

NOWA matura

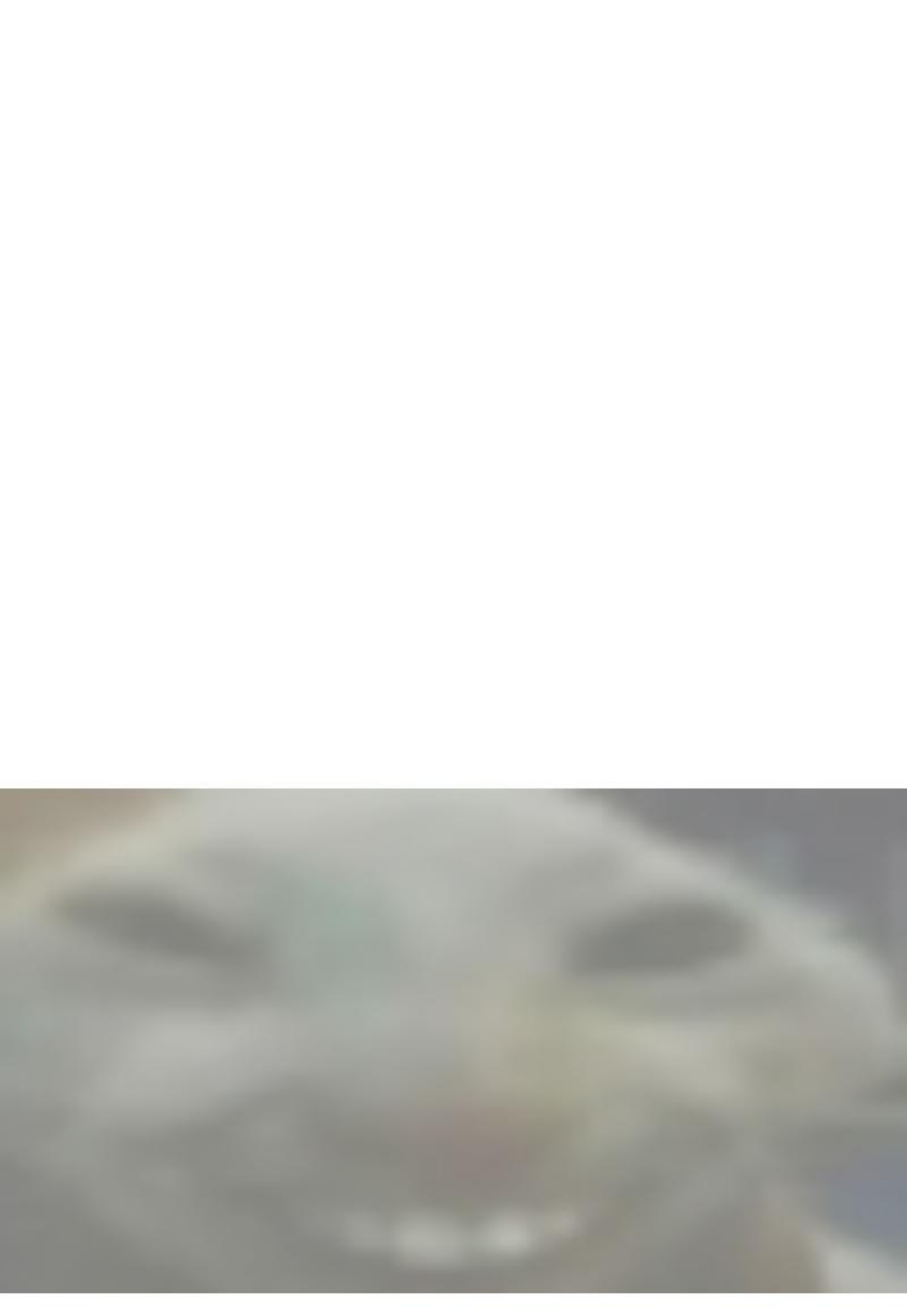
z matematyki

REPETYTORIUM

Zakres podstawowy

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe





Jacek Lech
Alina Popiołek
Jerzy Radzewicz

NOWA **mATURA** z matematyki

REPETYTORIUM

Zakres podstawowy



Redakcja: *Anna Płońska*

Korekta: *Agnieszka Frączyk, Maria Hoffmann, Bogumiła Kamut, Mirosława Nawrot, Anna Sajko, Anna Maria Sarmiento, Agnieszka Wierzejska*

Okładka: *Jarosław Zakrzewski*

Projekt graficzny i rysunki: *Sławomir Kilian*

Skład (T_EX): *Joanna Szyller*

ISBN 978-83-8118-624-7

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2023. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Normex, Gdańsk

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl

lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80

tel. 801 643 917, 58 340 63 63

fax 58 340 63 61, 58 340 63 66

<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

SPIS TREŚCI

Wstęp	4
1. Liczby rzeczywiste	
Teoria	6
Zadania	8
2. Wyrażenia algebraiczne	
Teoria	21
Zadania	22
3. Równania, nierówności i układy równań	
Teoria	35
Zadania	36
4. Funkcje	
Teoria	51
Zadania	54
5. Ciągi	
Teoria	81
Zadania	83
6. Trygonometria	
Teoria	97
Zadania	99
7. Planimetria	
Teoria	117
Zadania	123
8. Geometria analityczna	
Teoria	144
Zadania	147
9. Stereometria	
Teoria	166
Zadania	170
10. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa	
Teoria	191
Zadania	192
11. Statystyka	
Teoria	202
Zadania	203
Rozwiązania	213
Odpowiedzi	269
Tabela wartości funkcji trygonometrycznych	272

Drogi Czytelniku,

Repetitorium jest **nowością na rynku wydawniczym**. Powstało z myślą o uczniach przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki w **Formule 2023**.

Książka jest podzielona na **11 rozdziałów** ułożonych w kolejności treści ujętych w podstawie programowej matematyki dla szkoły ponadpodstawowej. Zawiera ona ponad 700 zadań – każdemu z nich przypisano wymaganie szczegółowe.

Każdy rozdział rozpoczyna się od części teoretycznej podzielonej na dwa moduły. Pierwszy z nich zawiera treści zaczerpnięte z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki* opublikowanych przez CKE. Uzupełnieniem tych treści jest drugi moduł, wyróżniony szarym tłem, z dodatkową teorią. Taki układ części teoretycznej uczy korzystania z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki* i jednocześnie zwraca uwagę na treści, które warto zapamiętać (nie będą one dostępne w trakcie egzaminu).

Oprócz teorii każdy rozdział zawiera obszerny zestaw zadań, uporządkowanych według kolejnych wymagań szczegółowych z podstawy programowej. Każdy taki zestaw obejmuje zadania zróżnicowane zarówno pod względem stopnia trudności, jak i typu.

Wśród zadań pojawiają się zadania z arkuszy maturalnych CKE w Formule 2023 oraz z innych materiałów publikowanych przez CKE w tej formule. Do nich dołączono zadania autorskie, które konstrukcją i stopniem trudności odpowiadają tym, z którymi maturzyści mierzą się na egzaminie maturalnym.

W skład zestawu wchodzi zadania wszystkich rodzajów, które mogą wystąpić na egzaminie maturalnym w Formule 2023, a są to:

- zadania zamknięte A/B/C/D z wyborem jednej poprawnej odpowiedzi (1 punkt)
- zadania zamknięte A/B/C/D/E/F... z wyborem dwóch poprawnych odpowiedzi (2 punkty)
- zadania zamknięte typu prawda/fałsz (1-2 punkty)
- zadania zamknięte na dobieranie (2 punkty)
- zadania zamknięte typu A/B/C ponieważ 1/2/3 (1 punkt)
- zadania otwarte z luką (1-2 punkty)
- zadania otwarte krótkiej odpowiedzi (1-3 punkty)
- zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi (4 punkty)

W *Repetitorium* można również znaleźć wiązki zadań, czyli zestawy od dwóch do czterech zadań zamkniętych lub otwartych o wspólnym kontekście tematycznym.

W końcowej części książki podaliśmy odpowiedzi do wszystkich zadań, a do zadań otwartych – dodatkowo obszerne szkice rozwiązań.

Z *Repetitorium* mogą korzystać nie tylko uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego. Może to być także doskonałe źródło zadań do wykorzystania na lekcji, na zajęciach dodatkowych oraz uzupełniający zasób zadań do uczniowskiej pracy w domu, nawet w klasach przedmaturalnych.

Autorzy

Oznaczenia:

I.1 – zadanie dotyczące treści obowiązujących na egzaminie maturalnym od 2023 roku

wymagania szczegółowe

II.5 – zadanie dotyczące treści, które będą obowiązywać na egzaminie maturalnym dopiero od 2025 roku



– zadanie pochodzące z zasobów CKE

1. LICZBY RZECZYWISTE

TEORIA

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.

Dla dowolnej liczby x mamy:

$$|x| \geq 0 \qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

$$\begin{aligned} |x - a| \leq r & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } a - r \leq x \leq a + r \\ |x - a| \geq r & \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r \end{aligned}$$

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a definiujemy jej n -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

- dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$
- dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & (a^r)^s &= a^{r \cdot s} & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r & \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$.

Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b :

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie: $a^{\log_a b} = b$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0$, $y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \quad \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Procent składany. Jeżeli kapitał początkowy K_0 złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n jest określony wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Niech x, y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

- Jeżeli $a \in (0; 1)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x > y$.
- Jeżeli $a \in (1; +\infty)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x < y$.

Wybrane oznaczenia i symbole matematyczne

$\mathbb{N}$ — zbiór liczb naturalnych

$\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych

$\mathbb{Q}$ — zbiór liczb wymiernych

$\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych

$A \cup B$ — suma zbiorów A oraz B

$A \cap B$ — iloczyn zbiorów A i B (część wspólna zbiorów A i B)

$A \setminus B$ — różnica zbioru A i zbioru B

$A \subset B$ — zbiór A jest podzbiorem zbioru B

$x \in A$ — element x należy do zbioru A

$(a; b)$ — zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od liczby a i jednocześnie mniejszych od liczby b

$\langle a; b \rangle$ lub $[a; b]$ — zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie mniejszych od liczby a i jednocześnie nie większych od liczby b .

$(a; +\infty)$ — zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od liczby a

$(-\infty; b)$ — zbiór wszystkich liczb rzeczywistych mniejszych od liczby b

Liczba pierwsza to każda liczba naturalna n większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki: 1 oraz n .

Liczba złożona to każda liczba naturalna większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki.

Notacja wykładnicza to zapis liczby w postaci $a \cdot 10^n$, gdzie $a \in \langle 1; 10 \rangle$ i $n \in \mathbb{Z}$.

I.1

A. 0 B. 1 C. 2021 D. 2023

I.1

A. $\frac{25}{4}$ B. $\frac{4}{25}$ C. $\frac{36}{49}$ D. $\frac{40}{9}$

I.1

A. $1 + 2\sqrt{7}$ B. $1 - 4\sqrt{7}$ C. $11 - 4\sqrt{7}$ D. $1 + 4\sqrt{7}$

I.1

A.	$5\sqrt{2} - 4$,	ponieważ	1.	$ 4 - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 4$.
B.	$4 + 5\sqrt{2}$,		2.	$\sqrt{4^2} + \sqrt{(5\sqrt{2})^2} = 4 + 5\sqrt{2}$.
C.	$\sqrt{2}$,		3.	$ - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

1.1

Wyznacz taką ujemną liczbę x , dla której zachodzi równość $|x| = 2a + \frac{b}{2}$.

[illegible]

Zadanie 6. (0-1)**I.1**

Dane są liczby:

$$a = \log_{\frac{1}{5}} 125 \quad b = \log_{25} 125 \quad c = \log_{25} \frac{1}{5}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby a , b oraz c spełniają warunek:

- A. $c < b < a$ B. $c < a < b$ C. $a < c < b$ D. $a < b < c$

Zadanie 7. (0-1)**I.1**

Dane są liczby:

$$a = \log_{\frac{1}{4}} 16 \quad b = \log_4 \sqrt[3]{4} \quad c = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} \quad d = \log_{64} \frac{1}{4}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby a , b , c i d spełniają warunek:

- A. $a > b > c > d$ B. $b > d > a > c$ C. $c > a > b > d$ D. $d > b > a > c$

**Zadanie 8. (0-2)****I.1**

Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

1. Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y

- A. o 40% pensji pana Y. C. o 150% pensji pana Y.
B. o 90% pensji pana Y. D. o 275% pensji pana Y.

2. Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X

- E. o 60% pensji pana X. G. o 90% pensji pana X.
F. o 73% pensji pana X. H. o 150% pensji pana X.

Zadanie 9. (0-1)**I.1**

Ile procent liczby $a = \frac{(5^{-4})^6 \cdot (11^{-3})^7}{55^{-22}}$ stanowi liczba $b = \frac{121 \cdot 55^{11}}{5^{14} \cdot 11^{12}}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 500% B. 5% C. 0,2% D. 20%

Zadanie 10. (0-1)**I.1**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

12,5% liczby 2^{72} jest równe:

- A. 2^9 B. 2^{69} C. 2^{24} D. $\left(\frac{4}{25}\right)^{72}$

Zadanie 11. (0-1)**I.1**

Długość jednej pary równoległych boków kwadratu zwiększono o 20%, a drugiej — zmniejszono o 20%, otrzymując w ten sposób prostokąt.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

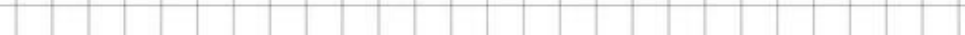
Obwody kwadratu i prostokąta są równe.	P	F
Pole prostokąta jest o 4% mniejsze od pola kwadratu.	P	F

Zadanie 12. (0-3)

I.1

Pewien bank proponuje lokatę trzymiesięczną o oprocentowaniu 6% w skali roku.

Oblicz, jaką kwotę należy wpłacić na tę lokatę, aby po upływie jej terminu odsetki netto, po potrąceniu podatku w wysokości 19%, wynosiły 182,25 zł. Zapisz obliczenia.



Zadanie 13. (0-1)

I.1

Cenę towaru w ciągu dwóch tygodni podwyższono dwukrotnie: w pierwszym tygodniu o 25%, a w następnym tygodniu o 28%. O ile procent trzeba obniżyć cenę tego towaru po dwóch podwyżkach, aby była równa cenie początkowej?

Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

A.	o 60%,	ponieważ	1.	$1,6 \cdot 100\% = 160\%$ i $160\% - 100\% = 60\%$
B.	o 53%,		2.	$1,53 \cdot 100\% = 153\%$ i $153\% - 100\% = 53\%$
C.	o 37,5%,		3.	cena wzrosła o 60% i $\frac{1}{1,6} \cdot 100\% = 62,5\%$

Zadanie 14. (0-1)

I.1

Liczba $6\,543\,21a$, gdzie a oznacza cyfrę jednośc, jest podzielna przez 15.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cyfra jedności a jest równa:

- A. 0 B. 5 C. 4 D. 9

Zadanie 15.

Dane są liczby $a = 3,12 \cdot 10^8$ i $b = 1,1 \cdot 10^7$.

Zadanie 15.1. (0-1)

1.2

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Liczba $a + b$ jest podzielna przez 17.	P	F
Liczba $a + b$ <u>nie jest</u> podzielna przez 19.	P	F

Zadanie 15.2. (0-2)

1.2

Wykaż, że liczba $a \cdot b$ jest podzielna przez 325.





Zadanie 16. (0-2)

1.2

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $20n^2 + 30n + 7$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

[illegible]

Zadanie 17. (0-2)

1.2

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $10n^2 + 30n + 8$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or other markings on the page.

Zadanie 18. (0-2)

1.2

Wykaż, że liczba $9^{100} - 4 \cdot 9^{99} + 8 \cdot 9^{98}$ jest podzielna przez 477.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 19. (0-1)

1.3

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wartość wyrażenia:

$$\sqrt[3]{-1\frac{11}{16}} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{4}{15}}$$

jest równa:



Zadanie 20. (0-1)

I.3

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wskaż nierówność prawdziwą.

- A. $-\sqrt[3]{25} < 6\sqrt[3]{-6}$ B. $11\sqrt{7} < 7\sqrt{11}$ C. $2\sqrt[3]{-33} < 3\sqrt[3]{-11}$ D. $4\sqrt[3]{-2} < -2\sqrt[3]{4}$

Zadanie 21. (0-1)

I.4

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $(56^4)^3 \cdot 7^{34}$ jest podzielna przez:

- A. 2^{37} B. 7^{47} C. 49^{23} D. 8^{13}

Zadanie 22. (0-2)

I.4

Dane są liczby $k = 4\sqrt{3}$ i $l = 3\sqrt{6}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{k}{l} + \frac{l}{k}$. Wynik podaj w postaci ułamka bez niewymierności w mianowniku. Zapisz obliczenia.

Zadanie 23. (0-2)

I.4

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $28^{n+1} + 2^{2n} \cdot 7^n$ jest podzielna przez 29.

Zadanie 24. (0-1)

I.4

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wartość wyrażenia:

$$\frac{(2^{11} + 2^9) \cdot 625}{2^4 \cdot 10^5}$$

jest równa

Zadanie 25. (0-1)

1.4

Dane są liczby:

$$a = \frac{\sqrt[3]{9}}{9}$$

$$b = \frac{1}{3\sqrt[4]{27}}$$

$$c = \sqrt{27}$$

$$d = \frac{9}{\sqrt[4]{3}}$$

$$e = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7}{4}}$$

Wskaż równość prawdziwą.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $e = a$ B. $e = b$ C. $e = c$ D. $e = d$

Zadanie 26. (0-1)

1.4

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\sqrt[7]{7} \cdot \sqrt[6]{7}$ jest równa:

- A. $\sqrt[13]{7}$ B. $\sqrt[9]{7}$ C. $\sqrt[7]{7}$ D. $\sqrt[6]{7}$

Zadanie 27. (0-2)

1.4

Wykaż, że liczba $27^5 + 9^8 + 8 \cdot 81^4$ jest podzielna przez 7.



Zadanie 28. (0-2)

1.4

Dane są liczby:

$$a = 5^{-\frac{3}{4}} : 5^{-\frac{1}{2}}$$

$$b = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{5}}$$

$$C = \frac{5^6 \cdot 25 - 5^7}{(2 \cdot 5^4)^2}$$

$$d = \sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}$$

Oblicz iloczyn $a \cdot b \cdot c \cdot d$. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 29. (0-1)

I.4

Która z podanych równości jest prawdziwa?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $(\sqrt{7} + \sqrt{5})^3 = \sqrt{7}^3 + \sqrt{5}^3$

C. $\left(\sqrt{2\frac{1}{4}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

B. $\sqrt{\sqrt{144} + \sqrt{16}} = 2^{\frac{4}{2}}$

D. $\left(\sqrt[3]{64}\right)^{24} = 8^3$


Zadanie 30. (0-3)

I.4

Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b , które spełniają warunki:

$$a \neq 0 \text{ oraz } b \neq 0 \text{ oraz } a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$$

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , spełniających powyższe warunki. Wynik podaj w postaci ułamka bez niewymierności w mianowniku. Zapisz obliczenia.

Zadanie 31. (0-1)

I.5

Która z podanych liczb jest większa od liczby $7^{1,66}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $7\sqrt{7}$ B. $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{8}{5}}$ C. $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{2}{3}}$ D. $\sqrt[3]{7^5}$

Zadanie 32. (0-2)

I.5

Dwie spośród podanych nierówności są prawdziwe. Wskaż te nierówności.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-17} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-15}$ C. $3^7 < \left(\frac{1}{9}\right)^{-4}$ E. $\left(-\frac{1}{7}\right)^3 > (-3)^7$
 B. $\left(\frac{3}{2}\right)^{27} > \left(\frac{3}{2}\right)^{29}$ D. $4^{-5} < \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$ F. $\left(\frac{1}{32}\right)^4 < (8^{-2})^4$

Zadanie 33. (0-1)

I.5

Która spośród podanych liczb jest największa?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $64^{-3} \cdot 16^{\frac{1}{3}}$ B. $\frac{\sqrt[3]{4}}{256}$ C. $(16^{-1})^5$ D. $\left(4^3 \cdot \frac{1}{16^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

Zadanie 34. (0-1)

I.5

Wskaż nierówność prawdziwą.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-18} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-20}$ C. $16^{-25} < (-4)^{-48}$
 B. $(-3)^{-12} > 3^{-11}$ D. $(-8)^6 < (-2)^{16}$

Zadanie 35. (0-1)
I.5

 Dane są liczby a , b oraz c :

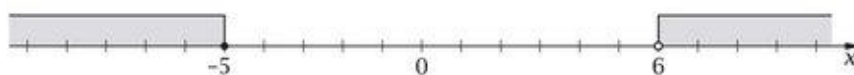
$$a = 3^{-150} : 3^{-140} \quad b = (3^{-15})^2 \quad c = 3^{13} \cdot 3^7$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Liczba b jest mniejsza od liczby a .	P	F
Liczba b jest większa od liczby c^{-2} .	P	F

Zadanie 36. (0-1)
I.6

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

 Wskaż warunek, który spełniają wszystkie liczby rzeczywiste x należące do zbioru zaznaczonego na osi liczbowej.


- A. $-5 \leq x < 6$ B. $-5 < x \leq 6$ C. $x \leq -5$ lub $x > 6$ D. $x \geq -5$ lub $x < 6$

Zadanie 37. (0-1)
I.6

 Który spośród podanych przedziałów liczbowych opisuje zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{2}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $(-\sqrt{3}; \sqrt{2})$ B. $\langle -\sqrt{3}; \sqrt{2} \rangle$ C. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$ D. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cap (\sqrt{2}; \infty)$

Zadanie 38. (0-1)
I.6

 Zbiór A jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, których odległość od liczby zero na osi liczbowej jest mniejsza od 10.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Wszystkie liczby ze zbioru A należą do przedziału $(-10; 10)$.	P	F
Do zbioru A należy dokładnie 5 liczb pierwszych.	P	F

Zadanie 39. (0-2)
I.7

 Wskaż dwa warunki, które spełniają wszystkie liczby rzeczywiste x należące do zaznaczonego na osi liczbowej przedziału.

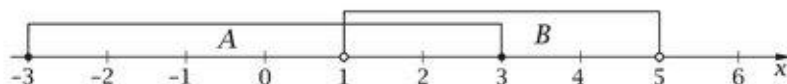
 Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. $|x - 1| < 4$ C. $|x + 1| < 4$ E. $|x - 4| < 1$ G. $|x + 4| < 1$
 B. $|x + 1| < 3$ D. $|x - 1| < 2$ F. $|x| \leq 5$ H. $|x| < 4$

Zadanie 40. (0-1)

1.7

Przedziały A i B zaznaczono na osi liczbowej (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Wszystkie liczby x należące do przedziału A spełniają warunek $ x \leq 3$.	P	F
Wszystkie liczby x należące do przedziału B spełniają warunek $ x - 3,5 < 1,5$.	P	F

Zadanie 41. (0-1)

1.7

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Warunek $|x - \quad| = \quad$ jest spełniony dla $x = -3$ i $x = 5$.



CKE

Zadanie 42. (0-1)

1.8

Oprocentowanie na długoterminowej lokacie w pewnym banku wynosi 3% w skali roku (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczone odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie — zgodnie z procentem składanym.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po 10 latach oszczędzania w tym banku (i bez wypłacania kapitału ani odsetek w tym okresie) kwota na lokacie będzie większa od kwoty wpłaconej na samym początku o (w zaokrągleniu do 1%):

- A. 30% B. 34% C. 36% D. 43%

Zadanie 43. (0-1)

1.8

Klient wpłacił do banku 20 000 zł na lokatę dwuletnią. Po każdym rocznym okresie oszczędzania bank dolicza odsetki w wysokości 3% od kwoty bieżącego kapitału znajdującego się na lokacie.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po dwóch latach oszczędzania w tym banku kwota na lokacie (bez uwzględniania podatków) jest równa:

- A. $20\,000 \cdot (1,12)^2$ B. $20\,000 \cdot 2 \cdot 1,03$ C. $20\,000 \cdot 1,06$ D. $20\,000 \cdot (1,03)^2$

24

Zadanie 44. (0-1)

1.8

Pan Nowak kupił obligacje Skarbu Państwa za 40 000 zł oprocentowane 7% w skali roku. Odsetki są naliczane i kapitalizowane co rok.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość obligacji kupionych przez pana Nowaka będzie po dwóch latach równa:

- A. $40\,000 \cdot (1,07)^2$ zł B. $40\,000 \cdot (1,7)^2$ zł C. $40\,000 \cdot 1,14$ zł D. $40\,000 \cdot 1,49$ zł

1.8

Okres T drgań wahadła w pewnym zegarze dany jest wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdzie l oznacza długość wahadła, a g oznacza przyspieszenie grawitacyjne. Przyjmij do obliczeń, że przyspieszenie grawitacyjne na Ziemi wynosi $g_Z = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu wynosi $g_K = 1,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Oblicz $\frac{T_K}{T_Z}$ — stosunek okresu drgań tego wahadła, gdyby znajdowało się ono na Księżycu, do okresu drgań tego samego wahadła znajdującego się na Ziemi. Wynik podaj z dokładnością do 0,01. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 1 cm by 1 cm each, covering the entire area of the page. There are no margins or other markings on the paper.

1.9

Wskaż równość prawdziwą.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\log_{3\sqrt{3}} 27 = 3$ B. $\log 10\sqrt{10} = \frac{1}{2}$ C. $\log_9 3 = -2$ D. $8^{\log_2 5} = 125$

1.9

Wskaż dwie równości prawdziwe.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. $\log_5 75 - \log_5 15 = 12$
 B. $\log_8 16 \sqrt[4]{4} + \log_8 4 \sqrt[4]{2} = 2,25$
 C. $\log 5 + \log 20 = 10$
 D. $\log_3 \sqrt[3]{54} - \log_3 \sqrt[3]{2} = 1$
 E. $\log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 5$
 F. $\log_{\sqrt{2}} 3 + \log_{\sqrt{2}} 5 = 6$
 G. $\log 105 - \log 5 = 2$

1.9

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $9^{\log_3 5}$ jest równa:

- A. 5 B. 10 C. 25 D. 125

1.9

Dane są liczby $a = 4 \log_{\frac{1}{3}} 2\sqrt{10}$ i $b = 4 \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{10}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Różnica $a - b$ jest równa $\sqrt{10}$.	P	F
Liczba b jest o 2 większa od liczby a .	P	F

Zadanie 50. (0-2)

1.9

O liczbach dodatnich a , b oraz c wiadomo, że:

$$\log_{16} a = 3 \quad \text{oraz} \quad \log_8 b = 2 \quad \text{oraz} \quad \log_{64} c = -\frac{1}{3}$$

Oblicz wartość wyrażenia $\log_4 \frac{a \cdot c}{b}$. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 51. (0-1)

1.9

Dane są liczby:

$$a = \log_3 \frac{1}{81} \quad b = \log_5 \frac{1}{125} \quad c = \log_{\frac{1}{6}} 36 \quad d = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba dodatnia jest liczba:

- A. *a* B. *b* C. *c* D. *d*

Zadanie 52. (0-1)

1.9

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba o 2 mniejsza od liczby $\log_3 36$ jest równa:

- A. $\log_3 34$ B. $\log_3 27$ C. $\log_3 18$ D. $\log_3 4$

CK
E

Zadanie 53. (0-1)

1.9

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_2 \left[(\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot (\sqrt{2})^8 \right]$ jest równa:

- A. $\sqrt{2}$ B. 7 C. 14 D. 2^7

CK
E

Zadanie 54. (0-1)

1.9

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\log_7 98 - \log_7 2$ jest równa:

- A. 7 B. 2 C. 1 D. -1

CK
E

Zadanie 55. (0-1)

1.9

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $2 \log_5 5 + 1 - \frac{1}{2} \log_5 625$ jest równa:

- A. 1 B. 5 C. 10 D. 25

Zadanie 56. (0-1)

I.9

Liczba a jest 1000 razy mniejsza od liczby b oraz liczby a i b są dodatnie.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log a$ jest:

- A. o 1000 mniejsza od liczby $\log b$ C. o 3 mniejsza od liczby $\log b$
 B. 1000 razy mniejsza od liczby $\log b$ D. 3 razy mniejsza od liczby $\log b$


Zadanie 57. (0-1)

I.9

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\log k + \log \frac{1}{100}k^2 - \log \frac{1}{10}k^3$, gdzie $k > 0$, jest równa:

- A. 0 B. 1 C. -1 D. k


Zadanie 58. (0-2)

I.9

Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają następujące warunki:

$$x, y, z > 0 \quad \text{oraz} \quad x, y, z \neq 1 \quad \text{oraz} \quad y^z = x$$

Dokończ zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

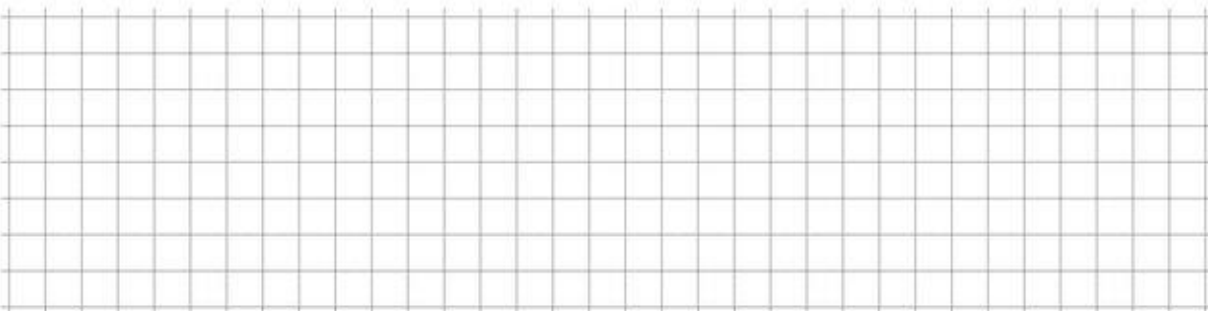
Z podanych warunków wynika, że prawdziwe są równości:

- A. $\log_x y = z$ C. $\log_x z = y$ E. $\log_y x = z$
 B. $y^{-\log_y x} = \frac{1}{x}$ D. $y^{\log_x y} = x$ F. $z^{-\log_x z} = \frac{1}{y}$

Zadanie 59. (0-2)

I.9

Oblicz, dla jakiej wartości a zachodzi równość $2 \log a + \log 4 = \log 1$. Zapisz obliczenia.


Zadanie 60. (0-1)

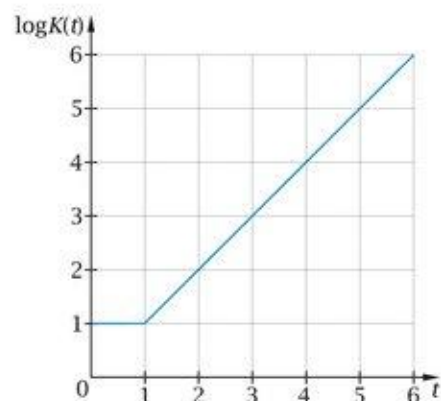
I.9

Na wykresie przedstawiono zależność $\log K(t)$, gdzie $K(t)$ jest liczbą bakterii w próbie po czasie t wyrażonym w godzinach, jaki upłynął od chwili $t = 0$ rozpoczęcia obserwacji.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po upływie dokładnie 3 godzin od chwili $t = 0$ liczba K bakterii była równa:

- A. 3 B. 100 C. 1000 D. 10 000



Zadanie 61. (0-1)

1.9

Dane są liczby:

$$a = \frac{2 \log 6 - \log 12}{\log \sqrt{3}} \quad \text{ i } \quad b = 27^{\log_3 \sqrt[3]{2}}$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Liczby a i b są równe.	P	F
Suma liczb a i b jest równa 2.	P	F

Zadanie 62. (0-2)

1.9

Dany jest prostokąt o polu P i obwodzie L . Boki tego prostokąta mają długości a i b :

$$a = 4^{\log_2 \sqrt{3}} \quad b = \log_2 (\log_2 8)$$

Wskaż dwa zdania prawdziwe.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. Iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy $\log_2 \frac{8}{3}$.
 B. Przekątna tego prostokąta ma długość $3 + \log_2 3$.
 C. Obwód L jest równy $\log_2 73$.
 D. Obwód L jest równy $\log_2 576$.
 E. Pole P jest równe $\sqrt{3} \log_4 8$.
 F. Pole P jest równe $\log_3 27$.

Zadanie 63. (0-2)

1.9

O liczbach dodatnich a , b i c wiadomo, że:

$$\log_c a = 5 \quad \text{oraz} \quad b = \frac{c}{a^2} \quad \text{oraz} \quad c \neq 1$$

Oblicz $\log_c b$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 64. (0-4)

1.9

Wiadomo, że:

$$\log_7 27 = a \qquad \log_7 25 = b$$

Przedstaw liczbę $\log_7 15$ za pomocą a i b . Zapisz obliczenia.



2. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

TEORIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$, jeśli istnieje wielomian $V(x)$ taki, że: $W(x) = V(x) \cdot (x - a)$.

Wielomian $W(x)$ nie jest podzielny przez dwumian $x - a$, jeśli istnieje taki wielomian $V(x)$ oraz liczba rzeczywista r ($r \neq 0$), że: $W(x) = V(x) \cdot (x - a) + r$.

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy liczbę a spełniającą warunek $W(a) = 0$.

Wielomian stopnia n może mieć co najwyżej n pierwiastków.

Liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$) zależy od wyróżnika $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Jeżeli $\Delta > 0$, to trójmian $ax^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Jeżeli $\Delta = 0$, to trójmian $ax^2 + bx + c$ ma jeden pierwiastek $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian $ax^2 + bx + c$ nie ma pierwiastków.

Twierdzenie Bézouta. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Jeśli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, którego wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi i $a_0 \neq 0$, ma pierwiastki całkowite, to są one dzielnikami wyrazu wolnego a_0 .

ZADANIA



Zadanie 1. (0-1)

II.1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej a wartość wyrażenia $(3 + 4a)^2 - (3 - 4a)^2$ jest równa:

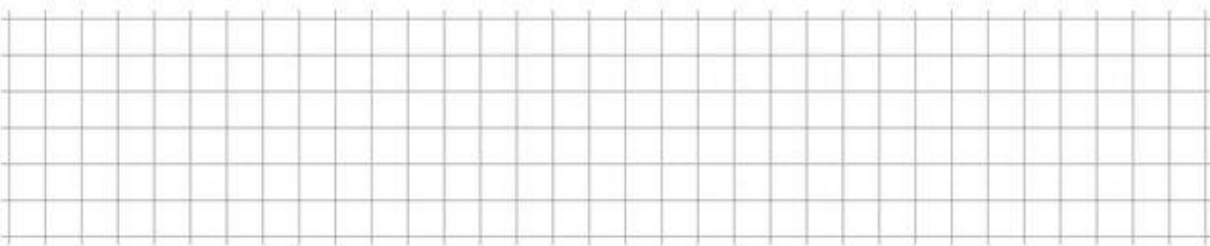
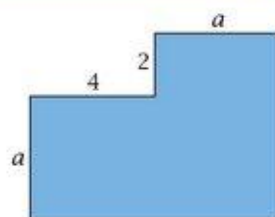
- A. $32a^2$ B. 0 C. $48a$ D. $8a^2$

Zadanie 2. (0-3)

II.1

Dane są dwa wielokąty: wielokąt W przedstawiony na rysunku i kwadrat o boku $a + 3$. Każde dwa sąsiednie boki wielokąta W są prostopadłe.

Ustal, który z tych wielokątów ma większe pole. Znajdź różnicę tych pól. Zapisz obliczenia.



Zadanie 3. (0-1)

II.1

Przyprostokątne w trójkącie prostokątnym mają długości a i b , a przeciwprostokątna ma długość 30.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika stąd, że wartość wyrażenia $(a + b)^2$ należy do przedziału:

- A. $\langle 0; 30 \rangle$ B. $\langle 30; 300 \rangle$ C. $\langle 300; 900 \rangle$ D. $(900; +\infty)$



Zadanie 4. (0-1)

II.1

Dana jest liczba $x = a - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, gdzie a należy do zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych. W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ są niewymierne.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie poniższego zdania było prawdziwe.

Liczba x jest wymierna dla:

- A. $a = 5$ C. $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0,3$ E. $a = -2\sqrt{6} + 12,5$ G. $a = -\sqrt{6}$
 B. $a = -\sqrt{3} + \sqrt{2}$ D. $a = 6$ F. $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$

Zadanie 5. (0-1)

II.1

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Wartość wyrażenia $\sqrt{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{a - \sqrt{b}}$ jest liczbą wymierną dla:

- A. $a = 3$ i $b = 5$ C. $a = 4$ i $b = 5$ E. $a = 2$ i $b = 2$ G. $a = 1$ i $b = \frac{5}{9}$
 B. $a = \sqrt{5}$ i $b = 2$ D. $a = 0,4$ i $b = 0,1$ F. $a = \frac{3}{2}$ i $b = \frac{3}{4}$

Zadanie 6. (0-3)**II.1**

Dana jest liczba $a = (n+1)^3 - (n^3 + 1)$ określona dla każdej liczby naturalnej n .

Wykaż, że liczba a jest parzysta. Sprawdź, czy liczba a jest podzielna przez 9. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-2)**II.1**

Wykaż, że wartość wyrażenia $a^2 - ab + b(b - a)$ jest liczbą nieujemną dla każdej pary liczb rzeczywistych a i b .

Zadanie 8. (0-3)**II.1**

Dane są dwie liczby całkowite a i b takie, że $a - b = 2$.

Wykaż, że różnica kwadratów liczb a i b jest wielokrotnością liczby całkowitej leżącej na osi liczbowej między liczbami a i b .

**Zadanie 9. (0-2)****II.1**

Dokończ zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y wyrażenie $9 - (x^2 - 2xy + y^2)$ jest równe:

- | | |
|-----------------------|--|
| A. $[3 - (x - 2y)]^2$ | D. $[3 - (x - y)] \cdot [3 + (x - y)]$ |
| B. $[3 + (x - 2y)]^2$ | E. $[3 - (x + 2y)] \cdot [3 + (x + 2y)]$ |
| C. $[3 - (x + 2y)]^2$ | F. $-[(x - y) - 3] \cdot [(x - y) + 3]$ |

24

Zadanie 10. (0-1)

II.1

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Wyrażenie $2x^2 - 1$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $(1 - x\sqrt{2})(x\sqrt{2} - 1)$.	P	F
Dla każdej liczby rzeczywistej x wartość wyrażenia $(2 + x)^3 - x^2(x + 6) - 12x$ jest równa 8.	P	F

Zadanie 11. (0-1)

II.1

Wyrażenie $(x\sqrt[3]{2}+2)^3$ można przedstawić w postaci wielomianu ax^3+bx^2+cx+d . Wskaż współczynnik, którego wartość podano błędnie.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $a = 2$ B. $b = 3\sqrt[3]{4}$ C. $c = 12\sqrt[3]{2}$ D. $d = 8$

Zadanie 12. (0-1)

II.1

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby lub wyrażenia algebraiczne, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wyrażenie $a^3 - 3$ można przedstawić w postaci wyrażenia $(a - \dots)(\dots + \dots + \sqrt[3]{9})$.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 13. (0-1)

II.1

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Liczba $a = 410^3 - 407^3$ jest liczbą podzielną przez:

A.	dwa,	ponieważ	1.	ostatnią cyfrą liczby 410 jest 0.
B.	trzy,		2.	$a = (410 - 407)(410^2 + 410 \cdot 407 + 407^2)$.
C.	pięć,		3.	suma wszystkich cyfr obu liczb 410 i 407 jest podzielna przez 2.

Zadanie 14. (0-1)

II.1

Dane są dwa wyrażenia:

$$A = p^3 - 8 \qquad B = (p - 2)^3$$

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dla każdej rzeczywistej liczby ujemnej p :

A.	$A < B$,	ponieważ	1.	$p^3 - 2^3 = p^3 - 8$.
B.	$A = B$,		2.	$A - B = 6p^2 - 12p$ i $6p^2 - 12p > 0$ dla $p < 0$.
C.	$A > B$		3.	wyrażenia A i B mają tę samą wartość dla $p = 0$.

Zadanie 15. (0-2)**II.1**

Dane są dwie liczby rzeczywiste x i y , których suma jest równa a ($a \neq 0$), a suma sześciątów tych liczb wynosi b .

Wykaż, że $\frac{a^3 - b}{3a} = x \cdot y$.

**Zadanie 16. (0-3)****II.1**

Rozważmy dwie kolejne liczby naturalne a i b takie, że obie są niepodzielne przez 3.

Udowodnij, że liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 9.

**Zadanie 17. (0-3)****II.1**

Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b , które spełniają warunki:

$$a \neq 0, b \neq 0 \quad \text{oraz} \quad a^3 + b^3 = (a + b)^3$$

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b spełniających powyższe warunki.

Zadanie 18. (0-1)**II.2**

Dane są wielomiany $U(x) = 2x^6 - 7x^5 - 3x^2 + 5x + 9$ i $W(x) = 9x^3 - 5x^2 - 4x - 3$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Suma wielomianów $U(x)$ i $W(x)$ jest wielomianem stopnia 9.	P	F
Iloczyn wielomianów $U(x)$ i $W(x)$ jest wielomianem stopnia 18.	P	F

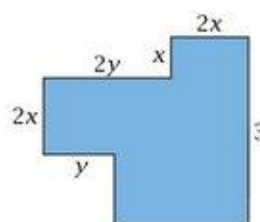
Zadanie 19. (0-1)**II.2**

Każde dwa sąsiednie boki wielokąta narysowanego obok są prostopadłe.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole tego wielokąta można przedstawić w postaci wyrażenia:

- A. $6x + 3y + xy$ C. $(2y + 2x)(y + 2x)$
 B. $6x + 6y - 2xy$ D. $6x^2 + 4xy + 3x$

**Zadanie 20. (0-1)****II.2**

Dane są wielomiany:

$$U(x) = 2x^3 - 5x \quad V(x) = 4x - 3 \quad W(x) = 5x^2 + 2x - 4$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

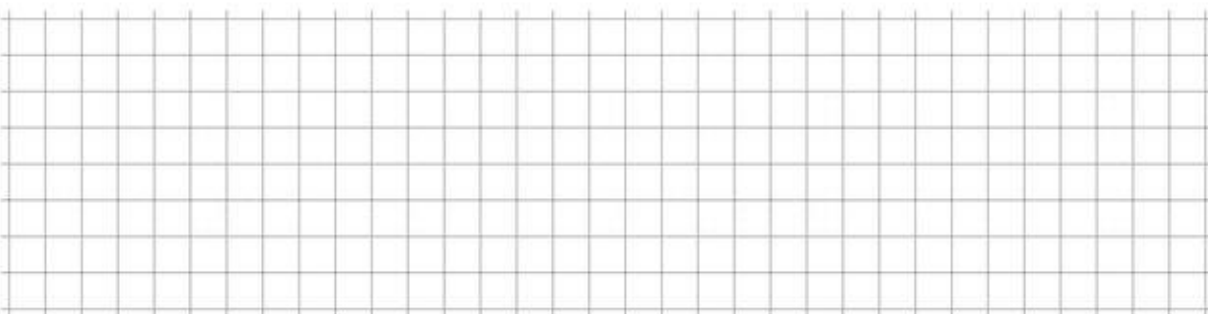
Wielomian $U(x) - V(x) \cdot W(x)$ jest równy:

- A. $10x^5 + 4x^4 - 52x^3 - 3x^2 + 6x - 12$ C. $22x^3 - 7x^2 - 27x + 12$
 B. $22x^3 - 12x^2 - 22x - 12$ D. $-18x^3 + 7x^2 + 17x - 12$

Zadanie 21. (0-1)**II.2**

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiedni jednomian, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wyrażenie $(x - 2)^3 + \dots + 16$ można przedstawić w postaci wyrażenia $(x + 2)^3$.

**Zadanie 22. (0-1)****II.2**

Dane są wielomiany:

$$U(x) = 3x^3(6x^2 + ax - 5) \quad \text{ i } \quad W(x) = x^3(9x - 5)(2x + b)$$

gdzie a i b oznaczają pewne liczby rzeczywiste. Współczynniki wielomianów $U(x)$ i $W(x)$ przy odpowiednich potęgach zmiennej x są równe.

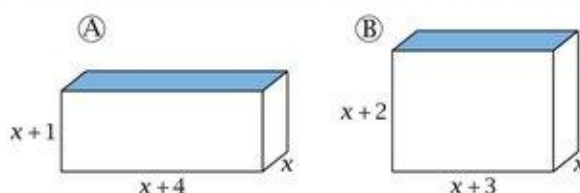
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma liczb a i b wynosi:

- A. $8\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{4}{3}$ D. $2\frac{2}{3}$

Zadanie 23. (0-1)**II.2**

Dany jest prostopadłościan ① o objętości V_A i prostopadłościan ② o objętości V_B (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dla prostopadłościanów ① i ② spełniony jest warunek:

A.	$V_A > V_B$,	ponieważ	1.	$V_A - V_B = -2x$ i dla każdego $x > 0$ wartość wyrażenia $V_A - V_B$ jest liczbą ujemną.
B.	$V_A = V_B$,		2.	oba prostopadłościany mają taką samą sumę długości wszystkich krawędzi.
C.	$V_A < V_B$,		3.	pole zacieniowanej ściany prostopadłościanu ① jest większe od pola zacieniowanej ściany prostopadłościanu ②.

Zadanie 24. (0-1)**II.2**

Dany jest kwadrat, którego bok ma długość a , gdzie $a > 4$. Rozpatrujemy dwa warianty usunięcia prostokąta z tego kwadratu:

I. Usunięty prostokąt ma wymiary $4 \times \frac{a}{2}$.

II. Usunięty prostokąt to kwadrat, którego bok ma długość 3.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

W wariantcie I po usunięciu prostokąta otrzymamy figurę, która ma takie samo pole jak prostokąt o wymiarach $a \times (a - 2)$.	P	F
W wariantcie II po usunięciu prostokąta otrzymamy figurę, która ma takie samo pole jak prostokąt o wymiarach $(a + 3) \times (a - 3)$.	P	F

Zadanie 25. (0-3)**II.2**

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $(n^2 - 2n + 4)(2n - 1) - 2(n^3 - 2)$ jest podzielna przez 5.

**Zadanie 26. (0-1)****II.3**

Z sumy algebraicznej $12a^3b - 18a^2b^2$ wyłączono poza nawias jednomian $6a^2b$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie w nawiasie jest równe:

- A. $12a + 18b$ B. $2a - 3b$ C. $2b - 3a$ D. $2a - 18a^2b^2$

Zadanie 27. (0-1)

II.3

Dane jest wyrażenie $W = 24x^2y^4 - 30x^3y^3$. Wskaż jednomian, który należy wyłączyć poza nawias wyrażenia W , aby wyrażenie w nawiasie było równe $4y^2 - 5xy$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $24x^2y^4$ B. $6x^2y^2$ C. $3x^2y^3$ D. $30x^3y^3$

Zadanie 28. (0-1)

II.3

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie wyrażenia algebraiczne, tak aby zdanie było prawdziwe.

Z wyrażenia $24a^7b^6 + 12a^3b^4 - 6a^4b^2$ można wyłączyć poza nawias jednomian tak, że będzie można je zapisać w postaci wyrażenia $\dots (4a^5b^4 + \dots - \dots)$.



Zadanie 29. (0-2)

II.3

Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej nieparzystej n liczba $n^2 + 2023$ jest podzielna przez 8.



Zadanie 30. (0-1)

II.4

Dane są wielomiany:

$$W(x) = 4x^2(x-5) - x(x-5) \qquad U(x) = -3x^3(x-2) + 6x^2(x+2)$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Wielomian $W(x)$ można zapisać w postaci $(x - 5)(2x - 1)(2x + 1)$.	P	F
Wielomian $U(x)$ można zapisać w postaci $-3x^2(x^2 - 4x - 4)$.	P	F

Zadanie 31. (0-1)

II.4

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wielomian $x^3(x-5) - x(x-5)(3x-7)$ można przedstawić w postaci:

- A. $x(x-5)(x^2+3x-7)$
 B. $x^3(x-5)(3x-7)$
 C. $x(x-5)(x^2-3x+7)$
 D. $x(x-5)(x^2-1)(-3x+7)$

Zadanie 32. (0-1)

II.4

Wielomian $6x^3 - 10x^2 + 9x - 15$ rozłożono na czynniki.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jednym z czynników może być:

- A. $5x - 3$ B. $2x^2 - 3$ C. $3x - 5$ D. $2x + 3$

Zadanie 33. (0-1)

II.4

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednie wyrażenie algebraiczne, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wyrażenie $a^3 - b^3 + a^2 - b^2$ można przekształcić do postaci $(a - b)(\dots\dots\dots)$.



Zadanie 34. (0-1)

II.5

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$, który ma trzy pierwiastki całkowite.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jednym z pierwiastków tego wielomianu jest liczba:

- A. 13 B. 12 C. 7 D. 2

Zadanie 35. (0-1)

II.5

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich pierwiastków wielomianu $2x^4 + 10x^3 + x^2 + 5x$ jest równa:

- A. jeden B. dwa C. trzy D. cztery

Zadanie 36. (0-1)

II.5

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma pierwiastków wielomianu $7(2x - 4)(x + 5) - x(x + 5)(2x - 4)$ jest równa:

- A. 0 B. 4 C. 6 D. 14

Zadanie 37. (0-2)

II.5

Jeden z pierwiastków wielomianu $U(x) = -7(2x - 6)(x + 5)$ jest również pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - 10x + a$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Wartość współczynnika a jest równa:

- A. -25 B. -5 C. 0 D. 3 E. 7 F. 50 G. 75



Zadanie 38. (0-3)

II.5

Dany jest wielomian:

$$W(x) = 3x^3 + mx^2 + 3x - 2$$

gdzie m jest liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że ten wielomian można zapisać w postaci iloczynowej $W(x) = (x + 2) \cdot Q(x)$, gdzie $Q(x)$ jest pewnym trójmianem kwadratowym.

Wyznacz wielomian $Q(x)$ oraz oblicz wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu $W(x)$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 39. (0-1)

II.6

Wynikiem dzielenia wielomianu $3x^3 - 11x^2 - 20x$ przez dwumian $x - 5$ jest wielomian $ax^2 + bx$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma współczynników a i b jest równa:

- A. -1 B. 2 C. 5 D. 7



Zadanie 40. (0-1)

II.6

Dany jest wielomian:

$$W(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, \quad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}$$

Dokończ zdanie, tak aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.

Wskazówka: Skorzystaj z definicji podzielności wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - a)$.

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez:

A.	dwumian $(x - 3)$,	ponieważ	1.	liczba $x = 3$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.
			2.	wyraz wolny wielomianu $W(x)$ jest równy 6.
B.	dwumian $(x - 6)$,		3.	liczba $x = 6$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Zadanie 41. (0-1)

II.6

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 3$ przez dwumian $x - 2$ jest równa:

A.	-3,	ponieważ	1.	$W(x) = (4x^2 + 3x + 6)(x - 2) + 9$.
B.	4,		2.	wyraz wolny wielomianu $W(x)$ jest równy -3.
C.	9,		3.	współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej x w wielomianie $W(x)$ jest równy 4.

Zadanie 42. (0-1)

II.6

Wynikiem dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 18x + 9$ przez dwumian $x + 3$ jest wielomian $U(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość którego ze współczynników wielomianu $U(x)$ podano błędnie?

- A. $a = 2$ B. $b = -1$ C. $c = 5$ D. $d = 9$

Zadanie 43. (0-4)

II.6

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x + m$ przez dwumian $x + 2$ jest równa 35.

Oblicz wartość współczynnika m oraz znajdź pierwiastki wielomianu $W(x)$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 44. (0-1)

II.7

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x takiej, że $x \neq 0$ i $x \neq 2$, wyrażenie $\frac{x^2-4}{2x^2} : \frac{x-2}{x}$ można przekształcić do postaci:

- A. $2x$ B. $\frac{x-2}{2x}$ C. $\frac{1}{2} + \frac{1}{x}$ D. $\frac{x+2}{2x^3}$

Zadanie 45. (0-1)

II.7

Dla każdej liczby rzeczywistej x nienależącej do zbioru $\{-7, -5, 2, 6\}$, wyrażenie $\frac{x-6}{x+5} : \frac{x-2}{x+7}$ jest równe:

- A. $\frac{x-6}{x+7} : \frac{x-2}{x+5}$ B. $\frac{x+5}{x-6} \cdot \frac{x-2}{x+7}$ C. $\frac{x-2}{x+5} : \frac{x-6}{x+7}$ D. $\frac{x+7}{x+5} \cdot \frac{x-6}{x-2}$

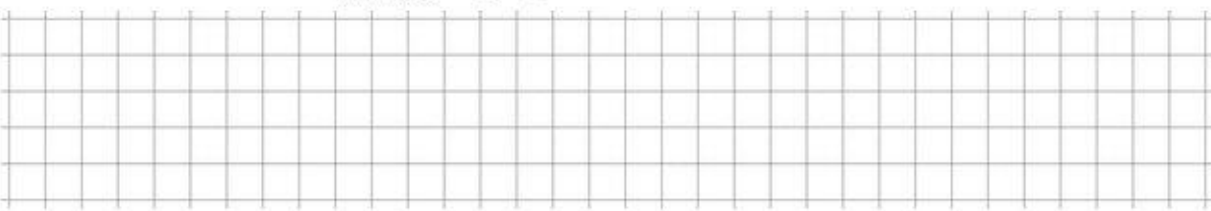


Zadanie 46. (0-2)

II.7

Dane są liczby $a = \sqrt{5} - 2$ oraz $b = \sqrt{5} + 2$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ dla podanych a i b .

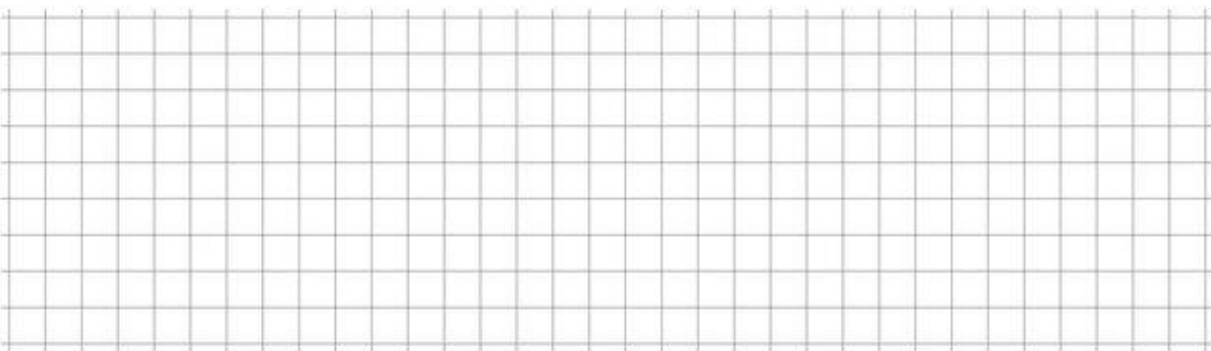
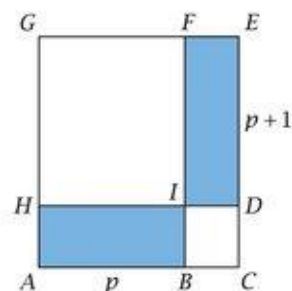


Zadanie 47. (0-3)

II.7

Każdy z zacieniowanych prostokątów na rysunku obok ma pole równe 1. Odcinek AB ma długość p , a odcinek DE jest od niego o 1 dłuższy.

Wykaż, że iloczyn pola prostokąta $BCDI$ i pola prostokąta $FGHI$ jest równy 1.



Zadanie 48. (0-1)

II.8

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$ wyrażenie $\frac{2}{x-1} - 5$ jest równe:

- A. $\frac{-5x+1}{x-1}$ B. $\frac{-5x+7}{x-1}$ C. $\frac{-5x+3}{x-1}$ D. $\frac{-5x-3}{x-1}$

Zadanie 49. (0-1)

II.8

Dane są wyrażenia $p = \frac{x}{5}$ oraz $q = \frac{2}{x}$, gdzie $x \neq 0$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Błędnie wykonano działanie:

A. $p + q = \frac{x^2 + 10}{5x}$

B. $q - p = \frac{10 - x^2}{5x}$

C. $pq = \frac{2}{5}$

D. $\frac{q}{p} = \frac{5}{2}$

Zadanie 50. (0-1)

II.8

Dla pary liczb rzeczywistych x i y takich, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$, zachodzi równość $\frac{2x-6y}{3y} = 5$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\frac{y}{x}$ jest równa:

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{2}{21}$

C. $10\frac{1}{2}$

D. 15

Zadanie 51. (0-1)

II.8

Dane są wyrażenia $x = \frac{5}{6a^2}$ oraz $y = \frac{2}{3a}$, gdzie $a \neq 0$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x wyrażenie y^2 jest równe $\frac{8x}{15}$.	P	F
Suma $x + y$ jest równa $\frac{7}{6a^2 + 3a}$.	P	F

Zadanie 52. (0-2)

II.8

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ wartość sumy $\frac{x-1}{x} + \frac{2x+1}{2x^2}$ jest liczbą dodatnią.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 53. (0-2)

II.8

Dane są dwie liczby x i y takie, że iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x+y}{x}$. Wynik podaj bez niewymierności w mianowniku.



II.8

Wyrażenie $\frac{2}{x-3} + 5$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie a, b, c, d są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

Wyznacz wartości liczbowe współczynników a, b, c, d . Zapisz obliczenia.

[illegible]

II.8

Dane jest wyrażenie:

$$\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right)$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $a \neq -b$.

Przekształć dane wyrażenie do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ oraz $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 56.

Suma pewnej liczby rzeczywistej p ($p \neq 0$) i odwrotności tej liczby jest równa 7.

II.8

Wartość wyrażenia $\frac{1+p^2}{p}$ jest równa:

- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{8}{\sqrt{7}}$ C. 7 D. 8

II.8

Oblicz wartość wyrażenia $p^2 + \frac{1}{p^2}$. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

**Zadanie 57. (0-1)****II.8**

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.	P	F
Wyrażenie $W(x)$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{2x}{x^2-1}$.	P	F

**Zadanie 58. (0-1)****II.8**

Liczby rzeczywiste x i y są dodatnie oraz $x \neq y$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}$ można przekształcić do postaci:

- A. $\frac{2}{x-y}$ B. $\frac{2}{x^2-y^2}$ C. $\frac{2x}{x^2-y^2}$ D. $\frac{-2xy}{x+y}$

Zadanie 59.

Dane są dwa wyrażenia A i B :

$$A = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \qquad B = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$$

Wyrażenie A określone jest dla każdej liczby rzeczywistej x takiej, że $x \neq 1$ i $x \neq -3$, a wyrażenie B — dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Zadanie 59.1. (0-1)**II.8**

Wskaż taką wartość $x \in \{-1, 0, 2, 3\}$, dla której wartość wyrażenia A jest największa.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $x = -1$ B. $x = 0$ C. $x = 2$ D. $x = 3$

Zadanie 59.2. (0-1)**II.8**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

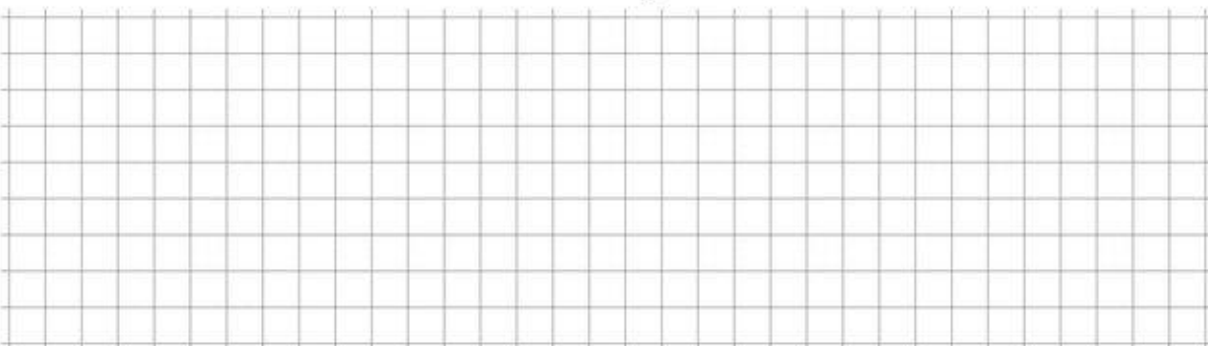
Wyrażenie B można przekształcić do postaci:

- A. $\frac{0}{x^3}$ B. $\frac{2-2x}{x^2}$ C. $\frac{x^2+2x-3}{x^3}$ D. $\frac{1+2x-3x^2}{x^3}$

Zadanie 59.3. (0-2)**II.8**

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x , dla której wyrażenia A i B są określone, spełniona jest równość:

$$A \cdot B = \frac{4}{x^3}$$



3. RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI I UKŁADY RÓWNAŃ

TEORIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

$|x - a| \leq r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - r \leq x \leq a + r$

$|x - a| \geq r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq a - r$ lub $x \geq a + r$

Wyróżnikiem Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$) zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

- Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Rodzaje równań liniowych $ax + b = 0$

- równanie oznaczone ($a \neq 0$) — ma jedno rozwiązanie: $x = -\frac{b}{a}$
- równanie sprzeczne ($a = 0$ i $b \neq 0$) — nie ma rozwiązania
- równanie tożsamościowe ($a = 0$ i $b = 0$) — każda liczba rzeczywista spełnia to równanie

Rodzaje układów równań liniowych

- układ oznaczony — ma jedno rozwiązanie
- układ sprzeczny — nie ma rozwiązania
- układ nieoznaczony — ma nieskończenie wiele rozwiązań

Rozwiązywanie równania wielomianowego $U(x) \cdot W(x) = 0$

Rozwiązaniem równania $U(x) \cdot W(x) = 0$, gdzie U, W są wielomianami, jest każda liczba rzeczywista (o ile istnieje), która jest rozwiązaniem równania $U(x) = 0$ lub $W(x) = 0$.

Rozwiązywanie równania wymiernego $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$

Rozwiązaniem równania $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$ jest każda liczba rzeczywista x (o ile istnieje), dla której $V(x) = 0$ i $W(x) \neq 0$.

ZADANIA



Zadanie 1. (0-1)

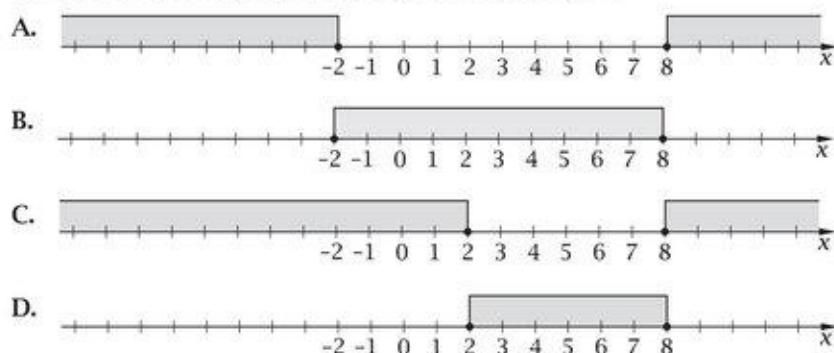
III.1/I.7

Dana jest nierówność:

$$|x - 3| \geq 5$$

Na którym rysunku prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających powyższą nierówność?

Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

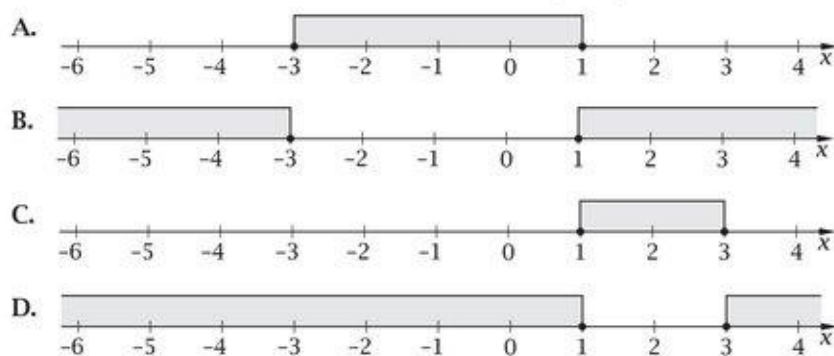


Zadanie 2. (0-1)

III.1/I.7

Spośród rysunków A-D wybierz ten, na którym prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność:

$$|x + 1| \leq 2$$



Zadanie 3. (0-1)

III.1/I.7

Spośród nierówności A-D wybierz tę, której zbiór wszystkich rozwiązań zaznaczono na osi liczbowej.



A. $|x + 2| \leq 2$

B. $|x - 2| \leq 2$

C. $|x + 2| \geq 2$

D. $|x - 2| \geq 2$

Zadanie 4. (0-1)

III.1/I.7

Zbiór T jest zbiorem wszystkich liczb, które są rozwiązaniem co najmniej jednego z równań:

$$|x - 2| = 5 \quad |x - 5| = 2 \quad |x| = 3$$

Ile liczb jest w zbiorze T ?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

III.1

Dane jest równanie I, którego rozwiązaniami są liczby -1 i 1 :

$$1. x^2 - 1 = 0$$

Rozwiązaniem równania II są liczby -2 i 2 .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Aby otrzymać równanie II, wystarczy:

- A. obie strony równania I pomnożyć przez 2. C. lewą stronę równania I pomnożyć przez 4.
B. do obu stron równania I dodać 5. D. od lewej strony równania I odjąć 3.

III.1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Nierówność $(4x-1)^2 > (x-4)^2$ ma taki sam zbiór rozwiązań, jak nierówność:

- A. $x^2 > 1$ B. $(x-1)^2 > 0$ C. $4x^2 > 1$ D. $(x-4)^2 > 0$

III.1

Jedyną liczbą spełniającą równanie $\frac{0,8x-4,5}{2} + 0,05x = \frac{5}{6}(3,2x-0,1) - 6,6$ jest liczba 2.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Jeśli obie strony tego równania zostaną podzielone przez 2, to otrzymamy równanie, którego rozwiązaniem jest liczba 1.	P	F
Jeśli do obu stron tego równania zostanie dodana liczba 3, to otrzymamy równanie, którego rozwiązaniem jest liczba 3.	P	F

Zadanie 8.

Dane są dwa wyrażenia:

$$K(x) = (1+x)^2 + 1 + x^2$$

$$L(x) = 1 + x + x^2$$

III.2

Wskaż równanie, które jest spełnione dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $K(x) + L(x) = 0$ B. $K(x) - L(x) = 0$ C. $2K(x) + L(x) = 0$ D. $K(x) - 2L(x) = 0$

III.2

Udowodnij, że nierówność $K(x) - x < L(x) + 1$ nie ma rozwiązań.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 9. (0-1)

III.2

W zapisie poniższej nierówności i równania z niewiadomą x występuje ten sam współczynnik b :

$$x^2 + bx + 4 \geq 0 \qquad x^2 + bx + 4 = 0$$

Wskaż wartość współczynnika b , dla której nierówność jest tożsamościowa, a równanie jest sprzeczne.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $b = -4$ B. $b = -3$ C. $b = 4$ D. $b = 5$

Zadanie 10. (0-2)

III.2

Dane są wyrażenia:

$$P(x) = (x-1)(x+1) \quad O(x) = (x-2)(x+2) \quad R(x) = (x-3)(x+3) \quad S(x) = (x-4)(x+4)$$

Wskaż dwa zdania fałszywe.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. Równanie $P(x) = 3 + Q(x)$ jest tożsamościowe.
B. Równanie $Q(x) = 12 + S(x)$ jest tożsamościowe.
C. Równanie $P(x) = x + S(x)$ jest sprzeczne.
D. Równanie $Q(x) = 9 + R(x)$ jest sprzeczne.
E. Równanie $P(x) + S(x) = Q(x) + R(x)$ jest sprzeczne.
F. Równanie $Q(x) + R(x) - P(x) = S(x)$ jest tożsamościowe.
G. Równanie $3O(x) = P(x) + R(x) + S(x)$ jest sprzeczne.

Zadanie 11. (0-2)

III.2

Wśród podanych nierówności jest jedna sprzeczna i jedna tożsamościowa.

- A. $(x-3)^2 > x^2$ C. $(x-2)(x-3) > x^2 - 5x$ E. $x^2 + 2 < x^2 + 2x$
B. $x^2 + 4 < 4x$ D. $x^2 - x < x - x^2$ F. $1 - x^2 > 1 - x$

Każdemu z tych dwóch rodzajów nierówności przyporządkuj nierówność. Wpisz obok rodzaju nierówności właściwą odpowiedź wybraną spośród A-F.

Nr zadania	Rodzaj nierówności	Odpowiedź
11.1	tożsamościowa	
11.2	sprzeczna	



Zadanie 12. (0-2)

III.3

Rozwiąż nierówność. Podaj największą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność.

$$2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$$

Zapisz obliczenia.

[illegible]

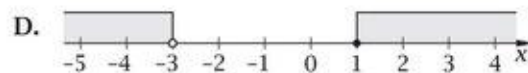
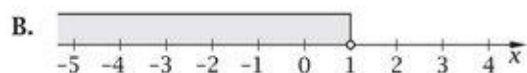
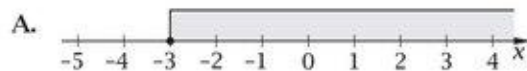
Zadanie 13. (0-1)

III.3

Wskaż oś liczbową, na której zaznaczono zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które jednocześnie spełniają obie nierówności:

$$(x-2)^2 > x^2 \quad \text{ i } \quad (x+6)^2 \geq x^2$$

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



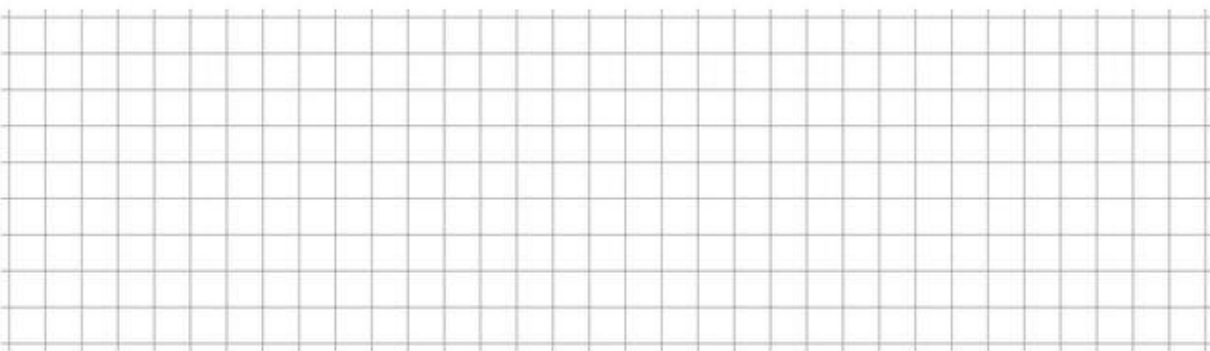
Zadanie 14. (0-1)

III.3

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Suma wszystkich liczb całkowitych ujemnych, które spełniają nierówność $\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{3} \geq 0$, jest równa

.....



Zadanie 15. (0-2)

III.3

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{\frac{1}{2}x-3}{\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{3}x-2}{\frac{1}{2}}$. Zbiór D jest zbiorem wszystkich takich liczb x , dla których wartość wyrażenia $W(x)$ jest liczbą ujemną.

Wyznacz zbiór D . Zapisz obliczenia.



Zadanie 16. (0-1)

III.4

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba, która spełnia równanie $4x^2 + 1 = 4x$, spełnia także równanie:

A. $6x^2 - 2 = x$

B. $6x^2 + x = 1$

C. $10x^2 + x = 2$

D. $10x^2 - x = 2$

Zadanie 17. (0-1)

III.4

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Równanie $x^2 - 6x + 5 = 0$ ma dwa różne pierwiastki.	P	F
Równanie $ x ^2 - 6 x + 5 = 0$ ma cztery różne pierwiastki.	P	F



Zadanie 18. (0-1)

III.4

Dana jest nierówność kwadratowa:

$$(3x - 9)(x + k) < 0$$

z niewiadomą x i parametrem $k \in \mathbb{R}$. Rozwiązaniem tej nierówności jest przedział $(-2; 3)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba k jest równa:

- A. -2 B. 2 C. -3 D. 3

Zadanie 19. (0-1)

III.4

Dane są dwie nierówności:

I. $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2+1} > 0$ II. $\frac{(x-2)(x+1)}{|x|+1} < 0$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Suma zbiorów rozwiązań nierówności I i nierówności II jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.	P	F
Liczba $\sqrt{2}$ spełnia jednocześnie nierówność I i nierówność II.	P	F

Zadanie 20. (0-1)

III.4

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma wszystkich liczb całkowitych, które spełniają nierówność $x^2 < 2x + 35$, jest równa:

- A. -11 B. -9 C. 9 D. 11

Zadanie 21. (0-2)

III.4

Dane są dwie nierówności:

I. $4 - x^2 \geq 0$ II. $x^2 \leq 2x + 8$

Uzupełnij zdania. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdania były prawdziwe.

1. Najmniejszą liczbą naturalną, która nie spełnia ani nierówności I ani nierówności II, jest
2. Najmniejszą liczbą całkowitą, która spełnia jednocześnie nierówność I i nierówność II, jest



Zadanie 22. (0-4)**III.4**

Dane jest wyrażenie W określone wzorem:

$$W(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ x^2 + 2x & \text{dla } x \in \langle -1; +\infty \rangle \end{cases}$$

Rozwiąż równanie $W(x) = \frac{1}{3}x$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 23. (0-4)****III.4**

Szymon przygotowuje się do egzaminu na prawo jazdy. Opanował już 97 spośród 3697 zadań. Postanowił, że każdego kolejnego dnia będzie rozwiązywał n zadań. Zauważył, że gdyby dzienną liczbę rozwiązanych zadań zwiększył o 5, czas potrzebny na rozwiązanie wszystkich zadań skróciłby się o 10 dni.

Oblicz, ile dni zajmie Szymonowi przygotowanie do egzaminu, jeśli nie będzie zwiększał dziennej liczby rozwiązanych zadań. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 24. (0-3)****III.5**

Rozwiąż równanie $(x - 1)^4 - 5(x - 1)^2 + 6 = 0$.

Zadanie 25. (0-1)

III.5

Liczby x_1, x_2, x_3 i x_4 takie, że $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ są pierwiastkami równania $(x^2 - \frac{9}{16})^2 - (x^2 - \frac{9}{16}) = 0$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Różnica $x_4 - x_2$ jest równa:

- A. 2,5 B. 2 C. 1,5 D. 0,5

Zadanie 26. (0-1)

III.5

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Największą liczbą x , dla której wartości wyrażeń: x^2 , $x^2 - 1$, $x^2 - 2$ są długościami boków trójkąta prostokątnego, jest:

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. 1 C. $\sqrt{5}$ D. 5

Zadanie 27. (0-2)

III.5

Dane jest równanie $4x^4 - 13x^2 + 9 = 0$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przedziałem, do którego należą dokładnie dwa pierwiastki tego równania, jest:

- A. $\left(-1; 1\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(-1\frac{1}{2}; 1\right)$ C. $\left(-1\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$ D. $\left(-1; 1\right)$

CK
CE

Zadanie 28. (0-3)

III.6

Rozwiąż równanie $3x^3 - 6x^2 - 27x + 54 = 0$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 29. (0-3)

III.6

Rozwiąż równanie $-2x^3 + x^2 + 18x - 9 = 0$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 30. (0-3)

III.6

Rozwiąż równanie $-x^3 + 13x - 12 = 0$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 31. (0-1)

III.6

Równanie $2x^4 - x^3 - 8x^2 + 4x = 0$ ma cztery rozwiązania. Trzy z nich to: -2 , 0 i 2 .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Czwarte rozwiązanie tego równania należy do przedziału:

- A. $(-\infty; -2)$ B. $(-2; 0)$ C. $(0; 2)$ D. $(2; +\infty)$

Zadanie 32. (0-2)

III.6

Dane są dwa równania:

$$I, \chi^3 - \chi = 0$$

$$\text{II. } (x+1)^3 - (x+1) = 0$$

Uzupełnij zdania. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdania były prawdziwe.

1. Liczba spełnia równanie I, ale nie spełnia równania II.
2. Liczba spełnia równanie II, ale nie spełnia równania I.

[illegible]

Zadanie 33. (0-3)

III.6

Objętość pewnego prostopadłościanu jest równa 6. Jedna z krawędzi podstawy jest o 1 krótsza, a druga — o 3 dłuższa od wysokości prostopadłościanu.

Oblicz wysokość tego prostopadłościanu. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 34. (0-1)

III.7

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{(4x-6)(x-2)^2}{2x(x-1,5)(x+6)} = 0$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych:

- A. dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 2$.
B. dokładnie dwa rozwiązania: $x = 1,5$, $x = 2$.
C. dokładnie trzy rozwiązania: $x = -6$, $x = 0$, $x = 2$.
D. dokładnie cztery rozwiązania: $x = -6$, $x = 0$, $x = 1,5$, $x = 2$.

Zadanie 35. (0-1)

III.7

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{(3x^2 - 6x)(x^2 - 9)}{(x - 2)(x - 3)^2} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

- A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 0$.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania: $x = 0$, $x = -3$.
D. ma dokładnie cztery rozwiązania: $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$, $x = -3$.



Zadanie 36. (0-1)

III.7

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{(x^2 + x)(x + 3)(x - 1)}{x^2 - 1} = 0$ ma w zbiorze liczb rzeczywistych dokładnie:

- A. jedno rozwiązanie: $x = -3$.
B. dwa rozwiązania: $x = -3, x = 0$.
C. trzy rozwiązania: $x = -3, x = -1, x = 0$.
D. cztery rozwiązania: $x = -3, x = -1, x = 0, x = 1$.

Zadanie 37. (0-1)

III.7

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $\frac{(x^2 - 4x)(x^2 - 4)}{(x^2 + 4x)(x^2 + 4)} = 0$ jest:

- A. $\{0, 2, 4\}$ B. $\{-2, 2, 4\}$ C. $\{-2, 0, 4\}$ D. $\{-2, 0, 2\}$



Zadanie 38. (0-3)

III.7

Rozwiąż równanie $\frac{(4x + 1)(x - 5)}{(2x - 10)(x + 3)} = 0$.



Zadanie 39. (0-1)

III.7

Dane są dwa równania:

$$\text{I. } \frac{x(x^2-1)}{x^2+x} = 0 \qquad \text{II. } \frac{x(x^2+1)}{x-1} = 0$$

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Równanie I ma:

A.	więcej rozwiązań niż równanie II,	ponieważ	1.	każde z tych równań spełnia tylko jedna liczba.
B.	tyle samo rozwiązań co równanie II,		2.	liczba 0 spełnia równanie II, ale nie spełnia równania I.
C.	mniej rozwiązań niż równanie II,		3.	każda liczba spełniająca równanie I jest dodatnia, a równania II nie spełnia żadna liczba dodatnia.

Zadanie 40. (0-3)

III.7

Suma odwrotności pewnej liczby a i odwrotności liczby o 1 większej od a jest równa 1.

Wyznacz liczbę a . Zapisz obliczenia.

Zadanie 41. (0-1)

IV.1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Para liczb (x, y) , która jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x - 3y = 11 \\ 3x - y = 17 \end{cases}$ nie spełnia układu równań:

A. $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 7 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 7 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 14 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 9 \end{cases}$

Zadanie 42. (0-2)

IV.1

Dany jest układ równań: $\begin{cases} x + \sqrt{2}y = 4 \\ \sqrt{2}x - y = \sqrt{2} \end{cases}$. Wskaż dwie równości, których nie spełnia para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem tego układu.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

A. $x^2 + y^2 = 6$

C. $(\sqrt{2})^x = y^2$

E. $\sqrt{2}y - x = 0$

G. $x^2 = 2y^2$

B. $\log_y x = 2$

D. $2x^2 = y^2$

F. $x^2 - y^2 = 2$

H. $(y - \sqrt{2})^2 = x^3 - 3$

Zadanie 43. (0-1)

IV.1

Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x - 4(y + 1) = 1 \\ \frac{x}{2} = y + 3 \end{cases}$.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Układ ten jest:

A.	oznaczony,	ponieważ	1.	nieskończenie wiele par liczb spełnia każde z równań tworzących ten układ.
B.	nieoznaczony,		2.	para liczb $(0, 0)$ nie spełnia tego układu.
C.	sprzeczny,		3.	ten układ jest równoważny układowi $\begin{cases} x - 2y = 2,5 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$.

Zadanie 44. (0-1)

IV.1

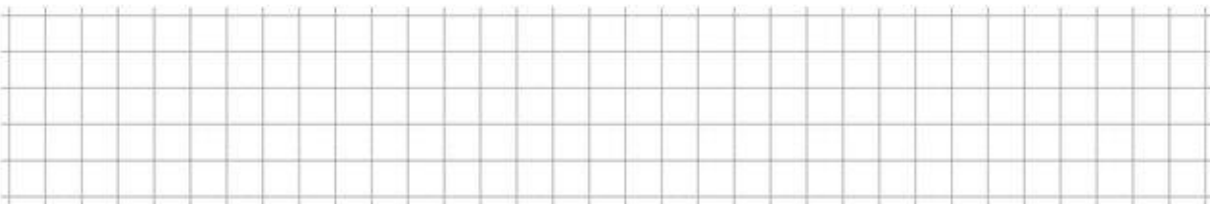
Dany jest układ równań z niewiadomymi x i y :

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 7y = T \end{cases} \quad \text{gdzie } T \text{ jest pewną liczbą rzeczywistą}$$

Jedna z par liczb: $(-1, 2)$, $(3, -1)$, $(-3, -2)$ spełnia ten układ.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Liczba T jest równa



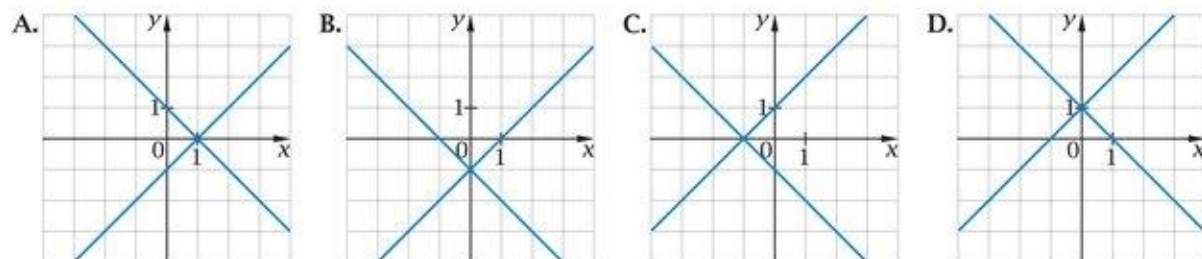
Zadanie 45. (0-1)

IV.1

Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

Na którym z rysunków A-D przedstawiona jest interpretacja geometryczna tego układu równań? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



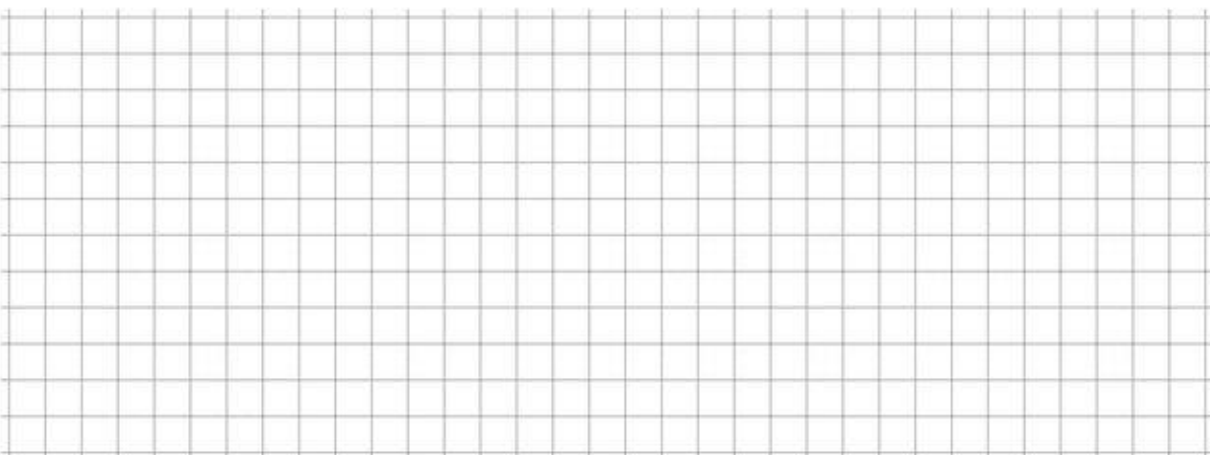
Zadanie 46. (0-4)

IV.1

Dany jest układ równań i wyrażenie W :

$$\begin{cases} \frac{x-9}{x-8} = \frac{y+40}{y+60} \\ \frac{x-7}{x-6} = \frac{y+20}{y+28} \end{cases} \quad W = \frac{x-5}{x-4} + \frac{y+50}{y+20}$$

Oblicz wartość wyrażenia W , wiedząc, że para liczb (x, y) jest rozwiązaniem układu równań. Zapisz obliczenia.



**Zadanie 47. (0-2)****IV.2**

Dane są dwie przecinające się proste. Miary kątów utworzonych przez te proste zapisano za pomocą wyrażeń algebraicznych (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie poniższego zdania było prawdziwe.

Układem równań, w którym zapisano prawidłowe zależności między miarami kątów utworzonych przez te proste, jest układ:

A.
$$\begin{cases} (\alpha + \beta) + \beta = 90^\circ \\ \alpha + \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$$

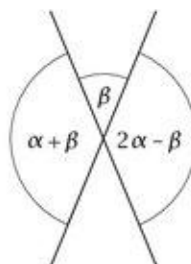
D.
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \\ \alpha + \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$$

E.
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2\alpha - \beta \\ 180^\circ - (2\alpha - \beta) = \beta \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \\ \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$$

F.
$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 360^\circ \\ 2\alpha - \beta = 2\beta \end{cases}$$

**Zadanie 48. (0-1)****IV.2**

O wielomianie $W(x) = 2x^2 + bx + c$ wiadomo, że $W(3) = 3^2$ i $W(4) = 4^2$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wielomianu $W(x)$ dla $x = 5$ jest równa:

- A. 31 B. 29 C. 27 D. 25

**Zadanie 49. (0-1)****IV.2**

Klient banku wypłacił z bankomatu kwotę 1040 zł. Bankomat wydał kwotę w banknotach o nominałach 20 zł, 50 zł oraz 100 zł. Banknotów 100-złotowych było dwa razy więcej niż 50-złotowych, a banknotów 20-złotowych było o 2 mniej niż 50-złotowych. Niech x oznacza liczbę banknotów 50-złotowych, a y — liczbę banknotów 20-złotowych, które otrzymał ten klient.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Poprawny układ równań prowadzący do obliczenia liczb x i y to:

A.
$$\begin{cases} 20y + 50x + 100 \cdot 2x = 1040 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 20y + 50x + 100 \cdot 2x = 1040 \\ x = y - 2 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 20y + 50x + 50x \cdot 2 = 1040 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} 20y + 50x + 50x \cdot 2 = 1040 \\ x = y - 2 \end{cases}$$

**Zadanie 50. (0-1)****IV.2**

Właściciel sklepu kupił w hurtowni 50 par identycznych spodni po x zł za parę i 40 identycznych marynarek po y zł za sztukę. Za zakupy w hurtowni zapłacił 8000 zł. Po doliczeniu marży 50% na każdą parę spodni i 20% na każdą marynarkę ceny detaliczne spodni i marynarki były jednakowe.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cenę pary spodni x oraz cenę marynarki y , jakie trzeba zapłacić w hurtowni, można obliczyć z układu równań:

A.
$$\begin{cases} x + y = 8000 \\ 0,5x = 0,2y \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 50x + 40y = 8000 \\ 1,5x = 1,2y \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 50x + 40y = 8000 \\ 0,5x = 0,2y \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x + y = 8000 \\ 1,5x = 1,2y \end{cases}$$

**Zadanie 51. (0-2)****IV.2**

Dana jest liczba dwucyfrowa a , w której suma cyfr jest równa 14. Jeżeli zamienimy miejscami jej cyfry, otrzymamy liczbę o 18 mniejszą od liczby sprzed tej zamiany cyfr.

Oblicz liczbę a . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 52. (0-3)****IV.2**

Pies goni lisa. Początkowa odległość między zwierzętami równa była 30 m. Długość każdego skoku psa jest równa 2 m, długość każdego skoku lisa jest równa 1 m. W czasie, w którym lis wykonuje trzy skoki, pies skacze dwa razy.

Oblicz dystans, po przebiegnięciu którego pies dogoni lisa. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 53. (0-3)****IV.2**

Suma liczb rzeczywistych a i b równa jest 527. Wiemy, że 8% liczby a jest równe 7,5% liczby b .

Oblicz liczby a i b . Zapisz obliczenia.

Zadanie 54. (0-2)

IV.2

W poniższej tabeli podano zawartość białka i węglowodanów w mące pszennej i mące sojowej.

Mąka	Zawartość białka	Zawartość węglowodanów
pszenna	12%	75%
sojowa	6%	5%

Oblicz, ile gramów mąki pszennej i ile gramów mąki sojowej należy wymieszać, aby otrzymać mąkę zawierającą 42 gramy białka i 230 gramów węglowodanów. Zapisz obliczenia.

A large rectangular area filled with a uniform grid of small squares, intended for drawing or sketching. The grid consists of approximately 20 columns and 10 rows of squares.

Zadanie 55. (0-3)

IV.2

Jeśli z lewej strony zapisu liczby dwucyfrowej x dopiszemy cyfrę 2, to otrzymamy liczbę trzycyfrową 5 razy większą od liczby dwucyfrowej y . Jeżeli natomiast cyfrę 2 dopiszemy z lewej strony zapisu liczby y , to otrzymamy liczbę trzycyfrową 9,8 razy większą od liczby x .

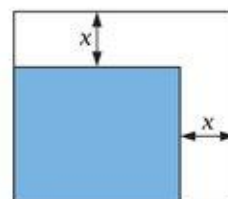
Wyznacz wszystkie liczby trzycyfrowe, które dzielą się przez liczbę x i przez liczbę y bez reszty. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 56. (0-3)

IV.2

Z arkusza papieru o wymiarach $34\text{ cm} \times 31\text{ cm}$ należy odciąć pasek o stałej szerokości cięciami równoległymi do dwóch brzegów arkusza (zobacz rysunek), tak aby pozostała część arkusza (na rysunku zamalowana kolorem niebieskim) miała pole równe 700 cm^2 .



Oblicz wartość x . Zapisz obliczenia.

A full page of blank graph paper with a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 15 rows of squares. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 57. (0-1)

IV.3

Wskaż układ równań, który spełnia dokładnie jedna para liczb.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\begin{cases} y = -x^2 \\ y - 8 = 4x \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x^2 \\ y - 8 = 4x \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = x^2 \\ y + 4 = 4x \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = -x^2 \\ y + 4 = 4x \end{cases}$

Zadanie 58. (0-1)

IV.3

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$ są dwie pary liczb (x, y) będące współrzędnymi punktów A i B w układzie współrzędnych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka AB jest równa:

A.1

B. $\sqrt{2}$

C. 2

D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 59. (0-1)

IV.3

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Para liczb (x, y) , która spełnia układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$, jest również rozwiązaniem układu równań:

A. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$



Zadanie 60. (0-4)

IV.3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 61. (0-4)

IV.3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \log_x(x+2y) = 2 \\ \log_y(x-2y) = 1 \end{cases}$. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

4. FUNKCJE

TEORIA

Wyróżnikiem Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$) zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę:

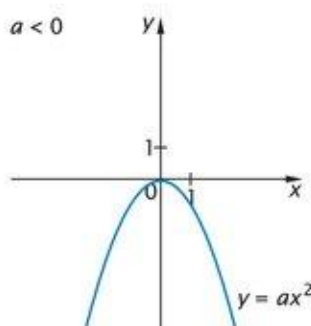
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Postać ogólna funkcji kwadratowej

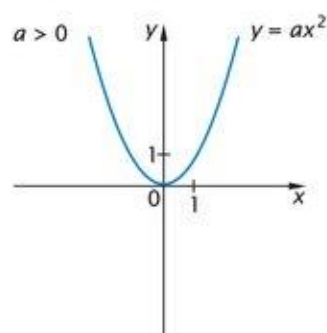
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie:

$$W = (p, q) \quad \text{gdzie } p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$



Gdy $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi.



Gdy $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3. Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można przestawić w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y .

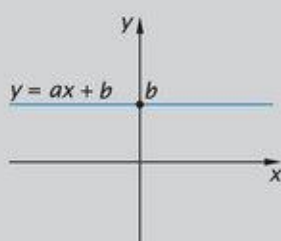
Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji, jego elementy — **argumentami**, a odpowiadające im elementy zbioru Y — **wartościami funkcji**.

Miejsce zerowe funkcji to argument, dla którego wartość funkcji jest równa 0.

Wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ jest prosta, która przecina oś y układu współrzędnych w punkcie $(0, b)$.



Jeśli $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$, to prosta ma jeden punkt wspólny z osią x układu współrzędnych: $(-\frac{b}{a}, 0)$.



Jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$, to prosta nie ma punktów wspólnych z osią x układu współrzędnych.



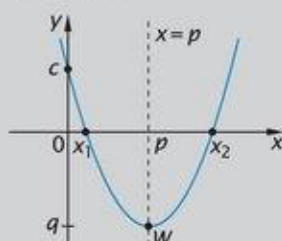
Jeśli $a = 0$ i $b = 0$, to prosta ma nieskończenie wiele punktów wspólnych z osią x układu współrzędnych.

Monotoniczność funkcji liniowej $f(x) = ax + b$

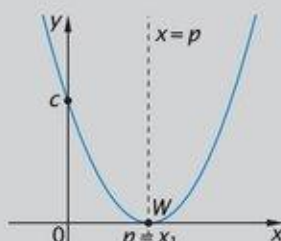
Funkcja liniowa f jest:

- rosnąca dla $a > 0$
- malejąca dla $a < 0$
- stała dla $a = 0$

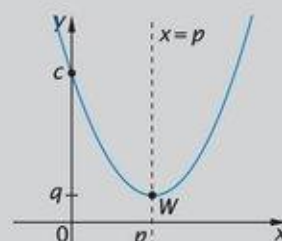
Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) jest parabola o wierzchołku $W = (p, q)$, która przecina oś y układu współrzędnych w punkcie $(0, c)$. Oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = p$.



Jeśli $\Delta > 0$, to parabola ma dwa punkty wspólne z osią x układu współrzędnych: $(x_1, 0)$ i $(x_2, 0)$ oraz $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

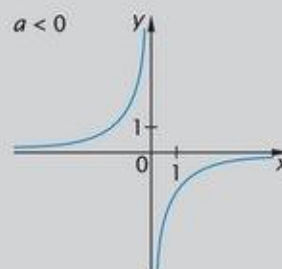
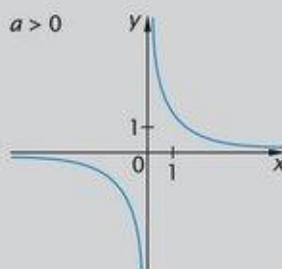


Jeśli $\Delta = 0$, to parabola ma jeden punkt wspólny z osią x układu współrzędnych: $(x_1, 0)$ oraz $p = x_1$.

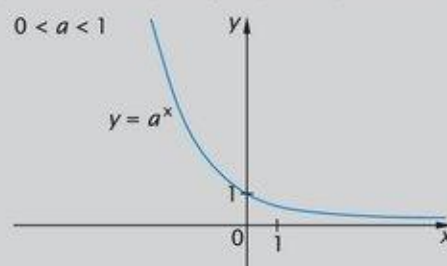
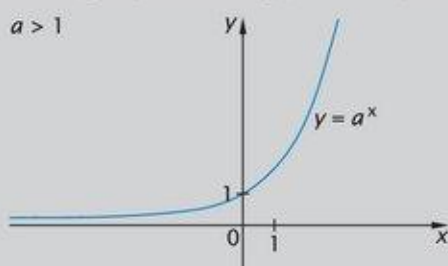


Jeśli $\Delta < 0$, to parabola nie ma punktów wspólnych z osią x układu współrzędnych.

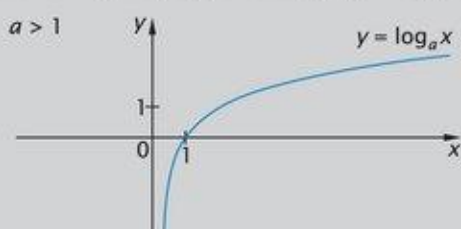
Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$ nazywamy **hiperbolą**. Wykres ten nie ma punktów wspólnych z osiami układu współrzędnych.



Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ przecina oś y układu współrzędnych w punkcie $(0, 1)$.

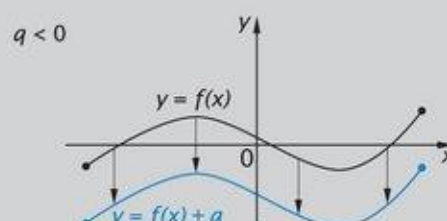
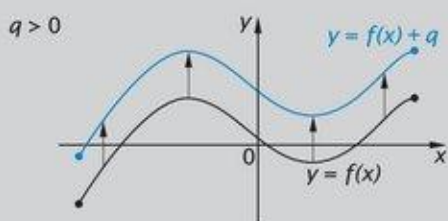


Wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ przecina oś x układu współrzędnych w punkcie $(1, 0)$.

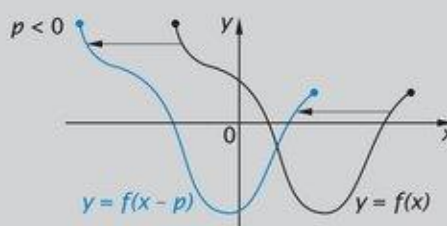
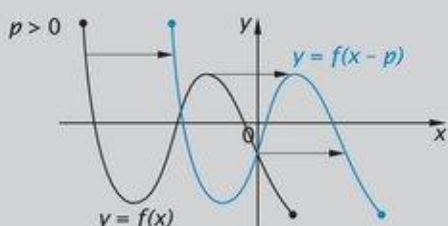


Przesuwanie wykresu funkcji

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ w górę o q jednostek, gdy $q > 0$, lub w dół o $|q|$ jednostek, gdy $q < 0$.

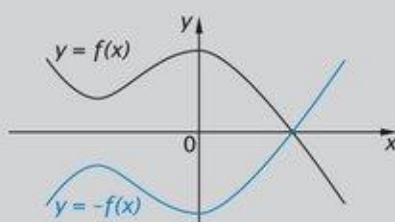


Wykres funkcji $y = f(x - p)$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ w prawo o p jednostek, gdy $p > 0$, lub w lewo o $|p|$ jednostek, gdy $p < 0$.

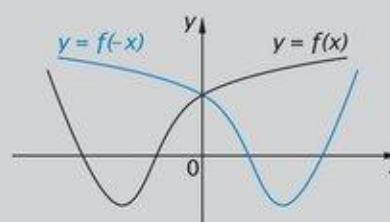


Symetrie wykresu funkcji

Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi x układu współrzędnych.



Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi y układu współrzędnych.



ZADANIA

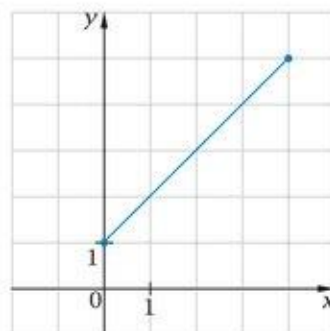
Zadanie 1. (0-1)

V.1

Poniżej przedstawiono opisy czterech funkcji.

- ① Funkcja przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej x mniejszej od 5 liczbę o 1 większą od x .
- ② Funkcja jest określona za pomocą wykresu (zobacz rysunek).
- ③ Funkcja jest określona wzorem $h(x) = x + 1$ dla $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- ④ Funkcja jest określona za pomocą tabeli.

x	0	1	2	3	4
$k(x)$	1	2	3	4	5



Trzy z tych opisów przedstawiają tę samą funkcję.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Który opis przedstawia funkcję inną niż trzy pozostałe?

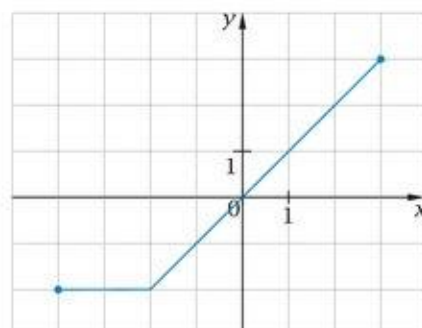
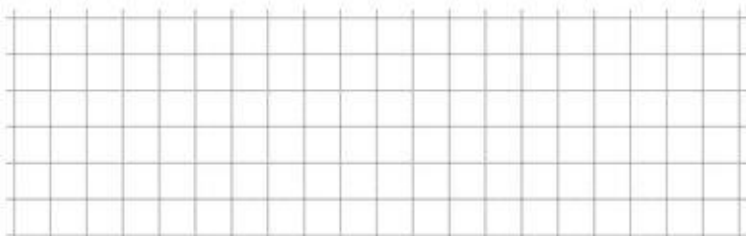
- A. opis ① B. opis ② C. opis ③ D. opis ④

Zadanie 2. (0-2)

V.1

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

Zapisz wzór funkcji f .



Zadanie 3. (0-1)

V.1

Funkcja f każdej liczbie dodatniej przyporządkowuje liczbę o 1 od niej większą, a każdej liczbie niedodatniej — liczbę o 1 od niej mniejszą.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Funkcja f dla argumentu $2 - \sqrt{2}$ przyjmuje wartość $3 - \sqrt{2}$.	P	F
Wartość funkcji f dla argumentu 1 jest o 2 większa od wartości funkcji f dla argumentu (-1) .	P	F

Zadanie 4. (0-1)

V.2

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ należy punkt:

- A. $(-2, -4)$ B. $(-1, \frac{1}{2})$ C. $(1, 1)$ D. $(2, 4)$

Zadanie 5. (0-1)

V.2

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość $f(2a - 1)$ jest równa:

- A. $\frac{a-2}{4a}$ B. $\frac{2a-1}{4a-1}$ C. $\frac{2a-2}{4a-1}$ D. $\frac{2a-3}{4a+1}$

Zadanie 6. (0-3)

V.2

Dane są funkcje f i g określone wzorami $f(x) = 3x + 5$ i $g(x) = 4x - 3$.

Oblicz, dla jakiego argumentu jest spełniony warunek $f(2x) = g(x - 1)$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 7. (0-1)

V.2

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^3 - b - 5\sqrt{2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Miejscem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2} + 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik b we wzorze funkcji f jest równy:

- A. $b = 1$ B. $b = 7$ C. $b = 1 - 3\sqrt{2}$ D. $b = 3 - 3\sqrt{2}$

24

Zadanie 8. (0-1)

V.2

Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 + kx^2 - 12x - 7k + 12$, gdzie k jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiadomo, że liczba (-2) jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba k jest równa:

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

Zadanie 9. (0-1)

V.2

Miejszem zerowym funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2x + a$ jest liczba 8.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość $f(1)$ jest równa:

- A. 7 B. 8 C. 13 D. 14

Zadanie 10. (0-2)

V.2

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = ax + b$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej k jest spełniona równość $f(2 + k) - f(2) = ka$.



Zadanie 11. (0-2)

V.3

Funkcja $y = f(x)$ jest określona za pomocą tabeli przedstawionej obok. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\{-2, -1, 0, 3, 5\}$.

x	-2	-1	0	3	5
$f(x)$	0	4	-6	2	0

Uzupełnij zdania. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdania były prawdziwe.

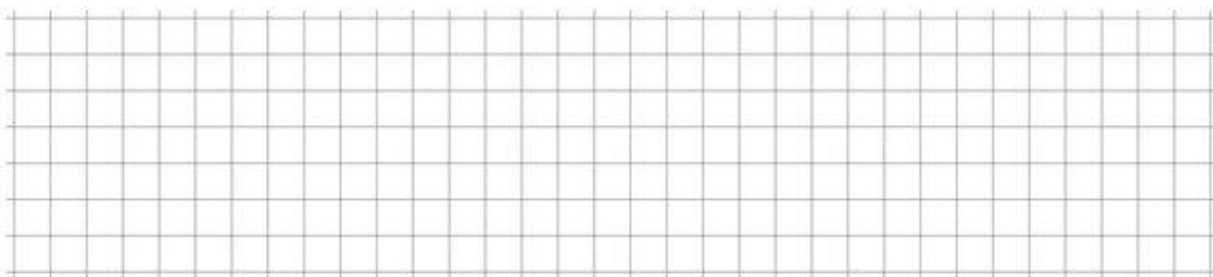
1. Miejscami zerowymi funkcji f są oraz
2. Największą wartość funkcja f przyjmuje dla argumentu i jest ona równa

Zadanie 12. (0-2)

V.3

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = 3x + \sqrt{x+4}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \geq -4$.

Wyznacz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji f przecina oś y układu współrzędnych oraz wartość funkcji f dla argumentu $x = 5$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 13. (0-2)

V.3

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{6x}{x-1}$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Do wykresu funkcji f nie należy punkt:

A. $(-2, 4)$ B. $(-1, 3)$ C. $(0, 0)$ D. $(2, 4)$

2. Funkcja f dla argumentu $x = \sqrt{2}$ przyjmuje wartość równą:

E. -6 F. $6(\sqrt{2} + 2)$ G. 6 H. $6(2 - \sqrt{2})$

Zadanie 14. (0-3)

V.3

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} -2x - 8 & \text{dla } -5 \leq x \leq -3 \\ x + 1 & \text{dla } -3 < x \leq 1 \end{cases}$.

Naszkicuj wykres funkcji f i podaj zbiór tych argumentów, dla których wartości funkcji f są ujemne.



Zadanie 15. (0-1)

V.3

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x \leq 2 \\ 4-x & \text{dla } x > 2 \end{cases}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Wartości funkcji f dla argumentów $x = -1$ oraz $x = 5$ są równe.	P	F
Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.	P	F



Zadanie 16. (0-1)

V.3

Czas T półtrwania leku w organizmie to czas, po którym masa leku w organizmie zmniejsza się o połowę — po przyjęciu jednorazowej dawki. Przyjmij, że po przyjęciu jednej dawki masa m leku w organizmie zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie:

m_0 — masa przyjętej dawki leku

T — czas półtrwania leku

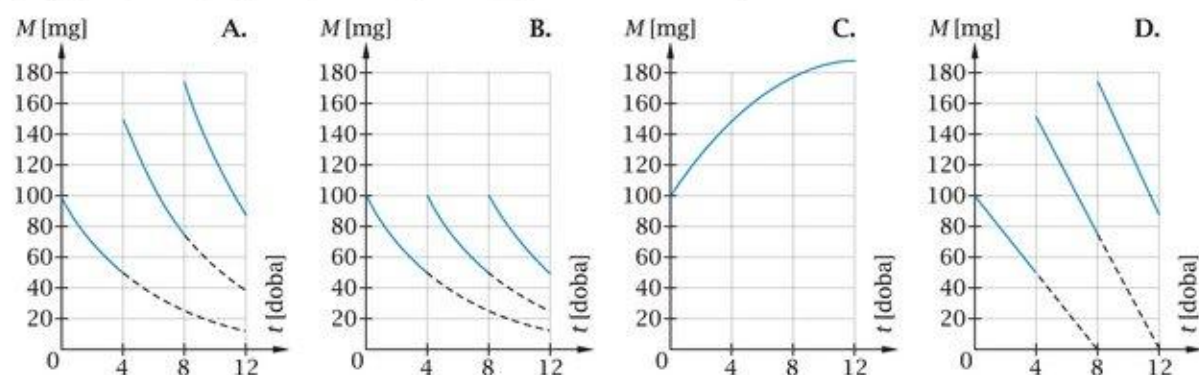
t — czas liczony od momentu przyjęcia dawki.

W przypadku przyjęcia kilku(nastu) dawek powyższa zależność pozwala obliczyć, ile leku pozostało w danym momencie w organizmie z każdej poprzednio przyjętej dawki. W ten sposób obliczone masy leku z przyjętych poprzednich dawek sumują się i dają informację o całkowitej aktualnej masie leku w organizmie.

Pacjent otrzymuje co 4 dni o tej samej godzinie dawkę $m_0 = 100$ mg leku L. Czas półtrwania tego leku w organizmie jest równy $T = 4$ doby.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres zależności masy M leku L w organizmie tego pacjenta od czasu t , liczonego od momentu przyjęcia przez pacjenta pierwszej dawki, przedstawiono na rysunku:



Zadanie 17. (0-1)

V.3

Na rysunku, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono wykres funkcji f określonej dla każdego $x \in \langle -6; 7 \rangle$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

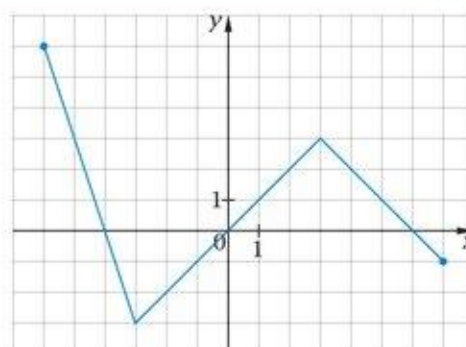
Nie jest prawdą, że:

A. funkcja f przyjmuje wartość (-1) dla trzech argumentów.

B. $f(-2) = -f(2)$.

C. $f(-5) > f(6)$.

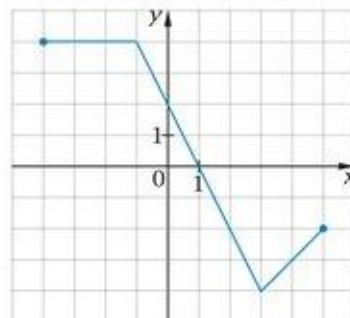
D. zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -3; 3 \rangle$.



Zadanie 18. (0-2)

V.4

Na rysunku, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono wykres funkcji f określonej dla każdego $x \in \langle -4; 5 \rangle$. Wskaż dwa zdania fałszywe.



Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

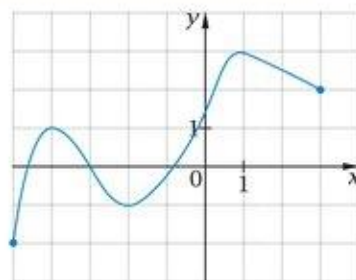
- A. Funkcja f ma jedno miejsce zerowe.
- B. Funkcja f jest stała w przedziale $\langle -4; -1 \rangle$.
- C. Funkcja f osiąga wartości dodatnie dla $x \in \langle -4; 1 \rangle$.
- D. Funkcja f osiąga wartości mniejsze od (-2) dla $x \in (2; 5)$.
- E. Funkcja f wartość 4 przyjmuje tylko dla jednego argumentu.
- F. Wartość (-2) funkcja f przyjmuje dla dwóch argumentów.
- G. Funkcja f dla argumentu $x = 2,7$ przyjmuje większą wartość niż dla argumentu $x = 2,6$.

Zadanie 19. (0-2)

V.4

Dana jest funkcja f , której wykres przedstawiono na rysunku.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.



1. Równanie $f(x) = p$ ma jedno rozwiązanie, gdy:

A. $p \in \langle -2; -1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle \cup \{3\}$ C. $p \in \langle -2; -1 \rangle \cup (1; 2) \cup \{3\}$

B. $p \in (-2; -1) \cup (1; 2) \cup \{3\}$ D. $p \in \langle -2; -1 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$

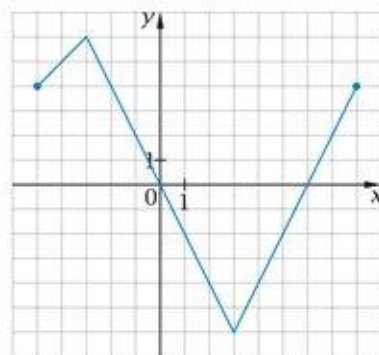
2. Równanie $f(x) = p$ ma trzy rozwiązania, gdy:

E. $p \in (-2; -1)$ F. $p \in (-1; 1)$ G. $p = (1; 2)$ H. $p \in (2; 3)$



Zadanie 20.

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok. Ta funkcja jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \in \langle -5; 8 \rangle$.



Zadanie 20.1. (0-1)

V.4

Zapisz w miejscu wy kropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności:

$$f(x) > 2$$

.....

Zadanie 20.2. (0-1)

V.4

Zapisz w miejscu wy kropkowanym poniżej maksymalny przedział lub maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

.....

Zadanie 20.3. (0-1)

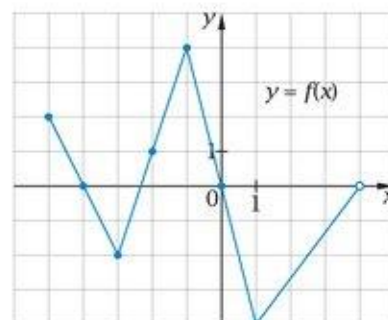
V.4

Uzupełnij zdania. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdania były prawdziwe.

Największa wartość funkcji f jest równa liczbie, a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie

**Zadanie 21.**

Na rysunku, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , przedstawiono wykres funkcji f określonej dla każdego $x \in \langle -5; 4 \rangle$. Na tym wykresie zaznaczono punkty o współrzędnych całkowitych.

**Zadanie 21.1. (0-1)****V.4**

Zapisz w wy kropkowanym miejscu zbiór wartości funkcji f .

Zadanie 21.2. (0-1)**V.4**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Dla każdego argumentu z przedziału $\langle -4; -2 \rangle$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne.	P	F
Funkcja f ma trzy miejsca zerowe.	P	F

Zadanie 21.3. (0-1)**V.4**

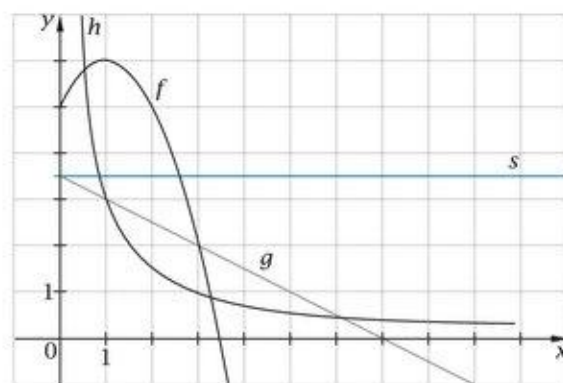
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$ jest równa:

- A. -4 B. -3 C. -2 D. 0

**Zadanie 22.**

W kartezjańskim układzie w współrzędnych (x, y) przedstawiono fragmenty wykresów czterech funkcji: f, g, h, s .

**Zadanie 22.1. (0-1)****V.4**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Największą wartość dla argumentu $x = 2$ przyjmuje funkcja:

- A. f B. g C. h D. s

Zadanie 22.2. (0-1)**V.4**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla argumentu $x = 3$ tę samą wartość przyjmują funkcje:

- A. f i s B. s i h C. f i g D. g i s

Zadanie 22.3. (0-1)**V.4**

Zapisz maksymalny przedział, w którym prawdziwa jest nierówność $g(x) > h(x)$.



Zadanie 23. (0-1)

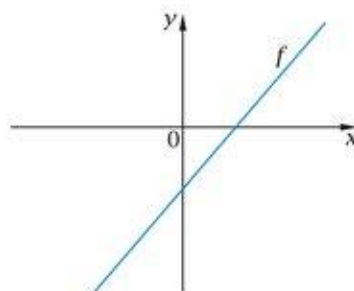
V.5

Dana jest funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi. Wykres funkcji f przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynniki a i b we wzorze funkcji f spełniają warunki:

- A. $a > 0$ i $b > 0$ C. $a < 0$ i $b > 0$
 B. $a > 0$ i $b < 0$ D. $a < 0$ i $b < 0$



Zadanie 24. (0-1)

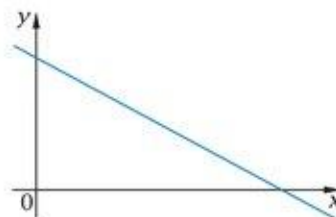
V.5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f , która jest określona jednym z poniższych wzorów.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest określona wzorem:

- A. $f(x) = 0,4x + 6$ C. $f(x) = 0,4x - 6$
 B. $f(x) = -0,4x + 6$ D. $f(x) = -0,4x - 6$



Zadanie 25. (0-2)

V.5

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = -5x + 15$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wskaż dwa zdania falsywe.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. Miejscem zerowym funkcji f jest liczba 3.
 B. Wykres funkcji f przechodzi przez punkt $(-7, 50)$.
 C. Funkcja f jest malejąca.
 D. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla $x > 3$.
 E. Funkcja f dla argumentu $x = -17$ przyjmuje mniejszą wartość niż dla argumentu $x = 17$.
 F. Istnieje argument, dla którego wartość funkcji f jest równa 1000.
 G. Wykres funkcji f przecina obie osie układu współrzędnych.

Zadanie 26. (0-1)

V.5

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 400x - 800$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Pole trójkąta ograniczonego wykresem funkcji f i osiami układu współrzędnych jest równe 1600.	P	F
Wykres funkcji f przechodzi przez I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych.	P	F

Zadanie 27. (0-1)

V.5

Funkcja f określona dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x) = (m - 4)x + 3 - m$ nie ma miejsc zerowych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres funkcji f przecina oś y układu współrzędnych w punkcie:

- A. $(0, -1)$ B. $(0, 1)$ C. $(0, 3)$ D. $(0, 4)$

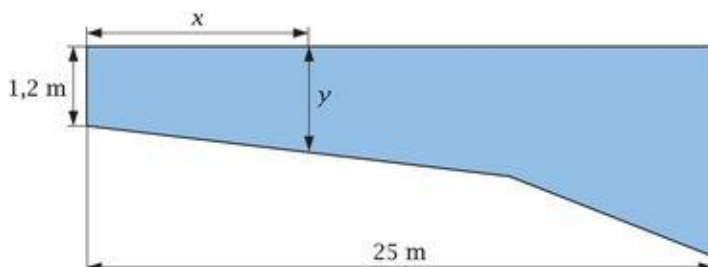


Zadanie 32.

Basen ma długość 25 m. W najpłytszym miejscu jego głębokość jest równa 1,2 m. Przekrój podłużny tego basenu przedstawiono poglądowo na rysunku. Głębokość y basenu zmienia się wraz z odległością x od brzegu w sposób opisany funkcją:

$$y = \begin{cases} ax + b & \text{dla } 0 \leq x \leq 15 \text{ m} \\ 0,18x - 0,9 & \text{dla } 15 \text{ m} \leq x \leq 25 \text{ m} \end{cases}$$

Odległość x jest mierzona od płytszego brzegu w poziomie na powierzchni wody (zobacz rysunek). Wielkości x i y wyrażone są w metrach.



Zadanie 32.1. (0-1)

V.2

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Największa głębokość basenu jest równa:

- A. 5,4 m B. 3,6 m C. 2,2 m D. 1,8 m

Zadanie 32.2. (0-2)

V.6

Oblicz wartość współczynnika a oraz wartość współczynnika b . Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 33. (0-3)

V.7

Dane sa:

- kwadrat $ABCD$, w którym $A = (-2, -2)$, $B = (2, -2)$, $C = (2, 2)$ i $D = (-2, 2)$
- funkcja f określona wzorem $f(x) = ax^2$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz a spełnia warunek $|a - 1| = 2$

Wyznacz współrzędne punktów, w których wykres funkcji f przecina boki kwadratu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 34. (0-3)

V.7

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = c - x^2$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$. Do wykresu funkcji f należy punkt $(-3, -5)$.

x	-3	-2	0	2	3
$f(x)$	-5				

Uzupełnij tabelkę odpowiednimi wartościami funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji f , zaznaczając na nim wszystkie punkty z tabeli. Zapisz obliczenia.



Zadanie 35. (0-3)

V.7

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^2 - bx$, gdzie $x \in \mathbb{R}$ i $b \in \mathbb{R}$. Do wykresu funkcji f należy punkt $(5, 5)$.

x	-1	0	2	4	5
$f(x)$					5

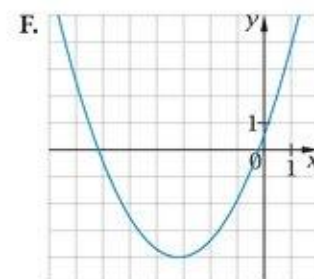
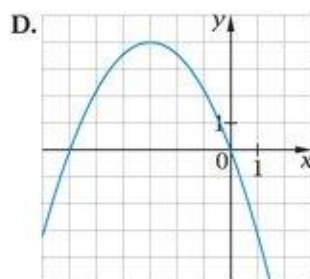
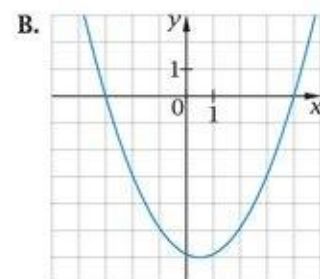
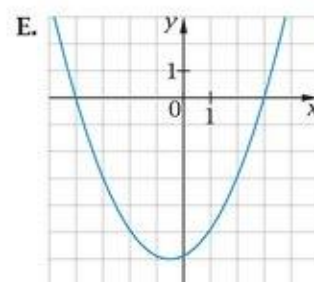
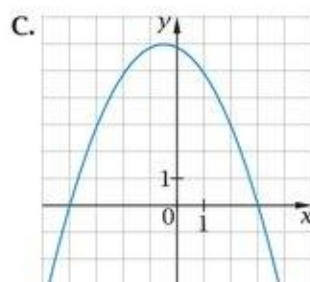
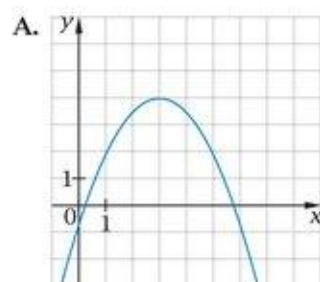
Uzupełnij tabelkę odpowiednimi wartościami funkcji f . Naszkicuj wykres funkcji f , zaznaczając na nim wszystkie punkty z tabeli. Zapisz obliczenia.



Zadanie 36. (0-2)

V.8

Funkcje f i g są określone są wzorami: $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x+4)$ i $g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 4$. Na rysunkach A-F przedstawiono wykresy różnych funkcji — w tym wykresy funkcji f oraz g .



Każdej z funkcji f oraz g przyporządkuj jej wykres. Wpisz obok symbolu funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A-F.

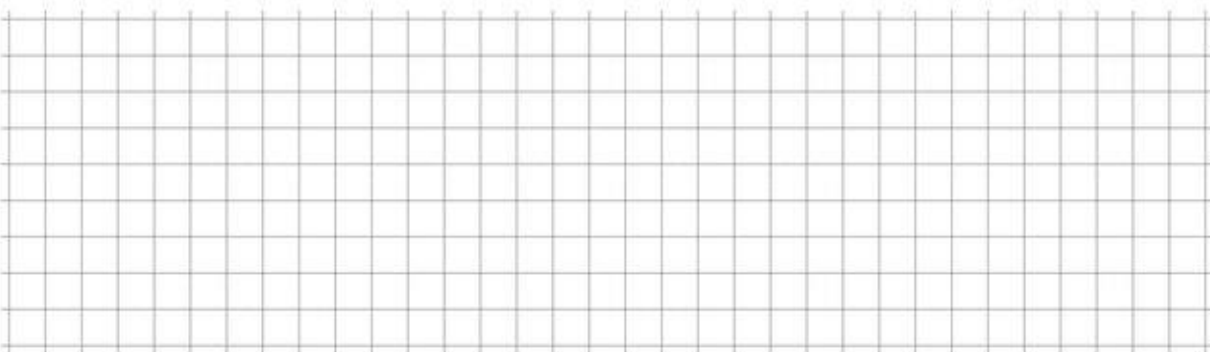
Nr zadania	Funkcja	Rysunek
36.1.	f	
36.2.	g	

Zadanie 37. (0-4)

V.8

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f oraz punktów, w których ta parabola przecina oś układu współrzędnych. Zapisz obliczenia.



Zadanie 38. (0-1)

V.8

Na rysunku obok przedstawiono wykres pewnej funkcji kwadratowej f , która jest określona jednym z poniższych wzorów.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

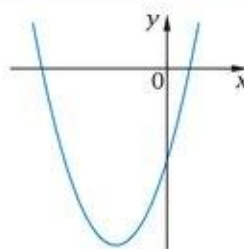
Funkcję f można opisać wzorem:

A. $f(x) = x^2 + 5x - 6$

C. $f(x) = -x^2 - 7x - 6$

B. $f(x) = x^2 + 6x + 7$

D. $f(x) = x^2 - 5x - 6$



Zadanie 39. (0-1)

V.8

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = p - x^2$, gdzie p jest pewną liczbą rzeczywistą.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

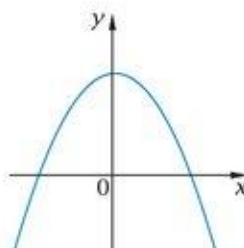
Na podstawie wykresu można stwierdzić, że:

A. $p < 0$

C. $p = 0$

B. $p > 0$

D. nie można określić znaku liczby p



Zadanie 40. (0-1)

V.8

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

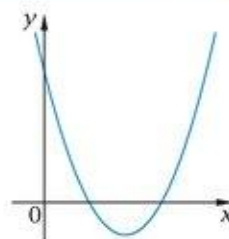
Liczbą ujemną jest wartość:

A. a

B. b

C. c

D. $b^2 - 4ac$



Zadanie 41.

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$.

Zadanie 41.1. (0-1)

V.8

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykresem funkcji f jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne:

A. $(1, 2)$

B. $(-1, 2)$

C. $(1, -2)$

D. $(-1, -2)$

Zadanie 41.2. (0-1)**V.4**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział:

- A. $(-\infty; 2)$ B. $(-\infty; 2)$ C. $(2; +\infty)$ D. $\langle 2; +\infty)$

**Zadanie 42. (0-1)****V.8**

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 3x^2 + bx - 5$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Współczynnik b jest liczbą rzeczywistą mniejszą od zera.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja f :

A.	ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe,	ponieważ	1.	$b^2 + 60 > 0$.
B.	ma jedno rzeczywiste miejsce zerowe,		2.	$b^2 + 60 = 0$.
C.	nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,		3.	$b^2 + 60 < 0$.

**Zadanie 43. (0-2)****V.8**

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = x^2 + 5x + 6$, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

1. Postać kanoniczna funkcji f wyraża się wzorem:

- A. $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ B. $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ C. $y = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{2}$ D. $y = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}$

2. Postać iloczynowa funkcji f wyraża się wzorem:

- E. $y = (x - 2)(x - 3)$ F. $y = (x - 2)(x + 3)$ G. $y = (x + 2)(x - 3)$ H. $y = (x + 2)(x + 3)$

**Zadanie 44. (0-1)****V.8**

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = -2x^2 + bx + c$ i przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x \in (-4; 2)$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prosta $x = 1$.	P	F
Postać iloczynowa funkcji f wyraża się wzorem $f(x) = -2(x + 4)(x - 2)$.	P	F

Zadanie 45. (0-2)**V.8**

Dane są funkcje kwadratowe określone wzorami:

$$f(x) = -x^2 + 10x - 25 \quad g(x) = -x^2 + 8x \quad h(x) = 2x^2 + 12x + 20 \quad k(x) = -x^2 - 10x - 50$$

Wiadomo również, że $l(x) = f(x) + h(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Funkcja, której wykresem jest parabola o wierzchołku leżącym w III ćwiartce układu współrzędnych to:

- A. funkcja f B. funkcja g C. funkcja h D. funkcja k

2. Wykres funkcji l przecina oś y układu współrzędnych w punkcie:

- E. $(-5, 0)$ F. $(0, 1)$ G. $(0, -5)$ H. $(1, 0)$

Zadanie 46. (0-2)**V.8**

Wskaż dwie funkcje, których wszystkie wartości są ujemne.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

A. $y = 5(x-3)^2 - 9$

C. $y = 2x^2 - 5x + 7$

E. $y = -3(x+7)^2 - 1$

G. $y = -4(x-1)(x-5)$

B. $y = 4(x-6)(x+2)$

D. $y = -x^2 + 3$

F. $y = -2x^2 + x - 8$

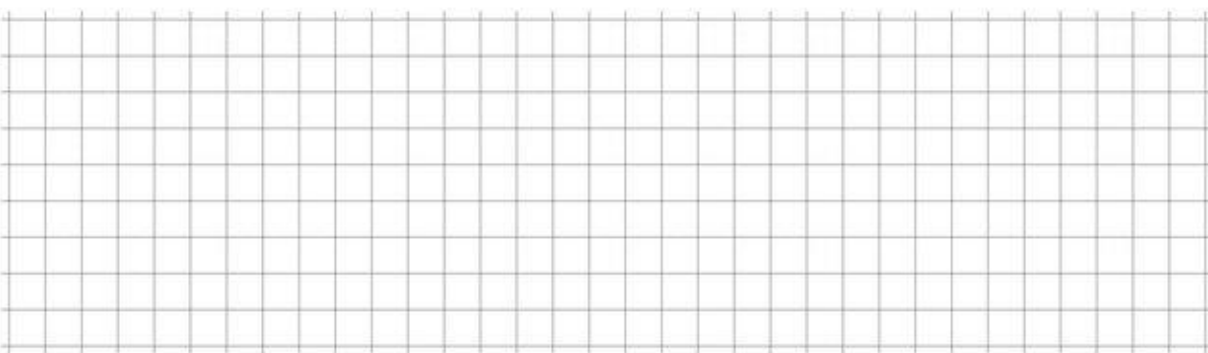
Zadanie 47. (0-2)**V.8**

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 7(x+9)^2 - 6$.

Uzupełnij zdania. Wpisz w wykropkowanych miejscach odpowiednie przedziały, tak aby zdania były prawdziwe.

1. Największym przedziałem, w którym funkcja f jest malejąca, jest

2. Zbiorem wartości funkcji f jest

**Zadanie 48. (0-1)****V.9**

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = 3x + 7 + 2x(x-3)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wzór funkcji f :

- A. nie może być przedstawiony w postaci ogólnej.
- B. nie może być przedstawiony w postaci kanonicznej.
- C. nie może być przedstawiony w postaci iloczynowej.
- D. może być przedstawiony w każdej z trzech postaci: ogólnej, kanonicznej i iloczynowej.

**Zadanie 49.**

Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci ogólnej, kanonicznej lub iloczynowej (o ile istnieje).

Zadanie 49.1. (0-1)**V.8**

Dana jest funkcja kwadratowa $y = f(x)$, której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

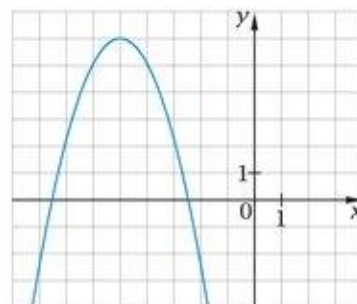
Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ określona jest wzorem:

A. $y = -(x+5)^2 - 6$

C. $y = -(x-5)^2 - 6$

B. $y = -(x+5)^2 + 6$

D. $y = -(x-5)^2 + 6$

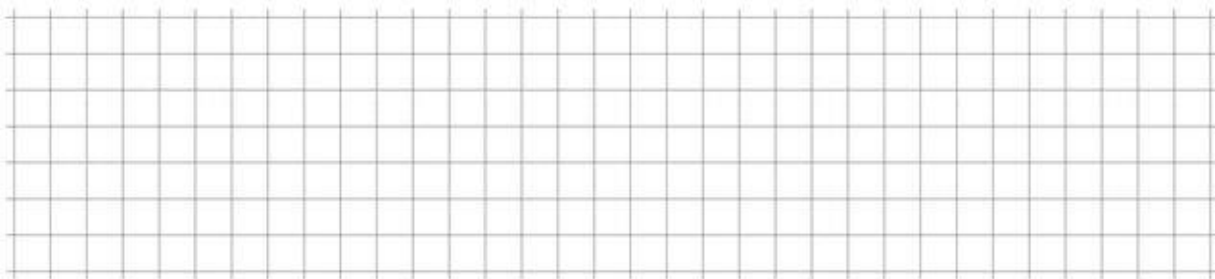


Zadanie 49.2. (0-1)

V.9

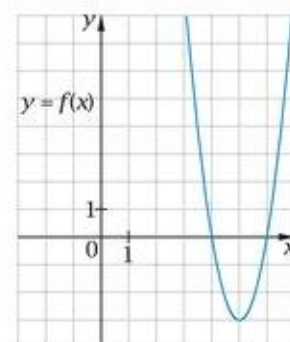
Do wykresu pewnej funkcji kwadratowej $y = g(x)$ należy punkt o współrzędnych $P = (2, -6)$. Oś symetrii wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $x = 3$, a jednym z miejsc zerowych funkcji g jest $x_1 = 1$.

Wyznacz i zapisz wzór funkcji $y = g(x)$ w postaci iloczynowej.



Zadanie 50.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f , ma współrzędne $(5, -3)$. Jeden z punktów przecięcia paraboli z osią x układu współrzędnych ma współrzędne $(4, 0)$.



Zadanie 50.1. (0-1)

V.9

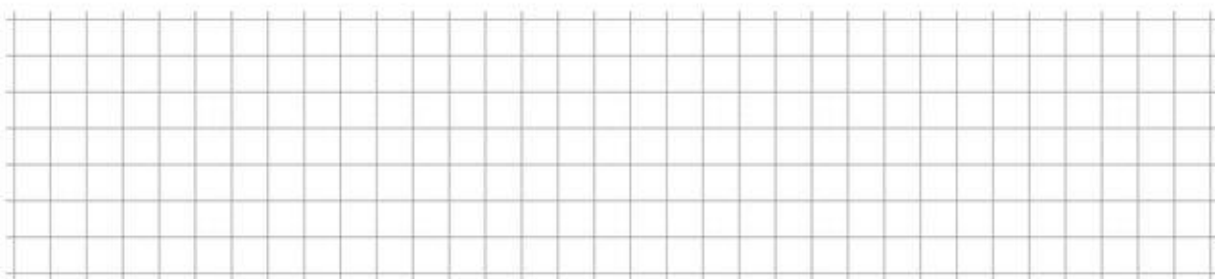
Zapisz poniżej zbiór wszystkich wartości funkcji f .

.....

Zadanie 50.2. (0-2)

V.9

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.

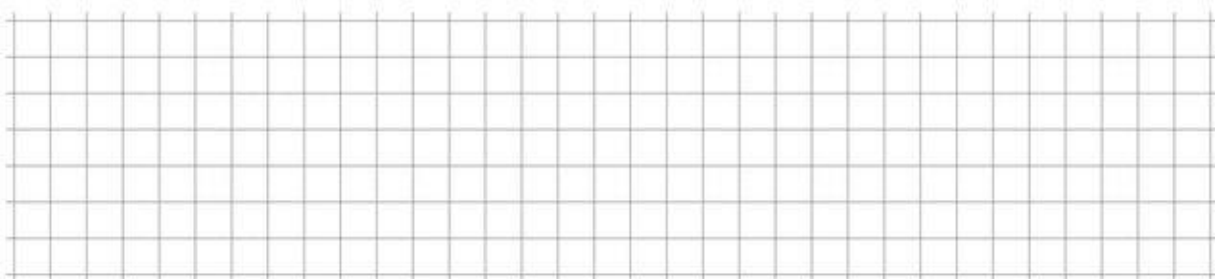


Zadanie 51. (0-2)

V.9

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 + bx - 6$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Funkcja ta przyjmuje najmniejszą wartość dla $x = 7$.

Wyznacz wartość współczynnika b . Zapisz obliczenia.



Zadanie 52. (0-2)

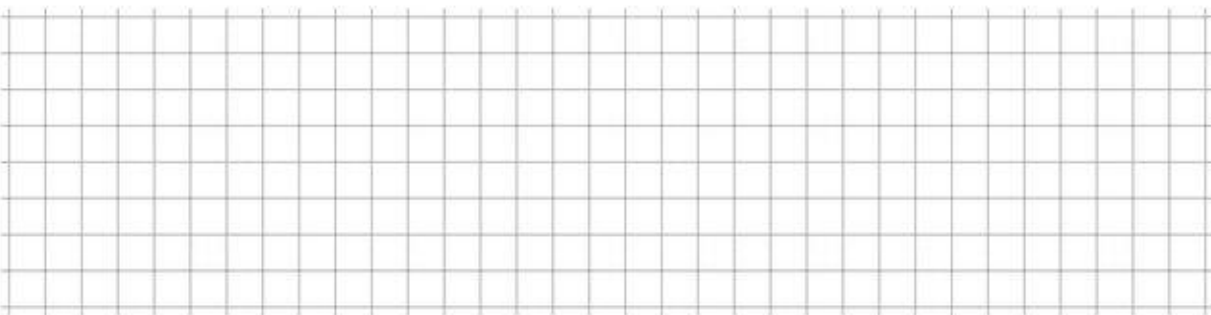
V.10

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -2(x-3)(x+1)$.

Uzupełnij zdania. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdania były prawdziwe.

1. W przedziale $\langle -2; 2 \rangle$ najmniejsza wartość funkcji f jest równa, a największa wartość jest równa

2. W przedziale $\langle 2; 3 \rangle$ najmniejsza wartość funkcji f jest równa, a największa wartość jest równa



Zadanie 53. (0-1)

V.10

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2(x-3)^2 - 4$.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja f osiąga w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$ najmniejszą wartość dla argumentu:

A.	$x = -1$,	ponieważ	1.	parabola, która jest wykresem funkcji f , ma ramiona skierowane do góry i pierwsza współrzędna jej wierzchołka jest równa 3.
B.	$x = 2$,		2.	$3 \notin \langle -1; 2 \rangle$ i $-1 < 2$.
C.	$x = 3$,		3.	$3 \notin \langle -1; 2 \rangle$ i $f(-1) > f(2)$.

Zadanie 54. (0-1)

V.10

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 4x^2 + 24x + 20$, a jej dziedziną jest przedział $\langle -4; 0 \rangle$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział:

A. $\langle -12; 20 \rangle$ B. $\langle -16; 52 \rangle$ C. $\langle -20; 12 \rangle$ D. $\langle -16; 20 \rangle$

Zadanie 55. (0-1)

V.11

Łódź płynie wzdłuż linii prostej od boi A do boi B ze stałą prędkością $12 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Odległość między tymi bojami wynosi 15 km. Odległość (d , w kilometrach) łodzi do boi B jest funkcją czasu (t , w godzinach), jaki upłynął od momentu, gdy łódź mijala boję A.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Funkcję d opisuje wzór $d(t) = 12t + 15$.	P	F
Dziedziną funkcji d jest przedział $\langle 0; 1\frac{1}{4} \rangle$.	P	F

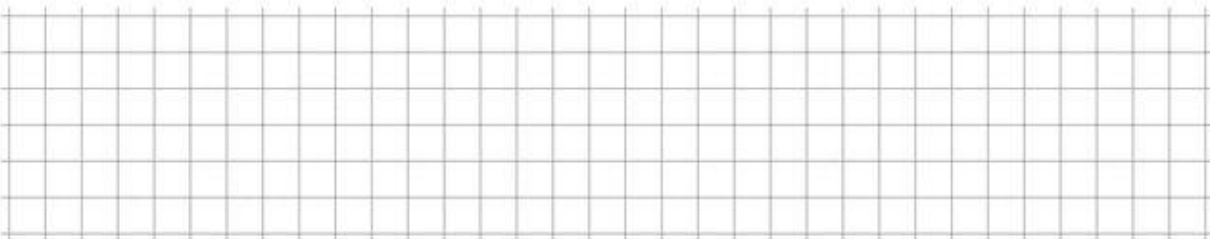
Zadanie 56. (0-3)

V.11

Oznaczmy literą x promień koła, a literą P — pole koła. Funkcja $P = f(x)$ przyporządkowuje promieniowi koła pole tego koła. Ponadto wiadomo, że:

$$f(\sqrt{11}) + f(5) = f(a)$$

Znajdź wartość a . Zapisz obliczenia.



Zadanie 57. (0-1)

V.11

Firma przeprowadziła badania rynkowe dotyczące wpływu zmiany ceny P swojego produktu na liczbę Q kupujących ten produkt. Z badań wynika, że każdorazowe zwiększenie ceny o 1 jednostkę powoduje spadek liczby kupujących o 3 jednostki. Ponadto przy cenie równej 5 jednostek liczba kupujących jest równa 12 jednostek.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja, która opisuje zależność liczby kupujących ten produkt od jego ceny, ma wzór:

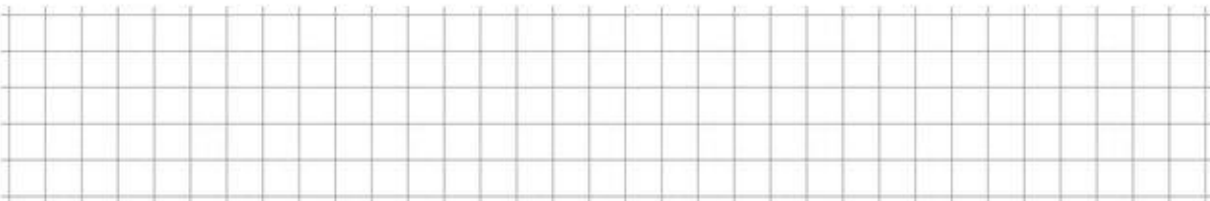
- A. $Q = -0,9P^2 + 6,9$ B. $Q = -3P + 27$ C. $P = -0,9Q^2 + 6,9$ D. $P = -3Q + 27$

Zadanie 58. (0-2)

V.11

Koszty produkcji (w złotych) w pewnej fabryce można opisać za pomocą funkcji liniowej f , w której argumentem x jest liczba sztuk wyprodukowanego towaru. Wyprodukowanie 1000 sztuk towaru kosztuje 1200 zł, a 3000 sztuk towaru — 1600 zł.

Oblicz, ile kosztuje wyprodukowanie 2500 sztuk tego towaru. Zapisz obliczenia.

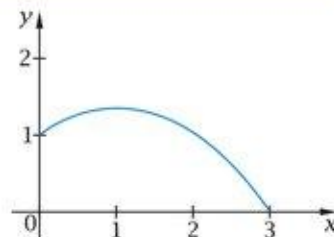


Zadanie 59. (0-4)

V.11

Strumień wody wypływający z ogrodowego węża ma kształt fragmentu paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + c$, gdzie x oznacza odległość (w metrach) od wylotu węża mierzona w poziomie, y oznacza wysokość (w metrach) nad powierzchnią ziemi (zobacz rysunek).

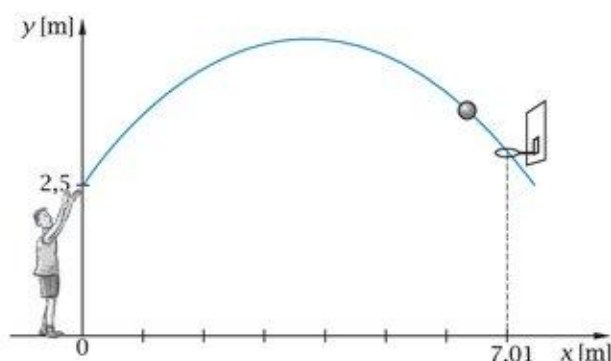
Wyznacz wartości współczynników b i c oraz oblicz, jak wysoko nad powierzchnią ziemi znajduje się najwyższy punkt strumienia. Zapisz obliczenia.



**Zadanie 60.**

Na podstawie zasad dynamiki można udowodnić, że torem rzutu — przy pominięciu oporów — jest fragment paraboli. Koszykarz wykonał rzut do kosza z odległości $x_k = 7,01$ m, licząc od środka piłki do środka obręczy kosza w linii poziomej. Do opisu toru ruchu przyjmijmy układ współrzędnych, w którym środek piłki w chwili początkowej znajdował się w punkcie $x_0 = 0$, $y_0 = 2,50$ m. Środek piłki podczas rzutu poruszał się po paraboli danej równaniem:

$$y = -0,174x^2 + 1,3x + 2,5$$



Rzut okazał się udany, a środek piłki przeszedł dokładnie przez środek kołowej obręczy kosza. Na rysunku powyżej przedstawiono tę sytuację oraz tor ruchu piłki w układzie współrzędnych.

Zadanie 60.1. (0-1)**V.11**

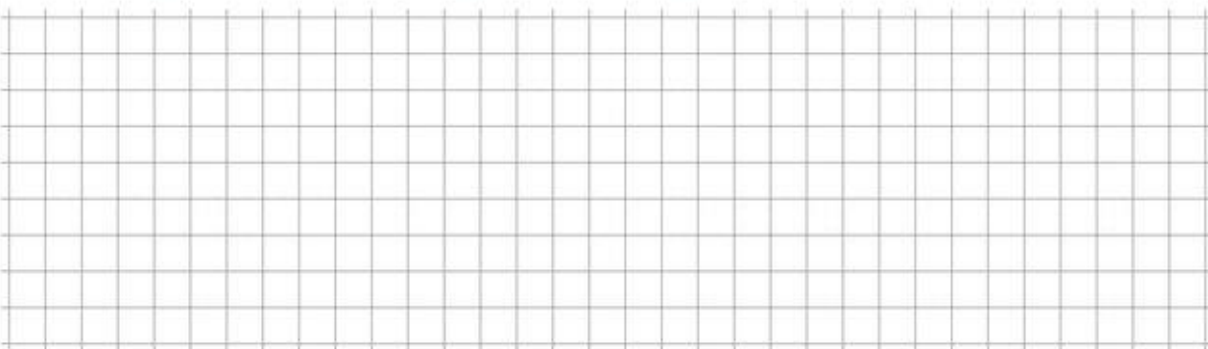
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obręcz kosza znajduje się na wysokości (podanej w zaokrągleniu z dokładnością do 0,01 m):

- A. 3,04 m B. 3,06 m C. 3,80 m D. 4,93 m

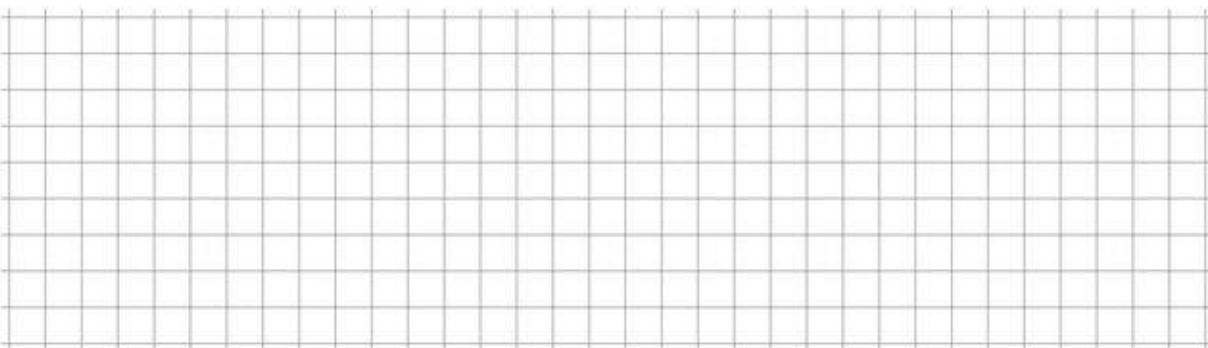
Zadanie 60.2. (0-2)**V.11**

Oblicz wysokość maksymalną, na jaką wzniesie się środek piłki podczas opisanego rzutu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

**Zadanie 60.3. (0-3)****V.11**

W opisanym rzucie piłka przeleciała swobodnie przez obręcz kosza i upadła na parkiet. Przyjmij, że obręcz kosza nie miała siatki, a na drodze nie było żadnej przeszkody. Promień piłki jest równy 0,12 m.

Oblicz współrzędną x punktu środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu. Zapisz wynik w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.



Zadanie 61.

Ze skarpy nad jeziorem rzucono kamień. Po upływie t sekund od chwili wyrzucenia kamień znajduje się na wysokości $h(t)$ metrów nad powierzchnią jeziora, gdzie $h(t) = 12 + 20t - 5t^2$.

Zadanie 61.1. (0-2)

V.11

Oblicz, po jakim czasie od momentu wyrzucenia kamień uderzy w powierzchnię jeziora. Wynik podaj w sekundach w zaokrągleniu do części dziesiątych. Zapisz obliczenia.



Zadanie 61.2. (0-3)

V.11

Oblicz, przez jaki czas kamień znajdował się na wysokości ponad 20 metrów nad powierzchnią jeziora. Wynik podaj w sekundach w zaokrągleniu do części dziesiątych. Zapisz obliczenia.



Zadanie 61.3. (0-2)

V.11

Oblicz największą wysokość, na jakiej znajdował się kamień. Zapisz obliczenia.



Zadanie 62.

Temperatura powietrza obniża się wraz ze wzrostem wysokości n.p.m. Na podstawie danych empirycznych stwierdzono, że temperatura maleje o $0,6^{\circ}\text{C}$, gdy wysokość wzrasta o 100 m, a gdy wysokość maleje o 100 m — temperatura rośnie o $0,6^{\circ}\text{C}$. W Zakopanem, które znajduje się na wysokości 1000 metrów n.p.m., temperatura powietrza zmierzona w punkcie pomiarowym była równa 13°C . W tym samym czasie dokonano pomiarów temperatury powietrza w Białce Tatrzańskiej i na Rysach.

Zadanie 62.1. (0-1)

V.2

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Na Rysach, na wysokości 2499 metrów n.p.m., zmierzona temperatura powietrza nie przekraczała 5°C.	P	F
W Białce Tatrzańskiej (650 metrów n.p.m.) zmierzona temperatura powietrza była równa 16,5°C.	P	F

Zadanie 62.2. (0-2)

V.11

Niech $f(x) = ax + b$ będzie funkcją opisującą zależność temperatury powietrza od wysokości x n.p.m. w dowolnym punkcie nad Zakopanem.

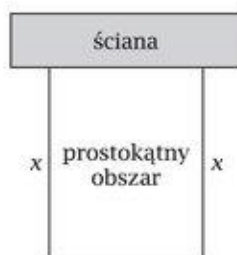
Oblicz wartość współczynnika a i wartość współczynnika b . Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 63. (0-1)

V.11/XIII

Listwę o długości 120 cm należy rozciąć na trzy części tak, aby można było nimi ograniczyć z trzech stron prostokątny obszar przylegający do ściany (zobacz rysunek). Przyjmijmy, że x oznacza długość tej części listwy, która jest prostopadła do ściany ($0 < x < 60$), a funkcja $y = P(x)$ opisuje pole ograniczonego obszaru.



Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Największe możliwe pole P tego obszaru jest równe:

A.	120 cm^2 ,	ponieważ	1.	jeśli podzielimy listwę na trzy równe części (po 40 cm każda), to ograniczonym obszarem będzie kwadrat.
B.	1600 cm^2 ,		2.	wykresem funkcji P jest parabola o wierzchołku $(30, P(30))$, więc największa wartość tej funkcji to $P(30)$.
C.	1800 cm^2 ,		3.	suma długości trzech części listwy ograniczających obszar jest równa 120 cm .

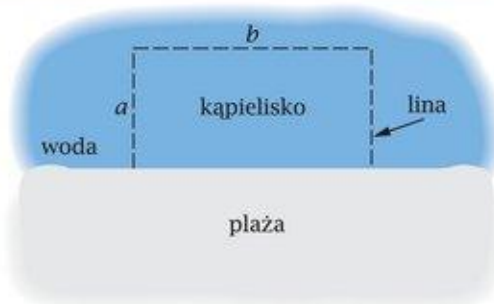
CK
E

Zadanie 64. (0-4)

V.11/XIII

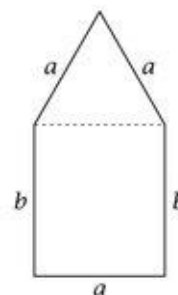
Do wyznaczenia trzech boków pewnego kąpieliska w kształcie prostokąta należy użyć liny o długości 200 m. Czwarty bok tego kąpieliska będzie pokrywał się z brzegiem plaży, który w tym miejscu jest linią prostą (zobacz rysunek).

Oblicz wymiary a i b kąpieliska, tak aby jego powierzchnia była największa. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or other markings on the page.

Zadanie 65.

Gospodarz ma 100 m siatki i chce nią ogrodzić obszar w kształcie pięciokąta, który można podzielić na prostokąt i trójkąt równoboczny. Oznaczmy długości boków prostokąta literami a i b , zaś długość boku trójkąta równobocznego — literą a (zobacz rysunek).

**Zadanie 65.1. (0-2)**

V.11/XIII

Wykaż, że pole P ogrodzonego obszaru można wyrazić za pomocą wzoru:

$$P(a) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \right) a^2 + 50a$$

**Zadanie 65.2. (0-2)**

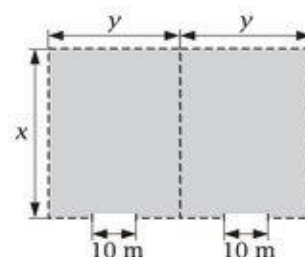
V.11/XIII

Wyznacz taką wartość a , dla której pole P jest możliwie największe. Wynik podaj w metrach w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

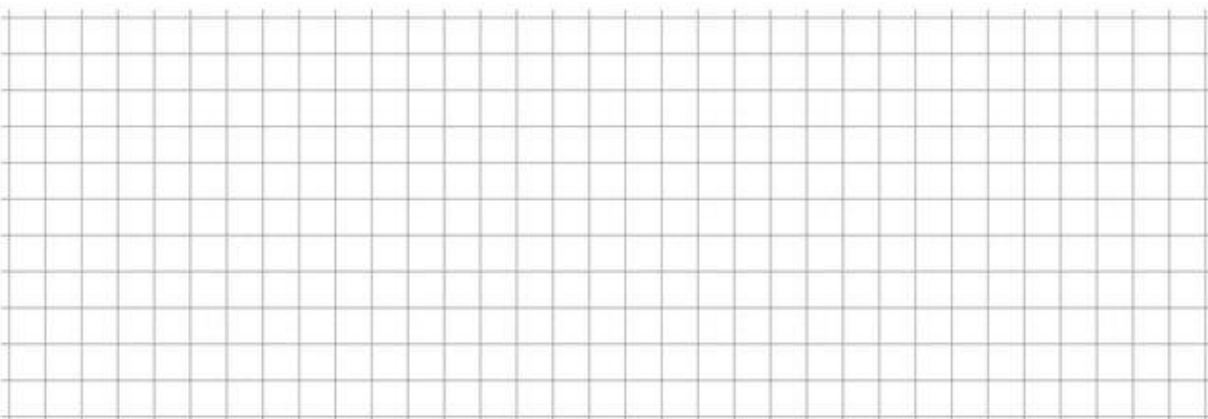
**Zadanie 66. (0-4)**

V.11/XIII

Powierzchnia magazynowa będzie się składała z dwóch identycznych prostokątnych działek połączonych wspólnym bokiem. Całość ma być ogrodzona płotem, przy czym obie działki będzie rozdzielał wspólny płot. W ogrodzeniu będą zamontowane dwie bramy wjazdowe, każda o szerokości 10 m (zobacz rysunek). Łączna długość płotu ogradzającego oraz rozdzielającego obie działki wyniesie 580 metrów, przy czym szerokości obu bram wjazdowych nie wliczają się w długość płotu.



Oblicz wymiary x i y każdej z dwóch prostokątnych działek, tak aby całkowite pole powierzchni magazynowej było największe.



Zadanie 67.

Kierownictwo zakładu produkującego zbiorniki na deszczówkę ustaliło, że średni koszt B (w złotych) wyprodukowania jednego zbiornika w sierpniu zależy od liczby x wyprodukowanych zbiorników w tym miesiącu zgodnie ze wzorem $B(x) = 80 - 0,1x$. Miesięcznie zakład może wyprodukować co najwyżej 600 zbiorników.

Zadanie 67.1. (0-1)

V.11/XIII

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Najniższy możliwy do uzyskania średni koszt wyprodukowania jednego zbiornika w sierpniu jest równy 20 zł.	P	F
Najwyższy możliwy do uzyskania średni koszt wyprodukowania jednego zbiornika w sierpniu jest równy 80 zł.	P	F

Zadanie 67.2. (0-3)

V.11/XIII

Oblicz, jaki jest najwyższy możliwy koszt produkcji zbiorników w sierpniu w tym zakładzie oraz ile zbiorników wyprodukuje wtedy zakład. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 68. (0-4)

V.11/XIII

Rodzinna firma stolarska produkuje małe wiatraki ogrodowe. Na podstawie analizy rzeczywistych wpływów i wydatków stwierdzono, że:

- przychód P (w złotych) z tygodniowej sprzedaży x wiatraków można opisać funkcją $P(x) = 251x$
- koszt K (w złotych) produkcji x wiatraków w ciągu jednego tygodnia można określić funkcją $K(x) = x^2 + 21x + 170$.

Tygodniowo w zakładzie można wyprodukować co najwyżej 150 wiatraków.

Oblicz, ile tygodniowo wiatraków należy sprzedać, aby zysk zakładu w ciągu jednego tygodnia był największy. Oblicz ten największy zysk. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że zysk jest różnicą przychodu i kosztów.

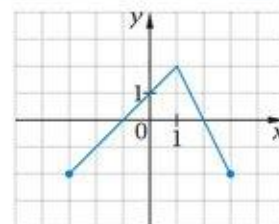
A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or other markings on the page.

Zadanie 69. (0-1)

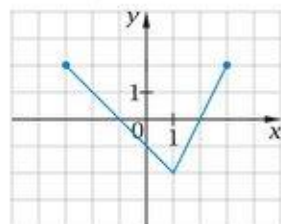
V.12

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Wskaż wykres funkcji, do którego przypisano błędny wzór funkcji.

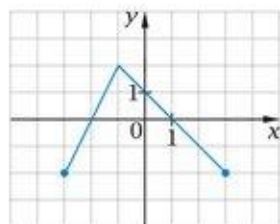
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



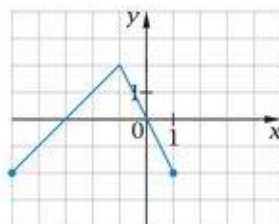
A. $y = -f(x)$



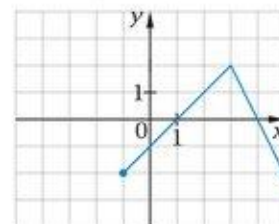
B. $y = f(-x)$



C. $y = f(x+2)$



D. $y = 2 + f(x)$



Zadanie 70. (0-2)

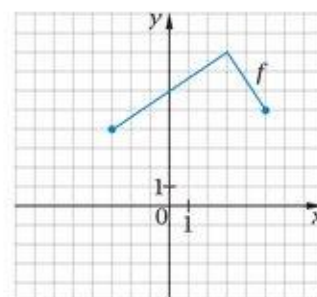
V.12

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych na rysunku obok. Ta funkcja jest określona dla $x \in \langle -3; 5 \rangle$. Funkcje g oraz h są określone następująco:

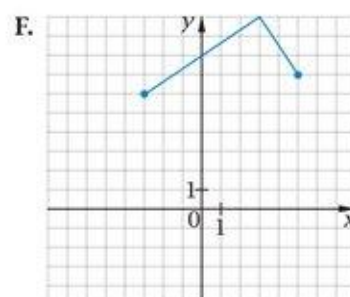
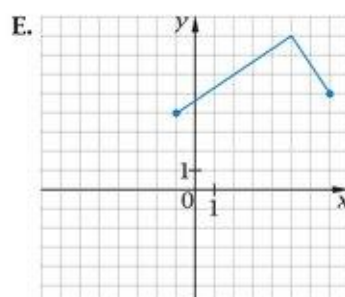
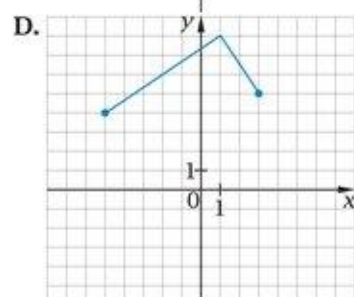
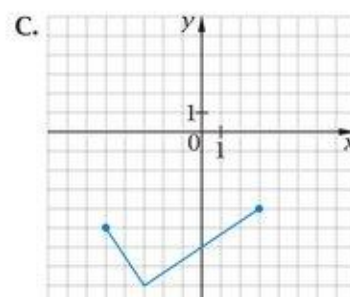
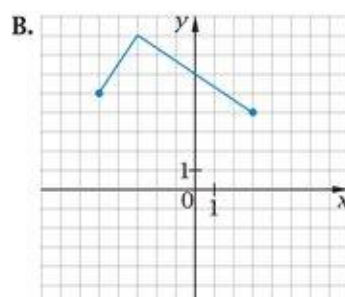
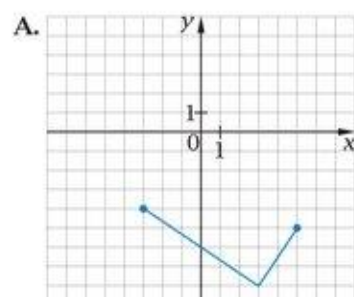
$$y = g(x) = f(x+2) \quad y = h(x) = f(-x)$$

Na rysunkach A-F przedstawiono wykresy różnych funkcji — w tym wykresy funkcji g oraz h .

Każdej z funkcji $y = g(x)$ oraz $y = h(x)$ przyporządkuj jej wykres. Wpisz obok symboli funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A-F.

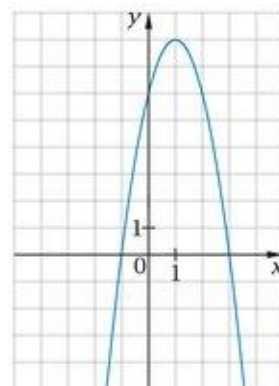


Nr zadania	Funkcja	Rysunek
70.1.	$y = g(x)$	
70.2.	$y = h(x)$	



**Zadanie 71.**

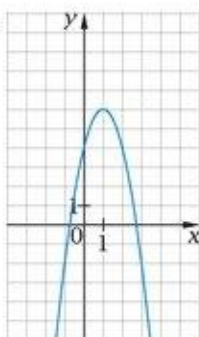
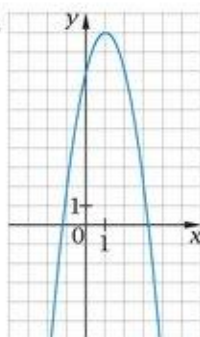
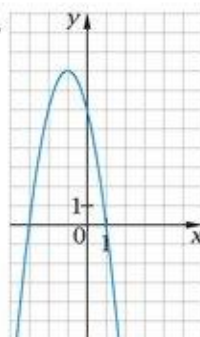
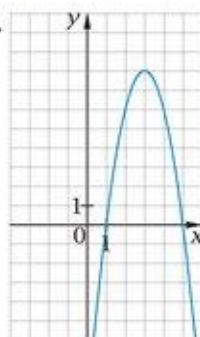
Dana jest funkcja kwadratowa f , której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f oraz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych, mają współrzędne całkowite.

**Zadanie 71.1. (0-1)****V.12**

Funkcja g określona jest za pomocą funkcji f następująco: $g(x) = f(x - 2)$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres funkcji g przedstawiono na rysunku:

A.**B.****C.****D.****Zadanie 71.2. (0-1)****V.4**

Wyznacz i zapisz w miejscu wy kropkowanym poniżej zbiór wszystkich rozwiązań nierówności:

$$f(x) \leq 0$$

.....

Zadanie 71.3. (0-3)**V.9**

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 72. (0-1)****V.12**

Dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest przedział $\langle -2; 3 \rangle$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedziną funkcji $y = f(x - 2)$ jest przedział:

- A. $\langle -4; 1 \rangle$ B. $\langle -4; 5 \rangle$ C. $\langle 0; 5 \rangle$ D. $\langle 0; 1 \rangle$

Zadanie 73. (0-2)

V.12

Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów należących do przedziału $(-2; 5)$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Funkcja $y = f(-x)$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów należących do przedziału:

- A. $(-5; 2)$ B. $(2; 5)$ C. $(-5; -2)$ D. $(-2; 0)$

2. Funkcja $y = -f(x)$ przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów należących do przedziału:

- E. $(-5; 2)$ F. $(0; 5)$ G. $(-2; 5)$ H. $(-5; -2)$

Zadanie 74. (0-2)

V.12

Funkcja $y = f(x)$ osiąga największą wartość równą 6 dla $x = 5$.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich zdanie było prawdziwe.

Wynika stąd, że:

- A. funkcja $y = f(x - 3)$ osiąga największą wartość dla $x = 5$ i jest ona równa 3.
 B. funkcja $y = f(x) + 3$ osiąga największą wartość dla $x = 8$ i jest ona równa 9.
 C. funkcja $y = f(-x)$ osiąga największą wartość dla $x = -5$ i jest ona równa (-6) .
 D. funkcja $y = f(x + 3)$ osiąga największą wartość dla $x = 2$ i jest ona równa 6.
 E. funkcja $y = f(x) - 3$ osiąga największą wartość dla $x = 2$ i jest ona równa 3.
 F. funkcja $y = -f(x)$ osiąga najmniejszą wartość dla $x = 5$ i jest ona równa (-6) .

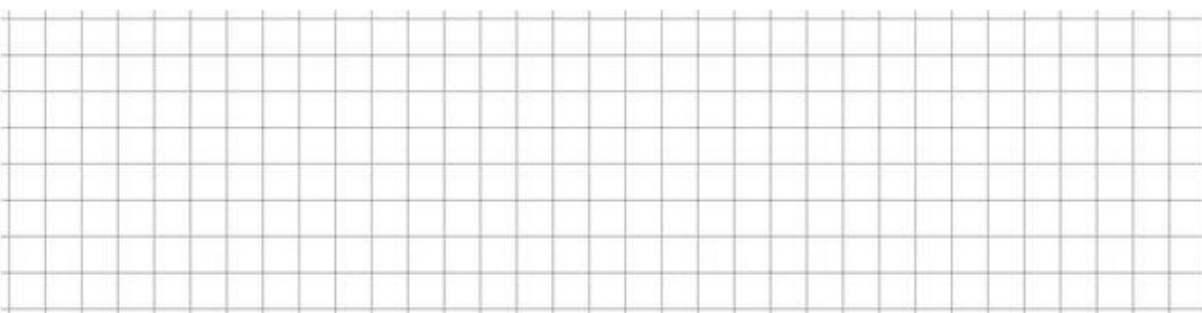
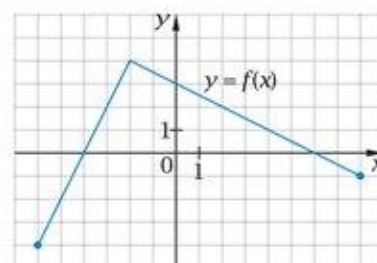
Zadanie 75. (0-2)

V.12

Dana jest funkcja f określona dla $x \in \langle -6; 8 \rangle$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych na rysunku obok. Funkcje g oraz h są określone następująco:

$$g(x) = f(x - 3) - 2 \quad \text{oraz} \quad h(x) = -f(x) + 1$$

Naszkicuj wykresy funkcji g oraz h .



Zadanie 76. (0-1)

V.13

Aby zaorać pole o powierzchni P w ciągu 8 godzin, potrzeba trzech ciągników. Przyjmijmy, że każdy ciągnik w ustalonej jednostce czasu może zaorać taką samą powierzchnię pola.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Zaoranie pola o powierzchni P przy pomocy dwóch ciągników zajęłoby 12 godzin.	P	F
Cztery ciągniki, które pracują o połowę szybciej, zaorałyby to pole w ciągu 4 godzin.	P	F

Zadanie 77. (0-1)

V.13

Romb o przekątnych e oraz f ma pole równe 15.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

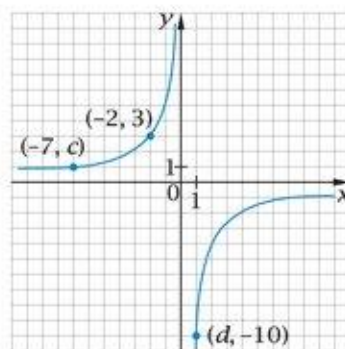
Zależność między długościami przekątnych rombu o polu równym 15 można zapisać w postaci wzoru $f = \frac{15}{e}$.	P	F
Długości przekątnych rombu o polu równym 15 są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.	P	F

Zadanie 78. (0-2)

V.13

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji o wzorze $f(x) = \frac{a}{x}$.

Wyznacz wartości a , c i d . Zapisz obliczenia.



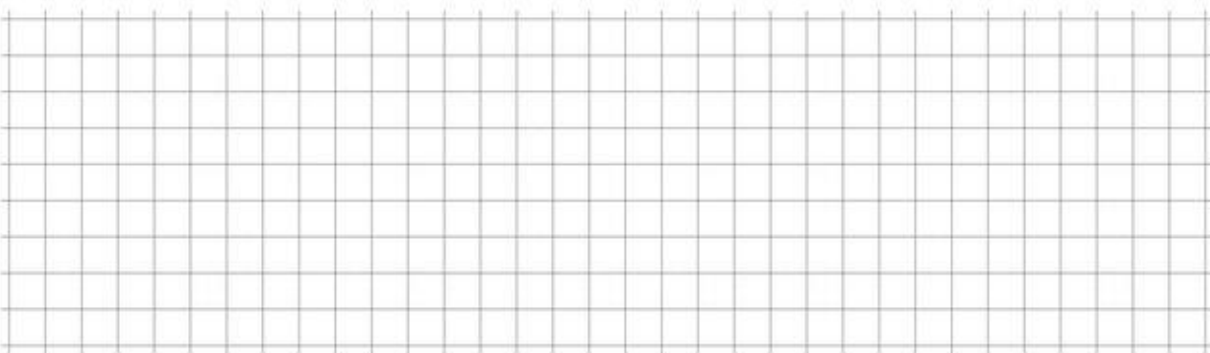
Zadanie 79. (0-3)

V.13

W laboratorium przeprowadzono eksperyment. W stałej temperaturze zmieniano ciśnienie (p) w zbiorniku z gazem i mierzono objętość (V) tego gazu. W tabeli obok przedstawiono część wyników tych pomiarów. Ciśnienie wyrażone jest w anglosaskiej jednostce PSI (1 PSI = 6894,8 Pa). Wiadomo, że objętość gazu jest odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia.

p [PSI]	40	25	20	x
V [ml]	5	8	y	50

Znajdź wzór funkcji V , a następnie oblicz wartości x oraz y . Zapisz obliczenia.



Zadanie 80. (0-1)

V.14

Poniżej zamieszczono cztery wzory, za pomocą których naukowcy mogą przewidzieć liczebności P_1 , P_2 , P_3 i P_4 populacji czterech gatunków zwierząt t lat po roku 2022.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wzorem opisującym populację, której liczebność się zmniejsza, jest:

- A. $P_1 = 500 \cdot 1,1^t$ B. $P_2 = 4000 \cdot 0,9^t$ C. $P_3 = 80 \cdot 1,15^t$ D. $P_4 = 9000 \cdot 1,2^t$

Zadanie 81. (0-2)

V.14

Wiek psa można porównać z wiekiem człowieka, korzystając ze wzoru $c = 31 + 11 \cdot \log_2 p$, gdzie c i p oznaczają, odpowiednio, wiek człowieka i wiek psa w latach.

Uzupełnij zdania. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdania były prawdziwe.

1. Wiek człowieka odpowiadający wiekowi rocznego psa wynosi lat.
2. Wiek psa, który odpowiada wiekowi 64-letniego człowieka, wynosi lat.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high, covering the entire page area.

Zadanie 82.

Przyjmijmy oznaczenia:

T – temperatura wody w termosie (w stopniach Celsjusza)

t – czas, jaki upłynął od początku eksperymentu (w godzinach)

p – temperatura panująca w laboratorium (w stopniach Celsjusza)

Przeprowadzono dwa eksperymenty. W trakcie eksperymentu nr 1 temperatura T wody w termosie zmieniała się zgodnie ze wzorem:

$$T = p + 50 \cdot 0,8^t$$

Po dwóch godzinach temperatura wody w termosie spadła do 45°C .

Zadanie 82.1. (0-2)

V.14

Uzupełnij zdania. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdania były prawdziwe.

1. Temperatura w laboratorium podczas eksperymentu nr 1 wynosiła °C.
2. Temperatura wody w termosie na początku eksperymentu nr 1 wynosiła °C.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 82.2. (0-1)

V.14

W eksperymencie nr 2 sprawdzano, jak zmienia się temperatura wody w innym termosie. Okazało się, że w tym termosie temperatura wody spadała wolniej niż temperatura wody podczas eksperymentu nr 1. Jeden z poniższych wzorów opisuje zmianę temperatury wody w termosie podczas eksperymentu nr 2. Wskaż ten wzór.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $T = p + 50 \cdot 0.75^t$ B. $T = p + 50 \cdot 0.8^t$ C. $T = p + 50 \cdot 0.85^t$ D. $T = p + 50 \cdot 1.05^t$

Zadanie 83. (0-1)

V.14

W tabeli podanej obok przedstawiono, jak zmieniała się liczba bakterii w badanej kolonii podczas eksperymentu. Naukowcy stwierdzili, że zmiana liczby bakterii jest zgodna ze wzorem $B(t) = p \cdot r^t$, gdzie B oznacza liczbę bakterii, t – czas (w godzinach) od początku eksperymentu, natomiast

t (w godzinach)	0	1	3
$B(t)$	12	60	1500

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Suma liczb p i r jest równa 17.	P	F
Po dwóch godzinach od początku eksperymentu kolonia liczyła 108 bakterii.	P	F



Zadanie 84.

Czas T połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas, po którym liczba jąder danego izotopu (a zatem i masa tego izotopu) zmniejsza się o połowę — tzn. połowa jąder danego izotopu przemienia się w inne jądra. Liczba jąder $N(t)$ izotopu promieniotwórczego pozostających w próbce po czasie t , licząc od chwili t_0 , wyraża się zależnością wykładniczą:

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

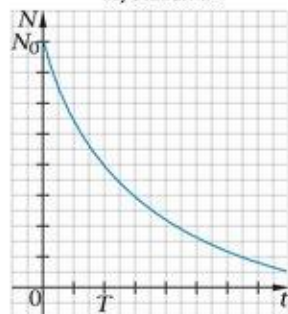
gdzie N_0 jest liczbą jader izotopu promieniotwórczego w chwili początkowej t_0 .

Zadanie 84.1. (0-1)

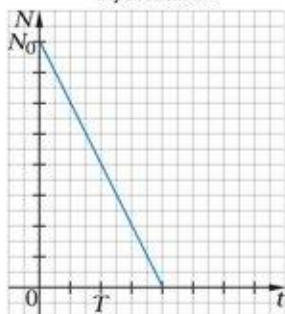
V.14

Na poniższych rysunkach 1.-4. Przedstawiono wykresy różnych zależności.

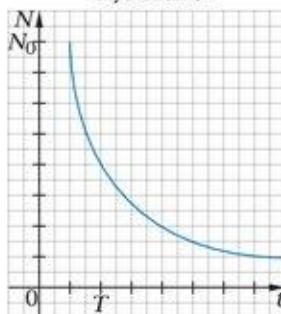
Rysunek 1.



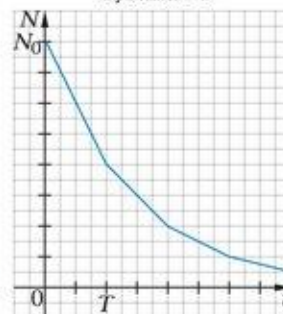
Rysunek 2.



Rysunek 3.



Rysunek 4.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres zależności wykładniczej $N(t)$ — opisanej we wstępie do zadania — przedstawiono na:

A. rysunku 1.

B. rysunku 2.

C. rysunku 3.

D. rysunku 4.

Zadanie 84.2. (0-3)

V.14

Czas połowicznego rozpadu węgla ^{14}C to około 5700 lat. Naukowcy oszacowali za pomocą datowania radiowęglowego, że masa izotopu węgla ^{14}C w pewnym ograniczonym znalezisku archeologicznym stanowi $\frac{1}{16}$ masy tego izotopu, jaka utrzymywała się podczas życia organizmu.

Oblicz, ile lat ma opisane znalezisko archeologiczne. Wynik podaj z dokładnością do stu lat.



5. CIĄGI

TEORIA

Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla } q \neq 1 \quad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla } q = 1$$

Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Ciąg (a_n) można określić, podając wyraz a_1 (lub kilka początkowych wyrazów) oraz wzór na wyraz a_{n+1} wyrażony za pomocą poprzednich wyrazów. Taki sposób określenia ciągu nazywamy **wzorem rekurencyjnym**.

Monotoniczność ciągu

Jeżeli dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ spełniony jest warunek:

- $a_{n+1} - a_n > 0$, to ciąg (a_n) jest **rosnący**
- $a_{n+1} - a_n < 0$, to ciąg (a_n) jest **malejący**
- $a_{n+1} - a_n \leq 0$, to ciąg (a_n) jest **nierosnący** (malejący lub stały)
- $a_{n+1} - a_n \geq 0$, to ciąg (a_n) jest **niemalejący** (rosnący lub stały)
- $a_{n+1} - a_n = 0$, to ciąg (a_n) jest **stały**

Wzór na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu (a_n) umożliwia obliczenie dowolnego wyrazu ciągu (a_n) :

$$a_1 = S_1 \quad \text{i} \quad a_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Wzór na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu (a_n) umożliwia obliczenie sumy S_n^k kolejnych wyrazów ciągu (a_n) od wyrazu a_k do wyrazu a_n :

$$S_n^k = S_n - S_{k-1} \quad \text{dla } 1 < k < n$$

Różnicą r ciągu arytmetycznego (a_n) nazywamy liczbę:

$$r = a_{n+1} - a_n \quad \text{dla } n \geq 1$$

Wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego o różnicy r i pierwszym wyrazie a :

$$a_1 = a \quad \text{i} \quad a_{n+1} = a_n + r \quad \text{dla } n \geq 1$$

Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Jeżeli w ciągu arytmetycznym (a_n) o różnicy r spełniony jest warunek:

- $r > 0$, to ciąg (a_n) jest **rosnący**
- $r < 0$, to ciąg (a_n) jest **malejący**
- $r = 0$, to ciąg (a_n) jest **stały**

W ciągu arytmetycznym (a_n) o różnicy r dla $1 \leq k < n$ zachodzą wzory:

$$a_n = a_k + (n - k)r \quad a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

Ilorazem q ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach $a_n \neq 0$ nazywamy liczbę:

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{dla } n \geq 1$$

Wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego o ilorazie q i pierwszym wyrazie a :

$$a_1 = a \quad \text{i} \quad a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{dla } n \geq 1$$

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Jeżeli w ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie q spełniony jest warunek:

- $a_1 > 0$ i $q > 1$, to ciąg (a_n) jest **rosnący**
- $a_1 < 0$ i $0 < q < 1$, to ciąg (a_n) jest **rosnący**
- $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$, to ciąg (a_n) jest **malejący**
- $a_1 < 0$ i $q > 1$, to ciąg (a_n) jest **malejący**
- $a_1 \neq 0$ i $q = 1$, to ciąg (a_n) jest **stały**
- $a_1 = 0$ i $q \in \mathbb{R}$, to ciąg (a_n) jest **stały**
- $a_1 > 0$ i $q = 0$, to ciąg (a_n) jest **nierosnący**
- $a_1 < 0$ i $q = 0$, to ciąg (a_n) jest **niemalejący**
- $a_1 \neq 0$ i $q < 0$, to ciąg (a_n) jest **niemonotoniczny**

W ciągu geometrycznym (a_n) o ilorazie q dla $1 \leq k < n$ zachodzą wzory:

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k} \quad (a_n)^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$$

VI.1

A. 4 B. $6(1 + \sqrt{2})$ C. 11 D. $7 + 4\sqrt{2}$

VI.1

2. Suma $a_2 + a_3$ jest równa

[illegible]

VI.1

A. siódmy B. jedenasty C. trzynasty D. nie ma takiego wyrazu

VI.1

Trzeci wyraz ciągu (a_n) jest liczbą dodatnią.	P	F
Wśród wyrazów ciągu (a_n) nie ma wyrazu równego 5.	P	F

VI.2

W ciągu (a_n) drugi wyraz jest równy czwartemu wyrazowi.	P	F
W ciągu (a_n) piąty wyraz jest większy od trzeciego wyrazu.	P	F

Zadanie 6. (0-1)

VI.2

Ciag (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} \end{cases} \text{ dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Różnica $a_5 - a_4$ jest równa:

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 6



Zadanie 7. (0-2)

VI.2

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n + 4 \end{cases} \text{ dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1$$

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 8. (0-1)

VI.3

Ciąg rosnący (a_n) składa się z czterech wyrazów, a trzema jego początkowymi wyrazami są: $a_1 = -4$, $a_2 = 3$ oraz $a_3 = 5$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Czwartym wyrazem ciągu (a_n) może być dowolna liczba p spełniająca warunek:

- A. $p > a_1 + a_2 + a_3$ B. $p > a_1 + a_2$ C. $p > a_2 + a_3$ D. $a_1 + a_2 < p < a_1 + a_2 + a_3$

Zadanie 9. (0-1)

VI.3

Tylko jeden z podanych ciągów określonych dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest malejący. Wskaż ten ciąg.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 10 - a_n \end{cases}$ B. $a_n = \frac{5}{n^2}$ C. $\begin{cases} a_1 = -10 \\ a_{n+1} = -2a_n \end{cases}$ D. $a_n = n^2 - 5$

Zadanie 10. (0-2)

VI.3

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek $a_{n+1} = a_n + 100 - p$, gdzie p jest liczbą rzeczywistą.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Ciag (a_n) jest ciągiem malejącym, gdy p jest równe:

- A. -500 B. -110 C. -80 D. 0 E. 80 F. 110 G. 500

VI.3

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest:

A.	rosnący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$	1.	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą ujemną.
B.	malejący,		2.	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa zero.
C.	stały,		3.	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą dodatnią.

VI.3

Liczby x, y, z tworzą w podanej kolejności trzywyrazowy ciąg rosnący.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika stąd, że trzwyrazowym ciągiem rosnącym jest również ciąg o kolejnych wyrazach:

A. z, y, x B. $-x, -y, -z$ C. $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ D. $2x, 2y, 2z$

VI.3

Ciąg (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $a_n = \frac{15}{2n+3}$ jest malejący.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Różnica $a_{215} - a_{73}$ jest liczbą dodatnią.	P	F
Największy wyraz ciągu (a_n) jest równy 3.	P	F

CK
E

VI.4

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = -3n + 5$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Liczby 2, (-1) , (-4) są trzema kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu (a_n) .	P	F
(a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy równej 5.	P	F

VI.4

O ciągu (a_n) wiadomo, że jest arytmetyczny.

Wykaż, że ciąg określony wzorem $b_n = p \cdot a_n + q$, gdzie p i q są liczbami rzeczywistymi, też jest ciągiem arytmetycznym.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or other markings on the page.

Zadanie 16. (0-1)

VI.4

Wskaż wzór ciągu określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, który nie jest arytmetycznym.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $a_n = \frac{n+8}{2}$ B. $a_n = 4(n-3)$ C. $a_n = \frac{6}{1+n}$ D. $a_n = 5-7n$

Zadanie 17. (0-1)

VI.4

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Ciagiem geometrycznym jest:

- A. ciąg złożony z pięciu wyrazów: 2, 4, 6, 8, 10.
B. ciąg (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $a_n = 5n - 5$.
C. ciąg (b_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $b_n = n^2$.
D. ciąg złożony z pięciu wyrazów: 36, 12, 4, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{9}$.

Zadanie 18. (0-1)

VI.4

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Ciąg (a_n) złożony z trzech wyrazów: $a_1 = 5m + 6$, $a_2 = m$, $a_3 = 1$ jest geometryczny dla $m = \dots\dots\dots$
lub $m = \dots\dots\dots$.



Zadanie 19. (0-1)

VI.4

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{n^3}{n^2+1}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Początkowymi wyrazami tego ciągu są liczby $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{8}{5}$ oraz $a_3 = \frac{27}{10}$.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciag (a_n) :

A.	jest arytmetyczny,	ponieważ	1.	$a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = \frac{11}{10}$.
B.	jest geometryczny,		2.	$\frac{a_3}{a_2} \neq \frac{a_2}{a_1}$, a ponadto $a_4 = \frac{64}{17}$ i $a_2 - a_1 \neq a_4 - a_3$.
C.	nie jest ani arytmetyczny, ani geometryczny,		3.	$\frac{a_2}{a_1} = a_3 + a_1$.



Zadanie 20. (0-2)

VI.4

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = 4n - 9$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.



Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym $a_n = 3n - 1$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

VI.3

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciag (a_n) jest:

A.	rosnący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$	1.	$a_{n+1} - a_n = -1$.
B.	malejący,		2.	$a_{n+1} - a_n = 0$.
C.	stały,		3.	$a_{n+1} - a_n = 3$.

VI.1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejszą wartością n , dla której wyraz a_n jest większy od 25, jest:

A. 8 B. 9 C. 7 D. 26

VI.5

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 57 dla n równego:

A. 6 B. 23 C. 5 D. 11

VI.5

Ciag (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n - 3 \end{cases} \text{ dla każdej liczby naturalnej } n \geq 1$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wzorem ogólnym ciągu (a_n) jest:

A. $a_n = 4 + 3n$ B. $a_n = 7 - 3n$ C. $a_n = 10 - 3n$ D. $a_n = -3 + 7n$

VI.5

Drugi wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 16, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy 10.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Różnica ciągu (a_n) wynosi, a pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

20

Zadanie 24. (0-1)

VI.5

Pięciowyrazowy ciąg $(-3, \frac{1}{5}, x, y, 11)$ jest arytmetyczny.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczby x oraz y są równe:

- A. $x = 4$ oraz $y = \frac{15}{2}$ B. $x = \frac{15}{2}$ oraz $y = 4$ C. $x = -4$ oraz $y = \frac{15}{2}$ D. $x = -\frac{15}{2}$ oraz $y = 4$

Zadanie 25. (0-1)

VI.5

Cztery liczby a , $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, b są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloczyn ab jest równy:

- A. $\frac{7}{16}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{15}{16}$ D. 2

Zadanie 26. (0-1)

VI.5

Liczby p , $2p + 9$, $p + 8$ są kolejno trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Czwarty wyraz ciągu (a_n) jest równy:

- A. -5 B. 3 C. 7 D. 17

Zadanie 27.

Liczba 100 jest pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n) , a liczba 93 — drugim.

Zadanie 27.1. (0-1)

VI.5

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednie wyrażenia, tak aby zdanie było prawdziwe.

Ciąg (a_n) można opisać wzorem $a_n = \dots$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.



Zadanie 27.2. (0-1)

VI.5

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Suma wszystkich dodatnich wyrazów ciągu (a_n) jest równa



Zadanie 33. (0-2)

VI.5

Pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n) jest liczba 1, a suma 403 początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 27 404.

Oblicz różnicę ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.



Zadanie 34. (0-4)

VI.5

Suma pierwszego i drugiego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 2, a suma trzeciego i czwartego wyrazu tego ciągu wynosi 42.

Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 35. (0-1)

VI.6

Ciąg geometryczny (a_n) dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest określony wzorem $a_n = 6 \cdot 3^n$. Który z poniższych wzorów rekurencyjnych opisuje ten ciąg?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_{n+1} = 18 \cdot a_n \end{cases}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$

B. $\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{cases}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$

C. $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{cases}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$

D. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 6 \cdot a_n \end{cases}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$



Zadanie 36. (0-2)

VI.6

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. W tym ciągu $a_1 = -5$, $a_2 = 15$, $a_3 = -45$.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi tak, aby dla każdej z nich dokończenie poniższego zdania było prawdziwe.

Wzór ogólny ciągu (a_n) ma postać:

A. $a_n = -5 \cdot (-3)^{n-1}$

C. $a_n = -5 \cdot 3^{n-1}$

E. $a_n = 5 \cdot \frac{(-3)^n}{2}$

B. $a_n = -5 \cdot (-3)^n$

D. $a_n = -5 \cdot \frac{(-3)^n}{2}$

F. $a_n = -5 \cdot (-3)^n \cdot 3$



Zadanie 43.

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{7^n}{21}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Zadanie 43.1. (0-1)

VI.6

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pięćdziesiątym wyrazem ciągu (a_n) jest:

- A. $\frac{7^{49}}{3}$ B. $\frac{7^{50}}{3}$ C. $\frac{7^{51}}{3}$ D. $\frac{7^{52}}{3}$

Zadanie 43.2. (0-1)

VI.6

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Ciąg (a_n) jest geometryczny.	P	F
Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 20.	P	F



Zadanie 44. (0-3)

VI.6

Iloraz skończonego ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{3}$, trzeci wyraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{9}$, a suma wszystkich wyrazów to $\frac{364}{243}$.

Oblicz, z ilu wyrazów składa się ten ciąg. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 45. (0-2)

VI.6

Pierwszym wyrazem pewnego ciągu geometrycznego (a_n) jest liczba 27, a czwarty wyraz jest równy 8. Oblicz drugi i trzeci wyraz ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 46. (0-1)

VI.7

Dane są ciąg arytmetyczny (a_n) i ciąg geometryczny (b_n) określone wzorami:

$$a_n = 5 + nk \quad b_n = 5 \cdot p^n$$

dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, gdzie k i p są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Dla $k \in (0, 1)$ ciąg (a_n) jest malejący.	P	F
Dla $p < 0$ ciąg (b_n) jest malejący.	P	F

Zadanie 47. (0-1)

VI.7

Pierwsza wpłata na konto wynosiła 1000 zł, a każda następna była o 100 zł wyższa niż poprzednia. Z konta nie wykonywano żadnych wypłat.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po trzydziestu wpłatach zgromadzona na koncie kwota wynosi:

- A. 33 000 zł B. 39 500 zł C. 66 000 zł D. 73 500 zł

Zadanie 48. (0-1)

VI.7

Na szpulkę nawinięto 25 warstw tasiemki o łącznej długości 170 cm. Każda warstwa była o 1 mm dłuższa niż warstwa poprzednia.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pierwsza warstwa tasiemki nawinięta na tę szpulkę miała długość:

- A. 3,4 cm B. 4,2 cm C. 4,8 cm D. 5,6 cm

Zadanie 49. (0-2)

VI.7

Na rysunku poniżej przedstawiono cztery początkowe wyrazy ciągu figur ułożonych z takich samych patyczków.



Figura 1.



Figura 2.



Figura 3.



Figura 4.

Kolejne figury powstają zgodnie z regułą widoczną na rysunku: każda następna figura powstaje z poprzedniej w wyniku dołożenia pięciu patyczków.

Uzupełnij zdania. Wpisz w kropkowane miejsca odpowiednie liczby, tak aby zdania były prawdziwe.

1. Setna figura w tym ciągu składa się z patyczków.

2. Do zbudowania stu początkowych figur w tym ciągu potrzeba patyczków.



Zadanie 50. (0-1)

VI.7

Powierzchnia pewnego lasu jest równa obecnie 2000 km², ale przewiduje się, że co roku będzie się zmniejszała o 5%. Takie tempo zmniejszania się powierzchni tego lasu ma utrzymać się przez minimum 20 lat.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po 20 latach powierzchnia tego lasu będzie równa:

- A. około 755 km² B. około 717 km² C. około 191 km² D. około 100 km²

Zadanie 51. (0-1)

VI.7

Iga narysowała spiralę podobną do tej przedstawionej na rysunku obok. Spirala Igi zbudowana była z dziesięciu odcinków. Pierwszy, najdłuższy z nich, ma 8 cm długości, a długość każdego następnego odcinka stanowi 0,8 długości poprzedniego odcinka.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość spirali Igi, zaokrąglona do 1 mm, jest równa:

- A. 357 mm B. 464 mm C. 517 mm D. 640 mm



Zadanie 52. (0-2)

VI.7

Darek planuje codziennie trenować bieganie. Pierwszego dnia przebiegł 1000 m i postanowił każdego następnego dnia przebiec dystans o 10% dłuższy niż dnia poprzedniego. Darek wytrwał w takim postanowieniu przez dwa tygodnie.

Uzupełnij zdania. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby zaokrąglone do dziesiątek, tak aby zdania były prawdziwe.

1. Czternastego dnia Darek przebiegł około metrów.
2. Przez czternaście dni Darek przebiegł łącznie około metrów.



Zadanie 53. (0-4)

VI.7

Na trybunie hali sportowej w każdym kolejnym rzędzie może zasiąść o 6 osób więcej niż w rzędzie poprzednim. W ostatnim trzydziestym rzędzie jest 246 miejsc.

Oblicz, ile jest miejsc w pierwszym rzędzie oraz ile jest wszystkich miejsc na tej trybunie. Zapisz obliczenia.

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 10 rows of squares, intended for drawing a picture.

Czas T półtrwania leku w organizmie to czas, po którym masa leku w organizmie zmniejsza się o połowę — po przyjęciu jednorazowej dawki. Przyjmij, że po przyjęciu jednej dawki masa m leku w organizmie zmienia się w czasie zgodnie z zależnością wykładniczą:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie:

m_0 — masa przyjętej dawki leku

T — czas półtrwania leku

t — czas liczony od momentu przyjęcia dawki.

W przypadku przyjęcia kilku(nastu) dawek powyższa zależność pozwala obliczyć, ile leku pozostało w danym momencie w organizmie z każdej poprzednio przyjętej dawki. W ten sposób obliczone masy leku z przyjętych poprzednich dawek sumują się i dają informację o całkowitej aktualnej masie leku w organizmie.

Pacjent otrzymuje co 4 dni o tej samej godzinie dawkę $m_0 = 100$ mg leku L. Czas półtrwania tego leku w organizmie jest równy $T = 4$ doby.

Oblicz masę leku L w organizmie tego pacjenta tuż przed przyjęciem jedenastej dawki tego leku. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,1 mg. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Dane są liczby:

$$a = 2\sqrt{2} \qquad b = 4 \qquad c = 4\sqrt{2}$$

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Liczby a , b oraz c tworzą w podanej kolejności ciąg:

A.	arytmetyczny,	ponieważ	1.	$b = \frac{a+c}{2}$.
B.	geometryczny,		2.	$b = \frac{(c-a)^2}{2}$.
			3.	$b^2 = a \cdot c$.



Liczby x, y, z , których suma jest równa 114, tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Liczby te są również wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) , gdzie $n \geq 1$, w którym $x = a_1$, $y = a_4$ i $z = a_{25}$.

Oblicz liczby x, y, z . Zapisz obliczenia.





Zadanie 57. (0-2)

VI.7

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.

Oblicz wartość m , dla której $f(m)$, $f(1)$, $f(2)$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Zapisz obliczenia.



Zadanie 58. (0-4)

VI.7

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny o sumie 24. Po dodaniu do nich kolejno liczb 4, 10 i 40 otrzymujemy ciąg geometryczny.

Oblicz te trzy liczby. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 59.

Pani Joanna postanowiła systematycznie oszczędzać i co miesiąc na swoje subkonto odkładać pewną sumę pieniędzy. Pierwszego czerwca 2020 roku wpłaciła 300 złotych. Pierwszego dnia każdego kolejnego miesiąca wpłacała o 25 zł więcej niż w miesiącu poprzednim.

Zadanie 59.1. (0-1)

VI.7

Oblicz kwotę, jaką pani Joanna wpłaciła na subkonto pierwszego czerwca 2022 roku. Zapisz obliczenia.



Zadanie 59.2. (0-2)

VI.7

Oblicz, o ile większą kwotę niż w miesiącu poprzednim pani Joanna powinna odkładać, aby pierwszego czerwca 2025 roku (uwzględniając również wpłatę w tym dniu) na subkoncie była kwota 76 860 złotych. Zapisz obliczenia.



6. TRYGNOMETRIA

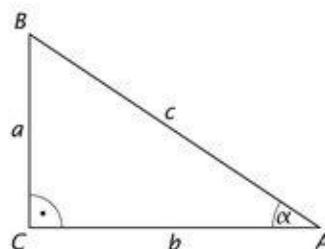
TEORIA

Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

Wzory redukcyjne

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

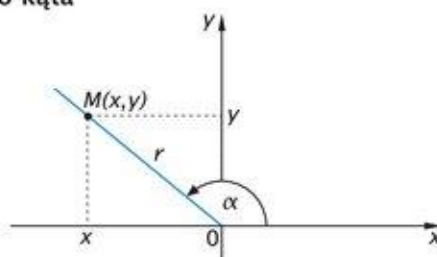
Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ o ile } x \neq 0$$

$$\text{gdzie } r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



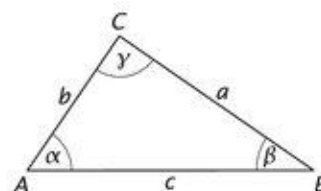
Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC

a, b, c — długości boków w trójkącie ABC

α, β, γ — miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących —
odpowiednio — przy wierzchołkach A, B oraz C

R — długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC

h_a, h_b, h_c — wysokości trójkąta opuszczone —
odpowiednio — z wierzchołków A, B i C



Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to $a^2 + b^2 = c^2$.

Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Wzory na pole trójkąta ABC

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \cdot \sin \beta$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$$

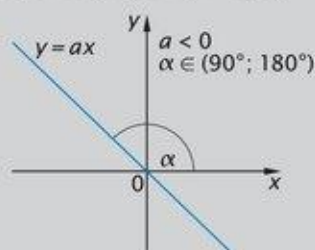
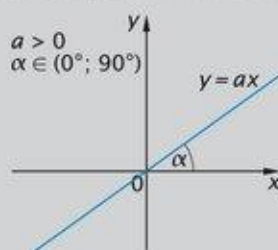
Dla każdego kąta α , dla którego $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ zachodzą wzory:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Tabela znaków wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych i rozwartych

	$\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$	$\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$
$\sin \alpha$	+	+
$\cos \alpha$	+	-
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-

Kąt α nachylenia prostej $y = ax$ do osi x układu współrzędnych ($a = \operatorname{tg} \alpha$)



ZADANIA

Zadanie 1. (0-1)

VII.1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W trójkącie prostokątnym ABC o przeciwprostokątnej AB , w którym kąt BAC ma miarę α , a kąt ABC ma miarę β , iloraz $\frac{|AB|}{|AC|}$ jest równy:

- A. $\cos \alpha$ B. $\sin \beta$ C. $\frac{1}{\sin \beta}$ D. $\frac{1}{\sin \alpha}$

Zadanie 2. (0-1)

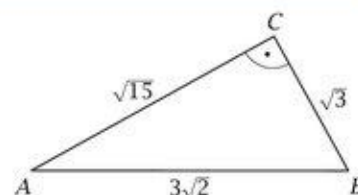
VII.1

Dany jest trójkąt prostokątny ABC (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta ABC jest równy:

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$



Zadanie 3. (0-1)

VII.1

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 3 i 9.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Sinus większego z kątów ostrych tego trójkąta jest równy:

- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ C. 3 D. $\frac{1}{3}$

Zadanie 4. (0-1)

VII.1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W trójkącie równoramiennym o bokach długości 10, 10, $10\sqrt{2}$ miara kąta przy podstawie jest równa:

- A. 90° B. 60° C. 45° D. 30°

Zadanie 5. (0-1)

VII.1

W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna AB ma długość 17, a długość przyprostokątnej BC jest równa 8.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta CAB jest równy:

- A. $\frac{15}{17}$ B. $\frac{8}{17}$ C. $\frac{8}{15}$ D. $\frac{15}{8}$

Zadanie 6. (0-1)

VII.1

W trójkącie równoramiennym T wysokość poprowadzona do podstawy jest dwa razy dłuższa od tej podstawy.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

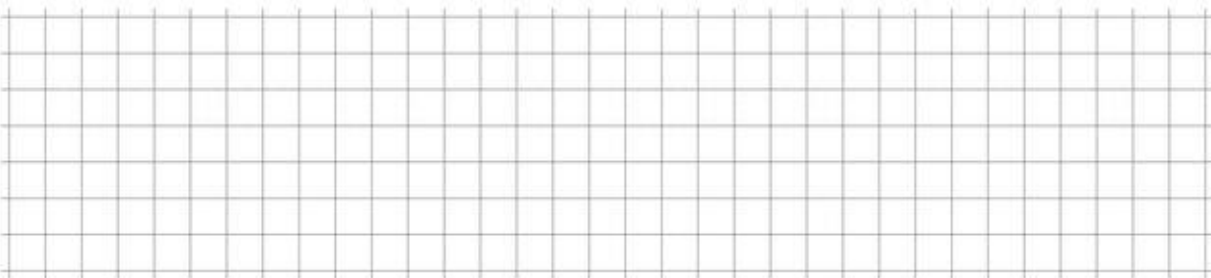
Sinus kąta przy podstawie trójkąta T jest równy $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.	P	F
Tangens kąta przy podstawie trójkąta T jest równy 2.	P	F

Zadanie 7. (0-1)

VII.1

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wykropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

W trójkącie rozwartokątnym kąty ostre mają miary 30° i 45° , a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego ma długość 7 i dzieli najdłuższy bok tego trójkąta na odcinki o długościach i



Zadanie 8. (0-1)

VII.1

Która z podanych liczb jest największa?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\text{tg } 25^\circ$ B. $\text{tg } 36^\circ$ C. $\text{tg } 72^\circ$ D. $\text{tg } 89^\circ$



Zadanie 9. (0-1)

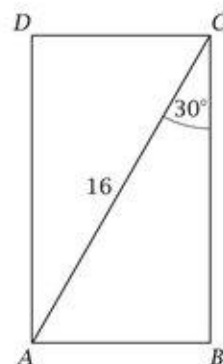
VII.1

Powierzchnię boczną graniastosłupa prawidłowego czworokątnego rozcięto wzdłuż krawędzi bocznej graniastosłupa i rozłożono na płaszczyźnie. Otrzymano w ten sposób prostokąt $ABCD$, w którym bok BC odpowiada krawędzi rozcięcia (wysokości graniastosłupa). Przekątna AC tego prostokąta ma długość 16 i tworzy z bokiem BC kąt o mierze 30° (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa:

- A. 8 B. $8\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 2



Zadanie 10. (0-2)

VII.1

W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 30° , a długość przeciwprostokątnej jest równa 4.

Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

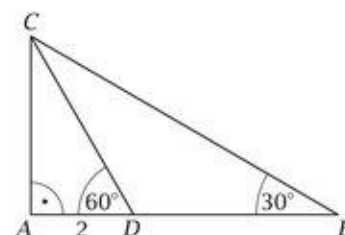


Zadanie 11. (0-2)

VII.1

Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych AB i AC , w którym $|\angle ABC| = 30^\circ$. Na przyprostokątnej AB zaznaczono taki punkt D , że $|AD| = 2$ oraz $|\angle ADC| = 60^\circ$ (zobacz rysunek).

Oblicz długość przyprostokątnej AB w trójkącie prostokątnym ABC . Zapisz obliczenia.



Zadanie 12. (0-3)

VII.1

W trójkącie prostokątnym ABC dane są: $|AB| = 15$, $|AC| = 9$ i $|BC| = 12$, oraz:

$$\angle BAC = \alpha \quad \angle ABC = \beta$$

Oblicz wartość wyrażenia:

$$3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4 \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \beta - 5 \cos^2 \beta$$

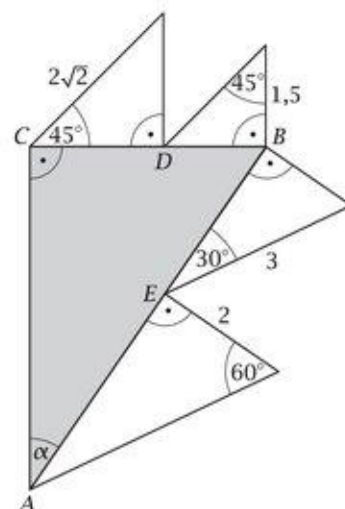
Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0-4)

VII.1

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $|\angle ACB| = 90^\circ$ oraz $|\angle BAC| = \alpha$. Na bokach AB i BC tego trójkąta zbudowano trójkąty prostokątne takie, że $|CD| + |DB| = |BC|$ oraz $|BE| + |EA| = |AB|$ (zobacz rysunek).

Oblicz wartość wyrażenia $\sqrt{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 14. (0-1)

VII.1

Dane jest wyrażenie:

$$(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ) \cdot (\sin 60^\circ + \sin 45^\circ)$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość tego wyrażenia jest równa:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $-\frac{1}{4}$

Zadanie 15. (0-1)

VII.1

Uzupełnij zadanie. Wpisz w wykropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wartość wyrażenia

$$\cos 30^\circ \cdot \sin 135^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 135^\circ$$

jest równa: _____.

[illegible]

Zadanie 16. (0-1)

VII.1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\sin 150^\circ - \cos 120^\circ$ jest równa:

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

Zadanie 17. (0-1)

VII.1

Dane jest wyrażenie:

$$\frac{\sin 150^\circ + \cos 150^\circ}{\sin 120^\circ + \cos 120^\circ} - \frac{\operatorname{tg} 150^\circ}{\operatorname{tg} 120^\circ}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość tego wyrażenia jest równa:

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

Zadanie 18. (0-2)

VII.1

O kącie α wiadomo, że jest rozwarty i $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Miara kąta α jest równa:

- A. 120° B. 130° C. 135° D. 150°

2. Wartości funkcji sinus i cosinus dla kąta α są równe:

- E. $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ i $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ G. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ i $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
F. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ H. $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 19. (0-1)

VII.1

Dany jest trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β .

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

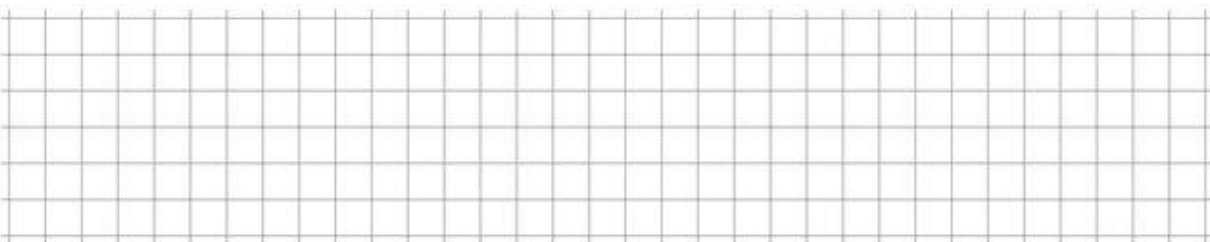
Dla kątów α i β spełniona jest równość $\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$.	P	F
Dla kątów α i β spełniona jest równość $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1$.	P	F

Zadanie 20. (0-3)

VII.1

Kąty α i β są kątami ostrymi tego samego trójkąta prostokątnego i $\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{3}{4}$.

Oblicz miary kątów α i β . Zapisz obliczenia.



Zadanie 21. (0-1)

VII.1

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są trzy punkty $O = (0, 0)$, $P = (7, 0)$ i $R = (-8, 6)$. Które z wartości funkcji trygonometrycznych kąta rozwartego $\alpha = \sphericalangle POR$ obliczono poprawnie: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ czy $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. tylko $\operatorname{tg} \alpha$ B. tylko $\sin \alpha$ C. wszystkie D. żadna

Zadanie 22. (0-2)

VII.1

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest kąt rozwarty $\alpha = \sphericalangle AOB$, gdzie:

$$A = (4, 0) \quad O = (0, 0) \quad B = (-3, 2)$$

Wskaż dwie prawdziwe równości.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

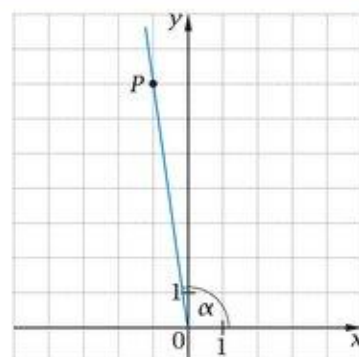
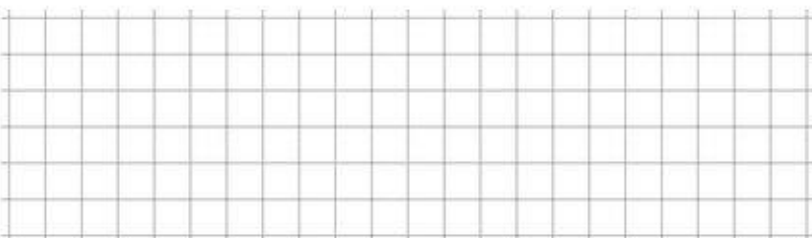
- A. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$ C. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ E. $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$ G. $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$
 B. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$ D. $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$ F. $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ H. $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$

Zadanie 23. (0-2)

VII.1

W kartezjańskim układzie współrzędnych dany jest kąt rozwarty α i punkt P o obu współrzędnych całkowitych (zobacz rysunek).

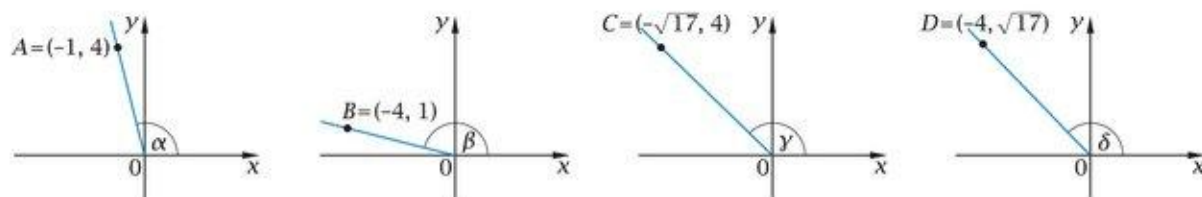
Oblicz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ oraz $\operatorname{tg} \alpha$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 24. (0-1)

VII.1

Na rysunkach przedstawiono kąty α , β , γ i δ .



Cosinus którego z zaznaczonych kątów jest równy $\left(-\frac{4\sqrt{17}}{17}\right)$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. α B. β C. γ D. δ

Zadanie 25. (0-3)

VII.1

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $A = (7, 0)$, $B = (-2, 4)$, $C = (-8, 4)$ i $O = (0, 0)$ oraz kąty $\alpha = \angle AOB$ i $\beta = \angle AOC$.

Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} \beta + \sin \alpha - \cos \beta$$

Zapisz obliczenia.



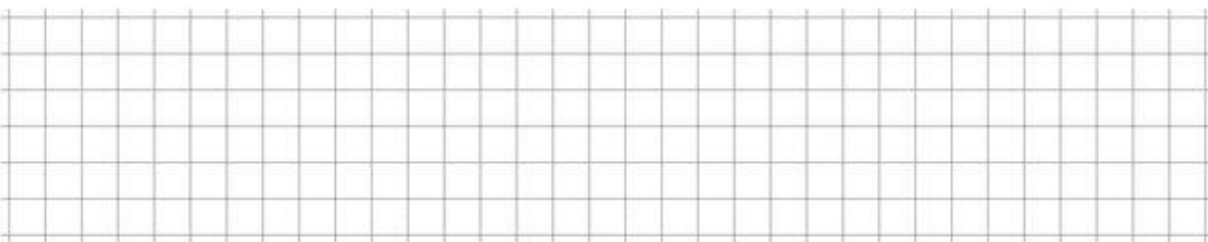
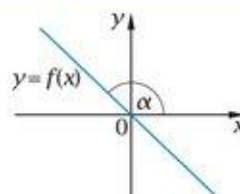
Zadanie 26. (0-1)

VII.1

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ i kąt α .

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wartość tangensa kąta α jest równa



Zadanie 27. (0-1)

VII.1

Prosta l przechodzi przez punkty $O = (0, 0)$ i $P = (-3, \sqrt{3})$ oraz jest nachylona do osi x układu współrzędnych pod kątem α .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość tangensa kąta α jest równa:

- A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 32. (0-1)

VII.3

O kącie α wiadomo, że jest ostry i $\sin \alpha = 0,75$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika stąd, że:

- A. $\alpha < 30^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha > 45^\circ$

Zadanie 33. (0-1)

VII.3

Dany jest kąt α taki, że $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika stąd, że:

- A. $\alpha < 30^\circ$ B. $\alpha = 30^\circ$ C. $\alpha = 60^\circ$ D. $\alpha > 60^\circ$

Zadanie 34. (0-1)

VII.3

Oblicz, jaką miarę ma najmniejszy z kątów w trójkącie prostokątnym o bokach długości 3, 4 i 5. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych stopni. Zapisz obliczenia.



Zadanie 35. (0-2)

VII.3

W trójkacie prostokątnym przeciwprostokątna jest 1,25 razy dłuższa od jednej z przyprostokątnych.

Wyznacz miary kątów ostrych tego trójkąta. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych stopni.
Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or other markings on the page.

Zadanie 36. (0-2)

VII.4

Dany jest kąt α taki, że $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ i $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ jest równa:

- A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{15}{64}$ C. $\frac{15}{16}$ D. $\frac{15}{4}$

2. Wartość wyrażenia $(\sin 30^\circ - \cos \alpha)^{-2} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ jest równa:

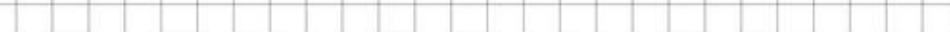
- E. $-\frac{1}{32}$ F. $\frac{1}{32}$ G. 4 H. 8

Zadanie 37. (0-2)

VII.4

Kąt α jest rozwarty i $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

Oblicz $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 38. (0-1)

VII.4

Wartość cosinusa kąta α jest o 20% większa od wartości sinusa tego kąta.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy:

- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{1}{5}$

Zadanie 39. (0-1)

VII.4

W trójkącie prostokątnym kąty ostre mają miary α i β oraz $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Sinus kąta β jest równy $\frac{\sqrt{5}}{5}$.	P	F
Tangens kąta α jest równy 2.	P	F



Zadanie 40. (0-1)

VII.4

Dany jest kąt o mierze α taki, że $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ oraz $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Dla kąta α spełnione jest równanie: $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.	P	F
Dla kąta α spełnione jest równanie: $ \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$.	P	F

Zadanie 41. (0-2)

VII.4

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$.

Oblicz $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$. Zapisz obliczenia.





Zadanie 42. (0-1)

VII.4

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $(1 - \cos 20^\circ) \cdot (1 + \cos 20^\circ) - \sin^2 20^\circ$ jest równa:

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 20

Zadanie 43. (0-2)

VII.4

Wykaż, że dla każdego kąta $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ)$ spełniona jest równość:

$$\sin \alpha \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \frac{1}{\cos \alpha}$$



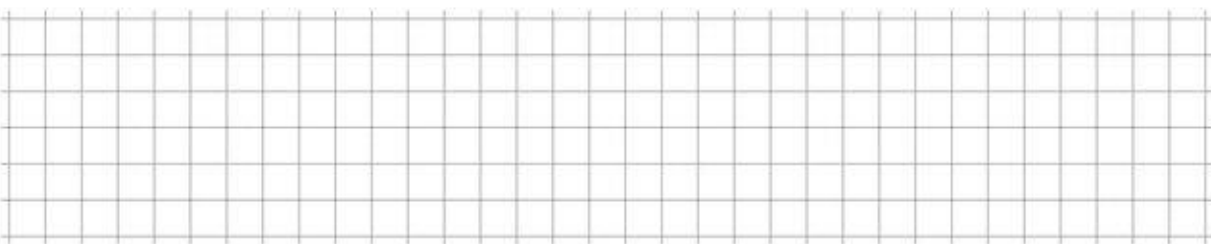
Zadanie 44. (0-3)

VII.4

Kąty ostre α i β tego samego trójkąta prostokątnego spełniają warunek:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha = 4.$$

Wyznacz miary kątów α i β . Zapisz obliczenia.



Zadanie 45. (0-3)

VII.4

Dany jest kąt α taki, że $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ oraz jest spełniona równość:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = 5.$$

Oblicz $\cos \alpha$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 46. (0-1)

VII.4

Która równość nie jest spełniona dla żadnego kąta $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ)$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1$ C. $1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha$
 B. $\cos \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ D. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} = 1 + \operatorname{tg} \alpha$

Zadanie 47. (0-2)

VII.4

Dokończ zdanie. Wybierz **dwie** odpowiedzi tak, aby dla każdej z nich zdanie było prawdziwe.

Nie istnieje kat α , dla którego jest spełniony warunek:

A. $\sin \alpha = 0,8$ i $\cos \alpha = 0,6$

C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ i $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$

$$\text{E. } \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

B. $\sin \alpha = \frac{4}{9}$ i $\cos \alpha = \frac{5}{9}$

D. $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$

$$\text{F. } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadanie 48. (0-4)

VII.4

Dany jest kąt ostry α , dla którego jest spełniona równość:

$$\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{\cos \alpha}$$

Oblicz $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ i $\operatorname{tg} \alpha$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 49. (0-2)

VII.4

Wykaż, że nie istnieje kąt ostry α , dla którego są spełnione warunki: $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$.



Zadanie 50. (0-2)

VII.4

Dane jest wyrażenie:

$$W = \frac{7}{1 + \tan^2 \alpha} + 7 \sin^2 \alpha, \quad \text{gdzie} \quad \alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ)$$

Wykaż, że wartość wyrażenia W nie zależy od miary kąta α .



Zadanie 51. (0-1)

VII.4

Kat α jest ostry oraz $4 \operatorname{tg} \alpha = 3 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kata α jest równy:

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. 4



Zadanie 52. (0-1)

VII.4

Kąt α jest ostry oraz:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{64}{9}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ jest równa:

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{64}{9}$ D. $\frac{9}{64}$

Zadanie 53. (0-1)

VII.5

Dany jest trójkąt równoramienny o ramionach długości 10 i kącie rozwartym 135° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole tego trójkąta jest równe:

- A. $50\sqrt{2}$ B. $25\sqrt{2}$ C. 50 D. 25

Zadanie 54. (0-1)

VII.5

Dany jest trójkąt ABC , w którym: $|AC| = 7$. Na boku AB tego trójkąta wybrano taki punkt D , że $|DA| = 3$ i $|DC| = 5$ oraz $\sphericalangle ADC = \alpha$ i $\sphericalangle BDC = \beta$. Wskaż równość fałszywą.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{1+\cos \alpha}{1+\cos \beta}=\frac{1}{3}$ B. $\cos \alpha \cdot \cos \beta=-\frac{1}{2}$ C. $\cos \alpha+\cos \beta=0$ D. $\cos \beta-\cos \alpha=1$



Zadanie 55. (0-2)

VII.5

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 4$, $|AB| = 3$, $\cos \sphericalangle BAC = \frac{4}{5}$.

Oblicz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high, covering the entire page area.

Zadanie 56. (0-3)

VII.5

W trójkącie rozwartokątnym ABC , o kącie rozwartym BAC , dane są $|AC| = 4$ i $|AB| = 9$. Pole tego trójkąta jest równe $12\sqrt{2}$.

Oblicz długość boku BC trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 57. (0-3)**VII.5**

W trójkącie ABC dane są:

$$|AB| = 18 \quad |BC| = 15 \quad |AC| = 12$$

Oblicz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 58.**

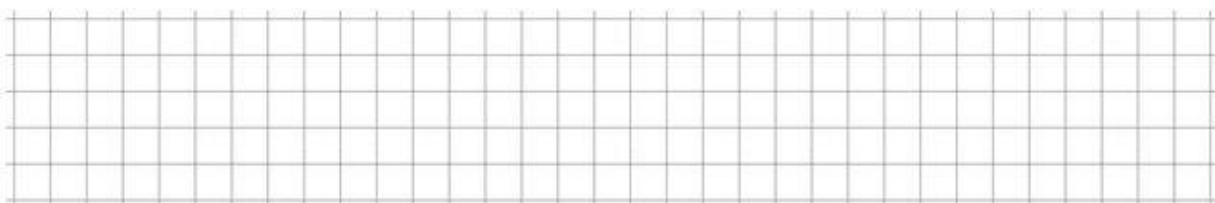
Dwa boki trójkąta ABC mają długości $|AB| = 6$ i $|CA| = 4$, a kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 120° .

Zadanie 58.1. (0-1)**VII.5**

Oblicz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

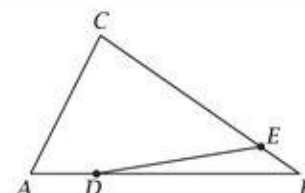
**Zadanie 58.2. (0-1)****VII.5**

Oblicz długość boku BC trójkąta ABC .

**Zadanie 59. (0-3)****VII.5**

Dany jest trójkąt ABC . Na boku AB tego trójkąta wybrano taki punkt D , taki, że $|AD| = \frac{1}{4}|AB|$, a na boku BC wybrano taki punkt E , że $|BE| = \frac{1}{5}|BC|$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta ABC jest równe 20.

Oblicz pole trójkąta DBE .



Zadanie 60. (0-1)**VII.5**

Punkty A , B i C są wierzchołkami trójkąta, w którym:

$$\sphericalangle BAC = \alpha \quad \sphericalangle ABC = \beta \quad \sphericalangle ACB = \gamma \quad |BC| = a \quad |AC| = b \quad |AB| = c$$

O trójkącie ABC nie można powiedzieć, że:

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $a = 2\sqrt{2}$, $b = 5$, $\alpha = 45^\circ$

C. $b = 6\sqrt{2}$, $c = 12$, $\gamma = 135^\circ$

B. $a = 3$, $c = 2$, $\alpha = 60^\circ$

D. $a = 9\sqrt{2}$, $b = 9\sqrt{3}$, $\beta = 120^\circ$

Zadanie 61. (0-1)**VII.6**

Dany jest romb o przekątnych długości 10 i 24.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ostrego tego rombu, po zaokrągleniu do pełnych stopni, jest równa:

A. 42°

B. 46°

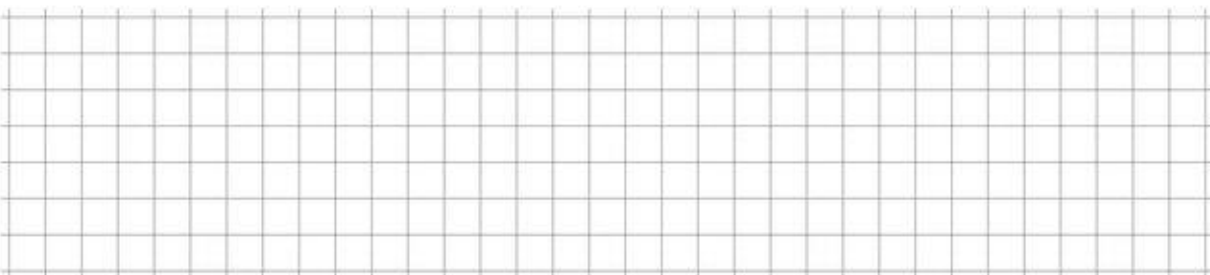
C. 50°

D. 86°

Zadanie 62. (0-2)**VII.6**

Krótsza przekątna równoległoboku ma długość 24. Przekątna ta tworzy z bokami równoległoboku kąty o miarach 90° i 23° .

Oblicz długość dłuższego boku tego równoległoboku. Wynik podaj w zaokrągleniu do jedności. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 63. (0-2)****VII.6**

Dany jest prostokąt o bokach długości $6\sqrt{5}$ i $12\sqrt{5}$.

Oblicz miarę kąta ostrego zawartego między przekątnymi tego prostokąta. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych stopni. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 64. (0-1)****VII.6**

Drabina o długości 3,5 m jest oparta o ścianę tak, że jej koniec dotyka ściany na wysokości 2,8 m.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Drabina jest nachylona do podłoża pod kątem, którego miara po zaokrągleniu do pełnych stopni jest równa:

A. 37°

B. 39°

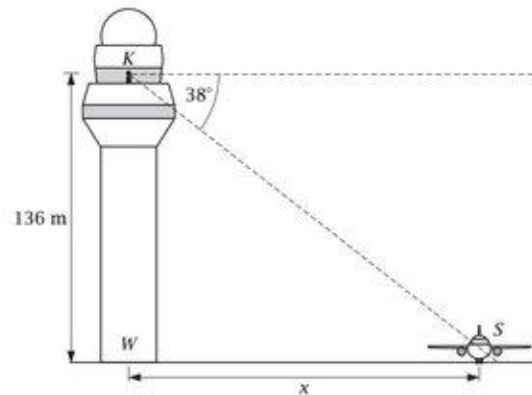
C. 51°

D. 53°

Zadanie 65. (0-3)

VII.6

Z okna wieży kontroli lotów widać startujący samolot S pod kątem 38° do poziomu. Kontroler K znajduje się na wysokości 136 m od płyty lotniska (zobacz rysunek)



Oblicz odległość x samolotu S od podstawy W tej wieży. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych metrów. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

Zadanie 66.

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 14, a kąt między ramionami ma miarę 70° .

Zadanie 66.1. (0-2)

VII.6

Oblicz wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C . Wynik podaj w zaokrągleniu do jednej dziesiątej. Zapisz obliczenia.



Zadanie 66.2. (0-2)

VII.6

Wyznacz długość ramienia trójkąta ABC . Wynik podaj w zaokrągleniu do jedności. Zapisz obliczenia.

Zadanie 67. (0-1)**VII.6**

Dany jest trójkąt o bokach długości 8, 12 i $4\sqrt{19}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt zawarty między bokami o długościach 8 i 12 w tym trójkącie ma miarę równą:

- A. 30° B. 45° C. 120° D. 150°

Zadanie 68. (0-1)**VII.6**

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = |BC| = 20$ oraz miara jednego z kątów jest równa 150° .

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Pole trójkąta ABC jest równe 100.	P	F
Długość boku AB trójkąta ABC jest równa $20\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.	P	F

Zadanie 69.

Dwa boki trójkąta T mają długości 4 i $4\sqrt{3}$, a kąt między tymi bokami ma miarę 120° .

Zadanie 69.1. (0-1)**VII.6**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

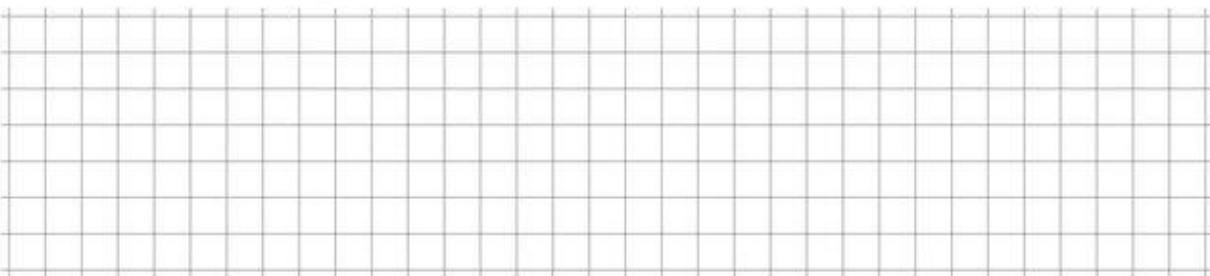
Długość trzeciego boku trójkąta T jest równa:

- A. $4\sqrt{4 - \sqrt{3}}$ B. $4\sqrt{4 + \sqrt{3}}$ C. $4\sqrt{7}$ D. 4

Zadanie 69.2. (0-2)**VII.6**

O kącie α wiadomo, że jest najmniejszym kątem trójkąta T .

Udowodnij, że iloraz $\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$ jest liczbą większą od $\frac{3}{2}$.

**Zadanie 70. (0-2)****VII.6**

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości 6, 7 i 8.

Oblicz cosinus największego kąta tego trójkąta. Zapisz obliczenia.



Zadanie 71. (0-1)

VII.6

W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$ oraz $|AC| = \sqrt{6}$ i $|BC| = \sqrt{2}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta BAC jest równa:

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 150°

Zadanie 72. (0-1)

VII.6

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $|CA| = 2\sqrt{3}$, $|CB| = 2\sqrt{2}$, a wysokość poprowadzona do boku AB jest równa $\sqrt{6}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Różnica między miarą największego kąta a miarą najmniejszego kąta w trójkącie ABC wynosi:

- A. 15° B. 30° C. 45° D. 75°

Zadanie 73. (0-2)

VII.6

Trójkąt ma boki o długościach 7, 8 i 9.

Wyznacz miarę najmniejszego kąta tego trójkąta. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych stopni. Zapisz obliczenia.



Zadanie 74. (0-2)

VII.6

W trójkącie ABC dane są: $\angle ABC = 45^\circ$, $|AB| = 7\sqrt{3}$ i $|AC| = 7\sqrt{2}$. Najdłuższym bokiem tego trójkąta jest bok AB .

Wyznacz miary pozostałych kątów trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.



Zadanie 75. (0-2)

VII.6

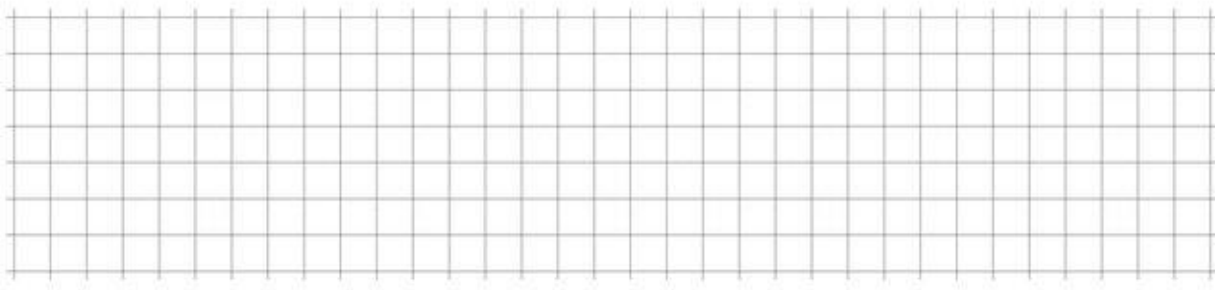
Dany jest trójkąt ABC , w którym $|\sphericalangle BAC| = 12^\circ$ i $|\sphericalangle ABC| = 18^\circ$, a najdłuższy bok ma długość 15.

Oblicz długość boku AC trójkąta ABC . Wynik podaj w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.



**Zadanie 76. (0-2)****VII.6**

W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków $|AB| = 12$, $|BC| = 8$ oraz miara kąta $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$.
Oblicz długość środkowej trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A .

**Zadanie 77. (0-3)****VII.6**

W trójkącie ABC , w którym $|AB| = 12$, $|AC| = 5$ i $|BC| = 11$ poprowadzono odcinek łączący wierzchołek C ze środkiem boku AB .

Oblicz długość tego odcinka. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 78. (0-3)****VII.6**

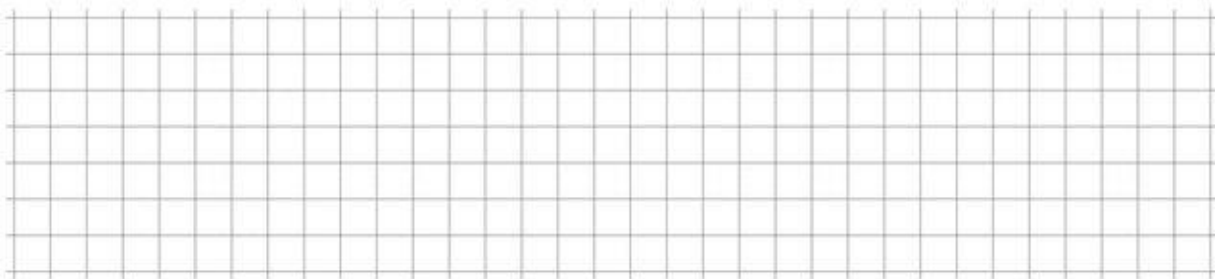
Pole trójkąta ostrokątnego ABC jest równe $15\sqrt{3}$, a dwa boki mają długości $|AC| = 6$ i $|BC| = 10$.

Oblicz długość boku AB trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 79. (0-3)****VII.6**

Boki trójkąta ABC mają długości: $|AC| = 10$, $|AB| = 12$ i $|BC| = 14$.

Oblicz tangens kąta leżącego naprzeciw najdłuższego boku trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.



7. PLANIMETRIA

TEORIA

Oznaczenia w trójkącie ABC

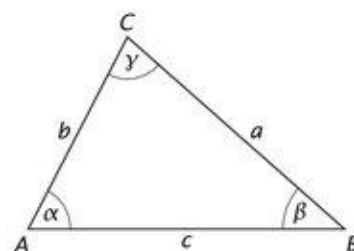
a, b, c — długości boków w trójkącie ABC

α, β, γ — miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących, odpowiednio, przy wierzchołkach A, B oraz C

R, r — długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC

h_a, h_b, h_c — wysokości trójkąta opuszczone, odpowiednio, z wierzchołków A, B i C

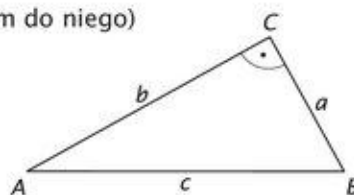
p — połowa obwodu trójkąta ABC , tj. $p = \frac{a+b+c}{2}$



Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to:
 $a^2 + b^2 = c^2$.

Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.



Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Wzory na pole trójkąta ABC

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \cdot \sin \beta$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R} \quad P_{\triangle ABC} = p \cdot r$$

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2} c^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P_{\triangle ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

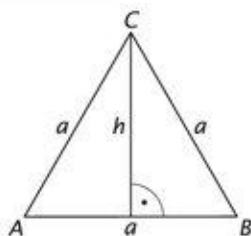
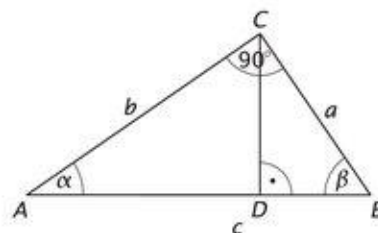
Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \quad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad R = \frac{1}{2}c$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

**Związki miarowe w trójkącie równobocznym**

a — długość boku trójkąta równobocznego

h — wysokość trójkąta równobocznego

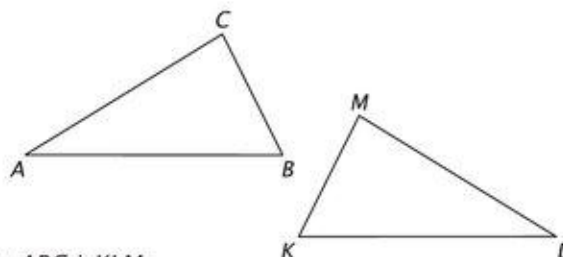
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3}h \quad R = \frac{2}{3}h$$

Cechy przystawania trójkątów

- cecha przystawania „bok-bok-bok” dla trójkątów ABC i KLM :

długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom boków trójkąta KLM ,
np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$, $|CA| = |ML|$



- cecha przystawania „bok-kąt-bok” dla trójkątów ABC i KLM :

długości dwóch boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające,
np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$

- cecha przystawania „kąt-bok-kąt” dla trójkątów ABC i KLM :

długość jednego boku trójkąta ABC jest równa długości jednego boku trójkąta KLM i kąty przyległe do tego boku trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta KLM ,

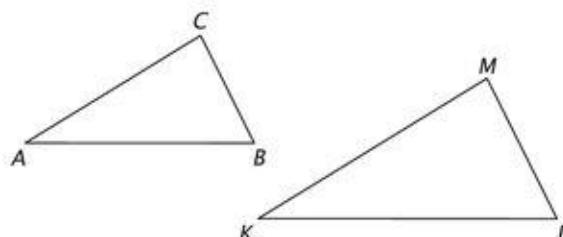
np.: $|AB| = |KL|$ oraz $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$

Cechy podobieństwa trójkątów

- cecha podobieństwa „bok-bok-bok” dla trójkątów ABC i KLM :

długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta KLM ,

$$\text{np.: } \frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$$



- cecha podobieństwa „bok-kąt-bok” dla trójkątów ABC i KLM :

długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające,

$$\text{np.: } \frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|} \text{ i } |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$$

- cecha podobieństwa „kąt-kąt-kąt” dla trójkątów ABC i KLM :

kąty trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów trójkąta KLM ,

$$\text{np.: } |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM| \text{ i } |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM| \text{ i } |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|$$

Twierdzenie o dwusiecznej kąta

Jeżeli dwusieczna kąta wewnętrznego (zewnątrznego) trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą zawierającą odcinek AB w punkcie D , to:

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

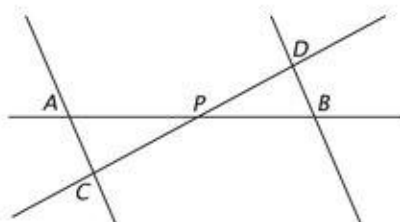
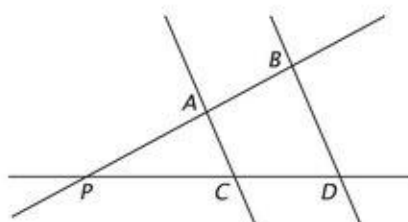
Różne proste AB i CD przecinają się w punkcie P , przy czym spełniony jest jeden z warunków:

- punkt A leży wewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży wewnątrz odcinka PD
LUB
- punkt A leży na zewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży na zewnątrz odcinka PD .

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to:

$$\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$$

Jeżeli $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$, to proste AC i BD są równoległe.

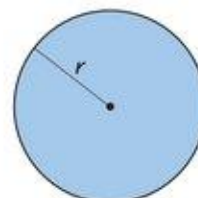
**Koło**

Pole P koła o promieniu r jest równe:

$$P = \pi r^2$$

Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L = 2\pi r$$

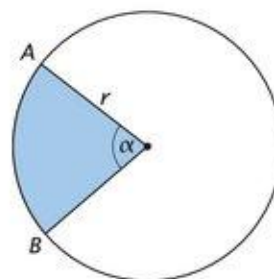
**Wycinek koła**

Pole P wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równe:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Długość L łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równa:

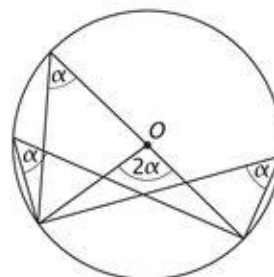
$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

**Kąty w okręgu**

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O , opartych na tym samym łuku, są równe.

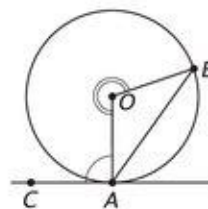
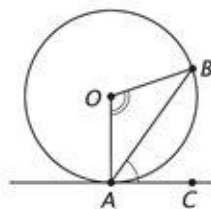
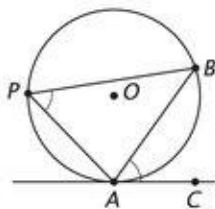


Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i cięciwa AB tego okręgu. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A , natomiast punkt P leży na tym okręgu i nie należy do kąta CAB . Wtedy:

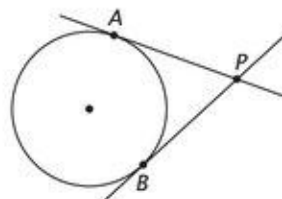
$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CAB| \text{ i } |\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$$

Przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB .


Twierdzenie o odcinkach stycznych

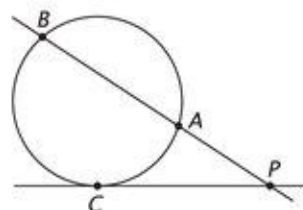
Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to:

$$|PA| = |PB|$$


Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P , to:

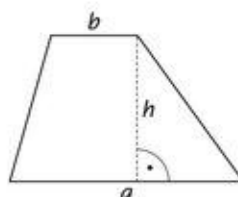
$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$


Czworokąty

- **Trapez** — czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole P trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



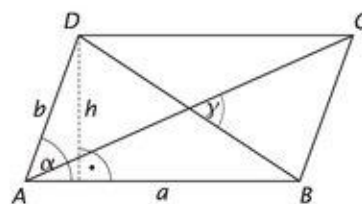
- **Równoległobok** — czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole P równoległoboku:

$$P = ah$$

$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \gamma$$



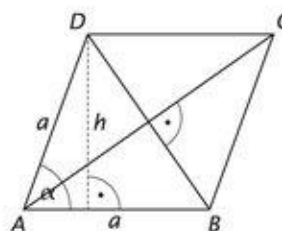
- **Romb** — czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole P rombu:

$$P = ah$$

$$P = a^2 \cdot \sin \alpha$$

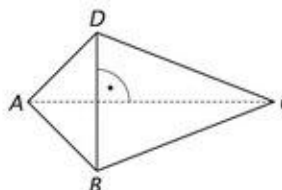
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



- **Deltoid** — czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole P deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Pola figur podobnych

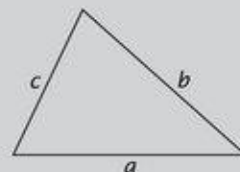
Jeżeli figura $\mathcal{B}$ o polu $P_{\mathcal{B}}$ jest podobna do figury $\mathcal{A}$ o polu $P_{\mathcal{A}}$ (różnym od zera) w skali k , to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$$

Nierówność trójkąta

Suma długości dowolnych dwóch boków trójkąta jest większa od długości trzeciego boku tego trójkąta:

$$b + c > a \quad a + c > b \quad a + b > c$$



W trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok.

Jeśli a , b i c są długościami boków trójkąta oraz $a \leq c$ i $b \leq c$, to trójkąt ten jest:

- ostrokątny, gdy $a^2 + b^2 > c^2$
- prostokątny, gdy $a^2 + b^2 = c^2$
- rozwartokątny, gdy $a^2 + b^2 < c^2$

Wysokość trójkąta

Wysokość trójkąta to najkrótszy odcinek łączący jeden z wierzchołków trójkąta z prostą zawierającą przeciwległy bok.

W każdym trójkącie wysokości przecinają się w jednym punkcie zwanym **ortocentrum trójkąta**.

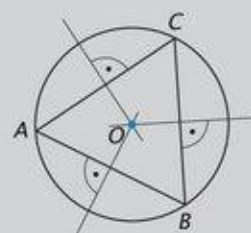
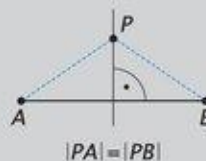
W trójkącie ostrokątnym ortocentrum znajduje się wewnątrz trójkąta, w trójkącie rozwartokątnym — na zewnątrz, a w trójkącie prostokątnym — w wierzchołku kąta prostego.

Symetralna odcinka

Symetralna odcinka to prosta prostopadła do tego odcinka i przechodząca przez jego środek.

Punkt P należy do symetralnej odcinka wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednakowo oddalony od obu końców odcinka.

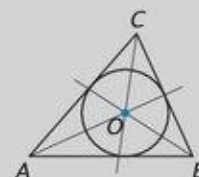
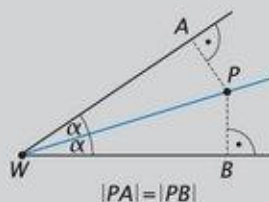
W każdym trójkącie symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Jest to **środek okręgu opisanego na tym trójkącie**.

**Dwusieczna kąta**

Dwusieczna kąta to półprosta o początku w jego wierzchołku i dzieląca ten kąt na dwa kąty o równych miarach.

Punkt P należy do dwusiecznej kąta wypukłego wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednakowo oddalony od obu ramion tego kąta.

W każdym trójkącie dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie. Jest to **środek okręgu wpisanego w ten trójkąt**.

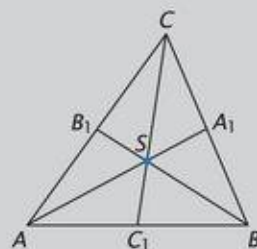


Środkowa trójkąta

Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

W każdym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie zwanym **środkiem ciężkości trójkąta**. Punkt ten dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1.

$$\frac{|AS|}{|SA_1|} = \frac{|BS|}{|SB_1|} = \frac{|CS|}{|SC_1|} = 2$$



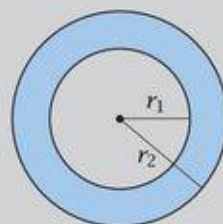
Pierścień kołowy

Pole P pierścienia kołowego o promieniu wewnętrznym r_1 i promieniu zewnętrznym r_2 jest równe:

$$P = \pi (r_2^2 - r_1^2)$$

Obwód L pierścienia kołowego o promieniu wewnętrznym r_1 i promieniu zewnętrznym r_2 jest równy:

$$L = 2\pi (r_1 + r_2)$$



Wielokąt wypukły

Wielokąt nazywamy wypukłym, gdy wszystkie jego kąty wewnętrzne są mniejsze niż 180° .

Suma kątów wewnętrznych n -kąta wypukłego jest równa $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Liczba przekątnych n -kąta wypukłego jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.

Wielokąt foremny

Wielokąt nazywamy foremnym, gdy ma wszystkie boki tej samej długości i wszystkie kąty wewnętrzne tej samej miary.

Wielokątami foremnymi są na przykład trójkąt równoboczny i kwadrat.

Miara kąta wewnętrznego n -kąta foremnego jest równa $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

W każdym wielokącie foremnym wszystkie dwusieczne kątów i symetralne boków przecinają się w tym samym punkcie. Jest to **środek okręgu opisanego na tym wielokącie i wpisanego w ten wielokąt**.



Związki miarowe w wybranych wielokątach foremnych

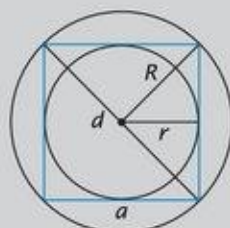
- kwadrat

$$d = a\sqrt{2}$$

$$P = a^2 = \frac{1}{2}d^2$$

$$r = \frac{1}{2}a$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



- sześciokąt foremny

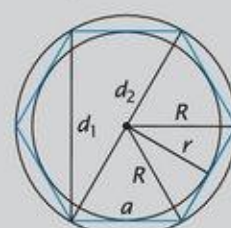
$$d_1 = a\sqrt{3}$$

$$d_2 = 2a$$

$$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = a$$



ZADANIA

Zadanie 1. (0-1)

VIII.1

Prosta a jest styczna w punkcie P do okręgu o środku O i promieniu 12 cm. Średnicę AB poprowadzono w tym okręgu tak, że $|\angle AOP| = 120^\circ$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odległość punktu A od prostej a jest równa:

- A. 12 cm B. 16 cm C. 18 cm D. 24 cm

Zadanie 2. (0-1)

VIII.1

Okrąg wpisany w trójkąt prostokątny ABC jest styczny do przeciwprostokątnej AB w punkcie X , a do przyprostokątnych AC i BC odpowiednio w punktach Y i Z , przy czym $\frac{|CY|}{|AY|} = \frac{1}{5}$ i $\frac{|CZ|}{|BZ|} = \frac{2}{3}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stosunek $\frac{|BX|}{|AX|}$ jest równy:

- A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{2}{15}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{3}{10}$

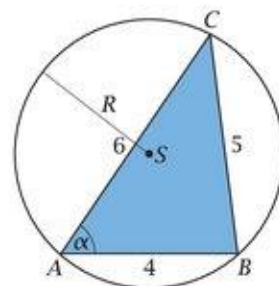


Zadanie 3. (0-3)

VIII.1

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$, $|AC| = 6$. Na tym trójkącie opisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu R .

Oblicz promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC .

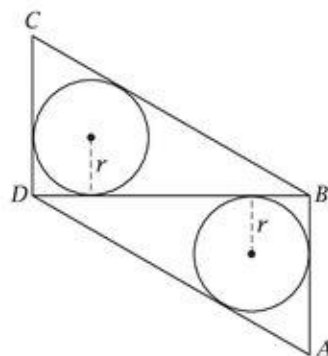


Zadanie 4. (0-4)

VIII.1

Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $|AB| = 1$, $|BC| = 2$ oraz kąt ostry ma miarę 60° . W każdy z trójkątów ABD i BCD wpisano okrąg (zobacz rysunek).

Oblicz odległość między środkami tych okręgów. Zapisz obliczenia.



Zadanie 5. (0-1)

VIII.2

Wskaż trzy liczby będące długościami boków trójkąta ostrokątnego.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 8, 15, 17 B. 5, 8, 10 C. 4, 8, 9 D. 4, 7, 8



Zadanie 6. (0-1)

VIII.2

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 6$, $|BC| = 5$, $|AC| = 10$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Cosinus kąta ABC jest równy $(-0,65)$.	P	F
Trójkąt ABC jest rozwartokątny.	P	F

Zadanie 7. (0-1)

VIII.2

Boki trójkąta ABC mają długości:

$$|AC| = 7 \quad |BC| = 9 \quad |AB| = 12$$

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Trójkąt ABC jest:

A.	prostokątny,	ponieważ	1.	$\cos \angle ACB < 0$.
B.	ostrokątny,		2.	$7^2 + 9^2 \neq 12^2$.
C.	rozwartokątny,		3.	$\cos \angle BAC > 0$.



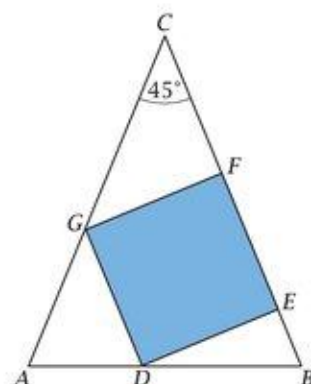
Zadanie 8. (0-1)

VIII.3

Dane są trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$ i $|\angle ACB| = 45^\circ$, oraz kwadrat $DEFG$ o polu równym 1. Wierzchołki E i F kwadratu leżą na ramieniu BC danego trójkąta, wierzchołek G leży na ramieniu AC , a wierzchołek D leży na podstawie AB trójkąta (zobacz rysunek).

Oceń prawdziwość poniższych relacji. Wybierz P, jeśli relacja jest prawdziwa, albo F — jeśli jest fałszywa.

$ \angle AGD = 45^\circ$	P	F
$ AG - BE = 2 - \sqrt{2}$	P	F



Zadanie 9. (0-1)

VIII.3

Punkty A , B , C oraz D są kolejnymi wierzchołkami pewnego wielokąta foremnego. Miara kąta ABC jest równa 156° . Ile jest równa miara kąta ACD ?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 152° B. 150° C. 144° D. 142°

Zadanie 10. (0-2)

VIII.3

Trzy kolejne wierzchołki pewnego wielokąta foremnego W wyznaczają trójkąt, w którym jeden z kątów jest rozwarty i ma miarę 10 razy większą od miary każdego kąta ostrego w tym trójkącie.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego W jest równa:

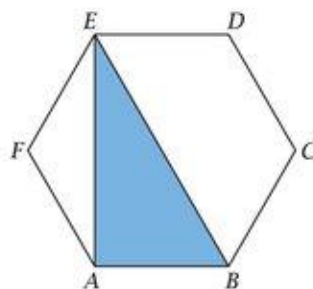
A. 162° B. 156° C. 150° D. 144°

2. Liczba wierzchołków wielokąta W jest równa:

E. 18 F. 16 G. 15 H. 12

**Zadanie 11.**

Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ o polu równym $6\sqrt{3}$ (zobacz rysunek).

**Zadanie 11.1. (0-1)****VIII.3**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole trójkąta ABE jest równe:

- A. 6 B. $4\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4

Zadanie 11.2. (0-1)**VIII.3**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka AE jest równa:

- A. 2 B. $2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. 4

Zadanie 12. (0-1)**VIII.3**

Ile boków ma wielokąt foremny, w którym suma miar wszystkich kątów jest 20 razy większa od miary kąta prostego?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 12 B. 16 C. 20 D. 24

Zadanie 13. (0-1)**VIII.3**

W pewnym wielokącie foremnym kąt wewnętrzny jest 4 razy większy od kąta przyległego do niego. Ile boków ma ten wielokąt?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 16 B. 12 C. 10 D. 8

Zadanie 14. (0-2)**VIII.3**

Punkty A , B , C oraz D są czterema kolejnymi wierzchołkami 18-kąta foremnego F . Proste AB i DC przecinają się w punkcie P .

Dokończ zdania. Wybierz właściwe odpowiedzi spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Miara kąta APD jest równa:

- A. 120° B. 135° C. 140° D. 145°

2. Liczba przekątnych 18-kąta foremnego F , których końcami nie jest żaden z punktów A , B , C oraz D , wynosi:

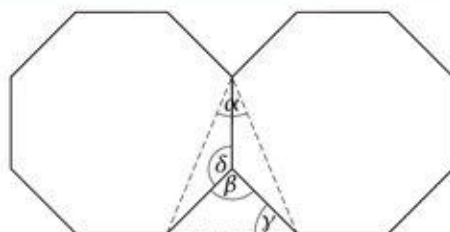
- E. 270 F. 154 G. 135 H. 78

Zadanie 15. (0-1)**VIII.3**

Na rysunku przedstawiono dwa jednakowe ośmiokąty foremne o wspólnym boku i oznaczono literami α , β , γ i δ miary niektórych kątów.

Wskaż równość falszywą. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ B. $\delta = \frac{5}{2}\gamma$ C. $\alpha + \gamma = \beta$ D. $\beta + \gamma = \delta$



Zadanie 16. (0-2)

VIII.3

Bok 12-kąta foremnego ma długość 1, a każdy wierzchołek tego wielokąta leży na okręgu.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych A-D oraz spośród E-H.

1. Pole koła wyznaczonego przez ten okrag jest równe:

- A. $(2 + \sqrt{3})\pi$ B. $(2 - \sqrt{3})\pi$ C. 3π D. $4,5\pi$

2. Najkrótsza przekątna 12-kąta foremnego ma długość:

- E. $2 + \sqrt{3}$ F. $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ G. $\sqrt{3}$ H. $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Zadanie 17. (0-1)

VIII.3

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Dla każdej osi symetrii ośmiokąta foremnego można wskazać inną oś — prostopadłą do niej.	P	F
Każda oś symetrii ośmiokąta foremnego jest prostopadła do pewnego boku tego ośmiokąta.	P	F

Zadanie 18.

Dany jest sześciokąt foremny S o boku długości 1 oraz dwa trójkąty:

- trójkąt T_1 , którego jeden z boków ma długość 1, a jego pole jest równe polu sześciokąta S ,
- trójkąt równoboczny T_2 , którego wierzchołkami są wierzchołki sześciokąta S .

Zadanie 18.1. (0-1)

VIII.3

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Pole sześciokąta S jest równe, a wysokość trójkąta T_1 , poprowadzona na bok o długości 1, wynosi



Zadanie 18.2. (0-2)

VIII.3

Oblicz pole trójkąta T_2 . Zapisz obliczenia.

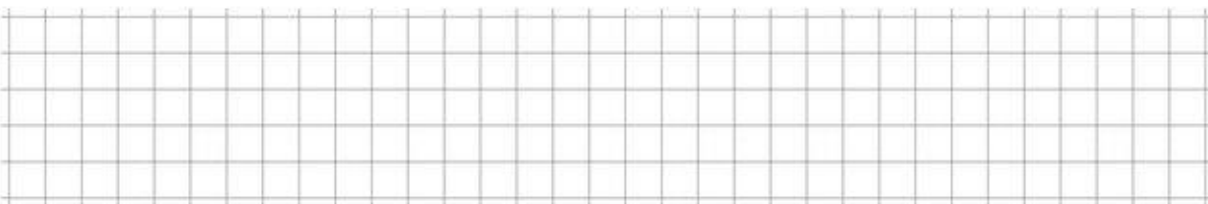
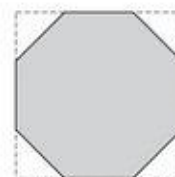
[illegible]

Zadanie 19. (0–2)

VIII.3

Naroża kwadratu obcięto tak, że wyznaczony został ośmiokąt foremny (zobacz rysunek).

Oblicz, jaką część pola kwadratu jest pole tego ośmiokąta. Wynik podaj w postaci ułamka dziesiętnego, zaokrąglonego do części setnych. Zapisz obliczenia.



Zadanie 20. (0–1)

VIII.4

Przekątną AC rombu $ABCD$ podzielono punktami P i Q w stosunku $2:1:2$. Każdy z trójkątów PQB i PQD ma pole równe 3. Punkty R i S dzielą przekątną BD na trzy równe części.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole trójkąta ARS jest równe:

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Zadanie 21. (0–1)

VIII.4

Dwa boki równoległoboku o polu S mają długości a i b , a przekątne — długości p i q .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Sinus kąta ostrego między kolejnymi bokami tego równoległoboku jest równy $\frac{S}{ab}$.	P	F
Sinus kąta ostrego między przekątnymi tego równoległoboku jest równy $\frac{2S}{pq}$.	P	F

Zadanie 22. (0–1)

VIII.4

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD ($|AB| > |CD|$), w którym $|\angle BAC| = \alpha$, $|\angle ABD| = \beta$ oraz E jest punktem przecięcia przekątnych.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Iloraz $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ jest równy ilorazowi $\frac{ BD }{ AC }$.	P	F
Iloraz $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ jest równy ilorazowi $\frac{ BE }{ AE }$.	P	F

Zadanie 23. (0–1)

VIII.4

Na przekątnej BD prostokąta $ABCD$, w którym $|AB| = 15$ i $|AD| = 8$, zaznaczono punkty P i Q takie, że $|\angle BAP| = |\angle ABP|$ i $|\angle QBC| = |\angle CQB|$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych prostokąta $ABCD$.	P	F
Długość odcinka QB jest większa od długości odcinka PB .	P	F

Zadanie 24. (0-2)

VIII.4

Boki równoległoboku mają długość 1 i 2, a kąt między nimi ma miarę 60° .

Oblicz sinus kąta między przekątnymi tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.



Zadanie 25. (0-1)

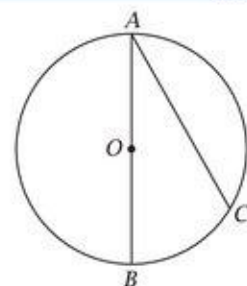
VIII.5

Odcinek AB jest średnicą okręgu o środku w punkcie O i promieniu $r = 8$ (zobacz rysunek). Cięciwa AC ma długość $8\sqrt{3}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta BAC jest równa:

- A. 30° B. 45° C. 15° D. 60°



Zadanie 26. (0-1)

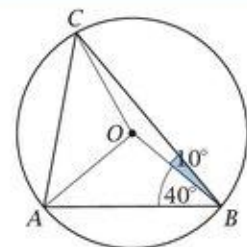
VIII.5

Punkty A, B oraz C leżą na okręgu o środku w punkcie O . Kąt ABO ma miarę 40° , a kąt OBC ma miarę 10° (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ACO jest równa:

- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°



Zadanie 27. (0-1)

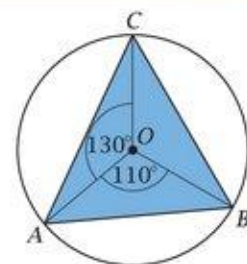
VIII.5

Punkty A, B, C leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek). Ponadto $|\sphericalangle AOC| = 130^\circ$ oraz $|\sphericalangle BOA| = 110^\circ$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta wewnętrznego BAC trójkąta ABC jest równa:

- A. 60° B. 55° C. 50° D. 65°



Zadanie 28. (0-1)

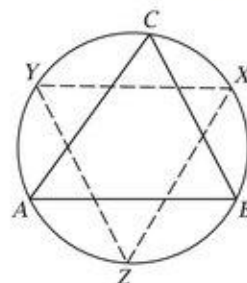
VIII.5

Trójkąt ABC , w którym $|\sphericalangle BAC| = 54^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 62^\circ$ jest wpisany w okrąg. Punkty X, Y, Z (zobacz rysunek) są środkami łuków odpowiednio BC, CA, AB .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara najmniejszego kąta w trójkącie XYZ jest równa:

- A. 58° B. 59° C. 61° D. 63°

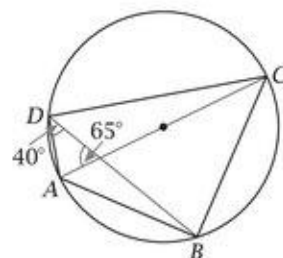
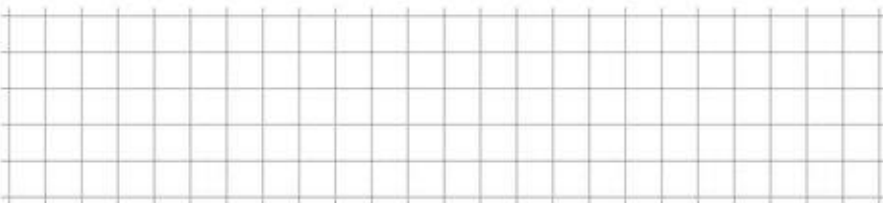


Zadanie 29. (0-2)

VIII.5

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a przekątna AC tego czworokąta jest średnicą tego okręgu (zobacz rysunek).

Oblicz miary wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

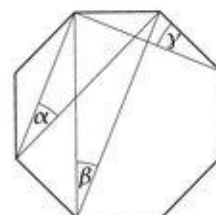


Zadanie 30. (0-3)

VIII.5

Przedstawiony na rysunku ośmiokąt jest foremny.

Wyznacz miary kątów α , β i γ . Zapisz obliczenia.

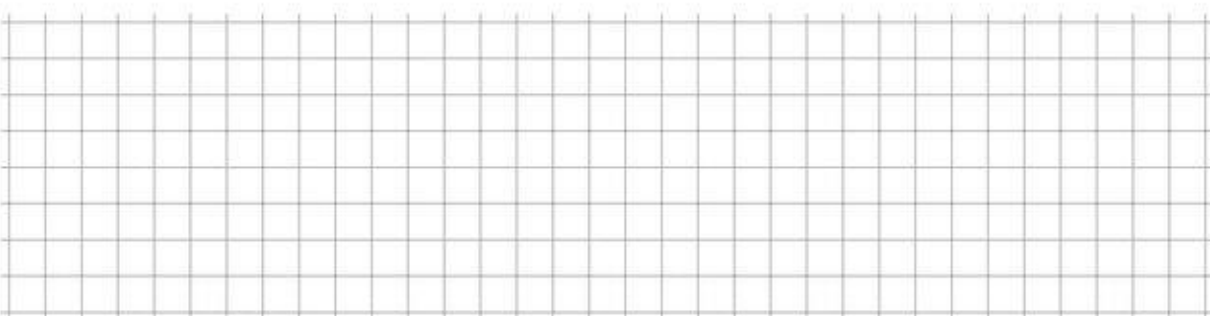
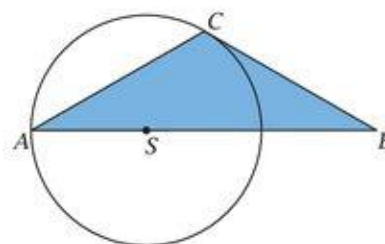


Zadanie 31. (0-4)

VIII.5

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r . Środek S tego okręgu leży na boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek). Długości boków AB i AC są równe odpowiednio $|AB| = 3r$ oraz $|AC| = \sqrt{3}r$.

Oblicz miary wszystkich kątów trójkąta ABC .



Zadanie 32. (0-2)

VIII.6

W kole o promieniu 8 cm wyznaczono wycinek W o polu $18\pi \text{ cm}^2$, a na okręgu tego koła wyznaczono łuk L o długości $5\pi \text{ cm}$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Łuk, na którym opiera się kąt środkowy wycinka W , ma długość:

- A. $9\pi \text{ cm}$ B. $6,75\pi \text{ cm}$ C. $6\pi \text{ cm}$ D. $4,5\pi \text{ cm}$

2. Wycinek koła o kącie środkowym opierającym się na łuku L ma pole:

- E. $10\pi \text{ cm}^2$ F. $15\pi \text{ cm}^2$ G. $20\pi \text{ cm}^2$ H. $25\pi \text{ cm}^2$

Zadanie 33. (0-1)

VIII.6

Kąt środkowy o mierze 160° wyznacza w kole o promieniu 9 wycinek W .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole równe polu wycinka W ma koło o promieniu:

- A. 7,5 B. 6 C. 4,5 D. 4

Zadanie 34. (0-1)

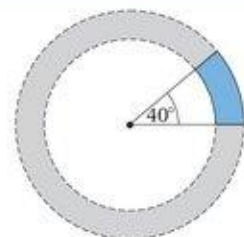
VIII.6

Dany jest pierścień kołowy o promieniu wewnętrznym 9 cm i zewnętrznym 12 cm. Kąt środkowy o mierze 40° dzieli ten pierścień na dwie części (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole części zacieniowanej na niebiesko jest równe:

- A. $7\pi \text{ cm}^2$ B. $8\pi \text{ cm}^2$ C. $9\pi \text{ cm}^2$ D. $10\pi \text{ cm}^2$

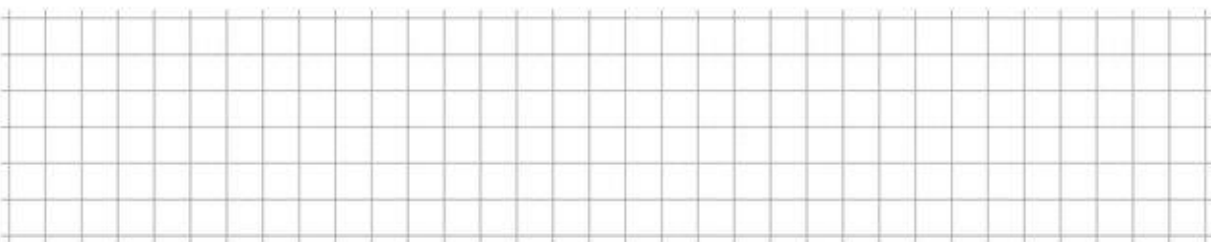
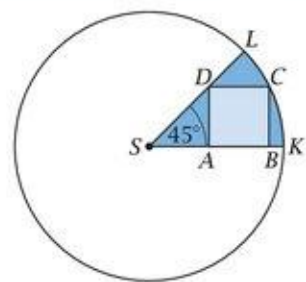


Zadanie 35. (0-3)

VIII.6

W wycinek koła wyznaczony przez kąt środkowy KSL o mierze 45° wpisano kwadrat $ABCD$ w taki sposób, że wierzchołki A oraz B leżą na promieniu SK , wierzchołek D leży na promieniu SL , a wierzchołek C leży na łuku KL (zobacz rysunek).

Oblicz stosunek pola kwadratu $ABCD$ do pola wycinka kołowego KSL . Zapisz obliczenia.



Zadanie 36. (0-1)

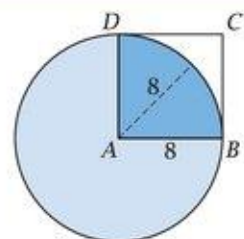
VIII.6

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 8. Z wierzchołka A zakreślono koło o promieniu równym długości boku kwadratu (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni części wspólnej koła i kwadratu jest równe:

- A. 16π B. 8π C. $4\sqrt{2}\pi$ D. $16\sqrt{2}\pi$



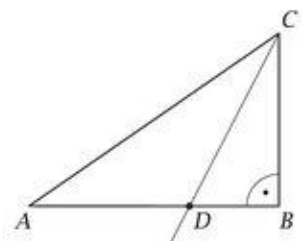
Zadanie 37. (0-1)

VIII.7

W trójkącie ABC , w którym $|\angle ABC| = 90^\circ$ poprowadzono dwusieczną kąta ACB , która przecina bok AB w punkcie D (zobacz rysunek). Wskaż stosunek długości odcinków równy sinusowi kąta BAC .

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{|BD|}{|BC|}$ B. $\frac{|CD|}{|CA|}$ C. $\frac{|DB|}{|DC|}$ D. $\frac{|BD|}{|AD|}$



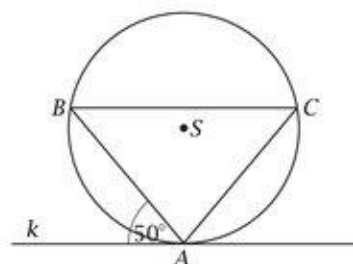

Zadanie 38. (0-1)
VIII.7

Dane są okrąg o środku S oraz prosta k styczna do okręgu w punkcie A . Odcinek AB jest cięciwą tego okręgu. Miara kąta ostrego pomiędzy prostą k a cięciwą AB jest równa 50° . Punkt C leży na okręgu. Kąt BCA jest ostry. Sytuację przedstawia rysunek obok.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta BCA jest równa:

- A. 100° B. 80° C. 50° D. 40°


Zadanie 39. (0-2)
VIII.7

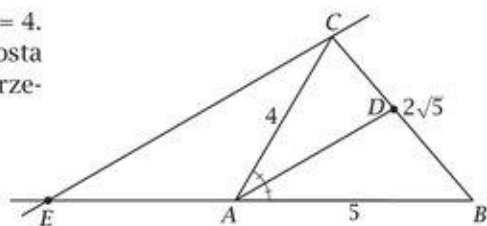
Na ostrokatnym trójkącie równoramiennym ABC jest opisany okrąg. Przez punkt A poprowadzono styczną do tego okręgu, która z bokiem AB wyznacza kąt ostry o mierze 56° .

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Kąt między ramionami trójkąta ABC ma miarę $^\circ$ lub miarę $^\circ$.


Zadanie 40.

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AB| = 5$, $|BC| = 2\sqrt{5}$, $|AC| = 4$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie D . Prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do odcinka AD przecina półprostą BA w punkcie E (zobacz rysunek).


Zadanie 40.1. (0-1)
VIII.7

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Długość odcinka BD jest równa:

A.	$\sqrt{5}$,	ponieważ	1.	w trójkącie naprzeciw kątów o tej samej mierze leżą boki tej samej długości.
B.	$\frac{10\sqrt{5}}{9}$,		2.	$ BD < AD + AB $
C.	$\frac{8\sqrt{5}}{9}$,		3.	$\frac{ AB }{ AC } = \frac{ BD }{ DC }$

Zadanie 40.2. (0-1)
VIII.7

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Odległość punktu D od boku AC jest mniejsza od odległości punktu D od boku AB .	P	F
Długość odcinka EC można wyrazić wzorem $ EC = \frac{ AD \cdot EA }{5} + AD $.	P	F



Zadanie 41. (0-1)

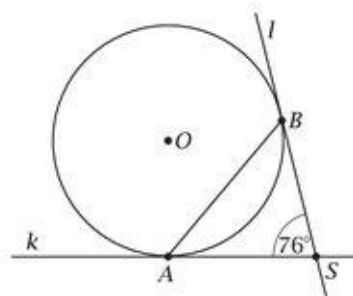
VIII.7

Punkty A oraz B leżą na okręgu o środku O . Proste k i l są styczne do tego okręgu w punktach — odpowiednio — A i B . Te proste przecinają się w punkcie S i tworzą kąt o mierze 76° (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta OBA jest równa:

- A. 52° B. 26° C. 14° D. 38°



Zadanie 42. (0-1)

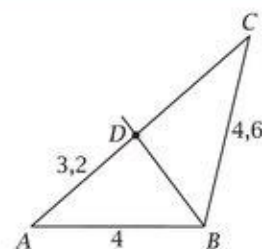
VIII.7

W trójkącie ABC bok AB ma długość 4, a bok BC ma długość 4,6. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC w punkcie D takim, że $|AD| = 3,2$ (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odcinek CD ma długość:

- A. $\frac{64}{23}$ B. $\frac{16}{5}$ C. $\frac{23}{4}$ D. $\frac{92}{25}$



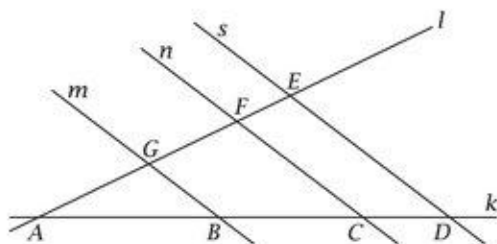
Zadanie 43. (0-2)

VIII.7

Proste k i l przecinają się w punkcie A . Proste m , n i s są do siebie równoległe i przecinają obie proste k i l w punktach B , C , D , E , F , G (zobacz rysunek) w taki sposób, że:

$$|BC| = 30 \quad |CD| = 20 \quad |GF| = 21$$

Oblicz długość odcinka FE . Zapisz obliczenia.



Zadanie 44. (0-2)

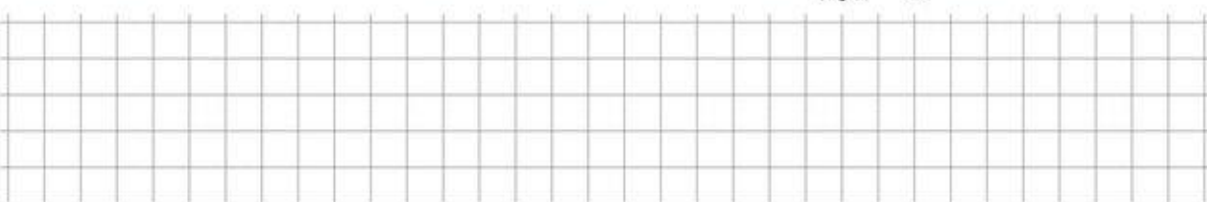
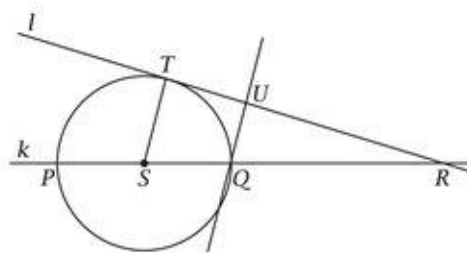
VIII.7

Dane są:

- okrąg o środku S i promieniu $r = 1$
- prosta k przechodząca przez S i przecinająca okrąg w punktach P i Q
- prosta l styczna do danego okręgu w punkcie T

Prosta k przecina prostą l w punkcie R . Prosta przechodząca przez punkt Q i równoległa do odcinka ST przecina styczną l w punkcie U (zobacz rysunek).

Oblicz długość odcinka TU , wiedząc, że spełniony jest warunek $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2}{3}$. Zapisz obliczenia.





Zadanie 45. (0-1)

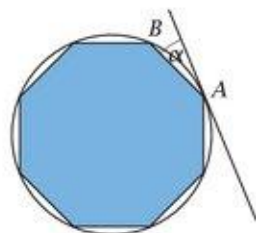
VIII.7

Dany jest ośmiokąt foremny wpisany w okrąg K . Punkty A oraz B są sąsiednimi wierzchołkami tego ośmiokąta oraz α jest kątem między styczną do okręgu K w punkcie A i bokiem AB wielokąta (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta α jest równa:

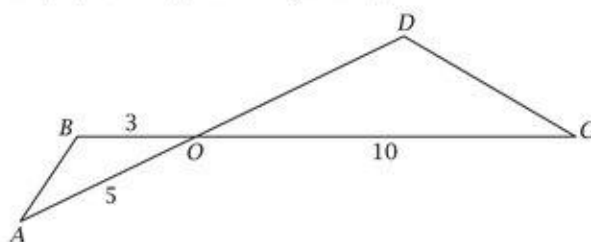
- A. 45° B. 30° C. $22,5^\circ$ D. 15°



Zadanie 46. (0-2)

VIII.8

Odcinki AD i BC przecinają się w punkcie O . W trójkątach ABO i ODC zachodzą związki: $|AO| = 5$, $|BO| = 3$, $|OC| = 10$, $|\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle OCD|$ (zobacz rysunek).



Oblicz długość boku OD trójkąta ODC . Zapisz obliczenia.



Zadanie 47. (0-1)

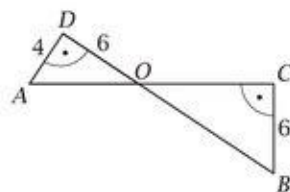
VIII.8

Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie O . Ponadto $|AD| = 4$ i $|OD| = |BC| = 6$. Kąty ODA i BCO są proste (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość odcinka OC jest równa:

- A. 9 B. 8 C. $2\sqrt{13}$ D. $3\sqrt{13}$



Zadanie 48. (0-1)

VIII.8

Prostokąt P ma wymiary $3\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Na ile sposobów można wybrać z zestawu czterech odcinków o długościach: 54 cm, 72 cm, 96 cm i 128 cm takie dwa, które będą bokami prostokąta podobnego do prostokąta P ?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Na 3 sposoby. B. Na 2 sposoby. C. W 1 sposób. D. Nie można wybrać takiej pary.

Zadanie 49. (0-1)

VIII.8

W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono symetralną przeciwprostokątnej BC , która przecięła boki BC i AB odpowiednio w punktach D i E , przy czym punkt E dzieli bok AB tak, że $|EB| = 2|AE|$. Trójkąty ABC i BDE są podobne.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Skala podobieństwa trójkąta BDE do trójkąta ABC jest równa:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{9}$

Zadanie 50. (0-1)

VIII.8

Dany jest romb $ABCD$ o dłuższej przekątnej BD . Na tej przekątnej obrano punkty P i Q takie, że czworokąt $AQCP$ jest rombem podobnym do rombu $ABCD$, a trójkąty ABQ , BCQ , CDP oraz DAP są równoramienne.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta rozwartego w rombie $ABCD$ jest równa:

- A. 144° B. 135° C. 120° D. 105°

Zadanie 51. (0-1)

VIII.8

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości x i 6 jest podobny do trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 8 i $x - 8$ w skali:

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{6}{8}$ C. $\frac{8}{6}$ D. $\frac{2}{3}$

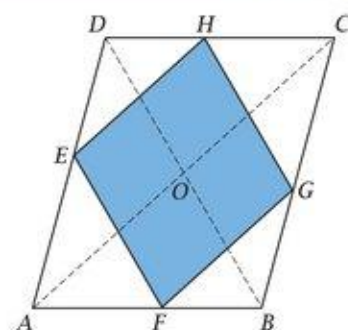
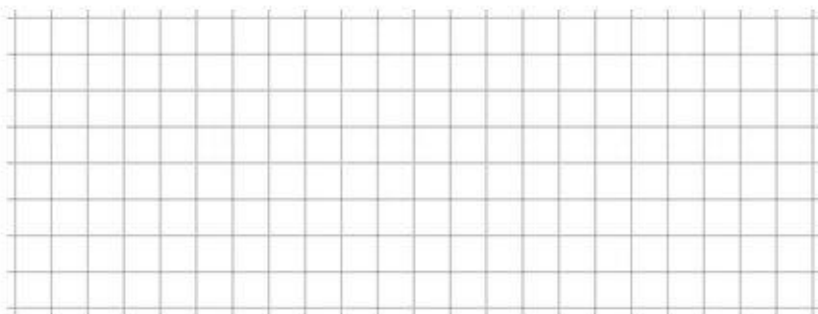


Zadanie 52. (0-2)

VIII.8

Przekątne równoległoboku $ABCD$ mają długości: $|AC| = 16$ oraz $|BD| = 12$. Wierzchołki E , F , G oraz H rombu $EFGH$ leżą na bokach równoległoboku $ABCD$ (zobacz rysunek). Boki tego rombu są równoległe do przekątnych równoległoboku.

Oblicz długość boku rombu $EFGH$. Zapisz obliczenia.

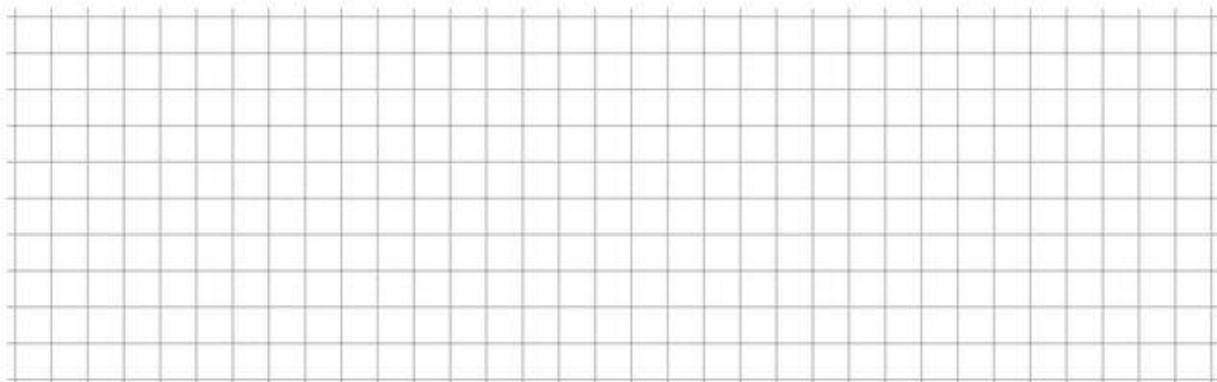
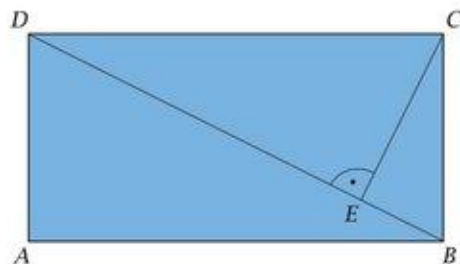


Zadanie 53. (0-3)

VIII.8

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 2$. Kąt BDA ma miarę α , taką, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Przekątna BD i prosta przechodząca przez wierzchołek C prostopadła do BD przecinają się w punkcie E (zobacz rysunek).

Oblicz długość odcinka CE . Zapisz obliczenia.

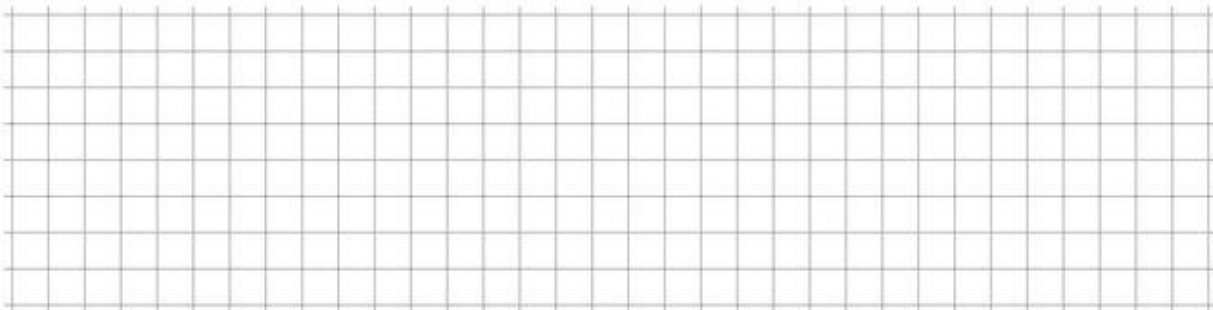


Zadanie 54. (0-3)

VIII.8

Przekątna BD dzieli prostokąt $ABCD$ na dwa trójkąty, w których poprowadzono wysokości AE i CF opuszczone na odcinek BD . Tangens kąta ABD jest równy $0,2$.

Oblicz tangens kąta EAF . Zapisz obliczenia.

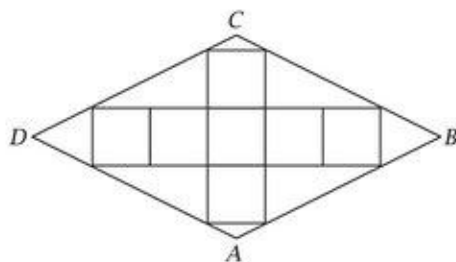


Zadanie 55. (0-2)

VIII.8

W rombie $ABCD$ umieszczono jednakowe kwadraty o bokach długości 1 w sposób przedstawiony na rysunku.

Oblicz pole tego rombu. Zapisz wszystkie obliczenia.



Zadanie 56. (0-1)

VIII.9

Prostokąt P_2 jest podobny do prostokąta P_1 w skali $\frac{2}{3}$, a prostokąt P_3 jest podobny do prostokąta P_2 w skali $\frac{9}{10}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stosunek pola prostokąta P_3 do pola prostokąta P_1 jest równy:

- A. 0,6 B. 0,48 C. 0,36 D. 0,3



Zadanie 57. (0-1)

VIII.9

Dane są dwa trójkąty podobne ABC i KLM o polach równych — odpowiednio — P oraz $2P$. Obwód trójkąta ABC jest równy x .

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Obwód trójkąta KLM jest równy:

A.	$\sqrt{2}x$,	ponieważ stosunek obwodów trójkątów podobnych jest równy	1.	kwadratowi stosunku pól tych trójkątów.
			2.	pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku pól tych trójkątów.
B.	$2x$,		3.	stosunkowi pól tych trójkątów.



Zadanie 58. (0-1)

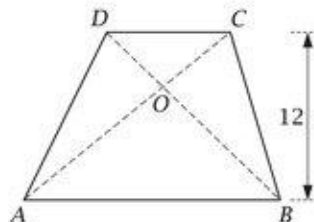
VIII.9

Dany jest trapez $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ oraz przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O (zobacz rysunek). Wysokość tego trapezu jest równa 12. Obwód trójkąta ABO jest równy 39, a obwód trójkąta CDO jest równy 13.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość trójkąta ABO poprowadzona z punktu O jest równa:

- A. 3 B. 4 C. 9 D. 6



Zadanie 59. (0-1)

VIII.9

W trapezie $ABCD$ podstawy mają długości: $|AB| = 15$ i $|CD| = 5$. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie P .

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Pole trójkąta ABP jest razy większe od pola trójkąta CDP .



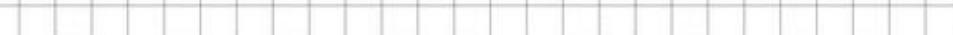
Zadanie 60. (0-2)

VIII.9

W trapezie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie E , a podstawa AB jest 9 razy dłuższa od podstawy CD .

Uzupełnij zdania. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby oba zdania były prawdziwe.

1. Obwód trójkąta ABE jest razy większy od obwodu trójkąta CDE .
2. Pole trapezu $ABCD$ jest razy większe od pola trójkąta CDE .



Zadanie 61. (0-2)

VIII.9

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 9. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DEF , w którym $|DF| = |EF|$. Ramię trójkąta DEF jest o 4 krótsze od ramienia trójkąta ABC , a obwód trójkąta DEF jest o 11 mniejszy od obwodu trójkąta ABC .

Oblicz skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta DEF . Zapisz obliczenia.

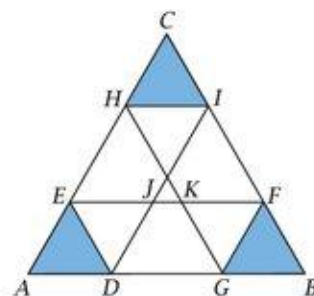


Zadanie 62. (0-3)

VIII.9

W trójkącie równobocznym ABC umieszczono trzy przystające trójkąty równoboczne: ADE , GBF , HIC , które są podobne do trójkąta ABC w skali $k = 0,3$. Odcinki DI i GH przecięły odcinek EF w punktach J i K (zobacz rysunek).

Oblicz, jaki procent pola trójkąta ABC stanowi pole trapezu $DGKJ$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 63. (0-2)

VIII.9

Dane są dwa siedmiokąty foremne. Jeden z nich ma bok o długości 10 cm, a długość boku drugiego jest równa 2 cm.

Oblicz stosunek długości najdłuższych przekątnych oraz stosunek pól tych siedmiokątów. Zapisz obliczenia.

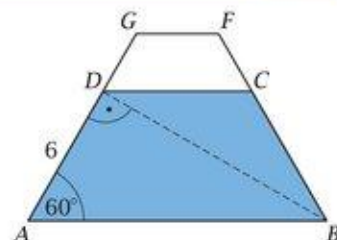


Zadanie 64. (0-4)

VIII.9

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD , gdzie $|AB| > |CD|$. Kąt ostry tego trapezu ma miarę 60° , a przekątna jest prostopadła do ramienia, którego długość jest równa 6. Oba ramiona tego trapezu przedłużono, otrzymując trapez $DCFG$ podobny do trapezu $ABCD$ (zobacz rysunek).

Oblicz pole trapezu $DCFG$. Zapisz obliczenia.



**Zadanie 65. (0-2)****VIII.10**

Dany jest trójkąt równoramienny, który nie jest równoboczny. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt H jest jego ortocentrum.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. Punkt O jest równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta.
- B. Punkt O jest równo oddalony od trzech wierzchołków tego trójkąta.
- C. Punkt O jest równo oddalony od trzech boków tego trójkąta.
- D. Punkt H jest równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta.
- E. Punkt H jest równo oddalony od trzech wierzchołków tego trójkąta.
- F. Punkt H jest równo oddalony od trzech boków tego trójkąta.

Zadanie 66. (0-2)**VIII.10**

Na trójkącie prostokątnym równoramiennym o przeciwprostokątnej długości $\sqrt{2}$ opisano okrąg, a drugi okrąg wpisano w ten trójkąt.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Odległość ortocentrum tego trójkąta od środka okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

2. Odległość między środkami tych okręgów jest równa:

- E. $\sqrt{2} - 1$ F. $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ G. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ H. $2 - \sqrt{2}$

Zadanie 67. (0-1)**VIII.10**

W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokość CD . Przez wierzchołek C i środek S okręgu opisanego na tym trójkącie poprowadzono prostą, która przecięła okrąg w punkcie E . Wskaż równość fałszywą.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BEC|$ C. $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BAC|$
 B. $|\sphericalangle SCB| = |\sphericalangle ACD|$ D. $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle EBC|$

Zadanie 68. (0-1)**VIII.10**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

W każdym trójkącie równoramiennym jedna z wysokości przecina się z dwusieczną jednego z kątów w punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.	P	F
Punkt D , w którym przecinają się środkowe dowolnego trójkąta ABC , ma taką własność, że pole trójkąta ABC jest 3 razy większe od pola trójkąta ABD .	P	F

Zadanie 69. (0-1)**VIII.11**

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym:

$$|AC| = 7 \quad |BC| = 11 \quad \cos \sphericalangle BAC = \frac{1}{14}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obwód trójkąta ABC jest równy:

- A. 31 B. 29 C. 27 D. 25

Zadanie 70. (0-1)

VIII.11

Dany jest trapez $ABCD$, w którym:

$$|\angle BAD| = |\angle CDA| = 90^\circ \quad \cos \angle ABC = \frac{7\sqrt{2}}{10} \quad |CD| = |DA| = 1$$

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Długość boku AB jest równa, a przekątna BD ma długość

Zadanie 71. (0-2)

VIII.11

Bok pięciokąta foremnego F ma długość 10 cm.

Wyznacz promień R okręgu opisanego na pięciokącie F oraz promień r okręgu wpisanego w pięciokąt F . Wynik podaj w zaokrągleniu do dziesiątej części centymetra. Zapisz obliczenia.

Zadanie 72. (0-2)

VIII.11

Dany jest trapez równoramienny, w którym podstawy mają długości 6 i 8, a kąt ostry ma miarę 60° .

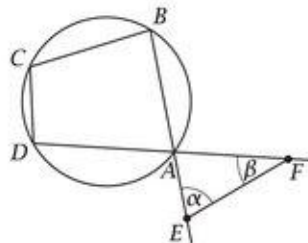
Oblicz obwód i pole tego trapezu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 73. (0-2)

VIII.12

Wierzchołki czworokąta $ABCD$ leżą na okręgu. Na półprostych BA i DA obrano odpowiednio takie punkty E i F , że $|\sphericalangle AEF| = \alpha$ i $|\sphericalangle AFE| = \beta$ (zobacz rysunek).

Wykaż, że $|\llcorner BCD| = \alpha + \beta$.

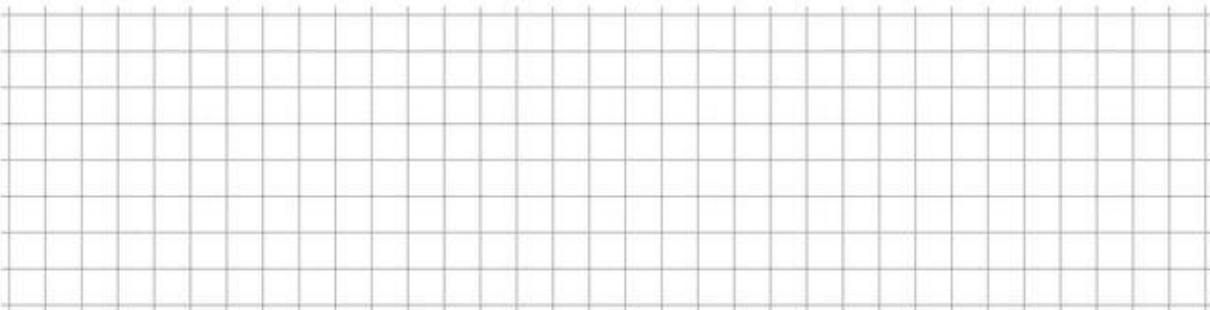


Zadanie 74. (0-2)

VIII.12

W kołach o promieniach r_1 i r_2 wyznaczono odpowiednio wycinek W_1 o polu 30π i wycinek W_2 o polu 40π . Kąt środkowy wycinka W_1 jest większy od 180° , a kąt środkowy W_2 jest mniejszy od 180° .

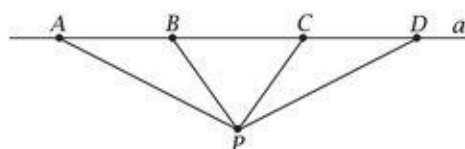
Wykaż, że $r_1 < r_2$.



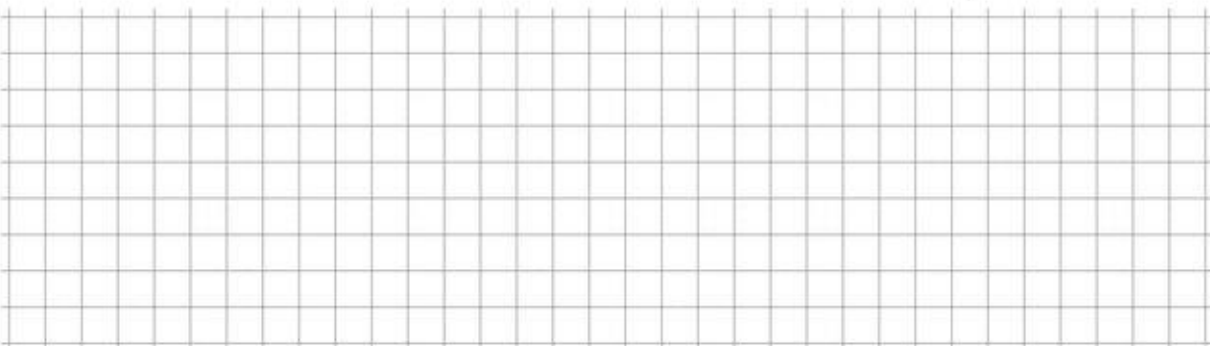
Zadanie 75. (0-3)

VIII.12

Punkt P leżący poza prostą a połączono z punktami A , B , C i D leżącymi na tej prostej i spełniającymi warunek: $|AB| = |BP| = |PC| = |CD|$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że trójkąty DAP i DCP są podobne.



Zadanie 76. (0-3)

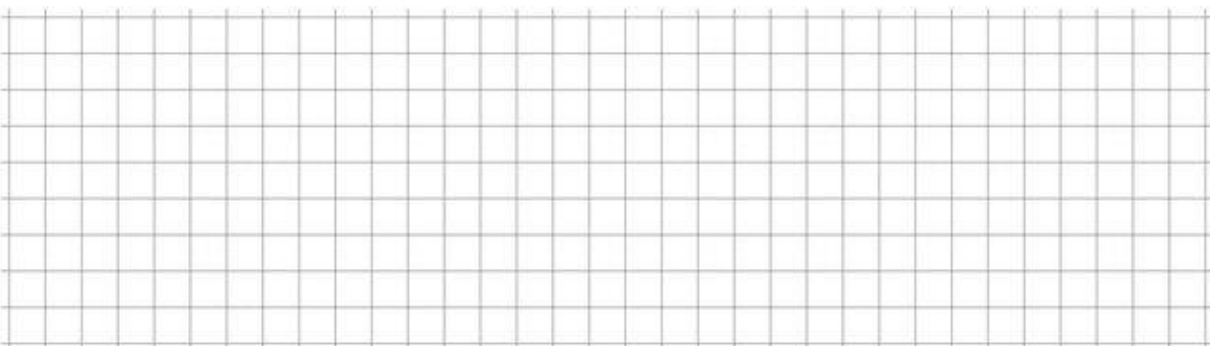
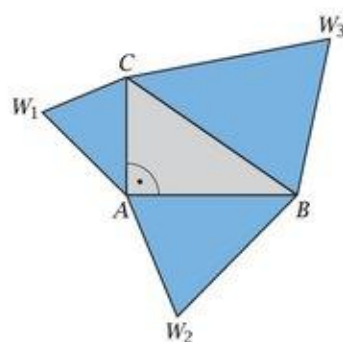
VIII.12

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa można udowodnić bardziej ogólną własność niż ta, o której mówi samo twierdzenie.

Rozważmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Niech każdy z boków tego trójkąta: CA , AB , BC będzie podstawą trójkątów podobnych, odpowiednio: CAW_1 , ABW_2 , CBW_3 . Trójkąty te mają odpowiadające sobie kąty o równych miarach, odpowiednio przy wierzchołkach: W_1 , W_2 , W_3 .

Pola trójkątów CAW_1 , ABW_2 , CBW_3 oznaczmy odpowiednio jako P_1 , P_2 , P_3 .

Udowodnij, że $P_3 = P_1 + P_2$.



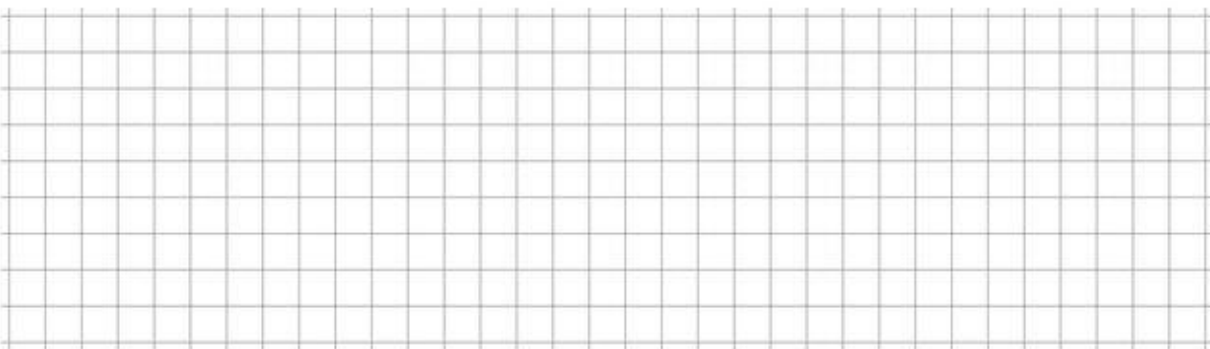
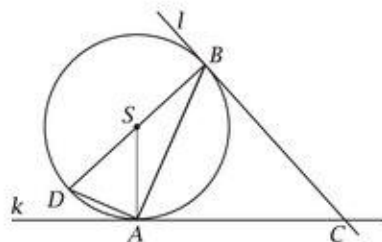


Zadanie 77. (0-3)

VIII.12

Trzy różne punkty A , B i D leżą na okręgu o środku w punkcie S . Odcinek BD jest średnicą tego okręgu. Styczne k i l do tego okręgu, odpowiednio w punktach A i B , przecinają się w punkcie C (zobacz rysunek).

Wykaż, że trójkąty ACB i ASD są podobne.

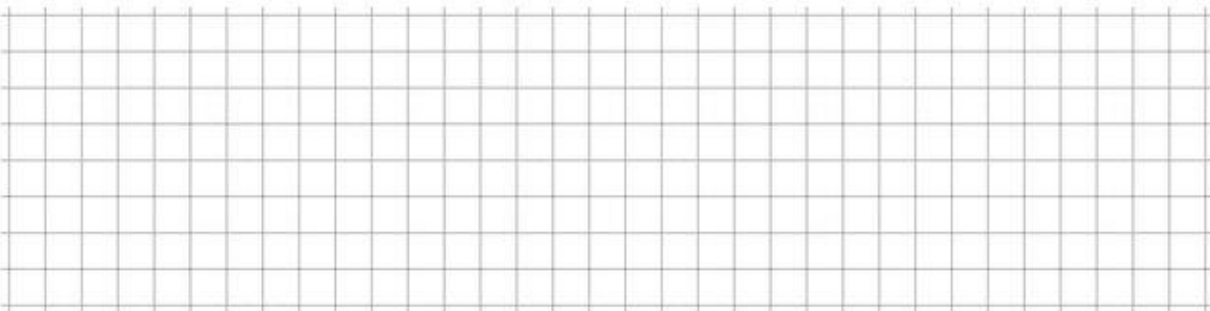
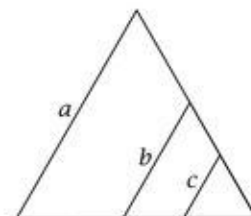


Zadanie 78. (0-2)

VIII.12

W trójkącie równobocznym o boku długości a poprowadzono dwa odcinki równoległe do jednego z jego boków. Długości tych odcinków są równe b i c , przy czym $c < b < a$ (zobacz rysunek). Odcinki podzieliły trójkąt równoboczny na trzy figury: dwa trapezy i trójkąt.

Wykaż, że stosunek pola trapezu o podstawach b i c do pola trapezu o podstawach a i b jest równy $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$.

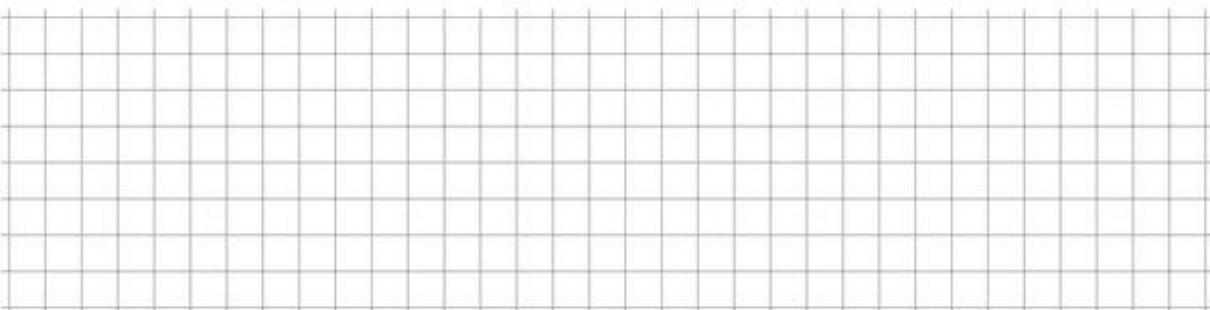
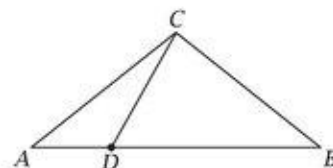


Zadanie 79. (0-2)

VIII.12

Dany jest trójkąt ABC , w którym: $|AB| = 11$ oraz $|BC| = |AC| = 7$. Na boku AB obrano taki punkt D , że $|DA| = 3$ i $|DC| = 5$ (zobacz rysunek).

Wykaż, że kąt ADC ma miarę dwukrotnie większą niż kąt BDC .



Zadanie 80. (0-2)

VIII.12

Boki równoległoboku mają długości a i b , a długości jego przekątnych są równe p i q .

Wykaż, że $a^2 + b^2 = \frac{p^2 + q^2}{2}$.

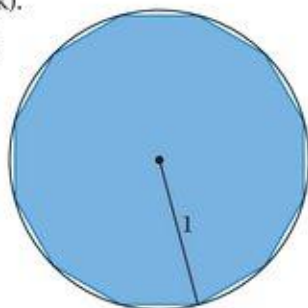
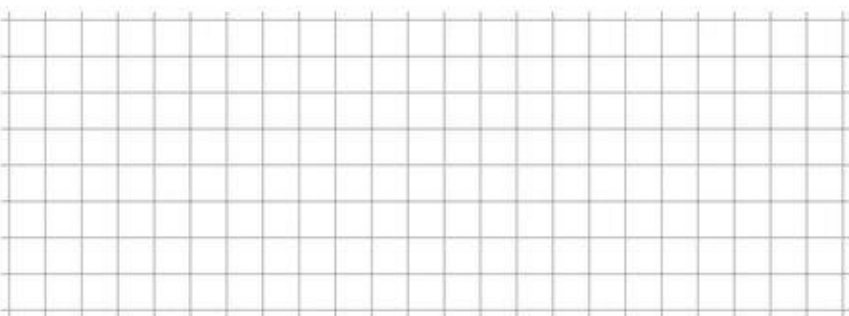


Zadanie 81. (0-2)

VIII.12

Dwunastokąt foremny wpisany jest w okrąg o promieniu 1 (zobacz rysunek).

Wykaż, że w tym wielokącie istnieją przekątne o długościach: $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$.

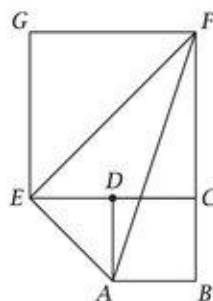
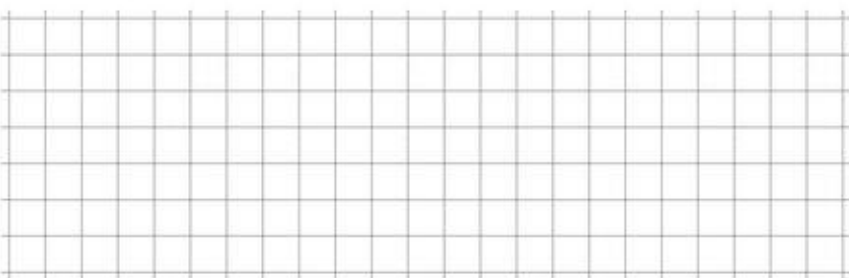


Zadanie 82. (0-2)

VIII.12

Kwadraty $ABCD$ i $ECFG$ położone są tak, jak na rysunku, przy czym punkt D jest środkiem odcinka CE .

Wykaż, że pola trójkątów EFA i EFG są równe.



Zadanie 83. (0-3)

VIII.12

Dany jest wielokąt wypukły W , w którym liczba przekątnych jest o 150 większa od liczby jego boków.

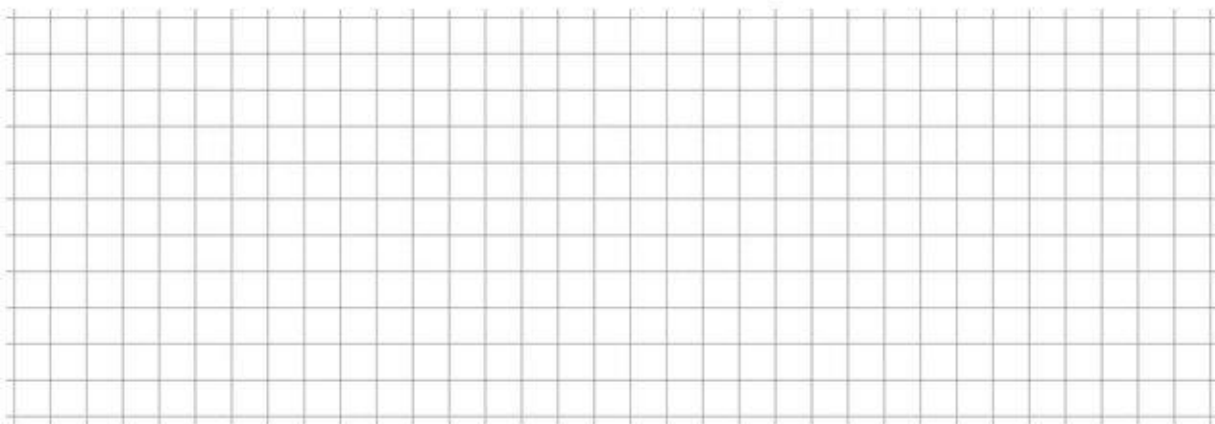
Wykaż, że suma kątów wewnętrznych wielokąta W jest równa 3240° .



Zadanie 84. (0–4)**VIII.12**

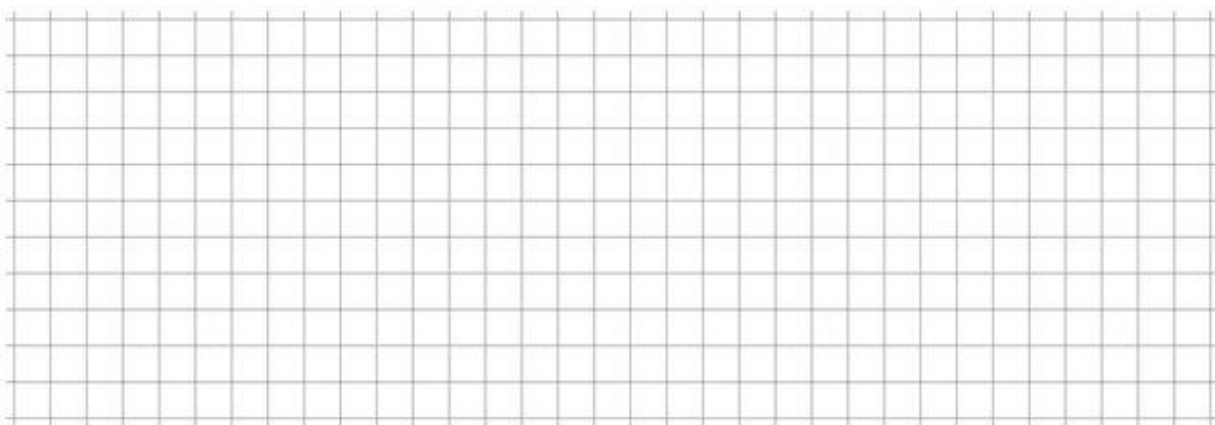
Promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym stanowi $\frac{25}{32}$ wysokości h tego trójkąta poprowadzonej do jego podstawy.

Wykaż, że promień okręgu wpisanego w ten trójkąt stanowi $\frac{3}{8}$ wysokości h .

**Zadanie 85. (0–3)****VIII.12**

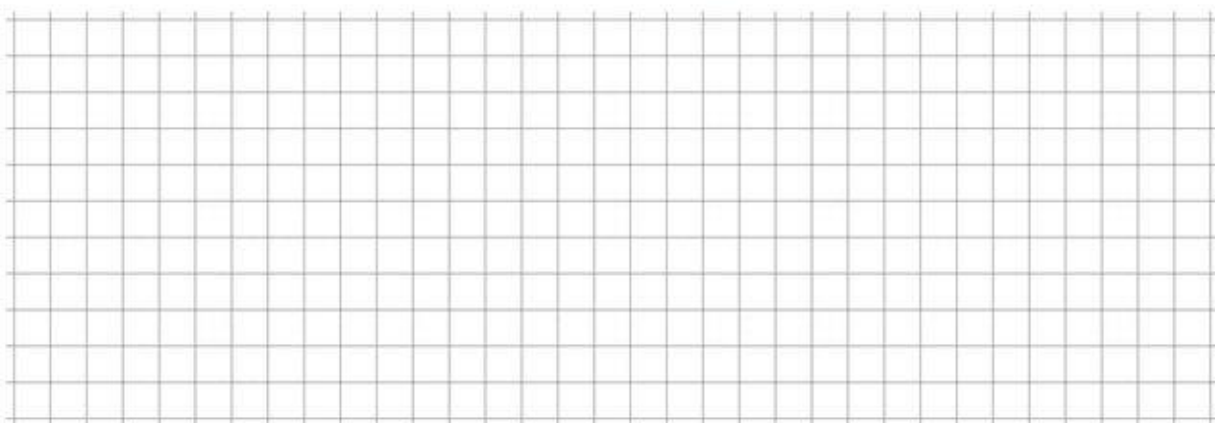
Dany jest trójkąt, w którym jeden z kątów ma miarę 60° .

Wykaż, że w tym trójkącie suma długości obu boków zawartych w ramionach tego kąta jest nie większa od podwojonej długości trzeciego boku.

**Zadanie 86. (0–3)****VIII.12**

Jeden z kątów trójkąta ma miarę 120° , a bok leżący naprzeciwko tego kąta ma długość $\sqrt{3}$.

Wykaż, że suma długości pozostałych boków tego trójkąta jest mniejsza niż $\sqrt{6}$.



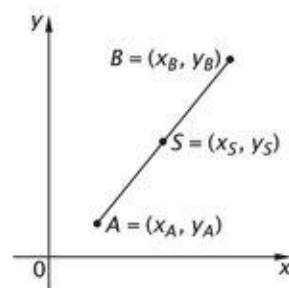
8. GEOMETRIA ANALITYCZNA

TEORIA

Długość odcinka

Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Współrzędne środka odcinka

Współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Równanie kierunkowe prostej

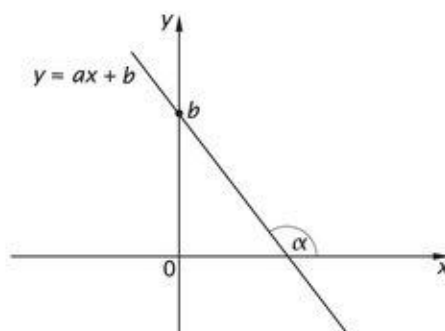
Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy , to można opisać ją równaniem kierunkowym:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej.

$$a = \tan \alpha$$

Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$.



Równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$y - y_A = a(x - x_A), \quad \text{gdzie} \quad a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (x_B \neq x_A)$$

Równanie ogólne prostej

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{gdzie} \quad A, B, C \in \mathbb{R} \quad \text{ i } \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

- Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox .
- Jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy .
- Jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

Proste równoległe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

Proste prostopadłe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

Odległość punktu od prostej

Odległość d punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ jest równa:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Równanie okręgu

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci ogólnej:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

gdzie $c = a^2 + b^2 - r^2$

Przekształcenia geometryczne

- Symetria osiowa S_{Ox} względem osi Ox przekształca:

punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x, -y)$

- Symetria osiowa S_{Oy} względem osi Oy przekształca:

punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, y)$

- Symetria środkowa S_K względem punktu $K = (a, b)$ przekształca:

punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (2a - x, 2b - y)$

W szczególności symetria środkowa względem początku układu współrzędnych przekształca:

punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, -y)$

Pole trójkąta

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$ jest równe:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

Współrzędne środka ciężkości trójkąta

Współrzędne środka ciężkości $S = (x_S, y_S)$ trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$, czyli punktu przecięcia jego środkowych:

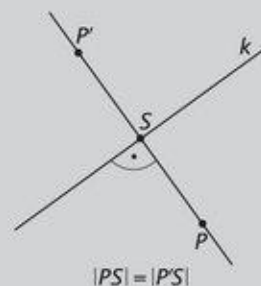
$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Symetria względem prostej

Punkty P i P' są **symetryczne względem prostej k** , jeżeli spełniają warunki:

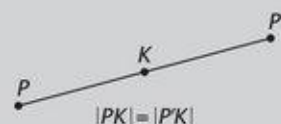
- należą do tej samej prostej prostopadłej do prostej k
- są położone po przeciwnych stronach prostej k i w równych odległościach od tej prostej

Mówimy wówczas, że punkt P' jest obrazem punktu P w **symetrii osiowej** względem prostej k , a prostą k nazywamy **osią symetrii** odcinka PP' (inaczej symetralną odcinka).

**Symetria względem punktu**

Punkty P i P' są **symetryczne względem punktu K** , jeżeli punkt K jest środkiem odcinka PP' .

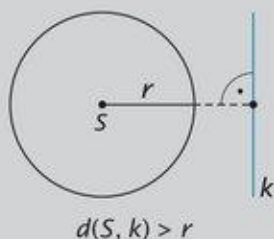
Mówimy wówczas, że punkt P' jest obrazem punktu P w **symetrii środkowej** względem punktu K , a punkt K nazywamy **środkiem symetrii** odcinka PP' .

**Wzajemne położenie prostej i okręgu**

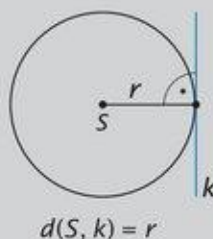
r — promień okręgu

$d(S, k)$ — odległość środka okręgu od prostej k

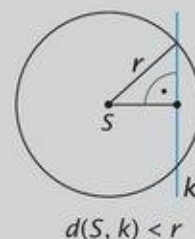
- prosta rozłączna z okręgiem



- styczna do okręgu



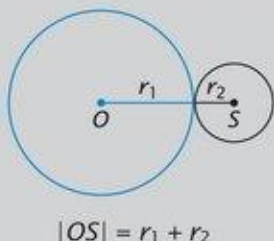
- sieczna okręgu

**Wzajemne położenie dwóch okręgów**

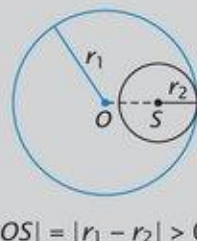
r_1, r_2 — promienie okręgów

$|OS|$ — odległość między środkami okręgów

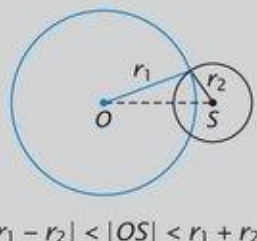
- okręgi styczne zewnętrznie



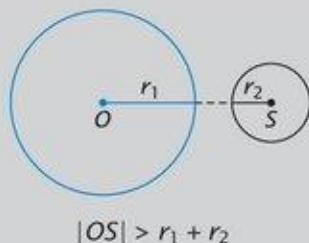
- okręgi styczne wewnętrznie



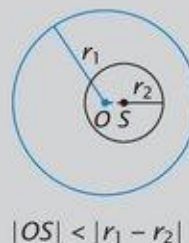
- okręgi przecinające się



- okręgi rozłączne zewnętrznie



- okręgi rozłączne wewnętrznie



ZADANIA



Zadanie 1. (0-1)

IX.1

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dane są proste k oraz l o równaniach $y = \frac{1}{3}x - 2$ i $y = -3x + 6$. Proste k oraz l :

- A. nie mają punktów wspólnych. C. przecinają się w punkcie $P = (3, -1)$.
B. są prostopadłe. D. pokrywają się.

Zadanie 2. (0-1)

IX.1

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są prosta k o równaniu $y = \frac{\sqrt{7}}{7}x + 3$ oraz prosta l o równaniu $y = \sqrt{7}x - 3$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Proste k oraz l :

- A. są równoległe. C. przecinają się w punkcie należącym do II ćwiartki układu współrzędnych.
B. są prostopadłe. D. przecinają się w punkcie $P = (\sqrt{7}, 4)$.

Zadanie 3. (0-1)

IX.1

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) proste o równaniach $y = -5x + 9$ i $y = 3x - 7$ przecinają się w punkcie P .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punkt P ma współrzędne:

- A. $(-1, 2)$ B. $(2, -1)$ C. $(2, 1)$ D. $(-2, -1)$

Zadanie 4. (0-1)

IX.1

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są proste o równaniach $y = -2x - 5$ i $y = x + 10$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punkt przecięcia tych prostych należy do prostej o równaniu:

- A. $y = x - 10$ B. $y = x$ C. $y = 3x$ D. $y = -\frac{1}{3}x + 4$

Zadanie 5. (0-1)

IX.1

Proste o równaniach $y = \frac{1}{2}x + 3$ i $y = -\frac{2}{3}x + b$ przecinają się w punkcie leżącym na osi x kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y) .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika stąd, że:

- A. $b = 3$ B. $b = -4$ C. $b = 4$ D. $b = 2$

Zadanie 6. (0-1)

IX.1

Proste o równaniach $y = -2x + 10$ i $y = 3x - 5b$ przecinają się w punkcie leżącym na osi y kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y) .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika stąd, że:

- A. $b = -6$ B. $b = 6$ C. $b = 5$ D. $b = -2$

**Zadanie 7. (0-1)****IX.1**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dane są:

- prosta k o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 5$,
- prosta l o równaniu $y - 1 = -2x$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Proste k i l :

- A. się pokrywają. C. są prostopadłe.
B. nie mają punktów wspólnych. D. przecinają się pod kątem 30° .

**Zadanie 8. (0-2)****IX.1**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dana jest prosta k o równaniu $y = -3x + 1$.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

1. Jedną z prostych równoległych do prostej k jest prosta o równaniu:

- A. $y = 3x + 2$ B. $y = -3x + 2$ C. $y = \frac{1}{3}x + 1$ D. $y = -\frac{1}{3}x + 1$

2. Jedną z prostych prostopadłych do prostej k jest prosta o równaniu:

- E. $y = \frac{1}{3}x + 2$ F. $y = -\frac{1}{3}x + 2$ G. $y = 3x + 1$ H. $y = -3x + 1$

Zadanie 9. (0-1)**IX.1**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są proste k oraz l o równaniach $y = -\frac{1}{3}mx - 8$ i $y = 2x + 4m + 3mx$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Proste k oraz l są równoległe dla:

- A. $m = -2$ B. $m = -\frac{3}{4}$ C. $m = -\frac{3}{5}$ D. $m = -4$

Zadanie 10. (0-1)**IX.1**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są proste k oraz l o równaniach $y = 3x - 5m$ i $y = x + 3 - mx$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Proste k oraz l są prostopadłe dla:

- A. $m = -\frac{1}{3}$ B. $m = \frac{4}{3}$ C. $m = \frac{2}{3}$ D. $m = \frac{1}{3}$

**Zadanie 11. (0-1)****IX.1**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , rozważamy dwie proste o równaniach $y = a + bx$ oraz $y = -\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2x$, gdzie $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

Dokończ zdanie, tak aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dla $a = 2$ i $b = -\frac{3}{2}$ rozważane proste są:

A.	prostopadłe,	ponieważ	1.	$a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -1$.
			2.	$(a + b) \cdot \left(-\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2\right) = -1$.
B.	równoległe,		3.	$b = -\frac{2}{3}b^2$.

Zadanie 12. (0-1)**IX.1**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są proste k oraz l o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$, gdzie $b_1 = b_2$.

Dokończ zdanie, tak aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dla $a_1 = \frac{1}{7-4\sqrt{3}}$ i $a_2 = -\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$ proste k oraz l są:

A.	prostopadłe,	ponieważ	1.	$b_1 = b_2$.
B.	równoległe,		2.	$a_1 \cdot a_2 = -1$.
			3.	$a_1 - 7 = a_2 + 7$.

**Zadanie 13. (0-1)****IX.1**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są proste k oraz l o równaniach:

$$k: y = \frac{2}{3}x \quad l: y = -\frac{3}{2}x + 13$$

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1., 2. albo 3.

Proste k oraz l :

A.	są prostopadłe	i przecinają się w punkcie P o współrzędnych	1.	$(-6, -4)$.
B.	nie są prostopadłe		2.	$(6, 4)$.
			3.	$(-6, 4)$.

Zadanie 14. (0-2)**IX.1**

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

1. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $-3x + 4y - 2 = 0$ jest równoległa do prostej o równaniu:

A. $4x + 3y - 3 = 0$ B. $y = 4x + \frac{3}{4}$ C. $y = -0,75x + 2$ D. $3x - 4y = 0$

2. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $4x - 3y - 6 = 0$ jest prostopadła do prostej o równaniu:

E. $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{6}$ F. $y = -\frac{3}{4}x + 1$ G. $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$ H. $y = -\frac{4}{3}x - 6$

**Zadanie 15. (0-1)****IX.2**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dana jest prosta k o równaniu $y = 3x + b$, przechodząca przez punkt $A = (-1, 3)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik b w równaniu tej prostej jest równy:

A. 0 B. 6 C. -10 D. 8

Zadanie 16. (0-1)**IX.2**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $A = (103, -72)$ i $B = (130, -90)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prosta przechodząca przez punkty A i B jest równoległa do prostej KL , gdy:

A. $K = (-72, 103)$ i $L = (90, 130)$ C. $K = (-7, 10)$ i $L = (-15, 22)$
 B. $K = (12, 19)$ i $L = (21, 25)$ D. $K = (-12, 19)$ i $L = (-21, 25)$

Zadanie 17. (0-1)

IX.2

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dana jest prosta l o równaniu $y = -\sqrt{5}x + \sqrt{3}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Prosta o równaniu $y = \sqrt{5}x$ jest równoległa do prostej l i jednocześnie przechodzi przez początek układu współrzędnych.	P	F
Prosta o równaniu $y = \frac{\sqrt{5}}{5}x + 5$ jest prostopadła do prostej l i jednocześnie przechodzi przez punkt $(0, -5)$.	P	F



Zadanie 18. (0-1)

IX.2

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dane są punkty $A = (1, 2)$ oraz $B = (2m, m)$, gdzie m jest liczbą rzeczywistą, oraz prosta k o równaniu $y = -x - 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prosta przechodząca przez punkty A i B jest równoległa do prostej k , gdy:

- A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = 2$

Zadanie 19. (0-1)

IX.2

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (6, -5)$ i $B = (8, 3)$ są końcami cięciwy okręgu o środku w punkcie $S = (4, -1)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prosta równoległa do cięciwy AB i przechodząca przez punkt S jest opisana równaniem:

- A. $y = -4x + 15$ B. $y = 4x + 8$ C. $y = 4x - 17$ D. $y = -x + 3$

Zadanie 20. (0-1)

IX.2

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dana jest prosta l o równaniu $4x - 3y + 1 = 0$ i punkt $P = (-12, 8)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prosta przechodząca przez punkt P i prostopadła do prostej l jest opisana równaniem:

- A. $4x + 3y + 24 = 0$ B. $y = -\frac{3}{4}x - 1$ C. $3x + 4y + 24 = 0$ D. $y = \frac{4}{3}x + 24$

Zadanie 21. (0-1)

IX.2

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $K = (-3, \sqrt{3} + 2)$ i $L = (\sqrt{3}, 1)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta nachylenia prostej przechodzącej przez punkty K i L do osi x układu współrzędnych jest równy:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $-\sqrt{3}$

Zadanie 22. (0-1)

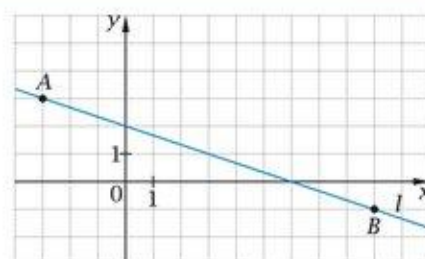
IX.2

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dana jest prosta l przechodząca przez punkty A i B . Obie współrzędne punktów A i B są liczbami całkowitymi (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prosta l jest opisana równaniem kierunkowym:

- A. $y = -3x - 6$ B. $y = \frac{1}{3}x + 4$ C. $y = -\frac{1}{3}x + 2$ D. $y = -3x + 2$

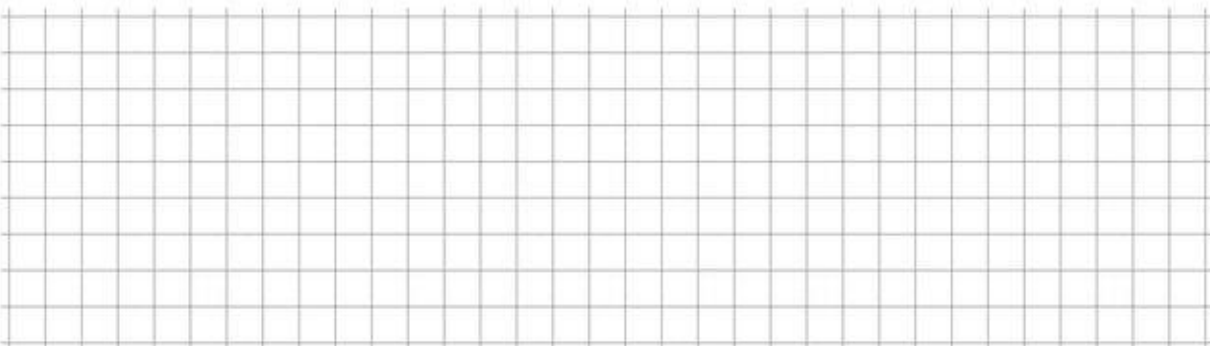


Zadanie 23. (0-1)**IX.2**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dane są punkty $A = (1, 1)$, $B = (-4, -2)$ i $C = (2t, 3t - 5)$, gdzie t jest liczbą rzeczywistą.

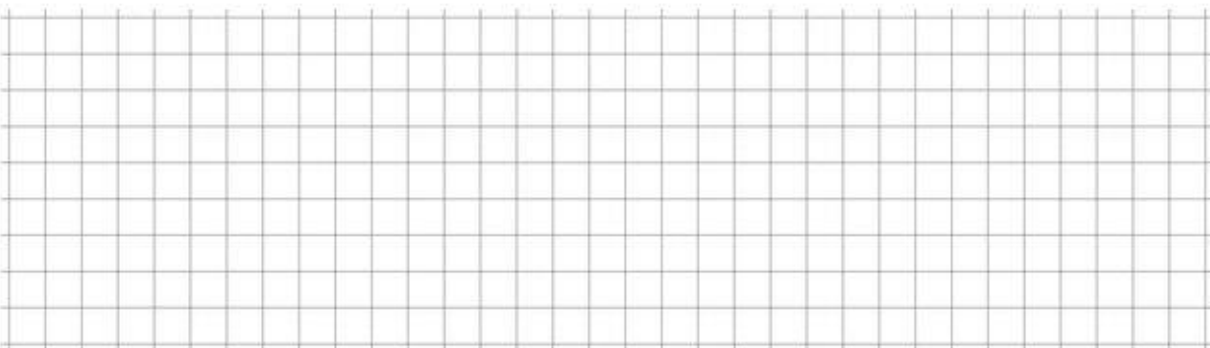
Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Punkty A , B i C są współliniowe dla $t = \dots\dots\dots$.

**Zadanie 24. (0-2)****IX.2**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $B = (2, -6)$ i $D = (-2, 4)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

Wyznacz równanie prostej zawierającej przekątną AC tego kwadratu. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 25. (0-4)****IX.2**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $A = (0, -3)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$. Bok BC tego równoległoboku zawiera się w prostej o równaniu $y = -5x + 21$, a bok DC — w prostej o równaniu $y = x + 3$.

Wyznacz współrzędne wierzchołków B , C i D tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.



Zadanie 26. (0-4)**IX.2**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (-3, -1)$ i $C = (9, 5)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu $ABCD$. O wierzchołku D tego rombu wiadomo, że należy do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D tego rombu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 27.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dana jest prosta l o równaniu $2x + 4y - 5 = 0$.

Zadanie 27.1. (0-2)**IX.2**

Znajdź równanie prostej m równoległej do prostej l i przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 27.2. (0-2)**IX.2**

Znajdź równanie prostej k prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt $(-6, 2)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 28. (0-2)**IX.3**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wierzchołkami równoległoboku $ABCD$ są punkty:

$$A = (1, 4) \quad B = (9, 4) \quad C = (5, 7) \quad D = (13, 7)$$

Oblicz wysokość równoległoboku $ABCD$ opuszczoną na bok BC . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 29.**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest trójkąt ABC . Wierzchołki tego trójkąta mają współrzędne: $A = (-15, -8)$, $B = (-6, 4)$, $C = (-19, -5)$.

Zadanie 29.1. (0-2)**IX.3**

Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.

**Zadanie 29.2. (0-3)****IX.2**

Wierzchołki trójkąta ABC są trzema wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Odcinek AC jest przekątną tego równoległoboku.

Oblicz współrzędne wierzchołka D . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 29.3. (0-1)****IX.2**

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Punkt S przecięcia środkowych trójkąta ABC ma współrzędne $S = (\dots, \dots)$.

**Zadanie 30. (0-1)****IX.3**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest kwadrat $ABCD$. Wierzchołki $A = (-2, 1)$ i $C = (4, 5)$ są końcami przekątnej tego kwadratu.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

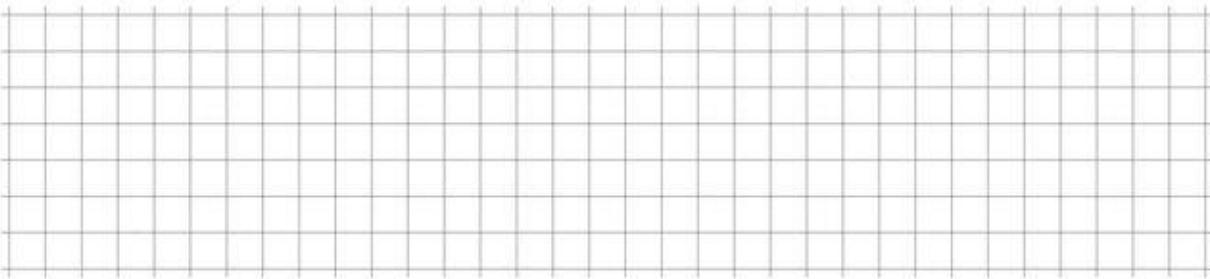
Długość przekątnej kwadratu $ABCD$ jest równa:

- A. 10 B. $2\sqrt{13}$ C. $2\sqrt{10}$ D. 8

Zadanie 31. (0-4)**IX.3**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach: $A = (-5, -4)$, $B = (3, 0)$ i $C = (-1, 4)$.

Oblicz długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 32. (0-1)****IX.3**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach: $A = (-5, -1)$, $B = (6, 1)$ i $C = (-2, 5)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Kąt ABC jest najmniejszym wewnętrznym kątem trójkąta ABC .	P	F
Miara kąta wewnętrznego trójkąta ABC przy wierzchołku C jest równa 90° .	P	F

Zadanie 33. (0-1)**IX.3**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (-6, -4)$ i $C = (4, 0)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$.

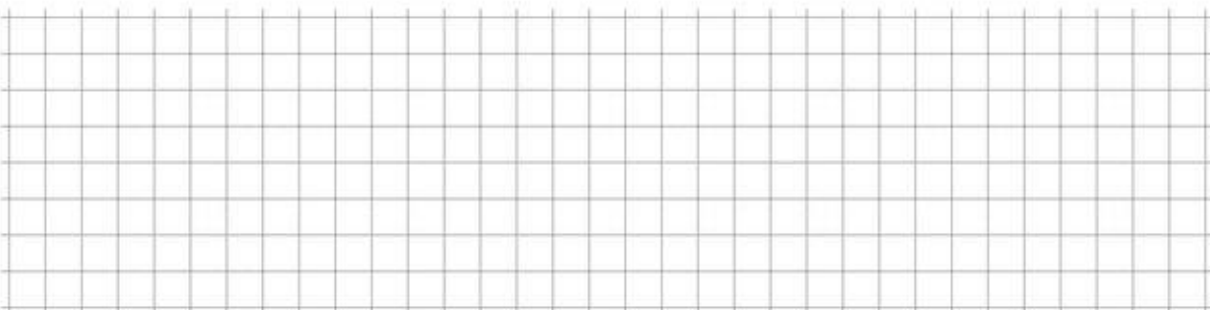
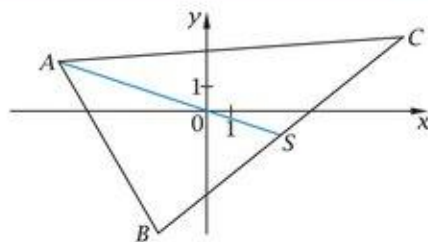
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Pole kwadratu $ABCD$ jest równe 116.	P	F
Obwód kwadratu $ABCD$ jest równy $4\sqrt{58}$.	P	F

Zadanie 34. (0-2)**IX.3**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest trójkąt ABC , którego wierzchołki mają współrzędne $A = (-6, 2)$, $B = (-2, -5)$ i $C = (8, 3)$. W trójkącie tym poprowadzono środkową AS (zobacz rysunek).

Oblicz długość środkowej AS . Zapisz obliczenia.



**Zadanie 35. (0-4)****IX.3**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest trójkąt ABC . Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = -3x + 6$. Wierzchołki A i B leżą odpowiednio na osi Oy oraz Ox . Wierzchołek C ma współrzędne $(3, 7)$.

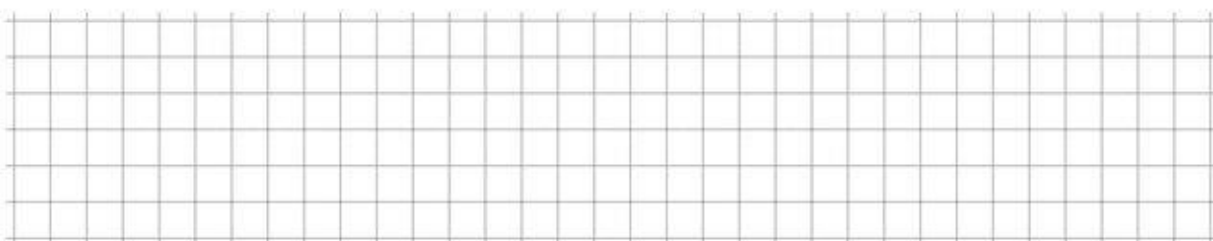
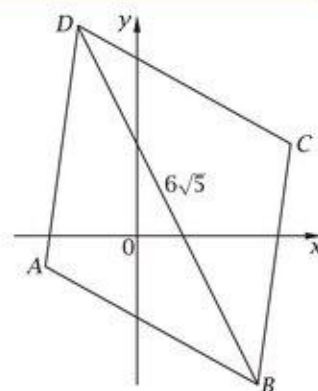
Oblicz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 36. (0-2)****IX.3**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest romb $ABCD$, w którym $A = (-3, -1)$, $C = (5, 3)$. Przekątna BD tego rombu ma długość $6\sqrt{5}$ (zobacz rysunek).

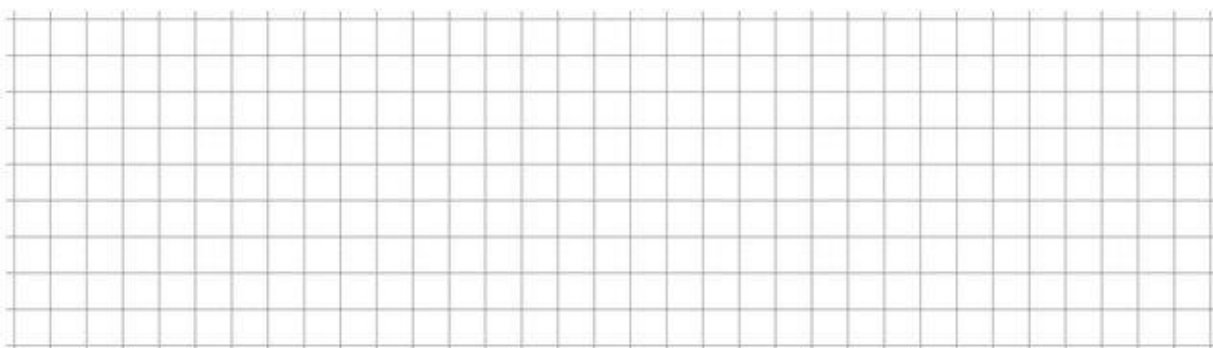
Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

1. Przekątne rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie $(\dots, \dots)$.
2. Pole rombu $ABCD$ jest równe $\dots$.

**Zadanie 37. (0-3)****IX.3**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $K = (-3, -7)$ i $L = (6, -2)$.

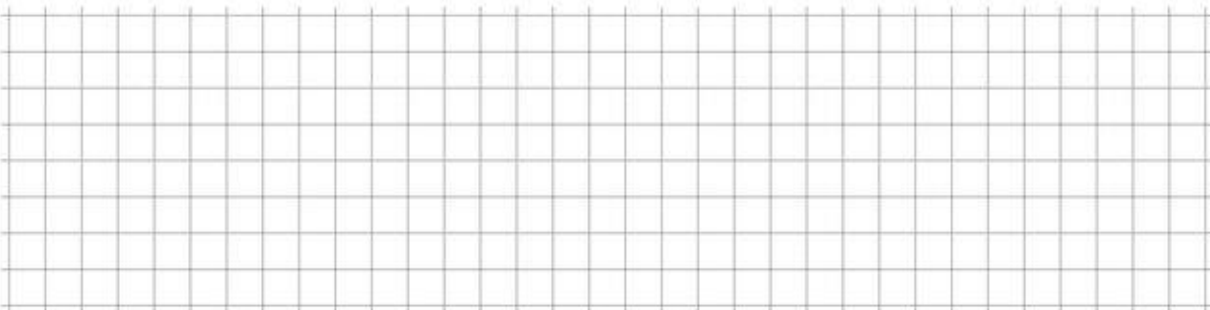
Wyznacz współrzędne punktu P , który leży na osi x układu współrzędnych i jest równo odległy od punktów K i L . Zapisz obliczenia.



Zadanie 38. (0-3)**IX.3**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest punkt $P = (-2, 2)$ oraz prosta k przechodząca przez punkty $A = (1, 1)$ i $B = (2, 4)$.

Wyznacz współrzędne takich punktów należących do prostej k , których odległość od punktu P jest równa 10. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 39. (0-2)****IX.3**

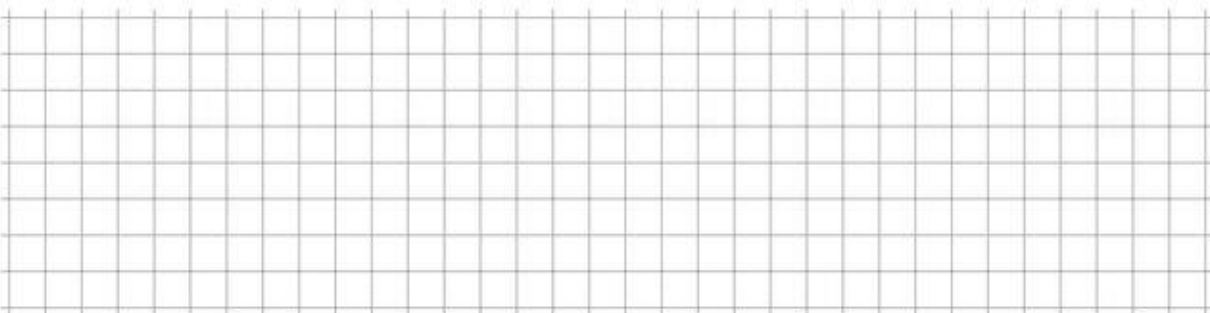
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $A = (t, 2)$ i $B = (9, -3)$, gdzie t jest pewną liczbą rzeczywistą.

Oblicz, dla jakich wartości t długość odcinka AB jest równa 13. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 40. (0-3)****IX.3**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dana jest prosta k o równaniu $y = \frac{1}{4}x + 6$ oraz punkty $A = (4, -3)$ i $B = (12, 1)$.

Wyznacz współrzędne takiego punktu P , który należy do prostej k i jego odległości od punktów A i B są równe. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 41. (0-1)****IX.4**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $A = (-2, 3)$ i $B = (8, -7)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okrąg, którego średnicą jest odcinek AB , można opisać za pomocą równania:

A. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 10\sqrt{2}$

C. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 50$

B. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5\sqrt{2}$

D. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 200$

IX.4

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest okrąg o środku $S = (2, -5)$ i promieniu $r = 3$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie tego okręgu ma postać:

- A. $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$
 B. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 3$
 C. $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 3$
 D. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$



IX.4

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest okrąg O o równaniu $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okrąg O przecina oś Oy w punktach o współrzędnych:

- A. $(0, 1)$ i $(0, 5)$ B. $(0, 1)$ i $(0, -5)$ C. $(1, 0)$ i $(5, 0)$ D. $(0, -1)$ i $(0, 5)$



IX.4

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dane są: punkt $A = (8, 11)$ oraz okrąg o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odległość punktu A od środka tego okręgu jest równa:

- A. 25 B. 13 C. $\sqrt{125}$ D. $\sqrt{265}$



IX.4

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg O o równaniu $x^2 + y^2 = 2$ oraz prosta k o równaniu $y = m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiedni przedział, tak aby zdanie było prawdziwe.

Okrag O i prosta k mają dwa punkty wspólne tylko wtedy, gdy $m \in$



IX.4

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest trójkąt prostokątny ABC o wierzchołkach $A = (-2, -1)$, $B = (4, 7)$ i $C = (-4, 3)$. Na tym trójkącie opisano okrąg.

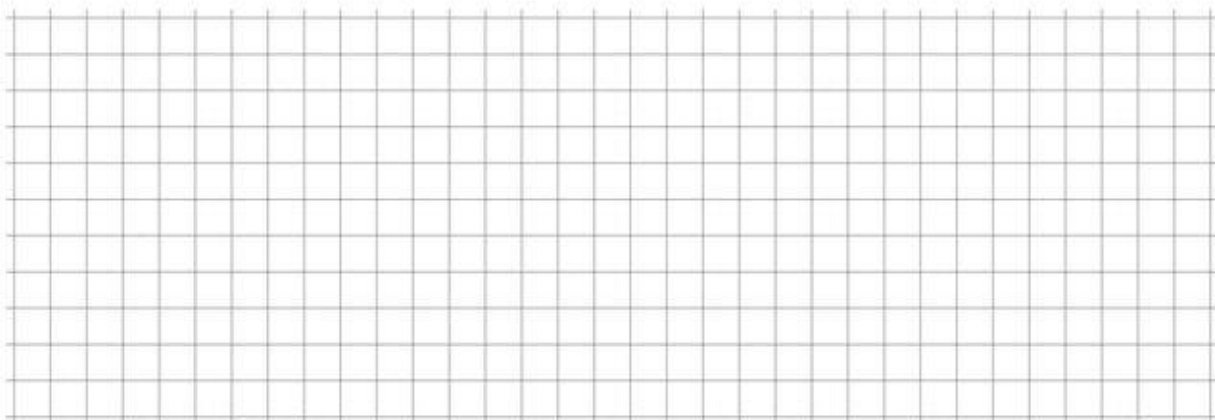
Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC . Zapisz obliczenia.



**Zadanie 47. (0-4)****IX.4**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , punkty $A = (-8, 12)$ i $B = (-2, 4)$ są końcami cięciwy okręgu O . Środek tego okręgu leży na prostej k o równaniu $y = 4x + 2$.

Wyznacz współrzędne środka okręgu O i promień tego okręgu. Zapisz obliczenia.

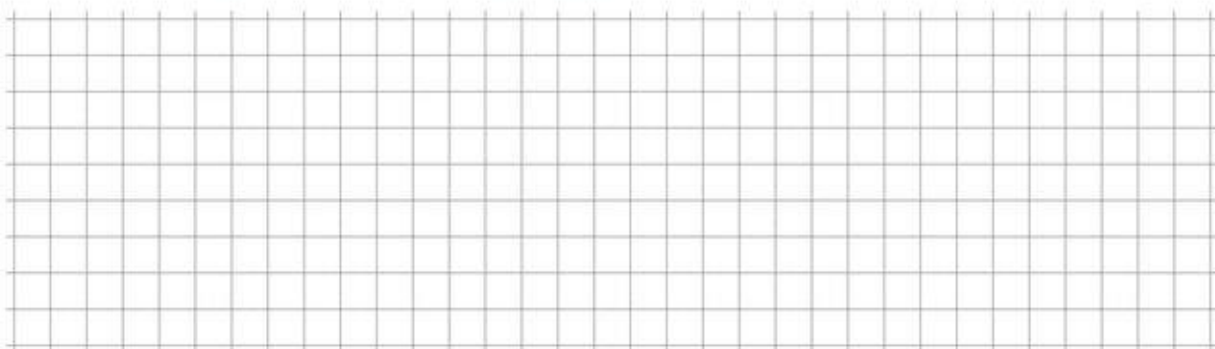
**Zadanie 48.**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $A = (-8, 5)$ i $B = (4, 1)$.

Zadanie 48.1. (0-2)**IX.4**

Punkt A jest środkiem okręgu O_1 , a odcinek AB jest promieniem tego okręgu.

Wyznacz równanie okręgu O_1 . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 48.2. (0-4)****IX.4**

Punkty A i B należą do okręgu O_2 , a środkiem tego okręgu jest punkt leżący na osi x układu współrzędnych.

Wyznacz równanie okręgu O_2 . Zapisz obliczenia.



Zadanie 49.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest okrąg O określony równaniem $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Zadanie 49.1. (0-2)**IX.4**

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

1. Do okręgu O nie należy punkt o współrzędnych:

- A. $(1, 1)$ B. $(0, 0)$ C. $(-1, 5)$ D. $(-7, 7)$

2. Liczba punktów wspólnych okręgu O z osiami układu współrzędnych jest równa:

- E. 0 F. 2 G. 3 H. 4

Zadanie 49.2. (0-1)**IX.4**

Do okręgu O poprowadzono styczne prostopadłe do osi x układu współrzędnych oraz styczne prostopadłe do osi y układu współrzędnych.

Podaj współrzędne wierzchołków czworokąta ograniczonego tymi stycznymi.

**Zadanie 50.**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest okrąg O określony równaniem: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Zadanie 50.1. (0-1)**IX.4**

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

1. Środek S okręgu O ma współrzędne:

- A. $S = (2, -3)$ B. $S = (-2, -3)$ C. $S = (-2, 3)$ D. $S = (2, 3)$

2. Promień r okręgu O jest równy:

- E. $r = 25$ F. $r = 10$ G. $r = 5$ H. $r = 2$

Zadanie 50.2. (0-2)**IX.4**

Oblicz odcięte punktów przecięcia okręgu O z osią x układu współrzędnych. Zapisz obliczenia.



Zadanie 51.

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest okrąg O określony równaniem $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$ i punkt $P = (1, 2)$ należący do tego okręgu.

Zadanie 51.1. (0-2)**IX.4**

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Do okręgu O należy punkt $(-1, -2)$.	P	F
Do prostej o równaniu $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2} + 2$ należy punkt P .	P	F
Środek okręgu O i punkt P należą do prostej o równaniu $y = -x + 3$.	P	F

Zadanie 51.2. (0-3)**IX.4**

Wyznacz równanie stycznej do okręgu O w punkcie P . Zapisz obliczenia.

Zadanie 52. (0-3)**IX.4**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi o równaniach:

$$(x - m)^2 + (y + m)^2 = 4 \quad (x + 2m)^2 + (y - 3m)^2 = 25$$

gdzie m jest pewną liczbą dodatnią.

Wyznacz wszystkie wartości m , dla których te okręgi są wewnętrznie rozłączne. Zapisz obliczenia.

Zadanie 53. (0-4)**IX.4**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi o równaniach:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4 \quad (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = r^2, \quad \text{gdzie } r > 0$$

Wyznacz wszystkie wartości r , dla których te okręgi mają dokładnie dwa punkty wspólne. Zapisz obliczenia.

Zadanie 54. (0-2)**IX.5**

Dany jest punkt $P = (3, -2)$ oraz proste k , l i m o równaniach:

$$k: x = -2 \quad l: y = 1 \quad m: y = x - 1$$

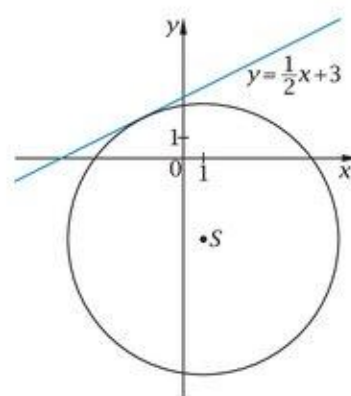
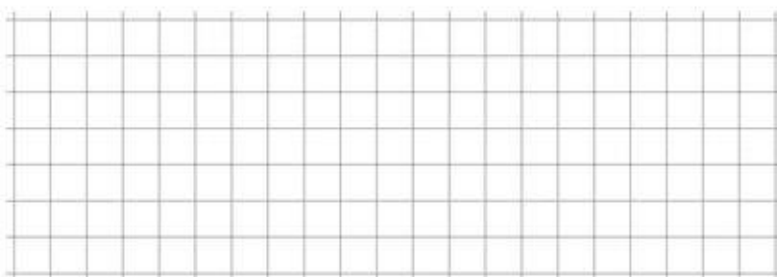
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Suma odległości punktu P od prostych k i l jest równa 8.	P	F
Odległość punktu P od prostej k jest liczbą pierwszą.	P	F
Odległość punktu przecięcia prostych k i l od prostej m jest większa od 3.	P	F

Zadanie 55. (0-3)**IX.5**

Okrąg O o środku w punkcie $S = (1, -4)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 3$ (zobacz rysunek).

Wyznacz i zapisz równanie okręgu O . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 56.**

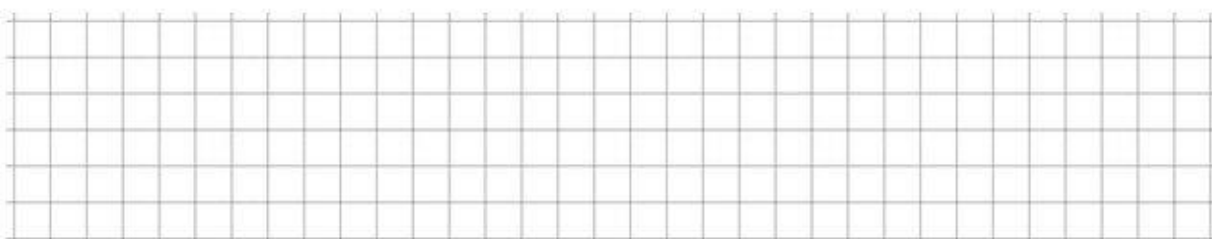
Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dane są: okrąg O o środku w punkcie $S = (3, -4)$ i prosta k o równaniu $2x - y - 11 = 0$. Okrąg O jest styczny do prostej k w punkcie P .

Zadanie 56.1. (0-2)**IX.5**

Wyznacz i zapisz równanie okręgu O . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 56.2. (0-2)****IX.5**

Oblicz współrzędne punktu P , w którym okrąg O jest styczny do prostej k . Zapisz obliczenia.



Zadanie 57. (0-1)**IX.5**

Dany jest okrąg O o środku $S = (-1, -1)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$ oraz prosta l o równaniu $x = 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Liczba punktów wspólnych prostej l i okręgu O jest równa:

A.	0,	ponieważ odległość środka okręgu od prostej l jest	1.	równa r .
B.	1,		2.	mniejsza od r .
C.	2,		3.	większa od r .

Zadanie 58. (0-4)**IX.5**

Dane są okrąg O o równaniu $(x - 2m)^2 + (y - m)^2 = 25$ i prosta k o równaniu $mx + my + 4 = 0$, gdzie $m > 0$.

Wyznacz wszystkie wartości m , dla których prosta k ma dwa punkty wspólne z okręgiem O . Zapisz obliczenia.

Zadanie 59. (0-1)**IX.6**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są prosta l o równaniu $y = -x - 4$ i okrąg O opisany równaniem $(x + 3)^2 + y^2 = 25$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cięciwa wycięta z prostej l przez okrąg O ma długość:

- A. $5\sqrt{2}$ B. 14 C. 8 D. $7\sqrt{2}$

**Zadanie 60. (0-3)****IX.6**

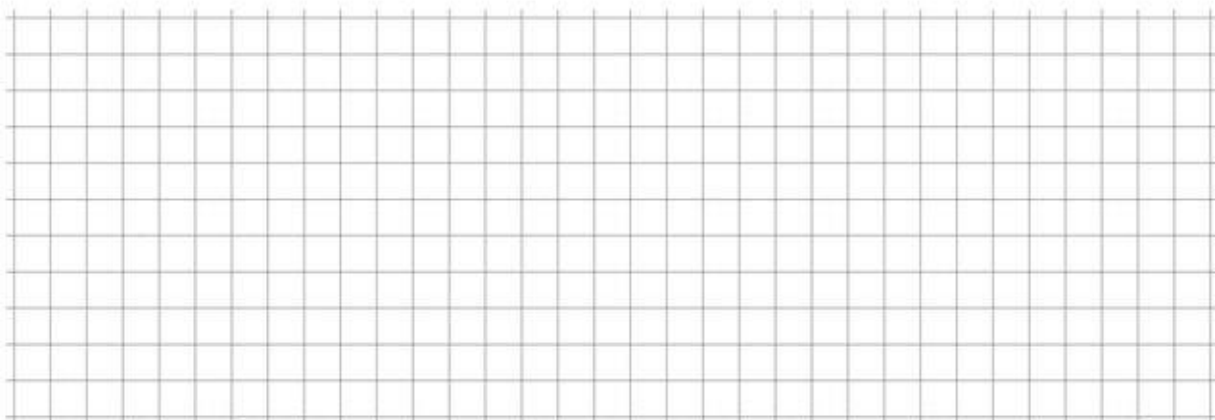
Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Funkcja liniowa g określona jest wzorem $g(x) = -x + 5$.

Oblicz współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji $y = f(x)$ oraz funkcji $y = g(x)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 61. (0-3)**IX.6**

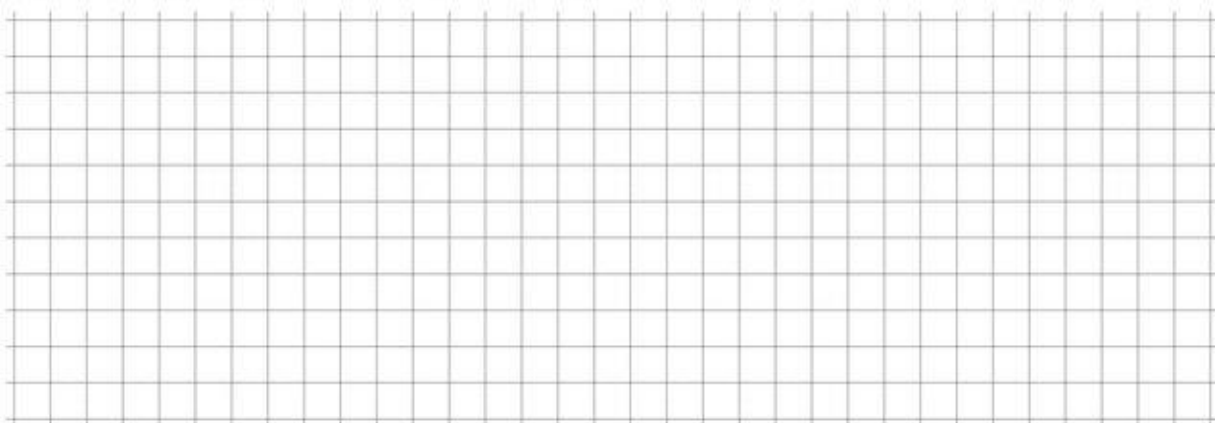
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są prosta l o równaniu $y = x - 1$ i okrąg O o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Prosta l przecina okrąg O w punktach A i B .

Wyznacz pole kwadratu, dla którego punkty A i B są końcami przekątnej.

**Zadanie 62. (0-3)****IX.6**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są prosta l o równaniu $y = -5x + 1$ i parabola o równaniu $y = -x^2 - 3$. Prosta l przecina tę parabolę w punktach A i B .

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 63. (0-1)****IX.7**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest odcinek AB , w którym $A = (7, 9)$ i $B = (3, 15)$. Punkt S jest środkiem odcinka AB .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obrazem punktu S w symetrii względem osi y układu współrzędnych jest punkt:

- A. $(-5, 12)$ B. $(5, 12)$ C. $(-5, -12)$ D. $(5, -12)$

Zadanie 64. (0-1)**IX.7**

Punkt $A' = (3 - 4a, -b^2 - 5)$ jest obrazem punktu $A = (a^2 + 1, 4 - 2b)$ w symetrii środkowej względem początku kartezjańskiego układu współrzędnych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika stąd, że:

- A. $a = -2$ i $b = 1$ B. $a = 2$ i $b = 1$ C. $a = 2$ i $b = -1$ D. $a = -2$ i $b = -1$

**Zadanie 65. (0-1)****IX.7**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dane są punkty $A = (1, 2)$ oraz $B = (3, 7)$. Punkty A_O oraz B_O są odpowiednio obrazami punktów A i B w symetrii środkowej o środku w punkcie $O = (0, 0)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A_O i B_O jest równy:

- A. $\frac{5}{2}$ B. $-\frac{5}{2}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$

Zadanie 66. (0-1)**IX.7**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest równoległobok $ABCD$, którego środkiem symetrii jest punkt $(0, 0)$, a dwa kolejne wierzchołki A i B mają współrzędne $A = (-4, -5)$ i $B = (5, -1)$.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wierzchołki C i D równoległoboku $ABCD$ mają współrzędne: $C = (\dots, \dots)$ i $D = (\dots, \dots)$.

**Zadanie 67. (0-1)****IX.7**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg O o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Obrazem okręgu O w symetrii osiowej względem osi x układu współrzędnych jest okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.	P	F
Obrazem okręgu O w symetrii osiowej względem osi y układu współrzędnych jest okrąg o równaniu $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.	P	F

Zadanie 68. (0-1)**IX.7**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg O o środku w punkcie $S = (5, -7)$ i promieniu $r = 6$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obrazem okręgu O w symetrii środkowej o środku w punkcie $(0, 0)$ jest okrąg o równaniu:

- A. $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 6$ C. $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 36$
 B. $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 6$ D. $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 36$

Zadanie 69. (0-1)**IX.7**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest punkt $P = (-8, -6)$. Punkt P_1 jest obrazem punktu P w symetrii osiowej względem osi y układu współrzędnych, a punkt P_2 jest obrazem punktu P w symetrii osiowej względem osi x układu współrzędnych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Okrąg opisany na trójkącie PP_1P_2 można opisać równaniem:

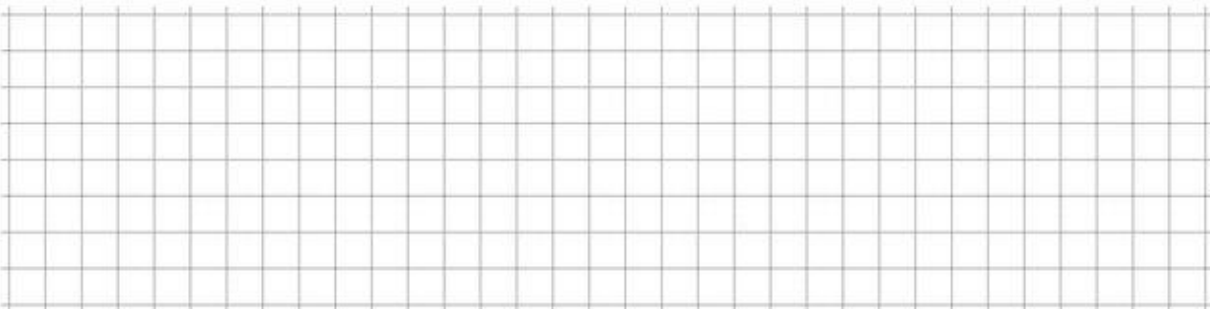
- A. $x^2 + y^2 = 20$ B. $x^2 + y^2 = 10$ C. $x^2 + y^2 = 100$ D. $x^2 + y^2 = 200$

Zadanie 70. (0–4)**IX.7**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest trójkąt $A'B'C'$, w którym:

- punkt A' jest obrazem punktu $A = (-5, 4)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych
- punkt B' jest obrazem punktu $B = (3, 2)$ w symetrii względem osi x układu współrzędnych
- punkt C' jest obrazem punktu $C = (-2, -7)$ w symetrii względem osi y układu współrzędnych

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt $A'B'C'$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 71.**

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) rozpatrujemy trójkąty ABC , w których $A = (1, 0)$, $B = (t, 0)$ i $C = (t + 1, 4 - t)$, gdzie $t \in (1; 4)$.

Zadanie 71.1. (0–2)**IX.7**

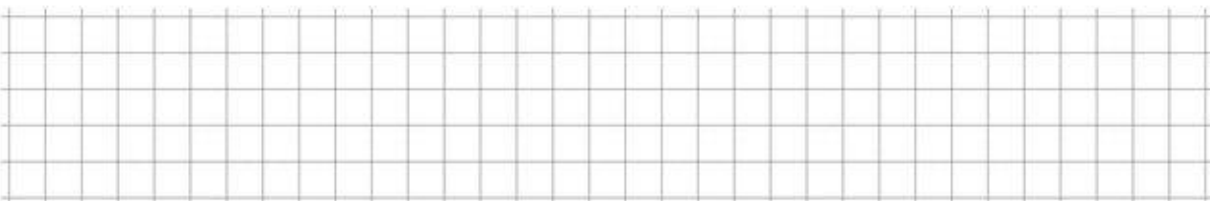
Uzupełnij zdania. Wpisz w wy kropkowanych miejscach odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

1. Obrazem punktu B w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt $B' = (-3\frac{1}{2}, 0)$

dla $t = \dots\dots\dots$.

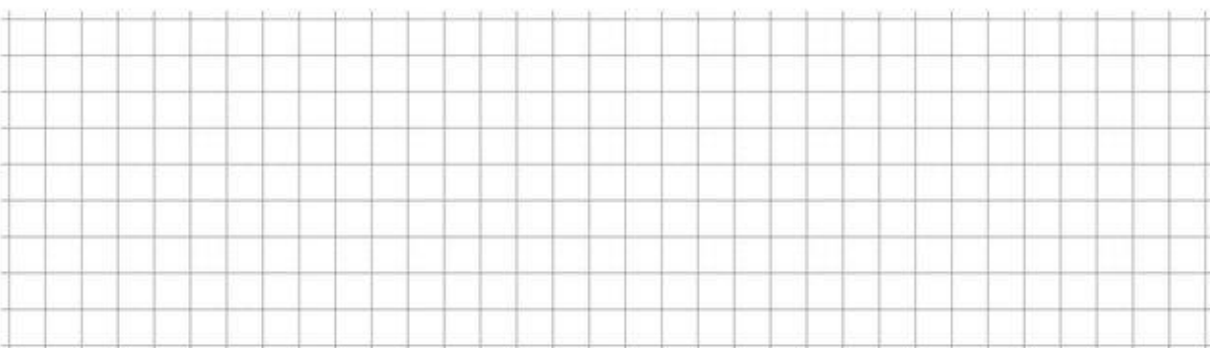
2. Obrazem punktu C w symetrii względem osi x układu współrzędnych jest punkt $C' = (3, -2)$ dla

$t = \dots\dots\dots$.

**Zadanie 71.2. (0–4)****IX.7/XIII**

Trójkąt ABC o największym polu przekształcono w symetrii względem osi y układu współrzędnych.

Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta otrzymanego w wyniku tego przekształcenia. Zapisz obliczenia.



9. STEREOMETRIA

TEORIA

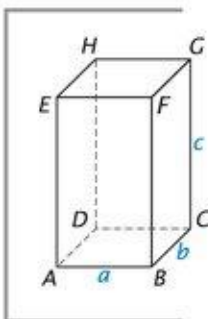
Przyjmujemy oznaczenia:

P_c — pole powierzchni całkowitej

P_p — pole podstawy

P_b — pole powierzchni bocznej

V — objętość

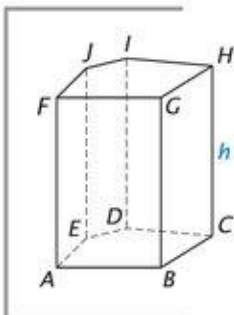


Prostopadłościan

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = abc$$

gdzie a , b , c są długościami krawędzi prostopadłościanu.

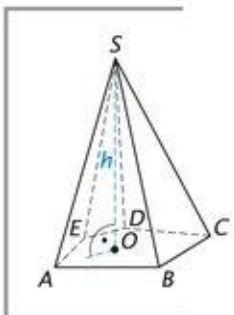


Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

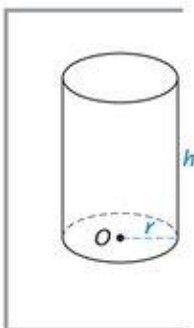
gdzie Ob jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast h — wysokością graniastosłupa.



Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



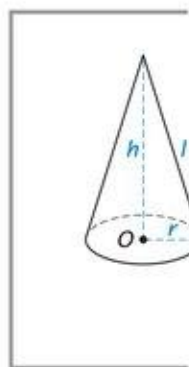
Walec

$$P_b = 2\pi r h$$

$$P_c = 2\pi r (r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie h jest wysokością walca,
 O — środkiem symetrii podstawy walca,
 r — promieniem podstawy walca.

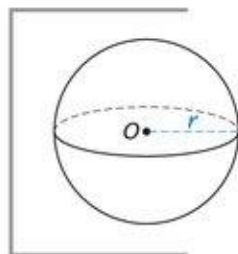
**Stożek**

$$P_b = \pi r l$$

$$P_c = \pi r (r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

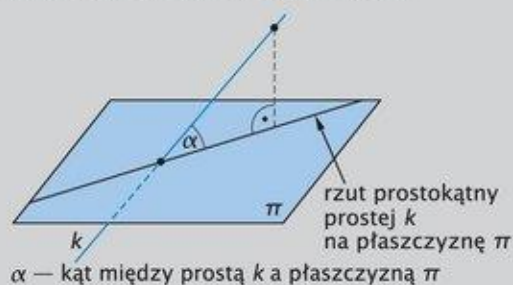
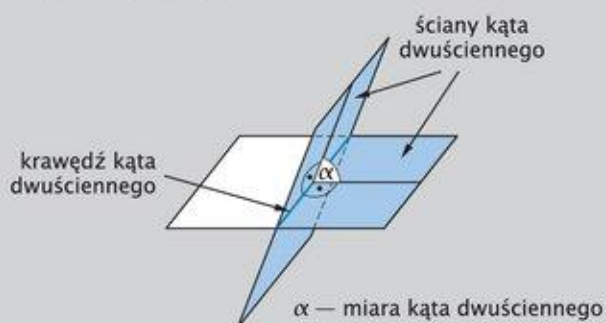
gdzie r jest promieniem podstawy stożka,
 h — jego wysokością,
 natomiast l — tworzącą stożka.
 Punkt O jest środkiem symetrii podstawy stożka.

**Kula**

$$P_c = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

gdzie r jest promieniem kuli,
 natomiast O — środkiem symetrii kuli.

Kąt między prostą a płaszczyzną**Kąt dwuścienny****Graniastosłup n -kątny**

Podstawą graniastosłupa n -kątnego jest wielokąt o n wierzchołkach.

Graniastosłup n -kątny ma $2n$ wierzchołków, $3n$ krawędzi i $(n + 2)$ ściany.

Graniastosłup prosty

Graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, nazywamy **graniastosłupem prostym**. Wszystkie ściany boczne graniastosłupa prostego są prostokątami.



graniastosłup prosty trójkątny



graniastosłup prosty czworokątny



graniastosłup prosty sześciokątny

Graniastosłup prawidłowy

Graniastosłup prosty, w którym podstawy są wielokątami foremnymi (np. trójkątami równobocznymi, kwadratami, sześciokątami foremnymi), nazywamy **graniastosłupem prawidłowym**. Wszystkie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego są przystającymi prostokątami.

Przekątne graniastosłupa

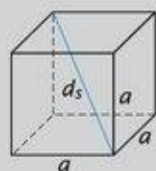
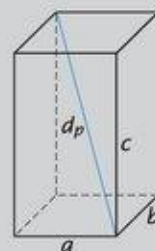
Odcinek łączący dwa wierzchołki graniastosłupa nienależące do tej samej ściany nazywamy **przekątną graniastosłupa**.

Liczba przekątnych graniastosłupa n -kątnego jest równa $n(n-3)$.

Wszystkie przekątne prostopadłościanu mają taką samą długość i przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem symetrii prostopadłościanu.

Długość d_p przekątnej prostopadłościanu, w którym krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka mają długości a , b i c , wyraża się wzorem:

$$d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

**Sześcian**

Graniastosłup, którego wszystkie ściany są kwadratami, nazywamy **sześcianem**.

$$d_s = a\sqrt{3}$$

$$P_c = 6a^2$$

$$V = a^3$$

Kąty w graniastosłupie prostym

α_1 — kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą

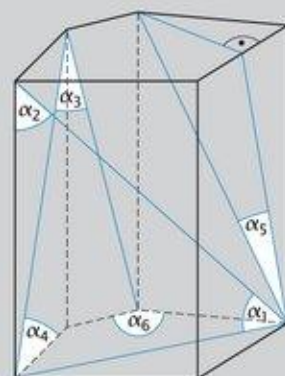
α_2 — kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią boczną

α_3 — kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych

α_4 — kąt między przekątną ściany bocznej a podstawą

α_5 — kąt między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną

α_6 — kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi

**Ostrosłup n -kątny**

Podstawą ostrosłupa n -kątnego jest wielokąt o n wierzchołkach.

Ostrosłup n -kątny ma $(n+1)$ wierzchołków, $2n$ krawędzi i $(n+1)$ ścian.

Ostrosłup prawidłowy

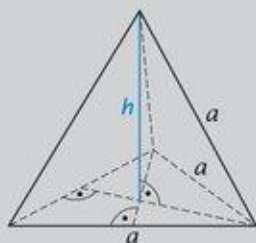
Ostrosłup, w którym podstawa jest wielokątem foremnym (np. trójkątem równobocznym, kwadratem, sześciokątem foremnym), a krawędzie boczne są równej długości, nazywamy **ostrosłupem prawidłowym**. Wszystkie ściany boczne ostrosłupa prawidłowego są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Spodek wysokości ostrosłupa

Punkt wspólny wysokości ostrosłupa i płaszczyzny zawierającej podstawę ostrosłupa nazywamy **spodkiem wysokości ostrosłupa**.

Jeżeli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają równe długości (nachylone są do podstawy pod tym samym kątem), to na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg. Środek tego okręgu jest **spodkiem wysokości ostrosłupa**.

Jeżeli wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod tym samym kątem (wysokości ścian bocznych poprowadzone do krawędzi podstawy mają równe długości), to w podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg. Środek tego okręgu jest **spodkiem wysokości ostrosłupa**.



Czworościan foremny

Ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$P_c = a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Kąty w ostrosłupie

β_1 — kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy

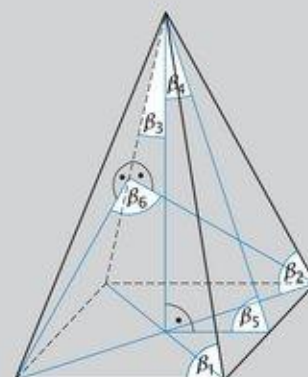
β_2 — kąt między krawędzią boczną ostrosłupa a podstawą

β_3 — kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną

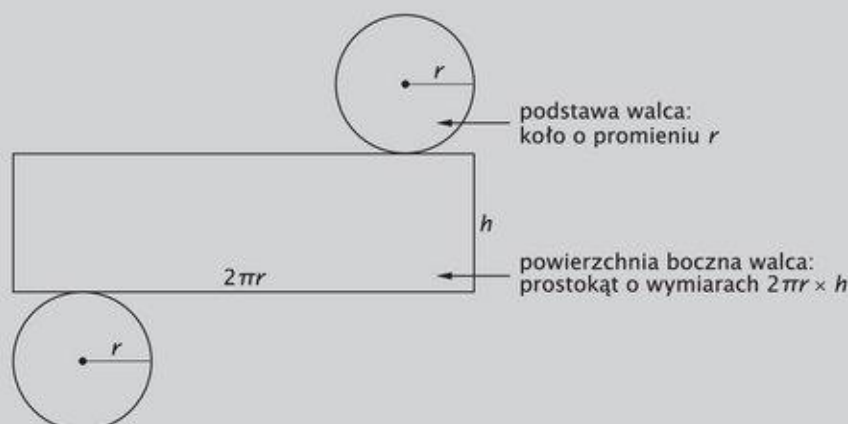
β_4 — kąt między wysokością ostrosłupa a ścianą boczną

β_5 — kąt między ścianą boczną a podstawą

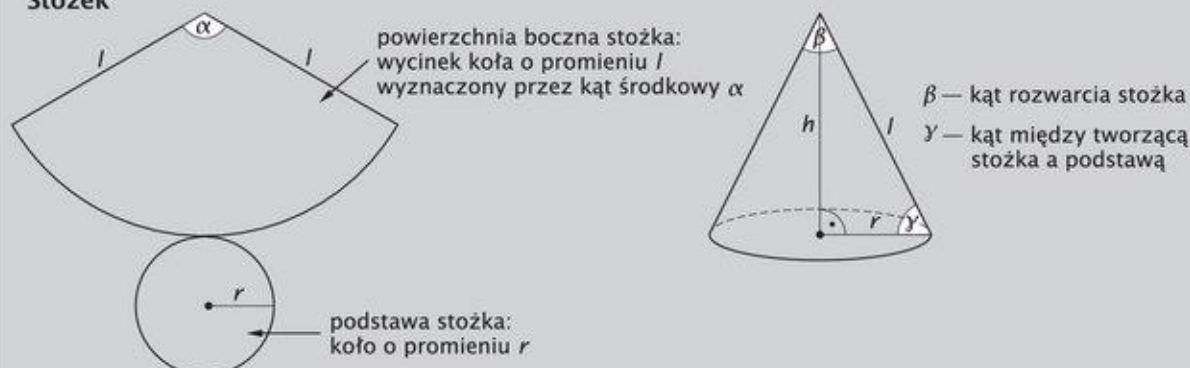
β_6 — kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi



Walec



Stożek



W stożku, którego powierzchnia boczna jest wycinkiem koła o promieniu l wyznaczonym przez kąt środkowy α , a podstawa — kołem o promieniu r , zachodzą równości:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi l^2 = \pi r l \quad \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi l = 2\pi r$$

Bryły podobne

Jeżeli bryła B_1 jest podobna do bryły B_2 w skali k , to:

- stosunek pola powierzchni bryły B_1 do pola powierzchni bryły B_2 jest równy k^2
- stosunek objętości bryły B_1 do objętości bryły B_2 jest równy k^3

ZADANIA

Zadanie 1. (0-2)

X.1

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

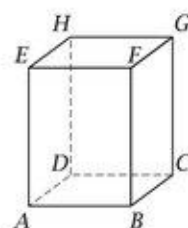
Istnieje graniastosłup, który nie ma przekątnych.	P	F
W graniastosłupie prawidłowym wszystkie przekątne mają równe długości.	P	F
W graniastosłupie, którego podstawami są siedmiokąty wypukłe, liczba przekątnych jest równa 28.	P	F

Zadanie 2. (0-2)

X.1

Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek).

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.



Krawędź AB jest równoległa do czterech innych krawędzi tego prostopadłościanu.	P	F
Krawędź DH jest równoległa do przekątnej ściany $BCGF$ tego prostopadłościanu.	P	F
Krawędź GF jest prostopadła do ośmiu krawędzi tego prostopadłościanu.	P	F



Zadanie 3. (0-1)

X.1

W pewnym ostrosłupie prawidłowym stosunek liczby W wszystkich wierzchołków do liczby K wszystkich krawędzi jest równy $\frac{W}{K} = \frac{3}{5}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Podstawa tego ostrosłupa jest:

- A. kwadrat B. pięciokąt foremny C. sześciokąt foremny D. siedmiokąt foremny

Zadanie 4. (0-1)

X.1

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 5 i 12. Wysokość tego graniastosłupa jest równa 9.

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wy kropkowanym miejscu tak, aby zdanie było prawdziwe.

Długość przekątnej ściany bocznej o największym polu w tym graniastosłupie jest równa



Zadanie 5. (0-1)

X.1

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o wysokości $4\sqrt{6}$ krawędź podstawy ma długość 4.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Krótsza przekątna graniastosłupa jest 3 razy dłuższa od krawędzi podstawy.	P	F
Dłuższa przekątna graniastosłupa ma długość $4\sqrt{10}$.	P	F



Zadanie 6. (0-3)

X.1

Każda z krawędzi podstawy trójkątnej ostrosłupa ma długość $10\sqrt{3}$, a każda jego krawędź boczna ma długość 15.

Oblicz wysokość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

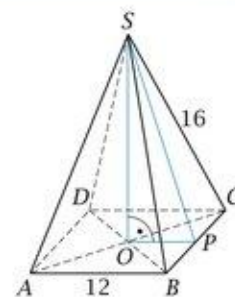
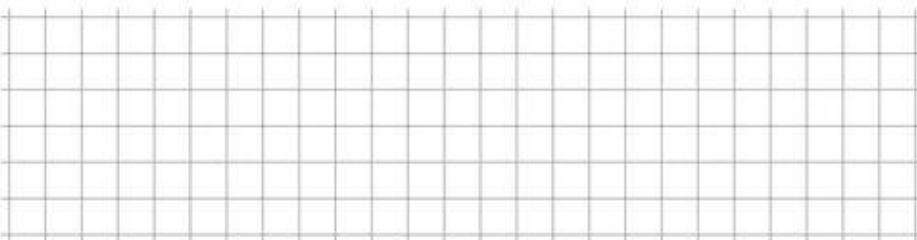


Zadanie 7. (0-2)

X.1

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$, w którym krawędź podstawy i krawędź boczna mają odpowiednio długości 12 i 16. Punkt P jest środkiem krawędzi BC (zobacz rysunek).

Oblicz pole trójkąta OPS . Zapisz obliczenia.

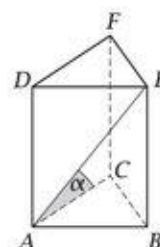
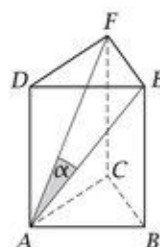
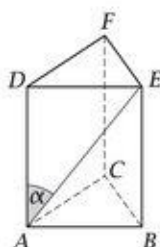
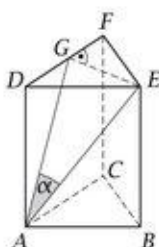


Zadanie 8. (0-1)

X.2/X.3

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ (zobacz rysunek). Na którym z rysunków prawidłowo narysowano, oznaczono i podpisano kąt α pomiędzy ścianą boczną $ACFD$ i przekątną AE ściany bocznej $ABED$ tego graniastosłupa?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\alpha = \angle EAG$ B. $\alpha = \angle EAD$ C. $\alpha = \angle EAF$ D. $\alpha = \angle EAC$ 

Zadanie 9. (0-1)**X.2/X.3**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S wszystkie krawędzie mają jednakową długość.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ASC jest równa:

- A. 30° B. 45° C. 75° D. 90°

Zadanie 10. (0-1)**X.2/X.3**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości 12 wysokość ściany bocznej jest nachylona do podstawy pod kątem 60° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Krawędź podstawy ostrosłupa ma długość:

- A. $4\sqrt{3}$ B. $8\sqrt{3}$ C. $16\sqrt{3}$ D. $24\sqrt{3}$

Zadanie 11. (0-1)**X.2/X.3**

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ma długość 15 i jest nachylona do podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa:

- A. 9 B. $9\sqrt{2}$ C. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 12. (0-1)**X.2/X.3**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o wysokości 4 krawędź boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 45° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa jest równa:

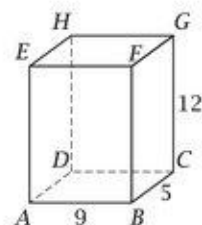
- A. $8\sqrt{3}$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{6}$

Zadanie 13. (0-2)**X.2/X.3**

W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ krawędzie podstawy mają długości 5 i 9, a wysokość wynosi 12 (zobacz rysunek).

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe albo F — jeśli jest fałszywe.

Sinus kąta CBH jest równy $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.	P	F
Tangens kąta CHB jest równy $\frac{1}{3}$.	P	F
Przekątna prostopadłościanu $ABCDEFGH$ jest dłuższa od 16.	P	F

**Zadanie 14. (0-1)****X.2/X.3**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta między krawędzią boczną a podstawą czworościanu foremnego jest równy:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 15. (0-2)**X.2/X.3**

Wysokość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa długości krawędzi podstawy.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

1. Krawędź boczna tego ostrosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem, którego tangens jest równy:

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{2}$

2. Wysokość ściany bocznej, prostopadła do krawędzi podstawy, jest nachylona do podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy:

- E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ F. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ G. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ H. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

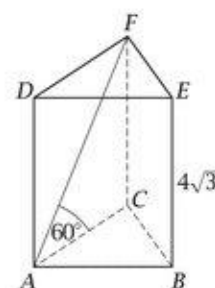
Zadanie 16. (0-1)**X.2/X.3**

Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCDEF$ jest równa $4\sqrt{3}$, a kąt między przekątną ściany bocznej i krawędzią podstawy ma miarę 60° (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

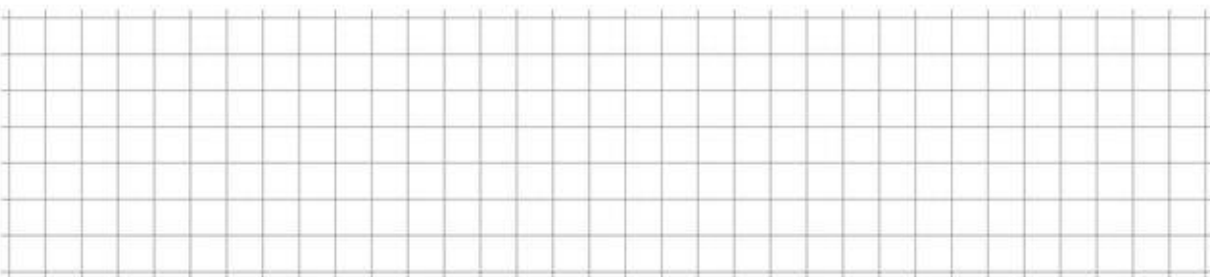
Cosinus kąta między przekątnymi dwóch sąsiednich ścian bocznych, poprowadzonymi z jednego wierzchołka, jest równy:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{7}{8}$ D. $\frac{23}{24}$

**Zadanie 17. (0-2)****X.2/X.3**

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy.

Oblicz cosinus kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 18. (0-1)****X.2/X.3**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta między dwiema sąsiednimi ścianami czworościanu foremnego jest równy:

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Zadanie 19. (0-1)**X.2/X.3**

W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź boczna ma długość 10 i tworzy z podstawą kąt 30° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa jest równa:

- A. $10\sqrt{3}$ B. $5\sqrt{3}$ C. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ D. 5

Zadanie 20. (0-1)**X.2/X.3**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt α między wysokością czworokątnego ostrosłupa a krawędzią boczną spełnia warunek:

- A. $\alpha \in (20^\circ; 30^\circ)$ B. $\alpha \in (30^\circ; 40^\circ)$ C. $\alpha \in (40^\circ; 50^\circ)$ D. $\alpha \in (50^\circ; 60^\circ)$

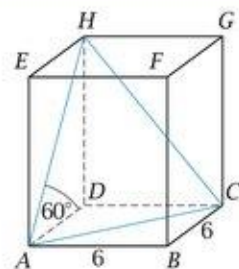
Zadanie 21. (0-1)**X.2/X.3**

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ krawędź podstawy ma długość 6 i tworzy z przekątną ściany bocznej kąt o mierze 60° (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obwód trójkąta ACH jest równy:

- A. $18\sqrt{2}$ B. $24 + 6\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$ D. $12\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

**Zadanie 22. (0-1)****X.2/X.3**

Dany jest kąt α między krawędzią sześciianu a jego przekątną wychodzącymi z jednego wierzchołka.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt α spełnia warunek:

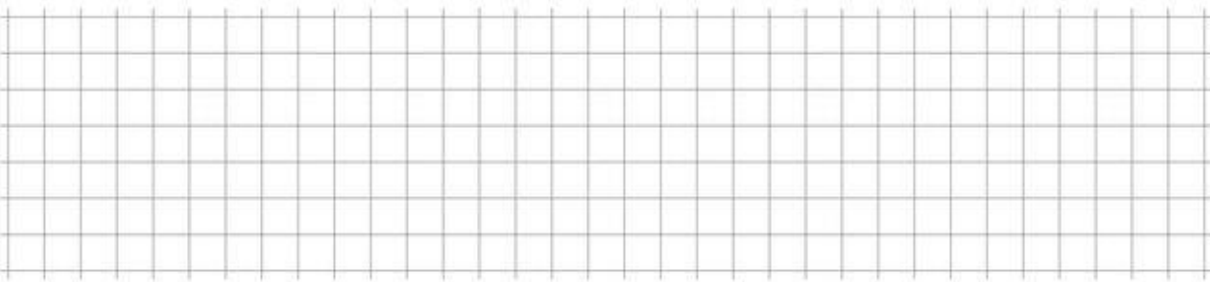
- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Zadanie 23.

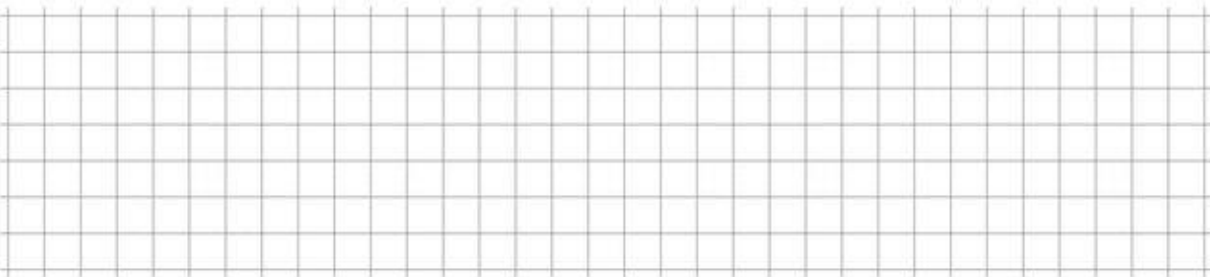
Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm, a długość krawędzi bocznej jest równa 10 cm.

Zadanie 23.1. (0-2)**X.2/X.3**

Wyznacz miarę kąta między krawędzią boczną a podstawą tego ostrosłupa. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych stopni. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 23.2. (0-2)****X.2/X.3**

Wyznacz miarę kąta między ścianą boczną a podstawą tego ostrosłupa. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych stopni. Zapisz obliczenia.

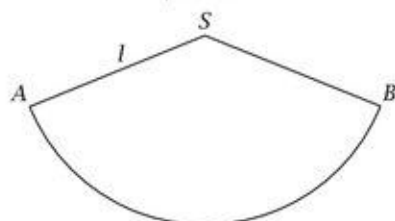


**Zadanie 24.**

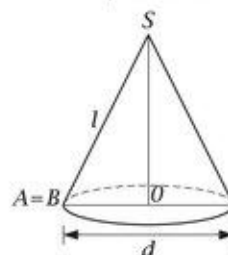
Hania zaprojektowała i wykonała czapeczkę na bal urodzinowy młodszego brata. Czapeczka miała kształt stożka o średnicy podstawy $d = 20$ cm, wysokości $H = 25$ cm i tworzącej l .

Żeby wykonać czapeczkę, Hania najpierw narysowała na kartonie figurę płaską ABS o kształcie wycinka koła o promieniu l i środku S (zobacz rysunek 1.). Następnie wycięła tę figurę z kartonu, odpowiednio ją wymodelowała i skleiła odcinek SB z odcinkiem SA (zobacz rysunek 2.).

Rysunek 1.



Rysunek 2.

**Zadanie 24.1. (0-1)****X.4**

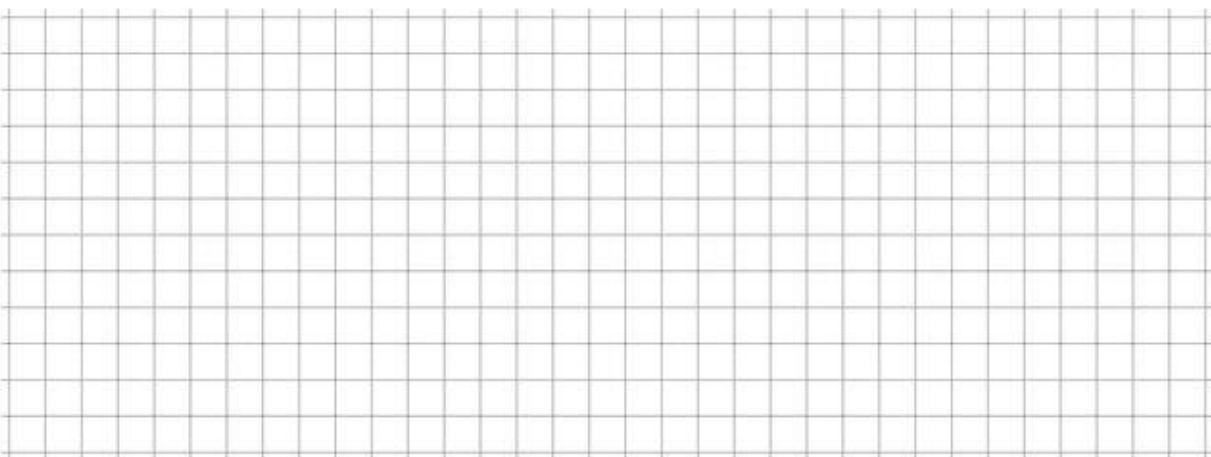
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarcia stożka, którego powierzchnią boczną jest czapeczka, ma miarę (w zaokrągleniu do 1°):

- A. 44° B. 136° C. 22° D. 68°

Zadanie 24.2. (0-3)**X.4**

Oblicz miarę kąta BSA wycinka koła, z którego powstała powierzchnia boczna stożka opisanego we wstępie do zadania. Miarę kąta BSA podaj w zaokrągleniu do 1° .

**Zadanie 25. (0-2)****X.5**

Graniastosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy ma długość 7, a wysokość — 12, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź jednej podstawy i odcinek należący do drugiej podstawy w sposób przedstawiony na rysunku. Płaszczyzna ta jest nachylona do podstawy pod kątem α .

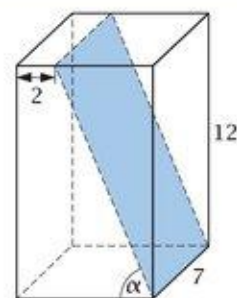
Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Pole tego przekroju jest równe:

- A. 91 B. 84 C. 60 D. 35

2. Tangens kąta α jest równy:

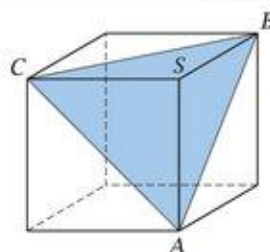
- E. $\frac{5}{12}$ F. $\frac{7}{12}$ G. $1\frac{5}{7}$ H. 2,4



Zadanie 26. (0-2)

X.5

Sześcian o boku długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty A, B, C , które są wierzchołkami tego sześcianu (zobacz rysunek).



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

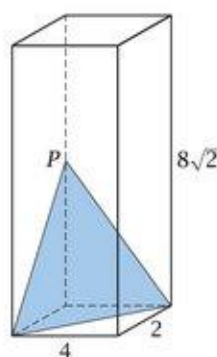
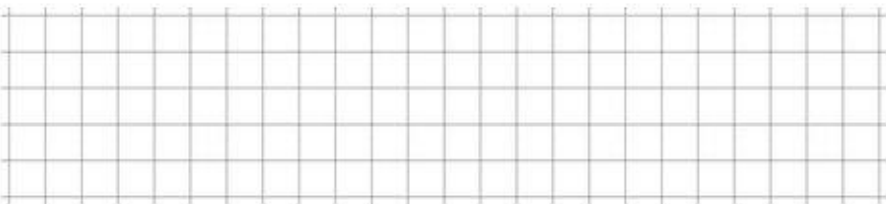
Obwód trójkąta ABC jest równy $3\sqrt{2}a$.	P	F
Odległość wierzchołka S od płaszczyzny przechodzącej przez punkty A, B, C jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.	P	F
Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa $ABCS$ jest większa od $7a$.	P	F

Zadanie 27. (0-3)

X.5

Podstawą prostopadłościanu o wysokości $8\sqrt{2}$ jest prostokąt, którego boki mają długości 4 i 2. Prostopadłościan ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i punkt P , który jest środkiem krawędzi bocznej (zobacz rysunek).

Oblicz obwód figury, która jest przekrojem prostopadłościanu opisaną płaszczyzną. Zapisz obliczenia.

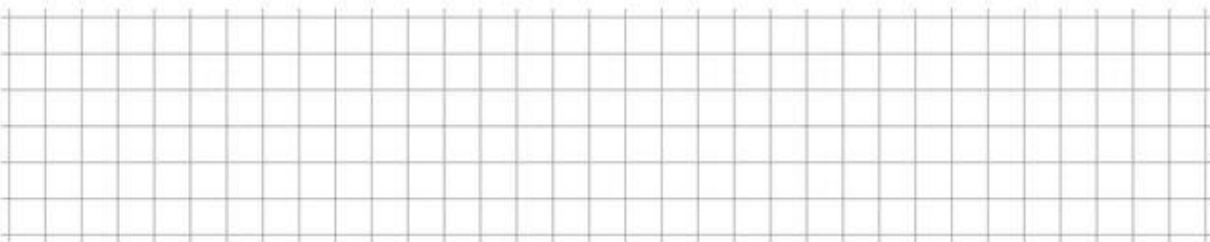
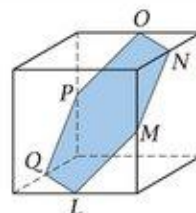


Zadanie 28. (0-3)

X.5

Sześcian o krawędzi długości 8 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty $LMNOPQ$, które są środkami krawędzi sześcianu (zobacz rysunek).

Oblicz pole tego przekroju. Zapisz obliczenia.



Zadanie 29. (0-1)

X.6

Objętość sześcianu jest równa 16.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma długości wszystkich krawędzi tego sześcianu jest równa:

- A. $2\sqrt[3]{2}$ B. $8\sqrt{6}$ C. $24\sqrt[3]{2}$ D. 36

Zadanie 30. (0-1)

X.6

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość sześcianu, którego przekątna ma długość 12, jest równa:

- A. $64\sqrt{3}$ B. $108\sqrt{3}$ C. $192\sqrt{3}$ D. $432\sqrt{3}$

Zadanie 31. (0-1)

X.6

Dany jest sześcián, którego przekátna ma dłuęość d .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe:

- A. $12d^2$ B. $3d^2$ C. $2d^2$ D. $\frac{1}{3}d^2$

Zadanie 32. (0-1)

X.6

Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego są równe 4.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa jest równe:

- A. $4\sqrt{3}+16$ B. $8\sqrt{3}+16$ C. $4\sqrt{3}+48$ D. $8\sqrt{3}+48$

Zadanie 33. (0-1)

X.6

W prostopadłościanie, którego podstawą jest kwadrat, przekątna ma długość d i tworzy z podstawą kąt o mierze α .

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Pole powierzchni bocznej tego prostopadłościanu jest równe $2\sqrt{2}d^2 \sin \alpha \cos \alpha$.	P	F
Objętość tego prostopadłościanu jest równa $\frac{1}{2}d^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$.	P	F

Zadanie 34. (0-1)

X.6

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $32\sqrt{3}$, a krawędź podstawy ma długość 4.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego graniastosłupa jest równa:

- A. 24 B. 28 C. 72 D. 84

Zadanie 35. (0-2)

X.6

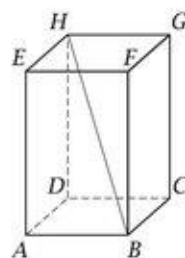
Dany jest graniastosłup prosty o wysokości równej 16, którego podstawą jest romb. Przekątne graniastosłupa mają długości $16\sqrt{2}$ i 24.

Oblicz objętość tego graniastoslupa. Zapisz obliczenia.



**Zadanie 36.**

Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, w którym prostokąty $ABCD$ i $EFGH$ są jego podstawami. Odcinek BH jest przekątną tego prostopadłościanu.

**Zadanie 36.1. (0-1)****X.3**

Na którym z rysunków prawidłowo narysowano, oznaczono i podpisano kąt α pomiędzy przekątną BH prostopadłościanu, a jego ścianą boczną $ADHE$?

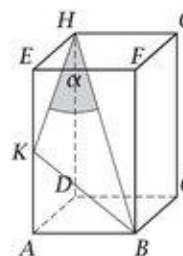
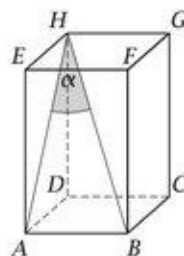
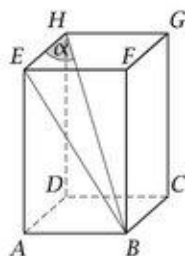
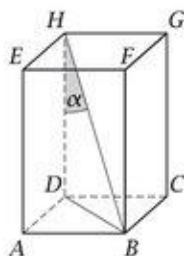
Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $\alpha = \sphericalangle BHD$

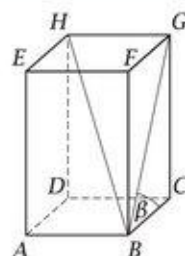
B. $\alpha = \sphericalangle BHE$

C. $\alpha = \sphericalangle BHA$

D. $\alpha = \sphericalangle BHK$

**Zadanie 36.2. (0-4)****X.6**

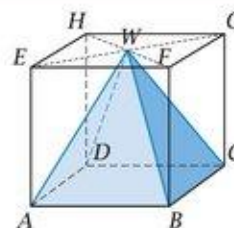
W prostopadłościanie $ABCDEFGH$ dane są $\operatorname{tg} \beta = \frac{9}{7}$, $|BG| = 2\sqrt{130}$, $|BH| = 2\sqrt{194}$, gdzie odcinek BH jest przekątną prostopadłościanu, odcinek BG jest przekątną ściany bocznej $BCGF$, a β jest miarą kąta GBC . Sytuację ilustruje rysunek obok.



Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$.

**Zadanie 37.**

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 9. Wierzchołki podstawy $ABCD$ sześcianu połączono odcinkami z punktem W , który jest punktem przecięcia przekątnych podstawy $EFGH$. Otrzymano w ten sposób ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDW$ (zobacz rysunek).

**Zadanie 37.1. (0-1)****X.6**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość V ostrosłupa $ABCDW$ jest równa:

A. 243

B. 364,5

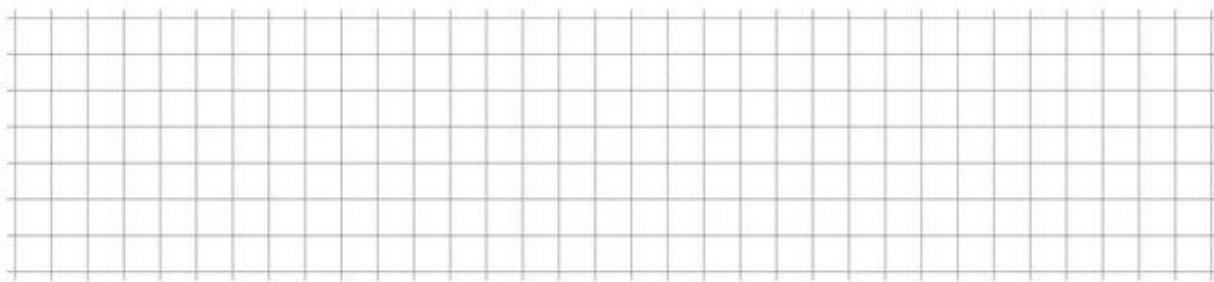
C. 489

D. 729

Zadanie 37.2. (0-2)

X.2/X.3

Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy. Zapisz obliczenia.

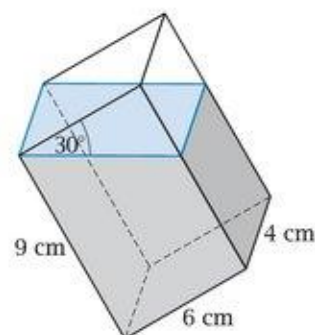
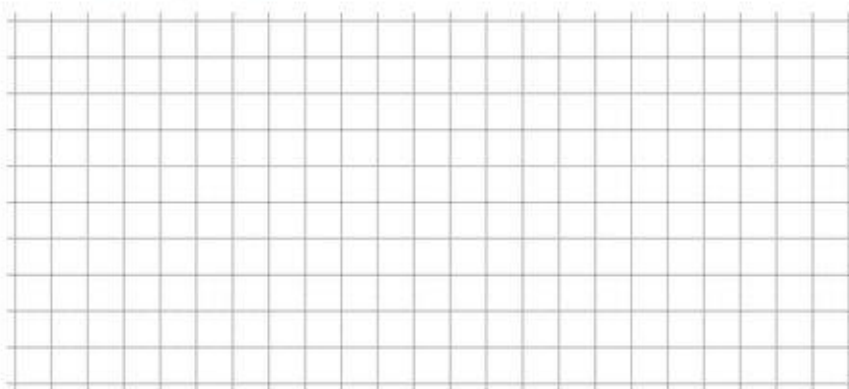


Zadanie 38. (0-4)

X.6

Na rysunku przedstawiono pochylony pojemnik w kształcie prostopadłościanu. Linia niebieska wskazuje, do jakiej wysokości sięga woda. Pojemnik ten ma wymiary $4\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 9\text{ cm}$.

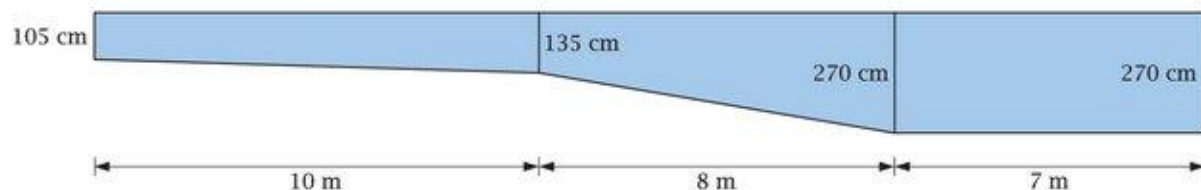
Oblicz objętość wody w pojemniku. Wynik podaj w centymetrach sześciennych zaokrąglonych do całości. Zapisz obliczenia.



Zadanie 39. (0-3)

X.6

Basen ma długość 25 m, a jego szerokość wynosi 15 m. W naj płytszym miejscu głębokość tego basenu jest równa 105 cm, a w najgłębszym — 270 cm (zobacz rysunek).



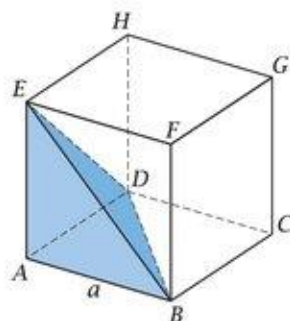
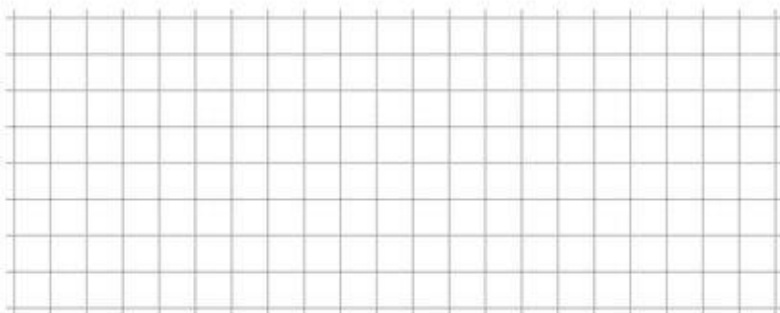
Oblicz, ile litrów wody zmieści się w tym basenie. Zapisz obliczenia.



**Zadanie 40. (0-2)****X.6**

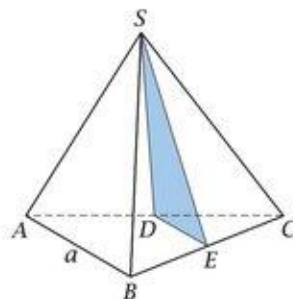
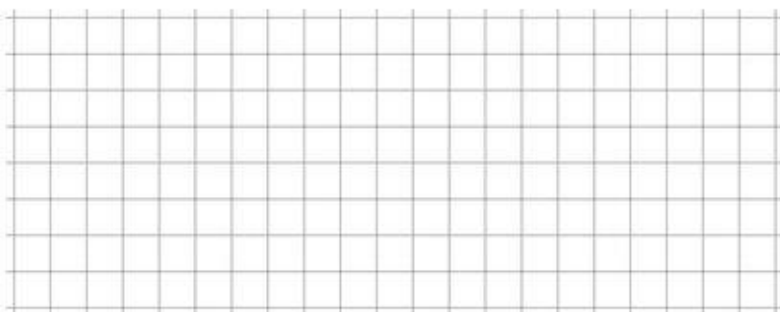
Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a . Punkty A, B, D i E są wierzchołkami ostrosłupa (zobacz rysunek).

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $ABDE$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 41. (0-2)****X.6**

Każda krawędź czworostianu $ABCS$ ma długość a . Punkty D i E są środkami boków odpowiednio AC i BC (zobacz rysunek).

Oblicz pole trójkąta DES . Zapisz obliczenia.

**Zadanie 42. (0-1)****X.6**

Dłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 16 i jest nachylona do podstawy pod kątem 30° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

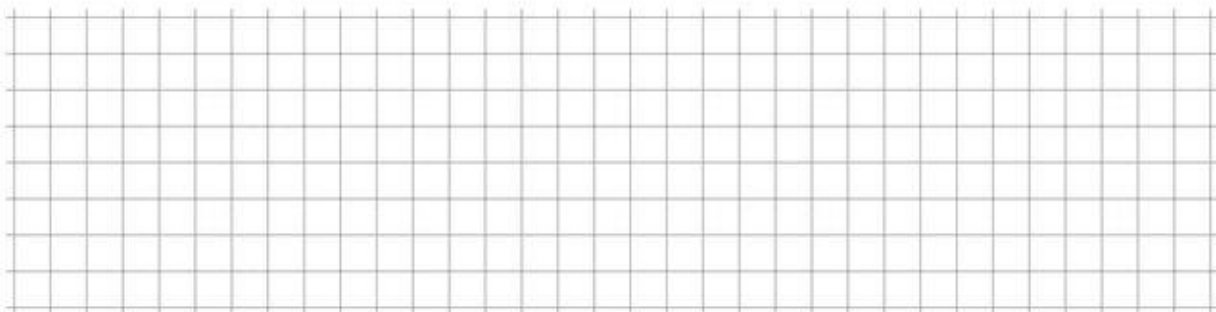
Objętość tego graniastosłupa jest równa:

- A. 96 B. $96\sqrt{3}$ C. $576\sqrt{3}$ D. 576

Zadanie 43. (0-3)**X.6**

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krótsza przekątna ma długość 12 i jest nachylona do podstawy pod kątem 30° .

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.



Zadanie 44. (0-3)**X.6**

Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 36 jest trapez prostokątny, którego podstawy mają długości 12 i 18. Dłuższa przekątna graniastosłupa jest nachylona do podstawy graniastosłupa pod kątem 60° .

Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 45. (0-3)**X.6**

Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o podstawach długości 12 i 20. Przekątna tego graniastosłupa ma długość 24 i jest nachylona do podstawy graniastosłupa pod kątem 30° .

Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 46. (0-2)**X.6**

Wysokość graniastosłupa prostego jest równa 10. Podstawą tego graniastosłupa jest równoległobok, którego kąt ostry ma miarę 45° , a wysokości są równe $3\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2}$.

Oblicz objętość tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 47. (0-3)**X.6**

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej o długości $16\sqrt{3}$ jest nachylona do sąsiedniej ściany bocznej pod kątem o mierze 30° .

Oblicz objętość tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 48. (0-1)

X.6

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o wysokości równej 12 krawędź podstawy ma długość 10.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe:

- A. 360 B. 340 C. 165 D. 620

Zadanie 49. (0-1)

X.6

Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 288, a pole podstawy $24\sqrt{3}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa jest równa:

- A. $8\sqrt{7}$ B. 12 C. 8 D. $4\sqrt{33}$

Zadanie 50. (0-1)

X.6

W ostrosłupie, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości 4, jedna z krawędzi bocznych ma długość 3 i jest prostopadła do podstawy.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe:

- A. $24 + 4\sqrt{21}$ B. $12 + 2\sqrt{21}$ C. $12\sqrt{5}$ D. $6\sqrt{5}$

Zadanie 51. (0-1)

X.6

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość podstawy jest równa 6, a krawędź boczna tworzy z podstawą kąt o mierze 45° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego ostrosłupa jest równa:

- A. $4\sqrt{3}$ B. $16\sqrt{3}$ C. $48\sqrt{3}$ D. $96\sqrt{3}$

Zadanie 52. (0-1)

X.6

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość $4\sqrt{2}$, a ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 30° .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe:

- A. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ C. 32 D. $\frac{64\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 53. (0-2)

X.6

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkątem równoramiennym. Miary kątów przy podstawie tego trójkąta są równe 45° , a wysokość opuszczona na jego podstawę jest równa 6.

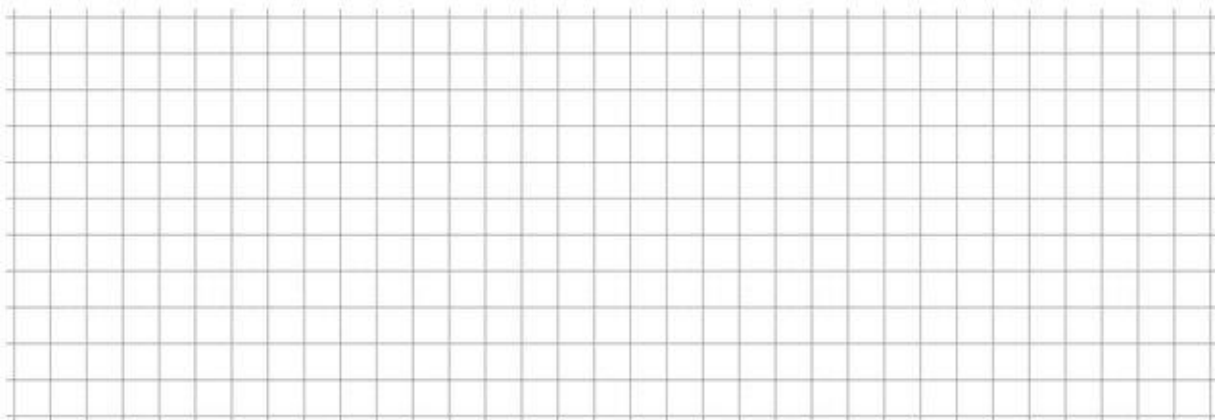
Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.



Zadanie 54. (0-3)**X.6**

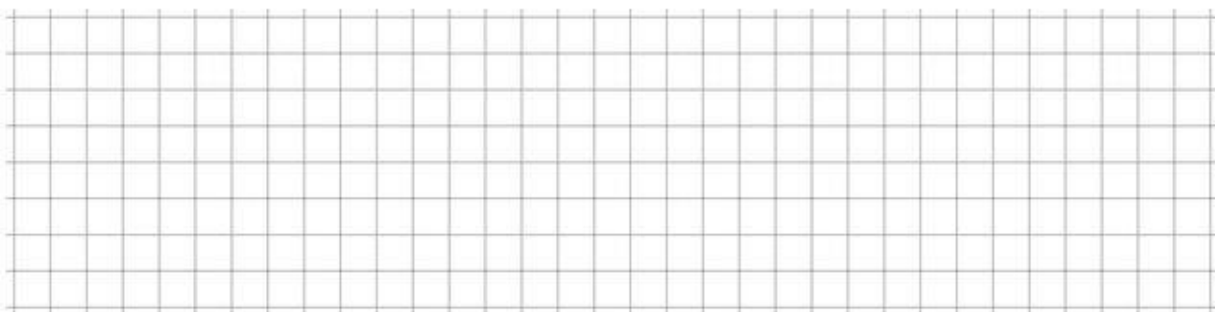
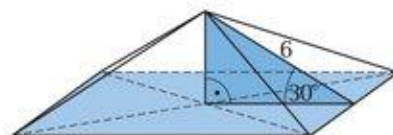
Dany jest ostrosłup $ABCD S$ o wysokości równej 9, którego podstawą jest prostokąt $ABCD$. Wysokości dwóch przeciwległych ścian bocznych, poprowadzone z wierzchołka S są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° , a wysokości dwóch pozostałych ścian, poprowadzone z wierzchołka S tworzą z podstawą kąt 30° .

Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 55. (0-4)****X.6**

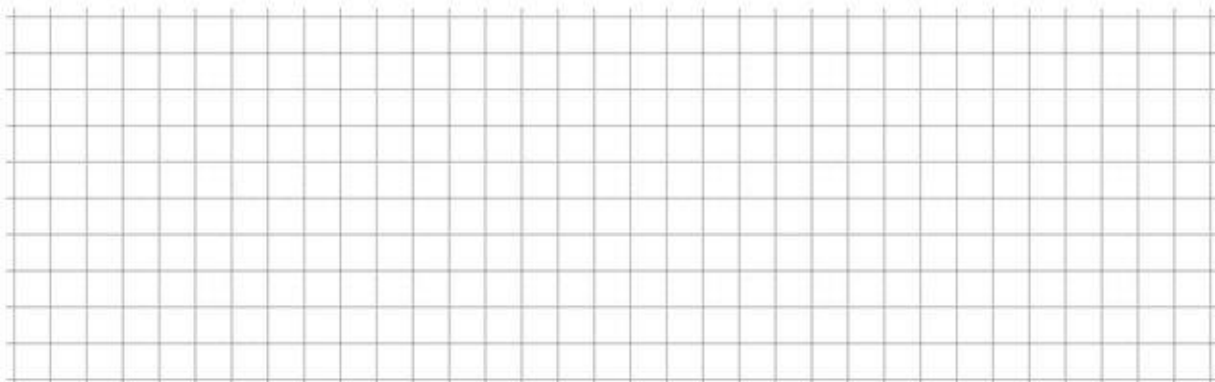
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° i ma długość równą 6 (zobacz rysunek).

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 56. (0-3)****X.6**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna ma długość 8 i jest nachylona do podstawy pod kątem 30° .

Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.



Zadanie 57.

Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $4\sqrt{3}$, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy ma miarę 60° .

Zadanie 57.1. (0-1)

X.2/X.3

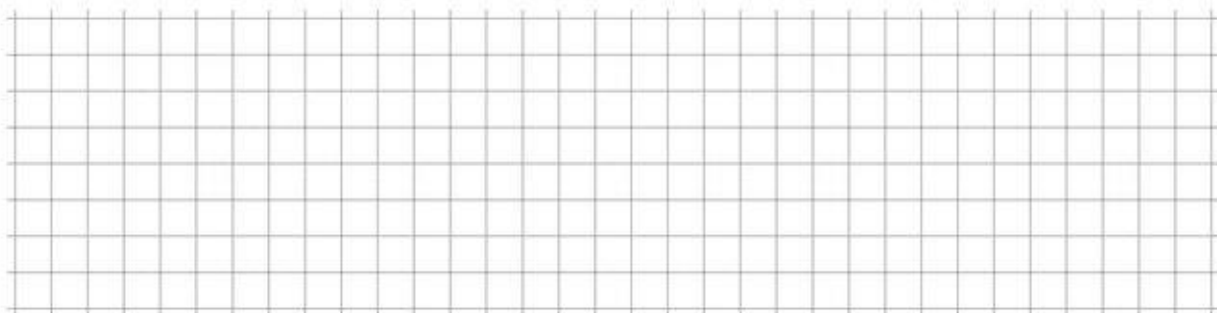
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Krawędź boczna tego ostrosłupa jest dłuższa od krawędzi podstawy.	P	F
Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa $36\sqrt{3}$.	P	F

Zadanie 57.2. (0-2)

X.6

Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

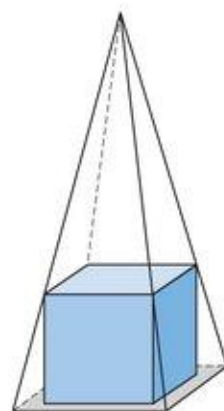
**Zadanie 58. (0-2)**

X.6

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 2 i wysokości 8. Wpisano w niego sześcian w taki sposób, że dolna podstawa sześciangu zawiera się w podstawie ostrosłupa, a krawędzie jego górnej podstawy zawierają się w ścianach bocznych ostrosłupa (zobacz rysunek).

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Krawędź sześciangu jest dłuższa niż 1,5.	P	F
Ostrosłup jest czterokrotnie wyższy od sześciangu.	P	F
Objętość sześciangu jest większa od 4.	P	F

**Zadanie 59. (0-1)**

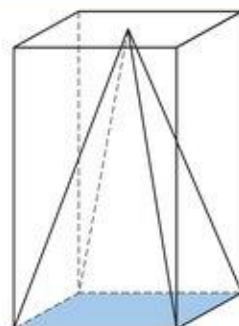
X.6

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a oraz wysokości h . Wpisano w niego ostrosłup prawidłowy czworokątny w taki sposób, że krawędzie podstawy ostrosłupa i graniastosłupa pokrywają się, zaś górny wierzchołek ostrosłupa jest środkiem podstawy górnej graniastosłupa (zobacz rysunek). Niech $\mathcal{F}$ będzie bryłą powstałą po wycięciu ostrosłupa z graniastosłupa.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Różnica objętości bryły $\mathcal{F}$ i objętości ostrosłupa jest równa:

- A. $\frac{1}{3}a^2h$ B. $\frac{2}{3}a^2h$ C. $\frac{1}{3}ah^2$ D. $\frac{2}{3}ah^2$



Zadanie 60. (0-1)

X.6

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem o bokach długości 6 i 12. Wysokość tego walca jest równa 12.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego walca jest równa:

- A. 432π B. 108π C. $\frac{432}{\pi}$ D. $\frac{108}{\pi}$

Zadanie 61. (0-1)

X.6

Dany jest walec, którego wysokość i średnica podstawy mają długość 4.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni całkowitej tego walca jest równe:

- A. 64π B. 24π C. 16π D. $\frac{16}{\pi}$

Zadanie 62. (0-1)

X.6

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest kwadratem o boku długości 6.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość tego walca jest równa:

- A. $\frac{54}{\pi}$ B. 54π C. $\frac{108}{\pi}$ D. 216π

Zadanie 63. (0-2)

X.6

Graniastosłup prawidłowy trójkątny i walec mają wysokości o tej samej długości i równe pola powierzchni bocznej.

Oblicz stosunek objętości walca do objętości graniastosłupa. Zapisz obliczenia.



Zadanie 64. (0-3)

X.6

Kartkę papieru o wymiarach $20\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ można zwinąć tak, aby utworzyć z niej powierzchnię boczną walca.

Oblicz, jaka największą objętość może mieć taki walec. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 65. (0-1)

X.6

Dany jest walec o polu powierzchni bocznej 48π i objętości równej 96π .

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Promień podstawy tego walca ma długość

[illegible]

Zadanie 66. (0-1)

X.6

Dany jest stożek o średnicy podstawy 12 i objętości równej $36\sqrt{5}\pi$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość tego stożka jest równa:

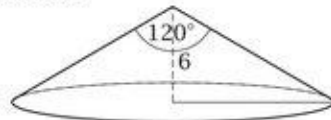
- A. $\frac{\sqrt{5}}{15}$ B. $\sqrt{5}$ C. $3\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Zadanie 67. (0-2)

X.6

Dany jest stożek o kącie rozwarcia 120° i wysokości równej 6 (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.



1. Objętość tego stożka jest równa:

- A. 216π B. $72\sqrt{3}\pi$ C. 648π D. 24π

2. Pole powierzchni całkowitej tego stożka jest równe:

- E. 36π F. $72\sqrt{3}\pi$ G. $108\sqrt{3}\pi$ H. $108\pi + 72\sqrt{3}\pi$

Zadanie 68. (0-3)

X.6

Tworząca stożka ma długość 10 i jest nachylona do podstawy pod kątem 60° .

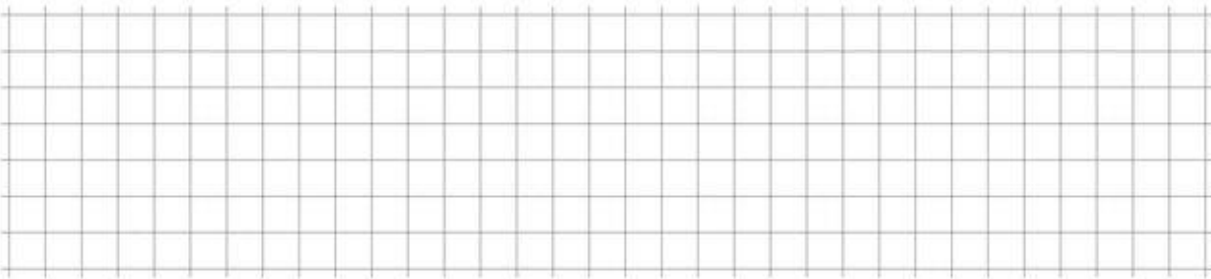
Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego stożka. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper featuring a uniform grid of thin, light gray horizontal and vertical lines. The grid covers the entire area of the page, creating a series of small squares suitable for drawing or technical work.

Zadanie 69. (0-2)**X.6**

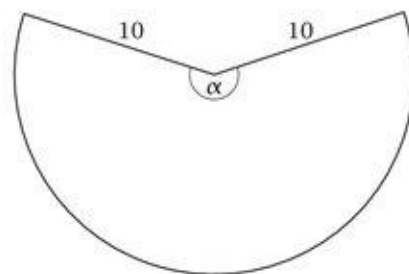
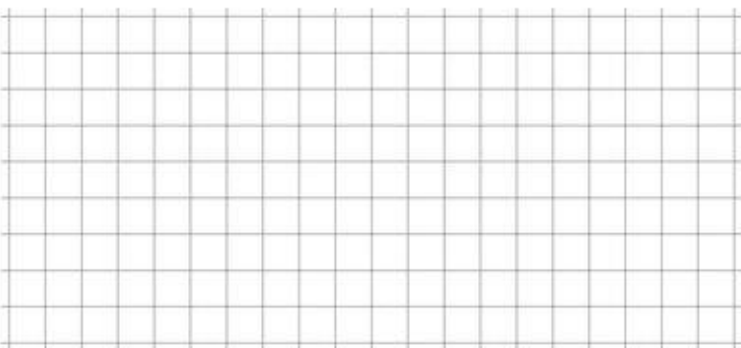
Z wycinka koła o kącie środkowym o mierze 240° i promieniu równym 12 utworzono powierzchnię boczną stożka.

Oblicz objętość tego stożka. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 70. (0-4)****X.6**

Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe 96π . Powierzchnia boczna tego stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 10 i kącie środkowym α (zobacz rysunek).

Oblicz miarę kąta środkowego α tego wycinka koła. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 71. (0-1)****X.6**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Promień kuli o objętości 64π jest równy:

- A. 4 B. $2\sqrt[3]{6}$ C. $2\sqrt[3]{2}$ D. $4\sqrt[3]{3}$

Zadanie 72. (0-1)**X.6**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni kuli o objętości 144π jest równe:

- A. $72\pi\sqrt[3]{2}$ B. $64\pi\sqrt[3]{9}$ C. $648\pi\sqrt[3]{2}$ D. $24\pi\sqrt[3]{12}$

Zadanie 73. (0-1)**X.6**

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wy kropkowane miejsce, tak aby zdanie było prawdziwe.

Objętość kuli o polu powierzchni 72π jest równa



Zadanie 74. (0–4)**X.6**

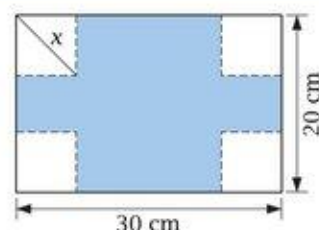
Z drutu o długości 4 m chcemy zbudować model graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

Ustal, jakie wymiary powinien mieć ten graniastosłup, aby jego pole powierzchni całkowitej było największe. Oblicz to pole. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 75. (0–4)****X.6**

Janek planuje zrobić pudełko w kształcie prostopadłościanu (bez pokrywki). Zamierza wykorzystać prostokątny arkusz tektury o wymiarach $30\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, odcinając z każdego rogu kwadrat o przekątnej $x\text{ cm}$ (zobacz rysunek).

Oblicz wartość x , dla której pole powierzchni bocznej otrzymanego pudełka będzie największe. Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych centymetrów. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 76. (0–4)****X.6**

Rozpatrujemy walce, w których suma długości średnicy podstawy i wysokości jest równa 20 cm.

Oblicz, jaką wysokość powinien mieć taki walec, aby jego pole powierzchni bocznej było możliwie największe. Zapisz obliczenia.



Zadanie 77. (0-1)**X.7**

Stosunek pól powierzchni całkowitych dwóch sześcianów jest równy $\frac{3}{4}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stosunek objętości tych sześcianów jest równy:

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{9}{16}$

**Zadanie 78. (0-1)****X.7**

Dany jest sześcian $\mathcal{F}$ o krawędzi długości a i objętości V oraz sześcian $\mathcal{G}$ o krawędzi długości $3a$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Objętość sześcianu $\mathcal{G}$ jest równa:

- A. $3V$ B. $9V$ C. $18V$ D. $27V$

**Zadanie 79. (0-1)****X.7**

Dane są dwa prostopadłościany podobne $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$. Objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równa V , a objętość prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równa $27V$. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_1$ jest równe P .

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $\mathcal{B}_2$ jest równe:

A.	$27P$,	ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy	1.	stosunkowi objętości tych prostopadłościanów.
B.	$9P$,		2.	pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.
C.	$3\sqrt{3}P$,		3.	kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.

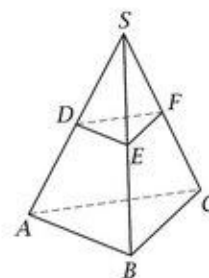
**Zadanie 80. (0-1)****X.7**

Dany jest ostrosłup trójkątny $ABCS$ o podstawie ABC . Punkty D , E i F są środkami odpowiednio krawędzi bocznych AS , BS i CS (zobacz rysunek).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Stosunek objętości ostrosłupa $DEFS$ do objętości ostrosłupa $ABCS$ jest równy:

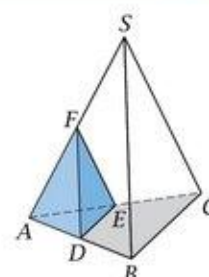
- A. 3:4 B. 1:4 C. 1:8 D. 3:8

**Zadanie 81. (0-1)****X.7**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ zaznaczono środki krawędzi AB , AC i AS odpowiednio punktami D , E i F (zobacz rysunek).

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Pole powierzchni ostrosłupa $ADEF$ jest dwukrotnie mniejsze od pola powierzchni ostrosłupa $ABCS$.	P	F
Objętość ostrosłupa $ADEF$ jest ośmiokrotnie mniejsza od objętości ostrosłupa $ABCS$.	P	F



Zadanie 82. (0-2)

X.7

Od ostrosłupa o wysokości h i objętości V odcięto mniejszy ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy ostrosłupa, która podzieliła wysokość ostrosłupa w stosunku 1 : 2, licząc od podstawy.

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

1. Objętość odciętego ostrosłupa jest równa:

- A. $\frac{2}{3}V$ B. $\frac{4}{9}V$ C. $\frac{1}{8}V$ D. $\frac{8}{27}V$

2. Stosunek pola powierzchni całkowitej odciętego ostrosłupa do pola powierzchni całkowitej ostrosłupa o wysokości h i objętości V jest równy:

- E. $\frac{2}{3}$ F. $\frac{4}{9}$ G. $\frac{8}{27}$ H. $\frac{1}{8}$

Zadanie 83. (0-1)

X.7

Od ostrosłupa o wysokości H odcięto mniejszy ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy w taki sposób, że objętość odciętego ostrosłupa jest cztery razy mniejsza od objętości ostrosłupa o wysokości H . W jakiej odległości od podstawy poprowadzono płaszczyznę cięcia?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\left(1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)H$ B. $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}H$ C. $\frac{1}{4}H$ D. $\frac{3}{4}H$

Zadanie 84. (0-1)

X.7

Bryła B_1 o objętości 16 jest podobna do bryły B_2 o objętości 8 w skali k .

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Stosunek pola powierzchni całkowitej bryły $\mathcal{B}_1$ do pola powierzchni całkowitej bryły $\mathcal{B}_2$ jest równy:

A.	8,	ponieważ	1.	$\left(\frac{16}{8}\right)^2 = 4.$
B.	4,		2.	$\left(\frac{16}{8}\right)^3 = 8.$
C.	$\sqrt[3]{4},$		3.	$k = \sqrt[3]{\frac{16}{8}}$ i stosunek pól powierzchni jest równy $k^2.$

Zadanie 85. (0-3)

X.7

Stożek S o wysokości równej 8 i promieniu podstawy 6 przecięto płaszczyzną równoległą do jego podstawy. Odległość tej płaszczyzny od podstawy stożka S wynosi 2.

Oblicz objętość bryły, która pozostała po odcięciu mniejszego stożka. Zapisz obliczenia.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

10. KOMBINATORYKA I RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

TEORIA

Własności prawdopodobieństwa

Niech Ω będzie niepustym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, natomiast P — prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach zbioru Ω . Wtedy:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{dla każdego zdarzeń } A \text{ oraz } B \text{ takich, że } A \subset B \subset \Omega$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{gdzie } A' \text{ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{dla każdego zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad \text{dla każdego zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech Ω będzie niepustym skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A jest równe:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A , natomiast $|\Omega|$ — liczbę elementów zbioru Ω .

Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Niech X będzie zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ określoną na zbiorze Ω , przy czym $P(\{\omega: \omega \in \Omega \text{ oraz } X(\omega) = x_i\}) = p_i$ dla $1 \leq i \leq n$. Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

Zasada mnożenia

Gdy wynik pewnego postępowania zależy od kolejno podejmowanych niezależnych decyzji i przy podejmowaniu pierwszej decyzji mamy do wyboru n_1 możliwości, drugiej — n_2 możliwości itd., a ostatniej — n_k możliwości, to liczba różnych wyników, które możemy otrzymać, jest równa $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Zasada dodawania

Jeśli, ustalając liczbę możliwości, możemy rozważyć kilka parami rozłącznych przypadków, to możemy policzyć, ile jest możliwości w każdym z nich i dodać otrzymane wyniki.

ZADANIA

Zadanie 1. (0–1)

XI.1

Sześć jednakowych żetonów należy umieścić w czterech różnych pudełkach tak, aby w każdym pudełku był co najmniej jeden żeton. Na ile sposobów można to zrobić?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 14

Zadanie 2. (0–1)

XI.1

Doświadczenie losowe polega na pięciokrotnym rzucie symetryczną monetą.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich różnych wyników tego doświadczenia, w których liczba orłów różni się od liczby reszek o 1, jest:

- A. 10 B. 12 C. 15 D. 20

Zadanie 3. (0–1)

XI.1

Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych o sumie cyfr równej 3, podzielnych przez 4?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Zadanie 4. (0–1)

XI.1

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą, a następnie jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Ile możliwych wyników tego doświadczenia spełnia warunek: liczba uzyskanych orłów jest równa liczbie oczek na kostce?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 2 B. 6 C. 7 D. 12

Zadanie 5. (0–1)

XI.1

Wszystkie liczby dwucyfrowe o sumie cyfr należącej do przedziału $(10; 14)$ tworzą zbiór D .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

W zbiorze D jest 35 liczb.	P	F
W zbiorze D jest 7 liczb podzielnych przez 3.	P	F

Zadanie 6. (0–2)

XI.2

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A–D oraz spośród E–H.

1. Wszystkich różnych liczb czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym wszystkie cyfry są różne, jest:

- A. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ B. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ C. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ D. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

2. Wszystkich różnych liczb pięciocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym cyfry mogą się powtarzać, jest:

- E. 10^5 F. $9 \cdot 10^4$ G. $10 \cdot 9^4$ H. 9^5

**Zadanie 7. (0-1)****XI.2**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, w których zapisie dziesiętnym nie występuje cyfra 2, jest:

- A. 900 B. 729 C. 648 D. 512

**Zadanie 8. (0-1)****XI.2**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich różnych liczb naturalnych czterocyfrowych, które są nieparzyste i podzielne przez 25, jest:

- A. $9 \cdot 9 \cdot 2$ B. $9 \cdot 10 \cdot 2$ C. $9 \cdot 9 \cdot 4$ D. $9 \cdot 10 \cdot 4$

**Zadanie 9. (0-1)****XI.2**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, w zapisie których cyfra 5 występuje dokładnie jeden raz, jest:

- A. 125 B. 225 C. 280 D. 300

**Zadanie 10. (0-1)****XI.2**

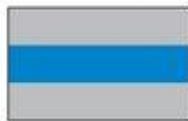
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych o sumie cyfr równej 3 jest:

- A. 3 B. 5 C. 6 D. 10

**Zadanie 11. (0-1)****XI.2**

Firma krawiecka produkuje prostokątne dwukolorowe obrusy w jednakowym rozmiarze. Każdy obrus jest zszyty z trzech pasów materiału tej samej szerokości (zobacz rysunek). Zewnętrzne pasy są w tym samym kolorze. Cały obrus jest obszyty lamówką w jednym kolorze. W firmowym magazynie materiały są dostępne w 5 kolorach, a lamówka — w 3 kolorach. Obrusy uznajemy za różne, gdy różnią się kolorem lamówki lub kolorem pasów zewnętrznych, lub kolorem pasa wewnętrznego.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich różnych obrusów, które firma może produkować, jest równa:

- A. $5 \cdot 4 \cdot 3$ B. $5 \cdot 5 \cdot 3$ C. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$ D. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$

Zadanie 12. (0-1)**XI.2**

W grupie pięciu osób jest trzech mężczyzn i dwie kobiety.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród A-D oraz spośród E-H.

1. Liczba sposobów utworzenia kolejki przez wszystkie osoby z tej grupy, tak aby kobiety stały obok siebie, jest równa:

- A. 48 B. 45 C. 30 D. 24

2. Liczba sposobów utworzenia kolejki przez wszystkie osoby z tej grupy, tak aby dwaj mężczyźni nie stali obok siebie, jest równa:

- E. 18 F. 9 G. 24 H. 12

Zadanie 13. (0-1)

XI.2

Obliczono wszystkie możliwe iloczyny dwóch różnych liczb wybranych z zestawu: 1, 2, 3, 4, 5. Jaką część otrzymanych iloczynów stanowią liczby nieparzyste?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{10}$

Zadanie 14. (0-1)

XL.2

Na ściankach sześcienniej symetrycznej kostki umieszczono cyfry: 4, 5, 6, 7, 8, 9 i wykonano sześć rzutów tą kostką. Kolejne wyniki zapisano bez odstępów, tworząc zapis liczby sześciocyfrowej.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

W ten sposób można otrzymać co najwyżej:

7 różnych liczb o sumie cyfr mniejszej od 26.	P	F
21 różnych liczb o sumie cyfr równej 52.	P	F

Zadanie 15. (0-2)

XI.2

Do dyspozycji są dwa puste pojemniki oraz pięć kul. Każdą z kul należy umieścić w pojemniku. Liczba wszystkich różnych rozmieszczeń tych kul zależy od cech kul i pojemników. W poniższej tabeli w lewej kolumnie podano cechy obiektów (kul i pojemników).

Uzupełnij tabelę. Wpisz w każdą pustą komórkę tabeli właściwą odpowiedź wybrana spośród A-F.

Cechy kul i pojemników	Liczba wszystkich różnych rozmieszczeń kul w pojemnikach
Kule rozróżnialne, pojemniki rozróżnialne	
Kule rozróżnialne, pojemniki nierozróżnialne	
Kule nierozróżnialne, pojemniki rozróżnialne	
Kule nierozróżnialne, pojemniki nierozróżnialne	

- A. 6 B. $2 \cdot 5$ C. 2^4 D. 3 E. 2^5 F. 5^2

Zadanie 16. (0-2)

XI.2

Pojedynczy znak w piśmie Braille'a dla niewidomych jest kombinacją od 1 do 6 wypukłych punktów. Punkty te mogą zajmować miejsca ułożone w dwóch kolumnach po trzy miejsca w każdej kolumnie. Poniżej podano przykład napisu w piśmie Braille'a. Czarne kropki w znaku oznaczają wypukłości, a białe kropki oznaczają brak wypukłości. Pojedynczy znak w piśmie Braille'a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły.

m a t u r y

Oblicz, ile różnych pojedynczych znaków można zapisać w piśmie Braille'a.



Zadanie 17. (0-2)

XI.2

W drugim rzędzie widowni jest o jedno miejsce mniej niż w pierwszym. Liczba sposobów, na które dwie osoby mogą zająć miejsca w drugim rzędzie, jest o 22 mniejsza od liczby sposobów, na które mogą one zająć miejsca w pierwszym rzędzie.

Oblicz, ile jest miejsc łącznie w pierwszym i drugim rzędzie. Zapisz obliczenia.

[illegible]

CK
E

Zadanie 18.

Andrzej ma w szafie 4 koszule: czerwoną, żółtą, zieloną i niebieską; 3 pary spodni: niebieskie, czarne i szare; oraz 5 par butów: czarne, szare, zielone, czerwone i niebieskie. Andrzej wybiera z szafy zestaw ubrań: jedną koszulę, jedną parę spodni i jedną parę butów. Zestawy ubrań wybierane przez Andrzeja określimy jako różne, gdy będą różniły się kolorem chociaż jednego rodzaju elementu ubioru w zestawie.

Zadanie 18.1. (0-1)

XL.2

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich możliwych, różnych zestawów ubrań, jakie może wybrać Andrzej, jest równa:

- A. 12 B. 72 C. 60 D. 720

Zadanie 18.2. (0-3)

XI.2

Oblicz, na ile sposobów można wybrać taki zestaw, w którym dokładnie jeden element ubioru będzie niebieski.

[illegible]

Zadanie 19. (0-1)

XII.1

W pojemniku są wyłącznie kule białe i czerwone. Stosunek liczby kul białych do liczby kul czerwonych jest równy 4:5. Z pojemnika losujemy jedną kulę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe:

- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{4}$

**Zadanie 20. (0–1)****XII.1**

Marek ma 3 koszulki w kolorach czerwonym, niebieskim i białym. Darek ma 5 koszulek w kolorach czerwonym, białym, zielonym, żółtym i szarym. Chłopcy umówili się, że następnego dnia każdy z nich założy wybraną w sposób losowy jedną ze swoich koszulek.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że następnego dnia chłopcy założą koszulki w tym samym kolorze, jest równe:

- A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{15}$

**Zadanie 21. (0–1)****XII.1**

Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$. Losujemy jednocześnie dwa różne wierzchołki tego pięciokąta.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane wierzchołki będą końcami przekątnej pięciokąta $ABCDE$, jest równe:

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

Zadanie 22. (0–1)**XII.1**

Piekarz upiekł 18 rogalików, z których 8 jest z powidłami, a pozostałe — z serem. Dwie pierwsze osoby, które poczęstowano tymi wypiekami, wzięły po jednym rogaliku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród tych dwóch rogalików będzie co najmniej jeden z powidłami?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{5}{17}$ B. $\frac{5}{18}$ C. $\frac{7}{18}$ D. $\frac{12}{17}$

Zadanie 23. (0–2)**XII.1**

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Wskaż dwa zdarzenia związane z tym doświadczeniem, których prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{3}$.

Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. Uzyskana liczba oczek będzie mniejsza od 4.
- B. Uzyskana liczba oczek będzie dzielnikiem liczby 425.
- C. Uzyskana liczba oczek będzie liczbą pierwszą.
- D. Uzyskana liczba oczek będzie większa od liczby $\frac{3^2}{2^3}$.
- E. Uzyskana liczba oczek będzie rozwiązaniem równania $|x - 3| = 2$.
- F. Uzyskana liczba oczek nie będzie wielokrotnością liczby 2.
- G. Uzyskana liczba oczek nie będzie dzielnikiem liczby 24.

Zadanie 24. (0–2)**XII.1**

W pojemniku są kule w trzech kolorach. Białe stanowią 40% wszystkich, a stosunek liczby czerwonych do liczby zielonych wynosi 3 : 5.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z tego pojemnika jest równe:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{8}$

2. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli, która nie jest zielona, jest równe:

- E. $\frac{31}{40}$ F. $\frac{9}{40}$ G. $\frac{5}{8}$ H. $\frac{2}{5}$

XII.1

Ze zbioru pięciu liczb $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta, jest równe $\frac{8}{25}$.	P	F
Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie liczby będą parzyste, jest równe $\frac{2}{25}$.	P	F

XII.1

W pudełku były piłeczki różniące się jedynie kolorem — połowa z nich była czerwona, a pozostałe zielone. Do tego pudełka dołożono tyle czerwonych piłeczek, że liczba wszystkich piłeczek w pudełku podwoiła się. Następnie dołożono jeszcze tyle piłeczek zielonych, że znów liczba piłeczek w pudełku się podwoiła.

Dokończ zdanie, tak aby było prawdziwe. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Prawdopodobieństwo wylosowania piłeczki zielonej z tego pudełka jest teraz:

A.	większe od $\frac{1}{2}$,	ponieważ	1.	na początku w pudełku było tyle samo zielonych piłeczek, co czerwonych.
B.	równe $\frac{1}{2}$,		2.	za pierwszym i drugim razem łącznie dołożono więcej piłeczek zielonych niż czerwonych.
C.	mniejsze od $\frac{1}{2}$,		3.	po pierwszym dołożeniu w pudełku było więcej piłeczek czerwonych niż zielonych.

XII.1

Rzucamy jednocześnie dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami różniącymi się wielkością i liczbami występującymi na ich ściankach. Na ściankach mniejszej kostki umieszczone są liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, a na ściankach większej — liczby 7, 8, 9, 10, 11, 12. Zdarzenie A polega na tym, że suma liczb uzyskanych na obu kostkach będzie większa od 13.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Zadanie 28.

W pojemniku jest 12 kul ponumerowanych od 1 do 12. Dla doświadczenia polegającego na jednokrotnym losowaniu kuli z tego pojemnika określono zdarzenia A , B , C , o których wiadomo, że $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, oraz zdarzenia D i E określone w następujący sposób:

D — Wylosowano kulę z liczbą pierwszą.

E – Wylosowano kule z liczbą podzielna przez 3 lub z liczbą podzielna przez 5.

Zadanie 28.1. (0-2)

XII.1

Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń D i E . Zapisz obliczenia.



Zadanie 28.2. (0-2)

XII.1

Uzasadnij, że wśród wyników tego doświadczenia istnieje taki, który sprzyja jednocześnie co najmniej dwóm ze zdarzeń: A, B, C.



Zadanie 29. (0-3)

XII.1

W pojemniku znajdują się losy loterii fantowej ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi od 1000 do 9999. Każdy los, którego numer jest liczbą o sumie cyfr równej 3, jest wygrywający. Uczestnicy loterii losują z pojemnika po jednym losie.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że pierwszy los wyciągnięty z pojemnika był wygrywający. Zapisz obliczenia.



Zadanie 30.

W worku są wyłącznie kule białe i czarne. Stosunek liczby kul białych do czarnych wynosi 3:4.

Zadanie 30.1. (0-1)

XII.1

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej z tego worka jest równe

Zadanie 30.2. (0-2)

XII.1

Losujemy jedną kulę, wrzucamy ją z powrotem do worka i losujemy drugą kulę.

Oblicz prawdopodobieństwo, że obie wylosowane z tego worka kule będą miały ten sam kolor. Zapisz obliczenia.



Zadanie 31. (0-4)

XII.1

Spośród wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich losujemy jedną liczbę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3.



Zadanie 32.

W grupie 30 osób 20 gra w brydża, 15 gra w szachy, a 3 osoby nie grają w żadną z tych gier.

Zadanie 32.1. (0-2)

XII.1

Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z tej grupy gra zarówno w brydża, jak i w szachy. Zapisz obliczenia.



Zadanie 32.2. (0-2)

XII.1

Oblicz prawdopodobieństwo, że dwie losowo wybrane osoby z tej grupy nie grają ani w brydża, ani w szachy. Zapisz obliczenia.



Zadanie 33. (0-1)

XII.5

W pewnej grze uczestnicy używają symetrycznej sześcienniej kostki, która na jednej ścianie ma umieszczoną liczbę m , na dwóch liczbę $9 - m$, a na trzech pozostałych liczbę $10 - m$. Gracz rzuca kostką, a liczba, która wypadnie, określa jego zysk lub stratę.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wartość oczekiwana zysku gracza w tej grze jest równa 0 dla $m =$



Zadanie 34. (0-1)

XII.5

Gra, w którą grają osoby X i Y, polega na trzykrotnym rzucie symetryczną monetą. Gdy orzeł wypadnie dokładnie jeden raz, gracz X płaci graczowi Y 8 zł, gdy orzeł wypadnie trzy razy gracz X płaci graczowi Y 16 zł. W pozostałych przypadkach gracz Y płaci graczowi X 24 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość oczekiwana wygranej gracza X w tej grze jest równa:

- A. 5 zł B. 7 zł C. 12 zł D. 17 zł

Zadanie 35. (0-1)

XII.5

W pudełku jest 10 losów, z których jeden daje wygraną 9 zł, dwa — wygraną 11 zł, a pozostałe — wygraną k zł. Losujemy jeden los z tego pudełka. Dla jakiej wartości k wartość oczekiwana wygranej jest równa 15 zł?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 11 zł B. 13 zł C. 15 zł D. 17 zł

Zadanie 36. (0-1)

XII.5

Gra polega na jednokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Za udział w grze trzeba zapłacić 5 zł. Gdy wypadnie 6 oczek, grającemu wypłacana jest kwota 14 zł, gdy 5 lub 4 oczka — wypłata jest równa 8 zł. W pozostałych przypadkach gracz nie otrzymuje żadnej wypłaty.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość oczekiwana zysku gracza w tej grze jest równa:

- A. -6 zł B. 0 zł C. 5 zł D. 12 zł

Zadanie 37. (0-1)

XII.5

W pojemniku z losami znajduje się 60% losów pustych, a pozostałe są wygrywające. 30% losów wygrywających daje wygraną równą cenie zakupu losu, czyli 21 zł. Pozostałe losy wygrywające oznaczają otrzymanie 57 zł.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo, że pierwszy uczestnik loterii trafi na los dający najwyższą wygraną, jest równe $\frac{7}{25}$.	P	F
Wartość oczekiwana zysku gracza w tej loterii jest równa 0.	P	F

XII.5

Oblicz ustaloną przez Pawła i Grzegorza liczbę x żetonów.

A large grid of graph paper with 20 columns and 10 rows. The grid is composed of small squares, with a slightly larger square in the top-left corner, likely for a title or header. The grid is empty and ready for use.

XII.5

Oblicz wartość oczekiwaną zysku gracza w tej grze. Zapisz obliczenia.

[illegible]

XII.5

Oblicz, ile razy większa jest wygrana z jednego losu na tej loterii od ceny jego zakupu. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or additional markings on the page.

11. STATYSTYKA

TEORIA

Średnia arytmetyczna $\bar{a}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Średnia ważona $\bar{s}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$, którym przypisano dodatnie wagi — odpowiednio: $w_1, w_2, \dots, w_n$, jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)
- dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$ (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)

Wariancja σ^2 danych liczbowych $a_1, a_2, \dots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ jest równa:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}$$

Prawdziwa jest też równość:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}}$$

Dominanta zestawu danych to wartość, która w tym zestawie występuje najczęściej. Dominanta bywa nazywana modalną lub modą.

Wynik na skali centylowej to procent danych całego zestawu, które są nie większe od tego wyniku.

XII.2

A. 42 centylowi B. 45 centylowi C. 56 centylowi D. 60 centylowi

XII.2

Wynik osoby, która uzyskała 27 punktów, odpowiada 35 centylowi.	P	F
Wynik stanowiący mniej niż 60% maksymalnej liczby punktów osiągnęło ponad 100 osób.	P	F

XII.2

A full page of blank graph paper with a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 15 rows of squares. There are no margins or additional markings on the page.



XII.3

A. 25 B. 25,2 C. 24,9 D. 25,5

CKE

Zadanie 5. (0-1)

XII.3

Mediana zestawu sześciu liczb 1, 2, 3, 4, 5, $2x$ jest równa 3.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba x jest równa:

- A. 1 B. 1.5 C. 2 D. 3



Zadanie 6.

W pewnej grupie 100 uczniów przeprowadzono sondaż dotyczący dziennego czasu korzystania z komputera. Wyniki sondażu przedstawia poniższy diagram. Na osi poziomej podano — wyrażony w godzinach — dzienny czas korzystania przez ucznia z komputera. Na osi pionowej przedstawiono liczbę uczniów, którzy dziennie korzystają z komputera przez określony czas.



Zadanie 6.1. (0-1)

XII.3

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Mediana dziennego czasu korzystania przez ucznia z komputera jest równa 2,25 godziny.	P	F
Połowa z tej grupy uczniów korzysta dziennie z komputera przez mniej niż 2,5 godziny.	P	F

Zadanie 6.2. (0-1)

XII.3

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dominanta dziennego czasu korzystania przez ucznia z komputera jest równa:

- A. 2,25 godziny B. 2,50 godziny C. 2,75 godziny D. 1,50 godziny

Zadanie 7. (0-1)

XII.3

Firma kurierska dostarczyła do hurtowni 50 paczek, w tym 16 o masie 2 kg każda, pozostałe o masie 3 kg albo 5 kg. Średnia masa jednej paczki z tej dostawy wynosi 3,6 kg.

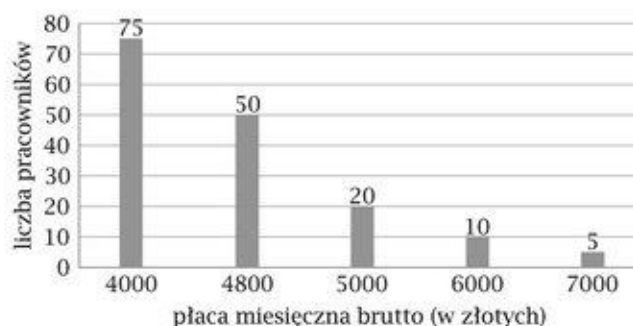
Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednią liczbę, tak aby zdanie było prawdziwe.

Liczba paczek z tej dostawy o masie 5 kg jest równa



**Zadanie 8.**

Firma F zatrudnia 160 osób. Rozkład płac brutto pracowników tej firmy przedstawia poniższy diagram. Na osi poziomej podano — wyrażoną w złotych — miesięczną płacę brutto, a na osi pionowej podano liczbę pracowników firmy F, którzy otrzymują płacę miesięczną w danej wysokości.

**Zadanie 8.1. (0-1)****XII.3**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnia miesięczna płaca brutto w firmie F jest równa:

- A. 4593,75 zł B. 4800,00 zł C. 5360,00 zł D. 2399,33 zł

Zadanie 8.2. (0-1)**XII.3**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Mediana miesięcznej płacy pracowników firmy F jest równa:

- A. 4000 zł B. 4800 zł C. 5000 zł D. 5500 zł

Zadanie 8.3. (0-1)**XII.2 / I.1**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba pracowników firmy F, których miesięczna płaca brutto nie przewyższa 5000 zł, stanowi (w zaokrągleniu do 1%):

- A. 91% liczby wszystkich pracowników tej firmy. C. 53% liczby wszystkich pracowników tej firmy.
B. 78% liczby wszystkich pracowników tej firmy. D. 22% liczby wszystkich pracowników tej firmy.

Zadanie 9.

Uczniowie pewnej klasy maturalnej rozwiązywali test ze statystyki złożony z ośmiu zadań. Rozwiązanie każdego zadania mogło być ocenione na 0 punktów lub na 1 punkt. Zbiorcze wyniki tego testu przedstawiono w tabeli poniżej. Mediana wszystkich wyników tego testu jest równa 3,5.

Suma punktów	0	1 lub 2	3 lub 4	5 lub 6	7 lub 8
Liczba osób	2	5	16	7	4

Zadanie 9.1. (0-1)**XII.3**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

W tym teście więcej osób uzyskało 4 punkty niż 5 lub 6 punktów.	P	F
Średnia arytmetyczna wszystkich wyników tego testu może być mniejsza od mediany.	P	F

Zadanie 9.2. (0-1)

XII.3

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dominanta tego zestawu wyników jest równa:

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6



Zadanie 10.

Na wykresie słupkowym poniżej podano rozkład miesięcznych zarobków wszystkich pracowników w pewnej firmie F. Na osi poziomej podano — wyrażone w tysiącach złotych — miesięczne wynagrodzenie netto pracowników firmy F, a na osi pionowej przedstawiono liczbę osób, która osiąga podane zarobki.



Zadanie 10.1. (0-1)

XII.3

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dominantą miesięcznych zarobków w firmie jest kwota:

A.	10 tys. zł,	ponieważ	1.	tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie F.
B.	4,5 tys. zł,		2.	ta wartość zarobków jest największa w firmie F.
C.	4 tys. zł,		3.	iloczyn tej wartości zarobków i liczby osób z takimi zarobkami jest największy w firmie F.

Zadanie 10.2. (0-1)

XII.3

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wy kropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Mediana miesięcznych zarobków w firmie jest kwota _____ tys. zł.



Zadanie 10.3. (0-2)

XII.2 / I.1

Oblicz, jaki % liczby wszystkich pracowników firmy F stanowią osoby zarabiające 5,5 tys. zł lub mniej.



Zadanie 10.4. (0-2)

XII.3

Oblicz średnią arytmetyczną miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy F. Wynik podaj bez zaokrąglania.

A large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 10 rows of squares, intended for drawing a picture.

Zadanie 11. (0-1)

XII.3

Średnia arytmetyczna zestawu liczb 3, 5, 8, 2, x jest równa 6, a dla zestawu 9, 3, 2 y średnia arytmetyczna wynosi 15. Zestawy te połączono w jeden zestaw liczb.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnia arytmetyczna otrzymanego zestawu liczb:

- A. jest równa jego medianie. C. jest o 5 mniejsza od jego mediany.
B. jest o 5 większa od jego mediany. D. jest o 3 mniejsza od jego mediany.

Zadanie 12. (0-1)

XII.3

W wyniku pięciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry otrzymano zestaw liczb: 3, 5, 1, 2, 2. Zestaw ten uzupełniono jeszcze o dwie jednakowe liczby uzyskane w wyniku szóstego i siódmego rzutu tą samą kostką. Mediana powiększonego zestawu jest taka sama, jak zestawu początkowego, a dominanta zmniejszyła się o 1.

Uzupełnij zdanie. Wpisz w wy kropkowanym miejscu odpowiednie liczby, tak aby zdanie było prawdziwe.

Wyniki szóstego i siódmego rzutu to i .



Zadanie 13. (0-2)

XII.3

Oblicz średnią arytmetyczną i medianę zestawu wszystkich liczb czterocyfrowych o sumie cyfr równej 3. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 14. (0-2)

XII.3

Każda z 20 osób wpłaciła datek na pewien cel charytatywny. Średnia arytmetyczna wpłat była równa 18 zł. Część z tych osób zdecydowała się dopłacić jeszcze po 10 zł, co podwyższyło średnią do 25 zł.

Oblicz, ile osób dokonano dodatkowej wpłaty. Zapisz obliczenia.



Zadanie 15. (0-2)

XII.3

Dany jest zbiór A liczb naturalnych podzielnych przez 3 i należących do przedziału $\langle 40; 60 \rangle$.

Oblicz średnią ważoną wszystkich liczb należących do zbioru A , przyjmując za wagę dla każdej liczby sumę jej cyfr. Zapisz obliczenia.



Zadanie 16. (0-3)

XII.3

Piętnaście liczb tworzących zestaw Z o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ podzielono na trzy zestawy: Z_1 , Z_2 i Z_3 zawierające odpowiednio 4, 5 i 6 elementów oraz o średnich arytmetycznych równych odpowiednio $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, i $\bar{a}_3$. Średnie te spełniają warunki: $\bar{a}_2 - \bar{a}_1 = 6$ i $\bar{a}_3 - \bar{a}_2 = 9$.

Wyznacz różnicę $\bar{a} - \bar{a}_1$. Zapisz obliczenia.



Zadanie 17. (0-4)

XII.3

W tabeli jest przedstawiony zestaw liczb i przypisane im wagi. Średnia arytmetyczna i średnia ważona tego zestawu danych są równe 0.

Liczba	1	3	$m - 2k$	-5	$k + m$
Waga	6	8	3	15	6

Oblicz medianę tego zestawu liczb. Zapisz obliczenia.



Zadanie 18. (0-3)

XII.3

Kamil ma wystawione oceny semestralne z dziesięciu na dwanaście przedmiotów. Średnia arytmetyczna tych dziesięciu ocen jest równa 4,8.

Oblicz, jakie oceny powinien otrzymać Kamil z dwóch pozostałych przedmiotów, aby jego średnia arytmetyczna była większa niż 4,75. Zapisz obliczenia.



Zadanie 19. (0-1)

XII.4

Odchylenie standardowe zestawu liczb złożonego z dziewięciu zer i dodatniej liczby k jest równe 6.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba k jest równa:

- A. $\sqrt{6}$ B. $3\sqrt{6}$ C. 18 D. 20

Zadanie 20. (0-1)

XII.4

Na jednej stronie żetonu znajduje się liczba 1, a na drugiej — liczba (-1) . Wykonano 100 rzutów tym żetonem. W 64 rzutach uzyskano liczbe 1.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odchylenie standardowe zestawu tych 100 wyników w tym doświadczeniu jest równe:

- A. 1,04 B. 0,96 C. $\frac{9}{16}$ D. $\frac{3}{4}$

Zadanie 21. (0-1)

XII.4

Wskaż zestaw liczb, którego odchylenie standardowe jest równe 2.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 0, 6, 0, 6, 0, 6 B. 2, 2, 2, 2, 2, 2 C. 7, 3, 3, 3, 1, 1 D. 4, 2, 2, 2, 2, 0

Zadanie 22. (0-1)

XII.4

Dany jest zestaw liczb: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ile spośród tych liczb różni się od średniej arytmetycznej tego zestawu o więcej niż wartość odchylenia standardowego?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

Zadanie 23. (0-2)

XII.4

Dany jest zestaw liczb: $1, 1, 1, 1, t$, gdzie $t > 0$.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

1. Dla pewnej liczby $t > 0$ średnia arytmetyczna tego zestawu jest równa 3. Wówczas odchylenie standardowe tego zestawu jest równe:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. Dla pewnej liczby $t > 0$ odchylenie standardowe tego zestawu jest równe 6. Wówczas średnia arytmetyczna tego zestawu jest równa:

- E. 4 F. 5 G. 6 H. 8

Zadanie 24. (0-1)

XII.4

Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Odchylenie standardowe zestawu liczb $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ jest równe $\sqrt{2}$.	P	F
Odchylenie standardowe zestawu liczb $x-3, x-2, x-1, x, x+1, x+2, x+3$ jest równe $\sqrt{3}$.	P	F

Zadanie 25. (0-3)

XII.4

Na pewnej ulicy przez pięć dni w tygodniu mierzono natężenie ruchu. W kolejnych dniach przejeżdżało tą ulicą odpowiednio 1246, 1249, 1381, 1429 oraz 1110 samochodów.

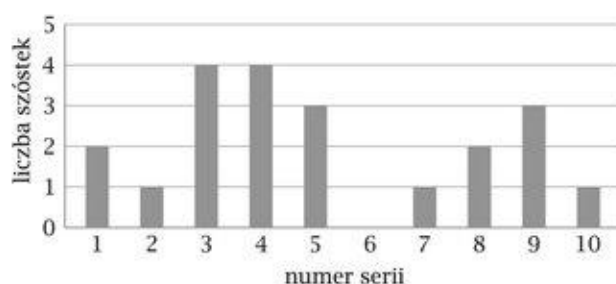
Oblicz odchylenie standardowe liczby samochodów przejeżdżających tą ulicą w tym czasie. Wynik zaokrąglij do jedności. Zapisz obliczenia.

A full-page sheet of white graph paper with a light gray grid. The grid consists of small squares, approximately 10 units wide by 10 units high. There are no margins or other markings on the page.

Zadanie 26. (0-4)

XII.4

Wykonano 10 serii po 5 rzutów sześcienną kostką do gry. Liczby uzyskanych szóstek w poszczególnych seriach przedstawiono na diagramie.



Uporządkuj od najmniejszej do największej wartości: średnią arytmetyczną, dominantę, medianę i odchylenie standardowe tego zestawu danych. Zapisz obliczenia.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Zadanie 27.

Z liczb naturalnych należących do zbioru $P = \{4, 5, 6, \dots, 15, 16\}$ utworzono cztery zestawy liczb:

Z_2 — zestaw wszystkich liczb podzielnych przez 2

Z_3 — zestaw wszystkich liczb podzielnych przez 3

Z_4 — zestaw wszystkich liczb podzielnych przez 4

Z_5 – zestaw wszystkich liczb podzielnych przez 5

Zadanie 27.1. (0-1)

XII.3

Wskaż zestaw liczb, którego średnia arytmetyczna jest największa.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. Z_2

B. Z_3 C. Z_4

D. Z_5

Zadanie 27.2. (0-2)

XII.4

Zestaw Z jest złożony z median zestawów Z_2 , Z_3 , Z_4 i Z_5 .

Oblicz kwadrat odchylenia standardowego zestawu Z. Zapisz obliczenia.

[illegible]

Zadanie 28.

Dane są dwa zestawy złożone z czterech liczb:

Z_1 – zestaw liczb $1, 1, 1, k$

Z_2 – zestaw liczb 2, 2, 2, n

Średnie arytmetyczne zestawów Z_1 i Z_2 są równe odpowiednio 3 i 4. Oba zestawy połączono w jeden zestaw Z_3 .

Zadanie 28.1. (0-1)

XII.3

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

Mediana zestawu Z_3 jest większa od średniej arytmetycznej zestawu Z_1 .	P	F
Liczby 1 i 2 są dominantami zestawu Z_3 .	P	F

Zadanie 28.2. (0-1)

XII.4

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odchylenie standardowe zestawu Z_3 jest równe:

A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 3,5

D. $\sqrt{11}$

Zadanie 29. (0-3)**XII.4**

Dany jest zestaw pięciu liczb: 1, 1, 1, 1, t , gdzie $t \in (6; 11)$.

Wyznacz najmniejszy przedział, do którego należy odchylenie standardowe tego zestawu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 30. (0-4)**XII.4**

W pewnej firmie było zatrudnionych było pięciu pracowników, których wynagrodzenia w maju wynosiły 3100 zł, 3200 zł, 3600 zł, 4500 zł, 5100 zł. W czerwcu w tej firmie zatrudniono dodatkowo pięć osób, których wynagrodzenia były jednakowe i równe średniej arytmetycznej wynagrodzeń wszystkich pracowników w maju. Oznaczmy przez σ_m i σ_c odpowiednio odchylenia standardowe zestawu wynagrodzeń wszystkich pracowników tej firmy w maju i w czerwcu.

Wykaż, że:

$$\sigma_c = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sigma_m$$

Zadanie 31. (0-4)**XII.4**

Dany jest zestaw pięciu liczb: 1, 2, k , k , k .

Wyznacz wartość k , dla której kwadrat odchylenia standardowego tego zestawu przyjmuje najmniejszą wartość. Zapisz obliczenia.

ROZWIĄZANIA

1. Liczby rzeczywiste

Zadanie 5. (0-4)

$$a = \left| 1 - 3\sqrt{2} - 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{2} \right) \right| = \left| -2 - \sqrt{2} \right| = 2 + \sqrt{2}$$

$$b = \left| 5\sqrt{2} - 8 \right| + \left| 6\sqrt{2} - 6 \right| = -5\sqrt{2} + 8 + 6\sqrt{2} - 6 = 2 + \sqrt{2}$$

$$2a + \frac{b}{2} = 4 + 2\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10 + 5\sqrt{2}}{2}$$

$$|x| = \frac{10 + 5\sqrt{2}}{2} \quad \text{oraz} \quad x < 0$$

$$\text{Zatem } x = -\frac{10 + 5\sqrt{2}}{2}.$$

Zadanie 12. (0-3)

K_0 — kwota początkowa

Oprocentowanie za okres 3 miesięcy: $\frac{6\%}{4} = 1,5\%$

Odsetki przed potrąceniem podatku: $1,5\% \cdot K_0 = 0,015K_0$

Odsetki po potrąceniu podatku: $81\% \cdot 0,015K_0 = 0,81 \cdot 0,015K_0 = 0,01215K_0$

Zatem: $0,01215K_0 = 182,25$, czyli $K_0 = 15\,000$ zł

Zadanie 15.2. (0-2)

$$a \cdot b = 3,432 \cdot 10^{15} = 343\,200 \cdot 10^{10} = 325 \cdot 1056 \cdot 10^{10}$$

Liczba $1056 \cdot 10^{10}$ jest liczbą naturalną, stąd liczba $325 \cdot 1056 \cdot 10^{10}$ jest podzielna przez 325.

Zadanie 16. (0-2)

$$20n^2 + 30n + 7 = 20n^2 + 30n + 5 + 2 = 5(4n^2 + 6n + 1) + 2$$

Dla każdej liczby naturalnej n wartość wyrażenia $4n^2 + 6n + 1$ jest liczbą naturalną, zatem liczba $5(4n^2 + 6n + 1)$ jest podzielna przez 5, a stąd wynika, że liczba $5(4n^2 + 6n + 1) + 2$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Zadanie 17. (0-2)

$$10n^2 + 30n + 8 = 10n^2 + 30n + 5 + 3 = 5(2n^2 + 6n + 1) + 3$$

Dla każdej liczby naturalnej n wartość wyrażenia $2n^2 + 6n + 1$ jest liczbą naturalną, zatem liczba $5(2n^2 + 6n + 1)$ jest podzielna przez 5, a stąd wynika, że liczba $5(2n^2 + 6n + 1) + 3$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

Zadanie 18. (0-2)

$$9^{100} - 4 \cdot 9^{99} + 8 \cdot 9^{98} = 9^{98} \cdot (9^2 - 4 \cdot 9 + 8) = 9^{98} \cdot 53 = 9^{97} \cdot 477$$

Liczba 9^{97} jest liczbą naturalną, stąd liczba $9^{97} \cdot 477$ jest podzielna przez 477.

Zadanie 22. (0-2)

$$\frac{k}{l} + \frac{l}{k} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} + \frac{3\sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{8\sqrt{2}}{12} + \frac{9\sqrt{2}}{12} = \frac{17\sqrt{2}}{12}$$

Zadanie 23. (0-2)

$$28^{n+1} + 2^{2n} \cdot 7^n = 28^n \cdot 28 + 28^n = 28^n \cdot (28 + 1) = 28^n \cdot 29$$

Dla każdej liczby naturalnej n liczba 28^n jest liczbą naturalną, stąd $28^n \cdot 29$ jest liczbą podzielną przez 29.

Zadanie 27. (0-2)

$$27^5 + 9^8 + 8 \cdot 81^4 = 3^{15} + 3^{16} + 8 \cdot 3^{16} = 3^{15} + 9 \cdot 3^{16} = 3^{15} \cdot 28 = 7 \cdot 4 \cdot 3^{15}$$

Liczba $4 \cdot 3^{15}$ jest liczbą naturalną, stąd liczba $7 \cdot 4 \cdot 3^{15}$ jest podzielna przez 7.

Zadanie 28. (0-2)

Liczby a , b , c i d zapisujemy w postaci potęgi liczby 5:

$$a = 5^{-\frac{1}{4}} \quad b = 5^{\frac{7}{6}} \quad c = 5^{-1} \quad d = 5^{\frac{1}{12}}$$

Zatem iloczyn liczb a , b , c i d jest równy: $a \cdot b \cdot c \cdot d = 5^{-\frac{1}{4} + \frac{7}{6} - 1 + \frac{1}{12}} = 5^0 = 1$.

Zadanie 30. (0-3)

Z równości $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$ otrzymujemy:

$$a = -\frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \text{stąd} \quad a = -\frac{b\sqrt{6}}{2}$$

Zatem:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Zadanie 45. (0-2)

$$\frac{T_K}{T_Z} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{I}{1,62}}}{2\pi\sqrt{\frac{I}{9,81}}} = \sqrt{\frac{I}{1,62} \cdot \frac{9,81}{I}} = \sqrt{\frac{9,81}{1,62}} \approx \sqrt{6,056} \approx 2,46$$

Zadanie 50. (0-2)

Liczby a , b i c zapisujemy w postaci potęgi liczby 2:

$$a = 16^3 = 2^{12} \quad b = 8^2 = 2^6 \quad c = 64^{-\frac{1}{3}} = 2^{-2}$$

Zatem:

$$\log_4 \frac{a \cdot c}{b} = \log_4 \frac{2^{12} \cdot 2^{-2}}{2^6} = \log_4 2^4 = \log_4 16 = 2$$

Zadanie 59. (0-2)

$$2 \log a + \log 4 = \log 1, \quad \text{gdzie } a > 0$$

$$\log(a^2 \cdot 4) = \log 1, \quad \text{stąd } a^2 = \frac{1}{4}$$

Jedyną dodatnią liczbą, która spełnia równanie $a^2 = \frac{1}{4}$, jest $a = \frac{1}{2}$.

Zadanie 63. (0-2)

$$\log_c b = \log_c \frac{c}{a^2} = \log_c c - \log_c a^2 = 1 - 2 \log_c a$$

Skoro $\log_c a = 5$, to $\log_c b = 1 - 2 \cdot 5 = -9$.

Zadanie 64. (0-4)

$$a = \log_7 27 = \log_7 3^3 = 3 \log_7 3, \quad \text{stąd } \log_7 3 = \frac{1}{3}a$$

$$b = \log_7 25 = \log_7 5^2 = 2 \log_7 5, \quad \text{stąd } \log_7 5 = \frac{1}{2}b$$

$$\text{Zatem: } \log_7 15 = \log_7 3 + \log_7 5 = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b.$$

2. Wyrażenia algebraiczne

Zadanie 2. (0-3)

P_1 — pole wielokąta W przedstawionego na rysunku

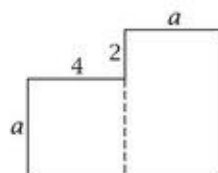
P_2 — pole kwadratu o boku $a + 3$

$$P_1 = 4 \cdot a + (2 + a) \cdot a = a^2 + 6a$$

$$P_2 = (a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$$

$P_2 > P_1$, więc kwadrat ma większe pole.

$$P_2 - P_1 = 9$$



Zadanie 6. (0-3)

Dla każdej liczby naturalnej n otrzymujemy:

$$(n+1)^3 - (n^3 + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 1 = 3n^2 + 3n = 3n(n+1)$$

Liczba $n(n+1)$ jako iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych, jest liczbą parzystą. Zatem liczba $3n(n+1)$ też jest parzysta.

Liczba $3n(n+1)$ nie jest podzielna przez 9 dla każdej liczby naturalnej n . Przykładowo dla $n = 1$ otrzymujemy liczbę 6, która nie dzieli się przez 9.

Zadanie 7. (0-2)

$$a^2 - ab + b(b - a) = a^2 - ab + b^2 - ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc $a^2 - ab + b(b - a) \geq 0$.

Zadanie 8. (0-3)

Niech $a = n + 2$ i $b = n$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$.

Jedyną liczbą całkowitą, która leży na osi liczbowej między liczbami a i b , jest liczba $(n + 1)$.

Przedstawiamy różnicę kwadratów liczb a i b w postaci iloczynu pewnej liczby całkowitej i liczby $(n + 1)$:

$$a^2 - b^2 = (n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4(n + 1)$$

Zatem liczba $a^2 - b^2$ jest wielokrotnością liczby całkowitej $(n + 1)$ leżącej na osi liczbowej między liczbami a i b .

Zadanie 15. (0-2)

$a = x + y$ i $b = x^3 + y^3$. Zatem:

$$\frac{a^3 - b}{3a} = \frac{(x + y)^3 - (x^3 + y^3)}{3(x + y)} = \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 - y^3}{3(x + y)} = \frac{3x^2y + 3xy^2}{3(x + y)} = \frac{3xy(x + y)}{3(x + y)} = xy$$

Zadanie 16. (0-3)

Niech $a = 3k + 1$ i $b = 3k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Zatem:

$$a^3 + b^3 = (3k + 1)^3 + (3k + 2)^3 = 54k^3 + 81k^2 + 45k + 9 = 9(6k^3 + 9k^2 + 5k + 1)$$

Ponieważ $k \in \mathbb{N}$, to $(6k^3 + 9k^2 + 5k + 1) \in \mathbb{N}$. Skoro liczbę $a^3 + b^3$ można przedstawić w postaci iloczynu liczby 9 i liczby naturalnej $(6k^3 + 9k^2 + 5k + 1)$, to jest ona podzielna przez 9.

Zadanie 17. (0-3)

Równość $a^3 + b^3 = (a + b)^3$ przekształcamy do postaci $3a^2b + 3ab^2 = 0$ i dzielimy stronami przez wyrażenie $3ab$ ($3ab \neq 0$). Zatem:

$$a + b = 0, \quad \text{stąd} \quad a = -b$$

Wartość wyrażenia $\frac{a}{b}$ jest więc równa: $\frac{a}{b} = \frac{-b}{b} = -1$.

Zadanie 25. (0-3)

$$(n^2 - 2n + 4)(2n - 1) - 2(n^3 - 2) = 5(2n - n^2), \text{ gdzie } n \in \mathbb{Z}$$

Ponieważ $n \in \mathbb{Z}$, to $(2n - n^2) \in \mathbb{Z}$.

Skoro liczbę $(n^2 - 2n + 4)(2n - 1) - 2(n^3 - 2)$ można przedstawić w postaci iloczynu liczby 5 i liczby całkowitej, to jest ona podzielna przez 5.

Zadanie 29. (0-2)

$n = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Zatem:

$$n^2 + 2023 = (2k + 1)^2 + 2023 = 4k(k + 1) + 2024$$

Liczba $k(k + 1)$ jako iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą parzystą. Zatem liczba $4k(k + 1)$ też jest parzysta.

Liczba 2024 jest podzielna przez 8, gdyż $2024 = 8 \cdot 253$.

Zatem liczba $4k(k + 1) + 2024$ jest podzielna przez 8 jako suma dwóch liczb podzielnych przez 8.

Zadanie 38. (0-3)

Niech $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Wówczas:

$$W(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b + 2a)x^2 + (c + 2b)x + 2c$$

Zatem:

$$3x^3 + mx^2 + 3x - 2 = ax^3 + (b + 2a)x^2 + (c + 2b)x + 2c$$

Porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b + 2a = m \\ c + 2b = 3 \\ 2c = -2 \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ m = 8 \end{cases}$$

Otrzymujemy wielomiany:

$$Q(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad \text{oraz} \quad W(x) = (x + 2)(3x^2 + 2x - 1)$$

Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby $-2, -1, \frac{1}{3}$.

Zadanie 43. (0-4)

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 7x - 4 \\ (2x^3 - 3x^2 - 18x + m) : (x + 2) \\ \underline{-2x^3 - 4x^2} \\ -7x^2 - 18x \\ \underline{7x^2 + 14x} \\ -4x + m \\ \underline{4x + 8} \\ m + 8 \end{array}$$

Zatem $m + 8 = 35$, a stąd $m = 27$ i $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x + 27$.

Rozkładamy wielomian $W(x)$ na czynniki:

$$W(x) = x^2(2x - 3) - 9(2x - 3) = (2x - 3)(x^2 - 9) = (2x - 3)(x - 3)(x + 3)$$

Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby $-3, \frac{3}{2}, 3$.

Zadanie 46. (0-2)

$$\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{ab(a - b)}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{ab(a - b)}{a - b} = a \cdot b$$

Zatem dla $a = \sqrt{5} - 2$ i $b = \sqrt{5} + 2$ otrzymujemy:

$$a \cdot b = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 1$$

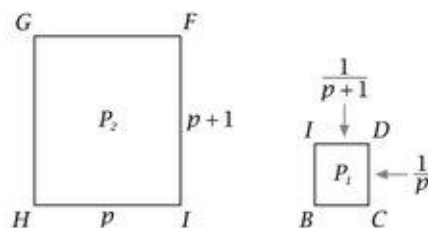
Zadanie 47. (0-3) P_1 — pole prostokąta $BCDI$ P_2 — pole prostokąta $FGHI$

$$|BI| \cdot p = 1, \text{ więc } |BI| = \frac{1}{p}$$

$$|DI| \cdot (p+1) = 1, \text{ więc } |DI| = \frac{1}{p+1}$$

$$P_1 = |BI| \cdot |DI| = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$$

$$P_2 = |HI| \cdot |FI| = p \cdot (p+1)$$



Wyznaczamy iloczyn pól prostokątów: $P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{p(p+1)} \cdot p \cdot (p+1) = 1$.

Zadanie 52. (0-2)

Dodajemy wyrażenia wymierne i przekształcamy do najprostszej postaci:

$$\frac{x-1}{x} + \frac{2x+1}{2x^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2x + 1}{2x^2} = \frac{2x^2 + 1}{2x^2}$$

Dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$ wartości wyrażeń $2x^2 + 1$ i $2x^2$ są liczbami dodatnimi, a więc wartość wyrażenia $\frac{2x^2 + 1}{2x^2}$ też jest liczbą dodatnią.

Zadanie 53. (0-2)

Skoro $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to $\frac{y}{x} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$. Zatem:

$$\frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

Po usunięciu niewymierności z mianownika wyrażenia $\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ otrzymujemy:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Zadanie 54. (0-2)

$$\frac{2}{x-3} + 5 = \frac{2}{x-3} + \frac{5(x-3)}{x-3} = \frac{5x-13}{x-3}, \text{ więc } a=5, b=-13, c=1, d=-3.$$

Zadanie 55. (0-3)

$$\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2} \right) = \left(\frac{a(a-b)}{a^2-b^2} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right) \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{a-b} \right) = -\frac{ab}{a-b}$$

Zatem dla $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ i $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ otrzymujemy:

$$-\frac{ab}{a-b} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Zadanie 56.2. (0-2)

Wiadomo, że $p + \frac{1}{p} = 7$, gdzie $p \neq 0$. Po podniesieniu obu stron równości do kwadratu otrzymujemy:

$$\left(p + \frac{1}{p} \right)^2 = 49, \text{ stąd } p^2 + 2 + \frac{1}{p^2} = 49, \text{ czyli } p^2 + \frac{1}{p^2} = 47$$

Zadanie 59.3. (0-2)

$$A = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} = \frac{(x+3)-(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{4}{x^2+2x-3} \text{ dla } x \neq 1 \text{ i } x \neq -3$$

$$B = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} = \frac{x^2+2x-3}{x^3} \text{ dla } x \neq 0$$

$$A \cdot B = \frac{4}{x^2+2x-3} \cdot \frac{x^2+2x-3}{x^3} = \frac{4}{x^3}$$

3. Równania, nierówności i układy równań

Zadanie 8.2. (0-2)

Nierówność $K(x) - x < L(x) + 1$ przekształcamy do postaci:

$$1 + 2x + x^2 + 1 + x^2 - x < 1 + x + x^2 + 1, \quad \text{stąd} \quad x^2 < 0$$

Ponieważ nie istnieje taka liczba x , dla której $x^2 < 0$, więc nierówność $K(x) - x < L(x) + 1$ nie ma rozwiązań.

Zadanie 12. (0-2)

Nierówność $2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$ przekształcamy do postaci:

$$(2 - \sqrt{5}) \cdot x \geq -3(2 - \sqrt{5})$$

Dzielimy obie strony nierówności przez $(2 - \sqrt{5})$. Ponieważ $2 - \sqrt{5} < 0$, więc należy pamiętać o zmianie zwrotu nierówności na przeciwny. Zatem $x \leq -3$, czyli największą liczbą całkowitą, która spełnia tę nierówność, jest -3 .

Zadanie 15. (0-2)

Wszystkie liczby x należące do zbioru D spełniają nierówność:

$$\frac{\frac{1}{2}x - 3}{\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{3}x - 2}{\frac{1}{2}} < 0$$

Nierówność ta po przekształceniu przyjmuje postać $\frac{5x-30}{6} < 0$. Zatem $D = (-\infty; 6)$.

Zadanie 22. (0-4)

Równanie $W(x) = \frac{1}{3}x$ przekształcamy do postaci:

$$\begin{cases} 3x^2 + 19x + 6 = 0 \\ x \in (-\infty; -1) \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 3x^2 + 5x = 0 \\ x \in (-1; +\infty) \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{cases} x \in \{-6, -\frac{1}{3}\} \\ x \in (-\infty; -1) \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x \in \{-\frac{5}{3}, 0\} \\ x \in (-1; +\infty) \end{cases}$$

Rozwiązaniami równania $W(x) = \frac{1}{3}x$ są więc liczby -6 i 0 .

Zadanie 23. (0-4)

m — liczba dni potrzebnych na rozwiązanie pozostałych zadań

$$m \in \{11, 12, 13, \dots\}$$

Szymonowi pozostało do rozwiązania $3697 - 97 = 3600$ zadań, zatem $mn = 3600$.

Sytuację związaną ze zwiększoną liczbą zadań i skróceniem czasu potrzebnego na rozwiązanie wszystkich zadań opisuje równanie:

$$(m - 10)(n + 5) = 3600$$

Po przekształceniu tego równania otrzymujemy:

$$mn + 5m - 10n - 50 = 3600, \quad \text{gdzie} \quad mn = 3600$$

Zatem $n = \frac{1}{2}m - 5$, czyli wystarczy rozwiązać równanie:

$$m\left(\frac{1}{2}m - 5\right) = 3600, \quad \text{stąd} \quad m^2 - 10m - 7200 = 0$$

Zatem $m \in \{-80, 90\}$, ale tylko $m = 90$ spełnia warunki zadania.

Przygotowanie do egzaminu zajmie Szymonowi 90 dni.

Zadanie 24. (0-3)

Równanie $(x-1)^4 - 5(x-1)^2 + 6 = 0$ zapisujemy w postaci:

$$t^2 - 5t + 6 = 0, \text{ gdzie } t = (x-1)^2 \text{ i } t \geq 0$$

Zatem $t \in \{2, 3\}$, czyli $x \in \{-\sqrt{3}+1, -\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1, \sqrt{3}+1\}$.

Zadanie 28. (0-3)

Przekształcamy lewą stronę równania $3x^3 - 6x^2 - 27x + 54 = 0$ do postaci iloczynowej:

$$3x^2(x-2) - 27(x-2) = 0$$

$$3(x-2)(x-3)(x+3) = 0$$

Zatem $x \in \{-3, 2, 3\}$.

Zadanie 29. (0-3)

Przekształcamy lewą stronę równania $-2x^3 + x^2 + 18x - 9 = 0$ do postaci iloczynowej:

$$-x^2(2x-1) + 9(2x-1) = 0$$

$$(2x-1)(3-x)(3+x) = 0$$

Zatem $x \in \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$.

Zadanie 30. (0-3)

Przekształcamy lewą stronę równania $-x^3 + 13x - 12 = 0$ do postaci iloczynowej:

$$-x^3 + x + 12x - 12 = 0$$

$$-x(x^2 - 1) + 12(x-1) = 0$$

$$(x-1)(-x^2 - x + 12) = 0$$

$$-(x-1)(x-3)(x+4) = 0$$

Zatem $x \in \{-4, 1, 3\}$.

Zadanie 33. (0-3)

h — wysokość prostopadłościanu

$h-1$ — długość jednej krawędzi podstawy

$h+3$ — długość drugiej krawędzi podstawy

$h > 1$

Rozwiązujemy równanie:

$$h(h-1)(h+3) = 6$$

$$h^3 + 2h^2 - 3h - 6 = 0$$

Równanie $h^3 + 2h^2 - 3h - 6 = 0$ można zapisać w postaci $(h^2 - 3)(h + 2) = 0$, a więc jedynym jego rozwiązaniem, spełniającym warunek $h > 1$, jest $h = \sqrt{3}$.

Zadanie 38. (0-3)

Wyznaczamy dziedzinę równania $\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)} = 0$ i skracamy wyrażenie wymierne:

$$\frac{4x+1}{2(x+3)} = 0, \text{ gdzie } x \neq -3 \text{ i } x \neq 5$$

Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest liczba $-\frac{1}{4}$.

Zadanie 40. (0-3)

Rozwiązujemy równanie dla:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} = 1, \text{ stąd } -a^2 + a + 1 = 0 \text{ i } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

Rozwiązaniami równania $-a^2 + a + 1 = 0$ są liczby $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oraz $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 46. (0-4)

Przekształcamy układ równań:

$$\begin{cases} (x-9)(y+60) = (x-8)(y+40) \\ (x-7)(y+28) = (x-6)(y+20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x - y = 220 \\ 8x - y = 76 \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = 20 \end{cases}$$

Obliczamy wartość wyrażenia W dla $x = 12$ i $y = 20$:

$$W = \frac{x-5}{x-4} + \frac{y+50}{y+20} = \frac{12-5}{12-4} + \frac{20+50}{20+20} = 2\frac{5}{8}$$

Zadanie 51. (0-2)

Analizę zadania przedstawiamy w tabeli poniżej.

	Cyfra dziesiątek	Cyfra jedności	Liczba dwucyfrowa
Sytuacja przed zmianą cyfr	x	y	$10x + y$
Sytuacja po zmianie cyfr	y	x	$10y + x$

$$x \in \{1, 2, 3, \dots, 9\} \text{ i } y \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

Sytuację przedstawioną w zadaniu opisuje układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 10y + x + 18 = 10x + y \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} x + y = 14 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Zatem $x = 8$ i $y = 6$, czyli $a = 86$.**Zadanie 52. (0-3)**

Analizę zadania przedstawiamy w tabeli obok.

 t — czas, w którym pies skacze dwa razy, a lis trzy (pies pokonuje 4 m, a lis — 3 m) x — droga, którą musi pokonać pies, aby dogonić lisa (w metrach)

Sytuację przedstawioną w zadaniu opisuje równanie:

$$\frac{xt}{4} = \frac{(x-30)t}{3}, \text{ gdzie } t \neq 0$$

Zatem po podzieleniu obu stron równania przez t otrzymujemy:

$$\frac{x}{4} = \frac{x-30}{3}, \text{ stąd } x = 120$$

Pies dogoni lisa po pokonaniu 120 metrów.

	droga [m]	prędkość	czas
pies	x	$\frac{4}{t}$	$\frac{xt}{4}$
lis	$x - 30$	$\frac{3}{t}$	$\frac{(x-30)t}{3}$

Zadanie 53. (0-3)

Sytuację przedstawioną w zadaniu opisuje układ równań:

$$\begin{cases} a + b = 527 \\ 0,08a = 0,075b \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} a = 255 \\ b = 272 \end{cases}$$

Zadanie 54. (0-2) p — masa mąki pszennej (w gramach) s — masa mąki sojowej (w gramach)

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 0,12p + 0,06s = 42 \\ 0,75p + 0,05s = 230 \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} p = 300 \\ s = 100 \end{cases}$$

Należy wymieszać 300 g mąki pszennej i 100 g mąki sojowej.

Zadanie 55. (0-3)

Sytuację przedstawioną w zadaniu opisujemy za pomocą układu równań:

$$\begin{cases} 200 + x = 5y \\ 200 + y = 9,8x \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} x = 25 \\ y = 45 \end{cases}$$

Aby liczba była podzielna przez 25 i 45, musi być podzielna przez 225, ponieważ $\text{NWW}(25, 45) = 225$. Liczby trzycyfrowe spełniające ten warunek to: 225, 450, 675, 900.

Zadanie 56. (0-3)

P — pole zamalowanej części arkusza ($P = 700 \text{ cm}^2$)

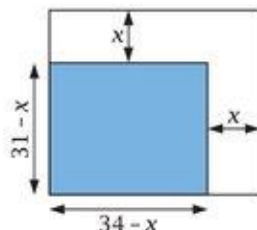
$$P = (31 - x)(34 - x)$$

Założenie: $x \in (0; 31)$. Rozwiązujemy równanie:

$$(31 - x)(34 - x) = 700, \quad \text{stąd} \quad x^2 - 65x + 354 = 0$$

Rozwiązaniami równania $x^2 - 65x + 354 = 0$ są liczby: $x = 6$ i $x = 59$.

Ponieważ tylko $x = 6$ spełnia założenie $x \in (0; 31)$, więc szerokość paska to 6 cm.

**Zadanie 60. (0-4)**

Przekształcamy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + (2x - 1)^2 - 4x + 4(2x - 1) - 17 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 20 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$$

Zadanie 61. (0-4)

Rozwiązania układu równań powinny spełniać założenia:

$$x \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \quad \text{i} \quad y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \quad \text{i} \quad x > 2y$$

Przekształcamy układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y = x^2 \\ x - 2y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 - 5y = 0 \\ x = 3y \end{cases}$$

Zatem:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = \frac{5}{9} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Ponieważ para liczb $x = 0$ i $y = 0$ nie spełnia założeń, więc rozwiązaniem układu równań jest jedynie para liczb $x = \frac{5}{3}$ i $y = \frac{5}{9}$.

4. Funkcje

Zadanie 2. (0-2)

Funkcja f dla $x \in \langle -4; -2 \rangle$ przyjmuje wartość -2 , a dla $x \in \langle -2; 3 \rangle$ — wartość równą argumentowi. Zatem:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in \langle -4; -2 \rangle \\ x & \text{dla } x \in \langle -2; 3 \rangle \end{cases}$$

Zadanie 6. (0-3)Wyznaczamy $f(2x)$ i $g(x-1)$:

$$f(2x) = 3 \cdot 2x + 5 = 6x + 5$$

$$g(x-1) = 4 \cdot (x-1) - 3 = 4x - 7$$

Rozpatrujemy warunek $f(2x) = g(x-1)$:

$$6x + 5 = 4x - 7, \quad \text{stąd } x = -6.$$

Zadanie 10. (0-2) $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.Wyznaczmy $f(2+k)$ i $f(2)$:

$$f(2+k) = a(2+k) + b = 2a + ak + b$$

$$f(2) = 2a + b$$

Wyznaczamy różnicę $f(2+k) - f(2)$:

$$f(2+k) - f(2) = 2a + ak + b - (2a + b) = ka$$

Zadanie 12. (0-2)

$$f(0) = 3 \cdot 0 + \sqrt{0+4} = 2$$

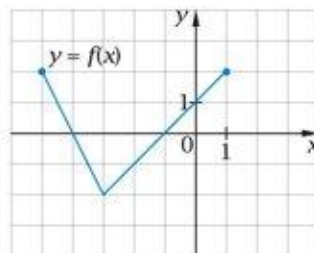
$$f(5) = 3 \cdot 5 + \sqrt{5+4} = 18$$

Zatem wykres funkcji f przecina oś y układu współrzędnych w punkcie $(0, 2)$, a wartość funkcji f dla argumentu $x = 5$ wynosi 18.**Zadanie 14. (0-3)**Wybrane argumenty funkcji f oraz odpowiadające im wartości przedstawiamy w tabeli:

x	-5	-4	-3	-1	0	1
$f(x)$	2	0	-2	0	1	2

Z wykresu odczytujemy zbiór argumentów, dla których wartości funkcji f są ujemne:

$$f(x) < 0 \quad \text{dla } x \in (-4, -1)$$

**Zadanie 29. (0-3)**

$$f(x) = ax + b$$

Skoro wykres funkcji f przecina oś y układu współrzędnych w punkcie $(0, 4)$, to $b = 4$.Do wykresu funkcji f należy również punkt $(6, 0)$. Zatem:

$$0 = 6a + 4, \quad \text{stąd } a = -\frac{2}{3}$$

Wzór funkcji f : $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$.Argument x , dla którego $f(x) = 6$, jest więc rozwiązaniem równania:

$$6 = -\frac{2}{3}x + 4, \quad \text{stąd } x = -3$$

Zadanie 31. (0-3)Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przechodzi przez punkty: $(-4, -10)$ i $(2, -1)$. Zatem:

$$\begin{cases} -10 = -4a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases}, \quad \text{stąd } \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -4 \end{cases}$$

Funkcja f jest więc określona wzorem $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$. Skoro do jej wykresu należą również punkty $(p, -7)$, $(0, q)$ i $(4, r)$, to są spełnione równości:

$$-7 = \frac{3}{2}p - 4 \quad q = \frac{3}{2} \cdot 0 - 4 \quad r = \frac{3}{2} \cdot 4 - 4$$

Zatem: $p = -2$, $q = -4$ i $r = 2$.

Zadanie 32.2. (0-2)

Wartość współczynnika b jest równa $y(0)$, czyli $b = 1,2$.

Obliczamy głębokość basenu w odległości 15 m od płytszego brzegu:

$$y(15) = 0,18 \cdot 15 - 0,9 = 1,8$$

Obliczamy wartość współczynnika a :

$$a \cdot 15 + 1,2 = 1,8, \text{ czyli } a = 0,04$$

Zadanie 33. (0-3)

Z warunku $|a - 1| = 2$ wynika: $a \in \{-1, 3\}$.

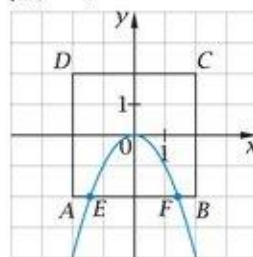
Zatem funkcja f jest określona wzorem:

$$f(x) = -x^2 \quad \text{lub} \quad f(x) = 3x^2$$

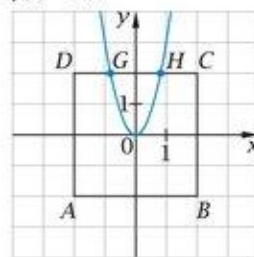
Punkty przecięcia wykresu funkcji $f(x) = -x^2$ z bokami kwadratu $ABCD$: $E = (-\sqrt{2}, -2)$ i $F = (\sqrt{2}, -2)$.

Punkty przecięcia wykresu funkcji $f(x) = 3x^2$ z bokami kwadratu $ABCD$: $G = (-\frac{\sqrt{6}}{3}, 2)$ i $H = (\frac{\sqrt{6}}{3}, 2)$.

$$f(x) = -x^2$$

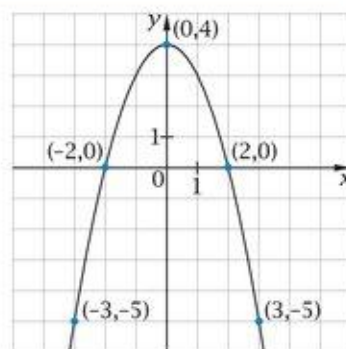


$$f(x) = 3x^2$$

**Zadanie 34. (0-3)**

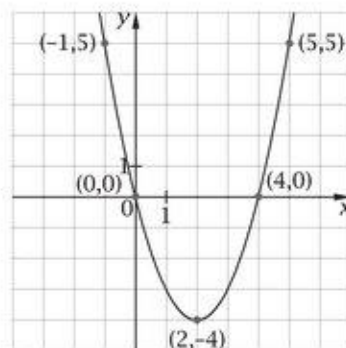
Ponieważ punkt $(-3, -5)$ należy do wykresu funkcji f , więc jest spełniona równość $-5 = c - (-3)^2$, z której wynika, że $c = 4$.

x	-3	-2	0	2	3
$f(x)$	-5	0	4	0	-5

**Zadanie 35. (0-3)**

Ponieważ punkt $(5, 5)$ należy do wykresu funkcji f , więc jest spełniona równość $5 = 5^2 - 5b$, z której wynika, że $b = 4$.

x	-1	0	2	4	5
$f(x)$	5	0	-4	0	5

**Zadanie 37. (0-4)**

Obliczamy współrzędne punktu $W = (x_w, y_w)$ będącego wierzchołkiem paraboli:

$$x_w = \frac{-1}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 1 \quad y_w = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 + 4 = 4\frac{1}{2}$$

Wierzchołek paraboli ma więc współrzędne $W = (1, 4\frac{1}{2})$.

Ponieważ $f(0) = 4$, więc wykres funkcji f przecina oś y układu współrzędnych w punkcie $(0, 4)$.

Obliczamy miejsca zerowe funkcji f :

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 = 9, \quad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 4 \quad x_2 = \frac{-1+3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -2$$

Zatem wykres funkcji f przecina oś x układu współrzędnych w punktach $(-2, 0)$ oraz $(4, 0)$.

Zadanie 49.2. (0-1)

Oś symetrii wykresu funkcji g przecina oś x układu współrzędnych w punkcie $A = (3, 0)$. Punkt A jest więc środkiem odcinka, którego końcami są miejsca zerowe x_1 i x_2 funkcji g .

$$3 = \frac{1+x_2}{2}, \quad \text{stąd} \quad x_2 = 5$$

Funkcję g można opisać wzorem $g(x) = a(x-1)(x-5)$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą.

Wykres funkcji g przechodzi przez punkt $P = (2, -6)$, więc jest spełniona równość $-6 = a(2-1)(2-5)$, z której wynika, że $a = 2$.

Wzór funkcji g w postaci iloczynowej: $g(x) = 2(x-1)(x-5)$.

Zadanie 50.2. (0-2)

Wierzchołek paraboli ma współrzędne $(5, -3)$, czyli $f(x) = a(x-5)^2 - 3$.

Do paraboli należy punkt $(4, 0)$, więc:

$$0 = a(4-5)^2 - 3, \quad \text{stąd} \quad a = 3$$

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej:

$$f(x) = 3(x-5)^2 - 3$$

Zadanie 51. (0-2)

Ponieważ wykres funkcji kwadratowej f ma ramiona skierowane do góry ($a = 2 > 0$), więc funkcja ta najmniejszą wartość przyjmuje dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli. Zatem:

$$-\frac{b}{2a} = 7, \quad \text{stąd} \quad -\frac{b}{4} = 7, \quad \text{czyli} \quad b = -28$$

Zadanie 56. (0-3)

$f(x) = \pi x^2$, gdzie $x > 0$

Zatem równanie $f(\sqrt{11}) + f(5) = f(a)$ można zapisać w postaci $\pi \cdot (\sqrt{11})^2 + \pi \cdot 5^2 = \pi a^2$, gdzie $a > 0$. Po podzieleniu obu stron równania przez π otrzymujemy:

$$11 + 25 = a^2, \quad \text{czyli} \quad a^2 = 36$$

Ponieważ wartość a musi należeć do dziedziny funkcji f , więc $a = 6$.

Zadanie 58. (0-2)

$f(x) = ax + b$, gdzie x oznacza liczbę sztuk wyprodukowanego towaru

Ponieważ $f(3000) = 1600$ oraz $f(1000) = 1200$, więc rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 3000a + b = 1600 \\ 1000a + b = 1200 \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = 1000 \end{cases}$$

Funkcja f jest więc określona wzorem $f(x) = \frac{1}{5}x + 1000$.

Koszt wyprodukowania 2500 sztuk towaru to: $f(2500) = \frac{1}{5} \cdot 2500 + 1000 = 1500$ [zł].

Zadanie 59. (0-4)

Wykres funkcji przecina oś y układu współrzędnych w punkcie $(0, 1)$, więc $c = 1$. Miejscem zerowym tej funkcji jest $x = 3$, więc spełnione jest równanie $-\frac{1}{3} \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 1 = 0$, stąd $b = \frac{2}{3}$. Zatem funkcja opisująca wysokość strumienia wody nad powierzchnią ziemi ma wzór: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

Szukana wysokość to druga współrzędna wierzchołka paraboli, czyli:

$$y_w = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1\right)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = 1\frac{1}{3}$$

Najwyższy punkt strumienia wody znajduje się na wysokości $1\frac{1}{3}$ m nad powierzchnią ziemi.

Zadanie 60.2. (0-2)

Szukana wysokość to druga współrzędna wierzchołka paraboli, czyli:

$$y_w = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(1,3^2 + 4 \cdot 0,174 \cdot 2,5)}{4 \cdot (-0,174)} = 4,928 \dots \approx 4,93$$

Maksymalna wysokość, na jaką wzniesie się środek piłki, to około 4,93 m.

Zadanie 60.3. (0-3)

W momencie gdy piłka upadła i dotknęła parkietu, punkt środka piłki należał do paraboli oraz znajdował się na wysokości 0,12 m ponad parkietem, a więc współrzędne (x, y) środka piłki spełniają równanie paraboli oraz $y = 0,12$ i $x > 7,01$. Zatem rozwiązujemy równanie:

$$0,12 = -0,174x^2 + 1,3x + 2,5, \quad \text{stad} \quad 0,174x^2 - 1,3x - 2,38 = 0$$

Rozwiązaniami powyższego równania są liczby:

$$x_1 = \frac{1,3 - \sqrt{3,34648}}{0,348} \approx -1,52 \quad x_2 = \frac{1,3 + \sqrt{3,34648}}{0,348} \approx 8,99$$

Jedynie $x = 8,99$ spełnia warunek $x > 7,01$, a więc współrzędna x środka piłki w momencie, w którym piłka dotknęła parkietu, jest równa w przybliżeniu 8,99 m.

Zadanie 61.1. (0-2)

$$h(t) = 0, \quad \text{czyli} \quad 0 = -5t^2 + 20t + 12$$

Rozwiązaniami powyższego równania są liczby:

$$t_1 = 2 + 0,8\sqrt{10} \approx 4,5 \quad t_2 = 2 - 0,8\sqrt{10} \approx -0,5$$

Ponieważ $t > 0$, więc kamień uderzy w powierzchnię jeziora po upływie około 4,5 s od momentu rzucenia.

Zadanie 61.2. (0-3)

$$h(t) > 20, \quad \text{czyli} \quad -5t^2 + 20t + 12 > 20, \quad \text{stad} \quad -5t^2 + 20t - 8 > 0$$

Rozwiązaniami równania $-5t^2 + 20t - 8 = 0$ są liczby:

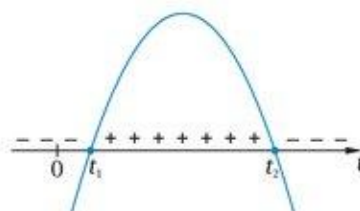
$$t_1 = 2 - 0,4\sqrt{15} \quad t_2 = 2 + 0,4\sqrt{15}$$

Rozwiązania nierówności $-5t^2 + 20t - 8 > 0$ odczytujemy z wykresu:

$$t \in (t_1; t_2)$$

Czas, przez który kamień znajdował się na wysokości ponad 20 m nad powierzchnią jeziora jest więc równy różnicy $t_2 - t_1$.

Zatem: $t_2 - t_1 = 2 + 0,4\sqrt{15} - (2 - 0,4\sqrt{15}) = 0,8\sqrt{15} \approx 3,1$ [s].



Zadanie 61.3. (0-2)

Dziedziną funkcji h jest zbiór $(0; +\infty)$.

Wykresem funkcji $y = 12 + 20t - 5t^2$ jest parabola o ramionach skierowanych do dołu, więc jej największa wartość jest równa drugiej współrzędnej wierzchołka tej paraboli, czyli:

$$y_w = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-(20^2 + 4 \cdot 5 \cdot 12)}{4 \cdot (-5)} = \frac{640}{20} = 32$$

Jeśli $y_w = 32$, to $x_w = -\frac{20}{2 \cdot (-5)} = 2$. Ponieważ $2 \in (0; +\infty)$, więc największą wartością funkcji h określonej w zbiorze $(0; +\infty)$ jest liczba 32.

Zatem największa wysokość, na jakiej znajdował się kamień, to 32 m.

Zadanie 62.2. (0-2)

Do wykresu funkcji $f(x) = ax + b$ należą punkty $(1000, 13)$ i $(1500, 10)$.

Rozwiązujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} 1000a + b = 13 \\ 1500a + b = 10 \end{cases}, \quad \text{stad} \quad \begin{cases} a = -0,006 \\ b = 19 \end{cases}$$

Zadanie 64. (0-4)

P — pole kąpieliska

$$2a + b = 200, \text{ czyli } b = 200 - 2a$$

$$P = a \cdot b$$

$$\text{Zatem: } P(a) = a(200 - 2a) = -2a^2 + 200a.$$

Ponieważ $a > 0$ i $200 - 2a > 0$, więc dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 100)$.

Wykresem funkcji $y = -2a^2 + 200a$ jest parabola o ramionach skierowanych do dołu, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$a_w = \frac{-200}{2 \cdot (-2)} = 50$$

Ponieważ $50 \in (0; 100)$, więc funkcja P określona w zbiorze $(0; 100)$ przyjmuje dla $a = 50$ największą wartość. Zatem kąpielisko o największej powierzchni ma wymiary:

$$a = 50 \text{ m} \quad \text{oraz} \quad b = 200 - 2 \cdot 50 = 100 \text{ [m]}$$

Zadanie 65.1. (0-2)

$$2b + 3a = 100, \text{ więc } b = 50 - \frac{3}{2}a$$

$$P = ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Zatem:

$$P(a) = a \left(50 - \frac{3}{2}a \right) + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = -\frac{3}{2}a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 50a = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \right) a^2 + 50a$$

Zadanie 65.2. (0-2)

Ponieważ $a > 0$ i $b = 50 - \frac{3}{2}a > 0$, więc dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 33\frac{1}{3})$.

Wykresem funkcji $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \right) a^2 + 50a$ jest parabola o ramionach skierowanych do dołu, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$a_w = \frac{-50}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \right)} = \frac{100(\sqrt{3} + 6)}{33}$$

Ponieważ $\frac{100(\sqrt{3} + 6)}{33} \approx 23,43 \in (0; 33\frac{1}{3})$, więc funkcja P określona w zbiorze $(0; 33\frac{1}{3})$ przyjmuje największą wartość dla $a = \frac{100(\sqrt{3} + 6)}{33}$ m. Zatem pole P będzie największe dla $a \approx 23,43$ m.

Zadanie 66. (0-4)

$$3x + 4y - 2 \cdot 10 = 58 \quad \text{czyli} \quad y = 150 - \frac{3}{4}x$$

$$P = x \cdot 2y$$

$$\text{Zatem: } P(x) = 2x \left(150 - \frac{3}{4}x \right) = -\frac{3}{2}x^2 + 300x.$$

Ponieważ $x > 0$ i $150 - \frac{3}{4}x > 10$, więc dziedziną funkcji P jest przedział $(0; \frac{560}{3})$.

Wykresem funkcji $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 300x$ jest parabola o ramionach skierowanych do dołu, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$x_w = \frac{-300}{2 \cdot (-\frac{3}{2})} = 100$$

Ponieważ $100 \in (0; \frac{560}{3})$, więc funkcja P określona w zbiorze $(0; \frac{560}{3})$ przyjmuje dla $x = 100$ największą wartość. Zatem działka o największej powierzchni magazynowej ma wymiary:

$$x = 100 \text{ m} \quad \text{oraz} \quad y = 150 - \frac{3}{4} \cdot 100 = 75 \text{ [m]}$$

Zadanie 67.2. (0-3)

Koszt K (w zł) wyprodukowania x zbiorników w sierpniu wyraża się wzorem:

$$K(x) = x(80 - 0,1x), \quad \text{stad} \quad K(x) = -0,1x^2 + 80x$$

Dziedziną funkcji K jest zbiór $\{0, 1, 2, \dots, 600\}$.

Wykresem funkcji $y = -0,1x^2 + 80x$ jest parabola o ramionach skierowanych do dołu, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$x_w = \frac{-80}{2 \cdot (-0,1)} = 400$$

Ponieważ $400 \in \{0, 1, 2, \dots, 600\}$, więc funkcja K określona w zbiorze $\{0, 1, 2, \dots, 600\}$ przyjmuje dla $x = 400$ największą wartość równą:

$$K(400) = 400(80 - 0,1 \cdot 400) = 16\,000$$

Zatem koszt produkcji zbiorników będzie najwyższy, gdy zakład wyprodukuje 400 zbiorników i wyniesie on 16 000 zł.

Zadanie 68. (0-4)

$Z(x)$ — tygodniowy zysk ze sprzedaży x wiatraków

Zysk ze sprzedaży jest różnicą przychodu ze sprzedaży wiatraków oraz kosztu ich wytworzenia:

$$Z(x) = P(x) - K(x) = -x^2 + 230x - 170$$

Dziedziną funkcji Z jest zbiór $\{0, 1, 2, \dots, 150\}$.

Wykresem funkcji $y = -x^2 + 230x - 170$ jest parabola o ramionach skierowanych do dołu, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$x_w = \frac{-230}{2 \cdot (-1)} = 115$$

Ponieważ $115 \in \{0, 1, 2, \dots, 150\}$, więc funkcja Z określona w zbiorze $\{0, 1, 2, \dots, 150\}$ przyjmuje dla $x = 115$ największą wartość równą:

$$Z(115) = -115^2 + 230 \cdot 115 - 170 = 13\,055$$

Zatem tygodniowy zysk będzie największy, gdy zakład wyprodukuje 115 wiatraków i wyniesie on 13 055 zł.

Zadanie 71.3. (0-3)

Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f ma współrzędne $(1, 8)$, czyli $f(x) = a(x - 1)^2 + 8$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Ponieważ $f(-1) = 0$, więc:

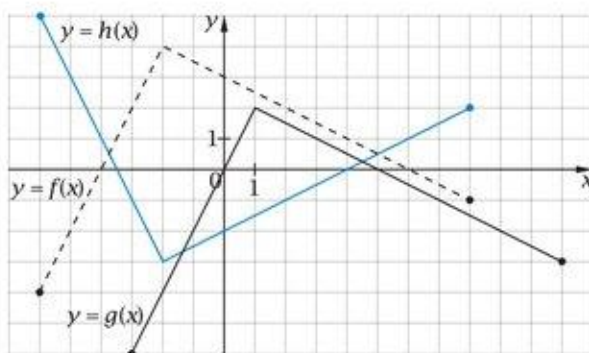
$$0 = a(-1 - 1)^2 + 8, \quad \text{stad} \quad a = -2$$

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$.

Zadanie 75. (0-2)

$$y = f(x) \xrightarrow[3 \text{ jednostki w prawo}]{\quad} y = f(x - 3) \xrightarrow[2 \text{ jednostki w dół}]{\quad} g(x) = f(x - 3) - 2$$

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{symetria wzgl. osi } x]{\quad} y = -f(x) \xrightarrow[1 \text{ jednostka w górę}]{\quad} g(x) = -f(x) + 1$$



Zadanie 78. (0-2)

Ponieważ punkt $(-2, 3)$ należy do wykresu funkcji f , więc:

$$3 = \frac{a}{-2}, \quad \text{czyli } a = -6, \quad \text{stąd } f(x) = \frac{-6}{x}$$

Punkty $(-7, c)$ i $(d, -10)$ też należą do wykresu funkcji f , więc spełnione są równości:

$$c = \frac{-6}{-7} \quad \text{oraz} \quad -10 = \frac{-6}{d}$$

Zatem $c = \frac{6}{7}$ i $d = \frac{6}{10}$.

Zadanie 79. (0-3)

$V = \frac{a}{p}$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą

$$5 = \frac{a}{40}, \quad \text{więc } a = 5 \cdot 40 = 200 \quad \text{i} \quad V = \frac{200}{p}$$

Jeśli $p = 20$, to $y = \frac{200}{20} = 10$ [ml]. Jeśli $V = 50$, to $50 = \frac{200}{x}$, a więc $x = 4$ [PSI].

Zadanie 84.2. (0-3)

$$T \approx 5700 \text{ lat}$$

t — wiek znaleziska archeologicznego w latach

$$\frac{1}{16}N_0 = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \quad \text{czyli } \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \quad \text{stąd } \frac{t}{T} = 4$$

Zatem $t = 4T \approx 4 \cdot 5700 = 22\,800$ lat.

5. Ciągi

Zadanie 7. (0-2)

Obliczamy a_2 , a_3 i a_4 dla ciągu (a_n) , w którym $a_1 = -2$:

$$a_2 = 1 \cdot a_1 + 4 = 1 \cdot (-2) + 4 = 2$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 4 = 2 \cdot 2 + 4 = 8$$

$$a_4 = 3 \cdot a_3 + 4 = 3 \cdot 8 + 4 = 28$$

Obliczamy sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n) :

$$S_4 = -2 + 2 + 8 + 28 = 36$$

Zadanie 15. (0-3)

Jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to $a_{n+1} - a_n = r$, gdzie r jest pewną liczbą rzeczywistą. Obliczamy różnicę między dowolnymi kolejnymi wyrazami ciągu (b_n) :

$$b_{n+1} - b_n = p \cdot a_{n+1} + q - (p \cdot a_n + q) = p(a_{n+1} - a_n) = pr$$

Różnica $b_{n+1} - b_n$ przyjmuje stałą wartość niezależną od n , więc ciąg (b_n) jest arytmetyczny.

Zadanie 20. (0-2)

Wyznaczamy wzór na wyraz a_{n+1} :

$$a_{n+1} = 4(n+1) - 9 = 4n - 5 \quad \text{dla } n \geq 1$$

Obliczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = 4n - 5 - (4n - 9) = 4 \quad \text{dla każdego } n \geq 1$$

Różnica $a_{n+1} - a_n$ przyjmuje wartość 4, więc ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 4$.

Zadanie 30. (0-2)

Skoro $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$, to:

$$5a_1 + 35r = 3(5a_1 + 10r)$$

Zatem dla $r = 4$ otrzymujemy:

$$5a_1 + 140 = 3(5a_1 + 40), \text{ stąd } a_1 = 2$$

Zadanie 32. (0-2)

Ciąg 101, 103, 105, ..., 499 jest ciągiem arytmetycznym o różnicy równej 2. Aby ustalić liczbę wyrazów tego ciągu, rozwiązujemy równanie:

$$499 = 101 + (n-1) \cdot 2, \text{ stąd } n = 200$$

Suma tych wyrazów jest równa $\frac{101+499}{2} \cdot 200 = 60\,000$.

Zadanie 33. (0-2)

Skoro suma 403 początkowych wyrazów ciągu (a_n) , w którym $a_1 = 1$, wynosi 27 404, to zachodzi równość:

$$\frac{2 \cdot 1 + 402 \cdot r}{2} \cdot 403 = 27\,404, \text{ stąd } r = \frac{1}{3}$$

Zadanie 34. (0-4)

Skoro $a_1 + a_2 = 2$ i $a_3 + a_4 = 42$, to należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2a_1 + r = 2 \\ 2a_1 + 5r = 42 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} a_1 = -4 \\ r = 10 \end{cases}$$

Wyznaczamy wzór ogólny ciągu (a_n) :

$$a_n = -4 + (n-1) \cdot 10, \text{ czyli } a_n = 10n - 14$$

Zadanie 40. (0-2)

W ciągu geometrycznym (a_n) zachodzi $a_7 = 5$ oraz $(a_7)^2 = a_6 \cdot a_8$. Zatem:

$$a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = (a_7)^3 = 5^3 = 125$$

Zadanie 41. (0-3)

Niech q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Wtedy:

$$b = aq \quad c = aq^2 \quad d = aq^3$$

Stąd:

$$ad = a \cdot aq^3 = a^2q^3 \quad \text{oraz} \quad bc = aq \cdot aq^2 = a^2q^3$$

Zatem $ad = bc$.

Zadanie 44. (0-3)

$$\frac{1}{9} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2, \text{ stąd } a_1 = 1$$

Rozwiązujemy równanie $\frac{364}{243} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$, gdzie n oznacza liczbę wyrazów ciągu (a_n) .

Zatem:

$$\frac{364}{243} = \frac{3^n - 1}{3^n} \cdot \frac{3}{2}, \text{ stąd } 3^n = 729, \text{ czyli } n = 6$$

Zadanie 45. (0-2)

Dla ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q , w którym $a_1 = 27$ i $a_4 = 8$, otrzymujemy:

$$27q^3 = 8, \text{ stąd } q = \frac{2}{3}$$

Zatem:

$$a_2 = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18 \quad a_3 = 18 \cdot \frac{2}{3} = 12$$

Zadanie 53. (0-4)

Liczbę miejsc w kolejnych rzędach trybuny można opisać za pomocą ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_{30} = 246$ i $r = 6$. Zatem liczbę miejsc w pierwszym rzędzie wyznaczamy z równania:

$$a_1 + (30 - 1) \cdot 6 = 246, \quad \text{stąd} \quad a_1 = 72$$

Liczba wszystkich miejsc na tej trybunie jest sumą 30 początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Zatem:

$$S_{30} = \frac{72 + 246}{2} \cdot 30 = 4770$$

Zadanie 54. (0-3)

Pacjent przyjmuje jedenastą dawkę po 40 dniach, licząc od momentu przyjęcia pierwszej dawki.

Dawka nr n	Liczba dni między dawkami nr n i 11.	Ile mg leku zostaje w organizmie z dawki nr n do przyjęcia dawki nr 11?
1	40	$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
2	36	$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9$
3	32	$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$
4	28	$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$
5	24	$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$
6	20	$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$
7	16	$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$
8	12	$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$
9	8	$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$
10	4	$100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1$

Liczby z ostatniej kolumny tworzą ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_1 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ i $q = 2$.

Łączna masa leku L w organizmie człowieka jest sumą dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) . Zatem:

$$S_{10} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 100 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \approx 99,9 \text{ [mg]}$$

Zadanie 56. (0-4)

r — różnica ciągu arytmetycznego (a_n)

$$x = a_1$$

$$y = a_4 = a_1 + 3r$$

$$z = a_{25} = a_1 + 24r$$

Liczby a_1 , $a_1 + 3r$, $a_1 + 24r$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny i ich suma jest równa 114. Zatem rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 3a_1 + 27r = 114 \\ (a_1 + 3r)^2 = a_1(a_1 + 24r) \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} a_1 = 38 - 9r \\ 4r - r^2 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniami równania $4r - r^2 = 0$ są liczby $r = 0$ oraz $r = 4$.

Dla $r = 0$ ciąg (a_n) jest ciągiem stałym, w którym każdy wyraz jest równy 38. Zatem $x = y = z = 38$.

Jeżeli $r = 4$, to:

$$x = a_1 = 2$$

$$y = 2 + 3 \cdot 4 = 14$$

$$z = 2 + 24 \cdot 4 = 98$$

Zadanie 57. (0-2)

(a_n) — ciąg geometryczny

Wyznaczamy a_1 , a_2 i a_3 :

$$a_1 = f(m) = \frac{1}{m} \quad a_2 = f(1) = 1 \quad a_3 = f(2) = \frac{1}{2}$$

W ciągu (a_n) zachodzi:

$$(a_2)^2 = a_1 \cdot a_3, \text{ czyli } 1 = \frac{1}{2m}, \text{ stąd } m = \frac{1}{2}$$

Zadanie 58. (0-4)

Trzy liczby tworzące ciąg arytmetyczny to: $b-r$, b , $b+r$, gdzie r jest różnicą tego ciągu. Uwzględniając warunek na sumę tych liczb, otrzymujemy:

$$(b-r) + b + (b+r) = 24, \text{ stąd } b = 8$$

Zatem ciąg arytmetyczny ma postać: $(8-r, 8, 8+r)$.

Po dodaniu kolejno do jego wyrazów liczb 4, 10, 40 otrzymujemy ciąg geometryczny:

$$(12-r, 18, 48+r)$$

Z własności ciągu geometrycznego wynika równanie:

$$18^2 = (12-r)(48+r), \text{ stąd } r^2 + 36r - 252 = 0$$

Rozwiązaniami równania $r^2 + 36r - 252 = 0$ są liczby $r = -42$ oraz $r = 6$.

Dla $r = -42$ otrzymujemy 50, 8, -34, a dla $r = 6$ szukane liczby to 2, 8, 14.

Zadanie 59.1. (0-1)

Comiesięczne wpłaty są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 300$ i $r = 25$. Pierwszego czerwca 2022 roku pani Joanna dokona dwudziestej piątej wpłaty.

a_{25} — wartość kwoty wpłaconej przez panią Joannę 1.06.2022 r.

Zatem:

$$a_{25} = 300 + (25-1) \cdot 25 = 900$$

Pani Joanna 1.06.2022 wpłaciła na subkonto 900 zł.

Zadanie 59.2. (0-2)

Comiesięczne wpłaty są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 300$. Pierwszego czerwca 2025 roku pani Joanna dokona sześćdziesiątej pierwszej wpłaty.

r — o tyle większą kwotę niż w poprzednim miesiącu powinna odkładać pani Joanna

Zatem:

$$\frac{2 \cdot 300 + (61-1)r}{2} \cdot 61 = 76\,860, \text{ stąd } r = 32$$

Pani Joanna powinna odkładać o 32 zł więcej niż w miesiącu poprzednim.

6. Trygonometria

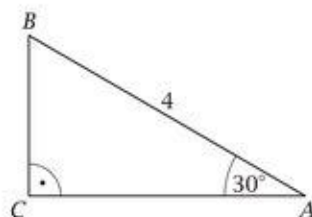
Zadanie 10. (0-2)

Obliczamy długość przyprostokątnej AC:

$$\frac{|AC|}{4} = \cos 30^\circ, \text{ stąd } |AC| = 2\sqrt{3}$$

Obliczamy długość przyprostokątnej BC:

$$\frac{|BC|}{4} = \sin 30^\circ, \text{ stąd } |BC| = 2$$



Zadanie 11. (0-2)

Obliczamy długość przyprostokątnej AC: $\frac{|AC|}{|AD|} = \operatorname{tg} 60^\circ$, stąd $|AC| = 2\sqrt{3}$.

Obliczamy długość przyprostokątnej AB: $\frac{|AC|}{|AB|} = \operatorname{tg} 30^\circ$, stąd $|AB| = 6$.

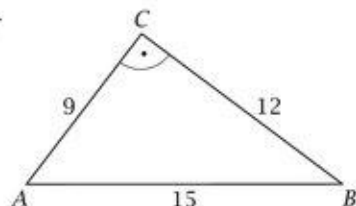
Zadanie 12. (0-3)

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych występujących w wyrażeniu dla kątów α i β :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \sin \beta = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad \cos \beta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Obliczamy wartość wyrażenia:

$$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} - 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

**Zadanie 13. (0-4)**

Z definicji funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych trójkątów zbudowanych na bokach trójkąta ABC wynika:

$$|CD| = 2 \quad |DB| = 1,5 \quad |AE| = 2\sqrt{3} \quad |EB| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$|CB| = |CD| + |DB| = 3,5$$

$$|AB| = |AE| + |EB| = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika:

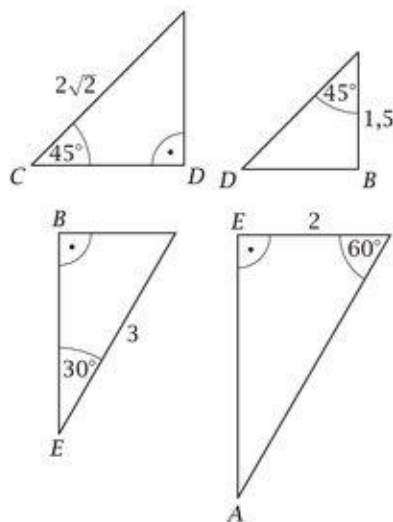
$$|AC|^2 = |AB|^2 - |CB|^2, \text{ stąd } |AC|^2 = \frac{49}{2}, \text{ czyli } |AC| = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Zatem:

$$\sin \alpha = \frac{|CB|}{|AB|} = \frac{3,5}{\frac{7\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{|CB|}{|AC|} = \frac{3,5}{\frac{7\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Obliczamy wartość wyrażenia $\sqrt{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}$:

$$\sqrt{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

**Zadanie 20. (0-3)**

Kąty α i β to kąty ostre tego samego trójkąta prostokątnego, więc $\sin \beta = \cos \alpha$.

Zatem z równości $\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{3}{4}$ oraz z założeń: $\cos \alpha > 0$ i $\sin \beta > 0$ wynika:

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli } \alpha = 30^\circ \text{ oraz } \beta = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$$

Zadanie 23. (0-2)

$$P = (-1, 7), \operatorname{tg} \alpha = -7, |OP| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \quad \cos \alpha = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Zadanie 25. (0-3)

$$\operatorname{tg} \alpha = -2, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{2}$$

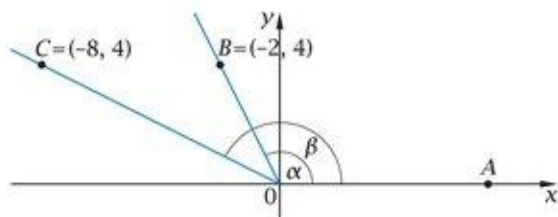
$$|OB| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$|OC| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \beta = \frac{-8}{4\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Wartość wyrażenia jest równa:

$$\frac{1}{2} \cdot (-2) - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$



Zadanie 28.1. (0-2)

$$P = (-4, 3), \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}, \quad \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}$$

Zadanie 28.2. (0-2)

$$|OP| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

Zadanie 29. (0-3)

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$|OP| = \sqrt{(-4)^2 + (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{3\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

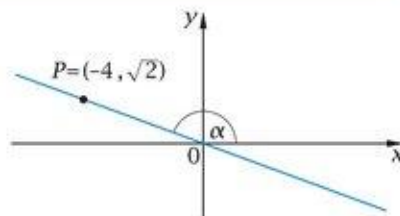
Obliczamy wartość wyrażenia z lewej strony równości dla danego kąta α :

$$3(\sin \alpha + \cos \alpha) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 1 - 2\sqrt{2}$$

Obliczamy wartość wyrażenia z prawej strony równości dla danego kąta α :

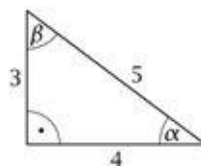
$$1 + 8 \operatorname{tg} \alpha = 1 + 8 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 1 - 2\sqrt{2}$$

Zatem podana równość jest spełniona dla danego kąta α .

**Zadanie 33. (0-1)**

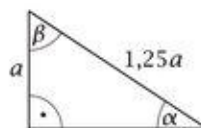
α — miara najmniejszego kąta w trójkącie

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75, \text{ czyli } \alpha \approx 37^\circ$$

**Zadanie 35. (0-2)**

$$\sin \alpha = \frac{a}{1,25a} = 0,8, \text{ czyli } \alpha \approx 53^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 37^\circ$$

**Zadanie 37. (0-2)**

Z „jedynki trygonometrycznej” wynika:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \text{ gdzie } \cos \alpha < 0$$

Zatem:

$$\cos \alpha = -\frac{12}{13} \text{ oraz } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

Zadanie 41. (0-2)

Ze wzoru $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ wynika:

$$\sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \cos \alpha$$

Z „jedynki trygonometrycznej” otrzymujemy równość:

$$(\sqrt{2} \cdot \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \text{ gdzie } \cos \alpha > 0$$

$$\text{Zatem } \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ oraz } \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Zadanie 43. (0-2)

$$\sin \alpha \cdot \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \sin \alpha \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \sin \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Zadanie 44. (0-3)

Kąty α i β to kąty ostre tego samego trójkąta prostokątnego, więc:

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

Z warunku $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = 4$ wynika:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 4, \text{ gdzie } \operatorname{tg} \alpha > 0$$

Zatem:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 3, \text{ stąd } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}, \text{ czyli } \alpha = 60^\circ \text{ oraz } \beta = 90^\circ - \alpha = 30^\circ$$

Zadanie 45. (0-3)

Przekształcamy lewą stronę równości:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Zatem:

$$\frac{1}{\sin \alpha} = 5, \text{ stąd } \sin \alpha = \frac{1}{5}$$

Z „jedynki trygonometrycznej” wynika:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \text{ gdzie } \cos \alpha < 0$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Zadanie 48. (0-4)

Przekształcamy lewą stronę równości:

$$\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

Zatem:

$$\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{3}{\cos \alpha}, \text{ stąd } \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

Z „jedynki trygonometrycznej” wynika:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \text{ gdzie } \cos \alpha > 0$$

Zatem:

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ oraz } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Zadanie 49. (0-2)

Ze wzoru $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ wynika, że $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

Zatem:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25} \neq 1$$

Ponieważ wartości $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ nie spełniają „jedynki trygonometrycznej”, więc kąt α nie istnieje.

Zadanie 50. (0-2)

Przekształcamy wyrażenie W przy użyciu wzoru $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ oraz „jedynki trygonometrycznej”:

$$W = 7 \left(\frac{1}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} + \sin^2 \alpha \right) = 7 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha \right) = 7 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 7$$

Wartość wyrażenia W jest równa 7, więc nie zależy od miary kąta α .

Zadanie 55. (0-2)

$$\sphericalangle BAC = \alpha$$

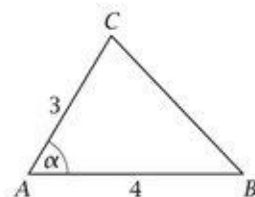
Ponieważ $\cos \alpha > 0$, więc $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$.

Z „jedynki trygonometrycznej” wynika:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1, \text{ gdzie } \sin \alpha > 0$$

Zatem:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \text{ czyli } P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{5} = 3\frac{3}{5}$$

**Zadanie 56. (0-3)**

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha$$

$$12\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 \cdot \sin \alpha, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

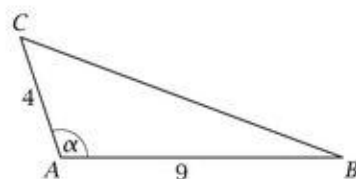
Z „jedynki trygonometrycznej” wynika:

$$\cos^2 \alpha + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1, \text{ gdzie } \cos \alpha < 0$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha = -\frac{1}{3}.$$

Z twierdzenia cosinusów wynika:

$$|BC|^2 = 4^2 + 9^2 - 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right), \text{ czyli } |BC|^2 = 121, \text{ stąd } |BC| = 11$$

**Zadanie 57. (0-3)**

$$\sphericalangle BAC = \alpha$$

Z twierdzenia cosinusów, wynika:

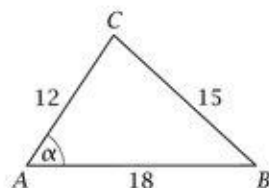
$$15^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \cos \alpha, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{9}{16}$$

Z „jedynki trygonometrycznej” wynika:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{9}{16}\right)^2 = 1, \text{ gdzie } \sin \alpha > 0$$

Zatem:

$$\sin \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{16}, \text{ czyli } P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{135\sqrt{7}}{4}$$

**Zadanie 58.1. (0-1)**

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = 6\sqrt{3}$$

Zadanie 58.2. (0-1)

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Z twierdzenia cosinusów wynika:

$$|BC|^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ, \text{ czyli } |BC|^2 = 76, \text{ stąd } |BC| = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

Zadanie 59. (0-3)

$$\sphericalangle ABC = \alpha$$

$$|AB| = 4x$$

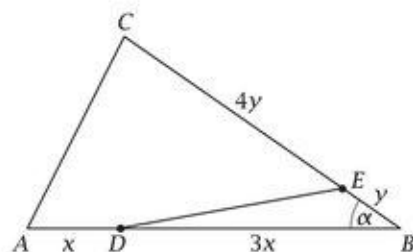
$$|BC| = 5y$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 5y \cdot \sin \alpha$$

$$20 = 10xy \cdot \sin \alpha, \text{ więc } xy \cdot \sin \alpha = 2$$

Zatem:

$$P_{\triangle DBE} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot y \cdot \sin \alpha = \frac{3}{2}xy \cdot \sin \alpha = 3$$

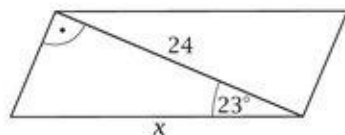


Zadanie 62. (0-2)

x — długość dłuższego boku równoległoboku

$$\frac{24}{x} = \cos 23^\circ, \text{ stąd } x = \frac{24}{\cos 23^\circ}$$

Ponieważ $\cos 23^\circ \approx 0,9205$, więc $x \approx 26$.

**Zadanie 63. (0-2)**

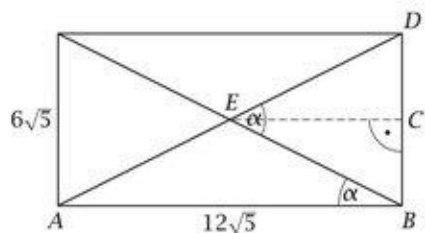
α — kąt ostry zawarty między przekątnymi prostokąta

$$\sphericalangle CEB = \frac{1}{2}\alpha$$

$$|BC| = \frac{1}{2}|BD| = 3\sqrt{5}$$

$$|CE| = \frac{1}{2}|AB| = 6\sqrt{5}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha = \frac{|BC|}{|CE|} = \frac{1}{2}, \text{ stąd } \frac{1}{2}\alpha = 27^\circ, \text{ czyli } \alpha = 54^\circ.$$

**Zadanie 65. (0-3)**

$$|\sphericalangle WSK| = 38^\circ$$

Zatem:

$$\frac{136}{x} = \operatorname{tg} 38^\circ, \text{ stąd } x = \frac{136}{\operatorname{tg} 38^\circ}$$

Ponieważ $\operatorname{tg} 38^\circ \approx 0,7813$, więc $x \approx 174,06$.

Po zaokrągleniu do pełnych metrów: $x \approx 174$ m.

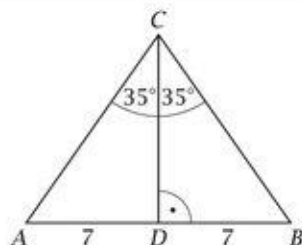
Samolot znajduje się w odległości około 174 metrów od wieży.

Zadanie 66.1. (0-2)

$|CD|$ — wysokość poprowadzona z wierzchołka C

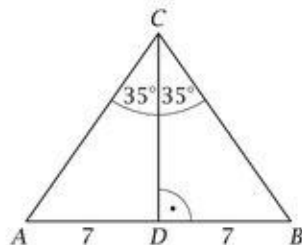
$$\frac{7}{|CD|} = \operatorname{tg} 35^\circ, \text{ stąd } |CD| = \frac{7}{\operatorname{tg} 35^\circ}$$

Ponieważ $\operatorname{tg} 35^\circ \approx 0,7$, więc $|CD| \approx 10$.

**Zadanie 66.2. (0-2)**

$$\frac{7}{|AC|} = \sin 35^\circ, \text{ stąd } |AC| = \frac{7}{\sin 35^\circ}$$

Ponieważ $\sin 35^\circ \approx 0,5736$, więc $|AC| = |BC| \approx 12$.

**Zadanie 69.2. (0-2)**

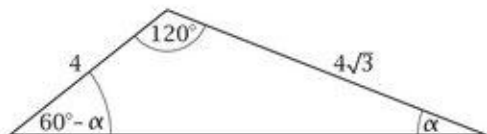
Kąt α jako najmniejszy kąt trójkąta T leży naprzeciw boku o długości 4. Trzeci kąt tego trójkąta leżący naprzeciw boku o długości $4\sqrt{3}$ ma miarę:

$$180^\circ - (120^\circ + \alpha) = 60^\circ - \alpha$$

Z twierdzenia sinusów wynika:

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{4}{\sin \alpha}, \text{ stąd } \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \sqrt{3}$$

Ponieważ $\sqrt{3} \approx 1,73$, więc iloraz $\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$ jest liczbą większą od 1,5.

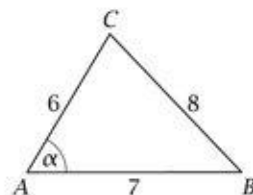


Zadanie 70. (0-2)

α — miara największego kąta w trójkącie
(leży naprzeciw najdłuższego boku)

Z twierdzenia cosinusów wynika:

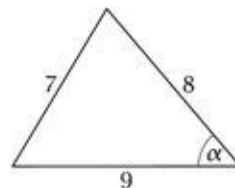
$$8^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos \alpha, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

**Zadanie 73. (0-2)**

α — miara najmniejszego kąta w trójkącie
(leży naprzeciw najkrótszego boku)

Z twierdzenia cosinusów wynika:

$$7^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos \alpha, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{2}{3}, \text{ czyli } \alpha \approx 48^\circ$$

**Zadanie 74. (0-2)**

$\sphericalangle BAC = \alpha$

$\sphericalangle ACB = \gamma$ oraz γ jest największym kątem w trójkącie ABC

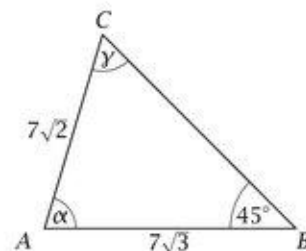
Z twierdzenia sinusów wynika:

$$\frac{7\sqrt{3}}{\sin \gamma} = \frac{7\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}, \text{ stąd } \sin \gamma = \frac{7\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zatem $\gamma = 60^\circ$ lub $\gamma = 120^\circ$.

Gdy $\gamma = 60^\circ$, to $\alpha = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$, a więc $\gamma < \alpha$ i jest to sprzeczne z założeniem, że γ jest największym kątem w trójkącie ABC .

Gdy $\gamma = 120^\circ$, to $\alpha = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$. Wówczas γ będzie największym kątem trójkąta ABC . Pozostałe kąty w trójkącie ABC mają miary: 120° i 15° .

**Zadanie 75. (0-2)**

$$|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - (12^\circ + 18^\circ) = 150^\circ$$

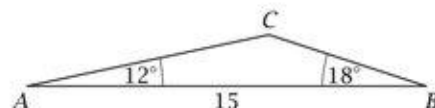
Z twierdzenia sinusów wynika:

$$\frac{|AC|}{\sin 18^\circ} = \frac{15}{\sin 150^\circ}, \text{ stąd } |AC| = \frac{15 \sin 18^\circ}{\sin 150^\circ}$$

$$\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 18^\circ \approx 0,309$$

Obliczamy długość boku AC :

$$|AC| \approx \frac{15 \cdot 0,309}{\frac{1}{2}} \approx 9,27$$

**Zadanie 76. (0-2)**

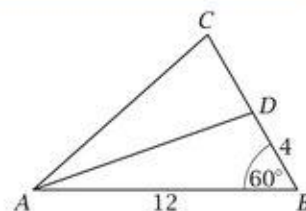
Odcinek AD jest środkową, więc:

$$|BD| = \frac{1}{2}|BC| = 4$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD wynika:

$$|AD|^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}, \text{ czyli } |AD|^2 = 112$$

Zatem $|AD| = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$.

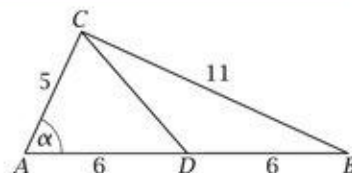
**Zadanie 77. (0-3)**

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC wynika:

$$11^2 = 5^2 + 12^2 - 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot \cos \alpha, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{2}{5}$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ADC wynika:

$$|CD|^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{5}, \text{ stąd } |CD| = \sqrt{37}$$



Zadanie 78. (0-3)

Pole P trójkąta ABC zapisujemy w zależności od miary kąta y :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin y$$

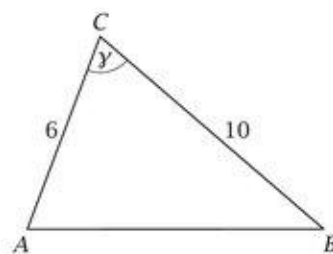
Zatem:

$$15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin y, \quad \text{stad } \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ponieważ $y \in (0^\circ; 90^\circ)$, to $y = 60^\circ$.

Z twierdzenia cosinusów wynika:

$$|AB|^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ, \quad \text{czyli } |AB| = 2\sqrt{19}$$

**Zadanie 79. (0-3)**

Z twierdzenia cosinusów wynika:

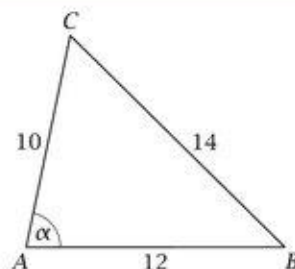
$$14^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos \alpha, \quad \text{stad } \cos \alpha = \frac{1}{5}$$

Z „jedynki trygonometrycznej” wynika:

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1, \quad \text{gdzie } \sin \alpha > 0$$

Zatem:

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \text{czyli } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\sqrt{6}$$



7. Planimetria

Zadanie 3. (0-3)

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC wynika:

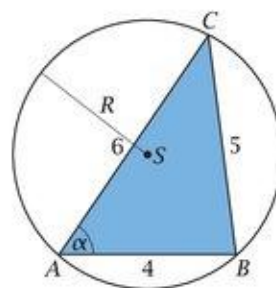
$$5^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos \alpha, \quad \text{stad } \cos \alpha = \frac{9}{16}$$

Z „jedynki trygonometrycznej” wynika:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2, \quad \text{czyli } \sin \alpha = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABC wynika:

$$\frac{5}{\frac{5\sqrt{7}}{16}} = 2R, \quad \text{więc } R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

**Zadanie 4. (0-4)**

$$x = |S_1 S_2|$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBC wynika:

$$|DB|^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{stad } |DB| = \sqrt{3}$$

Boki trójkąta DBC mają długości 1, $\sqrt{3}$ i 2, stad:

$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ABD| = 90^\circ$$

Ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny otrzymujemy:

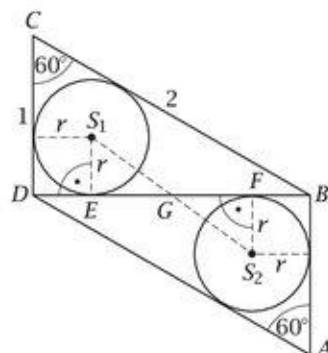
$$r = \frac{1 + \sqrt{3} - 2}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Zatem:

$$|EF| = |DB| - 2r = 1, \quad \text{stad } |EG| = \frac{1}{2} |EF| = \frac{1}{2}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EGS_1 wynika:

$$|S_1 G|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \text{stad } |S_1 G| = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}, \quad \text{czyli } x = 2 |S_1 G| = \sqrt{5-2\sqrt{3}}$$



Zadanie 18.2. (0-2)

a — długość boku sześciokąta foremnego S

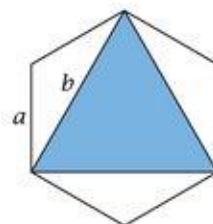
b — długość boku trójkąta T_2

P — pole trójkąta T_2

Bok trójkąta T_2 jest krótszą przekątną sześciokąta foremnego S , czyli $b = a\sqrt{3}$, stąd $b = \sqrt{3}$.

Zatem:

$$P = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

**Zadanie 19. (0-2)**

x — długość boku kwadratu

a — długość boku ośmiokąta

P_4 — pole kwadratu o boku długości x

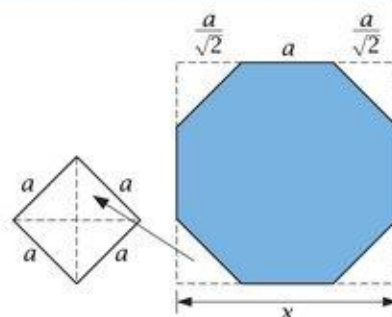
P_8 — pole ośmiokąta foremnego

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + a + \frac{a}{\sqrt{2}} = x, \text{ stąd } a = (\sqrt{2} - 1)x$$

Z czterech odciętych trójkątów można zbudować kwadrat o boku długości a .

Zatem:

$$\frac{P_8}{P_4} = \frac{x^2 - a^2}{x^2} = \frac{x^2 - x^2(\sqrt{2} - 1)^2}{x^2} = 1 - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0,83$$

**Zadanie 24. (0-2)**

d, e — długości przekątnych równoległoboku

α — miara kąta między przekątnymi równoległoboku

P — pole równoległoboku

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Z twierdzenia cosinusów wynika:

$$d^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 3, \text{ czyli } d = \sqrt{3}$$

$$e^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 7, \text{ czyli } e = \sqrt{7}$$

Pole równoległoboku można wyznaczyć dwoma sposobami:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sin \alpha$$

$$P = 1 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ$$

Zatem:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sin \alpha = 1 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ, \text{ stąd } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Zadanie 29. (0-2)

Z sumy kątów wewnętrznych w trójkącie AED wynika:

$$\alpha_1 = 180^\circ - (40^\circ + 65^\circ) = 75^\circ$$

Kąty BDA i BCA są kątami wpisanymi opartymi na łuku $\widehat{AB}$, a więc są równe, stąd $\alpha_2 = 40^\circ$.

Kąty DAC i CBD są kątami wpisanymi opartymi na łuku $\widehat{DC}$, a więc są równe, stąd $\alpha_3 = 75^\circ$.

Kąty ABC i CDA są kątami wpisanymi opartymi na średnicy okręgu, a więc są to kąty proste.

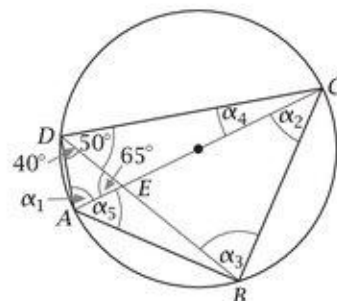
Z sumy kątów wewnętrznych w trójkątach ACD i ABC wnioskujemy:

$$\alpha_4 = 180^\circ - (75^\circ + 90^\circ) = 15^\circ$$

$$\alpha_5 = 180^\circ - (40^\circ + 90^\circ) = 50^\circ$$

Zatem kąty wewnętrzne czworokąta $ABCD$ mają miary:

$$|\sphericalangle ABC| = 90^\circ \quad |\sphericalangle BCD| = 55^\circ \quad |\sphericalangle CDA| = 90^\circ \quad |\sphericalangle DAB| = 125^\circ$$



Zadanie 30. (0-3)

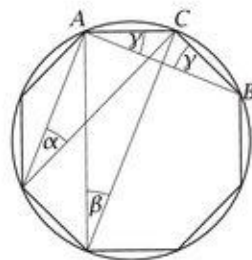
Wierzchołki każdego ośmiokąta foremnego należą do okręgu. Kąty α , β i γ to kąty wpisane oparte na tym samym łuku, więc $\alpha = \beta = \gamma$. Miara kąta wewnętrznego ośmiokąta foremnego jest równa:

$$\frac{(8-2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$$

Skoro trójkąt ABC jest równoramienny to:

$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 135^\circ) = 22,5^\circ$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 22,5^\circ$$

**Zadanie 31. (0-4)**

Kąt $\sphericalangle ACD$ jest kątem wpisanym opartym na średnicy, zatem $\sphericalangle ACD = 90^\circ$, czyli trójkąt ADC jest prostokątny.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC wynika:

$$|CD| = \sqrt{(2r)^2 - (\sqrt{3}r)^2}, \text{ stąd } |CD| = r$$

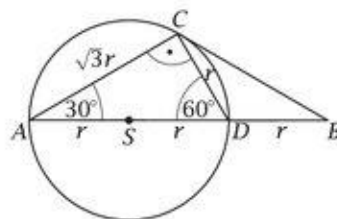
Trójkąt ADC o bokach $2r$, r , $\sqrt{3}r$ jest połową trójkąta równobocznego, zatem:

$$|\sphericalangle CAD| = 30^\circ \quad |\sphericalangle ADC| = 60^\circ$$

$$|\sphericalangle CDB| = 180^\circ - |\sphericalangle ADC| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Zatem: $|\sphericalangle DBC| = 30^\circ$ i $|\sphericalangle BCD| = 30^\circ$. Skoro $|DB| = |DC| = r$, to trójkąt DBC jest równoramienny.

Kąty w trójkącie ABC mają miary: $|\sphericalangle CAB| = 30^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 30^\circ$ i $|\sphericalangle BCA| = 120^\circ$.

**Zadanie 35. (0-3)**

r — promień okręgu

x — długość boku kwadratu $ABCD$

P_W — pole wycinka kołowego KSL

P_K — pole kwadratu $ABCD$

Trójkąt SAD jest prostokątny i równoramienny, więc:

$$|AS| = |AD| = x$$

Zapisujemy długość odcinka BS w zależności od x :

$$|BS| = |AB| + |AS| = 2x$$

$$|SC| = r$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SBC wynika:

$$x^2 + (2x)^2 = r^2, \text{ stąd } r = x\sqrt{5}$$

Zatem:

$$\frac{P_K}{P_W} = \frac{x^2}{\frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (x\sqrt{5})^2} = \frac{8}{5\pi}$$

Zadanie 43. (0-2)

Z twierdzenia Talesa wynika:

$$\frac{21}{30} = \frac{|FE|}{20}, \text{ stąd } |FE| = 14$$

Zadanie 44. (0-2)

Z warunku $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2}{3}$ wynika:

$$|QR| = 3, \text{ więc } |SR| = |SQ| + |QR| = 1 + 3 = 4$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta STR wynika:

$$|TR|^2 + 1^2 = 4^2, \text{ czyli } |TR| = \sqrt{15}$$

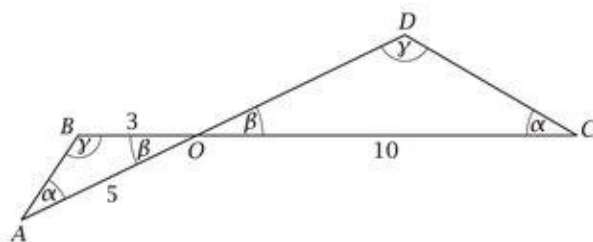
Z twierdzenia Talesa wynika:

$$\frac{|TU|}{\sqrt{15}} = \frac{1}{4}, \text{ stąd } |TU| = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Zadanie 46. (0-2)

Trójkąty AOB i OCD są podobne (cecha kkk). Zatem:

$$\frac{10}{5} = \frac{|OD|}{3}, \quad \text{stąd} \quad |OD| = 6$$

**Zadanie 52. (0-2)**

a — długość boku rombu $EFGH$

Z podobieństwa trójkątów AEF i ADB (cecha kkk) wynika zależność:

$$\frac{|AF|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|BD|}, \quad \text{czyli} \quad \frac{|AF|}{a} = \frac{|AB|}{12}, \quad \text{stąd} \quad |AF| = \frac{|AB| \cdot a}{12}$$

Analogicznie z podobieństwa trójkątów FBG i ABC (cecha kkk) otrzymujemy:

$$\frac{|BF|}{|FG|} = \frac{|AB|}{|AC|}, \quad \text{czyli} \quad \frac{|BF|}{a} = \frac{|AB|}{16}, \quad \text{stąd} \quad |BF| = \frac{|AB| \cdot a}{16}$$

Zatem:

$$|AB| = \frac{|AB| \cdot a}{12} + \frac{|AB| \cdot a}{16}, \quad \text{czyli} \quad 1 = \frac{a}{12} + \frac{a}{16}, \quad \text{stąd} \quad a = 6\frac{6}{7}$$

Zadanie 53. (0-3)

Trójkąty ABD i ECD są podobne na podstawie cechy kkk (zobacz rysunek).

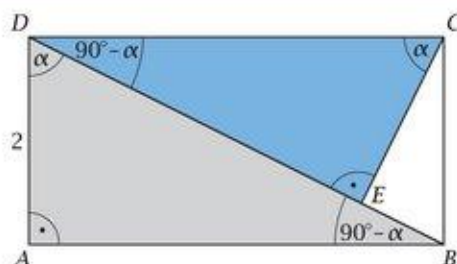
Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha = 2$, to $|AB| = 4$. Zatem $|DC| = 4$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD wynika:

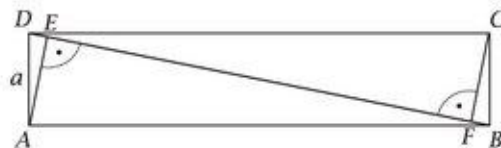
$$|BD|^2 = 2^2 + 4^2, \quad \text{stąd} \quad |BD| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Z podobieństwa trójkątów ABD i ECD (cecha kkk) otrzymujemy:

$$\frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{|CE|}{4}, \quad \text{więc} \quad |CE| = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

**Zadanie 54. (0-3)**

a — długość odcinka AD



$$\operatorname{tg} \angle ABD = \frac{a}{|AB|}, \quad \text{stąd} \quad \frac{1}{5} = \frac{a}{|AB|}, \quad \text{czyli} \quad |AB| = 5a$$

Z równości $\frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD|$, wynika:

$$|AE| = \frac{5a \cdot a}{\sqrt{a^2 + (5a)^2}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}a$$

Trójkąty ADE i ABD są podobne (cecha kkk), więc:

$$\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|AD|}{|BD|}, \quad \text{stąd} \quad |DE| = \frac{\sqrt{26}}{26}a$$

Zatem:

$$|EF| = |BD| - 2 \cdot |DE| = \sqrt{26}a - 2 \cdot \frac{\sqrt{26}}{26}a = \frac{12\sqrt{26}}{13}a$$

Obliczamy tangens kąta EAF :

$$\operatorname{tg} \angle EAF = \frac{|EF|}{|AE|} = \frac{\frac{12\sqrt{26}}{13}a}{\frac{5\sqrt{26}}{26}a} = 4,8$$

Zadanie 55. (0-2)

h — wysokość trójkąta IJC poprowadzona do boku IJ

w — wysokość trójkąta GHB poprowadzona do boku GH

Trójkąty IJC i KHC są podobne (cecha kkk), więc:

$$\frac{h}{1} = \frac{h+1}{5}, \text{ stąd } h = \frac{1}{4}$$

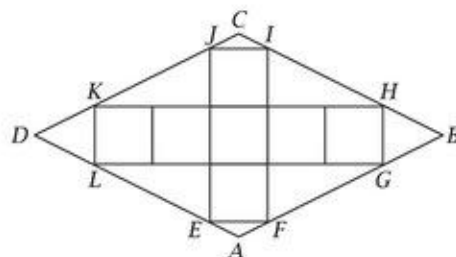
Podobne są też trójkąty GHB i FIB (cecha kkk), więc:

$$\frac{w}{1} = \frac{w+2}{3}, \text{ stąd } w = 1$$

Przekątne tego rombu mają długości: $|AC| = 3\frac{1}{2}$ i $|BD| = 7$.

Zatem pole P rombu jest równe:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 7 = 12\frac{1}{4}$$

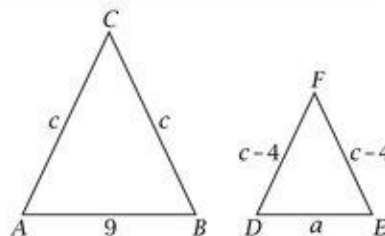
**Zadanie 61. (0-2)**

k — skala podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta DEF

Z zależności między obwodami trójkątów ABC i DEF wynika:

$$2c + 9 = 2(c - 4) + a + 11, \text{ stąd } a = 6$$

Zatem $k = \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

**Zadanie 62. (0-3)**

a — długość boku trójkąta ABC

Skoro trójkąty równoboczne ADE , GBF i HIC są podobne do trójkąta ABC w skali $k = 0,3$, to boki tych trójkątów mają długości $0,3a$, a pola są równe $0,3^2 \cdot P_{\triangle ABC}$.

Ponieważ $|CE| = |EF| = |CF| = 0,7a$, więc:

$$P_{\triangle EFC} = 0,7^2 \cdot P_{\triangle ABC}$$

$$P_{DGKJ} = P_{ABFE} - 4 \cdot P_{\triangle ADE} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle EFC} - 4 \cdot P_{\triangle ADE}$$

Zatem:

$$P_{DGKJ} = P_{\triangle ABC} - 0,7^2 \cdot P_{\triangle ABC} - 4 \cdot 0,3^2 \cdot P_{\triangle ABC} = 0,15 \cdot P_{\triangle ABC}$$

Pole trapezu $DGKJ$ stanowi 15% pola trójkąta ABC .

Zadanie 63. (0-2)

Każde dwa siedmiokąty foremne są podobne.

Skala podobieństwa siedmiokąta foremnego o boku długości 10 cm do siedmiokąta foremnego, którego bok ma długość 2 cm, jest równa $k = 5$. Stosunek najdłuższych przekątnych tych siedmiokątów też jest równy skali k , czyli 5, a stosunek ich pól to k^2 , czyli 25.

Zadanie 64. (0-4)

Z własności trójkąta ABD o kątach 30° , 60° , 90° wynika, że $|AB| = 12$.

Z własności trójkąta AED o kątach 30° , 60° , 90° otrzymujemy:

$$|AE| = 3 \quad \text{oraz} \quad |DE| = 3\sqrt{3}$$

Zatem:

$$|CD| = |AB| - 2 \cdot |AE| = 12 - 2 \cdot 3 = 6$$

Obliczamy pole trapezu $ABCD$:

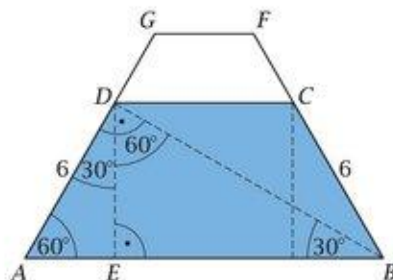
$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot (12 + 6) \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$$

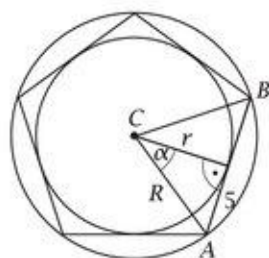
Skala podobieństwa k trapezu $DCFG$ do trapezu $ABCD$ jest równa:

$$k = \frac{|DC|}{|AB|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Zatem:

$$P_{DCFG} = k^2 \cdot P_{ABCD} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 27\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$



Zadanie 71. (0-2)

$$|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ, \text{ a więc } \alpha = 36^\circ$$

$$\sin 36^\circ = \frac{5}{R}, \text{ stąd } R = \frac{5}{\sin 36^\circ} \approx 8,5 \text{ [cm]}$$

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{5}{r}, \text{ stąd } r = \frac{5}{\operatorname{tg} 36^\circ} \approx 6,9 \text{ [cm]}$$

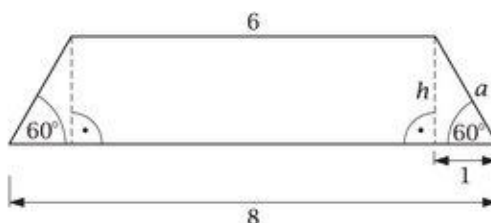
Zadanie 72. (0-2)

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{1}, \text{ stąd } h = \sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{a}, \text{ stąd } a = 2$$

$$\text{Obwód} = 6 + 8 + 2a = 18$$

$$P = \frac{6+8}{2} \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

**Zadanie 73. (0-2)**

$$|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle EAF| = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

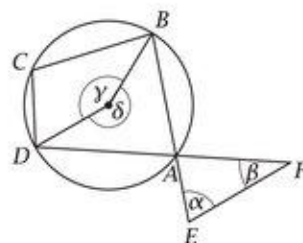
Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika:

$$\gamma = 2 \cdot |\sphericalangle DAB| = 360^\circ - 2(\alpha + \beta)$$

$$\text{Zatem } \delta = 360^\circ - \gamma = 2(\alpha + \beta).$$

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika:

$$|\sphericalangle BCD| = \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2} \cdot 2(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$$

**Zadanie 74. (0-2)**

α_1 — kąt środkowy wycinka W_1 , gdzie $180^\circ < \alpha_1 < 360^\circ$

α_2 — kąt środkowy wycinka W_2 , gdzie $0^\circ < \alpha_2 < 180^\circ$

Z równości $\frac{\alpha_1}{360^\circ} \cdot \pi r_1^2 = 30\pi$ wynika:

$$r_1^2 = 30 \cdot \frac{360^\circ}{\alpha_1} < 60, \text{ ponieważ } 180^\circ < \alpha_1 < 360^\circ$$

Analogicznie z równości $\frac{\alpha_2}{360^\circ} \cdot \pi r_2^2 = 40\pi$ wynika:

$$r_2^2 = 40 \cdot \frac{360^\circ}{\alpha_2} > 80, \text{ ponieważ } 0^\circ < \alpha_2 < 180^\circ$$

Skoro $r_1^2 < 60$ i $r_2^2 > 80$, to $r_1 < r_2$.

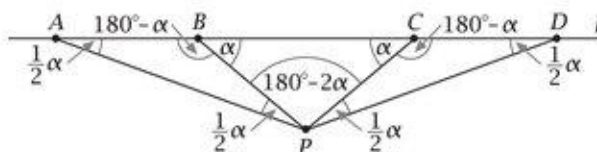
Zadanie 75. (0-3)

Skoro $|BP| = |PC|$, to $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCB|$. Przyjmujemy, że $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCB| = \alpha$.

Wówczas $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle DCP| = 180^\circ - \alpha$ oraz $|\sphericalangle BPC| = 180^\circ - 2\alpha$. Ponieważ $|AB| = |BP| = |PC| = |CD|$, więc trójkąty APB i DCP są trójkątami równoramiennymi, w których kąt między ramionami ma miarę $180^\circ - \alpha$. Zatem:

$$|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle PDC| = \frac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - \alpha)) = \frac{1}{2}\alpha$$

Ponieważ $|\sphericalangle APD| = 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha + (180^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha$, więc trójkąty DAP i DCP są podobne na podstawie ckk.



Zadanie 76. (0-3) a — długość odcinka AC b — długość odcinka AB c — długość odcinka BC k_b — skala podobieństwa trójkąta ABW_2 do trójkąta ACW_1 k_c — skala podobieństwa trójkąta CBW_3 do trójkąta ACW_1

$$k_b = \frac{b}{a}, \quad k_c = \frac{c}{a}$$

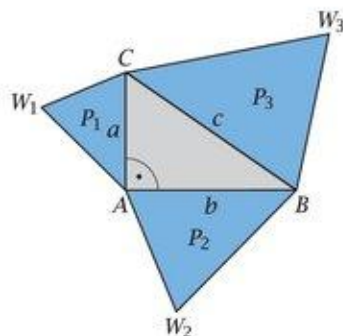
Ze wzoru na stosunek pól figur podobnych otrzymujemy:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad \text{stad} \quad P_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot P_1$$

$$\frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad \text{stad} \quad P_3 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot P_1$$

Zatem:

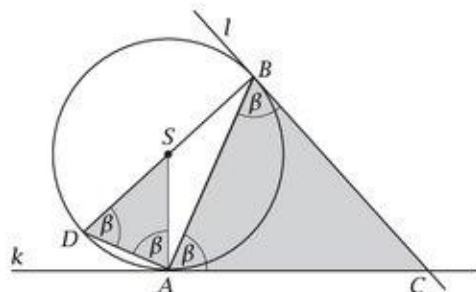
$$P_1 + P_2 = P_1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot P_1 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot P_1 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot P_1 = P_3$$

**Zadanie 77. (0-3)**

$$|\angle CAB| = \beta$$

Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wnioskujemy:

$$|\angle ADB| = |\angle CAB| = \beta$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że trójkąty ACB i ASD są równoramienne, a miary kątów przy podstawach tych trójkątów są równe β .Zatem na podstawie cechy kkk trójkąty ACB i ASD są podobne.**Zadanie 78. (0-2)** P_1 — pole trapezu o podstawach a i b P_2 — pole trapezu o podstawach b i c

$$P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4}, \quad P_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} - \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4}$$

Zatem:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4}}{\frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4}} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

Zadanie 79. (0-2)

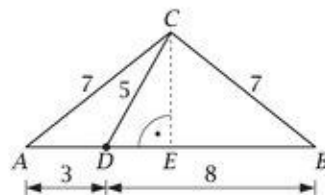
$$|DE| = \frac{|AB|}{2} - |AD| = \frac{11}{2} - 3 = 2,5$$

Trójkąt DEC jest prostokątny i $|DC| = 2 \cdot |DE|$, więc:

$$|\angle EDC| = |\angle BDC| = 60^\circ, \quad \text{a stad} \quad |\angle ADC| = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Zachodzi więc związek:

$$|\angle ADC| = 2 \cdot |\angle BDC|$$

**Zadanie 80. (0-2)** α — kąt ostry równoległoboku p — długość przekątnej leżącej naprzeciwko kąta α

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$$

$$q^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180^\circ - \alpha), \quad \text{czyli} \quad q^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha$$

Zatem:

$$p^2 + q^2 = 2a^2 + 2b^2, \quad \text{czyli} \quad a^2 + b^2 = \frac{p^2 + q^2}{2}$$

Zadanie 81. (0-2)

d — długość przekątnej, która nie jest średnicą okręgu

Przekątna, która nie jest średnicą, jest podstawą trójkąta równoramiennego, którego ramiona mają długości 1, a kąt między nimi ma miarę $n \cdot 30^\circ$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Z twierdzenia cosinusów wynika:

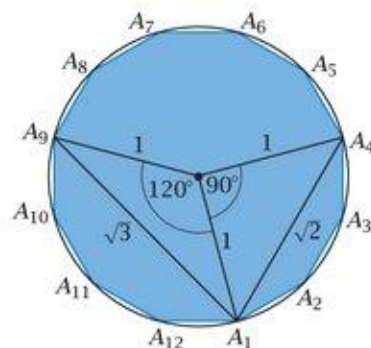
$$d^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(n \cdot 30^\circ)$$

Gdy $d = \sqrt{2}$, to $\cos(n \cdot 30^\circ) = 0$, czyli $n = 3$.

Na przykład przekątna A_1A_4 ma długość $\sqrt{2}$.

Gdy $d = \sqrt{3}$, to $\cos(n \cdot 30^\circ) = -\frac{1}{2}$, czyli $n = 4$.

Na przykład przekątna A_1A_5 ma długość $\sqrt{3}$.

**Zadanie 82. (0-2)**

a — długość odcinka AB

P — punkt przecięcia przekątnych kwadratu $ECFG$

Czworokąt $ADEH$ jest kwadratem o boku długości a , czyli $|AE| = a\sqrt{2}$.

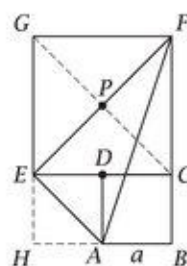
Ponadto $\angle AEF = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

Bok kwadratu $ECFG$ ma długość $2a$, więc:

$$|GP| = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$$

Zatem $|AE| = |GP|$.

$$P_{\triangle EFA} = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot |AE| = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot |GP| = P_{\triangle EFG}$$

**Zadanie 83. (0-3)**

n — liczba boków wielokąta W ($n \in \mathbb{N}$ i $n > 3$)

Liczba przekątnych n -kąta jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$, a więc otrzymujemy równanie:

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 150, \quad \text{stad} \quad n^2 - 5n - 300 = 0$$

Równanie $n^2 - 5n - 300 = 0$ jest spełnione dla $n \in \{-15, 20\}$.

Ponieważ $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 3$, więc wielokąt W jest 20-kątem.

Obliczamy sumę kątów wewnętrznych 20-kąta:

$$(n-2) \cdot 180^\circ = 18 \cdot 180^\circ = 3240^\circ$$

Zadanie 84. (0-4)

a — długość boku trójkąta ABC

R — promień okręgu opisanego na trójkącie ABC

r — promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC

$$R = \frac{25}{32}h$$

$$x = h - R = \frac{7}{32}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBS wynika:

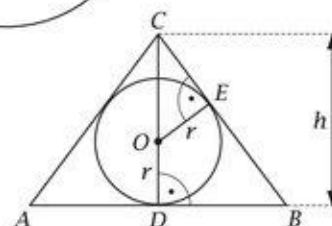
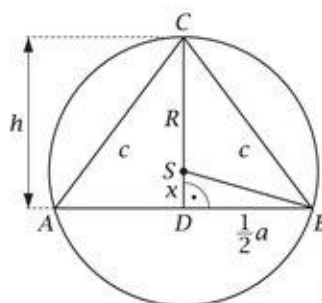
$$\left(\frac{7}{32}h\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{25}{32}h\right)^2, \quad \text{stad} \quad a = \frac{3}{2}h$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBC wynika:

$$h^2 + \left(\frac{3}{4}h\right)^2 = c^2, \quad \text{stad} \quad c = \frac{5}{4}h$$

Trójkąty prostokątne DBC i OEC są podobne na podstawie cech kkk, zatem:

$$\frac{h-r}{\frac{5}{4}h} = \frac{r}{\frac{3}{4}h}, \quad \text{stad} \quad \frac{5}{4}r = \frac{3}{4}h - \frac{3}{4}r, \quad \text{czyli} \quad r = \frac{3}{8}h.$$



Zadanie 85. (0-3)

Z twierdzenia cosinusów wynika:

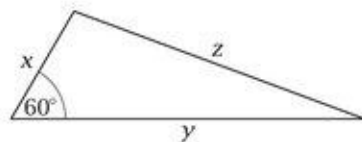
$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{czyli } z^2 = x^2 + y^2 - xy$$

Założmy przeciwnie, że $x + y > 2z$.

Obie strony nierówności $x + y > 2z$ są liczbami dodatnimi, więc po podniesieniu jej stronami do kwadratu otrzymamy:

$$(x + y)^2 > 4z^2, \quad \text{czyli } x^2 + 2xy + y^2 > 4(x^2 + y^2 - xy), \quad \text{stąd } (x - y)^2 < 0$$

Otrzymana sprzeczność jest konsekwencją błędnego założenia, że $x + y > 2z$, a zatem $x + y \leq 2z$.

**Zadanie 86. (0-3)**

x, y — długości boków zawartych w ramionach kąta o mierze 120°

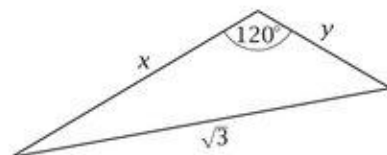
Z nierówności trójkąta wynika warunek $x + y > \sqrt{3}$.

Z twierdzenia cosinusów wynika:

$$3 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 120^\circ, \quad \text{stąd } 3 = x^2 + y^2 + xy$$

Szacujemy wartość wyrażenia $(x + y)^2$:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 < 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2(x^2 + y^2 + xy) = 6, \quad \text{czyli } x + y < \sqrt{6}$$



8. Geometria analityczna

Zadanie 24. (0-2)

Punkt S jest środkiem przekątnej BD , zatem:

$$S = \left(\frac{2-2}{2}, \frac{-6+4}{2} \right) = (0, -1)$$

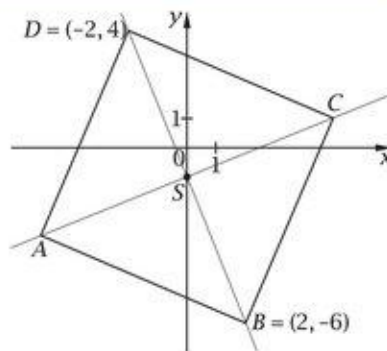
Wyznaczamy współczynnik kierunkowy a prostej BD :

$$a = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{4+6}{-2-2} = -\frac{5}{2}$$

Prosta AC jest prostopadła do prostej BD i należy do niej punkt $S = (0, -1)$, więc:

$$\text{prosta } AC: y = -\frac{1}{a}x + b, \quad \text{gdzie } b = -1$$

Zatem prosta AC ma równanie $y = \frac{2}{5}x - 1$.

**Zadanie 25. (0-4)**

S — punkt przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka C będącego punktem wspólnym prostych o równaniach $y = -5x + 21$ i $y = x + 3$:

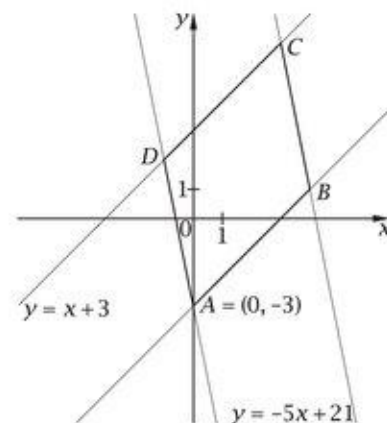
$$\begin{cases} y = -5x + 21 \\ y = x + 3 \end{cases}, \quad \text{stąd } \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}, \quad \text{czyli } C = (3, 6)$$

Prosta AB jest równoległa do prostej o równaniu $y = x + 3$ i należy do niej punkt $A = (0, -3)$, więc:

$$\text{prosta } AB: y = x - 3$$

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka B będącego punktem wspólnym prostych o równaniach $y = -5x + 21$ i $y = x - 3$:

$$\begin{cases} y = -5x + 21 \\ y = x - 3 \end{cases}, \quad \text{stąd } \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}, \quad \text{czyli } B = (4, 1)$$



Punkt S jest środkiem przekątnej AC , zatem:

$$S = \left(\frac{0+3}{2}, \frac{6-3}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

Z faktu, że S jest też środkiem przekątnej BD wynika:

$$\frac{x_D+4}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{y_D+1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \text{gdzie} \quad D = (x_D, y_D)$$

Zatem $x_D = -1$ i $y_D = 2$, czyli $D = (-1, 2)$.

Wierzchołki B , C i D równoległoboku mają współrzędne: $B = (4, 1)$, $C = (3, 6)$ i $D = (-1, 2)$.

Zadanie 26. (0-4)

Punkt S jest środkiem przekątnej AC , zatem:

$$S = \left(\frac{-3+9}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = (3, 2)$$

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy a prostej AC :

$$a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5+1}{9+3} = \frac{1}{2}$$

Prosta BD jest prostopadła do prostej AC i należy do niej punkt $S = (3, 2)$, więc:

$$\text{prosta } BD: y = -\frac{1}{a}x + b$$

Stąd:

$$2 = -2 \cdot 3 + b, \quad \text{czyli} \quad b = 8$$

Zatem prosta BD ma równanie $y = -2x + 8$.

Wyznaczamy współrzędne wierzchołka D będącego punktem wspólnym prostych o równaniach $y = -2x + 8$

i $y = \frac{1}{2}x + 3$:

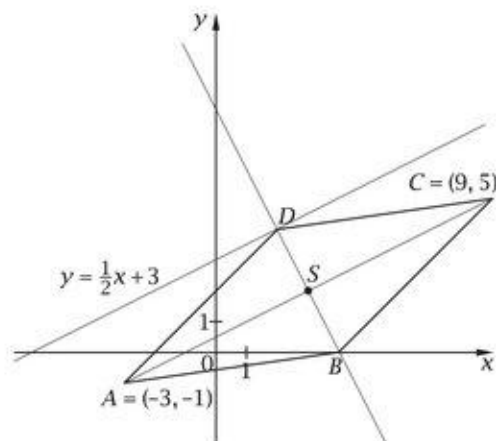
$$\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}, \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}, \quad \text{czyli} \quad D = (2, 4)$$

Z faktu, że S jest też środkiem przekątnej BD wynika:

$$\frac{2+x_B}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad \frac{4+y_B}{2} = 2, \quad \text{gdzie} \quad B = (x_B, y_B)$$

Zatem $x_B = 4$ i $y_B = 0$, czyli $B = (4, 0)$.

Wierzchołki B i D rombu mają współrzędne: $B = (4, 0)$ i $D = (2, 4)$.



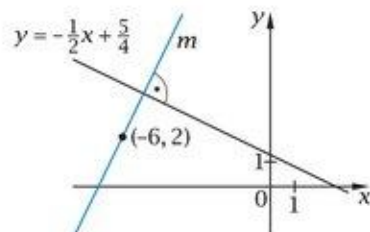
Zadanie 27.1. (0-2)

Prostą o równaniu ogólnym $2x + 4y - 5 = 0$ można opisać równaniem kierunkowym $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$.

Prosta m jest równoległa do prostej l o współczynniku $a = -\frac{1}{2}$ i należy do niej punkt $(0, 0)$, więc:

$$m: y = ax + b, \quad \text{gdzie} \quad b = 0$$

Zatem prosta m ma równanie $y = -\frac{1}{2}x$.



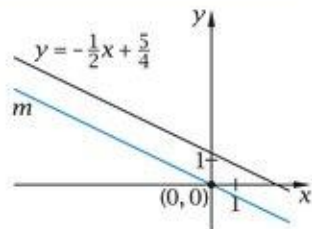
Zadanie 27.2. (0-2)

Prostą o równaniu ogólnym $2x + 4y - 5 = 0$ można opisać równaniem kierunkowym $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$.

Prosta m jest prostopadła do prostej l o współczynniku $a = -\frac{1}{2}$ i należy do niej punkt $(-6, 2)$, więc:

$$m: y = -\frac{1}{a}x + b, \quad \text{stąd} \quad 2 = 2 \cdot (-6) + b, \quad \text{czyli} \quad b = 14$$

Zatem prosta m ma równanie $y = 2x + 14$.

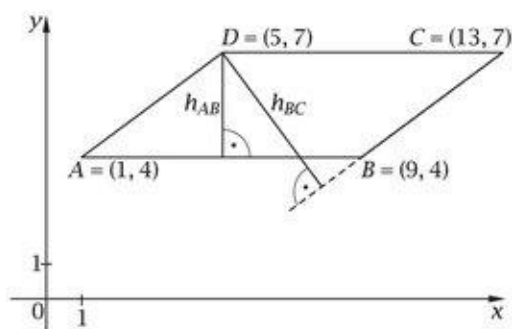


Zadanie 28. (0-2) h_{AB} — wysokość opuszczona na bok AB h_{BC} — wysokość opuszczona na prostą zawierającą bok BC P — pole równoległoboku $ABCD$

$$|AB| = 8 \text{ i } h_{AB} = 3, \text{ czyli } P = |AB| \cdot h_{AB} = 24$$

$$|BC| = \sqrt{(13-9)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$P = |BC| \cdot h_{BC}, \text{ stąd } 5h_{BC} = 24, \text{ czyli } h_{BC} = 4,8$$

**Zadanie 29.1. (0-2)**Obliczamy długości boków trójkąta ABC :

$$|AB| = \sqrt{(-6+15)^2 + (4+8)^2} = \sqrt{225}$$

$$|BC| = \sqrt{(-19+6)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{250}$$

$$|AC| = \sqrt{(-19+15)^2 + (-5+8)^2} = \sqrt{25}$$

Sprawdzamy, czy w trójkącie ABC jest spełnione założenie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa:

$$|AB|^2 + |AC|^2 = (\sqrt{225})^2 + (\sqrt{25})^2 = 250, \text{ czyli } |BC|^2 = (\sqrt{250})^2 = 250$$

Skoro $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest prostokątny.**Zadanie 29.2. (0-3)** S — punkt przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$ Punkt S jest środkiem przekątnej AC , zatem:

$$S = \left(\frac{-15-19}{2}, \frac{-8-5}{2} \right) = \left(-17, -\frac{13}{2} \right)$$

Z faktu, że S jest też środkiem przekątnej BD , wynika:

$$\frac{x_D - 6}{2} = -17 \text{ oraz } \frac{y_D + 4}{2} = -\frac{13}{2}, \text{ gdzie } D = (x_D, y_D)$$

Zatem $x_D = -28$ i $y_D = -17$, czyli $D = (-28, -17)$.**Zadanie 31. (0-4)**odcinek CD — wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C Wyznaczamy współczynnik kierunkowy a prostej AB :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0+4}{3+5} = \frac{1}{2}$$

Do prostej AB o równaniu: $y = \frac{1}{2}x + b$ należy punkt $B = (3, 0)$, więc:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot 3 + b, \text{ czyli } b = -\frac{3}{2}$$

Zatem prosta AB ma równanie $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.Prosta CD jest prostopadła do prostej AB i należy do niej punkt $C = (-1, 4)$, więc:

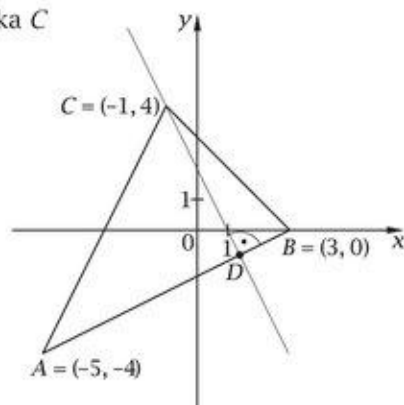
$$\text{prosta } CD: y = -\frac{1}{a}x + b, \text{ stąd } 4 = -2 \cdot (-1) + b, \text{ czyli } b = 2$$

Zatem prosta CD ma równanie $y = -2x + 2$.Wyznaczamy współrzędne punktu D będącego punktem wspólnym prostych o równaniach $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ i $y = -2x + 2$:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = -2x + 2 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}, \text{ czyli } D = \left(\frac{7}{5}, -\frac{4}{5} \right)$$

Obliczamy długość wysokości CD :

$$|CD| = \sqrt{\left(\frac{7}{5} + 1 \right)^2 + \left(-\frac{4}{5} - 4 \right)^2} = \sqrt{\frac{720}{25}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$



Zadanie 34. (0-2)

S — środek boku BC

Wyznaczamy współrzędne punktu S :

$$S = \left(\frac{-2+8}{2}, \frac{-5+3}{2} \right) = (3, -1)$$

Obliczamy długość środkowej AS :

$$|AS| = \sqrt{(3+6)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

Zadanie 35. (0-4)

Prosta o równaniu $y = -3x + 6$ przecina osie układu współrzędnych w punktach: $(0, 6)$ i $(2, 0)$. Zatem $A = (0, 6)$ i $B = (2, 0)$.

Obliczamy długości boków trójkąta ABC :

$$|AB| = \sqrt{(2-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{40}$$

$$|BC| = \sqrt{(3-2)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{50}$$

$$|AC| = \sqrt{(3-0)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{10}$$

$$|AB|^2 + |AC|^2 = (\sqrt{40})^2 + (\sqrt{10})^2 = 50 \quad \text{oraz} \quad |BC|^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$$

Zatem $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, stąd z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku A .

Obliczamy pole trójkąta ABC :

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = 10$$

Zadanie 37. (0-3)

Ponieważ punkt P leży na osi x układu współrzędnych, więc $P = (x, 0)$.

Wyrażamy odległości punktu P od punktów K i L w zależności od zmiennej x :

$$|KP| = \sqrt{(x+3)^2 + (0+7)^2}$$

$$|LP| = \sqrt{(x-6)^2 + (0+2)^2}$$

Z warunku $|KP| = |LP|$ wynika, że:

$$(x+3)^2 + 7^2 = (x-6)^2 + 2^2, \quad \text{stąd} \quad x = -1, \quad \text{czyli} \quad P = (-1, 0)$$

Zadanie 38. (0-3)

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy a prostej k :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

Do prostej k należy punkt $A = (1, 1)$, więc:

$$k: y = 3x + b, \quad \text{stąd} \quad 1 = 3 \cdot 1 + b, \quad \text{czyli} \quad b = -2$$

Niech M będzie dowolnym punktem należącym do prostej k , zatem $M = (x, 3x-2)$.

Wyrażamy odległości punktu M od punktu P w zależności od zmiennej x :

$$|PM| = \sqrt{(x+2)^2 + (3x-2-2)^2}$$

Z warunku $|PM| = 10$ wynika, że:

$$(x+2)^2 + (3x-4)^2 = 100, \quad \text{stąd} \quad x \in \{-2, 4\}$$

Zatem istnieją dwa punkty należące do prostej k , których odległość od punktu P jest równa 10. Są to punkty o współrzędnych: $(-2, -8)$ i $(4, 10)$.

Zadanie 39. (0-2)

Wyrażamy długość odcinka AB w zależności od zmiennej t :

$$|AB| = \sqrt{(9-t)^2 + (-3-2)^2}$$

Z warunku $|AB| = 13$ wynika, że:

$$(9-t)^2 + (-5)^2 = 169, \quad \text{stąd} \quad t \in \{-3, 21\}$$

Zadanie 40. (0-3)

Ponieważ punkt P należy do prostej o równaniu $y = \frac{1}{4}x + 6$, więc $P = (x, \frac{1}{4}x + 6)$.

Wyrażamy odległości punktu P od punktów A i B w zależności od zmiennej x :

$$|AP| = \sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{1}{4}x + 6 + 3\right)^2} \quad |BP| = \sqrt{(x-12)^2 + \left(\frac{1}{4}x + 6 - 1\right)^2}$$

Z warunku $|AP| = |BP|$ wynika, że:

$$(x-4)^2 + \left(\frac{1}{4}x + 9\right)^2 = (x-12)^2 + \left(\frac{1}{4}x + 5\right)^2, \quad \text{stąd } x = 4$$

Zatem:

$$P = \left(4, \frac{1}{4} \cdot 4 + 6\right), \quad \text{czyli } P = (4, 7)$$

Zadanie 46. (0-3)

Obliczamy długości boków trójkąta prostokątnego ABC :

$$|AB| = \sqrt{(4+2)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$|AC| = \sqrt{(-4+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

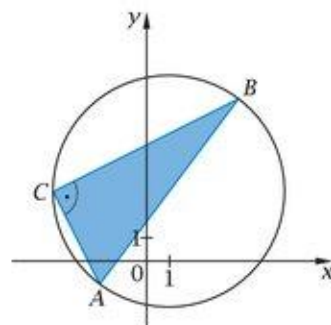
$$|BC| = \sqrt{(-4-4)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Bok AB jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC , czyli jest jego przeciwprostokątną i jednocześnie średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie.

Wyznaczamy współrzędne środka S okręgu opisanego na trójkącie ABC i jego promień r :

$$S = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+7}{2}\right) = (1, 3) \quad r = \frac{1}{2}|AB| = 5$$

Okrąg opisany na trójkącie ABC ma więc równanie $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$.

**Zadanie 47. (0-4)**

Ponieważ środek S okręgu O należy do prostej o równaniu $y = 4x + 2$, więc $S = (a, 4a + 2)$.

Wyrażamy odległości punktu S od punktów A i B w zależności od zmiennej a :

$$|AS| = \sqrt{(a+8)^2 + (4a+2-12)^2} \quad |BS| = \sqrt{(a+2)^2 + (4a+2-4)^2}$$

Punkty A i B należą do okręgu O , więc spełniają warunek $|AS| = |BS|$. Zatem otrzymujemy:

$$(a+8)^2 + (4a-10)^2 = (a+2)^2 + (4a-2)^2, \quad \text{stąd } a = 3, \quad \text{czyli } S = (3, 14)$$

Promień r okręgu O jest równy odległości punktu A od środka okręgu, zatem:

$$r = |AS| = \sqrt{(3+8)^2 + (14-12)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Zadanie 48.1. (0-2)

Promień r okręgu O_1 jest równy odległości punktu A od punktu B . Zatem:

$$r = |AB| = \sqrt{(4+8)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{160}$$

Okrąg O_1 ma więc równanie $(x+8)^2 + (y-5)^2 = 160$.

Zadanie 48.2. (0-4)

Ponieważ środek S okręgu O_2 leży na osi x układu współrzędnych, więc $S = (a, 0)$.

Wyrażamy odległości punktu S od punktów A i B w zależności od zmiennej a :

$$|AS| = \sqrt{(a+8)^2 + (0-5)^2} \quad |BS| = \sqrt{(a-4)^2 + (0-1)^2}$$

Punkty A i B należą do okręgu O_2 , więc spełniają warunek $|AS| = |BS|$. Zatem otrzymujemy:

$$(a+8)^2 + 5^2 = (a-4)^2 + 1^2, \quad \text{stąd } a = -3, \quad \text{czyli } S = (-3, 0)$$

Promień r okręgu O_2 jest równy odległości punktu A od środka okręgu. Zatem:

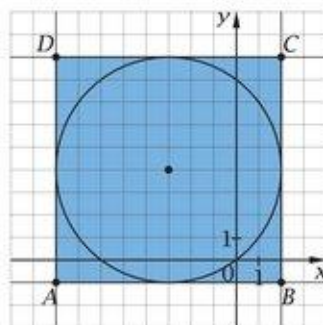
$$r = |AS| = \sqrt{(-3+8)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{50}$$

Okrąg O_2 ma więc równanie $(x+3)^2 + y^2 = 50$.

Zadanie 49.2. (0-1)

Wierzchołki czworokąta odczytujemy z rysunku:

$A = (-8, -1)$, $B = (2, -1)$, $C = (2, 9)$, $D = (-8, 9)$.

**Zadanie 50.2. (0-2)**

Punkty (x, y) leżące na osi x układu współrzędnych oraz jednocześnie należące do okręgu spełniają warunki:

$$y = 0 \quad \text{oraz} \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Rozwiązujemy równanie:

$$(x+2)^2 + (-3)^2 = 25, \quad \text{stąd} \quad (x+2)^2 = 16, \quad \text{czyli} \quad x \in \{-6, 2\}$$

Zadanie 51.2. (0-3)

k — styczna do okręgu O w punkcie P

Okrąg O ma środek w punkcie $S = (-6, 3)$.

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy a prostej SP :

$$a = \frac{y_P - y_S}{x_P - x_S} = \frac{2 - 3}{1 + 6} = -\frac{1}{7}$$

Prosta k jest prostopadła do prostej SP i należy do niej punkt $P = (1, 2)$, więc:

$$k: y = -\frac{1}{a}x + b, \quad \text{stąd} \quad 2 = 7 \cdot 1 + b, \quad \text{czyli} \quad b = -5$$

Zatem prosta k ma równanie $y = 7x - 5$.

Zadanie 52. (0-3)

Środkami okręgów są punkty: $O = (m, -m)$ i $S = (-2m, 3m)$, a promienie tych okręgów to odpowiednio: $r_1 = 2$ i $r_2 = 5$.

Wyrażamy odległość między środkami O i S w zależności od m :

$$|OS| = \sqrt{(-2m - m)^2 + (3m + m)^2} = \sqrt{25m^2}$$

Dla $m > 0$ zachodzi: $|OS| = 5m$.

Okręgi o środkach w punktach O i S oraz promieniach r_1 i r_2 są rozłączne wewnętrznie tylko wtedy gdy spełniony jest warunek $|OS| < |r_1 - r_2|$, czyli:

$$5m < |2 - 5| \quad \text{i} \quad m > 0, \quad \text{stąd} \quad 0 < m < \frac{3}{5}$$

Zatem dane okręgi są rozłączne wewnętrznie dla $m \in (0; \frac{3}{5})$.

Zadanie 53. (0-4)

Środkami okręgów są punkty: $O = (2, -1)$ i $S = (-1, 3)$, a promienie tych okręgów to odpowiednio: $r_1 = 2$ i $r_2 = r$.

Obliczamy odległość między środkami O i S :

$$|OS| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Okręgi o środkach w punktach O i S oraz promieniach r_1 i r_2 mają dokładnie dwa punkty wspólne tylko wtedy gdy spełniony jest warunek $|r_1 - r_2| < |OS| < r_1 + r_2$ czyli:

$$|2 - r| < 5 \quad \text{i} \quad 5 < 2 + r \quad \text{i} \quad r > 0$$

Nierówność $|2 - r| < 5$ jest spełniona dla $r \in (-3; 7)$, a z nierówności $5 < 2 + r$ wynika, że $r \in (3; +\infty)$. Zatem dane okręgi mają dokładnie dwa punkty wspólne dla $r \in (3; 7)$.

Zadanie 55. (0-3)**I sposób**

Prosta k jest prostopadła do prostej o współczynniku kierunkowym $a = \frac{1}{2}$ i należy do niej punkt $S = (1, -4)$, więc:

$$k: y = -\frac{1}{a}x + b, \text{ stąd } -4 = (-2) \cdot 1 + b, \text{ czyli } b = -2$$

Zatem prosta k ma równanie $y = -2x - 2$.

Wyznaczamy współrzędne punktu P będącego punktem wspólnym prostych o równaniach $y = \frac{1}{2}x + 3$ i $y = -2x - 2$:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = -2x - 2 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}, \text{ czyli } P = (-2, 2)$$

Promień r jest odległością środka S od prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 3$, czyli odległością środka S od punktu P . Zatem:

$$r = |PS| = \sqrt{(1+2)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{45}$$

Okrąg O ma więc równanie $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 45$.

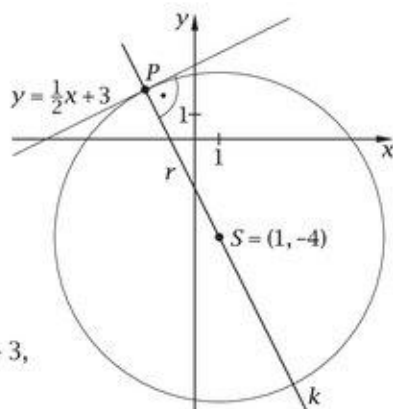
II sposób

Prostą o równaniu kierunkowym $y = \frac{1}{2}x + 3$ można opisać równaniem ogólnym $x - 2y + 6 = 0$.

Promień r jest odległością środka $S = (1, -4)$ od prostej o równaniu $x - 2y + 6 = 0$. Ze wzoru na odległość punktu od prostej otrzymujemy:

$$r = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) + 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

Okrąg O ma więc równanie $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 45$.

**Zadanie 56.1. (0-2)**

Promień r okręgu O jest odległością środka $S = (3, -4)$ od prostej o równaniu $2x - y - 11 = 0$. Ze wzoru na odległość punktu od prostej otrzymujemy:

$$r = \frac{|2 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) - 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Okrąg O ma więc równanie $(x-3)^2 + (y+4)^2 = \frac{1}{5}$.

Zadanie 56.2. (0-2)

Prostą o równaniu ogólnym $2x - y - 11 = 0$ można opisać równaniem kierunkowym $y = 2x - 11$.

Prosta SP jest prostopadła do prostej o współczynniku kierunkowym $a = 2$ i należy do niej środek $S = (3, -4)$, więc:

$$\text{prosta } SP: y = -\frac{1}{a}x + b, \text{ stąd } -4 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 + b, \text{ czyli } b = -\frac{5}{2}$$

Zatem prosta SP ma równanie $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

Punkt P jest punktem wspólnym prostych o równaniach $y = 2x - 11$ i $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$. Zatem:

$$\begin{cases} y = 2x - 11 \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} x = \frac{17}{5} \\ y = -\frac{21}{5} \end{cases}, \text{ czyli } P = \left(\frac{17}{5}, -\frac{21}{5}\right)$$

Zadanie 58. (0-4)

Środkiem okręgu O jest punkt $S = (2m, m)$, a promień tego okręgu ma długość $r = 5$.

Wyrażamy odległość środka S od prostej k w zależności od m :

$$d(S, k) = \frac{|m \cdot 2m + m^2 + 4|}{\sqrt{m^2 + m^2}} = \frac{|3m^2 + 4|}{\sqrt{2m^2}}$$

Dla $m > 0$ zachodzi: $d(S, k) = \frac{3m^2 + 4}{\sqrt{2m}}$.

Prosta k ma dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu r wtedy, gdy spełniony jest warunek $d(S, k) < r$, czyli $\frac{3m^2 + 4}{\sqrt{2m}} < 5$.

Po pomnożeniu stronami nierówności $\frac{3m^2+4}{\sqrt{2}m} < 5$ przez wyrażenie $\sqrt{2}m$ ($\sqrt{2}m > 0$) otrzymujemy:

$$3m^2 - 5\sqrt{2}m + 4 < 0, \text{ stąd } m \in \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; \sqrt{2}\right)$$

Zatem prosta k ma dwa punkty wspólne z okręgiem O dla $m \in \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; \sqrt{2}\right)$.

Zadanie 60. (0-3)

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -x + 5 \end{cases}, \text{ stąd } -x^2 + 3x - 2 = 0, \text{ czyli } x \in \{1, 2\}$$

Wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach: $(1, 4)$ i $(2, 3)$.

Zadanie 61. (0-3)

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16 \\ y = x - 1 \end{cases}, \text{ stąd } x^2 - 2x - 3 = 0, \text{ czyli } x \in \{-1, 3\}$$

Prosta l przecina okrąg O w punktach $A = (-1, -2)$ i $B = (3, 2)$.

Obliczamy długość odcinka AB :

$$|AB| = \sqrt{(3+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Odcinek AB jest przekątną kwadratu, czyli bok tego kwadratu ma długość 4, a jego pole wynosi 16.

Zadanie 62. (0-3)

S — środek odcinka AB

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 3 \\ y = -5x + 1 \end{cases}, \text{ stąd } -x^2 + 5x - 4 = 0, \text{ czyli } x \in \{1, 4\}$$

Wykresy funkcji f i g przecinają się w punktach: $A = (1, -4)$ i $B = (4, -19)$.

Wyznaczamy współrzędne punktu S :

$$S = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{-4-19}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{23}{2}\right)$$

Zadanie 70. (0-4)

r — promień okręgu wpisanego w trójkąt $A'B'C'$

$$A = (-5, 4) \xrightarrow[\text{wzgl. } (0,0)]{\text{symetria}} A' = (5, -4)$$

$$B = (3, 2) \xrightarrow[\text{wzgl. osi } x]{\text{symetria}} B' = (3, -2)$$

$$C = (-2, -7) \xrightarrow[\text{wzgl. osi } y]{\text{symetria}} C' = (2, -7)$$

Obliczamy długości boków trójkąta $A'B'C'$:

$$|A'B'| = \sqrt{(3-5)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|B'C'| = \sqrt{(2-3)^2 + (-7+2)^2} = \sqrt{26}$$

$$|A'C'| = \sqrt{(2-5)^2 + (-7+4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Zauważamy, że:

$$|A'B'|^2 + |A'C'|^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{18})^2 = 26$$

$$|B'C'|^2 = (\sqrt{26})^2 = 26$$

Skoro $|A'B'|^2 + |A'C'|^2 = |B'C'|^2$, to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt $A'B'C'$ jest prostokątny.

Obliczamy promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny $A'B'C'$:

$$r = \frac{|A'B'| + |A'C'| - |B'C'|}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{26}}{2} = \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{26}}{2}$$

Zadanie 71.2. (0-4)

h_C — wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C

$P(t)$ — pole trójkąta ABC w zależności od t , gdzie $t \in (1; 4)$

$$|AB| = t - 1, \quad h_C = 4 - t$$

Wyznaczamy pole trójkąta ABC w zależności od t :

$$P(t) = \frac{1}{2}(t-1)(4-t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}t - 2$$

Dziedziną funkcji P jest przedział $(1; 4)$.

Wykresem funkcji $y = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2}t - 2$ jest parabola o ramionach skierowanych do dołu, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla $t = \frac{-\frac{5}{2}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = \frac{5}{2}$. Ponieważ $\frac{5}{2} \in (1; 4)$, więc funkcja P określona w przedziale $(1; 4)$ przyjmuje największą wartość dla $t = \frac{5}{2}$. Wówczas trójkąt ABC ma największe pole, a jego wierzchołkami są: $A = (1, 0)$, $B = (\frac{5}{2}, 0)$ i $C = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$.

Skoro obrazem punktu (x, y) w symetrii względem osi y układu współrzędnych jest punkt $(-x, y)$, to:

- obrazem punktu $A = (1, 0)$ jest punkt $A' = (-1, 0)$,
- obrazem punktu $B = (\frac{5}{2}, 0)$ jest punkt $B' = (-\frac{5}{2}, 0)$,
- obrazem punktu $C = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$ jest punkt $C' = (-\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$.

9. Stereometria**Zadanie 6. (0-3)**

a — krawędź podstawy ostrosłupa ($a = 10\sqrt{3}$)

h — wysokość ostrosłupa

h_p — wysokość podstawy ostrosłupa

R — promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa

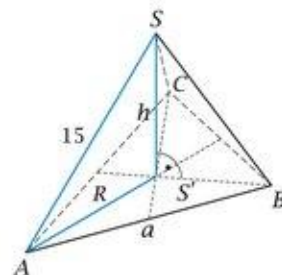
Ponieważ krawędzie boczne ostrosłupa mają taką samą długość, to spodek wysokości ostrosłupa jest punktem jednakowo odległym od wierzchołków podstawy, czyli jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

$$R = \frac{2}{3}h_p$$

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 15, \quad \text{czyli } R = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $AS'S$ otrzymujemy:

$$h^2 = 15^2 - 10^2, \quad \text{stad } h^2 = 125, \quad \text{czyli } h = 5\sqrt{5}$$

**Zadanie 7. (0-2)**

a — krawędź podstawy ostrosłupa ($a = 12$)

P — pole trójkąta OPS

$$|OP| = \frac{1}{2}a = 6$$

$$|OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OCS otrzymujemy:

$$|OS|^2 = 16^2 - (6\sqrt{2})^2, \quad \text{stad } |OS|^2 = 184, \quad \text{czyli } |OS| = 2\sqrt{46}$$

Zatem:

$$P = \frac{|OP| \cdot |OS|}{2} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{46}}{2} = 6\sqrt{46}$$

Zadanie 17. (0-2)

a — krawędź podstawy graniastosłupa

α — miara kąta między przekątnymi dwóch sąsiednich ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka

Wszystkie przekątne ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego mają równe długości, więc $|AC| = |AB|$.

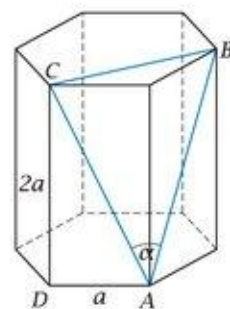
Odcinek CB jest krótszą przekątną sześciokąta foremnego o boku a , więc $|CB| = a\sqrt{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DAC otrzymujemy:

$$|AC|^2 = a^2 + (2a)^2, \text{ stąd } |AC|^2 = 5a^2, \text{ czyli } |AC| = |AB| = a\sqrt{5}$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC wynika:

$$(a\sqrt{3})^2 = (a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{5})^2 - 2 \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5} \cdot \cos \alpha, \text{ stąd } \cos \alpha = \frac{7}{10}$$

**Zadanie 23.1. (0-2)**

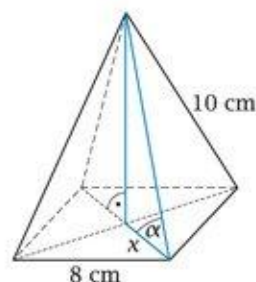
α — kąt między krawędzią boczną ostrosłupa a podstawą

a — krawędź podstawy ostrosłupa ($a = 8$ cm)

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

Obliczamy miarę kąta α :

$$\cos \alpha = \frac{x}{10} = \frac{4\sqrt{2}}{10} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 0,566, \text{ czyli } \alpha \approx 56^\circ$$

**Zadanie 23.2. (0-2)**

α — kąt między ścianą boczną ostrosłupa a podstawą

a — krawędź podstawy ostrosłupa ($a = 8$ cm)

h — wysokość ostrosłupa

$$|AB| = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ [cm]}$$

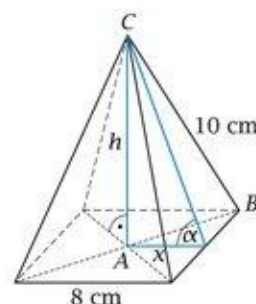
$$x = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ [cm]}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy:

$$h^2 = 10^2 - (4\sqrt{2})^2, \text{ stąd } h^2 = 68, \text{ czyli } h = 2\sqrt{17} \text{ cm}$$

Obliczamy miarę kąta α :

$$\tg \alpha = \frac{h}{x} = \frac{2\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}}{2} \approx 2,062, \text{ czyli } \alpha \approx 64^\circ$$

**Zadanie 24.2. (0-3)**

r — promień podstawy stożka

α — miara kąta BSA

$$r = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ [cm]}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS otrzymujemy:

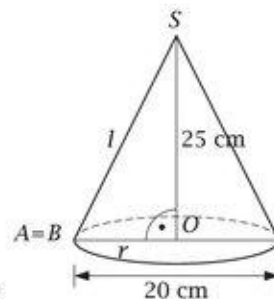
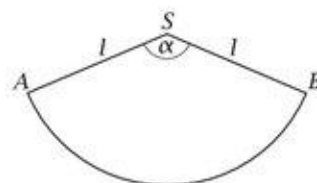
$$l^2 = 10^2 + 25^2, \text{ stąd } l^2 = 725, \text{ czyli } l = 5\sqrt{29} \text{ cm}$$

Pole figury ABS (wycinka koła) jest równe polu powierzchni bocznej stożka.

Obliczamy miarę kąta α :

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi l^2 = \pi r l, \text{ stąd } \alpha = \frac{r}{l} \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = \frac{10}{5\sqrt{29}} \cdot 360^\circ \approx 134^\circ$$



Zadanie 27. (0-3)

$$|PD| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy:

$$|AC|^2 = 4^2 + 2^2, \quad \text{stad } |AC|^2 = 20, \quad \text{czyli } |AC| = 2\sqrt{5}$$

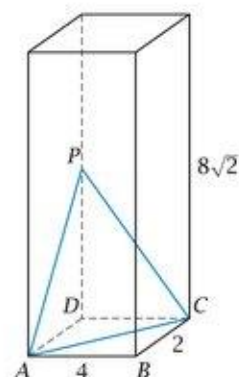
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DCP otrzymujemy:

$$|PC|^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2, \quad \text{stad } |PC|^2 = 48, \quad \text{czyli } |PC| = 4\sqrt{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADP otrzymujemy:

$$|AP|^2 = 2^2 + (4\sqrt{2})^2, \quad \text{stad } |AP|^2 = 36, \quad \text{czyli } |AP| = 6$$

Zatem obwód trójkąta ACP jest równy $2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} + 6$.

**Zadanie 28. (0-3)**

a — długość boku sześciokąta $LMNOPQ$

P — pole sześciokąta $LMNOPQ$

Każdy bok sześciokąta $LMNOPQ$ jest przekątną kwadratu o boku 4.

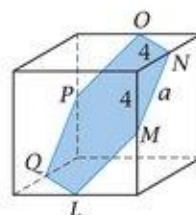
Zatem $a = 4\sqrt{2}$.

Ponieważ $|QM| = |LN|$, więc trójkąty QLM i LMN są przystające (cecha bbb), czyli $\sphericalangle QLM = \sphericalangle LMN$. Podobnie pozostałe kąty sześciokąta $LMNOPQ$ mają taką samą miarę jak kąt QLM .

Zatem sześciokąt $LMNOPQ$ jest foremny.

Obliczamy pole tego sześciokąta:

$$P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$$

**Zadanie 35. (0-2)**

h — wysokość graniastosłupa ($h = 16$)

odcinek AG — dłuższa przekątna graniastosłupa ($|AG| = 24$)

odcinek BH — krótsza przekątna graniastosłupa ($|BH| = 16\sqrt{2}$)

V — objętość graniastosłupa

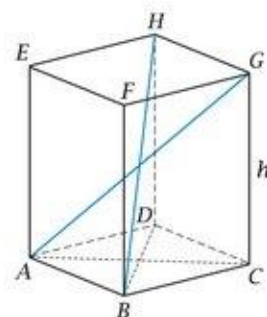
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ACG otrzymujemy:

$$|AC|^2 = 24^2 - 16^2, \quad \text{stad } |AC|^2 = 320, \quad \text{czyli } |AC| = 8\sqrt{5}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BDH otrzymujemy:

$$|BD|^2 = (16\sqrt{2})^2 - 16^2, \quad \text{stad } |BD|^2 = 256, \quad \text{czyli } |BD| = 16$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{5} \cdot 16 \cdot 16 = 1024\sqrt{5}$$

**Zadanie 36.2. (0-4)**

a, b — krawędzie podstawy prostopadłościanu $ABCDEFGH$

c — krawędź boczna prostopadłościanu $ABCDEFGH$

P_c — pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu $ABCDEFGH$

$$|BH| = 2\sqrt{194}, \quad |BG| = 2\sqrt{130}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{c}{b}, \quad \text{czyli } \frac{9}{7} = \frac{c}{b}, \quad \text{stad } c = \frac{9}{7}b$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCG otrzymujemy:

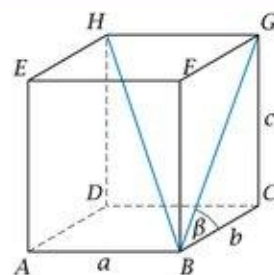
$$b^2 + \left(\frac{9}{7}b\right)^2 = (2\sqrt{130})^2, \quad \text{stad } b^2 = 196, \quad \text{czyli } b = 14$$

$$c = \frac{9}{7}b = \frac{9}{7} \cdot 14 = 18$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BGH ($\sphericalangle BGH = 90^\circ$) otrzymujemy:

$$a^2 + (2\sqrt{130})^2 = (2\sqrt{194})^2, \quad \text{stad } a^2 = 256, \quad \text{czyli } a = 16$$

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac = 2 \cdot 16 \cdot 14 + 2 \cdot 14 \cdot 18 + 2 \cdot 16 \cdot 18 = 1528$$



Zadanie 37.2. (0-2)

α — kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa $ABCDW$ do podstawy

O — spodek wysokości ostrosłupa $ABCDW$

h — wysokość ostrosłupa $ABCDW$ ($h = 9$)

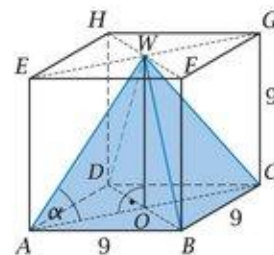
$$|AO| = \frac{|AB| \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOW otrzymujemy:

$$|AW|^2 = 9^2 + \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2, \text{ stąd } |AW|^2 = \frac{243}{2}, \text{ czyli } |AW| = \frac{9\sqrt{6}}{2}$$

Zatem:

$$\cos \alpha = \frac{|AO|}{|AW|} = \frac{\frac{9\sqrt{2}}{2}}{\frac{9\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Zadanie 38. (0-4)**

V — objętość prostopadłościanu (pojemnika)

V_1 — objętość graniastosłupa $ABCDEF$

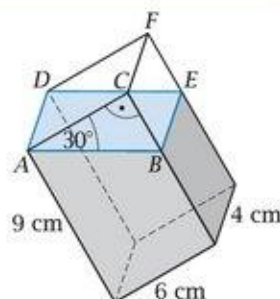
V_2 — objętość wody

$$V = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216 \text{ [cm}^3\text{]}$$

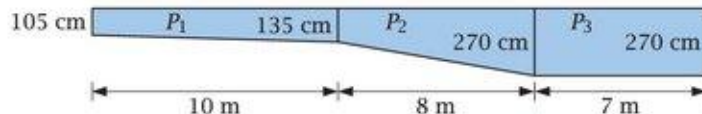
$$\tan 30^\circ = \frac{|BC|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|BC|}{6}, \text{ stąd } |BC| = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot |CF| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 24\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$V_2 = V - V_1 = 24(9 - \sqrt{3}) \approx 174 \text{ [cm}^3\text{]}$$

**Zadanie 39. (0-3)**

Basen ma kształt graniastosłupa o podstawie przedstawionej na rysunku i wysokości równej szerokości basenu (graniastosłup).



h — wysokość graniastosłupa ($h = 15 \text{ m}$)

P_p — pole podstawy graniastosłupa

V — objętość graniastosłupa

$$P_1 = \frac{(1,05 + 1,35)}{2} \cdot 10 = 12 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$P_2 = \frac{(1,35 + 2,7)}{2} \cdot 8 = 16,2 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$P_3 = 2,7 \cdot 7 = 18,9 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$P_p = P_1 + P_2 + P_3 = 12 + 16,2 + 18,9 = 47,1 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$V = P_p \cdot h = 47,1 \cdot 15 = 706,5 \text{ [m}^3\text{]} = 706\,500 \text{ [l]}$$

Zadanie 40. (0-2)

P_c — pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $ABDE$

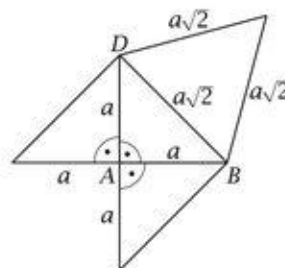
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $ABDE$ jest równe sumie pól trzech przystających trójkątów prostokątnych równoramiennych ABD , ABE i ADE oraz trójkąta równobocznego BDE .

$$|BD| = a\sqrt{2}$$

$$P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABE} = P_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}a^2$$

$$P_{\triangle BDE} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$P_c = 3 \cdot \frac{1}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}a^2$$



Zadanie 41. (0-2)

Ponieważ $|EC| = |DC| = \frac{1}{2}a$ oraz $\angle ECD = 60^\circ$, więc trójkąt ECD jest równoboczny, a jego bok ma długość $\frac{1}{2}a$. Zatem $|ED| = \frac{1}{2}a$.

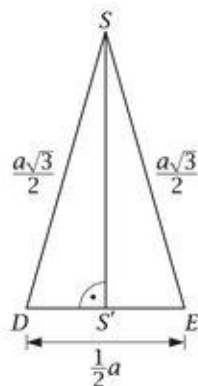
Odcinki SE i SD są wysokościami ścian bocznych, które są trójkątami równobocznymi o bokach długości a . Zatem $|SE| = |SD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$|S'E| = \frac{1}{2}|ED| = \frac{1}{4}a$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $S'SE$ otrzymujemy:

$$|SS'|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}a\right)^2, \quad \text{stad } |SS'|^2 = \frac{11}{16}a^2, \quad \text{czyli } |SS'| = \frac{\sqrt{11}}{4}a$$

$$P_{\triangle DES} = \frac{1}{2} \cdot |ED| \cdot |SS'| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{11}}{4}a = \frac{\sqrt{11}}{16}a^2$$

**Zadanie 43. (0-3)**

a — krawędź podstawy graniastosłupa

h — wysokość graniastosłupa

V — objętość graniastosłupa

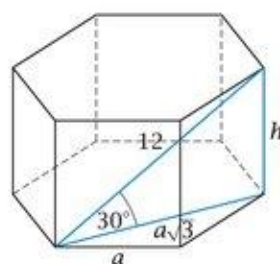
P_c — pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{12}, \quad \text{czyli } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}, \quad \text{stad } a = 6$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{12}, \quad \text{czyli } \frac{1}{2} = \frac{h}{12}, \quad \text{stad } h = 6$$

$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{3 \cdot 6^2\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 324\sqrt{3}$$

$$P_c = 3a^2\sqrt{3} + 6ah = 3 \cdot 6^2\sqrt{3} + 6 \cdot 6 \cdot 6 = 108\sqrt{3} + 216 = 108(\sqrt{3} + 2)$$

**Zadanie 44. (0-3)**

P_b — pole powierzchni bocznej graniastosłupa

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{36}{|BD|}, \quad \text{czyli } \sqrt{3} = \frac{36}{|BD|}, \quad \text{stad } |BD| = 12\sqrt{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD otrzymujemy:

$$|AD|^2 = (12\sqrt{3})^2 - 18^2, \quad \text{stad } |AD|^2 = 108, \quad \text{czyli } |AD| = 6\sqrt{3}$$

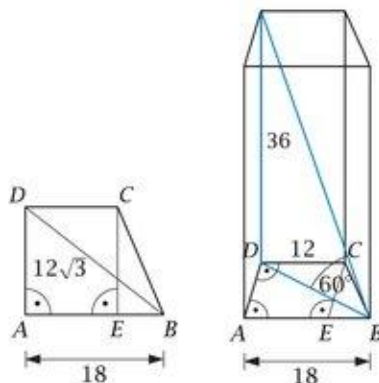
$$|EB| = |AB| - |CD|, \quad \text{czyli } |EB| = 6$$

$$|EC| = |AD| = 6\sqrt{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EBC otrzymujemy:

$$|BC|^2 = (6\sqrt{3})^2 + 6^2, \quad \text{stad } |BC|^2 = 144, \quad \text{czyli } |BC| = 12$$

$$P_b = 18 \cdot 36 + 2 \cdot 12 \cdot 36 + 6\sqrt{3} \cdot 36 = 216(7 + \sqrt{3})$$

**Zadanie 45. (0-3)**

h — wysokość graniastosłupa

h_p — wysokość podstawy graniastosłupa

P_c — pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{24}, \quad \text{czyli } \frac{1}{2} = \frac{h}{24}, \quad \text{stad } h = 12$$

$$\cos 30^\circ = \frac{|AC|}{24}, \quad \text{czyli } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|AC|}{24}, \quad \text{stad } |AC| = 12\sqrt{3}$$

$$|KB| = \frac{|AB| - |CD|}{2}, \quad \text{czyli } |KB| = 4$$

$$|AK| = |AB| - |KB|, \quad \text{czyli } |AK| = 16$$

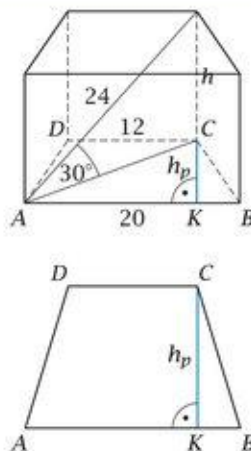
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AKC otrzymujemy:

$$h_p^2 = (12\sqrt{3})^2 - 16^2, \quad \text{stad } h_p^2 = 176, \quad \text{czyli } h_p = 4\sqrt{11}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta KBC otrzymujemy:

$$|BC|^2 = (4\sqrt{11})^2 + 4^2, \quad \text{stad } |BC|^2 = 192, \quad \text{czyli } |BC| = 8\sqrt{3}$$

$$P_c = 2 \cdot \frac{20+12}{2} \cdot 4\sqrt{11} + (20 + 8\sqrt{3} + 12 + 8\sqrt{3}) \cdot 12 = 64(6 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{11})$$

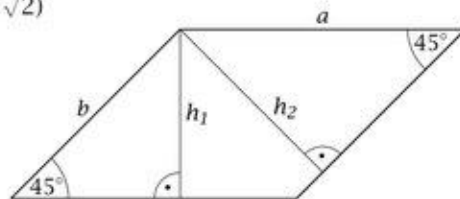


Zadanie 46. (0-2) h — wysokość graniastosłupa ($h = 10$) a, b — krawędzie podstawy ($a > b$) h_1 — wysokość równoległoboku opuszczona na bok a ($h_1 = 3\sqrt{2}$) h_2 — wysokość równoległoboku opuszczona na bok b ($h_2 = 4\sqrt{2}$) V — objętość graniastosłupa

$$\sin 45^\circ = \frac{h_1}{b}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{b}, \quad \text{stad} \quad b = 6$$

$$\sin 45^\circ = \frac{h_2}{a}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{a}, \quad \text{stad} \quad a = 8$$

$$V = ab \cdot \sin 45^\circ \cdot h = 8 \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ \cdot 10 = 240\sqrt{2}$$

**Zadanie 47. (0-3)** a — krawędź podstawy graniastosłupa h_p — wysokość podstawy graniastosłupa d — przekątna ściany bocznej graniastosłupa ($d = 16\sqrt{3}$) h — wysokość graniastosłupa V — objętość graniastosłupa

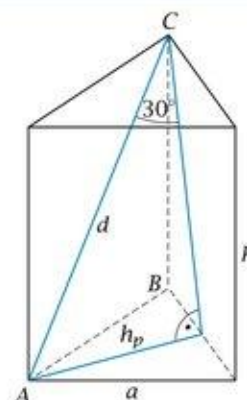
$$\sin 30^\circ = \frac{h_p}{d}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{2} = \frac{h_p}{16\sqrt{3}}, \quad \text{stad} \quad h_p = 8\sqrt{3}$$

$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \text{czyli} \quad 8\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \text{stad} \quad a = 16$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy:

$$h^2 = (16\sqrt{3})^2 - 16^2, \quad \text{stad} \quad h^2 = 512, \quad \text{czyli} \quad h = 16\sqrt{2}$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{16^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 16\sqrt{2} = 1024\sqrt{6}$$

**Zadanie 53. (0-2)** a — krawędź podstawy ostrosłupa h_b — wysokość ściany bocznej ostrosłupa ($h_b = 6$) h — wysokość ostrosłupa V — objętość ostrosłupa

$$\tan 45^\circ = \frac{h_b}{\frac{1}{2}a}, \quad \text{czyli} \quad 1 = \frac{6}{\frac{1}{2}a}, \quad \text{stad} \quad a = 12$$

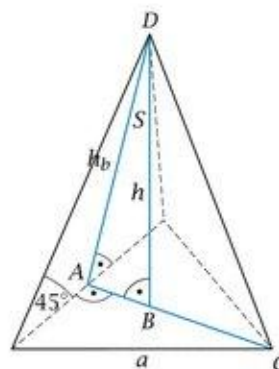
Punkt B jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę ostrosłupa, a odcinek AB jest promieniem tego okręgu. Zatem:

$$|AB| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD otrzymujemy:

$$h^2 = 6^2 - (2\sqrt{3})^2, \quad \text{stad} \quad h^2 = 24, \quad \text{czyli} \quad h = 2\sqrt{6}$$

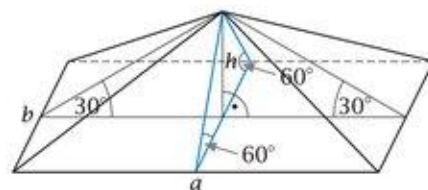
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6} = 72\sqrt{2}$$

**Zadanie 54. (0-3)** a, b — krawędzie podstawy ostrosłupa ($a > b$) h — wysokość ostrosłupa ($h = 9$) V — objętość ostrosłupa

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{1}{2}b}, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{3} = \frac{9}{\frac{1}{2}b}, \quad \text{stad} \quad b = 6\sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{\frac{1}{2}a}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{9}{\frac{1}{2}a}, \quad \text{stad} \quad a = 18\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}abh = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 9 = 972$$



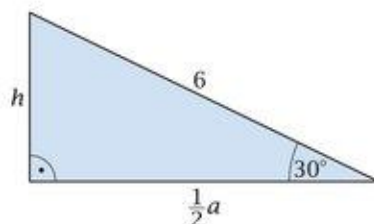
Zadanie 55. (0-4) a — krawędź podstawy ostrosłupa h — wysokość ostrosłupa V — objętość ostrosłupa P_c — pole powierzchni całkowitej ostrosłupa

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{6}, \quad \text{czyli } \frac{1}{2} = \frac{h}{6}, \quad \text{stąd } h = 3$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{6}, \quad \text{czyli } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2}a}{6}, \quad \text{stąd } a = 6\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}(6\sqrt{3})^2 \cdot 3 = 108$$

$$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot 6 = (6\sqrt{3})^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 = 108 + 72\sqrt{3} = 36(3 + 2\sqrt{3})$$

**Zadanie 56. (0-3)** a — krawędź podstawy ostrosłupa h — wysokość ostrosłupa h_b — wysokość ściany bocznej ostrosłupa P_c — pole powierzchni całkowitej ostrosłupa

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{8}, \quad \text{czyli } \frac{1}{2} = \frac{h}{8}, \quad \text{stąd } h = 4$$

$$\cos 30^\circ = \frac{|BC|}{8}, \quad \text{czyli } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|BC|}{8}, \quad \text{stąd } |BC| = 4\sqrt{3}$$

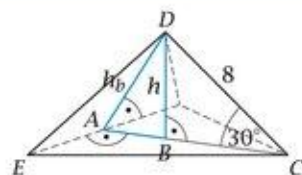
Punkt B jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa, a odcinek BC jest promieniem tego okręgu. Zatem:

$$|BC| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad \text{czyli } 4\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad \text{stąd } a = 12$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED otrzymujemy:

$$h_b^2 = 8^2 - 6^2, \quad \text{stąd } h_b^2 = 28, \quad \text{czyli } h_b = 2\sqrt{7}$$

$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2}ah_b = \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{7} = 36(\sqrt{3} + \sqrt{7})$$

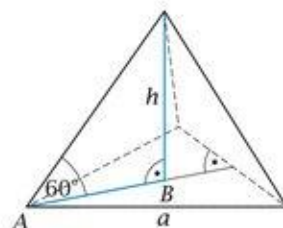
**Zadanie 57.2. (0-2)** h — wysokość ostrosłupa a — krawędź podstawy ostrosłupa ($a = 4\sqrt{3}$) V — objętość ostrosłupa

Punkt B jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa, a odcinek AB — promieniem tego okręgu. Zatem:

$$|AB| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad \text{czyli } |AB| = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 4$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{|AB|}, \quad \text{czyli } \sqrt{3} = \frac{h}{4}, \quad \text{stąd } h = 4\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3} = 48$$

**Zadanie 63. (0-2)** h — wysokość graniastosłupa i walca a — krawędź podstawy graniastosłupa r — promień podstawy walca V_g — objętość graniastosłupa V_w — objętość walca

Z równości pól powierzchni bocznej graniastosłupa i walca wynika:

$$2\pi rh = 3ah, \quad \text{stąd } \frac{r}{a} = \frac{3}{2\pi}$$

Obliczamy stosunek objętości brył:

$$\frac{V_w}{V_g} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2 = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3} \cdot \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

Zadanie 64. (0-3)

Aby uzyskać walec o największej objętości, należy do jego powierzchni bocznej wykorzystać całą kartkę. Kartkę tę można zwinąć na dwa różne sposoby: wzdłuż krótszej krawędzi albo wzdłuż dłuższej.

r_1, r_2 — promienie podstaw walców

h_1, h_2 — wysokości walców ($h_1 = 20$ cm, $h_2 = 30$ cm)

V_1, V_2 — objętości walców

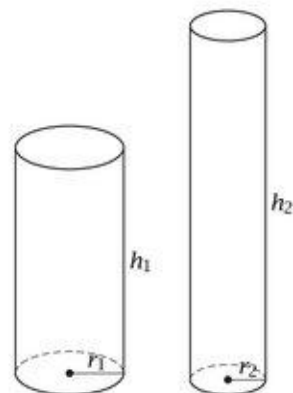
$$2\pi r_1 = 30, \quad \text{czyli} \quad r_1 = \frac{15}{\pi} \text{ cm}$$

$$2\pi r_2 = 20, \quad \text{czyli} \quad r_2 = \frac{10}{\pi} \text{ cm}$$

$$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h_1 = \pi \cdot \left(\frac{15}{\pi}\right)^2 \cdot 20 = \frac{4500}{\pi} [\text{cm}^3]$$

$$V_2 = \pi r_2^2 \cdot h_2 = \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 30 = \frac{3000}{\pi} [\text{cm}^3]$$

Ponieważ $V_1 > V_2$, więc walec o największej objętości ma objętość równą $V_1 = \frac{4500}{\pi} \text{ cm}^3$.

**Zadanie 68. (0-3)**

r — promień podstawy stożka

h — wysokość stożka

l — tworząca stożka ($l = 10$)

V — objętość stożka

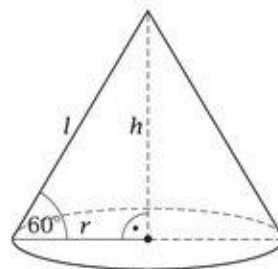
P_c — pole powierzchni całkowitej stożka

$$\cos 60^\circ = \frac{r}{l}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{2} = \frac{r}{10}, \quad \text{stad} \quad r = 5$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{l}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{10}, \quad \text{stad} \quad h = 5\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\sqrt{3}}{3}\pi$$

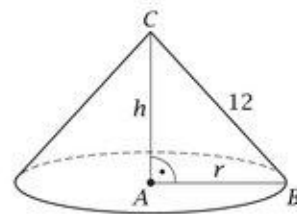
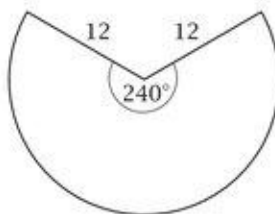
$$P_c = \pi r^2 + \pi r l = \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 5 \cdot 10 = 75\pi$$

**Zadanie 69. (0-2)**

h — wysokość stożka

r — promień podstawy stożka

V — objętość stożka



Obwód podstawy stożka jest równy długości łuku wycinka koła, z którego otrzymano powierzchnię boczną stożka. Zatem:

$$\frac{240^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 12 = 2\pi r, \quad \text{czyli} \quad r = 8$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy:

$$h^2 = 12^2 - 8^2, \quad \text{stad} \quad h^2 = 80, \quad \text{czyli} \quad h = 4\sqrt{5}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 4\sqrt{5} = \frac{256\sqrt{5}}{3}\pi$$

Zadanie 70. (0-4)

α — miara kąta środkowego wycinka koła (w stopniach)

L — długość łuku wycinka koła

r — promień podstawy stożka

l — tworząca stożka (promień wycinka koła, $l = 10$)

P_c — pole powierzchni całkowitej stożka ($P_c = 96\pi$)

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi l = \frac{\alpha}{36^\circ} \cdot 2\pi$$

Obwód podstawy stożka jest równy długości łuku L . Zatem:

$$\frac{\alpha}{36^\circ} \cdot 2\pi = 2\pi r, \quad \text{czyli} \quad r = \frac{\alpha}{36^\circ}$$

Wyznaczamy pole powierzchni całkowitej stożka w zależności od α :

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l = \pi \cdot \left(\frac{\alpha}{36^\circ}\right)^2 + \pi \cdot \frac{\alpha}{36^\circ} \cdot 10$$

$$\pi \cdot \left(\frac{\alpha}{36^\circ}\right)^2 + \pi \cdot \frac{\alpha}{36^\circ} \cdot 10 = 96\pi, \quad \text{stad} \quad \alpha^2 + 36 \cdot 10\alpha - 96 \cdot 36^2 = 0$$

$$\Delta = 36^2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 96 \cdot 36^2 = 36^2 (100 + 4 \cdot 96) = 36^2 \cdot 484$$

$$\sqrt{\Delta} = 36 \cdot 22 = 792$$

Liczby spełniające równanie $\alpha^2 + 36 \cdot 10\alpha - 96 \cdot 36^2 = 0$ to:

$$\alpha = \frac{-360 + 792}{2} = 216 \quad \text{oraz} \quad \alpha = \frac{-360 - 792}{2} = -576$$

Ponieważ $\alpha > 0$, więc $\alpha = 216^\circ$.

Zadanie 74. (0-4)

x — krawędź podstawy graniastosłupa

h — wysokość graniastosłupa

P_c — pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$8x + 4h = 4, \quad \text{czyli} \quad h = 1 - 2x$$

$$P_c = 2x^2 + 4xh$$

Zatem:

$$P_c(x) = 2x^2 + 4x(1 - 2x) = -6x^2 + 4x$$

Ponieważ $x > 0$ i $1 - 2x > 0$, więc dziedziną funkcji P_c jest przedział $(0; \frac{1}{2})$.

Wykresem funkcji $y = -6x^2 + 4x$ jest parabola o ramionach skierowanych do dołu, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$x_w = \frac{-4}{2 \cdot (-6)} = \frac{1}{3}$$

Ponieważ $\frac{1}{3} \in (0; \frac{1}{2})$, więc funkcja P_c określona w zbiorze $(0; \frac{1}{2})$ przyjmuje dla $x = \frac{1}{3}$ największą wartość.

Dla $x = \frac{1}{3}$ otrzymujemy $h = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Graniastosłup o największym polu powierzchni całkowitej ma wymiary $x = \frac{1}{3}$ m oraz $h = \frac{1}{3}$ m i to pole jest równe:

$$P_c\left(\frac{1}{3}\right) = -6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} [\text{m}^2]$$

Zadanie 75. (0-4)

a — długość boku wyciętego kwadratu

P_b — pole powierzchni bocznej pudełka

$$x = a\sqrt{2}, \quad \text{czyli} \quad a = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Zatem:

$$P_b(x) = x\sqrt{2} \cdot (30 - x\sqrt{2}) + x\sqrt{2} \cdot (20 - x\sqrt{2}) = -4x^2 + 50\sqrt{2}x$$

Ponieważ $x > 0$ i $\frac{x\sqrt{2}}{2} < 10$, więc dziedziną funkcji P_b jest przedział $(0; 10\sqrt{2})$.

Wykresem funkcji $y = -4x^2 + 50\sqrt{2}x$ jest parabola o ramionach skierowanych do dołu, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$x_w = \frac{-50\sqrt{2}}{2 \cdot (-4)} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$$

Ponieważ $\frac{25\sqrt{2}}{4} \in (0; 10\sqrt{2})$, więc funkcja P_b określona w zbiorze $(0; 10\sqrt{2})$ przyjmuje dla $x = \frac{25\sqrt{2}}{4}$ największą wartość.

Zatem dla $x = \frac{25\sqrt{2}}{4} \approx 9$ [cm] pole powierzchni bocznej pudełka będzie największe.

Zadanie 76. (0-4) r — promień podstawy walca h — wysokość walca P — pole powierzchni bocznej walca

$$2r + h = 20, \text{ czyli } r = 10 - \frac{1}{2}h$$

$$P = 2\pi rh$$

$$\text{Zatem: } P(h) = 2\pi \left(10 - \frac{1}{2}h\right)h = -\pi h^2 + 20\pi h.$$

Ponieważ $h > 0$ i $10 - \frac{1}{2}h > 0$, więc dziedziną funkcji P jest przedział $(0; 20)$.Wykresem funkcji $y = -\pi h^2 + 20\pi h$ jest parabola o ramionach skierowanych do dołu, więc funkcja ta osiąga największą wartość dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka tej paraboli:

$$h_w = \frac{-20\pi}{2 \cdot (-\pi)} = 10$$

Ponieważ $10 \in (0; 20)$, więc funkcja P określona w zbiorze $(0; 20)$ przyjmuje dla $h = 10$ największą wartość. Walec o największym polu powierzchni bocznej ma wysokość równą 10 cm.**Zadanie 85. (0-3)** h_S — wysokość stożka S ($h_S = 8$) r_S — promień stożka S ($r_S = 6$) h — wysokość stożka odciętego V_S, V, V_B — objętości odpowiednio stożka S , stożka odciętego i bryły powstałej po odcięciu mniejszego stożka

$$|OP| = 2$$

$$h = h_S - |OP| = 8 - 2 = 6$$

Stożek odcięty jest podobny do stożka S .Obliczamy skalę k tego podobieństwa:

$$k = \frac{h}{h_S} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Obliczamy objętość stożka S :

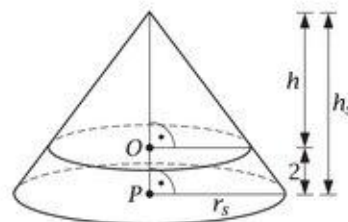
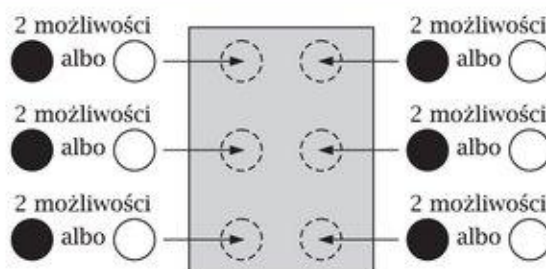
$$V_S = \frac{1}{3}\pi r_S^2 \cdot h_S = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$$

Obliczamy objętość stożka odciętego:

$$\frac{V}{V_S} = k^3, \text{ czyli } \frac{V}{96\pi} = \left(\frac{3}{4}\right)^3, \text{ stąd } V = 40,5\pi$$

Obliczamy objętość bryły powstałej po odcięciu mniejszego stożka:

$$V_B = V_S - V = 96\pi - 40,5\pi = 55,5\pi$$

**10. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa****Zadanie 16. (0-2)**Wszystkich możliwości (łącznie z utworzeniem znaku z 6 polami niewypukłymi) jest 2^6 . Ponieważ znak Braille'a musi zawierać co najmniej jeden punkt wypukły, to wszystkich znaków jest: $2^6 - 1 = 63$.

Zadanie 17. (0-2)

n — liczba miejsc w pierwszym rzędzie

$n(n-1)$ — liczba sposobów, na które dwie osoby mogą zająć miejsca w pierwszym rzędzie

$(n-1)(n-2)$ — liczba sposobów, na które dwie osoby mogą zająć miejsca w drugim rzędzie

Rozwiązujemy równanie:

$$n(n-1) - (n-1)(n-2) = 22, \text{ stąd } n = 12$$

Zatem w pierwszym i drugim rzędzie są łącznie 23 miejsca.

Zadanie 18.2. (0-3)

L.p.	Kolor koszuli	Kolor spodni	Kolor butów	Liczba możliwych zestawów
1.	niebieski	czarny albo szary	czarny, szary, zielony albo czerwony	$1 \cdot 2 \cdot 4$
2.	czerwony, żółty albo zielony	niebieski	czarny, szary, zielony albo czerwony	$3 \cdot 1 \cdot 4$
3.	czerwony, żółty albo zielony	czarny albo szary	niebieski	$3 \cdot 2 \cdot 1$

Liczba wszystkich zestawów ubrań, w których dokładnie jeden element jest niebieski, to:

$$1 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 26$$

Zadanie 28.1. (0-2)

$$|\Omega| = 12$$

$$D = \{2, 3, 5, 7, 11\}, \text{ więc } |D| = 5, \text{ czyli } P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{5}{12}$$

$$E = \{3, 5, 6, 9, 10, 12\}, \text{ więc } |E| = 6, \text{ czyli } P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 28.2. (0-2)

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12} > 1$$

Skoro $P(A) + P(B) + P(C) > 1$, to wśród wyników analizowanego doświadczenia musi być taki, który sprzyja co najmniej dwóm ze zdarzeń: A , B , C .

Zadanie 29. (0-3)

A — Pierwszy wylosowany z pojemnika los był wygrywający.

$$|\Omega| = 9999 - 999 = 9000$$

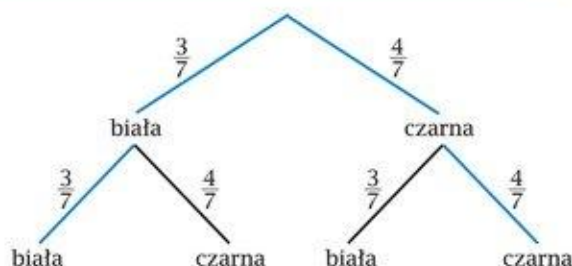
$$A = \{1011, 1101, 1110, 1002, 1020, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000\}, \text{ więc } |A| = 10$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{9000} = \frac{1}{900}$$

Zadanie 30.2. (0-2)

A — Wylosowane kule mają ten sam kolor.

$$P(A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{25}{49}$$



Zadanie 31. (0-4)

A — Wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3.

$$|\Omega| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$$

Cyfra tysięcy	Cyfra setek	Cyfra dziesiątek	Cyfra jedności	Ilość
1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	0, 1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	3	2	$7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1$
1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	3	0, 1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	2	$7 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1$
3	0, 1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	0, 1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	2	$1 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 1$
1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	2	3	0, 4, 6 lub 8	$7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4$
2	0, 1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	3	0, 4, 6 lub 8	$1 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 4$
1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	3	2	0, 4, 6 lub 8	$7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4$
2	3	0, 1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	0, 4, 6 lub 8	$1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 4$
3	2	0, 1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	0, 4, 6 lub 8	$1 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 4$
3	0, 1, 4, 5, 6, 7, 8 lub 9	2	0, 4, 6 lub 8	$1 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 4$

$$|A| = 2 \cdot 7 \cdot 8 + 8 \cdot 8 + 2 \cdot 7 \cdot 4 + 4 \cdot 8 \cdot 4 = 360$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{360}{9000} = \frac{1}{25}$$

Zadanie 32.1. (0-2)

A — Wybrana osoba gra zarówno w brydża, jak i w szachy.

$$|\Omega| = 30$$

Ponieważ 3 osoby nie grają ani w brydża, ani w szachy, to 27 osób gra przynajmniej w jedną z tych gier. Wiadomo, że 20 osób gra w brydża, a w szachy — 15 osób. Skoro $20 + 15 - 27 = 8$, to $|A| = 8$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

Zadanie 32.2. (0-2)

B — Dwie losowo wybrane osoby nie grają ani w brydża, ani w szachy.

Pierwszą osobę możemy wybrać na 30 sposobów, a drugą — na 29. Nie uwzględniamy kolejności wyboru, więc należy iloczyn $30 \cdot 29$ podzielić przez 2. Zatem $|\Omega| = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$.

Wybór 2 osób z grupy trzyosobowej jest równoznaczny z usunięciem 1 osoby z tej grupy. Można to zrobić na 3 sposoby. Zatem $|B| = 3$ i $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{435} = \frac{1}{145}$.

Zadanie 38. (0-3)

x — liczba żetonów ($x > 0$)

$E(X_P)$ — wartość oczekiwana zysku Pawła

$E(X_G)$ — wartość oczekiwana zysku Grzegorza

Wynik rzutu	1	2	3	4	5	6
Prawdopodobieństwo	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Zysk Pawła	10	10	10	0	0	$-x$
Zysk Grzegorza	-10	-10	-10	0	0	x

$$E(X_P) = \frac{1}{6} (10 + 10 + 10 - x) = 5 - \frac{1}{6}x, \quad E(X_G) = \frac{1}{6} (-10 - 10 - 10 + x) = -5 + \frac{1}{6}x$$

Ponieważ $E(X_P) = E(X_G)$, więc $5 - \frac{1}{6}x = -5 + \frac{1}{6}x$, stąd $x = 30$.

Zadanie 39. (0-3)

Wynik losowania	1	2	3	4	5	6	7
Prawdopodobieństwo	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
Zysk gracza	-154	154	-136	156	-110	166	-76

Zatem wartość oczekiwana zysku gracza w grze to:

$$E(X) = \frac{1}{7}(-154 + 154 - 136 + 156 - 110 + 166 - 76) = 0$$

Zadanie 40. (0-3)

w — kwota wygranej z jednego losu

c — cena zakupu jednego losu

Wynik losowania	los wygrywający	los pusty
Prawdopodobieństwo	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
Zysk uczestnika	$w - c$	$-c$

$$E(X) = \frac{4}{5} \cdot (-c) + \frac{1}{5} \cdot (w - c) = \frac{1}{5}w - c$$

$$E(X) = 0, \text{ więc } \frac{1}{5}w - c = 0, \text{ stąd } w = 5c.$$

Zatem wygrana z jednego losu na tej loterii jest 5 razy większa od ceny jego zakupu.

11. Statystyka

Zadanie 10.3. (0-2)

W firmie pracuje łącznie 75 pracowników, z czego 65 zarabia 5,5 tys. zł lub mniej.

Ustalamy, jaki procent liczby 75 stanowi liczba 65:

$$\frac{65}{75} \cdot 100\% = 87\%$$

Osoby zarabiające 5,5 tys. zł lub mniej stanowią 87% wszystkich pracowników firmy F .

Zadanie 10.4. (0-2)

Średnia arytmetyczna (w tys. zł):

$$\bar{a} = \frac{1,5 + 2 + 4 \cdot 2,5 + 7 \cdot 3 + 10 \cdot 3,5 + 14 \cdot 4 + 13 \cdot 4,5 + 9 \cdot 5 + 6 \cdot 5,5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 6,5 + 7 + 7,5 + 8,5 + 2 \cdot 10}{75}$$

Zatem $a = 4,48$ tys. zł.

Zadanie 13. (0-2)

Zestaw wszystkich liczb czterocyfrowych o sumie cyfr równej 3:

$$1002, 1011, 1020, 1101, 1110, 1200, 2001, 2010, 2100, 3000$$

$$\text{Średnia arytmetyczna: } \bar{a} = \frac{1002 + 1011 + 1020 + 1101 + 1110 + 1200 + 2001 + 2010 + 2100 + 3000}{10} = 1555,5$$

$$\text{Mediana: } \frac{1110 + 1200}{2} = 1155$$

Zadanie 14. (0-2)

n — liczba osób, które wpłaciły dodatkową składkę

$$\frac{20 \cdot 18 + n \cdot 10}{20} = 25, \text{ stąd } n = 14$$

Zadanie 15. (0-2)

$$A = \{42, 45, 48, 51, 54, 57, 60\}$$

Liczba	42	45	48	51	54	57	60
Waga	6	9	12	6	9	12	6

Średnia ważona:

$$\bar{s} = \frac{42 \cdot 6 + 45 \cdot 9 + 48 \cdot 12 + 51 \cdot 6 + 54 \cdot 9 + 57 \cdot 12 + 60 \cdot 6}{6 + 9 + 12 + 6 + 9 + 12 + 6} = 51 \frac{3}{20}$$

Zadanie 16. (0-3)

$$\frac{4\bar{a}_1 + 5\bar{a}_2 + 6\bar{a}_3}{15} = \bar{a}, \text{ gdzie } \bar{a}_2 = \bar{a}_1 + 6 \text{ i } \bar{a}_3 = \bar{a}_1 + 15$$

$$\bar{a} - \bar{a}_1 = \frac{4\bar{a}_1 + 5(\bar{a}_1 + 6) + 6(\bar{a}_1 + 15)}{15} - \bar{a}_1, \text{ czyli } \bar{a} - \bar{a}_1 = 8$$

Zadanie 17. (0-4)

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{6 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot (m - 2k) + 15 \cdot (-5) + 6 \cdot (k + m)}{38} = 0 \\ \frac{1 + 3 + m - 2k - 5 + k + m}{5} = 0 \end{cases}, \text{ stąd } m = 5 \text{ i } k = 9$$

Dla $m = 5$ i $k = 9$ otrzymujemy zestaw liczb: $-13, -5, 1, 3, 14$ z medianą równą 1.

Zadanie 18. (0-3)

Suma już wystawionych 10 ocen Kamila to $4,8 \cdot 10 = 48$. Suma wszystkich 12 ocen Kamila powinna być większa od: $4,75 \cdot 12 = 57$, a więc suma dwóch brakujących ocen musi być większa od: $57 - 48 = 9$. Zatem brakującymi ocenami Kamila mogą być: 5 i 5, lub 4 i 6, lub 5 i 6, lub 6 i 6.

Zadanie 25. (0-3)

$$\text{Średnia arytmetyczna: } \bar{a} = \frac{1246 + 1249 + 1381 + 1429 + 1110}{5} = 1283$$

Odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1246 - 1283)^2 + (1249 - 1283)^2 + (1381 - 1283)^2 + (1429 - 1283)^2 + (1110 - 1283)^2}{5}} = \sqrt{\frac{63\,374}{5}} \approx 113$$

Zadanie 26. (0-4)

Liczba szóstek	0	1	2	3	4
Liczba serii	1	3	2	2	2

$$\text{Średnia arytmetyczna: } \bar{a} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2}{10} = 2,1$$

$$\text{Dominanta: } D_o = 1$$

$$\text{Mediana: } M_e = \frac{2+2}{2} = 2$$

$$\text{Odchylenie standardowe: } \sigma = \sqrt{\frac{(-2,1)^2 + 3 \cdot (-1,1)^2 + 2 \cdot (-0,1)^2 + 2 \cdot 0,9^2 + 2 \cdot 1,9^2}{10}} = \sqrt{1,69} = 1,3$$

$$\text{Zatem: } D_o < \sigma < M_e < \bar{a}.$$

Zadanie 27.2. (0-2)

Z_2 to zestaw liczb: 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16.

Z_3 to zestaw liczb: 6, 9, 12, 15.

Z_4 to zestaw liczb: 4, 8, 12, 16.

Z_5 to zestaw liczb: 5, 10, 15.

Mediany zestawów Z_2 , Z_3 , Z_4 i Z_5 to odpowiednio liczby: 10, $10\frac{1}{2}$, 10 i 10.

Zatem zestaw Z składa się z liczb: 10, 10, 10, $10\frac{1}{2}$.

Średnia arytmetyczna zestawu Z : $\bar{a} = \frac{10+10+10+10\frac{1}{2}}{4} = 10\frac{1}{8}$

Kwadrat odchylenia standardowego zestawu Z : $\sigma^2 = \frac{3 \cdot (10 - 10\frac{1}{8})^2 + (10\frac{1}{2} - 10\frac{1}{8})^2}{4} = \frac{3}{64}$

Zadanie 29. (0-3)

Średnia arytmetyczna: $\bar{a} = \frac{4+t}{5}$

Odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\frac{4 \cdot (1 - \frac{4+t}{5})^2 + (t - \frac{4+t}{5})^2}{5}} = \frac{2}{5}|t-1|$

Dla $t \in (6; 11)$ spełniona jest nierówność $t-1 > 0$, czyli $\sigma = \frac{2}{5}(t-1)$.

Skoro $6 < t < 11$, to $2 < \frac{2}{5}(t-1) < 4$. Zatem $\sigma \in (2; 4)$.

Zadanie 30. (0-4)

$\bar{x}_m$ — średnia arytmetyczna wynagrodzeń pracowników w maju

$\bar{x}_c$ — średnia arytmetyczna wynagrodzeń pracowników w czerwcu

$$\bar{x}_m = \frac{3100+3200+3600+4500+5100}{5} = 3900$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{(-800)^2 + (-700)^2 + (-300)^2 + 600^2 + 1200^2}{5}}$$

$$\bar{x}_c = \bar{x}_m = 3900$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{(-800)^2 + (-700)^2 + (-300)^2 + 600^2 + 1200^2 + 5 \cdot 0^2}{10}}$$

Zatem:

$$\sigma_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(-800)^2 + (-700)^2 + (-300)^2 + 600^2 + 1200^2}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sigma_m$$

Zadanie 31. (0-4)

$S(k)$ — kwadrat odchylenia standardowego w zależności od k , gdzie $S(k) \geq 0$

Wyznaczamy średnią arytmetyczną w zależności od k :

$$\bar{a} = \frac{3+3k}{5} = 0,6 + 0,6k$$

Wyznaczamy kwadrat odchylenia standardowego S w zależności od k :

$$S(k) = \frac{(1-0,6-0,6k)^2 + (2-0,6-0,6k)^2 + 3(k-0,6-0,6k)^2}{5} = 0,24k^2 - 0,72k + 0,64$$

Dla trójkątniku kwadratowego $0,24k^2 - 0,72k + 0,64$:

$$\Delta = -0,096 < 0 \quad \text{ i } \quad a = 0,24 > 0$$

Zatem trójkąt ten przyjmuje tylko dodatnie wartości i osiąga wartość najmniejszą.

Dziedzina funkcji S jest zbiór $\mathbb{R}$ i funkcja ta osiąga wartość najmniejszą dla argumentu będącego pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji, czyli:

$$k_w = \frac{-(-0,72)}{2 \cdot 0,24} = \frac{3}{2}$$

Kwadrat odchylenia standardowego przyjmuje najmniejszą wartość dla $k = \frac{3}{2}$.

ODPOWIEDZI

1. Liczby rzeczywiste

1. D. 2. B. 3. C. 4. A1. 5. $x = -\frac{10+5\sqrt{2}}{2}$. 6. C 7. B. 8. CE. 9. D. 10. B. 11. PP. 12. 15 000 zł.
13. C3. 14. A. 15. PF. 19. $-\frac{5}{6}$. 20. D. 21. C. 22. $\frac{17\sqrt{2}}{12}$. 24. 1. 25. B. 26. D. 28. 1. 29. B.
30. $-\frac{5\sqrt{6}}{6}$. 31. D. 32. CE. 33. D. 34. C. 35. PP. 36. C. 37. B. 38. PF. 39. CF. 40. PF. 41. 1; 4.
42. B. 43. D. 44. A. 45. Około 2,46. 46. D. 47. BD. 48. C. 49. FP. 50. 2. 51. D. 52. D. 53. B.
54. B. 55. A. 56. C. 57. C. 58. BE. 59. $a = \frac{1}{2}$. 60. C. 61. PF. 62. DF. 63. -9. 64. $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$.

2. Wyrażenia algebraiczne

1. C. 2. Kwadrat, 9. 3. D. 4. CE. 5. AG. 6. Nie. 9. DF. 10. FP. 11. B. 12. $\sqrt[3]{3}$, a^2 , $\sqrt[3]{3}a$.
13. B2. 14. C2. 17. -1. 18. FF. 19. A. 20. D. 21. $12x^2$. 22. A. 23. C1. 24. PP. 26. B. 27. B.
28. $6a^2b^2$, $2ab^2$, a^2 . 30. FP. 31. C. 32. C. 33. $a^2 + b^2 + ab + a + b$. 34. D. 35. B. 36. B. 37. DG.
38. $Q(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $x \in \{-2, -1, \frac{1}{3}\}$. 39. D. 40. A1. 41. C1. 42. D. 43. $m = 27$, $x \in \{-3, \frac{3}{2}, 3\}$.
44. C. 45. D. 46. 1. 48. B. 49. D. 50. B. 51. PF. 53. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 54. $a = 5$, $b = -13$, $c = 1$, $d = -3$.
55. $-\frac{ab}{a-b}$, $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. 56. C; 47. 57. FP. 58. C. 59. C; C.

3. Równania, nierówności i układy równań

1. A. 2. A. 3. C. 4. A. 5. D. 6. A. 7. FF. 8. D. 9. B. 10. CF. 11. CB. 12. $x \in (-\infty; -3)$,
-3. 13. C. 14. -28. 15. $D = (-\infty; 6)$. 16. D. 17. PP. 18. B. 19. FP. 20. D. 21. 5; -2.
22. $x \in \{-6, 0\}$. 23. 90 dni. 24. $x \in \{-\sqrt{3}+1, -\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1, \sqrt{3}+1\}$. 25. B. 26. C. 27. A.
28. $x \in \{-3, 2, 3\}$. 29. $x \in \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$. 30. $x \in \{-4, 1, 3\}$. 31. C. 32. 1; -2. 33. $\sqrt{3}$. 34. A.
35. C. 36. B. 37. B. 38. $-\frac{1}{4}$. 39. B1. 40. $a \in \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$. 41. C. 42. DH. 43. C3. 44. -20.
45. A. 46. $2\frac{5}{8}$. 47. BE. 48. C. 49. A. 50. C. 51. $a = 86$. 52. 120 m. 53. $a = 255$, $b = 272$.
54. Mąka pszenna: 300 g, mąka sojowa: 100 g. 55. 225, 450, 675, 900. 56. 6 cm. 57. C. 58. B.
59. B. 60. $x = 2$ i $y = 3$, $x = -2$ i $y = -5$. 61. $x = \frac{5}{3}$ i $y = \frac{5}{9}$.

4. Funkcje

1. B. 2. $f(x) = -2$ dla $x \in \langle -4; -2 \rangle$ i $f(x) = x$ dla $x \in (-2; 3)$. 3. PF. 4. D. 5. C. 6. $x = -6$. 7. B.
8. B. 9. C. 11. -2, 5; -1; 4. 12. (0, 2), $f(5) = 18$. 13. DF. 14. $x \in (-4; -1)$. 15. PP. 16. A.
17. D. 18. EG. 19. CF. 20. $\langle -5; -1 \rangle \cup (7; 8)$; $\langle -3; 3 \rangle$; 6; -6. 21. $\langle -4; 4 \rangle$; FP; C. 22. A; C; (1; 6).
23. B. 24. B. 25. DE. 26. FF. 27. A. 28. C2. 29. $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$, $x = -3$. 30. C. 31. $p = -2$,
 $q = -4$, $r = 2$. 32. B; $a = 0,04$, $b = 1,2$. 33. Dla $a = -1$: $(-\sqrt{2}, -2)$, $(\sqrt{2}, -2)$, dla $a = 3$: $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 2)$,
 $(\frac{\sqrt{6}}{3}, 2)$. 34. $f(-2) = 0$, $f(0) = 4$, $f(2) = 0$, $f(3) = -5$. 35. $f(-1) = 5$, $f(0) = 0$, $f(2) = -4$, $f(4) = 0$. 36. EA.
37. $(1, 4\frac{1}{2})$, $(-2, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 4)$. 38. A. 39. B. 40. B. 41. A; A. 42. A1. 43. BH. 44. FP.

45. DG. 46. EF. 47. $(-\infty; -9)$, $(-6; +\infty)$. 48. C. 49. B; $g(x) = 2(x-1)(x-5)$. 50. $(-3; +\infty)$; $f(x) = 3(x-5)^2 - 3$. 51. $b = -28$. 52. -10, 8; 0, 6. 53. B3. 54. D. 55. FP. 56. $a = 6$. 57. B. 58. 1500 zł. 59. $b = \frac{2}{3}$, $c = 1$; $1\frac{1}{3}$ m. 60. B; około 4,93 m; około 8,99 m. 61. Około 4,5 s; około 3,1 s; 32 m. 62. PF; $a = -0,006$, $b = 19$. 63. C2. 64. $a = 50$ m, $b = 100$ m. 65. $a \approx 23,43$ m. 66. $x = 100$ m, $y = 75$ m. 67. PF; 16 000 zł; 400 zbiorników. 68. 115 wiatraków, 13 055 zł. 69. D. 70. DB. 71. D; $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$. 72. C. 73. AG. 74. DF. 76. PP. 77. FP. 78. $a = -6$, $c = \frac{6}{7}$, $d = \frac{3}{5}$. 79. $V = \frac{200}{p}$, $y = 10$ ml, $x = 4$ PSI. 80. B. 81. 31; 8. 82. 13, 63; C. 83. PF. 84. A; około 22 800 lat.

5. Ciągi

1. B. 2. 18; $7 - \sqrt{6}$. 3. C. 4. PP. 5. PF. 6. C. 7. 36. 8. C. 9. B. 10. FG. 11. A3. 12. D. 13. FP. 14. PF. 16. C. 17. D. 18. -1, 6. 19. C2. 21. A3; B; A. 22. C. 23. -3, 19. 24. A. 25. A. 26. C. 27. $-7n + 107$; 765. 28. C. 29. BD. 30. $a_1 = 2$. 31. FF. 32. 60 000. 33. $r = \frac{1}{3}$. 34. $a_n = 10n - 14$. 35. B. 36. AE. 37. A. 38. C. 39. PP. 40. 125. 42. C. 43. A; PF. 44. 6 wyrazów. 45. $a_2 = 18$, $a_3 = 12$. 46. FF. 47. D. 48. D. 49. 501; 25 350. 50. B. 51. A. 52. 3450; 27 970. 53. 72 miejsca; 4770 miejsc. 54. Około 99,9 mg. 55. B3. 56. $x = y = z = 38$ lub $x = 2$, $y = 14$, $z = 98$. 57. $m = \frac{1}{2}$. 58. (50, 8, -34) lub (2, 8, 14). 59. 900 zł; 32 zł.

6. Trygonometria

1. C. 2. B. 3. B. 4. C. 5. C. 6. PF. 7. $7\sqrt{3}$, 7. 8. D. 9. D. 10. $|AC| = 2\sqrt{3}$, $|BC| = 2$. 11. $|AB| = 6$. 12. $\frac{1}{3}$. 13. $\frac{\sqrt{30}}{6}$. 14. A. 15. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 16. D. 17. D. 18. DG. 19. FP. 20. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. 21. C. 22. BG. 23. $\sin \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\tan \alpha = -7$. 24. B. 25. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 26. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 27. B. 28. $\frac{5}{4}$; $\frac{7}{25}$. 29. Tak. 30. D. 31. C. 32. D. 33. A. 34. Około 37° . 35. $\alpha \approx 53^\circ$, $\beta \approx 37^\circ$. 36. DG. 37. $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$. 38. C. 39. PP. 40. PF. 41. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 42. B. 44. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. 45. $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$. 46. A. 47. BF. 48. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. 51. A. 52. B. 53. B. 54. B. 55. $3\frac{3}{5}$. 56. $|BC| = 11$. 57. $\frac{135\sqrt{7}}{4}$. 58. $6\sqrt{3}$; $2\sqrt{19}$. 59. 3. 60. A. 61. B. 62. Około 26. 63. Około 54° . 64. D. 65. Około 174 m. 66. Około 10; około 12. 67. C. 68. PF. 69. B. 70. $\frac{1}{4}$. 71. A. 72. B. 73. Około 48° . 74. 120° i 15° . 75. Około 9,27. 76. $4\sqrt{7}$. 77. $\sqrt{37}$. 78. $2\sqrt{19}$. 79. $2\sqrt{6}$.

7. Planimetria

1. C. 2. D. 3. $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$. 4. $\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$. 5. D. 6. PP. 7. C1. 8. PP. 9. C. 10. CH. 11. C; B. 12. A. 13. C. 14. CH. 15. B. 16. AH. 17. PF. 18. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $3\sqrt{3}$; $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 19. Około 0,83. 20. C. 21. PP. 22. PF. 23. PF. 24. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. 25. A. 26. B. 27. A. 28. A. 29. $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCD = 55^\circ$, $\angle CDA = 90^\circ$, $\angle DAB = 125^\circ$. 30. $\alpha = \beta = \gamma = 22,5^\circ$. 31. $\angle CAB = \angle ABC = 30^\circ$, $\angle BCA = 120^\circ$. 32. DG. 33. B. 34. A. 35. $\frac{8}{5\pi}$. 36. A. 37. D. 38. C. 39. 56° , 68° . 40. B3; FP. 41. D. 42. D. 43. $|FE| = 14$. 44. $|TU| = \frac{\sqrt{15}}{4}$. 45. C. 46. $|OD| = 6$. 47. A. 48. A. 49. B. 50. C. 51. A. 52. $6\frac{6}{7}$. 53. $|CE| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. 54. $\tan \angle EAF = 4,8$. 55. $12\frac{1}{4}$. 56. C. 57. A2. 58. C. 59. 9. 60. 9, 100. 61. $\frac{3}{2}$. 62. 15%. 63. 5:1, 25:1. 64. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. 65. BD. 66. BF. 67. C. 68. PP. 69. C. 70. 8, $\sqrt{65}$. 71. $R \approx 8,5$ cm, $r \approx 6,9$ cm. 72. 18, $7\sqrt{3}$.

8. Geometria analityczna

1. B. 2. D. 3. B. 4. D. 5. B. 6. D. 7. C. 8. BE. 9. C. 10. B. 11. B3. 12. A2. 13. A2.
 14. DE. 15. B. 16. D. 17. FF. 18. B. 19. C. 20. B. 21. C. 22. C. 23. 3. 24. $y = \frac{2}{5}x - 1$.
 25. $B = (4, 1)$, $C = (3, 6)$, $D = (-1, 2)$. 26. $B = (4, 0)$, $D = (2, 4)$. 27. $y = -\frac{1}{2}x$; $y = 2x + 14$. 28. 4,8.
 29. $D = (-28, -17)$; $-\frac{40}{3}, -3$. 30. B. 31. $\frac{12\sqrt{5}}{5}$. 32. PP. 33. FP. 34. $3\sqrt{10}$. 35. 10. 36. 1, 1; 60.
 37. $P = (-1, 0)$. 38. $(-2, -8)$, $(4, 10)$. 39. $t \in \{-3, 21\}$. 40. $P = (4, 7)$. 41. C. 42. A. 43. A. 44. B.
 45. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. 46. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$. 47. $(3, 14)$, $5\sqrt{5}$. 48. $(x+8)^2 + (y-5)^2 = 160$;
 $(x+3)^2 + y^2 = 50$. 49. C; G; $(-8, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 9)$, $(-8, 9)$. 50. CG; $x \in \{-6, 2\}$. 51. PPF; $y = 7x - 5$.
 52. $m \in (0; \frac{3}{5})$. 53. $r \in (3; 7)$. 54. PPF. 55. $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 45$. 56. $(x-3)^2 + (y+4)^2 = \frac{1}{5}$;
 $P = (\frac{17}{5}, -\frac{21}{5})$. 57. C2. 58. $m \in (\frac{2\sqrt{2}}{3}; \sqrt{2})$. 59. D. 60. $(1, 4)$, $(2, 3)$. 61. 16. 62. $(\frac{5}{2}, -\frac{23}{2})$.
 63. A. 64. C. 65. A. 66. 4, 5, -5, 1. 67. PP. 68. D. 69. C. 70. $\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{26}}{2}$. 71. $3\frac{1}{2}$, 2; $(-1, 0)$,
 $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$.

9. Stereometria

1. PFP. 2. FFP. 3. B. 4. $5\sqrt{10}$. 5. PP. 6. $5\sqrt{5}$. 7. $6\sqrt{46}$. 8. A. 9. D. 10. B. 11. C. 12. C.
 13. PPF. 14. B. 15. AF. 16. C. 17. $\frac{7}{10}$. 18. B. 19. B. 20. B. 21. B. 22. D. 23. Około 56° ,
 około 64° . 24. A; około 134° . 25. AH. 26. PFP. 27. $2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} + 6$. 28. $48\sqrt{3}$. 29. C. 30. C.
 31. C. 32. D. 33. PP. 34. A. 35. $1024\sqrt{5}$. 36. C; 1528. 37. A; $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 38. Około 174 cm^3 .
 39. 706 500 l. 40. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}a^2$. 41. $\frac{\sqrt{11}}{16}a^2$. 42. C. 43. Objętość: $324\sqrt{3}$, pole powierzchni całko-
 witej: $108(\sqrt{3}+2)$. 44. $216(7+\sqrt{3})$. 45. $64(6+3\sqrt{3}+2\sqrt{11})$. 46. $240\sqrt{2}$. 47. $1024\sqrt{6}$. 48. A.
 49. A. 50. B. 51. B. 52. B. 53. $72\sqrt{2}$. 54. 972. 55. Objętość: 108, pole powierzchni całkowitej:
 $36(3+2\sqrt{3})$. 56. $36(\sqrt{3}+\sqrt{7})$. 57. PF; 48. 58. PFP. 59. A. 60. D. 61. B. 62. A. 63. $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$.
 64. $\frac{4500}{\pi} \text{ cm}^3$. 65. 4. 66. C. 67. AH. 68. Objętość: $\frac{125\sqrt{3}}{3}\pi$, pole powierzchni całkowitej: 75π .
 69. $\frac{256\sqrt{5}}{3}\pi$. 70. 216° . 71. B. 72. A. 73. $72\sqrt{2}\pi$. 74. $\frac{1}{3} \text{ m}$, $\frac{1}{3} \text{ m}$, $\frac{1}{3} \text{ m}$, pole powierzchni całko-
 witej: $\frac{2}{3} \text{ m}^2$. 75. Około 9 cm. 76. 10 cm. 77. C. 78. D. 79. B3. 80. C. 81. FP. 82. DE. 83. A.
 84. C3. 85. $55,5\pi$.

10. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

1. A. 2. D. 3. D. 4. C. 5. FP. 6. BE. 7. C. 8. B. 9. B. 10. C. 11. A. 12. AH. 13. D. 14. PP.
 15. ECAD. 16. 63 znaki. 17. 23 miejsca. 18. C; 26. 19. A. 20. A. 21. D. 22. D. 23. BE.
 24. BG. 25. FF. 26. A2. 27. $\frac{5}{12}$. 28. $P(D) = \frac{5}{12}$, $P(E) = \frac{1}{2}$. 29. $\frac{1}{900}$. 30. $\frac{4}{7}$; $\frac{25}{49}$. 31. $\frac{1}{25}$. 32. $\frac{4}{15}$;
 $\frac{1}{145}$. 33. 12. 34. B. 35. D. 36. B. 37. PF. 38. $x = 30$. 39. 0. 40. 5 razy.

11. Statystyka

1. C. 2. PF. 3. 72. 4. B. 5. B. 6. PP; B. 7. 23. 8. A; B; A. 9. FF; A. 10. C1; 4,5; około 87%;
 4,48 tys. zł. 11. B. 12. 1; 1. 13. Średnia arytmetyczna: 1555,5, mediana: 1155. 14. 14 osób.
 15. $51\frac{3}{20}$. 16. 8. 17. 1. 18. 5 i 5 lub 4 i 6, lub 5 i 6, lub 6 i 6. 19. D. 20. B. 21. C. 22. B.
 23. DE. 24. PF. 25. Około 113 samochodów. 26. Dominanta, odchylenie standardowe, mediana,
 średnia arytmetyczna. 27. B; $\frac{3}{64}$. 28. FP; C. 29. $(2; 4)$. 31. $k = \frac{3}{2}$.

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	1	0
1°	0,0175	0,9998	0,0175
2°	0,0349	0,9994	0,0349
3°	0,0523	0,9986	0,0524
4°	0,0698	0,9976	0,0699
5°	0,0872	0,9962	0,0875
6°	0,1045	0,9945	0,1051
7°	0,1219	0,9925	0,1228
8°	0,1392	0,9903	0,1405
9°	0,1564	0,9877	0,1584
10°	0,1736	0,9848	0,1763
11°	0,1908	0,9816	0,1944
12°	0,2079	0,9781	0,2126
13°	0,2250	0,9744	0,2309
14°	0,2419	0,9703	0,2493
15°	0,2588	0,9659	0,2679
16°	0,2756	0,9613	0,2867
17°	0,2924	0,9563	0,3057
18°	0,3090	0,9511	0,3249
19°	0,3256	0,9455	0,3443
20°	0,3420	0,9397	0,3640
21°	0,3584	0,9336	0,3839
22°	0,3746	0,9272	0,4040
23°	0,3907	0,9205	0,4245
24°	0,4067	0,9135	0,4452
25°	0,4226	0,9063	0,4663
26°	0,4384	0,8988	0,4877
27°	0,4540	0,8910	0,5095
28°	0,4695	0,8829	0,5317
29°	0,4848	0,8746	0,5543
30°	0,5000	0,8660	0,5774
31°	0,5150	0,8572	0,6009
32°	0,5299	0,8480	0,6249
33°	0,5446	0,8387	0,6494
34°	0,5592	0,8290	0,6745
35°	0,5736	0,8192	0,7002
36°	0,5878	0,8090	0,7265
37°	0,6018	0,7986	0,7536
38°	0,6157	0,7880	0,7813
39°	0,6293	0,7771	0,8098
40°	0,6428	0,7660	0,8391
41°	0,6561	0,7547	0,8693
42°	0,6691	0,7431	0,9004
43°	0,6820	0,7314	0,9325
44°	0,6947	0,7193	0,9657
45°	0,7071	0,7071	1

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
45°	0,7071	0,7071	1
46°	0,7193	0,6947	1,0355
47°	0,7314	0,6820	1,0724
48°	0,7431	0,6691	1,1106
49°	0,7547	0,6561	1,1504
50°	0,7660	0,6428	1,1918
51°	0,7771	0,6293	1,2349
52°	0,7880	0,6157	1,2799
53°	0,7986	0,6018	1,3270
54°	0,8090	0,5878	1,3764
55°	0,8192	0,5736	1,4281
56°	0,8290	0,5592	1,4826
57°	0,8387	0,5446	1,5399
58°	0,8480	0,5299	1,6003
59°	0,8572	0,5150	1,6643
60°	0,8660	0,5000	1,7321
61°	0,8746	0,4848	1,8040
62°	0,8829	0,4695	1,8807
63°	0,8910	0,4540	1,9626
64°	0,8988	0,4384	2,0503
65°	0,9063	0,4226	2,1445
66°	0,9135	0,4067	2,2460
67°	0,9205	0,3907	2,3559
68°	0,9272	0,3746	2,4751
69°	0,9336	0,3584	2,6051
70°	0,9397	0,3420	2,7475
71°	0,9455	0,3256	2,9042
72°	0,9511	0,3090	3,0777
73°	0,9563	0,2924	3,2709
74°	0,9613	0,2756	3,4874
75°	0,9659	0,2588	3,7321
76°	0,9703	0,2419	4,0108
77°	0,9744	0,2250	4,3315
78°	0,9781	0,2079	4,7046
79°	0,9816	0,1908	5,1446
80°	0,9848	0,1736	5,6713
81°	0,9877	0,1564	6,3138
82°	0,9903	0,1392	7,1154
83°	0,9925	0,1219	8,1443
84°	0,9945	0,1045	9,5144
85°	0,9962	0,0872	11,4301
86°	0,9976	0,0698	14,3007
87°	0,9986	0,0523	19,0811
88°	0,9994	0,0349	28,6363
89°	0,9998	0,0175	57,2900
90°	1	0	—

Dobry wynik na maturze? Z tą książką to pewne.

Powtórka prowadzona według działów matematyki, które ułożyliśmy zgodnie z ich kolejnością w podstawie programowej. Każdy z działów składa się z 2 części – teorii i zadań.

Na teorię składają się wzory opracowane przez CKE oraz dodatkowe informacje pomocne przy rozwiązywaniu zadań. Część druga to **zbiór zadań zamkniętych i otwartych (wśród nich zadania z materiałów CKE w Formule 2023)**, które uporządkowaliśmy według układu wymagań szczegółowych podstawy programowej. **Zaznaczyliśmy również, które z zadań nie będą obowiązywać na maturze w roku 2024.**

Na końcu książki zebraliśmy schematy rozwiązań zadań otwartych i odpowiedzi do wszystkich zadań.

Skuteczne przygotowanie do egzaminów maturalnych ułatwią także:

