

Nowość  
EDYCJA 2024

# NOWA MATeMATyka

1

PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM

ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

ZMIANY  
W PODSTAWACH  
2024



oznaczenia  
usuniętych  
treści

nowa  
era

# NOWA MATeMATyka

1

PODRĘCZNIK • LICEUM • TECHNIKUM

ZAKRES PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

WOJCIECH BABIAŃSKI

LECH CHAŃKO

JERZY JANOWICZ

DOROTA PONCZEK

EWA SZMYTKIEWICZ

KAROLINA WEJ



*Twoje mocne strony*



# NOWA MATEMATyka

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie podstawowym i rozszerzonym, na podstawie opinii rzeczoznawców:

**dr. hab. Edwarda Tutaja, mgr. Tadeusza Marczewskiego, dr hab. Anny Cegięły.**

Etap edukacyjny: III

Typ szkoły: ponadpodstawowa

**Rok dopuszczenia: 2024**

**Numer ewidencyjny w wykazie MEN: 988/1/2024/z1**

Podręcznik został opracowany na podstawie *Programu nauczania matematyki w liceum ogólnokształcącym i technikum* (2024) autorstwa Agnieszki Kamińskiej i Doroty Ponczek.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy o przestrzeganie praw, jakie im przysługują. Zawartość publikacji możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie umieszczaj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, to nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Możesz skopiować część publikacji jedynie na własny użytek.

Szanujemy cudzą własność i prawo. Więcej na [www.legalnakultura.pl](http://www.legalnakultura.pl)

Wykorzystywanie treści niniejszego Utworu, w jakiejkolwiek formie lub w jakimkolwiek procesie, do celów eksploracji tekstu i danych, uczenia maszynowego, rozwoju i/lub szkolenia i/lub wzbogacania sztucznej inteligencji jakiegokolwiek rodzaju jest surowo zabronione.



© Copyright by Nowa Era Sp. z o.o. 2024  
ISBN 978-83-267-5018-2

**Opracowanie redakcyjne i redakcja merytoryczna:** Ewa Kowalik, Katarzyna Radzimińska

**Współpraca redakcyjna:** Urszula Cielniak

**Opracowanie redakcyjne i merytoryczne infografik:** Urszula Cielniak

**Konsultacje merytoryczne:** Jacek Klisowski, Barbara Sasim-Leciejevska

**Redakcja językowa:** Dorota Rzeszewska

**Opieka graficzna:** Maciej Galiński, Marcin Oleksak

**Projekt graficzny:** Marek Błoszko, Ewa Kaletyn, Piotr Stopczyński

**Projekt okładki:** Maciej Galiński

**Fotoedycja:** Katarzyna Iwan-Malawska

**Rysunki merytoryczne:** Lech Chańko

**Ilustracje:** Krzysztof Mrawiński

**Opracowanie graficzne infografik:** Marek Błoszko, Aleksandra Szpunar, Alicja Skupin-Podwojewska

**Realizacja projektu graficznego:** Dorota Chańko

Nowa Era Sp. z o.o.  
Aleje Jerozolimskie 146 D, 02-305 Warszawa  
[www.nowaera.pl](http://www.nowaera.pl), e-mail: [nowaera@nowaera.pl](mailto:nowaera@nowaera.pl)  
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

Druk i oprawa: Quad/Graphics Europe Sp. z o.o.

**Zdjęcia pochodzą ze zbiorów:**

**Zdjęcie na okładce:** Shutterstock/Vink Fan.

**Zdjęcia:** Archiwum NE s. 41 (Merkury, Ziemia, Jowisz); BE&W: Alamy Stock Photo - Alvey&Towers Picture Library s. 149, Bruce Leighty - Sports Images s. 164, Science History Images s. 38; Getty Images: Alexander Hassenstein/Staff s. 342 (pchnięcie kulą), E+/Deejpilot s. 63, E+/mbbirdy s. 273, iStock/Getty Images Plus - GeorgiosArt s. 71, westphalia s. 51, Moment - George Pachantouris s. 123, Rob Kroenert s. 315; Shutterstock: Africa Studio s. 192, Alex-505 s. 143 (10 centów), Amanda Carden s. 41 (Słońce), Bojan Pavlukovic s. 17, ch123 s. 301, Delpixel s. 146 (łódź na rzece), Gertjan Hooijer s. 342 (gaszenie pożaru na statku), Inger Eriksen s. 243, Jonathan Larsen s. 332 (radioteleskopy), Juice Dash s. 163, Kurt Kleemann s. 332 (reflektor), Lukas Gojda s. 221, mexrix s. 342 (morze - tło), Nadiia Korol s. 148, Potapov Alexander s. 98, rsooll s. 143 (5 centów), Tongsai s. 146 (kuter), Tony Baggett s. 143 (25 centów); Lech Chańko s. 9, 24, 214, 300.

Wydawnictwo dołożyło wszelkich starań, aby odnaleźć posiadaczy praw autorskich do wszystkich utworów zamieszczonych w podręczniku. Pozostałe osoby prosimy o kontakt z Wydawnictwem.

# Spis treści

## ► 1. Liczby rzeczywiste

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Cechy podzielności liczb – <a href="#">przypomnij sobie</a> .....                           | 10 |
| 1.1. Liczby naturalne .....                                                                 | 11 |
| Liczby pierwsze – <a href="#">dowiedz się więcej</a> .....                                  | 15 |
| Działania na liczbach całkowitych i ułamkach zwykłych – <a href="#">przypomnij sobie</a> .. | 16 |
| 1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne .....                                                | 17 |
| 1.3. Liczby niewymierne .....                                                               | 20 |
| 1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej .....                                       | 24 |
| 1.5. Pierwiastek kwadratowy .....                                                           | 28 |
| 1.6. Pierwiastek sześcienny. Pierwiastek $n$ -tego stopnia .....                            | 31 |
| 1.7. Potęga o wykładniku całkowitym .....                                                   | 35 |
| Liczby Fermata – <a href="#">dowiedz się więcej</a> .....                                   | 38 |
| 1.8. Notacja wykładnicza .....                                                              | 39 |
| 1.9. Potęga o wykładniku wymiernym .....                                                    | 42 |
| 1.10. Logarytm i jego własności .....                                                       | 45 |
| 1.11. Procenty (1) .....                                                                    | 48 |
| 1.12. Procenty (2) .....                                                                    | 51 |
| Powtórzenie .....                                                                           | 53 |
| Zadania z kontekstem realistycznym .....                                                    | 56 |
| Sposób na zadanie .....                                                                     | 57 |
| Przed obowiązkową maturą z matematyki .....                                                 | 58 |
| Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym .....                                    | 62 |

## ► 2. Język matematyki

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Zbiory .....                                                                       | 64 |
| 2.2. Działania na zbiorach .....                                                        | 66 |
| Iloczyn kartezjański zbiorów. Punkty kratowe – <a href="#">dowiedz się więcej</a> ..... | 71 |
| Oś liczbowa – <a href="#">przypomnij sobie</a> .....                                    | 72 |
| 2.3. Przedziały .....                                                                   | 73 |
| 2.4. Działania na przedziałach .....                                                    | 77 |
| Rozwiązywanie równań – <a href="#">przypomnij sobie</a> .....                           | 80 |
| 2.5. Rozwiązywanie nierówności .....                                                    | 81 |
| Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian – <a href="#">przypomnij sobie</a> .....    | 85 |
| 2.6. Wyłączanie jednomianu przed nawias .....                                           | 86 |
| 2.7. Mnożenie sum algebraicznych .....                                                  | 89 |
| 2.8. Wzory skróconego mnożenia .....                                                    | 94 |
| 2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych .....                                    | 99 |

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodach – <a href="#">dowiedz się więcej</a> | 102 |
| <b>2.10.</b> Wartość bezwzględna                                                        | 103 |
| Zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach – <a href="#">dowiedz się więcej</a>      | 106 |
| <b>2.11.</b> Własności wartości bezwzględnej                                            | 107 |
| Logika matematyczna – <a href="#">dowiedz się więcej</a>                                | 110 |
| Powtórzenie                                                                             | 114 |
| Zadania z kontekstem realistycznym                                                      | 116 |
| Sposób na zadanie                                                                       | 117 |
| Przed obowiązkową maturą z matematyki                                                   | 118 |
| Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym                                      | 122 |
| <b>▶ 3. Układy równań</b>                                                               |     |
| Wykorzystanie równań do rozwiązywania zadań – <a href="#">przypomnij sobie</a>          | 124 |
| <b>3.1.</b> Co to jest układ równań                                                     | 125 |
| <b>3.2.</b> Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania                            | 128 |
| <b>3.3.</b> Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników              | 134 |
| Układy trzech równań z trzema niewiadomymi – <a href="#">dowiedz się więcej</a>         | 140 |
| <b>3.4.</b> Układy równań – zadania tekstowe (1)                                        | 141 |
| <b>3.5.</b> Układy równań – zadania tekstowe (2)                                        | 145 |
| Rozwiązywanie układów równań metodą wyznacznikową – <a href="#">dowiedz się więcej</a>  | 150 |
| Metoda eliminacji Gaussa – <a href="#">dowiedz się więcej</a>                           | 152 |
| Powtórzenie                                                                             | 154 |
| Zadania z kontekstem realistycznym                                                      | 156 |
| Sposób na zadanie                                                                       | 157 |
| Przed obowiązkową maturą z matematyki                                                   | 158 |
| Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym                                      | 162 |
| <b>▶ 4. Funkcje</b>                                                                     |     |
| <b>4.1.</b> Pojęcie funkcji                                                             | 164 |
| Układ współrzędnych – <a href="#">przypomnij sobie</a>                                  | 169 |
| <b>4.2.</b> Szkicowanie wykresu funkcji (1)                                             | 170 |
| <b>4.3.</b> Szkicowanie wykresu funkcji (2)                                             | 175 |
| <b>4.4.</b> Monotoniczność funkcji                                                      | 180 |
| Wykorzystanie wykresu do prezentacji informacji – <a href="#">przypomnij sobie</a>      | 184 |
| <b>4.5.</b> Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)                                | 185 |
| <b>4.6.</b> Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)                                | 189 |
| <b>4.7.</b> Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY                                           | 193 |
| <b>4.8.</b> Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX                                           | 195 |
| <b>4.9.</b> Wektory w układzie współrzędnych                                            | 197 |

|                                                                                                                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>4.10.</b> Przesuwanie wykresu o wektor                                                                                                                                                                            | 200 |
|  <b>4.11.</b> Przekształcanie wykresu przez symetrię<br>względem osi układu współrzędnych                                         | 202 |
|   <b>4.12.</b> Inne przekształcenia wykresu    | 206 |
| <b>4.13.</b> Proporcjonalność odwrotna                                                                                                                                                                               | 209 |
| Powtórzenie                                                                                                                                                                                                          | 212 |
| Zadania z kontekstem realistycznym                                                                                                                                                                                   | 214 |
| Sposób na zadanie                                                                                                                                                                                                    | 215 |
| Przed obowiązkową maturą z matematyki                                                                                                                                                                                | 216 |
| Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym                                                                                                                                                                   | 220 |
| <b>▶ 5. Funkcja liniowa</b>                                                                                                                                                                                          |     |
| Punkty kratowe należące do prostej – <a href="#">przypomnij sobie</a>                                                                                                                                                | 222 |
| <b>5.1.</b> Wykres funkcji liniowej                                                                                                                                                                                  | 223 |
| <b>5.2.</b> Własności funkcji liniowej                                                                                                                                                                               | 228 |
| <b>5.3.</b> Równanie prostej na płaszczyźnie                                                                                                                                                                         | 233 |
| Płaszczyzna w trójwymiarowym układzie współrzędnych – <a href="#">dowiedz się więcej</a>                                                                                                                             | 237 |
| <b>5.4.</b> Współczynnik kierunkowy prostej                                                                                                                                                                          | 238 |
| <b>5.5.</b> Warunek prostopadłości prostych                                                                                                                                                                          | 244 |
| <b>5.6.</b> Interpretacja geometryczna układu równań liniowych                                                                                                                                                       | 248 |
|   <b>5.7.</b> Układy nierówności liniowych | 252 |
| Programowanie liniowe – <a href="#">dowiedz się więcej</a>                                                                                                                                                           | 255 |
|  <b>5.8.</b> Równania i nierówności liniowe z parametrami                                                                       | 256 |
| <b>5.9.</b> Funkcja liniowa – zastosowania                                                                                                                                                                           | 259 |
| Postać parametryczna równania prostej – <a href="#">dowiedz się więcej</a>                                                                                                                                           | 262 |
| Powtórzenie                                                                                                                                                                                                          | 264 |
| Zadania z kontekstem realistycznym                                                                                                                                                                                   | 266 |
| Sposób na zadanie                                                                                                                                                                                                    | 267 |
| Przed obowiązkową maturą z matematyki                                                                                                                                                                                | 268 |
| Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym                                                                                                                                                                   | 272 |
| <b>▶ 6. Planimetria</b>                                                                                                                                                                                              |     |
| Kąty – <a href="#">przypomnij sobie</a>                                                                                                                                                                              | 274 |
| <b>6.1.</b> Miary kątów w trójkącie                                                                                                                                                                                  | 275 |
| Punkty specjalne w trójkącie                                                                                                                                                                                         | 278 |
| <b>6.2.</b> Trójkąty przystające                                                                                                                                                                                     | 279 |
| <b>6.3.</b> Twierdzenie Talesa                                                                                                                                                                                       | 283 |
| <b>6.4.</b> Wielokąty podobne                                                                                                                                                                                        | 287 |
| <b>6.5.</b> Trójkąty podobne                                                                                                                                                                                         | 291 |
| Proste i odcinki pomocnicze – <a href="#">dowiedz się więcej</a>                                                                                                                                                     | 295 |





|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| Pola czworokątów – <b>przypomnij sobie</b> .....                           | 296 |
| <b>6.6.</b> Pola wielokątów podobnych .....                                | 297 |
| ✂ <b>6.7.</b> Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie .....             | 302 |
| Problemy konstrukcyjne .....                                               | 304 |
| Powtórzenie .....                                                          | 306 |
| Zadania z kontekstem realistycznym .....                                   | 308 |
| Sposób na zadanie .....                                                    | 309 |
| Przed obowiązkową maturą z matematyki .....                                | 310 |
| Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym .....                   | 314 |
| <b>► 7. Funkcja kwadratowa</b>                                             |     |
| <b>7.1.</b> Wykres funkcji $f(x) = ax^2$ .....                             | 316 |
| <b>7.2.</b> Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ o wektor .....      | 319 |
| Obliczanie wartości trójmianu kwadratowego – <b>przypomnij sobie</b> ..... | 322 |
| <b>7.3.</b> Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej .....    | 323 |
| <b>7.4.</b> Równania kwadratowe (1) .....                                  | 328 |
| Parabola – <b>dowiedz się więcej</b> .....                                 | 331 |
| <b>7.5.</b> Równania kwadratowe (2) .....                                  | 333 |
| Szkicowanie paraboli – <b>dowiedz się więcej</b> .....                     | 337 |
| <b>7.6.</b> Postać iloczynowa funkcji kwadratowej .....                    | 338 |
| <b>7.7.</b> Nierówności kwadratowe .....                                   | 343 |
| Powtórzenie .....                                                          | 346 |
| Zadania z kontekstem realistycznym .....                                   | 348 |
| Sposób na zadanie .....                                                    | 349 |
| Przed obowiązkową maturą z matematyki .....                                | 350 |
| Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym .....                   | 353 |
| Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań .....                                        | 354 |
| Indeks .....                                                               | 396 |
| Wybrane wzory i twierdzenia matematyczne .....                             | 400 |

Odpowiedzi do poleceń i rozwiązań zadań nie należy zapisywać w podręczniku.

Fioletowym paskiem na marginesie oznaczono materiał realizowany w zakresie rozszerzonym.

**R** Temat w całości obowiązujący w zakresie rozszerzonym.

**7.** Zadania, których numery oznaczono kolorem niebieskim, nie należą do głównego toku lekcji, są mniej typowe lub trudniejsze.

**D** Oznaczenie przykładów z dowodami oraz ćwiczeń i zadań na dowodzenie.

 Oznaczenie zadań, przy których rozwiązaniu należy skorzystać z kalkulatora.

# 1 Liczby rzeczywiste

Podstawowe dane holownika „Stefan” przedstawionego na zdjęciu: długość 28,74 m, szerokość 6,53 m, zanurzenie 2,6 m, prędkość maksymalna 10 węzłów. Prędkość statków morskich podaje się w węzłach, czyli w milach morskich na godzinę. Jedna mila morska (Mm) to przybliżona długość takiego łuku południka, który jest wyznaczony przez 1 minutę kątową ( $1/60$  stopnia). Południk jest w przybliżeniu półokręgiem o długości 20 000 km. Zatem:

$$1 \text{ Mm} \approx \frac{20\,000 \text{ km}}{180 \cdot 60} \approx 1,851852 \text{ km}$$

Otrzymany wynik zaokrągla się do pełnych metrów, czyli przyjmuje się, że  $1 \text{ Mm} = 1852 \text{ m}$ .





## Cechy podzielności liczb

## Twierdzenie

Liczba naturalna jest podzielna przez:

- 2, gdy ostatnią jej cyfrą jest jedna z cyfr 0, 2, 4, 6, 8;
- 3, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- 4, gdy jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4;
- 5, gdy ostatnią jej cyfrą jest 0 lub 5;
- 9, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

1. Przez które z liczb 2, 3, 5, 9 jest podzielna liczba:  
a) 653 925,      b) 574 038,      c) 946 030,      d) 749 298?
2. Czy liczba  $n$  jest podzielna przez 4?  
a)  $n = 63\,874$       b)  $n = 58\,052$       c)  $n = 35\,406$       d)  $n = 47\,796$
3. Jaką cyfrę można podstawić za  $a$ , aby dana liczba była podzielna przez 4?  
a)  $684\,56a$       b)  $23\,53a$       c)  $21\,5a6$       d)  $35\,7aa$
4. Jaką cyfrę można podstawić za  $a$ , aby dana liczba była podzielna przez 3?  
a)  $333\,3a4$       b)  $64a\,871$       c)  $434\,a4a$       d)  $5aa\,6a3$
5. Wyszukaj w dostępnych źródłach cechę podzielności liczby naturalnej przez 8. Sprawdź, czy liczba  $x$  jest podzielna przez 8.  
a)  $x = 713\,592$       b)  $x = 639\,044$       c)  $x = 480\,658$       d)  $x = 817\,296$
6. Przeczytaj przykład obok i podaj przez które z liczb 6, 12, 15 jest podzielna liczba:  
a) 775 584,      c) 894 665,  
b) 868 470,      d) 501 474.
7. Dana jest liczba siedmiocyfrowa  $3\,150\,57a$ , gdzie  $a$  oznacza cyfrę jedności. Wyznacz tę liczbę przy założeniu, że jest ona podzielna przez:  
a) 9,      b) 6,      c) 4,      d) 8.
8. Nie wykonując dzielenia, ustal, przez które spośród liczb 15, 45, 75 jest podzielna liczba:  
a) 1155,      b) 9825,      c) 5165,      d) 8235.

Liczba 69 222 jest podzielna przez 2 i przez 3, ale nie jest podzielna przez 4. Zatem liczba ta jest podzielna przez 6, ale nie jest podzielna przez 12.

## 1.1. Liczby naturalne



**Liczb naturalnych:** 0, 1, 2, 3, ... jest nieskończenie wiele. Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  istnieje następna liczba naturalna:  $n+1$ . Na przykład po milionie następuje milion jeden, potem milion dwa, milion trzy, a po trylionie (liczba zapisywana jako jedynka z 18 zerami) – trylion jeden itd.

Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczamy literą  $\mathbb{N}$ .

## Definicja

Niech  $m$  i  $n$  będą liczbami naturalnymi oraz  $m \neq 0$ . Liczbę  $m$  nazywamy **dzielnikiem** liczby  $n$ , gdy istnieje taka liczba naturalna  $k$ , że  $n = m \cdot k$ .

Jeśli liczba  $m$  jest dzielnikiem liczby  $n$ , to mówimy, że liczba  $n$  jest **podzielna** przez liczbę  $m$  lub że liczba  $n$  jest **wielokrotnością** liczby  $m$ .

Zauważ, że:

- liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej,
- liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby,
- każda dodatnia liczba naturalna jest dzielnikiem liczby 0.

## Przykład 1

Wymień dzielniki liczby 54.

Liczba 54 ma następujące dzielniki: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

## Ćwiczenie 1

Wymień dzielniki liczby:

- a) 12,      b) 28,      c) 36,      d) 48.

Podzielność liczb naturalnych zapisujemy w następujący sposób:

- zapis  $3 \mid n$  czytamy: 3 dzieli  $n$  lub inaczej: liczba  $n$  jest podzielna przez 3,
- zapis  $7 \nmid n$  czytamy: 7 nie dzieli  $n$  lub inaczej: liczba  $n$  nie jest podzielna przez 7.

Liczbę **parzystą** możemy zapisać w postaci  $2k$ , a **nieparzystą** – w postaci  $2k+1$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną.

Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Jeśli  $2 \mid n$ , to liczbę  $n$  nazywamy **parzystą**. Jeśli  $2 \nmid n$ , to liczbę  $n$  nazywamy **nieparzystą**.

Ćwiczenie 2

Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?

- a)  $3 \mid 323\,232$       b)  $11 \mid 111$       c)  $15 \nmid 2345$       d)  $7 \nmid 4949$

Zamiast mówić, że liczba 3 jest dzielnikiem liczby 45, możemy też powiedzieć, że liczba 45 **dzieli się** przez 3 **bez reszty**.  $45 : 3 = 15$  reszta 0

W wyniku podzielenia liczby 47 przez 3, otrzymujemy  $47 : 3 = 15$  reszta 2. 15 i resztę 2.

Oznacza to, że liczbę 47 możemy przedstawić w postaci  $47 = 3 \cdot 15 + 2$ .

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci  $3k$ ,  $3k + 1$  lub  $3k + 2$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną.

- a) 26      b) 76      c) 108      d) 127      e) 713

Ćwiczenie 4

Zapisz liczbę w postaci  $4k$ ,  $4k + 1$ ,  $4k + 2$  lub  $4k + 3$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną.

- a) 3      b) 49      c) 79      d) 126      e) 492

Definicja

Liczbę naturalną, która ma dokładnie dwa dzielniki (1 i samą siebie), nazywamy **liczbą pierwszą**. Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**.

Liczbami pierwszymi są na przykład liczby 7 i 37.

Zwróć uwagę na to, że liczb 0 i 1 nie zaliczamy ani do liczb pierwszych, ani do złożonych (jakie są dzielniki liczby 1, a jakie liczby 0?).

Grecki matematyk Euklides (żyjący na przełomie IV i III w. p.n.e.) udowodnił, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Ćwiczenie 5

Podaj wszystkie liczby pierwsze:

- a) parzyste,  
b) mniejsze od 20,  
c) większe od 20 i mniejsze od 50,  
d) większe od 50 i mniejsze od 100.

Liczby pierwsze między 100 a 1000:

101 179 263 353 443 547 641 739 839 947  
103 181 269 359 449 557 643 743 853 953  
107 191 271 367 457 563 647 751 857 967  
109 193 277 373 461 569 653 757 859 971  
113 197 281 379 463 571 659 761 863 977  
127 199 283 383 467 577 661 769 877 983  
131 211 293 389 479 587 673 773 881 991  
137 223 307 397 487 593 677 787 883 997  
139 227 311 401 491 599 683 797 887  
149 229 313 409 499 601 691 809 907  
151 233 317 419 503 607 701 811 911  
157 239 331 421 509 613 709 821 919  
163 241 337 431 521 617 719 823 929  
167 251 347 433 523 619 727 827 937  
173 257 349 439 541 631 733 829 941

Rozkład liczby naturalnej na czynniki jest przedstawieniem tej liczby w postaci iloczynu liczb naturalnych większych od 1. Na przykład liczbę 52 można rozłożyć na czynniki następująco:

$$52 = 2 \cdot 26, \quad 52 = 4 \cdot 13, \quad 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13$$

Ostatni z tych rozkładów jest rozkładem na czynniki będące liczbami pierwszymi. Mówimy krótko, że jest to **rozkład na czynniki pierwsze**.

**Uwaga.** Zauważmy, że  $2 \cdot 2 \cdot 13$  jest tym samym rozkładem co np.  $2 \cdot 13 \cdot 2$ .

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze. Istnieje dokładnie jeden taki rozkład (z dokładnością do kolejności czynników).

Rozkład na czynniki pierwsze liczby złożonej odbywa się zwykle w kilku krokach. Na przykład dla liczby 150 mamy:

$$150 = 3 \cdot 50 = 3 \cdot 2 \cdot 25 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Rozkład możemy też zapisać tak, jak podano obok.

|     |   |
|-----|---|
| 150 | 3 |
| 50  | 2 |
| 25  | 5 |
| 5   | 5 |
| 1   |   |

Ćwiczenie 6

Podaj rozkłady na czynniki pierwsze liczb 99, 720, 770, 1024, 1323.

Praktycznym zastosowaniem rozkładu na czynniki pierwsze jest wyznaczanie **najmniejszej wspólnej wielokrotności** dwóch liczb – NWW oraz **największego wspólnego dzielnika** – NWD.

Przykład 2

Korzystając z podanych obok rozkładów na czynniki pierwsze liczb 120 i 54, otrzymujemy:

$$\text{NWW}(120, 54) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1080$$

$$\text{NWD}(120, 54) = 2 \cdot 3 = 6$$

|     |   |    |   |
|-----|---|----|---|
| 120 | 2 | 54 | 2 |
| 60  | 2 | 27 | 3 |
| 30  | 2 | 9  | 3 |
| 15  | 3 | 3  | 3 |
| 5   | 5 | 1  |   |
| 1   |   |    |   |

Ćwiczenie 7

Oblicz  $\text{NWD}(x, y)$  oraz  $\text{NWW}(x, y)$ .

- a)  $x = 18, y = 30$       c)  $x = 24, y = 72$       e)  $x = 84, y = 105$   
b)  $x = 15, y = 50$       d)  $x = 144, y = 192$       f)  $x = 196, y = 420$

Ćwiczenie 8

Dane są dwie liczby  $x$  i  $y$  takie, że żaden czynnik występujący w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby  $x$  nie występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby  $y$ . Wyznacz  $\text{NWD}(x, y)$  i  $\text{NWW}(x, y)$ .



## Zadania

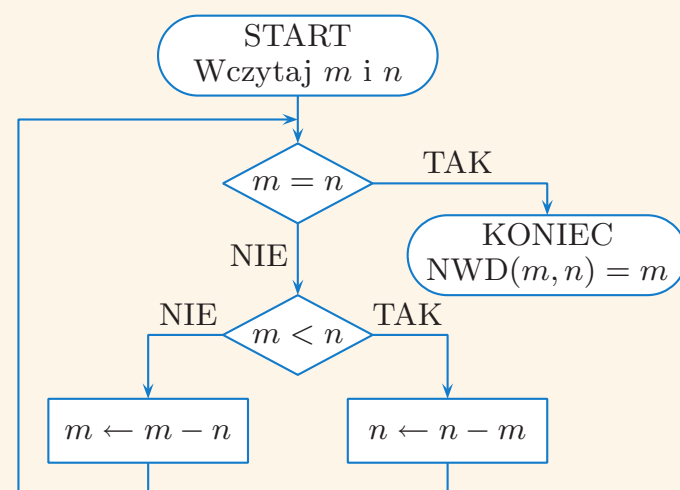
- Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 201 i podzielnych przez:
  - 5,
  - 8,
  - 9,
  - 11?
- Przedstaw liczbę  $n$  w postaci  $5k + r$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną, natomiast  $r$  jest jedną z liczb 0, 1, 2, 3, 4.
  - $n = 39$
  - $n = 62$
  - $n = 156$
  - $n = 275$
- Czy liczbę  $n$  można przedstawić w postaci  $6k + r$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną, a  $r$  jest jedną z liczb 1, 2, 3?
  - $n = 46$
  - $n = 74$
  - $n = 147$
  - $n = 276$
- Wyznacz sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych, z których pierwszą jest podana liczba, a  $n$  jest liczbą naturalną.
  - $2n + 1$
  - $2n - 1, n > 0$
  - $2n - 5, n > 2$
  - $4n + 3$

- D** 5. Uzasadnij, że iloczyn:
- trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,
  - trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48,
  - czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.

6. Oblicz wartość  $\frac{NWW(x,y)}{NWD(x,y)}$  dla:
- $x = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3, y = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^3,$
  - $x = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17, y = 2 \cdot 3^4 \cdot 17,$
  - $x = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7, y = 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3,$
  - $x = 2 \cdot 3 \cdot 5^3, y = 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$

### Czy wiesz, że...

Największy wspólny dzielnik liczb naturalnych można obliczyć, korzystając z opisanego przez Euklidesa w „Elementach” algorytmu, który przedstawiono obok. Wykorzystuje on fakt, że dzielnik liczb naturalnych  $m$  i  $n$  jest również dzielnikiem różnicy tych liczb.



7. Korzystając z algorytmu Euklidesa, oblicz NWD liczb:
- 48, 72,
  - 360, 600,
  - 253, 69.

## Dowiedz się więcej

### Liczby pierwsze

- Liczba 31415926535897932384626433832795028841 zestawiona z 38 początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby  $\pi$  jest liczbą pierwszą.
- Duże liczby pierwsze są stosowane przy tworzeniu szyfrów.
- Największa znana liczba pierwsza (znaleziona w grudniu 2018 roku) jest równa  $2^{82589933} - 1$ , a jej zapis dziesiętny ma 24 862 048 cyfr. Wielkich liczb pierwszych poszukuje się pośród liczb specjalnej postaci, na przykład  $2^p - 1$  (tak zwanych liczb Mersenne’a), gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą.
- Do tej pory nie udało się rozwiązać wielu problemów dotyczących liczb pierwszych. Na przykład nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele bliźniaczych liczb pierwszych (bliźniaczymi nazywamy liczby pierwsze różniące się od siebie o 2, np. 3 i 5, 17 i 19 czy też 9 999 971 i 9 999 973).
- Nierozstrzygnięta również pozostaje hipoteza Goldbacha: „Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych”.

1. W kwadracie magicznym sumy liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i wzdłuż obu przekątnych są sobie równe (oznaczymy tę sumę literą  $S$ ). Przerysuj do zeszytu i uzupełnij przedstawiony obok kwadrat magiczny składający się z liczb pierwszych dla  $S = 1077$ .

|     |    |   |
|-----|----|---|
| 569 | 59 | ? |
| 239 | ?  | ? |
| ?   | ?  | ? |

**Sito Eratostenesa** to jedna z metod wyszukiwania kolejnych liczb pierwszych. Zastosujemy ją do wyszukania liczb pierwszych wśród liczb: 2, 3, ..., 24. Zaczynamy od wypisania wszystkich tych liczb, następnie zaznaczamy liczbę 2 – najmniejszą liczbę pierwszą i wykreślamy jej wszystkie wielokrotności:

2, 3, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, 21, ~~22~~, 23, ~~24~~

Najmniejsza niewykreślona liczba jest kolejną liczbą pierwszą – jest nią 3. Zaznaczamy ją i wśród pozostałych niewykreślonych liczb wykreślamy wszystkie jej wielokrotności:

2, ~~3~~, ~~4~~, 5, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, 11, ~~12~~, 13, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, 17, ~~18~~, 19, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, 23, ~~24~~

Powyższą procedurę powtarzamy dla kolejnych liczb pierwszych tak długo, aż wszystkie liczby będą albo zaznaczone jako pierwsze, albo wykreślone.

2, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, ~~7~~, ~~8~~, ~~9~~, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, ~~15~~, ~~16~~, ~~17~~, ~~18~~, ~~19~~, ~~20~~, ~~21~~, ~~22~~, ~~23~~, ~~24~~

- D** 2. Stosując sito Eratostenesa, wyznacz wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 100. Uzasadnij, że po wykreśleniu wielokrotności liczby 7 wszystkie niewykreślone liczby będą pierwsze.

## Działania na liczbach całkowitych i ułamkach zwykłych

1. Oblicz.

- a)  $4 - (6 - (12 - 10))$  d)  $-9 + ((14 - 6) - (7 - 13))$   
 b)  $6 - 2((8 - 19) - 7)$  e)  $-6(-2 \cdot 9 - 17) - 19$   
 c)  $8 - (4 + (-12 - (-4)))$  f)  $13(5 - 19) - 3(9 - 13)$

2. Oblicz.

- a)  $4((13 - 17) - 6(19 - 11)) : 2$  c)  $-12 : (4 - 19) - (17 - 8) : (9 - 12)$   
 b)  $8((15 - 3) : 2 + 32 : (-4 + 12))$  d)  $(42 : (-6 - 8))((-5 - 17) : (5 - 7))$

3. Zamień liczbę mieszaną na ułamek zwykły.

- a)  $1\frac{2}{3}$  b)  $3\frac{1}{3}$  c)  $4\frac{3}{7}$  d)  $6\frac{4}{11}$  e)  $5\frac{11}{15}$

$$2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

4. Zamień ułamek zwykły na liczbę mieszaną.

- a)  $\frac{11}{3}$  b)  $\frac{17}{4}$  c)  $\frac{21}{8}$  d)  $\frac{32}{9}$  e)  $\frac{49}{25}$

$$\frac{19}{5} = \frac{15 + 4}{5} = 3\frac{4}{5}$$

5. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

- a)  $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$  c)  $\frac{5}{6} + \frac{11}{6}$  e)  $\frac{17}{5} - \frac{3}{5}$  g)  $\frac{7}{9} - \frac{23}{9}$   
 b)  $\frac{7}{3} + \frac{4}{3}$  d)  $\frac{13}{8} + \frac{23}{8}$  f)  $\frac{19}{4} - \frac{3}{4}$  h)  $\frac{29}{25} - \frac{61}{25}$

6. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

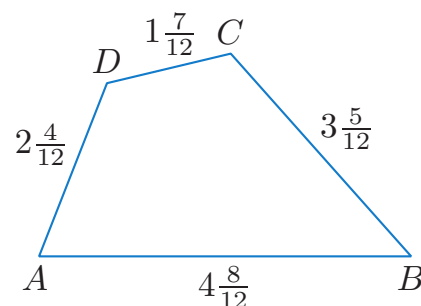
- a)  $\frac{13}{4} + \frac{17}{4} - \frac{5}{4} - \frac{9}{4}$  c)  $\frac{21}{11} - \frac{8}{11} - \frac{13}{11} + \frac{32}{11}$   
 b)  $\frac{25}{7} - \frac{19}{7} + \frac{8}{7} - \frac{3}{7}$  d)  $\frac{8}{15} - \frac{26}{15} + \frac{4}{15} - \frac{2}{15}$

7. Oblicz. Wynik podaj w postaci liczby całkowitej lub mieszanej.

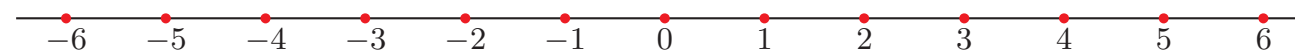
- a)  $\frac{3}{5} \cdot 2$  c)  $\frac{5}{6} \cdot (-8)$  e)  $\frac{5}{6} \cdot 24$  g)  $1\frac{1}{4} \cdot 6$   
 b)  $\frac{2}{3} \cdot 5$  d)  $\frac{9}{10} \cdot (-6)$  f)  $\frac{8}{9} \cdot 45$  h)  $3\frac{2}{3} \cdot 9$

8. Dany jest czworokąt  $ABCD$  (rysunek obok).

- a) Oblicz długość boku kwadratu, którego obwód jest równy obwodowi tego czworokąta.  
 b) Stosunek długości boków prostokąta jest równy  $2:1$ , a jego obwód jest równy obwodowi czworokąta  $ABCD$ . Oblicz pole tego prostokąta.



## 1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne



**Liczby całkowite** to liczby naturalne dodatnie:  $1, 2, 3, 4, \dots$ , liczby do nich przeciwne:  $-1, -2, -3, -4, \dots$  oraz liczba  $0$ .

Zbiór wszystkich liczb całkowitych będziemy oznaczać literą  $\mathbb{Z}$ .

Zera oraz liczb ujemnych używano w Indiach już w drugiej połowie I tysiąclecia n.e. W Europie przyjęły się dopiero kilkaset lat później. Współcześnie ideę osi liczbowej z zerem i liczbami ujemnymi widzimy np. w termometrze zaokiennym, a reguły rachunkowe dotyczące liczb ujemnych są przedmiotem ćwiczeń w szkole podstawowej.



## Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

- a)  $42 - 78$  c)  $-240 \cdot (-3)$  e)  $7 \cdot (-4) - 2 \cdot (-3) \cdot (-5)$   
 b)  $-47 - (-63)$  d)  $-342 + (-139)$  f)  $(-16) \cdot (-2) - (-54) : (-9)$

Działania występujące w powyższym ćwiczeniu: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie są zawsze wykonalne w zbiorze liczb całkowitych. Inaczej jest w dzieleniu, gdyż wynik dzielenia liczb całkowitych nie zawsze jest liczbą całkowitą. Na przykład wynik dzielenia  $(-3) : (-2) = \frac{3}{2}$  nie jest liczbą całkowitą.

## Definicja

Liczby, które można zapisać jako iloraz  $\frac{m}{n}$ , gdzie  $m$  i  $n$  są liczbami całkowitymi ( $n \neq 0$ ), nazywamy **liczbami wymiernymi**.

Zbiór wszystkich liczb wymiernych oznaczamy literą  $\mathbb{Q}$ .

Zwróć uwagę na to, że każda liczba całkowita jest liczbą wymierną (dlaczego?).

Ułamki zazwyczaj przedstawiamy w możliwie najprostszej postaci, a więc w postaci **nieskracalnej**, np.:

$$\frac{180}{480} = \frac{18 \cdot \cancel{10}^1}{48 \cdot \cancel{10}^1} = \frac{18}{48} = \frac{3 \cdot \cancel{6}^1}{8 \cdot \cancel{6}^1} = \frac{3}{8}$$

Ułamek  $\frac{3}{8}$  jest nieskracalny.

Po doprowadzeniu ułamka do postaci nieskracalnej otrzymujemy ułamek, którego licznik i mianownik to liczby **względnie pierwsze** (nie mają żadnych wspólnych dzielników całkowitych z wyjątkiem liczb  $1$  i  $-1$ ).

**Uwaga.** Określenia **dzielnik** używamy również w odniesieniu do liczb całkowitych, np. liczba  $-6$  ma następujące dzielniki:  $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$ .

## Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy ułamki  $x$  i  $y$  są równe.

a)  $x = \frac{27}{72}, y = \frac{36}{96}$       b)  $x = \frac{60}{108}, y = \frac{75}{135}$       c)  $x = \frac{84}{156}, y = \frac{126}{246}$

Czasami trzeba ułamek **rozszerzyć**, na przykład wtedy, gdy chcemy dodać lub odjąć dwa ułamki o różnych mianownikach.

## Ćwiczenie 3

Oblicz różnicę  $\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$ , biorąc jako wspólny mianownik ułamków:

- a) iloczyn liczb 12 i 18,  
b) NWW(12, 18).

## Ćwiczenie 4

Oblicz.

a)  $1\frac{5}{12} - \frac{9}{8} - 2\frac{5}{6}$       c)  $2\frac{2}{9} - 3\frac{5}{6} + 5\frac{1}{3}$   
b)  $6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6}$       d)  $2\frac{2}{9} + 1\frac{5}{12} - \frac{7}{8}$

### Działania na liczbach wymiernych

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

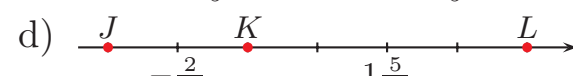
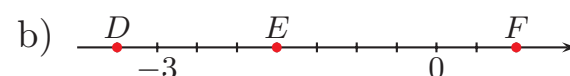
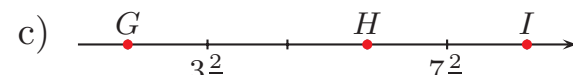
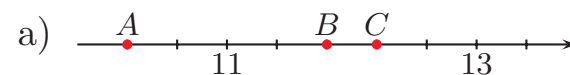
## Ćwiczenie 5

Oblicz.

a)  $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{27}{28}\right)$       b)  $-3\frac{3}{8} : 5\frac{1}{16}$       c)  $-1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{11}{24} : \frac{3}{5}$       d)  $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{6} : \left(-2\frac{1}{9}\right)$

## Zadania

1. Podaj liczby odpowiadające punktom zaznaczonym na osi liczbowej.



2. Oblicz.

a)  $1\frac{3}{5} - 2\frac{1}{6}$       d)  $\frac{7}{6} + \left(-\frac{5}{4} - \frac{4}{3}\right)$       g)  $1\frac{5}{8} - \left(-2\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$   
b)  $3\frac{3}{8} + 2\frac{5}{6}$       e)  $- \left(-2\frac{2}{3}\right) + \frac{7}{15}$       h)  $1\frac{2}{5} - 3\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$   
c)  $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)$       f)  $-1\frac{9}{16} + \frac{11}{12}$       i)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

3. Oblicz wartość podanego wyrażenia dla  $x = 1\frac{1}{2}$ ,  $y = -\frac{1}{4}$ ,  $z = -\frac{3}{8}$ .

a)  $\frac{x-y}{y-z}$       b)  $\frac{x+y-z}{y+z}$       c)  $\frac{x-y+2z}{x+y+3z}$

4. Uporządkuj liczby  $x$ ,  $y$ ,  $z$  w kolejności rosnącej.

a)  $x = \frac{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{8} - \frac{8}{7}}$ ,  $y = 2\frac{3}{5} \cdot 4\frac{6}{11} \cdot 3\frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$ ,  $z = \frac{24}{11} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)$

b)  $x = \frac{2\frac{3}{4} : \frac{1}{7} - 22}{6 - (-5)} + 1\frac{3}{4}$ ,  $y = \frac{\frac{6}{11} - \frac{15}{45}}{\frac{11}{3} - 2\frac{1}{2}} \cdot 2\frac{3}{4}$ ,  $z = 2 - \frac{8 - \frac{1}{2}}{12 + \frac{1}{2}}$

5. Oblicz.

a)  $\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}{\frac{2}{5} - \frac{1}{2}} + \left(3\frac{2}{17} - 4\frac{6}{13}\right) \cdot \left(\frac{5}{4} - 1\frac{1}{4}\right)$       e)  $\frac{3}{5} - \left(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{14} - \frac{9}{10 \cdot 3^2}\right) : \left(-\frac{1}{5}\right)$

b)  $\frac{2}{3} - \left[\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{(-2)^2} - \frac{(-2)^2}{5}\right] : \left(-1\frac{1}{2}\right)$       f)  $\frac{5\frac{3}{4} - 8\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2} - \frac{2}{3} : \left(-\frac{4}{27}\right)$

c)  $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8} : \frac{5}{8}\right)$       g)  $\frac{4}{5} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{8} - 1\frac{1}{3}\right)\right)$

d)  $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) : \left(\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right)$       h)  $\left(\left(-1\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-1\frac{1}{3}\right)^2\right) : 4\frac{1}{4}$

- D** 6. Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt o bokach długości  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

a)  $x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)$ ,  $y = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$ ,  $z = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)^2$

b)  $x = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}$ ,  $y = \frac{2\frac{1}{5} - \frac{1}{4}}{2\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}$ ,  $z = \frac{1\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}$

7. **Ułamek egipski** to ułamek postaci  $\frac{1}{n}$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną dodatnią. Przeczytaj informację obok i przedstaw podany ułamek jako sumę różnych ułamków egipskich.

a)  $\frac{2}{11}$       b)  $\frac{2}{17}$       c)  $\frac{2}{31}$

### Czy wiesz, że...

Każdy ułamek postaci  $\frac{2}{n}$ , gdzie  $n$  jest liczbą nieparzystą, można przedstawić jako sumę:

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

dla:  $a = \frac{n+1}{2}$ ,  $b = \frac{n(n+1)}{2}$

- D** 8. Uzasadnij wzór  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną dodatnią, a następnie oblicz:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$$

9. Woda płynąca jednocześnie z kranów  $A$ ,  $B$  i  $C$  może napełnić basen w ciągu 6 godzin. Woda płynąca tylko z kranu  $A$  napełnia w ciągu godziny  $\frac{1}{12}$  basenu, a tylko z kranu  $B - \frac{1}{15}$  basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu  $C$ ?

10. Woda płynąca z kranu  $A$  napełnia zbiornik w ciągu 6 godzin. Aby napełnić ten sam zbiornik wodą płynącą tylko z kranu  $B$ , potrzeba 9 godzin. Ile czasu zajmie napełnienie zbiornika, jeśli kran  $B$  odkręcono 4 godziny po odkręceniu kranu  $A$ ?



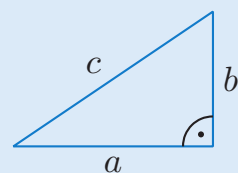
# 1.3. Liczby niewymierne

W VI w. p.n.e. Grecy sformułowali jedno z najsłynniejszych twierdzeń.

## Twierdzenie Pitagorasa

Suma kwadratów długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

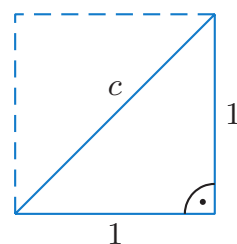
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Twierdzenie to miało istotny wpływ na rozwój pojęcia liczby. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 (rysunek obok).

Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa:  $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ , czyli  $c = \sqrt{2}$  (przekątna kwadratu o boku 1 ma długość  $\sqrt{2}$ ).

Okazało się, że nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat jest równy 2.



## Definicja

Liczby, które nie są wymierne, nazywamy **liczbami niewymiernymi**.

Stwierdzenie, że  $\sqrt{2}$  jest liczbą niewymierną, oznacza, że liczba ta nie jest równa żadnemu ułomkowi  $\frac{m}{k}$ , gdzie  $m$  i  $k$  są liczbami całkowitymi.

Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  liczba  $\sqrt{n}$  jest albo liczbą naturalną (gdy jest kwadratem liczby naturalnej, np.  $\sqrt{81} = 9$ ), albo liczbą niewymierną. Np.  $\sqrt{82}$  nie jest liczbą naturalną, gdyż  $9 = \sqrt{81} < \sqrt{82} < \sqrt{100} = 10$ , jest więc liczbą niewymierną. Analogicznie jest dla pierwiastka sześciennego (np.  $\sqrt[3]{8} = 2$ , a  $\sqrt[3]{9}$  jest liczbą niewymierną).

## Ćwiczenie 1

Wśród podanych liczb wskaż liczby niewymierne.

- a)  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{9}$ ,  $\sqrt{16}$ ,  $\sqrt{18}$ ,  $\sqrt{44}$ ,  $\sqrt{144}$       b)  $\sqrt[3]{1}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{10}$ ,  $\sqrt[3]{16}$ ,  $\sqrt[3]{25}$ ,  $\sqrt[3]{27}$

W dowodzie niewymierności liczby  $\sqrt{2}$  wykorzystamy następujący fakt: jeśli liczba 2 jest dzielnikiem liczby  $n$ , to w rozkładzie liczby  $n^2$  na czynniki pierwsze występuje ona parzystą liczbę razy, np.:

$$18^2 = 18 \cdot 18 = (2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3) = \underbrace{2 \cdot 2}_{\text{dwukrotnie}} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$56^2 = 56 \cdot 56 = (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7}_{\text{sześciokrotnie}}) \cdot (\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7}_{\text{sześciokrotnie}}) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{sześciokrotnie}} \cdot 7 \cdot 7$$

## Dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$

Przypuśćmy, że  $\sqrt{2}$  jest liczbą wymierną, czyli istnieje ułamek  $\frac{m}{k}$  (gdzie  $m$  i  $k$  są liczbami całkowitymi,  $k \neq 0$ ) taki, że:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{k}, \text{ czyli } 2 = \frac{m^2}{k^2} \\ \text{wtedy } 2k^2 = m^2$$

Zauważmy, że ostatnia równość nie może zachodzić, gdyż oznaczałaby ona, że w rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 2 występuje parzystą liczbę razy po stronie prawej i nieparzystą liczbę razy po stronie lewej. Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc przypuszczenie, że  $\sqrt{2}$  można wyrazić jako ułamek  $\frac{m}{k}$ , było fałszywe (z prawdy nie może wynikać fałsz). Zatem  $\sqrt{2}$  jest liczbą niewymierną.

Dowód niewymierności  $\sqrt{2}$  jest **dowodem przez sprowadzenie do sprzeczności** (*reductio ad absurdum*). Ten sposób rozumowania polega na wykazaniu, że przyjęcie prawdziwości jakiegoś zdania prowadzi do sprzeczności. Zatem musi być prawdziwe zdanie przeciwne.

Inne przykłady liczb niewymiernych otrzymamy, jeżeli zauważymy, że suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Podobnie iloczyn liczby wymiernej różnej od zera i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną. Dlatego na przykład liczby:

$$3 + \sqrt{7}, \quad \frac{1}{5}\sqrt{13}, \quad \frac{1}{2} - 2\sqrt{17}, \quad 2\sqrt{3} - \frac{7}{3}$$

są liczbami niewymiernymi.

## Ćwiczenie 2

Czy liczba  $x$  jest niewymierna?

- a)  $x = 3\sqrt{6} - \frac{1}{3}$       c)  $x = \sqrt{16} + 2\sqrt{14}$       e)  $x = \sqrt[3]{9} - 1$   
b)  $x = 10 + \frac{2}{3}\sqrt{9}$       d)  $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} - \sqrt{121}$       f)  $x = 15 + 6\sqrt[3]{27}$

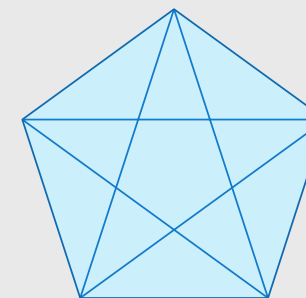
## Ćwiczenie 3

Podaj przykład dwóch różnych liczb niewymiernych, których:

- a) suma jest liczbą wymierną,      b) iloczyn jest liczbą wymierną.

**Uwaga.** Oprócz liczb niewymiernych, które są pierwiastkami kwadratowymi lub sześciennymi, istnieją inne liczby niewymierne, np. znana z geometrii liczba  $\pi$ .

Przekątna pięciokąta foremnego o boku długości 1 ma długość równą  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Jest to liczba niewymierna.



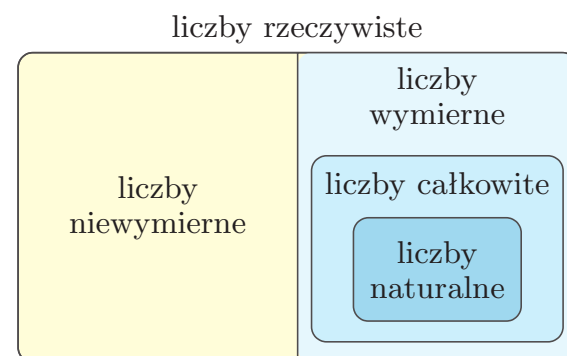
## Definicja

Zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych nazywamy zbiorem **liczb rzeczywistych**.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy literą  $\mathbb{R}$ .

Zbiór liczb niewymiernych bywa oznaczany literami  $\mathbb{I}\mathbb{Q}$ .

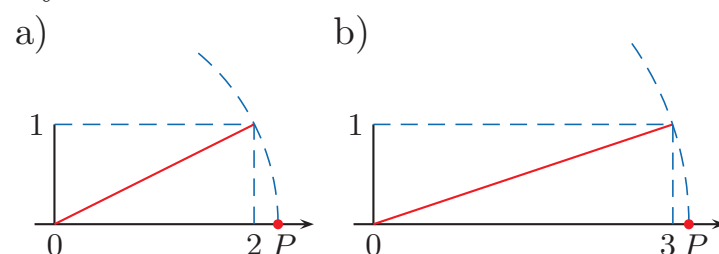
**Uwaga.** W dalszym ciągu, jeżeli nie napiszemy inaczej, przez „liczbę” rozumieć będziemy liczbę rzeczywistą.



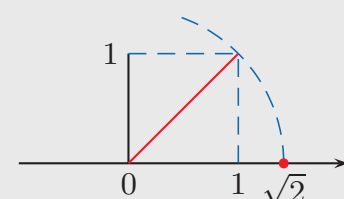
## Zadania

- Wśród podanych trzech liczb wskaż liczbę niewymierną.
  - $\sqrt{4}, \sqrt{64}, \sqrt{164}$
  - $\sqrt{9}, \sqrt{29}, \sqrt{49}$
  - $\sqrt{25}, \sqrt{125}, \sqrt{225}$
  - $\sqrt{169}, \sqrt{196}, \sqrt{286}$
  - $\sqrt[3]{0}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{64}$
  - $\sqrt[3]{81}, \sqrt[3]{125}, \sqrt[3]{216}$

- Wyznacz współrzędną punktu  $P$  zaznaczonego na osi liczbowej. Czy jest to liczba wymierna?



Konstrukcyjne wyznaczenie na osi liczbowej punktu o współrzędnej  $\sqrt{2}$



- Dany jest prostokąt o bokach  $x$  i  $y$ . Czy długość przekątnej tego prostokąta wyraża się liczbą wymierną?

a)  $x = 2, y = 4$    b)  $x = 3, y = 4$    c)  $x = 6, y = 8$    d)  $x = 8, y = 10$

- Dane są liczby niewymierne  $p = 3 - 2\sqrt{3}$ ,  $q = 2\sqrt{3}$ ,  $r = 2\sqrt{3} - 7$ ,  $s = 7\sqrt{3}$ . Wybierz dwie spośród tych liczb tak, aby:

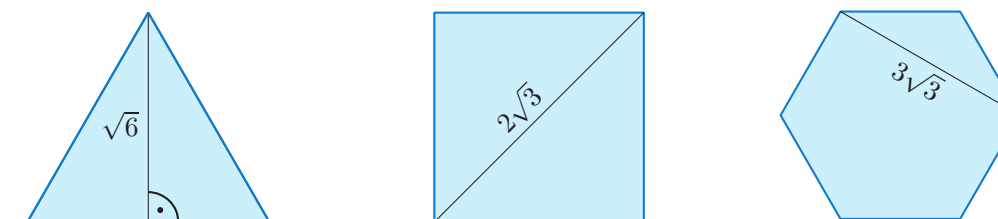
a) ich suma była liczbą wymierną,   c) ich iloczyn był liczbą wymierną,  
b) ich różnica była liczbą wymierną,   d) ich iloraz był liczbą wymierną.

- Korzystając z podanych przybliżeń, sprawdź, czy nierówność jest prawdziwa (nie używaj kalkulatora).

a)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$    c)  $2\sqrt{2} + \sqrt{5} > 5$    e)  $4 - 2\sqrt{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$   
b)  $\sqrt{5} + \sqrt{3} > 4$    d)  $\sqrt{5} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$    f)  $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2} < \sqrt{3}$

$\sqrt{2} \approx 1,414$   
 $\sqrt{3} \approx 1,732$   
 $\sqrt{5} \approx 2,236$

- Na rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny. Obwód którego z tych wielokątów wyraża się liczbą wymierną?



- Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do dowodu niewymierności liczby  $\sqrt{2}$ , udowodnij, że liczba  $x$  jest niewymierną.

a)  $x = \sqrt{3}$    b)  $x = \sqrt{5}$    c)  $x = \sqrt{6}$

- Przeczytaj podany w ramce przykład.

Iloczyn dowolnej liczby niewymiernej  $x$  i liczby całkowitej  $k \neq 0$  jest liczbą niewymierną.

**Dowód.** Załóżmy – przeciwnie – że istnieją liczba niewymierna  $x$  oraz liczba całkowita  $k \neq 0$  takie, że iloczyn  $k \cdot x$  jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieją liczby całkowite  $m$  i  $n$  ( $n \neq 0$ ) takie, że  $k \cdot x = \frac{m}{n}$ . Wówczas  $x = \frac{m}{k \cdot n}$ , z czego wynika, że  $x$  jest liczbą wymierną. Otrzymaliśmy sprzeczność, a zatem iloczyn  $k \cdot x$  jest liczbą niewymierną.

Udowodnij, że:

- iloczyn dowolnej liczby niewymiernej  $x$  i liczby wymiernej  $w \neq 0$  jest liczbą niewymierną,
- suma dowolnej liczby niewymiernej  $x$  i liczby wymiernej  $w$  jest liczbą niewymierną.

- Przeczytaj podane obok twierdzenie. Podaj przykład liczby niewymiernej  $x$  takiej, że:

a)  $1 < x < 2$ ,   b)  $0,01 < x < 0,02$ ,   c)  $5,001 < x < 5,002$ .

Między dwiema różnymi liczbami rzeczywistymi na osi liczbowej znajdują się liczby niewymierne.

- Uzasadnij, że jeśli przekątna sześcianu ma długość 3, to jego pole powierzchni wyraża się liczbą wymierną, a objętość – liczbą niewymierną.

- Uzasadnij, że wśród dzielników liczby 12 są takie liczby  $a, b, c$ , że długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach długości  $a, b, c$  jest liczbą wymierną.

# 1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

Ułamki o mianownikach 10, 100, 1000, ... (czyli mianownikach będących potęgami liczby 10) nazywamy **uławkami dziesiętnymi**. Mogą one być zapisane na dwa sposoby:  $\frac{15}{100} = 0,15$ ;  $\frac{37}{1000} = 0,037$ ;  $5\frac{7}{10} = 5,7$ .

Zapis po prawej stronie powyższych równości nazywamy **rozwinięciem dziesiętnym** lub **postacią dziesiętną** liczby. Aby uzyskać postać dziesiętną liczby wymiernej, wykonujemy dzielenie. Na przykład dla liczby  $\frac{13}{4}$  otrzymamy:

$$\frac{13}{4} = 13 : 4 = 3,25$$

Dla liczby  $\frac{1}{6}$  w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{1}{6} = 0,166666666...$$

Takie rozwinięcie zapisujemy w następujący sposób:

$$\frac{1}{6} = 0,1(6)$$

Dla liczby  $\frac{4}{7}$  w wyniku dzielenia otrzymamy:

$$\frac{4}{7} = 0,571428571428571428...$$

co zapiszemy  $\frac{4}{7} = 0,(571428)$ .

Nawias w rozwinięciu dziesiętnym oznacza powtarzanie się nieskończenie wiele razy zapisanej w nim grupy cyfr. Taką najkrótszą powtarzającą się grupę cyfr nazywamy **okresem**, a rozwinięcie dziesiętne możemy też nazwać **okresowym**. Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy **długością okresu**.

## Ćwiczenie 1

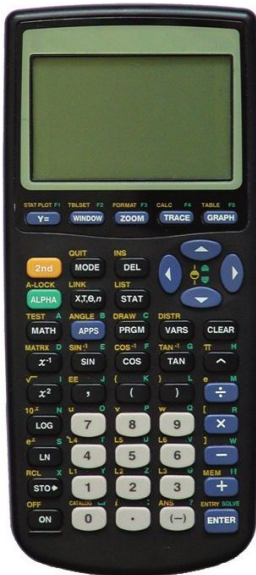
Przeczytaj podany w ramce przykład, a następnie przedstaw liczbę w postaci dziesiętnej.

- a)  $\frac{7}{20}$       c)  $\frac{52}{25}$       e)  $\frac{4}{125}$   
b)  $\frac{11}{25}$       d)  $\frac{143}{50}$       f)  $\frac{17}{250}$

## Ćwiczenie 2

Jaka cyfra znajduje się na dziesiątym, a jaka na dwudziestym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym podanej liczby?

- a) 0,(1234)      b) 5,(732)      c) 2,6(435)      d) 0,32(1410)



Przy obliczeniach na liczbach podanych w postaci dziesiętnej wygodnie jest korzystać z kalkulatora.

Przedstaw liczbę  $\frac{6}{25}$  w postaci dziesiętnej.

$$\frac{6}{25} = \frac{6}{25} \cdot \frac{4}{4} = \frac{24}{100} = 0,24$$

W tabeli poniżej podano długości okresów rozwinięć dziesiętnych nieskracalnego ułamka  $\frac{m}{n}$  dla wybranych wartości  $n$ .

| $n$            | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 | 41 |
|----------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| długość okresu | 6 | 2  | 6  | 16 | 18 | 22 | 28 | 15 | 3  | 5  |

## D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że jeśli ułamek  $\frac{m}{n}$ , gdzie  $m, n$  są liczbami naturalnymi oraz  $n \neq 0$ , ma rozwinięcie dziesiętne okresowe, to długość okresu jest mniejsza od  $n$ .

**Wskazówka.** Liczba różnych reszt z dzielenia liczby  $m$  przez liczbę  $n$  jest mniejsza od  $n$ .

## Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci dziesiętnej skończonej lub nieskończonej okresowej.

Każde rozwinięcie dziesiętne okresowe przedstawia liczbę wymierną.

**Uwaga.** Rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe przedstawiają liczby niewymierne, np. 0,101001000100001...

## Ćwiczenie 4

Wskaż liczby, które mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone nieokresowe.

- a)  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{16}$ ,  $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ,  $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ,  $\sqrt{\frac{16}{9}}$       b)  $\sqrt[3]{8}$ ,  $\sqrt[3]{9}$ ,  $\sqrt[3]{16}$ ,  $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$ ,  $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$

## ■ Przybliżenia. Reguła zaokrąglania

Mówimy, że liczba  $x$  jest **przybliżeniem** liczby  $a$  z dokładnością do  $d$ , jeśli liczby  $a$  i  $x$  różnią się o nie więcej niż  $d$ . Na przykład liczba 1,414 jest przybliżeniem liczby  $\sqrt{2}$  z dokładnością do 0,001.

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237$$

## Ćwiczenie 5

Podaj przybliżenie liczby  $\sqrt{2}$  z dokładnością do:

- a) 0,1,      b) 0,01,      c) 0,0001,      d) 0,00001.

Do przybliżenia liczby zapisanej w postaci dziesiętnej zwykle stosujemy **regułę zaokrąglania**, która polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby i zastąpieniu ich zerami, przy czym:

- jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian;
- jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.



### Przykład 1

Zaokrągleniem liczby 6,9874 do:

- trzech miejsc po przecinku jest liczba 6,987,
- dwóch miejsc po przecinku – liczba 6,99,
- jednego miejsca po przecinku – liczba 7.

**Zaokrągleniem** liczby nazywamy jej przybliżenie zgodne z regułą zaokrąglania.

### Ćwiczenie 6

Zaokrąglaj do liczby całkowitej.

- a) 20,9813      b) 19,901      c) 0,401      d) 1,099      e) 2,49957

### Ćwiczenie 7

Podaj zaokrąglenia liczb  $x = 7,89517$ ,  $y = 9,99625$  i  $z = 5,90394$  do  $n$  miejsc po przecinku dla: a)  $n = 4$ , b)  $n = 3$ , c)  $n = 2$ , d)  $n = 1$ .

Jeżeli przybliżenie liczby jest mniejsze od tej liczby, to mówimy o przybliżeniu z **niedomiarem**. Natomiast jeżeli przybliżenie liczby jest od niej większe, to mówimy o przybliżeniu z **nadmiarem**.

#### Czy wiesz, że...

W 2002 r. Yasumasa Kanada wyznaczył za pomocą komputera liczbę  $\pi$  z dokładnością do ponad biliona cyfr po przecinku. W praktyce wystarczająco znacznie mniej dokładne przybliżenia.

3,141592653589793238462643383279502  
88419716939937510582097494459230781  
64062862089986280348253421170679821  
48086513282306647093844609550582231  
72535940812848111745028410270193852  
11055596446229489549303819644288109  
75665933446128475648233786783165271  
20190914564856692346034861045432664

### Ćwiczenie 8

Podaj zaokrąglenie liczby  $\pi$  z dokładnością do  $n$  miejsc po przecinku. Czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem?

- a)  $n = 6$       b)  $n = 5$       c)  $n = 4$       d)  $n = 3$       e)  $n = 2$

## Zadania

1. Na podstawie podanych obok informacji znajdź rozwinięcie dziesiętne podanej liczby.

- a)  $\frac{7}{9}$       b)  $\frac{1}{60}$       c)  $\frac{1}{300}$       d)  $\frac{5}{900}$       e)  $\frac{11}{30}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} &= 0,33333333\dots \\ \frac{1}{6} &= 0,16666666\dots \\ \frac{1}{9} &= 0,11111111\dots\end{aligned}$$

2. Jaka cyfra znajduje się na dwudziestym czwartym, a jaka na setnym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby: a)  $\frac{2}{7}$ , b)  $\frac{5}{7}$ ?

3. Liczba o rozwinięciu dziesiętnym okresowym  $7,19(1ab693)$  ma na jedenaśmym miejscu po przecinku cyfrę 3, a na dwudziestym drugim – cyfrę 6. Wyznacz cyfry  $a$  i  $b$  tego rozwinięcia.

4. Na podstawie podanego obok twierdzenia odpowiedz, czy rozwinięcie dziesiętne ułamka jest skończone czy okresowe.

- a)  $\frac{633}{320}$       b)  $\frac{137}{480}$       c)  $\frac{6561}{22\,400}$       d)  $\frac{11\,111}{51\,200}$

Ułamek nieskracalny  $\frac{m}{n}$  ma rozwinięcie dziesiętne skończone wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $n$  jest iloczynem pewnej liczby czynników równych 2 lub 5.

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Przedstaw liczbę  $0,(12)$  w postaci ułamka zwykłego.

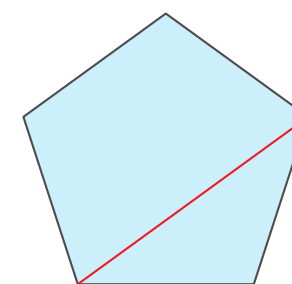
$$\begin{aligned}x &= 0,121212\dots \\ 100x &= 12,121212\dots && \text{Obie strony równania mnożymy przez 100, aby przecinek} \\ &&& \text{znalazł się za pierwszym wystąpieniem okresu.} \\ 100x &= 12 + x \\ 99x &= 12 \\ x &= \frac{12}{99} = \frac{4}{33}\end{aligned}$$

Przedstaw liczbę w postaci ułamka zwykłego.

- a)  $0,(36)$       b)  $3,(72)$       c)  $-6,(24)$       d)  $0,(9)$       e)  $41,7(9)$       f)  $2,1(52)$

6. Liczby  $x = 0,(6)$  i  $y = 4,(36)$  przedstaw w postaci ułamków zwykłych, a następnie oblicz: a)  $x + y$ , b)  $x^2 - y$ , c)  $x + \frac{1}{y}$ .
7. Liczba o rozwinięciu dziesiętnym okresowym  $0,(1x2y3)$  ma na dwudziestym trzecim miejscu po przecinku cyfrę dwukrotnie większą od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym drugim i trzykrotnie mniejszą od cyfry znajdującej się na miejscu dwudziestym czwartym. Wyznacz cyfry  $x$  i  $y$ .

8. Pięciokąt foremny o boku 1 ma przekątną o długości  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$ . Liczba  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  jest nazywana **złotą liczbą** (patrz str. 63). Jej coraz dokładniejszymi przybliżeniami są ułamki tworzone w następujący sposób: jako pierwszy bierzemy dowolny ułamek  $\frac{a}{b}$ , gdzie  $a, b$  są liczbami naturalnymi oraz  $a > b > 0$ . Następny ma wówczas postać  $\frac{a+b}{a}$ , a każdy kolejny powstaje z poprzedniego w analogiczny sposób. Na przykład, jeśli weźmiemy  $a = 5$  i  $b = 4$ , to otrzymamy  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{9}{5}$ ,  $\frac{14}{9}$  itd. Wyznacz pierwszych osiem takich ułamków i sprawdź, które z nich przybliżają złotą liczbę z dokładnością do 0,005.



## 1.5. Pierwiastek kwadratowy

Przypomnijmy definicję pierwiastka kwadratowego.

### Definicja

**Pierwiastkiem kwadratowym** (pierwiastkiem drugiego stopnia) z liczby nieujemnej  $a$  nazywamy liczbę nieujemną  $b$ , której kwadrat jest równy  $a$ .

$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

### Przykład 1

$\sqrt{36} = 6$ , ponieważ  $6^2 = 36$ .

$\sqrt{0,16} = 0,4$ , ponieważ  $0,4^2 = 0,16$ .

$\sqrt{0} = 0$ , ponieważ  $0^2 = 0$ .

Zwróć uwagę na to, że  $\sqrt{36}$  nie jest równy  $-6$ , ponieważ umówiliśmy się, że pierwiastek kwadratowy jest liczbą nieujemną, aby uniknąć sytuacji, w której  $\sqrt{36}$  oznaczałby dwie różne liczby.

### Ćwiczenie 1

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- |                 |                  |                  |
|-----------------|------------------|------------------|
| a) $\sqrt{144}$ | d) $\sqrt{625}$  | g) $\sqrt{1,21}$ |
| b) $\sqrt{225}$ | e) $\sqrt{2500}$ | h) $\sqrt{3,61}$ |
| c) $\sqrt{324}$ | f) $\sqrt{8100}$ | i) $\sqrt{4,41}$ |

Prawdziwa jest następująca własność:

Dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Stąd  $\sqrt{5^2} = 5$  oraz  $\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$ .

### Ćwiczenie 2

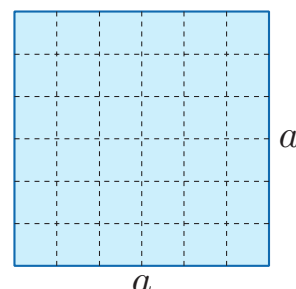
Podaj wartość, korzystając z powyższej własności.

- a)  $\sqrt{3^2}$     b)  $\sqrt{(-3)^2}$     c)  $\sqrt{(-9)^2}$     d)  $\sqrt{(-1,2)^2}$     e)  $\sqrt{(-\sqrt{3})^2}$

Wyznaczenie pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej odpowiada wyznaczeniu długości boku kwadratu, gdy znamy jego pole ( $P = a^2$ , więc  $a = \sqrt{P}$ ).

### Ćwiczenie 3

Oblicz obwód kwadratu o polu: a)  $3,24 \text{ cm}^2$ , b)  $1024 \text{ cm}^2$ .



|              |
|--------------|
| $11^2 = 121$ |
| $12^2 = 144$ |
| $13^2 = 169$ |
| $14^2 = 196$ |
| $15^2 = 225$ |
| $16^2 = 256$ |
| $17^2 = 289$ |
| $18^2 = 324$ |
| $19^2 = 361$ |
| $20^2 = 400$ |
| $21^2 = 441$ |
| $22^2 = 484$ |
| $23^2 = 529$ |
| $24^2 = 576$ |
| $25^2 = 625$ |

Przy odpowiednich założeniach (jakich?) prawdziwe są podane obok wzory.

**Pierwiastek iloczynu**

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

**Pierwiastek ilorazu**

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

### Przykład 2

a)  $\sqrt{49 \cdot 144} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} = 7 \cdot 12 = 84$

b)  $\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

### Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a)  $\sqrt{4 \cdot 81}$ ,  $\sqrt{25 \cdot 0,36}$ ,  $\sqrt{0,09 \cdot 361}$     c)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ ,  $\sqrt{6} \cdot \sqrt{1,5}$ ,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$   
b)  $\sqrt{\frac{121}{144}}$ ,  $\sqrt{\frac{361}{400}}$ ,  $\sqrt{\frac{576}{625}}$     d)  $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$ ,  $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{35}}$

## Zadania

### 1. Oblicz.

- |                                              |                                                                          |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| a) $\sqrt{121} + \sqrt{49} - \sqrt{225}$     | d) $\sqrt{3,61} - \sqrt{1,21} - \sqrt{0,09}$                             |
| b) $\sqrt{196} - \sqrt{169} - \sqrt{144}$    | e) $\sqrt{\frac{81}{400}} + \sqrt{\frac{9}{100}} - \sqrt{\frac{64}{25}}$ |
| c) $\sqrt{0,25} + \sqrt{1,44} + \sqrt{6,25}$ | f) $\sqrt{3\frac{6}{25}} - \sqrt{2\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{7}{9}}$    |

### D 2. Uzasadnij, że:

- a)  $\sqrt{1\frac{9}{16}} \neq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{9}{16}}$ ,    b)  $\sqrt{2\frac{1}{4}} \neq \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$ ,    c)  $\sqrt{4\frac{1}{9}} \neq \sqrt{4} + \sqrt{\frac{1}{9}}$ .

### 3. Podaj wszystkie liczby naturalne leżące na osi między liczbami:

- a)  $\sqrt{2}$  i  $\sqrt{33}$ ,    b)  $\sqrt{10}$  i  $\sqrt{140}$ ,    c)  $\sqrt{80}$  i  $\sqrt{300}$ .

### 4. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

- |                |                |                 |                 |
|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| a) $\sqrt{18}$ | c) $\sqrt{48}$ | e) $\sqrt{108}$ | g) $\sqrt{392}$ |
| b) $\sqrt{24}$ | d) $\sqrt{96}$ | f) $\sqrt{252}$ | h) $\sqrt{450}$ |

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

### 5. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{2}$ .

- |                            |                             |                                           |
|----------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------|
| a) $4\sqrt{2} + \sqrt{8}$  | c) $\sqrt{18} + \sqrt{98}$  | e) $\sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{242}$   |
| b) $\sqrt{32} - 3\sqrt{2}$ | d) $\sqrt{200} - \sqrt{50}$ | f) $\sqrt{800} + \sqrt{242} - \sqrt{162}$ |

### 6. Zapisz liczbę w postaci $a\sqrt{b}$ .

- |                            |                             |                                                      |
|----------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------------|
| a) $7\sqrt{5} + \sqrt{20}$ | c) $\sqrt{12} + \sqrt{75}$  | e) $0,2\sqrt{50} + 0,8\sqrt{72} - 0,3\sqrt{32}$      |
| b) $\sqrt{48} - \sqrt{27}$ | d) $\sqrt{45} - \sqrt{125}$ | f) $3\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 5\sqrt{180}$ |

7. Usuń niewymierność z mianownika, postępując tak jak w przykładzie.

- a)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  c)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$  e)  $\frac{5}{3\sqrt{10}}$   
 b)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  d)  $\frac{4}{3\sqrt{2}}$  f)  $\frac{3}{5\sqrt{15}}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

8. Usuń niewymierność z mianownika. Podaj przybliżoną wartość wyrażenia (przyjmij  $\sqrt{2} \approx 1,4$ ).

- a)  $\frac{8+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$  b)  $\frac{6-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$  c)  $\frac{5\sqrt{2}-10}{4\sqrt{2}}$  d)  $\frac{5\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}$

9. Oblicz.

- a)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$  c)  $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$  e)  $\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$  g)  $\sqrt{30} \cdot \sqrt{480}$   
 b)  $\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$  d)  $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$  f)  $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$  h)  $\sqrt{80} \cdot \sqrt{180}$

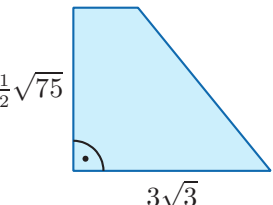
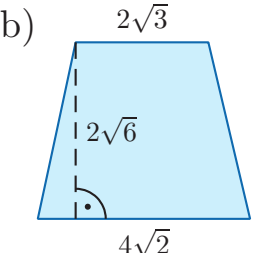
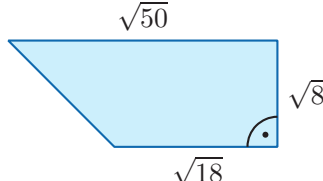
10. Oblicz.

- a)  $\frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{350}}{\sqrt{21}}$  b)  $\frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt{375}}{\sqrt{80}}$  c)  $\frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{363}}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{130}}$  d)  $\frac{\sqrt{48} \cdot \sqrt{162}}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{135}}$

11. Wykonaj działania.

- a)  $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3})$  c)  $\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$   
 b)  $3\sqrt{2}(2\sqrt{6} - 4\sqrt{8} + \sqrt{18})$  d)  $\sqrt{10}(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{45} - \sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

12. Oblicz pole trapezu.

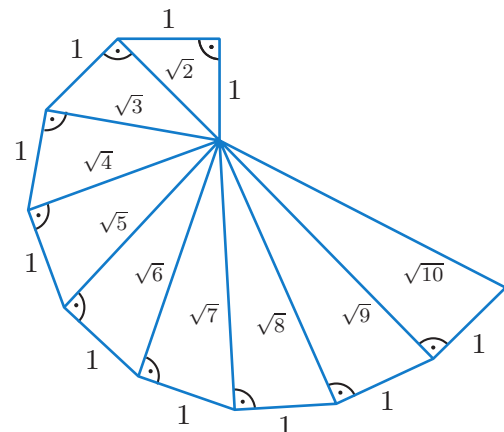
- a)  b)  c) 

13. Oblicz obwód i pole trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne mają długości  $x$  i  $y$ .

- a)  $x = 3\sqrt{2}$ ,  $y = 4\sqrt{2}$  b)  $x = 2\sqrt{27}$ ,  $y = 4\sqrt{12}$  c)  $x = 2\sqrt{10}$ ,  $y = \sqrt{50}$

14. Na rysunku obok przedstawiono spiralę Teodorosa. Pokazuje ona, jak konstrukcyjnie wyznaczyć odcinek o długości  $\sqrt{n}$ , gdzie  $n > 1$  jest liczbą naturalną, gdy dany jest odcinek o długości 1. Opisz, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować odcinek o długości:

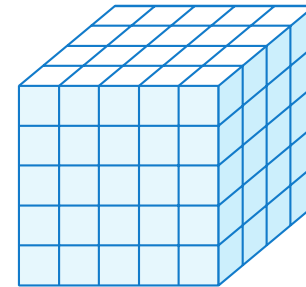
- a)  $\sqrt{17}$ , b)  $\sqrt{38}$ .



## 1.6. Pierwiastek sześcienny. Pierwiastek $n$ -tego stopnia

### ■ Pierwiastek sześcienny z liczby nieujemnej

Rozpatrzmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu długości krawędzi sześcianu o danej objętości  $V$ . Na przykład długość krawędzi sześcianu o objętości  $V = 125 \text{ cm}^3$  jest równa 5 cm, bo  $5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^3$ . Zapisujemy to następująco  $\sqrt[3]{125} = 5$ . Mówimy, że liczba 5 jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby 125.



### Definicja

**Pierwiastkiem sześciennym** (pierwiastkiem trzeciego stopnia) z liczby nieujemnej  $a$  nazywamy liczbę  $b$ , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa  $a$ .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

### Przykład 1

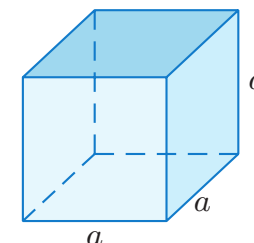
Podaj pierwiastek trzeciego stopnia i uzasadnij odpowiedź.

- a)  $\sqrt[3]{8} = 2$ , ponieważ  $2^3 = 8$ . c)  $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$ , ponieważ  $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$ .  
 b)  $\sqrt[3]{0} = 0$ , ponieważ  $0^3 = 0$ . d)  $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$ , ponieważ  $0,6^3 = 0,216$ .

### Przykład 2

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości 27.

Objętość  $V$  sześcianu o krawędzi długości  $a$  jest równa  $a^3$ , więc  $a = \sqrt[3]{V}$ , czyli  $a = \sqrt[3]{27} = 3$ .



### Ćwiczenie 1

Oblicz długość krawędzi sześcianu o objętości  $V$ .

- a)  $V = 1$  b)  $V = 64$  c)  $V = 216$  d)  $V = 8000$

### Ćwiczenie 2

Podaj wartość, korzystając z informacji podanych obok.

- a)  $\sqrt[3]{512}$  c)  $\sqrt[3]{1331}$  e)  $\sqrt[3]{1,331}$   
 b)  $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$  d)  $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$  f)  $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}}$

$$\begin{aligned} 7^3 &= 343 \\ 8^3 &= 512 \\ 9^3 &= 729 \\ 11^3 &= 1331 \end{aligned}$$



Obliczanie pierwiastka trzeciego stopnia jest działaniem odwrotnym do podnoszenia do trzeciej potęgi.

Na przykład  $\sqrt[3]{11^3} = 11$  oraz  $(\sqrt[3]{9})^3 = 9$ .

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^3} &= a \\ (\sqrt[3]{a})^3 &= a\end{aligned}$$

W obliczeniach wykorzystujemy podane poniżej wzory na pierwiastek sześcienny iloczynu i pierwiastek sześcienny ilorazu. Są one analogiczne do wzorów dla pierwiastka kwadratowego (podaj potrzebne założenia).

### Przykład 3

$$\text{a)} \sqrt[3]{0,001 \cdot 343} = \sqrt[3]{0,001} \cdot \sqrt[3]{343} = 0,1 \cdot 7 = 0,7$$

$$\text{b)} \frac{\sqrt[3]{686}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{686}{2}} = \sqrt[3]{343} = 7$$

### Pierwiastek iloczynu

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

### Pierwiastek ilorazu

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

### Ćwiczenie 3

Oblicz.

$$\text{a)} \sqrt[3]{8 \cdot 27} \quad \text{c)} \sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98} \quad \text{e)} \sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \sqrt[3]{\frac{125}{216}}$$

$$\text{b)} \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} \quad \text{d)} \frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}} \quad \text{f)} \frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}} + \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$$

### Ćwiczenie 4

Przeanalizuj przykład w ramce. Na jego podstawie usuń niewymierność z mianownika podanego ułamka.

$$\text{a)} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \quad \text{b)} \frac{4}{\sqrt[3]{4}} \quad \text{c)} \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 4}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

## ■ Pierwiastek sześcienny z liczby rzeczywistej

W przeciwieństwie do definicji pierwiastka kwadratowego definicję pierwiastka sześciennego można rozszerzyć na liczby ujemne.

Na przykład:  $\sqrt[3]{-1} = -1$ , bo  $(-1)^3 = -1$ ;  $\sqrt[3]{-8} = -2$ , bo  $(-2)^3 = -8$ .

### Definicja

**Pierwiastkiem trzeciego stopnia** z liczby rzeczywistej  $a$  nazywamy taką liczbę  $b$ , która podniesiona do trzeciej potęgi jest równa  $a$ .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

### Ćwiczenie 5

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

$$\text{a)} \sqrt[3]{-27} \quad \text{b)} \sqrt[3]{-64} \quad \text{c)} \sqrt[3]{-125} \quad \text{d)} \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} \quad \text{e)} \sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$$

## ■ Pierwiastek $n$ -tego stopnia

Ogólnie dla pierwiastka  $n$ -tego stopnia mamy następujące definicje:

Jeśli  $n$  jest liczbą parzystą, to dla dowolnej liczby nieujemnej  $a$ :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b \geq 0 \text{ i } b^n = a$$

Jeśli  $n$  jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby rzeczywistej  $a$ :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

**Uwaga.** Dla pierwiastka 2. stopnia zamiast pisać  $\sqrt[n]{a}$  stosujemy zapis  $\sqrt{a}$ .

### Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci liczby wymiernej.

$$\begin{aligned}\text{a)} \sqrt[4]{81} \quad \text{c)} \sqrt[4]{0,0016} \quad \text{e)} \sqrt[6]{729} \\ \text{b)} \sqrt[5]{-32} \quad \text{d)} \sqrt[5]{-0,00001} \quad \text{f)} \sqrt[7]{-128}\end{aligned}$$

$$\sqrt[8]{256} = 2, \text{ bo } 2^8 = 256.$$

$$\sqrt[9]{-512} = -2, \text{ bo } (-2)^9 = 512.$$

## Zadania

1. Zapisz w postaci liczby wymiernej.

$$\begin{aligned}\text{a)} \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \quad \text{c)} \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \quad \text{e)} \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} \quad \text{g)} \sqrt[3]{2\frac{10}{27}} \\ \text{b)} \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \quad \text{d)} \sqrt[3]{\frac{64}{125}} \quad \text{f)} \sqrt[3]{\frac{125}{216}} \quad \text{h)} \sqrt[3]{12\frac{19}{27}}\end{aligned}$$

2. Oblicz.

$$\begin{aligned}\text{a)} \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{8} \quad \text{c)} \sqrt[3]{1000} + \sqrt[3]{27} \quad \text{e)} \sqrt[3]{0,125} + \sqrt[3]{0,001} \\ \text{b)} \sqrt[3]{125} - \sqrt[3]{64} \quad \text{d)} \sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{216} \quad \text{f)} \sqrt[3]{0,027} + \sqrt[3]{0,008}\end{aligned}$$

3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek.

$$\begin{aligned}\text{a)} \sqrt[3]{32} \quad \text{c)} \sqrt[3]{135} \quad \text{e)} \sqrt[3]{108} \\ \text{b)} \sqrt[3]{250} \quad \text{d)} \sqrt[3]{375} \quad \text{f)} \sqrt[3]{120}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{500} &= \sqrt[3]{125 \cdot 4} = \\ &= \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{4}\end{aligned}$$

4. Włącz czynnik pod pierwiastek.

$$\begin{aligned}\text{a)} 2\sqrt[3]{3} \quad \text{c)} 3\sqrt[3]{3} \quad \text{e)} 4\sqrt[3]{10} \\ \text{b)} 3\sqrt[3]{2} \quad \text{d)} 6\sqrt[3]{2} \quad \text{f)} 6\sqrt[3]{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{6} &= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{6} = \\ &= \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}\end{aligned}$$

5. Sprawdź, czy podana równość jest prawdziwa.

$$\begin{aligned}\text{a)} \frac{3\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2,25} \quad \text{b)} \frac{2\sqrt[3]{5}}{5\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{0,08} \quad \text{c)} \frac{5\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{2\frac{7}{9}}\end{aligned}$$

6. Która z podanych liczb jest większa:  $x$  czy  $y$ ?

$$\begin{aligned}\text{a)} x = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}, y = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \quad \text{c)} x = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{729}}, y = \sqrt[3]{\frac{135}{320}} \\ \text{b)} x = \frac{\sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{27}}, y = \sqrt[3]{\frac{3000}{81}} \quad \text{d)} x = \frac{\sqrt[3]{0,064}}{\sqrt[3]{0,125}}, y = \frac{\sqrt[3]{0,081}}{\sqrt[3]{0,192}}\end{aligned}$$

**D** 7. Uzasadnij, że podana liczba jest liczbą naturalną.

- a)  $\sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3}$       c)  $\sqrt[3]{14^2 - 13^2}$       e)  $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$   
 b)  $\sqrt[3]{1^3 + 6^3 + 8^3}$       d)  $\sqrt[3]{11^2 + \sqrt[3]{64}}$       f)  $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{72}$

8. Objętość prostopadłościanu o wymiarach  $x$  cm  $\times$   $y$  cm  $\times$   $z$  cm jest równa objętości pewnego sześcianu. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

- a)  $x = 4, y = 4, z = 32$       b)  $x = 16, y = 20, z = 25$

9. Z trzech sześciennych klocków zbudowano wieżę. Jej objętość jest równa objętości prostopadłościanu o podanych wymiarach. Oblicz wysokość tej wieży.

- a)  $4$  cm  $\times$   $6$  cm  $\times$   $16$  cm      b)  $6,25$  cm  $\times$   $7,5$  cm  $\times$   $8$  cm

10. Włącz czynnik pod pierwiastek.

- a)  $3\sqrt[4]{2}$     b)  $5\sqrt[4]{4}$     c)  $4\sqrt[5]{2}$     d)  $10\sqrt[6]{0,01}$

$$\begin{aligned} 2\sqrt[10]{5} &= \sqrt[10]{2^{10}} \cdot \sqrt[10]{5} = \\ &= \sqrt[10]{2^{10} \cdot 5} = \sqrt[10]{5120} \end{aligned}$$

11. Oblicz.

- a)  $\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{256} + \sqrt[4]{625}$       e)  $2\sqrt[4]{\frac{81}{16}} - 3\sqrt[4]{\frac{256}{625}}$   
 b)  $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{10\,000}$       f)  $6\sqrt[4]{0,0625} - 3\sqrt[4]{0,0081}$   
 c)  $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16} - \frac{\sqrt[6]{1000}}{\sqrt[6]{0,001}} - \sqrt[5]{32}$       g)  $\sqrt[6]{64} - \sqrt[6]{\frac{1}{64}} - \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$   
 d)  $\sqrt[8]{8} \cdot \sqrt[8]{32} - \sqrt[10]{1024} + \sqrt[5]{1024}$       h)  $\sqrt[6]{1\,000\,000} + \sqrt[8]{256}$

12. Oblicz.

- a)  $\sqrt[4]{250} \cdot \sqrt[4]{40} + \sqrt[4]{375} \cdot \sqrt[4]{135}$       c)  $\sqrt[5]{405} \cdot \sqrt[5]{1875} - \sqrt[5]{108} \cdot \sqrt[5]{72}$   
 b)  $\sqrt[4]{\frac{243}{500}} \cdot \sqrt[4]{\frac{64}{15}} - \sqrt[4]{\frac{63}{50}} \cdot \sqrt[4]{\frac{18}{175}}$       d)  $\sqrt[5]{\frac{275}{108}} \cdot \sqrt[5]{\frac{500}{99}} + \sqrt[5]{\frac{56}{135}} \cdot \sqrt[5]{\frac{20}{63}}$

13. Zapisz w postaci liczby wymiernej.

- a)  $\sqrt[3]{-8000}$       b)  $\sqrt[3]{-0,001}$       c)  $\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$       d)  $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$

14. Oblicz.

- a)  $2\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{-27}$       c)  $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}} - \sqrt[3]{-2\frac{10}{27}}$       e)  $\frac{\sqrt[3]{-16}}{5\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{-72}}{\sqrt[3]{-9}}$   
 b)  $-\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} + \sqrt[3]{-0,125}$       d)  $\frac{\sqrt[3]{-9} \cdot \sqrt[3]{-9}}{\sqrt[3]{-3}} - \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{-3}}$       f)  $\frac{\sqrt[5]{-128}}{\sqrt[5]{-4}} + \frac{\sqrt[7]{-128}}{\sqrt[9]{-1}}$

**D** 15. Uzasadnij, że iloczyn  $xyz$  równa się zero.

- a)  $x = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{16}, y = \sqrt[7]{1} - 2\sqrt[6]{1}, z = \sqrt[10]{1024} + 2\sqrt[9]{-1}$   
 b)  $x = \sqrt[5]{32} - \sqrt[4]{81}, y = \sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{81}, z = \sqrt[5]{-1} + \sqrt[4]{1}$

## 1.7. Potęga o wykładniku całkowitym

### Przykład 1

Załóżmy, że mamy parę królików oraz że liczba królików podwaja się co pół roku. Ile królików będziemy mieli po 5 latach?

$$2 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{10 \text{ półrocznych okresów}} = 2^{11} = 2048$$

Przypomnijmy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

### Definicja

Dla liczby naturalnej  $n > 1$  potęgą  $a^n$  nazywamy iloczyn  $n$  czynników równych liczbie  $a$ :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

↑  
podstawa potęgi

↑  
wykładnik potęgi

Przyjmujemy również, że:  $a^1 = a$  oraz  $a^0 = 1$  dla  $a \neq 0$ .

Nie definiujemy wartości  $0^0$ .

### Przykład 2

- a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$   
 b)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$   
 c)  $(-3)^1 = -3$   
 d)  $16^0 = 1$

### Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a)  $9^2, 9^3, 9^4$   
 b)  $\left(\frac{3}{4}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3, \left(\frac{3}{4}\right)^4$   
 c)  $\left(-\frac{2}{5}\right)^2, \left(-\frac{2}{5}\right)^3, \left(-\frac{2}{5}\right)^4$

### Ćwiczenie 2

Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej.

$$(-2)^0, (-2)^4, (-2)^9, (-3)^4, (-3)^9$$

Przydatna jest umiejętność rozpoznawania niektórych potęg liczb: 2, 3, 4, 5.

| $n$ | $2^n$ | $3^n$ | $4^n$ | $5^n$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1   | 2     | 3     | 4     | 5     |
| 2   | 4     | 9     | 16    | 25    |
| 3   | 8     | 27    | 64    | 125   |
| 4   | 16    | 81    | 256   | 625   |
| 5   | 32    | 243   | 1024  |       |
| 6   | 64    | 729   |       |       |
| 7   | 128   |       |       |       |
| 8   | 256   |       |       |       |
| 9   | 512   |       |       |       |
| 10  | 1024  |       |       |       |

Możemy również określić potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym.

### Definicja

Dla liczby naturalnej  $n \geq 1$  i dla liczby  $a \neq 0$  przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

### Przykład 3

$$\text{a) } 3^{-1} = \frac{1}{3} \quad \text{b) } 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \quad \text{c) } \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

### Ćwiczenie 3

Oblicz.

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } 4^{-2} & \text{c) } (-3)^{-2} & \text{e) } \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} & \text{g) } \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} & \text{i) } 0,2^{-2} \\ \text{b) } 4^{-3} & \text{d) } (-3)^{-3} & \text{f) } \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} & \text{h) } \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} & \text{j) } (-0,2)^{-3} \end{array}$$

### Ćwiczenie 4

Czy podane liczby są równe?

$$\text{a) } \left(\frac{5}{7}\right)^{-3}, \left(\frac{7}{5}\right)^3 \quad \text{b) } \left(-\frac{4}{9}\right)^6, \left(\frac{9}{4}\right)^{-6} \quad \text{c) } \left(-\frac{3}{5}\right)^{-5}, \left(\frac{5}{3}\right)^5$$

Do obliczania wartości wyrażeń, w których występują potęgi o wykładnikach całkowitych, możemy wykorzystywać prawa analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach naturalnych.

### Twierdzenie

Dla liczb całkowitych  $m, n$  oraz różnych od 0 liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ :

$$\begin{array}{lll} \blacksquare a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \blacksquare a^n \cdot b^n = (ab)^n & \blacksquare (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ \blacksquare \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & \blacksquare \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n & \end{array}$$

### Ćwiczenie 5

Oblicz.

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } 3^9 \cdot 3^{-6} & \text{c) } (2^5)^{-2} & \text{e) } 5^{-9} : 5^{-11} & \text{g) } 6^5 : 3^5 & \text{i) } 6^3 \cdot 2^{-5} \\ \text{b) } 0,5^3 \cdot 0,5^7 & \text{d) } (0,25^{-1})^{-4} & \text{f) } 4 : 4^{-4} & \text{h) } 10^{10} : 5^{10} & \text{j) } 10^4 \cdot 5^{-2} \end{array}$$

### Ćwiczenie 6

Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie.

$$\text{a) } (x^2 \cdot x^6) : x^4 \quad \text{b) } (x^7 : x^2) : x^{-1} \quad \text{c) } (x^2 y)^{-1} \cdot x^3 \quad \text{d) } (x^{-2} y^3)^{-2} : y^{-3}$$

## Zadania

1. Oblicz.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (-2)^5, (-2)^{-5}, 2^{-5} & \text{c) } (\sqrt{3})^4, (\sqrt{3})^{-2}, (\sqrt{3})^{-6} \\ \text{b) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} & \text{d) } (\sqrt{2})^6, (\sqrt{2})^7, (\sqrt{2})^{-8} \end{array}$$

2. Zapisz liczbę w postaci  $2^m$ , gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą.

$$\text{a) } 2^3 \cdot 4^6 \quad \text{b) } 4^{-5} \cdot 8^2 \quad \text{c) } 64^2 : 32^{-3} \quad \text{d) } (16^{-2} : 4^{-8}) \cdot 8^4$$

3. Zapisz podane liczby w postaci potęg o tej samej podstawie.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 16, \frac{1}{64}, 8^3, (\sqrt{2})^4, 1024^2 & \text{c) } 0,001, 100^5, \left(\frac{1}{100}\right)^{-4}, \left(\frac{1}{0,1}\right)^{-6} \\ \text{b) } \frac{1}{81}, 27, 9^{-2}, (\sqrt{3})^6, 81^{-5} & \text{d) } 25^{-3}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{125}\right)^4, 625^{-5} \end{array}$$

4. Oblicz.

$$\text{a) } (-2\sqrt{3})^{-3} \quad \text{b) } \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-4} \quad \text{c) } \left(-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^{-3} \quad \text{d) } ((-3\sqrt{2})^{-1})^{-2}$$

5. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 5^{-3} \cdot 2^{-3} & \text{c) } 8^{-4} \cdot 4^4 & \text{e) } \left(2\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{17}{14}\right)^5 & \text{g) } (-0,2)^{-8} : 5^8 \\ \text{b) } 0,2^{-5} \cdot 5^{-5} & \text{d) } 18^{-3} : 6^{-3} & \text{f) } 1,3^{-2} : 0,1^{-2} & \text{h) } (-1,2)^{-5} : \left(\frac{6}{5}\right)^{-5} \end{array}$$

6. Oblicz.

$$\text{a) } \left(\frac{6}{5}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-4} \quad \text{b) } \left(\frac{2}{21}\right)^{-3} \cdot 15^{-3} \cdot 7^{-3} \quad \text{c) } 0,4^3 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^3 : 4^{-3}$$

7. Która z liczb jest większa:  $x$  czy  $y$ ?

$$\text{a) } x = 2^4 \cdot 4^{-2}, y = 4^{-4} : 8^{-2} \quad \text{b) } x = (2^{-4} : 2^{-6})^{-1}, y = (2^{-4} \cdot 2^{-3})^{-1}$$

8. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{2^{-2}}{3^{-3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 & \text{c) } \frac{6^0 + 0^6}{6^{-1}} + (4^6 - 16^3) & \text{e) } \left(0,5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-6} - 2 \cdot 16^4\right) : 7^3 \\ \text{b) } \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-2} & \text{d) } \left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\right) : 6^{-2} & \text{f) } \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-4} \end{array}$$

9. Podaj konieczne założenia i uprość wyrażenie, a następnie oblicz jego wartość dla podanej wartości  $x$ .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (x^{-3})^{-2} + (x^{-1})^{-6}, x = -2 & \text{c) } \left(\left((x^{-3})^2 : x^{-4}\right) : x^0\right)^{-2}, x = 5 \\ \text{b) } \left((x^4)^{-3}\right)^{-2} : \left((x^2)^{-2}\right)^{-3}, x = 1 & \text{d) } \left((x^3)^6 + (x^{-2})^{-9}\right) : (x^{-5})^{-3}, x = \frac{3}{2} \end{array}$$



Liczby Fermata

**Pierre de Fermat** (1607–1665) – francuski matematyk, z zawodu prawnik. Większości swoich prac nie opublikował. Tak zwane **wielkie twierdzenie Fermata** (opublikowane dopiero po jego śmierci, w 1670 r.) mówi, że nie istnieją liczby naturalne dodatnie  $x, y, z, n$  takie, że  $x^n + y^n = z^n$  dla  $n > 2$ . Twierdzenie to zostało udowodnione dopiero w 1995 r. Innym pojęciem związanym z jego nazwiskiem są liczby  $F_k = 2^{2^k} + 1$ , gdzie  $k$  jest liczbą naturalną, nazywane **liczbami Fermata**. Pięć początkowych liczb Fermata:



$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$   
 $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$   
 $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$

$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$   
 $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$

Fermat przypuszczał, że wszystkie liczby  $F_k = 2^{2^k} + 1$  są pierwsze, ale w 1732 r. **Leonhard Euler** [czyt. ojler] wykazał, że  $F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$ , czyli jest liczbą złożoną. Do dziś nie wiadomo, czy którakolwiek z liczb Fermata oprócz  $F_0, F_1, F_2, F_3$  i  $F_4$  jest liczbą pierwszą. Poniższe twierdzenie, udowodnione przez **Carla Friedricha Gaussa**, podaje związek między liczbami pierwszymi Fermata a wielokątami foremnymi.

Twierdzenie

Za pomocą cyrkla i linijki można skonstruować  $n$ -kąt foremny wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $n$  jest: potęgą dwójki lub liczbą pierwszą Fermata pomnożoną przez  $2^k$ , lub iloczynem różnych liczb pierwszych Fermata i liczby  $2^k$ , gdzie  $k$  jest dowolną liczbą naturalną.

W tabeli obok podano liczby naturalne mniejsze od 100, dla których można skonstruować  $n$ -kąt foremny.

1. Sprawdź, czy jest możliwe skonstruowanie za pomocą cyrkla i linijki  $n$ -kąta foremnego, gdy  $n$  równe jest 170, 200, 204, 1020.
2. Znajdź informacje o konstrukcji 17-kąta foremnego (możliwość takiej konstrukcji wykazał C.F. Gauss w 1796 r.).

|                    |                            |
|--------------------|----------------------------|
| $3 = 3$            | $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$   |
| $4 = 2^2$          | $32 = 2^5$                 |
| $5 = 5$            | $34 = 2 \cdot 17$          |
| $6 = 2 \cdot 3$    | $40 = 2^3 \cdot 5$         |
| $8 = 2^3$          | $48 = 2^4 \cdot 3$         |
| $10 = 2 \cdot 5$   | $51 = 3 \cdot 17$          |
| $12 = 2^2 \cdot 3$ | $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ |
| $15 = 3 \cdot 5$   | $64 = 2^6$                 |
| $16 = 2^4$         | $68 = 2^2 \cdot 17$        |
| $17 = 17$          | $80 = 2^4 \cdot 5$         |
| $20 = 2^2 \cdot 5$ | $85 = 5 \cdot 17$          |
| $24 = 2^3 \cdot 3$ | $96 = 2^5 \cdot 3$         |

1.8. Notacja wykładnicza

Przy zapisywaniu bardzo dużych i bardzo małych liczb wygodnie jest posługiwać się notacją wykładniczą (inaczej zwaną notacją naukową).

Definicja

Liczbę dodatnią  $a$  możemy przedstawić w postaci iloczynu:

$a = x \cdot 10^n$

gdzie  $x$  jest liczbą spełniającą warunki  $1 \leq x < 10$ , a  $n$  – liczbą całkowitą. Takie przedstawienie liczby nazywamy **notacją wykładniczą**.

Przykład 1

a)  $326\,000\,000\,000 = 3,26 \cdot 10^{11}$   

↑  
11 cyfr

b)  $0,00000097 = 9,7 \cdot 10^{-7}$   

↑  
7 cyfr

Ćwiczenie 1

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 5 020 000 000 000 000 000 000 000 ton (masa Syriusza)
- b) 0,00027 mm (wielkość wirusa ospy)
- c) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 029 9 kg (masa cząsteczki wody)
- d) 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 956 kg (masa elektronu)

Ćwiczenie 2

Zapisz liczbę w notacji wykładniczej.

- a) 6 320 000      c) 43,728      e) 0,00065      g) 0,100324
- b) 109 000 000      d) 8765,2      f) 0,00302      h) 0,000001

Ćwiczenie 3

Zapisz liczbę w postaci dziesiętnej.

- a)  $8,62 \cdot 10^4$       b)  $7,89 \cdot 10^{-4}$       c)  $8,34 \cdot 10^{-5}$       d)  $6,02 \cdot 10^0$

Ćwiczenie 4

Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej i w postaci dziesiętnej.

- a)  $(3,4 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^{-5})$
- b)  $(1,4 \cdot 10^3) \cdot (8 \cdot 10^2)$
- c)  $(4,8 \cdot 10^{-1}) : (1,6 \cdot 10^{-3})$
- d)  $(7,2 \cdot 10^{-3}) : (1,2 \cdot 10^{-2})$

Oblicz.

$(5,2 \cdot 10^9) \cdot (0,5 \cdot 10^{-7}) = 5,2 \cdot 0,5 \cdot 10^{9-7} =$   
 $= 2,6 \cdot 10^2 = 260$



## 1.9. Potęga o wykładniku wymiernym

### Definicja

Dla dowolnej liczby  $a \geq 0$  i liczby naturalnej  $n > 1$  przyjmujemy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

### Przykład 1

Oblicz.

$$\text{a) } 49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7 \quad \text{b) } 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{c) } 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

### Ćwiczenie 1

Oblicz.

$$\text{a) } 4^{\frac{1}{2}} \quad \text{b) } 16^{\frac{1}{2}} \quad \text{c) } 81^{\frac{1}{2}} \quad \text{d) } 8^{\frac{1}{3}} \quad \text{e) } 27^{\frac{1}{3}} \quad \text{f) } 81^{\frac{1}{4}}$$

Potęę o wykładniku wymiernym  $\frac{m}{n}$  definiujemy następująco:

### Definicja

Dla dowolnej liczby  $a > 0$ , liczby naturalnej  $n > 1$  i liczby całkowitej  $m$  przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

### Przykład 2

Oblicz.

$$\text{a) } 9^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27 \quad \text{b) } 8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4 \quad \text{c) } 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

### Ćwiczenie 2

Oblicz.

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } 4^{\frac{3}{2}} & \text{c) } 8^{\frac{4}{3}} & \text{e) } 81^{1,5} & \text{g) } 125^{-\frac{2}{3}} & \text{i) } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2,5} \\ \text{b) } 27^{\frac{2}{3}} & \text{d) } 32^{\frac{3}{5}} & \text{f) } 4^{2,5} & \text{h) } \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} & \text{j) } \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \end{array}$$

### D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby  $a > 0$ , liczby naturalnej  $n > 1$  i liczby całkowitej  $m$  zachodzi równość  $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ .

### Ćwiczenie 4

Oblicz.

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } (\sqrt{10})^6 & \text{c) } \sqrt[3]{125^2} & \text{e) } (\sqrt[8]{625})^2 & \text{g) } \left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2 & \text{i) } \left(\sqrt{\sqrt[3]{49}}\right)^3 \\ \text{b) } \sqrt{4^{10}} & \text{d) } \sqrt[5]{32^3} & \text{f) } \sqrt{\sqrt{81}} & \text{h) } \sqrt[3]{\sqrt{4^3}} & \text{j) } \sqrt[3]{\sqrt[4]{16^6}} \end{array}$$

Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładnikach całkowitych.

### Przykład 3

Oblicz.

$$\begin{array}{l} \text{a) } 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 3^2 = 9 \\ \text{b) } 6^{\frac{4}{3}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}} = 6^1 = 6 \end{array}$$

### Ćwiczenie 5

Oblicz.

$$\text{a) } 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \quad \text{b) } 5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{5}{3}} \quad \text{c) } 4^{\frac{9}{2}} : 4^{\frac{5}{2}} \quad \text{d) } 2^{7,5} : 2^{2,5} \quad \text{e) } 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}}$$

### Przykład 4

Oblicz.

$$\begin{array}{l} \text{a) } 8^{\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = (8 \cdot 2)^{\frac{5}{2}} = 16^{\frac{5}{2}} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 4^5 = 1024 \\ \text{b) } 10^{\frac{3}{2}} : 5^{\frac{3}{2}} = (10 : 5)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \\ \text{c) } 80^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = (16 \cdot 5)^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 = 40 \end{array}$$

### Ćwiczenie 6

Oblicz.

$$\text{a) } 12^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \quad \text{b) } 12^{\frac{5}{2}} : 3^{\frac{5}{2}} \quad \text{c) } 24^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \quad \text{d) } 9^{\frac{4}{3}} : 24^{\frac{2}{3}} \quad \text{e) } 375^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$$

### Ćwiczenie 7

Oblicz.

$$\text{a) } \left(9^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{10}{3}} \quad \text{b) } \left(8^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{9}} \quad \text{c) } \left(125^{\frac{2}{3}}\right)^{0,75} \quad \text{d) } \left(\left(\frac{4}{9}\right)^{-2,5}\right)^{-0,6} \quad \text{e) } \left(32^{\frac{28}{25}}\right)^{-\frac{5}{7}}$$

Obliczając przybliżone wartości potęg o wykładniku wymiernym, możemy skorzystać z odpowiedniego kalkulatora (przykładowe wyniki zostały przedstawione obok).

$$\begin{array}{l} 10^{0,3} \approx 1,995262315 \\ 10^{0,45} \approx 2,818382931 \\ 10^{0,625} \approx 4,216965034 \end{array}$$

### Ćwiczenie 8

Korzystając z powyższych przybliżeń, podaj z dokładnością do czterech miejsc po przecinku przybliżoną wartość potęgi:

$$\text{a) } 10^{2,3}, \quad \text{b) } 10^{3,45}, \quad \text{c) } 10^{\frac{13}{8}}, \quad \text{d) } 10^{-1,7}.$$



Na dalszym etapie nauki rozszerzymy pojęcie potęgi na potęgę o wykładniku rzeczywistym, czyli także niewymiernym, np.  $2^{\sqrt{3}}$ ,  $10^{\sqrt{2}}$ .

W tabeli obok przedstawiono kilka przybliżeń liczby  $10^{\sqrt{2}}$ .

**Uwaga.**  $\sqrt{2} \approx 1,414213562$

|                    |                        |
|--------------------|------------------------|
| $10^{1,4}$         | $\approx 25,118864315$ |
| $10^{1,41}$        | $\approx 25,703957828$ |
| $10^{1,414}$       | $\approx 25,941793621$ |
| $10^{1,414213562}$ | $\approx 25,954553497$ |
| $10^{\sqrt{2}}$    | $\approx 25,954553519$ |

## Zadania

- Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 2.  
a)  $\sqrt{2}$       c)  $\sqrt{0,5}$       e)  $\sqrt{512}$       g)  $2\sqrt{2}$   
b)  $\sqrt[3]{2}$       d)  $\sqrt[3]{4}$       f)  $\sqrt[3]{1024}$       h)  $2\sqrt[3]{2}$
- Zapisz liczbę w postaci potęgi o podstawie 7.  
a)  $\sqrt{7^3}$       c)  $\frac{1}{\sqrt{7}}$       e)  $\sqrt{\frac{1}{7^3}}$       g)  $49\sqrt{7}$   
b)  $\sqrt[3]{7^2}$       d)  $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$       f)  $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$       h)  $7\sqrt[5]{7}$
- Oblicz.  
a)  $9^{\frac{3}{2}}$       c)  $8^{-\frac{4}{3}}$       e)  $144^{-0,5}$       g)  $10\,000^{0,25}$   
b)  $125^{\frac{2}{3}}$       d)  $27^{-\frac{2}{3}}$       f)  $16^{0,75}$       h)  $81^{-0,125}$
- Oblicz.  
a)  $0,04^{\frac{3}{2}}$       c)  $0,027^{\frac{2}{3}}$       e)  $0,0625^{-\frac{5}{4}}$       g)  $0,0081^{-1,25}$   
b)  $0,16^{-\frac{1}{2}}$       d)  $0,0016^{-\frac{3}{4}}$       f)  $0,00032^{\frac{3}{5}}$       h)  $0,00000256^{0,375}$
- Oblicz.  
a)  $2^2 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$       b)  $3^3 \cdot 27^{-\frac{4}{3}}$       c)  $0,008^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{125}$       d)  $0,0256^{\frac{3}{4}} \cdot (\sqrt[3]{10})^9$
- Zapisz podaną liczbę w postaci  $a^x$ , gdzie  $a$  jest liczbą naturalną, natomiast  $x$  – liczbą wymierną.  
a)  $\sqrt{\sqrt{2}}$       d)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$       g)  $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{2}$       j)  $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}$   
b)  $\sqrt[3]{5^{\frac{1}{2}}}$       e)  $\sqrt{3} : \sqrt[3]{3}$       h)  $9^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} : \sqrt{3}$       k)  $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{27} : 6^{\frac{3}{4}}$   
c)  $\sqrt[4]{5^{\frac{3}{2}}}$       f)  $\sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{3}$       i)  $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{3}{2}} : 8^{\frac{2}{3}}$       l)  $3^{\frac{1}{8}} \cdot 12^{\frac{3}{4}} : \sqrt{8}$
- Która liczba jest większa:  $x$  czy  $y$ ?  
a)  $x = 3 \cdot 1024^{-0,1}$ ,  $y = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} : \sqrt{2}$       b)  $x = (\frac{2}{5})^{-3} : \sqrt[6]{\frac{125}{8}}$ ,  $y = \sqrt[6]{36^3}$

# 1.10. Logarytm i jego własności

### Definicja

**Logarytmem o podstawie 10** (logarytmem dziesiętnym) z dodatniej liczby  $b$  nazywamy liczbę  $x$  taką, że  $10^x = b$ . Piszemy wówczas  $\log b = x$ .

### Przykład 1

- a)  $\log 1000 = 3$ , ponieważ  $10^3 = 1000$ .  
b)  $\log 0,1 = -1$ , ponieważ  $10^{-1} = 0,1$ .  
c)  $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ , ponieważ  $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ .

Pytanie o  $\log b$  to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 10, aby otrzymać liczbę  $b$ .

### Ćwiczenie 1

Oblicz.

- a)  $\log 10$       b)  $\log 100$       c)  $\log 100\,000$       d)  $\log 0,01$       e)  $\log \sqrt[3]{10}$

Rozpatruje się też logarytmy o innych podstawach. Na przykład logarytmem o podstawie 2 z dodatniej liczby  $b$  jest taka liczba  $x$ , że  $2^x = b$ . Piszemy wówczas  $\log_2 b = x$ .

### Przykład 2

- a)  $\log_2 8 = 3$ , ponieważ  $2^3 = 8$ .  
b)  $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ , ponieważ  $2^{-4} = \frac{1}{16}$ .  
c)  $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$ , ponieważ  $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ .

Pytanie o  $\log_2 b$  to pytanie o to, do jakiej potęgi należy podnieść 2, aby otrzymać liczbę  $b$ .

### Ćwiczenie 2

Oblicz.

- a)  $\log_2 16$       b)  $\log_2 1024$       c)  $\log_2 \frac{1}{2}$       d)  $\log_2 \frac{1}{8}$       e)  $\log_2 \sqrt{2}$

### Definicja

Niech  $a$  i  $b$  będą liczbami dodatnimi oraz  $a \neq 1$ . **Logarytm** o podstawie  $a$  z liczby  $b$  to wykładnik potęgi, do jakiej należy podnieść podstawę  $a$ , aby otrzymać liczbę  $b$ .

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

### Przykład 3

- a)  $\log_3 9 = 2$ , ponieważ  $3^2 = 9$ .  
b)  $\log_5 125 = 3$ , ponieważ  $5^3 = 125$ .  
c)  $\log_{25} 625 = 2$ , ponieważ  $25^2 = 625$ .

$\log_a b = x$   
liczba logarytmowana  
logarytm  
podstawa logarytmu

Ćwiczenie 3

Oblicz.

- a)  $\log_3 3$     b)  $\log_3 81$     c)  $\log_3 \sqrt{3}$     d)  $\log_3 27$     e)  $\log_3 \frac{1}{9}$     f)  $\log_3 \sqrt[4]{3}$

D Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby dodatniej  $a$  różnej od 1 zachodzą podane obok własności.

$\log_a 1 = 0$   
 $\log_a a = 1$

Czy wiesz, że...

Pojęcie logarytmu wprowadził ponad 400 lat temu szkocki matematyk John Napier (1550–1617), a logarytmy dziesiętne zdefiniował Anglik Henry Briggs (1561–1630) – opublikował on tablice takich logarytmów.

W obliczeniach są wykorzystywane następujące własności logarytmów (ich dokładne omówienie i dowody zostaną przedstawione w dalszym toku nauki).

Twierdzenie

Jeśli  $a, b, c$  są liczbami dodatnimi oraz  $a \neq 1$  i  $p \in \mathbb{R}$ , to:

$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$     logarytm iloczynu  
 $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$     logarytm ilorazu  
 $\log_a b^p = p \log_a b$     logarytm potęgi

Przykład 4

- a)  $\log_2(256 \cdot 1024) = \log_2 256 + \log_2 1024 = 8 + 10 = 18$   
b)  $\log_2 16\sqrt{2} = \log_2 16 + \log_2 \sqrt{2} = 4 + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.

- a)  $\log_2(64 \cdot 256)$     b)  $\log_5(125 \cdot 625)$     c)  $\log_5 5\sqrt{5}$     d)  $\log_2 8\sqrt[3]{2}$     e)  $\log_3 9\sqrt[4]{3}$

Przykład 5

- a)  $\log_2 \frac{0,25}{32} = \log_2 0,25 - \log_2 32 = -2 - 5 = -7$   
b)  $\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}} = \log_3 81 - \log_3 \sqrt{3} = 4 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 6

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm ilorazu.

- a)  $\log_2 \frac{0,5}{64}$     b)  $\log_2 \frac{1024}{0,125}$     c)  $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{8}$     d)  $\log_5 \frac{625}{\sqrt{5}}$     e)  $\log_3 \frac{243}{\sqrt[4]{3}}$

Ćwiczenie 7

Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm potęgi.

- a)  $\log_2 4^{10}$     b)  $\log_2 32^4$     c)  $\log_3 9^6$     d)  $\log_3 81^{-4}$

$\log_2 8^5 = 5 \log_2 8 =$   
 $= 5 \cdot 3 =$   
 $= 15$

Zadania

1. Oblicz.  
a)  $\log_2 512$     b)  $\log_2 2$     c)  $\log_2 \frac{1}{32}$     d)  $\log_2 \sqrt[5]{2}$     e)  $\log_2 \sqrt{8}$
2. Oblicz.  
a)  $\log_3 1$     b)  $\log_3 243$     c)  $\log_3 \frac{1}{3}$     d)  $\log_3 3\sqrt{3}$     e)  $\log_3 \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$
3. Oblicz.  
a)  $\log_{\frac{1}{2}} 2$     b)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$     c)  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$      $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$ , bo  $(\frac{1}{3})^{-3} = 27$ .
4. Sprawdź prawdziwość równości  $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$  dla podanych wartości  $x$  i  $y$ .  
a)  $x = 4, y = 16$     b)  $x = 8, y = \frac{1}{4}$     c)  $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{8}$
5. Sprawdź prawdziwość równości  $\log_3 x - \log_3 y = \log_3 \frac{x}{y}$  dla podanych wartości  $x$  i  $y$ .  
a)  $x = 27, y = 3$     b)  $x = 81, y = 9$     c)  $x = 3, y = \sqrt{3}$
6. Oblicz, korzystając ze wzoru na logarytm iloczynu.  
a)  $\log_4 2 + \log_4 8$     b)  $\log_6 2 + \log_6 3$     c)  $\log_2 12 + \log_2 \frac{2}{3}$

- D 7. Uzasadnij poniższą równość.  
a)  $\log 15 + \log 12 - 2 = \log \frac{9}{5}$     b)  $\log_2 54 - \log_2 3 = 2 \log_2 \sqrt{3} + \log_2 6$

8. W karcie wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych na egzamin maturalny z biologii, chemii i fizyki znajduje się tablica przybliżonych wartości logarytmów dziesiętnych. Korzystając z zamieszczonego fragmentu tablicy, podaj przybliżone wartości:  
a)  $\log 0,03, \log 0,3, \log 3$ ,  
b)  $\log 0,054, \log 0,0054, \log 5,4$ ,  
c)  $\log 3 + \log 9, \log 8 - \log 2$ .

| $x$         | $\log x$ | $x$         | $\log x$ | $x$         | $\log x$ |
|-------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|
| <b>0,01</b> | -2,000   | <b>0,26</b> | -0,585   | <b>0,51</b> | -0,292   |
| <b>0,02</b> | -1,699   | <b>0,27</b> | -0,569   | <b>0,52</b> | -0,284   |
| <b>0,03</b> | -1,523   | <b>0,28</b> | -0,553   | <b>0,53</b> | -0,276   |
| <b>0,04</b> | -1,398   | <b>0,29</b> | -0,538   | <b>0,54</b> | -0,268   |
| <b>0,05</b> | -1,301   | <b>0,30</b> | -0,523   | <b>0,55</b> | -0,260   |
| <b>0,06</b> | -1,222   | <b>0,31</b> | -0,509   | <b>0,56</b> | -0,252   |
| <b>0,07</b> | -1,155   | <b>0,32</b> | -0,495   | <b>0,57</b> | -0,244   |

# 1.11. Procenty (1)

## ■ Obliczanie procentu danej liczby

Należy pamiętać, że procenty zawsze odnoszą się do jakiejś całości (wielkości ustalonej).

$1\%w = \frac{1}{100}w = 0,01w, \quad 15\%w = \frac{15}{100}w = 0,15w, \quad 240\%w = \frac{240}{100}w = 2,4w$

### Ćwiczenie 1

Oblicz:

- a) 1%, 5%, 25%, 75% liczby 600,      b) 2%, 8%, 40%, 120% liczby 250.

### Ćwiczenie 2

Oblicz:

- a) 20% liczby 500,      c) 15% liczby 400,      e) 150% liczby 48,  
b) 40% liczby 800,      d) 80% liczby 15,      f) 210% liczby 20.

### Ćwiczenie 3

Karolina kupiła czapkę i rękawice po obniżce (w tabeli podano ceny przed obniżką i wysokość obniżki). Oblicz, ile zapłaciła.

| Produkt  | Cena  | Obniżka |
|----------|-------|---------|
| czapka   | 45 zł | o 40%   |
| rękawice | 60 zł | o 35%   |

Warto zauważyć, że wielokrotnej zmiany wartości o pewien procent nie można zastąpić jednorazową zmianą o sumę procentów każdej ze zmian.

### Ćwiczenie 4

W styczniu narty kosztowały 825 zł. W lutym ich cenę obniżono o 30%, a w marcu – o dalsze 20%. Ile trzeba było zapłacić za narty po marcowej obniżce? Ile kosztowałyby te narty, gdyby ich cenę od razu obniżono o 50%?

### Ćwiczenie 5

Cena kajaka wynosiła 1000 zł. Cenę podniesiono najpierw o 20%, a następnie o 15%. Ile kosztuje kajak po tych zmianach? O ile procent wzrosła cena kajaka w stosunku do ceny początkowej?

### Ćwiczenie 6

Po dwukrotnej obniżce ceny pewnego towaru o  $p\%$  jego cena spadła o  $x\%$ . Oblicz  $p$  dla:

- a)  $x = 19$ ,      b)  $x = 36$ ,      c)  $x = 51$ .

**1 procent** (1%) danej wielkości to 0,01 tej wielkości.

W niektórych sytuacjach wykorzystuje się dziesiątą część procentu, czyli promil.

**1 promil** (1‰) danej wielkości to 0,001 tej wielkości.

## Ćwiczenie 7

Oblicz:

- a) 2‰ liczby 300,      c) 50‰ liczby 100,      e) 0,2‰ liczby 1800,  
b) 8‰ liczby 1400,      d) 5‰ liczby 1000,      f) 5,5‰ liczby 180.

## ■ Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

### Przykład 1

Za jedną akcję firmy  $X$  tydzień temu trzeba było zapłacić 25 zł, a dzisiaj – o 2,25 zł więcej. O ile procent podrożały akcje?

$$\frac{2,25}{25} \cdot 100\% = 9\%$$

Akcje podrożały o 9%.

### Ćwiczenie 8

W tabeli podano ceny jednej akcji firmy  $Y$  i firmy  $Z$  w lutym i w marcu. Oblicz, o ile procent podrożały akcje każdej z tych firm.

| Firma | Luty  | Marzec   |
|-------|-------|----------|
| $Y$   | 18 zł | 24,30 zł |
| $Z$   | 24 zł | 27 zł    |

### Ćwiczenie 9

Oblicz, jakim procentem liczby  $x$  jest liczba  $y$  oraz jakim procentem liczby  $y$  jest liczba  $x$ .

- a)  $x = 100, y = 50$       b)  $x = 50, y = 40$       c)  $x = 10, y = 16$

## ■ Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

### Przykład 2

W tabeli podano ceny zestawów rondli po obniżce oraz wysokość obniżki. Oblicz cenę dużego zestawu przed obniżką.

Oznaczmy przez  $x$  cenę dużego zestawu przed obniżką. Obecna cena stanowi 85% ceny  $x$ :

$$\frac{85}{100}x = 272 \text{ i stąd } x = 272 \cdot \frac{100}{85} = 320 \text{ [zł]}.$$

| Zestaw | Obniżka | Cena   |
|--------|---------|--------|
| duży   | o 15%   | 272 zł |
| średni | o 24%   | 190 zł |
| mały   | o 32%   | 85 zł  |

### Ćwiczenie 10

Oblicz cenę średniego i cenę małego zestawu rondli z przykładu 2 przed obniżką.



Zadania

1. Oblicz: a) 401% liczby 40, b) 15‰ liczby 300, c) 2‰ liczby 2.
2. Cenę sukni ślubnej obniżono o  $p\%$ . O ile procent należałoby podnieść nową cenę, aby suknia kosztowała tyle samo, ile przed obniżką?  
a)  $p = 50$                       b)  $p = 25$                       c)  $p = 36$
3. Cenę pewnego towaru podniesiono dwukrotnie o  $p\%$ . O ile procent należałoby obniżyć jego cenę, aby towar ten kosztował tyle, ile na początku?  
a)  $p = 25$                                       b)  $p = 50$
4. Wycieczka do Londynu kosztuje 2400 zł. Jaka byłaby cena tej wycieczki:  
a) gdyby najpierw podniesiono ją o 10%, a następnie obniżono o 10%,  
b) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 25%,  
c) gdyby najpierw obniżono ją o 25%, a następnie podniesiono o 20%?
5. Na diagramie obok przedstawiono liczbę poszczególnych ocen, jakie bracia Bolek, Olek i Alek otrzymali na koniec pierwszego semestru.  
a) Ile procent ocen Olka to oceny dobre i bardzo dobre?  
b) Ile procent wszystkich ocen braci stanowią oceny lepsze od oceny dopuszczającej?
- liczba ocen

dop

dst

db

bdb

cel

ocena

Bolek

Olek

Alek

|     |   |   |   |
|-----|---|---|---|
| dop | 3 | 1 | 2 |
| dst | 3 | 2 | 0 |
| db  | 2 | 4 | 1 |
| bdb | 1 | 0 | 3 |
| cel | 0 | 0 | 2 |
6. Firma A w II kwartale miała obroty o 50% większe niż w I kwartale. W III kwartale jej obroty spadły o 20%, a w IV – o kolejne 20%. Oblicz, jakie były obroty firmy A w pozostałych kwartałach w przypadku, gdy wyniosły: a) w II kwartale 3 750 000 zł, b) w IV kwartale 1 440 000 zł.
7. Cena brutto komputera jest równa cenie netto plus 23% podatku VAT.  
a) Cena netto komputera jest równa 2200 zł. Oblicz jego cenę brutto. Ile procent ceny brutto stanowi podatek VAT?  
b) Cena brutto komputera jest równa 3198 zł. Oblicz jego cenę netto. Ile procent ceny brutto stanowi cena netto?  
c) Podatek VAT doliczony do ceny netto komputera wyniósł 483 zł. Jaka jest cena brutto tego komputera? Ile byłaby równa cena brutto tego komputera, gdyby jego cena netto została podniesiona o 200 zł?

1.12. Procenty (2)

Przykład 1

W tabeli przedstawiono procentowy udział Chińskiej Republiki Ludowej, Republiki Południowej Afryki i Stanów Zjednoczonych w światowym wydobyciu złota w latach 2008 i 2022.

| Kraj | 2008 rok | 2022 rok |
|------|----------|----------|
| ChRL | 12,2%    | 10,6%    |
| RPA  | 9,8%     | 3,5%     |
| USA  | 9,9%     | 5,5%     |

Źródło: [www.goldsheetlinks.com/production](http://www.goldsheetlinks.com/production),  
[en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_countries\\_by\\_gold\\_production](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_gold_production)



Zauważmy, że udział USA w światowym wydobyciu złota spadł prawie o połowę. Można też powiedzieć, że spadł on dokładnie o 4,4 punktu procentowego. Udział RPA spadł w tym czasie o 6,3 punktu procentowego.

Przykład 2

Sondaż przeprowadzony we wrześniu pokazał, że partię X popiera 12% wyborców. W październiku poparcie dla partii X deklarowało 18% wyborców. Można powiedzieć, że poparcie dla partii X wzrosło o 6 punktów procentowych lub że liczba osób popierających tę partię wzrosła o 50%.

Ćwiczenie 1

W tabeli przedstawiono wyniki sondażu, w którym pytano o poparcie dla partii Y oraz partii Z.

- a) O ile punktów procentowych wzrosło poparcie dla partii Y? O ile procent wzrosła liczba osób popierających partię Y?

| Partia | Luty | Marzec |
|--------|------|--------|
| Y      | 16%  | 20%    |
| Z      | 10%  | 8%     |

- b) O ile punktów procentowych zmalało poparcie dla partii Z? O ile procent zmalała liczba osób popierających partię Z?

Ćwiczenie 2

W tabeli podano wysokość oprocentowania lokat w bankach A i B w latach 2023 i 2024. Jak zmieniło się oprocentowanie w każdym z tych banków? Odpowiedź podaj w punktach procentowych.

| Bank | 2023 | 2024 |
|------|------|------|
| A    | 4,3% | 5,8% |
| B    | 5,4% | 4,2% |



### Ćwiczenie 3

Kapitał 5000 zł złożono w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości  $r$  w skali roku. Podaj wielkość kapitału po roku.

- a)  $r = 2\%$       b)  $r = 3,5\%$       c)  $r = 4\%$

Kapitał w wysokości  $k$  złożony na rok przy oprocentowaniu rocznym w wysokości  $r\%$  wynosi po roku  $k(1 + \frac{r}{100})$ .

### Zadania

- Dorota wpłaciła 8000 zł do banku  $A$  na lokatę roczną oprocentowaną  $4,3\%$  w skali roku. O ile więcej zarobiłaby, gdyby wpłaciła tę samą kwotę do banku  $B$ , w którym oprocentowanie lokaty rocznej jest o 1,5 punktu procentowego wyższe niż w banku  $A$ ?
- Połowę z 6000 zł złożono na lokatę roczną w banku  $A$ , a drugą połowę – w banku  $B$ . Odsetki uzyskane po roku w banku  $B$  były o 45 zł wyższe niż odsetki w banku  $A$ . O ile punktów procentowych było wyższe oprocentowanie lokaty w banku  $B$  od oprocentowania lokaty w banku  $A$ ?
- Tomek złożył w banku 7500 zł na lokatę roczną oprocentowaną  $4\%$  w skali roku. Oblicz, jaką kwotę odbierze po roku w przypadku, gdy od odsetek:
  - nie jest pobierany podatek,
  - jest pobierany podatek w wysokości  $20\%$ .

**Uwaga.** W Polsce podatek od odsetek wynosi  $19\%$ , jednak w zadaniach, dla uproszczenia obliczeń, przyjmujemy, że jest to  $20\%$ .
- Darek chciałby za rok wydać na remont 5250 zł. Czy uzyska potrzebną kwotę, jeśli złoży 5000 zł na lokacie rocznej oprocentowanej  $5\%$  w skali roku, a od naliczanych odsetek jest pobierany podatek w wysokości  $20\%$ ?
- Krysia wpłaciła do banku pewną kwotę na lokatę roczną oprocentowaną  $4\%$  w skali roku. Od dopisanych odsetek został pobrany podatek w wysokości  $20\%$ . Jaką kwotę:
  - odebrała po roku, jeśli do banku wpłaciła 2250 zł,
  - wpłaciła, jeśli po roku odebrała z banku 2580 zł?
- Kwotę 12 000 zł podzielono na dwie części. Jedną część wpłacono do banku  $A$  na lokatę roczną oprocentowaną  $3\%$  w skali roku. Drugą część wpłacono do banku  $B$  na lokatę roczną oprocentowaną  $3,5\%$  w skali roku. W obu bankach od dopisanych odsetek został pobrany podatek w wysokości  $20\%$ . Po roku z obu banków odebrano łącznie 12 300 zł. Jaką kwotę wpłacono do banku  $A$ ?

## Powtórzenie

### Zestaw I

- Jaka jest największa liczba trzycyfrowa podzielna przez:
  - 5,
  - 6,
  - 7,
  - 15,
  - 45?
- Wyznacz liczbę przeciwną do podanej liczby.
  - $23 : (-7\frac{2}{3}) - \frac{324}{243}$
  - $(-2\frac{3}{5}) \cdot 3\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
  - $(-6\frac{2}{3}) : (-7\frac{1}{7}) - \sqrt{\frac{169}{225}}$
  - $-12 \cdot 3\frac{7}{15} + 3\frac{1}{2} : 5$
  - $3\frac{3}{4} : \frac{3}{10} - (-1\frac{1}{6}) : \frac{7}{5}$
  - $4\frac{3}{4} : (\frac{3}{4} - 2\frac{1}{3}) - \frac{1}{2}$
- Wśród poniższych liczb wskaż liczbę niewymierną i podaj największą liczbę całkowitą od niej mniejszą.
  - $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}$ ,  $14 - \sqrt{196}$ ,  $2\sqrt{16} - \sqrt{36}$
  - $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ ,  $\sqrt{1\frac{4}{25}}$ ,  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{75}$
  - $\frac{\sqrt{49}}{3} + \frac{\sqrt[3]{729}}{4}$ ,  $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}$
  - $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$ ,  $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}$
- Wyznacz liczbę odwrotną do podanej liczby.
  - $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{15}$
  - $\sqrt{5\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$
  - $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{40}$
  - $\sqrt[3]{75} \cdot \sqrt[3]{45}$
  - $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{512}}$
  - $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{192}}$
  - $\sqrt{1\frac{9}{16}} : \sqrt{\frac{225}{256}}$
  - $\sqrt{1\frac{1}{2}} : \sqrt{1\frac{5}{27}}$
- Oblicz.
  - $\sqrt[3]{\frac{(-2)^3}{125}}$
  - $\sqrt[3]{\frac{(-2)^6}{(-3)^3}}$
  - $\sqrt{1\frac{9}{16}} - \sqrt[3]{\frac{125}{64}}$
  - $\frac{\sqrt{121} - \sqrt[3]{125}}{\sqrt{144} - \sqrt[3]{216}}$
  - $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{15}} \cdot \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$
  - $\sqrt[3]{2\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{20}}$
  - $\sqrt[3]{0,8} : \sqrt[3]{1\frac{9}{16}}$
  - $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt[3]{1,44}$
- Oblicz iloraz sumy liczb  $x = 2 - \sqrt{5}$  i  $y = 4 - \sqrt{5}$  oraz ich różnicy.
  - Oblicz sześcian różnicy liczb  $x = 1 - 6\sqrt[3]{3}$  i  $y = 0, (9) - \sqrt[3]{3}$ .
  - Oblicz różnicę odwrotności kwadratów liczb  $x = \frac{\sqrt{2}}{9}$  i  $y = 0, (2) \cdot \sqrt{3}$ .
- Podaj liczbę naturalną  $n$  spełniającą nierówności:
  - $n < 2\sqrt{3} < n + 1$ ,
  - $n - 1 < 5\sqrt{5} < n$ ,
  - $n < \sqrt{35} < n + 1$ .
- Oblicz. Wynik podaj w notacji wykładniczej.
  - $\frac{7,2 \cdot 10^{18} \cdot 4,9 \cdot 10^7}{5,6 \cdot 10^{32}}$
  - $\frac{1,44 \cdot 10^{11} \cdot 5,4 \cdot 10^{23}}{1,8 \cdot 10^5 \cdot 3,6 \cdot 10^8}$
  - $4\,410\,000\,000 : 0,021$
  - $10\,240 : 0,00000008$
  - $0,000000216 : 360\,000$
  - $0,00000000008 : 2,5$

9. Uporządkuj liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  od najmniejszej do największej.

a)  $a = \log_2 64$ ,  $b = \log_3 81$ ,  $c = \log_4 1024$ ,  $d = \log_5 125$

b)  $a = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ ,  $b = \log_{\frac{1}{3}} 27$ ,  $c = \log_{\frac{1}{4}} 64$ ,  $d = \log_{\frac{1}{5}} 25$

10. Wyznacz liczbę o 20% mniejszą od podanej liczby.

a)  $\frac{(3\frac{1}{4} - 1,5) \cdot (-2\frac{1}{8} + \frac{1}{4})}{(2,25 - 3\frac{1}{2}) : \frac{2}{3} + \frac{1}{8}}$  c)  $\frac{-48 : 0,6 + 1\frac{2}{3} \cdot 45 - 1\frac{5}{7} : 1\frac{1}{14}}{1\frac{1}{3} \cdot (-2\frac{2}{5}) + (\frac{3}{5} - 5\frac{1}{5}) \cdot 0,5}$

b)  $\frac{(1\frac{1}{6} - \frac{7}{9}) : (1\frac{1}{3} - \frac{1}{6})}{(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}) \cdot 0,35 - 1\frac{2}{3} : (-2\frac{1}{2})}$  d)  $\frac{0,3(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{1}{6}) : 0,75}{(\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3}) \cdot (-0,8) + 1,44 : 2\frac{2}{5}}$

11. O ile procent zmieniło się pole prostokąta, jeśli:

a) oba boki skrócono o 20%,

b) jeden bok skrócono o 10%, a drugi wydłużono o 10%?

12. Liczba członków pewnego klubu golfowego wzrastała przez ostatnie trzy lata o 20% rocznie. Ilu członków liczył ten klub trzy lata temu, jeśli rok temu należało do niego 216 osób?

13. Kwotę 3000 zł wpłacono do banku  $A$  na lokatę oprocentowaną  $p\%$  w skali roku. Kwotę 4000 zł wpłacono do banku  $B$ , w którym oprocentowanie jest o 2 punkty procentowe wyższe. Po roku odsetki uzyskane łącznie w obu bankach wyniosły 360 zł. Oblicz  $p$ .

14. Wyznacz liczbę:

a) o 2‰ większą od 100,

b) o 1,6‰ większą od 500.

## ■ Zestaw II

1. Która z liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  ma najwięcej dzielników, a która najmniej?

$a = 12$        $b = 50$        $c = 60$        $d = 110$        $e = 123$

2. Oblicz.

a)  $\frac{4^{-6} \cdot 4^5}{4^{-2}}$  c)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{9^4}{8^3}$  e)  $2^{-5} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4} \cdot (\sqrt{8})^6$

b)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \frac{3^{-3}}{3^2}$  d)  $10^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \cdot (5^5)^{-1}$  f)  $\frac{(\sqrt{3})^8}{(\sqrt{27})^{-2}} \cdot (3^4 : 3^{-2})^{-2}$

3. Sprawdź, czy podana liczba jest całkowita.

a)  $\frac{3\frac{1}{2} \cdot (2\frac{2}{3} - 1\frac{5}{12}) - \frac{5}{8}}{3\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot 8\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}$  b)  $\frac{3,74 \cdot (2,34 + 3,86)}{1,759 + 0,35 \cdot 8,26}$  c)  $\frac{3,6 \cdot (2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{3}) - 2,3}{1,32 \cdot (4\frac{3}{11} - 2\frac{7}{11}) + 7,34}$

**D** 4. Uzasadnij, że nierówność zachodzi dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$ .

a)  $\sqrt[3]{\frac{125x^6}{64}} - \sqrt{\frac{9x^4}{8}} \geq 0$  b)  $\sqrt[3]{\frac{64x^{12}}{27}} - \sqrt{0,01x^8} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}x^4$

5. Liczby  $x = 0,8(3)$  i  $y = 1,(3)$  zapisz jako ułamki zwykłe i oblicz:

a)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ , b)  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ , c)  $\frac{1}{x} + y^2$ , d)  $x^2 - \frac{1}{y^2}$ .

6. Podaj potrzebne założenia i uprość wyrażenie.

a)  $\frac{x^5 \cdot x^{-7}}{(x^2)^3}$  b)  $\left(\frac{-6y^0 \cdot y^{-1}}{y^{-3}}\right)^2$  c)  $\left(\frac{3z^2}{y^{-3}}\right)^2 - \frac{z^3y^4}{z^{-1}y^{-2}}$  d)  $\frac{s^2t - t^3}{\frac{1}{s^{-2}} - \frac{1}{t^{-2}}}$

7. Oblicz wartość wyrażenia:

a)  $(5x^2y^2)^3 : (25x^8y^4)$  dla  $x = \sqrt{2}$ ,  $y = \sqrt{8}$ ,

b)  $(8x^{-3}y)^3 : (4x^{-4}y^2)^3$  dla  $x = \sqrt[3]{12}$ ,  $y = 4\sqrt{3}$ ,

c)  $\frac{(x^2y^3)^2 \cdot (-3x^3y^2)^3}{(-xy^2)^5}$  dla  $x = \sqrt{3}$ ,  $y = \frac{1}{9}$ ,

d)  $\frac{(x^2y^{-1})^{-2}(-xy^{-2})^2}{(x^3y^4)^{-1}}$  dla  $x = \sqrt[4]{2}$ ,  $y = \sqrt[8]{8}$ .

8. Oblicz  $u + v + w$ . Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a)  $u = \frac{14m^2t - 35mt + 28mt^2}{7mt}$ ,  $v = \frac{9m^2t^2 - 21m^2t}{3m^2t}$ ,  $w = \frac{m^2t^2 + 0,5mt^3}{-2mt^2}$

b)  $u = \frac{64x^4y^2 - 60x^3y^2}{-4x^3y^2}$ ,  $v = \frac{60xy^3 - 85x^2y^3}{5xy^3}$ ,  $w = \frac{11x^3y + 3x^2y}{-x^2y}$

9. Oblicz. Odpowiedź podaj w notacji wykładniczej.

a)  $\frac{(2,4 \cdot 10^3) \cdot (7 \cdot 10^{13})}{(6 \cdot 10^6) \cdot (3,5 \cdot 10^4)}$  c)  $\frac{(1,2 \cdot 10^8) \cdot (5,1 \cdot 10^{-5})}{(1,7 \cdot 10^{-7}) \cdot (4,8 \cdot 10^7)}$

b)  $\frac{(25 \cdot 10^{-2}) \cdot (6 \cdot 10^{-6})}{(1,5 \cdot 10^{11}) \cdot (5 \cdot 10^{-9})}$  d)  $0,00015 : 0,0006$

**D** 10. Liczba  $k$  jest sumą pięciu kolejnych liczb nieparzystych. Uzasadnij, że  $\frac{k}{5}$  jest liczbą całkowitą.

11. Największy wspólny dzielnik dwucyfrowej liczby  $x$  i liczby 48 jest równy 8. Ile może być równa liczba  $x$ ?

**D** 12. Uzasadnij, że jeśli jeden bok prostokąta ma długość równą 1, a drugi – równą  $n$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną, to długość przekątnej tego prostokąta jest liczbą niewymierną.

**D** 13. Uzasadnij, że dla dwóch kolejnych liczb całkowitych  $m$  i  $m + 1$  można wskazać liczbę niewymierną  $c$  taką, że  $m < c < m + 1$ .





## Zadania z kontekstem realistycznym

1. W trzech wieżowcach, z których żaden nie ma więcej niż 15 pięter, na parterze są lokale użytkowe, a na piętrach – mieszkania. Na każdym piętrze każdego z budynków mieszka tyle samo osób, a mieszkańców w tych budynkach jest odpowiednio 420, 462 i 504. Ile pięter ma każdy z wieżowców?
2. W każdej sekundzie około 600 milionów ton wodoru zawartego w Słońcu ulega zamianie w hel na skutek reakcji termojądrowej. Przyjmując, że Słońce zawiera około  $1,49 \cdot 10^{27}$  ton wodoru, oszacuj, po ilu latach zapas wodoru zawartego w Słońcu uległby wyczerpaniu, gdyby tempo reakcji się nie zmieniło.
3. Cena netto pewnego towaru wynosi 140 zł. Podatek VAT od tego towaru jest równy 23%.

Cena brutto składa się z ceny netto powiększonej o podatek VAT.

  - a) Oblicz cenę brutto tego towaru. Jaki procent ceny brutto stanowi podatek VAT?
  - b) Przy jakiej stawce podatku VAT cena brutto tego towaru wynosiłaby 151,20 zł? O ile procent cena netto byłaby wtedy mniejsza od ceny brutto?
  - c) O ile procent zmalałaby cena brutto tego towaru, gdyby obecną stawkę podatku VAT zmniejszono do 5%?
4. Pan Kowalski ulokował 5000 zł na lokacie oprocentowanej 5,05% w skali roku. Pan Nowak wpłacił taką samą kwotę na lokatę półroczną. Po 6 miesiącach otrzymał tę kwotę powiększoną o 2,5%. Ulokował te pieniądze ponownie na tej samej lokacie półrocznej. Który z nich po roku oszczędzania zgromadził większy kapitał?
5. Klient wpłacił w banku 4000 zł na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Po pierwszym roku oszczędzania całą kwotę wraz z odsetkami ulokował ponownie na tych samych warunkach. Tak samo postąpił po drugim roku oszczędzania. Jaki kapitał zgromadził po 3 latach? O ile mniejsze byłyby jego oszczędności, gdyby co roku ponownie wpłacał na lokatę 4000 zł wypłacone z poprzedniej lokaty, a odsetki gromadził poza lokatą?
6. Pan Antoni zainwestował na giełdzie papierów wartościowych pewną kwotę pieniędzy. Po roku stan jego rachunku zwiększył się o 5%, w drugim roku zmniejszył się o 4,5%, w trzecim wzrósł o 6%. Po trzech latach stan jego rachunku wyniósł 2125,83 zł. Ustal, jaką kwotę zainwestował pan Antoni.



## Sposób na zadanie

### Przykład 1

Ile jest liczb dwucyfrowych dodatnich, których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3?

Aby rozwiązać to zadanie, możemy postąpić na różne sposoby.

- Liczb spełniających warunki zadania nie jest dużo, można je zatem wszystkie wypisać: 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94 – jest ich 13.
- Zauważmy, że najmniejszą liczbą dwucyfrową spełniającą podany warunek jest 10, a największą 94. Wszystkie te liczby można zapisać w postaci  $7n + 3$ , gdzie  $1 \leq n \leq 13$ , zatem jest 13 takich liczb.

**Odpowiedź:** 13

→ Zadanie 20, str. 61

### Przykład 2

Ile jest liczb czterocyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 3 i przez 5?

Zauważmy, że liczby podzielne przez 3 i przez 5 to liczby podzielne przez 15. Najmniejszą liczbą czterocyfrową podzielną przez 15 jest 1005, a największą 9990. Liczb spełniających warunki zadania jest zbyt dużo, aby je wszystkie wypisać.

$$1005 = 15 \cdot 67, 1020 = 15 \cdot 68, 1035 = 15 \cdot 69, \dots, 9990 = 15 \cdot 666$$

Każdą z tych liczb możemy zapisać w postaci  $15 \cdot n$ , gdzie  $67 \leq n \leq 666$ . Zatem takich liczb jest  $666 - 67 + 1 = 600$ .

**Odpowiedź:** 600

→ Zadanie 21, str. 61

### Przykład 3

Ile jest liczb trzycyfrowych dodatnich, które są podzielne przez 5 lub przez 6?

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 5: 100, 105, 110, ..., 995. Najmniejszą z nich jest 100, a największą 995. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 5 można zapisać w postaci  $100 + 5n$ , gdzie  $0 \leq n \leq 179$ , zatem takich liczb jest 180.

Rozpatrujemy liczby trzycyfrowe podzielne przez 6: 102, 108, 114, ..., 996. Najmniejszą z nich jest 102, a największą 996. Liczby trzycyfrowe podzielne przez 6 można zapisać w postaci  $102 + 6n$ , gdzie  $0 \leq n \leq 149$ , zatem takich liczb jest 150.

Zauważmy, że dwa razy zostały policzone liczby podzielne przez 30 (są one podzielne zarówno przez 5, jak i przez 6).

Liczby trzycyfrowe podzielne przez 30 można zapisać w postaci  $120 + 30n$ , gdzie  $0 \leq n \leq 29$ , takich liczb jest więc 30.

Zatem liczb podzielnych przez 5 lub przez 6 jest:  $180 + 150 - 30 = 300$ .

**Odpowiedź:** 300

→ Zadanie 22, str. 61



W zadaniach 1–12 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

**Zadanie 1 (0–1)**

Liczbą podzieloną przez 15 jest

- A. 9 720 279      B. 2 220 205      C. 22 222 220      D. 23 420 340

**Zadanie 2 (0–1)**

Liczbą odwrotną do  $\frac{0,25 - \sqrt{\frac{9}{16}}}{-3^2 : 3}$  jest

- A. 6      B. 4      C. –4      D. –6

**Zadanie 3 (0–1)**

Najmniejszą liczbą całkowitą większą od  $6 - 2\pi$  jest

- A. –1      B. 0      C. 1      D. –2

**Zadanie 4 (0–1)**

Liczbą wymierną jest

- A.  $\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{16}}{2}$       B.  $\frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$       C.  $\frac{\sqrt{25} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$       D.  $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{54}}$

**Zadanie 5 (0–1)**

Ułamek  $\frac{\sqrt[3]{-16} \cdot \sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-4}}$  jest równy

- A.  $\frac{-16}{\sqrt[3]{-4}}$       B.  $\frac{16}{\sqrt[3]{-4}}$       C. –4      D. 4

**Zadanie 6 (0–1)**

Ułamek  $\frac{5^5 \cdot 3 + 2 \cdot 5^5}{5^6 : 5^2}$  jest równy

- A.  $5^6$       B.  $15 + 2 \cdot 5^5$       C. 25      D.  $5^7$

**Zadanie 7 (0–1)**

Liczba  $\log_8 4$  jest równa

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{3}{2}$

**Zadanie 8 (0–1)**

Cena ulgowego karnetu na basen stanowi 60% ceny karnetu normalnego. Karnet ulgowy kosztuje 60 zł. Za karnet normalny trzeba zapłacić

- A. 84 zł      B. 100 zł      C. 360 zł      D. 36 zł

**Zadanie 9 (0–1)**

Oprocentowanie lokaty terminowej było równe 4%. Po roku bank podwyższył oprocentowanie do 5%. Oprocentowanie lokaty wzrosło

- A. o 20%.      B. o 25%.      C. o 40%.      D. o 75%.



**Zadanie 10 (0–1)**

Suma  $2^{15} + 2^{15} + 2^{15} + 2^{15}$  jest równa

- A.  $2^{60}$       B.  $8^{15}$       C.  $2^{18}$       D.  $2^{17}$

**Zadanie 11 (0–1)**

Iloczyn liczb  $6,4 \cdot 10^8$  i  $8,5 \cdot 10^{-3}$  jest równy

- A.  $5,44 \cdot 10^5$       B.  $0,544 \cdot 10^6$       C.  $5,44 \cdot 10^6$       D.  $5,44 \cdot 10^7$

**Zadanie 12 (0–1)**

Liczba  $b$  jest o 20% mniejsza od liczby  $a$ , zaś liczba  $c$  jest o 20% większa od liczby  $b$ . Zatem

- A.  $a = \frac{4}{5}c$       B.  $a = c$       C.  $a = \frac{13}{12}c$       D.  $a = 1\frac{1}{24}c$

**Zadanie 13 (0–1)**

Dana jest liczba  $\left(2 \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) - 7 : 4\frac{1}{5}\right) : \frac{-2\frac{1}{8} + 0,625 \cdot \frac{4}{5}}{-2 + 1\frac{1}{9} \cdot (-6)}$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                             |          |          |
|---------------------------------------------|----------|----------|
| Podana liczba to liczba całkowita ujemna.   | <b>P</b> | <b>F</b> |
| Podana liczba to liczba wymierna nieujemna. | <b>P</b> | <b>F</b> |

**Zadanie 14 (0–2)**

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczbą wymierną jest

- A.  $\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$       E.  $\sqrt{12}(\sqrt{48} + \sqrt{27})$   
B.  $\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{18})$       F.  $\sqrt{12}(\sqrt{54} + \sqrt{24})$   
C.  $\sqrt{8}(\sqrt{18} + \sqrt{50})$       G.  $\sqrt{18}(\sqrt{32} + \sqrt{24})$   
D.  $\sqrt{8}(\sqrt{36} + \sqrt{25})$       H.  $\sqrt{18}(\sqrt{25} + \sqrt{49})$

**Zadanie 15 (0–2)**

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Wartość 2 przyjmuje wyrażenie

- A.  $\log_2 1 + \log_2 1$       E.  $\log_4 4 + \log_4 2$   
B.  $\log_2 4 + \log_2 4$       F.  $\log_2 8 + \log_4 2$   
C.  $\log_2 4 - \log_2 2$       G.  $\log_4 4 - \log_4 2$   
D.  $\log_2 8 - \log_2 2$       H.  $\log_4 8 + \log_4 2$



**Zadanie 16**

Dane są liczby  $\sqrt{11}$ ,  $\sqrt[3]{64}$ ,  $\sqrt[3]{(-17)^3}$ ,  $\sqrt{121}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{\frac{169}{9}}$ ,  $\sqrt{(-2)^2}$ .

**Zadanie 16.1 (0-1)**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                                       |          |          |
|-------------------------------------------------------|----------|----------|
| Dokładnie dwie spośród podanych liczb są ujemne.      | <b>P</b> | <b>F</b> |
| Dokładnie dwie spośród podanych liczb są niewymierne. | <b>P</b> | <b>F</b> |

**Zadanie 16.2 (0-1)**

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.  
Suma dwóch najmniejszych liczb spośród podanych jest równa ?.

**Zadanie 17 (0-1)**

Dane są liczby  $x$  i  $y$  spełniające warunki:  $x < -1$  oraz  $x < y < 0$ .  
Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.  
Iloczyn liczby o 1 większej od  $x$  i liczby  $y$  jest

|           |             |          |           |                                    |
|-----------|-------------|----------|-----------|------------------------------------|
| <b>A.</b> | dodatni,    | ponieważ | <b>1.</b> | jeden z czynników jest równy zero. |
| <b>B.</b> | równy zero, |          | <b>2.</b> | czynniki są różnych znaków.        |
| <b>C.</b> | ujemny,     |          | <b>3.</b> | oba czynniki są ujemne.            |

**Zadanie 18**

Dane są liczby  $a = 6 - 3\sqrt{48}$  i  $b = 8 + 2\sqrt{108}$ .

**Zadanie 18.1 (0-1)**

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3. Suma liczb  $a$  i  $b$  jest liczbą

|    |              |          |    |                                                   |
|----|--------------|----------|----|---------------------------------------------------|
| A. | wymierną,    | ponieważ | 1. | suma liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną. |
| B. | niewymierną, |          | 2. | suma liczb wymiernych jest liczbą wymierną.       |
|    |              |          | 3. | suma tych liczb jest równa 14.                    |

**Zadanie 18.2 (0-1)**

Iloczyn liczb  $a$  i  $b$  jest równy  
**A.**  $24(16 + \sqrt{3})$     **B.**  $-24(16 + \sqrt{3})$     **C.**  $-24(16 - \sqrt{3})$     **D.**  $24(16 - \sqrt{3})$



**Zadanie 19 (0-2)**

Określ znak iloczynu liczb  $a = \frac{13}{5} - 2,(5)$  oraz  $b = \sqrt{2} - 1,(4)$ .

**Zadanie 20 (0-2) → Przykład 1, str. 57**

Ile jest dodatnich liczb dwucyfrowych, których reszta z dzielenia przez 6 jest równa 2?

**Zadanie 21 (0-3) → Przykład 2, str. 57**

Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 3 i przez 4?

**Zadanie 22 (0-4) → Przykład 3, str. 57**

Ile jest dodatnich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4 lub przez 5?

**Zadanie 23**

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości  $2\sqrt{27}$  i  $4\sqrt{12}$ .

**Zadanie 23.1 (0-2)**

Oblicz obwód tego trójkąta.

**Zadanie 23.2 (0-2)**

Kwadrat o boku  $a$  ma pole równe polu tego trójkąta. Oblicz  $a$ .

**Zadanie 24 (0-2)**

Cena brutto kurtki zimowej wynosiła 307,50 zł. Na cenę tę składała się cena netto oraz 23% podatku VAT. Cena kurtki została obniżona i po obniżce podatek VAT wynosił 51,75 zł. O ile zmniejszyła się cena netto tej kurtki?

**Zadanie 25 (0-2)**

Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o  $p\%$  i w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki. Wyznacz  $p$ .

**Zadanie 26 (0-4)**

Dane są liczby  $x = (\frac{3}{5} - \frac{2}{15}) : (\frac{11}{20} - 0,2)$  i  $y = (0,5 \cdot 3)^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^{-1}$ . O ile procent liczba  $x$  jest większa od liczby  $y$ ?

**Zadanie 27 (0-4)**

Woda płynąca jednocześnie z kranów  $A$ ,  $B$  i  $C$  może napełnić basen w ciągu 4 godzin. Woda płynąca tylko z kranu  $A$  napełnia w ciągu godziny  $\frac{1}{10}$  basenu, a tylko z kranu  $B - \frac{1}{12}$  basenu. Ile czasu trwałoby napełnianie basenu wodą płynącą tylko z kranu  $C$ ?

**D Zadanie 28 (0-4)**

Uzasadnij, że jeśli  $a = 45$ ,  $b = (2 - \sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5})$  i  $c = (-2 + \sqrt{5})(11 + 2\sqrt{5})$ , to liczba  $\frac{\sqrt{a}}{b+c}$  jest liczbą wymierną.





### Zadanie 1 (0-2)

Dane są liczby  $a = 3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$ ,  $b = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$  i  $c = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2$ . Liczba  $x$  jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb  $a$  i  $b$ , a liczba  $y$  – najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb  $a$  i  $c$ . Wyznacz zaokrąglenie ilorazu  $\frac{y}{x}$  z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

### Zadanie 2 (0-2)

Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{x^{-1}y^4 \cdot (x^{-1}y)^3}{(x^2y^{-1})^{-1}x^2y^2}$  dla  $x = \sqrt[3]{4}$  i  $y = \sqrt[6]{2}$ .

### Zadanie 3 (0-2)

Liczbę  $1,(54)$  zapisz jako ułamek nieskracalny  $\frac{m}{n}$ .

### D Zadanie 4 (0-3)

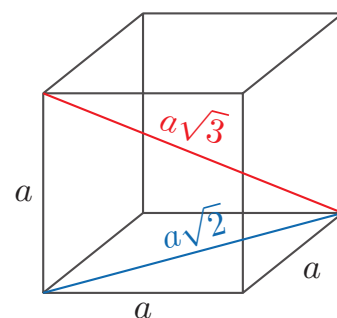
Wykaż, że iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 120.

### D Zadanie 5 (0-3)

Uzasadnij, że liczba  $7^{11} \cdot 11^7$  ma 96 różnych dzielników.

### D Zadanie 6 (0-3)

Przekątna sześcianu o krawędzi  $a$  ma długość  $a\sqrt{3}$ , a przekątna jego podstawy ma długość  $a\sqrt{2}$ . Uzasadnij, że jeśli długość przekątnej sześcianu jest liczbą wymierną, to długość przekątnej podstawy jest liczbą niewymierną.



### D Zadanie 7 (0-3)

Logarytmy o podstawie 3 liczb  $a$ ,  $b$  i  $c$  są kolejnymi liczbami naturalnymi. Uzasadnij, że liczba  $a + b + c$  jest podzielna przez 13.

### D Zadanie 8 (0-3)

Uzasadnij, że jeśli  $a\sqrt{2}$  jest liczbą wymierną różną od 0, to  $a$  jest liczbą niewymierną.

### Zadanie 9

Z cyfr 1, 2, 3 i 4 utworzono wszystkie możliwe liczby czterocyfrowe o niepowtarzających się cyfrach.

### D Zadanie 9.1 (0-2)

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 9 każdej z tych liczb jest równa 1.

### D Zadanie 9.2 (0-2)

Uzasadnij, że żadna taka liczba nie jest sumą trzech spośród tych liczb.

**Wskazówka.** Możesz skorzystać z tego, że reszta z dzielenia przez 9 każdej z takich liczb jest równa 1.

# 2 Język matematyki

Wieża CN Tower w Toronto jest najwyższą budowlą na zachodniej półkuli. Stosunek jej wysokości (553,33 m) do wysokości, na której znajduje się kosz wieży (342 m), wynosi około 1,618. Jest to przybliżenie liczby zwanej **złotą liczbą** lub **złotym stosunkiem**. O odcinku mówimy, że został podzielony w złotym stosunku, jeśli stosunek dłuższej części do krótszej jest równy stosunkowi całego odcinka do dłuższej części:  $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$ .



Dokładna wartość złotego stosunku wynosi  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .



## 2.1. Zbiory

Zgodnie z tradycją zbiory oznaczamy wielkimi literami. Aby opisać zbiór, należy określić, jakie są jego **elementy**. Można to zrobić słownie lub (jeśli to możliwe) wypisać jego elementy, np.:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  – zbiór liczb naturalnych

$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$  – zbiór naturalnych dzielników liczby 20

Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**. Zbiór, do którego należy nieskończenie wiele elementów, nazywamy **zbiorem nieskończonym**.

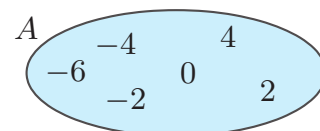
Aby zapisać, że element należy do zbioru, używamy symbolu  $\in$ , np.  $7 \in \mathbb{N}$ , aby zapisać, że element nie należy do zbioru – symbolu  $\notin$ , np.  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem  $\emptyset$ .

### Ćwiczenie 1

Na diagramie przedstawiono zbiór  $A$ . Określ, czy zdanie jest prawdziwe.

- a)  $2 \in A$                       c)  $\sqrt{16} \in A$                       e)  $-6 \notin A$   
b)  $1 \in A$                       d)  $\sqrt{9} \in A$                       f)  $6 \notin A$



Jeszcze innym sposobem opisanie zbioru jest podanie warunku, jaki muszą spełniać jego elementy. Na przykład zapis  $B = \{x \in \mathbb{N}: x^2 \leq 16\}$  oznacza, że  $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

### Ćwiczenie 2

Czy zbiory  $A$  i  $B$  są równe?

- a)  $A = \{x \in \mathbb{N}: x^2 \leq 27\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N}: x^2 \leq 30\}$   
b)  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N}: x^2 \leq 9\}$

Dwa zbiory są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

**Uwaga.** Zdanie: „ $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $q$ ” oznacza, że prawdziwe są dwa zdania: „jeżeli  $p$ , to  $q$ ” oraz „jeżeli  $q$ , to  $p$ ”

### Definicja

Zbiór  $A$  jest **podzbiorem** zbioru  $B$ , jeśli każdy element zbioru  $A$  jest elementem zbioru  $B$ . Mówimy też, że zbiór  $A$  jest zawarty w zbiorze  $B$ .

Zapisujemy to:  $A \subset B$ .

Zapis  $A \not\subset B$  oznacza, że  $A$  nie jest podzbiorem zbioru  $B$ .

**Uwaga.** Dla dowolnego zbioru  $A$  zachodzą zależności:  $A \subset A$  i  $\emptyset \subset A$ . Jeśli  $A \subset B$  i  $B \subset A$ , to zbiory  $A$  i  $B$  są równe:  $A = B$ .

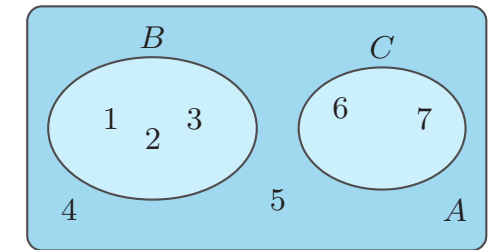
### Przykład 1

Na diagramie obok przedstawiono zbiory:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ,  $C = \{6, 7\}$ .

Między tymi zbiorami zachodzą zależności:

$$B \subset A \text{ i } C \subset A$$



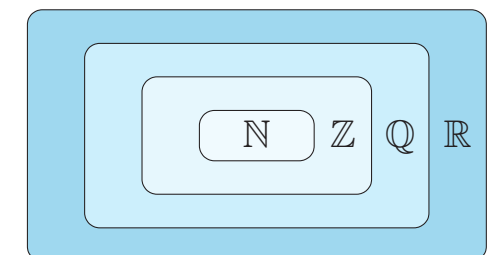
### Ćwiczenie 3

Czy prawdziwa jest któraś z zależności:  $A \subset B$ ,  $B \subset A$ ?

- a)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$   
b)  $A = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 \leq 16\}$   
c)  $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 = 12\}$ ,  $B = \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$

Zwróćmy uwagę, że dla poznanych dotychczas zbiorów liczbowych zachodzą zależności:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



### Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że: a)  $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ , b)  $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$ .

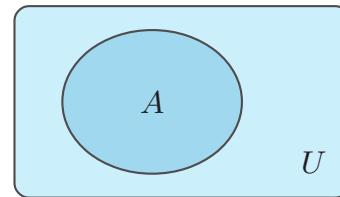
## Zadania

- Zapisz zbiory  $A$  i  $B$ , wypisując wszystkie ich elementy. Czy zachodzi któraś z zależności:  $A \subset B$ ,  $B \subset A$ ?  
a)  $A = \{x \in \mathbb{N}: x \leq 5\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N}: x^2 \leq 36\}$   
b)  $A = \{x \in \mathbb{Z}: -4 \leq x \leq -2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z}: 4 \leq x^2 \leq 16\}$   
c)  $A = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 49\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{N}: x^2 = 49\}$
- Czy zbiory  $A$  i  $B$  mają tyle samo elementów?  
a)  $A$  – zbiór dzielników liczby 6,  $B$  – zbiór dzielników liczby 15  
b)  $A$  – zbiór dzielników liczby 36,  $B$  – zbiór dzielników liczby 48  
c)  $A$  – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100 podzielnych przez 2 lub 5,  $B$  – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100 podzielnych przez 3 lub 4
- Liczba podzbiorów zbioru dwuelementowego  $\{1, 2\}$  jest równa  $2^2$ . Podzbiórami tymi są:  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{1, 2\}$ . Wypisz wszystkie podzbiory:  
a) zbioru trzelementowego  $\{1, 2, 3\}$  i sprawdź, czy jest ich  $2^3$ ,  
b) zbioru czterelementowego  $\{1, 2, 3, 4\}$  i sprawdź, czy jest ich  $2^4$ .
- Który ze zbiorów  $A$ ,  $B$  ma więcej podzbiorów?  
a)  $A = \{n \in \mathbb{N}: 2 < n^3 < 125\}$ ,  $B = \{n \in \mathbb{N}: n|125\}$   
b)  $A = \{k \in \mathbb{Z}: 2 < k^2 < 15\}$ ,  $B = \{k \in \mathbb{Z}: 1 < k^4 < 75\}$



## 2.2. Działania na zbiorach

Na zamieszczonym obok diagramie  $U$  oznacza zbiór wszystkich rozpatrywanych elementów i jest nazywany **przestrzenią**. Gdy mówimy o liczbach, to przestrzenią jest zwykle zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .

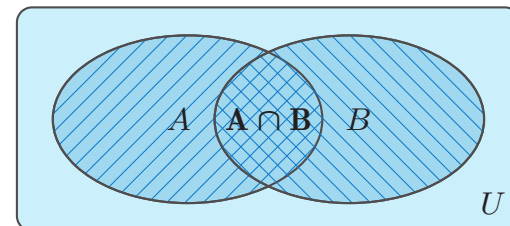


### Definicja

**Iloczynem** (częścią wspólną) zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór elementów, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów. Iloczyn zbiorów  $A$  i  $B$  oznaczamy  $A \cap B$ .

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ i } x \in B\}$$

Na zamieszczonym obok diagramie iloczyn zbiorów  $A$  i  $B$  jest przedstawiony jako obszar podwójnie zakreskowany.



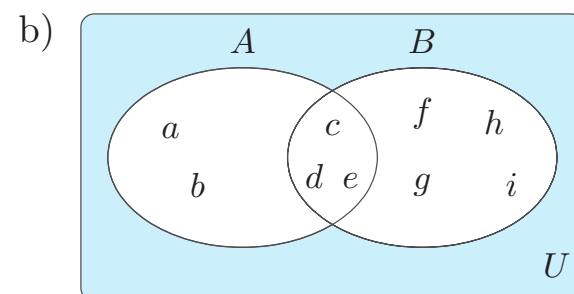
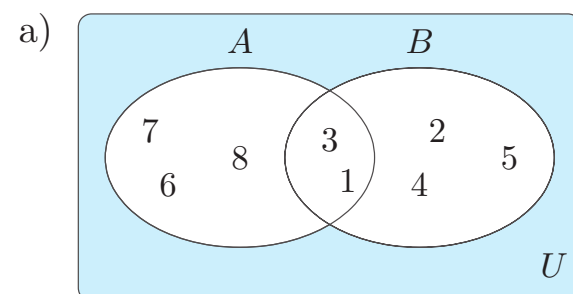
### Przykład 1

Niech  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Tylko liczby 2 i 4 należą do obu zbiorów jednocześnie, zatem:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

### Ćwiczenie 1

Na podstawie diagramu podaj elementy zbiorów  $A$ ,  $B$  oraz  $A \cap B$ .

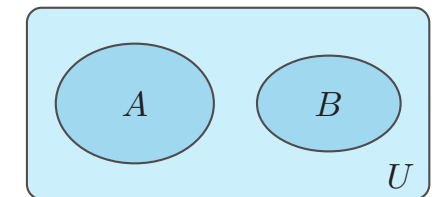


### Ćwiczenie 2

Wyznacz iloczyn zbiorów  $A$  i  $B$ .

- $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ ,  $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
- $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}\}$ ,  $B = \{\frac{10}{100}, \frac{20}{100}, \frac{30}{100}, \frac{40}{100}, \frac{50}{100}\}$
- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $B = \{\log 1, \log 10, \log 100, \log 10\,000, \log 100\,000\}$

Zbiory  $A$  i  $B$  nazywamy **rozłącznymi**, gdy nie mają wspólnych elementów, czyli gdy  $A \cap B = \emptyset$ . Na zamieszczonym obok diagramie przedstawiono rozłączne zbiory  $A$  i  $B$ .



### Ćwiczenie 3

Czy zbiory  $X$  i  $Y$  są rozłączne?

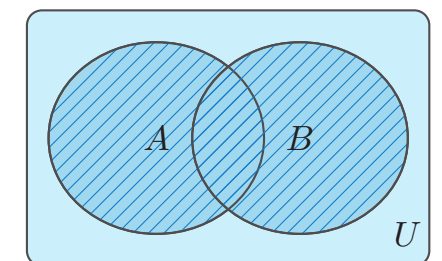
- $X$  – zbiór liczb parzystych,  $Y$  – zbiór liczb nieparzystych
- $X$  – zbiór liczb parzystych,  $Y$  – zbiór liczb podzielnych przez 5

### Definicja

**Sumą zbiorów**  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór elementów, które należą do co najmniej jednego ze zbiorów  $A$  lub  $B$ . Sumę zbiorów  $A$  i  $B$  oznaczamy  $A \cup B$ .

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

Na zamieszczonym obok diagramie suma zbiorów  $A$  i  $B$  jest przedstawiona jako obszar zakreskowany.

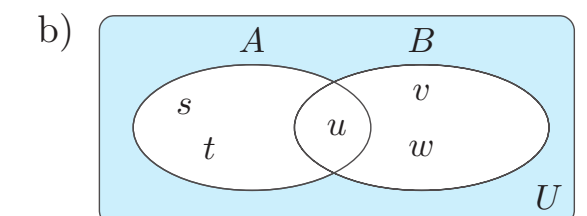
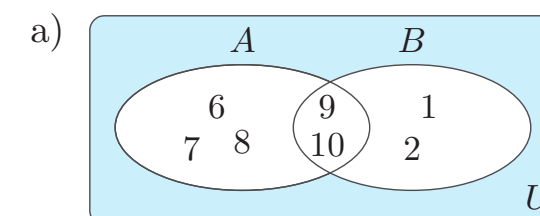


### Przykład 2

Jeśli  $A = \{2, 3, 4\}$  i  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ , to  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ .

### Ćwiczenie 4

Na podstawie diagramu podaj elementy sumy zbiorów  $A$  i  $B$ .



### Ćwiczenie 5

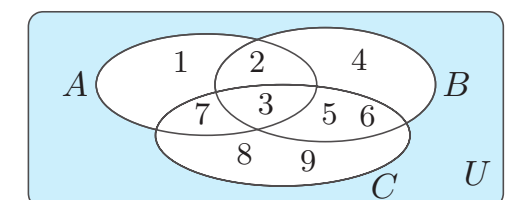
Wyznacz sumę zbiorów  $A$  i  $B$ .

- $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ ,  $B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- $A$  – zbiór dzielników liczby 6,  $B$  – zbiór dzielników liczby 8
- $A$  – zbiór liczb parzystych,  $B$  – zbiór liczb nieparzystych

### Ćwiczenie 6

Korzystając z diagramu, wyznacz zbiory:

- $A \cup B$ ,  $A \cup C$ ,  $B \cup C$ ,  $A \cup B \cup C$ ,
- $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $B \cap C$ ,  $A \cap B \cap C$ .



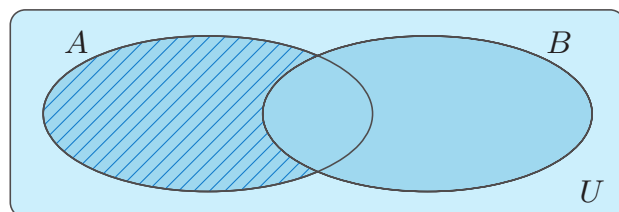


## Definicja

**Różnicą zbiorów**  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór elementów, które należą do zbioru  $A$  i nie należą do zbioru  $B$ . Różnicę zbiorów  $A$  i  $B$  oznaczamy  $A \setminus B$ .

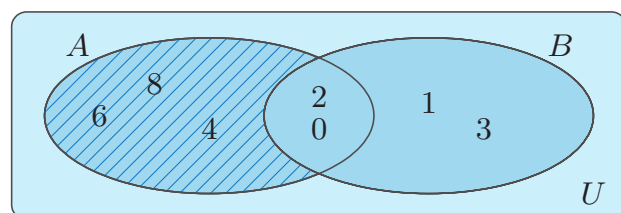
$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

Na zamieszczonym obok diagramie różnica  $A \setminus B$  jest przedstawiona jako obszar zakreskowany.

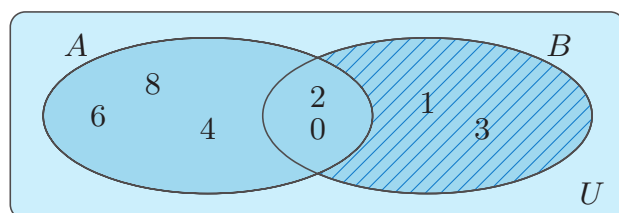


## Przykład 3

Dane są zbiór  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$  i zbiór  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ . Wyznacz zbiory  $A \setminus B$  oraz  $B \setminus A$ .



$$A \setminus B = \{4, 6, 8\}$$



$$B \setminus A = \{1, 3\}$$

## Ćwiczenie 7

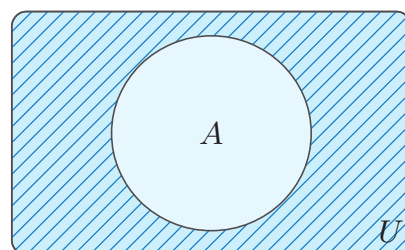
Wyznacz zbiory  $A \setminus B$  i  $B \setminus A$ .

- a)  $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ,  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$   
 b)  $A = \{n \in \mathbb{N}: 8|n \text{ i } n \leq 50\}$ ,  $B = \{n \in \mathbb{N}: 6|n \text{ i } n \leq 50\}$

Szczególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest **dopełnienie zbioru** oznaczane przez  $A'$  i definiowane jako różnica całej przestrzeni i zbioru  $A$ :

$$A' = U \setminus A = \{x \in U: x \notin A\}$$

Obszar zakreskowany na diagramie to zbiór  $A'$ .



## Ćwiczenie 8

Rozpatrzmy zbiór  $U = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$  oraz jego podzbiory  $A$  i  $B$ , przy czym do zbioru  $A$  należą liczby parzyste, a do  $B$  liczby podzielne przez 3. Uzasadnij, że zachodzi równość:

$$\text{a) } (A \cap B)' = A' \cup B', \quad \text{b) } (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Podane obok równości zachodzą dla dowolnych zbiorów  $A, B$ . Nazywane są prawami De Morgana.

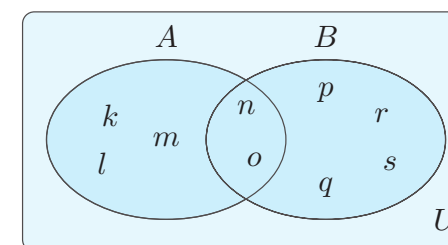
## Prawa De Morgana

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

## Zadania

1. Na diagramie przedstawiono zbiory  $A$  i  $B$ . Wyznacz zbiory  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .



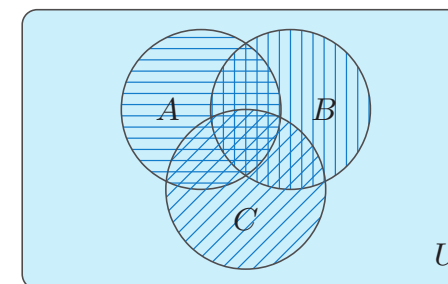
2. Wyznacz zbiory  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .

a)  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{-3, -1, 1, 3\}$

b)  $A = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$ ,  $B = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{4}\}$

c)  $A = \mathbb{N}$ ,  $B = \mathbb{Z}$

3. Na diagramie obok obszar potrójnie zakreskowany odpowiada zbiorowi  $A \cap B \cap C$ . Wyznacz ten zbiór dla  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ .

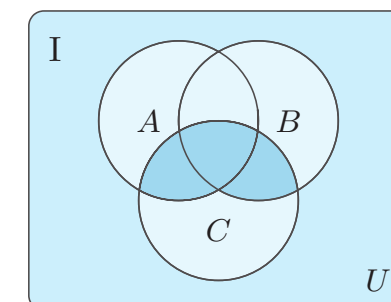


4. Dane są zbiory:  $A$  – zbiór spółgłosek w słowie *arytmetyka*,  $B$  – zbiór spółgłosek w słowie *geometria* oraz  $C$  – zbiór spółgłosek w słowie *algebra*. Wyznacz zbiór:

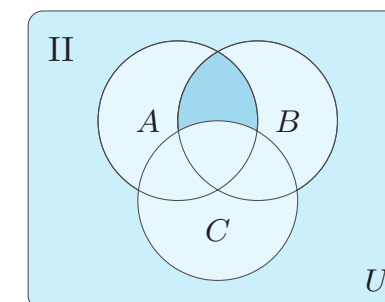
a)  $A \cap B$ , c)  $B \setminus A$ , e)  $B \setminus C$ , g)  $A \cap B \cap C$ ,

b)  $A \setminus B$ , d)  $B \cap C$ , f)  $C \setminus B$ , h)  $A \cup B \cup C$ .

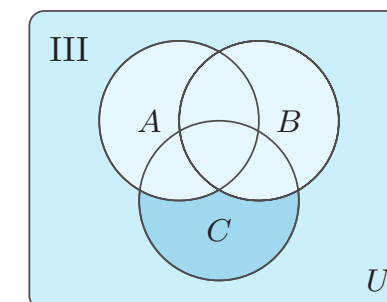
5. Na którym z poniższych diagramów ciemnoniebieski obszar odpowiada podanemu zbiorowi?



a)  $(A \cap B) \setminus C$



b)  $C \setminus (A \cup B)$



c)  $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

6. Przyjmij, że żadne dwa spośród zbiorów  $A, B, C$  nie są rozłączne, i na oddzielnych diagramach przedstaw zbiory:

a)  $A \cup (B \cap C)$  i  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ,

b)  $A \cap (B \cup C)$  i  $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ,

c)  $A \cap (B \setminus C)$  i  $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$ ,

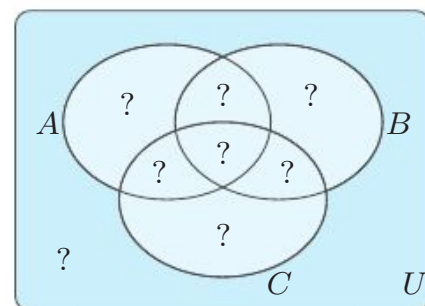
d)  $B \setminus (A \cup C)$  i  $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$ .

Porównaj otrzymane wyniki.

## Czy wiesz, że...

Diagramy ilustrujące zależności między zbiorami – takie jak użyte w tym temacie – noszą nazwę **diagramów Venna**, na cześć angielskiego matematyka i filozofa Johna Venna (1834–1923).

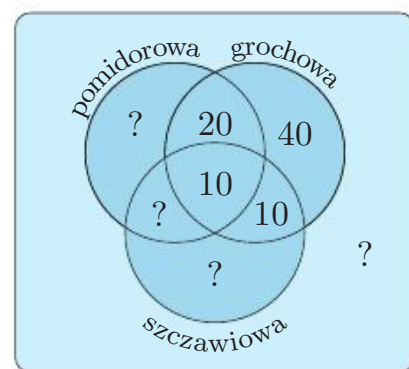
7. Dany jest zbiór  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ . Przerysuj przedstawiony obok diagram do zeszytu i umieść na nim liczby ze zbioru  $U$ , korzystając z podanych niżej informacji.  
 $A \cap B \cap C = \{1, 2\}$ ,  $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ ,  
 $B \cap C = \{1, 2, 6\}$ ,  $A \cap C = \{1, 2\}$ ,  
 $A = \{1, 2, 3, 4, 9\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ ,  $C = \{1, 2, 5, 6\}$ .



Następnie wyznacz zbiory:

- a)  $A \cup B$ ,  $A \cup C$ ,  $A \setminus C$ ,  $B \setminus C$ ,  
b)  $A \setminus (B \cap C)$ ,  $(A \setminus B) \cap C$ ,  
c)  $A \cup (B \cap C)$ ,  $(A \cup B) \cap C$ ,  
d)  $A' \cap B'$ ,  $A' \cup C'$ ,  $A' \cup B' \cup C'$ .
8. W ofercie pewnej stołówki są tylko trzy zupy: pomidorowa, szczawiowa i grochowa. Wśród 300 uczniów korzystających z tej stołówki przeprowadzono ankietę, których wyniki podano poniżej.

130 uczniów lubi zupę pomidorową,  
110 uczniów lubi zupę szczawiową,  
80 uczniów lubi zupę grochową,  
40 uczniów lubi zupę pomidorową i szczawiową,  
30 uczniów lubi zupę pomidorową i grochową,  
20 uczniów lubi zupę szczawiową i grochową,  
10 uczniów lubi wszystkie zupy.



Przerysuj do zeszytu i uzupełnij powyższy diagram. Podaj, ilu uczniów:

- a) nie lubi żadnej z oferowanych przez stołówkę zup,  
b) lubi dokładnie jedną zupę oferowaną przez stołówkę,  
c) lubi dokładnie dwie zupy oferowane przez stołówkę.
9. W 30-osobowej klasie 14 uczniów ma psa, 9 – kota, 3 – świnki morskie, a 8 nie ma żadnego z wymienionych zwierząt. Uczniowie mający świnki morskie nie mają innych zwierząt. Podaj, ilu uczniów ma jednocześnie psa i kota.

10. Naskicuj diagramy dla zbiorów:

$$(A \cup B \cup C)', (A \cap B \cap C)', A' \cup B' \cup C', A' \cap B' \cap C'$$

Na ich podstawie sformułuj odpowiednie prawa rachunku zbiorów.

## Dowiedz się więcej

### Iloczyn kartezjański zbiorów. Punkty kratowe

**Parą uporządkowaną**  $(a, b)$  nazywamy dwa elementy  $a, b$ , wśród których  $a$  jest wyróżniony jako pierwszy element tej pary. Pary uporządkowane  $(a, b)$  i  $(c, d)$  są równe wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = c$  i  $b = d$ .

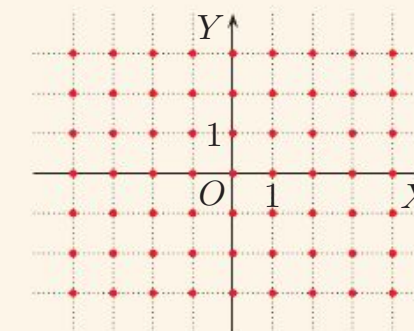
#### Definicja

**Iloczynem kartezjańskim** zbiorów  $A$  i  $B$  nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych  $(a, b)$  takich, że  $a \in A$  i  $b \in B$ . Zbiór ten oznaczamy  $A \times B$ .

Nazwa „iloczyn kartezjański” upamiętnia francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes’a (1596–1650), zwanego w Polsce Kartezjuszem, autora sentencji „Myślę, więc jestem”. Wprowadził on do geometrii metodę współrzędnych. Obecnie stosujemy w matematyce wiele oznaczeń Kartezjusza, np. zmienne:  $x, y, z, \dots$ , współczynniki literowe:  $a, b, c, \dots$ , zapisywanie potęg w postaci:  $a^7, x^2, x^4, \dots$



Zbiór  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  to zbiór wszystkich par  $(x, y)$  takich, że  $x$  i  $y$  są liczbami całkowitymi (rysunek obok). Nazywamy go zbiorem **punktów kratowych**.



#### Przykład 1

Niech  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ , wówczas  
 $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ .

#### Twierdzenie Picka

Pole wielokąta, którego wierzchołkami są punkty kratowe, można obliczyć, korzystając ze wzoru:

$$P = \omega + \frac{b}{2} - 1$$

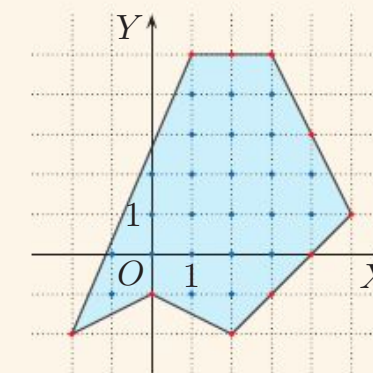
gdzie  $\omega$  jest liczbą punktów kratowych należących do wnętrza wielokąta,  $b$  – liczbą punktów kratowych należących do brzegu wielokąta.

#### Przykład 2

Dla wielokąta przedstawionego na rysunku obok mamy:  $\omega = 24$ ,  $b = 10$ , czyli pole  $P = 24 + \frac{10}{2} - 1 = 28$ .

1. Korzystając z twierdzenia Picka, oblicz pole wielokąta  $ABCDE$ .

- a)  $A(-4, 4)$ ,  $B(-2, -1)$ ,  $C(3, 2)$ ,  $D(2, 5)$ ,  $E(0, 3)$   
b)  $A(-4, 1)$ ,  $B(-1, -2)$ ,  $C(1, 2)$ ,  $D(7, 1)$ ,  $E(-1, 5)$

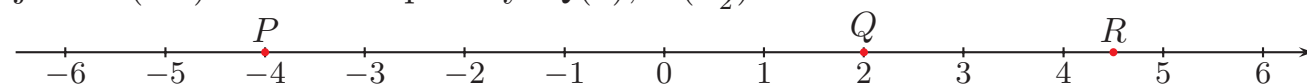


## Oś liczbowa

**Oś liczbowa** to prosta, na której wyróżniono punkt zerowy (początek osi), zwrot oraz przynajmniej jeden punkt wskazujący na jednostkę.

Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada dokładnie jeden punkt na osi liczbowej. Każdemu punktowi na osi liczbowej przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba zwana **współrzędną** tego punktu.

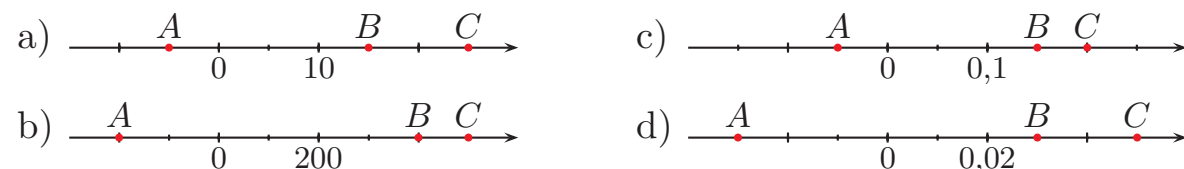
Na poniższej osi liczbowej punkt  $P$  odpowiada liczbie  $-4$ , co możemy zapisać jako  $P(-4)$ . Pozostałe punkty:  $Q(2)$ ,  $R(4\frac{1}{2})$ .



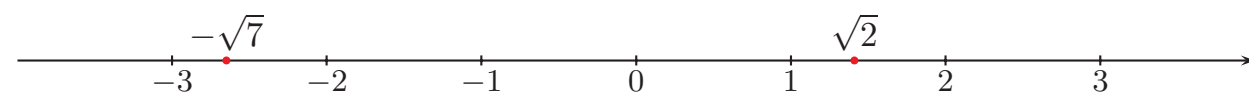
1. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



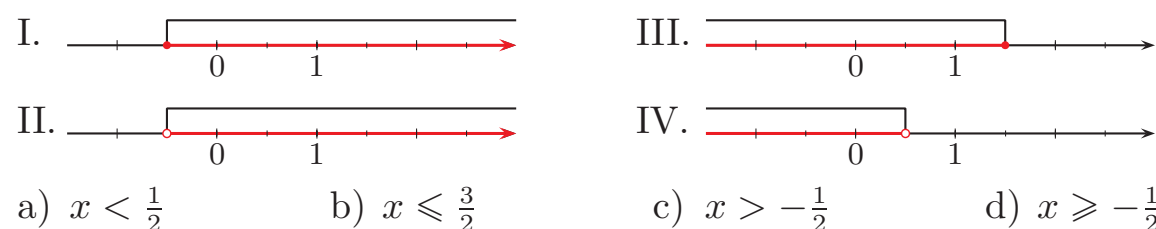
2. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



3. Na osi liczbowej zaznaczono przybliżone położenia punktów odpowiadających liczbom  $-\sqrt{7}$  oraz  $\sqrt{2}$ . Przerysuj tę oś do zeszytu i zaznacz na niej przybliżone położenia punktów odpowiadających liczbom  $-\sqrt{10}$ ,  $-\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$ .



4. Na którym z poniższych rysunków zaznaczono zbiór tych liczb  $x$ , które spełniają podany warunek?



5. Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb  $x$ , które spełniają warunek:

a)  $x < 4\frac{1}{3}$ ,      b)  $x \leq -2\frac{3}{4}$ ,      c)  $x > -3\frac{1}{5}$ ,      d)  $x \geq 8,3$ .

6. Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb  $x$ , które spełniają warunek:

a)  $x \geq 21$ ,      b)  $x < -35$ ,      c)  $x \leq 0,03$ ,      d)  $x > -3\frac{1}{6}$ .

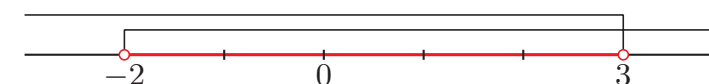
## 2.3. Przedziały

### Przedziały ograniczone

#### Przykład 1

Zaznacz na osi liczbowej zbiór tych liczb  $x$ , które spełniają jednocześnie dwa warunki (dwie nierówności):  $x > -2$  i  $x < 3$ .

Liczby, które spełniają obie nierówności jednocześnie, muszą być większe od  $-2$  i mniejsze od  $3$ , co możemy też zapisać symbolicznie za pomocą podwójnej nierówności:  $-2 < x < 3$ . Na osi liczbowej zbiór ten przedstawiamy następująco:

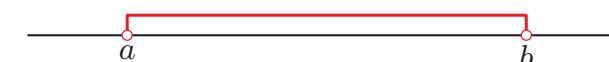


Liczby  $-2$  i  $3$  nie należą do zbioru. Na osi zaznaczamy je pustymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem otwartym** od  $-2$  do  $3$ , co symbolicznie zapisujemy  $(-2; 3)$ . Liczby  $-2$  i  $3$  nazywamy **końcami przedziału**.

Podając, które liczby  $x$  spełniają obie nierówności, piszemy:  $x \in (-2; 3)$ .

| Nazwa zbioru      | Oznaczenie | Warunek, jaki spełniają liczby $x$ należące do zbioru | Ilustracja graficzna |
|-------------------|------------|-------------------------------------------------------|----------------------|
| przedział otwarty | $(a; b)$   | $a < x < b$                                           |                      |

**Uwaga.** Przedział otwarty  $(a; b)$  często zaznacza się na osi liczbowej następująco:



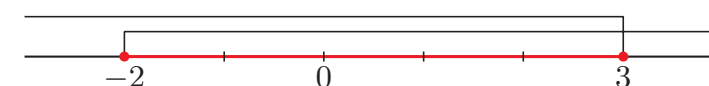
#### Ćwiczenie 1

Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

a)  $(-3; 2)$       b)  $(0; 4)$       c)  $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$       d)  $(100; 150)$

#### Przykład 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek:  $-2 \leq x \leq 3$ .



Liczby  $-2$  i  $3$  należą do zbioru, dlatego na osi końce przedziałów zaznaczamy zamalowanymi kółkami. Ten zbiór nazywamy **przedziałem obustronnie domkniętym** od  $-2$  do  $3$  i zapisujemy symbolicznie  $[-2; 3]$ .



Jeśli do przedziału należy tylko jego lewy koniec, to taki przedział nazywamy **lewostronnie domkniętym**, a jeśli należy do niego tylko jego prawy koniec – to **prawostronnie domkniętym**.

| Nazwa zbioru                      | Oznaczenie | Warunek, jaki spełniają liczby $x$ należące do zbioru | Ilustracja graficzna |
|-----------------------------------|------------|-------------------------------------------------------|----------------------|
| przedział domknięty               | $[a; b]$   | $a \leq x \leq b$                                     |                      |
| przedział lewostronnie domknięty  | $[a; b)$   | $a \leq x < b$                                        |                      |
| przedział prawostronnie domknięty | $(a; b]$   | $a < x \leq b$                                        |                      |

**Długością** każdego z przedziałów  $(a; b)$ ,  $(a; b]$   $[a; b)$   $[a; b]$  nazywamy liczbę:  $b - a$ .

### Ćwiczenie 2

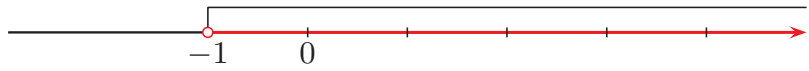
Zapisz nierówności, które są spełnione przez liczby należące do podanego przedziału. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej. Podaj, ile liczb całkowitych należy do tego przedziału.

- a)  $[-1; 4]$       b)  $[\frac{3}{2}; 5)$       c)  $(-2; -\frac{1}{2}]$       d)  $[-60; 40]$

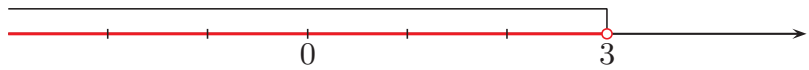
### ■ Przedziały nieograniczone

#### Przykład 3

a) Zbiór liczb spełniających nierówność  $x > -1$  nazywamy **przedziałem lewostronnie otwartym** od  $-1$  do  $\infty$  i zapisujemy symbolicznie  $(-1; \infty)$ .

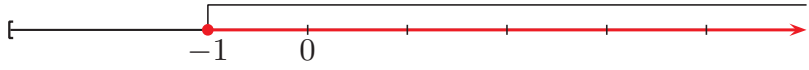


b) Zbiór liczb spełniających nierówność  $x < 3$  nazywamy **przedziałem prawostronnie otwartym** od  $-\infty$  do  $3$  i zapisujemy symbolicznie  $(-\infty; 3)$ .

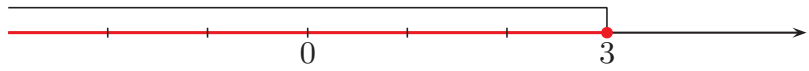


#### Przykład 4

a) Zbiór liczb spełniających nierówność  $x \geq -1$  nazywamy **przedziałem lewostronnie domkniętym** od  $-1$  do  $\infty$  i zapisujemy symbolicznie  $[-1; \infty)$ .



b) Zbiór liczb spełniających nierówność  $x \leq 3$  nazywamy **przedziałem prawostronnie domkniętym** od  $-\infty$  do  $3$  i zapisujemy symbolicznie  $(-\infty; 3]$ .



**Uwaga.** Zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  możemy zapisać jako przedział  $(-\infty; \infty)$ .

### Ćwiczenie 3

Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

| Nazwa zbioru                     | Oznaczenie     | Warunek, jaki spełniają liczby $x$ należące do zbioru | Ilustracja graficzna |
|----------------------------------|----------------|-------------------------------------------------------|----------------------|
| przedział otwarty                | $(a; \infty)$  | ?                                                     |                      |
| przedział lewostronnie domknięty | $[a; \infty)$  | $x \geq a$                                            | ?                    |
| ?                                | ?              | $x \leq b$                                            |                      |
| ?                                | $(-\infty; b)$ | ?                                                     | ?                    |

### Zadania

1. Zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających podany warunek. Zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

- a)  $-7 \leq x \leq 0$       b)  $\frac{1}{4} \leq x < \sqrt{2}$       c)  $x \geq 2\frac{1}{4}$       d)  $x < -\frac{1}{3}$

2. Zapisz symbolicznie przedział zaznaczony na osi liczbowej i podaj warunek, jaki muszą spełniać liczby należące do tego przedziału.

- a)      c)      e)      g)   
b)      d)      f)      h)

3. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich:

- a) liczb dodatnich, których odległość od zera jest mniejsza od 4,  
b) liczb ujemnych, których odległość od zera jest nie większa niż 4,  
c) liczb nieujemnych, których odległość od zera jest większa od  $2\frac{1}{2}$ ,  
d) liczb niedodatnich, których odległość od zera jest nie mniejsza niż  $\sqrt{2}$ .

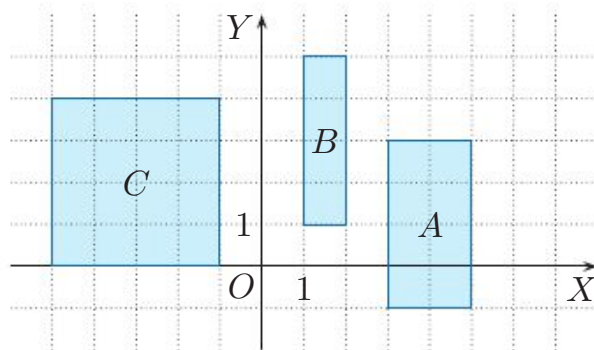
4. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór, do którego należą liczby odległe:

- a) od liczby 1 o mniej niż 2,      c) od liczby 3 o nie więcej niż 2,  
b) od liczby  $-1$  o mniej niż 3,      d) od liczby  $-\frac{1}{4}$  o nie więcej niż  $\frac{3}{2}$ .

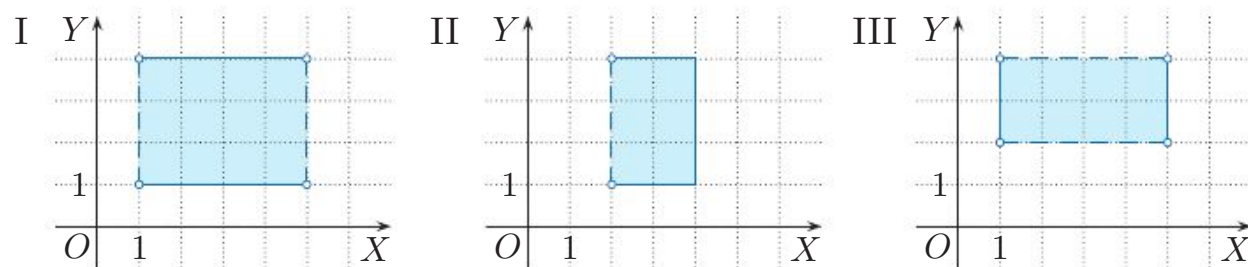
5. Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do podanego przedziału.

- a)  $[-1; 4)$       b)  $(0; 6]$       c)  $[-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}]$       d)  $[-\frac{25}{4}; -2]$

6. Które spośród liczb  $x, y, z$  należą do podanego przedziału?
- a)  $(-2\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3}]$ ,  $x = -\frac{8}{3}$ ,  $y = -2\frac{3}{4}$ ,  $z = 3\frac{2}{5}$   
b)  $[-1; 2)$ ,  $x = -1,01$ ,  $y = -0,(9)$ ,  $z = 1,(9)$
7. Ile liczb całkowitych  $x$  spełnia podany warunek?
- a)  $\sqrt{x} \in [1; 2]$     b)  $\sqrt{x} \in [2; 3]$     c)  $\sqrt[3]{x} \in (1; 2)$     d)  $\sqrt[3]{x} \in [-2; 0)$
8. Sprawdź, czy zachodzi któraś z zależności:  $A \subset B$ ,  $B \subset A$ .
- a)  $A = (-1; 2]$ ,  $B = [-1; 3]$     c)  $A = (-\frac{7}{8}; \frac{15}{8})$ ,  $B = [-\frac{6}{7}; \frac{13}{7}]$   
b)  $A = (-\infty; 7)$ ,  $B = (2; 7]$     d)  $A = (\frac{22}{7}; 7)$ ,  $B = (\pi; \sqrt{50})$
9. Określ najdłuższy przedział domknięty, którego końce są liczbami całkowitymi i który jest zawarty w podanym przedziale.
- a)  $(-2\frac{1}{2}; 5]$     b)  $(-\pi; 6)$     c)  $[-3\frac{3}{4}; 2\frac{3}{4}]$     d)  $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$
10. Wskaż na osi liczbowej liczbę jednakowo odległą od końców przedziału:
- a)  $[-3; 1]$ ,    b)  $[-2; 3]$ ,    c)  $[\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$ ,    d)  $[1\frac{1}{4}; 2\frac{3}{4}]$ .
11. Dla jakich wartości parametru  $p$  przedziały  $[p; p+1]$  oraz  $[2p; 2p+1]$  mają dokładnie jeden punkt wspólny?
12. Współrzędne  $(x, y)$  punktów należących do prostokąta  $A$  (rysunek obok) spełniają warunki:  $x \in [3; 5]$  i  $y \in [-1; 3]$ . Zapisz warunki, jakie spełniają punkty należące do:
- a) prostokąta  $B$ ,  
b) kwadratu  $C$ .
13. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono zbiór punktów  $(x, y)$ , których współrzędne spełniają podane warunki?



- a)  $x \in (2; 4]$ ,  $y \in [1; 4]$     b)  $x \in [1; 5]$ ,  $y \in (2; 4)$     c)  $x \in (1; 5)$ ,  $y \in [1; 4]$



**Uwaga.** Linia przerywana na rysunku oznacza, że leżące na niej punkty nie należą do zbioru.

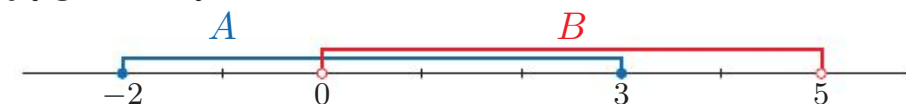
## 2.4. Działania na przedziałach

Przedziały to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych. Można wykonywać na nich działania:  $\cup, \cap, \setminus$ .

### Przykład 1

Wyznacz zbiory  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$  dla  $A = [-2; 3]$  i  $B = (0; 5)$ .

Kiedy wykonujemy działania na przedziałach, wygodnie jest posługiwać się ich ilustracją graficzną.



|                           |                                                                                                       |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A \cup B = [-2; 5)$      | Sumie przedziałów $A$ i $B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona co najmniej jednym kolorem. |
| $A \cap B = (0; 3]$       | Iloczynowi przedziałów $A$ i $B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona dwoma kolorami.        |
| $A \setminus B = [-2; 0]$ | Różnicy $A \setminus B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem niebieskim.       |
| $B \setminus A = (3; 5)$  | Różnicy $B \setminus A$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem czerwonym.        |

**Uwaga.** Wykonując działania na przedziałach, zwróć szczególną uwagę na ich końce. Na osi liczbowej używamy pustego kółka, gdy liczba odpowiadająca temu punktowi nie należy do zbioru, a kółka zamalowanego – gdy należy.

### Ćwiczenie 1

Wyznacz zbiory  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .

- a)  $A = (1; 4)$ ,  $B = (2; 6)$     c)  $A = [1; 3]$ ,  $B = [-5; 3]$   
b)  $A = [-4; 1]$ ,  $B = [1; 3]$     d)  $A = (-3; 2]$ ,  $B = (-1; 2]$

### Przykład 2

Zbiór  $X$  zaznaczony na osi liczbowej jest sumą przedziałów  $[-3; 0)$  i  $(1; 4]$ .



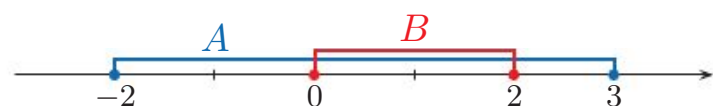
### Ćwiczenie 2

Zaznacz na osi liczbowej zbiór  $X$ .

- a)  $X = [-4; -1] \cup [2; 4)$     b)  $X = [-6; -5] \cup (-3; 2) \cup [4; \infty)$

### Przykład 3

Dane są zbiory  $A = [-2; 3]$  i  $B = [0; 2]$ . Wyznacz zbiór  $A \setminus B$ .



Różnicą zbiorów  $A$  i  $B$  jest suma przedziałów.

$$A \setminus B = [-2; 0) \cup (2; 3]$$

### Ćwiczenie 3

Wyznacz zbiór  $A \setminus B$ .

- a)  $A = [-5; 4]$ ,  $B = (-3; -1)$       c)  $A = [-3; \infty)$ ,  $B = [-1; 2]$   
 b)  $A = [-3; 5]$ ,  $B = [2; \frac{5}{2})$       d)  $A = \mathbb{R}$ ,  $B = [-3; 1]$

### Zadania

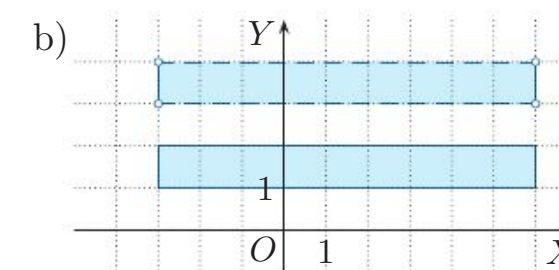
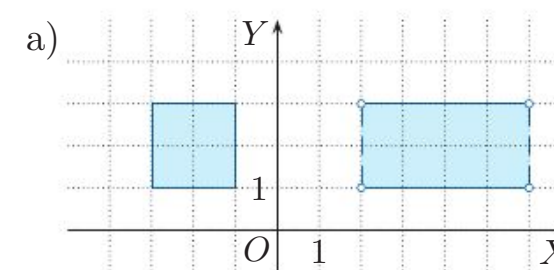
- Wyznacz zbiory  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .  
 a)  $A = (-3; 0)$ ,  $B = [-1; 4]$       c)  $A = (-\infty; 2]$ ,  $B = [0; 2]$   
 b)  $A = (-4; 2]$ ,  $B = [-\frac{1}{2}; 3]$       d)  $A = [-1; 2]$ ,  $B = [2; \infty)$
- Ile elementów należy do zbioru  $X$ ? Wykonaj odpowiednią ilustrację graficzną.  
 a)  $X = [-5; 6] \cap \mathbb{N}$       b)  $X = (-3; 3) \cap \mathbb{Z}$       c)  $X = (-\pi; \pi) \cap \mathbb{N}$
- Niech  $A = (-5; 3)$ ,  $B = (-7; 4)$ . Ile liczb całkowitych należy do zbioru:  
 a)  $A \cup B$ ,      b)  $A \cap B$ ,      c)  $A \setminus B$ ,      d)  $B \setminus A$ ?
- Zaznacz zbiór  $X$  na osi liczbowej.  
 a)  $X = [-2; 0] \cup [1; 2] \cup [4; 6]$       c)  $X = (-\infty; -4] \cup [-2; 1) \cup \{3\}$   
 b)  $X = (-3; -1) \cup (0; 2] \cup [3; \infty)$       d)  $X = (-\infty; -2) \cup \{0, 1\} \cup [4; \infty)$
- Zaznacz na osi liczbowej zbiory  $A$  i  $B$ , a następnie wyznacz zbiory  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ ,  $B \setminus A$ .  
 a)  $A = (-3; 1) \cup (3; 6)$ ,  $B = (0; 4)$       d)  $A = (-2; 0]$ ,  $B = \{0\} \cup [3; 5]$   
 b)  $A = [-2; 1] \cup [4; 5]$ ,  $B = (0; \infty)$       e)  $A = [0; 7]$ ,  $B = (1; 3) \cup [8; 9]$   
 c)  $A = (-\infty; 0] \cup [2; 5]$ ,  $B = (-1; 6)$       f)  $A = [1; 9]$ ,  $B = (1; 2) \cup (6; 9)$
- Zaznacz na osi liczbowej zbiory  $A$  i  $B$ , a następnie wyznacz zbiory  $A \setminus B$  i  $B \setminus A$ .  
 a)  $A = [-5; 2]$ ,  $B = \{1, 2\}$       c)  $A = (-\infty; 4]$ ,  $B = \{0\} \cup [4; \infty)$   
 b)  $A = [3; \infty)$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$       d)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1\} \cup (2; \infty)$

- Zapisz w postaci przedziałów zbiory  $A = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -4 \text{ i } x < 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}: x > -1 \text{ i } x \leq 3\}$ ,  $C = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\}$ , a następnie wyznacz:  
 a)  $(A \cup B) \setminus C$ ,      b)  $(A \cup C) \setminus B$ ,      c)  $(A \cap B) \setminus C$ .

$$A' = \mathbb{R} \setminus A$$

- Wyznacz zbiory  $A'$ ,  $B'$  i  $A' \cap B'$ , gdy  $A, B \subset \mathbb{R}$ .  
 a)  $A = (-3; 0)$ ,  $B = [\frac{1}{2}; 3]$       c)  $A = (-\infty; 1) \cup (3; \infty)$ ,  $B = [-4; 4]$   
 b)  $A = [-4; 4]$ ,  $B = (0; 2)$       d)  $A = (-\infty; 0) \cup (1; 5)$ ,  $B = (-5; -1)$

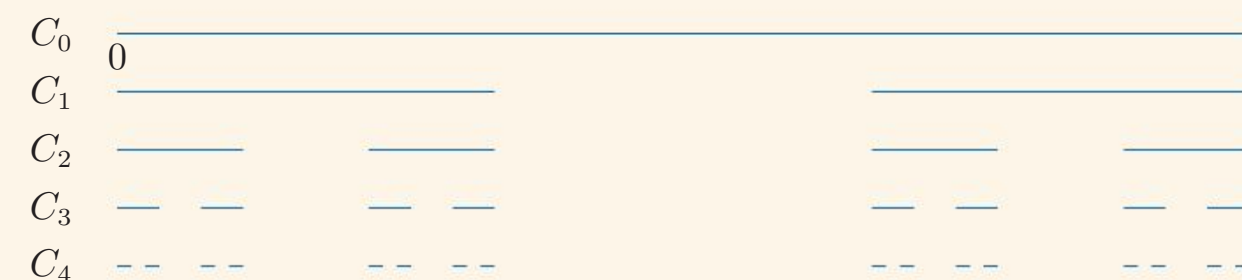
- Podaj za pomocą przedziałów, jakie warunki spełniają współrzędne punktów  $(x, y)$  należących do przedstawionego zbioru.



- Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów  $(x, y)$ , których współrzędne spełniają warunki  $x \in [-3; -1] \cup (1; 2)$  oraz:  
 a)  $y \in [-2; 3]$ ,      b)  $y \in [-3; -1) \cup (1; 3]$ ,      c)  $y \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$ .

### Czy wiesz, że...

Na rysunku przedstawiono początkowe etapy zaproponowanej przez niemieckiego matematyka Georga Cantora (1845–1918) konstrukcji pewnego zbioru – **zbioru Cantora**. Zaczynamy od przedziału  $C_0 = [0; 1]$ , który dzielimy na trzy części równej długości i usuwamy środkową część będącą przedziałem  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ . W ten sposób otrzymujemy zbiór  $C_1 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$ . Następnie z każdej części zbioru  $C_1$  usuwamy jej środkową trzecią część itd.



- a) Zapisz zbiór  $C_2$  w postaci sumy przedziałów. Jaki jest stosunek sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru  $C_2$  do sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru  $C_1$ ?  
 b) Jaki jest stosunek sumy długości przedziałów wchodzących w skład zbioru  $C_4$  do długości zbioru  $C_0$ ?



## Rozwiązywanie równań

1. Sprawdź, czy liczba  $p$  spełnia podane równanie.

a)  $20 - 5x = 4 - 13x$ ,  $p = -2$

b)  $3x - (1 + 5x) = \frac{1}{2}x + 14$ ,  $p = -5$

2. Rozwiąż równanie.

a)  $2x + 4 = 9$

c)  $4x + 3 = 2x - 9$

b)  $-3x + 6 = 7$

d)  $x - 6 = 5x - 2$

3. Rozwiąż równanie.

a)  $\frac{4x-1}{3} = 5$

c)  $\frac{6x+1}{5} = x$

b)  $\frac{2-3x}{4} = 1$

d)  $3 - x = \frac{2x-3}{2}$

4. Liczba  $x$  jest rozwiązaniem podanego równania. Oblicz sumę liczby przeciwnej i liczby odwrotnej do  $x$ .

a)  $\frac{3x-5}{2} + 3 = \frac{3x+5}{6}$

b)  $\frac{4x+1}{5} = 2 - \frac{4-8x}{3}$

Rozwiąż równanie.

a)  $2x - 3 = 9$

$$2x - 3 = 9 \quad / + 3$$

$$2x = 12 \quad / : 2$$

$$x = 6$$

Rozwiązaniem jest liczba 6.

b)  $\frac{x+6}{2} = 5$

$$\frac{x+6}{2} = 5 \quad / \cdot 2$$

$$x + 6 = 10 \quad / - 6$$

$$x = 4$$

Rozwiązaniem jest liczba 4.

c)  $\frac{x+4}{2} - \frac{-2x-5}{6} = \frac{0,5x+2,5}{3}$

d)  $\frac{5-4x}{4} - \frac{6x-1}{3} = \frac{4x-1}{12}$

5. Rozwiąż równanie.

a)  $3(2x - 7) - (7x - 13) = -10$

d)  $3x = x - (1 - (x - 3))$

b)  $-2(-27 - 3x) = -3(2x - 10)$

e)  $5x - (2x + (3 - x)) = 11$

c)  $6 - 2(2x - \frac{1}{2}) = 4x - 2(\frac{3}{4} - 3x)$

f)  $1 - (x - (x - (x - 1))) = 0$

6. Sprawdź, czy równanie jest **tożsamościowe** (spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą), czy **sprzeczne** (niespełnione przez żadną liczbę rzeczywistą).

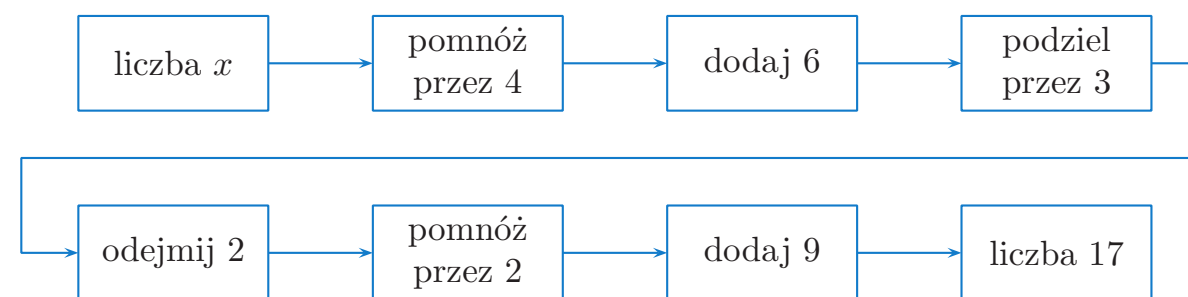
a)  $3x - 6 = 1 - (7 - 3x)$

c)  $\frac{3}{2}(4x - 6) = \frac{2}{3}(9x - 6)$

b)  $4 - (3 + 2x) = 5 - (2x + 6)$

d)  $\frac{1}{2}(8 - \frac{1}{2}x) = 4 - \frac{1}{4}x$

7. Począwszy od liczby  $x$ , wykonano kolejno ciąg operacji. Wyznacz liczbę  $x$ .



## 2.5. Rozwiązywanie nierówności

Warunek  $ax + b > c$ , gdzie  $x$  jest niewiadomą, nazywamy **nierównością**.

Mówimy, że **liczba spełnia nierówność**, jeśli po podstawieniu jej na miejsce niewiadomej otrzymujemy nierówność prawdziwą. Na przykład liczba 7 spełnia nierówność  $x + 1 > 5$ , bo  $7 + 1 > 5$ . Rozwiązanie nierówności polega na wyznaczeniu zbioru wszystkich liczb, które ją spełniają.

## Ćwiczenie 1

Sprawdź, czy podana liczba spełnia nierówność  $\frac{1}{2}x - 2 < 1$ .

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

## Przykład 1

- a) Rozwiąż nierówność  $x + 3 > 7$ .

$$x + 3 > 7$$

$$x + 3 - 3 > 7 - 3$$

$$x > 4$$

Nierówność jest prawdziwa dla  $x \in (4; \infty)$ .

- b) Rozwiąż nierówność  $x - 4 \leq 5$ .

$$x - 4 \leq 5$$

$$x - 4 + 4 \leq 5 + 4$$

$$x \leq 9$$

Nierówność jest prawdziwa dla  $x \in (-\infty; 9]$ .

Zauważ, że dodanie tej samej liczby do obu stron nierówności lub jej odjęcie od obu stron odpowiada czynności przeniesienia tej liczby na drugą stronę nierówności z przeciwnym znakiem.

## Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność. Podaj najmniejszą liczbę naturalną spełniającą tę nierówność.

a)  $x + 309 < 273$

b)  $x - \frac{1}{2} \geq 2\frac{1}{3}$

c)  $x - \frac{1}{4} \leq -5\frac{1}{2}$

d)  $2x - 3 > x + 17$

## Definicja

Dwie nierówności nazywamy **równoważnymi**, jeśli mają one ten sam zbiór rozwiązań.

## Ćwiczenie 3

Czy podane nierówności są równoważne?

a)  $x - 13 < 56$ ,  $x + 26 > 95$

b)  $x + \frac{1}{4} \geq \frac{2}{3}$ ,  $x + \frac{1}{12} \geq \frac{1}{2}$

## Twierdzenie

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną.

### Przykład 2

Rozwiąż nierówność  $6x + 5 < 17$ .

$$\begin{aligned} 6x + 5 &< 17 && \text{Od obu stron nierówności odejmujemy 5.} \\ 6x &< 12 \quad / : 6 && \text{Obie strony nierówności dzielimy przez 6.} \\ x &< 2 \end{aligned}$$

### Ćwiczenie 4

Rozwiąż nierówność.

$$\text{a) } 3x + 7 \leq 34 \quad \text{b) } \frac{3}{4}x - 1 > \frac{1}{3} \quad \text{c) } 0,1x + 1 < -\frac{1}{2} \quad \text{d) } 5x - 7 \geq 3x + 5$$

## Twierdzenie

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę ujemną, to po zmianie zwrotu nierówności otrzymamy nierówność równoważną.

### Przykład 3

a) Rozwiąż nierówność  $-\frac{1}{3}x > 5$ .

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x &> 5 \quad / \cdot (-3) && \text{Obie strony nierówności mnożymy przez } -3. \\ x &< -15 && \text{Zmieniamy zwrot nierówności.} \end{aligned}$$

Zwróć uwagę na to, że zamiast mnożyć obie strony nierówności przez liczbę ujemną ( $-3$ ), można je pomnożyć przez 3 i przenieść odpowiednie wyrazy na drugą stronę nierówności.

b) Rozwiąż nierówność  $-6x - 4 \leq -13$ .

$$\begin{aligned} -6x - 4 &\leq -13 && \text{Do obu stron nierówności dodajemy 4.} \\ -6x &\leq -9 \quad / : (-6) && \text{Obie strony nierówności dzielimy przez } -6. \\ x &\geq \frac{3}{2} && \text{Zmieniamy zwrot nierówności.} \end{aligned}$$

### Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań tej nierówności.

$$\begin{aligned} \text{a) } -3x - 7 &< 2 && \text{c) } 3(x - 1) \geq x + 5 && \text{e) } \frac{x-3}{2} < \frac{x+2}{3} \\ \text{b) } -\frac{2}{3}x + 1 &\leq 5 && \text{d) } 2\left(x + \frac{1}{4}\right) > \frac{1}{2}x + 4 && \text{f) } \frac{2-x}{5} \leq \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

## Definicja

Nierówność, która nie jest spełniona przez żadną liczbę rzeczywistą, nazywamy **nierównością sprzeczną**.

Nierówność, która jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą, nazywamy **nierównością tożsamościową**.

### Przykład 4

Rozwiąż nierówność.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1-3x}{6} &< -\frac{1}{2}x && \text{b) } \frac{5x-2}{5} \geq x-2 \\ \frac{1-3x}{6} &< -\frac{1}{2}x \quad / \cdot 6 && \frac{5x-2}{5} \geq x-2 \quad / \cdot 5 \\ 1-3x &< -3x && 5x-2 \geq 5x-10 \\ 1 &< 0 && -2 \geq -10 \\ &&& \text{sprzeczność} && \text{tożsamość} \end{aligned}$$

Nierówność jest spreczna.

Nierówność jest tożsamościowa.

### Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy podana nierówność jest tożsamościowa, czy spreczna.

$$\begin{aligned} \text{a) } 3(2 - \frac{1}{6}x) &\geq -0,5x + 1 && \text{d) } \frac{4-3x}{3} \geq \frac{2-5x}{5} + 5 \\ \text{b) } -\frac{2}{3}(3x-2) &> \frac{1}{2}(3-4x) && \text{e) } \frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6} \\ \text{c) } \frac{x-2}{2} &< \frac{3x-4}{6} - 1 && \text{f) } \frac{x+3}{2} - \frac{x-3}{4} \geq \frac{1}{4}x - 3 \end{aligned}$$

## Zadania

1. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb spełniających poniższy warunek (klamra oznacza, że obie nierówności mają być jednocześnie spełnione).

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x+9 \geq 13 \\ 2x-6 < 4 \end{cases} && \text{b) } \begin{cases} 3x+6 > -9 \\ 1-x \geq 3 \end{cases} && \text{c) } \begin{cases} -2x+3 \leq 4 \\ 5-4x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie podane nierówności. Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą należącą do tego przedziału.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x+20 > 8 \text{ i } 5 < 1-x && \text{c) } 2x+3 < 7 \text{ i } 3-4x \leq 19 \\ \text{b) } 2x+3 > 2 \text{ i } 4x < 3 && \text{d) } 3x+9 > -7 \text{ i } -3x > 4x+21 \end{aligned}$$

3. Które spośród liczb  $a = 1 - \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{5} - 1$ ,  $c = \pi + 2$  spełniają nierówność:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3}{4}x - \frac{2}{3} &> x + \frac{1}{2}, && \text{c) } \frac{3x-2}{5} \geq \frac{x+1}{3}, && \text{e) } \frac{3x+2}{-5} < 3-x, \\ \text{b) } \frac{5}{6}x - \frac{1}{2} &\leq \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}, && \text{d) } \frac{2x+7}{3} > \frac{6-x}{2}, && \text{f) } -3(x+3) > \frac{x-5}{-2} \end{aligned}$$

4. Rozwiąż nierówność.

a)  $2 - \frac{x+3}{3} < \frac{2x-3}{2}$

b)  $\frac{2-x}{2} - \frac{2x-1}{3} \leq 1 - x$

c)  $\frac{x+4}{12} + 1 \geq \frac{x}{6} - \frac{3-x}{4}$

d)  $\frac{3x+1}{4} - \frac{6-2x}{5} > -\frac{1}{20} - \frac{x-1}{2}$

e)  $-\frac{1}{6}x - \frac{2x-5}{4} \geq 3 - \frac{8x-3}{3}$

f)  $\frac{x-1}{3} - \frac{2x-1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{x-3}{5}$

5. Rozwiąż nierówność.

a)  $\sqrt{3}x - 6 < 9 - 2\sqrt{3}x$     b)  $\sqrt{2}x + 4 < \sqrt{8}x - 8$     c)  $\sqrt{5}x < \frac{5\sqrt{5}}{3}x - 2\frac{2}{3}$

6. a) Jeśli podwoimy liczbę naturalną  $n$ , od otrzymanego iloczynu odejmiemy 11, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę naturalną mniejszą od 21. Podaj możliwe wartości  $n$ .

b) Jeśli potroimy całkowitą liczbę ujemną  $k$ , do otrzymanego iloczynu dodamy 7, a następnie otrzymaną sumę pomnożymy przez 4, to otrzymamy liczbę większą od 2. Podaj możliwe wartości  $k$ .

c) Jeśli od połowy liczby naturalnej  $m$  odejmiemy trzecią część liczby  $m$  pomniejszonej o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 3. Podaj możliwe wartości  $m$ .

7. Wysokość prostopadłościanu jest równa  $k$ , a jego podstawą jest kwadrat o boku 3. Jakie wartości całkowite może przyjmować  $k$  przy założeniu, że:

a) suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest większa od 38 i mniejsza od 46,

b) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest większe od 40 i mniejsze od 68?

8. Właściciel klubu chce zaprosić na koncert jeden z dwóch zespołów rockowych. Zespół Gamma zażądał za występ 2230 zł, a zespół Kappa – 1550 zł plus 8 zł od każdego uczestnika koncertu. Dla jakiej liczby uczestników tańsze będzie zaproszenie zespołu Gamma?

9. Liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają warunki:  $c < 0$  oraz  $a > b$ . Który symbol,  $<$  czy  $>$ , należy wstawić w miejsce  $?$ , aby otrzymać nierówność prawdziwą?

a)  $-ac \text{ ? } -bc$

b)  $\frac{a}{c^2} \text{ ? } \frac{b}{c^2}$

c)  $\frac{a}{c^3} \text{ ? } \frac{b}{c^3}$

**D 10.** Udowodnij poniższe stwierdzenie.

a) Jeśli  $p < q$  i  $r < s$ , to  $p(r - s) > q(r - s)$ .

b) \* Jeśli  $p, q, r, s > 0$  i  $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ , to  $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s}$  oraz  $\frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$ .

## Przypomnij sobie

### Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Przypomnijmy, że aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy każdy wyraz sumy pomnożyć przez ten jednomian.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x - 2) \cdot x &= \\ &= x^2 \cdot x + 3x \cdot x - 2 \cdot x = \\ &= x^3 + 3x^2 - 2x \end{aligned}$$

1. Wykonaj mnożenie.

a)  $(3x^2 + 2x - 4)x^2$

d)  $\sqrt{2}x^4(\sqrt{8}xy + y^2)$

b)  $-2x^3(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2)$

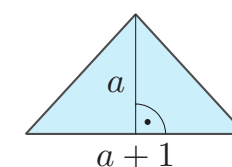
e)  $(x^2y - xy + xy^2)x^2y$

c)  $-\frac{1}{2}x^2(4x^2y - 2xy^2)$

f)  $2\sqrt{3}xy^3(\sqrt{3}x^2y^2 - \frac{1}{2}x^3y)$

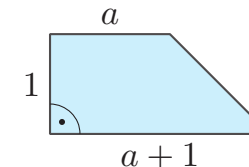
2. Dopasuj do figury wzór na jej pole.

A.



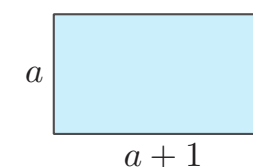
I.  $2a^2 + a$

B.



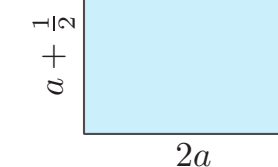
II.  $a^2 + a$

C.



III.  $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a$

D.



IV.  $a + \frac{1}{2}$

3. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a)  $2x(3x - 4) - 6x(x^2 + 2x - 3)$

b)  $-\frac{1}{2}x^2(x^2 - 2x + 6) - 2x(\frac{1}{2} - 4x)$

c)  $\sqrt{6}x^3(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) + \sqrt{3}x(2x^2 - 4\sqrt{2}x)$

d)  $xy^2(2x - 3xy + y) + \frac{1}{4}x^2y(\frac{1}{2}y^2 - 8y)$

e)  $-\frac{1}{2}x^3y(xy - 2xy^2) - \frac{1}{8}xy^2(4x^3 - 16x^2y)$

f)  $-\frac{1}{4}x^2y(-2x + y) - \frac{3}{4}y(x^2 - x^2y) - \frac{1}{2}(x^3y + xy)$

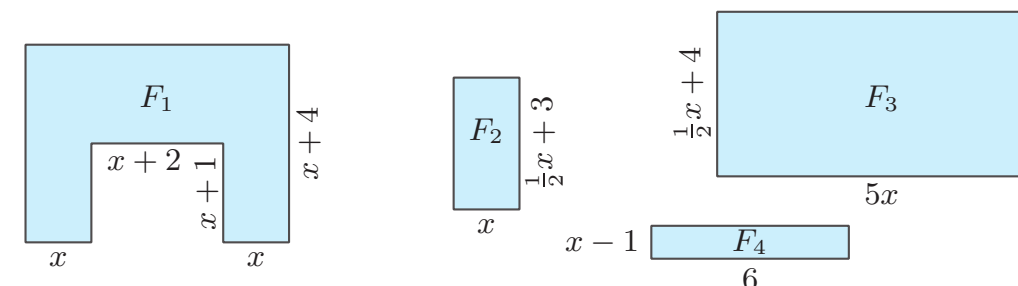
Wyrazy sumy algebraicznej są podobne, gdy składają się z tych samych zmiennych oraz zmienne te występują w tych samych potęgach, np.:  $4x^2y$  i  $7x^2y$ . Wyrazy podobne różnią się co najwyżej czynnikiem liczbowym. Wyrazami podobnymi są też liczby.

**D 4.** Wykaż, że wartość podanego wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej  $x$ .

a)  $4x^2(x^2 - \frac{3}{2}x + 1) - 3x(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1) - 4(x^2 - \frac{3}{4}x - 8)$

b)  $\sqrt{15}x(2\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{5}x - \sqrt{10}) - 2\sqrt{5}x^2(3x - 3\sqrt{15}) + \sqrt{6}(5x - 1)$

**D 5.** Uzasadnij, że suma pól figur  $F_1$  i  $F_2$  równa się różnicy pól figur  $F_3$  i  $F_4$ .





# 2.6. Wyłączanie jednomianu przed nawias

Jeżeli wśród poszczególnych wyrazów sumy występują jednakowe czynniki, można wyłączyć je przed nawias – czasami ułatwia to obliczenia.

## Przykład 1

Oblicz sumę  $7 \cdot 49 + 7 \cdot 51$ .

Wyłączamy przed nawias liczbę 7:

$$7 \cdot 49 + 7 \cdot 51 = 7 \cdot (49 + 51) = 7 \cdot 100 = 700$$

Korzystamy z własności działań:  
 $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$   
zwanej rozdzielną mnożenia  
względem dodawania.

## Ćwiczenie 1

Oblicz w pamięci.

- a)  $2 \cdot 183 + 2 \cdot 17$       c)  $3 \cdot 251 + 3 \cdot 249$       e)  $228 \cdot 12 + 172 \cdot 12$   
b)  $9 \cdot 27 + 9 \cdot 23$       d)  $6 \cdot 378 + 6 \cdot 222$       f)  $19 \cdot 116 + 84 \cdot 19$

Zauważmy, że wspólny czynnik można wyłączyć przed nawias również w sumach algebraicznych.

## Przykład 2

Dana jest suma algebraiczna  $6x^3 + 12x^2$ . Wyłącz przed nawias wspólny czynnik.

- Wyłączamy przed nawias 6:  $6x^3 + 12x^2 = 6(x^3 + 2x^2)$
- Wyłączamy przed nawias  $6x$ :  $6x^3 + 12x^2 = 6x(x^2 + 2x)$
- Wyłączamy przed nawias  $6x^2$ :  $6x^3 + 12x^2 = 6x^2(x + 2)$
- Wyłączamy przed nawias  $12x^2$ :  $6x^3 + 12x^2 = 12x^2(\frac{1}{2}x + 1)$

To, jaki czynnik wyłączymy przed nawias, zależy od konkretnego zadania.

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias jest czynnością odwrotną do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną.

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

## Ćwiczenie 2

Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- a)  $5x + 5y$       c)  $9x - 27y^2$       e)  $39y^2 - 26z$       g)  $-48p + 36q^2$   
b)  $4b - 8a$       d)  $-6x^2 + 18y^2$       f)  $-11a^3 + 22b^2$       h)  $75xy^3 - 125$

## Ćwiczenie 3

Wyłącz wskazany jednomian przed nawias.

- a)  $4x^2 + xy$ ,  $x$       c)  $3xy - xyz$ ,  $xy$       e)  $a^2b + 3a^2b^2 - a^3b$ ,  $a^2b$   
b)  $2x^3 - 12xy$ ,  $2x$       d)  $6pq + 18p^2q$ ,  $6pq$       f)  $4x^2y^2 - 5x^3y^2 + 2x^2y^3$ ,  $x^2y^2$

Przed nawias wyłączamy zwykle **czynnik liczbowy** oraz **wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach**. Na przykład:

$$27x^3y^2 + 18x^2y^3 = 9x^2y^2(3x + 2y)$$

## Ćwiczenie 4

Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach.

- a)  $8x^3 - 36x^2$       d)  $20ax - 15ay$       g)  $2a^3b + 4a^2b - 4a^2b^2$   
b)  $7y^2 - 14y^4$       e)  $8ab + 12bc$       h)  $21p^3q^2 - 27p^2q^3 + 3p^2q^2$   
c)  $5x^3 + 10x^2y$       f)  $4xy + 6x^2y$       i)  $48x^2y + 18xy^2 - 12x^2y^2$

## Zadania

### 1. Oblicz.

- a)  $4 \cdot 49 + 4 \cdot 51$       c)  $113 \cdot 25 + 87 \cdot 25$       e)  $10 \cdot 17 + 10 \cdot 33 + 50 \cdot 10$   
b)  $40 \cdot 47 + 40 \cdot 53$       d)  $63 \cdot 37 + 37 \cdot 37$       f)  $15 \cdot 17 + 15 \cdot 2 + 15$

### 2. Wyłącz podany czynnik przed nawias.

- a)  $a^2b + ab^3$ ,  $ab$       c)  $9a^3b^2 - 3a^2c^2$ ,  $3a^2$       e)  $3a^3b^2 - 6a^2b$ ,  $3a^2b$   
b)  $x^3y^2 - xy^3$ ,  $xy^2$       d)  $4x^4y^4 + 8y^3z$ ,  $4y^3$       f)  $6x^2y^4 + 8x^3y^3$ ,  $2x^2y^3$

### 3. Zapisz podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu, wyłączając przed nawias wskazany jednomian.

- a)  $x^2yz + xy^2z + xyz^2$ ,  $xyz$       c)  $2x^3y - 4x^2y^2 + 6x^2yz$ ,  $2x^2y$   
b)  $x^2yz^2 + xy^2z^3 - x^3yz^2$ ,  $xyz^2$       d)  $12x^4y^3 + 6x^3y^3 - 9x^5y^2$ ,  $3x^3y^2$

### 4. Przepisz do zeszytu i uzupełnij odpowiednimi jednomianami.

- a)  $27y^4 + 36y^3 - 54y^2 = 9y^2(3y^2 + \boxed{?} + \boxed{?})$   
b)  $3ab(3a + b + \boxed{?}) = 9a^2b + \boxed{?} + 6ab$   
c)  $12t^4 - 9t^3 + 3t^2 = \boxed{?} \cdot (\boxed{?} - 3t + 1)$

### 5. Wiadomo, że $a + b = 15$ . Oblicz wartość podanego wyrażenia.

- a)  $-3a - 3b$       b)  $2(a + b) - 4a - 4b$       c)  $a(a + b) + b(a + b)$

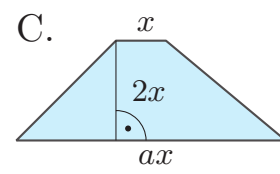
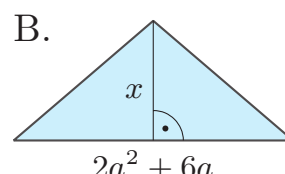
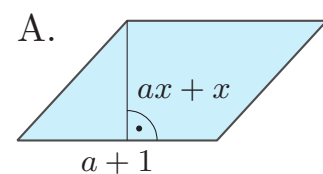
6. Wiadomo, że  $6x + 9y = 12$ . Oblicz wartość podanego wyrażenia.  
 a)  $60x + 90y$       b)  $12x + 18y$       c)  $2x + 3y$       d)  $x + \frac{3}{2}y$
7. Aby obliczyć wartość wyrażenia  $a^2 - 2ab$  dla  $a = 18,5$  i  $b = 4,25$ , można postąpić tak, jak podano poniżej.

Obliczenia będą prostsze, gdy zauważymy, że  $a^2 - 2ab = a(a - 2b)$ .  
 Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:  
 $a(a - 2b) = 18,5(18,5 - 2 \cdot 4,25) = 18,5(18,5 - 8,5) = 18,5 \cdot 10 = 185$

Korzystając z podanej metody, oblicz wartość wyrażenia:

- a)  $x^2 + 2xy$  dla  $x = 17,5$  i  $y = 6,25$ ,      b)  $2x^2 - 3xy$  dla  $x = 14$  i  $y = 6$ .

8. Dopasuj do figury wyrażenie opisujące jej pole.



I.  $ax(a + 3)$

II.  $x^2(a + 1)$

III.  $x(a + 1)^2$

- D** 9. W pudełkach ponumerowanych od 1 do 7 znajdowały się kulki. W pierwszym z nich było  $x$  kulek, a w każdym następnym o jedną kulkę więcej niż w poprzednim. Uzasadnij, że we wszystkich pudełkach było  $7(x + 3)$  kulek.

- D** 10. Przeczytaj podane obok uzasadnienie stwierdzenia, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3. Następnie uzasadnij, że:

- a) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5,  
 b) suma trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6,  
 c) suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3.

Niech  $n$ ,  $n + 1$  i  $n + 2$  będą kolejnymi liczbami naturalnymi. Ich suma  $S$  jest równa:

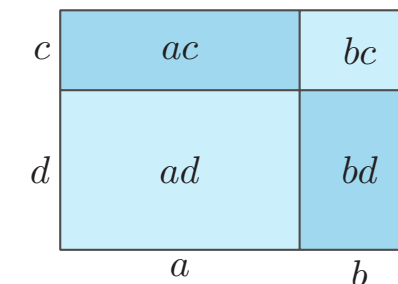
$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Suma  $S$  została przedstawiona w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 3, a drugim liczba naturalna  $n + 1$ . Zatem  $S$  jest podzielna przez 3.

- D** 11. Uzasadnij, że jeśli dwie liczby naturalne są podzielne przez 3, to suma ich kwadratów jest podzielna przez 9.
- D** 12. Uzasadnij, że suma dowolnej liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przedstawienia cyfr tej liczby jest podzielna przez 11 (np.  $23 + 32 = 55$ , a liczba 55 jest podzielna przez 11).

## 2.7. Mnożenie sum algebraicznych

Prostokąt narysowany obok ma boki długości  $a + b$  i  $c + d$ , zatem jego pole jest równe  $(a + b) \cdot (c + d)$ . Pole tego prostokąta możemy również obliczyć, sumując pola czterech mniejszych prostokątów:



$$ac + ad + bc + bd$$

Mamy zatem równość:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne, należy każdy wyraz jednej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy i zapisać sumę otrzymanych iloczynów.

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

**Uwaga.** W zapisie iloczynu sum algebraicznych możemy pominąć znak mnożenia między nawiasami.

### Przykład 1

- a) Wykonaj mnożenie  $(x + 3)(x + 5)$ . Zredukuj wyrazy podobne.

$$(x + 3)(x + 5) = x \cdot x + x \cdot 5 + 3 \cdot x + 3 \cdot 5 = x^2 + 8x + 15$$

Każdy wyraz jednej sumy mnożymy przez każdy wyraz drugiej sumy.

- b) Wykonaj mnożenie  $(a + 4b)(a - b)$ . Zredukuj wyrazy podobne.

$$(a + 4b)(a - b) = a^2 - ab + 4ab - 4b^2 = a^2 + 3ab - 4b^2$$

### Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Zredukuj wyrazy podobne.

- a)  $(x + 4)(x + 3)$       c)  $(p + q)(q - 2p)$       e)  $(a + 3b)(3a - 2b)$   
 b)  $(p + 6)(p - q)$       d)  $(3x + 1)(2x + 6)$       f)  $(2a - \frac{1}{2}b)(4a - 3b)$

### Przykład 2

Wykonaj mnożenie  $(x - 3)(x^2 + x - 2)$ .

Zauważmy, że nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonamy mnożenie danych sum algebraicznych.

$$(x - 3)(x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$(x^2 + x - 2)(x - 3) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

### Ćwiczenie 2

Wykonaj mnożenie.

- a)  $(x-1)(x^2+x-2)$     c)  $(x+y-4)(x-y)$     e)  $(x-y+2)(x+y-3)$   
b)  $(x+3)(2x^2-x+3)$     d)  $(2x-y+6)(x+3y)$     f)  $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

### Przykład 3

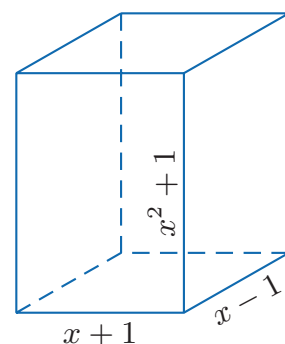
Wyznacz objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku obok. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

Aby wyznaczyć objętość prostopadłościanu, mnożymy przez siebie wyrażenia opisujące długości sąsiednich krawędzi jego podstawy i wysokość:

$$V = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$\begin{aligned} ((x+1)(x-1))(x^2+1) &= && \text{Mnożymy dwie dowolnie wybrane sumy i w otrzy-} \\ = (x^2-x+x-1)(x^2+1) &= && \text{manym wyrażeniu redukujemy wyrazy podobne.} \\ = (x^2-1)(x^2+1) &= && \text{Mnożymy dwie sumy i ponownie} \\ = x^4+x^2-x^2-1 = x^4-1 &= && \text{redukujemy wyrazy podobne.} \end{aligned}$$

Zatem objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem  $V = x^4 - 1$ .



### Ćwiczenie 3

Wyznacz objętość prostopadłościanu o podanych wymiarach. Zapisz otrzymane wyrażenie w jak najprostszej postaci.

- a)  $x+2$ ,  $x-2$ ,  $x^2+2$     b)  $x-2$ ,  $x^2-1$ ,  $x^2+1$

### Przykład 4

- a) Oblicz  $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)$ .

Postępujemy analogicznie jak w przypadku mnożenia sum algebraicznych.

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = 3 + \sqrt{3} - 2 = 1 + \sqrt{3}$$

- b) Oblicz  $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$ .

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= 2(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 = \\ &= 6 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2 = 4 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

### Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a)  $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-1)$     c)  $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$     e)  $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$   
b)  $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)$     d)  $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$     f)  $(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

### D Przykład 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej  $n$  liczba  $S$  jest podzielna przez 5.

$$S = (4n-1)(n-2) + (4-n)(2-n)$$

Przekształcamy wyrażenie opisujące liczbę  $S$ :

$$\begin{aligned} S &= (4n-1)(n-2) + (4-n)(2-n) = && \text{Mnożymy sumy algebraiczne.} \\ &= 4n^2 - 8n - n + 2 + 8 - 4n - 2n + n^2 = && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ &= 5n^2 - 15n + 10 = && \text{Wyłączamy liczbę 5 przed nawias.} \\ &= 5(n^2 - 3n + 2) \end{aligned}$$

Liczbę  $S$  przedstawiliśmy w postaci iloczynu, którego jednym z czynników jest liczba 5, a drugim liczba  $n^2 - 3n + 2$ . Liczba  $n^2 - 3n + 2$  jest całkowita, ponieważ jest sumą liczb całkowitych. Zatem  $S$  jest podzielna przez 5.

### D Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej  $n$  liczba postaci:

- a)  $(2n-3)(n+4) + (n-3)(n+2) - n$  jest podzielna przez 3,  
b)  $(3n-4)(2n-5) - (2n-1)(5-2n)$  jest podzielna przez 5,  
c)  $(6n-3)(n+4) - (3n-2)(2n-1)$  jest podzielna przez 7.

### Przykład 6

- a) Rozwiąż równanie  $(x-1)(x+3) = x^2$ .

$$\begin{aligned} (x-1)(x+3) &= x^2 && \text{Mnożymy sumy algebraiczne i przenosimy } x^2 \\ x^2 + 3x - x - 3 &= x^2 && \text{na lewą stronę równania ze zmienionym znakiem.} \\ 2x - 3 &= 0 && \text{Redukujemy wyrazy podobne.} \\ 2x &= 3 && / : 2 \\ x &= 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- b) Rozwiąż nierówność  $(2x+1)(2x+5) + x \leq (4x-1)(x+3)$ .

$$\begin{aligned} (2x+1)(2x+5) + x &\leq (4x-1)(x+3) \\ 4x^2 + 10x + 2x + 5 + x &\leq 4x^2 + 12x - x - 3 \\ 4x^2 + 10x + 2x + x - 4x^2 - 12x + x &\leq -3 - 5 && \text{Przenosimy ze zmienionym znakiem} \\ 2x &\leq -8 && \text{wyrażenia zawierające niewiadomą} \\ 2x &\leq -8 && \text{na lewą stronę nierówności,} \\ x &\leq -4 && \text{a liczby na prawą stronę.} \end{aligned}$$

### Ćwiczenie 6

Rozwiąż równanie lub nierówność.

- a)  $(x+2)(x-5) = x^2$     d)  $(x+4)(x-1) < x(x+2) + 2x - 1$   
b)  $(x+3)(1-2x) + 2x^2 = 0$     e)  $(2x+3)(3x-1) + 4 > (6x-2)(x+1)$   
c)  $3x^2 - (x+1)(3x+2) = 0$     f)  $(1-x)(2x+3) \leq -2(x+1)(x-2) - 2$



## Zadania

1. Wykonaj mnożenie.

- a)  $(2a + b)(a - 1)$       c)  $(-2a + b)(6a - 2)$       e)  $(2a + b^2)(a - 2b)$   
b)  $(3a - 2b)(2b + 3)$       d)  $(3 + 4a)(-2b - 1)$       f)  $(a^2 - 3b)(2b - 3a)$

2. Wykonaj mnożenie.

- a)  $(x + 2y + 3)(x - 2)$       c)  $(x^2 + y)(x + y + 2)$       e)  $2x(x - 2y)(3 + y)$   
b)  $(2x - y + 1)(2x - 3)$       d)  $(x - y)(x^2 - 2x + 1)$       f)  $-4x(2x - y)(2x + y)$

3. Uprość wyrażenie.

- a)  $(a + 3)(a - 4) + (a - 3)(a + 4)$       c)  $3y^2 - 2x(x + 2y) - (x - y)(2x + y)$   
b)  $(2a - b)(a + 3b) - (a - 4b)(2a + b)$       d)  $2x^2 + 3(x(x + 2) - x(x - 3))$

4. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla  $x = -0,5$ .

- a)  $(x + 2)(6(x + 4) - 5(x + 6))$       b)  $-2(x^4 + x^2) + x^3(x + 1) + (x^2 - 2)(x^2 + 3)$

5. Dany jest prostokąt o bokach długości  $a$  i  $a + 2$ .

- a) Przedstaw wzór na pole tego prostokąta w postaci sumy algebraicznej.  
b) Krótszy bok tego prostokąta przedłużono o 1, a dłuższy skrócono o 1, w wyniku czego powstał kwadrat. Wyznacz różnicę między polem kwadratu a polem prostokąta.

6. a) Dany jest kwadrat o boku długości  $x + 3$ . O ile zmniejszy się pole tej figury, gdy jeden jej bok zmniejszymy o 2, a drugi o 1?

b) Dany jest trójkąt o podstawie równej  $a + 3$  i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej  $a + 4$ . O ile zwiększy się pole trójkąta, gdy tę wysokość zwiększymy o 2?

c) Dany jest prostokąt o bokach długości  $x + 4$  i  $2x + 3$ . O ile zwiększy się pole tego prostokąta, jeśli jeden z jego boków zwiększymy o 2, a drugi o 1? Rozpatrz dwa przypadki.

7. Oblicz.

- a)  $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - 8\sqrt{2})$       c)  $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (4 - \sqrt{6})$   
b)  $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{2})(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$       d)  $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (6 - 3\sqrt{15})$

**D** 8. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby  $x \in \mathbb{R}$  wartość wyrażenia jest nieujemna.

- a)  $(3x - 6)(4x - 2) - (6x + 3)(2x - 6)$   
b)  $(3x - 2)(2x - 1) - (5x - 2)(x - 1)$

9. Rozwiąż równanie.

- a)  $(x + 2)(x - 3) = x^2 + 4$       d)  $(x - 2)(x - 5) = (x + 3)(x + 6)$   
b)  $(x - 4)(x + 6) = x(x - 4)$       e)  $(2x + 1)(x + 3) = (x - 4)(2x - 3)$   
c)  $(2 - x^2)(x^2 - 3) = x + 5x^2 - x^4$       f)  $(2x^2 + x - 3)(x - 4) = x^2(2x - 7)$

10. Rozwiąż nierówność.

- a)  $x^2 - (x + 3)(x - 3) \leq 6x$       c)  $(2x - 1)(3x - 1) - (3x - 2)(2x - 3) \geq 0$   
b)  $(4 - x)(2x + 3) + 2x^2 < 6$       d)  $(4 - 6x)(2x + 1) + (4x - 5)(3x - 1) > x$

11. Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?

- a)  $(3x + 1)(2 - x) + x(3x - 5) \geq x$   
b)  $2x^2 - (2x + 1)(x - 3) > 6x - 7$   
c)  $(3x + 3)(2x - 1) + 4x < 6(x + 2)(x - 1) + 9$   
d)  $(x + 1\frac{1}{2})(2x + 1) \geq (2x + \frac{1}{2})(x - 1) + 6x$

12. a) Dane są dwa prostokąty:  $P_1$  o wymiarach  $(2x + 30)$  cm  $\times$   $(x + 20)$  cm oraz  $P_2$  o wymiarach  $(2x + 10)$  cm  $\times$   $(x + 10)$  cm. Różnica pól prostokątów  $P_1$  i  $P_2$  jest równa  $900$  cm<sup>2</sup>. Oblicz obwody tych prostokątów.

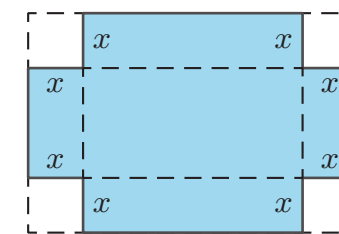
b) Dane są dwa prostokąty o wymiarach  $(6 - x)$  cm  $\times$   $(2x - 5)$  cm oraz  $(x + 5)$  cm  $\times$   $(2x - 1)$  cm. Suma ich pól jest równa  $69$  cm<sup>2</sup>. Oblicz różnicę między polami większego i mniejszego prostokąta.

c) Dane są dwa czworokąty: kwadrat o boku  $(2x + 7)$  cm oraz prostokąt o wymiarach  $(4x + 1)$  cm  $\times$   $(x + 3)$  cm. Pole kwadratu jest o  $91$  cm<sup>2</sup> większe od pola prostokąta. Oblicz różnicę między obwodami kwadratu i prostokąta.

**13.** Wykonaj mnożenie.

- a)  $(x + 1)(x - 1)(x^2 - 1)(x^4 - 1)$       c)  $(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^3 - b^3)$   
b)  $(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)$       d)  $(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^3 - b^3)$

**D** 14. a) Z prostokątnego arkusza tektury o bokach  $30$  cm i  $20$  cm wycięto w rogach kwadraty o boku  $x$  cm. Pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko. Uzasadnij, że pojemność tego pudełka wyraża się wzorem  $V = 4x^3 - 100x^2 + 600x$ .



b) Z kwadratowego arkusza tektury o boku równym  $40$  cm wycięto w rogach kwadraty o boku  $x$  cm. Pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko. Zapisz w postaci sumy algebraicznej wzór opisujący pojemność tego pudełka.

## 2.8. Wzory skróconego mnożenia

### ■ Kwadrat sumy i kwadrat różnicy

#### Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat sumy}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{kwadrat różnicy}$$

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można zilustrować następująco:

$$(\bigcirc + \square)^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

$$(\bigcirc - \square)^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2$$

#### D Ćwiczenie 1

Wykaż, że dla dowolnych liczb  $a$  i  $b$  prawdziwe są podane wyżej wzory.

#### Przykład 1

- a)  $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$   
 b)  $(x - 4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$   
 c)  $(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$   
 d)  $(2x - 5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

#### Ćwiczenie 2

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a)  $(x + 1)^2$       c)  $(x - 3)^2$       e)  $(2x + 1)^2$       g)  $(4x - 1)^2$   
 b)  $(x + 2)^2$       d)  $(x - 5)^2$       f)  $(\frac{1}{2}x + 2)^2$       h)  $(2x - \frac{1}{2})^2$

#### Przykład 2

- a)  $(x + 4y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4y + (4y)^2 = x^2 + 8xy + 16y^2$   
 b)  $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

#### Ćwiczenie 3

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a)  $(x + 2y)^2$       c)  $(3x + 2y)^2$       e)  $(x - \frac{1}{2}y)^2$       g)  $(2x - \frac{1}{4}y)^2$   
 b)  $(2x - y)^2$       d)  $(3x - 4y)^2$       f)  $(3x + \frac{1}{2}y)^2$       h)  $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)^2$

#### Przykład 3

- a)  $(\sqrt{5} + 2)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + 2^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5}$   
 b)  $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{12} + 2 = 8 + 4\sqrt{3}$   
 c)  $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 6 - 2\sqrt{18} + 3 = 9 - 6\sqrt{2}$

#### Ćwiczenie 4

Oblicz.

- a)  $(\sqrt{7} + 1)^2$       c)  $(6 - \sqrt{3})^2$       e)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$       g)  $(\sqrt{6} + \sqrt{15})^2$   
 b)  $(\sqrt{5} - 3)^2$       d)  $(4 + \sqrt{5})^2$       f)  $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2$       h)  $(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{6})^2$

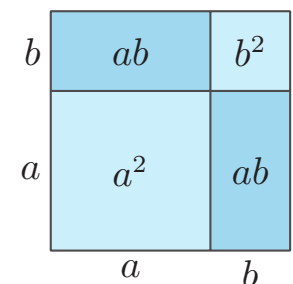
#### Ćwiczenie 5

a) Wyjaśnij, dlaczego rysunek przedstawiony obok jest interpretacją geometryczną wzoru:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

b) Podaj analogiczną interpretację geometryczną wzoru:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



### ■ Różnica kwadratów

#### Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{różnica kwadratów}$$

#### D Ćwiczenie 6

Wykaż, że dla dowolnych liczb  $a$  i  $b$  prawdziwy jest podany wyżej wzór.

#### Przykład 4

- a)  $(\boxed{x} - \boxed{6})(\boxed{x} + \boxed{6}) = \boxed{x}^2 - \boxed{6}^2 = x^2 - 36$   
 b)  $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$   
 c)  $(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$   
 d)  $(y + 2x)(2x - y) = (2x + y)(2x - y) = (2x)^2 - y^2 = 4x^2 - y^2$

#### Ćwiczenie 7

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

- a)  $(x - 3)(x + 3)$       c)  $(2x - 4)(2x + 4)$       e)  $(3x - 4y)(3x + 4y)$   
 b)  $(x + 7)(x - 7)$       d)  $(6 + 5x)(5x - 6)$       f)  $(\frac{1}{2}x + 3y)(3y - \frac{1}{2}x)$

### Przykład 5

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) = 49 - 3 = 46$$

Ten przykład rozwiązany za pomocą kalkulatora wyglądałby następująco:

$$(7 - \sqrt{3})(7 + \sqrt{3}) \approx (7 - 1,732050808)(7 + 1,732050808) = \\ = 5,267949192 \cdot 8,732050808 \approx 46$$

### Ćwiczenie 8

Oblicz.

- a)  $(5 - \sqrt{7})(5 + \sqrt{7})$     d)  $\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$     g)  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$   
b)  $(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3})$     e)  $(2\sqrt{3} + \frac{1}{2})(2\sqrt{3} - \frac{1}{2})$     h)  $(\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$   
c)  $(\sqrt{5} + 1)(1 - \sqrt{5})$     f)  $(2\sqrt{2} - 3)(3 + 2\sqrt{2})$     i)  $\left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

### Przykład 6

Oblicz wartość wyrażenia  $(x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2$  dla  $x = \sqrt{5}$ .

$$(x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2 = x^2 - 1 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x$$

Wartość tego wyrażenia dla  $x = \sqrt{5}$  jest równa  $2(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} = 10 + 2\sqrt{5}$ .

### Ćwiczenie 9

Oblicz wartość wyrażenia:

- a)  $(x + 2)(x - 2) - (x + 4)^2$  dla  $x = \sqrt{5}$ ,  
b)  $(3x - 1)(3x + 1) + (3x - 1)^2$  dla  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  
c)  $(2x + 3)(2x - 3) - (2x + 1)^2$  dla  $x = -\sqrt{6}$ ,  
d)  $(1 - 4x)(4x + 1) + (4x - 3)^2$  dla  $x = -2\sqrt{3}$ .

## Zadania

1. Uprość podane wyrażenie.

- a)  $(x - 3)(x + 3) + (2 + x)(2 - x)$   
b)  $\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$   
c)  $(y + 3x)(3x - y) - (x - 5y)(x + 5y)$   
d)  $(2x - y)(2x + y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$

2. Oblicz wartość wyrażenia:

- a)  $(x + 1)(x - 1) + (x + 2)(x - 2) - (x + 3)(x - 3)$  dla  $x = \sqrt{3}$ ,  
b)  $(1 - 2x)(1 + 2x) + (1 - 3x)(1 + 3x) - (1 - 4x)(4x + 1)$  dla  $x = \sqrt{5}$ ,  
c)  $(2x - 1)^2 - (2x - 1)(1 + 2x) - (2x + 1)^2$  dla  $x = \sqrt{2}$ .

3. Oblicz.

- a)  $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2$     e)  $(4 - \sqrt{5})(4 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5} - 2)(2 + \sqrt{5})$   
b)  $(\sqrt{3} - 1)^2 - (2 - \sqrt{3})^2$     f)  $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$   
c)  $(2\sqrt{3} - \frac{3}{2})^2 - (2\sqrt{3} + \frac{3}{2})^2$     g)  $(2\sqrt{5} - \sqrt{10})^2 - (2\sqrt{5} + 1)(1 - 2\sqrt{5})$   
d)  $(\frac{1}{3} + 3\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{3} - 3\sqrt{2})^2$     h)  $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{2} - 1)(1 + 5\sqrt{2})$

4. Oblicz.

- a)  $\sqrt{\sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt{\sqrt{2} - 1}$     c)  $\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$   
b)  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$     d)  $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

5. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi  $a$ .

- a)  $a = 3 + \sqrt{2}$     b)  $a = 2\sqrt{3} - 1$     c)  $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

6. Oblicz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych  $a$  i  $b$ .

- a)  $a = 4 - \sqrt{2}$ ,  $b = 4 + \sqrt{2}$     b)  $a = 8 + \sqrt{2}$ ,  $b = 4 - 2\sqrt{2}$

7. Oblicz.

- a)  $\left(\sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2$     c)  $\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^2$   
b)  $\left(\sqrt{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{\sqrt{5} - 2}\right)^2$     d)  $\left(\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}}\right)^2$

8. Oblicz wartość wyrażenia:

- a)  $(2x + 3y)(2x - 3y) - (2x - 3y)^2$  dla  $x = \sqrt{\sqrt{10} - 3}$ ,  $y = \sqrt{\sqrt{10} + 3}$ ,  
b)  $(\sqrt{3}x - y)^2 - (x - \sqrt{3}y)^2$  dla  $x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ,  $y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ,  
c)  $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2 - (\sqrt{2}x - \sqrt{5}y)(\sqrt{2}x + \sqrt{5}y)$  dla  $x = \sqrt{5} - 4$ ,  $y = \sqrt{6}$ ,  
d)  $(x^2 - 4y^2)^2 - (4y^2 - x^2)^2$  dla  $x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ ,  $y = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ .

**D** 9. Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba:

- a)  $(n + 1)^2 - n^2$  jest nieparzysta,    c)  $(n + \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2$  jest parzysta,  
b)  $(2n + 1)^2$  jest nieparzysta,    d)  $n^3 - n$  jest podzielna przez 6.

**D** 10. Wyprowadź wzór:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

**Wskazówka.** Odpowiednio pogrupuj wyrazy i skorzystaj ze wzoru na kwadrat sumy.

**D** 11. Wykaż, że:

- a) jeśli  $c \neq 0$  i  $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$ , to  $a = -b$ ,  
b) jeśli  $b \neq 0$  i  $(a - b + c)^2 = a^2 + c^2 - 2ab + 2ac$ , to  $b = 2c$ .

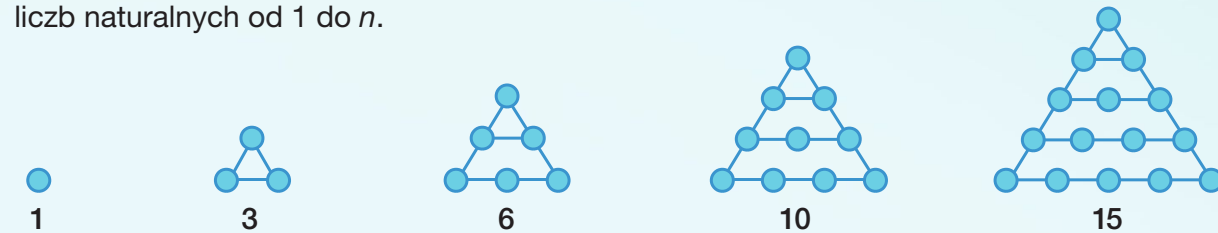


# Liczby wielokątne

Liczby wielokątne badali już w VI wieku p.n.e. starożytni Grecy. Ich nazwę wyjaśniono na poniższych rysunkach.

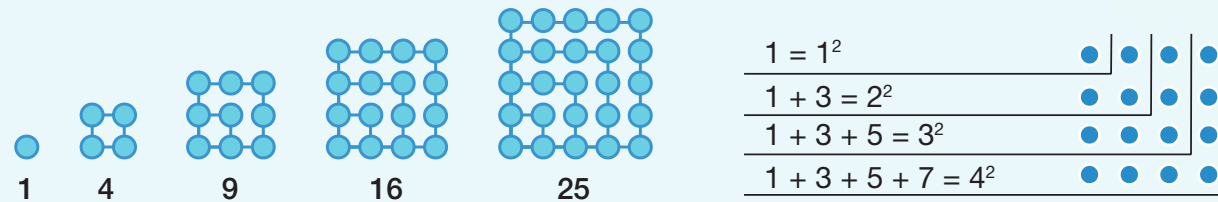
## Liczby trójkątne

Liczby 1, 3, 6, 10, 15, to kolejne liczby trójkątne. Zauważ, że  $n$ -ta liczba trójkątna to suma liczb naturalnych od 1 do  $n$ .



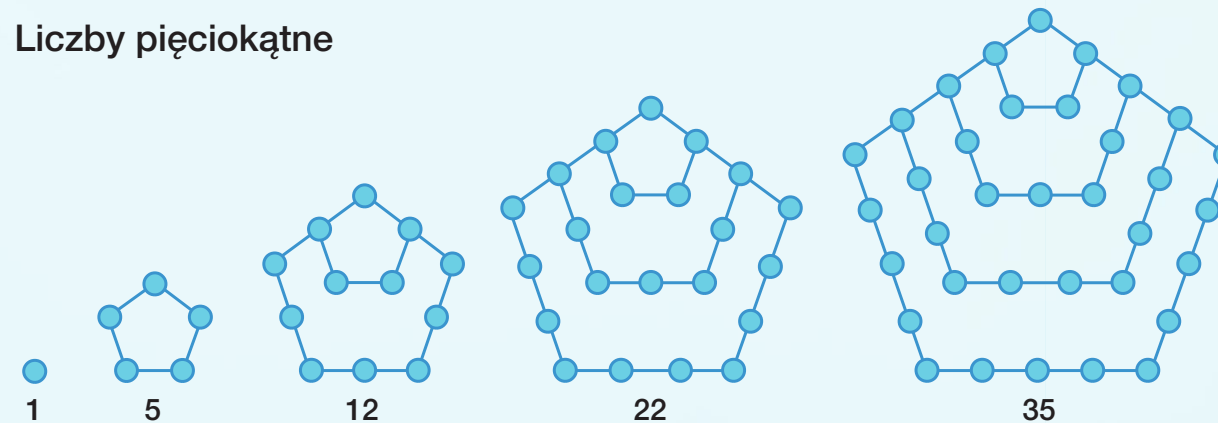
Wzór na  $n$ -tą liczbę trójkątną ma postać  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

## Liczby kwadratowe



- 1 Zauważ, że  $n$ -ta liczba kwadratowa jest sumą  $n$  początkowych liczb nieparzystych (rysunek po prawej). Ile jest równa suma dwudziestu początkowych liczb nieparzystych?
- 2 Wykaż, że dla  $n > 1$   $n$ -ta liczba kwadratowa jest sumą dwóch kolejnych liczb trójkątnych.

## Liczby pięciokątne



- 3 Korzystając z podanego obok wzoru, oblicz szóstą liczbę pięciokątną.
- 4 Oblicz pięć kolejnych liczb sześciokątnych. Podaj ich ilustrację graficzną.

$n$ -ta liczba  $r$ -kątna wyraża się wzorem:

$$(r-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n$$

## 2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

Wzór na różnicę kwadratów:  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  można zastosować do usuwania niewymierności z mianownika.

### Przykład 1

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{5}{\sqrt{2}-1} &= \frac{5}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{5\sqrt{2}+5}{2-1} = 5\sqrt{2}+5 \\ \text{b)} \quad \frac{6}{3+\sqrt{3}} &= \frac{6}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{6(3-\sqrt{3})}{6} = 3-\sqrt{3} \\ \text{c)} \quad \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} &= \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

### Ćwiczenie 1

Usuń niewymierność z mianownika.

$$\text{a)} \quad \frac{1}{6+\sqrt{2}} \quad \text{b)} \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+4} \quad \text{c)} \quad \frac{2}{4-3\sqrt{2}} \quad \text{d)} \quad \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2} \quad \text{e)} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

Wzory skróconego mnożenia wykorzystujemy do rozwiązywania równań i nierówności.

### Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany obok przykład. Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2 - (2-x)^2 &= 8 \\ \text{b)} \quad (3x+1)^2 - 9x^2 &= 7 \\ \text{c)} \quad (x+1)^2 - (x+1)(x-1) &= 12 \end{aligned}$$

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} (x-4)(x+4) - (x-3)^2 &= 17 \\ x^2 - 16 - (x^2 - 6x + 9) &= 17 \\ x^2 - 16 - x^2 + 6x - 9 &= 17 \\ 6x - 25 &= 17 \\ 6x &= 42 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

### Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 4x^2 - (2x+1)^2 &< 3 & \text{c)} \quad (2x+1)(2x-1) &> 4x^2 - 9x \\ \text{b)} \quad (3-x)^2 &\geq x^2 + 12 & \text{d)} \quad 2 - (2x-1)^2 &\leq (3-2x)(2x+3) \end{aligned}$$

### Przykład 2

Dla jakich wartości  $x$  wyrażenie  $x^2 + 4x + 4$  przyjmuje wartość równą 0?

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2, \text{ więc:}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Symbol  $\Leftrightarrow$  zastępuje zwrot: „wtedy i tylko wtedy, gdy”.

#### Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości  $x$  podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

- |                     |                      |                              |
|---------------------|----------------------|------------------------------|
| a) $x^2 + 8x + 16$  | d) $4x^2 - 4x + 1$   | g) $4x^2 + 12x + 9$          |
| b) $x^2 - 6x + 9$   | e) $25x^2 + 10x + 1$ | h) $9x^2 + 12x + 4$          |
| c) $x^2 + 10x + 25$ | f) $16x^2 + 8x + 1$  | i) $9x^2 - 3x + \frac{1}{4}$ |

#### Przykład 3

a) Rozwiąż równanie  $(x + 3)^2 = 6x$ .

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 &= 6x \\x^2 &= -9\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej  
nie może być liczbą ujemną.

Zatem równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną liczbę  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Rozwiąż nierówność  $(2x - 1)^2 < 4x(x - 1)$ .

$$\begin{aligned}4x^2 - 4x + 1 &< 4x^2 - 4x \\1 &< 0\end{aligned}$$

Zatem nierówność jest sprzeczna – nie jest spełniona przez żadną liczbę  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Przykład 4

a) Rozwiąż równanie  $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 = 12x$ .

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) &= 12x \\12x &= 12x\end{aligned}$$

Zatem równanie jest tożsamościowe – jest spełnione przez każdą liczbę  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Rozwiąż nierówność  $(x - 2)(x + 2) + 5 > 0$ .

$$\begin{aligned}x^2 - 4 + 5 &> 0 \\x^2 &> -1\end{aligned}$$

Kwadrat liczby rzeczywistej  
zawsze jest większy od liczby  
ujemnej.

Zatem nierówność jest tożsamościowa – spełniona przez każdą liczbę  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy równanie jest tożsamościowe lub sprzeczne.

- |                                    |                                         |
|------------------------------------|-----------------------------------------|
| a) $(6 - x)^2 - (2 - x)^2 = -8x$   | c) $(x - 4)^2 + 4x = (x - 2)^2 + 12$    |
| b) $(3x + 1)^2 - (1 - 3x)^2 = 12x$ | d) $(x - 3)^2 + 14x = 2x^2 - (x - 4)^2$ |

#### Ćwiczenie 6

Sprawdź, czy nierówność jest tożsamościowa lub sprzeczna.

- |                                             |                                          |
|---------------------------------------------|------------------------------------------|
| a) $(x + 1)^2 - 2 \leq (x - 1)(1 + x) + 2x$ | c) $6x - (3x - 1)^2 \geq (2x + 3)^2$     |
| b) $(2 - x)^2 - (4 - x)^2 \geq 4x - 8$      | d) $(2x + 3)^2 - 30 < 8x^2 - (2x - 3)^2$ |

## Zadania

1. Usuń niewymierność z mianownika. Czy podana liczba należy do przedziału  $(0; 4)$ ?

- |                             |                              |                                     |                                            |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------|
| a) $\frac{1}{1 + \sqrt{3}}$ | d) $\frac{2}{1 - 2\sqrt{2}}$ | g) $\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$  | j) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$  |
| b) $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$ | e) $\frac{6}{3 + 2\sqrt{3}}$ | h) $\frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$  | k) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$ |
| c) $\frac{3}{2 + \sqrt{5}}$ | f) $\frac{8}{3\sqrt{2} - 4}$ | i) $\frac{10}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$ | l) $\frac{1 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$     |

2. Rozwiąż równanie.

- |                                                    |                                                                       |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| a) $(x - 5)(x + 5) = x^2 - 100x$                   | d) $4(x + 2)^2 - (2x - 1)^2 = 20x + 10$                               |
| b) $(3 - x)^2 - (x + \frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$ | e) $(6 + \frac{1}{3}x)(-\frac{1}{3}x + 6) + (\frac{1}{3}x - 4)^2 = 4$ |
| c) $4(\frac{1}{2}x - 3)^2 = (6 - x)^2$             | f) $(-4x - 3)(4x - 3) + 8(1 - \sqrt{2}x)^2 = 1$                       |

3. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

- |                                              |                                                                                    |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $4(x - 3)^2 - (2x - 5)^2 \geq 2$          | d) $-9(2 - x)^2 - (1 - 3x)(3x + 1) \leq 11$                                        |
| b) $9(\frac{2}{3}x - 1)^2 > (1 - 2x)^2 - 8x$ | e) $(\frac{1}{4}x + 2)^2 + \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}x)(1 + \frac{1}{2}x) \geq 0$ |
| c) $2(x + 2)^2 - (\sqrt{2}x - 2)^2 \geq 0$   | f) $(\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1)(\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1) < \frac{(x - 1)^2}{2}$      |

4. Wyznacz przedział będący zbiorem liczb spełniających obie nierówności.

- |                                                                                                |                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\begin{cases} (x + 1)^2 > x^2 + 1 \\ (x - 1)^2 < (2 - x)^2 \end{cases}$                    | c) $\begin{cases} (2x + 5)(5 - 2x) + (2x - 3)^2 - 2 > 0 \\ (x - \frac{1}{2})^2 - 4 < x - (2 - x)(2 + x) \end{cases}$ |
| b) $\begin{cases} \frac{x - 3}{4} < \frac{x + 1}{2} \\ (2x - 3)^2 \leq (5 - 2x)^2 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} x - \frac{4x - 2}{3} \geq x - 6 \\ 1 - (2x - 1)(1 + 2x) < -2x - (2x - 1)^2 \end{cases}$            |

5. Oblicz.

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98} + \sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

6. Usuń niewymierność z mianownika.

- |                                        |                                        |                                               |
|----------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------|
| a) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}$ | b) $\frac{2}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ | c) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ |
|----------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------|

D 7. Udowodnij równość  $(\sqrt{1 + x^2} + x)^{-1} = \sqrt{1 + x^2} - x$ .

D 8. Wykaż, że jeśli  $\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , to  $\frac{x}{y} = \frac{x + y}{x}$ . Liczba  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  to złota liczba (patrz str. 63).

### Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w dowodach

#### D Przykład 1

Uzasadnij, że liczba  $13^8 - 7^8$  jest podzielna przez 120.

$$\begin{aligned} 13^8 - 7^8 &= (13^4 - 7^4)(13^4 + 7^4) = \\ &= (13^2 - 7^2)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\ &= (169 - 49)(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) = \\ &= 120(13^2 + 7^2)(13^4 + 7^4) \end{aligned}$$

Zatem liczba  $13^8 - 7^8$  jest podzielna przez 120.

- D 1. a) Uzasadnij, że liczba  $19^{16} - 9^{16}$  jest podzielna przez 280.  
b) Uzasadnij, że liczba  $11^{32} - 7^{32}$  jest podzielna przez 72.

#### D Przykład 2

Uzasadnij, że dla dowolnych liczb  $a$  i  $b$  zachodzi nierówność  $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ .

Jeśli  $a + b < 0$ , to nierówność jest prawdziwa (dlaczego?).

Zakładamy teraz, że  $a + b \geq 0$ . Obie strony nierówności są wówczas nieujemne, możemy więc podnieść je do kwadratu bez zmiany zwrotu nierówności. Nierówność przekształcamy równoważnie:

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^2}{4} &\leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad / \cdot 4 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy.} \\ a^2 + 2ab + b^2 &\leq 2a^2 + 2b^2 \\ 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.} \\ 0 &\leq (a - b)^2 \end{aligned}$$

Nierówność  $0 \leq (a - b)^2$  zachodzi dla dowolnych liczb  $a$  i  $b$ , zatem wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

- D 2. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb  $a, b > 0$  zachodzi podana nierówność.  
a)  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$       b)  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$

#### D Przykład 3

Udowodnij, że dla dowolnych liczb  $x$  i  $y$  prawdziwa jest nierówność:

$$2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 \geq 0$$

Przekształcamy wyrażenie po lewej stronie nierówności:

$$2x^2 - 2xy - 2x + y^2 + 1 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = (x - y)^2 + (x - 1)^2.$$

$(x - y)^2 \geq 0$  i  $(x - 1)^2 \geq 0$ , więc wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

- D 3.\* Udowodnij, że dla dowolnych liczb  $x$  i  $y$  prawdziwa jest nierówność:  
a)  $y^2 + 2x^2 - 2xy - 6x + 9 \geq 0$ ,      b)  $5x^2 + y^2 + 4 \geq 4xy + 4x$ .

## 2.10. Wartość bezwzględna

### Definicja

Liczbę  $|a|$  określoną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

nazywamy **wartością bezwzględną** liczby  $a$ .

Oznaczenie  $|a|$  wprowadził Karl Weierstrass [czyt. wajersztras] w 1841 r.

Zwróć uwagę, że  $|a|$  jest zawsze liczbą nieujemną:  $|a| \geq 0$  dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}$ .

### Przykład 1

$$\text{a) } |3,5| = 3,5 \quad \text{b) } |-3,5| = -(-3,5) = 3,5 \quad \text{c) } |0| = 0 \quad \text{d) } |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$$

### Przykład 2

$$\begin{aligned} \text{a) } |\sqrt{5} - 2| &= \sqrt{5} - 2, \text{ gdyż } \sqrt{5} - 2 > 0. \\ \text{b) } |1 - \sqrt{2}| &= -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1, \text{ gdyż } 1 - \sqrt{2} < 0. \end{aligned}$$

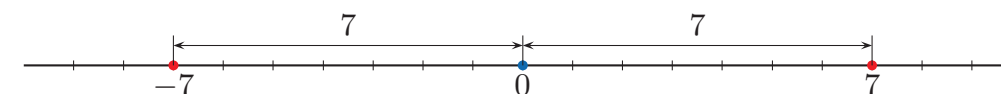
### Ćwiczenie 1

Podaj wartość bezwzględną liczby.

$$\text{a) } 5 \quad \text{b) } -5 \quad \text{c) } \sqrt{3} - 1 \quad \text{d) } \sqrt{3} - 3 \quad \text{e) } 4 - 3\sqrt{2} \quad \text{f) } 5 - 2\sqrt{5}$$

### Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

Wartość bezwzględna liczby  $x$  to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.



Liczby  $-7$  i  $7$  leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej i mają tę samą wartość bezwzględną, równą 7.

$$|-7| = 7 \quad \text{i} \quad |7| = 7$$

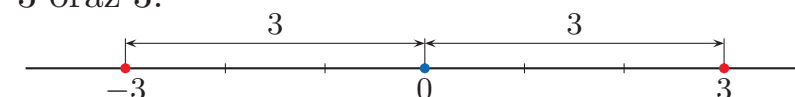
Dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}$ :

$$|-a| = |a|$$

### Przykład 3

Rozwiąż równanie  $|x| = 3$ .

Ponieważ zgodnie z interpretacją geometryczną wartość bezwzględna liczby  $x$  jest równa jej odległości na osi liczbowej od 0, jedynymi liczbami spełniającymi równanie są  $-3$  oraz  $3$ .



### Ćwiczenie 2

Podaj, dla jakich wartości  $x$  spełnione jest równanie:

$$\text{a) } |x| = 2, \quad \text{b) } |x| = 10, \quad \text{c) } |x| = 0, \quad \text{d) } |x| = -3.$$



### Ćwiczenie 3

Która z liczb  $x, y$  ma większą wartość bezwzględną?

- a)  $x = 7, y = -6$       b)  $x = -10, y = -12$       c)  $x = -8, y = 0$

Przypomnijmy, że:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Dla dowolnego  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Na przykład:  $\sqrt{5^2} = |5| = 5$  oraz  $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ .

### Ćwiczenie 4

Oblicz.

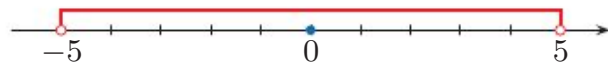
- a)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$       b)  $\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2}$       c)  $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2}$

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre nierówności z wartością bezwzględną.

#### Przykład 4

- a) Rozwiąż nierówność  $|x| < 5$ .

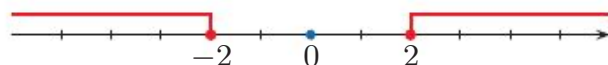
Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb  $x$ , których odległość od 0 jest mniejsza od 5.



Nierówność jest spełniona przez  $-5 < x < 5$ , zatem  $x \in (-5; 5)$ .

- b) Rozwiąż nierówność  $|x| \geq 2$ .

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb  $x$ , których odległość od 0 jest większa lub równa 2.



Nierówność jest spełniona przez  $x \leq -2$  oraz przez  $x \geq 2$ , zatem:

$$x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$$

### Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność i zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

- a)  $|x| < 8$       b)  $|x| \leq \sqrt{2}$       c)  $|x| > 3$       d)  $|x| \geq \pi$

### Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

- a)  $|x| \geq 0$       b)  $|x| \leq 0$       c)  $|x| > 0$       d)  $|x| < 0$

## Zadania

1. Oblicz  $x + |x|$  oraz  $x - 2|x|$ .

- a)  $x = -3$       b)  $x = 4 - 2\sqrt{6}$       c)  $x = 6\sqrt{2} - 8$       d)  $x = \pi - 2\sqrt{3}$

2. Wyznacz liczby spełniające równanie.

- a)  $2|x| = 8$       c)  $\frac{2}{3}|x| = 4$       e)  $3|x| + 6 = 7$       g)  $3 - 2|x| = 1$   
b)  $\frac{1}{2}|x| = 7$       d)  $-3|x| = -\frac{3}{4}$       f)  $\frac{1}{2}|x| - 1 = 3$       h)  $9 - \frac{3}{4}|x| = 6$

3. Która nierówność jest tożsamościowa, a która sprzeczna?

- a)  $|x| > -7, |x| < -7$       b)  $|x| \geq -3, |x| \leq -3$

4. Zbiór rozwiązań nierówności zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci sumy przedziałów. Ile liczb całkowitych należy do tego zbioru?

- a)  $1 < |x| < 4$       c)  $2 \leq |x| \leq 5$       e)  $\frac{1}{2} \leq |x| < 3$       g)  $\frac{5}{2} \leq |x| \leq \frac{9}{2}$   
b)  $0 < |x| < 6$       d)  $3 \leq |x| \leq \pi$       f)  $\sqrt{3} < |x| \leq 6$       h)  $\sqrt{2} < |x| < 5$

5. Oblicz.

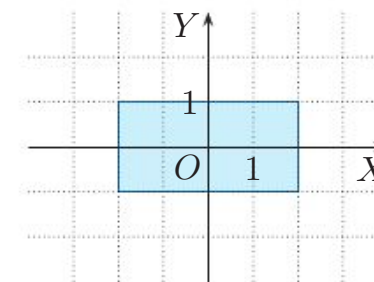
- a)  $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(7 - 3\sqrt{5})^2}$       b)  $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{(3\sqrt{2} - 4)^2}$

- D** 6. Uzasadnij, że:

- a)  $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = |\sqrt{2} - 2|$ ,      c)  $\sqrt{24 - 8\sqrt{5}} = |2 - 2\sqrt{5}|$ ,  
b)  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = |\sqrt{3} - 2|$ ,      d)  $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = |3 - 2\sqrt{3}|$ .

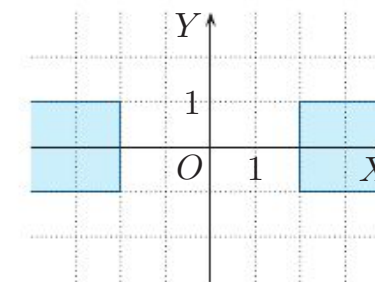
7. Na rysunkach przedstawiono zbiory punktów płaszczyzny. Do każdego z nich dopasuj warunki spełnione przez współrzędne  $(x, y)$  tych punktów.

A.



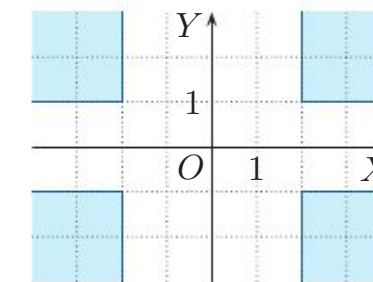
I.  $|x| \geq 2$  i  $|y| \leq 1$

B.



II.  $|x| \geq 2$  i  $|y| \geq 1$

C.



III.  $|x| \leq 2$  i  $|y| \leq 1$

8. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają podane warunki.

- a)  $|x| \leq 5$  i  $|y| \leq 1$       b)  $|x| \leq 3$  i  $|y| \geq 2$       c)  $1 \leq |x| \leq 3$  i  $|y| \leq 4$

### Zastosowanie wartości bezwzględnej w dowodach

#### D Przykład 1

Wykaż, że liczba  $a = \sqrt{(2 - 3\sqrt{2})^2} - 3\sqrt{2}$  jest całkowita.

Zauważ, że  $\sqrt{(2 - 3\sqrt{2})^2} = |2 - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2$ .

Stąd  $a = 3\sqrt{2} - 2 - 3\sqrt{2} = -2$ , czyli  $a \in \mathbb{Z}$ .

#### D Przykład 2

Wykaż, że liczba  $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$  jest całkowita.

Wyrażenie  $11 - 6\sqrt{2}$  chcemy zapisać w postaci kwadratu różnicy. Możemy do tego zastosować metodę prób i błędów:

$$(1 - \sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$$

$$(1 - 3\sqrt{2})^2 = 1 - 6\sqrt{2} + 18 = 19 - 6\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$$

$$(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |3 - \sqrt{2}| + \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3,$$

czyli dana liczba jest całkowita.

#### D Przykład 3

Wykaż, że liczba  $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$  jest wymierna.

Aby wykazać, że liczba  $a$  jest wymierna, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Obliczamy kwadrat liczby  $a$ :

$$\begin{aligned} a^2 &= \left( \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \right)^2 = \\ &= 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = \\ &= 8 - 2\sqrt{16 - 12} = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

Ponieważ  $a > 0$ , otrzymujemy  $a = 2$  – jest to liczba wymierna.

- Zauważamy, że  $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$  oraz  $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$  (sprawdź), czyli:

$$a = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} + 1| - |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2,$$

co oznacza, że  $a$  jest liczbą wymierną.

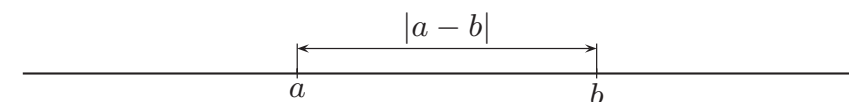
#### D 1. Wykaż, że:

$$\text{a) } \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = 5, \quad \text{b) } 3\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{19 - 6\sqrt{2}} = 10.$$

## 2.11. Własności wartości bezwzględnej

Interpretacją geometryczną wartości bezwzględnej liczby  $a$  jest jej odległość na osi liczbowej od 0.

Zauważmy, że odległość na osi liczbowej między liczbami  $a$  i  $b$  jest równa  $|a - b|$ .



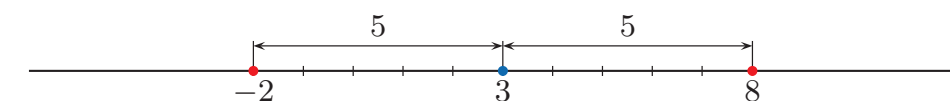
$$|a - b| = |b - a|$$

Odległość między liczbami  $a$  i  $b$  na osi liczbowej jest taka sama jak odległość między liczbami  $b$  i  $a$ .

#### Przykład 1

Rozwiąż równanie  $|x - 3| = 5$ .

Szukamy na osi liczbowej takich liczb  $x$ , których odległość od 3 wynosi 5.



Zatem  $x = -2$  lub  $x = 8$ .

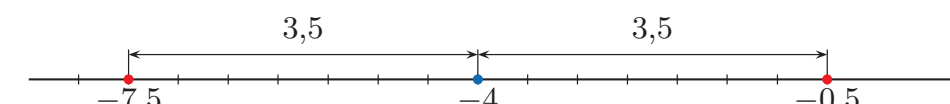
Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} \text{dla } x = -2: & \quad |-2 - 3| = |-5| = 5, \\ \text{dla } x = 8: & \quad |8 - 3| = |5| = 5. \end{aligned}$$

#### Przykład 2

Rozwiąż równanie  $|x + 4| = 3,5$ .

Równanie zapisujemy w postaci:  $|x - (-4)| = 3,5$  i szukamy na osi liczbowej takich liczb  $x$ , których odległość od  $-4$  wynosi  $3,5$ .



Zatem  $x = -7,5$  lub  $x = -0,5$ .

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} \text{dla } x = -7,5: & \quad |-7,5 + 4| = |-3,5| = 3,5, \\ \text{dla } x = -0,5: & \quad |-0,5 + 4| = |3,5| = 3,5. \end{aligned}$$

#### Przykład 3

Rozwiąż równanie  $|x - 4| = -2$ .

Wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemna, zatem równanie jest sprzeczne.

#### Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

$$\begin{aligned} \text{a) } |x - 2| &= 3 & \text{c) } |x + 6| &= 2 & \text{e) } |2 + x| &= \sqrt{3} & \text{g) } |x + \frac{1}{4}| &= \frac{1}{2} \\ \text{b) } |x - 4| &= 3,5 & \text{d) } |6 - x| &= 1 & \text{f) } |x + 1| &= -1 & \text{h) } |x + 9| &= 0 \end{aligned}$$

#### D Ćwiczenie 2

Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, uzasadnij, że liczba  $\frac{a+b}{2}$  jest jedynym rozwiązaniem równania  $|x - a| = |x - b|$ .

**Przykład 4**

Rozwiąż nierówność  $|x - 2| < 5$ .

Szukamy na osi liczbowej takich liczb  $x$ , których odległość od 2 jest mniejsza od 5.



Zatem  $-3 < x < 7$ , czyli  $x \in (-3; 7)$ .

**Ćwiczenie 3**

Rozwiąż nierówność.

- a)  $|x - 7| < 3$       c)  $|x + 6| > 1$       e)  $|9 - x| \leq 7$       g)  $|x + \frac{1}{5}| < 0,1$   
 b)  $|x - 3| < 7$       d)  $|x + 4| \geq 4$       f)  $|5 + x| > 8$       h)  $|x - \sqrt{7}| \geq \sqrt{7}$

**Przykład 5**

Rozwiąż nierówność  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + |x - 3| \geq 10$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - 3)^2} + |x - 3| &\geq 10 && \text{Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy.} \\ |x - 3| + |x - 3| &\geq 10 && \text{Korzystamy ze wzoru } \sqrt{a^2} = |a|. \\ 2|x - 3| &\geq 10 \\ |x - 3| &\geq 5 \end{aligned}$$

Szukamy na osi liczbowej takich liczb  $x$ , których odległość od 3 jest większa od 5 lub równa 5.



Zatem  $x \leq -2$  lub  $x \geq 8$ , czyli  $x \in (-\infty; -2] \cup [8; \infty)$ .

**Ćwiczenie 4**

Rozwiąż nierówność.

- a)  $\sqrt{(x - 7)^2} + |x - 7| \leq 5$       b)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x - 2| > 3$

**Przykład 6**

Rozwiąż nierówność  $|3x - 6| < 9$ .

$|3x - 6| = |3(x - 2)| = |3| \cdot |x - 2| = 3|x - 2|$ ,  
zatem:

$$\begin{aligned} 3|x - 2| &< 9 \\ |x - 2| &< 3 \\ x &\in (-1; 5) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} |a \cdot b| &= |a| \cdot |b| \\ \left| \frac{a}{b} \right| &= \frac{|a|}{|b|} \quad b \neq 0 \end{aligned}$$

**Zadania**

1. Rozwiąż równanie.

- a)  $|2x - 8| = 4$       c)  $|\frac{1}{2}x - 1| = 3$       e)  $|10 - x| = 4$   
 b)  $|4x + 2| = 6$       d)  $|\frac{2}{3}x + 4| = 2$       f)  $|1 - 3x| = 6$

2. Rozwiąż nierówność.

- a)  $|2x + 4| \leq 8$       d)  $|2 - \frac{1}{3}x| < 1$       g)  $|2x - 4| \leq 0$   
 b)  $|3x - 9| \geq 6$       e)  $|\frac{5}{2}x + 10| \geq 5$       h)  $|x + 11| > 0$   
 c)  $|2x + \frac{1}{2}| > 2$       f)  $|0,75 + \frac{5}{4}x| < \frac{1}{4}$       i)  $|x - 3| \geq -1$

3. Rozwiąż równanie.

- a)  $\sqrt{(x + 5)^2} = 5$       c)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1$       e)  $\sqrt{\frac{1}{4} + x + x^2} = 4$   
 b)  $\sqrt{(3 - x)^2} = 2$       d)  $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = 3$       f)  $\sqrt{9x^2 - 12x + 4} = 6$

4. Rozwiąż nierówność.

- a)  $|x| \leq \sqrt{(4 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(4 - 3\sqrt{2})^2}$   
 b)  $|x + 1| \geq \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3} - 2)^2}$

5. Rozwiąż równanie.

- a)  $|x - 3| = x - 3$       c)  $|x + \sqrt{2}| = -x - \sqrt{2}$   
 b)  $|3x - 6| = 6 - 3x$       d)  $\sqrt{(x - 2)^2} = x - 2$

$$\begin{aligned} |x - 8| &= 8 - x, \\ \text{gdy } x - 8 &\leq 0, \\ \text{czyli } x &\leq 8. \end{aligned}$$

6. Uprość wyrażenie dla  $x < 0$ .

- a)  $\sqrt{x^2} + x$       b)  $\sqrt{(x - 3)^2} - \sqrt{x^2}$       c)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x$

**D 7.** Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, uzasadnij, że jeśli  $a < b$ , to zbiorem rozwiązań nierówności  $|x - a| < |x - b|$  jest przedział  $(-\infty; \frac{a+b}{2})$ .

**D 8.** Wykaż, że wyrażenie przyjmuje stale tę samą wartość dla podanych wartości  $x$ .

- a)  $|-x| + |2 - x| - |3 - 2x|$  dla  $x \geq 2$   
 b)  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} + |-x| - |-2x - 6|$  dla  $x \leq -3$

**D 9.** Wykaż, że jeśli  $0 \leq a \leq b$ , to  $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} - \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = 2\sqrt{a}$ .



Logika matematyczna

Sposoby budowania zdań w języku, którym porozumiewamy się na co dzień, są określone przez reguły gramatyki. W matematyce podobną rolę odgrywają reguły **logiki matematycznej**. Odnoszą się one do zdań, którym można w jednoznaczny sposób przypisać wartość logiczną: **prawdy** lub **fałszu**. Stosowane są oznaczenia: 1 (prawda), 0 (fałsz).

Przykład 1

Przypisz wartość logiczną podanemu zdaniu.

- a)  $\sqrt{2}$  jest liczbą wymierną. fałsz 0
- b) Każdy prostokąt jest równoległobokiem. prawda 1
- c) Każdy równoległobok jest prostokątem. fałsz 0

**Uwaga.** Reguły logiki można stosować również do zdań o treści niematematycznej.

Ze **zdań składowych** (będziemy je oznaczać literami  $p, q, r, \dots$ ) możemy tworzyć **zдания złożone** przy użyciu spójników logicznych: „nieprawda, że”, „lub”, „i”, „jeżeli..., to...”, „wtedy i tylko wtedy, gdy...”.

Negacja zdania

Rozpatrzmy dwa zdania: zdanie  $p$  i jego zaprzeczenie – zdanie *Nieprawda, że  $p$* , co zapisujemy  $\sim p$  i nazywamy **negacją** zdania  $p$ . Na przykład:

- $p$ : 7 jest liczbą ujemną. 0
- $\sim p$ : Nieprawda, że 7 jest liczbą ujemną. 1

Zdanie  $p$  jest fałszywe, zdanie  $\sim p$  jest prawdziwe.

Zwróć uwagę na to, że z dwóch zdań,  $p$  i  $\sim p$ , zawsze jedno jest prawdziwe, a jedno fałszywe.

| $p$ | $\sim p$ |
|-----|----------|
| 1   | 0        |
| 0   | 1        |

Jeśli zdanie  $p$  jest prawdziwe, to zdanie  $\sim p$  jest fałszywe.  
Jeśli zdanie  $p$  jest fałszywe, to zdanie  $\sim p$  jest prawdziwe.

1. Sformułuj zdanie:

- a)  $\sim p$  dla danego zdania  $p$ :  $2\sqrt{3} > 3\frac{1}{2}$ ,
- b)  $\sim p$  dla danego zdania  $p$ :  $\sqrt{625} \neq 25$ ,
- c)  $p$  dla danego zdania  $\sim p$ : 100 jest liczbą nieparzystą.

Określ wartości logiczne zdań  $p$  i  $\sim p$ .

Jeżeli zdanie  $p$  ma postać  $\sqrt{8} < 3$ , to zdanie  $\sim p$  ma postać  $\sqrt{8} \geq 3$ . Wartości logiczne zdań  $p$  i  $\sim p$  to odpowiednio 1 i 0.



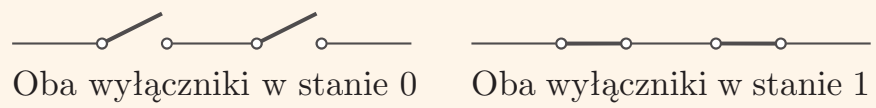
Koniunkcja zdań

Niech  $p$  oznacza zdanie: *Liczba 12 jest podzielna przez 2*, a  $q$  – zdanie: *Liczba 12 jest podzielna przez 3*. Zdanie  $p \wedge q$  (czytamy:  $p$  i  $q$ ), zwane **koniunkcją** zdań, będzie brzmiało: *Liczba 12 jest podzielna przez 2 i jest podzielna przez 3*.

Przyjmujemy, że zdanie  $p \wedge q$  jest prawdziwe jedynie wtedy, gdy oba zdania  $p, q$  są prawdziwe.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1   | 1   | 1            |
| 1   | 0   | 0            |
| 0   | 1   | 0            |
| 0   | 0   | 0            |

Interpretacją fizyczną koniunkcji zdań  $p \wedge q$  jest układ dwóch wyłączników połączonych szeregowo. Każdy z wyłączników może być włączony (stan 1) lub wyłączony (stan 0). Przepływ prądu nastąpi tylko wtedy, gdy oba wyłączniki będą w stanie 1.



2. Zapisz zdanie  $p \wedge q$ . Określ prawdziwość zdań  $p, q$  oraz koniunkcji  $p \wedge q$ .

- a)  $p$ :  $2|20$ ,  $q$ :  $5|20$  c)  $p$ :  $-2 < (-2)^3$ ,  $q$ :  $2 < 2^3$
- b)  $p$ :  $3|39$ ,  $q$ :  $9|39$  d)  $p$ :  $\sqrt{221} \in \mathbb{Q}$ ,  $q$ :  $\sqrt{212} \in \mathbb{Q}$

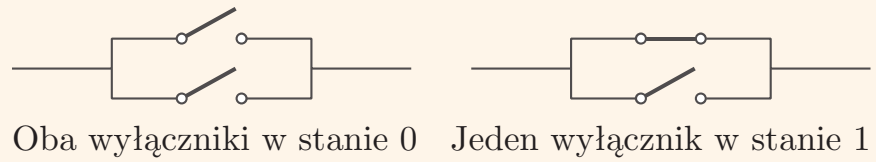
Alternatywa zdań

Niech  $p$  oznacza zdanie: *Liczba 92 jest podzielna przez 4*, a  $q$  – zdanie: *Liczba 92 jest podzielna przez 3*. Zdanie  $p \vee q$  (czytamy:  $p$  lub  $q$ ), zwane **alternatywą** zdań, będzie brzmiało: *Liczba 92 jest podzielna przez 4 lub jest podzielna przez 3*.

Przyjmujemy, że zdanie  $p \vee q$  jest prawdziwe, gdy jest prawdziwe co najmniej jedno ze zdań  $p, q$ .

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| 1   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 0   | 1   | 1          |
| 0   | 0   | 0          |

Interpretacją fizyczną alternatywy zdań  $p \vee q$  jest układ dwóch wyłączników połączonych równolegle. Na rysunku z lewej oba wyłączniki są w stanie 0. Przepływ prądu nastąpi wtedy, gdy którykolwiek z wyłączników zostanie włączony (będzie w stanie 1) – rysunek z prawej.



3. Określ wartość logiczną podanego zdania.

- a)  $(-6)^2 = 36 \vee 6^2 = 36$  d)  $-\sqrt{2} < -2 \vee \sqrt{2} > 2$
- b)  $19^2 = 361 \vee 19^2 = 381$  e)  $|-a| = |a| \vee |-a| = -a$
- c)  $-2 > -1 \vee (-2)^2 > (-1)^2$  f)  $|-a| = a \vee |-a| = -|a|$



■ Implikacja zdań

Niech  $p$  oznacza zdanie: *1035 jest liczbą podzielną przez 9*, a  $q$  – zdanie: *1035 jest liczbą podzielną przez 3*. Zdanie  $p \Rightarrow q$  (czytamy: jeżeli  $p$ , to  $q$ ), zwane **implikacją** zdań, będzie brzmiało: *Jeżeli 1035 jest liczbą podzielną przez 9, to jest liczbą podzielną przez 3*.

Zdanie  $p$  nazywamy **poprzednikiem**, a zdanie  $q$  – **następnikiem** implikacji.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 1   | 1   | 1                 |
| 1   | 0   | 0                 |
| 0   | 1   | 1                 |
| 0   | 0   | 1                 |

Przyjmujemy, że implikacja jest fałszywa tylko wtedy, gdy prawdziwy jest jej poprzednik i fałszywy jej następnik – z prawdy nie może wynikać fałsz. Implikacja pojawia się bardzo często we wnioskowaniu matematycznym. Zwróć uwagę na dwa ostatnie wiersze tabeli: wnioskowanie rozpoczynające się od fałszywego poprzednika jest zawsze prawdziwe.

4. Podaj wartość logiczną poprzednika, następnika i implikacji.
- a)  $0 > 1 \Rightarrow 5 = 5$

b)  $2 + 2 = 5 \Rightarrow 2 + 2 = 50$

c)  $4 | 12 \Rightarrow 2 | 12$

d)  $5 | 25 \Rightarrow 10 | 25$

■ Równoważność zdań

**Równoważność** zdań  $p$  i  $q$  jest to zdanie postaci:  *$p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $q$* , co zapisujemy  $p \Leftrightarrow q$ . Przyjmujemy, że zdanie  $p \Leftrightarrow q$  jest prawdziwe, gdy oba zdania  $p, q$  mają tę samą wartość logiczną. Na przykład:

- $-3 < 2 \Leftrightarrow 2 < 3$  – równoważność jest prawdziwa,  

zdanie            zdanie  
prawdziwe    prawdziwe
- $-3 > 2 \Leftrightarrow 2 > 3$  – równoważność jest prawdziwa,  

zdanie            zdanie  
fałszywe    fałszywe
- $(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (-3)^3 = 3^3$  – równoważność jest fałszywa.  

zdanie            zdanie  
prawdziwe    fałszywe

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 1   | 1   | 1                     |
| 1   | 0   | 0                     |
| 0   | 1   | 0                     |
| 0   | 0   | 1                     |

5. Podaj wartość logiczną każdego ze zdań składowych i zdania złożonego.
- a)  $2 + 2 = 5 \Leftrightarrow 1 < 0$

b)  $\sqrt{5^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-5)^2} = -5$

c)  $(-3)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (-3)^4 = 3^4$

d)  $(-2)^3 = 2^3 \Leftrightarrow (-2)^6 = 2^6$

■ Prawa rachunku zdań

Spośród zdań złożonych, które możemy zapisać za pomocą spójników  $\sim, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ , szczególną rolę odgrywają zdania, których wartość logiczna zawsze jest równa 1 (są zawsze prawdziwe). Takie zdania nazywamy **prawami rachunku zdań**.

D Przykład 2

Wykaż, że zdanie:  $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$  – *zaprzeczenie koniunkcji jest równoważne alternatywie zaprzeczeń* – jest prawem rachunku zdań.

Sporządzamy tabelę, w której uwzględnimy wszystkie możliwe wartości logiczne zdań  $p, q$ .

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\sim(p \wedge q)$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $(\sim p) \vee (\sim q)$ | $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$ |
|-----|-----|--------------|--------------------|----------|----------|--------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1   | 1   | 1            | 0                  | 0        | 0        | 0                        | 1                                                           |
| 1   | 0   | 0            | 1                  | 0        | 1        | 1                        | 1                                                           |
| 0   | 1   | 0            | 1                  | 1        | 0        | 1                        | 1                                                           |
| 0   | 0   | 0            | 1                  | 1        | 1        | 1                        | 1                                                           |

W ostatniej kolumnie, bez względu na wartość logiczną zdań  $p$  i  $q$ , zawsze otrzymujemy, że zdanie jest prawdziwe, zatem jest ono prawem rachunku zdań. Zdanie to jest znane jako jedno z **praw De Morgana**.

- D 6. Wykaż, że podane zdanie jest prawem rachunku zdań.  
 $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$       [drugie z praw De Morgana](#)

- D 7. Wykaż, że podane zdanie jest prawem rachunku zdań.
- a)  $(\sim p) \vee p$       [prawo wyłączonego środka](#)

b)  $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$       [prawo podwójnego przeczenia](#)

c)  $\sim(p \wedge \sim p)$       [prawo sprzeczności](#)

d)  $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$       [prawo odrywania](#)

e)  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$       [prawo transpozycji](#)

f)  $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$       [prawo zaprzeczenia implikacji](#)

8. Sprawdź, czy podane zdanie jest prawem rachunku zdań.
- a)  $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

b)  $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

c)  $[(\sim p \vee \sim q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$

d)  $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

e)  $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

f)  $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$



# Powtórzenie

## Zestaw I

- Wśród 180 studentów przeprowadzono ankietę dotyczącą znajomości języków obcych. Otrzymano następujące wyniki: 90 studentów zna język angielski, 81 – niemiecki, 75 – rosyjski, 45 – angielski i niemiecki, 25 – angielski i rosyjski, 20 – niemiecki i rosyjski, a 4 – wszystkie trzy języki. Ilu spośród ankietowanych studentów nie zna żadnego z tych języków?
- Dane są zbiory:  $A$  – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 15,  $B$  – zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3,  $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ ,  $D$  – zbiór liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1. Wypisz wszystkie elementy zbioru:
  - $A \cap B$ ,
  - $A \setminus C$ ,
  - $A \cap B \cap C$ ,
  - $A \setminus (B \cup C)$ ,
  - $A \cap (D \setminus B)$ ,
  - $A \setminus (B \setminus D)$ .
- Wyznacz zbiory  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$  i  $B \setminus A$ .
  - $A = [-1; 4]$ ,  $B = (2; 5)$
  - $A = [2; 7]$ ,  $B = (3; 5]$
  - $A = [-4; 2]$ ,  $B = [2; 9]$
  - $A = (-\infty; 0] \cup (1; 2)$ ,  $B = [0; 4]$
  - $A = (-\infty; -1) \cup [3; 5]$ ,  $B = (-2; 4)$
  - $A = (-1; 2] \cup (5; \infty)$ ,  $B = [0; 5]$
- Wykonaj mnożenie.
  - $(a + 2b + 3)(a - 2)$
  - $(2a - b + c)(2a - 3b)$
  - $(a + 2b - 3c)(2a - 3b)$
  - $-4(x^2 - 2y)(2x^2 - y)$
  - $2x(3x^2 - 2y)(2y - 3x^2)$
  - $(x + y)(x^2 + y^2)(x - y)$
- Wskaż liczbę całkowitą  $k$ , dla której  $x \in [k; k + 1)$ .
  - $x = \sqrt[3]{17}$
  - $x = \sqrt[3]{-25}$
  - $x = (3 - 2\sqrt{2})^2$
  - $x = \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$
- Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?
  - $\frac{2x+1}{2} - 2 < x - \frac{x-3}{3}$
  - $\frac{1}{2}x - \frac{6x-3}{4} \geq -2 - \frac{2x-1}{3}$
  - $\frac{x-1}{4} - \frac{2x-1}{5} \geq \frac{x-3}{2} - \frac{2-x}{5}$
  - $\frac{2-x}{2} - \frac{1}{3}x > \frac{1-4x}{5} - \frac{3-x}{2}$
- Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.
  - $|x| > 1$  i  $|x| \leq 9$
  - $|x| \geq 2$  i  $|x-2| < 4$
  - $|x| < 4$  i  $|x+1| \geq 2$
- Dane są zbiory:  $A = \{x \in \mathbb{R}: |x-3| < 4\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}: |x+2| \geq 3\}$  i  $C = \{x \in \mathbb{R}: |x| \geq 3\}$ . Zaznacz na osi liczbowej zbiór:
  - $A \cap B$ ,
  - $A \setminus B$ ,
  - $B \setminus A$ ,
  - $(A \cup C) \setminus B$ ,
  - $(A \setminus B) \cup C$ .

## Zestaw II

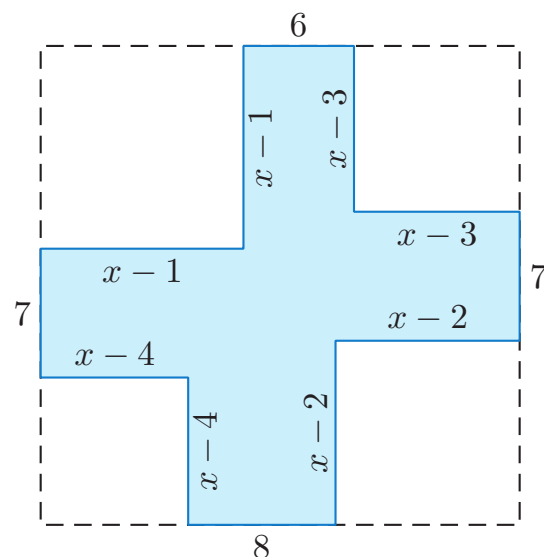
- Wśród zbiorów  $X, Y, T$  wskaż parę zbiorów równych.
  - $X = (-4; 2] \cap \mathbb{Z}$ ,  $Y = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 \leq 4\}$ ,  $T = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
  - $X = (2; 7) \cup \{7\}$ ,  $Y = [2; 7] \setminus \{2\}$ ,  $T = (2; 4) \cup (4; 7]$
  - $X = \{x \in \mathbb{N}: |x| \leq 6\}$ ,  $Y = (-7; 7) \cap \mathbb{N}$ ,  $T = \mathbb{N} \setminus (5; 8)$
- Sprawdź, czy prawdziwa jest któraś z zależności:  $A \subset B$ ,  $B \subset A$ .
  - $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < |x| < 2\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}: |x-5| \geq 1\}$
  - $A = \{x \in \mathbb{R}: |x+1| \geq 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}: |2x-6| > 16\}$
  - $A = \{x \in \mathbb{R}: 1 \leq |x| \leq 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{x^2 - 10x + 25} < 8\}$
- Oblicz.
  - $(\sqrt{2} + \sqrt{6})(2\sqrt{2} - \sqrt{6})$
  - $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(4\sqrt{3} - \sqrt{2})$
  - $(\sqrt{6} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{6} + 6\sqrt{3})$
  - $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{10})(-3\sqrt{10} - 2\sqrt{2})$
  - $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$
  - $(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{6} - 2\sqrt{3})^2$
  - $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
  - $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2(\sqrt{3} + \sqrt{7})$
- Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.
  - $\begin{cases} 1\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} > \frac{1}{2} - x \\ (x - \frac{1}{2})^2 + 0,75x \geq x^2 \end{cases}$
  - $\begin{cases} \frac{1}{4}x - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x) \geq x - \frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leq (x+1)^2 \end{cases}$
  - $\begin{cases} \frac{x-\frac{1}{3}}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} < 1 \\ (x - \frac{1}{2})^2 \geq x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$
  - $\begin{cases} 2 - x^2 - (x-2)^2 \leq 6 - 2(x+4)^2 \\ (4-x)^2 - (6-x)^2 \geq \frac{11}{4} - \frac{0,5 - \frac{1}{2}x}{2} \end{cases}$
  - $\begin{cases} -4(4-x)^2 < 8 - (4-2x)^2 \\ \frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(\sqrt{2}x-4)(\sqrt{2}x+4)}{2} > 0,25 \end{cases}$
  - $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}+1} + 4x(1-x) > \sqrt{2}x - (1-2x)^2 \\ \frac{1-x^4}{x^2+1} - 2x \geq 2x - (3-x)^2 \end{cases}$
- Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne  $(x, y)$  spełniają podane warunki. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego zbioru?
  - $|x| \leq 3$  i  $|y| \leq 2$
  - $1 \leq |x| \leq 4$  i  $|y| < 1$
  - $1 \leq |x| \leq 2$  i  $1 \leq |y| \leq 3$
  - $0 < |x| < 3$  i  $1 < |y| < 2$
- Liczby  $p$  i  $q$  przy dzieleniu przez 4 dają reszty odpowiednio 1 i 3. Wykaż, że reszty z dzielenia liczb  $p^2$  i  $q^2$  przez 4 są równe.
  - Liczby  $p$  i  $q$  przy dzieleniu przez 5 dają reszty odpowiednio  $k$  i  $l$ , gdzie  $k < l$ , a reszty z dzielenia liczb  $p^2$  i  $q^2$  przez 5 są równe. Wyznacz  $k$  i  $l$ .





## Zadania z kontekstem realistycznym

- W ubiegłym roku szkolnym 20 uczniów reprezentowało szkołę w konkursie informatycznym, 15 uczniów – w konkursie matematycznym, 5 uczniów – w konkursach informatycznym i fizycznym, 7 uczniów – w konkursach matematycznym i fizycznym, 8 uczniów – w konkursach informatycznym i matematycznym, a 2 uczniów – we wszystkich trzech konkursach. 12 uczniów brało udział tylko w jednym konkursie.
  - Ilu uczniów uczestniczyło tylko w konkursie matematycznym?
  - Ilu uczniów brało udział w konkursach?
  - Ilu uczniów reprezentowało szkołę w konkursie fizycznym, ale nie brało udziału w konkursie informatycznym?
- Na kartkówce każdy uczeń rozwiązał poprawnie dwa spośród trzech zadań. Zadanie 1. poprawnie rozwiązało 23 uczniów, zadanie 2. – 10 uczniów, a zadanie 3. – 21 uczniów. Ilu uczniów pisało tę kartkówkę?
- Na parkingu *A* pobiera się opłatę 5 zł za pierwszą godzinę parkowania i 3 zł za każdą następną godzinę. Na parkingu *B* płaci się 3,90 zł za pierwszą godzinę i 3,20 zł za każdą następną. Ile co najmniej godzin parkował samochód na parkingu *A*, jeżeli wiadomo, że za tę samą liczbę godzin na parkingu *B* zapłaciłby więcej?
- Należność za przejazd taksówką pewnej firmy nalicza się następująco: jeśli przebyta droga wyrażona w kilometrach należy do przedziału  $[k; k + 1)$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$ , to kwota opłaty wyrażona w złotych jest wartością wyrażenia  $8 + 2,4k$ . Oblicz, ile kosztuje przejazd tą taksówką trasy długości:
  - 4,5 km,
  - 12,9 km,
  - 12,1 km,
  - 6 km.
- Na kwadratowym placyku zaprojektowano nieregularną rabatę kwiatową – jej plan przedstawiono na rysunku obok (wymiary są podane w metrach).
  - Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego pole tej rabaty, a następnie sprowadź to wyrażenie do najprostszej postaci (przyjmujemy, że  $x > 4$ ).
  - Oblicz pole tej rabaty dla  $x = 11$ .



### D Przykład 1

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest równa 2.

Rozpatrzmy trzy kolejne liczby naturalne:  $n, n + 1, n + 2$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ . Suma kwadratów tych liczb:

$$\begin{aligned} S &= n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \\ &= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2 \end{aligned}$$

Ponieważ  $n^2 + 2n + 1$  jest liczbą naturalną, reszta z dzielenia  $S$  przez 3 jest równa 2.

• Zauważ, że aby wykazać, że reszta z dzielenia liczby  $S$  przez 3 jest równa 2, przedstawiliśmy tę liczbę w postaci  $3k + 2$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$ .

• Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb naturalnych, bo sprawdzenie dla konkretnych liczb naturalnych, np.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 = 3 \cdot 4 + 2$$

czy:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 = 121 + 144 + 169 = 434 = 3 \cdot 144 + 2$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

→ Zadanie 25, str. 121

### D Przykład 2

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 3.

Trzy kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci  $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5$ , gdzie  $n \in \mathbb{Z}$ . Rozpatrywana sumę oznaczamy przez  $S$ .

$$\begin{aligned} S &= (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 = \\ &= (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) + (4n^2 + 20n + 25) = \\ &= 12n^2 + 36n + 35 = 4(3n^2 + 9n + 8) + 3 \end{aligned}$$

Ponieważ  $3n^2 + 9n + 8$  jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia  $S$  przez 4 jest równa 3.

• Zauważ, że aby wykazać, że reszta z dzielenia liczby  $S$  przez 4 jest równa 3, liczbę  $S$  przedstawiliśmy w postaci  $4k + 3$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$ .

• Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb nieparzystych, bo sprawdzenie dla konkretnych liczb nieparzystych, np.:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 4 \cdot 8 + 3$$

czy:

$$(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 = 49 + 25 + 9 = 83 = 4 \cdot 20 + 3$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

→ Zadanie 25, str. 121



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

**Zadanie 1 (0–1)**

$A$  jest zbiorem kwadratów liczb naturalnych, a  $B$  – zbiorem ich sześciątów. Ile liczb mniejszych od 200 należy do zbioru  $B \setminus A$ ?

- A. 5                      B. 4                      C. 3                      D. 0

**Zadanie 2 (0–1)**

$A = (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}) \cap \mathbb{Z}$  jest zbiorem

- A. siedmioelementowym.                      C. czteroelementowym.  
B. sześcieelementowym.                      D. pustym.

**Zadanie 3 (0–1)**

Zbiór  $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$  można zapisać w postaci

- A.  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$                       C.  $(-\infty; -1] \cup [1; \infty)$   
B.  $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$                       D.  $\{-1, 1\}$

**Zadanie 4 (0–1)**

Zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{x}{2} + 2 < \frac{x}{3}$  jest przedział

- A.  $(-\infty; 12)$                       B.  $(-\infty; -12)$                       C.  $(-12; \infty)$                       D.  $(12; \infty)$

**Zadanie 5 (0–1)**

Zbiór wszystkich liczb spełniających jednocześnie dwie nierówności  $1 - x \geq 2$  i  $2x + 4 > -6$  można zapisać w postaci przedziału

- A.  $(-5; -1]$                       B.  $(-5; -1)$                       C.  $[-5; -1]$                       D.  $(-\infty; -5)$

**Zadanie 6 (0–1)**

Dla dowolnych liczb  $a$  i  $b$  zachodzi równość

- A.  $(a - 2b)^2 = a^2 - 4b^2$                       C.  $(a - 2b)^2 = a^2 - 2ab + 4b^2$   
B.  $(a - 2b)^2 = a^2 + 4b^2$                       D.  $(a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$

**Zadanie 7 (0–1)**

Dla dowolnej liczby  $x$  wyrażenie  $\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 1$  jest równe

- A.  $(-\frac{x}{3} + 1)^2$                       B.  $(-\frac{x}{3} - 1)^2$                       C.  $(-\frac{x}{3} - 3)^2$                       D.  $(\frac{2}{3}x - 1)^2$

**Zadanie 8 (0–1)**

Ułamek  $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$  jest równy

- A.  $1 + \sqrt{2}$                       B.  $-1 - \sqrt{2}$                       C.  $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$                       D.  $\frac{1+\sqrt{3}}{3-2\sqrt{2}}$

**Zadanie 9 (0–1)**

Liczba  $|\sqrt{3} - 4|$  należy do przedziału

- A.  $(-\infty; 0)$                       B.  $[0; 2,3)$                       C.  $[2,3; 4)$                       D.  $[4; \infty)$



**Zadanie 10**

Dane są liczby  $a = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$  i  $b = (\sqrt{3} + 1)^2$ .

**Zadanie 10.1 (0–1)**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                         |          |          |
|-----------------------------------------|----------|----------|
| Obie podane liczby są niewymierne.      | <b>P</b> | <b>F</b> |
| Liczba $b$ jest większa od liczby $a$ . | <b>P</b> | <b>F</b> |

**Zadanie 10.2 (0–1)**

Uzupełnij zdanie.

Największą liczbą całkowitą mniejszą od  $b$  jest liczba ?.

**Zadanie 11 (0–1)**

Dana jest nierówność  $(x - 3)^2 - (x - 1)^2 \geq -2$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                                                  |          |          |
|------------------------------------------------------------------|----------|----------|
| Podaną nierówność spełnia nieskończenie wiele liczb naturalnych. | <b>P</b> | <b>F</b> |
| Liczba $x = 2\sqrt{3}$ spełnia tę nierówność.                    | <b>P</b> | <b>F</b> |

**Zadanie 12 (0–1)**

Dane jest wyrażenie  $(x - \frac{1}{2}y)^2 - (x + \frac{1}{2}y)^2$ .

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  podane wyrażenie jest równe

|           |                   |          |           |                                                                                                                                       |
|-----------|-------------------|----------|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>A.</b> | $-\frac{1}{2}xy,$ | ponieważ | <b>1.</b> | $(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz<br>$(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$ . |
| <b>B.</b> | $-xy,$            |          | <b>2.</b> | $(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz<br>$(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2$ .                       |
| <b>C.</b> | $-2xy,$           |          | <b>3.</b> | $(x - \frac{1}{2}y)^2 = x^2 - 2xy + \frac{1}{4}y^2$ oraz<br>$(x + \frac{1}{2}y)^2 = x^2 + 2xy + \frac{1}{4}y^2$ .                     |

**Zadanie 13 (0–2)**

Oblicz wartość wyrażenia  $(x - 4y)^2 - (4y + x)^2$  dla  $x = \frac{1}{4}$  i  $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**Zadanie 14 (0-2)**

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczba  $(2\sqrt{6}a - \sqrt{2})^2$  jest całkowita dla

- A.  $a = \sqrt{6}$       C.  $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$       E.  $a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 8$   
B.  $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$       D.  $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$       F.  $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{3}$

**Zadanie 15 (0-1)**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                                                                               |          |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|
| Dla dowolnych liczb $p, q$ , jeśli $p < q$ , to $p^2 < q^2$ .                                 | <b>P</b> | <b>F</b> |
| Dla dowolnych różnych od zera liczb $p, q$ , jeśli $p < q$ , to $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$ . | <b>P</b> | <b>F</b> |

**Zadanie 16 (0-1)**

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Suma  $|3 - 2\sqrt{3}| + |4\sqrt{3} - 7|$  jest równa

|    |                    |          |    |                                             |
|----|--------------------|----------|----|---------------------------------------------|
| A. | $4 - 2\sqrt{3}$ ,  | ponieważ | 1. | $3 - 2\sqrt{3} > 0$ i $4\sqrt{3} - 7 > 0$ . |
| B. | $6\sqrt{3} - 10$ , |          | 2. | $3 - 2\sqrt{3} < 0$ i $4\sqrt{3} - 7 < 0$ . |
|    |                    |          | 3. | $3 - 2\sqrt{3} < 0$ i $4\sqrt{3} - 7 > 0$ . |

**Zadanie 17 (0-2)**

Dane są liczby  $a = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$  i  $b = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ .

Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Iloczyn  $ab$  jest równy

- A. 1      B. 2      C.  $2\sqrt{6}$       D. 5

2. Iloczyn  $(b + a)(b - a)$  jest równy

- E.  $4\sqrt{6}$       F.  $10 - 4\sqrt{6}$       G.  $10 + 4\sqrt{6}$       H.  $-4\sqrt{6}$

**Zadanie 18 (0-2)**

Zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności:

$$(3 - 2x)^2 \leq (2x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 2x)$$

**Zadanie 19 (0-2)**

Podaj liczby naturalne spełniające nierówność  $(4x + 3)^2 - (4x - 3)^2 \leq 100$ .

**D Zadanie 20 (0-3)**

Uzasadnij, że nierówność  $\sqrt{2}x - 3\sqrt{2} < 6 - x$  spełniają cztery liczby naturalne dodatnie.

**Zadanie 21 (0-2)**

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną  $n$  spełniającą nierówność:

$$n^2 \geq |10 - 10\sqrt{10}|$$

**Zadanie 22 (0-2)**

Ile liczb całkowitych  $x$  spełnia warunek  $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} \leq |x| < 9$ ?

**D Zadanie 23 (0-2)**

Uzasadnij, że dla dowolnego  $k \in \mathbb{Z}$  liczba  $(3k - 1)^2 + (3k + 1)^2 + (3k + 2)^2 - 3k^2$  jest podzielna przez 6.

**D Zadanie 24 (0-2)**

Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

**D Zadanie 25 (0-4) → Przykład 1 i 2, str. 117**

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 8 sumy kwadratów czterech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 4.

**Zadanie 26 (0-4)**

Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} : \frac{a \cdot b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$  dla  $a = 3 + \sqrt{2}$  i  $b = 3 - \sqrt{2}$ .

**D Zadanie 27 (0-3)**

Uzasadnij, że każda liczba z przedziału  $(\frac{7}{2}; \infty)$  spełnia nierówność:

$$\sqrt{2}x + 2 \leq 2x$$

**Zadanie 28 (0-4)**

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających jednocześnie obie nierówności.

$$\begin{cases} \frac{1-x}{2} < \frac{5-x}{4} \\ (2x-1)^2 \geq (2x-3)(2x+3) + 2 \end{cases}$$

**Zadanie 29 (0-4)**

Ile jest liczb całkowitych spełniających jednocześnie obie nierówności?

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x) \geq x - \frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leq (x+1)^2 \end{cases}$$



**Zadanie 1 (0-2)**

Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną spełniającą nierówność:

$$-0,01x < \frac{1}{1-\sqrt{2}}$$

**Zadanie 2**

Dane są zbiory  $A = (-\infty; -6) \cup [4; \infty)$ ,  $B = [-100; 36]$  i  $C = [-8; 4]$ .

**Zadanie 2.1 (0-2)**

Ile liczb całkowitych należy do zbioru  $(A \cap B) \setminus C$ ?

**Zadanie 2.2 (0-3)**

Wyznacz  $p$  i  $q$ , tak aby zbiorem rozwiązań nierówności  $|x - p| > q$  był zbiór  $A \setminus B$ .

**Zadanie 3 (0-2)**

$A$  jest zbiorem wszystkich liczb całkowitych  $k$  takich, że liczba  $\sqrt{2}k$  spełnia nierówność  $|2x - 3| < 241$ . Oblicz różnicę między największym a najmniejszym elementem zbioru  $A$ .

**Zadanie 4 (0-2)**

Wyznacz liczbę punktów  $(x, y)$  o obu współrzędnych całkowitych spełniających warunki:  $|x - 3| \leq 30$  i  $|y + 2| \leq 60$ .

**D Zadanie 5 (0-3)**

Wykaż, że jeśli liczba naturalna  $n$  nie jest podzielna przez 3, to reszta z dzielenia  $n^2$  przez 3 jest równa 1.

**D Zadanie 6 (0-3)**

Wykaż, że dla dowolnych liczb  $x$  i  $y$  zachodzi nierówność:

$$3x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \geq 2xy - y^2$$

**D Zadanie 7 (0-4)**

Uzasadnij, że liczba  $137^8 - 119^8$  jest podzielna przez  $2^{11}$ .

**Zadanie 8 (0-4)**

Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność:

$$\sqrt{12 - 4\sqrt{3}x + x^2} < \frac{3}{2\sqrt{3} - 3}$$

**Zadanie 9 (0-5)**

Dane są zbiory:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}: x \leq \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}} \right\}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R}: |2x + 12| \geq 2 \}$$

Wyznacz zbiór  $B \setminus A$ .

# 3 Układy równań

Samolot lecący pod wiatr przebywa trasę 1200 km w ciągu 2,4 h. Tę samą trasę z wiatrem pokonuje w 2 h. Jaka jest prędkość samolotu, a jaka wiatru (przyjmujemy, że prędkości te są stałe)?

Jeśli oznaczymy przez  $x$  prędkość samolotu, a przez  $y$  prędkość wiatru, to do opisu sytuacji potrzebujemy dwóch równań z niewiadomymi  $x$  i  $y$ . Poszukiwanym rozwiązaniem są wielkości spełniające jednocześnie oba te równania:  $x = 550$  km/h i  $y = 50$  km/h.

Rozdział ten poświęcony jest metodom rozwiązywania układów równań oraz wykorzystaniu ich do rozwiązywania zadań tekstowych.





## Wykorzystanie równań do rozwiązywania zadań

## Przykład 1

W skarbonce znajduje się 12 monet – są to monety 2- i 5-złotowe. Razem dają one kwotę 36 zł. Oblicz, ile monet każdego nominału znajduje się w skarbonce.

Oznaczmy przez  $x$  liczbę 2-złotówek, wówczas liczba 5-złotówek jest równa  $12 - x$ . Zapisujemy równanie uwzględniające informacje zawarte w zadaniu:

$$2x + 5(12 - x) = 36$$

$$2x + 60 - 5x = 36$$

$$-3x = -24$$

$$x = 8$$

$$\text{Sprawdzenie: } 8 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 36$$

Zatem w skarbonce znajduje się 8 monet 2-złotowych i 4 monety 5-złotowe.

1. W portmonetce znajduje się 19 monet: 6 monet 1-złotowych oraz monety 2- i 5-złotowe. Razem dają one kwotę 50 zł. Oblicz, ile monet 5-złotowych znajduje się w portmonetce.
2. Otrzymaliśmy 6 zł reszty w monetach 10-, 20- i 50-groszowych. Monet 20- i 50-groszowych było tyle samo, a wszystkich monet było 20. Oblicz, ile otrzymaliśmy monet 10-groszowych.

## Przykład 2

Z dwóch miast odległych o 390 km wyjechały o tej samej godzinie naprzeciw siebie dwa samochody. Pierwszy samochód jechał z prędkością 60 km/h, a drugi z prędkością o 10 km/h większą. Po jakim czasie samochody się spotkają?

Oznaczmy przez  $t$  czas w godzinach, jaki minął od wyjazdu do momentu spotkania. Pierwszy samochód przejechał w tym czasie  $60t$  km, a drugi –  $70t$  km. Otrzymujemy równanie:

$$60t + 70t = 390$$

$$130t = 390$$

$$t = 3$$

Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Zatem samochody spotkają się po 3 godzinach.

3. Samochód pokonał trasę o długości 525 km. Pierwszy odcinek trasy przebył z prędkością 90 km/h. Przejechanie drugiego odcinka z prędkością 60 km/h zajęło mu dwa razy więcej czasu niż przejechanie pierwszego odcinka. Ile czasu trwała cała podróż?

$$s = v \cdot t$$

gdzie:  
 $s$  – droga,  
 $v$  – prędkość,  
 $t$  – czas

## 3.1. Co to jest układ równań

## Przykład 1

Podaj trzy pary liczb  $x, y$  spełniające równanie  $2x + 4y = 20$ .

Przykładowe pary:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 0,5 \\ y = 4,75 \end{cases}$$

Po wybraniu jako  $x$  dowolnej liczby wyznaczamy  $y$ , rozwiązując odpowiednie równanie.

Równanie  $2x + 4y = 20$  to przykład **równania z dwiema niewiadomymi**. Równanie to jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb.

## Przykład 2

Do skarbonki wrzucono 7 monet. Były to monety 2- i 5-złotowe. Wiadomo, że w skarbonce jest 26 zł. Ile monet 2-, a ile 5-złotowych wrzucono do skarbonki?

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych:

$x$  – liczba monet 2-złotowych,

$y$  – liczba monet 5-złotowych.

Aby opisać sytuację z zadania, potrzebujemy dwóch równań:  $x + y = 7$  (do skarbonki wrzucono 7 monet) i  $2x + 5y = 26$  (w skarbonce znajduje się 26 zł). Równania te muszą być spełnione jednocześnie – zapisujemy to, łącząc je klamrą:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$$

Ustalmy najpierw, które pary liczb spełniają pierwsze równanie. Liczby monet  $x$  i  $y$  mogą być tylko liczbami dodatnimi naturalnymi, zatem równanie  $x + y = 7$  spełnia sześć par liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

Spośród nich tylko para  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$  spełnia drugie równanie  $2x + 5y = 26$ .

Zatem jest ona rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 5y = 26 \end{cases}$ , czyli do skarbonki wrzucono 3 monety 2-złotowe i 4 monety 5-złotowe.

## Ćwiczenie 1

Kasjerka wydała resztę 2 zł 10 gr w 9 monetach, wśród których były tylko 10- i 50-groszówki. Ile było 10-groszówek, a ile 50-groszówek?

**Układem dwóch równań z dwiema niewiadomymi** (lub krótko: układem równań) nazywamy dwa jednocześnie rozpatrywane równania opisujące związek między tymi dwiema niewiadomymi. **Rozwiązanie układu równań** to para liczb, która spełnia jednocześnie oba równania.

### Przykład 3

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań  $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ -x + 2y = 14 \end{cases}$

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$$

A. Podstawiamy do równań układu  $x = 1$  i  $y = 2$ .

$$\begin{cases} 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -1 + 2 \cdot 2 = 3 \neq 14 & \text{Drugie równanie nie jest spełnione.} \end{cases}$$

Zatem para  $x = 1, y = 2$  nie spełnia podanego układu równań.

B. Podstawiamy do równań układu  $x = -2$  i  $y = 6$ .

$$\begin{cases} 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 = -8 + 18 = 10 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -(-2) + 2 \cdot 6 = 2 + 12 = 14 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Zatem para  $x = -2, y = 6$  spełnia podany układ równań.

### Ćwiczenie 2

Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań  $\begin{cases} 3x - 2y = -18 \\ -\frac{1}{2}x + 3y = 7 \end{cases}$

$$\text{A. } \begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -5 \\ y = -1,5 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -5 \\ y = 1,5 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$$

## Zadania

1. Sprawdź, czy para liczb  $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$  spełnia podany układ równań.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 7x - y = 17 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x + \frac{1}{3}y = 3 \\ -x - y = 1 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 2\frac{1}{6} \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y+1}{4} = \frac{3}{2} \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 7 \\ 4x + y = 11 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2 \\ \frac{5}{2}y - \frac{3}{4}x = 1 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y = 0 \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = -\frac{5}{6} \end{cases} \end{array}$$

2. Sprawdź, która para liczb spełnia układ równań.

$$\begin{cases} 3x + 2y = -8 \\ -6x - 5y = 11 \end{cases}$$

$$\text{A. } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = -6 \\ y = 5 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = -8 \\ y = 8 \end{cases}$$

3. Podaj wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich spełniające równanie.

$$\text{a) } 3x + 2y = 17 \quad \text{b) } 3x + 4y = 17 \quad \text{c) } 2x + 4y = 17$$

4. Do podanego równania dopisz takie drugie, aby utworzony układ równań był spełniony przez wskazaną parę liczb.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 4x + 3y = 14, \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} & \text{c) } 4x - 9y = -1, \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \text{b) } 3x - 7y = 6, \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases} & \text{d) } 12x + \frac{1}{2}y = -10, \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -8 \end{cases} \end{array}$$

5. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

- Suma liczb  $x$  i  $y$  wynosi 5. Różnica tych liczb wynosi 2.
- Liczba  $x$  jest o 8 większa od liczby  $y$ . Liczba  $y$  jest pięciokrotnie mniejsza od liczby  $x$ .
- Liczba  $x$  jest trzykrotnie większa od liczby  $y$ . Średnia arytmetyczna liczb  $x$  i  $y$  jest równa 10.
- Liczba  $x$  jest o 3 mniejsza od liczby  $y$ . Różnica liczb  $x$  i  $y$  jest dwa razy większa od liczby  $y$ .

6. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

- Liczba  $a$  stanowi 40% liczby  $b$ . Gdy do 20% liczby  $a$  dodamy 60% liczby  $b$ , to otrzymamy 4.
- Suma liczb  $a$  i  $b$  jest równa 14. Gdy do 120% liczby  $a$  dodamy 70% liczby  $b$ , to otrzymamy sumę  $a$  i  $b$ .
- Liczba o 10% mniejsza od liczby  $a$  jest o 10% większa od liczby  $b$ . Różnica liczby o 15% większej od  $a$  i liczby o 15% mniejszej od  $b$  wynosi 1.

7. Dla jakich wartości parametrów  $m$  i  $n$  rozwiązaniem układu równań jest podana para liczb?

$$\text{a) } \begin{cases} mx + 2y = 39 \\ -8x + ny = -34 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 8x - my = 5 \\ nx - 10y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$



# 3.2. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Jedną z metod rozwiązywania układów równań jest **metoda podstawiania**.

## Przykład 1

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$  metodą podstawiania.

Wybieramy jedno z równań i wyznaczamy z niego jedną z niewiadomych. To, którą niewiadomą wyznaczymy, nie ma wpływu na ostateczne rozwiązanie układu równań.

$$\begin{cases} x = 3y + 5 & \text{Wyznaczamy niewiadomą } x \text{ z pierwszego równania.} \\ 4x + 5y = 3 & \text{Drugie równanie przepisujemy bez zmian.} \end{cases}$$

W miejsce  $x$  w drugim równaniu podstawiamy wyrażenie  $3y + 5$ , dzięki czemu otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą  $y$ .

$$\begin{cases} x = 3y + 5 & \text{Pierwsze równanie przepisujemy bez zmian.} \\ 4(3y + 5) + 5y = 3 & \text{Podstawiamy wyrażenie } 3y + 5 \text{ w miejsce } x \text{ w drugim równaniu.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 12y + 20 + 5y = 3 & \text{Rozwiązujemy drugie równanie z niewiadomą } y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ 17y = -17 / : 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y + 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \cdot (-1) + 5 & \text{Podstawiamy wyznaczoną wartość } y \text{ do pierwszego równania i obliczamy niewiadomą } x. \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{Otrzymana para liczb jest jedynym rozwiązaniem układu równań.}$$

Aby przekonać się, czy nie popełniliśmy błędu, możemy sprawdzić otrzymane rozwiązanie, podstawiając je do układu równań:

$$\begin{cases} 2 - 3 \cdot (-1) = 2 + 3 = 5 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 8 - 5 = 3 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

Zatem otrzymana para liczb jest rozwiązaniem tego układu równań.

W wyniku przekształceń równań układu w kolejne równoważne równania otrzymujemy **równoważne układy równań**, czyli takie, które mają to samo rozwiązanie (są spełnione przez tę samą parę liczb).

## Ćwiczenie 1

Rozwiąż podany układ równań metodą podstawiania. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - 3y = 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 5x + 3y = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} -3x + y = -20 \\ 2x - y = 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x + y = 20 \\ x - 3y = -4 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} -7x + 2y = 13 \\ -5x + y = 11 \end{cases} \end{array}$$

## Przykład 2

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} 4x + y = 6 - 2y \\ 2y - x = 2 + y \end{cases}$  metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia obu równań do prostszej postaci – takiej, w której niewiadome znajdują się po jednej stronie równań.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{Wybierając równanie, z którego wyznaczymy niewiadomą, kierujemy się przede wszystkim łatwością obliczeń.}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{Wyznaczamy niewiadomą } y \text{ z drugiego równania.}$$

$$\begin{cases} 4x + 3(x + 2) = 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{Podstawiamy wyrażenie } x + 2 \text{ w miejsce } y \text{ w pierwszym równaniu.}$$

$$\begin{cases} 4x + 3x + 6 = 6 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{Rozwiązujemy pierwsze równanie z niewiadomą } x.$$

$$\begin{cases} 7x = 0 / : 7 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 2 \end{cases} \quad \text{Wyznaczoną wartość niewiadomej } x \text{ podstawiamy do drugiego równania.}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Para liczb  $x = 0$ ,  $y = 2$  jest rozwiązaniem podanego układu równań.

### Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 2x - 4y \\ x + y = 7 - y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x = x - y + 3 \\ 2 = y - x \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2(x + 2) = y - 2 \\ 2x - y = x + y - 15 \end{cases}$$

### Przykład 3

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$  metodą podstawiania.

Zaczynamy od doprowadzenia pierwszego równania do prostszej postaci, a następnie rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{y+3}{6} = \frac{x+1}{3} - 1 & / \cdot 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + 2x - 7 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y + 3 = 2(x + 1) - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 4x = 8 & / : 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y + 3 = 2x + 2 - 6 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 7 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Na dowolnym etapie roz-} \\ \text{wiązywania możemy zamie-} \\ \text{nić równania miejscami.} \end{array} \\ \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb:  $x = 2$ ,  $y = -3$ .

### Ćwiczenie 3

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x+y}{2} = 5 \\ \frac{x-y}{3} = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{2x-y}{3} = \frac{3x+y}{2} \\ x = 2(x+y+1) \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 1 - \frac{x-1}{2} = 2 + \frac{y+1}{3} \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

**Nie każdy układ równań ma rozwiązanie.** Na przykład układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

nie jest spełniony przez żadną parę liczb (jeśli suma dwóch liczb jest równa 7, to nie może być jednocześnie równa 8). Zauważmy, że również układ równań:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$$

nie ma rozwiązania (dlaczego?).

### Przykład 4

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 7 \end{cases}$  metodą podstawiania.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 3 + 2y \\ -2(3 + 2y) + 4y = 7 \end{cases} & \quad \begin{array}{l} \text{Wyznaczamy niewiadomą } x \text{ z pierwszego równania.} \\ \text{Podstawiamy wyrażenie } 3 + 2y \\ \text{w miejsce } x \text{ w drugim równaniu.} \end{array} \\ \begin{cases} x = 3 + 2y \\ -6 - 4y + 4y = 7 \end{cases} & \\ \begin{cases} x = 3 + 2y \\ 0y = 13 \end{cases} & \quad \text{Drugie równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione} \\ & \quad \text{przez żadną wartość niewiadomej } y. \end{aligned}$$

Zatem **żadna para liczb nie spełnia podanego układu równań.**

Układ równań może mieć **nieskończenie wiele rozwiązań**. Na przykład układ:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

spełnia każda para liczb  $x$ ,  $y$ , których suma jest równa 2.

### Przykład 5

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} 6x - 2y = 12 \\ -3x + y = -6 \end{cases}$  metodą podstawiania.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - y = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases} & \quad \begin{array}{l} \text{Doprowadzamy pierwsze równanie do prostszej postaci.} \\ \text{Wyznaczamy niewiadomą } y \text{ z drugiego równania.} \end{array} \\ \begin{cases} 3x - (3x - 6) = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases} & \quad \begin{array}{l} \text{Podstawiamy wyrażenie } 3x - 6 \text{ w miejsce } y \\ \text{w pierwszym równaniu.} \end{array} \\ \begin{cases} 3x - 3x + 6 = 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases} & \quad \begin{array}{l} \text{Równanie } 0x = 0 \text{ (możemy je również zapisać } 0 = 0) \\ \text{jest zawsze spełnione, niezależnie od tego, jaką wartość} \\ \text{wstawimy w miejsce niewiadomej } x. \\ \text{Zatem o liczbie rozwiązań układu decyduje tylko} \\ \text{drugie równanie, w którym występują obie niewiadome.} \end{array} \\ \begin{cases} 0x = 0 \\ y = 3x - 6 \end{cases} & \end{aligned}$$

Równanie  $y = 3x - 6$  jest spełnione przez nieskończenie wiele par liczb, co oznacza, że **układ równań jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb**,

np. spełniają go pary liczb:  $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x = 0,5 \\ y = -4,5 \end{cases}$

Układ równań z dwiema niewiadomymi  $x$  i  $y$ :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{gdzie } a_1 \neq 0 \text{ lub } b_1 \neq 0 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{gdzie } a_2 \neq 0 \text{ lub } b_2 \neq 0 \end{cases}$$

nazywamy **układem równań liniowych**.

### Definicja

Układ równań liniowych, którego rozwiązaniem jest jedna para liczb, nazywamy **układem oznaczonym**.

Układ równań liniowych, który ma nieskończenie wiele rozwiązań, nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Układ równań liniowych, który nie ma ani jednego rozwiązania, nazywamy **układem sprzecznym**.

### Ćwiczenie 4

Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy spreczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 4y = 24 \\ x + 2y = 12 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - 3y = -3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases} \end{array}$$

### Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + 6 = 3x + y \\ 4 = x - 2y + 5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -2x = 3y - 2 \\ y - 6x = -6 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} x - 3y = 1 - x - y \\ 0,2x + 0,1y = -0,1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x - 3y = 0,7 \\ x + 4y = 5,3 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 0,4x - 0,3y = -2 \\ 1,6x + 1,5y = 46 \end{cases} \end{array}$$

2. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 3(x - y) - 4(x - y) = -5 \\ 6 - x = 2(x - 3y) - 18 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3 - 2(y - 4x) = 4(1 - x) - 19 \\ -3(2x - y + 1) = -2y + 26 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 6x - (2y - 3x) = 7y - 9 \\ -3x + 8 = -2(x - 2y - 9) \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 4(3x - 0,5) - 5(y + 0,5) = 9 \\ -2x - 5(y - 2,5) = -9y + 5,5 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} x - 2(3 - 2(x - y)) = 23 \\ 6 + 5(1 - 3(y - x)) = 20x + 1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 4(x - 1) - 2(y - 0,5) = 7 \\ 3(x - 2) + 5(y - 1,5) = 13,5 \end{cases} \end{array}$$

3. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb całkowitych?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} \frac{x+5}{2} + \frac{y}{2} = \frac{y+8}{4} \\ -3x - y = 5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{2+x}{4} = \frac{y-1}{3} \\ \frac{5-x-y}{2} = \frac{x+2y}{5} \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} \frac{2x-6}{5} + 6y = 3 \\ x - 6y - 1 = 2y \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = 1 \\ \frac{x-2}{8} - \frac{y-1}{4} = 2 \end{cases} \end{array}$$

4. Sprawdź, ile rozwiązań ma układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2(x - 3y) + 3(x - 2y) = 1 \\ \frac{5}{2}x - 2y = 4(y + 1) \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - 7(y - 1) = -2(\frac{5}{2} + x) \\ -2(1 - 2x - y) = 1 - x - 5y \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 2(x - 2y) - 2(y - x + 1,5) = 5 \\ \frac{2-x}{5} - 0,3y = 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3(1 - x) - 5(2 - y) = 5 \\ 0,2(2 - 3x) + y = 0,8 \end{cases} \end{array}$$

5. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} (x + 2)^2 + 2y = x + 15 + (x - 2)(x + 2) \\ x + (y - 1)^2 = 1 - (\sqrt{3} - y)(y + \sqrt{3}) \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x(1 - 2x) - y(1 - y) = (y - \sqrt{2}x)(y + \sqrt{2}x) + 3 \\ 2x - (2y - \frac{1}{4})^2 + 16\frac{1}{16} = (2y + 3)(3 - 2y) \end{cases} \end{array}$$

6. Sprawdź, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy spreczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 3(y - 2) = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x - y = 2 \\ \frac{1}{2}y = 2(x - 1) \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2y - x = 8 \\ x + 4 = 2(y - 2) \end{cases} \end{array}$$

7. Dane jest równanie  $3x - 4y = 2$ . Dopisz do niego drugie równanie, tak aby otrzymany układ równań był:

a) spreczny, b) nieoznaczony, c) oznaczony.

8. Dla których wartości parametru  $m \in \{-2, 0, 2\}$  układ jest oznaczony, dla których nieoznaczony, a dla których spreczny?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + my = 3m \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ mx + 3y = 6 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} mx + 2y = 2 \\ 2x + my = -2 \end{cases} \end{array}$$

9. Układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

nie jest układem równań liniowych. Ma cztery rozwiązania, które są parami liczb całkowitych. Podaj te rozwiązania.



### 3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Inną metodą rozwiązywania układów równań jest **metoda przeciwnych współczynników**.

#### Przykład 1

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases}$  metodą przeciwnych współczynników. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

Zauważmy, że współczynniki przy niewiadomej  $x$  są liczbami przeciwnymi (1 i  $-1$ ), zatem po dodaniu obu równań stronami, otrzymamy równanie z jedną niewiadomą  $y$ .

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x + 3y = -4 \\ -x + 6y = 13 \end{cases} & & \\ + & & \\ \hline x - x + 3y + 6y = -4 + 13 & \text{Dodajemy równania stronami.} & \\ 9y = 9 & \text{Otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą.} & \\ y = 1 & & \end{array}$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej  $y$  podstawiamy do jednego z równań wyjściowego układu, na przykład do równania  $x + 3y = -4$ . Otrzymujemy nowy, równoważny układ równań:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + 3 \cdot 1 = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Podstawiamy liczbę 1 w miejsce } y \text{ w równaniu} \\ x + 3y = -4 \text{ i obliczamy niewiadomą } x. \end{array}$$

Stąd otrzymujemy jako rozwiązanie układu równań parę liczb:

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 1 \end{cases}$$

#### Sprawdzenie

$$\begin{cases} -7 + 3 \cdot 1 = -7 + 3 = -4 & \text{Spełnione pierwsze równanie.} \\ -(-7) + 6 \cdot 1 = 7 + 6 = 13 & \text{Spełnione drugie równanie.} \end{cases}$$

#### Ćwiczenie 1

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 2x - y = -2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -2x + y = -1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ -5x + y = 9 \end{cases} \end{array}$$

Czasami zanim dodamy równania stronami, najpierw musimy pomnożyć obie strony jednego równania (lub obu równań) przez taką liczbę (lub liczby), aby współczynniki przy jednej z niewiadomych w obu równaniach były liczbami przeciwnymi.

#### Przykład 2

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$  metodą przeciwnych współczynników.

Współczynniki przy żadnej z niewiadomych nie są liczbami przeciwnymi. Przekształcimy zatem jedno z równań tak, aby otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej  $y$ .

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases} & & \\ + \begin{cases} 5x + 4y = 6 \\ -8x - 4y = -12 \end{cases} & \begin{array}{l} \text{Mnożymy obie strony drugiego równania przez } -4. \\ \text{Dodajemy równania stronami.} \end{array} & \\ \hline 5x - 8x = 6 - 12 & \text{Otrzymaliśmy równanie z jedną niewiadomą.} & \end{array}$$

Rozwiązujemy równanie z niewiadomą  $x$ :

$$-3x = -6, \text{ stąd } x = 2$$

Wyznaczoną wartość niewiadomej  $x$  podstawiamy do jednego z równań wyjściowego układu, np. do równania  $2x + y = 3$ , i otrzymujemy nowy, równoważny układ równań:

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 + y = 3 \end{cases} \quad \text{Podstawiamy liczbę 2 w miejsce } x \text{ w równaniu } 2x + y = 3.$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Otrzymana para liczb  $x = 2, y = -1$  jest rozwiązaniem podanego układu.

#### Ćwiczenie 2

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 5y = -2 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x + 14y = 5 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 10x + 21y = -9 \\ -5x - 7y = 8 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x + y = -13 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ 3x + 5y = -9 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x + 3y = -3,5 \\ 3x - 2y = 4,5 \end{cases} \end{array}$$

**Przykład 3**

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x + 7y = 4 \end{cases}$  metodą przeciwnych współczynników.

Rozwiązanie układu równań rozpoczynamy od pomnożenia każdego z równań przez takie liczby, aby przy jednej z niewiadomych otrzymać przeciwne współczynniki.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 & / \cdot 5 \\ 5x + 7y = 4 & / \cdot (-2) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 5,} \\ \text{a drugiego przez } -2. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 10x + 15y = 10 \\ -10x - 14y = -8 \end{cases} \\ \hline y = 2 \end{array} \quad \text{Dodajemy równania stronami.}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \quad \text{Otrzymujemy nowy układ równań, równoważny do danego.}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x + 3 \cdot 2 = 2 \end{cases} \quad \text{Podstawiamy liczbę 2 w miejsce } y \text{ w drugim równaniu.}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 2x = -4 & / : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para liczb:  $x = -2, y = 2$ .

**Ćwiczenie 3**

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x + 7y = 7 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 6x + 2y = 13 \\ 4x - 7y = 2 \end{cases} \end{array}$$

**Ćwiczenie 4**

Podaj liczby, przez które można pomnożyć obie strony równań układu, aby móc skorzystać z metody przeciwnych współczynników. Nie rozwiązuj układu.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 7y = 2 \\ -5x + 4y = 8 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 17y = 4 \\ \frac{1}{3}x - 13y = 5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{2}{5}x - 6y = 1 \\ 3x - 5y = 9 \end{cases} \end{array}$$

**Przykład 4**

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} 5(x - y) + 5 = 2(2x + y) \\ 2(x - 1) = y + 1 \end{cases}$

Rozpoczynamy od doprowadzenia równań układu do najprostszej postaci.

$$\begin{cases} 5x - 5y + 5 = 4x + 2y \\ 2x - 2 = y + 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Redukujemy wyrazy podobne. Niewiadome} \\ \text{zapisujemy po lewej stronie każdego równania.} \end{array}$$

Otrzymany układ równań możemy rozwiązać jedną z dwóch metod.

**Metoda podstawiania**

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ 2(-5 + 7y) - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ -10 + 14y - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ 13y = 13 & / : 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7y \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

**Metoda przeciwnych współczynników**

$$\begin{cases} x - 7y = -5 & / \cdot (-2) \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 14y = 10 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \hline 13y = 13 & / : 13 \\ y = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x - 1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań nie zależy od:

- wyboru metody rozwiązywania,
- kolejności równań w układzie – można ją zmienić na każdym etapie rozwiązywania.

W przypadku metody podstawiania rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru wyznaczonej niewiadomej i tego, z którego równania ją wyznaczamy.

W przypadku metody przeciwnych współczynników rozwiązanie układu równań nie zależy od wyboru niewiadomej, którą redukujemy.

Rozpatrywane poprzednio układy równań były układami oznaczonymi. Pokażemy, jak wygląda rozwiązywanie metodą przeciwnych współczynników układu sprzecznego oraz nieoznaczonego.

#### Przykład 5

$$\begin{array}{l} \text{Rozwiąż układ równań } \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \end{cases} \\ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ -x + \frac{2}{3}y = 1 \end{array} \right. / \cdot 3 \\ \hline \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ -3x + 2y = 3 \end{array} \right. \\ \hline 0x + 0y = 7 \end{array} \end{array}$$

Mnożymy obie strony drugiego równania przez 3.

Dodajemy równania stronami.

Otrzymaliśmy równanie spreczne.

Równania  $0x + 0y = 7$  (można je zapisać w postaci  $0 = 7$ ) nie spełnia żadna para liczb  $x$  i  $y$ , zatem układ równań jest spreczny.

#### Przykład 6

$$\begin{array}{l} \text{Rozwiąż układ równań } \begin{cases} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{cases} \\ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -5x + \frac{2}{3}y = -4 \\ 3\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = 3 \end{array} \right. / \cdot 3 \\ \hline \left\{ \begin{array}{l} -15x + 2y = -12 \\ 15x - 2y = 12 \end{array} \right. \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array} \end{array}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez 3, a drugiego przez 4.

Dodajemy równania stronami.

Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe.

Równanie  $0x + 0y = 0$  (można je zapisać w postaci  $0 = 0$ ) spełnia dowolna para liczb  $x$  i  $y$ . Wyjściowy układ równań jest równoważny nieoznaczonemu układowi równań:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 15x - 2y = 12 \end{cases}$$

Układ ten jest spełniony przez nieskończenie wiele par liczb, dla których prawdziwe jest drugie równanie. Jego rozwiązanie można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{15}{2}x - 6 \end{cases}$$

#### Ćwiczenie 5

Sprawdź, czy układ równań jest nieoznaczony czy spreczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + 0,4y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 1,5x - 2y = 6 \\ x - 1\frac{1}{3}y = 4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -\frac{2}{3}x + 3y = 4 \\ \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{4}y = 5 \end{cases} \end{array}$$

#### Zadania

1. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 6x - 8y = 3 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2(2x + 3y) = 30 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - 4y = 15 \\ 7x + 2y = 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x - 5y = 3,5 \\ -4x + 2y = -7 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2(x + y) = 2 - 2y \\ x + 2y = 6 \end{cases} \end{array}$$

2. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 0,2(x + 2y) - 0,3(2x - y) = 3,5 \\ 2(x + y) - (x - 2) = 2y + 2 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x - y = 4x - 3y + 5 \\ x + y = 3x + 5y - 2 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 0,01x - 0,01(y - 1) = -0,06 \\ 0,03x - 0,02(y - 2) = -0,12 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{3}(x + y) \\ \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}(y + 3x) = -4 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 0,01(4x - y) = 0,01y + 0,02 \\ 0,6(y - x) = 0,1(y + 2x + 1) \end{cases} \end{array}$$

3. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 5(y + 2) + x = 3x + y \\ \frac{y + 2,5}{5} = x + 1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 1) + 13 \\ \frac{x - y}{3} = \frac{3x}{2} + \frac{3y}{4} + 1 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 3x - y = 5 \\ (x + 1)(x + 1) - y = x(x + 1) \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} \frac{x + y}{2} = \frac{5y - x}{3} - \frac{7y - 3x}{5} \\ 5(x + 1) = 3(y - 1) \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} \frac{x - 1}{2} + \frac{y + 1}{3} = 3 \\ \frac{x + 1}{3} - \frac{y - 2}{6} = 2 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 1 \\ \frac{5}{2}y - 2 = 1 - \frac{1}{2}x \end{cases} \end{array}$$

4. Dla których wartości parametrów  $m \in \{1, 3\}$  i  $n \in \{1, 3\}$  układ jest nieoznaczony, a dla których – spreczny?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 3x - 18y = n \\ mx - 6y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x - y = 2mx - 1 \\ mx + y = -x + n \end{cases} \end{array}$$



### Układy trzech równań z trzema niewiadomymi

Niektóre zagadnienia wymagają wprowadzenia trzech lub więcej niewiadomych. Tworzy się wtedy i rozwiązuje układ tylu równań, ile niewiadomych zostało wprowadzonych. Pokażemy, jak postępować w przypadku trzech równań z trzema niewiadomymi.

1. Przeczytaj zamieszczony obok opis metody rozwiązywania układu trzech równań z trzema niewiadomymi, a następnie rozwiąż podany układ równań.

$$a) \begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + y - z = 20 \\ x - y - z = 30 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y + z = 7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 5x - 3y - z = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = -1 \end{cases}$$

■ Z jednego z równań wyznaczamy wybraną niewiadomą i podstawiamy otrzymane wyrażenie do obu pozostałych równań. Powstają w ten sposób dwa równania z dwiema niewiadomymi.

■ Rozwiązujemy otrzymany układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi dowolną metodą.

■ Obliczone wartości dwóch niewiadomych podstawiamy do dowolnego równania początkowego układu i obliczamy wartość trzeciej niewiadomej.

2. Czy podany układ równań spełnia trójka liczb całkowitych?

$$a) \begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ 2y + z = 2 \\ 2y = -2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + 2y - z = 10 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 2y - z = -9 \\ 2y + 3z = 16 \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y - 2z = -5 \\ x + 2y + z = 4 \\ x - 3y - 2z = -3 \end{cases}$$

3. a) Suma trzech liczb jest równa 36. Suma pierwszej i drugiej liczby jest dwukrotnie większa od trzeciej liczby, a suma drugiej i trzeciej jest o 10 większa od pierwszej liczby. Jakie to liczby?
- b) Suma liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jest równa 27. Liczba  $c$  jest o 3 większa od średniej arytmetycznej liczb  $a$  i  $b$ , a liczba  $b$  jest o 3 mniejsza od średniej arytmetycznej liczb  $a$  i  $c$ . Wyznacz liczby  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

## 3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)

### Przykład 1

Dwie ciężarówki przewożące piasek wykonały łącznie 13 kursów. Jedna z nich przewoziła za każdym razem 15 ton, a druga – 8 ton piasku. Łącznie przewiozły one 132 tony piasku. Ile kursów wykonała każda z ciężarówek? Ułóż odpowiedni układ równań i go rozwiąż.

Wprowadźmy oznaczenia niewiadomych:

$x$  – liczba kursów wykonanych przez pierwszą ciężarówkę,

$y$  – liczba kursów wykonanych przez drugą ciężarówkę.

Zapisujemy układ równań odpowiadający treści zadania.

$$\begin{cases} x + y = 13 & \text{Łączna liczba kursów dwóch ciężarówek.} \\ 15x + 8y = 132 & \text{Łączna masa przewiezonego piasku.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 13 \quad / \cdot (-8) \\ 15x + 8y = 132 \end{cases} \quad \text{Układ równań rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.}$$

$$+ \begin{cases} -8x - 8y = -104 \\ 15x + 8y = 132 \end{cases}$$


---


$$7x = 28$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu równań  $x = 4$  i  $y = 9$ .

Pierwsza ciężarówka wykonała 4 kursy, a druga 9.

### Ćwiczenie 1

Dwie ciężarówki, jedna o ładowności 6 ton, a druga – 10 ton, przewiozły łącznie 460 ton piasku podczas 50 kursów (za każdym razem były maksymalnie obciążone). Ile kursów wykonała jedna ciężarówka, a ile druga?

### Ćwiczenie 2

a) Śliwki na targowisku kosztowały 6,50 zł/kg, a wiśnie – 8,50 zł/kg. Gospodyni kupiła łącznie 4 kg tych owoców i zapłaciła za nie 31 zł. Ile kupiła śliwek, a ile wiśni?

b) Warzywa znajdujące się na stoisku kosztują: marchew – 4 zł/kg, buraki – 6 zł/kg, rzepa – 7,50 zł/kg. Kierownik stołówki kupił 8 kg tych warzyw, w tym 2 kg rzepy. Za wszystko zapłacił 49 zł. Ile kupił marchwi, a ile buraków?

Przykład 2

Piotr i Dorota mają razem 30 lat. Dorota jest o cztery lata młodsza od Piotra. Oblicz wiek Doroty i wiek Piotra.

Oznaczamy niewiadome:

$d$  – wiek Doroty w latach,  $p$  – wiek Piotra w latach.

Zapisujemy warunki zadania w postaci układu równań:

$$\begin{cases} d + p = 30 \\ d = p - 4 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy (sprawdź):

$$\begin{cases} p = 17 \\ d = 13 \end{cases}$$

Dorota ma 13 lat, a Piotr – 17 lat.

Ćwiczenie 3

Tomek jest o cztery lata starszy od swojej siostry. Za dwa lata będą mieli w sumie 30 lat. Ile lat ma obecnie każde z nich?

Przykład 3

Sześć lat temu mama Basi była trzy razy starsza od swojej córki, a za cztery lata będzie od niej dwa razy starsza. Ile lat ma obecnie Basia, a ile jej mama?

Oznaczamy niewiadome:

$b$  – wiek Basi w latach,  $m$  – wiek mamy Basi w latach.

Informacje z zadania wygodnie jest przedstawić w formie tabeli.

|                | Sześć lat temu | Obecnie | Za cztery lata |
|----------------|----------------|---------|----------------|
| Wiek Basi      | $b - 6$        | $b$     | $b + 4$        |
| Wiek mamy Basi | $m - 6$        | $m$     | $m + 4$        |

Zapisujemy układ równań, w którym pierwsze równanie opisuje sytuację sprzed sześciu lat, a drugie – sytuację, która nastąpi za cztery lata.

$$\begin{cases} m - 6 = 3(b - 6) \\ m + 4 = 2(b + 4) \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymujemy (sprawdź):

$$\begin{cases} b = 16 \\ m = 36 \end{cases}$$

Basia ma obecnie 16 lat, a jej mama – 36 lat.

Ćwiczenie 4

a) Pięć lat temu Daria miała dwa razy mniej lat niż Maria. Daria jest młodsza od Marii o 5 lat. Ile lat ma obecnie Daria, a ile Maria?

b) Za trzy lata Olek będzie o połowę starszy od Alka, a dziewięć lat temu Olek miał o dwa lata więcej niż wynosił podwojony wiek Alka. Ile lat ma obecnie Olek, a ile Alek?

Zadania

1. Dziewięć lat temu ojciec był sześć razy starszy od syna. Za dziewięć lat obaj będą mieli razem 85 lat. Ile lat ma obecnie każdy z nich?
2. Dwa lata temu Ania, jej siostra bliźniaczka i ich starszy brat mieli razem 45 lat. Za trzy lata suma wieku bliźniaczek będzie o 12 większa od wieku ich brata. Ile lat ma obecnie każde z nich?
3. Moneta 2-złotowa waży 5,21 g, a 5-złotowa – 6,54 g. Skarbnik klasowy zebrał 30 monet o nominałach 2 zł oraz 5 zł. Wszystkie monety ważyły łącznie 169,6 g. Ile monet 2-złotowych, a ile 5-złotowych zebrał skarbnik?
4. Wydano 48 złotych w 20 monetach: było wśród nich 8 monet 2-złotowych oraz monety 1- i 5-złotowe. Ile było monet 1-, a ile 5-złotowych?
5. Kwotę 100 złotych wydano w monetach 1-, 2- i 5-złotowych – łącznie w 32 monetach, przy czym liczba monet 5-złotowych była o dwa większa od podwojonej liczby monet 1-złotowych. Ile monet każdego rodzaju wydano?
6. Jednego dolara rozmieniono na monety 5-, 10- i 25-centowe. Okazało się, że po rozmienieniu było łącznie 12 monet, w tym jedna moneta 25-centowa. Ile było monet 5-, a ile 10-centowych?

1 dolar = 100 centów



Moneta 5-centowa

Moneta 10-centowa

Moneta 25-centowa

7. W skarbonce znajdowały się 4 dolary w monetach 5-, 10- i 25-centowych. Wszystkich monet było 29, a 10-centówek było trzy razy więcej niż 5-centówek. Ile było monet każdego nominału?

8. Długość jednego boku prostokąta jest o 3 cm większa od podwojonej długości drugiego boku. Obwód tego prostokąta jest równy 36 cm. Oblicz jego pole.
9. Obwód prostokąta jest równy 56 cm. Gdyby zwiększyć długość jednego jego boku o 2 cm, a drugiego o 6 cm, to stosunek długości boków otrzymanego prostokąta wynosiłby 1:3. Oblicz długości boków wyjściowego prostokąta (rozpatrz dwa przypadki).
10. Na widowni teatru muzycznego znajduje się 280 miejsc. Na spektakl sprzedano  $\frac{3}{4}$  wszystkich miejsc i uzyskano przychód wysokości 7000 zł. Cena biletu ulgowego wynosi 30 zł, a normalnego 35 zł. Ile sprzedano biletów ulgowych, a ile normalnych?
11. W sobotę wystawę fotografii odwiedziły 72 osoby: 50 osób kupiło bilety normalne, pozostali kupili bilety ulgowe. Dochód ze sprzedaży biletów w tym dniu wyniósł 654 zł. W niedzielę wystawę obejrzało 112 osób, w tym 42 osoby, które kupiły bilety ulgowe. Tego dnia dochód ze sprzedaży biletów wyniósł 994 zł. Ile kosztował bilet normalny, a ile ulgowy?
12. Różnica między pewną liczbą dwucyfrową a liczbą otrzymaną w wyniku przestawienia cyfr tej liczby wynosi 36. Suma tych liczb wynosi 110. Jakie to liczby?
13. Dana jest dwucyfrowa liczba  $A$  oraz liczba  $B$  uzyskana z przestawienia cyfr liczby  $A$ . Suma liczb  $A$  i  $B$  wynosi 121, a liczba  $A$  jest o 7 większa od podwojonej liczby  $B$ . Wyznacz te liczby.
14. Dana jest trzycyfrowa liczba  $A$  o cyfrze dziesiątek równej 5. Po usunięciu tej cyfry otrzymujemy dwucyfrową liczbę  $B$ . Różnica liczb  $A$  i  $B$  wynosi 320, a suma liczb  $A$  i  $B$  jest równa 388. Jakie to liczby?
15. Liczba  $x$  powstaje z trzycyfrowej liczby  $y$ , mającej dwie cyfry takie same, przez zapisanie jej cyfr w odwrotnej kolejności. Różnica między liczbą  $x$  a liczbą  $y$  jest równa 396, a suma cyfr każdej z nich jest równa 16. Wyznacz te liczby.
16. W pewnym spotkaniu brało udział 180 osób. Ustawiono dla nich łącznie 60 krzeseł i pewną liczbę trzyosobowych kanap. Niestety, nie dla wszystkich starczyło miejsc siedzących. Stosunek liczby osób stojących do siedzących był równy 1:4. Oblicz, ile kanap ustawiono.

## 3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)

Układy równań są często wykorzystywane przy rozwiązywaniu zadań dotyczących wielkości podanych w procentach oraz zadań dotyczących prędkości.

### Przykład 1

Ile kilogramów solanki o stężeniu 6% należy zmieszać z solanką o stężeniu 2%, aby otrzymać 100 kg solanki o stężeniu 5%?

Oznaczamy niewiadome:

$x$  – masa w kg solanki 6-procentowej,

$y$  – masa w kg solanki 2-procentowej.

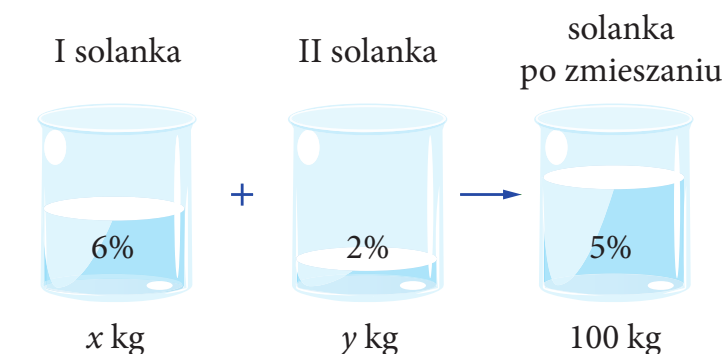
Układamy równania opisujące warunki zawarte w treści zadania:

$$x + y = 100$$

$$0,06 \cdot x + 0,02 \cdot y = 0,05 \cdot 100$$

Zapisujemy układ równań i go rozwiązujemy:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 100 \\ 0,06x + 0,02y = 5 \end{array} \right. / \cdot (-50) \\ + \left\{ \begin{array}{l} x + y = 100 \\ -3x - y = -250 \end{array} \right. \\ \hline -2x = -150 \quad / : (-2) \\ x = 75 \end{array}$$



Stąd otrzymujemy rozwiązanie układu:  $x = 75$  i  $y = 25$ . Sprawdzamy otrzymane rozwiązanie:  $25 + 75 = 100$  oraz  $0,06 \cdot 75 + 0,02 \cdot 25 = 5$ .

Aby otrzymać 100 kg solanki 5-procentowej, należy zmieszać 75 kg solanki 6-procentowej i 25 kg solanki 2-procentowej.

### Ćwiczenie 1

a) Ile kilogramów solanki o stężeniu 13% należy zmieszać z solanką o stężeniu 6%, aby otrzymać 35 kg solanki o stężeniu 9%?

b) Do 5-procentowego roztworu soli dosypano taką jej ilość, że otrzymano 95 g roztworu o stężeniu 6%. Ile soli dosypano?

**Stężenie procentowe** roztworu określa, jaki procent masy całego roztworu stanowi masa rozpuszczonej substancji. Roztwór soli nazywany jest **solanką**.



# Łódź płynąca z prądem i pod prąd

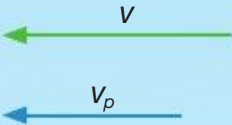
Gdy rozpatrujemy ruch łodzi na rzece, ważnym pojęciem jest prędkość własna łodzi.

Prędkość własna łodzi to prędkość, jaką osiąga łódź na stojącej wodzie.

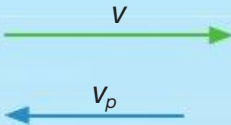
$$\text{prędkość} = \frac{\text{droga}}{\text{czas}}$$



Na prędkość, z jaką po rzece porusza się łódź, wpływa prędkość prądu rzeki. Oznaczmy przez  $v$  prędkość własną łodzi, a przez  $v_p$  prędkość prądu rzeki.



Prędkość łodzi poruszającej się z prądem rzeki jest równa  $v + v_p$



Prędkość łodzi płynącej pod prąd jest równa  $v - v_p$

## Przykład 2

Łódź motorowa płynąca z prądem rzeki przebyła trasę pomiędzy przystaniami odległymi o 36 kilometrów w 2 godziny, drogę powrotną natomiast w 3 godziny. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.

W tego typu zadaniach zakładamy, że wszystkie prędkości są stałe. Oznaczamy przez  $v$  – prędkość własną łodzi, a przez  $v_p$  – prędkość prądu rzeki. Informacje podane w zadaniu możemy przedstawić w tabeli.

|                    | Odległość | Prędkość  | Czas |
|--------------------|-----------|-----------|------|
| Płynięcie z prądem | 36 km     | $v + v_p$ | 2 h  |
| Płynięcie pod prąd | 36 km     | $v - v_p$ | 3 h  |

Prędkość łodzi płynącej z prądem jest równa  $\frac{36 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 18 \text{ km/h}$ , a prędkość łodzi płynącej pod prąd  $\frac{36 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 12 \text{ km/h}$ .

Otrzymujemy układ równań i rozwiązujemy go metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} v + v_p = 18 \\ v - v_p = 12 \end{cases} \\ & + \quad \begin{cases} v + v_p = 18 \\ v - v_p = 12 \end{cases} \\ & \quad \quad \quad 2v = 30 \\ & \quad \quad \quad v = 15 \\ & \begin{cases} v = 15 \\ v + v_p = 18 \end{cases} \\ & \begin{cases} v = 15 \\ v_p = 3 \end{cases} \end{aligned}$$



Sprawdzenie:  $2(15 + 3) = 36$ ,  $3(15 - 3) = 36$ .  
Prędkość własna łodzi była równa 15 km/h, a prędkość prądu rzeki 3 km/h.

## Ćwiczenie 2

Płynąc w dół rzeki, łódź pokonała 24 kilometry w 2 godziny. Droga powrotna łodzi trwała trzy razy dłużej. Oblicz prędkość własną łodzi oraz prędkość prądu rzeki.

## Ćwiczenie 3

Pierwszego dnia łódź motorowa płynąca 2 godziny z prądem rzeki, a następnie 3 godziny pod prąd przebyła trasę długości 58 km. Drugiego dnia, płynąc 3 godziny z prądem oraz 4 godziny pod prąd, przeplłynęła trasę długości 82 km. Oblicz prędkość własną łodzi i prędkość prądu rzeki.



## Zadania

1. W pewnym liceum uczy się 500 osób. Jeżeli liczba dziewcząt zmniejszyłaby się o 40%, a liczba chłopców zwiększyłaby się o 60%, to liczba osób uczęszczających do tej szkoły by się nie zmieniła. Ile dziewcząt, a ilu chłopców uczy się w tym liceum?
2. Paweł i Bartek pracowali w wakacje przy zbiorze owoców. Paweł zarobił 110% tego co Bartek i jeszcze 280 zł, natomiast Bartek dostał 60% tego co Paweł i jeszcze 240 zł. Ile zarobił każdy z nich?
3. Kwotę 10 000 zł podzielono na dwie części. Jedną z nich wpłacono do banku *A* na lokatę roczną oprocentowaną 3% w skali roku, drugą do banku *B* na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku. Po roku z lokat otrzymano łączne 10 340 zł. Jaka kwotę wpłacono do banku *A*, a jaką do banku *B*? Przeanalizuj przedstawiony obok początek rozwiązania tego zadania i je dokończ.
4. Kwotę 20 000 zł zainwestowano w dwie różne lokaty roczne oferowane przez bank *X* i bank *Y*. Lokata w banku *X* oprocentowana była 3,5% w skali roku. Oprocentowanie lokaty w banku *Y* było o 1 punkt procentowy wyższe. Po roku wypłacono z lokat 20 840 zł. Jaka kwotę złożono na lokacie w banku *X*, a jaką w banku *Y*?

### Czy wiesz, że...

**Mosiądz** to stop miedzi, w którym głównym dodatkiem jest cynk. Z mosiądzu wykonuje się na przykład dzwony okrętowe.



5. Zawartość miedzi w dwóch różnych stopach wynosi 40% i 80%. Ile każdego z tych stopów należy użyć, aby otrzymać 2 kg stopu zawierającego 50% miedzi?
6. Mamy do dyspozycji dwa stopy miedzi o różnej jej zawartości. Jeśli użyjemy 2 kg pierwszego i 6 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 55% miedzi. Jeśli natomiast użyjemy 3 kg pierwszego i 5 kg drugiego, to otrzymamy stop o zawartości 52,5% miedzi. Jaka jest zawartość miedzi w każdym z tych stopów?

7. Roman przygotowuje się do zawodów rowerowych. Na sobotnim treningu przejechał 90 kilometrów w ciągu 5 godzin. Część trasy wiodła po drogach asfaltowych, część po gruntowych. Na drogach asfaltowych średnia prędkość jazdy wynosiła 20 km/h, a na drogach gruntowych 15 km/h. Ile czasu Roman jechał po drogach asfaltowych? Jaka odległość w tym czasie pokonał?
8. Z miast *A* i *B* wyruszają jednocześnie naprzeciw siebie ze stałymi prędkościami dwa pociągi. Jeden z nich jedzie z prędkością dwukrotnie większą niż drugi. Spotykają się po godzinie i 20 minutach. Gdyby wolniejszy pociąg jechał z prędkością o 10 km/h większą, spotkanie nastąpiłoby po godzinie i 12 minutach. Jaka jest odległość między miastami *A* i *B*?
9. Pociąg pokonał 120 km w ciągu godziny i 45 minut. Pierwszy odcinek trasy przebył z prędkością 80 km/h, a drugi – ze względu na roboty torowe – z prędkością 40 km/h. Jaka była długość drugiego odcinka?



10. Na pewne przedstawienie w teatrze sprzedano łącznie 500 biletów. Były to bilety normalne po 50 zł, ulgowe po 40 zł i wejściówki po 30 zł. Biletów normalnych było o 40 więcej niż ulgowych i wejściówek razem. Wszystkie bilety kosztowały łącznie 22 300 zł. Ile biletów poszczególnych rodzajów sprzedano? Przeanalizuj przedstawiony poniżej początek rozwiązania tego zadania i je dokończ.

Oznaczamy niewiadome:

$x$  – liczba sprzedanych biletów normalnych,  
 $y$  – liczba sprzedanych biletów ulgowych,  
 $z$  – liczba sprzedanych wejściówek.

Możemy zatem ułożyć układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ x = y + z + 40 \\ 50x + 40y + 30z = 22\,300 \end{cases}$$

11. Jedna ściana prostopadłościanu ma obwód równy 26 cm, druga – 28 cm, a trzecia – 34 cm. Oblicz długości krawędzi tego prostopadłościanu.

### Rozwiązywanie układów równań metodą wyznacznikową

Układ równań liniowych:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

gdzie  $|a_1| + |b_1| \neq 0$  i  $|a_2| + |b_2| \neq 0$ , można rozwiązać **metodą wyznacznikową**.

Liczbę:

■  $W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$  nazywamy **wyznacznikiem głównym**,

■  $W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$  nazywamy **wyznacznikiem niewiadomej  $x$** ,

■  $W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$  nazywamy **wyznacznikiem niewiadomej  $y$** .

1. Jeśli  $W \neq 0$ , to układ równań ma jedno rozwiązanie wyznaczone za pomocą tzw. **wzorów Cramera**:  $x = \frac{W_x}{W}$  i  $y = \frac{W_y}{W}$ .
2. Jeśli  $W = 0$  i  $W_x = 0$ , i  $W_y = 0$ , to układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony).
3. Jeśli  $W = 0$  i ( $W_x \neq 0$  lub  $W_y \neq 0$ ), to układ równań nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).

#### Przykład 1

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 5x - 4y = 13 \end{cases}$  metodą wyznacznikową.

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 = -14$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 13 & -4 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-4) - 13 \cdot 2 = -70$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot 13 - 5 \cdot 11 = -42$$

$W \neq 0$ , więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie  $(x, y)$ , gdzie:

$$\begin{cases} x = \frac{W_x}{W} = \frac{-70}{-14} = 5 \\ y = \frac{W_y}{W} = \frac{-42}{-14} = 3 \end{cases}$$



1. Określ, czy układ równań jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Jeśli układ jest oznaczony, to korzystając ze wzorów Cramera, wyznacz jego rozwiązanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x + y = -7 \\ x + 3y = 4 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 4x - y = 8 \\ -x + \frac{1}{4}y = -2 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} \frac{1}{2}x + 6y = 12 \\ \frac{1}{6}x + 2y = -4 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} 2x + 7y = 1 \\ 3x - 4y = 16 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 7x + 4y = -2 \\ -5x + 3y = 19 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 8 \\ \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = -4 \end{cases} \end{array}$$

#### Przykład 2

Określ liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru  $k$ .

$$\begin{cases} kx - y = 2 \\ -4x + ky = 4 \end{cases}$$

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} k & -1 \\ -4 & k \end{vmatrix} = k \cdot k - (-4) \cdot (-1) = k^2 - 4$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 2 \cdot k - 4 \cdot (-1) = 2k + 4$$

$$W_y = \begin{vmatrix} k & 2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot k - (-4) \cdot 2 = 4k + 8$$

- Dla  $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$  wyznacznik  $W \neq 0$ . Zatem układ równań ma jedno rozwiązanie (jest oznaczony).
- Dla  $k = 2$  wyznacznik  $W = 0$ , ale  $W_x \neq 0$  i  $W_y \neq 0$ . Zatem układ równań nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).
- Dla  $k = -2$  zachodzą równości  $W = 0$ ,  $W_x = 0$  i  $W_y = 0$ . Zatem układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony).

2. Dany jest układ równań z niewiadomymi  $x, y$  i parametrem  $k$ . Dla jakich wartości parametru  $k$  układ jest oznaczony, dla jakich nieoznaczony, a dla jakich sprzeczny?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} -x + 2y = 5 \\ kx - 10y = -5k \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + ky = 3 \\ kx + y = -3 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} k^2x - 2y = -4 \\ -2x + y = 2 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} x + 2ky = 4 \\ 2x + 8y = k \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2kx + y = 1 \\ -4x - ky = 2 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} (k+1)x + ky = 2 \\ x + ky = 4 \end{cases} \end{array}$$



## Metoda eliminacji Gaussa

Czasami przy rozwiązywaniu układu równań pomija się w zapisie niewiadome, a współczynniki występujące w równaniach przedstawia się w postaci tablicy zwanej **macierzą** (poniżej macierze zapisano kolorem niebieskim).

### Przykład 1

Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ -2x + 7y - 6z = 13 \\ 2x - 9y + 3z = -9 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & -6 & 13 \\ 2 & -9 & 3 & -9 \end{array} \right]$$

Najpierw eliminujemy niewiadomą  $x$  z drugiego i trzeciego równania. W tym celu do drugiego równania dodajemy stronami pierwsze równanie pomnożone przez 2, a do trzeciego dodajemy stronami pierwsze pomnożone przez  $-2$ . Otrzymujemy układ równań (zwróć uwagę, że operacjom na równaniach odpowiadają odpowiednie operacje na wierszach macierzy):

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 0x + y - 4z = 9 \\ 0x - 3y + z = -5 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Do 2. wiersza macierzy} \\ \text{dodano 1. wiersz pomnożony} \\ \text{przez 2, do 3. wiersza dodano} \\ \text{1. wiersz pomnożony przez } -2. \end{array}$$

Następnie eliminujemy niewiadomą  $y$  z trzeciego równania. W tym celu do trzeciego równania dodajemy stronami drugie równanie pomnożone przez 3. Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 0x + y - 4z = 9 \\ 0x + 0y - 11z = 22 \end{cases} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{Do 3. wiersza macierzy} \\ \text{dodano 2. wiersz} \\ \text{pomnożony przez 3.} \end{array}$$

Z trzeciego równania dostajemy  $z = -2$ . Podstawiamy tę wartość do drugiego równania i otrzymujemy  $y = 1$ . Następnie podstawiamy uzyskane wartości  $y$  i  $z$  do pierwszego równania i otrzymujemy  $x = 3$ .

Zatem układ spełniony jest przez trójkę liczb:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Przedstawiona powyżej metoda rozwiązywania układu równań nosi nazwę **metody eliminacji Gaussa**.



### Przykład 2

Rozwiąż podany układ równań metodą eliminacji Gaussa.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ x + 5y + 6z = -4 \end{cases}$$

Zapisujemy współczynniki występujące w równaniach układu w postaci macierzy:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -4 \end{array} \right] \quad \text{Kolejne wiersze macierzy odpowiadają} \\ \text{kolejnym równaniom układu.}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & -5 \end{array} \right] \quad \text{Od 2. i 3. wiersza macierzy} \\ \text{odjęto 1. wiersz.}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad \text{Od 3. wiersza macierzy odjęto} \\ \text{2. wiersz pomnożony przez 4.}$$

Z trzeciego równania (reprezentowanego przez trzeci wiersz macierzy) otrzymujemy  $z = -1$ . Podstawiamy tę wartość do drugiego równania i otrzymujemy  $y = 1$ . Otrzymane wartości  $y$  i  $z$  podstawiamy do pierwszego równania i otrzymujemy  $x = -3$ . Zatem układ równań jest spełniony przez trójkę liczb:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

1. Rozwiąż podany układ równań metodą eliminacji Gaussa. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ x - 4y + 4z = -1 \\ -2x + y - 5z = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 2x - 2y - z = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ -x + 4y - 6z = 7 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 3z = 11 \\ 3x - y - 5z = -19 \end{cases}$$



# Powtórzenie

## Zestaw I

1. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1 \\ \frac{x-2}{4} - \frac{y-6}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 0,95 \\ \frac{2x-2}{5} + \frac{3-2y}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{4y-7}{3} = 2 \\ \frac{3y-6}{4} - \frac{5-x}{6} = -1\frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{2x-y}{5} - \frac{y+2x}{4} = 1,2 \\ \frac{2x+3y}{12} - \frac{4x-y}{8} = 0,25 \end{cases}$$

2. Czy rozwiązaniem układu równań jest para liczb o różnych znakach?

$$\text{a) } \begin{cases} 2x = 3(1-y) + 2y \\ 3(y-x) = y-1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y = \frac{1}{3}(x-1) \\ 3(x+1) = -(y+1) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{-2+x}{2} + 5 = x + \frac{y+8}{3} \\ \frac{2+3x}{4} = \frac{2y+6}{2} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{x-2}{4} - \frac{y-3}{3} = \frac{x+y}{6} \\ \frac{x+y-1}{3} - x = \frac{y-1}{4} \end{cases}$$

3. Określ liczbę rozwiązań układu równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 2(2y+1) = 6(4-x) \\ 3x+2y = 11 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -2x+2y = y-2 \\ 2(y-3x) = 6-y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 0,2y = \frac{6x+y}{5} + 1 \\ x-1 = \frac{y-5}{6} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = \frac{2-x}{4} \\ x - \frac{x+y}{2} = 1 - \frac{2x-3y}{2} \end{cases}$$

4. a) Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 13. Gdybyśmy zamienili miejscami cyfry tej liczby, wtedy otrzymalibyśmy liczbę o 45 większą od szukanej. Co to za liczba?

b) Jeśli do licznika pewnego ułamka dodamy 1, a od jego mianownika odejmiemy 1, to otrzymamy  $\frac{1}{2}$ . Jeśli natomiast od licznika odejmiemy 1, a do mianownika dodamy 1, to otrzymamy  $\frac{1}{3}$ . Co to za ułamek?

5. a) Roztwór soli o stężeniu 5% zmieszano z roztworem soli o stężeniu 40% i otrzymano 1,4 kg roztworu soli o stężeniu 30%. Ile gramów każdego z tych roztworów użyto?

b) Laborant potrzebuje 10 g roztworu azotanu potasu o stężeniu 9%. Ma do dyspozycji roztwory tego związku o stężeniach 6% i 10%. Ile gramów jednego roztworu i ile drugiego powinien zmieszać?

## Zestaw II

1. Podaj, ile rozwiązań ma układ równań dla  $m = 1$ , a ile – dla  $m = -2$ .

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - my = 1 \\ mx - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + my = 2 \\ mx + y = 4 - 2m \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - |m|y = m^2 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$$

2. Dla jakich wartości parametrów  $m$  i  $k$  para liczb:  $x = 3$ ,  $y = 2$  jest rozwiązaniem układu równań?

$$\text{a) } \begin{cases} mx + ky = 5 \\ (k-1)x - 2my = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (1-m)x + 4ky = 10 \\ (m-2k)x - (4k+m)y = -8 \end{cases}$$

3. Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}y = 0,25 \\ (x-1)^2 = (2-x)^2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ (3x-1)(1+3x) + y = (1-3x)^2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (y+2)^2 = y^2 + x \\ (2x-1)^2 = 4x^2 - y \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} (x-y)(x+y) = x^2 - (y-1)^2 \\ (x+y)(x+2) - xy = x^2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (3x-1)^2 = 9x^2 + y \\ 2x + 4y^2 = (1-2y)^2 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} (x-8)^2 = (x+8)(x+8) + y \\ x(y-1) = y(x-2) \end{cases}$$

4. Dla jakich wartości parametru  $m$  rozwiązaniem układu równań jest para liczb ujemnych?

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 1 - m \\ x - 2y = m - 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = 2m - 6 \\ 3x - \frac{3}{2}y = 3 - m \end{cases}$$

5. Dla jakich wartości parametru  $m$  rozwiązaniem układu równań jest para liczb o przeciwnych znakach?

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = m \\ 5x - 3y = 2m + 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = m - 3 \\ 3x - y = 2 - m \end{cases}$$

6.\* Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru  $m \in \{-1, 1, 2\}$ .

$$\text{a) } \begin{cases} mx + 3y = 4 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -8x + 6y = m \\ mx - \frac{3}{2}y = -6 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + my = 1 \\ x + 2y = m \end{cases}$$

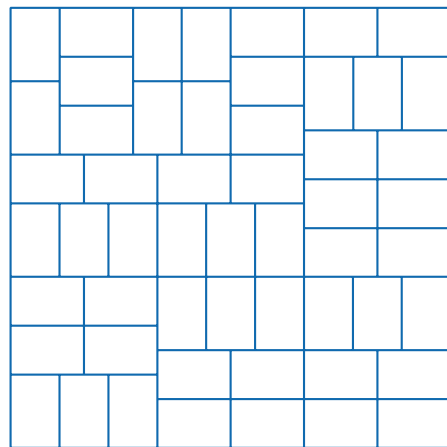
7.\* Dla jakiej wartości parametru  $m$  układ jest nieoznaczony, a dla jakich sprzeczny?

$$\text{a) } \begin{cases} 6x - 9y = 15 \\ 2x - 3y = m \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -4x + 5y = 8 \\ 2x - 2,5y = m \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} -2x + y = 7 \\ 4x + my = -14 \end{cases}$$



## Zadania z kontekstem realistycznym

1. Na straganie można kupić banany i jabłka. Jedno jabłko kosztuje 1,20 zł, a jeden banan 1,80 zł. Krysia kupiła kilka owoców i zapłaciła 7,20 zł. Piotr kupił tyle bananów, ile Krysia jabłek, i tyle jabłek, ile Krysia bananów. Za zakupy zapłacił 7,80 zł. Ile jabłek i ile bananów kupiła Krysia?
2. W dwóch skrzynkach znajdowało się 60 jabłek. Po przełożeniu połowy jabłek z drugiej skrzynki do pierwszej w pierwszej skrzynce było cztery razy więcej jabłek, niż zostało w drugiej. Ile jabłek było w każdej skrzynce na początku?
3. W hurtowni wafle są pakowane w większe pudełka, a cukierki – w mniejsze. Pudełko z waflami waży 5,20 kg, a z cukierkami 3,20 kg. Do sklejenia większego pudełka zużywa się 1,60 m taśmy, a do mniejszego 1,20 m. Na zamówienie jednego ze sklepów przygotowano transport 20 pudełek z tymi słodyczami i zużyto do tego 30 m taśmy. Czy całą dostawę można przewieźć wózkiem, którego dozwolona ładowność jest równa 100 kg?
4. Student ma do skserowania 30 kartek, z których część jest zapisana jednostronnie, a pozostałe – dwustronnie. W punkcie usługowym kserowanie jednostronne kosztuje 20 gr, a dwustronne 30 gr. Student skserował swoje kartki tak, że otrzymał taką samą kopię jak oryginał (30 kartek) i zapłacił 7,40 zł. Ile kosztowałyby jego odbitki, gdyby każdą zapisaną stronę kserował na osobnej kartce?
5. Na trasie między Opolem a Warszawą, o długości 320 km, kursują busy i autokary. Bus wyjechał z Opola o godzinie 15.00 i poruszał się ze średnią prędkością 60 km/h. Autokar wyruszył z Warszawy o godzinę później, a jego średnia prędkość wynosiła 70 km/h. O której godzinie i w jakiej odległości od Opola pojazdy się minęły?
6. Z jednakowych prostokątnych płytek ułożono kwadrat o polu równym  $324 \text{ dm}^2$  (rysunek obok). Oblicz obwód pojedynczej płytki.
7. Samochód przejechał pierwszą część trasy ze średnią prędkością 70 km/h. Drugą część trasy, dłuższą o 60 km, pokonał ze średnią prędkością 90 km/h. Jego średnia prędkość na całej trasie była równa 80 km/h. Oblicz długość całej trasy.



## Sposób na zadanie

Rozwiązując zadania tekstowe, spotkamy się także z takimi, w których mamy trzy niewiadome. Jednak możemy jedną z nich opisać za pomocą pozostałych i otrzymać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi.

### Przykład 1

Dany jest trójkąt o kątach  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , przy czym suma miar kątów  $\alpha$  i  $\beta$  jest równa  $105^\circ$  oraz spełniona jest równość  $\alpha + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ$ . Wyznacz te kąty.

Zauważmy, że  $\alpha = 105^\circ - \beta$ .

Możemy więc napisać układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} (105^\circ - \beta) + 2\beta + 3\gamma = 400^\circ \\ (105^\circ - \beta) + \beta + \gamma = 180^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta + 3\gamma = 295^\circ \\ \gamma = 75^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 70^\circ \\ \gamma = 75^\circ \end{cases}$$

Pamiętaj, że po rozwiązaniu układu równań warto sprawdzić, czy otrzymane rozwiązanie spełnia warunki zadania.

Zatem  $\alpha = 105^\circ - \beta = 35^\circ$ .

**Odpowiedź:**  $\alpha = 35^\circ$ ,  $\beta = 70^\circ$ ,  $\gamma = 75^\circ$

→ Zadanie 17, str. 161

### Przykład 2

W skarbonce znajduje się 18 monet – są to monety 1-, 2- i 5-złotowe. Razem dają one kwotę 48 zł. Monet 5-złotowych jest o dwie mniej niż monet 1-złotowych. Oblicz, ile monet każdego nominału znajduje się w skarbonce.

Zauważmy, że w tym zadaniu również mamy trzy niewiadome:

$x$  – liczba monet 1-złotowych,

$y$  – liczba monet 2-złotowych,

$z$  – liczba monet 5-złotowych.

Z treści zadania wynika, że  $z = x - 2$ .

Otrzymujemy zatem układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} x + y + (x - 2) = 18 \\ x + 2y + 5(x - 2) = 48 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb:  $x = 9$  oraz  $y = 2$  (sprawdź).

Zatem  $z = x - 2 = 7$ .

**Odpowiedź:** W skarbonce znajduje się 9 monet 1-złotowych, 2 monety 2-złotowe oraz 7 monet 5-złotowych.

→ Zadanie 19, str. 161





W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

**Zadanie 1 (0–1)**

Kuba jest o 5 lat starszy od Magdy. Wiek Magdy stanowi  $\frac{2}{3}$  wieku Kuby. Który z poniższych układów równań opisuje tę sytuację?

Przyjęto oznaczenia:  $k$  – wiek Kuby,  $m$  – wiek Magdy.

A.  $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$  B.  $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$  C.  $\begin{cases} k = m + 5 \\ m = \frac{2}{3}k \end{cases}$  D.  $\begin{cases} k = m - 5 \\ m = \frac{3}{2}k \end{cases}$

**Zadanie 2 (0–1)**

W trójkącie równoramiennym miara kąta między ramionami jest o  $18^\circ$  mniejsza od miary kąta przy podstawie.

Przyjęto oznaczenia:  $\alpha$  – miara kąta przy podstawie,  $\beta$  – miara kąta między ramionami, a następnie ułożono układ równań opisujący sytuację z zadania:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 180^\circ \\ \alpha = \beta + 18^\circ \end{cases}$$

Wskaż układ równań równoważny temu układowi.

A.  $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 180^\circ \\ \beta = \alpha + 18^\circ \end{cases}$  B.  $\begin{cases} 2\alpha = 144^\circ \\ \alpha = \beta + 18^\circ \end{cases}$  C.  $\begin{cases} 2\alpha = 108^\circ \\ 3\beta = 144^\circ \end{cases}$  D.  $\begin{cases} 2\alpha = 132^\circ \\ 3\beta = 144^\circ \end{cases}$

**Zadanie 3 (0–1)**

Wskaż parę liczb, która nie spełnia układu równań  $\begin{cases} -4x + 2y = -6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

A.  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -9 \end{cases}$  B.  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -4 \end{cases}$  C.  $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$  D.  $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

**Zadanie 4 (0–1)**

Układ równań  $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ -6x + 4y = m \end{cases}$  nie jest sprzeczny dla

A.  $m = 12$  B.  $m = 3$  C.  $m = -3$  D.  $m = -12$

**Zadanie 5 (0–1)**

Układ równań  $\begin{cases} 2m^2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = -10m \end{cases}$  jest układem nieoznaczonym dla

A.  $m = -\frac{1}{2}$  B.  $m = -1$  C.  $m = 1$  D.  $m = \frac{1}{2}$

**Zadanie 6 (0–1)**

Wskaż równanie, które należy dopisać do równania  $3x - 4y = 6$ , aby otrzymać nieoznaczony układ równań.

A.  $3x - 4y = -6$  C.  $\frac{3}{2}x - 2y = -3$   
B.  $-3x + 4y = 6$  D.  $-\frac{3}{2}x + 2y = -3$

**Zadanie 7 (0–1)**

Wskaż rozwiązanie układu równań  $\begin{cases} 5x - 2y = 27 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

A.  $\begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$  B.  $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \end{cases}$  C.  $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$  D.  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

**Zadanie 8 (0–1)**

Rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ mx - y = m - 1 \end{cases}$  jest para liczb ujemnych dla

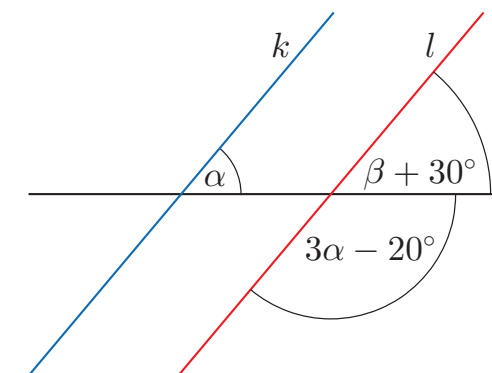
A.  $m = -\frac{5}{2}$  B.  $m = -\frac{1}{2}$  C.  $m = \frac{1}{3}$  D.  $m = \frac{3}{2}$

**Zadanie 9 (0–1)**

Proste  $k$  i  $l$  na rysunku obok są równoległe.

Wynika stąd, że

A.  $\begin{cases} \alpha = 60^\circ \\ \beta = 30^\circ \end{cases}$  C.  $\begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ \beta = 15^\circ \end{cases}$   
B.  $\begin{cases} \alpha = 50^\circ \\ \beta = 20^\circ \end{cases}$  D.  $\begin{cases} \alpha = 55^\circ \\ \beta = 15^\circ \end{cases}$

**Zadanie 10 (0–1)**

Dana jest dwucyfrowa liczba  $M$ . Suma cyfry jedności i cyfry dziesiątek tej liczby jest równa 8. Różnica między liczbą powstałą przez przestawienie cyfr liczby  $M$  oraz liczbą  $M$  jest równa 54.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                                                            |   |   |
|----------------------------------------------------------------------------|---|---|
| Różnica między cyfrą jedności a cyfrą dziesiątek liczby $M$ jest równa 6.  | P | F |
| Suma liczby $M$ i liczby powstałej z przestawienia jej cyfr jest równa 88. | P | F |



**Zadanie 11 (0-1)**

Adam jest o dwa lata starszy od Tomka. Trzy lata temu mieli w sumie 24 lata. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                      |          |          |
|--------------------------------------|----------|----------|
| Adam i Tomek mają w sumie 30 lat.    | <b>P</b> | <b>F</b> |
| Za cztery lata Tomek skończy 18 lat. | <b>P</b> | <b>F</b> |

**Zadanie 12 (0-2)**

Dane są dwa układy równań:

**I.**  $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$       **II.**  $\begin{cases} -3x + y = 10 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$

Każdemu z tych układów przyporządkuj równoważny mu układ równań. Wpisz obok numerów układów równań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–F.

| Numer zadania | Układ równań | Równoważny układ równań |
|---------------|--------------|-------------------------|
| <b>12.1</b>   | <b>I</b>     | ?                       |
| <b>12.2</b>   | <b>II</b>    | ?                       |

**A.**  $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ -x = 22 \end{cases}$       **C.**  $\begin{cases} y = 10 - 3x \\ 5x = 22 \end{cases}$       **E.**  $\begin{cases} y = -2 \\ 3x - y = -10 \end{cases}$

**B.**  $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ 5x - 10y = 12 \end{cases}$       **D.**  $\begin{cases} y = 10 + 3x \\ -x - 10y = 12 \end{cases}$       **F.**  $\begin{cases} y = 3x - 10 \\ x = -2y - 8 \end{cases}$

**Zadanie 13 (0-1)**

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Układ równań  $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = \sqrt{2} \\ 2x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$  jest

|           |               |                               |           |                                              |
|-----------|---------------|-------------------------------|-----------|----------------------------------------------|
| <b>A.</b> | oznaczony,    | ponieważ jest spełniony przez | <b>1.</b> | wszystkie pary liczb rzeczywistych.          |
|           |               |                               | <b>2.</b> | nieskończenie wiele par liczb rzeczywistych. |
| <b>B.</b> | nieoznaczony, |                               | <b>3.</b> | tylko jedną parę liczb rzeczywistych.        |



**Zadanie 14 (0-2)**

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Jednym z rozwiązań układu równań  $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = 1 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$  jest para liczb

**A.**  $x = \frac{7}{2}, y = -\frac{5}{2}$       **E.**  $x = -\frac{2}{9}, y = 6\frac{1}{3}$

**B.**  $x = \frac{5}{2}, y = -\frac{3}{2}$       **F.**  $x = -\frac{4}{9}, y = 6\frac{2}{3}$

**C.**  $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$       **G.**  $x = -\frac{7}{9}, y = 7\frac{1}{3}$

**D.**  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$       **H.**  $x = -\frac{8}{9}, y = 8\frac{2}{3}$

**Zadanie 15 (0-2)**

Para liczb  $x = 2, y = 3$  jest rozwiązaniem układu równań utworzonego przez dwa spośród poniższych równań. Wskaż te równania.

**I.**  $x - 2y = -4$       **II.**  $2x + 3y = 15$       **III.**  $2x - 3y = -5$       **IV.**  $3x - y = 2$

**Zadanie 16 (0-2)**

Bankomat wypłacił kwotę 940 zł w banknotach o nominałach 10 zł, 20 zł i 50 zł. Banknotów 10-złotowych było tyle samo co banknotów 50-złotowych, a banknotów 20-złotowych było o 7 więcej niż 50-złotowych. Ile było banknotów każdego rodzaju?

**Zadanie 17 (0-2) → Przykład 1, str. 157**

Różnica miar kątów  $\alpha$  i  $\beta$  pewnego trójkąta wynosi  $30^\circ$ . Kąt  $\gamma$  tego trójkąta ma miarę o  $20^\circ$  większą od sumy miar kątów  $\alpha$  i  $\beta$ . Wyznacz kąty tego trójkąta.

**Zadanie 18 (0-3)**

Cztery lata temu Kasia i jej dwaj bracia bliźniacy mieli razem 22 lata. Za dwa lata Kasia będzie miała tyle lat, ile obaj jej bracia razem. Oblicz, ile lat będzie mieć Kasia, gdy jej bracia będą mieli po 18 lat.

**Zadanie 19 (0-3) → Przykład 2, str. 157**

Tomek ma w skarbonce trzydzieści jeden monet, w tym: trzy monety 5-złotowe, monety 1- i 2-złotowe oraz monety 10- i 50-groszowe. Liczba monet 10-groszowych jest taka sama jak liczba monet 50-groszowych, a monet 1-złotowych jest dwukrotnie więcej niż monet 2-złotowych. Łączna kwota w skarbonce wynosi 42 zł. Oblicz, ile jest monet każdego rodzaju.

**Zadanie 20 (0-3)**

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} 4(x + y)^2 - 4y(2x + y) = (2x)^2 + x + y \\ (x - 1)(y + 1) = (x + 2)(y - 2) \end{cases}$



**Zadanie 1 (0–2)**

Dwaj rowerzyści wyruszyli w tę samą trasę: pierwszy o 10.00, drugi godzinę później, przy czym drugi jechał ze średnią prędkością o 5 km/h większą niż pierwszy. O godzinie 14.00 drugi rowerzysta dogonił pierwszego. Oblicz prędkości obu rowerzystów.

**Zadanie 2 (0–2)**

Wyznacz liczby  $x$  i  $y$  spełniające układ równań:

$$\begin{cases} y - x(2x + 1) = -2(x - 1)^2 + 3 \\ (y + 1)^2 + 2x = y(y + 1) + 5 \end{cases}$$

**Zadanie 3 (0–2)**

Oblicz sumę liczb  $x$  i  $y$ , które tworzą parę będącą rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 4\sqrt{2} \\ x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$$

**Zadanie 4 (0–4)**

Michał uczestniczył w dwudniowym zgrupowaniu zawodników klubu kajakarskiego. Pierwszego dnia płynął kajakiem 3 godziny z prądem rzeki oraz tyle samo czasu pod prąd i pokonał łącznie 24 km. Drugiego dnia płynął kajakiem 2 godziny z prądem rzeki i 4 godziny pod prąd i pokonał łącznie 21 km. Oblicz prędkość prądu rzeki.

**D Zadanie 5 (0–3)**

Uzasadnij, że punkt  $P(x, y)$ , którego współrzędne spełniają podany układ równań, należy do prostokąta o wierzchołkach  $A(1, 1)$ ,  $B(3, 1)$ ,  $C(3, 6)$ ,  $D(1, 6)$ .

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - x)(y + x) = y(y - 1) \\ x + y - \frac{x - y}{2} = \frac{x + 2y}{2} + 2 \end{cases}$$

**Zadanie 6**

Dany jest układ równań z parametrem  $m$ :

$$\begin{cases} 2x - y = 2m + 1 \\ 3x - 2y = 2m - 3 \end{cases}$$

**D Zadanie 6.1 (0–2)**

Uzasadnij, że dla  $m = -\frac{7}{2}$  rozwiązaniem układu równań jest para liczb przeciwnych.

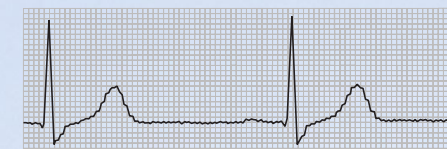
**D Zadanie 6.2 (0–3)**

Wykaż, że  $m = -5$  jest największą liczbą całkowitą, dla której układ równań jest spełniony przez parę liczb ujemnych.

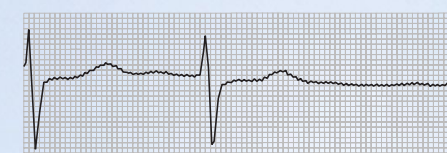
# 4 Funkcje

U osób wyczynowo uprawiających sport regularnie przeprowadza się specjalistyczne badania lekarskie.

Elektrokardiografię wykonuje się za pomocą przyrządu, który odbiera i wzmacnia impulsy elektryczne. Jako wynik badania otrzymujemy elektrokardiogram – wykres funkcji napięcia elektrycznego, wytworzonego na skutek skurczu mięśnia sercowego, w zależności od czasu.



Prawidłowa czynność serca



Zaburzenie rytmu serca





# 4.1. Pojęcie funkcji

## Przykład 1

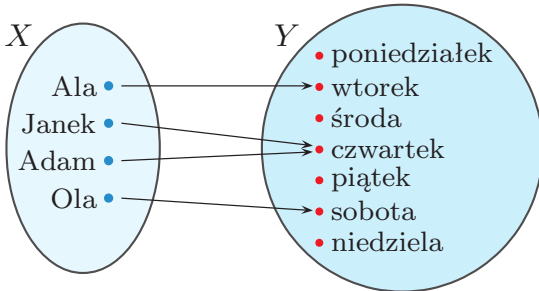
W szkolnym turnieju piłki nożnej wzięło udział pięć drużyn:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  i  $E$ . Grano systemem każdy z każdym. Za zwycięstwo przyznawano 3 pkt, za remis 1 pkt, a za przegraną 0 pkt. Najmniejsza możliwa do zdobycia liczba punktów to 0, a największa to 12. Każdej drużynie przyporządkowano sumę zdobytych punktów – wyniki turnieju przedstawiono w tabeli.

| Drużyna        | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Zdobyte punkty | 3   | 7   | 8   | 1   | 8   |



## Przykład 2

Na przedstawionym obok grafie każdej z czterech osób przyporządkowano dzień tygodnia, w którym dana osoba się urodziła. Zbiór osób oznaczono literą  $X$ , a zbiór dni tygodnia – literą  $Y$ .

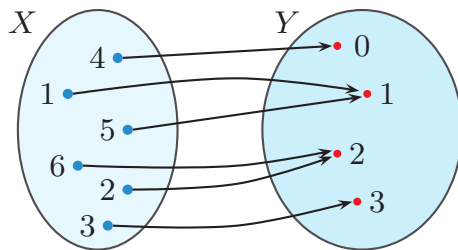


Omówione powyżej przyporządkowania są przykładami **funkcji**. W każdym z nich są wskazane dwa zbiory, często oznaczane przez  $X$  i  $Y$ , oraz określony sposób przyporządkowania elementom zbioru  $X$  elementów zbioru  $Y$  – można to zrobić np. za pomocą tabeli, grafu lub opisu słownego.

## Przykład 3

Każdej liczbie ze zbioru  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  przyporządkowano jej resztę z dzielenia przez 4. Zbiór możliwych reszt oznaczono literą  $Y$ . Przyporządkowanie to przedstawiono za pomocą tabeli i grafu.

| Liczba | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------|---|---|---|---|---|---|
| Reszta | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 |



## Ćwiczenie 1

Każdej liczbie ze zbioru  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  przyporządkowano liczbę ze zbioru  $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  będącą jej resztą z dzielenia przez 5. Przedstaw to przyporządkowanie za pomocą tabeli i grafu.

## Definicja

**Funkcją** ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$  nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi  $x \in X$  odpowiada dokładnie jeden element  $y \in Y$ .

Zbiór  $X$  nazywamy **dziedzina** funkcji, a jego elementy **argumentami**.

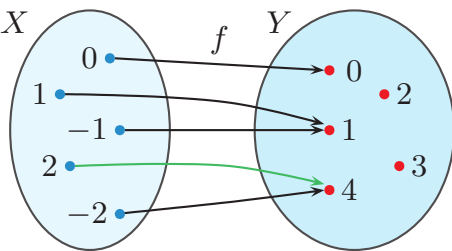
Zbiór  $Y$  nazywamy **przeciwdziedzina** funkcji. Jeśli element zbioru  $Y$  jest przyporządkowany jakiemuś elementowi zbioru  $X$ , to nazywamy go **wartością funkcji**.

Funkcje zwykle oznaczamy małymi literami, na przykład  $f$ ,  $g$ ,  $h$ .

Mówiąc o funkcji  $f$  ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ , używamy zapisu  $f: X \rightarrow Y$ , a wartość, jaką funkcja  $f$  przyjmuje dla argumentu  $x$ , oznaczamy przez  $f(x)$ .

## Przykład 4

Dane są zbiory  $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  i  $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Funkcję  $f$  ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ , która każdej liczbie przyporządkowuje jej kwadrat, określono za pomocą grafu i tabeli.



| Argument $x$           | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|------------------------|----|----|---|---|---|
| Wartość funkcji $f(x)$ | 4  | 1  | 0 | 1 | 4 |

Zwróć uwagę na to, że liczby 2 i 3 należą do przeciwdziedziny funkcji  $f$ , ale nie są wartościami tej funkcji.

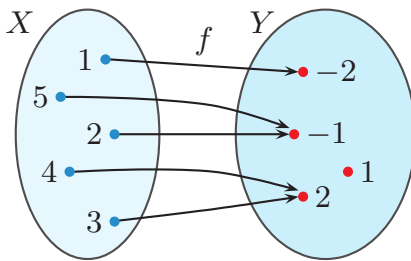
Funkcja  $f$  dla argumentu  $x = 2$  przyjmuje wartość  $y = 4$ , co zapisujemy „ $f(2) = 4$ ” i czytamy: „ $f$  od 2 jest równe 4”.

Wartość  $y = 4$  funkcja  $f$  przyjmuje również dla argumentu  $x = -2$ , zatem  $f(-2) = 4$ .

## Ćwiczenie 2

Dane są zbiory  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  i  $Y = \{-2, -1, 1, 2\}$  oraz funkcja  $f: X \rightarrow Y$  przedstawiona za pomocą grafu.

- a) Podaj wartości funkcji  $f$  dla argumentów parzystych.
- b) Dla jakich argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartość 2, a dla jakich – wartość 1?
- c) Przedstaw funkcję  $f$  za pomocą tabeli.



Ćwiczenie 3

Dane są zbiory  $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  i  $Y = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ . Funkcja  $f: X \rightarrow Y$  przyporządkowuje każdemu argumentowi połowę jego kwadratu. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i tabeli. Które elementy zbioru  $Y$  nie są wartościami funkcji  $f$ ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

Ćwiczenie 4

Funkcję  $f: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  przedstawiono za pomocą tabeli.

|        |   |   |    |   |   |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|----|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$    | 0 | 1 | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $f(x)$ | 1 | 1 | -2 | 0 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | 4 |

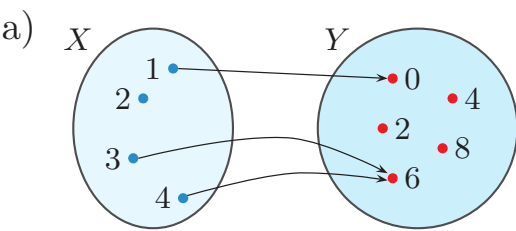
Dla których argumentów zachodzi równość:

- a)  $f(x) = 0$ ,      b)  $f(x) = 1$ ,      c)  $f(x) = -2$ ,      d)  $f(x) = -1$ ?

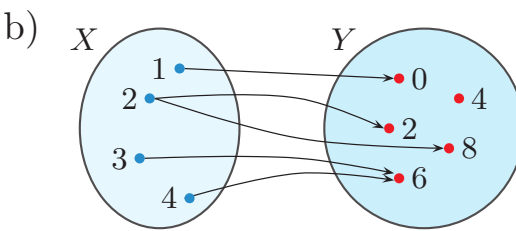
Zauważmy, że zgodnie z definicją przyporządkowanie jest funkcją ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ , jeżeli **każdemu** elementowi zbioru  $X$  przyporządkowany jest **dokładnie jeden** element zbioru  $Y$ .

D Przykład 5

Uzasadnij, że na poniższym grafie nie przedstawiono funkcji ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ .



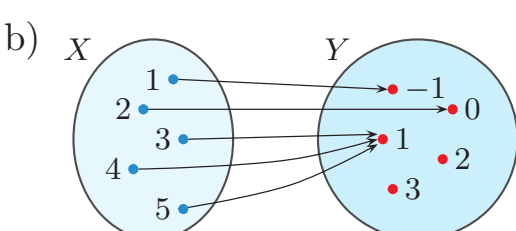
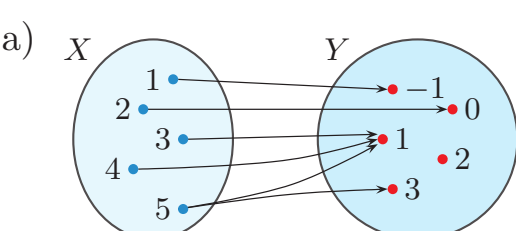
Liczbę 2 należącej do zbioru  $X$  nie przyporządkowano żadnego elementu zbioru  $Y$ . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ .



Liczbę 2 należącej do zbioru  $X$  przyporządkowano dwa elementy zbioru  $Y$ . Zatem graf nie przedstawia funkcji ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ .

Ćwiczenie 5

Czy na poniższym grafie przedstawiono funkcję ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$ ? Jeśli tak, to podaj argument, dla którego funkcja ta przyjmuje wartość 0.



Definicja

**Miejszem zerowym** funkcji  $f$  nazywamy taki argument  $x$ , dla którego:

$f(x) = 0$

Przykład 6

Funkcja  $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$  przedstawiona za pomocą tabeli ma dwa miejsca zerowe:  $-1$  i  $2$ .

|        |    |    |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | 1  | 0  | 4 | 3 | 0 |

Ćwiczenie 6

Funkcja  $f$  każdej liczbie ze zbioru  $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$  przyporządkowuje:

a) liczbę o 2 mniejszą,      c) kwadrat tej liczby pomniejszony o 1,  
b) liczbę o 3 większą,      d) sześcian tej liczby pomniejszony o 8.

Przedstaw za pomocą tabeli funkcję  $f$  i podaj jej miejsca zerowe.

Zadania

1. Funkcję  $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  przedstawiono za pomocą tabeli. Przedstaw tę funkcję za pomocą grafu i podaj jej miejsca zerowe.

a)

|        |    |    |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | 3  | 2  | 0 | 2 | 3 |

b)

|        |    |    |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | -1 | 0  | 1 | 2 | 3 |

2. Funkcja  $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  została podana w postaci tabeli. Przedstaw ją za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości nieparzyste?

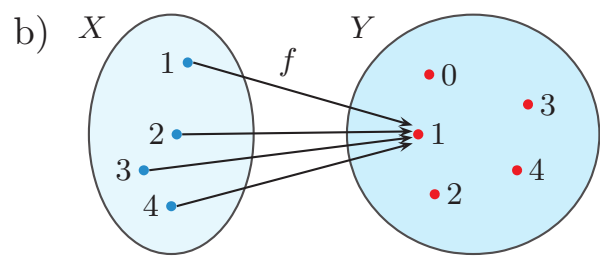
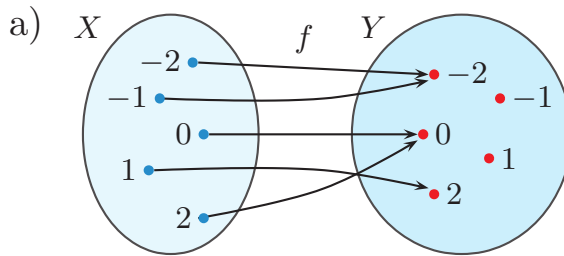
a)

|        |    |    |   |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 0  | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 |

b)

|        |    |    |   |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 2  | 1  | 0 | 1 | 2 | 3 |

3. Funkcję  $f: X \rightarrow Y$  przedstawiono w postaci grafu. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i podaj jej miejsca zerowe.



4. Dane są zbiory  $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  oraz  $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Funkcja  $f: X \rightarrow Y$  każdemu argumentowi przyporządkowuje jego kwadrat.

a) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i grafu.

b) Które elementy zbioru  $Y$  nie są wartościami funkcji  $f$ ? Które wartości są przyjmowane dla więcej niż jednego argumentu?

5. Funkcja  $f$  została podana w postaci tabeli. Określ jej dziedzinę, a następnie przedstaw tę funkcję za pomocą grafu oraz opisu słownego. Dla ilu argumentów przyjmuje ona wartości dodatnie?

a)

|        |    |    |    |    |   |   |
|--------|----|----|----|----|---|---|
| $x$    | -1 | 0  | 1  | 2  | 3 | 4 |
| $f(x)$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 |

b)

|        |    |    |    |   |    |    |
|--------|----|----|----|---|----|----|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0 | 1  | 2  |
| $f(x)$ | 3  | 2  | 1  | 0 | -1 | -2 |

6. Funkcja  $f$  każdej liczbie ze zbioru  $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$  przyporządkowuje jej kwadrat pomniejszony o 4. Dla których argumentów funkcja ta przyjmuje wartości ujemne? Czy ma ona miejsca zerowe?

- D** 7. Rozważmy przyporządkowanie, w którym danej liczbie odpowiada jej pierwiastek kwadratowy. Uzasadnij, że to przyporządkowanie nie jest funkcją ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$  dla:

a)  $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \mathbb{Q}$ ,      b)  $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $Y = \mathbb{R}$ .

8. Funkcja  $f$  każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez  $n$ . Ile miejsc zerowych ma funkcja  $f$ ?

a)  $n = 2$       b)  $n = 4$       c)  $n = 5$       d)  $n = 10$

9. Funkcja  $f$  każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np.  $f(24) = 6$ .

a) Podaj wszystkie wartości, które może przyjmować funkcja  $f$ .

b) Dla jakich argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartość 3, a dla jakich 7?

10. Funkcja  $f$  każdej trzycyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje sumę jej cyfr, np.  $f(234) = 9$ .

a) Podaj wszystkie wartości, które może przyjmować funkcja  $f$ .

b) Dla jakich argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartość 2, a dla jakich 3?

11. Funkcja  $f$  każdej trzycyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje iloczyn jej cyfr, np.  $f(213) = 6$ .

a) Ile miejsc zerowych ma funkcja  $f$ ?

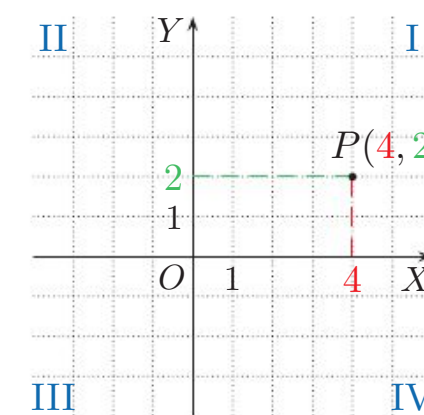
b) Dla ilu argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartość 8?

## Przypomnij sobie

### Układ współrzędnych

**Prostokątny układ współrzędnych** (lub krótko: układ współrzędnych) to układ dwóch prostopadłych osi liczbowych o wspólnym początku. Oś pozioma nazywana jest osią  $OX$  lub **osią odciętych**, a oś pionowa to oś  $OY$  lub inaczej **oś rzędnych**.

Każdy punkt płaszczyzny jest w układzie współrzędnych jednoznacznie określony przez parę liczb zwanych **współrzędnymi**. Na przykład punktowi  $P$  na rysunku obok odpowiadają współrzędne  $(4, 2)$ .



Układ współrzędnych dzieli płaszczyznę na **ćwiartki**, które oznaczamy cyframi rzymskimi. Punkt  $P$  należy do I ćwiartki układu. Kolejne numerujemy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

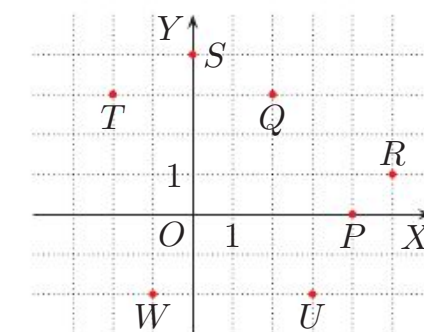
Punkty leżące na osiach układu nie należą do żadnej ćwiartki.

Prostokątny układ współrzędnych nazywany jest również **kartezjańskim układem współrzędnych** na cześć francuskiego matematyka, fizyka i filozofa René Descartes'a [czyt. rene dekarta] (1596–1650), zwanego w Polsce Kartezjuszem.

1. Odczytaj współrzędne punktów  $P, Q, R, S, T, U, W$  (rysunek obok).

2. Podaj, w której ćwiartce układu współrzędnych położony jest punkt:

a)  $A(-3, 6)$ ,      c)  $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ,  
b)  $B(4, -11)$ ,      d)  $D(-50, -60)$ .



3. Naskicuj układ współrzędnych, a następnie zaznacz w nim punkty:

$A(0, 5), B(-2, 4), C(-1, -4), D(6, 1\frac{1}{2}), E(-2, 0), F(3, -3)$

4. Naskicuj prostokąt  $ABCD$ . Ile punktów kratowych leży wewnątrz tego prostokąta?

a)  $A(1, -1), B(4, -1), C(4, 3), D(1, 3)$   
b)  $A(-4, -2), B(5, -2), C(5, 4), D(-4, 4)$

**Punktami kratowymi** nazywamy punkty, których obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

5. Dane są trójkąt  $T_1$  o wierzchołkach  $A(-4, -2), B(2, -2)$  i  $C(-4, 4)$  oraz trójkąt  $T_2$  o wierzchołkach  $D(0, 2), E(8, 2)$  i  $F(4, 6)$ . Do wnętrza którego z tych trójkątów należy więcej punktów kratowych i o ile?



## 4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)

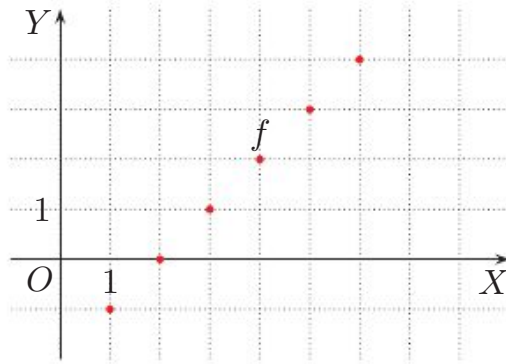
Funkcję, której argumenty i wartości są liczbami, nazywamy **funkcją liczbową**. W dalszym ciągu rozdziału będziemy rozpatrywać tylko takie funkcje. Jednym ze sposobów przedstawienia funkcji liczbowej jest wykres.

### Przykład 1

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 mniejszą. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

| $x$        | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------|----|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Do wykresu funkcji  $f$  należą punkty o współrzędnych  $(x, y)$ , gdzie  $x$  jest argumentem, a  $y$  – wartością funkcji. Są to punkty:  $(1, -1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(5, 3)$  i  $(6, 4)$ .



### Definicja

**Wykresem funkcji**  $f: X \rightarrow Y$  w układzie współrzędnych nazywamy zbiór wszystkich takich punktów  $(x, y)$ , że  $x \in X$  oraz  $y = f(x)$ .

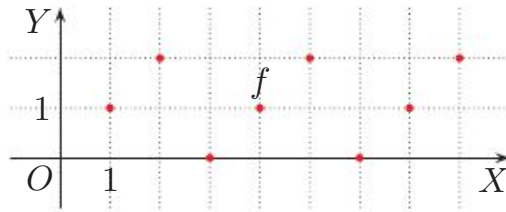
### Ćwiczenie 1

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdemu argumentowi liczbę o 2 większą. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli oraz wykresu.

### Przykład 2

Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdemu argumentowi jego resztę z dzielenia przez 3. Poniżej tę funkcję przedstawiono za pomocą tabeli oraz wykresu.

| $x$    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 |



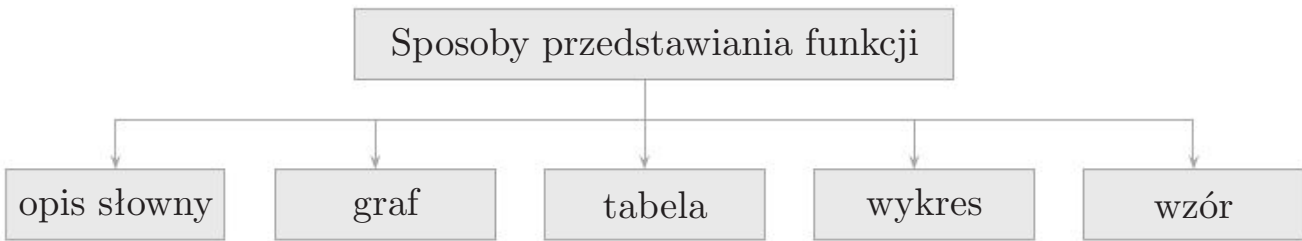
### Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji, która każdej liczbie ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  przyporządkowuje jej resztę z dzielenia przez: a) 2, b) 4.

Często możliwe jest określenie funkcji za pomocą wzoru. Na przykład:

| Opis słowny                                                                       | Dziedzina      | Wzór                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------|---------------------------|
| Funkcja $f$ przyporządkowuje każdemu argumentowi $x$ liczbę o 3 większą.          | $\mathbb{R}$   | $f(x) = x + 3$            |
| Funkcja $f$ przyporządkowuje każdemu argumentowi $x$ jego połowę powiększoną o 1. | $(-\infty; 2]$ | $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ |
| Funkcja $f$ przyporządkowuje każdemu argumentowi $x$ jego kwadrat.                | $[1; \infty)$  | $f(x) = x^2$              |

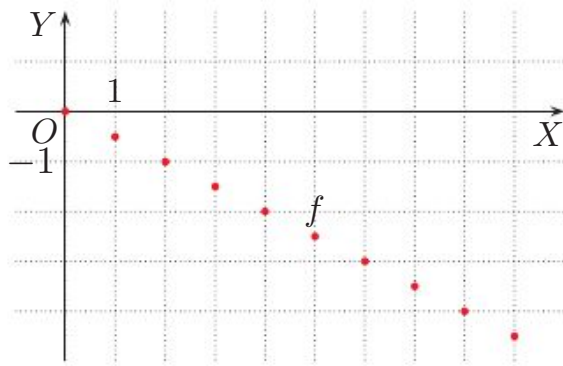
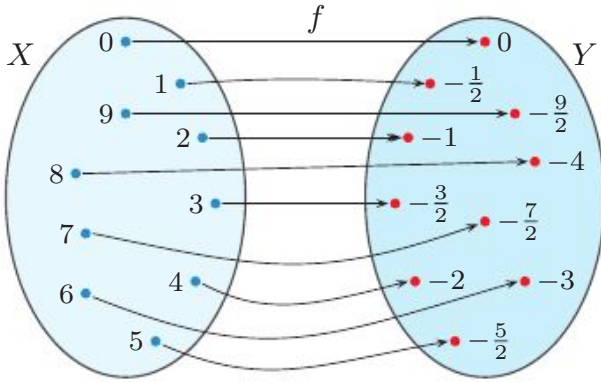
**Uwaga.** Wzór funkcji  $f(x) = x + 3$  możemy zapisać też w postaci  $y = x + 3$ .



### Przykład 3

Funkcja  $f$  każdej jednocyfrowej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę przeciwną do jej połowy. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli, grafu i wykresu. Podaj jej wzór.

| $x$    | 0 | 1              | 2  | 3              | 4  | 5              | 6  | 7              | 8  | 9              |
|--------|---|----------------|----|----------------|----|----------------|----|----------------|----|----------------|
| $f(x)$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | -1 | $-\frac{3}{2}$ | -2 | $-\frac{5}{2}$ | -3 | $-\frac{7}{2}$ | -4 | $-\frac{9}{2}$ |



Funkcję  $f$  można określić wzorem  $f(x) = -\frac{1}{2}x$ , gdzie dziedziną jest zbiór  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .

### Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres oraz podaj wzór funkcji  $f$ , która każdej liczbie należącej do zbioru  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$  przyporządkowuje:

- a) liczbę o 3 mniejszą, b) połowę kwadratu tej liczby.

Przed naszkicowaniem wykresu funkcji należy zwrócić uwagę na jej dziedzinę.

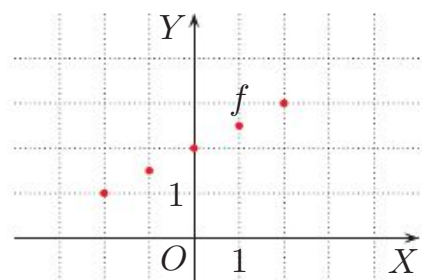
#### Przykład 4

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy trzech różnych funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

I. zbiór  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

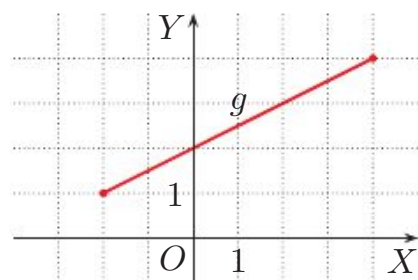
II. przedział  $[-2; 4]$

III. przedział  $(-2; 4)$



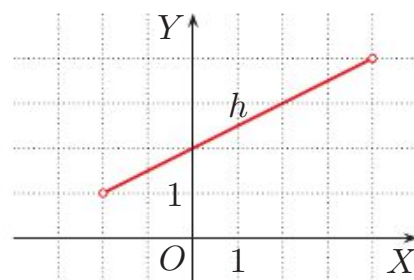
$$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$g: [-2; 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



$$h: (-2; 4) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

- Wykresem funkcji  $f$  (rysunek I) jest pięć punktów.
- Wykresem funkcji  $g$  (rysunek II) jest odcinek łączący punkty  $(-2, 1)$  i  $(4, 4)$  – jego końce zaznaczono pełnymi kółkami.
- Na rysunku III puste kółka w punktach  $(-2, 1)$  i  $(4, 4)$  oznaczają, że punkty te nie należą do wykresu funkcji  $h$  (ponieważ liczby  $-2$  i  $4$  nie należą do dziedziny tej funkcji).

Jeśli dziedziną funkcji  $f(x) = ax + b$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ , jest przedział domknięty  $[x_1; x_2]$ , to wykresem tej funkcji jest odcinek. Aby go naszkicować, wystarczy obliczyć wartości  $f(x_1)$  i  $f(x_2)$ . Jeśli dziedziną funkcji  $f$  jest przedział otwarty, to jej wykresem jest odcinek bez swoich końców.

#### Przykład 5

Naszkicuj wykres funkcji  $f: [-2; 6) \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ .

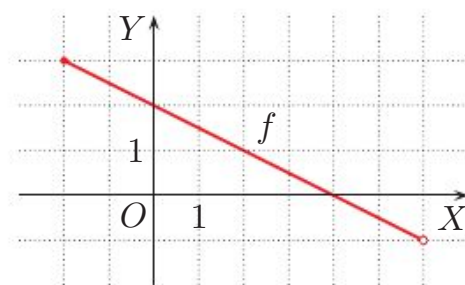
Obliczamy wartość funkcji dla  $x = -2$ :

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 2 = 3$$

Obliczamy wartość wyrażenia  $-\frac{1}{2}x + 2$  dla  $x = 6$ :

$$-\frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = -1$$

Wykresem funkcji  $f$  jest odcinek łączący punkty  $(-2, 3)$  i  $(6, -1)$  bez końca w punkcie  $(6, -1)$ .



#### Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

a)  $D = [-2; 3]$ ,  $f(x) = x + 1$

c)  $D = (0; 5)$ ,  $f(x) = x - 1$

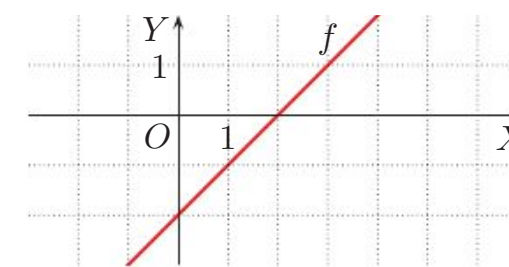
b)  $D = [-2; 6)$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

d)  $D = (-4; 2]$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Dla dowolnych liczb  $a, b \in \mathbb{R}$  wykresem funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem  $f(x) = ax + b$  jest prosta. Takie funkcje będą szczegółowo omawiane w następnym rozdziale.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = x - 2$ .

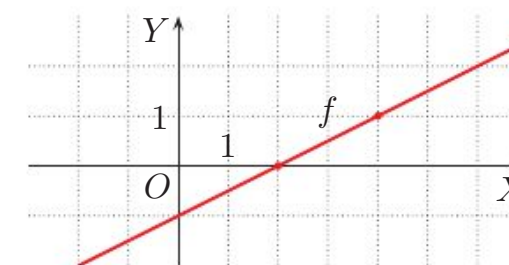
Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy obliczyć jej wartości dla dwóch dowolnych argumentów (dlaczego?), zaznaczyć odpowiednie punkty i poprowadzić przez nie prostą.



#### Przykład 6

Naszkicuj wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ .

Obliczamy wartości funkcji  $f$  dla dwóch dowolnych argumentów, np. dla  $x = 2$  i  $x = 4$ :  $f(2) = 0$ ,  $f(4) = 1$ . Do wykresu funkcji  $f$  należą punkty  $(2, 0)$  oraz  $(4, 1)$ . Szkicujemy prostą przechodzącą przez te punkty.



#### Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem:

a)  $f(x) = 2x$ ,    b)  $f(x) = -x$ ,    c)  $f(x) = x - 1$ ,    d)  $f(x) = -2x + 2$ .

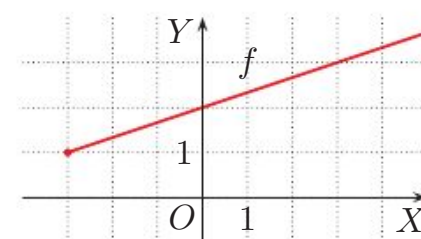
#### Przykład 7

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji określonych tym samym wzorem, ale których dziedzinami są kolejno:

I. przedział  $[-3; \infty)$

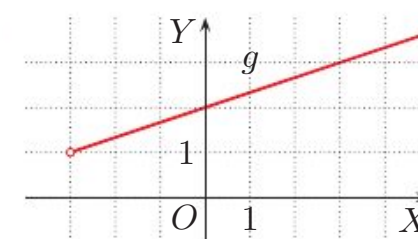
II. przedział  $(-3; \infty)$

III. przedział  $(-\infty; 3]$



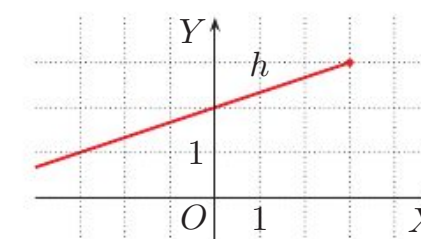
$$f: [-3; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2$$



$$g: (-3; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x + 2$$



$$h: (-\infty; 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{1}{3}x + 2$$

Wykresami funkcji  $f$  i  $h$  są półproste domknięte (z początkiem). Wykresem funkcji  $g$  jest półprosta otwarta (bez początku).

#### Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem  $f(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$ .

a)  $D = (-\infty; 2)$     b)  $D = (-\infty; 2]$     c)  $D = (2; \infty)$     d)  $D = [2; \infty)$



## Zadania

1. Naskicuj wykres funkcji  $f: \{-1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ , która każdej liczbie z dziedziny przyporządkowuje:

- a) liczbę o 1 mniejszą, c) jej wartość bezwzględną,  
b) liczbę przeciwną, d) jej kwadrat.

2. Dziedziną funkcji  $f$  jest zbiór  $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ . Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli i naskicuj jej wykres.

- a)  $f(x) = x + 3$  b)  $f(x) = \frac{1}{2}x$  c)  $f(x) = |\frac{1}{2}x|$  d)  $f(x) = -|x|$

3. Funkcja  $f$  podana została za pomocą tabeli. Naskicuj wykres tej funkcji i spróbuj odgadnąć wzór, którym mogłaby być określona.

a)

|        |    |    |    |    |    |   |
|--------|----|----|----|----|----|---|
| $x$    | -1 | 0  | 1  | 2  | 3  | 4 |
| $f(x)$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |

c)

|        |    |    |   |   |   |   |
|--------|----|----|---|---|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 6  | 5  | 4 | 3 | 2 | 1 |

b)

|        |                |   |               |   |               |   |
|--------|----------------|---|---------------|---|---------------|---|
| $x$    | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 |
| $f(x)$ | -1             | 0 | 1             | 2 | 3             | 4 |

d)

|        |                |    |               |   |               |   |
|--------|----------------|----|---------------|---|---------------|---|
| $x$    | $-\frac{1}{2}$ | 0  | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 |
| $f(x)$ | -2             | -1 | 0             | 1 | 2             | 3 |

4. Naskicuj wykres funkcji  $f(x) = x + 1$ , której dziedziną jest przedział:

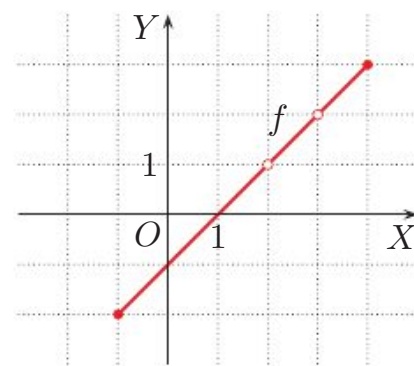
- a)  $[0; 4]$ , b)  $[-2; 3]$ , c)  $[1; \infty)$ , d)  $(-\infty; 2]$ .

5. Naskicuj wykres funkcji  $f(x) = -x + 3$ , której dziedziną jest przedział:

- a)  $(0; 4)$ , b)  $(-3; 2)$ , c)  $(0; \infty)$ , d)  $(-\infty; -1)$ .

6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = x - 1$ , gdzie  $D = [-1; 4] \setminus \{2, 3\}$ . Naskicuj wykres funkcji  $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$  określonej tym samym wzorem.

- a)  $D_g = [-3; 0] \cup (2; 4)$  c)  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$   
b)  $D_g = (-2; 5) \setminus \{4\}$  d)  $D_g = (0; \infty) \setminus \{3\}$



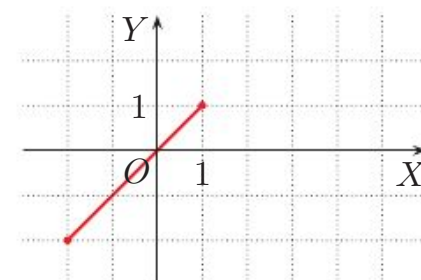
7. Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4, a funkcja  $g$  jej resztę z dzielenia przez 5. Naskicuj wykresy tych funkcji. Dla ilu liczb naturalnych mniejszych od 25 funkcje  $f$  i  $g$  przyjmują te same wartości?

## 4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)

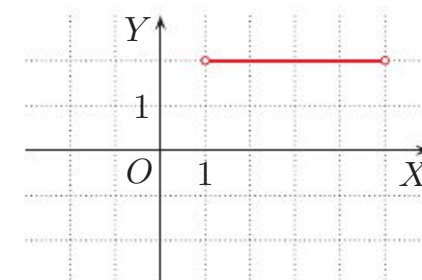
### Przykład 1

Naskicuj wykres funkcji  $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 5) \end{cases}$

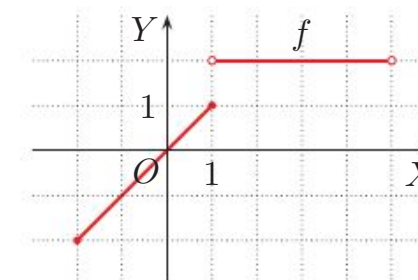
Zauważ, że dziedziną funkcji  $f$  jest przedział  $[-2; 5]$ .



Fragment wykresu funkcji  $f$  dla  $x \in [-2; 1]$



Fragment wykresu funkcji  $f$  dla  $x \in (1; 5)$



Wykres funkcji  $f$

### Ćwiczenie 1

Naskicuj wykres funkcji  $f$ .

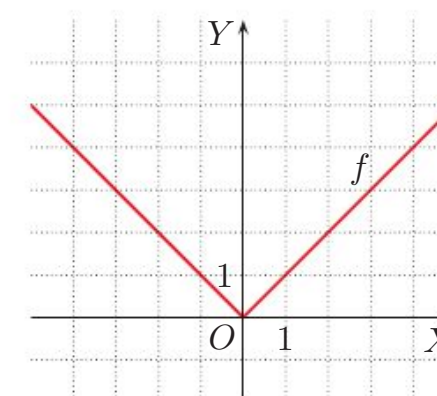
- a)  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1; 4) \end{cases}$  c)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-3; -1) \\ -x & \text{dla } x \in [-1; 4) \end{cases}$   
b)  $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in [-4; -2] \\ x & \text{dla } x \in (-2; 3] \end{cases}$  d)  $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in [1; \infty) \end{cases}$

### Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej za pomocą wzoru  $f(x) = |x|$ .

W tabeli podano wartości funkcji  $f$  dla **wybranych** argumentów. Tabelę taką nazywamy **tabelą wartości funkcji**.

|        |    |    |    |   |   |   |   |
|--------|----|----|----|---|---|---|---|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 3  | 2  | 1  | 0 | 1 | 2 | 3 |



Wzór tej funkcji można zapisać w postaci:  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$

### Ćwiczenie 2

Sporządź tabelę wartości funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dla całkowitych argumentów  $x$ , takich że  $|x| \leq 3$ . Naskicuj wykres tej funkcji i zapisz jej wzór bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

- a)  $f(x) = |2x|$  b)  $f(x) = |3x|$  c)  $f(x) = |\frac{1}{2}x|$  d)  $f(x) = -|x|$



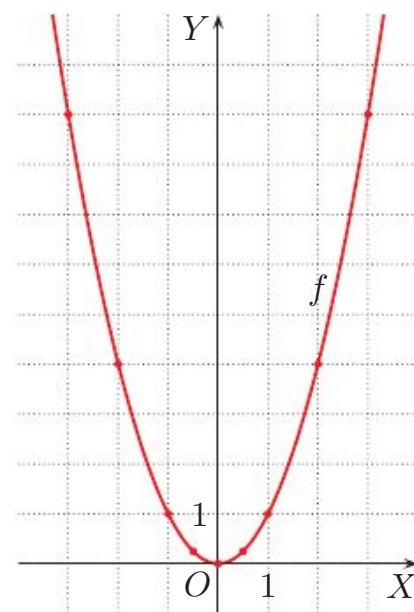
### Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej za pomocą wzoru  $f(x) = x^2$ .

Aby naszkicować wykres funkcji  $f(x) = x^2$ , sporządzamy tabelę jej wartości dla wybranych argumentów.

|        |    |    |    |                |   |               |   |   |   |
|--------|----|----|----|----------------|---|---------------|---|---|---|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 9  | 4  | 1  | $\frac{1}{4}$  | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | 4 | 9 |

Wyznaczone punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i łączymy je krzywą, jak na rysunku – w ten sposób otrzymujemy wykres funkcji  $f$ .



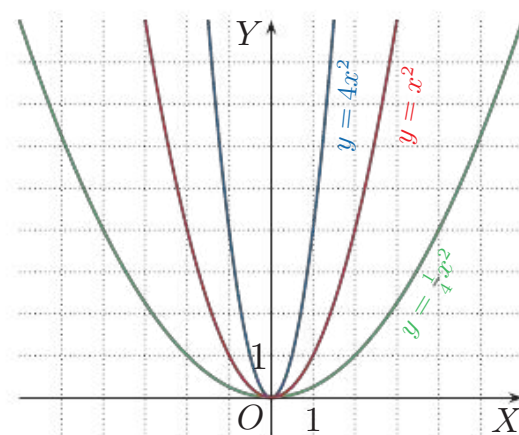
### Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem  $f(x) = x^2$ , o podanej dziedzinie  $D$ .

- a)  $D = [-2; 2]$       b)  $D = [1; 3]$       c)  $D = [0; \infty)$

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji  $y = \frac{1}{4}x^2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$ .

Dziedziną każdej z tych funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.



### Ćwiczenie 4

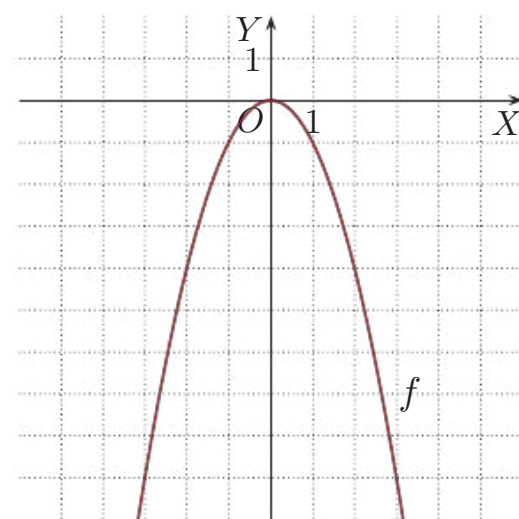
Sporządź tabelę wartości funkcji  $f$  dla podanych argumentów.

- a)  $f(x) = 4x^2$ ,  $x \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$   
b)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ ,  $x \in \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$

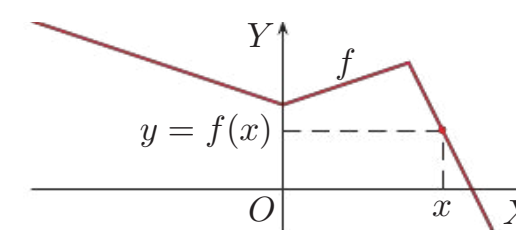
### Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej za pomocą wzoru  $f(x) = -x^2$ .

- a) Sporządź tabelę wartości tej funkcji dla  $x \in \{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ .  
b) Naszkicuj wykres funkcji  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  określonej za pomocą wzoru  $g(x) = -x^2$ , o dziedzinie  $D = [-1; 2]$ .



Z wykresu funkcji można czasem odczytać wartość, jaką przyjmuje ona dla danego argumentu. Zauważmy, że dla argumentu  $x$  istnieje dokładnie jedna wartość  $y$  taka, że punkt  $(x, y)$  należy do wykresu funkcji  $f$ .

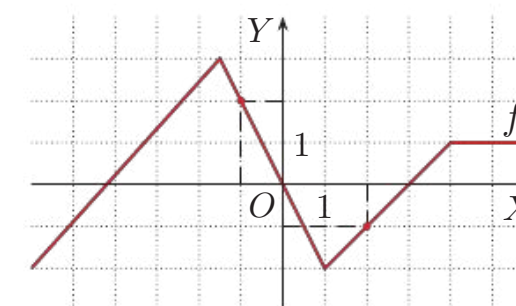


### Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Odczytaj z niego wartości funkcji dla argumentów  $x = -1$  oraz  $x = 2$ .

Dla  $x = -1$  odczytujemy  $f(-1) = 2$ .

Dla  $x = 2$  odczytujemy  $f(2) = -1$ .



### Ćwiczenie 6

Wykresem funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest prosta przechodząca przez punkty  $A$  i  $B$ . Naszkicuj ten wykres i odczytaj z niego wartości funkcji dla  $x = 1$  i dla  $x = 7$ .

- a)  $A(-3, -1)$ ,  $B(5, 3)$       b)  $A(3, 0)$ ,  $B(5, -3)$

### Ćwiczenie 7

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj jej wartości dla  $x = 1$  oraz  $x = 3$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ x & \text{dla } x \in (-2; 4) \\ 4 & \text{dla } x \in [4; \infty) \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ -x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 3 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$$

Czasami dokładne odczytanie wartości funkcji z wykresu może być trudne lub niemożliwe, ale możemy ją obliczyć, gdy znamy wzór funkcji.

### Przykład 5

Oblicz wartości funkcji  $f(x) = x^2 + 3$ ,  $g(x) = 5x^2 - 6x$  i  $h(x) = x^3 - 1$  dla argumentu  $x = 2$ . Czy punkt  $P(2, 7)$  należy do wykresu którejś z tych funkcji?

Obliczamy wartości funkcji dla  $x = 2$ :

$$f(2) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$g(2) = 5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 = 20 - 12 = 8 \neq 7$$

$$h(2) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji  $y = f(x)$ , jeśli po wstawieniu jego współrzędnych odpowiednio na miejsce  $x$  i  $y$  do wzoru funkcji otrzymamy równość prawdziwą.

Zatem punkt  $P$  należy do wykresu funkcji  $f$  oraz do wykresu funkcji  $h$ .

### Ćwiczenie 8

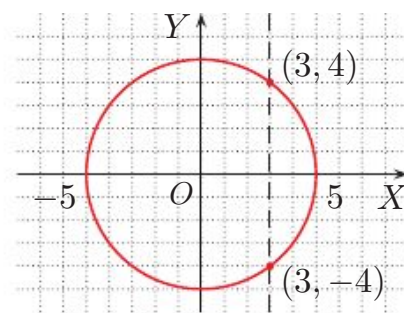
Sprawdź, czy punkt  $P$  należy do wykresu funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- a)  $f(x) = 3x^2 + 1$ ,  $P(-2, -11)$       b)  $f(x) = -2x^2 - x$ ,  $P(-\frac{1}{2}, 0)$

Funkcja każdemu argumentowi  $x$  przyporządkowuje tylko jedną wartość  $y$ , więc do wykresu funkcji nie mogą należeć dwa punkty o tej samej odciętej.

### Przykład 6

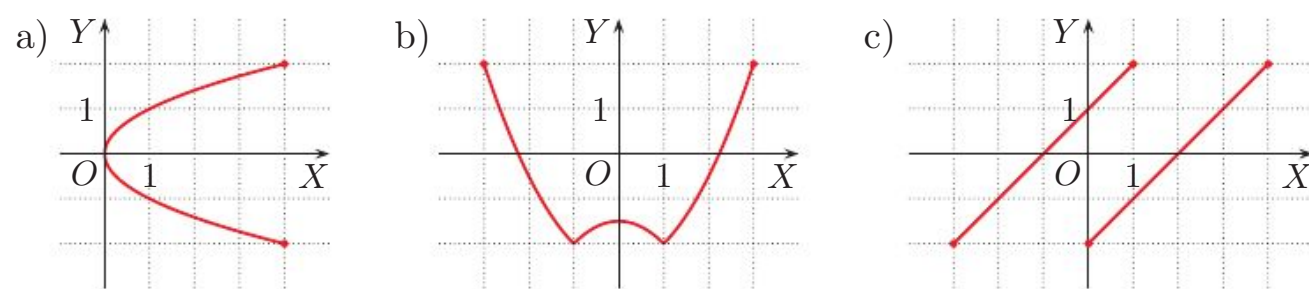
Okrąg (rysunek obok) nie jest wykresem funkcji, gdyż można wskazać takie liczby  $x$ , którym odpowiadają dwie różne wartości  $y_1, y_2$ , np. dla  $x = 3$  mamy  $y_1 = -4$  i  $y_2 = 4$ . Jest to sprzeczne z definicją funkcji.



Żadna prosta pionowa (równoległa do osi  $OY$ ) nie przecina wykresu funkcji w więcej niż jednym punkcie.

### Ćwiczenie 9

Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.



## Zadania

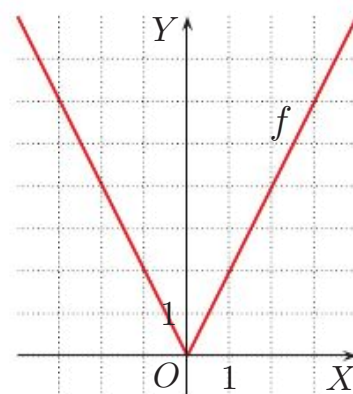
1. Naskicuj wykres funkcji danej wzorem  $f(x) = |x|$  o podanej dziedzinie  $D$ .

a)  $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$       b)  $D = (-4; 4)$       c)  $D = [-2; \infty)$

2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej za pomocą wzoru  $f(x) = |2x|$ . Naskicuj wykres funkcji  $g(x) = |2x|$  o podanej dziedzinie  $D$ .

a)  $D = (-4; 2)$       b)  $D = [-2, 4]$

3. Naskicuj wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej za pomocą wzoru  $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$ .



4. Naskicuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru  $f(x) = \left|\frac{1}{2}x\right|$  o podanej dziedzinie  $D$ .

a)  $D = \{-5, -4, -2, 0, 2, 4, 5\}$       b)  $D = (-4; 4)$       c)  $D = [-2; \infty)$

### Czy wiesz, że...

Szwajcarski matematyk Leonhard Euler [czyt. ojler] (1707–1783) jako pierwszy do opisu wartości funkcji używał oznaczenia  $f(x)$ . Podana przez nas definicja funkcji została sformułowana dopiero w połowie XIX wieku przez niemieckiego matematyka Petera G.L. Dirichleta (1805–1859).

5. Naskicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj jej wartości dla  $x = -4$  oraz dla  $x = 4$ .

a)  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty; 0] \\ 2x & \text{dla } x \in (0; \infty) \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in [-2; \infty) \end{cases}$

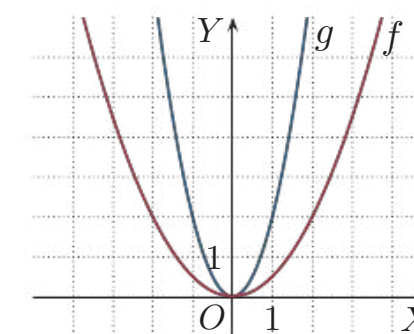
6. Naskicuj wykres funkcji  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem  $f(x) = -x^2$ .

a)  $D = (-2; 3)$       b)  $D = [-2; 3]$       c)  $D = (-3; 2)$       d)  $D = [-3; 2]$

7. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  oraz  $g(x) = 2x^2$ .

a) Który spośród punktów  $P(1, 2)$ ,  $Q(4, 8)$ ,  $R(-2, 8)$ ,  $S(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  należy do wykresu funkcji  $g$ ?

b) Podaj pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do wykresu funkcji  $f$ .



8. Naskicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj jej wartości dla  $x = -3$  oraz dla  $x = 2$ .

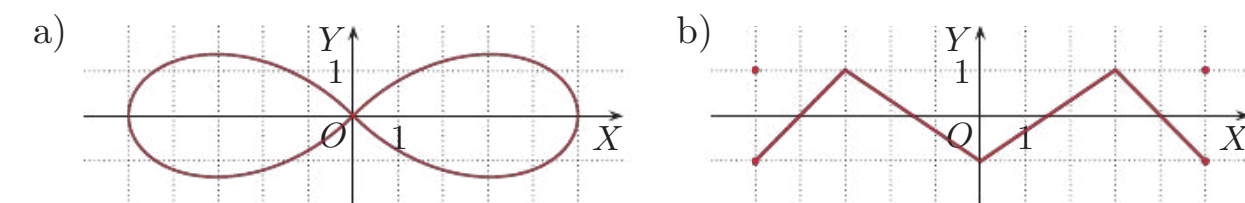
a)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 1] \\ x & \text{dla } x \in (1; 4] \\ 4 & \text{dla } x \in (4; \infty) \end{cases}$       c)  $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3] \\ -x & \text{dla } x \in (-3; 2] \\ 2 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ 2x & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 1 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$       d)  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -3] \\ |x| & \text{dla } x \in [-3; 3] \\ 3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$

9. Dana jest funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Który z punktów  $P(-1, -5)$ ,  $Q(2, -9)$  należy do wykresu tej funkcji?

a)  $f(x) = -\frac{3}{2}x - 6$       b)  $f(x) = -4x^2 + x$       c)  $f(x) = x^3 - 4x^2$

10. Czy na rysunku przedstawiono wykres funkcji? Odpowiedź uzasadnij.





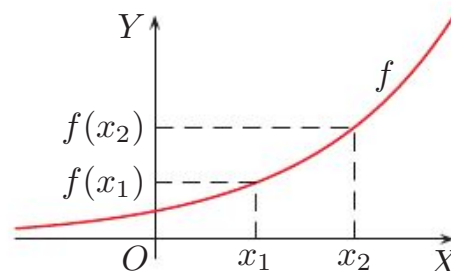
## 4.4. Monotoniczność funkcji

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji  $f$ . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada większa wartość funkcji.

### Definicja

Funkcję  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



**Uwaga.** Warunek z definicji można też zapisać: jeśli  $x_1 < x_2$ , to  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ .

### D Przykład 1

Wykaż, że funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$  jest rosnąca.

Założmy, że  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  są dowolnymi argumentami, takimi że  $x_1 < x_2$ .

Wówczas  $f(x_1) = \frac{1}{2}x_1 - 4$  oraz  $f(x_2) = \frac{1}{2}x_2 - 4$ .

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\frac{1}{2}x_2 - 4\right) - \left(\frac{1}{2}x_1 - 4\right) = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0$$

ponieważ na podstawie założenia  $x_2 - x_1 > 0$ .

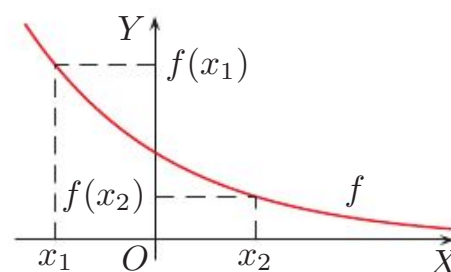
Oznacza to, że funkcja  $f$  jest rosnąca.

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji  $f$ . Zauważ, że większemu argumentowi odpowiada mniejsza wartość funkcji.

### Definicja

Funkcję  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



**Uwaga.** Warunek z definicji można też zapisać: jeśli  $x_1 < x_2$ , to  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ .

### D Przykład 2

Wykaż, że funkcja  $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = \frac{4}{x}$  jest malejąca.

Założmy, że  $x_1, x_2 \in (0; \infty)$  są dowolnymi argumentami, takimi że  $x_1 < x_2$ .

Wówczas  $f(x_1) = \frac{4}{x_1}$  oraz  $f(x_2) = \frac{4}{x_2}$ .

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{4}{x_2} - \frac{4}{x_1} = \frac{4x_1 - 4x_2}{x_1x_2} = \frac{4(x_1 - x_2)}{x_1x_2} < 0$$

ponieważ na podstawie założenia  $x_1x_2 > 0$  oraz  $x_1 - x_2 < 0$ .

Oznacza to, że funkcja  $f$  jest malejąca.

### D Ćwiczenie 1

Uzasadnij, że:

a) funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = -2x + 6$  jest malejąca,

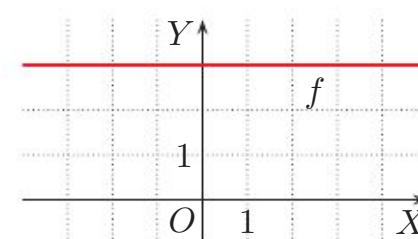
b) funkcja  $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = -\frac{4}{x}$  jest rosnąca,

c) funkcja  $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = -\frac{2}{x}$  jest rosnąca.

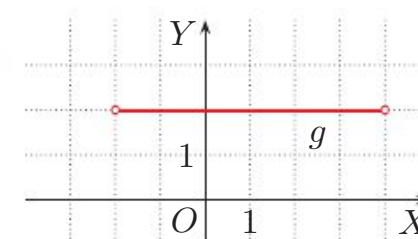
### Definicja

Funkcję  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  prawdziwa jest równość:  $f(x_1) = f(x_2)$ .

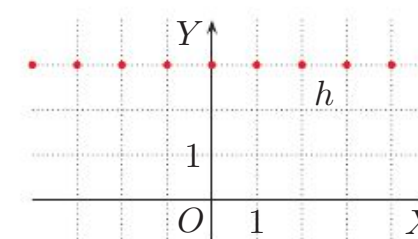
Na poniższych rysunkach przedstawiono wykresy funkcji stałych.



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3$$



$$g: (-2; 4) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2$$

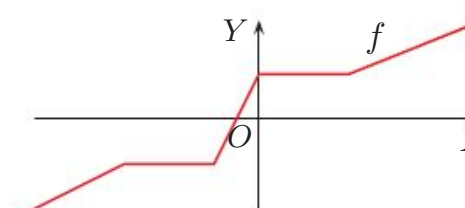


$$h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 3$$

### Definicja

Funkcję  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy **nemalejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

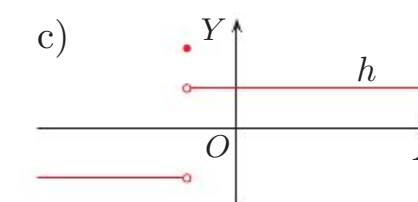
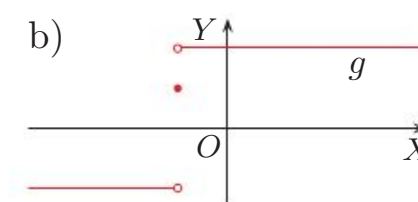
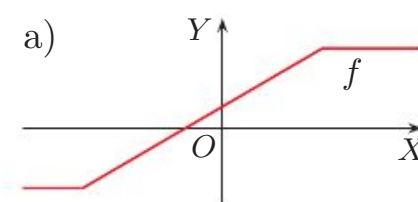
$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leq f(x_2)$$



Przykład funkcji nemalejącej

### Ćwiczenie 2

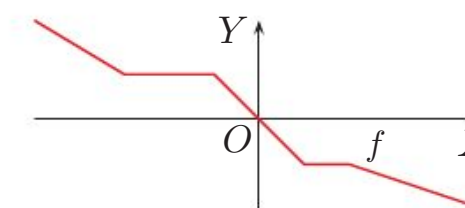
Czy na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji nemalejącej?



### Definicja

Funkcję  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy **nierosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geq f(x_2)$$



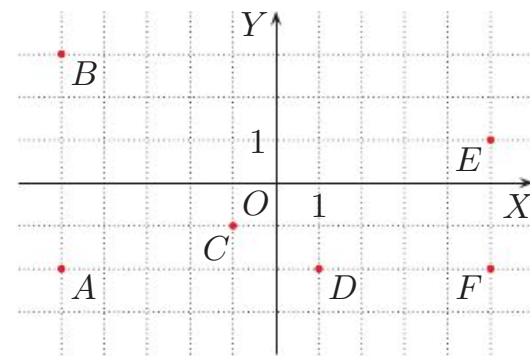
Przykład funkcji nierosnącej



### Ćwiczenie 3

a) Naszkicuj wykres funkcji nierosnącej  $f: [-5; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ , tak aby należały do niego cztery spośród punktów  $A-F$ .

b) Czy można naszkicować wykres funkcji niemalejącej  $f: [-5; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ , tak aby należały do niego cztery spośród punktów  $A-F$ ?



Każda funkcja malejąca jest funkcją nierosnącą, a każda funkcja rosnąca jest funkcją niemalejącą.

Funkcja stała jest zarówno funkcją niemalejącą, jak i nierosnącą.

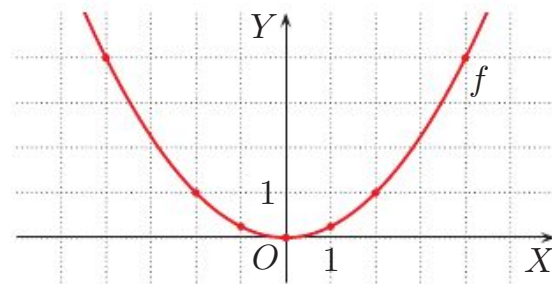
### Definicja

Funkcje rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe nazywamy funkcjami **monotonicznymi**.

### Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ .

Funkcja  $f$  rozpatrywana w całej swojej dziedzinie nie jest monotoniczna. Jest to funkcja **przedziałami monotoniczna**.



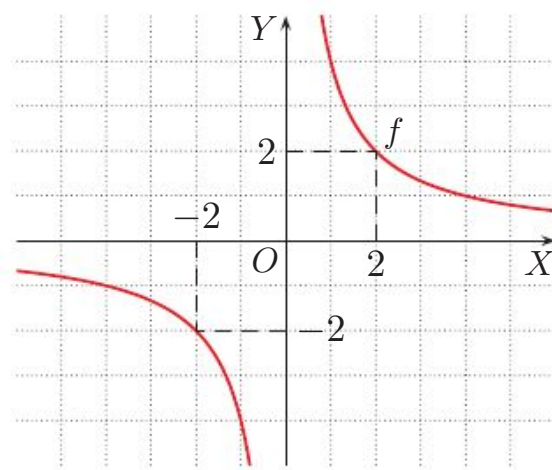
W przedziale  $(-\infty; 0]$  funkcja  $f$  maleje, a w przedziale  $[0; \infty)$  – rośnie. Przedziały te nazywamy przedziałami monotoniczności tej funkcji.

### Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f: (-\infty; 0) \cup (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = \frac{4}{x}$ . Funkcja ta jest malejąca w każdym z przedziałów  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; \infty)$ .

Jednak funkcja  $f$  nie jest funkcją malejącą w zbiorze  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ . Na przykład dla pary argumentów  $-2$  i  $2$  mamy:

$$-2 < 2 \text{ i } f(-2) = -2 < f(2) = 2$$

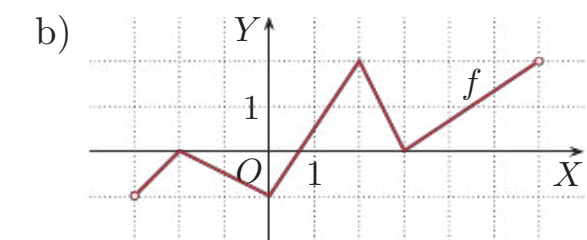
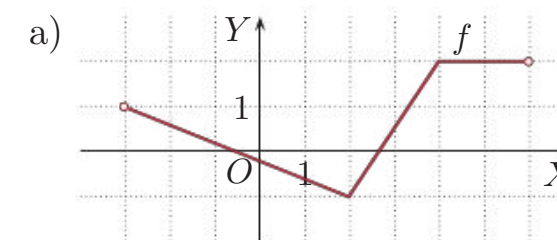


### Ćwiczenie 4

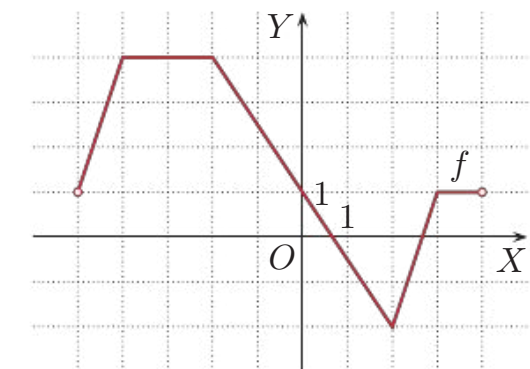
Naszkicuj wykres funkcji, która jest przedziałami rosnącą, ale nie jest funkcją monotoniczną.

## Zadania

1. Dany jest wykres funkcji  $f: (-3; 6) \rightarrow \mathbb{R}$ . Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f: (-5; 4) \rightarrow \mathbb{R}$ . Podaj jej przedziały monotoniczności. Które z poniższych zdań są prawdziwe?



A. Funkcja  $f$  jest nierosnąca w  $[-4; 2]$ .

B. Funkcja  $f$  jest niemalejąca w  $(-5; -2]$ .

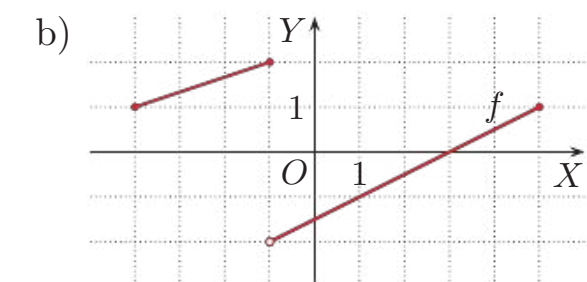
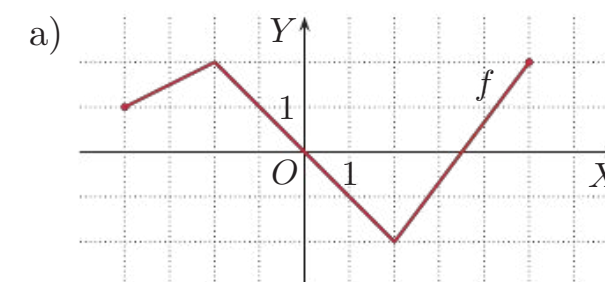
C. Funkcja  $f$  jest niemalejąca w  $[2; 4)$ .

3. Naszkicuj wykres funkcji  $f: (-5; 6) \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającej warunki:

a)  $f$  rośnie w  $(-5; -1]$  i w  $[3; 6)$  oraz maleje w  $[-1; 3]$ ,

b)  $f$  jest stała w  $[0; 4]$ , rośnie w  $[4; 5]$ , maleje w  $(-5; 0]$  i w  $[5; 6)$ .

**D** 4. Dany jest wykres funkcji  $f: [-4; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ . Uzasadnij, że funkcja ta nie jest monotoniczna. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



**D** 5. Przeczytaj podany w ramce przykład. Wykaż, że funkcja:

a)  $f: (-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = 6x^2 + 1$  jest malejąca,

b)  $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2$  jest rosnąca,

c)  $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = -8x^2 + 6$  jest malejąca.

Wykaż, że funkcja  $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  jest rosnąca.

Niech  $x_1, x_2 \in [0; \infty)$  oraz  $x_1 < x_2$ .

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 =$$

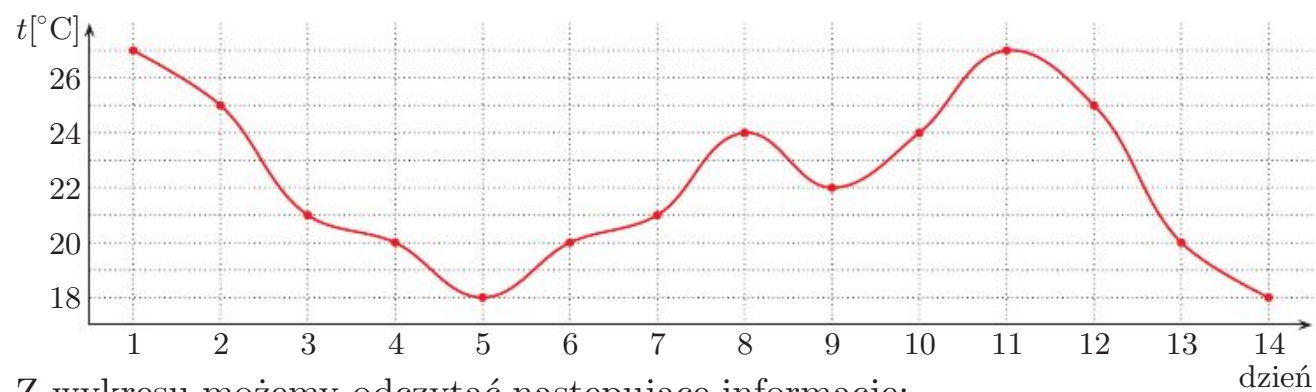
$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

$x_2 - x_1 > 0$  oraz  $x_2 + x_1 > 0$ , zatem  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , czyli  $f(x_2) > f(x_1)$ . Oznacza to, że funkcja  $f$  jest rosnąca.



## Wykorzystanie wykresu do prezentacji informacji

Na poniższym wykresie przedstawiono zmiany temperatury powietrza w pewnym mieście w dwóch pierwszych tygodniach sierpnia podane przez jeden z serwisów meteorologicznych. Temperaturę mierzono każdego dnia w południe. Otrzymane punkty wykresu zwyczajowo łączy się krzywą ilustrującą ciągły proces zmiany temperatury.



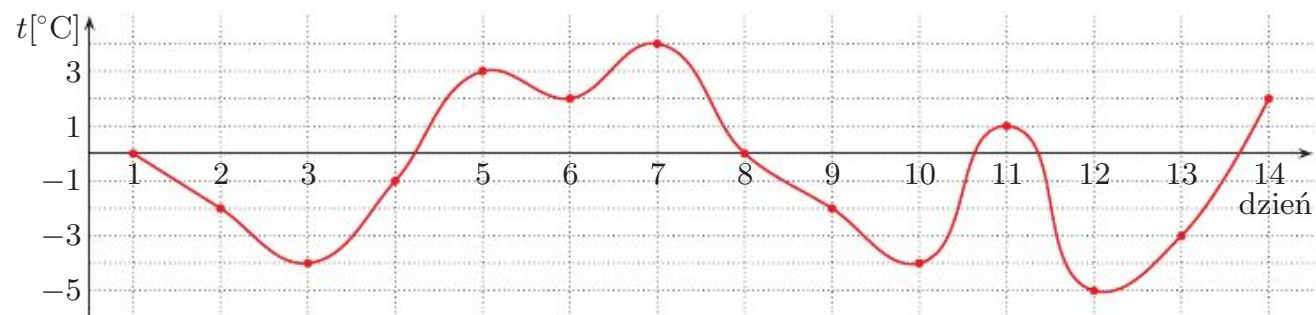
Z wykresu możemy odczytać następujące informacje:

- najwyższa temperatura odnotowana w tym okresie to 27°C (1 i 11 sierpnia),
- najniższa temperatura odnotowana w tym okresie to 18°C (5 i 14 sierpnia).

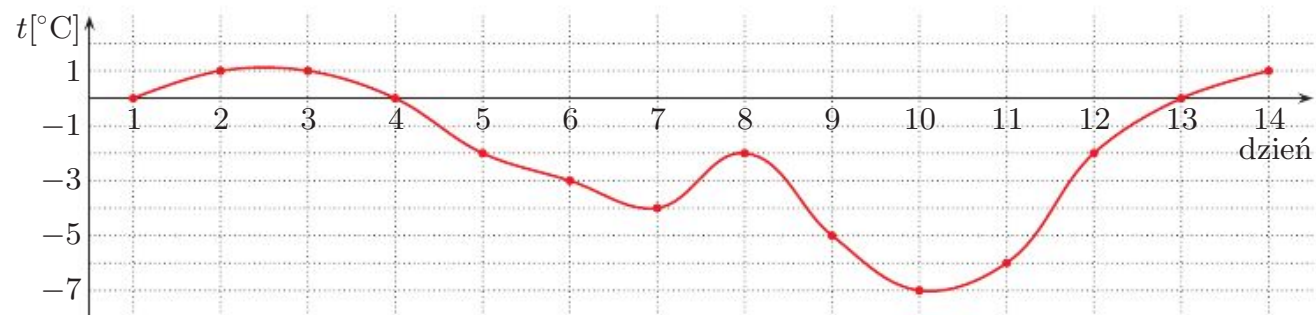
1. Na poniższych wykresach przedstawiono zmiany temperatury powietrza w miastach A i B w pierwszych dwóch tygodniach stycznia. Dla każdego miasta odczytaj z wykresu:

- najniższą temperaturę i podaj dni, w których była ona odnotowana,
- najwyższą temperaturę i podaj dni, w których była ona odnotowana,
- dni, w których temperatura była ujemna.

Miasto A



Miasto B



## 4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

## Odczytywanie dziedziny funkcji

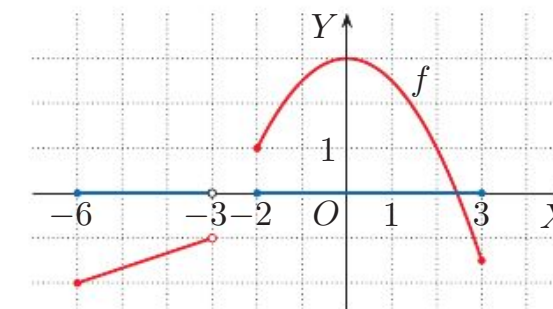
Dziedzina funkcji  $y = f(x)$  to zbiór wszystkich argumentów  $x$ , dla których funkcja jest określona. Dziedzinę funkcji  $f$  oznaczamy przez  $D$  lub  $D_f$ .

## Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f$ . Jej dziedziną jest zbiór:

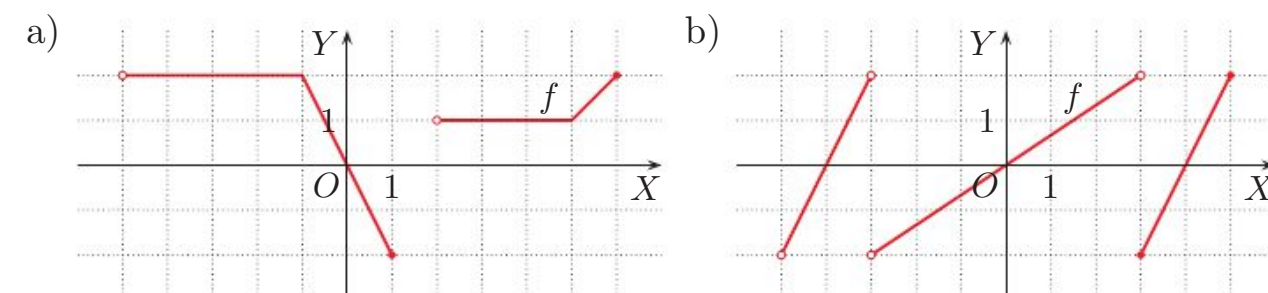
$$D = [-6; -3] \cup [-2; 3]$$

Na rysunku został on zaznaczony na osi  $OX$  kolorem niebieskim.



## Ćwiczenie 1

Z wykresu funkcji  $f$  odczytaj jej dziedzinę.



## Odczytywanie zbioru wartości funkcji

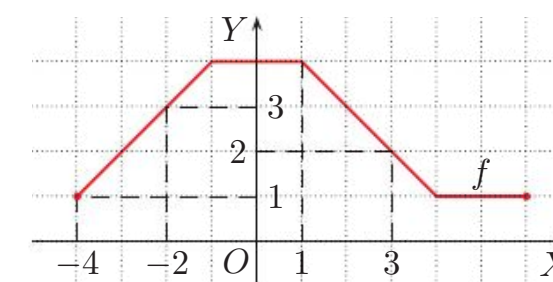
Z wykresu funkcji można odczytać nie tylko wartość, jaką ta funkcja przyjmuje dla danego argumentu, lecz także zbiór wszystkich liczb, które są wartościami tej funkcji. Zbiór ten nazywamy **zbiorem wartości** funkcji.

## Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: [-4; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ . Odczytaj z niego  $f(-4)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(1)$  i  $f(3)$  oraz zbiór wartości funkcji  $f$ .

Z wykresu odczytujemy wartości funkcji:  $f(-4) = 1$ ,  $f(-2) = 3$ ,  $f(1) = 4$  i  $f(3) = 2$ .

Wartościami funkcji  $f$  są wszystkie liczby  $y$  spełniające warunek  $1 \leq y \leq 4$ . Zatem zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $[1; 4]$ .





## Definicja

**Zbiór wartości** funkcji  $f: D \rightarrow Y$  to zbiór tych wszystkich  $y \in Y$ , dla których istnieje taki argument  $x \in D$ , że  $f(x) = y$ .

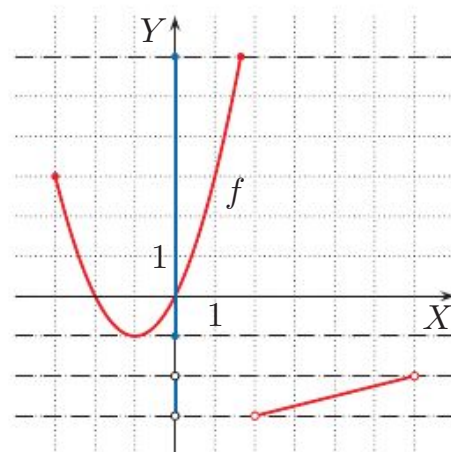
Zbiór wartości funkcji  $f$  oznaczamy przez  $f(D)$  lub  $f(D_f)$ .

## Przykład 3

Z wykresu funkcji  $f$  odczytaj jej zbiór wartości.

Przy odczytywaniu zbioru wartości funkcji wygodnie jest poprowadzić odpowiednie proste poziome (równoległe do osi  $OX$ ).

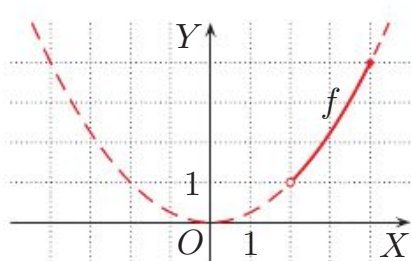
Zbiór wartości  $f(D) = (-3; -2) \cup [-1; 6]$  został zaznaczony na osi  $OY$  kolorem niebieskim.



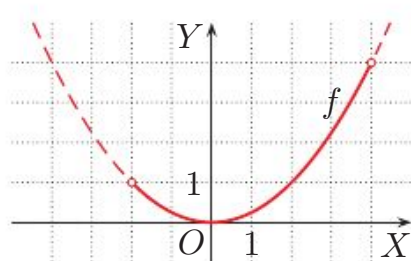
## Ćwiczenie 2

Linia ciągłą narysowano wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$  o dziedzinie  $D$ . Odczytaj z wykresu zbiór wartości funkcji  $f$ .

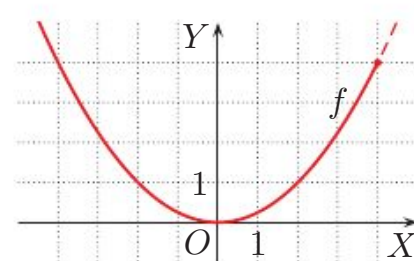
a)  $D = (2; 4]$



b)  $D = (-2; 4)$

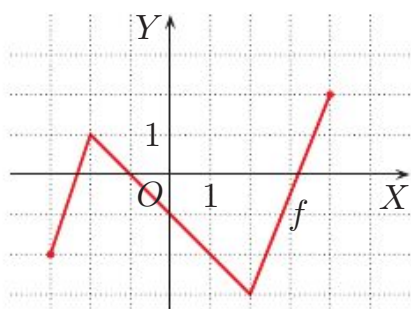


c)  $D = (-\infty; 4]$

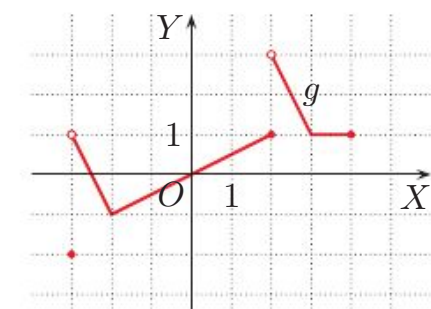


## Ćwiczenie 3

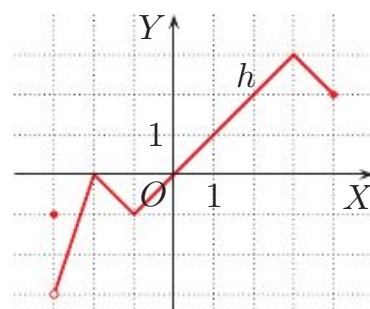
Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji  $f$ ,  $g$  i  $h$  określonych w przedziale  $[-3; 4]$ . Najmniejsze wartości każdej z tych funkcji podano pod wykresami. Odczytaj ich największe wartości. Dla jakich argumentów są one przyjmowane?



Najmniejsza wartość funkcji  $f$  jest równa  $-3$ . Jest ona przyjmowana dla  $x = 2$ .



Najmniejsza wartość funkcji  $g$  jest równa  $-2$ . Jest ona przyjmowana dla  $x = -3$ .



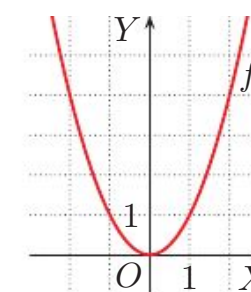
Funkcja  $h$  nie przyjmuje najmniejszej wartości.

## Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f(x) = x^2$  o dziedzinie  $D = \mathbb{R}$ .

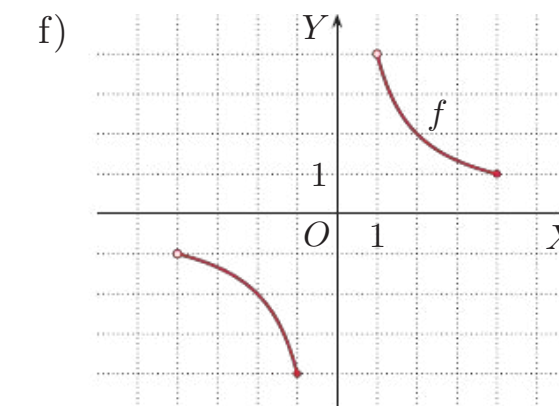
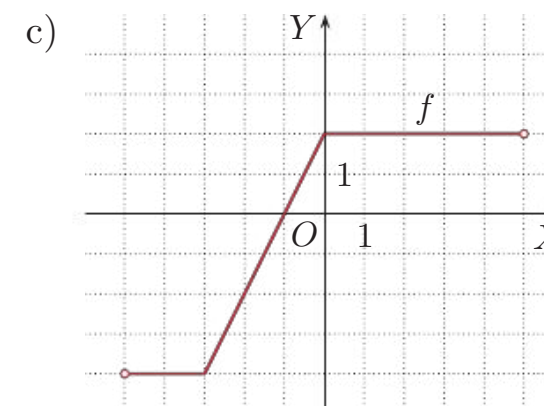
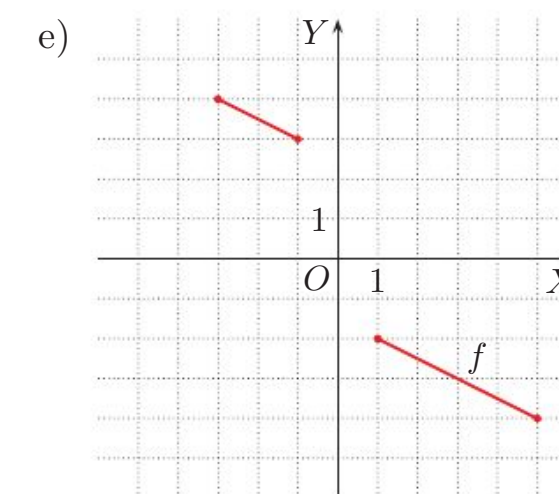
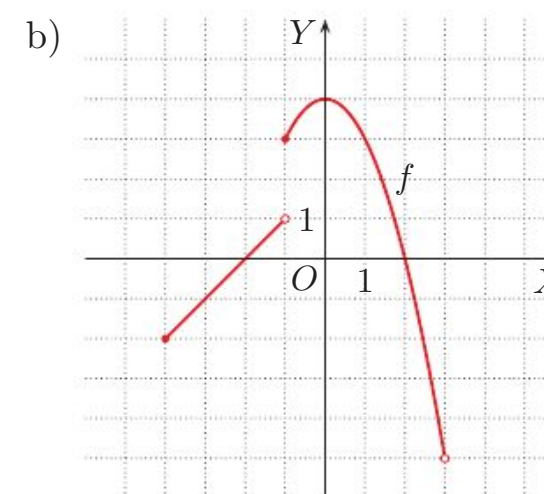
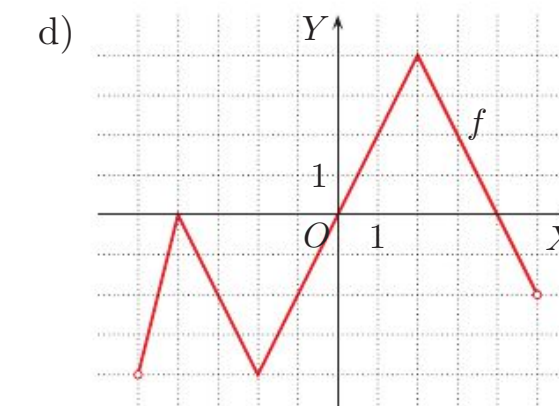
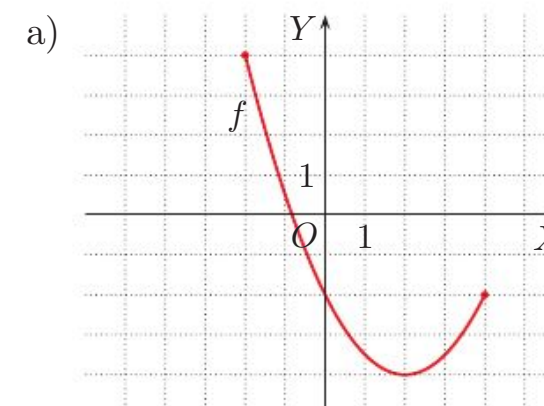
Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $[0; \infty)$ .

Najmniejsza wartość funkcji  $f$ , równa  $0$ , jest przyjmowana dla  $x = 0$ . Funkcja  $f$  nie przyjmuje wartości największej.



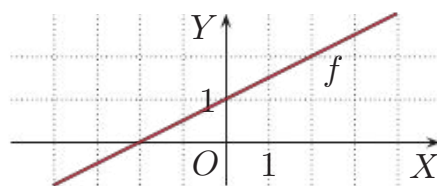
## Zadania

1. Odczytaj z wykresu funkcji  $f$  jej dziedzinę, zbiór wartości, najmniejszą wartość i największą wartość oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.





2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ . Podaj zbiór wartości funkcji, której dziedziną jest zbiór  $D$ , określonej tym samym wzorem.

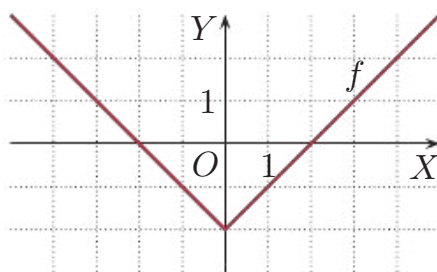


- a)  $D = [-4; 4]$       b)  $D = [-4; -2] \cup [0; 4]$       c)  $D = [-4; 0) \cup (2; 4]$
3. Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$  o dziedzinie  $D$ . Odczytaj z wykresu zbiór wartości tej funkcji.
- a)  $D = [-4; 6]$       b)  $D = [-4; 0] \cup [2; 4]$       c)  $D = [-4; -2] \cup [4; 6]$

4. Podany zbiór jest zbiorem wartości funkcji  $f(x) = 2x - 4$ . Określ dziedzinę tej funkcji.

- a)  $(-3; 4]$       b)  $(-2; 2) \cup (2; \infty)$       c)  $(0; 2) \cup \{3\}$       d)  $\{0, 2, 3\}$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = |x| - 2$ . Dla funkcji  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  określonej tym samym wzorem podaj wartości największą i najmniejszą oraz argumenty, dla których są one przyjmowane.



- a)  $D = [-4; -1]$       b)  $D = [-3; 4)$       c)  $D = [-2; \infty)$

6. Naszkicuj wykres dowolnej funkcji  $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ , której zbiór wartości jest równy:

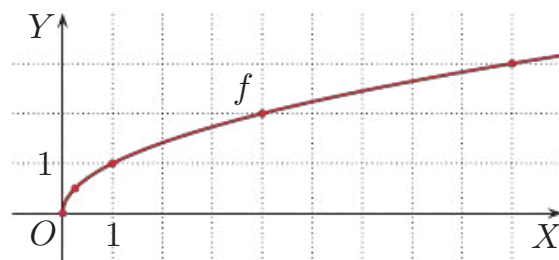
- a)  $[-2; 6)$ ,      b)  $[-4; 0] \cup (1; 4]$ ,      c)  $[-2; 3) \cup \{5\}$ ,      d)  $\{0, 4\}$ .

7. Aby naszkicować wykres funkcji  $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = \sqrt{x}$ , sporządzono tabelę wartości tej funkcji dla wybranych argumentów.

| $x$    | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | 4 | 9 |
|--------|---|---------------|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |

Odczytaj z wykresu, jakie wartości funkcja  $f$  przyjmuje dla:

- a)  $x \in (0; \frac{1}{4}]$ ,      b)  $x \in (\frac{1}{4}; 1)$ ,      c)  $x \in [4; 9]$ ,      d)  $x \in [2\frac{1}{4}; 6\frac{1}{4}]$ .

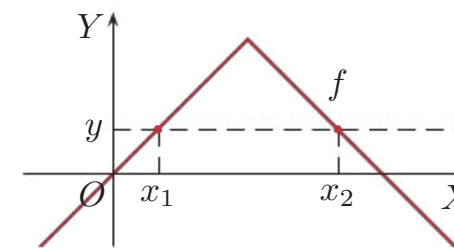


8. Na podstawie odpowiedniej tabeli wartości funkcji naszkicuj wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Jakie wartości funkcja  $f$  przyjmuje dla argumentów z przedziału:

- a)  $[0; 1]$ ,      b)  $(0; 8)$ ,      c)  $[-8; 1]$ ,      d)  $(-8; \infty)$ ?

## 4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

Na podstawie wykresu funkcji możemy podać argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość. Zwróć uwagę na to, że funkcja  $f$ , której wykres przedstawiono obok, przyjmuje wskazaną wartość  $y$  dla dwóch argumentów:  $x_1$  i  $x_2$ .

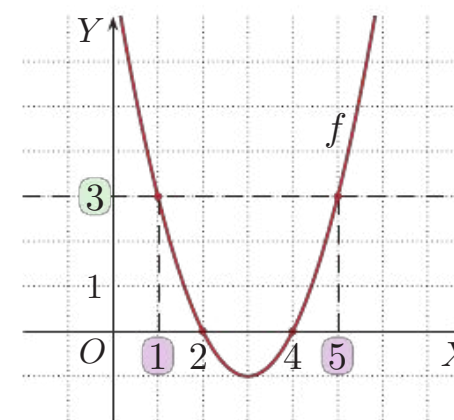


### Przykład 1

Dany jest wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Odczytaj, dla jakich argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartość 3 oraz podaj jej miejsca zerowe.

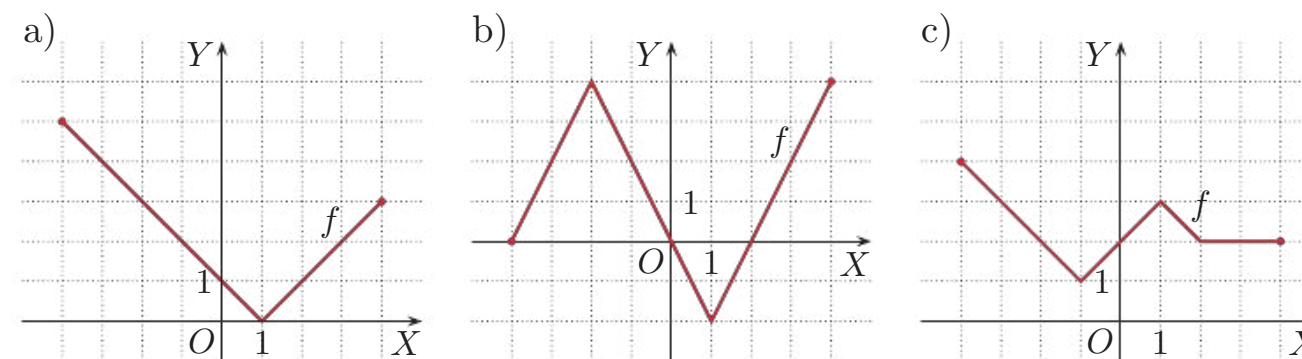
Rysujemy prostą  $y = 3$ . Przecina ona wykres funkcji w punktach  $(1, 3)$  i  $(5, 3)$ . Zatem funkcja  $f$  przyjmuje wartość równą 3 dla  $x = 1$  i  $x = 5$ .

Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby 2 i 4.



### Ćwiczenie 1

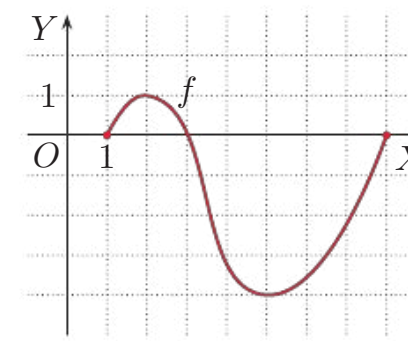
Na podstawie wykresu funkcji  $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$  podaj jej miejsca zerowe oraz te argumenty  $x$ , dla których spełnione jest równanie  $f(x) = 2$ .



### Przykład 2

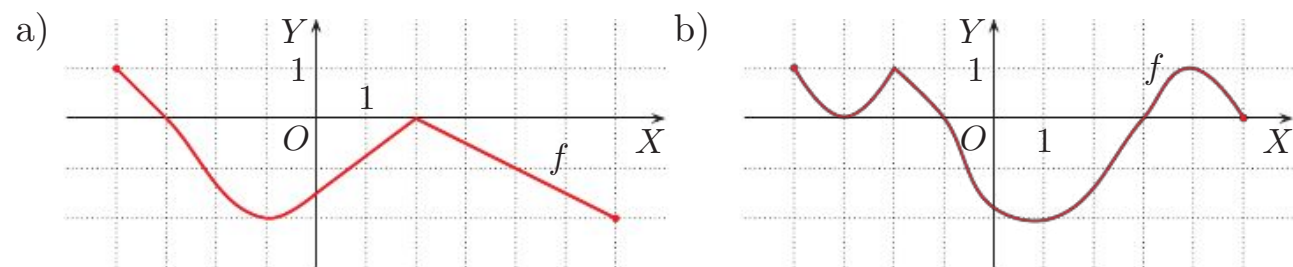
Dany jest wykres funkcji  $f: [1; 8] \rightarrow \mathbb{R}$ . Odczytujemy z niego:

- równanie  $f(x) = 0$  jest spełnione dla  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $x = 8$ ,
- nierówność  $f(x) > 0$  zachodzi dla  $x \in (1; 3)$ ,
- nierówność  $f(x) \leq 0$  zachodzi dla  $x \in \{1\} \cup [3; 8]$ .



## Ćwiczenie 2

Z wykresu funkcji  $f$  odczytaj jej miejsca zerowe, zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) > 0$  oraz nierówności  $f(x) \leq 0$ .



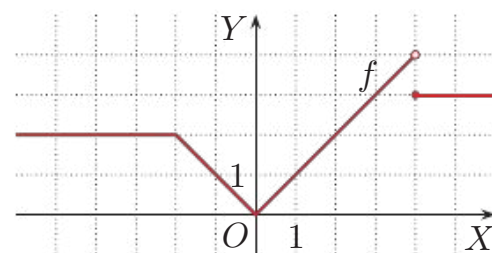
## Przykład 3

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |x| & \text{dla } x \in [-2; 4) \\ 3 & \text{dla } x \in [4; \infty) \end{cases}$$

Odczytaj z wykresu zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) > 2$  oraz nierówności  $f(x) \geq 2$ .

Nierówność  $f(x) > 2$  zachodzi dla  $x \in (2; \infty)$ , a nierówność  $f(x) \geq 2$  zachodzi dla  $x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ .



## Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Odczytaj z niego:

- rozwiązanie równania  $f(x) = 3$  i zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) > 3$ ,
- rozwiązanie równania  $f(x) = 1$  i zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \leq 1$ .

a)  $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -5) \\ |x| & \text{dla } x \in [-5; 3) \\ 1 & \text{dla } x \in [3; \infty) \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in [-1; 1] \\ 3 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

## Przykład 4

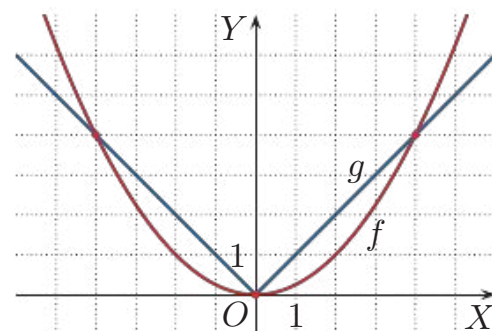
Rozwiąż graficznie równanie  $\frac{1}{4}x^2 = |x|$  oraz nierówność  $\frac{1}{4}x^2 < |x|$ .

W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$  i  $g(x) = |x|$ .

Z wykresów odczytujemy:

$$\frac{1}{4}x^2 = |x| \text{ dla } x = -4, x = 0, x = 4,$$

$$\frac{1}{4}x^2 < |x| \text{ dla } x \in (-4; 0) \cup (0; 4).$$

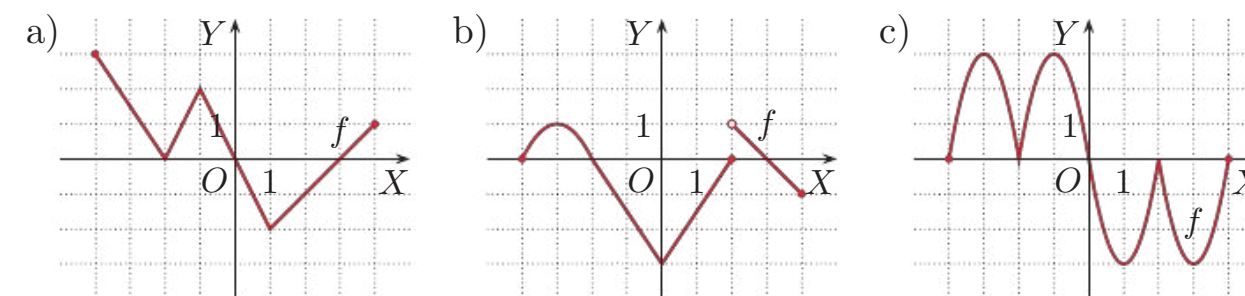


## Ćwiczenie 4

Odczytaj z wykresów funkcji  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$  i  $g(x) = |x|$  z przykładu 4. zbiór rozwiązań nierówności  $\frac{1}{4}x^2 \geq |x|$ .

## Zadania

1. Z wykresu funkcji  $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$  odczytaj jej miejsca zerowe oraz zbiory rozwiązań nierówności  $f(x) > 0$  i  $f(x) \geq 0$ .

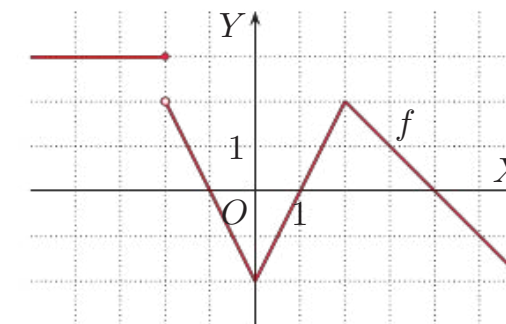


2. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Odczytaj z wykresu:

a) rozwiązanie równania  $f(x) = 0$  oraz zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) > 0$ ,

b) rozwiązanie równania  $f(x) = 2$  oraz zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \geq 2$ ,

c) rozwiązanie równania  $f(x) = 3$  oraz zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \leq 3$ .



3. Naszkicuj wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a następnie odczytaj z niego rozwiązanie równania  $f(x) = 1$  oraz zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \geq 1$ .

a)  $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in [-4; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in [1; \infty) \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -4) \\ |x| & \text{dla } x \in [-4; 2) \\ 4 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2] \\ |2x| & \text{dla } x \in (-2; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$

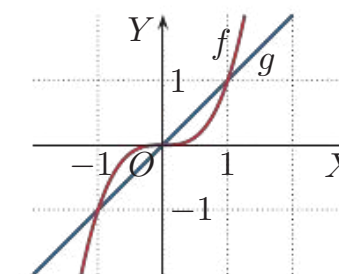
d)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |2x| & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ 1 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji  $f(x) = x^3$  i  $g(x) = x$ . Odczytaj z wykresów:

a) rozwiązanie równania  $x^3 = x$ ,

b) zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) < g(x)$ ,

c) zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \geq g(x)$ .



- 5.\* a) Rozwiąż graficznie równanie  $x^2 = |2x|$  i nierówność  $x^2 < |2x|$ .

b) Rozwiąż graficznie równanie  $x^2 = 2 - x$  i nierówność  $x^2 \geq 2 - x$ .



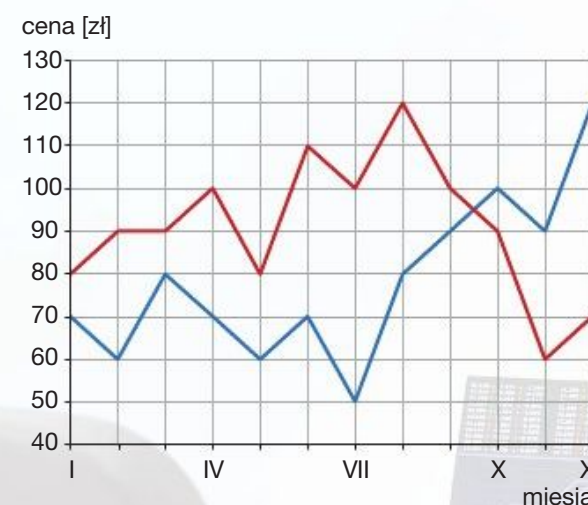
# Wykresy jako nośnik informacji finansowych

Wiele informacji finansowych jest prezentowanych w postaci wykresów. Poniżej przedstawiono zmiany kursu franka szwajcarskiego w stosunku do złotego w okresie od 2 stycznia do 29 lutego 2024 r. Taki wykres składa się z punktów odpowiadających kursom franka w kolejnych dniach – zwyczajowo łączy się je odcinkami. Poprawia to czytelność wykresu.



1 Na rysunku przedstawiono ceny akcji spółki X (kolor czerwony) i spółki Y (kolor niebieski) na koniec kolejnych miesięcy 2023 roku.

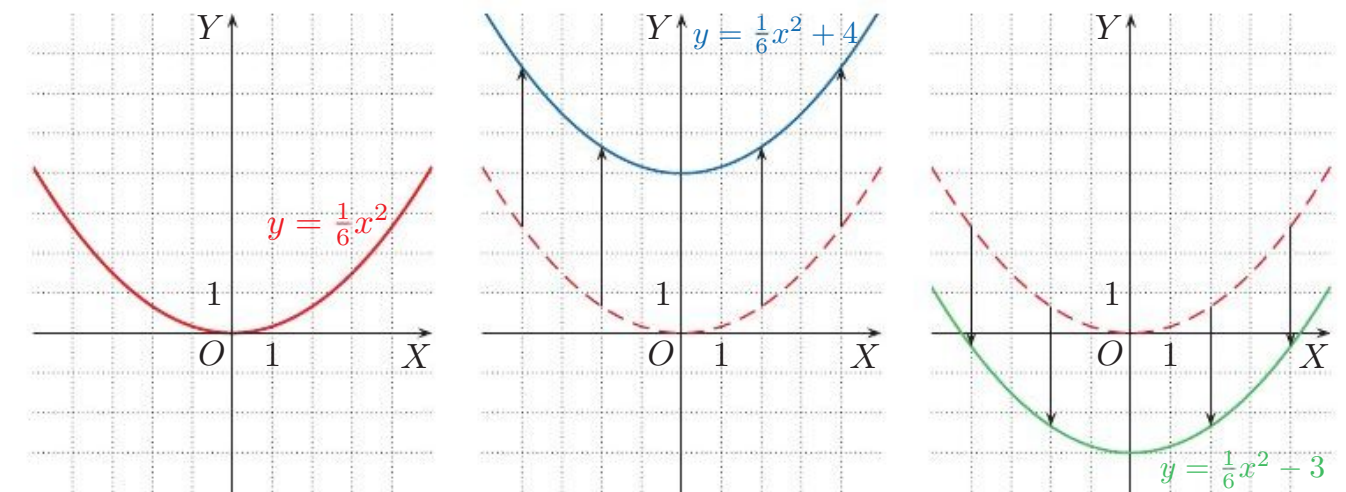
- Jaki jest największy możliwy zysk przy zakupie i sprzedaży po 3 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaki – spółki Y?
- Jaka jest największa możliwa strata przy zakupie i sprzedaży po 5 miesiącach jednej akcji spółki X, a jaka – spółki Y?



## 4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

### Przykład 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji  $y = \frac{1}{6}x^2$ ,  $y = \frac{1}{6}x^2 + 4$  oraz  $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$ .



Wykresy funkcji  $y = \frac{1}{6}x^2 + 4$  i  $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$  można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = \frac{1}{6}x^2$  wzdłuż osi OY o odpowiednią liczbę jednostek.

### Twierdzenie

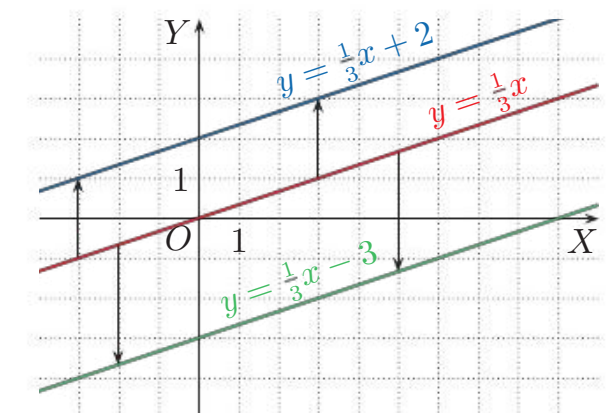
Wykres funkcji  $y = f(x) + q$  dla  $q > 0$  otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = f(x)$  o  $q$  jednostek w górę wzdłuż osi OY.

Wykres funkcji  $y = f(x) - q$  dla  $q > 0$  otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = f(x)$  o  $q$  jednostek w dół wzdłuż osi OY.

### Przykład 2

Jeśli przesuniemy wykres funkcji  $y = \frac{1}{3}x$  o 2 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji  $y = \frac{1}{3}x + 2$ .

Jeśli przesuniemy wykres funkcji  $y = \frac{1}{3}x$  o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji  $y = \frac{1}{3}x - 3$ .



### Ćwiczenie 1

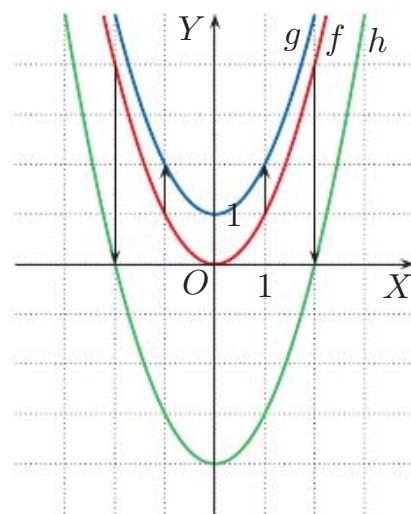
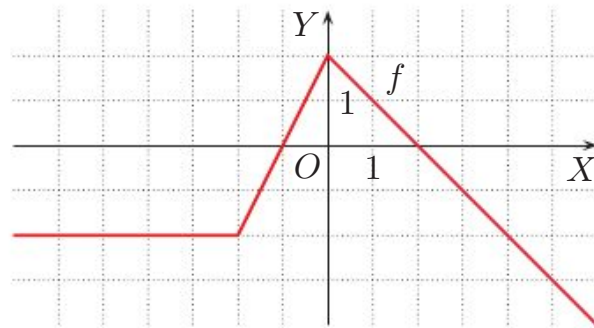
Stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji  $y = |x|$ , naszkicuj wykres i podaj zbiór wartości funkcji:

- $y = |x| + 2$ ,
- $y = |x| - 2$ ,
- $y = |x| - 3$ ,
- $y = |x| + \frac{1}{2}$ .



## Zadania

- Dany jest wykres funkcji  $y = f(x)$ .  
Naszkicuj wykres funkcji  $g$  i podaj jej zbiór wartości.  
a)  $g(x) = f(x) + 2$   
b)  $g(x) = f(x) - 2$   
c)  $g(x) = f(x) - 3$
- Naszkicuj wykres funkcji  $f$ , a następnie wykresy funkcji  $g(x) = f(x) + 1$  oraz  $h(x) = f(x) - 2$ . Podaj zbiory wartości funkcji  $f$ ,  $g$  i  $h$ .  
a)  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |2x| & \text{dla } x \in [-1; 2] \\ 4 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ |\frac{1}{2}x| & \text{dla } x \in [-2; 2] \\ 3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$
- Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = |x|$ , a następnie naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = |x| + a$  oraz podaj wartość parametru  $a$  w przypadku, gdy:  
a) zbiorem wartości funkcji  $g$  jest przedział  $[1; \infty)$ ,  
b) miejscami zerowymi funkcji  $g$  są liczby  $-4$  i  $4$ .
- Dana jest funkcja  $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in [-3; 3] \\ 3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \cup [3; \infty) \end{cases}$   
Naszkicuj wykresy funkcji  $f$  oraz funkcji  $g(x) = f(x) + a$  takiej, że podane równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.  
a)  $g(x) = 5$       b)  $g(x) = -4$
- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f(x) = x^2$  oraz wykresy funkcji  $g$  i  $h$ . Podaj wzory funkcji  $g$  i  $h$ .
- Naszkicuj wykres funkcji  $y = x^2$ , a następnie wykres funkcji  $f$ . Podaj liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$  dla  $m \in \{-3, -1, 2\}$ .  
a)  $f(x) = x^2 + 2$       c)  $f(x) = x^2 - 3$   
b)  $f(x) = x^2 - 1$       d)  $f(x) = x^2 - 9$
- Dla jakiej wartości współczynnika  $a$  wykres funkcji  $f(x) = \frac{1}{2}|x| + a$  wraz z osią  $OX$  ograniczają trójkąt o polu równym: a) 8, b) 98?



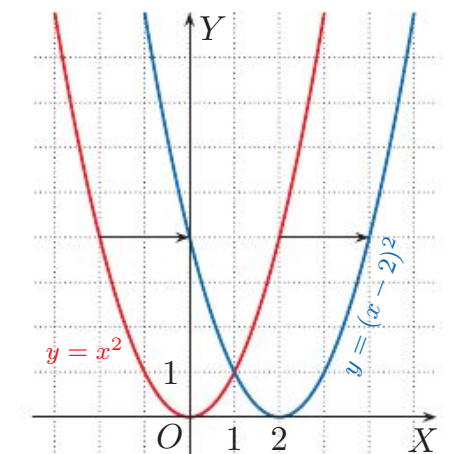
## 4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

### Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji  $y = x^2$  oraz  $y = (x - 2)^2$  naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

| $x$       | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----------|----|----|----|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | 9  | 4  | 1  | 0 | 1 | 4 | 9 |

| $x$             | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------------|----|---|---|---|---|---|---|
| $y = (x - 2)^2$ | 9  | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

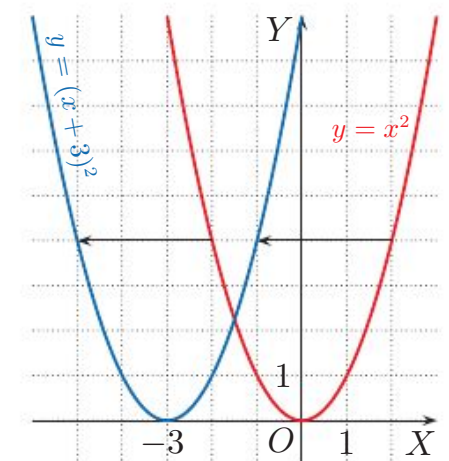


Zauważmy, że wykres funkcji  $y = (x - 2)^2$  możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = x^2$  o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi  $OX$ .

### Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji  $y = x^2$  oraz  $y = (x + 3)^2$  naszkicowane na podstawie odpowiednich tabel wartości funkcji.

| $x$             | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|---|
| $y = (x + 3)^2$ | 9  | 4  | 1  | 0  | 1  | 4  | 9 |



Zauważmy, że wykres funkcji  $y = (x + 3)^2$  możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = x^2$  o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi  $OX$ .

### Twierdzenie

Wykres funkcji  $y = f(x - p)$  dla  $p > 0$  otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = f(x)$  o  $p$  jednostek w prawo wzdłuż osi  $OX$ .

Wykres funkcji  $y = f(x + p)$  dla  $p > 0$  otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = f(x)$  o  $p$  jednostek w lewo wzdłuż osi  $OX$ .

### Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji  $g$ , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji  $f(x) = |x|$ . Podaj miejsce zerowe funkcji  $g$ .

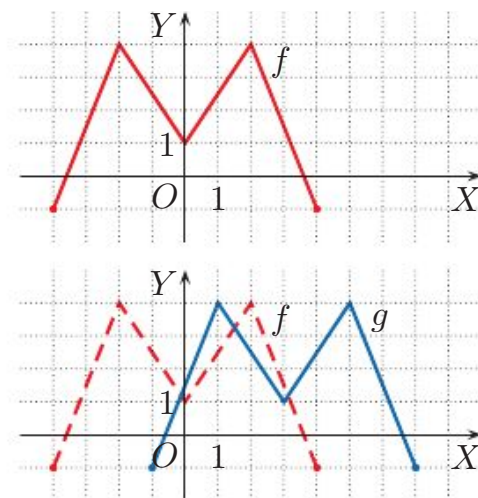
- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| a) $g(x) =  x - 1 $ | c) $g(x) =  x + 3 $ |
| b) $g(x) =  x + 2 $ | d) $g(x) =  x - 4 $ |

### Przykład 3

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: [-4; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = f(x - 3)$  i podaj jej dziedzinę.

Wykres funkcji  $g(x) = f(x - 3)$  otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji  $y = f(x)$  o 3 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji  $g$  jest przedział  $[-1; 7]$ .



### Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji  $g$ , stosując odpowiednie przesunięcie wykresu funkcji  $f$  z przykładu 3. Podaj dziedzinę funkcji  $g$ .

- a)  $g(x) = f(x - 2)$       b)  $g(x) = f(x + 3)$       c)  $g(x) = f(x + 4)$

### Zadania

1. Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = x^2$ , a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji  $g$ . Podaj jej miejsce zerowe.

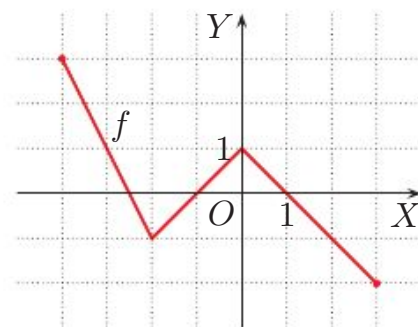
- a)  $g(x) = (x - 1)^2$       b)  $g(x) = (x + 1)^2$       c)  $g(x) = (x + 2)^2$

2. Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = |2x|$ , a następnie stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji  $g$ .

- a)  $g(x) = |2(x - 3)|$       b)  $g(x) = |2(x - 2)|$       c)  $g(x) = |2(x + 2)|$

3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: [-4; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g$  i podaj jej dziedzinę.

- a)  $g(x) = f(x - 2)$       c)  $g(x) = f(x + 1)$   
b)  $g(x) = f(x - 3)$       d)  $g(x) = f(x + 2)$



4. Miejscami zerowymi funkcji  $f(x) = x^3 - 4x$  są liczby  $-2, 0, 2$ . Podaj miejsca zerowe funkcji  $g$ .

- a)  $g(x) = (x - 3)^3 - 4(x - 3)$       b)  $g(x) = (x + 5)^3 - 4(x + 5)$

5. Dla jakiej wartości współczynnika  $a$  liczba  $x_0$  jest miejscem zerowym funkcji  $f$ ? Naszkicuj wykres funkcji  $f$ .

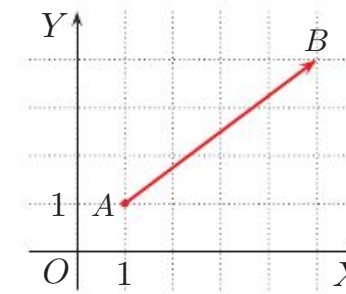
- a)  $f(x) = |3x + a|$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$       b)  $f(x) = |\frac{1}{2}x + a|$ ,  $x_0 = -4$

## 4.9. Wektory w układzie współrzędnych

Intuicyjnie **wektor** to odcinek z wyróżnionym **początkiem** i **końcem**, często rysowany jako strzałka. Wektor o początku  $A$  i końcu  $B$  oznaczamy  $\overrightarrow{AB}$ .

Wektor  $\overrightarrow{AB}$  (rysunek obok) możemy określić, podając współrzędne początku wektora  $A(1, 1)$  i współrzędne jego końca  $B(5, 4)$ .

Punkt  $A$  będący początkiem wektora  $\overrightarrow{AB}$  nazywamy też **punktem zaczepienia** wektora, a o wektorze  $\overrightarrow{AB}$  mówimy, że jest zaczepiony w punkcie  $A$ .



### Ćwiczenie 1

Narysuj wektor  $\overrightarrow{AB}$ .

- a)  $A(-3, 2)$ ,  $B(4, -1)$       b)  $A(2, 2)$ ,  $B(-1, 5)$       c)  $A(6, 3)$ ,  $B(6, -1)$

### Definicja

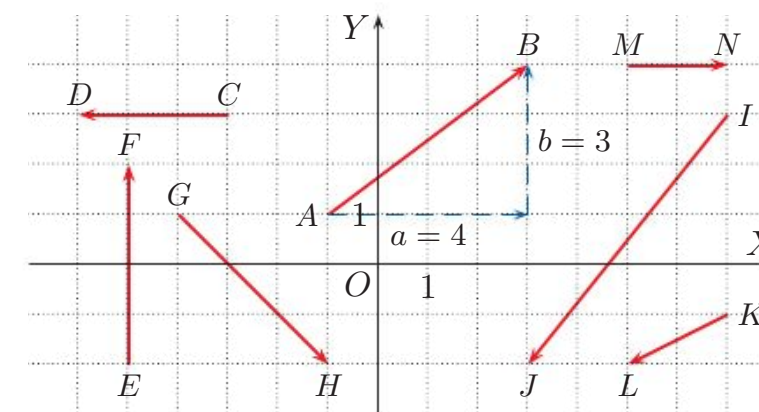
Dane są punkty  $A(x_A, y_A)$  i  $B(x_B, y_B)$ . Współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$  określamy wzorem:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

### Przykład 1

Na rysunku obok:

$$\overrightarrow{AB} = [4, 3], \quad \overrightarrow{CD} = [-3, 0], \\ \overrightarrow{EF} = [0, 4], \quad \overrightarrow{KL} = [-2, -1].$$



### Ćwiczenie 2

Zapisz współrzędne wektorów  $\overrightarrow{GH}$ ,  $\overrightarrow{IJ}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  przedstawionych na rysunku obok.

### Ćwiczenie 3

Zaznacz w układzie współrzędnych punkty  $A(-2, 3)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C(6, 3)$ ,  $D(3, 1)$ ,  $E(-2, -2)$ . Podaj współrzędne wektorów:

- a)  $\overrightarrow{BC}$  i  $\overrightarrow{BE}$ ,      b)  $\overrightarrow{AC}$  i  $\overrightarrow{AE}$ ,      c)  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{BA}$ ,      d)  $\overrightarrow{BD}$  i  $\overrightarrow{DA}$ .

Wektor  $\overrightarrow{BA}$  nazywamy **wektorem przeciwnym** do wektora  $\overrightarrow{AB}$ .

### Ćwiczenie 4

Podaj współrzędne wektora przeciwnego do wektora  $\overrightarrow{AB}$ .

- a)  $A(2, 1)$ ,  $B(3, 7)$       b)  $A(5\frac{1}{4}, -2)$ ,  $B(-3\frac{1}{2}, 6\frac{2}{3})$

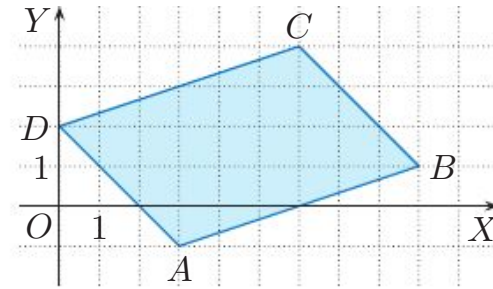


Zauważ, że jeśli wektor  $\overrightarrow{AB}$  ma współrzędne  $[a, b]$ , to wektor  $\overrightarrow{BA}$  ma współrzędne  $[-a, -b]$ . Zapisujemy to:  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .

### Ćwiczenie 5

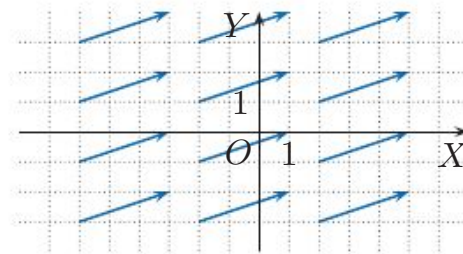
Dany jest równoległobok  $ABCD$  (rysunek obok). Podaj współrzędne wektorów:

- a)  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  
b)  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ .



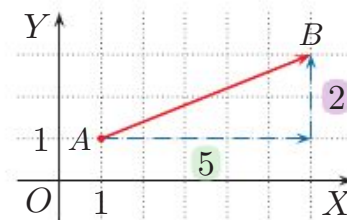
Aby określić **wektor zaczepiony**, podajemy współrzędne jego początku i końca. Rozważamy również **wektor swobodny**, dla którego podajemy wyłącznie jego współrzędne  $[a, b]$ . Wektory swobodne oznaczamy zwykle  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$ .

**Uwaga.** Tam, gdzie nie prowadzi to do nieporozumień, zamiast „wektor swobodny” czy „wektor zaczepiony” mówimy po prostu „wektor”.



Wszystkie wektory na rysunku reprezentują wektor swobodny  $\vec{u} = [3, 1]$ .

Wektory są wygodnym sposobem opisu przesunięcia w układzie współrzędnych. Zauważmy, że przesunięcie o wektor  $\overrightarrow{AB}$  (rysunek obok) oznacza przesunięcie o 5 jednostek w prawo i o 2 jednostki w górę. Zapisujemy to następująco:  $\overrightarrow{AB} = [5, 2]$ .



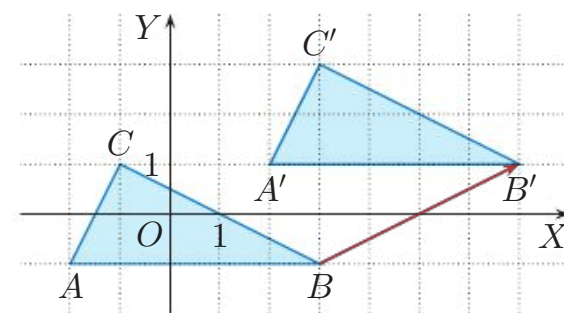
### Twierdzenie

W przesunięciu o wektor  $[a, b]$ :

- współrzędna  $a$  określa, o ile jednostek nastąpiło przesunięcie w poziomie (wzdłuż osi  $OX$ ) **w prawo**, jeśli  $a > 0$ , lub **w lewo**, jeśli  $a < 0$ ;
- współrzędna  $b$  określa, o ile jednostek nastąpiło przesunięcie w pionie (wzdłuż osi  $OY$ ) **w górę**, jeśli  $b > 0$ , lub **w dół**, jeśli  $b < 0$ .

### Przykład 2

Trójkąt  $A'B'C'$  (rysunek obok) otrzymano przez przesunięcie trójkąta  $ABC$  o wektor  $\vec{v} = [4, 2]$ . Zauważ, że jeśli znamy współrzędne punktów  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i wektor  $\vec{v}$ , to możemy wyznaczyć współrzędne punktów  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ .

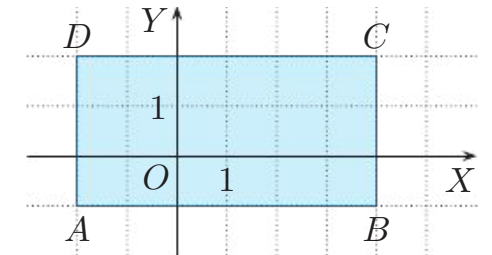


Figurę  $F'$  otrzymaną w wyniku przesunięcia figury  $F$  o wektor  $\vec{v}$  nazywamy **obrazem** figury  $F$  w przesunięciu o wektor  $\vec{v}$ .

### Ćwiczenie 6

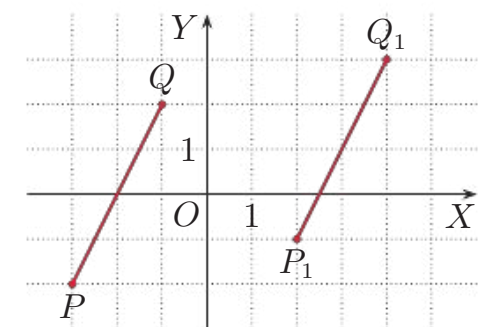
Prostokąt  $ABCD$  (rysunek obok) przesunięto o wektor  $\vec{v}$  i otrzymano prostokąt  $A'B'C'D'$ . Oblicz pole części wspólnej tych prostokątów.

- a)  $\vec{v} = [-3, 2]$                       b)  $\vec{v} = [4\frac{1}{2}, -1]$



### Zadania

- Wyznacz współrzędne punktu  $B$ , mając dane punkt  $A$  i wektor  $\overrightarrow{AB}$ .  
a)  $A(-3, 5)$ ,  $\overrightarrow{AB} = [9, 0]$                       c)  $A(\frac{5}{2}, 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} = [3, -\frac{3}{2}]$   
b)  $A(2, 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} = [-5, -2]$                       d)  $A(4, -1)$ ,  $\overrightarrow{AB} = [-5\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- Wyznacz współrzędne punktu  $A$ , mając dane punkt  $B$  i wektor  $\overrightarrow{AB}$ .  
a)  $B(0, 4)$ ,  $\overrightarrow{AB} = [3, 4]$                       c)  $B(-1, 2)$ ,  $\overrightarrow{AB} = [14, -15]$   
b)  $B(-2, 3)$ ,  $\overrightarrow{AB} = [-3, 2]$                       d)  $B(1, 4)$ ,  $\overrightarrow{AB} = [-22, -28]$
- Sprawdź, czy podana para liczb to współrzędne wektora przeciwnego do wektora  $\overrightarrow{AB}$  lub wektora  $\overrightarrow{CD}$ .  
a)  $[7\frac{1}{2}, 6]$ ,  $A(8, 4)$ ,  $B(\frac{1}{2}, -2)$ ,  $C(3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$ ,  $D(-4, 3\frac{3}{4})$   
b)  $[-3, 2\frac{1}{6}]$ ,  $A(-2\frac{1}{6}, 2\frac{1}{2})$ ,  $B(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3})$ ,  $C(\sqrt{3}, 2\frac{1}{6})$ ,  $D(\frac{6}{3-\sqrt{3}}, 0)$
- a) O jaki wektor należy przesunąć odcinek  $PQ$ , aby otrzymać odcinek  $P_1Q_1$ ?  
b) Narysuj obraz odcinka  $PQ$  w przesunięciu o wektor  $[2, -2]$ .  
c) Narysuj obraz odcinka  $PQ$  w przesunięciu o wektor  $[-2, 1]$ .
- Trójkąt  $A_1B_1C_1$  otrzymujemy, przesuwając trójkąt  $ABC$  o wektor  $\vec{v}$ . Oblicz pole części wspólnej tych trójkątów.  
a)  $A(-5, -3)$ ,  $B(4, -3)$ ,  $C(1, 3)$ ,  $\vec{v} = [-2, 1]$   
b)  $A(-4, -3)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(-1, 6)$ ,  $\vec{v} = [-5, -1]$
- Dane są współrzędne jednego z wierzchołków równoległoboku  $ABCD$ :  $C(2, 4)$ . Wiadomo, że  $\overrightarrow{BC} = [-4, 4]$ ,  $\overrightarrow{DC} = [9, 3]$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków  $A$ ,  $B$  i  $D$ . Oblicz pole części wspólnej równoległoboku  $ABCD$  i jego obrazu w przesunięciu o wektor  $\vec{v} = [3, 1]$ .



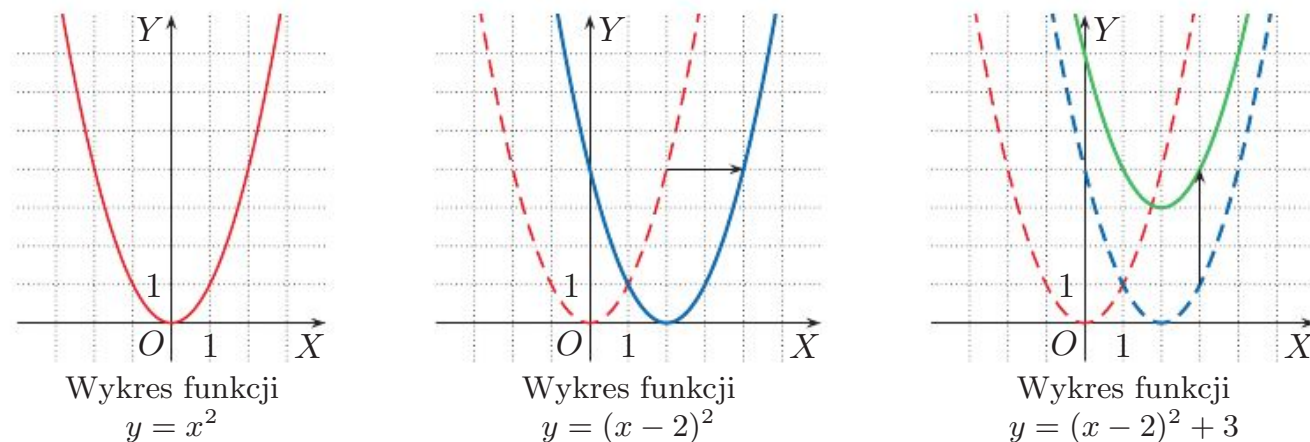


## 4.10. Przesuwanie wykresu o wektor

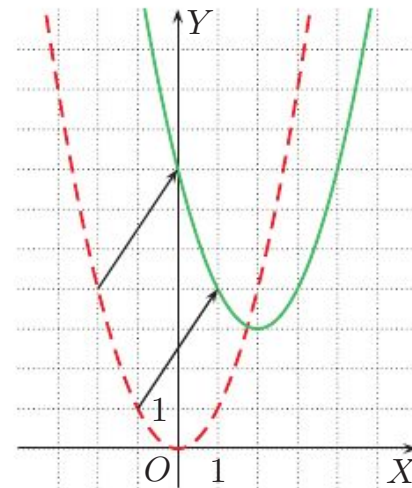
### Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji  $y = (x - 2)^2 + 3$ .

Wykres funkcji  $y = x^2$  przesuwamy najpierw o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi  $OX$ , a następnie otrzymany wykres przesuwamy o 3 jednostki w górę wzdłuż osi  $OY$ .



Zauważ, że wykres funkcji  $y = (x - 2)^2 + 3$  możemy otrzymać, przesuwając wykres funkcji  $y = x^2$  jednocześnie o 2 jednostki w prawo i o 3 jednostki w górę (rysunek obok). Mówimy, że wykres funkcji został przesunięty o wektor  $[2, 3]$  – wektor ten nazywamy **wektorem przesunięcia**.



### Ćwiczenie 1

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f(x) = x^2$  oraz  $g$  i  $h$ . O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji  $f$ , aby otrzymać wykres funkcji  $h$ ?

a)  $g(x) = (x - 1)^2$ ,  $h(x) = (x - 1)^2 - 2$     b)  $g(x) = (x + 3)^2$ ,  $h(x) = (x + 3)^2 + 2$

### Twierdzenie

Wykres funkcji  $y = f(x - p) + q$  otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = f(x)$  o wektor  $[p, q]$ .

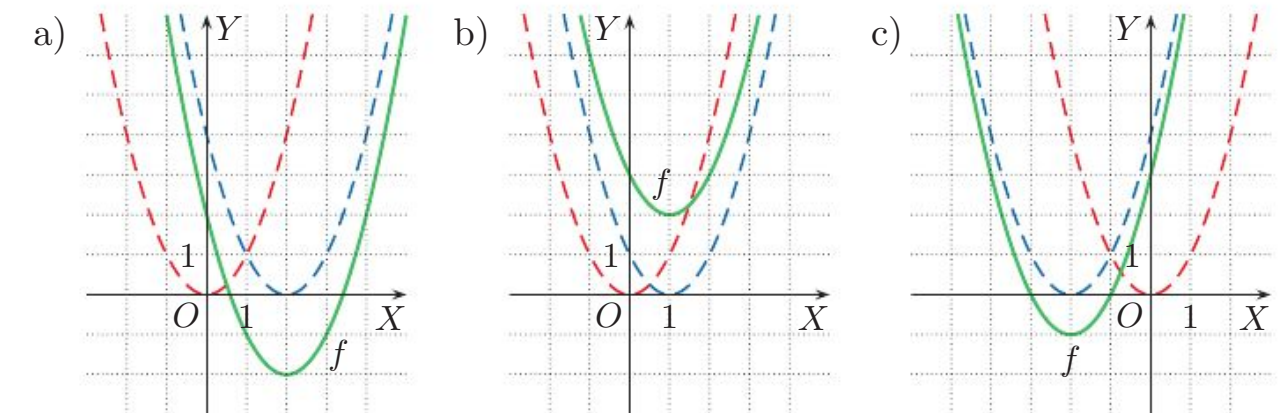
### Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ , przesuwając wykres funkcji  $y = x^2$  o odpowiedni wektor. Podaj ten wektor.

a)  $f(x) = (x - 2)^2 - 1$     b)  $f(x) = (x + 3)^2 - 2$     c)  $f(x) = (x + 1)^2 + 1$

## Zadania

1. Wykres funkcji  $f$  otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = x^2$ . Podaj wzór funkcji  $f$  oraz wektor przesunięcia.



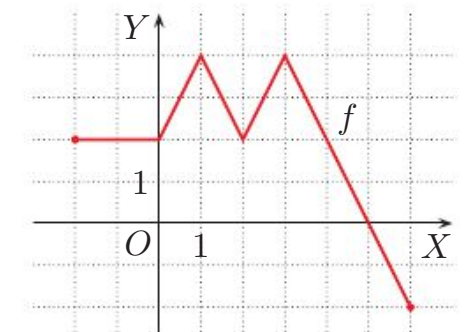
2. Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Podaj jej miejsca zerowe i zbiór wartości.

a)  $f(x) = |x + 2| + 3$     b)  $f(x) = |x - 2| - 3$     c)  $f(x) = |x + 1| - 2$

3. Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji  $f$  i  $g$ .

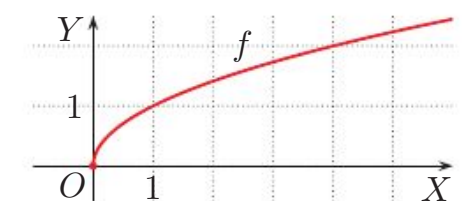
a)  $f(x) = |2x| - 2$ ,  $g(x) = |x - 1| + 1$   
b)  $f(x) = |2x + 2| + 1$ ,  $g(x) = |x - 2| + 1$

4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g$ , odczytaj jej dziedzinę i zbiór wartości. Podaj zbiór rozwiązań nierówności  $g(x) \leq 0$ .



a)  $g(x) = f(x + 2) - 2$     b)  $g(x) = f(x - 1) + 2$     c)  $g(x) = f(x - 2) - 4$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = \sqrt{x}$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g$ . Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.



a)  $g(x) = \sqrt{x - 1} + 3$     b)  $g(x) = \sqrt{x + 4} - 2$     c)  $g(x) = \sqrt{x + 1} - 1$

6. Dziedziną funkcji  $f$  jest przedział  $[-7; -1]$ , a zbiorem wartości przedział  $[5; 8]$ . Wykres funkcji  $g$  powstał przez przesunięcie wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{v}$ . Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji  $g$ .

a)  $\vec{v} = [2, 3]$     b)  $\vec{v} = [-3, -5]$     c)  $\vec{v} = [-6\frac{1}{3}, 13\frac{2}{3}]$

7. Wykres funkcji  $g$  otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji  $f$  danej wzorem  $f(x) = |x + 2| - 3$ . Wyznacz wektor przesunięcia.

a)  $g(x) = |x - 3|$     b)  $g(x) = |x| + 1$     c)  $g(x) = |x + 3| - 4$

## 4.11. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi układu współrzędnych

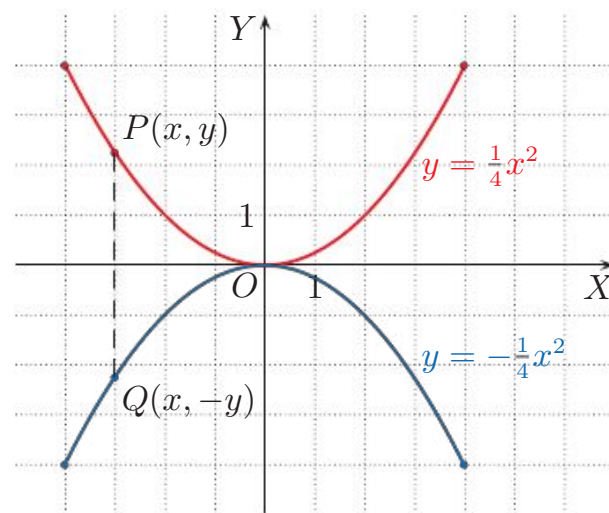
### Przykład 1

Naszkicuj wykresy funkcji  $y = \frac{1}{4}x^2$  i  $y = -\frac{1}{4}x^2$  określonych dla  $x \in [-4; 4]$ .

W tabeli obok podano wartości tych funkcji dla wybranych argumentów.

| $x$                   | -4 | -2 | -1             | 0 | 1              | 2  | 4  |
|-----------------------|----|----|----------------|---|----------------|----|----|
| $y = \frac{1}{4}x^2$  | 4  | 1  | $\frac{1}{4}$  | 0 | $\frac{1}{4}$  | 1  | 4  |
| $y = -\frac{1}{4}x^2$ | -4 | -1 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | -1 | -4 |

Dla porównania wykresy tych funkcji narysowano w jednym układzie współrzędnych. Zauważmy, że wykresy funkcji  $y = \frac{1}{4}x^2$  i  $y = -\frac{1}{4}x^2$  są symetryczne względem osi  $OX$  – punktowi  $P(x, y)$ , należącemu do wykresu funkcji  $y = \frac{1}{4}x^2$ , odpowiada punkt  $Q(x, -y)$ , należący do wykresu funkcji  $y = -\frac{1}{4}x^2$ .



### Twierdzenie

Wykres funkcji  $y = -f(x)$  otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji  $y = f(x)$  względem osi  $OX$ .

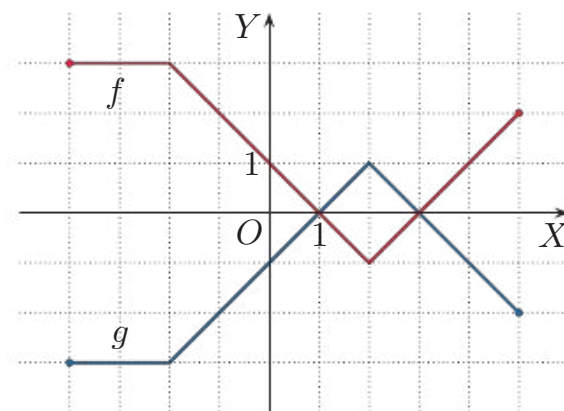
### Ćwiczenie 1

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f$  oraz wykres funkcji:

$$g(x) = -f(x)$$

Dla każdej z tych funkcji podaj:

- jej dziedzinę i zbiór wartości,
- przedziały, w których jest ona rosnąca.



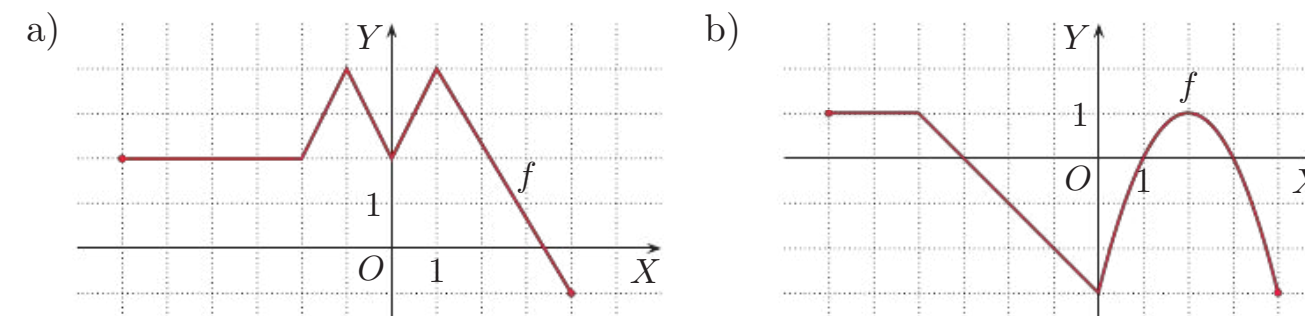
### Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykresy funkcji  $f$  i  $g$  oraz podaj ich zbiory wartości.

- $f(x) = |x|$  i  $g(x) = -|x|$
- $f(x) = x^2$  i  $g(x) = -x^2$

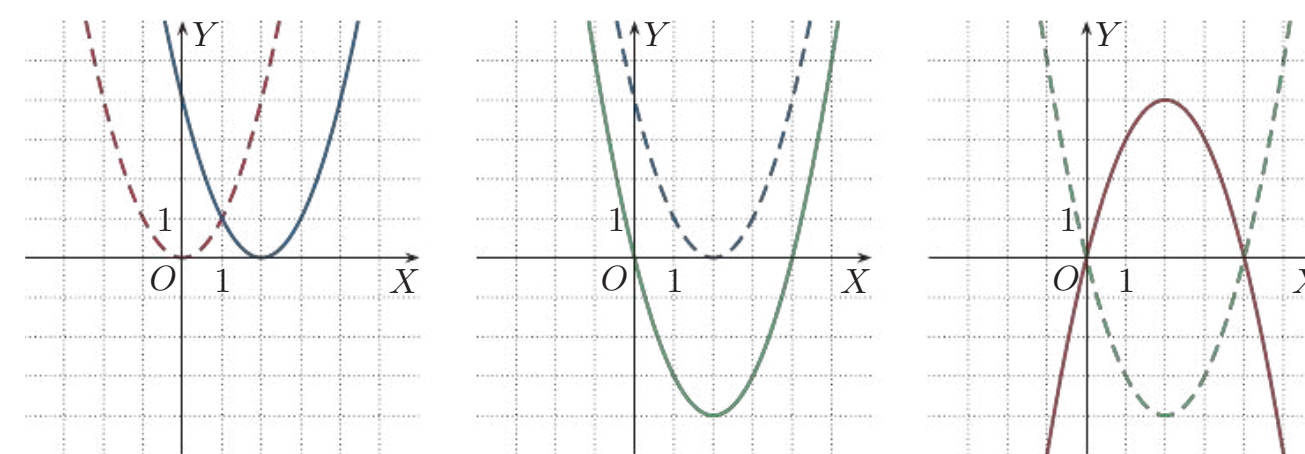
### Ćwiczenie 3

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji  $f: [-6; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = -f(x)$ . Podaj zbiory wartości funkcji  $f$  i  $g$ .



### Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = x^2$ , a następnie kolejno wykresy funkcji:  $g(x) = f(x - 2)$ ,  $h(x) = f(x - 2) - 4$ ,  $k(x) = -[f(x - 2) - 4]$ .



Linią przerywaną zaznaczono wykres funkcji:

$$f(x) = x^2$$

linią ciągłą – wykres funkcji:

$$g(x) = (x - 2)^2$$

Linią przerywaną zaznaczono wykres funkcji:

$$g(x) = (x - 2)^2$$

linią ciągłą – wykres funkcji:

$$h(x) = (x - 2)^2 - 4$$

Linią przerywaną zaznaczono wykres funkcji:

$$h(x) = (x - 2)^2 - 4$$

linią ciągłą – wykres funkcji:

$$k(x) = -[(x - 2)^2 - 4]$$

### Ćwiczenie 4

Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$ , a następnie kolejno wykresy podanych funkcji.

$$\text{a) } g(x) = f(x) - 3, \quad h(x) = f(x - 2) - 3, \quad k(x) = -[f(x - 2) - 3]$$

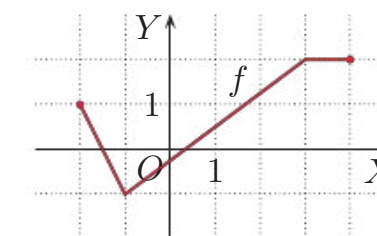
$$\text{b) } g(x) = f(x + 3), \quad h(x) = f(x + 3) + 1, \quad k(x) = -[f(x + 3) + 1]$$

### Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g$ .

$$\text{a) } g(x) = -f(x - 1)$$

$$\text{b) } g(x) = -f(x + 2)$$





## Przykład 3

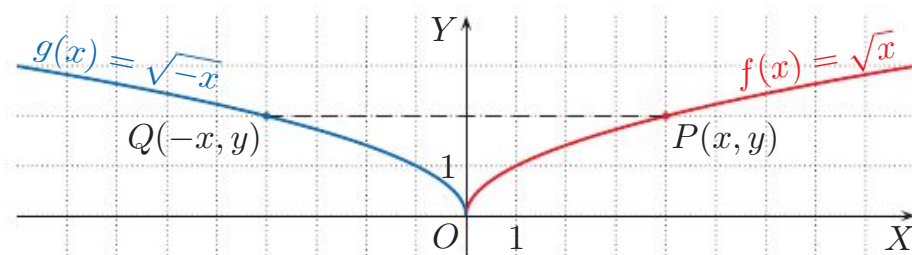
Naszkicuj wykres funkcji  $f: [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  danej za pomocą wzoru  $f(x) = \sqrt{x}$  oraz wykres funkcji  $g: (-\infty; 0] \rightarrow \mathbb{R}$  danej za pomocą wzoru  $g(x) = \sqrt{-x}$ .

Zauważmy, że:

$$g(-4) = f(4) = 2$$

$$g(-1) = f(1) = 1$$

$$g(-\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$



Wykresy funkcji  $f$  i  $g$  są symetryczne względem osi  $OY$  – punktowi  $P(x,y)$ , należącemu do wykresu funkcji  $f$ , odpowiada punkt  $Q(-x,y)$ , należący do wykresu funkcji  $g$ .

## Twierdzenie

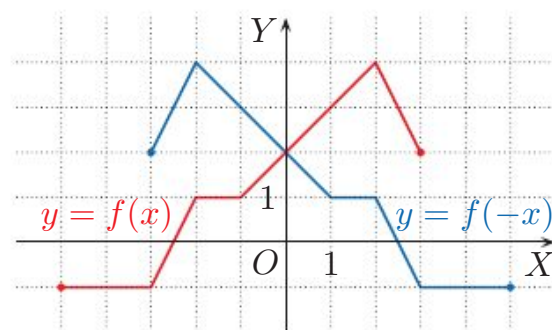
Wykres funkcji  $y = f(-x)$  otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji  $y = f(x)$  względem osi  $OY$ .

## Przykład 4

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji  $y = f(x)$  oraz  $y = f(-x)$ .

Zwróć uwagę na to, że dziedziną funkcji  $y = f(x)$  jest przedział  $[-5; 3]$ , a dziedziną funkcji  $y = f(-x)$  jest przedział  $[-3; 5]$ .

Funkcje  $y = f(x)$  i  $y = f(-x)$  mają ten sam zbiór wartości.



## Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ , a następnie kolejno wykresy funkcji  $g$  i  $h$ .

a)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = f(x-2)$ ,  $h(x) = f(-x-2)$

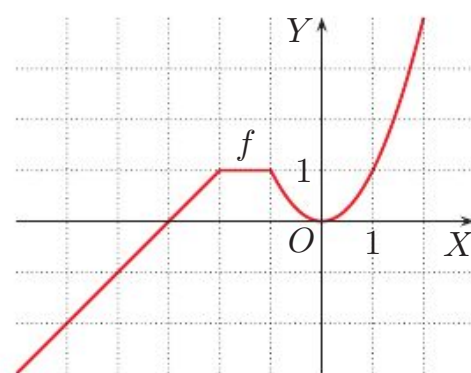
b)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = f(x+2)$ ,  $h(x) = f(-x+2)$

## Ćwiczenie 7

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji:

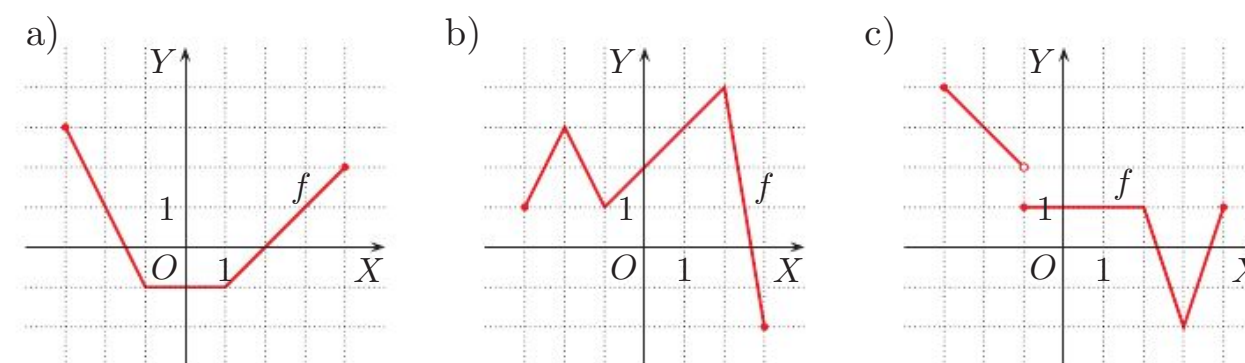
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ 1 & \text{dla } x \in [-2; -1] \\ x^2 & \text{dla } x \in (-1; \infty) \end{cases}$$

Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = f(-x)$  i podaj jej wzór.



## Zadania

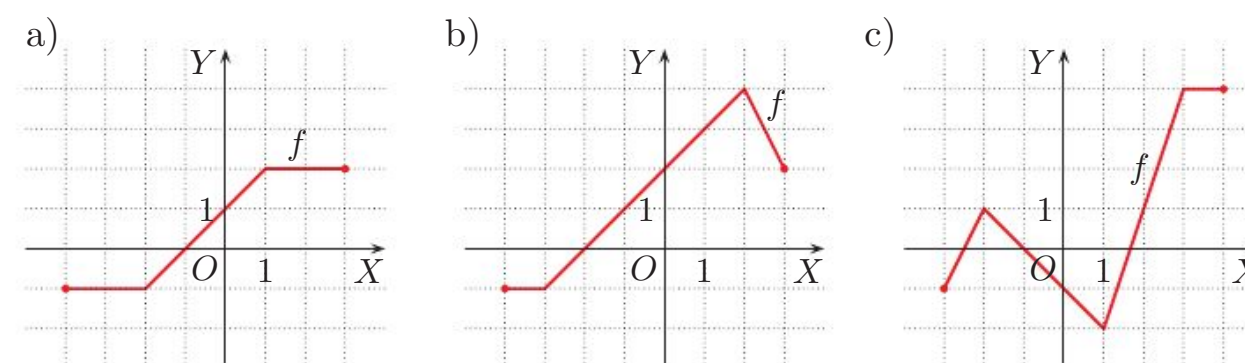
1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = -f(x)$  oraz podaj zbiory wartości funkcji  $f$  i  $g$ .



2. Naszkicuj wykresy funkcji  $f$  i  $g(x) = -f(x)$ . Podaj punkty wspólne tych wykresów.

a)  $f(x) = |x| - 1$       c)  $f(x) = |x - 2|$       e)  $f(x) = |\frac{1}{2}x| - 2$   
b)  $f(x) = |x| + 2$       d)  $f(x) = |x + 2|$       f)  $f(x) = |2x| + 1$

3. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji  $f$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = f(-x)$  oraz podaj dziedziny funkcji  $f$  i  $g$ .

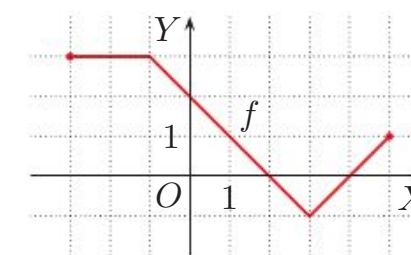


4. Naszkicuj wykresy funkcji  $f$  oraz funkcji  $g(x) = -f(x)$  i  $h(x) = -f(-x)$ . Podaj wzory funkcji  $g$  i  $h$ .

a)  $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x < -2 \\ x & \text{dla } -2 \leq x \leq 3 \\ 3 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x < -1 \\ |x| & \text{dla } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g$  oraz podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

a)  $g(x) = f(-x)$       c)  $g(x) = f(-x-2)+1$   
b)  $g(x) = f(-x+2)$       d)  $g(x) = -f(-x+1)$



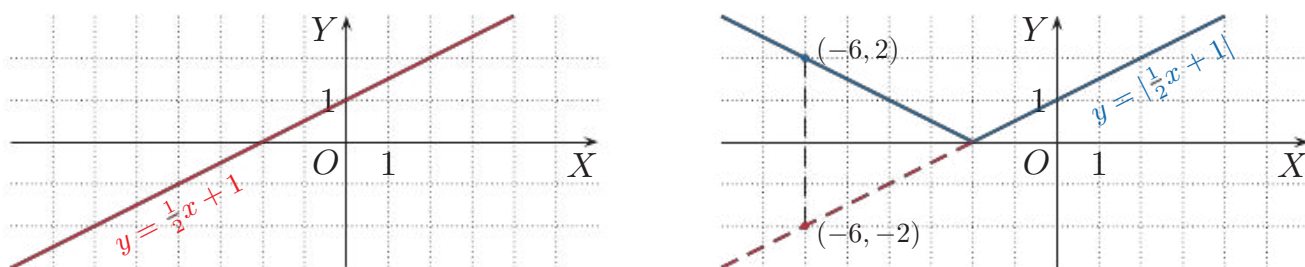




## R 4.12. Inne przekształcenia wykresu

### Przykład 1

Poniżej przedstawiono wykresy funkcji  $y = \frac{1}{2}x + 1$  i  $y = |\frac{1}{2}x + 1|$ .



Zauważ, że punktowi  $(-6, -2)$ , należącemu do wykresu funkcji  $y = \frac{1}{2}x + 1$ , odpowiada położony symetrycznie względem osi  $OX$  punkt  $(-6, 2)$ , należący do wykresu funkcji  $y = |\frac{1}{2}x + 1|$ .

### Twierdzenie

Wykres funkcji  $y = |f(x)|$  otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi  $OX$  tej części wykresu funkcji  $f$ , która znajduje się pod osią  $OX$ . Pozostałej części wykresu nie zmieniamy.

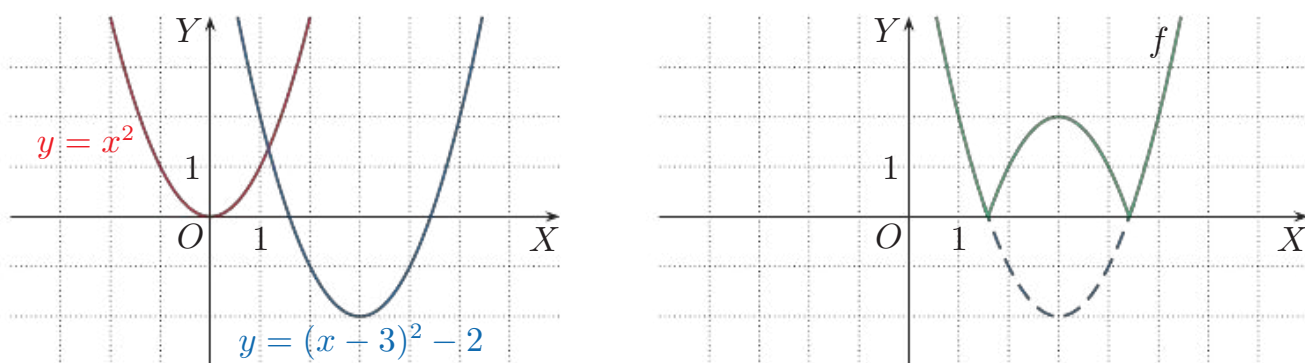
### Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykresy funkcji  $y = f(x)$  i  $y = |f(x)|$ .

- a)  $f(x) = x - 2$    b)  $f(x) = -2x + 2$    c)  $f(x) = x^2 - 1$    d)  $f(x) = -x^2 + 4$

### Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = |(x - 3)^2 - 2|$ .



Po przesunięciu wykresu funkcji  $y = x^2$  o wektor  $[3, -2]$  otrzymamy wykres funkcji  $y = (x - 3)^2 - 2$ .

Następnie odbijamy symetrycznie względem osi  $OX$  fragment wykresu funkcji  $y = (x - 3)^2 - 2$ , który znajduje się pod osią  $OX$ , i otrzymujemy wykres funkcji  $f(x) = |(x - 3)^2 - 2|$ .

### Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ .

- a)  $f(x) = |(x + 3)^2 - 1|$    b)  $f(x) = ||x + 3| - 1|$    c)  $f(x) = ||x| - 2|$

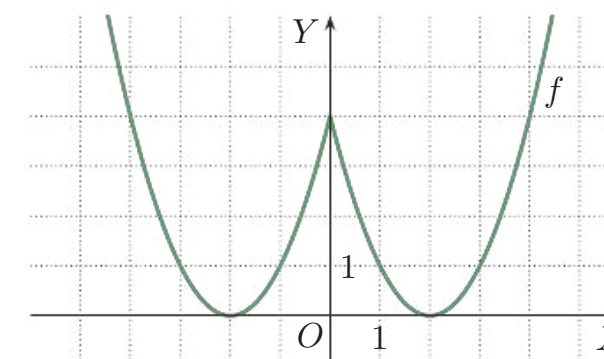
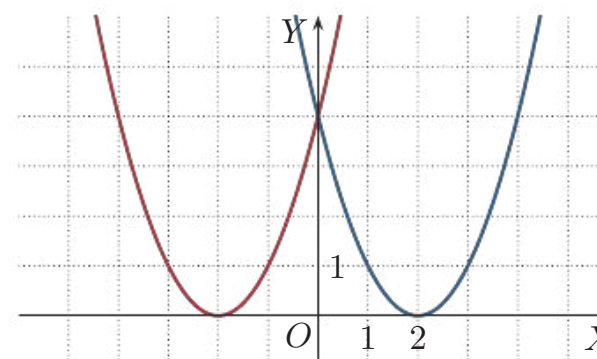
### Przykład 3

Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = (|x| - 2)^2$ .

Skorzystamy z tego, że:

$$(|x| - 2)^2 = \begin{cases} (-x - 2)^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ (x - 2)^2 & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$

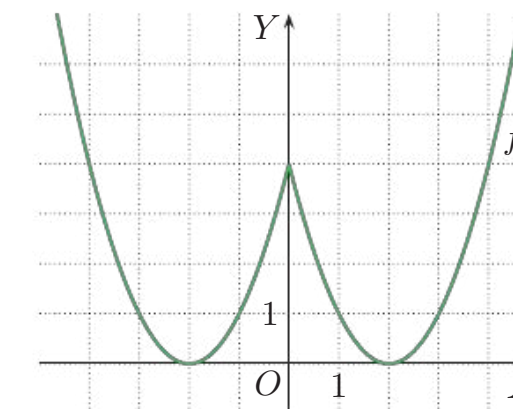
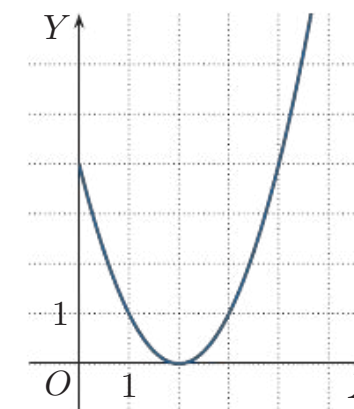
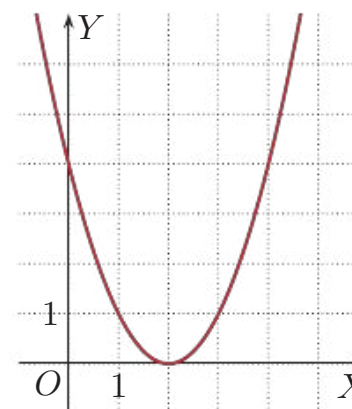
Zauważ, że  
 $(-x - 2)^2 = (x + 2)^2$ .



W jednym układzie współrzędnych szkicujemy wykresy funkcji  $y = (x + 2)^2$  oraz  $y = (x - 2)^2$ .

Odpowiednie fragmenty tych wykresów tworzą wykres funkcji  $f(x) = (|x| - 2)^2$ .

Zauważmy, że wykres funkcji  $f(x) = (|x| - 2)^2$  możemy też otrzymać w opisany poniżej sposób.



Szkicujemy wykres funkcji  $y = (x - 2)^2$ .

Dla  $x \geq 0$  wykresy funkcji  $f$  i  $y = (x - 2)^2$  się pokrywają.

Wykres funkcji  $f(x) = (|x| - 2)^2$  jest symetryczny względem osi  $OY$ .

### Twierdzenie

Wykres funkcji  $y = f(|x|)$  otrzymujemy w następujący sposób: szkicujemy część wykresu funkcji  $f$  dla  $x \geq 0$  (gdzie  $x \in D_f$ ), a następnie tę część odbijamy symetrycznie względem osi  $OY$ .

### Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ .

- a)  $f(x) = (|x| - 1)^2$    b)  $f(x) = (|x| + 1)^2$    c)  $f(x) = (|x| - 3)^2$





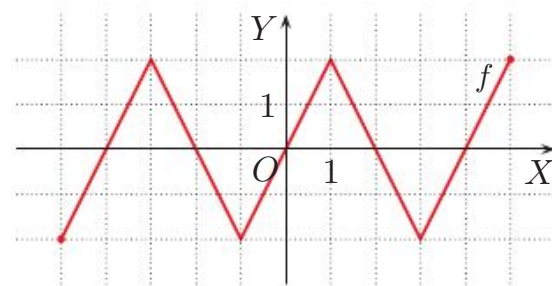
## Zadania

1. Naskicuj wykresy funkcji  $y = f(x)$  i  $y = |f(x)|$ .

a)  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$       b)  $f(x) = 2|x| - 2$       c)  $f(x) = -2|x| + 2$

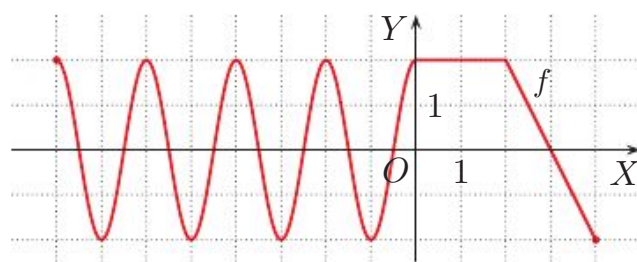
2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: [-5; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ . Naskicuj wykres funkcji  $g$  i podaj liczbę rozwiązań równania  $g(x) = 1$ .

a)  $g(x) = |f(x)|$       c)  $g(x) = f(-|x|)$   
b)  $g(x) = f(|x|)$



3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: [-8; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ . Naskicuj wykres funkcji:

a)  $y = f(|x|)$ ,      b)  $y = |f(|x|)|$ .

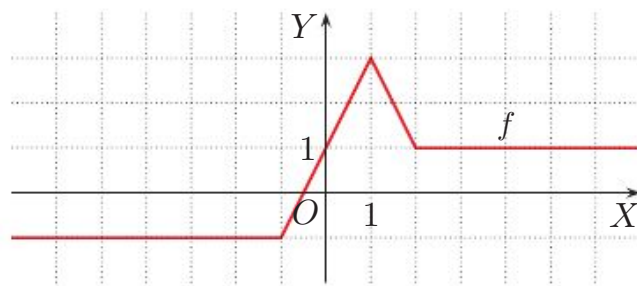


4. Naskicuj wykres funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = (|x| - 3)^2 - 4$       b)  $f(x) = (|x| + 2)^2$       c)  $f(x) = (1 - |x|)^2 - 4$

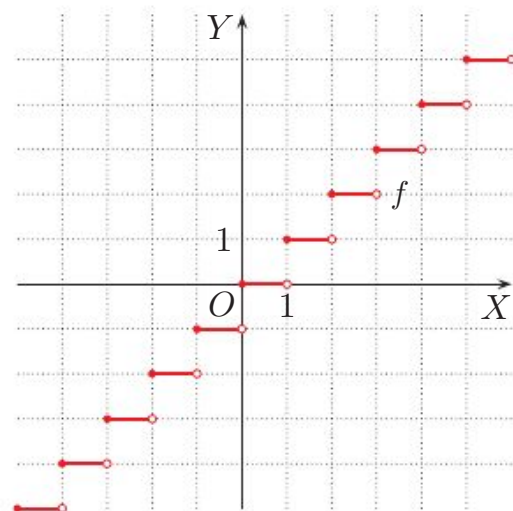
5. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Naskicuj wykres funkcji  $g$ .

a)  $g(x) = |f(x - 1) - 2|$   
b)  $g(x) = f(|x| - 1) - 2$



6. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem  $f(x) = [x]$ , gdzie  $[x]$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $x$  (np.  $[-3\frac{1}{2}] = -4$ ,  $[-3] = -3$ ,  $[0,22] = 0$ ,  $[3,7] = 3$ ).

- a) Naskicuj wykres funkcji  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem  $g(x) = x - [x]$ .  
b) Dla jakich  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi równość  $g(|x|) = g(x)$ ?



7. Naskicuj wykres funkcji  $f$ .

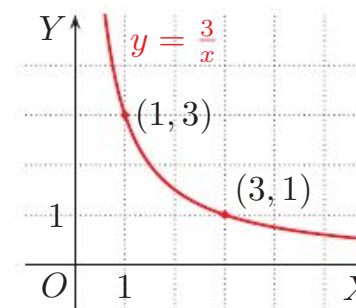
a)  $f(x) = -[x]$       b)  $f(x) = [-x]$       c)  $f(x) = [x]$       d)  $f(x) = \lceil x \rceil$

## 4.13. Proporcjonalność odwrotna

### Przykład 1

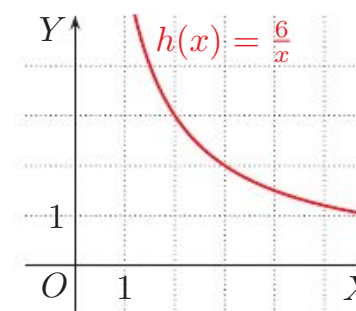
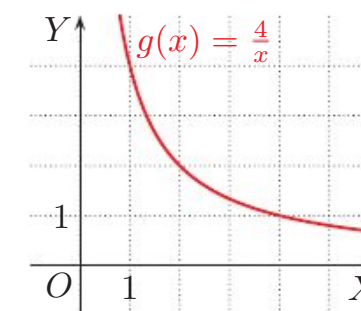
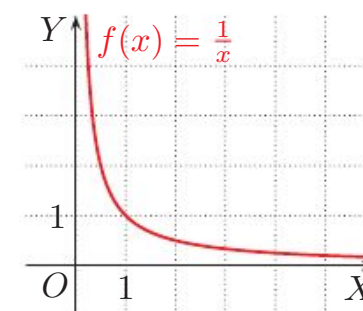
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $y = \frac{3}{x}$ , gdzie  $x > 0$ . Zwróć uwagę na to, że jeśli punkt  $(x, y)$  należy do wykresu tej funkcji, to jego współrzędne spełniają zależność  $x \cdot y = 3$ .

Jedynymi punktami o współrzędnych całkowitych należącymi do wykresu tej funkcji są punkty  $(1, 3)$  i  $(3, 1)$ .



### Ćwiczenie 1

Funkcje  $f$ ,  $g$  i  $h$ , których wykresy przedstawiono poniżej, określone są dla  $x > 0$ . Podaj punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu każdej z nich.



### Definicja

Funkcję postaci  $y = \frac{a}{x}$ , gdzie  $x > 0$  oraz  $a \in \mathbb{R}_+$ , nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**. Wielkości  $x$  i  $y$  nazywamy **odwrotnie proporcjonalnymi**, a stałą  $a$  – **współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej**.

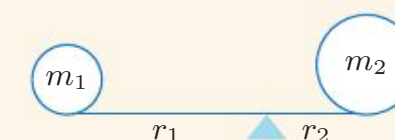
Jeśli wielkości  $x$  i  $y$  są odwrotnie proporcjonalne, to ich iloczyn jest stały. Wzór proporcjonalności odwrotnej możemy również zapisać w postaci  $x \cdot y = a$ .

### Czy wiesz, że...

Dwie masy  $m_1$  i  $m_2$  umieszczone na równoważni w odległościach  $r_1$  i  $r_2$  od punktu podparcia znajdują się w równowadze, jeśli zachodzi równość:

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

Oznacza to, że masa i jej odległość od punktu podparcia są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Odkrycie tego prawa (zwanego też zasadą dźwigni) zawdzięczamy Archimedesowi (ok. 287 r. p.n.e. – ok. 212 r. p.n.e.).

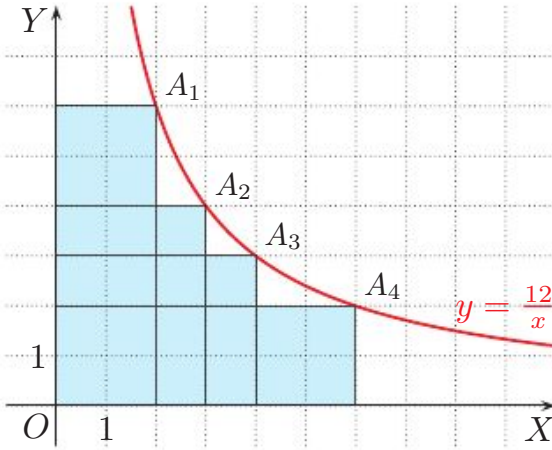




Przykładem wielkości odwrotnie proporcjonalnych są długości  $x$  i  $y$  boków prostokąta o ustalonym polu  $P$ . Zachodzi wówczas zależność  $x \cdot y = P$ .

### Przykład 2

Rozpatrzmy prostokąty, każdy o polu równym 12 i dwóch bokach  $x$ ,  $y$  zawartych w osiach układu współrzędnych (rysunek obok). Wierzchołki  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  i  $A_4$  tych prostokątów łączymy krzywą, która jest wykresem funkcji  $y = \frac{12}{x}$ , gdzie  $x > 0$ . Ich współrzędne  $(x, y)$  spełniają zależność  $x \cdot y = 12$ .



### Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{6}{x}$ , gdzie  $x > 0$ , i narysuj prostokąt, którego jeden z wierzchołków należy do wykresu tej funkcji, a dwa boki zawierają się w osiach układu współrzędnych. Ile jest równe pole tego prostokąta? Czy odpowiedź zależy od wyboru wierzchołka należącego do wykresu funkcji  $f$ ?

Zauważ, że jeśli wielkości  $x$  i  $y$  są odwrotnie proporcjonalne, to wraz ze wzrostem jednej z nich druga proporcjonalnie maleje.

### Przykład 3

W tabeli podano, ile kilogramów winogron możemy kupić za 24 zł w zależności od ceny za jeden kilogram.

|                 |   |     |   |   |    |
|-----------------|---|-----|---|---|----|
| $x$ – cena [zł] | 4 | 5   | 6 | 8 | 12 |
| $y$ – masa [kg] | 6 | 4,8 | 4 | 3 | 2  |

Wraz ze wzrostem ceny za kilogram  $x$  proporcjonalnie maleje liczba kilogramów winogron  $y$ , które możemy kupić za 24 zł.

Wielkości  $x$  i  $y$  są odwrotnie proporcjonalne:  $y = \frac{24}{x}$ .

### Ćwiczenie 3

Na zakup jabłek przeznaczono kwotę 9 zł. Niech  $x$  oznacza cenę za kilogram, a  $y$  – liczbę kilogramów jabłek, które możemy kupić.

|          |     |   |   |     |     |
|----------|-----|---|---|-----|-----|
| $x$ [zł] | 1,5 | 2 | 3 | 4,5 | 6   |
| $y$ [kg] | ?   | ? | ? | ?   | 1,5 |

a) Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

b) W układzie współrzędnych zaznacz punkty odpowiadające wartościom z tabeli i korzystając z nich, naszkicuj wykres funkcji  $y = \frac{9}{x}$ , gdzie  $x > 0$ .

## Zadania

1. Wielkości  $x$  i  $y$  są odwrotnie proporcjonalne. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Podaj wzór tej proporcjonalności i naszkicuj jej wykres.

a)

|     |   |   |     |   |   |
|-----|---|---|-----|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 2,5 | 4 | 5 |
| $y$ | ? | ? | 3,2 | ? | ? |

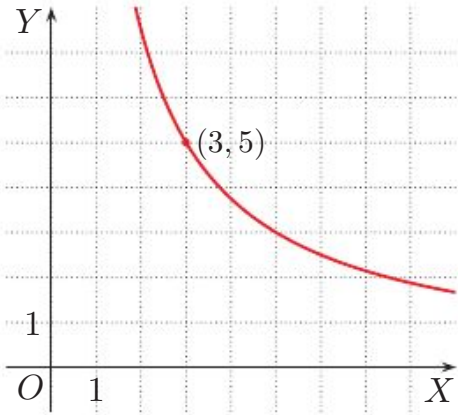
b)

|     |   |   |     |     |   |
|-----|---|---|-----|-----|---|
| $x$ | 1 | 2 | 2,5 | 4   | 5 |
| $y$ | ? | ? | ?   | 2,5 | ? |

2. Pewną stałą kwotę  $k$  zł przeznaczono na zakup śliwek. Na wykresie przedstawiono zależność między ceną  $x$  w złotych za kilogram a liczbą kilogramów  $y$ , które można w tej cenie kupić.

a) Podaj wartość  $k$ .

b) Przedstaw za pomocą tabeli zależność między  $x$  i  $y$  dla  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .



3. Naszkicuj wykres funkcji  $y = f(x)$ , gdzie  $x > 0$ . Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu tej funkcji?

a)  $f(x) = \frac{2}{x}$

b)  $f(x) = \frac{5}{x}$

c)  $f(x) = \frac{8}{x}$

d)  $f(x) = \frac{18}{x}$

4. Rozważmy  $n$ -kąty foremne o obwodzie równym 12. Sporządź odpowiednią tabelę i naszkicuj wykres funkcji opisującej zależność długości boku  $n$ -kąta od liczby jego boków dla  $n \leq 12$ . Podaj dziedzinę tej funkcji.

Czas  $t$  potrzebny do przebycia drogi  $s$  ze średnią prędkością  $v$  wyraża się wzorem  $t = \frac{s}{v}$ .

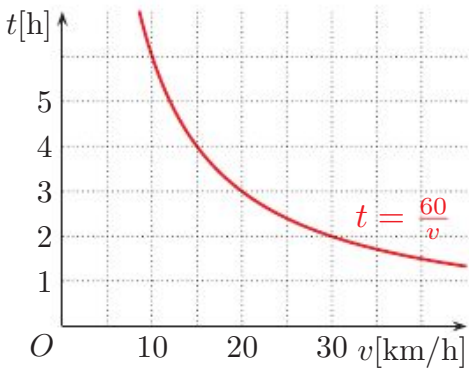
5. Rowerzysta ma do przebycia dystans 60 km. Na wykresie przedstawiono zależność czasu jego jazdy od średniej prędkości. Ile czasu zajmie rowerzyście pokonanie całego dystansu, jeśli będzie jechał z prędkością:

a) 15 km/h,

c) 24 km/h,

b) 18 km/h,

d) 25 km/h?



6. Samochód ma do przebycia trasę 240 km. Dobierz odpowiednio jednostki na osiach układu współrzędnych i naszkicuj wykres zależności między średnią prędkością samochodu a czasem podróży.



# Powtórzenie

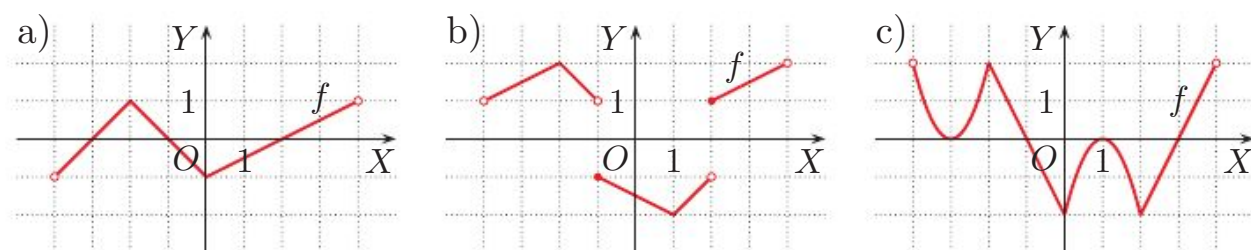
## Zestaw I

- Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej dwucyfrowej liczbie naturalnej iloczyn jej cyfr.
  - Jaka jest najmniejsza wartość funkcji  $f$ , a jaka największa?
  - Dla ilu argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartość 12, a dla ilu 16?
  - Dla ilu argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartości parzyste?

- Naszkicuj wykres funkcji  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem  $f(x) = |x| - 1$ . Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

a)  $X = \{-4, -1, 0, 1, 3\}$     b)  $X = (-\infty; 2)$     c)  $X = [-3; -1] \cup [2; 4)$

- Dany jest wykres funkcji  $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbb{R}$ . Podaj przedziały monotoniczności, miejsca zerowe i zbiór argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości dodatnie.



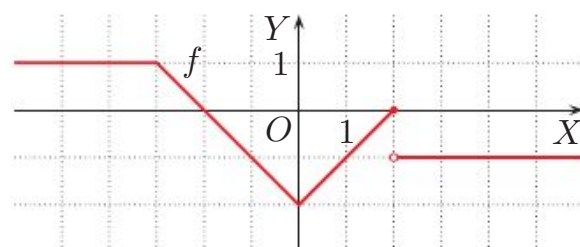
- Naszkicuj wykres funkcji  $f$ , przesuwając wykres funkcji  $y = \frac{1}{2}|x|$  o wektor.
  - $f(x) = \frac{1}{2}|x - 2| - 1$
  - $f(x) = \frac{1}{2}|x + 3| + 2$
  - $f(x) = \frac{1}{2}|x + 1| - 3$

- Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji  $f$  i  $g$ .

a)  $f(x) = |2x| - 1, g(x) = |x + 2|$     b)  $f(x) = -\frac{1}{2}|x|, g(x) = |x + 3| - 6$

- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ |x| - 2 & \text{dla } x \in [-3; 2] \\ -1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



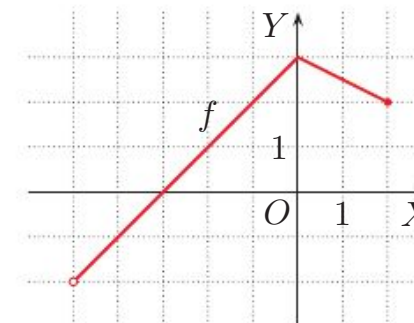
Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = f(-x)$ . Podaj jej wzór, a następnie odczytaj z wykresu rozwiązanie:

- równania  $g(x) = 0$  i zbiór rozwiązań nierówności  $g(x) < 0$ ,
- równania  $g(x) = 1$  i zbiór rozwiązań nierówności  $g(x) \leq 1$ ,
- równania  $g(x) = -1$  i zbiór rozwiązań nierówności  $g(x) \leq -1$ .

## Zestaw II

- Dziedziną funkcji  $f$  (rysunek obok) jest przedział  $(-5; 2]$ . Podaj dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji  $g$ .

a)  $g(x) = f(x - 3)$     c)  $g(x) = -f(x + 2)$   
b)  $g(x) = f(2 - x)$     d)  $g(x) = -f(1 - x)$



- Podaj wzór i naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = -f(x)$ . Odczytaj z wykresu zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji  $g$ .

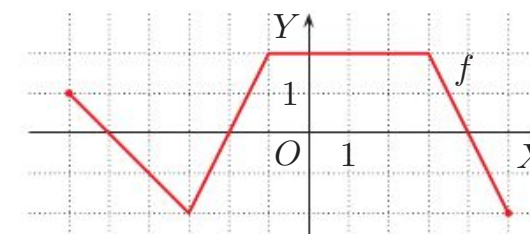
a)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ |x| & \text{dla } x \in [-1; 3] \\ 3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$     b)  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x^2 & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ -5 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

- Liczby  $-1, -\frac{1}{2}, 3$  są miejscami zerowymi funkcji  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$ . Podaj wzór i miejsca zerowe funkcji  $g$ .

a)  $g(x) = f(-x)$     b)  $g(x) = f(x + 1)$     c)  $g(x) = f(1 - x)$

- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: [-6; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g$  i podaj jej miejsca zerowe.

a)  $g(x) = -f(-x)$     b)  $g(x) = -|f(x)|$

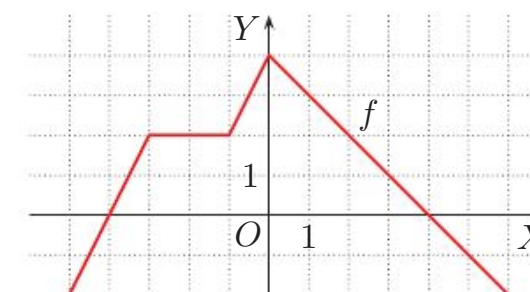


- Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $f(x) = m$  ma jedno rozwiązanie, a dla jakich – trzy rozwiązania?

a)  $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x < -2 \\ |x| & \text{dla } -2 \leq x \leq 4 \\ 8 - x & \text{dla } x > 4 \end{cases}$     b)  $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{dla } x < -2 \\ x^2 & \text{dla } -2 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

- Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Oblicz pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji:

a)  $y = f(x)$  i  $y = -f(x)$ ,  
b)  $y = f(-x)$  i  $y = |x|$ .



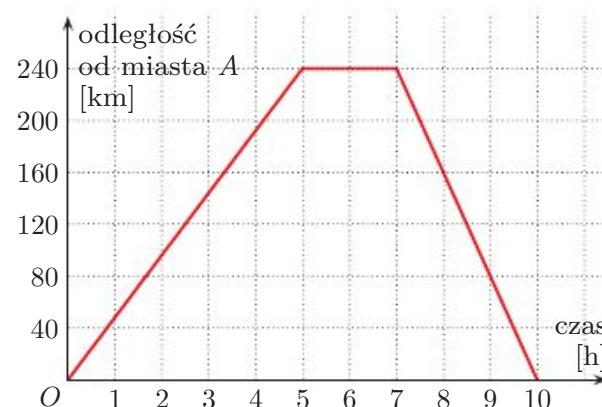
- Wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ , gdzie  $x > 0$  oraz  $a \in \mathbb{R}$ , przechodzi przez punkt  $(\frac{5}{2}, \frac{28}{5})$ . Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do wykresu funkcji  $f$ ? Naszkicuj wykres tej funkcji.



## Zadania z kontekstem realistycznym

1. Przejazd samochodem z miasta  $A$  do odległego o 240 km miasta  $B$  i z powrotem zajął (razem z dwugodzinnym postojem) 10 godzin. Korzystając z wykresu obok, podaj średnią prędkość przejazdu:

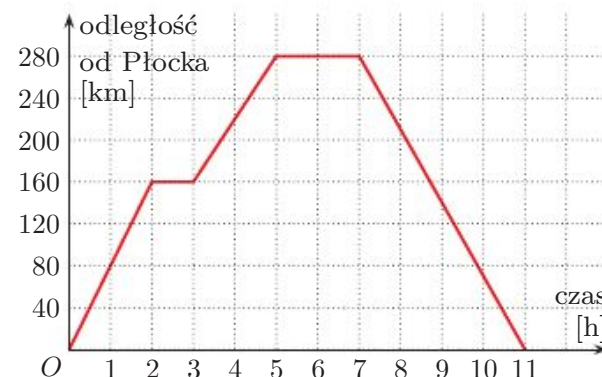
- a) z miasta  $B$  do miasta  $A$ ,  
b) całej trasy bez postoju.



2. Na wykresie poniżej przedstawiono, jak zmieniała się odległość samochodu od Płocka podczas jazdy na trasie Płock–Gdańsk–Płock.

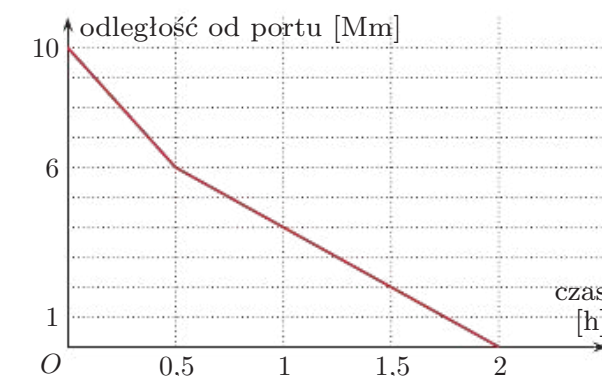
- a) Oblicz średnią prędkość samochodu bez uwzględniania postojów.

- b) Jaka byłaby średnia prędkość na trasie z Gdańska do Płocka, gdyby postój w Gdańsku przedłużył się o godzinę, a cała wyprawa trwałaby  $11\frac{1}{2}$  godziny?



3. Jacht znajdujący się w odległości 10 mil morskich od portu płynął w jego kierunku z prędkością 8 węzłów. Po półgodzinie wiatr osłabł, a prędkość jachtu spadła o połowę. Na wykresie obok pokazano, jak zmieniała się odległość jachtu od portu w zależności od czasu.

Inny jacht, będący 10 mil morskich od portu, płynął w jego kierunku przez godzinę z prędkością 2 węzłów, a następnie – z prędkością 6 węzłów. Naskicuj wykres przedstawiający zmiany odległości tego jachtu od portu w zależności od czasu. Po jakim czasie dotarł on do portu?



### Przykład 1

Ile miejsc zerowych ma funkcja  $f$ ?

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in [-2; 2) \\ -2x + 8 & \text{dla } x \in [2; \infty) \end{cases}$$

- A. zero      B. jedno      C. dwa      D. trzy

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Miejsca zerowe funkcji  $f$  możemy wyznaczyć, rozwiązując równania:

$$-2x - 2 = 0, \text{ skąd } x = -1, \text{ ale } -1 \notin (-\infty; -2)$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = 0, \text{ skąd } x = -6, \text{ ale } -6 \notin [-2; 2)$$

$$-2x + 8 = 0, \text{ skąd } x = 4 \in [2; \infty)$$

Liczby  $-1$  i  $-6$  nie są miejscami zerowymi funkcji  $f$ , jedynym jej miejscem zerowym jest liczba 4.

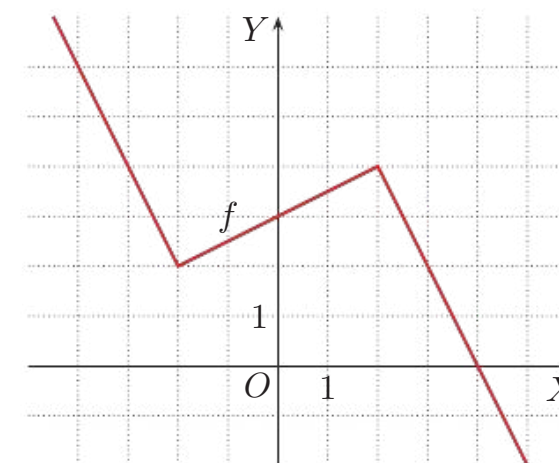
Zatem funkcja  $f$  ma jedno miejsce zerowe.

- Możemy też naskicować wykres funkcji  $f$  i odczytać z niego liczbę jej miejsc zerowych.

**Odpowiedź: B**

→ Zadanie 6, str. 216

→ Zadanie 19, str. 219



### Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: [-2; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ . Suma miejsc zerowych funkcji  $g(x) = f(-x)$  jest równa

- A.  $-2$       B.  $-4$       C.  $-6$       D.  $-8$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

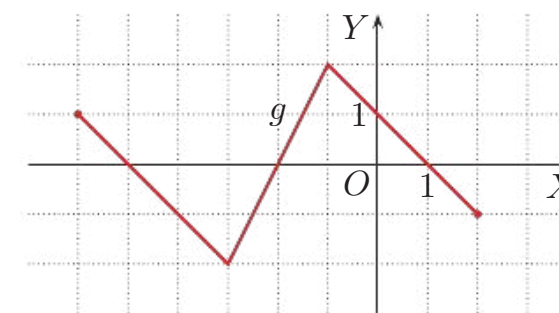
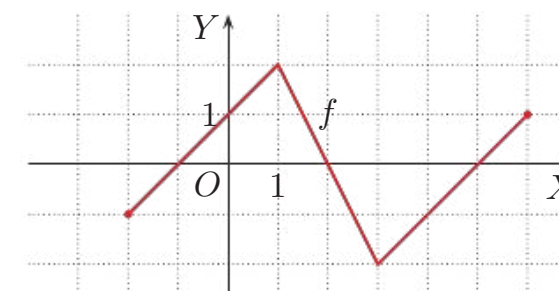
- Miejscami zerowymi funkcji  $f$  są liczby:  $-1, 2, 5$ . Zatem miejscami zerowymi funkcji  $g$  są liczby:  $1, -2, -5$ . Ich suma jest równa  $-6$ .

- Możemy też naskicować wykres funkcji  $g$  i odczytać z niego jej miejsca zerowe. Są to liczby:  $-5, -2$  i  $1$ . Ich suma jest równa  $-6$ .

**Odpowiedź: C**

→ Zadanie 9, str. 217

→ Zadanie 20, str. 219







W zadaniach 1–10 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

### Zadanie 1 (0–1)

Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej jej resztę z dzielenia przez 4. Niech  $a = f(129)$ . Wówczas

- A.  $a > f(29)$       B.  $a = f(59)$       C.  $a < f(89)$       D.  $a = f(149)$

### Zadanie 2 (0–1)

Liczba  $-\frac{3}{2}$  jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem

- A.  $y = x^2 + \frac{9}{4}$       B.  $y = x^3 - \frac{27}{8}$       C.  $y = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}x^2$       D.  $y = \frac{3}{2} - \frac{4}{9}x^3$

### Zadanie 3 (0–1)

Liczba  $-2$  nie jest miejscem zerowym funkcji danej wzorem

- A.  $y = \sqrt{x+2}$       B.  $y = x^2 - 2$       C.  $y = x^3 + 8$       D.  $y = \frac{2}{x} + 1$

### Zadanie 4 (0–1)

Do wykresu funkcji  $f(x) = x + \sqrt{x^2}$  należy punkt

- A.  $A(-2, 0)$       B.  $B(4, 6)$       C.  $C(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$       D.  $D(-4, -8)$

### Zadanie 5 (0–1)

Do wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{3}(x-1)^2$  należy punkt

- A.  $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3})$       C.  $(-2\sqrt{3}, -13\sqrt{3} + 12)$   
B.  $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3})$       D.  $(2\sqrt{3}, 13\sqrt{3} - 12)$

### Zadanie 6 (0–1) → Przykład 1, str. 215

Ile miejsc zerowych ma funkcja  $f$ ?

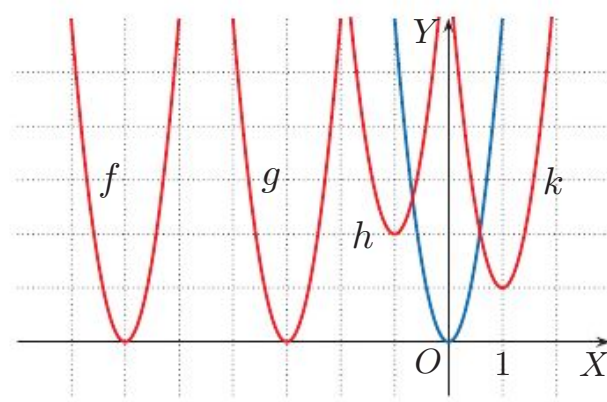
$$f(x) = \begin{cases} |x| - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; 4) \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in [4; \infty) \end{cases}$$

- A. zero      B. jedno      C. dwa      D. trzy

### Zadanie 7 (0–1)

Wykresy funkcji  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $k$  otrzymano przez odpowiednie przesunięcia wykresu funkcji  $y = 6x^2$ . Zatem

- A.  $f(x) = 6(x^2 - 12x + 36)$   
B.  $g(x) = 6(x^2 + 6x + 9)$   
C.  $h(x) = 6(x^2 - 2x + 1) + 2$   
D.  $k(x) = 6(x^2 - 1) + 1$



### Zadanie 8 (0–1)

Jeśli  $D_f = [-5; 3]$ , to dziedziną funkcji  $g(x) = f(x-1) + 2$  jest zbiór

- A.  $[-2; 6]$       B.  $[-3; 5]$       C.  $[-4; 4]$       D.  $[-6; 2]$

### Zadanie 9 (0–1) → Przykład 2, str. 215

Funkcja  $f$  ma pięć miejsc zerowych:  $-5, -3, -1, 0, 2$ . Wynika stąd, że suma miejsc zerowych funkcji  $y = -f(-x)$  jest równa

- A.  $-9$       B.  $-7$       C.  $7$       D.  $9$

### Zadanie 10 (0–1)

Do wykresu funkcji  $f(x) = ax^2$  należy punkt  $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$ . Zatem do tego wykresu należy również punkt

- A.  $(\sqrt{3}, -\frac{9}{4})$       B.  $(\sqrt{3}, \frac{3}{2})$       C.  $(-3, -\frac{3}{2})$       D.  $(-3, -\frac{9}{2})$

### Zadanie 11 (0–1)

Przejazd samochodem z miasta A do odległego o 360 km miasta B i z powrotem zajął (razem z godzinnym postojem) 10 godzin. Na wykresie obok przedstawiono, jak zmieniała się w tym czasie odległość od miasta A.



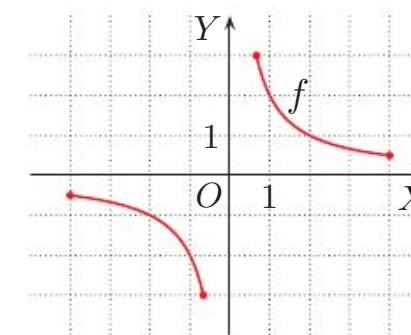
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                                                     |   |   |
|---------------------------------------------------------------------|---|---|
| Średnia prędkość przejazdu z miasta A do miasta B wynosiła 90 km/h. | P | F |
| Średnia prędkość na całej trasie (bez postoju) wynosiła 72 km/h.    | P | F |

### Zadanie 12 (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem  $f(x) = \frac{2}{x}$ , której dziedziną jest zbiór  $D = [-4; -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 4]$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



|                                                                 |   |   |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| Do zbioru wartości funkcji $f$ należy siedem liczb całkowitych. | P | F |
| Funkcja $f$ jest funkcją malejącą.                              | P | F |





### Zadanie 13 (0-2)

Funkcja  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$  jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Do wykresu funkcji  $f$  nie należy punkt

- |              |                                      |                                |
|--------------|--------------------------------------|--------------------------------|
| A. $(-1, 0)$ | D. $(-2, \frac{15}{4})$              | G. $(\sqrt{2}, \frac{3}{2})$   |
| B. $(1, 0)$  | E. $(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4})$    | H. $(-\sqrt{2}, \frac{3}{2})$  |
| C. $(0, 1)$  | F. $(-\frac{1}{4}, -\frac{255}{16})$ | I. $(-\sqrt{2}, -\frac{3}{2})$ |

### Zadanie 14 (0-1)

Dziedziną funkcji  $f$  jest przedział  $[-4; 2]$ .

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dziedziną funkcji  $g(x) = f(x + 2)$  jest przedział

|    |             |                                                                                              |    |          |
|----|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|----------|
| A. | $[-6; 0]$ , | ponieważ wykres funkcji $g$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $f$ o 2 jednostki | 1. | do góry. |
| B. | $[-2; 4]$ , |                                                                                              | 2. | w prawo. |
|    |             |                                                                                              | 3. | w lewo.  |

### Zadanie 15

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f: [-5; 4] \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Zadanie 15.1 (0-1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Zbiorem rozwiązań nierówności  $f(x) \leq 1$  jest .

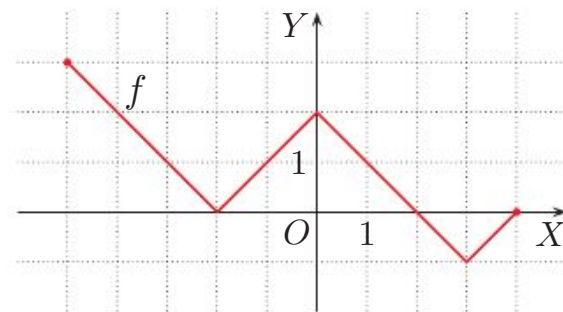
#### Zadanie 15.2 (0-1)

Uzupełnij zdanie tak, aby było prawdziwe.

Najdłuższym przedziałem, w którym funkcja  $f$  jest rosnąca, jest .

### Zadanie 16 (0-1)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{dla } x < 2 \\ -5x + 3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

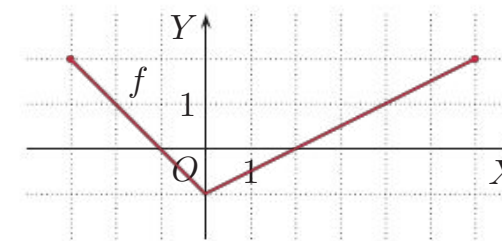


### Zadanie 17 (0-2)

Funkcja  $f$  określona na zbiorze liczb rzeczywistych jest funkcją nierosnącą, a punkty  $(-6, 4)$ ,  $(-3, 2)$ ,  $(1, 2)$  i  $(4, -5)$  należą do jej wykresu. Wyznacz wartość  $f(-2\sqrt{2})$ .

### Zadanie 18 (0-2)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: [-3; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ . Podaj dziedzinę funkcji  $g(x) = f(-x)$  i naszkicuj jej wykres.



### Zadanie 19 (0-2) → Przykład 1, str. 215

Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{dla } -1 \leq x \leq 3 \\ x - 2 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

### Zadanie 20 (0-3) → Przykład 2, str. 215

Miejscami zerowymi funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  są liczby  $-3$ ,  $2$  i  $4$ . Wyznacz sumę miejsc zerowych funkcji  $g(x) = f(-x + 6)$ .

### Zadanie 21 (0-4)

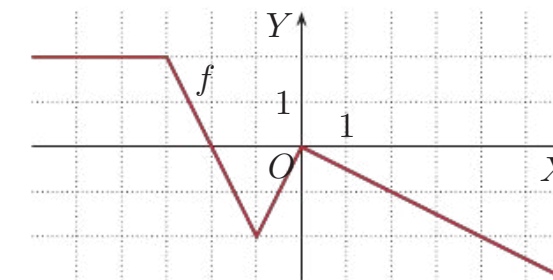
Dana jest funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem  $f(x) = 2x + 2$ . Naszkicuj wykresy funkcji  $g(x) = -f(x)$  i  $h(x) = f(x - 4)$ . Oblicz pole obszaru ograniczonego osią  $OX$  i wykresami funkcji  $g$  i  $h$ .

### Zadanie 22 (0-4)

Zbiór  $X$  jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 12. Funkcja  $f$  każdej liczbie ze zbioru  $X$  przyporządkowuje resztę z dzielenia przez 4. Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = f(x) - 1$  i podaj jej miejsca zerowe.

### Zadanie 23 (0-4)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = -f(x)$ . Podaj przedziały monotoniczności funkcji  $g$  i odczytaj zbiór rozwiązań nierówności  $g(x) \leq 0$ .



### D Zadanie 24 (0-1)

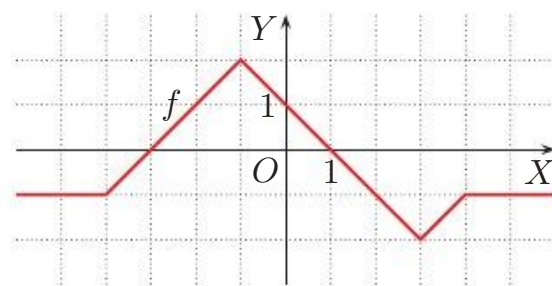
Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek o końcach  $(0, 0)$  i  $(a, 0)$ , gdzie  $a > 0$ . Trzeci wierzchołek trójkąta należy do wykresu funkcji  $y = \frac{4}{x}$ , gdzie  $x > 0$ . Uzasadnij, że pole tego trójkąta nie zależy od wyboru parametru  $a$ .



**Zadanie 1 (0-2)**

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Oblicz sumę miejsc zerowych funkcji:

$$g(x) = f(x - 3\sqrt{2}) - 1$$

**Zadanie 2 (0-2)**

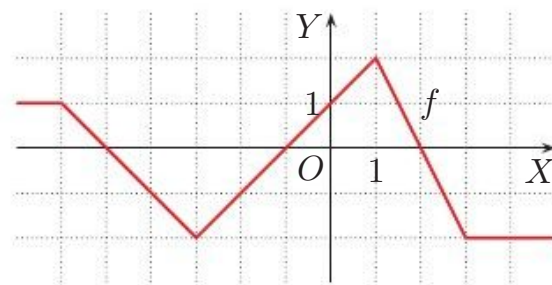
Wykres funkcji  $g$  otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji  $f(x) = |x - 2| - 6$  o wektor  $\vec{v} = [0, \sqrt{3}]$ . Dla jakich argumentów funkcja  $g$  przyjmuje wartości ujemne?

**Zadanie 3 (0-2)**

Wykres funkcji  $g(x) = 6(x - 8)^2 + 7$  otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji  $f(x) = 6(x + 9)^2 - 12$  o wektor  $[a, b]$ . Wyznacz ten wektor.

**Zadanie 4**

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Zadanie 4.1 (0-3)**

Naszkicuj wykres funkcji  $g(x) = |f(-x)|$ .  
Podaj rozwiązanie nierówności  $g(x) \geq 2$ .

**Zadanie 4.2 (0-2)**

Naszkicuj wykres funkcji  $h(x) = -|f(x)|$ . Rozwiąż równanie  $h(x) = -2$ .

**Zadanie 5 (0-3)**

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$$f(x) = |x + 4| - 2 \text{ i } g(x) = -|x + 3| + 5$$

Oblicz pole figury ograniczonej tymi wykresami.

**Zadanie 6 (0-4)**

Naszkicuj wykresy funkcji  $f$  oraz  $g(x) = f(-x) - 3$ . Podaj rozwiązanie równania  $g(x) = -1$ .

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in [-2; 3] \\ 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty) \end{cases}$$

**Zadanie 7 (0-4)**

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f(x) = 2|x| - 2$  i  $g(x) = (|x| - 1)^2$ . Podaj rozwiązanie nierówności  $2|x| - 2 \leq (|x| - 1)^2$ .

# 5 Funkcja liniowa

Dla snowboardzisty czy narciarza kąt nachylenia stoku jest bardzo ważny. Jest to jeden z czynników branych pod uwagę podczas ustalania stopnia trudności trasy narciarskiej.

Kąt nachylenia terenu ma też zasadnicze znaczenie w zagadnieniach inżynierskich, takich jak budowa dróg czy kolei. Przy badaniu kąta nachylenia terenu wykorzystuje się pojęcie kąta nachylenia prostej.

O nachyleniu prostej będącej wykresem funkcji liniowej  $y = ax + b$  decyduje współczynnik  $a$ .



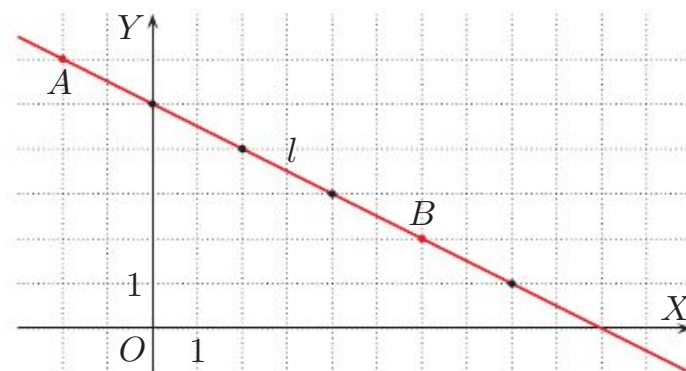


### Punkty kratowe należące do prostej

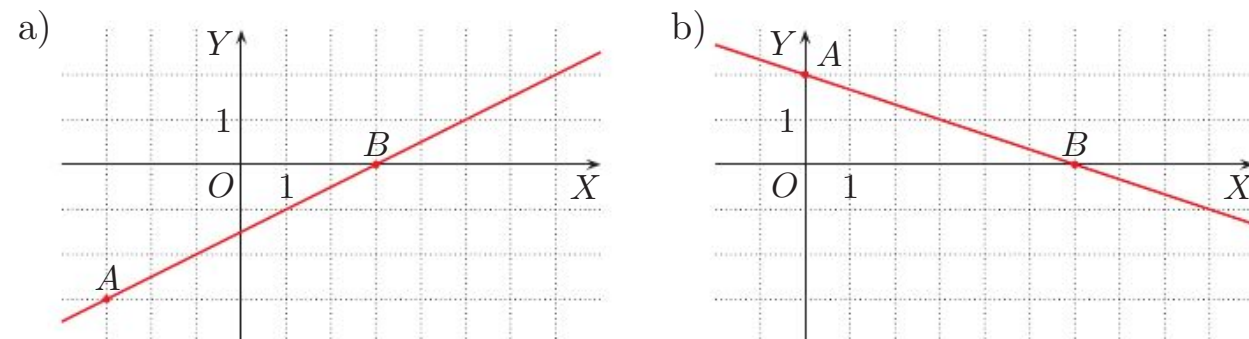
**Punkty kratowe** to punkty, których obie współrzędne są całkowite.

Punkty  $A(-2, 6)$  i  $B(6, 2)$  należą do prostej  $l$ . Do odcinka  $AB$  należą również następujące punkty kratowe:  $(0, 5)$ ,  $(2, 4)$  i  $(4, 3)$ .

Punkt  $(8, 1)$  jest punktem kratowym, który należy do prostej  $l$ , ale nie należy do odcinka  $AB$ .



1. Podaj współrzędne wszystkich punktów kratowych należących do odcinka  $AB$  oraz dowolnych trzech punktów kratowych należących do prostej  $l$ , ale nienależących do odcinka  $AB$ .



### Przykład 1

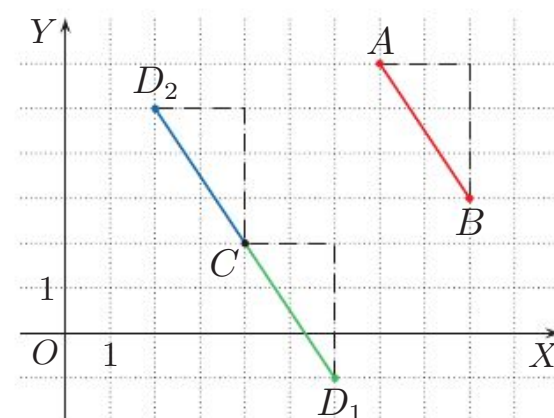
Dane są punkty  $A(7, 6)$ ,  $B(9, 3)$  i  $C(4, 2)$ . Wyznacz współrzędne punktu  $D$  tak, aby odcinki  $AB$  i  $CD$  były równoległe oraz miały równe długości.

W układzie współrzędnych rysujemy odcinek  $AB$  i zaznaczamy punkt  $C$ .

Zauważmy, że aby przenieść się z punktu  $A$  do punktu  $B$ , przesuwamy się o 2 jednostki w prawo i o 3 jednostki w dół.

Zatem warunki zadania są spełnione przez dwa punkty:

$$D_1(6, -1) \text{ i } D_2(2, 5)$$



2. Wyznacz współrzędne punktu  $D$  tak, aby odcinki  $AB$  i  $CD$  były równoległe oraz miały równe długości.

a)  $A(-2, 2)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $C(3, 1)$       b)  $A(-1, 4)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(4, 2)$

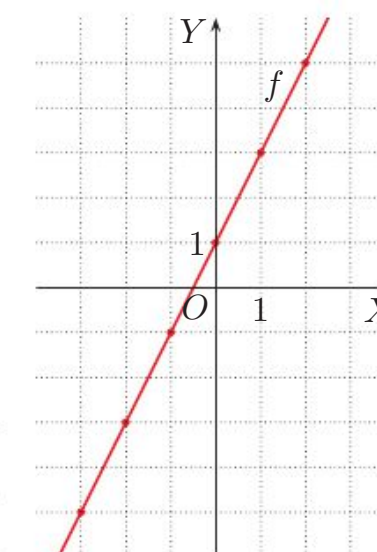
## 5.1. Wykres funkcji liniowej

### Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji określonej za pomocą wzoru  $f(x) = 2x + 1$ , której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

Aby naszkicować wykres funkcji  $f(x) = 2x + 1$ , sporządzamy tabelę wartości funkcji dla wybranych argumentów.

|        |    |    |    |   |   |   |
|--------|----|----|----|---|---|---|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | -5 | -3 | -1 | 1 | 3 | 5 |



Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych. Zwróć uwagę, że wszystkie te punkty leżą na jednej prostej – jest ona wykresem funkcji  $f$ .

### Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ , której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

a)  $f(x) = x + 2$       b)  $f(x) = 2x - 1$       c)  $f(x) = -x$       d)  $f(x) = -x + 3$

### Definicja

Funkcję  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określoną wzorem  $f(x) = ax + b$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ , nazywamy **funkcją liniową**.

Wykresem funkcji  $f(x) = ax + b$  (używamy też zapisu  $y = ax + b$ ) jest **prosta**. Aby naszkicować wykres tej funkcji, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta). Prosta ta ma równanie  $y = ax + b$ . Powiemy też krótko: prosta  $y = ax + b$ .

### Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = \frac{5}{3}x - 1$ .

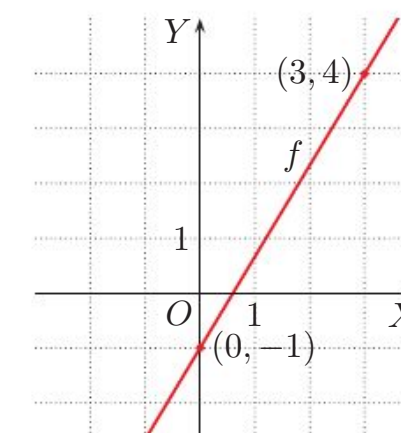
Dla  $x = 0$  mamy  $f(0) = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$ .

Dla  $x = 3$  mamy  $f(3) = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4$ .

Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

|        |    |   |
|--------|----|---|
| $x$    | 0  | 3 |
| $f(x)$ | -1 | 4 |

Punkty  $(0, -1)$  i  $(3, 4)$  należą do wykresu funkcji  $f$ .





## Ćwiczenie 2

Znajdź dwa punkty kratowe należące do wykresu funkcji  $f$ . Naszkicuj ten wykres.

a)  $f(x) = \frac{3}{2}x - 2$

c)  $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$

b)  $f(x) = -\frac{3}{5}x$

d)  $f(x) = -\frac{4}{7}x - 1$

## Definicja

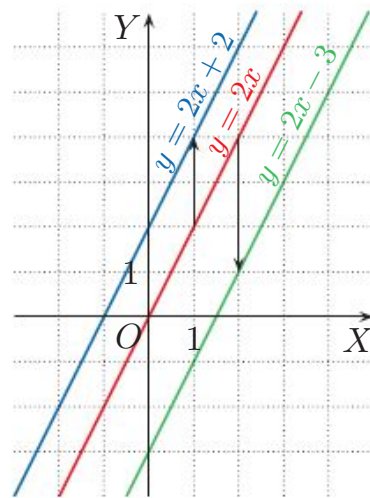
Liczbę  $a$  występującą we wzorze funkcji liniowej  $f(x) = ax + b$  nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej, a liczbę  $b$  – **wyrazem wolnym**.

## Przykład 3

Wykresy funkcji liniowych  $y = 2x + 2$  i  $y = 2x - 3$  są prostymi równoległymi. Każdy z nich możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = 2x$  wzdłuż osi  $OY$ .

Po przesunięciu prostej  $y = 2x$ :

- o 2 jednostki w górę otrzymamy prostą  $y = 2x + 2$ ,
- o 3 jednostki w dół otrzymamy prostą  $y = 2x - 3$ .



## Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji  $y = 3x$ , a następnie wykres funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = 3x + 1$

c)  $f(x) = 3x - 2$

b)  $f(x) = 3x + 3$

d)  $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$

Zauważmy, że wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi. Proste, które są wykresami funkcji liniowych o różnych współczynnikach kierunkowych, nie są równoległe.

## Twierdzenie

Proste dane równaniami  $y = a_1x + b_1$  i  $y = a_2x + b_2$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 = a_2$ .

## Ćwiczenie 4

Które spośród prostych  $l_1, l_2, \dots, l_8$  są równoległe?

$l_1: y = \frac{1}{2}x - 3$

$l_3: y = -\frac{1}{2}x + 3$

$l_5: y = 8 - \frac{1}{2}x$

$l_7: y = 1 - 2x$

$l_2: y = 2x - 3$

$l_4: y = 4 + 2x$

$l_6: y = 2x - \sqrt{3}$

$l_8: y = \sqrt{5} - \frac{1}{2}x$

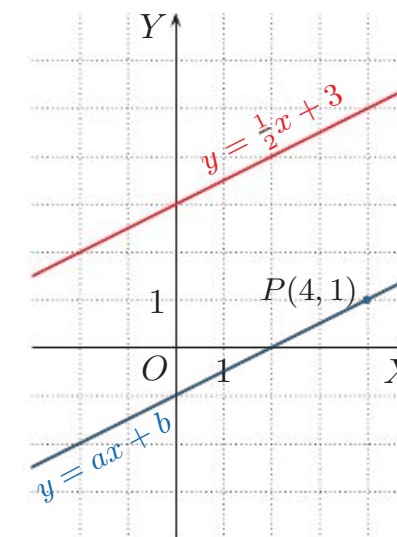
## Przykład 4

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt  $P(4, 1)$  i równoległa do prostej  $y = \frac{1}{2}x + 3$ .

Szukana funkcja liniowa ma wzór postaci  $y = ax + b$ , a jej wykresem jest prosta równoległa do prostej  $y = \frac{1}{2}x + 3$ , więc  $a = \frac{1}{2}$ .

Aby obliczyć współczynnik  $b$ , podstawiamy współrzędne punktu  $P(4, 1)$  do równania  $y = \frac{1}{2}x + b$  i otrzymujemy  $1 = \frac{1}{2} \cdot 4 + b$ , skąd  $b = -1$ .

Zatem warunki zadania spełnia funkcja  $y = \frac{1}{2}x - 1$ .



## Ćwiczenie 5

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta równoległa do prostej  $l$  i przechodząca przez punkt  $P$ .

a)  $l: y = 2x - 4, P(3, 7)$

c)  $l: y = -\frac{2}{3}x + 3, P(3, -4)$

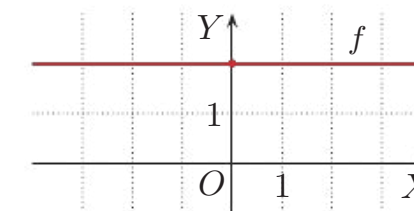
b)  $l: y = -3x + 5, P(-\frac{1}{3}, 2)$

d)  $l: y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}, P(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$

Szczególnym przypadkiem funkcji liniowej jest funkcja stała.

## Przykład 5

Funkcja  $f(x) = 2$  dla dowolnego argumentu  $x \in \mathbb{R}$  przyjmuje wartość równą 2. Jej wykresem jest prosta równoległa do osi  $OX$  i przechodząca przez punkt  $(0, 2)$ .



## Ćwiczenie 6

Naszkicuj wykres funkcji  $f(x) = ax + b$  o współczynnikach:

a)  $a = 0, b = 1$ ,

b)  $a = 0, b = -\frac{3}{2}$ ,

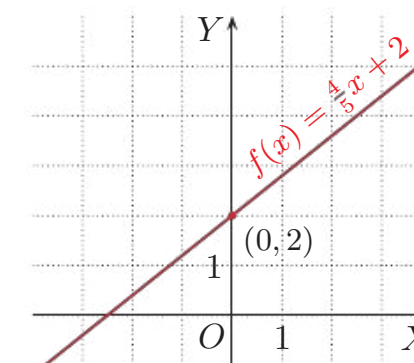
c)  $a = 0, b = 0$ .

Współczynnik  $b$  we wzorze funkcji liniowej  $f(x) = ax + b$  wskazuje punkt przecięcia prostej będącej wykresem funkcji z osią  $OY$ .

## Przykład 6

Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji  $f(x) = \frac{4}{5}x + 2$  z osią  $OY$ .

Jeśli podstawimy  $x = 0$  do wzoru funkcji, to otrzymamy rzędną punktu, w którym jej wykres przecina oś  $OY$ . Zatem  $f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0 + 2 = 2$ , czyli wykres przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, 2)$ .



## Twierdzenie

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej  $f(x) = ax + b$  przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, b)$ .

### Ćwiczenie 7

Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej  $l$  i przecinająca oś  $OY$  w punkcie  $P$ .

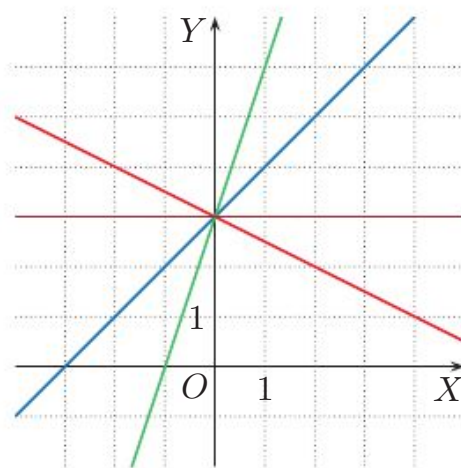
- a)  $l: y = 3x - 4$ ,  $P(0, 6)$       b)  $l: y = -\frac{3}{4}x + 1$ ,  $P(0, -\frac{3}{2})$

### Ćwiczenie 8

Na rysunku przedstawiono proste przechodzące przez punkt  $(0, 3)$ . Są one wykresami funkcji liniowych:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + 3, & f_3(x) &= -\frac{1}{2}x + 3, \\ f_2(x) &= 3, & f_4(x) &= 3x + 3. \end{aligned}$$

- a) Oblicz wartości tych funkcji dla  $x = 1$ .  
b) Dla każdej z tych funkcji określ, która prosta jest jej wykresem.



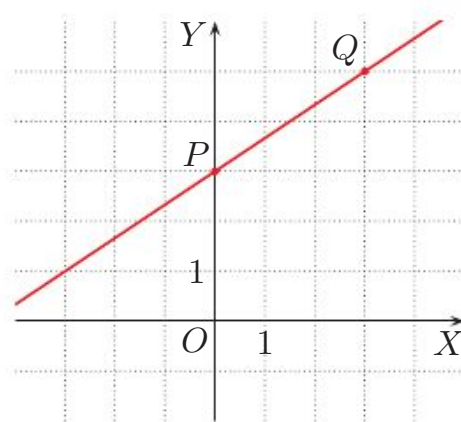
### Czy wiesz, że...

Zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt nazywamy **pękiem prostych**, a punkt przecięcia tych prostych – **środkiem pęku**.

### Przykład 7

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty  $P(0, 3)$  i  $Q(3, 5)$ .

Szukana funkcja ma wzór postaci  $y = ax + b$ . Jej wykres przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, 3)$ , więc  $b = 3$ . Aby wyznaczyć współczynnik  $a$ , podstawiamy współrzędne punktu  $Q(3, 5)$  do równania  $y = ax + 3$  i dostajemy  $5 = 3a + 3$ , skąd  $a = \frac{2}{3}$ . Zatem szukany wzór funkcji to:  $y = \frac{2}{3}x + 3$ .



### Ćwiczenie 9

Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty  $P$  i  $Q$ . Czy punkt  $R$  należy do wykresu tej funkcji?

- a)  $P(0, 5)$ ,  $Q(4, 2)$ ,  $R(8, -1)$       b)  $P(0, -4)$ ,  $Q(-3, -9)$ ,  $R(6, 5)$

## Zadania

1. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych te spośród prostych  $l_1, \dots, l_8$ , które przecinają oś  $OY$  w punkcie  $(0, 2)$ , a w drugim te, które przecinają oś  $OY$  w punkcie  $(0, -1)$ .

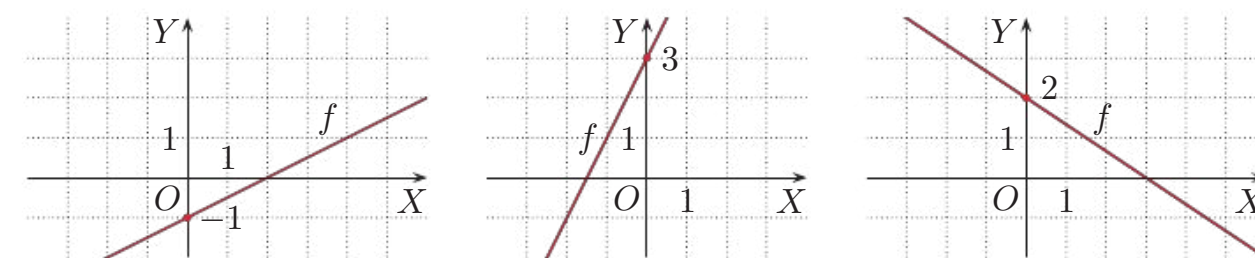
$$\begin{aligned} l_1: y &= 3x + 2 & l_3: y &= -1 & l_5: y &= -2x + 2 & l_7: y &= \frac{1}{2}x - 1 \\ l_2: y &= 3x - 1 & l_4: y &= 2 & l_6: y &= -2x - 1 & l_8: y &= \frac{1}{2}x + 2 \end{aligned}$$

2. Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej o podanym równaniu i przechodząca przez punkt  $P$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= 4x - 2, \quad P(0, 5) & \text{c) } y &= -\frac{4}{3}x + 6, \quad P(-6, 5) \\ \text{b) } y &= -3x + 4, \quad P(1, 8) & \text{d) } y &= \sqrt{3}x - 3, \quad P(2\sqrt{3}, 6) \end{aligned}$$

3. Sprawdź, czy punkt  $Q$  należy do wykresu funkcji liniowej  $f$ , jeśli należy do niego punkt  $P$ .

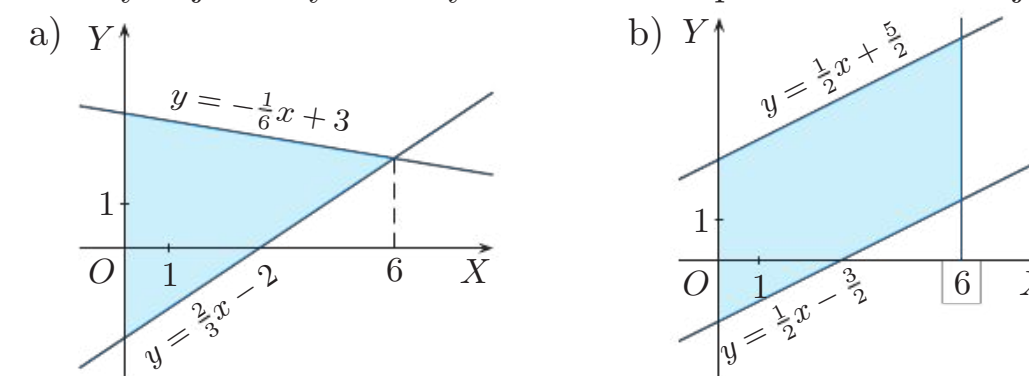
$$\text{a) } P(8, 3), Q(16, 9) \quad \text{b) } P(-6, -9), Q(7, 19) \quad \text{c) } P(9, -4), Q(8, -3\frac{1}{3})$$



4. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt  $P$  i przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, 4)$ . Wyznacz wzór tej funkcji i naskicuj jej wykres.

$$\text{a) } P(2, 6) \quad \text{b) } P(-6, 1) \quad \text{c) } P(5, -11) \quad \text{d) } P(\frac{3}{4}, -2)$$

5. Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz pole zacieniowanej figury.



- D** 6. Wykaż, że punkt  $(0, 0)$  jest jedynym punktem o obu współrzędnych wymiernych należącym do wykresu funkcji  $y = \sqrt{2}x$ .

- D** 7. Wykaż, że do wykresu funkcji  $y = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$  nie należy żaden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

**Wskazówka.** Przeprowadź dowód przez sprowadzenie do sprzeczności.



## 5.2. Własności funkcji liniowej

### ■ Miejsce zerowe funkcji liniowej

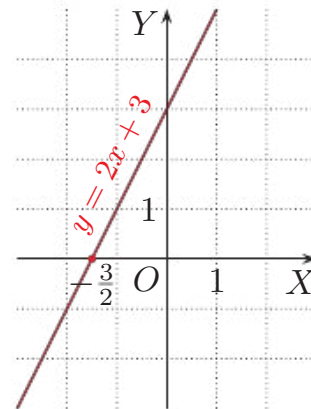
#### Przykład 1

Wyznacz miejsce zerowe funkcji liniowej  $y = 2x + 3$  (wykres obok).

Aby wyznaczyć miejsce zerowe tej funkcji, rozwiążemy równanie:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 0 \\ 2x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Zatem miejsce zerowe jest równe  $-\frac{3}{2}$ .



#### D Ćwiczenie 1

Uzasadnij podane obok twierdzenie.

#### Ćwiczenie 2

Wyznacz miejsce zerowe funkcji:

a)  $y = -4x + 6$ ,      b)  $y = -3x - 4$ ,      c)  $y = \frac{1}{2}x + 3$ ,      d)  $y = \frac{7}{3}x - \frac{14}{9}$ .

#### Ćwiczenie 3

Dla jakich wartości współczynników  $a$ ,  $b$  funkcja  $f(x) = ax + b$ :

a) nie ma miejsc zerowych,      b) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych?

#### Przykład 2

Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez osie układu współrzędnych i wykres funkcji  $f(x) = \frac{9}{16}x + 3$  (rysunek obok).

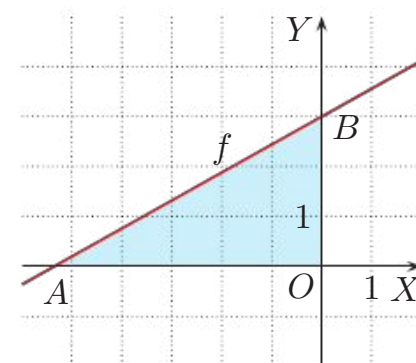
Wyznaczamy miejsce zerowe funkcji  $f$ :

$$\frac{9}{16}x + 3 = 0 \text{ dla } x = -\frac{16}{3}. \text{ Zatem } |OA| = \frac{16}{3}.$$

Punkt  $B$  ma współrzędne  $(0, 3)$ , stąd  $|OB| = 3$ .

Obliczamy pole trójkąta  $AOB$ :

$$P = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 3 = 8$$



Symbolem  $|OA|$  oznaczamy długość odcinka  $OA$ .

#### Ćwiczenie 4

Oblicz pole trójkąta wyznaczonego przez osie układu współrzędnych i wykres funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = 2x + 4$     b)  $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$     c)  $f(x) = -\frac{1}{2}x - 4$     d)  $f(x) = \frac{5}{3}x - 5$

### ■ Monotoniczność funkcji liniowej

Funkcja liniowa może być funkcją rosnącą, malejącą lub stałą.

Przypomnijmy, że funkcję  $f$  nazywamy **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2$  spełniony jest warunek: jeśli  $x_1 < x_2$ , to  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Jeśli  $a > 0$ , to funkcja liniowa  $f(x) = ax + b$  jest **rosnąca**.

#### Dowód

Rozpatrzmy funkcję  $f(x) = ax + b$ , gdzie  $a > 0$ .

Niech  $x_1, x_2$  będą dowolnymi argumentami takimi, że  $x_1 < x_2$ .

Wówczas mamy:

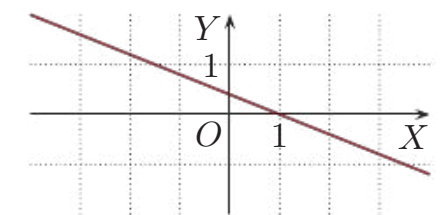
$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \quad / \cdot a \\ ax_1 &< ax_2 \\ ax_1 + b &< ax_2 + b \end{aligned}$$

Mnożymy obie strony nierówności przez liczbę  $a > 0$ , zatem nie zmieniamy jej zwrotu.

Oznacza to, że  $f(x_1) < f(x_2)$ . Zatem  $f$  jest funkcją rosnącą.

Funkcja  $f$  jest funkcją **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2$  spełniony jest warunek: jeśli  $x_1 < x_2$ , to  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Jeśli  $a < 0$ , to funkcja liniowa  $f(x) = ax + b$  jest **malejąca**.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów.

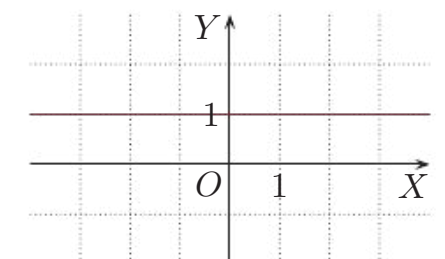
#### D Ćwiczenie 5

Udowodnij powyższe twierdzenie.

Funkcja  $f$  jest funkcją **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2$  prawdziwa jest równość:  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Jeśli  $a = 0$ , to funkcja liniowa  $f(x) = ax + b$  jest funkcją **stałą**.

Jeśli funkcja liniowa jest funkcją stałą, to jej wykresem jest prosta równoległa do osi  $OX$ .



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, która przyjmuje stałe tę samą wartość.

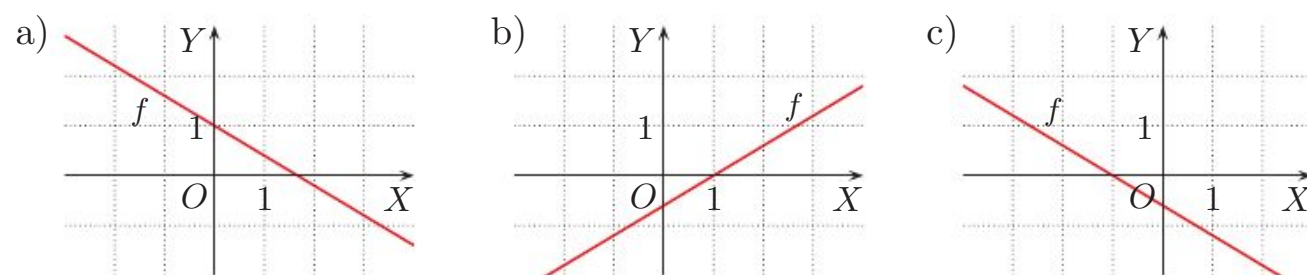
### Ćwiczenie 6

Określ monotoniczność funkcji  $f$ .

- a)  $f(x) = 5x - 12$                       c)  $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x$   
b)  $f(x) = 8 - 3x$                       d)  $f(x) = -3$

### Ćwiczenie 7

Dany jest wykres funkcji  $f(x) = ax + b$ . Podaj znaki współczynników  $a$  i  $b$ .

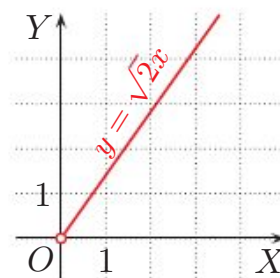


### ■ Proporcjonalność prosta

Przypomnijmy, że zależność między dwiema dodatnimi wielkościami  $x$  i  $y$  daną wzorem  $y = ax$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}_+$ , nazywamy **proporcjonalnością prostą**. Wielkości  $x$  i  $y$  nazywamy **wprost proporcjonalnymi**, a liczbę  $a$  – **współczynnikiem proporcjonalności** prostej.

#### Przykład 3

Długość boku kwadratu  $x$  i długość jego przekątnej  $y$  są wielkościami wprost proporcjonalnymi: zachodzi równość  $y = \sqrt{2}x$ . Zależność tę przedstawiono na wykresie obok.



### Ćwiczenie 8

Czy opisane wielkości są odwrotnie proporcjonalne, czy wprost proporcjonalne? Podaj wzór tej proporcjonalności.

- a) Długość boku trójkąta równobocznego i jego obwód.  
b) Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o ustalonym polu  $P$ .  
c) Obwód i promień okręgu.  
d) Długości przekątnych rombu o ustalonym polu  $P$ .

### Ćwiczenie 9

Wielkości  $x$  i  $y$  są wprost proporcjonalne. Podaj wzór tej proporcjonalności, a następnie uzupełnij poniższą tabelę. Naszkicuj wykres tej proporcjonalności.

a) 

|     |                |   |   |
|-----|----------------|---|---|
| $x$ | $\frac{3}{4}$  | 1 | 2 |
| $y$ | $2\frac{1}{4}$ | ? | ? |

b) 

|     |   |     |   |
|-----|---|-----|---|
| $x$ | 1 | 1,8 | ? |
| $y$ | ? | 1,2 | 2 |

c) 

|     |                |   |    |
|-----|----------------|---|----|
| $x$ | $2\frac{1}{3}$ | ? | 14 |
| $y$ | $1\frac{2}{3}$ | 5 | ?  |

### Ćwiczenie 10

a) Samochód jedzie autostradą ze stałą prędkością. W półtorej godziny pokonał 165 km. Oblicz odległość, jaką ten samochód pokona w dwie i pół godziny.

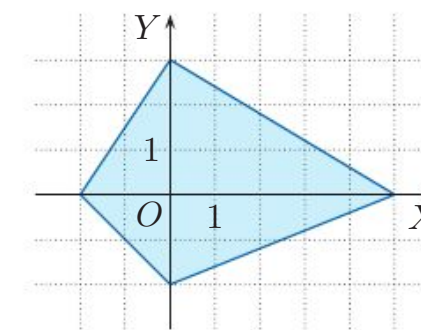
Dla ruchu ze stałą prędkością  $v$  przebyta droga  $s$  jest wprost proporcjonalna do czasu  $t$ :

$$s = v \cdot t$$

b) Samochód jadący ze stałą prędkością znalazł się 60 km od punktu początkowego o godzinie 13.00. O godzinie 15.24 był już od tego punktu oddalony o 252 km. Jak daleko od punktu początkowego był ten samochód o 16.00?

### Zadania

- Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta będąca wykresem funkcji  $f$ ?  
a)  $f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$                       c)  $f(x) = -8x - 3$                       e)  $f(x) = (1 - \sqrt{2})x + 3$   
b)  $f(x) = 4x + 1$                       d)  $f(x) = 12x - 1$                       f)  $f(x) = -5$
- Określ monotoniczność funkcji  $f(x) = mx - 4$  dla:  
a)  $m = \sqrt{3} - 2$ ,                      b)  $m = 5 - 2\sqrt{5}$ ,                      c)  $m = 3 - \sqrt[3]{-27}$ .
- Określ monotoniczność funkcji  $f$  w zależności od parametru  $m$ .  
a)  $f(x) = (5 - m)x$                       b)  $f(x) = (1 + 5m)x$                       c)  $f(x) = (|m| - 1)x$
- Określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest prosta przechodząca przez podane punkty.  
a)  $(-8, 6)$  i  $(4, 12)$                       c)  $(6, \sqrt{5})$  i  $(10, \sqrt{5})$                       e)  $(-1, \frac{2}{3})$  i  $(2, \frac{7}{12})$   
b)  $(-37, -9)$  i  $(-9, -37)$                       d)  $(3\sqrt{2}, 7)$  i  $(2\sqrt{3}, 5)$                       f)  $(\frac{2}{3}, -8)$  i  $(\frac{3}{5}, -7)$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, do której wykresu należy punkt:  
a)  $(0, 4)$  i która przyjmuje wartości ujemne tylko dla  $x < -6$ ,  
b)  $(0, -\frac{1}{2})$  i która przyjmuje wartości dodatnie tylko dla  $x > 2$ ,  
c)  $(0, -2)$  i która przyjmuje wartości nieujemne tylko dla  $x \leq -4$ .
- Wyznacz wzory funkcji liniowych, w których wykresach zawierają się:  
a) boki przedstawionego obok czworokąta,  
b) boki czworokąta o wierzchołkach:  
 $A(-48, 0)$ ,  $B(0, -72)$ ,  $C(36, 0)$ ,  $D(0, 144)$ .





7. Wykres pewnej funkcji liniowej i osie układu współrzędnych ograniczają trójkąt równoramienny. Wyznacz wzór tej funkcji, jeśli wiadomo, że:
- przyjmuje ona wartości ujemne tylko dla  $x > 3$ ,
  - do jej wykresu należy punkt  $(0, -4)$ .

8. Podaj wzór proporcjonalności prostej, do której wykresu należy punkt:

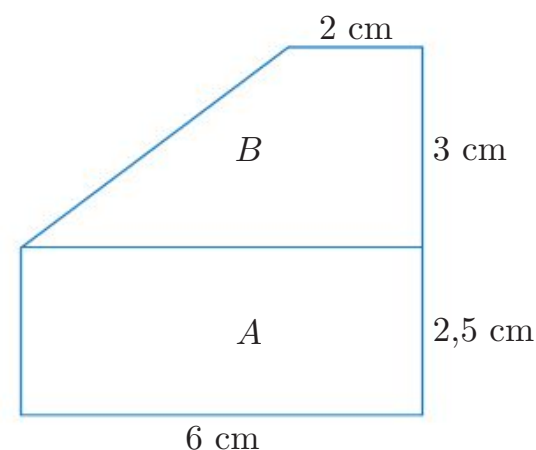
- $(2\frac{1}{2}, 15)$ ,
- $(2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2})$ ,
- $(3\frac{1}{2}, 2\frac{4}{5})$ .

- D** 9. a) Uzasadnij, że długość boku kwadratu i jego obwód są wielkościami wprost proporcjonalnymi,  
b) Uzasadnij, że długość boku kwadratu i jego pole nie są wielkościami wprost proporcjonalnymi (mimo że wraz ze wzrostem długości boku kwadratu rośnie jego pole).

10. Przykładem wielkości wprost proporcjonalnych są odległość na mapie (planie) i odpowiadająca jej odległość w terenie. Na rysunku poniżej przedstawiono plan sąsiadujących ze sobą działek budowlanych  $A$  i  $B$ .

- Działka  $A$  ma kształt prostokąta, którego krótszy bok ma długość 15 m. Oblicz obwód tej działki.

- Działka  $B$  ma kształt trapezu prostokątnego. Czy na jej ogrodzenie wystarczy 95 m bieżących siatki, jeśli brama ma mieć szerokość 2 m?



11. Prostokątną działkę budowlaną o wymiarach  $20\text{ m} \times 30\text{ m}$  przedstawiono na planie w postaci prostokąta o wymiarach  $x\text{ cm} \times (x+2)\text{ cm}$ . Wyznacz skalę tego planu.

Skala mapy (planu) to stosunek odległości na mapie do odpowiadających im odległości rzeczywistych.

12. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres, przecinając oś  $OY$  w punkcie  $(0, -3)$ , i osie układu współrzędnych ograniczają trójkąt o polu równym:

- 6,
- $10\frac{1}{2}$ ,
- $9\sqrt{2}$ .

13. Wyznacz wzór funkcji liniowej, której wykres, przecinając oś  $OX$  w punkcie  $(\frac{3}{2}, 0)$ , i osie układu współrzędnych ograniczają trójkąt o polu równym:

- 6,
- $4\frac{1}{2}$ ,
- $3\sqrt{2}$ .

## 5.3. Równanie prostej na płaszczyźnie

Jeśli znamy współrzędne dwóch różnych punktów należących do prostej, możemy wyznaczyć jej równanie. Dla prostej będącej wykresem funkcji liniowej wyznaczamy równanie postaci  $y = ax + b$ .

### Definicja

Równanie postaci  $y = ax + b$  nazywamy **równaniem kierunkowym prostej**.

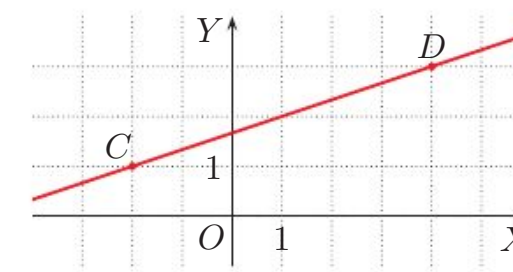
### Przykład 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $C(-2, 1)$  i  $D(4, 3)$ .

Aby wyznaczyć współczynniki  $a, b$  równania  $y = ax + b$ , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-2) + b \\ 3 = a \cdot 4 + b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Równania układu otrzymujemy,} \\ \text{podstawiając współrzędne punktów } C \text{ i } D \\ \text{do równania } y = ax + b. \end{array}$$

Powyższy układ spełniony jest przez parę liczb  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{5}{3}$ .  
Zatem równanie prostej ma postać  $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ .



### Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $C$  i  $D$ .

- $C(-1, -5)$ ,  $D(3, 3)$
- $C(-2, 4)$ ,  $D(8, -1)$
- $C(-3, -3)$ ,  $D(6, 3)$

### Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy punkty  $A, B, C$  są współliniowe.

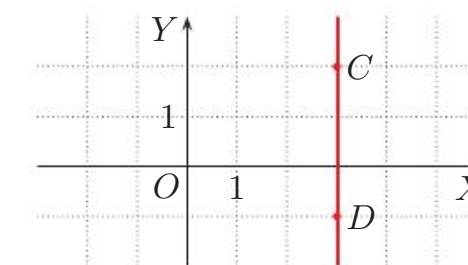
- $A(0, 1)$ ,  $B(6, 2)$ ,  $C(12, 3)$
- $A(8, 3)$ ,  $B(6, 4)$ ,  $C(-2, 8)$
- $A(-2, 6)$ ,  $B(2, -2)$ ,  $C(5, -7)$
- $A(-4, 5)$ ,  $B(7, 5)$ ,  $C(7, 2\sqrt{6})$

### Przykład 2

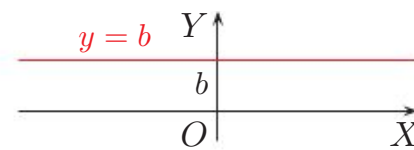
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $C(3, 2)$  i  $D(3, -1)$ .

Do szukanej prostej należą wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej równej 3. Jej równanie ma postać  $x = 3$ .

Zwróć uwagę na to, że prosta równoległa do osi  $OY$  nie jest wykresem funkcji (dlaczego?), a jej równania nie można zapisać w postaci kierunkowej.



Równanie prostej  $y = b$  (równoległej do osi  $OX$ ) jest równaniem w postaci kierunkowej. Dla tej prostej współczynnik  $a = 0$ .



### Ćwiczenie 3

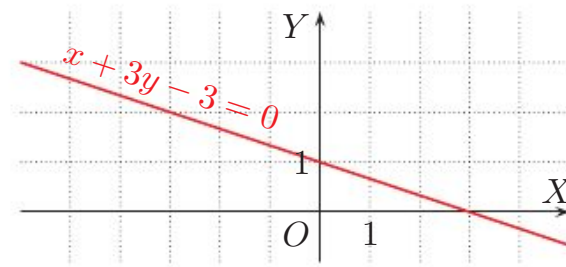
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $C$  i  $D$ . Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej?

- a)  $C(-3, 4)$ ,  $D(-3, 6)$       b)  $C(-5, -3)$ ,  $D(7, -3)$       c)  $C(8, -2)$ ,  $D(8, 6)$

### Przykład 3

Naszkicuj prostą daną za pomocą równania  $x + 3y - 3 = 0$ .

Równanie przekształcamy do postaci kierunkowej  $y = -\frac{1}{3}x + 1$  i następnie szkicujemy prostą.



### Definicja

Równanie  $Ax + By + C = 0$ , gdzie  $A \neq 0$  lub  $B \neq 0$ , nazywamy **równaniem ogólnym prostej**.

Równanie każdej prostej na płaszczyźnie (również prostej równoległej do osi  $OY$ ) można zapisać w postaci  $Ax + By + C = 0$ .

### Ćwiczenie 4

Naszkicuj prostą daną równaniem ogólnym.

- a)  $-x + 2y - 4 = 0$       b)  $6x + 3y - 9 = 0$       c)  $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + 2 = 0$

Jedna prosta może mieć wiele równań ogólnych. Na przykład każde z poniższych równań opisuje tę samą prostą.

- I.  $2x + y - 4 = 0$       II.  $4x + 2y - 8 = 0$       III.  $x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

Zauważ, że po przekształceniu do postaci kierunkowej w każdym z powyższych przykładów otrzymujemy równanie  $y = -2x + 4$ .

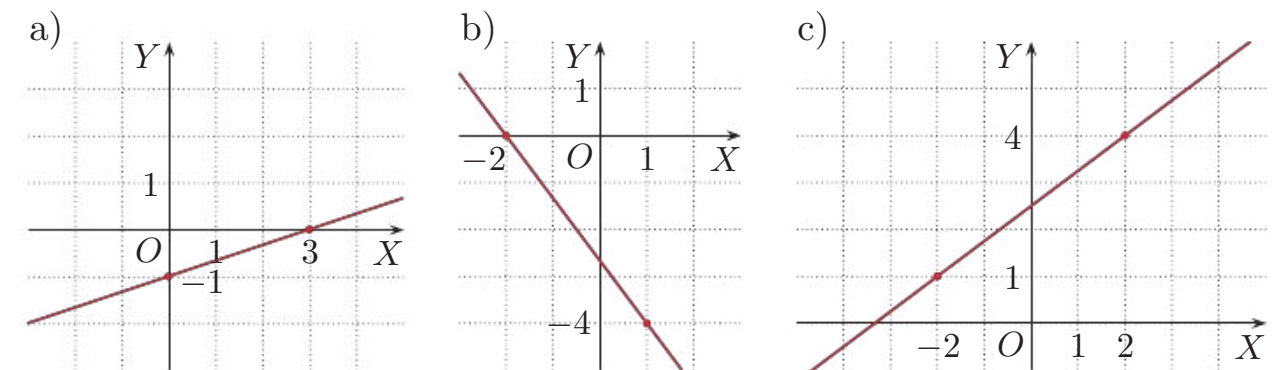
### Ćwiczenie 5

Które równania opisują tę samą prostą?

- l:  $-\frac{3}{4}x + y - 1 = 0$       n:  $9x - 12y + 12 = 0$       p:  $3x - 4y + 4 = 0$   
m:  $-3x + 4y + 4 = 0$       o:  $6x - 8y + 12 = 0$       r:  $-\frac{3}{2}x + 2y - 2 = 0$

## Zadania

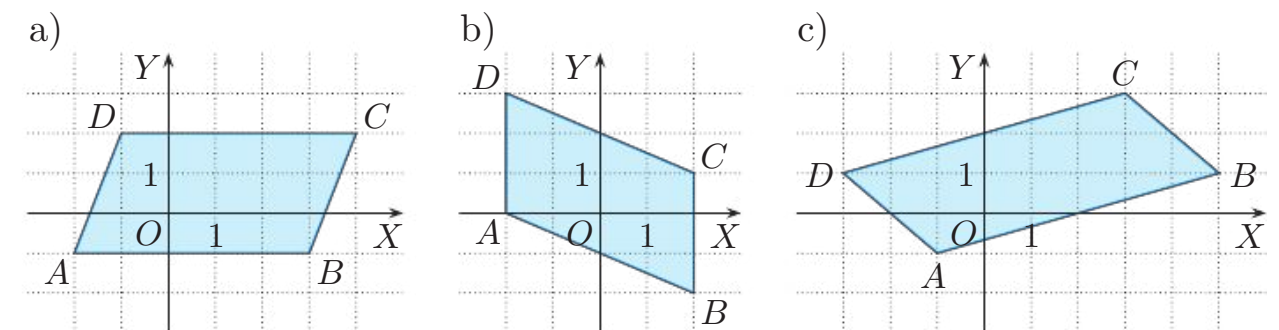
1. Równanie prostej przedstawionej na rysunku zapisz w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej. Czy punkt  $A(-10, -5)$  lub punkt  $B(-3, \frac{8}{3})$  należy do tej prostej?



2. Naszkicuj prostą o podanym równaniu. Wyznacz współrzędne punktów, w których przecina ona osie układu współrzędnych.

- a)  $2x - y + 2 = 0$       c)  $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$       e)  $-4(y - \frac{1}{4}x) = 16$   
b)  $10x + 5y - 5 = 0$       d)  $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 2\frac{1}{4} = 0$       f)  $2(1 - \frac{1}{3}y) - 4x = 0$

3. Zapisz w postaci ogólnej równania prostych, w których są zawarte boki równoległoboku  $ABCD$ .



4. Dla jakiej wartości parametru  $m$  prosta o podanym równaniu jest równoległa do prostej  $4x + 3y + 7 = 0$ ?

- a)  $mx + 6y - 1 = 0$       c)  $(m - \frac{1}{2})x - \frac{1}{2}y = 0$       e)  $x + my + 9 = 0$   
b)  $(2m + 1)x - y = 0$       d)  $\frac{m}{6}x - \frac{3}{4}y + 3 = 0$       f)  $\frac{1}{3}x - 2my = 0$

- D** 5. Uzasadnij podane poniżej twierdzenie.

Jeśli równania ogólne  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  i  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  opisują tę samą prostą oraz  $A_2$ ,  $B_2$  i  $C_2$  są różne od zera, to  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .



6. Podstawy trapezu są zawarte w prostych  $l_1$  i  $l_2$ . Korzystając z podanego obok twierdzenia, wyznacz wartości parametru  $m$ .

a)  $l_1: -6x + 4y + 3 = 0$ ,  
 $l_2: mx + (m + 1)y - 4 = 0$

b)  $l_1: 9x + 8y + 1 = 0$ ,  $l_2: -m^2x + (1 - m^2)y + 4 = 0$

Proste o równaniach:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

oraz

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

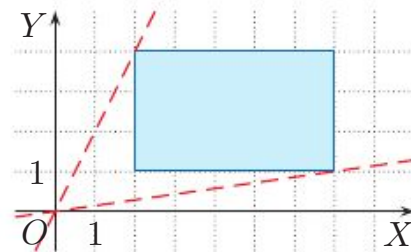
są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1B_2 = A_2B_1$$

7. Dla jakich wartości parametru  $m$  prosta  $2x - y + m = 0$  ma punkt wspólny z odcinkiem  $AB$ ?

a)  $A(-2, 0)$ ,  $B(0, -4)$       b)  $A(0, 2)$ ,  $B(6, 2)$

8. Ile punktów wspólnych, w zależności od parametru  $m$ , ma prosta  $mx - y = 0$  z bokami narysowanego obok prostokąta?



9. Uzasadnij, że jeśli  $a \neq 0$  i  $b \neq 0$ , to równanie prostej  $y = ax + b$  można zapisać w postaci:

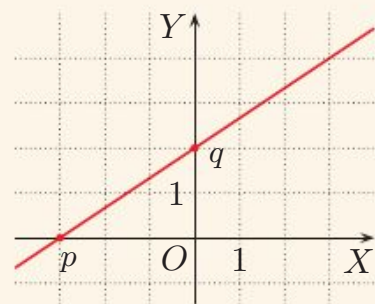
$$\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{b} = 1$$

#### Czy wiesz, że...

Równanie prostej przecinającej oś  $OX$  w punkcie  $(p, 0)$ , gdzie  $p \neq 0$ , i oś  $OY$  w punkcie  $(0, q)$ , gdzie  $q \neq 0$ , można zapisać w postaci:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Jest to **równanie odcinkowe prostej**.



10. Wyznacz punkty, w których prosta o podanym równaniu odcinkowym przecina osie układu współrzędnych. Narysuj tę prostą w układzie współrzędnych i wyznacz jej równanie kierunkowe.

a)  $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$       b)  $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$       c)  $\frac{x}{-1} + \frac{y}{4} = 1$

11. Dane jest równanie prostej w postaci odcinkowej. Zapisz to równanie w postaci kierunkowej i określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest ta prosta.

a)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$       b)  $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$       c)  $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} = 1$

12. Wyznacz równanie odcinkowe prostej o podanym równaniu kierunkowym.

a)  $y = 2x + 6$       b)  $y = \frac{2}{3}x - 4$       c)  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

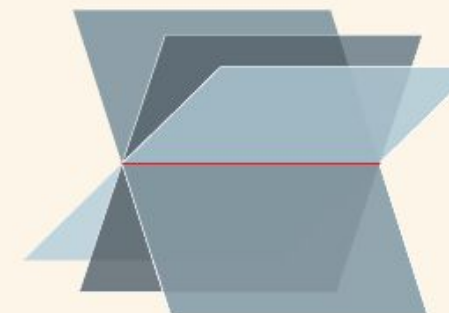
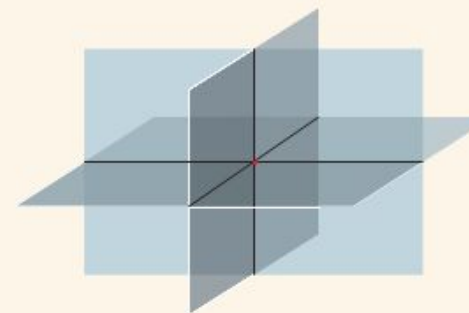
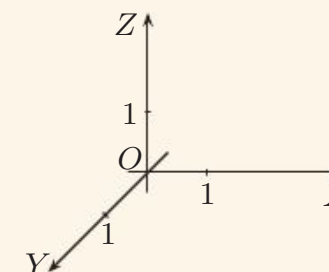
#### Dowiedz się więcej

##### Płaszczyzna w trójwymiarowym układzie współrzędnych

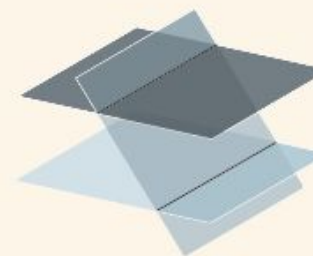
Równanie  $Ax + By + Cz + D = 0$ , gdzie  $A \neq 0$  lub  $B \neq 0$  lub  $C \neq 0$ , opisuje płaszczyznę w przestrzeni z trójwymiarowym układem współrzędnych.

Rozwiązując układ trzech takich równań, szukamy punktów wspólnych trzech płaszczyzn.

Na pierwszym rysunku poniżej przedstawiono przypadek, gdy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, na drugim – gdy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, a płaszczyzny się nie pokrywają.



Na poniższych rysunkach przedstawiono przykładowe sytuacje, gdy układ równań jest sprzeczny.



- Wyznacz współrzędne punktu wspólnego płaszczyzn  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$ .  
 a)  $P_1: 2x - y + z - 4 = 0$ ,  $P_2: 4x + y - z - 2 = 0$ ,  $P_3: 3x - 3y + z - 1 = 0$   
 b)  $P_1: x + 2y + z - 7 = 0$ ,  $P_2: 2x + y - z - 2 = 0$ ,  $P_3: x + 2y - z - 9 = 0$
- Podaj równanie płaszczyzny zawierającej osie układu współrzędnych:  
 a)  $OX$  i  $OY$ ,      b)  $OX$  i  $OZ$ ,      c)  $OY$  i  $OZ$ .
- Wyznacz równanie płaszczyzny, do której należą punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$ .  
 a)  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(2, 1, -2)$ ,  $C(1, 0, 1)$       b)  $A(2, 0, 2)$ ,  $B(1, 3, 5)$ ,  $C(3, 2, 9)$
- Podaj równania płaszczyzn, w których są zawarte ściany prostopadłościanu o wierzchołkach:  
 $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 2, 0)$ ,  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 2, 3)$ ,  $(1, 0, 3)$ ,  $(1, 2, 3)$

## 5.4. Współczynnik kierunkowy prostej

### Twierdzenie

Współczynnik kierunkowy prostej  $y = ax + b$  przechodzącej przez punkty  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$ , gdzie  $x_1 \neq x_2$ , dany jest wzorem:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

### Dowód

Podstawiamy współrzędne punktów  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  do równania prostej i zapisujemy układ równań:

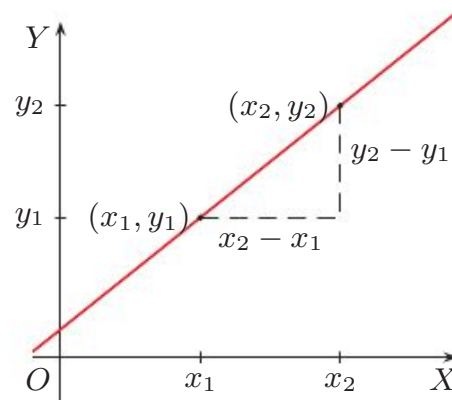
$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

czyli  $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ , skąd:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{Uwaga: } x_1 \neq x_2$$



### Przykład 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty  $A(-2, 3)$  i  $B(4, 6)$ .

Mamy  $(x_1, y_1) = (-2, 3)$  oraz  $(x_2, y_2) = (4, 6)$ .

Zatem współczynnik kierunkowy prostej  $y = ax + b$  przechodzącej przez punkty  $A$  i  $B$  jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### Ćwiczenie 1

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej, do której należą punkty  $A$  i  $B$ .

- a)  $A(3, 7), B(9, 12)$       b)  $A(3, 5), B(-7, -5)$       c)  $A(12, -2), B(6, 8)$

### Ćwiczenie 2

Czy prosta przechodząca przez punkty  $P(4, 8)$  i  $Q(-2, -1)$  jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty  $R$  i  $S$ ?

- a)  $R(0, 6), S(-4, 0)$       b)  $R(-2, 4), S(1, 7)$       c)  $R(5, -\frac{5}{2}), S(8, 2)$

### D Ćwiczenie 3

Uzasadnij, że czworokąt  $ABCD$  o wierzchołkach  $A(-3, -5)$ ,  $B(6, -2)$ ,  $C(4, 2)$  oraz  $D(-5, -1)$  jest równoległobokiem.

### Interpretacja geometryczna współczynnika kierunkowego

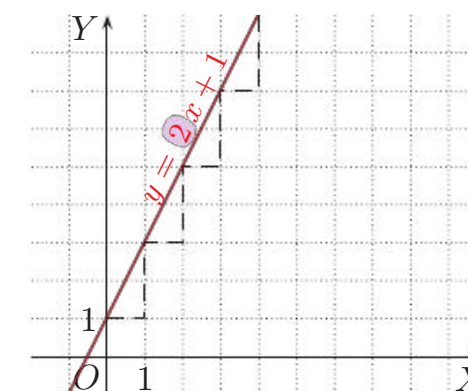
Współczynnik kierunkowy prostej pozwala określić, jak bardzo jest ona „stroma”.

### Przykład 2

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = 2x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o 2 jednostki.



### Ćwiczenie 4

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a)  $y = x + 2$

b)  $y = 3x + 2$

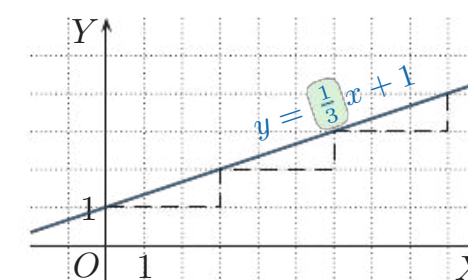
c)  $y = 4x + 2$

### Przykład 3

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o  $\frac{1}{3}$  jednostki (czyli wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o 1 jednostkę).



### Ćwiczenie 5

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a)  $y = \frac{1}{2}x + 2$

b)  $y = \frac{1}{4}x + 2$

c)  $y = \frac{1}{7}x + 2$

### Przykład 4

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

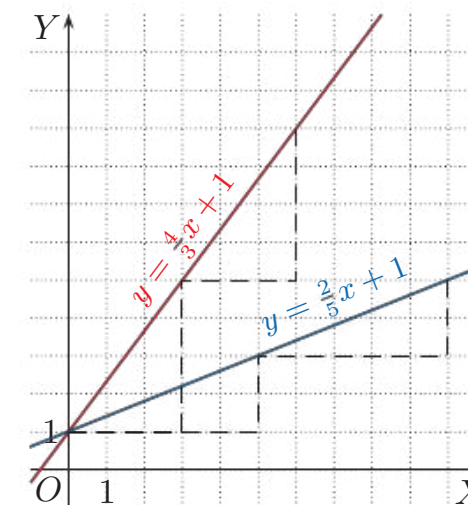
$$y = \frac{4}{3}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada wzrost wartości funkcji o  $\frac{4}{3}$  jednostki (czyli wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada wzrost wartości funkcji o 4 jednostki).

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = \frac{2}{5}x + 1$$

wzrostowi argumentu o 5 jednostek odpowiada wzrost wartości funkcji o 2 jednostki.





### Ćwiczenie 6

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a)  $y = \frac{5}{3}x - 2$       b)  $y = \frac{3}{4}x - 2$       c)  $y = \frac{3}{5}x - 2$

Jeśli prosta będąca wykresem funkcji liniowej ma ujemny współczynnik kierunkowy, to ze wzrostem argumentu funkcji maleje jej wartość.

### Przykład 5

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

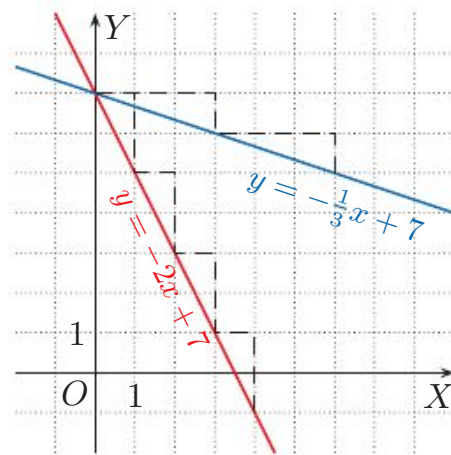
$$y = -2x + 7$$

wzrostowi argumentu o 1 jednostkę odpowiada spadek wartości funkcji o 2 jednostki.

W przypadku prostej będącej wykresem funkcji:

$$y = -\frac{1}{3}x + 7$$

wzrostowi argumentu o 3 jednostki odpowiada spadek wartości funkcji o 1 jednostkę.



### Ćwiczenie 7

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a)  $y = -3x + 4$       b)  $y = -4x + 4$       c)  $y = -\frac{1}{2}x + 4$       d)  $y = -\frac{1}{4}x + 4$

### Ćwiczenie 8

Wykonaj rysunek i przedstaw interpretację geometryczną współczynnika kierunkowego podanej prostej.

a)  $y = -\frac{4}{3}x - 3$       b)  $y = -\frac{2}{5}x - 3$       c)  $y = -\frac{3}{7}x - 3$       d)  $y = -\frac{4}{7}x - 3$

### Przykład 6

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $P(3, -7)$  i  $Q(-2, 3)$ .

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej  $PQ$  o równaniu  $y = ax + b$ :

$$a = \frac{3 - (-7)}{-2 - 3} = \frac{10}{-5} = -2$$

Następnie do równania  $y = -2x + b$  podstawiamy współrzędne jednego z punktów  $P$  lub  $Q$ . Dla  $P(3, -7)$  otrzymujemy:  $-7 = -2 \cdot 3 + b$ , stąd  $b = -1$ . Równanie prostej ma zatem postać  $y = -2x - 1$ .

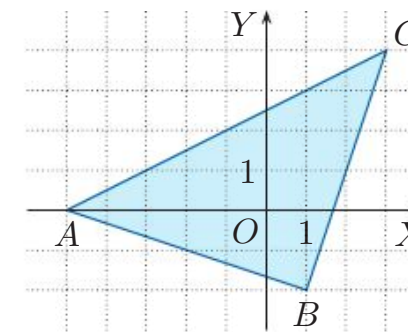
### Ćwiczenie 9

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $P$  i  $Q$ .

a)  $P(4, 5), Q(-4, 9)$       b)  $P(4, -13), Q(2, -7)$       c)  $P(3, 3), Q(1, \frac{7}{3})$

## Zadania

- Odczytaj z rysunku współrzędne wierzchołków trójkąta  $ABC$ . Podaj współczynniki kierunkowe prostych zawierających jego boki.

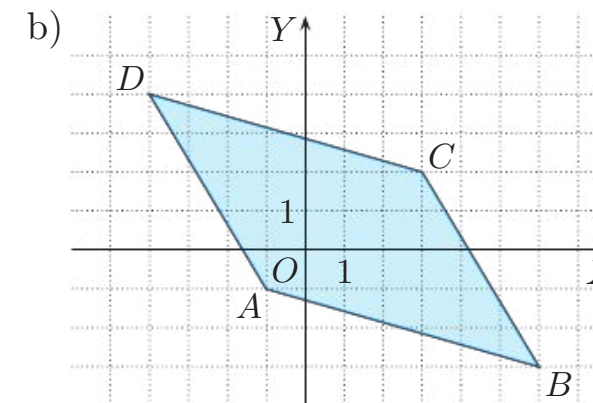
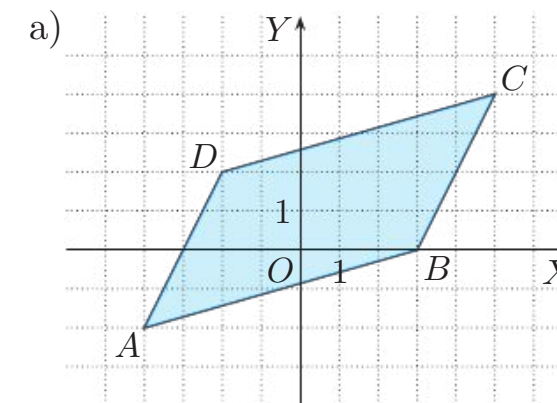


- Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których są zawarte boki czworokąta  $ABCD$ , gdzie  $A(-4, -2), B(2, 1), C(0, 3), D(-5, 4)$ .

- Oblicz współczynnik kierunkowy i wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty  $P$  i  $Q$ .

a)  $P(3, 4), Q(7, 6)$       c)  $P(\frac{1}{3}, 1), Q(\frac{1}{2}, -1)$       e)  $P(-2, -6), Q(8, -6)$   
b)  $P(-2, 7), Q(2, -1)$       d)  $P(3, \frac{7}{3}), Q(2, \frac{1}{3})$       f)  $P(\sqrt{3}, 4), Q(3\sqrt{3}, 10)$

- D** 4. Oblicz współczynniki kierunkowe i wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta  $ABCD$ . Uzasadnij, że jest on równoległobokiem.



- D** 5. Oblicz współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się boki czworokąta  $PQRS$ . Uzasadnij, że czworokąt ten jest trapezem i nie jest równoległobokiem.

a)  $P(0, -5), Q(9, 1), R(6, 11), S(-6, 3)$   
b)  $P(-8, 5), Q(-6, -2), R(4, -6), S(7, -1)$

- Dane są punkty  $A, B, C$  i  $D$ . Wyznacz wartość parametru  $m$ , dla której proste  $AB$  i  $CD$  są równoległe.

a)  $A(-1, -3), B(9, 2), C(5, 4), D(1, m)$   
b)  $A(9, m), B(4, -m), C(9, 2), D(3, 6)$

- Dane są punkty  $K(-4, 5), L(4, -1), M(0, 8), N(m, \frac{1}{4}m)$ . Wyznacz wartość parametru  $m$ , dla której proste  $KL$  i  $MN$  są równoległe.



8. Dany jest czworokąt o wierzchołkach  $A(-2, 4)$ ,  $B(-3, -2)$ ,  $C(4, 1 - m^2)$  i  $D(0, 4)$ . Współczynniki kierunkowe prostych, w których zawierają się przekątne czworokąta  $ABCD$ , są liczbami przeciwnymi. Wyznacz wartość parametru  $m$ .

- D** 9. Udowodnij poniższe twierdzenie.

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym  $a$  przechodzącej przez punkt  $(x_1, y_1)$  można zapisać w postaci  $y - y_1 = a(x - x_1)$ .

10. Zapisz w postaci  $y - y_1 = a(x - x_1)$  równanie prostej równoległej do prostej  $l$  i przechodzącej przez punkt  $P$ .

a)  $l: y = 2x + 8, P(2, 1)$       c)  $l: y = -\frac{7}{3}x + 8, P(2, -9)$

b)  $l: y = 7x - \frac{1}{4}, P(-3, -5)$       d)  $l: y = \sqrt{2}x - 7, P(-1, \sqrt{2})$

- D** 11. Uzasadnij, że jeśli prosta nie jest równoległa do osi  $OY$ , to jej równanie można zapisać w postaci:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

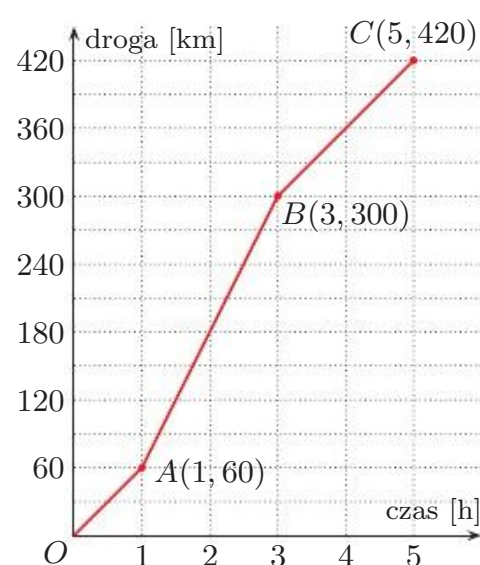
gdzie  $(x_1, y_1)$  i  $(x_2, y_2)$  są różnymi punktami należącymi do tej prostej.

12. Przeczytaj podaną w ramce informację.

Na wykresie przedstawiono, jak zmieniła się droga podczas pięciogodzinnej jazdy samochodem. Punkty  $A$  i  $B$  wykresu odpowiadają początkowi i końcowi jazdy autostradą. Aby obliczyć, z jaką prędkością jechał wtedy samochód, korzystamy ze wzoru  $v = \frac{s}{t}$ :

$$v = \frac{300 - 60}{3 - 1} = 120 \text{ [km/h]}$$

Zwróć uwagę na to, że prędkość  $v$  jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej  $AB$ .



- a) Oblicz współczynniki kierunkowe prostych  $OA$  i  $BC$ . Z jaką średnią prędkością jechał samochód w ciągu pierwszej godziny jazdy, a z jaką w ciągu dwóch ostatnich godzin?
- b) Oblicz współczynnik kierunkowy prostej  $OC$  i podaj jego interpretację.

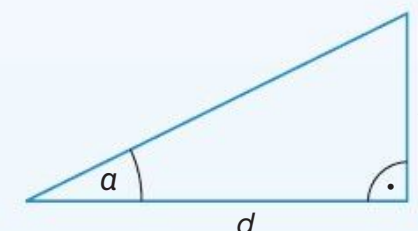
## Nachylenie trasy

Współczynnik kierunkowy prostej mówi nam o jej nachyleniu, o tym, jak bardzo ta prosta jest „stroma”.

### Nachylenie trasy

Nachylenie trasy często podaje się w procentach. Wyraża się je wzorem:

$$n = \frac{h}{d} \cdot 100\%$$



Nachylenie równe 100% odpowiada kątowi  $45^\circ$ , a nachylenie 10% – kątowi około  $6^\circ$ .

| Kąt $\alpha$ | $5^\circ$ | $10^\circ$ | $15^\circ$ | $20^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ |
|--------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Nachylenie   | ok. 9%    | ok. 18%    | ok. 27%    | ok. 36%    | ok. 58%    | 100%       |

### Skocznia narciarska

Największa skocznia narciarska na świecie znajduje się w Vikersund w Norwegii. Ma ponad pół kilometra długości: od najwyższej belki startowej do końca odjazdu jest około 570 metrów. Maksymalne nachylenie zeskoku to  $38^\circ$ .

- 1 Wyszukaj informacje dotyczące nachylenia poszczególnych części skoczni narciarskiej: rozbiegu, progu, grzbietu skoczni i zeskoku.





## 5.5. Warunek prostokątności prostych

### D Przykład 1

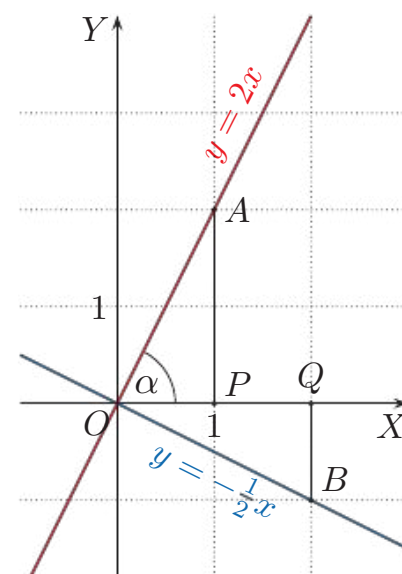
Wykaż, że proste  $y = 2x$  i  $y = -\frac{1}{2}x$  są prostopadłe.

Punkt  $A(1, 2)$  należy do prostej  $y = 2x$ , a punkt  $B(2, -1)$  do prostej  $y = -\frac{1}{2}x$  (rysunek obok). Trójkąty prostokątne  $OPA$  i  $BQO$  mają przyprostokątne tej samej długości, są więc przystające.

Przyjmijmy, że  $|\angle AOP| = \alpha$ , wówczas w trójkącie  $BQO$  mamy:  $|\angle OBQ| = \alpha$  oraz  $|\angle BOQ| = 90^\circ - \alpha$ . Stąd otrzymujemy:

$$|\angle AOB| = |\angle AOP| + |\angle BOQ| = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$$

Zatem proste  $y = 2x$  i  $y = -\frac{1}{2}x$  są prostopadłe.



Symbolem  $|\angle AOB|$  oznaczamy miarę kąta  $AOB$ .

### D Ćwiczenie 1

Udowodnij, stosując metodę pokazaną w przykładzie 1., że podane proste są prostopadłe.

a)  $y = 3x$  i  $y = -\frac{1}{3}x$     b)  $y = \frac{3}{4}x$  i  $y = -\frac{4}{3}x$     c)  $y = \sqrt{2}x$  i  $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

### Twierdzenie

Proste  $y = a_1x + b_1$  ( $a_1 \neq 0$ ) i  $y = a_2x + b_2$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_2 = -\frac{1}{a_1} \quad (\text{czyli } a_1 \cdot a_2 = -1)$$

### Przykład 2

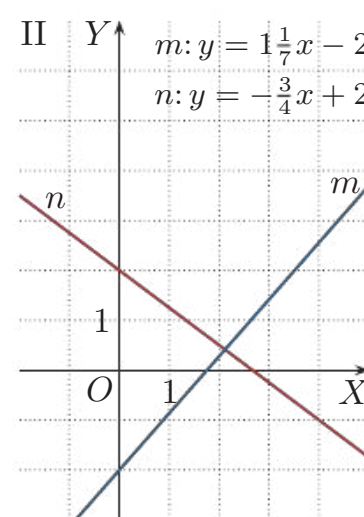
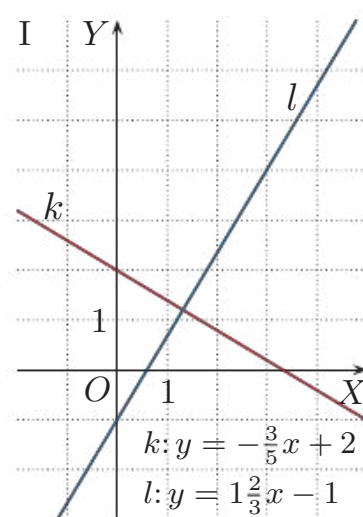
Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunkach I i II są prostopadłe.

I. Współczynniki kierunkowe prostych  $k$  i  $l$  są odpowiednio równe:  $a_1 = -\frac{3}{5}$  i  $a_2 = 1\frac{2}{3}$ .

$a_1 \cdot a_2 = -1$ , więc proste  $k$  i  $l$  są prostopadłe.

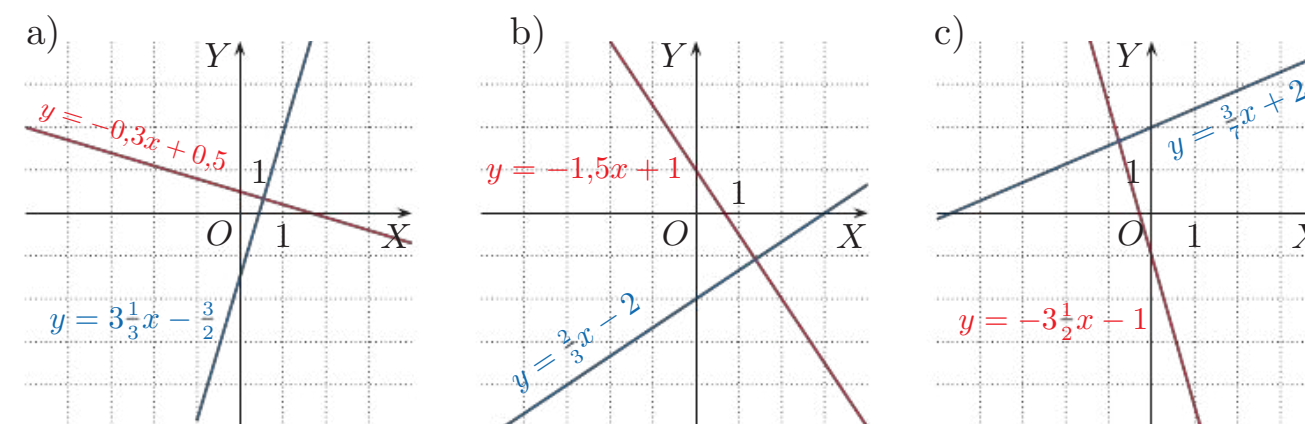
II. Współczynniki kierunkowe prostych  $m$  i  $n$  są odpowiednio równe:  $a_1 = 1\frac{1}{7}$  i  $a_2 = -\frac{3}{4}$ .

$a_1 \cdot a_2 \neq -1$ , więc proste  $m$  i  $n$  nie są prostopadłe.



### Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.



### Przykład 3

Prosta  $k$  jest prostopadła do prostej  $y = \frac{3}{8}x - 4$ . Oblicz współczynnik kierunkowy prostej  $k$ .

Oznaczmy przez  $a$  współczynnik kierunkowy prostej  $k$ . Wówczas:

$$a = \frac{-1}{\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$$

### Ćwiczenie 3

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do podanej prostej.

a)  $y = \frac{1}{5}x + 4$     b)  $y = 9x$     c)  $y = -2\frac{1}{3}x - 3$     d)  $y = \frac{\sqrt{2}}{6}x - 1$

### D Ćwiczenie 4

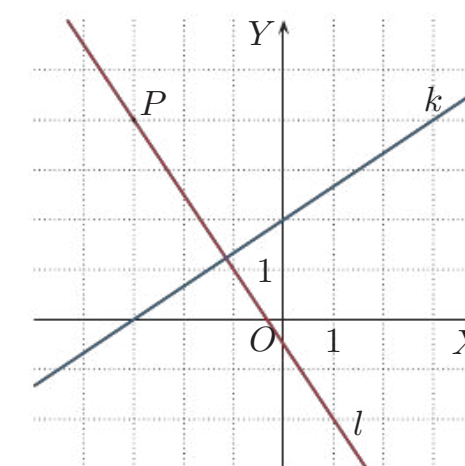
Uzasadnij, że jeśli proste  $y = a_1x$  i  $y = a_2x$  są prostopadłe, to dla dowolnych liczb  $b_1, b_2$  prostopadłe są też proste  $y = a_1x + b_1$  i  $y = a_2x + b_2$ .

### Przykład 4

Prosta  $k$  ma równanie  $y = \frac{2}{3}x + 2$ . Wyznacz równanie prostej  $l$  prostopadłej do prostej  $k$  i przechodzącej przez punkt  $P(-3, 4)$ .

Równanie prostej  $l$  ma postać  $y = -\frac{3}{2}x + b$  (ponieważ  $l \perp k$ ). Podstawiamy do równania współrzędne punktu  $P(-3, 4)$  i otrzymujemy  $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$ , stąd  $b = -\frac{1}{2}$ .

Prosta  $l$  ma zatem równanie  $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ .



### Ćwiczenie 5

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do podanej prostej i przechodzącej przez punkt  $P$ .

a)  $y = -3x + 2$ ,  $P(0, -1)$     b)  $y = -0,1x$ ,  $P(1, 9)$     c)  $y = \frac{3}{7}x + 9$ ,  $P(3, 2)$

**Przykład 5**

Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba 3, a jej wykresem jest prosta  $l$  prostopadła do prostej  $4x + 3y - 7 = 0$ . Wyznacz równanie prostej  $l$ .

Równanie  $4x + 3y - 7 = 0$  przekształcamy do postaci kierunkowej:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

Stąd równanie prostej  $l$  ma postać  $y = \frac{3}{4}x + b$ . Podstawiamy współrzędne punktu  $(3, 0)$  i otrzymujemy  $0 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$ , czyli  $b = -\frac{9}{4}$ .

Prosta  $l$  ma zatem równanie  $y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$ .

**Ćwiczenie 6**

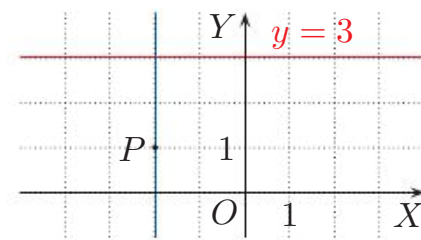
Miejszem zerowym funkcji liniowej jest liczba  $-2$ . Wyznacz równanie prostej będącej wykresem tej funkcji i jednocześnie prostopadłej do podanej prostej.

a)  $3x + 2y + 6 = 0$       b)  $2x - \frac{1}{2}y - 5 = 0$       c)  $-\frac{3}{4}x + \frac{9}{8}y + 3 = 0$

**Przykład 6**

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej  $y = 3$  i przechodzącej przez punkt  $P(-2, 1)$ .

Powyższe warunki spełnia prosta  $x = -2$ .

**Ćwiczenie 7**

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $P(6, -5)$  i prostopadłej do podanej prostej.

a)  $y = -3$       b)  $x = -3$       c)  $x = -2\sqrt{3}$

**Zadania**

1. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej  $l$  i przechodzącej przez punkt  $P$ .

a)  $l: y = -3x + 1, P(3, -2)$       c)  $l: y = -\frac{4}{3}x + 11, P(-4, -2)$   
b)  $l: y = \frac{2}{3}x - 3, P(4, 1)$       d)  $l: y = 3\frac{1}{2}x - 3, P(14, -4)$

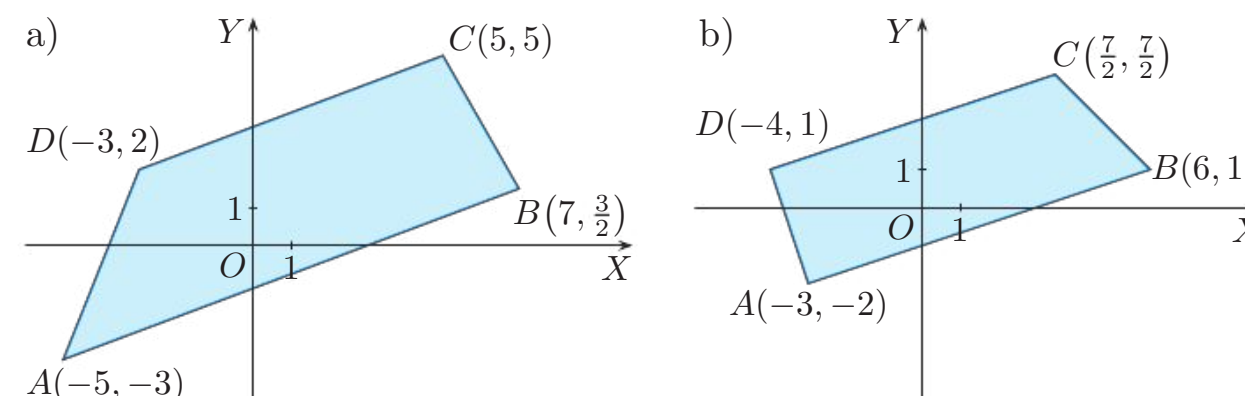
2. Wyznacz równania prostych  $AB$ ,  $AC$  i  $BC$ . Czy trójkąt  $ABC$  jest prostokątny?

a)  $A(1, 5), B(4, 2), C(7, 5)$       c)  $A(-7, -2), B(8, -2), C(-2, 3)$   
b)  $A(-2, -1), B(0, -3), C(4, 5)$       d)  $A(4\frac{1}{2}, 6), B(-2, -\frac{1}{2}), C(4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

3. Punkty  $A, B, C$  i  $D$  są kolejnymi wierzchołkami rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte przekątne tego rombu.

a)  $A(-2, -6), B(5, -3), C(8, 4)$       b)  $A(-1, -2), B(6, -1), D(-6, 3)$

**D** 4. Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku czworokąt  $ABCD$  jest trapezem. Czy jest to trapez prostokątny?



**D** 5. Uzasadnij, że czworokąt  $PQRS$  jest prostokątem.

a)  $P(-5, 0), Q(-1, -6), R(8, 0), S(4, 6)$   
b)  $P(-8, -2), Q(6, -8), R(9, -1), S(-5, 5)$

**D** 6. Punkty  $A(0, 0)$  i  $C(2, 8)$  są wierzchołkami prostokąta  $ABCD$ , którego przekątna  $BD$  jest zawarta w prostej  $y = -\frac{1}{4}x + 4\frac{1}{4}$ . Uzasadnij, że prostokąt ten jest kwadratem. Oblicz jego obwód i pole.

7. a) Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$ , którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej  $y = 3x + 10$ , a odcinek o końcach  $B(-5, -5), C(3, -1)$  jest przyprostokątną. Wyznacz współrzędne wierzchołka  $A$ .

b) Punkty  $A(-5, 4)$  i  $C(4, -3)$  są wierzchołkami trójkąta  $ABC$ , a jego bok  $AB$  jest równoległy do osi  $OY$ . Prosta  $y = -3x - 11$  zawiera jedną z wysokości tego trójkąta. Wyznacz współrzędne wierzchołka  $B$ .

8. Proste prostopadłe  $l_1$  i  $l_2$  przecinają się w punkcie  $(2, 4)$ , a jedna z nich przecina oś  $OX$  w punkcie  $(-6, 0)$ . Wyznacz równania prostych  $l_1$  i  $l_2$ . O ile procent jest większe pole trójkąta ograniczonego prostymi  $l_1, l_2$  i osią  $OX$  od pola trójkąta ograniczonego tymi prostymi oraz osią  $OY$ ?

**9.** Korzystając z podanej obok informacji, sprawdź, czy proste  $k$  i  $l$  są prostopadłe.

a)  $k: 3x - 4y + 9 = 0, l: \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 0$   
b)  $k: 4x + 6y - 3 = 0, l: \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = 0$

Proste  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  oraz  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ .

**10.** Dla jakich wartości parametru  $m$  proste  $l_1, l_2$  są prostopadłe?

a)  $l_1: x + my - 9 = 0, l_2: 0,1x - 0,02y + 3 = 0$   
b)  $l_1: 4x - 9y - 7 = 0, l_2: (4m^2 - 4)x - m^2y + 17 = 0$

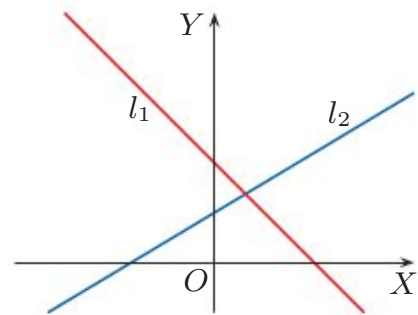


## 5.6. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

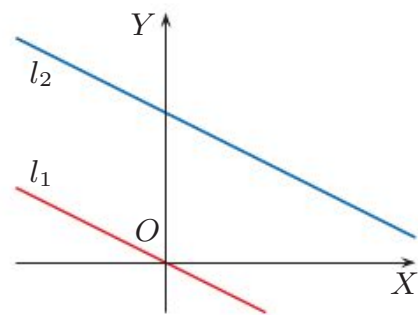
Rozpatrzmy proste  $l_1$  i  $l_2$  opisane równaniami układu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

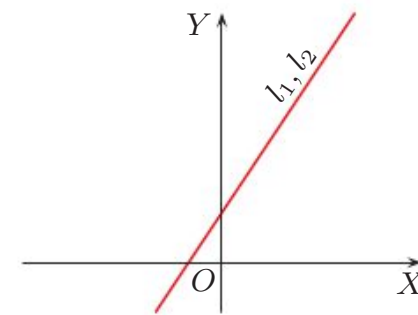
Współrzędne punktów  $(x, y)$  należących jednocześnie do obu prostych są rozwiązaniami tego układu. Może zachodzić jedna z poniższych sytuacji.



**Układ oznaczony** (ma jedno rozwiązanie) – proste przecinają się w jednym punkcie.



**Układ spreczny** (nie ma rozwiązań) – proste są równoległe i różne.



**Układ nieoznaczony** (ma nieskończenie wiele rozwiązań) – proste się pokrywają.

### Przykład 1

Rozwiąż graficznie układ równań:

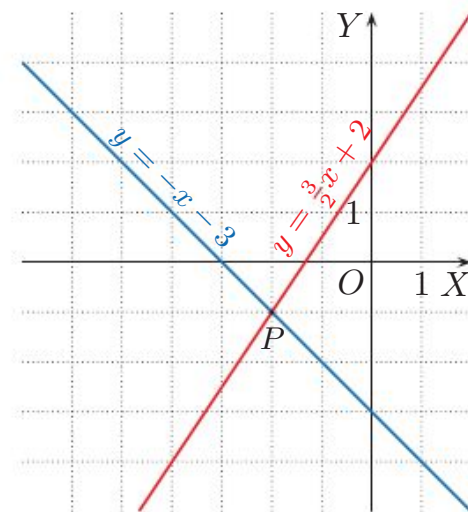
$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$$

Przekształcamy równania układu do postaci kierunkowej:

$$\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = \frac{3}{2}x + 2 \end{cases}$$

Szkicujemy obie proste i odczytujemy współrzędne ich punktu przecięcia:  $P(-2, -1)$ .

Rozwiązaniem układu jest więc para liczb:  $x = -2$ ,  $y = -1$  (poprawność rozwiązania można sprawdzić, podstawiając je do układu równań).



### Ćwiczenie 1

Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + y = 1 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x - y = 3 \\ -x + 2y = 8 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \end{array}$$

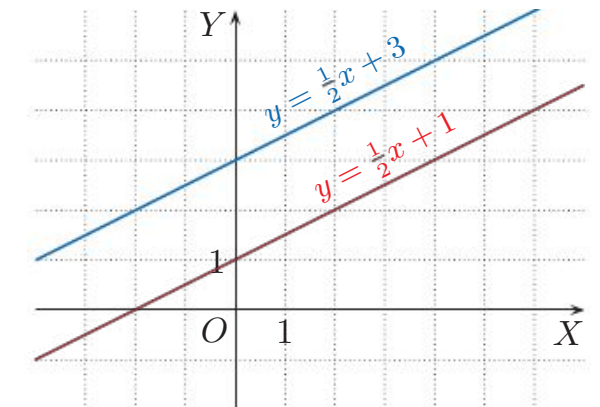
### Przykład 2

Rozwiąż graficznie układ równań  $\begin{cases} 2x - 4y = -4 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$

Równania układu przekształcamy do postaci kierunkowej i szkicujemy obie proste.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$$

Są to proste równoległe – nie mają punktów wspólnych. Zatem układ równań nie ma rozwiązania – jest spreczny.



### Przykład 3

Rozwiąż graficznie układ równań:

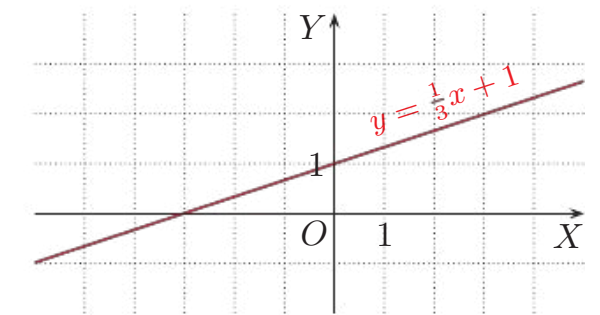
$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 2x - 6y = -6 \end{cases}$$

Obydwa równania opisują tę samą prostą o równaniu kierunkowym  $y = \frac{1}{3}x + 1$ .

Układ ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań. Są nimi wszystkie pary liczb  $(x, \frac{1}{3}x + 1)$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ .

Rozwiązaniami tego układu są na przykład pary:  $(-3, 0)$ ,  $(0, 1)$  czy  $(3, 2)$ .

Podaj trzy inne pary liczb będące rozwiązaniami tego układu równań.



### Ćwiczenie 2

Rozwiąż graficznie układ równań.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 0,5y - x = -3 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} -3x + 2y = 2 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases} \end{array}$$

Czasami nie musimy przekształcać równań układu, aby określić, czy jest on oznaczony, nieoznaczony czy spreczny. Wystarczy przyjrzeć się współczynnikom przy niewiadomych oraz wyrazom wolnym.

### Ćwiczenie 3

Określ, bez rozwiązywania układu równań, czy jest to układ oznaczony, nieoznaczony czy spreczny.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -3x + 2y = 1 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -3x + y = -4 \end{cases} \end{array}$$

## Zadania

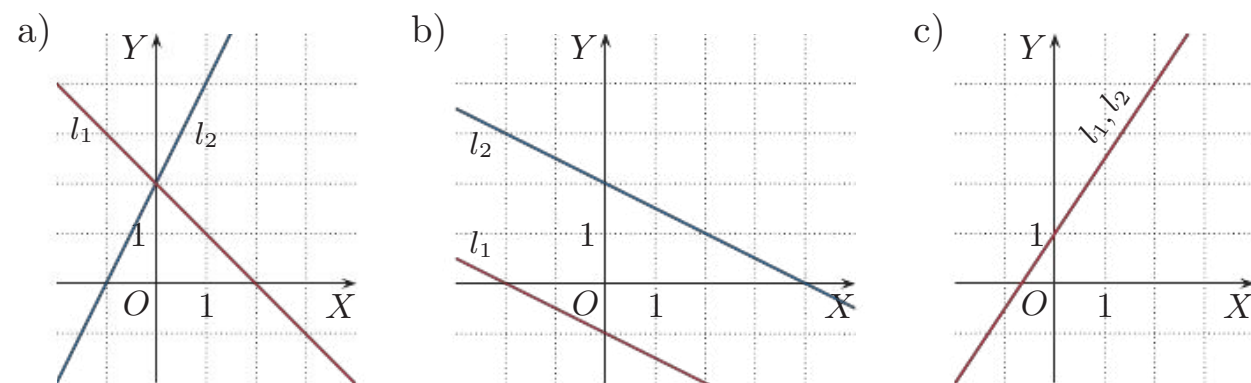
1. Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 3 \\ y + x = 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -\frac{4}{3}x + 2y = -4 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} y = -2x + 2 \\ 4y + 3x = -12 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} y - 2x = 4 \\ 9x - 2y = -3 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 3y + x = 9 \\ y + 3 = -\frac{1}{3}x \end{cases} \end{array}$$

2. Rozwiąż graficznie układ równań. Sprawdź otrzymane rozwiązanie.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ x = 3 + 2y \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 0,5x + 2y = 1 \\ y = 2 - x \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} y = 6x + 2 \\ \frac{3-y}{2} + 3x = 0 \end{cases} \\ \text{b)} \begin{cases} y = 2x - 2 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x = 6 - y \\ \frac{y-1}{3} = x \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2y - 1 = x \\ 6y - 3x = 3 \end{cases} \end{array}$$

3. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku.



4. Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

Jakie warunki powinny spełniać współczynniki  $a_1, a_2, b_1, b_2$ , aby układ był:

a) nieoznaczony, b) sprzeczny, c) oznaczony?

5. Dla jakich wartości parametru  $k$  układ równań jest oznaczony, dla jakich nieoznaczony, a dla jakich sprzeczny?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - y = 2 \\ kx + 2y = 4 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + ky = 4k \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 4x - y = -1 \\ x - k^2y = \frac{k}{2} \end{cases} \end{array}$$

6. Narysuj równoległobok, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.

a)  $y = x - 2$ ,  $y = x - 6$ ,  $y + 3 = 0$ ,  $y - 2 = 0$

b)  $y = \frac{1}{2}x + 3$ ,  $y = \frac{1}{2}x - 2$ ,  $y = -2x - 7$ ,  $y = -2x + 8$

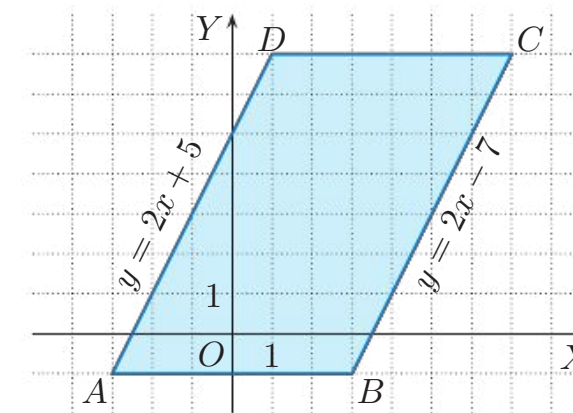
c)  $3x - y = -2$ ,  $3x - y = 4$ ,  $x - 2y = 6$ ,  $x - 2y = -14$

7. Trzy boki trapezu prostokątnego  $ABCD$  są zawarte w prostych  $y = \frac{1}{3}x - 2$ ,  $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ ,  $y = 2x + 3$ . Wierzchołek  $B$  jest punktem przecięcia osi  $OX$  z prostą  $y = \frac{1}{3}x - 2$ . Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trapezu.

8. Dany jest równoległobok  $ABCD$  (rysunek obok).

a) Punkt  $P$  jest punktem przecięcia prostej  $AD$  z prostą  $y = -x + 2$ . Oblicz pole trójkąta  $ABP$ .

b) Punkt  $Q$  jest punktem przecięcia prostej  $BC$  z prostą  $y = -2x + 7$ . Oblicz pole trapezu  $ABQD$ .



9. Wierzchołki  $B$  i  $C$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  są punktami przecięcia prostej  $y = -\frac{3}{4}x + 3$  z osiami układu współrzędnych, a przeciwprostokątna  $AB$  jest zawarta w prostej  $y = \frac{1}{2}x - 2$ . Narysuj ten trójkąt i odczytaj współrzędne wierzchołka  $A$ .

10. Prosta  $AC$  dana jest równaniem  $y = \frac{3}{4}x - 1$ , a wierzchołek  $B$  kwadratu  $ABCD$  ma współrzędne  $(-1, -8)$ . Naszkicuj proste zawierające przekątne kwadratu i odczytaj współrzędne ich punktu przecięcia. Uzasadnij, że dwa wierzchołki tego kwadratu należą do osi układu współrzędnych.

### Czy wiesz, że...

Pole trójkąta o wierzchołkach  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} |x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2|$$

11. Narysuj trójkąt, którego boki są zawarte w podanych prostych. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta. Oblicz jego pole, korzystając z podanego powyżej wzoru.

a)  $y = x + 4$ ,  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ ,  $y = -2x + 10$

b)  $y = \frac{2}{3}x + 5$ ,  $y = 3x - 2$ ,  $y = -\frac{1}{2}x - 2$





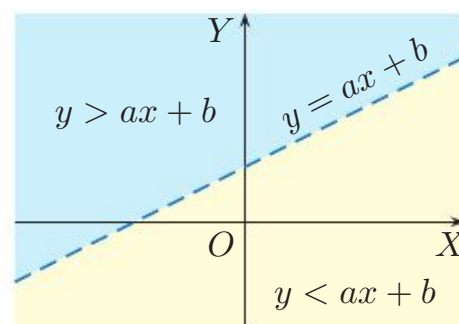
## R 5.7. Układy nierówności liniowych

Każdą z dwóch części płaszczyzny, na które dzieli ją dowolna prosta, nazywamy **półpłaszczyzną**, a tę prostą – **krawędzią** obu półpłaszczyzn.

Półpłaszczyznę zawierającą krawędź nazywamy **półpłaszczyzną domkniętą**. Półpłaszczyznę, do której nie należy żaden punkt jej krawędzi, nazywamy **półpłaszczyzną otwartą**.

Prosta  $l: y = ax + b$  wyznacza dwie półpłaszczyzny otwarte:

- zbiór  $\{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ i } y < ax + b\}$  jest półpłaszczyzną leżącą poniżej prostej  $l$ ,
- zbiór  $\{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ i } y > ax + b\}$  jest półpłaszczyzną leżącą powyżej tej prostej.



### Przykład 1

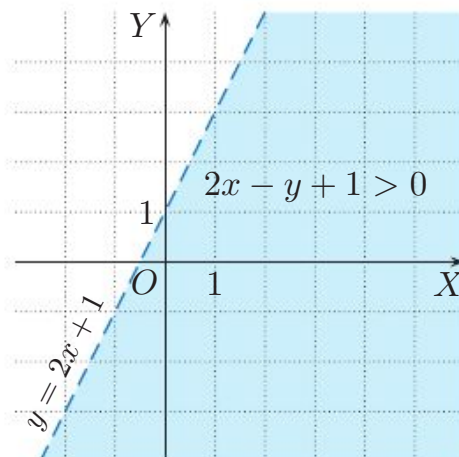
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność  $2x - y + 1 > 0$ .

Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y < 2x + 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną otwartą leżącą poniżej prostej  $y = 2x + 1$ .

Współrzędne punktów tej prostej nie spełniają nierówności  $y < 2x + 1$ , więc tę prostą rysujemy linią przerywaną.



### Przykład 2

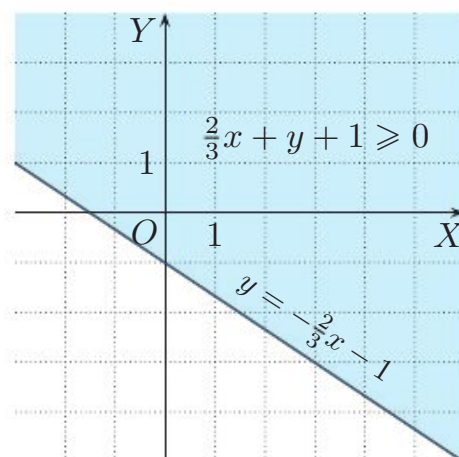
Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających nierówność  $\frac{2}{3}x + y + 1 \geq 0$ .

Nierówność zapisujemy w postaci:

$$y \geq -\frac{2}{3}x - 1$$

Szukany zbiór punktów jest półpłaszczyzną domkniętą ograniczoną przez prostą  $y = -\frac{2}{3}x - 1$ .

Współrzędne punktów tej prostej spełniają nierówność  $y \geq -\frac{2}{3}x - 1$ , więc tę prostą rysujemy linią ciągłą.



### Ćwiczenie 1

Zaznacz na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających podaną nierówność.

a)  $-3x + 2y - 6 > 0$

b)  $y \geq -\frac{1}{2}x - 1$

c)  $y - 2x \leq -3$

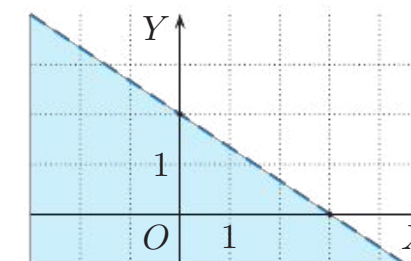
### Przykład 3

Wyznacz nierówność opisującą półpłaszczyznę zaznaczoną na rysunku obok.

Krawędź półpłaszczyzny jest prostą przechodzącą przez punkty  $(0, 2)$  i  $(3, 0)$  – wyznaczamy jej równanie:

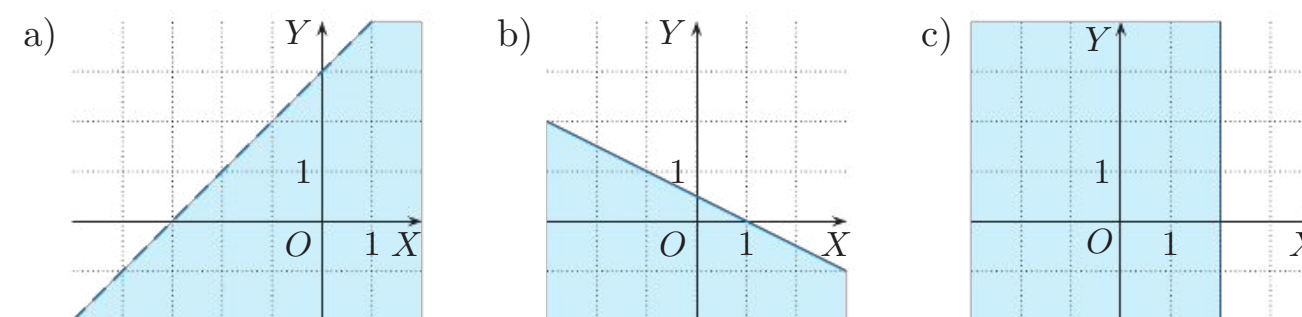
$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Półpłaszczyzna jest otwarta, a jej punkty leżą poniżej prostej  $y = -\frac{2}{3}x + 2$ , zatem szukaną nierównością jest  $y < -\frac{2}{3}x + 2$ .



### Ćwiczenie 2

Wyznacz nierówność opisującą półpłaszczyznę zaznaczoną na rysunku.



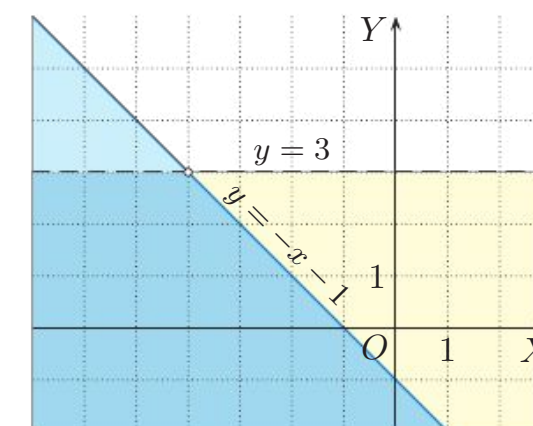
### Przykład 4

Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności:

$$\begin{cases} x + y + 1 \leq 0 \\ y < 3 \end{cases}$$

Zaznaczamy odpowiednią półpłaszczyznę domkniętą, której krawędzią jest prosta  $y = -x - 1$ . Dla drugiej nierówności zaznaczamy półpłaszczyznę otwartą ograniczoną z góry prostą  $y = 3$ . Część wspólna obu półpłaszczyzn jest zbiorem punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności.

Zauważ, że punkt  $(-4, 3)$  nie należy do części wspólnej obu półpłaszczyzn.



### Ćwiczenie 3

Przedstaw ilustrację graficzną podanego układu nierówności.

a)  $\begin{cases} -2x + y - 3 \leq 0 \\ x > -1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 3x - y - 2 < 0 \\ -6x + 2y < 0 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x - 3y + 3 \geq 0 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$

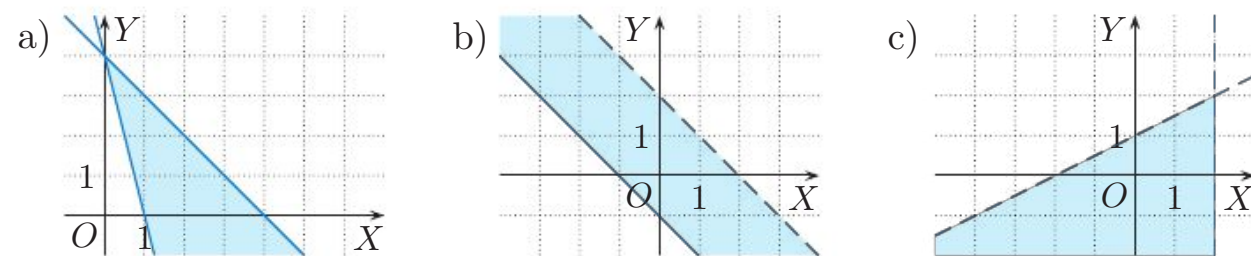


## Zadania

1. Przedstaw ilustrację graficzną podanego układu nierówności. Które spośród punktów  $P(6, 1)$ ,  $Q(-3, 5)$ ,  $R(8, -3)$  należą do otrzymanego zbioru?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ x - y - 5 < 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2x + y + 1 \geq 0 \\ x + 2y - 7 < 0 \end{cases} \end{array}$$

2. Wyznacz układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawiony na rysunku.

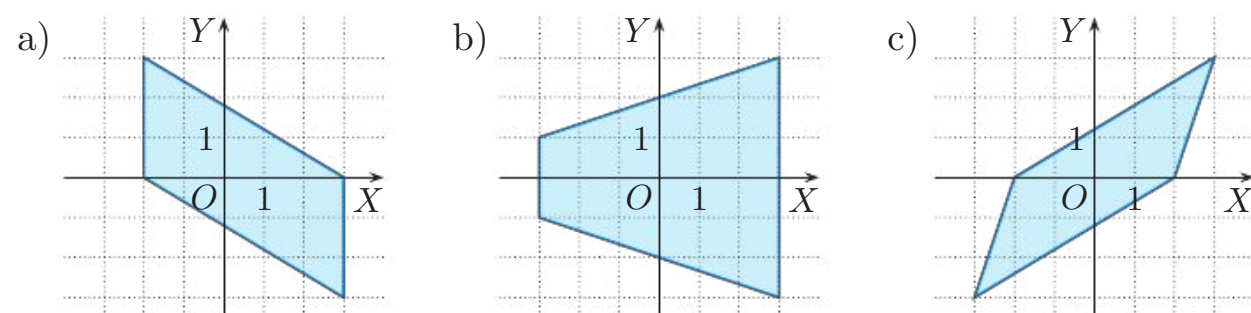


3. Wyznacz układ nierówności opisujący zbiór punktów leżących wewnątrz trójkąta  $ABC$ : a)  $A(1, 2)$ ,  $B(5, -2)$ ,  $C(5, 4)$ , b)  $A(-6, 7)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(2, 3)$ .

4. Pewien trójkąt został opisany przez podany układ nierówności. Naszkicuj ten trójkąt i wyznacz współrzędne jego wierzchołków.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} y - x \geq 0 \\ y + x \leq 6 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x + y - 12 \leq 0 \\ 3x - 2y + 6 \geq 0 \\ y + 3 \geq 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + y + 3 \geq 0 \\ 2x - y - 6 \leq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

5. Wyznacz układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawiony na rysunku.



6. Dane są zbiory:  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2\}$ ,  
 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 6\}$ ,  
 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x + y - 2 < 0\}$ .

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór:

- a)  $A \cap B \cap C$ , c)  $(A \cup B) \setminus C$ ,  
b)  $(A \cap C) \setminus B$ , d)  $(A \setminus C) \cup B$ .

Symbol  $\mathbb{R}^2$  oznacza zbiór wszystkich punktów płaszczyzny kartezjańskiej, czyli płaszczyzny z wprowadzonym układem współrzędnych.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ i } y \in \mathbb{R}\}$$

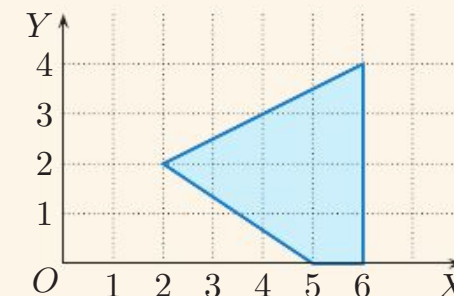
## Dowiedz się więcej

### Programowanie liniowe

#### Przykład

Wyznacz największą i najmniejszą wartość sumy  $x + y$  dla punktów  $(x, y)$  należących do wielokąta opisanego za pomocą układu nierówności:

$$\begin{cases} y \geq -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$



Wielokąt ten przedstawiono na rysunku obok.

Skorzystamy z twierdzenia mówiącego, że wartość największa oraz wartość najmniejsza sumy  $x + y$  są osiągane w którychś z wierzchołków (lub na całym boku) danego wielokąta.

Wierzchołkami wielokąta są punkty:

$$(5, 0), (6, 0), (6, 4) \text{ i } (2, 2)$$

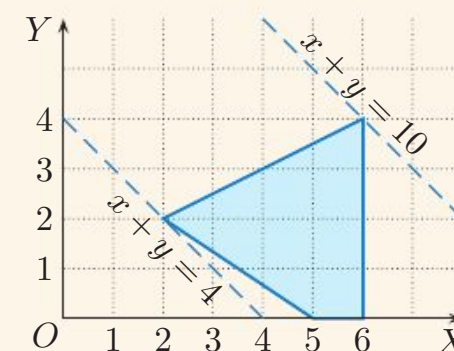
Obliczamy dla nich wartości sumy  $x + y$ :

$$(5, 0): x + y = 5 + 0 = 5$$

$$(6, 0): x + y = 6 + 0 = 6$$

$$(6, 4): x + y = 6 + 4 = 10$$

$$(2, 2): x + y = 2 + 2 = 4$$



Zatem największą wartością sumy  $x + y$  jest 10, a najmniejszą 4.

W powyższym przykładzie przedstawiono proste zagadnienie z działu matematyki zwanego **programowaniem liniowym**. Dział ten zajmuje się zagadnieniami optymalizacyjnymi, czyli szukaniem najlepszego rozwiązania wśród wszystkich możliwych (np. maksymalizacji zysków lub minimalizacji kosztów). Programowanie liniowe było intensywnie rozwijane podczas II wojny światowej, kiedy wykorzystywano je w logistyce.

1. Wyznacz wartość największą i wartość najmniejszą sumy  $x + y$  dla wielokąta opisanego układem nierówności.

$$\text{a)} \begin{cases} y \leq 2x + 4 \\ y \geq 2x - 4 \\ y \geq -2 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} y \leq 2x + 9 \\ y \geq 2x - 6 \\ y \geq -x - 3 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} x - 6 \leq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ x + y - 7 \leq 0 \\ x + 3y + 3 \geq 0 \end{cases}$$



## R 5.8. Równania i nierówności liniowe z parametrami

### Przykład 1

Rozwiąż równanie  $a^2x - 3 = a - x$  z niewiadomą  $x$  w zależności od parametru  $a$ . Podaj rozwiązanie tego równania dla  $a = -1$  i  $a = 3$ .

$$\begin{aligned}a^2x - 3 &= a - x \\a^2x + x &= a + 3 \\(a^2 + 1)x &= a + 3 \quad \text{Zauważ, że } a^2 + 1 \neq 0 \text{ dla } a \in \mathbb{R}. \\x &= \frac{a+3}{a^2+1} \quad \text{Otrzymane rozwiązanie równania zależy od parametru } a.\end{aligned}$$

Równanie ma jedno rozwiązanie dla każdego  $a \in \mathbb{R}$ .

Dla  $a = -1$  otrzymujemy  $x = 1$ , natomiast dla  $a = 3$  otrzymujemy  $x = \frac{3}{5}$ .

W przypadku równań z parametrami zazwyczaj przyjmujemy, że  $x$  jest niewiadomą, chyba że wyraźnie zaznaczono inaczej.

### Przykład 2

Rozwiąż równanie  $a^2x - 3 = a + 9x$  w zależności od parametru  $a$ .

$$\begin{aligned}a^2x - 3 &= a + 9x \\a^2x - 9x &= a + 3 \\(a^2 - 9)x &= a + 3 \quad \text{Zauważ, że wyrażenie } a^2 - 9 \text{ może przyjmować wartość } 0.\end{aligned}$$

- Dla  $a = -3$  otrzymujemy równanie **tożsamościowe** (spełnione przez dowolną liczbę):  $0x = 0$ .
- Dla  $a = 3$  otrzymujemy równanie **sprzeczne**:  $0x = 6$ .
- Dla  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$  mamy  $a^2 - 9 \neq 0$ . Równanie **ma jedno rozwiązanie** postaci:  $x = \frac{a+3}{a^2-9} = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$ .

### Ćwiczenie 1

Rozwiąż podane równanie w zależności od parametru  $a$ .

$$\text{a) } \frac{1}{2}ax - 4a = x + a \quad \text{b) } (a-1)x + 4 = 3x + a \quad \text{c) } 4a^2x + \frac{1}{2} = a + x$$

### Ćwiczenie 2

Sprawdź, dla jakich wartości parametrów  $a$  i  $b$  równanie  $ax + b = 0$  jest tożsamościowe, dla jakich jest sprzeczne, a dla jakich ma jedno rozwiązanie.

### Przykład 3

Sprawdź, dla jakich wartości parametrów  $a$  i  $b$  równanie  $ax + 4 = 2a + 2bx$  jest tożsamościowe, dla jakich jest sprzeczne, a dla jakich ma jedno rozwiązanie – znajdź to rozwiązanie. Podaj rozwiązanie tego równania dla  $a = 5$  i  $b = 1$ .

$$\begin{aligned}ax + 4 &= 2a + 2bx \\ax - 2bx &= 2a - 4 \\(a - 2b)x &= 2a - 4\end{aligned}$$

- Dla  $a - 2b = 0$  i  $2a - 4 = 0$  (czyli  $a = 2$  i  $b = 1$ ) równanie jest tożsamościowe.
- Dla  $a - 2b = 0$  i  $2a - 4 \neq 0$  (czyli  $a \neq 2$  i  $b = \frac{1}{2}a$ ) równanie jest sprzeczne.
- Dla  $a - 2b \neq 0$  (czyli  $b \neq \frac{1}{2}a$ ) równanie ma jedno rozwiązanie:  $x = \frac{2a-4}{a-2b}$ .

Po podstawieniu  $a = 5$  i  $b = 1$  otrzymujemy  $x = 2$ .

### Ćwiczenie 3

Przeprowadź analizę liczby rozwiązań równania ze względu na wartości parametrów  $a$  i  $b$ . Podaj rozwiązanie tego równania dla  $a = 2$  i  $b = -1$ .

$$\begin{aligned}\text{a) } 2ax - 1 &= a^2 + bx & \text{d) } ax - b &= 2 - bx \\ \text{b) } a^2x + 2 &= b - b^2x & \text{e) } 3ax - 9 &= 2bx + 3b \\ \text{c) } 6ax + 3a &= 2bx + b & \text{f) } ax + a &= 3bx + b\end{aligned}$$

### Przykład 4

Dla jakich wartości parametru  $m$  miejsce zerowe funkcji  $f(x) = (m+1)x + 2$  jest liczbą dodatnią?

- Zauważmy, że dla  $m = -1$  funkcja  $f$  nie ma miejsca zerowego – jest funkcją stałą  $f(x) = 2$ .
- Dla  $m \neq -1$  wyznaczamy miejsce zerowe funkcji  $f$ .

$$\begin{aligned}(m+1)x + 2 &= 0 \\(m+1)x &= -2 \\x &= \frac{-2}{m+1}\end{aligned}$$

Nierówność  $\frac{-2}{m+1} > 0$  jest spełniona, gdy  $m+1 < 0$ , czyli dla  $m < -1$ .

### Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości parametru  $m$  miejsce zerowe funkcji  $f$  jest liczbą ujemną?

$$\begin{aligned}\text{a) } f(x) &= (m-2)x - 4 & \text{c) } f(x) &= (m^2+1)x + m \\ \text{b) } f(x) &= (2m+3)x + 1 & \text{d) } f(x) &= -m^2x + 3 - m\end{aligned}$$

### Przykład 5

Dla jakiej wartości parametru  $k$  zbiorem rozwiązań nierówności  $(k+1)x - 2 \leq 0$  jest przedział  $(-\infty; 1]$ ?

Rozpatrzmy funkcję  $f(x) = (k+1)x - 2$ .

Zbiorem rozwiązań nierówności  $f(x) \leq 0$  jest przedział  $(-\infty; 1]$ , gdy jest to funkcja rosnąca, której miejscem zerowym jest 1.

- Funkcja  $f$  jest rosnąca, gdy  $k+1 > 0$ , czyli dla  $k > -1$ .
- Miejsce zerowe funkcji  $f$  jest równe 1, gdy  $\frac{2}{k+1} = 1$ , czyli dla  $k = 1$ .

Zatem warunki zadania są spełnione dla  $k = 1$ .

### Ćwiczenie 5

Wyznacz wartość parametru  $k$ , dla której zbiorem rozwiązań nierówności jest podany przedział.

- a)  $(k-3)x + 2 \leq 0$ ,  $(-\infty; -2]$       c)  $kx + 3 \geq 4x$ ,  $[1; \infty)$   
b)  $(k+1)x + 6 > 0$ ,  $(-\infty; 3)$       d)  $2x < kx + 2$ ,  $(-4; \infty)$

## Zadania

1. Dla jakich wartości parametru  $m$  podane równanie ma jedno rozwiązanie będące liczbą dodatnią?

a)  $\frac{x-m}{3} = \frac{m+4}{2}$       b)  $\frac{mx-m}{2} = \frac{1-2m}{4}$       c)  $\frac{mx-1}{2} = 1+x$

2. Określ liczbę rozwiązań równania ze względu na parametr  $m$ .

a)  $2x - 2 = 4 + mx$       d)  $(1 - 2m)x = m^2 - \frac{1}{4}$   
b)  $mx + 2 = m - 3x$       e)  $(m^2 - 1)x = m^2 + m$   
c)  $(m + 1)x = m^2 - 1$       f)  $(m^2 + 2m)x = m^2 - 4$

3. Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametrów  $p$  i  $q$ .

a)  $2px - qx = p - 4$       d)  $p^2x + q = p + q^2x$   
b)  $px + 2 = 3x + q$       e)  $(x - p)(x - q) = x^2 + pq$   
c)  $px + q^2 = p^2 - qx$       f)  $(x - p)^2 = x^2 - qx$

4. Rozwiąż równanie  $ax - 2x = 4a - 1$ :

a) z niewiadomą  $x$  i parametrem  $a$ ,      b) z niewiadomą  $a$  i parametrem  $x$ .

5. Dla jakich wartości parametru  $k$  miejsce zerowe funkcji  $f$  należy do przedziału  $[-2; 2]$ ?

a)  $f(x) = -3x + 1 - 6k$       b)  $f(x) = (x - k)^2 - (x + k)^2 + k^2$ ,  $k \neq 0$

## 5.9. Funkcja liniowa – zastosowania

### Przykład 1

Funkcja  $f(x) = 1500 + 12x$ , gdzie  $D_f = \mathbb{N}$ , opisuje miesięczne koszty (w złotych) firmy Skrzat, produkującej krasnale ogrodowe: 1500 zł to koszt stały, 12 zł to koszt wyprodukowania jednego krasnala,  $x$  – liczba krasnali.

a) Naskicuj wykres funkcji  $f$ .

b) Jaki był półroczny zysk firmy, jeśli w tym czasie wyprodukowano 1800 krasnali i sprzedano je po 37 zł za sztukę?

Dochód ze sprzedaży:

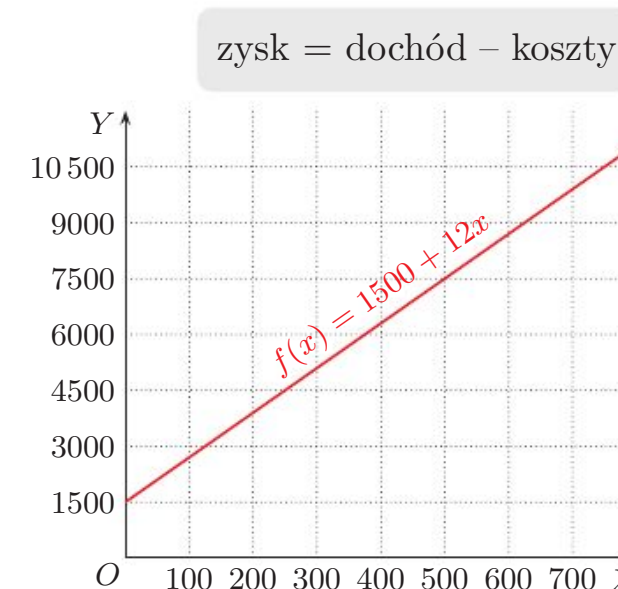
$$1800 \cdot 37 = 66\,600 \text{ [zł]}$$

Koszty po 6 miesiącach:

$$6 \cdot 1500 + 12 \cdot 1800 = 30\,600 \text{ [zł]}$$

Półroczny zysk:

$$66\,600 - 30\,600 = 36\,000 \text{ [zł]}$$



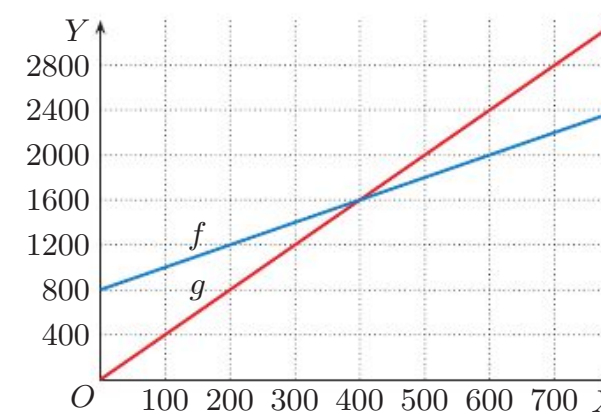
### Ćwiczenie 1

W firmie opisanej w przykładzie 1. podjęto decyzję o produkcji większych krasnali, przy czym koszt wyprodukowania takiego krasnala wyniósł 20 zł (koszty stałe pozostały bez zmian). Naskicuj wykres funkcji  $g$  opisującej obecne miesięczne koszty tej firmy.

### Ćwiczenie 2

Funkcja  $f(x) = 2x + 800$ , gdzie  $D_f = \mathbb{N}$ , opisuje dzienne koszty, jakie ponosi firma produkująca pokarm dla kotów: 800 zł to stały koszt dzienny,  $x$  – liczba puszek pokarmu wyprodukowanych dziennie, a 2 zł – koszt wyprodukowania jednej puszki. Dochody firmy opisuje funkcja  $g(x) = 4x$ , gdzie  $D_g = \mathbb{N}$ ,  $x$  jest liczbą sprzedanych dziennie puszek pokarmu, a 4 zł to cena jednej puszki. Przyjmując, że liczba wyprodukowanych i sprzedanych danego dnia puszek jest taka sama, podaj wielkość dziennej produkcji, dzięki której firma osiągnie:

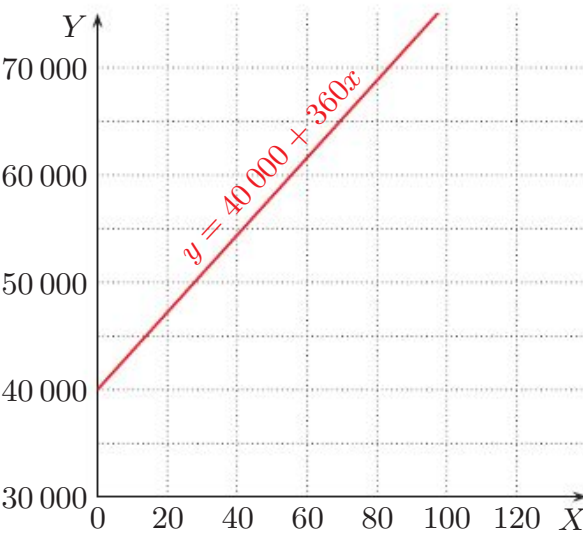
- a) zerowy wynik ekonomiczny (dochód jest równy kosztom),  
b) dzienny zysk w wysokości 400 zł,  
c) dzienny zysk w wysokości 1400 zł.





# Zadania

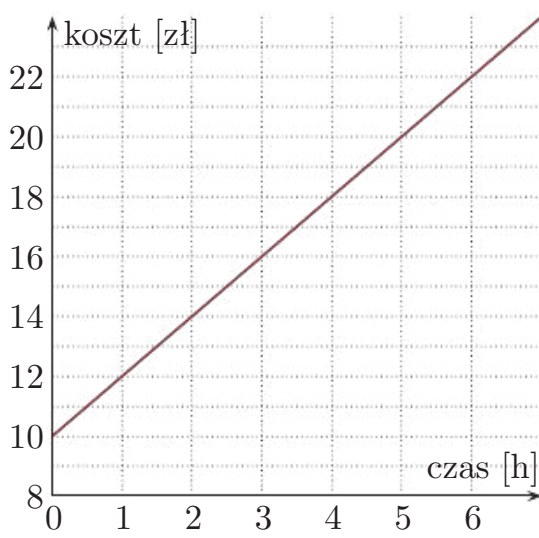
1. Samochód *A* kosztuje 34 tys. zł i spala 8 l benzyny na 100 km, a samochód *B* kosztuje 40 tys. zł i spala 6 l benzyny na 100 km. Cena benzyny wynosi średnio 6 zł za liter. Niech  $x$  oznacza liczbę przejechanych tysięcy kilometrów,  $y$  – cenę samochodu plus koszty paliwa w złotych (pozostałe koszty pomijamy). Na zamieszczonym obok wykresie przedstawiono łączny koszt dla samochodu *B*.



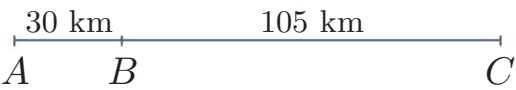
- a) Naskicuj analogiczny wykres dla samochodu *A*.
- b) Jeżeli zakupiono samochód *B*, to po przejechaniu ilu kilometrów zwróci się różnica w cenie?
2. Przeczytaj informacje dotyczące warunków wypożyczenia rowerów w wypożyczalniach Wagabunda i Szprycha ( $x$  oznacza liczbę godzin).

| WYPOŻYCZALNIA WAGABUNDA |               | WYPOŻYCZALNIA SZPRYCHA |              |
|-------------------------|---------------|------------------------|--------------|
| • Rower górski          | 10 zł + 2x zł | • Rower górski         | 6 zł + 3x zł |
| • Rower dziecięcy       | 6 zł + 2x zł  | • Rower dziecięcy      | 2 zł + 3x zł |

Na wykresie obok przedstawiono koszt wypożyczania roweru górskiego w wypożyczalni Wagabunda w zależności od czasu.



- a) Naskicuj analogiczny wykres dla wypożyczalni Szprycha.
- b) Odczytaj z wykresów, na ile godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda, a na ile z wypożyczalni Szprycha.
- c) Trzyosobowa rodzina chce wypożyczyć dwa rowery górskie i jeden rower dziecięcy. Na ile godzin korzystniejsze jest wypożyczenie roweru górskiego z wypożyczalni Wagabunda?

3. Piotr i Stefan wyruszają na wycieczkę rowerową do miasta *C* o tej samej godzinie.  Piotr startuje z miasta *B* i jedzie ze stałą prędkością 15 km/h, a Stefan z miasta *A* i jedzie ze stałą prędkością 22,5 km/h.
- a) Naskicuj wykres pokazujący odległość Piotra od miasta *C* w zależności od czasu oraz w tym samym układzie współrzędnych – wykres pokazujący odległość Stefana od miasta *C* w zależności od czasu.
- b) Po jakim czasie Stefan dogoni Piotra?
- c) O ile Piotr musiałby zwiększyć swoją średnią prędkość, aby Stefan dogonił go dopiero w mieście *C*?
4. Z miasta *A* o godzinie 8.00 wyjechał rowerzysta poruszający się z prędkością 20 km/h. Dwie godziny później z miasta *A* w tę samą stronę wyjechał samochód, który poruszał się z prędkością 60 km/h. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy zależności liczby kilometrów przejechanych przez każdy z pojazdów od czasu, jaki upłynął od rozpoczęcia podróży przez pierwszy z nich. Oblicz na podstawie wykresu:
- a) o której godzinie samochód wyprzedził rowerzystę,
- b) jaki dystans dzielił rowerzystę i samochód o godzinie 10.30,
- c) o której godzinie samochód oddalił się od rowerzysty o 40 km.
5. Z Kartuz do odległych o 15 km Ostrzyc wyruszył pieszo turysta. Godzinę później z Ostrzyc do Kartuz wyjechał samochód, który minął turystę po 15 minutach jazdy. Po półgodzinnym postoju w Kartuzach kierowca ruszył w drogę powrotną. Po raz kolejny minął turystę zmierzającego do Ostrzyc po 50 minutach od ich ostatniego spotkania. Oblicz, ile czasu zajęła turystyście droga z Kartuz do Ostrzyc. Przyjmij, że turysta szedł całą drogę w tym samym tempie, a kierowca w obie strony jechał z taką samą stałą prędkością.
6. Z miejscowości *A* do oddalonej o 40 km miejscowości *B* wyruszył rowerzysta jadący z prędkością 16 km/h. Jednocześnie z miejscowości *B* do miejscowości *A* wyruszył drugi rowerzysta, który poruszał się z tą samą prędkością.
- a) Przedstaw na wykresie i za pomocą wzoru odległość każdego z rowerzystów od miejscowości *A* w zależności od czasu.
- b) Zapisz wzór określający odległość między rowerzystami w zależności od czasu. W jakim czasie od chwili rozpoczęcia podróży odległość ta była równa 8 km?

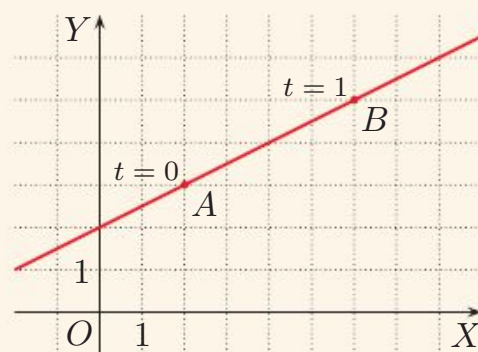
### Postać parametryczna równania prostej

W tym rozdziale przedstawiono dwa sposoby opisu prostej w układzie współrzędnych – postacię kierunkową i ogólną. Istnieje jednak wiele innych sposobów – jednym z nich jest **postać parametryczna**.

Na przykład układ równań z parametrem  $t$ :

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

jest parametrycznym przedstawieniem prostej  $AB$  (rysunek obok). Opisuje on ruch punktu po prostej  $AB$ . Dla  $t = 0$  otrzymujemy punkt  $A(2, 3)$ , a dla  $t = 1$  – punkt  $B(6, 5)$ .



1. Naskicuj prostą opisaną parametrycznie.

a)  $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$

b)  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$

#### Przykład 1

Wyznacz równanie kierunkowe prostej przedstawionej parametrycznie:

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy parametr:  $t = 2x - 2$  i podstawiamy do drugiego równania:

$$y = 3 - 2t = 3 - 2(2x - 2)$$

skąd otrzymujemy  $y = -4x + 7$ .

**D** 2. Uzasadnij, że dla  $t \in \mathbb{R}$  podane układy równań opisują tę samą prostą.

I.  $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

II.  $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$

III.  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

3. Prosta  $l$  dana jest w postaci parametrycznej:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

Podaj wartość parametru  $t$ , dla którego punkt  $A$  należy do prostej  $l$ .

a)  $A(-10, 12)$

b)  $A(11, -2)$

c)  $A(\frac{3}{2}, \frac{13}{3})$

Czy punkty  $P(-1, 2)$  i  $Q(8, 4)$  leżą na prostej  $l$ ?



4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Ruch kuli  $K_1$  toczącej się po prostej  $k$  opisują równania parametryczne:

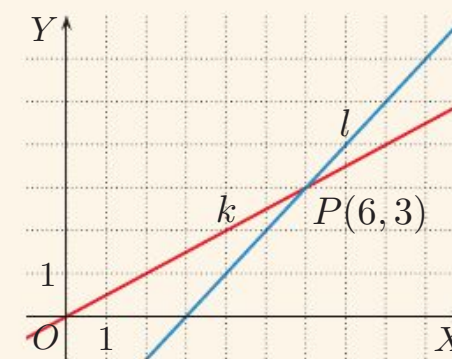
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

Ruch kuli  $K_2$  toczącej się po prostej  $l$  opisują równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

Czy kule  $K_1$  i  $K_2$  się zderzą?

Wyznaczmy równania kierunkowe prostych  $k$ :  $y = \frac{1}{2}x$  i  $l$ :  $y = x - 3$ . Proste  $k$  i  $l$  przecinają się w punkcie  $P(6, 3)$ . Zderzenie jednak nie nastąpi, gdyż kula  $K_1$  będzie w punkcie  $P$  dla  $t = 3$ , natomiast kula  $K_2$  dopiero dla  $t = 6$ .



Przemieszczanie się ślimaków  $S_1$  i  $S_2$  opisują podane równania parametryczne ( $t \geq 0$ ). Czy te ślimaki się spotkają?

a)  $S_1: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - t \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$

b)  $S_1: \begin{cases} x = 6t \\ y = 8 - 2t \end{cases} \quad S_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -4 + 2t \end{cases}$

Równanie prostej w trójwymiarowym układzie współrzędnych możemy przedstawić w postaci parametrycznej. Na przykład prosta opisana równaniami:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$$

przechodzi przez punkty  $A(3, 2, 4)$  dla  $t = 0$  oraz  $B(4, 1, 6)$  dla  $t = 1$ .

5. Które spośród punktów  $P(3, 1, 2)$ ,  $Q(9, 0, 6)$ ,  $R(-3, 7, 2)$  należą do prostej przedstawionej w postaci parametrycznej?

a)  $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \\ z = 4 - t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$

b)  $\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}$





# Powtórzenie

## Zestaw I

- Naszkicuj prostą  $l$ . Podaj, które z punktów  $P, Q, R$  należą do tej prostej.  
a)  $l: y = 2x - 4, P(5, 6), Q(-3, -10), R(-\frac{7}{2}, -11)$   
b)  $l: y = \frac{1}{2}x + 2, P(-8, -2), Q(9, \frac{11}{2}), R(17, 10\frac{1}{2})$
- Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Dla jakich argumentów funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich większe od 2?  
a)  $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$       b)  $f(x) = -3x + 5$       c)  $f(x) = -2,5x - 3$
- Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osiami układu współrzędnych. Oblicz pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych i wykresem funkcji  $f$ .  
a)  $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$       b)  $f(x) = \frac{4}{7}x - 8$       c)  $f(x) = -3x - 7,5$
- Określ monotoniczność funkcji  $f$  w zależności od parametru  $m$ .  
a)  $f(x) = (m + \frac{1}{2})x - 7$       b)  $f(x) = (6 - \frac{2}{3}m)x + 9$
- Sprawdź, czy punkty  $A, B$  i  $C$  należą do wykresu tej samej funkcji liniowej.  
a)  $A(2, -7), B(3, -10), C(-2, 5)$       b)  $A(-4, -3), B(-2, -2), C(12, 5)$
- Punkty  $P$  i  $Q$  należą do wykresu funkcji  $y = ax$ . Oblicz  $k$ .  
a)  $P(\frac{2}{3}, 2), Q(5, k)$       b)  $P(k, 6), Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$       c)  $P(1, 8, 2, 4), Q(12, k)$
- Wyznacz wzór funkcji, której wykresem jest prosta równoległa do prostej  $l$  i przechodząca przez punkt  $P$ . Czy ta funkcja jest malejąca?  
a)  $l: y = -\frac{1}{3}x + 7, P(6, 5)$       b)  $l: y = \frac{1}{4}x - 11, P(-6, 1)$
- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt  $P(-3, -1)$  i prostopadłej do prostej  $l$ .  
a)  $l: y = \frac{1}{2}x - 7$       c)  $l: y = -6$       e)  $l: 3x - 5y - 1 = 0$   
b)  $l: y = -4,5x - 5$       d)  $l: x = 11$       f)  $l: x - y = y + x$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej  $f$ , która spełnia podane warunki.  
a)  $f(-2) = -4$  i  $f(4) = -1$       c)  $f(-8) = 6$  i  $f(-3) = 4$   
b)  $f(-3) = 2$  i  $f(3) = 6$       d)  $f(0) = 0$  i  $f(\sqrt{2}) = 2$
- Rozwiąż równanie z niewiadomą  $x$  w zależności od parametru  $m$ .  
a)  $m(x - 6) = 2x - 12$       b)  $m(mx - 1) = 9x + 3$

## Zestaw II

- Wykresem funkcji  $f$  jest prosta  $l$ . Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości niedodatnie.  
a)  $l: y = 6x + 18$       b)  $l: y = -\frac{5}{2}x - 10$       c)  $l: \sqrt{2}x + y - 4 = 0$
- Wyznacz równania prostych, w których zawarte są boki trójkąta o wierzchołkach  $A, B, C$ . Czy jest to trójkąt prostokątny?  
a)  $A(0, 0), B(8, 6), C(-6, 8)$       b)  $A(-6, 0), B(1, 1), C(-3, 4)$
- D Wyznacz równania prostych zawierających boki czworokąta o wierzchołkach  $A(-2, -3), B(4, 0), C(2, 4), D(-4, 1)$ . Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem.
- Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań.  
a)  $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -6x + 4y = 8 \end{cases}$       e)  $\begin{cases} 0,5y - 0,125x = 1,5 \\ \frac{1}{8}y - \frac{1}{64}x = \frac{1}{2} \end{cases}$   
b)  $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 3y = -15 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} 3x + 4y = -19 \\ \frac{1}{2}x - y = -1,5 \end{cases}$       f)  $\begin{cases} 2y - \frac{3x-4}{2} = 0 \\ y - 1,5x = 5 \end{cases}$
- Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki są zawarte w prostych  $l_1, l_2$  i  $l_3$ . Narysuj ten trójkąt i oblicz jego pole.  
a)  $l_1: y = x + 2, l_2: y = -x + 2, l_3: y = -3x + 6$   
b)  $l_1: 2x - y + 6 = 0, l_2: 3x - 4y + 4 = 0, l_3: y - 4 = 0$   
c)  $l_1: x - 2y - 4 = 0, l_2: 3x + 4y - 28 = 0, l_3: x + 2 = 0$
- Przekątne rombu są zawarte w prostych  $3x + 4y = 10$  i  $4x - 3y = 5$ , a dwa spośród jego boków w prostych  $x - 2y - 5 = 0$  i  $x - 2y + 5 = 0$ . Narysuj podane proste i odczytaj współrzędne wierzchołków rombu. Wyznacz równania prostych, w których są zawarte pozostałe boki rombu.
- Narysuj trójkąt prostokątny, którego boki są zawarte w prostych  $k, l, m$  i odczytaj współrzędne jego wierzchołków. Wyznacz współrzędne spodka wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego.  
a)  $k: y = 2x + 2, l: y = \frac{3}{4}x - 3, m: y = -\frac{4}{3}x + 5\frac{1}{3}$   
b)  $k: y = -2x - 7, l: y = 2x - 3, m: y = \frac{1}{2}x + 3$
- Dwa boki równoległoboku są zawarte w prostych  $y = \frac{1}{2}x - 1$  i  $y = -\frac{2}{3}x + 6$ , a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne  $(-1, 2)$ . Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego równoległoboku.



## Zadania z kontekstem realistycznym

- Aby opróżnić wypełniony wodą basen, otworzono odpływ, przez który woda wypływała jednostajnym strumieniem w tempie 60 litrów na minutę. Ilość wody  $y$  (w litrach), która po upływie  $x$  minut pozostawała jeszcze w basenie, można opisać funkcją  $y = 9000 - 60x$ . Oblicz, po jakim czasie w basenie zostało 40% początkowej ilości wody.
- Student dorabiał, rozwoząc pizzę. Przez 7 dni pracował w pizzerii Milano, w której obowiązywała stawka dzienna 48 zł i dodatkowo 3 zł za każdą dostawę. Następnie przeniósł się do pizzerii Torino, w której stawka dzienna wynosiła 60 zł i dodatkowo 2,40 zł za każdą dostawę. Po 7 dniach pracy w Torino stwierdził, że zrealizował tyle samo dostaw i zarobił tyle samo co w Milano.
  - Oblicz, ile dostaw zrealizował student w każdej pizzerii.
  - Oblicz, ile zarobił student w każdej pizzerii.
- Wypożyczalnia limuzyn oferuje dwa warianty usług.

|            | Opłata stała | Limit kilometrów w cenie opłaty stałej | Cena za 1 km powyżej limitu |
|------------|--------------|----------------------------------------|-----------------------------|
| Wariant I  | 800 zł       | 200                                    | 1 zł                        |
| Wariant II | 600 zł       | 300                                    | 1,80 zł                     |

- Dla obu wariantów oblicz koszt wynajęcia limuzyny dla trasy 350 km.
  - Dla obu wariantów zapisz wzór funkcji opisującej koszt wynajęcia limuzyny w zależności od liczby przejechanych kilometrów.
  - Jaką co najmniej długość trasy zaplanował klient, jeżeli korzystniejszy dla niego okazał się wariant I?
- Koszt chodnika o szerokości 2 m, uwzględniający jego ułożenie i materiały, można opisać za pomocą pewnej funkcji liniowej. Wiadomo, że dla takiego chodnika o długości 160 m koszt wynosi 70 000 zł, a dla chodnika o długości 240 m to 104 000 zł. Oblicz koszt chodnika o długości 180 m.
  - W pewnym eksperymencie puszczano promień świetlny w płaszczyźnie opisanej układem współrzędnych. Promień ten przeszedł przez punkt  $A(5, 3)$  i odbił się w punkcie  $B(\frac{7}{2}, 0)$  od przeszkody ustawionej wzdłuż osi  $OX$ . Wyznacz równanie prostej, wzdłuż której biegł ten promień przed odbiciem, i równanie prostej zawierającej promień odbity.

**Wskazówka.** Kąt odbicia jest równy kątowi padania.



## Sposób na zadanie

### Przykład 1

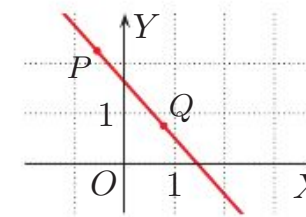
Prosta  $y = ax + b$  przechodzi przez punkty  $P$  i  $Q$ . Dla której pary punktów  $P, Q$  współczynnik kierunkowy  $a$  jest ujemny?

- A.  $P(-\frac{9}{5}, \frac{2}{3}), Q(-\frac{3}{5}, \frac{7}{3})$       C.  $P(-\frac{7}{2}, -\frac{4}{3}), Q(\frac{5}{2}, \frac{8}{3})$   
 B.  $P(\frac{3}{7}, -\frac{7}{6}), Q(\frac{9}{7}, \frac{5}{6})$       D.  $P(-\frac{5}{9}, \frac{9}{4}), Q(\frac{7}{9}, \frac{3}{4})$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zaznaczamy punkty  $P$  i  $Q$  w układzie współrzędnych, aby sprawdzić, w którym przypadku prosta  $PQ$  jest wykresem funkcji malejącej (na rysunku obok przedstawiono prostą  $PQ$  dla przypadku D).



- Zauważmy, że tylko w przypadku D:  $x_P < x_Q$  (gdyż  $-\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$ ) oraz  $y_P > y_Q$  (gdyż  $\frac{9}{4} > \frac{3}{4}$ ), zatem prosta  $PQ$  jest wykresem funkcji malejącej, czyli  $a < 0$ .

**Odpowiedź: D**

→ Zadanie 6, str. 268

### Przykład 2

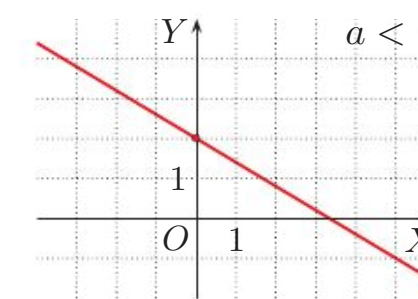
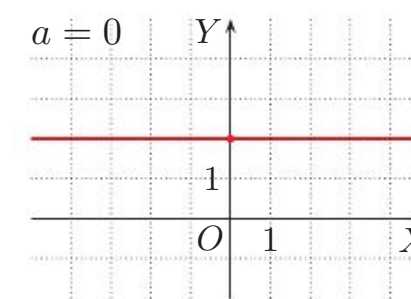
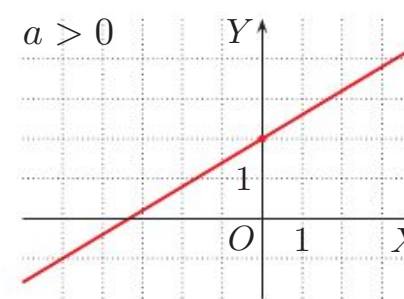
Która para punktów nie należy do prostej  $y = ax + 2$  dla żadnej wartości współczynnika  $a$ ?

- A.  $(-8, -5), (8, 9)$       C.  $(-8, -6), (4, -2)$   
 B.  $(-9, 6), (9, -2)$       D.  $(-10, 4), (5, 1)$

Aby wskazać poprawną odpowiedź, możemy postąpić na różne sposoby.

- Sprawdzamy współliniowość podanych punktów z punktem  $(0, 2)$  w każdym z przypadków A, B, C i D.

- Zauważamy, że prosta  $y = ax + 2$  nie może przechodzić jednocześnie przez punkty należące do III i IV ćwiartki układu współrzędnych (patrz rysunki), a takie punkty podano tylko w przypadku C.



**Odpowiedź: C**

→ Zadanie 7, str. 268



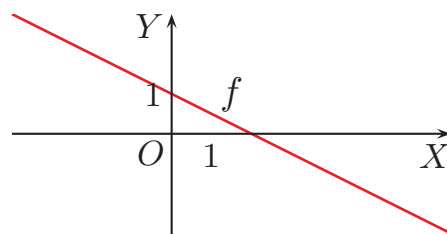


W zadaniach 1–10 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

### Zadanie 1 (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji liniowej o wzorze

- A.  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$       C.  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$   
B.  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$       D.  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$



### Zadanie 2 (0–1)

Przez którą ćwiartkę układu współrzędnych nie przechodzi wykres funkcji  $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$ ?

- A. I      B. II      C. III      D. IV

### Zadanie 3 (0–1)

Miejsce zerowe funkcji  $f(x) = \sqrt{2}x + 4$  jest równe

- A.  $-2\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{2}$       C. 2      D.  $2\sqrt{2}$

### Zadanie 4 (0–1)

Prosta przechodząca przez punkt  $(-1, 6)$  i przecinająca oś  $OX$  w punkcie o odciętej 1 przecina oś  $OY$  w punkcie o rzędnej

- A. 3      B.  $\frac{3}{2}$       C. -3      D. -6

### Zadanie 5 (0–1)

Punkt  $A(2k, 7)$  należy do wykresu funkcji  $f(x) = 2x + 1$  dla

- A.  $k = \frac{2}{3}$       B.  $k = \frac{3}{2}$       C.  $k = \frac{1}{2}$       D.  $k = 7$

### Zadanie 6 (0–1) → Przykład 1, str. 267

Prosta  $y = ax + b$  przechodzi przez punkty  $P$  i  $Q$ . Dla której pary punktów  $P, Q$  współczynnik kierunkowy  $a$  jest dodatni?

- A.  $P(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), Q(\frac{11}{2}, -\frac{19}{2})$       C.  $P(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}), Q(\frac{19}{2}, -\frac{7}{2})$   
B.  $P(\frac{11}{2}, -\frac{19}{2}), Q(\frac{9}{2}, -\frac{11}{2})$       D.  $P(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), Q(\frac{19}{2}, -\frac{7}{2})$

### Zadanie 7 (0–1) → Przykład 2, str. 267

Która para punktów nie należy do prostej  $y = a(x - 2)$  dla żadnej wartości parametru  $a$ ?

- A.  $(4, 1), (-4, -3)$       C.  $(-3, -2), (-1, 3)$   
B.  $(-3, -10), (1, -2)$       D.  $(1, 3), (3, -3)$

### Zadanie 8 (0–1)

Proste  $y = 3x + 3m$  i  $y = (2m + 1)x + 6$  są prostopadłe wtedy, gdy

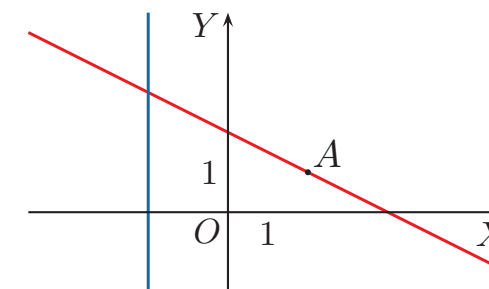
- A.  $m = 0$       B.  $m = -1$       C.  $m = -\frac{1}{3}$       D.  $m = -\frac{2}{3}$



### Zadanie 9 (0–1)

Dwa boki trójkąta prostokątnego o kącie prostym przy wierzchołku  $A$  są zawarte w prostych przedstawionych na rysunku obok. Pole tego trójkąta jest równe

- A. 20      B. 24      C. 28      D. 40



### Zadanie 10 (0–1)

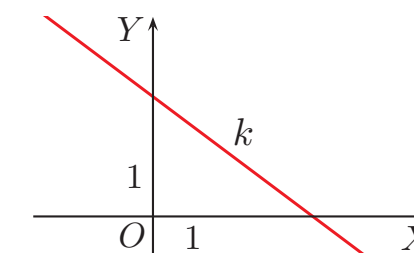
Dany jest czworokąt o kolejnych wierzchołkach  $P(0, -5), Q(3, -4), R(4, -1)$  i  $S(1, -2)$ . W której prostej jest zawarta jedna z przekątnych tego czworokąta?

- A.  $y = x + 5$       B.  $y = -x + 5$       C.  $y = x - 1$       D.  $y = -x - 1$

### Zadanie 11 (0–1)

Na rysunku obok przedstawiono prostą  $k$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



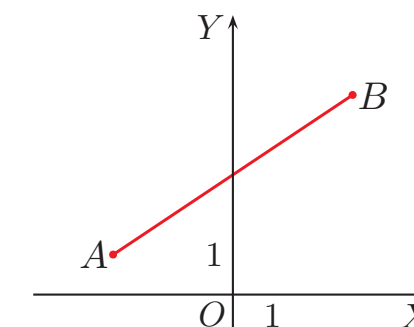
|                                                                 |   |   |
|-----------------------------------------------------------------|---|---|
| Prosta $y = -\frac{3}{4}x + 8$ jest równoległa do prostej $k$ . | P | F |
| Prosta $y = \frac{3}{4}x + 3$ jest prostopadła do prostej $k$ . | P | F |

### Zadanie 12

Na rysunku obok dany jest odcinek  $AB$  będący jednym z boków trójkąta  $ABC$ .

#### Zadanie 12.1 (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



|                                                                                                                                 |   |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| Wysokość trójkąta $ABC$ opuszczona z wierzchołka $C$ jest zawarta w prostej o współczynniku kierunkowym równym $-\frac{2}{3}$ . | P | F |
| Jeśli wierzchołek $C$ ma współrzędne $(9, -4)$ , to trójkąt $ABC$ jest prostokątny.                                             | P | F |

#### Zadanie 12.2 (0–2)

Wierzchołek  $C$  ma współrzędne  $(1, -1)$ . Wyznacz równania prostych zawierających boki  $AC$  i  $BC$  tego trójkąta.



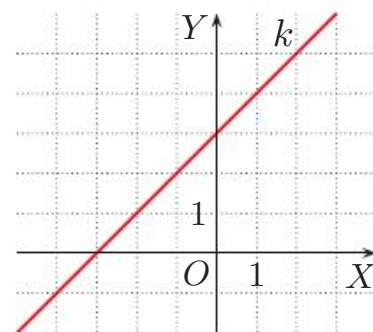
### Zadanie 13 (0-2)

Na rysunku obok przedstawiono prostą  $k$ .

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Prosta, która przecina prostą  $k$  w punkcie o obu współrzędnych całkowitych, dana jest równaniem

- |                            |                           |
|----------------------------|---------------------------|
| A. $y = -\frac{1}{3}x - 6$ | E. $y = \frac{1}{3}x + 2$ |
| B. $y = -x - 6$            | F. $y = \frac{1}{2}x + 2$ |
| C. $y = -2x - 6$           | G. $y = x + 2$            |
| D. $y = -3x - 6$           | H. $y = 3x + 2$           |



### Zadanie 14 (0-1)

Punkty  $K(-4, -5)$  i  $M(8, 1)$  są przeciwległymi wierzchołkami rombu  $KLMN$ .

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Przekątna  $LN$  tego rombu jest zawarta w prostej o współczynniku kierunkowym równym

|    |                  |                          |    |                       |
|----|------------------|--------------------------|----|-----------------------|
| A. | $-2$ ,           | ponieważ przekątne rombu | 1. | mają równe długości.  |
| B. | $-\frac{1}{2}$ , |                          | 2. | dzielą się na połowy. |
|    |                  |                          | 3. | są prostopadłe.       |

### Zadanie 15

Dany jest trapez o kolejnych wierzchołkach  $A(-4, -3)$ ,  $B(4, 1)$ ,  $C(4, 3)$  oraz  $D(-4, 7)$ .

#### ☒ Zadanie 15.1 (0-2)

Uzasadnij, że przekątne tego trapezu nie są prostopadłe.

#### Zadanie 15.2 (0-3)

Wyznacz punkt, w którym przecinają się proste zawierające ramiona tego trapezu.

### Zadanie 16 (0-2)

Dla jakiej liczby  $c$  miejsce zerowe funkcji  $f(x) = \frac{2}{3}x + c$  jest równe 6?

#### ☒ Zadanie 17 (0-2)

Uzasadnij, że proste  $y = \frac{2}{3}x - (1 - x)$  i  $y = 0,4x - (x - 1)$  są prostopadłe.



### Zadanie 18 (0-2)

Prosta  $k$  jest prostopadła do prostej  $l: y = \frac{1}{2}x + 2$  i przecina oś  $OX$  w tym samym punkcie co prosta  $l$ . Wyznacz równanie prostej  $k$ .

### Zadanie 19 (0-2)

Znajdź największą liczbę całkowitą  $m$ , dla której prosta  $y = (\frac{3}{2}m + 9)x - 4$  jest wykresem funkcji malejącej.

### Zadanie 20 (0-4)

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osią  $OX$  oraz prostymi  $2x - y - 2 = 0$  i  $x - 2y + 5 = 0$ .

#### ☒ Zadanie 21 (0-4)

Dwa boki trójkąta są zawarte w prostych  $y = -\frac{3}{4}x + 4$  i  $y = \frac{2}{3}x - 6$ . Wykaż, że jeśli punkty  $P(2, -4)$  i  $Q(-2, 2)$  należą do trzeciego boku tego trójkąta, to jest on prostokątny.

### Zadanie 22

Punkty  $A(0, -5)$ ,  $B(8, -3)$ ,  $C(4, 5)$  są wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ .

#### ☒ Zadanie 22.1 (0-2)

Uzasadnij, że równoległobok  $ABCD$  nie jest prostokątem.

#### Zadanie 22.2 (0-4)

Wyznacz równania prostych, w których są zawarte odcinki  $AD$  i  $CD$ .

### Zadanie 23 (0-4)

Punkty  $(-3, -5)$  i  $(3, 4)$  są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna jest zawarta w prostej  $x = -3$ . Oblicz pole tego trójkąta.

### Zadanie 24 (0-4)

Prosta  $y = \frac{5}{3}x + 5$  przecina osie układu współrzędnych w punktach  $A$  i  $B$ , a prosta  $y = 1,5x - 6$  – w punktach  $C$  i  $D$ . Oblicz pole czworokąta  $ABCD$ .

### Zadanie 25 (0-4)

Punkty  $P(-3, 0)$  i  $S(-1, 4)$  są wierzchołkami prostokąta  $PQRS$  oraz wierzchołek  $R$  leży na osi  $OX$ . Wyznacz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego prostokąta.

### Zadanie 26 (0-4)

Punkty  $A(-2, 0)$ ,  $B(0, -2)$  i  $C(4, 0)$  są wierzchołkami trapezu prostokątnego  $ABCD$  o podstawach  $AD$  i  $BC$ . Wyznacz współrzędne wierzchołka  $D$ .



**Zadanie 1 (0-2)**

Punkty  $A(-1, 2)$ ,  $B(-2, -1)$ ,  $C(4, -2)$  są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Bok  $CD$  tego równoległoboku zawiera się w prostej przecinającej oś  $OX$  w punkcie  $(x_0, 0)$ . Wyznacz  $x_0$ .

**Zadanie 2 (0-2)**

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą  $m \neq 0$ , dla której rozwiązaniem poniższego układu równań jest para liczb dodatnich.

$$\begin{cases} 2x - y = m - 170 \\ mx + my = 2m^2 - 550m \end{cases}$$

**Zadanie 3**

Dany jest czworokąt o wierzchołkach  $A(0, -4)$ ,  $B(6, -4)$ ,  $C(8, 0)$  oraz  $D(3, 2)$ .

**D Zadanie 3.1 (0-3)**

Udowodnij, że czworokąt  $ABCD$  nie jest trapezem prostokątnym.

**D Zadanie 3.2 (0-3)**

Udowodnij, że pole czworokąta  $ABCD$  jest równe  $\frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|$ .

**Zadanie 4 (0-2)**

Wyznacz liczbę punktów o obu współrzędnych całkowitych należących do trójkąta, którego boki są zawarte w prostych:

$$x = 0, \quad x - 3y + 9 = 0, \quad 3x - y - 5 = 0$$

**D Zadanie 5 (0-4)**

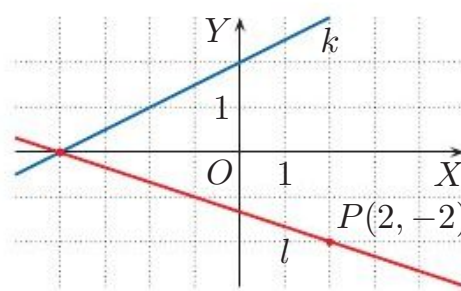
Udowodnij, że proste  $y = m^2x + 2x$  i  $y = -n^2x - x - 2$  przecinają się w punkcie należącym do III ćwiartki układu współrzędnych dla dowolnych wartości parametrów  $m$  i  $n$ .

**D Zadanie 6 (0-4)**

Udowodnij, że do prostej  $y = \sqrt{6}x - 1$  należy tylko jeden punkt o obu współrzędnych wymiernych.

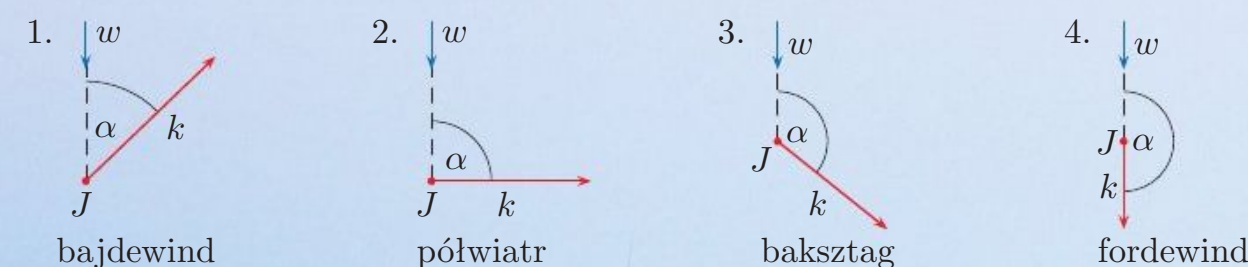
**D Zadanie 7 (0-5)**

Dwa boki trójkąta prostokątnego są zawarte w prostych  $k$  i  $l$ , a trzeci bok jest zawarty w prostej przechodzącej przez punkt  $P$  (rysunek obok). Udowodnij, że pole tego trójkąta jest równe 10 lub 20.



# 6 Planimetria

Jednym z pojęć omawianych w tym rozdziale jest pojęcie kąta. W żeglarsztwie od kąta między kierunkiem wiatru a kursem jachtu zależy ustawienie żagli. Na poniższych rysunkach podano nazwy kursów jachtu względem wiatru (strzałka  $w$  oznacza kierunek wiatru, punkt  $J$  – położenie jachtu, a strzałka  $k$  – kurs obrany przez jacht).





## Kąty

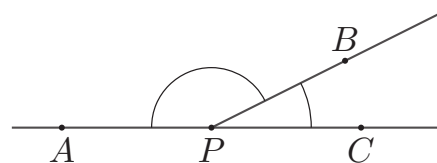
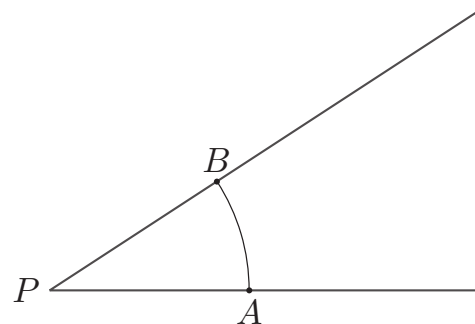
**Kąt** to jeden z dwóch obszarów płaszczyzny wyznaczony przez dwie półproste (zwane **ramionami kąta**) o wspólnym początku (zwanym **wierzchołkiem kąta**) wraz z tymi półprostymi.

Miarę kąta  $APB$  oznaczamy  $|\sphericalangle APB|$ .

**Kąt wypukły** ma miarę mniejszą od  $180^\circ$  lub równą  $180^\circ$ . Kąt o mierze większej od  $180^\circ$  nazywamy **wkłęśłym**.

Dwa kąty wypukłe nazywamy **przyległymi**, gdy mają wspólne ramie, a ich pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.

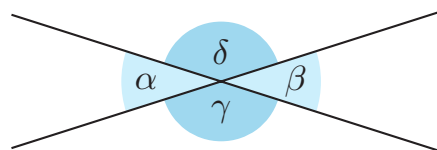
Kąty  $APB$  i  $BPC$  na rysunku obok są przyległe.



1. Wyznacz miary kątów przyległych, których stosunek miar jest równy:

- a) 1:2,      b) 1:3,      c) 1:5,      d) 5:7.

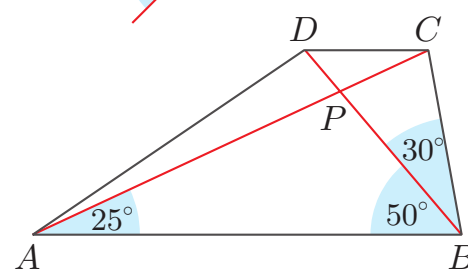
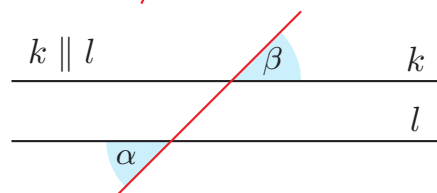
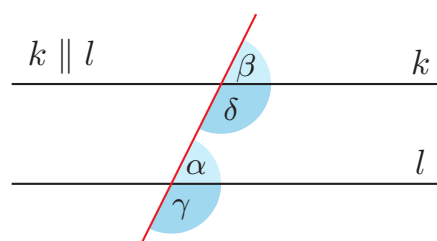
Dwie przecinające się proste tworzą dwie pary **kątów wierzchołkowych**  $\alpha$  i  $\beta$  oraz  $\gamma$  i  $\delta$  (rysunek obok). Zachodzą równości  $\alpha = \beta$  oraz  $\gamma = \delta$ .



2. Przekątna prostokąta jest dwa razy dłuższa od jego krótszego boku. Wyznacz miary kątów wierzchołkowych utworzonych przez proste zawierające przekątną tego prostokąta.

Para prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wyznacza **kąty odpowiadające** o równych miarach.

Na przykład na rysunku obok  $\alpha = \beta$  i  $\gamma = \delta$ .

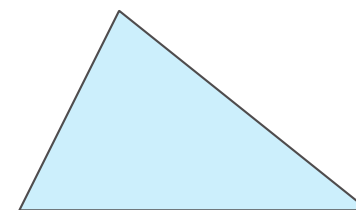


**D** 3. Na rysunku obok zaznaczono **kąty naprzemianległe** i oznaczono je  $\alpha$  i  $\beta$ . Uzasadnij, że kąty te mają równe miary.

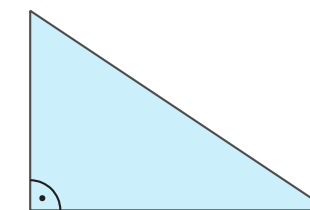
4. Punkt  $P$  jest punktem przecięcia przekątnych trapezu  $ABCD$  (rysunek obok). Wyznacz miary kątów trójkąta  $CDP$  oraz trójkąta  $CBP$ .

## 6.1. Miary kątów w trójkącie

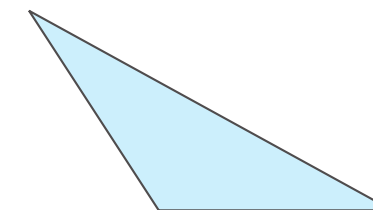
Przypomnijmy, że **trójkąt** to figura wyznaczona przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z tych punktów jest **wierzchołkiem** trójkąta, a odcinki łączące wierzchołki nazywamy **bokami**. Trójkąty można klasyfikować ze względu na ich kąty.



**Trójkąt ostrokątny** ma wszystkie kąty ostre. (Kąt ostry to kąt o mierze mniejszej od  $90^\circ$ ).



**Trójkąt prostokątny** ma jeden kąt prosty. (Kąt prosty to kąt o mierze równej  $90^\circ$ ).



**Trójkąt rozwartokątny** ma jeden kąt rozwarty. (Kąt rozwarty to kąt o mierze większej od  $90^\circ$  i mniejszej od  $180^\circ$ ).

## Twierdzenie

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa  $180^\circ$ .

## Dowód

Rozpatrzmy trójkąt ostrokątny  $ABC$  (rysunek obok). Rysujemy pomocniczą prostą  $l$  równoległą do boku  $AB$ , przechodzącą przez wierzchołek  $C$ . Kąty  $\alpha$  i  $\alpha'$  są równe (jako kąty naprzemianległe). Również kąty  $\beta$  i  $\beta'$  są równe (jako kąty naprzemianległe).

Zatem  $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma$ .

Ponadto  $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^\circ$ , więc również:

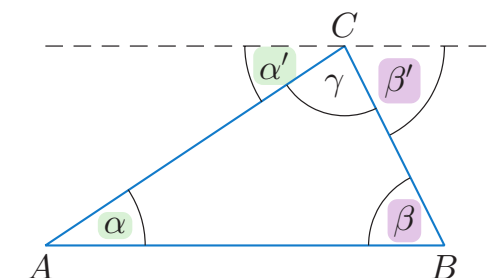
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Zauważmy, że powyższe rozumowanie jest takie samo dla trójkąta rozwartokątnego czy prostokątnego. Udowodniliśmy w ten sposób, że suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie jest równa  $180^\circ$ .

**Uwaga.** Tam, gdzie nie powoduje to nieporozumień, będziemy zamiennie używać określeń „kąt” i „miara kąta”.

## Ćwiczenie 1

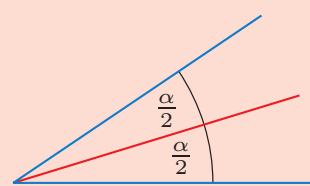
- D** a) Wykaż, że trójkąt  $ABC$ , w którym kąt  $B$  jest dwa razy większy od kąta  $A$ , a kąt  $C$  jest trzy razy większy od kąta  $A$ , jest trójkątem prostokątnym.  
b) Stosunek miar kątów trójkąta jest jak 1:4:5. Podaj miary tych kątów.





## Definicja

**Dwusieczną kąta** nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta, dzielącą ten kąt na dwa kąty o równych miarach.



## Przykład 1

Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny  $ABC$  o kącie prostym przy wierzchołku  $B$  (rysunek poniżej). Dwusieczna kąta  $BAC$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $P$ . Oblicz miarę kąta  $APC$ .

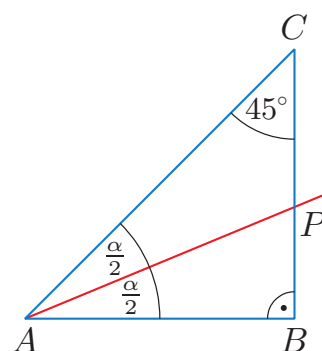
Trójkąt  $ABC$  jest prostokątny równoramienny, więc:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCA| = 45^\circ$$

Stąd:

$$|\sphericalangle CAP| = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ$$

Zatem  $|\sphericalangle APC| = 180^\circ - (45^\circ + 22,5^\circ) = 112,5^\circ$ .

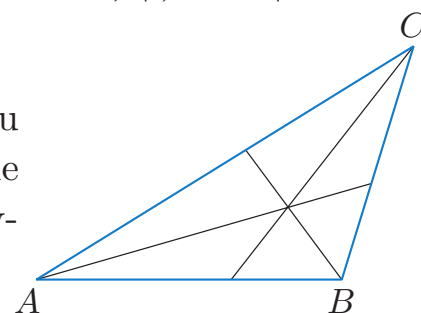


## Ćwiczenie 2

Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$  o kącie prostym przy wierzchołku  $C$ . Dwusieczna kąta  $BAC$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $P$ . Oblicz miary kątów trójkąta  $APB$  w przypadku, gdy: a)  $|\sphericalangle BAC| = 30^\circ$ , b)  $|\sphericalangle BAC| = 35^\circ$ .

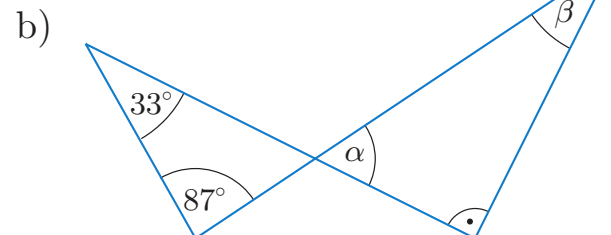
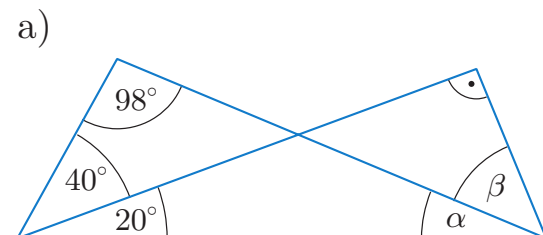
## Ćwiczenie 3

Miary kątów  $CAB$  i  $CBA$  trójkąta  $ABC$  na rysunku obok są odpowiednio równe  $32^\circ$  i  $108^\circ$ . Dwusieczne kątów tego trójkąta dzielą go na sześć trójkątów. Wyznacz miary kątów tych trójkątów.



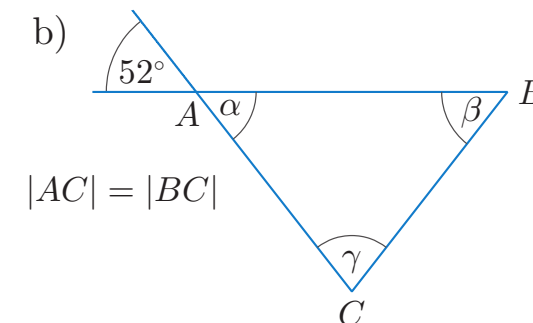
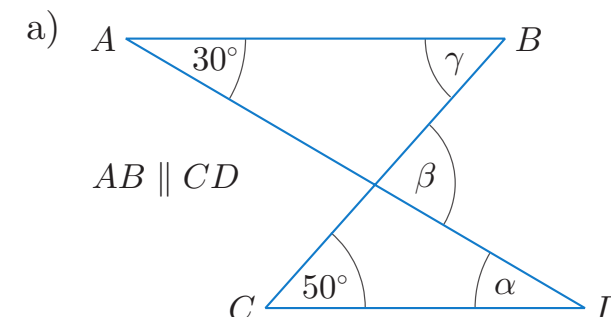
## Zadania

1. Wyznacz miary kątów  $\alpha$  i  $\beta$ .

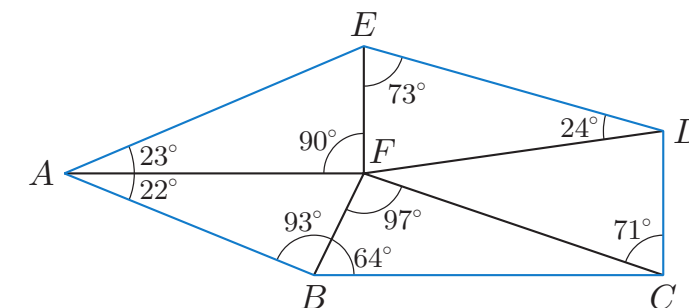


2. Stosunek miar dwóch kątów trójkąta wynosi  $2:3$ , a miara trzeciego kąta jest o  $26^\circ$  większa od miary najmniejszego kąta. Wyznacz miary kątów tego trójkąta.

3. Wyznacz miary kątów  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ .



4. Do wykonania pomiarów geodezyjnych wykorzystuje się metodę zwaną **triangulacją**. Polega ona na podzieleniu mierzonego obszaru na przylegające do siebie trójkąty, czyli utworzeniu tak zwanej siatki triangulacyjnej. Oblicz brakujące miary kątów narysowanego obok fragmentu siatki triangulacyjnej.

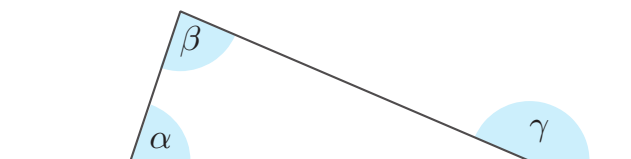


5. Dany jest trójkąt równoramienny  $ABC$  o ramionach  $AC$  i  $BC$  oraz kącie między nimi  $40^\circ$ . Oblicz miary kątów trójkątów powstałych z podzielenia trójkąta  $ABC$  dwusieczną kąta: a)  $ACB$ , b)  $CAB$ .

6. Miary kątów przyległych różnią się o  $32^\circ$ . Wyznacz te miary.

☐ 7. Uzasadnij, że dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe.

☐ 8. Wykaż, że miara kąta zewnętrznego  $\gamma$  trójkąta (rysunek obok) jest równa sumie miar kątów wewnętrznych  $\alpha$  i  $\beta$ .



☐ 9. Wykaż, że suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa  $360^\circ$ . **Wskazówka.** Podziel czworokąt przekątną na dwa trójkąty.

10. Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych:

a) pięciokąta, b) sześciokąta, c)  $n$ -kąta?

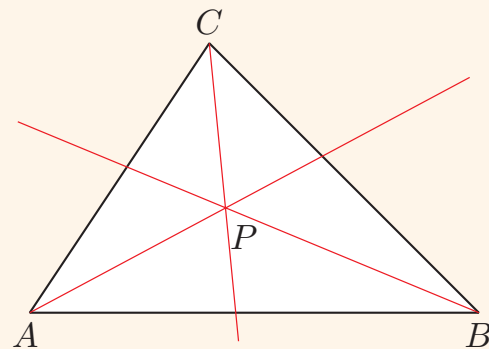
11. Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta jest równa  $1440^\circ$ . Ile boków ma ten wielokąt?

12. Przekątne sześciokąta foremnego poprowadzone z jednego z jego wierzchołków podzieliły go na cztery trójkąty. Wyznacz miary kątów tych trójkątów.

## Punkty specjalne w trójkącie

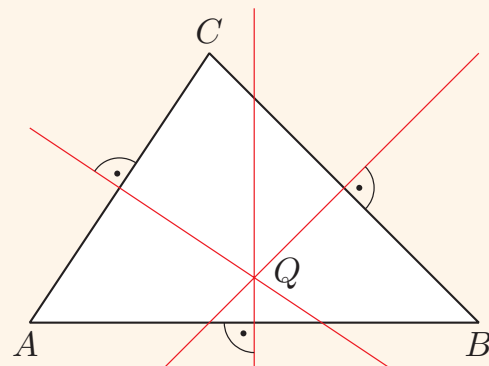
**Dwusieczną kąta** nazywamy półprostą o początku w wierzchołku kąta dzielącą ten kąt na dwa kąty o równych miarach.

Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



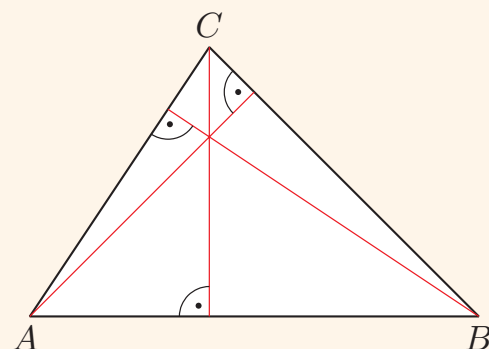
**Symetralną odcinka** nazywamy prostą prostopadłą do tego odcinka przechodzącą przez jego środek.

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



**Wysokością trójkąta** nazywamy odcinek prostopadły do boku trójkąta łączący ten bok (lub jego przedłużenie) z przeciwległym wierzchołkiem.

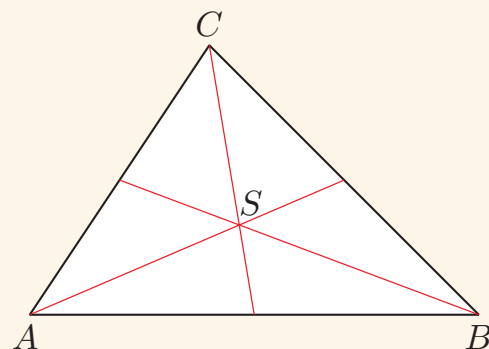
Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Punkt przecięcia wysokości trójkąta nazywamy **ortocentrum trójkąta**.

**Środkową trójkąta** nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Punkt przecięcia środkowych trójkąta nazywamy **środkiem ciężkości** lub **barycentrum trójkąta**. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1, gdy liczymy od wierzchołka.

## 6.2. Trójkąty przystające

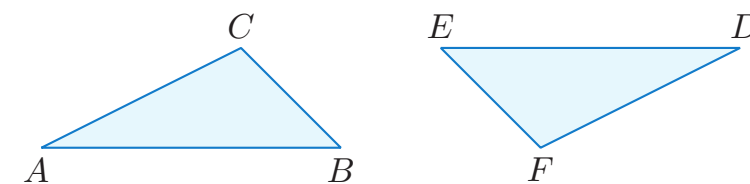
Figury **przystające** to, intuicyjnie, figury tego samego kształtu i wielkości. Dwa wielokąty są **przystające**, jeśli ich odpowiednie boki i odpowiednie kąty są równe.

Na tej lekcji omówimy przystawanie trójkątów.

Długość odcinka  $AB$  będziemy oznaczać  $|AB|$ .

### Ćwiczenie 1

Trójkąty przedstawione na poniższym rysunku są przystające. Wskaż pary równych boków i równych kątów.



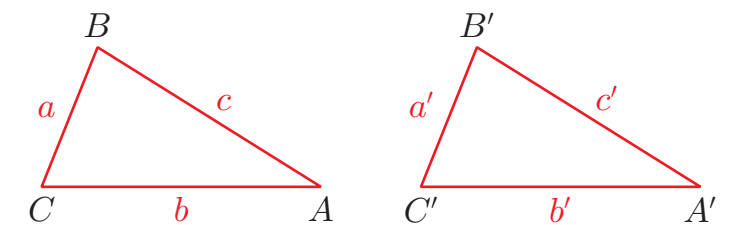
Do stwierdzenia, że trójkąty są przystające, nie jest konieczne porównanie aż 6 par wielkości (3 par kątów i 3 par boków). Przypomnijmy twierdzenia pozwalające wnioskować o przystawianiu trójkątów zwane **cechami przystawiania trójkątów**.

### Cecha BBB

Jeśli trzy boki jednego trójkąta są równe odpowiednim trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.

Jeśli  $a = a'$ ,  $b = b'$  i  $c = c'$ , to trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  są przystające, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

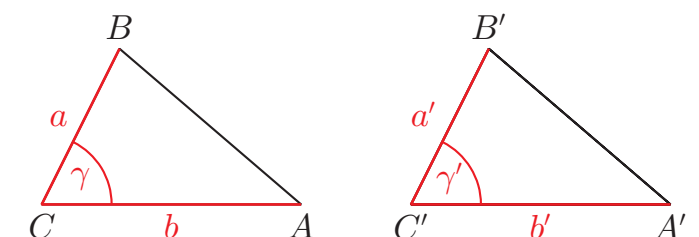


### Cecha BKB

Jeśli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są równe odpowiednim dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli  $a = a'$ ,  $b = b'$  i  $\gamma = \gamma'$ , to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$



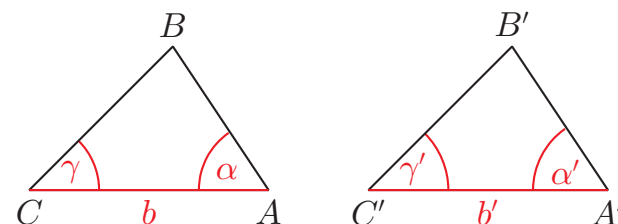


## Cecha KBK

Jeśli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są równe odpowiedniemu bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.

Jeśli  $b = b'$ ,  $\alpha = \alpha'$  i  $\gamma = \gamma'$ , to:

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$



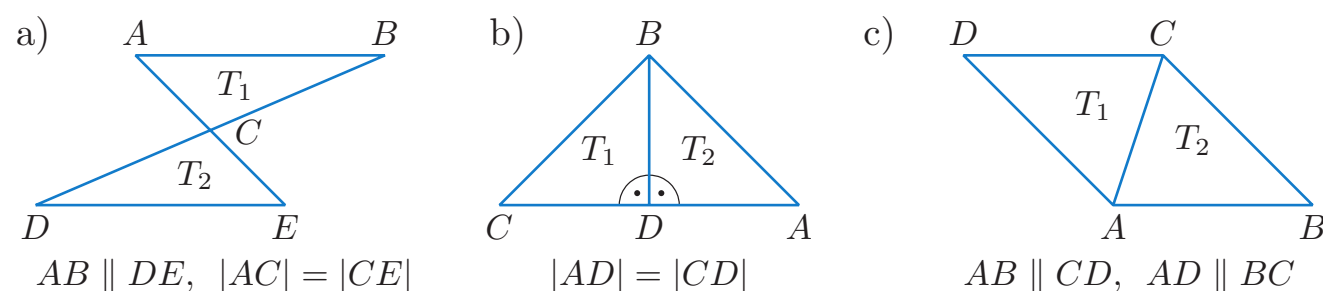
## Ćwiczenie 2

Czy przystające są trójkąty, o których wiadomo, że:

- trzy kąty jednego z nich są równe trzem kątom drugiego,
- mają jedną parę równych kątów i dwie pary równych boków?

## Ćwiczenie 3

Podaj cechę przystawania, na podstawie której można stwierdzić, że trójkąty  $T_1$  i  $T_2$  są przystające.



## Przykład 1

Uzasadnij, że dowolny punkt symetralnej odcinka jest równo oddalony od końców tego odcinka.

Rozpatrzmy odcinek  $AB$  o środku  $S$  i jego symetralną  $l$ .

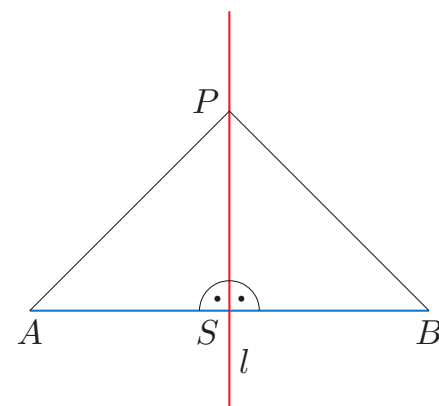
Niech  $P$  będzie dowolnym punktem symetralnej.

Jeśli  $P = S$ , to  $|AP| = |BP|$ .

Załóżmy teraz, że  $P \neq S$ .

Korzystając z cechy KBK, stwierdzamy, że trójkąty  $ASP$  i  $BSP$  są przystające (uzasadnij).

Zatem zachodzi równość  $|AP| = |BP|$ .



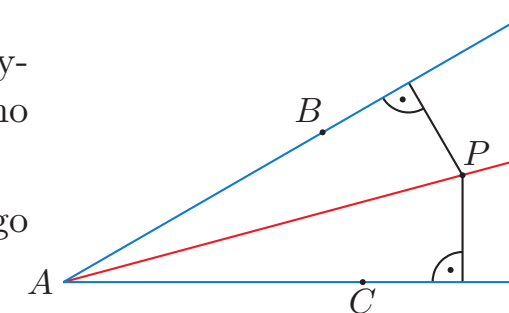
## Ćwiczenie 4

Uzasadnij, że symetralne boków dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

## Ćwiczenie 5

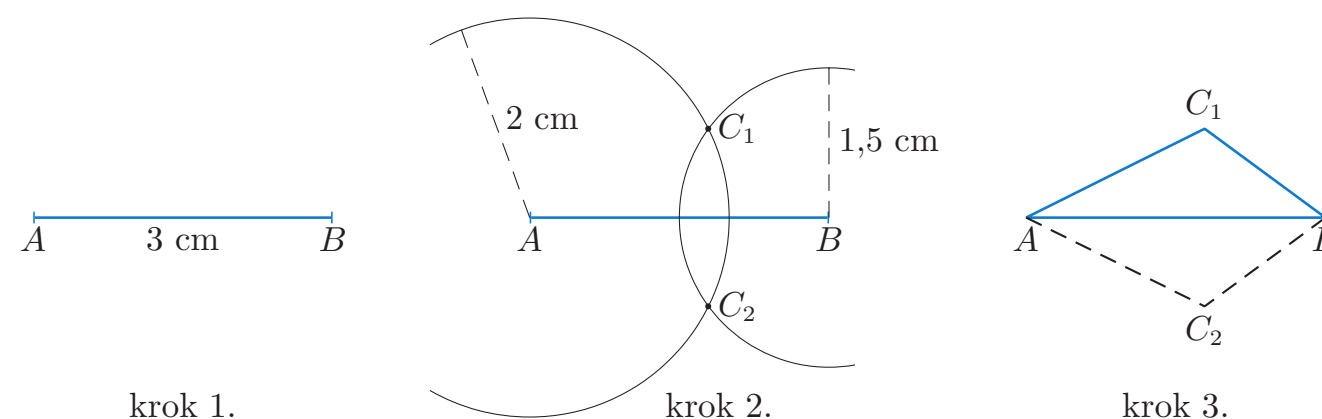
a) Półprosta  $AP$  jest dwusieczną kąta  $BAC$  (rysunek obok). Uzasadnij, że punkt  $P$  jest równo oddalony od ramion tego kąta.

b) Uzasadnij, że dwusieczne kątów dowolnego trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



## Przykład 2

Skonstruuj (narysuj za pomocą cyrkla i linijki) trójkąt o bokach długości 1,5 cm, 2 cm i 3 cm.



W kroku 2. z punktów  $A$  i  $B$  zataczamy łuki okręgów, które przecinają się w punkcie  $C_1$  oraz w punkcie  $C_2$ . W wyniku tej konstrukcji otrzymaliśmy dwa trójkąty spełniające podany warunek:  $\triangle ABC_1$  i  $\triangle ABC_2$ .

Zauważmy, że nie z każdych trzech odcinków można zbudować trójkąt. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

## Nierówność trójkąta

Z odcinków o długościach  $a, b, c$  można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a + b > c$$

gdzie  $c$  jest długością najdłuższego odcinka.

## Ćwiczenie 6

Czy boki trójkąta mogą mieć długości:

- 2, 2,  $\sqrt{7}$ ,
- 7, 8,  $\sqrt{225}$ ,
- $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,
- 1,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sqrt{2}$ ?

## Ćwiczenie 7

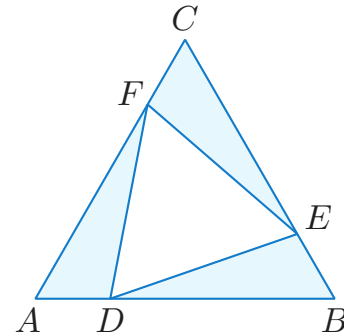
Na ile sposobów można zbudować trójkąt, jeżeli są do dyspozycji dwa odcinki długości 2 cm, trzy odcinki długości 3 cm i dwa odcinki długości 5 cm?

## Zadania

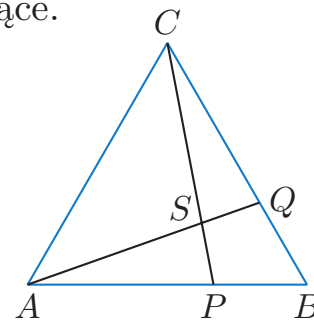
- D** 1. a) W prostokącie  $ABCD$  punkt  $P$  jest środkiem boku  $AB$ . Uzasadnij, że trójkąty  $APD$  i  $BPC$  są przystające.

b) Uzasadnij, że punkt przecięcia przekątnych równoległoboku dzieli je na połowy.

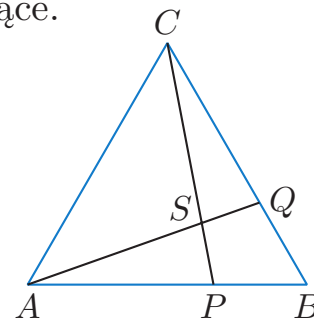
- D** 2. Trójkąt  $ABC$  jest równoboczny (rysunek obok). Odcinki  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  mają równe długości. Uzasadnij, że trójkąt  $DEF$  też jest równoboczny.



- D** 3. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny  $ABC$  o kącie prostym przy wierzchołku  $C$ . Środkowe  $AP$  i  $BQ$  tego trójkąta przecinają się w punkcie  $O$ . Uzasadnij, że trójkąty  $AOQ$  i  $BOP$  są przystające.

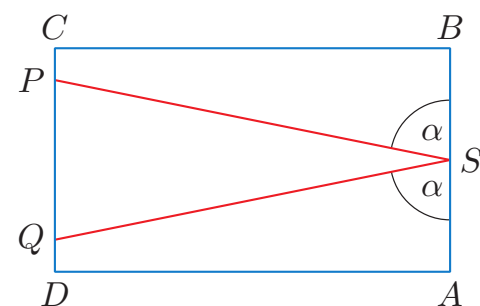


- D** 4. W trójkącie równobocznym  $ABC$  (rysunek obok) na bokach  $AB$  i  $BC$  wybrano odpowiednio punkty  $P$  i  $Q$  tak, że  $|AP| = 2|BP|$  i  $|CQ| = 2|BQ|$ . Odcinki  $AQ$  i  $CP$  przecinają się w punkcie  $S$ . Uzasadnij, że trójkąty  $APS$  i  $CQS$  są przystające.



- D** 5. W czworokącie wypukłym  $ABCD$  dwie pary boków są równe:  $|AB| = |BC|$  oraz  $|CD| = |DA|$ . Przekątne  $AC$  i  $BD$  tego czworokąta przecinają się w punkcie  $O$ . Uzasadnij, że trójkąt  $AOB$  jest przystający do trójkąta  $COB$  oraz że trójkąt  $AOD$  jest przystający do trójkąta  $COD$ .

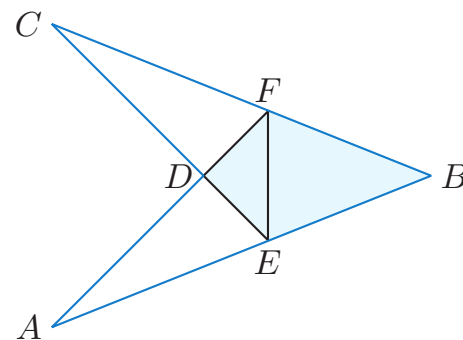
- D** 6. Kula bilardowa odbija się od bandy stołu bilardowego pod takim samym kątem, pod jakim w nią uderzyła (kąt  $\alpha$  na rysunku). Kula przebyła drogę z  $P$  do  $S$  i z  $S$  do  $Q$ , gdzie  $S$  jest środkiem bandy  $AB$ . Uzasadnij, że  $|PC| = |QD|$ .



- D** 7. Uzasadnij, że jeśli wysokość trójkąta zawiera się w dwusiecznej kąta tego trójkąta, to trójkąt ten jest równoramienny.

- D** 8. W czworokącie  $ABCD$  (rysunek obok) kąty  $EFB$  i  $FEB$  są równe oraz  $|AE| = |CF|$ . Uzasadnij, że:

- a) trójkąty  $BAF$  i  $BCE$  są przystające,  
b) czworokąt  $DEBF$  ma dwie pary boków równych.

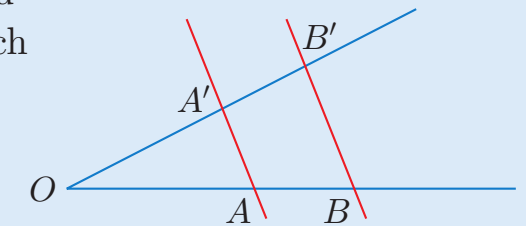


## 6.3. Twierdzenie Talesa

### Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta  $AOA'$  są przecięte dwiema prostymi równoległymi  $AA'$  i  $BB'$ , to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu tego kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu:

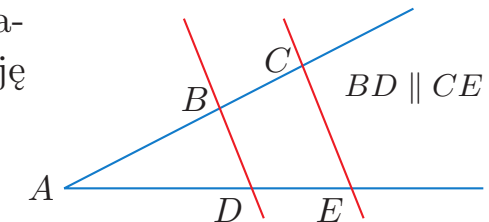
$$\frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|OA'|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OB|}$$



### Ćwiczenie 1

a) Długość którego odcinka (rysunek obok) należy wstawić w miejsce  $?$ , aby otrzymać proporcję prawdziwą?

$$\frac{?}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}, \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{?}{|DE|}$$



b) Oblicz długość odcinka  $AD$  dla  $|AB| = 3,6$ ,  $|AC| = 5,4$ ,  $|DE| = 1,2$ .

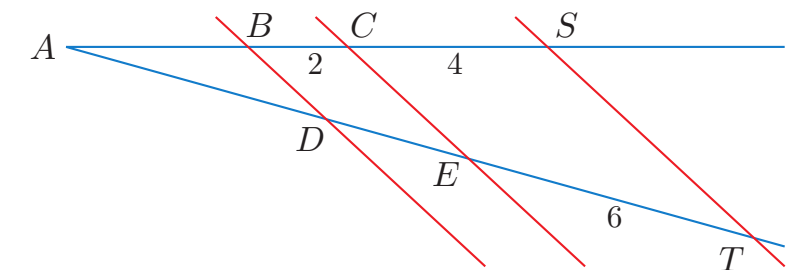
### Ćwiczenie 2

Proste  $BD$ ,  $CE$  i  $ST$  (rysunek obok) są równoległe.

- D** a) Uzasadnij, że:

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|CS|}{|ET|}$$

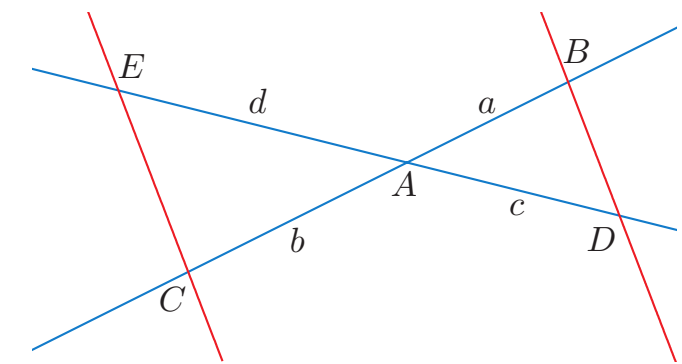
b) Wiadomo, że  $|AS| = 10$ . Oblicz długości odcinków  $AD$  i  $DE$ .



Zauważmy, że równość  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  zachodzi również w sytuacji przedstawionej na rysunku poniżej ( $BD \parallel CE$ ).

### Ćwiczenie 3

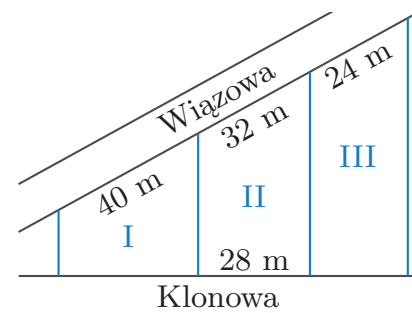
Proste  $BD$  i  $CE$  są równoległe (rysunek obok) oraz  $a = 3,6$ ,  $b = 4,8$ ,  $c = 4,5$ . Oblicz długość odcinka  $ED$ .





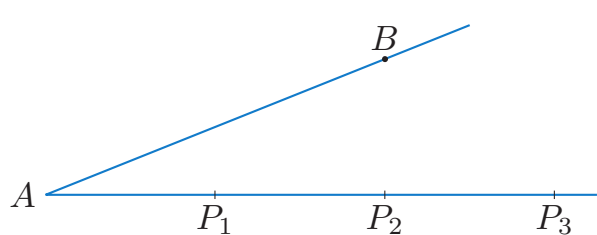
## Ćwiczenie 4

Każda z trzech działek budowlanych położonych między ulicami Klonową i Wiązową ma kształt trapezu (rysunek obok). Dla działek I i III oblicz długości boków przylegających do ulicy Klonowej.

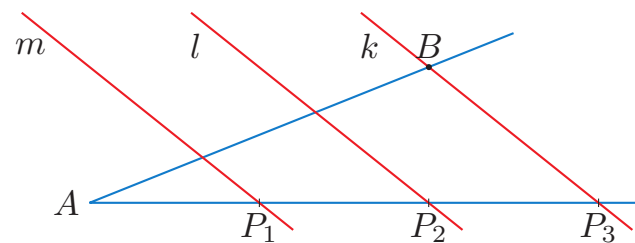


## Przykład 1

Za pomocą cyrkla i linijki podziel dany odcinek  $AB$  na trzy równe części.



Odcinek  $AB$  umieszczamy na jednym ramieniu kąta. Na drugim ramieniu odmierzymy trzy odcinki tej samej (dowolnej) długości. Są to odcinki  $AP_1$ ,  $P_1P_2$  i  $P_2P_3$ .



Przez punkt  $P_3$  i  $B$  prowadzimy prostą (prosta  $k$ ), następnie konstruujemy dwie proste równoległe do prostej  $k$  przechodzące przez punkty  $P_2$  i  $P_1$  (proste  $l$  i  $m$ ). Patrz str. 305.

Zgodnie z twierdzeniem Talesa odcinki wyznaczone na ramionach kąta przez proste równoległe są proporcjonalne, więc opisana konstrukcja prowadzi do podziału odcinka  $AB$  na trzy równe części.

## Ćwiczenie 5

Jak za pomocą cyrkla i linijki podzielić dany odcinek:

- a) na 5 równych części, b) na 7 równych części, c) w stosunku 4:5?

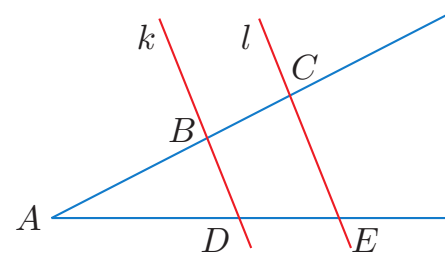
Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa – mówi ono, że z proporcji odpowiednich odcinków wynika równoległość prostych.

## Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.

## Ćwiczenie 6

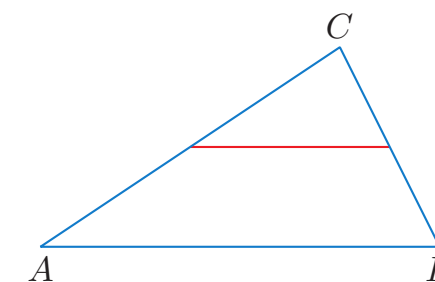
- a) Podaj przykłady proporcji, z których wynika równoległość prostych  $k$  i  $l$  (rysunek obok).



- D** b) Uzasadnij, że jeśli  $|AB| = 2,4$ ,  $|AC| = 3,6$ ,  $|AD| = 2,8$  i  $|DE| = 1,4$ , to proste  $BD$  i  $CE$  są równoległe.

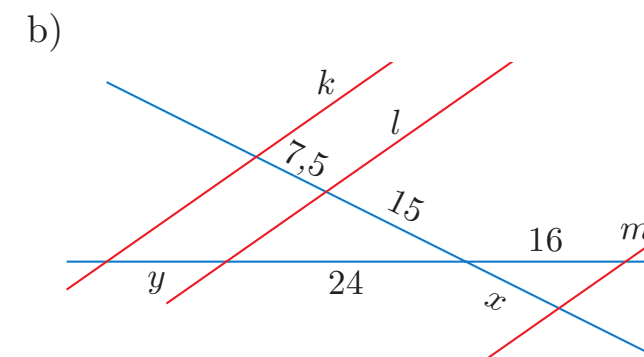
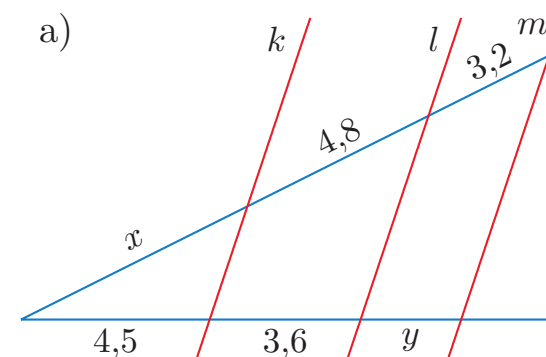
**D** Ćwiczenie 7

Wykaż, że w dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do trzeciego boku (rysunek obok).



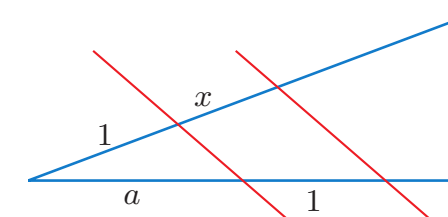
## Zadania

1. Proste  $k$ ,  $l$  i  $m$  na rysunku są równoległe. Oblicz długości  $x$  i  $y$ .

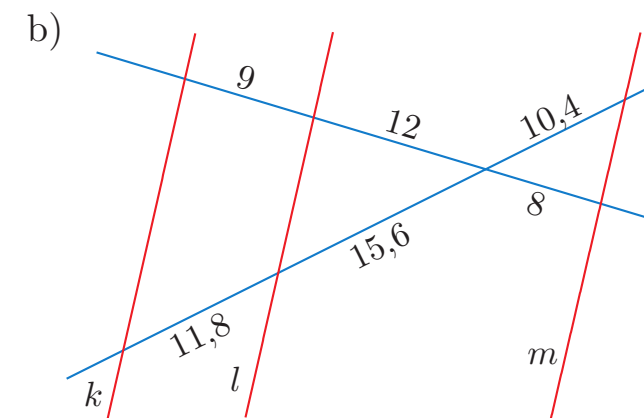
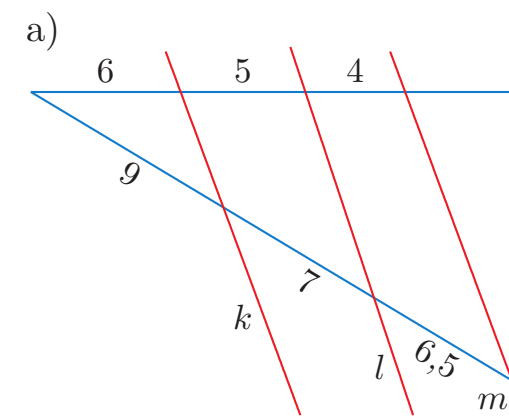


2. Dany jest trapez  $ABCD$  o ramionach  $|AD| = 9$  cm,  $|BC| = 12$  cm. Na ramieniu  $AD$  wybrano punkty  $P$  i  $Q$  takie, że  $|AQ| = 7$  cm i  $|DP| = 5$  cm. Oblicz długości odcinków, na jakie proste równoległe do podstaw trapezu i przechodzące przez punkty  $P$  i  $Q$  podzieliły ramię  $BC$ .

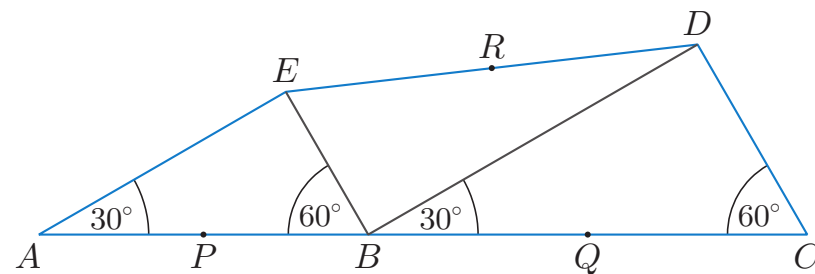
3. Na rysunku pokazano, jak – mając dane odcinki o długościach 1 i  $a$  – skonstruować odcinek o długości  $x = \frac{1}{a}$ . Opisz, jak – mając dane odcinki o długościach 1 i  $a$  – skonstruować odcinki o długościach  $a^2$  i  $a^3$ .



4. Opisz, jak podzielić konstrukcyjnie dany odcinek w stosunku  $1 : \sqrt{2}$ .
5. Sprawdź, które z prostych  $k$ ,  $l$  i  $m$  są równoległe.



6. Punkty  $P$ ,  $Q$  i  $R$  są środkami odcinków  $AB$ ,  $BC$  i  $DE$  (rysunek poniżej).

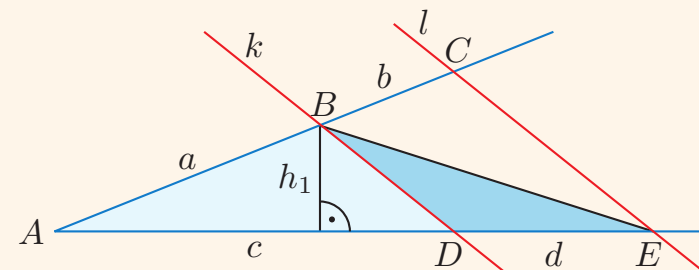


- D** a) Wykaż, że trójkąt  $PQR$  jest prostokątny.  
b) Dane są  $|AB| = 6$  i  $|CD| = 4$ . Oblicz obwody trójkątów  $BDE$  i  $PQR$ .

#### Czy wiesz, że...

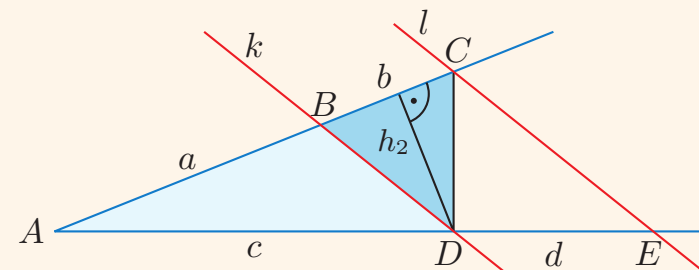
Najstarszy zachowany dowód twierdzenia Talesa to dowód autorstwa Euklidesa przedstawiony poniżej.

Zakładamy, że proste  $k$  i  $l$  są równoległe (rysunek poniżej).



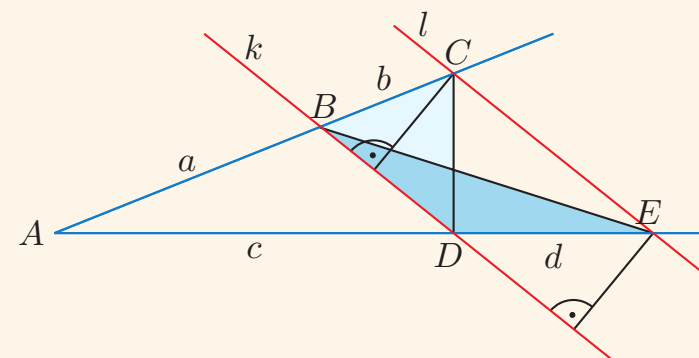
Trójkąty  $ADB$  i  $DEB$  mają wspólną wysokość  $h_1$ , zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2}ch_1}{\frac{1}{2}dh_1} = \frac{c}{d}$$



Trójkąty  $ADB$  i  $CBD$  mają wspólną wysokość  $h_2$ , zatem:

$$\frac{P_{ADB}}{P_{CBD}} = \frac{\frac{1}{2}ah_2}{\frac{1}{2}bh_2} = \frac{a}{b}$$



Trójkąty  $DEB$  i  $CBD$  mają wspólną podstawę  $BD$  oraz tę samą wysokość (gdyż proste  $k$  i  $l$  są równoległe). Zatem:

$$P_{DEB} = P_{CBD}$$

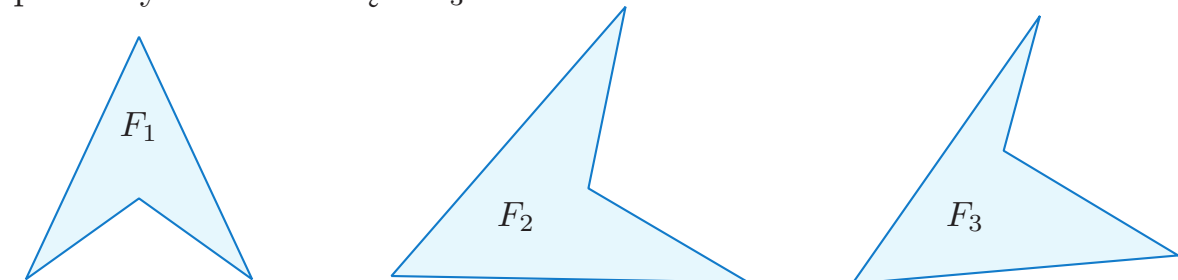
Zatem otrzymujemy  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  lub równoważnie  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ .

- D** 7. Skorzystaj z oznaczeń na rysunku powyżej i uzasadnij, że z równości  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  wynika równość  $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$ .

## 6.4. Wielokąty podobne

Dwie figury geometryczne są **podobne**, jeśli są tego samego kształtu, lecz niekoniecznie tej samej wielkości. Na przykład podobne są dwa dowolne koła, dwa dowolne kwadraty czy trójkąty równoboczne.

Na rysunku poniżej podobne są czworokąty  $F_1$  i  $F_2$ . Żaden z nich nie jest podobny do czworokąta  $F_3$ .



#### Definicja

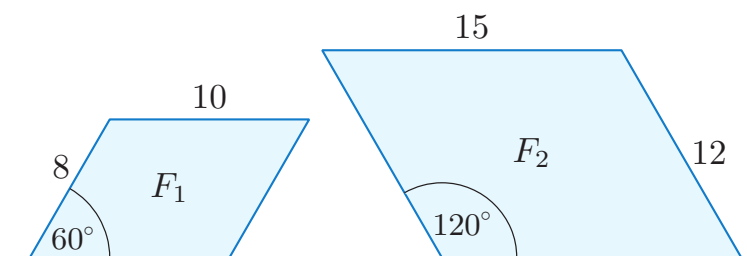
Dwa wielokąty są **podobne**, jeśli ich odpowiednie kąty są równe, a odpowiednie boki proporcjonalne.

Jeśli figury  $F_1$  i  $F_2$  są podobne, to piszemy  $F_1 \sim F_2$ .

#### **D** Przykład 1

Uzasadnij, że równoległoboki  $F_1$  i  $F_2$  na rysunku poniżej są podobne.

Długości boków równoległoboków  $F_1$  i  $F_2$  są proporcjonalne, ponieważ  $\frac{15}{10} = \frac{12}{8}$ , a ich odpowiednie kąty są równe. Zatem  $F_1 \sim F_2$ .



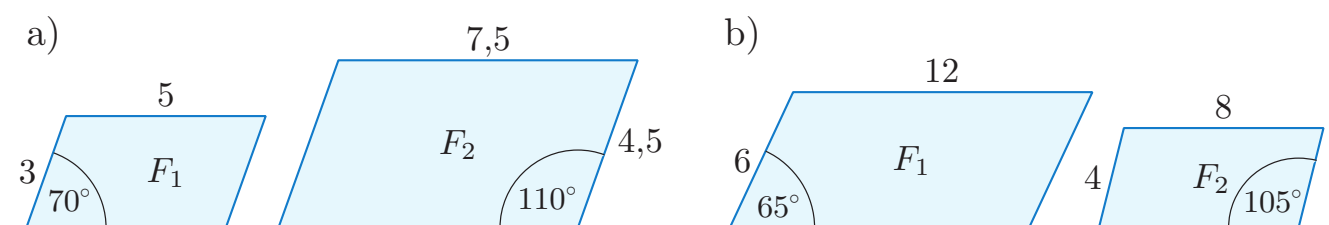
#### Ćwiczenie 1

Dany jest prostokąt  $P_1$  o bokach  $a = 2,4$  i  $b = 1,8$ . Sprawdź, czy prostokąt ten jest podobny do prostokąta  $P_2$  o bokach  $c$  i  $d$ .

- a)  $c = 3,6$ ,  $d = 2,7$       b)  $c = 4$ ,  $d = 6$       c)  $c = 54$ ,  $d = 72$

#### Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy równoległoboki  $F_1$  i  $F_2$  są podobne.



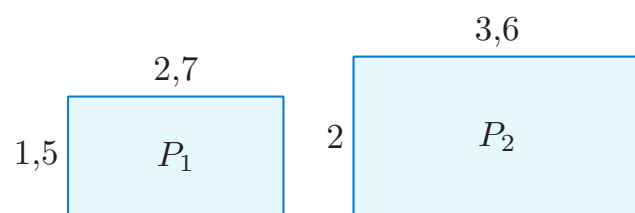


## Definicja

Dla wielokątów podobnych stosunek długości odcinków jednego wielokąta do długości odpowiadających im odcinków drugiego wielokąta nazywamy **skala podobieństwa** (zwykle oznaczamy ją literą  $k$ ).

## Przykład 2

Prostokąty  $P_1$  i  $P_2$  (rysunek obok) są podobne. Podaj skalę podobieństwa prostokąta  $P_2$  do prostokąta  $P_1$  oraz prostokąta  $P_1$  do prostokąta  $P_2$ .



Skala podobieństwa prostokąta  $P_2$  do prostokąta  $P_1$  jest równa:

$$k_1 = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3}$$

Zauważ, że również  $\frac{3,6}{2,7} = \frac{4}{3}$ .

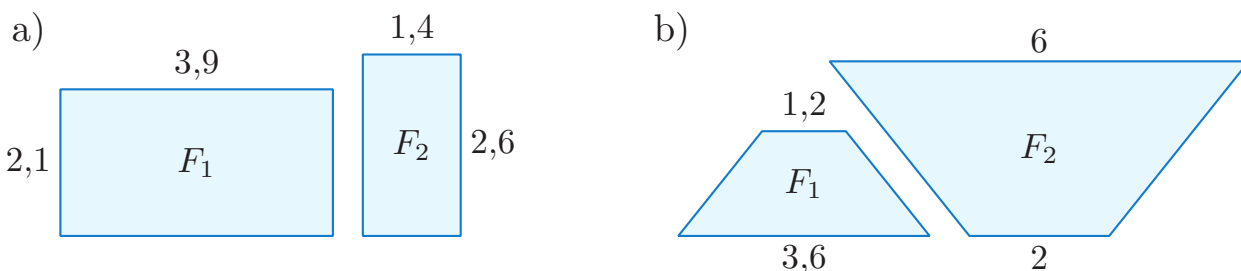
Skala podobieństwa prostokąta  $P_1$  do prostokąta  $P_2$  jest równa:

$$k_2 = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{Zauważ, że skale podobieństwa } k_1 \text{ i } k_2 \text{ są liczbami odwrotnymi.}$$

Zwróć uwagę, że jeśli figury  $F_1$  i  $F_2$  są przystające, to są podobne, a ich skala podobieństwa jest równa 1.

## Ćwiczenie 3

Figury  $F_1$  i  $F_2$  są podobne. Podaj skalę podobieństwa figury  $F_2$  do figury  $F_1$  oraz skalę podobieństwa figury  $F_1$  do figury  $F_2$ .



## Przykład 3

Dane są prostokąty  $P_1$  o bokach  $a_1 = 5$  i  $b_1 = 8$  oraz podobny do niego  $P_2$  o krótszym boku  $a_2 = 15$ . Oblicz długość drugiego boku prostokąta  $P_2$ .

Oznaczmy przez  $b_2$  długość szukanego boku. Prostokąty są podobne, zatem:

$$\frac{b_2}{8} = \frac{15}{5} \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

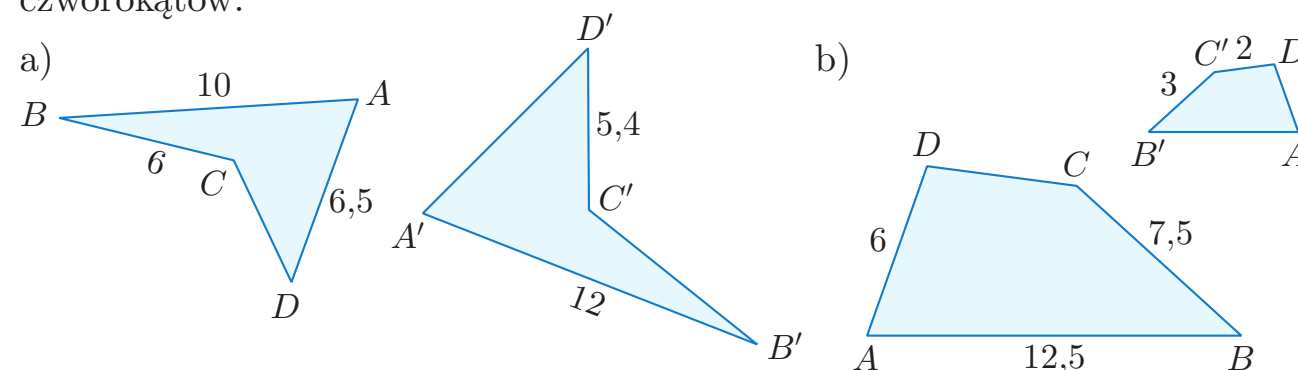
Stąd  $\frac{b_2}{8} = 3$ , czyli  $b_2 = 24$ .

Długość boku  $b_2$  można też wyznaczyć, obliczając najpierw skalę podobieństwa. Skala podobieństwa  $k$  prostokąta  $P_2$  do prostokąta  $P_1$  jest równa 3, co oznacza, że:

$$b_2 = k \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24$$

## Ćwiczenie 4

Czworokąty  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  są podobne. Oblicz skalę podobieństwa czworokąta  $ABCD$  do czworokąta  $A'B'C'D'$  oraz brakujące długości boków tych czworokątów.



## Ćwiczenie 5

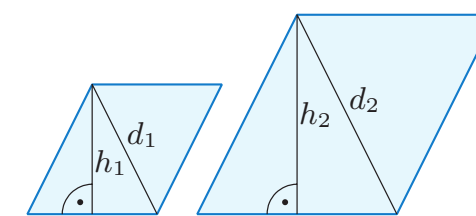
Przeczytaj informację w ramce, a następnie wyznacz szukane wielkości.

Dany jest równoległobok  $ABCD$  o bokach długości 6 cm i 12 cm. Jego krótsza przekątna tworzy z jego krótszym bokiem kąt prosty. Równoległobok  $A'B'C'D'$  jest podobny do równoległoboku  $ABCD$ , a jego krótsza przekątna ma długość  $9\sqrt{3}$  cm.

- Oblicz obwód równoległoboku  $A'B'C'D'$ .
- Oblicz wysokości obu równoległoboków.

Jeśli dwa wielokąty są podobne w skali  $k$ , to proporcjonalne są nie tylko ich boki, lecz także inne odpowiadające sobie odcinki, na przykład wysokości czy przekątne.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_1}{d_2} = k$$



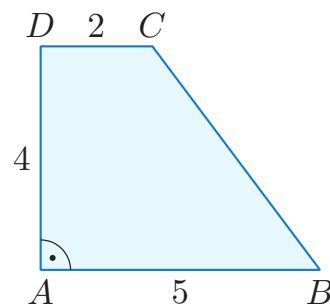
## Zadania

- Oblicz skalę podobieństwa kwadratu  $K_1$  o boku 5 cm do kwadratu  $K_2$ :
  - o przekątnej  $8\sqrt{2}$  cm,
  - o obwodzie 40 cm.
- Trapez o podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz skalę podobieństwa otrzymanych trapezów.
- Dany jest prostokąt  $P$  o bokach długości 12 cm i 8 cm. Oblicz obwód prostokąta  $P'$  w przypadku, gdy skala podobieństwa prostokąta:
  - $P'$  do  $P$  jest równa 3,
  - $P$  do  $P'$  jest równa 2.
- Uzasadnij, że dwa prostokąty są podobne, gdy stosunek długości do szerokości jest w obu prostokątach taki sam.

5. a) Dwa romby są podobne w skali  $k = \frac{5}{2}$ . Długości przekątnych mniejszego z nich są równe 12 i 16. Oblicz obwód każdego z tych rombów.

b) Przekątne rombu  $ABCD$  mają długości 10 i 24. Obwód podobnego do niego rombu  $A'B'C'D'$  jest równy 78. Oblicz skalę podobieństwa większego rombu do mniejszego.

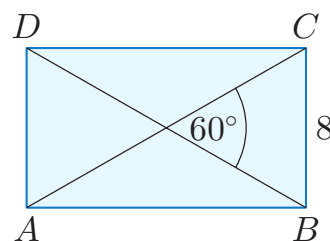
6. Trapez  $A'B'C'D'$  o obwodzie równym 24 jest podobny do trapezu prostokątnego  $ABCD$  (rysunek obok). Oblicz długości boków trapezu  $A'B'C'D'$ .



7. Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$  o bokach długości 9 cm, 12 cm i 15 cm. Trójkąt  $A'B'C'$  jest podobny do trójkąta  $ABC$  w skali  $k = \frac{25}{24}$ . Oblicz wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną w każdym z tych trójkątów oraz sumę ich obwodów.

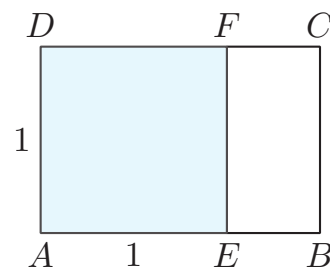
8. Dwa kwadraty o przekątnych długości  $d_1$  i  $d_2$  są podobne w skali  $k = \sqrt{2}$  oraz wiadomo, że  $d_1 + d_2 = 2$ . Oblicz sumę obwodów tych kwadratów.

9. Prostokąt  $A'B'C'D'$  jest podobny do prostokąta  $ABCD$  (rysunek obok). Obwód prostokąta  $A'B'C'D'$  jest równy  $20 + 20\sqrt{3}$ . Oblicz skalę podobieństwa tych figur.



- D** 10. Prostokąt o bokach długości  $x$  i 4, gdzie  $x > 4$ , jest podobny do prostokąta o bokach długości 6 i  $x+5$ . Uzasadnij, że suma obwodów tych prostokątów jest równa 70.

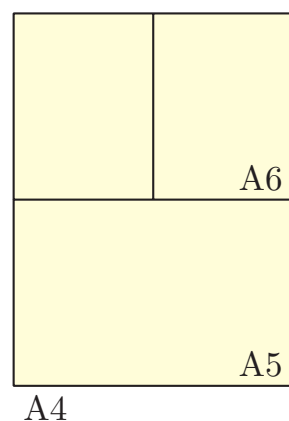
- D** 11. Dany jest prostokąt  $ABCD$  o bokach długości  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  i 1 (rysunek obok). Uzasadnij, że po odcięciu od tego prostokąta kwadratu o boku 1 otrzymamy prostokąt  $BCFE$  podobny do prostokąta  $ABCD$ .



**Uwaga.** Liczba  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  nosi nazwę **złotej liczby**.

12. Arkusz papieru formatu A4 jest prostokątem, który po złożeniu na pół daje dwa arkusze formatu A5 będące prostokątami podobnymi do wyjściowego prostokąta.

- a) Jaki jest stosunek długości boków arkusza A4?  
b) Krótszy bok arkusza A4 ma długość 21 cm. Jaką długość ma dłuższy bok? Odpowiedź podaj w zaokrągleniu z dokładnością do 1 mm.  
c) Jakie są wymiary arkusza A5, a jakie – arkusza A6?



## 6.5. Trójkąty podobne

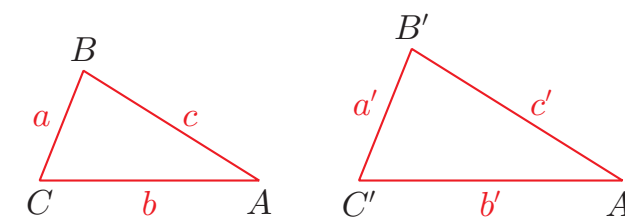
Aby ustalić podobieństwo trójkątów, nie musimy sprawdzać równości wszystkich kątów i proporcjonalności wszystkich boków. Możemy skorzystać z twierdzeń znanych jako **cechy podobieństwa trójkątów**.

### Cecha BBB

Jeśli trzy boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich trzech boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

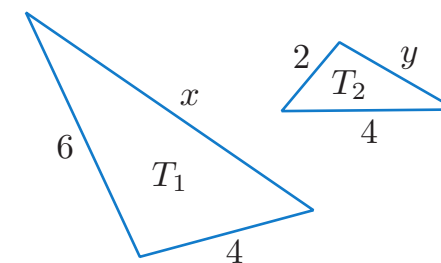
Jeśli  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ , to trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  są podobne, co zapisujemy:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



### Ćwiczenie 1

Przedstawione na rysunku obok trójkąty  $T_1$  i  $T_2$  są podobne. Oblicz długości boków  $x$  i  $y$  tych trójkątów. Podaj skalę podobieństwa trójkąta  $T_2$  do trójkąta  $T_1$ .



### Ćwiczenie 2

Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy te trójkąty są podobne?

a) 6, 8, 12 oraz 9, 12, 18

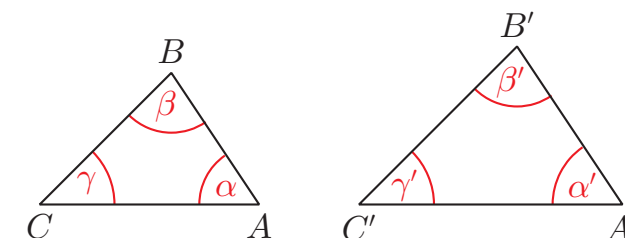
b)  $1\frac{1}{2}$ ,  $2\frac{1}{2}$ ,  $3\frac{1}{2}$  oraz 9, 15, 20

### Cecha KKK

Jeśli kąty jednego trójkąta są równe kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

Jeśli  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  oraz  $\gamma = \gamma'$ , to:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



### **D** Ćwiczenie 3

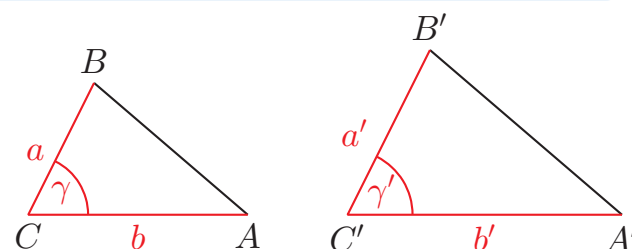
- a) Uzasadnij, że jeśli dwa kąty jednego trójkąta są równe dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.  
b) Uzasadnij, że trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów ma miarę  $27^\circ$ , jest podobny do trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ma miarę  $63^\circ$ .



## Cecha BKB

Jeśli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąty zawarte między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.

Jeśli  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  oraz  $\gamma = \gamma'$ , to:  
 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

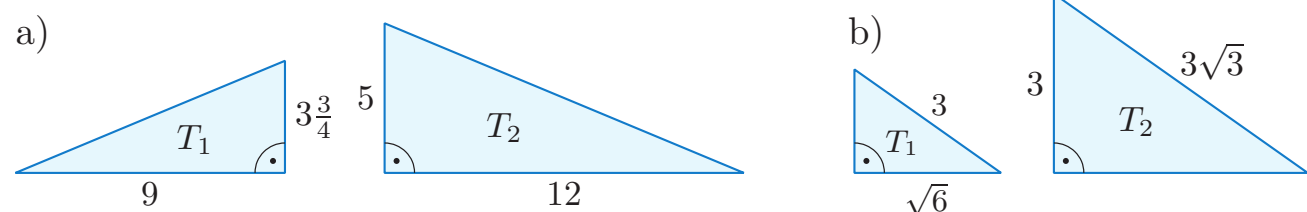


### Ćwiczenie 4

Dane są trójkąty prostokątne  $T_1$  i  $T_2$ . Uzasadnij, że jeśli stosunek długości przyprostokątnych trójkąta  $T_1$  równa się stosunkowi długości przyprostokątnych trójkąta  $T_2$ , to trójkąty te są podobne.

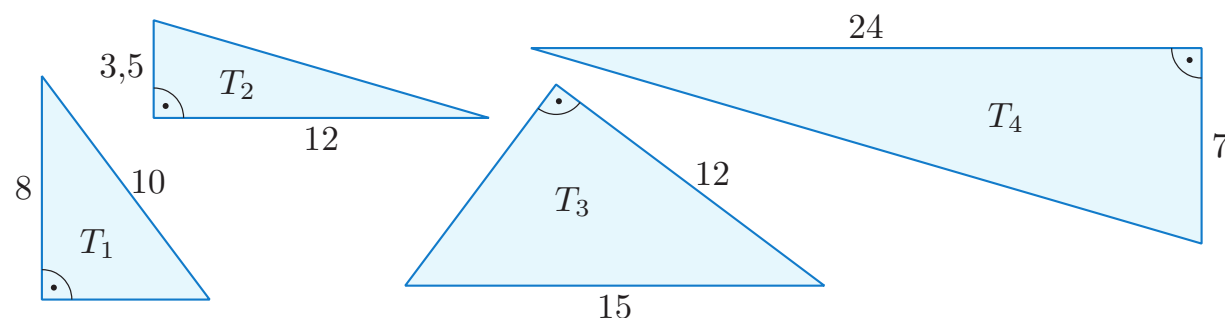
### Ćwiczenie 5

Uzasadnij, że trójkąty  $T_1$  i  $T_2$  są podobne. Podaj skalę podobieństwa trójkąta  $T_1$  do trójkąta  $T_2$ .



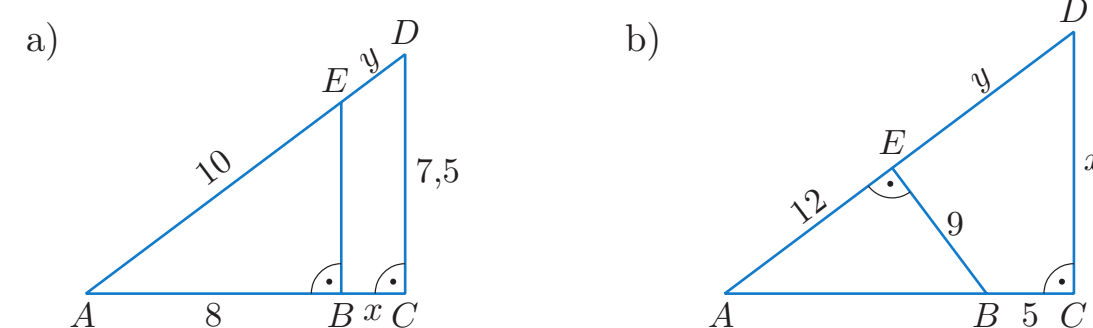
## Zadania

1. Wśród trójkątów przedstawionych na rysunku wskaż pary trójkątów podobnych. Dla każdej pary podaj skalę podobieństwa.

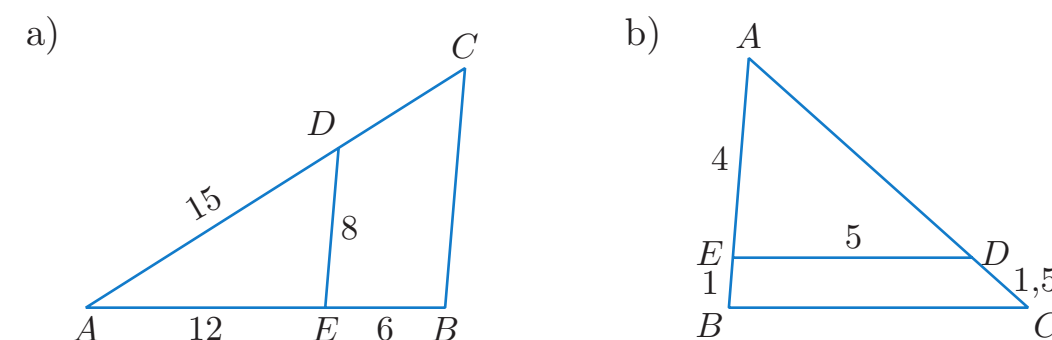


2. a) Dany jest trójkąt  $ABC$  o bokach długości 6, 8, 12. Długość najdłuższego boku trójkąta  $A'B'C'$  jest równa 16 oraz  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ . Jaka jest skala podobieństwa trójkąta  $A'B'C'$  do trójkąta  $ABC$ ? Oblicz obwód trójkąta  $A'B'C'$ .  
 b) Trójkąt  $ABC$ , którego obwód jest równy 55, jest podobny do trójkąta o bokach długości 4, 8, 10. Oblicz długości boków trójkąta  $ABC$ .

3. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, oblicz długości odcinków  $x$  i  $y$ .



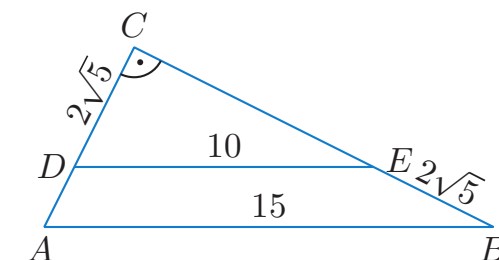
4. Odcinki  $ED$  i  $BC$  są równoległe. Oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .



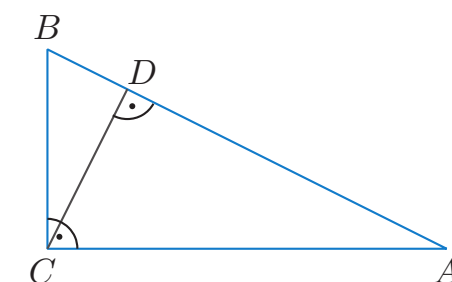
5. a) Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych 12 i 16 jest podobny do trójkąta o obwodzie równym 6. Oblicz długości przeciwprostokątnych obu trójkątów.  
 b) Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej równej 100 jest podobny do trójkąta o przyprostokątnych 12 i 3,5. Oblicz obwody obu trójkątów.

6. Uzasadnij, że  $\triangle ABC \sim \triangle DEC$  (rysunek obok). Oblicz:

- a) skalę podobieństwa tych trójkątów,  
 b) obwody tych trójkątów.

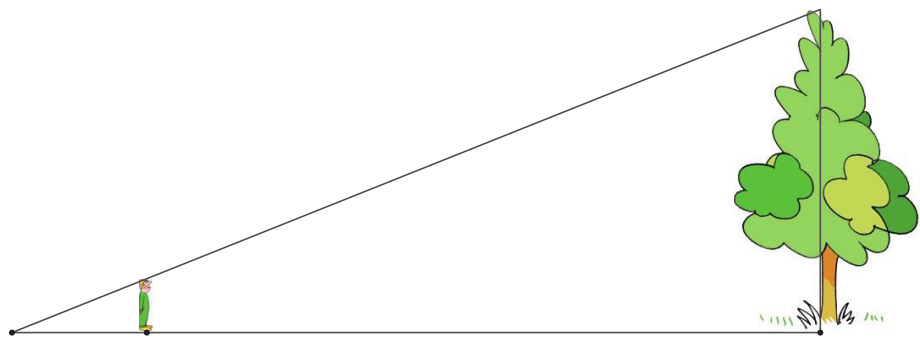


7. a) Wypisz pary trójkątów podobnych (rysunek poniżej). Dla każdej pary podaj odpowiednią cechę podobieństwa.  
 b) W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 3 i 4 poprowadzono wysokość z wierzchołka kąta prostego. Oblicz długości odcinków, na jakie ta wysokość podzieliła przeciwprostokątną.



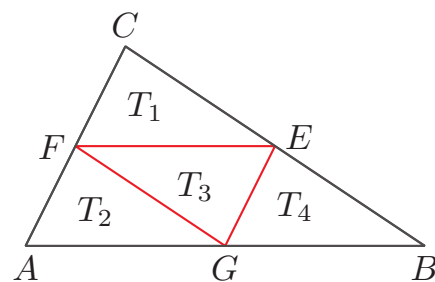
8. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, w którym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki o długościach 2 cm i 8 cm.

9. Aby obliczyć wysokość drzewa, uczeń o wzroście 180 cm ustawił się tak, że koniec jego cienia o długości 4,5 m pokrył się z końcem cienia drzewa. Okazało się, że uczeń stanął w odległości 22,5 m od drzewa. Oblicz wysokość drzewa.

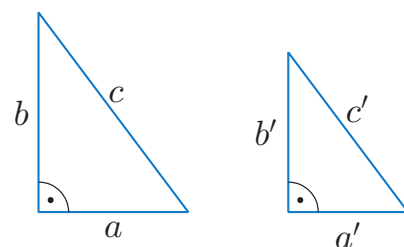


- D 10. W trójkącie ostrokątnym  $DEF$  poprowadzono wysokości  $DM$  i  $EN$ . Wykaż, że trójkąty  $FEN$  i  $FDM$  są podobne.

- D 11. W trójkącie  $ABC$  połączono odcinkami punkty będące środkami boków (rysunek obok).  
a) Wykaż, że trójkąty  $ABC$  i  $EFG$  są podobne.  
b) Wykaż, że trójkąty  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  i  $T_4$  są przystające.

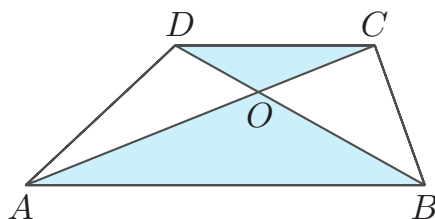


- D 12. Uzasadnij, że jeśli stosunek długości przeciwprostokątnych trójkątów prostokątnych jest równy stosunkowi długości odpowiednich przyprostokątnych, tj.  $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}$  lub  $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$ , to trójkąty te są podobne.



13. W trapezie o podstawach  $AB$  i  $CD$  przekątne przecinają się w punkcie  $O$  (rysunek obok).

- D a) Uzasadnij, że trójkąty  $ABO$  i  $CDO$  są podobne.



b) Przyjmij, że wysokość trapezu wynosi 6 cm, a długości podstaw  $AB$  i  $CD$  są równe odpowiednio 8 cm i 4 cm. Jaka jest odległość punktu  $O$  od krótszej podstawy? Oblicz pola trójkątów  $ABO$  i  $CDO$ .

- D 14. a) Dany jest trapez o podstawie  $AB$  i przekątnych  $AC$  i  $BD$ . Wykaż, że jeśli przekątne trapezu przecinają się w punkcie  $O$ , to pola trójkątów  $AOD$  i  $BOC$  są równe.

b) Dłuższa podstawa trapezu ma długość 10 cm. Punkt przecięcia przekątnych tego trapezu jest odległy o 5 cm od jego dłuższej podstawy i o 3 cm od krótszej. Oblicz pola trójkątów, na które przekątne dzielą ten trapez.

## Dowiedz się więcej

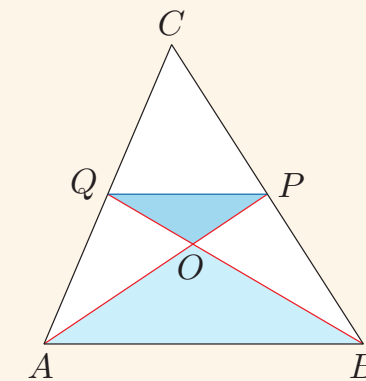
### Proste i odcinki pomocnicze

Przeprowadzając dowody w geometrii, często dorysowujemy pomocnicze odcinki lub proste.

- D 1. Udowodnij, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1, gdy liczymy od wierzchołka. Przeczytaj początek dowodu w ramce i podaj wskazane uzasadnienia.

Rozpatrzmy środkowe  $AP$  i  $BQ$  dowolnego trójkąta  $ABC$ . Niech punkt  $O$  będzie punktem ich przecięcia. Rysujemy pomocniczy odcinek  $PQ$ . Uzasadnij kolejno, że:

- odcinek  $PQ$  jest równoległy do odcinka  $AB$ ,
- trójkąty  $ABO$  i  $PQO$  są podobne,
- punkt  $O$  dzieli każdą ze środkowych  $AP$  i  $BQ$  w stosunku 2 : 1, gdy liczymy od wierzchołka.



Przeprowadź analogiczne rozumowanie dla środkowych poprowadzonych z wierzchołków  $A$  i  $C$ , a następnie uzasadnij, że wszystkie środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

- D 2. Udowodnij, że proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Przeczytaj dowód w ramce i podaj wskazane uzasadnienia.

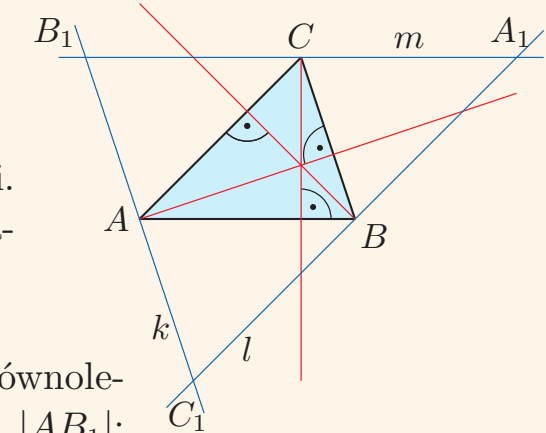
Rozpatrzmy dowolny trójkąt  $ABC$ . Rysujemy proste równoległe do kolejnych boków trójkąta i przechodzące przez odpowiednie wierzchołki:

- $k \parallel BC$  oraz  $A \in k$ ,
- $l \parallel AC$  oraz  $B \in l$ ,
- $m \parallel AB$  oraz  $C \in m$ .

Proste  $k$ ,  $l$ ,  $m$  przecinają się parami. Odpowiednie punkty przecięcia oznaczono na rysunku przez  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ .

Uzasadnij kolejno, że:

- czworokąty  $ABCB_1$  i  $AC_1BC$  są równoległobokami (skąd wynika, że  $|AC_1| = |AB_1|$ ; analogicznie  $|BC_1| = |BA_1|$  i  $|CA_1| = |CB_1|$ ),
- punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta  $A_1B_1C_1$  jest punktem przecięcia prostych zawierających wysokości trójkąta  $ABC$ .



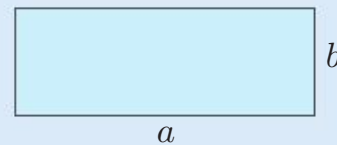


## Przypomnij sobie

### Pola czworokątów

Pole prostokąta o bokach długości  $a$ ,  $b$  wyraża się wzorem:

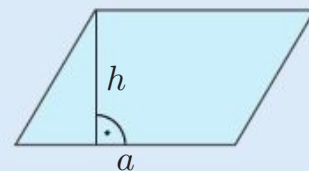
$$P = ab$$



1. a) Oblicz pole prostokąta, którego obwód wynosi 48 cm, a stosunek długości boków jest równy 3:5.  
b) Oblicz obwód prostokąta, którego krótszy bok ma długość 6 cm, a pole jest równe 72 cm<sup>2</sup>.

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

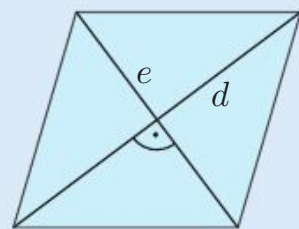
$$P = ah$$



2. a) Oblicz pole równoległoboku o bokach długości 8 cm i 12 cm, którego kąt ostry ma miarę 45°.  
b) Stosunek długości boków równoległoboku jest równy 1:2, jego obwód wynosi 54 cm, a pole jest równe 80 cm<sup>2</sup>. Oblicz obie jego wysokości.

Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym w punkcie, który dzieli je na połowy. Pole rombu o przekątnych długości  $d$ ,  $e$  wyraża się wzorem:

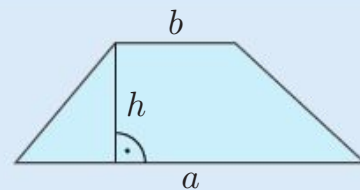
$$P = \frac{1}{2}de$$



3. Oblicz pole i długość boku rombu o przekątnych długości 6 cm i 8 cm.

Pole trapezu o podstawach długości  $a$ ,  $b$  i wysokości  $h$  wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



4. Dany jest trapez o podstawach długości 4 cm i 12 cm, którego kąt ostry ma miarę 45°. Oblicz pole tego trapezu w przypadku, gdy jest on:
  - a) równoramienny,
  - b) prostokątny.

## 6.6. Pola wielokątów podobnych

### Przykład 1

Bok jednego kwadratu jest o 20% dłuższy od boku drugiego kwadratu. Jaka jest skala podobieństwa tych kwadratów? Ile wynosi stosunek ich pól?

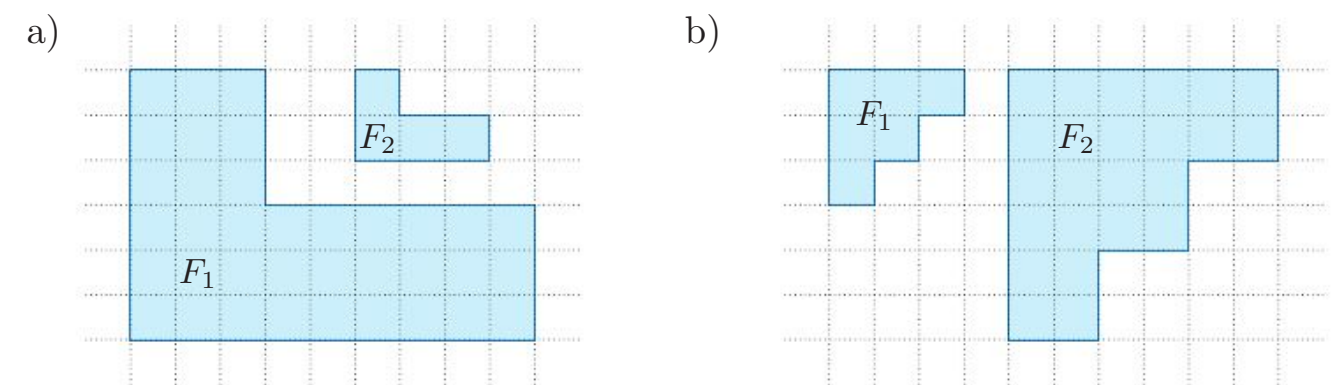
Niech bok pierwszego kwadratu ma długość  $a$ , wówczas bok drugiego z nich ma długość  $a + 20\%a = 120\%a = \frac{6}{5}a$ .

Zatem skala podobieństwa  $k = \frac{6}{5}$ .

Pola kwadratów są odpowiednio równe  $a^2$  i  $\frac{36}{25}a^2$ , zatem stosunek ich pól jest równy  $\frac{36}{25}$ . Zauważmy, że  $\frac{36}{25} = k^2$ .

### Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono wielokąty podobne  $F_1$  i  $F_2$ . Podaj skalę podobieństwa i oblicz stosunek pola figury  $F_2$  do pola figury  $F_1$ .



### Przykład 2

Trójkąt  $T_2$  jest podobny do trójkąta  $T_1$  w skali  $k$ . Uzasadnij, że stosunek pola trójkąta  $T_2$  do pola trójkąta  $T_1$  jest równy  $k^2$ .

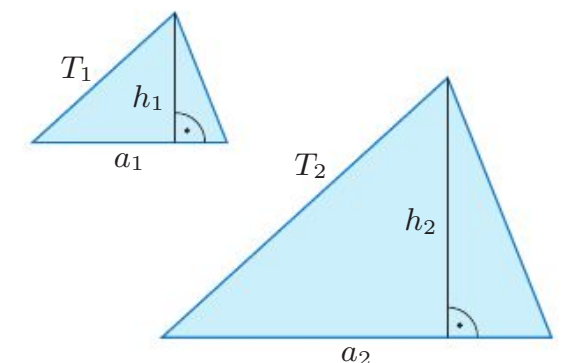
Pole trójkąta  $T_1$ :  $P_1 = \frac{1}{2}a_1h_1$ .

Dla trójkąta  $T_2$  mamy:  
 $a_2 = k \cdot a_1$ ,  $h_2 = k \cdot h_1$ .

Stąd pole trójkąta  $T_2$ :

$$P_2 = \frac{1}{2}a_2h_2 = \frac{1}{2}(k \cdot a_1)(k \cdot h_1) = \frac{1}{2}k^2 \cdot a_1h_1.$$

$$\text{Zatem } \frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}k^2a_1h_1}{\frac{1}{2}a_1h_1} = k^2.$$



### Ćwiczenie 2

Prostokąt  $P_2$  jest podobny do prostokąta  $P_1$  w skali  $k$ . Uzasadnij, że stosunek pola prostokąta  $P_2$  do pola prostokąta  $P_1$  jest równy  $k^2$ .

## Twierdzenie

Jeśli skala podobieństwa figur podobnych równa się  $k$ , to stosunek ich pól jest równy  $k^2$ .

### Ćwiczenie 3

Dane są dwa kwadraty, przy czym pole jednego z nich jest:

- a) o 19% mniejsze od pola drugiego,    b) o 125% większe od pola drugiego.  
Jaka jest skala podobieństwa tych kwadratów?

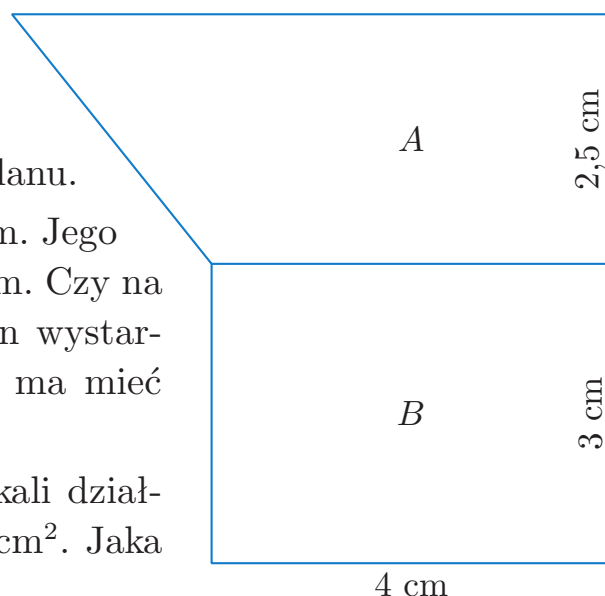
### Ćwiczenie 4

Dany jest trapez prostokątny  $T_1$  o podstawach długości 5 cm i 7 cm oraz wysokości równej 4 cm. Pole trapezu  $T_2$  podobnego do trapezu  $T_1$  jest równe  $6 \text{ cm}^2$ . Oblicz skalę podobieństwa trapezu  $T_2$  do trapezu  $T_1$  oraz ich obwody.

### Ćwiczenie 5

Na rysunku obok przedstawiono plan sąsiadujących działek budowlanych.

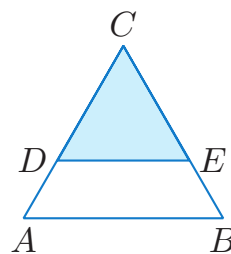
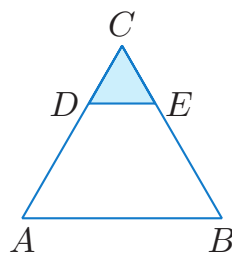
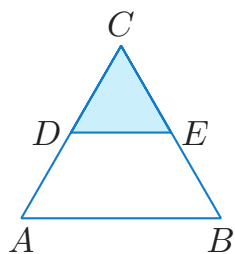
- a) Działka  $B$  jest prostokątem o wymiarach  $32 \text{ m} \times 24 \text{ m}$ . Wyznacz skalę tego planu.  
b) Działka  $A$  jest trapezem prostokątnym. Jego najdłuższy bok ma na planie długość 6 cm. Czy na ogrodzenie działki  $A$  ze wszystkich stron wystarczy 125 m bieżących siatki, jeśli furtka ma mieć szerokość 1,5 m?  
c) Na planie wykonanym w tej samej skali działka  $C$  jest kwadratem o polu równym  $9 \text{ cm}^2$ . Jaka jest powierzchnia tej działki?



### Ćwiczenie 6

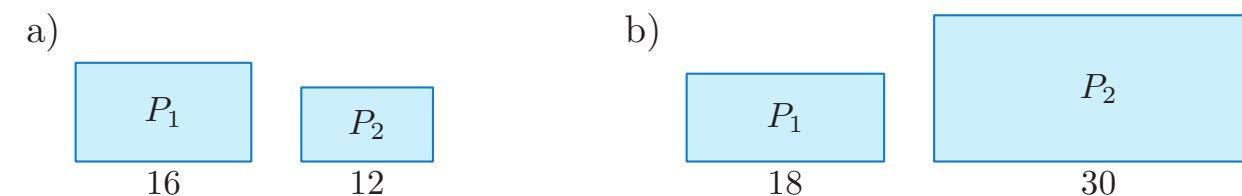
Dany jest trójkąt równoboczny  $ABC$ , którego bok ma długość 12 cm. Odcinek  $DE$  jest równoległy do boku  $AB$ , a pole trójkąta  $DEC$  jest równe  $P$ . Wyznacz stosunek długości odcinków  $DC$  do  $AC$  i oblicz obwód trapezu  $ABED$ .

- a)  $P = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$     b)  $P = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$     c)  $P = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

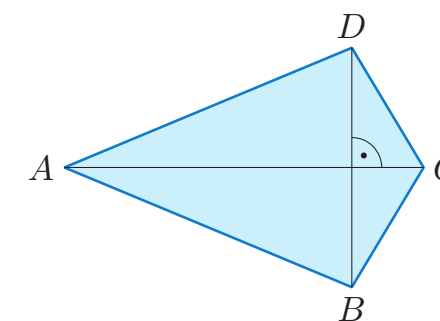


## Zadania

1. Prostokąty  $P_1$  i  $P_2$  są podobne, przy czym pole prostokąta  $P_1$  jest równe  $144 \text{ cm}^2$ . Oblicz skalę podobieństwa prostokąta  $P_2$  do prostokąta  $P_1$  oraz pole prostokąta  $P_2$ .



2. Prostokąt o bokach długości 6 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta o obwodzie 60 cm. Oblicz pole większego prostokąta.
3. a) Trójkąt prostokątny  $T_2$  jest podobny do trójkąta  $T_1$  w skali  $k = \frac{2}{3}$ . Pole trójkąta  $T_1$  jest równe  $45 \text{ cm}^2$ , a jedna z przyprostokątnych trójkąta  $T_2$  ma długość 10 cm. Oblicz obwód trójkąta  $T_2$ .  
b) Romb  $R_2$  jest podobny do rombu  $R_1$  w skali  $k = 3$ . Pole rombu  $R_2$  jest równe  $648 \text{ cm}^2$ , a jedna z przekątnych rombu  $R_1$  ma długość 6 cm. Oblicz obwód każdego z tych rombów.
4. Dany jest równoległobok  $R_1$ , którego boki mają długości 4 cm i 6 cm. Jedna z przekątnych tego równoległoboku jest prostopadła do jego krótszych boków. Równoległobok  $R_2$  o polu  $200\sqrt{5} \text{ cm}^2$  jest podobny do równoległoboku  $R_1$ . Oblicz obwód równoległoboku  $R_2$ .
5. a) Suma pól dwóch figur podobnych jest równa  $340 \text{ dm}^2$ , a ich skala podobieństwa  $k = 4$ . Oblicz pole każdej z tych figur.  
b) Suma pól dwóch trójkątów prostokątnych równoramiennych jest równa  $180 \text{ cm}^2$ , a ich skala podobieństwa  $k = 3$ . Oblicz obwód każdego z tych trójkątów.
6. Przekątne deltoidu  $ABCD$  mają długości:  $|AC| = 15 \text{ cm}$  i  $|BD| = 10 \text{ cm}$ . Oblicz pole powierzchni latawca mającego kształt deltoidu podobnego do deltoidu  $ABCD$  przy założeniu, że wymiary latawca są czterokrotnie większe.



7. Wielokąt  $F_1$  jest podobny do wielokąta  $F_2$  w skali  $\frac{3}{4}$ . Stosunek pól wielokątów podobnych  $F_2$  i  $F_3$  jest równy  $\frac{4}{9}$ . Oblicz skalę podobieństwa wielokąta  $F_3$  do  $F_1$ .

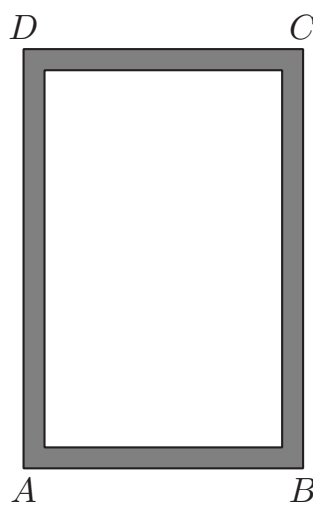


8. Trzy odbitki zdjęć mają kształt podobnych prostokątów  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$ . Pole prostokąta  $P_2$  jest o 44% większe od pola prostokąta  $P_1$ , a pole prostokąta  $P_3$  jest o 125% większe od pola prostokąta  $P_1$ . Wymiary prostokąta  $P_2$  są równe  $24 \text{ cm} \times 36 \text{ cm}$ . Oblicz wymiary prostokąta  $P_3$ .



9. W trójkącie prostokątnym  $ABC$ , którego przeciwprostokątna  $AB$  ma długość 15 cm, poprowadzono wysokość  $CD$ . Stosunek pól trójkątów  $ADC$  i  $BCD$  jest równy 4. Oblicz obwód trójkąta  $ABC$ .
10. Przekątne trapezu o podstawach  $AB$  i  $CD$  oraz wysokości równej 10 przecinają się w punkcie  $P$ . Stosunek pola trójkąta  $ABP$  do pola trójkąta  $CDP$  jest równy  $\frac{9}{4}$ . Oblicz odległości punktu  $P$  od podstaw trapezu.
11. Trapez o wysokości równej 5 cm i podstawach długości 4 cm i 9 cm podzielono prostą równoległą do podstaw na dwa trapezy podobne. Oblicz pole każdego z trapezów otrzymanych w wyniku tego podziału.
12. Działka budowlana o powierzchni  $1025 \text{ m}^2$  ma kształt trapezu o podstawach 32 m i 50 m. Działkę tę podzielono prostą równoległą do podstaw trapezu na dwie działki będące trapezami podobnymi. Oblicz pole każdej z nowo powstałych działek.
- D** 13. Przekątne trapezu o podstawach  $AB$  i  $CD$  przecinają się w punkcie  $P$ . Pole trójkąta  $ABP$  jest równe  $S_1$ , a pole trójkąta  $DCP$  jest równe  $S_2$ . Uzasadnij, że pole tego trapezu jest równe  $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$ .

14. Według projektu zewnętrzny obrys fundamentów domu jest prostokątem (rysunek obok). Przed rozpoczęciem wykopu kierownik budowy nakazał wykonanie pomiaru nie tylko długości boków, lecz także długości przekątnych. Jak sądzisz, dlaczego?



- a) W projekcie budynku wykonanym w skali 1:50  $|AB| = 12 \text{ cm}$ ,  $|BC| = 18 \text{ cm}$ . Ile powinien wynieść wynik pomiaru przekątnych w terenie?
- b) Fundamenty mają mieć głębokość 0,5 m oraz grubość 0,5 m. Ile  $\text{m}^3$  betonu potrzeba na ich wykonanie?

## Fraktale

Fraktal to figura geometryczna cechująca się samopodobieństwem – dowolnie małe części tej figury są podobne do całości.

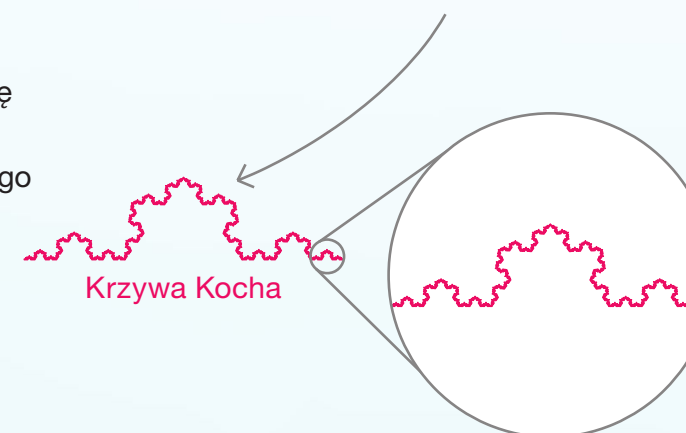
### Krzywa Kocha i śnieżynka Kocha

Przykładem fraktala jest **krzywa Kocha** (jej konstrukcję opisał w 1904 r. szwedzki matematyk Helge von Koch). Oto kolejne etapy jej powstawania.



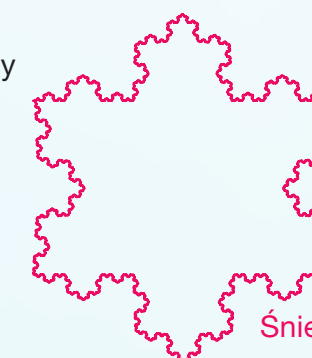
Na każdym kolejnym etapie konstrukcji krzywej Kocha jej długość powiększa się o  $\frac{1}{3}$  długości krzywej z poprzedniego etapu. Jeśli zatem długość początkowego odcinka jest równa 1, to kolejne krzywe mają długości:

$$1, \frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \dots$$



Jeżeli konstrukcję krzywej przeprowadzimy na bokach trójkąta równobocznego, otrzymamy figurę nazywaną **śnieżynką Kocha**.

Śnieżynka Kocha ma skończone pole, chociaż jest ograniczona przez krzywą o nieskończonej długości.



**SAMOPODOBIENSTWO**  
Powiększając dowolnie mały fragment krzywej Kocha, otrzymamy jej idealną kopię.

### Trójkąt Sierpińskiego

Innym przykładem fraktala jest **trójkąt Sierpińskiego**. Konstrukcję, w której z trójkąta równobocznego wycina się kolejne trójkąty równoboczne, przedstawił w 1915 r. polski matematyk Wacław Sierpiński.



- 1** Czy potrafisz obliczyć pole ostatniej z pokazanych figur, jeśli pole wyjściowego trójkąta jest równe 1?



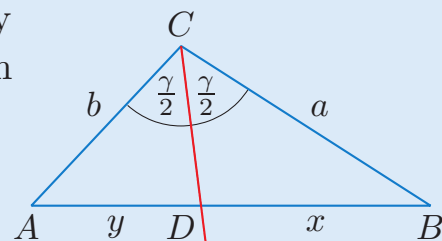
## 6.7. Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy udowodnić poniższe twierdzenie.

### Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$



### Dowód

Wyznaczamy półprostą  $AC$  oraz prostą  $l$  równoległą do dwusiecznej  $CD$  przechodzącą przez punkt  $B$ . Punkt przecięcia półprostej  $AC$  z prostą  $l$  oznaczamy przez  $P$ .

Proste  $CD$  i  $BP$  są równoległe, więc:

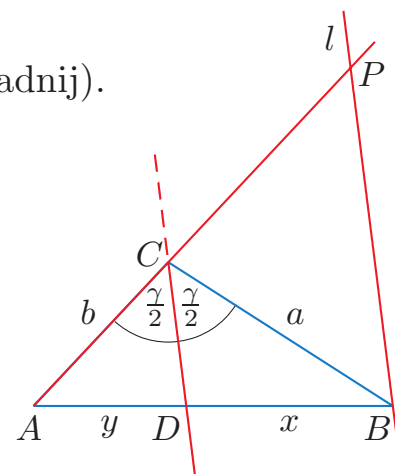
$|\angle ACD| = |\angle APB|$  oraz  $|\angle DCB| = |\angle CBP|$  (uzasadnij).

Oznacza to, że trójkąt  $BPC$  jest równoramienny i  $|CP| = |CB| = a$ .

Z twierdzenia Talesa dla kąta  $CAD$  otrzymujemy:

$$\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|CP|}{|AC|}$$

zatem  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ .



### Ćwiczenie 1

a) Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta prostego tego trójkąta dzieli jego przeciwprostokątną.

b) Przeciwprostokątna trójkąta o kątach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  ma długość 2. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów dzielą boki tego trójkąta.

c) Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego na odcinki długości  $\frac{15}{7}$  i  $\frac{20}{7}$ . Oblicz obwód tego trójkąta.

d) Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego ma miarę  $22,5^\circ$ , a dłuższa przyprostokątna ma długość równą 1. Oblicz długość krótszej przyprostokątnej tego trójkąta.

## Zadania

- Dany jest trójkąt  $ABC$  o bokach  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$  i  $|AB| = c$ . Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczna kąta  $ACB$  dzieli bok  $AB$ , dla:
  - $a = 2$ ,  $b = 6$ ,  $c = 5$ ,
  - $a = 6$ ,  $b = 10$ ,  $c = 12$ .

- Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny  $ABC$ , którego przeciwprostokątna  $AB$  ma długość  $\sqrt{2}$ . Dwusieczna kąta  $ABC$  przecina bok  $AC$  w punkcie  $P$ . Oblicz obwody trójkątów  $BCP$  i  $BAP$ .

- D** 3. Dany jest trójkąt  $ABC$  o bokach długości  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$  i  $|AB| = c$ . Uzasadnij, że dwusieczna kąta  $ACB$  dzieli bok  $AB$  na odcinki długości  $\frac{ac}{a+b}$  i  $\frac{bc}{a+b}$ .

- D** 4. Przeczytaj podany poniżej dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie. W miejscach oznaczonych **?** podaj brakujące uzasadnienia.

Odcinek  $CD$  jest zawarty w dwusiecznej kąta  $ACB$ , a  $CG$  jest wysokością trójkąta opuszczoną z wierzchołka  $C$ .

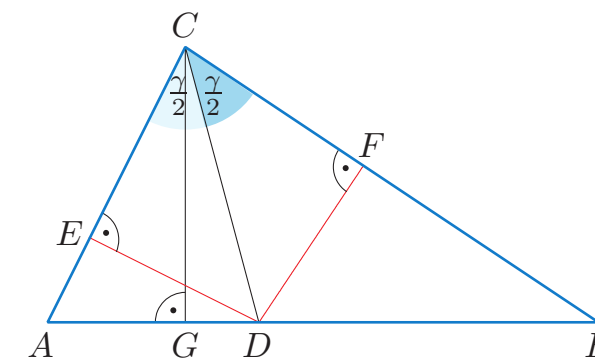
Stąd  $\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|DB|}{|AD|}$ . **?**

Odcinki  $DE$  i  $DF$  mają równe długości. **?**

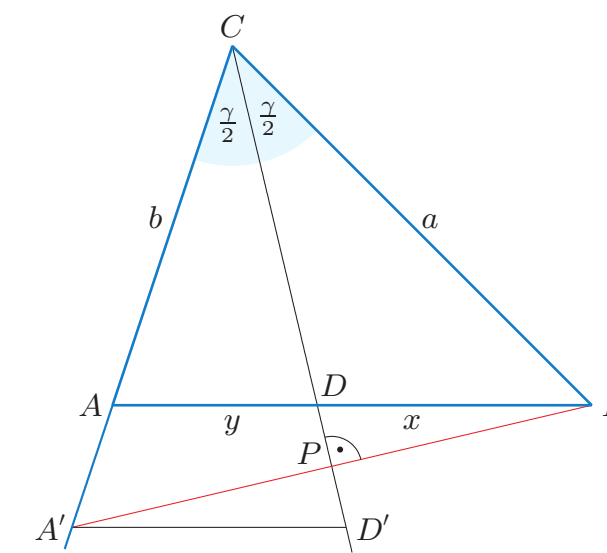
Zatem:

$$\frac{P_{\triangle DBC}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{|BC|}{|AC|} \quad \text{?}$$

Czyli prawdziwa jest proporcja  $\frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}$ .



- D** 5. W trójkącie  $ABC$  poprowadzono dwusieczną  $CD$  kąta  $\gamma$  (rysunek obok). Punkt  $A'$  leży na półprostej  $CA$ , odcinek  $A'B$  jest prostopadły do dwusiecznej  $CD$  i przecina ją w punkcie  $P$ , a odcinek  $A'D'$  jest równoległy do odcinka  $AD$ . Uzasadnij, że trójkąty  $A'D'P$  i  $BDP$  są przystające, a trójkąty  $A'D'C$  i  $ADC$  są podobne. Korzystając z równości  $|A'C| = a$ , uzasadnij prawdziwość proporcji  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ .



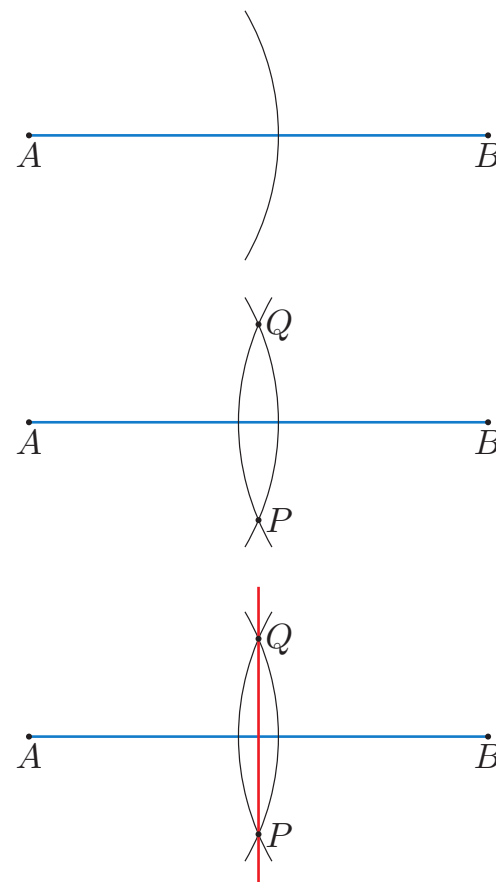


## Problemy konstrukcyjne

Klasyczne konstrukcje wykonuje się tylko za pomocą cyrkla i linijki. Oto niektóre z nich.

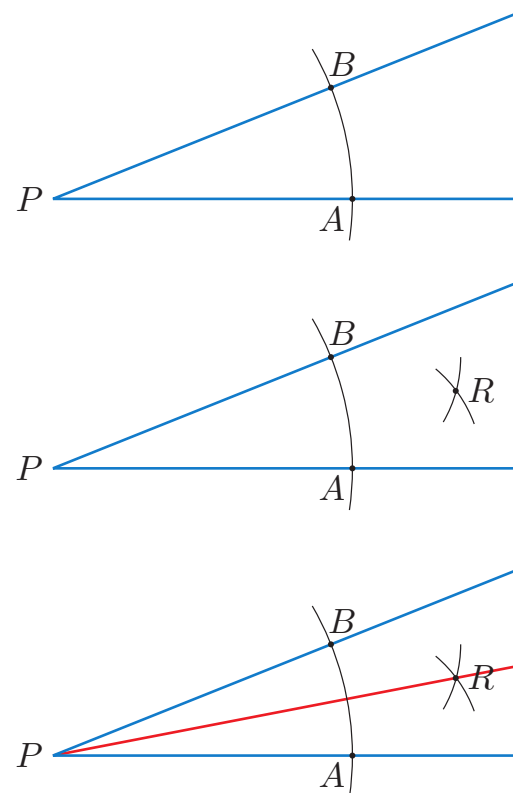
### Konstrukcja symetralnej odcinka

1. Z jednego końca danego odcinka rysujemy łuk okręgu o promieniu dłuższym od połowy odcinka.
2. Z drugiego końca tego odcinka rysujemy łuk okręgu o takim samym promieniu. Punkty przecięcia łuków oznaczamy przez  $P$  i  $Q$ .
3. Rysujemy prostą  $PQ$  – jest ona symetralną odcinka  $AB$ , ponieważ odcinki  $PQ$  i  $AB$  są przekątnymi rombu  $APBQ$ .



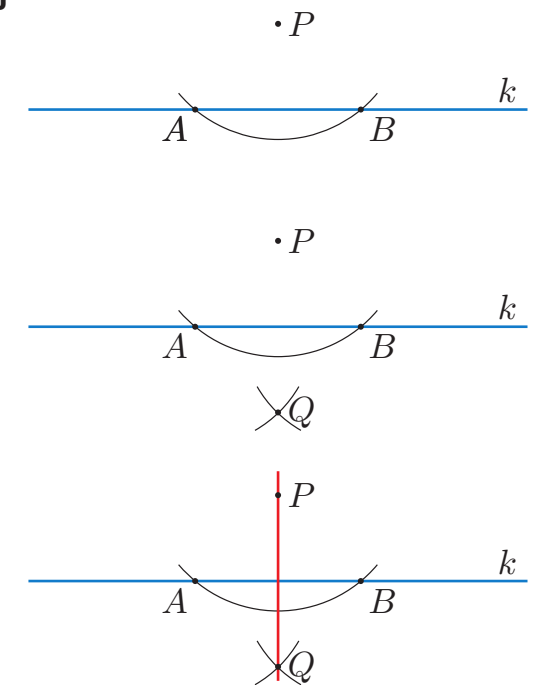
### Konstrukcja dwusiecznej kąta

1. Z wierzchołka danego kąta rysujemy łuk okręgu przecinający ramiona tego kąta. Punkty przecięcia oznaczamy przez  $A$  i  $B$ .
2. Wewnątrz kąta rysujemy łuki okręgów o środkach w punktach  $A$  i  $B$  oraz takich samych promieniach. Punkt przecięcia tych łuków oznaczamy przez  $R$ .
3. Rysujemy półprostą  $PR$  – jest ona dwusieczną kąta  $APB$ , ponieważ trójkąty  $PAR$  i  $PBR$  są przystające (cecha BBB).



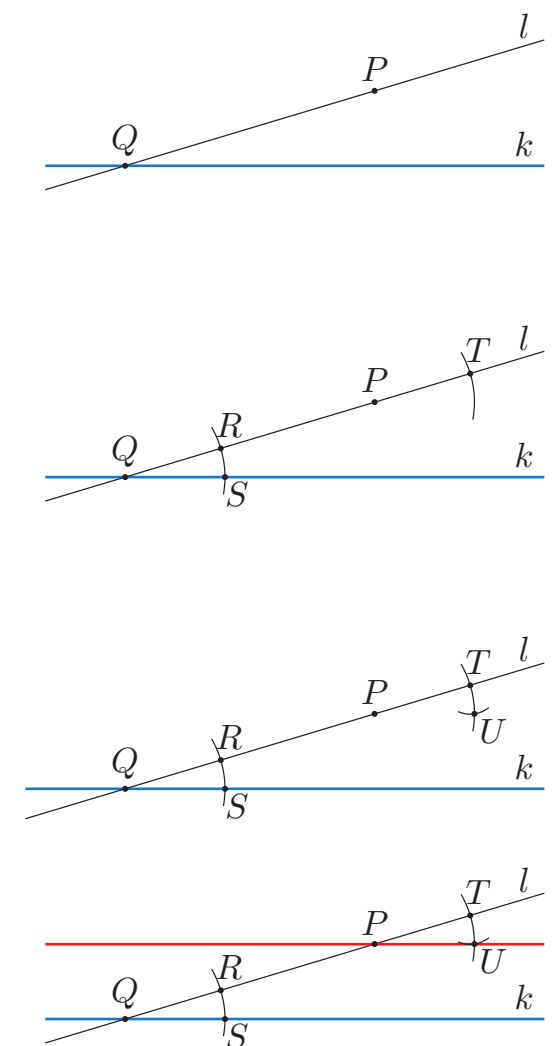
### Konstrukcja prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt nieleżący na tej prostej

1. Z danego punktu  $P$  rysujemy łuk okręgu przecinający daną prostą  $k$ . Punkty przecięcia oznaczamy przez  $A$  i  $B$ .
2. Z punktów  $A$  i  $B$  rysujemy przecinające się łuki okręgów o promieniu  $|AP|$ . Punkt przecięcia tych łuków oznaczamy przez  $Q$ .
3. Rysujemy prostą  $PQ$  – jest ona prostopadła do prostej  $k$ , ponieważ odcinki  $PQ$  i  $AB$  są przekątnymi rombu  $APBQ$ .



### Konstrukcja prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt

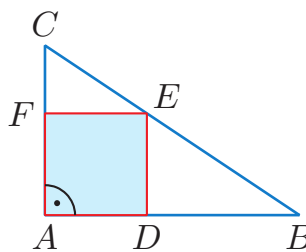
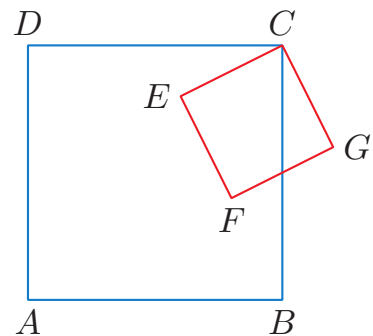
1. Rysujemy dowolną prostą  $l$  nierównoległą do danej prostej  $k$  i przechodzącą przez dany punkt  $P$ . Punkt przecięcia prostej  $l$  z prostą  $k$  oznaczamy przez  $Q$ .
2. Rysujemy łuki okręgów o środkach w punktach  $P$  i  $Q$  oraz takich samych promieniach. Punkty przecięcia tych łuków z prostą  $l$  oznaczamy odpowiednio przez  $T$  i  $R$ . Punkt przecięcia łuku o środku w punkcie  $Q$  z prostą  $k$  oznaczamy przez  $S$ .
3. Rysujemy łuk okręgu o środku w punkcie  $T$  i promieniu  $|RS|$ . Punkt przecięcia tego łuku z łukiem o środku w punkcie  $P$  oznaczamy przez  $U$ .
4. Rysujemy prostą  $PU$  – jest ona równoległa do prostej  $k$ , ponieważ kąt  $TPU$  jest przystający do kąta  $RQS$ .



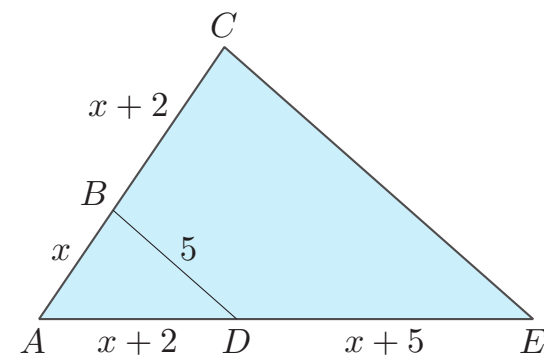
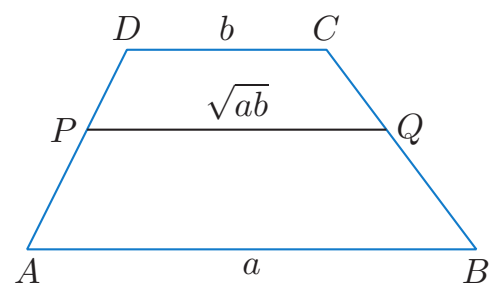


# Powtórzenie

## Zestaw I

- Wyznacz miary kątów trójkąta o podanym stosunku tych miar.
  - 1:2:3
  - 1:3:5
  - 2:9:13
- Kąty między boki trójkąta ostrokatnego a wysokościami poprowadzonymi z wierzchołków należących do tego boku mają miary  $40^\circ$  i  $20^\circ$ . Wyznacz miary kątów tego trójkąta.
- Dane są długości boków dwóch trójkątów. Czy trójkąty te są podobne?
  - 15, 18, 24 oraz 20, 24, 32
  - 4, 8, 10 oraz 6, 3, 7,5
  - 1,2; 1,4; 1,8 oraz 1,8; 2,1; 2,8
  - 20, 25, 30 oraz 6, 9, 7,5
- Trójkąt  $T_1$  o bokach 5 cm, 5 cm i 4 cm jest podobny do trójkąta  $T_2$ . Oblicz długości boków trójkąta  $T_2$  w przypadku, gdy:
  - jego obwód jest równy 35 cm,
  - jego pole jest równe  $4\sqrt{21}$  cm<sup>2</sup>.
- W trójkącie  $ABC$  o polu 50 dm<sup>2</sup> bok  $AB$  ma długość 20 dm. Punkt  $P$  leży na boku  $AC$  i  $|CP| = \frac{1}{5}|AC|$ . Punkt  $Q$  leży na boku  $BC$  i  $|CQ| = \frac{1}{5}|BC|$ . Oblicz długość odcinka  $PQ$  i pole trójkąta  $CPQ$ .
- Przyprostokątne trójkąta  $ABC$  (rysunek obok) mają długości 10 i 15. Oblicz pole kwadratu  $ADEF$ .
 
- Dany jest trójkąt o bokach 4 cm, 6 cm i 8 cm. Oblicz długości odcinków, na jakie dwusieczne kątów tego trójkąta dzielą jego przeciwległe boki.
 
- Punkt  $C$  jest wspólnym wierzchołkiem kwadratów  $ABCD$  i  $CEFG$  (rysunek obok). Wykaż, że pola trójkątów  $DEC$  i  $CBG$  są równe.
- Działkę budowlaną w kształcie trójkąta o bokach długości 60 m, 60 m i 40 m podzielono na dwie części o równych polach płotem równoległym do boku długości 40 m. Oblicz z dokładnością do 1 m obwód każdej z nowo powstałych działek.

## Zestaw II

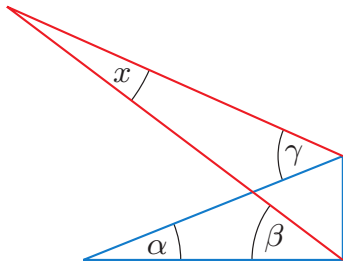
- Wykaż, że dowolne dwa prostokąty, w których przekątne przecinają się pod tym samym kątem  $\alpha$ , są podobne.
  - Wykaż, że jeśli prostokąt o bokach  $x$  i  $y$  jest podobny do prostokąta o bokach odpowiednio  $x+1$  i  $y+1$ , to prostokąty te są kwadratami.
- Oblicz obwód trójkąta  $AEC$ .
  - $BD \parallel CE$
  - 
- Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 260 cm, a ich skala podobieństwa  $k = \frac{5}{8}$ . Oblicz obwód każdej z tych figur.
- Figury  $F_1$  i  $F_2$  są podobne w skali 1:2, a figury  $F_2$  i  $F_3$  są podobne w skali 1:3. Suma pól figur  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  jest równa 410 dm<sup>2</sup>. Oblicz pole każdej z tych figur.
- Wykaż, że w trapezie niebędącym równoległobokiem odcinek łączący środki:
  - ramion trapezu jest równoległy do jego podstaw (rozpatrz kąt otrzymany przez przedłużenie ramion trapezu),
  - przekątnych trapezu jest równoległy do jego podstaw.
- W rombie  $ABCD$  połączono środki kolejnych boków i otrzymano czworokąt  $A'B'C'D'$ . Uzasadnij, że czworokąt ten jest prostokątem o polu dwa razy mniejszym od pola rombu.
- W trapezie  $ABCD$  o podstawach  $a$  i  $b$  (rysunek obok) poprowadzono odcinek  $PQ$  o długości  $\sqrt{ab}$  równoległy do podstaw trapezu. Uzasadnij, że:
  - $\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|AB|}{|PQ|}$ ,
  - trapezy  $ABQP$  i  $PQCD$  są podobne.



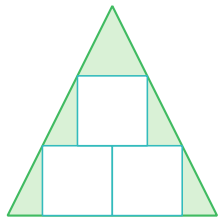


# Zadania z kontekstem realistycznym

1. Geodeta miał zmierzyć w terenie kąt oznaczony na rysunku obok przez  $x$ . Ze względu na ukształtowanie terenu okazało się to niemożliwe, więc zmierzył kąty  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  i otrzymał  $\alpha = 22^\circ$ ,  $\beta = 37^\circ$ ,  $\gamma = 46^\circ$ . Ile wynosi miara kąta  $x$ ?

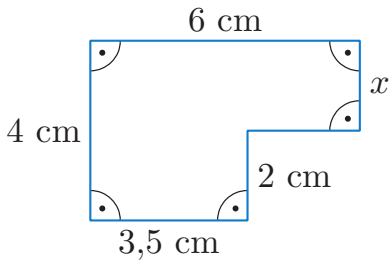


2. Na trawniku mającym kształt trójkąta równoramiennego wytyczono trzy jednakowej wielkości rabaty kwiatowe, każda w kształcie kwadratu (rysunek obok). Oblicz, jaką część powierzchni trawnika zajmują rabaty.



3. Na mapie sporządzonej w skali 1 : 700 000 odległość między miejscowościami  $A$  i  $B$  jest równa 4 cm. Oblicz odległość między tymi miejscowościami na mapie w skali 1 : 800 000.

4. Na rysunku przedstawiono plan ogrodu w pewnej skali. Wiadomo, że fragment płotu biegnący wzdłuż odcinka  $x$  ma długość 6 m. Jaka jest długość płotu postawionego wokół tego ogrodu, jeżeli na wejście pozostawiono 2 m?

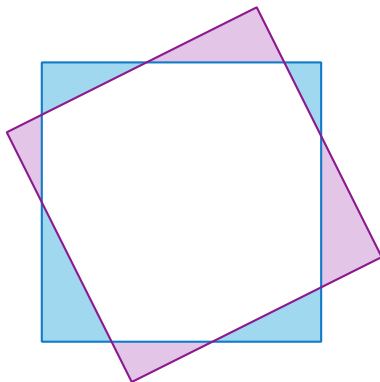


5. Na planie w skali 1:450 kwadratowa działka ma pole równe  $81 \text{ cm}^2$ . Ile siatki potrzeba na ogrodzenie tej działki, jeżeli brama ma mieć długość 4 m?

D 6. Jaś położył dwie jednakowe kwadratowe kartki tak jak na rysunku obok, a następnie część trójkątów pomalował na niebiesko, a część na fioletowo.

a) Uzasadnij, że wszystkie pomalowane trójkąty są podobne.

b) Uzasadnij, że na pomalowanie trójkątów niebieskich potrzebował tyle samo farby, co na pomalowanie trójkątów fioletowych.



7. Działkę budowlaną mającą kształt trapezu podzielono płotem równoległym do podstaw trapezu na dwie działki o równych polach. Czy długość płotu dzielącego nowo powstałe działki jest większa od długości płotu równoległego do podstaw trapezu dzielącego te działki na dwa trapezy podobne?

Przedstawiając dowód, należy precyzyjnie uzasadnić każdy krok rozumowania. Można to zrobić tak jak w przykładzie 1. lub w postaci dowodu dwukolumnowego, który jest zapisany w tabeli (przykład 2.).

## D Przykład 1

Dane są kwadrat  $ABCD$  i równoległobok  $EFBA$  (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty  $ADE$  i  $BCF$  są przystające.

Niech kąt ostry równoległoboku ma miarę  $\alpha$ . Wówczas  $|\sphericalangle CBF| = 90^\circ + \alpha$ . Suma miar kątów przy jednym boku równoległoboku jest równa  $180^\circ$ , więc:

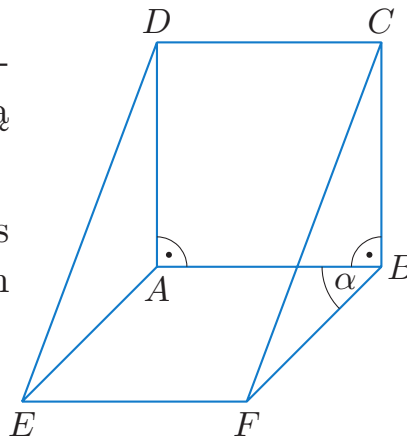
$$|\sphericalangle BAE| = 180^\circ - \alpha$$

Stąd:

$$|\sphericalangle DAE| = 360^\circ - (|\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle BAD|) = 360^\circ - (180^\circ - \alpha + 90^\circ) = 90^\circ + \alpha$$

czyli  $|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle CBF|$ . Jednocześnie  $|AD| = |BC|$  (boki kwadratu) oraz  $|AE| = |BF|$  (przeciwległe boki równoległoboku).

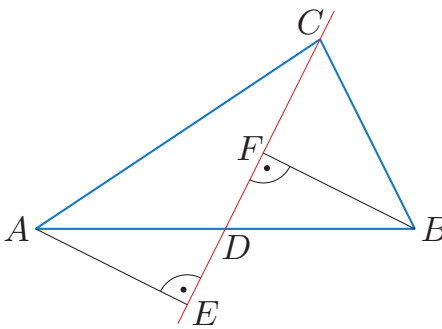
Na podstawie cechy BKB wnioskujemy, że  $\triangle ADE \equiv \triangle BCF$ .



→ Zadanie 13, str. 312

## D Przykład 2

Prosta zawierająca środkową trójkąta  $ABC$  poprowadzoną z wierzchołka  $C$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ . Punkty  $E$  i  $F$  leżą na prostej  $CD$ , przy czym  $AE \perp CD$  oraz  $BF \perp CD$  (rysunek obok). Udowodnij, że trójkąty  $ADE$  i  $BDF$  są przystające.



Dowód przedstawimy w dwukolumnowej tabeli.

W jednej kolumnie zapisujemy kolejne stwierdzenia, a w drugiej – ich uzasadnienia. Pozwala to uporządkować całe rozumowanie.

| Stwierdzenie                                    | Uzasadnienie                                                                  |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $ AD  =  BD $                                   | Punkt $D$ jest środkiem boku $AB$ .                                           |
| $ \sphericalangle ADE  =  \sphericalangle BDF $ | Są to kąty wierzchołkowe.                                                     |
| $ \sphericalangle AED  =  \sphericalangle BFD $ | Są to kąty proste.                                                            |
| $ \sphericalangle DAE  =  \sphericalangle DBF $ | Trójkąty $ADE$ i $BDF$ mają dwa kąty równe, więc wszystkie ich kąty są równe. |
| $\triangle ADE \equiv \triangle BDF$            | Na podstawie cechy KBK przystawiania trójkątów.                               |

→ Zadanie 13, str. 312



W zadaniach 1–8 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

**Zadanie 1 (0–1)**

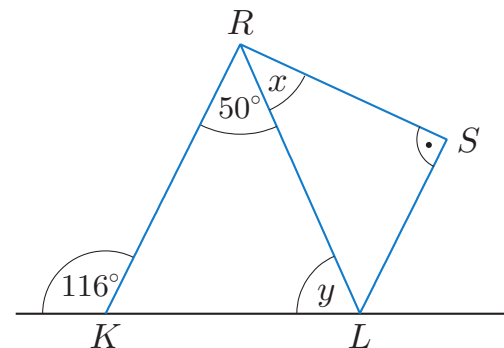
Przekątna ośmiokąta foremnego dzieli go na siedmiokąt i trójkąt równoramienny. Miara kąta ostrego tego trójkąta jest równa

- A.  $22,5^\circ$       C.  $26,5^\circ$   
B.  $24,5^\circ$       D.  $28,5^\circ$

**Zadanie 2 (0–1)**

Na rysunku obok  $RK \parallel SL$ . Suma miar kątów  $x$  i  $y$  jest równa

- A.  $104^\circ$       C.  $106^\circ$   
B.  $105^\circ$       D.  $110^\circ$

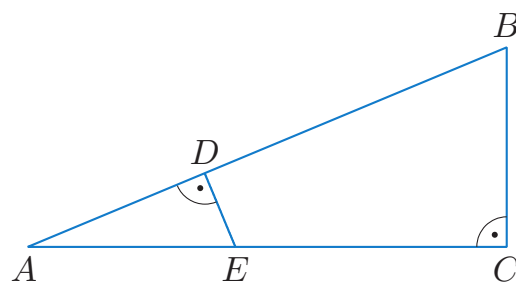
**Zadanie 3 (0–1)**

Suma obwodów dwóch figur podobnych jest równa 340 cm, a ich skala podobieństwa  $k = \frac{7}{10}$ . Różnica obwodów tych figur wynosi

- A. 60 cm      B. 65 cm      C. 75 cm      D. 80 cm

**Zadanie 4 (0–1)**

Przyprostokątne trójkąta  $ABC$  (rysunek poniżej) mają długości 5 cm i 12 cm. Ile wynosi obwód trójkąta  $AED$ , jeśli jego pole jest równe  $4,8 \text{ cm}^2$ ?



- A. 6 cm      B. 8 cm      C. 10 cm      D. 12 cm

**Zadanie 5 (0–1)**

Jeżeli prostokąt  $P_1$  o bokach długości 9 cm i 12 cm jest podobny do prostokąta  $P_2$  o przekątnej długości 20 cm, to

- A. obwód prostokąta  $P_2$  jest równy 54 cm.  
B. pole prostokąta  $P_2$  jest równe  $200 \text{ cm}^2$ .  
C. pole prostokąta  $P_2$  jest o  $64 \text{ cm}^2$  większe od pola prostokąta  $P_1$ .  
D. stosunek pola prostokąta  $P_1$  do pola prostokąta  $P_2$  jest równy 9 : 16.

**Zadanie 6 (0–1)**

Na boku  $AB$  trójkąta  $ABC$  wybrano punkt  $P$ , a na boku  $AC$  – punkt  $Q$  tak, że  $PQ \parallel BC$ . Jeśli  $|AB| = 4,5 \text{ cm}$ ,  $|AC| = 5 \text{ cm}$ ,  $|AQ| = 2 \text{ cm}$  i  $|BC| = 3 \text{ cm}$ , to obwód trójkąta  $APQ$  jest równy

- A. 5 cm      B. 6 cm      C. 6,5 cm      D. 7 cm

**Zadanie 7 (0–1)**

Prostokąt  $P_1$  o bokach długości 7 cm i 24 cm jest podobny do prostokąta  $P_2$ , którego pole jest równe  $42 \text{ cm}^2$ . Długość przekątnej prostokąta  $P_2$  wynosi

- A. 6,25 cm      B. 12,5 cm      C. 14,5 cm      D. 25 cm

**Zadanie 8 (0–1)**

Dany jest trójkąt  $ABC$ . Dwusieczna kąta  $ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $P$  takim, że  $|BP| = |AP| + 1 \text{ cm}$ . Ponadto  $|AC| = 4 \text{ cm}$  oraz  $|BC| = 6 \text{ cm}$ . Obwód trójkąta  $ABC$  wynosi

- A. 15 cm      B. 14,5 cm      C. 12,5 cm      D. 12 cm

**Zadanie 9 (0–2)**

Dwa boki trójkąta mają długości 4 cm i 8 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Długość trzeciego boku tego trójkąta nie może być równa

- A.  $3\sqrt{2} \text{ cm}$       E.  $(7 + 2\sqrt{5}) \text{ cm}$   
B.  $2\sqrt{3} \text{ cm}$       F.  $(8 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}$   
C.  $(3 + \sqrt{2}) \text{ cm}$       G.  $(9 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}$   
D.  $(2 + \sqrt{5}) \text{ cm}$       H.  $(10 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}$

**Zadanie 10 (0–1)**

Trójkąty  $T_1$  i  $T_2$  są podobne. Najkrótszy bok trójkąta  $T_1$  ma długość 4,5 cm, a najkrótszy bok trójkąta  $T_2$  ma długość 7,5 cm.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                                                                                                |          |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|
| Jeśli pole trójkąta $T_1$ jest równe $27 \text{ cm}^2$ , to pole trójkąta $T_2$ jest równe $75 \text{ cm}^2$ . | <b>P</b> | <b>F</b> |
| Jeśli pole trójkąta $T_2$ jest równe $25 \text{ cm}^2$ , to pole trójkąta $T_1$ jest równe $9 \text{ cm}^2$ .  | <b>P</b> | <b>F</b> |





### Zadanie 11 (0-1)

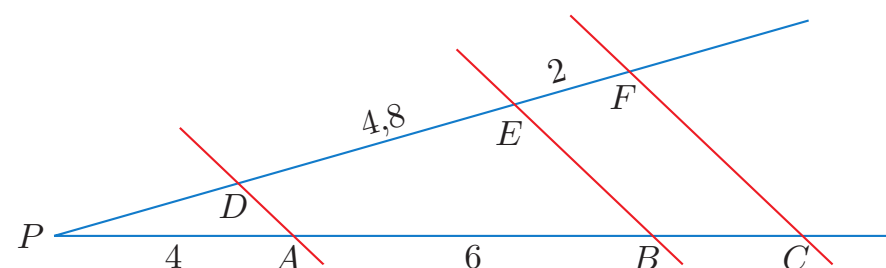
Przekątne poprowadzone z jednego wierzchołka pięciokąta foremnego podzieliły ten pięciokąt na trzy trójkąty.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                                                                  |          |          |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|
| Jeden z tych trójkątów ma kąty o miarach $30^\circ$ , $75^\circ$ , $75^\circ$ .  | <b>P</b> | <b>F</b> |
| Dwa z tych trójkątów mają kąty o miarach $30^\circ$ , $30^\circ$ , $120^\circ$ . | <b>P</b> | <b>F</b> |

### Zadanie 12 (0-2)

Proste  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$  są równoległe (rysunek poniżej).



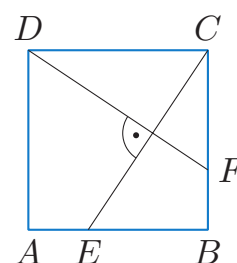
Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

| Numer zadania | Zdanie do uzupełnienia        | Dokończenie zdania |
|---------------|-------------------------------|--------------------|
| <b>12.1</b>   | Odcinek $BC$ ma długość równą | ?                  |
| <b>12.2</b>   | Odcinek $PD$ ma długość równą | ?                  |

A. 2,5      B. 2,8      C. 3,2      D. 3,6      E. 3,8

### D Zadanie 13 (0-2) → Przykłady 1 i 2, str. 309

Na bokach  $AB$  i  $BC$  kwadratu  $ABCD$  wybrano odpowiednio punkty  $E$  i  $F$  takie, że  $CE \perp DF$  (rysunek obok). Uzasadnij, że trójkąty  $BCE$  i  $CDF$  są przystające.



### Zadanie 14

Przekątne rombu  $ABCD$  mają długości 12 cm i 16 cm.

### Zadanie 14.1 (0-2)

Punkt  $P$  jest punktem przecięcia przekątnych rombu  $ABCD$ . Oblicz długości odcinków, na które dwusieczna kąta  $APB$  dzieli bok rombu.

### Zadanie 14.2 (0-2)

Romb  $EFGH$  o polu równym  $150 \text{ cm}^2$  jest podobny do rombu  $ABCD$ . Oblicz obwód rombu  $EFGH$ .

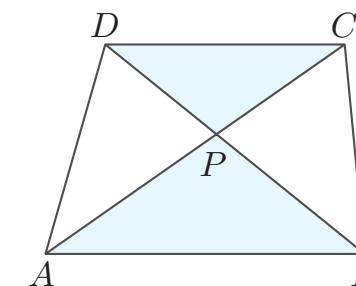


### Zadanie 15 (0-1)

Dany jest trapez  $ABCD$  (rysunek obok). Podstawy trapezu mają długości  $|AB| = 16 \text{ cm}$ ,  $|CD| = 12 \text{ cm}$ , a pole trójkąta  $ABP$  jest równe  $48 \text{ cm}^2$ .

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

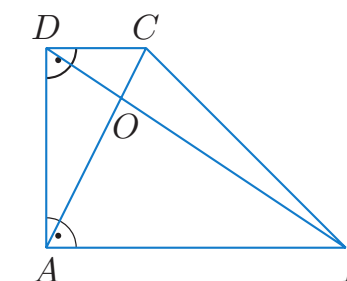
Pole trójkąta  $CDP$  jest równe



|           |                     |                                                                         |           |                  |
|-----------|---------------------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|------------------|
| <b>A.</b> | $36 \text{ cm}^2$ , | ponieważ skala podobieństwa trójkąta $CDP$ do trójkąta $ABP$ jest równa | <b>1.</b> | $\frac{3}{4}$ .  |
| <b>B.</b> | $27 \text{ cm}^2$ , |                                                                         | <b>2.</b> | $\frac{9}{16}$ . |
|           |                     |                                                                         | <b>3.</b> | $\frac{16}{9}$ . |

### Zadanie 16 (0-4)

W trapezie prostokątnym (rysunek obok) dane są długości podstaw  $|AB| = 6$  i  $|CD| = 2$  oraz ramienia  $|AD| = 4$ . Punkt  $O$  jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu. Oblicz obwód trójkąta  $AOB$ .

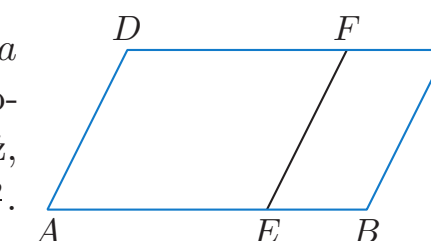


### Zadanie 17 (0-4)

Dany jest trapez  $ABCD$  o podstawach  $|AB| = 40 \text{ cm}$  i  $|CD| = 25 \text{ cm}$  i ramionach długości 12 cm i 9 cm. Przedłużenia ramion tego trapezu przecinają się w punkcie  $P$ . Oblicz obwód trójkąta  $ABP$ .

### D Zadanie 18 (0-4)

Dany jest równoległobok  $ABCD$  o bokach  $|AB| = a$  i  $|BC| = b$ . Czworokąt  $EBCF$  jest równoległobokiem podobnym do równoległoboku  $ABCD$ . Wykaż, że obwód czworokąta  $AEFD$  jest równy  $\frac{2a^2 - 2b^2 + 2ab}{a}$ .



### Zadanie 19 (0-4)

Dany jest trójkąt równoramienny o ramieniu długości 6 cm i kącie przy podstawie równym  $30^\circ$ . Oblicz odległości punktu przecięcia prostych zawierających wysokości tego trójkąta od jego wierzchołków.

**Wskazówka.** Proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

### D Zadanie 20 (0-4)

Uzasadnij, że suma długości środkowych trójkąta o obwodzie  $L$  jest mniejsza od  $\frac{3}{2}L$ .

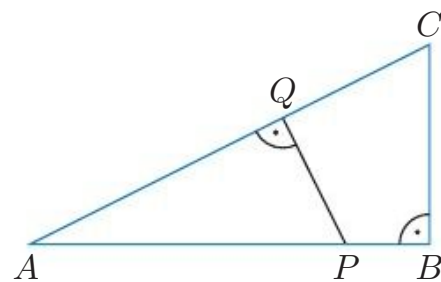


### Zadanie 1 (0-2)

Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$ , w którym  $|AC| = 8$  i  $|BC| = 6$ , a kąt prosty znajduje się przy wierzchołku  $C$ . Odcinek  $CP$  jest wysokością trójkąta  $ABC$ , a odcinek  $PQ$  jest wysokością trójkąta  $CPA$ . Oblicz stosunek pola trójkąta  $APQ$  do pola trójkąta  $ABC$ .

### Zadanie 2

Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$  o przyprostokątnych długości  $|AB| = 4$  i  $|BC| = 2$  (rysunek obok). Odcinek  $PQ$  dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach.



### Zadanie 2.1 (0-2)

Oblicz obwód trójkąta  $APQ$ .

### Zadanie 2.2 (0-2)

Dwusieczna kąta  $AQP$  przecina odcinek  $AB$  w punkcie  $D$ . Oblicz długość odcinka  $DB$ .

### Zadanie 3 (0-2)

Dany jest trapez  $ABCD$  o dłuższej podstawie  $AB$ . Na ramieniu  $AD$  wybrano punkt  $E$ , a na ramieniu  $BC$  punkt  $F$  w taki sposób, że odcinek  $EF$  jest równoległy do podstaw trapezu oraz  $|BF| = 2,8$  i  $|CF| = 1,2$ . Przedłużenia ramion trapezu przecinają się w punkcie  $P$  takim, że  $|PA| = 7,8$  i  $|PB| = 10,4$ . Oblicz długości odcinków  $PD$  i  $PE$ .

### D Zadanie 4 (0-4)

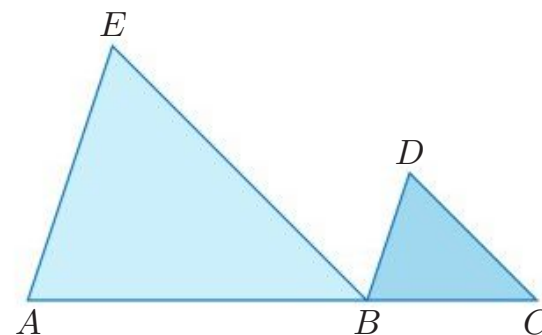
Uzasadnij, że jeśli odcinek łączący środki ramion trapezu dzieli go na dwa trapezy podobne, to trapez ten jest równoległobokiem.

### D Zadanie 5 (0-4)

Trapez prostokątny o podstawach długości  $a$  i  $2a$  oraz krótszym ramieniu równym  $a$  podzielono odcinkiem równoległym do podstaw na dwa trapezy podobne. Uzasadnij, że pola tych trapezów są równe  $\frac{a^2}{2}$  i  $a^2$ .

### D Zadanie 6 (0-6)

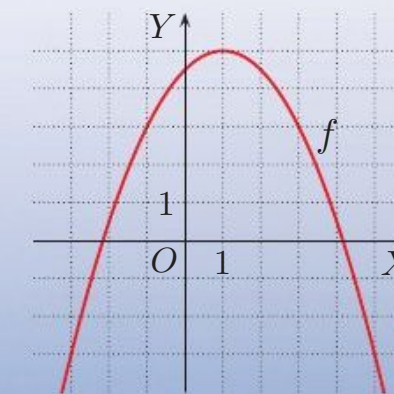
Punkty  $A, B, C$  (rysunek obok) są współliniowe oraz  $AE \parallel BD$  i  $BE \parallel CD$ . Pola trójkątów  $ABE$  i  $BCD$  są równe odpowiednio  $S_1$  i  $S_2$ . Udowodnij, że pole trójkąta  $BDE$  jest równe  $\sqrt{S_1 \cdot S_2}$ .



# 7 Funkcja kwadratowa

Funkcję postaci  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ) nazywamy **funkcją kwadratową** lub **trójmianem kwadratowym**. Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**. Mówimy „parabola określona równaniem  $y = ax^2 + bx + c$ ” lub krótko: „parabola  $y = ax^2 + bx + c$ ”.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji kwadratowej  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$ .



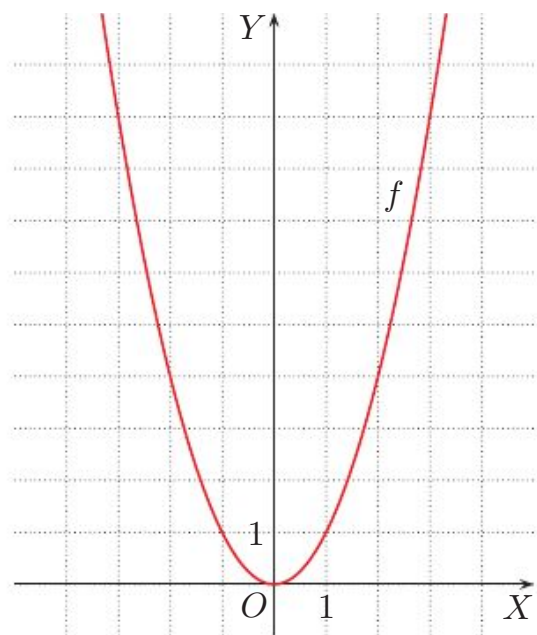
Swobodnie wisząca zamocowana na końcach lina przyjmuje kształt krzywej łańcuchowej. Natomiast liny podtrzymujące most wiszący mają kształt zbliżony do paraboli (na zdjęciu most Golden Gate w San Francisco).





## 7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

Na rysunku poniżej przedstawiono **parabolę**, która jest wykresem funkcji  $f(x) = x^2$ . Jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości – przedział  $[0; \infty)$ . Z wykresu możemy odczytać następujące własności:

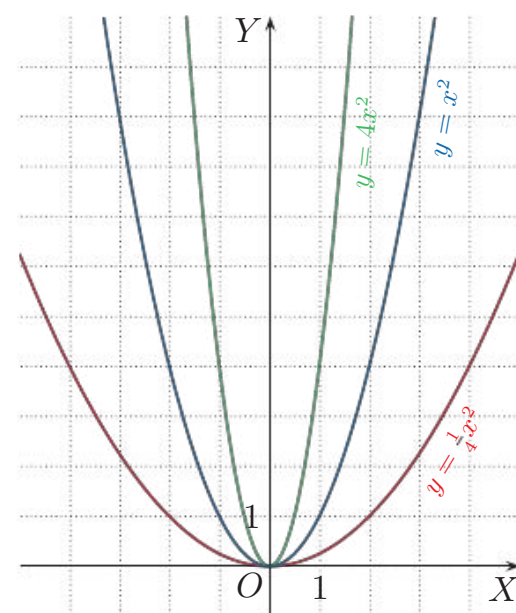


- **ramiona** paraboli są skierowane do góry,
- oś  $OY$  jest **osią symetrii** paraboli,
- punkt  $(0,0)$  jest **wierzchołkiem** paraboli,
- funkcja  $f$  jest **malejąca** w przedziale  $(-\infty; 0]$  oraz **rosnąca** w przedziale  $[0; \infty)$ ,
- dla  $x = 0$  funkcja  $f$  przyjmuje **wartość najmniejszą** równą zero, natomiast dla każdego  $x \neq 0$  prawdziwa jest nierówność  $f(x) > 0$ ,
- funkcja  $f$  nie przyjmuje **wartości największej**.

### Ćwiczenie 1

Sporządź odpowiednie tabele wartości funkcji i naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = 2x^2$  i  $f_3(x) = \frac{1}{2}x^2$ , łącząc punkty wykresu odpowiednią krzywą (patrz wyżej).

Parabole  $y = \frac{1}{4}x^2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$  zostały dla porównania naszkicowane w jednym układzie współrzędnych. Zwróć uwagę na zależność między współczynnikiem  $a$  w równaniu paraboli  $y = ax^2$  i rozchyleniem ramion tej paraboli.



### Ćwiczenie 2

Czy punkt  $P$  należy do paraboli  $y = 4x^2$ ?

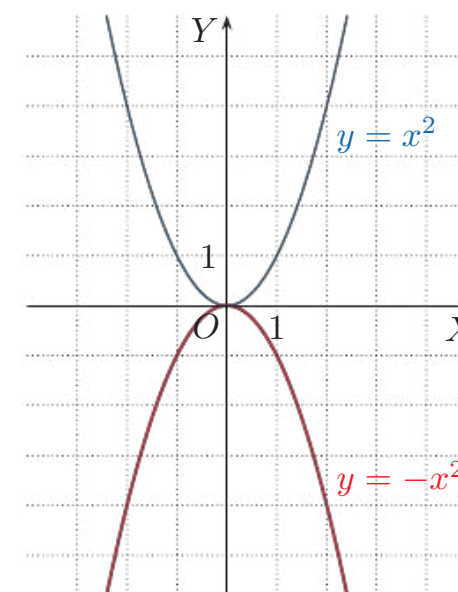
- |                         |                        |
|-------------------------|------------------------|
| a) $P(-\frac{1}{4}, 1)$ | c) $P(\frac{1}{2}, 1)$ |
| b) $P(4, 32)$           | d) $P(-2, 16)$         |

### Ćwiczenie 3

Dla jakiej wartości współczynnika  $a$  punkt  $Q$  należy do paraboli  $y = ax^2$ ?

- |              |              |               |                |
|--------------|--------------|---------------|----------------|
| a) $Q(1, 6)$ | b) $Q(2, 8)$ | c) $Q(-4, 8)$ | d) $Q(-8, 48)$ |
|--------------|--------------|---------------|----------------|

Wykres funkcji  $y = -x^2$  można otrzymać, odbijając symetrycznie względem osi  $OX$  wykres funkcji  $y = x^2$ . Zwróć uwagę na to, że ramiona paraboli będącej wykresem funkcji  $y = -x^2$  są skierowane w dół.

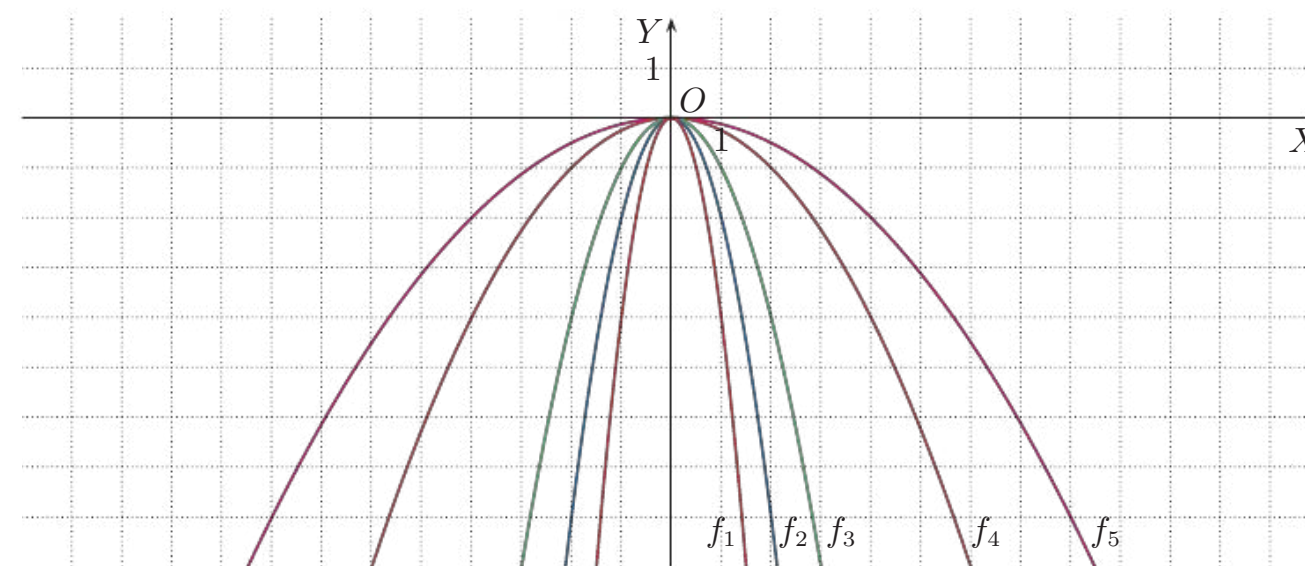


### Ćwiczenie 4

- Podaj przedziały monotoniczności funkcji  $f(x) = -x^2$ .
- Podaj równanie osi symetrii i współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f(x) = -x^2$ .

### Ćwiczenie 5

Wykresy funkcji  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  (rysunek poniżej) otrzymano, odbijając symetrycznie względem osi  $OX$  wykresy funkcji  $y = \frac{1}{8}x^2$ ,  $y = \frac{1}{4}x^2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ ,  $y = 4x^2$ . Podaj wzory funkcji  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ .



Wartość współczynnika  $a$  we wzorze funkcji  $f(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ , decyduje o tym, czy ramiona paraboli będącej jej wykresem skierowane są do góry (gdy  $a > 0$ ) czy w dół (gdy  $a < 0$ ) oraz o tym, jak bardzo są rozchylone.

### Ćwiczenie 6

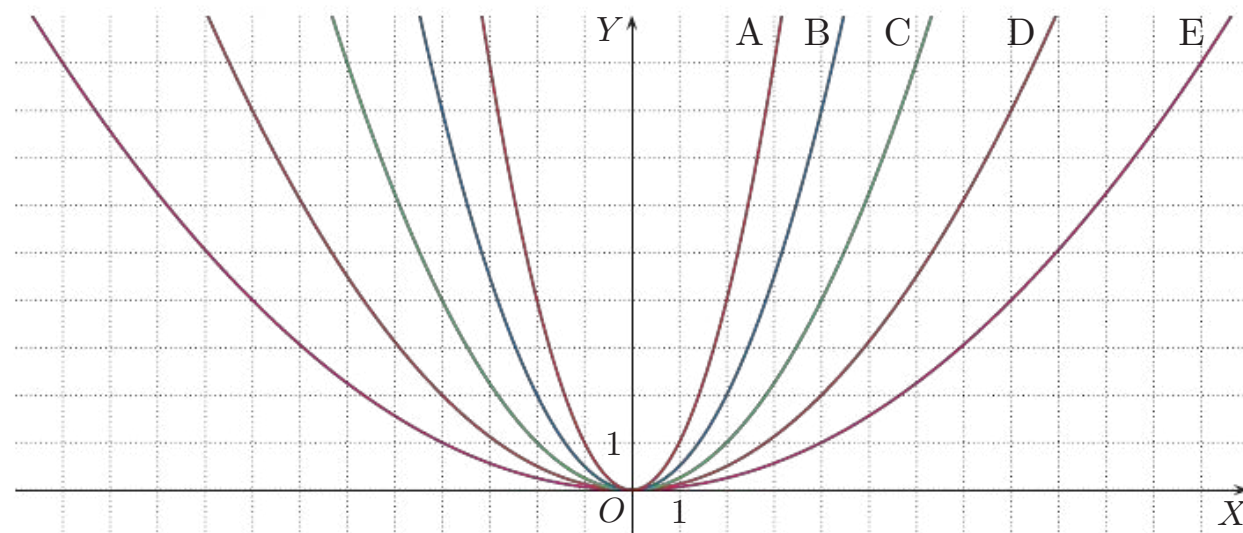
Do wykresu funkcji  $f(x) = ax^2$  należy punkt  $P$ . Naszkicuj ten wykres i podaj pięć punktów o obu współrzędnych całkowitych, które do niego należą.

- |               |                         |                       |                        |
|---------------|-------------------------|-----------------------|------------------------|
| a) $P(2, -4)$ | b) $P(\frac{1}{2}, -1)$ | c) $P(-\sqrt{2}, -6)$ | d) $P(-2\sqrt{2}, -4)$ |
|---------------|-------------------------|-----------------------|------------------------|



## Zadania

- Naszkicuj wykres funkcji  $f$  o dziedzinie  $D$ . Podaj zbiór wartości tej funkcji.
  - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ ,  $D = (-2; 4)$
  - $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ ,  $D = [-4; 2]$
  - $f(x) = 3x^2$ ,  $D = (-1; 2)$
  - $f(x) = -2x^2$ ,  $D = [1; 2]$
- Dopasuj do równań  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{2}x^2$ ,  $y = \frac{1}{8}x^2$  odpowiednie parabole spośród A–E. Podaj równania pozostałych parabol.

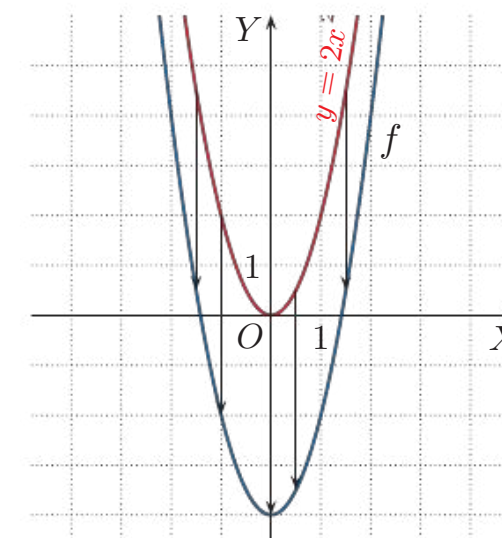


- Dla której spośród trzech podanych funkcji odległość od osi  $OX$  punktu o odciętej  $x = 1$  należącego do jej wykresu jest najmniejsza?
  - $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$ ,  $y = -6x^2$
  - $y = \frac{3}{2}x^2$ ,  $y = \sqrt{2}x^2$ ,  $y = 2x^2$
  - $y = -\frac{1}{3}x^2$ ,  $y = 3x^2$ ,  $y = 2\sqrt{3}x^2$
  - $y = -3x^2$ ,  $y = \pi x^2$ ,  $y = 3,14x^2$
- Punkty  $P(x_1, y_1)$  i  $Q(x_2, y_2)$  należą do paraboli  $y = ax^2$ . Oblicz odległość punktu  $Q$  od osi  $OX$  dla podanych współrzędnych punktów  $P$  i  $Q$ .
  - $x_1 = 3$ ,  $y_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $x_2 = -2$
  - $x_1 = -2\sqrt{2}$ ,  $y_1 = 20$ ,  $x_2 = 2$
- Prosta  $y = 4$  przecina parabolę  $y = ax^2$  w punktach  $A$  i  $B$ . Oblicz  $a$  dla:
  - $|AB| = 2$ ,
  - $|AB| = 8$ ,
  - $|AB| = \frac{1}{2}$ ,
  - $|AB| = 2\sqrt{2}$ .
- Punkty  $O(0,0)$ ,  $A(x,3)$  i  $B(-x,3)$  należą do paraboli  $y = ax^2$ . Pole trójkąta  $AOB$  jest równe 12. Naszkicuj tę parabolę.
- Podaj dziedzinę i wzór funkcji opisującej pole kwadratowej działki budowlanej w zależności od długości jej przekątnej  $x$ . Naszkicuj jej wykres.
  - Prostokątną działkę budowlaną można podzielić na dwa kwadraty. Podaj dziedzinę i wzór funkcji opisującej pole tej działki w zależności od długości przekątnej  $x$  tej działki.

## 7.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ o wektor

### Przykład 1

Wykres funkcji  $f(x) = 2x^2 - 4$  otrzymamy, przesuwając parabolę  $y = 2x^2$  o 4 jednostki w dół, czyli o wektor  $\vec{u} = [0, -4]$  (rysunek obok).



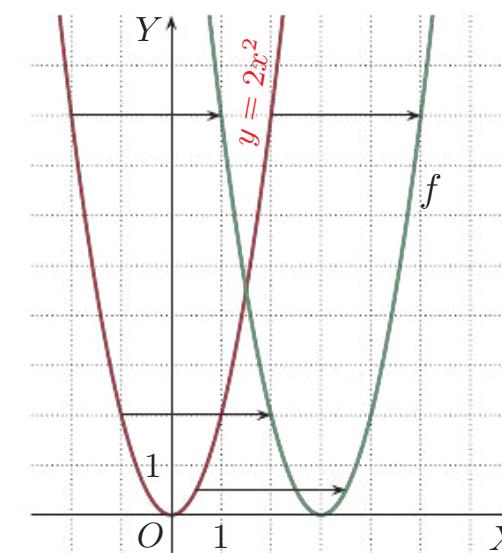
### Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji  $f$  i określ jej zbiór wartości.

- $f(x) = x^2 - 3$
- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = -2x^2 - 4$
- $f(x) = -2x^2 + 2$

### Przykład 2

Wykres funkcji  $f(x) = 2(x-3)^2$  otrzymamy, przesuwając parabolę  $y = 2x^2$  o 3 jednostki w prawo, czyli o wektor  $\vec{u} = [3, 0]$  (rysunek obok).



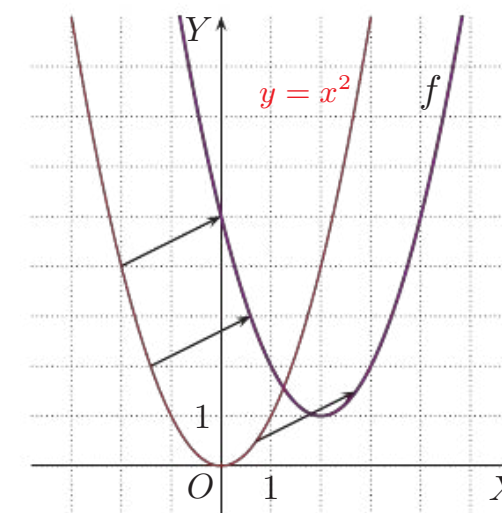
### Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji  $f$  i podaj jej przedziały monotoniczności.

- $f(x) = (x+3)^2$
- $f(x) = (x-1)^2$
- $f(x) = -2(x+2)^2$
- $f(x) = -2(x-2)^2$

### Przykład 3

Wykres funkcji  $f(x) = (x-2)^2 + 1$  otrzymamy, przesuwając parabolę  $y = x^2$  o 2 jednostki w prawo, a następnie o 1 jednostkę w górę, lub bezpośrednio o wektor  $\vec{u} = [2, 1]$ .



### Ćwiczenie 3

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ .

- $f(x) = (x-3)^2 - 2$
- $f(x) = (x+2)^2 + 1$
- $f(x) = (x-2)^2 - 1$



Wykres funkcji  $f(x) = a(x - p)^2 + q$ , gdzie  $a \neq 0$ , otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji  $y = ax^2$  o wektor  $[p, q]$ .

Wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji  $f$  jest punkt  $(p, q)$ .  
Jej osią symetrii jest prosta  $x = p$ .

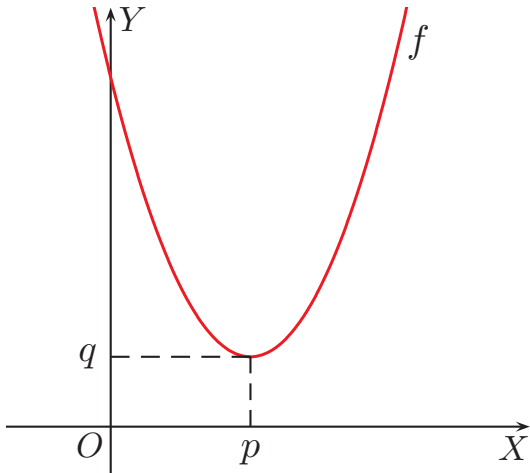
#### Ćwiczenie 4

O jaki wektor należy przesunąć parabolę  $y = 2x^2$ , aby otrzymać wykres podanej funkcji?

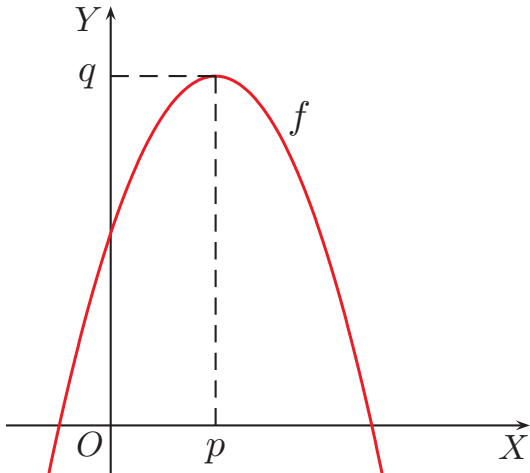
- a)  $f(x) = 2(x + 6)^2 - 3$                       b)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$

Poniższe własności funkcji  $f(x) = a(x - p)^2 + q$  zależą od współczynnika  $a$ .

| $a > 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• ramiona paraboli są skierowane do góry</li> <li>• dla <math>x = p</math> funkcja osiąga wartość najmniejszą <math>y = q</math></li> <li>• funkcja maleje w przedziale <math>(-\infty; p]</math></li> <li>• funkcja rośnie w przedziale <math>[p; \infty)</math></li> <li>• zbiorem wartości funkcji jest przedział <math>[q; \infty)</math></li> </ul> |



| $a < 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• ramiona paraboli są skierowane w dół</li> <li>• dla <math>x = p</math> funkcja osiąga wartość największą <math>y = q</math></li> <li>• funkcja rośnie w przedziale <math>(-\infty; p]</math></li> <li>• funkcja maleje w przedziale <math>[p; \infty)</math></li> <li>• zbiorem wartości funkcji jest przedział <math>(-\infty; q]</math></li> </ul> |



#### Ćwiczenie 5

Podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji  $f$  oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem. Naskicuj tę parabolę.

- a)  $f(x) = 2(x - 3)^2 - 4$                       c)  $f(x) = -(x + 4)^2 - 1$   
b)  $f(x) = \frac{1}{4}(x + 2)^2 + 2$                       d)  $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^2 + 3$

### Zadania

- Wykres funkcji  $f(x) = x^2$  przesun o wektor  $\vec{u}$ . Następnie podaj wzór otrzymanej funkcji oraz jej przedziały monotoniczności.  
a)  $\vec{u} = [1, 2]$     b)  $\vec{u} = [1, -2]$     c)  $\vec{u} = [-3, -2]$     d)  $\vec{u} = [-2, -4]$
- Naskicuj parabolę, którą otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji  $f(x) = -x^2$  o wektor  $\vec{u}$ . Podaj współrzędne jej wierzchołka i równanie jej osi symetrii.  
a)  $\vec{u} = [-2, 4]$     b)  $\vec{u} = [-3, -1]$     c)  $\vec{u} = [2, 2]$     d)  $\vec{u} = [3, -1]$
- Naskicuj wykres funkcji  $f$  i podaj jej zbiór wartości.  
a)  $f(x) = 2(x - 1)^2 - 4$                       c)  $f(x) = -2(x + 3)^2 + 2$   
b)  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 1$                       d)  $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 4$
- Wykres funkcji  $g$  powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji  $f$  o wektor  $\vec{u}$ . Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij.

| Wzór funkcji $f$        | Wektor $\vec{u}$    | Wzór funkcji $g$                   |
|-------------------------|---------------------|------------------------------------|
| $f(x) = 5x^2 - 3$       | $\vec{u} = [-1, 5]$ | ?                                  |
| $f(x) = 4x^2$           | ?                   | $g(x) = 4(x + 2)^2 + 3$            |
| ?                       | $\vec{u} = [7, -3]$ | $g(x) = \frac{5}{2}(x - 7)^2 - 13$ |
| $f(x) = 2(x - 5)^2 + 3$ | $\vec{u} = [4, -6]$ | ?                                  |

- Punkty  $F$  i  $G$  są wierzchołkami parabol będących wykresami funkcji  $f$  i  $g$ . Wyznacz współrzędne wektora  $\vec{FG}$  i naskicuj obie parabole.  
a)  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$   
b)  $f(x) = 4 - 2(x + 1)^2$ ,  $g(x) = 2 - 2(x + 3)^2$   
c)  $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 4$ ,  $g(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 - 1$   
d)  $f(x) = 2 - \frac{1}{2}(x + 1)^2$ ,  $g(x) = -1 - \frac{1}{2}(x - 3)^2$
- Do wykresu funkcji  $f(x) = ax^2 + q$  należy punkt  $P(-1, 2)$ . Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest podany przedział. Wyznacz wzór tej funkcji.  
a)  $[1; \infty)$     b)  $[0; \infty)$     c)  $(-\infty; 3]$     d)  $(-\infty; 6]$
- Do paraboli  $y = (x - p)^2 - 1$  należą punkty  $A$  i  $B$ . Oblicz wartość współczynnika  $p$  i naskicuj tę parabolę.  
a)  $A(-4, 3)$ ,  $B(0, 3)$                       b)  $A(-1, 8)$ ,  $B(5, 8)$





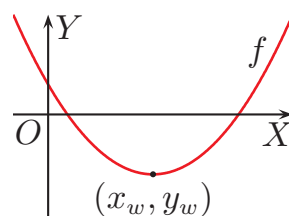
$$\begin{aligned}
 \text{b) } y &= x^2 + 5x + 3 = && \text{Postać ogólna} \\
 &= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + 3 = && \text{Współczynnik 5 zapisujemy jako } 2 \cdot \frac{5}{2}. \\
 &= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 = && \text{Dodajemy i odejmujemy } \left(\frac{5}{2}\right)^2. \\
 &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 = && \text{Korzystamy ze wzoru } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \\
 &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} && \text{Postać kanoniczna}
 \end{aligned}$$

### Ćwiczenie 2

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } y = x^2 - 8x + 6 & \text{c) } y = x^2 - 6x - 2 & \text{e) } y = x^2 + x + \frac{1}{4} \\
 \text{b) } y = x^2 + 4x + 8 & \text{d) } y = x^2 - 3x + 1 & \text{f) } y = x^2 - x - 2
 \end{array}$$

Wykresem funkcji kwadratowej  $f(x) = a(x-p)^2 + q$  jest parabola o wierzchołku  $(p, q)$ . Współrzędne wierzchołka paraboli oznaczamy także  $(x_w, y_w)$ .



### Twierdzenie

Parabola  $y = ax^2 + bx + c$  ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac, a \neq 0$$

Wyrażenie  $\Delta$  nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

### Dowód

$$\begin{aligned}
 y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x\right) + c = \\
 &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
 \end{aligned}$$

Jest to postać kanoniczna funkcji  $y = a(x-p)^2 + q$  dla  $p = -\frac{b}{2a}$  i  $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ , zatem  $x_w = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$ .

### Ćwiczenie 3

Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } y = x^2 + 3x + 1 & \text{c) } y = x^2 - 4x + 4 & \text{e) } y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 \\
 \text{b) } y = 2x^2 + 4x + 1 & \text{d) } y = -2x^2 + 6x - 6 & \text{f) } y = 2x^2 - \sqrt{2}x - \frac{1}{4}
 \end{array}$$

### Ćwiczenie 4

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } y = 4x^2 + 6x + 3 & \text{b) } y = -2x^2 + 4x + 1 & \text{c) } y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1
 \end{array}$$

Zauważmy, że jeśli wyznaczymy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f$ , to jego drugą współrzędną możemy obliczyć, korzystając z tego, że  $y_w = f(x_w)$ .

### Przykład 2

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji:

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 1$$

Współczynniki  $a = -2$ ,  $b = 8$ , więc  $x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2$ .

Współrzędna  $y_w = f(x_w) = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = 7$ .

Wierzchołkiem paraboli jest punkt  $(2, 7)$ .

### Ćwiczenie 5

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ , korzystając z tego, że  $y_w = f(x_w)$ .

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f(x) = 2x^2 - 4x + 3 & \text{c) } f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 10 \\
 \text{b) } f(x) = -x^2 - 3x + 4 & \text{d) } f(x) = 3x^2 + 6x - 10
 \end{array}$$

## Zadania

1. Przedstaw trójmian kwadratowy  $f$  w postaci ogólnej i oblicz jego wyróżnik.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - 3 & \text{d) } f(x) = -3(x + 2)^2 + 8 \\
 \text{b) } f(x) = -(x - 4)^2 + 5 & \text{e) } f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2 \\
 \text{c) } f(x) = 2(x - 3)^2 - 14 & \text{f) } f(x) = \frac{2}{3}(x - 3)^2 - 9
 \end{array}$$

2. Korzystając ze wzorów  $x_w = -\frac{b}{2a}$  i  $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$ , wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ . Przedstaw funkcję  $f$  w postaci kanonicznej.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } f(x) = x^2 + 2x + 3 & \text{d) } f(x) = -4x^2 + 8x + 1 & \text{g) } f(x) = x^2 - x \\
 \text{b) } f(x) = x^2 - 4x - 2 & \text{e) } f(x) = 2x^2 + 8x - 7 & \text{h) } f(x) = -2x^2 + 6x \\
 \text{c) } f(x) = -x^2 - 2x + 1 & \text{f) } f(x) = -2x^2 - 6x + 2 & \text{i) } f(x) = 3x^2 - 8
 \end{array}$$

3. Korzystając ze wzorów  $x_w = -\frac{b}{2a}$  i  $y_w = f(x_w)$ , wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } f(x) = 2x^2 + 6x - 3 & \text{b) } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 4 & \text{c) } f(x) = -3x^2 - 6x
 \end{array}$$

4. Przedstaw funkcję  $f$  w postaci kanonicznej. Naskicuj wykres funkcji  $f$ , stosując odpowiednie przesunięcie paraboli  $y = x^2$  lub  $y = -x^2$ .

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } f(x) = x^2 + 2x + 4 & \text{b) } f(x) = -x^2 - 6x - 12 & \text{c) } f(x) = -x^2 + 4x
 \end{array}$$

5. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Prosta  $x = 3$  jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 5$ . Oblicz współczynnik  $b$ .

Oś symetrii jest prosta  $x = -\frac{b}{2a}$ , zatem  $-\frac{b}{2a} = 3$ , skąd:  

$$b = -6a = -6 \cdot \frac{1}{2} = -3$$

Prosta  $l$  jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f$ . Oblicz współczynnik  $b$ .

- a)  $f(x) = x^2 + bx + 4$ ,  $l: x = 2$       c)  $f(x) = 2x^2 + bx - 1$ ,  $l: x = -1$   
 b)  $f(x) = -x^2 + bx - 3$ ,  $l: x = 4$       d)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 7$ ,  $l: x = -6$

6. Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f$  leży na prostej  $l$ . Oblicz współczynnik  $a$ . Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej.

- a)  $f(x) = ax^2 + 4x - 3$ ,  $l: x = 2$       c)  $f(x) = ax^2 + 2x + 5$ ,  $l: x = -4$   
 b)  $f(x) = ax^2 + 6x + 2$ ,  $l: x = 1$       d)  $f(x) = ax^2 - 6x - 1$ ,  $l: x = -\frac{3}{2}$

7. Przeczytaj podany w ramce przykład.

Oblicz współczynniki  $b$  i  $c$  funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 + bx + c$ , której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie  $(3, -2)$ .

Ze wzoru  $x_w = -\frac{b}{2a}$  otrzymujemy:

$$-\frac{b}{2 \cdot 1} = 3, \text{ skąd } b = -6.$$

Zatem  $f(x) = x^2 - 6x + c$ . Podstawiamy współrzędne punktu  $(3, -2)$  do wzoru funkcji i otrzymujemy równość:

$$-2 = 3^2 - 6 \cdot 3 + c, \text{ skąd } c = 7.$$

Szukane współczynniki:  $b = -6$  i  $c = 7$ .

Oblicz współczynniki  $b$  i  $c$  funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 + bx + c$ , której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie  $W$ .

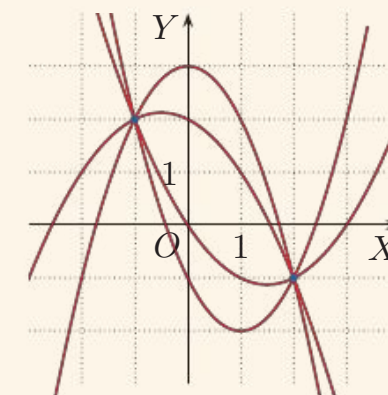
- a)  $W(2, 4)$       b)  $W(-1, -3)$       c)  $W(\frac{1}{2}, -1)$       d)  $W(10, 0)$

8. Wyznacz współczynniki  $a$  i  $c$  funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + 6x + c$ , której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie  $W$ . Zapisz wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

- a)  $W(-1, 2)$       b)  $W(6, -3)$       c)  $W(2, 4)$       d)  $W(-\frac{3}{2}, -1)$

### Czy wiesz, że...

Dla dowolnych dwóch punktów płaszczyzny (nie leżących na prostej pionowej) istnieje nieskończenie wiele parabol opisanych za pomocą równania  $y = ax^2 + bx + c$  przechodzących przez te punkty (rysunek obok).



Przez trzy niewspółliniowe punkty (z których żadne dwa nie leżą na prostej pionowej) przechodzi dokładnie jedna parabola  $y = ax^2 + bx + c$ .

Jeśli mamy dane współrzędne tych punktów, to możemy obliczyć współczynniki  $a$ ,  $b$  i  $c$ . W tym celu rozwiązujemy odpowiedni układ równań.

Na przykład, aby wyznaczyć równanie paraboli  $y = ax^2 + bx + c$  przechodzącej przez punkty  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, -4)$  i  $C(4, 5)$ , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -4 \\ a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 5 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań jest trójka liczb:  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = -3$ , zatem szukana parabola jest dana równaniem  $y = x^2 - 2x - 3$ .

**Uwaga.** Jeżeli mamy dany wierzchołek paraboli, to do wyznaczenia jej równania wystarczy znajomość jeszcze jednego należącego do niej punktu.

9. Do paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + c$  należy punkt  $P$ , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt  $W$ . Oblicz współczynniki  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

- a)  $P(0, 2)$ ,  $W(2, 0)$       c)  $P(3, 1)$ ,  $W(0, 3)$       e)  $P(2, 1)$ ,  $W(1, 2)$   
 b)  $P(0, 0)$ ,  $W(-1, -1)$       d)  $P(-2, 0)$ ,  $W(-1, 3)$       f)  $P(1, 2)$ ,  $W(2, 4)$

10. Wyznacz równanie paraboli, o której wiadomo, że przecina osie układu współrzędnych w punktach  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Naszkicuj tę parabolę.

- a)  $A(0, 3)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(3, 0)$       b)  $A(0, 6)$ ,  $B(-6, 0)$ ,  $C(2, 0)$

11. Wyznacz równanie paraboli przechodzącej przez punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

- a)  $A(-3, 1)$ ,  $B(0, 4)$ ,  $C(1, 1)$       c)  $A(-5, 3)$ ,  $B(-1, -5)$ ,  $C(1, -3)$   
 b)  $A(-4, 1)$ ,  $B(-3, -2)$ ,  $C(1, -2)$       d)  $A(-4, 2)$ ,  $B(2, -1)$ ,  $C(4, -6)$

12.\* O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji  $f$ , aby otrzymać parabolę przechodzącą przez punkty  $A(-2, 0)$  i  $B(2, 4)$ ?

- a)  $f(x) = x^2$       b)  $f(x) = -x^2$



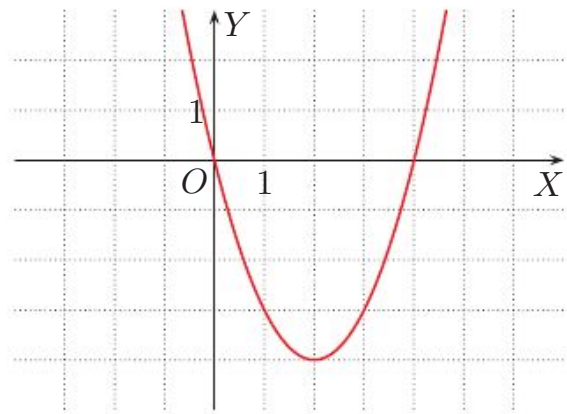
## 7.4. Równania kwadratowe (1)

### Przykład 1

Naszkicuj wykres funkcji i odczytaj z niego miejsca zerowe tej funkcji.

a)  $y = x^2 - 4x$

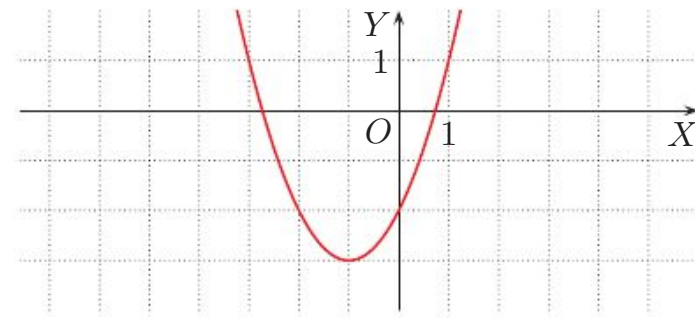
Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy:  $y = (x - 2)^2 - 4$ .



Z wykresu można odczytać miejsca zerowe:  $x = 0$  i  $x = 4$ .

b)  $y = x^2 + 2x - 2$

Po przekształceniu do postaci kanonicznej mamy:  $y = (x + 1)^2 - 3$ .

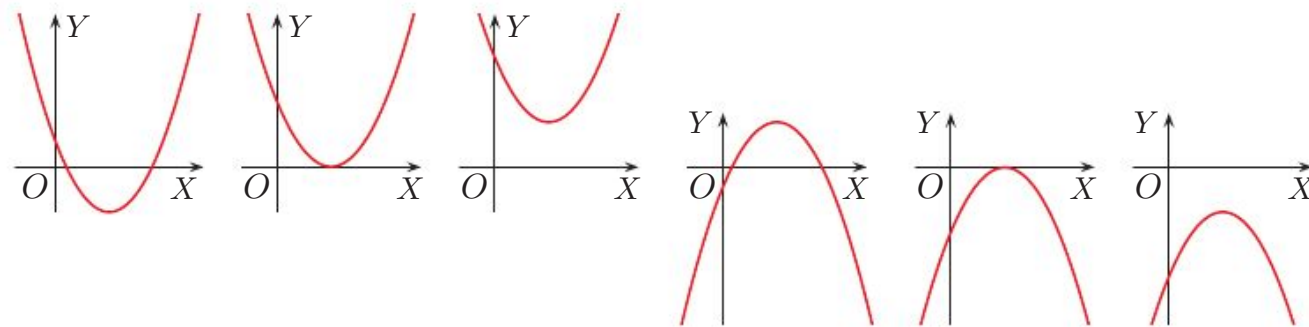


Z wykresu można odczytać tylko przybliżone wartości miejsc zerowych. Wyznaczenie ich dokładnych wartości wymaga rozwiązania równania  $x^2 + 2x - 2 = 0$ .

Rozwiązania równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) to miejsca zerowe funkcji  $y = ax^2 + bx + c$ .

### Ćwiczenie 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono możliwe położenia wykresu funkcji kwadratowej względem osi  $OX$ . Ile rozwiązań może mieć równanie kwadratowe  $ax^2 + bx + c = 0$ , gdzie  $a \neq 0$ ?



Rozwiązanie równania z niewiadomą  $x$  polega na wyznaczeniu wszystkich wartości  $x$ , dla których to równanie jest spełnione. Zbiór tych  $x$  nazywamy **zbiorem rozwiązań równania**. Rozwiązania równania nazywane są również jego **pierwiastkami**.

### Przykład 2

Podaj zbiór rozwiązań równania  $4x^2 - 8x = 0$ .

Lewą stronę równania rozkładamy na czynniki:

$$4x(x - 2) = 0$$

czyli  $x = 0$  lub  $x - 2 = 0$ , zatem  $x = 0$  lub  $x = 2$ .

Zbiorem rozwiązań równania jest zbiór  $\{0, 2\}$ .

Dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{R}$ :  
 $a \cdot b = 0$   
 wtedy i tylko wtedy, gdy  
 $a = 0$  lub  $b = 0$ .

### Ćwiczenie 2

Podaj zbiór rozwiązań równania.

a)  $3x^2 + 6x = 0$       b)  $7x - 3x^2 = 0$       c)  $2x^2 = 5x$       d)  $8x = \frac{1}{2}x^2$

W niektórych przykładach przy rozkładzie trójmianu kwadratowego na czynniki możemy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia.

### Przykład 3

Rozwiąż równanie  $4x^2 - 9 = 0$ .

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów:  $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$ .

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$2x + 3 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{3}{2}$$

Rozwiązaniem równania są liczby  $-\frac{3}{2}$  i  $\frac{3}{2}$ .

### Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a)  $16x^2 - 25 = 0$       b)  $4 - 100x^2 = 0$       c)  $4x^2 - 121 = 0$       d)  $\frac{9}{49}x^2 - 81 = 0$

### Przykład 4

Rozwiąż równanie  $x^2 - 4x + 4 = 0$ .

Korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy:  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ .

$$(x - 2)^2 = 0, \quad \text{czyli} \quad x - 2 = 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem tego równania.

### Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

a)  $x^2 + 8x + 16 = 0$       c)  $4x^2 + 4x + 1 = 0$       e)  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$   
 b)  $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$       d)  $4x^2 - 12x + 9 = 0$       f)  $3x^2 + 9 = x^2 - 6\sqrt{2}x$

### Przykład 5

a) Rozwiąż równanie  $\frac{11}{3}x^2 - 7 = 0$ .

$$\begin{aligned}\frac{11}{3}x^2 &= 7 \quad / \cdot \frac{3}{11} \\ x^2 &= \frac{21}{11} \\ x &= -\sqrt{\frac{21}{11}} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{\frac{21}{11}}\end{aligned}$$

b) Rozwiąż równanie  $2x^2 + 9 = 0$ .

Zauważmy, że  $2x^2 + 9 \geq 9$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ , więc  $2x^2 + 9$  nie może być równe zero.

Zatem równanie jest sprzeczne.

### Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a)  $6x^2 - 18 = 0$       b)  $x^2 + 4 = 0$       c)  $\frac{4}{5}x^2 - 2 = 0$       d)  $4x^2 + 1 = 0$

### Zadania

1. Rozwiąż równanie.

a)  $-7x^2 + 42x = 0$       c)  $36x^2 = 6x$       e)  $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$   
b)  $9x^2 + \frac{1}{3}x = 0$       d)  $2x + 18x^2 = 0$       f)  $\sqrt{3}x = -3x^2$

2. Rozwiąż równanie.

a)  $100x^2 - 81 = 0$       d)  $x^2 + 64 = 16x$       g)  $x^2 = (1-x)(1+x)$   
b)  $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9} = 0$       e)  $24x - x^2 = 144$       h)  $\frac{1}{2}x(6-x) = 2+x$   
c)  $x^2 + 10x + 25 = 0$       f)  $1 + 9x^2 + 6x = 0$       i)  $(x-3)(x-2) = 7x-30$

3. Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych.

a)  $y = 3x^2 - 12x$       c)  $y = 3x^2 + 12$       e)  $y = 900x^2 + 4$   
b)  $y = 3x^2 - 12$       d)  $y = 900x^2 + 4x$       f)  $y = 900x^2 - 4$

4. Wyznacz wspólne miejsce zerowe funkcji  $f$  i  $g$ .

a)  $f(x) = x^2 - 4$ ,  $g(x) = x^2 - 4x + 4$   
b)  $f(x) = x^2 + 4x$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$   
c)  $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - 1$ ,  $g(x) = x^2 - 6x + 9$

5. Podaj zbiór rozwiązań równania.

a)  $(2x+3)^2 = (x-3)^2$       c)  $(16x^2 - 8x + 1)(9x^2 - 4) = 0$   
b)  $(1 - \frac{1}{2}x)^2 = (\frac{3}{2}x - 5)^2$       d)  $(\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9)(1 - 2x^2) = 0$

6. Rozwiąż równanie.

a)  $|x^2 - 1| = 3$       b)  $|4x^2 - 3| = 1$       c)  $|2x^2 - 6| = 0$       d)  $x^2 = |x|$

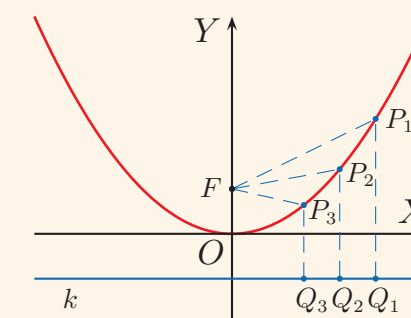
### Dowiedz się więcej

#### Parabola

Parabola jest zbiorem punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonej prostej  $k$  (zwanej **kierownicą**) i ustalonego punktu  $F$  (zwanego **ogniskiem**).

Na rysunku obok mamy:

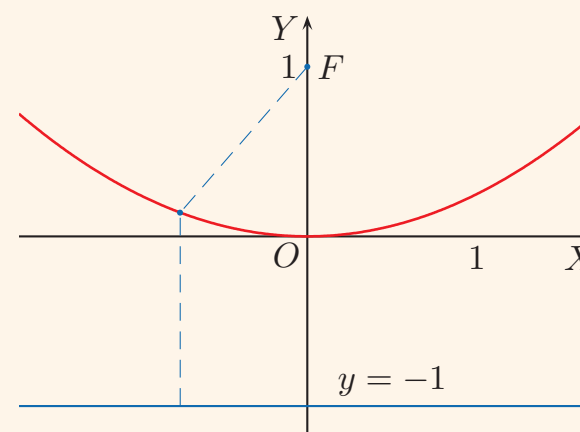
$$|P_1F| = |P_1Q_1|, |P_2F| = |P_2Q_2|, |P_3F| = |P_3Q_3|$$



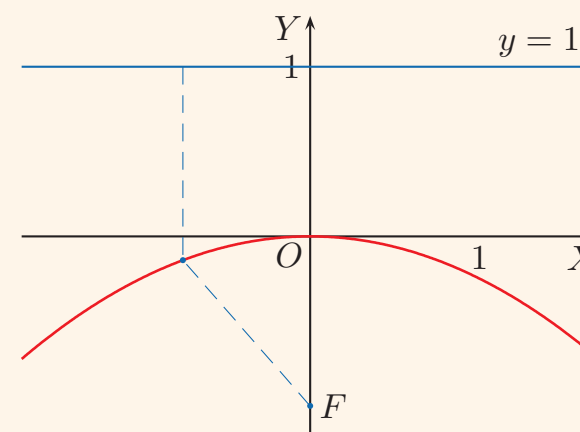
Parabola, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej  $y = -p$  i punktu  $F(0, p)$ , jest określona za pomocą równania  $y = \frac{1}{4p}x^2$ .

#### Przykład 1

Parabola  $y = \frac{1}{4}x^2$  ma kierownicę daną równaniem  $y = -1$  i ognisko  $F(0, 1)$ .



Parabola  $y = -\frac{1}{4}x^2$  ma kierownicę daną równaniem  $y = 1$  i ognisko  $F(0, -1)$ .



Parabola  $y = x^2$  ma kierownicę daną równaniem  $y = -\frac{1}{4}$  i ognisko  $F(0, \frac{1}{4})$ .

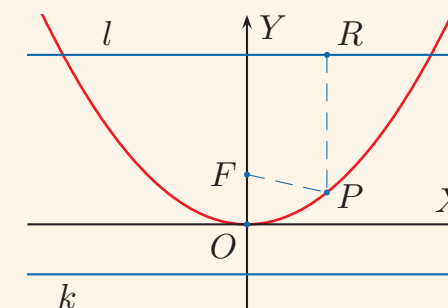
1. Podaj równanie paraboli, która jest zbiorem punktów równo odległych od prostej  $k$  i punktu  $F$ .

a)  $k: y = -\frac{1}{2}$ ,  $F(0, \frac{1}{2})$       b)  $k: y = \frac{1}{2}$ ,  $F(0, -\frac{1}{2})$       c)  $k: y = -\frac{1}{6}$ ,  $F(0, \frac{1}{6})$

2. Wyznacz równanie kierownicy i współrzędne ogniska podanej paraboli.

a)  $y = -x^2$       b)  $y = 2x^2$       c)  $y = -2x^2$       d)  $y = \frac{1}{8}x^2$

**D** 3. Dana jest parabola o ognisku  $F$  i kierownicy  $k$ . Prosta  $l$  jest równoległa do kierownicy i leży powyżej wierzchołka paraboli. Uzasadnij, że dla dowolnego punktu  $P$  należącego do paraboli suma odległości tego punktu od ogniska i od prostej  $l$  jest stała.

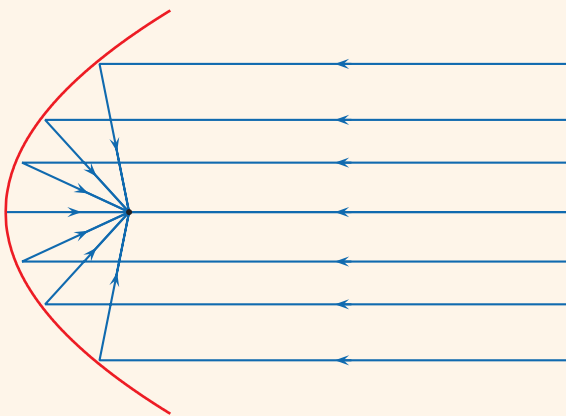




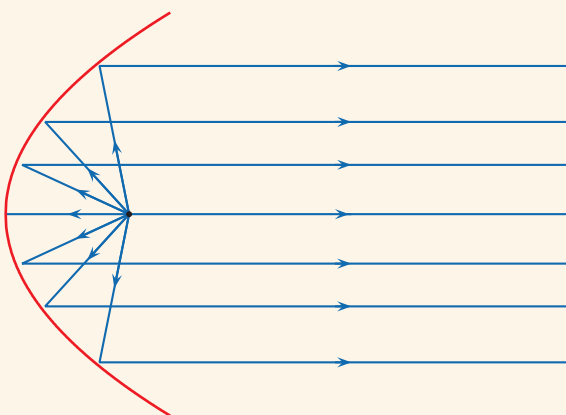
4. Skonstruuj parabolę zgodnie z podanym niżej opisem.

- Narysuj kierownicę i prostą do niej prostopadłą – oś symetrii paraboli.
- Na osi symetrii wybierz punkt  $F$  – ognisko paraboli i zaznacz wierzchołek paraboli w połowie odległości między ogniskiem a kierownicą.
- Po tej samej stronie wierzchołka, po której znajduje się ognisko, narysuj kilka prostych równoległych do kierownicy.
- Odmierz cyrklem odległość każdej z narysowanych prostych od kierownicy, a następnie narysuj łuk okręgu o środku w punkcie  $F$  i promieniu równym tej odległości – punkty przecięcia łuku z daną prostą należą do paraboli.

Promienie równoległe padające na zwierciadło o parabolicznym kształcie po odbiciu skupiają się w jednym punkcie – ognisku paraboli. Zjawisko to wykorzystuje się w telewizyjnych antenach satelitarnych i radioteleskopach, w których odbiornik umieszcza się w ognisku, aby uzyskać silny sygnał.



Natomiast promienie wychodzące z żarówki umieszczonej w ognisku zwierciadła parabolicznego po odbiciu są równoległe. Zjawisko to jest wykorzystywane na przykład w reflektorach samochodowych.



## 7.5. Równania kwadratowe (2)

### Przykład 1

Rozwiąż równanie  $4x^2 + 20x + 25 = 0$ .

Korzystamy ze wzoru  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

$$(2x + 5)^2 = 0$$

$$2x + 5 = 0$$

Równanie ma jeden pierwiastek:  $x = -\frac{5}{2}$ .

#### Czy wiesz, że...

Równania kwadratowe były rozwiązywane już przez starożytnych Babilończyków około 1800 r. p.n.e. Świadczą o tym zachowane gliniane tabliczki z pismem klinowym.

### Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a)  $9x^2 - 12x + 4 = 0$       b)  $25x^2 + 40x + 16 = 0$       c)  $4x^2 - 28x + 49 = 0$

### Przykład 2

Rozwiąż równanie  $4x^2 - 20x + 27 = 0$ .

$$(2x - 5)^2 - 25 + 27 = 0$$

$$(2x - 5)^2 = -2$$

Zauważ, że:

$$(2x - 5)^2 - 25 = 4x^2 - 20x.$$

Równanie to jest sprzeczne, gdyż  $(2x - 5)^2 \geq 0$  dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$ .

### D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że podane równanie jest sprzeczne.

a)  $x^2 - 2x + 2 = 0$       b)  $x^2 + 6x + 12 = 0$       c)  $4x^2 + 4x + 5 = 0$

### Przykład 3

Rozwiąż równanie  $4x^2 - 20x + 23 = 0$ .

$$(2x - 5)^2 - 25 + 23 = 0$$

$$(2x - 5)^2 = 2$$

$$2x - 5 = -\sqrt{2} \text{ lub } 2x - 5 = \sqrt{2}$$

$$2x = 5 - \sqrt{2} \text{ lub } 2x = 5 + \sqrt{2}$$

Równanie ma dwa pierwiastki:  $x = \frac{5 - \sqrt{2}}{2}$ ,  $x = \frac{5 + \sqrt{2}}{2}$ .

### Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a)  $x^2 - 2x - 3 = 0$       b)  $x^2 + 6x + 8 = 0$       c)  $x^2 + 6x + 7 = 0$

Postępując tak jak w przykładach 1–3, możemy rozwiązać dowolne równanie kwadratowe. Zwykle korzystamy jednak ze wzorów podanych w poniższym twierdzeniu.

### Twierdzenie

Rozważmy równanie kwadratowe  $ax^2 + bx + c = 0$ , gdzie  $a \neq 0$ .

1. Jeśli  $\Delta > 0$ , to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Jeśli  $\Delta = 0$ , to równanie ma **jeden** pierwiastek:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Jeśli  $\Delta < 0$ , to równanie **nie ma** pierwiastków.

### Dowód

Zapiszmy trójmian w postaci kanonicznej:  $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ .

Stąd  $ax^2 + bx + c = 0$ , gdy  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$ , co oznacza, że:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Jeśli  $\Delta < 0$ , to powyższe równanie jest sprzeczne.
- Jeśli  $\Delta = 0$ , to otrzymujemy równanie:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Jego rozwiązaniem jest liczba  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .

- Jeśli  $\Delta > 0$ , to otrzymujemy:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Rozwiązaniami równania są liczby  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

W przypadku, gdy  $\Delta = 0$ , pierwiastek  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  nazywamy **pierwiastkiem podwójnym** (zauważ, że dla  $\Delta = 0$  ze wzorów:  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ , otrzymujemy  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ).

### Ćwiczenie 4

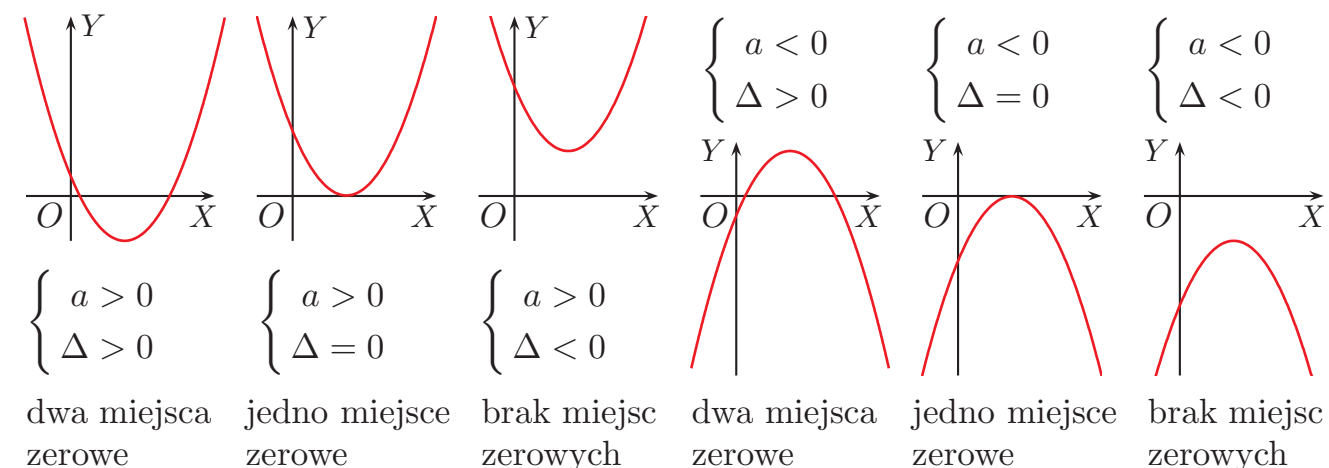
Oblicz wyróżnik trójmianu kwadratowego i podaj liczbę rozwiązań równania.

- |                                  |                                  |                                          |
|----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------|
| a) $x^2 + 8x + 15 = 0$           | d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$           | g) $-3x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{3} = 0$ |
| b) $x^2 - 4x + 6 = 0$            | e) $\frac{9}{5}x^2 - 6x + 5 = 0$ | h) $\sqrt{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$  |
| c) $5x^2 + 5x - \frac{1}{2} = 0$ | f) $-x^2 + 4x - 7 = 0$           | i) $4\sqrt{2}x^2 + 3x = 0$               |

### Interpretacja geometryczna równania kwadratowego

Rozwiązania równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$  są miejscami zerowymi funkcji  $y = ax^2 + bx + c$ . Są one zatem odciętymi punktów przecięcia odpowiedniej paraboli z osią  $OX$ .

Poniżej przedstawiono możliwe położenia paraboli  $y = ax^2 + bx + c$  względem osi  $OX$  w zależności od współczynnika  $a$  i wyróżnika  $\Delta$ .



### Przykład 4

Rozwiąż równanie.

a)  $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 16 + 24 = 40$ . Ponieważ  $\Delta > 0$ , równanie ma dwa pierwiastki.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 - \sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

b)  $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} = 36 - 36 = 0$ , równanie ma zatem jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

c)  $7x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 9 - 56 = -47 < 0$ , więc równanie jest sprzeczne.

### Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

- |                        |                                   |                                  |
|------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ | d) $28x^2 - 4x + \frac{1}{7} = 0$ | g) $-3x^2 + 2x - 3 = 0$          |
| b) $4x^2 - x - 5 = 0$  | e) $-x^2 + 6x + 1 = 0$            | h) $6x^2 - 2x - 1 = 0$           |
| c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$ | f) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$  | i) $2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ |



## Zadania

1. Rozwiąż równanie.

- |                          |                         |                                                     |
|--------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------|
| a) $2x^2 - 9x - 35 = 0$  | d) $5x^2 - 6x + 6 = 0$  | g) $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$                     |
| b) $4x^2 - 13x + 3 = 0$  | e) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$ | h) $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$            |
| c) $-6x^2 + 13x + 5 = 0$ | f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ | i) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0$ |

2. Rozwiąż równanie.

- |                                |                         |                       |
|--------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| a) $2x^2 + 3 = -7x$            | d) $-2x - 3x^2 + 6 = 0$ | g) $11(x^2 + 5) = x$  |
| b) $x + 10 = 3x^2$             | e) $5x^2 = 2 - 2x$      | h) $x^2 + x = 4x + 7$ |
| c) $16x^2 + 24\sqrt{2}x = -18$ | f) $5x^2 = 8x - 5$      | i) $3x^2 + 1 = 7x$    |

3. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osiami układu współrzędnych.

- |                           |                                                       |
|---------------------------|-------------------------------------------------------|
| a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ | d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 12$                  |
| b) $f(x) = 2x^2 + 6x + 3$ | e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$                   |
| c) $f(x) = -4x^2 + x + 3$ | f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x + 1$ |

4. Rozwiąż równanie.

- |                                               |                                                 |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)^2$               | d) $(\frac{1}{2}x - 3)(x + 2) = (5 - x)(6 - x)$ |
| b) $6x^2 + 7x + 2 = (2 - 3x)(3x + 2)$         | e) $(x - 3)(x + 5) = (2x + 3)(x - 4)$           |
| c) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 9 = (x - 3)(x - 5)$ | f) $(4x - 1)(x - 4) = (3x + 2)(x - 7)$          |

5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania.

- |                                     |                                                 |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $(\sqrt{2} - 1)x^2 + 2x + 2 = 0$ | b) $13x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + \frac{1}{8} = 0$ |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------|

6. Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f$ ,  $g$  i  $h$ .

- |                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ , $g(x) = 2(x - \frac{1}{4})^2 - 8(x - \frac{1}{4}) + 5$ ,<br>$h(x) = 2(x - \frac{\sqrt{6}}{2})^2 - 8(x - \frac{\sqrt{6}}{2}) + 5$                |
| b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$ , $g(x) = -\frac{1}{2}(x + \frac{7}{2})^2 + 4(x + \frac{7}{2}) + 6$ ,<br>$h(x) = -\frac{1}{2}(x + 2\sqrt{7})^2 + 4(x + 2\sqrt{7}) + 6$ |

7. Rozwiąż równanie.

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| a) $ x^2 - 2x  = 1$ | b) $ x^2 + 4x  = 3$ |
|---------------------|---------------------|

8. Rozwiąż równanie.

- |                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| a) $ x^2 + x  =  x^2 - 2 $  | c) $ x^2 - 1  =  x^2 + 2x - 3 $ |
| b) $ x^2 - x  =  2x^2 - x $ | d) $ x - 3  =  x^2 + x - 4 $    |

## Dowiedz się więcej

### Szkicowanie paraboli

Aby naszkicować parabolę będącą wykresem funkcji  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , można wykorzystać postać kanoniczną funkcji  $f$  lub postąpić zgodnie z następującą instrukcją.

- Podaj punkt, w którym parabola przecina oś  $OY$ . Jest to punkt  $(0, c)$ .
- Wyznacz (jeśli istnieją) punkty, w których parabola przecina oś  $OX$ . Są to punkty  $(x_1, 0)$  i  $(x_2, 0)$ , gdzie  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .
- Wyznacz wierzchołek paraboli  $W(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ .
- Aby uzyskać dokładniejszy szkic, wyznacz kilka dodatkowych punktów należących do paraboli (można wykorzystać fakt, że prosta  $x = -\frac{b}{2a}$  jest osią symetrii paraboli).
- Połącz otrzymane punkty odpowiednią krzywą.

### Przykład

Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ .

- Parabola przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, -3)$ .

- Rozwiązujemy równanie  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .

$\Delta = 16$ , stąd  $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ ,  $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

Parabola przecina oś  $OX$  w punktach  $(-1, 0)$  i  $(3, 0)$ .

- Wyznaczamy wierzchołek paraboli.

$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_w = f(-\frac{b}{2a}) = f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$$

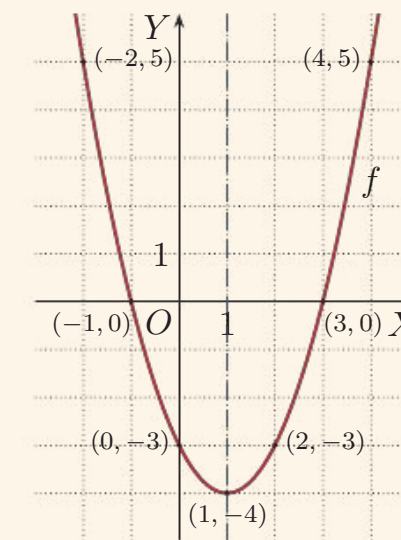
Wierzchołkiem paraboli jest punkt  $(1, -4)$ .

- Wyznaczamy inne punkty należące do paraboli.  $f(-2) = 5$ , czyli do paraboli należy punkt  $(-2, 5)$ . Prosta  $x = 1$  jest osią symetrii paraboli, więc należą do niej także punkty  $(4, 5)$  i  $(2, -3)$ .

- Szkicujemy parabolę.

1. Naszkicuj parabolę będącą wykresem funkcji  $f$ .

- |                                    |                                      |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$           | d) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$            |
| b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ | e) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$           |
| c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 6$          | f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$ |



# 7.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

## Definicja

Postać  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ , gdzie  $a \neq 0$ , nazywamy **postacią iloczynową** funkcji kwadratowej.

Przedstawienie wzoru funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej nazywamy również **rozkładem na czynniki liniowe**. Rozkład na czynniki liniowe można zapisać na różne sposoby, np.:

$y = (3x + 2)(x - 7) =$  Czynniki liniowe:  $3x + 2$  i  $x - 7$   
 $= 3(x + \frac{2}{3})(x - 7)$  Czynniki liniowe:  $x + \frac{2}{3}$  i  $x - 7$

Aby przejść od postaci iloczynowej do ogólnej, wystarczy wykonać mnożenie. Na przykład dla trójmianu  $y = 2(x - 3)(x + 5)$  mamy:  
 $y = 2(x - 3)(x + 5) = 2(x^2 + 5x - 3x - 15) = 2x^2 + 4x - 30$

## Ćwiczenie 1

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci ogólnej.

a)  $y = -\frac{1}{3}(x + 3)(x - 9)$       b)  $y = 4(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})$       c)  $y = \frac{1}{6}x(x + 2)$

Liczby  $x_1$  i  $x_2$  występujące w postaci iloczynowej  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$  są miejscami zerowymi (pierwiastkami) trójmianu kwadratowego, czyli pierwiastkami równania  $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ .

## Przykład 1

| Postać ogólna       | Postać iloczynowa                      | Czynniki liniowe                        | Pierwiastki                                  |
|---------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------|
| $y = x^2 - 9x + 14$ | $y = (x - 2)(x - 7)$                   | $x - 2$ i $x - 7$                       | $x_1 = 2$ i $x_2 = 7$                        |
| $y = 4x^2 + 4x + 1$ | $y = 4(x + \frac{1}{2})^2$             | $x + \frac{1}{2}$<br>(czynnik podwójny) | $x = -\frac{1}{2}$<br>(pierwiastek podwójny) |
| $y = 2x^2 + 6$      | nie można rozłożyć na czynniki liniowe |                                         | brak pierwiastków                            |

## Ćwiczenie 2

Odczytaj czynniki liniowe i podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a)  $y = 4(x - 3)(x - 5)$       c)  $y = -(x + 4)(x + 8)$       e)  $y = -3(x - 2)^2$   
b)  $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x + 6)$       d)  $y = 8x(x - 9)$       f)  $y = 13(x + 7)^2$

## Twierdzenie

Dany jest trójmian kwadratowy  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .

- Jeśli  $\Delta > 0$ , to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ , gdzie  $x_1, x_2$  są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli  $\Delta = 0$ , to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej  $y = a(x - x_0)^2$ , gdzie  $x_0$  jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli  $\Delta < 0$ , to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

## Przykład 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

- a)  $y = 2x^2 + 5x - 3$   
 $\Delta = 25 + 24 = 49$ ,  $\sqrt{\Delta} = 7$ , zatem:  
 $x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3$ ,  $x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$   
Postać iloczynowa:  $y = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2})$ .
- b)  $y = x^2 - 2x - 1$   
 $\Delta = 4 + 4 = 8$ ,  $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$ , zatem:  
 $x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ ,  $x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$   
Postać iloczynowa:  $y = (x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2}))$ , którą możemy zapisać:  $y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2})$ .
- c)  $y = -2x^2 + x - 4$   
 $\Delta = 1 - 32 = -31 < 0$ , więc trójmian nie ma pierwiastków i nie można go rozłożyć na czynniki liniowe.

## Ćwiczenie 3

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

- a)  $y = x^2 - 8x + 15$       d)  $y = 12x^2 + 11x + 2$       g)  $y = 2x^2 - 3x + 4$   
b)  $y = x^2 + 3x - 28$       e)  $y = -2x^2 - 2x + 24$       h)  $y = x^2 - 2x - 2$   
c)  $y = 3x^2 - 7x + 2$       f)  $y = -4x^2 + 3x + 1$       i)  $y = 2x^2 - 2x - 1$

## Zadania

1. Podaj pierwiastki trójmianu kwadratowego.

a)  $y = -(x - 3)(x - 13)$       d)  $y = -2(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})$   
b)  $y = 2(x - 2)(x + 5)$       e)  $y = -2(x + 1)(x + 1 - \sqrt{2})$   
c)  $y = \frac{1}{3}(x + 15)(x + 9)$       f)  $y = (x + 2 - \sqrt{3})(x - 3 + \sqrt{2})$



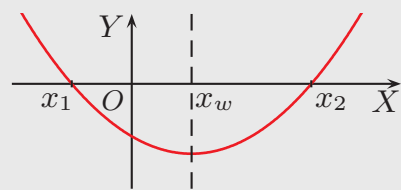
2. Przedstaw trójkąt kwadratowy w postaci iloczynowej, jeśli to możliwe.

- a)  $y = 2x^2 - 3x - 2$       d)  $y = 3x^2 - 5x + 1$       g)  $y = 10 - 2x^2$   
 b)  $y = -x^2 + x + 6$       e)  $y = -4x^2 + 2x - 1$       h)  $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x$   
 c)  $y = 4x^2 - x - 3$       f)  $y = x^2 + \sqrt{3}x - 6$       i)  $y = 6x^2 + 9$

3. Oblicz współczynniki  $b$  i  $c$  trójkątu kwadratowego  $y = x^2 + bx + c$  o podanych pierwiastkach.

- a) 3 i 5      c)  $\frac{1}{3}$  i 7      e) -5 i 0      g)  $\sqrt{2}$  i  $1 + \sqrt{2}$   
 b) 4 i -9      d)  $\frac{2}{7}$  i  $-\frac{3}{5}$       f)  $-\sqrt{3}$  i  $\sqrt{3}$       h)  $1 + \sqrt{7}$  i  $1 - \sqrt{7}$

Znajomość miejsc zerowych  $x_1, x_2$  funkcji kwadratowej pozwala wyznaczyć oś symetrii paraboli i współrzędną  $x_w$  jej wierzchołka, gdyż  $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .



4. Wyznacz równanie osi symetrii paraboli oraz współrzędne jej wierzchołka.

- a)  $y = x(x - 6)$       b)  $y = \frac{1}{2}(x + 6)(x - 2)$       c)  $y = (2x + 1)(2x - 3)$

5. Znajdź punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz wyznacz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.

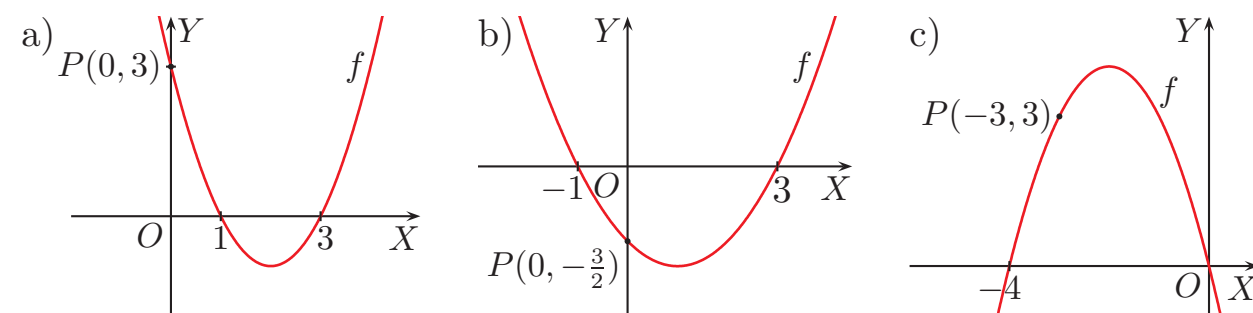
- a)  $y = -x(x + 6)$       b)  $y = (x - 1)(x - 5)$       c)  $y = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 1)$

6. Wyznacz trójkąt kwadratowy o pierwiastkach  $x_1, x_2$  i zbiorze wartości  $W$ . Odpowiedź podaj w jednej z wymienionych poniżej postaci.

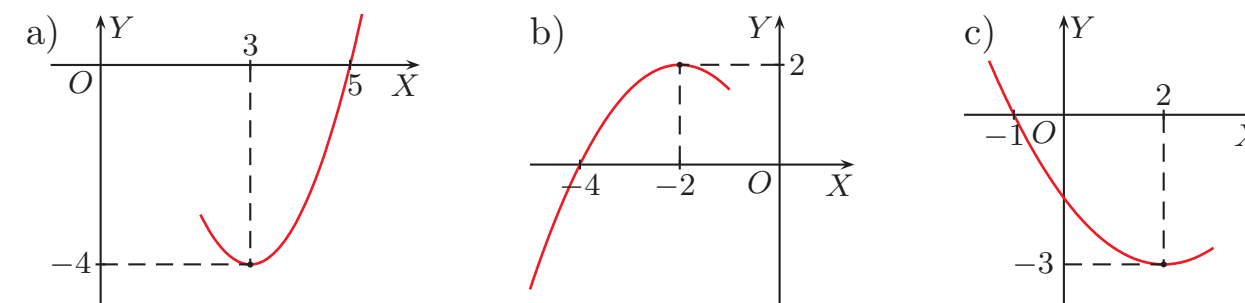
- a)  $x_1 = -1, x_2 = 3, W = [-4; \infty)$   
 b)  $x_1 = -4, x_2 = 0, W = (-\infty; 2]$   
 c)  $x_1 = -8, x_2 = 2, W = (-\infty; 10]$   
 d)  $x_1 = 0, x_2 = 6, W = [-6; \infty)$

Postać ogólna:  $y = ax^2 + bx + c$   
 Postać kanoniczna:  $y = a(x - p)^2 + q$   
 Postać iloczynowa:  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

7. Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji kwadratowej  $f$ . Wyznacz wzór tej funkcji w postaciach iloczynowej i ogólnej.



8. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej  $f$ . Znajdź miejsce zerowe tej funkcji niezaznaczone na rysunku. Wyznacz wzór funkcji  $f$  w postaciach iloczynowej i kanonicznej.



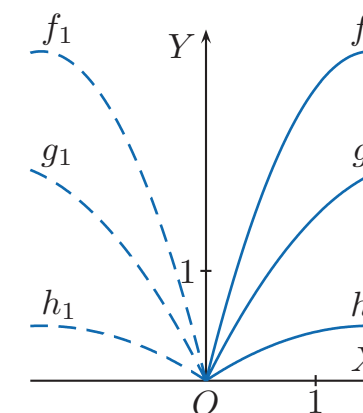
9. a) Parabola będąca wykresem trójkątu kwadratowego ma wierzchołek w punkcie  $(-2, 4)$ . Jeden pierwiastek trójkątu jest o dwa większy od drugiego. Wyznacz ten trójkąt.

b) Parabola będąca wykresem trójkątu kwadratowego ma wierzchołek w punkcie  $(4, 2)$ . Jeden pierwiastek trójkątu jest trzy razy większy od drugiego. Wyznacz ten trójkąt.

10. Krople wody tryskające z fontanny poruszają się po torach opisanych za pomocą wzorów:

$$f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, \\ h(x) = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{3}x$$

Parabole  $f_1, g_1, h_1$  są symetryczne odpowiednio do parabol  $f, g$  i  $h$  względem osi  $OY$ . Podaj równania parabol  $f_1, g_1, h_1$  w postaciach kanonicznej i iloczynowej.



11. Oblicz współczynniki  $b$  i  $c$  trójkątu kwadratowego  $y = x^2 + bx + c$ , którego pierwiastki są dwukrotnie większe od pierwiastków podanego trójkątu.

- a)  $y = x^2 - 4x + 3$       b)  $y = x^2 - 3\sqrt{2}x + 4$       c)  $y = x^2 - 4x + 2$

12. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji  $y = \frac{1}{2}x^2$ , aby otrzymać wykres trójkątu kwadratowego, którego pierwiastkami są podane liczby.

- a) 1 i 5      b) -6 i 2      c)  $3 - \sqrt{2}$  i  $3 + \sqrt{2}$

13. Trójkąt kwadratowy  $y = ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a \neq 0$ , ma postać kanoniczną:

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Wykaż, że jeśli  $\Delta \geq 0$ , to trójkąt można zapisać w postaci iloczynowej.

**Uwaga.** Jest to dowód twierdzenia ze str. 339.



## Rzut ukośny

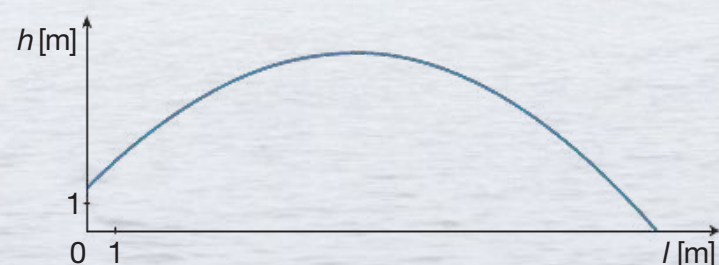
Tory rzuconej piłki, ukośnie skierowanego strumienia wody czy lawy wyrzuconej z wulkanu to fragmenty paraboli (jeżeli pominie się opór powietrza).

### Portowa straż pożarna

Ruch wody wystrzelwanej z armatek statku gaśniczego pod dużym ciśnieniem jest przykładem rzutu ukośnego. Umożliwia to zwalczanie pożarów na jednostkach pływających i na obszarach portowo-stoczniowych z bezpiecznej odległości.

### Pchnięcie kulą

Rysunek pokazuje tor lotu kuli pchniętej przez zawodnika podczas zawodów w pchnięciu kulą ( $h$  – wysokość,  $l$  – odległość). Tor lotu kuli jest fragmentem paraboli  $y = ax^2 + bx + c$ , której wierzchołek ma współrzędne  $(10, 6\frac{1}{2})$  i która przechodzi przez punkt  $(0, 1\frac{1}{2})$ .



1 Wyznacz równanie paraboli.

2 Czy zawodnik uzyskał wynik powyżej 20 m?



## 7.7. Nierówności kwadratowe

Jeśli mamy wykres funkcji kwadratowej i znamy jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności kwadratowej.

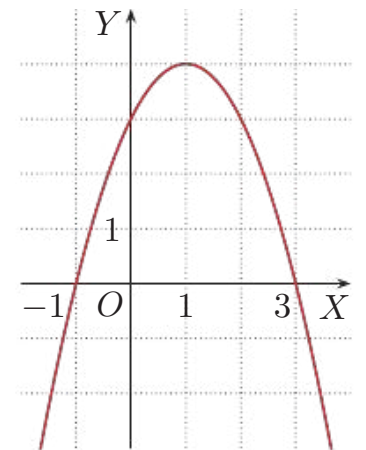
### Przykład 1

Dany jest wykres funkcji  $y = -x^2 + 2x + 3$ . Rozwiąż nierówność  $-x^2 + 2x + 3 > 0$ .

Z wykresu odczytujemy, że:

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \text{ dla } x \in (-1; 3)$$

**Uwaga.** Zauważ, że do rozwiązywania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji. Wystarczy znajomość jej miejsc zerowych i informacja o tym, czy ramiona paraboli, będącej wykresem tej funkcji, są skierowane do góry czy w dół.



### Przykład 2

a) Rozwiąż nierówność  $2x^2 - 6x > 0$ .

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji  $y = 2x^2 - 6x$  rozwiązujemy równanie  $2x^2 - 6x = 0$ , czyli  $2x(x - 3) = 0$ . Zatem  $x = 0$  lub  $x = 3$ .

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi  $OX$ . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy  $x^2$  jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$2x^2 - 6x > 0 \text{ dla } x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$$



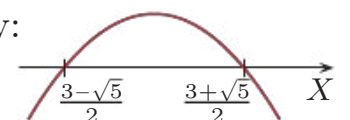
b) Rozwiąż nierówność  $-x^2 + 3x - 1 \geq 0$ .

Rozwiązujemy równanie  $-x^2 + 3x - 1 = 0$ .

$$\Delta = 9 - 4 = 5, \text{ zatem } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi  $OX$ . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy  $x^2$  jest ujemny), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Ze szkicu wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 3x - 1 \geq 0 \text{ dla } x \in \left[ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$



### Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

a)  $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$

b)  $2x^2 + x - 1 \leq 0$

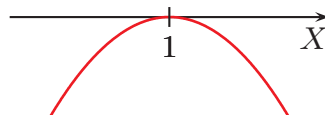
c)  $-x^2 + 2x + 4 > 0$



### Przykład 3

Rozwiąż nierówność  $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$ .

Rozwiązujemy równanie  $-x^2 + 2x - 1 = 0$ , czyli  $-(x - 1)^2 = 0$ . Zatem  $x = 1$  (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi  $OX$  i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół. Ze szkicu wykresu odczytujemy:  $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$  dla  $x = 1$ .



### Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

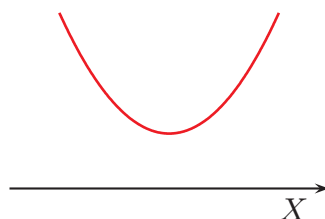
- a)  $-x^2 + 2x - 1 \leq 0$       b)  $-x^2 + 2x - 1 < 0$       c)  $-x^2 + 2x - 1 > 0$

### Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność  $5x^2 - 3x + 2 < 0$ .

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$$

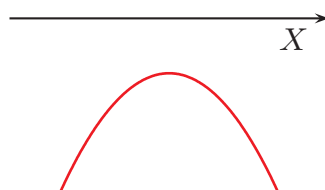
Równanie  $5x^2 - 3x + 2 = 0$  nie ma pierwiastków oraz współczynnik przy  $x^2$  jest dodatni. Parabola znajduje się zatem nad osią  $OX$ , a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.



b) Rozwiąż nierówność  $-3x^2 + 2x - 1 < 0$ .

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$$

Równanie  $-3x^2 + 2x - 1 = 0$  nie ma pierwiastków oraz współczynnik przy  $x^2$  jest ujemny. Parabola znajduje się zatem pod osią  $OX$ , a to oznacza, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego  $x$ , czyli  $x \in \mathbb{R}$ .



### Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

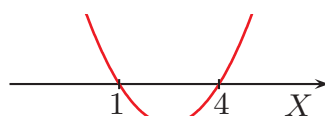
- a)  $4x^2 + 2x + 1 > 0$       b)  $x^2 + x + 3 < 0$       c)  $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 \leq 0$

### Przykład 5

Rozwiąż nierówność  $2(2 - x) < -x(x - 3)$ .

$$\begin{aligned} 4 - 2x &< -x^2 + 3x && \text{Wykonujemy mnożenie.} \\ x^2 - 5x + 4 &< 0 && \text{Przenosimy wszystkie wyrazy} \\ &&& \text{na lewą stronę nierówności.} \end{aligned}$$

Rozwiązujemy równanie  $x^2 - 5x + 4 = 0$  i otrzymujemy  $x = 1$  lub  $x = 4$ . Szkicujemy parabolę i odczytujemy, że nierówność jest spełniona dla  $x \in (1; 4)$ .



## Zadania

1. Rozwiąż nierówność.

- a)  $x^2 > 25$       d)  $x^2 - x \geq 6$       g)  $9x + 5 \geq 2x^2$       j)  $6x^2 - x > 12$   
b)  $x^2 \leq 16$       e)  $x^2 - 4 \leq 3x$       h)  $2x^2 + 5x > 3$       k)  $3x + 8 \geq \frac{1}{2}x^2$   
c)  $4x^2 \geq 9$       f)  $4x + 5 > x^2$       i)  $3x^2 + 1 < x$       l)  $\frac{2}{3}x^2 + 6 \leq x$

2. Ile liczb całkowitych spełnia podaną nierówność?

- a)  $9 - \frac{1}{4}x^2 \geq 0$       b)  $\frac{1}{3}x^2 > x$       c)  $2x^2 - 10 \leq x$       d)  $2 - x > x^2$

3. Rozwiąż nierówność.

- a)  $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} < 0$       c)  $x^2 + 2x + 2 > 0$       e)  $2x^2 - x + \frac{1}{2} \leq 0$   
b)  $-3x^2 + 2x - \frac{1}{3} \leq 0$       d)  $-9x^2 + 2x - \frac{1}{9} < 0$       f)  $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$

4. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości większe niż funkcja  $g(x) = x^2 - 2x + 3$ .

- a)  $f(x) = 2x^2 - x + 1$       b)  $f(x) = 3x^2 - x$       c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$

5. Rozwiąż nierówność.

- a)  $(2x - 2)(x - 3) < (x - 3)(x - 4)$       d)  $(2x - 2)^2 \geq (3x - 2)(x - 3)$   
b)  $(3x - 1)(x + 2) \geq (x - 3)(2x - 1)$       e)  $2x^2 - 3x + 4 \geq -(x - 1)^2 - 6$   
c)  $(4x - 1)(4 - x) \leq (2 - 3x)(x + 1)$       f)  $(2x + 3)^2 - 9 < 8 - (3 - x)^2$

6. Dane są zbiory  $A$  i  $B$ . Zaznacz na osi liczbowej zbiory  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  i  $A \setminus B$ .

- a)  $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x - 6 \leq 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}: -x^2 \leq 4x\}$   
b)  $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + \frac{7}{2}x - 2 > 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x + \frac{1}{4} \leq 0\}$

7. Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$ .

- a)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$       c)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{4 - x^2}$   
b)  $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x + 3}$       d)  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{9 - 4x^2}$

8. Boki prostokąta mają długości równe  $x - 1$  i  $2x + 3$ . Podaj wzór funkcji  $y = P(x)$  opisującej pole tego prostokąta i określ jej dziedzinę. Dla jakich wartości  $x$  pole tego prostokąta jest:

- a) mniejsze od 7,      b) większe od 18?

9. Rozwiąż nierówność.

- a)  $x^2 - 4|x| \geq 0$       b)  $x^2 + 2|x| < 3$       c)  $2x^2 - 5|x| \geq 3$



# Powtórzenie

## Zestaw I

- Wyznacz zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności funkcji  $f$ .
  - $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$
  - $f(x) = -x^2 + 6x$
  - $f(x) = x^2 - 8x + 7$
  - $f(x) = -x^2 + 4x + 5$
  - $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$
  - $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x$
- Wyznacz punkty przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne jej wierzchołka. Naszkicuj tę parabolę.
  - $y = x^2 - 4x$
  - $y = -x^2 + 2x$
  - $y = -x^2 + 2x + 8$
  - $y = x^2 + 6x + 8$
  - $y = 2x^2 - 5x + 2$
  - $y = -2x^2 + 8x - 6$
- Rozwiąż równanie.
  - $x^2 + 4x - 21 = 0$
  - $-6x^2 - 7x + 5 = 0$
  - $\frac{9}{4}x^2 - 12x + 16 = 0$
  - $-x^2 + 3\sqrt{2}x - 5 = 0$
  - $3x^2 + 5x + 1 = 0$
  - $2x^2 - 3x - 1 = 0$
- Rozwiąż równanie.
  - $49x^2 + 140x + 100 = 0$
  - $x^2 + 6x + 9 = (2x - 1)^2$
  - $3x^2 + 2x + 1 = 3x + 4x^2 - 3$
  - $4 - \frac{1}{4}x^2 - 3x = x^2 + 2x + 9$
  - $(2x - 4)(x - 10) = (x + 6)(x - 10)$
  - $x(3 - x) = (2x + 1)(x + 2) - 1$
  - $(x - 1)(x + 2) = (2x - 3)(x + 4)$
  - $(2x - 1)^2 = (3 - x)(x - 6)$
- Rozwiąż nierówność.
  - $3x^2 - 1 \geq 0$
  - $-4x^2 \leq 12x$
  - $\frac{1}{4}x^2 - 5x + 7 < 0$
  - $6x^2 + 3 > 2x$
  - $x^2 - 3x(x - 1) \leq 2(x - 1)(x + 1) - 4x$
  - $7 - x(5x + 2) > 3 - x(4 - x)$
  - $2x^4 + x^2 - 3 \geq (1 - 2x^2)(3 - x^2)$
  - $(2 - 3x)^2 - 6(3x - 1) \leq -(1 - 4x)(2x - 1)$
- Wykresem funkcji  $f(x) = x^2 + bx + c$  jest parabola o wierzchołku w punkcie  $W$ . Wyznacz współczynniki  $b$  i  $c$  oraz zapisz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej.
  - $W(0, 1)$
  - $W(1, 3)$
  - $W(-2, 2)$
  - $W(4, -1)$
- Wyznacz współczynnik  $b$  tak, aby podany przedział był zbiorem wartości funkcji  $f(x) = 2x^2 + bx + 1$ .
  - $[-1; \infty)$
  - $[0; \infty)$
  - $[2; \infty)$
  - $[\frac{1}{2}; \infty)$

## Zestaw II

- Wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$ , o której wiadomo, że:
  - przyjmuje ona największą wartość równą 2, a jej miejscami zerowymi są liczby  $-1$  i  $3$ ,
  - jej zbiorem wartości jest przedział  $[-5; \infty)$ , a miejscami zerowymi są liczby  $-3$  i  $7$ ,
  - przyjmuje ona najmniejszą wartość równą 0, a do jej wykresu należą punkty  $(2, 5)$  i  $(4, 5)$ .
- Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, o której wiadomo, że jej wykresem jest parabola o wierzchołku  $W(2, 4)$  przechodząca przez punkt  $P$ .
  - $P(4, 0)$
  - $P(-1, 7)$
  - $P(6, 10)$
- Punkt  $W$  jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej  $f$ , a liczba 3 jest miejscem zerowym tej funkcji. Wyznacz jej drugie miejsce zerowe.
  - $W(5, 4)$
  - $W(-3, -6)$
  - $W(\frac{1}{2}, 2)$
  - $W(\frac{5}{4}, 6)$
- Rozwiąż równanie.
  - $(x - 3)^2 = (2x - 1)(x - 3)$
  - $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)(3x - 4)$
  - $16 - (3x - 1)^2 = 0$
  - $9x^2 - (2x - 1)^2 = 0$
  - $4x^2 = (1 - x)^2$
  - $(2x + 1)^2 = (4x + 5)^2$
- Rozwiąż układ nierówności.
  - $\begin{cases} (3x + 1)(x - 2) > 0 \\ 4x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$
  - $\begin{cases} x(2 - 3x) \geq -3(x + 2) \\ 25 - 9x^2 < 0 \end{cases}$
- Wyznacz współczynniki  $a, b, c$  trójmianu kwadratowego  $y = ax^2 + bx + c$ , do którego wykresu należą podane punkty.
  - $A(0, 2), B(1, 0), C(-1, 0)$
  - $A(0, 4), B(1, 3), C(2, 0)$
  - $A(3, 0), B(2, 4), C(4, 4)$
  - $A(1, 2), B(3, 2), C(4, -4)$

Przedstaw ten trójmian w postaci iloczynowej.
- Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów  $(x, y)$  spełniających podane warunki.
  - $x^2 \leq x + 12$  i  $y^2 \leq 4$
  - $x^2 \leq 3x$  i  $y^2 - y \leq 2$
  - $x^2 - 2x > 3$  i  $y^2 < 2y$
  - $x^2 - x > 6$  i  $y^2 \geq 3y$





## Zadania z kontekstem realistycznym

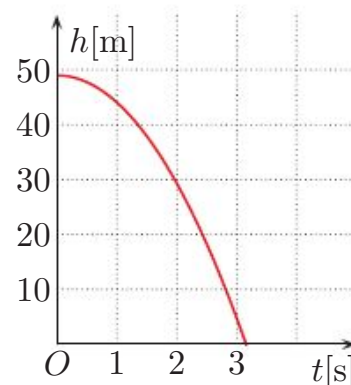
1. W *Rozmowach i dowodzeniach matematycznych* z 1638 r. Galileusz analizował funkcję opisującą ruch spadającego ciała. Znałe jest jego doświadczenie, podczas którego z wieży w Pizie z wysokości 49 m zrzucił metalowe kule. Jeśli pominiemy opór powietrza, to odległość od ziemi  $h$  kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 49 m, w zależności od czasu  $t$ , można opisać za pomocą wzoru  $h(t) = -4,9t^2 + 49$ .

a) Przerysuj tabelę wartości funkcji  $h$  do zeszytu i uzupełnij ją. Znajdź miejsca zerowe i określ dziedzinę tej funkcji.

|        |    |   |   |   |
|--------|----|---|---|---|
| $t[s]$ | 0  | 1 | 2 | 3 |
| $h[m]$ | 49 | ? | ? | ? |

b) Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $h$  będący fragmentem paraboli. Ile metrów przebyła kula w ostatniej sekundzie?

c) Naszkicuj wykres funkcji  $k(t) = -4,9t^2 + 80$  opisującej odległość od ziemi  $k$  (w metrach) kuli upuszczonej swobodnie z wysokości 80 m, gdzie czas  $t$  liczony jest w sekundach.



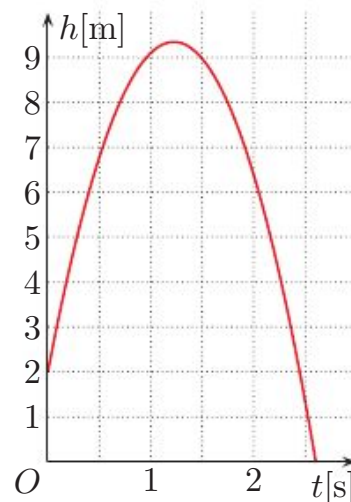
2. Janek wyrzucił piłkę pionowo do góry z prędkością 12 m/s. W momencie rzutu piłka znajdowała się 2 m nad ziemią. Zależność wysokości piłki nad ziemią od czasu można wyrazić wzorem:

$$h(t) = -4,9t^2 + 12t + 2$$

Wykres funkcji  $h$  przedstawiono na rysunku.

a) Odczytaj z wykresu przybliżoną wysokość, jaką osiągnęła piłka. Jaka jest długość drogi, którą przebyła piłka?

b) Jak sądzisz, kiedy piłka poruszała się z większą prędkością – w chwili  $t = 1$  s czy  $t = 2$  s?



3. Z wysokości 5 m wypuszczono z łuku strzałę pionowo do góry z prędkością początkową 50 m/s. Wysokość strzały nad ziemią (w metrach) opisuje wzór  $h(t) = 5 + 50t - 5t^2$ , gdzie  $t$  jest czasem lotu strzały (w sekundach). Po ilu sekundach od momentu wypuszczenia z łuku strzała:

- a) ponownie osiągnie wysokość, z jakiej ją wypuszczono,  
b) osiągnie największą wysokość?

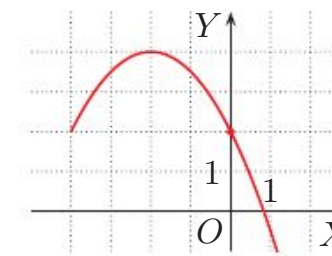


## Sposób na zadanie

Jeśli w zadaniu mamy do wyznaczenia wzór funkcji kwadratowej, ale nie jest powiedziane, czy chodzi o postać ogólną, kanoniczną czy iloczynową, możemy wybrać taką, która jest dla nas najwygodniejsza.

### Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt  $(-2, 4)$ . Wyznacz wzór funkcji  $f$ . Ile liczb całkowitych spełnia nierówność  $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 2$ ?



Wzór funkcji  $f$  zapisujemy w postaci kanonicznej. Wierzchołkiem paraboli jest punkt  $(-2, 4)$ , więc:

$$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$$

Z rysunku odczytujemy, że do wykresu funkcji  $f$  należy punkt  $(0, 2)$ , zatem  $2 = a(0 + 2)^2 + 4$  i stąd  $a = -\frac{1}{2}$ , czyli  $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$ .

Rozwiązujemy nierówność:

$$-\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4 \geq \frac{1}{2}x + 2 \quad / \cdot (-2)$$

$$x^2 + 4x + 4 - 8 \leq -x - 4$$

$$x^2 + 5x \leq 0$$

$$x(x + 5) \leq 0$$

Zatem  $x \in [-5; 0]$ , czyli nierówność tę spełnia sześć liczb całkowitych.

**Odpowiedź:**  $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 4$ ; sześć liczb

→ Zadanie 22, str. 352

### D Przykład 2

Obwód prostokąta jest równy 14, a jeden z jego boków ma długość  $x$ . Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta w zależności od  $x$  i podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że jeśli ten prostokąt nie jest kwadratem, to jego pole jest mniejsze od  $12\frac{1}{4}$ .

Długość drugiego boku prostokąta oznaczmy przez  $y$ . Wtedy  $2x + 2y = 14$ , czyli  $y = 7 - x$ . Pole tego prostokąta opisuje funkcja kwadratowa, której wzór zapisujemy w postaci iloczynowej, a następnie przekształcamy go do postaci ogólnej:

$$P(x) = x \cdot (7 - x) = -x^2 + 7x, \quad \text{gdzie } x \in (0; 7)$$

Wykresem funkcji  $P$  jest fragment paraboli o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie o odciętej  $x_w = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$ . Obliczamy rzędną wierzchołka:

$$P\left(\frac{7}{2}\right) = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{2} = \frac{-49}{4} + \frac{49}{2} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$$

Funkcja  $P$  przyjmuje wartość  $12\frac{1}{4}$  dla  $x = y = \frac{7}{2}$ , czyli gdy prostokąt jest kwadratem. Zatem dla prostokąta niebędącego kwadratem pole jest mniejsze od  $12\frac{1}{4}$ .

→ Zadanie 23, str. 352



W zadaniach 1–9 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

**Zadanie 1 (0–1)**

Przedział  $[-10; \infty)$  jest zbiorem wartości funkcji

- A.  $f(x) = 4x^2 - 12x + 10$       C.  $f(x) = 4x^2 - 12x - 1$   
B.  $f(x) = 4x^2 - 12x + 1$       D.  $f(x) = 4x^2 - 12x - 10$

**Zadanie 2 (0–1)**

Prosta  $x = \sqrt{2}$  jest osią symetrii wykresu funkcji

- A.  $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 2x - 1$       C.  $f(x) = \sqrt{2}x^2 + 4x - 1$   
B.  $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 2x + 1$       D.  $f(x) = \sqrt{2}x^2 - 4x + 1$

**Zadanie 3 (0–1)**

Wykresem funkcji  $f$  jest parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku położonym nad osią  $OX$ , gdy

- A.  $f(x) = (2 - \sqrt{2})x^2 - 6$       C.  $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 6$   
B.  $f(x) = (2 - \sqrt{2})x^2 - 6x$       D.  $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 - 6x$

**Zadanie 4 (0–1)**

Dwa różne pierwiastki ma równanie

- A.  $2x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$       C.  $2x^2 - 3\sqrt{2}x + \sqrt{3} = 0$   
B.  $2x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$       D.  $2x^2 + 3\sqrt{2}x + 2\sqrt{3} = 0$

**Zadanie 5 (0–1)**

Miejscami zerowymi funkcji  $y = 4x^2 + bx + c$  są liczby 5 i  $-3$ , zatem

- A.  $b = -8$  i  $c = -60$       C.  $b = 2$  i  $c = -8$   
B.  $b = -2$  i  $c = -15$       D.  $b = 4$  i  $c = -30$

**Zadanie 6 (0–1)**

Wierzchołkiem paraboli danej równaniem  $y = (2x + 8)(3x + 6)$  jest punkt

- A.  $(-3, -6)$       B.  $(-3, 6)$       C.  $(3, -6)$       D.  $(3, 6)$

**Zadanie 7 (0–1)**

Zbiór liczb rzeczywistych jest zbiorem rozwiązań nierówności

- A.  $5x^2 + 4x \geq 0$       C.  $9x^2 + 30x - 25 \geq 0$   
B.  $-4x^2 - 1 < 0$       D.  $-2x^2 + 24x - 48 < 0$

**Zadanie 8 (0–1)**

Liczba  $\pi$  należy do zbioru rozwiązań nierówności

- A.  $2x^2 - 9x - 11 \geq 0$       C.  $2x^2 - 5x - 7 \geq 0$   
B.  $2x^2 - 7x - 9 \geq 0$       D.  $2x^2 - 3x - 5 \geq 0$

**Zadanie 9 (0–1)**

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności  $2x^2 > 3$  jest

- A.  $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$       C.  $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$   
B.  $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$       D.  $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}; \infty\right)$

**Zadanie 10 (0–2)**

Punkt  $P$  jest wierzchołkiem paraboli będącej wykresem funkcji danej wzorem  $f(x) = x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{173}{16}$ .

Każdemu rozpoczętemu zdaniu przyporządkuj właściwe dokończenie. Wpisz obok rozpoczętych zdań w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–E.

| Numer zadania | Zdanie do uzupełnienia        | Dokończenie zdania |
|---------------|-------------------------------|--------------------|
| 10.1          | Odcięta punktu $P$ jest równa | ?                  |
| 10.2          | Rzędna punktu $P$ jest równa  | ?                  |

- A.  $6\frac{1}{4}$       B.  $5\frac{1}{4}$       C.  $4\frac{3}{4}$       D.  $3\frac{1}{4}$       E.  $2\frac{3}{4}$

**Zadanie 11 (0–1)**

Dana jest nierówność  $(x - \sqrt{17})(x + 4\sqrt{17}) \leq 0$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|                                                                   |   |   |
|-------------------------------------------------------------------|---|---|
| Nierówności tej nie spełnia żadna liczba całkowita ujemna.        | P | F |
| Nierówność ta jest spełniona przez 5 liczb całkowitych dodatnich. | P | F |

**Zadanie 12 (0–1)**

Dana jest funkcja  $f(x) = x^2 - 4\sqrt{3}x + 9$ .

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz 1., 2. albo 3.

Postać kanoniczna funkcji  $f$  to

|           |                              |                               |           |                                  |
|-----------|------------------------------|-------------------------------|-----------|----------------------------------|
| <b>A.</b> | $(x - 1)^2 - 4 - 2\sqrt{3},$ | a jej postać<br>iloczynowa to | <b>1.</b> | $(x - \sqrt{3})(x + 3\sqrt{3}).$ |
| <b>B.</b> | $(x - 2\sqrt{3})^2 - 3,$     |                               | <b>2.</b> | $(x - \sqrt{3})(x - 3\sqrt{3}).$ |
|           |                              |                               | <b>3.</b> | $(x + \sqrt{3})(x - 3\sqrt{3}).$ |





**Zadanie 13 (0-2)**

Rozwiąż równanie  $3x(x+3) = (x+3)^2$ .

**Zadanie 14 (0-2)**

Rozwiąż nierówność  $2x^2 + 7x \geq 4$ .

**Zadanie 15 (0-2)**

Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f(x) = (\sqrt{3} - 1)x^2 + 3x + \sqrt{3} + 1$ .

**Zadanie 16 (0-2)**

Rozwiąż nierówność  $(x+1)(2x+3) \leq (x+1)(5-x)$ .

**Zadanie 17 (0-2)**

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji  $f(x) = -6x + x^2$ .

**Zadanie 18 (0-2)**

Oblicz najmniejszą wartość funkcji  $f(x) = 2(x+3)(x-5)$ .

**Zadanie 19 (0-2)**

Zapisz w postaci iloczynowej trójmian kwadratowy  $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ .

**Zadanie 20 (0-4)**

Wykres funkcji  $g$  otrzymano przez przesunięcie wykresu funkcji  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$  o trzy jednostki w lewo. Naskicuj wykres funkcji  $g$  i odczytaj z niego najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale  $[-5; 1]$ .

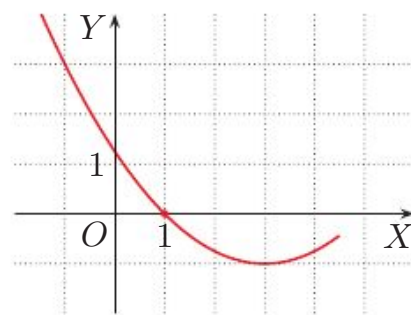
**Zadanie 21 (0-4)**

Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające jednocześnie obie nierówności:

$$x^2 + 4x \leq 0 \quad \text{ i } \quad x^2 - 4 > 0$$

**D Zadanie 22 (0-4) → Przykład 1, str. 349**

Na rysunku obok przedstawiono fragment paraboli będącej wykresem funkcji  $f$ . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt  $(3, -1)$ . Wyznacz wzór funkcji  $f$  i uzasadnij, że żadna liczba niewymierna nie spełnia nierówności  $f(x) \leq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$ .



**D Zadanie 23 (0-4) → Przykład 2, str. 349**

Jedna z przekątnych rombu ma długość  $x$ , a suma długości obu przekątnych jest równa  $10\frac{1}{2}$ . Wyznacz wzór funkcji opisującej pole tego rombu w zależności od  $x$ . Podaj jej dziedzinę. Uzasadnij, że dla dowolnego całkowitego argumentu  $x$  funkcja ta przyjmuje wartość mniejszą od  $\frac{441}{32}$ .



**Zadanie 1 (0-2)**

Wyznacz najmniejszy pierwiastek równania:

$$(x^2 - 11x - 26)(2x^2 + 7x + 4) = 0$$

**Zadanie 2 (0-2)**

Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych spełniających jednocześnie obie nierówności  $x^2 - 14x - 32 > 0$  i  $x^2 - 23x \leq 0$ .

**Zadanie 3**

Wykres funkcji  $f$  otrzymujemy przez przesunięcie paraboli  $y = x^2 - 8x - 11$  o wektor  $[p, q]$ .

**Zadanie 3.1 (0-2)**

Wyznacz liczbę  $q$ , dla której zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $[-7; \infty)$ .

**Zadanie 3.2 (0-2)**

Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f$  dla  $p = 3\sqrt{3}$  i  $q = 0$ .

**Zadanie 4 (0-2)**

Liczba  $-5$  jest jednym z miejsc zerowych funkcji  $f$ , której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie  $(-3, 1)$ . Po przesunięciu wykresu funkcji  $f$  o wektor  $[0, p]$  otrzymujemy wykres funkcji  $g$ , dla której jednym z miejsc zerowych jest liczba 4. Wyznacz liczbę  $p$ .

**Zadanie 5 (0-4)**

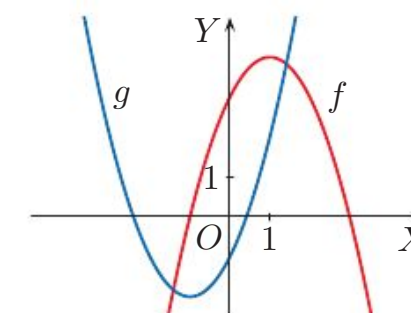
Funkcje  $f(x) = 2x^2 - 11x + 15$  i  $g(x) = x^2 + bx + c$  mają te same miejsca zerowe. Oblicz wartości współczynników  $b$  i  $c$ .

**Zadanie 6 (0-4)**

Naskicuj wykres funkcji  $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ . Podaj rozwiązanie nierówności  $f(x) \geq 3$ .

**Zadanie 7 (0-4)**

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  i  $g(x) = ax^2 + bx - 1$ . Parabola będąca wykresem funkcji  $g$  ma wierzchołek w punkcie  $(-1, -2)$ . Podaj rozwiązanie nierówności  $f(x) \cdot g(x) < 0$ .



**Zadanie 8 (0-4)**

Dane są funkcje  $f(x) = -x^2 + 4|x| + 1$  i  $g(x) = x + 1$ . Rozwiąż graficznie nierówność  $f(x) \leq g(x)$ .

# Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

## Cechy podzielności liczb

1. a) 3, 5 b) 2, 3, 9 c) 2, 5 d) 2, 3  
2. a), c) nie b), d) tak  
3. a) 0, 4, 8  
b) 2, 6  
c) 1, 3, 5, 7, 9  
d) 0, 4, 8  
4. a) 2, 5, 8  
b) 1, 4, 7  
c) 0, 3, 6, 9  
d) nie ma takiej cyfry  
5. a), d) tak b), c) nie  
6. a) 6, 12 b) 6, 15  
c) przez żadną d) 6  
7. a)  $a = 6$  b)  $a = 0$  lub  $a = 6$   
c)  $a = 2$  lub  $a = 6$  d)  $a = 6$   
8. a) 15 b) 15, 75  
c) przez żadną  
d) 15, 45

## 1.1. Liczby naturalne

- Ć 1. a) 1, 2, 3, 4, 6, 12  
b) 1, 2, 4, 7, 14, 28  
c) 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36  
d) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48  
2. a), c) tak b), d) nie  
3. a)  $3 \cdot 8 + 2$  b)  $3 \cdot 25 + 1$  c)  $3 \cdot 36$   
d)  $3 \cdot 42 + 1$  e)  $3 \cdot 237 + 2$   
4. a)  $4 \cdot 0 + 3$  b)  $4 \cdot 12 + 1$  c)  $4 \cdot 19 + 3$   
d)  $4 \cdot 31 + 2$  e)  $4 \cdot 123$   
5. a) 2  
b) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19  
c) 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47  
d) 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97  
6.  $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$ ,  
 $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ ,  
 $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ,  
 $1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ ,  
 $1323 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

7. a)  $\text{NWD}(18, 30) = 6$ ,  
 $\text{NWW}(18, 30) = 90$   
b)  $\text{NWD}(15, 50) = 5$ ,  
 $\text{NWW}(15, 50) = 150$   
c)  $\text{NWD}(24, 72) = 24$ ,  
 $\text{NWW}(24, 72) = 72$   
d)  $\text{NWD}(144, 192) = 48$ ,  
 $\text{NWW}(144, 192) = 576$   
e)  $\text{NWD}(84, 105) = 21$ ,  
 $\text{NWW}(84, 105) = 420$   
f)  $\text{NWD}(196, 420) = 28$ ,  
 $\text{NWW}(196, 420) = 2940$

8.  $\text{NWD}(x, y) = 1$ ,  
 $\text{NWW}(x, y) = x \cdot y$

- Z 1. a) 41 b) 26 c) 23 d) 19  
2. a)  $5 \cdot 7 + 4$  b)  $5 \cdot 12 + 2$   
c)  $5 \cdot 31 + 1$  d)  $5 \cdot 55 + 0$   
3. a) nie b) tak, dla  $r = 2$   
c) tak, dla  $r = 3$  d) nie

4. a)  $6n + 9$  b)  $6n + 3$   
c)  $6n - 9$  d)  $12n + 15$

6. a) 6 b) 150 c) 245 d) 70

7. a) 24 b) 120 c) 23

## Liczby pierwsze

1.

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 569 | 59  | 449 |
| 239 | 359 | 479 |
| 269 | 659 | 149 |

## Działania na liczbach całkowitych i ułamkach zwykłych

1. a) 0 b) 42 c) 12 d) 5  
e) 191 f)  $-170$   
2. a)  $-104$  b) 80 c)  $3\frac{4}{5}$  d)  $-33$   
3. a)  $\frac{5}{3}$  b)  $\frac{10}{3}$  c)  $\frac{31}{7}$  d)  $\frac{70}{11}$  e)  $\frac{86}{15}$   
4. a)  $3\frac{2}{3}$  b)  $4\frac{1}{4}$  c)  $2\frac{5}{8}$  d)  $3\frac{5}{9}$  e)  $1\frac{24}{25}$

5. a) 1 b)  $3\frac{2}{3}$  c)  $2\frac{2}{3}$  d)  $4\frac{1}{2}$   
e)  $2\frac{4}{5}$  f) 4 g)  $-1\frac{7}{9}$  h)  $-1\frac{7}{25}$   
6. a) 4 b)  $1\frac{4}{7}$  c)  $2\frac{10}{11}$  d)  $-1\frac{1}{15}$   
7. a)  $1\frac{1}{5}$  b)  $3\frac{1}{3}$  c)  $-6\frac{2}{3}$  d)  $-5\frac{2}{5}$   
e) 20 f) 40 g)  $7\frac{1}{2}$  h) 33

8. a) 3 b) 8

## 1.2. Liczby całkowite. Liczby wymierne

- Ć 1. a)  $-36$  b) 16 c) 720  
d)  $-481$  e)  $-58$  f) 26  
2. a), b)  $x = y$  c)  $x \neq y$   
3.  $\frac{1}{36}$   
4. a)  $-2\frac{13}{24}$  b)  $\frac{11}{12}$  c)  $3\frac{13}{18}$  d)  $2\frac{55}{72}$   
5. a)  $2\frac{1}{4}$  b)  $-\frac{2}{3}$  c)  $-2\frac{7}{9}$  d) 5  
Z 1. a)  $A = 10\frac{1}{5}$ ,  $B = 11\frac{4}{5}$ ,  $C = 12\frac{1}{5}$   
b)  $D = -3\frac{3}{7}$ ,  $E = -1\frac{5}{7}$ ,  $F = \frac{6}{7}$   
c)  $G = 2\frac{1}{15}$ ,  $H = 6\frac{1}{15}$ ,  $I = 8\frac{11}{15}$   
d)  $J = -\frac{8}{11}$ ,  $K = \frac{4}{11}$ ,  $L = 2\frac{6}{11}$   
2. a)  $-\frac{17}{30}$  b)  $6\frac{5}{24}$  c) 1 d)  $-1\frac{5}{12}$  e)  $3\frac{2}{15}$   
f)  $-\frac{31}{48}$  g)  $4\frac{1}{24}$  h)  $-2\frac{3}{5}$  i)  $\frac{7}{60}$   
3. a) 14 b)  $-2\frac{3}{5}$  c) 8  
4. a)  $z < y < x$  b)  $y < z < x$   
5. a)  $-8\frac{2}{3}$  b)  $\frac{8}{15}$  c)  $-\frac{1}{20}$  d)  $1\frac{1}{8}$   
e)  $2\frac{3}{5}$  f)  $-42$  g)  $1\frac{1}{24}$  h)  $\frac{1}{9}$   
7. a)  $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$  b)  $\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$   
c)  $\frac{2}{31} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496}$   
8.  $\frac{9}{10}$   
9. 60 h  
10. 5 h 12 min

## 1.3. Liczby niewymierne

- Ć 1. a)  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{18}$ ,  $\sqrt{44}$   
b)  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{10}$ ,  $\sqrt[3]{16}$ ,  $\sqrt[3]{25}$   
2. a), c), e) jest  
b), d), f) nie jest  
3. a) np.  $\sqrt{3}$ ,  $2 - \sqrt{3}$   
b) np.  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{27}$   
Z 1. a)  $\sqrt{164}$  b)  $\sqrt{29}$  c)  $\sqrt{125}$   
d)  $\sqrt{286}$  e)  $\sqrt[3]{4}$  f)  $\sqrt[3]{81}$   
2. a)  $\sqrt{5}$ ; nie b)  $\sqrt{10}$ ; nie  
3. b), c) tak a), d) nie

4. a)  $p, q$  lub  $p, r$  b)  $q, r$  c)  $q, s$  d)  $q, s$   
5. a), c), e) jest b), d), f) nie jest  
6. sześciokąta  
9. a) np.  $\sqrt{2}$  b) np.  $0,01\sqrt{2}$   
c) np.  $5 + 0,001\sqrt{2}$

## 1.4. Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

- Ć 1. a) 0,35 b) 0,44 c) 2,08  
d) 2,86 e) 0,032 f) 0,068  
2. a) na 10. miejscu: 2,  
na 20. miejscu: 4  
b) na 10. miejscu: 7,  
na 20. miejscu: 3  
c) na 10. miejscu: 5,  
na 20. miejscu: 4  
d) na 10. miejscu: 0,  
na 20. miejscu: 4  
4. a)  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{\frac{3}{4}}$  b)  $\sqrt[3]{9}$ ,  $\sqrt[3]{16}$   
5. a) 1,4 b) 1,41 c) 1,4142 d) 1,41421  
6. a) 21 b) 20 c) 0 d) 1 e) 2  
7. a) 7,8952, 9,9963, 5,9039  
b) 7,895, 9,996, 5,904  
c), d) 7,9, 10, 5,9  
8. a) 3,141593; z nadmiarem  
b) 3,14159; z niedomiarem  
c) 3,1416; z nadmiarem  
d) 3,142; z nadmiarem  
e) 3,14; z niedomiarem  
Z 1. a) 0,(7) b) 0,01(6) c) 0,00(3)  
d) 0,00(5) e) 0,3(6)  
2. a) na 24. miejscu: 4, na 100. miejscu: 7  
b) na 24. miejscu: 5, na 100. miejscu: 2  
3.  $a = 6$ ,  $b = 3$   
4. a), d) skończone b), c) okresowe  
5. a)  $\frac{4}{11}$  b)  $\frac{41}{11}$  c)  $-\frac{206}{33}$   
d) 1 e)  $\frac{209}{5}$  f)  $\frac{2131}{990}$   
6.  $x = \frac{2}{3}$ ,  $y = \frac{48}{11}$   
a)  $5\frac{1}{33}$  b)  $-3\frac{91}{99}$  c)  $\frac{43}{48}$   
7.  $x = 1$ ,  $y = 6$   
8. z dokładnością do 0,005:  $\frac{60}{37}$ ,  $\frac{97}{60}$ ,  $\frac{157}{97}$



### 1.5. Pierwiastek kwadratowy

- ☐ 1. a) 12 b) 15 c) 18 d) 25 e) 50  
f) 90 g) 1,1 h) 1,9 i) 2,1
2. a) 3 b) 3 c) 9 d) 1,2 e)  $\sqrt{3}$
3. a) 7,2 cm b) 128 cm
4. a) 18, 3, 5,7 b)  $\frac{11}{12}, \frac{19}{20}, \frac{24}{25}$   
c) 4, 3, 10 d) 3,  $\frac{1}{2}$ , 2
- ☐ 1. a) 3 b) -11 c) 4,2 d) 0,5  
e)  $-\frac{17}{20}$  f)  $1\frac{19}{30}$
3. a) 2, 3, 4, 5  
b) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11  
c) 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17
4. a)  $3\sqrt{2}$  b)  $2\sqrt{6}$  c)  $4\sqrt{3}$  d)  $4\sqrt{6}$   
e)  $6\sqrt{3}$  f)  $6\sqrt{7}$  g)  $14\sqrt{2}$  h)  $15\sqrt{2}$
5. a)  $6\sqrt{2}$  b)  $\sqrt{2}$  c)  $10\sqrt{2}$   
d)  $5\sqrt{2}$  e)  $20\sqrt{2}$  f)  $22\sqrt{2}$
6. a)  $9\sqrt{5}$  b)  $\sqrt{3}$  c)  $7\sqrt{3}$  d)  $-2\sqrt{5}$   
e)  $4,6\sqrt{2}$  f)  $-25\sqrt{5}$
7. a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  b)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  c)  $\frac{\sqrt{10}}{5}$   
d)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  e)  $\frac{\sqrt{10}}{6}$  f)  $\frac{\sqrt{15}}{25}$
8. a)  $4\sqrt{2} + 1 \approx 6,6$   
b)  $\frac{3}{2}(\sqrt{2} - 1) \approx 0,6$   
c)  $\frac{5}{4}(1 - \sqrt{2}) \approx -0,5$   
d)  $\frac{1}{4}(10 + 3\sqrt{2}) \approx 3,55$
9. a) 6 b) 16 c) 20 d) 30  
e) 42 f) 30 g) 120 h) 120
10. a) 30 b)  $\frac{35}{4}\sqrt{6}$  c) 2,2 d)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
11. a)  $6 + 18\sqrt{2}$  b)  $12\sqrt{3} - 30$   
c)  $\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} - \sqrt{6}$  d)  $5\sqrt{2} + 4\sqrt{5} - 1$
12. a) 15 b)  $6\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$  c) 16
13. a)  $Ob = 12\sqrt{2}$ ,  $P = 12$   
b)  $Ob = 24\sqrt{3}$ ,  $P = 72$   
c)  $Ob = 5(\sqrt{10} + \sqrt{2})$ ,  $P = 10\sqrt{5}$

### 1.6. Pierwiastek sześcienny. Pierwiastek $n$ -tego stopnia

- ☐ 1. a) 1 b) 4 c) 6 d) 20
2. a) 8 b)  $\frac{1}{9}$  c) 11 d)  $\frac{2}{9}$  e) 1,1 f)  $\frac{9}{11}$
3. a) 6 b) 5 c) 14 d) 2 e)  $-\frac{1}{12}$  f)  $2\frac{1}{3}$
4. a)  $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$  b)  $2\sqrt[3]{2}$  c)  $\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$
5. a) -3 b) -4 c) -5 d)  $-\frac{1}{3}$  e)  $-\frac{3}{10}$

6. a) 3 b) -2 c) 0,2 d) -0,1 e) 3 f) -2

- ☐ 1. a)  $\frac{1}{2}$  b)  $\frac{1}{4}$  c)  $\frac{2}{3}$  d)  $\frac{4}{5}$   
e)  $\frac{3}{10}$  f)  $\frac{5}{6}$  g)  $\frac{4}{3}$  h)  $\frac{7}{3}$
2. a) 7 b) 1 c) 13 d) 2 e) 0,6 f) 0,5
3. a)  $2\sqrt[3]{4}$  b)  $5\sqrt[3]{2}$  c)  $3\sqrt[3]{5}$   
d)  $5\sqrt[3]{3}$  e)  $3\sqrt[3]{4}$  f)  $2\sqrt[3]{15}$
4. a)  $\sqrt[3]{24}$  b)  $\sqrt[3]{54}$  c)  $\sqrt[3]{81}$   
d)  $\sqrt[3]{432}$  e)  $\sqrt[3]{640}$  f)  $\sqrt[3]{1080}$
5. Wszystkie równości są prawdziwe.
6. a)  $y$  b)  $x = y$  c)  $y$  d)  $x$
8. a) 8 cm b) 20 cm
9. a)  $12\sqrt[3]{2}$  cm b) 15 cm
10. a)  $\sqrt[4]{162}$  b)  $\sqrt[4]{2500}$  c)  $\sqrt[5]{2048}$   
d)  $\sqrt[6]{10\,000}$
11. a) 14 b) 9 c) -10 d) 4  
e) 0,6 f) 2,1 g)  $1\frac{1}{4}$  h) 12
12. a) 25 b)  $\frac{3}{5}$  c) 9 d)  $\frac{7}{3}$
13. a) -20 b) -0,1 c)  $-\frac{5}{4}$  d) -1,5
14. a) 1 b) 0,3 c)  $\frac{14}{15}$  d) -1 e) -2,4 f) 4

### 1.7. Potęga o wykładniku całkowitym

- ☐ 1. a) 81, 729, 6561 b)  $\frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \frac{81}{256}$   
c)  $\frac{4}{25}, -\frac{8}{125}, \frac{16}{625}$
2.  $(-3)^9 < (-2)^9 < (-2)^0 < (-2)^4 = 2^4 < 3^4 = (-3)^4$
3. a)  $\frac{1}{16}$  b)  $\frac{1}{64}$  c)  $\frac{1}{9}$  d)  $-\frac{1}{27}$  e) 4  
f) 32 g)  $\frac{9}{4}$  h)  $\frac{81}{16}$  i) 25 j) -125
4. a), b) tak c) nie
5. a) 27 b)  $\frac{1}{1024}$  c)  $\frac{1}{1024}$   
d)  $\frac{1}{256}$  e) 25 f) 1024  
g) 32 h) 1024 i)  $\frac{27}{4}$  j) 400
6. a)  $x^4$ ,  $x \neq 0$  b)  $x^6$ ,  $x \neq 0$   
c)  $\frac{x}{y}$ ,  $x, y \neq 0$  d)  $\frac{x^4}{y^3}$ ,  $x, y \neq 0$
- ☐ 1. a) -32,  $-\frac{1}{32}$ ,  $\frac{1}{32}$  b) 9, -27, 81  
c) 9,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{27}$  d) 8,  $8\sqrt{2}$ ,  $\frac{1}{16}$
2. a)  $2^{15}$  b)  $2^{-4}$  c)  $2^{27}$  d)  $2^{20}$
3. a)  $2^4$ ,  $2^{-6}$ ,  $2^9$ ,  $2^2$ ,  $2^{20}$   
b)  $3^{-4}$ ,  $3^3$ ,  $3^{-4}$ ,  $3^3$ ,  $3^{-20}$   
c)  $10^{-3}$ ,  $10^{10}$ ,  $10^8$ ,  $10^{-6}$   
d)  $5^{-6}$ ,  $5^2$ ,  $5^{-12}$ ,  $5^{-20}$
4. a)  $-\frac{\sqrt{3}}{72}$  b)  $\frac{4}{81}$  c)  $-40\sqrt{5}$  d) 18

5. a) 0,001 b) 1 c)  $\frac{1}{16}$  d)  $\frac{1}{27}$   
e) 32 f)  $\frac{1}{169}$  g) 1 h) -1
6. a)  $\frac{35}{36}$  b) 0,001 c)  $\frac{1}{8}$
7. a)  $x$  b)  $y$
8. a)  $1\frac{1}{3}$  b)  $\frac{16}{81}$  c) 6  
d)  $3\frac{3}{8}$  e) 0 f)  $\frac{8}{125}$
9.  $x \neq 0$   
a)  $2x^6$ ; 128 b)  $x^{12}$ ; 1  
c)  $x^4$ ; 625 d)  $2x^3$ ;  $\frac{27}{4}$

### Liczby Fermata

1. tak: 170, 204, 1020; nie: 200

### 1.8. Notacja wykładnicza

- ☐ 1. a)  $5,02 \cdot 10^{27}$  b)  $2,7 \cdot 10^{-4}$   
c)  $2,99 \cdot 10^{-26}$  d)  $9,10956 \cdot 10^{-31}$
2. a)  $6,32 \cdot 10^6$  b)  $1,09 \cdot 10^8$   
c)  $4,3728 \cdot 10^1$  d)  $8,7652 \cdot 10^3$   
e)  $6,5 \cdot 10^{-4}$  f)  $3,02 \cdot 10^{-3}$   
g)  $1,00324 \cdot 10^{-1}$  h)  $1 \cdot 10^{-6}$
3. a) 86 200 b) 0,000789  
c) 0,0000834 d) 6,02
4. a)  $1,36 \cdot 10^3 = 1360$   
b)  $1,12 \cdot 10^6 = 1\,120\,000$   
c)  $3 \cdot 10^2 = 300$   
d)  $6 \cdot 10^{-1} = 0,6$
- ☐ 1. a)  $2 \cdot 10^4 = 20\,000$   
b)  $9 \cdot 10^{10} = 90\,000\,000\,000$   
c)  $3 \cdot 10^{12} = 3\,000\,000\,000\,000$   
d)  $1,6 \cdot 10^{11} = 160\,000\,000\,000$
2. a)  $9,6 \cdot 10^9$  b)  $6 \cdot 10^{-13}$   
c)  $1,02 \cdot 10^0$  d)  $1,2 \cdot 10^0$
3. włos:  $0,0000000046$  m/s,  
ślimak:  $1,94 \cdot 10^{-3}$  m/s,  
sprinter:  $1 \cdot 10^1$  m/s,  
Ziemia:  $29\,600$  m/s,  
światło:  $2,99792458 \cdot 10^8$  m/s
4. rok świetlny:  $9,4608 \cdot 10^{12}$  km;  
kolejno:  $3,9 \cdot 10^5$ ,  $1,5 \cdot 10^8$ ,  $5,9 \cdot 10^9$ ,  
 $4,1 \cdot 10^{15}$ ,  $2,6 \cdot 10^{17}$ ,  $1,4 \cdot 10^{22}$
5.  $1,017 \cdot 10^{11}$  h

### Nazwy wielkich liczb

2. nazewnictwo europejskie:  
Słońce – 1,989 kwintylionów kg,  
Merkury – 330,2 tryliardów kg,  
Jowisz – 1,899 kwadryliardów kg,  
Ziemia – 5,974 kwadrylionów kg;  
nazewnictwo amerykańskie:  
Słońce – 1,989 nonylionów kg,  
Merkury – 330,2 sekstylionów kg,  
Jowisz – 1,899 oktylionów kg,  
Ziemia – 5,974 septylionów kg

### 1.9. Potęga o wykładniku wymiernym

- ☐ 1. a) 2 b) 4 c) 9 d) 2 e) 3 f) 3
2. a) 8 b) 9 c) 16 d) 8 e) 729  
f) 32 g)  $\frac{1}{25}$  h) 27 i) 32 j)  $\frac{9}{4}$
4. a) 1000 b) 1024 c) 25 d) 8 e) 5  
f) 3 g) 3 h) 2 i) 7 j) 4
5. a) 4 b) 125 c) 16 d) 32 e)  $\sqrt[3]{3}$
6. a) 216 b) 32 c) 12 d)  $\frac{9}{4}$  e) 15
7. a) 81 b) 4 c)  $5\sqrt{5}$  d)  $\frac{8}{27}$  e)  $\frac{1}{16}$
8. a) 199,5262 b) 2818,3829  
c) 42,1697 d) 0,0200
- ☐ 1. a)  $2^{\frac{1}{2}}$  b)  $2^{\frac{1}{3}}$  c)  $2^{-\frac{1}{2}}$  d)  $2^{\frac{2}{3}}$   
e)  $2^{\frac{9}{2}}$  f)  $2^{\frac{10}{3}}$  g)  $2^{\frac{3}{2}}$  h)  $2^{\frac{4}{3}}$
2. a)  $7^{\frac{3}{2}}$  b)  $7^{\frac{2}{3}}$  c)  $7^{-\frac{1}{2}}$  d)  $7^{-\frac{1}{3}}$   
e)  $7^{-\frac{3}{2}}$  f)  $7^{-\frac{3}{5}}$  g)  $7^{\frac{5}{2}}$  h)  $7^{\frac{6}{5}}$
3. a) 27 b) 25 c)  $\frac{1}{16}$  d)  $\frac{1}{9}$   
e)  $\frac{1}{12}$  f) 8 g) 10 h)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. a) 0,008 b) 2,5 c) 0,09 d) 125  
e) 32 f) 0,008 g)  $(\frac{10}{3})^5$  h) 0,008
5. a) 16 b)  $\frac{1}{3}$  c) 1 d) 64
6. a)  $2^{\frac{1}{4}}$  b)  $5^{\frac{1}{6}}$  c)  $5^{\frac{3}{8}}$  d)  $2^{\frac{5}{6}}$  e)  $3^{\frac{1}{6}}$  f)  $3^{\frac{1}{12}}$   
g)  $2^{\frac{4}{3}}$  h)  $3^{\frac{7}{6}}$  i)  $2^{\frac{3}{2}}$  j)  $18^1$  k)  $2^{-\frac{1}{2}}$  l)  $3^{\frac{7}{8}}$
7. a)  $x$  b)  $x$

### 1.10. Logarytm i jego własności

- ☐ 1. a) 1 b) 2 c) 5 d) -2 e)  $\frac{1}{3}$
2. a) 4 b) 10 c) -1 d) -3 e)  $\frac{1}{2}$
3. a) 1 b) 4 c)  $\frac{1}{2}$  d) 3 e) -2 f)  $\frac{1}{4}$
5. a) 14 b) 7 c)  $1\frac{1}{2}$  d)  $3\frac{1}{3}$  e)  $2\frac{1}{4}$
6. a) -7 b) 13 c)  $-2\frac{1}{2}$  d)  $3\frac{1}{2}$  e)  $4\frac{3}{4}$

7. a) 20 b) 20 c) 12 d)  $-16$
- ☐ 1. a) 9 b) 1 c)  $-5$  d)  $\frac{1}{5}$  e)  $\frac{3}{2}$
2. a) 0 b) 5 c)  $-1$  d)  $\frac{3}{2}$  e)  $-\frac{3}{2}$
3. a)  $-1$  b) 2 c) 4
4. a)  $2 + 4 = 6$  b)  $3 - 2 = 1$  c)  $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$
5. a)  $3 - 1 = 2$  b)  $4 - 2 = 2$  c)  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
6. a) 2 b) 1 c) 3
8. a)  $-1,523, -0,523, 0,477$   
b)  $-1,268, -2,268, 0,732$  c)  $1,431, 0,602$

### 1.11. Procenty (1)

- ☐ 1. a) 6, 30, 150, 450 b) 5, 20, 100, 300
2. a) 100 b) 320 c) 60 d) 12 e) 72 f) 42
3. czapka  $-27$  zł, rękawice  $-39$  zł, razem 66 zł
4. cena nart po obniżce: marcowej  $-462$  zł, o 50%  $-412,50$  zł
5. 1380 zł; wzrosła o 38%
6. a) 10 b) 20 c) 30
7. a) 0,6 b) 11,2 c) 5 d) 5 e) 0,36 f) 0,99
8. firma Y: o 35%, firma Z: o 12,5%
9. a)  $y = 50\%x, x = 200\%y$   
b)  $y = 80\%x, x = 125\%y$   
c)  $y = 160\%x, x = 62,5\%y$
10. cena średniego zestawu: 250 zł, cena małego zestawu: 125 zł

- ☐ 1. a) 160,4 b) 4,5 c) 0,004
2. a) 100% b)  $33\frac{1}{3}\%$  c) 56,25%
3. a) 36% b)  $55\frac{5}{9}\%$
4. a) 2376 zł b) 2250 zł c) 2160 zł
5. a) 62,5% b) 75%
6. a) I kwartał: 2 500 000 zł, III kwartał: 3 000 000 zł, IV kwartał: 2 400 000 zł  
b) I kwartał: 1 500 000 zł, II kwartał: 2 250 000 zł, III kwartał: 1 800 000 zł
7. a) 2706 zł; podatek stanowi około 18,7% ceny brutto  
b) 2600 zł; cena netto stanowi około 81,3% ceny brutto

- c) 2583 zł; cena brutto po podniesieniu ceny netto: 2829 zł

### 1.12. Procenty (2)

- ☐ 1. a) poparcie o 4 punkty procentowe; liczba osób o 25%  
b) poparcie o 2 punkty procentowe; liczba osób o 20%
2. W banku A wzrosło o 1,5 punktu procentowego, w banku B zmalało o 1,2 punktu procentowego.
3. a) 5100 zł b) 5175 zł c) 5200 zł
- ☐ 1. 120 zł
2. 1,5 punktu procentowego
3. a) 7800 zł b) 7740 zł
4. nie
5. a) 2322 zł b) 2500 zł
6. 9000 zł

### Zestaw I

1. a) 995 b) 996 c) 994 d) 990 e) 990
2. a)  $4\frac{1}{3}$  b) 8 c)  $-\frac{1}{15}$  d) 40,9  
e)  $-13\frac{1}{3}$  f)  $3\frac{1}{2}$
3. a)  $4 - \frac{\sqrt{12}}{3}, 2$  b)  $\sqrt{1\frac{4}{25}}, 1$   
c)  $\sqrt{81} + \sqrt[3]{81}, 13$  d)  $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{125}, 8$
4. a)  $\frac{1}{3}$  b)  $\frac{2}{7}$  c)  $\frac{1}{10}$  d)  $\frac{1}{15}$   
e) 2 f)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  g)  $\frac{3}{4}$  h)  $\frac{8}{9}$
5. a)  $-\frac{2}{5}$  b)  $-1\frac{1}{3}$  c) 0 d) 1  
e)  $\frac{2}{3}$  f)  $\frac{1}{2}$  g)  $\frac{4}{5}$  h)  $\frac{5}{6}$
6. a)  $-3 + \sqrt{5}$  b)  $-375$  c)  $\frac{135}{4}$
7. a) 3 b) 12 c) 5
8. a)  $6,3 \cdot 10^{-7}$  b)  $1,2 \cdot 10^{21}$   
c)  $2,1 \cdot 10^{11}$  d)  $1,28 \cdot 10^{11}$   
e)  $6 \cdot 10^{-13}$  f)  $3,2 \cdot 10^{-11}$
9. a)  $d < b < c < a$  b)  $b = c < d < a$
10. a)  $1\frac{1}{2}$  b)  $\frac{4}{9}$  c)  $\frac{24}{25}$  d)  $\frac{11}{16}$
11. a) Zmniejszyło się o 36%.  
b) Zmniejszyło się o 1%.
12. 150
13. 4
14. a) 100,2 b) 500,8

### Zestaw II

1. Najwięcej dzielników ma liczba 60, a najmniej liczba 123.
2. a) 4 b)  $\frac{1}{3}$  c)  $2\frac{17}{32}$  d)  $6\frac{1}{4}$  e) 64 f)  $\frac{1}{243}$
3. a), c) jest b) nie jest
5.  $x = \frac{5}{6}, y = \frac{4}{3}$   
a)  $1\frac{19}{20}$  b)  $2\frac{1}{400}$  c)  $2\frac{44}{45}$  d)  $\frac{19}{144}$
6. a)  $x^{-8}, x \neq 0$  b)  $36y^4, y \neq 0$   
c)  $8z^4y^6, y \neq 0, z \neq 0$   
d)  $s \neq 0, t \neq 0, s \neq t, s \neq -t$
7. a) 20 b)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$  c) 27 d) 2
8. a)  $1\frac{1}{2}m + 6\frac{3}{4}t - 12, m \neq 0, t \neq 0$   
b)  $-44x + 24, x \neq 0, y \neq 0$
9. a)  $8 \cdot 10^5$  b)  $2 \cdot 10^{-9}$   
c)  $7,5 \cdot 10^2$  d)  $2,5 \cdot 10^{-1}$
11.  $x = 40$  lub  $x = 56$  lub  $x = 88$

### Zadania z kontekstem realistycznym

1. 10, 11 i 12
2. około  $7,87 \cdot 10^{10}$
3. a) 172,20 zł; około 18,7%  
b) 8%; o około 7,4%  
c) o około 14,6%
4. pan Nowak
5. 4499,46 zł; o 19,46 zł
6. 2000 zł

### Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. A 3. B 4. D 5. C 6. C 7. C 8. B  
9. B 10. D 11. C 12. D
13. FF
14. CE
15. DH
- 16.1. FP 16.2.  $-15$
17. A3
- 18.1. A3 18.2. B
19. ujemny
20. 15
21. 75
22. 360
- 23.1.  $24\sqrt{3}$  23.2.  $6\sqrt{2}$

24. 25 zł

25. 150

26. 12,5%

27. 15 h

### Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 0,62

2. 0,25

3.  $\frac{17}{11}$

### 2.1. Zbiory

- ☐ 1. a), c), f) jest b), d), e) nie jest
2. a) tak b) nie
3. a)  $B \subset A$  b)  $A \subset B$   
c)  $A \subset B$  i  $B \subset A$ , czyli  $A = B$
- ☐ 1. a)  $A \subset B$  b)  $A \subset B$  c)  $B \subset A$
2. a) tak b) nie c) nie
3. a) tak b) tak
4. a) B b) A

### 2.2. Działania na zbiorach

- ☐ 1. a)  $A = \{1, 3, 6, 7, 8\},$   
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{1, 3\}$   
b)  $A = \{a, b, c, d, e\},$   
 $B = \{c, d, e, f, g, h, i\},$   
 $A \cap B = \{c, d, e\}$
2. a)  $\{0, 6, 12, 18\}$  b)  $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\}$   
c)  $\{0, 1, 2, 4, 5\}$
3. a) tak b) nie
4. a) 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10 b)  $s, t, u, v, w$
5. a)  $\{5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25\}$   
b)  $\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -8, 8\}$   
c)  $\mathbb{Z}$
6. a)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$   
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\},$   
 $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$   
 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$   
b)  $A \cap B = \{2, 3\}, A \cap C = \{3, 7\},$   
 $B \cap C = \{3, 5, 6\}, A \cap B \cap C = \{3\}$
7. a)  $A \setminus B = \{7, 9, 11\}, B \setminus A = \{0, 2, 4, 6\}$   
b)  $A \setminus B = \{8, 16, 32, 40\},$   
 $B \setminus A = \{6, 12, 18, 30, 36, 42\}$



- Z** 1.  $A \cup B = \{k, l, m, n, o, p, q, r, s\}$ ,  
 $A \cap B = \{n, o\}$ ,  $A \setminus B = \{k, l, m\}$ ,  
 $B \setminus A = \{p, q, r, s\}$
2. a)  $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  
 $A \cap B = \{-1, 1\}$ ,  $A \setminus B = \{-2, 0, 2\}$ ,  
 $B \setminus A = \{-3, 3\}$   
b)  $A \cup B = \{0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$ ,  
 $A \cap B = \{1, 2\}$ ,  $A \setminus B = \{\frac{1}{2}, 4\}$ ,  
 $B \setminus A = \{0, \sqrt{2}\}$   
c)  $A \cup B = \mathbb{Z}$ ,  $A \cap B = \mathbb{N}$ ,  $A \setminus B = \emptyset$ ,  
 $B \setminus A = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$
3.  $A \cap B \cap C = \{5, 7\}$
4. a)  $A \cap B = \{m, r, t\}$   
b)  $A \setminus B = \{k\}$   
c)  $B \setminus A = \{g\}$  d)  $B \cap C = \{g, r\}$   
e)  $B \setminus C = \{m, t\}$  f)  $C \setminus B = \{b, l\}$   
g)  $A \cap B \cap C = \{r\}$   
h)  $A \cup B \cup C = \{b, g, k, l, m, r, t\}$
5. a) II b) III c) I
6. W każdym podpunkcie odpowiednie zbiory są równe.
7. a)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ ,  
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ ,  
 $A \setminus C = \{3, 4, 9\}$ ,  $B \setminus C = \{3, 7, 8\}$   
b)  $A \setminus (B \cap C) = \{3, 4, 9\}$ ,  
 $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$   
c)  $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ ,  
 $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 6\}$   
d)  $A' \cap B' = \{5, 10\}$ ,  
 $A' \cup C' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  
 $A' \cup B' \cup C' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
8. a) 60 b) 170 c) 60
9. 4
10.  $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$ ,  
 $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

**Iloczyn kartezjański zbiorów.**

**Punkty kratowe**

1. a) 20 b) 25,5

**Oś liczbowa**

1. a)  $A(-\frac{2}{3})$ ,  $B(\frac{1}{3})$ ,  $C(1\frac{2}{3})$   
b)  $A(-1\frac{1}{4})$ ,  $B(\frac{3}{4})$ ,  $C(1\frac{1}{2})$

2. a)  $A(-5)$ ,  $B(15)$ ,  $C(25)$   
b)  $A(-200)$ ,  $B(400)$ ,  $C(500)$   
c)  $A(-0,05)$ ,  $B(0,15)$ ,  $C(0,2)$   
d)  $A(-0,03)$ ,  $B(0,03)$ ,  $C(0,05)$

4. a) IV b) III c) II d) I

### 2.3. Przedziały

- C** 1. a)  $-3 < x < 2$  b)  $0 < x < 4$   
c)  $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$  d)  $100 < x < 150$
2. a)  $-1 \leq x \leq 4$ , 6 liczb całkowitych  
b)  $\frac{3}{2} \leq x < 5$ , 3 liczby całkowite  
c)  $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$ , 1 liczba całkowita  
d)  $-60 \leq x \leq 40$ , 101 liczb całkowitych

- Z** 1. a)  $[-7; 0]$  b)  $[\frac{1}{4}; \sqrt{2}]$   
c)  $[2\frac{1}{4}; \infty)$  d)  $(-\infty; -\frac{1}{3})$
2. a)  $(-7; 2]$ ,  $-7 < x \leq 2$   
b)  $[-50; 20]$ ,  $-50 \leq x \leq 20$   
c)  $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ ,  $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$   
d)  $[3, 14; \pi)$ ,  $3, 14 \leq x < \pi$   
e)  $(-\infty; 10)$ ,  $x < 10$   
f)  $(\sqrt{2}; \infty)$ ,  $x > \sqrt{2}$   
g)  $[-\frac{1}{4}; \infty)$ ,  $x \geq -\frac{1}{4}$   
h)  $(-\infty; 2\pi)$ ,  $x < 2\pi$

3. a)  $(0; 4)$  b)  $[-4; 0]$   
c)  $(2\frac{1}{2}; \infty)$  d)  $(-\infty; -\sqrt{2}]$
4. a)  $(-1; 3)$  b)  $(-4; 2)$   
c)  $[1; 5]$  d)  $[-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}]$
5. a)  $-1, 0, 1, 2, 3$  b)  $1, 2, 3, 4, 5$   
c)  $0, 1, 2$  d)  $-6, -5, -4, -3, -2$
6. a)  $z$  b)  $y$
7. a) 4 b) 6 c) 6 d) 8
8. a)  $A \subset B$   
b) Nie zachodzi żadna z tych zależności.  
c)  $B \subset A$  d)  $A \subset B$

9. a)  $[-2; 5]$  b)  $[-3; 5]$   
c)  $[-3; 2]$  d)  $[-1; 1]$
10. a)  $-1$  b)  $\frac{1}{2}$  c)  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  d) 2
11.  $p = -1$  lub  $p = 1$
12. a)  $x \in [1; 2]$  i  $y \in [1; 5]$   
b)  $x \in [-5; -1]$  i  $y \in [0; 4]$
13. a) II b) III c) I

### 2.4. Działania na przedziałach

- C** 1. a)  $A \cup B = (1; 6)$ ,  $A \cap B = (2; 4)$ ,  
 $A \setminus B = (1; 2]$ ,  $B \setminus A = [4; 6)$   
b)  $A \cup B = [-4; 3]$ ,  $A \cap B = \{1\}$ ,  
 $A \setminus B = [-4; 1)$ ,  $B \setminus A = (1; 3]$   
c)  $A \cup B = [-5; 3]$ ,  $A \cap B = [1; 3]$ ,  
 $A \setminus B = \emptyset$ ,  $B \setminus A = [-5; 1)$   
d)  $A \cup B = (-3; 2]$ ,  $A \cap B = (-1; 2]$ ,  
 $A \setminus B = (-3; -1]$ ,  $B \setminus A = \emptyset$
2. a)   
b)
3. a)  $[-5; -3] \cup [-1; 4]$   
b)  $[-3; 2] \cup [\frac{5}{2}; 5]$   
c)  $[-3; -1] \cup [2; \infty)$   
d)  $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$
- Z** 1. a)  $A \cup B = (-3; 4)$ ,  $A \cap B = [-1; 0)$ ,  
 $A \setminus B = (-3; -1)$ ,  $B \setminus A = [0; 4)$   
b)  $A \cup B = (-4; 3)$ ,  $A \cap B = [-\frac{1}{2}; 2]$ ,  
 $A \setminus B = (-4; -\frac{1}{2})$ ,  $B \setminus A = (2; 3)$   
c)  $A \cup B = (-\infty; 2]$ ,  $A \cap B = [0; 2)$ ,  
 $A \setminus B = (-\infty; 0) \cup \{2\}$ ,  $B \setminus A = \emptyset$   
d)  $A \cup B = [-1; \infty)$ ,  $A \cap B = \{2\}$ ,  
 $A \setminus B = [-1; 2)$ ,  $B \setminus A = (2; \infty)$

2. a) 7 b) 5 c) 4

3. a) 10 b) 7 c) 0 d) 3

5. a)  $A \cup B = (-3; 6)$ ,  
 $A \cap B = (0; 1) \cup (3; 4)$ ,  
 $A \setminus B = (-3; 0] \cup [4; 6)$ ,  $B \setminus A = [1; 3]$   
b)  $A \cup B = [-2; \infty)$ ,  
 $A \cap B = (0; 1] \cup [4; 5]$ ,  
 $A \setminus B = [-2; 0]$ ,  $B \setminus A = (1; 4) \cup (5; \infty)$   
c)  $A \cup B = (-\infty; 6)$ ,  
 $A \cap B = (-1; 0] \cup [2; 5]$ ,  
 $A \setminus B = (-\infty; -1]$ ,  $B \setminus A = (0; 2) \cup (5; 6)$   
d)  $A \cup B = (-2; 0] \cup [3; 5]$ ,  
 $A \cap B = \{0\}$ ,  $A \setminus B = (-2; 0)$ ,  
 $B \setminus A = [3; 5]$   
e)  $A \cup B = [0; 7] \cup [8; 9]$ ,  
 $A \cap B = (1; 3)$ ,  $A \setminus B = [0; 1] \cup [3; 7]$ ,  
 $B \setminus A = [8; 9]$   
f)  $A \cup B = [1; 9]$ ,  $A \cap B = (1; 2) \cup (6; 9)$ ,  
 $A \setminus B = \{1\} \cup [2; 6] \cup \{9\}$ ,  $B \setminus A = \emptyset$

6. a)  $A \setminus B = [-5; 1) \cup (1; 2)$ ,  $B \setminus A = \emptyset$   
b)  $A \setminus B = (3; 4) \cup (4; \infty)$ ,  $B \setminus A = \{2\}$   
c)  $A \setminus B = (-\infty; 0) \cup (0; 4)$ ,  
 $B \setminus A = (4; \infty)$   
d)  $A \setminus B = \{2\}$ ,  $B \setminus A = (2; 3) \cup (3; \infty)$
7.  $A = [-4; 0)$ ,  $B = (-1; 3]$ ,  $C = [2; \infty)$   
a)  $[-4; 2)$  b)  $[-4; -1] \cup (3; \infty)$   
c)  $(-1; 0)$

8. a)  $A' = (-\infty; -3] \cup [0; \infty)$ ,  
 $B' = (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (3; \infty)$ ,  
 $A' \cap B' = (-\infty; -3] \cup [0; \frac{1}{2}) \cup (3; \infty)$   
b)  $A' = (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$ ,  
 $B' = (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$ ,  
 $A' \cap B' = (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$   
c)  $A' = [1; 3]$ ,  $B' = (-\infty; -4) \cup (4; \infty)$ ,  
 $A' \cap B' = \emptyset$   
d)  $A' = [0; 1] \cup [5; \infty)$ ,  
 $B' = (-\infty; -5] \cup [-1; \infty)$ ,  
 $A' \cap B' = [0; 1] \cup [5; \infty)$

9. a)  $x \in [-3; -1] \cup (2; 6)$ ,  $y \in [1; 3]$   
b)  $x \in [-3; 6]$ ,  $y \in [1; 2] \cup (3; 4)$

11. a)  $[0; \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1]$ ,  $\frac{2}{3}$   
b)  $\frac{16}{81}$

### Rozwiązanie równań

1. a) spełnia b) nie spełnia

2. a)  $x = \frac{5}{2}$  b)  $x = -\frac{1}{3}$   
c)  $x = -6$  d)  $x = -1$

3. a)  $x = 4$  b)  $x = -\frac{2}{3}$   
c)  $x = -1$  d)  $x = \frac{9}{4}$

4. a)  $2\frac{2}{3}$  b)  $-3\frac{3}{4}$  c)  $2\frac{2}{3}$  d)  $1\frac{1}{2}$

5. a)  $x = 2$  b)  $x = -2$  c)  $x = \frac{17}{28}$   
d)  $x = -4$  e)  $x = \frac{7}{2}$  f)  $x = 2$

6. a), d) tożsamościowe  
b), c) sprzeczne

7.  $x = 3$

### 2.5. Rozwiązanie nierówności

- C** 1. a), b) spełnia c), d) nie spełnia
2. a)  $x < -36$ , nie istnieje taka liczba  
b)  $x \geq 2\frac{5}{6}$ , liczba 3  
c)  $x \leq -5\frac{1}{4}$ , nie istnieje taka liczba  
d)  $x > 20$ , liczba 21

3. a) nie b) tak
4. a)  $x \leq 9$  b)  $x > \frac{16}{9}$   
c)  $x < -15$  d)  $x \geq 16$
5. a)  $x > -3$  b)  $x \geq -6$  c)  $x \geq 4$   
d)  $x > \frac{7}{3}$  e)  $x < 13$  f)  $x \geq -\frac{1}{7}$
6. a), e), f) tożsamościowa  
b), c), d) sprzeczna
7. 1. a)  $[4; 5]$  b)  $(-5; -2]$  c)  $[-\frac{1}{2}; 1]$   
2. a)  $(-6; -4), -5$  b)  $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}), 0$   
c)  $[-4; 2), -4, 1$   
d)  $(-\frac{16}{3}; -3), -5, -4$   
3. a) żadna b) c c) c d) b, c  
e) a, b, c f) żadna  
4. a)  $x > \frac{15}{8}$  b)  $x \geq 2$  c)  $x \leq \frac{25}{4}$   
d)  $x > \frac{28}{33}$  e)  $x \geq \frac{11}{8}$  f)  $x < \frac{19}{3}$   
5. a)  $x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$  b)  $x > 6\sqrt{2}$  c)  $x > \frac{4\sqrt{5}}{5}$   
6. a)  $n \in \{6, 7, 8\}$  b)  $k \in \{-2, -1\}$   
c)  $m \leq 13$  i  $m \in \mathbb{N}$   
7. a)  $k \in \{4, 5\}$  b)  $k \in \{2, 3, 4\}$   
8. większej niż 85  
9. a)  $>$  b)  $>$  c)  $<$

#### Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

1. a)  $3x^4 + 2x^3 - 4x^2$   
b)  $-\frac{1}{2}x^5 + x^4 + 4x^3$   
c)  $-2x^4y + x^3y^2$  d)  $4x^5y + \sqrt{2}x^4y^2$   
e)  $x^4y^2 - x^3y^2 + x^3y^3$   
f)  $6x^3y^5 - \sqrt{3}x^4y^4$
2. A – III, B – IV, C – II, D – I
3. a)  $-6x^3 - 6x^2 + 10x$  b)  $-\frac{1}{2}x^4 + 5x^2$   
c)  $3\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{6}x^2$  d)  $-\frac{23}{8}x^2y^3 + xy^3$   
e)  $-x^4y^2 + x^4y^3 + 2x^3y^3$   
f)  $\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy$

#### 2.6. Wyłączanie jednomianu przed nawias

1. a) 400 b) 450 c) 1500  
d) 3600 e) 4800 f) 3800
2. a)  $5(x + y)$  b)  $4(b - 2a)$   
c)  $9(x - 3y^2)$  d)  $-6(x^2 - 3y^2)$   
e)  $13(3y^2 - 2z)$  f)  $-11(a^3 - 2b^2)$   
g)  $-12(4p - 3q^2)$  h)  $25(3xy^3 - 5)$

3. a)  $x(4x + y)$  b)  $2x(x^2 - 6y)$   
c)  $xy(3 - z)$  d)  $6pq(1 + 3p)$   
e)  $a^2b(1 + 3b - a)$   
f)  $x^2y^2(4 - 5x + 2y)$
4. a)  $4x^2(2x - 9)$  b)  $7y^2(1 - 2y^2)$   
c)  $5x^2(x + 2y)$  d)  $5a(4x - 3y)$   
e)  $4b(2a + 3c)$  f)  $2xy(2 + 3x)$   
g)  $2a^2b(a + 2 - 2b)$   
h)  $3p^2q^2(7p - 9q + 1)$   
i)  $6xy(8x + 3y - 2xy)$
5. 1. a) 400 b) 4000 c) 5000  
d) 3700 e) 1000 f) 300  
2. a)  $ab(a + b^2)$  b)  $xy^2(x^2 - y)$   
c)  $3a^2(3ab^2 - c^2)$  d)  $4y^3(x^4y + 2z)$   
e)  $3a^2b(ab - 2)$  f)  $2x^2y^3(3y + 4x)$   
3. a)  $xyz(x + y + z)$   
b)  $xyz^2(x + yz - x^2)$   
c)  $2x^2y(x - 2y + 3z)$   
d)  $3x^3y^2(4xy + 2y - 3x^2)$   
4. a)  $4y - 6$   
b)  $3ab(3a + b + 2) = 9a^2b + 3ab^2 + 6ab$   
c)  $3t^2(4t^2 - 3t + 1)$   
5. a)  $-45$  b)  $-30$  c) 225  
6. a) 120 b) 24 c) 4 d) 2  
7. a) 525 b) 140  
8. I – C, II – A, III – B

#### 2.7. Mnożenie sum algebraicznych

1. a)  $x^2 + 7x + 12$  b)  $p^2 - pq + 6p - 6q$   
c)  $-2p^2 - pq + q^2$  d)  $6x^2 + 20x + 6$   
e)  $3a^2 + 7ab - 6b^2$  f)  $8a^2 - 8ab + \frac{3}{2}b^2$
2. a)  $x^3 - 3x + 2$  b)  $2x^3 + 5x^2 + 9$   
c)  $x^2 - 4x + 4y - y^2$   
d)  $2x^2 + 6x + 5xy + 18y - 3y^2$   
e)  $x^2 - x + 5y - y^2 - 6$  f)  $x^4 + x^2 + 1$
3. a)  $V = x^4 - 2x^2 - 8$   
b)  $V = x^5 - 2x^4 - x + 2$
4. a)  $2\sqrt{2} - 1$  b)  $11 - 5\sqrt{5}$   
c)  $7 - 3\sqrt{6}$  d)  $16 + 7\sqrt{10}$   
e)  $5 + 2\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$   
f)  $-5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$
6. a)  $x = -\frac{10}{3}$  b)  $x = \frac{3}{5}$  c)  $x = -\frac{2}{5}$   
d)  $x > -3$  e)  $x > -1$  f)  $x \geq \frac{1}{3}$

1. a)  $2a^2 - 2a + ab - b$   
b)  $6ab + 9a - 4b^2 - 6b$   
c)  $-12a^2 + 4a + 6ab - 2b$   
d)  $-4a - 8ab - 6b - 3$   
e)  $2a^2 - 4ab + ab^2 - 2b^3$   
f)  $-3a^3 + 2a^2b + 9ab - 6b^2$
2. a)  $x^2 + x + 2xy - 4y - 6$   
b)  $4x^2 - 4x - 2xy + 3y - 3$   
c)  $x^3 + x^2y + 2x^2 + xy + y^2 + 2y$   
d)  $x^3 - x^2y - 2x^2 + 2xy + x - y$   
e)  $2x^2y + 6x^2 - 12xy - 4xy^2$   
f)  $-16x^3 + 4xy^2$
3. a)  $2a^2 - 24$  b)  $12ab + b^2$   
c)  $4y^2 - 4x^2 - 3xy$  d)  $2x^2 + 15x$
4. a)  $x^2 - 4x - 12, -9, 75$   
b)  $x^3 - x^2 - 6, -6, 375$
5. a)  $P = a^2 + 2a$  b) 1
6. a)  $3x + 7$  b)  $a + 3$   
c)  $5x + 12$  lub  $4x + 13$
7. a)  $-20$  b)  $-6$  c)  $-4$  d) 10
9. a)  $x = -10$  b)  $x = 4$  c)  $x = -6$   
d)  $x = -\frac{1}{2}$  e)  $x = \frac{1}{2}$  f)  $x = \frac{12}{7}$
10. a)  $x \geq \frac{3}{2}$  b)  $x < -\frac{6}{5}$  c)  $x \geq \frac{5}{8}$   
d)  $x < \frac{1}{2}$
11. a) 3 b) 10 c) 0 d) 5
12. a) 160 cm i 100 cm b) 57 cm<sup>2</sup> c) 14 cm
13. a)  $x^8 - 2x^6 + 2x^2 - 1$  b)  $1 - x^8$  c)  $a^6 - b^6$   
d)  $a^6 - 2a^3b^3 + b^6$
14. b)  $V = 4x^3 - 160x^2 + 1600x$

#### 2.8. Wzory skróconego mnożenia

2. a)  $x^2 + 2x + 1$  b)  $x^2 + 4x + 4$   
c)  $x^2 - 6x + 9$  d)  $x^2 - 10x + 25$   
e)  $4x^2 + 4x + 1$  f)  $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$   
g)  $16x^2 - 8x + 1$  h)  $4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$
3. a)  $x^2 + 4xy + 4y^2$  b)  $4x^2 - 4xy + y^2$   
c)  $9x^2 + 12xy + 4y^2$   
d)  $9x^2 - 24xy + 16y^2$   
e)  $x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$   
f)  $9x^2 + 3xy + \frac{1}{16}y^2$   
g)  $4x^2 - xy + \frac{1}{16}y^2$   
h)  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$

4. a)  $8 + 2\sqrt{7}$  b)  $14 - 6\sqrt{5}$   
c)  $39 - 12\sqrt{3}$  d)  $21 + 8\sqrt{5}$   
e)  $5 + 2\sqrt{6}$  f)  $12 - 2\sqrt{35}$   
g)  $21 + 6\sqrt{10}$  h)  $6\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$
7. a)  $x^2 - 9$  b)  $x^2 - 49$   
c)  $4x^2 - 16$  d)  $25x^2 - 36$   
e)  $9x^2 - 16y^2$  f)  $9y^2 - \frac{1}{4}x^2$
8. a) 18 b) 33 c)  $-4$  d)  $-1\frac{7}{18}$   
e)  $11\frac{3}{4}$  f)  $-1$  g)  $-1$  h) 4 i) 4,5
9. a)  $-8\sqrt{5} - 20$  b)  $9 - 3\sqrt{2}$   
c)  $4\sqrt{6} - 10$  d)  $48\sqrt{3} + 10$
1. a)  $-5$  b)  $-2$  c)  $8x^2 + 24y^2$   
d)  $13x^2 - 5y^2$
2. a) 7 b) 16 c)  $-7 - 8\sqrt{2}$
3. a) 6 b)  $-3 + 2\sqrt{3}$  c)  $-12\sqrt{3}$   
d)  $4\sqrt{2}$  e) 10 f)  $12 - 2\sqrt{30}$   
g)  $49 - 20\sqrt{2}$  h)  $-31 - 12\sqrt{2}$
4. a) 1 b) 1 c) 2 d) 2
5. a)  $66 + 36\sqrt{2}$  b)  $78 - 24\sqrt{3}$   
c)  $48 + 24\sqrt{3}$
6. a) 14 b)  $12 - \sqrt{2} + 3\sqrt{10}$
7. a) 14 b)  $2\sqrt{5} - 2$   
c) 12 d)  $2\sqrt{7} - 4$
8. a)  $-18\sqrt{10} - 42$  b)  $16\sqrt{3}$   
c)  $96 - 12\sqrt{5}$  d) 0

#### Liczby wielokątne

1. 400  
3. 51  
4. 1, 6, 15, 28, 45

#### 2.9. Zastosowanie przekształceń algebraicznych

1. a)  $\frac{6-\sqrt{2}}{34}$  b)  $\frac{8\sqrt{2}-2\sqrt{10}}{11}$   
c)  $-4 - 3\sqrt{2}$  d)  $\frac{7-3\sqrt{3}}{4}$   
e)  $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$
2. a)  $x = 3$  b)  $x = 1$  c)  $x = 5$
3. a)  $x > -1$  b)  $x \leq -\frac{1}{2}$   
c)  $x > \frac{1}{9}$  d)  $x \leq 2$
4. a)  $x = -4$  b)  $x = 3$  c)  $x = -5$   
d)  $x = \frac{1}{2}$  e)  $x = -\frac{1}{5}$  f)  $x = -\frac{1}{4}$   
g)  $x = -\frac{3}{2}$  h)  $x = -\frac{2}{3}$  i)  $x = \frac{1}{6}$



5. a), d) sprzeczne  
b), c) tożsamościowe

6. a), d) tożsamościowa  
b), c) sprzeczna

1. a)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ , tak b)  $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$ , tak  
c)  $3\sqrt{5}-6$ , tak d)  $-\frac{4\sqrt{2}+2}{7}$ , nie  
e)  $4\sqrt{3}-6$ , tak  
f)  $12\sqrt{2}+16$ , nie  
g)  $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ , nie  
h)  $2\sqrt{5}-2\sqrt{3}$ , tak  
i)  $2\sqrt{7}+2\sqrt{2}$ , nie j)  $\sqrt{6}-2$ , tak  
k)  $-\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{5}$ , nie l)  $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$ , tak

2. a)  $x = \frac{1}{4}$  b)  $x = 1,3$  c)  $x \in \mathbb{R}$   
d) sprzeczne e)  $x = 18$  f)  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. a)  $x \leq \frac{9}{4}$  b)  $x \in \mathbb{R}$  c)  $x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$   
d)  $x \leq \frac{4}{3}$  e)  $x \geq -\frac{17}{4}$  f)  $x < \frac{3}{2}$

4. a)  $(0; \frac{3}{2})$  b)  $(-5; 2]$   
c)  $(\frac{1}{8}; \frac{8}{3})$  d)  $(\frac{3}{2}; 5]$

5. 9

6. a)  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2}{4}$  b)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{2}$   
c)  $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

## 2.10. Wartość bezwzględna

1. a) 5 b) 5 c)  $\sqrt{3}-1$   
d)  $3-\sqrt{3}$  e)  $3\sqrt{2}-4$   
f)  $5-2\sqrt{5}$

2. a)  $x = -2$  lub  $x = 2$   
b)  $x = -10$  lub  $x = 10$   
c)  $x = 0$  d) brak rozwiązań

3. a)  $x$  b)  $y$  c)  $x$

4. a)  $2-\sqrt{3}$  b)  $4-2\sqrt{3}$  c)  $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

5. a)  $x \in (-8; 8)$  b)  $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$   
c)  $x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$   
d)  $x \in (-\infty; -\pi] \cup [\pi; \infty)$

6. a)  $x \in \mathbb{R}$  b)  $x = 0$   
c)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  d) sprzeczna

1. a)  $x + |x| = 0$ ,  $x - 2|x| = -9$   
b)  $x + |x| = 0$ ,  $x - 2|x| = 12 - 6\sqrt{6}$   
c)  $x + |x| = 12\sqrt{2} - 16$ ,  
 $x - 2|x| = -6\sqrt{2} + 8$   
d)  $x + |x| = 0$ ,  $x - 2|x| = 3\pi - 6\sqrt{3}$

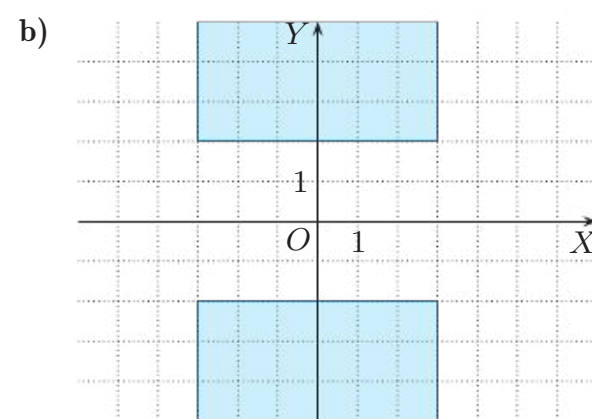
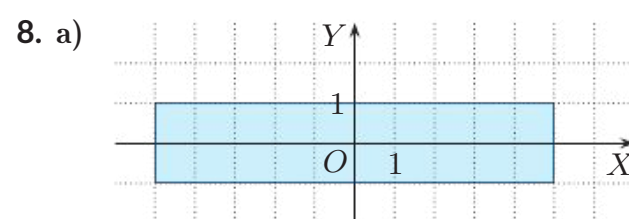
2. a)  $x = -4$ ,  $x = 4$  b)  $x = -14$ ,  $x = 14$   
c)  $x = -6$ ,  $x = 6$  d)  $x = -\frac{1}{4}$ ,  $x = \frac{1}{4}$   
e)  $x = -\frac{1}{3}$ ,  $x = \frac{1}{3}$  f)  $x = -8$ ,  $x = 8$   
g)  $x = -1$ ,  $x = 1$  h)  $x = -4$ ,  $x = 4$

3. a)  $|x| > -7$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 $|x| < -7$  dla  $x \in \emptyset$   
b)  $|x| \geq -3$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 $|x| \leq -3$  dla  $x \in \emptyset$

4. a)  $(-4; -1) \cup (1; 4)$ , 4  
b)  $(-6; 0) \cup (0; 6)$ , 10  
c)  $[-5; -2] \cup [2; 5]$ , 8  
d)  $[-\pi; -3] \cup [3; \pi]$ , 2  
e)  $(-3; -\frac{1}{2}) \cup [\frac{1}{2}; 3)$ , 4  
f)  $[-6; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 6]$ , 10  
g)  $[-\frac{9}{2}; -\frac{5}{2}] \cup [\frac{5}{2}; \frac{9}{2}]$ , 4  
h)  $(-5; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 5)$ , 6

5. a)  $5 - 2\sqrt{5}$  b)  $\sqrt{2} - 1$

7. I - B, II - C, III - A



## 2.11. Własności wartości bezwzględnej

1. a)  $x = -1$  lub  $x = 5$   
b)  $x = 0,5$  lub  $x = 7,5$   
c)  $x = -8$  lub  $x = -4$   
d)  $x = 5$  lub  $x = 7$   
e)  $x = -2 - \sqrt{3}$  lub  $x = -2 + \sqrt{3}$   
f) sprzeczne  
g)  $x = -\frac{3}{4}$  lub  $x = \frac{1}{4}$   
h)  $x = -9$

3. a)  $x \in (4; 10)$  b)  $x \in (-4; 10)$   
c)  $x \in (-\infty; -7) \cup (-5; \infty)$   
d)  $x \in (-\infty; -8] \cup [0; \infty)$  e)  $x \in [2; 16]$   
f)  $x \in (-\infty; -13) \cup (3; \infty)$   
g)  $x \in (-\frac{3}{10}; -\frac{1}{10})$   
h)  $x \in (-\infty; 0] \cup [2\sqrt{7}; \infty)$

4. a)  $x \in [4\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}]$   
b)  $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (3\frac{1}{2}; \infty)$

1. a)  $x = 2$ ,  $x = 6$  b)  $x = -2$ ,  $x = 1$   
c)  $x = -4$ ,  $x = 8$  d)  $x = -9$ ,  $x = -3$   
e)  $x = 6$ ,  $x = 14$  f)  $x = -\frac{5}{3}$ ,  $x = \frac{7}{3}$

2. a)  $x \in [-6; 2]$  b)  $x \in (-\infty; 1] \cup [5; \infty)$   
c)  $x \in (-\infty; -\frac{5}{4}) \cup (\frac{3}{4}; \infty)$  d)  $x \in (3; 9)$   
e)  $x \in (-\infty; -6] \cup [-2; \infty)$   
f)  $x \in (-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5})$  g)  $x = 2$   
h)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-11\}$  i)  $x \in \mathbb{R}$

3. a)  $x = -10$ ,  $x = 0$  b)  $x = 1$ ,  $x = 5$   
c)  $x = 0$ ,  $x = 2$  d)  $x = -2$ ,  $x = 1$   
e)  $x = -\frac{9}{2}$ ,  $x = \frac{7}{2}$  f)  $x = -\frac{4}{3}$ ,  $x = \frac{8}{3}$

4. a)  $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$  b)  $x \in \mathbb{R}$

5. a)  $x \geq 3$  b)  $x \leq 2$   
c)  $x \leq -\sqrt{2}$  d)  $x \geq 2$

6. a) 0 b) 3 c) 2

## Logika matematyczna

1. a)  $\sim p: 2\sqrt{3} \leq 3\frac{1}{2}$ ,  $p - 0$ ,  $\sim p - 1$   
b)  $\sim p: \sqrt{625} = 25$ ,  $p - 0$ ,  $\sim p - 1$   
c)  $p: 100$  jest liczbą parzystą,  
 $p - 1$ ,  $\sim p - 0$

2. wartość logiczna koniunkcji:

- a) 1 b) 0 c) 0 d) 0

3. a) 1 b) 1 c) 1 d) 0 e) 1 f) 0

4. a) 0, 1, 1 b) 0, 0, 1 c) 1, 1, 1 d) 1, 0, 0

5. a) 0, 0, 1 b) 1, 0, 0 c) 1, 1, 1 d) 0, 1, 0

8. Tylko a) i e) nie są prawami rachunku zdań.

## Zestaw I

1. 20

2. a)  $\{0, 3, 6, 9, 12\}$   
b)  $\{0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$  c)  $\{3\}$   
d)  $\{1, 4, 8, 10, 14\}$  e)  $\{1, 5, 13\}$   
f)  $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14\}$

3. a)  $A \cap B = (2; 4]$ ,  $A \cup B = [-1; 5]$ ,  
 $A \setminus B = [-1; 2]$ ,  $B \setminus A = (4; 5)$   
b)  $A \cap B = (3; 5]$ ,  $A \cup B = [2; 7]$ ,  
 $A \setminus B = [2; 3] \cup (5; 7)$ ,  $B \setminus A = \emptyset$   
c)  $A \cap B = \{2\}$ ,  $A \cup B = [-4; 9]$ ,  
 $A \setminus B = [-4; 2)$ ,  $B \setminus A = (2; 9)$   
d)  $A \cap B = \{0\} \cup (1; 2)$ ,  $A \cup B = (-\infty; 4]$ ,  
 $A \setminus B = (-\infty; 0)$ ,  $B \setminus A = (0; 1] \cup [2; 4]$   
e)  $A \cap B = (-2; -1) \cup [3; 4)$ ,  
 $A \cup B = (-\infty; 5]$ ,  
 $A \setminus B = (-\infty; -2] \cup [4; 5]$ ,  $B \setminus A = [-1; 3)$   
f)  $A \cap B = [0; 2]$ ,  
 $A \cup B = (-1; 5) \cup (5; \infty)$ ,  
 $A \setminus B = (-1; 0) \cup (5; \infty)$ ,  $B \setminus A = (2; 5)$

4. a)  $a^2 + 2ab + a - 4b - 6$   
b)  $4a^2 - 8ab + 3b^2 + 2ac - 3bc$   
c)  $2a^2 + ab - 6b^2 - 6ac + 9bc$   
d)  $-8x^4 + 20x^2y - 8y^2$   
e)  $-18x^5 + 24x^3y - 8xy^2$   
f)  $x^4 - y^4$

5. a) 2 b) -3 c) 0 d) 3

6. a) 8 b) 8 c) 3 d) 5

7. a)  $[-9; -1) \cup (1; 9]$   
b)  $[2; 6]$   
c)  $(-4; -3] \cup [1; 4)$

8. a)  $[1; 7)$  b)  $(-1; 1)$   
c)  $(-\infty; -5] \cup [7; \infty)$   
d)  $(-5; -3] \cup (-1; 1)$   
e)  $(-\infty; -3] \cup (-1; 1) \cup [3; \infty)$

## Zestaw II

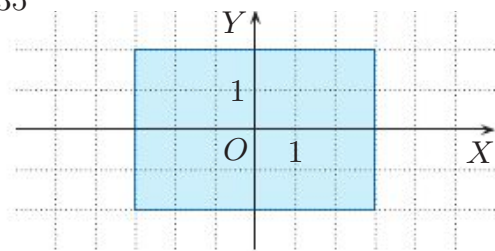
1. a)  $X = T$  b)  $X = Y$  c)  $X = Y$

2. a)  $A \subset B$  b)  $B \subset A$  c) żadna

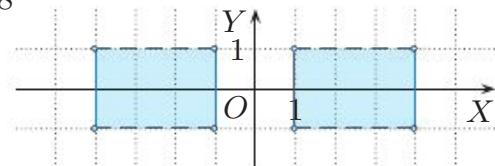
3. a)  $-2 + 2\sqrt{3}$   
b)  $8 + 7\sqrt{6}$   
c)  $-24 + 6\sqrt{2}$   
d)  $-22\sqrt{5} + 40$   
e) 28 f)  $24\sqrt{2}$   
g)  $4 + 4\sqrt{3}$   
h)  $48 - 16\sqrt{5}$

4. a)  $(\frac{2}{7}; 1]$  b)  $[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}]$   
c)  $(-\infty; \frac{3}{4}]$  d)  $\emptyset$   
e)  $(-\infty; \frac{7}{2})$  f)  $(-\infty; 1)$

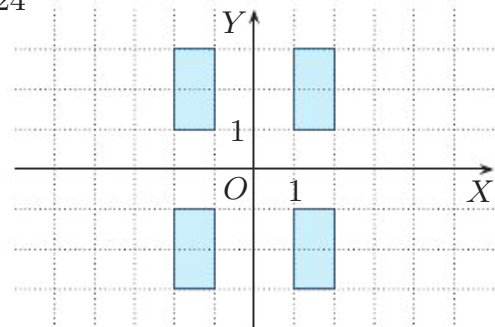
5. a) 35



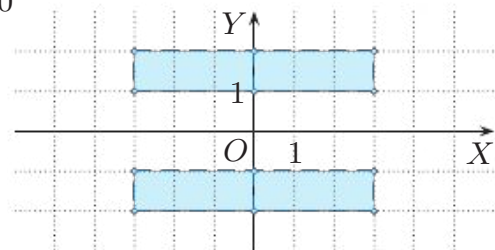
b) 8



c) 24



d) 0



6. b)  $k = 1, l = 4$  lub  $k = 2, l = 3$

**Zadania z kontekstem realistycznym**

1. a) 2 b) 28 c) 6

2. 27

3. 7

4. a) 17,60 zł b) 36,80 zł

c) 36,80 zł d) 22,40 zł

5. a)  $P = 28x - 26$  b)  $282 \text{ m}^2$

**Przed obowiązkową maturą z matematyki**

1. C 2. A 3. C 4. B 5. A 6. D 7. A

8. B 9. B

10.1. FP 10.2. 7

11. FF

12. C2

13.  $-\sqrt{3}$

14. CE

15. FF

16. A2

17. AE

18.  $[1; \infty)$

19. 0, 1, 2

21. 5

22. 10

26.  $\frac{1}{7}$

28.  $x \in (-3; 2]$

29. 4

**Przed maturą z matematyki  
na poziomie rozszerzonym**

1. 242

2.1. 124

2.2.  $p = -32, q = 68$

3. 170

4. 7381

8. -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

9.  $(2; \infty)$

**Wykorzystanie równań do rozwiązywania  
zadań**

1. 6

2. 4

3. 7,5 h

**3.1. Co to jest układ równań**

Ć 1. 6 monet 10-groszowych i 3 monety 50-groszowe

2. C

Z 1. a), c), f) tak b), d), e) nie

2. C

3. a) (1, 7), (3, 4), (5, 1) b) (3, 2)

c) Nie ma takich liczb.

4. a) np.  $x + y = 3$  b) np.  $y - x = 2$

c) np.  $4x + 3y = 3$  d) np.  $2x + y = -9$

5. a)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} y + 8 = x \\ 5y = x \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x = 3y \\ \frac{x+y}{2} = 10 \end{cases}$  d)  $\begin{cases} x + 3 = y \\ x - y = 2y \end{cases}$

6. a)  $\begin{cases} a = 0,4b \\ 0,2a + 0,6b = 4 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} a + b = 14 \\ 1,2a + 0,7b = a + b \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 0,9a = 1,1b \\ 1,15a - 0,85b = 1 \end{cases}$

7. a)  $m = 7, n = 3$  b)  $m = 4, n = 6$

**3.2. Rozwiązywanie układów równań  
metodą podstawiania**

Ć 1. a)  $x = 10, y = 1$

b)  $x = 19, y = 37$

c)  $x = \frac{3}{5}, y = \frac{4}{5}$

d)  $x = 8, y = 4$

e)  $x = 3, y = -1$

f)  $x = -3, y = -4$

2. a)  $x = 5, y = 1$

b)  $x = \frac{1}{3}, y = \frac{7}{3}$

c)  $x = 1, y = 8$

3. a)  $x = 11, y = -1$

b)  $x = 2, y = -2$

c)  $x = 3, y = -7$

4. a) nieoznaczony b) oznaczony

c) sprzeczny

Z 1. a)  $x = 2,2, y = 1,6$

b)  $x = \frac{1}{7}, y = -\frac{2}{7}$

c)  $x = 1, y = 0$

d)  $x = 1,7, y = 0,9$

e)  $x = -\frac{1}{6}, y = -\frac{2}{3}$

f)  $x = 10, y = 20$

2. a)  $x = 2, y = -3$

b)  $x = -2,8, y = -1,8$

c)  $x = 5, y = -1$

d)  $x = -\frac{2}{3}, y = 5$

e)  $x = 0,5, y = -1,5$

f)  $x = 4, y = 3$

3. a) tak b), c), d) nie

4. a) 0 b) 1 c) 1 d) 0

5. a)  $x = 1, y = 2$

b)  $x = -\frac{4}{3}, y = -\frac{13}{3}$

6. a), c) nieoznaczony

b) sprzeczny

7. a) np.  $6x - 1 = 8y$

b) np.  $6x - 4 = 8y$

c) np.  $3x - 8y = 2$

8. a) oznaczony dla  $m = -2$  lub  $m = 0$ ,  
nieoznaczony dla  $m = 2$

b) oznaczony dla  $m = -2$  lub  $m = 0$ ,  
sprzeczny dla  $m = 2$

c) nieoznaczony dla  $m = -2$ , oznaczony  
dla  $m = 0$ , sprzeczny dla  $m = 2$

9.  $(-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2)$

**3.3. Rozwiązywanie układów równań  
metodą przeciwnych współczynników**

Ć 1. a)  $x = \frac{1}{2}, y = 3$  b)  $x = 1, y = 1$

c)  $x = -\frac{14}{5}, y = -5$

2. a)  $x = 1, y = -1$  b)  $x = -5, y = 2$

c)  $x = 1, y = \frac{1}{7}$  d)  $x = 2, y = -3$

e)  $x = -3, y = 1$  f)  $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}$

3. a)  $x = 2, y = -2$  b)  $x = 7, y = -3$

c)  $x = 1,9, y = 0,8$

4. a) np. 5 i 3 b) np. 2 i 3 c) np.  $\frac{15}{2}$  i -1

5. a), c) sprzeczny b) nieoznaczony

Z 1. a)  $x = 5, y = 3$  b)  $x = 1, y = -3$

c)  $x = 24,5, y = 18$

d)  $x = 2, y = 0,5$

e) nieoznaczony:  $y = -\frac{2}{3}x + 5, x \in \mathbb{R}$

f) sprzeczny

2. a)  $x = -8, y = 4$

b)  $x = -1, y = 1$

c)  $x = -25, y = -5$

d)  $x = 0, y = 5$

e)  $x = -2, y = 5$

f)  $x = 3, y = 5$

3. a)  $x = -\frac{10}{9}, y = -\frac{55}{18}$

b)  $x = 3, y = 4$

c)  $x = 5, y = 2$

d)  $x = 1, y = -2$

e)  $x = -1, y = 1$

f) nieoznaczony:  $y = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5}, x \in \mathbb{R}$

4. a) nieoznaczony dla  $m = 1$  i  $n = 3$ ,

sprzeczny dla  $m = 1$  i  $n = 1$

b) nieoznaczony dla  $m = 3$  i  $n = 1$ ,

sprzeczny dla  $m = 3$  i  $n = 3$



### Układy trzech równań z trzema niewiadomymi

1. a)  $x = 20, y = -5, z = -5$   
b)  $x = 2, y = 1, z = -1$   
c)  $x = \frac{1}{11}, y = -\frac{3}{22}, z = \frac{2}{11}$
2. a)  $x = 2, y = -1, z = 4$ ; tak  
b)  $x = -1, y = 2, z = 4$ ; tak  
c)  $x = 2, y = 1\frac{2}{5}, z = -3\frac{1}{5}$ ; nie  
d)  $x = 2, y = -1, z = 4$ ; tak
3. a) 13, 11, 12  
b)  $a = 9, b = 7, c = 11$

### 3.4. Układy równań – zadania tekstowe (1)

- ☞ 1. 10 i 40
2. a) 1,5 kg śliwek i 2,5 kg wiśni  
b) 1 kg marchwi i 5 kg buraków
3. Tomek 15 lat, siostra 11 lat
4. a) Daria 10 lat, Maria 15 lat  
b) Olek 27 lat, Alek 17 lat
- ☒ 1. syn 16 lat, ojciec 51 lat
2. Ania i siostra po 15 lat, brat 21 lat
3. 20 monet 2-złotowych i 10 monet 5-złotowych
4. 7 monet 1-złotowych i 5 monet 5-złotowych
5. 6 monet 1-złotowych, 12 monet 2-złotowych i 14 monet 5-złotowych
6. 7 monet 5-centowych i 4 monety 10-centowe
7. 5 monet 5-centowych, 15 monet 10-centowych i 9 monet 25-centowych
8.  $65 \text{ cm}^2$
9. 7 cm i 21 cm lub 3 cm i 25 cm
10. 70 biletów ulgowych i 140 normalnych
11. 10 zł normalny, 7 zł ulgowy
12. 37 i 73
13.  $A = 83, B = 38$
14.  $A = 354, B = 34$
15.  $x = 844, y = 448$
16. 28

### 3.5. Układy równań – zadania tekstowe (2)

- ☞ 1. a) 15 b) 1 g
2. prędkość własna łodzi – 8 km/h, prędkość prądu – 4 km/h
3. prędkość własna łodzi – 12 km/h, prędkość prądu – 2 km/h
- ☒ 1. 300 dziewcząt, 200 chłopców
2. Bartek 1200 zł, Paweł 1600 zł
3. 6000 zł do banku A i 4000 zł do banku B
4. 6000 zł w banku X i 14 000 zł w banku Y
5. 1,5 kg stopu 40% i 0,5 kg stopu 80%
6. 60% i 40%
7. 3 h, 60 km
8. 120 km
9. 20 km
10. 270 biletów normalnych, 190 biletów ulgowych, 40 wejściówek
11. 5 cm, 8 cm, 9 cm

### Rozwiązywanie układów równań metodą wyznacznikową

1. a)  $x = -5, y = 3$  b)  $x = 4, y = -1$   
c) nieoznaczony d)  $x = -2, y = 3$   
e) sprzeczny f)  $x = 4, y = 8$
2. a) oznaczony dla  $k \neq 5$ , nieoznaczony dla  $k = 5$   
b) oznaczony dla  $k \neq 2$ , sprzeczny dla  $k = 2$   
c) oznaczony dla  $k \neq -1$  i  $k \neq 1$ , nieoznaczony dla  $k = -1$ , sprzeczny dla  $k = 1$   
d) oznaczony dla  $k \neq -\sqrt{2}$  i  $k \neq \sqrt{2}$ , sprzeczny dla  $k \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$   
e) oznaczony dla  $k \neq -2$  i  $k \neq 2$ , nieoznaczony dla  $k \in \{-2, 2\}$   
f) oznaczony dla  $k \neq 0$ , sprzeczny dla  $k = 0$

### Metoda eliminacji Gaussa

1. a)  $x = 3, y = -1, z = -2$   
b)  $x = -5, y = 2, z = 1$   
c)  $x = 5, y = -3, z = 4$   
d)  $x = 0, y = -1, z = 4$

### Zestaw I

1. a)  $x = 6, y = 4$   
b) nieoznaczony:  $x \in \mathbb{R}, y = 0,4x - 1,9$   
c)  $x = 1, y = 1$  d)  $x = -3, y = -2$
2. a), c), d) nie b) tak
3. a), d) nieskończenie wiele b) 1 c) 0
4. a) 49 b)  $\frac{7}{17}$
5. a) 400 g roztworu 5% i 1000 g roztworu 40%  
b) 7,5 g roztworu 10% i 2,5 g roztworu 6%

### Zestaw II

1. a)  $m = 1$ : jedno rozwiązanie,  $m = -2$ : nie ma rozwiązań  
b)  $m = 1$ : nieskończenie wiele rozwiązań,  $m = -2$ : jedno rozwiązanie  
c)  $m = 1$ : jedno rozwiązanie,  $m = -2$ : nieskończenie wiele rozwiązań
2. a)  $m = \frac{11}{17}, k = \frac{26}{17}$  b)  $m = -1, k = \frac{1}{2}$
3. a)  $x = \frac{3}{2}, y = 6$  b)  $x = 0, y = -1$   
c)  $x = \frac{3}{22}, y = \frac{2}{11}$  d)  $x = 1, y = -4$   
e)  $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$  f)  $x = 0, y = 0$
4. a)  $m > 2$  b)  $m > 3$
5. a)  $m \in (1; 2)$  b)  $m \in (\frac{11}{4}; 5)$
6. a) nieskończenie wiele dla  $m = -1$ , 1 dla  $m \in \{1, 2\}$   
b) 0 dla  $m = 2$ , 1 dla  $m \in \{-1, 1\}$   
c) 0 dla  $m = 1$ , 1 dla  $m \in \{-1, 2\}$
7. a) nieoznaczony dla  $m = 5$ , sprzeczny dla  $m \neq 5$   
b) nieoznaczony dla  $m = -4$ , sprzeczny dla  $m \neq -4$   
c) nieoznaczony dla  $m = -2$ , sprzeczny dla  $m \neq -2$

### Zadania z kontekstem realistycznym

1. 3 jabłka i 2 banany
2. 36 i 24
3. tak
4. 8,80 zł
5. o 18.00, 180 km
6. 10 dm
7. 480 km

### Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. C 2. D 3. D 4. D 5. B 6. D 7. C  
8. D 9. B
10. PP
11. PP
- 12.1. C 12.2. E
13. B2
14. BH
15. I i III
16. 10 banknotów 10-złotowych, 17 banknotów 20-złotowych, 10 banknotów 50-złotowych
17.  $\alpha = 55^\circ, \beta = 25^\circ, \gamma = 100^\circ$
18. 28
19. po 5 monet 10- i 50-groszowych, 12 monet 1-złotowych, 6 monet 2-złotowych
20.  $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

### Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 15 km/h i 20 km/h
2.  $x = \frac{3}{7}, y = \frac{22}{7}$
3.  $\frac{10+2\sqrt{2}}{3}$
4. 1,5 km/h

### 4.1. Pojęcie funkcji

- ☞ 2. a)  $f(2) = -1, f(4) = 2$   
b)  $f(x) = 2$  dla  $x \in \{3, 4\}$ , nie istnieje argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 1.
3. Wartościami funkcji nie są 1 i  $\frac{3}{2}$ . Wartości przyjmowane dla dwóch argumentów:  $\frac{1}{2}$  i 2.
4. a) 3 b) 0, 1, 5 c) 2 d) dla żadnych
5. a) nie b) tak, 2
6. miejsca zerowe funkcji  $f$ :  
a) 2 b) brak c)  $-1, 1$  d) 2
- ☒ 1. miejsca zerowe funkcji  $f$ : a) 0 b)  $-1$
2. a), b) dla trzech argumentów
3. a) 0, 2  
b) brak miejsc zerowych

4. b) Wartościami funkcji  $f$  nie są: 2, 3, 5; 1 i 4 są przyjmowane dla dwóch argumentów.

5. wartości dodatnie dla:

- a) 1 argumentu  
b) 3 argumentów

6. wartości ujemne dla:  $-1, 0, 1$ ,  
dwa miejsca zerowe:  $-2, 2$

8. a) 45 b) 22 c) 18 d) 9

9. a)  $\{n \in \mathbb{N}: 1 \leq n \leq 18\}$

b)  $f(x) = 3$  dla  $x \in \{12, 21, 30\}$ ,  
 $f(x) = 7$  dla  
 $x \in \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$

10. a)  $\{n \in \mathbb{N}: 1 \leq n \leq 27\}$

b)  $f(x) = 2$  dla  $x \in \{101, 110, 200\}$ ,  
 $f(x) = 3$  dla  
 $x \in \{102, 111, 120, 201, 210, 300\}$

11. a) 171 b) 10

#### Układ współrzędnych

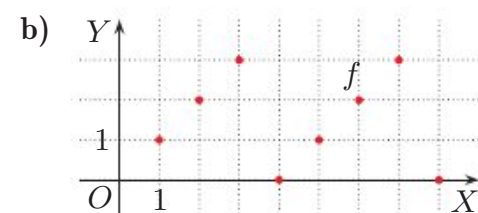
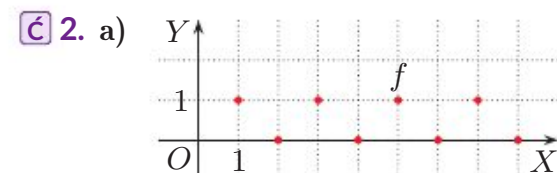
1.  $P(4, 0)$ ,  $Q(2, 3)$ ,  $R(5, 1)$ ,  $S(0, 4)$ ,  
 $T(-2, 3)$ ,  $U(3, -2)$ ,  $W(-1, -2)$

2. a) II b) IV c) I d) III

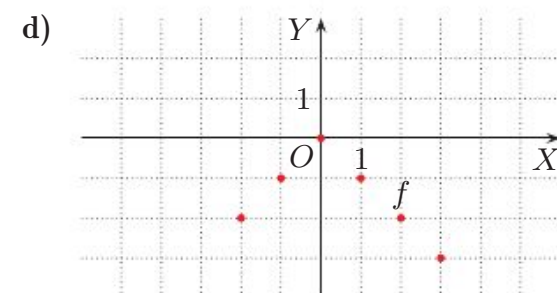
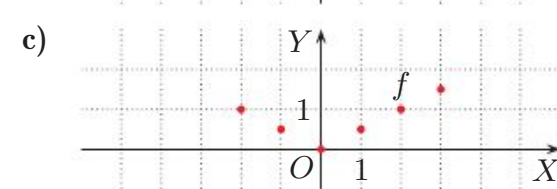
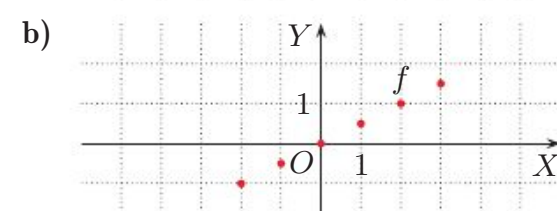
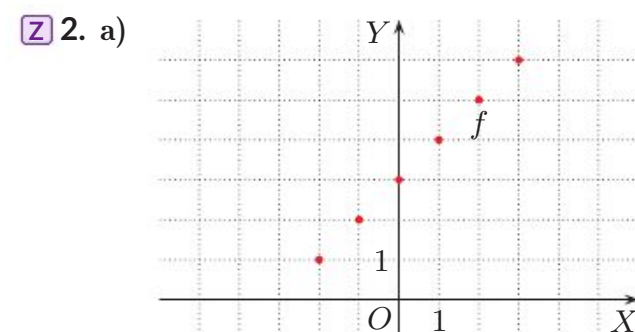
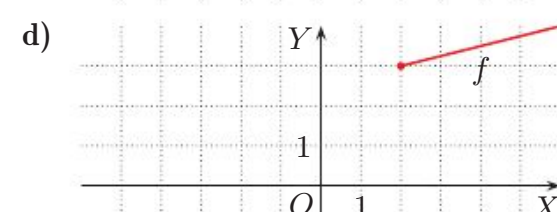
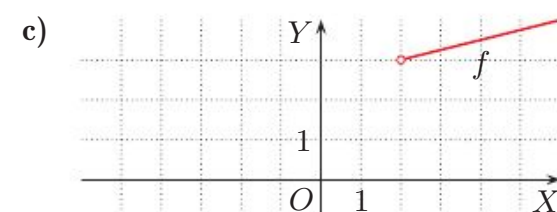
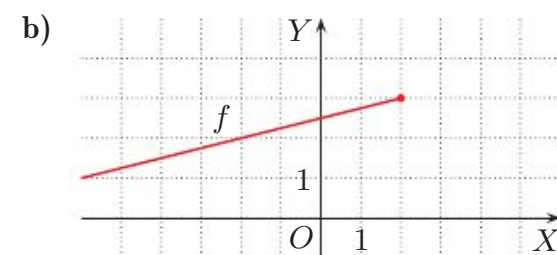
4. a) 6 b) 40

5. do  $T_1$ , o 1

#### 4.2. Szkicowanie wykresu funkcji (1)



3. a)  $f(x) = x - 3$  b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

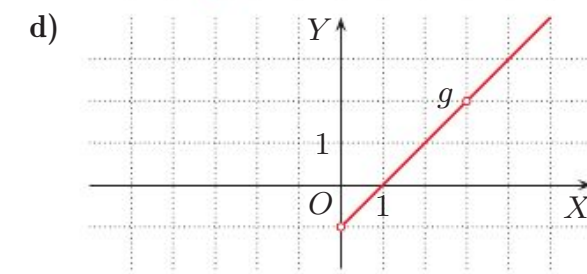
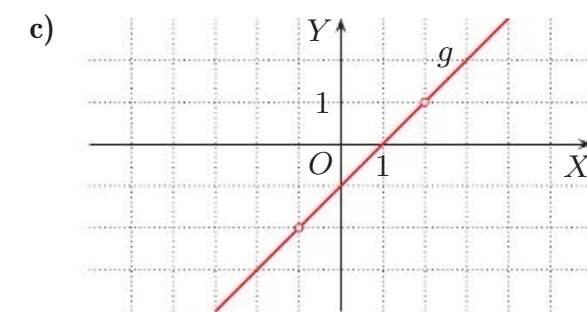
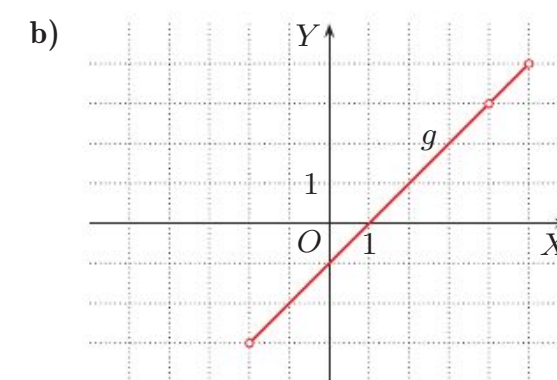
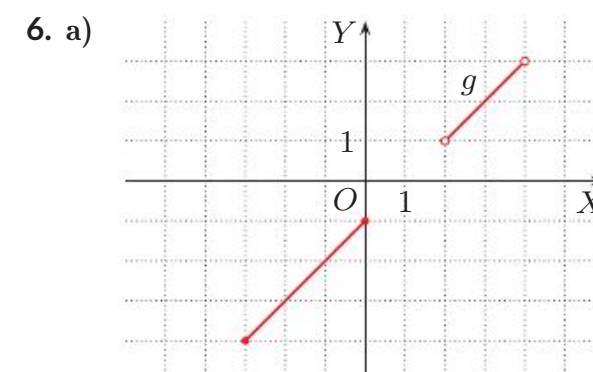
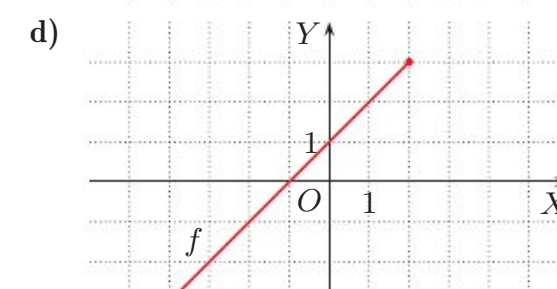
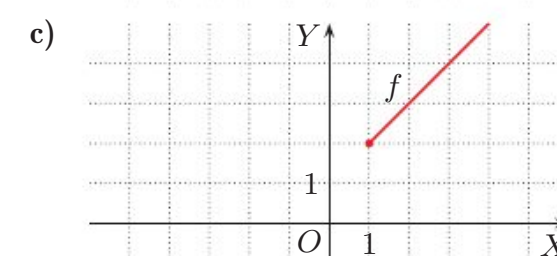
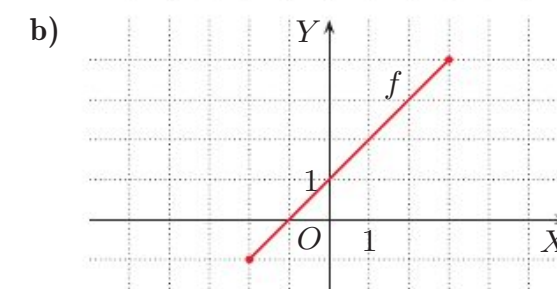
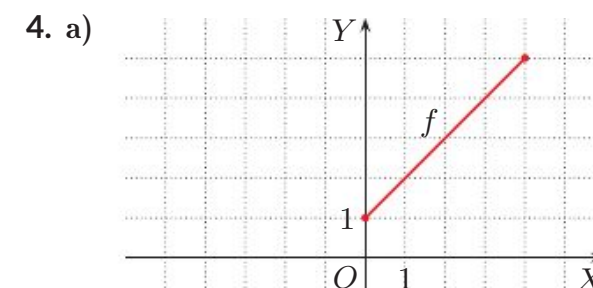


3. a)  $f(x) = x - 4$

b)  $f(x) = 2x$

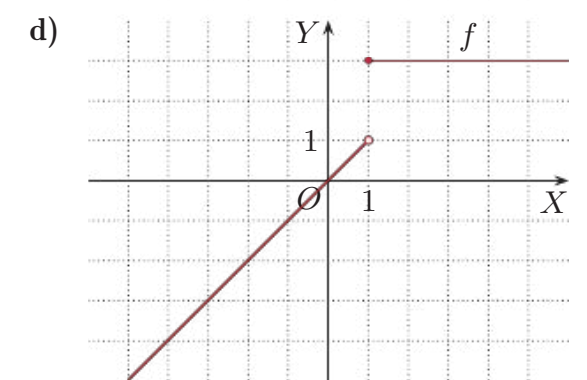
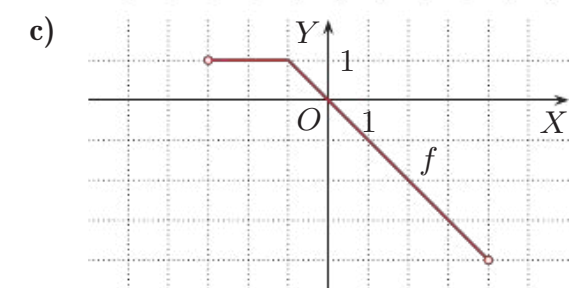
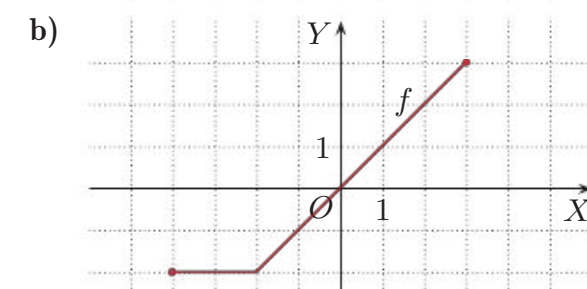
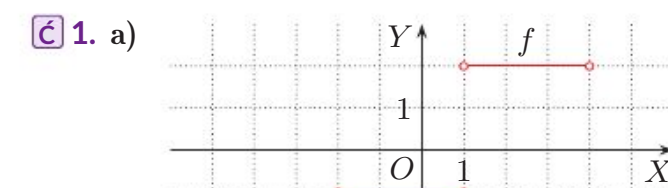
c)  $f(x) = -x + 4$

d)  $f(x) = 2x - 1$

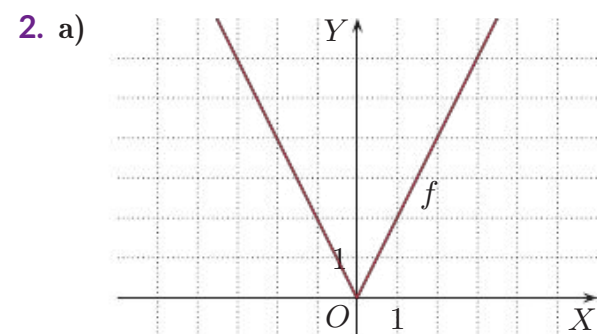


7. dla ośmiu

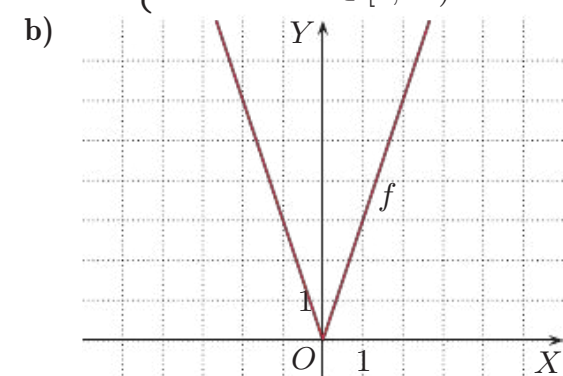
#### 4.3. Szkicowanie wykresu funkcji (2)



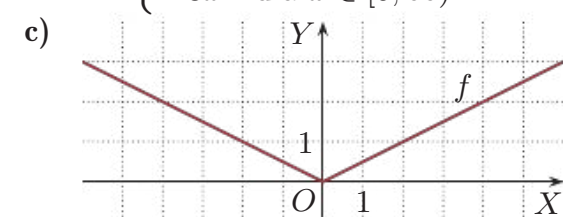




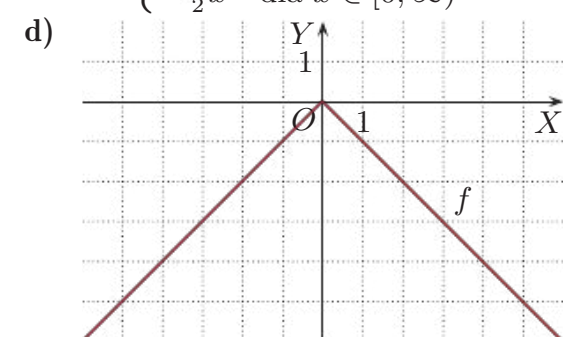
$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$



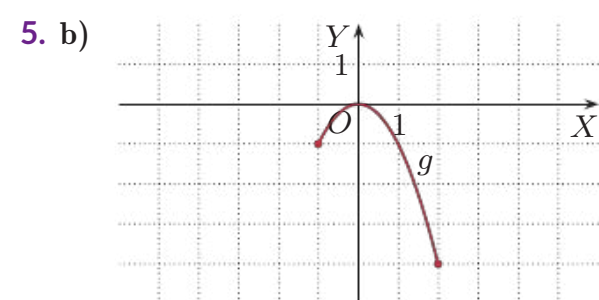
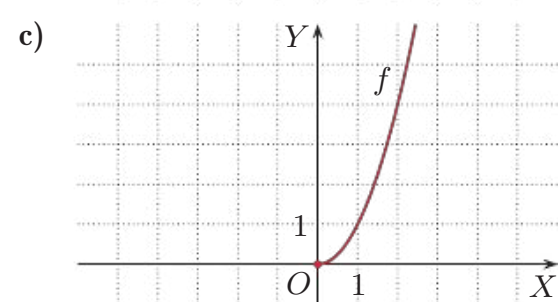
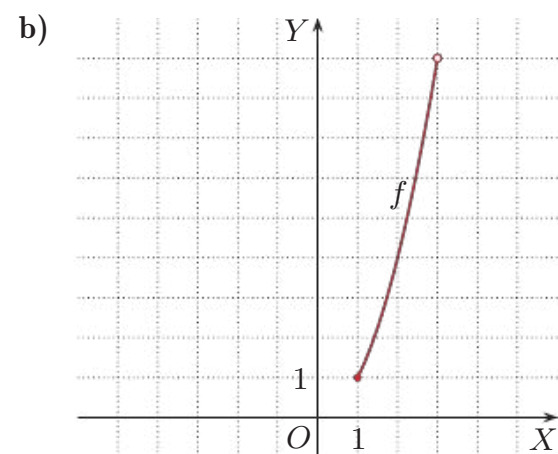
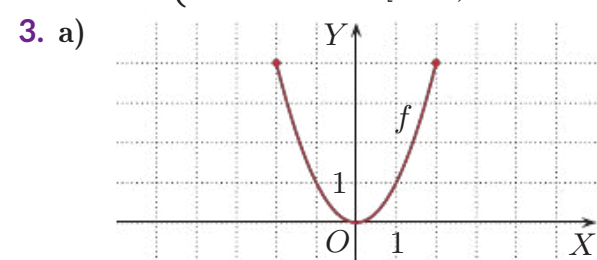
$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 3x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$



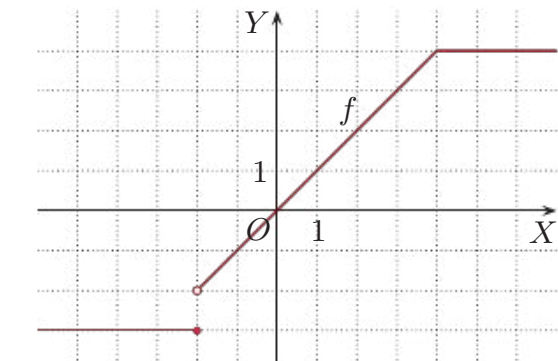
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ -x & \text{dla } x \in [0; \infty) \end{cases}$$



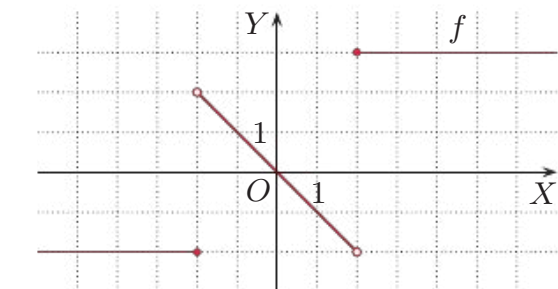
6. a)  $f(1) = 1, f(7) = 4$

b)  $f(1) = 3, f(7) = -6$

7. a)  $f(1) = 1, f(3) = 3$

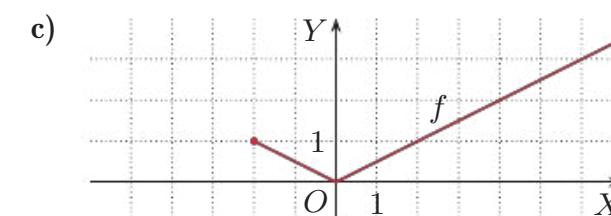
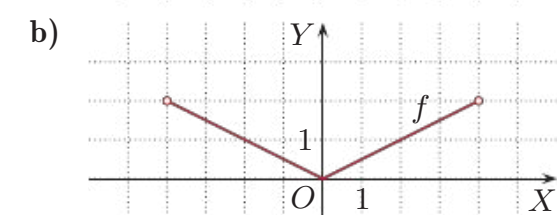
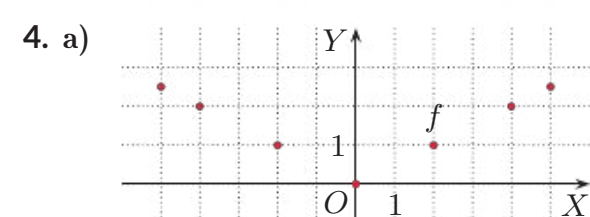
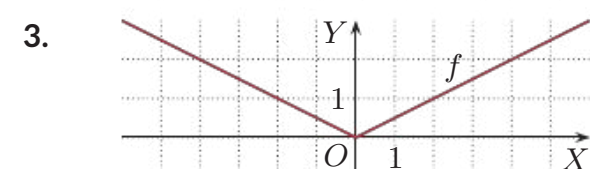
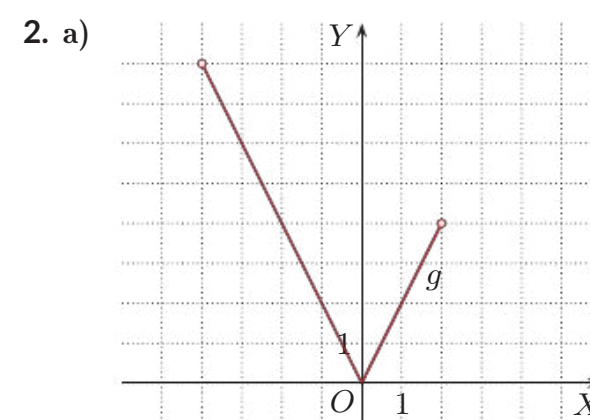
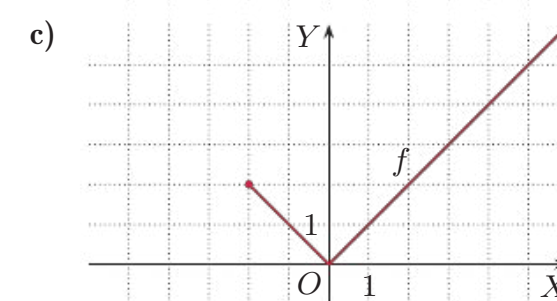
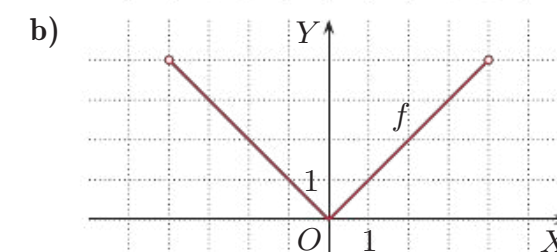
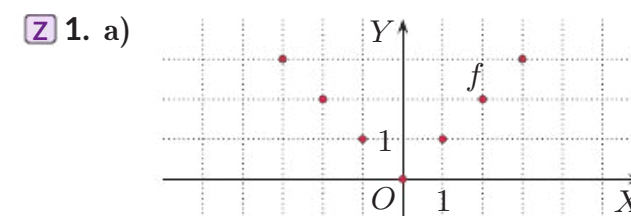


b)  $f(1) = -1, f(3) = 3$



8. a) nie należy b) należy

9. a), c) nie b) tak



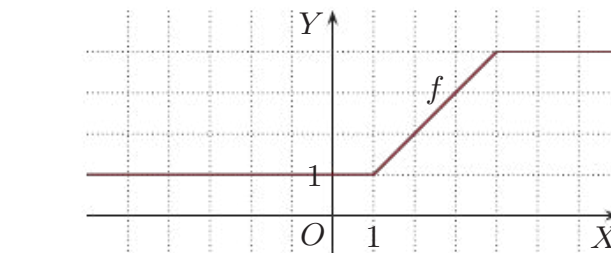
5. a)  $f(-4) = 4, f(4) = 8$

b)  $f(-4) = 2, f(4) = 4$

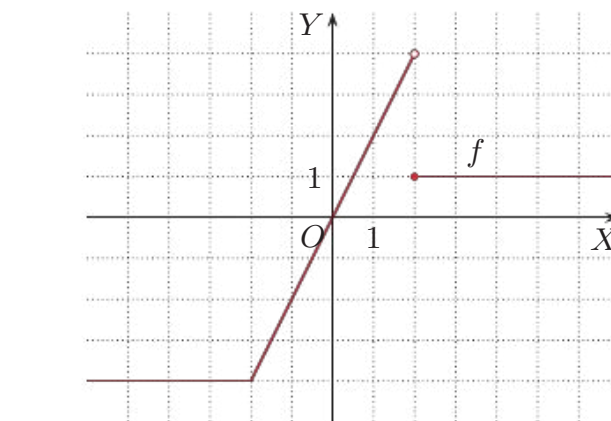
7. a) P, R, S

b) np.  $(-4, 8), (-2, 2), (0, 0), (2, 2), (4, 8)$

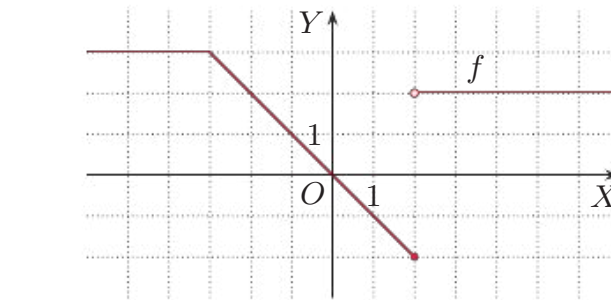
8. a)  $f(-3) = 1, f(2) = 2$



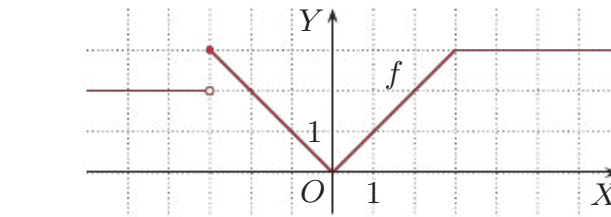
b)  $f(-3) = -4, f(2) = 1$



c)  $f(-3) = 3, f(2) = -2$



d)  $f(-3) = 3, f(2) = 2$



9. a) Q b) P c) P

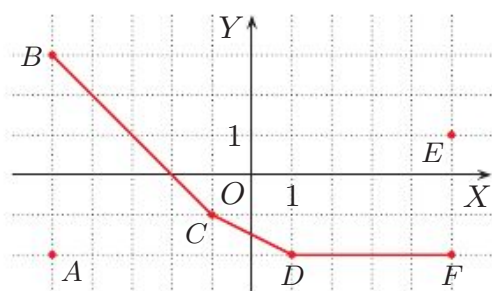
10. a), b) nie



#### 4.4. Monotoniczność funkcji

Ć 2. a) tak b) tak c) nie

3. a)



b) nie

Z 1. a) maleje w  $(-3; 2]$ , stała w  $[4; 6)$ ,

rośnie w  $[2; 4]$

b) maleje w  $[-2; 0]$  i w  $[2; 3]$ ,

rośnie w  $(-3; -2]$ ,  $[0; 2]$  i w  $[3; 6]$

2. Wszystkie zdania są prawdziwe.

4. a) maleje w  $[-2; 2]$ ,

rośnie w  $[-4; -2]$  i w  $[2; 5]$

b) rośnie w  $[-4; -1]$  i w  $(-1; 5]$

#### Wykorzystanie wykresu do prezentacji informacji

1. a) A:  $-5^\circ\text{C}$ , 12 stycznia,

B:  $-7^\circ\text{C}$ , 10 stycznia

b) A:  $4^\circ\text{C}$ , 7 stycznia,

B:  $1^\circ\text{C}$ , 2, 3, 14 stycznia

c) A: 2-4, 9, 10, 12, 13 stycznia,

B: 2-12 stycznia

#### 4.5. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (1)

Ć 1. a)  $D = (-5; 1] \cup (2; 6]$

b)  $D = (-5; -3) \cup (-3; 5]$

2. a)  $f(D) = (1; 4]$

b)  $f(D) = [0; 4]$

c)  $f(D) = [0; \infty)$

3. Funkcja  $f$  przyjmuje największą wartość równą 2 dla  $x = 4$ .

Funkcja  $g$  nie przyjmuje wartości największej.

Funkcja  $h$  przyjmuje największą wartość równą 3 dla  $x = 3$ .

Z 1. a)  $D = [-2; 4]$ ,  $f(D) = [-4; 4]$ ,

$f_{\min} = -4$  dla  $x = 2$ ,

$f_{\max} = 4$  dla  $x = -2$

b)  $D = [-4; 3]$ ,  $f(D) = (-5; 4]$ ,

nie przyjmuje wartości najmniejszej,

$f_{\max} = 4$  dla  $x = 0$

c)  $D = (-5; 5)$ ,  $f(D) = [-4; 2]$ ,

$f_{\min} = -4$  dla  $x \in (-5; -3]$ ,

$f_{\max} = 2$  dla  $x \in [0; 5)$

d)  $D = (-5; 5)$ ,  $f(D) = [-4; 4]$ ,

$f_{\min} = -4$  dla  $x = -2$ ,

$f_{\max} = 4$  dla  $x = 2$

e)  $D = [-3; -1] \cup [1; 5]$ ,

$f(D) = [-4; -2] \cup [3; 4]$ ,

$f_{\min} = -4$  dla  $x = 5$ ,

$f_{\max} = 4$  dla  $x = -3$

f)  $D = (-4; -1] \cup (1; 4]$ ,

$f(D) = [-4; -1] \cup [1; 4]$ ,

$f_{\min} = -4$  dla  $x = -1$ ,

nie przyjmuje wartości największej

2. a)  $f(D) = [-1; 3]$

b)  $f(D) = [-1; 0] \cup [1; 3]$

c)  $f(D) = [-1; 1] \cup (2; 3]$

3. a)  $f(D) = [1; 6]$

b)  $f(D) = [1; 3] \cup [4; 5]$

c)  $f(D) = [1; 2] \cup [5; 6]$

4. a)  $D = (\frac{1}{2}; 4]$

b)  $D = (1; 3) \cup (3; \infty)$

c)  $D = (2; 3) \cup \{\frac{7}{2}\}$

d)  $D = \{2, 3, \frac{7}{2}\}$

5. a)  $f_{\min} = -1$  dla  $x = -1$ ,

$f_{\max} = 2$  dla  $x = -4$

b)  $f_{\min} = -2$  dla  $x = 0$ ,

nie przyjmuje wartości największej

c)  $f_{\min} = -2$  dla  $x = 0$ ,

nie przyjmuje wartości największej

7. a)  $(0; \frac{1}{2}]$  b)  $(\frac{1}{2}; 1)$  c)  $[2; 3]$  d)  $[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}]$

8. a)  $[0; 1]$  b)  $(0; 2)$  c)  $[-2; 1]$  d)  $(-2; \infty)$

#### 4.6. Odczytywanie własności funkcji z wykresu (2)

Ć 1. a)  $f(x) = 0$  dla  $x = 1$ ,

$f(x) = 2$  dla  $x \in \{-1, 3\}$

b)  $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-4, 0, 2\}$ ,

$f(x) = 2$  dla  $x \in \{-3, -1, 3\}$

c) brak miejsc zerowych,

$f(x) = 2$  dla  $x \in \{-2, 0\} \cup [2; 4]$

2. a)  $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-3, 2\}$ ,

$f(x) > 0$  dla  $x \in [-4; -3)$ ,

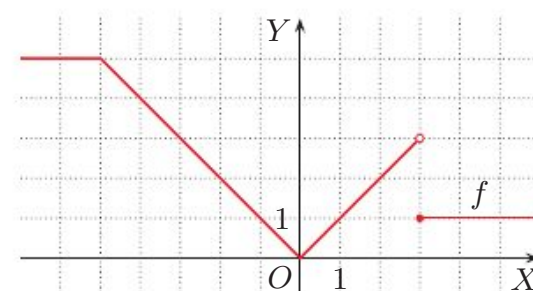
$f(x) \leq 0$  dla  $x \in [-3; 6]$

b)  $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-3, -1, 3, 5\}$ ,

$f(x) > 0$  dla  $x \in [-4; -3) \cup (-3; -1) \cup$

$\cup (3; 5)$ ,  $f(x) \leq 0$  dla  $x \in [-1; 3] \cup \{-3, 5\}$

3. a)



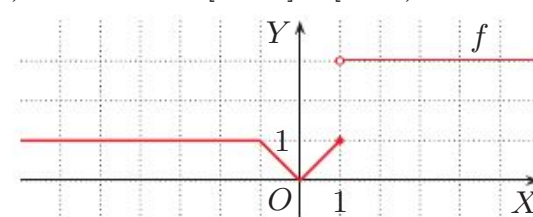
$f(x) = 3$  dla  $x = -3$ ,

$f(x) > 3$  dla  $x \in (-\infty; -3)$ ,

$f(x) = 1$  dla  $x \in \{-1, 1\} \cup [3; \infty)$ ,

$f(x) \leq 1$  dla  $x \in [-1; 1] \cup [3; \infty)$

b)



$f(x) = 3$  dla  $x \in (1; \infty)$ ,

nie przyjmuje wartości większych od 3,

$f(x) = 1$  dla  $x \in (-\infty; -1] \cup \{1\}$ ,

$f(x) \leq 1$  dla  $x \in (-\infty; 1]$

4.  $x \in (-\infty; -4] \cup \{0\} \cup [4; \infty)$

Z 1. a)  $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-2, 0, 3\}$ ,

$f(x) > 0$  dla  $x \in [-4; -2) \cup (-2; 0) \cup (3; 4]$ ,

$f(x) \geq 0$  dla  $x \in [-4; 0] \cup [3; 4]$

b)  $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-4, -2, 2, 3\}$ ,

$f(x) > 0$  dla  $x \in (-4; -2) \cup (2; 3)$ ,

$f(x) \geq 0$  dla  $x \in [-4; -2] \cup [2; 3]$

c)  $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ ,

$f(x) > 0$  dla  $x \in (-4; -2) \cup (-2; 0)$ ,

$f(x) \geq 0$  dla  $x \in [-4; 0] \cup \{2, 4\}$

2. a)  $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-1, 1, 4\}$ ,

$f(x) > 0$  dla  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 4)$

b)  $f(x) = 2$  dla  $x = 2$ ,

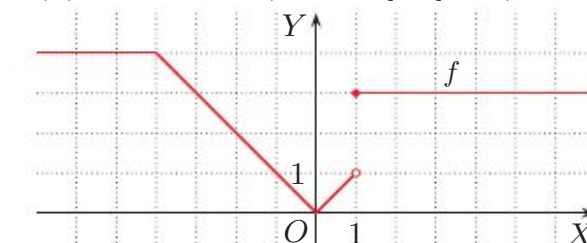
$f(x) \geq 2$  dla  $x \in (-\infty; -2] \cup \{2\}$

c)  $f(x) = 3$  dla  $x \in (-\infty; -2]$ ,

$f(x) \leq 3$  dla  $x \in \mathbb{R}$

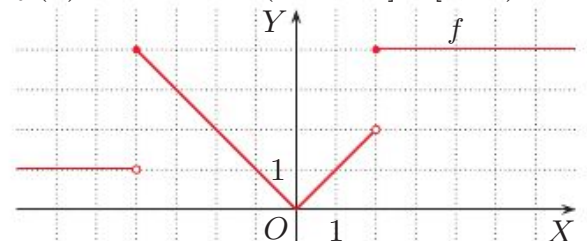
3. a)  $f(x) = 1$  dla  $x = -1$ ,

$f(x) \geq 1$  dla  $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$



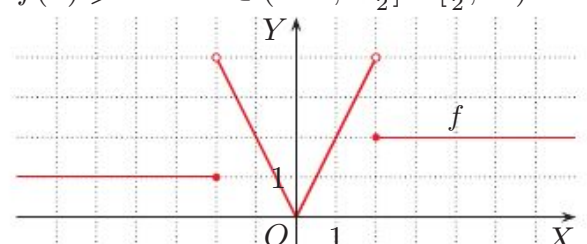
b)  $f(x) = 1$  dla  $x \in (-\infty; -4) \cup \{-1, 1\}$ ,

$f(x) \geq 1$  dla  $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$



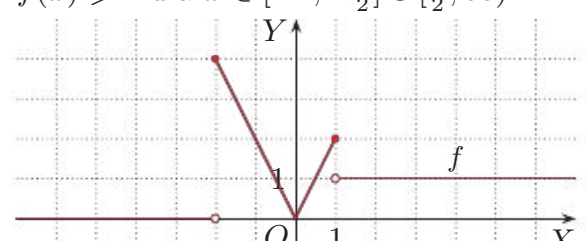
c)  $f(x) = 1$  dla  $x \in (-\infty; -2] \cup \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ ,

$f(x) \geq 1$  dla  $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$



d)  $f(x) = 1$  dla  $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \cup (1; \infty)$ ,

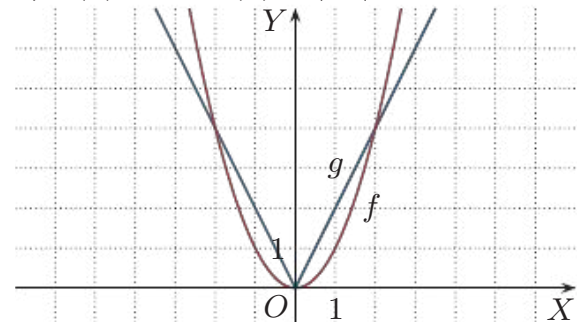
$f(x) \geq 1$  dla  $x \in [-2; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$



4. a)  $x \in \{-1, 0, 1\}$  b)  $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$

c)  $[-1; 0] \cup [1; \infty)$

5. a)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = |2x|$

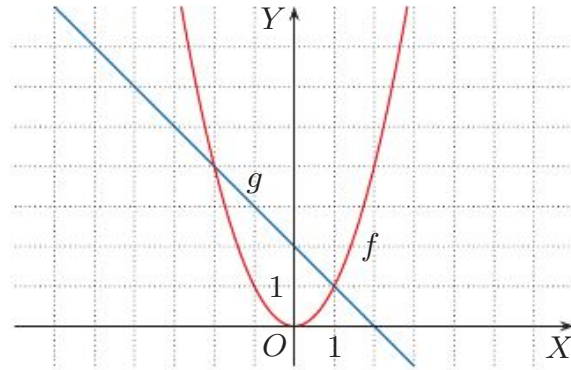


$x^2 = |2x|$  dla  $x \in \{-2, 0, 2\}$ ,

$x^2 < |2x|$  dla  $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$



5. b)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 2 - x$



$x^2 = 2 - x$  dla  $x \in \{-2, 1\}$ ,  
 $x^2 \geq 2 - x$  dla  $x \in (-\infty; -2] \cup [1; \infty)$

**Wykresy jako nośnik informacji finansowych**

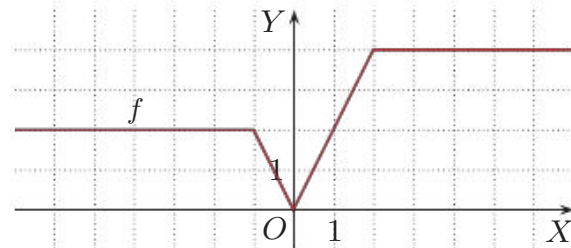
1. a)  $X$ : 40 zł,  $Y$ : 50 zł  
 b)  $X$ : 50 zł,  $Y$ : 10 zł

#### 4.7. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY

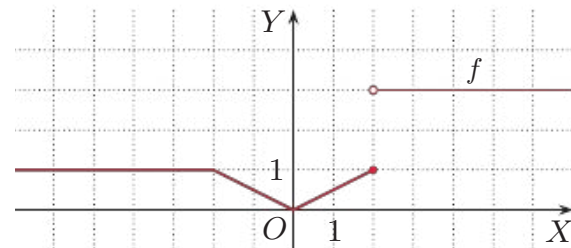
- Ć 1. a)  $[2; \infty)$  b)  $[-2; \infty)$   
 c)  $[-3; \infty)$  d)  $[\frac{1}{2}; \infty)$

- Z 1. a)  $g(D) = (-\infty; 4]$   
 b)  $g(D) = (-\infty; 0]$   
 c)  $g(D) = (-\infty; -1]$

2. a)  $f(D_f) = [0; 4]$ ,  $g(D_g) = [1; 5]$ ,  
 $h(D_h) = [-2; 2]$



b)  $f(D_f) = [0; 1] \cup \{3\}$ ,  
 $g(D_g) = [1; 2] \cup \{4\}$ ,  
 $h(D_h) = [-2; -1] \cup \{1\}$



3. a)  $a = 1$  b)  $a = -4$   
 4. a)  $a = 5$  b)  $a = -4$   
 5.  $g(x) = x^2 + 1$ ,  $h(x) = x^2 - 4$

6. a) 0 dla  $m \in \{-3, -1\}$ ,  
 1 dla  $m = 2$   
 b) 0 dla  $m = -3$ ,  
 1 dla  $m = -1$ ,  
 2 dla  $m = 2$   
 c) 1 dla  $m = -3$ ,  
 2 dla  $m \in \{-1, 2\}$   
 d) 2 dla  $m \in \{-3, -1, 2\}$

7. a)  $a = -2$  b)  $a = -7$

#### 4.8. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX

- Ć 1. a) 1 b) -2 c) -3 d) 4  
 2. a)  $D = [-2; 6]$  b)  $D = [-7; 1]$   
 c)  $D = [-8; 0]$

- Z 1. a)  $g(1) = 0$  b)  $g(-1) = 0$   
 c)  $g(-2) = 0$

3. a)  $[-2; 5]$  b)  $[-1; 6]$   
 c)  $[-5; 2]$  d)  $[-6; 1]$   
 4. a) 1, 3, 5 b) -7, -5, -3  
 5. a)  $a = -\frac{3}{2}$  b)  $a = 2$

#### 4.9. Wektory w układzie współrzędnych

- Ć 2.  $\vec{GH} = [3, -3]$ ,  $\vec{IJ} = [-4, -5]$ ,  
 $\vec{MN} = [2, 0]$   
 3. a)  $\vec{BC} = [3, -1]$ ,  $\vec{BE} = [-5, -6]$   
 b)  $\vec{AC} = [8, 0]$ ,  $\vec{AE} = [0, -5]$   
 c)  $\vec{AB} = [5, 1]$ ,  $\vec{BA} = [-5, -1]$   
 d)  $\vec{BD} = [0, -3]$ ,  $\vec{DA} = [-5, 2]$

4. a)  $[-1, -6]$  b)  $[8\frac{3}{4}, -8\frac{2}{3}]$   
 5. a)  $\vec{AB} = \vec{DC} = [6, 2]$ ,  
 $\vec{BA} = \vec{CD} = [-6, -2]$   
 b)  $\vec{AD} = \vec{BC} = [-3, 3]$ ,  
 $\vec{DA} = \vec{CB} = [3, -3]$

6. a) 3 b) 3

- Z 1. a)  $B(6, 5)$  b)  $B(-3, 0)$   
 c)  $B(5\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  d)  $B(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$   
 2. a)  $A(-3, 0)$  b)  $A(1, 1)$   
 c)  $A(-15, 17)$  d)  $A(23, 32)$   
 3. a)  $\vec{AB}$  b)  $\vec{CD}$   
 4. a)  $[5, 1]$   
 5. a) 12 b) 3,5  
 6.  $A(-3, -3)$ ,  $B(6, 0)$ ,  $D(-7, 1)$ ,  $P = 32$

#### 4.10. Przesuwanie wykresu o wektor

- Ć 1. a)  $[1, -2]$  b)  $[-3, 2]$   
 2. a)  $[2, -1]$  b)  $[-3, -2]$  c)  $[-1, 1]$   
 Z 1. a)  $f(x) = (x - 2)^2 - 2$ ,  $[2, -2]$   
 b)  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ ,  $[1, 2]$   
 c)  $f(x) = (x + 2)^2 - 1$ ,  $[-2, -1]$   
 2. a) brak miejsc zerowych,  $f(D) = [3; \infty)$   
 b)  $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-1, 5\}$ ,  
 $f(D) = [-3; \infty)$   
 c)  $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-3, 1\}$ ,  
 $f(D) = [-2; \infty)$   
 3. a) 11 b) 6  
 4. a)  $D_g = [-4; 4]$ ,  $g(D_g) = [-4; 2]$ ,  
 $g(x) \leq 0$  dla  $x \in [-4; -2] \cup \{0\} \cup [2; 4]$   
 b)  $D_g = [-1; 7]$ ,  $g(D_g) = [0; 6]$ ,  
 $g(x) \leq 0$  dla  $x = 7$   
 c)  $D_g = [0; 8]$ ,  $g(D_g) = [-6; 0]$ ,  
 $g(x) \leq 0$  dla  $x \in [0; 8]$   
 5. a)  $D_g = [1; \infty)$ ,  $g(D_g) = [3; \infty)$   
 b)  $D_g = [-4; \infty)$ ,  $g(D_g) = [-2; \infty)$   
 c)  $D_g = [-1; \infty)$ ,  $g(D_g) = [-1; \infty)$   
 6. a)  $D_g = [-5; 1]$ ,  $g(D_g) = [8; 11]$   
 b)  $D_g = [-10; -4]$ ,  $g(D_g) = [0; 3]$   
 c)  $D_g = [-13\frac{1}{3}; -7\frac{1}{3}]$ ,  
 $g(D_g) = [18\frac{2}{3}; 21\frac{2}{3}]$   
 7. a)  $[5, 3]$  b)  $[2, 4]$  c)  $[-1, -1]$

#### 4.11. Przekształcanie wykresu przez symetrię względem osi układu współrzędnych

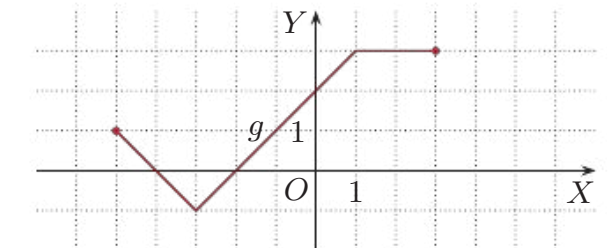
- Ć 1. a)  $D_f = D_g = [-4, 5]$ ,  
 $f(D_f) = [-1; 3]$ ,  $g(D_g) = [-3; 1]$   
 b)  $f$  rośnie w  $[2; 5]$ ,  $g$  rośnie w  $[-2; 2]$   
 2. a)  $f(D_f) = [0; \infty)$ ,  $g(D_g) = (-\infty; 0]$   
 b)  $f(D_f) = [0; \infty)$ ,  $g(D_g) = (-\infty; 0]$   
 3. a)  $f(D_f) = [-1; 4]$ ,  $g(D_g) = [-4; 1]$   
 b)  $f(D_f) = [-3; 1]$ ,  $g(D_g) = [-1; 3]$   
 7.  $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ 1 & \text{dla } x \in [1; 2] \\ -x + 3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$   
 Z 1. a)  $f(D_f) = [-1; 3]$ ,  $g(D_g) = [-3; 1]$   
 b)  $f(D_f) = [-2; 4]$ ,  $g(D_g) = [-4; 2]$

c)  $f(D_f) = [-2; 1] \cup (2; 4]$ ,  
 $g(D_g) = [-4; -2] \cup [-1; 2]$

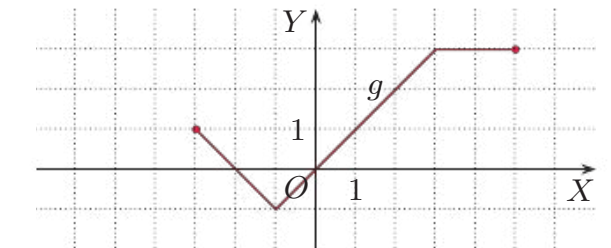
2. a)  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$   
 b), f) brak punktów wspólnych  
 c)  $(2, 0)$  d)  $(-2, 0)$   
 e)  $(-4, 0)$ ,  $(4, 0)$   
 3. a), b)  $D_f = [-4; 3]$ ,  $D_g = [-3; 4]$   
 c)  $D_f = [-3; 4]$ ,  $D_g = [-4; 3]$

4. a)  $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -x & \text{dla } x \in [-2; 3] \\ -3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$   
 $h(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ x & \text{dla } x \in [-3; 2] \\ 2 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$   
 b)  $g(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -|x| & \text{dla } x \in [-1; 2] \\ -3 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$   
 $h(x) = \begin{cases} -3 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -|x| & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ x - 2 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$

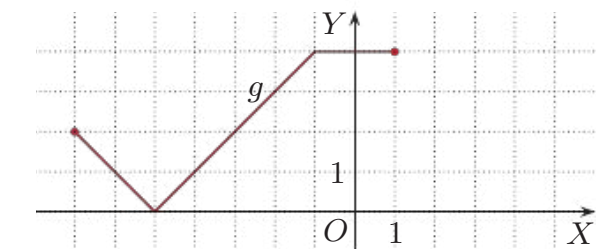
5. a)  $D_g = [-5; 3]$ ,  $g(D_g) = [-1; 3]$



- b)  $D_g = [-3; 5]$ ,  $g(D_g) = [-1; 3]$

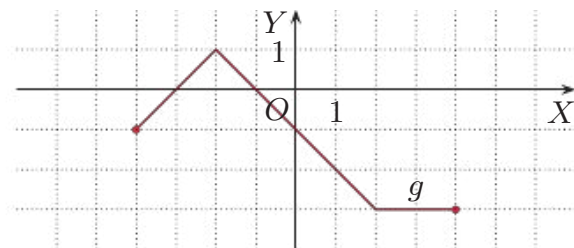


- c)  $D_g = [-7; 1]$ ,  $g(D_g) = [0; 4]$



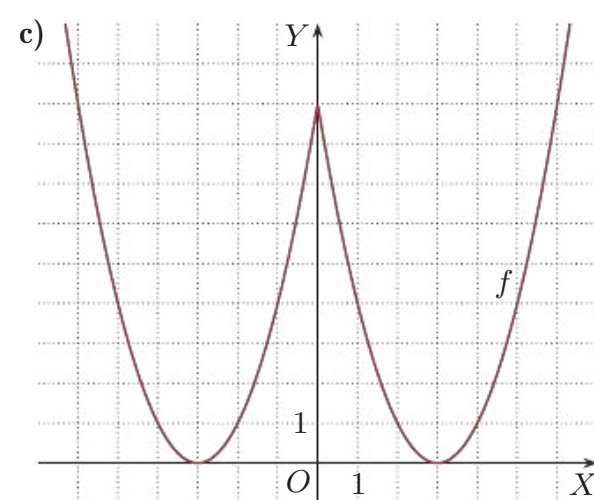
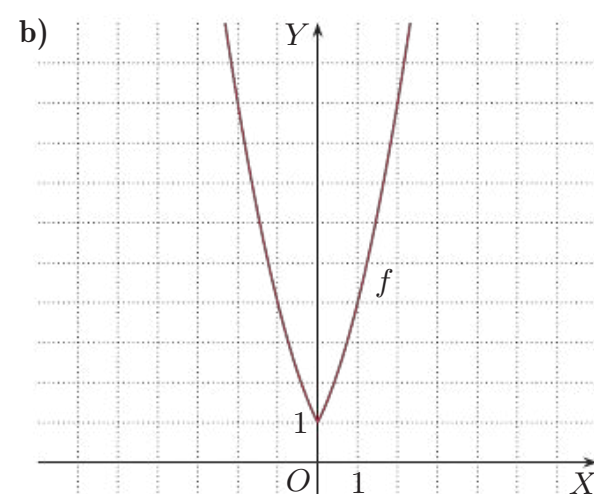
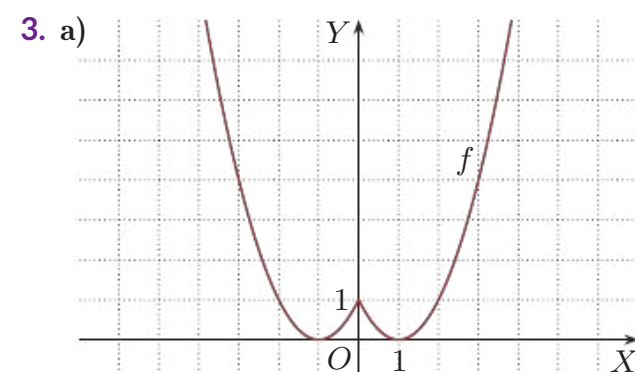
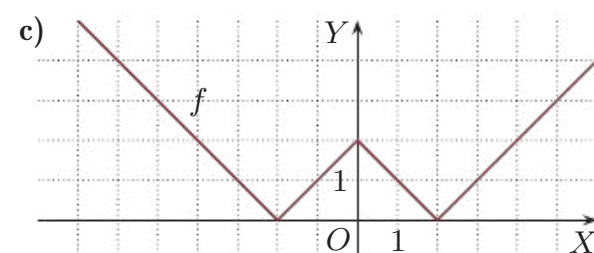
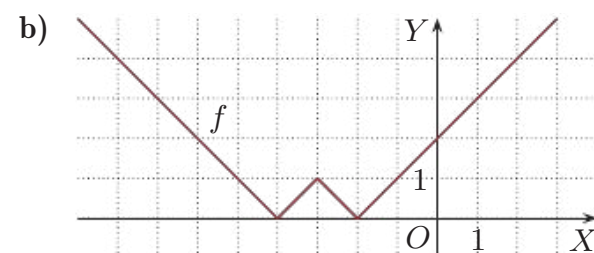
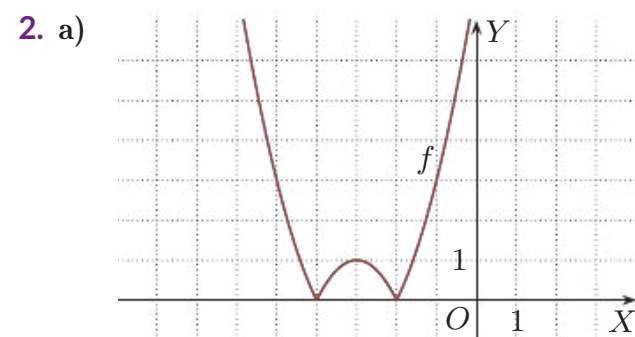
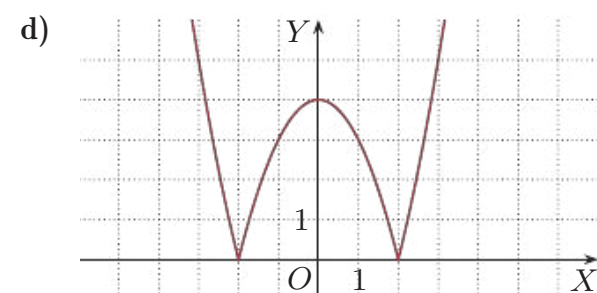
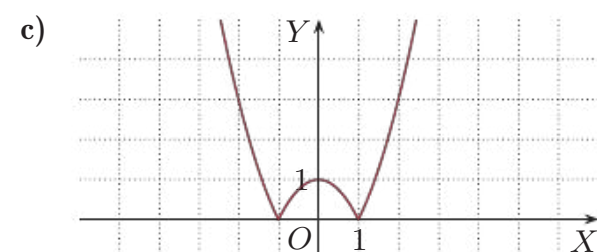
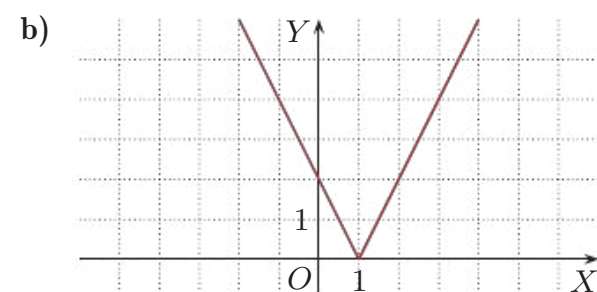
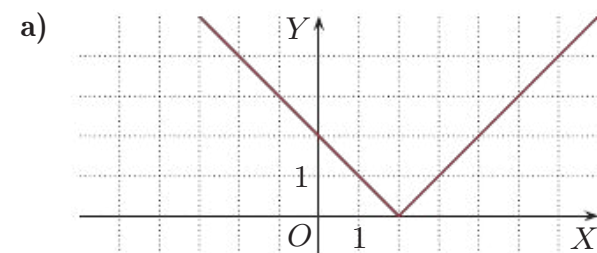


5. d)  $D_g = [-4; 4]$ ,  $g(D_g) = [-3; 1]$

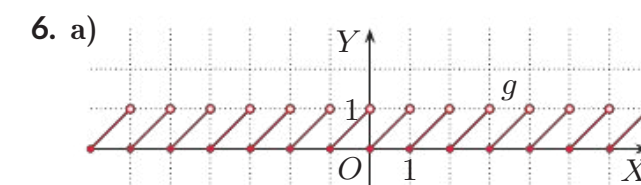
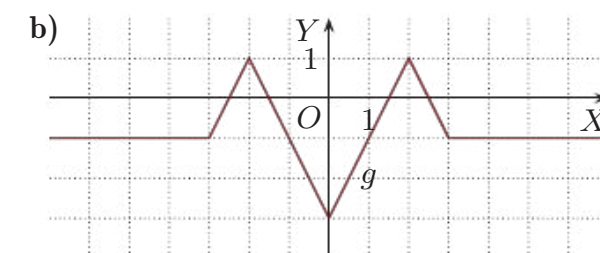
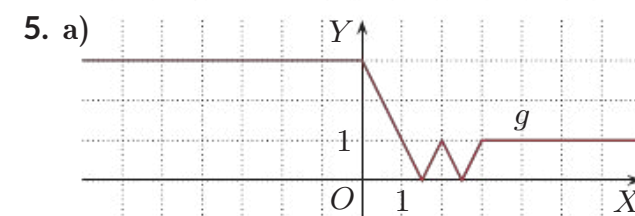
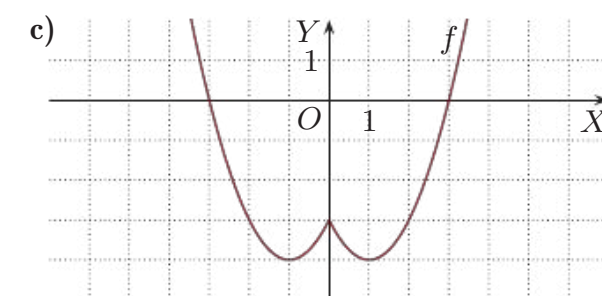
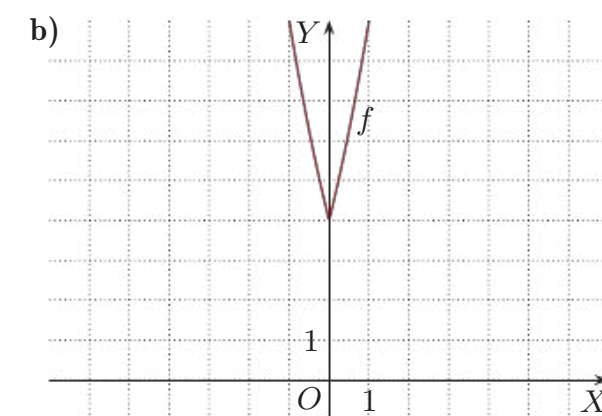
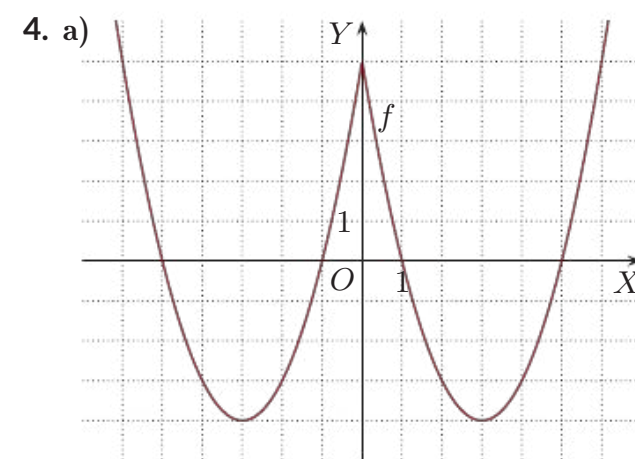
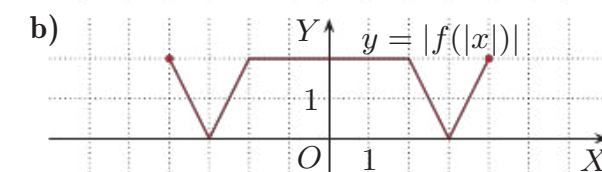
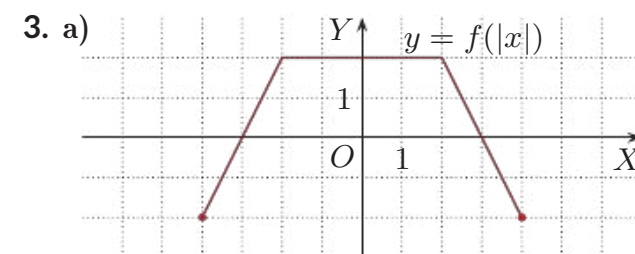


#### 4.12. Inne przekształcenia wykresu

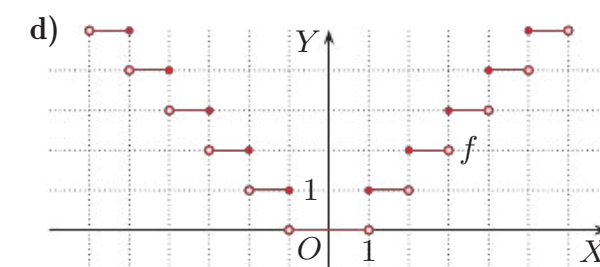
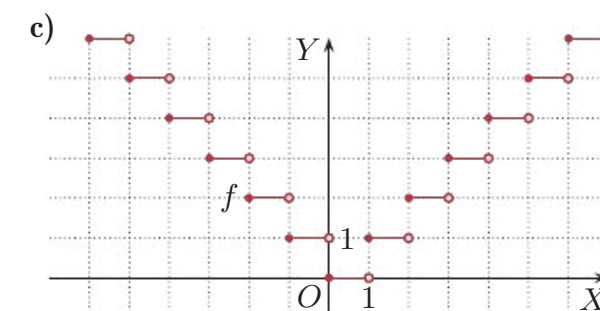
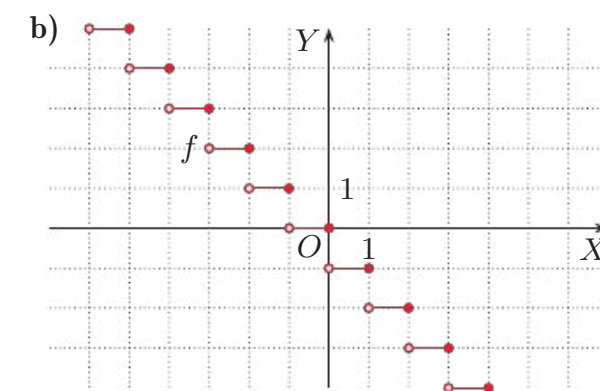
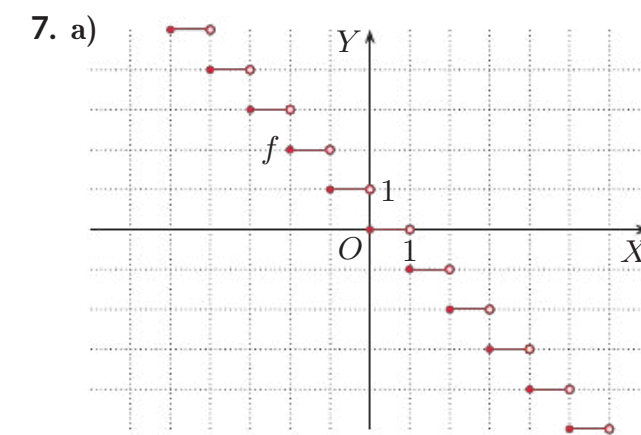
Ć 1. wykresy  $y = |f(x)|$



Z 2. a) 10 b) 6 c) 4



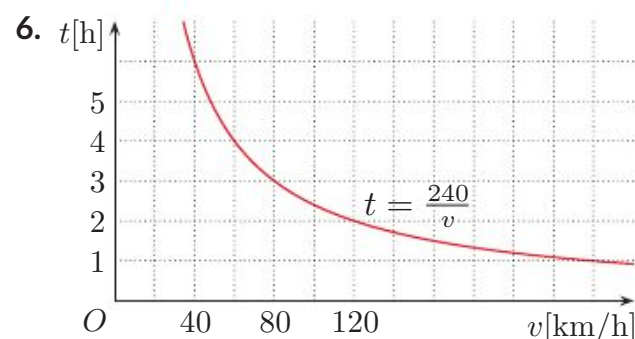
b)  $x \in \{\frac{1}{2}k : k \in \mathbb{Z}_-\} \cup [0; \infty)$





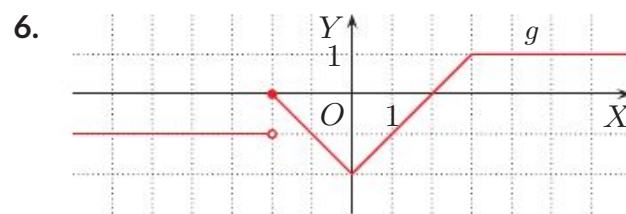
#### 4.13. Proporcjonalność odwrotna

- Ć 1.  $f$ : (1, 1),  $g$ : (1, 4), (2, 2), (4, 1),  
 $h$ : (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)
2. 6, nie zależy
3. a) kolejno uzupełniamy: 6, 4,5, 3, 2
- Z 1. kolejno uzupełniamy:  
 a) 8, 4, 2, 1,6 b) 10, 5, 4, 2  
 wzór: a)  $y = \frac{8}{x}$ ,  $x > 0$  b)  $y = \frac{10}{x}$ ,  $x > 0$
2. a)  $k = 15$
3. a) 2 b) 2 c) 4 d) 6
4.  $D = \{n \in \mathbb{N}: 3 \leq n \leq 12\}$
5. a) 4 h b) 3 h 20 min c) 2,5 h  
 d) 2 h 24 min



#### Zestaw I

1. a)  $f_{\min} = 0$ ,  $f_{\max} = 81$   
 b) 12 dla 4 argumentów,  
 16 dla 3 argumentów  
 c) 65
2. a)  $f(X) = \{-1, 0, 2, 3\}$   
 b)  $f(X) = [-1; \infty)$  c)  $f(X) = [0; 3]$
3. a)  $f$  rośnie w  $(-4; -2]$  i w  $[0; 4)$ ,  
 maleje w  $[-2; 0]$ ,  
 $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-3, -1, 2\}$ ,  
 $f(x) > 0$  dla  $x \in (-3; -1) \cup (2; 4)$   
 b)  $f$  rośnie w  $(-4; -2]$  i w  $[1; 4)$ ,  
 maleje w  $[-2; 1]$ ,  
 $f$  nie przyjmuje wartości 0,  
 $f(x) > 0$  dla  $x \in (-4; -1) \cup [2; 4)$   
 c)  $f$  rośnie w  $[-3; -2]$ , w  $[0; 1]$  i w  $[2; 4)$ ,  
 maleje w  $(-4; -3]$ , w  $[-2; 0]$  i w  $[1; 2]$ ,  
 $f(x) = 0$  dla  $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$ ,  
 $f(x) > 0$  dla  $x \in (-4; -3) \cup (-3; -1) \cup$   
 $\cup (3; 4)$
5. a) 6 b) 21



- a)  $g(x) = 0$  dla  $x \in \{-2, 2\}$ ,  
 $g(x) < 0$  dla  $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2)$   
 b)  $g(x) = 1$  dla  $x \in [3; \infty)$ ,  
 $g(x) \leq 1$  dla  $x \in \mathbb{R}$   
 c)  $g(x) = -1$  dla  $x \in (-\infty; -2) \cup \{-1, 1\}$ ,  
 $g(x) \leq -1$  dla  $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 1]$

#### Zestaw II

1. a)  $D_g = (-2; 5]$  b)  $D_g = [0; 7]$   
 c)  $D_g = (-7; 0]$  d)  $D_g = [-1; 6]$
2. a)  $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -|x| & \text{dla } x \in [-1; 3] \\ -3 & \text{dla } x \in (3; \infty) \end{cases}$   
 $g(D_g) = [-3; 0]$ , stała w  $(-\infty; -1]$   
 i w  $[3; \infty)$ , rośnie w  $[-1; 0]$ , maleje w  $[0; 3]$
- b)  $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ x^2 & \text{dla } x \in [-2; 1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1; \infty) \end{cases}$   
 $g(D_g) = \{-2\} \cup [0; 4] \cup \{5\}$ ,  
 stała w  $(-\infty; -2)$  i w  $(1; \infty)$ ,  
 rośnie w  $[0; 1]$ , maleje w  $[-2; 0]$
3. a)  $g(x) = -2x^3 - 3x^2 + 8x - 3$ ,  
 miejsca zerowe:  $-3, \frac{1}{2}, 1$   
 b)  $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$ ,  
 miejsca zerowe:  $-2, -\frac{3}{2}, 2$   
 c)  $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 8x - 12$ ,  
 miejsca zerowe:  $-2, \frac{3}{2}, 2$
4. a)  $-4, 2, 5$  b)  $-5, -2, 4$
5. a) 1 rozwiązanie dla  $m = 4$ ,  
 3 rozwiązania dla  $m \in \{0, 2\}$   
 b) 1 rozwiązanie dla  $m \in (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$ ,  
 3 rozwiązania dla  $m \in (0; 4)$

6. a) 32 b) 7

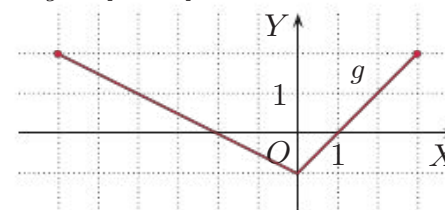
7. 4 punkty;  $f(x) = \frac{14}{x}$

#### Zadania z kontekstem realistycznym

1. a) 80 km/h b) 60 km/h  
 2. a) 70 km/h b) 80 km/h  
 3. 2 h 20 min

#### Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. D 2. C 3. B 4. A 5. D 6. C 7. B  
 8. C 9. C 10. D
11. FF  
 12. FF  
 13. CI  
 14. A3
- 15.1.  $[-3; -1] \cup [1; 4]$  15.2.  $[-2; 0]$
16.  $\frac{5}{3}$
17. 2
18.  $D_g = [-6; 3]$



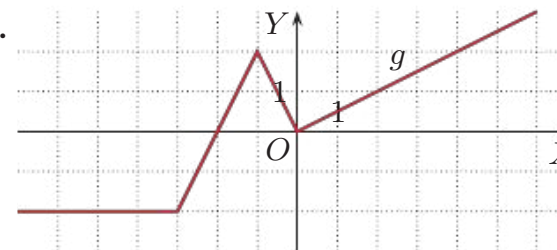
19.  $-2, 1$

20. 15

21. 8

22. 1, 5, 9

- 23.



stała w  $(-\infty; -3]$ ,  
 rośnie w  $[-3; -1]$  i w  $[0; \infty)$ ,  
 maleje w  $[-1; 0]$ ,  
 $g(x) \leq 0$  dla  $x \in (-\infty; -2] \cup \{0\}$

#### Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

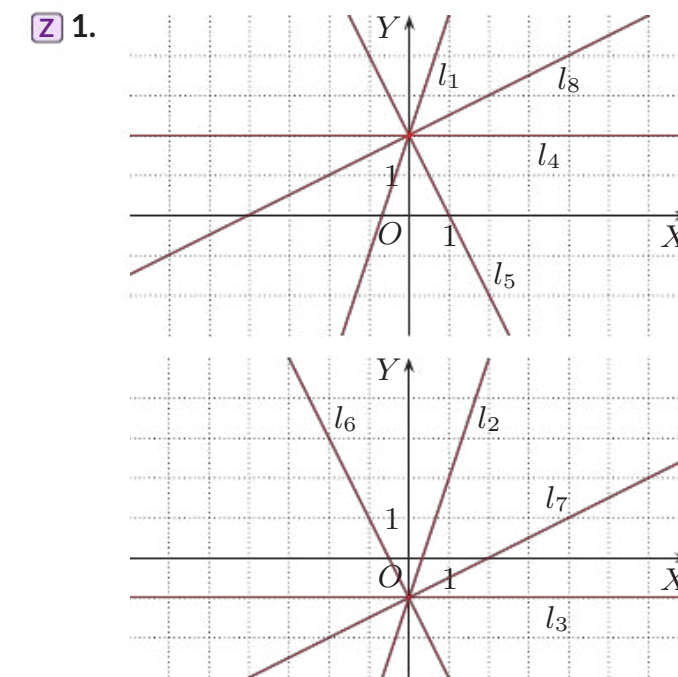
1.  $6\sqrt{2} - 2$   
 2.  $x \in (-4 + \sqrt{3}; 8 - \sqrt{3})$   
 3.  $[17, 19]$   
 4.1.  $x \in (-\infty; -3] \cup \{-1, 3\}$   
 4.2.  $x \in \{-3, 1\} \cup [3; \infty)$   
 5. 24  
 6.  $x \in (-\infty, -3) \cup \{-2\} \cup [2; \infty)$   
 7.  $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; 1] \cup [3; \infty)$

#### Punkty kratowe należące do prostej

1. a) punkty należące do odcinka AB:  
 $(-3, -3)$ ,  $(-1, -2)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(3, 0)$ ,  
 punkty należące do prostej  $l$ , ale  
 nienależące do odcinka AB:  
 $(-5, -4)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(7, 2)$   
 b) punkty należące do odcinka AB:  
 $(0, 2)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(6, 0)$ ,  
 punkty należące do prostej  $l$ , ale  
 nienależące do odcinka AB:  
 $(9, -1)$ ,  $(12, -2)$ ,  $(15, -3)$
2. a)  $D(7, 3)$  lub  $D(-1, -1)$   
 b)  $D(7, -1)$  lub  $D(1, 5)$

#### 5.1. Wykres funkcji liniowej (1)

- Ć 2. a) np.  $(0, -2)$ ,  $(2, 1)$   
 b) np.  $(0, 0)$ ,  $(5, -3)$   
 c) np.  $(0, 2)$ ,  $(-4, -1)$   
 d) np.  $(0, -1)$ ,  $(-7, 3)$
4.  $l_2 \parallel l_4 \parallel l_6$ ,  $l_3 \parallel l_5 \parallel l_8$
5. a)  $y = 2x + 1$  b)  $y = -3x + 1$   
 c)  $y = -\frac{2}{3}x - 2$  d)  $y = -\frac{3}{5}x + 1$
7. a)  $y = 3x + 6$  b)  $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$
8. a)  $f_1(1) = 4$ ,  $f_2(1) = 3$ ,  
 $f_3(1) = 2\frac{1}{2}$ ,  $f_4(1) = 6$   
 b)  $f_1$  - niebieski,  $f_2$  - brązowy,  
 $f_3$  - czerwony,  $f_4$  - zielony
9. a)  $y = -\frac{3}{4}x + 5$ ; tak b)  $y = \frac{5}{3}x - 4$ ; nie



2. a)  $y = 4x + 5$  b)  $y = -3x + 11$   
 c)  $y = -\frac{4}{3}x - 3$  d)  $y = \sqrt{3}x$   
 3. a), b) nie należy c) należy  
 4. a)  $y = x + 4$  b)  $y = \frac{1}{2}x + 4$   
 c)  $y = -3x + 4$  d)  $y = -8x + 4$   
 5. a) 15 b) 24

## 5.2. Własności funkcji liniowej

- Ć 2. a)  $\frac{3}{2}$  b)  $-\frac{4}{3}$  c)  $-6$  d)  $\frac{2}{3}$   
 3. a)  $a = 0$  i  $b \neq 0$  b)  $a = b = 0$   
 4. a) 4 b) 6 c) 16 d) 7,5  
 6. a), c) rosnąca b) malejąca d) stała  
 7. a)  $a < 0$  i  $b > 0$  b)  $a > 0$  i  $b < 0$   
 c)  $a < 0$  i  $b < 0$   
 8. a) wprost proporcjonalne,  $a = \frac{1}{3}Ob$   
 b) odwrotnie proporcjonalne,  $a = \frac{2P}{b}$   
 c) wprost proporcjonalne,  $Ob = 2\pi r$   
 d) odwrotnie proporcjonalne,  $d_1 = \frac{2P}{d_2}$   
 9. a)  $y = 3x$  b)  $y = \frac{2}{3}x$  c)  $y = \frac{5}{7}x$   
 10. a) 275 km b) 300 km  
 Z 1. a) I, II, IV b) I, II, III c) II, III, IV  
 d) I, III, IV e) I, II, IV f) III, IV  
 2. a) malejąca b), c) rosnąca  
 3. a) rosnąca dla  $m < 5$ , stała dla  $m = 5$ ,  
 malejąca dla  $m > 5$   
 b) rosnąca dla  $m > -\frac{1}{5}$ ,  
 stała dla  $m = -\frac{1}{5}$ ,  
 malejąca dla  $m < -\frac{1}{5}$   
 c) rosnąca dla  $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ ,  
 stała dla  $m \in \{-1, 1\}$ ,  
 malejąca dla  $m \in (-1; 1)$   
 4. a), d) rosnąca b), e), f) malejąca  
 c) stała  
 5. a)  $y = \frac{2}{3}x + 4$  b)  $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$   
 c)  $y = -\frac{1}{2}x - 2$   
 6. a)  $y = \frac{2}{5}x - 2$ ,  $y = -\frac{3}{5}x + 3$ ,  
 $y = \frac{3}{2}x + 3$ ,  $y = -x - 2$   
 b)  $y = -\frac{3}{2}x - 72$ ,  $y = 2x - 72$ ,  
 $y = -4x + 144$ ,  $y = 3x + 144$   
 7. a)  $y = -x + 3$   
 b)  $y = -x - 4$  lub  $y = x - 4$   
 8. a)  $y = 6x$  b)  $y = \frac{2}{3}x$  c)  $y = \frac{4}{5}x$

10. a) 102 m b) tak  
 11. 1 : 500  
 12. a)  $y = -\frac{3}{4}x - 3$  lub  $y = \frac{3}{4}x - 3$   
 b)  $y = -\frac{3}{7}x - 3$  lub  $y = \frac{3}{7}x - 3$   
 c)  $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x - 3$  lub  $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - 3$   
 13. a)  $y = -5\frac{1}{3}x + 8$  lub  $y = 5\frac{1}{3}x - 8$   
 b)  $y = -4x + 6$  lub  $y = 4x - 6$   
 c)  $y = -\frac{8\sqrt{2}}{3}x + 4\sqrt{2}$   
 lub  $y = \frac{8\sqrt{2}}{3}x - 4\sqrt{2}$

## 5.3. Równanie prostej na płaszczyźnie

- Ć 1. a)  $y = 2x - 3$  b)  $y = -\frac{1}{2}x + 3$   
 c)  $y = \frac{2}{3}x - 1$   
 2. a), b) są c), d) nie są  
 3. a)  $x = -3$ ; nie jest b)  $y = -3$ ; jest  
 c)  $x = 8$ ; nie jest  
 5.  $l, n, p, r$   
 Z 1. a)  $y = \frac{1}{3}x - 1$ ,  $x - 3y - 3 = 0$ ; nie należą  
 b)  $y = -1\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$ ,  $4x + 3y + 8 = 0$ ;  
 nie należą  
 c)  $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{2}$ ,  $3x - 4y + 10 = 0$ ;  
 A należy, B nie należy  
 2. a)  $(0, 2)$ ,  $(-1, 0)$  b)  $(0, 1)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$   
 c)  $(0, 4)$ ,  $(-\frac{4}{3}, 0)$  d)  $(0, -3)$ ,  $(\frac{9}{2}, 0)$   
 e)  $(0, -4)$ ,  $(16, 0)$  f)  $(0, 3)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$   
 3. a)  $AB: y + 1 = 0$ ,  $DC: y - 2 = 0$ ,  
 $AD: 3x - y + 5 = 0$ ,  $BC: 3x - y - 10 = 0$   
 b)  $AB: x + 2y + 2 = 0$ ,  $DC: x + 2y - 4 = 0$ ,  
 $AD: x + 2 = 0$ ,  $BC: x - 2 = 0$   
 c)  $AB: x - 3y - 2 = 0$ ,  $DC: x - 3y + 6 = 0$ ,  
 $AD: x + y + 2 = 0$ ,  $BC: x + y - 6 = 0$   
 4. a)  $m = 8$  b)  $m = -\frac{7}{6}$   
 c)  $m = -\frac{1}{6}$  d)  $m = -6$   
 e)  $m = \frac{3}{4}$  f)  $m = -\frac{1}{8}$   
 6. a)  $m = -\frac{3}{5}$  b)  $m = -3$  lub  $m = 3$   
 7. a)  $m \in [-4; 4]$  b)  $m \in [-10; 2]$   
 8. 0 dla  $m \in (-\infty; \frac{1}{7}) \cup (2; \infty)$ ,  
 1 dla  $m \in \{\frac{1}{7}, 2\}$ ,  
 2 dla  $m \in (\frac{1}{7}; 2)$   
 10. a)  $(8, 0)$ ,  $(0, 6)$ ;  $y = -\frac{3}{4}x + 6$   
 b)  $(5, 0)$ ,  $(0, -3)$ ;  $y = \frac{3}{5}x - 3$   
 c)  $(-1, 0)$ ,  $(0, 4)$ ;  $y = 4x + 4$

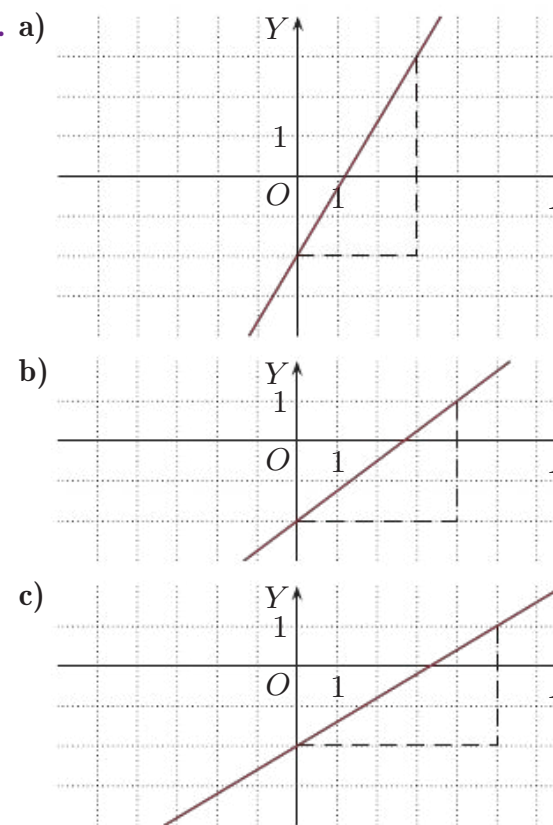
11. a)  $y = -3x + 9$ , malejąca  
 b)  $y = \frac{1}{2}x + 2$ , rosnąca  
 c)  $y = \frac{1}{4}x - 2$ , rosnąca  
 12. a)  $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$  b)  $\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} = 1$   
 c)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

## Płaszczyzna w trójwymiarowym układzie współrzędnych

1. a)  $(1, 2, 4)$  b)  $(-2, 5, -1)$   
 2. a)  $z = 0$  b)  $y = 0$  c)  $x = 0$   
 3. a)  $2x + y + z - 3 = 0$   
 b)  $3x + 2y - z - 4 = 0$   
 4.  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$

## 5.4. Współczynnik kierunkowy prostej

- Ć 1. a)  $\frac{5}{6}$  b) 1 c)  $-\frac{5}{3}$   
 2. a), c) jest b) nie jest  
 6. a)



9. a)  $y = -\frac{1}{2}x + 7$  b)  $y = -3x - 1$   
 c)  $y = \frac{1}{3}x + 2$   
 Z 1.  $AB: -\frac{1}{3}$ ,  $BC: 3$ ,  $AC: \frac{1}{2}$   
 2.  $AB: \frac{1}{2}$ ,  $BC: -1$ ,  $CD: -\frac{1}{5}$ ,  $AD: -6$   
 3. a)  $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$  b)  $y = -2x + 3$   
 c)  $y = -12x + 5$  d)  $y = 2x - 3\frac{2}{3}$   
 e)  $y = -6$  f)  $y = \sqrt{3}x + 1$

4. a)  $AB: y = \frac{2}{7}x - \frac{6}{7}$ ,  $AD: y = 2x + 6$ ,  
 $BC: y = 2x - 6$ ,  $CD: y = \frac{2}{7}x + \frac{18}{7}$   
 b)  $AB: y = -\frac{2}{7}x - 1\frac{2}{7}$ ,  $AD: y = -\frac{5}{3}x - 2\frac{2}{3}$ ,  
 $BC: y = -\frac{5}{3}x + 7$ ,  $CD: y = -\frac{2}{7}x + 2\frac{6}{7}$   
 5. a)  $PQ$  i  $RS: \frac{2}{3}$ ,  $QR: -\frac{10}{3}$ ,  $PS: -\frac{4}{3}$   
 b)  $PQ: -\frac{7}{2}$ ,  $RS: \frac{5}{3}$ ,  $QR$  i  $PS: -\frac{2}{5}$   
 6. a)  $m = 2$  b)  $m = -\frac{5}{3}$   
 7.  $m = 8$   
 8.  $m = -3$  lub  $m = 3$   
 10. a)  $y - 1 = 2(x - 2)$   
 b)  $y + 5 = 7(x + 3)$   
 c)  $y + 9 = -\frac{7}{3}(x - 2)$   
 d)  $y - \sqrt{2} = \sqrt{2}(x + 1)$   
 12. a) 60 km/h, 60 km/h b) 84

## 5.5. Warunek prostokątności prostych

- Ć 2. a), b) są c) nie są  
 3. a)  $-5$  b)  $-\frac{1}{9}$  c)  $\frac{3}{7}$  d)  $-3\sqrt{2}$   
 5. a)  $y = \frac{1}{3}x - 1$  b)  $y = 10x - 1$   
 c)  $y = -\frac{7}{3}x + 9$   
 6. a)  $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$  b)  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$   
 c)  $y = -\frac{3}{2}x - 3$   
 7. a)  $x = 6$  b)  $y = -5$  c)  $y = -5$   
 Z 1. a)  $y = \frac{1}{3}x - 3$  b)  $y = -\frac{3}{2}x + 7$   
 c)  $y = \frac{3}{4}x + 1$  d)  $y = -\frac{2}{7}x$   
 2. a)  $AB: y = -x + 6$ ,  $BC: y = x - 2$ ,  
 $AC: y = 5$ ; jest  
 b)  $AB: y = -x - 3$ ,  $BC: y = 2x - 3$ ,  
 $AC: y = x + 1$ ; jest  
 c)  $AB: y = -2$ ,  $BC: y = -\frac{1}{2}x + 2$ ,  
 $AC: y = x + 5$ ; nie jest  
 d)  $AB: y = x + \frac{3}{2}$ ,  $BC: y = -\frac{1}{2}$ ,  
 $AC: x = 4\frac{1}{2}$ ; jest  
 3. a)  $AC: y = x - 4$ ,  $BD: y = -x + 2$   
 b)  $AC: y = 3x + 1$ ,  $BD: y = -\frac{1}{3}x + 1$   
 4. a) nie jest b) jest  
 6.  $Ob = 4\sqrt{34}$ ,  $P = 34$   
 7. a)  $(-1, 7)$  b)  $(-5, -6)$   
 8.  $l_1: y = \frac{1}{2}x + 3$ ,  $l_2: y = -2x + 8$ ; o 300%  
 9. a) są b) nie są  
 10. a)  $m = 5$  b)  $m = -\frac{4}{5}$  lub  $m = \frac{4}{5}$

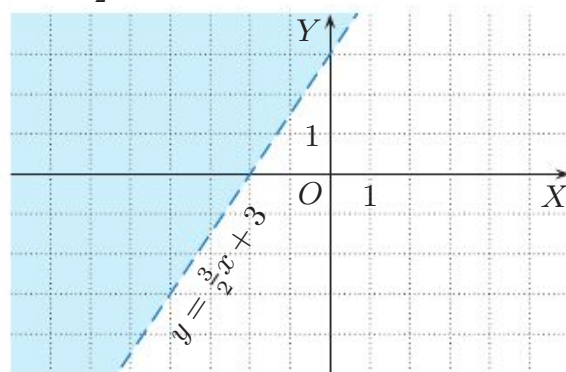


## 5.6. Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

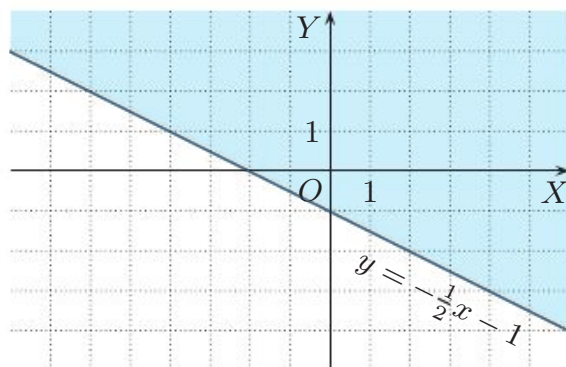
- Ć 1. a)  $x = -1, y = 2$  b)  $x = 2, y = 5$   
c)  $x = 1, y = -2$
2. a), c) sprzeczny  
b) nieoznaczony:  $x \in \mathbb{R}, y = 2x - 6$
3. a) sprzeczny b) nieoznaczony  
c) oznaczony
- Z 1. a)  $x = 3, y = 4$  b)  $x = 4, y = -6$   
c)  $x = 2, y = 1$  d)  $x = 1, y = 6$   
e) nieoznaczony,  $x \in \mathbb{R}, y = \frac{2}{3}x - 2$   
f) sprzeczny
2. a)  $x = 3, y = 0$  b)  $x = 3, y = 4$   
c)  $x = 2, y = 0$  d)  $x = 1, y = 4$   
e) sprzeczny  
f) nieoznaczony,  $x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
3. a) np.  $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$   
b) np.  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$   
c) np.  $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 6x - 4y = -4 \end{cases}$
4. a)  $a_1 = a_2$  i  $b_1 = b_2$   
b)  $a_1 = a_2$  i  $b_1 \neq b_2$   
c)  $a_1 \neq a_2$  i  $b_1, b_2$  dowolne
5. a) oznaczony dla  $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ,  
sprzeczny dla  $k = -2$   
b) oznaczony dla  $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ,  
nieoznaczony dla  $k = \frac{1}{2}$   
c) oznaczony dla  $k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ ,  
nieoznaczony dla  $k = -\frac{1}{2}$ ,  
sprzeczny dla  $k = \frac{1}{2}$
6. a)  $A(-1, -3), B(3, -3), C(8, 2), D(4, 2)$   
b)  $A(-2, -3), B(4, 0), C(2, 4), D(-4, 1)$   
c)  $A(-2, -4), B(\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5}), C(4\frac{2}{5}, 9\frac{1}{5}), D(2, 8)$
7.  $A(-3, -3), B(6, 0), C(5, 3), D(-1, 1)$
8. a) 12 b) 27
9.  $A(-6, -5)$
10.  $(-4, -4)$
11. a) 24 b) 31,5

## 5.7. Układy nierówności liniowych

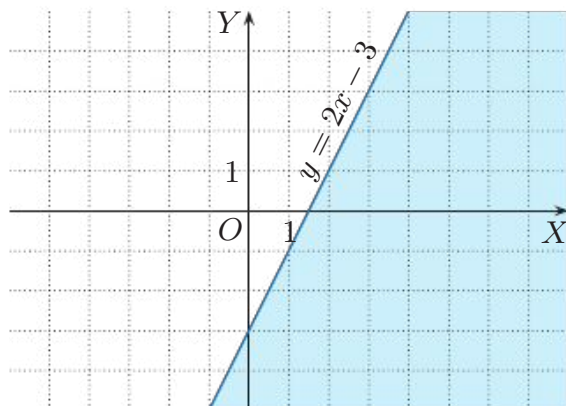
Ć 1. a)  $y > \frac{3}{2}x + 3$



b)  $y \geq -\frac{1}{2}x - 1$

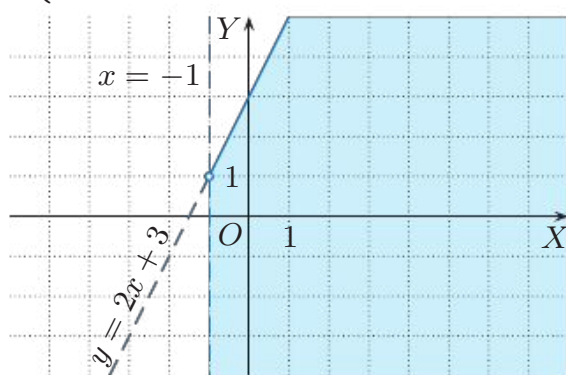


c)  $y \leq 2x - 3$

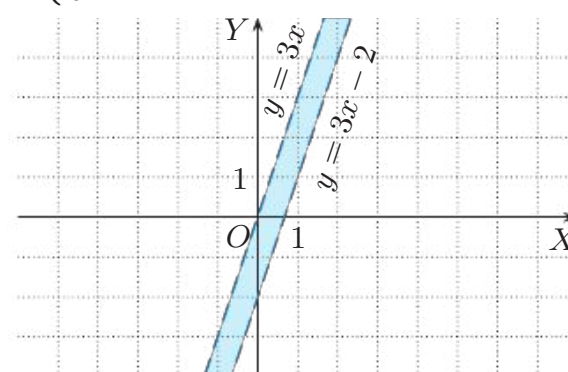


2. a)  $y < x + 3$  b)  $y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$   
c)  $x \leq 2$

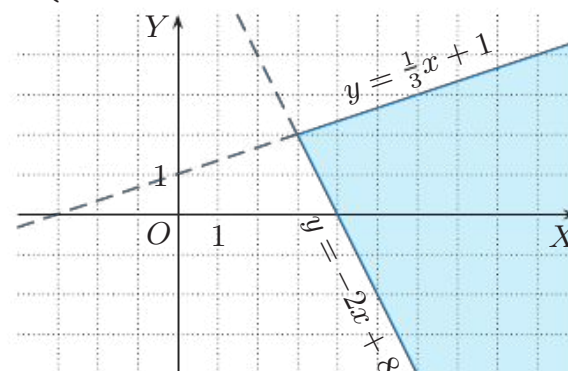
3. a)  $\begin{cases} y \leq 2x + 3 \\ x > -1 \end{cases}$



3. b)  $\begin{cases} y > 3x - 2 \\ y < 3x \end{cases}$



c)  $\begin{cases} y \leq \frac{1}{3}x + 1 \\ y \geq -2x + 8 \end{cases}$



Z 1. a)  $P, R$  b) żaden c)  $R$

2. a)  $\begin{cases} y \leq -x + 4 \\ y \geq -4x + 4 \end{cases}$  b)  $\begin{cases} y < -x + 2 \\ y \geq -x - 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + 1 \\ x < 2 \end{cases}$

3. a)  $\begin{cases} y < \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y > -x + 3 \\ x < 5 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} y > -x + 1 \\ y > x + 1 \\ y < -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

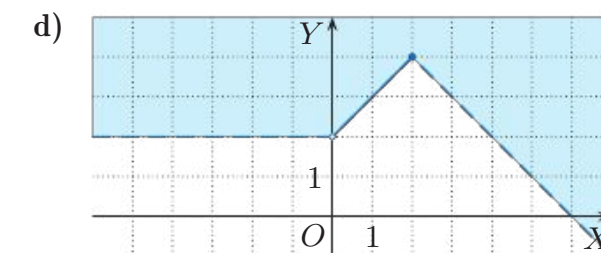
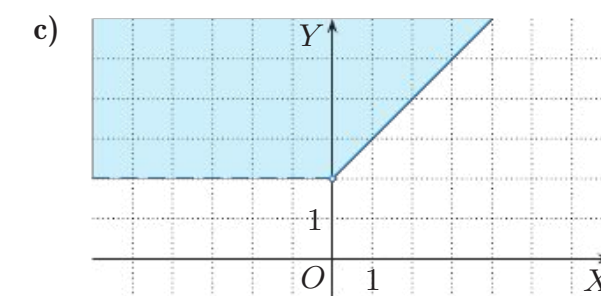
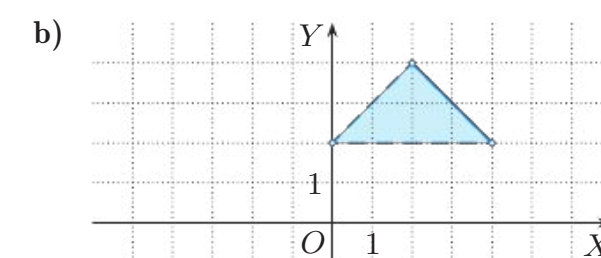
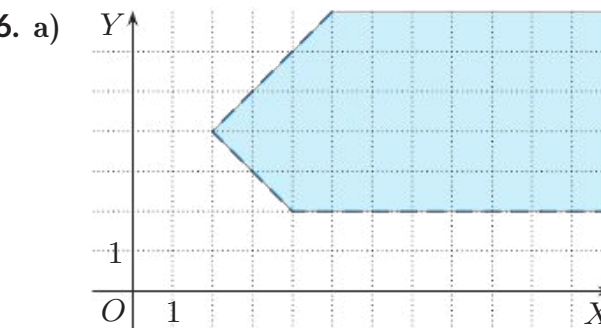
4. a)  $(-1, -1), (-1, 7), (3, 3)$

b)  $(-4, -3), (5, -3), (2, 6)$

c)  $(1, -4), (5, 4), (-3, 0)$

5. a)  $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -2 \\ y \leq -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} \\ y \geq -\frac{3}{5}x - \frac{6}{5} \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \\ y \leq \frac{1}{3}x + 2 \\ y \geq -\frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$



## Programowanie liniowe

1. a) wartość najmniejsza:  $-5$ ,  
wartość największa:  $22$   
b) wartość najmniejsza:  $-3$ ,  
wartość największa:  $6$   
c) wartość najmniejsza:  $-3$ ,  
wartość największa:  $7$

## 5.8. Równania i nierówności liniowe z parametrami

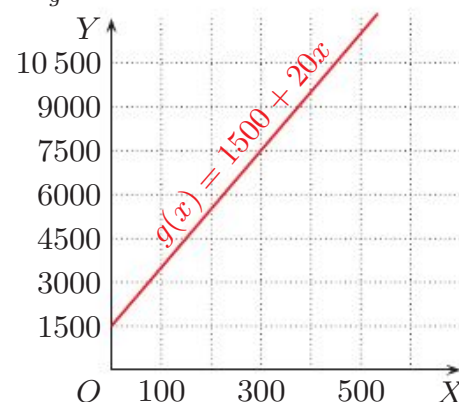
- Ć 1. a) sprzeczne dla  $a = 2$ ,  
jedno rozwiązanie dla  $a \neq 2$ :  $x = \frac{10a}{a-2}$   
b) tożsamościowe dla  $a = 4$ ,  
jedno rozwiązanie dla  $a \neq 4$ :  $x = 1$   
c) tożsamościowe dla  $a = \frac{1}{2}$ ,  
sprzeczne dla  $a = -\frac{1}{2}$ ,  
jedno rozwiązanie dla  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ :  
 $x = \frac{1}{4a+2}$
2. tożsamościowe dla  $a = b = 0$ ,  
sprzeczne dla  $a = 0$  i  $b \neq 0$ ,  
jedno rozwiązanie dla  $a \neq 0$
3. a) sprzeczne dla  $a = \frac{1}{2}b$ ,  
jedno rozwiązanie dla  $a \neq \frac{1}{2}b$ :  $x = \frac{a^2+1}{2a-b}$ ,  
dla  $a = 2$  i  $b = -1$ :  $x = 1$   
b) sprzeczne dla  $a = b = 0$ ,  
jedno rozwiązanie dla  $a \neq 0$  lub  $b \neq 0$ :  
 $x = \frac{b-2}{a^2+b^2}$ ,  
dla  $a = 2$  i  $b = -1$ :  $x = -\frac{3}{5}$   
c) tożsamościowe dla  $b = 3a$ ,  
jedno rozwiązanie dla  $b \neq 3a$ :  $x = -\frac{1}{2}$   
d) tożsamościowe dla  $a = 2$  i  $b = -2$ ,  
sprzeczne dla  $a = -b$  i  $b \neq -2$ ,  
jedno rozwiązanie dla  $a \neq -b$ :  $x = \frac{b+2}{a+b}$ ,  
dla  $a = 2$  i  $b = -1$ :  $x = 1$   
e) tożsamościowe dla  $a = -2$  i  $b = -3$ ,  
sprzeczne dla  $a = \frac{2}{3}b$  i  $b \neq -3$ ,  
jedno rozwiązanie dla  $a \neq \frac{2}{3}b$ :  $x = \frac{3b+9}{3a-2b}$ ,  
dla  $a = 2$  i  $b = -1$ :  $x = \frac{3}{4}$   
f) tożsamościowe dla  $a = b = 0$ ,  
sprzeczne dla  $a = 3b$  i  $a \neq 0$ ,  
jedno rozwiązanie dla  $a \neq 3b$ :  $x = \frac{b-a}{a-3b}$ ,  
dla  $a = 2$  i  $b = -1$ :  $x = -\frac{3}{5}$
4. a)  $m < 2$  b)  $m > -\frac{3}{2}$   
c)  $m > 0$  d)  $m > 3$
5. a)  $k = 4$  b)  $k = -3$   
c) nie ma takiego  $k$  d)  $k = \frac{5}{2}$
- Z 1. a)  $m > -\frac{12}{5}$  b)  $m > 0$  c)  $m > 2$   
2. a) 0 dla  $m = 2$ , 1 dla  $m \neq 2$   
b) 0 dla  $m = -3$ , 1 dla  $m \neq -3$   
c) 1 dla  $m \neq -1$ ,  
nieskończenie wiele dla  $m = -1$

- d) 1 dla  $m \neq \frac{1}{2}$ ,  
nieskończenie wiele dla  $m = \frac{1}{2}$   
e) 0 dla  $m = 1$ , 1 dla  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,  
nieskończenie wiele dla  $m = -1$   
f) 0 dla  $m = 0$ , 1 dla  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ ,  
nieskończenie wiele dla  $m = -2$
3. a) 0 dla  $2p = q$  i  $p \neq 4$ , 1 dla  $2p \neq q$ ,  
nieskończenie wiele dla  $p = 4$  i  $q = 8$   
b) 0 dla  $p = 3$  i  $q \neq 2$ , 1 dla  $p \neq 3$ ,  
nieskończenie wiele dla  $p = 3$  i  $q = 2$   
c) 1 dla  $p \neq -q$ , nieskończenie wiele  
dla  $p = -q$   
d) 0 dla  $p = -q \neq 0$ , 1 dla  $p \neq q$  i  $p \neq -q$ ,  
nieskończenie wiele dla  $p = q$   
e) 1 dla  $p \neq -q$ , nieskończenie wiele dla  
 $p = -q$   
f) 0 dla  $p \neq 0$  i  $p = \frac{1}{2}q$ , 1 dla  $p \neq \frac{1}{2}q$ ,  
nieskończenie wiele dla  $p = q = 0$

4. a) dla  $a = 2$  sprzeczne,  
dla  $a \neq 2$ :  $x = \frac{4a-1}{a-2}$   
b) dla  $x = 4$  sprzeczne,  
dla  $x \neq 4$ :  $a = \frac{2x-1}{x-4}$
5. a)  $k \in [-\frac{5}{6}; \frac{7}{6}]$  b)  $k \in [-8; 0) \cup (0; 8]$

## 5.9. Funkcja liniowa - zastosowania

- Ć 1.  $D_g = \mathbb{N}$



2. a) 400 b) 600 c) 1100
- Z 1. b) 50 000 km  
2. b) korzystniej z wypożyczalni Waga-  
bunda dla liczby godzin większej od 4  
c) dla liczby godzin większej od 4  
3. b) po 4 godzinach c) o 2,5 km/h  
4. a) o 11.00 b) 20 km c) o 12.00

5. 3 h 45 min  
6.  $t$  - czas [h]  
a)  $d_1(t) = 16t$ ,  $t \in [0; 2,5]$ ;  
 $d_2(t) = 40 - 16t$ ,  $t \in [0; 2,5]$   
b)  $d(t) = |32t - 40|$ ,  $D_d = [0; \frac{5}{2}]$ ;  
po 1 h i po 1,5 h

## Postać parametryczna równania prostej

3. a)  $t = 4$  b)  $t = -3$  c)  $t = \frac{1}{6}$   
 $P$  i  $Q$  nie leżą na prostej  $l$ .  
4. a) tak b) nie  
5. a)  $Q$  b)  $R$

## Zestaw I

1. a) wszystkie b)  $P, R$   
2. a) ujemne dla  $x < -6$ ,  
większe od 2 dla  $x > -3$   
b) ujemne dla  $x > \frac{5}{3}$ ,  
większe od 2 dla  $x < 1$   
c) ujemne dla  $x > -\frac{6}{5}$ ,  
większe od 2 dla  $x < -2$   
3. a)  $(9, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $P = 13,5$   
b)  $(14, 0)$ ,  $(0, -8)$ ,  $P = 56$   
c)  $(-\frac{5}{2}, 0)$ ,  $(0, -\frac{15}{2})$ ,  $P = 9,375$   
4. a) rosnąca dla  $m \in (-\frac{1}{2}; \infty)$ ,  
malejąca dla  $m \in (-\infty; -\frac{1}{2})$ ,  
stała dla  $m = -\frac{1}{2}$   
b) rosnąca dla  $m \in (-\infty; 9)$ ,  
malejąca dla  $m \in (9; \infty)$ ,  
stała dla  $m = 9$   
5. a), b) należą  
6. a) 15 b) 12 c) 16  
7. a)  $y = -\frac{1}{3}x + 7$ ; malejąca  
b)  $y = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$ ; rosnąca  
8. a)  $y = -2x - 7$   
b)  $y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$   
c)  $x = -3$  d)  $y = -1$   
e)  $y = -\frac{5}{3}x - 6$  f)  $x = -3$   
9. a)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$   
b)  $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$   
c)  $f(x) = -\frac{2}{5}x + 2\frac{4}{5}$   
d)  $f(x) = \sqrt{2}x$

10. a) dla  $m = 2$  nieskończenie wiele rozwią-  
zań, dla  $m \neq 2$  jedno rozwiązanie:  $x = 6$   
b) dla  $m = 3$  sprzeczne,  
dla  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$  jedno rozwiązanie:  
 $x = \frac{1}{m-3}$ , dla  $m = -3$  nieskończenie wiele  
rozwiązań

## Zestaw II

1. a)  $x \in (-\infty; -3]$   
b)  $x \in [-4; \infty)$   
c)  $x \in [2\sqrt{2}; \infty)$   
2. a)  $y = \frac{3}{4}x$ ,  $y = -\frac{4}{3}x$ ,  $y = -\frac{1}{7}x + 7\frac{1}{7}$ ;  
jest  
b)  $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$ ,  $y = \frac{4}{3}x + 8$ ,  
 $y = -\frac{3}{4}x + 1\frac{3}{4}$ ; jest  
3.  $AB$ :  $y = \frac{1}{2}x - 2$ ,  $BC$ :  $y = -2x + 8$ ,  
 $CD$ :  $y = \frac{1}{2}x + 3$ ,  $AD$ :  $y = -2x - 7$   
4. a)  $x = -3$ ,  $y = 2$  b)  $x = 3$ ,  $y = 6$   
c) sprzeczny d)  $x = -5$ ,  $y = -1$   
e)  $x = 8$ ,  $y = 5$  f)  $x = -8$ ,  $y = -7$   
5. a)  $(0, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(2, 0)$ ;  $P = 2$   
b)  $(-4, -2)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(-1, 4)$ ;  $P = 15$   
c)  $(-2, -3)$ ,  $(-2, \frac{17}{2})$ ,  $(\frac{36}{5}, \frac{8}{5})$ ;  $P = 52,9$   
6.  $(-1, -3)$ ,  $(4, -\frac{1}{2})$ ,  $(5, 5)$ ,  $(0, \frac{5}{2})$ ;  
 $y = \frac{11}{2}x + \frac{5}{2}$ ,  $y = \frac{11}{2}x - \frac{45}{2}$   
7. a) wierzchołki:  $(-4, -6)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(1, 4)$ ,  
spodek wysokości:  $(0, 2)$   
b) wierzchołki:  $(-4, 1)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(-1, -5)$ ,  
spodek wysokości:  $(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5})$   
8.  $(2, 0)$ ,  $(6, 2)$ ,  $(3, 4)$

## Zadania z kontekstem realistycznym

1. 1,5 h  
2. a) 140 b) 756 zł  
3. a) wariant I: 950 zł, wariant II: 690 zł  
b)  $f_I(x) = \begin{cases} 800 & \text{dla } 0 \leq x \leq 200 \\ x + 600 & \text{dla } x > 200 \end{cases}$   
 $f_{II}(x) = \begin{cases} 600 & \text{dla } 0 \leq x \leq 300 \\ 1,8x + 60 & \text{dla } x > 300 \end{cases}$   
c) więcej niż 675 km  
4. 78 500 zł  
5.  $y = 2x - 7$ ,  $y = -2x + 7$



**Przed obowiązkową maturą z matematyki**

1. D 2. A 3. A 4. A 5. B 6. C 7. C  
8. D 9. A 10. D

11. PF

12.1. FP

12.2.  $AC: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ,  $BC: y = 3x - 4$

13. CF

14. A3

15.2. (6, 2)

16. -4

18.  $y = -2x - 8$

19. -7

20. 12

22.2.  $AD: y = -2x - 5$ ,  $CD: y = \frac{1}{4}x + 4$

23. 39

24. 38,5

25. (2, 0)

26.  $D(\frac{14}{5}, \frac{12}{5})$

**Przed maturą z matematyki  
na poziomie rozszerzonym**

1.  $x_0 = 4\frac{2}{3}$

2. 311

4. 19

**Kąty**

1. a)  $60^\circ$ ,  $120^\circ$  b)  $45^\circ$ ,  $135^\circ$   
c)  $30^\circ$ ,  $150^\circ$  d)  $75^\circ$ ,  $105^\circ$

2.  $60^\circ$ ,  $120^\circ$

4.  $\triangle CDP$ :  $25^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  
 $\triangle CBP$ :  $30^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $75^\circ$

**6.1. Miary kątów w trójkącie**

☐ 1. b)  $18^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $90^\circ$

2. a)  $15^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $105^\circ$   
b)  $17,5^\circ$ ,  $55^\circ$ ,  $107,5^\circ$

3.  $16^\circ$ ,  $128^\circ$ ,  $36^\circ$ ;  $52^\circ$ ,  $54^\circ$ ,  $74^\circ$ ;  
 $54^\circ$ ,  $56^\circ$ ,  $70^\circ$ ;  $124^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $36^\circ$ ;  
 $20^\circ$ ,  $86^\circ$ ,  $74^\circ$ ;  $94^\circ$ ,  $16^\circ$ ,  $70^\circ$

☐ 1. a)  $\alpha = 22^\circ$ ,  $\beta = 48^\circ$   
b)  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$

2.  $44^\circ$ ,  $66^\circ$ ,  $70^\circ$

3. a)  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 80^\circ$ ,  $\gamma = 50^\circ$

b)  $\alpha = 52^\circ$ ,  $\beta = 52^\circ$ ,  $\gamma = 76^\circ$

4.  $|\sphericalangle AEF| = 67^\circ$ ,  $|\sphericalangle AFB| = 65^\circ$ ,  
 $|\sphericalangle BCF| = 19^\circ$ ,  $|\sphericalangle EFD| = 83^\circ$ ,  
 $|\sphericalangle DFC| = 25^\circ$ ,  $|\sphericalangle CDF| = 84^\circ$

5. a) oba trójkąty:  $20^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $90^\circ$

b)  $\triangle ABE$ :  $35^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  
 $\triangle AEC$ :  $35^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $105^\circ$

6.  $74^\circ$ ,  $106^\circ$

10. a)  $540^\circ$  b)  $720^\circ$  c)  $(n-2) \cdot 180^\circ$

11. 10

12. dwa trójkąty:  $30^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $120^\circ$ ;  
pozostałe dwa:  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$

**6.2. Trójkąty przystające**

☐ 1.  $|AB| = |DE|$ ,  $|AC| = |DF|$ ,  
 $|BC| = |EF|$ ,  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$ ,  
 $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$ ,  
 $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$

2. a), b) nie

3. a) KBK b) BKB c) KBK

6. a), d) tak b), c) nie

7. sześć

**6.3. Twierdzenie Talesa**

1. a)  $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}$ ,  $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|DE|}$  b) 2,4

2. b)  $|DE| = 3$ ,  $|AD| = 6$

3.  $|ED| = 10,5$

4. działka I: 35 m, działka III: 21 m

6. a) np.  $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|}$ ,  $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|}$ ,  
 $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|}$

☐ 1. a)  $x = 6$ ,  $y = 2,4$  b)  $x = 10$ ,  $y = 12$

2.  $5\frac{1}{3}$  cm, 4 cm,  $2\frac{2}{3}$  cm

5. a)  $k$  i  $m$  b)  $l$  i  $m$

6. b)  $Ob_{BDE} = 3 + 4\sqrt{3} + \sqrt{57}$ ,  
 $Ob_{PQR} = \frac{7}{2}(3 + \sqrt{3})$

**6.4. Wielokąty podobne**

☐ 1. a), c) jest b) nie jest

2. a) są b) nie są

3. a)  $F_1$  do  $F_2$ :  $\frac{3}{2}$ ,  $F_2$  do  $F_1$ :  $\frac{2}{3}$   
b)  $F_1$  do  $F_2$ :  $\frac{3}{5}$ ,  $F_2$  do  $F_1$ :  $\frac{5}{3}$

4. a)  $k = \frac{5}{6}$ ,  $|CD| = 4,5$ ,  $|A'D'| = 7,8$ ,  
 $|B'C'| = 7,2$

b)  $k = 2,5$ ,  $|CD| = 5$ ,  $|A'B'| = 5$ ,  
 $|A'D'| = 2,4$

5. a) 54 cm

b) wysokości równoległoboku  $ABCD$ :  
 $3\sqrt{3}$  cm,  $6\sqrt{3}$  cm, wysokości równoleg-  
łoboku  $A'B'C'D'$ :  $\frac{9}{2}\sqrt{3}$  cm,  $9\sqrt{3}$  cm

☐ 1. a) 5:8 b) 1:2

2. 2:3

3. a) 120 cm b) 20 cm

5. a) 40, 100 b) 3:2

6. 3, 6, 7,5, 7,5

7.  $h = 7,2$  cm,  $h' = 7,5$  cm,  
suma obwodów: 73,5 cm

8.  $4\sqrt{2}$

9. 1,25

12. a)  $\sqrt{2} : 1$  b) około 297 mm

c) A5: 21 cm  $\times$  14,8 cm,  
A6: 10,5 cm  $\times$  14,8 cm

**6.5. Trójkąty podobne**

☐ 1.  $x = 8$ ,  $y = 3$ ;  $k = \frac{1}{2}$

2. a) są b) nie są

5. a)  $\frac{3}{4}$  b)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

☐ 1.  $T_1$  i  $T_3$ ,  $k_1 = \frac{2}{3}$ ;  $T_2$  i  $T_4$ ,  $k_2 = \frac{1}{2}$

2. a)  $k = \frac{4}{3}$ ,  $Ob = 34\frac{2}{3}$  b) 10, 20, 25

3. a)  $x = 2$ ,  $y = 2,5$  b)  $x = 15$ ,  $y = 13$

4. a) 52,5 b) 18,75

5. a) 20,  $2\frac{1}{2}$  b) 224, 28

6. a)  $\frac{3}{2}$   
b)  $\triangle DEC$ :  $6\sqrt{5} + 10$ ,  $\triangle ABC$ :  $9\sqrt{5} + 15$

7. a)  $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ , KKK;  
 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ , KKK;  
 $\triangle CBD \sim \triangle ACD$ , KKK  
b) 1,8, 3,2

8. 20 cm<sup>2</sup>

9. 10,8 m

13. b) 2 cm;  $P_{\triangle ABO} = 16$  cm<sup>2</sup>,  
 $P_{\triangle DCO} = 4$  cm<sup>2</sup>

14. b) 25 cm<sup>2</sup>, 15 cm<sup>2</sup>, 15 cm<sup>2</sup>, 9 cm<sup>2</sup>

**Pola czworokątów**

1. a) 135 cm<sup>2</sup> b) 36 cm

2. a)  $48\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup> b) 4,5 cm, 9 cm

3. 24 cm<sup>2</sup>, 5 cm

4. a) 32 cm<sup>2</sup> b) 64 cm<sup>2</sup>

**6.6. Pola wielokątów podobnych**

☐ 1. a)  $k = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{9}$   
b)  $k = 2$ ,  $\frac{P_2}{P_1} = 4$

3. a) 0,9 b) 1,5

4.  $k = \frac{1}{2}$ ,  $Ob_1 = (16 + 2\sqrt{5})$  cm,  
 $Ob_2 = (8 + \sqrt{5})$  cm

5. a) 1:800 b) tak c) 576 m<sup>2</sup>

6. a)  $k = \frac{1}{2}$ ,  $Ob = 30$  cm  
b)  $k = \frac{1}{3}$ ,  $Ob = 32$  cm  
c)  $k = \frac{2}{3}$ ,  $Ob = 28$  cm

☐ 1. a)  $k = 0,75$ ,  $P = 81$  cm<sup>2</sup>

b)  $k = \frac{5}{3}$ ,  $P = 400$  cm<sup>2</sup>

2. 200 cm<sup>2</sup>

3. a)  $(14 + 2\sqrt{29})$  cm  
b)  $12\sqrt{17}$  cm,  $36\sqrt{17}$  cm

4. 100 cm

5. a) 20 dm<sup>2</sup>, 320 dm<sup>2</sup>  
b)  $(12 + 6\sqrt{2})$  cm,  $(36 + 18\sqrt{2})$  cm

6. 1200 cm<sup>2</sup>

7. 2

8. 30 cm  $\times$  45 cm

9.  $(15 + 9\sqrt{5})$  cm

10. 6, 4

11. 22,5 cm<sup>2</sup>, 10 cm<sup>2</sup>

12. 625 m<sup>2</sup>, 400 m<sup>2</sup>

14. a) około 10,82 m b) 7 m<sup>3</sup>

**Fraktale**

1.  $\frac{27}{64}$

**6.7. Twierdzenie o dwusiecznej  
kąta w trójkącie**

☐ 1. a)  $3\frac{14}{17}$ ,  $9\frac{3}{17}$   
b)  $\sqrt{3} - 1$ ,  $3 - \sqrt{3}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $4 - 2\sqrt{3}$ ,  
 $2\sqrt{3} - 3$   
c) 12 d)  $\sqrt{2} - 1$

- Z** 1. a) 1,25, 3,75 b) 4,5, 7,5  
 2.  $\triangle BCP: \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}},$   
 $\triangle BAP: 2 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

#### Zestaw I

1. a)  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  b)  $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$   
 c)  $15^\circ, 67^\circ 30', 97^\circ 30'$   
 2.  $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$   
 3. a), b), d) tak c) nie  
 4. a) 12,5 cm, 12,5 cm, 10 cm  
 b)  $5\sqrt{2}$  cm,  $5\sqrt{2}$  cm,  $4\sqrt{2}$  cm  
 5.  $|PQ| = 4$  dm,  $P = 2$  dm<sup>2</sup>  
 6. 36  
 7. 3,2 cm, 4,8 cm;  $1\frac{5}{7}$  cm,  $2\frac{2}{7}$  cm;  
 2 cm, 4 cm  
 9.  $160 - 40\sqrt{2} \approx 103$  [m],  
 $80\sqrt{2} \approx 113$  [m]

#### Zestaw II

2. a) 37,5 b) 14,4  
 3. 100 cm, 160 cm  
 4. 10 dm<sup>2</sup>, 40 dm<sup>2</sup>, 360 dm<sup>2</sup>

#### Zadania z kontekstem realistycznym

1.  $x = 13^\circ$   
 2.  $\frac{2}{3}$   
 3. 3,5 cm  
 4. 58 m  
 5. 158 m  
 7. tak

#### Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. A 2. C 3. A 4. D 5. D 6. A 7. B 8. A  
 9. BH  
 10. PP  
 11. FF  
 12.1. A 12.2. C  
 14.1.  $4\frac{2}{7}$  cm,  $5\frac{5}{7}$  cm 14.2. 50 cm  
 15. B1  
 16.  $6 + \frac{3}{2}(\sqrt{5} + \sqrt{13})$   
 17. 96 cm  
 19. 6 cm,  $6\sqrt{3}$  cm,  $6\sqrt{3}$  cm

#### Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1. 0,4096  
 2.1.  $3\sqrt{2} + \sqrt{10}$  2.2.  $4 - \frac{2}{3}\sqrt{10}$   
 3.  $|PD| = 4,8, |PE| = 5,7$

#### 7.1. Wykres funkcji $f(x) = ax^2$

- C** 2. a), b) nie należy c), d) należy  
 3. a) 6 b) 2 c) 0,5 d) 0,75  
 4. a) rośnie w  $(-\infty; 0]$ , maleje w  $[0; \infty)$   
 b) oś symetrii:  $x = 0$ , wierzchołek:  $(0, 0)$   
 5.  $f_1(x) = -4x^2, f_2(x) = -2x^2,$   
 $f_3(x) = -x^2, f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2,$   
 $f_5(x) = -\frac{1}{8}x^2$

- Z** 1. a)  $f(D) = (-8; 0]$  b)  $f(D) = [0; 4]$   
 c)  $f(D) = [0; 12]$  d)  $f(D) = [-8; -2]$   
 2. A:  $y = x^2$ , B:  $y = \frac{1}{2}x^2$ , C:  $y = \frac{1}{4}x^2$ ,  
 D:  $y = \frac{1}{8}x^2$ , E:  $y = \frac{1}{16}x^2$   
 3. a)  $y = x^2$  b)  $y = \sqrt{2}x^2$   
 c)  $y = -\frac{1}{3}x^2$  d)  $y = -3x^2$

4. a)  $\frac{2}{3}$  b) 10  
 5. a)  $a = 4$  b)  $a = \frac{1}{4}$  c)  $a = 64$  d)  $a = 2$   
 6.  $a = \frac{3}{16}$   
 7. a)  $P(x) = \frac{1}{2}x^2, x > 0$   
 b)  $P(x) = \frac{2}{5}x^2, x > 0$

#### 7.2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ o wektor

- C** 1. a)  $[-3; \infty)$  b)  $[1; \infty)$   
 c)  $(-\infty; -4]$  d)  $(-\infty; 2]$   
 2. a) maleje w  $(-\infty; -3]$ , rośnie w  $[-3; \infty)$   
 b) maleje w  $(-\infty; 1]$ , rośnie w  $[1; \infty)$   
 c) rośnie w  $(-\infty; -2]$ , maleje w  $[-2; \infty)$   
 d) rośnie w  $(-\infty; 2]$ , maleje w  $[2; \infty)$   
 4. a)  $[-6, -3]$  b)  $[1, 0]$   
 5. a) maleje w  $(-\infty; 3]$ , rośnie w  $[3; \infty)$ ,  
 $f(D) = [-4; \infty), W(3, -4)$   
 b) maleje w  $(-\infty; -2]$ , rośnie w  $[-2; \infty)$ ,  
 $f(D) = [2; \infty), W(-2, 2)$   
 c) rośnie w  $(-\infty; -4]$ , maleje w  $[-4; \infty)$ ,  
 $f(D) = (-\infty; -1], W(-4, -1)$   
 d) rośnie w  $(-\infty; 1]$ , maleje w  $[1; \infty)$ ,  
 $f(D) = (-\infty; 3], W(1, 3)$

- Z** 1. a)  $y = (x - 1)^2 + 2$ ,  
 maleje w  $(-\infty; 1]$ , rośnie w  $[1; \infty)$   
 b)  $y = (x - 1)^2 - 2$ ,  
 maleje w  $(-\infty; 1]$ , rośnie w  $[1; \infty)$   
 c)  $y = (x + 3)^2 - 2$ ,  
 maleje w  $(-\infty; -3]$ , rośnie w  $[-3; \infty)$   
 d)  $y = (x + 2)^2 - 4$ ,  
 maleje w  $(-\infty; -2]$ , rośnie w  $[-2; \infty)$

2. a)  $W(-2, 4), x = -2$   
 b)  $W(-3, -1), x = -3$   
 c)  $W(2, 2), x = 2$  d)  $W(3, -1), x = 3$   
 3. a)  $f(D) = [-4; \infty)$  b)  $f(D) = [1; \infty)$   
 c)  $f(D) = (-\infty; 2]$  d)  $f(D) = (-\infty; 4]$   
 4. kolejno uzupełniamy:  $g(x) = 5(x+1)^2 + 2,$   
 $\vec{u} = [-2, 3], f(x) = \frac{5}{2}x^2 - 10,$   
 $g(x) = 2(x - 9)^2 - 3$   
 5. a)  $\vec{FG} = [4, 3]$  b)  $\vec{FG} = [-2, -2]$   
 c)  $\vec{FG} = [-3, -5]$  d)  $\vec{FG} = [4, -3]$   
 6. a)  $f(x) = x^2 + 1$  b)  $f(x) = 2x^2$   
 c)  $f(x) = -x^2 + 3$  d)  $f(x) = -4x^2 + 6$   
 7. a)  $p = -2$  b)  $p = 2$

#### Obliczanie wartości trójkianu kwadratowego

1. a) 4, 12 b)  $4\frac{1}{2}, 13$  c)  $-17, -34$   
 2. a) 5,  $2\frac{3}{4}$  b)  $-5, -\frac{1}{2}$  c) 3,  $-1\frac{1}{8}$   
 3. a)  $g(-2) = -17, f(-2) = -15,$   
 $h(-2) = -7$  b)  $g(-2) = -10\frac{1}{2},$   
 $h(-2) = -10\frac{1}{2}, f(-2) = -8$   
 4. a)  $c = 7$  b)  $c = 20$  c)  $c = -5\sqrt{2}$   
 5. A, B, E  
 6. a)  $x = -1, W(-1, -\frac{3}{2})$   
 b)  $x = -1, W(-1, 4)$   
 7. a)  $x = \frac{1}{2}, W(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4})$   
 b)  $x = \frac{3}{2}, W(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2})$  c)  $x = \frac{3}{2}, W(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$   
 d)  $x = -\frac{1}{2}, W(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2})$

#### 7.3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej

- C** 1. a)  $y = -2x^2 + 12x - 12$   
 b)  $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$   
 c)  $y = 3x^2 - 30x + 84$   
 2. a)  $y = (x - 4)^2 - 10, W(4, -10)$   
 b)  $y = (x + 2)^2 + 4, W(-2, 4)$

- c)  $y = (x - 3)^2 - 11, W(3, -11)$   
 d)  $y = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}, W(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$   
 e)  $y = (x + \frac{1}{2})^2, W(-\frac{1}{2}, 0)$   
 f)  $y = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}, W(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$

3. a) 5 b) 8 c) 0 d)  $-12$  e) 12 f) 4  
 4. a)  $W(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$  b)  $W(1, 3)$  c)  $W(1, \frac{1}{2})$   
 5. a)  $W(1, 1)$  b)  $W(-1\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$   
 c)  $W(2, 9)$  d)  $W(-1, -13)$

- Z** 1. a)  $f(x) = x^2 - x - 2\frac{3}{4}, \Delta = 12$   
 b)  $f(x) = -x^2 + 8x - 11, \Delta = 20$   
 c)  $f(x) = 2x^2 - 12x + 4, \Delta = 112$   
 d)  $f(x) = -3x^2 - 12x - 4, \Delta = 96$   
 e)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, \Delta = 4$   
 f)  $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x - 3, \Delta = 24$   
 2. a)  $f(x) = (x + 1)^2 + 2, W(-1, 2)$   
 b)  $f(x) = (x - 2)^2 - 6, W(2, -6)$   
 c)  $f(x) = -(x + 1)^2 + 2, W(-1, 2)$   
 d)  $f(x) = -4(x - 1)^2 + 5, W(1, 5)$   
 e)  $f(x) = 2(x + 2)^2 - 15, W(-2, -15)$   
 f)  $f(x) = -2(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{13}{2}, W(-\frac{3}{2}, \frac{13}{2})$   
 g)  $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}, W(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$   
 h)  $f(x) = -2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}, W(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$   
 i)  $f(x) = 3x^2 - 8, W(0, -8)$

3. a)  $W(-\frac{3}{2}, -\frac{15}{2})$  b)  $W(1, \frac{7}{2})$  c)  $W(-1, 3)$   
 4. a)  $f(x) = (x + 1)^2 + 3$   
 b)  $f(x) = -(x + 3)^2 - 3$   
 c)  $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$   
 5. a)  $b = -4$  b)  $b = 8$  c)  $b = 4$  d)  $b = -6$   
 6. a)  $a = -1, f(x) = -(x - 2)^2 + 1$   
 b)  $a = -3, f(x) = -3(x - 1)^2 + 5$   
 c)  $a = \frac{1}{4}, f(x) = \frac{1}{4}(x + 4)^2 + 1$   
 d)  $a = -2, f(x) = -2(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{2}$   
 7. a)  $b = -4, c = 8$  b)  $b = 2, c = -2$   
 c)  $b = -1, c = -\frac{3}{4}$  d)  $b = -20, c = 100$   
 8. a)  $a = 3, c = 5$  b)  $a = -\frac{1}{2}, c = -21$   
 c)  $a = -\frac{3}{2}, c = -2$  d)  $a = 2, c = \frac{7}{2}$

9. a)  $a = \frac{1}{2}, b = -2, c = 2$   
 b)  $a = 1, b = 2, c = 0$   
 c)  $a = -\frac{2}{9}, b = 0, c = 3$   
 d)  $a = -3, b = -6, c = 0$   
 e)  $a = -1, b = 2, c = 1$   
 f)  $a = -2, b = 8, c = -4$



10. a)  $y = x^2 - 4x + 3$   
b)  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

11. a)  $y = -x^2 - 2x + 4$   
b)  $y = \frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{19}{5}$   
c)  $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2}$   
d)  $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$

12. a)  $[-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}]$  b)  $[\frac{1}{2}, \frac{25}{4}]$

#### 7.4. Równania kwadratowe (1)

Ć 1. Równanie kwadratowe może mieć 2 rozwiązania, 1 rozwiązanie lub 0 rozwiązań.

2. a)  $\{-2, 0\}$  b)  $\{0, \frac{7}{3}\}$   
c)  $\{0, \frac{5}{2}\}$  d)  $\{0, 16\}$

3. a)  $x = -\frac{5}{4}, x = \frac{5}{4}$   
b)  $x = -\frac{1}{5}, x = \frac{1}{5}$   
c)  $x = -\frac{11}{2}, x = \frac{11}{2}$   
d)  $x = -21, x = 21$

4. a)  $x = -4$  b)  $x = \frac{1}{2}$  c)  $x = -\frac{1}{2}$   
d)  $x = \frac{3}{2}$  e)  $x = 2$  f)  $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

5. a)  $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$  b) sprzeczne  
c)  $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}, x = \frac{\sqrt{10}}{2}$  d) sprzeczne

Z 1. a)  $x = 0, x = 6$  b)  $x = -\frac{1}{27}, x = 0$   
c)  $x = 0, x = \frac{1}{6}$  d)  $x = -\frac{1}{9}, x = 0$   
e)  $x = 0, x = 2$  f)  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = 0$

2. a)  $x = -\frac{9}{10}, x = \frac{9}{10}$   
b)  $x = -\frac{2}{3}, x = \frac{2}{3}$   
c)  $x = -5$  d)  $x = 8$  e)  $x = 12$   
f)  $x = -\frac{1}{3}$  g)  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
h)  $x = 2$  i)  $x = 6$

3. a)  $(0, 0), (4, 0)$   
b)  $(-2, 0), (2, 0), (0, -12)$   
c)  $(0, 12)$ , nie przecina osi  $OX$   
d)  $(0, 0), (-\frac{1}{225}, 0)$   
e)  $(0, 4)$ , nie przecina osi  $OX$   
f)  $(-\frac{1}{15}, 0), (\frac{1}{15}, 0), (0, -4)$

4. a) 2 b) -4 c) 3

5. a)  $\{-6, 0\}$  b)  $\{3, 4\}$  c)  $\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\}$   
d)  $\{-6, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$

6. a)  $x = -2, x = 2$   
b)  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = -1, x = 1, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
c)  $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$   
d)  $x = -1, x = 0, x = 1$

#### Parabola

1. a)  $y = \frac{1}{2}x^2$  b)  $y = -\frac{1}{2}x^2$  c)  $y = \frac{3}{2}x^2$

2. a)  $y = \frac{1}{4}, F(0, -\frac{1}{4})$  b)  $y = -\frac{1}{8}, F(0, \frac{1}{8})$   
c)  $y = \frac{1}{8}, F(0, -\frac{1}{8})$  d)  $y = -2, F(0, 2)$

#### 7.5. Równania kwadratowe (2)

Ć 1. a)  $x = \frac{2}{3}$  b)  $x = -\frac{4}{5}$  c)  $x = \frac{7}{2}$

3. a)  $x = -1, x = 3$  b)  $x = -4, x = -2$   
c)  $x = -3 - \sqrt{2}, x = -3 + \sqrt{2}$

4. a)  $\Delta = 4 > 0$ , 2 rozwiązania  
b)  $\Delta = -8 < 0$ , 0 rozwiązań  
c)  $\Delta = 35 > 0$ , 2 rozwiązania  
d)  $\Delta = 49 > 0$ , 2 rozwiązania  
e)  $\Delta = 0$ , 1 rozwiązanie  
f)  $\Delta = -12 < 0$ , 0 rozwiązań  
g)  $\Delta = -2 < 0$ , 0 rozwiązań  
h)  $\Delta = \frac{25}{4} - 4\sqrt{2} > 0$ , 2 rozwiązania  
i)  $\Delta = 9 > 0$ , 2 rozwiązania

5. a)  $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}$   
b)  $x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{4}$   
c)  $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 2$  d)  $x_0 = \frac{1}{14}$   
e)  $x_1 = 3 - \sqrt{10}, x_2 = 3 + \sqrt{10}$   
f)  $x_1 = 2 - \sqrt{6}, x_2 = 2 + \sqrt{6}$   
g) sprzeczne h)  $x_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{6}, x_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{6}$   
i) sprzeczne

Z 1. a)  $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 7$  b)  $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 3$   
c)  $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$  d) sprzeczne  
e)  $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 1$  f)  $x_0 = -\frac{3}{2}$   
g) sprzeczne h)  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$   
i)  $x_0 = \frac{2}{3}$

2. a)  $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}$   
b)  $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 2$  c)  $x_0 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$   
d)  $x_1 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}$   
e)  $x_1 = \frac{-1-\sqrt{11}}{5}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{11}}{5}$   
f), g) sprzeczne

h)  $x_1 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$   
i)  $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{6}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{6}$

3. a)  $(0, -1), (-1, 0), (\frac{1}{3}, 0)$   
b)  $(0, 3), (-\frac{\sqrt{3}+3}{2}, 0), (\frac{\sqrt{3}-3}{2}, 0)$   
c)  $(0, 3), (1, 0), (-\frac{3}{4}, 0)$   
d)  $(0, 12), (-6, 0)$  e)  $(0, 5)$   
f)  $(0, 1), (\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$

4. a)  $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$   
b)  $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{5}$   
c)  $x_1 = 5 - \sqrt{13}, x_2 = 5 + \sqrt{13}$   
d)  $x_1 = 6, x_2 = 12$   
e)  $x_1 = \frac{7-\sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$   
f) sprzeczne

5. a) 2 b) 0

6. a)  $f(x) = 0$  dla  $x = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}, x = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ ;  
 $g(x) = 0$  dla  $x = \frac{9}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2}, x = \frac{9}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2}$ ;  
 $h(x) = 0$  dla  $x = 2, x = 2 + \sqrt{6}$   
b)  $f(x) = 0$  dla  $x = 4 - 2\sqrt{7}, x = 4 + 2\sqrt{7}$ ;  
 $g(x) = 0$  dla  $x = \frac{1}{2} - 2\sqrt{7}, x = \frac{1}{2} + 2\sqrt{7}$ ;  
 $h(x) = 0$  dla  $x = 4 - 4\sqrt{7}, x = 4$

7. a)  $x = 1 - \sqrt{2}, x = 1, x = 1 + \sqrt{2}$   
b)  $x = -2 - \sqrt{7}, x = -2 + \sqrt{7}, x = -1, x = -3$

8. a)  $x = -2, x = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$   
b)  $x = 0, x = \frac{2}{3}$   
c)  $x = -2, x = 1$   
d)  $x = -1 - 2\sqrt{2}, x = -1 + 2\sqrt{2}, x = -1, x = 1$

#### 7.6. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Ć 1. a)  $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 9$   
b)  $y = 4x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}$   
c)  $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x$

2. a)  $x_1 = 3, x_2 = 5$  b)  $x_1 = -6, x_2 = 2$   
c)  $x_1 = -8, x_2 = -4$  d)  $x_1 = 0, x_2 = 9$   
e)  $x_0 = 2$  f)  $x_0 = -7$

3. a)  $y = (x - 3)(x - 5)$   
b)  $y = (x + 7)(x - 4)$   
c)  $y = 3(x - \frac{1}{3})(x - 2)$   
d)  $y = 12(x + \frac{2}{3})(x + \frac{1}{4})$   
e)  $y = -2(x - 3)(x + 4)$   
f)  $y = -4(x + \frac{1}{4})(x - 1)$   
g) nie ma postaci iloczynowej  
h)  $y = (x + \sqrt{3} - 1)(x - \sqrt{3} - 1)$   
i)  $y = 2\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Z 1. a)  $x_1 = 3, x_2 = 13$  b)  $x_1 = 2, x_2 = -5$   
c)  $x_1 = -15, x_2 = -9$   
d)  $x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}$   
e)  $x_1 = -1, x_2 = \sqrt{2} - 1$   
f)  $x_1 = \sqrt{3} - 2, x_2 = 3 - \sqrt{2}$

2. a)  $y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 2)$   
b)  $y = -(x - 3)(x + 2)$   
c)  $y = 4(x - 1)(x + \frac{3}{4})$   
d)  $y = 3\left(x - \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$   
e) nie ma postaci iloczynowej  
f)  $y = (x - \sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$   
g)  $y = -2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$   
h)  $y = \frac{1}{3}x(x + \frac{1}{2})$   
i) nie ma postaci iloczynowej

3. a)  $b = -8, c = 15$  b)  $b = 5, c = -36$   
c)  $b = -7\frac{1}{3}, c = 2\frac{1}{3}$  d)  $b = \frac{11}{35}, c = -\frac{6}{35}$   
e)  $b = 5, c = 0$  f)  $b = 0, c = -3$   
g)  $b = -(1 + 2\sqrt{2}), c = 2 + \sqrt{2}$   
h)  $b = -2, c = -6$

4. a)  $x = 3, W(3, -9)$   
b)  $x = -2, W(-2, -8)$   
c)  $x = \frac{1}{2}, W(\frac{1}{2}, -4)$

5. a)  $(0, 0), (-6, 0), W(-3, 9)$   
b)  $(1, 0), (5, 0), (0, 5), W(3, -4)$   
c)  $(-3, 0), (1, 0), (0, \frac{3}{2}), W(-1, 2)$

6. a)  $y = (x + 1)(x - 3)$  b)  $y = -\frac{1}{2}x(x + 4)$   
c)  $y = -\frac{2}{5}(x + 8)(x - 2)$  d)  $y = \frac{2}{3}x(x - 6)$

7. a)  $f(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$   
b)  $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$   
c)  $f(x) = -x(x + 4) = -x^2 - 4x$

8. a)  $x = 1, f(x) = (x - 1)(x - 5),$   
 $f(x) = (x - 3)^2 - 4$   
b)  $x = 0, f(x) = -\frac{1}{2}x(x + 4),$   
 $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$   
c)  $x = 5, f(x) = \frac{1}{3}(x + 1)(x - 5),$   
 $f(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^2 - 3$

9. a)  $y = -4(x + 3)(x + 1)$   
b)  $y = -\frac{1}{2}(x - 2)(x - 6)$

10.  $f_1(x) = -\frac{4}{3}(x + \frac{3}{2})^2 + 3 = -\frac{4}{3}x(x + 3),$   
 $g_1(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x(x + 4),$   
 $h_1(x) = -\frac{2}{9}(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2} = -\frac{2}{9}x(x + 3)$

11. a)  $b = -8, c = 12$  b)  $b = -6\sqrt{2}, c = 16$   
c)  $b = -8, c = 8$

12. a)  $[3, -2]$  b)  $[-2, -8]$  c)  $[3, -1]$

#### Rzut ukośny

1.  $y = -\frac{1}{20}x^2 + x + \frac{3}{2}$   
2. tak

## 7.7. Nierówności kwadratowe

1. a)  $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [1; \infty)$  b)  $x \in [-1; \frac{1}{2}]$   
c)  $x \in (1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$

2. a)  $x \in \mathbb{R}$  b)  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  c) sprzeczna

3. a)  $x \in \mathbb{R}$  b) sprzeczna c)  $x \in \mathbb{R}$

1. a)  $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$  b)  $x \in [-4; 4]$   
c)  $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}; \infty)$   
d)  $x \in (-\infty; -2] \cup [3; \infty)$   
e)  $x \in [-1; 4]$  f)  $x \in (-1; 5)$   
g)  $x \in [-\frac{1}{2}; 5]$  h)  $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$   
i) sprzeczna j)  $x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (\frac{3}{2}; \infty)$   
k)  $x \in [-2; 8]$  l) sprzeczna

2. a) 13 b) nieskończenie wiele c) 5 d) 2

3. a)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$  b)  $x \in \mathbb{R}$  c)  $x \in \mathbb{R}$   
d)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{9}\}$  e) sprzeczna f)  $x = \frac{3}{2}$

4. a)  $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$   
b)  $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (1; \infty)$   
c)  $x \in (-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$

5. a)  $x \in (-2; 3)$   
b)  $x \in (-\infty; -6 - \sqrt{41}] \cup [-6 + \sqrt{41}; \infty)$   
c)  $x \in (-\infty; 9 - 5\sqrt{3}] \cup [9 + 5\sqrt{3}; \infty)$   
d)  $x \in (-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \infty)$   
e)  $x \in \mathbb{R}$  f)  $x \in (-1; -\frac{1}{5})$

7. a)  $D = (-\infty; -1] \cup [4; \infty)$   
b)  $D = [-\frac{1}{2}; 3]$   
c)  $D = [-2; -1] \cup [1; 2]$   
d)  $D = [-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}]$

8.  $P(x) = (x-1)(2x+3)$ ,  $D = (1; \infty)$   
a)  $x \in (1; 2)$  b)  $x \in (3; \infty)$

9. a)  $x \in (-\infty; -4] \cup \{0\} \cup [4; \infty)$   
b)  $x \in (-1; 1)$   
c)  $x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$

### Zestaw I

1. a)  $f(D) = [-\sqrt{2}; \infty)$ , rośnie w  $[0; \infty)$   
b)  $f(D) = (-\infty; 9]$ , rośnie w  $(-\infty; 3]$ , maleje w  $[3; \infty)$   
c)  $f(D) = [-9; \infty)$ , maleje w  $(-\infty; 4]$ , rośnie w  $[4; \infty)$   
d)  $f(D) = (-\infty; 9]$ , rośnie w  $(-\infty; 2]$ , maleje w  $[2; \infty)$

e)  $f(D) = (-\infty; 3]$ , rośnie w  $(-\infty; 3]$ , maleje w  $[3; \infty)$   
f)  $f(D) = [-\frac{3}{32}; \infty)$ , maleje w  $(-\infty; -\frac{3}{4}]$ , rośnie w  $[-\frac{3}{4}; \infty)$

2. a)  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $W(2, -4)$   
b)  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $W(1, 1)$   
c)  $(0, 8)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $W(1, 9)$   
d)  $(0, 8)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(-4, 0)$ ,  $W(-3, -1)$   
e)  $(0, 2)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $W(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8})$   
f)  $(0, -6)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $W(2, 2)$

3. a)  $x_1 = -7$ ,  $x_2 = 3$   
b)  $x_1 = -\frac{5}{3}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$   
c)  $x_0 = \frac{8}{3}$  d) sprzeczne  
e)  $x_1 = \frac{-5-\sqrt{13}}{6}$ ,  $x_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{6}$   
f)  $x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$ ,  $x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$   
4. a)  $x_0 = -\frac{10}{7}$  b)  $x_1 = -\frac{2}{3}$ ,  $x_2 = 4$   
c)  $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$   
d)  $x_0 = -2$  e)  $x_0 = 10$  f) sprzeczne  
g)  $x_1 = -2 - \sqrt{14}$ ,  $x_2 = -2 + \sqrt{14}$   
h) sprzeczne

5. a)  $x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty)$   
b)  $x \in (-\infty; -3] \cup [0; \infty)$   
c)  $x \in (10 - 6\sqrt{2}; 10 + 6\sqrt{2})$  d)  $x \in \mathbb{R}$   
e)  $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [2; \infty)$   
f)  $x \in (-\frac{2}{3}; 1)$   
g)  $x \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{2}; \infty)$   
h)  $x \in [12 - 3\sqrt{15}; 12 + 3\sqrt{15}]$

6. a)  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,  $f(x) = x^2 + 1$   
b)  $b = -2$ ,  $c = 4$ ,  $f(x) = (x-1)^2 + 3$   
c)  $b = 4$ ,  $c = 6$ ,  $f(x) = (x+2)^2 + 2$   
d)  $b = -8$ ,  $c = 15$ ,  $f(x) = (x-4)^2 - 1$

7. a)  $b = -4$ ,  $b = 4$   
b)  $b = -2\sqrt{2}$ ,  $b = 2\sqrt{2}$   
c) nie ma takiego  $b$  d)  $b = -2$ ,  $b = 2$

### Zestaw II

1. a)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$   
b)  $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{21}{5}$   
c)  $f(x) = 5x^2 - 30x + 45$

2. a)  $y = -(x-2)^2 + 4$   
b)  $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 4$   
c)  $y = \frac{3}{8}(x-2)^2 + 4$

3. a)  $x = 7$  b)  $x = -9$

c)  $x = -2$  d)  $x = -\frac{1}{2}$

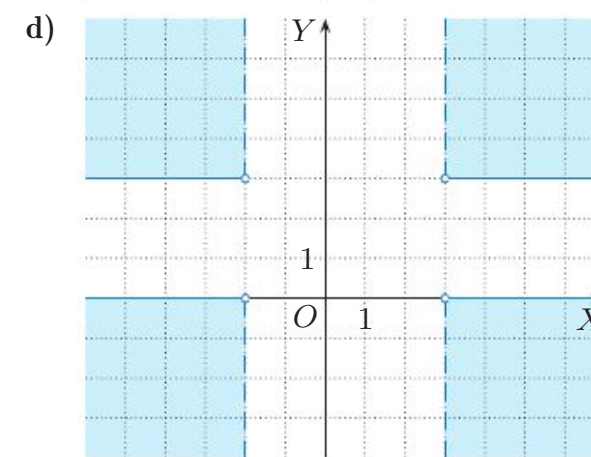
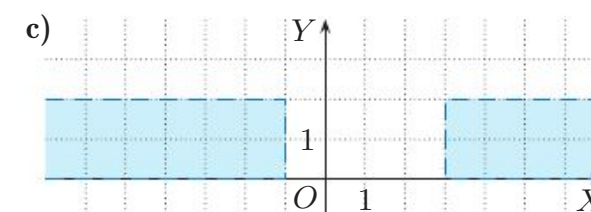
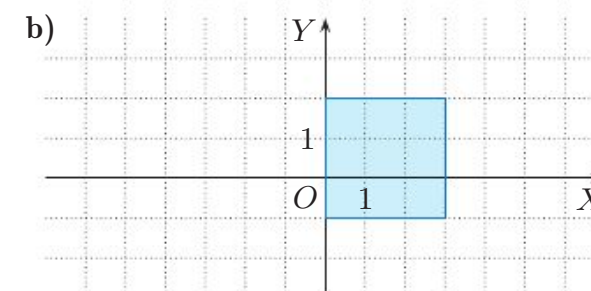
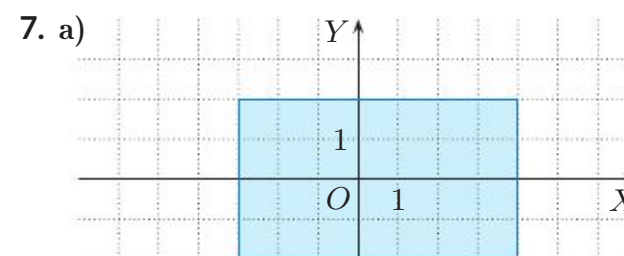
4. a)  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$  b)  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$

c)  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{5}{3}$  d)  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{1}{5}$

e)  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$  f)  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -1$

5. a)  $x \in [-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}]$  b)  $x \in (\frac{5}{3}; \frac{5+\sqrt{97}}{6}]$

6. a)  $a = -2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 2$ ,  
 $y = -2(x-1)(x+1)$   
b)  $a = -1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 4$ ,  
 $y = -(x-2)(x+2)$   
c)  $a = 4$ ,  $b = -24$ ,  $c = 36$ ,  
 $y = 4(x-3)^2$   
d)  $a = -2$ ,  $b = 8$ ,  $c = -4$ ,  
 $y = -2(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$



## Zadania z kontekstem realistycznym

1. a) 44,1; 29,4; 4,9;  $D_h = [0; \sqrt{10}]$ ,  
miejsce zerowe:  $\sqrt{10}$  b) około 26 m  
2. a)  $h \approx 9,3$  m, około 16,6 m b)  $t = 2$   
3. a) 10 s b) 5 s

## Przed obowiązkową maturą z matematyki

1. C 2. D 3. D 4. C 5. A 6. A 7. B  
8. D 9. C

10.1. E 10.2. D

11. FF

12. B2

13.  $x = -3$ ,  $x = \frac{3}{2}$

14.  $x \in (-\infty; -4] \cup [\frac{1}{2}; \infty)$

15.  $x_1 = -\sqrt{3} - 1$ ,  $x_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

16.  $x \in [-1; \frac{2}{3}]$

17. maleje w  $(-\infty; 3]$ , rośnie w  $[3; \infty)$

18. -32

19.  $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$

20. wartość największa: 0,  
wartość najmniejsza: -8

21. -4, -3

22.  $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 1$

23.  $P(x) = \frac{1}{2}x(10\frac{1}{2} - x)$ ,  $D = (0; 10\frac{1}{2})$

## Przed maturą z matematyki na poziomie rozszerzonym

1.  $-\frac{7+\sqrt{17}}{4}$

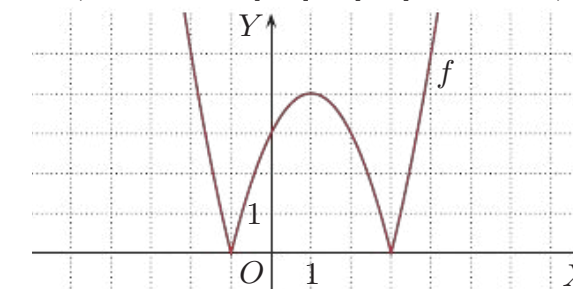
2. 140

3.1.  $q = 20$  3.2.  $x = 4$ ,  $x = 4 + 6\sqrt{3}$

4.  $p = 11,25$

5.  $b = -\frac{11}{2}$ ,  $c = \frac{15}{2}$

6.  $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{7}] \cup [0; 2] \cup [1 + \sqrt{7}; \infty)$



7.  $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1; -1 + \sqrt{2}) \cup (3; \infty)$

8.  $x \in (-\infty; -5] \cup \{0\} \cup [3; \infty)$



# Indeks

algorytm Euklidesa 14  
alternatywa zdań 111  
Archimedes 209  
argumenty funkcji 165

barycentrum trójkąta 278  
Briggs Henry 46

Cantor Georg 79  
cechy

- podobieństwa trójkątów 291, 292
- podzielności liczb 10
- przystawiania trójkątów 279, 280

cena

- brutto 56
- netto 56

ćwiartki układu współrzędnych 169

Descartes René (Kartezjusz) 71, 169  
diagramy Venna 69  
Dirichlet Peter G.L. 179  
długość

- okresu 24
- przedziału 74

dopełnienie zbioru 68  
dowód

- niewymierności liczby  $\sqrt{2}$  21
- przez sprowadzenie do sprzeczności 21

twierdzenia

- o dwusiecznej kąta w trójkącie 302
- o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta 275
- Talesa 286

dwusieczna kąta 276, 278  
działania na potęgach 36, 43  
dziedzina funkcji 165, 185  
dzielnik 11, 17

element zbioru 64  
Euklides 12, 14, 286  
Euler Leonhard 38, 179

Fermat Pierre de 38  
figury podobne 287

figury przystające 279  
fraktale 301  
funkcja 164, 165

- kwadratowa 315
- liczbowa 170
- liniowa 223
- malejąca 180, 229
- monotoniczna 182
- niemalejąca 181
- nierosnąca 181
- przedziałami monotoniczna 182
- rosnąca 180, 229
- stała 181, 229

Gauss Carl Friedrich 38  
googol 41

iloczyn

- kartezjański zbiorów 71
- zbiorów 66

implikacja zdań 112

kartezjański układ współrzędnych 169  
Kartezjusz (René Descartes) 71, 169  
Kasner Edward 41  
kąt 274

- wklęsły 274
- wypukły 274

kąty

- naprzemianległe 274
- odpowiadające 274
- przyległe 274
- wierzchołkowe 274

kierownica paraboli 331  
Koch Helge von 301  
koniunkcja zdań 111  
konstrukcja

- dwusiecznej kąta 304
- prostej prostopadłej 305
- prostej równoległej 305
- symetralnej odcinka 304

krawędź półpłaszczyzny 252  
krzywa Kocha 301  
kwadrat różnicy 94  
kwadrat sumy 94

liczba

- logarytmowana 45
- $\pi$  26

liczby

- całkowite 17, 22
- Fermata 38
- kwadratowe 98
- Mersenne’a 15
- naturalne 11, 22
- nieparzyste 11
- niewymierne 20, 22
- parzyste 11
- pierwsze 12, 15
- pięciokątne 98
- rzeczywiste 22
- trójkątne 98
- wielokątne 98
- wymierne 17, 22
- względnie pierwsze 17
- złożone 12

logarytm 45

- dziesiętny 45
- iloczynu 46
- ilorazu 46
- potęgi 46

logika matematyczna 110

macierz 152  
metoda

- eliminacji Gaussa 152
- podstawiania 128, 137
- przeciwnych współczynników 134, 137
- wyznacznikowa 150

miejsce zerowe funkcji 167

- liniowej 228

mnożenie sumy algebraicznej

- przez jednomian 85

najmniejsza wspólna wielokrotność 13  
największy wspólny dzielnik 13  
Napier John 46  
następnik implikacji 112  
nazwy wielkich liczb 41  
negacja zdania 110  
nierówności

- nieostre 81
- ostre 81
- równoważne 81, 82

nierówność 81

- sprzeczna 83
- tożsamościowa 83
- trójkąta 281

notacja wykładnicza 39

obraz figury 199  
odbicie symetryczne wykresu funkcji 202, 204  
ognisko paraboli 331  
okres 24

- długość 24

ortocentrum trójkąta 278  
oś

- liczbowa 72
- odciętych 169
- rzędnych 169
- symetrii paraboli 320, 340

para uporządkowana 71  
parabola 315, 316, 331, 337  
pęk prostych 226  
pierwiastek

- iloczynu 29, 32
- ilorazu 29, 32
- kwadratowy (drugiego stopnia) 28, 33
- $n$ -tego stopnia 33
- podwójny równania kwadratowego 334
- sześcienny (trzeciego stopnia) 31, 32

pierwiastki równania kwadratowego 328, 334  
płaszczyzna w trójwymiarowym układzie współrzędnych 237  
podstawa

- logarytmu 45
- potęgi 35

podzbiór zbioru 64  
podzielność liczb 11  
pole

- prostokąta 296
- rombu 296
- równoległoboku 296
- trapezu 296
- trójkąta 251

poprzednik implikacji 112  
postać

- dziesiętna liczby 24
- iloczynowa funkcji kwadratowej 338, 339

postać

- kanoniczna funkcji kwadratowej 323
- ogólna funkcji kwadratowej 323
- parametryczna równania prostej 262, 263

potęga o wykładniku

- naturalnym 35
- całkowitym ujemnym 36
- wymiernym 42

półpłaszczyzna 252

- domknięta 252
- otwarta 252

prawa

- De Morgana 68, 113
- rachunku zdań 113

procent 48

programowanie liniowe 255

promil 49

proporcjonalność

- odwrotna 209
- prosta 230

proste

- prostopadłe 244, 247
- równoległe 224, 236

prostokątny układ współrzędnych 169

przeciwdziedzina 165

przedział

- domknięty 74
- lewostronnie domknięty 74
- lewostronnie otwarty 74
- obustronnie domknięty 73
- otwarty 73, 74
- prawostronnie domknięty 74
- prawostronnie otwarty 74

przekątna pięciokąta foremnego 21

przestrzeń 66

przesunięcie wykresu funkcji 193, 195, 200

przybliżenie 25

- z nadmiarem 26
- z niedomiarem 26

punkt

- procentowy 51
- zaczepienia wektora 197

punkty kratowe 71, 169, 222

ramiona kąta 274

reguła zaokrąglania 25

rozkład

- liczby na czynniki pierwsze 13
- na czynniki liniowe funkcji kwadratowej 338

rozwiązania równania kwadratowego 328

rozwiązanie układu równań 126

rozwiniecie dziesiętne liczby 24

równanie

- kierunkowe prostej 233
- odcinkowe prostej 236
- ogólne prostej 234
- sprzeczne 80
- tożsamościowe 80
- z dwiema niewiadomymi 125

równoważne układy równań 129

równoważność zdań 112

różnica

- kwadratów 95
- zbiorów 68

Sierpiński Wacław 301

sito Eratostenesa 15

skala

- mapy 232
- podobieństwa 288

spirala Teodorosa 30

sposoby przedstawiania funkcji 171

stężenie procentowe 145

stosunek pól figur podobnych 298

suma zbiorów 67

symetralna odcinka 278

symetryczne odbicie wykresu funkcji 202, 204

śnieżynka Kocha 301

środek

- ciężkości trójkąta 278
- pęku prostych 226

środkowa trójkąta 278

tabela wartości funkcji 175

triangulacja 277

trójkąt 275

- ostrokatny 275
- prostokątny 275
- rozwartokątny 275

trójkąt Sierpińskiego 301

trójmian kwadratowy 315, 323

twierdzenie

- odwrotne do twierdzenia Talesa 284
- o dwusiecznej kąta w trójkącie 302
- Picka 71
- Pitagorasa 20
- Talesa 283
- wielkie Fermata 38

układ

- dwóch równań z dwiema niewiadomymi 126
- równań nieoznaczony 132, 248
- równań oznaczony 132, 248
- równań liniowych 132
- równań sprzeczny 132, 248
- trzech równań z trzema niewiadomymi 140

ułamek

- dziesiętny 24
- egipski 19
- nieskracalny 17, 27

Venn John 69

wartość

- bezwzględna liczby 103, 107, 108
- interpretacja geometryczna 103, 107
- funkcji 165

Weierstrass Karl 103

wektor 197

- przeciwny 197
- swobodny 198
- zaczepiony 198

wielkości

- odwrotnie proporcjonalne 209
- wprost proporcjonalne 230

wielkie twierdzenie Fermata 38

wielokąty

- podobne 287
- przystające 279

wielokrotność 11

wierzchołek

- kąta 274
- paraboli 320, 337

współczynnik

- kierunkowy prostej 224, 238
- interpretacja 239, 240
- proporcjonalności 209, 230

współrzędna punktu 72

współrzędne

- punktu 169
- wektora 197, 198
- wierzchołka paraboli 320, 324, 325

wykładnik potęgi 35

wykres funkcji 170

- liniowej 223

wyrazy podobne 85

wyróżnik trójmianu kwadratowego 324

wysokość trójkąta 278

wzory Cramera 150

wzór funkcji 171

zaokrąglenie 26

zbiory

- rozłączne 67
- równe 64

zbiór

- Cantora 79
- liczb całkowitych 17, 22
- liczb naturalnych 11, 22
- liczb niewymiernych 22
- liczb rzeczywistych 22
- liczb wymiernych 17, 22
- nieskończony 64
- pusty 64
- skończony 64
- wartości funkcji 185, 186

złota liczba 27, 63, 101, 290

złoty stosunek 63

zwierciadło paraboliczne 332



## Wzory skróconego mnożenia

Dla  $a, b \in \mathbb{R}$ :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

## Wartość bezwzględna

Dla  $a \in \mathbb{R}$ :

- $|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$

- $|-a| = |a|$

Dla  $a, b \in \mathbb{R}$ :

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Dla  $a, b \in \mathbb{R}$  i  $b \neq 0$ :

- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

## Pierwiastek kwadratowy

Dla  $a \geq 0$ :

- $\sqrt{a} = b$ , gdy  $b^2 = a$  i  $b \geq 0$

Dla  $a \in \mathbb{R}$ :

- $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$

Dla  $a, b \geq 0$ :

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Dla  $a \geq 0$  i  $b > 0$ :

- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

## Pierwiastek $n$ -tego stopnia

Dla  $a \geq 0$  i parzystego  $n$ :

- $\sqrt[n]{a} = b$ , gdy  $b \geq 0$  i  $b^n = a$

Dla  $a \in \mathbb{R}$  i nieparzystego  $n$ :

- $\sqrt[n]{a} = b$ , gdy  $b^n = a$

## Potęgi i pierwiastki

Dla  $a > 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ :

- $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Dla  $a, b > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{Q}$ :

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

## Logarytmy

Dla  $a, b > 0$ ,  $a \neq 1$ :

- $\log_a b = x$ , gdy  $a^x = b$

Dla  $a, b, c > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $p \in \mathbb{R}$ :

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^p = p \log_a b$

## Równanie prostej

- Równanie kierunkowe:  $y = ax + b$
- Równanie ogólne:  $Ax + By + C = 0$ , gdzie  $A \neq 0$  lub  $B \neq 0$
- Równanie prostej o współczynniku kierunkowym  $a$  przechodzącej przez punkt  $(x_1, y_1)$ :  $y - y_1 = a(x - x_1)$

Proste  $y = a_1x + b_1$  i  $y = a_2x + b_2$  są:

- równoległe, gdy  $a_1 = a_2$ ,
- prostopadłe, gdy  $a_1 \cdot a_2 = -1$ .

Współczynnik kierunkowy prostej:

$y = ax + b$   
przechodzącej przez punkty  $(x_1, y_1)$   
i  $(x_2, y_2)$ , gdzie  $x_1 \neq x_2$ :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

## Równanie kwadratowe

- Wyróżnik równania kwadratowego  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Pierwiastki równania kwadratowego:

- Jeśli  $\Delta > 0$ , to równanie ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Jeśli  $\Delta = 0$ , to równanie ma jeden pierwiastek (podwójny):

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

- Jeśli  $\Delta < 0$ , to równanie nie ma pierwiastków.

## Wzór funkcji kwadratowej

- Postać ogólna:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

Współrzędne wierzchołka paraboli:

$$(p, q) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- Postać kanonicza:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, a \neq 0$$

- Postać iloczynowa:

– jeśli  $\Delta > 0$ , to:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), a \neq 0,$$

gdzie  $x_1, x_2$  są pierwiastkami,

– jeśli  $\Delta = 0$ , to  $f(x) = a(x - x_0)^2$ ,

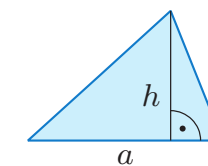
gdzie  $x_0$  jest pierwiastkiem,

– jeśli  $\Delta < 0$ , to funkcja nie ma postaci iloczynowej.

## Pola trójkątów i czworokątów

- Trójkąt

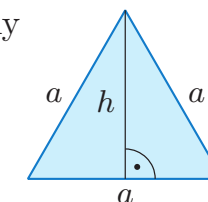
$$P = \frac{1}{2}ah$$



- Trójkąt równoboczny

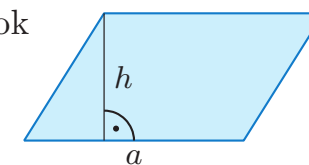
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



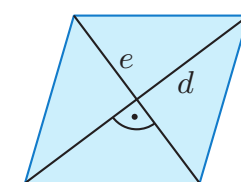
- Równoległobok

$$P = ah$$



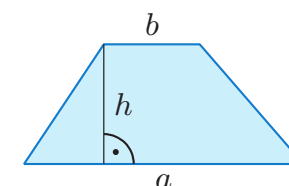
- Romb

$$P = \frac{1}{2}de$$



- Trapez

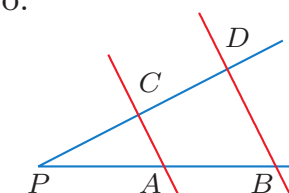
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



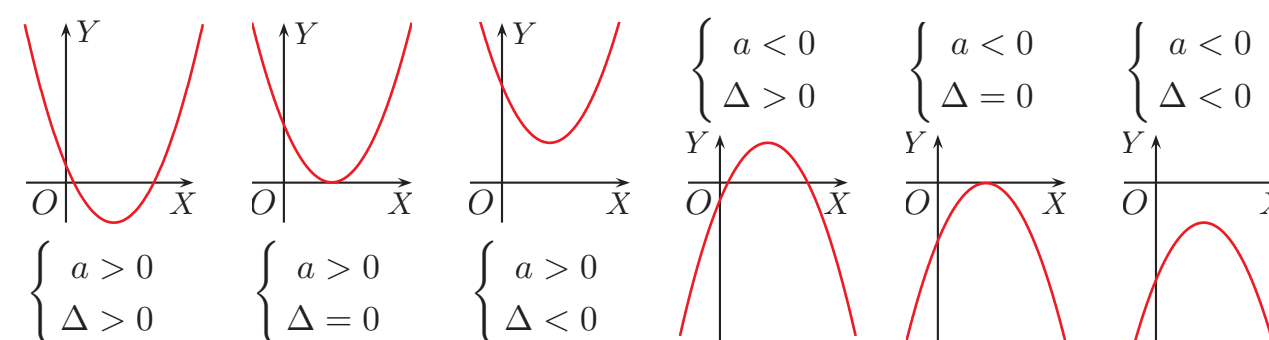
## Twierdzenie Talesa

Jeśli  $AC \parallel BD$ , to:

- $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|AB|}$
- $\frac{|PC|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PB|}$



## Położenie paraboli względem osi OX

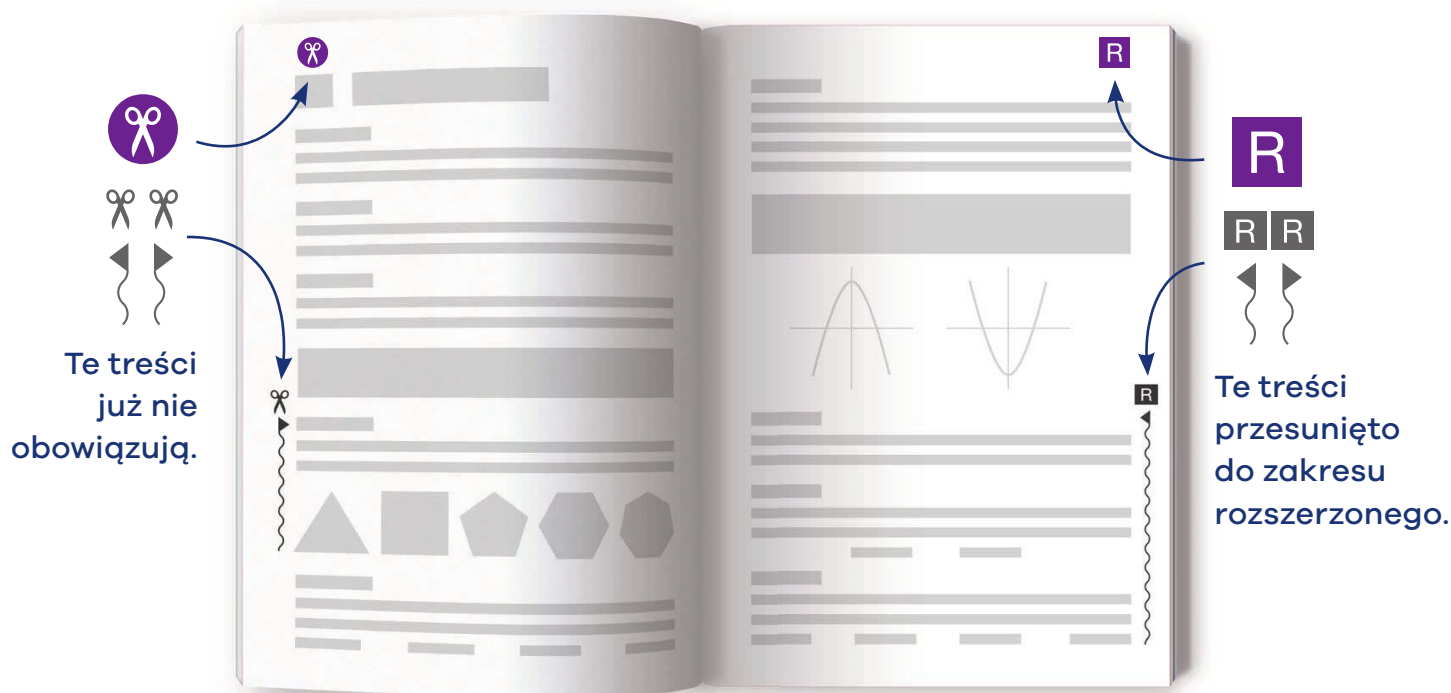


## Za co polubisz podręczniki NOWA MATeMATyka?

- ★ wiedza ujęta w formie zwięzłych lekcji
- ★ powtórki *Przypomnij sobie*
- ★ atrakcyjne rozwiązania graficzne
- ★ skuteczny trening umiejętności
- ★ systematyczne przygotowanie do MATURY
- ★ wzory na końcu podręcznika



## W podręczniku znajdziesz oznaczenia związane ze zmianami obowiązującymi od września 2024 r.



Fioletowe ikony na górze strony informują, że na tej stronie są zmiany.  
Ich dokładne umiejscowienie wskazują szare ikony z falkami.

Nowa Era Sp. z o.o.



[www.nowaera.pl](http://www.nowaera.pl)



[nowaera@nowaera.pl](mailto:nowaera@nowaera.pl)



Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5018-2



9 788326 750182