

ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

Lata 2002–**2024**

Poziom rozszerzony

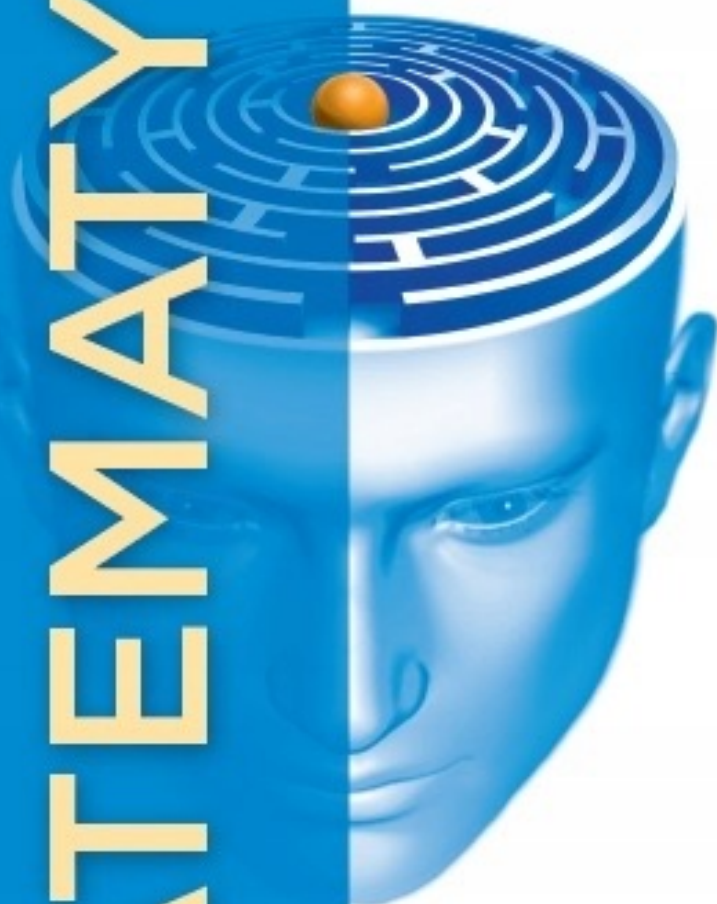
575 zadań

Centralnej Komisji Egzaminacyjnej
z rozwiązaniami

Opracował Ryszard Pagacz



MATEMATYKA



Projekt okładki i strony tytułowej
Bożena Sawicka

Skład i łamanie
AP Artepagina.com – Wojciech Prusakiewicz

Redaktor
Tomasz Szwed

© Copyright by Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
Warszawa 2024 r.

Druk i oprawa
Druk-Serwis Sp. z o.o.
ul. Tysiąclecia 8b, 06-400 Ciechanów

Wydrukowano na papierze *UPM* 65 g
www.antalisp.pl

Wydanie VIII/I. Warszawa 2024 r.

Oficyna Edukacyjna * Krzysztof Pazdro Sp. z o.o.
ul. Kościńska 4, 01-695 Warszawa
www.pazdro.com.pl
pazdro@pazdro.com.pl

ISBN 978-83-7594-267-5

Spis treści

Wstęp	4
1. Funkcja kwadratowa	5
2. Wielomiany	10
3. Funkcje wymierne, wykładnicze, logarytmiczne	14
4. Trygonometria	18
5. Wartość bezwzględna	23
6. Ciągi	26
7. Granica ciągu, suma szeregu nieskończonego	30
8. Planimetria	35
9. Stereometria	42
10. Geometria analityczna	51
11. Kombinatoryka	59
12. Rachunek prawdopodobieństwa	61
13. Dowody algebra	67
14. Dowody geometria	71
15. Granice. Pochodna	78
16. Optymalizacja	84
17. Inne	94
1. Funkcja kwadratowa	95
2. Wielomiany	114
3. Funkcje wymierne, wykładnicze, logarytmiczne	124
4. Trygonometria	132
5. Wartość bezwzględna	150
6. Ciągi	159
7. Granica ciągu, suma szeregu nieskończonego	169
8. Planimetria	177
9. Stereometria	198
10. Geometria analityczna	221
11. Kombinatoryka	253
12. Rachunek prawdopodobieństwa	260
13. Dowody algebra	275
14. Dowody geometria	285
15. Granice. Pochodna	300
16. Optymalizacja	310
17. Inne	339

zadania

rozwiązania

Wstęp

W zbiorze zebrałem zadania z lat 2002–2024, które występowały w arkuszach maturalnych CKE na poziomie rozszerzonym. Są tu zadania pochodzące z egzaminów maturalnych w terminach głównych i dodatkowych, z egzaminów próbnych przygotowanych przez CKE, z diagnozy przedmaturalnej z lat 2020–2022, z informatora o egzaminie maturalnym z matematyki z roku 2021, z arkusza pokazowego z roku 2022 oraz z arkuszy z sesji 2023 i 2024. Zadania zostały jednak podzielone i uporządkowane według rozdziałów występujących w typowym programie nauczania matematyki w szkole. Obok numeru każdego zadania jest wskazówka, z arkusza której matury dane zadanie pochodzi (miesiąc, rok, nr zadania i liczba punktów).

Do wszystkich zadań podałem szkice rozwiązań.

W czerwcu 2024 r. została „odechudzona” podstawa programowa i w związku z tym na maturze w 2025 r. na pewno nie pojawi się kilka zagadnień. Zadania ich dotyczące zostały oznaczone symbolem nożyczek ✂. Zadania z sesji maturalnych 2023 i 2024 w terminie podstawowym i dodatkowym zostały zapisane na szarym tle.

Ten zbiór zadań może być dobrym materiałem do samodzielnego przygotowania się do egzaminu. Może również być pomocny nauczycielowi w zaplanowaniu cyklu powtórzeń przygotowujących uczniów do matury.

Mam nadzieję, że ten bogaty materiał pozwoli uczniom skutecznie przygotować się do egzaminu.

Ryszard Pagacz

zadania

1. Funkcja kwadratowa

Zadanie 1.1. [próbna matura CKE, styczeń 2004, zadanie 14. (4 pkt)]

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c funkcja:

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

Zadanie 1.2. [matura próbna CKE, listopad 2006, zadanie 11. (3 pkt)]

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej $n > 1$ największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$ o niewiadomej x . Wyznacz wzór funkcji f .

Zadanie 1.3. [matura, maj 2008, zadanie 3. (5 pkt)]

Liczy $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są rozwiązaniami równania $x^2 - (p^2 + q^2)x + (p + q) = 0$ z niewiadomą x . Oblicz wartości p i q .

Zadanie 1.4. [matura, maj 2010, zadanie 6. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + mx + 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2 - 13$.

Zadanie 1.5. [matura, sierpień 2010, zadanie 4. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - (m-4)x + m^2 - 4m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest mniejsza od $2m^3 - 3$.

Zadanie 1.6. [matura, sierpień 2010, zadanie 5. (4 pkt)]

Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 - 4|x|$ i na jego podstawie wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

Zadanie 1.7. [matura, maj 2011, zadanie 3. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - 4mx - m^3 + 6m^2 + m - 2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 - x_2)^2 < 8(m+1)$.

Zadanie 1.8. [matura, czerwiec 2011, zadanie 2. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $2x^2 - (m-2)x - 3m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 , spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 25$.

Zadanie 1.9. [matura, maj 2012, zadanie 1. (4 pkt)]

Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

Zadanie 1.10. [matura, maj 2012, zadanie 4. (6 pkt)]

Oblicz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - (m+2)x + m + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$.

Zadanie 1.11. [matura, czerwiec 2012, zadanie 4. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $2x^2 + (3-2m)x - m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że $|x_1 - x_2| = 3$.

Zadanie 1.12. [matura, maj 2013, zadanie 6. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + 2(1-m)x + m^2 - m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2$.

Zadanie 1.13. [matura, czerwiec 2013, zadanie 2. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $(m+1)x^2 - 3mx + m + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki takie, że ich suma jest nie większa niż 2,5.

Zadanie 1.14. [matura, maj 2014, zadanie 2. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - (2m+2)x + 2m + 5$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że suma kwadratów odległości punktów $A = (x_1, 0)$, $B = (x_2, 0)$ od prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$ jest równa 6.

Zadanie 1.15. [matura, czerwiec 2014, zadanie 6. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (2m-5)x + 2m + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 + x_2)^2 \geq x_1^2 \cdot x_2^2 \geq x_1^2 + x_2^2$.

Zadanie 1.16. [matura, maj 2015, zadanie 7. (2 pkt)]

Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f . Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.

Zadanie 1.17. [matura, maj 2015, zadanie 13. (5 pkt)]

Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 , spełniające warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$.

Zadanie 1.18. [matura, maj 2015, zadanie 3. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $(m^2 - m)x^2 - x + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $\frac{1}{x_1 + x_2} \leq \frac{m}{3} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Zadanie 1.19. [matura, czerwiec 2015, zadanie 15. (6 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{m^2 + m - 6}{m - 5}x^2 - 2(m-2)x + m - 5$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wyznacz całkowite wartości parametru m , dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

Zadanie 1.20. [matura, czerwiec 2015, zadanie 1. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + 2(m-1)x + m^2 + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) = x_1^3 + x_2^3$.

Zadanie 1.21. [matura, maj 2016, zadanie 12. (6 pkt)]

Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 + 2(m+1)x + 6m + 1$. Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m , dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 3$.

Zadanie 1.22. [matura, czerwiec 2016, zadanie 12. (4 pkt)]

Liczba m jest sumą odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania $k^2x^2 + (k-1)x + 1 = 0$, gdzie $k \neq 0$. Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = 2^m$.

Zadanie 1.23. [matura, czerwiec 2016, zadanie 3. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + 3x + \frac{2-m}{3-m} = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -9$.

Zadanie 1.24. [matura, maj 2017, zadanie 12. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $4x^2 - 6mx + (2m+3)(m-3) = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 , przy czym $x_1 < x_2$, spełniające warunek $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$.

Zadanie 1.25. [matura, czerwiec 2017, zadanie 13. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty, 3)$.

Zadanie 1.26. [matura, maj 2018, zadanie 12. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (m+1)x - m^2 + 1 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$), spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$.

Zadanie 1.27. [matura, czerwiec 2018, zadanie 14. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - 3mx + (m+1)(2m-1) = 0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunki: $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ oraz $0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$.

Zadanie 1.28. [matura, maj 2019, zadanie 9. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x) = (2m+1)x^2 + (m+2)x + m - 3$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $(x_1 - x_2)^2 + 5x_1x_2 \geq 1$.

Zadanie 1.29. [matura, czerwiec 2019, zadanie 12. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$4x^2 + (2-4m)x + m^2 - m - 2 = 0$$

ma dwa różne dodatnie rozwiązania x_1, x_2 spełniające nierówność $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$.

Zadanie 1.30. [matura, czerwiec 2020, zadanie 11. (4 pkt)]

Dane jest równanie kwadratowe $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$ z niewiadomą x . Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których różne rozwiązania x_1 i x_2 tego równania istnieją i spełniają warunek

$$2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2.$$

Zadanie 1.31. [matura, lipiec 2020, zadanie 14. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których nierówność

$$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x > 2mx - 2$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

Zadanie 1.32. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 14. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których równanie $x^2 - 2ax + a^3 - 2a = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

Zadanie 1.33. [matura, maj 2021, zadanie 11. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których trójmian kwadratowy

$$4x^2 - 2(m+1)x + m$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

Zadanie 1.34. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 6. (4 pkt)]

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem

$$f(x) = px^2 + (p-1)x + 1 - 2p \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1.

Zadanie 1.35. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 9. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (m-4)x + m^2 - 7m + 12 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2 \cdot x_2 + 5x_1 \cdot x_2^2$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 1.36. [matura, maj 2023, zadanie 11. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których równanie

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 1.37. [matura, czerwiec 2023, zadanie 10. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 , spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 1.38. [matura, maj 2024, zadanie 12. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$x^2 - (3m+1) \cdot x + 2m^2 + m + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 spełniające warunek

$$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 1.39. [matura, czerwiec 2024, zadanie 12. (6 pkt)]Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(3-m) \cdot x^2 + (m+1) \cdot x - (m+1)^2 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$$

Zapisz obliczenia.

2. Wielomiany

Zadanie 2.1. [matura próbna CKE, listopad 2006, zadanie 2. (5 pkt)]Wyznacz wszystkie wartości $k \in \mathbb{R}$, dla których pierwiastki wielomianu
 $W(x) = (x^2 - 8x + 12) \cdot (x - k)$ są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.

⚡ **Zadanie 2.2.** [matura, maj 2007, zadanie 9. (3 pkt)]

Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.

Zadanie 2.3. [matura próbna CKE, marzec 2008, zadanie 3. (4 pkt)]Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których jedynym rozwiązaniem rzeczywistym równania $x^3 + m^3x^2 - m^2x - 1 = 0$ jest liczba 1.**Zadanie 2.4.** [matura próbna CKE, marzec 2008, zadanie 6. (3 pkt)]Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 9$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.**Zadanie 2.5.** [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 7. (6 pkt)]Dane jest równanie $(x+3) \cdot [x^2 + (p+4)x + (p+1)^2] = 0$ z niewiadomą x .a) Rozwiąż to równanie dla $p = 1$.b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których równanie to ma tylko jedno rozwiązanie.**Zadanie 2.6.** [matura, maj 2009, zadanie 2. (4 pkt)]

Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-1)$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = 8x^2 + 4x - 14$ oraz resztę $R(x) = -5$. Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Zadanie 2.7. [matura, maj 2010, zadanie 4. (4 pkt)]

Wyznacz wartości a i b współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ wiedząc, że $W(2) = 7$ oraz, że reszta z dzielenia $W(x)$ przez $(x-3)$ jest równa 10.

Zadanie 2.8. [matura, czerwiec 2010, zadanie 6. (3 pkt)]

Wykaż, że nie istnieje wielomian $W(x)$ stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, który spełnia warunki: $W(2) = 3$ i $W(-2) = 2$.

Zadanie 2.9. [matura, maj 2012, zadanie 2. (4 pkt)]Rozwiąż nierówność $x^4 + x^2 \geq 2x$.**Zadanie 2.10.** [matura, czerwiec 2012, zadanie 2. (4 pkt)]Wielomian $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 24x + 9$ jest kwadratem wielomianu $P(x) = x^2 + cx + d$. Oblicz a oraz b .**Zadanie 2.11.** [matura, maj 2013, zadanie 8. (4 pkt)]

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + m$ przez dwumian $x+1$ jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika m oraz pierwiastki tego wielomianu.

Zadanie 2.12. [matura, czerwiec 2013, zadanie 12. (4 pkt)]

Pierwiastkami wielomianu stopnia trzeciego są liczby 1, 3, 5. Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej tego wielomianu jest równy $\frac{1}{2}$. Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej wartość tego wielomianu jest liczbą podzielną przez 24.

Zadanie 2.13. [matura, maj 2014, zadanie 10. (5 pkt)]Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru m , dla których równanie
 $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)(x^2 - (2m+1)x + m^2 + m) = 0$ ma trzy, parami różne, pierwiastki rzeczywiste, takie że jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.
Zadanie 2.14. [matura, czerwiec 2014, zadanie 9. (5 pkt)]

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 6x^3 + (m+4)x^2 - 2x - 1$ przez dwumian $x-m$ jest równa 8. Oblicz wartość m oraz pierwiastki tego wielomianu.

Zadanie 2.15. [matura, maj 2015, zadanie 15. (6 pkt)]

Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki a, b i c . Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

Zadanie 2.16. [matura, maj 2015, zadanie 2. (5 pkt)]

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 3mx^2 + (3m^2 - 1)x - 9m^2 + 20m + 4$. Wykres tego wielomianu, po przesunięciu o wektor $\vec{u} = [-3, 0]$, przechodzi przez początek układu współrzędnych. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu W .

Zadanie 2.17. [matura, czerwiec 2015, zadanie 10. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których liczba 1 jest jedynym całkowitym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = mx^3 + x^2 + (m^2 - 9)x + m$.

Zadanie 2.18. [matura, maj 2017, zadanie 2. (5 pkt)]

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + ax^2 - 13x + b$. Liczba 3 jest jednym z pierwiastków tego wielomianu. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x + 2)$ jest równa 20. Oblicz współczynniki a i b oraz pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Zadanie 2.19. [matura, maj 2018, zadanie 8. (4 pkt)]

Liczba $\frac{2}{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 5x^3 - 7x^2 - 3x + p$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu i rozwiąż nierówność $W(x) > 0$.

Zadanie 2.20. [matura, czerwiec 2018, zadanie 8. (3 pkt)]

Wykaż, że równanie $x^8 + x^2 = 2(x^4 + x - 1)$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste $x = 1$.

Zadanie 2.21. [matura, czerwiec 2018, zadanie 10. (6 pkt)]

Wielomian $W(x) = x^3 + cx^2 - 10x + d$ jest podzielny przez dwumian $P(x) = x + 2$. Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $Q(x) = x - 1$ otrzymujemy resztę (-30) . Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$ i rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

Zadanie 2.22. [matura, maj 2019, zadanie 13. (6 pkt)]

Wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x + 1)$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x) \leq 0$.

Zadanie 2.23. [matura, maj 2019, zadanie 6. (5 pkt)]

Wielomian określony wzorem $W(x) = 2x^3 + (m^3 + 2)x^2 - 11x - 2(2m + 1)$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x + 1)$ daje resztę 6. Oblicz m oraz pierwiastki wielomianu $W(x)$ dla wyznaczonej wartości m .

Zadanie 2.24. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 10. (4 pkt)]

Reszty z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + bx^3 + cx^2$ przez dwumiany $(x - 2)$ i $(x - 3)$ są odpowiednio równe (-8) oraz (-18) . Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x - 4)$.

Zadanie 2.25. [matura, czerwiec 2021, zadanie 12. (5 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $(x - 3)(x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m) = 0$ ma dokładnie dwa rozwiązania.

Zadanie 2.26. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 4. (5 pkt)]

Dane jest równanie $(x - 6)[(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1] = 0$

z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których to równanie ma trzy rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku. Zapisz obliczenia.

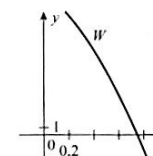
Zadanie 2.27. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 3. (3 pkt)]

Na diagramie (rysunek obok) przedstawiono fragment wykresu wielomianu W określonego wzorem

$$W(x) = 4x^3 - 19x^2 - 12x + 18$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Oblicz wszystkie pierwiastki wielomianu W .

**Zadanie 2.28.** [informator maturalny CKE 2021, zadanie 5. (3 pkt)]

Wielomian W jest określony wzorem

$$W(x) = (x - 1)(x^2 - mx + m - 1) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których wielomian W ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 2.29. [matura, czerwiec 2022, zadanie 13. (6 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$(x - 4)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - m - 6] = 0$$

ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 oraz x_3 , spełniające warunek

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$$

Zadanie 2.30. [matura, maj 2023, zadanie 5. (2 pkt)]

Wielomian $W(x) = 7x^3 - 9x^2 + 9x - 2$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty. Oblicz ten pierwiastek.

3. Funkcje wymierne, wykładnicze, logarytmiczne

✂ **Zadanie 3.1.** [matura CKE dla chętnych, maj 2002, zadanie 16. (7 pkt)]

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2^{x+1}$ oraz $g(x) = \left| \frac{x+1}{x} \right|$.

Na podstawie wykonanego rysunku określ liczbę ujemnych rozwiązań równania $f(x) = g(x)$.

Zadanie 3.2. [matura, maj 2005, zadanie 11. (3 pkt)]

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

✂ **Zadanie 3.3.** [test diagnostyczny CKE, grudzień 2005, zadanie 13. (5 pkt)]

Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x-4}{x-2} \right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $\left| \frac{x-4}{x-2} \right| = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.

Zadanie 3.4. [matura, styczeń 2006, zadanie 11. (6 pkt)]

Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f danej wzorem $f(m) = x_1 \cdot x_2$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $(m+2)x^2 - (m+2)^2x + 3m + 2 = 0$, w którym $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Zadanie 3.5. [matura próbna CKE, listopad 2006, zadanie 1. (5 pkt)]

Funkcja homograficzna f jest określona wzorem $f(x) = \frac{px-3}{x-p}$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest parametrem i $|p| \neq \sqrt{3}$.

- Dla $p = 1$ zapisz wzór funkcji w postaci $f(x) = k + \frac{m}{x-1}$, gdzie k oraz m są liczbami rzeczywistymi.
- Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których w przedziale $(p, +\infty)$ funkcja f jest malejąca.

✂ **Zadanie 3.6.** [matura, maj 2008, zadanie 5. (5 pkt)]

Dane jest równanie $\left| \frac{2}{x} + 3 \right| = p$ z niewiadomą x . Wyznacz liczbę rozwiązań tego równania w zależności od parametru p .

Zadanie 3.7. [matura, maj 2008, zadanie 9. (4 pkt)]

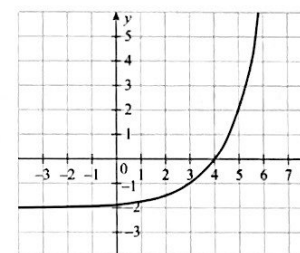
Wyznacz dziedzinę i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(8x - x^2)$.

✂ **Zadanie 3.8.** [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 1. (3 pkt)]

Na rysunku narysowano fragment wykresu funkcji

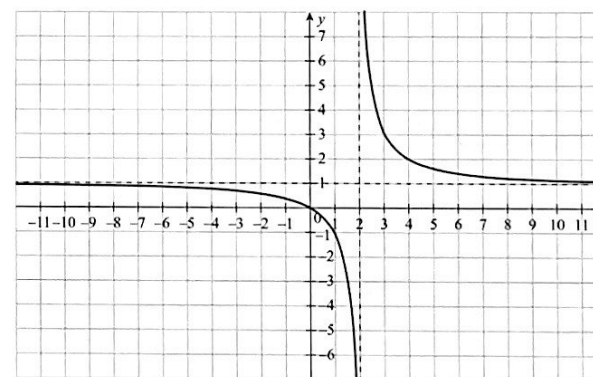
$f(x) = 2^{x-3} - b$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$.

- Podaj wartość b .
- Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$.
- Podaj wszystkie wartości parametru p , dla których równanie $g(x) = p$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.



Zadanie 3.9. [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 5. (3 pkt)]

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji h otrzymanego przez przesunięcie o wektor $[2, 1]$ wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{a}{x}$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $x \neq 0$.

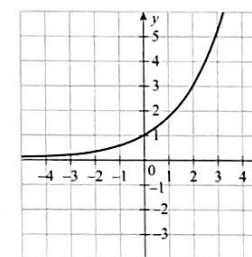


Wyznacz wzór funkcji h , a następnie sprawdź, czy punkt $M = (\sqrt{3}, -2\sqrt{3} - 3)$ należy do jej wykresu.

✂ **Zadanie 3.10.** [matura, maj 2009, zadanie 3. (4 pkt)]

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

- Oblicz a .
- Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$ i podaj wszystkie wartości parametru $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie $g(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

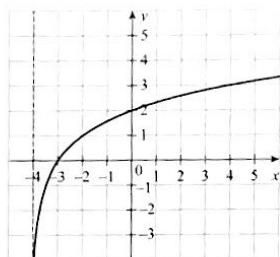


Zadanie 3.11. [matura, maj 2009, zadanie 6. (5 pkt)]

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{2\cos x}(9 - x^2)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

Zadanie 3.12. [matura, maj 2013, zadanie 12. (3 pkt)]

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji logarytmicznej f określonej wzorem $f(x) = \log_2(x - p)$.



- Podaj wartość p .
- Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.
- Podaj wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.

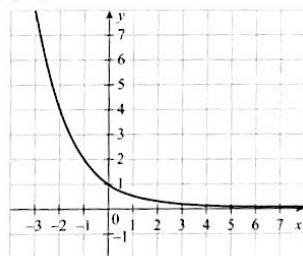
Zadanie 3.13. [matura, maj 2014, zadanie 1. (4 pkt)]

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{|x+3| + |x-3|}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Zadanie 3.14. [matura, czerwiec 2016, zadanie 11. (4 pkt)]

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji

wykładniczej określonej wzorem $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Rozważamy funkcję g określoną wzorem

$$g(x) = |f(x+3) - 2|.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $g(x) = k$ ma dwa rozwiązania takie, że ich iloczyn jest liczbą ujemną.

Zadanie 3.15. [matura, czerwiec 2019, zadanie 1. (5 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{|x+2|}{x-1} - \frac{x-2}{|x-1|} + 3$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.

Wyznacz zbiór jej wartości.

Zadanie 3.16. [matura, czerwiec 2020, zadanie 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{-1} \leq 1$.

Zadanie 3.17. [matura, maj 2021, zadanie 7. (3 pkt)]

Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$$

Zadanie 3.18. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 4. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{-3x+41}{x-13} \text{ dla } x \neq 13$$

Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.

Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f .

Zadanie 3.19. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 8. (5 pkt)]

Rozwiąż nierówność

$$\frac{x-1}{x^2-4} - \frac{1}{2-x} \geq \frac{3}{2+x} + 2$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 3.20. [matura, maj 2023, zadanie 1. (2 pkt)]

W chwili początkowej ($t = 0$) masa substancji jest równa 4 gramom. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 19% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Dla każdej liczby całkowitej $t \geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masę substancji w gramach po t pełnych dobach (czas liczymy od chwili początkowej).

Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza od 1,5 grama. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3.21. [matura, maj 2024, zadanie 1. (2 pkt)]

W chwili początkowej ($t = 0$) filiżanka z gorącą kawą znajduje się w pokoju, a temperatura tej kawy jest równa 80°C . Temperatura w pokoju (temperatura otoczenia) jest stała i równa 20°C . Temperatura T tej kawy zmienia się w czasie zgodnie z zależnością

$$T(t) = (T_p - T_z) \cdot k^{-t} + T_z \text{ dla } t \geq 0$$

gdzie:

T – temperatura kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,

t – czas wyrażony w minutach, liczony od chwili początkowej,

T_p – temperatura początkowa kawy wyrażona w stopniach Celsjusza,

T_z – temperatura otoczenia wyrażona w stopniach Celsjusza,

k – stała charakterystyczna dla danej cieczy.

Po 10 minutach, licząc od chwili początkowej, kawa ostygła do temperatury 65°C .

Oblicz temperaturę tej kawy po następnych pięciu minutach. Wynik podaj w stopniach Celsjusza, w zaokrągleniu do jedności. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3.22. [matura, czerwiec 2024, zadanie 1. (2 pkt)]

W chwili początkowej ($t = 0$) zainicjowano pewną reakcję chemiczną, w której brał udział związek A. W wyniku tej reakcji masa m związku A zmieniła się w czasie zgodnie z zależnością

$$m(t) = a \cdot 2^{-0,05t} + b \text{ dla } t \geq 0$$

gdzie:

m – masa związku A wyrażona w gramach,

t – czas wyrażony w sekundach (liczony od chwili $t = 0$),

a, b – współczynniki liczbowe.

Masa początkowa związku A (tj. masa w chwili $t = 0$)

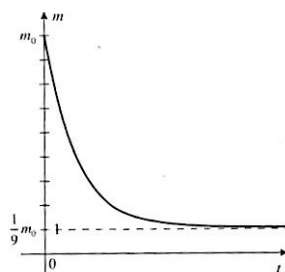
była równa m_0 gramów.

Po osiągnięciu stanu równowagi (tj. gdy $t \rightarrow \infty$) masa

tego związku była równa $\frac{1}{9}$ jego masy początkowej

(zobacz rysunek).

Oblicz, po ilu sekundach (licząc od chwili zainicjowania tej reakcji) przereagowało 87,5% masy początkowej tego związku. Zapisz obliczenia.



4. Trygonometria

Zadanie 4.1. [próbna matura CKE, styczeń 2004, zadanie 15. (4 pkt)]

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem:

$$f(x) = \sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4.2. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2005, zadanie 16. (7 pkt)]

Dane jest równanie postaci $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest parametrem.

- Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0, 5 \rangle$.
- Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ trzy różne rozwiązania.

Zadanie 4.3. [matura, styczeń 2006, zadanie 15. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie: $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$.

Zadanie 4.4. [matura, maj 2008, zadanie 4. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $4\cos^2 x = 4\sin x + 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.5. [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 10. (4 pkt)]

Sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego oraz liczba 1 tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sinus najmniejszego kąta tego trójkąta.

Zadanie 4.6. [matura, maj 2010, zadanie 2. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.7. [matura, sierpień 2010, zadanie 1. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.8. [matura, maj 2011, zadanie 4. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = 1 - \cos x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.9. [matura, czerwiec 2011, zadanie 4. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.10. [matura, maj 2012, zadanie 3. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.

Zadanie 4.11. [matura, czerwiec 2012, zadanie 3. (5 pkt)]

Kąt α jest taki, że $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $|\cos \alpha - \sin \alpha|$.

Zadanie 4.12. [matura, maj 2013, zadanie 4. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.13. [matura, czerwiec 2013, zadanie 3. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $2\operatorname{tg} x \cdot \cos x + 1 = 2\cos x + \operatorname{tg} x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.14. [matura, czerwiec 2013, zadanie 8. (3 pkt)]

Wykaż, że dla dowolnego kąta α prawdziwa jest tożsamość $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{1 + \cos^2 2\alpha}{2}$.

Zadanie 4.15. [matura, maj 2014, zadanie 3. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Zadanie 4.16. [matura, czerwiec 2014, zadanie 4. (4pkt)]

Rozwiąż nierówność $-2\sin 3x \geq 1$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zadanie 4.17. [próbna matura, grudzień 2014, zadanie 11. (3 pkt)]

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , spełniające równanie $\sin 5x - \sin x = 0$.

Zadanie 4.18. [matura, maj 2015, zadanie 5. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sin^2 2x - 4\sin^2 x + 1 = 0$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zadanie 4.19. [matura, czerwiec 2015, zadanie 10. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$, dla $x \in (-\pi, 0)$.

Zadanie 4.20. [matura, czerwiec 2015, zadanie 3. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zadanie 4.21. [matura, maj 2016, zadanie 11. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zadanie 4.22. [matura, czerwiec 2016, zadanie 13. (3 pkt)]

Rozwiąż nierówność $(2\sin x - 3)(2\sin x + 1) > 0$ w przedziale $x \in (0, 2\pi)$.

Zadanie 4.23. [matura, czerwiec 2016, zadanie 14. (4 pkt)]

W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 4.24. [matura, czerwiec 2016, zadanie 4. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sin^3 x - 3\sin x \cdot \cos^2 x - 3\cos^3 x + \sin^2 x \cdot \cos x = 0$ w przedziale $(0, \pi)$.

Zadanie 4.25. [matura, maj 2017, zadanie 10. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zadanie 4.26. [matura, czerwiec 2017, zadanie 11. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zadanie 4.27. [matura, czerwiec 2017, zadanie 4. (5 pkt)]

Rozwiąż równanie $2\cos^4 x + 5\sin^2 x = 3$ w przedziale $(0, \pi)$.

Zadanie 4.28. [matura, maj 2018, zadanie 11. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $(0, \pi)$.

Zadanie 4.29. [matura, maj 2018, zadanie 7. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Zadanie 4.30. [matura, czerwiec 2018, zadanie 7. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnego kąta $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \frac{1}{4}.$$

Zadanie 4.31. [matura, czerwiec 2018, zadanie 2. (5 pkt)]

Rozwiąż równanie $4\sin x \cdot \cos^2 x - 1 = 2\sin 2x - \cos x$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zadanie 4.32. [matura, maj 2019, zadanie 14. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $(\cos x) \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{2} \sin x$.

Zadanie 4.33. [matura, maj 2019, zadanie 7. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\cos 2x = \sin x + 1$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zadanie 4.34. [matura, czerwiec 2019, zadanie 14. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $4\sin 7x \cos 2x = 2\sin 9x - 1$ w przedziale $(0, \pi)$.

Zadanie 4.35. [matura, czerwiec 2019, zadanie 7. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $\sin^2 2x = 2\cos^2 x$ należące do przedziału $(0, 2\pi)$.

Zadanie 4.36. [matura, czerwiec 2020, zadanie 9. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$ dla $x \in (0, 2\pi)$.

Zadanie 4.37. [matura, lipiec 2020, zadanie 9. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $4\sin^3 x + \sin 2x = 2\sin^2 x \cdot (2\cos x + 1)$.

Zadanie 4.38. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 7. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie:

$$\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Zadanie 4.39. [matura, maj 2021, zadanie 12. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w przedziale $(0, \pi)$.

Zadanie 4.40. [matura, czerwiec 2021, zadanie 8. (4 pkt)]Rozwiąż równanie $2\cos^2 x - \cos x = \sin(2x) - \sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.**Zadanie 4.41.** [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 7. (4 pkt)]Rozwiąż równanie $\sin(3x) = 2\sin x$ w zbiorze $[0, \pi]$. Zapisz obliczenia. **Zadanie 4.42.** [informator maturalny CKE 2021, zadanie 15. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność

$$(2 - \cos x)^2 \leq 4\sin^2 \frac{x}{2} - 4\cos^2 \frac{x}{2} + 4,75$$

w zbiorze $(0, \pi)$.**Zadanie 4.43.** [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 5. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie

$$6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x + 3\tg x + \sqrt{3} = 0$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 4.44. [matura, maj 2023, zadanie 6. (3 pkt)]

Rozwiąż równanie

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 4.45. [matura, maj 2023, zadanie 12. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie

$$3\sin^2 x - \sin^2(2x) = 0$$

w przedziale $\langle \pi, 2\pi \rangle$.**Zadanie 4.46.** [matura, czerwiec 2023, zadanie 8. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

w zbiorze $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Zapisz obliczenia.**Zadanie 4.47.** [matura, maj 2024, zadanie 10. (5 pkt)]

Rozwiąż równanie

$$\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$$

w przedziale $[0, 2\pi]$.**Zadanie 4.48.** [matura, maj 2024, zadanie 12. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie

$$\sin(2x) + \cos(2x) = 1 + \sin x - \cos x$$

w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zapisz obliczenia.**Zadanie 4.49.** [matura, czerwiec 2024, zadanie 9. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

5. Wartość bezwzględna

Zadanie 5.1. [próbna matura CKE, listopad 2006, zadanie 5. (3 pkt)]Sporządź wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 2|x| - x^2$, a następnie, korzystając z niego, podaj wszystkie wartości x , dla których funkcja f przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości x , dla których przyjmuje minima lokalne.**Zadanie 5.2.** [matura, maj 2007, zadanie 1. (5 pkt)]Dana jest funkcja $f(x) = |x - 1| - |x + 2|$ dla $x \in \mathbb{R}$.

- Wyznacz zbiór wartości funkcji f dla $x \in (-\infty, -2)$.
- Naszkicuj wykres tej funkcji.
- Podaj jej miejsca zerowe.
- Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania.

Zadanie 5.3. [matura, maj 2008, zadanie 2. (4 pkt)]Rozwiąż nierówność $|x - 2| + |3x - 6| < |x|$.**Zadanie 5.4.** [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 2. (3 pkt)]Rozwiąż nierówność $|x + 3| + |3x + 9| < |x + 5|$.**Zadanie 5.5.** [matura, maj 2010, zadanie 1. (4 pkt)]Rozwiąż nierówność $|2x + 4| + |x - 1| \leq 6$.**Zadanie 5.6.** [matura, sierpień 2010, zadanie 2. (4 pkt)]Rozwiąż nierówność $|2x + 2| + |x - 2| > 5$.

Zadanie 5.7. [matura, czerwiec 2011, zadanie 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|2x - 4| + |x - 5| \geq 12$.

Zadanie 5.8. [matura, czerwiec 2012, zadanie 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|x - 2| + |x + 1| \geq 3x - 3$.

Zadanie 5.9. [matura, maj 2013, zadanie 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|2x - 5| - |x + 4| \leq 2 - 2x$.

Zadanie 5.10. [matura, czerwiec 2013, zadanie 1. (5 pkt)]

Rozwiąż nierówność $\sqrt{x^2 + 4x + 4} \geq 11 - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

Zadanie 5.11. [matura, czerwiec 2014, zadanie 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|x + 6| - 2|x - 2| \leq 2x - 3$.

Zadanie 5.12. [matura, maj 2015, zadanie 6. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|2x - 6| + |x + 7| \geq 17$.

Zadanie 5.13. [matura, czerwiec 2015, zadanie 2. (4 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x-2}{x}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x takich,

że $x \neq 0$. Rozwiąż nierówność $\left| f\left(\frac{1}{x+1}\right) - 3 \right| \leq 4$.

Zadanie 5.14. [matura, czerwiec 2016, zadanie 9. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|x^2 - 3x + 2| \geq |x - 1|$.

Zadanie 5.15. [matura, czerwiec 2016, zadanie 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|x + 5| + |x - 6| \leq 9 - x$.

Zadanie 5.16. [matura, maj 2017, zadanie 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|x - 1| + |x - 5| \leq 10 - 2x$.

Zadanie 5.17. [matura, czerwiec 2017, zadanie 1. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $2|x + 1| - |x - 2| = 9$.

Zadanie 5.18. [matura, maj 2018, zadanie 1. (4 pkt)]

Rozwiąż równanie $3|x + 2| = |x - 3| + 11$.

Zadanie 5.19. [matura, czerwiec 2018, zadanie 1. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność $|2x - 1| + x \leq 5 + |x + 5|$.

Zadanie 5.20. [matura, maj 2019, zadanie 1. (5 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2} - x + 3|x-1|$, dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -2$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Zadanie 5.21. [matura, czerwiec 2019, zadanie 6. (5 pkt)]

Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 3x < |2x - 4|$.

Zadanie 5.22. [matura, czerwiec 2020, zadanie 6. (3 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których równanie $|x - 5| = (a - 1)^2 - 4$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

Zadanie 5.23. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 1. (6 pkt)]

Dany jest układ równań

$$\begin{cases} mx + y = m^2 \\ 4x + my = 8 \end{cases}$$

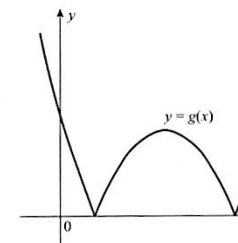
z niewiadomymi x i y oraz parametrem m .

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których układ jest oznaczony, a para liczb (x, y) będąca rozwiązaniem układu spełnia warunek $|x + y| < 2$.

Zadanie 5.24. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 2.]

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = \left| -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5 \right|$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Fragment wykresu funkcji g w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono na rysunku (jednostki pominięto).



Zadanie 5.24.1. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 2.1. (2 pkt)]

Wyznacz zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja g przyjmuje w przedziale $[9, 11]$.

Zapisz obliczenia.

Zadanie 5.24.2. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 2.1. (2 pkt)]

Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m , dla których równanie $g(x) = |m|$ ma dokładnie dwa rozwiązania dodatnie.

Zadanie 5.25. [matura, maj 2023, zadanie 9. (4 pkt)]

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ dla każdej liczby rzeczywistej a .

6. Ciągi

Zadanie 6.1. [matura CKE dla chętnych, styczeń 2003, zadanie 14. (5 pkt)]Suma n początkowych, kolejnych wyrazów ciągu (a_n) , jest obliczana według wzoru

$$S_n = n^2 + 3n, \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Wyznacz a_n . Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.**Zadanie 6.2.** [matura CKE dla chętnych, styczeń 2003, zadanie 15. (5 pkt)]

Dziesiąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego równa się 10. Oblicz iloczyn dwunastu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 6.3. [matura próbna CKE, listopad 2006, zadanie 10. (5 pkt)]Ciąg liczbowy (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem

$$a_n = (n-3)(2-p^2), \quad \text{gdzie } p \in \mathbb{R}.$$

- Wykaż, że dla każdej wartości p ciąg (a_n) jest arytmetyczny.
- Dla $p = 2$ oblicz sumę $a_{20} + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{40}$.
- Wyznacz wszystkie wartości p , dla których ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n - pn$ jest stały.

Zadanie 6.4. [matura próbna CKE, marzec 2008, zadanie 10. (3 pkt)]Dany jest ciąg $x_n = -1 - n$ dla $n \geq 1$. Ciąg (y_n) ma tę własność, że dla każdego $n \geq 1$ punkty o współrzędnych $(x_n, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, y_n)$ leżą na jednej prostej. Wyznacz wzór ogólny ciągu (y_n) .**Zadanie 6.5.** [matura próbna CKE, marzec 2008, zadanie 10. (5 pkt)]Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3^{1-n}$ dla $n \geq 1$

- Oblicz iloraz tego ciągu.
- Oblicz $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \dots + \log_3 a_{100}$, czyli sumę logarytmów o podstawie 3, stu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 6.6. [matura, maj 2008, zadanie 6. (3 pkt)]Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a = b = c$.**Zadanie 6.7.** [matura, maj 2009, zadanie 4. (5 pkt)]W skarbcu królewskim było k monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucił o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbcia król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę k , dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości k oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.**Zadanie 6.8.** [matura, maj 2009, zadanie 7. (6 pkt)]Ciąg $(x - 3, x + 3, 6x + 2, \dots)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.**Zadanie 6.9.** [matura, maj 2010, zadanie 5. (5 pkt)]O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, zaś ciąg $(a + 1, b + 4, c + 19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.**Zadanie 6.10.** [matura, sierpień 2010, zadanie 11. (5 pkt)]Ciąg (a, b, c) jest geometryczny i $a + b + c = 10$, zaś ciąg $(a - 5, b - 4, c - 11)$ jest arytmetyczny. Oblicz a, b, c .**Zadanie 6.11.** [matura, maj 2011, zadanie 5. (4 pkt)]O ciągu (a_n) dla $n \geq 1$ wiadomo, że:

- ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3^{1-n}$ dla $n \geq 1$ jest geometryczny o ilorazie $q = 27$.
- $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 145$.

Oblicz x_1 .**Zadanie 6.12.** [matura, czerwiec 2011, zadanie 3. (5 pkt)]Ciąg (a, b, c) jest geometryczny. Ciąg $(3a + 3, 2b, c - 12)$ jest arytmetyczny i suma jego dwóch pierwszych wyrazów jest równa trzeciemu. Oblicz a, b, c .**Zadanie 6.13.** [matura, maj 2012, zadanie 5. (6 pkt)]

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

Zadanie 6.14. [matura, czerwiec 2012, zadanie 5. (5 pkt)]W ciągu arytmetycznym (a_n) , dla $n \geq 1$, dane są $a_1 = -2$ oraz różnica $r = 3$. Oblicz największe n takie, że $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2012$.

Zadanie 6.15. [matura, maj 2013, zadanie 5. (5 pkt)]

Ciąg liczbowy (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + b + c = 33$, natomiast ciąg $(a - 1, b + 5, c + 19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c .

Zadanie 6.16. [matura, czerwiec 2013, zadanie 10. (4 pkt)]

Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie i w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny.

Uzasadnij, że prawdziwa jest równość $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$.

Zadanie 6.17. [matura, maj 2014, zadanie 7. (6 pkt)]

Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_{100} = 100$. Oblicz a_1 .

Zadanie 6.18. [matura, czerwiec 2014, zadanie 8. (6 pkt)]

Trzy liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, którego iloraz jest różny od 1. Jeżeli weźmiemy kolejno drugą z nich, pierwszą i trzecią, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Jeżeli pierwszy wyraz tego ciągu arytmetycznego zmniejszymy o 7, drugi pozostawimy bez zmian, a trzeci zwiększymy o 3, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz te liczby.

Zadanie 6.19. [matura, maj 2015, zadanie 4. (6 pkt)]

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy 5, do drugiej 3, a do trzeciej 4, to otrzymamy rosnący ciąg geometryczny, w którym trzeci wyraz jest cztery razy większy od pierwszego. Znajdź te liczby.

Zadanie 6.20. [matura, czerwiec 2016, zadanie 10. (3 pkt)]

Dany jest ciąg (a_n) określony dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$, w którym $a_1 = 4$ oraz dla każdej liczby $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_{n+1} = a_n + n - 4$. Oblicz pierwszy wyraz ciągu (a_n) i ustal, czy ciąg ten jest malejący.

Zadanie 6.21. [matura, czerwiec 2016, zadanie 4 (3 pkt)]

Ciąg (a_n) jest określony wzorem
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3n + 2 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Oblicz średnią arytmetyczną liczb $a_2 + 3$ i $a_3 + 2$.

Zadanie 6.22. [matura, maj 2017, zadanie 14. (6 pkt)]

Liczby a, b, c są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a - 2, b, 2c + 1)$ jest geometryczny.

Wyznacz liczby a, b, c .

Zadanie 6.23. [matura, czerwiec 2017, zadanie 10. (5 pkt)]

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorzem ciągu geometrycznego (b_n) . Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n) . Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

Zadanie 6.24. [matura, maj 2018, zadanie 13. (4 pkt)]

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$$

Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769.

Zadanie 6.25. [matura, maj 2018, zadanie 2 (5 pkt)]

Liczby a, b, c , spełniające warunek $3a + b + 3c = 77$, są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Ciąg $(a, b + 1, 2c)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b, c oraz podaj wyrazy ciągu geometrycznego.

Zadanie 6.26. [matura, czerwiec 2018, zadanie 10. (4 pkt)]

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2) , którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.

Zadanie 6.27. [matura, maj 2019, zadanie 12. (6 pkt)]

Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg

$$\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a + 2b + c} \right)$$
 jest geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

Zadanie 6.28. [matura, maj 2019, zadanie 4. (5 pkt)]

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, ciąg $(a + 1, b + 5, c)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym oraz $a + b + c = 39$. Oblicz a, b, c .

Zadanie 6.29. [matura, czerwiec 2019, zadanie 4. (4 pkt)]

W ciągu geometrycznym $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 182, a stosunek sumy wyrazów o numerach nieparzystych do sumy wyrazów o numerach parzystych jest równy $\frac{1}{3}$. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu.

Zadanie 6.30. [matura, czerwiec 2020, zadanie 10. (5 pkt)]

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) , spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}$. Wyrazy a_3, a_2, a_1 , są odpowiednio – czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1 .

Zadanie 6.31. [matura, lipiec 2020, zadanie 6. (3 pkt)]

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równy 2. Wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają warunek $a_n = 3 \cdot a_{n+1} + n^2$. Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3$.

Zadanie 6.32. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 12. (5 pkt)]

Czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jest równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu. Ponadto ciąg $(a + 100, b, c)$ jest geometryczny. Oblicz wyrazy ciągu (a, b, c, d) .

Zadanie 6.33. [matura, czerwiec 2023, zadanie 11. (5 pkt)]

Ciąg (a, b, c) jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich.

Ciąg $(2a, 2b, c + 1)$ jest trzywyrazowym ciągiem arytmetycznym.

Ponadto spełniony jest warunek $c - b = 6$. Oblicz a , b oraz c . Zapisz obliczenia.

Zadanie 6.34. [matura, maj 2024, zadanie 7. (4 pkt)]

Trzywyrazowy ciąg (x, y, z) jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Liczby x , y oraz z są – odpowiednio – pierwszym, drugim oraz szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oblicz x , y oraz z . Zapisz obliczenia.

7. Granica ciągu, suma szeregu nieskończonego

Zadanie 7.1. [matura, maj 2005, zadanie 14. (5 pkt)]

Oblicz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)}{5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)}.$$

Zadanie 7.2. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2005, zadanie 15. (5 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny postaci:

$$2, \frac{2}{p-1}, \frac{2}{(p-1)^2}, \frac{2}{(p-1)^3}, \dots$$

Wyznacz wszystkie wartości p , dla których granicą tego ciągu jest liczba:

- 0.
- 2.

Zadanie 7.3. [matura, styczeń 2006, zadanie 14. (4 pkt)]

Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość a ($a > 0$).

Zadanie 7.4. [matura, maj 2006, zadanie 13. (5 pkt)]

Dany jest ciąg (a_n) , gdzie $a_n = \frac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

- Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) .
- Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- Podaj największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek $a \leq a_n \leq b$.

Zadanie 7.5. [matura, maj 2006, zadanie 19. (7 pkt)]

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k - 2)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu (a_n) .

Zadanie 7.6. [matura, maj 2007, zadanie 11. (4 pkt)]

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geq 1$.

- Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}$.
- Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3n^2 - 2}$.

Zadanie 7.7. [przykładowy arkusz CKE, grudzień 2014, zadanie 8. (2 pkt)]

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{(n+2)^2}{n+444} \right)$$

Zadanie 7.8. [przykładowy arkusz CKE, grudzień 2014, zadanie 12. (3 pkt)]

Niech P_n oznacza pole koła o promieniu $\frac{1}{2^n}$, dla $n \geq 1$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (P_n) .

Zadanie 7.9. [matura, maj 2015, zadanie 14. (2 pkt)]

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11n^3 + 6n + 5}{6n^3 + 1} - \frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 - 4} \right).$$

Zadanie 7.10. [matura, maj 2016, zadanie 8. (2 pkt)]

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x , dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest zbieżny.

Zadanie 7.11. [matura, czerwiec 2016, zadanie 6. (2 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym iloraz jest równy pierwszemu wyrazowi, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 12. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

Zadanie 7.12. [matura, czerwiec 2018, zadanie 11. (4 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2 + y^2 = 2^{11-n}$, $n \geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} wewnętrznym okręgiem o_{2k} . Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k , gdzie $k \geq 1$.

Zadanie 7.13. [matura, maj 2019, zadanie 5. (2 pkt)]

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n^3 + 11n^2}{7n^3 + 5n^2 + 3n + 1} - \frac{n^2}{3n^2 + 1} \right)$$

Zadanie 7.14. [matura, lipiec 2020, zadanie 5. (2 pkt)]

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równa 2, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 3. Oblicz iloraz ciągu (a_n) .

Zadanie 7.15. [matura, maj 2021, zadanie 5. (2 pkt)]

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)^2 - (1-2n)^2}{(2n-1)^2}$$

Zadanie 7.16. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 3. (4 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 7, a suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8.

Wyznacz wszystkie wartości n , dla których spełniona jest nierówność

$$\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001$$

gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

Zadanie 7.17. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 8. (2 pkt)]

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n}$$

Zadanie 7.18. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 13. (4 pkt)]

W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}.$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 6.

Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) .

Zadanie 7.19. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 17. (3 pkt)]

Ciąg (a_n) jest określony wzorem

$$a_n = (n+5)^2 \cdot \left(\frac{p+1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2p+2}{(n+2)(n+3)} \right) \text{ dla } n \geq 1$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których granica ciągu jest równa 12.

Zadanie 7.20. [matura, maj 2022, zadanie 5. (2 pkt)]

Ciąg (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $a_n = \frac{(7p-1)n^3 + 5pn - 3}{(p+1)n^3 + n^2 + p}$,

gdzie p jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Oblicz wartość p , dla której granica ciągu (a_n) jest równa $\frac{4}{3}$.

Zadanie 7.21. [matura, maj 2022, zadanie 10. (4 pkt)]

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Ponadto $a_1 = 675$ i $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$.

Ciąg (b_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa sumie dwudziestu pięciu początkowych kolejnych wyrazów ciągu (b_n) . Ponadto $a_3 = b_4$. Oblicz b_1 .

Zadanie 7.22. [matura, czerwiec 2022, zadanie 10. (4 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, którego iloraz q jest równy pierwszemu wyrazowi i spełnia warunek $|q| < 1$.

Stosunek sumy S_N wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych do sumy S_P wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równy różnicy tych sum, tj.

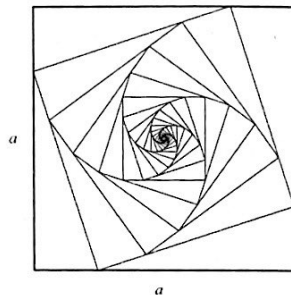
$$\frac{S_N}{S_P} = S_N - S_P. \text{ Oblicz } q.$$

Zadanie 7.23. [matura, maj 2023, zadanie 10. (4 pkt)]

Określamy kwadraty $K_1, K_2, K_3, \dots$ następująco:

- K_1 jest kwadratem o boku długości a
 - K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku 1:3
 - K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku 1:3
- i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,
- K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku 1:3.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny. Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.



Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7.24. [matura, czerwiec 2023, zadanie 5. (2 pkt)]

Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2n + 1}{3n^3 - n^2 - 2n + 3}$$

Zadanie 7.25. [matura, czerwiec 2023, zadanie 7. (4 pkt)]

Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$2x - \frac{6x}{x-1} + \frac{18x}{(x-1)^2} - \frac{54x}{(x-1)^3} + \dots$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0 i od 1), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{15}{2}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7.26. [matura, czerwiec 2024, zadanie 7. (4 pkt)]

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych jest równa 16, tj.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots = 16$$

$$\text{Ponadto } a_1 + a_3 = \frac{5}{2} \cdot a_2$$

Wyznacz wzór ogólny na n -ty wyraz ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

8. Planimetria

Zadanie 8.1. [matura CKE dla chętnych, styczeń 2003, zadanie 19. (5 pkt)]

Trapez równoramienny, o obwodzie równym 20 cm, jest opisany na okręgu. Wiedząc, że przekątna trapezu ma długość $\sqrt{41}$ cm, oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 8.2. [próbna matura CKE, styczeń 2004, zadanie 17. (5 pkt)]

Odcinki o długościach: $2\sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ są bokami trójkąta.

- Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta i oblicz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka tego kąta.
- Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 8.3. [matura, maj 2006, zadanie 17. (6 pkt)]

Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD . Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|} = \frac{2}{5}$.

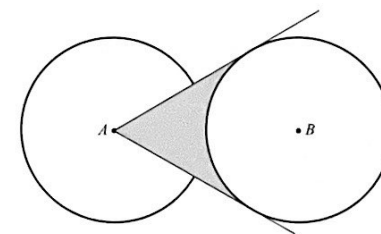
- Wyznacz długość ramienia tego trapezu.
- Oblicz cosinus $\angle CBD$.

Zadanie 8.4. [próbna matura CKE, listopad 2006, zadanie 4. (7 pkt)]

Trójkąt prostokątny ABC , w którym $\angle BCA = 90^\circ$ i $\angle CAB = 30^\circ$, jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz odległość wierzchołka C trójkąta od punktu styczności tego okręgu z przeciwprostokątną. Wykonaj odpowiedni rysunek.

Zadanie 8.5. [próbna matura CKE, listopad 2006, zadanie 12. (4 pkt)]

Dwa okręgi, każdy o promieniu 8, są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego z nich poprowadzono styczne do drugiego okręgu. Oblicz pole zacieniowanej figury (patrz rysunek).



Zadanie 8.6. [matura, maj 2007, zadanie 4. (3 pkt)]

Dany jest trójkąt o bokach długości $1, \frac{3}{2}, 2$. Oblicz cosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta.

Zadanie 8.7. [matura, maj 2007, zadanie 10. (4 pkt)]

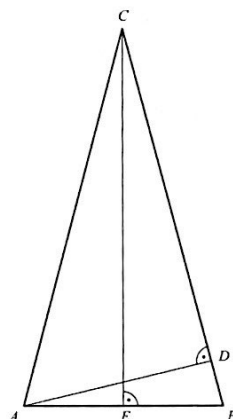
Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.

Zadanie 8.8. [matura próbna CKE, marzec 2008, zadanie 7. (4 pkt)]

W czworokącie wypukłym $ABCD$ dane są: $|AB| = 2$, $|BC| = \sqrt{3}$, $|CD| = 3$, $|DA| = 4$ i $|\angle DAB| = 60^\circ$. Oblicz pole tego czworokąta.

Zadanie 8.9. [matura próbna CKE, marzec 2008, zadanie 9. (5 pkt)]

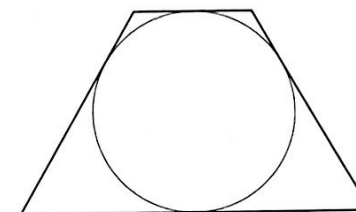
W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |BC|$ wysokość CE jest dwa razy dłuższa od wysokości AD (patrz rysunek). Oblicz kosinusy wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta ABC .

**Zadanie 8.10.** [matura, maj 2008, zadanie 12. (4 pkt)]

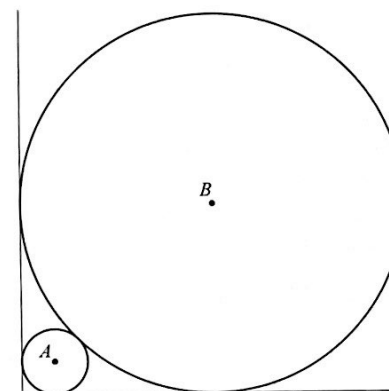
W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości: $|BC| = 9$, $|CA| = 12$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że odcinki BC i CD mają równe długości. Oblicz długość odcinka AD .

Zadanie 8.11. [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 8. (6 pkt)]

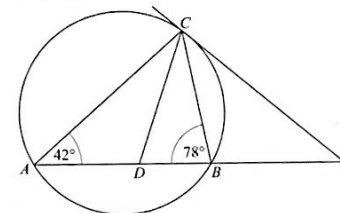
Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraż pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.

**Zadanie 8.12.** [matura, maj 2009, zadanie 8. (4 pkt)]

Dwa okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest jednocześnie styczny do ramion tego samego kąta prostego (patrz rysunek). Udowodnij, że stosunek promienia większego z tych okręgów do promienia mniejszego jest równy $3 + 2\sqrt{2}$.

**Zadanie 8.13.** [matura, sierpień 2010, zadanie 8. (4 pkt)]

Odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB trójkąta ABC . Kąty trójkąta ABC mają miary: $|\angle CAB| = 42^\circ$, $|\angle ABC| = 78^\circ$. Styczna do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie C przecina prostą AB w punkcie E (zobacz rysunek).



Oblicz, ile stopni ma każdy z kątów trójkąta CDE .

Zadanie 8.14. [matura, maj 2011, zadanie 6. (4 pkt)]

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\angle BAC| = 30^\circ$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

Zadanie 8.15. [matura, czerwiec 2011, zadanie 7. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $|AC| = 5$ i $|AB| = 8$. Pole tego trójkąta jest równe $10\sqrt{3}$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 8.16. [matura, maj 2012, zadanie 9. (5 pkt)]

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $a > b$. Odcinek AE jest wysokością trójkąta DAB opuszczoną na jego bok BD . Wyraż pole trójkąta AED za pomocą a i b .

Zadanie 8.17. [matura, czerwiec 2012, zadanie 8. (5 pkt)]

W czworokącie $ABCD$ dane są długości boków: $|AB| = 24$, $|CD| = 15$, $|AD| = 7$. Ponadto kąty DAB oraz BCD są proste. Oblicz pole tego czworokąta oraz długości jego przekątnych.

Zadanie 8.18. [matura, maj 2013, zadanie 9. (5 pkt)]

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC .

Zadanie 8.19. [matura, czerwiec 2013, zadanie 6. (5 pkt)]

W równoległoboku $ABCD$ miara kąta ostrego jest równa 30° , a odległości punktu przecięcia się przekątnych od sąsiednich boków równoległoboku są równe 2 i $\sqrt{3}$. Oblicz długość krótszej przekątnej tego równoległoboku.

Zadanie 8.20. [matura, maj 2014, zadanie 9. (5 pkt)]

Dane są trzy okręgi o środkach A , B , C i promieniach równych odpowiednio r , $2r$, $3r$. Każde dwa z tych okręgów są zewnętrznie styczne: pierwszy z drugim w punkcie K , drugi z trzecim w punkcie L i trzeci z pierwszym w punkcie M . Oblicz stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC .

Zadanie 8.21. [matura, czerwiec 2014, zadanie 2. (4 pkt)]

W czworokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 5\sqrt{3}$ i $|CD| = 6$, można wpisać okrąg. Przekątna BD tworzy z bokiem AB czworokątą kąt o mierze 60° , natomiast z bokiem AD tworzy kąt, którego sinus jest równy $\frac{3}{4}$. Wyznacz długości boków AB i BC oraz długość przekątnej BD tego czworokąta.

Zadanie 8.22. [przykładowy arkusz CKE, grudzień 2014, zadanie 7. (2 pkt)]

Długości boków prostokąta są równe 3 oraz 5 . Oblicz sinus kąta ostrego, który tworzą przekątne tego prostokąta.

Zadanie 8.23. [matura, maj 2015, zadanie 10. (4 pkt)]

Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4$, $|DA| = 5$. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

Zadanie 8.24. [matura, maj 2015, zadanie 8. (4 pkt)]

Na boku AB trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 2 : 3$. Oblicz tangens kąta ACD .

Zadanie 8.25. [matura, czerwiec 2015, zadanie 11. (4 pkt)]

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

Zadanie 8.26. [matura, czerwiec 2016, zadanie 10. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = |BC| = 10$, $\angle ACB = 120^\circ$. Na boku CB obrano punkt P dzielący ten bok w stosunku $3 : 2$ (licząc od punktu C). Oblicz sinus kąta PAB .

Zadanie 8.27. [matura, maj 2017, zadanie 9. (6 pkt)]

W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa 36 , a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 10 . Oblicz długości boków tego trójkąta i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 8.28. [matura, czerwiec 2017, zadanie 14. (6 pkt)]

Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 6 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa AB trapezu, o długości 12 , jest średnicą tego okręgu. Przekątne AC i BD trapezu przecinają się w punkcie P . Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt ABP .

Zadanie 8.29. [matura, maj 2018, zadanie 3. (5 pkt)]

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $|AD| = |AB| = |BC| = a$, $\angle BAD = 60^\circ$ i $\angle ADC = 135^\circ$. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Zadanie 8.30. [matura, czerwiec 2018, zadanie 12. (5 pkt)]

Trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu. Ramię BC ma długość 10 , a ramię AD jest wysokością trapezu. Podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD . Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 8.31. [matura, maj 2019, zadanie 10. (4 pkt)]

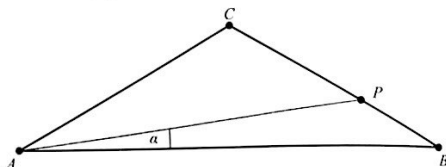
Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC| = 16$, $|AD| = 6$, $|CD| = 14$ i $|BC| = |BD|$. Oblicz obwód trójkąta ABC .

Zadanie 8.32. [matura, czerwiec 2019, zadanie 10. (4 pkt)]

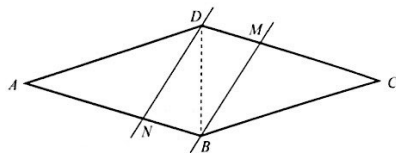
Miara kąta wewnętrznego n -kąta foremnego jest o 2° mniejsza od miary kąta wewnętrznego $(n + 2)$ -kąta foremnego. Oblicz n .

Zadanie 8.33. [matura, maj 2020, zadanie 8. (4 pkt)]

W trójkącie równoramiennym ABC :
 $|AC| = |BC| = 10$, a miara kąta ABC
 jest równa 30° . Na boku BC wybrano
 punkt P , taki, że $\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{2}{3}$. Oblicz si-
 nus kąta α (zobacz rysunek).

**Zadanie 8.34.** [matura, lipiec 2020, zadanie 14. (6 pkt)]

Dany jest romb $ABCD$. Przez wierzchołki B
 i D poprowadzono dwie proste równoległe
 przecinające boki CD i AB – odpowiednio
 – w punktach M i N , tak, że podzieliły one
 ten romb na trzy figury AND , $NBMD$, BCM
 o równych polach. Ponadto wiadomo, że
 $|MB| = |ND| = |BD|$ (zobacz rysunek). Ob-
 licz cosinus kąta ostrego tego rombu.

**Zadanie 8.35.** [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 9. (4 pkt)]

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$. Przekątna BD tego czworoką-
 ta ma długość 10. Kąty wewnętrzne BAD i ADC czworokąta $ABCD$ są ostre, a iloczyn sinusów
 wszystkich jego kątów wewnętrznych jest równy $\frac{3}{8}$. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego
 czworokąta.

Zadanie 8.36. [matura, maj 2021, zadanie 13. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt prostokątny ABC . Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest pięć razy
 krótszy od przeciwprostokątnej tego trójkąta. Oblicz sinus tego z kątów ostrych trójkąta ABC ,
 którego ma większą miarę.

Zadanie 8.37. [matura, czerwiec 2021, zadanie 14. (5 pkt)]

Na okręgu jest opisany czworokąt $ABCD$. Bok AD tego czworokąta jest dwa razy dłuższy
 od boku AB , a przekątna BD ma długość równą 6. Ponadto spełnione są następujące warunki:

$$\cos(\angle ADB) = \frac{7}{8}, \quad |\angle BCD| = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad |AB| > \sqrt{15}.$$

Oblicz długość boku BC tego czworokąta.

Zadanie 8.38. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 11. (5 pkt)]

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $|AB| > |CD|$ oraz ramię BC ma
 długość 6. Na tym trapezie opisano okrąg o promieniu $R = 5$. Miary kątów BAC i ABC tego
 trapezu spełniają warunek

$$\frac{\sin|\angle BAC|}{\sin|\angle ABC|} = \frac{5}{8}$$

Oblicz pole i obwód trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

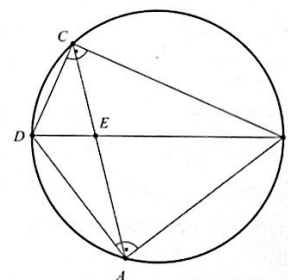
Zadanie 8.39. [matura, maj 2023, zadanie 8. (4 pkt)]

Czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = 4$ i $|CD| = 5$, jest opisany na okręgu. Przekątna AC tego
 czworokąta tworzy z bokiem BC kąt o mierze 60° , natomiast z bokiem AB – kąt ostry, którego
 sinus jest równy $\frac{1}{4}$.

Oblicz obwód czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8.40. [matura, czerwiec 2023, zadanie 12. (5 pkt)]

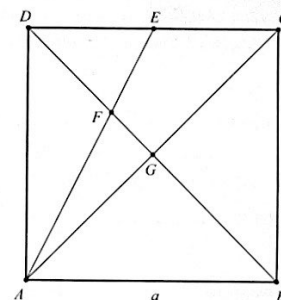
Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o pro-
 mieniu 4. Kąty BAD i BCD są proste (zobacz rysun-
 nek). Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się
 w punkcie E tak, że $|BE| = 3 \cdot |DE|$ oraz $|BD| = 2 \cdot |AE|$.



Oblicz długości boków czworokąta $ABCD$. Zapisz obli-
 czenia.

Zadanie 8.41. [matura, maj 2024, zadanie 9. (4 pkt)]

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości a . Punkt E
 jest środkiem boku CD . Przekątna BD dzieli trójkąt ACE
 na dwie figury: AGF oraz $CEFG$ (zobacz rysunek).



Oblicz pola figur AGF oraz $CEFG$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8.42. [matura, maj 2024, zadanie 13. (4 pkt)]

Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 17. Najdłuższym bokiem tego trójkąta
 jest bok AC , a długości dwóch pozostałych boków są równe $|AB| = 30$ oraz $|BC| = 17$. Oblicz
 miarę kąta BAC oraz długość boku AC tego trójkąta.

Zadanie 8.43. [matura, czerwiec 2024, zadanie 8. (4 pkt)]

W okrąg o promieniu 4 wpisano trójkąt ABC . Długość boku AB jest równa 6. Bok BC ma
 długość $4\sqrt{3}$ i jest najdłuższym bokiem tego trójkąta. Oblicz długość boku AC trójkąta ABC .
 Zapisz obliczenia.

9. Stereometria

Zadanie 9.1. [próba matura CKE, styczeń 2004, zadanie 18. (6 pkt)]

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu 9 dm^2 . Dwie ściany boczne ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątami $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{6}$.

- Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz na nim dane kąty.
- Oblicz objętość ostrosłupa.

Zadanie 9.2. [matura, maj 2005, zadanie 16. (5 pkt)]

Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Sporządź odpowiedni rysunek.

Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zadanie 9.3. [matura, styczeń 2006, zadanie 19. (6 pkt)]

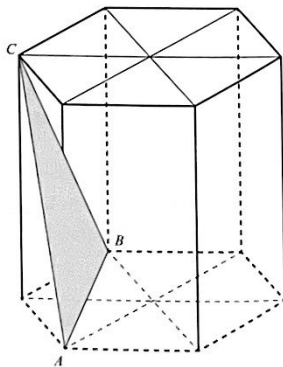
Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym długość krawędzi podstawy jest równa a . Kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ma miarę 45° . Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej jej krawędzi bocznej. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz otrzymany przekrój. Oblicz pole tego przekroju.

Zadanie 9.4. [matura, maj 2007, zadanie 3. (5 pkt)]

Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonych w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły lądownika.

Zadanie 9.5. [matura próbna CKE, marzec 2008, zadanie 8. (5 pkt)]

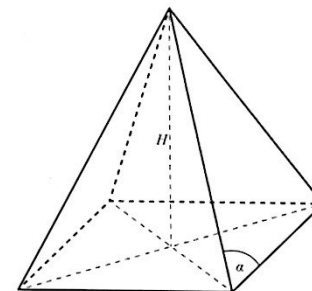
W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym płaszczyzna ABC zawierająca przekątne sąsiednich ścian bocznych, wychodzących z tego samego wierzchołka, jest nachylona do podstawy graniastosłupa pod kątem $\alpha = 60^\circ$. Pole przekroju graniastosłupa tą płaszczyzną równa się $8\sqrt{3}$. Zaznacz na poniższym rysunku kąt α . Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Zadanie 9.6. [matura, maj 2008, zadanie 11. (5 pkt)]

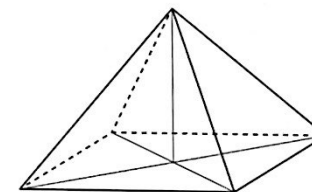
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są: H – wysokość ostrosłupa oraz α – miara kąta utworzonego przez krawędź boczną i krawędź podstawy ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$).

- Wykaż, że objętość V tego ostrosłupa jest równa $\frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\tan^2 \alpha - 1}$.
- Oblicz miarę kąta α , dla której objętość V danego ostrosłupa jest równa $\frac{2}{9} H^3$. Wynik podaj w zaokrągleniu do całkowitej liczby stopni.



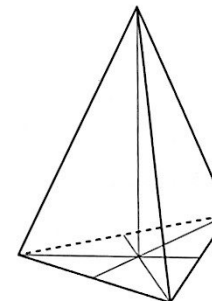
Zadanie 9.7. [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 11. (4 pkt)]

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym wszystkie krawędzie mają równą długość. Zaznacz na rysunku kąt utworzony przez dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa i oblicz kosinus tego kąta.



Zadanie 9.8. [matura, maj 2009, zadanie 11. (6 pkt)]

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy ma długość a i krawędź boczna jest od niej dwa razy dłuższa. Oblicz cosinus kąta między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ostrosłupa. Narysuj przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej i oblicz pole tego przekroju.



Zadanie 9.9. [matura, maj 2010, zadanie 11. (5 pkt)]

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a . Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa 2α . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 9.10. [matura, sierpień 2010, zadanie 7. (5 pkt)]

Objętość graniastoslupa prawidłowego trójkątnego jest równa $12\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej tego graniastoslupa jest równe 36. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.

Zadanie 9.11. [matura, maj 2011, zadanie 11. (6 pkt)]

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

Zadanie 9.12. [matura, czerwiec 2011, zadanie 12. (4 pkt)]

W ostrosłupie trójkątnym $ABCS$ o podstawie ABC i wierzchołku S dane są:
 $|AB| = |AC| = |SB| = |SC| = 9$ i $|AS| = |BC| = 8$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 9.13. [matura, maj 2012, zadanie 10. (5 pkt)]

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC . Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 9.14. [matura, czerwiec 2012, zadanie 11. (5 pkt)]

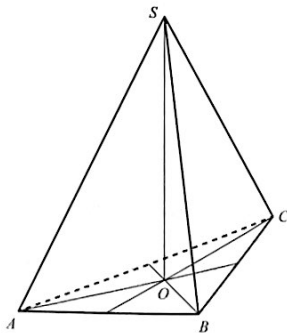
Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AB| = 30$, $|BC| = |AC| = 39$ i spodek wysokości ostrosłupa należy do jego podstawy. Każda wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka S ma długość 26. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 9.15. [matura, maj 2013, zadanie 10. (4 pkt)]

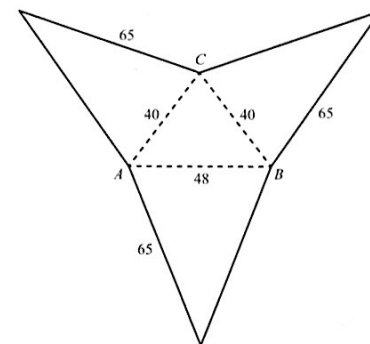
W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a . Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka A od ściany BCS jest równa d . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 9.16. [matura, czerwiec 2013, zadanie 9. (5 pkt)]

Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt ABC . Kąt nachylenia krawędzi bocznej AS do płaszczyzny podstawy ostrosłupa jest równy kątowi między krawędziami bocznymi AS i BS zawartymi w ścianie bocznej ASB tego ostrosłupa (zob. rysunek). Oblicz kosinus tego kąta.

**Zadanie 9.17.** [matura, maj 2014, zadanie 9. (6 pkt)]

Oblicz objętość ostrosłupa trójkątnego $ABCS$, którego siatkę przedstawiono na rysunku.

**Zadanie 9.18.** [matura, czerwiec 2014, zadanie 10. (5 pkt)]

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 25. Ściany boczne ABS i BCS mają takie same pola, każde równe 250. Ściany boczne ADS i CDS też mają jednakowe pola, każde równe 187,5. Krawędzie boczne AS i CS mają równe długości. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 9.19. [matura, maj 2015, zadanie 14. (5 pkt)]

Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa.

Zadanie 9.20. [matura, maj 2015, zadanie 10. (6 pkt)]

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCD S$ ma długość a . Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem 2α . Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną, która przechodzi przez krawędź podstawy i dzieli na połowy kąt pomiędzy ścianą boczną i podstawą. Oblicz pole powstałego przekroju tego ostrosłupa.

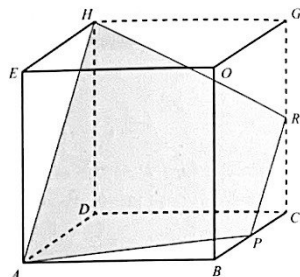
Zadanie 9.21. [matura, czerwiec 2015, zadanie 14. (5 pkt)]

Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest trapez $ABCD$. Przekątna AC tego trapezu ma długość $8\sqrt{3}$, jest prostopadła do ramienia BC i tworzy z dłuższą podstawą AB tego trapezu kąt o mierze 30° . Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość $4\sqrt{5}$. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej SD .

Zadanie 9.22. [matura, czerwiec 2015, zadanie 9. (5 pkt)]

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 2. Punkt P jest środkiem krawędzi BC . Płaszczyzna AHP przecina krawędź CG w punkcie R (zobacz rysunek).

Oblicz pole przekroju tego sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez punkty A, H, R i P .

**Zadanie 9.23.** [matura, maj 2016, zadanie 15. (6 pkt)]

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD$ o podstawie $ABCD$ wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę 120° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 9.24. [matura, czerwiec 2016, zadanie 12. (6 pkt)]

Trójkąt ABC jest podstawą prawidłowego ostrosłupa $ABCS$, którego krawędź boczna ma długość 10. Punkt D jest środkiem wysokości SO ostrosłupa oraz $|AD| = 2\sqrt{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 9.25. [matura, maj 2017, zadanie 9. (4 pkt)]

W czworoscianie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworoscianu. Płaszczyzna π , równoległa do podstawy tego czworoscianu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworoscianu i ostrosłup ścięty. Oblicz odległość środka S kuli od płaszczyzny π , tj. długość najkrótszego spośród odcinków SP , gdzie P jest punktem płaszczyzny π .

Zadanie 9.26. [matura, maj 2017, zadanie 10. (6 pkt)]

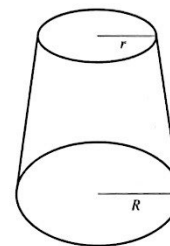
Przekątne sąsiednich ścian bocznych prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka tworzą z jego podstawą kąty o miarach $\frac{\pi}{3}$ i α . Cosinus kąta między tymi przekątnymi jest równy $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Wyznacz miarę kąta α .

Zadanie 9.27. [matura, czerwiec 2017, zadanie 7. (6 pkt)]

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoramienny o podstawie $|AB| = b$ i kącie α pomiędzy ramionami. Krawędź CD jest wysokością ostrosłupa, a kąt nachylenia ściany ABD do podstawy ostrosłupa jest równy β . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadanie 9.28. [matura, maj 2018, zadanie 10. (4 pkt)]

Objętość stożka ściętego (przedstawionego na rysunku) można obliczyć ze wzoru $V = \frac{1}{3}\pi H(r^2 + rR + R^2)$, gdzie r i R są promieniami podstaw ($r < R$), a H jest wysokością bryły. Dany jest stożek ścięty, którego wysokość jest równa 10, objętość 840π , a $r = 6$. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tej bryły do jednej z jej podstaw.

**Zadanie 9.29.** [matura, maj 2018, zadanie 11. (5 pkt)]

Przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek S i wysokości dwóch ścian bocznych jest trójkątem równobocznym. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 9.30. [matura, czerwiec 2018, zadanie 3. (5 pkt)]

Podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCD$ jest kwadrat $ABCD$. Punkt M jest środkiem odcinka AB , a punkt N jest środkiem odcinka BC . Trójkąt MNS jest równoboczny i jego bok ma długość m . Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$ i kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

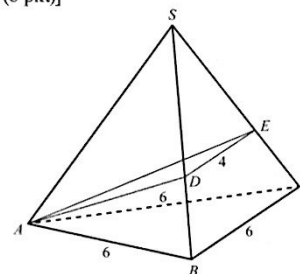
Zadanie 9.31. [matura, maj 2019, zadanie 11. (6 pkt)]

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest prostokąt $ABCD$, którego boki mają długości $|AB| = 32$ i $|BC| = 18$. Ściany boczne ABS i CDS są trójkątami przystającymi i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem α . Ściany boczne BCS i ADS są trójkątami przystającymi i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β . Miary kątów α i β spełniają warunek: $\alpha + \beta = 90^\circ$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadanie 9.32. [matura, czerwiec 2019, zadanie 11. (6 pkt)]

Podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6. Na krawędziach bocznych BS i CS wybrano punkty, odpowiednio D i E , takie że $|BD| = |CE|$ oraz $|DE| = 4$ (zobacz rysunek). Płaszczyzna ADE jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej BCS ostrosłupa.

Oblicz objętość tego ostrosłupa.



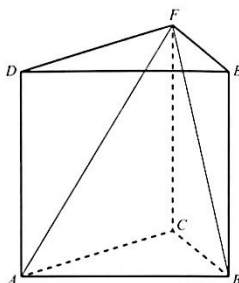
Zadanie 9.33. [matura, czerwiec 2020, zadanie 14. (6 pkt)]

Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCD$ jest trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Ramiona tego trapezu mają długości $|AD| = 10$ i $|BC| = 16$, a miara kąta ABC jest równa 30° . Każda ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α , taki, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{2}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

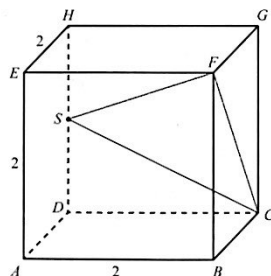
Zadanie 9.34. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 11. (4 pkt)]

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$. Krawędź podstawy tego graniastosłupa ma długość 4, a wysokość graniastosłupa jest równa 6 (zobacz rysunek).

Oblicz sinus kąta AFB .

**Zadanie 9.35.** [matura, czerwiec 2021, zadanie 10. (4 pkt)]

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 2. Punkt S jest środkiem krawędzi DH (zobacz rysunek). Oblicz miarę najmniejszego kąta wewnętrznego trójkąta CFS .

**Zadanie 9.36.** [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 10. (6 pkt)]

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD$ o podstawie $ABCD$ i polu powierzchni bocznej równym P . Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka S ma miarę 2α . Objętość tego ostrosłupa jest równa $\sqrt{k \cdot P^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(2\alpha)}$, gdzie k jest stałym współczynnikiem liczbowym. Oblicz współczynnik k . Zapisz obliczenia.

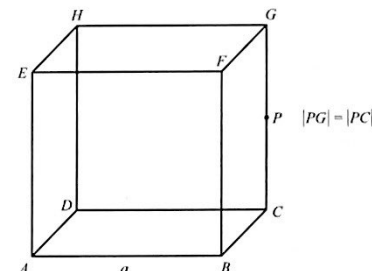
Zadanie 9.37. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 21. (5 pkt)]

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDE$ punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa. Stosunek obwodu podstawy $ABCD$ do sumy długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równy 1:5. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę. Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO (w zaokrągleniu do 1°).

Zadanie 9.38. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 25. (3 pkt)]

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a . Punkt P jest środkiem krawędzi CG tego sześcianu (zobacz rysunek obok).

Oblicz odległość wierzchołka C od płaszczyzny zawierającej punkty B , D oraz P .

**Zadanie 9.39.** [informator maturalny CKE 2021, zadanie 27. (4 pkt)]

Tomek i Marek chcą wejść docelowo na szczyt S pewnej góry. W chwili początkowej znajdują się w punkcie P położonym na stoku góry dokładnie na północ od szczytu na wysokości H_0 metrów n.p.m.

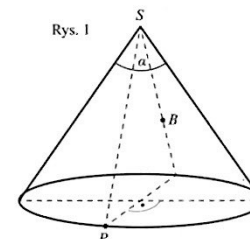
Tomek i Marek chcą dotrzeć do bazy B znajdującej się dokładnie na południe od szczytu na przeciwnym południowym stoku góry na wysokości H_1 metrów n.p.m., a następnie z bazy wejść na szczyt leżący na wysokości H_2 metrów n.p.m. (patrz rysunek 1).

Oblicz długość najkrótszej drogi, jaką muszą pokonać, aby dotrzeć do bazy.

Przyjmij, że góra jest stożkiem o kącie rozwarcia α .

Wskazówka: Powierzchnia boczna stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i rozłożeniu jest wycinkiem koła.

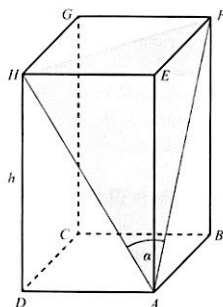
Najkrótsza droga do bazy odpowiada najkrótszej drodze z punktu P do B na wycinku koła.



Zadanie 9.40. [matura, maj 2022, zadanie 13. (5 pkt)]

Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek).

Pole trójkąta AFH jest równe 26,4. Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.

**Zadanie 9.41.** [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 10. (5 pkt)]

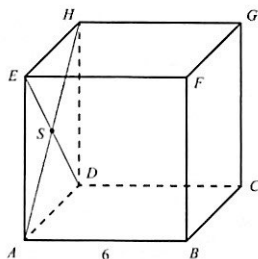
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$ o podstawie $ABCD$. Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość a . Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α takim, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Przez krawędź BC podstawy ostrosłupa poprowadzono

płaszczyznę π prostopadłą do ściany bocznej SAD .

Sporządź rysunek tego ostrosłupa, zaznacz na rysunku przekrój wyznaczony przez płaszczyznę π i nazwij figurę, która jest tym przekrojem. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9.42. [matura, maj 2023, zadanie 7. (4 pkt)]

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).



Oblicz wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9.43. [matura, czerwiec 2024, zadanie 10. (4 pkt)]

Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa a . Sinus kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka graniastosłupa jest równy $\frac{\sqrt{11}}{6}$. Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

10. Geometria analityczna**Zadanie 10.1.** [matura CKE dla chętnych, styczeń 2003, zadanie 17. (5 pkt)]

W układzie współrzędnych są dane punkty: $A(-9, -2)$ oraz $B(4, 2)$. Wyznacz współrzędne punktu C leżącego na osi OY , tak że kąt ACB jest kątem prostym.

Zadanie 10.2. [matura próbna CKE, styczeń 2004, zadanie 14. (3 pkt)]

Wykaż, że jeśli $a \neq b$, to równanie:

$$x^2 + y^2 + ax + by + \frac{a \cdot b}{2} = 0$$

jest równaniem okręgu. Wyznacz współrzędne środka i długość promienia tego okręgu.

Zadanie 10.3. [matura, maj 2005, zadanie 18. (8 pkt)]

Pary liczb (x, y) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego $ABCD$.

- Wyznacz współrzędne punktów: A, B, C, D .
- Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

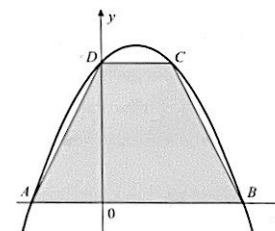
Zadanie 10.4. [matura, styczeń 2006, zadanie 18. (8 pkt)]

Punkty $A = (7, 8)$ i $B = (-1, 2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , w którym $\angle BCA = 90^\circ$.

- Wyznacz współrzędne wierzchołka C , wiedząc, że leży on na osi OX .
- Napisz równanie obrazu okręgu opisanego na trójkącie ABC w jednokładności o środku w punkcie $P = (1, 0)$ i skali $k = -2$.

Zadanie 10.5. [matura próbna CKE, listopad 2006, zadanie 6. (4 pkt)]

Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest zawarta w osi Ox , wierzchołek D jest punktem przecięcia paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6$ z osią Oy . Pozostałe wierzchołki trapezu również leżą na tej paraboli (patrz rysunek). Oblicz pole tego trapezu.



Zadanie 10.6. [matura, maj 2007, zadanie 5. (7 pkt)]

Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y = -x^2 + 6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi Ox . Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Zadanie 10.7. [matura próbna CKE, marzec 2008, zadanie 4. (5 pkt)]

Wiadomo, że okrąg jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$ w punkcie $A = (2, 1)$ i styczny do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 9$ w punkcie $B = (-4, 7)$. Oblicz promień tego okręgu.

Zadanie 10.8. [matura, maj 2008, zadanie 7. (4 pkt)]

Uzasadnij, że każdy punkt paraboli o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ jest równoodległy od osi Ox i od punktu $F = (0, 2)$.

Zadanie 10.9. [matura, maj 2008, zadanie 8. (4 pkt)]

Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu $(x - 16)^2 + y^2 = 4$ jest okrąg o równaniu $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$, a skala tej jednokładności jest liczbą ujemną.

Zadanie 10.10. [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 3. (5 pkt)]

Jeden z końców odcinka leży na paraboli o równaniu $y = x^2$, a drugi na prostej o równaniu $y = 2x - 6$. Wykaż, że długość tego odcinka jest nie mniejsza od $\sqrt{5}$. Sporządź odpowiedni rysunek.

Zadanie 10.11. [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 9. (7 pkt)]

Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A = (1, 4)$ i $B = (-6, 3)$ leży na osi Ox .

- Wyznacz równanie tego okręgu.
- Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej AB i oddalonej od początku układu współrzędnych o $\sqrt{2}$.

Zadanie 10.12. [matura, maj 2009, zadanie 9. (5 pkt)]

W układzie współrzędnych narysuj okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ oraz zaznacz punkt $A = (0, -1)$. Prosta o równaniu $x = 0$ jest jedną ze stycznych do tego okręgu przechodzących przez punkt A . Wyznacz równanie drugiej stycznej do tego okręgu, przechodzącej przez punkt A .

Zadanie 10.13. [matura, maj 2010, zadanie 7. (6 pkt)]

Punkt $A = (-2, 5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y = x + 1$. Oblicz współrzędne wierzchołka C .

Zadanie 10.14. [matura, sierpień 2010, zadanie 10. (6 pkt)]

Punkt $A = (2, -3)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu równym 300. Punkt $S = (3, 4)$ jest środkiem symetrii tego rombu. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

Zadanie 10.15. [matura, maj 2011, zadanie 7. (4 pkt)]

Oblicz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ poprowadzonymi przez punkt $A = (2, 0)$.

Zadanie 10.16. [matura, czerwiec 2011, zadanie 8. (5 pkt)]

Punkty $A = (-5, 5)$, $C = (8, 6)$ są przeciwległymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Prosta o równaniu $y = 2x$ jest osią symetrii tego trapezu. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D oraz pole tego trapezu.

Zadanie 10.17. [matura, czerwiec 2012, zadanie 7. (4 pkt)]

Okrąg jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $A = (0, 2)$ i $B = (2, 0)$ oraz jest styczny do prostej l w punkcie $C = (1, a)$, gdzie $a > 1$. Wyznacz równanie prostej l .

Zadanie 10.18. [matura, maj 2013, zadanie 7. (4 pkt)]

Prosta o równaniu $3x - 4y - 36 = 0$ przecina okrąg o środku $S = (3, 12)$ w punktach A i B . Długość odcinka AB jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu.

Zadanie 10.19. [matura, czerwiec 2013, zadanie 7. (4 pkt)]

Punkty $A = (2, 0)$ i $B = (4, 2)$ leżą na okręgu o równaniu $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$. Wyznacz na tym okręgu taki punkt C , aby trójkąt ABC był trójkątem równoramiennym o podstawie AB .

Zadanie 10.20. [matura, maj 2014, zadanie 8. (4 pkt)]

Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym $A = (0, 2\sqrt{3})$, $B = (2, 0)$, a C leży na osi Ox . Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie przechodzącej przez wierzchołek E .

Zadanie 10.21. [matura, czerwiec 2014, zadanie 7. (6 pkt)]

Odcinek AB o długości 4 jest zawarty w prostej o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$. Symetralna odcinka AB przecina oś Oy w punkcie $P = (0, 6)$. Oblicz współrzędne końców odcinka AB .

Zadanie 10.22. [przykładowy arkusz CKE, grudzień 2014, zadanie 17. (6 pkt)]

Dany jest okrąg o_0 o równaniu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$. W pierwszej „ćwiartce” układu współrzędnych istnieją dwa okręgi o_1, o_2 styczne zewnętrznie do okręgu o_0 jednocześnie styczne do obu osi układu współrzędnych. Oblicz odległość środków okręgów o_1 oraz o_2 .

Zadanie 10.23. [matura, maj 2015, zadanie 9. (5 pkt)]

Wyznacz równania prostych stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ i zarazem prostopadłych do prostej $x + 2y - 6 = 0$.

Zadanie 10.24. [matura, czerwiec 2015, zadanie 7. (2 pkt)]

Prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{61}{14}$ jest styczna od okręgu o środku $S = (1, -4)$. Wyznacz promień tego okręgu.

Zadanie 10.25. [matura, czerwiec 2015, zadanie 8. (6 pkt)]

Punkt $M = (5, 6)$ jest środkiem ramienia BC trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Podstawa AB tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + 1$ oraz $A = (-3, 0)$. Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta.

Zadanie 10.26. [matura, maj 2016, zadanie 10. (4 pkt)]

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których wykresy funkcji f i g , określonych wzorami $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = 5 - ax$, przecinają się w punkcie o obu współrzędnych dodatnich.

Zadanie 10.27. [matura, maj 2016, zadanie 13. (5 pkt)]

Punkty $A = (30, 32)$ i $B = (0, 8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x - y + 2 = 0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną AC . Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.

Zadanie 10.28. [matura, czerwiec 2016, zadanie 16. (5 pkt)]

Punkty $A = (-7, -2)$ i $B = (4, -7)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC , a wysokość opuszczona z wierzchołka A tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C .

Zadanie 10.29. [matura, czerwiec 2016, zadanie 6. (4 pkt)]

Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 + 12x + 4y + 36 = 0$, przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Zadanie 10.30. [matura, maj 2017, zadanie 13. (5 pkt)]

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5, 3)$ i $B = (0, 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$.

Zadanie 10.31. [matura, czerwiec 2017, zadanie 12. (5 pkt)]

Prosta l , na której leży punkt $P = (8, 2)$, tworzy z dodatnimi półosiąmi układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu równym 36. Wyznacz równanie prostej l .

Zadanie 10.32. [matura, maj 2018, zadanie 14. (6 pkt)]

Punkt $A = (7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

Zadanie 10.33. [matura, czerwiec 2018, zadanie 13. (5 pkt)]

Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi Oy układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB , BC i CA w punktach – odpowiednio – $P = (0, 10)$, $Q = (8, 6)$ i $R = (9, 13)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A , B i C tego trójkąta.

Zadanie 10.34. [matura, maj 2019, zadanie 11. (6 pkt)]

Dane są okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

Zadanie 10.35. [matura, czerwiec 2019, zadanie 13. (6 pkt)]

Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu 90. Przekątna BD zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$. Wyznacz długość boku tego rombu.

Zadanie 10.36. [matura, czerwiec 2020, zadanie 12. (5 pkt)]

Prosta o równaniu $x + y - 10 = 0$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$ w punktach K i L . Punkt S jest środkiem cięciwy KL . Wyznacz równanie obrazu tego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k = -3$.

Zadanie 10.37. [matura, lipiec 2020, zadanie 12. (6 pkt)]

Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu równym 82,5. Przekątna BD tego rombu zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

Zadanie 10.38. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 13. (5 pkt)]

Dany jest równoległobok, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = x + b$, $y = x + 2b$, $y = b$, $y = 2$, gdzie liczba rzeczywista b spełnia warunki: $b \neq 2$ i $b \neq 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru b , dla których pole tego równoległoboku jest równe 1.

Zadanie 10.39. [matura, maj 2021, zadanie 10. (4 pkt)]

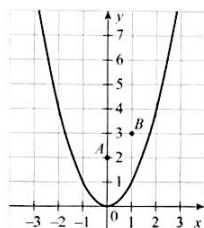
Prosta przechodząca przez punkty $A = (8, -6)$ i $B = (5, 15)$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $O = (0, 0)$. Oblicz promień tego okręgu i współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą AB .

Zadanie 10.40. [matura, maj 2021, zadanie 14. (6 pkt)]

Dane są parabola o równaniu $y = x^2$ oraz punkty $A = (0, 2)$ i $B = (1, 3)$ (zobacz rysunek). Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC , których wierzchołek C leży na tej paraboli.

Niech m oznacza pierwszą współrzędną punktu C .

- Wyznacz pole P trójkąta ABC jako funkcję zmiennej m .
- Wyznacz wszystkie wartości m , dla których trójkąt ABC jest ostrokątny.

**Zadanie 10.41.** [matura, czerwiec 2021, zadanie 9. (4 pkt)]

Dane są prosta k o równaniu $x - 2y = 0$ i prosta l o równaniu $2x + y - 1 = 0$. Punkt P leży na prostej o równaniu $y = x + 4$. Odległość punktu P od prostej k jest dwa razy większa niż odległość punktu P od prostej l . Oblicz współrzędne punktu P .

Zadanie 10.42. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 9. (6 pkt)]

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $A = (9, 12)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Prosta k o równaniu $y = \frac{1}{2}x$ zawiera dwusieczną kąta ABC tego trójkąta. Okrąg O o równaniu $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ jest wpisany w ten trójkąt.

Oblicz współrzędne punktu styczności prostej przechodzącej przez wierzchołki B i C tego trójkąta z okręgiem O . Zapisz obliczenia.

Zadanie 10.43. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 22. (5 pkt)]

Proste o równaniach $2x + y - 4m - 4 = 0$ i $x - 3y + 5m + 5 = 0$ przecinają się w punkcie P o współrzędnych (x_P, y_P) .

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których współrzędne punktu P spełniają warunki:

$$x_P > 0, y_P > 0, y_P \geq x_P^2 \text{ oraz } y_P < -\frac{2}{x_P} + 8.$$

Zadanie 10.44. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 23. (4 pkt)]

Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu

$$x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0.$$

Wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, a odcinek AB jest dłuższą z podstaw tego trapezu. Przekątna AC trapezu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y = x$.

Oblicz sinus kąta ABC .

Zadanie 10.45. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 24. (4 pkt)]

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że

$$\vec{BD} = [-21, -7] \text{ i } \vec{DC} = [15, 8].$$

Oblicz pole tego równoległoboku.

Zadanie 10.46. [matura, czerwiec 2022, zadanie 14. (6 pkt)]

Dane są okrąg o_1 o równaniu $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 98$ oraz okrąg o_2 o promieniu $2\sqrt{5}$. Środki okręgów o_1 i o_2 leżą po różnych stronach prostej k o równaniu $y = -3x - 6$, a punkty wspólne obu okręgów leżą na prostej k . Wyznacz równanie okręgu o_2 .

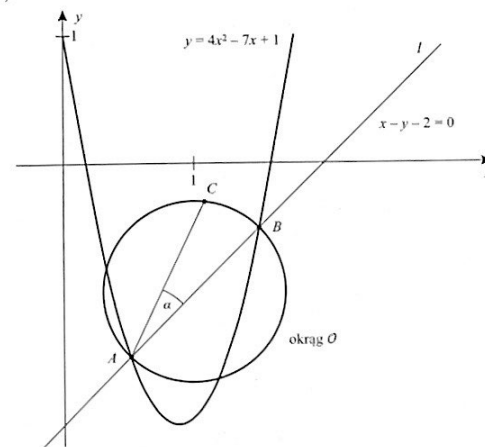
Zadanie 10.47. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 12. (6 pkt)]

Prosta k o równaniu $x + y - 9 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ w punktach

A oraz B . Pierwsza współrzędna punktu A jest liczbą dodatnią; pierwsza współrzędna punktu B jest liczbą ujemną. Prosta l jest równoległa do prostej k i styczna do danej paraboli w punkcie C . Oblicz odległość punktu C od prostej k oraz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

Zadanie 10.49. [matura, maj 2023, zadanie 13. (6 pkt)]

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta l o równaniu $x - y - 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = 4x^2 - 7x + 1$ w punktach A oraz B . Odcinek AB jest średnicą okręgu O . Punkt C leży na okręgu O nad prostą l , a kąt BAC jest ostry i ma miarę α taką, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ (zobacz rysunek).



Oblicz współrzędne punktu C . Zapisz obliczenia.

Zadanie 10.50. [matura, czerwiec 2023, zadanie 9. (4 pkt)]

W okrąg o równaniu $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ wpisano trójkąt ABC . Bok AB tego trójkąta jest zawarty w prostej o równaniu $4x - 3y + 2 = 0$. Wysokość CD tego trójkąta dzieli bok AB tak, że $|AD| = 4 \cdot |DB|$. Oblicz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

Zadanie 10.51. [matura, czerwiec 2023, zadanie 15. (7 pkt)]

Okrąg o_1 o środku w punkcie S_1 jest określony równaniem $(x-6)^2 + (y+1)^2 = 16$. Okrąg o_2 ma środek w punkcie S_2 takim, że $\overrightarrow{S_1S_2} = [-4, 4]$. Promienie tych okręgów są sobie równe. Figura F składa się z dwóch okręgów: o_1 oraz o_2 . Punkty M i N są punktami przecięcia figury F z tą z jej osi symetrii, która jest prostą o dodatnim współczynniku kierunkowym. Wyznacz punkt K , leżący na jednej z osi symetrii figury F , taki, że pole trójkąta MNK jest równe 40.

Zadanie 10.52. [matura, maj 2024, zadanie 11. (5 pkt)]

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) środek S okręgu o promieniu $\sqrt{5}$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$. Przez punkt $A = (1, 2)$, którego odległość od punktu S jest większa od $\sqrt{5}$, poprowadzono dwie proste styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – B i C . Pole czworokąta $ABSC$ jest równe 15. Oblicz współrzędne punktu S . Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10.53. [matura, czerwiec 2024, zadanie 11. (6 pkt)]

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $3x + y + 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 - 2x - 8$ w punktach A oraz B , które są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek A ma pierwszą współrzędną ujemną. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią. Odległość punktu C od prostej zawierającej bok AB równoległoboku jest równa $\frac{9\sqrt{10}}{5}$. Oblicz długość boku BC tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.

11. Kombinatoryka**Zadanie 11.1.** [matura, maj 2011, zadanie 9. (4 pkt)]

Oblicz, ile jest liczb ośmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dwie dwójki i występują trzy trójki.

Zadanie 11.2. [matura, maj 2012, zadanie 8. (4 pkt)]

Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dzielnym jest równy 12.

Zadanie 11.3. [matura, czerwiec 2012, zadanie 9. (3 pkt)]

Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub podzielnych przez 15.

Zadanie 11.4. [matura, maj 2013, zadanie 3. (3 pkt)]

Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5.

Zadanie 11.5. [matura, czerwiec 2015, zadanie 13. (5 pkt)]

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują, co najwyżej dwie dwójki.

Zadanie 11.6. [matura, maj 2016, zadanie 14. (3 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy. Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

Zadanie 11.7. [matura, czerwiec 2016, zadanie 15. (4 pkt)]

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste.

Zadanie 11.8. [matura, maj 2017, zadanie 7. (4 pkt)]

Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero, natomiast występują dwie dziewiątki, jedna szóstka i suma wszystkich cyfr jest równa 30.

Zadanie 11.9. [matura, czerwiec 2017, zadanie 9. (4 pkt)]

Z cyfr 0, 1, 2 tworzymy pięciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 15. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

Zadanie 11.10. [matura, maj 2019, zadanie 6. (3 pkt)]

Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7, 9, bez powtarzania jakiegokolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

Zadanie 11.11. [matura, czerwiec 2019, zadanie 6. (3 pkt)]

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

Zadanie 11.12. [matura, czerwiec 2020, zadanie 13. (4 pkt)]

Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

Zadanie 11.13. [matura, lipiec 2020, zadanie 13. (3 pkt)]

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym iloczyn wszystkich cyfr każdej z tych liczb jest równy 28.

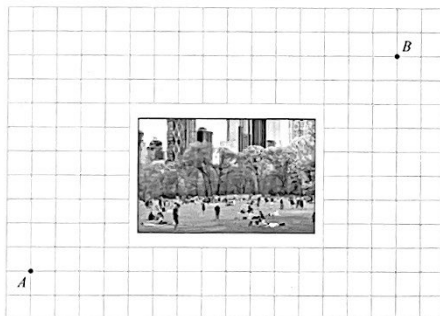
Zadanie 11.14. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 5. (2 pkt)]

Oblicz, ile jest liczb dziesięciocyfrowych takich, że suma cyfr w każdej z tych liczb jest równa 13 i żadna cyfra nie jest zerem.

Zadanie 11.15. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 31. (4 pkt)]

W pewnym mieście jest prostokątny układ ulic, a ruch na każdej z nich jest dwukierunkowy. W centrum miasta znajduje się park, gdzie obowiązuje całkowity zakaz ruchu pojazdów. Schemat ulic w tym mieście wraz z położeniem parku przedstawiono poniżej na rysunku. Tomek znajduje się w punkcie A miasta i chce dojechać najkrótszą drogą do punktu B .

Oblicz, ile jest najkrótszych dróg A do B .

**Zadanie 11.16.** [matura, czerwiec 2022, zadanie 7. (3 pkt)]

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste.

Zadanie 11.17. [matura, czerwiec 2023, zadanie 2. (3 pkt)]

Wśród n osób są Ania i jej dwaj znajomi. Wszystkie te n osób ustawiamy w kolejkę jedna za drugą. Liczba wszystkich takich ustawień jest 12 razy większa od liczby wszystkich takich ustawień tych n osób w kolejkę, w których Ania i jej dwaj znajomi zajmują trzy kolejne miejsca (w dowolnej kolejności). Oblicz n . Zapisz obliczenia.

Zadanie 11.18. [matura, maj 2024, zadanie 6. (3 pkt)]

Rozważamy wszystkie liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakiegokolwiek cyfry oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste. Oblicz, ile jest wszystkich takich liczb. Zapisz obliczenia.

12. Rachunek prawdopodobieństwa**Zadanie 12.1.** [matura CKE dla chętnych, styczeń 2003, zadanie 16. (4 pkt)]

Rzucamy pięć razy symetryczną kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że „jedyńka” wypadnie co najmniej cztery razy.

Zadanie 12.2. [matura CKE dla chętnych, maj 2003, zadanie 16. (5 pkt)]

Zawierając w kolekturze Toto-Lotka jeden zakład w grze „Expres-Lotek” zakreślamy 5 spośród 42 liczb. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia co najmniej 4 spośród 5 wylosowanych liczb. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,00001.

Zadanie 12.3. [próbna matura CKE, styczeń 2004, zadanie 19. (5 pkt)]

W pierwszej loterii jest n ($n > 2$) losów, w tym jeden los wygrywający. W drugiej loterii $2n$ losów, w tym dwa wygrywające. W której z loterii należy kupić dwa losy, aby mieć większą szansę wygranej? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 12.4. [matura, maj 2005, zadanie 13. (4 pkt)]

Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$.

Zadanie 12.5. [matura, maj 2006, zadanie 15. (4 pkt)]

Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

Zadanie 12.6. [matura próbna CKE, marzec 2008, zadanie 9. (4 pkt)]

Grupa 4 kobiet i 4 mężczyzn, w tym jedno małżeństwo, wybrała się na pieszą wycieczkę. Na wąskiej ścieżce musieli iść gęsiego tzn. jedno za drugim. Zakładamy, że wszystkie możliwe ustawienia tych osób są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że jako pierwsze pójść kobiety i żona będzie szła bezpośrednio przed mężem. Sprawdź, czy to prawdopodobieństwo jest mniejsze od 0,001.

Zadanie 12.7. [matura, maj 2008, zadanie 10. (4 pkt)]

Z pewnej grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdują się tylko kobiety jest równe 0,1. Oblicz, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.

Zadanie 12.8. [matura, maj 2009, zadanie 10. (4 pkt)]

W urnie znajdują się jedynie kule białe i czarne. Kul białych jest trzy razy więcej niż czarnych. Oblicz, ile jest kul w urnie, jeśli przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo otrzymania kul o różnych kolorach jest większe od $\frac{9}{22}$.

Zadanie 12.9. [matura, maj 2010, zadanie 10. (4 pkt)]

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.

Zadanie 12.10. [matura, sierpień 2010, zadanie 9. (4 pkt)]

Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ustawiamy losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tym ustawieniu suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzystą. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie 12.11. [matura, czerwiec 2011, zadanie 11. (4 pkt)]

Spśród wszystkich liczb czterocyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wszystkich cyfr wylosowanej liczby jest równa 7.

Zadanie 12.12. [matura, maj 2013, zadanie 11. (4 pkt)]

Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach będzie równy 60.

Zadanie 12.13. [matura, maj 2014, zadanie 11. (4 pkt)]

Z urny zawierającej 10 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 10 losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że numer jednej z wylosowanych kul jest równy sumie numerów dwóch pozostałych kul.

Zadanie 12.14. [matura, czerwiec 2014, zadanie 11. (4 pkt)]

W urnie jest dziesięć kul: 4 białe, 3 czarne, 2 zielone i 1 niebieska. Losujemy jednocześnie trzy kule z urny. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród wylosowanych kul nie ma kul w tym samym kolorze. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 12.15. [przykładowy arkusz CKE, grudzień 2014, zadanie 16. (5 pkt)]

Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynekę”, pod warunkiem że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

Zadanie 12.16. [matura, maj 2015, zadanie 11. (4 pkt)]

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej

i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

Zadanie 12.17. [matura, maj 2015, zadanie 11. (3 pkt)]

Rozważmy rzut sześcioma kostkami do gry, z których każda ma inny kolor. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że uzyskany wynik rzutu spełnia równocześnie trzy warunki:

- dokładnie na dwóch kostkach otrzymano po jednym oczku;
- dokładnie na trzech kostkach otrzymano po sześć oczek;
- suma wszystkich otrzymanych liczb oczek jest parzysta.

Zadanie 12.18. [matura, czerwiec 2015, zadanie 11. (4 pkt)]

Każda z urn oznaczonych liczbami 1, 2, 3 zawiera po 3 kule czarne i 4 białe, a każda urna oznaczona liczbami 4, 5, 6 zawiera po 3 czarne i 2 białe kule. Rzucamy sześcienną kostką do gry, a następnie z urny o numerze równym liczbie wyrzuconych oczek losujemy bez zwracania 2 kule. Co jest bardziej prawdopodobne: wylosowanie dwóch kul czarnych, czy dwóch kul białych?

Zadanie 12.19. [matura, czerwiec 2016, zadanie 7. (4 pkt)]

Rzucamy czterokrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy dokładnie dwie dwójki lub dokładnie dwie piątki. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 12.20. [matura, maj 2017, zadanie 11. (4 pkt)]

W pudełku znajduje się 8 pileczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną pileczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy pileczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich pileczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

Zadanie 12.21. [matura, maj 2017, zadanie 8. (3 pkt)]

W dwóch pudełkach umieszczono po pięć kul, przy czym w pierwszym pudełku: 2 kule białe i 3 kule czerwone, a w drugim pudełku: 1 kulę białą i 4 kule czerwone. Z pierwszego pudełka losujemy jedną kulę i bez oglądania wkładamy ją do drugiego pudełka. Następnie losujemy jedną kulę z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiego pudełka.

Zadanie 12.22. [matura, czerwiec 2017, zadanie 11. (3 pkt)]

Prawdopodobieństwo tego, że z pewnej grupy osób wylosujemy osobę znającą język angielski, jest równe 0,4, prawdopodobieństwo wylosowania osoby znającej język francuski jest równe 0,2, natomiast prawdopodobieństwo wylosowania osoby znającej oba te języki jest równe 0,1. Wykaż, że prawdopodobieństwo wylosowania osoby, która zna język angielski i nie zna języka francuskiego, jest trzy razy większe od prawdopodobieństwa wylosowania osoby, która zna język francuski i nie zna języka angielskiego.

Zadanie 12.23. [matura, maj 2018, zadanie 9. (4 pkt)]

Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Zadanie 12.24. [matura, czerwiec 2018, zadanie 9. (4 pkt)]

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry ze zbioru $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$, losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.

Zadanie 12.25. [matura, maj 2019, zadanie 10. (3 pkt)]

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie spośród trzech wylosowanych liczb będą równe. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

Zadanie 12.26. [matura, czerwiec 2019, zadanie 10. (4 pkt)]

W urnie jest dziesięć kulek różniących się wyłącznie kolorem: 4 czarne, 3 białe, 2 zielone i 1 niebieska. Losujemy jednocześnie trzy kule z urny. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że przynajmniej dwie z wylosowanych kulek mają ten sam kolor.

Zadanie 12.27. [matura, maj 2021, zadanie 9. (4 pkt)]

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

Zadanie 12.28. [matura, czerwiec 2021, zadanie 11. (4 pkt)]

W pewnym telewizyjnym programie bierze udział trzech sportowców i pewna liczba aktorów. W trakcie tego programu uczestnicy siadają na fotelach w rzędzie, naprzeciw prowadzącego (liczba foteli jest równa liczbie uczestników). Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że cała trójka sportowców będzie siedziała obok siebie przy losowym wyborze miejsc jest równe $\frac{1}{15}$. Oblicz, ilu aktorów bierze udział w tym programie.

Zadanie 12.29. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 11. (4 pkt)]

Egzamin składa się z 15 zadań zamkniętych. Do każdego zadania podano cztery odpowiedzi, z których tylko jedna okazuje się poprawna. Zdający zalicza egzamin, jeśli udzieli poprawnych odpowiedzi w co najmniej 11 zadaniach. Pewien student przystąpił nieprzygotowany do egzaminu i w każdym zadaniu wybierał losowo odpowiedź.

Przyjmij, że w każdym zadaniu wybór każdej z odpowiedzi przez studenta jest równo prawdopodobny.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ten student zaliczył egzamin. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.30. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 28. (4 pkt)]

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią. Ze zbioru

$$M = \{1, 2, 3, \dots, 3n+1\}$$

losujemy jednocześnie trzy liczby. Zdarzenie A odpowiada jednoczesnemu wylosowaniu ze zbioru M trzech liczb, takich że suma tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A .

Zadanie 12.31. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 29. (4 pkt)]

Pan Nowak często gra z synem w szachy. Obliczył, że 60% rozegranych partii wygrywa jego syn.

Oblicz, ile partii szachów musi rozegrać z synem pan Nowak, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od 0,95.

Zadanie 12.32. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 30. (3 pkt)]

Pewna choroba dotyka 0,2% całej populacji i w początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki stosuje się pewien test przesiewowy, który daje wynik pozytywny lub negatywny. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej da wynik pozytywny (oznaczający chorobę) jest równe 0,99. Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe 0,98. Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny. Pozytywny wynik oznacza podejrzenie choroby.

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Pan X jest rzeczywiście chory.

Zadanie 12.33. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 4. (3 pkt)]

Maszyna napelnia torebki herbatą. Każda torebka ma zostać napelniona 200 g herbaty. Torebkę, która zawiera mniej niż 200 g herbaty, nazywamy torebką z niedowagą. Prawdopodobieństwo tego, że pojedyncza torebka napelniona przez tę maszynę jest z niedowagą, jest równe 0,1. Kontrolni poddano masę herbaty w torebkach napelnianych przez tę maszynę danego dnia. Do kontroli wybrano losowo 20 torebek.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród tych 20 losowo wybranych torebek znajdą się co najwyżej dwie torebki z niedowagą.

Zapisz obliczenia. Wynik zapisz w zaokrągleniu do drugiego miejsca po przecinku.

Zadanie 12.34. [matura, maj 2023, zadanie 2. (3 pkt)]

Tomek i Romek postanowili rozegrać między sobą pięć partii szachów. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez Tomka jest równe $\frac{1}{4}$.

Oblicz prawdopodobieństwo wygrania przez Tomka co najmniej czterech z pięciu partii. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.35. [matura, maj 2023, zadanie 8. (3 pkt)]

W pojemniku jest siedem kulek: pięć kulek białych i dwie kulek czarne. Z tego pojemnika losujemy jednocześnie dwie kule bez zwracania. Następnie – z kul pozostałych w pojemniku – losujemy jeszcze jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w drugim losowaniu.

Zadanie 12.36. [matura, czerwiec 2023, zadanie 3. (3 pkt)]

Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii sieci ciepłowniczej na pewnym osiedlu mieszkaniowym w godzinach porannych pojedynczego dnia jest równe 0,1.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w okresie siedmiu dni wystąpią co najwyżej dwa takie dni, w których nastąpi awaria tej sieci na tym osiedlu w godzinach porannych. Wynik podaj w ułamku dziesiętnym w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.37. [matura, czerwiec 2023, zadanie 11. (4 pkt)]

W pudełku umieszczono n kul ($n \geq 3$) wśród których dokładnie 2 kule są czarne, a pozostałe kule są białe. Z tego pudełka losujemy jedną kulę i odkładamy ją na bok. Jeżeli wylosowana kula jest biała, to do pudełka wrzucamy kulę czarną, a gdy wylosowana kula jest czarna,

to do pudełka wrzucamy kulę białą. Po przeprowadzonej w ten sposób zmianie zawartości prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z tego pudełka jest równe $\frac{37}{50}$.

Oblicz n .

Zadanie 12.38. [matura, maj 2024, zadanie 3. (3 pkt)]

W pewnym zakładzie mleczarskim śmietana produkowana jest w 200-gramowych opakowaniach. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w losowo wybranym opakowaniu śmietana zawiera mniej niż 36% tłuszczu, jest równe 0,01. Kontrolę poddajemy 10 losowo wybranych opakowań ze śmietaną.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród opakowań poddanych tej kontroli będzie co najwyżej jedno opakowanie ze śmietaną, która zawiera mniej niż 36% tłuszczu. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12.39. [matura, maj 2024, zadanie 10. (3 pkt)]

Spośród wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, których wszystkie cyfry należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, losujemy jedną. Wylosowanie każdej z tych liczb jest jednakowo prawdopodobne.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy liczbę, która ma następującą własność: kolejne cyfry tej liczby (licząc od lewej strony) tworzą – w podanej kolejności – sześciowyrazowy ciąg malejący.

Zadanie 12.40. [matura, czerwiec 2024, zadanie 4. (3 pkt)]

Doświadczenie losowe polega na dziesięciokrotnym rzucie symetryczną monetą.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tym doświadczeniu losowym orzeł wypadł dokładnie trzy razy z rzędu, jeśli wiadomo, że wypadł dokładnie trzy razy. Zapisz obliczenia.

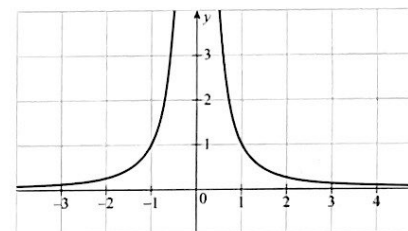
13. Dowody algebra**Zadanie 13.1.** [matura, maj 2009, zadanie 5. (3 pkt)]

Wykaż, że jeżeli $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$, to $B = 9\sqrt{A}$.

Zadanie 13.2. [matura, maj 2010, zadanie 8. (5 pkt)]

Rysunek przedstawia fragment wykresu

funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$.



Przeprowadzono prostą równoległą do osi Ox , która przecięła wykres tej funkcji w punktach A i B . Niech $C = (3, -1)$. Wykaż, że pole trójkąta ABC jest większe lub równe 2.

Zadanie 13.3. [matura, sierpień 2010, zadanie 6. (4 pkt)]

Wykaż, że nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b .

Zadanie 13.4. [matura, maj 2011, zadanie 1. (4 pkt)]

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^6 - 2k^4 + k^2$ jest podzielna przez 36.

Zadanie 13.5. [matura, maj 2011, zadanie 2. (4 pkt)]

Uzasadnij, że jeżeli $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ i $a + b = 2c$, to $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = 2$.

Zadanie 13.6. [matura, maj 2012, zadanie 7. (3 pkt)]

Udowodnij, że jeżeli $a + b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

Zadanie 13.7. [matura, czerwiec 2012, zadanie 6. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d prawdziwa jest nierówność $ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$.

Zadanie 13.8. [matura, czerwiec 2013, zadanie 4. (4 pkt)]

Wykaż, że prawdziwa jest równość $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3$.

Zadanie 13.9. [matura, czerwiec 2013, zadanie 5. (3 pkt)]

Uzasadnij, że jeżeli $2a + b \geq 0$, to $2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$.

Zadanie 13.10. [matura, maj 2014, zadanie 4. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$.

Zadanie 13.11. [matura, czerwiec 2014, zadanie 3. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $x(x-1) + y(y-1) \geq xy - 1$.

Zadanie 13.12. [próba matura, grudzień 2014, zadanie 13. (3 pkt)]

Wykaż, że jeżeli $a > b \geq 1$, to $\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3}$.

Zadanie 13.13. [matura, maj 2015, zadanie 8. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$.

Zadanie 13.14. [matura, maj 2015, zadanie 1. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x różnej od 1 oraz dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y różnej od 1 prawdziwa jest równość $\log_x(xy) \cdot \log_y\left(\frac{y}{x}\right) = \log_y(xy) \cdot \log_x\left(\frac{y}{x}\right)$.

Zadanie 13.15. [matura, czerwiec 2015, zadanie 8. (3 pkt)]

Niech $a = \log_{12} 2$. Wykaż, że $\log_6 64 = \frac{6a}{1-a}$.

Zadanie 13.16. [matura, czerwiec 2015, zadanie 4. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby a i dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby b spełniona jest równość

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \dots + \frac{1}{\log_{a^9} b} + \frac{1}{\log_{a^{10}} b} = \frac{55}{\log_a b}.$$

Zadanie 13.17. [matura, maj 2016, zadanie 8. (2 pkt)]

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

Zadanie 13.18. [matura, czerwiec 2016, zadanie 8. (4 pkt)]

Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

Zadanie 13.19. [matura, czerwiec 2016, zadanie 5. (3 pkt)]

Wykaż, że jeśli a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a + b + c = 0$, to $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

Zadanie 13.20. [matura, maj 2017, zadanie 7. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$.

Zadanie 13.21. [matura, czerwiec 2017, zadanie 7. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0$.

Zadanie 13.22. [matura, czerwiec 2017, zadanie 2. (3 pkt)]

Wykaż, że dla $a = \log_3 3 + \log_5 \sqrt{27}$ i $b = \log_5 3 - \log_5 \sqrt[3]{3}$ prawdziwa jest równość $\frac{b}{a} = \frac{16}{9}$.

Zadanie 13.23. [matura, maj 2018, zadanie 8. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 13.24. [matura, czerwiec 2018, zadanie 6. (3 pkt)]

Dodatnie liczby rzeczywiste a i b takie, że $a > b$, spełniają warunek

$$\log_2\left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$$

Wykaż, że dla liczb a i b prawdziwa jest równość $a^2 + b^2 = 11ab$.

Zadanie 13.25. [matura, maj 2019, zadanie 8. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y , takich że $x < y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a , prawdziwa jest nierówność $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$.

Zadanie 13.26. [matura, czerwiec 2019, zadanie 9. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16.

Zadanie 13.27. [matura, czerwiec 2020, zadanie 8. (3 pkt)]

Liczy dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$. Wykaż, że $a = 2b$.

Zadanie 13.28. [matura, lipiec 2020, zadanie 8. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ jest podzielne przez 16.

Zadanie 13.29. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 6. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x większej od 2 i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0$.

Zadanie 13.30. [matura, maj 2021, zadanie 6. (3 pkt)]

Niech $\log_2 18 = c$. Wykaż, że $\log_3 4 = \frac{4}{c-1}$.

Zadanie 13.31. [matura, czerwiec 2021, zadanie 6. (3 pkt)]

Niech $\log_2 9 = c$. Wykaż, że $\log_3 54 = \frac{3c+2}{c}$.

Zadanie 13.32. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 5. (3 pkt)]

Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

Zadanie 13.33. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 18.1. (4 pkt)]

Wykaż, że układ równań

$$4a + 4b + 4c = 80 \quad (1)$$

$$2ab + 2bc + 2ca = 256 \quad (2)$$

z niewiadomymi a oraz b ma rozwiązanie, które jest parą liczb rzeczywistych nie mniejszych od 4 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$c \in \left[4, \frac{28}{3}\right].$$

Zadanie 13.34. [matura, czerwiec 2022, zadanie 6. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $x \neq y$, spełniona jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2)$$

Zadanie 13.35. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 3. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej liczby rzeczywistej y , spełniających warunek $x + y \geq 1$, prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$$

Zadanie 13.36. [matura, maj 2023, zadanie 4. (3 pkt)]

Liczy rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 4$ i nierówność $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$. Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 2$.

Zadanie 13.37. [matura, czerwiec 2023, zadanie 5. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$$

Zadanie 13.38. [matura, czerwiec 2024, zadanie 5. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $a + b = 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$$

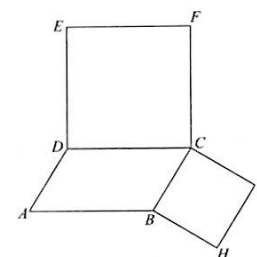
14. Dowody geometria

Zadanie 14.1. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2005, zadanie 17. (4 pkt)]

W trójkącie prostokątnym ABC ($\angle BCA = 90^\circ$) dane są długości przyprostokątnych: $|BC| = a$ i $|CA| = b$. Dwusieczna kąta prostego tego trójkąta przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D . Wykaż, że długość odcinka CD jest równa $\frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \sqrt{2}$. Sporządź pomocniczy rysunek uwzględniając podane oznaczenia.

Zadanie 14.2. [matura, maj 2010, zadanie 9. (4 pkt)]

Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$ (zobacz rysunek).



Udowodnij, że $|AC| = |FG|$.

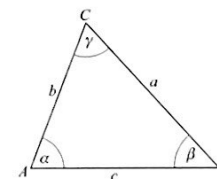
Zadanie 14.3. [matura, maj 2011, zadanie 10. (3 pkt)]

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD . Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$.

Zadanie 14.4. [matura, czerwiec 2011, zadanie 5. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC o bokach długości a, b, c i kątach α, β, γ (zobacz rysunek).

$$\text{Wykaż, że } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}.$$



Zadanie 14.5. [matura, czerwiec 2011, zadanie 9. (3 pkt)]

Przekątne trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Prosta równoległa do podstaw trapezu, przechodząca przez punkt P , przecina ramiona AD i BC odpowiednio w punktach M i N . Wykaż, że $|MP| = |NP|$.

Zadanie 14.6. [matura, maj 2013, zadanie 2. (4 pkt)]

Trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu o promieniu r . Wykaż, że $4r^2 = |AB| \cdot |CD|$.

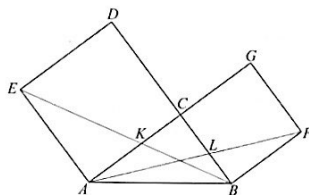
Zadanie 14.7. [matura, maj 2014, zadanie 6. (3 pkt)]

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S . Kąty wewnętrzne CAB , ABC i BCA tego trójkąta są równe, odpowiednio, α , 2α i 4α . Wykaż, że trójkąt ABC jest rozwartokątny, i udowodnij, że miary wypukłych kątów środkowych ASB , ASC i BSC tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

Zadanie 14.8. [matura, czerwiec 2014, zadanie 5. (3 pkt)]

Na przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, na zewnątrz trójkąta, kwadraty $ACDE$ i $BFGC$. Odcinek AF przecina przyprostokątną BC w punkcie L , a odcinek BE przecina przyprostokątną AC w punkcie K (zobacz rysunek).

Udowodnij, że $|KC| = |LC|$.

**Zadanie 14.9.** [próba matura, grudzień 2014, zadanie 14. (4 pkt)]

Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 \gamma$, to $\cos \gamma < 0$.

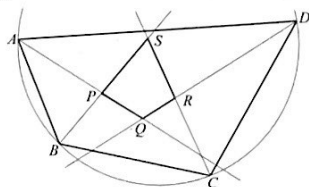
Zadanie 14.10. [próba matura, grudzień 2014, zadanie 15. (3 pkt)]

Punkt E jest środkiem boku BC prostokąta $ABCD$, w którym $|AB| > |BC|$. Punkt F leży na boku CD tego prostokąta oraz $\angle AEF = 90^\circ$. Udowodnij, że $\angle BAE = \angle EAF$.

Zadanie 14.11. [matura, maj 2015, zadanie 9. (3 pkt)]

Dwusieczne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach: P , Q , R , S (zobacz rysunek).

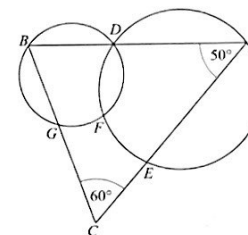
Wykaż, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg.

**Zadanie 14.12.** [matura, maj 2015, zadanie 7. (4 pkt)]

O trapezie $ABCD$ wiadomo, że można w niego wpisać okrąg, a ponadto długości jego boków AB , BC , CD , AD – w podanej kolejności – tworzą ciąg geometryczny. Uzasadnij, że trapez $ABCD$ jest rombem.

Zadanie 14.13. [matura, czerwiec 2015, zadanie 9. (3 pkt)]

W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę 50° , a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę 60° . Okrąg o_1 przechodzi przez punkt A i przecina boki AB i AC trójkąta odpowiednio w punktach D i E . Okrąg o_2 przechodzi przez punkt B , przecina okrąg o_1 w punkcie F oraz w punkcie G leżącym wewnątrz trójkąta ABC . Ponadto okrąg o_2 przecina bok BC trójkąta w punkcie G .



Udowodnij, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.

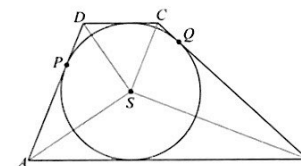
Zadanie 14.14. [matura, czerwiec 2015, zadanie 12. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.

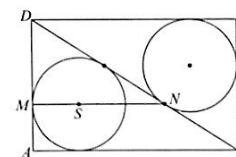
Zadanie 14.15. [matura, czerwiec 2015, zadanie 4. (3 pkt)]

W trapez $ABCD$ wpisano okrąg o środku S . Okrąg ten jest styczny do ramion AD i BC tego trapezu w punktach odpowiednio P i Q (zobacz rysunek).

Uzasadnij, że trójkąt ASD jest prostokątny. Wykaż, że $|AP| \cdot |DP| = |BQ| \cdot |CQ|$.

**Zadanie 14.16.** [matura, maj 2016, zadanie 9. (3 pkt)]

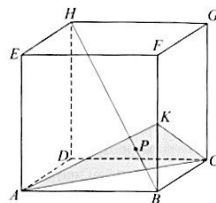
Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek S tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku.



Wykaż, że $|MN| = |AD|$.

Zadanie 14.17. [matura, czerwiec 2016, zadanie 11. (3 pkt)]

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Przez wierzchołki A i C oraz środek K krawędzi BF poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną BH w punkcie P (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|BP| : |HP| = 1 : 3$.

Zadanie 14.18. [matura, czerwiec 2016, zadanie 9. (4 pkt)]

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym: $|AB| = |BC|$, $|\angle DAB| = 45^\circ$, $|\angle ABC| = 150^\circ$, $|\angle BCD| = 60^\circ$. Wykaż, że trójkąt BCD jest równoboczny.

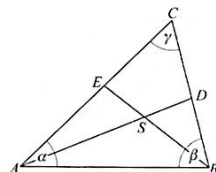
Zadanie 14.19. [matura, maj 2017, zadanie 8. (3 pkt)]

W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c , długość boku BC jest równa a oraz $|\angle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E . Wykaż, że długość

$$\text{odcinka } BE \text{ jest równa } \frac{2ac \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{a + c}.$$

Zadanie 14.20. [matura, czerwiec 2017, zadanie 8. (3 pkt)]

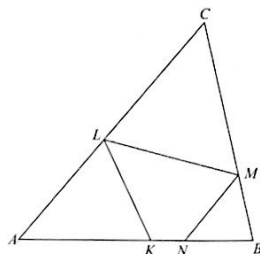
Miary kątów trójkąta ABC są równe $\alpha = |\angle BAC|$, $\beta = |\angle ABC|$ i $\gamma = |\angle ACB|$. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, a proste zawierające odcinki AS i BS przecinają boki BC i AC tego trójkąta w punktach odpowiednio D i E (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $\alpha + \beta = 2\gamma$, to na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.

Zadanie 14.21. [matura, maj 2018, zadanie 7. (3 pkt)]

Trójkąt ABC jest ostrokątny oraz $|AC| > |BC|$. Dwusieczna d_C kąta ACB przecina bok AB w punkcie K . Punkt L jest obrazem punktu K w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_A kąta BAC , punkt M jest obrazem punktu L w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_C kąta ACB , a punkt N jest obrazem punktu M w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_B kąta ABC (zobacz rysunek).



Udowodnij, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.

Zadanie 14.22. [matura, czerwiec 2018, zadanie 6. (3 pkt)]

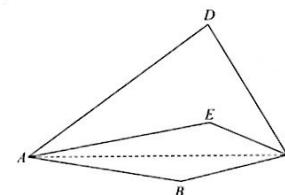
W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC . Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.

Zadanie 14.23. [matura, maj 2019, zadanie 9. (3 pkt)]

Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M ($M \neq A$ i $M \neq C$), a na ramieniu BC wybrano punkt N , w taki sposób, że $|AM| = |CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T . Udowodnij, że $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$.

Zadanie 14.24. [matura, czerwiec 2019, zadanie 8. (3 pkt)]

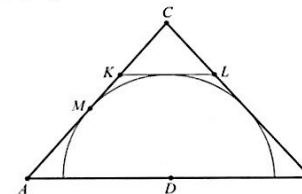
Dwusieczne kątów BAD i BCD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E , przy czym punkty B i E leżą po przeciwnych stronach prostej AC (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|\angle ABC| - |\angle ADC| + 2 \cdot |\angle AEC| = 360^\circ$.

Zadanie 14.25. [matura, czerwiec 2020, zadanie 7. (3 pkt)]

Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC| = 6$, a punkt D jest środkiem podstawy AB . Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC w punkcie M . Punkt K leży na boku AC , punkt L leży na boku BC , odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu oraz $|KC| = |LC| = 2$ (zobacz rysunek).



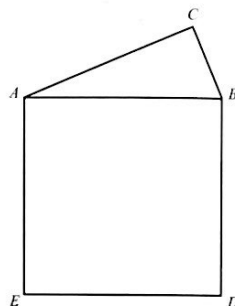
Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

Zadanie 14.26. [matura, lipiec 2020, zadanie 7. (3 pkt)]

Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty A, B, C i D . Wykaż, że jeżeli $|\angle ADB| = |\angle ACB|$, to $|\angle BAC| = |\angle BDC|$.

Zadanie 14.27. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 8. (4 pkt)]

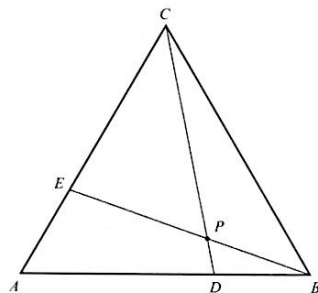
Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano kwadrat $ABDE$ (zobacz rysunek). Stosunek pola trójkąta do pola kwadratu jest równy k .



Wykaż, że suma tangensów kątów ostrych tego trójkąta jest równa $\frac{1}{2k}$.

Zadanie 14.28. [matura, maj 2021, zadanie 8. (3 pkt)]

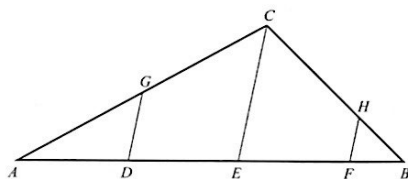
Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Na bokach AB i AC wybrano punkty – odpowiednio – D i E takie, że $|BD| = |AE| = \frac{1}{3}|AB|$. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek).



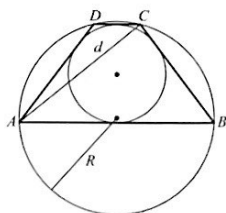
Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC .

Zadanie 14.29. [matura, czerwiec 2021, zadanie 7. (3 pkt)]

Dany jest trójkąt ABC . Na boku AB tego trójkąta obrano punkty D , E i F tak, że $|AD| = |DE| = |EF| = 2|FB|$. Na bokach AC i BC obrano – odpowiednio – punkty G i H tak, że $DG \parallel EC$ oraz $FH \parallel EC$ (zobacz rysunek). Wykaż, że jeżeli pole trójkąta FBH jest równe S , to pole trójkąta ADG jest równe $3S$.

**Zadanie 14.30.** [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 8. (4 pkt)]

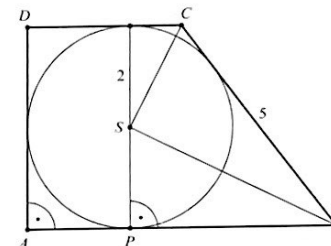
Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o obwodzie l i podstawach AB oraz CD takich, że $|AB| > |CD|$. Trapez jest opisany na okręgu i wpisany w okrąg, a przekątna AC trapezu ma długość d (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień R okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ jest równy $\frac{d \cdot l}{2\sqrt{16d^2 - l^2}}$.

Zadanie 14.31. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 26. (5 pkt)]

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o kątach prostych przy wierzchołkach A i D . Ramię BC trapezu ma długość 5. W ten trapez wpisano okrąg o środku w punkcie S i promieniu 2. Punkt P jest punktem styczności okręgu i dłuższej podstawy AB tego trapezu (zobacz rysunek).



Wykaż, że trójkąty BPS i BSC są trójkątami podobnymi, oraz oblicz skalę tego podobieństwa.

Zadanie 14.32. [matura, maj 2022, zadanie 8. (3 pkt)]

Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$. Długość podstawy CD jest o 2 mniejsza od długości podstawy AB . Promień okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym CPD jest o 3 mniejszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie APB . Wykaż, że spełniony jest warunek

$$|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$$

Zadanie 14.33. [matura, czerwiec 2022, zadanie 9. (3 pkt)]

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przez punkt O przecięcia się przekątnych poprowadzono dwie proste równoległe do boków BC i AD . Prosta równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie B' , a prosta równoległa do boku AD przecina bok AB w punkcie A' . Wykaż, że $|AA'| = |BB'|$.

Zadanie 14.34. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 6. (4 pkt)]

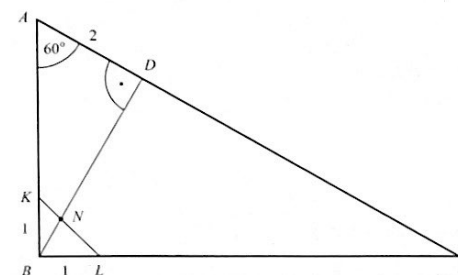
W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów przecinające boki BC , AC i AB tego trójkąta w punktach – odpowiednio – K , L oraz M . Punkt P jest punktem przecięcia tych dwusiecznych. Na czworokątach $CLPK$ oraz $BKPM$ można opisać okrąg. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.

Zadanie 14.35. [matura, maj 2023, zadanie 5. (3 pkt)]

Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym $|\angle ABC| = 90^\circ$ oraz $|\angle CAB| = 60^\circ$.

Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N , a ponadto $|AD| = 2$.

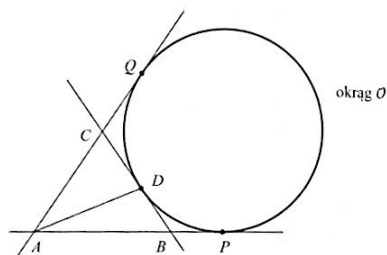
Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.



Zadanie 14.36. [matura, czerwiec 2023, zadanie 6. (3 pkt)]

Dany jest okrąg O . Przez punkt A poprowadzono dwie proste, które są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – P oraz Q . Przez punkt B leżący na odcinku AP poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie D , która przecięła odcinek AQ w punkcie C (zobacz rysunek).

Wykaż, że jeżeli $|AQ| = 5 \cdot |BP|$ oraz $|CD| = 2 \cdot |BD|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

**Zadanie 14.37.** [matura, maj 2024, zadanie 7. (3 pkt)]

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Przekątne AC oraz BD tego czworokąta przecinają się w punkcie S . Wykaż, że jeżeli $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Zadanie 14.38. [matura, maj 2024, zadanie 8. (4 pkt)]

Dany jest trójkąt ABC , który nie jest równoramienny. W tym trójkącie miara kąta ABC jest dwa razy większa od miary kąta BAC . Wykaż, że długości boków tego trójkąta spełniają warunek

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$$

Zadanie 14.39. [matura, czerwiec 2024, zadanie 6. (3 pkt)]

Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe a oraz b , przy czym $a > b$. W ten trapez można wpisać okrąg. Wykaż, że pole tego trapezu jest większe od $a \cdot b$.

15. Granice. Pochodna

Zadanie 15.1. [matura CKE dla chętnych, styczeń 2003, zadanie 13. (4 pkt)]

Wyznacz te wartości parametrów a oraz b , przy których funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, określona wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + a}{x - 2} & \text{dla } x \neq 2 \\ b & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x = 2$.

Zadanie 15.2. [matura CKE dla chętnych, maj 2003, zadanie 12. (5 pkt)]

Sprawdź, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)}{x^2 - 3x + 2} & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \text{ i } x \neq 2 \\ 3 & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

jest ciągła w punktach $x = 1$ i $x = 2$. Sformułuj odpowiedź.

Zadanie 15.3. [matura CKE dla chętnych, maj 2003, zadanie 18. (5 pkt)]

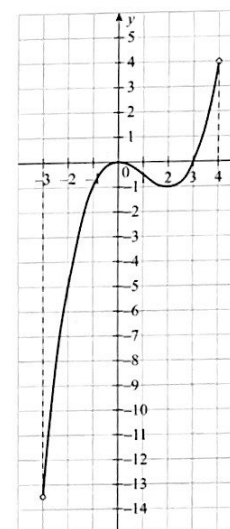
W tabeli podane są wartości funkcji $f: (-3, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ dla

x	-2	0	3
$f(x)$	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	-1

trzech argumentów.

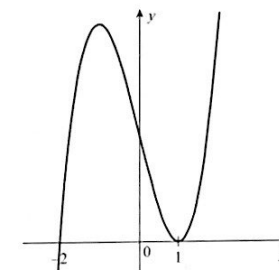
Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji f .

- Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x = 0$.
- Wyznacz ekstremum funkcji f . Podaj argument, dla którego funkcja f osiąga ekstremum.
- Podaj najmniejszą wartość funkcji f .

**Zadanie 15.4.** [test diagnostyczny CKE, grudzień 2005, zadanie 12. (5 pkt)]

Rysunek obok przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji wielomianowej $W(x)$ stopnia trzeciego. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby (-2) oraz 1 , a pochodna $W'(-2) = 18$.

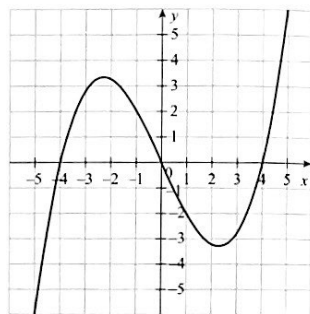
- Wyznacz wzór wielomianu $W(x)$.
- Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu tego wielomianu w punkcie o odciętej $x = 3$.



Zadanie 15.5. [matura, styczeń 2006, zadanie 17. (5 pkt)]

Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji f .

- Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.
- Wyznacz wartość x , dla której funkcja f osiąga maksimum lokalne. Odpowiedź uzasadnij.
- Wiedząc, że punkt $A = (1, 2)$ należy do wykresu funkcji f , napisz równanie stycznej do krzywej f w punkcie A .

**Zadanie 15.6.** [matura, maj 2006, zadanie 21. (5 pkt)]

W trakcie badania przebiegu zmienności funkcji ustalono, że funkcja f ma następujące własności:

- jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
- f jest funkcją nieparzystą,
- f jest funkcją ciągłą

oraz:

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-8, -3),$$

$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (-3, -1),$$

$$f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-1, 0),$$

$$f'(-3) = f'(-1) = 0,$$

$$f(-8) = 0,$$

$$f(-3) = -2,$$

$$f(-2) = 0,$$

$$f(-1) = 1.$$

W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -8, 8 \rangle$, wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.

Zadanie 15.7. [matura próbna CKE, listopad 2006, zadanie 8. (4 pkt)]

Uczeń analizował własności funkcji f , której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i która ma pochodną $f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wyniki tej analizy zapisał w tabeli.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$(+)$	0	$(-)$	0	$(-)$	0	$(-)$
$f(x)$		2		-1		1	

Niestety, wpisując znaki pochodnej, popełnił jeden błąd.

- Przekreśl błędnie wpisany znak pochodnej i wstaw obok prawidłowy.
- Napisz, czy po poprawieniu błędu w tabeli, zawarte w niej dane pozwolą określić dokładną liczbę miejsc zerowych funkcji

Zadanie 15.8. [przykładowy arkusz CKE, grudzień 2014, zadanie 9. (2 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$. Oblicz pochodną funkcji f w punkcie $x = 12$.

Zadanie 15.9. [przykładowy arkusz CKE, grudzień 2014, zadanie 10. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f , która jest równoległa do prostej $y = 4x + 7$.

Zadanie 15.10. [matura, maj 2015, zadanie 12. (4 pkt)]

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f , które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

Zadanie 15.11. [matura, maj 2017, zadanie 6. (3 pkt)]

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wyznacz równania stycznej do wykresu funkcji w punkcie $P = (1, 0)$.

Zadanie 15.12. [matura, maj 2018, zadanie 6. (3 pkt)]

Styczna do paraboli o równaniu $y = \sqrt{3}x^2 - 1$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$ jest nachylona do osi Ox pod kątem 30° . Oblicz współrzędne punktu P .

Zadanie 15.13. [matura, maj 2019, zadanie 7. (2 pkt)]

Punkt $P = (10, 2429)$ leży na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x + 2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P . Oblicz współczynnik b .

Zadanie 15.14. [matura, czerwiec 2019, zadanie 7. (2 pkt)]

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{25x^2 - 9}{x^2 + 2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Oblicz wartość $f'(10)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu 10.

Zadanie 15.15. [matura, czerwiec 2021, zadanie 13. (5 pkt)]

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{x^3 + k}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Oblicz wartość k , dla której prosta o równaniu $y = -x$ jest styczna do wykresu funkcji f .

Zadanie 15.16. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 2. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.

Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (-3, -3)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15.17. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 7. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{3x}{x+1} \text{ dla każdego } x \in (-1, +\infty).$$

Wykaż, że f jest funkcją rosnącą.

Zadanie 15.18. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 11. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+2} + 4 \log_2 x \text{ dla wszystkich } x > 0.$$

Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

Zadanie 15.19. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 12. (4 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = x^4 + 0,5 \cdot (2x+1)^4 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji.

Zadanie 15.20. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 14. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = x^6 - 2x^4 - x^3 + 1 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Wykaż, że liczba 5 należy do zbioru wartości tej funkcji.

Zadanie 15.21. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 16. (3 pkt)]

Wykaż, że równanie

$$x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2 = 0$$

ma w przedziale $(-2, 2)$ co najmniej dwa różne rozwiązania.

Zadanie 15.22. [matura, maj 2023, zadanie 3. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 8}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x . Punkt $P = (x_0, 3)$ należy do wykresu funkcji f .

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

Zapisz obliczenia.

Zadanie 15.23. [matura, maj 2023, zadanie 12.]

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = 8^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$$

dla każdej liczby dodatniej x .

Zadanie 15.23.1. [matura, maj 2023, zadanie 12.1. (2 pkt)]

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x wyrażenie

$$8^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$$

można równoważnie przekształcić do postaci $x^4 + x^2 - 6x$.

Zadanie 15.23.2. [matura, maj 2023, zadanie 12.2. (4 pkt)]

Oblicz najmniejszą wartość funkcji f określonej dla każdej liczby dodatniej x .

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że wzór funkcji f można przedstawić w postaci $f(x) = x^4 + x^2 - 6x$.

Zadanie 15.24. [matura, czerwiec 2023, zadanie 4. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Punkt $P = (x_0, 18)$ należy do wykresu funkcji f .

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

Zapisz obliczenia.

Zadanie 15.25. [matura, maj 2024, zadanie 2. (2 pkt)]

Oblicz granicę.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{(x - 2)^2}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 15.26. [matura, maj 2024, zadanie 4. (3 pkt)]

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt P , o pierwszej współrzędnej równej 2, należy do wykresu funkcji f . Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P .

Oblicz współczynniki a oraz b w równaniu tej stycznej. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15.27. [matura, czerwiec 2024, zadanie 2. (2 pkt)]

Oblicz granicę.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x^2-9}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 15.28. [matura, czerwiec 2024, zadanie 3. (3 pkt)]Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$$

dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $P = (x_0, 5)$, należy do wykresu funkcji f . Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P . Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P . Zapisz obliczenia.

16. Optymalizacja

Zadanie 16.1. [matura CKE dla chętnych, maj 2002, zadanie 15. (6 pkt)]

Objętość walca jest równa $250\pi \text{ cm}^3$. Przedstaw pole powierzchni całkowitej tego walca jako funkcję długości promienia jego podstawy i określ dziedzinę tej funkcji. Wyznacz długość promienia takiego walca, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

Zadanie 16.2. [próbna matura CKE, styczeń 2004, zadanie 20. (7 pkt)]

Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) jest liczbą mniejszą od 1. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{a_1 \cdot a_{49}}{a_{50}}$ wiedząc, że $a_{51} = 1$.

Zadanie 16.3. [matura, maj 2005, zadanie 19. (10 pkt)]

Dane jest równanie: $x^2 + (m-5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$.

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.

Zadanie 16.4. [matura, maj 2006, zadanie 18. (7 pkt)]

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej 2 m^3 istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długość krawędzi tego graniastosłupa.

Zadanie 16.5. [matura, maj 2007, zadanie 7. (7 pkt)]

Dany jest układ równań:
$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$$

Dla każdej wartości parametru m wyznacz parę liczb (x, y) , która jest rozwiązaniem tego układu równań. Wyznacz najmniejszą wartość sumy $x + y$ dla $m \in \langle 2, 4 \rangle$.

Zadanie 16.6. [matura, maj 2010, zadanie 3. (4 pkt)]

Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 1. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F umieszczone tak, by $|CE| = 2|DF|$. Oblicz wartość $x = |DF|$, dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze.

Zadanie 16.7. [matura, sierpień 2010, zadanie 3. (5 pkt)]

Dane są punkty $A = (1, 5)$, $B = (9, 3)$ i prosta k o równaniu $y = x + 1$. Oblicz współrzędne punktu C leżącego na prostej k , dla którego suma $|AC|^2 + |BC|^2$ jest najmniejsza.

Zadanie 16.8. [matura, maj 2011, zadanie 8. (4 pkt)]

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Zadanie 16.9. [matura, czerwiec 2011, zadanie 2. (5 pkt)]

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku równym 2. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F , różne od wierzchołków kwadratu, takie że $|CE| = |DF| = x$. Oblicz wartość x , dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze i oblicz to pole.

Zadanie 16.10. [matura, maj 2012, zadanie 6. (6 pkt)]

W układzie współrzędnych rozważmy wszystkie punkty P postaci: $P\left(\frac{1}{2}m + \frac{5}{2}, m\right)$, gdzie $m \in \langle 1, 7 \rangle$. Oblicz najmniejszą i największą wartość $|PQ|^2$, gdzie $Q\left(\frac{55}{2}, 0\right)$.

Zadanie 16.11. [matura, czerwiec 2012, zadanie 10. (4 pkt)]

Na płaszczyźnie dane są punkty $A = (3, -2)$ i $B = (11, 4)$. Na prostej o równaniu $y = 8x + 10$ znajdź punkt P , dla którego suma $|AP|^2 + |BP|^2$ jest najmniejsza.

Zadanie 16.12. [matura, czerwiec 2013, zadanie 11. (4 pkt)]

Suma długości dwóch boków trójkąta równa się 4, a kąt między tymi bokami ma miarę 120° . Oblicz najmniejszą wartość sumy kwadratów długości wszystkich boków tego trójkąta.

Zadanie 16.13. [przykładowy arkusz CKE, grudzień 2014, zadanie 18. (7 pkt)]

Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

Zadanie 16.14. [matura, maj 2015, zadanie 16. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

Zadanie 16.15. [matura, czerwiec 2015, zadanie 16. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

Zadanie 16.16. [matura, czerwiec 2015, zadanie 4. (5 pkt)]

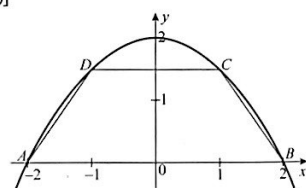
Prosta l , na której leży punkt $A = (2, 5)$, przecina parabolę o równaniu $y = x^2$ w dwóch różnych punktach $B = (x_1, y_1)$, $C = (x_2, y_2)$. Oblicz wartość współczynnika kierunkowego prostej l , przy której suma $y_1 + y_2$ osiągnie wartość najmniejszą.

Zadanie 16.17. [matura, maj 2016, zadanie 16. (7 pkt)]

Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox

układu współrzędnych w punktach $A = (-2, 0)$ i $B = (2, 0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB , a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).

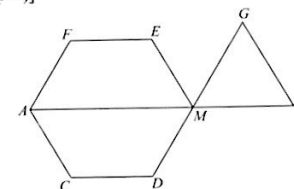
Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C . Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

**Zadanie 16.18.** [matura, czerwiec 2016, zadanie 17. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π . Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

Zadanie 16.19. [matura, czerwiec 2016, zadanie 8. (5 pkt)]

Dany jest odcinek AB o długości 10. Rozpatrujemy wszystkie sześciokąty foremne $ACDMEF$ i trójkąty równoboczne MBG , których wspólny wierzchołek M leży na odcinku AB (zobacz rysunek). Oblicz stosunek obwodu sześciokąta $ACDMEF$ do obwodu trójkąta MBG w przypadku, gdy suma pól tych dwóch wielokątów jest najmniejsza.

**Zadanie 16.20.** [matura, maj 2017, zadanie 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P . Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

Zadanie 16.21. [matura, czerwiec 2017, zadanie 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy $1:2$ oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

Zadanie 16.22. [matura, maj 2018, zadanie 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

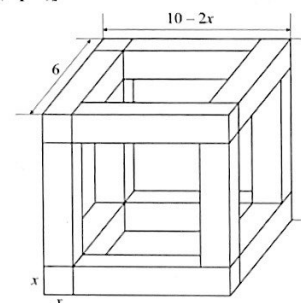
- Wyznacz wszystkie wartości a , dla których istnieje trapez o podanych własnościach.
- Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$.

- Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

Zadanie 16.23. [matura, czerwiec 2018, zadanie 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości x . Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.

- Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x .
- Wyznacz dziedzinę funkcji V .
- Oblicz tę wartość x , dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.



Zadanie 16.24. [matura, maj 2019, zadanie 15. (7 pkt)]

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V = 2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

Zadanie 16.25. [matura, czerwiec 2019, zadanie 15. (7 pkt)]

Dany jest okrąg o środku S i promieniu 18. Rozpatrujemy pary okręgów: jeden o środku S_1 i promieniu x oraz drugi o środku S_2 i promieniu $2x$, o których wiadomo, że spełniają jednocześnie następujące warunki:

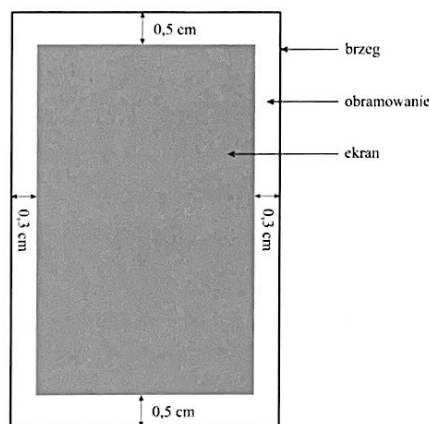
- rozważane dwa okręgi są styczne zewnętrznie;
- obydwa rozważane okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku S i promieniu 18;
- punkty: S, S_1, S_2 nie leżą na jednej prostej.

Pole trójkąta o bokach a, b, c można obliczyć ze wzoru Herona $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p – jest połową obwodu trójkąta.

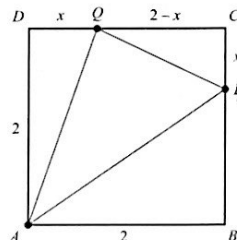
Zapisz pole trójkąta SS_1S_2 jako funkcję zmiennej x . Wyznacz dziedzinę tej funkcji i oblicz długości boków tego z rozważanych trójkątów, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole.

Zadanie 16.26. [matura, czerwiec 2020, zadanie 15. (7 pkt)]

Należy zaprojektować wymiary prostokątnego ekranu smartfona, tak aby odległości tego ekranu od krótszych brzegów smartfona były równe 0,5 cm każda, a odległości tego ekranu od dłuższych brzegów smartfona były równe 0,3 cm każda (zobacz rysunek – ekran zaznaczono kolorem szarym). Sam ekran ma mieć powierzchnię 60 cm^2 . Wyznacz takie wymiary ekranu smartfona, przy których powierzchnia ekranu wraz z obramowaniem jest najmniejsza.

**Zadanie 16.27.** [matura, czerwiec 2020, zadanie 10. (5 pkt)]

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 2. Na bokach BC i CD tego kwadratu wybrano – odpowiednio – punkty P i Q , takie, że długość odcinka $|PC| = |QD| = x$ (zobacz rysunek). Wyznacz tę wartość x , dla której pole trójkąta APQ osiąga wartość najmniejszą. Oblicz to najmniejsze pole.

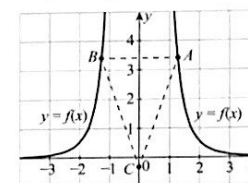
**Zadanie 16.28.** [matura, lipiec 2020, zadanie 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie i długości krawędzi bocznej jest równa d . Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozpatrywanych ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę największą objętość.

Zadanie 16.29. [test diagnostyczny CKE, marzec 2021, zadanie 15. (6 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC , których wierzchołki A i B leżą na wykresie funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{9}{x^4}$ dla $x \neq 0$. Punkt C ma współrzędne $(0, -\frac{1}{3})$, a punkty A i B

są położone symetrycznie względem osi Oy (zobacz rysunek). Oblicz współrzędne wierzchołków A i B , dla których pole trójkąta ABC jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

**Zadanie 16.30.** [matura, maj 2021, zadanie 15. (7 pkt)]

Pewien zakład otrzymał zamówienie na wykonanie prostopadłościennego zbiornika (całkowicie otwartego od góry) o pojemności 144 m^3 . Dno zbiornika ma być kwadratem. Żaden z wymiarów zbiornika (krawędzi prostopadłościanu) nie może przekraczać 9 metrów. Całkowity koszt wykonania zbiornika ustalono w następujący sposób:

- 100 zł za 1 m^2 dna
- 75 zł za 1 m^2 ścian bocznej.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.

Zadanie 16.31. [matura, czerwiec 2021, zadanie 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty prostokątne ABC o przeciwprostokątnej AB i obwodzie równym 4. Niech $x = |AC|$.

- a) Wykaż, że pole P trójkąta ABC jako funkcja zmiennej x jest określone wzorem

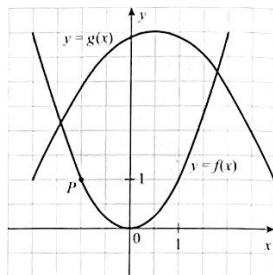
$$P(x) = \frac{x(4-2x)}{4-x}$$

- b) Wyznacz dziedzinę funkcji P .
c) Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.

Zadanie 16.32. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 6.]

Na obrzeżach miasta znajduje się jezioro, na którym postanowiono stworzyć tor regatowy. Na podstawie dostępnych map wymodelowano w pewnej skali kształt linii brzegowej jeziora w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) za pomocą fragmentów wykresów funkcji f oraz g (zobacz rysunek). Funkcje f oraz g są określone wzorami $f(x) = x^2$ oraz

$$g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4.$$



Początek toru postanowiono zlokalizować na brzegu jeziora w miejscu, któremu odpowiada w układzie współrzędnych punkt $P = (-1, 1)$.

Zadanie 16.32.1. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 6.1. (2 pkt)]

Niech R będzie punktem leżącym na wykresie funkcji g .

Wykaż, że odległość punktu R od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R .

Zadanie 16.32.2. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 6.2. (6 pkt)]

Koniec toru regatowego należy umieścić na linii brzegowej.

Oblicz współrzędne punktu K , w którym należy zlokalizować koniec toru, aby długość toru (tj. odległość końca K toru od początku P) była możliwie największa.

Oblicz długość najdłuższego toru. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: Przy rozwiązywaniu zadania możesz skorzystać z tego, że odległość dowolnego punktu R leżącego na wykresie funkcji g od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R .

Zadanie 16.33. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 9. (4 pkt)]

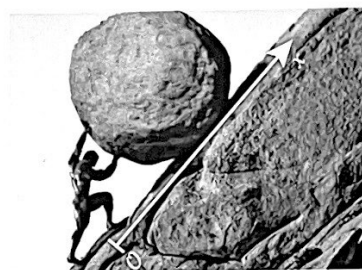
Szyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. W chwili $t = 0$ znajduje się on w punkcie O oddalonym od szczytu o 4 km, a położenie x Szyfy wtaczającego kulę jest opisane równaniem

$$x(t) = -t^3 + 16,5t^2 + 180t \text{ dla } t \in [0, 24]$$

gdzie x jest wyrażone w metrach, a t – w godzinach.

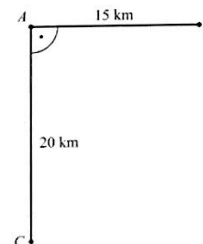
Oś Ox jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry.

Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Szyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz maksymalną prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę.

**Zadanie 16.34.** [informator maturalny CKE 2021, zadanie 19. (4 pkt)]

Na rysunku przedstawiono położenie miejscowości A , B i C oraz zaznaczono odległości między nimi.

O godzinie 9: 00 z miejscowości A do C wyruszył zastęp harcerzy „Tropicieli” i przemieszczał się z prędkością 4 km/h. O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszył zastęp harcerzy „Korsarze” i przemieszczał się z prędkością 2 km/h. Wyznacz godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza.

**Zadanie 16.35.** [informator maturalny CKE 2021, zadanie 20. (4 pkt)]

Firma X wytwarza pewien produkt D . Badania rynku pokazały, że związek między ilością Q produktu D , jaką firma jest w stanie zbyć na rynku, a ceną P produktu jest następujący:

$$P(Q) = 90 - 0,1Q \text{ dla } Q \in [0, 900]$$

gdzie P jest ceną za jednostkę produktu w złotych, a Q – ilością produktu w tys. sztuk.

Koszty K wytworzenia produktu D zależą od ilości Q wytwarzanego produktu następująco:

$$K(Q) = 0,002Q^3 + Q^2 + 29,9985Q + 50$$

gdzie K jest kosztem produkcji w tys. zł.

Oblicz, przy jakiej wielkości produkcji firma X osiąga największy dochód. Wynik podaj zaokrąglony z dokładnością do 100 sztuk.

Zadanie 16.36. [matura, maj 2022, zadanie 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne o obwodzie równym 18.

- a) Wykaż, że pole P każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości b ramienia, wyraża

$$\text{się wzorem } P(b) = \frac{(18 - 2b) \cdot \sqrt{18b - 81}}{2}.$$

- b) Wyznacz dziedzinę funkcji P .

- c) Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole.

Zadanie 16.37. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 7. (4 pkt)]

Olejarnia wytwarza olej ekologiczny. Aby produkcja była opłacalna, dzienna wielkość produkcji musi wynosić co najmniej 480 litrów i nie może przekroczyć 530 litrów (ze względu na ograniczone moce produkcyjne). Przy poziomie produkcji $(480 + x)$ litrów dziennie przeciętny koszt K (w złotych) wytworzenia jednego litra oleju jest równy

$$K(x) = \frac{22x^2 - 621,5x + 23430}{480 + x}, \text{ gdzie } x \in [0, 50].$$

Oblicz, ile litrów oleju dziennie powinna wytworzyć olejarnia, aby przeciętny koszt produkcji jednego litra oleju był najmniejszy (z zachowaniem opłacalności produkcji). Oblicz ten najmniejszy przeciętny koszt. Zapisz obliczenia.

Zadanie 16.38. [matura, maj 2023, zadanie 16. (7 pkt)]

Rozważamy trójkąty ABC , w których $A = (0, 0)$, $B = (m, 0)$, gdzie $m \in (4, +\infty)$, a wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = -2x$. Na boku BC tego trójkąta leży punkt $D = (3, 2)$.

- a) Wykaż, że dla $m \in (4, +\infty)$ pole P trójkąta ABC , jako funkcja zmiennej m , wyraża się wzorem

$$P(m) = \frac{m^2}{m - 4}$$

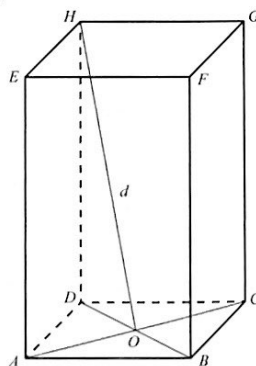
- b) Oblicz tę wartość m , dla której funkcja P osiąga wartość najmniejszą. Wyznacz równanie prostej BC , przy której funkcja P osiąga tę najmniejszą wartość.

Zadanie 16.39. [matura, czerwiec 2023, zadanie 13. (6 pkt)]

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne $ABCDEFGH$, w których odcinek łączący punkt O przecięcia przekątnych AC i BD podstawy $ABCD$ z dowolnym wierzchołkiem podstawy $EFGH$ ma długość d (zobacz rysunek).

- a) Wyznacz zależność objętości V graniastosłupa od jego wysokości h i podaj dziedzinę funkcji $V(h)$.
b) Wyznacz wysokość tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa.

Zapisz obliczenia.

**Zadanie 16.40.** [matura, maj 2024, zadanie 13.]

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości 3456, których krawędź podstawy ma długość nie większą niż $8\sqrt{3}$.

Zadanie 16.40.1. [matura, maj 2024, zadanie 13.1. (2 pkt)]

Wykaż, że pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

Zadanie 16.40.2. [matura, maj 2024, zadanie 13.2. (4 pkt)]

Pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa w zależności od długości a krawędzi podstawy graniastosłupa jest określone wzorem

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

dla $a \in (0, 8\sqrt{3}]$.

Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

Zadanie 16.41. [matura, czerwiec 2024, zadanie 13.]

Rozważamy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma wysokości H ostrosłupa oraz promienia R okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa jest równa 6.

Zadanie 16.41.1. [matura, czerwiec 2024, zadanie 13.1. (2 pkt)]

Wykaż, że objętość V każdego z takich ostrosłupów w zależności od długości R promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest określona wzorem

$$V(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

Zadanie 16.41.2. [matura, czerwiec 2024, zadanie 13.2. (4 pkt)]

Objętość V ostrosłupa w zależności od długości R promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest określona wzorem

$$V(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

dla $R \in (0, 6)$.

Wyznacz długość promienia okręgu opisanego na podstawie tego z rozważanych ostrosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

17. Inne

Zadanie 17.1. [matura próbna CKE, styczeń 2009, zadanie 6. (4 pkt)]

Porównaj liczby a^b oraz b^a , gdzie $a = \left[(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \right]^2$, $b = \frac{81^{-1} \cdot \sqrt{3}}{27^{-2} \cdot \sqrt[4]{9}}$.

Zadanie 17.2. [matura, lipiec 2020, zadanie 10. (4 pkt)]

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a > 1$, $b > 1$ i $N > 1$ jest spełniona równość

$$\log_{a^2b} N = \frac{3}{20} \cdot (\log_a N + \log_b N).$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia $\log_a b$.

Zadanie 17.3. [arkusz pokazowy CKE, marzec 2022, zadanie 1. (3 pkt)]

Dane są liczby $a = \log_2 3$ oraz $b = \log_3 7$.

Wyraż $\log_4 49$ za pomocą liczb a oraz b . Zapisz obliczenia.

Zadanie 17.4. [informator maturalny CKE 2021, zadanie 2. (3 pkt)]

Dane są liczby

$$a = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25 \text{ i } b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8}$$

Oblicz a^{b+1} .

Zadanie 17.5. [test diagnostyczny CKE, grudzień 2022, zadanie 1. (2 pkt)]

Oblicz

$$\frac{\log_3 5 \cdot \log_{25} 27}{\log_7 \sqrt[4]{49}}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 17.6. [matura, czerwiec 2023, zadanie 1. (2 pkt)]

Dane są liczby

$$a = 4^{\log_2 45} \text{ oraz } b = \frac{\log_3 2023}{\log_9 2023}$$

Oblicz $a - b$.

Zadanie 16.7. [matura, maj 2024, zadanie 5. (3 pkt)]

Wykaż, że jeżeli $\log_5 4 = a$ oraz $\log_4 3 = b$, to $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a \cdot (1+b)}$.

rozwiązania

1. Funkcja kwadratowa

Zadanie 1.1.

Po przekształceniu otrzymujemy

$$f(x) = 3x^2 - (2a + 2b + 2c)x + ab + bc + ca$$

Wyznaczamy wyróżnik

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(a + b + c)^2 - 12(ab + bc + ca) = \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8ab + 8bc + 8ca - 12ab - 12bc - 12ca = \\ &= 2(a^2 - 2ab + b^2) + 2(b^2 - 2bc + c^2) + 2(c^2 - 2ca + a^2) = \\ &= 2(a - b)^2 + 2(b - c)^2 + 2(c - a)^2 \end{aligned}$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $x^2 \geq 0$, stąd $\Delta \geq 0$, czyli funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

Zadanie 1.2.

$$x^2 - 3nx + 2n^2 < 0 \Leftrightarrow (x - n)(x - 2n) < 0 \Leftrightarrow x \in (n, 2n)$$

Największą liczbą całkowitą należącą do przedziału $(n, 2n)$ jest liczba $2n - 1$.

Odp. Wzór funkcji $f(n) = 2n - 1$, gdzie $n > 1$.

Zadanie 1.3.

Ze wzorów Viete'a otrzymujemy

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = 10 \\ p + q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 + p^2 - 4p + 4 = 10 \\ q = 2 - p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 2p - 3 = 0 \\ q = 2 - p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -1 \\ q = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} p = 3 \\ q = -1 \end{cases}$$

Odp. $(p, q) = (-1, 3)$, $(p, q) = (3, -1)$.

Zadanie 1.4.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_1^2 > 2m^2 - 13 \end{cases}$,

gdzie Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego, natomiast x_1, x_2 są pierwiastkami tego równania.

Zatem

$$x_1^2 + x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 4$$

$$\begin{cases} m^2 - 8 > 0 \\ m^2 - 4 > 2m^2 - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8 > 0 \\ m^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty) \\ m \in (-3, 3) \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in (-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3).$$

Zadanie 1.5.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2m^3 - 3 \end{cases}$,

gdzie Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego natomiast x_1, x_2 są pierwiastkami tego równania.

Zatem

$$\Delta = (m-4)^2 - 4(m^2-4m) = -3m^2 + 8m + 16 \quad x_1 + x_2 = m - 4$$

$$\begin{cases} -3m^2 + 8m + 16 > 0 \\ m - 4 < 2m^3 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 8m - 16 < 0 \\ 2m^3 - m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m+4)(m-4) < 0 \\ (m+1)(2m^2-2m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\frac{4}{3}, 4\right) \\ m \in (-1, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in (-1, 4).$$

Zadanie 1.6.

$$f(x) = x^2 - 4|x| = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{dla } x \geq 0 \\ x^2 + 4x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Wierzchołki parabol:

$$y = x^2 - 4x, \quad W = (2, -4).$$

$$y = x^2 + 4x, \quad W = (-2, -4).$$

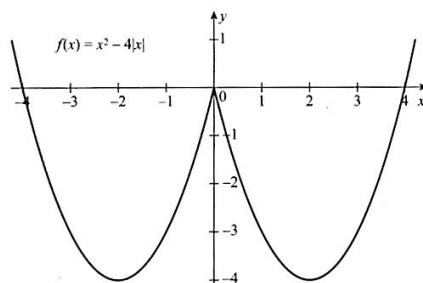
Odp.

Nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty, -4)$.

Dwa rozwiązania dla $m \in (0, +\infty) \cup \{-4\}$.

Trzy rozwiązania dla $m = 0$.

Cztery rozwiązania dla $m \in (-4, 0)$.

**Zadanie 1.7.**

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności $\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 < 8m + 8 \end{cases}$,

gdzie Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.

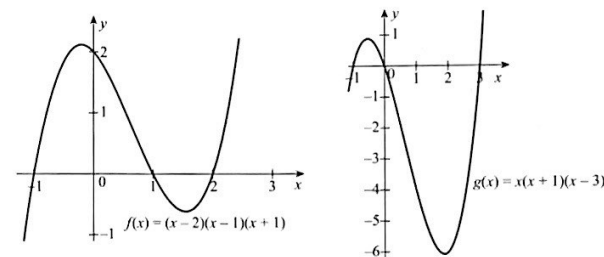
Zatem

$$\Delta = 16m^2 + 4m^3 - 24m^2 - 4m + 8 = 4m^3 - 8m^2 - 4m + 8 = 4m^2(m-2) - 4(m-2) = 4(m-2)(m-1)(m+1)$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right)^2 = \frac{\Delta}{a^2} = 4m^3 - 8m^2 - 4m + 8$$

$$\begin{cases} 4(m-2)(m-1)(m+1) > 0 \\ 4m^3 - 8m^2 - 4m + 8 < 8m + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(m-1)(m+1) > 0 \\ 4m^3 - 8m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(m-1)(m+1) > 0 \\ m(m+1)(m-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1, 1) \cup (2, +\infty) \\ m \in (-\infty, -1) \cup (0, 3) \end{cases}$$



$$\text{Odp. } m \in (0, 1) \cup (2, 3).$$

Zadanie 1.8.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 25 \leq 0 \end{cases}, \text{ gdzie } \Delta \text{ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.}$$

Zatem

$$\Delta = (m-2)^2 + 24m = m^2 + 20m + 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 25 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 25 = \left(\frac{m-2}{2} \right)^2 + \frac{12m}{2} - 25 = \frac{m^2 + 20m - 96}{4}$$

$$\begin{cases} m^2 + 20m + 4 > 0 \\ m^2 + 20m - 96 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, -10 - 4\sqrt{6}) \cup (-10 + 4\sqrt{6}, +\infty) \\ m \in [-24, 4] \end{cases}$$

$$\Delta_1 = 384 \quad m_1 = \frac{-20 - 8\sqrt{6}}{2} = -10 - 4\sqrt{6} \quad m_2 = -10 + 4\sqrt{6}.$$

$$\Delta_2 = 786 = 28^2 \quad m_1 = \frac{-20 - 28}{2} = -24 \quad m_2 = \frac{-20 + 28}{2} = 4.$$

$$\text{Odp. } m \in [-24, -10 - 4\sqrt{6}) \cup (-10 + 4\sqrt{6}, 4].$$

Zadanie 1.9.

Niech n oznacza najmniejszą z tych czterech liczb. Wtedy

$$n + 3 = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 \quad 3n^2 + 5n + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1 \quad n_1 = \frac{-5-1}{6} = -1 \quad n_2 = \frac{-5+1}{6} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Odp. } -1, 0, 1, 2.$$

Zadanie 1.10.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności i równania

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12 \end{cases}, \text{ gdzie } \Delta \text{ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.}$$

Zatem

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m+4) = m^2 - 12$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2(x_1x_2)^2 =$$

$$= ((m+2)^2 - 2(m+4))^2 - 2(m+4)^2 = (m^2 + 2m - 4)^2 - 2m^2 - 16m - 32 =$$

$$= m^4 + 4m^2 + 16 + 4m^3 - 8m^2 - 16m - 2m^2 - 16m - 32 =$$

$$= m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16.$$

$$m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12 \Leftrightarrow m^4 - 12m^2 - 28 = 0$$

$$\begin{cases} m^2 - 12 > 0 \\ (m^2 - 14)(m^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 12 \\ m^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 = 14.$$

$$\text{Odp. } m = -\sqrt{14} \text{ lub } m = \sqrt{14}.$$

Zadanie 1.11.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności i równania

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ |x_1 - x_2| = 3 \end{cases}, \text{ gdzie } \Delta \text{ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.}$$

Zatem

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 6$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = 36$$

$$\Delta = (3 - 2m)^2 - 8(-m + 1) = 9 - 12m + 4m^2 + 8m - 8 = 4m^2 - 4m + 1 = (2m - 1)^2$$

$$\Delta = 36 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 = 36 \Leftrightarrow 2m - 1 = 6 \text{ lub } 2m - 1 = -6 \Leftrightarrow m = \frac{7}{2} \text{ lub } m = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{Odp. } m = \frac{7}{2} \text{ lub } m = -\frac{5}{2}.$$

Zadanie 1.12.

$$\text{Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1x_2 \leq 6m \\ x_1^2 + x_2^2 \geq 6m \end{cases}, \text{ gdzie}$$

Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.

Zatem

$$\Delta = 4(1 - m)^2 - 4(m^2 - m) = 4 - 8m + 4m^2 - 4m^2 + 4m = -4m + 4$$

$$x_1x_2 = m^2 - m$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(1 - m)^2 - 2m^2 + 2m = 2m^2 - 6m + 4.$$

$$\begin{cases} -4m + 4 > 0 \\ m^2 - m \leq 6m \\ 2m^2 - 6m + 4 \geq 6m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m(m - 7) \leq 0 \\ m^2 - 6m + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, 1) \\ m \in (0, 7) \\ m \in (-\infty, 3 - \sqrt{7}) \cup (3 + \sqrt{7}, +\infty) \end{cases}$$

$$\Delta_1 = 36 - 8 = 28 \quad m_1 = \frac{6 - 2\sqrt{7}}{2} = 3 - \sqrt{7} \quad m_2 = 3 + \sqrt{7}.$$

$$\text{Odp. } m \in (0, 3 - \sqrt{7}).$$

Zadanie 1.13.

$$\text{Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności } \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 \leq 2,5 \end{cases}, \text{ gdzie } \Delta$$

jest wyróżnikiem równania kwadratowego natomiast x_1, x_2 są pierwiastkami tego równania.

Zatem

$$\Delta = 9m^2 - 4(m+1)^2 = (3m - 2(m+1))(3m + 2(m+1)) = (m-2)(5m+2)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{3m}{m+1} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{3m}{m+1} - \frac{5}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6m - 5(m+1)}{2(m+1)} = \frac{m-5}{2(m+1)} \leq 0 \Leftrightarrow 2(m+1)(m-5) \leq 0$$

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ (m-2)(5m+2) > 0 \\ 2(m+1)(m-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \in (-\infty, -\frac{2}{5}) \cup (2, +\infty) \\ m \in (-1, 5) \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in (-1, -\frac{2}{5}) \cup (2, 5).$$

Zadanie 1.14.

$$\text{Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności i równania } \begin{cases} \Delta > 0 \\ d_A^2 + d_B^2 = 6 \end{cases},$$

gdzie Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego natomiast d_A, d_B oznaczają odległości punktów A, B od prostej z zadania.

Zatem

$$\Delta = (2m+2)^2 - 4(2m+5) = 4m^2 + 8m + 4 - 8m - 20 = 4m^2 - 16.$$

$$d_A^2 + d_B^2 = \left(\frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{x_1^2 + 2x_1 + 1}{2} + \frac{x_2^2 + 2x_2 + 1}{2} =$$

$$\frac{x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2 + 2x_2 + 1}{2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1}{2} =$$

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{2} - x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = \frac{(2m+2)^2}{2} - (2m+5) + (2m+2) + 1 = 2m^2 + 4m.$$

$$\begin{cases} 4m^2 - 16 > 0 \\ 2m^2 + 4m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ m^2 + 2m - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_1 = 4 + 12 = 16 \quad m_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad m_2 = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Odp. $m = -3$.

Zadanie 1.15.

$$\text{Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności } \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 \geq (x_1 \cdot x_2)^2 \\ (x_1 \cdot x_2)^2 \geq x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

gdzie Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.

Zatem

$$\Delta = (2m - 5)^2 - 4(2m + 3) = 4m^2 - 20m + 25 - 8m - 12 = 4m^2 - 28m + 13 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{13}{2}, +\infty\right).$$

$$\Delta_1 = 28^2 - 16 \cdot 13 = 756 = 24^2 \quad m_1 = \frac{28-24}{8} = \frac{1}{2} \quad m_2 = \frac{28+24}{8} = \frac{13}{2}.$$

$$(x_1 + x_2)^2 \geq (x_1 \cdot x_2)^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - x_1 x_2)(x_1 + x_2 + x_1 x_2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(-2m + 5 - 2m - 3)(-2m + 5 + 2m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow (-4m + 2)8 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}.$$

$$(x_1 \cdot x_2)^2 \geq x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - (x_1 x_2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2m - 5)^2 - 2(2m + 3) - (2m + 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20m + 25 - 4m - 6 - 4m^2 - 12m - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -36m + 10 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{18}.$$

Stąd

$$\begin{cases} m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{13}{2}, +\infty\right) \\ m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq \frac{5}{18} \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in \left[\frac{5}{18}, \frac{1}{2}\right).$$

Zadanie 1.16.

Funkcję można zapisać w postaci $f(x) = a(x+1)(x-3)$, gdzie $a \neq 0$.

$$\text{Wtedy } \frac{f(6)}{f(12)} = \frac{a \cdot 7 \cdot 3}{a \cdot 13 \cdot 9} = \frac{7}{39}.$$

Zadanie 1.17.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności i równania

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ \Delta > 0 \end{cases}, \text{ gdzie } \Delta \text{ jest wyróżnikiem funkcji kwadratowej.}$$

$$x_1^4 - x_2^4 - (x_1^2 - x_2^2) = 0$$

Zatem

$$\Delta = 4(m-2)^2 - 4(m+1)(-m+4) = 4m^2 - 16m + 16 + 4m^2 - 12m - 16 = 8m^2 - 28m = 4m(2m-7)$$

$$x_1^4 - x_2^4 - (x_1^2 - x_2^2) = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1)$$

Pierwiastki są różne, więc $x_1 \neq x_2$. Stąd

$$\begin{cases} m \neq -1 \\ 4m(2m-7) > 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \text{ lub } (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalej

$$x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(m-2)}{m+1} = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{4(m-2)^2}{(m+1)^2} - 2 \frac{-m+4}{m+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(m-2)^2 - 2(-m+4)(m+1) - (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 16 + 2m^2 - 6m - 8 - m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 24m + 7 = 0.$$

$$\Delta_1 = 24^2 - 20 \cdot 7 = 436 \quad m_1 = \frac{24 - 2\sqrt{109}}{10} = \frac{12 - \sqrt{109}}{5} \quad m_2 = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}.$$

Zatem

$$\begin{cases} m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right) \\ m = 2 \text{ lub } m = \frac{12 - \sqrt{109}}{5} \text{ lub } m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5} \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m = \frac{12 + \sqrt{109}}{5}.$$

Zadanie 1.18.

Dla $m = 0$ lub $m = 1$. Równanie jest liniowe i ma tylko jedno rozwiązanie.

$$\text{Stąd rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności } \begin{cases} m \neq 0 \text{ i } m \neq 1 \\ \Delta > 0 \\ \frac{1}{x_1 + x_2} \leq \frac{m}{3} \\ \frac{m}{3} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \end{cases}$$

gdzie Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.

Zatem

$$\Delta = 1 - 4(m^2 - m) = -4m^2 + 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\Delta_1 = 32 = 16 \cdot 2 \quad m_1 = \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{-8} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \quad m_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{1}{x_1 + x_2} \leq \frac{m}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{m^2 - m}} \leq \frac{m}{3} \Leftrightarrow m^2 - m \leq \frac{m}{3} \Leftrightarrow 3m^2 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \in \left(0, \frac{4}{3} \right).$$

$$\frac{m}{3} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{m}{3} \leq \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \Leftrightarrow \frac{m}{3} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Stąd

$$\begin{cases} m \neq 0 \text{ i } m \neq 1 \\ m \in \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right) \\ m \in \left(0, \frac{4}{3} \right) \\ m \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in (0, 1) \cup \left(1, \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right).$$

Zadanie 1.19.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności

$$\begin{cases} \frac{m^2 + m - 6}{m - 5} < 0 \\ m \neq 5 \\ \Delta > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

w liczbach całkowitych, gdzie Δ jest wyróżnikiem funkcji kwadratowej natomiast x_1, x_2 miejscami zerowymi tej funkcji.

Zatem

$$\frac{m^2 + m - 6}{m - 5} < 0 \Leftrightarrow (m - 5)(m + 3)(m - 2) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5).$$

$$\Delta = 4(m - 2)^2 - 4(m^2 + m - 6) = -20m + 40 > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

$$x_1 x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{m - 5}{m^2 + m - 6} > 0 \Leftrightarrow \frac{(m - 5)^2}{m^2 + m - 6} > 0 \Leftrightarrow (m - 5)^2 (m + 3)(m - 2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty).$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5) \\ m < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \in (-\infty, -3) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in \{-4, -5, -6, \dots\}.$$

Zadanie 1.20.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności i równania

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 + x_2^3) = 0, \text{ gdzie } \Delta \text{ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.} \end{cases}$$

Zatem

$$\Delta = 4(m - 1)^2 - 4(m^2 + m - 1) = -12m + 8 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{2}{3}.$$

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 + x_2^3) = 0 \Leftrightarrow x_1^3 + x_1 x_2^2 + x_2 x_1^2 + x_2^3 - x_1^3 - x_2^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow (m^2 + m - 1)(-2(m - 1)) = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 1 = 0 \text{ lub } m = 1.$$

Stąd

$$\begin{cases} m < \frac{2}{3} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ lub } m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ lub } m = 1 \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ lub } m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Zadanie 1.21.

$$\text{Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ |x_1 - x_2| < 3 \end{cases}, \text{ gdzie } \Delta$$

jest wyróżnikiem funkcji kwadratowej.

$$\text{Ponieważ } |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{\Delta} < 3 \Leftrightarrow 0 \leq \Delta < 9, \text{ więc powyż-}$$

$$\text{szy układ nierówności jest równoważny z następującym układem: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ \Delta - 9 < 0 \end{cases}$$

Zatem

$$\Delta = 4(m + 1)^2 - 4(6m + 1) = 4m^2 - 16m = 4m(m - 4) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty).$$

$$x_1 x_2 = 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{6}.$$

$$\Delta - 9 = 4m^2 - 16m - 9 < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

$$\Delta_1 = 16^2 + 16 \cdot 9 = 400, \quad m_1 = \frac{16 + 20}{8} = \frac{9}{2}, \quad m_2 = \frac{16 - 20}{8} = -\frac{1}{2}.$$

Stąd

$$\begin{cases} m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ m > -\frac{1}{6} \\ m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right) \cup \left(4, \frac{9}{2}\right).$$

Zadanie 1.22.

Równanie ma dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$, gdzie Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.

Zatem

$$\Delta = (k-1)^2 - 4k^2 = -3k^2 - 2k + 1,$$

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ -3k^2 - 2k + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \in (-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Dalej

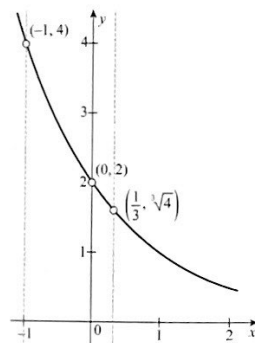
$$m = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-k+1}{1} = -k+1,$$

$$f(k) = 2^{-k+1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Funkcja malejąca.

$$f(-1) = 4, \quad f(0) = 2, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}.$$

$$\text{Odp. } (\sqrt[3]{4}, 2) \cup (2, 4).$$

**Zadanie 1.23.**

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności $\begin{cases} m \neq 3 \\ \Delta > 0 \\ x_1^3 + x_2^3 > -9 \end{cases}$, gdzie Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.

Zatem

$$\Delta = 9 - 4 \frac{2-m}{3-m} = \frac{27-9m-8+4m}{3-m} > 0 \Leftrightarrow (3-m)(-5m+19) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty, 3) \cup \left(\frac{19}{5}, +\infty\right).$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2) =$$

$$= -3 \left(9 - 3 \frac{2-m}{3-m}\right) > -9 \Leftrightarrow 9 - 3 \frac{2-m}{3-m} < 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{2-m}{3-m} < 0 \Leftrightarrow \frac{4-m}{3-m} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4-m)(3-m) < 0.$$

Stąd

$$\begin{cases} m \in (-\infty, 3) \cup \left(\frac{19}{5}, +\infty\right) \\ m \in (3, 4) \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in \left(\frac{19}{5}, 4\right).$$

Zadanie 1.24.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ (4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0 \end{cases} \text{ gdzie } \Delta \text{ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.}$$

Ponieważ

$$\Delta = 36m^2 - 16(2m+3)(m-3) = 4(9m^2 - 8m^2 + 24m - 12m + 36) = 4(m+6)^2, \text{ więc}$$

$$x_1 = \frac{6m-2|m+6|}{8} = \frac{3m-|m+6|}{4}, \quad x_2 = \frac{3m+|m+6|}{4}.$$

Stąd

$$4x_1 - 4x_2 = 3m - |m+6| - 3m - |m+6| = -2|m+6|$$

$$(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) = (-2|m+6| - 1)(-2|m+6| + 1) =$$

$$4|m+6|^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |m+6|^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |m+6| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m+6 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{13}{2} < m < -\frac{11}{2}$$

$$\begin{cases} m \neq -6 \\ m \in \left(-\frac{13}{2}, -\frac{11}{2}\right) \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in \left(-\frac{13}{2}, -6\right) \cup \left(-6, -\frac{11}{2}\right).$$

Zadanie 1.25.

Równanie ma dwa rozwiązania mniejsze od 3 wtedy, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ p < 3 \end{cases} \text{ , gdzie } \Delta \text{ jest wyróżnikiem równania kwadratowego, natomiast } p \text{ jest pierwszą współ-} \\ f(3) > 0$$

rzędną wierzchołka paraboli.

Zatem

$$\Delta = 9m^2 - 8m^2 - 4 = m^2 - 4 \quad p = \frac{3m}{2}$$

$$f(3) = 9 - 9m + 2m^2 + 1 = 2m^2 - 9m + 10 = (2m - 5)(m - 2)$$

$$\begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ \frac{3m}{2} < 3 \\ (2m - 5)(m - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ m < 2 \\ m \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

Odp. $m \in (-\infty, -2)$.

II sposób

Równanie ma dwa rozwiązania mniejsze od 3 wtedy, gdy:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < 3 \\ x_2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - 3 < 0 \\ x_2 - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 - 3)(x_2 - 3) > 0 \\ x_1 - 3 + x_2 - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 2m^2 - 9m + 10 > 0 \\ 3m - 6 < 0 \end{cases}$$

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) = x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 = 2m^2 + 1 - 9m + 9 = 2m^2 - 9m + 10.$$

$$x_1 - 3 + x_2 - 3 = 3m - 6.$$

Zadanie 1.26.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^3 + x_2^3 > -7x_1 x_2 \end{cases}$,

gdzie Δ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.

$$\Delta = (m+1)^2 - 4(-m^2+1) = 5m^2 + 2m - 3 = (5m-3)(m+1).$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2)$$

$$x_1^3 + x_2^3 = -(m+1)((m+1)^2 - 3(-m^2+1)) = -(m+1)(4m^2 + 2m - 2)$$

$$-7x_1 x_2 = -7(-m^2+1) = 7(m+1)(m-1)$$

$$x_1^3 + x_2^3 > -7x_1 x_2 \Leftrightarrow -(m+1)(4m^2 + 2m - 2) > 7(m+1)(m-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(-4m^2 - 2m + 2 - 7m + 7) > 0 \Leftrightarrow (m+1)(-4m^2 - 9m + 9) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(m+1)(4m^2 + 9m - 9) > 0 \Leftrightarrow -(m+1)(m+3)(4m-3) > 0.$$

$$\begin{cases} (5m-3)(m+1) > 0 \\ -(m+1)(m+3)(4m-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right) \\ m \in (-\infty, -3) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right).$$

Zadanie 1.27.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania układu nierówności.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 0 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{2}{3} \leq 0 \end{cases}, \text{ gdzie } \Delta \text{ jest wyróżnikiem równania kwadratowego.}$$

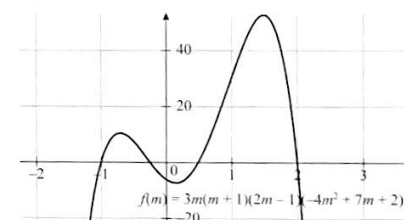
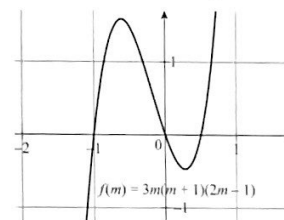
$$\Delta = 9m^2 - 4(m+1)(2m-1) = 9m^2 - 8m^2 - 4m + 4 = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3m}{(m+1)(2m-1)}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{2}{3} = \frac{3m}{(m+1)(2m-1)} - \frac{2}{3} = \frac{9m - 4m^2 - 2m + 2}{3(m+1)(2m-1)} = \frac{-4m^2 + 7m + 2}{3(m+1)(2m-1)}$$

$$\begin{cases} (m-2)^2 > 0 \\ \frac{3m}{(m+1)(2m-1)} > 0 \\ \frac{-4m^2 + 7m + 2}{3(m+1)(2m-1)} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \text{ i } m \neq -1 \text{ i } m \neq \frac{1}{2} \\ 3m(m+1)(2m-1) > 0 \\ 3(m+1)(2m-1)(-4m^2 + 7m + 2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 49 + 32 = 81, m_1 = \frac{-7-9}{-8} = 2, m_2 = \frac{-7+9}{-8} = -\frac{1}{4}$$



$$\begin{cases} m \neq 2 \text{ i } m \neq -1 \text{ i } m \neq \frac{1}{2} \\ m \in (-1, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ m \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right) \cup (2, +\infty).$$

Zadanie 1.28.

$$m \neq -\frac{1}{2}.$$

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(2m+1)(m-3) = m^2 + 4m + 4 - 8m^2 + 20m + 12 = -7m^2 + 24m + 16.$$

$$(x_1 - x_2)^2 + 5x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + 5x_1x_2 = \left(\frac{m+2}{2m+1}\right)^2 + \frac{m-3}{2m+1} =$$

$$= \frac{(m+2)^2 + (m-3)(2m+1)}{(2m+1)^2} = \frac{m^2 + 4m + 4 + 2m^2 - 5m - 3}{(2m+1)^2} = \frac{3m^2 - m + 1}{(2m+1)^2}.$$

$$(x_1 - x_2)^2 + 5x_1x_2 \geq 1 \Leftrightarrow 3m^2 - m + 1 \geq (2m+1)^2 \Leftrightarrow m^2 + 5m \leq 0.$$

$$\begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ -7m^2 + 24m + 16 > 0, \\ m^2 + 5m \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ (m-4)(-4-7m) > 0, \\ m \in (-5, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \in \left(-\frac{4}{7}, 4\right), \\ m \in (-5, 0) \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in \left(-\frac{4}{7}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Zadanie 1.29.

$$\Delta = (2-4m)^2 - 16(m^2 - m - 2) = 4 - 16m + 16m^2 - 16m^2 + 16m + 32 = 36.$$

Zatem równania ma dwa różne rozwiązania dla $m \in \mathbb{R}$.

$$x_1 = \frac{4m-2-6}{8} = \frac{m-2}{2}, x_2 = \frac{4m-2+6}{8} = \frac{m+1}{2}.$$

Dodatnie są wtedy, gdy $m-2 > 0$ i $m+1 > 0$, czyli dla $m > 2$.

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{m^2 - 4m + 4 + m^2 + 2m + 1}{4} = \frac{2m^2 - 2m + 5}{4}.$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4} \Leftrightarrow 2m^2 - 2m + 5 \leq 17 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (m-3)(m+2) \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-2, 3).$$

$$\text{Odp. } m \in (2, 3).$$

Zadanie 1.30.

Równanie ma dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = (3m+2)^2 - 4(2m^2 + 7m - 15) = 9m^2 + 12m + 4 - 8m^2 - 28m + 60 =$$

$$m^2 - 16m + 64 = (m-8)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 8$$

$$2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$2(3m+2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 = 2 \Leftrightarrow 20m^2 + 31m - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(5m+9)(4m-1) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{5} \text{ lub } m = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Odp. } m \in \left\{-\frac{9}{5}, \frac{1}{4}\right\}.$$

Zadanie 1.31.

Poniższe nierówności są równoważne

$$(m^2 + 4m - 5) \cdot x^2 + 2x > 2mx - 2$$

$$(m+5)(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 2 > 0$$

Dla $m = 1$ otrzymujemy nierówność $2 > 0$, która jest oczywiście prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

Dla $m = -5$ otrzymujemy nierówność $12x + 2 > 0$, która nie jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x .

Gdy $m \neq -5$ i $m \neq 1$ mamy nierówność kwadratową, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 4(m-1)^2 - 8(m+5)(m-1) = 4(m-1)(m-1-2m-10) = 4(m-1)(-m-11)$$

$$\begin{cases} (m+5)(m-1) > 0 \\ 4(m-1)(-m-11) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty, -5) \cup (1, +\infty) \\ m \in (-\infty, -11) \cup (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty, -11) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{Odp. } m \in (-\infty, -11) \cup (1, +\infty).$$

Zadanie 1.32.

Równanie ma dwa różne rozwiązania dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$

$$\Delta = (2a)^2 - 4(a^3 - 2a) = -4a^3 + 4a^2 + 8a = 4a(-a^2 + a + 2)$$

$$x_1 + x_2 = 2a$$

$$x_1 \cdot x_2 = a^3 - 2a = a(a^2 - 2)$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a(-a^2 + a + 2) > 0 \\ 2a > 0 \\ a(a^2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 + a + 2 > 0 \\ a > 0 \\ a^2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\sqrt{2}, 2)$$

$$\text{Odp. } a \in (\sqrt{2}, 2).$$

Zadanie 1.33.

Trójkąt kwadratowy ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 16m = 4(m-1)^2$$

Zatem trójkąt kwadratowy ma dwa różne pierwiastki dla $m \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Zero jest pierwiastkiem trójkąta kwadratowego dla $m = 0$.

Stąd $m \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Następujące nierówności są równoważne

$$x_1 + x_2 \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$$x_1 + x_2 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \leq 0$$

$$(x_1 + x_2) \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2} \right) \leq 0$$

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2} \leq 0$$

$$(x_1 + x_2)(x_1 x_2 - 1) x_1 x_2 \leq 0$$

Wykorzystując wzory na sumę i iloczyn pierwiastków otrzymujemy

$$\frac{2(m+1)}{4} \left(\frac{m}{4} - 1 \right) \frac{m}{4} \leq 0$$

$$(m+1)(m-4)m \leq 0$$

Rozwiązaniem nierówności są liczby należące do sumy przedziałów $(-\infty, -1) \cup (0, 4)$.

Po uwzględnieniu warunku $m \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ otrzymujemy odpowiedź.

Odp. $m \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, 4)$.

Zadanie 1.34.

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = |a|$$

$$\Delta = (p-1)^2 - 4p(1-2p) = p^2 - 2p + 1 - 4p + 8p^2 = 9p^2 - 6p + 1 = (3p-1)^2$$

Funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe różniące się o 1 wtedy, gdy

$$\begin{cases} p \neq 0 \\ p \neq \frac{1}{3} \\ |3p-1| = |p| \end{cases} \quad p = \frac{1}{2} \text{ lub } p = \frac{1}{4}$$

$$\text{Odp. } p \in \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Zadanie 1.35.

Równanie ma dwa różne rozwiązania wtedy, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = (m-4)^2 - 4(m^2 - 7m + 12) = -3m^2 + 20m - 32$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{8}{3}, 4 \right)$$

Następujące nierówności są równoważne

$$x_1^3 + x_2^3 < 5x_1^2 \cdot x_2 + 5x_1 \cdot x_2^2$$

$$(x_1 + x_2) \left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right) - 5x_1 x_2 (x_1 + x_2) < 0$$

$$(x_1 + x_2) \left((x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 \right) < 0$$

$$(m-4) \left((m-4)^2 - 8(m^2 - 7m + 12) \right) < 0$$

$$(m-4)(-7m^2 + 48m - 80) < 0$$

$$(m-4)(-7m+20)(m-4) < 0$$

$$\begin{cases} m > \frac{20}{7} \\ m \neq 4 \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{cases} m \in \left(\frac{8}{3}, 4 \right) \\ m \in \left(\frac{20}{7}, +\infty \right) \\ m \neq 4 \end{cases}$$

$$\text{Odp. } m \in \left(\frac{20}{7}, 4 \right).$$

Zadanie 1.36.

Równanie ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = 16 + 4 \cdot \frac{m-3}{m-2} = \frac{16m-32+4m-12}{m-2} = \frac{20m-44}{m-2}$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (20m-44)(m-2) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{5}, +\infty \right)$$

Wyznaczymy $x_1^3 + x_2^3$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right) = -4 \left(16 + 3 \cdot \frac{m-3}{m-2} \right)$$

Następujące nierówności są równoważne

$$x_1^3 + x_2^3 > -28 \Leftrightarrow 16 + 3 \cdot \frac{m-3}{m-2} < 7 \Leftrightarrow 9 + 3 \cdot \frac{m-3}{m-2} < 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{m-3}{m-2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4m-9}{m-2} < 0 \Leftrightarrow (4m-9)(m-2) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(2, \frac{9}{4} \right)$$

Zatem

$$\begin{cases} m \in (-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{5}, +\infty\right) \\ m \in \left(2, \frac{9}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{11}{5}, \frac{9}{4}\right)$$

Odp. $m \in \left(\frac{11}{5}, \frac{9}{4}\right)$.

Zadanie 1.37.

Równanie ma dwa różne pierwiastki różne od zera wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -2m + 3 \neq 0 \end{cases}$.

$$\Delta = (m+1)^2 - 4m \cdot (-2m+3) = 9m^2 - 10m + 1$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (9m-1)(m-1) > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right) \cup (1, +\infty)$$

Uwzględniając warunek $m \neq 0$ oraz $m \neq \frac{3}{2}$ otrzymujemy

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

Wyznamy $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{-2m+3}{m}}{\left(\frac{-2m+3}{m}\right)^2} = \frac{5m^2 - 4m + 1}{(2m-3)^2}$$

Następujące nierówności są równoważne

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{5m^2 - 4m + 1}{(2m-3)^2} < 1 \Leftrightarrow 5m^2 - 4m + 1 < 4m^2 - 12m + 9 \Leftrightarrow$$

$$m^2 + 8m - 8 < 0 \Leftrightarrow (m+4)^2 < 24 \Leftrightarrow |m+4| < 2\sqrt{6} \Leftrightarrow m \in (-4-2\sqrt{6}, -4+2\sqrt{6})$$

Zatem

$$\begin{cases} m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \\ m \in (-4-2\sqrt{6}, -4+2\sqrt{6}) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-4-2\sqrt{6}, 0) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right)$$

Odp. $m \in (-4-2\sqrt{6}, 0) \cup \left(0, \frac{1}{9}\right)$.

Zadanie 1.38.

Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$.

$$\Delta = (3m+1)^2 - 4(2m^2 + m + 1) = 9m^2 + 6m + 1 - 8m^2 - 4m - 4 = m^2 + 2m - 3 = (m+3)(m-1)$$

Zatem równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki dla $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Korzystając ze wzorów na sumę i iloczyn pierwiastków otrzymujemy

$$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) =$$

$$(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 9x_1 x_2 =$$

$$(x_1 + x_2)^3 - 9x_1 x_2 = (3m+1)^3 - 9(2m^2 + m + 1) =$$

$$27m^3 + 27m^2 + 9m + 1 - 18m^2 - 9m - 9 = 27m^3 + 9m^2 - 8$$

Zatem przekształcając równoważnie otrzymujemy

$$27m^3 + 9m^2 - 8 \leq 3m - 7$$

$$27m^3 + 9m^2 - 3m - 1 \leq 0$$

$$(9m^2 - 1)(3m + 1) \leq 0$$

$$(3m - 1)(3m + 1)^2 \leq 0$$

$$3m - 1 \leq 0 \vee 3m + 1 = 0$$

$$m \leq \frac{1}{3} \vee m = -\frac{1}{3}$$

$$m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$$

Po uwzględnieniu warunku $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ otrzymujemy odpowiedź.

Odp. $m \in m \in (-\infty, -3)$.

Zadanie 1.39.

Równanie ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} m \neq 3 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

$$\Delta = (m+1)^2 + 4(3-m)(m+1)^2 = (m+1)^2(-4m+13)$$

Zatem równanie ma dwa różne pierwiastki dla $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup \left(3, \frac{13}{4}\right)$.

Korzystając ze wzorów na sumę i iloczyn pierwiastków otrzymujemy

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 - 7 = 0$$

$$\left(\frac{m+1}{3-m}\right)^2 + 3 \cdot \frac{(m+1)^2}{3-m} - 7 = 0$$

$$(m+1)^2 + 3(m+1)^2(3-m) - 7(3-m)^2 = 0$$

$$(m+1)^2(10-3m)-7(3-m)^2=0$$

$$(m+1)^2(7+3-3m)-7(3-m)^2=0$$

$$3(m+1)^2(1-m)+7(m+1)^2-7(3-m)^2=0$$

$$3(m+1)^2(1-m)+7(8m-8)=0$$

$$(1-m)(3(m+1)^2-56)=0$$

$$m=1 \vee (m+1)^2=\frac{56}{3}$$

$$m=1 \vee m+1=\sqrt{\frac{56}{3}}=\frac{2\sqrt{42}}{3} \vee m+1=-\frac{2\sqrt{42}}{3}$$

$$m=1 \vee m=-1+\frac{2\sqrt{42}}{3} \vee m=-1-\frac{2\sqrt{42}}{3}$$

Uwzględniając, że $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, \frac{13}{4})$ otrzymujemy odpowiedź

$$m \in \left\{-1-\frac{2\sqrt{42}}{3}, 1\right\}.$$

2. Wielomiany

Zadanie 2.1.

Pierwiastkami wielomianu są liczby: 2, 6, k .

Liczby te są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego wtedy, gdy:

$$1. \ 2 \cdot k = 36 \text{ i } k > 6, \text{ czyli } k = 18,$$

$$2. \ k^2 = 12 \text{ i } 2 < k < 6, \text{ czyli } k = 2\sqrt{3},$$

$$3. \ k \cdot 6 = 4 \text{ i } k < 2, \text{ czyli } k = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Odp. } k \in \left\{\frac{2}{3}, 2\sqrt{3}, 18\right\}.$$

Zadanie 2.2.

$$W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = x^2(x^2 - 2x + 1) - (4x^2 - 4x + 1) =$$

$$(x(x-1))^2 - (2x-1)^2 = (x^2 - x - 2x + 1)(x^2 - x + 2x - 1) =$$

$$(x^2 - 3x + 1)(x^2 + x - 1)$$

Zadanie 2.3.

Jeżeli liczba 1 jest rozwiązaniem równania, to $1 + m^3 - m^2 - 1 = 0$, czyli $m^2(m-1) = 0$, zatem $m = 0$ lub $m = 1$.

Dla $m = 0$ mamy równanie $x^3 - 1 = 0$, którego 1 jest jedynym ma rozwiązaniem rzeczywistym.

Dla $m = 1$ mamy równanie $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$. Równanie to można przekształcić do postaci iloczynowej $(x+1)^2(x-1) = 0$, które ma dwa rozwiązania rzeczywiste 1 oraz -1. Liczba -1 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu.

Odp. $m = 0$.

Zadanie 2.4.

$$W(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 9 = x^2(x-1)^2 + (x-3)^2$$

Ponieważ $x^2(x-1)^2 > 0$ dla $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ oraz $(x-3)^2 > 0$ dla $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, więc

$$W(x) > 0 \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 2.5.

a) Dla $p = 1$ otrzymujemy równanie $(x+3) \cdot (x^2 + 5x + 4) = 0$, które ma trzy rozwiązania -1, -3, -4.

b) Równanie ma jedno rozwiązanie wtedy, gdy równanie $x^2 + (p+4)x + (p+1)^2 = 0$ nie ma rozwiązania lub jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba -3. Równania (*) nie ma rozwiązań wtedy, gdy $\Delta < 0$.

$$\Delta = (p+4)^2 - 4(p+1)^2 = -3p^2 + 12$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Liczba -3 jest rozwiązaniem równania (*) wtedy, gdy $9 - 3(p+4) + (p+1)^2 = 0$, czyli gdy $p^2 - p - 2 = 0$. Zatem $p = -1$ lub $p = 2$.

Dla $p = -1$ równanie (*) ma postać $x^2 + 3x = 0$ i ma dwa rozwiązania -3 oraz 0.

Dla $p = 2$ równanie (*) ma postać $x^2 + 6x + 9 = 0$ i ma jedno rozwiązanie -3.

$$\text{Odp. } p \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Zadanie 2.6.

$$W(x) = (x-1)(8x^2 + 4x - 14) - 5 = 8x^3 - 4x^2 - 18x + 9 = (4x^2 - 9)(2x - 1)$$

$$\text{Odp. Pierwiastki wielomianu } W(x): -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}.$$

Zadanie 2.7.

$$\begin{cases} W(2) = 7 \\ W(3) = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 8 + 4a + 2b + 1 = 7 \\ 27 + 9a + 3b + 1 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 9a + 3b = -18 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + b = -1 \\ 3a + b = -6 \end{cases}$$

$$\text{Odp. } \begin{cases} a = -5 \\ b = 9 \end{cases}$$

Zadanie 2.8.

Załóżmy, że taki wielomian istnieje. Niech $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Wtedy

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ -8a + 4b - 2c + d = 2 \end{cases}$$

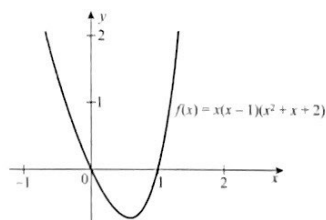
Stąd dodając stronami mamy: $8b + 2d = 5$.

Sprzeczność, bo lewa strona jest parzysta a prawa nieparzysta.

Zatem takiego wielomianu nie ma.

Zadanie 2.9.

$$x^4 + x^2 - 2x = x(x^3 + x - 2) = x(x-1)(x^2 + x + 2) \geq 0.$$



$$\text{Odp. } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Zadanie 2.10.

$$P^2(x) = (x^2 + cx + d)^2 = x^4 + c^2x^2 + d^2 + 2cx^3 + 2dx^2 + 2cdx = x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2.$$

$$\begin{cases} a = 2c \\ b = c^2 + 2d \\ -24 = 2cd \\ 9 = d^2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2c \\ b = c^2 + 6 \\ -24 = 6c \\ 3 = d \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2c \\ b = c^2 - 6 \\ -24 = -6c \\ -3 = d \end{cases} \quad \begin{cases} a = -8 \\ b = 22 \\ -4 = c \\ 3 = d \end{cases} \quad \begin{cases} a = 8 \\ b = 10 \\ 4 = c \\ -3 = d \end{cases}$$

$$\text{Odp. } \begin{cases} a = -8 \\ b = 22 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = 8 \\ b = 10 \end{cases}$$

Zadanie 2.11.

$$W(-1) = -4 - 5 + 23 + m = 20, \text{ czyli } m = 6.$$

Zatem

$$W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + 6.$$

$$\text{Ponieważ } W(-2) = -32 - 20 + 46 + 6 = 0, \text{ więc } W(x) = (x+2)(4x^2 - 13x + 3).$$

$$\Delta = 169 - 48 = 121.$$

$$\text{Odp. } m = 6, x_1 = -2 \text{ lub } x_2 = \frac{13-11}{8} = \frac{1}{4} \text{ lub } x_3 = \frac{13+11}{8} = 3.$$

Zadanie 2.12.

$$W(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-5).$$

$$W(2n+1) = \frac{1}{2}(2n)(2n-2)(2n-4) = 4n(n-1)(n-2), \text{ gdzie } n \text{ jest dowolną liczbą całkowitą.}$$

Liczba $n(n-1)(n-2)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, jest podzielna się przez 2 i przez 3.

Zatem $W(2n+1)$ jest podzielna się przez 24.

Zadanie 2.13.

$$W(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$W(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0$$

$$W(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1).$$

Zatem $x_1 = -1$ jest jedynym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Stąd równanie $Q(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$ musi mieć dwa różne rozwiązania $x_2 \neq -1 \neq x_3$.

$$Q(-1) = 1 + 2m + 1 + m^2 + m = m^2 + 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \text{ i } m \neq -2.$$

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + m) = 1 \quad x_2 = \frac{2m+1-1}{2} = m \quad x_3 = \frac{2m+1+1}{2} = m+1.$$

Zatem

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = x_1 = -1 \text{ lub } \frac{x_2 - 1}{2} = x_3 \text{ lub } \frac{-1 + x_3}{2} = x_2,$$

$$\frac{m + m + 1}{2} = -1 \text{ lub } \frac{m - 1}{2} = m + 1 \text{ lub } \frac{-1 + m + 1}{2} = m.$$

$$\text{Odp. } m = -3 \text{ lub } m = 0.$$

Zadanie 2.14.

$$W(m) = 6m^3 + (m+4)m^2 - 2m - 1 = 7m^3 + 4m^2 - 2m - 1 = 8.$$

Stąd

$$P(m) = 7m^3 + 4m^2 - 2m - 9 = 0, \quad P(1) = 7 + 4 - 2 - 9 = 0,$$

$$P(m) = 7m^3 + 4m^2 - 2m - 9 = (m-1)(7m^2 + 11m + 9), \quad \Delta = 121 - 4 \cdot 7 \cdot 9 = -131.$$

Zatem

$$W(x) = 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0, \quad W(-1) = -6 + 5 + 2 - 1 = 0,$$

$$W(x) = 6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = (x+1)(6x^2 - x - 1), \quad \Delta = 1 + 4 \cdot 6 = 25.$$

$$\text{Odp. } m = 1, x_1 = -1 \text{ lub } x_2 = \frac{1-5}{12} = \frac{-1}{3} \text{ lub } x_3 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 2.15.

$W(1) = 1 + a + b + c = 0$. Stąd pierwiastek wielomianu $x_1 = 1$. Zatem

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \text{ lub } x_3 = 7 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_2 = -2 \\ x_1 = 1 \text{ lub } x_3 = -2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_2 = -5 \\ x_3 = -2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Stąd

$$W(x) = (x-1)(x-4)(x-7) = x^3 - 12x^2 + 39x - 28 \text{ lub}$$

$$W(x) = (x+2)(x-1)(x-4) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 \text{ lub}$$

$$W(x) = (x+5)(x+2)(x-1) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10.$$

Odp. $(a, b, c) = (-12, 39, -28)$ lub $(a, b, c) = (-3, -6, 8)$ lub $(a, b, c) = (6, 3, -10)$.

II sposób

Należy rozwiązać następujące układy równań:

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ 64 + 16a + 4b + c = 0 \\ 343 + 49a + 7b + c = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ -8 + 4a - 2b + c = 0 \\ 64 + 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ -8 + 4a - 2b + c = 0 \\ -125 + 25a - 5b + c = 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.16.

Pierwiastkiem wielomianu jest $x_1 = 3$.

$$W(3) = 27 - 27m + 9m^2 - 3 - 9m^2 + 20m + 4 = 0 \Leftrightarrow -7m + 28 = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Wtedy

$$W(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = (x-3)(x^2 - 9x + 20), \quad \Delta = 81 - 4 \cdot 20 = 1.$$

$$\text{Odp. } x_1 = 3 \text{ lub } x_2 = \frac{9-1}{2} = 4 \text{ lub } x_3 = \frac{9+1}{2} = 5.$$

Zadanie 2.17.

$$W(1) = m + 1 + m^2 - 9 + m = m^2 + 2m - 8 = 0.$$

$$\Delta = 4 + 4 \cdot 8 = 36, \quad m_1 = \frac{-2-6}{2} = -4, \quad m_2 = \frac{-2+6}{2} = 2.$$

Dla $m = -4$ otrzymujemy:

$$W(x) = -4x^3 + x^2 + 7x - 4 = (x-1)(-4x^2 - 3x + 4), \quad \Delta = 9 + 4 \cdot 16 = 73.$$

Wielomian ma jeszcze dwa pierwiastki niewymiernie.

Dla $m = 2$ otrzymujemy:

$$W(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x-1)(2x^2 + 3x - 2),$$

$$\Delta = 9 + 4 \cdot 4 = 25, \quad x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2, \quad x_2 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}.$$

Odp. $m = -4$.

Zadanie 2.18.

$$W(3) = 54 + 9a - 39 + b = 0 \text{ i } W(-2) = -16 + 4a + 26 + b = 20.$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} 9a + b = -15 \\ 4a + b = 10 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymujemy: $5a = -25$, $a = -5$. Wtedy $b = 30$.

$$\text{Zatem } W(x) = 2x^3 - 5x^2 - 13x + 30 = (x-3)(2x^2 + x - 10).$$

$$\Delta = 81 \quad x_1 = \frac{-1+9}{4} = 2 \quad x_2 = \frac{-1-9}{4} = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{Odp. } \begin{cases} a = -5 \\ b = 30 \end{cases}. \text{ Pozostałe pierwiastki: } 2 \text{ oraz } -\frac{5}{2}.$$

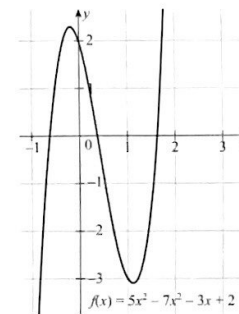
Zadanie 2.19.

$$W\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{25} - \frac{28}{25} - \frac{6}{5} + p = -2 + p = 0, \quad p = 2.$$

$$W(x) = 5x^3 - 7x^2 - 3x + 2 = (5x-2)(x^2 - x - 1)$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Odp. } x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

**Zadanie 2.20.**

$$x^8 + x^2 = 2(x^4 + x - 1) \Leftrightarrow x^8 - 2x^4 + 1 + x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0.$$

Stąd

$$\begin{cases} x^4 - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

Zatem $x = 1$.

Zadanie 2.21.

Z założeń wynika, że $W(-2) = 0$ i $W(1) = -30$.

$$\text{Stąd } \begin{cases} -8 + 4c + 20 + d = 0 \\ 1 + c - 10 + d = -30 \end{cases} \quad \begin{cases} 4c + d = -12 \\ c + d = -21 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymujemy: $3c = 9$, czyli $c = 3$ i $d = -24$.

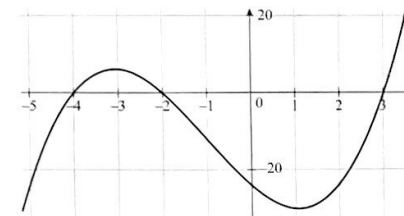
Zatem

$$W(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = (x+2)(x^2 + x - 12).$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49, \quad x_1 = \frac{-1-7}{2} = -4,$$

$$x_2 = \frac{-1+7}{2} = 3, \quad x_3 = -2.$$

$$\text{Odp. } x \in (-4, -2) \cup (3, +\infty).$$



Zadanie 2.22.

$$\begin{cases} W(2) = 0 \\ W(-1) = 6 \\ 16 + 4(m^3 + 2) - 22 - 2(2m + 1) = 0 \\ -2 + (m^3 + 2) + 11 - 2(2m + 1) = 6 \\ 4m^3 - 4m = 0 \\ m^3 - 4m = -3 \\ 4m^3 - 4m = 0 \\ -4m^3 + 16m = 12 \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$12m = 12$$

$$m = 1.$$

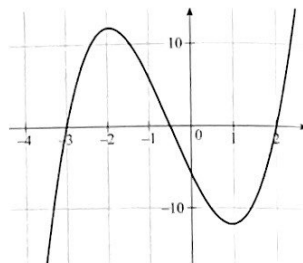
Dla $m = 1$ otrzymujemy

$$2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 \leq 0$$

$$(x - 2)(2x^2 + 7x + 3) \leq 0$$

$$(x - 2)(2x + 1)(x + 3) \leq 0$$

$$\text{Odp. } m = 1, x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, 2\right).$$

**Zadanie 2.23.**

Rozwiązanie jest w zadaniu 2.22.

$$\text{Odp. } m = 1, x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 2.$$

Zadanie 2.24.Reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumiany $(x - 2)$ i $(x - 3)$ są odpowiednio równe (-8)

$$\text{oraz } (-18) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \begin{cases} W(2) = -8 \\ W(3) = -18 \end{cases}$$

$$W(2) = 16 + 8b + 4c = 4(4 + 2b + c)$$

$$W(3) = 81 + 27b + 9c = 9(9 + 3b + c)$$

$$\begin{cases} W(2) = -8 \\ W(3) = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2b + c = -2 \\ 9 + 3b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = -6 \\ 3b + c = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$W(4) = 4^4 - 5 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 = 4^3(4 - 5 + 1) = 0$$

Odp. Resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x - 4)$ jest równa zero.**Zadanie 2.25.**Równanie $(x - 3)(x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m) = 0$ ma dokładnie dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. Równanie $x^2 + (m - 1)x - 6m^2 + 2m = 0$ ma jedno rozwiązanie różne od 3.
2. Równanie (*) ma dwa rozwiązania oraz jednym z rozwiązań jest 3.

$$\Delta = (m - 1)^2 - 4(-6m^2 + 2m) = 25m^2 - 10m + 1 = (5m - 1)^2$$

$$\text{Dla } m = \frac{1}{5} \text{ równanie (*) ma jedno rozwiązanie: } x = \frac{1 - m}{2} = \frac{2}{5} \neq 3.$$

$$\text{Dla } m \neq \frac{1}{5} \text{ równanie (*) ma dwa rozwiązania.}$$

Sprawdzimy, dla jakiej wartości parametru m rozwiązaniem jest 3.

$$9 + (m - 1) \cdot 3 - 6m^2 + 2m = 0$$

$$-6m^2 + 5m + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 + 144 = 169$$

$$m = \frac{-5 - 13}{-12} = \frac{3}{2} \text{ lub } m = \frac{-5 + 13}{-12} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Odp. } m \in \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right\}.$$

Zadanie 2.26.Równanie $(x - 6)[(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1] = 0$ jest równoważne alternatywie równań $\frac{x - 6}{(1)}$ lub $\frac{(m - 2)x^2 - 4(m + 3)x + m + 1}{(2)} = 0$.Dla dowolnej liczby rzeczywistej m rozwiązaniem równania (1) jest liczba 6.

Zatem równanie (2) powinno mieć dwa rozwiązania dodatnie różne o 6.

Rozwiązaniem równania (2) jest liczba 6 wtedy, gdy $(m - 2)36 - 4(m + 3)6 + m + 1 = 0$, czyli dla $m = 11$.

$$\text{Równanie (2) ma dwa rozwiązania dodatnie wtedy, gdy } \begin{cases} m \neq 2 \\ \Delta > 0 \\ \frac{m + 3}{m - 2} > 0 \\ \frac{m + 1}{m - 2} > 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 16(m + 3)^2 - 4(m - 2)(m + 1) = 4(3m^2 + 25m + 38) = 4(3m + 19)(m + 2)$$

Zatem

$$\begin{cases} m \neq 2 \\ m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (-2, +\infty) \\ m \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) \\ m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \end{cases}$$

Odp. $m \in \left(-\infty, -\frac{19}{3}\right) \cup (2, 11) \cup (11, +\infty)$.

Zadanie 2.27.

$$W\left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

$$W(x) = (4x - 3)(x^2 - 4x - 6)$$

$$\Delta = 16 + 24 = 40, x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{2} = 2 - \sqrt{10}, x_2 = 2 + \sqrt{10}$$

Odp. Pierwiastkami wielomianu są liczby: $2 - \sqrt{10}$, $2 + \sqrt{10}$, $\frac{3}{4}$.

Zadanie 2.28.

$$W(x) = \frac{(x-1)(x^2 - mx + m-1)}{P(x)Q(x)}$$

Zauważmy, że $P(1) = 0$ i $Q(1) = 0$.

Zatem wielomian Q musi mieć tylko jeden pierwiastek, tak jest gdy $\Delta = 0$.

$$\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$$

Odp. $m = 2$.

Zadanie 2.29.

$$x_1 = 4$$

Wyznamy wartości parametru m , dla których rozwiązaniem równania kwadratowego

$$x^2 + (m-3)x + m^2 - m - 6 = 0 \quad (1)$$

jest liczba 4.

$$16 + 4m - 12 + m^2 - m - 6 = 0$$

$$m^2 + 3m = 0$$

$$m = 0 \text{ lub } m = -3$$

Obliczymy teraz Δ oraz $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ i $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\Delta = (m-3)^2 - 4(m^2 - m - 6) = -3m^2 - 2m + 33 = -(3m+11)(m-3)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 4(m^2 - m - 6) = 4m^2 - 4m - 24$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 =$$

$$16 + (m-3)^2 - 2(m^2 - m - 6) = -m^2 - 4m + 37$$

Równanie (1) ma dwa różne rozwiązania różne od 0 i -3 wtedy, gdy

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ m \neq 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\frac{11}{3}, 3\right) \\ m \neq 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{11}{3}, -3\right) \cup (-3, 0) \cup (0, 3)$$

Nierówność $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$ jest równoważna

$$4m^2 - 4m - 24 > -m^2 - 4m + 37 - 5m - 51$$

$$5m^2 + 5m - 10 > 0$$

$$m^2 + m - 2 > 0$$

$$(m+2)(m-1) > 0$$

$$m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

Stąd

$$\begin{cases} m \in \left(-\frac{11}{3}, -3\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 3\right) \\ m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

Odp. $m \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -2\right) \cup (1, 3)$.

Zadanie 2.30.

$$W(x) = 7x^3 - 9x^2 + 9x - 2 = 7x^3 - 2x^2 - 7x^2 + 2x + 7x - 2 =$$

$$= x^2(7x-2) - x(7x-2) + (7x-2) = (7x-2)(x^2 - x + 1) = (7x-2)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$$

Ponieważ $\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) > 0$, więc jedynym pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu $W(x)$

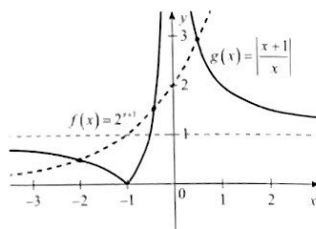
jest liczba $\frac{2}{7}$.

Odp. $\frac{2}{7}$.

3. Funkcje wymierne, wykładnicze, logarytmiczne

Zadanie 3.1.

Odp. Równanie ma dwa ujemne rozwiązania.



Zadanie 3.2.

Do dziedziny funkcji f należą liczby rzeczywiste spełniające następujący układ nierówności

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ x^2 - 3 \neq 1 \\ x^3 + 4x^2 - x - 4 > 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem pierwszej nierówności są liczby $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Rozwiązaniem drugiej nierówności są liczby $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Wielomian występujący w ostatniej nierówności rozłożymy na czynniki pierwszego stopnia i naszkicujemy wykres.

$$x^3 + 4x^2 - x - 4 = (x^2 - 1)(x + 4) = (x - 1)(x + 1)(x + 4)$$

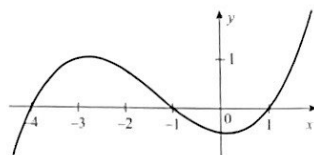
Rozwiązaniem nierówności $x^3 + 4x^2 - x - 4 > 0$

są liczby $x \in (-4, -1) \cup (1, +\infty)$.

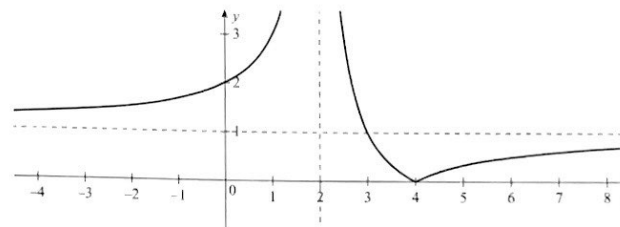
Zatem

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \\ x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \\ x \in (-4, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

Odp. $D = (-4, -2) \cup (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2) \cup (2, +\infty)$.



Zadanie 3.3.



Odp. $k \in (1, 2)$.

Zadanie 3.4.

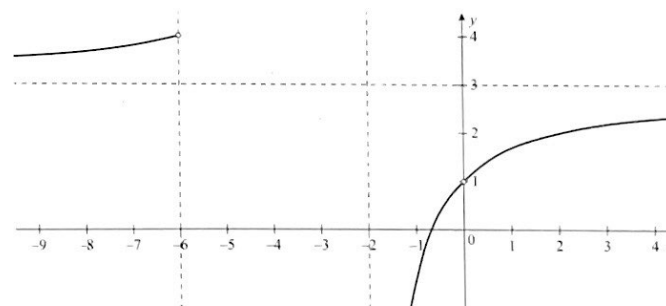
Równanie ma dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $\begin{cases} \Delta > 0 \\ m \neq -2 \end{cases}$.

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m+2)(3m+2) = (m+2)((m+2)^2 - 4(3m+2)) =$$

$$m^2(m+2)(m+6) > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

Dziedzina funkcji f : $(-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$, $(-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$

$$f(m) = x_1 \cdot x_2 = \frac{3m+2}{m+2} = 3 + \frac{-4}{m+2}$$



Zadanie 3.5.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-3}{x-1} = \frac{x-1-2}{x-1} = 1 + \frac{-2}{x-1}, \text{ czyli } k=1, m=-2.$$

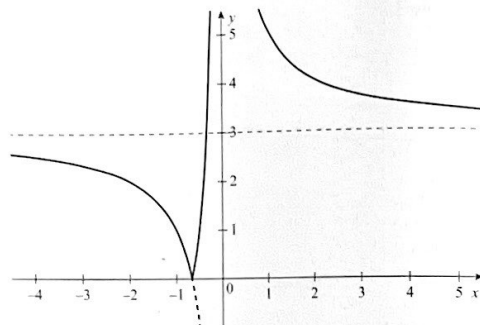
$$\text{b) } f(x) = \frac{px-3}{x-p} = \frac{p(x-p)+p^2-3}{x-p} = p + \frac{p^2-3}{x-p}$$

Funkcja f jest malejąca w przedziale $(p, +\infty)$ wtedy, gdy $p^2 - 3 > 0$.

Odp. $p \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Zadanie 3.6.

Odp. Dla $p \in (-\infty, 0)$ równanie nie ma rozwiązań, dla $p \in \{0, 3\}$ równanie ma jedno rozwiązanie, dla $p \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$ równanie ma dwa rozwiązania.

**Zadanie 3.7.**

Do dziedziny funkcji f należą liczby rzeczywiste spełniające nierówność $8x - x^2 > 0$, czyli $x \in (0, 8)$.

Funkcja logarytmiczna o podstawie $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ jest funkcją malejącą, zatem funkcja f osiąga

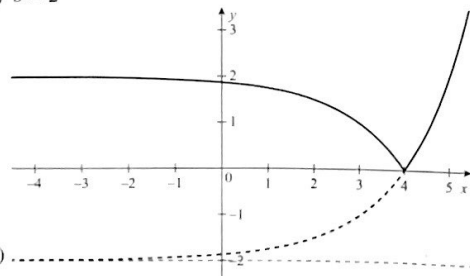
wartość najmniejszą wtedy, gdy funkcja $h(x) = 8x - x^2$ osiąga wartość największą. Funkcja h osiąga wartość największą dla argumentu 4. Zatem wartość najmniejsza funkcji f wynosi

$$f(4) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\log_2 \sqrt{2} - \log_2 2} = \frac{4}{\frac{1}{2} - 1} = -8$$

Odp. Dziedziną funkcji f jest przedział $(0, 8)$, najmniejsza wartość funkcji wynosi (-8) .

Zadanie 3.8.

a) $b = 2$



b)

c) $p \in (2, +\infty) \cup \{0\}$.

Zadanie 3.9.

$$h(x) = \frac{2}{x-2} + 1$$

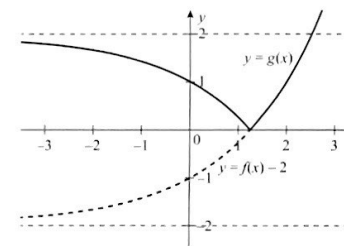
$$h(\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}-2} + 1 = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{3-4} + 1 = -2\sqrt{3} - 4 + 1 = -2\sqrt{3} - 3$$

Punkt M należy do wykresu funkcji h .

Zadanie 3.10.

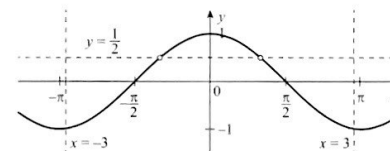
$$3 = f(2) = a^2. \text{ Zatem } a = \sqrt{3}.$$

Równanie $g(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $m \in (2, +\infty) \cup \{0\}$.

**Zadanie 3.11.**

Do dziedziny funkcji f należą liczby rzeczywiste spełniające następujący układ nierówności

$$\begin{cases} 2 \cos x > 0 \\ 2 \cos x \neq 1 \\ 9 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \cos x \neq \frac{1}{2} \\ x \in (-3, 3) \end{cases}$$

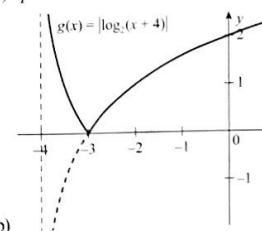


$$\text{Odp. } D = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Zadanie 3.12.

Odp.

a) $p = -4$.



b)

c) Dwa rozwiązania o przeciwnych znakach dla $m \in (2, +\infty)$.

Zadanie 3.17.

Dziedzina nierówności $R = \{0, 1\}$.

Przekształcamy nierówność do postaci wielomianowej.

$$\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$$

$$\frac{5x(2x-1) - 2(1+x)(1-x)}{5x(1-x)} \leq 0$$

$$5x(1-x)(12x^2 - 5x - 2) \leq 0$$

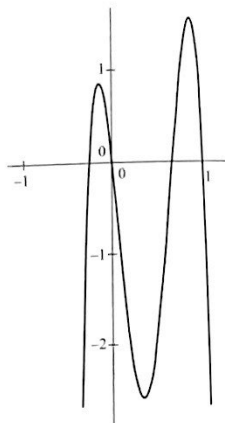
$$5x(1-x)(3x-2)(4x+1) \leq 0$$

Pierwiastki

$$x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = 1$$

Z ze szkicu wykresu odpowiedniej funkcji wielomianowej odczytujemy rozwiązanie uwzględniając dziedzinę nierówności.

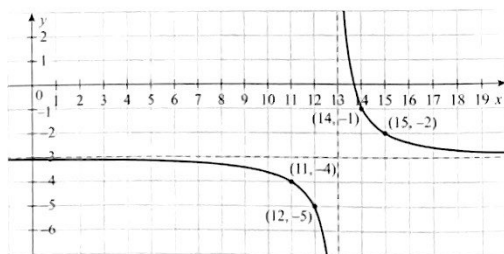
$$\text{Odp. } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty).$$

**Zadanie 3.18.**

$$f(x) = \frac{-3x+41}{x-13} = \frac{-3(x-13)+2}{x-13} = -3 + \frac{2}{x-13}$$

Współrzędne punktu $\left(x, 3 + \frac{2}{x-13}\right)$ są całkowite wtedy, gdy x jest liczbą całkowitą oraz

$x-13$ jest dzielnikiem całkowitym liczby 2. Tak jest dla $x \in \{11, 12, 14, 15\}$.



Odp. Punkty kratowe:

$(11, -4), (12, -5),$

$(14, -1), (15, -2).$

Zadanie 3.19.

Dziedzina $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Następujące nierówności są równoważne (uwzględniając dziedzinę)

$$\frac{x-1}{x^2-4} - \frac{1}{2-x} \geq \frac{3}{2+x} + 2$$

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} + \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-2x^2 - x + 15}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$(-2x+5)(x+3)(x-2)(x+2) \geq 0$$

$$\text{Odp. } x \in [-3, -2) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right].$$

Zadanie 3.20.

$$m(t) = 4 \cdot \left(\frac{81}{100}\right)^t$$

Funkcja $m(t)$ jest funkcją malejącą.

$$4 \cdot (0,81)^4 > 1,7 > 1,5$$

$$4 \cdot (0,81)^5 < 1,4 < 1,5$$

Odp. Po pięciu dobach.

Zadanie 3.21.

$$T(0) = 80$$

$$65 = T(10) = (80 - 20) \cdot k^{-10} + 20 = 60 \cdot k^{-10} + 20$$

$$60 \cdot k^{-10} = 45$$

$$k^{-10} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

$$T(5) = (65 - 20) \cdot k^{-5} + 20 = 45 \cdot (k^{-10})^{\frac{1}{2}} + 20 = 45 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + 20 = \frac{45\sqrt{3}}{2} + 20 \approx 55$$

Odp. 55°C.

Zadanie 3.22.

$$m_0 = m(0) = a \cdot 2^0 + b = a + b$$

$$\frac{1}{9} m_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(a \cdot \frac{2^{-0,05t}}{\frac{1}{0}} + b \right) = b$$

Zatem

$$\begin{cases} a = \frac{8}{9} m_0 \\ b = \frac{1}{9} m_0 \end{cases}$$

$$m(t) = \frac{8}{9} m_0 \cdot 2^{-0,05t} + \frac{1}{9} m_0 = \frac{1}{9} m_0 \left(2^3 \cdot 2^{-\frac{1}{20}t} + 1 \right) = \frac{1}{9} m_0 \left(2^{\frac{1}{20}t+3} + 1 \right)$$

$$m(t) = (100\% - 87,5\%)m_0 = \frac{1}{8}m_0$$

Stąd

$$\frac{1}{9}m_0 \left(2^{-\frac{1}{20}t+3} + 1 \right) = \frac{1}{8}m_0 \Leftrightarrow 2^{-\frac{1}{20}t+3} + 1 = \frac{9}{8} \Leftrightarrow 2^{-\frac{1}{20}t+3} = 2^{-3} \Leftrightarrow -\frac{1}{20}t + 3 = -3$$

$$t = 120$$

Odp. Po 120 sekundach.

4. Trygonometria

Zadanie 4.1.

$$f(x) = \sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) =$$

$$2 \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{6} - 2x}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{6} - 2x}{2}\right) =$$

$$2 \cos \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$$

Zbiorem wartości funkcji $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ jest przedział $(-1, 1)$, zatem najmniejszą wartość

cią funkcji f jest $-\sqrt{3}$, natomiast największą $\sqrt{3}$.

Odp. Najmniejsza wartość $-\sqrt{3}$, największa wartość $\sqrt{3}$.

Zadanie 4.2.

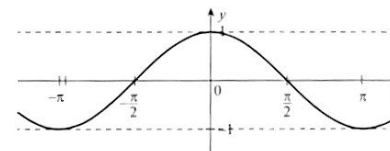
Równanie $(\cos x - 1) \cdot (\cos x + p + 1) = 0$ jest równoważne alternatywie równań $\cos x = 1$ lub $\cos x = -p - 1$.

Rozwiązaniem pierwszego równania są liczby $2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Dla $p = -1$ rozwiązaniami drugiego równania, $\cos x = 0$, są liczby $\frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

a) Do przedziału $(0, 5)$ należą trzy rozwiązania: $0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

W przedziale $(-\pi, \pi)$ równanie $\cos x = 1$ ma jedno rozwiązanie. Stąd równanie $\cos x = -p - 1$ musi mieć dwa rozwiązania. Tak jest wtedy, gdy $-1 \leq -p - 1 < 1$, czyli $-2 < p \leq 0$.



b) Równanie ma trzy rozwiązania dla $p \in (-2, 0)$.

Zadanie 4.3.

Dziedzina: $x \neq k\pi$.

Następujące równania są równoważne

$$\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$$

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \sin x = 0$$

$$1 + \cos x - \sin^2 x = 0$$

$$\cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ lub } \cos x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } x = \pi + 2k\pi$$

Liczby $\pi + 2k\pi$ nie należą do dziedziny.

Odp. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Zadanie 4.4.

Następujące równania są równoważne

$$4 \cos^2 x = 4 \sin x + 1$$

$$4(1 - \sin^2 x) = 4 \sin x + 1$$

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$$

$$(2 \sin x + 1)^2 = 4$$

$$2 \sin x + 1 = 2 \text{ lub } 2 \sin x + 1 = -2$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ lub } \sin x = -\frac{3}{2}$$

Rozwiązaniem pierwszego równania w przedziale $(0, 2\pi)$ są liczby $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, natomiast drugie równanie nie ma rozwiązań.

$$\text{Odp. } x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Zadanie 4.5.

Niech α, β ($\alpha \leq \beta$) oznaczać miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

Wtedy $\sin \alpha \leq \sin \beta < 1$ i $\sin^2 \beta = \sin \alpha$. Jednocześnie $\sin \beta = \cos \alpha$.

Zatem

$$\cos^2 \alpha = \sin \alpha$$

$$1 - \sin^2 \alpha = \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\left(\sin \alpha + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ lub } \sin \alpha + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ lub } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

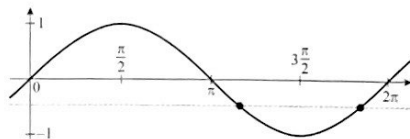
Uwzględniając, że $\sin \alpha > 0$ otrzymujemy odpowiedź.

$$\text{Odp. } \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Zadanie 4.6.

$$2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0.$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9, \quad \sin x = \frac{-5-3}{4} = -2 \text{ (sprzeczność)}, \quad \sin x = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}.$$



$$\text{Odp. } x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ lub } x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

Zadanie 4.7.

$$2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 7\cos x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0.$$

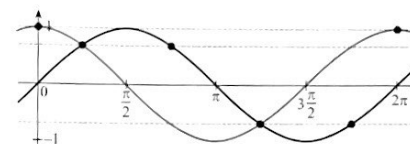
$$\Delta = 49 - 24 = 25, \quad \cos x = \frac{-7-5}{4} = -3 \text{ (sprzeczność)}, \quad \cos x = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Odp. } x = \frac{2\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{4\pi}{3}.$$

Zadanie 4.8.

$$2\sin^2 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x = 1 - \cos x \Leftrightarrow 2\sin^2 x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\sin^2 x - 1)(1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \cos x = 1.$$

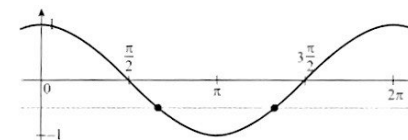


$$\text{Odp. } x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{3\pi}{4}, x_4 = \frac{5\pi}{4}, x_5 = \frac{7\pi}{4}, x_6 = 2\pi.$$

Zadanie 4.9.

$$6\sin^2 x + 7\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 6(1 - \cos^2 x) + 7\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow -6\cos^2 x + 7\cos x + 5 = 0.$$

$$\Delta = 49 + 120 = 169, \quad \cos x = \frac{-7-13}{-12} = \frac{20}{12} \text{ (sprzeczność)}, \quad \cos x = \frac{-7+13}{-12} = -\frac{1}{2}.$$



$$\text{Odp. } x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ lub } x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Zadanie 4.10.

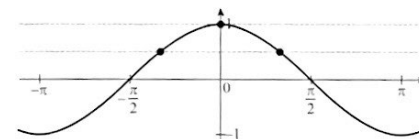
$$\cos 2x + 2 = 3\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2 - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0.$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1, \quad \cos x = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \text{ lub } \cos x = \frac{3+1}{4} = 1.$$

$$\text{Odp. } x_1 = k \cdot 2\pi, x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \text{ dowolna liczba}$$

całkowita.

**Zadanie 4.11.**

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow 2\cos \alpha \sin \alpha + 1 = \frac{16}{9} \Rightarrow 2\cos \alpha \sin \alpha = \frac{7}{9}.$$

$$|\cos \alpha - \sin \alpha| = \sqrt{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2} = \sqrt{1 - 2\cos \alpha \sin \alpha} = \sqrt{1 - \frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Odp. } \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

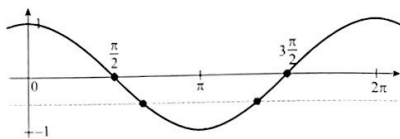
Zadanie 4.12.

$$\cos 2x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ lub } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Odp. } x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$$x_3 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}, x_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

**Zadanie 4.13.**

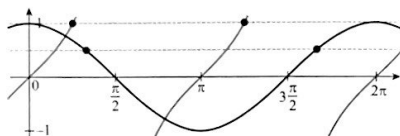
$$2\lg x \cdot \cos x + 1 = 2\cos x + \lg x \Leftrightarrow 2\lg x \cdot \cos x - \lg x - 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x(2\cos x - 1) - (2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\lg x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ lub } \lg x = 1.$$

$$\text{Odp. } x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3},$$

$$x_3 = \frac{\pi}{4}, x_4 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

**Zadanie 4.14.**

$$\frac{1 + \cos^2 2\alpha}{2} = \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2}{2} = \frac{2\sin^4 \alpha + 2\cos^4 \alpha}{2} = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha.$$

Zadanie 4.15.

$$\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin t = -\frac{1}{2},$$

$$\text{gdzie } t = x - \frac{\pi}{3}.$$

Zauważmy, że

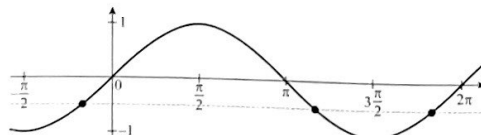
$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{3}.$$

Zatem

$$t_1 = -\frac{\pi}{6} \text{ lub } t_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ lub } t_3 = 2\pi - \frac{\pi}{6} \notin \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right).$$

$$\text{Odp. } x_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6},$$

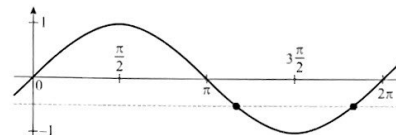
$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}.$$

**Zadanie 4.16.**

$$-2\sin 3x \geq 1 \Leftrightarrow \sin 3x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin t \leq -\frac{1}{2}, \text{ gdzie } t = 3x.$$

$$x \in (0, 2\pi) \Leftrightarrow 3x \in (0, 6\pi) \Leftrightarrow t \in (0, 6\pi).$$

Zatem



$$t \in \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7\pi}{6} + 2\pi, \frac{11\pi}{6} + 2\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{7\pi}{6} + 4\pi, \frac{11\pi}{6} + 4\pi \right\rangle = \left\langle \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{31\pi}{6}, \frac{35\pi}{6} \right\rangle.$$

$$\text{Odp. } x \in \left\langle \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18} \right\rangle \cup \left\langle \frac{19\pi}{18}, \frac{23\pi}{18} \right\rangle \cup \left\langle \frac{31\pi}{18}, \frac{35\pi}{18} \right\rangle.$$

Zadanie 4.17.

Następujące równania są równoważne

$$\sin 5x - \sin x = 0$$

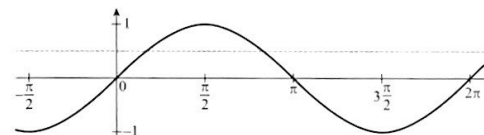
$$2\cos 3x \cdot \sin 2x = 0$$

$$\cos 3x = 0 \text{ lub } \sin 2x = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } 2x = k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{Odp. } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{k\pi}{2}, \text{ gdzie } k \text{ jest dowolną liczbą całkowitą.}$$

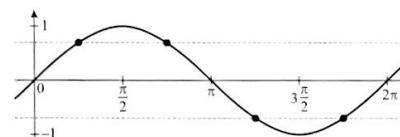
**Zadanie 4.18.**

$$\sin^2 2x - 4\sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x \cos x)^2 - 4\sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x(\cos^2 x - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow -4\sin^4 x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Odp. } x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \frac{5\pi}{4}, x_4 = \frac{7\pi}{4}.$$

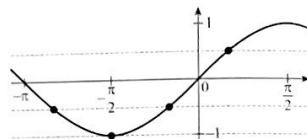
**Zadanie 4.19.**

$$(4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x \Leftrightarrow (4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x = 1 - 4\sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4\sin^2 x - 1) \cdot \sin x + 4\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow (4\sin^2 x - 1) \cdot (\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2} \text{ lub } \sin x = -1.$$

$$\text{Odp. } x_1 = -\frac{\pi}{6}, x_2 = -\frac{5\pi}{6}, x_3 = -\frac{\pi}{2}.$$

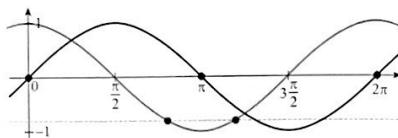
**Zadanie 4.20.**

$$\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

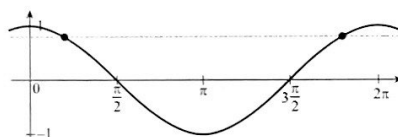
$$\sin x = 0 \text{ lub } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Odp. } x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6},$$

$$x_3 = 0, x_4 = \pi, x_5 = 2\pi.$$

**Zadanie 4.21.**

$$\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$$



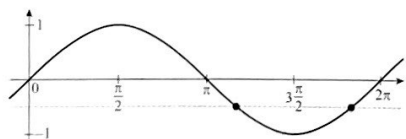
$$\text{Odp. } x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right).$$

Zadanie 4.22.

Ponieważ $2 \sin x \leq 2$, więc $2 \sin x - 3 \leq -1$.

Stąd

$$(2 \sin x - 3)(2 \sin x + 1) > 0 \Leftrightarrow 2 \sin x + 1 < 0 \Leftrightarrow \sin x < -\frac{1}{2}.$$



$$\text{Odp. } x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right).$$

Zadanie 4.23.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

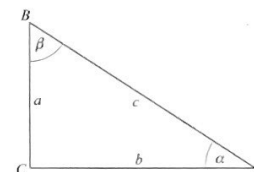
$$\frac{b-a}{c} = \frac{1}{2} \quad b = \frac{c+2a}{2}$$

$$a^2 + \left(\frac{c+2a}{2}\right)^2 = c^2 \quad 4a^2 + c^2 + 4ac + 4a^2 = 4c^2$$

$$8a^2 + 4ac - 3c^2 = 0 \quad \Delta = 16c^2 + 96c^2 = 112c^2 = (4\sqrt{7}c)^2$$

$$a = \frac{-4c + 4\sqrt{7}c}{16} = \frac{-c + \sqrt{7}c}{4} \quad b = \frac{c+2a}{2} = \frac{c + \frac{-c + \sqrt{7}c}{2}}{2} = \frac{c + \sqrt{7}c}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{1 + \sqrt{7}}{4} \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4}.$$

**II sposób**

$$\frac{b-a}{c} = \frac{1}{2} \quad \frac{b}{c} - \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \sin \alpha = \cos \alpha - \frac{1}{2}$$

$$(\cos \alpha)^2 + \left(\cos \alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \quad 2 \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \frac{3}{4} = 0 \quad \Delta = 1 + 6 = 7.$$

$$\text{Odp. } \cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}, \cos \beta = \sin \alpha = \cos \alpha - \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{7}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4}.$$

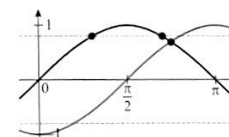
Zadanie 4.24.

$$\sin^3 x - 3 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \cos^3 x + \sin^2 x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \cos^2 x (\sin x + \cos x) + \sin^2 x (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - 3 \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(4 \sin^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \text{ lub } \sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ lub } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Odp. } x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}, x_3 = \frac{3\pi}{4}.$$

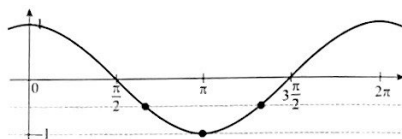


Zadanie 4.25.

$$\cos 2x + 3\cos x = -2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \text{ lub } \cos x = -1.$$

$$\text{Odp. } x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

**Zadanie 4.26.**

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Stąd

$$3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2}, \text{ gdzie } t = x - \frac{\pi}{4}.$$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{7\pi}{4}.$$

$$t_1 = \frac{\pi}{6} \text{ lub } t_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Odp. } x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12} \text{ lub } x_2 = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{12}.$$

II sposób

$$3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

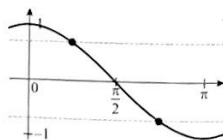
Dalej tak jak poprzednio.

Zadanie 4.27.

$$2\cos^4 x + 5\sin^2 x = 3 \Leftrightarrow 2\cos^4 x - 5\cos^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1)(\cos^2 x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \text{ lub } \cos^2 x = 2 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

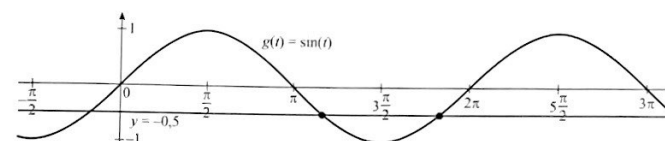
$$\text{Odp. } x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ lub } x_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

**Zadanie 4.28.**

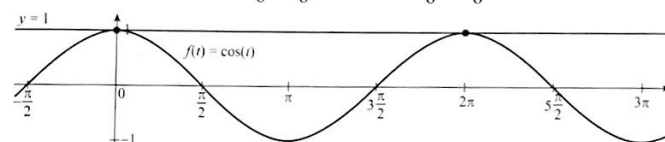
Niech $t = 3x$.

Wtedy $\sin 2t + \cos t = 2\sin t + 1$, $2\sin t \cos t + \cos t - 2\sin t - 1 = 0$, $(2\sin t + 1)(\cos t - 1) = 0$.

$\sin t = -\frac{1}{2}$ lub $\cos t = 1$, gdzie $t \in (0, 3\pi)$.



$$t = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ lub } t = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$



$$t = 0 \text{ lub } t = 2\pi$$

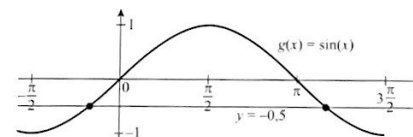
$$\text{Odp. } x \in \left\{ 0, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

Zadanie 4.29.

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25, \sin x = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \text{ lub } \sin x = \frac{3+5}{4} = 2.$$

$$\text{Odp. } x \in \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}.$$

**Zadanie 4.30.**

Wykorzystując znane wzory trygonometryczne otrzymujemy:

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) = \left(\sin\frac{\pi}{12}\cos\alpha - \sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{12}\sin\alpha\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\cos^2\alpha + \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\frac{\pi}{12} =$$

$$= \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\alpha\cos\alpha < \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Zadanie 4.31.

Następujące równania są równoważne:

$$4\sin x \cdot \cos^2 x - 1 = 2\sin 2x - \cos x$$

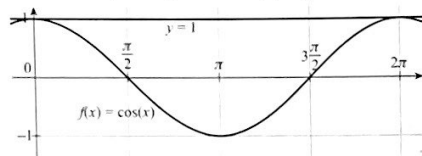
$$2\sin 2x \cdot \cos x - 1 = 2\sin 2x - \cos x$$

$$2\sin 2x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$$

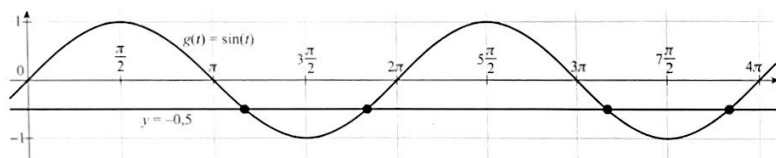
$$(2\sin 2x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \text{ lub } \cos x = 1.$$

Równanie $\cos x = 1$ nie ma rozwiązań w przedziale $(0, 2\pi)$



$$\sin t = -\frac{1}{2}, t \in (0, 4\pi).$$



$$t = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ lub } t = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \text{ lub } t = 2\pi + \frac{7\pi}{6} = \frac{19\pi}{6} \text{ lub } t = 2\pi + \frac{11\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}.$$

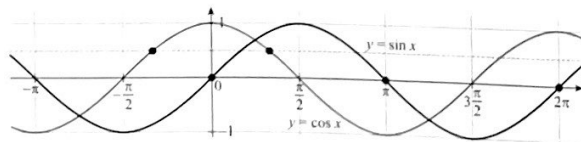
$$\text{Odp. } x \in \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}.$$

Zadanie 4.32.

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{x - \frac{\pi}{3} + x + \frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{x - \frac{\pi}{3} - x - \frac{\pi}{3}}{2}\right) = 2\sin x \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin x.$$

$$(\cos x) \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{2} \sin x \Leftrightarrow \cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ lub } \cos x = \frac{1}{2}.$$



$$\text{Odp. } x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Uwaga. Równanie $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin x$ można rozwiązać inaczej.

$$\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin x \Leftrightarrow 2\cos x \sin x = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\cos \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{3x}{2} = 0 \text{ lub } \sin \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } \frac{x}{2} = k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ lub } x = 2k\pi.$$

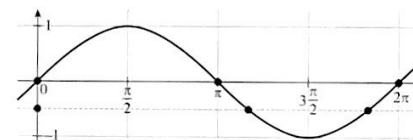
Zadanie 4.33.

$$\cos 2x = \sin x + 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x =$$

$$\sin x + 1 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 1) =$$

$$0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ lub } \sin x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Odp. } x \in \left\{ 0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi \right\}.$$

**Zadanie 4.34.**

Następujące równania są równoważne

$$4\sin 7x \cos 2x = 2\sin 9x - 1,$$

$$2(\sin 9x + \sin 5x) = 2\sin 9x - 1,$$

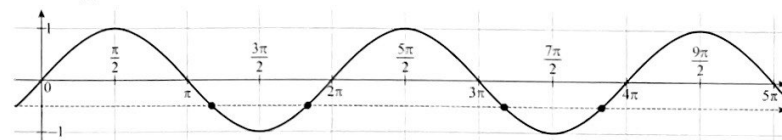
$$2\sin 5x = -1,$$

$$\sin 5x = -\frac{1}{2}.$$

Niech $t = 5x$.

Wtedy

$$\sin t = -\frac{1}{2}, t \in (0, 5\pi).$$



$$t \in \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6} \right\}$$

$$\text{Odp. } x \in \left\{ \frac{7\pi}{30}, \frac{11\pi}{30}, \frac{19\pi}{30}, \frac{23\pi}{30} \right\}.$$

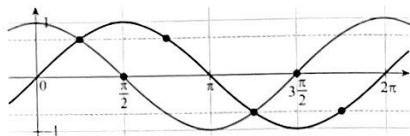
Zadanie 4.35.

Następujące równania są równoważne

$$4\sin^2 x \cos^2 x = 2\cos^2 x,$$

$$2\cos^2 x (2\sin^2 x - 1) = 0,$$

$$\cos x = 0 \text{ lub } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



$$\text{Odp. } x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

Zadanie 4.36.

$$3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3 \Leftrightarrow$$

$$3(1 - 2\sin^2 x) + 10(1 - \sin^2 x) - 24\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-16\sin^2 x - 24\sin x + 16 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ lub } \sin x = -2$$

Drugie równanie nie ma rozwiązań, natomiast rozwiązaniem pierwszego w przedziale $(0, 2\pi)$

są liczby $\frac{\pi}{6}$ oraz $\frac{5\pi}{6}$.

$$\text{Odp. } x \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Zadanie 4.37.

Następujące równania są równoważne

$$4\sin^3 x + \sin 2x = 2\sin^2 x \cdot (2\cos x + 1)$$

$$4\sin^3 x + 2\sin x \cos x - 4\sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x = 0$$

$$\sin x(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x \cos x - \sin x) = 0$$

$$\sin x(\cos x - \sin x)(1 - 2\sin x) = 0$$

$$\text{Zatem } \sin x = 0 \text{ lub } \cos x = \sin x \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązania równań są kolejno liczby: $k\pi$, $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$$\text{Odp. } x \in \left\{ k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}, \text{ gdzie } k \text{ jest dowolną liczbą całkowitą.}$$

Zadanie 4.38.

Następujące równania są równoważne

$$\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$2 \cdot \sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(2x + \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem

$$2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby: $\frac{\pi}{8} + k\pi$, $-\frac{\pi}{8} + k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Zadanie 4.39.

Wykorzystując wzór $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ otrzymujemy równanie równoważne

$$(\cos x - \sin x) \left(\cos x + \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\text{Stąd } \cos x = \sin x \text{ lub } \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rozwiązaniem pierwszego równania są liczby postaci $\frac{\pi}{4} + k\pi$, z których tylko $\frac{\pi}{4}$ należy do przedziału $(0, \pi)$

Drugie równanie przekształćmy równoważnie

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}$$

Zatem

$$\frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } \frac{\pi}{4} + x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$$

Tylko liczba $\frac{7\pi}{12}$ należy do przedziału $(0, \pi)$

$$\text{Odp. } x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12} \right\}.$$

Zadanie 4.40.

Wykorzystując wzór $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ otrzymujemy równania równoważne

$$\cos x (2 \cos x - 1) = \sin x (2 \cos x - 1)$$

$$(2 \cos x - 1)(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\text{Stąd } \cos x = \sin x \text{ lub } \cos x = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązaniem pierwszego równania są liczby postaci $\frac{\pi}{4} + k\pi$, z których tylko $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{5\pi}{4}$ należą do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązaniem drugiego równania są liczby postaci $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, z których tylko

$\frac{\pi}{3}$ i $\frac{5\pi}{3}$ należą do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\text{Odp. } x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

Zadanie 4.41.

Następujące równania są równoważne

$$\sin(3x) = 2 \sin x$$

$$\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x - 2 \sin x = 0$$

$$2 \sin x \cos x \cos x + \sin x \cos 2x - 2 \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \cos^2 x - 2 + \cos 2x) = 0$$

$$\sin x \cdot (2 \cos 2x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ lub } \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$x = k\pi \text{ lub } 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Odp. Rozwiązania równania należące do przedziału $[0, \pi]$: $0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

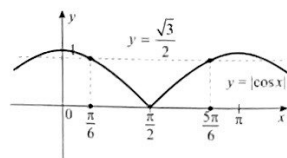
Zadanie 4.42.

Następujące nierówności są równoważne

$$(2 - \cos x)^2 \leq 4 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \cos^2 \frac{x}{2} + 4,75$$

$$4 - 4 \cos x + \cos^2 x \leq -4 \cos x + 4,75$$

$$\cos^2 x \leq \frac{3}{4}$$



$$|\cos x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Odp. } x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right].$$

Zadanie 4.43.

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Następujące równania są równoważne

$$6 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x + 3 \tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$6 \sin x \cos x + 2\sqrt{3} \cos^2 x + 3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$3 \sin x (2 \cos x + 1) + \sqrt{3} \cos x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$(2 \cos x + 1)(3 \sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \vee 3 \sin x = -\sqrt{3} \cos x$$

Rozwiązanie pierwszego równania są liczby postaci: $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Drugie równanie jest równoważne z równaniem $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, którego rozwiązaniem są liczby

$$\frac{5\pi}{6} + k\pi.$$

Odp. Rozwiązanie są liczby: $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Zadanie 4.44.

Następujące równania są równoważne

$$4 \sin(4x) \cos(6x) = 2 \sin(10x) + 1$$

$$2(\sin(10x) - \sin(2x)) = 2 \sin(10x) + 1$$

$$\sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

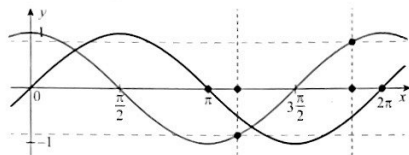
Odp. Rozwiązaniem są liczby: $-\frac{\pi}{12} + k\pi, -\frac{5\pi}{12} + k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Zadanie 4.45.

$$3\sin^2 x - \sin^2(2x) = 3\sin^2 x - 4\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x (3 - 4\cos^2 x) = 0$$

$$\sin^2 x = 0 \vee \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = 0 \vee \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$x = \pi \vee x = 2\pi \vee x = 2\pi - \frac{\pi}{6} \vee x = \pi + \frac{\pi}{6}$$

Odp. Rozwiązaniem są liczby: π , $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$, 2π .

Zadanie 4.46.

Następujące równania są równoważne:

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

$$\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \vee \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi \vee 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}$$

Z pierwszego wzoru do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ należą liczby, gdy $k = 0 \vee k = 1$.

Z drugiego wzoru do przedziału $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ należą liczby, gdy $k = -1 \vee k = 0 \vee k = 1$.

$$\text{Odp. } -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{5\pi}{24}, \frac{\pi}{8}, \frac{11\pi}{24}.$$

Zadanie 4.47.

Następujące równania są równoważne:

$$\sin(4x) - \sin(2x) = 4\cos^2 x - 3$$

$$2\sin(2x)\cos(2x) - \sin(2x) = 2\cos(2x) - 1$$

$$2\sin(2x)\cos(2x) - 2\cos(2x) - \sin(2x) + 1 = 0$$

$$2\cos(2x)(\sin(2x) - 1) - (\sin(2x) - 1) = 0$$

$$(\sin(2x) - 1)(2\cos(2x) - 1) = 0$$

$$\sin(2x) = 1 \vee \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

Rozwiązaniem pierwszego równania są liczby postaci:

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Rozwiązaniem drugiego równania są liczby postaci:

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Uwzględniając przedział $[0, 2\pi]$ otrzymujemy sześć rozwiązań.

$$\text{Odp. } \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

Zadanie 4.48.

Następujące równania są równoważne:

$$\sin(2x) + \cos(2x) = 1 + \sin x - \cos x$$

$$2\sin x \cos x + 1 - 2\sin^2 x = 1 + \sin x - \cos x$$

$$2\sin x(\cos x - \sin x) + \cos x - \sin x = 0$$

$$(\cos x - \sin x)(2\sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = \sin x \vee \sin x = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązaniem pierwszego równania są liczby postaci:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Rozwiązaniem drugiego równania są liczby postaci:

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Uwzględniając przedział $(0, 2\pi)$ otrzymujemy cztery rozwiązania.

$$\text{Odp. } \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

Zadanie 4.49.

Następujące równania są równoważne:

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

$$2\sin(5x)\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$

$$\sin(5x)(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin(5x) = 0 \vee \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rozwiązaniem pierwszego równania są liczby postaci:

$$5x = k\pi$$

$$x = \frac{1}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Rozwiązaniem drugiego równania są liczby postaci:

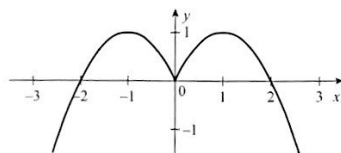
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

5. Wartość bezwzględna**Zadanie 5.1.**

Ponieważ $f(-x) = f(x)$, więc funkcja jest parzysta, czyli jej wykres jest symetryczny względem osi Oy .

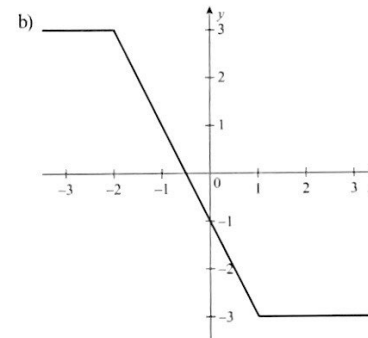
Dla $x \geq 0$ otrzymujemy $f(x) = 2x - x^2$.

Funkcja przyjmuje maksimum lokalne dla dwóch argumentów -1 oraz 1 , natomiast minimum lokalne przyjmuje dla argumentu 0 .

**Zadanie 5.2.**

Dla $x \in (-\infty, -2)$	Dla $x \in (-2, 1)$	Dla $x \in (1, +\infty)$
$f(x) = -x + 1 + x + 2$	$f(x) = -x + 1 - x - 2$	$f(x) = x - 1 - x - 2$
$f(x) = 3$	$f(x) = -2x - 1$	$f(x) = -3$

a) Zbiór wartości: $\{3\}$.



c) Miejsce zerowe: $-\frac{1}{2}$.

d) Równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań dla $m \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

Zadanie 5.3.

Po przekształceniu otrzymujemy nierówność $4|x - 2| - |x| < 0$.

Dla $x \in (-\infty, 0)$	Dla $x \in (0, 2)$	Dla $x \in (2, +\infty)$
$-4x + 8 + x < 0$	$-4x + 8 - x < 0$	$4x - 8 - x < 0$
$x > \frac{8}{3}$	$x > \frac{8}{5}$	$x < \frac{8}{3}$
Nie ma rozwiązań	$x \in \left(\frac{8}{5}, 2\right)$	$x \in \left(2, \frac{8}{3}\right)$

Odp. $x \in \left(\frac{8}{5}, \frac{8}{3}\right)$.

Zadanie 5.4.

Po przekształceniu otrzymujemy nierówność $4|x + 3| - |x + 5| < 0$.

Dla $x \in (-\infty, -5)$	Dla $x \in (-5, -3)$	Dla $x \in (-3, +\infty)$
$-4x - 12 + x + 5 < 0$	$-4x - 12 - x - 5 < 0$	$4x + 12 - x - 5 < 0$
$x > \frac{7}{3}$	$x > -\frac{17}{5}$	$x < -\frac{7}{3}$
Nie ma rozwiązań	$x \in \left(-\frac{17}{5}, -3\right)$	$x \in \left(-3, -\frac{7}{3}\right)$

Odp. $x \in \left(-\frac{17}{5}, -\frac{7}{3}\right)$.

Zadanie 5.5.

Dla $x \in (-\infty, -2)$	Dla $x \in (-2, 1)$	Dla $x \in (1, +\infty)$
$-2x - 4 - x + 1 \leq 6$	$2x + 4 - x + 1 \leq 6$	$2x + 4 + x - 1 \leq 6$
$x \geq -3$	$x \leq 1$	$x \leq 1$
$x \in (-3, -2)$	$x \in (-2, 1)$	$x = 1$

Odp. $x \in (-3, 1)$.

Zadanie 5.6.

Dla $x \in (-\infty, -1)$	Dla $x \in (-1, 2)$	Dla $x \in (2, +\infty)$
$-2x - 2 - x + 2 > 5$	$2x + 2 - x + 2 > 5$	$2x + 2 + x - 2 > 5$
$x < -\frac{5}{3}$	$x > 1$	$x > \frac{5}{3}$
$x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$	$x \in (1, 2)$	$x \in (2, +\infty)$

Odp. $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, +\infty)$.

Zadanie 5.7.

Dla $x \in (-\infty, 2)$	Dla $x \in (2, 5)$	Dla $x \in (5, +\infty)$
$-2x + 4 - x + 5 \geq 12$	$2x - 4 - x + 5 \geq 12$	$2x - 4 + x - 5 \geq 12$
$x \leq -1$	$x \geq 11$	$x \geq 7$
$x \in (-\infty, -1)$	$x \in \emptyset$	$x \in (7, +\infty)$

Odp. $x \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$.

Zadanie 5.8.

Dla $x \in (-\infty, -1)$	Dla $x \in (-1, 2)$	Dla $x \in (2, +\infty)$
$-x + 2 - x - 1 \geq 3x - 3$	$-x + 2 + x + 1 \geq 3x - 3$	$x - 2 + x + 1 \geq 3x - 3$
$x \leq 0,8$	$x \leq 2$	$x \leq 2$
$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (-1, 2)$	$x = 2$

Odp. $x \in (-\infty, 2)$.

Zadanie 5.9.

Dla $x \in (-\infty, -4)$	Dla $x \in \left(-4, \frac{5}{2}\right)$	Dla $x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
$-2x + 5 + x + 4 \leq 2 - 2x$	$-2x + 5 - x - 4 \leq 2 - 2x$	$2x - 5 - x - 4 \leq 2 - 2x$
$x \leq -7$	$x \geq -1$	$x \leq \frac{11}{3}$
$x \in (-\infty, -7)$	$x \in \left(-1, \frac{5}{2}\right)$	$x \in \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{3}\right)$

Odp. $x \in (-\infty; -7) \cup \left[-1; \frac{11}{3}\right)$.

Zadanie 5.10.

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} \geq 11 - \sqrt{x^2 - 6x + 9} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2} \geq 11 - \sqrt{(x-3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x+2| \geq 11 - |x-3| \Leftrightarrow |x+2| + |x-3| \geq 11.$$

Dla $x \in (-\infty, -2)$	Dla $x \in (-2, 3)$	Dla $x \in (3, +\infty)$
$-x - 2 - x + 3 \geq 11$	$x + 2 - x + 3 \geq 11$	$x + 2 + x - 3 \geq 11$
$x \leq -5$	$5 \geq 11$	$x \geq 6$
$x \in (-\infty, -5)$	$x \in \emptyset$	$x \in (6, +\infty)$

Odp. $(-\infty, -5) \cup (6, +\infty)$.

Zadanie 5.11.

Dla $x \in (-\infty, -6)$	Dla $x \in (-6, 2)$	Dla $x \in (2, +\infty)$
$-x - 6 + 2x - 4 \leq 2x - 3$	$x + 6 + 2x - 4 \leq 2x - 3$	$x + 6 - 2x + 4 \leq 2x - 3$
$x \geq -7$	$x \leq -5$	$x \geq \frac{13}{3}$
$x \in (-7, -6)$	$x \in (-6, -5)$	$x \in \left(\frac{13}{3}, +\infty\right)$

Odp. $x \in x \in (-7, -5) \cup \left[\frac{13}{3}, +\infty\right)$.

Zadanie 5.12.

Dla $x \in (-\infty, -7)$	Dla $x \in (-7, 3)$	Dla $x \in (3, +\infty)$
$-2x + 6 - x - 7 \geq 17$	$-2x + 6 + x + 7 \geq 17$	$2x - 6 + x + 7 \geq 17$
$x \leq -6$	$x \leq -4$	$x \geq \frac{16}{3}$
$x \in (-\infty, -7)$	$x \in (-7, -4)$	$x \in \left(\frac{16}{3}, +\infty\right)$

Odp. $x \in (-\infty, -4) \cup \left(\frac{16}{3}, +\infty\right)$.

Zadanie 5.13.

$$f(x) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}, \quad f\left(\frac{1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{\frac{1}{x+1}} = 1 - 2(x+1) = -2x - 1.$$

$$||-2x-1|-3| \leq 4 \Leftrightarrow ||2x+1|-3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq |2x+1|-3 \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq |2x+1| \leq 7.$$

Stąd

$$|2x+1| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq 2x+1 \leq 7 \Leftrightarrow -8 \leq 2x \leq 6 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 3.$$

$$\text{Odp. } x \in (-4, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 3).$$

Zadanie 5.14.

$$|x-2||x-1| \geq |x-1| \Leftrightarrow |x-1|(|x-2|-1) \geq 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ lub } |x-2| \geq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x=1 \text{ lub } x-2 \leq -1 \text{ lub } x-2 \geq 1 \Leftrightarrow x=1 \text{ lub } x \leq 1 \text{ lub } x \geq 3.$$

$$\text{Odp. } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty).$$

Zadanie 5.15.

Dla $x \in (-\infty, -5)$	Dla $x \in (-5, 6)$	Dla $x \in (6, +\infty)$
$-x - 5 - x + 6 \leq 9 - x$	$x + 5 - x + 6 \leq 9 - x$	$x + 5 + x - 6 \leq 9 - x$
$x \geq -8$	$x \leq -2$	$x \leq \frac{10}{3}$
$x \in (-8, -5)$	$x \in (-5, -2)$	$x = \emptyset$

$$\text{Odp. } x \in (-8, -2).$$

Zadanie 5.16.

Dla $x \in (-\infty, 1)$	Dla $x \in (1, 5)$	Dla $x \in (5, +\infty)$
$-x + 1 - x + 5 \leq 10 - 2x$	$x - 1 - x + 5 \leq 10 - 2x$	$x - 1 + x - 5 \leq 10 - 2x$
$6 \leq 10$	$x \leq 3$	$x \leq 4$
$x \in (-\infty, 1)$	$x \in (1, 3)$	$x \in \emptyset$

$$\text{Odp. } x \in (-\infty, 3).$$

Zadanie 5.17.

Dla $x \in (-\infty, -1)$	Dla $x \in (-1, 2)$	Dla $x \in (2, +\infty)$
$-2x - 2 + x - 2 = 9$	$2x + 2 + x - 2 = 9$	$2x + 2 - x + 2 = 9$
$x = -13 \in (-\infty, -1)$	$x = 3 \notin (-1, 2)$	$x = 5 \in (2, +\infty)$

$$\text{Odp. } x = -13 \text{ lub } x = 5.$$

Zadanie 5.18.

Dla $x \in (-\infty, -2)$	Dla $x \in (-2, 3)$	Dla $x \in (3, +\infty)$
$-3x - 6 = -x + 3 + 11$	$3x + 6 = -x + 3 + 11$	$3x + 6 = x - 3 + 11$
$-2x = 20$	$4x = 8$	$2x = 2$
$x = -10$	$x = 2$	$x \in \emptyset$

$$\text{Odp. } x \in \{-10, 2\}.$$

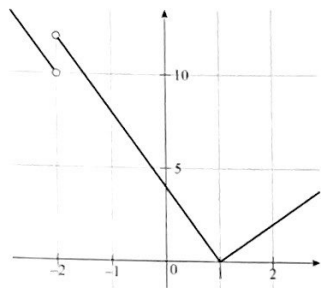
Zadanie 5.19.

Dla $x \in (-\infty, -5)$	Dla $x \in \left(-5, \frac{1}{2}\right)$	Dla $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$-2x + 1 + x \leq 5 - x - 5$	$-2x + 1 + x \leq 5 + x + 5$	$2x - 1 + x \leq 5 + x + 5$
$1 \leq 0$	$-2x \leq 9$	$2x \leq 11$
$x \in \emptyset$	$x \in \left[-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right]$

$$\text{Odp. } x \in \left[-\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right].$$

Zadanie 5.20.

Dla $x \in (-\infty, -2)$	Dla $x \in (-2, 1)$	Dla $x \in (1, +\infty)$
$ x+2 = -(x+2)$	$ x+2 = x+2$	$ x+2 = x+2$
$ x-1 = -x+1$	$ x-1 = -x+1$	$ x-1 = x-1$
$f(x) = -1 - x - 3x + 3$	$f(x) = 1 - x - 3x + 3$	$f(x) = 1 - x + 3x - 3$
$f(x) = -4x + 2$	$f(x) = -4x + 4$	$f(x) = 2x - 2$



Odp. $(0, +\infty)$.

Zadanie 5.21.

$$\sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x - 4)^2} = |x - 4|.$$

$$\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 3x < |2x - 4| \Leftrightarrow |x - 4| - 3x - 2|x - 2| < 0.$$

Dla $x \in (-\infty, 2)$	Dla $x \in \langle 2, 4)$	Dla $x \in \langle 4, +\infty)$
$ x - 2 = -x + 2$	$ x - 2 = x - 2$	$ x - 2 = x - 2$
$ x - 4 = -x + 4$	$ x - 4 = -x + 4$	$ x - 4 = x - 4$
$-x + 4 - 3x + 2x - 4 < 0$	$-x + 4 - 3x - 2x + 4 < 0$	$x - 4 - 3x - 2x + 4 < 0$
$-2x < 0$	$-6x < -8$	$-4x < 0$
$x \in (0, 2)$	$x \in \langle 2, 4)$	$x \in \langle 4, +\infty)$

Odp. $x \in (0, +\infty)$.

Zadanie 5.22.

Równanie ma dwa różne rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(a - 1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 > 4 \Leftrightarrow |a - 1| > 2 \Leftrightarrow a - 1 > 2 \text{ lub } a - 1 < -2 \Leftrightarrow$$

$$a > 3 \text{ lub } a < -1 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

Rozwiązaniami równania są liczby

$$x - 5 = (a - 1)^2 - 4 \text{ lub } x - 5 = 4 - (a - 1)^2$$

$$x = (a - 1)^2 + 1 \text{ lub } x = 9 - (a - 1)^2$$

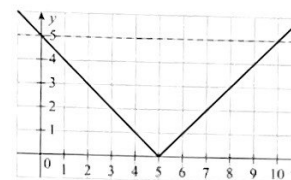
Pierwsze rozwiązanie jest dodatnie. Drugie rozwiązanie jest dodatnie wtedy, gdy

$$(a - 1)^2 < 9 \Leftrightarrow |a - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < a - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < a < 4$$

Uwzględniając, że $a \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ otrzymujemy $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$.

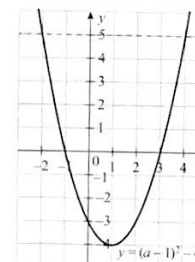
Odp. $a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$

II sposób



Równanie ma $y = |x - 5|$ ma dwa rozwiązania dodatnie wtedy, gdy $y \in (0, 5)$.

$$y = (a - 1)^2 - 4 \in (0, 5) \Leftrightarrow a \in (-2, -1) \cup (3, 4)$$



Zadanie 5.23.

$$\begin{cases} mx + y = m^2 \\ 4x + my = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m^2 - mx \\ 4x + m(m^2 - mx) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = m^2 - mx \\ (4 - m^2)x = 8 - m^3 \end{cases}$$

Układ jest oznaczony dla $m \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Rozwiązaniem są pary liczb:

$$x = \frac{8 - m^3}{4 - m^2} = \frac{(2 - m)(4 + 2m + m^2)}{(2 - m)(2 + m)} = \frac{4 + 2m + m^2}{2 + m}$$

$$y = m^2 - \frac{4m + 2m^2 + m^3}{2 + m} = \frac{2m^2 + m^3 - 4m - 2m^2 - m^3}{2 + m} = \frac{-4m}{2 + m}$$

Zatem

$$|x + y| = \left| \frac{4 - 2m + m^2}{2 + m} \right|$$

$$\begin{cases} \frac{4 - 2m + m^2}{2 + m} < 2 \\ \frac{4 - 2m + m^2}{2 + m} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-4m + m^2}{2 + m} < 0 \\ \frac{8 + m^2}{2 + m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + m^2 < 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (0, 4) \\ m \in (-2, +\infty) \end{cases}$$

Odp. $m \in (0, 2) \cup (2, 4)$

Zadanie 5.24.1.

Miejsca zerowe funkcji g : $g(2) = 0$, $g(10) = 0$

Wartości funkcji g dla argumentów 9 oraz 11: $g(9) = 2\frac{1}{4}$, $g(11) = 2\frac{1}{4}$

Odp. $\left[0, 2\frac{1}{4}\right]$.

Zadanie 5.24.2.

Wierzchołek paraboli

$$p = \frac{2+10}{2} = 6, \quad g(6) = 4$$

Ponieważ $g(0) = 5$, więc $m = 0 \vee 4 < |m| < 5$.

Odp. $m \in (-5, -4) \cup \{0\} \cup (4, 5)$.

Zadanie 5.25.

Następujące nierówności są równoważne

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-3)^2} < \frac{25}{3} \Leftrightarrow$$

$$|x+2| + |x-3| < \frac{25}{3}$$

$x \in (-\infty, -2)$	$x \in (-2, 3)$	$x \in (3, +\infty)$
$-x-2-x+3 < \frac{25}{3}$	$x+2-x+3 < \frac{25}{3}$	$x+2+x-3 < \frac{25}{3}$
$-2x < \frac{22}{3}$	$5 < \frac{22}{3}$	$2x < \frac{28}{3}$
$x > -\frac{11}{3}$	Prawda	$x < \frac{14}{3}$
$x \in \left(-\frac{11}{3}, -2\right)$	$x \in (-2, 3)$	$x \in \left(3, \frac{14}{3}\right)$

Odp. $x \in \left(-\frac{11}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

6. Ciągi**Zadanie 6.1.**

$$a_1 = S_1 = 4$$

Dla $n \geq 2$ otrzymujemy

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 3n - ((n-1)^2 + 3(n-1)) = 2n + 2$$

Zauważmy, że z powyższego wzoru dla $n = 1$ otrzymujemy $a_1 = 4$.

Zatem dla $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 1$ mamy

$$a_n = 2n + 2$$

Ponieważ $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + 2 - (2n + 2) = 2$, więc ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 2.

Zadanie 6.2.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{18} \cdot a_{19} = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \dots \cdot a_1 q^{17} \cdot a_1 q^{18} = a_1^{19} q^{1+2+\dots+18} =$$

$$a_1^{19} q^{19 \cdot 9} = (a_1 q^9)^{19} = (a_{10})^{19} = 10^{19}$$

Odp. 10^{19} .

Zadanie 6.3.

$$\text{a) } a_{n+1} - a_n = (n-2)(2-p^2) - (n-3)(2-p^2) = 2-p^2$$

Ciąg arytmetyczny o różnicy $2-p^2$.

$$\text{b) } a_{20} + a_{21} + a_{22} + \dots + a_{40} = \frac{a_{20} + a_{40}}{2} \cdot 21 = \frac{17 \cdot (-2) + 37 \cdot (-2)}{2} \cdot 21 = -1134$$

$$\text{c) } b_n = a_n - pn = (n-3)(2-p^2) - np = (-p^2 - p + 2)n + 3(p^2 - 2)$$

Ciąg jest stały wtedy, gdy $-p^2 - p + 2 = 0$, czyli dla $p = -2$ lub $p = 1$.

Zadanie 6.4.

Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(x_n, 0)$, $(-1, 1)$:

$$y = \frac{1-0}{-1-x_n}(x+1) + 1 = \frac{1}{n}(x+1) + 1 = \frac{1}{n}x + \frac{1}{n} + 1$$

Odp. $y_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Zadanie 6.5.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-n}}{3^{1-n}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Zauważmy, że

$$\log_3 a_n = \log_3 3^{1-n} = 1 - n$$

Zatem

$$\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \dots + \log_3 a_{100} = 0 + 1 + 2 + \dots + 99 = \frac{0+99}{2} \cdot 100 = 4950$$

Odp. Iloraz ciągu jest równy $\frac{1}{3}$. Suma wynosi 4950.

Zadanie 6.6.

Ponieważ b jest drugim wyrazem ciągu arytmetycznego i geometrycznego, więc

$b = a + r = aq$, dla pewnych liczb rzeczywistych r, q .

Stąd $r = aq - a$

Liczba c jest trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego i geometrycznego, więc

$$c = a + 2r = aq^2.$$

Zatem

$$a + 2(aq - a) = aq^2$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$a(q^2 - 2q + 1) = 0$$

Stąd

$$a = 0 \text{ lub } q^2 - 2q + 1 = 0$$

Jeżeli $a = 0$, to $r = 0$, czyli $a = b = c = 0$

W drugim przypadku $q = 1$, czyli $a = b = c$.

Zadanie 6.7.

Skarbnik n dnia dorzucił do skarbca $25 + (n-1)2 = 2n + 23$ monet.

Przez n dni skarbnik dorzucił $25 + 27 + \dots + (2n + 23) = n(n + 24)$ monet.

Król przez n dni wybrał ze skarbca $50n$ monet.

Zatem n dnia w skarbcu było $k + n(n + 24) - 50n = n^2 - 26n + k$ monet.

Zgodnie z założeniem $n^2 - 26n + k \geq 1$, czyli $n^2 - 26n + k - 1 \geq 0$ dla wszystkich n .

Stąd $\Delta = 676 - 4(k - 1) \leq 0$, czyli $k \geq 170$.

Zatem $k = 170$ jest najmniejszą liczbą, dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta. Wtedy w skarbcu n dnia było $n^2 - 26n + 170$ monet.

Najmniejsza ilość monet była dla $n = \frac{26}{2} = 13$, czyli trzynastego dnia.

Zadanie 6.8.

Ponieważ ciąg jest geometryczny, więc $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, czyli $(x+3)^2 = (x-3)(6x+2)$.

Po przekształceniach otrzymujemy równanie $5x^2 - 22x - 15 = 0$, którego rozwiązaniami są

liczby $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{3}{5}$. Zgodnie z założeniem wyrazy ciągu są dodatnie, więc $x = 5$.

Otrzymujemy ciąg $(2, 8, 32, \dots)$ o ilorazie $q = 4$.

$$\frac{S_{19}}{S_{20}} = \frac{a_1(1-q^{19})}{a_1(1-q^{20})} = \frac{1-q^{19}}{1-q^{20}} = \frac{4^{19}-1}{4^{20}-1} < \frac{4^{19}-1}{4^{20}-4} = \frac{4^{19}-1}{4(4^{19}-1)} = \frac{1}{4}$$

Zadanie 6.9.

$$b = \frac{a+c}{2} = 5 \quad \begin{cases} a+c=10 \\ (a+1)(c+19)=81 \end{cases} \quad \begin{cases} a=10-c \\ (11-c)(c+19)=81 \end{cases}$$

$$-c^2 - 8c + 128 = 0 \quad c^2 + 8c - 128 = 0$$

$$\Delta = 64 + 512 = 576 \quad c_1 = \frac{-8-24}{2} = -16 \quad c_2 = \frac{-8+24}{2} = 8.$$

Odp. $(a, b, c) = (26, 5, -16)$ lub $(a, b, c) = (2, 5, 8)$.

Zadanie 6.10.

$$b-4 = \frac{a-5+c-11}{2} = \frac{10-b-16}{2} \quad 2b-8 = -b-6 \quad 3b=2 \quad b = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} a+c=10-\frac{2}{3} = \frac{28}{3} \\ ac = \frac{4}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{28}{3}-c \\ \left(\frac{28}{3}-c\right)c = \frac{4}{9} \end{cases} \quad 9c^2 - 28 \cdot 3c + 4 = 0$$

$$\Delta = 49 \cdot 16 \cdot 9 - 16 \cdot 9 = 16 \cdot 9 \cdot 48 \quad c_1 = \frac{3 \cdot 28 - 16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 9} = \frac{14 - 8\sqrt{3}}{3} \quad c_2 = \frac{14 + 8\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Odp. } (a, b, c) = \left(\frac{14+8\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}, \frac{14-8\sqrt{3}}{3}\right) \text{ lub } (a, b, c) = \left(\frac{14-8\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}, \frac{14+8\sqrt{3}}{3}\right).$$

Zadanie 6.11.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{x_{n+1}}}{3^{x_n}} = 3^{x_{n+1}-x_n} = 27 \quad x_{n+1}-x_n = 3.$$

Ciąg (x_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 3$.

Stąd $x_{10} = x_1 + 9 \cdot 3$.

Zatem

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = \frac{x_1 + x_{10}}{2} \cdot 10 = (2x_1 + 9 \cdot 3) \cdot 5 = 145 \quad 2x_1 + 27 = 29.$$

Odp. $x_1 = 1$.

Zadanie 6.12.

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 4b = 3a + 3 + c - 12 \\ 3a + 3 + 2b = c - 12 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = ac \\ 4b = 3a + c - 9 \\ 3a + 2b + 15 = c \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = ac \\ c = 3a + 2b + 15 \\ 4b = 3a + 3a + 2b + 15 - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ c = 3a + 2b + 15 \\ 2b = 6a + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = ac \\ c = 9a + 21 \\ b = 3a + 3 \end{cases}$$

$$(3a + 3)^2 = a(9a + 21) \quad 9a^2 + 18a + 9 = 9a^2 + 21a \quad 9 = 3a.$$

$$\text{Odp. } (a, b, c) = (3, 12, 48).$$

Zadanie 6.13.

(a, b, c) – ciąg geometryczny.

$(a, b + 8, c)$ – ciąg arytmetyczny.

$(a, b + 8, c + 64)$ – ciąg geometryczny.

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 2b + 16 = a + c \\ (b + 8)^2 = a(c + 64) \end{cases}$$

$$b^2 + 16b + 64 = ac + 64a \quad b^2 + 16b + 64 = b^2 + 64a.$$

$$\text{Zatem } b = 4a - 4 \quad 2(4a - 4) + 16 = a + c \quad c = 7a + 8.$$

$$(4a - 4)^2 = a(7a + 8) \quad 16a^2 - 32a + 16 = 7a^2 + 8a \quad 9a^2 - 40a + 16 = 0$$

$$\Delta = 1600 - 16 \cdot 36 = 32^2 \quad a_1 = \frac{40 - 32}{18} = \frac{4}{9} \quad a_2 = \frac{40 + 32}{18} = 4.$$

$$\text{Odp. } (a, b, c) = (4, 12, 36) \text{ lub } (a, b, c) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right).$$

Zadanie 6.14.

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{-2 - 2 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n < 2012 \quad 3n^2 - 7n - 4024 < 0$$

$$\Delta = 49 + 48288 = 48337 \quad (48337 - \text{liczba pierwsza})$$

$$n_1 = \frac{7 - \sqrt{48337}}{6} \approx \frac{7 - 219,86}{6} \quad n_2 = \frac{7 + \sqrt{48337}}{6} \approx \frac{7 + 219,86}{6} \approx 37,8$$

$$n \in \left(0, \frac{7 + \sqrt{48337}}{6}\right) \cap \mathbb{Z}$$

$$n = 37.$$

Sprawdzenie:

$$a_{37} = -2 + 36 \cdot 3 = 106 \quad \frac{-2 + 106}{2} \cdot 37 = 52 \cdot 37 = 1924 < 2012$$

$$a_{38} = -2 + 37 \cdot 3 = 109 \quad \frac{-2 + 109}{2} \cdot 38 = 107 \cdot 19 = 2033 > 2012$$

$$\text{Odp. } n = 37.$$

Zadanie 6.15.

$$2b = a + c = 33 - b \quad b = 11$$

$$\begin{cases} a + c = 22 \\ (a-1)(c+19) = 256 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 22 - c \\ (21-c)(c+19) = 256 \end{cases}$$

$$-c^2 + 2c + 399 = 256 \quad c^2 - 2c - 143 = 0$$

$$\Delta = 4 + 572 = 576 = 24^2 \quad c_1 = \frac{2 - 24}{2} = -11 \quad c_2 = \frac{2 + 24}{2} = 13.$$

$$\text{Odp. } (a, b, c) = (33, 11, -11) \text{ lub } (a, b, c) = (9, 11, 13)$$

Zadanie 6.16.

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \dots \cdot a_1 q^{n-2} \cdot a_1 q^{n-1}} = \sqrt[n]{a_1^n \cdot q^{1+2+\dots+(n-1)}} =$$

$$= a_1 \sqrt[n]{q^{\frac{n(n-1)}{2}}} = a_1 q^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{a_1^2 q^{n-1}} = \sqrt{a_1 a_n}.$$

Zadanie 6.17.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = 100(a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}).$$

$$a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^4 + \dots + a_1 q^{98} = 100(a_1 q + a_1 q^3 + a_1 q^5 + \dots + a_1 q^{99}).$$

$$a_1(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{98}) = 100a_1 q(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{98}).$$

$$a_1 = 100a_1 q \quad q = 10^{-2}.$$

$$\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_{100} = 100. \quad \log(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{100}) = 100.$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{100} = 10^{100}.$$

$$a_1^{100} q^{1+2+\dots+99} = 10^{100}.$$

$$a_1^{100} q^{50 \cdot 99} = 10^{100}.$$

$$a_1^{100} 10^{-100 \cdot 99} = 10^{100}.$$

$$a_1^{100} = 10^{100 \cdot 100}.$$

$$\text{Odp. } a_1 = 10^{100}.$$

Zadanie 6.18.

(a, aq, aq^2) – ciąg geometryczny $q \neq 1$.

(aq, a, aq^2) – ciąg arytmetyczny.

$(aq - 7, a, aq^2 + 3)$ – ciąg geometryczny.

$$\begin{cases} 2a = aq + aq^2 \\ (aq - 7)(aq^2 + 3) = a^2 \end{cases}$$

$$a(q^2 + q - 2) = 0 \quad a = 0 \text{ lub } q = 1 \text{ lub } q = -2.$$

Dla $a = 0$ sprzeczność. Zatem $q = -2$.

$$(-2a - 7)(4a + 3) = a^2 \quad 9a^2 + 34a + 21 = 0$$

$$\Delta = 1156 - 756 = 400 \quad a_1 = \frac{-34 - 20}{18} = -3 \quad a_2 = \frac{-34 + 20}{18} = -\frac{7}{9}.$$

$$\text{Odp. } (-3, 6, -12) \text{ lub } \left(-\frac{7}{9}, \frac{14}{9}, -\frac{28}{9}\right).$$

Zadanie 6.19.

(a, b, c) – ciąg arytmetyczny.

$(a + 5, b + 3, c + 4)$ – rosnący ciąg geometryczny, w którym trzeci wyraz jest cztery razy większy od pierwszego. Stąd $q = 2$.

$$b + 3 = 2(a + 5) \quad b = 2a + 7 \quad c + 4 = 4(a + 5) \quad c = 4a + 16$$

$$2b = a + c, \quad 2(2a + 7) = a + 4a + 16, \quad a = -2.$$

$$\text{Odp. } (a, b, c) = (-2, 3, 8).$$

Zadanie 6.20.

$$4 = a_4 = a_3 + 3 - 4 \quad a_3 = 5 \quad 5 = a_3 = a_2 + 2 - 4 \quad a_2 = 7$$

$$7 = a_2 = a_1 + 1 - 4 \quad a_1 = 10.$$

$$a_5 = a_4 + 4 - 4 = 4.$$

Odp. $a_1 = 10$. Ciąg ten nie jest malejący, bo $a_5 = a_4$.

Zadanie 6.21.

$$a_2 = 2a_1 + 3 + 2 = 7 \quad a_3 = 2a_2 + 6 + 2 = 22 \quad \frac{a_2 + 3 + a_3 + 2}{2} = \frac{10 + 24}{2} = 17.$$

Odp. 17.

Zadanie 6.22.

$$\begin{cases} 2b = a + c \\ a + b + c = 27 \\ b^2 = (a - 2)(2c + 1) \end{cases} \quad \begin{cases} 2b = a + c \\ 3b = 27 \\ b^2 = (a - 2)(2c + 1) \end{cases} \quad \begin{cases} b = 9 \\ a + c = 18 \\ (18 - c - 2)(2c + 1) = 81 \end{cases}$$

$$(16 - c)(2c + 1) = 81 \quad -2c^2 + 31c - 65 = 0$$

$$\Delta = 961 - 520 = 441 \quad c_1 = \frac{-31 - 21}{-4} = 13 \quad c_2 = \frac{-31 + 21}{-4} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Odp. } (a, b, c) = (5, 9, 13) \text{ lub } (a, b, c) = \left(\frac{31}{2}, 9, \frac{5}{2}\right).$$

Zadanie 6.23.

Ciąg arytmetyczny: $q, q + r, q + 2r, \dots$

Ciąg geometryczny: $r, rq, rq^2, \dots$

$$\begin{cases} \frac{q + q + 7r}{2} \cdot 8 = 124 \\ r + rq = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 2q + 7r = 31 \\ r + rq = 18 \end{cases}$$

$$2qr + 7r^2 = 31r \quad 2(18 - r) + 7r^2 - 31r = 0 \quad 7r^2 - 33r + 36 = 0.$$

$$\Delta = 1089 - 1008 = 81 \quad r_1 = \frac{33 - 9}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \quad \text{lub} \quad r_2 = \frac{33 + 9}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$2q + 7 \cdot \frac{12}{7} = 31 \quad 2q = 19 \quad q = \frac{19}{2}$$

$$2q + 7 \cdot 3 = 31 \quad 2q = 10 \quad q = 5.$$

$$\text{Odp. } a_n = 5 + (n - 1)3 = 3n + 2. \quad b_n = 3 \cdot 5^{n-1}.$$

Zadanie 6.24.

$$\begin{cases} a_1 q^2 + a_1 q^5 = -84 \\ a_1 q^3 + a_1 q^6 = 168 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 q^2 (1 + q^3) = -84 \\ a_1 q^3 (1 + q^3) = 168 \end{cases}$$

Dzieląc stronami otrzymujemy: $q = -2$.

$$\text{Stąd } a_1 \cdot 4(1 - 8) = -84, \quad a_1 = 3.$$

$$\text{Zatem } S_n = \frac{3(1 - (-2)^n)}{3} = 32769, \quad (-2)^n = -32768.$$

$$\text{Odp. } n = 15.$$

Zadanie 6.25.

(a, b, c) – ciąg arytmetyczny.

$(a, b + 1, 2c)$ – ciąg geometryczny.

$$\begin{cases} 2b = a + c \\ 3a + b + 3c = 77 \\ (b + 1)^2 = 2ac \end{cases} \quad \begin{cases} 2b = a + c \\ 7b = 77 \\ (b + 1)^2 = 2ac \end{cases} \quad \begin{cases} b = 11 \\ a + c = 22 \\ 144 = 2ac \end{cases}$$

$$a(22 - a) = 72 \quad a^2 - 22a + 72 = 0 \quad \Delta = 484 - 288 = 196$$

$$a_1 = \frac{22 - 14}{2} = 4 \quad a_2 = \frac{22 + 14}{2} = 18$$

$$\text{Odp. } (a, b, c) = (4, 11, 18) \text{ lub } (a, b, c) = (18, 11, 4).$$

Ciąg geometryczny: $(4, 12, 36)$ lub $(18, 12, 8)$.

Zadanie 6.26.

Ciąg $(a, aq, aq^2 - 4)$ jest ciągiem arytmetycznym.

Zatem

$$2aq = a + aq^2 - 4$$

$$aq^2 - 2aq + a = 4$$

$$a(q - 1)^2 = 4.$$

Stąd $a > 0$, a ponieważ a jest liczbą nieparzystą, więc $a = 1$.

Zatem $q = 3$ lub $q = -1$.

Ponieważ ciąg jest rosnący, więc $q = 3$. Otrzymujemy ciąg $(1, 3, 9)$.

Odp. $aq = 3$.

Zadanie 6.27.

Iloraz ciągu geometrycznego wynosi:

$$q = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{3b}{a}} = \frac{2a}{3b} > 0.$$

Z ciągu arytmetycznego wynika, że $2b = a + c$.

Z ciągu geometrycznego otrzymujemy:

$$\frac{4}{9b^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2a + 2b + c}.$$

Zatem

$$4a(2a + 2b + 2b - a) = 9b^2,$$

$$4a(4b + a) = 9b^2,$$

$$4a^2 + 16ab - 9b^2 = 0,$$

$$\left(\frac{2a}{3b}\right)^2 + \frac{8}{3} \cdot \frac{2a}{3b} - 1 = 0,$$

$$q^2 + \frac{8}{3} \cdot q - 1 = 0.$$

$$\Delta = \frac{64}{9} + 4 = \frac{100}{9}$$

$$q_1 = \frac{-\frac{8}{3} - \frac{10}{3}}{2} < 0, \quad q_2 = \frac{-\frac{8}{3} + \frac{10}{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Odp. } q = \frac{1}{3}.$$

Zadanie 6.28. (a, b, c) – ciąg geometryczny. $(a + 1, b + 5, c)$ – ciąg arytmetyczny.

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 2b + 10 = a + c + 1, \\ a + b + c = 39 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2 = ac \\ 2b + 10 = 39 - b + 1, \\ a + c = 39 - b \end{cases} \quad \begin{cases} 100 = ac \\ b = 10 \\ a + c = 29 \end{cases}.$$

$$a(29 - a) = 100, \quad a^2 - 29a + 100 = 0, \quad \Delta = 841 - 400 = 441$$

$$a_1 = \frac{29 - 21}{2} = 4, \quad a_2 = \frac{29 + 21}{2} = 25.$$

$$c_1 = 29 - 4 = 25, \quad c_2 = 29 - 25 = 4.$$

$$\text{Odp. } (a, b, c) = (25, 10, 4).$$

Zadanie 6.29.

$$\frac{1}{3} = \frac{a_1 + a_3 + a_5}{a_2 + a_4 + a_6} = \frac{a_1(1 + q^2 + q^4)}{a_1 q(1 + q^2 + q^4)} = \frac{1}{q} \Rightarrow q = 3.$$

$$182 = a_1 + a_3 + a_5 = a_1 + 9a_1 + 81a_1 = 91a_1 \Rightarrow a_1 = 2.$$

$$\text{Odp. } (2, 6, 18, 54, 162, 486).$$

Zadanie 6.30.

Skoro a_3, a_2, a_1 są odpowiednio – pierwszym, drugim i czwartym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego, to $a_2 = a_3 + r$ i $a_1 = a_3 + 3r$, gdzie $r > 0$.

$$\text{Zatem } a_3 = a_1 - 3r \text{ i } a_2 = a_1 - 2r.$$

Dalej ciąg (a_1, a_2, a_3) jest ciągiem geometrycznym, więc

$$(a_1 - 2r)^2 = a_1(a_1 - 3r) \Leftrightarrow -4a_1r + 4r^2 = -3a_1r \Leftrightarrow a_1r = 4r^2.$$

Uwzględniając, że $r > 0$ otrzymujemy $a_1 = 4r$.

$$\text{Zatem } a_2 = 2r, \quad a_3 = r.$$

$$\text{Wtedy } 4r + 2r + r = \frac{21}{4}, \text{ czyli } r = \frac{3}{4} \text{ i } a_1 = 3.$$

$$\text{Odp. } a_1 = 3.$$

Zadanie 6.31.

$$a_{n+1} = \frac{a_n - n^2}{3}$$

Zatem

$$a_2 = \frac{a_1 - 1^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2 - 2^2}{3} = \frac{\frac{1}{3} - 4}{3} = -\frac{11}{9}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{11}{9} = \frac{10}{9}$$

$$\text{Odp. } \frac{10}{9}$$

Zadanie 6.32.

Dla pewnej dodatniej liczby rzeczywistej r mamy

$$(a, b, c, d) = (a, a + r, a + 2r, a + 3r)$$

Największym wyrazem tego ciągu jest $a + 3r$.

Zatem

$$(a + 3r)^2 = 2(a^2 + (a + r)^2 + (a + 2r)^2)$$

$$a^2 + 6ar + 9r^2 = 6a^2 + 12ar + 10r^2$$

$$5a^2 + 6ar + r^2 = 0$$

$$9a^2 + 6ar + r^2 = 4a^2$$

$$(3a + r)^2 = (2a)^2$$

$$3a + r = 2a \text{ lub } 3a + r = -2a$$

$$r = -a \text{ lub } r = -5a$$

Ponieważ $r > 0$, więc $a < 0$. W pierwszym przypadku otrzymujemy ciąg $(a, 0, -a, -2a)$,

w drugim przypadku $(a, -4a, -9a, -14a)$.

Ciąg $(a + 100, 0, -a)$ nie jest ciągiem geometrycznym, bo $-a > 0$.

Ciąg $(a + 100, -4a, -9a)$ jest ciągiem geometrycznym, więc

$$(-4a)^2 = (a + 100)(-9a)$$

$$16a^2 = -9a^2 - 900a$$

Uwzględniając, że $a < 0$ otrzymujemy $25a = -900$, czyli $a = -36$.

Ciąg $(64, 144, 324)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $\frac{9}{4}$.

Odp. $(a, b, c, d) = (-36, 144, 324, 504)$.

Zadanie 6.33.

Liczby dodatnie a, b, c spełniają trzy warunki

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ 4b = 2a + c + 1 \\ c - b = 6 \end{cases}$$

Z trzeciego i drugiego równania otrzymujemy

$$c = b + 6$$

$$a = \frac{3b - 7}{2}$$

Podstawiając do pierwszego równania otrzymujemy

$$b^2 = \frac{(3b - 7)(b + 6)}{2} \Leftrightarrow 2b^2 = 3b^2 + 11b - 42 \Leftrightarrow b^2 + 11b - 42 = 0 \Leftrightarrow (b - 3)(b + 14) = 0$$

Uwzględniając, że $b > 0$ otrzymujemy $b = 3$. Wtedy $a = 1$, $c = 9$

Odp. $(a, b, c) = (1, 3, 9)$.

Zadanie 6.34.

Z warunków zadania otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} y^2 = x \cdot z \\ x + y + z = 105 \\ z = x + (y - x) \cdot 5 \end{cases}$$

Ostatnie równanie po uroszczeniu przyjmuje postać $z = 5y - 4x$.

Podstawiając do drugiego równania otrzymujemy

$$x + y + 5y - 4x = 105$$

$$3x = 6y - 105$$

$$x = 2y - 35$$

Wtedy

$$z = 5y - 4(2y - 35) = 140 - 3y$$

Podstawiając do pierwszego równania otrzymujemy

$$y^2 = (2y - 35) \cdot (140 - 3y)$$

$$y^2 = 280y - 6y^2 - 4900 + 105y$$

$$7y^2 - 385y + 4900 = 0$$

$$y^2 - 55y + 700 = 0$$

$$\Delta = 3025 - 2800 = 225$$

$$y_1 = \frac{55 - 15}{2} = 20, y_2 = \frac{55 + 15}{2} = 35$$

$$x_1 = 2 \cdot 20 - 35 = 5, x_2 = 2 \cdot 35 - 35 = 35$$

$$z_1 = 140 - 3 \cdot 20 = 80, z_2 = 140 - 3 \cdot 35 = 35$$

Uwzględniając warunek, że ciąg (x, y, z) jest ciągiem rosnącym, otrzymujemy jedno rozwiązanie.

Odp. $(x, y, z) = (5, 20, 80)$.

7. Granica ciągu, suma szeregu nieskończonego

Zadanie 7.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)}{5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 + 3n - 2}{2} \cdot n}{\frac{5 + 2n + 3}{2} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{2n + 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{8}{n}} = \frac{3}{2}$$

Zadanie 7.2.

Iloraz ciągu geometrycznego $q = \frac{1}{p - 1}$, gdzie $p \neq 1$.

Ciąg jest zbieżny do zera wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{|p - 1|} < 1$.

Stąd $|p - 1| > 1$, czyli $p \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Ciąg jest zbieżny do 2 wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{p - 1} = 1$, czyli $p = 2$.

Odp. a) $p \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, b) $p = 2$.

Zadanie 7.3.

Niech a_n oznacza długość boku n tego trójkąta, natomiast P_n oznacza jego pole.

Wtedy

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, P_n = a_n^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{n+1} = a_{n+1}^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(a_n \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a_n^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} P_n$$

Zatem pola trójkątów tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{3}{4}$, więc suma pól wynosi

$$S = \frac{P_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}} = a^2\sqrt{3}$$

Zadanie 7.4.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5n+11}{10(n+2)} - \frac{5n+6}{10(n+1)} = \frac{-1}{10(n+2)(n+1)}$$

Ponieważ $\frac{-1}{10(n+2)(n+1)} < 0$, więc $a_{n+1} < a_n$, czyli ciąg jest malejący.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{10(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+\frac{6}{n}}{10+\frac{10}{n}} = \frac{1}{2}$$

Ciąg (a_n) jest malejący, więc $a_1 > a_n$, dla $n \geq 2$, czyli $a = a_1 = \frac{11}{20}$.

Jednocześnie każdy wyraz ciągu malejącego jest większy od granicy, zatem $b = \frac{1}{2}$.

Zadanie 7.5.

Iloraz ciągu $q = \log_2(k-2)$, gdzie $k > 2$.

Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera wtedy, gdy $\log_2(k-2) \neq 0$, czyli $k \neq 3$.

Suma istnieje wtedy, gdy $|q| < 1$, czyli $-1 < \log_2(k-2) < 1$, $\log_2 \frac{1}{2} < \log_2(k-2) < \log_2 2$.

Funkcja logarytmiczna o podstawie 2 jest rosnąca, zatem $\frac{1}{2} < k-2 < 2$, czyli $\frac{5}{2} < k < 4$.

Odp. $k \in \left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup (3, 4)$.

Zadanie 7.6.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + n - 2(n-1)^2 - (n-1) = 4n-1, \text{ dla } n \geq 2.$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{100} = \frac{a_2 + a_{100}}{2} \cdot 50 = \frac{7+399}{2} \cdot 50 = 10150$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{3n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{3n^2-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}$$

Zadanie 7.7.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{(n+2)^2}{n+444} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+444) - (n+2)^3}{(n+2)(n+444)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{438n^2 - 12n - 8}{n^2 + 446n + 888} = 438$$

Zadanie 7.8.

$$P_n = \pi \left(\frac{1}{2^n} \right)^2 = \frac{\pi}{2^{2n}} = \frac{\pi}{4^n}.$$

Ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{4}$ i o pierwszym wyrazie $P_1 = \frac{\pi}{4}$.

Ponieważ $-1 < \frac{1}{4} < 1$, więc suma nieskończona istnieje i można ją wyznaczyć ze wzoru

$$S = \frac{P_1}{1-q} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{3}. \quad \text{Odp. } \frac{\pi}{3}.$$

Zadanie 7.9.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11n^3 + 6n + 5}{6n^3 + 1} - \frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 - 4} \right) = \frac{11}{6} - \frac{2}{5} = \frac{55-12}{30} = \frac{43}{30}$$

Zadanie 7.10.

$$2x - 371 > 0 \quad q = \frac{1}{2x-371} < 1 \quad 1 < 2x-371 \quad x > 186.$$

Odp. 187

Zadanie 7.11.

$$q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{q}{1-q} = 12. \quad q = 12 - 12q. \quad q = \frac{12}{13}.$$

$$\text{Odp. } a_1 = \frac{12}{13}.$$

Zadanie 7.12.

$$\text{Promień okręgu } o_{2k-1} \text{ jest równy } r_{2k-1} = \sqrt{2^{11-2k+1}} = \sqrt{2^{12-2k}}.$$

$$\text{Promień okręgu } o_{2k} \text{ jest równy } r_{2k} = \sqrt{2^{11-2k}}.$$

Stąd pole pierścienia P_k jest równe:

$$P_k = \pi \left(\sqrt{2^{12-2k}} \right)^2 - \pi \left(\sqrt{2^{11-2k}} \right)^2 = \pi (2^{12-2k} - 2^{11-2k}) = \pi \cdot 2^{-2k} (2^{12} - 2^{11}) = \pi \cdot 2^{11} \cdot 2^{-2k}$$

Zatem pola pierścieni tworzą ciąg o ilorazie $q = 2^{-2}$.

Sumę tych pól można policzyć ze wzoru $S = \frac{a_1}{1-q}$.

$$\text{Odp. } S = \frac{2^{11} \cdot \pi \cdot 2^{-2}}{1-2^{-2}} = \frac{2^{11} \cdot \pi \cdot 2^{-2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2^{11} \cdot \pi \cdot 2^{-2} \cdot 4}{3} = \frac{2^{11}\pi}{3}.$$

Zadanie 7.13.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9n^3 + 11n^2}{7n^3 + 5n^2 + 3n + 1} - \frac{n^2}{3n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^3 + 11n^2}{7n^3 + 5n^2 + 3n + 1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 + 1} = \frac{9}{7} - \frac{1}{3} = \frac{20}{21}$$

Zadanie 7.14.

$$\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 2 \\ \frac{a_1^2}{1-q^2} = 3 \\ |q| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2(1-q) \\ \frac{4(1-q)^2}{(1-q)(1+q)} = 3 \\ |q| < 1 \end{cases}$$

Zatem

$$\frac{4(1-q)}{1+q} = 3 \Leftrightarrow 4 - 4q = 3 + 3q \Leftrightarrow 7q = 1 \Leftrightarrow q = \frac{1}{7}$$

$$\text{Odp. } q = \frac{1}{7}.$$

Zadanie 7.15.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)^2 - (1-2n)^2}{(2n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)^2}{(2n-1)^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-2n)^2}{(2n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 12n + 4}{4n^2 - 4n + 1} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

Zadanie 7.16.

Z treści zadania wynika

$$\begin{cases} \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 7 \\ \frac{a_1}{1-q} = 8 \\ |q| < 1 \end{cases}$$

Dzieląc pierwsze równanie przez drugie otrzymujemy $1 - q^3 = \frac{7}{8}$, czyli $q = \frac{1}{2}$. Zatem $a_1 = 4$.

$$S_n = \frac{4 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 8 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$\frac{S - S_n}{S_n} = \frac{8}{8 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} - 1 = \frac{2^n}{2^n - 1} - 1 = \frac{1}{2^n - 1}$$

$$\left| \frac{S - S_n}{S_n} \right| < 0,001 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n - 1} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 2^n - 1 > 1000 \Leftrightarrow n > 9$$

$$\text{Odp. } n \in \{10, 11, 12, 13, \dots\}.$$

Zadanie 7.17.

$$7 = \sqrt[7]{7^n} \leq \sqrt[7]{6^n + 7^n} \leq \sqrt[7]{2 \cdot 7^n} = 7\sqrt[7]{2}$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} 7\sqrt[7]{2} = 7$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} 7 = 7$, więc z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[7]{6^n + 7^n} = 7.$$

Zadanie 7.18.

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{a_5}{a_3} + 1 = q^2 + 1$$

Zatem

$$q^2 = \frac{4}{25}$$

Ciąg geometryczny jest malejący, więc $q = \frac{2}{5}$.

$$6 = a_2 + a_4 + a_6 + \dots = \frac{a_5}{1 - q^2} = \frac{25a_2}{21}$$

$$\frac{126}{25} = a_2 = a_1 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow a_1 = \frac{63}{5}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{63}{5} \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^{n-1} = \frac{63}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

$$\text{Odp. } a_n = \frac{63}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^n.$$

Zadanie 7.19.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+5)^2}{(n+1)(n+2)}(p+1) + \frac{(n+5)^2}{(n+2)(n+3)}(2p+2) \right) = 3p+3$$

$$3p+3 = 12 \Leftrightarrow p = 3$$

$$\text{Odp. } p = 3.$$

Zadanie 7.20.Dla $p = -1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8n^3 - 5n - 3}{n^2 - 1} = -\infty$$

Dla $p \neq -1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(7p-1)n^3 + 5pn - 3}{(p+1)n^3 + n^2 + p} = \frac{7p-1}{p+1}$$

$$\frac{7p-1}{p+1} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 21p-3 = 4p+4 \Leftrightarrow 17p = 7 \Leftrightarrow p = \frac{7}{17}$$

Odp. $p = \frac{7}{17}$.**Zadanie 7.21.**

$$a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21} \Leftrightarrow \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow q = \frac{5}{4}q^2 + \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{5}{4}q^2 - q + \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow$$

$$q^2 - \frac{4}{5}q + \frac{4}{25} = 0 \Leftrightarrow \left(q - \frac{2}{5}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{2}{5}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{675}{\frac{3}{5}} = 1125$$

Stąd

$$\frac{2b_1 + 24r}{2} \cdot 25 = 1125 \Leftrightarrow b_1 + 12r = 45$$

Dalej

$$b_1 + 3r = b_4 = a_3 = a_1 q^2 = 675 \cdot \frac{4}{25} = 108$$

Zatem

$$\begin{cases} b_1 + 12r = 45 \\ b_1 + 3r = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + 12r = 45 \\ 4b_1 + 12r = 432 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$3b_1 = 387$$

Odp. $b_1 = 129$.**Zadanie 7.22.**

$$q = a_1$$

Suma wyrazów nieparzystych

$$S_N = \frac{a_1}{1-q^2} = \frac{q}{1-q^2}$$

Suma wyrazów parzystych

$$S_P = \frac{a_1 q}{1-q^2} = \frac{q^2}{1-q^2}$$

Zatem

$$\frac{S_N}{S_P} = S_N - S_P \Leftrightarrow \frac{\frac{q}{1-q^2}}{\frac{q^2}{1-q^2}} = \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^2}{1-q^2} \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{q-q^2}{1-q^2} \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{q}{1+q} \Leftrightarrow$$

$$q^2 - q - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow q = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$$

$$\text{Odp. } q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Zadanie 7.23.Niech a_n oznacza długość boku kwadratu K_n , a $o_n = 4a_n$ obwód tego kwadratu. Wtedy

$$a_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a_n\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a_n\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a_n$$

$$o_{n+1} = 4a_{n+1} = 4 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a_n = \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot 4a_n = \frac{\sqrt{10}}{4}o_n$$

Zatem obwody tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$ oraz $o_1 = 4a$.Ponieważ $|q| < 1$, więc suma nieskończona ciągu istnieje i wynosi

$$\frac{o_1}{1-q} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{16a}{4-\sqrt{10}} = \frac{16a(4+\sqrt{10})}{6} = \frac{8(4+\sqrt{10})}{3}a$$

$$\text{Odp. } \frac{8(4+\sqrt{10})}{3}a.$$

Zadanie 7.24.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2n + 1}{3n^3 - n^2 - 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \frac{4}{3}$$

Zadanie 7.25.

$$a_1 = 2x, q = \frac{-3}{x-1}$$

Suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{15}{2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} \frac{2x}{1-\frac{-3}{x-1}} = \frac{15}{2} \\ \left| \frac{3}{x-1} \right| < 1 \end{cases}$$

Pierwsze równanie przekształcimy równoważnie

$$\frac{2x}{1 + \frac{3}{x-1}} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \frac{2x(x-1)}{x+2} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x = 15x + 30 \Leftrightarrow 4x^2 - 19x - 30 = 0$$

Rozwiązaniem tego równania są liczby $6, -\frac{5}{4}$.

Sprawdzimy, która liczba spełnia warunek $\left| \frac{3}{x-1} \right| < 1$.

$$\left| \frac{3}{6-1} \right| = \frac{3}{5} < 1, \quad \left| \frac{3}{-\frac{5}{4}-1} \right| = \frac{12}{9} > 1$$

Odp. $x = 6$.

Zadanie 7.26.

Z warunków w zadaniu otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{a_1}{1-q^2} = 16 \\ |q| < 1 \\ a_1 + a_1 q^2 = \frac{5}{2} a_1 q \end{cases}$$

$$a_1 + a_1 q^2 = \frac{5}{2} a_1 q \Leftrightarrow a_1 \left(q^2 - \frac{5}{2} q + 1 \right) = 0$$

Z danych w zadaniu wynika, że wyrazy nieparzyste są dodatnie, więc $a_1 > 0$. Zatem

$$q^2 - \frac{5}{2} q + 1 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

Uwzględniając warunek $|q| < 1$ otrzymujemy $q = \frac{1}{2}$.

Podstawiając do pierwszego równania wyznaczamy $a_1 = 12$.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego

$$a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 24 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

8. Planimetria

Zadanie 8.1.

Oznaczenia takie jak na rysunku, $|AB| = a$, $|CD| = b$, $|AD| = |BC| = c$.

Z własności trapezu opisanego na okręgu wynika, że $a + b = 2c$.

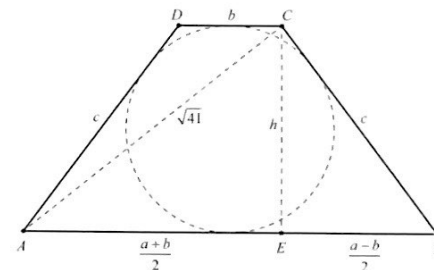
Zatem $c = 5$ i $a + b = 10$.

Twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta AEC : $5^2 + h^2 = 41$, czyli $h = 4$.

Pole trapezu

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = 20$$

Odp. 20 cm^2 .



Zadanie 8.2.

Niech $a = 3\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 3 - \sqrt{3}$.

Ponieważ $c < b < a$, więc największym kątem jest kąt α leżący naprzeciw boku o długości a .

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2bc} = \frac{12 + 9 - 6\sqrt{3} - 18}{12(\sqrt{3} - 1)} = \frac{-6(\sqrt{3} - 1)}{12(\sqrt{3} - 1)} = \frac{1}{2}$$

Zatem $\alpha = 120^\circ$.

Wykorzystując wzory na pole trójkąta otrzymujemy

$$\frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ah$$

$$h = \frac{bc \sin 120^\circ}{a} = \frac{2\sqrt{3} \cdot (3 - \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

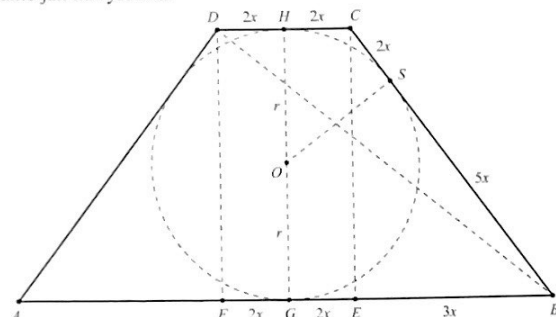
Z twierdzenia sinusów obliczymy promień okręgu opisanego na trójkącie.

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

Odp. Kąt 120° , wysokość $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$, promień $\sqrt{6}$.

Zadanie 8.3.

Oznaczenia takie jak na rysunku.



Twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta BCE

$$4r^2 + 9x^2 = 49x^2 \Leftrightarrow r^2 = 10x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{10}r$$

$$\text{Zatem } |BC| = \frac{7\sqrt{10}}{10}r.$$

Twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta BDF

$$|BD|^2 = 4r^2 + 49x^2 = 40x^2 + 49x^2 = 89x^2$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta BCD

$$\cos \alpha = \frac{|BC|^2 + |BD|^2 - |CD|^2}{2|BC||BD|} = \frac{49x^2 + 89x^2 - 16x^2}{2 \cdot 7x \cdot \sqrt{89}x} = \frac{122}{14\sqrt{89}} = \frac{61\sqrt{89}}{623}$$

$$\text{Odp. Długość ramienia trapezu wynosi } \frac{7\sqrt{10}}{10}r, \text{ cosinus } |\angle CBD| = \frac{61\sqrt{89}}{623}.$$

Zadanie 8.4.

Oznaczenia takie jak na rysunku.

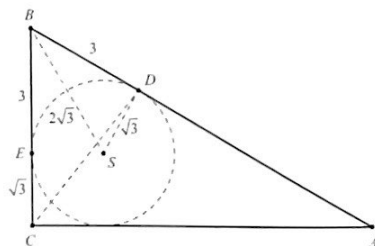
Trójkąt BSD jest połową trójkąta równobocznego o boku $2\sqrt{3}$, czyli $|BD| = 3$.

$$\text{Wtedy } |BC| = 3 + \sqrt{3}.$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta BCD

$$|CD|^2 = 3^2 + (3 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3 \cdot (3 + \sqrt{3}) \cos 60^\circ = 12 + 3\sqrt{3}$$

$$\text{Odp. } |CD| = \sqrt{12 + 3\sqrt{3}}.$$

**Zadanie 8.5.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.

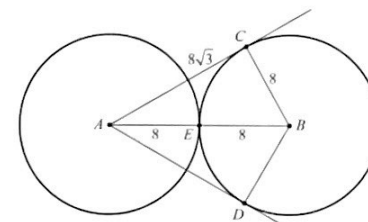
Trójkąt ABC jest połową trójkąta równobocznego o boku długości 16.

$$\text{Pole tego trójkąta wynosi } \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\sqrt{3} = 32\sqrt{3}.$$

Pole wycinka kołowego BCE wynosi

$$\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 8^2 = \frac{32\pi}{3}.$$

$$\text{Pole zacieniowanej figury } 2 \cdot \left(32\sqrt{3} - \frac{32\pi}{3} \right) = 64 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right).$$

**Zadanie 8.6.**

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy

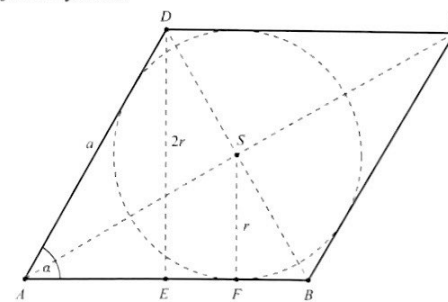
$$\cos \alpha = \frac{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4 + \frac{9}{4} - 1}{6} = \frac{7}{8}$$

Ze wzoru $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ otrzymujemy

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Zadanie 8.7.

Oznaczenia takie jak na rysunku.



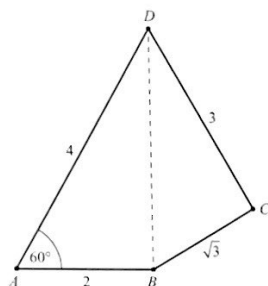
$$\sin \alpha = \frac{2r}{a} = \frac{4r^2}{2ar} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2ar} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi \sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kat α jest ostry, więc $\alpha = 60^\circ$.

Zadanie 8.8.

Z twierdzenia cosinusów obliczymy długość przekątnej BD.

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cdot \cos 60^\circ = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12$$



Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąty ABD i BCD są prostokątne o przeciwprostokątnych odpowiednio AD i BD.

Pole czworokąta

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BD| + \frac{1}{2}|CB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 = \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Odp. Pole czworokąta ABCD wynosi $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 8.9.

Niech $|AD| = h$ oraz $|AE| = a$, wtedy $|CE| = 2h$ i $|AB| = 2a$.

Trójkąty BCE i ABD są podobne, skala podobieństwa wynosi 2, więc $|BC| = 4a$.

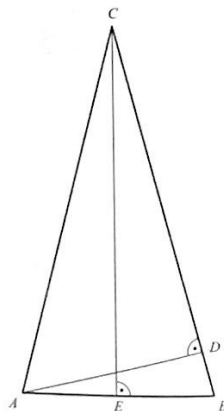
Niech $|\angle CAB| = \alpha$, $|\angle BCA| = \gamma$. Oczywiście również

$$|\angle ABC| = \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \gamma = \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -2\cos^2 \alpha + 1 = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$$

Odp. Kosinusy kątów wynoszą: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$.

**Zadanie 8.10.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|AB| = 15$.

Odcinek CE jest wysokością w trójkącie ABC, zatem

$$|\angle BCE| = \alpha.$$

Odcinek CE jest wysokością w trójkącie równoramiennym DCB, więc $|\angle ECD| = \alpha$.

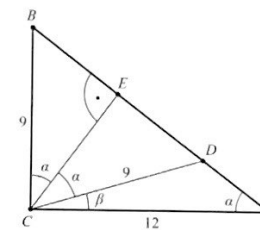
Stąd $\beta = 90^\circ - 2\alpha$. Zatem

$$\cos \beta = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{|BC|}{|AB|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta ADC

$$|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2 - 2|AC||CD|\cos \beta = 144 + 81 - 216 \cdot \frac{24}{25} = \frac{5625 - 5184}{25} = \frac{441}{25}$$

Odp. $|AD| = \frac{21}{5}$.

**Zadanie 8.11.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta AED

$$(a-b)^2 + h^2 = (a+b)^2$$

$$h = \sqrt{4ab}$$

Niech $x = a + b$.

Z założenia wynika, że $3b + a = 30$,

czyli $2b = 30 - x$ oraz $2a = 3x - 30$.

$$\text{Zatem } h = \sqrt{2a \cdot 2b} = \sqrt{(3x-30)(30-x)}$$

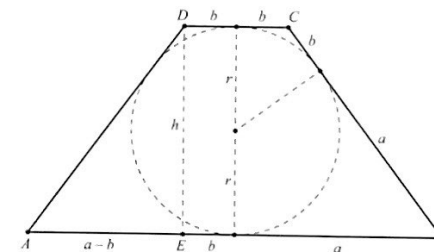
Pole trapezu

$$P = \frac{2a+2b}{2} \cdot h = x \cdot \sqrt{(3x-30)(30-x)}$$

Dziedzina

$$\begin{cases} 2b > 0 \\ 2a > 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30-x > 0 \\ 3x-30 > 30-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 30 \\ x > 15 \end{cases}$$

Odp. Pole trapezu $P = x \cdot \sqrt{(3x-30)(30-x)}$, $x \in (15, 30)$



Zadanie 8.12.

Niech r oznacza promień mniejszego okręgu i R promień większego okręgu.

Wtedy $|AB| = R + r$ jednocześnie

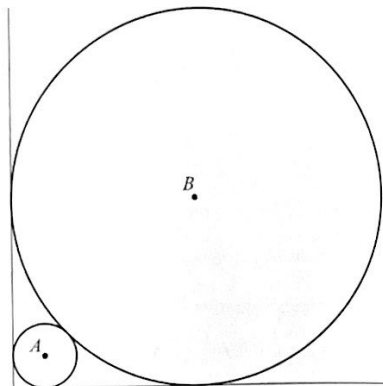
$$|AB| = R\sqrt{2} - r\sqrt{2}.$$

Zatem $R + r = R\sqrt{2} - r\sqrt{2}$, czyli

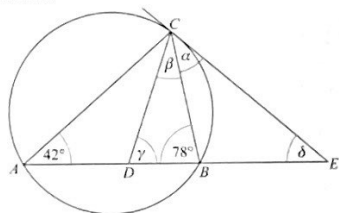
$$r(1 + \sqrt{2}) = R(\sqrt{2} - 1).$$

Stąd

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

**Zadanie 8.13.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.



$$\beta = \frac{180^\circ - 42^\circ - 78^\circ}{2} = 30^\circ,$$

$$\gamma = 180^\circ - 78^\circ - 30^\circ = 72^\circ,$$

$$\alpha = 42^\circ, \quad \delta = 180^\circ - 72^\circ - 30^\circ - 42^\circ = 36^\circ.$$

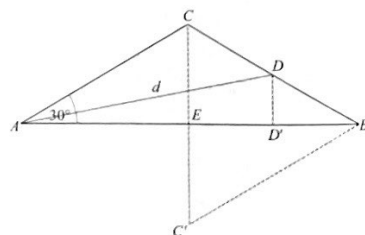
Odp. $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$.

Zadanie 8.14.

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Trójkąt BCC' jest równoboczny o wysokości $|BE| = 4$.

$$\text{Stąd } 4 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad |BC| = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$



Twierdzenie cosinusów:

$$d^2 = 8^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cos 30^\circ = 64 + \frac{16}{3} - 32 = \frac{112}{3} = \frac{16 \cdot 21}{9}.$$

$$d = \frac{4\sqrt{21}}{3}.$$

II sposób

Trójkąt BCC' jest równoboczny o wysokości $|BE| = 4$.

$$\text{Stąd } 4 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad |BC| = \frac{8\sqrt{3}}{3}, \quad |DD'| = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad |AD'| = 6.$$

$$\text{Twierdzenie Pitagorasa: } d^2 = 36 + \frac{4}{3} = \frac{112}{3}.$$

Zadanie 8.15.

Ze znanego wzoru na pole trójkąta otrzymujemy $10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin \alpha$.

$$\text{Stąd } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{Zatem } \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Z twierdzenia cosinusów: } |BC|^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49.$$

$$\text{Twierdzenie sinusów: } 2R = \frac{|BC|}{\sin \alpha} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14}{\sqrt{3}}.$$

$$R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

II sposób

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Symetralna boku AC przecina AB w punkcie D .

$$10\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h, \quad h = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

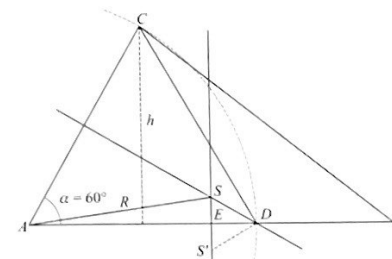
Wniosek: trójkąt ACD jest równoboczny.

Punkt E jest środkiem AB .

Trójkąt DSS' jest równoboczny o wysokości DE . $|DE| = 1$.

$$\text{Stąd } 1 = \frac{|SD|\sqrt{3}}{2}, \quad |SD| = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad |SE| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Twierdzenie Pitagorasa: } R^2 = 4^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 16 + \frac{1}{3} = \frac{49}{3}, \quad \text{Zatem } R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$



Zadanie 8.16.

Oznaczenia takie jak na rysunku.

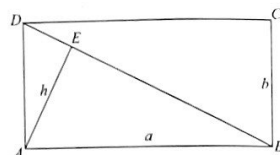
$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}h\sqrt{a^2 + b^2} \quad h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Trójkąty AED i ABD są podobne.

$$\text{Skala podobieństwa } s = \frac{h}{a}.$$

Zatem pole trójkąta AED wynosi:

$$P = s^2 \frac{1}{2}ab = \frac{(ab)^2}{a^2(a^2 + b^2)} \frac{1}{2}ab = \frac{ab^3}{2(a^2 + b^2)}.$$

**Zadanie 8.17.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.

$$d^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625, \quad d = 25.$$

$$|BC|^2 = 625 - 15^2 = 400, \quad |BC| = 20.$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 = 12 \cdot 7 + 10 \cdot 15 = 234.$$

Niech $\angle ABC = \beta$. Wtedy $\angle ADC = 180^\circ - \beta$.

$$\begin{cases} e^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos \beta \\ e^2 = 7^2 + 15^2 + 2 \cdot 7 \cdot 15 \cdot \cos \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7e^2 = 7 \cdot 976 - 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cos \beta \\ 32e^2 = 32 \cdot 274 + 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cos \beta \end{cases}$$

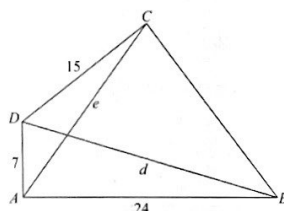
$$\begin{cases} 7e^2 = 7 \cdot 976 - 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cos \beta \\ 32e^2 = 32 \cdot 274 + 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cos \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7e^2 = 7 \cdot 976 - 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cos \beta \\ 32e^2 = 32 \cdot 274 + 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cos \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7e^2 = 7 \cdot 976 - 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cos \beta \\ 32e^2 = 32 \cdot 274 + 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cos \beta \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymamy:

$$39e^2 = 6832 + 8768 = 15600, \quad e^2 = 400, \quad e = 20.$$

**Zadanie 8.18.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Trójkąt BCD jest równoramienny.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów DEC i AEC otrzymujemy:

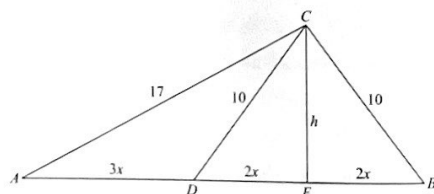
$$\begin{cases} 100 = 4x^2 + h^2 \\ 289 = 25x^2 + h^2 \end{cases}$$

Odejmując stronami mamy:

$$189 = 21x^2 \quad x^2 = 9$$

Dalej

$$100 = 36 + h^2 \quad h = 8$$



$$x = 3.$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot (7 \cdot 3) \cdot 8 = 84.$$

Zadanie 8.19.

Oznaczenia takie jak na rysunku. $h_1 = \sqrt{3}$, $h_2 = 2$.

Pole trójkąta ABD :

$$a\sqrt{3} = 2b = \frac{1}{2}ab \sin 30^\circ.$$

Stąd

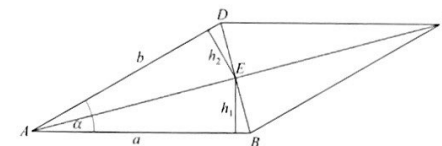
$$a\sqrt{3} = \frac{1}{4}ab \quad b = 4\sqrt{3}$$

$$2b = \frac{1}{4}ab \quad a = 8.$$

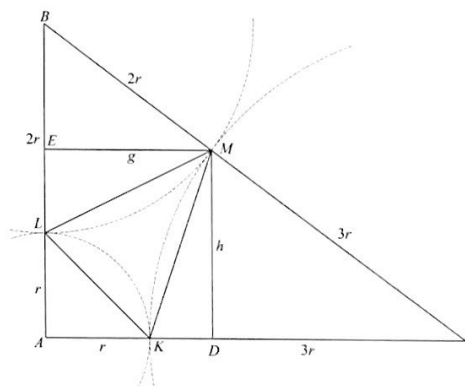
$$|BD|^2 = 64 + 48 - 2 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 112 - 96 = 16.$$

$$|BD| = 4.$$

Można stąd wyciągnąć wniosek, że przekątna BD jest prostopadła do boku AD .

**Zadanie 8.20.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.



Trójkąt ABC jest prostokątny. Zatem

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot 3r = 6r^2, \quad P_{AKL} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r = \frac{1}{2}r^2.$$

Trójkąty prostokątne DCM i ABC są podobne. Stąd

$$\frac{h}{3r} = \frac{3r}{5r}, \quad h = \frac{9}{5}r, \quad P_{KCM} = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot \frac{9}{5}r = \frac{27}{10}r^2.$$

Trójkąty prostokątne EMB i ABC są podobne. Stąd

$$\frac{g}{2r} = \frac{4r}{5r}, \quad g = \frac{8}{5}r, \quad P_{LMC} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \frac{8}{5}r = \frac{16}{10}r^2.$$

Zatem

$$P_{KML} = 6r^2 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{27}{10}r^2 - \frac{16}{10}r^2 = \frac{12}{10}r^2 = \frac{6}{5}r^2.$$

$$\frac{P_{KML}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{6}{5}r^2}{6r^2} = \frac{1}{5}.$$

Zadanie 8.21.

Oznaczenia takie jak na rysunku.

$$\alpha = 60^\circ, \sin \beta = \frac{3}{4}.$$

Z twierdzenia sinusów.

$$\frac{a}{\frac{3}{4}} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad a = \frac{15}{2}.$$

Z twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt.

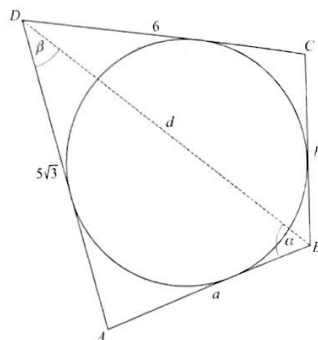
$$6 + \frac{15}{2} = b + 5\sqrt{3}, \quad b = \frac{27 - 10\sqrt{3}}{2}.$$

Z twierdzenia cosinusów.

$$(5\sqrt{3})^2 = d^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 2d \cdot \frac{15}{2} \cos 60^\circ, \quad 75 = d^2 + \frac{225}{4} - \frac{15}{2}d,$$

$$300 = 4d^2 - 30d + 225, \quad 4d^2 - 30d - 75 = 0,$$

$$\Delta = 900 + 1200 = 2100, \quad d = \frac{30 + 10\sqrt{21}}{8} = \frac{15 + 5\sqrt{21}}{4}.$$

**Zadanie 8.22.**

$$|AC| = \sqrt{34}$$

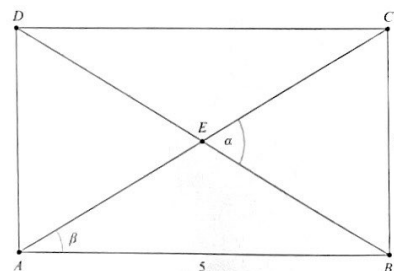
$$\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\sin \alpha = \sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta =$$

$$= 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{15}{17}$$

$$\text{Odp. } \sin \alpha = \frac{15}{17}.$$

**Zadanie 8.23.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Twierdzenie cosinusów dla trójkątów ABC i ACD,

$$\begin{cases} d^2 = 4 + 9 - 12 \cos \beta \\ d^2 = 16 + 25 + 40 \cos \beta \end{cases}$$

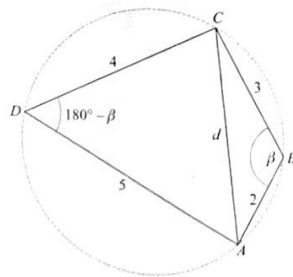
$$\begin{cases} 10d^2 = 130 - 120 \cos \beta \\ 3d^2 = 123 + 120 \cos \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10d^2 = 130 - 120 \cos \beta \\ 3d^2 = 123 + 120 \cos \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10d^2 = 130 - 120 \cos \beta \\ 3d^2 = 123 + 120 \cos \beta \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymujemy:

$$13d^2 = 253, \quad d^2 = \frac{253}{13}, \quad d = \frac{\sqrt{3289}}{13}.$$

**Zadanie 8.24.**

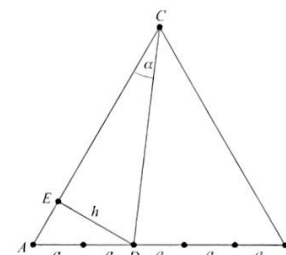
Oznaczenia takie jak na rysunku.

Trójkąt ADE jest połową trójkąta równobocznego.

Stąd

$$|AE| = a, \quad |EC| = 4a,$$

$$|DE| = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, \quad \tan \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Zadanie 8.25.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Z twierdzenia Pitagorasa $|BC| = 25$.

Wykorzystując $|BF| = |BD|$ i $|CE| = |CD|$ otrzymujemy:

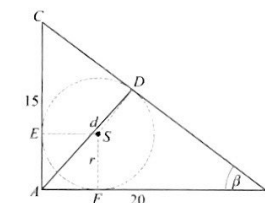
$$25 = 20 - r + 15 - r, \quad r = 5.$$

Dalej

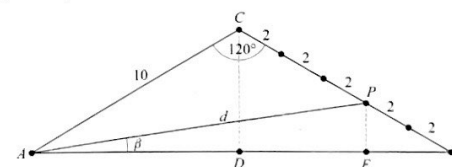
$$|BD| = 15, \quad |CD| = 10, \quad \cos \beta = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Twierdzenie cosinusów.

$$d^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15 \cdot \frac{4}{5} = 400 + 225 - 480 = 145, \quad d = \sqrt{145}.$$

**Zadanie 8.26.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.



Twierdzenie cosinusów.

$$d^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 100 + 36 + 60 = 196, \quad d = 14.$$

Trójkąt BPE jest połową trójkąta równobocznego. Stąd $|PE| = 2$.

$$\sin \beta = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}.$$

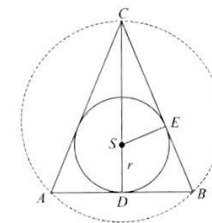
Zadanie 8.27.

Oznaczenia takie jak na rysunku.

$$|CE| = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24.$$

Trójkąty BCD i CES są podobne.

Stąd



$$\frac{|DB|}{36} = \frac{10}{24}, \quad |DB| = \frac{36 \cdot 5}{12} = 15.$$

Zatem

$$|AB| = 30,$$

$$|AC| = |BC| = \sqrt{15^2 + 36^2} = \sqrt{225 + 1296} = \sqrt{1521} = 39.$$

Pole trójkąta ABC wynosi

$$P = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540.$$

Promień okręgu opisanego

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{30 \cdot 39 \cdot 39}{4 \cdot 540} = \frac{39 \cdot 39}{4 \cdot 18} = \frac{13 \cdot 13}{8} = \frac{169}{8}.$$

Zadanie 8.28.

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Trapez $ABCD$ jest połową sześciokąta foremnego.

Wykorzystując ten fakt trójkąty ABC i ABD są połowami trójkątów równobocznych.

$$\text{Stąd } |AC| = |BD| = 2 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

$ASCD$ jest rombem. CDS jest trójkątem równobocznym.

$$\text{Stąd } |AP| = |BP| = \frac{6\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Dalej } |SP| = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \quad P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3},$$

$$P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (12 + 8\sqrt{3}) = r(6 + 4\sqrt{3}), \quad r(6 + 4\sqrt{3}) = 12\sqrt{3},$$

$$r = \frac{12\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3)}{3} = 2\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3) = 12 - 6\sqrt{3} = 6(2 - \sqrt{3}).$$

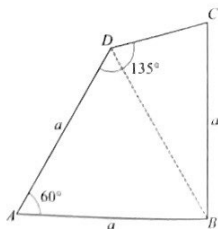
$$P_{\text{koła}} = 36(7 - 4\sqrt{3})\pi.$$

Zadanie 8.29.

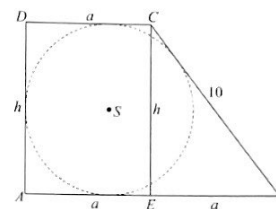
Trójkąt ABD jest równoboczny. Trójkąt BCD jest równoramienny o kącie $\angle CBD = 30^\circ$.

$$P_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad P_{BCD} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Odp. } P_{ABCD} = \frac{a^2(\sqrt{3} + 1)}{4}.$$



Zadanie 8.30.



Oznaczenia tak jak na rysunku.

Trapez jest opisany na okręgu, więc $h + 10 = 3a$.

Z tego, że trapez jest prostokątny otrzymujemy $h^2 + a^2 = 10^2$.

Zatem

$$(3a - 10)^2 + a^2 = 100$$

$$9a^2 - 60a + 100 + a^2 = 100$$

$$10a^2 - 60a = 0$$

$$10a(a - 6) = 0$$

$$a = 6, h = 8$$

$$\text{Odp. Pole trapezu równa się } \frac{18}{2} \cdot 8 = 72.$$

Zadanie 8.31.

Niech $|BD| = |BC| = a$ oraz niech

$$|\angle BDC| = |\angle BCD| = \alpha.$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta ACD .

$$16^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \cos(180^\circ - \alpha),$$

$$256 = 196 + 36 + 168 \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{24}{168} = \frac{1}{7}.$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta BCD .

$$a^2 = 14^2 + a^2 - 2 \cdot 14 \cdot a \cdot \cos \alpha,$$

$$2 \cdot 14 \cdot a \cdot \frac{1}{7} = 14^2,$$

$$a = 49.$$

$$\text{Odp. Obwód wynosi } 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

II sposób

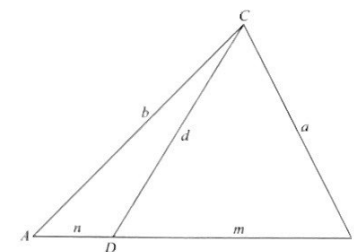
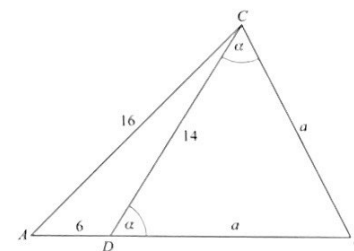
Można wykorzystać twierdzenie Stewarta.

$$b^2 \cdot m + a^2 \cdot n = c \cdot (d^2 + m \cdot n), \quad c = |AB|.$$

Wtedy

$$16^2 \cdot a + a^2 \cdot 6 = (6 + a) \cdot (14^2 + 6 \cdot a).$$

Po przekształceniach otrzymujemy $a = 49$.



III sposób

Trójkąty ACD i BCD mają wspólną wysokość, zatem

$$\frac{a}{6} = \frac{P_{BCD}}{P_{ACD}}.$$

Pola tych trójkątów obliczamy z twierdzenia Herona

$$P_{ACD} = \sqrt{18 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 12} = 24\sqrt{3},$$

$$P_{BCD} = \sqrt{(a+7) \cdot 7 \cdot 7 \cdot (a-7)} = 7\sqrt{a^2 - 49}.$$

Wtedy

$$\frac{a}{6} = \frac{7\sqrt{a^2 - 49}}{24\sqrt{3}}, \quad 4a\sqrt{3} = 7\sqrt{a^2 - 49}, \quad 48a^2 = 49(a^2 - 49), \quad a^2 = 49^2, \quad a = 49.$$

Zadanie 8.32.

Niech α oznacza miarę kąta wewnętrznego n – kąta foremnego.

Wtedy $\alpha + 2^\circ$ jest miarą kąta wewnętrznego $(n+2)$ – kąta foremnego.

Wykorzystując własności wielokątów foremnych otrzymujemy:

$$\begin{cases} n\alpha = (n-2)180^\circ \\ (n+2)(\alpha + 2^\circ) = n180^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} n\alpha = n180^\circ - 360^\circ \\ n\alpha + n2^\circ + 2\alpha + 4^\circ = n180^\circ \end{cases}$$

Odejmując stronami od drugiego równania pierwsze otrzymujemy:

$$n2^\circ + 2\alpha + 4^\circ = 360^\circ,$$

$$\alpha + 2^\circ = (180 - n)^\circ.$$

Podstawiając do drugiego równania otrzymujemy:

$$(n+2)(180 - n)^\circ = n180^\circ.$$

Stąd

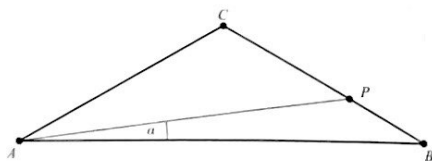
$$180n - n^2 + 360 - 2n = 180n,$$

$$n^2 + 2n - 360 = 0,$$

$$(n-18)(n+20) = 0.$$

$$\text{Odp. } n = 18.$$

Zadanie 8.33.



Twierdzenie cosinusów

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cos(180^\circ - 60^\circ) = 100 + 100 + 100 = 300$$

$$|AP|^2 = |AB|^2 + |BP|^2 - 2|AB| \cdot |BP| \cos 30^\circ = 300 + 16 - 20\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 196$$

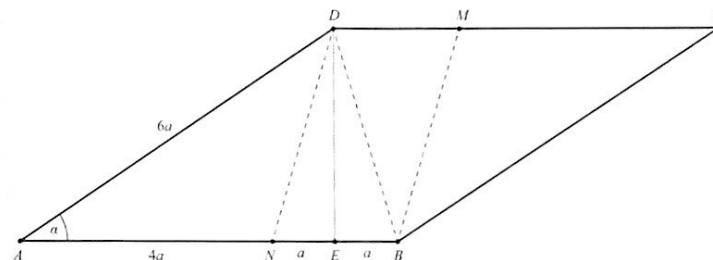
$$|AP| = 14$$

Twierdzenie sinusów

$$\frac{|AP|}{\sin 30^\circ} = \frac{|BP|}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{|BP| \sin 30^\circ}{|AP|} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{14} = \frac{1}{7}$$

$$\text{Odp. } \sin \alpha = \frac{1}{7}.$$

Zadanie 8.34.



Trójkąt NBD jest równoramienny.

Niech DE będzie wysokością trójkąta NBD oraz $|NE| = |EB| = a$.

Trójkąty NBD i MDB są przystające, więc mają równe pola.

Stąd i założeń wynika, że pole trójkąta AND jest dwa razy większe niż pole trójkąta NBD .

Jednocześnie trójkąty te mają wspólną wysokość DE , więc $|AN| = 4a$.

$$\cos \alpha = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{5a}{6a} = \frac{5}{6}$$

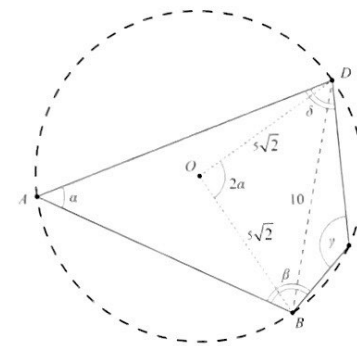
$$\text{Odp. } \cos \alpha = \frac{5}{6}.$$

Zadanie 8.35.

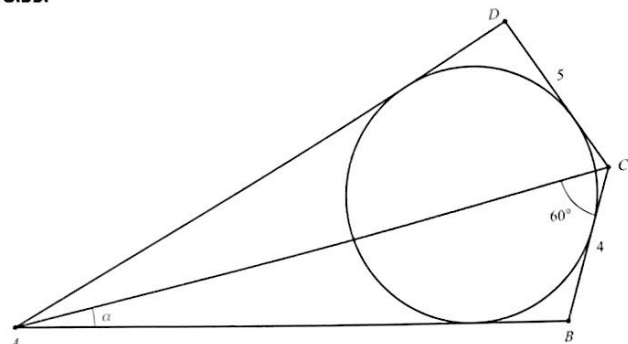
Oznaczenia tak jak na rysunku

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa wynika, że trójkąt BDO jest trójkątem prostokątnym, zatem $2\alpha = 90^\circ$, czyli $\alpha = 45^\circ$. Wynik ten można również otrzymać wykorzystując twierdzenie cosinusów dla trójkąta BDO lub twierdzenie sinusów dla trójkąta ABD .

Ponieważ czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc $\alpha + \gamma = 180^\circ$ oraz $\beta + \delta = 180^\circ$.



Zadanie 8.39.



Twierdzenie sinusa dla trójkąta ABC

$$\frac{|AB|}{\sin 60^\circ} = \frac{|BC|}{\sin \alpha} \Rightarrow |AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{1} = 8\sqrt{3}$$

Z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu wynika, że obwód czworokąta $ABCD$ jest równy

$$2 \cdot (|AB| + |CD|) = 2 \cdot (8\sqrt{3} + 5) = 10 + 16\sqrt{3}$$

Odp. $10 + 16\sqrt{3}$.

Zadanie 8.40.

Ponieważ przekątna BD jest średnicą okręgu, więc $|BD| = 8$.

Z warunku $|BE| = 3 \cdot |DE|$ wynika, że $|BE| = 6$, $|DE| = 2$.

Z warunku $|BD| = 2 \cdot |AE|$ otrzymujemy $|AE| = 4$.

Niech $|AD| = a$, $|CD| = b$.

Trójkąt BCE jest podobny do trójkąta ADE , skala podobieństwa wynosi $\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Stąd $|BC| = \frac{3}{2} \cdot |AD| = \frac{3}{2}a$.

Trójkąt ABE jest podobny do trójkąta CDE , skala podobieństwa wynosi $\frac{|AE|}{|DE|} = \frac{4}{2} = 2$.

Stąd $|AB| = 2 \cdot |CD| = 2b$.

Twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów ABD i BCD

$$\begin{cases} a^2 + 4b^2 = 64 \\ b^2 + \frac{9}{4}a^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4b^2 = 64 \\ 4b^2 + 9a^2 = 256 \end{cases}$$

Odejmując stronami od drugiego równania pierwsze otrzymujemy

$$8a^2 = 192 \Leftrightarrow a^2 = 24 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{6}$$

Wtedy

$$b^2 = 64 - \frac{9}{4}a^2 = 64 - 54 = 10 \Leftrightarrow b = \sqrt{10}$$

Odp. $|AB| = 2\sqrt{10}$, $|BC| = 3\sqrt{6}$, $|CD| = \sqrt{10}$, $|AD| = 2\sqrt{6}$.

Zadanie 8.41.

Trójkąty AGF i CFG oraz CEF i DFE mają podstawy tej samej długości oraz wspólną wysokość, więc

$$P_{AGF} = P_{CFG} = x$$

$$P_{CEF} = P_{DFE} = y$$

Jednocześnie

$$2x + y = P_{ACE} = \frac{1}{4}a^2$$

$$x + 2y = P_{CDG} = \frac{1}{4}a^2$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$x - y = 0, \text{ czyli } x = y$$

Zatem z pierwszego równania otrzymujemy

$$x = \frac{1}{12}a^2$$

$$\text{Odp. } P_{AGF} = \frac{1}{12}a^2, P_{CEFG} = \frac{1}{6}a^2.$$

II sposób

Niech $P_{AGF} = x$ oraz $P_{CEFG} = y$.

Trójkąty ABF i DFE są podobne. Skala podobieństwa

$$\text{wynosi } \frac{1}{2}.$$

Zatem

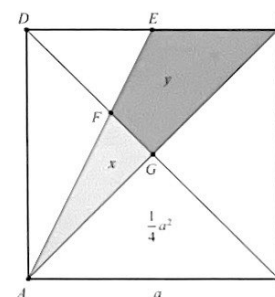
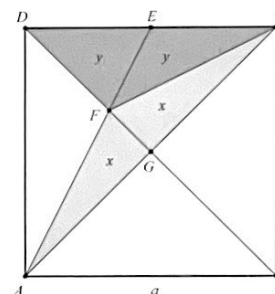
$$P_{DFE} = \frac{1}{4}P_{ABF} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}a^2 + x\right) = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}x$$

Pola trójkątów CDG oraz ACE są równe $\frac{1}{4}a^2$. Stąd

$$\begin{cases} \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}x + y = \frac{1}{4}a^2 \\ x + y = \frac{1}{4}a^2 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}x - x = 0$$



$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{16}a^2$$

$$x = \frac{1}{12}a^2$$

Z drugiego równania otrzymujemy

$$y = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{6}a^2$$

III sposób

Punkt H jest środkiem boku BC . Odcinek AH przecina przekątną BD w punkcie I .

Ze względu na symetrię względem prostej AC :

$$|BI| = |DF| = x \text{ oraz } |GI| = |GF| = y.$$

Trójkąty ABF i DFE są podobne. Skala podobieństwa

$$\text{wynosi } \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$x = \frac{1}{2}(x + 2y)$$

$$2y = x$$

Trójkąty ABI i AIF oraz AFD mają podstawy tej samej długości oraz wspólną wysokość, więc

$$P_{AIF} = \frac{1}{3}P_{ABD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^2$$

Zatem

$$P_{AGF} = \frac{1}{2}P_{AIF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}a^2 = \frac{1}{12}a^2$$

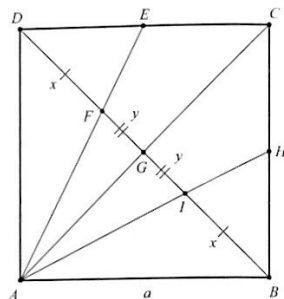
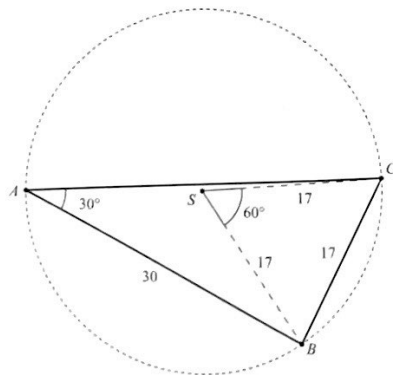
$$P_{CEFG} = P_{ACE} - P_{AGF} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{6}a^2$$

Zadanie 8.42.

Niech punkt S będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Wykorzystując związek między kątem wpisanym i środkowym opartym na tym samym łuku oraz to, że trójkąt BCS jest równoboczny, otrzymujemy $|\angle BAC| = 30^\circ$.

Długość boku AC obliczymy z twierdzenia cosinusów.



$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos |\angle BAC|$$

$$17^2 = 30^2 + x^2 - 2 \cdot 30 \cdot x \cdot \cos 30^\circ$$

$$x^2 - 30\sqrt{3}x + 611 = 0$$

$$\Delta = 2700 - 2444 = 256 = 16^2$$

$$x_1 = \frac{30\sqrt{3} - 16}{2} = 15\sqrt{3} - 8 < |AB|, x_2 = 15\sqrt{3} + 8$$

$$\text{Odp. } |\angle BAC| = 30^\circ, |AC| = 15\sqrt{3} + 8.$$

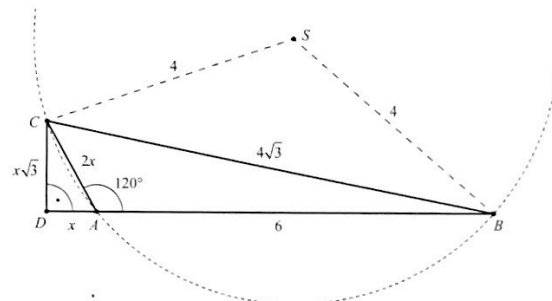
Zadanie 8.43.

Twierdzenie sinusów dla trójkąta ABC

$$\frac{|BC|}{\sin \alpha} = 2R \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{|BC|}{2R} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zatem $\alpha = 60^\circ$ lub $\alpha = 120^\circ$, ale bok BC jest największy, więc $\alpha = 120^\circ$.

Oznaczenia takie jak na rysunku.



Trójkąt ACD jest połową trójkąta równobocznego.

Niech $|AC| = 2x$. Wtedy $|AD| = x$ i $|CD| = x\sqrt{3}$.

Twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta BCD

$$(x\sqrt{3})^2 + (x+6)^2 = (4\sqrt{3})^2$$

$$3x^2 + x^2 + 12x + 36 = 48$$

$$4x^2 + 12x - 12 = 0$$

$$x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$\Delta = 9 + 12 = 21$$

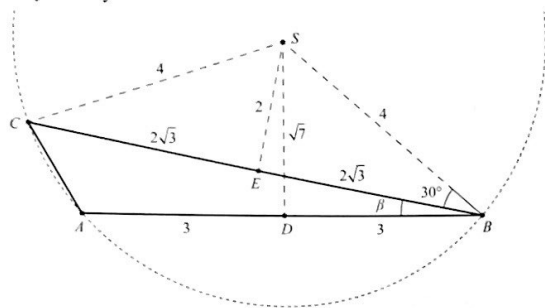
$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} < 0, x_2 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Odp. } |AC| = -3 + \sqrt{21}.$$

Uwaga. Znając kąt α , długość boku AC można wyznaczyć z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC .

II sposób

Oznaczenia takie jak na rysunku.



Trójkąt BSE jest połową trójkąta równobocznego
Twierdzenie sinusów dla trójkąta ABC

$$\frac{|AC|}{\sin \beta} = 2R \Leftrightarrow |AC| = 8 \sin \beta$$

Trójkąt prostokątny BSD

$$\sin(30^\circ + \beta) = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \cos \beta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \sqrt{3} \cos \beta + 3 \sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\cos(30^\circ + \beta) = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta - \frac{1}{2} \sin \beta = \frac{3}{4} \Rightarrow -\sqrt{3} \cos \beta + \sin \beta = -\frac{3}{2}$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$4 \sin \beta = \frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow 8 \sin \beta = \sqrt{21} - 3 = |AC|$$

9. Stereometria

Zadanie 9.1.

Ponieważ $h = \operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ$, więc

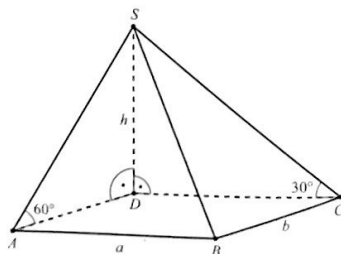
$$a \frac{\sqrt{3}}{3} = b \sqrt{3}, \text{ czyli } a = 3b.$$

Dalej $ab = 9$, więc $3b^2 = 9$, czyli $b = \sqrt{3}$.

Zatem wysokość $h = 3$ oraz objętość

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 = 9.$$

Odp. Objętość jest równa 9 dm^3 .



Zadanie 9.2.

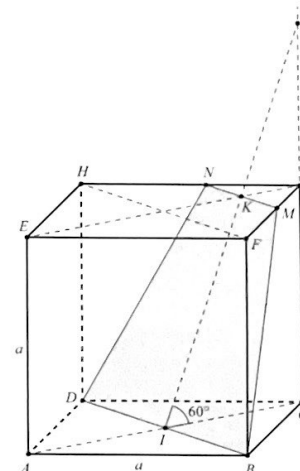
Niech punkty A, B, C, D, E, F, G, H będą wierzchołkami sześcianu tak jak na rysunku.

Punkt I jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$, natomiast J jest punktem przecięcia płaszczyzny przekroju i prostej CG .

$$|CJ| = |CI| \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} a > a$$

Stąd punkt J nie należy do krawędzi bocznej CG sześcianu $ABCDEFGH$, czyli przekrojem jest trapez równoramienny $BMND$.

Trójkąty BCD oraz MGN są podobne. Skala podobieństwa wynosi



$$s = \frac{|GK|}{|CI|} = \frac{|JG|}{|JC|} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} a - a}{\frac{\sqrt{6}}{2} a} = 1 - \frac{2}{\sqrt{6}} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$$

Zatem

$$|MN| = \frac{3 - \sqrt{6}}{3} \cdot |BC| = \frac{3 - \sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{2} a = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3} a$$

$$|MN| = \frac{3 - \sqrt{6}}{3} \cdot |BC| = \frac{3 - \sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{2} a = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3} a$$

Z twierdzenia Pitagorasa

$$|IJ| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} a\right)^2} = a\sqrt{2}$$

Wysokość trapezu

$$|IK| = |IJ| - |KJ| = |IJ| - s|IJ| = |IJ|(1 - s) = \frac{\sqrt{6}}{3} |IJ| = \frac{2\sqrt{3}}{3} a$$

Pole trapezu $BMND$

$$P = \frac{a\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3} a}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} a = \frac{6\sqrt{6} - 6}{9} a^2 = \frac{2(\sqrt{6} - 1)}{3} a^2$$

$$\text{Odp. Pole przekroju jest równe } \frac{2(\sqrt{6} - 1)}{3} a^2.$$

Zadanie 9.3.

Ostrosłup o podstawie BGD i wierzchołku C zawarty jest w sześcianie $ABCDEFGH$

o krawędzi długości $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ (rysunek). Wtedy

$$|BD| = |BG| = |DG| = a.$$

Przekrojem jest trójkąt równoramienny DBK .

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$|DK| = |BK| = \sqrt{\frac{2}{4}a^2 + \frac{2}{16}a^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$$

Wysokość LK trójkąta DBK obliczmy również z twierdzenia Pitagorasa

$$|LK| = \sqrt{\frac{10}{16}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

Pole przekroju wynosi

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{6}}{8}a^2$$

Zadanie 9.4.

Zależność między objętością stożka i objętością kapsuły

$$\frac{1}{3}\pi r^2(r+1) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\pi r^2(r+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

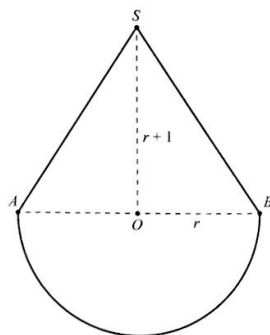
Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy

$$r = \frac{1}{3}$$

Objętość kapsuły

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(r+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 = \frac{2}{27}\pi$$

Odp. Objętość kapsuły $\frac{2}{27}\pi$.

**Zadanie 9.5.**

Trójkąty AFE i BEF są trójkątami równobocznymi o boku długości a .

AD i BD są wysokościami w tych trójkątach, więc

$$|AD| = |BD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Trójkąt CED jest połową trójkąta równobocznego o boku

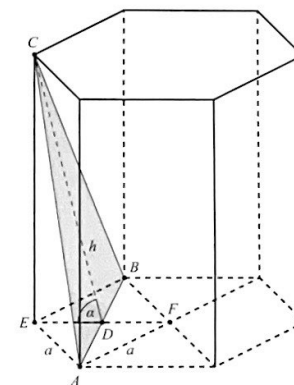
$$a, \text{ więc } h = |CD| = a \text{ oraz } |CE| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Zatem } 8\sqrt{3} = \frac{1}{2}|AB|h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}, \text{ czyli } a = 4.$$

Objętość graniastoslupa

$$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 144$$

Odp. Objętość graniastoslupa 144.

**Zadanie 9.6.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Wysokość ściany bocznej $h = a \tan \alpha$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EFS otrzymujemy

$$H^2 + a^2 = h^2$$

$$H^2 = a^2(\tan^2 \alpha - 1)$$

$$a^2 = \frac{H^2}{\tan^2 \alpha - 1}$$

Objętość ostrosłupa wynosi

$$V = \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot H = \frac{4}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\tan^2 \alpha - 1}$$

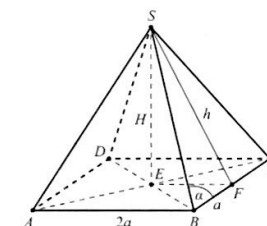
Dla $V = \frac{2}{9}H^3$ otrzymujemy

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\tan^2 \alpha - 1} = \frac{2}{9}H^3$$

$$\tan^2 \alpha - 1 = 6$$

$$\tan \alpha = \sqrt{7} \approx 2,6458$$

Zatem $69^\circ < \alpha < 70^\circ$, czyli $\alpha = 69^\circ$ lub $\alpha = 70^\circ$.



Zadanie 9.7.

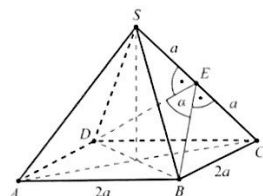
Oznaczenia takie jak na rysunku.

BD jest przekątną kwadratu o boku $2a$, więc $|BD| = 2a\sqrt{2}$.

BE i DE są wysokościami w trójkątach równobocznych o boku $2a$, więc $|BE| = |DE| = a\sqrt{3}$.

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta BED

$$\cos \alpha = \frac{|BE|^2 + |DE|^2 - |BD|^2}{2|BE| \cdot |DE|} = \frac{3a^2 + 3a^2 - 8a^2}{2 \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$

**Zadanie 9.8.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABS

$$\cos \alpha = \frac{|AB|^2 + |AS|^2 - |BS|^2}{2|AB| \cdot |AS|} = \frac{a^2 + 4a^2 - 4a^2}{2 \cdot a \cdot 2a} = \frac{1}{4}$$

Z twierdzenia cosinusów obliczymy długość środkowej BD trójkąta ABS

$$\begin{aligned} |BD|^2 &= |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos \alpha = \\ &= 2a^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczymy wysokość DE trójkąta równoramiennego BCD

$$|DE|^2 = |BD|^2 - |BE|^2 = \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$|DE| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Pole trójkąta BCD

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2$$

Zadanie 9.9.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

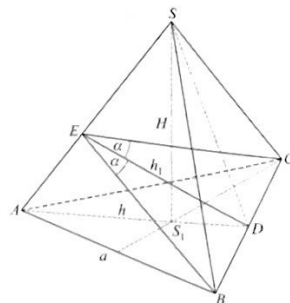
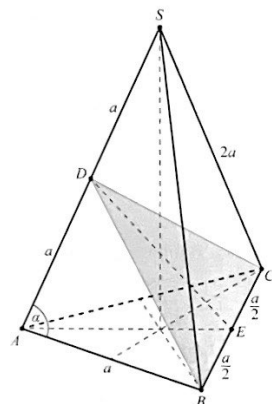
Niech $|AD| = h$, $|DE| = h_1$.

$$h_1 = \frac{a}{2 \tan \alpha} \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad |BE| = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

$$|AE|^2 = a^2 - |BE|^2 = a^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} = \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} (4 \sin^2 \alpha - 1)$$

$$|AE| = \frac{a}{2 \sin \alpha} \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}$$

Trójkąty ADE i ASS_1 są podobne. Stąd



$$\frac{H}{|AS_1|} = \frac{h_1}{|AE|}$$

$$H = \frac{2}{3}h \cdot \frac{h_1}{|AE|} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\frac{a}{2 \tan \alpha}}{\frac{a}{2 \sin \alpha} \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}} = \frac{a\sqrt{3} \sin \alpha}{3 \tan \alpha \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}} = \frac{a\sqrt{3} \cos \alpha}{3 \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3} \cos \alpha}{3 \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}} = \frac{a^3 \cos \alpha}{12 \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}}$$

Zadanie 9.10.

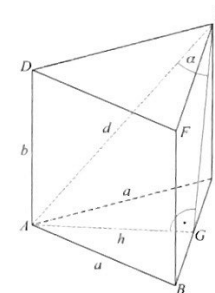
Oznaczenia tak jak na rysunku.

Wykorzystując wzory na objętość i pole powierzchni otrzymujemy:

$$\begin{cases} 12\sqrt{3} = \frac{a^2 \sqrt{3} b}{4} \\ 36 = 3ab \end{cases} \quad \begin{cases} 48 = a^2 b \\ 12 = ab \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = a \\ 3 = b \end{cases}$$

Dalej

$$d = 5, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \quad \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

**Zadanie 9.11.**

Oznaczenia tak jak na rysunku.

$$\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{6}{5} \quad \frac{2a\sqrt{2}}{|AS|} = \frac{6}{5} \quad |AS| = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$$

Trójkąt ASE .

$$|AS|^2 = h^2 + 2a^2 \quad h^2 = \frac{50a^2}{9} - 2a^2 = \frac{32a^2}{9}$$

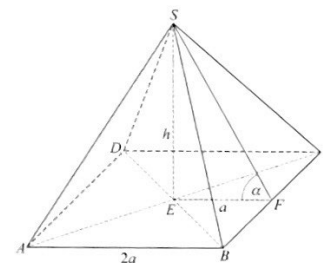
$$h = \frac{4a\sqrt{2}}{3}$$

$$|SF|^2 = h^2 + a^2 = \frac{32a^2}{9} + a^2 = \frac{41a^2}{9}$$

$$|SF| = \frac{a\sqrt{41}}{3}$$

Zatem

$$\sin \alpha = \frac{h}{|SF|} = \frac{\frac{4a\sqrt{2}}{3}}{\frac{a\sqrt{41}}{3}} = 4\sqrt{\frac{2}{41}} = \sqrt{\frac{32}{41}}$$



II sposób

Niech $|AS| = 10x$.

Wtedy $|AE| = 6x$ i $h = \sqrt{100x^2 - 36x^2} = 8x$.

Dalej $a^2 + a^2 = 36x^2$, $a = \frac{6}{\sqrt{2}}x = 3\sqrt{2}x$, $|SF| = \sqrt{64x^2 + 18x^2} = \sqrt{82}x$.

$$\sin \alpha = \frac{h}{|SF|} = \frac{8x}{\sqrt{82}x} = \sqrt{\frac{32}{41}}.$$

Zadanie 9.12.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

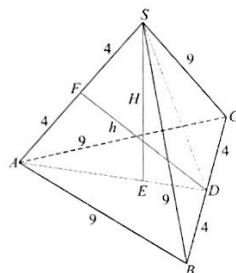
$$|AD| = |DS| = \sqrt{81 - 16} = \sqrt{65}, \quad h = \sqrt{65 - 16} = \sqrt{49} = 7.$$

Trójkąty AES i ADF są podobne.

Stąd

$$\frac{H}{8} = \frac{h}{\sqrt{65}}, \quad H = \frac{8 \cdot 7}{\sqrt{65}}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{65} \cdot \frac{56}{\sqrt{65}} = \frac{224}{3}.$$

**Zadanie 9.13.**

Oznaczenia tak jak na rysunku.

$$c = \sqrt{118^2 - (8\sqrt{210})^2} = \sqrt{13924 - 13440} = \sqrt{484} = 22$$

$$b = \sqrt{131^2 - (8\sqrt{210})^2} = \sqrt{17161 - 13440} = \sqrt{3721} = 61.$$

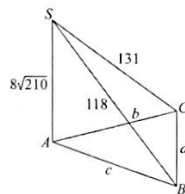
Ponieważ ABC jest równoramienny, więc $a = 61$.

Wysokość trójkąta ABC jest równa:

$$h = \sqrt{61^2 - 11^2} = \sqrt{3721 - 121} = \sqrt{3600} = 60.$$

Zatem objętość jest równa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 60 \cdot 8\sqrt{210} = 22 \cdot 80\sqrt{210} = 1760\sqrt{210}.$$

**Zadanie 9.14.**

Oznaczenia tak jak na rysunku.

Wysokości ścian bocznych są równej długości, więc spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

$$|CE| = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1521 - 225} = \sqrt{1296} = 36.$$

Pole podstawy:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540.$$

Jednocześnie

$$P = r \cdot p.$$

Stąd

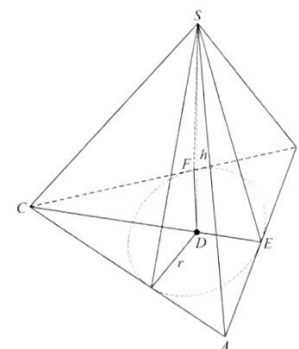
$$540 = r \cdot \frac{39 + 39 + 30}{2}, \quad 540 = r \cdot 54, \quad r = 10.$$

Wysokość ostrosłupa:

$$h = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24.$$

Objętość

$$V = \frac{1}{3} \cdot 540 \cdot 24 = 4320.$$

**Zadanie 9.15.**

Oznaczenia tak jak na rysunku.

$$|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad |DE| = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - d^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}{2}$$

Trójkąty ADE i ADS są podobne.

$$\frac{|DS|}{|DA|} = \frac{|DA|}{|DE|}, \quad |DS| = \frac{|DA|^2}{|DE|} = \frac{\frac{3}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}{2}} = \frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

Objętość ostrosłupa wynosi

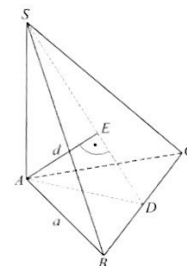
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2 - 4d^2}} \cdot d = \frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

II sposób

$$\begin{cases} \frac{1}{2}|DS| \cdot d = \frac{1}{2}|AS| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ |DS|^2 = |AS|^2 + \frac{3}{4}a^2 \end{cases} \quad \begin{cases} |DS| = |AS| \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2d} \\ |AS|^2 \cdot \frac{3a^2}{4d^2} = |AS|^2 + \frac{3}{4}a^2 \end{cases}$$

$$|AS|^2 \cdot \left(\frac{3a^2 - 4d^2}{4d^2} \right) = \frac{3}{4}a^2 \quad |AS|^2 = \frac{3a^2d^2}{3a^2 - 4d^2} \quad |AS| = \frac{\sqrt{3}ad}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}ad}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}} = \frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$



III sposób

$$\left| \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |DS| a \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot |AS| \right|$$

$$|DS|^2 = |AS|^2 + \frac{3}{4}a^2$$

Zadanie 9.16.

Niech $|AB| = |BC| = |CA| = a$, $|AS| = |BS| = |CS| = b$.

Trójkąt AOS :

$$|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \cos \alpha = \frac{|AO|}{|AS|} = \frac{a\sqrt{3}}{3b}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{3} \cos \alpha \quad (1)$$

Trójkąt ABS :

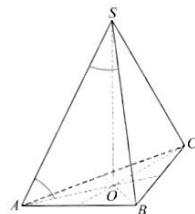
$$a^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos \alpha = 2b^2(1 - \cos \alpha) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2(1 - \cos \alpha) \quad (2)$$

Z (1) i (2) wynika

$$3\cos^2 \alpha = 2 - 2\cos \alpha \quad 3\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 + 24 = 4 \cdot 7 \quad \cos \alpha = \frac{-2 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} < -1.$$

$$\text{Odp. } \cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}.$$



Zadanie 9.17.

Krawędzie boczne są tej samej długości, więc spodek wysokości jest w środku okręgu opisanego na trójkącie ABC .

$$p = \frac{40 + 40 + 48}{2} = 64$$

Pole trójkąta

$$P = \sqrt{64 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 16} = 8 \cdot 24 \cdot 4 = 768$$

$$R = \frac{abc}{4P} = \frac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 4} = 25$$

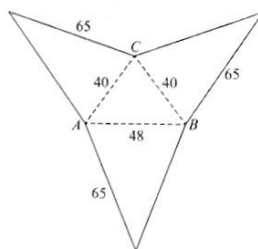
$$H = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{40 \cdot 90} = 60$$

$$\text{Odp. } V = \frac{1}{3} \cdot 768 \cdot 60 = 15360.$$

Można też było inaczej wyznaczyć długość promienia okręgu.

Niech CC_1 będzie wysokością trójkąta ABC . Wtedy $|CC_1| = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 32 = 768.$$



Niech $\angle ACB = 2\gamma$. Wtedy $\sin \gamma = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$ oraz $\cos \gamma = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$.

$$\text{Dalej } \sin 2\gamma = 2 \sin \gamma \cos \gamma = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

$$R = \frac{|AB|}{2 \sin 2\gamma} = \frac{48}{2 \cdot \frac{24}{25}} = 25.$$

Zadanie 9.18.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 25$$

$$h_1 = \frac{2 \cdot 250}{25} = 20$$

$$h_2 = \frac{2 \cdot 187,5}{25} = \frac{375}{25} = 15.$$

$|AS| = |CS|$, więc $|AS_1| = |CS_1|$. Stąd S_1 należy do symetralnej AC , czyli do przekątnej BD .

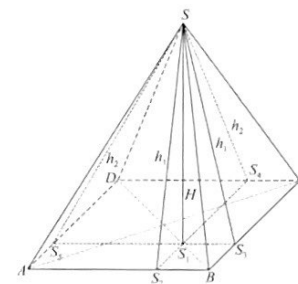
Płaszczyzna $SS_1S_2S_4$ zawiera wysokość ostrosłupa i wysokości ścian bocznych.

Wtedy $BC \parallel S_2S_4$. Analogicznie $AB \parallel S_2S_3$.

Ponieważ $20^2 + 15^2 = 625 = 25^2$, więc trójkąt S_2S_4S o bokach 15, 20, 25 jest prostokątny.

Zatem $H \cdot 25 = 20 \cdot 15$, $H = 12$.

$$\text{Objętość: } \frac{1}{3} \cdot 25^2 \cdot 12 = 625 \cdot 4 = 2500.$$



Zadanie 9.19.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

$$|AS| = |CS| = \sqrt{5}a \quad |BS| = \sqrt{6}a$$

AE i CE są wysokościami trójkątów odpowiednio ABS i BCS .

Niech $|AE| = |CE| = h$.

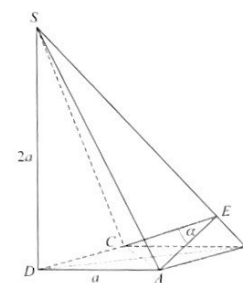
$$\text{Wtedy } a \cdot \sqrt{5}a = \sqrt{6}a \cdot h. \quad h = \frac{\sqrt{5}a}{\sqrt{6}}.$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta ACE :

$$2a^2 = \frac{5}{6}a^2 + \frac{5}{6}a^2 - 2 \cdot \frac{5}{6}a^2 \cos \alpha$$

$$\frac{2}{6}a^2 = -\frac{10}{6}a^2 \cos \alpha \quad \cos \alpha = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Stąd } \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$



Zadanie 9.20.

Oznaczenia tak jak na rysunku. Niech $|KL| = b$.

Twierdzenie sinusów dla trójkąta EFG :

$$\frac{h}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$$

$$h = a \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$$

Twierdzenie sinusów dla trójkąta EGS :

$$\frac{|SG|}{\sin \alpha} = \frac{|SE|}{\sin 3\alpha} \quad |SG| = \frac{|SE| \sin \alpha}{\sin 3\alpha}$$

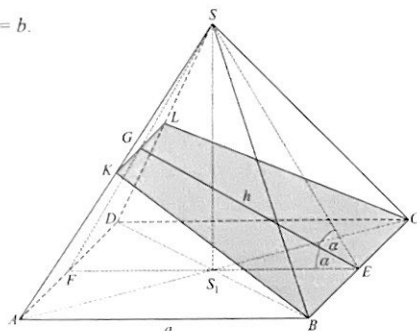
Trójkąty KSL i ASD są podobne. Zatem

$$\frac{b}{|SG|} = \frac{a}{|SF|} \quad b = \frac{a|SG|}{|SF|} = \frac{a \sin \alpha}{\sin 3\alpha}$$

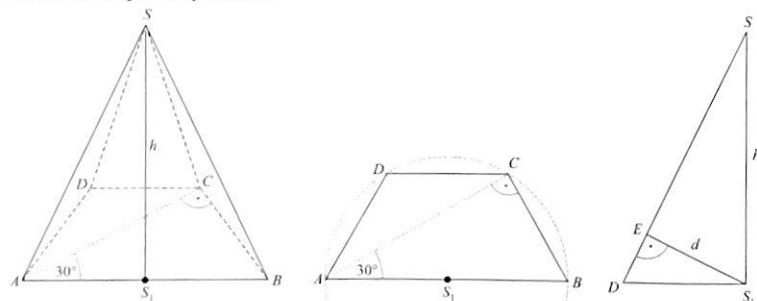
Stąd

$$a + b = a \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha} \right) = 2a \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{\sin 3\alpha} \quad \frac{a+b}{2} = a \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{\sin 3\alpha}$$

$$P = a \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{\sin 3\alpha} \cdot a \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = a^2 \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \right)^2 \cos \alpha.$$

**Zadanie 9.21.**

Oznaczenia tak jak na rysunkach.



Ponieważ krawędzie boczne są tej samej długości, więc spodek wysokości S_1 jest środkiem okręgu opisanego na trapezie $ABCD$. Z tego, że kąt ACB jest prosty wynika, że S_1 jest środkiem podstawy AB .

Skoro $|AC| = 8\sqrt{3}$ i $\angle BAC = 30^\circ$ oraz $\angle ACB = 90^\circ$, więc $|BC| = 8$, $|AB| = 16$.

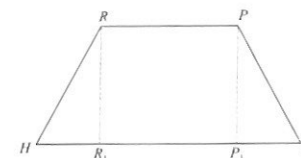
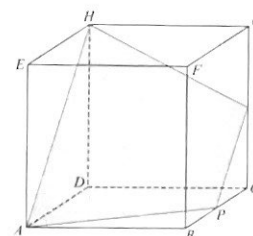
Dalej $|S_1D| = 8$.

Wysokość ostrosłupa $h = 4$.

Zatem wykorzystując wzór na pole trójkąta, bądź podobieństwo trójkątów mamy

$$8 \cdot 4 = 4\sqrt{5} \cdot d.$$

$$\text{Stąd } d = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

Zadanie 9.22.

Czworokąt $APRH$ jest trapezem równoramiennym.

$$|AH| = 2\sqrt{2} \quad |PR| = \sqrt{2} \quad |AP| = |HR| = \sqrt{5} \quad |HR| = |AP| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|PP_1| = \sqrt{5 - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad P = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{9}{2}.$$

Zadanie 9.23.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

Trójkąt BES_1 jest połową trójkąta równobocznego,

więc $|BE| = 2h$, $|BS_1| = \sqrt{3}h$.

Z twierdzenia Pitagorasa $|CS| = |BS| = \sqrt{25 + 3h^2}$.

Trójkąty ESS_1 i CSS_1 są podobne.

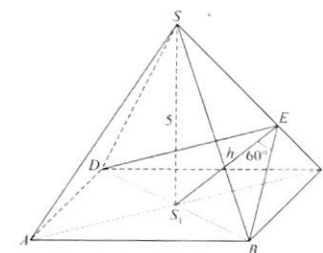
Stąd

$$\frac{h}{5} = \frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{25 + 3h^2}} \quad \sqrt{25 + 3h^2} = 5\sqrt{3}$$

$$25 + 3h^2 = 25 \cdot 3$$

$$3h^2 = 50 \quad h^2 = \frac{50}{3}.$$

$$\text{Objętość } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |AC|^2 \cdot |SS'| = \frac{1}{6} \cdot (2\sqrt{3}h)^2 \cdot 5 = \frac{1}{6} \cdot \left(12 \cdot \frac{50}{3} \right) \cdot 5 = \frac{500}{3}.$$

**Zadanie 9.24.**

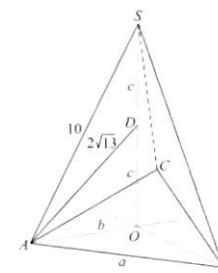
Oznaczenia tak jak na rysunku.

Niech $|AO| = b$, $|DO| = |DS| = c$. Wtedy

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 52 \\ b^2 + 4c^2 = 100 \end{cases} \quad 3c^2 = 48 \quad c = 4 \quad b = 6.$$

Wysokość $|SO| = 8$.

Wysokość podstawy $h = \frac{3}{2}b = 9$.



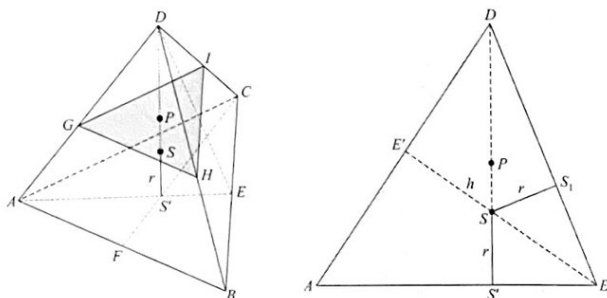
Bok podstawy wyliczymy ze wzoru $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$,

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}.$$

$$\text{Objętość } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 9 \cdot 8 = 72\sqrt{3}.$$

Zadanie 9.25.

Oznaczenia tak jak na rysunku.



Trójkąt ABC jest równoboczny, więc $|AE| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Trójkąt AED jest równoramienny.

Wysokość tego trójkąta wynosi $h = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Wykorzystując wzór na pole trójkąta dla trójkąta AED otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot |DS'|. \text{ Stąd } |DS'| = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}.$$

Ostrosłupy $ABCD$ i $GHID$ są podobne. Skala podobieństwa $\frac{2}{3}$. Stąd $|DP| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Z podobieństwa trójkątów DSS_1 i EDS' otrzymujemy:

$$\frac{r}{\frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad r = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad |DS| = 2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$|PS| = \frac{3\sqrt{6}}{2} - \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Zadanie 9.26.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

Trójkąt BCG jest połową trójkąta równobocznego.

Stąd $d = 2b$ i $c = b\sqrt{3}$.

Trójkąt ABE : $e^2 = a^2 + c^2 = a^2 + 3b^2$.

Trójkąt EFG : $f^2 = a^2 + b^2$.

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta BGE :

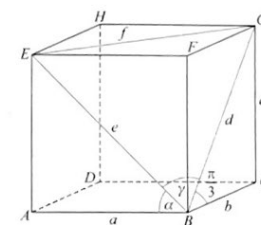
$$f^2 = e^2 + d^2 - 2ed\cos\gamma$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + 3b^2 + 4b^2 - 2\sqrt{a^2 + 3b^2} \cdot 2b \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$0 = 6b^2 - b\sqrt{6(a^2 + 3b^2)} \quad 6b = \sqrt{6(a^2 + 3b^2)}$$

$$36b^2 = 6a^2 + 18b^2 \quad a^2 = 3b^2 \quad a = b\sqrt{3}.$$

Zatem trójkąt ABE jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, czyli $\alpha = 45^\circ$.



Zadanie 9.27.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

Wykorzystując funkcje trygonometryczne otrzymujemy:

$$\frac{b}{2h_p} = \tan \frac{\alpha}{2} \quad h_p = \frac{b}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{b \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{h_p}{h_s} = \cos \beta \quad h_s = \frac{h_p}{\cos \beta} = \frac{b \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2}}$$

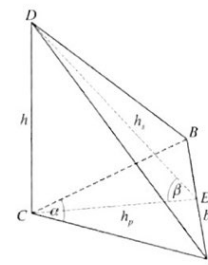
$$\frac{h}{h_p} = \tan \beta \quad h = h_p \tan \beta = \frac{b \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \frac{h}{2|AC|} = \sin \frac{\alpha}{2} \quad |AC| = \frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Zatem

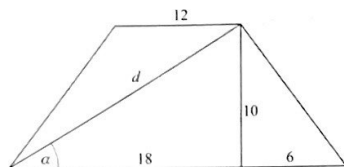
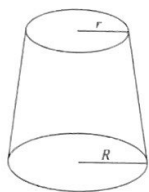
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} b h_p h = \frac{b^3 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2}}{6 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{24} b^3 \tan \beta \cot^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$P = \frac{1}{2} b h_p + \frac{1}{2} b h_s + 2 \cdot \frac{1}{2} |AC| h = \frac{b^2 \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{b^2 \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{b^2 \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{b^2 \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(1 + \frac{1}{\cos \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta \sin \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{b^2 \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \cos \beta \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \left(\cos \beta \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \beta \right).$$



Zadanie 9.28.



$$840\pi = \frac{1}{3} \pi \cdot 10(36 + 6R + R^2), \quad R^2 + 6R + 36 = 252, \quad R^2 + 6R - 216 = 0.$$

$$\Delta = 36 + 864 = 900, \quad R = \frac{-6 - 30}{2} < 0, \quad R = \frac{-6 + 30}{2} = 12.$$

$$d^2 = 100 + 324 = 424, \quad d = 2\sqrt{106}.$$

$$\text{Odp. } \cos \alpha = \frac{18}{2\sqrt{106}} = \frac{9}{\sqrt{106}} = \frac{9\sqrt{106}}{106}.$$

Zadanie 9.29.

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Niech $|AB| = 2a$.

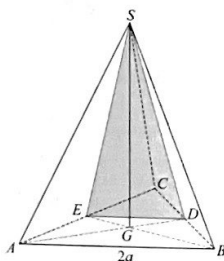
Wtedy $|DS| = |ES| = |DE| = a$.

Z trójkąta BDS wynika, że $a\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

$$\text{Wtedy } |DS| = \frac{2\sqrt{6}}{3}, |DG| = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Stąd } |GS| = \sqrt{\frac{24}{9} - \frac{8}{9}} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Odp. } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot |GS| = \frac{32\sqrt{3}}{27}.$$



Zadanie 9.30.

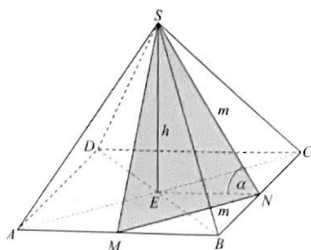
$$|AC| = 2m = |BD|$$

Pole podstawy $ABCD$ wynosi $\frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = 2m^2$.

Długość boku AB kwadratu jest równa $|AB| = \sqrt{2}m$.

$$\text{Stąd } |EN| = \frac{\sqrt{2}}{2}m.$$

$$\text{Dalej } h = \sqrt{m^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}m\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}m^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}m.$$

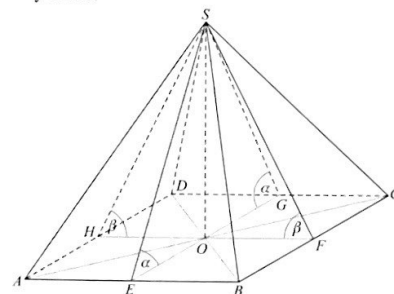


Objętość ostrosłupa $ABCD$ wynosi $\frac{1}{3} \cdot 2m^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}m = \frac{\sqrt{2}}{3}m^3$.

Ponieważ $|EN| = |ES|$, więc $\alpha = 45^\circ$.

Zadanie 9.31.

Oznaczenia takie jak na rysunku.



$$\Delta ABS \cong \Delta CDS \Rightarrow |AS| = |DS| \text{ i } |BS| = |CS| \quad (1) \text{ lub } |AS| = |CS| \text{ i } |BS| = |DS| \quad (2).$$

$$\Delta BCS \cong \Delta ADS \Rightarrow |BS| = |DS| \text{ i } |CS| = |AS| \quad (3) \text{ lub } |BS| = |AS| \text{ i } |CS| = |DS| \quad (4).$$

Jeżeli (1) i (3), to $|AS| = |DS| = |BS| = |CS|$, czyli wszystkie krawędzie boczne są równej długości.

Tak samo jest, gdy (1) i (4) lub (2) i (4).

W przypadku (2) i (3) trójkąty ACS i BDS są równoramienne o tej samej podstawie i tej samej wysokości, czyli wszystkie krawędzie boczne są równej długości. Zatem spodek wysokości jest w punkcie przecięcia przekątnych prostokąta $ABCD$.

$$\text{tg } \alpha = \frac{h}{9},$$

$$h = 9 \text{tg } \alpha.$$

$$\text{tg } \beta = \frac{h}{16},$$

$$h = 16 \text{tg } \beta.$$

$$9 \text{tg } \alpha = 16 \text{tg } \beta = \frac{16}{\text{tg } \alpha}, \quad \text{tg}^2 \alpha = \frac{16}{9}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{4}{3}.$$

$$h = 9 \text{tg } \alpha = 9 \cdot \frac{4}{3} = 12.$$

$$|ES| = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$$

$$|FS| = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20$$

$$P_c = 32 \cdot 18 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 20 = 576 + 480 + 360 = 1416.$$

Zadanie 9.35.

Twierdzenie Pitagorasa

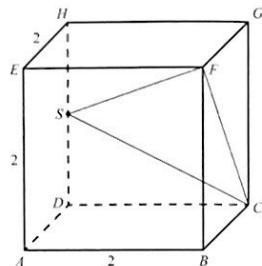
$$|CF|^2 = |CG|^2 + |GF|^2 = 8, \quad |CF| = 2\sqrt{2}$$

$$|CS|^2 = |CD|^2 + |DS|^2 = 5, \quad |CS| = \sqrt{5}$$

$$|FS|^2 = |HF|^2 + |HS|^2 = 9, \quad |FS| = 3$$

Twierdzenie cosinusów

$$\begin{aligned} \cos \angle SFC &= \frac{|CF|^2 + |SF|^2 - |CS|^2}{2 \cdot |CF| \cdot |SF|} = \\ &= \frac{8 + 9 - 5}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Odp. $\angle SFC = 45^\circ$.**Zadanie 9.36**

Oznaczenia takie jak na rysunku,

$$|SE| = |SF| = h,$$

$$|GE| = |GF| = |GB| = d.$$

Wtedy

$$d = h \sin \alpha$$

$$|SG| = h \cos \alpha$$

$$|AB| = |BC| = 2|BF| = 2d\sqrt{2}$$

$$P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h =$$

$$= 2 \cdot 2d\sqrt{2} \cdot h =$$

$$= 4\sqrt{2}h^2 \sin \alpha$$

Pole podstawy $ABCD$

$$P_{ABCD} = |AB|^2 = 8d^2 = 8h^2 \sin^2 \alpha = \sqrt{2}P \sin \alpha = \sqrt{2}P^2 \sin^2 \alpha$$

Wysokość ostrosłupa

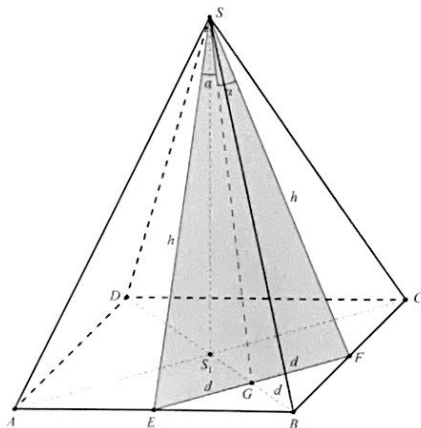
$$|SS_1| = \sqrt{|SG|^2 - |S_1G|^2} = \sqrt{h^2 \cos^2 \alpha - d^2} = \sqrt{h^2 \cos^2 \alpha - h^2 \sin^2 \alpha} =$$

$$\sqrt{h^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = \sqrt{h^2 \cos(2\alpha)} = \sqrt{\frac{P}{4\sqrt{2} \sin \alpha} \cos(2\alpha)}$$

Objętość ostrosłupa

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABCD} \cdot |SS_1| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}P^2 \sin^2 \alpha \cdot \sqrt{\frac{P}{4\sqrt{2} \sin \alpha} \cos(2\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{18\sqrt{2}}} \cdot P^3 \cdot \sin \alpha \cdot \cos(2\alpha)$$

$$\text{Odp. } k = \frac{\sqrt{2}}{36}.$$

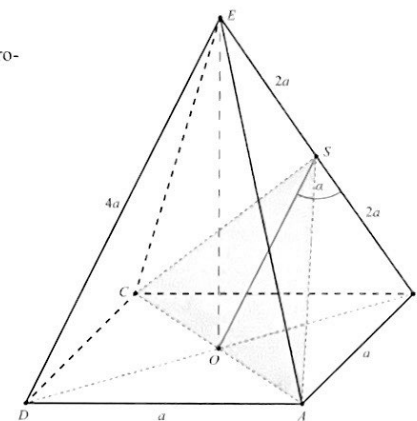
**Zadanie 9.37.**Niech $|AB| = a$. Wtedy $|BE| = 4a$ Odcinek SO jest środkową w trójkącie prostokątnym BEO , więc $|SO| = 2a$.

$$\frac{P_{ASC}}{P_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot 2a}{a^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|OS|^2 + |BS|^2 - |BO|^2}{2 \cdot |OS| \cdot |BS|} = \\ &= \frac{4a^2 + 4a^2 - a^2}{2 \cdot 2a \cdot 2a} = \frac{15}{8} = \\ &= \frac{15}{16} \approx 0,9375 \end{aligned}$$

$$\alpha \approx 20^\circ$$

Odp. Stosunek pola otrzymanego

przekroju do pola podstawy ostrosłupa wynosi $\sqrt{2}$, natomiast $\angle BSO \approx 20^\circ$.**Zadanie 9.38.**Niech O będzie środkiem przekątnej BD .Odległość punktu C od płaszczyzny BPD jest równa wysokości CQ w trójkącie prostokątnym CPO . Długość przeciwprostokątnej OP obliczymy z twierdzenia Pitagorasa

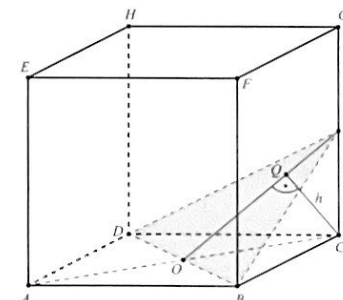
$$|OP| = \sqrt{|CO|^2 + |CP|^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Wykorzystując wzór na pole trójkąta CPO otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \cdot |CO| \cdot |CP| = \frac{1}{2} \cdot |CQ| \cdot |OP|$$

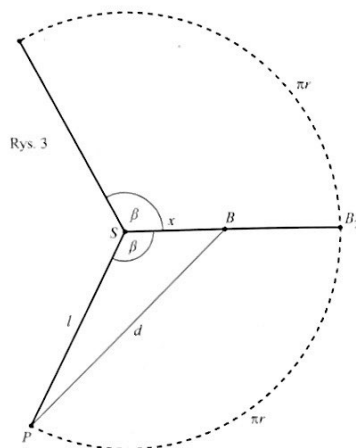
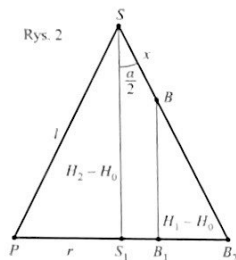
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Odp. } \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



Zadanie 9.39.

Przekrój osiowy stożka jest na rysunku 2, natomiast na rysunku 3 jest rozwinięcie powierzchni bocznej stożka.



$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{H_2 - H_0}{l} \Rightarrow l = \frac{H_2 - H_0}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{H_1 - H_0}{l - x} \Rightarrow l - x = \frac{H_1 - H_0}{\cos \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow x = \frac{H_2 - H_0}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{H_1 - H_0}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{H_2 - H_1}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{\beta}{\pi} = \frac{\pi r}{\pi l} \Rightarrow \beta = \pi \cdot \frac{r}{l} = \pi \sin \frac{\alpha}{2}$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta PBS

$$d^2 = l^2 + c^2 - 2lc \cos \beta = \frac{(H_2 - H_0)^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{(H_2 - H_1)^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{2(H_2 - H_0)(H_2 - H_1)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cos \left(\pi \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{Odp. } d = \sqrt{\frac{(H_2 - H_0)^2 + (H_2 - H_1)^2 - 2(H_2 - H_0)(H_2 - H_1) \cos \left(\pi \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

Zadanie 9.40.

Niech $|AB| = a$, $|AD| = b$.

Wtedy $|AH| = \sqrt{b^2 + h^2}$, $|AF| = \sqrt{a^2 + h^2}$, $|FH| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Jeżeli $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ i $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, to $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$.

Pole trójkąta AFH

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + h^2} \cdot \sqrt{b^2 + h^2} \cdot \frac{12}{13} = \frac{132}{5}$$

Stąd

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + h^2} \cdot \sqrt{b^2 + h^2} = \frac{22 \cdot 13}{5}$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkąta AFH

$$a^2 + b^2 = a^2 + h^2 + b^2 + h^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2 + h^2} \cdot \sqrt{b^2 + h^2} \cdot \cos \alpha$$

$$0 = 2h^2 - 2 \cdot \frac{22 \cdot 13}{5} \cdot \frac{5}{13}$$

$$h = \sqrt{22}$$

$$\text{Odp. } h = \sqrt{22}.$$

Zadanie 9.41.

Przekrojem jest trapez BCLK o wysokości EM.

$$\frac{\sqrt{10}}{10} = \cos \alpha = \frac{|ES_1|}{|ES|} \Rightarrow |ES| = \frac{a}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

$$|SS_1| = \sqrt{|ES|^2 - |ES_1|^2} = \sqrt{\frac{10a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$$

Trójkąty FEM i FS₁S są podobne, więc

$$\frac{|EM|}{|EF|} = \frac{|SS_1|}{|FS|} \Rightarrow |EM| =$$

$$= a \cdot \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{3a\sqrt{10}}{10}$$

$$|FM| = \sqrt{|EF|^2 - |EM|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{90a^2}{100}} = \sqrt{\frac{10a^2}{100}} = \frac{a\sqrt{10}}{10}$$

$$|MS| = |FS| - |FM| = \frac{a\sqrt{10}}{2} - \frac{a\sqrt{10}}{10} = \frac{4a\sqrt{10}}{10}$$

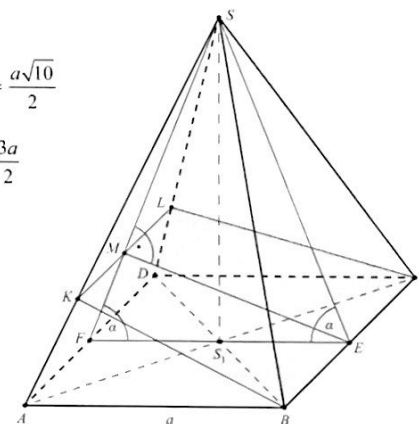
Trójkąty ADS i KLS są podobne, więc

$$\frac{|KL|}{|MS|} = \frac{|AD|}{|FS|} \Rightarrow |KL| = \frac{4a\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{a}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{4a}{5}$$

Pole trapezu

$$P = \frac{a + \frac{4a}{5}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{10}}{10} = \frac{27\sqrt{10}}{100} a^2$$

$$\text{Odp. } P = \frac{27\sqrt{10}}{100} a^2.$$



Zadanie 9.42.

Przekątna AH jest przekątną kwadratu o boku 6, więc $|AH| = 6\sqrt{2}$.

Przekątna sześcianu BH jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego ABH , którego przyprostokątne mają długości 6 oraz $6\sqrt{2}$, więc $|BH| = 6\sqrt{3}$.

Wysokość AA_1 trójkąta ABH obliczymy wykorzystując wzór na pole trójkąta.

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AH| = \frac{1}{2} \cdot |BH| \cdot |AA_1|$$

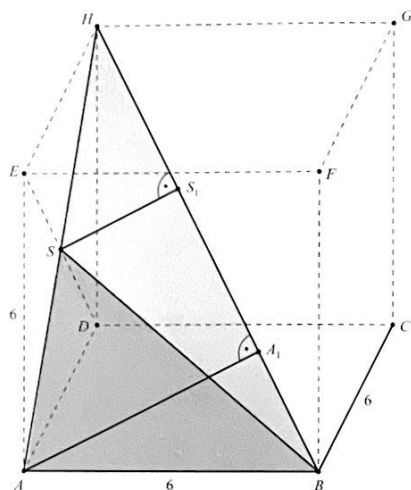
$$6 \cdot 6\sqrt{2} = 6\sqrt{3} \cdot |AA_1|$$

$$|AA_1| = 2\sqrt{6}$$

Trójkąt SS_1H jest podobny do trójkąta AA_1H i skala podobieństwa jest równa $\frac{1}{2}$.

$$\text{Zatem } |SS_1| = \sqrt{6}.$$

$$\text{Odp. } \sqrt{6}.$$

**Zadanie 9.43.**

Oznaczenia takie jak na rysunku.

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{6} \vee \cos \alpha = -\frac{5}{6}$$

$$\text{Kąt } \alpha < 60^\circ, \text{ więc } \cos \alpha = \frac{5}{6}.$$

Twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCD

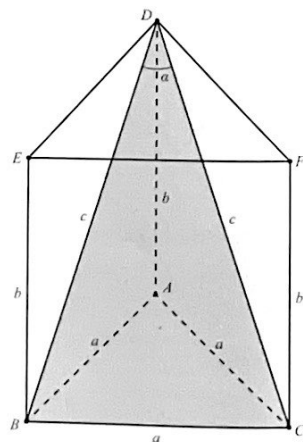
$$a^2 = c^2 + c^2 - 2c^2 \cos \alpha = 2c^2 - \frac{5}{3}c^2 = \frac{1}{3}c^2 \Rightarrow c^2 = 3a^2$$

Twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ABD

$$b^2 = c^2 - a^2 = 2a^2 \Rightarrow b = \sqrt{2}a$$

Pole powierzchni całkowitej graniastopy.

$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot \sqrt{2}a = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{2}\right)a^2$$

**10. Geometria analityczna****Zadanie 10.1.**

Punkt C leży na osi OY , więc ma współrzędne $C = (0, b)$.

$$\text{Współczynnik kierunkowy prostej } AC \text{ wynosi } a_1 = \frac{b+2}{9}.$$

$$\text{Współczynnik kierunkowy prostej } BC \text{ wynosi } a_2 = \frac{b-2}{-4}.$$

Proste AC i BC są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$. Zatem

$$\frac{b+2}{9} \cdot \frac{b-2}{-4} = -1 \Leftrightarrow b^2 - 4 = 36 \Leftrightarrow b^2 = 40 \Leftrightarrow b = 2\sqrt{10} \text{ lub } b = -2\sqrt{10}$$

$$\text{Odp. } C_1 = (0, -2\sqrt{10}), C_2 = (0, 2\sqrt{10}).$$

Zadanie 10.2.

Następujące równania są równoważne

$$x^2 + y^2 + ax + by + \frac{a \cdot b}{2} = 0$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{2}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a-b)^2$$

Ostatnie równanie jest równaniem okręgu o środku $S = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ i promieniu $r = \frac{1}{2}|a-b|$.

Zadanie 10.3.

Wyznaczając z drugiego równania $x^2 = y + 4$ i podstawiając do pierwszego otrzymujemy równanie $y^2 - 2y - 15 = 0$. Rozwiązaniem tego równania są liczby $y_1 = -3$, $y_2 = 5$.

Wtedy $x^2 = 1$ lub $x^2 = 9$.

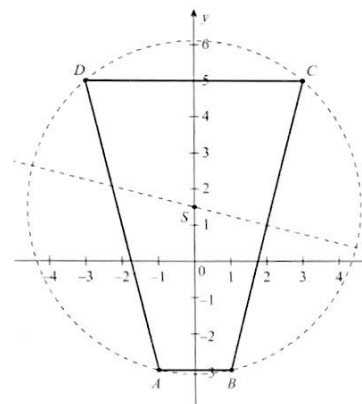
Zatem $A = (-1, -3)$, $B = (1, -3)$, $C = (3, 5)$,

$$D = (-3, 5).$$

Prosta AB ma równanie $y = -3$, natomiast prosta CD : $y = 5$.

Zatem $AB \parallel CD$, czyli czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD .

$$|AD| = \sqrt{(-3+1)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$



$$|BC| = \sqrt{(3-1)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

Stąd trapez $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.

Ponieważ podstawy trapezu są symetryczne względem osi Oy , więc środek S okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ ma współrzędne $S = (0, b)$.

Wykorzystując fakt, że S należy do symetralnej ramienia BC otrzymujemy:

$$|SB| = \sqrt{(1-0)^2 + (-3-b)^2}$$

$$|SC| = \sqrt{(3-0)^2 + (5-b)^2}$$

$$1 + 9 + 6b + b^2 = 9 + 25 - 10b + b^2$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$r = |SB| = \sqrt{(1-0)^2 + \left(-3 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}}$$

Równanie okręgu

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{4}$$

Zadanie 10.4.

Skoro $|\angle BCA| = 90^\circ$, to wierzchołek C leży na okręgu o średnicy AB . Punkt $S = (3, 5)$ jest

środkiem odcinka AB i środkiem okręgu o promieniu $r = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-2)^2} = 5$.

Równanie tego okręgu $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Współrzędne punktu C otrzymamy rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ y = 0 \end{cases}$$

Zatem $C = (3, 0)$.

Obrazem punktu $S = (3, 5)$ w jednokładności o środku w punkcie $P = (1, 0)$ i skali $k = -2$ jest

punkt $S' = (a, b)$ taki, że $\overrightarrow{PS'} = k \cdot \overrightarrow{PS}$.

$$\overrightarrow{PS'} = [a-1, b]$$

$$k \cdot \overrightarrow{PS} = -2 \cdot [2, 5] = [-4, -10]$$

Zatem $S' = (-3, -10)$ oraz $r' = |k| \cdot r = 10$.

Równanie obrazu okręgu: $(x+3)^2 + (y+10)^2 = 100$.

Zadanie 10.5.

Współrzędne wierzchołków A, B, C i D otrzymujemy rozwiązując odpowiednie układy równań:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6 \\ y = 0 \end{cases}, A = (-3, 0), B = (6, 0)$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6 \\ x = 0 \end{cases}, D = (0, 6)$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6 \\ y = 6 \end{cases}, C = (3, 6)$$

Długości podstaw $|AB| = 3 + 6 = 9$, $|CD| = 3$. Wysokość $h = 6$.

Odp. Pole trapezy wynosi $P = \frac{9+3}{2} \cdot 6 = 36$.

Zadanie 10.6.

Współrzędne wierzchołka C :

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3, q = y(3) = 9, C = (3, 9).$$

Wierzchołek $A = (a, -a^2 + 6a)$, gdzie $a < 3$.

Ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego otrzymujemy

$$|CD| = \frac{2|AD|\sqrt{3}}{2} = |AD|\sqrt{3}$$

$$D = (3, -a^2 + 6a), |AD| = |3-a|,$$

$$|CD| = |9 + a^2 - 6a| = (3-a)^2$$

$$(3-a)^2 = |3-a|\sqrt{3}$$

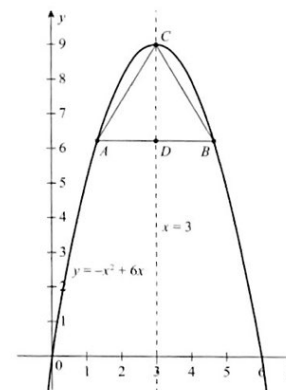
Uwzględniając, że $a < 3$ otrzymujemy $3-a = \sqrt{3}$, czyli $a = 3 - \sqrt{3}$.

$$y(3 - \sqrt{3}) = -(3 - \sqrt{3})^2 + 6(3 - \sqrt{3}) = 6$$

Zatem $A = (3 - \sqrt{3}, 6)$.

Wykorzystując, że $D = (3, 6)$ jest środkiem boku AB otrzymujemy $B = (3 + \sqrt{3}, 6)$.

Odp. $A = (3 - \sqrt{3}, 6)$, $B = (3 + \sqrt{3}, 6)$, $C = (3, 9)$.



Zadanie 10.7.

Środek okręgu leży na prostej k prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x - 3$ i przechodzącej przez punkt $A = (2, 1)$. Równanie prostej k :

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2) + 1 = -\frac{1}{2}x + 2$$

Środek okręgu leży również na prostej l prostopadłej do prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 9$ i przechodzącej przez punkt $B = (-4, 7)$. Równanie prostej l :

$$y = -2(x + 4) + 7 = -2x - 1$$

Współrzędne środka okręgu otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

$$S = (-2, 3)$$

Promień okręgu

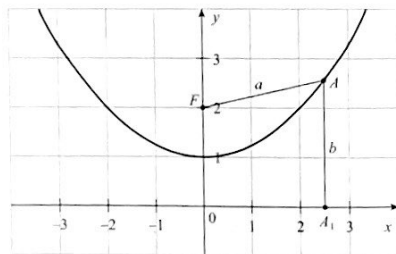
$$r = |SA| = \sqrt{(2+2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Odp. } r = 2\sqrt{5}.$$

Zadanie 10.8.

$$A = \left(x, \frac{1}{4}x^2 + 1\right),$$

$$A_1 = (x, 0)$$



$$a = |AF| = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 - 2\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2} = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

$$b = |AA_1| = \sqrt{(x-x)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2} = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

$$\text{Zatem } a = b.$$

Zadanie 10.9.

Środki i promienie okręgów

$$S_1 = (16, 0), r_1 = 2, S_2 = (6, 4), r_2 = 4.$$

Skala jednokładności

$$r_2 = |k|r_1 \text{ i } k < 0, \text{ czyli } k = -2.$$

Niech $S = (x, y)$ będzie środkiem jednokładności. Wtedy

$$\overrightarrow{SS_2} = k \overrightarrow{SS_1}$$

$$[6-x, 4-y] = -2[16-x, -y]$$

$$\begin{cases} -32 + 2x = 6 - x \\ 2y = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 38 \\ 3y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Odp. Współrzędne środka jednokładności } S = \left(\frac{38}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

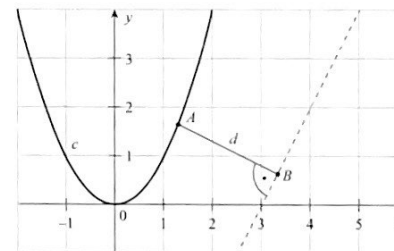
Zadanie 10.10.

Niech $A = (a, a^2)$.

Obliczymy odległość punktu A od prostej o równaniu $2x - y - 6 = 0$.

$$d = \frac{|2a - a^2 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{|a^2 - 2a + 6|}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{|(a-1)^2 + 5|}{\sqrt{5}} \geq \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

**Zadanie 10.11.**

a) Środek okręgu S leży na symetralnej odcinka AB .

Współczynnik kierunkowy prostej AB

$$a_{AB} = \frac{3-4}{-6-1} = \frac{1}{7}$$

Współrzędne środka odcinka AB

$$\left(\frac{-6+1}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Równanie symetralnej AB

$$y = -7\left(x + \frac{5}{2}\right) + \frac{7}{2} = -7x - 14$$

Środek okręgu

$$S = (-2, 0)$$

Promień okręgu

$$r = |SA| = \sqrt{(1+2)^2 + (4-0)^2} = 5$$

Równanie okręgu

$$(x+2)^2 + y^2 = 25$$

b) Równanie prostej prostopadłej do AB

$$y = -7x + b$$

$$\sqrt{2} = \frac{|7 \cdot 0 + 0 - b|}{\sqrt{50}} = \frac{|b|}{5\sqrt{2}}$$

$$b = 10 \text{ lub } b = -10$$

$$y = -7x + 10 \text{ lub } y = -7x - 10$$

Zadanie 10.12.

Równanie stycznej $y = ax - 1$, gdzie $a < 0$.

Środek okręgu $S = (-2, 3)$ jest oddalony od stycznej o równaniu $ax - y - 1 = 0$ o 2.

Zatem

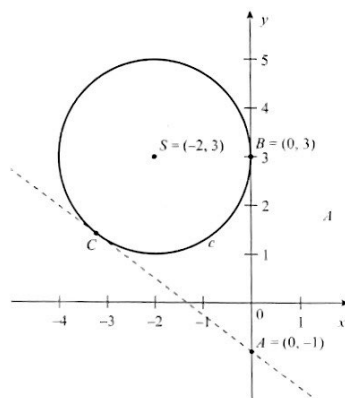
$$2 = \frac{|-2a - 3 - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$2\sqrt{a^2 + 1} = |2a + 4|$$

$$a^2 + 1 = (a + 2)^2$$

$$4a = -3$$

$$\text{Równanie stycznej } y = -\frac{3}{4}x - 1.$$



Zadanie 10.13.

$$C = (c, c+1) \quad x - y + 1 = 0$$

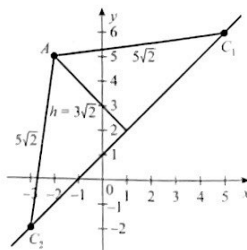
$$h = \frac{|-2 - 5 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \quad 15 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} |BC|$$

$$|BC| = \frac{30}{3\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$|AC| = \sqrt{(c+2)^2 + (c-4)^2} = |BC| = 5\sqrt{2}$$

$$(c+2)^2 + (c-4)^2 = 50 \quad 2c^2 - 4c - 30 = 0 \quad (c-5)(c+3) = 0.$$

$$\text{Odp. } C = (5, 6) \text{ lub } C = (-3, -2).$$



Zadanie 10.14.

Niech $C = (x, y)$. Wtedy

$$3 = \frac{2+x}{2} \quad x = 4 \quad 4 = \frac{-3+y}{2} \quad y = 11$$

$$C = (4, 11) \quad |AC| = \sqrt{(4-2)^2 + (11+3)^2} = \sqrt{4+196} = 10\sqrt{2}$$

$$300 = 10\sqrt{2} |BS| \quad |BS| = 15\sqrt{2}.$$

Współczynniki kierunkowe prostych.

$$\text{Prostej } AC: a_1 = \frac{4+3}{3-2} = 7. \quad \text{Prostej } BD: a_2 = -\frac{1}{7}.$$

$$\text{Równanie prostej } BD: y = -\frac{1}{7}(x-3) + 4 = -\frac{1}{7}x + 4\frac{3}{7}.$$

$$\text{Niech } B = (x, y). \text{ Wtedy } (x-3)^2 + (y-4)^2 = |BS|^2 = 450$$

$$(x-3)^2 + \left(-\frac{1}{7}x + \frac{3}{7}\right)^2 = 450 \quad (x-3)^2 + \frac{(x-3)^2}{49} = 450$$

$$\frac{50}{49}(x-3)^2 = 450$$

$$(x-2)^2 = 9 \cdot 49$$

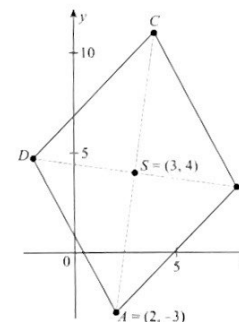
$$x-3 = 21 \text{ lub } x-3 = -21$$

$$x = 24 \text{ lub } x = -18$$

$$y = -\frac{24}{7} + \frac{31}{7} = 1$$

$$y = \frac{18}{7} + \frac{31}{7} = 7$$

$$\text{Odp. } C = (4, 11), B = (24, 1), D = (-18, 7).$$



Zadanie 10.15.

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 5$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5 \quad S = (-1, 1) \quad r = \sqrt{5}$$

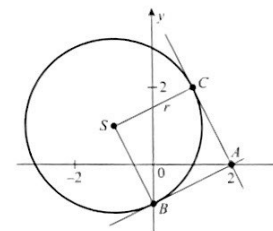
$$|SA| = \sqrt{(2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$|AC| = \sqrt{10-5} = \sqrt{5}. \quad |AB| = \sqrt{10-5} = \sqrt{5}.$$

Trójkąty ACS i ASB są prostokątne równoramienne.

Zatem $ACSB$ jest kwadratem.

$$\text{Odp. } \alpha = 90^\circ.$$



Zadanie 10.16.

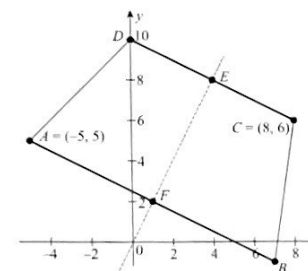
$$\text{Prosta } CD: y = -\frac{1}{2}x + 10 \quad 2x = -\frac{1}{2}x + 10$$

$$x = 4 \quad E = (4, 8).$$

$$\text{Niech } D = (x, y). \text{ Wtedy } \frac{x+8}{2} = 4 \text{ i } \frac{y+6}{2} = 8$$

$$D = (0, 10).$$

$$\text{Prosta } AB: y = -\frac{1}{2}(x+5) + 5 = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$



$$2x = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad x = 1 \quad F = (1, 2).$$

Niech $B = (x, y)$. Wtedy $\frac{x-5}{2} = 1$ i $\frac{y+5}{2} = 2$ $B = (7, -1)$.

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5} \quad |CD| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

$$|FE| = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5} \quad P = \frac{1}{2}(6\sqrt{5} + 4\sqrt{5})3\sqrt{5} = 75.$$

Odp. $D = (0, 10)$, $B = (7, -1)$. Pole $P = 75$.

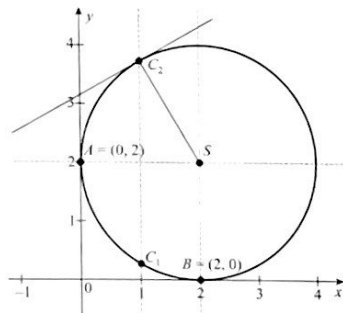
Zadanie 10.17.

Środek okręgu $S = (2, 2)$.

Równanie okręgu $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Stąd

$$(1-2)^2 + (a-2)^2 = 4 \quad (a-2)^2 = 3 \quad a = 2 + \sqrt{3} \text{ lub } a = 2 - \sqrt{3}.$$



Punkt styczności $C = (1, 2 + \sqrt{3})$.

Współczynnik kierunkowy prostej SC : $a = \frac{2 + \sqrt{3} - 2}{1 - 2} = -\sqrt{3}$.

$$\text{Styczna: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) + 2 + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

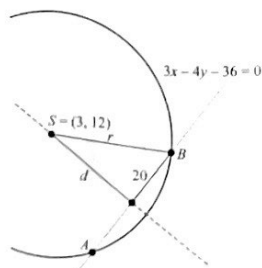
$$\text{Odp. } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Zadanie 10.18.

$$d = \frac{|9 - 48 - 36|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{75}{5} = 15.$$

$$r = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25.$$

$$\text{Odp. } (x-3)^2 + (y-12)^2 = 625.$$



Zadanie 10.19.

Środek okręgu:

$$S = (1, 3).$$

Współczynnik kierunkowy prostej AB :

$$a = \frac{2-0}{4-2} = 1.$$

Równanie symetralnej AB :

$$y = -1(x-1) + 3 = -x + 4.$$

Punkt C należy do symetralnej i okręgu:

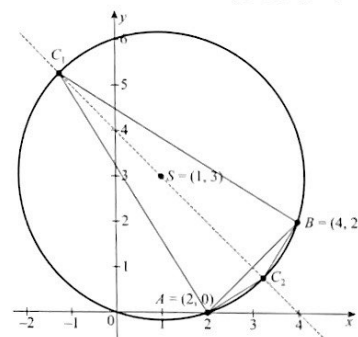
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 10 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 + (-x+1)^2 = 10$$

$$2(x-1)^2 = 10 \quad (x-1)^2 = 5$$

$$x-1 = \sqrt{5} \text{ lub } x-1 = -\sqrt{5}$$

$$x = 1 + \sqrt{5} \text{ lub } x = 1 - \sqrt{5}.$$



$$\text{Odp. } C_1 = (1 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}), \quad C_2 = (1 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}).$$

Zadanie 10.20.

$$|AB| = \sqrt{12 + 4} = 4.$$

Zatem $C = (6, 0)$.

Stąd środek okręgu opisanego na sześciokącie: $S = (4, 2\sqrt{3})$.

$$\text{Zatem } D = (8, 2\sqrt{3}).$$

$$\text{Dalej } E = (6, 4\sqrt{3}).$$

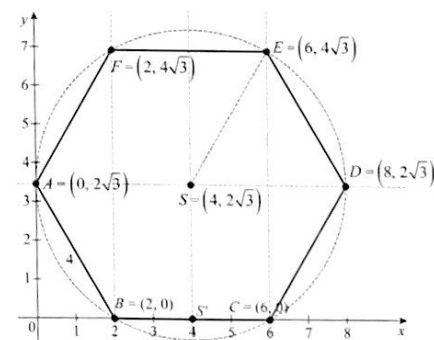
$$F = (2, 4\sqrt{3}).$$

$$\text{Współczynnik kierunkowy prostej}$$

$$SE: a = \frac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6 - 4} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Styczna: } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-6) + 4\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{3}.$$

$$\text{Odp. } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{3}.$$



Zadanie 10.21.

Symetralna AB : $y = -\frac{4}{3}x + 6$.

$$\frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}x + 6 \quad \frac{25}{12}x = \frac{15}{2} \quad x = \frac{18}{5}$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{18}{5} - \frac{3}{2} = \frac{54}{20} - \frac{30}{20} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}, \quad C = \left(\frac{18}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

Niech $A = \left(x, \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}\right)$. Wtedy

$$|AC| = \sqrt{\left(\frac{18}{5} - x\right)^2 + \left(\frac{6}{5} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}\right)^2}$$

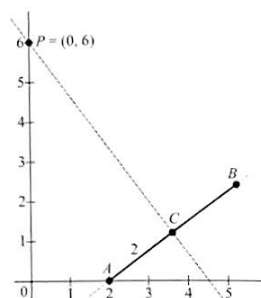
$$4 = \left(\frac{18}{5} - x\right)^2 + \left(\frac{27}{10} - \frac{3}{4}x\right)^2 \quad 4 = x^2 - \frac{36}{5}x + \frac{324}{25} + \frac{9}{16}x^2 - \frac{81}{20}x + \frac{729}{100}$$

$$\frac{25}{16}x^2 - \frac{225}{20}x + \frac{2025}{100} - 4 = 0 \quad \frac{25}{16}x^2 - \frac{45}{4}x + \frac{65}{4} = 0$$

$$25x^2 - 180x + 260 = 0 \quad 5x^2 - 36x + 52 = 0$$

$$\Delta = 1296 - 1040 = 256 \quad x_1 = \frac{36 - 16}{10} = 2 \quad x_2 = \frac{36 + 16}{10} = \frac{26}{5}$$

$$\text{Odp. } A = (2, 0), B = \left(\frac{26}{5}, \frac{12}{5}\right).$$



Zadanie 10.22.

$$S = (3, 1), r = 1.$$

Jeżeli okrąg o_1 o promieniu r leży w pierwszej „ćwiartce” układu współrzędnych i jest styczny do obu osi układu współrzędnych, to jego środek ma współrzędne $S_1 = (r, r)$.

Okręgi o_0 i o_1 są styczne zewnętrznie, więc $|SS_1| = r + 1$.

$$\text{Jednocześnie } |SS_1| = \sqrt{(r-3)^2 + (r-1)^2}.$$

Zatem

$$(r-3)^2 + (r-1)^2 = (r+1)^2$$

$$r^2 - 10r + 9 = 0$$

$$r_1 = 1, r_2 = 9$$

$$S_1 = (1, 1), S_2 = (9, 9)$$

$$|S_1S_2| = \sqrt{(9-1)^2 + (9-1)^2} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{Odp. } |S_1S_2| = 8\sqrt{2}.$$

Zadanie 10.23.

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

$$S = (-2, 3) \quad r = 4$$

Równanie stycznej

$$y = 2x + b$$

$$2x - y + b = 0$$

Odległość stycznej od środka okręgu

$$S = (-2, 3) \text{ jest równa } 4.$$

Zatem

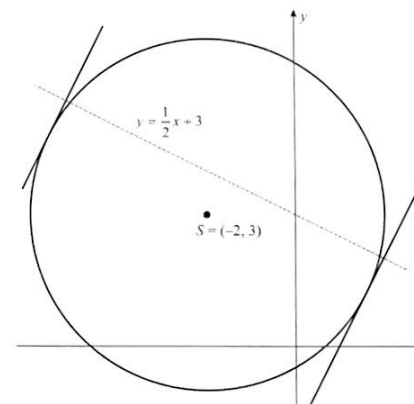
$$4 = \frac{|-4 - 3 + b|}{\sqrt{5}}$$

$$4\sqrt{5} = |b - 7|$$

$$b = 7 + 4\sqrt{5} \text{ lub } b = 7 - 4\sqrt{5}$$

$$\text{Odp. } y = 2x + 7 - 4\sqrt{5},$$

$$y = 2x + 7 + 4\sqrt{5}.$$



Zadanie 10.24.

$$21x - 28y - 122 = 0. \quad \text{Odp. } r = \frac{|21 \cdot 1 + 28 \cdot 4 - 122|}{\sqrt{441 + 784}} = \frac{11}{\sqrt{1225}} = \frac{11}{35}.$$

Zadanie 10.25.

$$\text{Niech } B = \left(b, \frac{1}{3}b + 1\right). \text{ Wtedy } C = \left(10 - b, -\frac{1}{3}b + 11\right)$$

$$|AC|^2 = (13 - b)^2 + \left(11 - \frac{1}{3}b\right)^2 \quad |BC|^2 = (10 - 2b)^2 + \left(10 - \frac{2}{3}b\right)^2$$

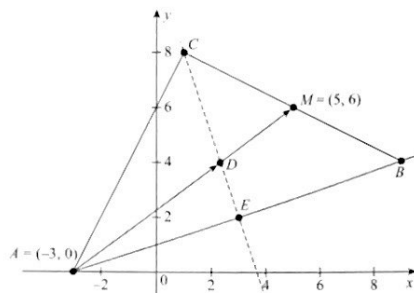
Stąd

$$169 - 26b + b^2 + 121 - \frac{22}{3}b + \frac{1}{9}b^2 = 100 - 40b + 4b^2 + 100 - \frac{40}{3}b + \frac{4}{9}b^2$$

$$\frac{10}{3}b^2 - 20b - 90 = 0 \quad b^2 - 6b - 27 = 0 \quad (b+3)(b-9) = 0$$

$$b = -3 \text{ lub } b = 9. \quad \text{Odp. } B = (9, 4).$$

II sposób



Niech punkt $D = (a, b)$ będzie punktem przecięcia się środkowych. Wtedy

$$\overline{AD} = \frac{2}{3} \overline{AM} \quad \overline{AD} = [a+3, b] \quad \frac{2}{3} \overline{AM} = \frac{2}{3} [8, 6] = \left[\frac{16}{3}, 4 \right]$$

$$a+3 = \frac{16}{3} \quad a = \frac{7}{3} \quad b = 4 \quad D = \left(\frac{7}{3}, 4 \right)$$

Prosta DE : $y = -3x + 11$. Zatem

$$\frac{1}{3}x + 1 = -3x + 11 \quad x = 3, \quad E = (3, 2).$$

Odp. $B = (9, 4)$.

Zadanie 10.26.

$$x - 2 = 5 - ax \quad x + ax = 7 \quad x = \frac{7}{a+1} \quad y = \frac{7}{a+1} - 2 = \frac{5-2a}{a+1}$$

$$\begin{cases} a+1 > 0 \\ 5-2a > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a > -1 \\ a < \frac{5}{2} \end{cases}$$

Odp. $a \in \left(-1, \frac{5}{2} \right)$.

Zadanie 10.27.

Prosta BD jest prostopadła do prostej o równaniu $y = x + 2$. Zatem równanie prostej BD jest następujące: $y = -x + 8$.

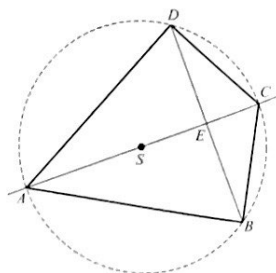
$$\text{Punkt } E \text{ (środek } BD\text{)}: \begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 8 \end{cases} \quad E = (3, 5).$$

Stąd $D = (6, 2)$.

AC jest średnicą okręgu. Zatem $AB \perp BC$.

$$\text{Współczynnik kierunkowy } AB: a = \frac{32-8}{30-0} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Prosta } BC: y = -\frac{5}{4}x + 8.$$



$$\text{Punkt } C: \begin{cases} y = x + 2 \\ y = -\frac{5}{4}x + 8 \end{cases} \quad x + 2 = -\frac{5}{4}x + 8 \quad \frac{9}{4}x = 6 \quad x = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Odp. } D = (6, 2), C = \left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3} \right).$$

II sposób

Współrzędne punktu D wyznaczamy tak jak w sposobie pierwszym.

Środek okręgu $S = (s, s+2)$

$$|AS|^2 = (s-30)^2 + (s-30)^2 \quad |BS|^2 = s^2 + (s-6)^2.$$

Stąd

$$s^2 - 60s + 900 + s^2 - 60s + 900 = s^2 + s^2 - 12s + 36 \quad 108s = 1764$$

$$s = \frac{1764}{108} = \frac{49}{3} \quad S = \left(\frac{49}{3}, \frac{55}{3} \right).$$

Wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C = (x, y)$.

$$\begin{cases} \frac{x+30}{2} = \frac{49}{3} \\ \frac{y+32}{2} = \frac{55}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{14}{3} \end{cases}$$

III sposób

Współrzędne punktu D wyznaczamy tak jak w sposobie pierwszym.

Środek AB : $(15, 20)$.

$$\text{Symetralna } AB: y = -\frac{5}{4}(x-15) + 20 = -\frac{5}{4}x + \frac{155}{4}.$$

Wyznaczenie środka okręgu:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{155}{4} \end{cases} \quad x + 2 = -\frac{5}{4}x + \frac{155}{4} \quad \frac{9}{4}x = \frac{147}{4} \quad x = \frac{49}{3}.$$

$$S = \left(\frac{49}{3}, \frac{55}{3} \right).$$

Współrzędnych punktu C wyznaczamy tak jak w sposobie II.

Zadanie 10.28.

$$\text{Prosta } BC \text{ jest prostopadła do prostej o równaniu } y = -\frac{2}{19}x - \frac{52}{19}.$$

$$\text{Zatem równanie prostej } BC: y = \frac{19}{2}(x-4) - 7 = \frac{19}{2}x - 45.$$

Środek odcinka AB :

$$D = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right).$$

Współczynnik kierunkowy prostej AB :

$$a = \frac{-7+2}{4+7} = -\frac{5}{11}.$$

Równanie prostej DC :

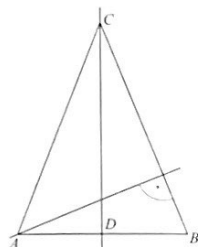
$$y = \frac{11}{5} \left(x + \frac{3}{2} \right) - \frac{9}{2} = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}.$$

Wyznaczenie współrzędnych punktu C .

$$\frac{11}{5}x - \frac{6}{5} = \frac{19}{2}x - 45 \quad x = 6$$

$$y = \frac{19}{2} \cdot 6 - 45 = 12.$$

Odp. $C = (6, 12)$.



Zadanie 10.29.

$$(x+6)^2 + (y+2)^2 = 4 \quad S = (-6, -2) \quad r = 2.$$

Styczna ma równanie $y = ax$ i jest oddalona od punktu S o 2. Zatem

$$\frac{|-6a+2|}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \quad |-6a+2| = 2\sqrt{a^2+1} \quad 36a^2 - 24a + 4 = 4a^2 + 4$$

$$32a^2 - 24a = 0 \quad a(4a-3) = 0 \quad a = 0 \text{ lub } a = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Odp. } y = 0, y = \frac{3}{4}x.$$

Zadanie 10.30.

Środek okręgu: $S = (3b-1, b)$. Wtedy

$$|AS|^2 = (3b+4)^2 + (b-3)^2 \quad |BS|^2 = (3b-1)^2 + (b-6)^2$$

$$9b^2 + 24b + 16 + b^2 - 6b + 9 = 9b^2 - 6b + 1 + b^2 - 12b + 36$$

$$18b + 25 = -18b + 37 \quad 36b = 12.$$

$$S = \left(0, \frac{1}{3} \right) \quad r^2 = \left(6 - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{289}{9}$$

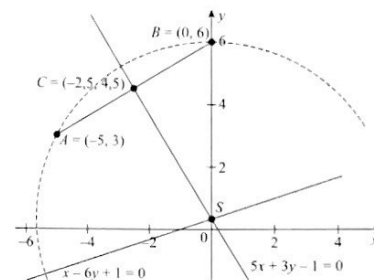
$$\text{Odp. } x^2 + \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{289}{9}.$$

II sposób

$$\text{Współczynnik kierunkowy prostej } AB: a = \frac{6-3}{0+5} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Środek } AB: C = \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

$$\text{Symetralna } AB: y = -\frac{5}{3} \left(x + \frac{5}{2} \right) + \frac{9}{2} = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3} \quad 5x + 3y - 1 = 0.$$



$$\text{Środek okręgu: } \begin{cases} 5x + 3y - 1 = 0 \\ x - 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad x = 0 \quad y = \frac{1}{3} \quad S = \left(0, \frac{1}{3} \right).$$

Zadanie 10.31.

Równanie prostej l :

$$y = a(x-8) + 2 = ax + 2 - 8a, \text{ gdzie } a \in (-\infty, 0).$$

Punkty przecięcia prostej l z osiami układu współrzędnych:

$$A = (0, 2-8a) \quad B = \left(8 - \frac{2}{a}, 0 \right).$$

Wykorzystując wzór na pole trójkąta otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}(2-8a) \left(8 - \frac{2}{a} \right) = 36$$

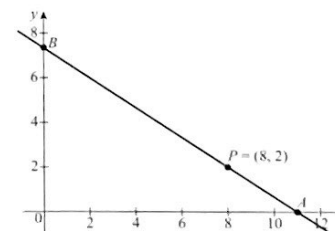
$$(1-4a) \left(8 - \frac{2}{a} \right) = 36$$

$$8 - \frac{2}{a} - 32a + 8 = 36 \quad \frac{2}{a} + 32a + 20 = 0$$

$$32a^2 + 20a + 2 = 0 \quad 16a^2 + 10a + 1 = 0$$

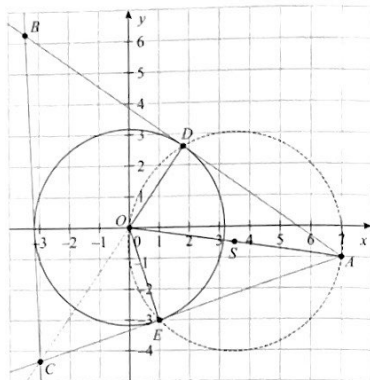
$$\Delta = 100 - 64 = 36 \quad a = \frac{-10 \pm 6}{32} = -\frac{1}{8} \text{ lub } a = \frac{-10 - 6}{32} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Odp. } y = -\frac{1}{8}x + 3 \text{ lub } y = -\frac{1}{2}x + 6.$$



Zadanie 10.32.

Punkty styczności boków AB i AC należą do okręgu o średnicy AO .



$$S = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right), |OA| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50},$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - 7x + \frac{49}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{25}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - 7x + y^2 + y = 0 \end{cases}$$

Odejmując stronami otrzymujemy:

$$-7x + y = -10, \quad y = 7x - 10.$$

Stąd

$$x^2 + (7x - 10)^2 = 10, \quad 50x^2 - 140x + 90 = 0, \quad 5x^2 - 14x + 9 = 0.$$

$$\Delta = 196 - 180 = 16, \quad x_1 = \frac{14-4}{10} = 1, \quad x_2 = \frac{14+4}{10} = \frac{9}{5}.$$

$$y_1 = 7 \cdot 1 - 10 = -3, \quad y_2 = 7 \cdot \frac{9}{5} - 10 = \frac{63-50}{5} = \frac{13}{5}$$

$$D = \left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right), \quad E = (1, -3).$$

Niech $B = (x, y)$.

$$\text{Wtedy } \frac{x+7}{2} = \frac{9}{5}, \quad x = \frac{18}{5} - 7 = \frac{18-35}{5} = -\frac{17}{5}, \quad \frac{y-1}{2} = \frac{13}{5}, \quad y = \frac{26}{5} + 1 = \frac{31}{5}.$$

$$B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right).$$

$$a_{AD} = \frac{\frac{13}{5} + 1}{\frac{9}{5} - 7} = \frac{\frac{18}{5}}{-\frac{26}{5}} = -\frac{18}{26} = -\frac{9}{13}, \quad \text{Prosta } DC: y = \frac{13}{9}x.$$

$$a_{AE} = \frac{-3+1}{1-7} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}, \quad \text{Prosta } AE: y = \frac{1}{3}(x-1) - 3 = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}.$$

$$\frac{13}{9}x = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}, \quad \frac{10}{9}x = -\frac{10}{3}, \quad x = -3, \quad y = \frac{13}{9} \cdot (-3) = -\frac{13}{3}.$$

$$\text{Odp. } B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right), C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right).$$

II sposób

Proste styczne.

$$y = a(x-7) - 1 = ax - 7a - 1, \quad ax - y - 7a - 1 = 0$$

Odległość środka okręgu $O = (0, 0)$ od stycznych wynosi $\sqrt{10}$.

$$\sqrt{10} = \frac{|-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}}, \quad 10(a^2+1) = 49a^2 + 14a + 1, \quad 39a^2 + 14a - 9 = 0.$$

$$\Delta = 196 + 1404 = 1600, \quad a_1 = \frac{-14-40}{78} = -\frac{54}{78} = -\frac{9}{13}, \quad a_2 = \frac{-14+40}{78} = \frac{26}{78} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Prosta } AB: y = -\frac{9}{13}(x-7) - 1 = -\frac{9}{13}x + \frac{63}{13} - 1 = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}.$$

$$\text{Prosta } AC: y = \frac{1}{3}(x-7) - 1 = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3} - 1 = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}.$$

Punkt styczności D .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13} \end{cases} \quad x^2 + \left(-\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}\right)^2 = 10 \quad x^2 + \frac{81}{169}x^2 - \frac{900}{169}x + \frac{2500}{169} = 10$$

$$\frac{250}{169}x^2 - \frac{900}{169}x + \frac{810}{169} = 0 \quad 25x^2 - 90x + 81 = 0 \quad (5x-9)^2 = 0 \quad D = \left(\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right).$$

Punkt B . $B = (x, y)$.

$$\frac{x+7}{2} = \frac{9}{5}, \quad x = \frac{18}{5} - 7 = \frac{18-35}{5} = -\frac{17}{5}, \quad \frac{y-1}{2} = \frac{13}{5},$$

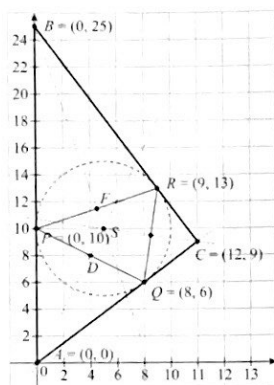
$$y = \frac{26}{5} + 1 = \frac{31}{5}.$$

$$B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right).$$

$$\text{Prosta } DC: y = \frac{13}{9}x.$$

$$\text{Punkt } C: \begin{cases} y = \frac{13}{9}x \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{13}{9}x \\ \frac{13}{9}x = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{13}{3} \end{cases} \quad C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right).$$

Zadanie 10.33.



Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie PQR . Środkami boków PQ , QR , RP są odpowiednio $D = (4, 8)$, $E = \left(\frac{17}{2}, \frac{19}{2}\right)$, $F = \left(\frac{9}{2}, \frac{23}{2}\right)$.

Symetralne boków trójkąta PQR są jednocześnie dwusiecznymi kątów trójkąta ABC .

$$a_{PQ} = \frac{6-10}{8-0} = -\frac{1}{2}. \text{ Równanie symetralnej } PQ: y = 2(x-4) + 8 = 2x.$$

$$a_{QR} = \frac{13-6}{9-8} = 7. \text{ Równanie symetralnej } QR: y = -\frac{1}{7}\left(x - \frac{17}{2}\right) + \frac{19}{2} = -\frac{1}{7}x + \frac{75}{7}.$$

$$a_{RP} = \frac{13-10}{9-0} = \frac{1}{3}. \text{ Równanie symetralnej } RP: y = -3\left(x - \frac{9}{2}\right) + \frac{23}{2} = -3x + 25.$$

Ponieważ punkty A, B leżą na osi Oy , więc $A = (0, 0)$ i $B = (0, 25)$.

Punkt C należy do symetralnej QR i do prostej AQ .

$$a_{AQ} = \frac{6-0}{8-0} = \frac{3}{4}. \text{ Równanie prostej } AQ: y = \frac{3}{4}(x-0) + 0 = \frac{3}{4}x.$$

Współrzędne punktu C :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ y = -\frac{1}{7}x + \frac{75}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ \frac{3}{4}x = -\frac{1}{7}x + \frac{75}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 21x = -4x + 300 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases}$$

Odp. $A = (0, 0)$, $B = (0, 25)$, $C = (12, 9)$.

Zadanie 10.34.

$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-4)^2 = 9.$$

Zatem środek $S_1 = (6, 4)$ i promień $r_1 = 3$.

$$x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0 \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y+2)^2 = 81.$$

Zatem środek $S_2 = (a, -2)$ i promień $r_2 = 9$.

Okręgi są styczne zewnętrznie wtedy, gdy $|S_1S_2| = r_2 + r_1$.

Okręgi są styczne wewnętrznie wtedy, gdy $|S_1S_2| = r_2 - r_1$.

$$|S_1S_2|^2 = (a-6)^2 + (-2-4)^2, (r_1+r_2)^2 = 144, (r_2-r_1)^2 = 36.$$

Zatem

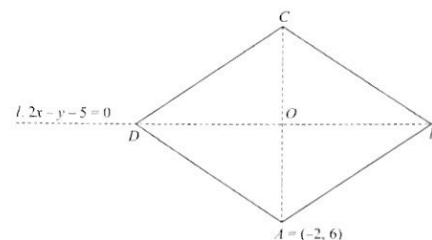
$$(a-6)^2 + 36 = 144 \text{ lub } (a-6)^2 + 36 = 36,$$

$$(a-6)^2 = 108 \text{ lub } (a-6)^2 = 0.$$

$$a-6 = 6\sqrt{3} \text{ lub } a-6 = -6\sqrt{3} \text{ lub } a = 6.$$

$$\text{Odp. } a = 6 + 6\sqrt{3}, a = 6 - 6\sqrt{3}, a = 6.$$

Zadanie 10.35.



Wykorzystamy znany wzór na odległość punktu od prostej.

$$|AO| = \frac{|-4-6-5|}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

Ze wzoru na pole rombu otrzymujemy

$$90 = |BD| \cdot 3\sqrt{5},$$

$$|BD| = 6\sqrt{5}.$$

Zatem romb $ABCD$ ma przekątne równej długości, więc jest kwadratem.

Stąd

$$6\sqrt{5} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Odp. } a = 3\sqrt{10}.$$

Zadanie 10.36.

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$$

Środek okręgu $O = (4, 3)$ a promień $r = \sqrt{17}$.

$$x^2 + (10-x)^2 - 8x - 6(10-x) + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 22x + 48 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \Leftrightarrow (x-8)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 8 \text{ lub } x = 3$$

$$\text{Zatem } K = (8, 2), L = (3, 7) \quad S = \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

Niech $O' = (a, b)$ będzie obrazem punktu O w jednokładności o środku w punkcie S i skali -3 .

$$\text{Wtedy } \overrightarrow{SO'} = -3\overrightarrow{SO}.$$

$$\overrightarrow{SO'} = \left[a - \frac{11}{2}, b - \frac{9}{2}\right], -3\overrightarrow{SO} = -3\left[4 - \frac{11}{2}, 3 - \frac{9}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right].$$

Zatem

$$\begin{cases} a - \frac{11}{2} = \frac{9}{2} \\ b - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 9 \end{cases}, \text{ czyli } O' = (10, 9) \text{ i } r' = 3\sqrt{17}$$

Odp. $(x-10)^2 + (y-9)^2 = 153$.

Zadanie 10.37.

Prosta AC jest prostopadła do prostej BD o równaniu $y = 2x - 5$, czyli prosta AC opisana jest równaniem $y = -\frac{1}{2}(x+2) + 6 = -\frac{1}{2}x + 5$.

Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych rombu $ABCD$. Zatem współrzędne punkty S są rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$$

$S = (4, 3)$

Ponieważ punkt S jest środkiem AC , więc

$$\left(\frac{-2 + x_C}{2}, \frac{6 + y_C}{2}\right) = (4, 3)$$

$C = (10, 0)$

Długość przekątnej AC

$$|AC| = \sqrt{(10+2)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{144 + 36} = 6\sqrt{5}$$

Długość przekątnej BD obliczymy wykorzystując odpowiedni wzór na pole rombu

$$\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| = \frac{165}{2}$$

$$|BD| = \frac{165}{6\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{2}$$

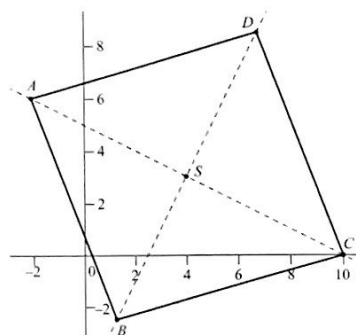
Niech wierzchołek B ma współrzędne $B = (b, 2b - 5)$. Wtedy

$$|BS| = \frac{11\sqrt{5}}{4} = \sqrt{(4-b)^2 + (3-2b+5)^2} \Leftrightarrow \frac{11\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5(4-b)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{11\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}|4-b| \Leftrightarrow |4-b| = \frac{11}{4} \Leftrightarrow b = \frac{5}{4} \text{ lub } b = \frac{27}{4}$$

$$B = \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right), D = \left(\frac{27}{4}, \frac{17}{2}\right)$$

Odp. $B = \left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right), C = (10, 0), D = \left(\frac{27}{4}, \frac{17}{2}\right)$.



Zadanie 10.38.

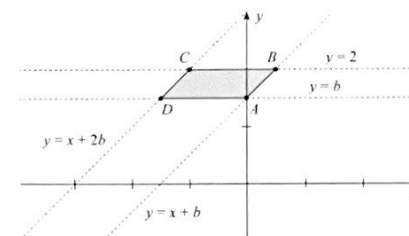
Rozwiązując układy równań otrzymujemy współrzędne wierzchołków równoległoboku.

$$\begin{cases} y = b \\ y = x + b \end{cases} \Rightarrow A = (0, b)$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = x + b \end{cases} \Rightarrow B = (2 - b, 2)$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = x + 2b \end{cases} \Rightarrow C = (2 - 2b, 2)$$

$$\begin{cases} y = b \\ y = x + 2b \end{cases} \Rightarrow D = (-b, b)$$



$$|AD| = \sqrt{(-b)^2 + (b-b)^2} = |b| = |BC|$$

Wysokość równoległoboku jest równa odległości między prostymi o równaniach $y = b$, $y = 2$, czyli wysokość jest równa $|2 - b|$.

Zatem pole równoległoboku wynosi $|b| \cdot |2 - b|$.

Stąd

$$|b| \cdot |2 - b| = 1$$

Ponieważ $|b| \cdot |2 - b| = |b(2 - b)|$, więc otrzymujemy alternatywę równań

$$b(2 - b) = 1 \text{ lub } b(2 - b) = -1$$

$$b^2 - 2b + 1 = 0 \text{ lub } b^2 - 2b - 1 = 0$$

$$(b-1)^2 = 0 \text{ lub } (b-1)^2 = 2$$

Rozwiązaniem pierwszego równania jest liczba 1, natomiast rozwiązanie drugiego równania są liczby $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$.

Odp. $b \in \{1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}\}$.

Zadanie 10.39.

Długość promienia okręgu stycznego do prostej AB jest równa odległości punktu O od tej prostej. Równanie prostej AB :

$$y = \frac{15+6}{5-8}(x-5) + 15 = -7x + 50, \text{ czyli } 7x + y - 50 = 0.$$

Zatem

$$r = \frac{|7 \cdot 0 + 0 - 50|}{\sqrt{49 + 1}} = \frac{50}{5\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

Punkt styczności okręgu i prostej AB jest punktem przecięcia prostej AB i prostej prostopadłej do AB przechodzącej przez punkt O .

Równanie prostej prostopadłej

$$y = \frac{1}{7}x$$

Współrzędne punktu przecięcia otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = -7x + 50 \\ y = \frac{1}{7}x \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $\begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$.

Odp. Punkt styczności $(7, 1)$, promień okręgu $r = 5\sqrt{2}$.

Zadanie 10.40.

$$C = (m, m^2)$$

Równanie prosta AB : $y = x + 2$.

Prosta AB przecina parabolę w punktach $M = (-1, 1)$, $N = (2, 4)$.

Zatem trójkąt ABC istnieje dla $m \in \mathbb{R} = \{-1, 2\}$.

Wysokość trójkąta ABC jest równa odległości punktu C od prostej AB .

Zatem

$$h = \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{2}}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|m^2 - m - 2|}{2}, m \in \mathbb{R} = \{-1, 2\}$$

Punkty D, E, F, G należą do paraboli oraz do prostych prostopadłych do AB przechodzących przez punkty A i B tak jak na rysunku.

Pokażemy, że okrąg o średnicy AB nie ma punktów wspólnych z parabolą o równaniu $y = x^2$. Okrąg ten jest styczny wewnętrznie do okręgu k o środku w punkcie $O = (0, 3)$ i promieniu $|AB| = \sqrt{2}$.

Równanie okręgu k : $x^2 + (y - 3)^2 = 2$.

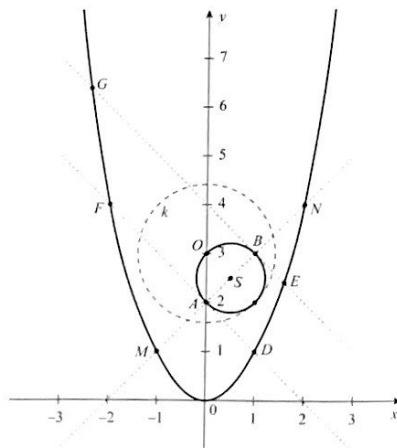
Okrąg k ma punkty wspólne z parabolą o równaniu $y = x^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań

$$\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 = 2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

ma rozwiązanie.

Podstawiając do pierwszego równania $y = x^2$ otrzymujemy:

$$x^2 + (x^2 - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$



Równanie to nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.

Zatem układ równań nie ma rozwiązania, czyli okrąg k nie ma punktów wspólnych z parabolą, tym bardziej nie ma punktów wspólnych z parabolą okrąg o średnicy AB .

Stąd trójkąt ABC jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy punkt C leży między punktami D i E lub między F i G .

Równanie prostej DF : $y = -x + 2$.

Równanie prostej EG : $y = -x + 4$.

Współrzędne punktów D oraz F otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$D = (1, 1), F = (-2, 4).$$

Współrzędne punktów E oraz G otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$E = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right), G = \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{9 + \sqrt{17}}{2}\right).$$

$$m \in \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, -2\right) \cup \left(1, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right).$$

Zadanie 10.41.

Wykorzystując, że punkt P leży na prostej o równaniu $y = x + 4$ mamy $P = (a, a + 4)$.

Ze wzoru na odległość punktu od prostej otrzymujemy

$$\frac{|a - 2(a + 4)|}{\sqrt{5}} = 2 \frac{|2a + a + 4 - 1|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$|-a - 8| = 2|3a + 3| \Leftrightarrow$$

$$|a + 8| = |6a + 6| \Leftrightarrow$$

$$6a + 6 = a + 8 \text{ lub } 6a + 6 = -a - 8 \Leftrightarrow$$

$$a = \frac{2}{5} \text{ lub } a = -2$$

$$\text{Odp. } P = \left(\frac{2}{5}, \frac{22}{5}\right) \text{ lub } P = (-2, 2).$$

Zadanie 10.42.

Środek i promień okręgu $S = (8, 4)$, $r = 4$.

Odległość prostej o równaniu $x = 9$ od środka okręgu wynosi 1, czyli nie może być styczną. Zatem styczne można opisać równaniem kierunkowym.

Równanie stycznej przechodzącej przez punkt A : $y = a(x - 9) + 12$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą.

Odległość stycznej (po przekształceniu) $ax - y - 9a + 12 = 0$ od S wynosi 4. Stąd

$$4 = \frac{|8a - 4 - 9a + 12|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$4\sqrt{a^2 + 1} = |8 - a|$$

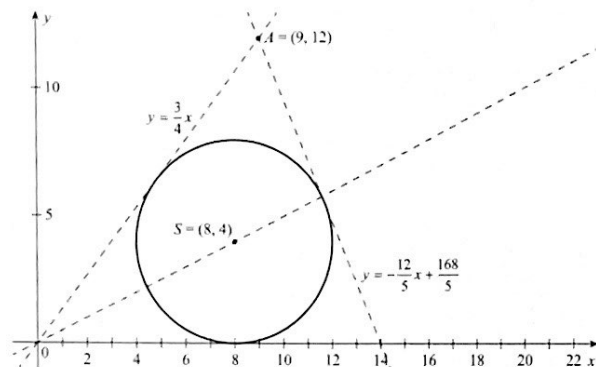
$$16a^2 + 16 = 64 - 16a + a^2$$

$$15a^2 + 16a - 48 = 0$$

$$a = \frac{4}{3} \text{ lub } a = -\frac{12}{5}$$

Równania stycznych

$$y = \frac{4}{3}x; y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5}$$



Wyznaczamy współrzędne wierzchołka B .

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \Rightarrow B_1 = (0, 0)$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -\frac{12}{5}x + \frac{168}{5} \end{cases} \Rightarrow B_2 = \left(\frac{336}{29}, \frac{168}{29}\right)$$

Dla $B_1 = (0, 0)$ styczną BC jest prosta o równaniu $y = 0$, czyli punktem styczności jest punkt o współrzędnych $(8, 0)$.

Pokażemy, że punkt $B_2 = \left(\frac{336}{29}, \frac{168}{29}\right)$ nie może być wierzchołkiem trójkąta opisanego na okręgu.

Zauważmy, że (rysunek, poniżej) $2\alpha + 2\beta < 180^\circ$, czyli $\alpha + \beta < 90^\circ$, zatem $|\angle B_2SA| > 90^\circ$. Jednocześnie

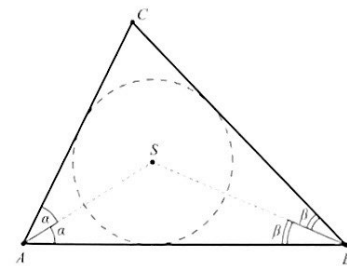
$$|SA| = \sqrt{(9-8)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{65} > 8$$

$$|B_2A| = \sqrt{\left(9 - \frac{336}{29}\right)^2 + \left(12 - \frac{168}{29}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{75}{29}\right)^2 + \left(\frac{180}{29}\right)^2} = \frac{\sqrt{5625 + 32400}}{29} = \frac{195}{29} < 7$$

Zatem $|\angle AB_2S| > |\angle B_2SA|$, czyli $|\angle B_2SA| < 90^\circ$.

Otrzymaliśmy sprzeczność, czyli punkt B_2 nie może być wierzchołkiem trójkąta opisanego na okręgu.

Odp. Prosta BC jest styczna do okręgu w punkcie $(8, 0)$.



Zadanie 10.43.

$$\begin{cases} 2x + y = 4m + 4 \\ x - 3y = -5m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ y = 2(m + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m + 1 > 0 \\ 2(m + 1) > 0 \\ 2(m + 1) \geq (m + 1)^2 \\ 2(m + 1) < -\frac{2}{m + 1} + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ 2 \geq m + 1 \\ (m + 1)^2 < -1 + 4(m + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 1 \geq m \\ m^2 - 2m + 1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m \in (-1, 1] \\ (m - 1)^2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1, 1] \\ |m - 1| < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1, 1] \\ -m + 1 < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1, 1] \\ m > 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Odp. $m \in (1 - \sqrt{3}, 1]$.

Zadanie 10.44.

Współrzędne punktów A i C otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 16x - 96 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 48 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 12) = 0$$

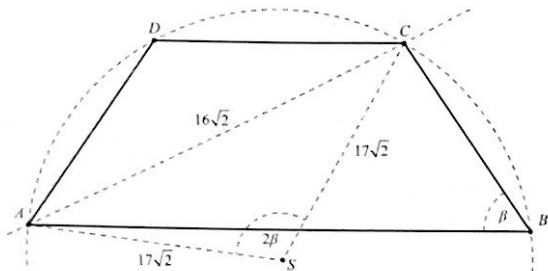
$$A = (-4, -4), C = (12, 12)$$

$$\text{Środek i promień okręgu o równaniu } (x - 19)^2 + (y + 11)^2 = 578$$

$$S = (19, -11), r = 17\sqrt{2}$$

Długość przekątnej trapezu

$$|AC| = \sqrt{(12 + 4)^2 + (12 + 4)^2} = 16\sqrt{2}$$



Twierdzenie cosinusów dla trójkąta ASC

$$\cos 2\beta = \frac{578 + 578 - 512}{2 \cdot 578} = \frac{644}{1156} = \frac{161}{289}$$

Wykorzystując wzór $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 \beta$ otrzymujemy

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{161}{289}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{128}{289}}{2}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17}$$

Odp. $\sin |\angle ABC| = \frac{8}{17}$.

Zadanie 10.45.

Niech $D = (0, 0)$.

Wtedy $B = (21, 7)$ i $C = (15, 8)$.

Wykorzystamy wzór na pole trójkąta

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} |(x_B - x_D)(y_C - y_D) - (y_B - y_D)(x_C - x_D)|$$

Wtedy

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} |21 \cdot 8 - 7 \cdot 15| = \frac{1}{2} |168 - 105| = \frac{63}{2}$$

Zatem pole równoległoboku wynosi $P_{ABCD} = 63$.

Zadanie 10.46.

Odległość punktu A od prostej o równaniu $x - y - 1 = 0$.

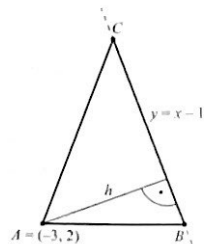
$$h = \frac{|-3 - 2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

Pole trójkąta ABC

$$15 = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot \frac{6}{\sqrt{2}}$$

Stąd

$$|AC| = |BC| = 5\sqrt{2}$$



Niech $C = (c, c - 1)$.

Wtedy

$$(c + 3)^2 + (c - 3)^2 = 50 \Leftrightarrow 2c^2 + 18 = 50 \Leftrightarrow c^2 = 16 \Leftrightarrow c = 4 \vee c = -4$$

$$C_1 = (4, 3), C_2 = (-4, -5)$$

Niech $B = (b, b - 1)$.

Wtedy

$$(b - 4)^2 + (b - 4)^2 = 50 \vee (b + 4)^2 + (b + 4)^2 = 50$$

$$|b - 4| = 5 \vee |b + 4| = 5$$

$$(b = -1 \vee b = 9) \vee (b = 1 \vee b = -9)$$

Odp. $B_1 = (-1, -2)$ i $C_1 = (4, 3)$ lub $B_2 = (9, 8)$ i $C_1 = (4, 3)$ lub $B_3 = (1, 0)$ i $C_2 = (-4, -5)$ lub $B_4 = (-9, -10)$ i $C_2 = (-4, -5)$.

Zadanie 10.47.

Środki okręgów i promienie:

$$S_1 = (6, 4), r_1 = 7\sqrt{2}, S_2 = (a, b),$$

$$r_2 = 2\sqrt{5}.$$

Punkty wspólne okręgu o_1 i o_2 leżą na prostej k , więc prosta S_1S_2 jest prostopadła do k .

Równanie prostej S_1S_2

$$y = \frac{1}{3}(x - 6) + 4 = \frac{1}{3}x + 2$$

Zatem

$$S_2 = \left(a, \frac{1}{3}a + 2\right)$$

Punkty wspólne okręgu o_1 i prostej k

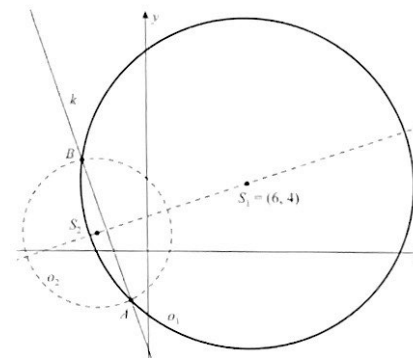
$$\begin{cases} y = -3x - 6 \\ (x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 6 \\ (x - 6)^2 + (-3x - 10)^2 = 98 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -3x - 6 \\ 10x^2 + 48x + 38 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 6 \\ 5x^2 + 24x + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 6 \\ (5x + 19)(x + 1) = 0 \end{cases}$$

Stąd

$$A = (-1, -3), B = \left(-\frac{19}{5}, \frac{27}{5}\right)$$

Odległość środka S_2 od punktu A wynosi $2\sqrt{5}$.



$$2\sqrt{5} = \sqrt{(a+1)^2 + \left(\frac{1}{3}a + 5\right)^2} \Leftrightarrow 20 = \frac{10}{9}a^2 + \frac{16}{3}a + 26 \Leftrightarrow \frac{10}{9}a^2 + \frac{16}{3}a + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$10a^2 + 48a + 54 = 0 \Leftrightarrow 5a^2 + 24a + 27 = 0 \Leftrightarrow (5a+9)(a+3) = 0$$

Stąd

$$S_2 = (-3, 1) \text{ lub } S_2 = \left(-\frac{9}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

Polożenie punktów S_2 oraz S_2 względem prostej k o równaniu $3x + y + 6 = 0$

$$S_1 = (6, 4): 3 \cdot 6 + 4 + 6 > 0$$

$$S_2 = (-3, 1): 3 \cdot (-3) + 1 + 6 < 0$$

$$S_2 = \left(-\frac{9}{5}, \frac{7}{5}\right): 3 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) + \frac{7}{5} + 6 > 0$$

Stąd

$$S_2 = (-3, 1)$$

Odp. Równanie okręgu $\sigma_2: (x+3)^2 + (y-1)^2 = 20$.**Zadanie 10.48.**

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \\ y = -x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(-x+9) = x^2 - 6x + 1 \\ y = -x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 35 = 0 \\ y = -x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 14 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 7 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$A = (7, 2), B = (-5, 14)$$

Współrzędne punktu C

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow C = (1, -1)$$

Odległość punktu C od prostej k

$$d = \frac{|1 - 1 - 9|}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

Długość odcinka AB

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}$$

Pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} = 54$$

$$\text{Odp. } d = \frac{9\sqrt{2}}{2}, P = 54.$$

Zadanie 10.49.Współrzędne punktów A i B

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)(2x-1) = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Równanie okręgu

$$S = (1, -1), 2r = |AB| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$$

Prosta AC jest nachylona do osi Ox pod kątem $45^\circ + \alpha$.Współczynnik kierunkowy prostej AC

$$a = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$$

Równanie prostej AC

$$y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = 2x - \frac{5}{2}$$

Współrzędne punktu C

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2} \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 8x + \frac{11}{4} = 0 \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 20x^2 - 32x + 11 = 0 \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(10x-11) = 0 \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$$

$$\text{Odp. } C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right).$$

II sposóbTak jak w pierwszym sposobie wyznaczamy współrzędne punktów A i B

$$A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Tak jak w pierwszym sposobie wyznaczamy równanie prostej AC

$$y = 2x - \frac{5}{2}$$

Równanie prostej BC (jest prostopadła do prostej AC)

$$y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

Współrzędne punktu C

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -2x + 1 \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -\frac{3}{2} \\ y = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{10} \\ x = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{10} + \frac{5}{2}\right) = \frac{11}{10} \end{cases}$$

$$C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$$

Zadanie 10.50.

Środek i promień okręgu

$$S = (1, 2), r = 5.$$

Ponieważ $4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$, więc punkt S należy do prostej AB , czyli AB jest średnicą okręgu.

$$|AD| = 8 \text{ i } |BD| = 2$$

Wykorzystamy twierdzenie o wysokości w trójkącie prostokątnym

$$|CD|^2 = |AD| \cdot |BD| = 16$$

$$|CD| = 4$$

Pole trójkąta ABC

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

Odp. 20.

Zadanie 10.51.

$$S_1 = (6, -1), r_1 = 4$$

Ponieważ $\overline{S_1S_2} = [-4, 4]$, więc $S_2 = (2, 3)$, $r_2 = 4$.

Ośiami symetrii figury F są proste:

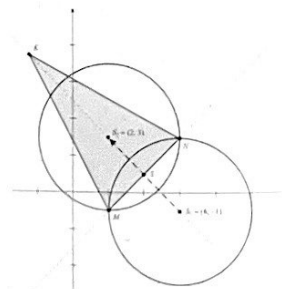
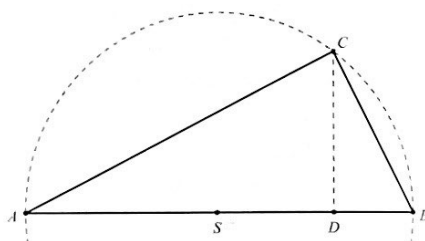
Prosta S_1S_2 oraz prosta prostopadła do prostej S_1S_2 i przechodząca przez środek odcinka S_1S_2 .

Równanie prostej S_1S_2

$$y = \frac{4}{-4} \cdot (x - 6) - 1 = -x + 5$$

Punkt S jest środkiem odcinka S_1S_2 .

$$S = (4, 1)$$



Równanie drugiej osi symetrii

$$y = 1 \cdot (x - 4) + 1 = x - 3$$

Ponieważ $|S_1S_2| = 4\sqrt{2} < 8 = r_1 + r_2$, więc okręgi o_1, o_2 się przecinają w punktach M, N , których współrzędne otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ y = x-3 \end{cases}$$

Rozwiązaniami są pary liczb

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

Zatem

$$M = (2, -1), N = (6, 3), |MN| = \sqrt{(6-2)^2 + (3+1)^2} = 4\sqrt{2}$$

Punkt K należy do prostej S_1S_2 , więc $K = (x, -x+5)$.

Wysokość trójkąta MNK

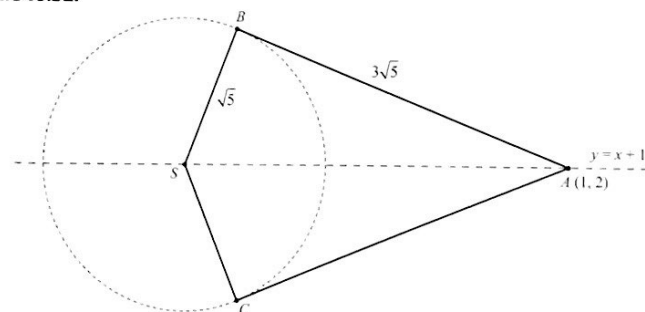
$$|SK| = \sqrt{(x-4)^2 + (-x+5-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (x-4)^2} = |x-4|\sqrt{2}$$

Pole trójkąta MNK

$$40 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot |x-4|\sqrt{2} \Leftrightarrow 10 = |x-4| \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 14$$

Odp. $K_1 = (-6, 11)$, $K_2 = (14, -9)$

Zadanie 10.52.



Trójkąty prostokątne ABS i ACS są przystające, zatem

$$\frac{15}{2} = P_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot |AB|$$

$$|AB| = 3\sqrt{5}$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$|AS|^2 = (\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 = 50$$

Niech $S = (x, x+1)$. Wtedy

$$50 = (x-1)^2 + (x+1-2)^2 = 2(x-1)^2$$

$$(x-1)^2 = 25$$

$$x = 6 \vee x = -4$$

$$\text{Odp. } S = (6, 7) \text{ lub } S = (-4, -3).$$

Zadanie 10.53.Współrzędne punktów A i B

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2 = x^2 - 2x - 8 \\ y = -3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ y = -3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -8 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$A = (-3, 7), B = (2, -8)$$

Współrzędne punktu

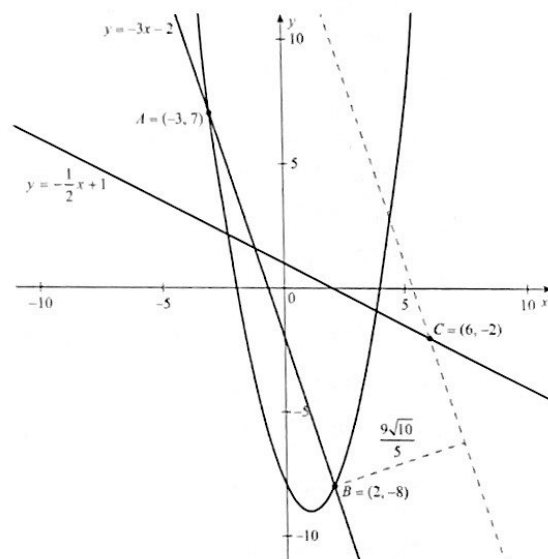
$$C = \left(c, -\frac{1}{2}c + 1\right) \text{ i } c > 0$$

$$\frac{9\sqrt{10}}{5} = \frac{\left|3c - \frac{1}{2}c + 1 + 2\right|}{\sqrt{9+1}}$$

$$\left|\frac{5}{2}c + 3\right| = 18$$

$$c = 6 \vee c = -\frac{42}{5}$$

$$C = (6, -2)$$

Długość boku BC

$$|BC| = \sqrt{(6-2)^2 + (-2+8)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

11. Kombinatoryka**Zadanie 11.1.**Liczba możliwości postawienia dwójek $\binom{8}{2} = 28$.Liczba możliwości postawienia trójek $\binom{6}{3} = 20$.Na pozostałych pozycjach stawiamy cyfry $\neq 0, 2, 3$. Można to zrobić na 7^3 sposobów.
Odp. $28 \cdot 20 \cdot 7^3 = 192080$.**Zadanie 11.2.**

Cyfry: 2, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Liczba możliwości postawienia cyfry 2: $\binom{8}{1} = 8$.Liczba możliwości postawienia cyfry 6: $\binom{7}{1} = 7$.

Cyfry: 2, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 1.

Liczba możliwości postawienia cyfry 2: $\binom{8}{2} = 28$.Liczba możliwości postawienia cyfry 3: $\binom{6}{1} = 6$.

Cyfry: 3, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Liczba możliwości postawienia cyfry 3: $\binom{8}{1} = 8$.Liczba możliwości postawienia cyfry 4: $\binom{7}{1} = 7$.Odp. $8 \cdot 7 + 28 \cdot 6 + 8 \cdot 7 = 280$.**Zadanie 11.3.**

Podzielne przez 6: 102, 108, 114, ..., 996.

$$996 = 102 + (n-1)6 \quad 900 = 6n \quad n = 150.$$

Podzielne przez 15: 105, 120, 135, ..., 990.

$$990 = 105 + (n-1)15 \quad 900 = 15n \quad n = 60.$$

Podzielne przez 30: 120, 150, 180, ..., 990.

$$990 = 120 + (n-1)30 \quad 900 = 30n \quad n = 30.$$

Odp. $150 + 60 - 30 = 180$.

Zadanie 11.4.

Liczba możliwości postawienia cyfr 0: $\binom{5}{3} = 10$.

Liczba możliwości postawienia cyfry 5: $\binom{3}{1} = 3$.

Na pozostałych miejscach stawiamy cyfry $\neq 0, 5$. Można to zrobić na 8^2 sposobów.
Odp. $10 \cdot 3 \cdot 8^2 = 1920$.

Zadanie 11.5.

Liczby, w których nie ma cyfry 2:

$$8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 23328.$$

Liczby, w których jest jedna cyfra 2.

$$\underbrace{8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1}_{\text{Cyfra 2 na końcu}} + \underbrace{1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4}_{\text{Cyfra 2 na początku}} + 8 \cdot \underbrace{\binom{3}{1} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4}_{\text{Cyfra 2 w środku}} = 5832 + 2916 + 7776 = 16524.$$

Liczby, w których są dwie cyfry 2.

$$\underbrace{1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1}_{\text{Cyfra 2 na końcu i na początku}} + 8 \cdot \underbrace{\binom{3}{1} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1}_{\text{Cyfra 2 na końcu i w środku}} + 1 \cdot \underbrace{\binom{3}{1} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4}_{\text{Cyfra 2 na początku i w środku}} + 8 \cdot \underbrace{\binom{3}{2} \cdot 9 \cdot 4}_{\text{Dwie cyfry 2 w środku}} =$$

$$= 729 + 1944 + 972 + 864 = 4509.$$

$$\text{Odp. } 23328 + 16524 + 4509 = 44361.$$

Zadanie 11.6.

Liczba możliwości postawienia cyfr 1: $\binom{10}{3} = 120$.

Na pozostałych miejscach stawiamy cyfry 2, 3. Można to zrobić na 2^7 sposobów.
Odp. $120 \cdot 2^7 = 15360$.

Zadanie 11.7.

$$\underbrace{5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 5}_{\text{nieparzysta na początku}} + 4 \cdot \underbrace{\binom{4}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{parzysta na początku}} \cdot 5 = 6 \cdot 5^5 + 4 \cdot 4 \cdot 5^4 = 18750 + 10000 = 28750.$$

$$\text{Odp. } 28750.$$

Zadanie 11.8.

Liczba możliwości postawienia cyfr 9: $\binom{6}{2} = 15$.

Liczba możliwości postawienia cyfr 6: $\binom{4}{1} = 4$.

Suma trzech cyfr $2 \cdot 9 + 6 = 24$. Stąd suma pozostałych trzech cyfr jest równa 6.

$$6 = 2 + 2 + 2. \text{ Wtedy } 15 \cdot 4 \cdot \binom{3}{3} = 60.$$

$$6 = 1 + 2 + 3. \text{ Wtedy } 15 \cdot 4 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 360.$$

$$6 = 1 + 1 + 4. \text{ Wtedy } 15 \cdot 4 \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 180.$$

$$\text{Odp. } 60 + 360 + 180 = 600.$$

Zadanie 11.9.

Niech $c_5 c_4 c_3 c_2 c_1$ będą cyframi tej liczby.

Z założeń wynika, że:

$c_1 = 0$ i $c_5 \neq 0$ oraz $c_5 + c_4 + c_3 + c_2$ jest podzielne przez 3.

Zauważmy, że suma $c_5 + c_4 + c_3 = 3k$ lub $c_5 + c_4 + c_3 = 3k + 1$ lub $c_5 + c_4 + c_3 = 3k + 2$.
Wtedy odpowiednio $c_2 = 0$ lub $c_2 = 2$ lub $c_2 = 1$.

Zatem $c_5 \in \{1, 2\}$, $c_4, c_3 \in \{0, 1, 2\}$.

Stąd liczb jest $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 18$.

$$\text{Odp. } 18.$$

Zadanie 11.10.

Wszystkich liczb jest $5! = 120$.

Każdą liczbę możemy zapisać tak:

$$c_5 \cdot 10^4 + c_4 \cdot 10^3 + c_3 \cdot 10^2 + c_2 \cdot 10 + c_1 \cdot 1.$$

Każda z cyfr 1, 3, 5, 7, 9 na każdej pozycji występuje 24 razy.

Zatem suma tych liczb jest równa:

$$\begin{aligned} &24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 10^4 + \\ &24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 10^3 + \\ &24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 10^2 + \\ &24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 10 + \\ &24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 1 = \\ &24 \cdot 25 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 600 \cdot 11111 = 6666600. \end{aligned}$$

$$\text{Odp. } 6666600.$$

II sposób (Pomysł – Krzysztof Kraik, absolwent LO w Strzelcach Opolskich)

Każda z cyfr na ustalonej pozycji liczby pięciocyfrowej występuje 24 razy. Suma liczb się nie zmienia, gdy na ustalonej pozycji będzie średnia cyfr 1, 3, 5, 7, 9, czyli 5, tylko $5 \cdot 24 = 120$ razy. Zatem suma wszystkich liczb wynosi: $120 \cdot 55555 = 6666600$.

Zadanie 11.11.

$$28 = 7 \cdot 4 = 7 \cdot 2 \cdot 2.$$

Zatem liczba siedmiocyfrowa jest zapisana za pomocą 7 i 4 oraz pięciu 1 lub 7 i dwóch 2 i czterech 1.

W pierwszym przypadku 7 możemy postawić na $\binom{7}{1}$ sposobów, 4 na $\binom{6}{1}$ sposobów.

W drugim przypadku 7 możemy postawić na $\binom{7}{1}$ sposobów, 2 na $\binom{6}{2}$ sposobów.

Zatem takich liczb jest $7 \cdot 6 + 7 \cdot 15 = 147$

Odp. 147.

Zadanie 11.12.

Cyfrę 1 możemy postawić na $\binom{7}{3} = 35$ sposobów.

Cyfrę 2 możemy postawić na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów.

Na pozostałych dwóch pozycjach możemy postawić każdą cyfrę różną od 1, 2.

Można to zrobić na $8 \cdot 8 = 64$ sposobów.

Policzymy teraz liczby z zerem na początku.

Cyfrę 1 możemy postawić na $\binom{6}{3} = 20$ sposobów.

Cyfrę 2 możemy postawić na $\binom{3}{2} = 3$ sposoby.

Ostatnią cyfrę możemy postawić na 8 sposobów.

Zatem liczb siedmiocyfrowych jest $35 \cdot 6 \cdot 64 - 20 \cdot 3 \cdot 8 = 13\,440 - 480 = 12\,960$

Odp. 12 960.

II sposób

Liczby bez cyfry zero.

Cyfrę 1 możemy postawić na $\binom{7}{3} = 35$ sposobów.

Cyfrę 2 możemy postawić na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów.

Na pozostałych dwóch pozycjach możemy postawić każdą cyfrę różną od 0, 1, 2. Można to zrobić na $7 \cdot 7 = 49$ sposobów.

Zatem liczb siedmiocyfrowych bez zera jest $35 \cdot 6 \cdot 49 = 10\,290$.

Liczby z jedną cyfrą zero.

Cyfrę 0 możemy postawić na $\binom{6}{1} = 6$ sposobów.

Cyfrę 1 możemy postawić na $\binom{6}{3} = 20$ sposobów.

Cyfrę 2 możemy postawić na $\binom{3}{2} = 3$ sposoby.

Ostatnią cyfrę możemy postawić na 7 sposobów.

Zatem liczb siedmiocyfrowych z jednym zera jest $6 \cdot 20 \cdot 3 \cdot 7 = 2520$.

Liczby z dwoma zerami.

Cyfrę 0 możemy postawić na $\binom{6}{2} = 15$ sposobów.

Cyfrę 1 możemy postawić na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów.

Cyfrę 2 możemy postawić na $\binom{2}{2} = 1$ sposob.

Zatem liczb siedmiocyfrowych z dwoma zerami jest $15 \cdot 10 \cdot 1 = 150$.
 $10\,290 + 2520 + 150 = 12\,960$

Zadanie 11.13.

$28 = 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ lub $28 = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

Liczb z jedną cyfrą 7 i jedną cyfrą 4 oraz pięcioma cyframi 1, jest tyle na ile sposobów możemy postawić cyfrę 7 i cyfrę 4 w ciągu siedmiowyrazowym.

Można to zrobić na $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{1}$ sposobów.

Liczb z jedną cyfrą 7 i dwiema cyframi 2 oraz czterema cyframi 1, jest tyle na ile sposobów możemy postawić cyfrę 7 i dwie cyfry 2 w ciągu siedmiowyrazowym.

Można to zrobić na $\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2}$ sposobów.

Zatem siedmiocyfrowych liczb jest

$$\binom{7}{1} \cdot \binom{6}{1} + \binom{7}{1} \cdot \binom{6}{2} = 7 \cdot 6 + 7 \cdot 15 = 147$$

Odp. 147.

Zadanie 11.14.

Sumę dziesięciu cyfr różnych od zera równą 13 możemy otrzymać w następujący sposób:

$$1) \quad 9 \cdot 1 + 4 = 13$$

$$2) \quad 8 \cdot 1 + 2 + 3 = 13$$

$$3) \quad 7 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 13$$

W pierwszym przypadku możemy to zrobić na tyle sposobów na ile sposobów możemy postawić cyfrę 4 w ciągu dziesięciowyrazowym. Można to zrobić na $\binom{10}{1}$ sposobów.

W drugim przypadku możemy to zrobić na tyle sposobów na ile sposobów możemy postawić cyfry 3 i 2 w ciągu dziesięciowyrazowym. Można to zrobić na $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{1}$ sposobów.

W trzecim przypadku możemy to zrobić na tyle sposobów na ile sposobów możemy postawić trzy cyfry 2 w ciągu dziesięciowyrazowym. Można to zrobić na $\binom{10}{3}$ sposobów.

Zatem liczb dziesięciocyfrowych o cyfrach różnych od zera i sumie cyfr 13 jest

$$\binom{10}{1} + \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{1} + \binom{10}{3} = 10 + 90 + 120 = 220.$$

Odp. 220.

Zadanie 11.15.

Każda najkrótsza droga z punktu X do punktu Y może być opisana ciągiem dwunastowyrazowym, gdzie 9 razy występuje p i 3 razy g .

p – oznacz „idziemy w prawo”, g w górę.

Droga na rysunku jest opisana ciągiem $ppppgpppppgg$.

Ciągów takich jest $\binom{12}{3}$.

Wracamy do zadania.

Do punktu B możemy dojść przez punkty C, D, E, F, G.

Przez punkt C może dojść na

$$\binom{13}{0} \cdot \binom{11}{9} \text{ sposobów.}$$

Przez punkt D może dojść na

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{11}{8} \text{ sposobów.}$$

Przez punkt E może dojść na

$$\binom{11}{7} \cdot \binom{13}{2} \text{ sposobów.}$$

Przez punkt F może dojść na

$$\binom{11}{8} \cdot \binom{13}{1} \text{ sposobów.}$$

Przez punkt G może dojść na $\binom{11}{9} \cdot \binom{13}{0}$ sposobów.

Zatem najkrótszych dróg jest

$$\binom{13}{0} \cdot \binom{11}{9} + \binom{13}{1} \cdot \binom{11}{8} + \binom{11}{7} \cdot \binom{13}{2} + \binom{11}{8} \cdot \binom{13}{1} + \binom{11}{9} \cdot \binom{13}{0} =$$

$$1 \cdot 55 + 13 \cdot 165 + 330 \cdot 78 + 165 \cdot 13 + 55 \cdot 1 = (55 + 2145) \cdot 2 + 25740 = 30140$$

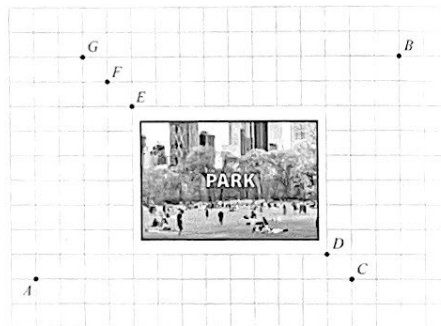
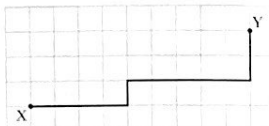
Odp. 30 140.

Zadanie 11.16.

Liczby o pierwszej cyfrze nieparzystej.

Cyfry nieparzyste możemy postawić na $\binom{4}{1} \cdot 5^2$ sposobów.

Cyfry parzyste możemy postawić na 5^3 sposobów.



Zatem

$$\binom{4}{1} \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 4 \cdot 5^5 = 20 \cdot 5^4$$

Liczby o pierwszej cyfrze parzystej.

Cyfry nieparzyste możemy postawić na $\binom{4}{2} \cdot 5^2$ sposobów.

Cyfry parzyste możemy postawić na $4 \cdot 5^2$ sposobów.

Zatem

$$\binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 4 \cdot 5^2 = 6 \cdot 4 \cdot 5^4 = 24 \cdot 5^4$$

Odp. $20 \cdot 5^4 + 24 \cdot 5^4 = 44 \cdot 5^4 = 27\,500$.

Zadanie 11.17.

n osób można ustawić w szeregu na $n!$ sposobów.

Anię i jej dwoje znajomych traktujemy jako jedną osobę. Wtedy mamy $n-2$ osób, które możemy ustawić w szeregu na $(n-2)!$ sposobów.

Jednocześnie Ania i jej dwoje znajomych mogą stanąć na 3! sposobów.

Zatem zgodnie z założeniem otrzymujemy równanie

$$n! = 12 \cdot (n-2)! \cdot 3!$$

Po uproszczeniu mamy

$$n \cdot (n-1) = 72 = 9 \cdot 8$$

Odp. $n = 9$.

Zadanie 11.18.

Tworzymy pięciowyrazowe ciągi $abcde$ różnowartościowe o wyrazach ze zbioru

$\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ takie, że liczby nieparzyste występują trzy razy, a liczby parzyste dwa razy.

Trzy liczby nieparzyste możemy wybrać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów.

Dwie liczby parzyste możemy wybrać na $\binom{5}{2} = 10$ sposobów.

Ciągów pięciowyrazowych z wybranych liczb utworzymy $5! = 120$.

Stąd ciągów mamy $10 \cdot 10 \cdot 120 = 12\,000$.

Policzymy, ile wśród nich jest ciągów o pierwszym wyrazie 0.

Trzy liczby nieparzyste możemy wybrać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów.

Drugą liczbę parzystą możemy wybrać na $\binom{4}{1} = 4$ sposoby.

Ciągów $Obcde$ z wybranych liczb utworzymy $4! = 24$.

Stąd ciągów $Obcde$ mamy $10 \cdot 4 \cdot 24 = 960$.

Zatem liczb spełniających warunki zadania jest $12000 - 960 = 11040$.

Odp. 11040.

II sposób

Trzy cyfry nieparzyste możemy wybrać na $\binom{5}{3} = 10$ sposobów.

Dwie cyfry parzyste bez zera możemy wybrać na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów.

Liczb pięciocyfrowych z wybranych cyfr utworzymy $5! = 120$.

Zatem liczb pięciocyfrowych bez zera jest $10 \cdot 6 \cdot 120 = 7200$.

Dwie cyfry parzyste z zerem możemy wybrać na $\binom{4}{1} = 4$ sposoby.

Liczb pięciocyfrowych z wybranych cyfr utworzymy $4 \cdot 4! = 96$.

Zatem liczb pięciocyfrowych z zerem jest $10 \cdot 4 \cdot 96 = 3840$.

Zatem liczb spełniających warunki zadania jest $7200 + 3840 = 11040$.

12. Rachunek prawdopodobieństwa

Zadanie 12.1.

Doświadczenie losowe można opisać schematem Bernoullego.

Prawdopodobieństwo sukcesu $p = \frac{1}{6}$.

Liczba prób $n = 5$.

Liczba sukcesów $k \geq 4$, czyli $k = 4$ lub $k = 5$.

Zatem

$$P(S_5^4 \cup S_5^5) = P(S_5^4) + P(S_5^5)$$

$$P_5(k \geq 4) = P_5(4) + P_5(5) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{25}{6^5} + \frac{1}{6^5} = \frac{26}{6^5} = \frac{13}{3888}$$

Odp. $\frac{13}{3888}$.

Zadanie 12.2.

A – trafienie 4 liczb.

B – trafienie 5 liczb.

$$P(A) = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{37}{1}}{\binom{42}{5}} = \frac{5 \cdot 37}{\frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}} = \frac{185}{14 \cdot 41 \cdot 39 \cdot 38}$$

$$P(B) = \frac{\binom{5}{5}}{\binom{42}{5}} = \frac{1}{14 \cdot 41 \cdot 39 \cdot 38}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{186}{14 \cdot 41 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{31}{7 \cdot 41 \cdot 13 \cdot 38} = \frac{31}{141778} = 0,0002186$$

Odp. 0,00022.

Zadanie 12.3.

A – wygranie na pierwszej loterii.

B – wygranie na drugiej loterii.

$$P(A') = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{n-2}{n}$$

$$P(A) = 1 - \frac{n-2}{n} = \frac{2}{n}$$

$$P(B') = \frac{\binom{2n-2}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{(n-1)(2n-3)}{n(2n-1)}$$

$$P(B) = 1 - \frac{(n-1)(2n-3)}{n(2n-1)} = \frac{2n^2 - n - 2n^2 + 5n - 3}{n(2n-1)} = \frac{4n-3}{n(2n-1)}$$

$$\frac{4n-3}{n(2n-1)} < \frac{4n-2}{n(2n-1)} = \frac{2(2n-1)}{n(2n-1)} = \frac{2}{n}$$

Odp. Losy należy kupić na pierwszej loterii.

Zadanie 12.4.

Doświadczenie losowe można opisać schematem Bernoullego.

Prawdopodobieństwo sukcesu $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Liczba prób n .

Liczba sukcesów $k \geq 1$.

Zatem

$$P(S_n^1 \cup S_n^2 \cup \dots \cup S_n^n) = 1 - P(S_n^0) = 1 - P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{671}{1296} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n > \frac{625}{1296} \Leftrightarrow n < 4$$

Odp. $n \in \{1, 2, 3\}$.

Zadanie 12.5.

Zdarzenia

 A – autobus prowadzi kierowca A, B – autobus prowadzi kierowca B, C – autobus prowadzi kierowca C, S – autobus spóźnia się.

$$P(S) = P(S|A) \cdot P(A) + P(S|B) \cdot P(B) + P(S|C) \cdot P(C) = \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{5} + \frac{20}{100} \cdot \frac{2}{5} + \frac{50}{100} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

Odp. Prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu wynosi $\frac{1}{5}$.

Zadanie 12.6.

$$|\Omega| = 8!$$

Skoro żona będzie szła bezpośrednio przed mężem to znaczy, że żona jest ostatnią kobietą w szeregu kobiet, a mąż jest pierwszy w szeregu mężczyzn.

Ustawienia: $(k, k, k, \text{żona}, \text{mąż}, m, m, m)$

Kobiety mogą się ustawić na $3!$ sposobów oraz mężczyźni na $3!$

Zatem

$$P(A) = \frac{3!3!}{8!} = \frac{6}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{1}{1120} < \frac{1}{1000}$$

Zadanie 12.7.

A – w delegacji znajdują się tylko kobiety.

Liczba kobiet – n , liczba mężczyzn $2n$, $n \geq 2$.

$$|\Omega| = \binom{3n}{2}, |A| = \binom{n}{2}$$

$$P(A) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}} = \frac{n(n-1)}{3n(3n-1)} = \frac{n-1}{9n-3} = \frac{1}{10}$$

Zatem

$$10n - 10 = 9n - 3$$

$$n = 7$$

Odp. W grupie było 7 kobiet oraz 14 mężczyzn.

Zadanie 12.8.

Oznaczmy przez n liczbę kul czarnych. Wtedy liczba kul białych wynosi $3n$.

A – wylosowanie dwóch kul o różnych kolorach.

$$|\Omega| = \binom{4n}{2}, |A| = \binom{n}{1} \cdot \binom{3n}{1}$$

$$P(A) = \frac{\binom{n}{1} \cdot \binom{3n}{1}}{\binom{4n}{2}} = \frac{n \cdot 3n}{2n(4n-1)} = \frac{3n}{8n-2}$$

Zgodnie z założeniem $\frac{3n}{8n-2} > \frac{9}{22}$, czyli $66n > 72n - 18$, $6n < 18$, $n < 3$.

Zatem $n = 1$ lub $n = 2$

Odp. W urnie są cztery kule lub w urnie jest osiem kul.

Zadanie 12.9.

$$|\Omega| = 6^3.$$

$a^2 \equiv 0 \pmod{3}$ lub $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Zatem suma kwadratów jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy trzy liczby są podzielne przez 3 lub trzy liczby są niepodzielne przez 3.

$$|A| = 2^3 + 4^3 = 8 + 64 = 72.$$

$$\text{Odp. } P(A) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}.$$

Zadanie 12.10.

$$|\Omega| = 8!.$$

Suma dwóch liczb jest nieparzysta wtedy, gdy jedna jest parzysta druga nieparzysta. Zatem są dwie możliwości: zaczyna się od parzystej i później na przemian lub odwrotnie od nieparzystej.

$$\underbrace{p, n, p, n, p, n, p, n}_{4 \ 4 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1} \text{ lub } \underbrace{n, p, n, p, n, p, n, p}_{4 \ 4 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1}$$

$$\text{Odp. } P(A) = \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{1}{35}.$$

Zadanie 12.11.

$$|\Omega| = 3^4 = 81$$

$$7 = 3 + 2 + 1 + 1 \text{ lub } 7 = 2 + 2 + 2 + 1$$

$$|A| = \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{2} + \binom{4}{3} \binom{1}{1} = 4 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 16$$

$$\binom{4}{1} - \text{liczba możliwości dla cyfry 3}$$

$$\binom{3}{1} - \text{liczba możliwości dla cyfry 2}$$

$$\binom{2}{2} - \text{liczba możliwości dla cyfry 1}$$

$$\binom{4}{3} - \text{liczba możliwości dla cyfry 2}$$

$\binom{1}{1}$ – liczba możliwości dla cyfry 1

Odp. $P(A) = \frac{16}{81}$.

Zadanie 12.12.

$$|\Omega| = 6^4.$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \text{ lub } 60 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1 \text{ lub } 60 = 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1$$

$$|A| = \binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = 6 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 60$$

$\binom{4}{2}$ – liczba możliwości dla liczb 2

$\binom{2}{1}$ – liczba możliwości dla liczby 3

$\binom{1}{1}$ – liczba możliwości dla liczby 5

$\binom{4}{1}$ – liczba możliwości dla liczby 4 tak samo dla liczby 2

$\binom{3}{1}$ – liczba możliwości dla liczby 3 tak samo dla liczby 6

$\binom{2}{1}$ – liczba możliwości dla liczby 5

$\binom{1}{1}$ – liczba możliwości dla liczby 1

Odp. $P(A) = \frac{60}{6^4} = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$.

Zadanie 12.13.

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

$$10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$$

$$8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$$

$$6 = 1 + 5 = 2 + 4$$

$$4 = 1 + 3$$

$$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$$

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$$

$$5 = 1 + 4 = 2 + 3$$

$$3 = 1 + 2$$

Odp. $P(A) = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

Zadanie 12.14.

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Trzy kule różnokolorowe: (b, c, z) lub (b, c, n) lub (b, z, n) lub (c, z, n) .

$$|A| = \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{1}{1} + \binom{4}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} + \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 50.$$

Odp. $P(A) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$.

Zadanie 12.15.

Zdarzenia:

A – w trzykrotnym rzucie otrzymamy co najmniej jedną „jedynekę”.

B – w trzykrotnym rzucie otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

Mamy obliczyć $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

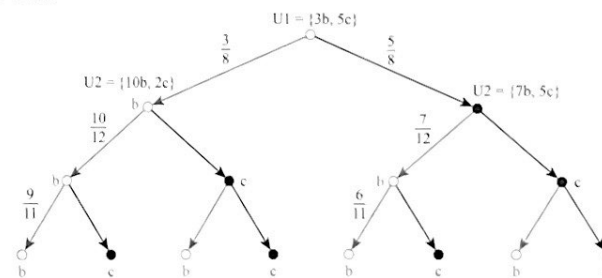
$$|B| = 6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91.$$

$A \cap B$ – (dwie szóstki i jedna jedynka) lub (dwie jedynki i jedna szóstka) lub (jedna jedynka i jedna szóstka oraz liczba różna od jedynki i szóstki).

$$|A \cap B| = 3 + 3 + 3 \cdot 2 \cdot 4 = 30.$$

Odp. $P(A|B) = \frac{30}{91}$.

Zadanie 12.16.



$$P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{11} + \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{45}{176} + \frac{35}{176} = \frac{80}{176} = \frac{5}{11}.$$

Zadanie 12.17.

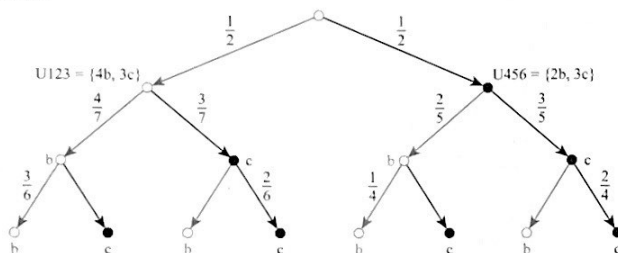
Każdy wynik rzutu tymi kostkami można opisać, jako ciąg: $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$.
 $|\Omega| = 6^6$.

Dokładnie dwie jedynki: $\binom{6}{2} = 15$. Wybieramy kolory, na których będą jedynki.

Dokładnie trzy szóstki: $\binom{4}{3} = 4$. Wybieramy kolory, na których będą szóstki.

Na ostatniej kostce musi być liczba parzysta. Dwa sposoby: 2 lub 4.

$$\text{Odp. } P(A) = \frac{15 \cdot 4 \cdot 2}{6^6} = \frac{5}{3^5 \cdot 8} = \frac{5}{1944}.$$

Zadanie 12.18.

$$P(bb) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{7} + \frac{1}{20} = \frac{27}{140}.$$

$$P(cc) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{14} + \frac{3}{20} = \frac{31}{140}.$$

Zadanie 12.19.

$|\Omega| = 6^6$.

A – dokładnie dwie dwójki. B – dokładnie dwie piątki.

Dokładnie dwie dwójki: $\binom{4}{2} = 6$. Wybieramy, za którym razem będą dwójki.

Dokładnie dwie piątki: $\binom{4}{2} = 6$. Wybieramy, za którym razem będą piątki.

Dokładnie dwie dwójki i dokładnie dwie piątki: $\binom{4}{2} \binom{2}{2} = 6$.

$$\text{Odp. } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6 \cdot 5^2}{6^4} + \frac{6 \cdot 5^2}{6^4} - \frac{6}{6^4} = \frac{6(25 + 25 - 1)}{6^4} = \frac{49}{216}.$$

Zadanie 12.20.

Liczb nieparzystych jest: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Liczb w której występują liczby nieparzyste i jedna 2: $\binom{3}{1} \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

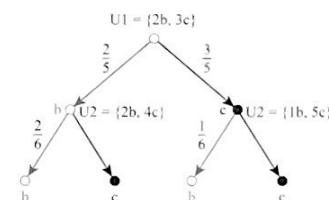
Liczb w której występują liczby nieparzyste i jedna 6: $\binom{3}{1} \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

$$P(A') = \frac{64 + 2 \cdot 48}{512} = \frac{160}{512} = \frac{5}{16}.$$

$$\text{Odp. } P(A) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}.$$

Zadanie 12.21.

$$\text{Odp. } P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{30}.$$

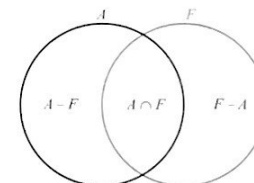
**Zadanie 12.22.**

$$P(A) = 0,4 \quad P(F) = 0,2$$

$$\text{Stąd } P(A - F) = 0,3 \text{ i } P(F - A) = 0,1.$$

$$\text{Zatem } P(A - F) = 3P(F - A).$$

$$P(A \cap F) = 0,1.$$

**Zadanie 12.23.**

Liczby parzyste $\{2, 4, 6\}$. Liczby nieparzyste $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$|\Omega| = 8!$. A – żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu.

Ciąg ma następującą postać: $(m, n, m, n, m, n, m, n, m)$, gdzie m to miejsce, na których może być liczba parzysta, n liczba nieparzysta.

Miejsca dla liczb parzystych można wybrać na $\binom{6}{3}$ sposobów.

Liczby parzyste można postawić na $\binom{6}{3} \cdot 3! = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6$ sposobów.

Liczby nieparzyste można postawić na $5!$ sposobów.

$$\text{Odp. } P(A) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5!}{8!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{5}{14}.$$

Zadanie 12.24.

Liczby ośmiocyfrowe jest $5 \cdot 6^7$.

Suma cyfr jest równa 3 wtedy i tylko wtedy, gdy występuje jedna cyfra „3” i siedem „0” lub trzy cyfry „1” i pięć „0”.

W pierwszym przypadku jest tylko jedna taka liczba.

W drugim przypadku jest takich liczb $\binom{7}{5} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

$$\text{Odp. } \frac{22}{5 \cdot 6^7} = \frac{11}{15 \cdot 6^6} = \frac{11}{699840}.$$

Zadanie 12.25.

$$|\Omega| = 9^3.$$

Wyniki losowania, że dokładnie dwie spośród trzech wylosowanych liczb będą równe można zapisać w następujący sposób:

aab lub aba lub baa , gdzie $a \neq b$.

Zatem

$$|A| = 9 \cdot 1 \cdot 8 + 9 \cdot 8 \cdot 1 + 9 \cdot 8 \cdot 1 = 3 \cdot 9 \cdot 8.$$

$$P(A) = \frac{3 \cdot 9 \cdot 8}{9^3} = \frac{8}{27}.$$

Zadanie 12.26.

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = 120.$$

A – trzy kule czarne lub trzy białe lub dokładnie 2 czarne lub dokładnie 2 białe lub dokładnie 2 zielone.

$$|A| = \binom{4}{3} + \binom{3}{3} + \binom{4}{2} \binom{6}{1} + \binom{3}{2} \binom{7}{1} + \binom{2}{2} \binom{8}{1} = 4 + 1 + 6 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 70.$$

$$\text{Odp. } P(A) = \frac{70}{120} = \frac{7}{12}.$$

Zadanie 12.27.

Zdarzenia

A – wylosowana liczba czterocyfrowa jest podzielna przez 15.

B – wylosowana liczba czterocyfrowa jest podzielna przez 18.

Mamy obliczyć

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Liczby czterocyfrowe podzielne przez 18 tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 18. Pierwszym wyrazem tego ciągu jest liczba 1008, a ostatnim wyrazem jest liczba 9990. Zatem takich liczb jest

$$\frac{9990 - 990}{18} = 500.$$

W zdarzeniu $A \cap B$ są liczby podzielne przez 18 oraz 15, czyli liczby podzielne przez 90. Liczby czterocyfrowe podzielne przez 90 tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 90. Pierwszym wyrazem tego ciągu jest liczba 1080, a ostatnim wyrazem jest liczba 9990. Zatem takich liczb jest

$$\frac{9990 - 990}{90} = 100.$$

$$\text{Odp. } P(A|B) = \frac{1}{5}.$$

Zadanie 12.28.

A – trójka sportowców siedzi obok siebie.

Niech n oznacza liczbę aktorów.

Liczba foteli $n + 3$.

$$|\Omega| = (n + 3)!$$

Sportowcy mają siedzieć obok siebie, więc traktujemy ich jako jedną osobę. Wtedy

$$|A| = (n + 1)! \cdot 3!$$

$$P(A) = \frac{(n + 1)! \cdot 6}{(n + 3)!} = \frac{6}{(n + 2)(n + 3)}$$

Zatem

$$\frac{6}{(n + 2)(n + 3)} = \frac{1}{15}$$

$$(n + 2)(n + 3) = 90 = 9 \cdot 10$$

Równanie ma dwa rozwiązania $n = -12$ lub $n = 7$.

Uwzględniając, że n jest liczbą naturalną otrzymujemy $n = 7$.

Odp. W programie bierze udział siedmiu aktorów.

Zadanie 12.29.

Doświadczenie losowe można opisać schematem Bernoullego.

$$\text{Prawdopodobieństwo sukcesu } p = \frac{1}{4}.$$

Liczba prób $n = 15$.

Liczba sukcesów $k \geq 11$, czyli $k = 11, k = 13, k = 13, k = 15, k = 15$.

Zatem

$$\begin{aligned} P(S_{15}^{11} \cup S_{15}^{12} \cup S_{15}^{13} \cup S_{15}^{14} \cup S_{15}^{15}) &= P(S_{15}^{11}) + P(S_{15}^{12}) + P(S_{15}^{13}) + P(S_{15}^{14}) + P(S_{15}^{15}) = \\ &= \binom{15}{11} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{11} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{15}{12} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{15}{13} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{13} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{15}{14} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{14} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{15}{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ &= \frac{1365 \cdot 81 + 455 \cdot 27 + 105 \cdot 9 + 15 \cdot 3 + 1}{4^{15}} = \frac{123841}{1073741824} \approx 0,00012 \end{aligned}$$

$$\text{Odp. } \frac{123841}{1073741824} \approx 0,00012$$

Zadanie 12.30.

$$|\Omega| = \binom{3n+1}{3} = \frac{(3n+1) \cdot 3n \cdot (3n-1)}{6} = \frac{(3n-1) \cdot n \cdot (3n+1)}{2}$$

$$A_0 = \{3, 6, 9, \dots, 3n\}, \quad |A_0| = n$$

$$A_1 = \{1, 4, 7, \dots, 3n+1\}, \quad |A_1| = n+1$$

$$A_2 = \{2, 5, 8, \dots, 3n-1\}, \quad |A_2| = n$$

Suma trzech liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 wtedy, gdy Dwie liczby są z A_0 i jedna z A_1 . Takich liczb jest

$$\binom{n}{2} \cdot \binom{n+1}{1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^3 - n}{2}$$

Dwie liczby są z A_2 i jedna z A_0 . Takich liczb jest

$$\binom{n}{2} \cdot \binom{n}{1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^3 - n^2}{2}$$

Dwie liczby są z A_1 i jedna z A_2 . Takich liczb jest

$$\binom{n+1}{2} \cdot \binom{n}{1} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot n}{2} = \frac{n^3 + n^2}{2}$$

Zatem

$$P(A) = \frac{\frac{n^3 - n}{2} + \frac{n^3 - n^2}{2} + \frac{n^3 + n^2}{2}}{\frac{(3n-1) \cdot n \cdot (3n+1)}{2}} = \frac{3n^3 - n}{(3n-1) \cdot n \cdot (3n+1)} = \frac{3n^2 - 1}{9n^2 - 1}$$

$$\text{Odp. } P(A) = \frac{3n^2 - 1}{9n^2 - 1}.$$

Zadanie 12.31.

Prawdopodobieństwo wygrania partii szachów przez ojca wynosi $p = \frac{2}{5}$. Liczba rozegranych partii – n .

Korzystamy ze schematu Bernoullego

$$P(S_n^1 \cup S_n^2 \cup \dots \cup S_n^n) = 1 - P(S_n^0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n \geq \frac{95}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq \frac{1}{20} \Leftrightarrow n \geq 6$$

Odp. Pan Nowak musi rozegrać co najmniej sześć partii.

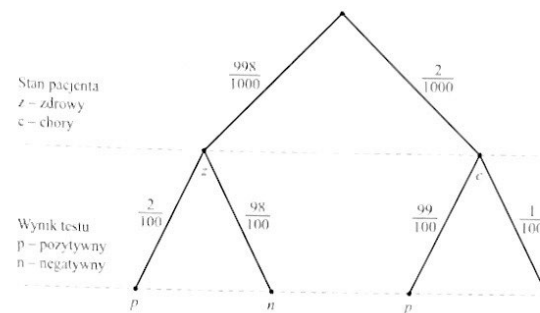
Zadanie 12.32.

Zdarzenia

A – pan X jest chory.

B – wynik testu jest pozytywny.

Mamy obliczyć $P(A|B)$.



$$A = \{cp, cn\},$$

$$B = \{zp, cp\},$$

$$A \cap B = \{cp\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{1000} \cdot \frac{99}{100}}{\frac{998}{1000} \cdot \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} \cdot \frac{99}{100}} = \frac{198}{2194} = \frac{99}{1097} \approx 0,09$$

Odp. Prawdopodobieństwo tego, że Pan X jest rzeczywiście chory wynosi $\frac{99}{1097} \approx 0,09$.

Zadanie 12.33.

Doświadczenie losowe można opisać schematem Bernoullego.

Prawdopodobieństwo sukcesu $p = \frac{1}{10}$.

Liczba prób $n = 20$.

Liczba sukcesów $k \leq 2$, czyli $k = 1$ lub $k = 2$.

Zatem

$$\binom{20}{0} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{20} + \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{19} + \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{18} =$$

$$\frac{9^{20} + 20 \cdot 9^{19} + 190 \cdot 9^{18}}{10^{20}} = \frac{9^{18} (81 + 180 + 190)}{10^{20}} = \frac{9^{18} \cdot 451}{10^{20}} \approx 0,68$$

$$\text{Odp. } \frac{9^{18} \cdot 451}{10^{20}} \approx 0,68.$$

Zadanie 12.34.

Doświadczenie losowe można opisać schematem Bernoullego.

Prawdopodobieństwo sukcesu $p = \frac{1}{4}$.

Liczba prób $n = 5$.

Liczba sukcesów $k \geq 4$, czyli $k = 4$ lub $k = 5$.

Zatem

$$\begin{aligned} P(S_5^4 \cup S_5^5) &= P(S_5^4) + P(S_5^5) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{15}{4^5} + \frac{1}{4^5} = \\ &= \frac{16}{4^5} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{64} \\ \text{Odp. } &\frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Zadanie 12.35.

Zdarzenia

A – wylosowanie dwóch kul białych w pierwszym losowaniu,

B – wylosowanie kuli białej i kuli czarnej w pierwszym losowaniu,

C – wylosowanie dwóch kul czarnych w pierwszym losowaniu,

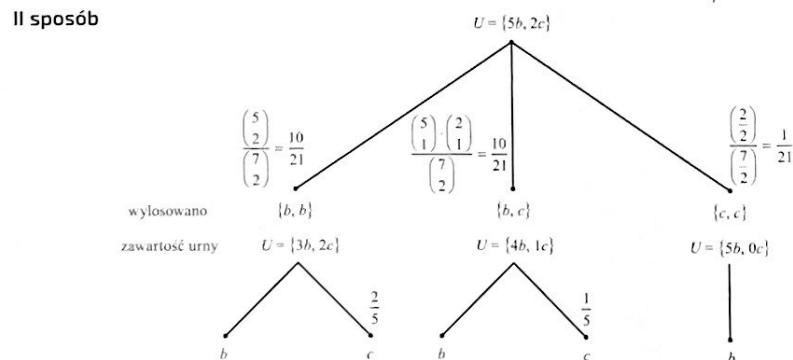
S – wylosowanie kuli czarnej w drugim losowaniu.

$$P(S) = P(S|A) \cdot P(A) + P(S|B) \cdot P(B) + P(S|C) \cdot P(C) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\binom{5}{1} \binom{2}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{0}{5} \cdot \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{21} + \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{21} + \frac{0}{5} \cdot \frac{1}{21} = \frac{4}{21} + \frac{2}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Odp. Prawdopodobieństwo wylosowanie kuli czarnej w drugim losowaniu wynosi $\frac{2}{7}$.

II sposób

**Zadanie 12.36.**

Doświadczenie losowe można opisać schematem Bernoullego.

Prawdopodobieństwo sukcesu $p = 0,1$.

Liczba prób $n = 7$.

Liczba sukcesów $k \leq 2$, czyli $k = 0$ lub $k = 1$ lub $k = 2$.

Zatem

$$\begin{aligned} P(S_7^0 \cup S_7^1 \cup S_7^2) &= P(S_7^0) + P(S_7^1) + P(S_7^2) = \\ &= \binom{7}{0} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^7 + \binom{7}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^5 = \\ &= \frac{9^7}{10^7} + \frac{7 \cdot 9^6}{10^7} + \frac{21 \cdot 9^5}{10^7} = \frac{(81 + 63 + 21) \cdot 9^5}{10^7} = \frac{165 \cdot 9^5}{10^7} = 1,65 \cdot (0,9)^5 = 0,9743085 \approx 0,97 \\ \text{Odp. } &0,97. \end{aligned}$$

Zadanie 12.37.

Zdarzenia

A – wylosowanie kuli białej w pierwszym losowaniu,

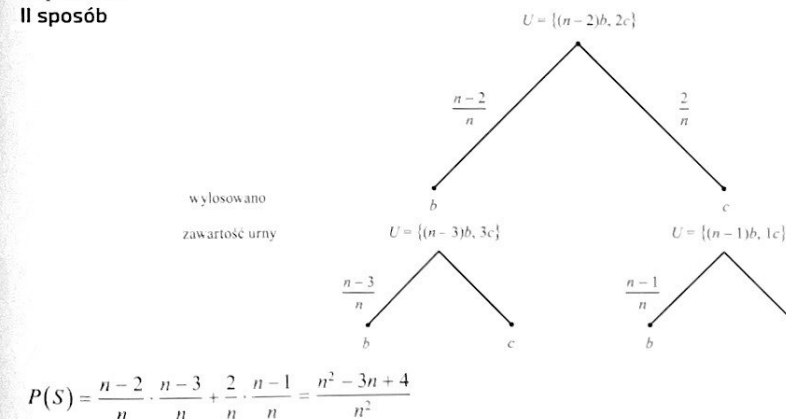
B – wylosowanie kuli czarnej w pierwszym losowaniu,

S – wylosowanie kuli białej w drugim losowaniu.

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|A) \cdot P(A) + P(S|B) \cdot P(B) = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - 3n + 4}{n^2} \\ \frac{n^2 - 3n + 4}{n^2} &= \frac{37}{50} \Leftrightarrow 50n^2 - 150n + 200 = 37n^2 \Leftrightarrow 13n^2 - 150n + 200 = 0 \Leftrightarrow \\ (n-10)(13n-20) &= 0 \end{aligned}$$

Odp. $n = 10$.

II sposób



Zadanie 12.38.

Doświadczenie losowe można opisać schematem Bernoullego.

Prawdopodobieństwo sukcesu $p = 0,01$.

Liczba prób $n = 10$.

Liczba sukcesów $k \leq 1$, czyli $k = 0$ lub $k = 1$.

Zatem

$$P(S_{10}^0 \cup S_{10}^1) = P(S_{10}^0) + P(S_{10}^1) = \binom{10}{0} \cdot (0,01)^0 \cdot (0,99)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (0,01)^1 \cdot (0,99)^9 =$$

$$(0,99)^{10} + 10 \cdot 0,01 \cdot (0,99)^9 = (0,99)^9 \cdot (0,99 + 0,1) = (0,99)^9 \cdot 1,09 \approx 0,996$$

Odp. 0,996.

Zadanie 12.39.

$$|\Omega| = \binom{8}{6} \cdot 6!$$

Z sześciu różnych liczb można utworzyć jeden i tylko jeden ciąg malejący. Zatem ciągów malejących jest tyle na ile sposobów można wybrać sześć liczb z ośmiu $\binom{8}{6}$.

$$P(A) = \frac{\binom{8}{6}}{\binom{8}{6} \cdot 6!} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

Zadanie 12.40.

Zdarzenia

A – orzeł wypadł dokładnie trzy razy.

B – orzeł wypadł dokładnie trzy razy z rzędu.

Mamy obliczyć

$$P(B|A)$$

Obliczymy wykorzystując wzór

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

$$|A| = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120$$

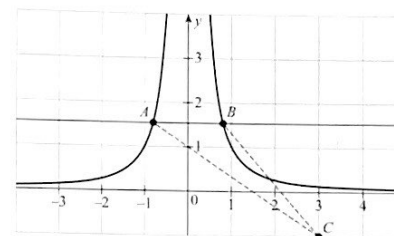
$$A \cap B = \{000TTTTT, T000TTTT, T1000TTT, \dots, TTTT1000, TTTT1000\}$$

$$|A \cap B| = 8$$

$$\text{Odp. } P(B|A) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}.$$

13. Dowody algebra**Zadanie 13.1.**

$$9\sqrt{A} = 3^2 \cdot (3^{4\sqrt{2}+2})^{\frac{1}{2}} = 3^2 \cdot 3^{2\sqrt{2}+1} = 3^{2\sqrt{2}+3} = B$$

Zadanie 13.2.

$$A = \left(a, \frac{1}{a^2}\right), B = \left(b, \frac{1}{b^2}\right), \text{ gdzie } b > 0 \text{ i } a = -b.$$

$$P = \frac{1}{2}(b-a)\left(1 + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2b\left(1 + \frac{1}{b^2}\right) = b\left(1 + \frac{1}{b^2}\right).$$

Wykorzystując związek między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy:

$$P = b\left(1 + \frac{1}{b^2}\right) \geq b \cdot 2\sqrt{1 \cdot \frac{1}{b^2}} = 2.$$

Bez tego związku.

$$P = b\left(1 + \frac{1}{b^2}\right) = \left(b + \frac{1}{b}\right) = \left((\sqrt{b})^2 - 2 + \frac{1}{(\sqrt{b})^2}\right) + 2 = \left(\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + 2 \geq 2.$$

Zadanie 13.3.

Następujące nierówności są równoważne:

$$\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad \frac{a^4 + b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2$$

$$2a^4 + 2b^4 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4 \geq 0 \quad a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \geq 0 \quad (a^2 - b^2)^2 \geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa.

Zadanie 13.4.

$$k^6 - 2k^4 + k^2 = k^2(k^4 - 2k^2 + 1) = k^2(k^2 - 1)^2 = ((k-1)k(k+1))^2.$$

Liczba $(k-1)k(k+1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych.

Zatem liczba ta jest podzielna przez 2 oraz 3. Czyli jest podzielna przez 6. Kwadrat tej liczby jest podzielny przez 36.

Zadanie 13.5.

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{2c-b}{2c-b-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{2c-b}{c-b} + \frac{b}{b-c} = \frac{b-2c}{b-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{2b-2c}{b-c} = \frac{2(b-c)}{b-c} = 2.$$

II sposób

$$\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c} = \frac{ab-ac+ab-bc}{(a-c)(b-c)} = \frac{2ab-c(a+b)}{ab-ac-bc+c^2} = \frac{2ab-2c^2}{ab-2c^2+c^2} = \frac{2(ab-c^2)}{ab-2c^2+c^2} = 2.$$

Zadanie 13.6.

Następujące nierówności są równoważne:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

$$a^3 - a^2b + b^3 - ab^2 \geq 0$$

$$a^2(a-b) - b^2(a-b) \geq 0$$

$$(a-b)(a^2 - b^2) \geq 0$$

$$(a-b)^2(a+b) \geq 0. \text{ Ostatnia nierówność jest prawdziwa.}$$

Zadanie 13.7.

Następujące nierówności są równoważne:

$$ac + bd \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$0 \leq a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$$

$$0 \leq (ad - bc)^2. \text{ Ostatnia nierówność jest prawdziwa.}$$

Zadanie 13.8.

Do znanego wzoru $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ podstawimy:

$$a = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}, b = \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \text{ i } x = a + b.$$

Wtedy

$$x^3 = 9 + \sqrt{80} + 3x + 9 - \sqrt{80}$$

$$x^3 - 3x - 18 = 0.$$

Ponieważ liczba 3 jest jedynym pierwiastkiem rzeczywistym wielomianu

$$x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + 3x + 6), \text{ więc } 3 = x = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}.$$

Zadanie 13.9.

Następujące nierówności są równoważne:

$$2a^3 + b^3 \geq 3a^2b$$

$$2a^3 + a^2b + b^3 - 4a^2b \geq 0$$

$$a^2(2a+b) + b(b^2 - 4a^2) = a^2(2a+b) + b(b+2a)(b-2a) = (2a+b)(a^2 + b^2 - 2ab)$$

$$(2a+b)(a-b)^2 \geq 0. \text{ Ostatnia nierówność jest prawdziwa.}$$

Zadanie 13.10.

Następujące nierówności są równoważne:

$$(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$$

$$x^3 + x^2 + y^3 + y^2 > 2xy$$

$$x^3 + y^3 + x^2 - 2xy + y^2 > 0$$

$$\underbrace{x^3 + y^3}_{>0} + \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} > 0. \text{ Ostatnia nierówność jest prawdziwa.}$$

II sposób

$$\frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 - 2 + \left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 = \underbrace{\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}}_{>0} + \underbrace{\left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2}_{\geq 0} > 0.$$

$$\text{Stąd } (x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2.$$

III sposób

$$(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} \geq 2\sqrt{(x+1)\frac{x}{y} \cdot (y+1)\frac{y}{x}} = 2\sqrt{(x+1)(y+1)} > 2\sqrt{1 \cdot 1} = 2.$$

Zadanie 13.11.

Następujące nierówności są równoważne:

$$x(x-1) + y(y-1) \geq xy - 1$$

$$x^2 - x + y^2 - y - xy + 1 \geq 0$$

$$2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y - 2xy + 2 \geq 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} \geq 0. \text{ Ostatnia nierówność jest prawdziwa.}$$

Zadanie 13.12.

$$\frac{a}{2+a^3} < \frac{b}{2+b^3} \Leftrightarrow 2a+ab^3 < 2b+ba^3 \Leftrightarrow 2(a-b) - ab(a^2-b^2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(2-ab(a+b)) < 0$$

Z założenia $a > b \geq 1$ wynika, że

$$ab > 1 \quad (1)$$

$$a+b > 2 \quad (2)$$

$$a-b > 0 \quad (3)$$

Z (1) i (2) otrzymujemy

$$ab(a+b) > 2$$

$$2 - ab(a+b) < 0 \quad (4)$$

Z (3) i (4) otrzymujemy

$(a-b)(2-ab(a+b)) < 0$, co należało udowodnić.

Zadanie 13.13.

Następujące nierówności są równoważne:

$$x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 2x + 1 + 1 > 0$$

$$\underbrace{(x^2-1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + 1 > 0. \text{ Ostatnia nierówność jest prawdziwa.}$$

Zadanie 13.14.

$$L = \log_x(xy) \cdot \log_y\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\log(xy)}{\log x} \cdot \frac{\log\left(\frac{y}{x}\right)}{\log y}$$

$$P = \log_y(xy) \cdot \log_x\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\log(xy)}{\log y} \cdot \frac{\log\left(\frac{y}{x}\right)}{\log x}$$

Stąd $L = P$.

Zadanie 13.15.

$$a = \log_{12} 2 = \frac{\log_6 2}{\log_6 12} = \frac{\log_6 2}{1 + \log_6 2}$$

$$a + a \log_6 2 = \log_6 2$$

$$a = (1-a) \log_6 2$$

$$\log_6 2 = \frac{a}{1-a}$$

$$\text{Stąd } \log_6 64 = \log_6 2^6 = 6 \log_6 2 = 6 \frac{a}{1-a} = \frac{6a}{1-a}.$$

Zadanie 13.16.

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \dots + \frac{1}{\log_{a^n} b} + \frac{1}{\log_{a^{n+1}} b} = \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_a b} + \dots + \frac{1}{\log_a b} =$$

$$= \frac{1}{\log_a b} + \frac{2}{\log_a b} + \frac{3}{\log_a b} + \dots + \frac{10}{\log_a b} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{\log_a b} = \frac{55}{\log_a b}.$$

Zadanie 13.17.

Z następującej nierówności $0 \leq (x-y)^2$ prawdziwej dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y , wynikają następujące nierówności.

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

$$2xy + x^2 + y^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 4$$

$$(x+y)^2 \leq 4$$

$$|x+y| \leq 2$$

$$x+y \leq 2.$$

Zadanie 13.18.

Następujące nierówności są równoważne:

$$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$$

$$(a+b)(c+d) \geq ac + 2\sqrt{acbd} + bd$$

$$ac + ad + bc + bd \geq ac + 2\sqrt{acbd} + bd$$

$$ad - 2\sqrt{acbd} + bc \geq 0$$

$$(\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0. \text{ Ostatnia nierówność jest prawdziwa.}$$

Zadanie 13.19.

Następujące równości są równoważne:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$$

$$(a+b+c)^2 = 0$$

$a+b+c=0$. Ostatnia równość jest prawdziwa zgodnie z założeniem.

Zadanie 13.20.

Następujące nierówności są równoważne:

$$x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$$

$$x^2y^2 - 4xy + 4 + 2(x^2 + y^2 - 2xy) > 0$$

$$\underbrace{(xy-2)^2}_{\geq 0} + 2 \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} > 0. \text{ Ostatnia nierówność jest prawdziwa.}$$

Zadanie 13.21.

Następujące nierówności są równoważne:

$$5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 6x + 9 \geq 0$$

$$(2x - y)^2 + (x + 3)^2 \geq 0. \text{ Ostatnia nierówność jest prawdziwa.}$$

Zadanie 13.22.

$$a = \log_1 3 + \log_5 \sqrt{27} = \frac{\log_5 3}{-1} + \log_5 3^{\frac{3}{2}} = -\log_5 3 + \frac{3}{2} \log_5 3 = \frac{1}{2} \log_5 3$$

$$b = \log_5 3 - \log_5 \sqrt[9]{3} = \log_5 3 - \frac{1}{9} \log_5 3 = \frac{8}{9} \log_5 3$$

$$\text{Zatem } \frac{b}{a} = \frac{\frac{8}{9} \log_5 3}{\frac{1}{2} \log_5 3} = \frac{16}{9}.$$

Zadanie 13.23.

$$k^3 m - km^3 = (k - m)(k + m).$$

Jeżeli jedna z liczb k, m jest parzysta, to również liczba km jest parzysta.

Jeżeli każda z liczb k, m jest nieparzysta, to liczba $k - m$ jest parzysta.

Stąd liczba $k^3 m - km^3$ jest podzielna przez 2.

Jeżeli jedna z liczb k, m jest podzielna przez 3, to również liczba km jest podzielna przez 3.

Jeżeli każda z liczb k, m nie jest podzielna przez 3, to liczba $k - m$ lub $k + m$ jest podzielna przez 3.

Stąd liczba $k^3 m - km^3$ jest podzielna przez 3.

Zatem liczba $k^3 m - km^3$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 13.24.

Następujące równości są równoważne:

$$\log_2 \left(\frac{a-b}{3} \right) = \frac{1}{2} (\log_2 a + \log_2 b)$$

$$\log_2 \left(\frac{a-b}{3} \right) = \log_2 \sqrt{ab}$$

$$\frac{a-b}{3} = \sqrt{ab}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 9ab$$

$$a^2 + b^2 = 11ab.$$

Zadanie 13.25.

Następujące nierówności są równoważne:

$$\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$$

$$x^2 + ax + y^2 + ay > 2xy + 2ax$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + ay - ax > 0$$

$$(x-y)^2 + a(y-x) > 0.$$

Ponieważ $(x-y)^2 > 0$, $(y-x) > 0$ i $a > 0$, więc ostatnia nierówność jest prawdziwa.

II sposób

Można wykorzystać następującą własność ułamków:

$$\text{Jeżeli } 0 < x < y \text{ i } a > 0, \text{ to } \frac{x+a}{y+a} > \frac{x}{y}.$$

Wtedy wykorzystując równieś nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy

$$\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2.$$

Zadanie 13.26.

$$n^5 - 3n^4 - n + 19 = n(n^4 - 1) - 3(n^4 - 1) + 16 = (n-3)(n-1)(n+1)(n^2+1) + 16.$$

Dla każdej liczby nieparzystej n każda z liczb $(n-3)$, $(n-1)$, $(n+1)$, (n^2+1) jest parzysta.

Stąd $(n-3)(n-1)(n+1)(n^2+1) + 16$ jest podzielne przez 16.

Zadanie 13.27.

$$a^2 + 2a = 4b^2 + 4b \Leftrightarrow a^2 - 4b^2 + 2a - 4b = 0 \Leftrightarrow (a-2b)(a+2b) + 2(a-2b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a-2b)(a+2b+2) = 0$$

Ponieważ $a+2b+2 > 0$, więc $a-2b=0$, czyli $a=2b$.

Zadanie 13.28.

$$n^5 - 3n^4 - n + 3 = (n-3)(n^4 - 1) = (n-3)(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

Ponieważ n jest liczbą nieparzystą, więc każdy z czynników: $n-3$, $n-1$, $n+1$, n^2+1 jest liczbą parzystą, czyli każdy z czynników jest podzielny przez 2.

Zatem iloczyn $(n-3)(n-1)(n+1)(n^2+1)$ jest podzielny przez 16.

Zadanie 13.29.

Następujące nierówności są równoważne

$$5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0$$

$$3(x^2 - 2xy + y^2) + 2(x^2 - x - 2) > 0$$

$$3(x-y)^2 + 2(x+1)(x-2) > 0$$

Zgodnie z założeniem $x-2 > 0$, również $x+1 > 0$, czyli $2(x+1)(x-2) > 0$.

$(x-y)^2 \geq 0$, bo dla każdej liczby rzeczywistej z zachodzi nierówność $z^2 \geq 0$, czyli $3(x-y)^2 \geq 0$.

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo jest sumą liczby dodatniej i nieujemnej.

Zadanie 13.30.

$$c = \log_2 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 2} = \frac{2 + \log_3 2}{\log_3 2} = \frac{2}{\log_3 2} + 1$$

Stąd

$$\frac{2}{\log_3 2} = c - 1$$

$$\log_3 2 = \frac{2}{c-1}$$

Zatem

$$\log_3 4 = 2 \log_3 2 = \frac{4}{c-1}$$

Zadanie 13.31.

$$c = \log_2 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 2} = \frac{2}{\log_3 2}$$

Stąd

$$\log_3 2 = \frac{2}{c}$$

Zatem

$$\log_3 54 = \log_3 (27 \cdot 2) = \log_3 27 + \log_3 2 = 3 + \frac{2}{c} = \frac{3c+2}{c}$$

Zadanie 13.32.

Trzy kolejne liczby całkowite można przedstawić w postaci: $3k-1$, $3k$, $3k+1$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Wtedy

$$m = (3k-1)^3 + (3k)^3 + (3k+1)^3 =$$

$$27k^3 - 27k^2 + 9k - 1 + 27k^3 + 27k^2 + 27k^2 + 9k + 1 = 9(9k^3 + 2k)$$

Ponieważ liczba $9k^3 + 2k$ jest liczbą całkowitą, więc liczba m jest podzielna przez 9.

Trzy kolejne liczby całkowite niepodzielne przez 4 są postaci: $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Zatem

$$m = (4k+1)^3 + (4k+2)^3 + (4k+3)^3 =$$

$$64k^3 + 48k^2 + 12k + 1 + 64k^3 + 96k^2 + 48k + 8 + 64k^3 + 144k^2 + 108k + 27 =$$

$$4(48k^3 + 72k^2 + 42k + 9)$$

Ponieważ liczba $48k^3 + 72k^2 + 42k + 9$ jest liczbą całkowitą, więc liczba m jest podzielna przez 4.

Liczba m jest podzielna przez 4 oraz przez 9, więc jest podzielna przez 36.

Zadanie 13.33.

Wyznaczając z pierwszego równania $b = 20 - a - c$ i podstawiając do drugiego otrzymujemy

$$a(20 - a - c) + c(20 - a - c) + ca = 128$$

$$20a - a^2 - ac + 20c - ac - c^2 + ca = 128$$

$$-a^2 + a(20 - c) + 20c - c^2 - 128 = 0$$

Równanie ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = (20 - c)^2 + 4(20c - c^2 - 128) = 400 - 40c + c^2 + 80c - 4c^2 - 512 =$$

$$-3c^2 + 40c - 112$$

$$-3c^2 + 40c - 112 \geq 0 \Leftrightarrow -(3c - 28)(c - 4) \Leftrightarrow c \in \left[4, \frac{28}{3}\right]$$

Zadanie 13.34.

$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x^3(x - y) - y^3(x - y) > 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^3 - y^3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) > 0$$

Zgodnie z założeniem $x \neq y$, więc $(x - y)^2 > 0$.

Ponieważ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 \geq 0$ i $\frac{3}{4}y^2 \geq 0$ oraz

wyrażenia te są jednocześnie równe zero tylko dla $x = y = 0$, więc

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0.$$

Iloczyn liczb dodatnich $(x - y)^2$ i $x^2 + xy + y^2$ jest dodatni.

Zadanie 13.35.

Następujące nierówności są równoważne

$$x^3 + 2xy + y^3 \geq x^2 + xy(x + y) + y^2$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) - (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$(x + y)(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$(x - y)^2(x + y - 1) \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo zgodnie z założeniem $x + y - 1 \geq 0$ oraz kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Zadanie 13.36.

Następujące nierówności są równoważne

$$x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) \leq 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - y)^2 \leq 0$$

Uwzględniając, że $x + y = 4$ otrzymujemy $x = y$, czyli $x = y = 2$.

Zadanie 13.37.

Następujące nierówności są równoważne

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12 \Leftrightarrow a^3 - 12a + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (a+4)(a-2)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo wyrażenie $(a-2)^2$ jest nieujemne dla każdej liczby rzeczywistej a oraz zgodnie z założeniem liczba $a+4$ jest dodatnia.

II sposób

Wykorzystując zawiązek między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną otrzymujemy

$$a^2 + \frac{16}{a} = a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a} \geq 3\sqrt{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}} = 3\sqrt{64} = 3 \cdot 4 = 12$$

Zadanie 13.38.

Wykorzystując nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną dla liczb dodatnich x, y

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy, \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{1+b} = \frac{1+b+a+1}{(a+1)(1+b)} = \frac{3}{(a+1)(1+b)} \geq \frac{3}{\left(\frac{a+1+1+b}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} \quad \blacksquare$$

II sposób

Z założeń wynika, że $a \in (0, 1)$ i $b = 1 - a$.

Następujące nierówności są równoważne

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2-a} \geq \frac{4}{3}$$

$$3(2-a+a+1) \geq 4(a+1)(2-a)$$

$$4a^2 - 4a + 1 \geq 0$$

$$(2a-1)^2 \geq 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych. $\blacksquare$

14. Dowody geometria**Zadanie 14.1.**

Czworokąt $CEDF$ jest kwadratem o boku x , zatem $|CD| = x\sqrt{2}$.

Trójkąty ABC i DBF są podobne. Stąd

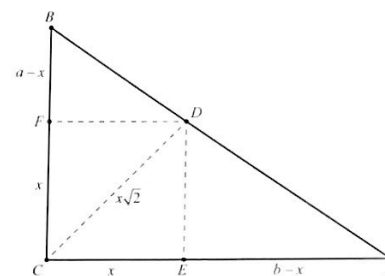
$$\frac{a}{b} = \frac{a-x}{x}$$

$$ax = ab - bx$$

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

Zatem

$$|CD| = \frac{ab}{a+b} \sqrt{2}$$

**Zadanie 14.2.**

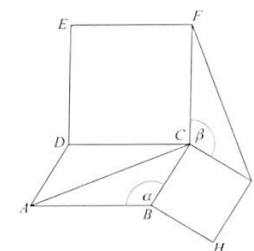
$$|AB| = |CF|$$

$$|BC| = |CG|$$

$$\beta = 360^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \alpha) - 90^\circ = \alpha.$$

Zatem trójkąty ABC i CFG są przystające.

Stąd $|AC| = |GF|$.

**Zadanie 14.3.**

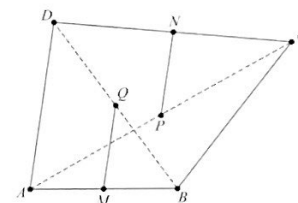
Ponieważ M i Q są środkami boków trójkąta ABD , więc

$$MQ \parallel AD.$$

Punkty P, N są środkami boków trójkąta ACD , więc

$$PN \parallel AD.$$

Stąd $PN \parallel MQ$.

**Zadanie 14.4.**

Z twierdzenia cosinusów:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

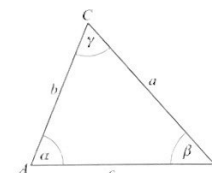
Z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$2ac \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2.$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}.$$



Zatem

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{2bc \cos \alpha}{2ac \cos \beta} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Zadanie 14.5.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

Trójkąty ABP i CDP są podobne. Stąd $\frac{d}{c} = \frac{f}{e}$.

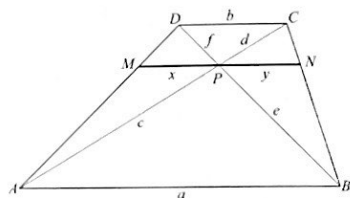
Trójkąty ACD i APM są podobne.

$$\text{Stąd } \frac{b}{x} = \frac{c+d}{c} = 1 + \frac{d}{c}.$$

Trójkąty BCD i BPN są podobne.

$$\text{Stąd } \frac{b}{y} = \frac{e+f}{e} = 1 + \frac{f}{e}.$$

$$\text{Zatem } \frac{b}{x} = \frac{b}{y}, \text{ czyli } x = y.$$



Zadanie 14.6.

$|AB| = a$, $|CD| = b$. Wysokość $|CE| = 2r$.

$$|BE| = \frac{a-b}{2}.$$

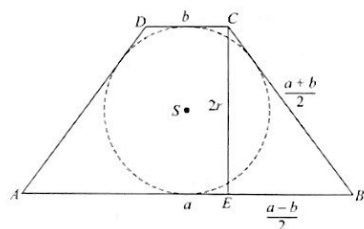
Z własności czworokąta opisanego na okręgu

$$\text{wynika, że } |BC| = \frac{a+b}{2}.$$

Trójkąt prostokątny BCE

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 4r^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$4r^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = ab.$$



Zadanie 14.7.

$$\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 7\alpha = 180^\circ \quad \alpha = \frac{180^\circ}{7} > 25^\circ$$

$$4\alpha = \frac{720^\circ}{7} > 100^\circ.$$

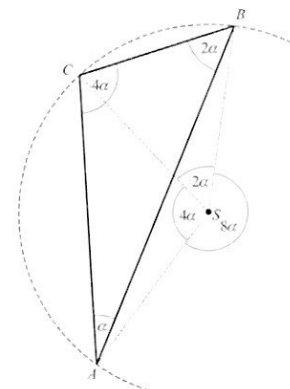
Zatem ABC jest trójkątem rozwartokątnym. Wykorzystując związek między kątem środkowym a wpisanym mamy:

$$\angle BSC = 2\alpha \quad \angle ASC = 4\alpha \quad \angle ASB = 8\alpha > 200^\circ.$$

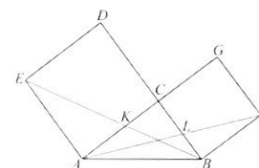
Zatem kąt wypukły

$$\angle ASB = 360^\circ - 8\alpha = 2(180^\circ - 4\alpha) = 2 \cdot 3\alpha = 6\alpha$$

Skąd kąty: $(2\alpha, 4\alpha, 6\alpha)$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 2α .



Zadanie 14.8.



$$\text{Trójkąty } BDE \text{ i } BCK \text{ są podobne. Stąd } \frac{|KC|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|DB|}, \quad |KC| = \frac{|DE| \cdot |BC|}{|DB|}.$$

$$\text{Trójkąty } AGF \text{ i } ACL \text{ są podobne. Stąd } \frac{|LC|}{|GF|} = \frac{|AC|}{|AG|}, \quad |LC| = \frac{|GF| \cdot |AC|}{|AG|}.$$

Ponieważ $|BC| = |GF|$ i $|DE| = |AC|$ oraz $|DB| = |AG|$, więc $|KC| = |LC|$.

Zadanie 14.9.

Twierdzenie sinusów

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}, \quad \sin \beta = \frac{b}{2R}, \quad \sin \gamma = \frac{c}{2R}.$$

Wtedy

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 \gamma \Rightarrow \frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} < \frac{c^2}{4R^2} \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2$$

Twierdzenie cosinusów

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Zatem

$$a^2 + b^2 < a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \Rightarrow 0 < -2ab \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma < 0.$$

Zadanie 14.10.

Z cechy podobieństwa trójkątów $k k$ trójkąty ABE i ECF są podobne.

Zatem

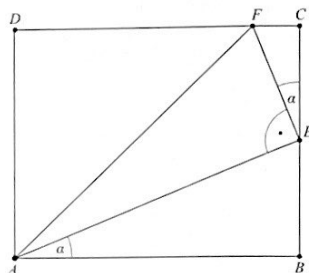
$$\frac{|AE|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|EC|}.$$

Wykorzystując, że $|EC| = |BE|$ otrzymujemy

$$\frac{|AE|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|BE|}.$$

Zatem na podstawie cechy bkb wynika, że trójkąty ABE i AEF są podobne.

Skąd $\angle BAE = \angle EAF$.

**Zadanie 14.11.**

Niech $\angle BAD = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$.

Wtedy $\angle SCB = 90^\circ - \alpha$ i $\angle SBC = \beta$.

Stąd $\angle BSC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \beta) = 90^\circ + \alpha - \beta$.

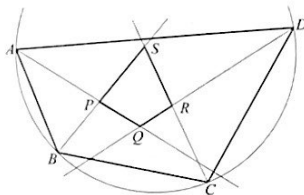
Dalej $\angle QAD = \alpha$ i $\angle QDA = 90^\circ - \beta$.

Zatem $\angle AQD = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ - \beta) = 90^\circ - \alpha + \beta$.

Czyli

$\angle BSC + \angle AQD = 90^\circ + \alpha - \beta + 90^\circ - \alpha + \beta = 180^\circ$.

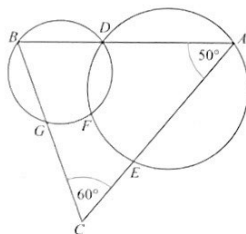
Stąd na czworokącie $PQSR$ można opisać okrąg.

**Zadanie 14.12.**

Niech $|AB| = a$, $|BC| = aq$, $|CD| = aq^2$, $|DA| = aq^3$. Wtedy

$$a + aq^2 = aq + aq^3 \quad a(1 + q^2) - aq(1 + q^2) = 0 \quad a(1 + q^2)(1 - q) = 0.$$

Stąd $q = 1$, czyli trapez $ABCD$ ma wszystkie boki równej długości. Zatem jest rombem.

Zadanie 14.13.

$$\angle DFE = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$$\angle DFG = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\angle EFG = 360^\circ - 130^\circ - 110^\circ = 120^\circ$$

$$\angle ECG + \angle EFG = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ.$$

Stąd na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.

Zadanie 14.14.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

Prosta DE jest równoległa do AP .

Z twierdzenia Talesa dla trójkąta ACP mamy:

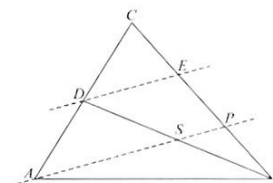
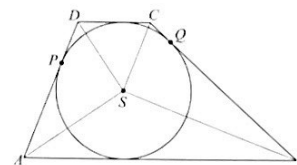
$$|CE| = |EP|.$$

Z twierdzenia Talesa dla trójkąta BDE mamy:

$$|BP| = |EP|.$$

Zatem punkty P i E podzieliły bok BC na trzy równe części.

$$\text{Stąd } |CP| = \frac{2}{3}a.$$

**Zadanie 14.15.**

Niech $\angle BAD = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$.

Wtedy $\angle ASD = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$.

Analogicznie $\angle BSC = 180^\circ - \beta - (90^\circ - \beta) = 90^\circ$.

Zatem trójkąty ASD i BSC są prostokątne.

Z twierdzenia o wysokości w trójkącie prostokątnym mamy:

$$|SP|^2 = |AP| \cdot |DP|, \quad |SQ|^2 = |BQ| \cdot |CQ|.$$

Ponieważ $|SP| = r$ i $|SQ| = r$, więc $|AP| \cdot |DP| = |BQ| \cdot |CQ|$.

Zadanie 14.16.

Oznaczenia takie jak na rysunku.

Wykorzystujemy twierdzenie o odcinkach stycznych do okręgu.

Trójkąt DMN , DAB są podobne.

Zatem

$$\frac{y}{x+r} = \frac{y+z}{y+r}$$

$$y^2 + yr = xy + xz + yr + rz$$

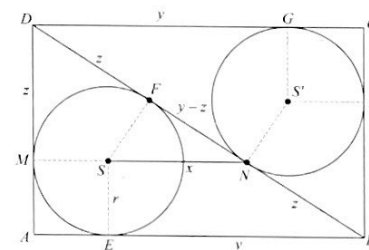
$$y^2 = xy + xz + rz. (1)$$

Trójkąt NSF , DAB są podobne.

Stąd

$$\frac{x}{y-z} = \frac{y+z}{y+r}$$

$$xy + xr = y^2 - z^2. (2)$$



Dodając stronami (1) i (2) mamy:

$$y^2 + xy + xr = y^2 - z^2 + xy + xz + rz$$

$$xr = -z^2 + xz + rz$$

$$xr - xz = rz - z^2$$

$$x(r - z) = z(r - z).$$

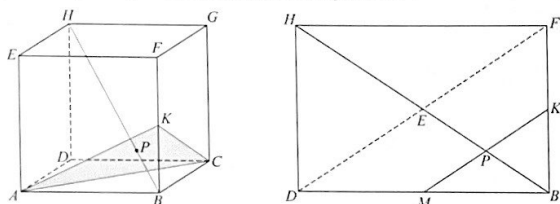
Ponieważ $z > r$, więc $x = z$. Stąd $|AD| = |MN|$.

Zadanie 14.17.

Punkt M jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$.

Punkt M jest środkiem przekątnej BD .

Punkt E jest punktem przecięcia przekątnych przekroju $BDHF$.



Ponieważ $BDHF$ jest prostokątem, więc punkt E jest środkiem BH .

Punkty K i M są środkami boków trójkąta BDF .

Stąd punkt P jest środkiem odcinka BE .

$$\text{Zatem } |BP| = \frac{1}{4}|BH|, |PH| = \frac{3}{4}|BH|.$$

$$\text{Stąd } \frac{|BP|}{|PH|} = \frac{\frac{1}{4}|BH|}{\frac{3}{4}|BH|} = \frac{1}{3}.$$

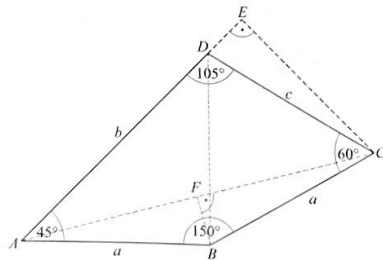
Zadanie 14.18.

Oznaczenia tak jak na rysunku.

$\angle CAD = 30^\circ$. Trójkąt ACE jest połową trójkąta równobocznego, czyli

$$|CE| = \frac{1}{2}|AC| = |CF|.$$

Trójkąty CDE i BCF są przystające, bo mają te same kąty i $|CE| = |CF|$.
Stąd $|CD| = |CB|$, czyli trójkąt BCD jest równoramienny, a ponieważ kąt wierzchołkowy $\angle BCD = 60^\circ$, więc jest równoboczny.



II sposób

Z twierdzenia sinusów dla $\triangle ACD$ mamy:

$$\frac{c}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \quad \frac{c}{1} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad b = \sqrt{2}c.$$

Twierdzenie cosinusów dla trójkątów ABD i BCD .

$$a^2 + 2c^2 - 2ac\sqrt{2}\cos 45^\circ = a^2 + c^2 - 2ac\cos 60^\circ \quad c^2 - 2ac = -ac$$

$$c^2 - ac = 0 \quad c(c - a) = 0 \quad c = a.$$

Zatem trójkąt BCD jest równoramienny, a ponieważ kąt wierzchołkowy $\angle BCD = 60^\circ$, więc jest równoboczny.

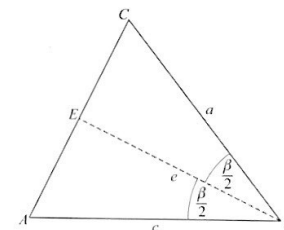
Zadanie 14.19.

Wykorzystując wzór na pole trójkąta otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ae\sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}ce\sin\frac{\beta}{2}$$

$$2ac\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = ae\sin\frac{\beta}{2} + ce\sin\frac{\beta}{2}$$

$$2ac\cos\frac{\beta}{2} = e(a + c) \quad e = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a + c}.$$



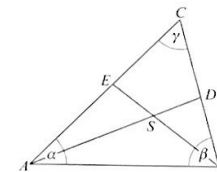
Zadanie 14.20.

Półproste AD i BE są dwusiecznymi.

Stąd

$$\angle ESD = \angle ASB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ - \frac{1}{2}(2\gamma) = 180^\circ - \gamma.$$

Zatem $\angle ESD + \angle DCE = 180^\circ$, czyli na czworokącie $DCES$ można opisać okrąg.



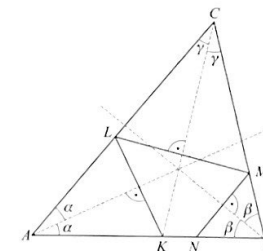
Zadanie 14.21.

$$\angle NKL = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha.$$

$$\angle LMN = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = \gamma + \beta.$$

$$\angle NKL + \angle NMN = 90^\circ + \alpha + \gamma + \beta = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Z tego wynika, że na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.



Zadanie 14.22.

Niech $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $|\angle ABC| = \beta$. Wtedy $|\angle BAC| = 2\beta$.

Wykorzystując twierdzenie sinusów otrzymujemy:

$$\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$a = 2b \cos \beta.$$

Wykorzystując twierdzenie cosinusów otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 2\beta$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

Odejmując stronami mamy:

$$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 + 2ac \cos \beta - 2bc \cos 2\beta$$

$$2(a^2 - b^2) = 2c(ac \cos \beta - bc \cos 2\beta)$$

$$a^2 - b^2 = c(ac \cos \beta - bc \cos 2\beta) = c(2bc \cos^2 \beta - b(2\cos^2 \beta - 1)) = cb.$$

Zadanie 14.23.

D – środek AB .

Niech $|AM| = |CN| = a$, $|CM| = |BN| = b$, $|AS| = c$,

$|DS| = d$, $|DT| = e$, $|BT| = f$.

Z twierdzenia Talesa

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{e}{f}. \text{ Stąd } c = \frac{a}{b} \cdot d, e = \frac{a}{b} \cdot f.$$

Jednocześnie $c + d = e + f$, więc

$$\frac{a}{b} \cdot d + d = \frac{a}{b} \cdot f + f.$$

$$\text{Zatem } \left(\frac{a}{b} + 1\right)d = \left(\frac{a}{b} + 1\right)f, \text{ czyli } d = f.$$

$$|ST| = d + e = e + f = |BD| = \frac{1}{2}|AB|.$$

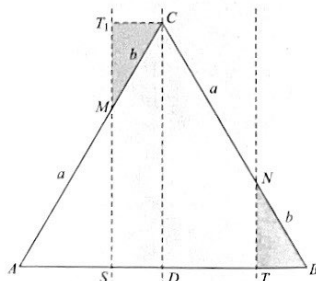
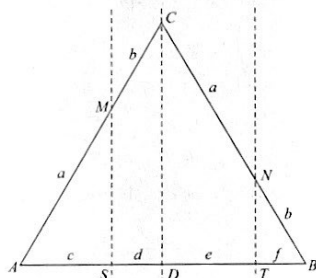
II sposób

Można też wykorzystać przystawanie trójkątów BNT i CMT_1 (rysunek obok).

Trójkąty są przystające na podstawie cechy kbk .

$$|ST| = |SD| + |DT| = |CT_1| + |DT| =$$

$$= |TB| + |DT| = |DB| = \frac{1}{2}|AB|.$$

**Zadanie 14.24.**

Niech $|\angle BAD| = 2\alpha$, $|\angle ABC| = \beta$, $|\angle BCD| = 2\gamma$,

$|\angle ADC| = \delta$, $|\angle AEC| = \varepsilon$.

Z czworokąta $ABCE$ mamy równość:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 360^\circ.$$

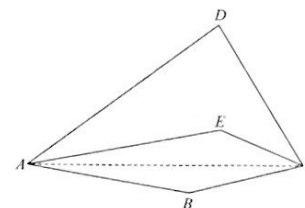
Z czworokąta $AECD$ mamy równość:

$$\alpha + 360^\circ - \varepsilon + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$\beta + \varepsilon - 360^\circ + \varepsilon - \delta = 0^\circ.$$

$$\text{Stąd } \beta - \delta + 2\varepsilon = 360^\circ.$$

**Zadanie 14.25.**

Punkt E jest punktem styczności KL z okręgiem.

CD jest wysokością w trójkącie ABC , natomiast CE

jest wysokością w trójkącie KLC .

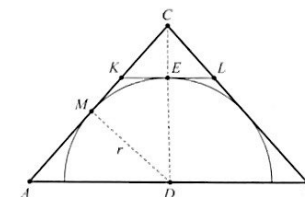
Trójkąty ABC i KLC są podobne. Skala podobieństwa wynosi 3.

Zatem

$$|CD| = 3|CE|$$

$$|CE| + r = 3|CE|$$

$$|CE| = \frac{1}{2}r$$



Z podobieństwa trójkątów ADM i MDC lub z twierdzenia o wysokości w trójkącie prostokątnym ADC otrzymujemy

$$|AM| \cdot |MC| = r^2 \quad (1)$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta MDC otrzymujemy

$$|MC|^2 + r^2 = \left(r + \frac{1}{2}r\right)^2$$

$$|MC|^2 = \frac{5}{4}r^2 \quad (2)$$

Dzielimy stronami (1) i (2)

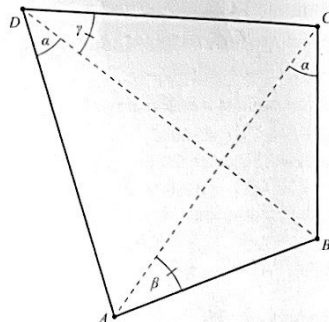
$$\frac{|AM| \cdot |MC|}{|MC|^2} = \frac{r^2}{\frac{5}{4}r^2}$$

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$$

Zadanie 14.26.

Z $|\angle ADB| = |\angle ACB| = \alpha$ wynika, że czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg.

Zatem kąty BAC i BDC oparte są na tym samym łuku, więc $\beta = \gamma$.

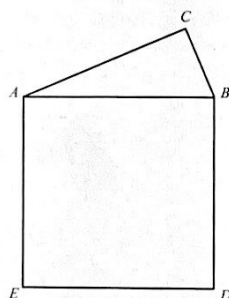
**Zadanie 14.27.**

Niech $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|\angle CAB| = \alpha$,

$|\angle ABC| = \beta$.

Wtedy

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{c^2}{ab} = \frac{P_{\triangle EDB}}{2P_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2 \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle EDB}}} = \frac{1}{2k}$$

**Zadanie 14.28.**

Niech bok trójkąta ABC ma długość $9a$. Wtedy

$|BD| = |AE| = 3a$ oraz $|AD| = |CE| = 6a$.

Poprowadźmy prostą równoległą do CD przechodzącą przez punkt E , która przecina bok AB w punkcie F (patrz rysunek).

Z twierdzenia Talesa dla trójkąta ADC wynika, że $|AF| = 2a$ i $|FD| = 4a$.

Niech $|BP| = 3d$.

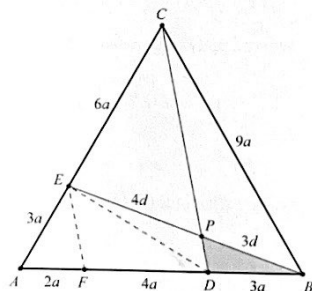
Z twierdzenia Talesa dla trójkąta BEF wynika, że $|EP| = 4d$.

Niech x oznacza pole trójkąta BPD .

Będziemy korzystać z twierdzenia:

Stosunek pól trójkątów o wspólnej wysokości jest równy stosunkowi ich podstaw.

Na podstawie cytowanego twierdzenia pole trójkąta EDP wynosi $\frac{4}{3}x$, czyli pole trójkąta BED jest równe $\frac{7}{3}x$. Jeszcze raz wykorzystując powyższe twierdzenie, tym razem do trójkątów BED i ADE , otrzymujemy pole trójkąta ADE , które wynosi $\frac{14}{3}x$.



Zatem pole trójkąta ABE jest równe $7x$.

Jeżeli zastosujemy powyższe twierdzenie dla trójkątów ABE oraz BCE , to otrzymamy pole trójkąta BCE , które jest równe $14x$.

Zatem pole trójkąta ABC jest równe $21x$.

Zadanie 14.29.

Trójkąty BCE i BHF są podobne, skala podobieństwa wynosi 3.

Stąd $P_{BCE} = 9P_{BHF} = 9S$.

Ponieważ trójkąty AEC i BCE mają wspólną wysokość, więc

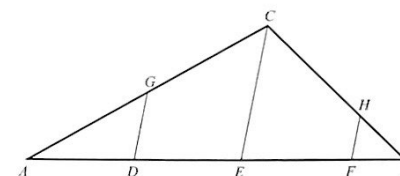
$$\frac{P_{AEC}}{P_{BCE}} = \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{4|BF|}{3|BF|} = \frac{4}{3}$$

$$P_{AEC} = \frac{4}{3} \cdot P_{BCE} = \frac{4}{3} \cdot 9S = 12S$$

Trójkąty ADG i AEC są podobne, skala podobieństwa wynosi $\frac{1}{2}$.

Stąd

$$P_{ADG} = \frac{1}{4} \cdot P_{AEC} = \frac{1}{4} \cdot 12S = 3S.$$

**Zadanie 14.30.**

Niech $|AB| = a$, $|CD| = b$, $|AD| = |BC| = c$.

Z założeń wynika, że

$$\begin{cases} a + b + 2c = l \\ a + b = 2c \end{cases}$$

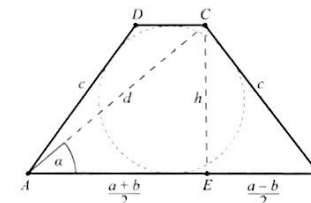
Stąd

$$c = \frac{l}{4}$$

$$a + b = \frac{l}{2}$$

Twierdzenie sinusów dla trójkąta ABC

$$R = \frac{c}{2 \sin \alpha} = \frac{c}{2 \cdot \frac{h}{d}} = \frac{c \cdot d}{2h} = \frac{\frac{l}{4} \cdot d}{2 \sqrt{d^2 - \left(\frac{l}{4}\right)^2}} = \frac{l \cdot d}{8 \sqrt{d^2 - \left(\frac{l}{4}\right)^2}} = \frac{l \cdot d}{8 \cdot \frac{\sqrt{16d^2 - l^2}}{4}} = \frac{l \cdot d}{2 \sqrt{16d^2 - l^2}}$$



Zadanie 14.31.

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow |\angle CSB| = 90^\circ$$

Z cechy podobieństwa kąt-kąt wynika, że trójkąty BPS i BSC są podobne.

Z twierdzenia o wysokości w trójkącie prostokątnym otrzymujemy

$$2^2 = p(5-p) \Leftrightarrow p^2 - 5p + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 4 \text{ lub } p = 1$$

Zatem

$$p = 4$$

$$|BS| = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$$

Skala podobieństwa trójkątów BPS i BSC

$$k = \frac{|BS|}{|BP|} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Zadanie 14.32.

Niech r oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie CDP oraz $|DC| = a$. Wtedy $r + 3$ jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABP i $|AB| = a + 2$.

Twierdzenie sinusów

$$\begin{cases} \frac{a}{\sin \alpha} = 2 \\ \frac{a+2}{\sin \alpha} = 2(r+3) \end{cases} \Rightarrow \frac{a+2}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha} + 6 \Rightarrow$$

$$a + 2 = a + 6 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

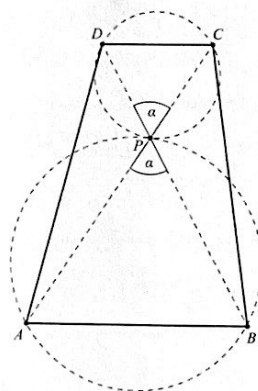
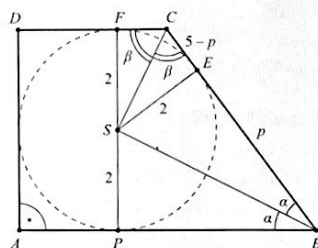
Ponieważ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, więc $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Twierdzenie cosinusów

$$|CD|^2 = |CP|^2 + |DP|^2 - 2|CP| \cdot |DP| \cdot \cos \alpha$$

$$|CD|^2 = |CP|^2 + |DP|^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |CP| \cdot |DP|$$

Stąd teza.

**Zadanie 14.33.**

Twierdzenie Talesa dla trójkąta ABD

$$\frac{x}{z+y} = \frac{|DO|}{|OB|}$$

Podobieństwo trójkątów ABO i CDO

$$\frac{|DO|}{|OB|} = \frac{|CO|}{|OA|}$$

Twierdzenie Talesa dla trójkąta ABC

$$\frac{y}{z+x} = \frac{|CO|}{|OA|}$$

Stąd

$$\frac{x}{z+y} = \frac{y}{z+x} \Leftrightarrow x^2 + xz = y^2 + yz \Leftrightarrow x^2 - y^2 + xz - yz = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-y)(x+y+z) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Zadanie 14.34

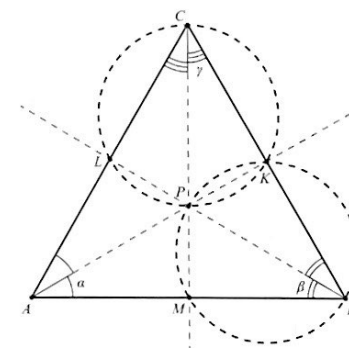
$$2\gamma + \underbrace{\angle KPM}_{180^\circ - (\alpha + \gamma)} = 180^\circ \Rightarrow 2\gamma = \alpha + \beta$$

$$2\beta + \underbrace{\angle KPM}_{180^\circ - (\alpha + \gamma)} = 180^\circ \Rightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$$

Odejmując stronami otrzymujemy

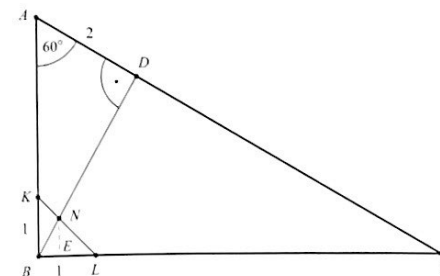
$$2\gamma - 2\beta = \beta - \gamma \Rightarrow \gamma = \beta$$

Podstawiając do pierwszej równości otrzymujemy $\gamma = \alpha$, czyli trójkąt ABC jest równoboczny.

**Zadanie 14.35.**

Trójkąt ABD jest połową trójkąta równobocznego, więc $|BD| = 2\sqrt{3}$. Odcinek NE jest prostym do BC . Niech $|BE| = x$.

Trójkąt BEN też jest połową trójkąta równobocznego, więc $|BN| = 2x$.



$$|EN| = x\sqrt{3}.$$

Trójkąt ELN jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, więc $|EL| = x\sqrt{3}$.

Zatem

$$x + x\sqrt{3} = 1$$

Stąd

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$|ND| = 2\sqrt{3} - 2x = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) = \sqrt{3} + 1$$

II sposób

Tak jak poprzednio wykorzystując, że trójkąt ABD jest połową trójkąta równobocznego otrzymujemy $|BD| = 2\sqrt{3}$.

Długość odcinka BN obliczymy, wyznaczając na dwa sposoby pole trójkąta BLK .

$$P_{BLK} = \frac{1}{2} \cdot |BL| \cdot |BK| = \frac{1}{2}$$

$$P_{BLK} = \frac{1}{2} \cdot |BL| \cdot |BN| \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot |BK| \cdot |BN| \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} |BN| + \frac{1}{4} |BN|$$

Zatem

$$\frac{\sqrt{3}+1}{4} |BN| = \frac{1}{2}$$

$$|BN| = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1$$

$$|DN| = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) = \sqrt{3} + 1$$

Zadanie 14.36.

Niech $|BP| = a$.

Wykorzystując twierdzenie o odcinkach stycznych i założenia otrzymujemy:

$$|AC| = |AQ| - |CQ| = 5 \cdot |BP| - |CD| = 5a - 2 \cdot |BD| = 5a - 2 \cdot |BP| = 5a - 2a = 3a$$

$$|BC| = |BD| + |CD| = |BP| + 2 \cdot |BD| = a + 2 \cdot |BP| = a + 2a = 3a$$

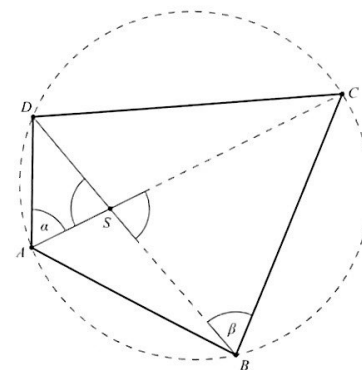
Zatem $|AC| = |CB|$, czyli trójkąt jest równoramienny.

Zadanie 14.37.

Kąty wierzchołkowe ASD i BSC mają równe

miary oraz $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$, więc trójkąty ASD

i BSC są podobne (cecha bkb). Zatem $|\angle DAC| = \alpha = \beta = |\angle DBC|$ (zobacz rysunek), a to dowodzi, że punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu. ■



Zadanie 14.38.

Dwusieczna ABC przecina bok AC w punkcie D .

Oznaczenia $|BC| = a$, $|AC| = b$,

$|AB| = c$, $|DC| = x$.

Trójkąty ABC i BCD są podobne (cecha kk), więc

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{x} \Rightarrow bx = a^2 \quad (1)$$

Z twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{b-x}{x} = \frac{c}{a} \Rightarrow ba - ax = cx \Rightarrow x(a+c) = ba \Rightarrow x = \frac{ba}{a+c}$$

Podstawiając do (1) otrzymujemy

$$b \frac{ba}{a+c} = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \cdot \frac{a+c}{a} = a(a+c) = a^2 + ac \quad \blacksquare$$

II sposób

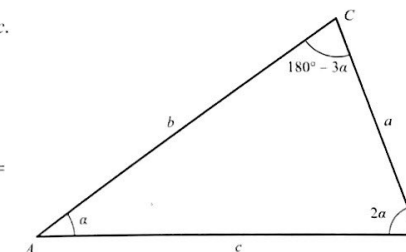
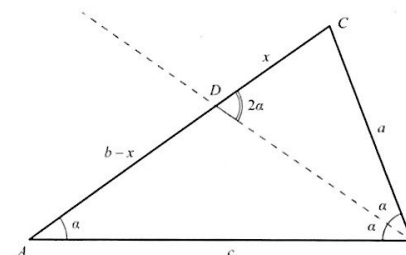
Oznaczenia: $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$.

Twierdzenie cosinusów

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos 2\alpha \quad (1)$$

Twierdzenie sinusów

$$\frac{c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow c = \frac{a \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{a(\sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha)}{\sin \alpha} =$$



$$\begin{aligned} a(\cos 2\alpha + 2\cos^2 \alpha) &= \\ a(\cos 2\alpha + 2\cos^2 \alpha - 1 + 1) &= \\ a(2\cos 2\alpha + 1) &= 2a\cos 2\alpha + a \end{aligned}$$

Stąd

$$c - a = 2a\cos 2\alpha \Rightarrow 2ca\cos 2\alpha = c(c - a)$$

Podstawiając do (1) otrzymujemy

$$b^2 = c^2 + a^2 - c(c - a) = c^2 + a^2 - c^2 + ca = a^2 + ac \quad \blacksquare$$

Zadanie 14.39.

Oznaczenia takie jak na rysunku.

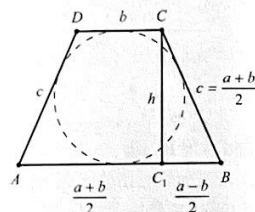
Z własności trapezu równoramiennego opisanego na okręgu oraz twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$h = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$$

Pole trapezu

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2}}{2} \cdot \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4ab}}{2} \cdot \sqrt{ab} > \frac{\sqrt{4ab}}{2} \cdot \sqrt{ab} = ab \quad \blacksquare$$

W dowodzie wykorzystaliśmy założenie, że $a > b$, czyli $(a-b)^2 > 0$.



15. Granice. Pochodna

Zadanie 15.1.

Dla $a \neq -4$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + a}{x - 2} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ 4+a \neq 0 \\ \downarrow \\ 0^+ \end{matrix} \quad \text{granica nie istnieje}$$

Dla $a = -4$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4 \\ g(2) &= b \end{aligned}$$

Odp. Funkcja g jest ciągła w punkcie $x = 2$ dla $a = -4$ i $b = 4$.

Zadanie 15.2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-2)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

$$f(1) = 1$$

Zatem w punkcie $x = 1$ funkcja f jest ciągła.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-1)(x-2)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

$$f(2) = 3$$

Zatem w punkcie $x = 2$ funkcja f nie jest ciągła.

Zadanie 15.3.

$$a) f'(0) = 0$$

Zatem współczynnik kierunkowy prostej wynosi $a = 0$.

$$\text{Równanie stycznej } y = \frac{5}{8}.$$

b)	x	$(-3, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, 4)$
	$f'(x)$	–	0	–	0	+
	$f(x)$	$\swarrow$	$\frac{5}{8}$	$\swarrow$	Minimum lokalne	$\nearrow$

Funkcja f osiąga minimum dla argumentu 3 i wynosi one $f(3) = -1$.

c) W przedziale $(-3, 4)$ wartość funkcji $f(3) = -1$ jest to jednocześnie wartość najmniejsza, czyli -1 jest wartością najmniejszą.

Zadanie 15.4.

$$W(x) = a(x-1)^2(x+2)$$

$$W'(x) = 2a(x-1)(x+2) + a(x-1)^2$$

$$18 = W'(-2) = 2a(-2-1)(-2+2) + a(-2-1)^2 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{Wzór wielomianu } W(x) = 2(x-1)^2(x+2)$$

$$\text{Współczynnik kierunkowy stycznej } a = W'(3) = 4(3-1)(3+2) + 2(3-1)^2 = 40 + 8 = 48$$

Punkt stycznej

$$W(3) = 2(3-1)^2(3+2) = 40, \quad A = (3, 40)$$

Równanie stycznej

$$y = 48(x-3) + 40 = 48x - 104$$

Zadanie 15.5.

a) Funkcja f jest malejąca w przedziałach: $(-\infty, -4)$, $(0, 4)$.

b)

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Minimum lokalne	$\nearrow$	Maksimum lokalne	$\searrow$	Minimum lokalne	$\nearrow$

Maksimum lokalne jest dla argumentu 0.

c) Równanie stycznej $y = f'(1)(x-1) + 2 = -2(x-1) + 2 = -2x + 4$

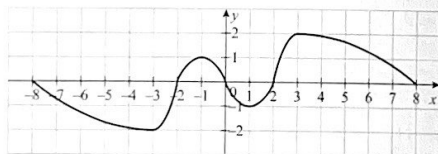
Zadanie 15.6.

Umieścimy dane w tabeli

x	-8	$(-8, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$
$f(x)$	0	$\searrow$	-2 Min lokalne	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1 Max lokalne	$\searrow$

Wykorzystując informację, że funkcja jest nieparzysta otrzymujemy

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, 8)$	8
$f(x)$	0	$\searrow$	-1 Min lokalne	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2 Max lokalne	$\searrow$	0

**Zadanie 15.7.**

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$(+)$	0	$(-)$	0	$(+)$	0	$(-)$
$f(x)$		2		-1		1	

W przedziale $(2, 3)$ poprawny znak pochodnej $(+)$.

Dane nie pozwalają stwierdzić ile ma miejsc zerowych funkcja.

W przedziale $(-\infty, -1)$ może mieć jedno miejsce zerowe $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0\right)$ lub nie mieć miejsc zerowych $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \geq 0\right)$.

W przedziale $(-1, 2)$ ma jedno miejsce zerowe.

W przedziale $(2, 3)$ ma jedno miejsce zerowe.

W przedziale $(3, +\infty)$ może mieć jedno miejsce zerowe $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < 0\right)$ lub nie mieć miejsc zerowych $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0\right)$.

Zadanie 15.8.

$$f'(x) = \frac{2x(x-4) - x^2}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2}$$

$$f'(12) = \frac{12^2 - 8 \cdot 12}{8^2} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Odp. } f'(12) = \frac{3}{4}.$$

Zadanie 15.9.

$$f'(x) = 4x^3$$

$$4x^3 = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

Punkt styczności $A = (1, 1)$.

Równanie stycznej $y = 4(x-1) + 1$.

$$\text{Odp. } y = 4x - 3.$$

Zadanie 15.10.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$3x^2 - 4x = 4$$

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\Delta = 16 + 16 \cdot 3 = 64 \quad x_1 = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{4+8}{6} = 2$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 1 = -\frac{5}{27}$$

$$f(2) = 8 - 8 + 1 = 1.$$

$$\text{Równanie stycznej: } y = 4\left(x + \frac{2}{3}\right) - \frac{5}{27} = 4x + \frac{67}{27}.$$

$$\text{Równanie stycznej: } y = 4(x-2) + 1 = 4x - 7.$$

Zadanie 15.11.

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - (x-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-1+2+1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Równanie stycznej } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Zadanie 15.12.

$$a = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad a = y'(x_0), \quad 2\sqrt{3}x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_0 = \frac{1}{6}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{36} - 1.$$

$$\text{Odp. } P = \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{36} - 1 \right).$$

Zadanie 15.13.

$$y' = 4x + 1,$$

$$a = y'(10) = 41.$$

Zatem styczna ma równanie:

$$y = 41(x - 10) + 2429 = 41x + 2019.$$

$$\text{Odp. } b = 2019.$$

II sposób

Można wyznaczyć współczynnik b bez wykorzystywania pochodnej.

Równanie prostej przechodzącej przez punkt $P = (10, 2429)$ jest następujące:

$$y = a(x - 10) + 2429 = ax - 10a + 2429.$$

Zatem

$$b = 2429 - 10a.$$

Prosta o równaniu $y = ax - 10a + 2429$ jest styczna do paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x + 2219$ wtedy, gdy układ równań

$$\begin{cases} y = ax - 10a + 2429 \\ y = 2x^2 + x + 2219 \end{cases}$$

ma jedno rozwiązanie.

Tak jest wtedy, gdy równanie $ax - 10a + 2429 = 2x^2 + x + 2219$ ma jedno rozwiązanie.

Przekształcając ostatnie równanie otrzymujemy

$$2x^2 + (1-a)x + 10a - 210 = 0.$$

Równanie to ma jedno rozwiązanie wtedy, gdy $\Delta = 0$.

$$\Delta = (1-a)^2 - 80a + 1680 = a^2 - 82a + 1681 = (a-41)^2.$$

Zatem $a = 41$ i $b = 2429 - 410 = 2019$.

Zadanie 15.14.

$$f'(x) = \frac{(25x^2 - 9)' \cdot (x^2 + 2) - (25x^2 - 9) \cdot (x^2 + 2)'}{(x^2 + 2)^2} = \frac{50x \cdot (x^2 + 2) - (25x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{118x}{(x^2 + 2)^2}.$$

$$f'(10) = \frac{1180}{(102)^2} = \frac{1180}{10404} = \frac{295}{2601}.$$

Zadanie 15.15.

Pochodna funkcji f

$$f'(x) = \frac{3x^3 - x^3 - k}{x^2} = \frac{2x^3 - k}{x^2}$$

Niech punkt $P = (x_0, y_0)$ będzie punktem styczności prostej o równaniu $y = -x$ z wykresem funkcji f .

Wtedy

$$\begin{cases} y_0 = \frac{x_0^3 + k}{x_0} \\ y_0 = -x_0 \\ \frac{2x_0^3 - k}{x_0^2} = -1 \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} x_0^3 + k = -x_0^2 \\ 2x_0^3 - k = -x_0^2 \end{cases}$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$3x_0^3 = -2x_0^2$$

Zatem uwzględniając, że $x_0 \neq 0$ otrzymujemy $x_0 = -\frac{2}{3}$, czyli $P = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Z równania $x_0^3 + k = -x_0^2$ otrzymujemy

$$k = -x_0^2 - x_0^3 = -\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{4}{9} + \frac{8}{27} = -\frac{4}{27}$$

Parametr k można też wyznaczyć z równania $2x_0^3 - k = -x_0^2$. Wtedy

$$k = 2x_0^3 + x_0^2 = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{16}{27} + \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$$

$$\text{Odp. } k = -\frac{4}{27}.$$

Zadanie 15.16.

Pochodna

$$f'(x) = \frac{(x^2+3)' \cdot (x-1) - (x^2+3) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$f'(-3) = \frac{9+6-3}{16} = \frac{3}{4}$$

Równanie stycznej

$$y = \frac{3}{4}(x+3) - 3 = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

Zadanie 15.17.

$$f'(x) = \frac{3(x+1) - 3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

W przedziale $(-1, +\infty)$ pochodna funkcji jest dodatnia, więc funkcja jest rosnąca.**Zadanie 15.18.**

$$f(4) = \frac{8-3}{4+2} + 4 \log_{\frac{1}{2}} 4 = \frac{5}{6} - 8 < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-3}{\frac{1}{2}+2} + 4 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = -\frac{4}{5} + 4 > 0$$

Funkcja f jest ciągła więc dla pewnej liczby $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 4\right)$ mamy $f(x_0) = 0$.**Zadanie 15.19.**

$$f'(x) = 4x^3 + 4 \cdot (2x+1)^3 = 4(x^3 + (2x+1)^3) =$$

$$4(x+2x+1)(x^2 - x(2x+1) + (2x+1)^2) = 4(3x+1)(3x^2+3x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$$

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$
$x'(t)$	–	0	+
$x(t)$		Minimum lokalne	

Minimum jest wartością najmniejszą i wynosi

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{54}$$

Odp. Najmniejsza wartość funkcji wynosi $\frac{1}{54}$.**Zadanie 15.20.**

Niech

$$h(x) = f(x) - 5 = x^6 - 2x^4 - x^3 - 4$$

$$h(0) = -4 < 0$$

$$h(2) = 64 - 32 - 8 - 4 = 20 > 0$$

Funkcja h jest ciągła, więc dla pewnej liczby $h(x_0) = 0$ mamy $h(x_0) = 0$.Wtedy $f(x_0) = h(x_0) + 5 = 5$.**Zadanie 15.21.**

Niech

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2$$

$$f(-1) = 1 + 7 + 9 - 8 - 2 = 7$$

$$f(0) = -2$$

$$f(1) = 1 - 7 + 9 + 8 - 2 = 9$$

Funkcja f jest ciągła, więc dla pewnej liczby $x_1 \in (-1, 0)$ mamy $f(x_1) = 0$ oraz dla pewnej liczby $x_2 \in (0, 1)$ mamy $f(x_2) = 0$.**Zadanie 15.22.**

$$\frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 2x + 8} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 3x^2 + 6x + 24 \Leftrightarrow -8x = 24 \Leftrightarrow x = -3$$

Punkt styczności $P = (-3, 3)$.

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x)'(x^2 + 2x + 8) - (3x^2 - 2x)(x^2 + 2x + 8)'}{(x^2 + 2x + 8)^2} =$$

$$\frac{(6x-2)(x^2+2x+8) - (3x^2-2x)(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2} = \frac{8x^2+48x-16}{(x^2+2x+8)^2} = \frac{8(x^2+6x-2)}{(x^2+2x+8)^2}$$

$$f'(-3) = \frac{8 \cdot (-11)}{11^2} = -\frac{8}{11}$$

Równanie stycznej

$$y = -\frac{8}{11}(x+3) + 3 = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$$

Zadanie 15.23.1.

$$81^{\log_3 x} = (3^4)^{\log_3 x} = (3^{\log_3 x})^4 = x^4$$

$$\frac{2 \cdot \log_3 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} = \frac{2 \cdot \log_3 3^{\frac{3}{2}} \cdot \log_3 2}{3} = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 2}{3} = \log_3 3 \cdot \log_3 2 =$$

$$\frac{1}{\log_3 2} \cdot \log_3 2 = 1$$

Stąd

$$81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_3 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x = x^4 + x^2 - 6x$$

Zadanie 15.23.2.

$$f(x) = x^4 + x^2 - 6x, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Uwzględniając, że $x \in (0, +\infty)$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		Minimum lokalne	

W przedziale $(0, +\infty)$ jest to wartość najmniejsza i wynosi $f(1) = -4$ Odp. $f(1) = -4$.**II sposób**Można uzasadnić, że (-4) jest najmniejszą wartością funkcji f nie wykorzystując pochodnych.

$$f(x) = x^4 + x^2 - 6x = x^4 - 2x^2 + 1 + 3x^2 - 6x + 3 - 4 = (x^2 - 1)^2 + 3(x - 1)^2 - 4$$

Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności

$$(x^2 - 1)^2 \geq 0$$

$$3(x - 1)^2 \geq 0$$

Zatem $f(x) \geq -4$.Jednocześnie $f(1) = -4$, więc (-4) jest najmniejszą wartością funkcji f .**Zadanie 15.24.**

$$2x^3 - 4x^2 + 9x = 18 \Leftrightarrow 2x^2(x - 2) + 9(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Punkt styczności $P = (2, 18)$.

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 9$$

$$f'(2) = 24 - 16 + 9 = 17$$

Równanie stycznej

$$y = 17(x - 2) + 18 = 17x - 16$$

Zadanie 15.25.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 2} = -\infty$$

Zadanie 15.26.

$$f(2) = \frac{2^3 - 3 \cdot 2 + 2}{2} = 2$$

Punkt styczności $P = (2, 2)$.

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 3x + 2)' \cdot x - (x^3 - 3x + 2)(x)'}{x^2} =$$

$$\frac{(3x^2 - 3) \cdot x - (x^3 - 3x + 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^3 - 3x - x^3 + 3x - 2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$$

$$f'(2) = \frac{16 - 2}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Równanie stycznej

$$y = \frac{7}{2}(x - 2) + 2 = \frac{7}{2}x - 5$$

Odp. $a = \frac{7}{2}$, $b = -5$.**Zadanie 15.27.**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 3|}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x + 3} = -\frac{1}{6}$$

Zadanie 15.28.

$$5 = \frac{2x+1}{x-4} \Leftrightarrow 5x-20 = 2x+1 \Leftrightarrow 3x = 21 \Leftrightarrow x = 7$$

Punkt styczności $P = (7, 5)$.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)' \cdot (x-4) - (2x+1)(x-4)'}{(x-4)^2} = \frac{2x-8-2x-1}{(x-4)^2} = \frac{-9}{(x-4)^2}$$

$$f'(7) = \frac{-9}{9} = -1$$

Równanie stycznej

$$y = -1(x-7) + 5 = -x + 12$$

16. Optymalizacja**Zadanie 16.1.**

Ponieważ $V = \pi r^2 h = 250\pi$, więc $h = \frac{250}{r^2}$.

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{250}{r^2} = 2\pi \left(r^2 + \frac{250}{r} \right)$$

$$r \in (0, +\infty)$$

$$\text{Niech } f(r) = r^2 + \frac{250}{r}.$$

$$f'(r) = 2r - \frac{250}{r^2} = \frac{2(r^3 - 125)}{r^2}$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 5$$

$$f'(r) > 0 \Leftrightarrow r \in (5, +\infty)$$

$$f'(r) < 0 \Leftrightarrow r \in (0, 5)$$

r	$(0, 5)$	5	$(5, +\infty)$
$f'(r)$	-	0	+
$f(r)$		Minimum lokalne	

W przedziale $(0, +\infty)$ jest to wartość najmniejsza.

Odp. $r = 5$.

Zadanie 16.2.

Niech r oznacza różnicę ciągu arytmetycznego. Wtedy

$$a_1 = 1 - 50r, \quad a_{49} = 1 - 2r, \quad a_{50} = 1 - r.$$

$$f(r) = \frac{a_1 \cdot a_{49}}{a_{50}} = \frac{(1-50r)(1-2r)}{1-r} = \frac{100r^2 - 52r + 1}{1-r}$$

$$r \in (-\infty, 1)$$

$$f'(r) = \frac{(200r - 52)(1-r) + 100r^2 - 52r + 1}{(1-r)^2} = \frac{-100r^2 + 200r - 51}{(1-r)^2}$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow -100r^2 + 200r - 51 = 0$$

$$\Delta = 40000 - 20400 = 19600$$

$$r_1 = \frac{-200 - 140}{-200} = \frac{17}{10} > 1$$

$$r_2 = \frac{-200 + 140}{-200} = \frac{3}{10} < 1$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{3}{10}$$

$$f'(r) > 0 \Leftrightarrow r \in \left(\frac{3}{10}, 1 \right)$$

$$f'(r) < 0 \Leftrightarrow r \in \left(-\infty, \frac{3}{10} \right)$$

r	$\left(-\infty, \frac{3}{10} \right)$	$\frac{3}{10}$	$\left(\frac{3}{10}, 1 \right)$
$f'(r)$	-	0	+
$f(r)$		Minimum lokalne	

W przedziale $\left(-\infty, \frac{3}{10} \right)$ minimum lokalne jest wartością najmniejszą i wynosi

$$f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{(1-15)\left(1-\frac{3}{5}\right)}{1-\frac{3}{10}} = \frac{-\frac{28}{5}}{\frac{7}{10}} = -8$$

Odp. Najmniejsza wartość wynosi -8 .

Zadanie 16.3.

Równanie powyższe ma pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = (m-5)^2 - 4\left(m^2 + m + \frac{1}{4}\right) = -3m^2 - 14m + 24 = (-3m+4)(m+6)$$

Zatem równanie ma pierwiastki rzeczywiste wtedy, gdy $m \in \left(-6, \frac{4}{3}\right)$.

Zauważmy jeszcze, że dla $m = -\frac{1}{2}$ współczynnik $m^2 + m + \frac{1}{4} = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, więc jeden z pierwiastków równania jest równy 0.

$$f(m) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{5-m}{m^2 + m + \frac{1}{4}}$$

Dziedziną funkcji jest suma przedziałów $D = \left(-6, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$.

$$f'(m) = \frac{-1\left(m^2 + m + \frac{1}{4}\right) - (5-m)(2m+1)}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^4} = \frac{m^2 - 10m - 21}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^4}$$

$$f'(m) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 10m - 21 = 0$$

$$\Delta = 100 + 21 = 121$$

$$m_1 = \frac{10-11}{2} = -\frac{1}{2} \notin D$$

$$m_2 = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} \notin D$$

$$f'(m) > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-6, -\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(m) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$$

Funkcja f jest ciągła w dziedzinie oraz

m	$\left(-6, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$
$f'(m)$	+	x	-
$f(m)$	$\nearrow$	x	$\searrow$

$$f(-6) = \frac{5+6}{36-6+\frac{1}{4}} = \frac{4}{11}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5-\frac{4}{3}}{\frac{16}{9}+\frac{4}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{12}{11}$$

Odp. Stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą dla $m = -6$ i wartość najmniejsza wynosi $\frac{4}{11}$.

Zadanie 16.4.

Niech x oznacza długość krawędzi podstawy graniastosłupa, h wysokość graniastosłupa. Wtedy

$$2 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}h$$

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{3x^2}$$

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$P = 2 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 3xh = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x^2 + \frac{16}{x}\right)$$

Niech

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Wtedy

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$$

x	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	Minimum lokalne	$\nearrow$

W przedziale $(0, +\infty)$ jest to wartość najmniejsza i wynosi

$$f(2) = 4 + 8 = 12$$

Odp. Długość krawędzi podstawy wynosi 2 m, wysokość $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ m.

II sposób

Można uzasadnić, że 12 jest najmniejszą wartością funkcji $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$, dla $x \in (0, +\infty)$ nie odwołując się do pochodnych. Wystarczy wykorzystać nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

$$x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} = 3 \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$$

Jednocześnie $f(2) = 12$, więc 12 jest najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $(0, +\infty)$.

Zadanie 16.5.

$$\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + my = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - 2 \\ x + m(mx - 2) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3m}{m^2 + 1} \\ y = \frac{m^2 - 2}{m^2 + 1} \end{cases}, m \in \mathbb{R}$$

$$x + y = f(m) = \frac{m^2 + 3m - 2}{m^2 + 1}$$

$$f'(m) = \frac{(2m+3)(m^2+1) - 2m(m^2+3m-2)}{(m^2+1)^2} = \frac{-3m^2+6m+3}{(m^2+1)^2} = \frac{-3((m-1)^2-2)}{(m^2+1)^2}$$

$$f'(m) = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 2 \Leftrightarrow m = 1 + \sqrt{2} \text{ lub } m = 1 - \sqrt{2}$$

$$f'(m) > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow m \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$$

$$f'(m) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$$

m	$(2, 1 + \sqrt{2})$	$1 + \sqrt{2}$	$(1 + \sqrt{2}, 4)$
$f'(m)$	+	0	-
$f(m)$	$\nearrow$	Maksimum lokalne	$\searrow$

Wartość najmniejsza funkcji jest równa $f(2)$ lub $f(4)$.

$$f(2) = \frac{4+6-2}{5} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$f(4) = \frac{16+12-2}{17} = \frac{26}{17} < 1,6$$

Najmniejszą wartością sumy $x + y$ jest $f(4) = \frac{26}{17}$.

Zadanie 16.6.

$$P = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(1-2x) - \frac{1}{2}2x(1-x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + x - x + x^2$$

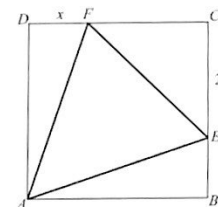
$$P = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ gdzie } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

$$P = \min \text{ dla } x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{4}.$$

Można też tak:

$$P = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \geq \frac{7}{16}.$$

$$\text{Równość zachodzi dla } x = \frac{1}{4}.$$



Zadanie 16.7.

Niech $C(x, x+1)$. Wtedy

$$|AC|^2 = (x-1)^2 + (x-4)^2 \quad |BC|^2 = (x-9)^2 + (x-2)^2$$

$$|AC|^2 + |BC|^2 = x^2 - 2x + 1 + x^2 - 8x + 16 + x^2 - 18x + 81 + x^2 - 4x + 4$$

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 4x^2 - 32x + 102 = 4(x^2 - 8x + 16) + 38 = 4(x-4)^2 + 38.$$

Wartość najmniejsza dla $x = 4$.

Odp. $C = (4, 5)$.

Zadanie 16.8.

a – długość krawędzi podstawy, b – długość krawędzi bocznej.

$$12a + 6b = 24, \quad b = 4 - 2a.$$

Pole powierzchni bocznej: $P = 6a \cdot (4 - 2a) = -8a(a - 2)$, $a \in (0, 2)$

Pole jest maksymalne dla $a = 1$.

Odp. $a = 1$, $b = 2$.

Zadanie 16.9.

$$P = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-x) - \frac{1}{2}x(2-x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2,$$

gdzie $x \in (0, 2)$.

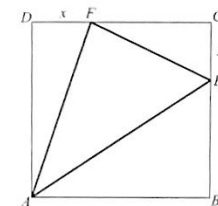
$$P = \min \text{ dla } x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$P_{\min} = \frac{3}{2}.$$

Można też tak:

$$P = \frac{1}{2}x^2 - x + 2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Równość zachodzi dla $x = 1$.



Zadanie 16.10.

$$|QP|^2 = \left(\frac{1}{2}m + \frac{5}{2} - \frac{55}{2}\right)^2 + m^2 = \frac{1}{4}m^2 - 25m + 625 + m^2 = \frac{5}{4}m^2 - 25m + 625 = f(m)$$

$$f(1) = 1,25 - 25 + 625 = 601,25$$

$$f(7) = 61,25 - 175 + 625 = 511,25$$

$$p = \frac{25}{5} = 10 \notin (1, 7).$$

Odp. Min = 511,25; Max = 601,25.

Zadanie 16.11.

Niech $P = (x, 8x + 10)$. Wtedy

$$|AP|^2 + |BP|^2 = (x-3)^2 + (8x+12)^2 + (x-11)^2 + (8x+6)^2 = f(x)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 + 64x^2 + 192x + 144 + x^2 - 22x + 121 + 64x^2 + 96x + 36$$

$$f(x) = 130x^2 + 260x + 310$$

$$p = \frac{-260}{260} = -1.$$

Odp. $P = (-1, 2)$.

Zadanie 16.12.

Z twierdzenia cosinusów

$$c^2 = x^2 + (4-x)^2 - 2x(4-x)\cos 120^\circ =$$

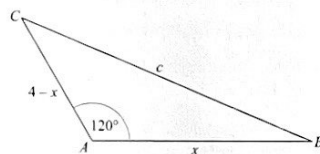
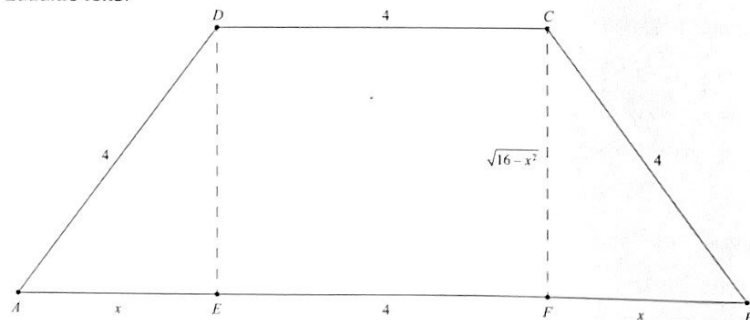
$$= x^2 + (4-x)^2 + x(4-x), \quad 0 < x < 4.$$

$$y = x^2 + (4-x)^2 + x^2 + (4-x)^2 + x(4-x) =$$

$$= 3x^2 - 12x + 32.$$

$$\text{Najmniejsza wartość jest dla } p = \frac{12}{6} = 2.$$

$$\text{Najmniejsza wartość wynosi } y(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 32 = 20.$$

**Zadanie 16.13.**

$$P = (x+4)\sqrt{16-x^2} = \sqrt{(x+4)^2(16-x^2)}, \quad x \in (0, 4)$$

$$\text{Niech } f(x) = (x+4)^2(16-x^2) = (x^2+8x+16)(16-x^2).$$

$$f'(x) = (2x+8)(16-x^2) + (x+4)^2(-2x) = 2(x+4)^2(4-x) - 2x(x+4)^2$$

$$= 2(x+4)^2(4-2x) = 4(x+4)^2(2-x)$$

Dla $x \in (0, 4)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$$

x	$(0, 2)$	2	$(2, 4)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		Maksimum lokalne	

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 4)$$

W przedziale $(0, 4)$ jest to wartość największa i wynosi $f(2) = 6^2 \cdot (16-4) = 432$.

Odp. Największe pole trapezu wynosi $P = \sqrt{432} = 12\sqrt{3} \text{ dm}^2$. Wtedy dłuższa podstawa trapezu ma długość 8 dm.

II sposób

Można uzasadnić, że 432 jest największą wartością funkcji $f(x) = (x+4)^2(16-x^2)$, dla $x \in (0, 4)$ nie odwołując się do pochodnych. Wystarczy wykorzystać nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

$$(x+4)^2(16-x^2) = 3^3 \cdot \frac{1}{3}(x+4) \cdot \frac{1}{3}(x+4) \cdot \frac{1}{3}(x+4) \cdot (4-x) \leq$$

$$\leq 3^3 \cdot \left(\frac{\frac{1}{3}(x+4) + \frac{1}{3}(x+4) + \frac{1}{3}(x+4) + 4-x}{4} \right)^4 = 27 \cdot 16 = 432.$$

Jednocześnie $f(2) = 6^2 \cdot 12 = 432$, więc 432 jest największą wartością funkcji f w przedziale $(0, 4)$.

Zadanie 16.14.

Wysokość stożka – h . Tworząca stożka – l . Promień podstawy stożka – r .

$$l + r = 10$$

$$h^2 + r^2 = (10 - r)^2$$

$$20r = 100 - h^2$$

$$r = 5 - \frac{1}{20}h^2. \text{ Zatem}$$

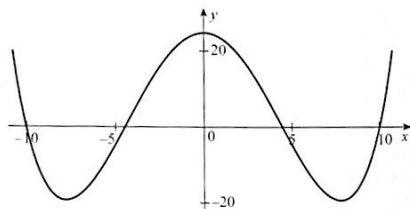
$$V = \frac{1}{3}\pi h \left(5 - \frac{1}{20}h^2 \right)^2, \quad h \in (0, 10).$$

Niech $f(h) = 25h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{400}h^5$.

Wtedy

$$f'(h) = 25 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{80}h^4 = \frac{1}{80}(h^2 - 20)(h^2 - 100)$$

$$f'(h) = \frac{1}{80}(h - 10)(h + 10)(h - 2\sqrt{5})(h + 2\sqrt{5}).$$



Dla $h \in (0, 2\sqrt{5})$, $f'(h) > 0$. Dla $h \in (2\sqrt{5}, 10)$, $f'(h) < 0$.

Zatem największa objętość jest dla $h = 2\sqrt{5}$, $r = 4$.

Objętość największa wynosi $V = \frac{1}{3}\pi 2\sqrt{5} \cdot 16 = \frac{32}{3}\pi\sqrt{5}$.

Zadanie 16.15.

Wysokość stożka – h . Tworząca stożka – l . Promień podstawy stożka – r .

$$l + r = 2 \quad h^2 + r^2 = (2 - r)^2 \quad 4r = 4 - h^2 \quad r = 1 - \frac{1}{4}h^2.$$

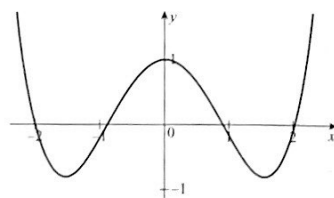
$$V = \frac{1}{3}\pi h \left(1 - \frac{1}{4}h^2\right)^2, \quad h \in (0, 2).$$

Niech $f(h) = h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5$.

Wtedy

$$f'(h) = 1 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{5}{16}h^4 = \frac{5}{16}(h^2 - 4)\left(h^2 - \frac{4}{5}\right)$$

$$f'(h) = \frac{5}{16}(h - 2)(h + 2)\left(h - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(h + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$



Dla $h \in \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $f'(h) > 0$. Dla $h \in \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 2\right)$, $f'(h) < 0$.

Zatem największa objętość jest dla $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $r = \frac{4}{5}$.

Objętość największa wynosi $V = \frac{1}{3}\pi \frac{16}{25} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{32}{375}\pi\sqrt{5}$.

Zadanie 16.16.

Równanie prostej BC : $y = a(x - 2) + 5 = ax + 5 - 2a$.

Wyznaczanie współrzędnych punktów przecięcia w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} y = ax + 5 - 2a \\ y = x^2 \end{cases} \quad x^2 - ax - 5 + 2a = 0$$

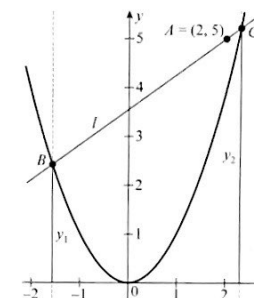
$$\Delta = a^2 - 8a + 20 = (a - 4)^2 + 4 > 0$$

$$y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$

$$a^2 - 2(-5 + 2a) = a^2 - 4a + 10, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Min dla $p = \frac{-b}{2a} = 2$

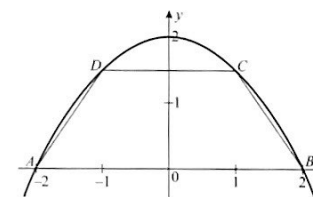
Odp. $a = 2$.



Zadanie 16.17.

Niech $C = \left(x, 2 - \frac{1}{2}x^2\right)$, $x \in (0, 2)$. Wtedy pole

trapezu $ABCD$ jest równe:



$$P = \frac{4 + 2x}{2} \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) = (2 + x) \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 2x + 4.$$

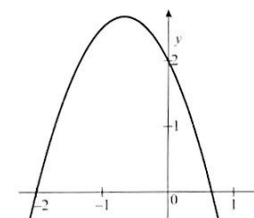
$$P' = -\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2.$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \quad x_1 = \frac{2 - 4}{-3} = \frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{2 + 4}{-3} = -2.$$

Dla $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, $P' > 0$. Dla $x \in \left(\frac{2}{3}, 2\right)$, $P' < 0$.

Zatem pole jest największe dla $x = \frac{2}{3}$.

Odp. $C = \left(\frac{2}{3}, 2 - \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$.



Zadanie 16.18.

$$2\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad 1 = r^2 + rh \quad h = \frac{1}{r} - r \quad r \in (0, 1).$$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{1}{r} - r \right) = \pi r - \pi r^3.$$

$$V' = \pi - 3\pi r^2 = \pi(1 - 3r^2).$$

$$V' = 0, \text{ dla } r_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \notin (0, 1), r_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1).$$

$$\text{Dla } r \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), V' > 0. \quad \text{Dla } r \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right), V' < 0.$$

Zatem dla $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ objętość jest największa.

$$V_{\max} = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi.$$

Zadanie 16.19.

Niech $|AM| = 2x, x \in (0, 5)$.

$$\text{Wtedy } P_{ACDMEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2 \text{ oraz}$$

$$P_{MBG} = \frac{\sqrt{3}}{4} (10 - 2x)^2 = 25\sqrt{3} - 10\sqrt{3}x + \sqrt{3}x^2.$$

Zatem

$$P = P_{MBG} + P_{ACDMEF} = \frac{5\sqrt{3}}{2} x^2 - 10\sqrt{3}x + 25\sqrt{3}.$$

$$\text{Dla } x = \frac{-b}{2a} = \frac{10\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 2 \text{ suma pól jest najmniejsza.}$$

$$\frac{O_{ACDMEF}}{O_{MBG}} = \frac{6x}{3(10 - 2x)} = \frac{2x}{10 - 2x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

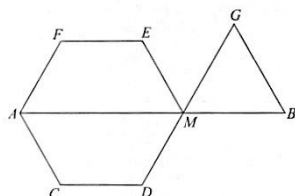
Zadanie 16.20.

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = r \cdot \frac{P - 2\pi r^2}{2} = \frac{1}{2} Pr - \pi r^3$$

$$\begin{cases} r > 0 \\ P - 2\pi r^2 > 0 \end{cases} \quad r \in \left(0, \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right)$$

$$V' = \frac{1}{2} P - 3\pi r^2$$



$$V' = 0 \Leftrightarrow 6\pi r^2 = P \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}.$$

$$\text{Dla } r \in \left(0, \sqrt{\frac{P}{6\pi}}\right), V' > 0. \quad \text{Dla } r \in \left(\sqrt{\frac{P}{6\pi}}, \sqrt{\frac{P}{2\pi}}\right), V' < 0.$$

Stąd V jest największe, gdy $r = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$. Wtedy

$$h = \frac{P - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{P - 2\pi \cdot \frac{P}{6\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{P}{6\pi}}} = \frac{\frac{2}{3}P}{2\pi \sqrt{\frac{P}{6\pi}}} = \frac{\frac{2}{3}P}{2\pi \cdot \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{P}{6\pi}}.$$

$$\text{Wartość największa } V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{P}{6\pi} \cdot 2\sqrt{\frac{P}{6\pi}} = \frac{P}{3} \sqrt{\frac{P}{6\pi}}.$$

Zadanie 16.21.

$$b = 2a.$$

$$8 = 2a^2c \quad 4 = a^2c \quad ac = \frac{4}{a} \quad c = \frac{4}{a^2}$$

$$P = 2(2a^2 + ac + 2ac) = 2\left(2a^2 + 3a \cdot \frac{4}{a^2}\right) = 4\left(a^2 + \frac{6}{a}\right).$$

Dziedzina:

$$4a + 4b + 4c < 28$$

$$3a + \frac{4}{a^2} < 7$$

$$(a-1)(3a^2 - 4a - 4) < 0$$

$$a \in (1, 2).$$

$$P' = 4\left(2a - \frac{6}{a^2}\right) = 8 \cdot \frac{a^3 - 3}{a^2}$$

$$P' = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{3} \in (1, 2)$$

$$P' > 0 \Leftrightarrow a \in (\sqrt[3]{3}, 2)$$

Pole jest najmniejsze, gdy:

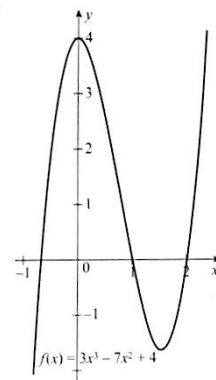
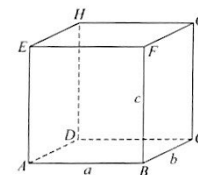
$$a = \sqrt[3]{3}, b = 2\sqrt[3]{3}, c = \frac{4}{\sqrt[3]{9}} = \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}.$$

$$3a + c < 7$$

$$3a^3 - 7a^2 + 4 < 0$$

$$(a-1)(a-2)(3a+2) < 0$$

$$P' < 0 \Leftrightarrow a \in (1, \sqrt[3]{3}).$$



Zadanie 16.22.

Ponieważ $h = 2 - a$, więc $a < 2$.

Wykorzystując, że trapez opisany jest na okręgu otrzymujemy:

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (2-a)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$(2-a)^2 = ab \quad b = \frac{(2-a)^2}{a}.$$

Zgodnie z założeniem $\frac{(2-a)^2}{a} < a$. Stąd $4 - 4a + a^2 < a^2 \quad a > 1$.

Odp. $a \in (1, 2)$.

$$L(a) = a + b + 2c = 2a + 2b = 2a + 2 \cdot \frac{(2-a)^2}{a} = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$$

$$L'(a) = \frac{(8a-8)a - 4a^2 + 8a - 8}{a^2} = \frac{4a^2 - 8}{a^2}$$

Dla $a \in (1, \sqrt{2})$, $L'(a) < 0$. Dla $a \in (\sqrt{2}, 2)$, $L'(a) > 0$.

Stąd dla $a = \sqrt{2}$ obwód trapezu jest najmniejszy.

Uwaga. Można to uzasadnić nie wykorzystując pochodnej. Wystarczy zauważyć, że

$$L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a} = 4\left(a - 2 + \frac{2}{a}\right) = 4\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}\right)^2 + 8\sqrt{2} - 8 \geq 8\sqrt{2} - 8.$$

Równość zachodzi, gdy $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$, czyli dla $a = \sqrt{2}$.

$$\text{Dla } a = \sqrt{2}: h = 2 - \sqrt{2}, \frac{a-b}{2} = \frac{\sqrt{2} - \frac{(2-\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{2-4+4\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

Zatem trójkąt BCE jest równoramienny, czyli $\alpha = 45^\circ$.

Odp. $\alpha = 1$

Zadanie 16.23.

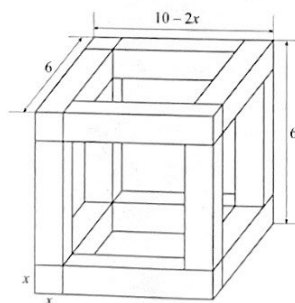
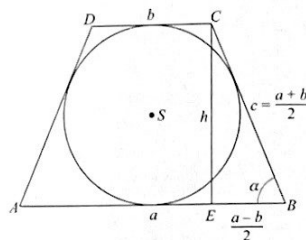
$$V = 4x^2(10-2x) + 8x^2(6-2x) = 88x^2 - 24x^3.$$

$$\begin{cases} 10-4x > 0 \\ 6-2x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ x < 3 \end{cases}$$

$$x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

$$V' = 176x - 72x^2 = 8x(22-9x).$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{22}{9}$$



$V' > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{22}{9}\right)$. Funkcja V jest rosnąca w przedziale $\left(0, \frac{22}{9}\right)$.

$V' < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{22}{9}, \frac{5}{2}\right)$. Funkcja V jest malejąca w przedziale $\left(\frac{22}{9}, \frac{5}{2}\right)$.

Stąd największa wartość funkcji V jest dla $x = \frac{22}{9}$.

Największa wartość wynosi

$$8\left(11 \cdot \frac{484}{81} - 3 \cdot \frac{10648}{729}\right) = 8\left(\frac{5324}{81} - \frac{10648}{243}\right) = 8\left(\frac{15972}{243} - \frac{10648}{243}\right) = 8 \cdot \frac{5324}{243} = \frac{42592}{243}.$$

Zadanie 16.24.

Niech a oznacza długość krawędzi podstawy, h wysokość graniastosłupa.

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 2.$$

$$h = \frac{8}{a^2\sqrt{3}}.$$

$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot ah = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{8}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(a^2 + \frac{16}{a}\right).$$

$a \in (0, +\infty)$.

$$\text{Niech } f(a) = a^2 + \frac{16}{a}.$$

$$f'(a) = 2a - \frac{16}{a^2} = \frac{2(a^3 - 8)}{a^2}.$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

$$f'(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (2, +\infty).$$

$$f'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 2).$$

a	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(a)$	–	0	+
$f(a)$	$\searrow$	Minimum lokalne	$\nearrow$

W przedziale $(0, +\infty)$ jest to wartość najmniejsza i wynosi $f(2) = 4 + 8 = 12$.

Odp. $a = 2$, $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Najmniejsze pole wynosi $P = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 6\sqrt{3}$.

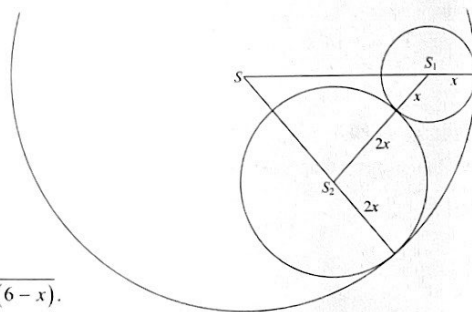
II sposób

Można uzasadnić, że 12 jest najmniejszą wartością funkcji $f(a) = a^2 + \frac{16}{a}$, dla $a \in (0, +\infty)$ nie odwołując się do pochodnych. Wystarczy wykorzystać nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

$$a^2 + \frac{16}{a} = a^2 + \frac{8}{a} + \frac{8}{a} \geq 3\sqrt{a^2 \cdot \frac{8}{a} \cdot \frac{8}{a}} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Jednocześnie $f(2) = 4 + 8 = 12$, więc 12 jest najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $(0, +\infty)$.

Zadanie 16.25.



$$p = 18.$$

$$P = \sqrt{18 \cdot x \cdot 2x \cdot (18 - 3x)} = 6\sqrt{3x^2(6 - x)}.$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x < 18 \\ 18 - x + 18 - 2x > 3x \end{cases}$$

$$x \in (0, 6).$$

$$\text{Niech } f(x) = x^2(6 - x) = -x^3 + 6x^2.$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 4).$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (4, 6).$$

x	$(0, 4)$	4	$(4, 6)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	Maksimum lokalne	$\searrow$

W przedziale $(0, 6)$ jest to wartość największa i wynosi $f(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 = 32$.

Odp. Największe pole ma trójkąt o bokach 14, 12, 10 i wynosi $P = 6 \cdot \sqrt{3 \cdot 32} = 24\sqrt{6}$.

II sposób

Można uzasadnić, że 32 jest największą wartością funkcji $f(x) = x^2(6 - x)$, dla $x \in (0, 6)$ nie odwołując się do pochodnych. Wystarczy wykorzystać nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

$$x^2(6 - x) = 4 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x \cdot (6 - x) \leq 4 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + 6 - x}{3} \right)^3 = 4 \cdot 2^3 = 32.$$

Jednocześnie $f(4) = 16 \cdot 2 = 32$, więc 32 jest największą wartością funkcji f w przedziale $(0, 6)$.

Zadanie 16.26.

Niech x oznacza długość krótszego boku ekranu, a y długość dłuższego boku ekranu.

Wtedy $xy = 60$.

Natomiast powierzchnia smartfona wynosi

$$P = (x + 0,6) \cdot (y + 1) =$$

$$= xy + x + 0,6y + 0,6 = x + \frac{36}{x} + 60,6$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{60}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 < 60 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, \sqrt{60})$$

$$P'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{x^2 - 36}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

$$P'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (6, \sqrt{60})$$

$$P'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 6)$$

x	$(0, 6)$	6	$(6, \sqrt{60})$
$P'(x)$	-	0	+
$P(x)$	$\searrow$	Minimum lokalne	$\nearrow$

W przedziale $(0, \sqrt{60})$ jest to wartość najmniejsza i wynosi $P(6) = 6 + 6 + 60,6 = 72,6$.

$$y = \frac{60}{6} = 10$$

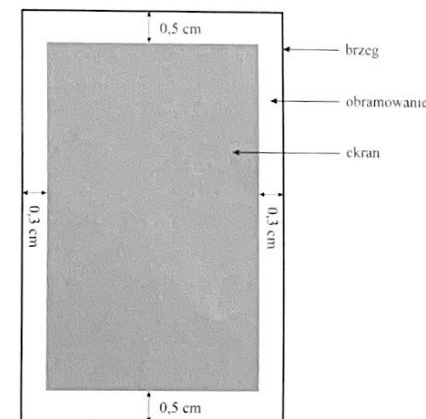
Odp. Krótszy bok ekranu ma długość 6 cm, dłuższy bok 10 cm.

II sposób

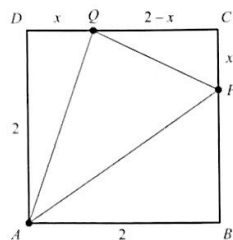
Można uzasadnić, że 72,6 jest najmniejszą wartością funkcji $P(x) = x + \frac{36}{x} + 60,6$, dla $x \in (0, \sqrt{60})$ nie odwołując się do pochodnych. Wystarczy wykorzystać nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

$$x + \frac{36}{x} + 60,6 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{36}{x}} + 60,6 = 2 \cdot 6 + 60,6 = 72,6$$

Jednocześnie $P(6) = 72,6$, więc 72,6 jest najmniejszą wartością funkcji P w przedziale $(0, \sqrt{60})$.



Zadanie 16.27.



$$P_{APQ} = P_{ABCD} - P_{ABP} - P_{PCQ} - P_{AQD} = 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2-x) - \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2-x) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x =$$

$$4 - 2 + x - x + \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

$$x \in \langle 0, 2 \rangle$$

$$p = \frac{-b}{2a} = 1 \in \langle 0, 2 \rangle$$

$$P_{APQ}(1) = \frac{3}{2}$$

Odp. Najmniejsze pole trójkąt APQ ma dla $x = 1$ i wynosi 1,5.

Zadanie 16.28.

Promień okręgu opisanego na podstawie, czyli na kwadracie, jest równy połowie przekątnej kwadratu.

Niech r oznacza promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa, b – długość krawędzi bocznej, h – długość wysokości ostrosłupa, V – objętość ostrosłupa. Wtedy

$$b + r = d$$

$$h^2 + r^2 = b^2 = (d - r)^2 = d^2 - 2dr + r^2$$

Zatem

$$r = \frac{d^2 - h^2}{2d}$$

Pole podstawy ostrosłupa wynosi $2r^2$, więc objętość ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot h = \frac{2}{3} \left(\frac{d^2 - h^2}{2d} \right)^2 h = \frac{1}{6d^2} (h^5 - 2d^2h^3 + d^4h)$$

Ostrosłup istnieje wtedy, gdy $h \in (0, d)$.

Niech $f(h) = h^5 - 2d^2h^3 + d^4h$, gdzie $h \in (0, d)$.

Wtedy

$$f'(h) = 5h^4 - 6d^2h^2 + d^4 = (5h^2 - d^2)(h^2 - d^2)$$

Uwzględniając, że $h \in (0, d)$ otrzymujemy

$$f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{d}{\sqrt{5}}$$

$$f'(h) > 0 \Leftrightarrow 0 < h < \frac{d}{\sqrt{5}}$$

$$f'(h) < 0 \Leftrightarrow \frac{d}{\sqrt{5}} < h < d$$

h	$\left(0, \frac{d}{\sqrt{5}}\right)$	$\frac{d}{\sqrt{5}}$	$\left(\frac{d}{\sqrt{5}}, d\right)$
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$	$\nearrow$	Minimum lokalne	$\searrow$

W przedziale $(0, d)$ jest to wartość największa i wynosi

$$f\left(\frac{d}{\sqrt{5}}\right) = \frac{d^5}{25\sqrt{5}} - \frac{2d^5}{5\sqrt{5}} + \frac{d^5}{\sqrt{5}} = \frac{16d^5}{25\sqrt{5}}$$

Wtedy

$$V\left(\frac{d}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{6d^2} \cdot f\left(\frac{d}{\sqrt{5}}\right) = \frac{8d^3}{75\sqrt{5}}$$

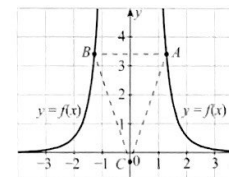
Długość krawędzi podstawy

$$a = r\sqrt{2} = \frac{d^2 - h^2}{2d} \cdot \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$$

Odp. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{5}d$, a naj-

większa objętość ostrosłupa wynosi $\frac{8d^3}{75\sqrt{5}}$.

Zadanie 16.29.



Niech $A = \left(x, \frac{9}{x^4}\right)$, $B = \left(-x, \frac{9}{x^4}\right)$, gdzie $x \in (0, +\infty)$.

Podstawa trójkąta ABC ma długość $2x$, natomiast wysokość $\frac{9}{x^4} + \frac{1}{3}$.

Pole trójkąta P wynosi

$$P = x \cdot \left(\frac{9}{x^4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{x^3} + \frac{1}{3}x$$

Wykorzystując nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną otrzymujemy

$$P = \frac{9}{x^3} + \frac{1}{3}x = \frac{9}{x^3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{9} + \frac{x}{9} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{9}{x^3} \cdot \frac{x}{9} \cdot \frac{x}{9} \cdot \frac{x}{9}} = 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{4}{3}$$

Jednocześnie

$$P(3) = \frac{9}{27} + 1 = \frac{4}{3}$$

Zatem najmniejsze pole trójkąta wynosi $\frac{4}{3}$, wtedy $A = \left(3, \frac{1}{9}\right)$, $B = \left(-3, \frac{1}{9}\right)$.

$$\text{Odp. } A = \left(3, \frac{1}{9}\right), B = \left(-3, \frac{1}{9}\right), P_{ABC} = \frac{4}{3}.$$

II sposób

Obliczamy pochodną funkcji P .

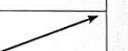
$$P'(x) = -\frac{27}{x^4} + \frac{1}{3}$$

Wtedy uwzględniając, że $x \in (0, +\infty)$ otrzymujemy

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-81 + x^4}{3x^4} \Leftrightarrow x^4 = 81 \Leftrightarrow x = 3$$

$$P'(x) > 0 \Leftrightarrow x^4 > 81 \Leftrightarrow x > 3$$

$$P'(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 < 81 \Leftrightarrow x < 3$$

x	$(0, 3)$	6	$(3, +\infty)$
$P'(x)$	-	0	+
$P(x)$		Minimum lokalne	

W przedziale $(0, +\infty)$ minimum jest wartością najmniejszą i wynosi $P(3) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

Zadanie 16.30.

Niech x oznacza długość boku kwadratu, a y wysokość zbiornika.

$$\text{Wtedy } x^2 y = 144, \text{ czyli } y = \frac{144}{x^2}.$$

Koszty wykonania zbiornika

$$K = 100 \cdot x^2 + 4 \cdot 75 \cdot x \cdot \frac{144}{x^2} = 100x^2 + \frac{43200}{x} = 100 \left(x^2 + \frac{432}{x} \right)$$

Dziedzina

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \langle 4, 9 \rangle$$

$$\begin{cases} \frac{144}{x^2} \leq 9 \\ x^2 \geq 16 \end{cases}$$

Niech $f(x) = x^2 + \frac{432}{x}$. Wtedy

$$f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2} = \frac{2(x^3 - 216)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (6, 9)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \langle 4, 6 \rangle$$

x	$\langle 4, 6 \rangle$	6	$(6, 9)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		Minimum lokalne	

W przedziale $\langle 4, 9 \rangle$ jest to wartość najmniejsza i wynosi $f(6) = 36 + 72 = 108$.

Odp. Dno zbiornika jest kwadratem o boku 6 m, wysokość zbiornika wynosi 4 m.

II sposób

Można uzasadnić, że 108 jest najmniejszą wartością funkcji $f(x) = x^2 + \frac{432}{x}$, dla $x \in \langle 4, 9 \rangle$

nie odwołując się do pochodnych. Wystarczy wykorzystać nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

$$x^2 + \frac{432}{x} = x^2 + \frac{216}{x} + \frac{216}{x} \geq 3 \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{216}{x} \cdot \frac{216}{x}} = 3 \cdot \sqrt[3]{216^2} = 3 \cdot 36 = 108$$

Jednocześnie $f(6) = 108$, więc 108 jest najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle 4, 9 \rangle$.

Zadanie 16.31.

Niech $|BC| = a$ i $|AB| = c$.

Wtedy

$$\begin{cases} a + x + c = 4 \\ a^2 + x^2 = c^2 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} c = 4 - a - x \\ a^2 + x^2 = (4 - a - x)^2 \end{cases}$$

Przekształcając drugie równanie otrzymujemy

$$a^2 + x^2 = 16 + a^2 + x^2 - 8x - 8a + 2ax$$

$$4a - ax = 8 - 4x$$

$$a = \frac{8-4x}{4-x}$$

Pole trójkąta ABC

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{8-4x}{4-x} = \frac{x(4-2x)}{4-x}$$

Dziedzina

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \\ a > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Uwzględniając, że $0 < x < 4$ otrzymujemy: $a = \frac{8-4x}{4-x} > 0$ wtedy, gdy $x < 2$.

$$c = 4 - a - x = 4 - \frac{8-4x}{4-x} - x = \frac{8-4x+x^2}{4-x} = \frac{(x-2)^2 + 4}{4-x}$$

Dla $x < 4$ mamy $c > 0$, czyli $x \in (0, 2)$.

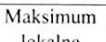
$$P'(x) = \frac{(4-4x)(4-x) - (4x-2x^2)(-1)}{(4-x)^2} = \frac{2x^2 - 16x + 16}{(4-x)^2}$$

Uwzględniając dziedzinę otrzymujemy

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 8x + 8) = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 8 \Leftrightarrow x = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$P'(x) > 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 8x + 8) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 4 - 2\sqrt{2})$$

$$P'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (4 - 2\sqrt{2}, 2)$$

x	$(0, 4 - 2\sqrt{2})$	$4 - 2\sqrt{2}$	$(4 - 2\sqrt{2}, 2)$
$P'(x)$	+	0	-
$P(x)$		Maksimum lokalne	

W przedziale $(0, 2)$ jest to wartość największa.

$$a = \frac{8-4x}{4-x} = \frac{8-4(4-2\sqrt{2})}{4-4+2\sqrt{2}} = \frac{-8+8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 4-2\sqrt{2}$$

Zatem jest to trójkąt prostokątny równoramienny.

$$c = x\sqrt{2} = 4\sqrt{2} - 4$$

Pole największe

$$P = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(4-2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}(24-16\sqrt{2}) = 4(3-2\sqrt{2})$$

Odp. $|BC| = |AC| = 4 - 2\sqrt{2}$, $|AB| = 4\sqrt{2} - 4$. Największe pole wynosi $4(3 - 2\sqrt{2})$.

Zadanie 16.32.1.

$$|PR|^2 = (x+1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) + 3\right)^2 = x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 - 3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 9 =$$

$$x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{64} - 3x^2 + 3x - \frac{3}{4} + 9 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}$$

Stąd

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}}$$

Zadanie 16.32.2.

Pierwsze współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g .

$$x^2 = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{31}{8} = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 4x - 31 = 0$$

Stąd

$$\Delta = 16 + 4 \cdot 12 \cdot 31 = 16 \cdot 94$$

$$x = \frac{4 - 4\sqrt{94}}{24} = \frac{1 - \sqrt{94}}{6} \text{ lub } x = \frac{1 + \sqrt{94}}{6}$$

Niech

$$K = (x, x^2), x \in \left[\frac{1 - \sqrt{94}}{6}, \frac{1 + \sqrt{94}}{6}\right]$$

Wtedy

$$h_1(x) = |PK|^2 = (x+1)^2 + (x^2-1)^2 = x^4 - x^2 + 2x + 2$$

$$h_1'(x) = 4x^3 - 2x + 2 = 2(x+1)(2x^2 - 2x + 1)$$

x	$\left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, -1\right]$	-1	$\left(-1, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$
$h_1'(x)$	-	0	+
$h_1(x)$		Minimum lokalne	

$$h_1\left(\frac{1-\sqrt{94}}{6}\right) < h_1\left(\frac{1+\sqrt{94}}{6}\right)$$

Zatem największą wartością jest $h_1\left(\frac{1+\sqrt{94}}{6}\right)$.

Niech

$$h_2(x) = |PK|^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}$$

$$h_2(x) = |PK|^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{13}{8}x^2 + \frac{39}{8}x + \frac{593}{64}$$

$$h_2'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{39}{8} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x^2 - \frac{13}{4}\right) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$$

x	$\left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{3}{2}\right]$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$
$h_2'(x)$	+	0	-
$h_2(x)$	$\nearrow$	Maksimum lokalne	$\searrow$

W przedziale $\left[\frac{1-\sqrt{94}}{6}, \frac{1+\sqrt{94}}{6}\right]$ jest to wartość największa, jednocześnie

$$h_1\left(\frac{1+\sqrt{94}}{6}\right) = h_2\left(\frac{1+\sqrt{94}}{6}\right).$$

Zatem

$$K = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \text{ oraz } |PK| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

Zadanie 16.33.

$$x(t) = -t^3 + 16,5t^2 + 180t = -t(t-24)(t+7,5)$$

$$x(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (0, 24)$$

$$x'(t) = -3t^2 + 33t + 180 = -3(t^2 - 11t - 60) = -3(t-15)(t+4)$$

t	$[0, 15)$	15	$(15, 24]$
$x'(t)$	+	0	-
$x(t)$	$\nearrow$	Maksimum lokalne	$\searrow$

W przedziale $[0, 24]$ wartość $x(15) = -15 \cdot (-9) \cdot 22,5 = 3037,5$ jest wartością największą.

Najmniejsza odległość od wierzchołka wynosi $4000 - 3037,5 = 962,5$ m.

$$p = \frac{15-4}{2} = 5,5$$

$$x'(p) = -3 \cdot (-9,5) \cdot 9,5 = 270,75$$

Maksymalna prędkość 270,75 m/h.

Odp. Najmniejsza odległość od wierzchołka wynosi 962,5 m. Maksymalna prędkość wynosi 270,75 m/h.

Zadanie 16.34.

Nie T oznacza punkt w którym są „Tropiciele” po t czasie.

Wtedy $|AT| = 4t$.

Przez K oznaczamy punkt w którym są „Korsarze” po t czasie.

Wtedy $|AK| = 15 - 2t$.

$$|KT| = \sqrt{16t^2 + (15 - 2t)^2} = \sqrt{20t^2 - 60t + 225}$$

Najmniejsza odległość $|KT|$ jest dla $t = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$.

Odp. Odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza o godzinie 10:30.

Zadanie 16.35.

Dochód

$$D(Q) = Q \cdot P(Q) - K(Q) = 90Q - 0,1Q^2 - 0,002Q^3 - Q^2 - 29,9985Q - 50 = -0,002Q^3 - 1,1Q^2 + 60,0015Q - 50$$

$$D'(Q) = -0,006Q^2 - 2,2Q + 60,0015$$

$$\Delta = 6,280036 = (2,506)^2$$

$$Q_1 = \frac{2,2 + 2,506}{-0,012} < 0$$

$$Q_2 = \frac{2,2 - 2,506}{-0,012} = \frac{0,306}{0,012} = \frac{306}{12} = \frac{51}{2} = 25,5$$

$$D'(Q) > 0 \Leftrightarrow [0; 25,5)$$

$$D'(Q) < 0 \Leftrightarrow (25,5; 900]$$

Q	$\left[0, \frac{51}{2}\right)$	$\frac{51}{2}$	$\left(\frac{51}{2}, 900\right]$
$D'(Q)$	+	0	-
$D(Q)$	$\nearrow$	Maksimum lokalne	$\searrow$

Odp. Największy dochód przy produkcji 25 500 sztuk.

Zadanie 16.36.

Niech $|AB| = 2a$ oraz $|AC| = |BC| = b$.

Zgodnie z założeniem $a + b = 9$, czyli $a = 9 - b$.

Do wyznaczenia pola trójkąta wykorzystamy wzór Herona

$$P = \sqrt{9 \cdot (9 - 2a) \cdot (9 - b) \cdot (9 - b)} = \sqrt{9(2b - 9)(9 - b)^2} = \\ = (9 - b)\sqrt{18b - 81} = \frac{(18 - 2b)\sqrt{18b - 81}}{2}$$

Dziedzina

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ 2b > 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - b > 0 \\ b > 0 \\ b > 9 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 9 \\ b > 0 \\ b > \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow b \in \left(\frac{9}{2}, 9\right)$$

Niech $f(b) = (2b - 9)(9 - b)^2 = 2b^3 - 45b^2 + 324b - 729$. Wtedy

$$f'(b) = 6b^2 - 90b + 324 = 6(b - 6)(b - 9)$$

Uwzględniając dziedzinę otrzymujemy

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = 6$$

$$f'(b) > 0 \Leftrightarrow b \in \left(\frac{9}{2}, 6\right)$$

$$f'(b) < 0 \Leftrightarrow b \in (6, 9)$$

b	$\left(\frac{9}{2}, 6\right)$	6	$(6, 9)$
$f'(b)$	+	0	-
$f(b)$	$\nearrow$	Maksimum lokalne	$\searrow$

W przedziale $\left(\frac{9}{2}, 9\right)$ maksimum lokalne jest to wartość największą.

Odp. Największe pole ma trójkąt równoboczny o boku 6.

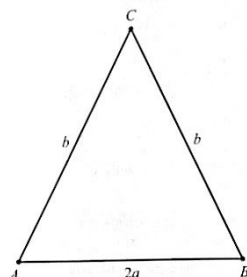
II sposób

Można uzasadnić, że dla $b = 6$ funkcji $f(b) = (2b - 9)(9 - b)^2$ w przedziale $\left(\frac{9}{2}, 6\right)$ ma

wartość największą nie odwołując się do pochodnych. Wystarczy wykorzystać nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

$$(2b - 9)(9 - b)^2 = (2b - 9)(9 - b)(9 - b) \leq \left(\frac{2b - 9 + 9 - b + 9 - b}{3}\right)^3 = 27$$

Jednocześnie $f(6) = 27$, więc 27 jest największą wartością funkcji f w przedziale $\left(\frac{9}{2}, 6\right)$.

**Zadanie 16.37.**

$$K'(x) = \frac{(22x^2 - 621,5x + 23430)' \cdot (480 + x) - (22x^2 - 621,5x + 23430) \cdot (480 + x)'}{(480 + x)^2} = \\ = \frac{(44x - 621,5) \cdot (480 + x) - (22x^2 - 621,5x + 23430)}{(480 + x)^2} = \frac{22x^2 + 21120x - 321750}{(480 + x)^2}$$

Uwzględniając dziedzinę otrzymujemy

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 22x^2 + 21120x - 321750 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 960x - 14625 = 0 \Leftrightarrow x = 15$$

$$K'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (15, 50)$$

$$K'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 15)$$

x	$(0, 15)$	15	$(15, 50)$
$K'(x)$	-	0	+
$K(x)$	$\searrow$	Minimum lokalne	$\nearrow$

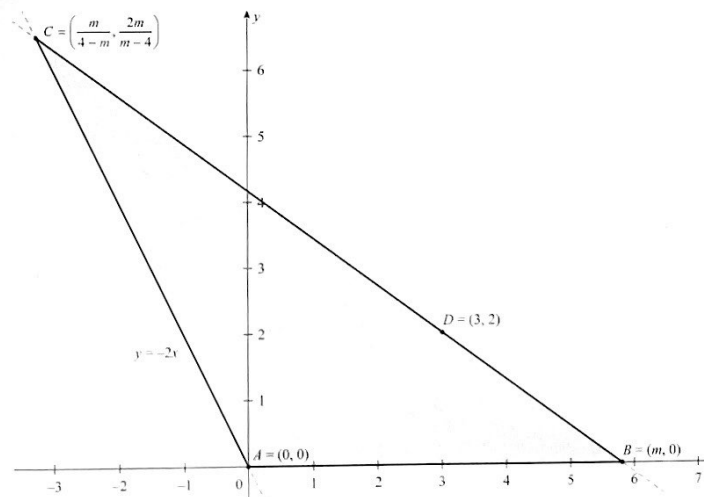
Funkcja K jest ciągła, więc w przedziale $[0, 50]$ minimum lokalne jest wartością najmniejszą i wynosi $K(15) = 38,5$.

Odp. 495 litrów, najmniejszy koszt 38,5 zł.

Zadanie 16.38.

Równanie prostej BC

$$y = \frac{2}{3-m}(x-3) + 2$$



Współrzędne punktu C otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3-m}(x-3)+2 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$C = \left(\frac{m}{4-m}, \frac{2m}{m-4} \right)$$

Pole trójkąta ABC

$$P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{2m}{m-4} = \frac{m^2}{m-4}$$

Wyznaczenie wartości m , dla której funkcja P osiąga wartość najmniejszą

$$P'(m) = \frac{2m(m-4)-m^2}{(m-4)^2} = \frac{m^2-8m}{(m-4)^2}$$

Uwzględniając, że $m \in (4, +\infty)$

$$P'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 8$$

$$P'(m) > 0 \Leftrightarrow m \in (8, +\infty)$$

$$P'(m) < 0 \Leftrightarrow m \in (4, 8)$$

m	$(4, 8)$	8	$(8, +\infty)$
$P'(m)$	-	0	+
$P(m)$		Minimum lokalne	

W przedziale $(4, +\infty)$ minimum lokalne jest wartością najmniejszą i wynosi $P(8) = 16$.

Współrzędne punktu C

$$C = (-2, 4)$$

Równanie prostej BC

$$y = -\frac{2}{5}(x-3)+2 = -\frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$$

II sposób

Można uzasadnić, że 16 jest najmniejszą wartością funkcji $P(m) = \frac{m^2}{m-4}$, dla $m \in (4, +\infty)$

nie odwołując się do pochodnych. Wystarczy wykorzystać nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.

$$\frac{m^2}{m-4} = m-4 + \frac{16}{m-4} + 8 \geq 2 \cdot \sqrt{(m-4) \cdot \frac{16}{m-4}} + 8 = 2 \cdot \sqrt{16} + 8 = 16$$

Jednocześnie $P(8) = 16$, więc 16 jest najmniejszą wartością funkcji P w przedziale $(4, +\infty)$.

Zadanie 16.39.

Niech $|DO| = a$, $|DH| = h$. Wtedy $a^2 = d^2 - h^2$.

Objętość graniastosłupa

$$V(h) = 2a^2 \cdot h = 2d^2h - 2h^3$$

Dziedzina $h \in (0, d)$.

$$V'(h) = 2d^2 - 6h^2$$

Uwzględniając, że $h \in (0, d)$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$V'(h) > 0 \Leftrightarrow h \in \left(0, \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$$

$$V'(h) < 0 \Leftrightarrow h \in \left(\frac{d}{\sqrt{3}}, d\right)$$

h	$\left(0, \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{d}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{d}{\sqrt{3}}, d\right)$
$V'(h)$	+	0	-
$V(h)$		Maksimum lokalne	

W przedziale $(0, d)$ maksimum jest wartością największą.

$$\text{Odp. a) } V(h) = 2d^2h - 2h^3, \quad h \in (0, d), \quad \text{b) } h = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}.$$

Zadanie 16.40.1.

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h, \quad h = \frac{4V}{a^2\sqrt{3}}$$

$$P(a) = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \frac{4V}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{4 \cdot 3456 \cdot \sqrt{3}}{a \cdot 3} =$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a} \quad \blacksquare$$

Zadanie 16.40.2.

$$P(a) = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}, \quad a \in (0, 8\sqrt{3}]$$

$$P'(a) = a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2} = \frac{\sqrt{3}(a^3 - 13824)}{a^2}$$

$$P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 24 > 8\sqrt{3}$$

Uwzględniając, że $a \in (0, 8\sqrt{3}]$

$P'(a) < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 8\sqrt{3}]$, czyli w przedziale $(0, 8\sqrt{3}]$ funkcja P jest malejąca.

a	$(0, 8\sqrt{3}]$
$P'(a)$	-
$P(a)$	

Zatem dla $a = 8\sqrt{3}$ funkcja P ma wartość najmniejszą i wynosi ona

$$P(8\sqrt{3}) = \frac{64 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = 96\sqrt{3} + 1728$$

Zadanie 16.41.1.

Wykorzystując związki między promieniem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym oraz wysokością, bokiem i polem tego trójkąta otrzymujemy

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = R\sqrt{3}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

Zatem

$$V(R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \cdot (6 - R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3) \quad \blacksquare$$

Zadanie 16.41.2.

$$V'(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (12R - 3R^2), \quad R \in (0, 6)$$

Uwzględniając, że $R \in (0, 6)$

$$V'(R) = 0 \Leftrightarrow R = 4$$

$$V'(R) > 0 \Leftrightarrow R \in (0, 4)$$

$$V'(R) < 0 \Leftrightarrow R \in (4, 6)$$

R	$(0, 4)$	4	$(4, 6)$
$V'(R)$	+	0	-
$V(R)$		Maksimum lokalne	

W przedziale $(0, 6)$ maksimum jest wartością największą, czyli dla $R = 4$ funkcja V ma wartość największą i wynosi ona $V(4) = 8\sqrt{3}$.

17. Inne**Zadanie 17.1.**

$$a = \left[(2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \right]^2 = 2 - \sqrt{3} + 2 \left[(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) \right]^{\frac{1}{2}} + 2 + \sqrt{3} = 6$$

$$b = \frac{81^{-1} \cdot \sqrt{3}}{27^{-2} \cdot \sqrt[4]{9}} = \frac{3^{-4} \cdot \sqrt{3}}{3^{-6} \cdot \sqrt{3}} = 3^2 = 9$$

$$\frac{a^b}{b^a} = \frac{6^9}{9^6} = \frac{2^9 \cdot 3^9}{3^{12}} = \frac{2^9}{3^3} = \frac{512}{27} > 1$$

Odp. $a^b > b^a$.

Zadanie 17.2.

$$\log_{a^b} N = \frac{3}{20} \cdot (\log_a N + \log_b N) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log_a N}{\log_a a^2 b} = \frac{3}{20} \cdot \left(\log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a b} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log_a N}{2 + \log_a b} = \frac{3 \log_a N}{20} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log_a b} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2 + \log_a b} = \frac{3}{20} \cdot \left(1 + \frac{1}{\log_a b} \right)$$

W ostatnim przekształceniu wykorzystaliśmy, że $\log_a N \neq 0$.

Niech $x = \log_a b$. Z założeń wynika, że $x \neq 0$ i $x \neq -2$. Wtedy

$$\frac{1}{2+x} = \frac{3}{20} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 20x = 3(x+1)(x+2) \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 11x + 6 = 0 \Leftrightarrow (3x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ lub } x = 3$$

$$\text{Odp. } \log_a b \in \left\{\frac{2}{3}, 3\right\}.$$

Zadanie 17.3.

$$\log_4 49 = \frac{\log_2 49}{\log_2 4} = \frac{2 \log_2 7}{2} = \log_2 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 2} = \frac{b}{\frac{\log_2 2}{\log_2 3}} = \frac{b}{\frac{1}{a}} = ab$$

Zadanie 17.4.

$$a = (\log_{\sqrt{5}} 2) \cdot \log_2 25 = \frac{1}{\frac{1}{2} \log_2 5} \cdot 2 \log_2 5 = 4$$

$$b = \frac{\log_5 6}{\log_5 8} = \frac{\frac{\log_2 6}{\log_2 5}}{\frac{\log_2 8}{\log_2 5}} = \frac{\log_2 6}{\log_2 8} = \frac{\log_2 6}{3}$$

$$a^{b+1} = 4^{1 + \frac{\log_2 6}{3}} = 4 \cdot 4^{\frac{\log_2 6}{3}} = 4 \cdot \sqrt[3]{2^{\log_2 6}} = 4\sqrt[3]{36}$$

Zadanie 17.5.

$$\frac{\log_3 5 \cdot \log_{25} 27}{\log_7 \sqrt[6]{49}} = \frac{\log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 25}}{\frac{1}{6} \log_7 49} = \frac{\log_3 5 \cdot \frac{3}{2 \log_3 5}}{\frac{1}{6} \cdot 2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Odp. } \frac{9}{2}.$$

Zadanie 17.6.

$$a = 4^{\log_2 45} = 2^{2 \log_2 45} = 2^{\log_2 45^2} = 45^2 = 2025$$

$$b = \frac{\log_3 2023}{\log_9 2023} = \frac{\log_3 2023}{\frac{\log_3 2023}{\log_3 9}} = 2$$

$$a - b = 2025 - 2 = 2023$$

Zadanie 17.7.

$$a = \log_5 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 5} = \frac{2}{\log_2 5} \Rightarrow \log_2 5 = \frac{2}{a}$$

$$b = \log_4 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 4} = \frac{\log_2 3}{2} \Rightarrow \log_2 3 = 2b$$

$$\log_{12} 80 = \frac{\log_2 80}{\log_2 12} = \frac{\log_2 16 + \log_2 5}{\log_2 4 + \log_2 3} = \frac{4 + \frac{2}{a}}{2 + 2b} = \frac{\frac{2a+1}{a}}{1+b} = \frac{2a+1}{a(1+b)} \quad \blacksquare$$