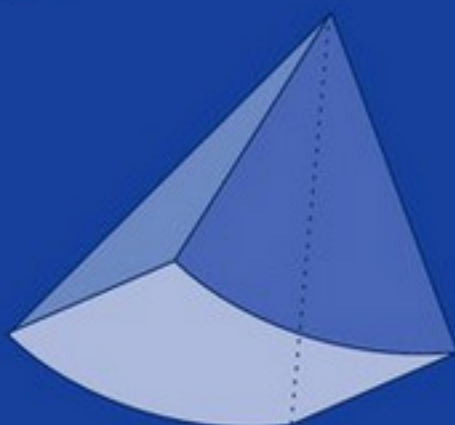
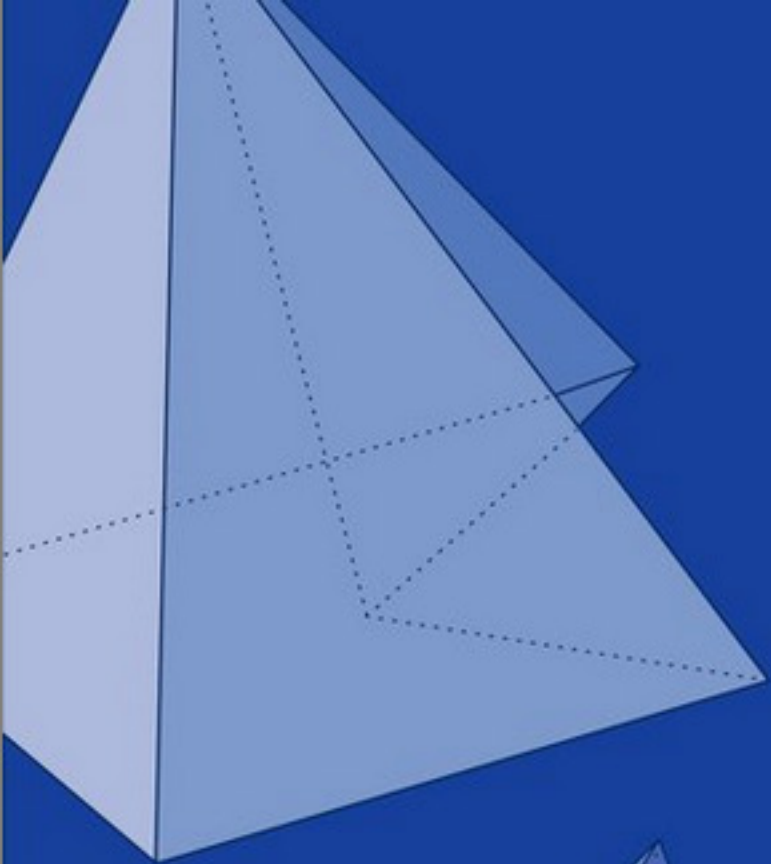




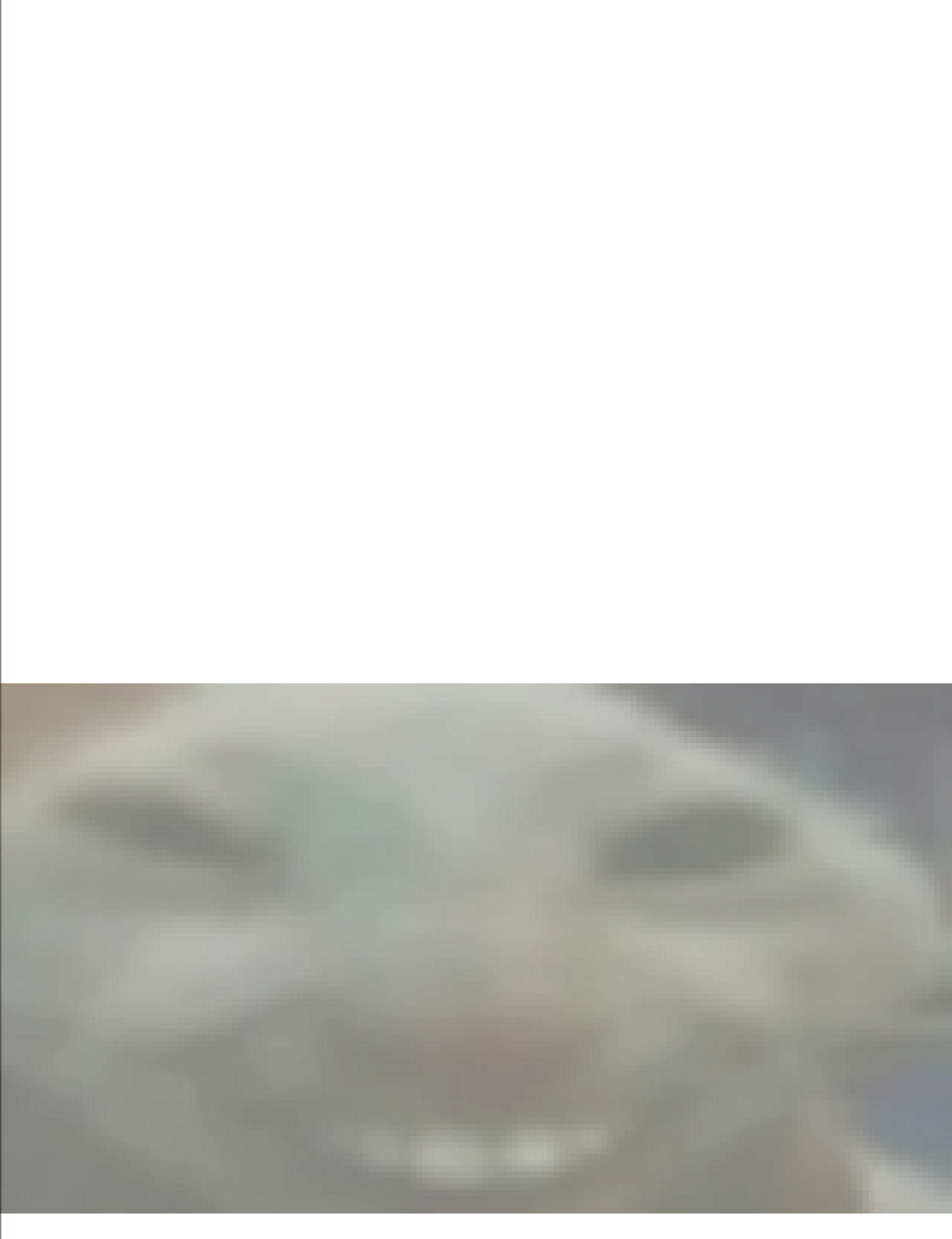
MATEMATYKA

ćwiczenia podstawowe



gdańskie
wydawnictwo
oświatowe





Jacek Lech

MATEMATYKA 8

ćwiczenia podstawowe



Konsultacja merytoryczna: *Małgorzata Dobrowolska*

Redakcja: *Elżbieta Bagińska-Stawiarz, Agnieszka Szulc*

Korekta merytoryczna: *Hanna Lenz-Terlecka, Mirosława Nawrot*

Korekta językowa: *Grażyna Kompowska*

Ilustracje: *Natalia Helman, Sławomir Kilian*

Opracowanie graficzne: *Leszek Jakubowski, Sławomir Kilian, Joanna Szyller, Jarosław Zakrzewski*

Fotoedycja: *Ilona Krasnopiórko*

Fotografie: *Shutterstock*

Skład (T_EX): *Maria Chojnicka, Łukasz Sitko, Joanna Szyller*

Książka zgodna z programem nauczania *Matematyka z plusem*.

ISBN 978-83-7420-965-6

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 411

Gdańsk 2018. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy.

Spis treści

1. LICZBY I DZIAŁANIA

1. System rzymski	5
2. Własności liczb naturalnych	6
3. Porównywanie liczb	7
4. Działania na liczbach	9
5. Działania na potęgach i pierwiastkach	12
<i>Sprawdź, ile umiesz</i>	15

2. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE I RÓWNANIA

1. Przekształcenia algebraiczne	17
2. Równania	21
3. Proporcje	24
4. Wielkości wprost proporcjonalne	26
<i>Sprawdź, ile umiesz</i>	29

3. FIGURY GEOMETRYCZNE NA PŁASZCZYŹNIE

1. Trójkąty i czworokąty	31
2. Twierdzenie Pitagorasa	34
3. Zastosowania twierdzenia Pitagorasa	36
4. Przekątna kwadratu. Wysokość trójkąta równobocznego	40
5. Trójkąty o kątach 90° , 45° , 45° oraz 90° , 30° , 60°	43
6. Odcinki w układzie współrzędnych	45
7. Dowodzenie w geometrii	47
<i>Sprawdź, ile umiesz</i>	48

4. ZASTOSOWANIA MATEMATYKI

1. Obliczenia procentowe	50
2. Zmiana o dany procent. Lokaty bankowe	51
3. VAT i inne podatki	54
4. Czytanie diagramów	55
5. Podział proporcjonalny	56
6. Obliczanie prawdopodobieństw	58
7. Odczytywanie wykresów	60
<i>Sprawdź, ile umiesz</i>	64

5. GRANIASTOSŁUPY I OSTROŚŁUPY

1. Pole powierzchni i objętość graniastosłupa	66
2. Odcinki w graniastosłupach	68
3. Rodzaje ostrosłupów	70
4. Siatki ostrosłupów. Pole powierzchni	71
5. Objętość ostrosłupa	73
6. Odcinki w ostrosłupach	75
<i>Sprawdź, ile umiesz</i>	77

6. SYMETRIE

1. Symetria względem prostej	80
2. Oś symetrii figury	84
3. Symetralna odcinka	85
4. Dwusieczna kąta	87
5. Symetria względem punktu	88
6. Środek symetrii figury	92
<i>Sprawdź, ile umiesz</i>	94

7. KOŁA I OKRĘGI

1. Styczna do okręgu	97
2. Wzajemne położenie dwóch okręgów	98
3. Liczba π . Długość okręgu	100
4. Pole koła	102
<i>Sprawdź, ile umiesz</i>	106

8. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

1. Ile jest możliwości?	108
2. Obliczanie prawdopodobieństw (cd.)	111

1.1 System rzymski

1. Zapisz podane liczby w systemie dziesiątkowym.

I	V	X	L	C	D	M	IV	IX	XL	XC	CD	CM
.....												

2. Zapisz podane liczby w systemie dziesiątkowym.

XIV	XIX	XLII	XLIV	XCV	CDXC	CMX
.....						
XXIV	XXXIX	XLVIII	XLVI	XCI	CDXX	CMLI
.....						
LXXII	CXVI	CXL	CLXXV	CDII	CDXXVII	CDLV
.....						
DC	DCLI	DCCXVIII	MDV	MDCII	CMLXVI	MMDC
.....						

3. Zapisz podane liczby w systemie rzymskim.

29	47	62	89	93	120
.....					
145	174	208	411	930	1762
.....					

4. Rok stworzenia filmu często podaje się w systemie rzymskim. Odczytaj, w którym roku powstały wymienione poniżej filmy.

„Ojciec chrzestny” MCMLXXII

„Obywatel Kane” MCMXLI

„Metropolis” MCMXXVII

„Deszczowa piosenka” MCMLII

„E.T.” MCMLXXXII



„Gdzie jest Nemo?” MMIII

„Toy story” MCMXCV

1.2 Własności liczb naturalnych

1. Wpisz w okienku cyfrę tak, aby otrzymana liczba spełniała warunek zapisany niebieskim kolorem.

174
podzielna przez 2

174
podzielna przez 9

174
podzielna przez 4

174
podzielna przez 15

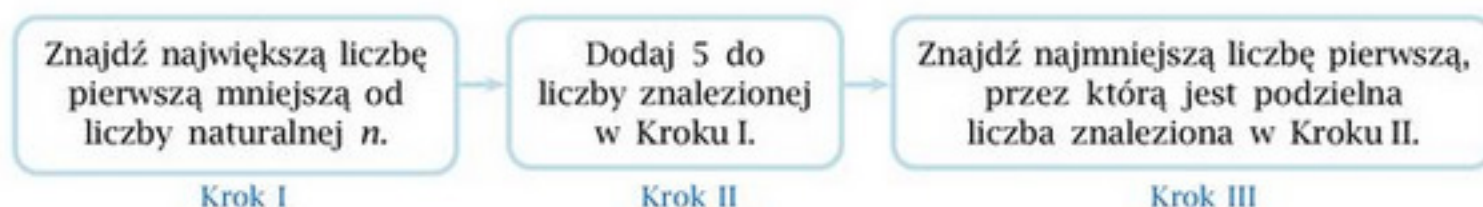
180	2	315	3
90		105	3
		35	

2. Dokończ rozkład na czynniki pierwsze podanych liczb, a następnie oblicz ich najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) i największy wspólny dzielnik (NWD).

NWW (180, 315) =

NWD (180, 315) =

3. Poniżej podano pewne czynności i kolejność ich wykonywania. Liczbą oznaczoną literą n może być dowolna liczba naturalna większa od 3.



Wykonaj te czynności dla poniższych liczb i zapisz wyniki otrzymane w Kroku III.

$n = 9$	$n = 17$	$n = 27$	$n = 32$
Wynik:	Wynik:	Wynik:	Wynik:

Czy zauważyłeś jakąś prawidłowość? Zapisz ją.

.....

4. Podaj przykłady dwóch liczb spełniających podane warunki.

Liczba jest podzielna przez 13. ,

Liczba jest podzielna przez 2 i 7. ,

Liczba jest podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 9. ,

Reszta z dzielenia tej liczby przez 8 jest równa 5. ,

Liczba, która jest wielokrotnością zarówno liczby 22, jak i liczby 33. ,

Liczba pierwsza większa od 30 i mniejsza od 40. ,

Liczba, której jedynymi dzielnikami, oprócz jej samej i liczby 1, są liczby pierwsze.

..... ,

1.3 Porównywanie liczb

1. Pokaż, że każda z poniższych liczb jest liczbą wymierną, czyli że można ją przedstawić w postaci ułamka, którego licznik i mianownik są liczbami całkowitymi.

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $0,27 =$ | f) $-\sqrt{16} =$ | k) $\sqrt[3]{27} =$ |
| b) $-32,9 =$ | g) $\sqrt{3\frac{6}{25}} =$ | l) $\sqrt[3]{-1000} =$ |
| c) $2\frac{3}{7} =$ | h) $-\sqrt{2\frac{2}{49}} =$ | m) $-\sqrt[3]{64} =$ |
| d) $-5\frac{3}{11} =$ | i) $\sqrt{0,36} =$ | n) $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}} =$ |
| e) $\sqrt{81} =$ | j) $-\sqrt{0,0009} =$ | o) $\sqrt[3]{-0,008} =$ |

2. Wpisz znak: $>$ lub $<$.

- | | | | |
|---|---------------------------------------|---|--|
| a) $\frac{1}{17} \bullet -\frac{5}{27}$ | $-\frac{39}{23} \bullet \frac{1}{70}$ | $\frac{11}{12} \bullet \frac{12}{11}$ | $\frac{7}{6} \bullet \frac{8}{9}$ |
| b) $\frac{3}{10} \bullet \frac{3}{8}$ | $\frac{12}{7} \bullet \frac{12}{5}$ | $-\frac{29}{21} \bullet -\frac{29}{20}$ | $-\frac{100}{7} \bullet -\frac{100}{43}$ |
| c) $\frac{2}{3} \bullet \frac{5}{6}$ | $\frac{7}{15} \bullet \frac{2}{5}$ | $-\frac{5}{12} \bullet -\frac{17}{36}$ | $-\frac{8}{21} \bullet -\frac{2}{7}$ |
| d) $\frac{3}{5} \bullet \frac{2}{3}$ | $\frac{5}{17} \bullet \frac{3}{10}$ | $-\frac{5}{6} \bullet -\frac{7}{9}$ | $-\frac{3}{11} \bullet -\frac{2}{9}$ |
| e) $2,7 \bullet 2,07$ | $-5,33 \bullet -5,333$ | $4,(7) \bullet 4,78$ | $-2,5(2) \bullet -2,2(5)$ |
| f) $0,8 \bullet \frac{3}{5}$ | $1,23 \bullet \frac{13}{10}$ | $-3\frac{2}{5} \bullet -3,35$ | $-\frac{5}{7} \bullet -0,7$ |

3. a) Oblicz potęgi, a następnie ustal, która z liczb jest większa.

- | | |
|---|---|
| $a = 5^2 =$, $b = 5^3 =$, a b | $i = (\frac{1}{2})^3 =$, $j = (\frac{1}{2})^5 =$, i j |
| $c = 2^3 =$, $d = 2^5 =$, c d | $k = (\frac{5}{2})^2 =$, $l = (\frac{5}{2})^3 =$, k l |
| $e = 1,4^2 =$, $f = 1,4^3 =$, e f | $m = 0,1^2 =$, $n = 0,1^3 =$, m n |
| $g = (\frac{1}{5})^2 =$, $h = (\frac{1}{5})^3 =$, g h | $o = 0,2^3 =$, $p = 0,2^4 =$, o p |

b) Bez obliczania potęg ustal, która z liczb jest większa.

- | | | | | |
|-------------------|-----------------------|---|-----------------------|---|
| 6^5 6^7 | $2,3^9$ $2,3^4$ | $(\frac{1}{6})^9$ $(\frac{1}{6})^7$ | $0,7^4$ $0,7^5$ | $(\frac{15}{7})^6$ $(\frac{15}{7})^8$ |
|-------------------|-----------------------|---|-----------------------|---|

4. a) Oblicz potęgi, a następnie ustal, która z liczb jest większa.

$$a = (-3)^2 = \dots, \quad b = (-3)^3 = \dots, \quad a \dots b \quad e = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \dots, \quad f = \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = \dots, \quad e \dots f$$

$$c = -5^4 = \dots, \quad d = (-5)^4 = \dots, \quad c \dots d \quad g = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \dots, \quad h = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \dots, \quad g \dots h$$

b) Bez obliczania potęg ustal, która z liczb jest większa.

$$(-7)^8 \dots (-7)^9 \quad -3^{12} \dots (-3)^{12} \quad \left(-\frac{2}{7}\right)^9 \dots \left(-\frac{2}{7}\right)^5 \quad \left(-\frac{5}{8}\right)^5 \dots \left(-\frac{5}{8}\right)^8$$

5. a) Liczby podane w notacji wykładniczej zapisz bez użycia potęg.

W Polsce w 2012 r. zużyto łącznie $1,1 \cdot 10^{10} \text{ m}^3$ wody,
w tym w rolnictwie $1,1 \cdot 10^9 \text{ m}^3$, a w produkcji przemysłowej $7,7 \cdot 10^9 \text{ m}^3$

Przeciętna szklanka ma pojemność $2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, a olimpijski basen pływacki mieści $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ km}^3$ wody.

b) Liczby podane w tekście zapisz w notacji wykładniczej.

W Polsce w 2012 r. 26 400 000 osób korzystało z oczyszczalni ścieków, w tym w miastach — 21 400 000 osób,
a na wsi — 5 030 000 osób.

Zgodnie z przepisami, w 1 litrze wody przeznaczonej do spożycia nie może być więcej niż 0,0005 g amoniaku ani
więcej niż 0,0000005 g pestycydów.

6. a) Przedstaw poniższe liczby w postaci pierwiastków kwadratowych i sześciennych.

$$7 = \sqrt{7^2} = \sqrt{49} \quad 7 = \sqrt[3]{7^3} = \sqrt[3]{343}$$

$$3 = \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots} \quad 5 = \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots} \quad 10 = \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots}$$

$$3 = \sqrt[3]{\dots} = \sqrt[3]{\dots} \quad 5 = \sqrt[3]{\dots} = \sqrt[3]{\dots} \quad 10 = \sqrt[3]{\dots} = \sqrt[3]{\dots}$$

b) Otocz pętlą liczby, które są jednocześnie większe od $\sqrt{40}$ i mniejsze od $\sqrt{70}$.

$$6 \quad \frac{700}{9} \quad 7 \quad \sqrt{57,327} \quad 8 \quad \frac{80}{3} \quad 9$$

c) Dla każdej z podanych liczb znajdź dwie kolejne liczby naturalne takie, aby jedna z nich była mniejsza, a druga większa od tej liczby.

$$\sqrt{100} < \sqrt{109} < \sqrt{121}, \quad \text{więc} \quad 10 < \sqrt{109} < 11$$

$$\sqrt{\dots} < \sqrt{31} < \sqrt{\dots}, \quad \text{więc} \quad \dots < \sqrt{31} < \dots$$

$$\sqrt{\dots} < \sqrt{185} < \sqrt{\dots}, \quad \text{więc} \quad \dots < \sqrt{185} < \dots$$

1.4 Działania na liczbach

1. Oblicz:

$$4 + 3 \cdot 5 - 10 : 2 = \dots\dots\dots$$

$$4 + 3 \cdot (5 - 10) : 2 = \dots\dots\dots$$

$$(4 + 3 \cdot 5 - 10) : 2 = \dots\dots\dots$$

2. Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$\text{a) } a = 0,67 \cdot 1000 \qquad b = 6,7 \cdot 10^3 \qquad c = 670000 : 10 \qquad d = 6,7 \cdot 10^{-2}$$

.....

$$\text{b) } a = 4,3 \cdot 10^5 \qquad b = 4,3 \cdot 10^{-3} \qquad c = 0,00043 \cdot 100 \qquad d = 4,3 : 10$$

.....

3. Uzupełnij puste pola odpowiednimi liczbami i jednostkami.

$$20 \text{ g} = 20 \cdot \frac{1}{1000} \text{ kg} = \dots 0,02 \dots \text{ kg} \qquad 50 \text{ t} = 50 \cdot \frac{1000}{1} \text{ kg} = \dots\dots\dots$$

$$5 \text{ cm} = 5 \cdot \frac{1}{100} \text{ m} = \dots\dots\dots \qquad 7 \text{ cm} = 7 \cdot \frac{1}{1000} \text{ m} = \dots\dots\dots$$

$$13 \text{ dag} = 13 \cdot \frac{1}{1000} \text{ kg} = \dots\dots\dots \qquad 8 \text{ km} = 8 \cdot \frac{1}{1000} \text{ m} = \dots\dots\dots$$

4. Oblicz w pamięci:

$$\text{a) } 3,2 + 5,64 = \dots\dots\dots \qquad 5,43 + 12,7 = \dots\dots\dots \qquad 17,2 + 3,51 + 2,1 = \dots\dots\dots$$

$$\text{b) } 6,47 - 4,3 = \dots\dots\dots \qquad 18,25 - 7,17 = \dots\dots\dots \qquad 11,7 - 8,4 = \dots\dots\dots$$

$$\text{c) } \frac{4}{13} + \frac{7}{13} = \dots\dots\dots \qquad 3\frac{5}{7} + \frac{4}{7} = \dots\dots\dots \qquad 2\frac{3}{5} + 13\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \dots\dots\dots$$

$$\text{d) } \frac{9}{13} - \frac{5}{13} = \dots\dots\dots \qquad 5\frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \dots\dots\dots \qquad 2\frac{3}{5} - 1\frac{4}{5} = \dots\dots\dots$$

5. Oblicz:

$$\text{a) } 2\frac{3}{20} + \frac{1}{4} = \dots\dots\dots \qquad \text{b) } 2\frac{1}{20} - \frac{3}{4} = \dots\dots\dots$$

$$1\frac{5}{18} + 2\frac{4}{9} + \frac{5}{6} = \dots\dots\dots \qquad 1\frac{7}{18} - 2\frac{2}{9} = \dots\dots\dots$$

$$3\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3} = \dots\dots\dots \qquad 2\frac{1}{7} - 5\frac{2}{3} = \dots\dots\dots$$

6. Oblicz:

a) $2,4 + \frac{2}{3} =$

b) $2\frac{7}{20} + 5,3 =$

c) $1\frac{3}{5} - 3,8 =$

d) $0,7 - 4\frac{2}{7} =$

7. Oblicz:

a) $3,2 \cdot 7 =$

$6 \cdot (-2,4) =$

$1,2 \cdot 2,3 =$

$-2,03 \cdot 3,1 =$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} =$

$-\frac{5}{7} \cdot (-\frac{4}{9}) =$

$\frac{32}{55} \cdot \frac{5}{8} =$

$\frac{7}{36} \cdot \frac{12}{49} =$

c) $2\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{32} =$

$1\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{14} =$

$2\frac{1}{7} \cdot (-4\frac{1}{5}) =$

$-1\frac{5}{11} \cdot (-1\frac{2}{20}) =$

d) $3,2 : 4 =$

$6,3 : (-0,9) =$

$1,2 : 2,4 =$

$-0,66 : 3,3 =$

e) $\frac{2}{7} : \frac{6}{7} =$

$-\frac{5}{12} : (-\frac{5}{16}) =$

$\frac{32}{45} : \frac{24}{25} =$

$-\frac{35}{36} : \frac{21}{8} =$

f) $2\frac{2}{3} : \frac{4}{15} =$

$-1\frac{5}{11} : (-\frac{20}{22}) =$

$1\frac{2}{5} : 2\frac{1}{10} =$

$2\frac{1}{7} : (-1\frac{4}{21}) =$

8. Ponumeruj podane liczby od największej do najmniejszej.

a) $a = 9 + \frac{23}{24}$ $b = 9 + \frac{37}{38}$ $c = 9 + \frac{19}{20}$

b) $a = (\frac{2}{3})^2$ $b = (\frac{2}{3})^3$ $c = (\frac{2}{3})^4$

c) $a = \sqrt{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ $b = \sqrt{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$ $c = \sqrt{2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$

9. Oblicz:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} =$

b) $2,9 - 0,9 \cdot 4 : 3 =$

c) $\frac{2,3+0,7}{0,7} \cdot \frac{14}{15} =$

d) $\left(\frac{4}{15} + 1,15\right) : 1\frac{7}{18} =$

10. Wykonaj działania.

a) $52,097 + 7,32$

b) $7,05 - 0,937$

c) $205,8 + 0,042 + 23,109$

d) $4,26 \cdot 1,2$

e) $0,302 \cdot 72,5$

f) $40,74 : 0,7$

11. Nie wykonując dokładnych obliczeń, oszacuj wartości poniższych wyrażeń i uporządkuj je w kolejności od wyrażenia o najmniejszej wartości do wyrażenia o największej wartości.

$$a = 23,74 + 0,908 \quad b = 5,1^2 \quad c = 30,42 - 7,57 \quad d = 59,83 : 2,98 \quad e = 6,83 \cdot 4,07$$

12. Odpowiedz na poniższe pytania, szacując wynik (nie wykonuj dokładnych obliczeń).

a) Na pewien wagon towarowy można załadować co najwyżej 39,5 t ładunku. Czy można nim przewieźć trzy skrzynie o masach 13 190 kg, 26 120 kg i 460 kg? ☐ TAK ☐ NIE

b) Na małej barce można przewieźć 364 t towarów. Czy można nią przewieźć 20 kontenerów, z których każdy ma masę 19 870 kg? ☐ TAK ☐ NIE

c) Ile wywrotek o nośności 20 t potrzeba do przewiezienia 389 200 kg żwiru?

1.5 Działania na potęgach i pierwiastkach

1. Zapisz w postaci jednej potęgi.

$$6^7 \cdot 6^4 = 6^{7+4} = 6^{11}$$

a) $7^2 \cdot 7^6 =$

$$0,2^5 \cdot 0,2^9 =$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{10} =$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^4 =$$

$$(-3,1)^4 \cdot (-3,1)^5 =$$

$$\left(\left(\frac{5}{6}\right)^7\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^{7 \cdot 4} = \left(\frac{5}{6}\right)^{28}$$

c) $(6^3)^5 =$

$$(0,7^2)^6 =$$

$$\left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^8 =$$

$$((-5)^3)^3 =$$

$$\left(\left(-3\frac{1}{4}\right)^3\right)^2 =$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^6 : \left(\frac{6}{25}\right)^6 = \left(\frac{9}{10} : \frac{6}{25}\right)^6 = \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{25}{6}\right)^6 = \left(\frac{15}{4}\right)^6$$

e) $12^7 : 6^7 =$

$$4,7^3 : 10^3 =$$

$$\left(\frac{20}{21}\right)^5 : \left(\frac{15}{14}\right)^5 =$$

$$(-8)^9 : (-2)^9 =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^7 : (-1,5)^7 =$$

$$3,1^9 : 3,1^4 = 3,1^{9-4} = 3,1^5$$

b) $5^8 : 5^6 =$

$$1,2^{10} : 1,2^7 =$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{13} : \left(\frac{5}{6}\right)^{10} =$$

$$(-2,3)^5 : (-2,3)^3 =$$

$$\left(-\frac{4}{9}\right)^{10} : \left(-\frac{4}{9}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{4}{15}\right)^8 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^8 = \left(\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{8}\right)^8 = \left(\frac{1}{6}\right)^8$$

d) $2^9 \cdot 7^9 =$

$$0,23^5 \cdot 10^5 =$$

$$\left(\frac{12}{25}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^7 =$$

$$(-0,3)^6 \cdot 5^6 =$$

$$(-1,2)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 =$$

$$\left(\left(\left(\frac{3}{5}\right)^6\right)^4\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^{6 \cdot 4 \cdot 2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{48}$$

f) $\left((3^2)^5\right)^2 =$

$$\left((0,4^2)^4\right)^5 =$$

$$\left(\left(\left(\frac{7}{8}\right)^3\right)^4\right)^2 =$$

$$\left(\left((-2)^3\right)^2\right)^3 =$$

$$\left(\left(\left(-1\frac{1}{3}\right)^2\right)^3\right)^4 =$$

2. Przedstaw w postaci potęgi liczby 3.

$$\frac{(27 \cdot 3^4)^5}{9^4} = \frac{(3^3 \cdot 3^4)^5}{(3^2)^4} = \frac{(3^7)^5}{3^8} = \frac{3^{35}}{3^8} = 3^{27}$$

- a) $27^5 =$
- b) $81 \cdot 3^5 =$
- c) $\frac{9^5}{3^8} =$
- d) $(3^7 \cdot 9)^2 =$
- e) $27^8 : 9^6 =$
- f) $\frac{3^{10} \cdot 27}{9^5} =$
- g) $(27^2)^5 \cdot 9 =$
- h) $\left(\frac{9^4}{27}\right)^2 =$

3. Zapisz podane wielkości w notacji wykładniczej.

$$3450 \cdot 10^{-12} = 3,45 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} = 3,45 \cdot 10^{-9}$$

$$0,00047 \cdot 10^9 = 4,7 \cdot 10^{-4} \cdot 10^9 = 4,7 \cdot 10^5$$

- a) $230 \cdot 10^8 =$
- b) $79,5 \cdot 10^5 =$
- c) $54\,000 \cdot 10^{-9} =$
- d) $120,4 \cdot 10^{-6} =$
- e) $0,57 \cdot 10^6 =$
- f) $0,000532 \cdot 10^{12} =$
- g) $0,876 \cdot 10^{-4} =$
- h) $0,0000012 \cdot 10^{-5} =$

4. Zapisz wyniki mnożenia w notacji wykładniczej.

$$9 \cdot (7 \cdot 10^{-5}) = 63 \cdot 10^{-5} = 6,3 \cdot 10^{-4}$$

$$(7 \cdot 10^{-3}) \cdot (6 \cdot 10^9) = 42 \cdot 10^{-3+9} = 42 \cdot 10^6 = 4,2 \cdot 10^7$$

$$3,2 \cdot 10^{10} + 2 \cdot 10^{12} = 3,2 \cdot 10^{10} + 200 \cdot 10^{10} = 203,2 \cdot 10^{10} = 2,032 \cdot 10^{12}$$

a) $5 \cdot (9 \cdot 10^7) =$

b) $4 \cdot 10^3 \cdot 7 =$

c) $8 \cdot (3 \cdot 10^{-7}) =$

d) $(8 \cdot 10^6) \cdot (4 \cdot 10^9) =$

e) $(7 \cdot 10^{-3}) \cdot (2 \cdot 10^7) =$

f) $(16 \cdot 10^2) : (8 \cdot 10^{-5}) =$

g) $5,4 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^{11} =$

h) $1,8 \cdot 10^{12} - 20 \cdot 10^9 =$

5. Zapisz w postaci jednego pierwiastka.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt{14} : \sqrt{2} = \sqrt{14 : 2} = \sqrt{7}$$

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} =$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{10} =$ $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{11} =$

b) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} =$ $\sqrt{15} : \sqrt{5} =$ $\sqrt[3]{30} : \sqrt[3]{3} =$

6. Wylącz czynnik przed znak pierwiastka.

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

a) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot}$

e) $\sqrt{700} =$

b) $\sqrt{125} =$

f) $\sqrt{28} =$

c) $\sqrt{18} =$

g) $\sqrt{72} =$

d) $\sqrt{45} =$

h) $\sqrt{40} =$

7. Oblicz, a następnie sprawdź, czy wynik znajduje się wśród liczb wypisanych z prawej strony (dzięki temu sprawdzisz, czy się nie pomyliłeś).

$$3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{8} = 6\sqrt{48} = 6\sqrt{16 \cdot 3} = 6\sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 24\sqrt{3} \quad 40\sqrt{3}$$

$$4\sqrt{15} \cdot 2\sqrt{5} = \dots \quad 10\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{8} \cdot 5\sqrt{6} = \dots \quad 24\sqrt{3}$$

$$5\sqrt{3} + 3\sqrt{12} = \dots \quad 29\sqrt{3}$$

$$5\sqrt{27} + 7\sqrt{12} = \dots \quad 9\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{48} + \frac{1}{3}\sqrt{27} = \dots \quad 11\sqrt{3}$$

8. Oblicz:

$$\text{a) } (5\sqrt[3]{4})^3 - (6\sqrt{5})^2 = 5^3 \cdot (\sqrt[3]{4})^3 - 6^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 125 \cdot 4 - 36 \cdot 5 = 500 - 180 = 320$$

$$\text{b) } (\sqrt[3]{7})^3 - (\sqrt{3})^2 = \dots$$

$$\text{c) } (\sqrt{12})^2 + \sqrt[3]{13^3} = \dots$$

$$\text{d) } (2\sqrt[3]{4})^3 + (3\sqrt{2})^2 = \dots$$

$$\text{e) } (10\sqrt[3]{5})^3 - (5\sqrt{2})^2 = \dots$$

Sprawdź, ile umiesz

1. Pod każdą z poniżej zapisanych liczb zapisz w systemie rzymskim liczbę o 9 większą.

XIX

XLII

CLXXIV

MMDCV

.....

.....

.....

.....

2. Podkreśl liczby podzielne przez 6 na zielono, a podzielne przez 15 — na czerwono.

85

78

105

328

306

315

126

255

71

111

412

3. Te spośród podanych liczb, które są liczbami naturalnymi, zakreśl kolorem niebieskim, liczby całkowite zakreśl kolorem czerwonym, a wymierne zakreśl na zielono.

1000

120,(32)

2

-8

$\frac{1}{9}$

$\sqrt[3]{5}$

0

$\sqrt{2}$

$-2\frac{11}{13}$

0,8

1

11

$\sqrt{6}$

$\sqrt{4}$

4. Która z liczb jest większa? Wstaw odpowiedni znak: < lub >.

$$\frac{9}{11} \dots \frac{9}{13} \quad \sqrt{59} \dots 8 \quad \frac{5}{7} \dots \frac{8}{11} \quad 4,6 \dots 4\frac{4}{9} \quad \sqrt{\frac{2}{9}} \dots \frac{2}{3} \quad 1,(23) \dots 1,232$$

5. Oblicz:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 4\frac{4}{9} + (-1\frac{5}{6}) = \dots\dots\dots & \text{c) } (-8\frac{2}{3}) : (-1\frac{4}{9}) = \dots\dots\dots \\ \text{b) } 4\frac{4}{9} \cdot (-3\frac{3}{8}) = \dots\dots\dots & \text{d) } \frac{0,42 : 0,3 \cdot 0,5}{2\frac{2}{9} - 1\frac{2}{3}} = \dots\dots\dots \end{array}$$

6. Odpowiedz na pytania, szacując wyniki.

- a) Czy jeśli podzielimy sznurek o długości 124,37 m na 200 równych kawałków, to każdy z nich będzie dłuższy niż 60 cm? ☐ TAK ☐ NIE
- b) Czy jeśli 490 cm³ octu zmieszamy z 2,38 dm³ wody, to ta mieszanina zmieści się w 3-litrowym słoiku? ☐ TAK ☐ NIE

7. Wpisz w szarym prostokącie odpowiedni wykładnik potęgi.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 4^7 \cdot 4 = 4^{\square} & \text{b) } 2^8 : 2 = 2^{\square} & \text{c) } (5^4)^3 \cdot 5 = 5^{\square} & \text{d) } \frac{(3^5)^2}{9} = 3^{\square} \end{array}$$

8. Zapisz w postaci potęgi liczby p .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{p^4 \cdot p^{11}}{p^{10}} = \dots\dots\dots & \text{b) } (p^7)^3 \cdot p^4 = \dots\dots\dots & \text{c) } \left(\frac{p^{14}}{p^{10}}\right)^3 = \dots\dots\dots \end{array}$$

9. Zapisz liczby $a = 6\,000\,000$ i $b = 30\,000$ w notacji wykładniczej, a następnie wykonaj działania bez korzystania z kalkulatora. Odpowiedź przedstaw w notacji wykładniczej.

$$\begin{array}{ll} a = \dots\dots\dots & ab = \dots\dots\dots \\ b = \dots\dots\dots & \frac{a}{b} = \dots\dots\dots \end{array}$$

10. a) Wylącz czynnik przed znak pierwiastka.

$$\sqrt{12} = \dots\dots\dots \quad \sqrt{48} = \dots\dots\dots$$

b) Skorzystaj z odpowiedzi do części a) tego zadania i przedstaw wyniki poniższych działań w jak najprostszej postaci.

$$\begin{array}{ll} \sqrt{12} + \sqrt{48} = \dots\dots\dots & \sqrt{12} \cdot \sqrt{48} = \dots\dots\dots \\ \sqrt{48} - \sqrt{12} = \dots\dots\dots & \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}} = \dots\dots\dots \end{array}$$

2.1 Przekształcenia algebraiczne

1. Zapisz za pomocą wyrażeń algebraicznych.

- a) suma liczb x i 7 iloczyn liczb a i 8
różnica liczb 6 i w iloraz liczb m i 5
- b) połowa sumy liczb x i 7
liczba 8 razy większa od różnicy liczb 6 i w
liczba o b mniejsza od iloczynu liczb a i 8
liczba o n większa od ilorazu liczb m i 5

2. Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.

- a) a kilometrów i b metrów — ile to metrów?
b) x kilogramów i y dekagramów — ile to dekagramów?
c) s złotych i t groszy — ile to złotych?
d) m godzin i k minut — ile to godzin?

3. Zapisz wyrażenie, nie używając nawiasów. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(2x^2 - 5xy + 4y) + (3x^2 - 2xy) = 2x^2 - 5xy + 4y + 3x^2 - 2xy = 5x^2 - 7xy + 4y$$

- a) $(5a^2 + 2a - 3b) + (3a^2 + 7a + 6b) =$
b) $(2pq - 5p + 3q) + (6pq - 2q) =$
c) $(-x^2 + 3y) + (3y + 3x^2 - 2xy) =$
d) $(-3b^2 - 2ab - 4a) + (a - 3b^2 + 2ab + 2b) =$

4. Zapisz wyrażenie, nie używając nawiasów. Zredukuj wyrazy podobne.

$$(2x^2 - 5xy + 4y) - (3x^2 - 2xy) = 2x^2 - 5xy + 4y - 3x^2 + 2xy = -x^2 - 3xy + 4y$$

- a) $(5a^2 + 2a - 3b) - (3a^2 + 7a + 6b) =$
b) $(2pq - 5p + 3q) - (6pq - 2q) =$
c) $(-x^2 + 3y) - (3y + 3x^2 - 2xy) =$

5. Zapisz w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej.

$$4m(2n - 5m + 3) - 2m(3 - 2m) = 8mn - 20m^2 + 12m - 6m + 4m^2 = -16m^2 + 8mn + 6m$$

a) $3a(2b + 4) + 2a(3 - 5b) = \dots\dots\dots$

$-2x(5x - y) - x(8x - 2y) = \dots\dots\dots$

$5p(2 + 3r - p) - 3p(2p - 4) = \dots\dots\dots$

$3k(4 - 5m + 2k) - 3m(2 - 3k) = \dots\dots\dots$

$$(3w - 5)(2w + 4) = \underset{3w \cdot 2w}{6w^2} + \underset{3w \cdot 4}{12w} - \underset{-5 \cdot 2w}{10w} - \underset{-5 \cdot 4}{20} = 6w^2 + 2w - 20$$

b) $(2a + 6)(3a + 5) = \dots\dots\dots$

$(3p - 2)(5p + 4) = \dots\dots\dots$

$(2x - 3)(5x - 1) = \dots\dots\dots$

$(3y - 2)(4 - 3y) = \dots\dots\dots$

$$3p(2 - 4p) - (2p - 5)(3p + 4) = 6p - 12p^2 - (6p^2 + 8p - 15p - 20) = \\ = 6p - 12p^2 - 6p^2 - 8p + 15p + 20 = -18p^2 + 13p + 20$$

c) $x(3x + 6) + (x - 4)(2x + 1) = \dots\dots\dots$

$2a(5a - 3) - (2a + 3)(a + 4) = \dots\dots\dots$

$(3u - 2)(2u - 1) - 5u(2u + 3) = \dots\dots\dots$

$(3y - 5)(2y + 3) - 3y(5 - 2y) = \dots\dots\dots$

6. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

$$(21a - 35ab - 7b^3) : 7 = 3a - 5ab - b^3$$

a) $(14n^2 - 4n) : 2 = \dots\dots\dots$

e) $(4x + 12xy - 20y) : 4 = \dots\dots\dots$

b) $(-30cd + 6d) : 6 = \dots\dots\dots$

f) $(6ab + 14a^2 - 8b) : 2 = \dots\dots\dots$

c) $(6m + 12m^2 - 15) : 3 = \dots\dots\dots$

g) $(-30uw + 9u - 6w) : (-3) = \dots\dots\dots$

d) $(20p + 35p^3 - 5) : 5 = \dots\dots\dots$

h) $(-16x^2 - 12xy + 4) : (-4) = \dots\dots\dots$

7. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

$$\frac{12x^2 - 30xy + 18}{6} = \frac{12x^2}{6} - \frac{30xy}{6} + \frac{18}{6} = 2x^2 - 5xy + 3$$

a) $\frac{16a^2 - 40}{8} = \dots\dots\dots$

f) $\frac{18a^2 - 30ab + 4b}{2} = \dots\dots\dots$

b) $\frac{-30xy + 15x}{5} = \dots\dots\dots$

g) $\frac{30x^2 - 10xy + 70}{10} = \dots\dots\dots$

c) $\frac{15p^2 - 6p + 3}{3} = \dots\dots\dots$

h) $\frac{-12u^2 - 15uw + 18u}{-3} = \dots\dots\dots$

d) $\frac{-8x^2 - 20x + 12xy}{4} = \dots\dots\dots$

i) $\frac{-4 - 14p - 2p^2}{-2} = \dots\dots\dots$

e) $\frac{21y^2 - 7xy + 14}{7} = \dots\dots\dots$

j) $\frac{9r^2 - 27rw - 45}{-9} = \dots\dots\dots$

8. Normalny bilet kolejowy na przejazd między pewnymi stacjami kosztuje x złotych. Bilet dla dziecka jest o 37% tańszy, a bilet dla nauczyciela o 33% tańszy od biletu normalnego. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.



a) cena biletu dla dziecka: $\dots\dots\dots$

b) cena biletu dla nauczyciela: $\dots\dots\dots$

c) ile kosztują łącznie jeden bilet normalny i jeden dla dziecka: $\dots\dots\dots$

d) ile kosztują łącznie bilety dla nauczyciela i 6 uczniów: $\dots\dots\dots$

e) ile kosztują łącznie bilety dla 4 nauczycieli i 30 uczniów: $\dots\dots\dots$

f) ile złotych reszty otrzyma osoba, która zapłaci za 3 bilety normalne banknotem 100 zł:

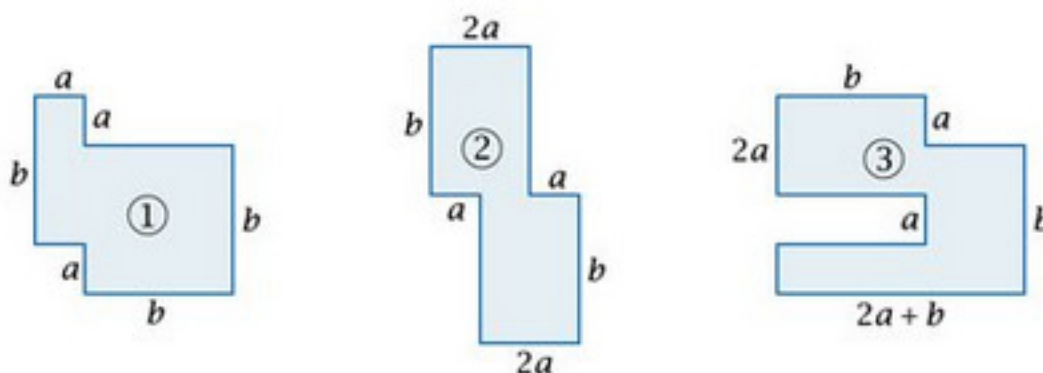
$\dots\dots\dots$

g) ile złotych reszty otrzyma osoba, która zapłaci za 2 bilety dla dzieci banknotem 50 zł:

$\dots\dots\dots$

h) ile złotych reszty otrzyma osoba, która zapłaci za bilety dla nauczyciela i 6 uczniów banknotem 100 zł: $\dots\dots\dots$

9. Zapisz w jak najprostszej postaci pola i obwody figur przedstawionych na rysunkach.



Obwód ① = Pole ① =
 Obwód ② = Pole ② =
 Obwód ③ = Pole ③ =

10. a) Jeden z boków prostokąta ma długość a , a drugi jest od niego o 2 dłuższy. Zapisz wyrażenie opisujące obwód tego prostokąta.



Obwód =



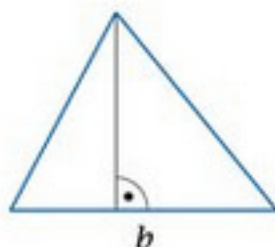
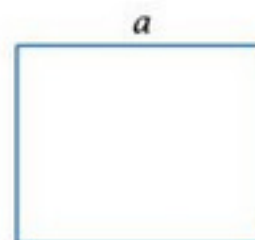
b) Jeden z boków prostokąta ma długość x , a drugi bok jest od niego 3 razy dłuższy. Zapisz wyrażenie opisujące pole tego prostokąta.

Pole =

11. Zapisz pole podanej figury w postaci sumy algebraicznej.

a) Prostokąt, którego jeden z boków ma długość a , a drugi jest od niego o 5 krótszy.

$P =$

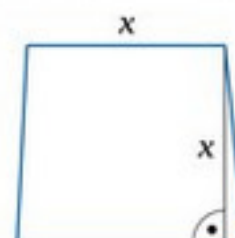


b) Trójkąt, którego jeden z boków ma długość b , a wysokość opuszczona na ten bok jest od niego o 7 krótsza.

$P =$

c) Trapez, którego wysokość i krótsza podstawa mają taką samą długość x , a druga podstawa jest o 3 dłuższa od krótszej.

$P =$



2.2 Równania

1. Ustal, która z liczb zapisanych pod równaniem spełnia to równanie. Rozwiązania podanego równania podkreśl.

a) $x^3 - x^2 = 6x$

2 3 0

$L = 2^3 - 2^2 = 4$ $P = 6 \cdot 2 = 12$ $L \neq P$

$L = 3^3 - 3^2 =$

$L = 0^3 - 0^2 =$

b) $x + \frac{x}{4} = 5$

-2 4 2

2. Rozwiąż równania.

a) $4x - 7 = 2x + 9$

c) $2 - x = 12 + 7x$

$4x + 4 - 5x = 7 - 3x + 8$

$-x + 4 = 15 - 3x$

$2x = 11 \quad | : 2$

$x = 5,5$

b) $3 - 8x = 18 - 3x$

d) $3x + 5x - 6 = 6x + 2$

e) $5 - 9x + 6 = 2x + 14 - x$

3. Rozwiąż równania.

a) $x(3x + 2) = 3(x^2 - 4)$

$2x(x + 3) = (x + 5)(2x - 1)$

$2x^2 + 6x = 2x^2 - x + 10x - 5$

$2x^2 + 6x - 2x^2 + x - 10x = -5$

$-3x = -5 \quad | : (-3), \quad \text{stąd} \quad x = \frac{5}{3}$

b) $6(1 + 2x^2) = 4x(1 + 3x)$

c) $3x(x - 5) = (3x + 2)(x - 1)$

4. Rozwiąż równania.

a) $\frac{5x-3}{4} + 3 = 2x$

.....

c) $4 - \frac{x}{4} = 2x - \frac{1}{2}$

.....

$$5 - \frac{x-3}{3} = \frac{5x}{3} \quad | \cdot 3$$

$$15 - x + 3 = 5x$$

$$-6x = -18 \quad | : (-6)$$

$$x = 3$$

b) $x - \frac{2x+3}{5} = 3$

.....

d) $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{x+2}{3}$

.....

e) $\frac{3x-2}{5} - 2 = \frac{x}{5}$

.....

5. Rozwiąż równania.

a) $\frac{x-5}{2} = \frac{x}{3}$

.....

b) $\frac{4x-1}{2} = \frac{5x+3}{3}$

.....

$$\frac{2x-3}{4} = \frac{x+5}{3}$$

$$3(2x-3) = 4(x+5)$$

$$6x-9 = 4x+20$$

$$2x = 29 \quad | : 2$$

$$x = 14,5$$

6. Określ, ile rozwiązań mają podane równania.

a) $3(2x-5) = 2(3x-5)$

.....

c) $\frac{x}{3} + x = 2 \cdot \frac{2x}{3}$

.....

$$x(4x-2) = 2x(2x-1)$$

$$4x^2 - 2x = 4x^2 - 2x$$

$$0 = 0$$

Równanie ma nieskoń-
 czenie wiele rozwiązań
 (równanie tożsamościowe).

b) $(x-1)(x+1) = x(x-1) + x$

.....

d) $\frac{x-3}{2} = \frac{2x-6}{4}$

.....

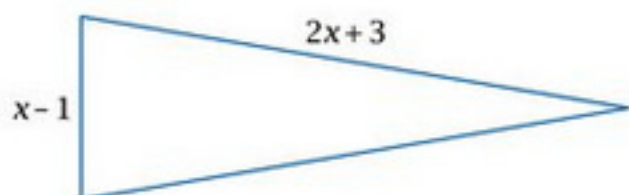
$$\frac{2x}{3} - 2 = x - \frac{x}{3} \quad | \cdot 3$$

$$2x - 6 = 3x - x$$

$$0 = -6$$

Równanie nie ma rozwią-
 zań (równanie sprzeczne).

7. Obwód narysowanego trójkąta równoramiennego jest równy 50. Ułóż odpowiednie równanie, rozwiąż je, a następnie oblicz długości boków tego trójkąta.



8. Sprawdzian składał się z dwóch rodzajów pytań. Za poprawną odpowiedź na niektóre pytania można było zdobyć po 1 punkcie, a na pozostałe — po 2 punkty. Marta odpowiedziała poprawnie na 12 pytań i zdobyła 17 punktów. Na ile pytań za 1 punkt odpowiedziała Marta? Rozwiąż zadanie, korzystając z podanych oznaczeń.

x — liczba poprawnych odpowiedzi Marty na pytania za 1 punkt

$12 - x$ — liczba poprawnych odpowiedzi Marty na pytania za 2 punkty

Zapisz równanie i je rozwiąż.

Odpowiedź:

9. W skarbonce znajdują się tylko jednozłotówki i dwuzłotówki. Razem jest w niej 30 monet o łącznej wartości 52 zł. Ile jednozłotówek jest w skarbonce? Rozwiąż zadanie, korzystając z podanych oznaczeń.

x — liczba jednozłotówek w skarbonce

$30 - x$ — liczba dwuzłotówek w skarbonce

Zapisz równanie i je rozwiąż.

Odpowiedź:

2.3 Proporcje

1. Rozwiąż równania.

$\frac{5}{x} = \frac{2}{7}$	a) $\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$	b) $\frac{4}{x} = \frac{2}{5}$	c) $\frac{3}{4} = \frac{x}{8}$	d) $\frac{4}{5} = \frac{3}{x}$
$5 \cdot 7 = 2x$	$3x = 5 \cdot 6$			
$35 = 2x \quad :2$				
$x = 17,5$				

2. Rozwiąż równania.

$\frac{3}{5} = \frac{7}{x-5}$	a) $\frac{x+6}{2} = \frac{4}{3}$	b) $\frac{5}{x-4} = \frac{3}{2}$	c) $\frac{1}{3} = \frac{x-7}{6}$
$3(x-5) = 5 \cdot 7$	$3(x+6) = 2 \cdot 4$		
$3x - 15 = 35$			
$3x = 50 \quad :3$			
$x = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$			

3. Rozwiąż poniższe zadania.

W misce było 21 orzechów włoskich. Po dosypaniu do nich orzechów laskowych stosunek (czyli iloraz) liczby orzechów włoskich do liczby orzechów laskowych wyniósł 3 : 5. Ile orzechów dosypano? x — liczba orzechów laskowych $\frac{21}{x} = \frac{3}{5}$ $21 \cdot 5 = 3x$ $105 = 3x \quad :3$ $x = 35$ ODPOWIEDŹ: Dosypano 35 orzechów.	a) Stosunek liczby bułek razowych do bułek pszennych w koszyku wynosi 10 : 3. Ile w tym koszyku jest bułek razowych, jeżeli wiadomo, że bułek pszennych jest 12? x — liczba bułek razowych $\frac{x}{12} = \frac{10}{3}$ Odpowiedź:
---	---

b) W pudełku jest 30 spinaczy plastikowych, a pozostałe są metalowe. Stosunek liczby spinaczy plastikowych do metalowych wynosi 5 : 8. Ile jest metalowych spinaczy?

x —

Odpowiedź:

c) W przepisie na ciasto stosunek masy potrzebnego cukru do masy mąki wynosi 2 : 7. Ile potrzeba cukru, aby do zrobienia tego ciasta wykorzystać 42 dag mąki?

x —

Odpowiedź:

4. Na rysunku obok przedstawiono pudełko, w którym znajdują się kule niebieskie, białe i szare.

a) Ile kul białych należy dołożyć, by białe kule stanowiły $\frac{3}{4}$ wszystkich kul w pudełku?

b — liczba dołożonych kul białych

$3 + b$ — nowa liczba kul białych w pudełku

..... — nowa liczba wszystkich kul w pudełku

$$\frac{3 + b}{\dots} = \frac{3}{4}$$

.....

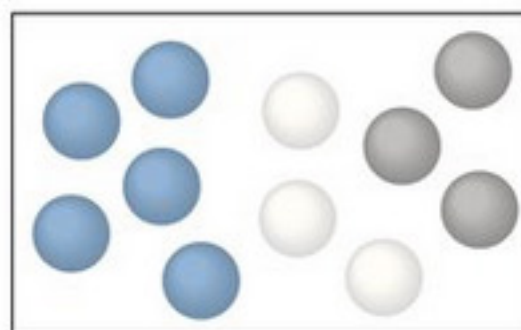
Odpowiedź:

b) Ile kul niebieskich należy dołożyć, by kule niebieskie stanowiły $\frac{3}{4}$ wszystkich kul w pudełku?

s — liczba dołożonych kul niebieskich

.....

Odpowiedź:



5. Ogrodnik miał zapas worków z nawozem dwóch typów, przy czym worków z nawozem typu A było o 2 więcej niż worków z nawozem typu B. Wymieszał nawóz z wszystkich worków i otrzymał mieszanę, w której na 5 porcji nawozu A przypadają 4 porcje nawozu B. Po ile worków każdego z typów nawozu zmieszał ogrodnik?

x — liczba worków nawozu typu B — liczba worków nawozu typu A

$$\frac{5}{4} =$$

.....

.....

.....

Odpowiedź:

2.4 Wielkości wprost proporcjonalne

1. Sprawdź, ile razy potrafisz wymówić poprawnie słowo „chrząszcz” w ciągu 10 sekund. Przyjmij, że umiesz w tym samym tempie wymawiać to słowo przez dłuższy czas. Ile razy wymówisz to słowo w ciągu pół minuty, ile razy — w ciągu minuty, ile razy — w ciągu 5 minut, a ile — w ciągu godziny? Uzupełnij tabelkę.

Czas (w sekundach)	10	30	60	300	3600
Ile razy powiesz słowo „chrząszcz”?					

2. Wielkości x i y są wprost proporcjonalne. Jakimi liczbami należy zastąpić litery b i c ?

x	8	4	6
y	6	3	a

$\frac{4}{3} = \frac{6}{a}$

$4a = 18 \quad |:4$

$a = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}$

x	5	10	b
y	2	4	6

.....

.....

.....

x	4	8	5
y	3	6	c

.....

.....

.....

3. Wielkości podane w tabeli są wprost proporcjonalne. Uzupełnij proporcje.

3	a	9
5	10	b

$$\frac{a}{10} = \frac{3}{\quad}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{\quad}{9}$$

$$\frac{9}{b} = \frac{\quad}{5}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{a}{\quad}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{\quad}$$

$$\frac{9}{a} = \frac{\quad}{\quad}$$

 4. Rozwiąż poniższe zadania.

Za 70 dag gruszek zapłacono 3,85 zł. Ile gruszek można kupić za 7,15 zł?

Masa (dag)	70	x
Kwota (zł)	3,85	7,15

$$\frac{3,85}{7,15} = \frac{70}{x}$$

$$3,85x = 70 \cdot 7,15$$

$$3,85x = 500,5 \quad |: 3,85$$

$$x = 130$$

ODPOWIEDŹ: Za 7,15 zł można kupić 130 dag (czyli 1,3 kg) gruszek.

a) Za 0,45 kg bananów zapłacono 2,10 zł. Ile bananów można kupić za 9,10 zł?

Masa (kg)	0,45	x
Kwota (zł)	2,10	9,10

.....

.....

.....

.....

Odpowiedź:

.....

b) Za 0,35 kg kiwi zapłacono 1,40 zł. Ile kosztuje 2,3 kg kiwi?

Masa (kg)	0,35	2,3
Kwota (zł)	1,40	x

.....

.....

.....

.....

Odpowiedź:

.....

c) Za 0,6 kg grejpfrutów zapłacono 3,30 zł. Ile kosztuje 1,5 kg grejpfrutów?

Masa (kg)	0,6	
Kwota (zł)	3,30	

.....

.....

.....

.....

Odpowiedź:

.....

d) Za 1,3 kg pomarańczy zapłacono 5,85 zł. Ile kosztuje 0,7 kg pomarańczy?

Masa (kg)	1,3	
Kwota (zł)	5,85	

.....

.....

.....

.....

Odpowiedź:

.....

5. Do przygotowania sernika potrzebne są następujące składniki: 1 kg twarogu, 20 dag masła, 25 dag cukru, 5 jaj, 50 g kaszy manny, 2 łyżki mąki ziemniaczanej, 1 łyżeczka proszku do pieczenia. W poniższym przykładzie pokazano, w jaki sposób obliczyć ilość masła, gdy chcemy upiec sernik z 1200 g twarogu. Rozwiąż poniższe zadania.

a) Oblicz, ile należy wziąć każdego ze składników, jeśli do przygotowania sernika chcemy użyć 1200 g twarogu.

Twaróg (g)	Masło (g)	Cukier (g)	Jaja (szt.)	Kasza manna (g)	Mąka ziemniaczana (łyżki)	Proszek do pieczenia (łyżeczki)
1000	200	250	5	50	2	1
1200	240					

m — masa masła

$$\frac{1000}{1200} = \frac{200}{m}$$

$$\frac{10}{12} = \frac{200}{m}$$

$$10m = 2400$$

$$m = 240$$

b) Oblicz, ile należy wziąć każdego ze składników, jeśli do przygotowania sernika chcemy użyć 80 g masła.

Twaróg (g)	Masło (g)	Cukier (g)	Jaja (szt.)	Kasza manna (g)	Mąka ziemniaczana (łyżki)	Proszek do pieczenia (łyżeczki)
1000	200	250	5	50	2	1

Sprawdź, ile umiesz

1. Przedstaw poniższe wyrażenia w postaci sum algebraicznych w jak najprostszej postaci.

a) $p(4 - 3p) + 5p(2p - 3) = \dots\dots\dots$

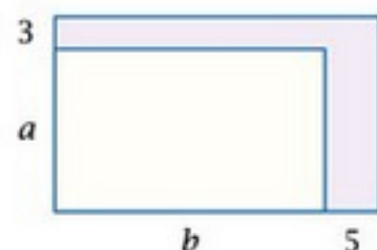
b) $5x(3x + 4y - 2) - 3y(2y + 5x) = \dots\dots\dots$

c) $(5p + 2q)(7q - 2p) = \dots\dots\dots$

d) $(2a - 3b)(2a - 3b) = \dots\dots\dots$

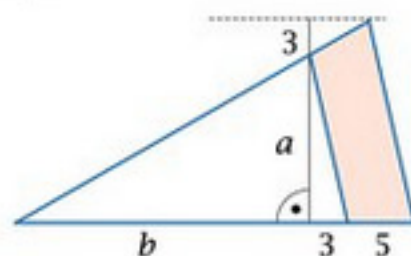
2. Jakie jest pole zacięniowanej figury? Zapisz je w postaci sumy algebraicznej.

a)



$P = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

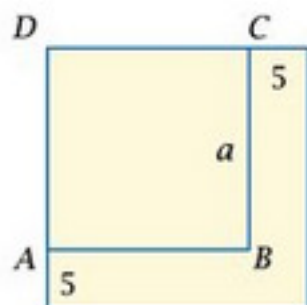
b)



$P = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

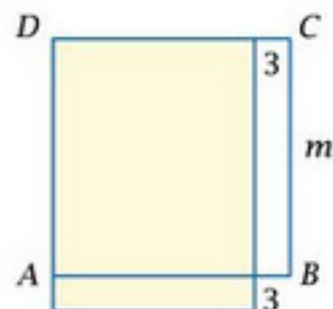
3. Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem. Zapisz pole zacięniowanej figury w postaci sumy algebraicznej.

a)



$P = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

b)



$P = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

4. Rozwiąż równania.

a) $2 - 5(3x - 4) = 5(6 + x)$

b) $x + \frac{x}{2} - 1 = 2x - \frac{x}{2} + 1$

c) $\frac{2x-3}{5} = \frac{x}{3}$

d) $(x+2)(x-1) = x(x+5)$

e) $\frac{1}{x} = \frac{5}{2x+1}$

f) $\frac{-x}{2x-4} = \frac{3x}{1-6x}$



5. Pewien taksówkarz w ciągu dnia wykonał 20 kursów, za każdym razem przewożąc jednego lub dwóch pasażerów. Tego dnia przewiózł w sumie 38 osób. Ile razy przewoził dwóch pasażerów?

Odpowiedź:

6. Zraszacz podlewa dwa trawniki z taką samą intensywnością. Trawniki o powierzchni 120 m^2 wymaga 600 litrów wody. Ile litrów wody zużywa zraszacz na podlanie trawnika o powierzchni 70 m^2 ?

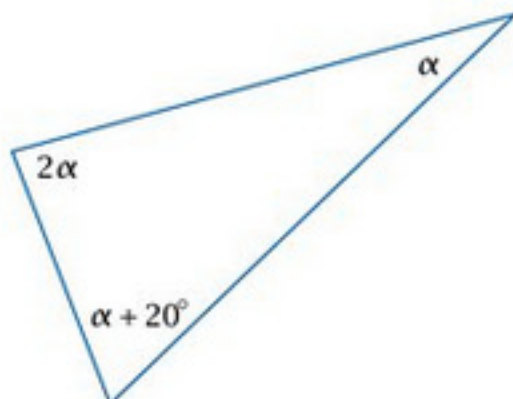


Odpowiedź:

3.1 Trójkąty i czworokąty

1. Oblicz miary kątów narysowanych trójkątów.

a)



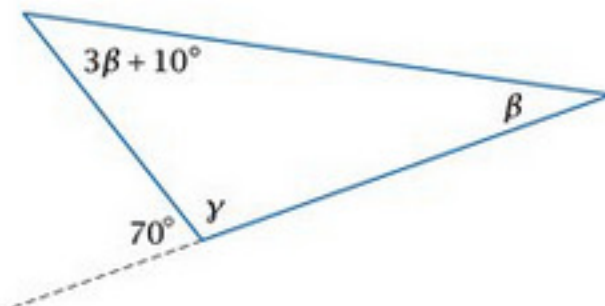
$$2\alpha + (\alpha + 20^\circ) + \alpha = 180^\circ$$

.....

.....

$$\alpha = \quad \alpha + 20^\circ = \quad 2\alpha =$$

b)



.....

.....

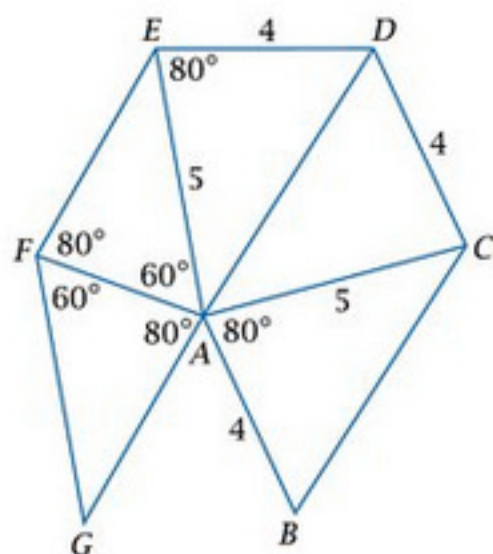
.....

.....

2. Wybierz trzy z narysowanych poniżej odcinków, z których można zbudować trójkąt. Ile różnych trójkąt możesz wybrać? Skonstruuj wszystkie możliwe trójkąty.



3. Skonstruuj trójkąt równoramienny, którego dwa boki mają długości 5 cm i 2 cm.



4. a) Uzupełnij zapisy.

Trójkąt AED jest przystający do trójkąta CAB na podstawie cechy:

Trójkąt AED jest przystający do trójkąta na podstawie cechy: bok, bok, bok.

Trójkąt jest przystający do trójkąta na podstawie cechy: kąt, bok, kąt.

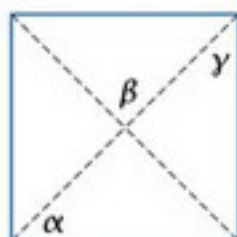
b) Wskaż na rysunku jeszcze jedną parę trójkątów przystających. Pokoloruj je.

5. W każdym rzędzie tabeli — przy danym rodzaju czworokąta — postaw krzyżyk tylko pod tymi własnościami, które dotyczą wszystkich czworokątów danego rodzaju.

	wszystkie boki tej samej długości	dwie pary boków tej samej długości	dwie pary boków równoległych	co najmniej jedna para boków równoległych	wszystkie kąty proste	przeciwległe kąty jednakowej miary	przekątne takiej samej długości	przekątne przecinają się w połowie	przekątne prostopadłe
kwadrat									
prostokąt									
równoległobok									
romb									
trapez									

6. Jakie miary mają kąty oznaczone literami?

a) kwadrat

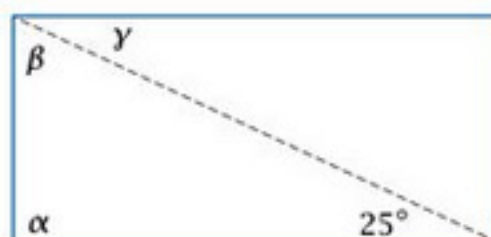


.....

.....

.....

b) prostokąt



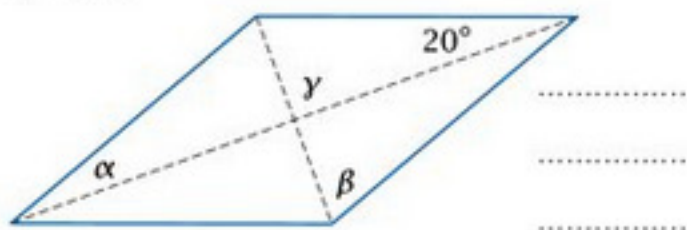
.....

.....

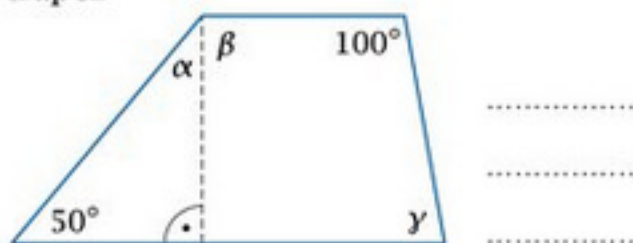
.....

7. Ustal miary kątów oznaczonych literami.

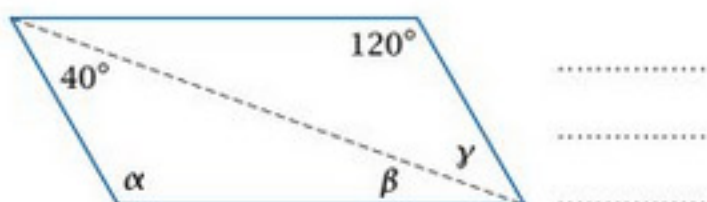
a) romb



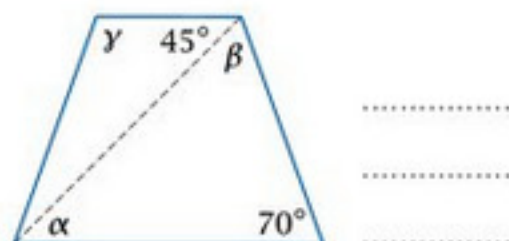
c) trapez



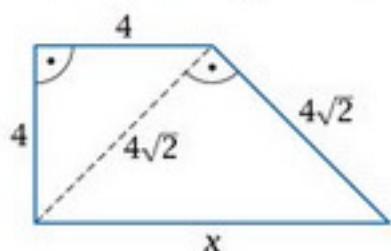
b) równoległobok



d) trapez równoramienny



8. Oblicz pola narysowanych poniżej czworokątów (trapezu, równoległoboku i rombu), a następnie ustal długości odcinków oznaczonych literami x , y , z , rozwiązując odpowiednie równania (według wzoru).



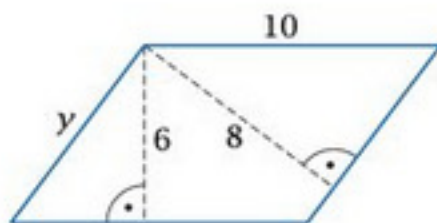
$$P = \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24$$

$$P = \frac{4+x}{2} \cdot 4$$

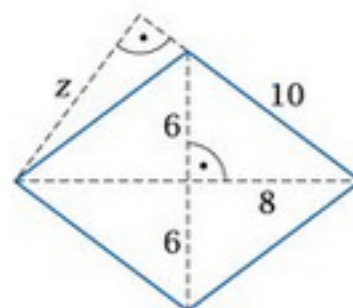
$$\frac{4+x}{2} \cdot 4 = 24$$

$$4+x = 12$$

$$x = 8$$



$$P =$$



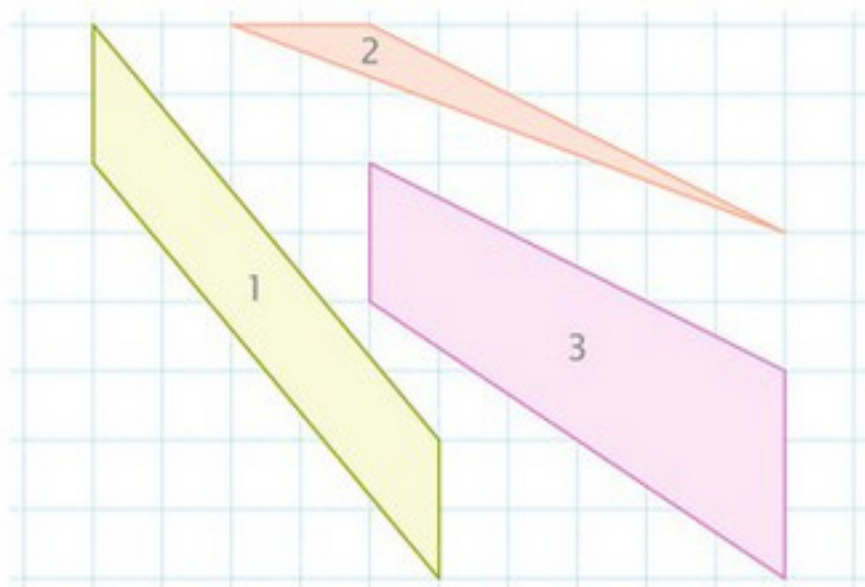
$$P =$$

9. Oblicz pola narysowanych figur. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1.

$$P_1 =$$

$$P_2 =$$

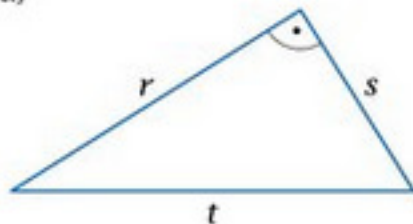
$$P_3 =$$



3.2 Twierdzenie Pitagorasa

1. Przyjrzyj się rysunkowi trójkąta. Podkreśl równość, która wynika z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta.

a)



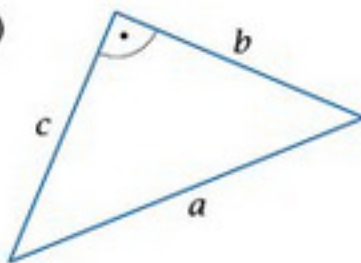
$$r^2 + t^2 = s^2$$

$$r + s = t$$

$$r^2 = t^2 + s^2$$

$$r^2 + s^2 = t^2$$

b)



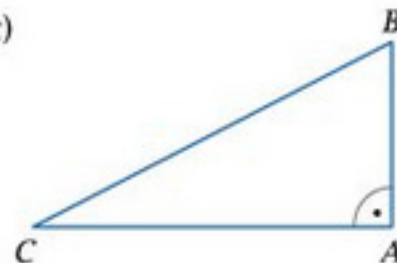
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$a + b = c$$

c)



$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

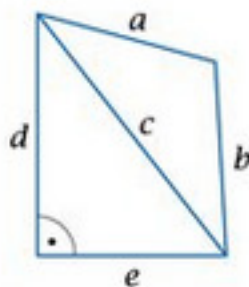
$$AB + BC = AC$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

2. Która z zapisanych pod rysunkiem zależności wynika z twierdzenia Pitagorasa? Podkreśl ją.

a)

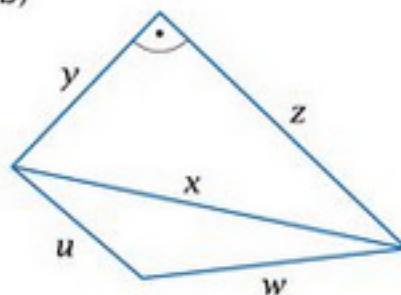


$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 + c^2 = d^2$$

$$d^2 + e^2 = c^2$$

b)

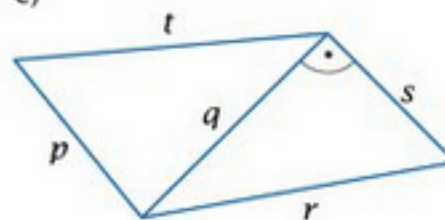


$$x^2 = u^2 + w^2$$

$$x^2 = y^2 + z^2$$

$$x = y + z$$

c)



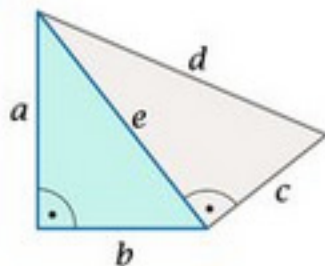
$$q^2 = p^2 + t^2$$

$$r^2 + s^2 = q^2$$

$$r^2 = q^2 + s^2$$

3. Zapisz dwie zależności wynikające z twierdzenia Pitagorasa: jedną dla niebieskiego trójkąta i jedną dla szarego.

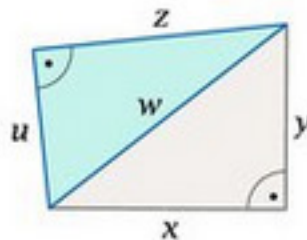
a)



$$a^2 + b^2 = \dots$$

$$c^2 + d^2 = \dots$$

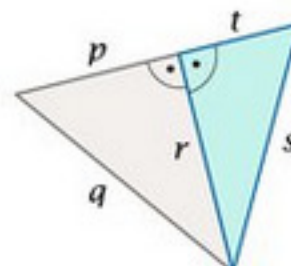
b)



$$\dots$$

$$\dots$$

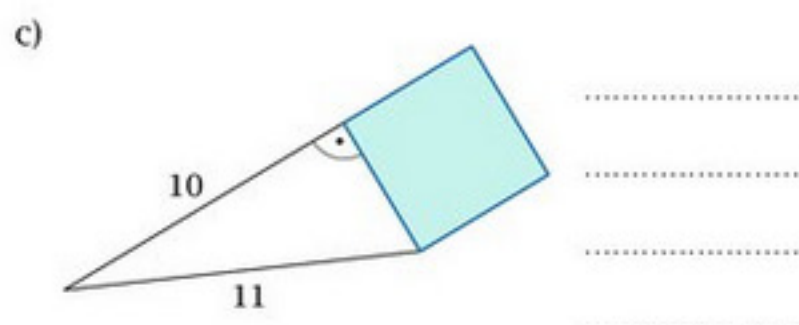
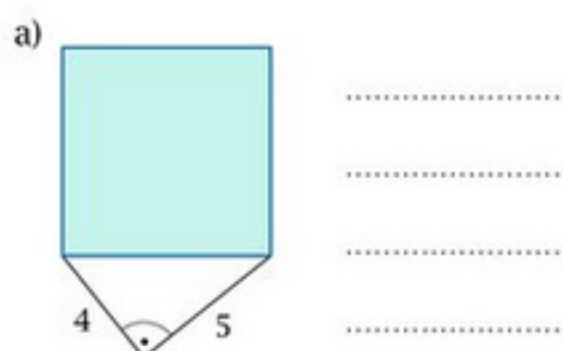
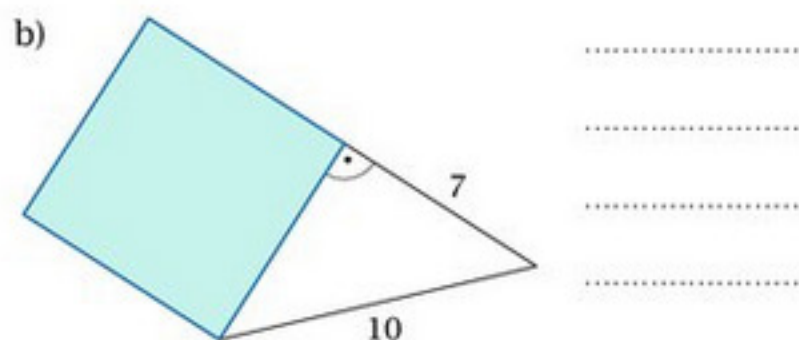
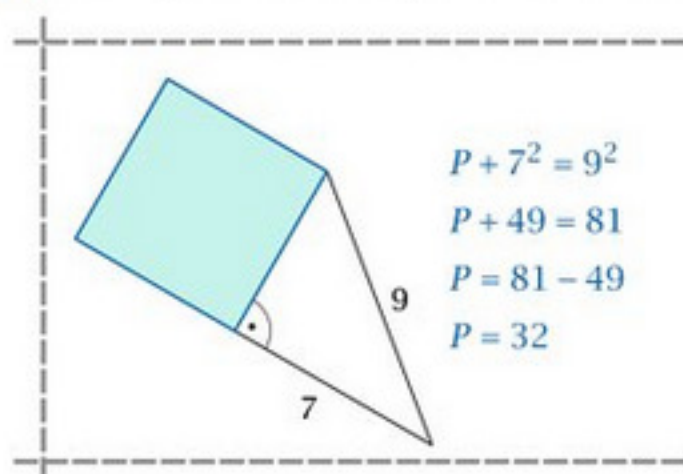
c)



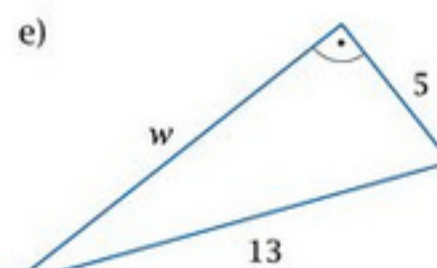
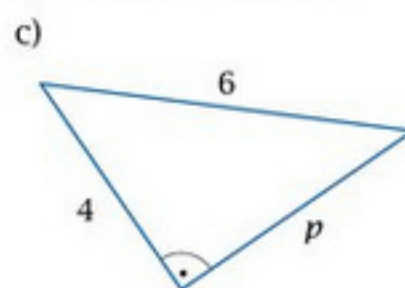
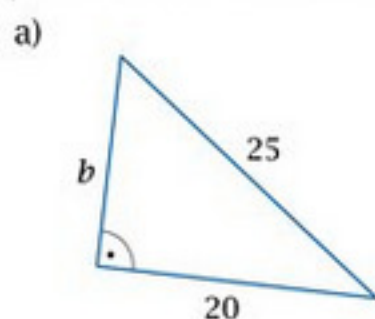
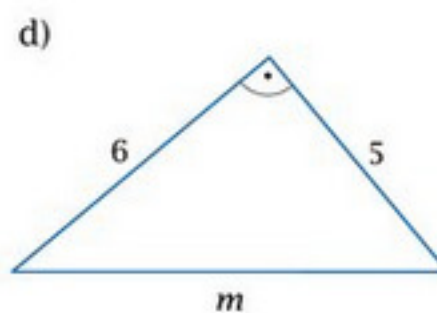
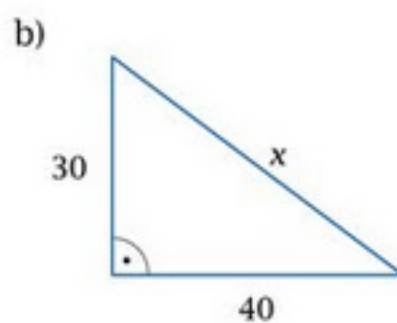
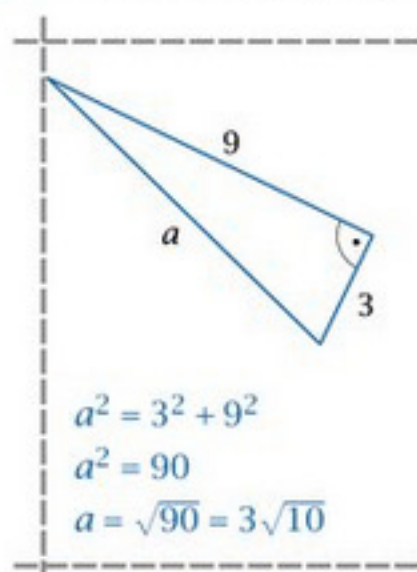
$$\dots$$

$$\dots$$

4. Oblicz pole niebieskiego kwadratu według wzoru.

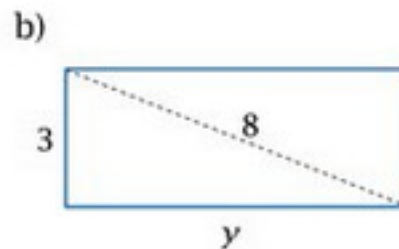
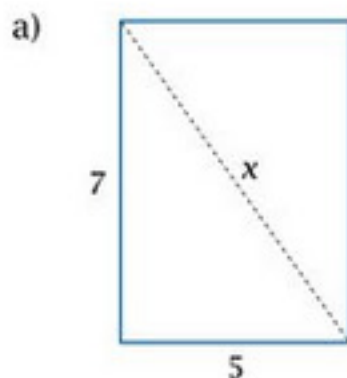
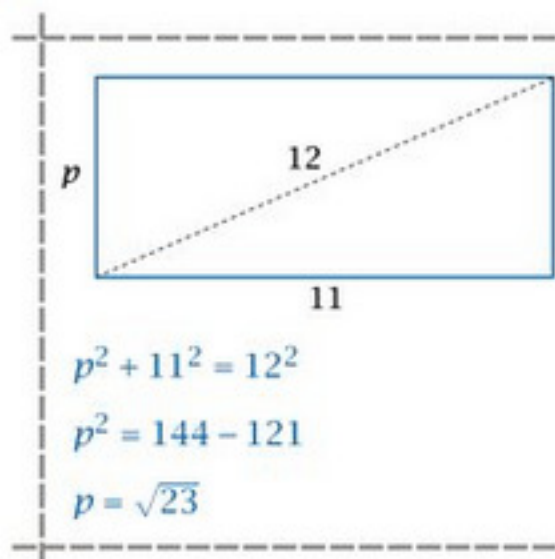


5. Oblicz brakującą długość boku trójkąta, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

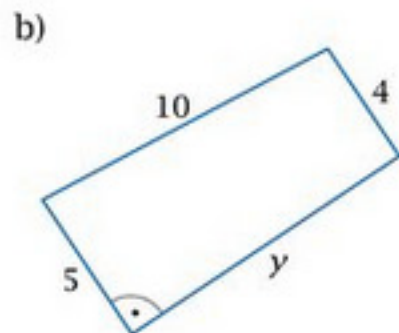
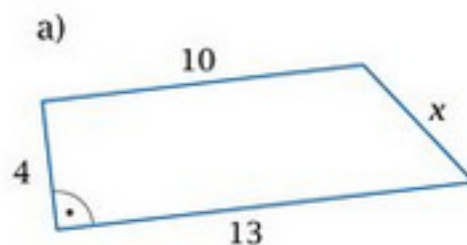
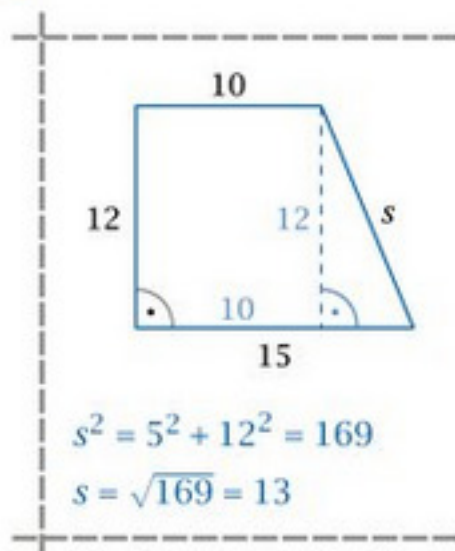


3.3 Zastosowania twierdzenia Pitagorasa

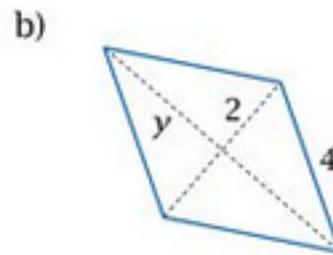
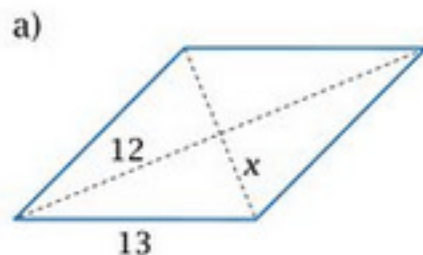
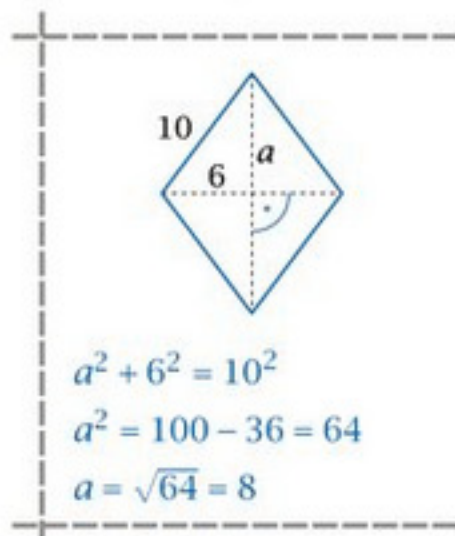
1. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



2. Oblicz brakującą długość boku trapezu.

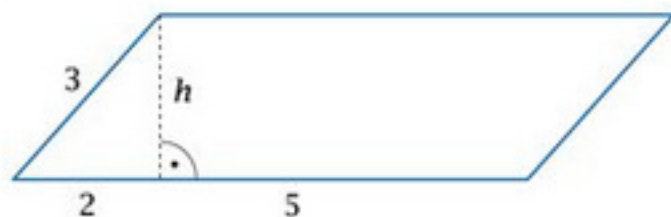


3. Na rysunku przedstawiony jest romb. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



4. Oblicz zaznaczoną wysokość równoległoboku, a następnie jego pole.

a)



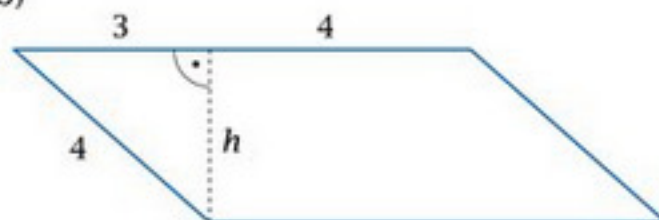
.....

.....

.....

.....

b)



.....

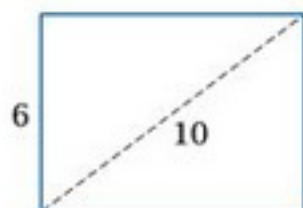
.....

.....

.....

5. Na rysunkach przedstawiono prostokąt i romb. Oblicz ich pola.

a)



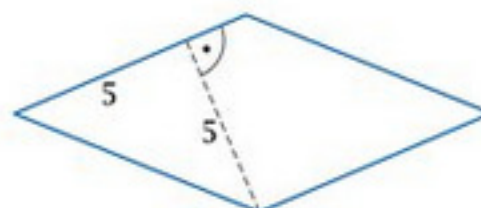
.....

.....

.....

.....

b)



.....

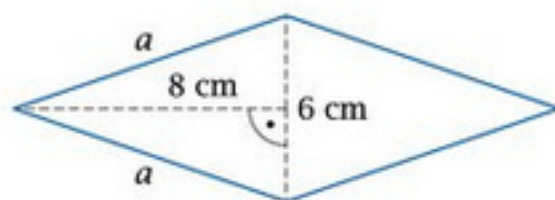
.....

.....

.....

6. Na rysunkach przedstawiono romb i prostokąt. Oblicz ich obwody.

a) romb



$a^2 = 8^2 + 6^2$

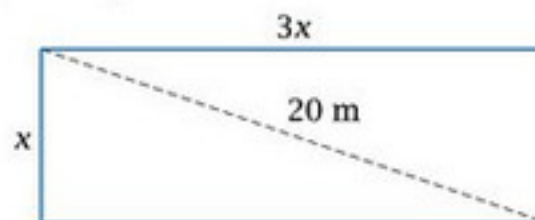
.....

.....

.....

.....

b) prostokąt



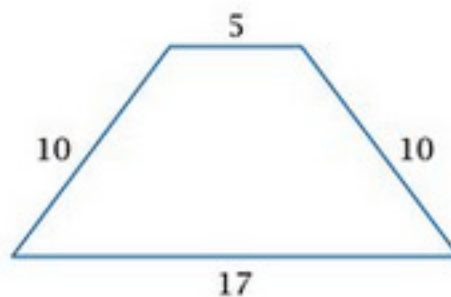
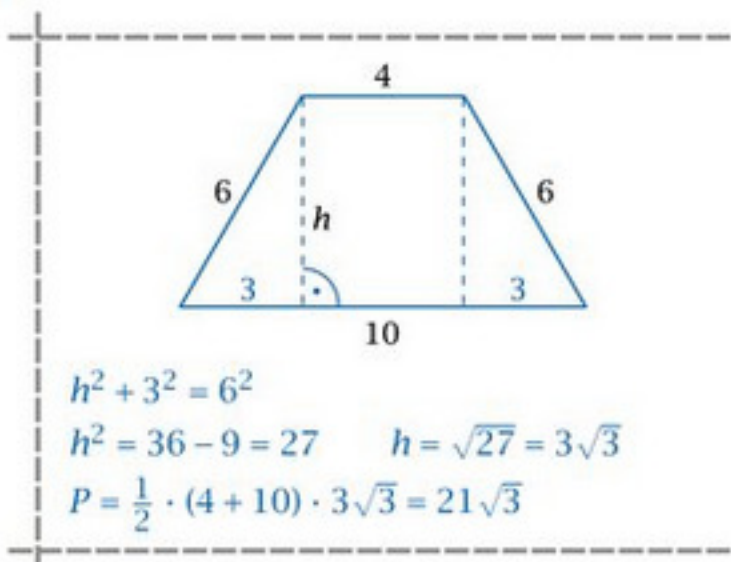
.....

.....

.....

.....

7. Oblicz wysokość trapezu, a następnie jego pole.

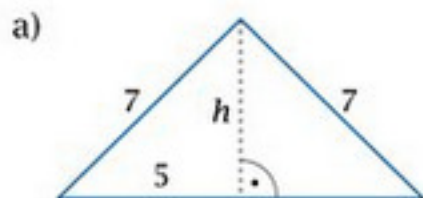


.....

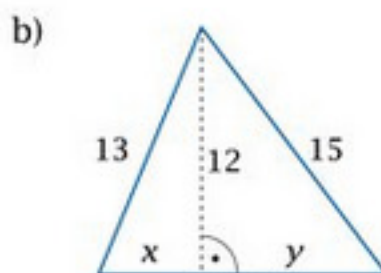
.....

.....

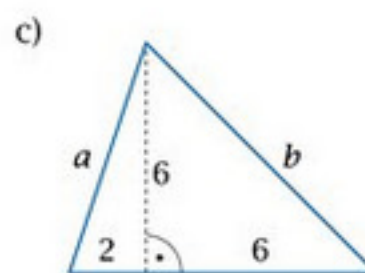
8. Oblicz pole i obwód narysowanego trójkąta.



$h^2 + \dots = \dots$
 $h^2 = \dots$
 $h = \dots$
 $P = \dots$
 Obwód =

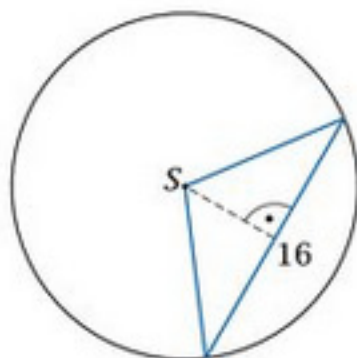


$x^2 + \dots = \dots$
 $x^2 = \dots$
 $x = \dots$
 $y^2 + \dots = \dots$
 $y^2 = \dots$
 $y = \dots$
 $P = \dots$
 Obwód =



$a^2 = \dots + \dots$
 $a^2 = \dots$
 $a = \dots$
 $b^2 = \dots + \dots$
 $b^2 = \dots$
 $b = \dots$
 $P = \dots$
 Obwód =

9. Każdy z poniższych okręgów ma promień długości 10. Punkt S jest środkiem okręgu. Oblicz pola trójkąta i prostokąta.



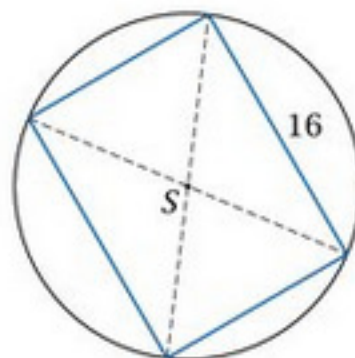
.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

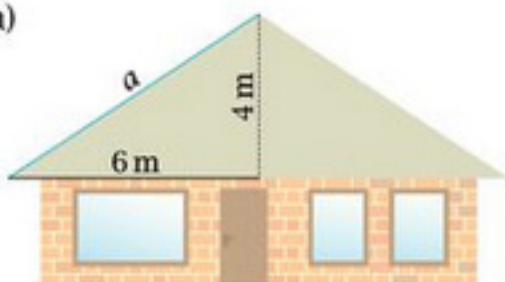
.....

.....

.....

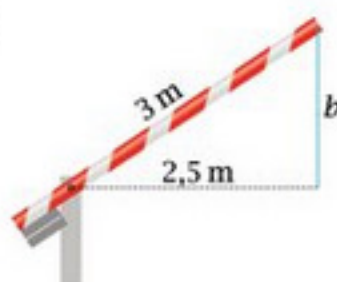
10. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą. Wynik zaokrąglaj do części dziesiątych metra.

a)



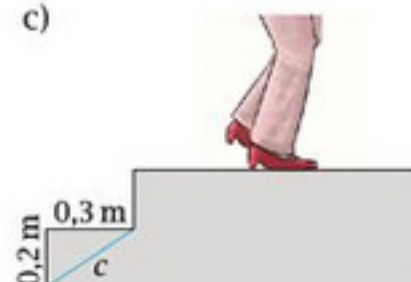
.....

b)



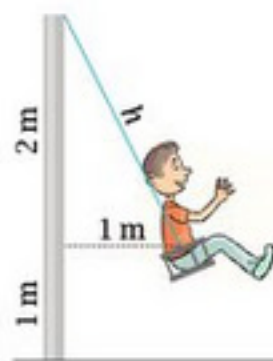
.....

c)



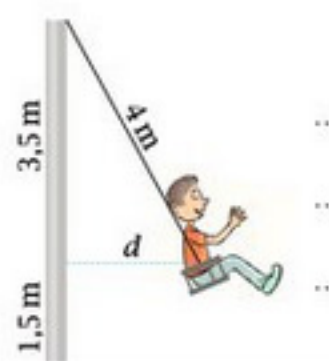
.....

11. a) Oblicz przybliżoną długość łańcucha (h) huśtawki.



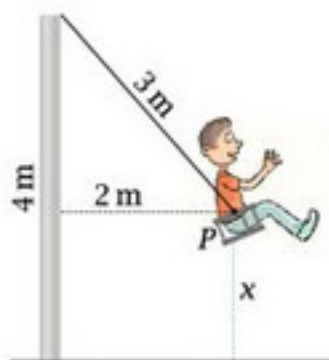
.....

b) Oblicz, jak daleko od słupków odchyliła się huśtawka.



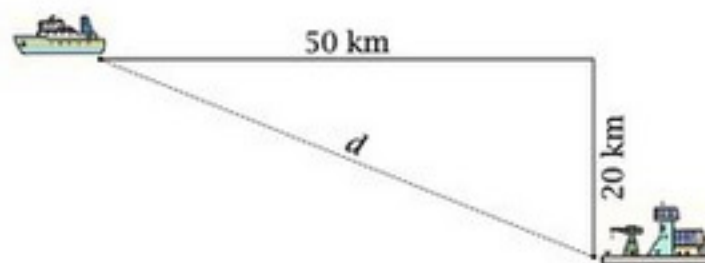
.....

c) Oblicz, jak wysoko nad ziemią znajduje się punkt P (znajdź długość x).



.....

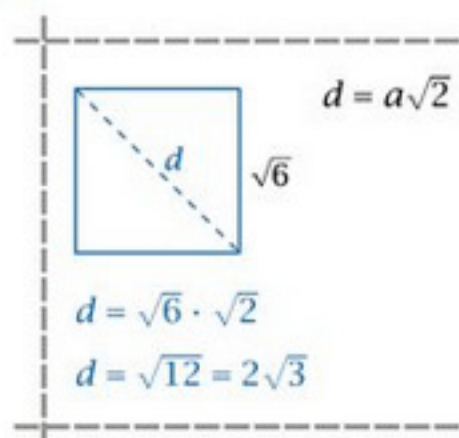
12. Statek wypłynął z portu w kierunku północnym. Po przepłynięciu 20 km skręcił na zachód, przepłynął w tym kierunku 50 km i tam zarzucił kotwicę. Jak daleko w linii prostej od portu znajduje się ten statek? Wynik zaokrąglaj do pełnych kilometrów.



Odpowiedź:

3.4 Przekątna kwadratu. Wysokość trójkąta równobocznego

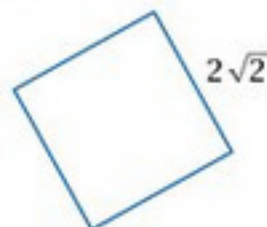
1. Narysuj przekątną kwadratu i oblicz jej długość.



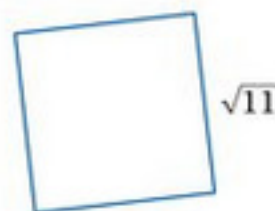
a)



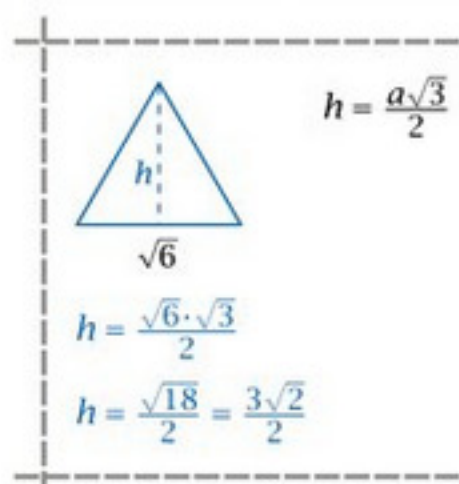
b)



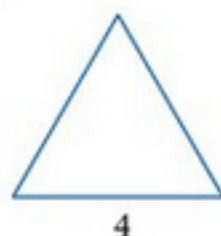
c)



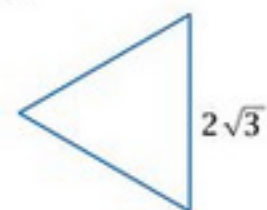
2. Narysuj wysokość trójkąta równobocznego i oblicz jej długość.



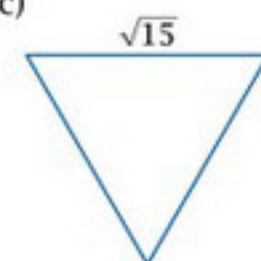
a)



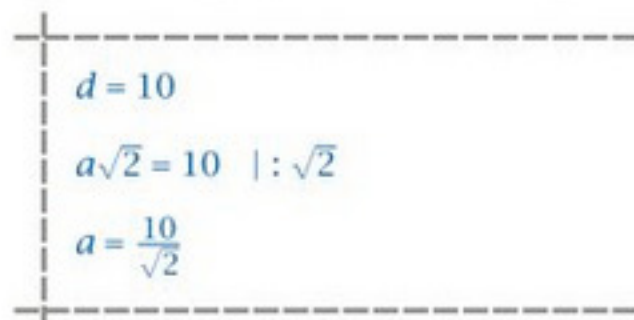
b)



c)



3. Oblicz długość boku kwadratu, którego przekątna ma długość d .



b) $d = \sqrt{3}$

a) $d = 6$

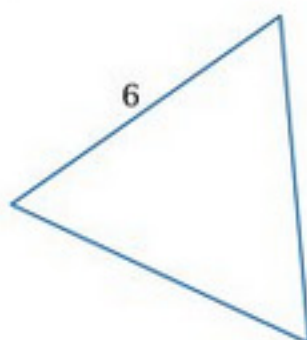
c) $d = 7\sqrt{2}$

4. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, którego wysokość ma długość h .

$h = 12$ $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 12 \quad \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$ $a = \frac{24}{\sqrt{3}}$	a) $h = 3$	b) $h = \sqrt{2}$	c) $h = 7\sqrt{3}$
			
			
			

5. Oblicz pola trójkątów.

a) trójkąt równoboczny



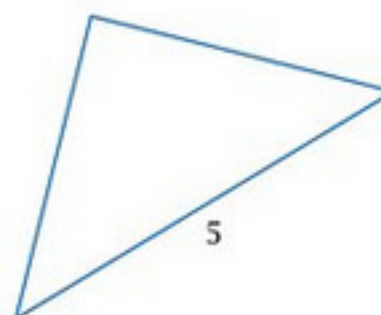
.....

.....

.....

.....

b) trójkąt prostokątny równoramienny



.....

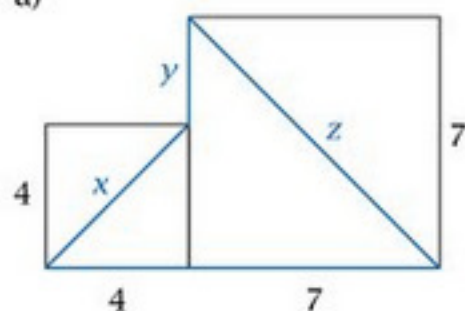
.....

.....

.....

6. Oblicz obwód wielokąta zaznaczonego niebieską linią.

a)



$x =$

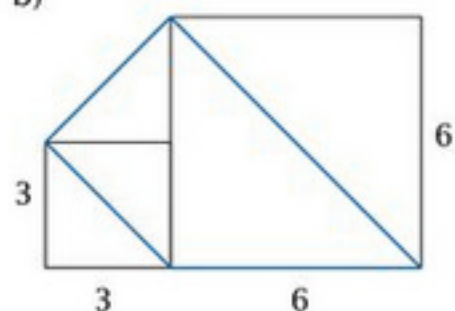
$y =$

$z =$

Obwód =

.....

b)



.....

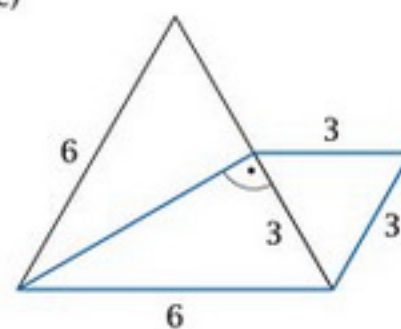
.....

.....

.....

.....

c)



.....

.....

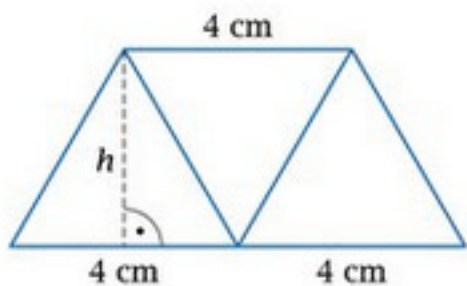
.....

.....

.....

7. Oblicz pola poniższych czworokątów. Skorzystaj z jednej z przedstawionych metod.

- a) Pewien trapez równoramienny można podzielić na trzy takie same trójkąty równoboczne o boku 4 cm.



METODA 1

Korzystamy ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego:

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{2} = \dots\dots\dots$$

Korzystamy ze wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot (4 + 8) \cdot \dots\dots\dots$$

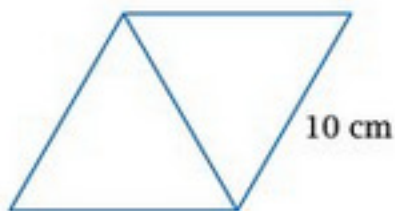
METODA 2

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego:

$$P_{\Delta} = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dots\dots\dots$$

$$P = 3 \cdot P_{\Delta} = \dots\dots\dots$$

- b) Jedna z przekątnych rombu dzieli go na dwa trójkąty równoboczne o boku 10 cm.



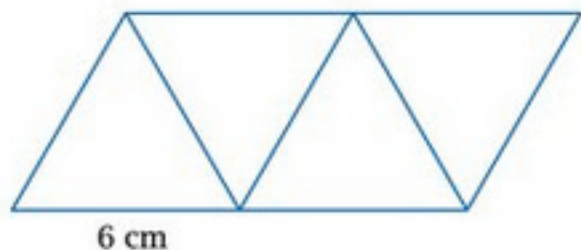
.....

.....

.....

.....

- c) Pewien równoległobok można podzielić na cztery takie same trójkąty równoboczne o boku 6 cm.

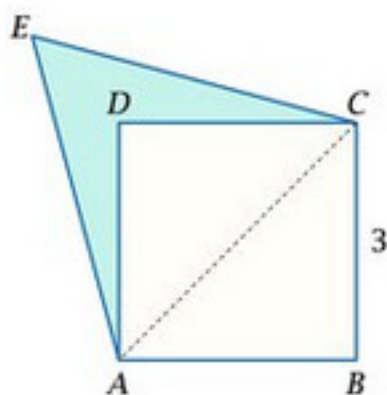


.....

.....

.....

.....



8. Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, a trójkąt ACE jest równoboczny. Oblicz pole zacieniowanej figury.

.....

.....

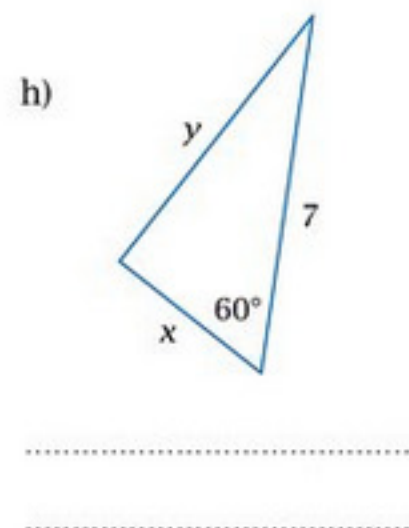
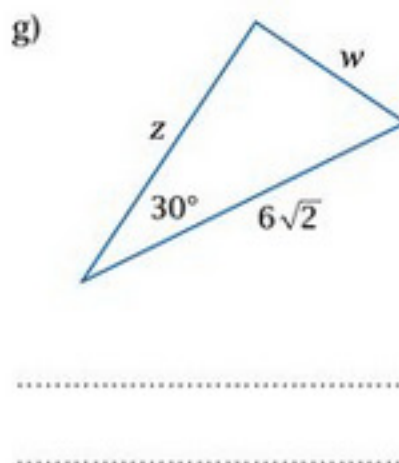
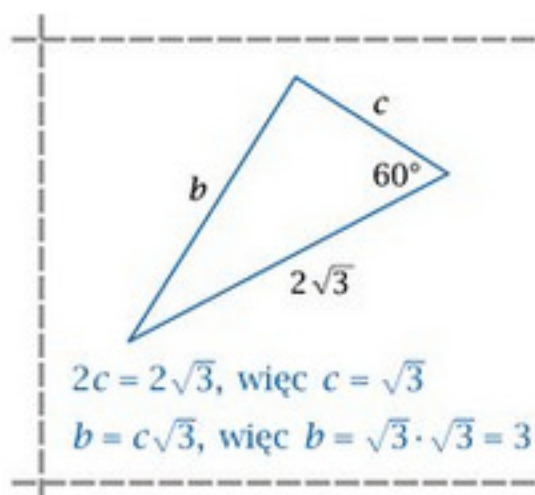
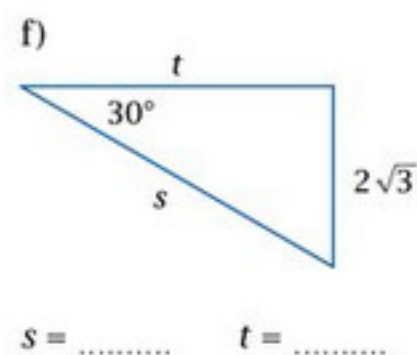
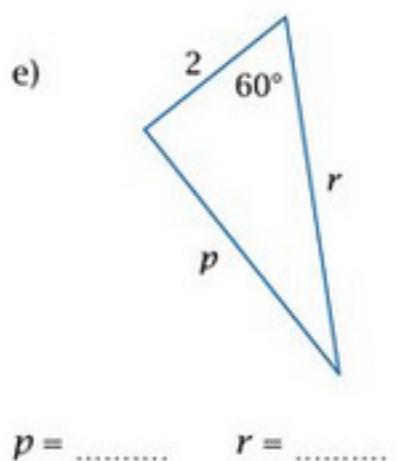
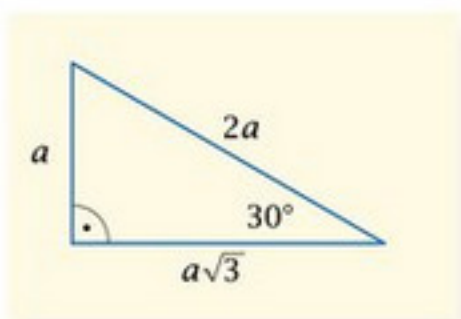
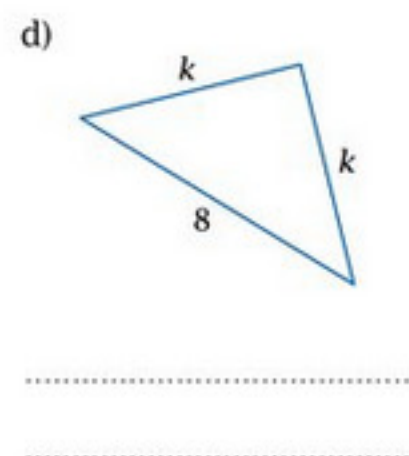
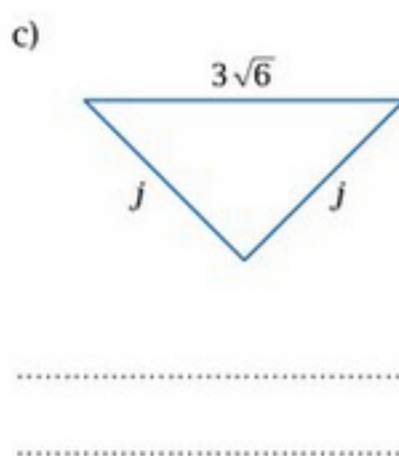
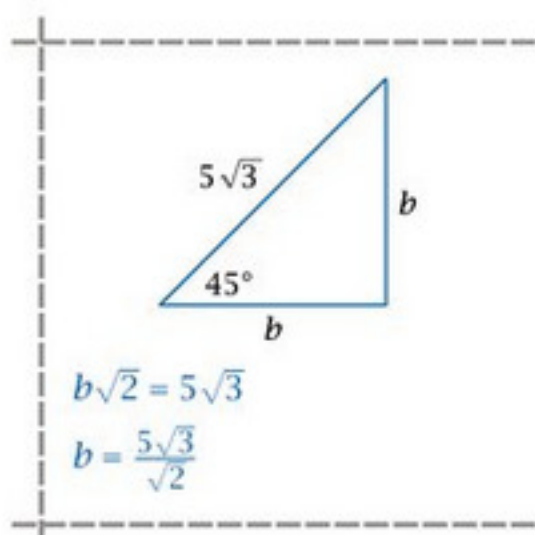
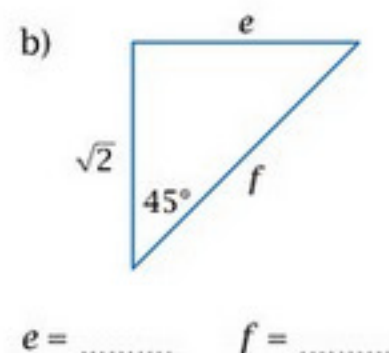
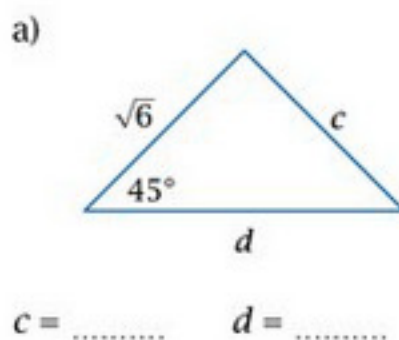
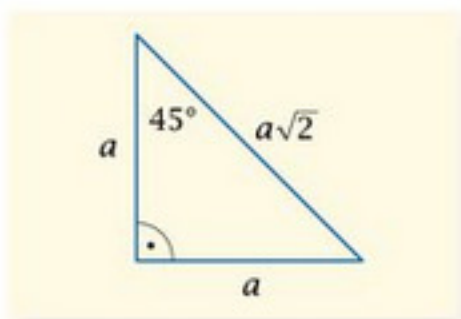
.....

.....

.....

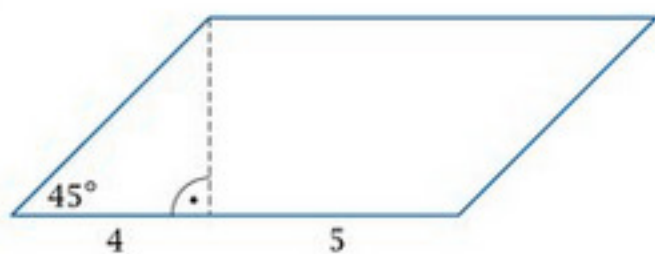
3.5 Trójkąty o kątach 90° , 45° , 45° oraz 90° , 30° , 60°

1. Narysowane trójkąty są prostokątne. Podaj długości boków oznaczonych literami.

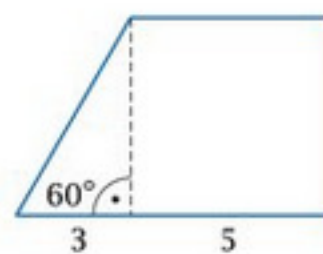


2. Na rysunkach przedstawiono równoległobok i trapez prostokątny. Oblicz ich pola.

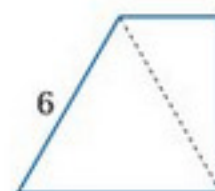
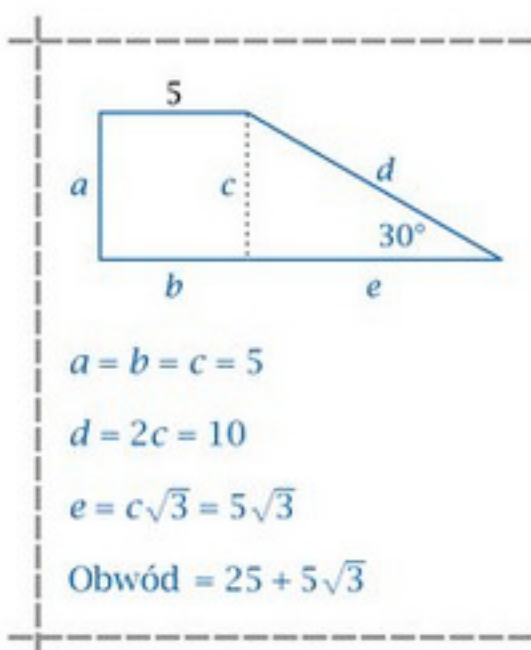
a)



b)

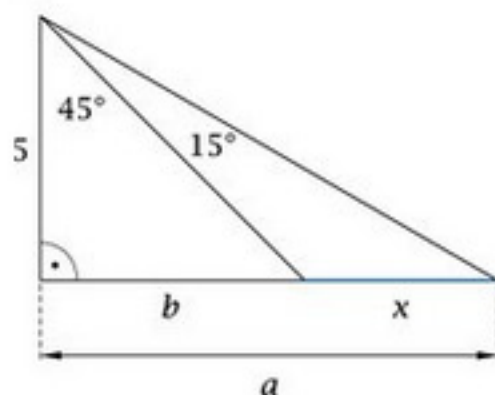


3. Poniższe wielokąty są zbudowane z kwadratów, trójkątów równobocznych, trójkątów prostokątnych równoramiennych i trójkątów o kątach 90° , 60° i 30° . Oblicz ich obwody.

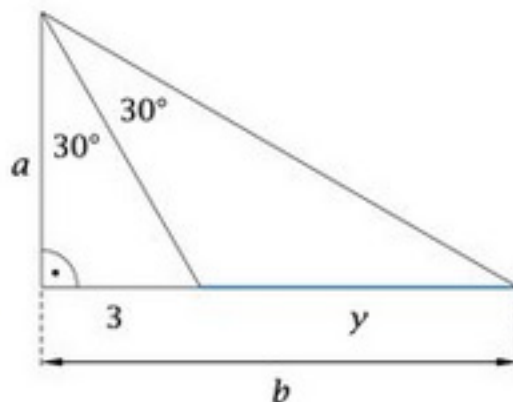


4. Oblicz długość odcinka zaznaczonego na niebiesko. Zaczynij od znalezienia trójkąta o kątach 90° , 60° , 30° lub 90° , 45° , 45° . (Możesz pomocniczo dopisać miary kątów na rysunku).

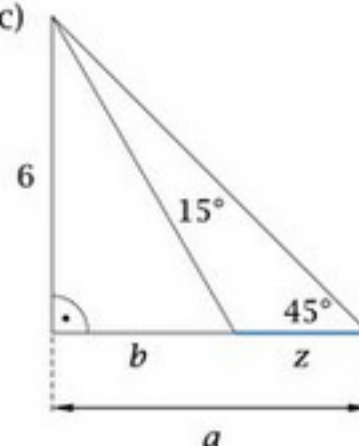
a)



b)

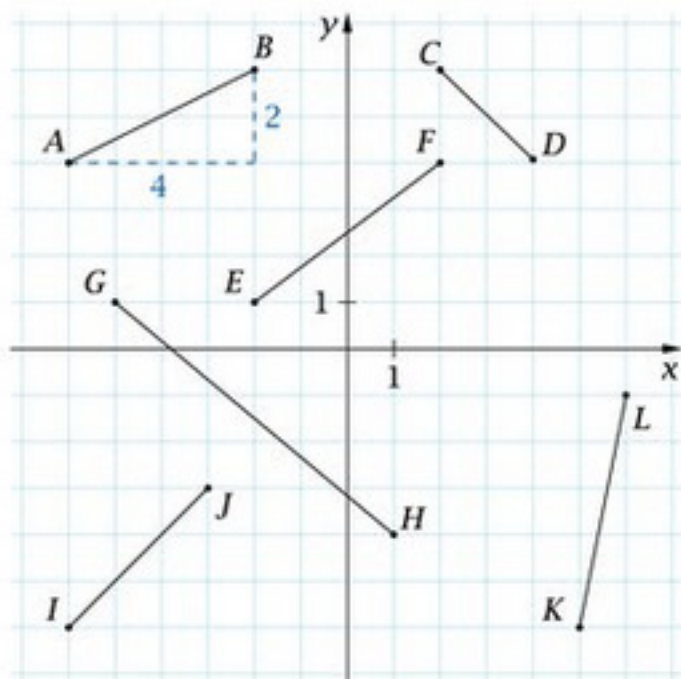


c)



3.6 Odcinki w układzie współrzędnych

1. Oblicz według wzoru długości odcinków narysowanych w układzie współrzędnych.



$$AB^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$GH^2 = \dots\dots\dots$$

$$AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$GH = \dots\dots\dots$$

$$CD^2 = \dots\dots\dots$$

$$IJ^2 = \dots\dots\dots$$

$$CD = \dots\dots\dots$$

$$IJ = \dots\dots\dots$$

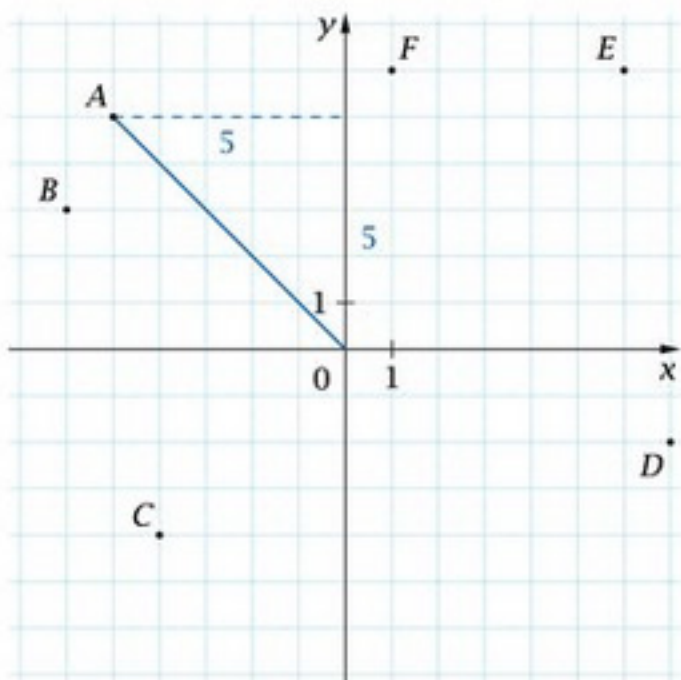
$$EF^2 = \dots\dots\dots$$

$$KL^2 = \dots\dots\dots$$

$$EF = \dots\dots\dots$$

$$KL = \dots\dots\dots$$

2. a) Ustal, który z zaznaczonych punktów leży najbliżej, a który najdalej od początku układu współrzędnych.



$$AO^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

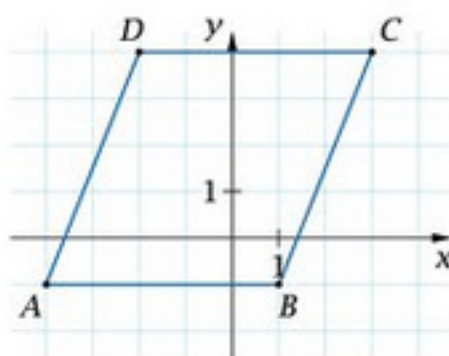
$$AO = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

.....

b) Które z punktów zaznaczonych w powyższym układzie współrzędnych należą do koła o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 7?

.....

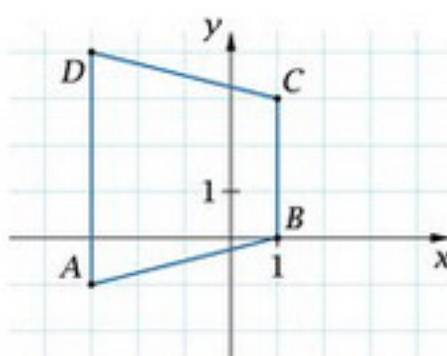
3. Oblicz obwody narysowanych wielokątów.



$$AD^2 = \dots\dots\dots$$

$$AD = \dots\dots\dots$$

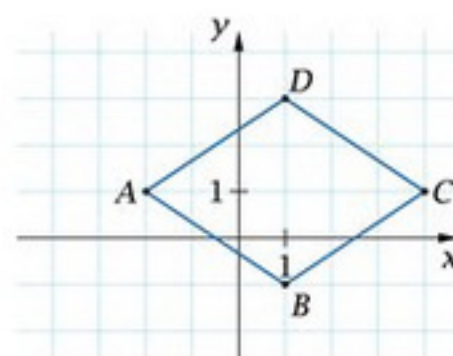
$$\text{Obwód} = \dots\dots\dots$$



$$AB^2 = \dots\dots\dots$$

$$AB = \dots\dots\dots$$

$$\text{Obwód} = \dots\dots\dots$$



$$AB^2 = \dots\dots\dots$$

$$AB = \dots\dots\dots$$

$$\text{Obwód} = \dots\dots\dots$$

4. Końcami odcinka AB są punkty $A = (-3, 13)$ i $B = (1, 17)$. Znajdź współrzędne punktów P , R i S , które dzielą odcinek AB na cztery równe części.

Współrzędne punktu P , który dzieli odcinek AB na połowę:

$$x_P = \frac{\dots\dots\dots + \dots\dots\dots}{2} = \dots\dots\dots$$

$$y_P = \frac{\dots\dots\dots + \dots\dots\dots}{2} = \dots\dots\dots$$

Współrzędne punktu R , który dzieli odcinek AP na połowę:

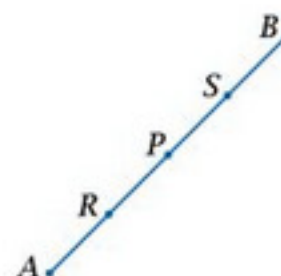
$$x_R = \dots\dots\dots$$

$$y_R = \dots\dots\dots$$

Współrzędne punktu S , który dzieli odcinek $\dots\dots\dots$ na połowę:

$$x_S = \dots\dots\dots$$

$$y_S = \dots\dots\dots$$



5. Dane są trzy punkty: $A = (-7, -4)$, $B = (2, 10)$ i $C = (-2, 8)$. Punkty A i B są końcami średnicy pewnego koła.

a) Oblicz długość średnicy tego koła.

$$AB^2 = (2 - (-7))^2 + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$AB = \dots\dots\dots$$

b) Znajdź współrzędne punktu S , który jest środkiem tego koła.

$$x_S = \frac{\dots\dots\dots + \dots\dots\dots}{2} = \dots\dots\dots$$

$$y_S = \frac{\dots\dots\dots + \dots\dots\dots}{2} = \dots\dots\dots$$

$$S = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$$

c) Oblicz odległość SC . Czy punkt C leży wewnątrz, czy na zewnątrz tego koła?

$$SC^2 = \dots\dots\dots$$

$$SC = \dots\dots\dots$$

3.7 Dowodzenie w geometrii

1. Dwie proste przecinają się w punkcie A . Na jednej z tych prostych zaznaczono punkty B i C , a na drugiej punkt D , wszystkie trzy w takiej samej odległości od punktu A . Udowodnij, że kąt BDC jest prosty, uzupełniając poniższe zapisy.

Zgodnie z treścią zadania trzy odcinki mają taką samą długość. Zatem możesz zapisać równość:

$$AB = \dots = \dots$$

Oznacz te odcinki na rysunku literą a .

Wynika stąd, że trójkąty ABD i $\dots$ są równoramienne, więc:

$$\sphericalangle ABD = \dots$$

Oznacz na rysunku te dwa kąty literą α .

$$\sphericalangle ACD = \dots$$

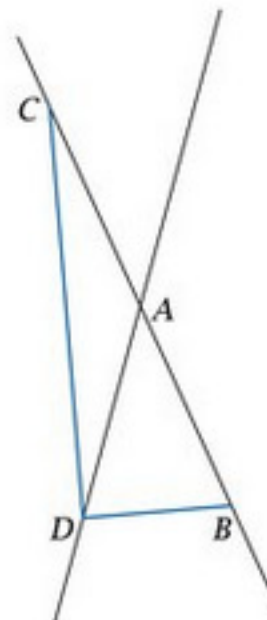
Oznacz na rysunku te dwa kąty literą β .

Dodając kąty trójkąta BCD , otrzymasz następujące wyrażenie, w którym występują α i β :

$$180^\circ = \sphericalangle CBD + \sphericalangle BCD + \sphericalangle BDC = \alpha + \dots + \dots + \dots = 2 \cdot \dots + 2 \cdot \dots$$

Wynika stąd, że:

$$\alpha + \beta = \dots, \text{ a więc } \sphericalangle BDC = \alpha + \beta = \dots$$



2. Na dwóch bokach trójkąta ABC zbudowano kwadraty, tak jak na poniższym rysunku. Udowodnij, że odcinki AE i BF mają równe długości.

Oznacz kąt ACB na rysunku literą α .

Rozważmy dwa trójkąty: AEC i BFC .

$AC = FC$, bo odcinki te są bokami kwadratu $ACFG$.

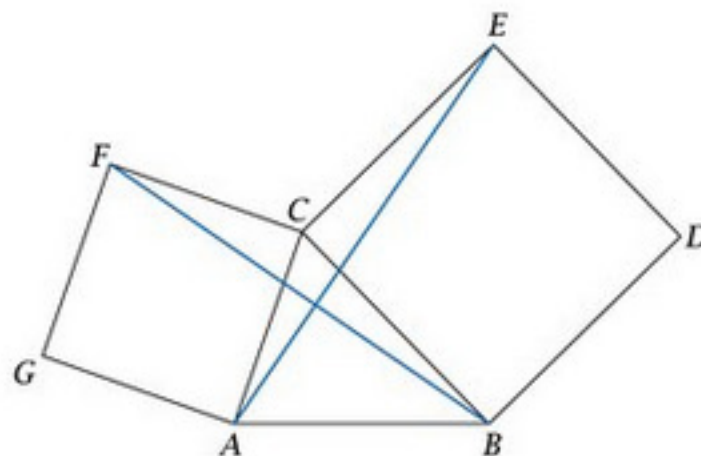
$CE = CB$, bo $\dots$

$$\sphericalangle ACE = \alpha + 90^\circ, \sphericalangle BCF = \dots,$$

zatem kąty $\sphericalangle ACE$ i $\sphericalangle BCF$ są $\dots$.

Wynika stąd, że trójkąty AEC i BFC są przystające na mocy cechy $\dots$, a jeśli są przystające, to odpowiadające im boki mają równe długości.

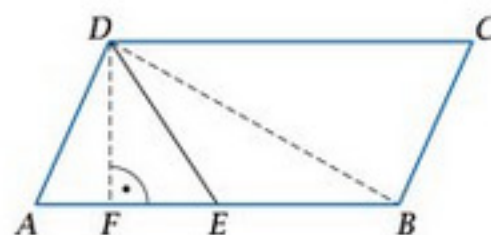
Stąd $AE = \dots$.



3. Środek boku równoległoboku połączono odcinkiem z jednym z wierzchołków, dzieląc równoległobok na trójkąt i trapez. Udowodnij, że pole powstałego trójkąta stanowi $\frac{1}{4}$ pola równoległoboku.



Trójkąt AED ma taką samą wysokość (DF) jak równoległobok $ABCD$, ale długość boku, na który jest ona opuszczona jest razy krótsza od odpowiedniego boku równoległoboku. Zatem:

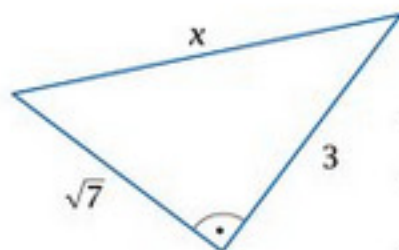


$$P_{ABCD} = AB \cdot \dots\dots\dots$$

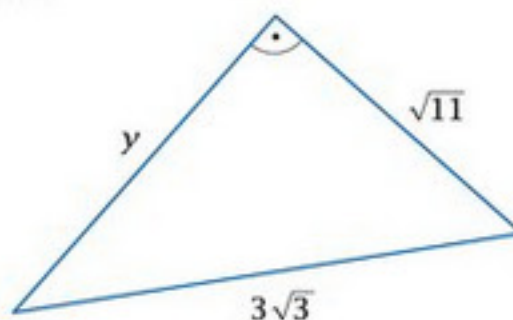
$$P_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \dots\dots \cdot \dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots \cdot P_{ABCD}$$

Sprawdź, ile umiesz

1. Oblicz długości boków oznaczonych literami.



.....
.....
.....

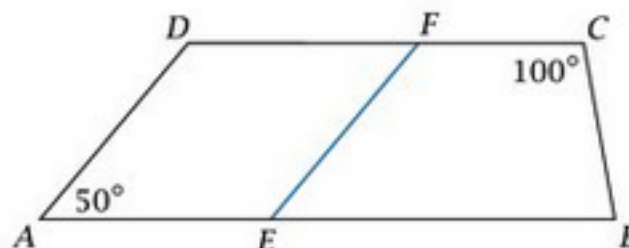


.....
.....
.....

2. Uzupełnij zdania.

- a) Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma miarę 24° . Pozostałe kąty tego trójkąta mają miary oraz
- b) Dwa boki trójkąta mają długości 2 cm i 5 cm. Trzeci bok tego trójkąta musi być dłuższy niż cm, ale krótszy niż cm.

3. Odcinek EF podzielił trapez $ABCD$ na romb $AEFD$ i trapez $EBCF$. Dorysuj odcinek DE , a następnie wpisz na rysunku miary kątów trójkątów AED i DEF oraz trapezu $EBCF$.



4. Oblicz wysokości trójkąta narysowanego obok.

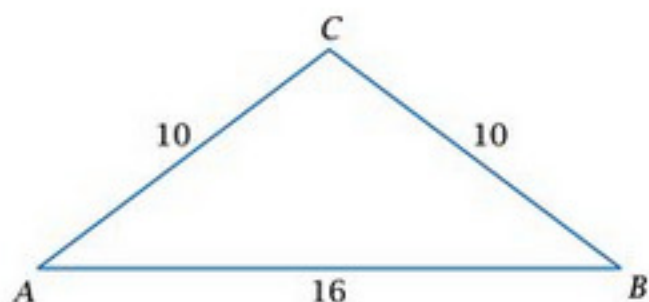
.....

.....

.....

.....

.....



5. Każde z ramion drabiny rozstawnej ma 3,5 m, a odległość między punktami, w których opierają się one o podłoże, jest równa 1,6 m. Jak wysoko sięga najwyższy punkt drabiny?



.....

.....

.....

.....

Odpowiedź:

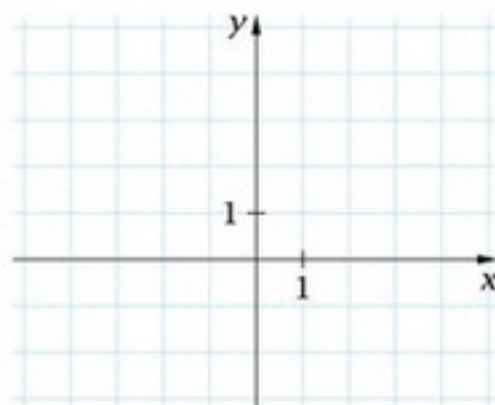
6. Narysuj w układzie współrzędnych trójkąt o wierzchołkach $(-5, 3)$, $(4, -1)$ i $(-1, 5)$ i oblicz długości jego boków.

.....

.....

.....

.....

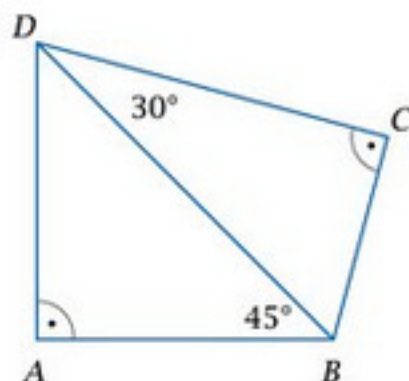


7. Punkty $A = (-7, -2)$, $B = (5, 1)$, $C = (8, 8)$ i $D = (-4, 5)$ są wierzchołkami równoległoboku. Znajdź współrzędne punktu, w którym przecinają się przekątne tego równoległoboku.

.....

.....

.....



8. Przekątna BD czworokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku ma długość 12 cm. Oblicz obwód tego czworokąta.

.....

.....

.....

.....

4.1 Obliczenia procentowe

1. Przeczytaj przykład w ramce, a następnie odpowiedz na poniższe pytania.

Jakim procentem liczby 45 jest liczba 9?

$$\frac{9}{45} \cdot 100\% = \frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%$$

- a) Jakim procentem liczby 60 jest liczba 42?
- b) Jakim procentem 15 kwiatów są 3 róże?
- c) Jaki procent odległości 25 km stanowi 14 km?

2. Po zapoznaniu się z przykładem zamieszczonym obok rozwiąż poniższe zadania.

- a) Oblicz 16% liczby 70.

Oblicz 27% liczby 400.

$$0,27 \cdot 400 = 108$$

- b) Żeglarze zabrali na wyprawę 40 puszek, wśród których było 30% rybnych. Ile puszek rybnych zabrali ze sobą?



Odpowiedź:

- c) Duża tabliczka czekolady ma masę 250 g, a 17% tej masy stanowią orzechy. Jaką masę mają orzechy w tej tabliczce?

Odpowiedź:

3. Po zapoznaniu się z przykładem zamieszczonym obok rozwiąż poniższe zadania.

- a) Znajdź liczbę, której 30% wynosi 24.

Znajdź liczbę, której 78% wynosi 234.

$$0,78x = 234 \quad x = \frac{234}{0,78} = 300$$

- b) Dziewięć orzechów, czyli 36% rozłupanych orzechów, było pustych. Ile orzechów rozłupano?

- c) Najdłuższy utwór na płycie trwa 14 minut, co stanowi 40% czasu odtwarzania całej płyty. Ile trwa odtworzenie tej płyty?

Odpowiedź:

Odpowiedź:

4. a) Według pewnego przepisu do zrobienia 400 g majonezu potrzeba 280 g oleju. Jaki procent masy majonezu stanowi olej?

Odpowiedź:

- b) Zgodnie z informacją na etykiecie żółtka jajek stanowią 7% masy majonezu. Oblicz masę żółtek potrzebnych do wyprodukowania 6 ton majonezu.

Odpowiedź:

5. Pewna wytwórnia słodczy produkuje 80 ton słodczy dziennie.

- a) Wytwórnia produkuje każdego dnia 16 ton krówek. Jaki procent masy wytwarzanych dziennie słodczy stanowią krówki?

Odpowiedź:

- b) Żelki stanowią 30% masy produkowanych dziennie słodczy. Ile ton żelków wytwarza się co dzień w tej wytwórni?

Odpowiedź:

- c) W wytwórni tej każdego dnia wytwarza się też 3 tony wafelków, co stanowi 15% dziennej produkcji wszystkich ciastek. Ile ton ciastek produkuje dziennie ta wytwórnia?

Odpowiedź:



4.2 Zmiana o dany procent. Lokaty bankowe

1. Przeczytaj przykład w ramce, a następnie odpowiedz na poniższe pytania.

Jaka liczba jest o 46% większa od 700?

$$700 + 0,46 \cdot 700 = 1,46 \cdot 700 = 1022$$

- a) Jaka liczba jest o 15% większa od 80?
- b) Jaka masa jest o 35% większa od 60 kg?
- c) Jaka kwota jest o 20% wyższa od 2,50 zł?

2. Rozwiąż poniższe zadania.

a) Jaka liczba jest o 80% mniejsza od 30?

.....

b) Cenę gry obniżono o 15%. Przed obniżką gra kosztowała 120 zł. Jaka jest nowa cena tej gry?

.....

.....

Odpowiedź:

Jaka liczba jest o 18% mniejsza od 75?

$$75 - 0,18 \cdot 75 = 0,82 \cdot 75 = 61,5$$

c) Normalny bilet autobusowy kosztuje 4 zł. Dzieci mają ulgę 20%. Ile kosztuje bilet dla dziecka?

.....

.....

Odpowiedź:

3. Zapisz za pomocą wyrażeń algebraicznych.

• liczba, która jest równa 20% liczby q

$$0,2q$$

• liczba o 20% większa od liczby q

$$q + 0,2q = 1,2q$$

• liczba o 20% mniejsza od liczby q

$$q - 0,2q = 0,8q$$

a) liczba, która jest równa 60% liczby x

liczba o 60% większa od liczby x

liczba o 60% mniejsza od liczby x

b) liczba, która jest równa 15% liczby m

liczba o 15% większa od liczby m

liczba o 15% mniejsza od liczby m

4. Po zapoznaniu się z przykładem rozwiąż poniższe zadania.

O ile procent liczba 128 jest większa od liczby 80?

$$\frac{128 - 80}{80} \cdot 100\% = \frac{48}{80} \cdot 100\% = 60\%$$

a) O ile procent liczba 50 jest większa od liczby 40?

.....

b) Kwaciarka ma 40 tulipanów i 25 żonkili. O ile procent liczba tulipanów jest większa od liczby żonkili?

.....

Odpowiedź:

5. Po zapoznaniu się z przykładem rozwiąż poniższe zadania.

O ile procent liczba 80 jest mniejsza od liczby 128?

$$\frac{128 - 80}{128} \cdot 100\% = \frac{48}{128} \cdot 100\% = 37,5\%$$

a) O ile procent liczba 40 jest mniejsza od liczby 50?

b) Labrador o masie 32 kg bawi się z jamnikiem o masie 8 kg. O ile procent masa jamnika jest mniejsza od masy labradora?



Odpowiedź:

6. Uzupełnij tabelę prezentującą zbiory owoców na pewnej plantacji.



Owoc	ubiegły rok	ten rok	
	zbiory w tonach	o ile procent więcej lub mniej	zbiory w tonach
maliny	18	o 15% więcej	
agrest	12	o 5% mniej	
truskawki	60		78
porzeczki	15		9

7. Uzupełnij tabelę.

Lokata	Oprocentowanie w procentach ($p\%$)	Ulokowana kwota (L)	Odsetki po roku ($d = \frac{p}{100} \cdot L$)	Stan konta po roku ($L + d$)
I	4%	5000 zł	$\frac{4}{100} \cdot 5000 = \dots\dots\dots$	$5000 + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
II	2%	5100 zł		
III	1,2%	5150 zł		
IV	3%	6000 zł		
V	1,5%	4000 zł		

4.3 VAT i inne podatki

1. Uzupełnij poniższą tabelę według wzoru.

Towar	Cena netto	Stawka VAT	Cena brutto
drożdżówka	1,60 zł	8%	$1,60 \text{ zł} + 0,08 \cdot 1,60 \text{ zł} \approx 1,73 \text{ zł}$
chleb	4 zł	5%	
pączek	0,90 zł	8%	
paczka herbatników	3,80 zł	23%	

2. Aby ustalić stawkę VAT, należy obliczyć, jakim procentem ceny netto jest kwota VAT. Uzupełnij poniższą tabelę według wzoru.

Towar	Cena brutto	Cena netto	Stawka VAT
1 kg mandarynek	4,32 zł	4 zł	$\frac{4,32 - 4}{4} \cdot 100\% = 8\%$
słoik dżemu	5,94 zł	5,50 zł	
butelka oranżady	2,46 zł	2 zł	
kartonik soku	3,99 zł	3,80 zł	

Stawka VAT na pewne czasopismo wynosi 5%, a jego cena brutto wynosi 25,20 zł. Na tej podstawie można obliczyć cenę netto tego czasopisma. Jeśli oznaczymy ją N , to:

$$N + 0,05N = 25,20$$

$$1,05N = 25,20$$

$$N = \frac{25,20}{1,05}$$

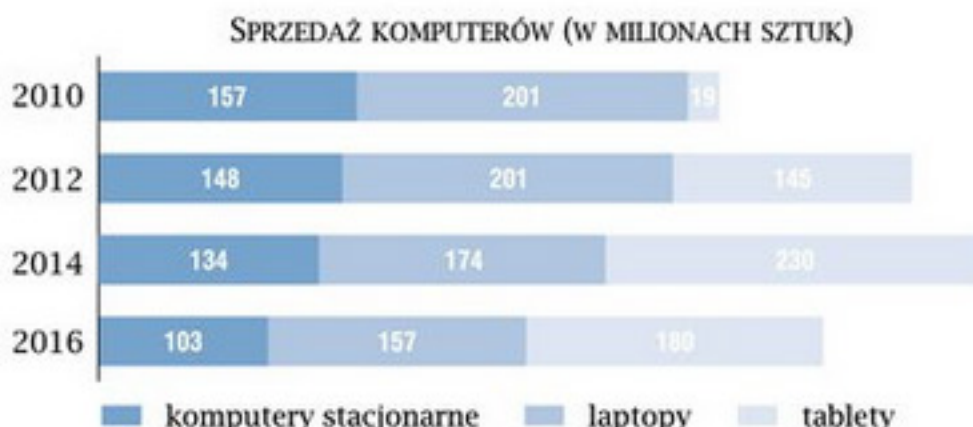
$$N = 24 \text{ [zł]}$$

3. Po zapoznaniu się z przykładem z ramki uzupełnij poniższą tabelę.

Towar	Cena brutto	Stawka VAT	Cena netto
magazyn „Instalator”	14,70 zł	5%	
gazeta „Codzienna”	2,70 zł	8%	
gazeta „Reklamy”	3,69 zł	23%	

4.4 Czytanie diagramów

1. Na diagramie przedstawiono, ile komputerów sprzedano w latach: 2010, 2012, 2014 i 2016. Komputery podzielono na trzy grupy: komputery stacjonarne, laptopy i tablety. Uzupełnij poniższe zdania.



W 2010 roku sprzedano 377 milionów komputerów. Dwa lata później sprzedano ich miliony, czyli o milionów więcej niż w roku 2010.

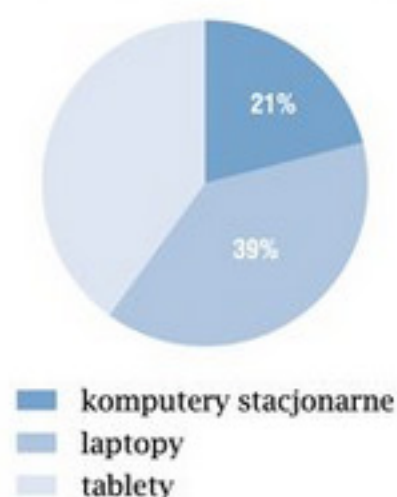
W latach 2010–2016 sprzedaż komputerów stacjonarnych się zmniejszała. Pomiedzy rokiem 2010 i 2012 ich sprzedaż zmalała o 9 milionów. Największy spadek nastąpił w latach i wyniósł milionów sztuk.

W 2016 roku laptopy stanowiły około% sprzedaży komputerów. Laptopy miały największy procentowy udział w sprzedaży w roku — wyniósł on około%.

W latach 2010–2012 sprzedaż tabletów wzrosła o około 663% i wzrastała do 2014 roku. Potem zaczęła się zmniejszać i w latach 2014–2016 zmalała o około%.

2. Przewiduje się, że w 2021 roku zostanie sprzedanych 419 milionów komputerów. Z diagramu można odczytać, jaki procent tej sprzedaży będą stanowiły komputery stacjonarne, laptopy i tablety. Uzupełnij poniższe zdania.

PROGNOZOWANA SPRZEDAŻ KOMPUTERÓW W 2021 ROKU



W 2021 roku tablety będą stanowiły% wszystkich sprzedanych komputerów. Oznacza to, że średnio na 5 sprzedanych komputerów będą tabletami.

Przewiduje się, że w 2021 roku zostanie sprzedanych około 88 milionów komputerów stacjonarnych i milionów tabletów.

Na podstawie danych z zadania 1. można stwierdzić, że w 2021 roku w porównaniu z rokiem 2016 tabletów zostanie sprzedanych o około milionów mniej, a udział procentowy tabletów w sprzedaży komputerów *wzrośnie/zmaleje/nie zmieni się*.

4.5 Podział proporcjonalny

1. Rozwiąż poniższe zadania.

Dwaj chłopcy dostali 24 cukierki. Chcą się nimi podzielić w stosunku 3 : 5. Ile cukierków dostanie każdy z chłopców?

Można powiedzieć, że jeden z chłopców ma dostać 3 „porcje” cukierków, a drugi 5 „porcji”. Oznaczmy „porcję” literą x .

$3x$ — liczba cukierków otrzymana przez jednego z chłopców

$5x$ — liczba cukierków otrzymana przez drugiego z chłopców

$$3x + 5x = 24$$

$$8x = 24$$

$$x = 3$$

$$3x = 3 \cdot 3 = 9$$

$$5x = 5 \cdot 3 = 15$$

ODPOWIEDŹ: Jeden z chłopców powinien dostać 9 cukierków, a drugi 15 cukierków.



a) Hania i Zosia podzieliły między siebie kwotę 450 zł w stosunku 7 : 8. Ile pieniędzy dostała każda z dziewcząt?

$7z$ — kwota Hani

$8z$ —

$$7z + 8z = 450$$

Odpowiedź:

b) W pewnej mieszance stosunek masy cukru do masy mąki wynosi 2 : 5. Ile cukru i ile mąki jest w 140 dag tej mieszanki?

..... — masa cukru

..... — masa mąki

Odpowiedź:

2. Rozwiąż poniższe zadania.

Aby otrzymać zaprawę, murarz miesza najpierw piasek, cement i wapno tak, że stosunek ich mas wynosi 30:5:1. Murarz chce otrzymać 18 kg takiej mieszanki. Ile kilogramów każdego ze składników powinien zmieszać?

Można powiedzieć, że by przygotować mieszankę, należy wziąć 30 „porcji” piasku, 5 „porcji” cementu i 1 „porcję” wapna. Oznaczmy „porcję” literą x .

$30x$ — liczba kilogramów piasku

$5x$ — liczba kilogramów cementu

x — liczba kilogramów wapna

$$30x + 5x + x = 18$$

$$36x = 18$$

$$x = 0,5$$

$$30x = 30 \cdot 0,5 = 15$$

$$5x = 5 \cdot 0,5 = 2,5$$

ODPOWIEDŹ: Murarz powinien zmieszać 15 kg piasku, 2,5 kg cementu i 0,5 kg wapna.



a) Producent chce, by w każdej torebce z żelkami było 90 żelek w trzech kolorach, przy czym liczby żelek czerwonych, zielonych i niebieskich powinny być w stosunku 2:3:4. Ile żelek w każdym z kolorów powinno się znaleźć w jednej torebce?

$2x$ — liczba czerwonych żelek

$3x$ —

$4x$ —

$$2x + 3x + \dots = \dots$$

Odpowiedź:

b) Według Natalii idealny koktajl owocowy składa się ze zmiksowanych owoców, maślanki i jogurtu zmieszanych tak, by ich objętości były w stosunku 3:2:1. Ile należy wziąć każdego ze składników, żeby otrzymać 3 litry takiego koktajlu?

..... — objętość zmiksowanych owoców [l]

..... — objętość maślanki [l]

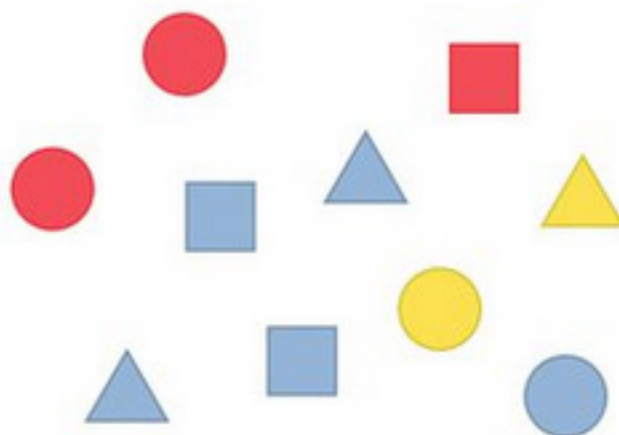
..... — objętość jogurtu [l]

Odpowiedź:

4.6 Obliczanie prawdopodobieństw

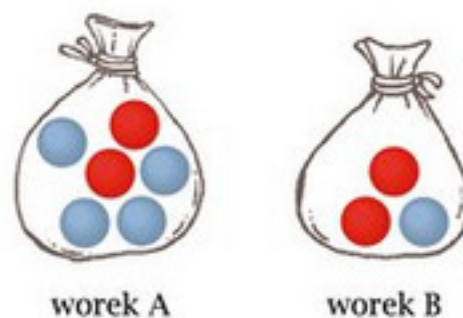
1. Spośród figur przedstawionych poniżej wylosowano jedną. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana figura:

- a) jest niebieska $P = \frac{5}{10} =$
- b) jest czerwona
- c) jest kwadratem
- d) jest kołem
- e) jest niebieskim trójkątem
- f) jest czerwona lub żółta
- g) nie jest trójkątem
- h) nie jest czerwona i nie jest kołem



2. W dwóch workach znajdują się kule czerwone i niebieskie, takie jak na poniższym rysunku. Oznaczmy niektóre z prawdopodobieństw w następujący sposób:

- P_1 — prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czerwonej z worka A.
- P_2 — prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli niebieskiej z worka A.
- P_3 — prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czerwonej z worka B.
- P_4 — prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli niebieskiej z worka B.



Oblicz te prawdopodobieństwa, a następnie wpisz w kratkach odpowiednie znaki: $>$, $<$ lub $=$.

$$P_1 = \dots\dots\dots$$

$$P_2 = \dots\dots\dots$$

$$P_3 = \dots\dots\dots$$

$$P_4 = \dots\dots\dots$$

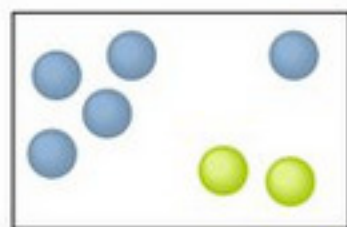
$$P_1 \square P_2$$

$$P_1 \square P_3$$

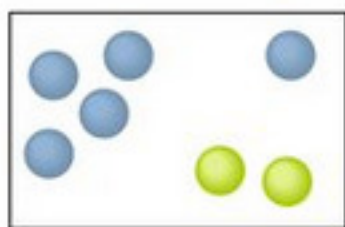
$$P_1 \square P_4$$

$$P_2 \square P_3$$

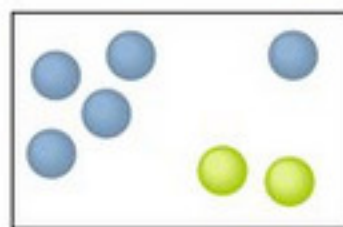
3. W każdym z pudełek dorysuj odpowiednie kule tak, aby prawdopodobieństwo wylosowania z pudełka zielonej kuli było równe liczbie zapisanej pod rysunkiem.



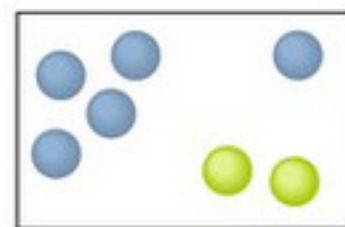
$$\frac{2}{9}$$



$$\frac{1}{2}$$



$$\frac{3}{10}$$



$$\frac{1}{3}$$

4. Z poniższej siatki można skleić sześcienną kostkę o nietypowym układzie oczek.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucając tą kostką, otrzymamy:

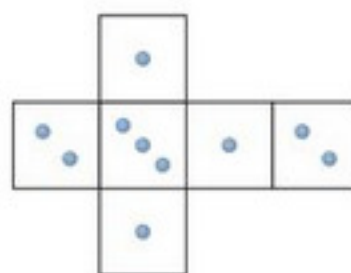
jedno oczko: $P = \frac{1}{6} =$

dwa oczka:

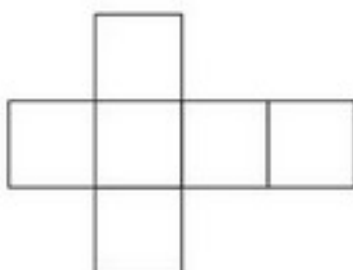
trzy oczka:

sześć oczek:

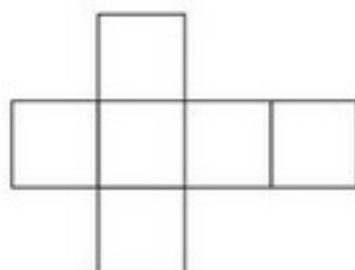
mniej niż cztery oczka:



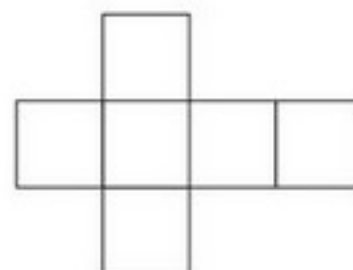
b) Rozmieść oczka na ściankach siatki kostki tak, aby spełnione były warunki zapisane pod siatkami.



Prawdopodobieństwo wyrzucenia dwóch oczek wynosi $\frac{1}{3}$.



Prawdopodobieństwo wyrzucenia jednego oczka wynosi $\frac{1}{2}$.



Prawdopodobieństwo wyrzucenia nieparzystej liczby oczek jest równe $\frac{2}{3}$.

5. Poniżej zapisano wszystkie dodatnie liczby całkowite mniejsze od 50.

a) Uzupełnij zdania.

Wszystkich dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 50 jest

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Wszystkich dodatnich liczb parzystych mniejszych od 50 jest

21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

Wszystkich dodatnich liczb nieparzystych mniejszych od 50 jest

41 42 43 44 45 46 47 48 49

Wszystkich dodatnich liczb podzielnych przez 3 mniejszych od 50 jest

Wszystkich dodatnich liczb podzielnych przez 5 mniejszych od 50 jest

b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba losowo wybrana spośród dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 50 jest:

parzysta

nieparzysta

podzielna przez 3

podzielna przez 5

.....

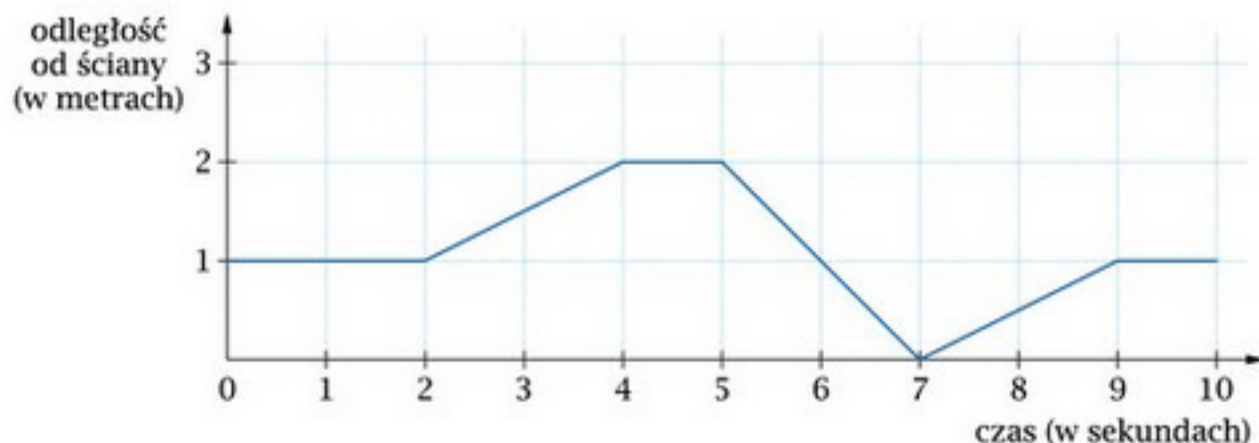
.....

.....

.....

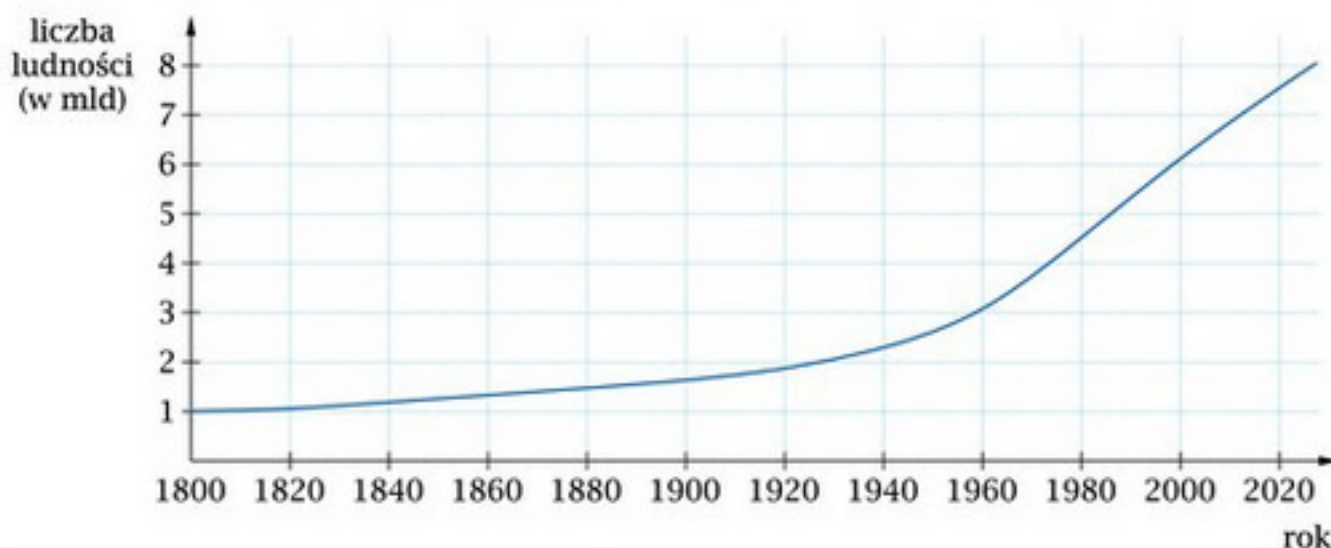
4.7 Odczytywanie wykresów

1. W pewnej odległości od ściany ustawiono zdalnie sterowaną zabawkę. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się odległość tej zabawki od ściany w ciągu 10 sekund.



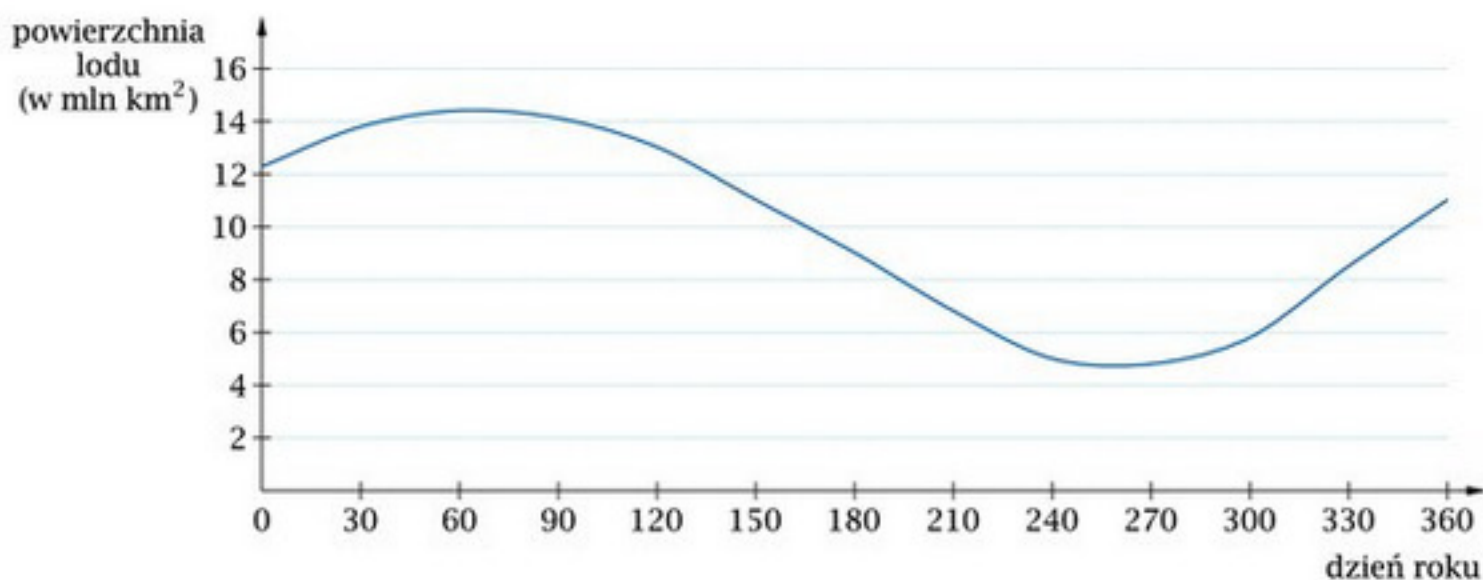
Uzupełnij zdania.

- Na początku zabawkę ustawiono m od ściany.
 - Po 8 s zabawka znalazła się w odległości m od ściany.
 - Zabawka znalazła się 1,5 m od ściany dwukrotnie: po s oraz po s.
 - Zabawka dotknęła ściany po s.
 - Po upływie s od puszczenia zabawka zaczęła się przybliżać do ściany.
 - Dystans większy niż 1 m od ściany zabawka utrzymywała przez s.
2. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się liczba ludności świata od 1800 r. i jak według części naukowców będzie się zmieniała do 2020 r. Odpowiedz na pytania.



- Ilu ludzi żyło na Ziemi w 1800 roku?
- W którym roku liczba ludności świata przekroczyła 6 miliardów?
- Ile lat trwało zwiększenie się liczby ludności z 1800 r. o 1 mld?
- W jakim okresie liczba ludności wzrastała najszybciej?

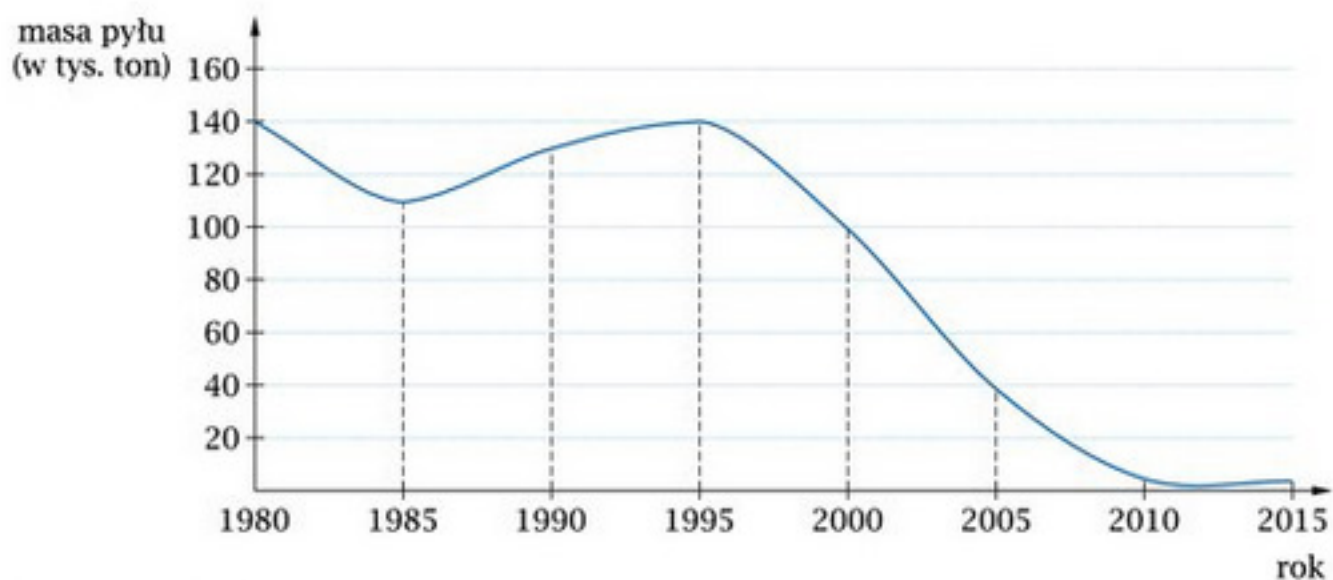
3. Wykres pokazuje, jak zmienia się powierzchnia lodu na morzach Arktyki w ciągu roku.



Uzupełnij zdania.

- W połowie roku lód pokrywający morza Arktyki zajmuje około mln km².
- Powierzchnia lodu jest większa od 14 mln km² przez około dni w roku.
- Powierzchnia lodu zmniejsza się od dnia do dnia roku.
- Powierzchnia lodu maleje dziennie w okresie od 120. do 210. dnia roku średnio o km².

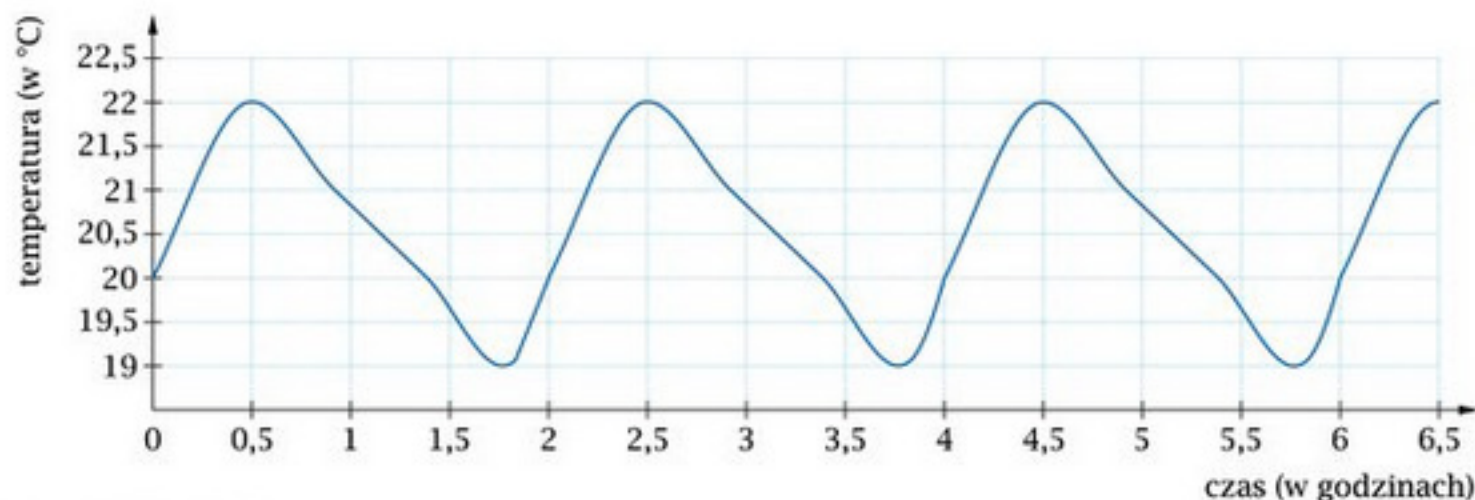
4. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się ilość pyłów emitowanych rocznie przez pewną elektrownię w latach 1980-2015.



Uzupełnij zdania.

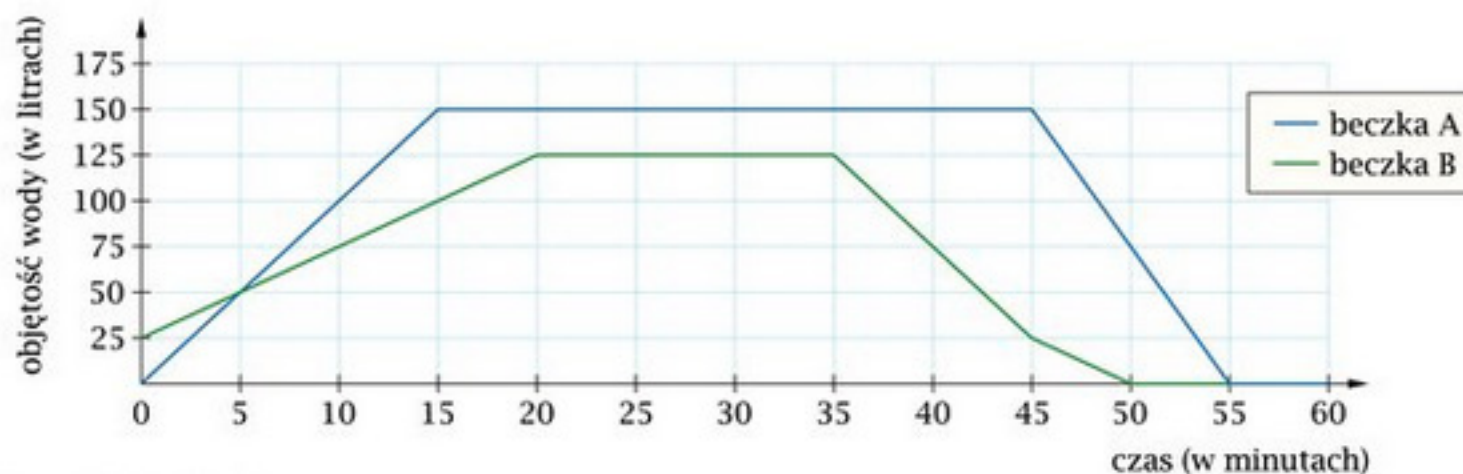
- W 1985 r. elektrownia emitowała około tysięcy ton pyłów.
- Emisja pyłów spadła do 40 tysięcy ton w roku.
- Emisja pyłów rosła od roku do roku.
- W okresie od 1995 r. do 2000 r. emisja pyłów spadła o tysięcy ton.
- W latach 2000-2005 emisja pyłów zmniejszała się rocznie średnio o tysięcy ton.

5. W celu uniknięcia dużych wahań temperatury w pomieszczeniu zamontowano w grzejniku termostat. Urządzenie to włącza grzejnik, gdy temperatura jest zbyt niska, i wyłącza go, gdy temperatura staje się zbyt wysoka. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się temperatura w pomieszczeniu ogrzewanym tym grzejnikiem.



Uzupełnij zdania.

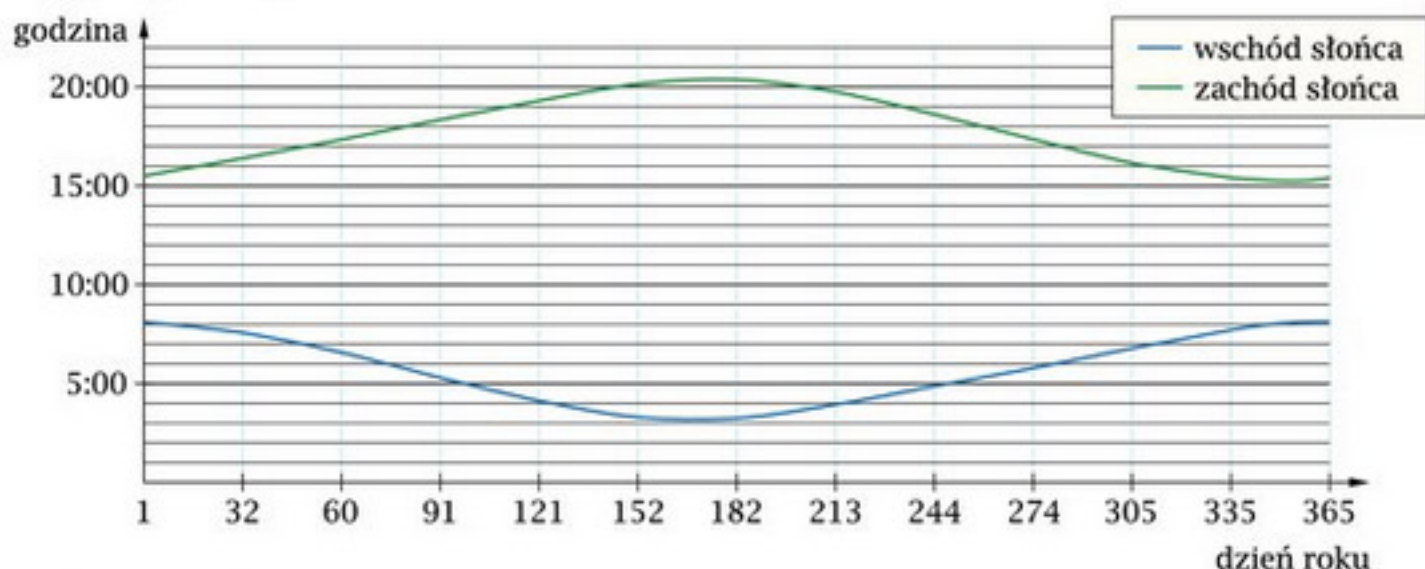
- Termostat włącza grzejnik, gdy temperatura w pomieszczeniu wynosi °C, a wyłącza go, gdy temperatura osiąga °C.
 - W ciągu pierwszych 30 minut od rozpoczęcia pomiarów temperatura w pomieszczeniu wzrosła o °C.
 - Grzejnik włączał się co godziny.
 - Po wyłączeniu grzejnika temperatura w pomieszczeniu obniżała się przez godziny.
6. Dwie beczki zaczęto napełniać wodą w tym samym momencie. Po nalaniu wody do pełna pozostawiono beczki na pewien czas, a potem spuszczano z nich wodę. Wykres pokazuje, jak zmieniała się objętość wody w obu beczkach.



Uzupełnij zdania.

- Na początku w beczce było o litrów wody mniej niż w beczce
- W ciągu pierwszych 10 minut do beczki A nalano litrów wody, a do beczki B nalano litrów wody.
- Wodę do beczki nalewano o minut krócej niż do beczki
- Gdy większą beczkę zaczęto opróżniać, w mniejszej beczce było litrów wody.

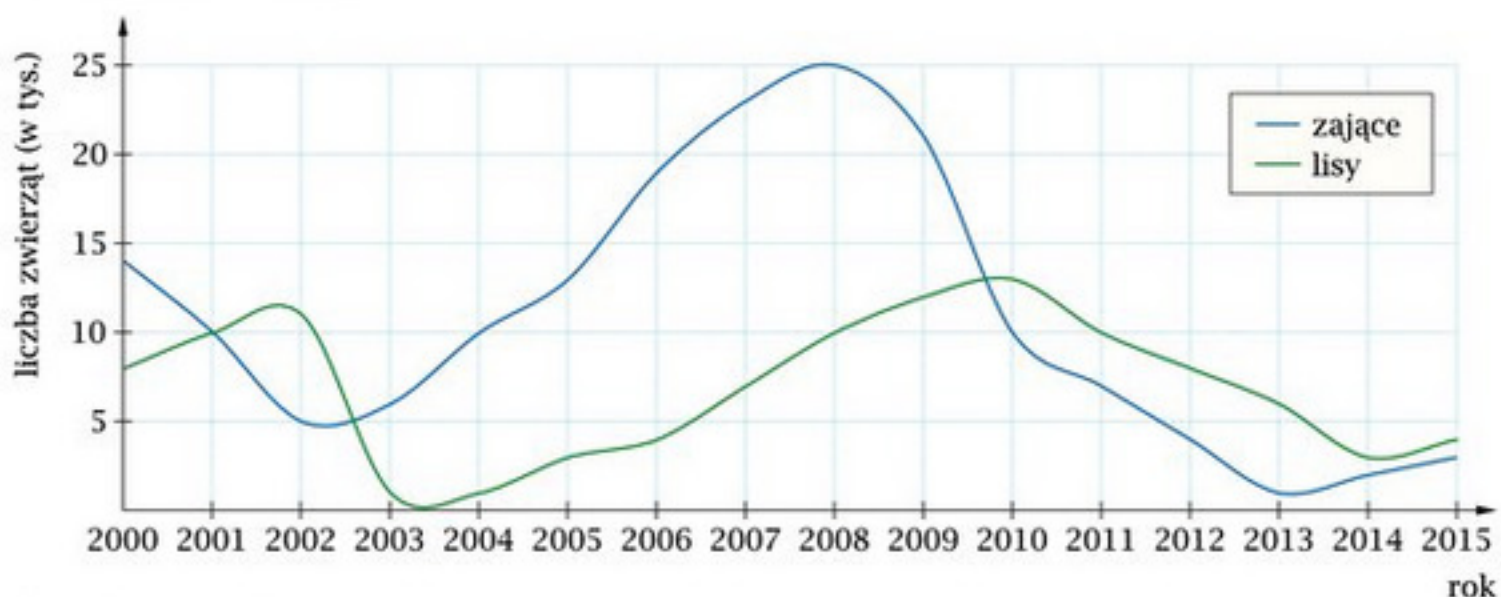
7. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniały się godzina wschodu i godzina zachodu słońca w Polsce pewnego roku.



Odpowiedz na pytania.

- O której godzinie słońce weszło pierwszego dnia roku?
- Ile godzin w przybliżeniu trwał 121. dzień roku?
- Ile godzin w przybliżeniu trwał najdłuższy dzień roku?
- Ile godzin w przybliżeniu trwał najkrótszy dzień roku?

8. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się liczba zajęcy i lisów na pewnym obszarze w latach 2000-2015.



Uzupełnij zdania.

- W 2006 r. na tym obszarze żyło ok. tys. zajęcy i tys. lisów.
- Populacja zajęcy była najmniejsza w roku i wynosiła ok. tys.
- Ile razy w tym okresie liczba lisów była równa liczbie zajęcy?
- Populacja zajęcy osiągnęła 10 tysięcy trzykrotnie: w roku (wtedy populacja lisów liczyła ok. tys.), w roku (wtedy populacja lisów liczyła ok. tys.) oraz w roku (wtedy populacja lisów liczyła ok. tys.).

Sprawdź, ile umiesz

1. W tym roku pewna wytwórnia słodczy oferuje 48 rodzajów ciastek i wyprodukuje ich łącznie 12 000 t. W przyszłym roku chce tę ofertę zmniejszyć do 30 rodzajów, ale zwiększyć produkcję o 15%.

a) Ile ton ciastek wytwórnia planuje wyprodukować w przyszłym roku?

.....

b) O ile procent zmniejszy się oferta wytwórni w przyszłym roku?

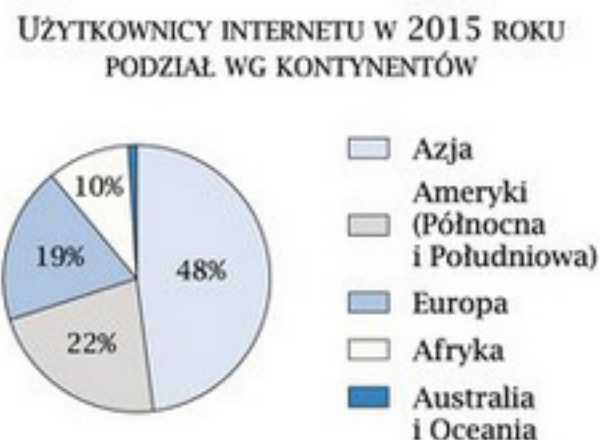
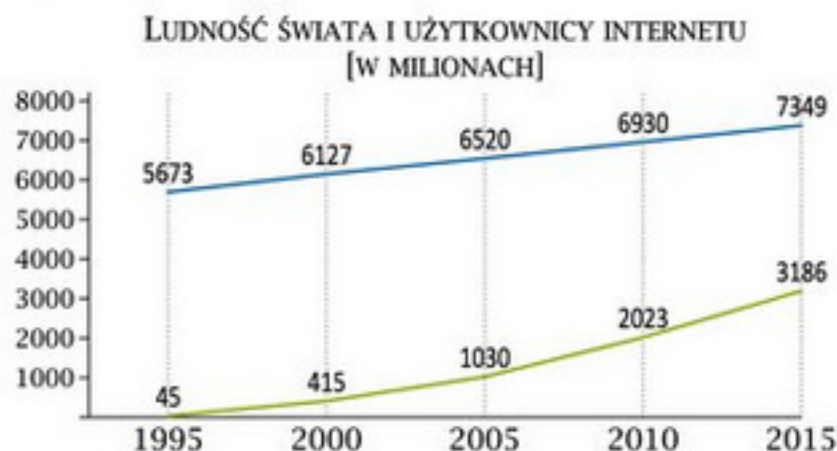
.....

2. Cena brutto pewnego towaru wynosi 2592 zł. Stawka VAT jest równa 8%. Ile wynosi cena netto tego towaru? Ile wyniosłaby cena brutto tego towaru, gdyby obowiązywał dla niego 23-procentowy VAT?

.....

.....

3. Na podstawie informacji przedstawionych na poniższych dwóch diagramach odpowiedz na pytania.



a) Jaki procent ludzi żyjących na świecie korzystał z internetu w 1995 roku, a jaki w 2015 roku?

.....

b) O ile procent wzrosła liczba użytkowników internetu w latach 2010-2015, a o ile procent wzrosła ludność świata w tym czasie?

.....

c) Ilu użytkowników internetu żyło w 2015 roku w Europie?

.....

4. Darek i Jarek mają pomalować płot zbudowany z 420 sztachet. Chłopcy postanowili podzielić się pracą w stosunku 3 : 2. Ile sztachet pomaluje każdy z chłopców?

Odpowiedź:

5. W pudełku znajdują się kule w trzech kolorach ponumerowane tak, jak na rysunku obok. Wyciągamy z pudełka jedną kulę.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyciągnięta kula:

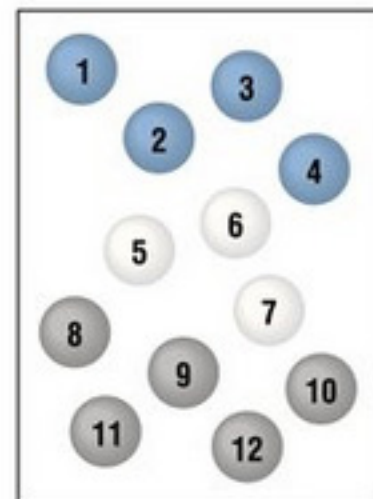
będzie szara

nie będzie biała

będzie miała numer nieparzysty

będzie miała numer podzielny przez 3

będzie niebieska i jej numer będzie liczbą pierwszą



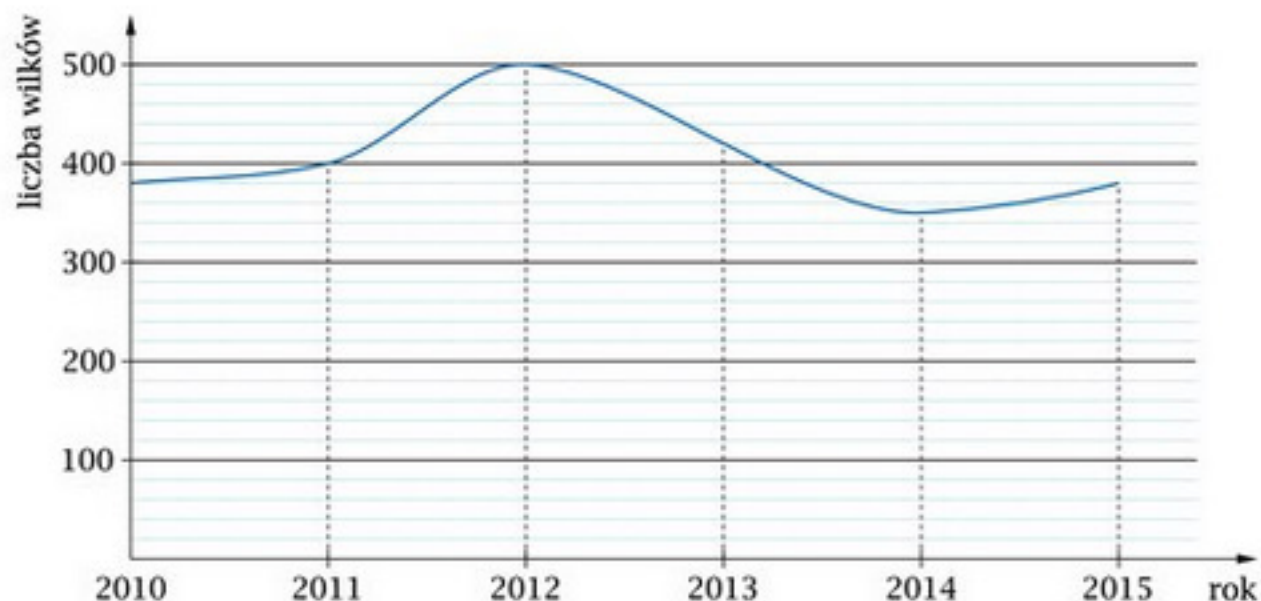
b) Z pudełka wyciągnięto kulę białą o numerze 6. Wyciągamy drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że druga kula:

będzie biała

będzie miała nieparzysty numer

będzie biała i jej numer będzie nieparzysty

6. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się liczba wilków na pewnym obszarze w latach 2010-2015.



a) W 2011 roku na tym obszarze żyło wilków.

b) Najwięcej wilków na tym obszarze odnotowano w roku

c) Liczba wilków przekraczała 400 w latach

5.1 Pole powierzchni i objętość graniastosłupa

1. Odpowiedz na pytania.

Ile boków ma podstawa graniastosłupa, który ma 14 wierzchołków?

Ile krawędzi ma graniastosłup, który ma 10 ścian bocznych?

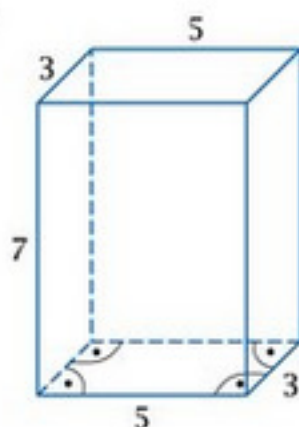
Jakimi wielokątami są ściany boczne graniastosłupa prostego?

Jak nazywamy graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny?

Jaką objętość ma graniastosłup o polu podstawy 20 cm^2 i wysokości 5 cm ?

2. Oblicz sumy długości wszystkich krawędzi, pola powierzchni i objętości graniastosłupów prostych przedstawionych na rysunkach.

a)

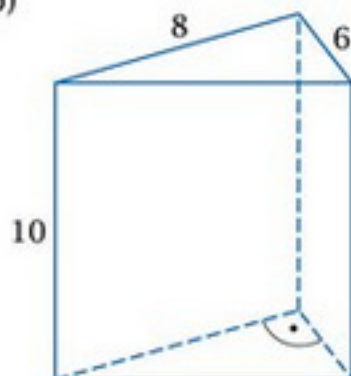


Suma długości krawędzi = $4 \cdot 5 + 4 \cdot$

Pole powierzchni = $2 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot$

Objętość =

b)



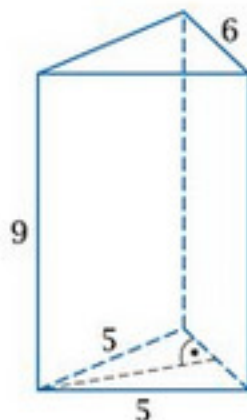
Suma długości krawędzi =

Pole podstawy =

Pole powierzchni =

Objętość =

c)



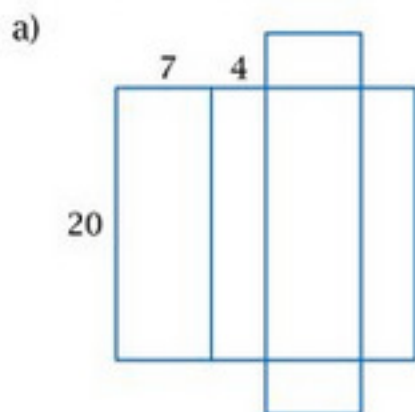
Suma długości krawędzi =

Pole podstawy =

Pole powierzchni =

Objętość =

3. Oblicz sumy długości wszystkich krawędzi, pola powierzchni (P_c) i objętości (V) graniastosłupów, których siatki narysowano poniżej.

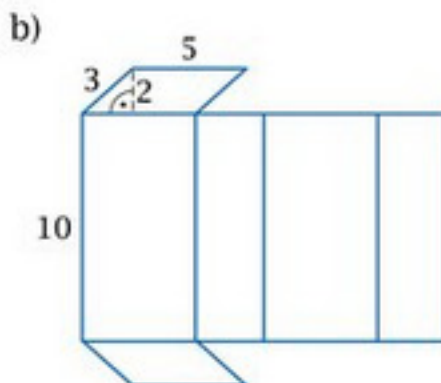


Suma długości krawędzi:

.....

$P_c =$

$V =$

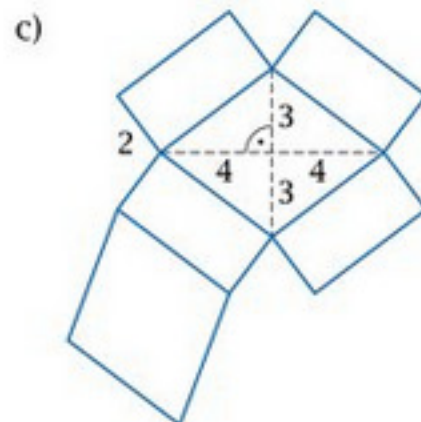


Suma długości krawędzi:

.....

$P_c =$

$V =$



Suma długości krawędzi:

.....

$P_c =$

$V =$

4. Poniżej podano wymiary kilku prostopadłościanów. Podkreśl wymiary tych prostopadłościanów, których objętość jest większa niż 0,5 litra. Zakreśl kolorem czerwonym wymiary prostopadłościanu o największej objętości, a kolorem niebieskim — o najmniejszej objętości.

① $9\text{ cm} \times 9\text{ cm} \times 12\text{ cm}$

③ $50\text{ mm} \times 50\text{ mm} \times 50\text{ mm}$

⑤ $30\text{ mm} \times 2\text{ cm} \times 0,5\text{ m}$

② $2\text{ mm} \times 5\text{ cm} \times 1\text{ m}$

④ $0,1\text{ m} \times 0,2\text{ m} \times 0,03\text{ m}$

⑥ $5\text{ mm} \times 40\text{ cm} \times 200\text{ mm}$

.....

.....

.....

5. Bryła narysowana obok powstała w wyniku sklejenia dwóch graniastosłupów prawidłowych. Uzupełnij wymiary krawędzi na rysunku, a następnie oblicz pole powierzchni i objętość tej bryły.

Pole podstawy bryły =

Pole powierzchni czerwonej ściany =

Pole powierzchni żółtej ściany =

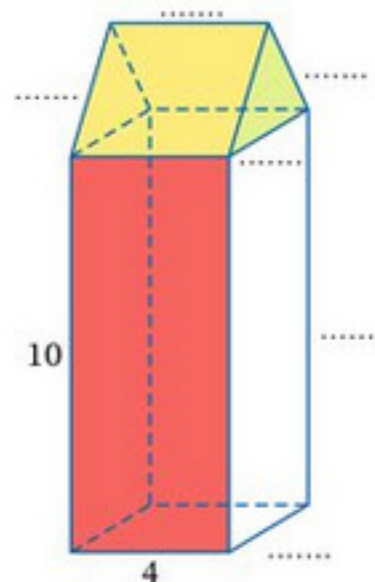
Pole powierzchni zielonej ściany =

Pole powierzchni całkowitej =

Objętość większego graniastosłupa =

Objętość mniejszego graniastosłupa =

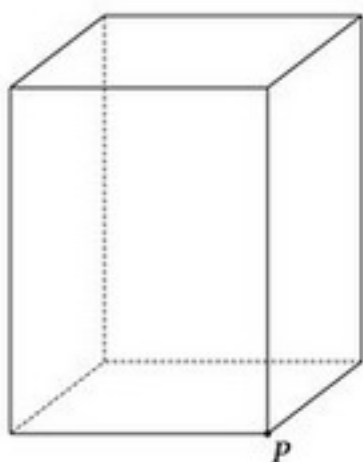
Objętość bryły =



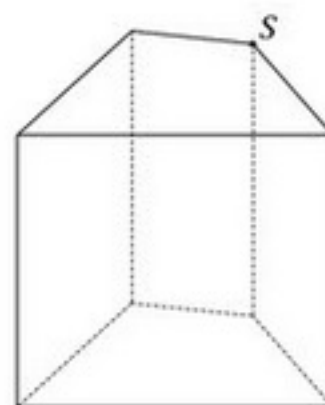
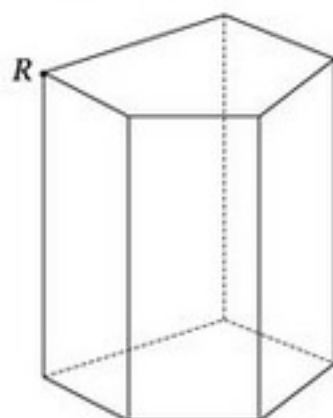
5.2 Odcinki w graniastosłupach

1. Narysuj opisane odcinki.

Dwie przekątne graniastosłupa wychodzące z punktu R .

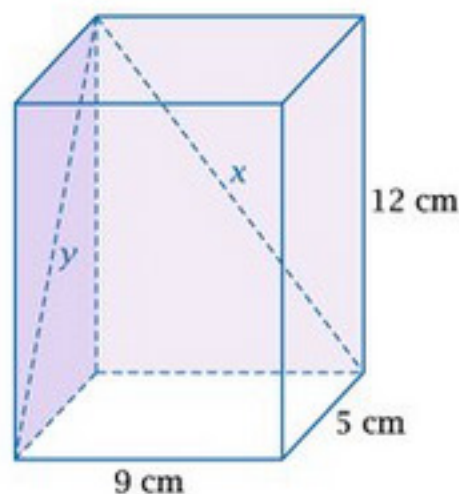


Przekątne trzech różnych ścian wychodzące z punktu P .



Krawędź boczna, przekątna graniastosłupa i przekątna podstawy wychodzące z punktu S .

2. Na rysunkach przedstawiono graniastosłupy proste. Narysuj jedną z przekątnych każdej z zacieniowanych ścian bocznych, a następnie oblicz długości tych przekątnych.

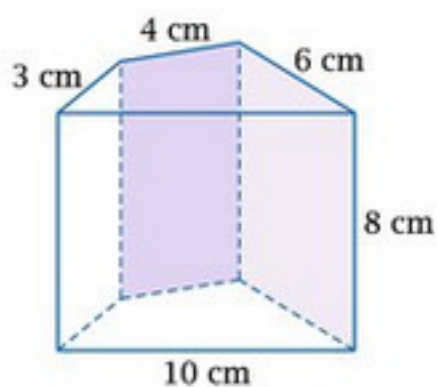


$$x^2 = 9^2 + 12^2 =$$

$$x =$$

$$y^2 = 5^2 + 12^2 =$$

$$y =$$

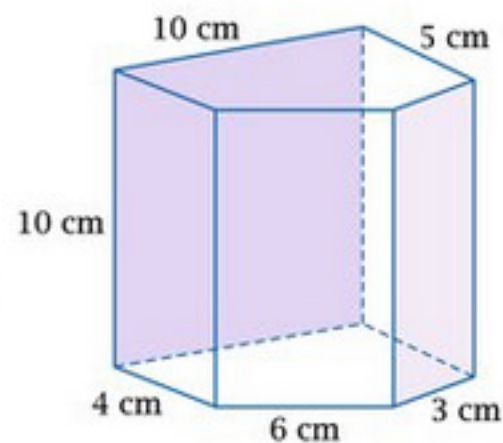


$$x^2 = 10^2 + 8^2 =$$

$$x =$$

$$y^2 = 3^2 + 8^2 =$$

$$y =$$



$$x^2 = 6^2 + 10^2 =$$

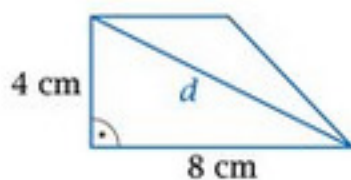
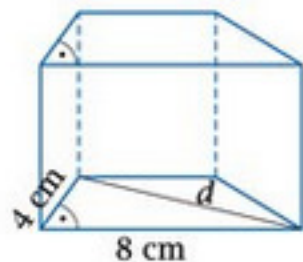
$$x =$$

$$y^2 = 4^2 + 10^2 =$$

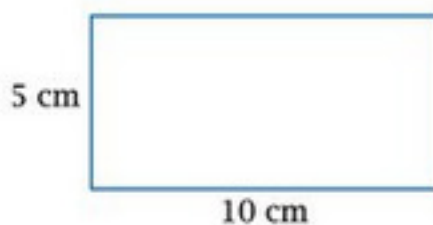
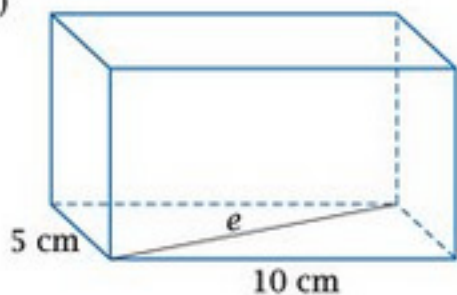
$$y =$$

3. Na rysunku przedstawiono graniastosłup z zaznaczoną przekątną podstawy oraz podstawę graniastosłupa. Dorysuj odpowiednią przekątną podstawy (według wzoru) i oblicz jej długość.

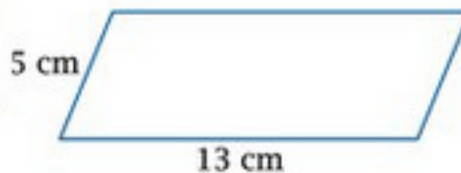
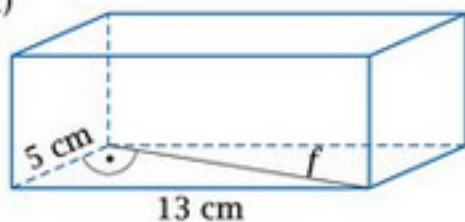
a)



b)

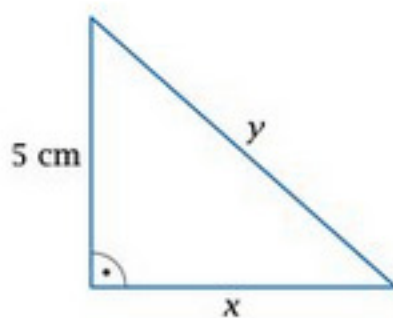
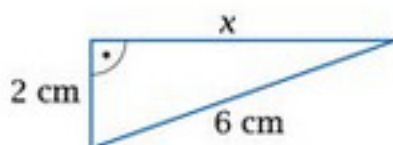
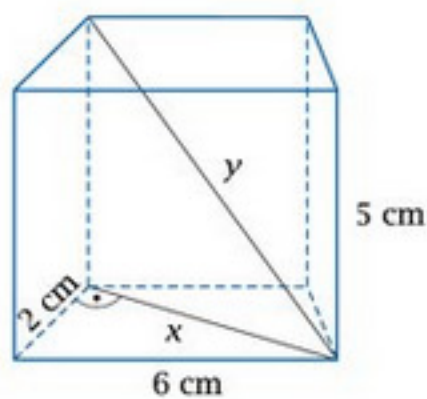


c)

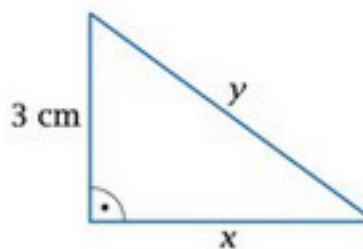
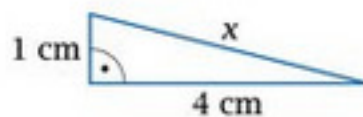
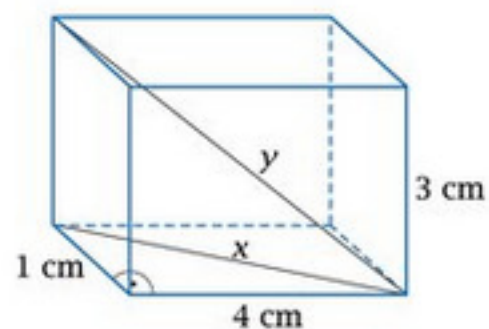


4. Na rysunku przedstawiono graniastosłup prosty. Oblicz długość przekątnej podstawy x , a następnie długość przekątnej graniastosłupa y (skorzystaj z rysunków pomocniczych).

a)

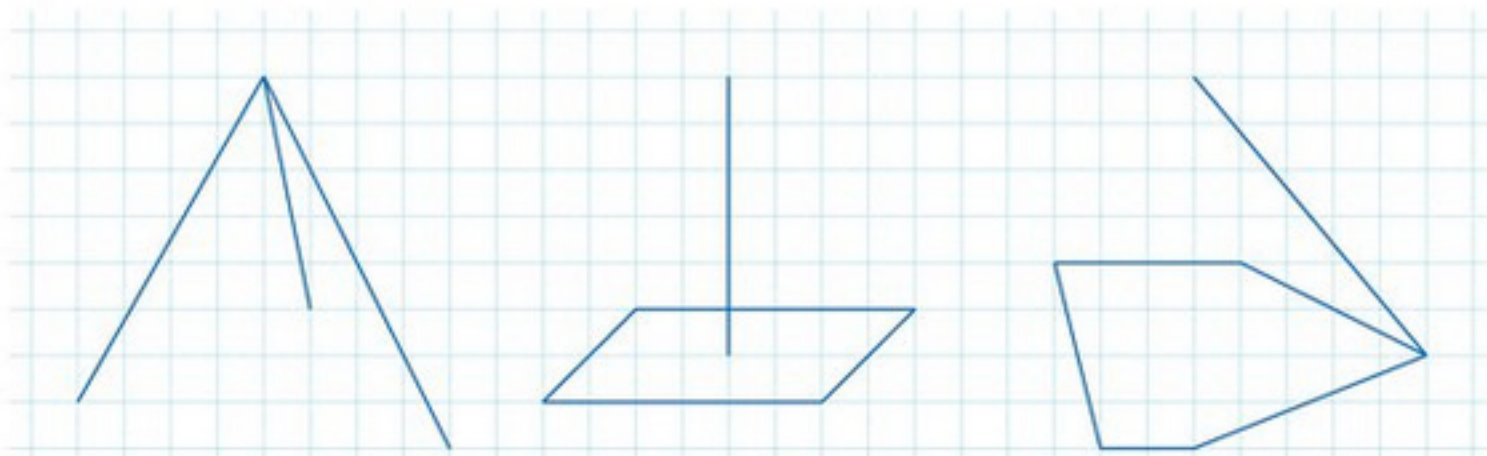


b)

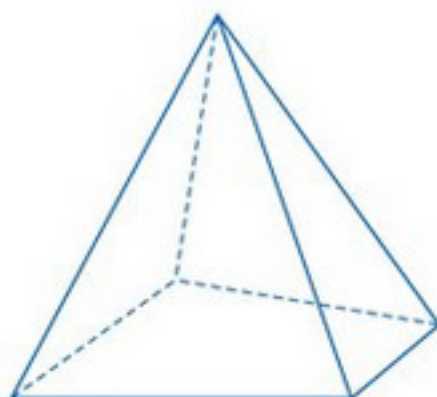


5.3 Rodzaje ostrosłupów

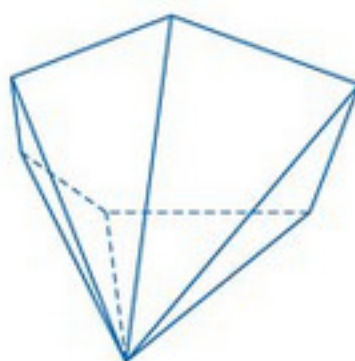
1. Dokończ rysunki trzech ostrosłupów. Na pierwszym rysunku widoczne są wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa, na drugim — podstawa i wysokość, na trzecim — podstawa i jedna z krawędzi bocznych.



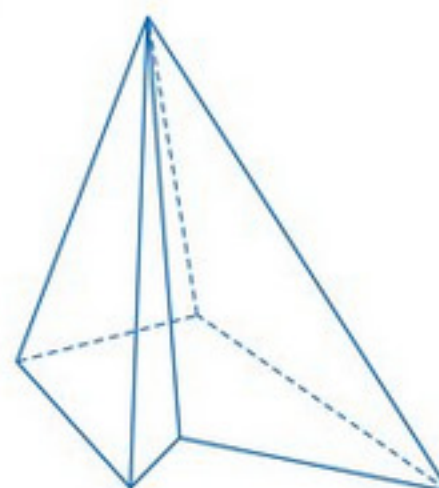
2. Zapisz pod każdym z ostrosłupów liczbę wszystkich ścian (S), krawędzi (K) oraz wierzchołków (W).



$S = 5$... $K =$... $W =$...



$S =$... $K =$... $W =$...



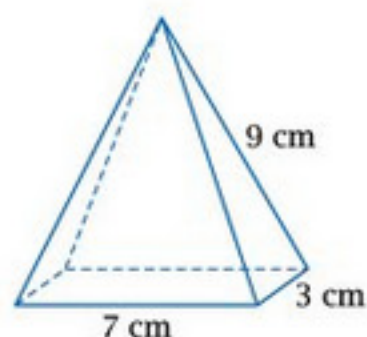
$S =$... $K =$... $W =$...

3. Uzupełnij tabelę.

Podstawa ostrosłupa	Liczba ścian bocznych	Liczba wszystkich ścian	Liczba krawędzi podstawy	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków podstawy	Liczba wszystkich wierzchołków
trójkąt						
siedmiokąt						
	5					
		9				
			6			
				22		

4. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupów przedstawionych na rysunkach. Ich podstawami są kolejno: prostokąt, trójkąt prostokątny i trapez równoramienny, a wszystkie krawędzie boczne mają takie same długości.

a)

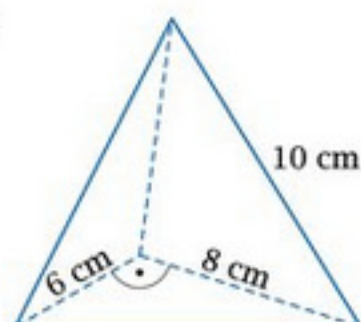


.....

.....

.....

b)

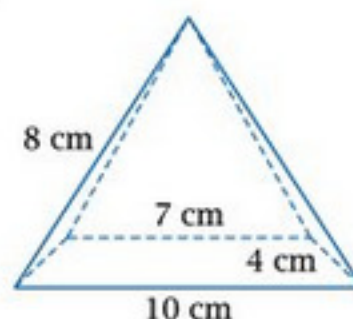


.....

.....

.....

c)



.....

.....

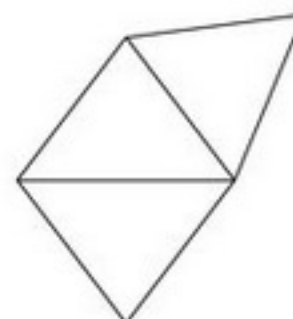
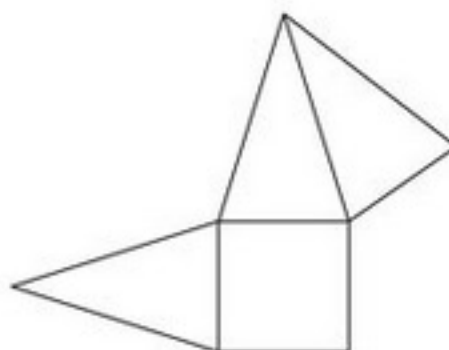
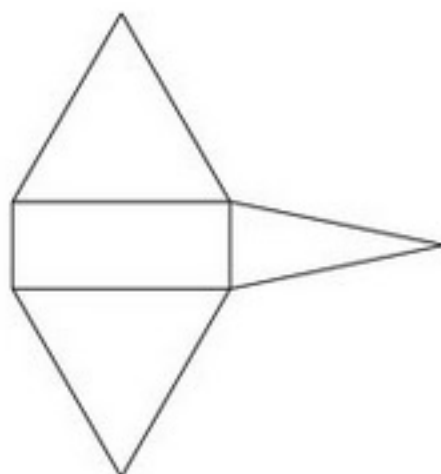
.....

5. Uzupełnij tabelę dotyczącą ostrosłupów prawidłowych.

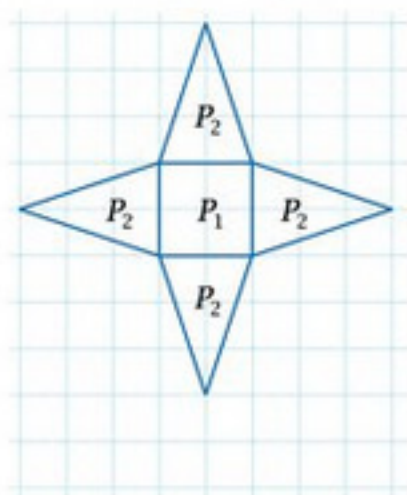
Podstawa ostrosłupa	Długość krawędzi podstawy	Długość krawędzi bocznej	Suma długości wszystkich krawędzi
trójkąt równoboczny	5 cm	10 cm	
sześciokąt foremny		15 dm	102 dm
dziesięciokąt foremny	9 mm	41 mm	

5.4 Siatki ostrosłupów. Pole powierzchni

1. Uzupełnij rysunki siatek ostrosłupów.

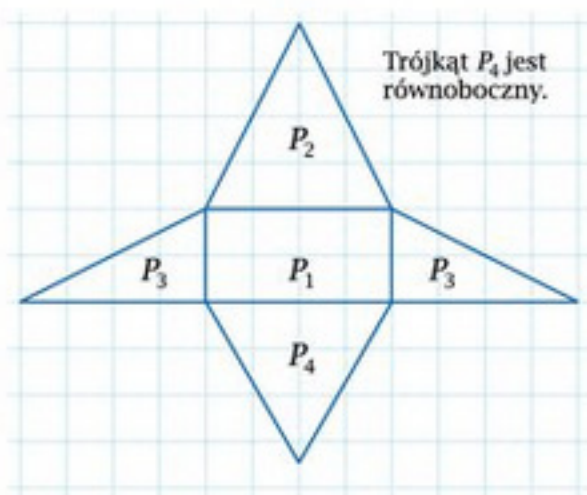


2. Na rysunkach przedstawiono siatki trzech ostrosłupów. Przyjmij, że bok kratki ma długość 1. Oblicz pola powierzchni całkowitej ostrosłupów.



$$P_1 = \dots\dots\dots P_2 = \dots\dots\dots$$

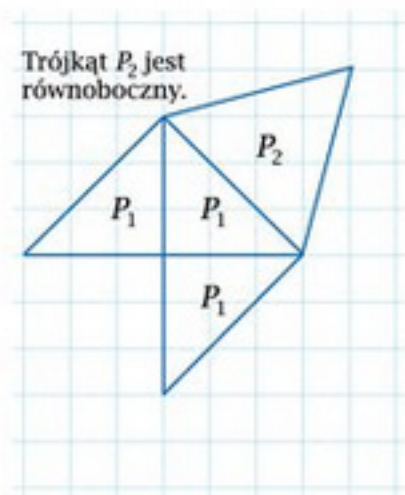
$$P_c = \dots\dots\dots$$



$$P_1 = \dots\dots\dots P_2 = \dots\dots\dots$$

$$P_3 = \dots\dots\dots P_4 = \dots\dots\dots$$

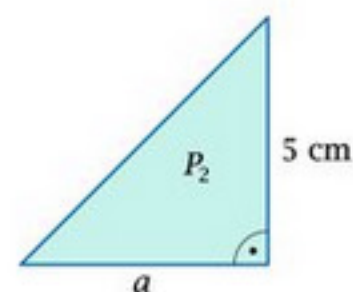
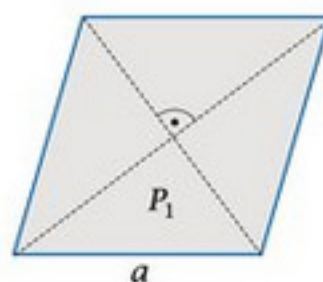
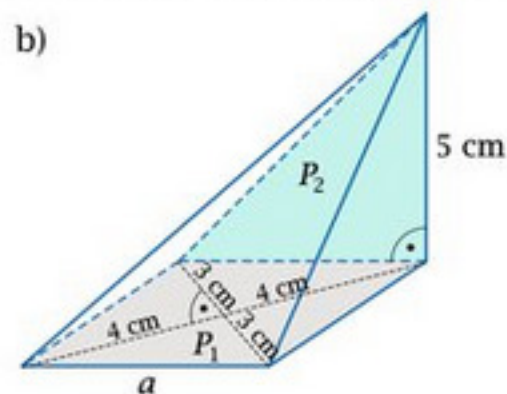
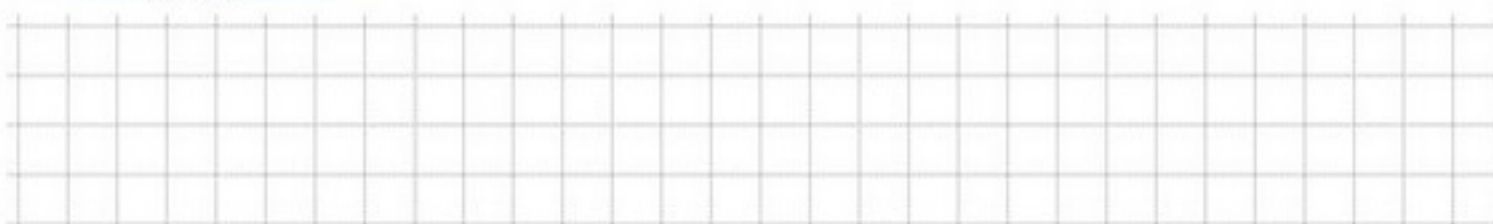
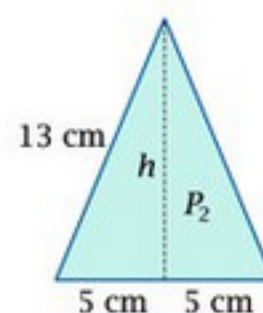
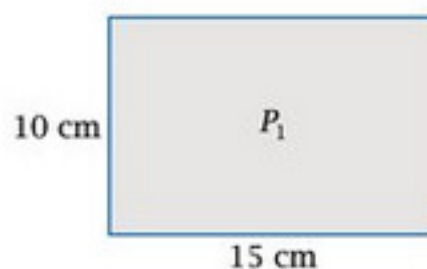
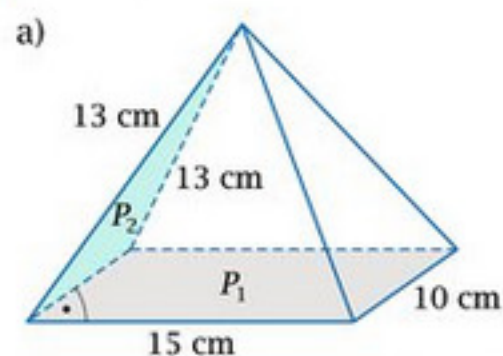
$$P_c = \dots\dots\dots$$



$$P_1 = \dots\dots\dots P_2 = \dots\dots\dots$$

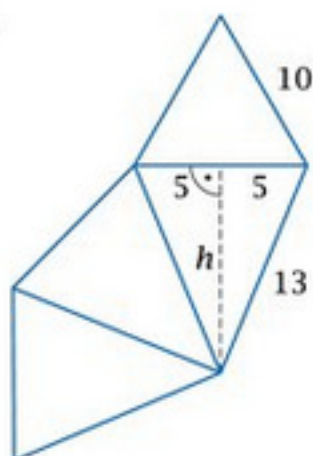
$$P_c = \dots\dots\dots$$

3. Oblicz pola zacieniowanych ścian ostrosłupa. Skorzystaj z rysunków pomocniczych.



4. Oblicz sumy długości wszystkich krawędzi oraz pola powierzchni ostrosłupów prawidłowych, których siatki narysowano poniżej.

a)



Suma długości krawędzi =

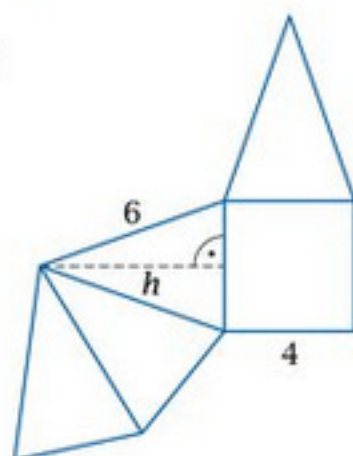
$$h^2 + 5^2 = \dots\dots\dots$$

.....

$$h = \dots\dots\dots$$

Pole powierzchni =

b)



Suma długości krawędzi =

$$h^2 + \dots\dots\dots = 6^2$$

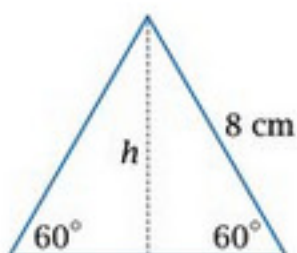
.....

$$h = \dots\dots\dots$$

Pole powierzchni =

5.5 Objętość ostrosłupa

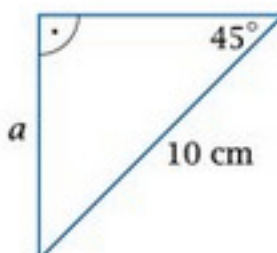
1. Na rysunkach przedstawiono podstawy ostrosłupów trójkątnych. Każdy z nich ma wysokość 5 cm. Oblicz objętości tych ostrosłupów.



$$h = \dots\dots\dots$$

$$P_p = \dots\dots\dots$$

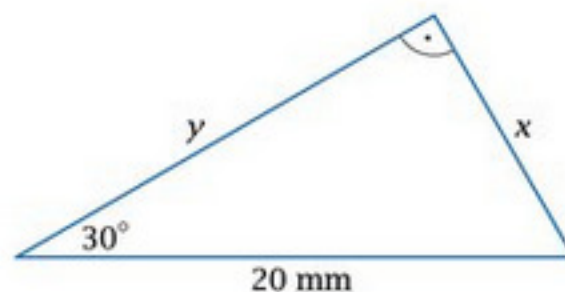
$$V = \dots\dots\dots$$



$$a = \dots\dots\dots$$

$$P_p = \dots\dots\dots$$

$$V = \dots\dots\dots$$



$$x = \dots\dots\dots \quad y = \dots\dots\dots$$

$$P_p = \dots\dots\dots$$

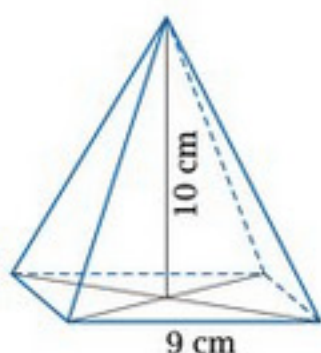
$$V = \dots\dots\dots$$

2. Uzupełnij tabelę.

Ostrosłup prawidłowy	Krawędź podstawy	Pole podstawy	Wysokość ostrosłupa	Objętość ostrosłupa
trójkątny	$\sqrt{3}$		5	
czworokątny	5		4	
sześciokątny	1		10	

3. Oblicz objętość ostrosłupa przedstawionego na rysunku, korzystając z informacji o jego podstawie.

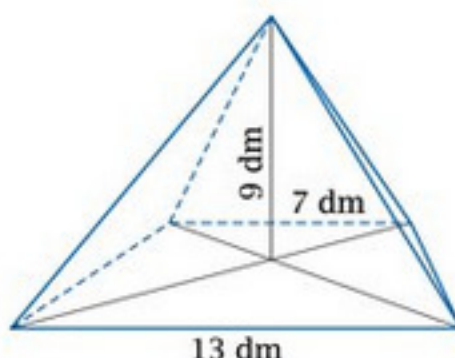
a) Podstawą jest równoległobok o wysokości 2 cm.



$$P_p = \dots\dots\dots$$

$$V = \dots\dots\dots$$

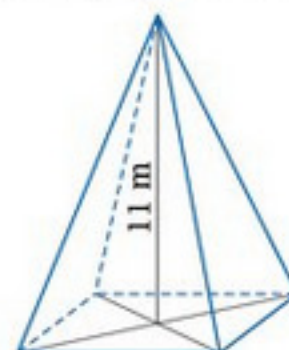
b) Podstawą jest trapez o wysokości 5 dm.



$$P_p = \dots\dots\dots$$

$$V = \dots\dots\dots$$

c) Podstawą jest romb o przekątnych 6 m i 4 m.



$$P_p = \dots\dots\dots$$

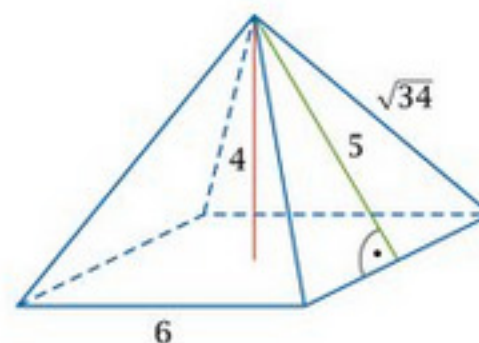
$$V = \dots\dots\dots$$

4. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy. Czerwony odcinek to wysokość ostrosłupa, a zielony to wysokość jego ściany bocznej. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi, pole powierzchni i objętość tego ostrosłupa.

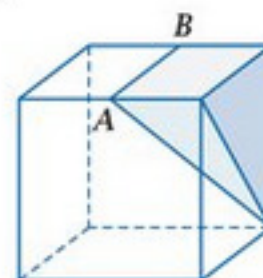
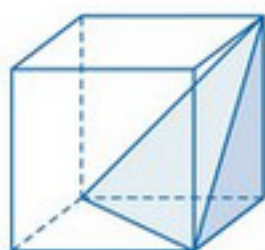
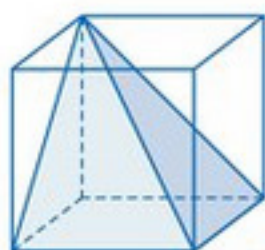
$$\text{Suma długości krawędzi} = \dots\dots\dots$$

$$\text{Pole powierzchni} = \dots\dots\dots$$

$$\text{Objętość} = \dots\dots\dots$$



5. Każdy z narysowanych sześciątów ma krawędź długości 2. Punkty A i B to środki krawędzi. Z sześciątów wycięto ostrosłupy. Oblicz objętości tych ostrosłupów.

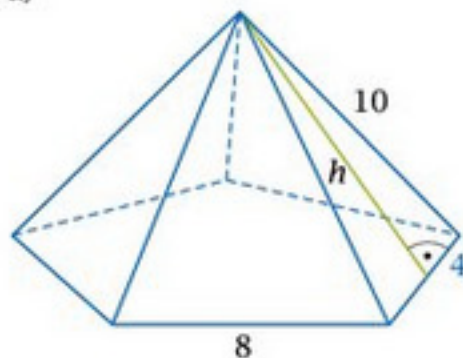


.....

5.6 Odcinki w ostrosłupach

1. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa według wzoru.

a)

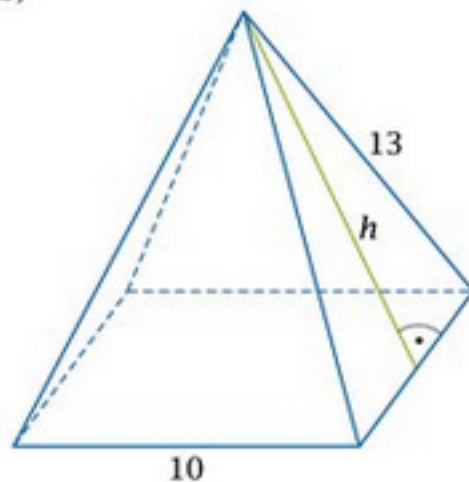


$$h^2 + 4^2 = 10^2$$

$$h^2 =$$

$$h =$$

b)

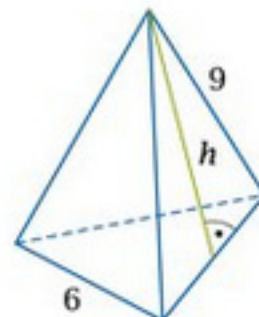


.....

.....

.....

c)



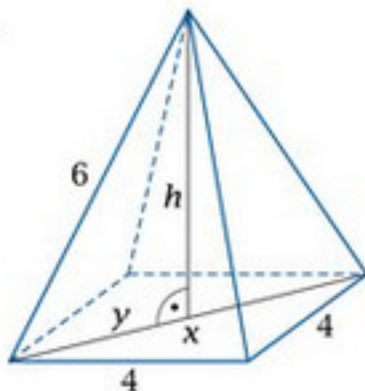
.....

.....

.....

2. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o danych długościach krawędzi podstawy i krawędzi bocznej można obliczyć na dwa sposoby. Dokończ obliczenia.

Sposób 1.



$$x = 4\sqrt{2}$$

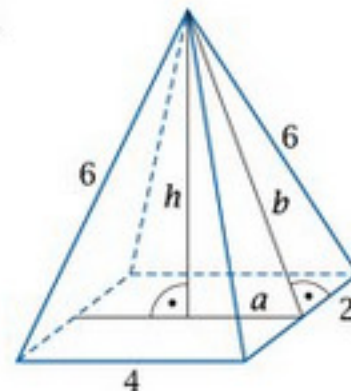
$$y = \frac{1}{2}x = 2\sqrt{2}$$

$$h^2 + y^2 = 6^2$$

.....

.....

Sposób 2.



$$a =$$

$$b^2 + 2^2 = 6^2$$

$$b^2 =$$

$$h^2 + a^2 = b^2$$

.....

.....

.....

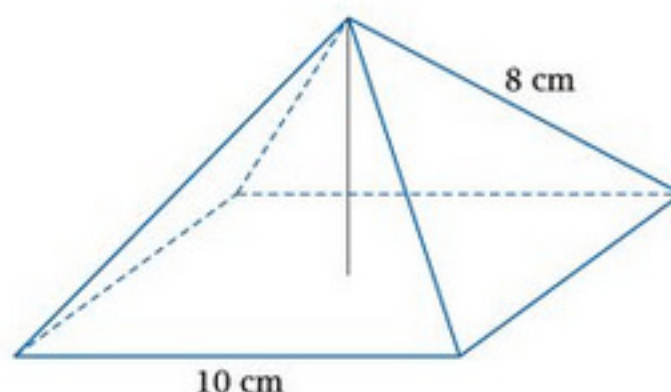
3. Korzystając z jednej z metod pokazanych w zadaniu 2, oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, przedstawionego na rysunku obok.

.....

.....

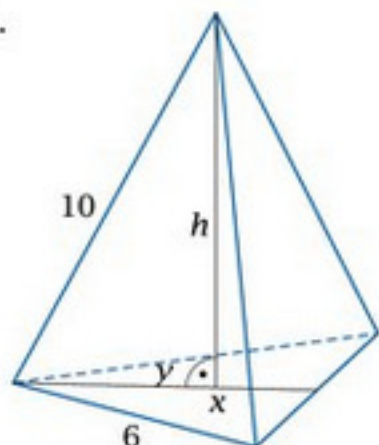
.....

.....



4. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o danych długościach krawędzi podstawy i krawędzi bocznej można obliczyć na dwa sposoby. Dokończ obliczenia.

Sposób 1.



$$x = \frac{6\sqrt{3}}{2} =$$

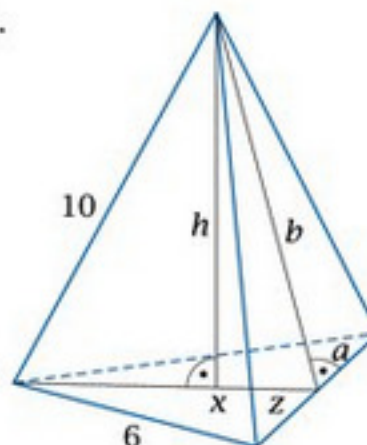
$$y = \frac{2}{3}x =$$

$$h^2 + y^2 = 10^2$$

.....

.....

Sposób 2.



$$x = \frac{6\sqrt{3}}{2} =$$

$$z = \frac{1}{3}x =$$

$$a =$$

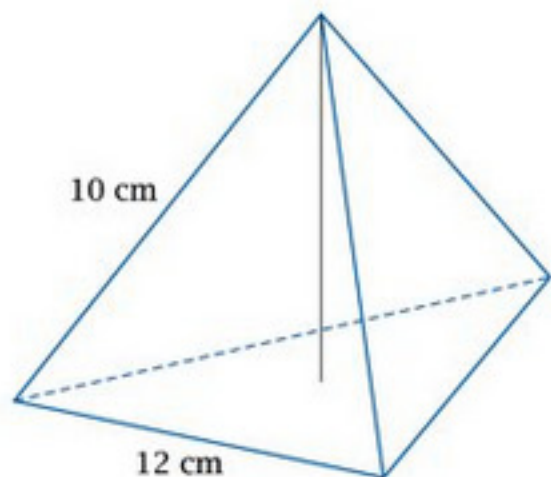
$$a^2 + b^2 = 10^2$$

$$b^2 =$$

$$h^2 + z^2 = b^2$$

.....

5. Korzystając z jednej z metod pokazanych w zadaniu 4, oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, przedstawionego na rysunku.



.....

.....

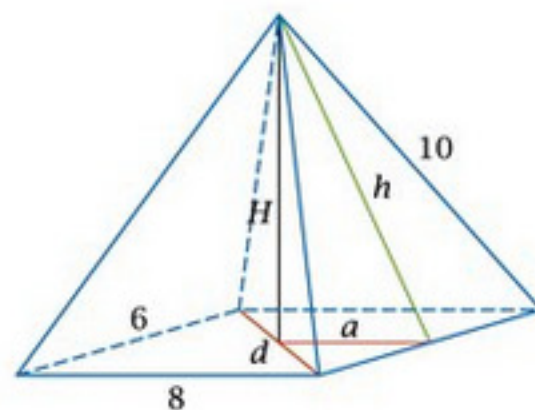
.....

.....

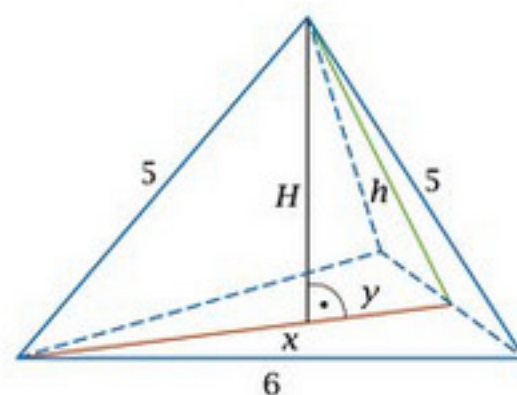
.....

.....

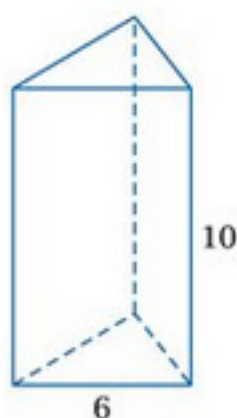
6. Podstawą ostrosłupa przedstawionego na rysunku jest prostokąt. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami a , d , h i H .



7. Narysowana poniżej bryła to ostrosłup prawidłowy. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami x , y , h i H .



Sprawdź, ile umiesz



1. Oblicz pole ściany bocznej, pole podstawy, pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku obok.

Pole ściany bocznej =

Pole podstawy =

Pole powierzchni całkowitej =

Objętość =

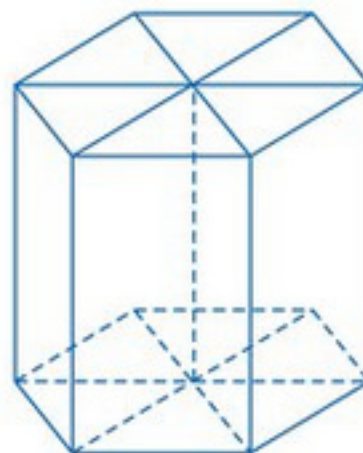
2. Graniastosłup przedstawiony obok powstał w wyniku sklejenia sześciu graniastosłupów takich, jak w zadaniu 1. Oblicz pole ściany bocznej, pole podstawy, pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

Pole ściany bocznej =

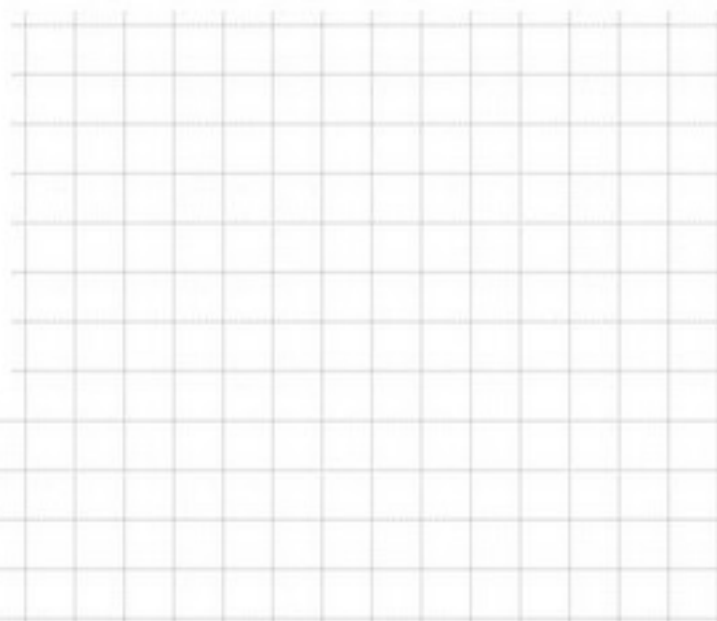
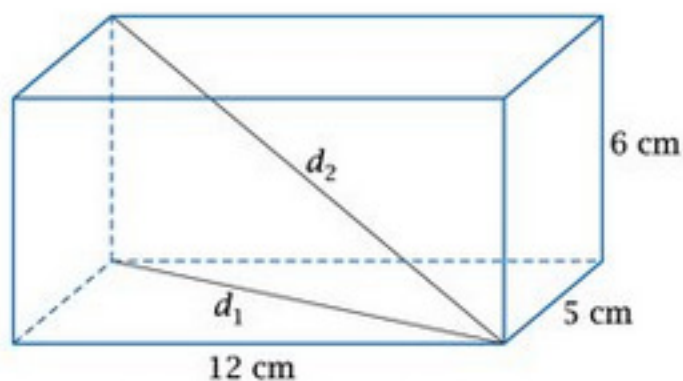
Pole podstawy =

Pole powierzchni całkowitej =

Objętość =



3. Oblicz długości zaznaczonych przekątnych prostopadłościanu.

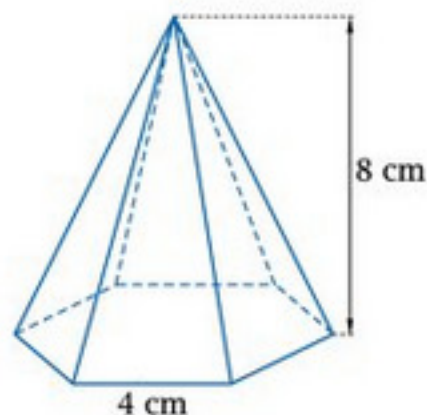


4. Uzupełnij tabelę.

Podstawa ostrosłupa	Liczba ścian	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków
dziesięciokąt			
	13		
		50	
			15

5. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego przedstawionego na rysunku.

.....



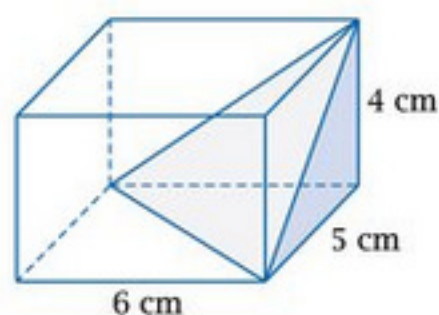
6. Na rysunku obok przedstawiono siatkę ścian bocznych pewnego ostrosłupa prawidłowego. Suma długości krawędzi podstawy jest równa 10 cm, a suma długości krawędzi bocznych — 30 cm.



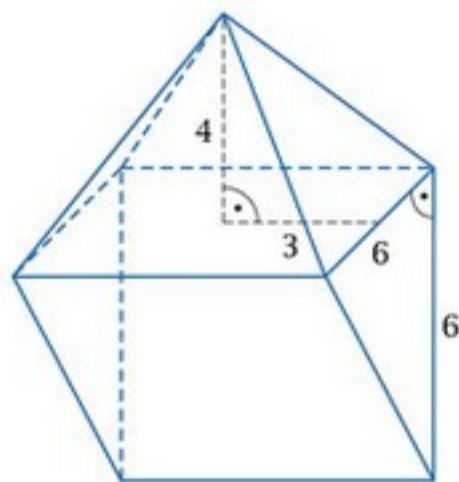
a) Jakie długości mają krawędzie tego ostrosłupa?

b) Oblicz pole powierzchni jednej ściany bocznej tego ostrosłupa.

7. Od prostopadłościanu odcięto ostrosłup, taki jak na rysunku. Oblicz objętości obu brył powstałych w wyniku tego rozcięcia.

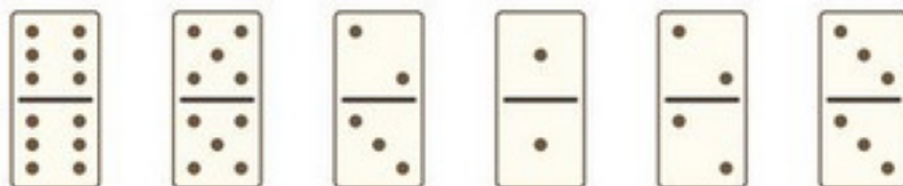


8. Narysowana poniżej bryła została utworzona w wyniku sklejenia ostrosłupa prawidłowego i graniastosłupa. Oblicz pole powierzchni i objętość tej bryły.

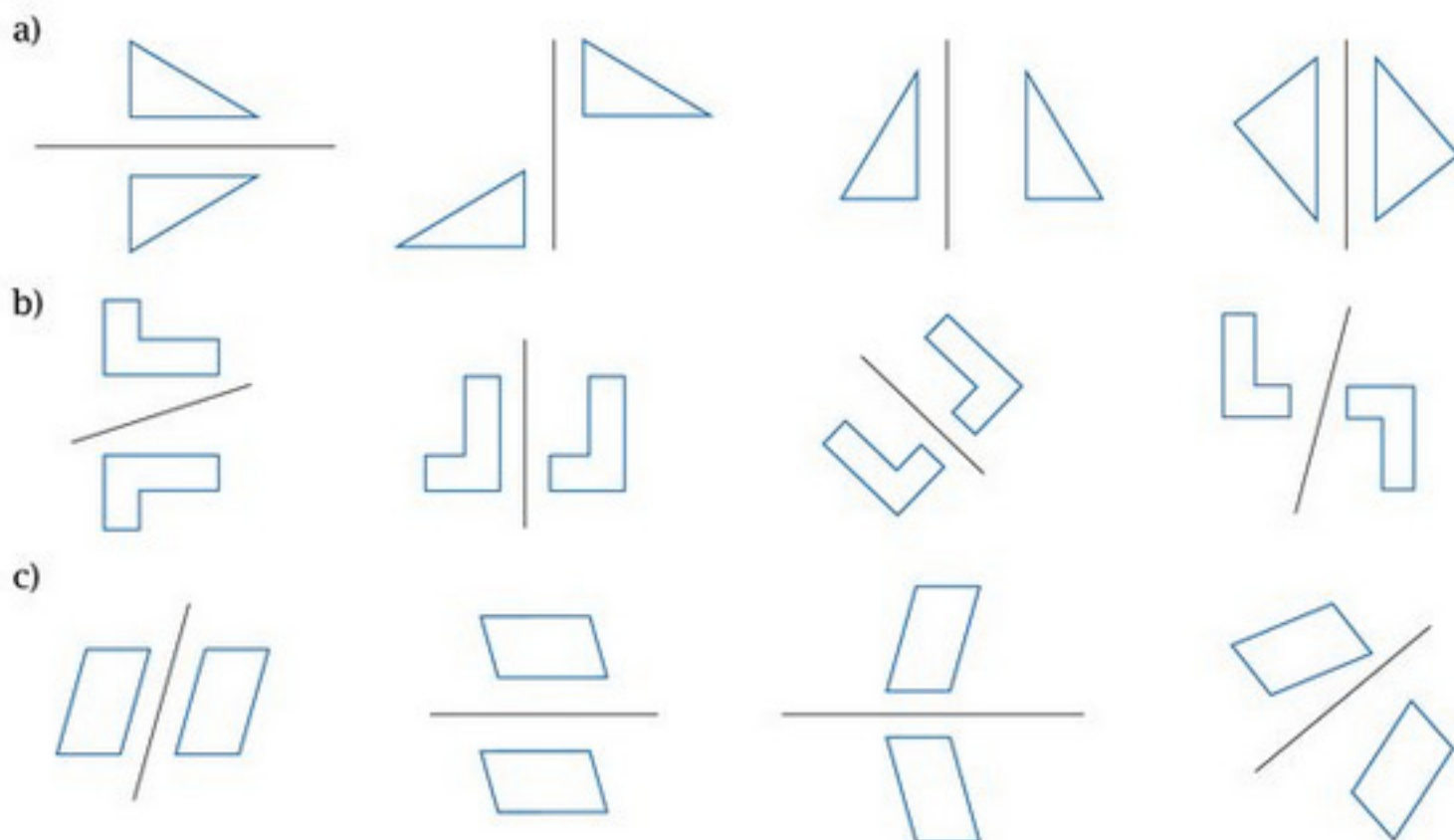


6.1 Symetria względem prostej

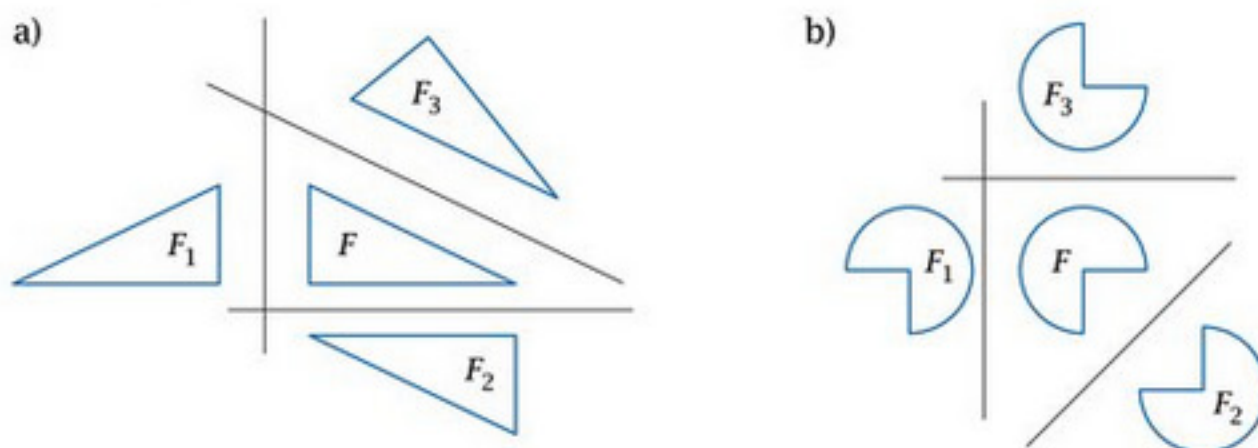
1. W których z poniższych kostek domina górna część jest lustrzanym odbiciem dolnej względem linii rozdzielającej te części? Zakreśl te kostki.



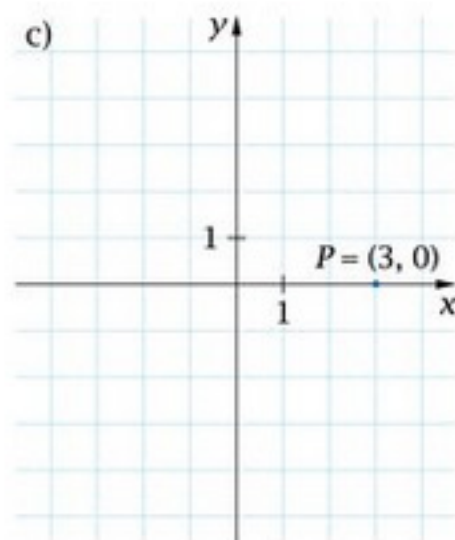
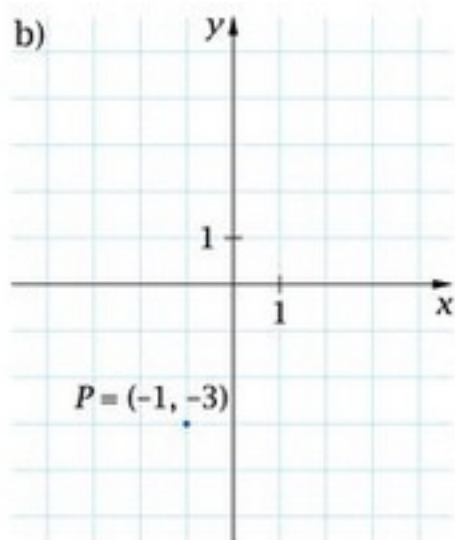
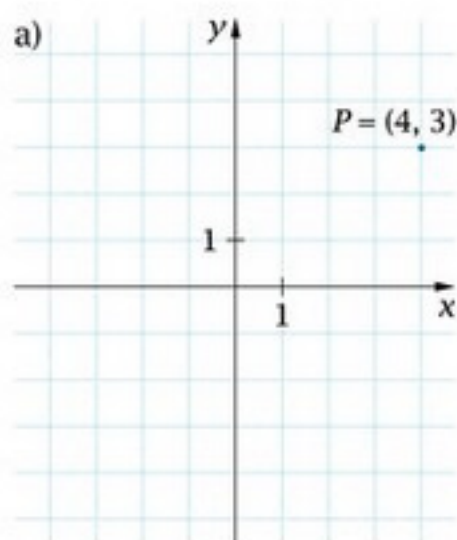
2. Pokoloruj parę figur, które są położone symetrycznie względem narysowanej prostej.



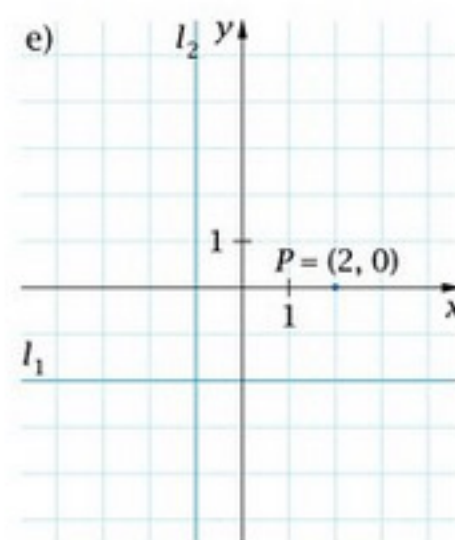
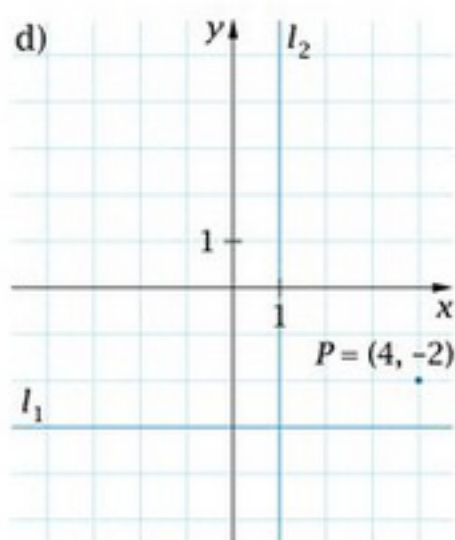
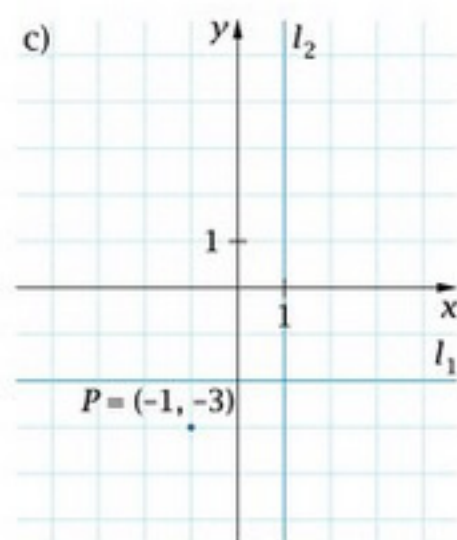
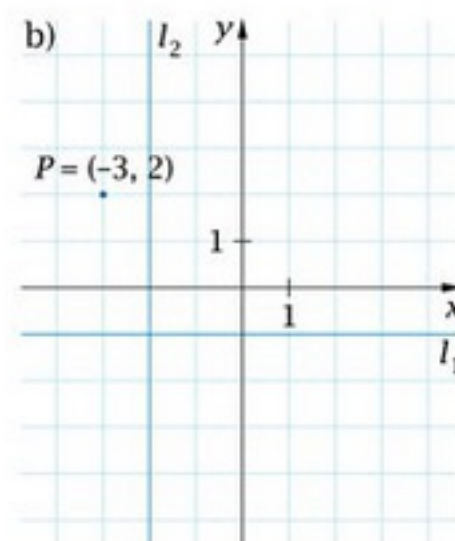
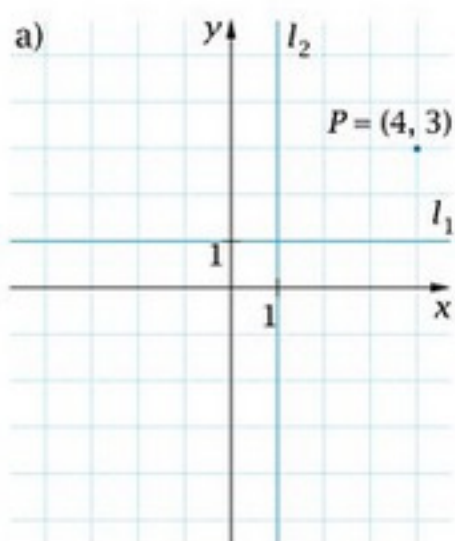
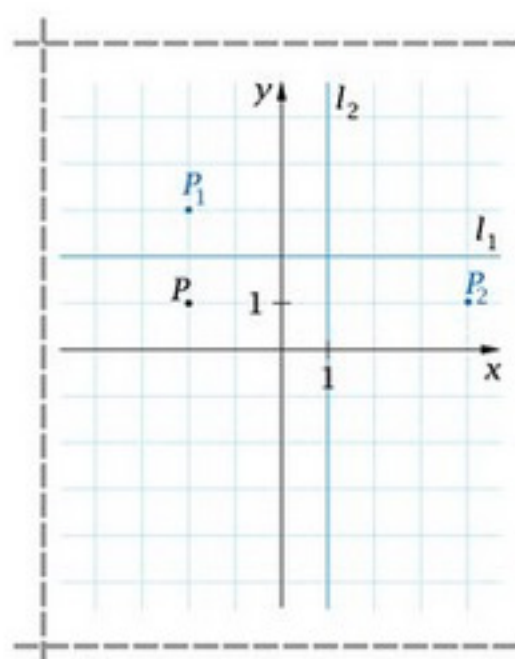
3. Jedna z figur F_1 , F_2 , F_3 **nie** jest symetryczna do figury F względem żadnej z prostych. Skreśl tę figurę.



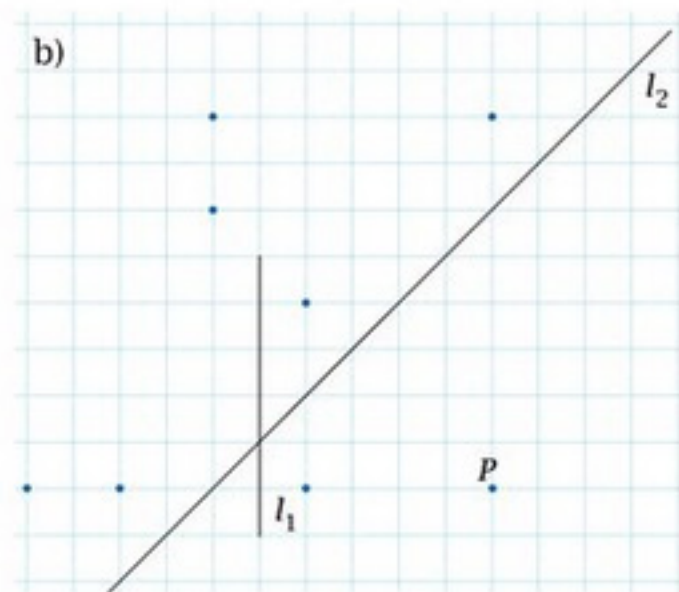
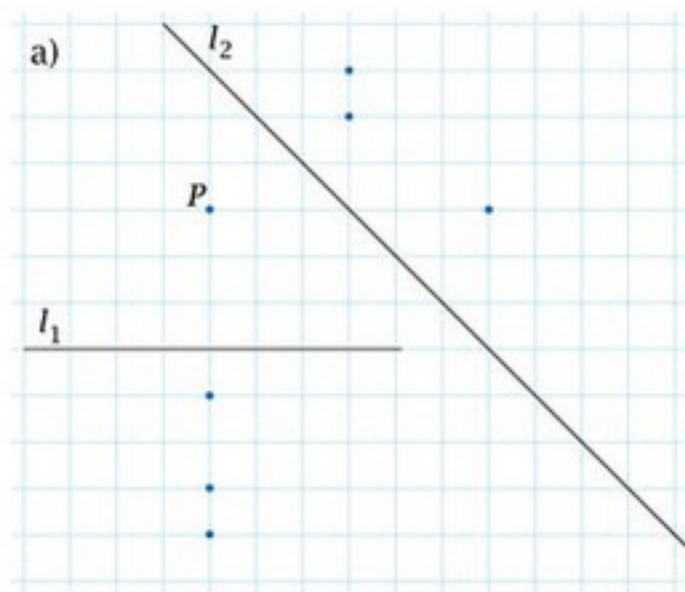
4. Zaznacz punkty symetryczne do punktu P względem osi x i osi y . Oznacz te punkty odpowiednio P_1 i P_2 . Zapisz współrzędne zaznaczonych punktów.



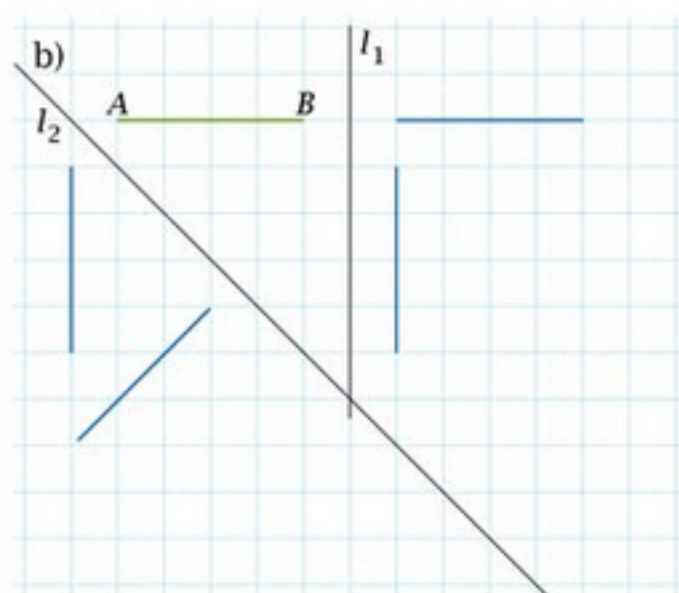
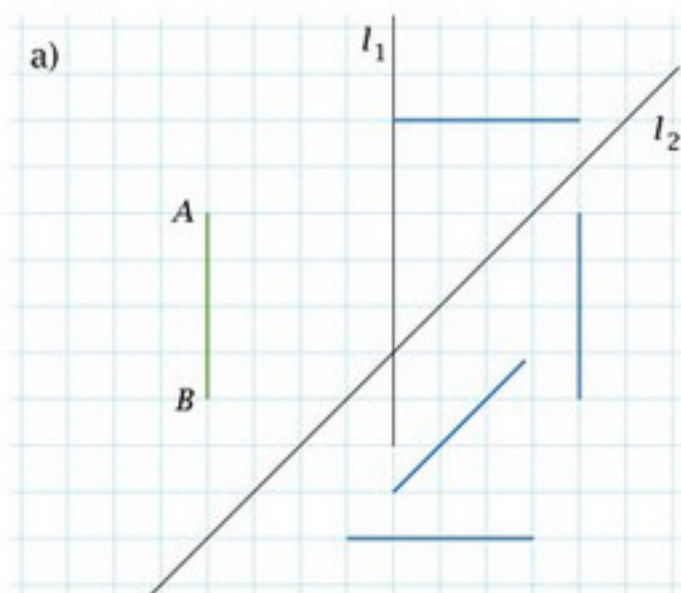
5. Zaznacz punkt symetryczny do punktu P względem prostej l_1 i oznacz go P_1 oraz punkt symetryczny do punktu P względem prostej l_2 i oznacz go P_2 .



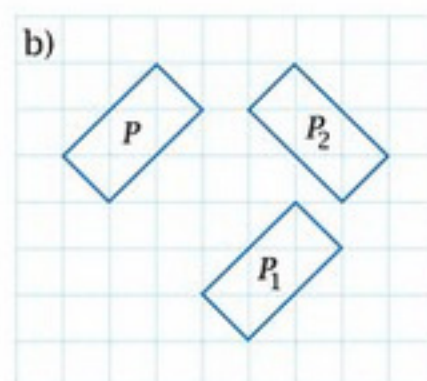
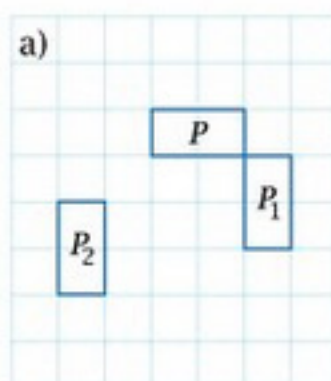
6. Ustal, który z narysowanych punktów jest symetryczny do punktu P względem prostej l_1 . Oznacz go P_1 . Wskaż też punkt symetryczny do punktu P względem prostej l_2 i oznacz go P_2 .



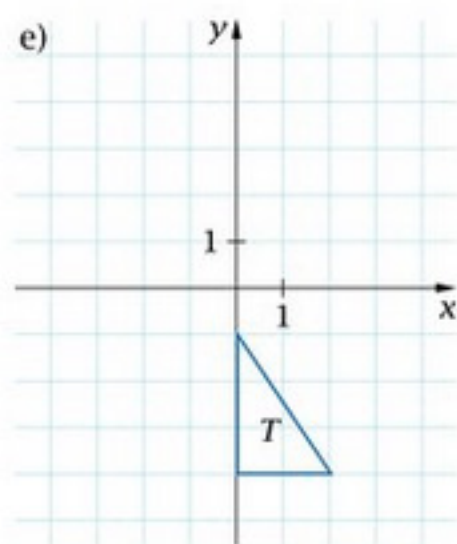
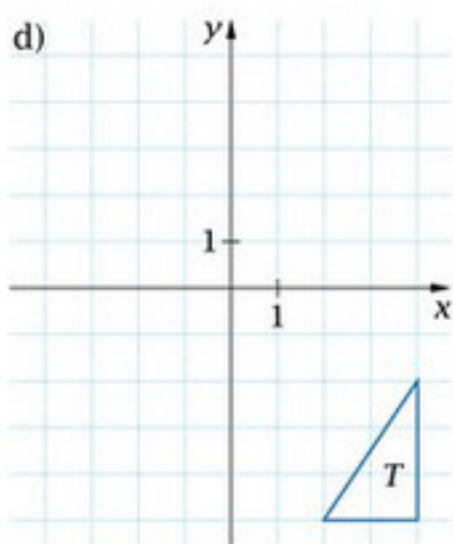
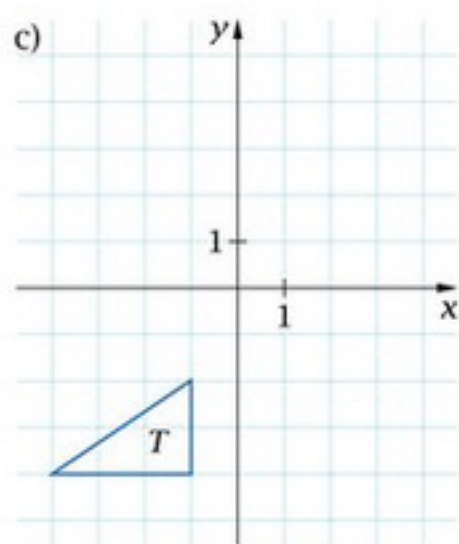
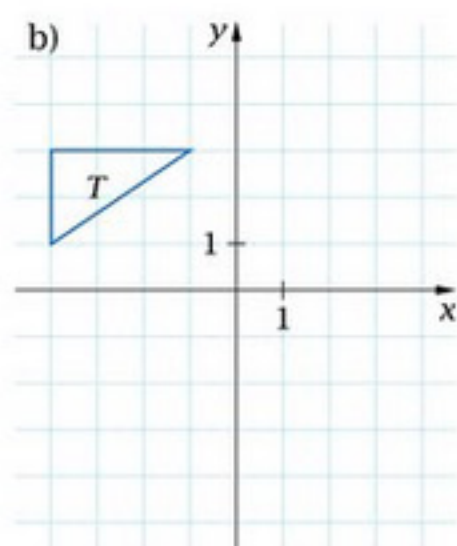
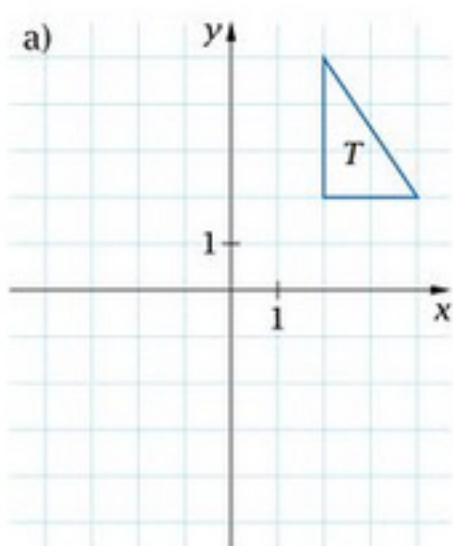
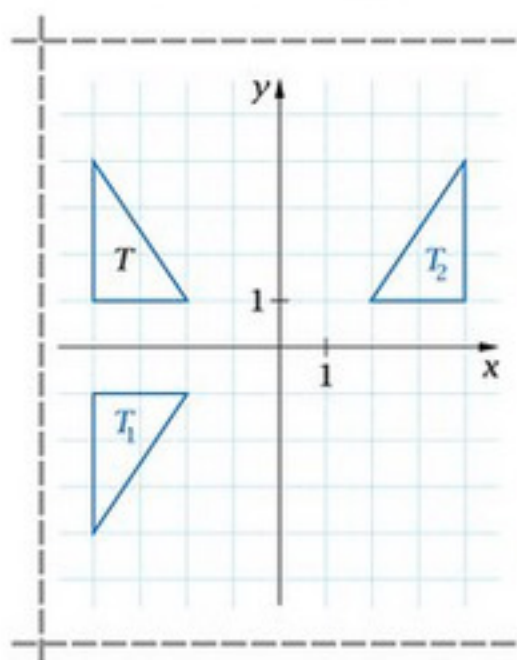
7. Wskaż odcinek symetryczny do odcinka AB względem prostej l_1 i oznacz jego końce, odpowiednio, A_1 i B_1 . Znajdź też odcinek symetryczny do odcinka AB względem prostej l_2 i oznacz go A_2B_2 .



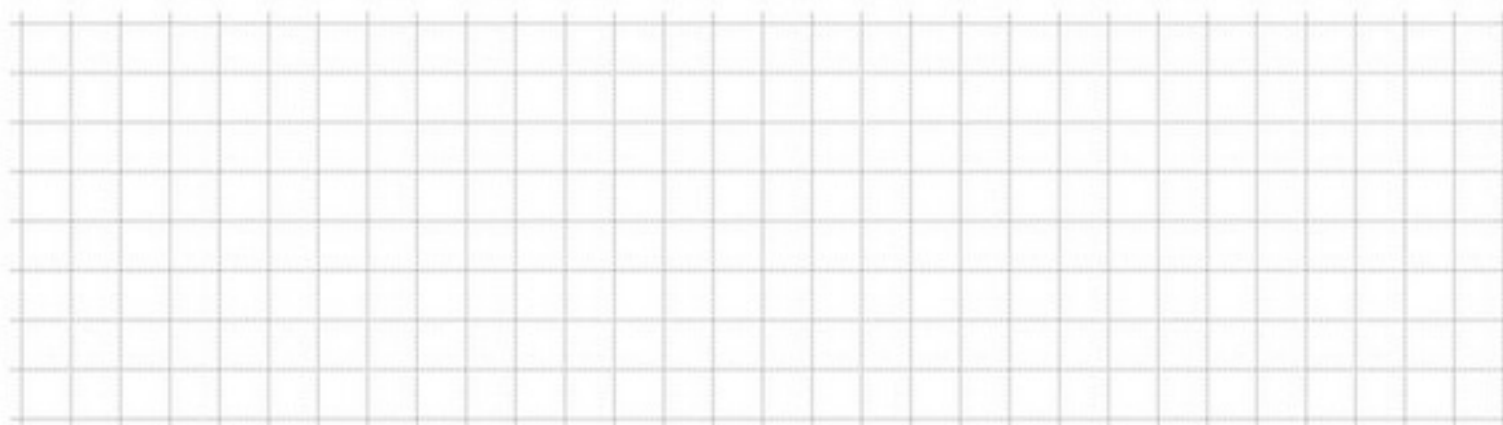
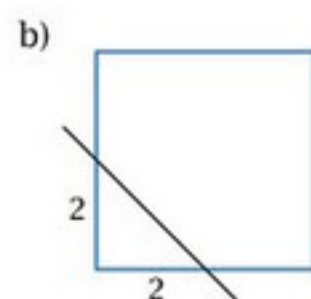
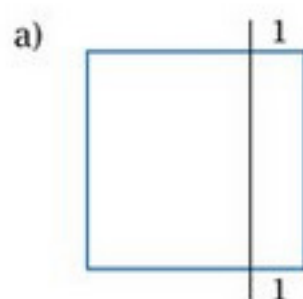
8. Na rysunku prostokąty P_1 i P_2 są symetryczne do prostokąta P . Narysuj proste, względem których zachodzą te symetrie.



9. Narysuj trójkąt symetryczny do trójkąta T względem osi x i oznacz go T_1 oraz trójkąt symetryczny do trójkąta T względem osi y i oznacz go T_2 .

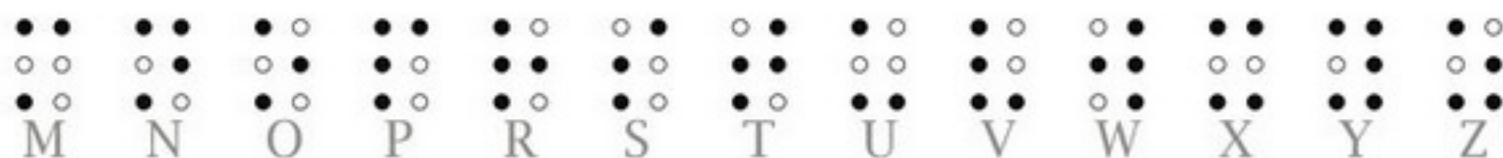
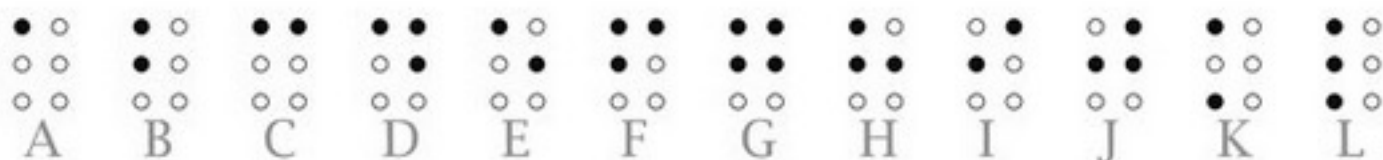


10. Bok kwadratu ma długość 4. Oblicz pole części wspólnej tego kwadratu i jego obrazu w symetrii osiowej względem narysowanej prostej.

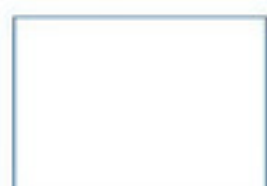


6.2 Oś symetrii figury

1. Poniżej podano znaki alfabetu Braille'a używanego przez niewidomych. Każdy z tych znaków to układ wypukłych kropek wybranych z podstawowego układu sześciu kropek. Które z tych znaków mają oś symetrii? Narysuj te osie.



2. Narysuj osie symetrii poniższych figur. Jeśli figura nie ma osi symetrii, to napisz „brak osi symetrii”.



prostokąt



kwadrat



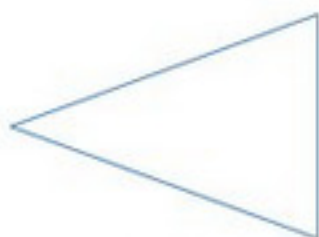
trapez równoramienny



połowa koła



trójkąt
równoboczny



trójkąt
równoramienny



trapez
prostokątny

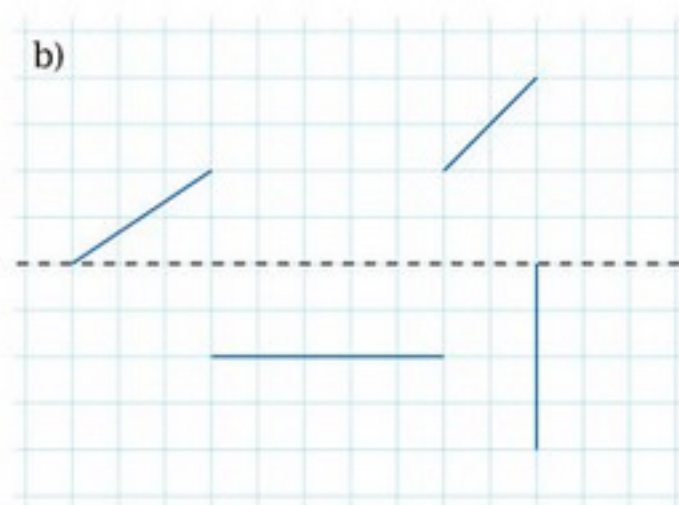
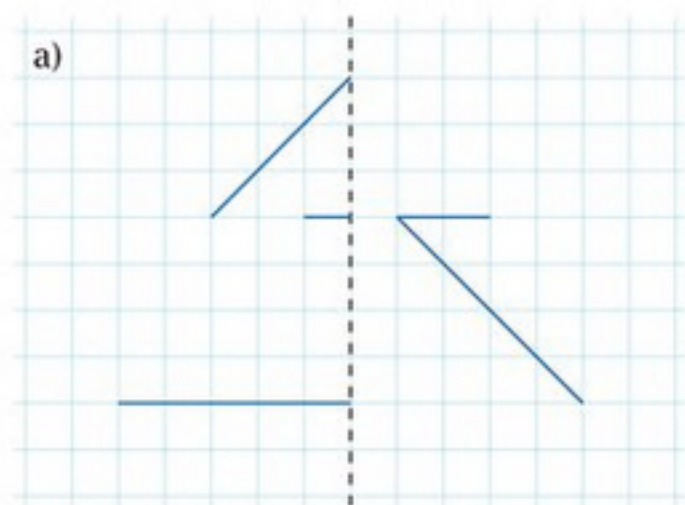


równoległobok

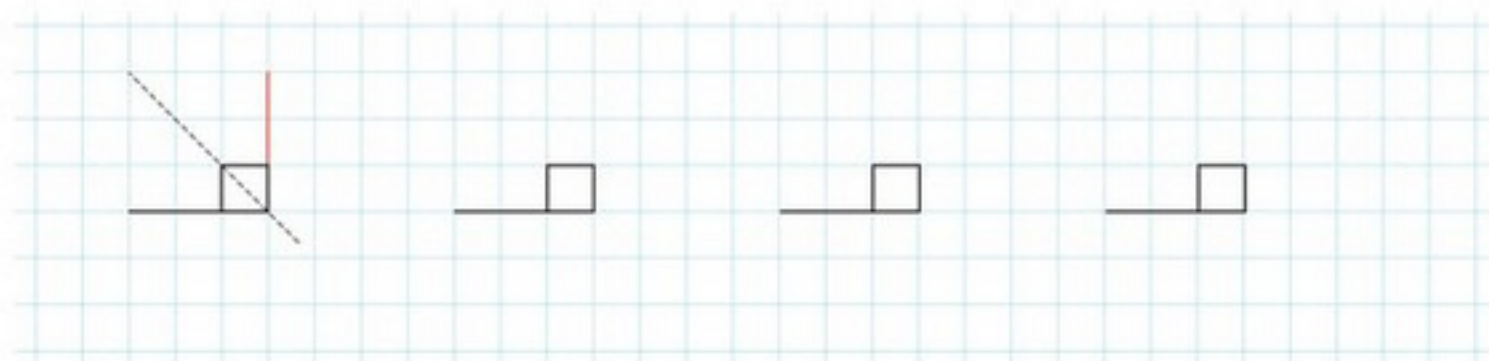
3. Narysuj osie symetrii poniższych kształtów.



4. Uzupełnij rysunek tak, aby prosta zaznaczona linią przerywaną była osią symetrii otrzymanej figury.

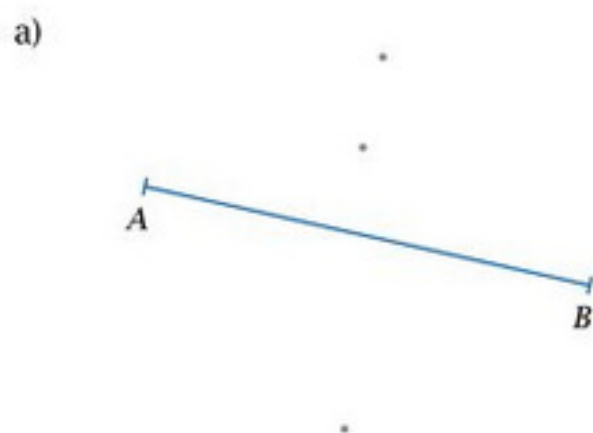


5. Na pierwszym rysunku do figury narysowanej czarnym kolorem dorysowano odcinek tak, że otrzymano figurę osiowosymetryczną. Dorysuj do pozostałych figur odcinek tak, by otrzymać trzy inne figury osiowosymetryczne. Zaznacz oś symetrii utworzonej figury.



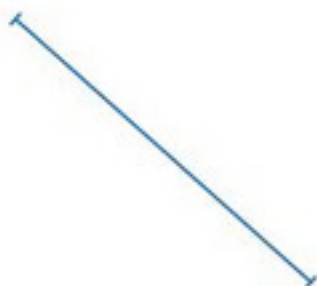
6.3 Symetralna odcinka

1. Skonstruuj symetralną odcinka, a następnie zaznacz na niebiesko punkty, które leżą bliżej końca oznaczonego literą A, a na czerwono — punkty, które leżą bliżej końca B.

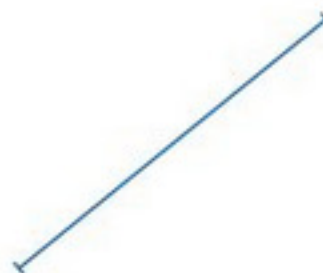


2. Skonstruuj symetralną odcinka, a następnie zaznacz na niej dwa punkty tak samo odległe od środka tego odcinka. Połącz zaznaczone punkty z końcami odcinka. Jaką figurę otrzymałeś?

a)



b)



Otrzymaną figurą jest

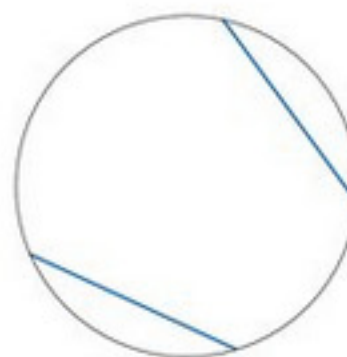
3. Narysowany odcinek to podstawa trójkąta równoramiennego o wysokości 3 cm. Znajdź trzeci wierzchołek tego trójkąta. Uwaga. Zadanie ma dwa rozwiązania.



4. a) Narysowany odcinek jest średnicą okręgu. Znajdź konstrukcyjnie środek tego okręgu, a następnie narysuj ten okrąg.



- b) Skonstruuj symetralne zaznaczonych cięciw okręgu i uzupełnij zdanie.

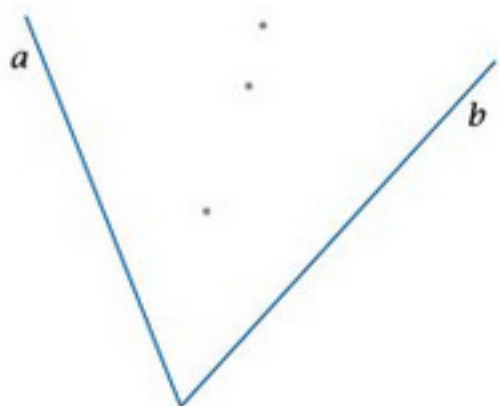


Punkt przecięcia symetralnych cięciw okręgu jest okręgu.

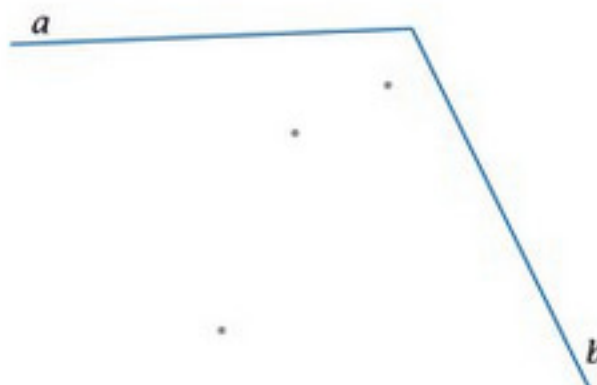
6.4 Dwusieczna kąta

1. Skonstruuj dwusieczną kąta, a następnie zaznacz na niebiesko punkty, które leżą bliżej ramienia oznaczonego literą a , a na czerwono — punkty, które leżą bliżej ramienia b .

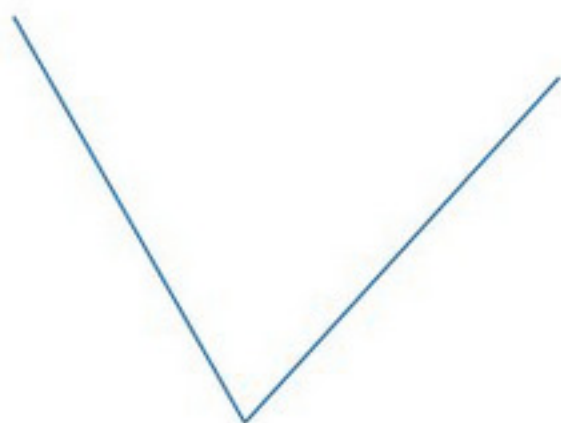
a) Kąt ostry



b) Kąt rozwarty



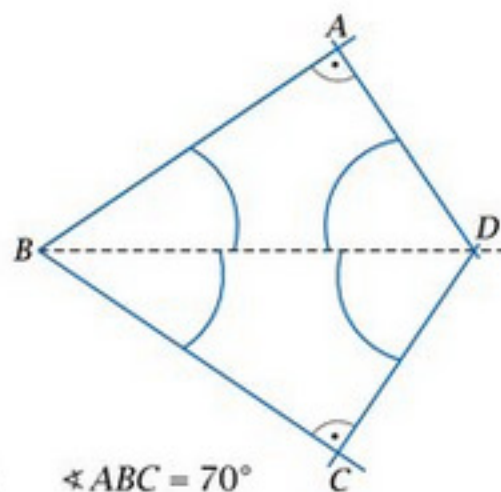
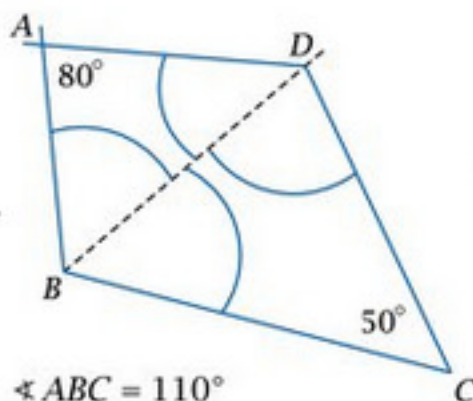
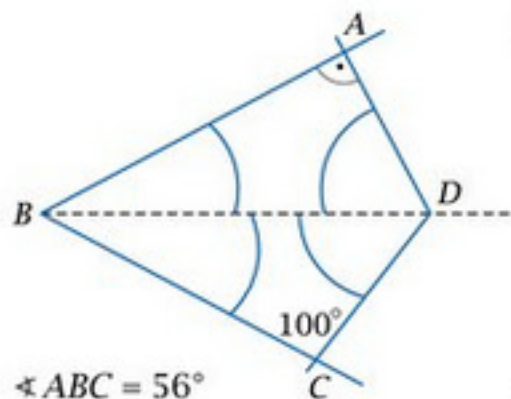
2. a) Narysowany poniżej kąt ma miarę 72° . Skonstruuj kąt o mierze 36° oraz kąt o mierze 18° .



- b) Narysowany poniżej kąt ma miarę 132° . Skonstruuj kąt o mierze 66° oraz kąt o mierze 99° .

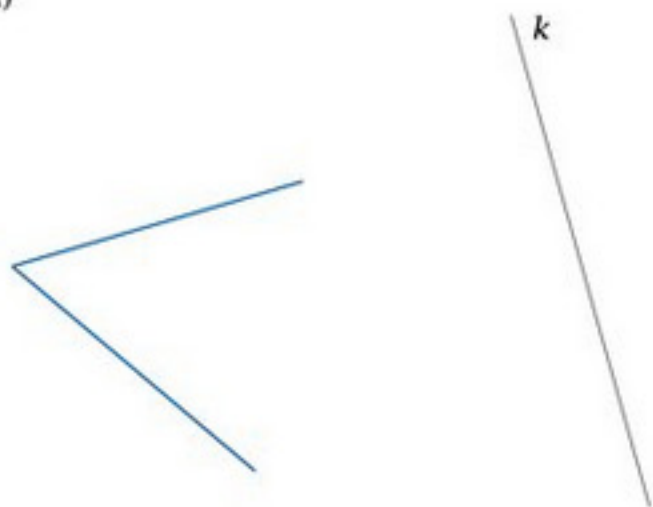


3. Półprosta narysowana linią przerywaną jest dwusieczną kąta ABC . Mając daną miarę kąta ABC , znajdź miary kątów zaznaczonych łukami.

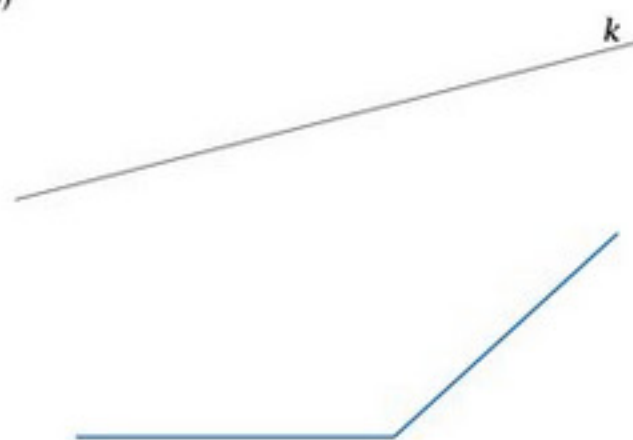


4. Znajdź na prostej k punkt C , który jest jednakowo odległy od ramion narysowanego kąta.

a)



b)



6.5 Symetria względem punktu

1. Pokoloruj parę figur, które są symetryczne względem zaznaczonego punktu.

a)



b)

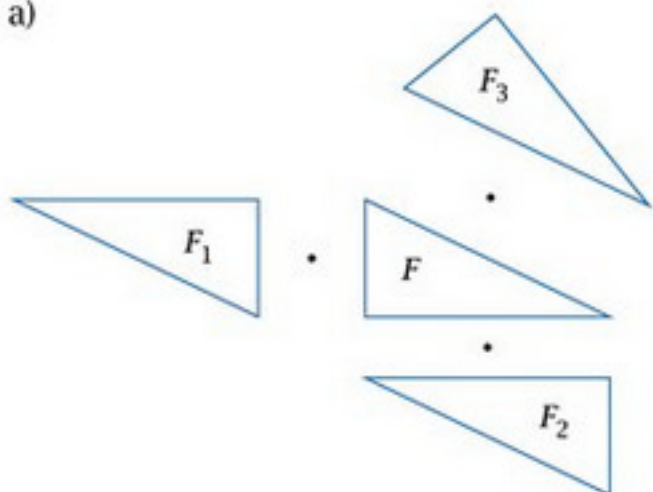


c)

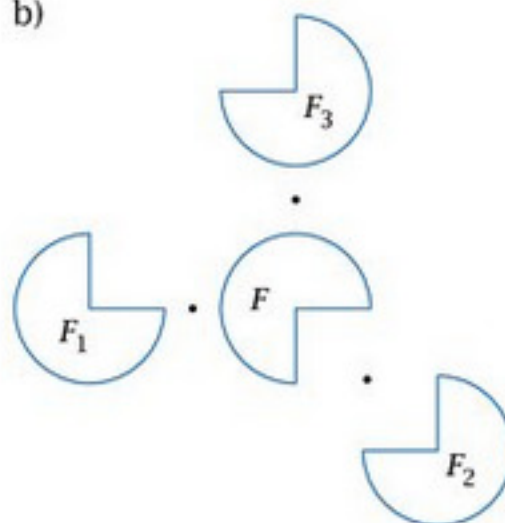


2. Jedna z figur F_1 , F_2 , F_3 **nie** jest symetryczna do figury F względem żadnego z zaznaczonych punktów. Skreśl tę figurę.

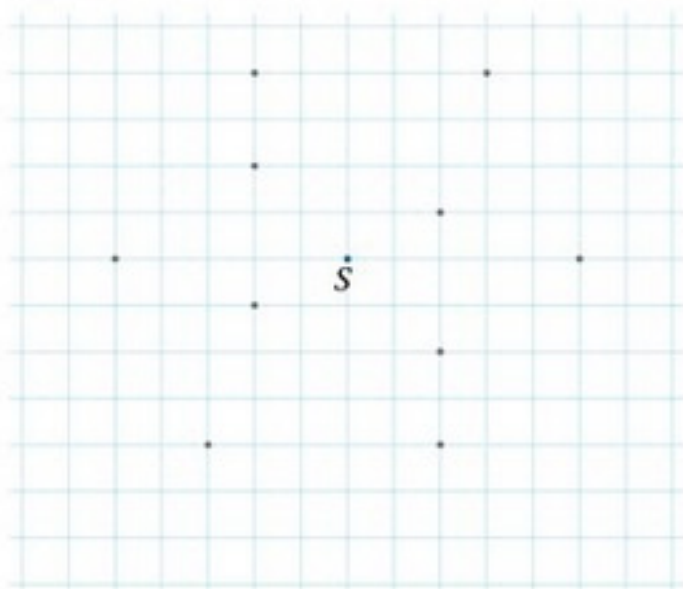
a)



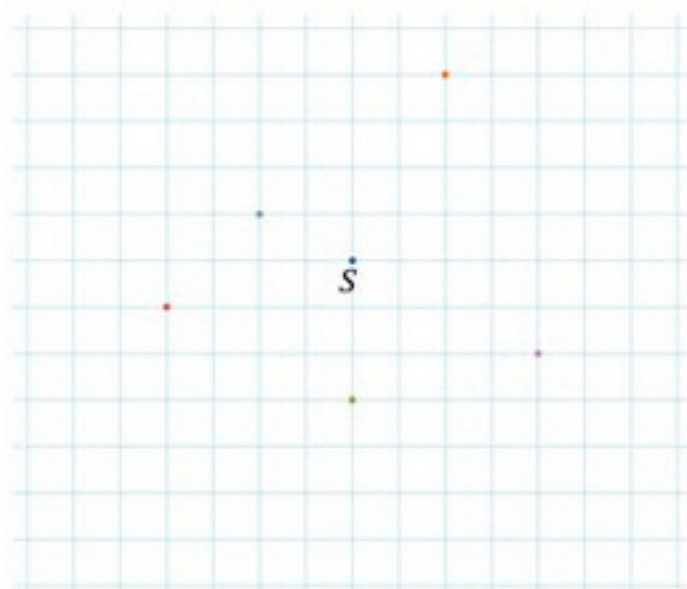
b)



3. a) Znajdź pary punktów symetrycznych względem punktu S . Zaznacz je tym samym kolorem.

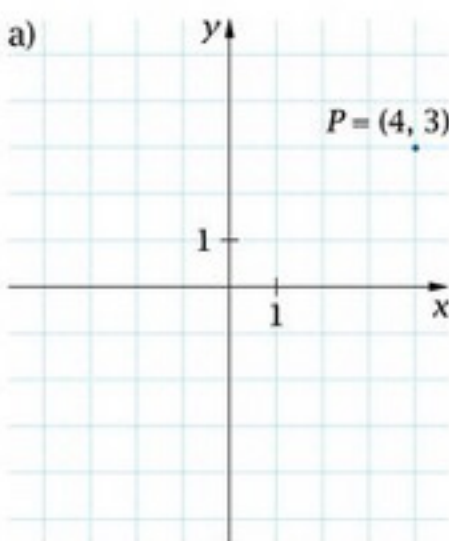


- b) Zaznacz punkty symetryczne do podanych względem punktu S .

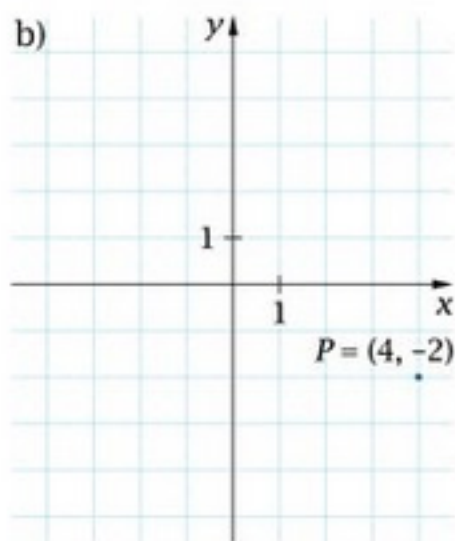


4. Zaznacz punkt symetryczny do punktu P względem początku układu współrzędnych, czyli punktu $(0, 0)$. Oznacz ten punkt jako P_1 . Zapisz współrzędne zaznaczonego punktu.

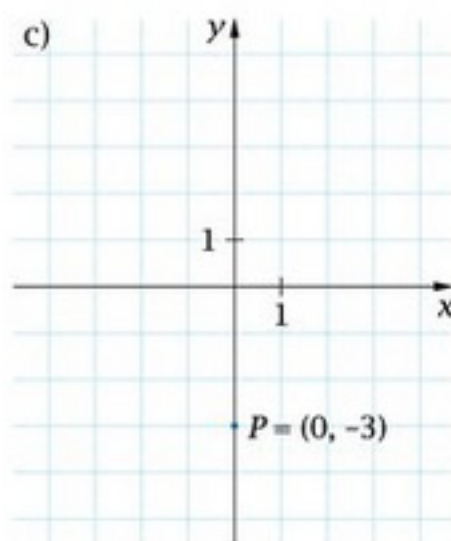
a)



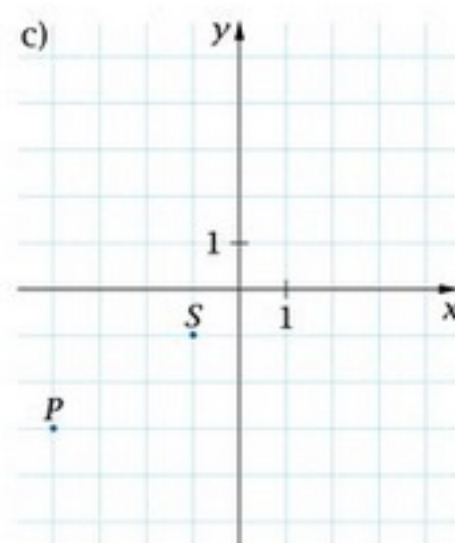
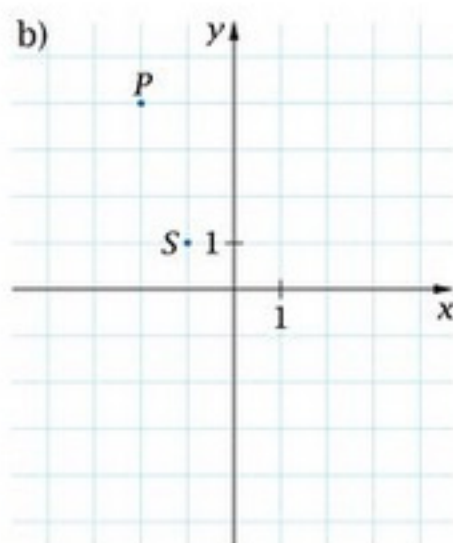
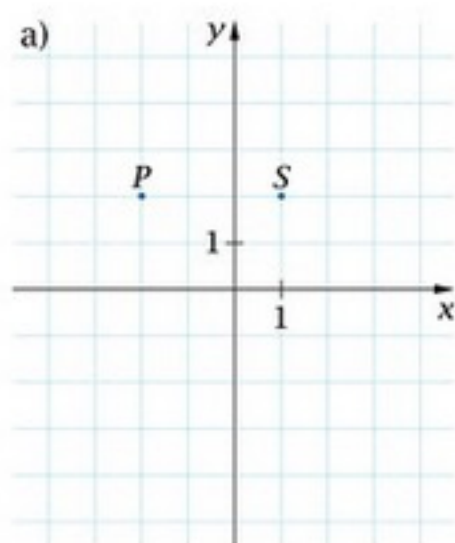
b)



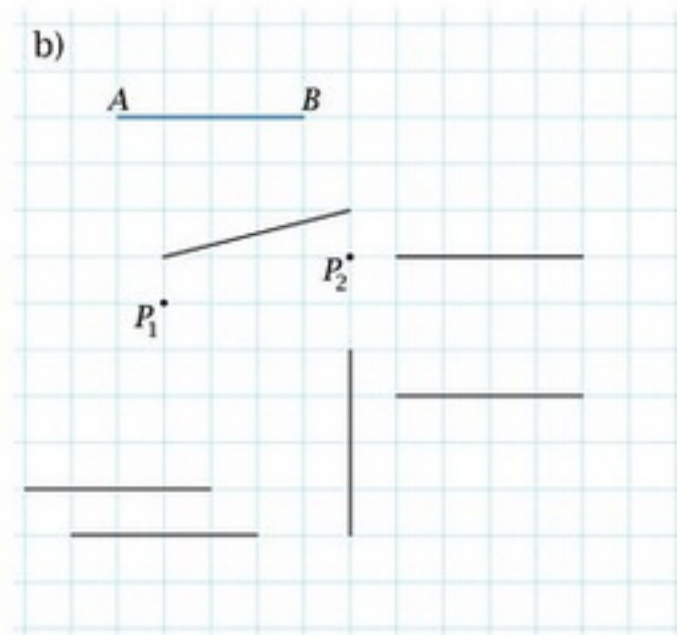
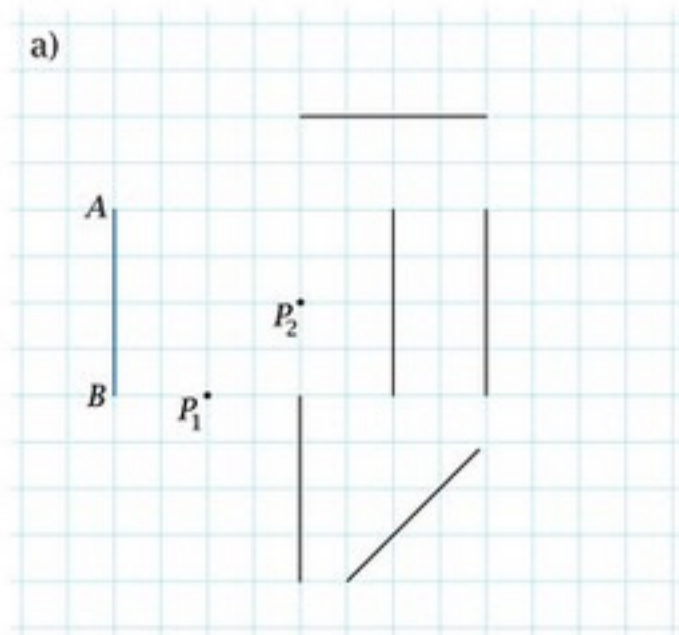
c)



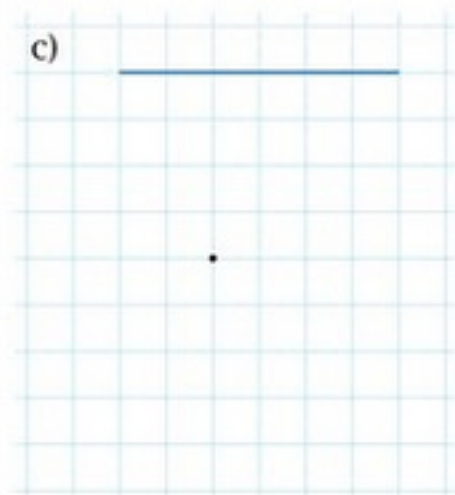
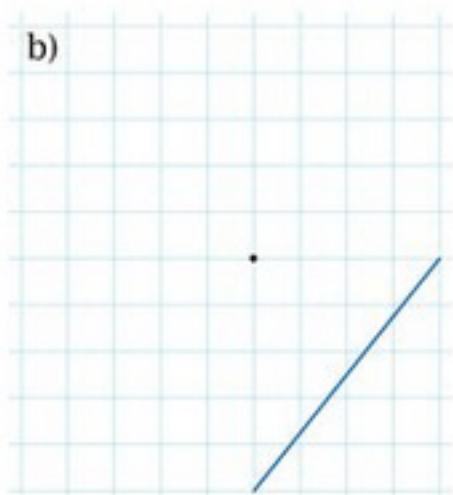
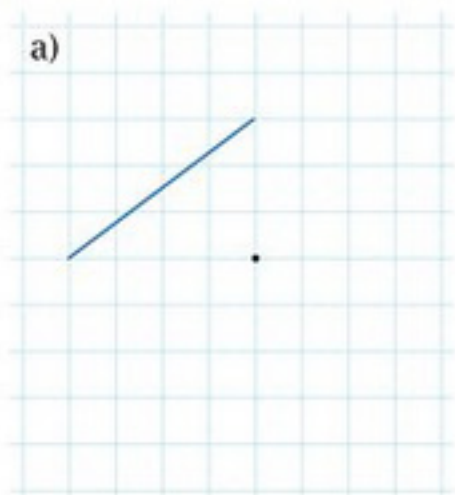
5. Zaznacz punkt symetryczny do punktu P względem punktu S i oznacz go P_1 .



6. Wskaż odcinek symetryczny do odcinka AB względem punktu P_1 i oznacz jego końce, odpowiednio, A_1 i B_1 oraz odcinek symetryczny do odcinka AB względem punktu P_2 i oznacz go A_2B_2 .

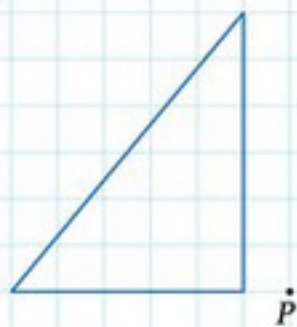


7. Narysuj odcinek symetryczny do danego odcinka względem zaznaczonego punktu.

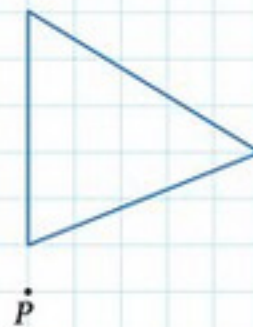


8. Narysuj trójkąt symetryczny do danego trójkąta względem punktu P .

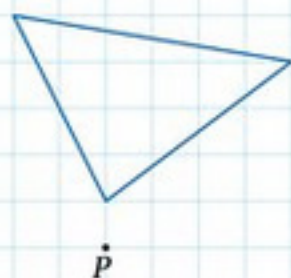
a)



c)



b)

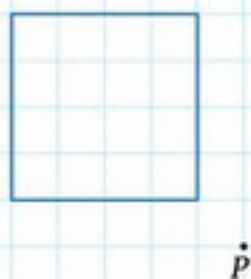


d)



9. Narysuj czworokąt symetryczny do danego czworokąta względem punktu P .

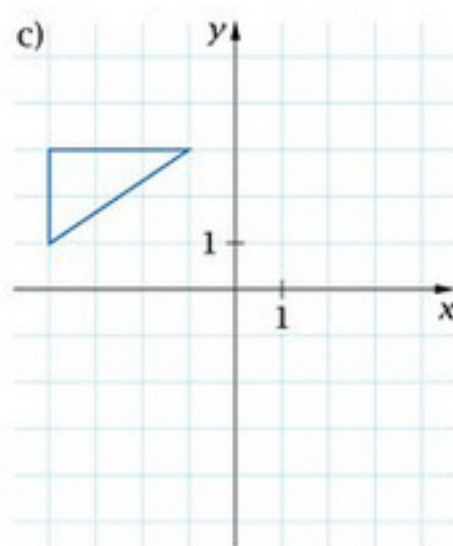
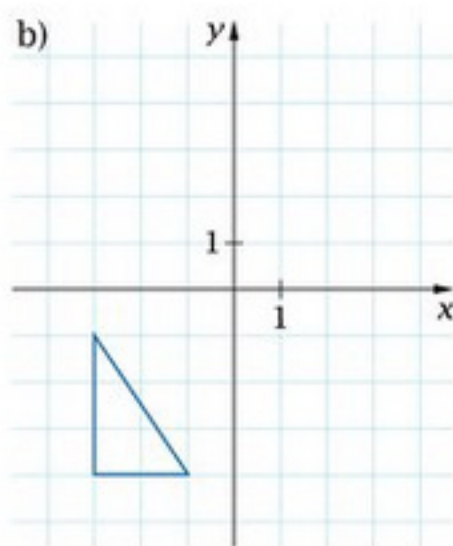
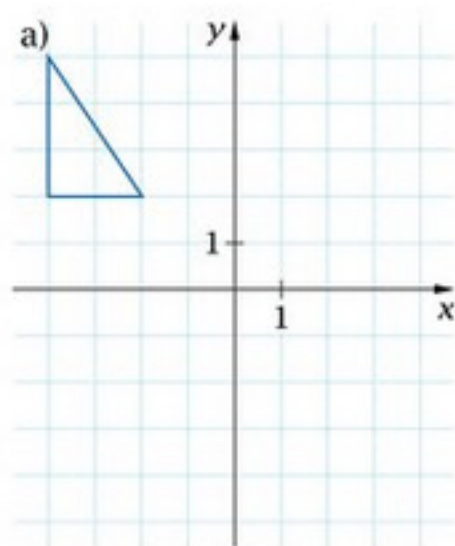
a)



b)

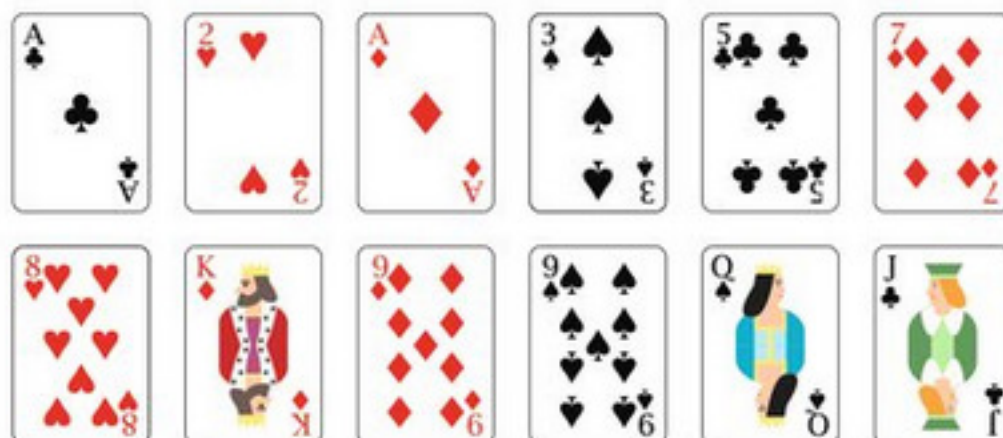


10. Narysuj trójkąt symetryczny do danego trójkąta względem punktu $(0, 0)$.

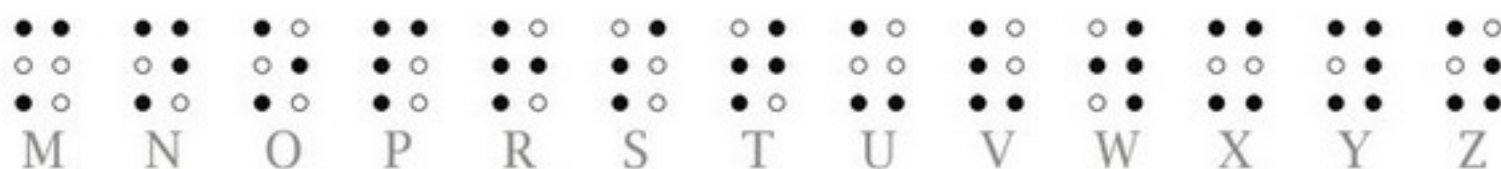
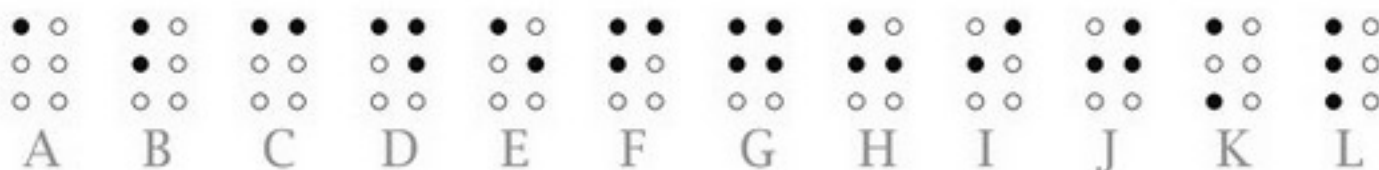


6.6 Środek symetrii figury

1. Które z kart mają środek symetrii? Zaznacz je petlą.



2. Poniżej podano znaki alfabetu Braille'a używanego przez niewidomych. Każdy z tych znaków to układ wypukłych kropek wybranych z podstawowego układu sześciu kropek. Które z tych znaków mają środek symetrii? Zaznacz go.



3. Pokoloruj te figury, które mają środek symetrii. Zaznacz ten środek. Jeśli figura nie ma środka symetrii, to napisz „brak środka symetrii”.



prostokąt



kwadrat



trapez równoramienny



połowa koła



trójkąt
równoboczny



trójkąt
równoramienny



trapez
prostokątny



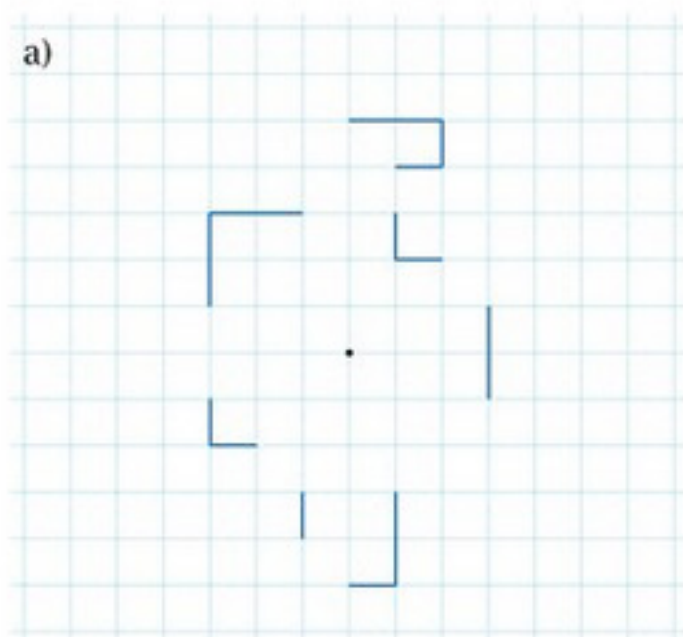
równoległobok

4. Czy poniższe figury mają środek symetrii? Wpisz TAK lub NIE w polach tabeli.

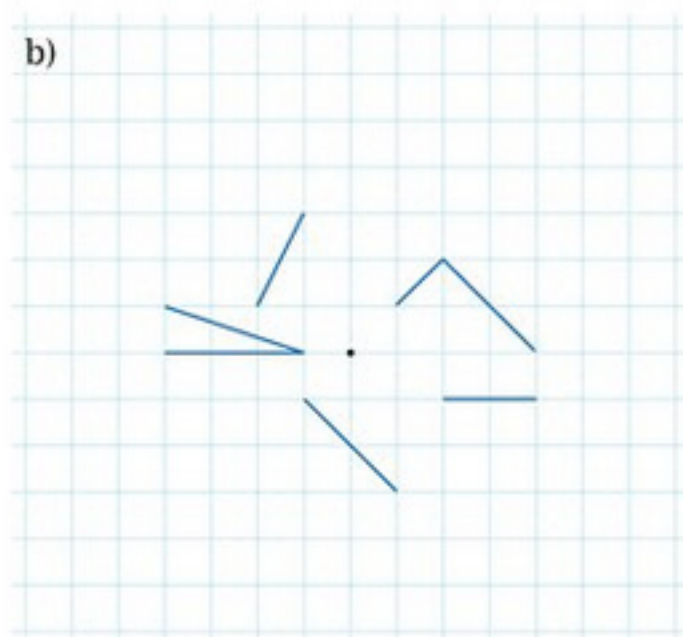
Środek symetrii						

5. Uzupełnij rysunek tak, aby zaznaczony punkt był środkiem symetrii otrzymanej figury.

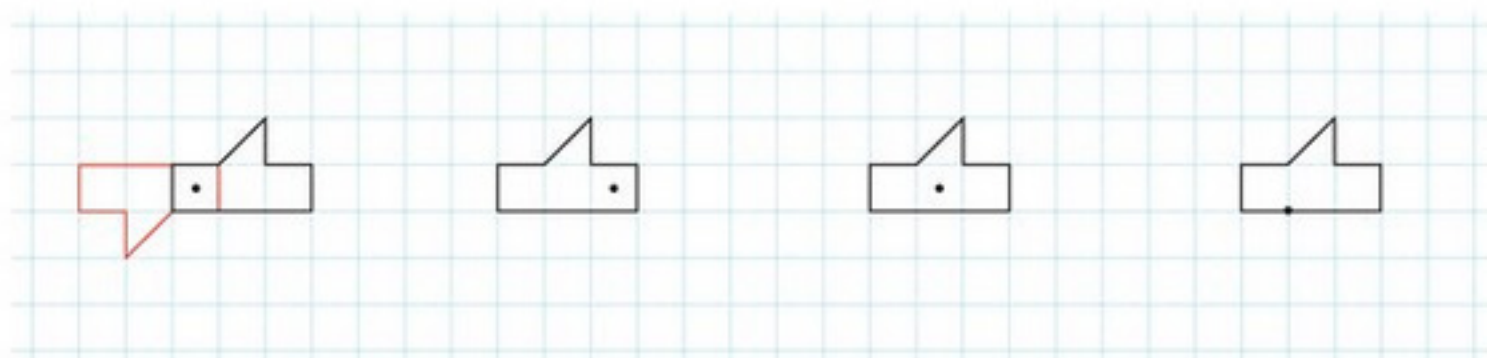
a)



b)



6. Na pierwszym rysunku figurę narysowaną czarnym kolorem uzupełniono tak, że otrzymano figurę środkowosymetryczną, a jej środkiem symetrii jest zaznaczony punkt. Uzupełnij pozostałe figury tak, by otrzymać figury środkowosymetryczne i by zaznaczony punkt był ich środkiem symetrii.

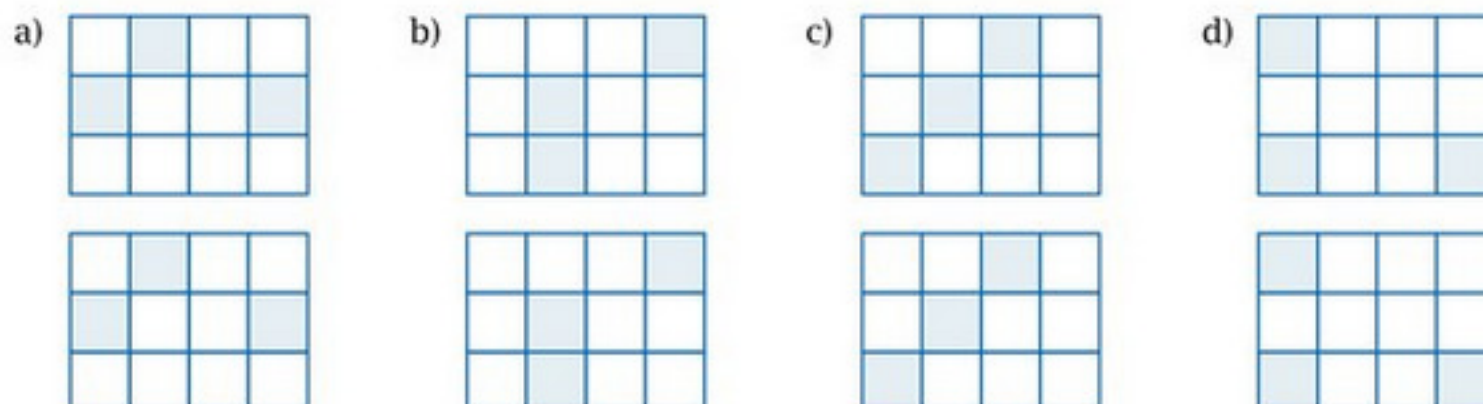


Sprawdź, ile umiesz

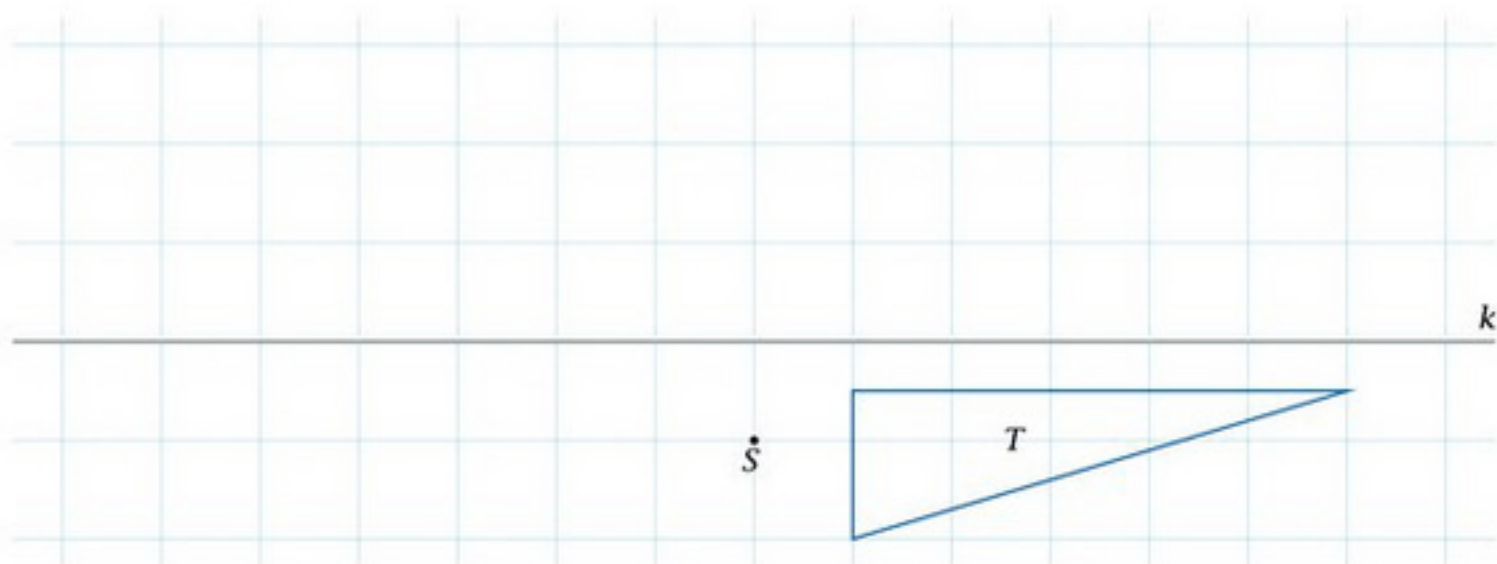
1. Czy poniższe figury mają środek lub oś symetrii? Wpisz TAK lub NIE w polach tabeli.

Oś symetrii					
Środek symetrii					

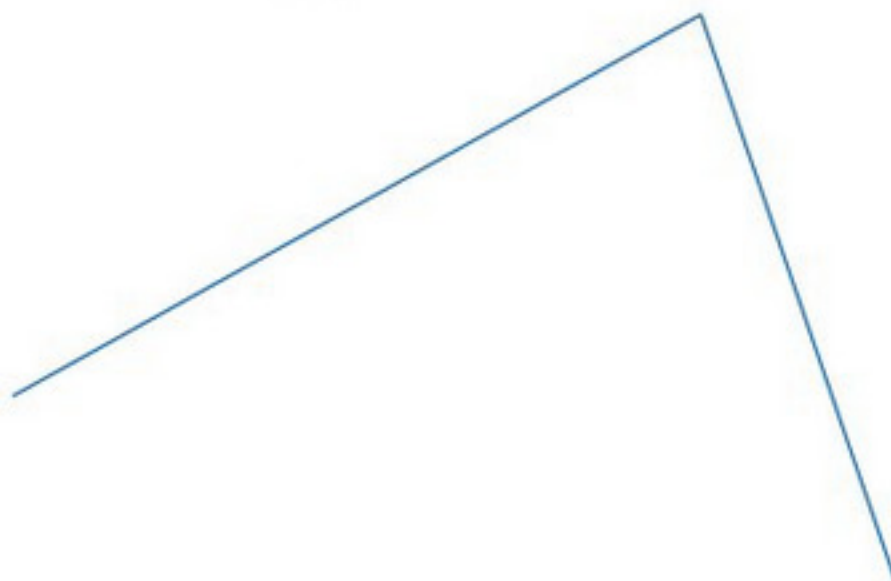
2. Zamaluj jak najmniej kwadracików tak, aby górna figura była osiowosymetryczna, a dolna środkowosymetryczna.



3. Narysuj trójkąt symetryczny do trójkąta T względem prostej k i trójkąt symetryczny do trójkąta T względem punktu S .

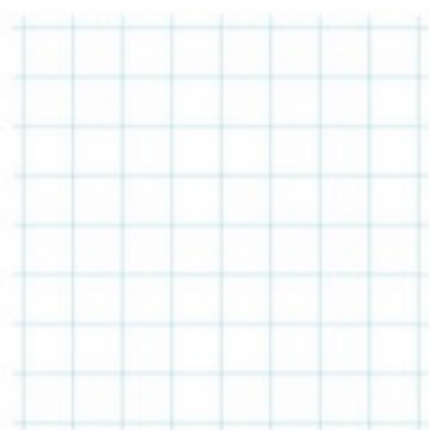


4. Narysowany kąt ma 80° . Skonstruuj kąt o mierze 20° .

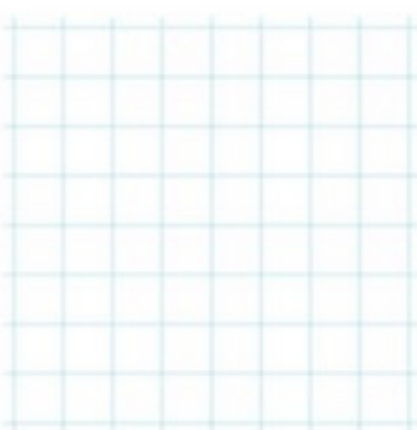


5. Narysuj układ współrzędnych. Zaznacz w nim punkt P , a następnie punkt symetryczny do tego punktu względem podanej prostej lub punktu.

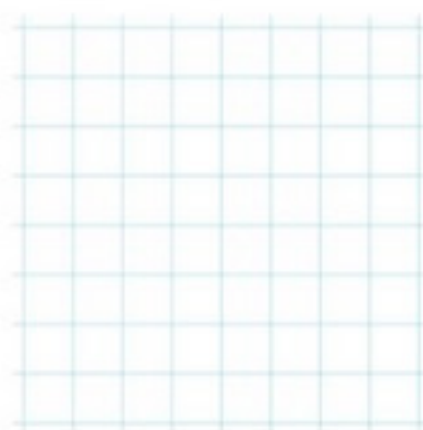
a) $P = (4, 2)$ względem
osi x



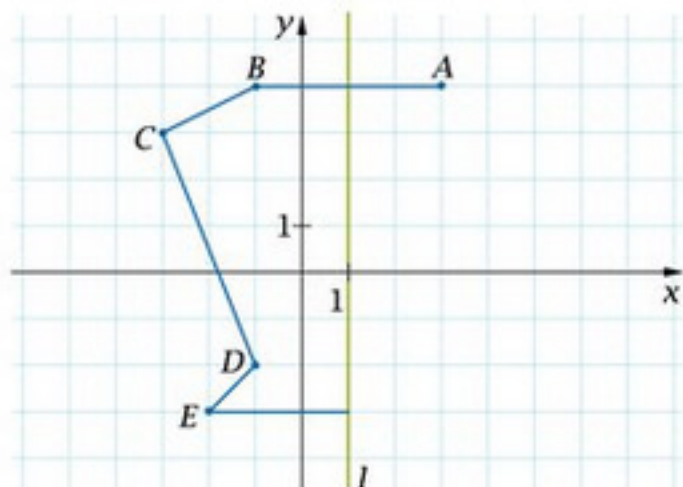
b) $P = (-3, 1)$ względem
osi y



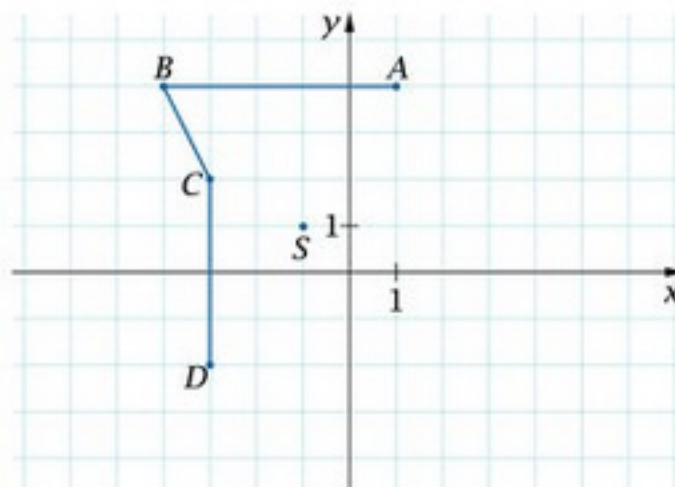
c) $P = (-2, -1)$ względem
punktu $(0, 0)$



6. Na rysunku przedstawiono fragment wielokąta $ABCDEFGH$. Ośią symetrii tego wielokąta jest prosta l . Znajdź współrzędne punktów F , G i H .



7. Na rysunku przedstawiono fragment wielokąta $ABCDEF$. Wielokąt ten ma środek symetrii w punkcie $S = (-1, 1)$. Znajdź współrzędne punktów E i F .



8. Które z poniższych znaków drogowych mają oś symetrii? Narysuj te osie. Które z tych znaków mają środek symetrii? Zaznacz go wyraźnie.

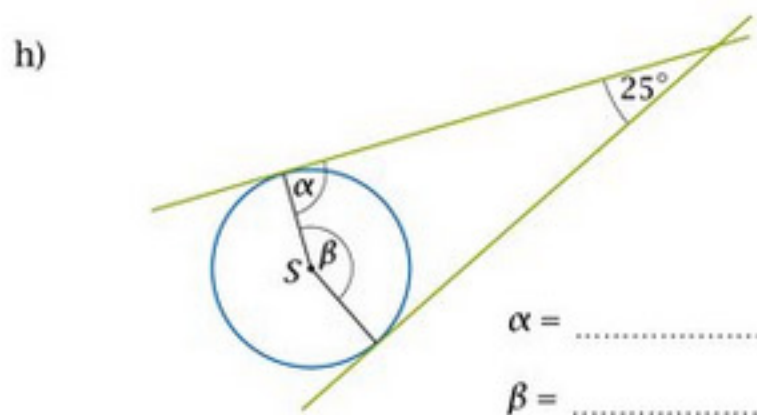
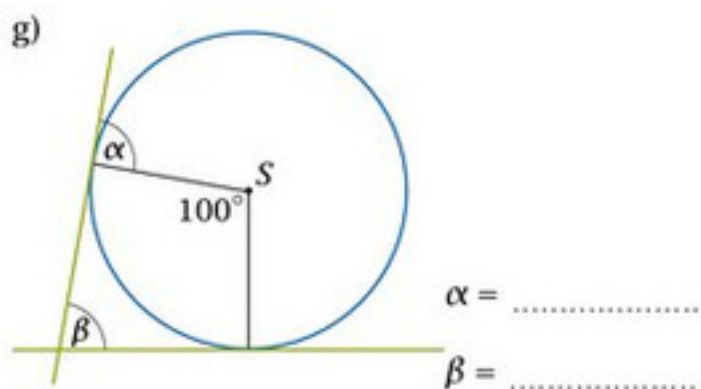
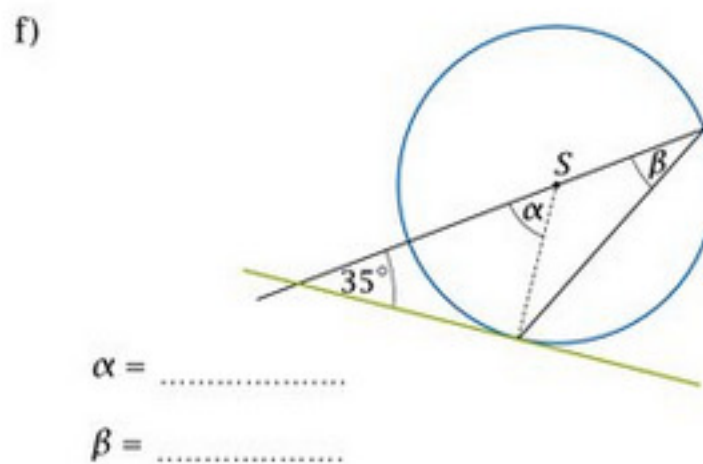
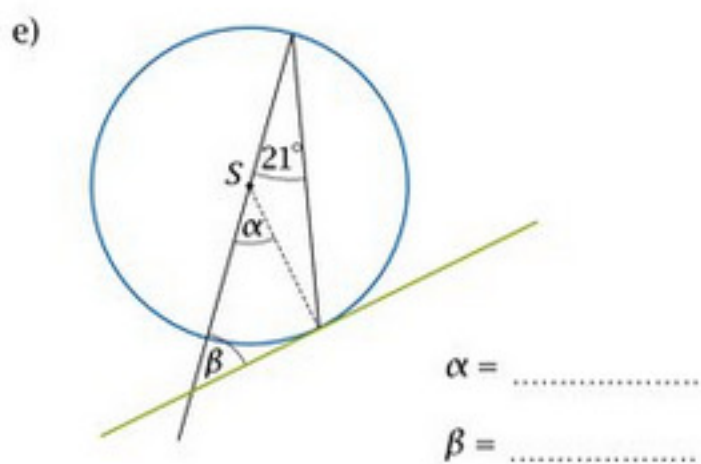
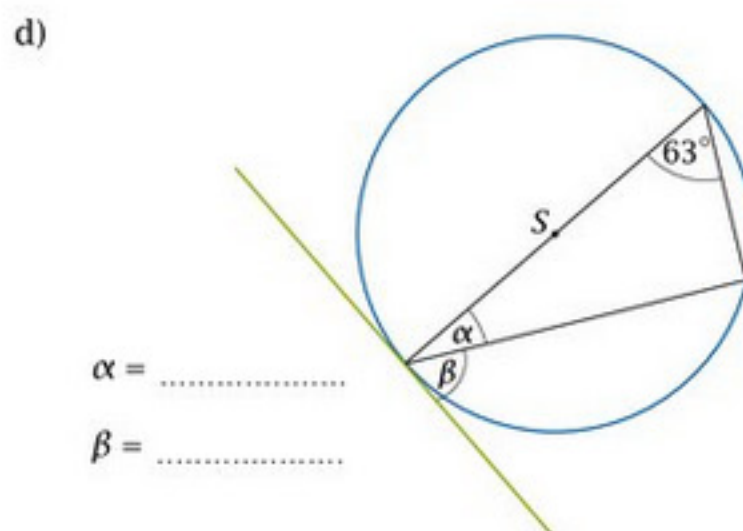
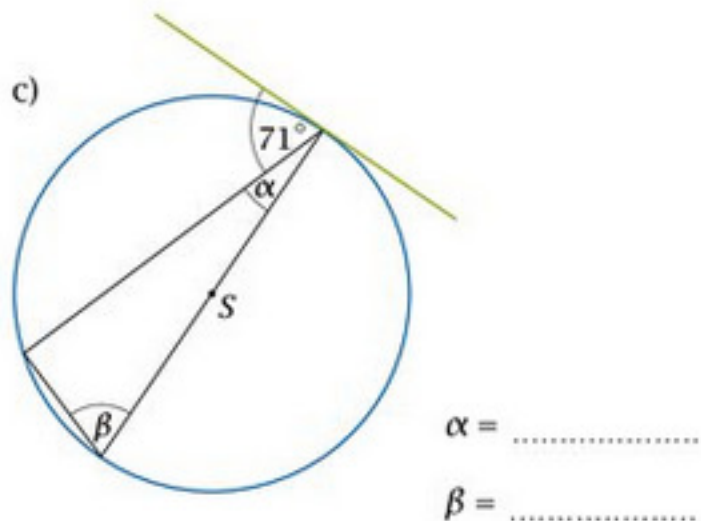
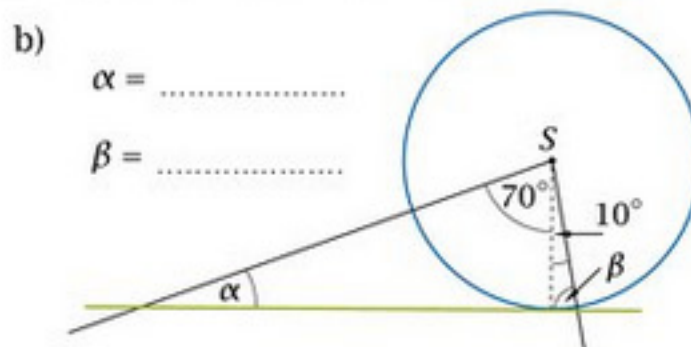
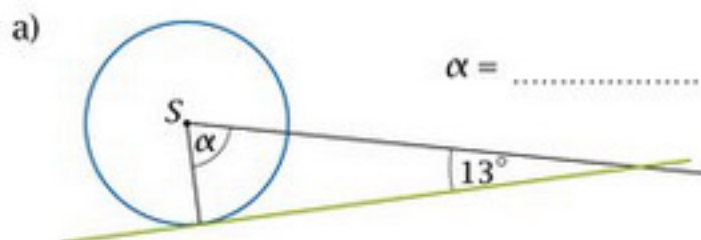


9. Uzupełnij tabelę.

Punkt P	Punkt symetryczny do punktu P względem		
	osi x	osi y	punktu $(0, 0)$
$(-2, 6)$			
$(5, -3)$			
$(-7, -8)$			
$(0, 10)$			
$(-4, 0)$			
	$(2, 8)$		
		$(-4, 9)$	
			$(1, -5)$

7.1 Styczna do okręgu

1. Zielone proste są styczne do okręgu o środku w punkcie S . Oblicz miary kątów oznaczonych literami. (Możesz pomocniczo dopisać na rysunku miary innych kątów).

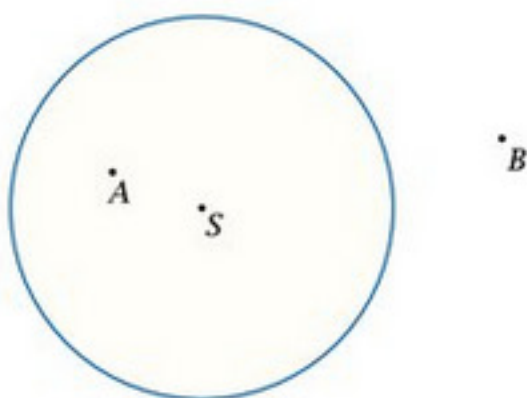


7.2 Wzajemne położenie dwóch okręgów

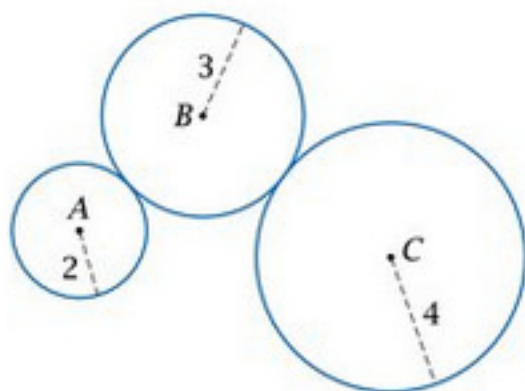
1. Dorysuj dwa okręgi tak, aby ich środkami były zaznaczone punkty oraz aby:
- a) oba były rozłączne z narysowanym okręgiem, b) oba przecinały narysowany okrąg.



2. Narysuj okręgi o środkach A i B tak, aby były styczne do narysowanego okręgu o środku S .

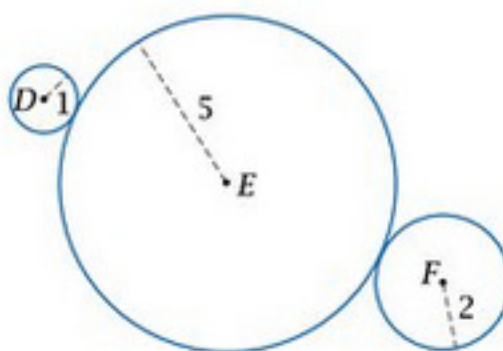


3. Oblicz odległości między środkami okręgów stycznych do siebie.



$$AB = 2 + 3 =$$

$$BC =$$

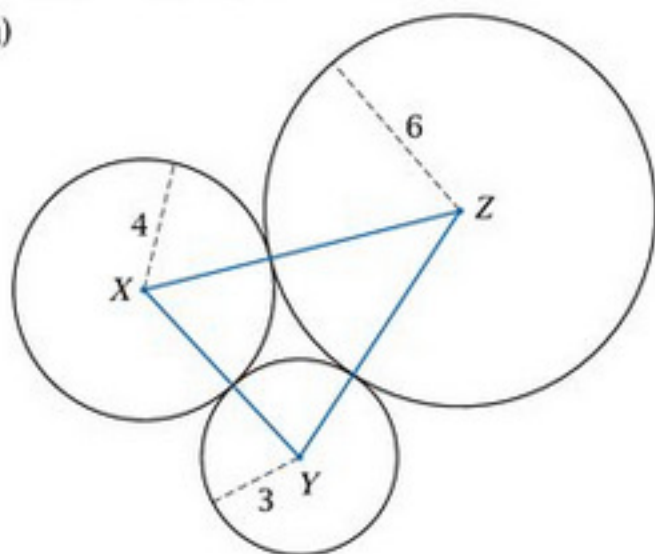


$$DE =$$

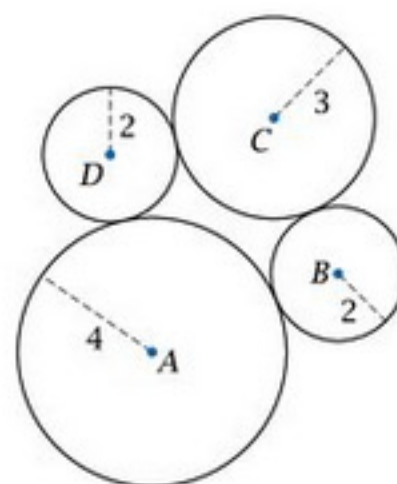
$$EF =$$

4. Oblicz obwody wielokątów XYZ oraz $ABCD$, których wierzchołkami są środki narysowanych okręgów stycznych zewnętrznie.

a)



b)



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

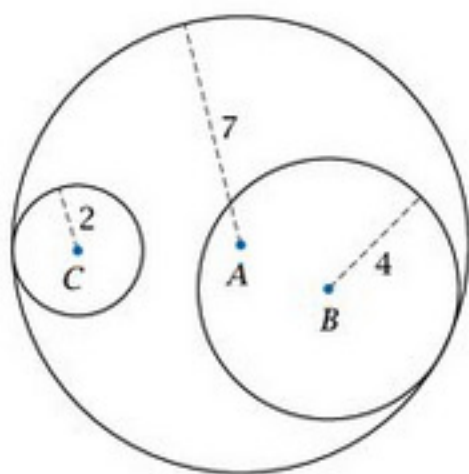
.....

.....

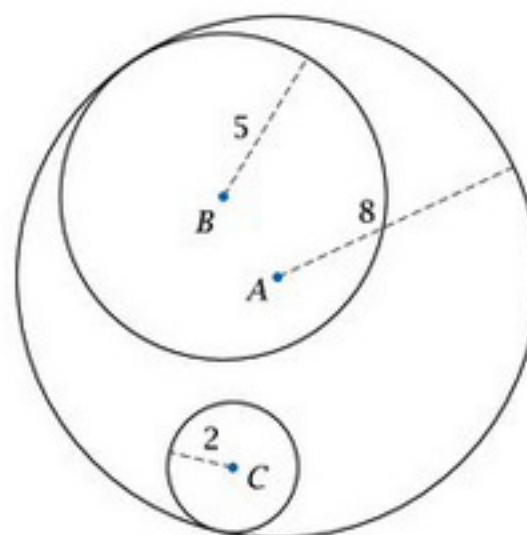
.....

5. Oblicz odległości między środkiem A największego okręgu a środkami okręgów do niego stycznych.

a)



b)



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7.3 Liczba π . Długość okręgu

1. Zakreśl liczby, które są większe od π .

$3\frac{3}{10}$

$3,015$

$3,1$

$\frac{16}{5}$

$\sqrt{7}$

$2\sqrt{2}$

$3,41$

$\frac{4}{3}$

2. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$ i podaj wynik działania z dokładnością do części setnych.

$$3\pi + 4 \approx 3 \cdot 3,14 + 4 = 13,42$$

a) $\pi + 7 \approx \dots\dots\dots$

d) $5\pi \approx \dots\dots\dots$

b) $\pi - 2 \approx \dots\dots\dots$

e) $2\pi + 1 \approx \dots\dots\dots$

c) $2\pi \approx \dots\dots\dots$

f) $10\pi - 5 \approx \dots\dots\dots$

3. Zapisz w jak najprostszej postaci.

$$4 \cdot 6\pi + 3\pi = 24\pi + 3\pi = 27\pi$$

a) $2 \cdot 7\pi = \dots\dots\dots$

d) $9\pi - 7\pi = \dots\dots\dots$

b) $5 \cdot 3\pi = \dots\dots\dots$

e) $2 \cdot 5\pi + 6\pi = \dots\dots\dots$

c) $2\pi + 5\pi = \dots\dots\dots$

f) $3 \cdot 7\pi - \pi = \dots\dots\dots$

4. Oblicz podane wielkości, przyjmując, że $\pi \approx 3,14$.



20 mm



58 cm



35 cm

Obwód tarczy zegarka:

.....
.....

Obwód koła samochodowego:

.....
.....

Obwód pizzy:

.....
.....

5. Uzupełnij tabelę. Ustalając przybliżoną długość okręgu, przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

Promień okręgu	Średnica okręgu	Długość okręgu	Przybliżona długość okręgu
3	6	6π	$6 \cdot 3,14 = 18,84$
		8π	
4,5			
	7		

$$\text{Obwód} = 9\pi$$

$$2\pi r = 9\pi \quad | : 2\pi$$

$$r = \frac{9\pi}{2\pi} = \frac{9}{2} = 4,5$$

6. Oblicz promień koła o podanym obwodzie.

a) Obwód = 10π

b) Obwód = 24π

c) Obwód = $0,8\pi$

.....

.....

.....

7. Oblicz przybliżoną długość promienia koła o podanym obwodzie.

$$\text{Obwód} = 10 \text{ cm}$$

$$2\pi r = 10 \quad | : 2\pi$$

$$r = \frac{10}{2\pi} \approx \frac{10}{2 \cdot 3,14} \approx 1,59 [\text{cm}]$$

a) Obwód = 20 cm

b) Obwód = 5 km

.....

.....

.....

8. Jaki promień będzie miał okrąg zrobiony z drutu o podanej długości?

$$\text{długość drutu: } 50 \text{ m}$$

$$2\pi r = 50 \quad | : 2\pi$$

$$r = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi} \approx 7,96 [\text{m}]$$

a) 4 m

b) 70 cm

.....

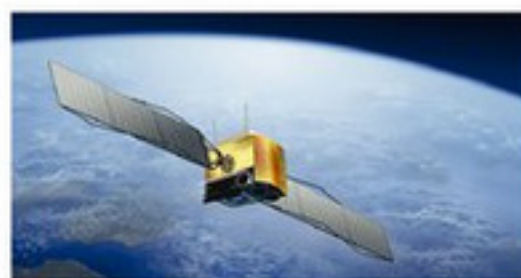
.....

.....

9. a) Satelita obiega Ziemię wzdłuż okręgu o promieniu 42 000 km. Jaką drogę pokonuje w ciągu jednego okrążenia Ziemi?

.....

.....



b) Koń biega wokół cyrkowej areny o promieniu 8 m. Jaką drogę pokona, obiegając arenę 10 razy?

.....



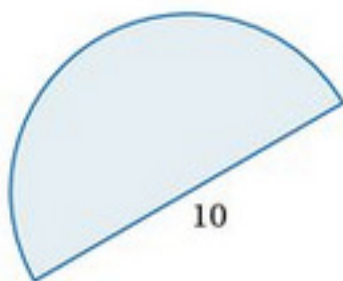
c) Najstarszy diabelski młyn miał średnicę równą 75 m. Zaprojektował go w Chicago George Ferris w 1893 roku. Jaką drogę pokonał pasażer tego młyna, który obrócił się 5 razy?

.....

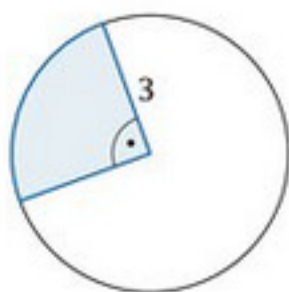
.....

10. Oblicz obwody zacieniowanych figur.

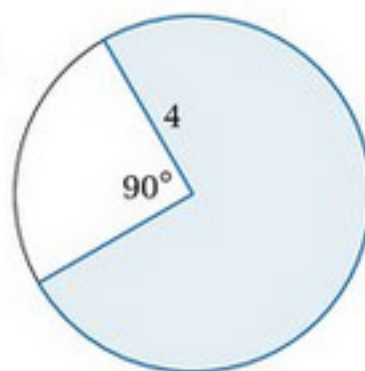
a)



b)



c)

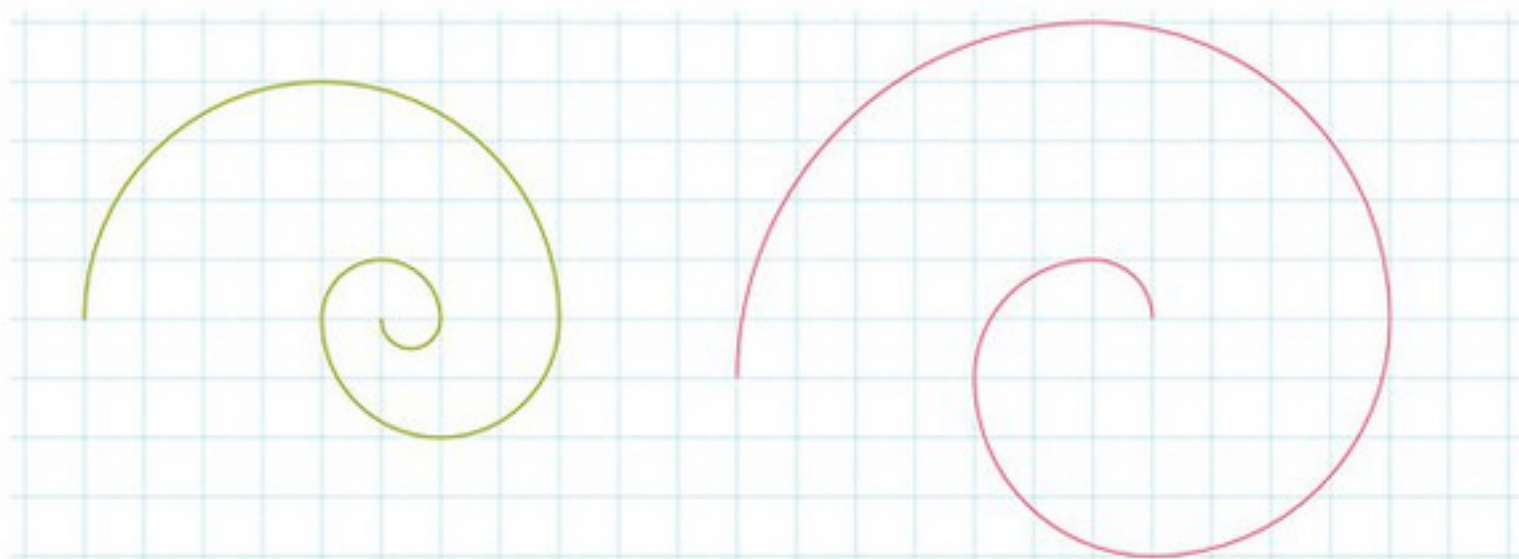


.....

.....

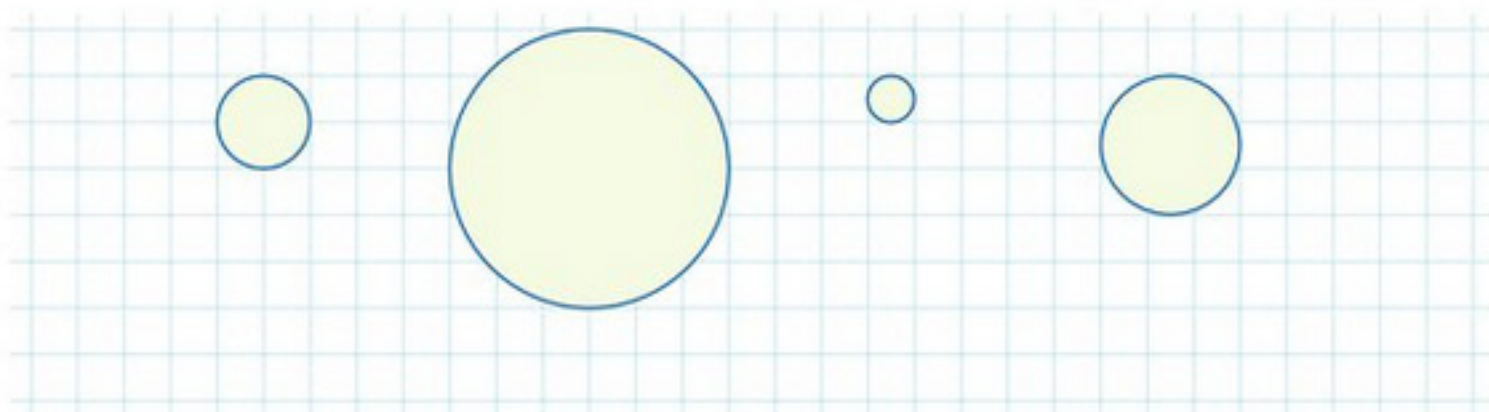
.....

11. Oblicz długości narysowanych spirali. Pierwsza z nich jest zbudowana z półokręgów, a druga — z ćwiartek okręgów. Przyjmij, że bok jednej kratki ma długość 1.



7.4 Pole koła

1. Oblicz pola narysowanych kół. Przyjmij, że długość boku jednej kratki jest równa 1.



2. Oblicz przybliżone pola: szyby w bulaju, talerzyka i monety. Przyjmij, że $\pi \approx 3,14$.

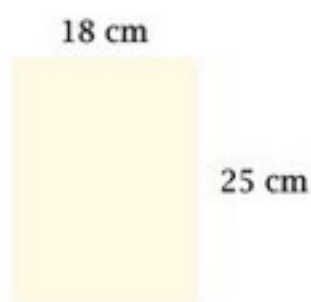
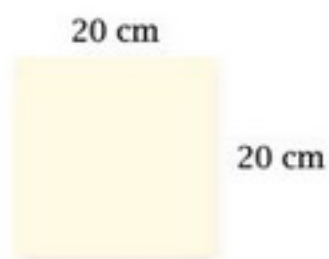
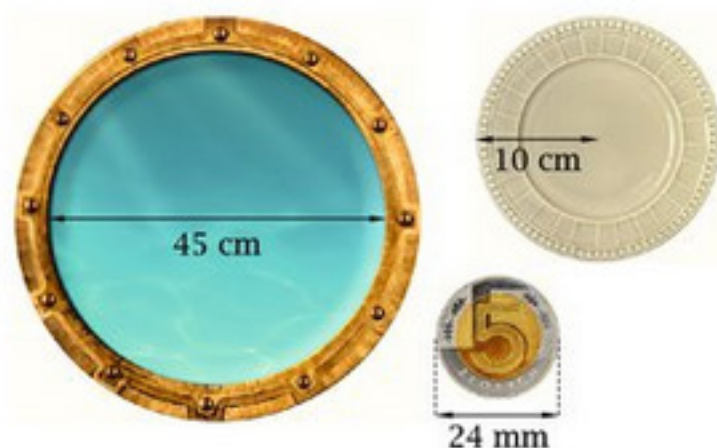
.....

.....

.....

.....

.....



3. Oblicz pola największych kół, jakie można wyciąć z prostokątnych kartek o wymiarach takich, jak na rysunkach.

.....

.....

.....

.....

$$\begin{aligned}
 P &= 5\pi \\
 \pi r^2 &= 5\pi \quad | : \pi \\
 r^2 &= \frac{5\pi}{\pi} = 5 \\
 r &= \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

4. Oblicz promień koła o podanym polu.

a) $P = 9\pi$

b) $P = 36\pi$

c) $P = 0,25\pi$

.....

.....

.....

5. Oblicz przybliżony promień koła o podanym polu.

$$\begin{aligned}
 P &= 10 \text{ cm}^2 \\
 \pi r^2 &= 10 \\
 r^2 &= \frac{10}{\pi} \\
 r &= \sqrt{\frac{10}{\pi}} \approx 1,78 \text{ [cm]}
 \end{aligned}$$

a) 30 cm^2

b) 520 m^2

c) 2 km^2

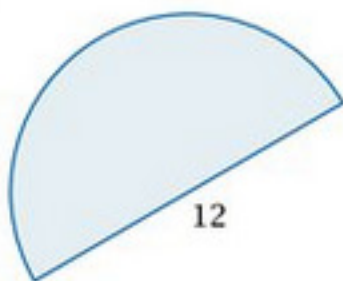
.....

.....

.....

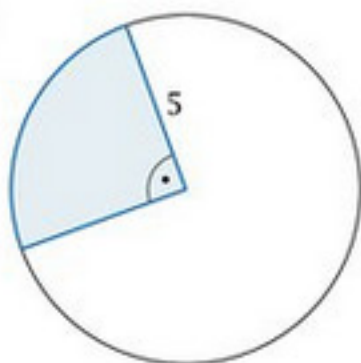
6. Oblicz pola zacieniowanych figur.

a)



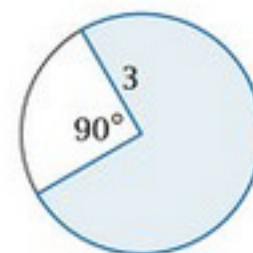
.....

b)



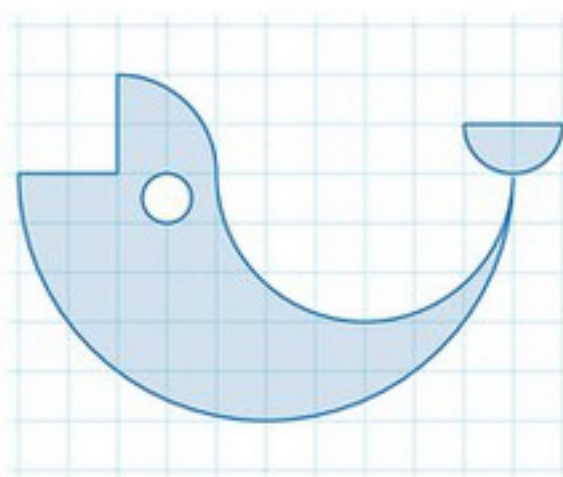
.....

c)



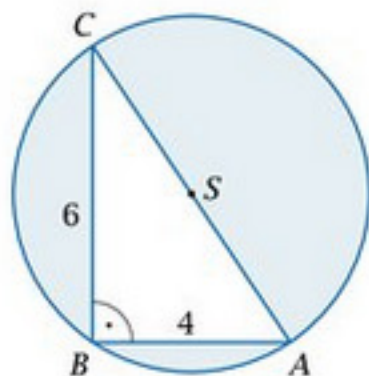
.....

7. Oblicz pole figury narysowanej obok. Przyjmij, że długość boku kratki jest równa 1.



8. Punkt S jest środkiem koła. Oblicz pola zacieniowanych figur.

a)



$$AC^2 = 6^2 + 4^2 =$$

.....

$$AC = 2r, \text{ więc } r =$$

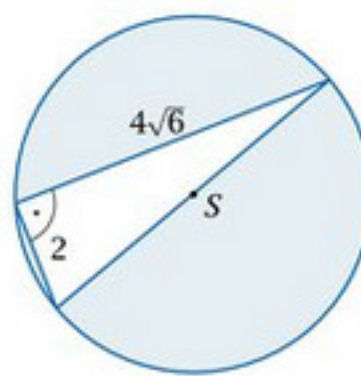
$$P_{\odot} =$$

$$P_{\triangle} =$$

$$P = P_{\odot} - P_{\triangle} =$$

.....

b)



.....

.....

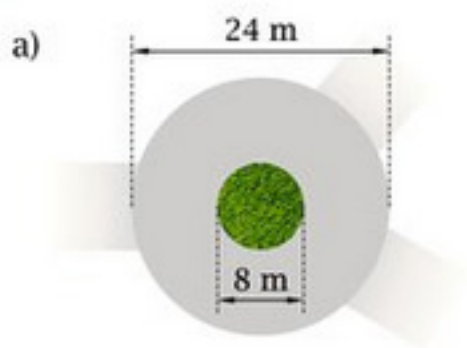
.....

.....

.....

.....

9. Oblicz pole powierzchni jezdni otaczającej trawiastą wysepkę ronda.



Pole jezdni i wysepki:

.....

Pole wysepki:

.....

Pole jezdni:

.....



Pole jezdni i wysepki:

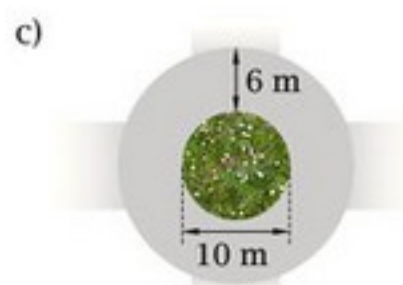
.....

Pole wysepki:

.....

Pole jezdni:

.....



Pole jezdni i wysepki:

.....

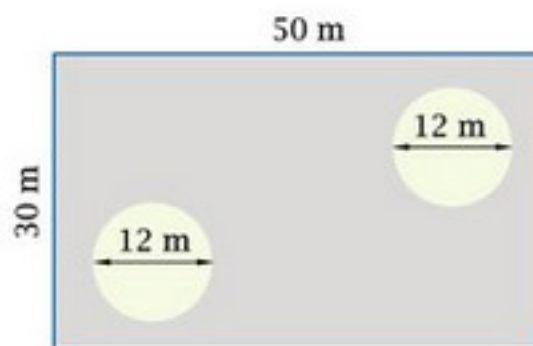
Pole wysepki:

.....

Pole jezdni:

.....

10. Firma drogowa ma pokryć kostką brukową plac w kształcie prostokąta z dwoma kołistymi kwiatowymi klombami. Ile będzie kosztować kostka potrzebna do tych prac, jeśli 1 m^2 kostki kosztuje 40 zł?



.....

.....

.....

.....

Odpowiedź:

11. Pizzeria oferuje pizzę w trzech rozmiarach. Oblicz przybliżoną powierzchnię każdej pizzy i koszt 1 cm^2 każdej z nich.

	Średnica pizzy [cm]	Cena pizzy [zł]	Powierzchnia pizzy [cm^2]	Koszt 1 cm^2 [zł]
1	28	12		
2	34	24		
3	37	35		

Sprawdź, ile umiesz

1. a) Jaką długość ma bok kwadratu o obwodzie takim samym jak koło o promieniu 10 m? b) Jaką długość ma bok kwadratu o polu takim samym jak koło o promieniu 2 m?

Obwód koła =

Pole koła =

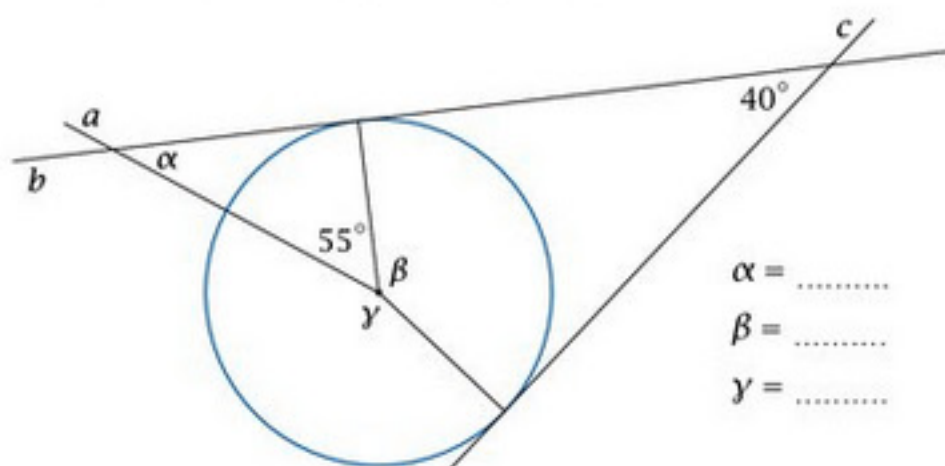
Obwód kwadratu =

Pole kwadratu =

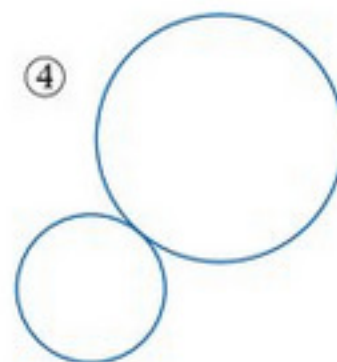
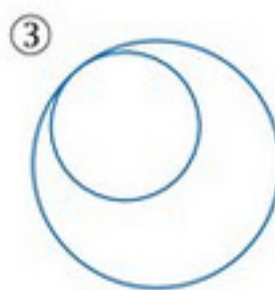
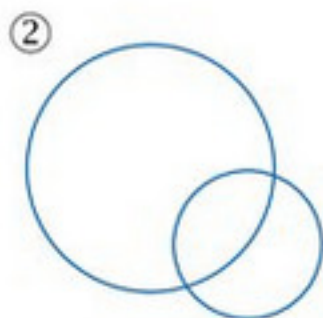
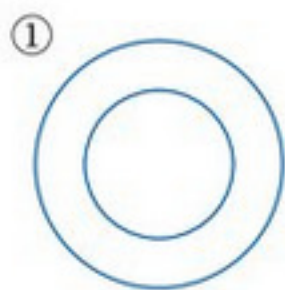
Bok kwadratu =

Bok kwadratu =

2. Proste b i c są styczne do narysowanego okręgu. Oblicz miary kątów α , β i γ .



3. Na każdym z poniższych rysunków narysowano okręgi o promieniach 5 i 3. Na pierwszym rysunku oba okręgi mają środki w tym samym punkcie, na drugim — środek mniejszego okręgu leży na większym okręgu, a na dwóch ostatnich — okręgi są styczne.



a) Na każdym z rysunków naszkicuj okrąg, który jest jednocześnie styczny zewnętrznie do mniejszego okręgu i wewnętrznie — do okręgu większego.

b) Dla pierwszych trzech rysunków ustal, jaki największy promień może mieć okrąg jednocześnie styczny zewnętrznie do mniejszego okręgu i wewnętrznie do większego okręgu.

4. a) Jaki jest promień koła, które ma taki sam obwód jak kwadrat o boku 5 cm?

Obwód kwadratu =

Obwód koła =

Promień koła =

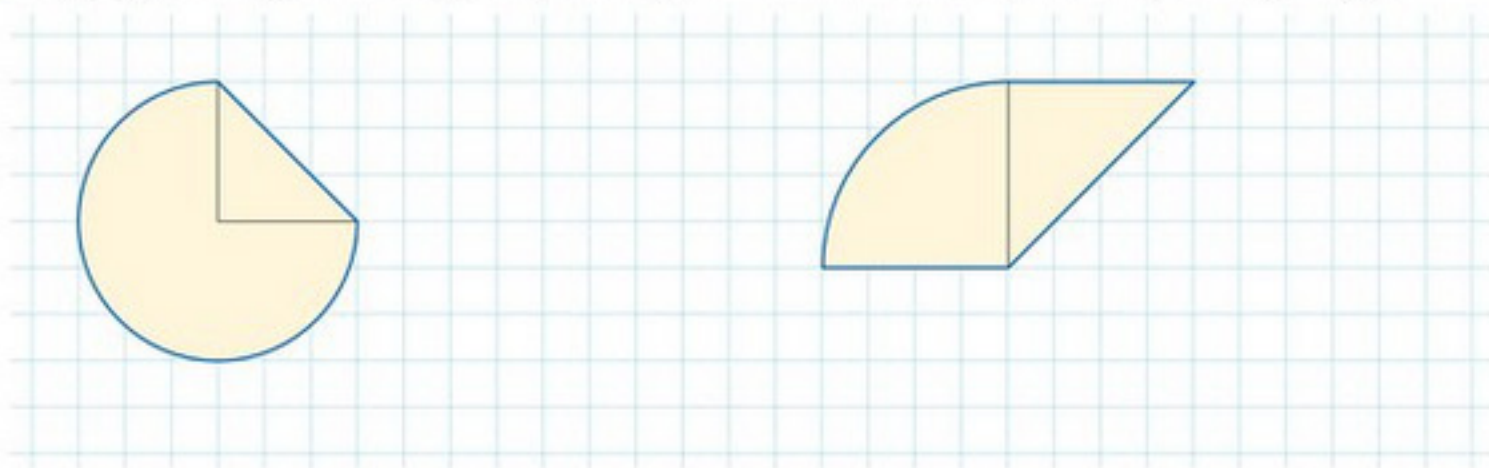
- b) Jaki jest promień koła, które ma takie samo pole jak kwadrat o boku 6 cm?

Pole kwadratu =

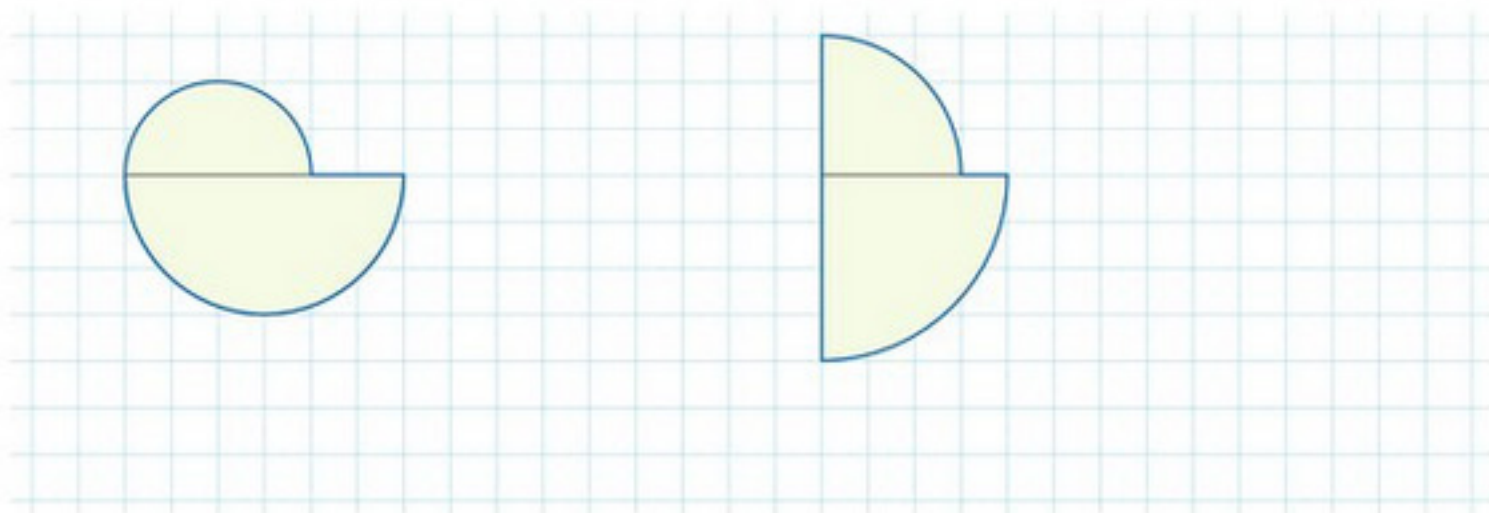
Pole koła =

Promień koła =

5. Przyjmij, że długość boku jednej kratki jest równa 1. Oblicz pola narysowanych figur.



6. Przyjmij, że długość boku jednej kratki jest równa 1. Oblicz obwody narysowanych figur.



7. Rdzeń i pierścień monet o nominałach 2 zł i 5 zł zbudowane są z dwóch metali. Rdzeń 2-złotówki i pierścień 5-złotówki są zrobione z miedzioniklu, a pozostałe części — z brązu. Oblicz pole powierzchni zajęte przez każdy z tych metali po jednej stronie monety.

Moneta	Średnica monety	Średnica rdzenia	Metal rdzenia	Metal pierścienia
2 zł	21,5 mm	12 mm	miedzionikiel	brąz
5 zł	24 mm	16 mm	brąz	miedzionikiel



Pole rdzenia =

Pole monety =

Pole pierścienia =



Pole rdzenia =

Pole monety =

Pole pierścienia =

8.1 Ile jest możliwości?

1. W stołówce możesz wybrać jeden z owoców: jabłko, gruszkę albo banana i jedną z kanapek: z serem, z jajkiem, z tuńczykiem lub z wędliną. W tabeli przedstawiono wszystkie możliwości wyboru zestawu składającego się z jednego owocu i jednej kanapki.

		Kanapka			
		z serem (KS)	z jajkiem (KJ)	z tuńczykiem (KT)	z wędliną (KW)
Owoc	jabłko (J)				△
	gruszka (G)				
	banan (B)	×		×	

Pole tabeli oznaczone trójkątem odpowiada zestawowi: jabłko i kanapka z wędliną, co możemy zapisać, korzystając z oznaczeń wprowadzonych w tabelce, następująco: (J, KW).

- Jaki zestaw oznacza zapis (G, KS)?
- Zapisz, jakim zestawom odpowiadają pola tabeli oznaczone krzyżykami.
- Ile jest możliwości wybrania zestawu składającego się z owocu i kanapki?
- Ile jest możliwości wybrania zestawu z kanapką z serem lub jajkiem?
- Ile jest możliwości wybrania zestawu bez gruszki?

2. Dla poniżej opisanych sytuacji dokończ tabelki i odpowiedz na pytania.

Na placu znajdują się 4 ciągniki i 6 przyczep. Na ile sposobów można utworzyć zestaw złożony z ciągnika i przyczepy?

		Przyczepy		
		p1	p2	
Ciągniki	c1			
	c2			

Pan Jan wybiera jedną spośród 5 koszul i jeden spośród 3 krawatów. Ilu różnych wyborów koszuli i krawatu może dokonać?

		Koszula	
		ko1	
Krawat	kr1		

3. Ada jada na śniadanie jeden z 4 rodzajów płatków z mlekiem lub jogurtem. Na ile sposobów może wybrać te dwa składniki?

4. W pudełku znajdują się 4 kartki, na każdej napisana jest inna litera: A, B, C lub D.



a) Wyciągamy z pudełka jedną kartkę, zapisujemy wylosowaną literę, wkładamy tę kartkę z powrotem do pudełka. Potem losujemy drugą kartkę i zapisujemy wylosowaną literę obok poprzednio zapisanej.

Wpisz w puste pola tabeli odpowiednie pary liter. Ile różnych literowych par możemy w taki sposób uzyskać?

		Pierwsza wylosowana litera			
		A	B	C	D
Druga wylosowana litera	A	AA			
	B			CB	
	C		BC		
	D				

b) Wyciągamy z pudełka jedną kartkę, zapisujemy wylosowaną literę, odkładamy tę kartkę (nie wraca ona do pudełka). Potem losujemy drugą kartkę z literą, którą zapisujemy obok pierwszej.

Wpisz w puste pola tabeli odpowiednie pary liter. Dlaczego niektóre pola tabeli zostały usunięte? Ile różnych literowych par możemy w taki sposób uzyskać?

		Pierwsza wylosowana litera			
		A	B	C	D
Druga wylosowana litera	A	×			
	B		×		
	C			×	
	D				×

5. Dla poniżej opisanych sytuacji narysuj tabele i odpowiedz na pytania.

a) W dwóch biegach ma startować tych samych pięciu równorzędnych zawodników. Na ile sposobów można wytypować zwycięzców tych biegów?

		Zwycięzca pierwszego biegu				
Zwycięzca drugiego biegu	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

b) W biegu ma startować pięciu równorzędnych zawodników. Na ile sposobów można wytypować dwóch, którzy jako pierwsi dotrą do mety?

	1					
	2					
	3					
	4					
	5					

6. a) Na ile sposobów można pokolorować bałwanka przedstawionego na rysunku obok, jeśli mamy trzy kolory i każde z kół chcemy pomalować innym kolorem?



		Kolor górnego koła		
		Kolor 1	Kolor 2	Kolor 3
Kolor dolnego koła	Kolor 1			
	Kolor 2			
	Kolor 3			

METODA I (ZA POMOCĄ TABELKI)

Bałwanka można pokolorować na sposobów.

Gdyby dopuszczalne było, żeby oba koła pokolorowane były tym samym kolorem, to bałwanka można byłoby pokolorować na sposobów.

METODA II (ZA POMOCĄ REGUŁY MNOŻENIA)

Sposób pokolorowania bałwanka zależy od dwóch wyborów:

- 1) wybór koloru górnego koła — można go dokonać na 3 sposoby (tyle jest dostępnych kolorów),
- 2) wybór koloru dolnego koła — można go dokonać na 2 sposoby (odpada kolor wykorzystany do pokolorowania górnego koła).

Liczba sposobów pokolorowania bałwanka jest iloczynem liczby sposobów dokonania wyboru 1 i wyboru 2, czyli wynosi: $3 \cdot 2 = \dots$

Gdyby dopuszczalne było, żeby oba koła pokolorowane były tym samym kolorem, to wyboru 1 można byłoby dokonać na 3 sposoby i wyboru 2 — też na 3 sposoby. Bałwanka można by wtedy pokolorować na sposobów.

- b) Skorzystaj z METODY II, aby obliczyć, na ile sposobów można pokolorować bałwanka, gdy mamy 100 kolorów. Rozpatrz dwie sytuacje (kolory nie mogą się powtarzać i kolory mogą się powtarzać).

Liczba sposobów pokolorowania, gdy kolory nie mogą się powtarzać =

Liczba sposobów pokolorowania, gdy kolory mogą się powtarzać =

- c) Na ile sposobów można pokolorować bałwanka przedstawionego na rysunku obok, jeśli mamy 10 kolorów i każdy z elementów (koła i cylinder) ma być pomalowany jednym kolorem? Skorzystaj z METODY II. Rozpatrz dwie sytuacje (kolory nie mogą się powtarzać i kolory mogą się powtarzać).



Liczba sposobów pokolorowania, gdy kolory nie mogą się powtarzać =

Liczba sposobów kolorowania, gdy kolory mogą się powtarzać =

8.2 Obliczanie prawdopodobieństw (cd.)

1. Na przyjęciu podano pięć pokrojonych rodzajów warzyw: marchewkę (M), seler naciowy (S), brokuły (B), kalafiora (K) i paprykę (P) oraz trzy sosy: czosnkowy (C), ziołowy (Z) i ogórkowy (O).

a) Pola tabeli obok odpowiadają wszystkim możliwym zestawom składającym się z warzywa i sosu. W niektórych polach wpisano, jakie to zestawy (np. MZ oznacza „marchewkę z sosem ziołowym”). Uzupełnij pozostałe pola tabelki.

		Warzywo				
		M	S	B	K	P
Sos	C			BC		
	Z	MZ				
	O			BO		

b) Ile jest wszystkich możliwych zestawów: warzywo i sos?

Ile jest możliwych zestawów: brokuły i dowolny sos?

Ile jest możliwych zestawów: dowolne warzywo i sos ziołowy?

Ile jest możliwych zestawów: dowolne warzywo oprócz kalafiora i dowolny sos oprócz czosnkowego?

c) Paweł poprosił kolegę, by podał mu jedno z warzyw z jednym z sosów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dostał:

- paprykę z sosem ogórkowym
- brokuły z dowolnym sosem
- dowolne warzywo z sosem ziołowym
- dowolne warzywo oprócz kalafiora z dowolnym sosem oprócz czosnkowego

2. Tomek nie może się zdecydować, jaką kupić szczoteczkę i pastę do zębów. W sklepie oferowane są dwie szczoteczki do zębów (S1 i S2) i siedem past (P1, P2, ... P7).

a) Dokończ tabelę, której pola mają odpowiadać wszystkim możliwym zestawom, składającym się ze szczoteczki i pasty do zębów, jakie Tomek ma do wyboru.

		Pasta do zębów						
		P1						
Szczoteczka	S1							

b) Tomek wybiera jedną szczoteczkę i jedną pastę losowo. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

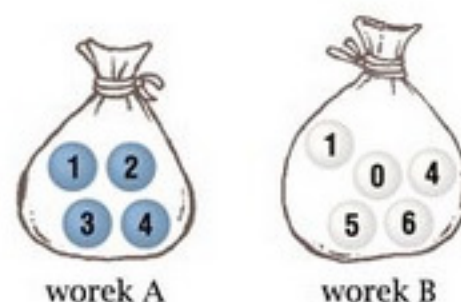
- wybrał szczoteczkę S1 i pastę P6
- wybrał szczoteczkę S2 i jedną z past P3 lub P4
- wybrał szczoteczkę S2 i nie wybrał pasty P1
- nie wybrał zestawu złożonego ze szczoteczki S1 i pasty P5

3. Na ściankach pewnej kostki sześcienniej znajdują się liczby od 1 do 6, a na ściankach kostki czworosiennej — liczby od 1 do 4. Rzucono obiema kostkami. W tabeli przedstawiono wszystkie możliwe wyniki rzutu tymi kostkami.

		Wynik na kostce sześcienniej					
		1	2	3	4	5	6
Wynik na kostce czworosiennej	1						
	2						
	3					●	●
	4						

- a) Ile jest wszystkich możliwych wyników rzutu tymi dwiema kostkami?
- b) W tabeli zieloną kropką zaznaczono jeden z wyników, w którym obie wyrzucone liczby są nieparzyste. Zaznacz zielonymi kropkami pozostałe wyniki spełniające taki warunek. Ile ich jest? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na obu kostkach wypadną liczby nieparzyste?
- c) W tabeli czerwoną kropką zaznaczono jeden z wyników, w którym suma wyrzuconych liczb jest podzielna przez 3. Zaznacz czerwonymi kropkami pozostałe wyniki spełniające taki warunek. Ile ich jest? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych liczb będzie podzielna przez 3?
- d) Zaznacz w tabeli niebieską kropką wszystkie wyniki, w których iloczyn wyrzuconych liczb jest większy od 11. Ile jest takich wyników? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wyrzuconych liczb będzie większy od 11?

4. W dwóch workach znajdują się kule oznaczone cyframi, tak jak na rysunku obok. Z worków losujemy po jednej kuli i z cyfr na nich układamy liczbę: cyfra z worka A jest cyfrą dziesiątek, a cyfra z worka B — cyfrą jedności. Pół tabeli odpowiadają wszystkim możliwym do otrzymania w ten sposób liczbom.



		Cyfra dziesiątek			
		1	2	3	4
Cyfra jedności	0				
	1				
	4				
	5				
	6				

- a) Ile liczb można w ten sposób otrzymać?
- b) Wpisz w odpowiednie pola tabeli liczby 14, 41 i 44.
- c) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby:
- parzystej większej od 20
- nieparzystej podzielnej przez 3



Podręcznik *Matematyka z plusem 8* został dopuszczony przez MEN do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników. Numer dopuszczenia: 780/5/2018

Zestaw dla ucznia składa się z podręcznika i zeszytu ćwiczeń lub ćwiczeń podstawowych. Uczniom poszukującym dodatkowych zadań polecamy zbiór zadań i dostępny w internecie program *Matlandia 8*.



Zeszyt ćwiczeń



Ćwiczenia podstawowe



Zbiór zadań



www.matlandia.pl