

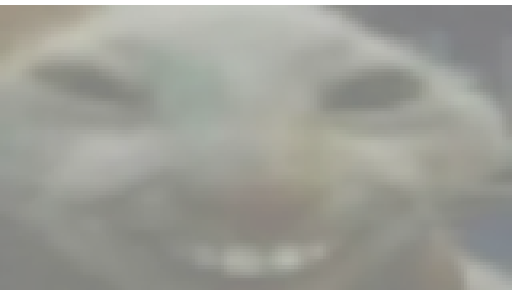
gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



MATEMATYKA Z PLUSEM

multipodręcznik do liceum i technikum

zakres rozszerzony





Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech

4

MATEMATYKA Z PLUSEM

multipodręcznik do liceum i technikum

zakres rozszerzony



Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Ilustracje: *Bartłomiej Brosz*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Fotografie: Archiwum GWO, Shutterstock

Skład (T_EX): *Joanna Szyller*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki (w zakresie rozszerzonym) na poziomie klasy IV liceum i technikum, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr. hab. Jacka Jędrzejewskiego, dr. Edwarda Stachowskiego i dr. Zofii Ireny Krzywickiej-Vauthier.

Numer dopuszczenia: 963/4/2022

ISBN 978-83-8118-479-3

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2022. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Podręcznik został wyprodukowany na papierze posiadającym certyfikaty FSC, PEFC, EU-Ecolabel oraz Blue Angel.

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy. Uwaga. W podręczniku nie należy zapisywać żadnych odpowiedzi, podkreślać ani zaznaczać rozwiązań zadań.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

Spis treści

Prawdopodobieństwo, część 1

■ Prawdopodobieństwo — podstawowe pojęcia	10
■ Obliczanie prawdopodobieństwa	22
■ Drzewka	27
■ Wartość oczekiwana	38
■ Zasada mnożenia i zasada dodawania	43
■ Wariacje	52
■ Kombinacje	60
■ Dwumian Newtona	65
■ Kombinatoryka i prawdopodobieństwo	70
■ Powtórzenie	78

Prawdopodobieństwo, część 2

■ Suma i iloczyn zdarzeń	80
■ Prawdopodobieństwo warunkowe	86
■ Prawdopodobieństwo całkowite	92
■ Zdarzenia niezależne	97
■ Schemat Bernoullego	103
■ Powtórzenie	110

Granice funkcji

■ Granice funkcji — intuicje	112
■ Granice funkcji — definicje	120
■ Funkcje ciągłe	126
■ Twierdzenie Darboux	131
■ Obliczanie granic	135
■ Obliczanie granic (cd.)	144
■ Powtórzenie	152

Pochodna funkcji

■ Pochodna funkcji w punkcie	154
■ Pochodna funkcji	161
■ Pochodna funkcji złożonej	168

■ Monotoniczność funkcji	173
■ Ekstrema	180
■ Zastosowania pochodnej	186
■ Zastosowania pochodnej (cd.)	194
■ Powtórzenie	198

Przygotowanie do matury

■ Działania na liczbach	200
■ Równania i nierówności	206
■ Ciągi	212
■ Własności funkcji. Funkcja liniowa	217
■ Funkcja kwadratowa	224
■ Wielomiany i wyrażenia wymierne	229
■ Funkcje wykładnicze i logarytmiczne	235
■ Trygonometria	239
■ Planimetria	246
■ Geometria analityczna	255
■ Stereometria	262
■ Granice i pochodne	271
■ Rachunek prawdopodobieństwa	279
■ Procenty. Elementy statystyki	285

TABELA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH	292
---	-----

ODPOWIEDZI	293
------------------	-----

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadania 7–10 ► — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązywać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

◄ ||| — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem |||

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

Drogie Uczennice!

Drodzy Uczniowie!

To Wasz ostatni szkolny podręcznik do matematyki. Uczyliście się tego przedmiotu ponad dziesięć lat i już niedługo większość z Was podsumuje swoje umiejętności egzaminem.

Przed Wami kilka pracowitych miesięcy przygotowań do matury z matematyki. Na pewno będziecie się starali dobrze ten czas wykorzystać.

Słowo „matura” wywodzi się z języka łacińskiego — *maturus* oznacza „dojrzały”. Dlatego ten egzamin bywa nazywany egzaminem dojrzałości. Jego wynik nie rozstrzygnie oczywiście, czy jesteście osobami dojrzałymi, czy też nie. Taka nazwa egzaminu pierwotnie miała oznaczać tylko (i aż) dojrzałość do podjęcia studiów wyższych.

Jesteśmy przekonani, że niezależnie od tego, jakie studia podejmiecie lub jaką pracę wybieriecie, przyda się Wam ten sposób argumentacji, rozumowania i odróżniania prawdy od fałszu, którego uczy matematyka. O sile matematyki świadczy jednak nie tylko jej użyteczność. Ładnie ujął to polski matematyk Hugo Steinhaus, mówiąc: „Między duchem a materią pośredniczy matematyka”.

Autorzy

Prawdopodobieństwo

część 1

W 1654 roku sławny matematyk i fizyk Blaise Pascal (czyt. blez paskał) otrzymał list od znanego hazardzisty i namiętnego gracza w kości, kawalera de Méré. Autor listu prosił Pascala o odpowiedź na następujące pytanie: Ile razy powinno się rzucać dwiema kostkami do gry, aby warto było obstawiać, że przynajmniej raz na obu kostkach wypadną szóstki? Od tego momentu zaczęło się zainteresowanie Pascala teorią opisującą zjawiska, których dokładnego wyniku nie można przewidzieć, nazwaną później rachunkiem prawdopodobieństwa.



Prawdopodobieństwo – podstawowe pojęcia ■ Obliczanie prawdopodobieństwa ■ Drzewka ■ Wartość oczekiwana ■ Zasada mnożenia i zasada dodawania ■ Wariacje ■ Kombinacje ■ Dwumian Newtona ■ Kombinatoryka i prawdopodobieństwo ■ Powtórzenie

PRAWDOPODOBIENSTWO

– PODSTAWOWE POJĘCIA

- I W niektórych sytuacjach, na przykład gdy rzucamy kostką do gry lub monetą, czy bierzemy udział w loterii fantowej, o wyniku działania decyduje tak zwany ślepy los. Czasem jednak można ocenić szansę interesującego nas rezultatu.

Każde działanie, którego wyniku nie można z góry przewidzieć, nazywamy **doświadczeniem losowym**. Oto kilka przykładów doświadczeń losowych:

- Rzut symetryczną monetą

Możliwe są dwa wyniki tego doświadczenia: wypadnie reszka lub wypadnie orzeł.



Szansa wypadnięcia reszki jest taka sama jak szansa wypadnięcia orła. W takim razie szansa, że w wyniku rzutu monetą otrzymamy orła, jest jak jeden do dwóch, czyli wynosi $\frac{1}{2}$. Taka sama jest szansa otrzymania reszki.

- Rzut symetryczną kostką do gry (sześcienną)

Możliwych jest sześć wyników tego doświadczenia. Szansa otrzymania jednego z tych wyników, na przykład pięciu oczek, jest jak jeden do sześciu, czyli wynosi $\frac{1}{6}$.



Oceniając szansę, że wypadną mniej niż trzy oczka, możemy rozumować tak: skoro dwa z sześciu możliwych rezultatów to liczby mniejsze od 3, więc szansa jest jak dwa do sześciu, czyli wynosi $\frac{1}{3}$.

- Rzut symetryczną monetą i symetryczną sześcienną kostką do gry

Wszystkie możliwe wyniki przedstawione są w tabelce (jest ich dwanaście). Szansa otrzymania każdego z tych wyników jest jednakowa i wynosi $\frac{1}{12}$.

A jaka jest szansa otrzymania pary: orzeł na monecie i parzysta liczba oczek na kostce? Wśród dwunastu możliwych wyników doświadczenia są trzy takie pary (zaznaczono je w tabeli). W takim razie szansa rozważanego rezultatu jest jak trzy do dwunastu, czyli $\frac{1}{4}$.

Przy rzucie monetą szansa wypadnięcia orła jest taka sama jak szansa wypadnięcia reszki i wynosi $\frac{1}{2}$. Nie znaczy to jednak, że gdy na przykład rzucimy monetą 50 albo 5000 razy, to na pewno połowę wyników będą stanowiły orły.

Takimi zagadnieniami zajmował się już w XVII wieku szwajcarski matematyk Jakub Bernoulli (czyt. bernuli). Udowodnił on twierdzenie zwane prawem wielkich liczb. Korzystając z tego prawa, możemy powiedzieć w pewnym uproszczeniu, że

jeśli wykonamy bardzo dużo rzutów monetą, to stosunek liczby orłów do liczby wszystkich rzutów będzie bliski $\frac{1}{2}$.

Fakt ten bywa czasem źle interpretowany. Na przykład niektórzy sądzą, że jeśli reszka wypadnie 10 razy z rzędu, to w kolejnym rzucie szansa wypadnięcia orła jest większa niż szansa wypadnięcia reszki. Należy jednak pamiętać, że za każdym razem (nawet w takiej sytuacji) wypadnięcie orła czy reszki jest tak samo prawdopodobne.

Opisując doświadczenie losowe, zaczynaliśmy od ustalenia, jakie wyniki możemy otrzymać. Każdy możliwy wynik doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym**. Zbiór wszystkich takich zdarzeń nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** i będziemy oznaczać grecką literą Ω (czyt. omega).

W omówionych doświadczeniach losowych przestrzenie zdarzeń elementarnych można opisać w następujący sposób: niech litera O oznacza wypadnięcie orła, a litera R — wypadnięcie reszki, para (R, 1) — wypadnięcie na monecie reszki, a na kostce jedynki, para (R, 2) — wypadnięcie reszki i dwójki itd.

$$\text{Rzut monetą:} \quad \Omega = \{O, R\}$$

$$\text{Rzut kostką:} \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{Rzut monetą i kostką:} \quad \Omega = \{(O, 1), (R, 1), (O, 2), (R, 2), \dots, (O, 6), (R, 6)\}$$

Uwaga. Te przestrzenie zdarzeń elementarnych są zbiorami skończonymi — składają się odpowiednio z dwóch, sześciu i dwunastu elementów. Można także rozważać doświadczenia losowe, których przestrzenie zdarzeń elementarnych są zbiorami nieskończonymi (na przykład gdy wybieramy w sposób losowy punkt należący do danej prostej). Tego typu doświadczeniami nie będziemy się jednak zajmować.

Oceniając szanse wyników doświadczeń, rozważaliśmy nie tylko zdarzenia elementarne. W doświadczeniu *rzut kostką* ocenialiśmy na przykład szansę zdarzenia: *wypadną mniej niż trzy oczka*. Temu zdarzeniu sprzyjają dwa zdarzenia elementarne, innymi słowy odpowiada mu 2-elementowy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych będziemy nazywać **zdarzeniem losowym** i oznaczać wielką literą.

W tabeli podano przykłady zdarzeń losowych.

Doświadczenie losowe	Opis słowny zdarzenia losowego	Zbiór sprzyjających zdarzeń elementarnych
Rzut monetą	A – Wypadł orzeł.	$A = \{O\}$
Rzut kostką	B – Otrzymano 5 oczek.	$B = \{5\}$
Rzut kostką	C – Otrzymano parzystą liczbę oczek.	$C = \{2, 4, 6\}$
Rzut monetą i kostką	D – Otrzymano reszkę na monecie i więcej niż 3 oczka na kostce.	$D = \{(R, 4), (R, 5), (R, 6)\}$



Na rysunku obok w schematyczny sposób przedstawiono pewną przestrzeń zdarzeń elementarnych. Kropki oznaczają jednakowo prawdopodobne zdarzenia. Zdarzeniu Z sprzyja pięć spośród dziewięciu zdarzeń elementarnych. Zatem szansa, że zajdzie zdarzenie Z jest jak pięć do dziewięciu, czyli wynosi $\frac{5}{9}$. Tę liczbę nazywamy prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia Z .

Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwo zdarzenia losowego** A będziemy oznaczać $P(A)$ i obliczać ze wzoru:

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

N – liczba wszystkich zdarzeń elementarnych

n_A – liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A

To twierdzenie nazywane jest klasyczną definicją prawdopodobieństwa. Można z niej korzystać tylko wówczas, gdy zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne i jest ich skończenie wiele.

Dla dowolnego zdarzenia A liczba n_A spełnia warunek $0 \leq n_A \leq N$. Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest liczbą nieujemną i nie większą od 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Uwaga. Prawdopodobieństwa zdarzeń wyraża się czasem za pomocą procentów.

Jeśli zdarzeniu losowemu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne, to nazywamy je **zdarzeniem niemożliwym** i oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Jeśli zdarzeniu losowemu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, to nazywamy je **zdarzeniem pewnym**. Zdarzenie pewne jest równe przestrzeni wszystkich zdarzeń elementarnych, oznaczamy je symbolem Ω .

$\emptyset$ — zdarzenie
niemożliwe

$$P(\emptyset) = 0$$

Ω — zdarzenie
pewne

$$P(\Omega) = 1$$

ĆWICZENIE A Spośród 15 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 15 losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że numer wylosowanej kuli jest:

- a) liczbą większą od 9,
- b) liczbą mniejszą od 20,
- c) liczbą dwucyfrową o sumie cyfr równej 10.

W rozważanych dotąd doświadczeniach dosyć łatwo można było ustalić, że zdarzenia elementarne mają równe prawdopodobieństwa. Nie zawsze jednak jest to oczywiste.

ĆWICZENIE B Rzucamy dwiema monetami — pięciozłotówką i złotówką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na jednej z monet wypadnie orzeł, a na drugiej reszka.

Rozważmy doświadczenie polegające, podobnie jak w ćwiczeniu B, na rzucie dwiema monetami, ale tym razem jednakowymi.

Wiadomo, że w wyniku otrzymamy dwa orły albo dwie reszki, albo orła i reszkę. Gdybyśmy jednak przyjęli, że te trzy zdarzenia tworzą przestrzeń zdarzeń elementarnych, to nie moglibyśmy zastosować definicji klasycznej do obliczania prawdopodobieństwa, bowiem te zdarzenia nie są jednakowo prawdopodobne. Zwróćmy bowiem uwagę, iż szansa, że wypadną orzeł i reszka jest, podobnie jak przy rzucaniu dwiema różnymi monetami, większa niż szansa, że wypadną np. dwa orły.

Aby zdarzenia były jednakowo prawdopodobne, należy w tym wypadku przyjąć, że przestrzeń zdarzeń elementarnych to zbiór czteroelementowy:

$$\Omega = \{ (O, O), (O, R), (R, O), (R, R) \}$$

Z historii

W słynnej *Wielkiej encyklopedii francuskiej* z XVIII wieku umieszczono artykuł *Orzeł i reszka*, którego autorem był Jean Le Rond d'Alembert (czyt. żan le ra dalmber) — znany francuski matematyk. W artykule tym autor popełnił błąd, przyjmując, że przy dwukrotnym rzucie monetą są tylko trzy możliwe wyniki i każdy z tych wyników jest jednakowo prawdopodobny.

Okazuje się, że w czasach, gdy nieznane były jeszcze metody teorii prawdopodobieństwa, nawet tak znakomitemu matematykowi jak d'Alembert zdarzały się pomyłki przy ocenie prawdopodobieństwa zdarzeń. W jednym z kolejnych wydań encyklopedii d'Alembert poprawił swój artykuł, podając prawidłowe wytłumaczenie problemu.

PRZYKŁAD

W urnie jest pięć kul białych, trzy czerwone i jedna zielona.

a) Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej lub czerwonej.

$$N = 5 + 3 + 1 = 9$$

$\Omega = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, c_3, z\}$, gdzie b_1 oznacza wyciągnięcie pierwszej białej kuli, b_2 — drugiej białej kuli itd.

A — Wylosowano kulę białą lub czerwoną.

$$n_A = 5 + 3 = 8$$

$$A = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, c_3\}$$

$$P(A) = \frac{8}{9}$$

b) Wylosowano trzy kule, każdą innego koloru, i usunięto je z urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że następną wylosowana kula będzie czerwona.

$$N = 4 + 2 = 6$$

Po usunięciu kul w urnie zostały 4 kule białe i 2 czerwone.

$$\Omega = \{b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2\}$$

B — Wylosowana kula jest czerwona.

$$n_B = 2$$

$$B = \{c_1, c_2\}$$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ZADANIE

W torebecie jest 8 cukierków czekoladowych, 10 owocowych i 4 krówki.

- Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania cukierka czekoladowego lub krówki.
- Z torebki zabrano 6 cukierków czekoladowych i jedną krówkę. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo wylosowania cukierka czekoladowego lub krówki?

Uwaga. W powyższym przykładzie, w podpunkcie a) przyjęliśmy, że jest 9 zdarzeń elementarnych. Gdybyśmy przyjęli, że są 3 zdarzenia elementarne: 1) wylosowano białą kulę, 2) wylosowano czerwoną kulę, 3) wylosowano zieloną kulę, to zdarzenia te nie byłyby jednakowo prawdopodobne i nie można byłoby zastosować klasycznej definicji przy obliczaniu prawdopodobieństwa.

zadania 1–7 ►

- II Wyobraźmy sobie, że wybieramy w sposób losowy dowolny dzień listopada 2021 roku.

Listopad ma 30 dni, zatem przestrzeń zdarzeń elementarnych możemy określić następująco:

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$$

Liczby oznaczają odpowiednie dni listopada.

2021	NOVEMBER + LISTOPAD + NOVEMBER							2021
45	1	2	3	4	5	6	7	
46	8	9	10	11	12	13	14	
47	15	16	17	18	19	20	21	
48	22	23	24	25	26	27	28	
49	29	30	1	2	3	4	5	

Rozważmy zdarzenia:

A — Wylosowany dzień jest niedzielą lub innym dniem świątecznym.

B — Wylosowanym dniem jest dzień powszedni.

Korzystając z kalendarza, otrzymujemy:

$$A = \{1, 7, 11, 14, 21, 28\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30\}$$

ĆWICZENIE C Dla zdarzeń A i B opisanych powyżej oblicz $P(A)$ i $P(B)$.

Zauważmy, że zdarzeniu B sprzyjają wszystkie te i tylko te zdarzenia elementarne, które nie sprzyjają zdarzeniu A . Zatem zbiór odpowiadający zdarzeniu B to zbiór różnicy $\Omega \setminus A$.

Zdarzenie $\Omega \setminus A$ nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia A i oznaczamy symbolem A' .

Zdarzenia losowe to pewne zbiory, więc własności zdarzeń przeciwnych można zapisać za pomocą działań na zbiorach.

Jeśli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to:

$$A \cap A' = \emptyset \quad A \cup A' = \Omega \quad P(A') = 1 - P(A)$$

Uwaga. Zauważ, że zdarzenie pewne jest zdarzeniem przeciwnym do niemożliwego.

Pierwsza i druga z powyższych równości są oczywiste (wynikają z definicji zdarzenia przeciwnego). Oto jak można uzasadnić trzecią z tych równości:

Niech N oznacza liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, a n_A i $n_{A'}$ — liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających odpowiednio zdarzeniom A oraz A' . Wówczas:

$$P(A') = \frac{n_{A'}}{N} = \frac{N - n_A}{N} = 1 - \frac{n_A}{N} = 1 - P(A)$$

Gdy mamy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, czasami łatwiej jest najpierw obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

ĆWICZENIE D Rzucamy sześcienną kostką do gry. Dla każdego z poniższych zdarzeń określ zdarzenie przeciwne i ustal jego prawdopodobieństwo.

A — Wypadnie jedynka.

B — Wypadnie nieparzysta liczba oczek.

C — Wypadnie 5 lub więcej oczek.

D — Wypadnie liczba oczek podzielna przez 6.

zadania 8–23 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania:

- a) trefla,
- b) figury,
- c) damy kier,
- d) dziesiątki,
- e) blotki z liczbą parzystą.

Typowa talia kart do gry składa się z 52 kart: 13 pików, 13 kierów, 13 kar i 13 trefli.



pik



kier



karo



trefl

W każdym z tych karcianych kolorów są 4 figury (as, król, dama i walet) oraz 9 blotek (od dwójki do dziesiątki).

2. a) Czy większe jest prawdopodobieństwo wylosowania figury spośród wszystkich kierów, czy — kiera spośród wszystkich 52 kart talii?

b) Z talii 52 kart wylosowano już 3 karty i wszystkie są asami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że czwarta wylosowana karta też będzie asem.

3. Najbardziej popularnym nazwiskiem w USA jest Smith — nosi je 1,01% mieszkańców. Smith to po angielsku „kowal”. Ciekawe, że w Polsce bardzo dużo osób nosi nazwisko Kowalski — około 140 tys. spośród ok. 38 mln mieszkańców. Co jest bardziej prawdopodobne: że losowo wybrany Amerykanin to Smith czy że losowo wybrany Polak to Kowalski?

Na fotografiach są przedstawione trzy kostki do gry: sześcienna (z liczbami od 1 do 6), czworościenna (z liczbami od 1 do 4) oraz dwunastościenna (z liczbami od 1 do 12).



W typowej kostce sześciennej suma oczek na przeciwległych ściankach wynosi 7, a w dwunastościenną wynosi 13. Natomiast na każdej ścianie typowej kostki czworościenną umieszczone są trzy liczby, ale tak, że liczby przy wspólnym wierzchołku ścianek są takie same. Wynikiem rzutu taką kostką jest liczba przy wierzchołku, który nie leży na stole.

4. a) Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadną co najmniej dwa oczka.

b) Rzucamy symetryczną dwunastościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie liczba oczek większa niż 9.

c) Rzucamy symetryczną czworościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie liczba oczek będąca liczbą pierwszą.



5. Powyżej przedstawiono siatki nietypowych symetrycznych kostek sześciennych. Którą należy wybrać, aby przy jednym rzucie mieć największą szansę otrzymania:

- a) szóstkę, b) szóstkę lub jedynki, c) nieparzystej liczby oczek?

6. W urnie jest 16 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 16. Kule z numerami od 1 do 3 są białe, z numerami od 4 do 7 — czerwone, a pozostałe są zielone. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo opisanego zdarzenia.

- a) Wylosowana kula jest czerwona lub zielona.
b) Liczba na wylosowanej kuli jest podzielna przez 3.
c) Wylosowano kulę zieloną z liczbą jednocyfrową.
d) Wylosowano kulę czerwoną lub z numerem parzystym.

7. W pudełku zmieszano 30 ziarenek fasoli, 20 ziarenek ciecierzycy i 50 ziarenek grochu.

- a) Jako pierwsze wylosowano ziarenko fasoli. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że drugim wylosowanym ziarenkiem nie będzie fasola?
b) Z pudełka usunięto po 10 ziarenek każdego rodzaju. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo wylosowania ziarenka fasoli?

◀ **8.** Rzucamy sześcienną kostką do gry. Wśród poniższych zdarzeń znajdź pary zdarzeń przeciwnych. Jedno ze zdarzeń nie ma pary. Określ zdarzenie do niego przeciwne.

- | | |
|--|------------------------|
| A_1 — Liczba oczek jest mniejsza od 5. | $A_5 = \{1, 4, 6\}$ |
| A_2 — Liczba oczek jest podzielna przez 3. | $A_6 = \{2, 4, 6\}$ |
| A_3 — Liczba oczek jest liczbą pierwszą. | $A_7 = \{1, 2, 4, 5\}$ |
| A_4 — Liczba oczek jest większa od 4. | |

9. Rzucamy czterokrotnie monetą. Wśród poniższych zdarzeń znajdź trzy pary zdarzeń przeciwnych. Jedno z opisanych zdarzeń nie ma pary. Określ zdarzenie do niego przeciwne.

- A_1 — Orzeł wypadnie co najmniej raz.
 A_2 — Orzeł wypadnie tyle samo razy co reszka.
 A_3 — Przynajmniej raz wypadnie reszka.
 A_4 — Orzeł wypadnie co najwyżej raz.
 A_5 — Orzeł nie wypadnie ani razu.
 A_6 — Orzeł wypadnie dwa, trzy lub cztery razy.
 A_7 — Wypadną same orły.

10. Wybieramy losowo jedną z początkowych czterdziestu cyfr występujących po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie jest to 0 oraz prawdopodobieństwo tego, że nie jest to 1.

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971\dots$$

Warto wiedzieć

W 1927 roku ukazała się książka *Zestaw liczb losowych* angielskiego naukowca L.H.C. Tippetta. Wszystkie 24 strony tej książki wypełniało 41 600 cyfr ułożonych (jak zapewniał autor) w przypadkowej kolejności. Książka stała się bestsellerem wśród książek naukowych.

Komu i do czego może się przydać losowo ułożony ciąg cyfr? Tablice liczb losowych są potrzebne naukowcom w wielu eksperymentach. Gdy na przykład trzeba zbadać skuteczność działania lekarstwa, ważne jest, by dobór pacjentów był zupełnie przypadkowy. Liczby losowe ułatwiają wybór odpowiedniego sposobu losowania badanych osób.

Można stwierdzić, że od czasu ukazania się pierwszych tablic liczb losowych rozwinął się cały „przemysł” związany z tworzeniem liczb losowych (ocenia się, że wartość tego rynku wynosi kilkadziesiąt miliardów dolarów).

L.H.C. Tippett opracował swoje tablice, wykorzystując przekształcone odpowiednie dane dotyczące powierzchni angielskich parafii. Współcześnie do tworzenia zestawów liczb losowych używa się programów komputerowych zwanych generatorami liczb losowych. Programy te są w informatyce niezwykle ważne, gdyż służą między innymi do zaszyfrowywania informacji i zabezpieczania danych.

11. Poniżej przedstawiono fragment tablicy liczb losowych. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybraną z tego zestawu cyfrą będzie 9, a jakie — że nie będzie to cyfra 7.

76052	05735	34843	67809	84927	29827	00812	65176
47134	48958	90863	05304	36333	61087	95482	30895
27919	50407	61154	49366	46870	25831	39449	86426
92222	12795	30723	50290	73967	36539	07714	09800
12340	02920	36288	81453	34026	87350	94393	02475
38696	97703	81305	11218	20537	68684	67208	92875

12. Losujemy jedną liczbę spośród wszystkich liczb dwucyfrowych.

- Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby mniejszej od 98.
- Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby o sumie cyfr większej od 3.
- Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 12.

13. W urnie jest 12 kul zielonych. Ile kul czerwonych trzeba dorzucić, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej było równe 0,4?

14. W sali są dziewczęta i chłopcy. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba będzie dziewczynką, wynosi $\frac{3}{5}$. Z sali wyszły trzy dziewczynki i prawdopodobieństwo wylosowania dziewczynki wyniosło wtedy $\frac{2}{9}$. Ile osób zostało w sali?

15. W urnie były kule białe i czerwone. Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wynosiło $\frac{4}{7}$. Gdy z urny wyjęto trzy kule białe i trzy czerwone, prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli wyniosło $\frac{2}{5}$. Ile kul było na początku w urnie?

16. W mieszance cukierków czekoladowych 25% stanowią galaretki, 60% pralinki owocowe, a resztę — trufle.

- Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany cukierek będzie trufką?
- Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany cukierek nie będzie praliną owocową?
- Z mieszanki ktoś wyjadł wszystkie galaretki. Jakie jest teraz prawdopodobieństwo wylosowania trufli?



17. W pewnym mieście 20% mieszkańców to artyści, a 5% spośród nich to śpiewacy. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany mieszkaniec tego miasta nie jest śpiewakiem?

18. W grze w okręty dwaj gracze umieszczają w kwadracie podzielonym na 100 krerek po 10 „okrętów”: jeden okręt czteromasztowy (zajmujący 4 kratki), dwa trójmasztowce, trzy dwumasztowce i cztery jednomasztowce. Na rysunku obok przedstawiono przykładowe rozmieszczenie okrętów przez jednego z graczy. Następnie każdy gracz próbuje odgadnąć, gdzie leżą okręty zaznaczone przez przeciwnika.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

- Oblicz prawdopodobieństwo tego, że gracz trafi w okręt przeciwnika już w pierwszej próbie.
- Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w pierwszej próbie gracz trafi w największy okręt.
- W który typ okrętu najłatwiej trafić (z największym prawdopodobieństwem) w pierwszej próbie?
- Pierwsze trzy próby gracza były nieudane. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że trafi on w okręt w następnej próbie?
- Przeciwnik zgłosił, że w pierwszej próbie gracz trafił w okręt. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że trafiony okręt jest dwumasztowy?

19. W równaniu $x^2 + kx + k = 0$ w miejsce k wstawiono liczbę wybraną losowo spośród liczb: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymane równanie będzie miało jedno rozwiązanie.

20. a) Z talii 52 kart losujemy kolejno po jednej karcie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ostatnią wylosowaną kartą będzie as.

b) W sali jest 9 chłopców i 12 dziewcząt. Przyjmijmy, że kolejność wychodzenia jest przypadkowa. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ostatnią osobą, która wyjdzie z sali, będzie chłopak.

c) Z pudełka, w którym było 6 kul białych i 4 kule czarne, losowano po jednej kuli. W końcu została jedna kula. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest ona czarna.

Z historii

Trudno wskazać moment, w którym pojawił się w matematyce rachunek prawdopodobieństwa. W kości grano już kilka tysięcy lat temu. Od dawna więc interesowały graczy szanse otrzymania pożądanego wyniku rzutu kośćmi. Pierwszą znaną pracę naukową na ten temat pt. *De ludo aleae* (O grze w kości) napisał Geronimo Cardano (czyt. dżeronimo kardano) (1501–1576). Praca była w owym czasie dość popularna, mimo, że ukazała się drukiem dopiero w 1663 roku.

Oprócz gry w kości Cardano rozważał w swojej pracy także inne kwestie związane z rachunkiem prawdopodobieństwa. Opisał i próbował rozwiązać na przykład następujący problem postawiony przez franciszkanina Lucę Paciolego (czyt. łukę paczolego) (1445–1515):

Dwa zespoły rozgrywały serię meczów w piłkę. Zespoły miały równe szanse na zwycięstwo i miały grać tak długo, aż jeden z nich osiągnie 6 zwycięstw. Nagrodą dla zwycięzcy były 22 dukaty. Rozgrywki przerwano, gdy jeden z zespołów miał 5 zwycięstw, a drugi 3. Jak należy podzielić nagrodę?

Pacioli, Cardano, a także inny znakomity matematyk — Niccolò (czyt. nikolo) Fontana zwany Tartaglią (czyt. tartalia) (1500–1557) podali trzy różne rozwiązania tego problemu, ale każde z nich było krytykowane.

W pełni zadowalające rozwiązanie podali dopiero w 1654 roku Blaise Pascal (czyt. blez paskal) (1623–1662) i Pierre de Fermat (czyt. pier ferma) (1601–1665). Stwierdzili oni, że seria gier może się składać maksymalnie z 11 meczów i wypisali wszystkie możliwe wyniki ostatnich trzech meczów (które mogłyby być jeszcze rozegrane):

$z_1, z_1, z_1, z_1, z_1, z_2, z_1, z_1, z_2, z_2, z_2, z_2, z_2, z_1, z_2, z_1, z_2, z_1, z_1, z_2, z_2, z_2, z_2, z_2, z_1, z_2, z_1, z_2, z_2, z_1, z_1$,
gdzie z_1 i z_2 oznaczają odpowiednio zwycięstwo pierwszego i drugiego zespołu.

Biorąc pod uwagę wygrane wcześniej mecze, łatwo stwierdzić, że prawdopodobieństwo wygrania rozgrywek przez pierwszą drużynę wynosi $\frac{7}{8}$, a przez drugą $\frac{1}{8}$. Zatem pierwsza drużyna powinna otrzymać $\frac{7}{8}$ nagrody.

21. Przeczytaj ciekawostkę. Określ, jak należałoby podzielić nagrodę w sytuacji opisanej w problemie Paciolego, gdyby rozgrywki przerwano, gdy:

a) pierwszy zespół miał 5 zwycięstw, a drugi 4,

b) pierwszy zespół miał 4 zwycięstwa, a drugi 3.

Warto wiedzieć

Przypuśćmy, że w sposób losowy wybieramy punkt na kartce. Zdarzeń elementarnych w takim doświadczeniu jest nieskończenie wiele, więc nie można tu stosować klasycznej definicji prawdopodobieństwa. Przyjmijmy, że A oznacza

pewien obszar na kartce. Prawdopodobieństwo trafienia w ten obszar możemy określić następująco:

$$P(A) = \frac{\text{Pole obszaru } A}{\text{Pole powierzchni kartki}}$$

22. Przeczytaj informacje w ramce powyżej.

a) Wyobraź sobie, że trafiamy w sposób losowy w punkt na kole. Dla każdego z kół na rysunku oblicz prawdopodobieństwo trafienia w zacieniowany obszar.



b) Placek drożdżowy wypełnia blachę o powierzchni 12 dm^2 . Podzielono go na równe kawałki o powierzchni 50 cm^2 każdy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jedyny rodzynek w cieście znajduje się w wybranym kawałku?

c) Obraz o wymiarach $1,2 \text{ m} \times 0,8 \text{ m}$ przedstawia pewną postać, która na obrazie tym zajmuje powierzchnię 20 dm^2 . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że mucha, która usiądzie na obrazie, znajdzie się na namalowanej postaci.

d) Naukowcy przewidują, że mały meteoryt upadnie na pewien obszar, którego powierzchnia wynosi 20 km^2 . Znajduje się tam jezioro o powierzchni 50 ha . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że meteoryt wpadnie do tego jeziora.

Ciekawostka

Związki między geometrią i rachunkiem prawdopodobieństwa są czasem bardzo zaskakujące. Francuski uczony Georges Louis Leclerc de Buffon (czyt. żorż lui lekler de bifa) (1707–1788) opisał następujące doświadczenie:

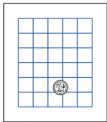
Na kartce rysujemy w równych odstępach proste równoległe i rzucamy w sposób losowy igłę, której długość jest równa odległości między sąsiednimi liniami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła spadnie tak, że przetnie jakąś linię?

Buffon udowodnił, że prawdopodobieństwo to wynosi $\frac{2}{\pi}$.

Wyobraźmy sobie, że rzucamy wieloma igłami. Obliczając stosunek liczby przypadków, gdy igła przecięła jakąś linię, do liczby wszystkich igieł, otrzymalibyśmy przybliżoną wartość liczby $\frac{2}{\pi}$. Korzystając z tego faktu, starano się doświadczalnie obliczyć przybliżoną wartość liczby π .



23. Na kartce narysowano linie pionowe i poziome tak, że odległości między sąsiednimi liniami są równe a (zob. rysunek). Rzucamy monetę o średnicy a tak, że środek monety leży na obszarze pokrytym liniami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że moneta zakryje punkt kratowy (wierzchołek któregoś z kwadratów)?



MINISPRAWDZIAN

51. W urnie jest siedem kul z numerami od 1 do 7. Losujemy jedną kulę. Niech a oznacza prawdopodobieństwo tego, że losując kulę z urny, trafimy na kulę z liczbą parzystą, b — z liczbą nieparzystą, a c — z liczbą pierwszą. Wynika stąd, że:

- A. $a = b = c$ B. $a < b < c$ C. $a < b = c$ D. $a = b < c$

52. Z talii wybrano zestaw kilkunastu kart. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana karta z tego zestawu będzie kierem, wynosiło $\frac{1}{3}$. Z zestawu usunięto 2 kiery i teraz prawdopodobieństwo tego, że karta wylosowana z pozostałych kart z zestawu będzie kierem, jest równe $\frac{1}{3}$. Ile kart początkowo było w zestawie?

- A. 12 B. 15 C. 16 D. 18

53. Z talii losujemy kolejno 3 karty. Jako zdarzenie A okreśmy wylosowanie co najmniej jednego pika. Które z poniższych zdarzeń będzie zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A ?

- A. Tylko jedna z wylosowanych kart jest pikiem.
B. Wszystkie wylosowane karty to kiery.
C. Żadna z wylosowanych kart nie jest pikiem.
D. Jedna z wylosowanych kart nie jest pikiem.

OBLICZANIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA

ĆWICZENIE W jednym pudełku znajdują się cztery kule z liczbami od 1 do 4, w drugim pudełku są trzy kule z literami A , B , C . Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne.

W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, jak za pomocą tabelki przedstawić wszystkie zdarzenia elementarne przy rzucie kostką i monetą (zob. s. 10). Podobne tabelki mogą być pomocne przy obliczaniu prawdopodobieństwa.

PRZYKŁAD 1 Rzucamy symetrycznymi kostkami czworościenną i sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyników będzie różna od 6.

A — Suma liczb na kostkach jest różna od 6.

A' — Suma liczb na kostkach wynosi 6.

I kostka \ II kostka	1	2	3	4	5	6
1					✓	
2				✓		
3			✓			
4		✓				

Przestrzeń zdarzeń elementarnych przedstawiamy za pomocą tabelki. Pola tabelki odpowiadają zdarzeniom elementarnym (parom liczb). Zaznaczone pola sprzyjają zdarzeniu A' .

$$N = 4 \cdot 6 = 24$$

$$n_{A'} = 4$$

$$P(A') = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ZADANIE Rzucamy symetrycznymi kostkami sześcienną i czworościenną. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn otrzymanych liczb nie będzie równy 12.

PRZYKŁAD 2 Spośród pięciu kul ponumerowanych liczbami od 1 do 5 losujemy kolejno dwie kule i zapisujemy — od lewej do prawej — cyfrę z pierwszej kuli, a potem cyfrę z drugiej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest parzysta i większa od 30.

A — Otrzymana liczba jest parzysta i większa od 30.

I kula \ II kula	1	2	3	4	5
1					
2					
3		✓		✓	
4		✓			
5		✓		✓	

Rysujemy tabelkę. Ponieważ w tym doświadczeniu niemożliwe jest wylosowanie dwóch kul o tym samym numerze, więc nie bierzemy pod uwagę pól odpowiadających parom tych samych liczb (w tabelce je zaciemniono).

$$N = 5 \cdot 5 - 5 = 20$$

$$n_A = 5$$

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

ZADANIE Spośród liczb 1, 2, 3, 4 i 5 losujemy kolejno dwie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma tych liczb jest nieparzysta i mniejsza od 6.

PRZYKŁAD 3 W skarbonce jest sześć monet: dwuzłotówka, trzy złotówki i dwie pięćdziesięciogroszówki. Wybieramy losowo dwie monety. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy kwotę mniejszą niż 2 zł.

A — Wylosowana kwota jest mniejsza niż 2 zł.

	2 zł	1 zł ₁	1 zł ₂	1 zł ₃	50 gr ₁	50 gr ₂
2 zł						
1 zł ₁					✓	✓
1 zł ₂					✓	✓
1 zł ₃					✓	✓
50 gr ₁		✓	✓	✓		✓
50 gr ₂		✓	✓	✓	✓	

W tabeli 1 zł₁, 1 zł₂, 1 zł₃ oznaczają trzy różne monety jednozłotowe, a 50 gr₁ i 50 gr₂ oznaczają dwie różne monety pięćdziesięciogroszowe. Nie możemy wylosować dwa razy tej samej monety, więc nie bierzemy pod uwagę pól odpowiadających parom tych samych monet.

$$N = 6 \cdot 6 - 6 = 30$$

$$n_A = 14$$

$$P(A) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

ZADANIE W skarbonce są następujące monety: dwie pięcioletówki, cztery dwuzłotówki i dwie złotówki. Losujemy dwie monety. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy więcej niż 3 zł.

Uwaga. W powyższym przykładzie interesowała nas otrzymana kwota, a nie kolejność wylosowanych monet, moglibyśmy więc inaczej opisać przestrzeń zdarzeń elementarnych — biorąc pod uwagę tylko połowę tabeli (jak na rysunku poniżej). Zdarzeń elementarnych byłoby 2 razy mniej, czyli 15, a zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A byłoby wówczas 7.

	2 zł	1 zł ₁	1 zł ₂	1 zł ₃	50 gr ₁	50 gr ₂
2 zł						
1 zł ₁					✓	✓
1 zł ₂					✓	✓
1 zł ₃					✓	✓
50 gr ₁						✓
50 gr ₂						

$$N = 15$$

$$n_A = 7$$

$$P(A) = \frac{7}{15}$$

zadania 1–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry i symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na monecie wypadnie reszka, a na kostce — nie więcej niż 4 oczka.
- b) Losujemy jedną kartę spośród wszystkich króli z talii oraz jedną kartę spośród wszystkich dam. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w ten sposób dwóch kart tego samego koloru (np. dwóch trefli lub dwóch kar itd.).
- c) W jednej urnie są 3 kule — czerwona, biała i zielona, a w drugiej urnie są 2 kule — czerwona i biała. Losujemy po jednej kuli z każdej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch kul w tym samym kolorze.
2. Rzucamy dwiema różnymi symetrycznymi sześciennymi kostkami.
- a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej na jednej kostce będzie jedynka.
- b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na obu kostkach będzie tyle samo oczek.
- c) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na każdej kostce będzie co najmniej 5 oczek.
- d) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma oczek będzie równa 4.
- e) Oblicz najbardziej prawdopodobną sumę oczek.
- f) Oblicz najbardziej prawdopodobną różnicę między wynikami na kostkach (od większego wyniku odejmujemy mniejszy).
3. Losujemy dwie karty spośród wszystkich figur pikowych.
- a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jedną z wybranych kart będzie król.
- b) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania króla i damy.
4. Z zestawu ośmiu kart z jednej talii, w którym są cztery damy i cztery dwójki, wylosowano kolejno dwie karty. Określ zdarzenie przeciwne do podanego i oblicz jego prawdopodobieństwo.
- a) Wśród wylosowanych kart jest co najmniej jedna dama.
- b) Obie wylosowane karty są kierami.
- c) Dokładnie jedna z wylosowanych kart jest figurą.
5. W grze „kamień, papier, nożyczki” każdy z dwóch grających pokazuje losowo albo pięść (kamień), albo otwartą dłoń (papier), albo dwa palce (nożyczki). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że gra zakończy się wygraną nożyczek.



kamień wygrywa
z nożyczkami



papier wygrywa
z kamieniem



nożyczki wygrywają
z papierem

6. W sklepie zoologicznym są dwie myszy — biała i szara.
- a) Wiadomo, że co najmniej jedna z myszy jest samcem. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie myszy są samcami.
- b) Sprzedawca powiedział, że biała mysz jest samcem. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie myszy są samcami.
7. W skrzyni przechowywanych jest 6 różnych par butów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwa losowo wybrane buty będą pochodziły z tej samej pary.

Zestaw do gry w domino składa się z 28 różnych kostek. Każda kostka podzielona jest na dwie części, a na każdej części jest od 1 do 6 oczek albo nie ma oczka.

8. Z zestawu kostek do gry w domino losujemy jedną kostkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- a) na obu częściach wylosowanej kostki jest taka sama liczba oczek,
- b) co najmniej na jednej z dwóch części wylosowanej kostki znajdują się 4 oczka,
- c) suma oczek na wylosowanej kostce jest równa 8.

9. Na rysunku przedstawiono sytuację po kilku ruchach rozpoczętej partii domina. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kostkę wybraną losowo spośród pozostałych będzie można dołączyć do kostek leżących już na stole.

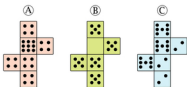


10. Rzucamy dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką, której siatkę przedstawiono obok. Oblicz prawdopodobieństwo poniższych zdarzeń.

A — Dwa razy wypadnie ta sama liczba oczek.

B — W drugim rzucie wypadnie większa liczba oczek niż w pierwszym.

11. Na sześciennych symetrycznych kostkach (A), (B) i (C) umieszczono takie liczby oczek, jakie widać na rysunkach. Pierwszy gracz wybiera jedną z kostek, a drugi gracz — jedną z pozostałych i obaj rzucają swoimi kostkami. Wygrywa ten, który wyrzuci większą liczbę oczek.



- a) Pierwszy gracz wybrał kostkę (A). Którą kostkę powinien wybrać drugi gracz, by mieć jak największą szansę wygranej?
- b) Czy jest wśród tych kostek najsilniejsza, to znaczy taka, że jeśli ją wybierze pierwszy gracz, to ma większą szansę wygrania niż gracz drugi, niezależnie od tego, którą z pozostałych kostek wybierze drugi gracz?

MINISPRAWDZIAN

51. Rzucamy sześcienną kostką oraz żetonem, który na jednej stronie ma jedną kropkę (1 oczko), a na drugiej — dwie. Wynikiem rzutu nazywamy iloczyn liczby oczek na kostce i żetonie. Niech A oznacza zdarzenie, że wynik jest liczbą parzystą, B — że jest wielokrotnością liczby 4, C — że jest większy od 5, D — że jest liczbą pierwszą. Która równość nie jest prawdziwa?

A. $P(A) = \frac{3}{4}$

B. $P(B) = \frac{1}{3}$

C. $P(C) = \frac{1}{2}$

D. $P(D) = \frac{1}{3}$

52. W szufladzie są skarpetki w różnych kolorach — 3 czarne, 3 granatowe i 2 czerwone. Wyciągamy losowo dwie skarpetki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będą one w różnych kolorach?

A. $\frac{17}{64}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{47}{64}$

D. $\frac{47}{56}$

DRZEWKA

- 1 W poprzednich rozdziałach omawialiśmy, jak obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń w prostych doświadczeniach losowych. Pokażemy teraz, jak można postępować, gdy sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana.

Rozważmy doświadczenie, które polega na tym, że najpierw rzucamy symetryczną kostką do gry, następnie — gdy wypadnie szóstka — losujemy kulę z pierwszego pudełka, a w pozostałych wypadkach — z drugiego.

W pierwszym pudełku są kule czerwone, zielone i białe, a w drugim — czerwone i zielone (zob. rysunek poniżej). Zastanówmy się, jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli.



15 kul – 6 czerwonych
4 zielone, 5 białych



10 kul – 3 czerwone
i 7 zielonych

Białe kule są tylko w pierwszym pudełku. Losujemy z tego pudełka, gdy wyrzucimy szóstkę, zatem zdarzenia, w których losowane będą kule z tego pudełka, stanowią $\frac{1}{6}$ wszystkich możliwych zdarzeń. Natomiast wylosowanie białej kuli z pierwszego pudełka to $\frac{5}{15}$ wszystkich możliwych wyników losowania z tego pudełka. Zatem prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli jest równe $\frac{1}{18}$, gdyż:

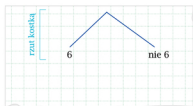
$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{18}$$

A jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli?

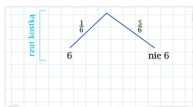
Zdarzenia, w których wylosujemy czerwoną kulę z pierwszego pudełka, stanowią $\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{15}$ wszystkich możliwych zdarzeń, a zdarzenia, w których wylosujemy kulę czerwoną z drugiego pudełka, stanowią $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10}$ wszystkich zdarzeń. Wobec tego prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli jest równe $\frac{19}{60}$, gdyż:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{15} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{19}{60}$$

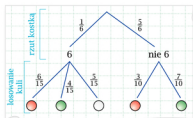
Doświadczenie to wygodnie jest zilustrować za pomocą diagramu zwanego drzewkiem. Poniżej przedstawiamy kolejne etapy rysowania drzewka.



1. Ilustrujemy pierwszy etap doświadczenia, czyli rzut kostką. Interesują nas zdarzenia: wypadnie szóstka (wówczas będziemy losować z I pudełka) lub wypadnie inna liczba oczek (wówczas będziemy losować z II pudełka).



2. Przy narysowanych gałęziach zapisujemy prawdopodobieństwa odpowiednich zdarzeń (szóstkę otrzymamy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$, a inny wynik — z prawdopodobieństwem $\frac{5}{6}$).

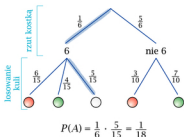


3. Ilustrujemy drugi etap doświadczenia, czyli losowanie kul z pudełek. Przy narysowanych gałęziach zapisujemy odpowiednie prawdopodobieństwa (losując z I pudełka, możemy otrzymać kulę czerwoną z prawdopodobieństwem $\frac{6}{15}$, zieloną z prawdopodobieństwem $\frac{4}{15}$, itd.).

Otrzymane drzewko może posłużyć do obliczania prawdopodobieństw różnych zdarzeń związanych z rozważanym doświadczeniem.

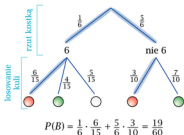
Na pierwszych dwóch rysunkach poniżej zilustrowano omówione już zdarzenia. Trzeci rysunek ilustruje zdarzenie: wylosowano kulę z pierwszego pudełka i była ona biała lub czerwona.

- A — Wylosowano kulę białą.



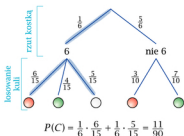
Zdarzeniu A odpowiada zaznaczona gałąź drzewka; szukany wynik otrzymamy, mnożąc prawdopodobieństwa zapisane przy tej gałęzi.

- B — Wylosowano kulę czerwoną.



Zaznaczamy gałęzie drzewka odpowiadające zdarzeniu B ; szukany wynik otrzymamy, mnożąc prawdopodobieństwa zapisane przy tych gałęziach i dodając otrzymane iloczyny.

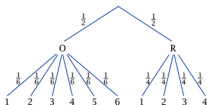
- C — Wylosowano kulę z pierwszego pudełka i była ona biała lub czerwona.



Zaznaczamy gałęzie drzewka odpowiadające zdarzeniu C ; obliczamy odpowiednie iloczyny i dodajemy je.

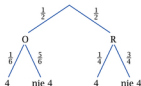
Uwaga. Stosując metodę, którą tu przedstawiamy, korzystamy intuicyjnie z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, które omawiamy w jednym z następnych rozdziałów.

Na rysunku poniżej zilustrowano następujące doświadczenie: rzucamy symetryczną monetą i jeśli wypadnie orzeł — rzucamy symetryczną sześcienną kostką, a gdy wypadnie reszka — rzucamy symetryczną czworościenną kostką.



Z tego drzewka moglibyśmy korzystać przy obliczaniu prawdopodobieństwa różnych zdarzeń związanych z tym doświadczeniem.

Gdy chcemy obliczyć prawdopodobieństwo wybranego zdarzenia, np. „Na kostce wypadnie czwórka”, wygodniej jest korzystać z uproszczonego drzewka, takiego jak na rysunku obok.

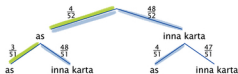


Zwróć uwagę, że w każdym drzewku gałęzie wychodzące z jednego punktu ilustrują wszystkie możliwe wyniki w danym etapie. Dlatego suma prawdopodobieństw zapisanych przy tych gałęziach zawsze jest równa 1.

PRZYKŁAD 1 Losujemy kolejno dwa razy po jednej karcie bez zwracania z talii 52 kart. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane karty to dwa asy, oraz tego, że wśród wylosowanych kart jest dokładnie jeden as.

A — Wylosowano dwa asy.

B — Wylosowano dokładnie jednego asa.



Po pierwszym losowaniu w talii zostało 51 kart. Jeżeli za pierwszym razem wylosowano asa — to w talii zostały jeszcze 3 asy, a jeśli nie wylosowano asa — wtedy zostały tam jeszcze 4 asy.

Na drzewku zaznaczono kolorem zielonym gałęzie odpowiadające zdarzeniu A, niebieskim zaś — odpowiadające zdarzeniu B.

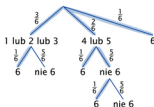
$$P(A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

$$P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{32}{221}$$

ZADANIE Losujemy kolejno dwa razy po jednej karcie bez zwracania z talii 52 kart. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród tych kart będzie dokładnie jeden kier.

PRZYKŁAD 2 Wyobraź sobie, że wykonujemy rzut symetryczną sześcienną kostką. Jeśli otrzymamy 1, 2 lub 3 oczka, to rzucamy kostką ponownie, a jeśli otrzymamy 4 lub 5 oczek — mamy prawo do dwóch kolejnych rzutów. Wygrywamy wtedy, gdy wypadnie szóstka. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.

A — W jednym z rzutów wypadła szóstka.



$$P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{19}{54}$$

ZADANIE Rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry, a jeśli wypadnie reszka — rzucamy taką kostką dwukrotnie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wypadnie jedynka.

Zwróć uwagę, że nie zawsze musimy narysować całe drzewko, aby obliczyć prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia — wystarczy narysować te gałęzie, które dotyczą interesujących nas wyników doświadczenia losowego.

PRZYKŁAD 3 Z talii 52 kart losujemy trzy razy po jednej karcie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna z nich nie będzie dziesiątką.

A — Co najmniej jedna z wyciągniętych kart nie jest dziesiątką.

A' — Wszystkie wyciągnięte karty to dziesiątki.



$$P(A') = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} = \frac{1}{5525}$$

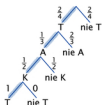
..... Zdarzeniu A' odpowiada zaznaczona gałąź drzewka.

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{5525} = \frac{5524}{5525}$$

ZADANIE W urnie jest 5 białych kul i 10 czarnych. Losujemy trzy razy po jednej kuli bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jedna z nich nie będzie biała.

PRZYKŁAD 4 Dwa klocki z literą T i po jednym klocku z literami A i K ustawiamy losowo obok siebie. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w ten sposób słowa TAKT.

S — Otrzymamy słowo TAKT.



$$P(S) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$$

Wystarczy narysować ten fragment drzewka, który zawiera gałąź przechodzącą kolejno przez litery T, A, K, T.

Po wylosowaniu pierwszej litery następną literę losujemy spośród pozostałych trzech (dlatego na drugim poziomie prawdopodobieństwa wynoszą $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$).

ZADANIE Ustawiamy losowo obok siebie dwa klocki z literą A i dwa klocki z literą M. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ułożymy słowo MAMA.

zadania 1–21

Ciekawostka

Na kuponie gry losowej Lotto gracz skreśla 6 spośród 49 liczb. Korzystając z drzewka, możemy obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że maszyna losująca wybierze sześć takich samych liczb, które skreślił gracz na kuponie.



Prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych liczb jest jedną ze skreślonych przez gracza, wynosi $\frac{6}{49}$. Drugą liczbę maszyna losuje spośród 48 liczb; prawdopodobieństwo tego, że będzie to jedna z pozostałych pięciu liczb skreślonych przez gracza, wynosi $\frac{5}{48}$ itd.

Zatem prawdopodobieństwo trafienia szóstki obliczamy następująco:

$$\frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{1}{13\,983\,816}$$

Możemy powiedzieć, że szansa trafienia szóstki w Lotto jest w przybliżeniu jak jeden do czternastu milionów. Zatem, aby mieć pewność głównej wygranej, należałoby złożyć około 14 mln różnych zakładów. Warto się zastanowić, dlaczego — skoro prawdopodobieństwo jest tak małe — co jakiś czas trafia się najwyższa wygrana.

Przypuśćmy, że przed losowaniem złożono 10 mln różnych zakładów. Szansa, że co najmniej jeden z nich to szczęśliwa szóstka, jest jak 10 do 14, czyli ponad 70%.

ZESTAW ZADAŃ

1. Pewne doświadczenie polega na rzucie symetryczną monetą i wylosowaniu jednej karty. Jeśli wypadnie reszka — karta jest losowana z talii 52 kart, a jeśli wypadnie orzeł — kartę losuje się z talii, z której usunięto wszystkie figury. Oblicz prawdopodobieństwo:

- a) wylosowania króla,
- b) wylosowania króla trefl,
- c) wylosowania dwójki,
- d) wylosowania dwójki pik.

2. W urnie znajdują się 3 kule białe i 7 czarnych. Losujemy jedną kulę. Jeśli wylosowana kula jest biała, to rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry, a jeśli czarna — rzucamy symetryczną kostką dwunastościenną.

- a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kulę białą, a w wyniku rzutu kostką otrzymamy liczbę pierwszą.
- b) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby pierwszej na kostce.

3. W dwóch pudełkach są losy loteryjne. W pierwszym pudełku jest 50 losów, w tym 10 wygrywających. W drugim pudełku jest 80 losów, w tym 20 wygrywających. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie 1 lub 6 — ciągniemy los z pierwszego pudełka. W pozostałych wypadkach ciągniemy los z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego.

4. Do worka wrzucono 50 losów loteryjnych, w tym 15 wygrywających.

- a) Wyciągamy kolejno dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyciągniemy dwa losy wygrywające. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jeden los jest wygrywający.
- b) Wyciągamy kolejno trzy losy z worka. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jeden z nich jest wygrywający, a dwa — przegrywające.

5. W dwóch pudełkach są cukierki. W pierwszym pudełku jest 15 cukierków czekoladowych i 5 owocowych, a w drugim jest 20 cukierków czekoladowych i 30 owocowych. Losujemy cukierek najpierw z pierwszego, a potem z drugiego pudełka.



- a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w wyniku losowania otrzymamy dwa cukierki czekoladowe.
- b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jeden z wylosowanych cukierków będzie czekoladowy, a drugi — owocowy.

6. Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Wyjaśnij, dlaczego zdarzenia „wypadną dwa orły i jedna reszka” oraz „wypadną dwie reszki i jeden orzeł” są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo każdego z tych zdarzeń.

7. Rzucamy pięć razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) co najmniej raz wypadnie orzeł,
- b) co najwyżej trzy razy wypadnie reszka.

8. Rzucamy trzema różnymi symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry.

- a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie dokładnie jedna szóstka.
- b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn liczb otrzymanych na kostkach będzie liczbą parzystą.

9. Wyobraź sobie, że losujemy kolejno dwie karty spośród kart przedstawionych na fotografii. Przyjmijmy, że wynik losowania to suma liczb na kartach. Dla każdego z możliwych wyników oblicz prawdopodobieństwo otrzymania tego wyniku.



10. Wybieramy trzy razy po jednej karcie bez zwracania z talii 24 kart, składającej się ze wszystkich figur oraz dziewiątek i dziesiątek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wszystkie wylosowane karty będą kierami,
- b) wśród tych kart będzie tylko jedna figura,
- c) wśród tych kart będzie as.

11. Z talii 52 kart wybieramy kolejno 4 karty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych kart:

- a) nie będzie ani jednego kiera,
- b) będzie co najmniej jeden as.

12. Drużyny piłkarskie Arsenal i Bajer mają rozegrać ze sobą dwa mecze. Eksperci twierdzą, że w każdym z tych meczów prawdopodobieństwo wygranej Arsenalu jest równe 0,5, a wygranej Bajera — 0,4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) oba spotkania zakończą się remisem,
- b) Arsenal przegra tylko jeden mecz,
- c) Bajer wygra co najmniej jeden mecz,
- d) obie drużyny zdobędą w tych dwóch meczach po tyle samo punktów (tzn. albo wygrają po jednym meczu, albo oba mecze zakończą się remisem).

Uwaga. Za zwycięstwo drużyna otrzymuje 3 pkt, a za remis 1 pkt.

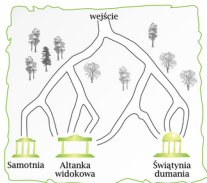
13. Na meczu koszykówki mężczyźni stanowią 20% kibiców. Barwami swojej drużyny pomalowało twarze 70% panów i 80% kobiet. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany kibic zachował własną twarz (niepomalowaną).



14. Najstarsi górale oceniają, że w tym roku szanse na ciepłą jesień są dwa razy większe niż na zimną jesień. Przewidują oni, że jeśli jesień będzie ciepła, to z prawdopodobieństwem 95% zima będzie śnieżna. Jeśli jednak jesień będzie chłodna, to śnieżnej zimy należy się spodziewać z prawdopodobieństwem 90%. Oblicz, jakie — według górali — jest prawdopodobieństwo tego, że zima będzie śnieżna.

15. Z dworca prowadzą dwa wyjścia: wyjście *A* — na przystanek autobusowy oraz wyjście *B* — na postój taksówek. Zaobserwowano, że pasażer korzysta z wyjścia *A* z prawdopodobieństwem 70%, zaś z wyjścia *B* — z prawdopodobieństwem 30%. Losowo wybrano trzech pasażerów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- wszyscy wybiorą wyjście *A*,
- wszyscy wybiorą to samo wyjście,
- jeden wybierze wyjście *A*, a pozostali dwaj — wyjście *B*,
- tylko dwaj z nich wybiorą to samo wyjście.



16. Na rysunku przedstawiono plan ścieżek w parku. Wyobraź sobie, że idąc od wejścia, na każdym rozwiedzeniu decydujesz za pomocą rzutu monetą o tym, w którą stronę pójdziesz (orzёл — w prawo, reszka — w lewo).

Przeprowadźcie w klasie symulację spaceru po parku. Niech każdy rzuci monetą trzy razy i zapisze, w której altance by się znalazł. Ustalcie, jaka część z was trafiła do każdej z altanek.

- 17. a)** W pudełku jest 16 czekoladek, w tym 4 marcepanowe. Losowo wybieramy po jednej czekoladce bez zwracania, do momentu, gdy wylosujemy czekoladkę marcepanową. Czy prawdopodobieństwo tego, że losować będziemy mniej niż trzy razy, jest większe niż $\frac{1}{2}$?

b) Z talii 52 kart losujemy po jednej karcie bez zwracania, tak długo, aż w ręku będziemy mieć dwa asy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowanie zakończy się po wyciągnięciu trzeciej karty.

c) Rzucamy monetą tak długo, aż wypadną dwa orły, niekoniecznie kolejno. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zakończysz rzucanie po trzecim rzucie.

d) Rzucamy monetą. Gdy wypadnie orzeł, przerywamy rzucanie, a gdy reszka — rzucamy jeszcze raz. Wykonujemy najwyżej trzy rzuty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ostatnim rzucie wypadnie orzeł.

W pewnym teleturnieju za jednymi z trojga drzwi jest ukryta nagroda. Uczestnik gry staje się jej właścicielem, gdy wskaże właściwe drzwi. Zgadywanie odbywa się w następujący sposób:

- Grający wskazuje drzwi, za którymi według niego schowano nagrodę.
- Prowadzący teleturniej otwiera losowo jedno z pozostałych drzwi (za którymi nie ma nagrody) i pyta grającego, czy podtrzymuje swoją decyzję, czy może chce ją zmienić.
- Grający wskazuje jedno z dwójga drzwi, które pozostały zamknięte.



Ten teleturniej nadawano w telewizji wiele lat. Widzowie, uważnie śledząc wyniki, mogliby zauważyć, że wśród graczy

zmieniających swą pierwotną decyzję odsetek wygrywających był wyższy niż wśród pozostałych graczy.

Obliczmy prawdopodobieństwo wygrania nagrody w tym teleturnieju, przy założeniu, że gracz zawsze zmienia decyzję.



Przy zmianie decyzji prawdopodobieństwo wygranej obliczamy następująco:

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Zatem, gdy gracz zmienia decyzję, to prawdopodobieństwo, że zdobędzie nagrodę jest dwukrotnie większe niż prawdopodobieństwo, że jej nie zdobędzie.

Zagadnienie to budziło wiele emocji i stało się tak znane, że nadano mu nawet nazwę: dylemat Monty'ego Halla (od imienia i nazwiska prezentera, który prowadził ten teleturniej przez kilka lat).

18. Przeczytaj ciekawostkę. Oblicz prawdopodobieństwo wskazania przez grającego właściwych drzwi, gdy przyjął on strategię, że:

- nie zmienia swojej decyzji,
- zmienia decyzję lub jej nie zmienia w zależności od wyniku rzutu monetą.

19. Przeczytaj ciekawostkę. Przypuśćmy, że w teleturnieju Monty'ego Halla zmieniono warunki: w I etapie jest czworo drzwi, a po wyborze jednych z nich przez uczestnika prowadzący grę otwiera losowo dwoje z niewskazanych drzwi (te, za którymi nie ma nagrody). Oblicz prawdopodobieństwo wskazania właściwych drzwi, gdy przyjmiemy strategię, że:

- zmieniamy decyzję,
- podtrzymujemy decyzję,
- zmieniamy decyzję losowo (w zależności od wyniku rzutu monetą).

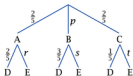
- **20.** W pierwszej urnie jest 6 kul białych i 4 czarne, a w drugiej urnie odwrotnie — 4 kule białe i 6 czarnych. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Gdy wypadnie szóstka lub jedynka, losujemy kulę z pierwszej urny i wkładamy ją do drugiej urny, w innym wypadku przekładamy losowo wybraną kulę z urny drugiej do pierwszej. Następnie losujemy jedną kulę z tej urny, w której jest więcej kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że druga wylosowana kula będzie biała.
- **21. a)** Dwaj zawodnicy rzucają na przemian symetryczną sześcienną kostką. Wygrywa ten, który pierwszy wyrzuci szóstkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zawodnik, który rzuca kostką jako pierwszy, wygra w swoim dziesiątym rzucie.
- b)** Dwaj zawodnicy rzucają na przemian symetryczną monetą, a wygrywa ten, który pierwszy wyrzuci orła. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zawodnik, który rzuca monetą jako drugi, wygra w swoim dwudziestym rzucie.
- c)** Trzej zawodnicy rzucają symetryczną monetą. Jeśli pierwszy wyrzuci reszkę, rzuca drugi zawodnik. Jeśli ten rzuci reszkę, to trzeci zawodnik rzuca monetą. Gdy i ten wyrzuci reszkę — rzuca znów pierwszy zawodnik itd. Rzucają do momentu, aż któryś z nich wyrzuci orła. Oblicz dla każdego z zawodników prawdopodobieństwo tego, że wyrzuci orła w swoim dwudziestym rzucie.



MINISPRAWDZIAN

51. Przyjrzyj się rysunkowi. Niektóre prawdopodobieństwa oznaczono literami p , r , s i t . Które z nich jest równe $\frac{2}{5}$?

- A. p B. r C. s D. t



52. W torbie znajduje się 50 orzechów, wśród których 7 jest pustych. Prawdopodobieństwo tego, że dwa losowo wybrane z torby orzechy będą puste, jest równe:

- A. $\frac{6}{49}$ B. $\frac{49}{250}$ C. $\frac{3}{175}$ D. $\frac{21}{125}$

53. W pewnym regionie zaobserwowano, że jeśli wieje wiatr z zachodu, to prawdopodobieństwo deszczu wynosi 0,2, a jeśli z innego kierunku — to tylko 0,1. Meteorolodzy oceniają prawdopodobieństwo wiatru z zachodu w najbliższy weekend na 0,8. Prawdopodobieństwo tego, że ten weekend będzie deszczowy, jest równe:

- A. 0,16 B. 0,18 C. 0,2 D. 0,26

WARTOŚĆ OCZEKIWANA

- I Jeden z dwóch graczy rzuca wielokrotnie sześcienną kostką. Za każdym razem, gdy wyrzuci szóstkę, otrzymuje od drugiego gracza 9 zł, a w pozostałych wypadkach — płaci mu 1 zł. Zastanówmy się, jakiej wygranej może się spodziewać gracz rzucający kostką po 60 rzutach?

Prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki to $\frac{1}{6}$. Zatem można się spodziewać, że jedna szóstka wszystkich rzutów, czyli 10 rzutów, zakończy się wygraną gracza rzucającego kostką, a pozostałe 50 rzutów zakończy się jego przegraną. Możemy oczekiwać, że po 60 rzutach jego wygrana wyniesie: $10 \cdot 9 - 50 \cdot 1 = 40$ [zł]. Zatem średnio może on oczekiwać w każdym rzucie wygranej równej $\frac{40}{60}$, czyli $\frac{2}{3}$ złotego.

Obliczmy, jakiej średniej wygranej mógłby oczekiwać ten gracz w każdym rzucie po n rzutach:

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot n \cdot 9 - \frac{5}{6} \cdot n \cdot 1}{n} = \frac{1}{6} \cdot 9 - \frac{5}{6} \cdot 1 = \frac{2}{3} \text{ [zł]}$$

Jak widać, otrzymana wielkość nie zależy od liczby rzutów. Tę wielkość nazywamy wartością oczekiwaną zysku gracza rzucającego kostką w tej grze.

Jeśli możliwymi zyskami uczestnika U w pewnej grze są liczby $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, którym odpowiadają prawdopodobieństwa $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, to **wartość oczekiwaną** zysku tego uczestnika oznaczamy symbolem EZ_U i obliczamy ze wzoru:

$$EZ_U = p_1 \cdot l_1 + p_2 \cdot l_2 + p_3 \cdot l_3 + \dots + p_n \cdot l_n$$

PRZYKŁAD 1 Losujemy kartę z talii 52 kart. Jeśli wyciągniemy asa — tracimy 10 punktów, jeśli wyciągniemy waleta, damę lub króla — zdobywamy 2 punkty. W pozostałych wypadkach zdobywamy 1 punkt. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku.

$$A - \text{Wyciągnięcie asa.} \quad P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$F - \text{Wyciągnięcie figury innej niż as.} \quad P(F) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$B - \text{Wyciągnięcie blotki.} \quad P(B) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

$$EZ = \frac{1}{13} \cdot (-10) + \frac{3}{13} \cdot 2 + \frac{9}{13} \cdot 1 = \frac{5}{13}$$

ZADANIE W pudełku jest 5 kul czerwonych, 4 niebieskie i 3 zielone. Losujemy jedną kulę. Jeśli jest czerwona, zdobywamy 6 zł, gdy wyciągniemy niebieską kulę — tracimy 3 zł, a gdy zieloną — tracimy 2 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku tej gry.

ĆWICZENIE Przyjmijmy, że gra opisana w przykładzie 1. toczy się w ten sposób, że po każdym losowaniu karty zwracamy ją do talii, karty tasujemy i następuje kolejne losowanie. Jakiej wygranej można się spodziewać po 52 losowaniach, a jakiej — po 260 losowaniach?

zadania 1-3 ►

- II** Zauważmy, że w przykładzie gry opisanej na początku rozdziału pierwszy gracz (rzucający kostką) może się spodziewać w każdym rzucie średniej wygranej $\frac{2}{3}$ złotego, czyli $EZ_1 = \frac{2}{3}$ [zł]. W takim razie drugi gracz musi się spodziewać takiej przegranej, czyli $EZ_2 = -\frac{2}{3}$ [zł]. Trudno zatem taką grę uważać za sprawiedliwą.

Grę będziemy uznawać za sprawiedliwą, gdy wartość oczekiwana wyniku każdego z graczy jest równa 0.

PRZYKŁAD 2 W dwóch pudełkach są kule. W pierwszym jest pięć kul z numerami od 1 do 5, a w drugim są cztery kule z numerami od 1 do 4. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka. Jeśli suma liczb z wylosowanych kul jest równa 5, to wygrywamy 5 zł, jeśli ta suma jest mniejsza od 5 — przegrywamy 2 zł. Jaką należy ustalić stawkę w przypadku wylosowania kul z liczbami o sumie większej od 5, aby gra była sprawiedliwa?

A — Suma wylosowanych liczb jest równa 5.

B — Suma wylosowanych liczb jest mniejsza od 5.

C — Suma wylosowanych liczb jest większa niż 5.

	1	2	3	4	5
1	o	o	o	✓	□
2	o	o	✓	□	□
3	o	✓	□	□	□
4	✓	□	□	□	□

W tabeli pola odpowiadające zdarzeniu A oznaczono symbolem ✓, pola odpowiadające zdarzeniu B oznaczono symbolem o, a odpowiadające zdarzeniu C — symbolem □.

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P(C) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

x — kwota odpowiadająca wylosowaniu sumy większej od 5

$$\frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{3}{10} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot x = 0$$

$$x = -0,8$$

Odp. Gra będzie sprawiedliwa, gdy przy wylosowaniu kul z liczbami o sumie większej niż 5 będziemy tracić 80 groszy.

ZADANIE Rzucamy dwiema różnymi sześciennymi kostkami do gry. Gdy suma oczek na kostkach jest równa 7 — otrzymujemy 10 zł. Gdy suma oczek jest większa od 7 — tracimy 2 zł. Jaka powinna być stawka za sumę oczek mniejszą od 7, aby gra była sprawiedliwa?

PRZYKŁAD 3 W pewnej loterii co trzeci los wygrywa. Jedna czwarta z wygranych losów oznacza otrzymanie 90 zł, a pozostałe wygrane oznaczają zwrot ceny losu. Po każdym losowaniu los wraca do pojemnika po to, aby wszyscy uczestnicy mieli taką samą szansę wygranej. Ile powinien kosztować los, aby loteria była sprawiedliwa?

A — Wyciągnięto los z wygraną 90 zł.

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

B — Wyciągnięto los, który zwraca jego koszt.

$$P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

C — Wyciągnięto pusty los.

$$P(C) = \frac{2}{3}$$

x — cena jednego losu

$$\frac{1}{12} \cdot (90 - x) + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot (-x) = 0$$

..... Wielkość wygranej trzeba pomniejszyć
..... o koszt losu.

$$x = 10$$

Odp. Loterię będzie można uznać za sprawiedliwą, gdy losy będą sprzedawane po 10 zł.

ZADANIE W pewnej loterii połowa losów wygrywa. Co trzeci wygrany los oznacza otrzymanie 15 zł. Pozostałe wygrane oznaczają zwrot ceny losu. Po każdym losowaniu los wraca do pojemnika z losami. Ile powinien kosztować los, aby ta loteria była sprawiedliwa?

zadania 4–12 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ **1.** Oblicz wartość oczekiwaną wyniku w opisanej grze.

a) Rzucamy sześcienną kostką do gry. Gdy wypadną 4 oczka, zdobywamy 4 punkty, gdy wypadnie 5 oczek — zdobywamy 5 punktów. W pozostałych wypadkach tracimy 1 punkt.

b) W pudełku jest 10 kul: 1 niebieska, 2 czerwone, 3 zielone i 4 białe. Za wylosowanie kuli niebieskiej otrzymujemy 10 punktów, za kulę czerwoną — 4 punkty, a za zieloną — tracimy 1 punkt. W wypadku wylosowania białej kuli nie tracimy ani nie zyskujemy punktów.

2. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku w opisanej grze.

a) Rzucamy monetą i sześcienną kostką do gry. Jeśli na monecie wypadnie orzeł — wygrywamy 2 zł. Jeśli wypadnie reszka i 1 oczko — przegrywamy 5 zł. W pozostałych wypadkach — przegrywamy 1 zł.

b) Rzucamy dwiema różnymi kostkami do gry. Jeśli na obu kostkach będzie ta sama liczba oczek — wygrywamy 10 zł. Jeśli różnica liczby oczek będzie równa 1 — wygrywamy 2 zł. W pozostałych wypadkach przegrywamy 5 zł.

3. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku w opisanej grze.

a) Rzucamy trzema różnymi monetami. Jeśli wypadną trzy orły lub 3 reszki — wygrywamy 100 zł. Jeśli wypadną dokładnie 2 orły — wygrywamy 5 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy 10 zł.

b) Z pudełka, w którym jest 9 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9, wyciągamy losowo trzy kule. Jeśli na wszystkich wyciągniętych kulach są liczby nieparzyste — przegrywamy 20 zł, jeśli na wszystkich są liczby parzyste — wygrywamy 10 zł. W pozostałych wypadkach wygrywamy 1 zł.

II 4. Rzucamy dwiema różnymi sześciennymi kostkami do gry — czerwoną i zieloną. Jeśli wynik na czerwonej kostce jest większy niż na zielonej, gracz otrzymuje 2 zł. Jeśli wynik jest większy na zielonej kostce — gracz traci 4 zł. Ile powinien otrzymać gracz za ten sam wynik na obu kostkach, aby gra była sprawiedliwa?

5. Na kole ruletki są liczby od 0 do 36. Gracz obstawia jedną z liczb od 1 do 36. Jeśli wypadnie wybrana przez niego liczba, to otrzyma od krupiera 35 razy więcej, niż postawił, i zwrot postawionej kwoty.

a) Czy ta gra jest sprawiedliwa?

b) Gracz postawił 100 zł na pewną liczbę. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku.



6. Gracz rzuca sześcienną kostką. Jeśli wyrzuci szóstkę — przegrywa pewną kwotę. Jeśli wyrzuci mniej niż sześć oczek, rzuca jeszcze raz i otrzymuje tyle złotych, ile jest oczek na kostce w drugim rzucie. Jaka powinna być kwota przegranej, aby gra była sprawiedliwa?

7. W urnie jest 7 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 7. Wyciągamy losowo jedną kulę. Gdy wynik jest liczbą podzielną przez 3 — przegrywamy 3 zł. Jeśli nie — losujemy następną kulę. Jeśli na tej kuli jest liczba podzielna przez 3 — przegrywamy 5 zł, a jeśli nie — wygrywamy pewną kwotę. Jaka to powinna być kwota, aby gra była sprawiedliwa?

8. Losujemy trzykrotnie kartę z talii 52 kart, za każdym razem zwracając ją do talii. Jeśli wyciągniemy 3 razy kiera, wygrywamy pewną kwotę. Jeśli wyciągniemy trzy razy pika — wygrywamy kwotę dwa razy większą. W każdym pozostałym wypadku przegrywamy 3 zł. Jakie powinny być stawki wygranych, aby grę uznać za sprawiedliwą?

9. W pojemniku z losami jest 20% losów wygrywających. 10% spośród losów wygrywających oznacza otrzymanie 100 zł, 30% losów wygrywających oznacza otrzymanie 20 zł. Pozostałe losy wygrywające oznaczają zwrot ceny losu. Po każdym losowaniu los wraca do pojemnika. Ile powinien kosztować los, aby loteria była sprawiedliwa?

10. Z 10 kart, spośród których są dwa króle i dwa asy, losujemy dwie karty. Gdy wylosujemy dwa asy lub dwa króle — otrzymujemy 300 zł, gdy wylosujemy króla i asa — otrzymujemy 60 zł, a gdy w wylosowanej parze będzie jeden król lub jeden as z inną od króla i asa kartą — krupier zwraca nam koszt udziału w losowaniu. W pozostałych wypadkach nie dostajemy nic. Ile powinno się płacić za możliwość losowania, aby gra była sprawiedliwa?

11. W trzech pudełkach znajdują się zapalki. W tabelce podano, ile zapalek jest w każdym z nich. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie 6 — losujemy zapalkę z III pudełka, gdy wypadnie 1 lub 2 — losujemy z II pudełka, a w pozostałych wypadkach — z I pudełka.

Pudełko	I	II	III
Zapalki z lebkami	6	3	14
Zapalki bez lebków	4	12	16

Za wylosowanie zapalki z lebkami gracz otrzymuje 3 zł. Jaka powinna być kwota przegranej za wylosowanie zapalki bez lebka, aby gra była sprawiedliwa?

12. Organizatorzy loterii charytatywnej przyjęli następujące założenia:

1. Losowanie polega na wyciągnięciu jednej kuli z pojemnika, w którym są kule białe i czarne.
2. Grający otrzymuje 100 zł, gdy wylosuje kulę czarną.
3. Po każdym losowaniu kula wraca do pojemnika.
4. Spodziewana liczba uczestników loterii to 2000 osób, a spodziewany dochód to 10 000 zł.

a) Jaka powinna być opłata za możliwość udziału w loterii, gdy w pojemniku są 2 kule czarne i 8 białych?

b) Zaplanuj, ile białych kul i ile czarnych kul powinno być w pojemniku, jeśli organizatorzy zaplanowali, że opłata za jeden los wyniesie 10 zł.

MINISPRAWDZIAN

51. W urnie są 2 kule zielone i 4 żółte. Losujemy dwie kule. Jeśli obie są zielone — wygrywamy 15 zł, jeśli obie są żółte — wygrywamy 5 zł. W pozostałych wypadkach przegrywamy 3 zł. Jaka jest wartość oczekiwana w tym losowaniu?

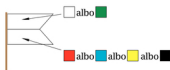
- A. 1,40 zł B. 4,60 zł C. $\frac{23}{9}$ zł D. $\frac{47}{9}$ zł

52. Rzucamy dwiema różnymi sześciennymi kostkami do gry. Jeśli wyrzucimy parę (na obu kostkach będzie taka sama liczba oczek), to wygrywamy pewną kwotę. Jeśli wyrzucimy jedną szóstkę — wygrywamy złotówkę. W pozostałych wypadkach przegrywamy dwuzłotówkę. Jaka powinna być kwota wygranej za wyrzucenie pary, aby gra była sprawiedliwa?

- A. 50 gr B. 5 zł C. 2,50 zł D. 3 zł

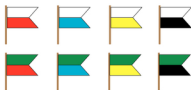
ZASADA MNOŻENIA I ZASADA DODAWANIA

- 1 Wyobraź sobie, że chorągiewka na rysunku obok ma być pomalowana w taki sposób, że górna jej część będzie miała kolor biały lub zielony, a dolna część — kolor czerwony, niebieski, żółty lub czarny.



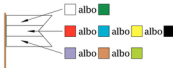
Na ile różnych sposobów można pokolorować tę chorągiewkę?

Sposób pokolorowania zależy od dwóch decyzji. Pierwszą decyzją to wybór koloru na górny pasek, a druga — na dolny. Pierwszą decyzję można podjąć na 2 sposoby, a drugą — na 4 sposoby. Na poniższym rysunku są przedstawione wszystkie możliwości.



Całą chorągiewkę można więc pomalować na $2 \cdot 4$ sposobów.

Kolejna chorągiewka składa się z trzech pasków. Załóżmy, że mamy ją pomalować różnymi kolorami zgodnie z podanym opisem.



Ile trójkolorowych chorągiewek można utworzyć?

Decyzje dotyczące kolorów poszczególnych pasków można podjąć odpowiednio na 2, 4 i 3 sposoby. Wiemy już, że dwa górne paski można pomalować na $2 \cdot 4$ sposobów. Dla każdej z otrzymanych częściowo pomalowanych chorągiewek trzeci pasek można pomalować na 3 sposoby. Zatem chorągiewkę można pomalować na $2 \cdot 4 \cdot 3$, tzn. 24 sposoby.

ĆWICZENIE Kolorując chorągiewkę składającą się z trzech pasków w sposób opisany powyżej, można otrzymać 24 różne chorągiewki. Ile wśród tych chorągiewek jest takich, w których:

- środkowy pasek jest czerwony,
- dolny pasek jest brązowy lub fioletowy?

W opisanych przypadkach stosowaliśmy regułę zwaną **zasadą mnożenia**, którą opisano poniżej.

Przypuśćmy, że wynik pewnego działania zależy od kolejno podejmowanych decyzji i że decyzje te są niezależne. Jeśli przy podejmowaniu pierwszej decyzji mamy do wyboru n_1 możliwości, przy drugiej — n_2 możliwości itd., a przy ostatniej — n_k możliwości, to liczba różnych wyników, które możemy otrzymać, jest równa iloczynowi:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

W worku znajduje się pięć kul ponumerowanych cyframi od 1 do 5.

- Losujemy trzy razy po jednej kuli bez zwracania i zapisujemy otrzymane cyfry obok siebie. Ile różnych liczb można w ten sposób otrzymać?

Jako pierwsza zostanie wybrana jedna z pięciu cyfr (a więc jest pięć możliwości), jako druga zostanie wybrana jedna z pozostałych czterech cyfr (cztery możliwości), jako trzecia — jedna z trzech cyfr. Zatem różnych liczb, jakie możemy otrzymać, jest:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

- Wyciągamy kolejno wszystkie kule i zapisujemy wylosowane cyfry. Ile różnych liczb można w ten sposób otrzymać?

Różnych pięciocyfrowych liczb, jakie mogą zostać zapisane, jest:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

- Wyciągamy cztery razy po jednej kuli bez zwracania i zapisujemy cyfry. Ile różnych liczb nieparzystych można w ten sposób otrzymać?

Cyfrą jedności może być jedna z trzech cyfr (1, 3 lub 5). Cyfrą dziesiątek może być zatem jedna z czterech pozostałych cyfr, cyfrą setek — jedna z trzech pozostałych, a cyfrą tysięcy — jedna z dwóch cyfr. Zatem różnych nieparzystych liczb czterocyfrowych możemy otrzymać:

$$3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$$

- Losujemy jedną kulę, zapisujemy otrzymaną cyfrę, a następnie wrzucamy kulę z powrotem do worka. Losowanie powtarzamy sześć razy. Ile różnych liczb można w ten sposób otrzymać?

Na każdym z sześciu miejsc może zostać zapisana jedna z pięciu cyfr. Wobec tego liczb, które możemy w ten sposób zapisać, jest:

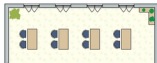
$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15\,625$$

- Losujemy trzy razy po jednej kuli i za każdym razem wrzucamy kulę z powrotem do worka. Ile liczb większych od 300 możemy otrzymać?

Na pierwszym miejscu może być jedna z trzech cyfr (3, 4 lub 5). A więc razem liczb trzycyfrowych większych od 300 będzie:

$$3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$$

PRZYKŁAD 1 Na rysunku przedstawiono fragment planu klasy, na którym zaznaczono cztery dwuosobowe ławki szkolne. Miejsca w tych ławkach przydzielamy sześciu osobom — dwóm dziewczynkom oraz czterem chłopcom.



a) Na ile różnych sposobów można przydzielić miejsca tym sześciu osobom?

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{20\,160}$$

Pierwszej osobie można przydzielić jedno z ośmiu miejsc, drugiej jedno z siedmiu itd.

b) Na ile sposobów można przydzielić miejsca tym sześciu osobom tak, aby dziewczynki siedziały w jednej ławce?

Liczba możliwych sposobów zajęcia miejsc przez dziewczynki:

$$4 \cdot 2 = 8$$

Dziewczynki mogą usiąść w jednej z czterech ławek, a w każdej na dwa sposoby.

Liczba możliwych sposobów zajęcia miejsc przez chłopców (gdy dziewczynki siedzą):

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Pierwszy z chłopców może zająć jedno z sześciu pozostałych miejsc, drugi chłopiec — jedno z pięciu miejsc itd.

Liczba wszystkich możliwych sposobów zajęcia miejsc:

$$8 \cdot 360 = \underline{2\,880}$$

c) Na ile sposobów można przydzielić miejsca tak, aby dziewczynki nie siedziały razem?

Liczba możliwych sposobów:

$$20\,160 - 2\,880 = \underline{17\,280}$$

Od liczby wszystkich możliwych sposobów zajęcia miejsc odejmujemy te, w których dziewczynki siedzą w jednej ławce.

d) Na ile sposobów można przydzielić miejsca, aby każda dziewczynka siedziała z chłopcem i nikt nie siedział sam w ławce?

Liczba sposobów zajęcia miejsc przez pierwszą z dziewcząt z chłopcem:

$$8 \cdot 4 = 32$$

Dziewczynka może wybrać jedno z ośmiu miejsc, a obok niej może usiąść jeden z czterech chłopców.

Liczba sposobów zajęcia miejsc przez drugą dziewczynkę z chłopcem (pierwsza para już siedzi):

$$6 \cdot 3 = 18$$

Druga dziewczynka może zająć jedno z sześciu pozostałych miejsc, a obok niej może usiąść jeden z trzech pozostałych chłopców.

Liczba możliwych sposobów zajęcia miejsc przez pozostałych chłopców, gdy obie pary siedzą:

$$4 \cdot 1 = 4$$

Szukana liczba możliwych sposobów:

$$32 \cdot 18 \cdot 4 = \underline{2304}$$

Jeden z pozostałych dwóch chłopców może wybrać jedno z czterech miejsc, a ostatni z chłopców musi usiąść obok niego.

ZADANIE Odpowiedz na wszystkie powyższe pytania, gdy w klasie jest pięć dwuosobowych ławek, a liczby dziewcząt i chłopców się nie zmieniły.

zadania 1–14 ►

- II Ustalając liczbę możliwości, czasami możemy rozważyć kilka rozłącznych przypadków, policzyć, ile jest możliwości w każdym z nich, i dodać otrzymane wyniki. Taki sposób postępowania nazywamy **zasadą dodawania**.

PRZYKŁAD 2 a) Spośród liczb od 1 do 9 wybieramy kolejno dwie różne. Na ile sposobów można wybrać te dwie liczby, tak aby ich suma była liczbą parzystą?

Suma dwóch liczb jest parzysta, gdy obie są parzyste lub gdy obie są nieparzyste.

Przypadek 1
Obie liczby są
parzyste, wtedy
odpowiednich par jest:

$$4 \cdot 3 = 12$$

Przypadek 2
Obie liczby są
nieparzyste, wtedy
odpowiednich par jest:

$$5 \cdot 4 = 20$$

Są 4 liczby parzyste. Pierwszą liczbę można wybrać na 4 sposoby, drugą na 3 sposoby. Jest 5 liczb nieparzystych. Pierwszą możemy wybrać na 5 sposobów, a drugą — na 4 sposoby.

Łącznie wszystkich par liczb, których suma jest liczbą parzystą, jest:

$$12 + 20 = \underline{32}$$

b) W klasie IVa jest 25 osób, w IVb — 30 osób, a w IVc — 28 osób. Na ile sposobów można wybrać dwuosobową delegację tak, aby były w niej osoby z różnych klas?

Przypadek 1 Przypadek 2 Przypadek 3

IVa i IVb:

IVa i IVc:

IVb i IVc:

$$25 \cdot 30 + 25 \cdot 28 + 30 \cdot 28 = \underline{2290}$$

Wybrane osoby mogą być uczniami klas IVa i IVb albo klas IVa i IVc, albo klas IVb i IVc.

ZADANIE a) Spośród liczb od 0 do 9 wybieramy kolejno trzy różne. Na ile sposobów można je wybrać tak, aby ich suma była liczbą parzystą?

b) W klasach IVa, IVb, IVc i IVd liczby uczniów wynoszą odpowiednio 20, 22, 21, 24. Na ile sposobów można wybrać trzynosobową delegację, aby były w niej osoby z trzech różnych klas?

Zagadnieniami takimi jak te, które omówiliśmy w powyższych przykładach, zajmuje się dział matematyki zwany kombinatoryką.

zadania 15–25 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Ile różnych słów można utworzyć, łącząc poniższe przedrostki (z pierwszego wiersza) z podanymi wyrazami (z drugiego wiersza)?

wy

za

na

prze

brać

grać

rzucić

robić

liczyć

nosić

bić

2. Pewien leniwy autor przemówień zauważył, że można utworzyć wypowiedź, budując każde zdanie według pewnego schematu:

- Najpierw podzielił na cztery grupy wybrane wyrazy i zwroty (zapisano je poniżej).
- Następnie tworzył zdania, losując dowolny zwrot z pierwszej grupy, potem dowolny zwrot z drugiej grupy, później z trzeciej i na koniec z czwartej.



Jak długo mogłoby trwać takie „przemówienie”, gdyby żadnego ze zdań nie powtarzać (przyjmij, że jedno zdanie przemawiający wypowiada przez 5 sekund)?

Grupa I

Ludziom ubogim
Całemu narodowi
Naszemu krajowi
Wyborcom
Wszystkim
uczciwym ludziom

Grupa II

jest potrzebna
nie wystarczy
należy się

Grupa III

lepsza
dobra
odważna
uczciwa
mądra
rozważna
ostrożna

Grupa IV

władza
polityka
partia
reforma
zmiana

3. a) Mechanizm przerzutki pewnego roweru ma trzy koła zębate z przodu i osiem z tyłu. Na ile sposobów można w tym rowerze ustawić przerzutki?

b) Wyobraź sobie, że kupujesz samochód i możesz wybrać jeden z pięciu oferowanych kolorów lakieru oraz jeden z trzech rodzajów tapicerki. Możesz również dodatkowo wybrać (lub nie) klimatyzację, a także centralny zamek jako wyposażenie. Ile masz różnych możliwości?

4. Numer dowodu osobistego w pewnym kraju składa się z 9 znaków. Trzy pierwsze znaki to litery wybrane spośród 26 liter, a pozostałe znaki to cyfry. Ile różnych numerów dowodów osobistych można przydzielić obywatelom?

5. Z domu Czerwonego Kapturka do domu babci wiedzie pięć różnych dróg. Na ile sposobów Czerwony Kapturek może przebyć drogę do babci i z powrotem, jeśli:

- a) nie wraca do domu tą samą drogą, którą szedł do babci,
- b) w każdą stronę może iść dowolną drogą,
- c) wraca do domu jedną z dwóch najkrótszych dróg?

6. Oblicz, ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć z podanych cyfr (cyfry mogą się powtarzać).

- a) 1, 3, 7
- b) 0, 1, 5
- c) 1, 3, 5, 7
- d) 6, 8

7. Z cyfr 0, 1, 4, 7, 8 tworzymy liczby (cyfry mogą się powtarzać). Ile można w ten sposób utworzyć liczb:

- a) pięciocyfrowych,
- b) czterocyfrowych parzystych,
- c) trzycyfrowych nieparzystych,
- d) trzycyfrowych podzielnych przez 4?

8. Ile jest różnych liczb naturalnych trzycyfrowych, takich że cyfra setek jest parzysta, a pozostałe cyfry są nieparzyste?

9. Losujemy kule z urny, w której znajduje się 9 kul z numerami od 1 do 9. Wynikiem losowania jest liczba utworzona z cyfr na kolejno wyjmowanych kulach. Ustal, ile różnych liczb możemy otrzymać, jeśli wyjmujemy:

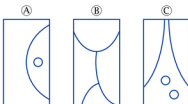
- a) kolejno 2 kule i żadnej nie wrzucamy z powrotem do urny,
- b) dwa razy kulę i za każdym razem wrzucamy ją z powrotem do urny,
- c) kolejno 3 kule i tylko za pierwszym razem wrzucamy kulę z powrotem do urny,
- d) kolejno 3 kule i za każdym razem wrzucamy kulę z powrotem do urny.

10. Z siedmiu płócien w różnych jednolitych kolorach (wśród nich jest niebieski) zamierzamy uszyć spódnicę, która składa się z trzech poziomych pasów jednakowej szerokości o różnych kolorach. Ile różnych spódnic możemy uszyć, jeżeli:

- a) środkowy pas musi być niebieski,
- b) jeżeli jeden z pasów musi być niebieski,
- c) żaden z pasów nie jest niebieski?

11. Figury A, B i C należy pokolorować tak, aby sąsiadujące obszary miały różne kolory. Na ile sposobów można pokolorować każdą z tych figur, jeśli mamy do dyspozycji:

- a) trzy kolory,
- b) cztery kolory?



- **12.** Każde z sześciorga dzieci w rodzinie — Julek, Kuba, Adam, Mateusz, Ryszard i Edmund — sprząta w kuchni raz w tygodniu (od poniedziałku do soboty). Oblicz, na ile sposobów można przydzielić dyżury w kuchni tak, aby:
- a) w poniedziałek sprzątał Edmund,
 - b) w sobotę nie sprzątał Adam,
 - c) wtorek i środa były dniami dyżuru Julka i Kuby,
 - d) Ryszard dyżurował następnego dnia po Mateuszu.

Ciekawostka

Wolfgang Amadeusz Mozart (czyt. mo-cart) był znany z poczucia humoru. Jednym z przykładów może być utwór *Musikalisches Würfelspiel* (*Muzyczna gra w kości*), wydany już po śmierci autora.

Dziełko to jest przepisem na tworzenie różnych 16-taktowych menuetów. Mozart przedstawił po dwie propozycje taktów ósmego i szesnastego oraz po jedenaście propozycji każdego z pozostałych taktów. Wykonawca sam mógł wybrać warianty taktów i „skomponować”

własny menuet. Odegranie takiego utworu zajmowało około pół minuty.

Mozart chciał, by wybór wersji taktu ósmego i szesnastego następował na przykład w wyniku rzutu monetą, a wybór wersji każdego z pozostałych jedenastu taktów — w wyniku rzutu kostkami. Proponował, by rzucać dwiema kostkami i od sumy wyrzuconych oczek na kostkach odejmować 1. Otrzymany wynik wskazywałby, którą z jedenastu wersji należy wybrać.

13. Przeczytaj ciekawostkę.

- a) Ile różnych menuetów można utworzyć, korzystając z przepisu Mozarta? Jak długo trwałoby odegranie ich wszystkich?
- b) Sposób losowania taktu spośród jedenastu zaproponowanych przez Mozarta nie daje równych szans wszystkim tym jedenastu taktom. Który z nich byłby wybierany najczęściej, a który — najrzadziej?

14. Siedmiu biznesmenów na spotkaniu przywitało się uściskiem dłoni i wymieniło wizytówkami. Ile było uścisków dłoni? Ile wizytówek zostało wręczonych?

◀ **15.** W klasie IVa jest 12 dziewcząt i 13 chłopców, a w klasie IV b jest 15 dziewcząt i 10 chłopców. Wybieramy dwuosobową delegację, w której jest chłopiec i dziewczynka.

- a) Ile delegacji można wybrać, jeśli oboje muszą być z tej samej klasy?
- b) Ile delegacji można wybrać, jeśli ich członkowie muszą być z różnych klas?

16. W odtwarzaczu umieszczamy trzy płyty CD różnych wykonawców. Losowo wybieramy jedną z płyt i słuchamy wszystkich utworów w przypadkowej kolejności. Ile różnych ciągów utworów możemy przesłuchać, jeśli na dwóch płytach jest po 10 utworów, a na trzeciej płycie jest 12 utworów?

17. Jedna z lodziarni oferuje 5 smaków lodów, a druga — 7 smaków. Trzy koleżanki chcą kupić w jednej z tych lodziarni po jednej gałce. Na ile różnych sposobów dziewczynki mogą kupić lody?

18. W wagonie są wolne miejsca tylko w trzech przedziałach. W jednym są wolne 4 miejsca, w drugim 3 miejsca, a w trzecim jest 5 wolnych miejsc. Na ile sposobów dwie osoby mogą zająć miejsca w wagonie, jeśli chcą siedzieć w jednym przedziale?

19. Ustal, ile jest trzycyfrowych liczb parzystych, w których występuje:

- a) dokładnie jedna cyfra 5, b) co najmniej jedna cyfra 4.

20. Ile jest różnych liczb spełniających podany warunek?

- a) Liczba jest trzycyfrowa parzysta i występuje w niej dokładnie jedna cyfra 0.
b) Liczba jest trzycyfrowa nieparzysta i występuje w niej dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2.

21. Ile jest liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 3 i spełniają podany warunek?

- a) W liczbie jest jedna jedynka i jedno zero.
b) W liczbie jest dokładnie jedna dziewiątka.

22. Ile jest liczb czterocyfrowych spełniających podane warunki?

- a) Liczba jest większa od 3500.
b) Liczba jest większa od 5200 i ma parami różne cyfry.
c) Liczba jest mniejsza od 4300 i występuje w niej co najmniej jedno zero.

23. Do ośrodka treningowego przyjechało dziesięciu sportowców: ośmiu brydżystów i dwóch szachistów. W ośrodku jest wolnych 12 jednoosobowych pokoi: 9 pokoi na parterze i 3 pokoje na pierwszym piętrze.



- a) Na ile sposobów można rozlokować sportowców w pokojach?
b) Na ile sposobów można rozlokować sportowców w pokojach tak, aby któryś z brydżystów mieszkał sam na pierwszym piętrze?
c) Na ile sposobów można przydzielić sportowcom pokoje tak, aby wszyscy szachiści mieszkali na pierwszym piętrze?
d) Na ile sposobów można rozlokować sportowców w pokojach tak, aby szachiści nie mieszkali na tym samym piętrze co brydżyści?

24. Na rysunku przedstawiono schemat miejsc siedzących w samochodzie osobowym. Litery oznaczają, jakie osoby mogą zająć miejsca w samochodzie. Wielkimi literami oznaczono osoby dorosłe, przy czym literami K , K_1 , K_2 , K_3 osoby posiadające prawo jazdy, a małymi literami — dzieci. Przyjmujemy, że dzieci nie mogą zajmować miejsc na przednich siedzeniach. Na ile sposobów osoby opisane literami przy rysunku mogą zająć miejsca w samochodzie?

a) $K a b A B C$

b) $K_1 K_2 A B C D$

c) $K_1 K_2 K_3 A B C$

d) $K_1 K_2 K_3 a b A$



25. Wyobraź sobie, że do każdej przegródki pudełka (zob. rysunek) wkładamy jedną z ośmiu czekoladek o różnych kształtach — cztery z mlecznej czekolady i cztery z białej.



- a) Na ile sposobów można ułożyć czekoladki tak, aby przegródki, w których znalazły się czekoladki z tej samej czekolady, nie miały wspólnej ścianki?
- b) Na ile sposobów można włożyć czekoladki do pudełka tak, aby cztery środkowe przegródki zajmowały czekoladki z tej samej czekolady?
- c) Zjedzono jedną czekoladkę z mlecznej czekolady. Na ile sposobów można poukładać pozostałe tak, aby te z białej czekolady znalazły się w jednym rzędzie?

MINISPRAWDZIAN

51. W klasie liczącej 21 uczniów przeprowadzono losowanie 3 biletów do trzech różnych teatrów. Na ile różnych sposobów mogło się zakończyć to losowanie, jeżeli każdy uczeń mógł wylosować co najwyżej jeden bilet?

A. 7980 B. 7 C. 42 D. 60

52. Na ile sposobów można posadzić na siedmioosobowej ławce siedem osób tak, aby ustalone dwie osoby A i B siedziały obok siebie?

A. 1440 B. 10 080 C. 5040 D. 720

53. Ile jest liczb czterocyfrowych o parami różnych cyfrach, które są większe od 5400?

A. 2016 B. 2240 C. 2296 D. 3236

WARIACJE

- I Gdy stosowaliśmy zasadę mnożenia, w obliczeniach często występował iloczyn kolejnych liczb. Iloczyn n kolejnych liczb naturalnych od 1 do n będziemy zapisywać za pomocą symbolu $n!$ (czytamy: „ n silnia”).

ĆWICZENIE A Oblicz: $4!$, $5!$, $6!$.

Jeśli n jest liczbą naturalną i $n > 1$, to przyjmujemy, że:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy, że:

$$0! = 1 \text{ i } 1! = 1$$

zadania 1–4 ►

II PERMUTACJE

ĆWICZENIE B Na pięciolinii zapisano cztery dźwięki. Gdybyśmy zmienili kolejność tych nut, powstałaby inna melodyjka. Ile różnych melodyjek można w ten sposób utworzyć?



Każdy ciąg utworzony ze wszystkich elementów pewnego zbioru nazywamy **permutacją** tego zbioru. Na przykład wszystkie możliwe permutacje 3-elementowego zbioru $\{\bullet, \blacksquare, \blacktriangle\}$ to:



ĆWICZENIE C Zapisz kilka permutacji liter występujących w wyrazie WTOREK. Ile różnych permutacji można utworzyć?

Gdy tworzymy permutację zbioru n -elementowego, to pierwszy element możemy wybrać na n sposobów, drugi element na $n-1$ sposobów, trzeci na $n-2$ sposobów itd. Zatem liczba wszystkich takich permutacji wynosi:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Liczba permutacji zbioru n -elementowego jest równa $n!$

Permutacje pojawiają się na przykład w następujących sytuacjach:

- 7 osób, jedna za drugą, można ustawić na $7! = 5040$ sposobów.
- 5 książek, jedna na drugiej, można ułożyć na $5! = 120$ sposobów.
- W teście jest 10 pytań. Kolejność odpowiadania na te pytania możemy wybrać na $10! = 3\,628\,800$ sposobów.

WARIACJE BEZ POWTÓRZEŃ

ĆWICZENIE D Spośród nut zapisanych obok wybieramy cztery dowolne nuty. Ile różnych melodięk można w ten sposób utworzyć (nuty nie mogą się powtarzać).



Każdy ciąg różnych elementów pewnego zbioru nazywamy **wariacją bez powtórzeń**.

Uwaga. Permutacja to taka wariacja bez powtórzeń, w której występują wszystkie elementy danego zbioru.

Na przykład ze zbioru $\{\bullet, \blacksquare, \blacktriangle, \times\}$ można utworzyć następujące 2-elementowe wariacje bez powtórzeń:



ĆWICZENIE E Ile 4-elementowych wariacji bez powtórzeń można utworzyć z liter występujących w wyrazie WTOREK?

Gdy tworzymy k -elementową wariację bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego, to pierwszy element możemy wybrać na n sposobów, drugi na $n - 1$ sposobów itd. Ostatni (k -ty) element można wybrać na $n - k + 1$ sposobów. Zatem wszystkich takich wariacji jest:

$$\underbrace{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)}_{k \text{ czynników}}$$

ĆWICZENIE F a) Po prawej stronie równości $\frac{20!}{(20-9)!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot p$ jest iloczyn kolejnych liczb naturalnych. Znajdź p .

b) Uzasadnij równość: $\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$.

Liczba k -elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego (gdzie $n \geq k$) jest równa:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

Liczbę tę można też zapisać inaczej:

$$\frac{n!}{(n - k)!}$$

Wariacje bez powtórzeń pojawiają się na przykład w takich sytuacjach:

- Wybieramy 6 osób spośród 10 osób i ustawiamy je jedna za drugą. Możemy to zrobić na $\frac{10!}{4!} = 151\,200$ sposobów.
- Z worka, w którym jest 20 różnych kul, wybieramy losowo 6 kul i ustawiamy je w kolejności losowania. Możemy to zrobić na $\frac{20!}{14!} = 27\,907\,200$ sposobów.
- Z cyfr od 1 do 9 tworzymy liczby czterocyfrowe o parami różnych cyfrach. Możemy to zrobić na $\frac{9!}{5!} = 3024$ sposoby.

Uwaga. Liczbę k -elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego można obliczać za pomocą kalkulatora. Zwykle służy do tego funkcja oznaczona nPk .

WARIACJE Z POWTÓRZENIAMI

ĆWICZENIE G Wyobraź sobie, że zapisujesz na pięciolini melodyjkę składającą się z trzech nut wybranych spośród 8 różnych nut, przy czym nuty mogą się powtarzać. Ile różnych melodyjek można w ten sposób utworzyć?

Każdy ciąg składający się z elementów pewnego zbioru (niekoniecznie różnych) nazywamy **wariacją z powtórzeniami**.

Oto wszystkie 3-elementowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru $\{\bullet, \blacksquare\}$:



ĆWICZENIE H Zapisz kilka 4-elementowych wariacji z powtórzeniami utworzonych z liter występujących w wyrazie WTOREK. Ile takich wariacji można utworzyć?

Gdy tworzymy k -elementową wariację z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego, to pierwszy wyraz możemy wybrać na n sposobów, drugi również na n sposobów i każdy następny także na n sposobów. Zatem wszystkich takich wariacji jest:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ czynników}}$$

Liczba wszystkich k -elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego jest równa:

$$n^k$$

Wariacje z powtórzeniami pojawiają się na przykład w takich sytuacjach:

- Z cyfr od 1 do 9 tworzymy liczby trzycyfrowe, w których cyfry mogą się powtarzać. Możemy w ten sposób utworzyć 9^3 różnych liczb.
- Z worka, w którym jest 50 ponumerowanych kul, losujemy kulę, zapisujemy otrzymany numer, wrzucamy kulę do worka i powtarzamy tę czynność jeszcze trzykrotnie. Liczba możliwych wyników takiego losowania wynosi 50^4 .
- W windzie znajdują się dwie osoby. Każda z nich może wysiąść na jednym z ośmiu pięter. Pasażerowie mogą wysiąść na tym samym piętrze lub na różnych. Liczba wszystkich możliwości wynosi 8^2 .

Wiele zadań kombinatorycznych można rozwiązywać na dwa sposoby — korzystając wyłącznie z zasady mnożenia lub dodawania albo wykorzystując wzory na permutacje lub wariacje.

PRZYKŁAD 1 W kodzie dostępu występuje najpierw 5 cyfr, a potem 3 litery albo najpierw 5 liter, a potem 3 cyfry. Litery wybieramy ze zbioru $\{Q, V, X\}$ i mogą się powtarzać, a cyfry wybieramy ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i nie mogą się powtarzać. Ile różnych takich kodów można utworzyć?

Sposób I

Kodów złożonych z 5 cyfr i 3 liter jest:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3240$$

Kodów złożonych z 5 liter i 3 cyfr jest:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 14\,580$$

$$3240 + 14\,580 = \underline{17\,820}$$

Sposób II

Kodów złożonych z 5 cyfr i 3 liter jest:

$$5! \cdot 3^3 = 3240$$

Kodów złożonych z 5 liter i 3 cyfr jest:

$$3^5 \cdot \frac{5!}{(5-3)!} = 3^5 \cdot \frac{5!}{2!} = 3^5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 14\,580$$

Odp. Razem jest 17 820 kodów.

Pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów, drugą — na 4 sposoby, itd., a każdą literę można wybrać na 3 sposoby.

Układów 5 cyfr jest tyle, ile permutacji zbioru 5-elementowego. Układów 3 liter jest tyle, ile 3-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego.

Układów 5 liter jest tyle, ile 5-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego, a układów 3 cyfr jest tyle, ile 3-elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru 5-elementowego.

ZADANIE Z takich samych zbiorów liter i cyfr jak w przykładzie 1 układamy kody, które składają się z dwóch liter i 4 cyfr albo 4 liter i 2 cyfr. Litery mogą się powtarzać, a cyfry — nie. Ile różnych takich kodów możemy utworzyć?

PRZYKŁAD 2 Z karteczek z literami A, A, A, E, K, M, M, T, T, Y układamy 10-literowe ciągi. Ile różnych ciągów można ułożyć?

Karteczki można ustawić na $10!$ sposobów.

Niektóre z tych ustawień karteczek dadzą taki sam ciąg liter, np. gdy przestawimy ze sobą karteczki z literami A (lub z literami M, lub z literami T).

Są trzy karteczki z literą A, więc można je przestawić na $3!$ sposobów. Karteczki z literą M można przestawić na 2 sposoby. Podobnie na 2 sposoby można przestawić karteczki z literą T. Zatem różnych ciągów 10-literowych będzie:

$$\frac{10!}{3! \cdot 2 \cdot 2} = \underline{151\,200}$$

ZADANIE Z karteczek z cyframi 2, 2, 2, 4, 5, 5 układamy liczby sześciocyfrowe. Ile różnych liczb możemy otrzymać?

PRZYKŁAD 3 Pewna grupa osób zajmuje losowo miejsca przy okrągłym stole. Przyjmujemy, że gdy wszystkie siedzące osoby przesuną się w tę samą stronę o tyle samo miejsc, to sposób zajęcia miejsc przy stole się nie zmienia.

a) Na ile sposobów 6 osób może zająć miejsca przy okrągłym stole?

Gdy 6 osób ustawimy w kolejce i przydzielimy im kolejne miejsca przy stole, to takich sposobów przydzielenia miejsc jest $6!$.

Zgodnie z przyjętym założeniem sześć kolejek osób, na przykład takich: (A B C D E F), (B C D E F A), (C D E F A B), (D E F A B C), (E F A B C D), (F A B C D E), daje ten sam sposób zajęcia miejsc przy stole.

Zatem różnych sposobów przydzielenia miejsc jest:

$$\frac{6!}{6} = 5! = \underline{120}$$

b) Na ile sposobów 10 osób może zająć miejsca tak, aby dwie ustalone osoby siedziały obok siebie?

Jeśli ustalone osoby to A i B, to osoba A oraz pozostałych 8 osób (bez B) mogą zająć miejsca na $\frac{9!}{9}$ sposobów.

Do każdego z tych układów osoba B może się dosiąść przy osobie A na 2 sposoby, zatem szukana liczba to:

$$\frac{9!}{9} \cdot 2 = 8! \cdot 2 = \underline{80\,640}$$

ZADANIE Usadzamy osoby przy okrągłym stole zgodnie z opisem w przykładzie 3.

a) Na ile sposobów można usadzić przy stole 5 osób?

b) Na ile sposobów można usadzić przy okrągłym stole 8 osób tak, aby dwie ustalone osoby nie siedziały obok siebie?

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz.

a) $\frac{6!}{4!}$

d) $\frac{5!}{1!}$

g) $\frac{9 \cdot 10!}{9! \cdot 10}$

j) $\frac{8! \cdot 3!}{9!}$

b) $\frac{13!}{12!}$

e) $\frac{100!}{98!}$

h) $\frac{10!}{8! \cdot 2!}$

k) $\frac{7! \cdot 9!}{8! \cdot 6!}$

c) $\frac{4!}{0!}$

f) $\frac{120! \cdot 121}{122!}$

i) $\frac{10!}{(4!)^2}$

l) $\frac{12! \cdot 8!}{(10!)^2}$

2. Zapisz bez używania symbolu silni i uprość ułamek.

a) $\frac{n!}{(n-3)!}$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

c) $\frac{(n-2)!}{(n+1)!}$

d) $\frac{(n+3)!}{(n+1) \cdot (n+3) \cdot n!}$

3. Która z podanych liczb jest większa?

a) $120!$ czy 120^2

c) $10! \cdot 10!$ czy $100!$

b) $(2 \cdot 15)!$ czy $2! \cdot 15!$

d) $(5^2)!$ czy $(5!)^2$

4. Ustal, dla jakiej wartości m zachodzi podana równość.

a) $\frac{125!}{(125-15)!} = 125 \cdot 124 \cdot \dots \cdot m$

b) $\frac{237!}{(237-m)!} = 237 \cdot 236 \cdot \dots \cdot 200$

5. a) Na ile sposobów można przydzielić 8 torów bieżni ośmiu lekkoatletom?

b) Na ile sposobów można ułożyć 4 różne poduszki, każda na jednym z miejsc czteroosobowej sofy?

c) W jednej z gonitw wyścigów konnych bierze udział 6 koni. Na ile sposobów można obstawić pierwszą trójkę na mecie?

d) Trzy osoby kupują po jednej galce lodów. Na ile sposobów można wybrać lody, jeśli są one w 5 smakach?

e) Odtwarzamy w sposób przypadkowy 3 utwory z płyty zawierającej 12 utworów (utwory mogą się powtarzać). Ile jest różnych możliwych zestawów?

f) Cztery prezenty trzeba zapakować w ozdobny papier wybrany spośród papierów o trzech różnych kolorach. Na ile różnych sposobów można przydzielić papiery do zapakowania prezentów?

g) W przedziale kolejowym jest 8 miejsc. Na ile różnych sposobów może w nim zająć miejsca dwóch pasażerów?

h) Na ile sposobów można ustawić 6 kobiet i 4 mężczyzn tak, aby kobiety zajmowały 6 początkowych miejsc?

i) Ile jest możliwych wyników klasówki, jeśli pisało ją 5 uczniów i każdy może otrzymać ocenę od 1 do 6 (bez plusów i minusów)?

W 1878 roku Samuel Loyd, amerykański autor zadań szachowych i innych łamigłówek, wynalazł grę zwaną „piętnastką”. W kwadratowej ramce umieścił piętnaście ponumerowanych płytek i zostawił jedno miejsce wolne (zob. rys. 1). Płytki można było przesuwać, wykorzystując wolne miejsce. Zadaniem gracza było ułożenie płytek w zadanej kolejności.

rys. 1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

rys. 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Wkrótce potem zarówno Amerykę, jak i Europę ogarnęła gorączka gry w „piętnastkę”. Grali wszyscy: parlamentarzyści i urzędnicy, sklepikarze i rolnicy, przechodnie na ulicy i pasażerowie tramwajów (konnych). Organizowano również

ogromne turnieje tej gry. Wynalazca zaofertował 1000 \$ (kwota ta odpowiada dzisiejszym 20 000 \$) za ułożenie płytek w takiej kolejności jak na rys. 2 (płytki 15 i 14 są zamienione miejscami).

Kupcy zapominali otwierać sklepy, masyjniści nie zatrzymywali pociągów na stacjach — wszyscy grali, myśląc, że są bliscy rozwiązania. Na szczęście niedługo potem powstała matematyczna teoria gry w „piętnastkę”, z której wynikało, że zadanie jest nierozwiązywalne.

Układ płytek można interpretować jako permutację szesnastu elementów (piętnaście płytek i jedno puste miejsce) liczonych kolejno od góry i od lewej do prawej strony. Okazuje się, że przesuwanie płytek łamigłówek, można ułożyć dokładnie połowę takich permutacji. I właśnie ustawienia zaproponowanego przez Loyda ułożyć się nie da.

6. a) Przeczytaj ciekawostkę. Ile jest różnych ustawień płytek w „piętnastkę”?

b) Wyobraź sobie odmianę gry S. Loyda, w której są tylko trzy przesuwane płytki (zob. rysunek). Postaraj się znaleźć wszystkie możliwe ustawienia płytek w tej grze. Porównaj otrzymany rezultat z liczbą permutacji czterech elementów.

1	2
3	

7. Ustal, ile różnych 7-elementowych ciągów liter można ułożyć, używając liter:

a) A, B

b) A, B, C

c) P, Q, R, S, T

8. Oblicz, na ile sposobów można rozmieścić:

a) 5 różnych kul w siedmiu szufladach,

b) 7 różnych kul w pięciu szufladach,

c) 10 jednakowych kul w pięciu szufladach tak, aby w każdej była inna liczba kul.

9. Ustal, ile różnych liczb pięciocyfrowych można utworzyć, mając do dyspozycji pięć tabliczek, na których są zapisane podane cyfry:

a) 1, 2, 3, 4, 4

b) 1, 2, 2, 3, 3

c) 1, 2, 2, 2, 3

d) 1, 1, 2, 2, 2

10. Ile różnych liczb można utworzyć, mając karteczki z podanymi liczbami?

a) 1, 2, 3, 4

b) 2, 2, 3, 3

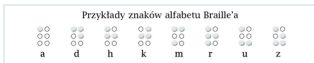
11. Z sześciu karteczek z literami tworzymy ciągi liter. Ile różnych ciągów można utworzyć?

a) *A A K L M W*

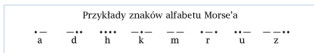
b) *A B B C C D*

c) *O O P P P R*

- **12.** Każdy znak alfabetu Braille'a (czyt. brajla) to układ wypukłych kropek wybranych z podstawowego układu sześciu kropek. W każdym znaku jest co najmniej jedna wypukła kropka. Oblicz, ile znaków można w ten sposób utworzyć.



13. Znak alfabetu Morse'a (czyt. morsa) jest zbudowany z ustawionych obok siebie kropek lub kresek. Łącznie kropek lub kresek w każdym znaku może być od jednej do czterech. Ile znaków można w ten sposób utworzyć?



14. Na ile sposobów siedmioro dzieci może stanąć w kole do zabawy w kółko graniaste?



15. Wokół okrągłej rabaty chcemy umieścić 12 różnych sadzonek.

a) Ile różnych układów sadzonek możemy otrzymać?

b) Tylko dwie rośliny to sadzonki tulipanów. Chcemy je umieścić obok siebie. Ile różnych układów sadzonek możemy otrzymać?

16. Czterech mężczyzn i cztery kobiety sadzamy przy okrągłym stole. Przyjmujemy, że gdy wszystkie siedzące osoby przesuną się w tę samą stronę o tyle samo miejsc, to sposób zajęcia miejsc przy stole się nie zmienia. Na ile sposobów mogą zająć miejsca, aby:

a) siedzieli na przemian (mężczyzna, kobieta, mężczyzna, kobieta itd.),

b) dwie ustalone kobiety siedziały obok siebie i dwóch ustalonych mężczyzn siedziało obok siebie?

MINISPRAWDZIAN

51. Kartkę podzielono na n pól i każde z nich należy pomalować jednym z k kolorów. Kolory mogą się powtarzać także na sąsiednich polach. W którym z podanych przypadków możliwości różnego pomalowania kartki jest najwięcej?

- A. $n = 5, k = 2$ B. $n = 4, k = 3$ C. $n = 3, k = 4$ D. $n = 2, k = 5$

52. Spośród cyfr od 0 do 9 i 24 małych liter alfabetu tworzymy kod składający się z dwóch różnych liter lub dwóch różnych cyfr. Ile takich kodów można utworzyć?

- A. 480 B. 642 C. 676 D. 1122

53. Na ile sposobów można posadzić przy okrągłym stole z 7 ponumerowanymi krzesłami 7 osób tak, aby ustalone dwie osoby A i B siedziały obok siebie?

- A. 1440 B. 840 C. 1680 D. 720

KOMBINACJE

- 1 Wyobraźmy sobie, że spośród następujących kart losujemy kolejno trzy karty:



Jeśli przyjmiemy, że wynikiem takiego losowania jest ciąg trzech kart ustawionych w kolejności losowania, to liczba możliwych wyników wynosi $5 \cdot 4 \cdot 3$. Oto przykłady takich ciągów kart:



Dwa ostatnie układy kart składają się z tych samych kart, a różnią się tylko kolejnością. Dla gracza istotny jest zbiór otrzymanych kart, kolejność nie jest ważna, więc te dwa układy z jego punktu widzenia są jednakowe.

Trzy karty można ustawić w ciąg na $3!$ sposobów. Zatem zbiorów trzech kart wybranych spośród pięciu kart jest $3!$ razy mniej niż ciągów 3-elementowych wybranych z tych kart. Liczbę takich zbiorów obliczamy następująco:

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{3!} = 10$$

Oto wszystkie układy kart istotne z punktu widzenia gracza, które możemy otrzymać, wybierając trzy karty z podanych pięciu kart:



KOMBINACJE

Każdy k -elementowy podzbiór zbioru n -elementowego nazywamy **k -elementową kombinacją ze zbioru n -elementowego**.

Uwaga. Gdy tworzymy k -elementową wariację, istotna jest kolejność elementów, a gdy tworzymy kombinację, kolejność elementów nie ma znaczenia.

Ciągów k -elementowych o parami różnych wyrazach wybranych ze zbioru n -elementowego jest $\frac{n!}{(n-k)!}$ dla $n \geq k$. Liczba k -elementowych permutacji wynosi $k!$, więc liczba k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego jest $k!$ razy mniejsza niż $\frac{n!}{(n-k)!}$, czyli wynosi $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Liczbę tę oznaczamy $\binom{n}{k}$ i nazywamy symbolem Newtona. Symbol $\binom{n}{k}$ czytamy: „ n po k ”.

Liczba kombinacji k -elementowych ze zbioru n -elementowego jest równa:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Uwaga. Zamiast $\binom{n}{k}$ używa się też oznaczenia C_n^k albo nCk (to ostatnie oznaczenie często występuje w kalkulatorach).

ĆWICZENIE Oblicz: $\binom{3}{2}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{10}{6}$, $\binom{10}{4}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{3}{0}$, $\binom{15}{15}$.

Z kombinacjami mamy do czynienia na przykład w takich sytuacjach:

- Wybieramy 13 kart z talii 52 kart, przy czym nie liczy się kolejność wybierania. Liczba możliwych kombinacji to $\binom{52}{13} \approx 6 \cdot 10^{11}$.
- Wybieramy 3-osobową delegację z grupy 20 osób. Liczba możliwych delegacji to $\binom{20}{3} = 1140$.
- Skreślamy 6 liczb na kuponie Lotto (z 49 liczbami). Wszystkich możliwości jest $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$.

PRZYKŁAD W klasie jest 17 dziewcząt i 12 chłopców. Wybieramy spośród uczniów 5-osobową delegację.

a) Ile różnych delegacji można wybrać?

$$\begin{aligned}\binom{29}{5} &= \frac{29!}{5! \cdot 24!} = \dots \text{Wszystkich uczniów jest 29.} \\ &= \frac{24! \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29}{24! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \underline{118\,755}\end{aligned}$$

b) Ile można wybrać delegacji, w których jest 1 chłopiec i 4 dziewczynki?

$$\begin{aligned}12 \cdot \binom{17}{4} &= 12 \cdot \frac{17!}{4! \cdot 13!} = \dots \text{Jednego chłopca można wybrać na 12 sposobów, a cztery dziewczynki na } \binom{17}{4} \text{ sposobów.} \\ &= \frac{12 \cdot 13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{13! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \underline{28\,560}\end{aligned}$$

c) Ile można wybrać delegacji złożonych z 3 dziewcząt i 2 chłopców?

$$\binom{17}{3} \cdot \binom{12}{2} = \frac{17!}{3! \cdot 14!} \cdot \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17}{2 \cdot 3} \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} = \underline{44\,880}$$

ZADANIE Wyobraź sobie, że trzeba wybrać w twojej klasie 3-osobową delegację. Ile można wybrać różnych delegacji, w których:

- a) są 2 dziewczynki, b) jest 2 chłopców?

zadania 1–13 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Która spośród liczb $\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2}, \dots, \binom{8}{8}$ jest największa?

b) Ile różnych liczb jest wśród liczb $\binom{9}{0}, \binom{9}{1}, \binom{9}{2}, \dots, \binom{9}{9}$?

c) Ile różnych liczb otrzymamy po przekształceniu wyrażeń?

$$\binom{15}{5} \cdot 5! \quad \binom{15}{10}! \quad \binom{15}{10} \cdot 5! \quad 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \quad 3! \cdot \binom{16}{6} \cdot \binom{6}{4}$$

2. a) W turnieju szachowym bierze udział 20 zawodników. Grają systemem „każdy z każdym”. Ile partii zostanie rozegranych w tym turnieju?

b) Na ile różnych sposobów można wybrać 3 gałki lodów o różnych smakach spośród 10 rodzajów lodów?

c) Na obozie młodzieżowym jest 30 osób. Na ile różnych sposobów można wybrać spośród uczestników trzy osoby dyżurujące w kuchni?

d) W grze w brydża 52 karty są rozdawane między czterech graczy. Ile różnych układów kart może otrzymać jeden gracz?

e) Na ile różnych sposobów możemy skreślić 5 liczb spośród 35 liczb?

3. Kurs języka angielskiego ma się odbywać o godzinie 18:00 trzy razy w tygodniu w dni robocze (od poniedziałku do piątku). Na ile sposobów można ułożyć plan kursu?

4. a) W figurze składającej się z 9 kwadracików zamalowujemy tym samym kolorem trzy kwadraciki (zob. rysunek poniżej). Ile różnych obrazków można w ten sposób otrzymać?



b) Na rysunkach poniżej przedstawiono obrazki otrzymane w wyniku zamalowania trzech kwadracików — każdego innym kolorem. Ile różnych obrazków można w ten sposób otrzymać?



c) W figurze składającej się z 9 kwadracików zamalowujemy niektóre z nich takim samym kolorem. Przy jakiej liczbie zamalowanych kwadracików można otrzymać najwięcej różnych obrazków?

5. a) W zestawie zadań jest 15 zadań łatwych i 5 trudnych. Na ile sposobów można z tego zestawu wybrać 10 zadań tak, aby wśród nich było 7 zadań łatwych i 3 trudne?

b) Wśród 10 mężczyzn jest 2 brunetów i 5 szatynów, a pozostali są łysi. Na ile sposobów można wybrać pięcioosobowy zespół, w którym będzie jeden brunet, dwóch szatynów i dwóch łysych?

c) Trener pewnej drużyny piłkarskiej ma do dyspozycji 22 zawodników, w tym: trzech bramkarzy, ośmiu obrońców, siedmiu pomocników i czterech napastników. Drużyna ta gra systemem 1-4-4-2 (bramkarz — czterech obrońców — czterech pomocników — dwóch napastników). Ile różnych jedenastoosobowych składów może wybrać trener tej drużyny?

6. Dziesięć różnych kul wrzucamy do szuflad. Oblicz, na ile sposobów można to zrobić, jeżeli:

a) są dwie szuflady, a w pierwszej z nich ma się znaleźć 8 kul, zaś w drugiej 2 kule,

b) są trzy szuflady, a w pierwszej z nich ma się znaleźć 5 kul, w drugiej 3 kule, zaś w trzeciej 2 kule.

7. Na ile sposobów można wybrać 5 kart z talii 52 kart tak, aby wśród wybranych kart były:

a) dwa asy i trzy króle,

b) trzy piki i dwa kiery?

8. a) Grupę 30 osób chcemy podzielić na pięcioosobowe załogi różnych jachtów. Na ile sposobów można to zrobić?

b) Rozdajemy 52 karty między czterech graczy. Ustal, ile jest możliwych różnych rozdań.

9. Na płaszczyźnie zaznaczono 30 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe.

- a) Przez każdą parę tych punktów poprowadzono prostą. Ile jest takich prostych?
- b) Ile jest trójkątów, których wierzchołkami są te punkty?

10. Na płaszczyźnie zaznaczono 50 prostych, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie i żadne dwie nie są równoległe.

- a) W ilu punktach przecinają się te proste?
- b) Ile jest trójkątów, których wszystkie boki leżą na tych prostych?

11. Losujemy 5 liczb spośród liczb naturalnych od 1 do 100. Na ile sposobów można wybrać te liczby tak, aby:

- a) wszystkie były dwucyfrowe,
- b) dokładnie jedna liczba była jednocyfrowa,
- c) dwie liczby były mniejsze od 20, a pozostałe — większe od 20?

12. Po jednej stronie pewnej alei parkowej wykopano 10 dołków.

- a) Ile jest różnych sposobów posadzenia 5 lip w tych dołkach?
- b) Ile jest różnych sposobów posadzenia 5 lip i 3 kasztanowców w tych dołkach?
- c) Ile jest różnych sposobów posadzenia 5 lip, 3 kasztanowców i 2 dębów?
- d) Ile jest różnych sposobów posadzenia 5 lip, 3 kasztanowców i 2 dębów wzdłuż tej alei, jeśli pierwszym i ostatnim drzewem ma być lipa?

13. Ile jest różnych liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których występują dwie cyfry parzyste i trzy cyfry nieparzyste, gdy:

- a) cyfry się nie powtarzają,
- b) cyfry mogą się powtarzać?

MINISPRAWDZIAN

51. Na ile sposobów można podzielić 12 żeglarzy na czteroosobowe wachty pełniące dyżury o różnych godzinach?

- A. 34 650 B. 565 C. 3 D. 13 584

52. Na ile sposobów można wybrać 6 kart z talii 52 kart tak, aby wśród wylosowanych kart były 3 asy, 2 króle i 1 dama?

- A. 1152 B. 96 C. 14 D. 40

53. W turnieju szachowym rozegrano 66 partii. Każdy zawodnik zagrał z każdym jeden raz. Ilu zawodników brało udział w tym turnieju?

- A. 33 B. 9 C. 8 D. 12

DWUMIAN NEWTONA

- 1 Aby przedstawić wyrażenie $(a+b)^4$ w postaci sumy jednomianów należy wykonać mnożenie:

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Składniki szukanej sumy możemy otrzymać, wybierając z każdego z czterech nawiasów po jednej liczbie (a albo b) i mnożąc te liczby przez siebie. Każdy taki składnik jest więc równy iloczynowi pewnej potęgi liczby a i pewnej potęgi liczby b .

$$\begin{array}{ll} \overset{a}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} & \longrightarrow a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4 \\ \overset{a}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} \overset{b}{(a+b)} & \longrightarrow a \cdot a \cdot a \cdot b = a^3 b \\ \overset{a}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} \overset{b}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} & \longrightarrow a \cdot a \cdot b \cdot a = a^3 b \\ \overset{a}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} \overset{b}{(a+b)} \overset{b}{(a+b)} & \longrightarrow a \cdot b \cdot a \cdot a = a^3 b \\ \overset{a}{(a+b)} \overset{b}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} & \longrightarrow b \cdot a \cdot a \cdot a = a^3 b \\ \overset{a}{(a+b)} \overset{b}{(a+b)} \overset{b}{(a+b)} \overset{a}{(a+b)} & \longrightarrow a \cdot a \cdot b \cdot b = a^2 b^2 \\ \vdots & \\ \overset{b}{(a+b)} \overset{b}{(a+b)} \overset{b}{(a+b)} \overset{b}{(a+b)} & \longrightarrow b^4 \end{array}$$

Zatem otrzymujemy równość:

$$(a+b)^4 = a^4 + a^3b + a^3b + a^3b + a^3b + a^2b^2 + \dots + b^4$$

Gdy b wybieramy tylko z jednego nawiasu, to otrzymamy składnik a^3b . Ponieważ są cztery nawiasy, w sumie będą cztery takie składniki. Analogicznie można ustalić, że w sumie będą cztery składniki ab^3 . Składnik a^2b^2 otrzymamy, gdy z dwóch nawiasów wybieramy liczbę b . Zatem iloczynów postaci a^2b^2 musi być tyle, ile jest sposobów wybrania dwóch nawiasów spośród czterech, tzn. $\binom{4}{2}$.

Zatem powyższą równość możemy zapisać w postaci:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Współczynniki składników tej sumy można zapisać w postaci $\binom{n}{k}$:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

W podobny sposób można uzasadnić ogólny wzór pozwalający obliczać n -tą potęgę sumy dwóch składników zwany **wzorem Newtona** lub **dwumianem Newtona**.

ĆWICZENIE A Uzasadnij wzór Newtona.

Dwumian Newtona

Jeśli a, b są liczbami rzeczywistymi, takimi że $a + b \neq 0$ i n jest dowolną liczbą naturalną, to:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

ĆWICZENIE B Przedstaw w postaci sumy wyrażenie $(a + b)^5$.

Po zastąpieniu we wzorze Newtona liczby n kolejnymi liczbami naturalnymi otrzymamy wzory. Niektóre z nich to znane ci wzory skróconego mnożenia:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + \binom{2}{1} ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

itd.

Okazuje się, że współczynniki liczbowe pojawiają się w tych wzorach zgodnie z pewną regułą. Można je zapisać tak, aby utworzyły „trójkąt” zwany trójkątem Pascala.



$$\begin{aligned} & \dots (a + b)^0 = 1 \\ & \dots (a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b \\ & \dots (a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \\ & \dots (a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \\ & \dots (a + b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 b + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4 \end{aligned}$$

Każdy wiersz w trójkącie Pascala zaczyna się i kończy liczbą 1, a każda z pozostałych liczb jest sumą dwóch zapisanych nad nią liczb z wcześniejszego wiersza.

ĆWICZENIE C Zapisz dwa następne wiersze powyższego trójkąta Pascala. Korzystając z trójkąta Pascala, zapisz wzory skróconego mnożenia pozwalające obliczyć $(a + b)^5$ i $(a + b)^6$.

W trójkącie Pascala można zauważyć symetrię, którą opisuje równość podana obok.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Dowód

Sposób I

$$P = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = L \quad \square$$

Sposób II

Jeśli wybieramy ze zbioru n -elementowego podzbiór k -elementowy, to każde-
mu takiemu podzbiorniowi odpowiada podzbiór $(n - k)$ -elementowy utworzony
z pozostałych elementów. Zatem liczba podzbiorów k -elementowych jest rów-
na liczbie podzbiorów $(n - k)$ -elementowych, czyli $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. $\square$

Równość podana obok opisuje z kolei
własność trójkąta Pascala, która po-
zwala obliczyć liczby w każdym ko-
lelnym wierszu na podstawie wartości
z poprzedniego.

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Dowód

Sposób I

$$\begin{aligned} P &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1} = L \quad \square \end{aligned}$$

Sposób II

Rozważmy zbiór X , w którym jest $n+1$ elementów i niech $p \in X$. Podzbiorów
 $(k+1)$ -elementowych w zbiorze X jest $\binom{n+1}{k+1}$. Część z nich nie zawiera elemen-
tu p , takich podzbiorów jest $\binom{n}{k+1}$. Podzbiorów zawierających p jest tyle, ile
 k -elementowych podzbiorów zbioru $X \setminus \{p\}$, czyli $\binom{n}{k}$. Stąd wynika równość
 $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. $\square$

PRZYKŁAD Wyrażenie $\left(\frac{4}{x} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^{28}$ można przedstawić w postaci sumy. Zapisz
ten ze składników sumy, w którym po skróceniu nie występuje x .

Każdy składnik sumy $(a+b)^{28}$ ma postać:

$$\binom{28}{k} \left(\frac{4}{x}\right)^k \cdot \left(\frac{-\sqrt[3]{x}}{2}\right)^{28-k} = \binom{28}{k} \frac{4^k}{x^k} \cdot \frac{(-1)^{28-k} x^{\frac{1}{3}(28-k)}}{2^{28-k}} \quad \dots \quad \binom{28}{k} \cdot a^k \cdot b^{28-k}$$

$$k = \frac{1}{3}(28 - k)$$

Aby zmienna x się skróciła, wykładniki potęg zmiennej x
w liczniku i mianowniku muszą być równe.

$$4k = 28$$

$$k = 7$$

Szukany wyraz sumy to:

$$\binom{28}{7} \cdot \frac{4^7(-1)^{28-7}}{2^{28-7}} = \frac{28!}{7! \cdot 21!} \cdot \frac{4^7(-1)}{2^{21}} = -\frac{22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} = -\frac{148\,005}{16}$$

ZADANIE Znajdź wyraz wolny sumy $\left(\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{x}{6}\right)^8$.

ZESTAW ZADAŃ

1. Korzystając ze wzoru Newtona, przekształć wyrażenie.

a) $(2 + c)^4$

c) $\left(2 - \frac{a}{2}\right)^6$

e) $\left(z + \frac{3}{z}\right)^4$

b) $(3 + 2x)^5$

d) $(2x - xy)^5$

f) $\left(\frac{4}{m} - \frac{m^2}{2}\right)^5$

2. Oblicz.

a) $(\sqrt{3} + 1)^4$

c) $(3\sqrt{7} + \sqrt{2})^5$

e) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{2}\right)^6$

b) $(3 - \sqrt{5})^6$

d) $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)^7$

f) $\left(\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^5$

3. Ile składników ma (przed redukcją) suma otrzymana po rozwinięciu podanego wyrażenia zgodnie ze wzorem Newtona? Ile jest wśród nich liczb wymiernych?

a) $\left(\sqrt{11} - \frac{1}{2}\right)^{20}$

b) $\left(\sqrt{7} - \sqrt[3]{2}\right)^{30}$

c) $\left(\sqrt[5]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{35}$

4. Korzystając ze wzoru Newtona, można zapisać podane wyrażenie w postaci sumy. Zapisz ten ze składników, w którym po skróceniu nie występuje x .

a) $\left(5x - \frac{3}{x}\right)^8$

c) $\left(\frac{3}{x^3} - \frac{x}{5}\right)^{12}$

e) $\left(\frac{1}{x^3} - 3x^5\right)^{16}$

b) $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{15}$

d) $\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^9$

f) $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{x^3}{\sqrt{2}}\right)^{20}$

5. a) Wyznacz ten wyraz rozwinięcia wyrażenia $\left(6a^2 - \frac{b}{3}\right)^8$, w którym występuje a^4 .

b) Wyznacz ten wyraz rozwinięcia wyrażenia $\left(\frac{pq}{2} + \frac{p^2}{3}\right)^7$, w którym występuje p^{10} .

6. a) Korzystając ze wzoru Newtona, przedstaw wyrażenie $(2 + 6x)^4$ w postaci sumy algebraicznej.

b) Przekształć wyrażenie $(2 + 6x)^4$, korzystając z równości $2 + 6x = 2(1 + 3x)$, a następnie zamień je na sumę algebraiczną, stosując wzór Newtona.

7. Zapisz trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia $(p + q)^n$ zgodnie ze wzorem Newtona, jeżeli wiadomo, że:

a) współczynniki przy drugim i szóstym wyrazie rozwinięcia są równe,

b) współczynniki przy trzecim i szóstym wyrazie rozwinięcia są równe,

c) współczynniki przy piątym i szóstym wyrazie rozwinięcia są równe.

8. Zapisz trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia $(u + w)^n$ zgodnie ze wzorem Newtona, jeżeli wiadomo, że suma współczynników przy tych trzech wyrazach jest równa:

a) 16

b) 56

c) 79

9. Udowodnij, że zbiór n -elementowy ma 2^n podzbiorów (uwzględniając w tym zbiór pusty i cały zbiór).

Warto wiedzieć

Wzór Newtona można wykorzystać do obliczania przybliżonych wartości potęg pewnych liczb. Na przykład, aby obliczyć $1,02^{15}$, można postępować w następujący sposób:

$$\begin{aligned} 1,02^{15} &= (1 + 0,02)^{15} = \binom{15}{0} \cdot 1^{15} + \binom{15}{1} \cdot 1^{14} \cdot 0,02 + \binom{15}{2} \cdot 1^{13} \cdot 0,02^2 + \binom{15}{3} \cdot 1^{12} \cdot 0,02^3 + \\ &+ \binom{15}{4} \cdot 1^{11} \cdot 0,02^4 + \dots + \binom{15}{15} \cdot 0,02^{15} = 1 + 15 \cdot 0,02 + 105 \cdot 0,0004 + 455 \cdot 0,000008 + \\ &+ 1365 \cdot 0,00000016 + \dots + 0,02^{15} = 1 + 0,3 + 0,042 + 0,00364 + 0,0002184 + \dots + 0,02^{15} \end{aligned}$$

Jeśli chcemy znaleźć przybliżoną wartość liczby $1,02^{15}$ z dokładnością do 0,01, to wystarczy dodać cztery pierwsze składniki tej sumy. Zatem:

$$1,02^{15} \approx 1 + 0,3 + 0,042 + 0,00364 = 1,34564 \approx 1,35$$

10. Przeczytaj informacje w ramce. Korzystając ze wzoru Newtona, oblicz z dokładnością do części setnych.

a) $1,01^{10}$

b) $0,99^{20}$

c) $1,002^{12}$

d) $0,997^{15}$

MINISPRAWDZIAN

S1. Korzystając ze wzoru Newtona, wyrażenie $\left(\frac{p}{2} + \frac{2}{p}\right)^6$ można przedstawić w postaci sumy. Które z podanych wyrażeni jest składnikiem tej sumy?

A. $\frac{p^6}{64}$

B. $\frac{3p^4}{8}$

C. 20

D. $\frac{32}{p^5}$

S2. Wyrażenie $\left(3a - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^9$ można przedstawić w postaci sumy. Składnik, w którym nie występuje zmienna a , jest równy:

A. 84

B. 756

C. 2268

D. 10 206

S3. W rozwinięciu wyrażenia $(1+x)^n$ współczynniki przy x^3 oraz przy x^5 są równe. Które z podanych wyrażeni jest składnikiem tego rozwinięcia?

A. $8x^2$

B. $70x^4$

C. $16x^5$

D. $24x^6$

KOMBINATORYKA I PRAWDOPODOBIENSTWO

I Rozważmy następujące zagadnienie:

W pewnej kawiarni można kupić deser, który składa się z dwóch warstw: na dole jest galaretka, a u góry krem. Galaretka może być w czterech smakach: cytrynowym, truskawkowym, malinowym, pomarańczowym.

Są dwa rodzaje kremu: kawowy i waniliowy. Przygotowując taki deser, cukiernik wybiera losowo galaretkę i krem.

Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przygotowuje on deser z galaretką cytrynową i kremem waniliowym?

Oto dwa sposoby rozwiązania tego zadania:

Sposób I

Korzystamy z drzewka ilustrującego doświadczenie losowe.

A — Cukiernik przygotował deser cytrynowo-waniliowy.



$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

Sposób II

Korzystamy z zasady mnożenia.

A — Cukiernik przygotował deser cytrynowo-waniliowy.

$$N = 4 \cdot 2 = 8$$

$$n_A = 1$$

$$P(A) = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

Galaretkę cukiernik może wybrać na 4 sposoby, a krem na 2 sposoby.

Tylko jedna z 8 możliwości to deser cytrynowo-waniliowy.

Oba przedstawione sposoby obliczenia prawdopodobieństwa są skuteczne. Wcześniej już pokazaliśmy, jak się oblicza prawdopodobieństwo za pomocą drzewek. Dalej podajemy przykłady, jak stosować kombinatorykę w rachunku prawdopodobieństwa.

PRZYKŁAD 1 Pięciu pasażerów jedzie windą. Każdy z nich może wysiąść na jednym z 8 pięter.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każdy z pasażerów wysiądzie na innym piętrze.

A — Pasażerowie wysiądą na różnych piętrach.

$$N = 8^5$$

N to liczba 5-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 8-elementowego.

$$n_A = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

n_A to liczba 5-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru 8-elementowego.

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

$$P(A) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{105}{512}$$

Odp. Pasażerowie wysiądą na różnych piętrach z prawdopodobieństwem równym $\frac{105}{512} \approx 0,21$.

b) Czy większe jest prawdopodobieństwo, że pasażerowie wysiądą na czterech różnych piętrach, czy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego?

B — Dwóch pasażerów wysiądzie na jednym piętrze, a trzech pozostałych na trzech różnych innych piętrach.

$$N = 8^5$$

Dwójkę pasażerów można wybrać na $\binom{5}{2}$ sposobów. Każda taka para może wysiąść na każdym z 8 pięter, trzeci z pasażerów może wysiąść na jednym z 7 pięter, czwarty — na jednym z 6 pięter, a piąty — na jednym z 5 pięter.

$$n_B = \binom{5}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$P(B) = \frac{n_B}{N} = \frac{\frac{5!}{2!3!} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{525}{1024}$$

$$P(B') = 1 - P(B)$$

$$P(B') = 1 - \frac{525}{1024} = \frac{499}{1024}$$

Odp. Pasażerowie wysiądą na czterech różnych piętrach z prawdopodobieństwem równym $\frac{525}{1024} \approx 0,51$ i jest to prawdopodobieństwo większe niż prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

ZADANIE Cztery różne kule umieszczamy losowo w dwunastu szufladach.

- Oblicz prawdopodobieństwo tego, że kule te trafią do czterech różnych szuflad.
- Oblicz prawdopodobieństwo tego, że trafią do trzech różnych szuflad.

PRZYKŁAD 2 Na siedmiu karteczkach są litery A, A, A, K, K, F, R (jedna litera na każdej karteczce). Ustawiamy karteczki w przypadkowej kolejności. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ułożymy w ten sposób słowo KARAFKA.

Sposób I

$$N = \frac{7!}{3! \cdot 2!}$$

$$n_A = 1$$

$$P(A) = \frac{1}{\frac{7!}{3! \cdot 2!}} = \frac{1}{420}$$

Przyjmujemy, że zdarzeniami elementarnymi są różne słowa, tzn. gdy w danym układzie liter przestawimy ze sobą litery A lub K, to otrzymamy to samo słowo. Różnych słów jest $3!2!$ razy mniej niż permutacji zbioru 7-elementowego.

Sposób II

$$N = 7!$$

$$n_A = 3! \cdot 2!$$

Zdarzeniami elementarnymi są ciągi 7 karteczek. Układając słowo KARAFKA karteczki z literą K można ustawić na 2 sposoby, a karteczki z literą A — na 3! sposobów.

Odp. Słowo KARAFKA ułożymy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{420}$.

ZADANIE Z liter A, A, K, K, K, N, O, O, S układamy wyrazy 9 literowe w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ułożymy słowo KOKOSANKA.

PRZYKŁAD 3 W grze Lotto skreśla się 6 spośród 49 liczb. Wygrana pieniędzy wypłacana jest tym grającym, którzy trafnie skreślą co najmniej 3 liczby. Oblicz prawdopodobieństwo jakiejś wygranej pieniężnej w Lotto.

A — Wśród skreślonych liczb są co najmniej 3 trafienia.

$$N = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

Możliwych różnych zastawów skreślonych liczb jest tyle, ile kombinacji 6-elementowych ze zbioru 49-elementowego.

$n_A = n_3 + n_4 + n_5 + n_6$, gdzie n_3 oznacza „trafiono dokładnie 3 liczby”,
 n_4 — „trafiono dokładnie 4 liczby” itd.

$$\begin{aligned} n_3 &= \binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{43!}{3! \cdot 40!} = \\ &= \frac{3! \cdot 40! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43}{3! \cdot 40! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 246\,820 \end{aligned}$$

Wśród skreślonych liczb są 3 wylosowane przez maszynę i 3 niewylosowane.

$$\begin{aligned} n_4 &= \binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{43!}{2! \cdot 41!} = \\ &= \frac{4! \cdot 41! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 42 \cdot 43}{4! \cdot 41! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 13\,545 \end{aligned}$$

Wśród skreślonych liczb są 4 wylosowane przez maszynę i 2 niewylosowane.

$$n_5 = \binom{6}{5} \cdot 43 = 6 \cdot 43 = 258$$

$$n_6 = 1$$

$$n_A = n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 260\,624$$

$$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{260\,624}{13\,983\,816} \approx 0,02$$

Odp. W Lotto prawdopodobieństwo wygranej pieniężnej wynosi około 0,02.

ZADANIE W grze Mini Lotto skreśla się 5 z 42 liczb. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że grając w tę grę, trafimy co najmniej czwórkę?

Uwaga. W przykładzie 3 można też obliczyć najpierw prawdopodobieństwo trafienia co najwyżej dwóch liczb, czyli prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego.

zadania 1–19 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Maszyna losuje kolejno bez zwracania trzy spośród dziesięciu kul ponumerowanych cyframi od 0 do 9. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że maszyna kolejno wylosuje kule z numerami 1, 2 i 3.
- b) Cztery osoby ustawiają się w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że te cztery osoby ustawią się według wzrostu (od najwyższej do najniższej). Zakładamy, że każda osoba jest innego wzrostu.
- c) Trzy razy rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadną same szóstki.
- d) Małpa usiadła przy komputerze i nacisnęła kolejno 5 klawiszy. Na klawiaturze są 104 klawisze. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że małpa wystukała słowo *palma*.
- e) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że cztery losowo wybrane osoby z trzydziestoosobowej klasy będą czterema pierwszymi osobami na liście w dzienniku.
2. Trzy jaja: kurze, kacze i gęsie należy pomalować różnymi kolorami wybranymi spośród sześciu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- a) żadne z jaj nie zostanie pomalowane na żółto,
- b) jajo gęsie zostanie pomalowane na czerwono,
- c) jajo kurze będzie żółte lub czerwone, a jajo kacze — niebieskie lub zielone.



3. Rysunek obok przedstawia kwadratową planszę z dziewięcioma polami.



a) Losujemy trzy pola i na każdym z nich umieszczamy monetę innego rodzaju. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że monety będą leżeć wzdłuż przekątnej.

b) Na wszystkich polach planszy kładziemy po jednej monecie, za każdym razem losując, czy moneta będzie leżeć do góry orłem czy reszką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na wszystkich polach monety leżą tą samą stroną do góry.

c) Na planszy umieszczamy kamień, szklaną kulę i monetę. Pole, na którym kładziemy przedmiot, losujemy spośród niezajętych jeszcze pól. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ułożą się wzdłuż linii (pionowej, poziomej lub ukośnej).

d) Na planszy zapisano dziewięć cyfr 1, ..., 9. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w wierszach (niekoniecznie kolejnych) będą ułożone liczby 123, 456 i 789.

4. Z talii 52 kart wybieramy losowo 13 kart. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wybierzemy:

a) 13 kierów,

b) 13 kart tego samego koloru,

c) zestaw, w którym będzie dokładnie siedem pików,

d) zestaw, w którym będzie jeden trefl, dwa kiero, a reszta to piki,

e) zestaw, w którym będą trzy trefle, trzy kara, trzy kiero i cztery piki.

5. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ustawione w przypadkowej kolejności:

a) litery A, B, D, N, O, Ź utworzą słowo *BANDŹO*,

b) litery A, A, G, I, R, T utworzą słowo *GITARA*,

c) litery A, A, A, A, B, J, K, L, Ł utworzą słowo *BALAJKA*.



6. Na ośmiu kartonikach o różnych kolorach są zapisane cyfry: 0, 2, 2, 5, 7, 8, 9, 9. Wybieramy losowo trzy kartoniki i ustawiamy obok siebie, tworząc liczbę trzycyfrową.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy liczbę parzystą.

b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy liczbę podzielną przez 4.

• **7.** Ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, 3n\}$ wybieramy losowo dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ich suma będzie podzielna przez 3.

8. Spośród siedmiorga gości pewnej restauracji jeden zamówił kawę, a inny — herbatę. Gdy goście na chwilę odeszli od stołu, kelner podał te napoje, ustawiając losowo filiżanki przy dwóch nakryciach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- kelner postawił odpowiednie napoje przy nakryciach osób, które je zamówiły,
- kelner postawił filiżanki przy nakryciach osób, które napojów nie zamówiły,
- kelner popełnił tylko jedną pomyłkę.

9. Niektóre odtwarzacze płyt kompaktowych mają możliwość odtwarzania utworów w przypadkowej kolejności. Na pewnej płycie jest 10 utworów. Oblicz prawdopodobieństwo, że jeśli wybierzemy odtwarzanie w przypadkowej kolejności, to:

- utwory zostaną odtworzone dokładnie w takiej kolejności, w jakiej znajdują się na płycie,
- utwór ostatni zostanie odtworzony jako pierwszy, a pierwszy jako ostatni,
- utwory pierwszy i ostatni zostaną odtworzone obok siebie.

10. Należy ułożyć we właściwej kolejności sześć obrazków komiksu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jeśli ułożymy te obrazki losowo, to:

- będą we właściwej kolejności,
- co najmniej jeden obrazek nie będzie na swoim miejscu,
- tylko początkowe dwa obrazki nie będą na swoich miejscach.



11. Winda może się zatrzymać na dowolnym z czternastu pięter budynku. W windzie znajduje się 7 pasażerów. Każdy z nich może wysiąść na którymkolwiek piętrze z takim samym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- co najmniej dwóch pasażerów wysiądzie na różnych piętrach,
- nikt nie wysiądzie na pierwszym piętrze ani na ostatnim,
- trzech wysiądzie na jednym piętrze, a czterech — na innym piętrze.

12. Do czterech szuflad wrzucamy losowo 5 różnych kul. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- dwie szuflady pozostaną puste,
- żadna szuflada nie będzie pusta.



13. W popularnej grze w kości rzucamy pięcioma różnymi sześciennymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w jednym rzucie:

- a) na wszystkich pięciu kostkach otrzymamy taką samą liczbę oczek (wyrzucimy tzw. generała),
- b) dokładnie na czterech kostkach otrzymamy taką samą liczbę oczek (wyrzucimy tzw. karę),

- c) pojawiają się tylko dwie różne liczby oczek, jedna z nich na trzech kostkach, a druga — na dwóch pozostałych (taki zestaw nazywany jest fulem).

14. W konkursie radiowym nadesłano 30 poprawnych odpowiedzi, z których 10 pochodziło z Warszawy. Nagrody otrzymało 5 autorów poprawnych odpowiedzi, których wyłoniono drogą losowania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wszystkie nagrody otrzymały osoby z Warszawy,
- b) dwie nagrody otrzymały osoby spoza Warszawy.

15. Trzy spośród dwunastu jajek w opakowaniu są nadtłuczone. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród losowo wybranych z opakowania czterech jajek:

- a) nie ma ani jednego nadtłuczonego,
- b) dwa są nadtłuczone.

16. W dziecięcą grę karcianą Piotruś gra się talią 25 kart, w której znajduje się 12 par kart i jedna karta bez pary. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że gracz, który dostał 12 kart, ma piotrusia (czyli kartę bez pary). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ma go drugi gracz.



17. W szufladzie są skarpetki niepołączone w pary. Wyjmujemy z niej po omacku kolejno dwie skarpetki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że są to skarpetki do pary, jeśli w szufladzie znajduje się:

- a) sześć różnych par skarpetek,
- b) trzy jednakowe pary białych i trzy jednakowe pary czarnych skarpetek,
- c) jedna skarpetka biała i dziewięć jednakowych czarnych skarpetek,
- d) dwie skarpetki białe, dwie czarne i cztery szare.

18. Czterech nieznajomych jedzie pociągiem w tym samym przedziale. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wszyscy urodzili się w tym samym dniu tygodnia,
- b) urodzili się w różne dni tygodnia,
- c) tylko trzy osoby urodziły się w tym samym dniu tygodnia.

Gra scrabble polega na układaniu wyrazów z liter zapisanych na plastikowych płytkach. Na początku gry każdy gracz losuje 7 spośród 100 takich płytek. Wśród tych 100 płytek znajdują się 2 płytki puste, które w układanym słowie mogą zastąpić dowolną literę. W poniższej tabeli podano, ile płytek każdego rodzaju znajduje się w zestawie.



Rodzaj płytki	A Ć Ę F Ń Ó Ś Ź Ż	B G H J L U pusta	C D K L M P T	R S W Y	N Z	O	E	I	A
Liczba płytek	1	2	3	4	5	6	7	8	9

19. Przeczytaj powyższe informacje o grze w scrabble.

a) Przyjmijmy, że w woreczku są wszystkie płytki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród siedmiu wylosowanych płytek będą dwie puste.

b) Przypuśćmy, że w woreczku nie ma pustych płytek, ale są wszystkie pozostałe. Losujemy 7 płytek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że można z nich ułożyć słowo KARAKAN.

c) Za ułożenie słowa JAŻŃ można otrzymać co najmniej 20 punktów. Losujemy 7 płytek z worka, w którym są wszystkie płytki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy płytki z literami J, A, Ż, Ń, a na pozostałych wylosowanych płytkach nie będzie liter J, A, Ż, Ń.

MINISPRAWDZIAN

51. Losujemy trzy karty z tali 52 kart. Prawdopodobieństwo wylosowania trzech kart tego samego koloru jest równe:

- A. $\frac{11}{850}$ B. $\frac{66}{5525}$ C. $\frac{22}{425}$ D. $\frac{33}{11050}$

52. Oblicz prawdopodobieństwo, że ułożymy słowo KOT, wybierając losowo i ustawiając w kolejności losowania trzy spośród liter występujących w słowie GOTYK?

- A. $\frac{1}{60}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{20}$

53. W składzie pewnego pociągu znajduje się 15 wagonów. W każdym z tych wagonów jest 10 przedziałów z 8 miejscami siedzącymi. Dwie nieznanne osoby kupiły bilety z miejscówkami na ten pociąg. Prawdopodobieństwo tego, że te osoby usiądą w tym samym przedziale naprzeciwko siebie, jest równe:

- A. $\frac{1}{1200}$ B. $\frac{1}{1199}$ C. $\frac{1}{1050}$ D. $\frac{1200}{2399}$

POWTÓRZENIE

1. W układzie współrzędnych spośród punktów o obu współrzędnych naturalnych mniejszych od 6 losujemy jeden. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) co najmniej jedna współrzędna tego punktu jest liczbą pierwszą,
- b) co najwyżej jedna współrzędna jest liczbą nieparzystą.

2. W urnie znajduje się n kul białych i jedna czarna. Z urny wyjmujemy losowo k kul ($k \leq n$). Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wyciągniętych kul nie ma czarnej.

3. Wśród 10 losów loteryjnych jest jeden los wygrywający, dwa uprawniające do ponownego losowania, a pozostałe są przegrywające. Oblicz prawdopodobieństwo, że pierwsza osoba, która bierze udział w loterii, wygra nagrodę.

4. Rzucamy trzema różnymi kostkami do gry. Jeśli wypadnie co najmniej jedna szóstka — wygrywamy 20 zł. Jeśli wypadną trzy jedynki — wygrywamy 100 zł. W pozostałych przypadkach przegrywamy pewną kwotę. Jaka to kwota, jeśli gra jest sprawiedliwa?

5. Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kart:

- a) nie ma pika,
- b) jest co najmniej jeden walet.

6. Trzech spośród jedenastu piłkarzy wylosowano do kontroli antydopingowej. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano trzech z czterech obrońców tej drużyny.

7. a) Ile meczów odbywa się w sezonie, jeśli każda z 16 drużyn w lidze rozgrywa z każdą z pozostałych po 2 mecze?

b) Na ile sposobów można rozwiązać test złożony z pięciu pytań, jeżeli do każdego podano trzy odpowiedzi?

c) Ile różnych słów można otrzymać, przestawiając litery w słowie ANANAS?

8. Zamek szyfrowy ma 3 pokrętła, każde z cyframi od 0 do 9. Oblicz, na ile sposobów można zakodować ten zamek tak, aby cyfry na każdym pokrętle:

- a) były różne,
- b) mogły się powtarzać.

9. Pewien kod składa się z ośmiu znaków (jedynek lub dwójek). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w kodzie tym występują:

- a) na przemian jedynki i dwójki,
- b) dwie jedynki i sześć dwójek,
- c) co najmniej dwie jedynki.

10. Pewien student na egzaminie losuje po jednym pytaniu z dwóch zestawów. Pierwszy zestaw zawiera 5 pytań, a student zna odpowiedzi na 4 spośród nich, w drugim zestawie są 4 pytania, a student zna odpowiedzi na 3 z nich. Oblicz prawdopodobieństwo, że ten student:

- a) będzie znał odpowiedzi na oba wylosowane pytania,
- b) nie będzie znał odpowiedzi na żadne z wylosowanych pytań,
- c) będzie znał odpowiedzi tylko na jedno z wylosowanych pytań.

11. Znajdź ten wyraz rozwinięcia wyrażenia $(2x^3 - \sqrt{2}y)^7$, w którym występuje x^{12} .

Prawdopodobieństwo

część 2

Producent pewnego testu medycznego zapewnia, że wykrywa on badaną chorobę z prawdopodobieństwem 90%. Jednak dodatni wynik tego testu oznacza, że prawdopodobieństwo choroby jest mniejsze niż 50%. Jak to możliwe? Jakość testu medycznego opisują dwie liczby: czułość testu i jego swoistość. Czułość to prawdopodobieństwo, że osoba chora uzyska dodatni wynik testu. I tę wartość podał nasz producent. Swoistość testu to prawdopodobieństwo, że u osoby zdrowej jego wynik będzie ujemny. Znając te parametry i odsetek chorych w populacji, można obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo, że przy dodatnim wyniku testu badana osoba jest chora. Pomaga w tym twierdzenie Bayesa, które poznasz w tym rozdziale.



- Suma i iloczyn zdarzeń ■ Prawdopodobieństwo warunkowe
- Prawdopodobieństwo całkowite ■ Zdarzenia niezależne
- Schemat Bernoullego ■ Powtórzenie

SUMA I ILOCZYN ZDARZEŃ

- I Zdarzenia losowe opisywaliśmy jako wszystkie podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych. Omówimy teraz niektóre pojęcia związane z własnościami tych zbiorów.

ĆWICZENIE A Dane są zbiory:

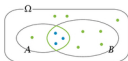
$$A = \{a, b, c, d, e\} \quad B = \{a, b, f\} \quad C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

Wymień wszystkie elementy zbiorów: $A \cap B$, $A \cup B$, $C \setminus A$, $C \setminus B$.

Zdarzenia losowe to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych. Iloczyn i sumy tych podzbiorów także oznaczają pewne zdarzenia losowe.

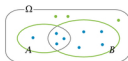
Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają zdarzenia elementarne, które sprzyjają jednocześnie zdarzeniu A i zdarzeniu B .

Zdarzeniu $A \cup B$ sprzyjają zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu A lub zdarzeniu B .



$$P(A \cap B) = \frac{3}{11}$$

Symbol $P(A \cap B)$ czytamy: „prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B ” albo „prawdopodobieństwo, że zajdą oba zdarzenia A i B ”.



$$P(A \cup B) = \frac{8}{11}$$

Symbol $P(A \cup B)$ czytamy: „prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A oraz B ” lub „prawdopodobieństwo, że zajdzie co najmniej jedno ze zdarzeń A lub B ”.

W doświadczeniu polegającym na losowaniu jednej karty z talii 52 kart rozważmy następujące zdarzenia:

K_1 — Wylosowana karta to karo.

K_2 — Wylosowana karta to kier.

F — Wylosowano figurę.

Zdarzenie „wylosowano kartę z figurą karo” to iloczyn $K_1 \cap F$, natomiast zdarzenie „wylosowano kartę koloru czerwonego” (karo lub kier) to suma zdarzeń $K_1 \cup K_2$.

Prawdopodobieństwa tych zdarzeń wynoszą:

$$P(K_1 \cap F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad P(K_1 \cup K_2) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

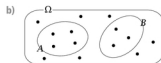
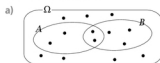
ĆWICZENIE B Przyjmij takie oznaczenia, jak opisano powyżej. Opisz słowami poniższe zdarzenia i określ ich prawdopodobieństwa:

$$K_1 \cup F \quad K_1 \cap K_2 \quad K'_1 \cap F \quad K_2 \cap F'$$

Zauważ, że zdarzenia opisane powyżej: „wylosowano karo” oraz „wylosowano kiera” nie mogą zajść jednocześnie. Takie zdarzenia nazywamy **wykluczającymi się**.

Zdarzenia A i B nazywamy **wykluczającymi się**, jeśli $A \cap B = \emptyset$.

ĆWICZENIE C Na rysunku przedstawiono przestrzeń zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego. Każda kropka oznacza zdarzenie elementarne. Zakładamy, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Oblicz $P(A)$, $P(B)$ i $P(A \cup B)$, a następnie sprawdź, czy zachodzi równość $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń nie zawsze jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń. Okazuje się, że zależy to od tego, czy zdarzenia te się wykluczają, czy nie.

Dla dowolnych dwóch zdarzeń A i B zachodzi równość:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dowód

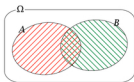
Niech A i B będą podzbiorami pewnej przestrzeni zdarzeń elementarnych. Niech N oznacza liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, zaś n_A , n_B , $n_{A \cup B}$ i $n_{A \cap B}$ oznaczają liczby zdarzeń elementarnych, które sprzyjają odpowiednio zdarzeniom A , B , $A \cup B$ oraz $A \cap B$.

Zauważmy, że:

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$$

Zatem:

$$P(A \cup B) = \frac{n_A + n_B - n_{A \cap B}}{N} = \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N} - \frac{n_{A \cap B}}{N} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \square$$



Z powyższego twierdzenia wynika, że:

Jeśli zdarzenia A i B się wykluczają, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

PRZYKŁAD

W pudełku są spinacze w dwóch wielkościach — duże i małe oraz w dwóch kolorach — fioletowym i zielonym. Duże spinacze stanowią 20% wszystkich spinaczy. W pudełku jest trzy razy więcej spinaczy fioletowych niż zielonych. Duże fioletowe spinacze to 5% spinaczy w pudełku. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany spinacz jest zielony i mały, a jakie — że jest fioletowy i mały.

D — Wylosowany spinacz jest duży.

F — Wylosowany spinacz jest fioletowy.

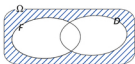
$$P(D) = 0,2$$

$$P(F) = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$P(F \cap D) = 0,05$$

Stosunek liczby fioletowych spinaczy do liczby zielonych spinaczy wynosi 3 : 1.

$F' \cap D'$ — Wylosowany spinacz jest zielony i mały.



$$F' \cap D' = (F \cup D)'$$

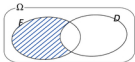
$$P(F' \cap D') = 1 - P(F \cup D)$$

$$P(F \cup D) = P(F) + P(D) - P(F \cap D) = 0,75 + 0,2 - 0,05 = 0,9$$

$$P(F' \cap D') = 1 - 0,9 = 0,1$$

Zdarzenie $F' \cap D'$ („wylosowany spinacz będzie zielony i mały”) jest przeciwne do zdarzenia $F \cup D$ („wylosowany spinacz będzie fioletowy lub duży”).

$F \cap D'$ — Wylosowany spinacz jest fioletowy i mały.



$$F = (F \cap D') \cup (F \cap D)$$

$$P(F) = P(F \cap D') + P(F \cap D)$$

Zdarzenia $F \cap D$ i $F \cap D'$ się wykluczają.

$$P(F \cap D') = P(F) - P(F \cap D) = 0,75 - 0,05 = 0,7$$

Odp. Prawdopodobieństwo wylosowania małego zielonego spinacza wynosi 0,1, a małego fioletowego spinacza wynosi 0,7.

ZADANIE

W worku znajdują się żetony w dwóch kolorach: białych jest 4 razy więcej niż czarnych. Okrągłe żetony stanowią 30% wszystkich żetonów, pozostałe są kwadratowe, a okrągłe białe żetony to 10% wszystkich żetonów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że żeton wyciągnięty losowo z worka jest:

a) kwadratowy i czarny,

b) kwadratowy i biały.

Najważniejsze omówione do tej pory własności prawdopodobieństwa zebrane zostały obok.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

zadania 1–11 ►

Ciekawostka

Definicję klasyczną prawdopodobieństwa, z której korzystamy, sformułował w 1812 roku francuski matematyk Pierre Simon de Laplace (czyt. pier sima de laplas). Jej zastosowanie ogranicza się do przypadku, gdy wszystkie zdarzenia elementarne mają jednakowe prawdopodobieństwa.

W 1933 roku rosyjski matematyk Andriej Kołmogorow podał definicję, którą można stosować dla dowolnej przestrzeni zdarzeń elementarnych. Oto definicja Kołmogorowa:

Niech Ω będzie skończoną przestrzenią zdarzeń elementarnych. Mówimy, że na zdarzeniach zawartych w zbiorze Ω określone jest prawdopodobieństwo, jeżeli każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba $P(A)$,

zwana prawdopodobieństwem zdarzenia A i spełnione są warunki:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- dla każdej pary wykluczających się zdarzeń A, B zachodzi równość:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Definicja ta nie podaje wprost przepisu, jak obliczać prawdopodobieństwo zdarzenia, a jedynie określa warunki (aksjomaty), jakie prawdopodobieństwo ma spełniać. Tego typu definicję nazywamy aksjomatyczną. Zauważ, że z dotychczasowych rozważań wynika, że prawdopodobieństwo określone przez definicję klasyczną spełnia warunki definicji Kołmogorowa.

ZESTAW ZADAŃ

1. W doświadczeniu polegającym na rzucie kostką do gry rozważmy zdarzenia:

A — Wypadła parzysta liczba oczek.

B — Wypadły nie mniej niż 4 oczka.

Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniom:

$$A \cup B \quad A \cap B \quad B' \quad A' \cup B \quad A' \cap B'$$

2. Kropki na rysunku oznaczają zdarzenia elementarne jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

$$A \cap B \quad A \cap B' \quad A' \cap B'$$

$$A \cup B \quad A' \cup B \quad A' \cup B'$$



3. Z talii 52 kart losujemy 5 kart. Rozważmy następujące zdarzenia:

A — Wszystkie wylosowane karty to piki.

B — Wszystkie wylosowane karty to figury.

C — Wśród wylosowanych kart są cztery asy.

D — Wśród wylosowanych kart są cztery błotki.

a) Wśród opisanych zdarzeń wskaż zdarzenia wykluczające się.

b) Które ze zdarzeń: B , $A \cap B$, $A \cup B$, $B' \cap A$, $C \cap D$ są zdarzeniami niemożliwymi?

4. Wiadomo, że $P(A \cup B) = P(B) = 2 \cdot P(A \cap B) = \frac{1}{2}$. Uporządkuj liczby $P(A)$, $P(A')$ i $P(B')$ w kolejności od najmniejszej do największej.

5. Czy podane informacje wystarczają, aby stwierdzić, że zdarzenia A i B się nie wykluczają?

a) $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,7$

c) $P(A') = 0,8$, $P(B) = 0,9$

b) $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = 0,3$

d) $P(A') = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{1}{4}$

6. Zdarzenia A i B to podzbiory pewnej przestrzeni zdarzeń elementarnych.

a) Wiadomo, że $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ i $P(A \cap B) = 0,3$. Oblicz $P(A \cup B)$.

b) Wiadomo, że $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ i $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$. Oblicz $P(A \cap B)$.

c) Wiadomo, że $P(A') = 0,5$, $P(B') = 0,4$ i $P(A \cup B) = 0,7$. Oblicz $P(A \cap B)$.

d) Wiadomo, że $P(A \cap B) = \frac{1}{7}$, $P(B') = \frac{3}{7}$ i $P(A' \cap B') = \frac{1}{7}$. Oblicz $P(A \cup B)$, $P(A)$ oraz $P(A' \cap B)$.

7. W kolekcji znaczków Darka znaczki nieostemplowane stanowią 75% wszystkich znaczków. Aż 80% tej kolekcji to znaczki polskie. Znaczki polskie lub nieostemplowane to 90% kolekcji. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany znaczek jest:

a) polski i nieostemplowany,

b) zagraniczny i nieostemplowany,

c) polski lub ostemplowany,

d) zagraniczny lub nieostemplowany.



8. W miseczce zmieszano różne rodzaje orzeszków. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany orzeszek jest ziemny, wynosi $\frac{1}{3}$, że jest prażony — wynosi $\frac{1}{4}$, a że jest prażony lub ziemny — wynosi $\frac{1}{2}$. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania prażonego orzeszka ziemnego. Jaką część orzeszków ziemnych stanowią orzeszki prażone?

9. Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo tego, iż pracownik urzędu jest kompetentny, wynosi 0,4, prawdopodobieństwo, że jest miły — wynosi 0,3, a tego, że ma obie te cechy — wynosi 0,1. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia na urzędnika, który:

- a) jest kompetentny lub miły,
- b) jest niemiły i niekompetentny,
- c) jest kompetentny, ale niemiły.

10. Połowa guzików w pudełku ma cztery dziurki, a $\frac{2}{3}$ wszystkich guzików ma kolor czerwony. Prawdopodobieństwo wylosowania czerwonego guzika z czterema dziurkami wynosi $\frac{1}{6}$. Czy w pudełku są guziki, które nie są czerwone i nie mają czterech dziurek?



11. Wybieramy losowo jedną z liczb od 1 do 1000. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby:

- a) podzielnej przez 2 lub przez 3,
- b) podzielnej przez 5 lub przez 7,
- c) podzielnej przez 6 lub przez 10,
- d) podzielnej przez 2 lub przez 3, lub przez 5.

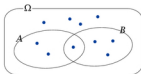
MINISPRAWDZIAN

51. Zdarzenia A i B spełniają warunki: $P(A) = 0,3$ i $P(A \cap B) = 0,2$. Wówczas $P(A' \cup B)$ wynosi:

- A. 0,9
- B. 0,8
- C. 0,7
- D. 0,6

52. Kropki na rysunkach oznaczają zdarzenia elementarne jednakowo prawdopodobne. Które z poniższych prawdopodobieństw jest największe?

- A. $P(A')$
- B. $P(A' \cap B)$
- C. $P(A \cup B)$
- D. $P(A \cap B')$



53. Prawdopodobieństwo, że wybrany losowo uczeń klasy IVA uczy się języka niemieckiego, wynosi $\frac{1}{3}$, francuskiego — $\frac{1}{5}$, a obu tych języków — $\frac{1}{15}$. Prawdopodobieństwo, że wybrany losowo uczeń tej klasy uczy się języka niemieckiego lub francuskiego, jest równe:

- A. $\frac{2}{15}$
- B. $\frac{7}{15}$
- C. $\frac{8}{15}$
- D. $\frac{14}{15}$

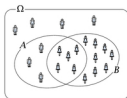
PRAWDOPODOBIENSTWO WARUNKOWE

- I W pewnej klasie jest 13 dziewcząt i 7 chłopców. Po przeprowadzeniu ankiety okazało się, że 5 dziewcząt i 3 chłopców nie ma rodzeństwa, a pozostali mają brata lub siostrę. Przypuśćmy, że wybieramy w sposób losowy jedną osobę z tej klasy.

Na rysunku obok zilustrowano schematycznie przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zaznaczono następujące zdarzenia:

A — Wylosowana osoba nie ma rodzeństwa.

B — Wylosowana osoba jest dziewczynką.



Prawdopodobieństwo wylosowania osoby, która nie ma rodzeństwa, wynosi $\frac{8}{20}$. Zastanówmy się, jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania osoby, która nie ma rodzeństwa, jeśli dodatkowo wiemy, że wylosowaną osobą jest dziewczynka. To prawdopodobieństwo jest równe prawdopodobieństwu wylosowania jedynaczki z grupy dziewcząt:

$$\frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{5}{13} \quad \begin{array}{l} \vdots \\ n_{A \cap B} \text{ — liczba jedynacek} \\ \vdots \\ n_B \text{ — liczba dziewcząt} \end{array}$$

Liczbę tę można wyrazić za pomocą prawdopodobieństw zdarzenia B oraz iloczynu zdarzeń $A \cap B$:

$$\frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{\frac{n_{A \cap B}}{N}}{\frac{n_B}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ĆWICZENIE Korzystając z podanych informacji o uczniach w klasie oblicz $n_{A \cap B}$, n_B , $P(A \cap B)$, $P(B)$ i porównaj ilorazy $\frac{n_{A \cap B}}{n_B}$ i $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Niech A i B będą zdarzeniami w pewnym doświadczeniu losowym i $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwo, że zaszło zdarzenie A przy założeniu, że zaszło zdarzenie B , nazywamy **prawdopodobieństwem warunkowym**. Oznaczamy je symbolem $P(A|B)$ (czytamy: *prawdopodobieństwo A , pod warunkiem że B*) i obliczamy ze wzoru:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wynika z tego, że $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.

PRZYKŁAD 1 W pudełku z kulkami 40% stanowią szklane kulki, a czerwone szklane kulki to 30% wszystkich kulek. Wylosowano szklaną kulkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest ona czerwona.

C — Wylosowana kulka jest czerwona.

S — Wylosowana kulka jest szklana.

$$P(S) = 0,4 \quad P(C \cap S) = 0,3$$

$$P(C|S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4}$$

ZADANIE W woreczku z klockami 70% stanowią czarne klocki, a czarne drewniane klocki to 40% wszystkich klocków. Wylosowano czarny klocek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ten klocek jest drewniany.

Przy obliczaniu prawdopodobieństwa warunkowego często wygodnie jest korzystać z równości $P(A|B) = \frac{n_{A \cap B}}{n_B}$.

PRZYKŁAD 2 Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz $P(A|B)$ oraz $P(B|A)$, gdy A i B oznaczają zdarzenia:

A — Suma oczek na obu kostkach jest większa od 6.

B — Na pierwszej kostce wypadły 2 oczka.

$$n_{A \cap B} = 2, \quad n_B = 6$$

$$P(A|B) = \frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|A) = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{2}{21}$$

Zdarzeniu $A \cap B$ sprzyjają zdarzenia elementarne (2, 5) oraz (2, 6).

Zdarzeniu B sprzyja 6 zdarzeń elementarnych: (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6).

Zdarzeniu A sprzyja 21 zdarzeń elementarnych: (1, 6), (2, 5), (2, 6) itd.

ZADANIE Rzucamy dwiema kostkami do gry. Niech A oznacza zdarzenie „iloczyn liczby oczek na obu kostkach jest nieparzysty” i B — zdarzenie „na obu kostkach wypadła ta sama liczba oczek”. Oblicz $P(A|B)$ oraz $P(B|A)$.

Uwaga. Zauważ, że w przykładzie 2 mogliśmy korzystać ze wzoru $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. W tabeli zapisano sumy oczek dla wszystkich możliwych wyników doświadczenia. Wynika z niej, że:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} \quad P(B) = \frac{6}{36} \quad P(A) = \frac{21}{36}$$

Zatem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{21}{36}} = \frac{2}{21}$$

1 kostka \ 2 kostka	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

PRZYKŁAD 3 W Polsce 35% dorosłych pali papierosy lub cierpi na choroby układu krążenia, które osłabiają serce. Wiadomo także, że 21% dorosłych mieszkańców Polski pali papierosy, a 25% cierpi na choroby serca. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany dorosły mieszkaniec Polski choruje na serce, jeśli wiadomo, że pali papierosy.

A — Wybrany dorosły mieszkaniec Polski pali papierosy.

B — Wybrany dorosły mieszkaniec Polski choruje na serce.

$$P(A) = 0,21 \quad P(B) = 0,25 \quad P(A \cup B) = 0,35$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,21 + 0,25 - 0,35 = 0,11 \quad \begin{matrix} \vdots \\ P(A \cup B) = \\ = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{matrix}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,11}{0,21} \approx 0,52$$

Odp. Prawdopodobieństwo, że osoba paląca ma chore serce, wynosi około 0,52.

ZADANIE Skorzystaj z powyższych danych i oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany dorosły mieszkaniec Polski pali papierosy, jeśli wiadomo, że choruje na serce.

Z przykładu 3. wynika, że prawdopodobieństwo wystąpienia choroby serca u statystycznego dorosłego mieszkańca Polski jest równe 0,25, a u palacza jest większe — wynosi 0,52. Liczby te wskazują, że może istnieć zależność między chorobami serca a paleniem papierosów.

Można oczywiście podać przykłady zjawisk, w których nie zaobserwowano takiej statystycznej zależności. Na przykład nie stwierdzono żadnego związku między chorobami serca a kolorem oczu, gdyż prawdopodobieństwo występowania choroby serca wśród osób o danym kolorze oczu jest takie samo jak w całym społeczeństwie.

zadania 1–19 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. W torebce jest 17 kolorowych lukrowanych ciastek w różnych kształtach (zob. rysunek). Losowo wybieramy ciastko z tej torebki.



a) Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A_1 — Wylosowane ciastko jest czerwone i ma kształt księżycy.

A_2 — Wylosowane ciastko jest czerwone, jeśli wiadomo, że ma kształt księżycy.

A_3 — Wylosowane ciastko ma kształt księżycy, jeśli wiadomo, że jest czerwone.

b) Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

B_1 — Wylosowane ciastko jest żółtą gwiazdką.

B_2 — Wylosowane ciastko jest żółte, jeśli wiadomo, że ma kształt gwiazdki.

B_3 — Wylosowane ciastko ma kształt gwiazdki, jeśli wiadomo, że jest żółte.

2. Rzucamy kostką do gry. Rozważmy zdarzenia:

A — Wypadła parzysta liczba oczek. B — Wypadła liczba oczek podzielna przez 3.

C — Wypadła liczba oczek mniejsza od 5.

Oblicz: $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A|C)$ i $P(C|B)$.

2025						
styczeń						
N	Pn	Wt	Śr	Cz	Pt	So
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

3. Na rysunku obok przedstawiono fragment kalendarza na rok 2025. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrany losowo dzień ze stycznia 2025 roku jest:

- a)** niedzielą lub dniem świątecznym i jest z pierwszego tygodnia stycznia (z pierwszych siedmiu dni stycznia),
- b)** niedzielą lub dniem świątecznym, lub jest z pierwszego tygodnia stycznia,
- c)** niedzielą lub dniem świątecznym, jeśli wiadomo, że jest dniem z pierwszego tygodnia stycznia,
- d)** dniem z pierwszego tygodnia stycznia, jeśli wiadomo, że jest niedzielą lub dniem świątecznym.

4. a) Rzucamy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymana liczba oczek jest parzysta, jeżeli wiadomo, że jest ona większa od 3.

b) Wybieramy kartę z talii 52 kart. Wybraną kartą jest figura. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest nią król.

c) W urnie znajdują się 2 kule białe i 3 czarne. Wybrano z niej 2 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że druga z tych kul jest biała, pod warunkiem że pierwsza wylosowana kula też jest biała.

5. Rzucamy trzykrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry i sumujemy liczby oczek, które wypadły w kolejnych rzutach. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana suma jest:

- a)** większa od 6, jeśli wiadomo, że w pierwszych dwóch rzutach wypadły jedynki,
- b)** mniejsza od 10, pod warunkiem że suma oczek w pierwszych dwóch rzutach wynosi 6,
- c)** większa od 15, skoro w pierwszym rzucie wypadło 5 oczek.

6. Z talii 52 kart wylosowano 2 karty. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a)** wylosowanymi kartami są karo i trefl,
- b)** pierwszą wylosowaną kartą jest karo, a drugą trefl,
- c)** drugą wylosowaną kartą jest trefl, jeżeli wiadomo, że pierwszą było karo.

7. Rzucono dwiema różnymi kostkami do gry.

a) Suma wyników na obu kostkach jest nieparzysta. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma ta wynosi 9.

b) Iloczyn wyników na obu kostkach jest parzysty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn ten wynosi 12.

8. W urnie jest siedem kul białych ponumerowanych liczbami od 1 do 7 i trzy kule czarne z liczbami 8, 9 i 10. Wylosowano jedną kulę. Niech A oznacza wylosowanie kuli o numerze parzystym, zaś B — kuli białej. Oblicz: $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(B'|A)$, $P(A'|B')$.

9. W pewnym liceum są dwie klasy maturalne. Każdy z uczniów tych klas wybrał na egzaminie maturalnym na poziomie rozszerzonym jeden z trzech przedmiotów — geografię, matematykę albo historię. W tabeli podano odpowiednie liczby uczniów. Niech A i B oznaczać, że losowo wybrana osoba spośród maturzystów należy odpowiednio do klasy IVa oraz do klasy IVb. Niech G , M i H oznaczać, że losowo wybrana osoba z tych klas będzie zdawała na poziomie rozszerzonym odpowiednio geografię, matematykę lub historię.

KLASA	geografia	matematyka	historia
IV a	6	18	10
IV b	12	15	5

Oblicz: $P(A \cap G)$, $P(B \cap H)$, $P(A \cup M)$, $P(B \cup G)$, $P(A|H)$, $P(B|M)$, $P(H|A)$, $P(G|B)$, $P(A|G')$, $P(B'|M)$, $P(A'|H')$.

10. Prognoza meteorologiczna na pewien dzień przewiduje wystąpienie opadów z prawdopodobieństwem 0,7, silnych wiatrów z prawdopodobieństwem 0,6, a opadów, którym towarzyszą silne wiatry — z prawdopodobieństwem 0,4. Oblicz, ile według meteorologów jest równe prawdopodobieństwo:

- a) wystąpienia opadów, jeżeli będą wiały silne wiatry,
- b) wystąpienia silnych wiatrów, jeżeli będzie padało.

11. a) Latem w pewnym mieście prawdopodobieństwo, że dzień będzie upalny, wynosi 0,8, a prawdopodobieństwo, że dzień będzie upalny i zanieczyszczenie powietrza przekroczy dopuszczalne normy, wynosi 0,2. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jeśli dzień będzie upalny, zanieczyszczenie powietrza przekroczy dopuszczalne normy.

b) Eksperti oceniają, że prawdopodobieństwo, iż pewna drużyna piłkarska zdobędzie mistrzostwo kraju, wynosi 0,7. Według tych samych ekspertów prawdopodobieństwo, że drużyna ta oprócz mistrzostwa zdobędzie też puchar kraju, wynosi 0,4. Oblicz, jak eksperci oceniają prawdopodobieństwo zdobycia przez tę drużynę pucharu, jeśli wcześniej zdobędzie ona mistrzostwo kraju.

12. a) Pewna firma zabiega o dwa kontrakty. Kierownictwo firmy ocenia, że szansa na podpisanie pierwszego kontraktu wynosi 60%, a jeśli uda się go podpisać, to szansa na zawarcie drugiego kontraktu wyniesie 90%. Oblicz prawdopodobieństwo zawarcia obu kontraktów.

b) W pewnym konkursie jako nagrody przygotowano koszulki, z których połowa ma kolor czerwony, a 30% czerwonych koszulek ma rozmiar XL. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana jako nagroda koszulka jest rozmiaru XL, skoro wiadomo, że jest czerwona.

- **13.** W pewnej partii zielonego groszku prawdopodobieństwo, że losowo wybrany groszek ma średnicę większą od 5 mm, wynosi 0,1, a że ma średnicę większą od 6 mm, wynosi 0,02. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że groszek ma średnicę większą od 6 mm, gdy wiadomo, że ma on średnicę większą od 5 mm.
- **14.** W pewnej szkole uczniowie wypożyczają na lekcje atlasy ze szkolnej biblioteki. 10% wszystkich atlasów to atlasy bardzo zniszczone, a 20% — nowe, zakupione niedawno. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypożyczony atlas jest bardzo zniszczony, jeśli wiadomo, że nie jest on nowy.

15. Zdarzenia A i B zawarte w zbiorze Ω spełniają warunki: $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$ oraz $P(A \cup B) = 0,5$.

a) Oblicz $P(A|B)$ i $P(B|A)$.

b) Oblicz $P(A \cap B')$ i $P(A|B')$.

16. Zdarzenia A i B zawarte w zbiorze Ω spełniają warunki: $P(A) = \frac{3}{7}$, $P(B) = \frac{4}{7}$ oraz $P(A \cup B') = \frac{5}{7}$. Oblicz: $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A'|B')$, $P(A'|B)$, $P(B'|A')$, $P(B'|A)$.

17. Zdarzenia A i B zawarte w zbiorze Ω spełniają warunki: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{3}$ oraz $P(A|B') = \frac{1}{2}$. Oblicz $P(B)$.

18. Zdarzenia A i B zawarte w zbiorze Ω spełniają warunki: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A|B) = \frac{3}{4}$ oraz $P(A|B') = \frac{1}{3}$. Oblicz: $P(A \cup B)$ i $P(A'|B)$.

19. Zdarzenia A i B zawarte w Ω spełniają warunki: $P(A) = 0,4$, $P(A|B) = 0,25$ i $P(A \cup B) = 0,7$. Oblicz: $P(A|B')$ i $P(A'|B)$.

MINISPRAWDZIAN

S1. Zdarzenia losowe A i B zawarte w zbiorze Ω spełniają warunki: $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(A|B) = \frac{3}{4}$ oraz $P(B|A) = \frac{6}{7}$. Prawdopodobieństwo zdarzenia B jest równe:

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{14}{15}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{49}{60}$

S2. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że jest ona podzielna przez 5 pod warunkiem, że jest nieparzysta, wynosi:

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{10}$

S3. Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w obu rzutach wypadła parzysta liczba oczek, jeżeli wiadomo, że sześć oczek nie wypadło ani razu.

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{4}{25}$

PRAWDOPODOBIENSTWO CAŁKOWITE

- I W garnku są pierogi ulepione przez Marysię i Zenka. Marysia przygotowała $\frac{1}{3}$ z nich i $\frac{3}{4}$ swoich pierogów nafaszerowała kapustą, a resztę grzybami. Zenek przygotował tyle samo pierogów z kapustą co z grzybami.

Obliczmy, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany pieróg ma grzybowe nadzienie.

Rozważmy następujące zdarzenia:

M — Wybrany pieróg przygotowała Marysia.

Z — Wybrany pieróg przygotował Zenek.

G — Wybrany pieróg jest z grzybami.



Opisaną powyżej sytuację zilustrowano obok. Zauważmy, że wszystkie pierogi zostały przygotowane albo przez Marysię, albo przez Zenka. Zdarzenie „wybrany pieróg jest z grzybami” to suma dwóch wykluczających się zdarzeń:

$$G = (G \cap M) \cup (G \cap Z)$$

Stąd:

$$P(G) = P(G \cap M) + P(G \cap Z)$$

Z podanych informacji wynikają równości:

$$P(M) = \frac{1}{3} \quad P(Z) = \frac{2}{3} \quad P(G|M) = \frac{1}{4} \quad P(G|Z) = \frac{1}{2}$$

Aby obliczyć $P(G \cap M)$ oraz $P(G \cap Z)$, skorzystamy z definicji prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(G) = P(G \cap M) + P(G \cap Z) = P(M) \cdot P(G|M) + P(Z) \cdot P(G|Z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

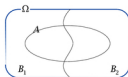
Taki sposób liczenia prawdopodobieństwa można opisać następująco:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych jest podzielona na dwa rozłączne zbiory B_1 i B_2 .

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \quad \text{i} \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A możemy obliczyć, korzystając z równości:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$



Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Niech $B_1, B_2, \dots, B_n$ będą zdarzeniami spełniającymi warunki:

- zdarzenia te parami się wykluczają,
- prawdopodobieństwa tych zdarzeń są większe od 0,
- zawsze musi zajść co najmniej jedno z nich, tzn. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$.

Wówczas dla każdego zdarzenia A zachodzi równość:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Dowód

Niech $B_1, B_2, \dots, B_n$ będą zdarzeniami spełniającymi założenia twierdzenia. Wówczas:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

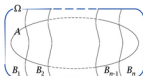
Zdarzenia $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ parami się wykluczają. Zatem:

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)) = \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) \end{aligned}$$

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego wynikają równości:

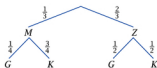
$$P(A \cap B_1) = P(B_1) \cdot P(A|B_1), \quad P(A \cap B_2) = P(B_2) \cdot P(A|B_2) \quad \text{itd.}$$

Wobec tego: $P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$. $\square$



Warto wiedzieć!

Korzystając z prawdopodobieństwa całkowitego, można wyjaśnić, dlaczego metoda drzewek jest poprawna. Sytuację opisaną na początku rozdziału można zilustrować tak:



M — Wybrano pieróg Marysi.

Z — Wybrano pieróg Zenka.

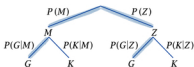
G — Wybrano pieróg z grzybami.

K — Wybrano pieróg z kapustą.

Na tym drzewku liczba $\frac{1}{4}$ oznacza prawdopodobieństwo, że wybrany pieróg jest

z grzybami, pod warunkiem że został on zrobiony przez Marysię.

Podobnie liczby $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{2}$ są pewnymi prawdopodobieństwami warunkowymi. Zatem drzewko to można opisać w następujący sposób:



Aby obliczyć $P(G)$ metodą drzewek, należy pomnożyć liczby zapisane przy zaznaczonych gałęziach i dodać uzyskane wyniki:

$$P(G) = P(M) \cdot P(G|M) + P(Z) \cdot P(G|Z)$$

PRZYKŁAD 1 Kompleks hotelowy Edyp tworzą trzy budynki: A , B i C . W budynku A jest dwa razy więcej, a w budynku C — trzy razy więcej pokoi niż w B . Okna z widokiem na morze ma $\frac{1}{3}$ pokoi w budynku A . W budynkach B i C takie pokoje stanowią odpowiednio $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{10}$ wszystkich pokoi. Oblicz prawdopodobieństwo, że pokój zarezerwowany w Edypie będzie miał okno z widokiem na morze. Przyjmujemy, że każdy pokój można zarezerwować z takim samym prawdopodobieństwem.

A — Zarezerwowano pokój w budynku A .

B — Zarezerwowano pokój w budynku B .

C — Zarezerwowano pokój w budynku C .

M — Zarezerwowano pokój z widokiem na morze.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n_A}{n_{A \cup B \cup C}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} & \begin{array}{l} : n_A : n_B : n_C = 2 : 1 : 3, \text{ więc} \\ : n_A : n_{A \cup B \cup C} = 2 : (2 + 1 + 3) \end{array} \\ P(B) &= \frac{n_B}{n_{A \cup B \cup C}} = \frac{1}{6} & : n_B = 1 : (2 + 1 + 3) \\ P(C) &= \frac{n_C}{n_{A \cup B \cup C}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & : n_C = 3 : (2 + 1 + 3) \end{aligned}$$

$$P(M|A) = \frac{1}{3} \quad : \frac{1}{3} \text{ pokoi w budynku } A \text{ jest z widokiem na morze.}$$

$$P(M|B) = \frac{1}{5} \quad : \frac{1}{5} \text{ pokoi w budynku } B \text{ jest z widokiem na morze.}$$

$$P(M|C) = \frac{1}{10} \quad : \frac{1}{10} \text{ pokoi w budynku } C \text{ jest z widokiem na morze.}$$

$$P(M) = P(M|A) \cdot P(A) + P(M|B) \cdot P(B) + P(M|C) \cdot P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{180} = \frac{7}{36}$$

Odp. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany pokój w kompleksie Edyp ma widok na morze, wynosi $\frac{7}{36}$.

ZADANIE Firma Bucik.pl zamawia 80% obuwia w fabryce F_1 , 15% — w fabryce F_2 , a 5% — w fabryce F_3 . Część produkcji z każdej z tych fabryk jest zwracana przez klientów z powodu wad. Reklamacje obejmują 7% produkcji z fabryki F_1 , 5% z F_2 oraz 1% z F_3 . Oblicz prawdopodobieństwo, że kupując parę butów w firmie Bucik.pl otrzymasz parę bez wad.

zadania 1–4 ►

- II Zwykle prawdopodobieństwo $P(A|B)$ jest różne od $P(B|A)$. Istnieje jednak związek między tymi prawdopodobieństwami. Mówi o tym twierdzenie:

Twierdzenie — wzór Bayesa (czyt. bejsa)

Niech A i B będą takimi zdarzeniami, że $P(A) > 0$ oraz $P(B) > 0$. Wówczas:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Dowód

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego wynika, że:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ więc } P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$\text{Zatem } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}. \quad \square$$

PRZYKŁAD 2 Choroba XTS występuje u 5% populacji. Istnieje test, który u osób chorych daje wynik pozytywny z prawdopodobieństwem 90%. Spośród wszystkich przebadanych tym testem 14% osób otrzymało wynik pozytywny. Przypuśćmy, że jakaś osoba otrzymała wynik pozytywny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ta osoba jest chora.

C — losowo wybrana osoba jest chora na XTS

T_+ — wynik testu badanej osoby jest pozytywny

$$P(C) = 0,05 \quad P(T_+) = 0,14 \quad P(T_+|C) = 0,9$$

$$P(C|T_+) = \frac{P(T_+|C) \cdot P(C)}{P(T_+)} = \frac{0,9 \cdot 0,05}{0,14} \approx 0,32$$

Odp. Jeśli wynik testu jest pozytywny, to prawdopodobieństwo, że osoba testowana jest chora na XTS, wynosi około 32%.

ZADANIE Dla powyższych danych oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoba, u której wynik testu jest ujemny, jest chora na XTS.

zadania 5–7 ►

ZESTAW ZADAŃ

- ◀ 1. W dwóch urnach są kule. W pierwszej urnie 3 zielone i 5 czerwonych, a w drugiej urnie 6 zielonych i 2 czerwone. Rzucamy kostką i jeśli wypadnie jedynka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, a w pozostałych wypadkach losujemy jedną kulę z drugiej urny. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A — Wylosowano kulę zieloną.

B_1 — Losowano z pierwszej urny.

B_2 — Losowano z drugiej urny.

Ustal $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$, a następnie korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, oblicz $P(A)$.

2. Nasiona trzech odmian cynii: A , B i C zostały wymieszane w proporcji 1:2:3 i wysiane na rabatce. Prawdopodobieństwo, że nasionko danej odmiany zakiełkuje, wynosi 95% dla odmiany A , 95% dla odmiany B i 80% dla C . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jedno wybrane losowo nasionko zakiełkuje.

3. W wytwórni ozdób choinkowych trzy pracownice malują bombki. Doświadczona pani Stefania maluje 60% wszystkich bombek, naberająca wprawy pani Zosia — 30%, a początkująca pani Jola — pozostałe 10% bombek przeznaczonych do malowania. Odpowiednio 1%, 5% i 30% ozdabianych przez panie bombek tłucze się przy malowaniu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że bombka przygotowana do malowania zostanie stłuczona.



4. Weterynarz stwierdził, że przyczyną choroby psa jest wirus V lub wirus W , przy czym prawdopodobieństwo zarażenia wirusem V ocenia na 80%, a wirusem W — na 20%. Prawdopodobieństwo tego, że pies wyzdrowieje, jest równe 0,8 w wypadku zarażenia wirusem V i 0,9, gdy jest to wirus W . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pies wyzdrowieje.

II 5. Na pewną chorobę cierpi 1% ludzi. Lekarze stosują test, który wykrywa tę chorobę u 90% osób chorych na nią, ale mylnie stwierdza ją też u 5% zdrowych osób.

- Oblicz prawdopodobieństwo, że test nie wykaże choroby u badanej osoby.
- Test nie wykazał choroby u badanej osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ta osoba jest chora.

6. W pewnym sklepie wytwórnia soków owocowych ustawiła stoisko promocyjne. Stwierdzono, że 70% klientów próbowało soków przy stoisku. Zauważono też, że soki tej wytwórni kupowało 40% tych, którzy próbowali soku przy stoisku, i tylko 10% tych, którzy soku nie próbowali.

- Oblicz prawdopodobieństwo, że klient spróbuje soku wytwórni, ale go nie kupi.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że klient nie spróbuje soku wytwórni i go nie kupi.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że klient nie kupi soku tej wytwórni.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że klient spróbował soku, jeśli wiemy, że go kupił.

7. W pudełkach są kule (zob. rysunek). Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno oczko, to losujemy jedną kulę z pudełka I, jeśli dwa lub trzy oczka, to losujemy kulę z pudełka II, a w pozostałych wypadkach losujemy kulę z pudełka III.



pudełko I



pudełko II



pudełko III

Niech A oznacza wylosowanie kuli zielonej, a V_1 , V_2 i V_3 losowanie z pudełek I, II i III. Oblicz: $P(A|V_2)$, $P(A)$, $P(A'|V_3)$, $P(A')$, $P(V_1|A)$, $P(V_2|A')$.

MINISPRAWDZIAN

51. W pewnym liceum są dwie klasy czwarte. W klasie IVa jest 28 uczniów, spośród których 7 będzie zdawało na egzaminie maturalnym matematykę na poziomie rozszerzonym. W klasie IVb jest 32 uczniów, a matematykę na poziomie rozszerzonym będzie zdawało 12. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana osoba będzie zdawała matematykę na poziomie rozszerzonym.

- A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{7}{300}$ C. $\frac{19}{60}$ D. $\frac{5}{16}$

52. W dwóch pudełkach są kule żółte i niebieskie. W pierwszym pudełku są dwie kule żółte i cztery niebieskie, a w drugim pudełku jest pięć kul żółtych i trzy niebieskie. Rzucamy sześcienną kostką do gry i jeśli wypadną co najmniej trzy oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka, a jeżeli wypadną co najwyżej dwa oczka, to losujemy jedną kulę z drugiego pudełka. Wylosowano kulę żółtą. Prawdopodobieństwo, że została ona wyjęta z pierwszego pudełka, jest równe:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{31}{72}$ C. $\frac{16}{31}$ D. $\frac{2}{31}$

ZDARZENIA NIEZALEŻNE

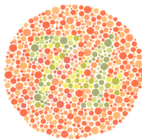
Warto wiedzieć!

Daltonizm to wrodzone i dziedziczne zaburzenie rozpoznawania barw. Zwykle polega na nieodróżnianiu barw czerwonej i zielonej, choć zdarzają się przypadki nierozpoznawania barw żółtej i niebieskiej, a nawet żadnej z barw.

W czasie II wojny światowej daltoniści dużo lepiej niż inni rozpoznawali zamaskowane obozy wroga poszukiwane przez samoloty szpiegowskie.

Nazwa „daltonizm” pochodzi od nazwiska angielskiego chemika i fizyka Johna Daltona (1766-1844). W dziele „Niezwyczajne fakty dotyczące widzenia barw” jako pierwszy opisał to zaburzenie, które miał zarówno on sam, jak i jego brat.

Większość ludzi widzi na poniższym obrazku liczbę 74. Daltoniści nieodróżniający kolorów czerwonego i zielonego widzą 21. Są też takie osoby, które nie widzą tu żadnej liczby.



- 1 Z badań statystycznych wynika, że około 4% ludzi to daltoniści. Okazuje się, że wśród kobiet jest zaledwie 0,5% daltonistek. Daltonizm jest więc cechą, która występuje częściej lub rzadziej w zależności od płci.

Istnieją cechy niezależne od płci. Na przykład odsetek osób z daną grupą krwi jest w Polsce taki sam wśród kobiet jak w całym społeczeństwie.

Rozważmy następujące zdarzenia:

A — Losowo wybrany mieszkaniec Polski ma grupę krwi A .

K — Losowo wybrany mieszkaniec Polski jest kobietą.

Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany mieszkaniec Polski ma grupę krwi A , jest równe prawdopodobieństwu, że losowo wybrana Polka ma tę grupę krwi, i wynosi 38%. Zatem $P(A) = P(A|K)$.

Gdy zachodzi taka równość, mówimy, że zdarzenia A i K są niezależne.

Równość tę możemy przekształcić, korzystając z definicji prawdopodobieństwa warunkowego. Otrzymujemy wtedy:

$$P(A) = P(A|K) = \frac{P(A \cap K)}{P(K)}, \quad \text{stąd} \quad P(A \cap K) = P(A) \cdot P(K)$$

Zdarzenia A i B są **niezależne**, gdy zachodzi równość:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

PRZYKŁAD 1 Z talii 52 kart losujemy jedną. Sprawdź, czy niezależne są zdarzenia:

a) A — Wylosowaną kartą jest król.

b) C — Wylosowano dziesiątkę lub figurę.

B — Wylosowaną kartą jest kier.

D — Wylosowana karta nie jest figurą.

$A \cap B$ — Wylosowano króla kier.

$C \cap D$ — Wylosowana karta to dziesiątka.

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

$$P(C \cap D) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = \frac{20}{52} = \frac{5}{13} \quad P(D) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$$

$$P(C) \cdot P(D) = \frac{5}{13} \cdot \frac{9}{13} = \frac{45}{169}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(C) \cdot P(D) \neq P(C \cap D)$$

Odp. Zdarzenia A i B są niezależne.

Odp. Zdarzenia C i D nie są niezależne.

ZADANIE Dla zdarzeń A , B , C i D opisanych powyżej sprawdź, czy niezależne są zdarzenia:

a) A i C

b) A' i B

c) C i D'

Niezależność zdarzeń A i B oznacza, że prawdopodobieństwo zdarzenia A nie zależy od tego, czy mamy informację o zajściu zdarzenia B , czy nie ma takiej informacji, a więc również prawdopodobieństwo zdarzenia A nie zależy od tego, czy mamy informację o zajściu zdarzenia B' . Wynika stąd, że zdarzenia A i B' są niezależne. To samo rozumowanie prowadzi także do stwierdzenia niezależności zdarzeń A' i B oraz A' i B' .

Te uwagi można podsumować w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie

Jeśli w pewnym doświadczeniu losowym zdarzenia A i B są niezależne, to również niezależne są zdarzenia A' i B , A i B' oraz A' i B' .

Dowód

Niech A i B będą takimi zdarzeniami, że $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Pokażemy najpierw, że zachodzi równość $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$.

Zauważmy, że zachodzi równość:

$$A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$$

Zdarzenia $A \cap B'$ oraz $A \cap B$ wykluczają się, zatem:

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$

Wobec tego:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

Korzystając z niezależności zdarzeń A i B , otrzymujemy:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) [1 - P(B)] = P(A) \cdot P(B')$$

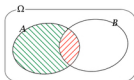
Zatem:

$$P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$$

Z równości $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$ wynikają równości:

$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B'),$$

$$P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B). \quad \square$$



ĆWICZENIE A Dwaj chłopcy — Marek i Tomek wykonują po jednym rzucie piłką do kosza. Marek trafia, niezależnie od wyniku Tomka, z prawdopodobieństwem 0,7, a Tomek niezależnie od rzutu Marka — z prawdopodobieństwem 0,6.

Niech M i T oznaczają zdarzenia:

M — Marek trafił do kosza (a Tomek trafił lub nie).

T — Tomek trafił do kosza (a Marek trafił lub nie).

- Oblicz $P(M \cap T)$, czyli prawdopodobieństwo, że obaj chłopcy trafią do kosza.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że Marek trafi, a Tomek nie.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że obaj chłopcy nie trafią do kosza.

zadania 1–6 ►

- II O niezależności zdarzeń możemy również mówić wtedy, gdy rozpatrujemy trzy zdarzenia.

Mówimy, że zdarzenia A , B i C są niezależne, jeśli niezależne są każde dwa spośród nich oraz zachodzi równość:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

ĆWICZENIE B Połączono karty z dwóch talii 52 kart i wylosowano jedną kartę. Sprawdź, czy poniższe zdarzenia są niezależne.

A — Wylosowaną kartą jest dama.

B — Wylosowaną kartą jest pik.

C — Wylosowano kartę z pierwszej talii.

Uwaga. Dla dowolnej liczby zdarzeń można zdefiniować, co się rozumie przez ich niezależność: Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ są niezależne, gdy dla dowolnej wybranej spośród nich pary zdarzeń, trójki zdarzeń, $\dots$, zestawu $n-1$ zdarzeń prawdopodobieństwo iloczynu wybranych zdarzeń jest równe iloczynowi ich prawdopodobieństw oraz zachodzi równość:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

PRZYKŁAD 2 W samochodzie zamontowano trzy systemy alarmowe działające niezależnie od siebie. Niezawodność pierwszego systemu, tzn. prawdopodobieństwo tego, że zadziała, wynosi 0,9, niezawodność drugiego systemu wynosi 0,8, a trzeciego 0,7. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- zadziała pierwszy system i jeden z dwóch pozostałych,
- zadziała co najmniej jeden system.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A — Zadziała pierwszy system.

B — Zadziała drugi system.

C — Zadziała trzeci system.

$$P(A) = 0,9 \quad P(B) = 0,8 \quad P(C) = 0,7$$

- a) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C)$ — Zadziała system pierwszy i drugi lub pierwszy i trzeci.

$$\begin{aligned} P((A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C)) &= \\ &= P(A \cap B \cap C') + P(A \cap B' \cap C) = \\ &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C') + P(A) \cdot P(B') \cdot P(C) = \\ &= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,7 = \underline{0,342} \end{aligned}$$

..... Zdarzenia $A \cap B \cap C'$, $A \cap B' \cap C$ się wykluczają.

$$\begin{aligned} P(C') &= 1 - P(C) \\ P(B') &= 1 - P(B) \end{aligned}$$

b) D — Zadziała co najmniej jeden system.

D' — Nie zadziała żaden system.

$$\begin{aligned} P(D) &= 1 - P(D') = 1 - P(A' \cap B' \cap C') = & \vdots & D' = A' \cap B' \cap C' \\ &= 1 - P(A') \cdot P(B') \cdot P(C') = \\ &= 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = \underline{0,994} \end{aligned}$$

ZADANIE Przyjmując dane o systemach alarmowych z przykładu, oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) zadziałają wszystkie trzy systemy,

b) zadziała tylko pierwszy system.

zadania 7–8 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Z talii 52 kart wylosowano jedną kartę. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

a) A — Wylosowana karta to dama.

B — Wylosowana karta jest treflem.

b) A — Wylosowana karta jest czarna (jest pikiem lub treflem).

B — Wylosowana karta jest pikiem.

c) A — Wylosowana karta jest czerwona (jest kierem lub karo).

B — Wylosowana karta jest figurą.

d) A — Wylosowana karta to dama kier.

B — Wylosowana karta jest czerwona.

2. W pewnej szkole 40% uczniów lubi muzykę rockową, a 30% uczniów lubi pierogi. Tych, którzy lubią i rocka, i pierogi, jest 10%. Czy zdarzenie: *losowo wybrany uczeń lubi rocka* i zdarzenie: *losowo wybrany uczeń lubi pierogi* są niezależne?

3. W jednej kieszeni jest 5 dziesięciogroszówek i 15 dwudziestogroszówek, a w drugiej — 9 dziesięciogroszówek i 6 dwudziestogroszówek. Z każdej z tych kieszeni wyjęto losowo po jednej monecie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) wyjęto dwie dziesięciogroszówki,

b) tylko jedna z wyjętych monet jest dziesięciogroszówką.

4. Dwaj chłopcy rzucają śnieżkami w bałwana. Na 10 wykonanych rzutów Antek trafia przeciętnie 3 razy, a Bartek — 4 razy. Zakładamy, że wyniki rzutów są zdarzeniami niezależnymi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że gdy obaj chłopcy jednocześnie rzucają śnieżkami w bałwana, to:

a) trafią obaj,

c) nie trafi tylko Bartek,

b) trafi tylko Antek,

d) trafi chociaż jeden z nich.

5. W fabryce zegarów z kukułką wadliwie wykonuje się 3% mechanizmów zegara i 1% mechanizmów napędzających kukułki. (Wady w mechanizmach występują niezależnie od siebie). Jakie jest prawdopodobieństwo, że w zegarze z tej fabryki oba mechanizmy są sprawne?

6. Wiadomo, że $P(A) = 0,3$ i $P(A \cup B) = 0,5$. Oblicz $P(B)$, jeśli zdarzenia A i B są:

- a) wykluczające się,
- b) niezależne.

7. Rzucamy dwiema różnymi sześciennymi symetrycznymi kostkami do gry. Ustal, czy zdarzenia A , B i C są niezależne, gdy:

A — Na pierwszej kostce wypadnie parzysta liczba oczek.

B — Liczba oczek na drugiej kostce jest podzielna przez 3.

C — Na obu kostkach wypadła ta sama liczba oczek.

8. Zdarzenia A , B i C są niezależne oraz wiadomo, że $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{10}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{15}$. Oblicz $P(A \cap B \cap C)$.

MINISPRAWDZIAN

51. Rzucamy dwukrotnie sześcienną symetryczną kostką do gry.

Przyjmijmy oznaczenia:

A — W pierwszym rzucie wypadła nieparzysta liczba oczek.

B — W obu rzutach wypadła liczba oczek większa od 3.

C — Suma oczek wyrzuconych w obu rzutach wynosi 7.

D — Co najmniej w jednym rzucie wypadło 6 oczek.

Wskaż parę zdarzeń niezależnych.

- A. A i B B. A i C C. B i C D. C i D

52. W pewnym doświadczeniu losowym zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(A) > 0$ i $3 \cdot P(A) = 4 \cdot P(A \cap B)$. Prawdopodobieństwo zdarzenia B' jest równe:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{13}{16}$ D. $\frac{3}{16}$

53. O zdarzeniach A i B zawartych w zbiorze Ω wiadomo, że $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$ oraz $P(A \cup B) = 0,76$. Oceń, czy prawdziwe są poniższe zdania.

I	Zdarzenie B jest przeciwne do zdarzenia A .	TAK/NIE
II	Zdarzenia A i B się wykluczają.	TAK/NIE
III	Zdarzenia A i B są niezależne.	TAK/NIE

SCHEMAT BERNOULLLEGO

- 1 Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Zastanówmy się, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dokładnie dwa razy wypadnie szóstka.

Nazwijmy wypadnięcie szóstki sukcesem, a wypadnięcie innej liczby oczek — porażką. To doświadczenie losowe ilustruje poniższe drzewko.



A — Dokładnie dwa razy wypadła szóstka.

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{72}$$

Każdy składnik powyższej sumy jest równy $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$ — to iloczyn dwóch prawdopodobieństw sukcesu i prawdopodobieństwa porażki. Iloczyn ten powtarza się trzy razy, gdyż wśród wyników doświadczenia są trzy takie, w których dwie próby zakończyły się sukcesem, a jedna porażką.

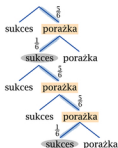
Przypuśćmy teraz, że pięć razy rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jakie tym razem jest prawdopodobieństwo, że dokładnie dwie próby zakończą się sukcesem, czyli dwa razy wypadnie szóstka?

A — Dwa razy wypadła szóstka.

Wzdłuż każdej gałęzi odpowiadającej zdarzeniu A są dwa sukcesy i trzy porażki. Na rysunku przedstawiono jedną z takich gałęzi.

Obliczając iloczyny prawdopodobieństw przy takich gałęziach, za każdym razem otrzymamy $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Aby obliczyć $P(A)$, wystarczy więc ustalić, ile w całym drzewku jest gałęzi, które ilustrują pięć prób z dokładnie dwoma sukcesami.



Takich gałęzi jest tyle, ile sposobów wybrania dwóch elementów (dwóch rzutów zakończonych sukcesami) ze zbioru pięcioelementowego (zbioru wszystkich pięciu rzutów). Liczba tych gałęzi to $\binom{5}{2}$. Wobec tego:

$$P(A) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888}$$

Doświadczenia opisane na poprzedniej stronie spełniają warunki tzw. schematu Bernoulliego.

Schemat Bernoulliego to doświadczenie polegające na powtórzeniu pewną liczbę razy próby, przy czym:

- wyniki kolejnych prób są zdarzeniami niezależnymi,
- w pojedynczej próbie możliwe są dwa wyniki — sukces lub porażka (jeśli prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p , to prawdopodobieństwo porażki jest równe $1 - p$).

Oto przykłady doświadczeń, które można zinterpretować jako schemat Bernoulliego:

- Rzucamy 8 razy monetą. Jeśli przyjmiemy, że sukcesem jest wypadnięcie orła, to prawdopodobieństwa sukcesu i porażki są równe i wynoszą $\frac{1}{2}$.
- Wykonujemy 5 strzałów do tarczy i przyjmujemy, że wynik każdego strzału nie zależy od pozostałych wyników, przy czym prawdopodobieństwo sukcesu, czyli trafienia w tarczę, jest takie samo w każdej próbie i wynosi 0,6. Wówczas prawdopodobieństwo porażki jest równe 0,4.
- W urnie znajdują się 3 kule białe i 5 czarnych. Losujemy 7 razy kulę i po każdym losowaniu wrzucamy kulę z powrotem do urny. Jeśli przyjmiemy, że sukcesem jest wylosowanie kuli białej, to prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $\frac{3}{8}$, a prawdopodobieństwo porażki wynosi $\frac{5}{8}$.

Opisaliśmy już, jak w doświadczeniu polegającym na pięciokrotnym rzucie kostką obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania dwóch sukcesów w pięciu próbach. W analogiczny sposób moglibyśmy obliczyć prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach.

W schemacie Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów w n próbach oznaczamy symbolem $P_n(k)$. Można je obliczać, korzystając ze wzoru:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

n — liczba prób

k — liczba sukcesów

p — prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie

ĆWICZENIE Dla każdego z przykładów doświadczeń opisanych powyżej oblicz prawdopodobieństwo tego, że trzy próby zakończą się sukcesem.

PRZYKŁAD Prawdopodobieństwo, że żarówka przepali się przed upływem miesiąca, wynosi 0,2. W żyrandolu jest 6 żarówek. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A — Przed upływem miesiąca przepalą się co najwyżej 2 żarówki.

B — Przed upływem miesiąca przepalą się nie więcej niż 4 żarówki.

$$p = 0,2$$

$$1 - p = 0,8$$

$$n = 6$$

Przyjmujemy za sukces przepalenie się żarówki oraz to, że żarówki przepalają się niezależnie od siebie, możemy więc skorzystać ze schematu Bernoullego.

$$\begin{aligned} P(A) &= P_6(2) + P_6(1) + P_6(0) = \\ &= \binom{6}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{6-2} + \binom{6}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{6-1} + \\ &\quad + \binom{6}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{6-0} = 0,90112 \end{aligned}$$

Zdarzenie A to suma trzech parami wykluczających się zdarzeń: „w 6 próbach uzyskano 2 sukcesy”, „w 6 próbach uzyskano 1 sukces” oraz „w 6 próbach nie uzyskano sukcesu”.

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(B') = 1 - [P_6(5) + P_6(6)] = \\ &= 1 - \left[\binom{6}{5} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^1 + \binom{6}{6} \cdot 0,2^6 \cdot 0,8^0 \right] = \\ &= 1 - 6 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8 - 0,2^6 = 0,9984 \end{aligned}$$

Zdarzenie „uzyskano co najwyżej 4 sukcesy w 6 próbach” jest przeciwnie do zdarzenia „uzyskano co najmniej 5 sukcesów w 6 próbach”.

Odp. Prawdopodobieństwo, że przed upływem miesiąca przepalą się co najwyżej dwie żarówki, jest równe 0,90112, a że przepalą się nie więcej niż 4 żarówki, wynosi 0,9984.

ZADANIE W pudełku jest 10 jajek. Prawdopodobieństwo, że jajko jest uszkodzone, wynosi 0,05. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A — W pudełku co najmniej 3 jajka są uszkodzone.

B — W pudełku co najmniej 6 jajek jest uszkodzonych.

zadania 1–14 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Dziecko próbuje odgadnąć, w której dłoni ojciec schował cukierek. Zabawa ta powtarzana jest sześciokrotnie i za każdym razem ojciec losowo wybiera dłoni, w której schowa cukierek.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że cukierek dwa razy był schowany w prawej dłoni.

b) Oblicz prawdopodobieństwo, że dziecko więcej niż trzy razy odgadło, w której dłoni jest cukierek.



2. a) Rzucamy pięć razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że orzeł wypadnie trzy razy.

b) Rzucamy czterema sześciennymi symetrycznymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadną dwie szóstki.

c) Z urny, która zawiera 2 kule białe i 3 czarne, siedmiokrotnie wyciągnięto jedną kulę, przy czym za każdym razem wkładano ją z powrotem do urny. Oblicz prawdopodobieństwo, że trzykrotnie wyciągnięto czarną kulę.

d) Koszykarz trafia do kosza z prawdopodobieństwem 0,8. Oblicz prawdopodobieństwo, że 5 spośród 10 oddanych przez niego rzutów będzie celnych.

e) Na pewnej fermie średnio jedno jajko na sto jest nadtluczone. Oblicz prawdopodobieństwo, że w pojemniku zawierającym 12 jajek z tej fermy 3 są nadtluczone.

f) W stawie hodowlanym 60% karpia ma masę ponad 1 kg. Oblicz prawdopodobieństwo, że 6 spośród 10 karpia wyłowionych z tego stawu waży więcej niż 1 kg.

3. Oto pytanie, które Samuel Pepys (czyt. pips), słynny pamiętnikarz, zadał Izaakowi Newtonowi (czyt. niutonowi):

Które z następujących zdarzeń jest najbardziej prawdopodobne:

- wypadnie co najmniej jedna szóstka, gdy rzucono sześcioma kostkami do gry,
- wypadną co najmniej dwie szóstki, gdy rzucono dwunastoma kostkami do gry,
- wypadną co najmniej trzy szóstki, gdy rzucono osiemnastoma kostkami do gry?

Jaka jest poprawna odpowiedź na pytanie Pepysa?

4. Pewien egzamin ma formę testu złożonego z 6 pytań. Każde pytanie opatrzone jest czterema wariantami odpowiedzi, z których tylko jedna jest prawidłowa. Egzamin jest zdany, jeśli ponad połowa udzielonych odpowiedzi jest właściwa. Oblicz prawdopodobieństwo, że egzaminowana osoba zda ten egzamin, jeśli:

- a)** jest zupełnie nieprzygotowana i odpowiedź na każde pytanie wybiera losowo,
- b)** jest w stanie wyeliminować jedną błędną odpowiedź na każde pytanie i z pozostałych wybiera jedną w sposób losowy,
- c)** zna poprawne odpowiedzi na 3 pytania, a odpowiedzi na pozostałe pytania wybiera losowo.

5. W pewnej wytwórni słodczy cukierki czekoladowe stanowią 60% produkcji. Pozostałe produkowane cukierki są mleczne. Maszyna porcjująca wybiera losowo 10 cukierków i pakuje je do torebki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a)** wszystkie cukierki w torebce są czekoladowe,
- b)** tylko jeden cukierek w torebce jest mleczny,
- c)** co najmniej dwa cukierki w torebce są mleczne,
- d)** w torebce jest tyle samo cukierków obu rodzajów,
- e)** w torebce jest o cztery więcej cukierków czekoladowych niż mlecznych.

6. Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo urodzenia się dziewczynki jest równe 0,48. Rozważmy rodziny z sześciorgiem dzieci. Oblicz, ile procent takich rodzin stanowią te, w których:

- a) jest tyle samo dziewczynek, co chłopców,
- b) jest co najmniej jeden chłopiec, ale dziewczynek jest więcej niż chłopców,
- c) wszystkie dzieci są tej samej płci.

Wskazówka do a). Oblicz prawdopodobieństwo, że w rodzinie z sześciorgiem dzieci jest tyle samo dziewczynek co chłopców.

7. W pewnej wytwórni granatów jeden granat na 50 jest wadliwy. Przed wysłaniem partii granatów do odbiorców przeprowadza się kontrolę jakości, przyjmując jedną z podanych poniżej zasad postępowania. W którym przypadku prawdopodobieństwo tego, że kontrola odrzuci badaną partię granatów, jest większe?

A. Partię się odrzuca, gdy wśród 10 wylosowanych z niej granatów znajduje się więcej niż jeden wadliwy.

B. Partię się odrzuca, gdy wśród 20 wylosowanych z niej granatów znajdują się więcej niż dwa wadliwe.

8. Idąc do szkoły i z powrotem, Agnieszka przechodzi przez ulicę z sygnalizacją świetlną. W ciągu jednego cyklu zmian świateł przez 55 sekund świeci się światło czerwone, a przez 30 sekund — zielone. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) jednego dnia Agnieszka dwukrotnie trafi na zielone światło,
- b) w ciągu dwóch dni Agnieszka trzykrotnie trafi na zielone światło,
- c) w okresie od poniedziałku do piątku pięciokrotnie trafi na zielone światło.

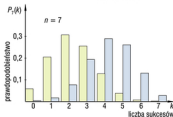
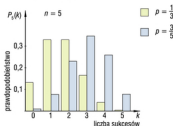
9. Kuba korzystał z wyciągu narciarskiego, który ma 100 krzesełek. Dziesięć z nich pomalowano na kolor zielony, a pozostałe były niebieskie. Kuba losowo trafiał na krzesło w wyciągu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w czasie dziesięciu przejazdów tym wyciągiem:

- a) tylko za pierwszym, drugim i trzecim razem trafił na zielone krzesło,
- b) ani razu nie jechał na zielonym krzesle,
- c) trzy razy trafił na zielone krzesło,
- d) co najmniej trzy razy jechał na zielonym krzesle,
- e) trzy razy z rzędu trafił na zielone krzesło, a siedem razy — na niebieskie.

10. W torebce są nasiona, z których mogą wyrosnąć kwiaty w kolorach niebieskim, czerwonym i żółtym. Nasiona te są zmieszane w proporcji odpowiednio 1 : 2 : 2. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród 10 kwiatów, które urosły z nasion z tej torebki:

- a) nie ma kwiatów niebieskich,
- b) trzy są czerwone,
- c) dziewięć jest żółtych,
- d) jest co najwyżej jeden czerwony,
- e) co najmniej dziewięć jest niebieskich,
- f) co najmniej dwa są żółte.

Na poniższych diagramach można zaobserwować, jak się zmienia prawdopodobieństwo k sukcesów w pięciu oraz w siedmiu próbach Bernoullego w zależności od k i od p .



Najwyższe słupki wskazują najbardziej prawdopodobne liczby sukcesów.

Gdy $p = \frac{1}{3}$ w pięciu próbach Bernoullego najbardziej prawdopodobne jest, że otrzymamy jeden lub dwa sukcesy. Zatem jeśli na przykład przy rzucie kostką uznamy za sukces wypadnięcie jedynki lub szóstki ($p = \frac{1}{3}$), to w pięciu rzutach kostką sukces osiągniemy najprawdopodobniej jeden lub dwa razy.

Gdy $p = \frac{1}{3}$, a prób jest siedem, to najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów wynosi 2.

Jak widać, najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów zależy od n (liczby prób Bernoullego) i od p (prawdopodobieństwa sukcesu w jednej próbie). Mówi o tym następujące twierdzenie:

Jeśli iloczyn $p(n+1)$ jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobne jest, że w n próbach Bernoullego otrzymamy $p(n+1) - 1$ albo $p(n+1)$ sukcesów.

Jeśli iloczyn $p(n+1)$ nie jest liczbą całkowitą, to w n próbach Bernoullego najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów jest równa największej z liczb całkowitych mniejszych od $p(n+1)$.

11. Przeczytaj informacje w ramce.

- Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba szóstek w 25 rzutach kostką do gry, a jaka — w 35 rzutach?
- Prawdopodobieństwo, że orzech jest pusty, wynosi $\frac{1}{13}$. Ile najprawdopodobniej będzie pustych orzechów, gdy rozłupiemy 40 sztuk?
- Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo, iż uczeń jest zdolny, wynosi $\frac{3}{8}$, a prawdopodobieństwo, że jest leniwy, wynosi $\frac{3}{5}$. Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba uczniów zdolnych, a jaka — leniwych w klasie liczącej 31 osób?

- Osoby leworęczne stanowią 10% ludzi. Korzystając z informacji w ramce, oblicz najbardziej prawdopodobną liczbę leworęcznych w grupie 100 osób oraz w grupie 99 osób.



- **13. a)** Oblicz prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie Bernoullego, aby najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w 10 próbach wynosiła 7.
- b)** Prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie Bernoullego wynosi 0,2. Ile należy wykonać prób, aby najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów była równa 11?
- 14. a)** Iloma co najmniej symetrycznymi monetami trzeba rzucić, by prawdopodobieństwo, że chociaż na jednej z nich wypadnie orzeł, było większe od 90%?
- b)** Ile co najmniej razy należy rzucić sześcienną symetryczną kostką do gry, by prawdopodobieństwo, że co najmniej raz wypadnie 1 oczko, było większe od $\frac{1}{2}$?
- c)** Strzelec trafia do celu z prawdopodobieństwem 0,6. Ile strzałów powinien wykonać, by prawdopodobieństwo, że trafi w cel chociaż raz, było większe od 99%?
- d)** Ile osób należy spytać, w jaki dzień tygodnia się urodziły, by prawdopodobieństwo, że wśród tych osób znajdzie się co najmniej jedna urodzona w niedzielę, było większe od prawdopodobieństwa, że takiej osoby wśród pytanых nie będzie?

MINISPRAWDZIAN

51. W ilu z poniższych doświadczeń możemy skorzystać ze schematu Bernoullego, aby obliczyć wskazane prawdopodobieństwo?

Doświadczenie I: W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 kule czerwone. Wyciągamy kolejno trzy kule. Za każdym razem wrzucamy kulę z powrotem do urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwie z wylosowanych kul są białe.

Doświadczenie II: W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 kule czerwone. Z urny wyciągamy trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jedna z wylosowanych kul jest biała.

Doświadczenie III: W urnie znajduje się 5 kul białych, 3 kule czerwone i 2 kule zielone. Z urny wyciągamy kolejno trzy kule. Za każdym razem wrzucamy kulę z powrotem do urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane kule mają różne kolory.

A. w jednym B. w dwóch C. w trzech D. w żadnym

52. Jeden na dwunastu mężczyzn jest daltonistą. Rozważmy zdarzenia:

X — Wśród 12 mężczyzn jest jeden daltonista albo jest ich dwóch.

Y — Wśród 12 mężczyzn nie ma daltonisty.

Z — Wśród 12 mężczyzn co najmniej jeden jest daltonistą.

Która zależność jest prawdziwa?

- A. $P(X) < P(Y) < P(Z)$ C. $P(Z) < P(Y) < P(X)$
 B. $P(Y) < P(X) < P(Z)$ D. $P(X) < P(Z) < P(Y)$

POWTÓRZENIE

1. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Rozważmy zdarzenia:

A — Liczba oczek jest podzielna przez 3.

B — Liczba oczek jest liczbą pierwszą.

C — Liczba oczek jest mniejsza od 5.

Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

$A', B \cap C, A \cup C, A \cap C', B' \cup C, A' \cap B' \cap C'.$

2. Wiadomo, że zdarzenie $A \cup B$ jest pewne, zdarzenia A i B się wykluczają oraz $P(A) = 0,62$. Oblicz $P(B)$.

3. Wiadomo, że $P(A) = 0,5$, $P(B') = 0,3$ i $P(A \cup B) = 0,9$. Oblicz:

a) $P(A \cap B)$ d) $P(A' \cup B')$

b) $P(A \cup B')$ e) $P(A|B)$

c) $P(B' \cap A)$ f) $P(B|A')$

4. Załóżmy, że zdarzenia A i B oraz A i C się wykluczają, zdarzenie $A \cup B \cup C$ jest pewne oraz $P(A) = P(B) = P(C) = p$, gdzie p jest pewną daną liczbą spełniającą warunek $0 < p < 1$. Oblicz $P(B \cap C)$.

5. W pudełku są koraliki szklane i drewniane w dwóch kolorach — czerwonym i białym. Koralików czerwonych jest dwa razy więcej niż białych. Wśród czerwonych koralików 60% stanowią koraliki szklane. Wśród białych koralików 70% stanowią drewniane.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że koralik losowo wybrany z pudełka jest drewniany.

b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany koralik jest szklany lub czerwony.

c) Z pudełka wyciągnięto drewniany koralik. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest on czerwony.

6. W tabelce podano, ile zapalek jest w każdym z trzech pudełek.

Pudełko	I	II	III
zapalki z lebkami	7	14	13
zapalki bez lebków	3	6	2

Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno oczko, to losujemy zapalkę z pudełka I, jeśli wypadną dwa lub trzy oczka, to losujemy zapalkę z pudełka II, w pozostałych przypadkach — z pudełka III. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana zapalka pochodzi z pudełka III, jeśli wiadomo, że ma lebek.

7. Z pudełka, w którym jest dziewięć kul z cyframi 1, 2, ..., 9, losujemy kolejno trzy razy po jednej kuli bez zwracania i z zapisanych na nich cyfr układamy liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymana liczba jest większa od 800, jeśli wiadomo, że wśród wylosowanych cyfr jest 5.

8. W biurze obsługi klienta pewnej firmy są trzy linie telefoniczne. Prawdopodobieństwo, że linia jest zajęta, jest takie samo dla każdej z linii i wynosi 0,8. Zakładając, że są to zdarzenia niezależne, oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) wszystkie trzy linie są wolne,

b) tylko jedna linia jest wolna,

c) co najmniej jedna z linii jest wolna,

d) tylko jedna z linii jest zajęta.

9. Adam i Kuba często grają w tenisa. Prawdopodobieństwo, że Kuba wygrywa taki mecz, wynosi 0,6. Ile meczów powinni rozegrać, aby prawdopodobieństwo tego, że Adam wygra co najmniej raz, było większe niż 90%?

Granice funkcji

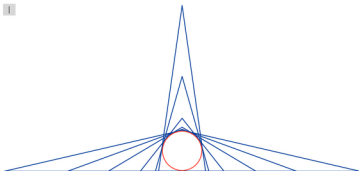
Jednym z najważniejszych dzieł w historii nauki jest wydana w 1687 roku książka Izaaka Newtona „Matematyczne zasady filozofii przyrody”. Za pomocą pewnych nowych metod matematycznych Newton opisał w niej prawa fizyki i astronomii. Te nowe metody – zwane dzisiaj rachunkiem różniczkowym – opierają się głównie na koncepcji granicy funkcji. Rachunek różniczkowy używany jest współcześnie niemal we wszystkich dziedzinach nauki, np. w oceanografii i meteorologii.



- Granice funkcji – intuicje ■ Granice funkcji – definicje
- Funkcje ciągłe ■ Twierdzenie Darboux ■ Obliczanie granic
- Obliczanie granic (cd.) ■ Powtórzenie

GRANICE FUNKCJI – INTUICJE

1



Rozważmy następującą sytuację. Na okręgu o promieniu 1 opisujemy trójkąty równoramienne. Łatwo zauważyć, że gdy zwiększa się długość podstawy trójkąta, to zmniejsza się jego wysokość, a także zmienia się długość jego ramion.



Oznaczmy przez x długość podstawy takiego trójkąta. Niech $h(x)$ oznacza wysokość opuszczoną na podstawę i niech $l(x)$ oznacza długość ramienia. Wyobraźmy sobie, że zwiększamy długości podstaw trójkątów w sposób nieograniczony. Wówczas wartość $h(x)$ jest coraz bliższa średnicy okręgu, a wartość $l(x)$ rośnie w sposób nieograniczony.

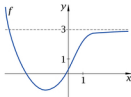
Możemy powiedzieć, że gdy x dąży do plus nieskończoności, wartości $h(x)$ dążą do 2, a wartości $l(x)$ dążą do plus nieskończoności. Mówimy wtedy, że liczba 2 jest granicą funkcji $h(x)$, gdy x dąży do plus nieskończoności, oraz że plus nieskończoność jest granicą funkcji $l(x)$, gdy x dąży do plus nieskończoności.

ĆWICZENIE A Przyjmij takie oznaczenia, jak opisano powyżej. Podstawa trójkąta równoramiennego opisanego na okręgu o promieniu 1 jest zawsze większa od 2. Jak myślisz, jaka jest granica funkcji $h(x)$, a jaka funkcji $l(x)$, gdy x dąży do 2?

Spróbujemy teraz intuicyjnie przybliżyć pojęcie granicy funkcji, zanim pojawią się ściśle definicje. Będziemy analizować wykresy różnych funkcji. Przyjmujemy, że kształt każdego z tych wykresów poza narysowaną częścią nie ulega istotnym zmianom.

Przyjrzyj się wykresowi na rysunku obok. Gdy argumenty funkcji f dążą do plus nieskończoności, wartości tej funkcji dążą do liczby 3. Mówimy wówczas, że granicą funkcji f w plus nieskończoności jest 3, co zapisujemy tak:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$



Zapis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ czytamy: *granica funkcji f przy x dążącym do plus nieskończoności* lub krócej: *granica funkcji f w plus nieskończoności*.



Na kolejnym rysunku przedstawiony jest wykres pewnej funkcji g . Granicą funkcji g w plus nieskończoności jest minus nieskończoność.

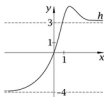
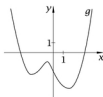
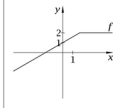
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

Na podstawie wykresów funkcji f i g możemy przypuszczać, że gdy argumenty dążą do $-\infty$, wartości funkcji f dążą do $+\infty$, a wartości funkcji g dążą do 0. Zapisujemy to tak:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

Zapis $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ czytamy: *granica funkcji f przy x dążącym do minus nieskończoności* lub krócej: *granica funkcji f w minus nieskończoności*.

ĆWICZENIE B Na rysunkach przedstawiono wykresy trzech funkcji. Na podstawie tych wykresów określ granice w $+\infty$ oraz w $-\infty$ funkcji f , g , h .



Zauważ, że jeśli funkcja f określona na zbiorze $\mathbb{R}$ jest stała, czyli $f(x) = c$, gdzie c jest pewną liczbą, to jej granice w $+\infty$ i w $-\infty$ są równe c . Zatem:

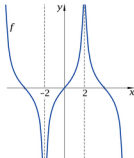
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} c = \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$$

Przyjrzyj się kolejnemu wykresowi. Gdy argumenty zbliżają się do liczby 2, wartości funkcji f dążą do plus nieskończoności. Mówimy, że granicą funkcji f w punkcie 2 jest plus nieskończoność.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

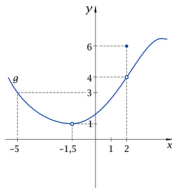
Natomiast gdy argumenty dążą do liczby -2 , wartości funkcji f dążą do minus nieskończoności.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$$



Zapis $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ czytamy: *granica funkcji f przy x dążącym do x_0*
lub krócej: *granica funkcji f w punkcie x_0 .*

Z wykresu funkcji g przedstawionego na rysunku poniżej możemy odczytać granice tej funkcji w kilku punktach.



Gdy argumenty zbliżają się do liczby 2, wartości tej funkcji zbliżają się do liczby 4. Granicą funkcji g w punkcie 2 jest 4.

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$$

Gdy argumenty dążą do -5 , wartości funkcji g dążą do liczby 3.

$$\lim_{x \rightarrow -5} g(x) = 3$$

Gdy argumenty dążą do $-1,5$, wartości funkcji dążą do 1.

$$\lim_{x \rightarrow -1,5} g(x) = 1$$

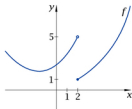
Zauważ, że gdy funkcja jest określona w punkcie x_0 , to jej wartość w punkcie x_0 może, ale nie musi być równa granicy w tym punkcie, np. $\lim_{x \rightarrow -5} g(x) = 3 = g(-5)$, ale $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 \neq g(2)$.

Zwróć też uwagę, że funkcja w pewnym punkcie x_0 może nie być określona, a granica funkcji w tym punkcie może istnieć, np. $\lim_{x \rightarrow -1,5} g(x) = 1$, a funkcja g w punkcie $-1,5$ nie jest określona.

Jeśli granica funkcji jest liczbą, to nazywamy ją **granicą właściwą**. Gdy granica funkcji jest równa $+\infty$ lub $-\infty$, granicę taką nazywamy **niewłaściwą**.

Może się zdarzyć, że funkcja jest określona w punkcie x_0 , ale granica w tym punkcie nie istnieje. Tak jest w wypadku funkcji f , której wykres przedstawiono na rysunku poniżej.

Zauważ, że jeśli argumenty zbliżają się do 2, ale są na przemian raz większe, a raz mniejsze od 2, to nie można wskazać jednej liczby, do której dążyłyby wartości funkcji f . W takiej sytuacji mówimy, że funkcja f nie ma granicy w punkcie 2.



Zauważ też, że jeśli argumenty zbliżają się do liczby 2 z lewej strony (czyli dążą do 2 i są mniejsze od 2), to wartości funkcji f dążą do liczby 5. Mówimy wówczas, że granicą lewostronną funkcji f w punkcie 2 jest liczba 5. Zapisujemy to tak:

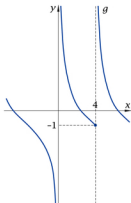
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$$

Zapis $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ czytamy: *granica funkcji f przy x dążącym do x_0 z lewej strony* lub krócej: *granica lewostronna funkcji f w punkcie x_0 .*

Gdy argumenty zbliżają się do 2 z prawej strony, wartości funkcji f zbliżają się do liczby 1. Mówimy, że granicą prawostronną funkcji f w punkcie 2 jest liczba 1. Zapisujemy to tak:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

Zapis $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ czytamy: *granica funkcji f przy x dążącym do x_0 z prawej strony* lub krócej: *granica prawostronna funkcji f w punkcie x_0 .*



Na kolejnym rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji g . Możemy zauważyć, że w punkcie 4 funkcja g nie ma granicy, ale ma granice jednostronne — lewostronną oraz prawostronną:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) = +\infty$$

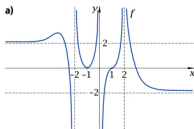
Funkcja ta nie ma także granicy w punkcie 0, ale ma w tym punkcie granice jednostronne:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

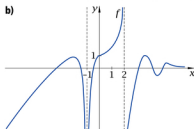
ZESTAW ZADAŃ

1. Korzystając z podanego wykresu funkcji, określ granice zapisane pod wykresem.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

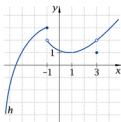
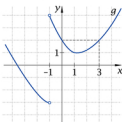
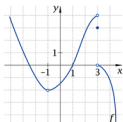
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$



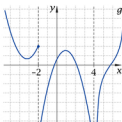
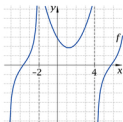
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

2. a) Na podstawie wykresów funkcji f , g i h określ granicę lewostronną i prawostronną w punkcie -1 oraz w punkcie 3 każdej z tych funkcji. Czy któraś z tych funkcji ma granicę w punkcie -1 ? Czy któraś ma granicę w punkcie 3 ?



b) Na podstawie wykresów funkcji f , g i h określ granice jednostronne w punkcie -2 oraz w punkcie 4 każdej z tych funkcji. Czy któraś z tych funkcji ma granicę w punkcie -2 ? Czy któraś ma granicę w punkcie 4 ?



3. Określ granice w $+\infty$ i w $-\infty$ funkcji $f(x) = ax + b$, funkcji $g(x) = ax^2$ oraz funkcji $h(x) = \frac{a}{x}$, gdy:

a) $a > 0$

b) $a < 0$

4. Naszkicuj wykres takiej funkcji f , która spełnia podane warunki.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

5. Naszkicuj wykres funkcji f spełniającej podane warunki.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, i $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, i $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, i $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, i $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 4$, i $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, i $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$, i $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$, i $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

6. Naszkicuj wykres odpowiedniej funkcji i podaj wartości granic.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10^x$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} 10^x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{1}{2} x$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log \frac{1}{2} x$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$ $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$ $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x+1}\right)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x+1}\right)$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(2 - \frac{1}{x+1}\right)$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(2 - \frac{1}{x+1}\right)$

7. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj wartości granic tej funkcji w $+\infty$ i w $-\infty$.

a) $f(x) = \frac{3x+1}{x}$

b) $f(x) = \frac{1-4x}{x}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 2, & \text{gdy } x > 0 \\ \frac{1}{x} - 3, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$

8. a) Która z podanych funkcji ma granicę w punkcie 2?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gdy } x < 2 \\ x+2, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{gdy } x \leq 2 \\ x-4, & \text{gdy } x > 2 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -x^2+1, & \text{gdy } x < 2 \\ x-5, & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$$

b) Która z podanych funkcji ma granicę w punkcie 1?

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gdy } x \geq 1 \\ -x^2, & \text{gdy } x < 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, & \text{gdy } x < 1 \\ 2^x - 3, & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \log x, & \text{gdy } x \geq 1 \\ \frac{1}{x} - 1, & \text{gdy } x < 1 \end{cases}$$

9. Rozważmy ostrosłupy, których podstawą jest kwadrat, którego bok ma długość 4, i których wszystkie krawędzie boczne mają jednakowe długości. Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$k(x)$ — długość krawędzi bocznej

$p(x)$ — pole jednej ściany bocznej

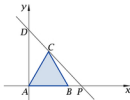
$V(x)$ — objętość ostrosłupa

x — wysokość ostrosłupa



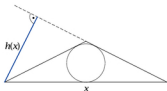
Ustal granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} p(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2} p(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) \quad \lim_{x \rightarrow 3} V(x)$$



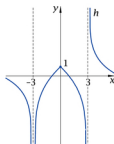
10. W układzie współrzędnych umieszczono trójkąt równoboczny ABC , którego bok ma długość 2 (zob. rysunek). Gdy na osi x wybierzemy dowolny punkt $P = (x, 0)$, leżący na prawo od punktu B , i poprowadzimy prostą PC , to przetnie ona oś y w pewnym punkcie D . Oznaczmy przez $d(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2^+} d(x)$.

11. Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąty równoramienne. Oznaczmy przez x długość podstawy, a przez $h(x)$ — wysokość tego trójkąta poprowadzoną do prostej zawierającej jego ramię. Ustal granice $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$.



MINISPRAWDZIAN

51. Na podstawie podanych wykresów funkcji f , g oraz h oceń, czy zdania są prawdziwe.



I	Granica funkcji f w punkcie 3 jest równa 2.	TAK/NIE
II	Granica funkcji g w punkcie 3 jest równa $+\infty$.	TAK/NIE
III	Granica funkcji h w punkcie -3 jest równa $-\infty$.	TAK/NIE
IV	Granica lewostronna funkcji g w punkcie 1 jest równa $+\infty$.	TAK/NIE

52. Jeden z rysunków przedstawia wykres funkcji f , która spełnia warunki: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$. Wskaż ten wykres.



53. Wskaż funkcję, która ma granicę w punkcie 3.

A. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{gdy } x \leq 3 \\ -\frac{x}{2} + 3, & \text{gdy } x > 3 \end{cases}$

C. $h(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{gdy } x \leq 3 \\ 4, & \text{gdy } x > 3 \end{cases}$

B. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{gdy } x < 3 \\ x - 2, & \text{gdy } x \geq 3 \end{cases}$

D. $i(x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x < 3 \\ 0, & \text{gdy } x = 3 \\ 1, & \text{gdy } x > 3 \end{cases}$

GRANICE FUNKCJI – DEFINICJE

- I W poprzednim rozdziale intuicyjnie ustalaliśmy granice funkcji na podstawie ich wykresów. Uściślimy teraz pojęcie granicy, podając formalne definicje.

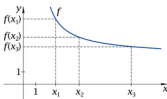
GRANICA FUNKCJI W NIESKOŃCZONOŚCI

Rozważmy funkcję:

$$f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$$

w przedziale $(1; +\infty)$.

Zastanówmy się, czy funkcja f ma w $+\infty$ granicę.



Niech (x_n) będzie następującym ciągiem argumentów rozbieżnym do $+\infty$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 4 & 9 & 16 & 25 & \dots & 101^2 & \dots & 1001^2 & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{100} & \dots & x_{1000} & \dots \end{array}$$

Wartości funkcji f odpowiadające kolejnym wyrazom ciągu (x_n) tworzą ciąg liczb:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 4 & 3 & 2,6 & 2,5 & \dots & 2,02 & \dots & 2,002 & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) & \dots & f(x_{100}) & \dots & f(x_{1000}) & \dots \end{array}$$

Im argument x_n jest większy, tym wyraz $f(x_n)$ jest bliższy liczbie 2. Ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do liczby 2, gdyż dowolnie blisko liczby 2 znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu $(f(x_n))$.

Okazuje się, że gdybyśmy wybrali jakikolwiek ciąg argumentów rozbieżny do $+\infty$, to odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f zawsze byłby zbieżny do 2. W takiej sytuacji mówimy, że granicą funkcji f w plus nieskończoności jest liczba 2, czyli:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x - \sqrt{x}} = 2$$

W podobny sposób za pomocą ciągów definiujemy granicę właściwą dowolnej funkcji w plus nieskończoności oraz w minus nieskończoności.

Funkcja f ma w plus nieskończoności granicę właściwą g , tzn.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g,$$

gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) rozbieżnego do $+\infty$ odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Funkcja f ma w minus nieskończoności granicę właściwą g , tzn.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g,$$

gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) rozbieżnego do $-\infty$ odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Funkcja f ma w plus nieskończoności granicę $+\infty$ ($-\infty$), tzn.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty),$$

gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) rozbieżnego do $+\infty$ odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $+\infty$ ($-\infty$).

Funkcja f ma w minus nieskończoności granicę $+\infty$ ($-\infty$), tzn.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty),$$

gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) rozbieżnego do $-\infty$ odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $+\infty$ ($-\infty$).

PRZYKŁAD 1 Korzystając z definicji granicy funkcji, oblicz granicę w $+\infty$ funkcji

$$f(x) = \frac{5x^2 + 4x}{8 - 2x^2}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

Niech (x_n) będzie ciągiem argumentów, takim że $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Wówczas:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5x_n^2 + 4x_n}{8 - 2x_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^2 \left(5 + \frac{4}{x_n}\right)}{x_n^2 \left(\frac{8}{x_n^2} - 2\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{4}{x_n}}{\frac{8}{x_n^2} - 2} =$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{x_n}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{x_n^2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} 2} = \frac{5 + 0}{0 - 2} = -\frac{5}{2}$$

Korzystamy z własności granic ciągów: Jeśli $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{x_n} = 0$, a także $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{x_n^2} = 0$.

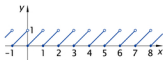
Pokazaliśmy, że dla dowolnego ciągu (x_n) rozbieżnego do $+\infty$ ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do $-\frac{5}{2}$. Wynika stąd, że:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{5}{2}$$

ZADANIE Korzystając z definicji granicy funkcji, oblicz granicę w $-\infty$ funkcji

$$f(x) = \frac{2 - 3x^2}{4x^2 + x}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}, 0\right\}.$$

PRZYKŁAD 2 Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = x - [x]$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. (Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x , tzn. największą z liczb całkowitych nie większą niż x). Wykaż, że nie istnieje granica w $+\infty$ tej funkcji.



Wskażemy dwa ciągi argumentów (a_n) i (b_n) rozbieżne do $+\infty$, dla których ciągi $(f(a_n))$ i $(f(b_n))$ mają różne granice.

Niech $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - [n]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

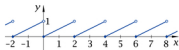
..... Część całkowita liczby naturalnej n jest równa n , czyli $[n] = n$.

Niech $b_n = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy: $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \frac{1}{2}) = +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \frac{1}{2} - [n + \frac{1}{2}]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \frac{1}{2} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \dots \quad [n + \frac{1}{2}] = n$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$, więc funkcja f nie ma granicy w $+\infty$.

ZADANIE Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x - [\frac{1}{2}x]$. Wykaż, że nie istnieje granica w $-\infty$ tej funkcji.



zadanie 1 ▶

II GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE

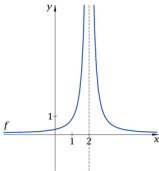
Rozważmy teraz następującą funkcję:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Na podstawie wykresu można wywnioskować, że:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

Można to opisać za pomocą ciągów w następujący sposób. Jeśli wybraliśmybyśmy jakiegokolwiek ciąg argumentów zbieżny do liczby 2, to odpowiadający mu ciąg wartości funkcji f byłby zawsze rozbieżny do $+\infty$.



Podobnie za pomocą ciągów możemy określić granicę dowolnej funkcji w punkcie x_0 . Punkt ten może, ale nie musi należeć do dziedziny funkcji.

Granicą funkcji f w punkcie x_0 jest liczba g , tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g,$$

gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) zbieżnego do x_0 , o wyrazach różnych od x_0 , odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Granicą funkcji f w punkcie x_0 jest $+\infty$ ($-\infty$), tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty),$$

gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) zbieżnego do x_0 , o wyrazach różnych od x_0 , odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $+\infty$ ($-\infty$).

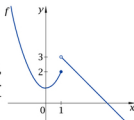
zadania 2-4 ►

III GRANICE JEDNOSTRONNE

Rozważmy teraz funkcję:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{gdy } x \leq 1 \\ -x + 4, & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

Na podstawie wykresu można wywnioskować, że w punkcie 1 granica funkcji f nie istnieje. Funkcja ta ma jednak w punkcie 1 granicę lewostronną oraz prawostronną.



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 4) = 3$$

Za pomocą ciągów moglibyśmy to opisać w następujący sposób: jeśli wybralibyśmy dowolny ciąg argumentów (x_n) zbieżny do 1, o wyrazach mniejszych od 1, to ciąg $(f(x_n))$ byłby zawsze zbieżny do 2. Z kolei dla dowolnego ciągu (x_n) zbieżnego do 1, o wyrazach większych od 1, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do 3.

Podobnie definiujemy granice jednostronne dowolnej funkcji w punkcie x_0 .

Granica lewostronną funkcji f w punkcie x_0 jest liczba g , tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g,$$

gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) zbieżnego do x_0 , o wyrazach mniejszych od x_0 , odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Granica prawostronną funkcji f w punkcie x_0 jest liczba g , tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g,$$

gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) zbieżnego do x_0 , o wyrazach większych od x_0 , odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Granica lewostronną funkcji f w punkcie x_0 jest $+\infty$ ($-\infty$), tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty),$$

gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) zbieżnego do x_0 , o wyrazach mniejszych od x_0 , odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $+\infty$ ($-\infty$).

Granica prawostronną funkcji f w punkcie x_0 jest $+\infty$ ($-\infty$), tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty),$$

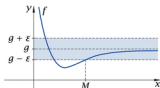
gdy dla każdego ciągu argumentów (x_n) zbieżnego do x_0 , o wyrazach większych od x_0 , odpowiadający mu ciąg wartości $(f(x_n))$ jest rozbieżny do $+\infty$ ($-\infty$).

Ciekawostka

Podane w tym rozdziale definicje granic funkcji sformułował niemiecki matematyk Eduard Heine (1821-1881) (czyt. hajne). Przedtem inne definicje podał francuski matematyk Augustin Cauchy (1789-1857) (czyt. ogistę koszi). Można udowodnić, że definicje Heinego i Cauchy'ego są równoważne.

Definicja Cauchy'ego granicy właściwej funkcji w $+\infty$ jest następująca:

Mówimy, że liczba g jest granicą funkcji f w $+\infty$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba M , że jeśli $x > M$, to wartość $f(x)$ różni się od g o mniej niż ε , czyli $|f(x) - g| < \varepsilon$.



Jeśli z przedziału $(a; b)$ zawierającego punkt x_0 usuniemy ten punkt, to otrzymamy zbiór liczb $(a; x_0) \cup (x_0; b)$. Tak otrzymany zbiór nazywamy **sąsiedztwem punktu x_0** .

Przyjmijmy, że funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 . Związek między granicami jednostronnymi a granicą funkcji opisują następujące twierdzenia:

Jeśli istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 , to istnieją też granice lewostronna i prawostronna tej funkcji w punkcie x_0 i te trzy granice są równe.

Jeśli istnieją granice lewostronna i prawostronna funkcji f w punkcie x_0 i granice te są sobie równe, to istnieje też granica funkcji f w tym punkcie i jest ona równa granicom jednostronnym.

Jeśli literą g oznaczymy granicę funkcji, właściwą bądź niewłaściwą, to obie powyższe implikacje można zapisać w skrócie w następujący sposób:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$$

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Korzystając z definicji granicy funkcji, oblicz podaną granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-5}{7-3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5)$

◀ II 2. Korzystając z definicji granicy funkcji, oblicz podaną granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 10} (2x - 3)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{3}x^2 - 2 \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x+5}$

3. Korzystając z definicji granicy funkcji, oblicz granice lewostronną i prawostronną funkcji $f(x) = \frac{3}{x+2}$ w punkcie -2 . Czy funkcja f ma granicę w punkcie -2 ?

4. Uzasadnij, że funkcja, która liczbom wymiernym przyporządkowuje 1 , a liczbom niewymiernym -1 , w żadnym punkcie nie ma ani granicy lewostronnej, ani prawostronnej.

◀ III 5. Korzystając z definicji granicy funkcji, wykaż, że nie istnieje granica funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie 0 ,

c) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{gdy } x < 3 \\ x^2-5, & \text{gdy } x \geq 3 \end{cases}$ w punkcie 3 ,

b) $f(x) = \frac{5}{x-1}$ w punkcie 1 ,

d) $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{gdy } x < -1 \\ -3, & \text{gdy } x \geq -1 \end{cases}$ w punkcie -1 .

6. Korzystając z definicji granicy funkcji, wykaż, że nie istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 .

a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x < 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \quad x_0 = 0. \\ 1, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{3x-6}{|x-2|}$, $x_0 = 2$

• 7. Podaj dwa przykłady ciągów (a_n) i (b_n) argumentów funkcji f spełniających poniższe warunki.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$$

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$

MINISPRAWDZIAN

51. Granica funkcji $f(x) = \frac{1}{|x|}$ w punkcie 0:

- A. jest równa 0 B. jest równa 1 C. jest równa $+\infty$ D. nie istnieje

52. Granica funkcji g w punkcie 1:

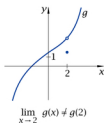
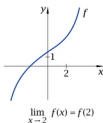
- A. jest równa 1 C. jest równa 2
B. jest równa -1 D. nie istnieje

$$g(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{gdy } x < 1 \\ 1, & \text{gdy } x = 1 \\ x + 1, & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

FUNKCJE CIĄGŁE

- 1 Granica funkcji w danym punkcie może być równa wartości funkcji w tym punkcie. Jednak nie zawsze musi tak być.

Przyjrzyj się wykresom funkcji, które przedstawiono poniżej.



Granica funkcji f w punkcie 2 jest równa wartości funkcji w tym punkcie. Granica funkcji g w punkcie 2 jest różna od wartości funkcji w tym punkcie. Funkcja h jest określona dla 2, ale nie ma granicy w tym punkcie.

Mówimy, że pierwsza z powyższych funkcji jest funkcją ciągłą w punkcie 2, a dwie pozostałe funkcje nie są ciągłe w tym punkcie (punkt 2 jest punktem nieciągłości funkcji g i h).

Niech x_0 należy do dziedziny funkcji f . Funkcję f nazywamy **funkcją ciągłą w punkcie x_0** , gdy ma ona w punkcie x_0 granicę i granica ta jest równa wartości funkcji w tym punkcie, czyli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Uwaga. O granicy funkcji w punkcie x_0 możemy mówić nawet wtedy, gdy funkcja w punkcie x_0 nie jest określona. Natomiast o tym, czy dana funkcja jest ciągła lub nieciągła w punkcie możemy mówić tylko wtedy, gdy funkcja jest określona w tym punkcie.

Gdy funkcja jest ciągła w każdym punkcie pewnego przedziału, to mówimy, że jest funkcją ciągłą w tym przedziale. Wykres dla argumentów z tego przedziału jest linią ciągłą — możemy powiedzieć, że w tym przedziale rysujemy go bez odrywania ołówka od kartki.

ĆWICZENIE Narysuj wykresy podanych funkcji f , g i h . Która z tych funkcji jest ciągła przedziale $(-2; 2)$?

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{gdy } x < -1 \\ 2, & \text{gdy } x = -1 \\ x + 3, & \text{gdy } x > -1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{gdy } x < -1 \\ -1, & \text{gdy } x = -1 \\ -x - 3, & \text{gdy } x > -1 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{gdy } x < -1 \\ 1, & \text{gdy } x = -1 \\ 2x, & \text{gdy } x > -1 \end{cases}$$

PRZYKŁAD 1 Ustal, dla jakich wartości p i q funkcja f jest ciągła w punkcie 1.

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 2p, & \text{gdy } x < 1 \\ q, & \text{gdy } x = 1 \\ x^2 + p, & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (5x + 2p) = 5 + 2p$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + p) = 1 + p$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow 5 + 2p = 1 + p$$

$$p = -4$$

Ustalamy, dla jakiej wartości p istnieje granica funkcji f w punkcie 1.

Gdy $p = -4$, otrzymujemy:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 + 2p = -3$$

$f(1) = q$, więc

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1), \text{ gdy } q = -3$$

Obliczamy (dla $p = -4$) granicę funkcji f w punkcie 1. Możemy skorzystać z równości $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ lub $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Sprawdzamy, dla jakiej wartości q zachodzi równość $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Odp. Funkcja f jest ciągła w punkcie 1, gdy $p = -4$ i $q = -3$.

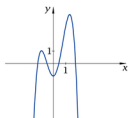
ZADANIE Ustal, dla jakich wartości a i b funkcja g jest ciągła w punkcie 2.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2a, & \text{gdy } x < 2 \\ b, & \text{gdy } x = 2 \\ -2x + 3a, & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$$

III Omawialiśmy dotąd różne typy funkcji — funkcje wielomianowe, wymierne, trygonometryczne, wykładnicze i logarytmiczne. Wszystkie te funkcje są ciągłe w każdym punkcie, w którym są określone.

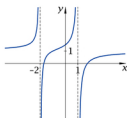
Oto przykłady:

$$f(x) = -2x^4 + x^3 + 5x^2 - 1$$



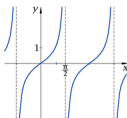
Funkcja wielomianowa

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + x - 2}$$



Funkcja wymierna

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$



Funkcja trygonometryczna

$$f(x) = 1,2^x$$



Funkcja wykładnicza

$$f(x) = \log_{0,6} x$$



Funkcja logarytmiczna

Gdy funkcje f i g są ciągłe w pewnym punkcie, to ciągłe w tym punkcie są także następujące funkcje:

$$y = f(x) + g(x) \quad y = f(x) - g(x) \quad y = f(x) \cdot g(x) \quad y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{gdzie } g(x) \neq 0)$$

Zatem na przykład funkcje:

$$y = x + 5^x \quad y = \frac{1}{x} - \operatorname{tg} x \quad y = 2^x \cdot \sin x \quad y = \frac{5x^4}{\log x}$$

są ciągłe w każdym punkcie, w którym są określone.

Jeśli wiadomo, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , to aby obliczyć jej granicę w punkcie x_0 , wystarczy obliczyć wartość funkcji f w tym punkcie.

PRZYKŁAD 2 Oblicz granicę funkcji f w punkcie x_0 .

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) = 2 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 + 1 = \underline{31}$$

b) $f(x) = \frac{3}{x-2}, \quad x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = \frac{3}{-2-2} = \underline{-\frac{3}{4}}$$

c) $f(x) = x^2 \sin x, \quad x_0 = \pi$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi) = \pi^2 \cdot \sin \pi = \pi^2 \cdot 0 = \underline{0}$$

d) $f(x) = \frac{3^x}{x^3 - 1}, \quad x_0 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = \frac{3^{-1}}{(-1)^3 - 1} = \frac{\frac{1}{3}}{-2} = \underline{-\frac{1}{6}}$$

Funkcja f jest ciągła i x_0 należy do dziedziny tej funkcji, więc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

ZADANIE Oblicz granicę funkcji f w punkcie x_0 .

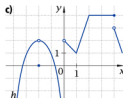
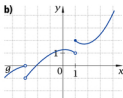
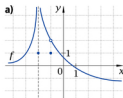
a) $f(x) = \cos x + 2^x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = \frac{\log x}{3x-7}, \quad x_0 = 10$

zadania 6–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji. Wskaż punkty dziedziny, w których funkcja ta nie jest ciągła.



Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , gdy spełnione są trzy warunki:

1. Punkt x_0 należy do dziedziny funkcji f .
2. Istnieje granica właściwa $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Przeczytaj informacje w ramce. Naszkicuj wykres funkcji, która:

- a) spełnia warunek 1, ale nie spełnia warunku 2,
- b) spełnia warunki 1 i 2, ale nie spełnia warunku 3,
- c) spełnia warunek 2, ale nie spełnia warunku 1.

3. Narysuj wykres podanej funkcji. Czy funkcja ta jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny?

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{gdy } x < 1 \\ (x-2)^3, & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{gdy } x \leq 0 \\ \log x, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{gdy } x < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & \text{gdy } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$$

4. Ustal, dla jakiej wartości parametru p funkcja f jest ciągła w punkcie 3.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+p, & \text{gdy } x \in (-\infty; 3) \\ px, & \text{gdy } x \in (3; +\infty) \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2+p, & \text{gdy } x \in (-\infty; 3) \\ px+2p, & \text{gdy } x \in (3; +\infty) \end{cases}$$

5. Ustal, dla jakich wartości parametrów p i q funkcja g jest ciągła w punkcie -2 .

$$\text{a) } g(x) = \begin{cases} -3x-9, & \text{gdy } x < -2 \\ p, & \text{gdy } x = -2 \\ \frac{1}{2}x+q, & \text{gdy } x > -2 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} 2x+p, & \text{gdy } x < -2 \\ px+q, & \text{gdy } x = -2 \\ \frac{q}{x+3}, & \text{gdy } x > -2 \end{cases}$$

6. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - x^2 + 1) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x+1} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} (2^x \cdot \cos x) \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^3 - 5x^2}{x+3} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{\sin x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2+5} \end{array}$$

7. Która z podanych liczb jest większa: a czy b ?

$$\text{a) } a = \lim_{x \rightarrow -19^+} (-2x-3), \quad b = \lim_{x \rightarrow 142^-} (-2x-3)$$

$$\text{b) } a = \lim_{x \rightarrow -4,1} \frac{1}{x+4}, \quad b = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x+4}$$

8. Oblicz wartość x_0 .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3}{x} = 1 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x}{x-2} = 3 & \text{e) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x+3}{3x-5} = 0 \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} (4x-5) = -1 & \text{d) } \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2-5) = 4 & \text{f) } \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2-x) = 6 \end{array}$$

9. Sprawdź, czy funkcje f i g podane poniżej są ciągłe w punkcie 0. Czy funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$ jest ciągła w punkcie 0?

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{gdy } x \in (-\infty; 0) \\ x+1, & \text{gdy } x \in (0; +\infty) \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{gdy } x \in (-\infty; 0) \\ x-1, & \text{gdy } x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

10. a) Narysuj wykres funkcji $f(x) = [x]$. W których punktach funkcja ta nie jest ciągła?
 b) W których punktach funkcja $f(x) = [x^2]$ nie jest ciągła?

Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x , tzn. największą z liczb całkowitych nie większą niż x .

11. Wykaż, że funkcja określona poniższym wzorem jest ciągła tylko w jednym punkcie swojej dziedziny.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

MINISPRAWDZIAN

51. Granica funkcji $f(x) = (x-2)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ w punkcie -2 jest równa:

- A. -2 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. 0

52. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 - 6x) = -9$, to:

- A. $x_0 = -3$ B. $x_0 = 6$ C. $x_0 = 3$ D. $x_0 = -9$

53. Funkcja $f(x) = \begin{cases} px + 1, & \text{gdy } x < 5 \\ x^2 - p, & \text{gdy } x \geq 5 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie 5 , gdy:

- A. $p = 4$ B. $p = -1$ C. $p = 6$ D. $p = 1$

TWIERDZENIE DARBOUX

- 1 **ĆWICZENIE A** Narysuj wykres takiej funkcji f , która jest ciągła w przedziale $(1; 5)$ i spełnia warunki $f(1) = 7$ i $f(5) = 2$. Wskaż argument z przedziału $(1; 5)$, dla którego wartość funkcji f jest równa 4 .

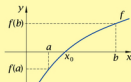
Jedną z ważniejszych własności funkcji ciągłych opisuje twierdzenie:

Twierdzenie Darboux (czyt. darbu)

Jeśli funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale $\langle a; b \rangle$ i $f(a) \neq f(b)$, to funkcja f przyjmuje w przedziale $\langle a; b \rangle$ wszystkie wartości między $f(a)$ i $f(b)$. Innymi słowy, dowolna liczba leżąca między $f(a)$ i $f(b)$ jest wartością funkcji dla pewnego argumentu z przedziału $\langle a; b \rangle$.

Z twierdzenia Darboux wynika następująca własność:

Jeśli funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale $\langle a; b \rangle$ oraz $f(a)$ i $f(b)$ mają różne znaki, to funkcja f w przedziale $\langle a; b \rangle$ przyjmuje wartość 0, czyli $f(x_0) = 0$, dla pewnego $x_0 \in \langle a; b \rangle$.



Własność ta co prawda pozwala na stwierdzenie, że punkt x_0 istnieje, ale nie pozwala na wskazanie tego punktu. Korzystając z tej własności, możemy jednak znajdować wartość x_0 z dowolną dokładnością.

PRZYKŁAD Znajdź przybliżone rozwiązanie równania $x^3 + x - 60 = 0$ w przedziale $\langle 1; 5 \rangle$ z błędem 0,5.

$$f(x) = x^3 + x - 60, \quad x \in \langle 1; 5 \rangle$$

$$f(1) = 1 + 1 - 60 < 0 \quad \text{ i } \quad f(5) = 5^3 + 5 - 60 > 0$$

Z twierdzenia Darboux wynika, że istnieje liczba x_0 należąca do przedziału $\langle 1; 5 \rangle$, taka że $f(x_0) = 0$. Środek tego przedziału to liczba 3.

Zatem:

$$x_0 \approx 3 \text{ z błędem } 2$$

⋮ Błąd 2 oznacza, że liczba x_0 nie różni się od 3 o więcej niż 2.

$$f(3) = 3^3 + 3 - 60 < 0 \quad \text{ i } \quad f(5) > 0$$

Z twierdzenia Darboux wynika, że istnieje liczba x_0 należąca do przedziału $\langle 3; 5 \rangle$, taka że $f(x_0) = 0$. Środek tego przedziału to liczba 4. Zatem:

$$x_0 \approx 4 \text{ z błędem } 1$$

⋮ Liczba x_0 nie różni się od 4 o więcej niż 1.

$$f(4) = 4^3 + 4 - 60 > 0 \quad \text{ i } \quad f(3) < 0$$

Z twierdzenia Darboux wynika, że istnieje liczba x_0 należąca do przedziału $\langle 3; 4 \rangle$, taka że $f(x_0) = 0$.

$$x_0 \approx 3,5 \text{ z błędem } 0,5$$

⋮ Liczba x_0 nie różni się od 3,5 o więcej niż 0,5.

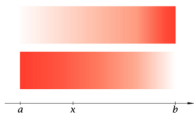
ZADANIE Oblicz przybliżoną wartość rozwiązania powyższego równania z błędem 0,25.

Uwaga. Opisana metoda pozwala znaleźć przybliżenie jednego rozwiązania równania. Nie wiemy jednak, czy równanie to nie ma innych rozwiązań w rozważanym przedziale.

zadania 1-7 ►

- II To, wydawałoby się, niepozorne twierdzenie ma zaskakująco wiele ciekawych i użytecznych zastosowań. Oto przykład:

Na prostokątach przedstawionych obok natężenie koloru czerwonego zmienia się w różnym tempie, ale w sposób ciągły. Na górnym kolor przechodzi od białego do intensywniej czerwieni, a na dolnym — odwrotnie.



Korzystając z twierdzenia Darboux, można wykazać, że gdybyśmy przesuwali wzdłuż pasków liniijkę ustawioną do nich prostopadle, natrafimy na miejsce, w którym na obu paskach natężenie koloru jest identyczne.

Przyjmijmy, że współrzędna x na osi liczbowej wyznacza położenie liniijki. Niech $p_1(x)$ oznacza intensywność koloru czerwonego na górnym pasku odpowiadającą punktowi x . Niech $p_2(x)$ oznacza intensywność koloru na dolnym pasku. Przyjmijmy, że największa intensywność koloru wynosi 1, czyli $p_1(b) = p_2(a) = 1$, a najmniejsza wynosi 0, czyli $p_1(a) = p_2(b) = 0$.

Natężenie koloru zmienia się w sposób ciągły, zatem funkcje p_1 i p_2 oraz $f(x) = p_1(x) - p_2(x)$ są ciągłe w przedziale $\langle a; b \rangle$. Zauważmy, że $f(a) = -1$ i $f(b) = 1$. Zatem musi istnieć liczba x_0 z przedziału $\langle a; b \rangle$, taka że $f(x_0) = 0$. Wówczas $p_1(x_0) = p_2(x_0)$.

zadania 8–10 ►

ZESTAW ZADAŃ

- ◀ I 1. Uzasadnij, że:

- a) funkcja $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x}$ przyjmuje w przedziale $\langle 3; 5 \rangle$ wartość 30.
b) funkcja $f(x) = 3^{x-2} - \log 2^x$ przyjmuje w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$ wartość 5.

2. Uzasadnij, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe w podanym przedziale.

- a) $f(x) = \log_3 x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \langle \frac{1}{3}; 3 \rangle$ c) $f(x) = 2^{-4x^2} - 6x$, $x \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$
b) $f(x) = \frac{x}{\pi} - \cos x$, $x \in \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \rangle$ d) $f(x) = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{x}{2}$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; 0 \rangle$

3. Sprawdź, że równanie ma rozwiązanie w podanym przedziale, i znajdź przybliżoną wartość tego rozwiązania z błędem 0,5.

- a) $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$ w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$ c) $x^4 - 2x - 5 = 0$ w przedziale $\langle 0; 4 \rangle$
b) $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ w przedziale $\langle -5; -1 \rangle$ d) $x^5 - x + 3 = 0$ w przedziale $\langle -3; 1 \rangle$

4. Znajdź przybliżoną wartość:

a) rozwiązania równania $x^3 - 2x^2 + 2 = 0$ z błędem 0,25,

b) rozwiązania równania $x^5 + x - 5 = 0$ z błędem 0,125.

5. Uzasadnij, że wielomian $x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 2x + 2$ ma w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$ co najmniej dwa pierwiastki.

6. Uzasadnij, że gdy $x \in \langle 1; 4 \rangle$, wykresy funkcji $f(x) = x^4 + 7x^2 + 6$ i $g(x) = 5x^3 + 5x$ mają co najmniej dwa punkty wspólne.

7. Uzasadnij, że wielomian $2x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x - 3$ ma w przedziale $\langle 0; 1 \rangle$ pierwiastek niewymierny.

8. Figurę złożoną z trzech różnych rozłącznych kół można podzielić linią prostą na dwie części o równych polach. Wyjaśnij dlaczego.

9. Posłaniec wyruszył w drogę o godzinie 7^{00} , kilka razy się zatrzymał, ale dotarł do celu w południe. Następnego dnia wyruszył w drogę powrotną też o godzinie 7^{00} . Wracał dokładnie tą samą trasą, ale zatrzymywał się w innych miejscach niż dnia poprzedniego, a mimo to droga zajęła mu ponownie 5 godzin. Udowodnij, że w pewnym punkcie trasy posłaniec znalazł się drugiego dnia dokładnie o tej samej godzinie co dnia poprzedniego.



10. Udowodnij, że w każdej chwili na równiku Ziemi istnieją takie dwa punkty leżące na krańcach jego średnicy, w których panują takie same temperatury.

MINISPRAWDZIAN

51. Równanie $2x^3 - 7x^2 - 5 = 0$ ma rozwiązanie w jednym z podanych przedziałów. Wskaż ten przedział.

A. $\langle -4; -2 \rangle$

B. $\langle -2; -0 \rangle$

C. $\langle 0; 2 \rangle$

D. $\langle 2; 4 \rangle$

52. O funkcji f wiadomo, że jest funkcją ciągłą oraz $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$. Z tych informacji wynika, że w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$ funkcja f :

A. nie ma miejsc zerowych

B. ma dokładnie jedno miejsce zerowe

C. ma co najmniej dwa miejsca zerowe

D. ma co najwyżej dwa miejsca zerowe

OBLICZANIE GRANIC

- 1 W tym rozdziale omówimy własności granic funkcji w $+\infty$ oraz w $-\infty$, które pozwalają obliczać te granice bez odwoływania się do definicji granicy.

ĆWICZENIE A Spróbuj wyznaczyć podaną granicę. (Zastanów się, jak się zmieniają wartości funkcji, gdy argumenty dążą do $+\infty$ lub do $-\infty$).

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-0,6}{x^4}$

Obliczając granicę w $+\infty$ lub w $-\infty$ funkcji typu $y = \frac{a}{x^n}$, możemy skorzystać z następującej własności:

*Jeśli a jest dowolną liczbą rzeczywistą
i n jest dowolną liczbą naturalną dodatnią, to:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^n} = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

Przy ustalaniu granic funkcji przydają się też następujące własności granic:

*Jeśli istnieją granice $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
i są to granice właściwe, to:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} af(x) = a \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \text{gdzie } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

Jeśli ponadto $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$, to

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}$$

Analogiczne własności mają granice w $-\infty$, a także granice funkcji w dowolnym punkcie x_0 oraz granice jednostronne. Wszystkie te własności wynikają z odpowiednich własności granic ciągów.

PRZYKŁAD 1 Oblicz.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^7} + \frac{6}{x^3} - 12 \right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^7} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^3} - \lim_{x \rightarrow +\infty} 12 = \\ &= 0 + 0 - 12 = -12 \end{aligned}$$

Ponieważ granice $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^7}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^3}$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} 12$ istnieją, możemy skorzystać z twierdzenia o sumie i różnicy granic.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^4 - 7}{2x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^4}{2x^5} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7}{2x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7}{2x^5} = 0 + 0 = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-5}{x^3} \left(3 - \frac{7}{x^2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{7}{x^2} \right) = 0 \cdot (3 - 0) = 0$$

ZADANIE Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^5} - \frac{15}{x^4} - \frac{6}{x} + 4 \right)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^5 + 4x^6}{6x^6}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{4x^2} \left(1 - \frac{7}{x} \right) \right]$$

Obliczenia prowadzące do ustalenia granicy funkcji można zapisywać w uproszczony sposób. W przykładzie 1a powyżej wyglądałoby to tak:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\overset{0}{\frac{4}{x^7}} + \overset{0}{\frac{6}{x^3}} - \overset{12}{12} \right) = -12$$

Własności granic podane na stronie 135 dotyczyły granic właściwych. Omówimy teraz kilka własności granic niewłaściwych.

ĆWICZENIE B Spróbuj wyznaczyć podaną granicę. (Zastanów się, jak się zmieniają wartości funkcji, gdy argumenty zmierzają do $+\infty$ lub do $-\infty$).

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + x^2)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^2)$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 7)(3 + x^2)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^3)$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3)(x^5 + 2)$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 - x)(x + 5x^5)$$

W ćwiczeniu B należało wyznaczyć granice funkcji typu $y = f(x) + g(x)$ oraz typu $y = f(x) \cdot g(x)$, przy czym granica zarówno funkcji f , jak i funkcji g była niewłaściwa. Oto przykład własności, z której można korzystać przy obliczaniu tego typu granic:

$$\text{Jeśli } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \text{ to } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$$

Tę własność możemy zapisać symbolicznie w następujący sposób:

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

Poniżej zapisano ważne własności dotyczące granic sum, różnic, iloczynów i ilorazów funkcji, z których co najmniej jedna ma granicę niewłaściwą.

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\frac{a}{+\infty} = 0$$

$$\frac{a}{-\infty} = 0$$

$$a + (+\infty) = +\infty$$

$$a + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) \cdot a = +\infty, \text{ gdy } a > 0$$

$$(+\infty) \cdot a = -\infty, \text{ gdy } a < 0$$

$$(-\infty) \cdot a = -\infty, \text{ gdy } a > 0$$

$$(-\infty) \cdot a = +\infty, \text{ gdy } a < 0$$

PRZYKŁAD 2 Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (6x^2 + \log_3 x) = +\infty$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,7^x (10^x - 9) = -\infty$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 \cdot 3^x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{0,5^x} = 0$

$$\frac{4}{+\infty} = 0$$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{5}{\log x} \right) = 2 + 0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty; \frac{5}{+\infty} = 0$$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5x - \frac{4}{x} + 3^x \right) = +\infty$

$$(+\infty) - 0 + (+\infty) = +\infty$$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{4}{x^2} \right) (6x^5 + 9) = -\infty$

$$3 \cdot (-\infty) = -\infty$$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(6 + \frac{3^x}{x^3} - \frac{7}{8x^4 + 4x^2} \right) = 6$

$$\frac{0}{-\infty} = 0; \frac{7}{+\infty} = 0$$

ZADANIE Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + \log_2 x^2)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 \cdot 0,5^x)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7^x + \frac{3}{x^2} + x^5 \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x (0,3^x + 4)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\log_5 x}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^3} \right) (-3x^4 + \sqrt{3}) \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{3^x} - 7}{7^x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{7}{x^3} \right)$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{5}{x^6}}{3 + \log x} - \frac{0,1^x}{x} - 4 \right)$

zadania 1-5

III Przyjrzyj się poniższym trzem przykładom. Zauważ, że w każdym wypadku mamy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Natomiast granica funkcji $y = f(x) - g(x)$ za każdym razem ma inną wartość.

$$\bullet \quad \begin{array}{l} f(x) = x^3 \\ g(x) = 5x^3 \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3) = -\infty$$

$$\bullet \quad \begin{array}{l} f(x) = 6x^3 \\ g(x) = x^3 \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (6x^3 - x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = +\infty$$

$$\bullet \quad \begin{array}{l} f(x) = 2x^3 \\ g(x) = 7 + 2x^3 \end{array} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - (7 + 2x^3)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-7) = -7$$

Jak widać, nie można podać ogólnej reguły pozwalającej obliczać granicę $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$, gdy zarówno granicą funkcji f , jak i funkcji g jest $+\infty$. Mówimy, że symbol „ $\infty - \infty$ ” jest nieoznaczony.

ĆWICZENIE C Sprawdź, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Oblicz $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x))$.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^3$ b) $f(x) = \frac{2}{x^3}$, $g(x) = 5x^2$ c) $f(x) = \frac{-5}{x^4}$, $g(x) = 3x^4$

Obok podajemy symbole nieoznaczone, które mogą występować przy obliczaniu granic funkcji.

Symbole nieoznaczone:

$$\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Pokażemy teraz, jak można obliczać granice niektórych funkcji, gdy mamy do czynienia z symbolami nieoznaczonymi.

PRZYKŁAD 3 Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^6 - 2x^5 - 100) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\overset{+\infty}{x^6} \left(\overset{4}{4} - \overset{2}{2} \frac{1}{x} - \overset{0}{\frac{100}{x^6}} \right) \right) = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2x^3 + \frac{1}{5}x^7 + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\overset{-\infty}{x^7} \left(\overset{-2}{-\frac{2}{x^4}} + \overset{0}{\frac{1}{5}} + \overset{1}{\frac{1}{x^6}} \right) \right) = -\infty$$

ZADANIE Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^7 + 4x^8 + 6x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^{10} - 3x^{11} - \frac{4}{3}x^4 + \sqrt{3})$

PRZYKŁAD 4 Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^4 + 5x^2}{3x^3 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(-1 + \frac{5}{x^2}\right)}{x^3 \left(3 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{+\infty}{x} \left(\overset{-1}{-1} + \overset{0}{\frac{5}{x^2}}\right)}{\overset{+\infty}{3} - \overset{0}{\frac{4}{x^2}} + \overset{0}{\frac{2}{x^3}}} = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^7 + 3x^2 - 5}{10x^9 - 5x^7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 \left(6 + \frac{3}{x^5} - \frac{5}{x^7}\right)}{x^9 \left(10 - \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{0}{6} + \overset{0}{\frac{3}{x^5}} - \overset{0}{\frac{5}{x^7}}}{\overset{+\infty}{x^2} \left(\overset{0}{10} - \overset{0}{\frac{5}{x^2}}\right)} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5 - 3x^4 + 7x^3}{-5x^5 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 \left(8 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x^5 \left(-5 + \frac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overset{8}{8} - \overset{0}{\frac{3}{x}} + \overset{0}{\frac{7}{x^2}}}{\overset{-5}{-5} + \overset{0}{\frac{1}{x^5}}} = -\frac{8}{5}$$

ZADANIE Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 3x^3}{5x^4 - x + 6}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{2x^9 - x^3 + 9}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^4 - 2x^2 - x + 2}{1 - 2x^4}$$

PRZYKŁAD 5 Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (9 \cdot 2^x - 7 \cdot 13^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overset{+\infty}{13^x} \left(9 \cdot \left(\frac{2}{13}\right)^x - 7\right) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 6^x}{5^x - 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6^x \left(\left(\frac{2}{6}\right)^x + 1\right)}{5^x \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^x\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{+\infty}{\left(\frac{6}{5}\right)^x} \left(\overset{0}{\left(\frac{1}{3}\right)^x} + 1\right)}{1 - \overset{0}{\left(\frac{3}{5}\right)^x}} = +\infty$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 4^x - 5^x}{3 \cdot 7^x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x \left(2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1\right)}{7^x \left(3 + \frac{4}{7^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{0}{\left(\frac{5}{7}\right)^x} \left(2 \cdot \overset{0}{\left(\frac{4}{5}\right)^x} - 1\right)}{3 + \overset{0}{\frac{4}{7^x}}} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + 2 \cdot 6^x}{7 \cdot 2^x - 9 \cdot 6^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6^x \left(\frac{5}{6^x} + 2\right)}{6^x \left(7 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^x - 9\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{0}{\left(\frac{5}{6}\right)^x} + 2}{7 \cdot \overset{0}{\left(\frac{2}{6}\right)^x} - 9} = -\frac{2}{9}$$

ZADANIE Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 \cdot 3^x - 2 \cdot 6^x)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 5^x}{4^x - 3^x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 2^x - 3^x}{4 \cdot 6^x - 2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 5^x - 7}{4 \cdot 2^x - 5^x}$$

zadania 6–18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 - \frac{2}{x}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10}{x^5} - 3\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{x^4} - \frac{7}{x^2} + \frac{8}{x}\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{3x^8} + \frac{3}{4x^5} + \frac{2}{3}\right)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(9 - \frac{4}{x^7} + \frac{-3}{x}\right) \left(\frac{12}{x^3} - \frac{11}{x^2} - 10\right)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6}{x^7} + \frac{2}{5x^2} + 1\right) \left(\frac{-3}{x^6} - \frac{9}{x^5} - \frac{1}{x}\right)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 + \frac{3}{x^4} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{13}{x^3} - \frac{10}{3x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{100}{x^{20}} - \frac{4}{3x^{10}}}{\frac{8}{5x^7} - \frac{1}{6x^5} - 3}$

2. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \log x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3^{-x} + \log_{\frac{1}{2}} x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5^x + \log_{\frac{1}{2}} (1 - x))$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\log(-x) + 2^x)$

3. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{3^{2x+1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0,25^x}{0,5^x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x - \log 2x}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \log x}{\log x^2}$

4. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^4 - 3x^3)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^6 + 3x^5 + 2x - 7)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3x^4 + 9x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 (3 + 2x^5)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - x - x^2)(5 + x^3)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x)(8 - 5x^4)$

5. Przyjmijmy, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - f(x))$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5g(x))$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3h(x) \cdot f(x))$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - h(x)}{3 + g(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4h(x)}{f(x) \cdot g(x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - f(x)) (h(x) + g(x))$

6. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^6 - 4x^5)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^8 - 5x^3 - \frac{1}{3} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^4 + 7x^3 + 9)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{10}}{4} - \frac{x^7}{3} - 5x^4 + 2x \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-8x^7 + 10x^6 + 7x^4)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2,3x^5 - 0,7x^4 + 1,2x^2 + 3,7)$

7. Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$. Uzasadnij, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = +\infty$, gdy $a_n > 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = -\infty$, gdy $a_n < 0$.

Warto wiedzieć

Znając wzór funkcji wielomianowej, łatwo jest rozstrzygnąć, jaka jest granica tej funkcji w plus nieskończoności:

Jeśli $a_n > 0$, to:

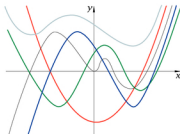
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + \dots + a_0) = +\infty$$

Jeśli $a_n < 0$, to:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + \dots + a_0) = -\infty$$

Własność tę wykorzystywaliśmy przy rysowaniu wykresów funkcji wielomianowych.

$a_n > 0$



$a_n < 0$



8. Uzasadnij, że dowolne równanie wielomianowe nieparzystego stopnia ma co najmniej jedno rozwiązanie.

9. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 5x}{2x^3 - x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 - 4x + 1}{-5x^6 + 2}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 3x^4 + -2x}{7 - 6x^3 + 2x^5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^4 + 3}{3x^4 + 2x^3 - 7}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^5 + 3x^4 - 7}{4x^4 - 2x^3}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^4 - 3x^2 + 2}{9x - 4x^3 - x^5}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x^2 - 2}{6x^3 + x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^6 - 11x}{-x^3 + 2x^2 - 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-4)(x+2)}{3x^2 + 1}$

10. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad \text{gdzie } a_n < 0 \text{ i } b_m > 0$$

Podaj $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, gdy:

a) $n = m$

b) $n < m$

c) $n > m$

11. a) Podaj przykład takiej funkcji wymiernej, której granicą w $+\infty$ jest $-\sqrt{3}$.

b) Podaj przykład takiego wielomianu $W(x)$, aby spełniona była równość:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x^3 + 2x^2 - 1)(2x^4 - 5x^2 + 2)}{W(x)} = \frac{4}{3}$$

12. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 - 2x + 1)(x^2 + 1)}{3x^5 + 4x^3 + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(5x^3 + 3x - 1)^2}{(2x^2 + 3)^4}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2)^2}{(2 - x)(x^3 + x^2 - 5x + 1)}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x - 1)(2x + 4)(x^2 - 5)}{(3x^2 - 7)^2}$

13. Ustal, dla jakiej wartości parametru p spełniona jest podana równość.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(p+1)x^5 + px^3 - 2x^2 + p}{px^3(2x^2 - 1)} = -\frac{2}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2p+1)x^5 + 3px - 4}{(px^3 - 3)(px^2 + 5)} = 3$

14. Ustal, dla jakich wartości p i q zachodzi poniższa równość.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^p + 2x^3)(4x^{2p} - 3)}{qx^{12} + 2x^7 - 1} = 5$$

15. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) \left(\frac{5x-1}{3x^2-2} - \frac{2}{4x^2+1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3)^2 \left(\frac{5x-1}{x(x+1)(x+2)} - \frac{4}{(x+1)(2x+1)} \right)$

16. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 \cdot 7^x - 9 \cdot 5^x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 6^x}{6^x + 5^x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 7^x - 6 \cdot 2^x}{3 \cdot 5^x + 4 \cdot 7^x}$

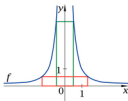
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3 \cdot 8^x + 9 \cdot 2^x + 6)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 4^x}{3^x - 2^x + 8}$

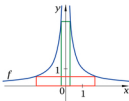
f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 5^x + 3^x - 8}{9^x - 5 \cdot 3^x}$

17. Rozważ rodzinę prostokątów, takich że dwa wierzchołki leżą na osi x , a dwa pozostałe na wykresie funkcji f . Oblicz, jaka jest granica pól prostokątów z tej rodziny, gdy długość boku leżącego na osi x dąży do $+\infty$, a jaka — gdy długość ta dąży do 0.

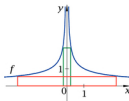
a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$



b) $f(x) = \frac{1}{|x|}$



c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$



- 18.** Przyjrzyj się obliczeniom przedstawionym obok, a następnie w podobny sposób oblicz:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+7})$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x-5})$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1-5x} - \sqrt{3-5x})$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+4}}$

PRZYKŁAD

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-5} - \sqrt{x}) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-5} - \sqrt{x})(\sqrt{x-5} + \sqrt{x})}{\sqrt{x-5} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-5-x}{\sqrt{x-5} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{\sqrt{x-5} + \sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

MINISPRAWDZIAN

51. Dane są funkcje $f(x) = -5x^2 + 3$ i $g(x) = 7 - 5x^2$. Granica funkcji $h(x) = f(x) - g(x)$ w $+\infty$ jest równa:

- A. -4 B. $+\infty$ C. $-\infty$ D. 0

52. Dane są funkcje $f(x) = \frac{-7}{x^5}$ i $g(x) = 5x^6$. Granica funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ w $+\infty$ jest równa:

- A. 0 B. -35 C. $+\infty$ D. $-\infty$

53. Granica funkcji $f(x) = 6x^4 - 5x^2 - 7x + 100$ w $+\infty$ jest równa:

- A. 6 B. $+\infty$ C. 100 D. $-\infty$

54. Granica funkcji $f(x) = \frac{9x^7 - 13x}{-x^5 + 3x^2 - 1}$ w $-\infty$ jest równa:

- A. $+\infty$ B. -1 C. $-\infty$ D. -9

OBLICZANIE GRANIC (CD.)

- I Wiemy już, że jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , to aby ustalić $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, wystarczy obliczyć $f(x_0)$, gdyż zgodnie z definicją funkcji ciągłej $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Teraz omówimy metody obliczania granic pewnych funkcji w punktach, w których funkcje te nie są określone.

Rozważmy następujące funkcje:

$$f_1(x) = \frac{3}{x^2} \qquad f_2(x) = \frac{3}{-x^2} \qquad f_3(x) = \frac{3}{x^3}$$

Zastanówmy się, czy funkcje te mają granice w punkcie 0 (liczba 0 nie należy do dziedziny żadnej z tych funkcji).

ĆWICZENIE A Rozważ ciąg argumentów $a_n = \left(-\frac{1}{10}\right)^n$. Zbadaj zbieżność ciągów $(f_1(a_n))$ i $(f_2(a_n))$.

W wypadku funkcji f_1 dla dowolnego ciągu argumentów zbieżnego do 0 mianownik dąży do 0, ale jego wartości są zawsze dodatnie. Zatem ciąg wartości funkcji f_1 będzie rozbieżny do $+\infty$. Można to zapisać tak:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$$

Dla funkcji f_2 , jeśli weźmiemy dowolny ciąg argumentów zbieżny do 0, to mianownik dąży do zera, ale jego wartości są zawsze ujemne. Zatem ciąg wartości funkcji f_2 będzie rozbieżny do $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{-x^2} = -\infty$$

ĆWICZENIE B Rozważ dwa ciągi argumentów: $a_n = \frac{1}{n}$ i $b_n = -\frac{1}{n}$. Każdy z nich jest zbieżny do 0. Zbadaj zbieżność ciągów $(f_3(a_n))$ i $(f_3(b_n))$.

Dla funkcji f_3 można wskazać takie dwa ciągi argumentów zbieżne do 0, dla których ciągi wartości funkcji f_3 mają różne granice. Gdy mianownik będzie dążył do 0 przez wartości dodatnie, granica będzie równa $+\infty$. Natomiast gdy mianownik będzie zmierzał do 0 przez wartości ujemne, granica będzie równa $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^3} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^3} = -\infty$$

Zatem nie istnieje granica funkcji f_3 w punkcie 0.

Zauważ, że każdą z funkcji f_1 , f_2 i f_3 możemy przedstawić jako iloraz dwóch funkcji. Dotychczasowe rozważania możemy uogólnić w następujący sposób:

Niech f i g będą takimi funkcjami, że $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, gdzie $a \neq 0$, oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Jeśli przy x dążącym do x_0 wartości funkcji g zmierzają do 0 przez wartości dodatnie, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \text{ gdy } a > 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \text{ gdy } a < 0$$

Jeśli przy x dążącym do x_0 wartości funkcji g zmierzają do 0 przez wartości ujemne, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \text{ gdy } a > 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \text{ gdy } a < 0$$

Te własności zapisano obok w sposób symboliczny.

Analogiczne własności mają granice jednostronne, a także granice w $+\infty$ oraz w $-\infty$.

$$\frac{a}{0^+} = \begin{cases} +\infty, & \text{gdy } a > 0 \\ -\infty, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{0^-} = \begin{cases} -\infty, & \text{gdy } a > 0 \\ +\infty, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

PRZYKŁAD 1 Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{10-3x}{(5-x)^2} = -\infty$

Dla liczb różnych od 5 wartości wyrażenia $(5-x)^2$ są dodatnie.

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2}{x-2} = +\infty$

Dla liczb większych od 2 wartości wyrażenia $x-2$ są dodatnie.

c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2-5}{x+1} = +\infty$

Dla liczb mniejszych od -1 wartości wyrażenia $x+1$ są ujemne.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}-3}{2^x} = -\infty$

Dla dowolnej liczby rzeczywistej wartości wyrażenia 2^x są dodatnie.

ZADANIE Oblicz:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{10-2x}{|x+4|}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2^x}{x-3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{2^{-x}}$

PRZYKŁAD 2 Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{4x+5}{x^3+3x^2}$ nie ma granicy w punkcie -3 .

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{4x+5}{x^2(x+3)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{4x+5}{x^2(x+3)} = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$, więc granica funkcji f w punkcie -3 nie istnieje.

Obliczamy granice jednostronne funkcji f w punkcie -3 .

ZADANIE Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{x+3}{x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x}$ nie ma granicy w punkcie 5 .

zadania 1-3

II Gdy mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\frac{0}{0}$, obliczenie granicy czasami jest możliwe po uproszczeniu wzoru.

PRZYKŁAD 3 Oblicz.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - 5x}{2x + 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(6x - 5)}{x(2 + 3x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 5}{2 + 3x} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{(x + 3)(x - 5)} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x - 5)}{(x + 3)(x - 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{x + 3} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 5)}{(x - 2)(x + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 5}{x + 3} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{x - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{(\sqrt{x} - x)(\sqrt{x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ponieważ mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\frac{0}{0}$, przekształcamy wzór funkcji.

ZADANIE Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + 3x^2}{9x^2 - 5x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 7x + 4}{5x + 5}$$

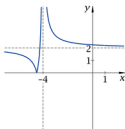
$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

zadania 4-8

III Dotychczas przez asymptotę rozumieliśmy intuicyjnie prostą, do której wykres funkcji się zbliża na dowolnie małą odległość, gdy punkt wykresu dostatecznie oddala się od początku układu współrzędnych. Pojęcie granicy funkcji pozwala precyzyjnie zdefiniować asymptoty.

Oto przykłady trzech funkcji, których wykresy mają asymptoty:

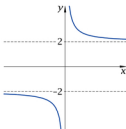
$$y = \left| \frac{2x+9}{x+4} \right|$$



Asymptota pionowa:
 $x = -4$

Asymptota pozioma:
 $y = 2$

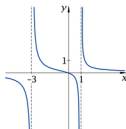
$$y = \frac{2|x|+1}{x}$$



Asymptota pionowa:
 $x = 0$

Dwie asymptoty poziome:
 $y = -2$ i $y = 2$

$$y = \frac{x}{x^2+2x-3}$$



Dwie asymptoty pionowe:
 $x = -3$ i $x = 1$

Asymptota pozioma:
 $y = 0$

Asymptoty poziome i pionowe definiujemy w następujący sposób:

Prosta o równaniu $y = a$ jest **asymptotą poziomą wykresu funkcji f** , gdy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a.$$

Prosta o równaniu $x = b$ jest **asymptotą pionową wykresu funkcji f** , gdy istnieje co najmniej jedna granica jednostronna niewłaściwa:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = -\infty, \\ &\text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

Uwaga. Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie p , to $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$, więc prosta o równaniu $x = p$ na pewno nie jest asymptotą pionową wykresu tej funkcji. Inaczej mówiąc, jeśli funkcja jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny to jej asymptoty pionowej powinniśmy szukać w punktach, które nie należą do dziedziny. Wiadomo ponadto, że jeśli takie asymptoty istnieją, to przecinają oś x na krańcach dziedziny.

ĆWICZENIE C a) Uzasadnij, że funkcja $f(x) = x^3 + x$ nie ma asymptoty poziomej.

b) Uzasadnij, że prosta o równaniu $x = 1$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

PRZYKŁAD 4 Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 5}{x^2 - 1}$. Znajdź równania asymptot poziomych i pionowych wykresu tej funkcji.

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 5}{x^2 - 1} \quad \text{Dziedzina: } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 - 2x + 5}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{-3}{\underbrace{-3}} - \overset{0}{\underbrace{\frac{2}{x}}} + \overset{0}{\underbrace{\frac{5}{x^2}}}}{\underset{1}{\underbrace{1}} - \underset{0}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}}} = -3 \end{aligned}$$

Aby ustalić, czy wykres funkcji ma asymptoty poziome, obliczamy granice funkcji w $+\infty$ i w $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = -3$$

Prosta o równaniu $y = -3$ jest asymptotą poziomą.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\overset{+}{\underbrace{-3x^2 - 2x + 5}}}{\underset{0^+}{\underbrace{x^2 - 1}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\overset{+}{\underbrace{-3x^2 - 2x + 5}}}{\underset{0^-}{\underbrace{x^2 - 1}}} = -\infty$$

Aby ustalić, czy wykres funkcji ma asymptoty pionowe, obliczamy granice funkcji w punktach, w których funkcja nie jest określona, czyli w punktach $x = -1$ i $x = 1$.

Prosta o równaniu $x = -1$ jest asymptotą pionową.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\overset{0}{\underbrace{-3x^2 - 2x + 5}}}{\underset{0^-}{\underbrace{x^2 - 1}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(-3x-5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\overset{-8}{\underbrace{-3x-5}}}{\underset{2}{\underbrace{x+1}}} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3x-5}{x+1} = -4$$

Prosta o równaniu $x = 1$ nie jest asymptotą pionową.

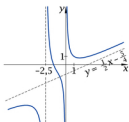
Odp. Wykres funkcji f ma jedną asymptotę poziomą: $y = -3$ oraz jedną asymptotę pionową: $x = -1$.

ZADANIE Znajdź równania asymptot poziomych i pionowych wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{3(x-1)(x+2)}$.

zadania 9-11 ►

Niektóre wykresy funkcji mają asymptoty, które nie są równoległe do żadnej z osi układu współrzędnych. Takie asymptoty nazywamy ukośnymi lub pochyłymi. Oto przykłady trzech funkcji, których wykresy mają asymptoty ukośne:

$$y = \frac{x^3 + x + 5}{2x^2 + 5x}$$



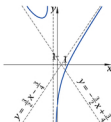
Dwie asymptoty pionowe:

$$x = -2,5 \text{ i } x = 0$$

Asymptota ukośna:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{3x|x| - 5}{2x + 1}$$



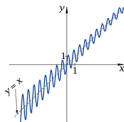
Asymptota pionowa:

$$x = -\frac{1}{2}$$

Dwie asymptoty ukośne:

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \text{ i } y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$y = x + 0,9^x \cdot \sin 9x$$



Asymptota ukośna:

$$y = x$$

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest **asymptotą ukośną** wykresu funkcji f , gdy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \text{ lub } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Aby sprawdzić, czy dana prosta jest asymptotą ukośną wykresu funkcji, wystarczy obliczyć odpowiednie granice. Co jednak należy zrobić, aby sprawdzić, czy wykres danej funkcji ma asymptoty ukośne? I w jaki sposób można znaleźć ich równania? Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony co najmniej jeden z dwóch warunków:

$$1. a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

$$2. a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$$

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-7}{(x-3)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0,5} \frac{1-x^2}{|0,5-x|}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2(x^5 + 1)}$

b) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{3-2x}{(x+5)^4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -100} \frac{3+x}{x|x+100|}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 6}{-3x^4 - 5x^2}$

2. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 + 5}{x - 5}$

e) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 6}{6x + 6}$

i) $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{x - 1}{x^2 - 6x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0,2^+} \frac{3x - 2}{(5x - 1)(1 + x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 1}{(x + 2)(x - 5)}$

j) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 4}{x^2 - x - 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

g) $\lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{x^2 - x}{3 + \frac{1}{2}x}$

k) $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{2x + 9}{x^2 + 6x + 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4 - 5x}{(5x + 3)(2x - 2)}$

h) $\lim_{x \rightarrow -0,3^-} \frac{x^3}{(10x + 3)(1 - x)}$

l) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5 - 4x}{2x^2 + x - 1}$

3. Wykaż, że granica funkcji f w punkcie x_0 nie istnieje.

a) $f(x) = \frac{x^2}{3x - 1}, \quad x_0 = \frac{1}{3}$

d) $f(x) = \frac{3 - 2x}{x^2 + 3x - 4}, \quad x_0 = -4$

b) $f(x) = \frac{4x^2 - 10}{3 + 2x}, \quad x_0 = -1,5$

e) $f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}, \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{6x - 5}{x^2 - 1}, \quad x_0 = 1$

f) $f(x) = \frac{|x + 2| + 3x + 6}{x + 2}, \quad x_0 = -2$

4. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{8 - 2x}{3x^2 - 12x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 3x - 10}$

e) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 8x + 16}{2x^2 + 7x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{-2x^2 - 10x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{-x^2 + 4x - 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 7x + 2}$

5. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{1 - x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - \sqrt{5x}}{25 - 5x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2x - x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9}$

d) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{6x} - 6}{6(x - 6)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - x}{x(x - 3)}$

6. Oblicz granicę lewostronną i prawostronną każdej z poniższych funkcji w punkcie -2 oraz ich granice w $+\infty$ oraz w $-\infty$.

$$f(x) = \frac{1}{(x + 2)(x^2 + 3)}$$

$$g(x) = \frac{x^4}{(x + 2)(x^2 + 3)}$$

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{(x + 2)(x^2 + 3)}$$

7. Dane są funkcje f i g . Oblicz $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) - g(x))$ oraz $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) - g(x))$.

a) $f(x) = \frac{4}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{-x}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$

8. a) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$. Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

b) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 2x^2}$. Oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

9. Znajdź równania asymptot pionowych wykresu funkcji.

a) $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{x^3 - x}{(x-1)(x+4)}$

c) $f(x) = \frac{x+3}{x^2 - 2x - 8}$

10. Znajdź równania asymptot poziomych wykresu funkcji.

a) $f(x) = \frac{3x^3 + 4}{5x^4 + 1}$

b) $f(x) = \frac{12x^5 - 2x^4 + x^3}{-2x^5 + 5}$

c) $f(x) = \frac{3|x| + 5}{x + 6}$

11. Wyznacz równania asymptot pionowych oraz poziomych wykresu funkcji.

a) $f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x - 3}$

c) $f(x) = \frac{4x^2 + 11}{(x-5)^2}$

e) $f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{-x^2 - 5x + 2}{2x + 1}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-4)(x+2)}$

f) $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 4x + 3}$

MINISPRAWDZIAN

S1. Granica lewostronna funkcji $f(x) = \frac{x-3}{4x^2 + 8x + 4}$ w punkcie -1 jest równa:

- A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. -3 D. 0

S2. Granica funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x^2 - 2x - 15}$ w punkcie 5 :

- A. jest równa 0 B. jest równa 1 C. jest równa $\frac{5}{4}$ D. nie istnieje

S3. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16}$. Która spośród podanych granic funkcji f jest obliczona poprawnie?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ B. $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = +\infty$ C. $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$ D. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{9}{8}$

S4. Dane są funkcje $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ i $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$. Granica $\lim_{x \rightarrow -3^+} (f(x) - g(x))$:

- A. jest równa 0 B. jest równa $+\infty$ C. jest równa $-\infty$ D. nie istnieje

1. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-6x^5 + x^2)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^7 - 3x^6)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x}{-5x^3 + 7}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 9}{-4x^3 + 5x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 3}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 0,5^x}{3 - \log_2 x}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 5 \cdot 4^x}{6^x - 2 \cdot 7^x}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 8^x - 2}{5 \cdot 3^x + 2^x}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \cdot 5^x + 4 \cdot 3^x}{9 \cdot 4^x - 2 \cdot 5^x}$

2. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x^2 - 6}{x + 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{4 + x}{(x + 7)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 7x + 12}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - \sin x}{1 + \cos x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 11x + 5}{2x + 10}$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{2^x + \sin x}$

3. Wiedząc, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -5$,

oblicz podaną granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + h(x) \cdot g(x))$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow a} (h(x) - f(x) \cdot g(x))$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{g(x) - f(x)}$

4. Co możesz powiedzieć o stopniach wielomianów $W(x)$ i $V(x)$, gdy granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{W(x)}{V(x)}$ jest:

a) równa 0,

b) właściwa, ale różna od 0,

c) niewłaściwa?

5. Uzasadnij, że funkcja f nie ma granicy w punkcie -2 .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2}, & \text{gdy } x < -2 \\ \frac{x}{x^2 + 6x + 8}, & \text{gdy } x > -2 \end{cases}$$

6. Ustal, dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f jest ciągła w punkcie 3.

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{gdy } x < 3 \\ b, & \text{gdy } x = 3 \\ \frac{1}{x-2}, & \text{gdy } x > 3 \end{cases}$$

7. Równanie $x^3 - x + 1 = 0$ ma jedno rozwiązanie. Podaj je z dokładnością do 0,5.

Pochodne funkcji

Naukowy sposób badania zjawisk polega najczęściej na obserwacji zachodzących zmian. Jeśli zmiany te uda się opisać za pomocą funkcji, jej wzoru lub wykresu, możemy zrozumieć, jak zjawisko przebiega, oraz przewidzieć, jak mogłoby przebiegać w przyszłości. Wiemy, kiedy dana wielkość będzie rosta, kiedy malała, a kiedy nie będzie się zmieniać. Czasem jednak to nie wystarcza – potrzebujemy więcej informacji, np. nie tylko to, czy prędkość obserwowanego obiektu będzie rosta, ale też w jakim tempie będzie się dokonywał ten wzrost. Do opisu tempa zmian używane jest specjalne narzędzie matematyczne – pochodna funkcji.

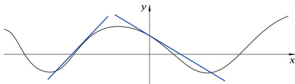


- Pochodna funkcji w punkcie ■ Pochodna funkcji ■ Pochodna funkcji złożonej ■ Monotoniczność funkcji ■ Ekstrema
- Zastosowania pochodnej ■ Zastosowania pochodnej (cd.)
- Powtórzenie

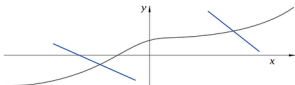
POCHODNA FUNKCJI W PUNKCIE

- I Styczna do okręgu to prosta, która ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny. Dla stycznych do innych krzywych ten warunek nie zawsze jest spełniony.

Na rysunku poniżej przedstawiono fragment wykresu pewnej funkcji i zaznaczono dwie styczne do jej wykresu. Jak widać styczne mogą mieć z wykresem więcej niż jeden punkt wspólny.



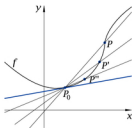
Każda z prostych przedstawionych na kolejnym rysunku ma z wykresem funkcji punkt wspólny, ale żadna z nich nie jest styczna do wykresu.



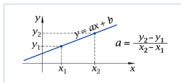
Spróbujemy teraz określić, jaką prostą nazywamy styczną do wykresu.

Wyobraź sobie, że na wykresie funkcji f wybrano punkt P_0 oraz różny od niego punkt P (zobacz rysunek obok). Prosta P_0P jest nazywana **sieczną** wykresu funkcji f .

Gdyby punkt P poruszał się po wykresie i zbliżał się do punktu P_0 , sieczna P_0P byłaby coraz bliższa prostej, którą nazywamy **styczną** do wykresu funkcji f w punkcie P_0 . Możemy więc powiedzieć, że styczna to graniczne położenie siecznych przechodzących przez punkt P_0 .



Zauważ, że zgodnie z tą definicją styczna do wykresu funkcji liniowej i jej wykres to ta sama prosta.



ĆWICZENIE A Punkty $P_0 = (1, 1)$ i $P = (1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$ należą do wykresu funkcji $f(x) = x^2$. Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej P_0P .

Spróbujemy znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $P_0 = (1, 1)$.

Niech P będzie punktem wykresu tej funkcji różnym od P_0 . Wówczas pierwsza współrzędna punktu P będzie różniła się o pewną liczbę h od pierwszej współrzędnej punktu P_0 . Zatem:

$$P = (1 + h, (1 + h)^2)$$

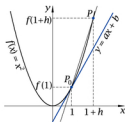
Niech a_h oznacza współczynnik kierunkowy stycznej P_0P . Wówczas:

$$a_h = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

Zauważ, że punkt P jest tym bliższy punktowi P_0 , im liczba h jest bliższa zeru. Zatem współczynnik kierunkowy a stycznej w punkcie P_0 jest równy:

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} a_h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$$

Równanie stycznej ma więc postać $y = 2x + b$. Styczna ta przechodzi przez punkt $P_0 = (1, 1)$, więc $1 = 2 \cdot 1 + b$, czyli $b = -1$. Zatem styczna w punkcie P_0 ma równanie: $y = 2x - 1$.



Granice właściwą $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

nazywamy **po pochodną funkcji f**

w punkcie x_0 i oznaczamy sym-

bolem $f'(x_0)$.

Zatem:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Pochodna w punkcie x_0 jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji f w tym punkcie.



Wyrażenie $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ występujące w definicji pochodnej funkcji nazywane jest **ilorazem różnicowym** w punkcie x_0 . Jeśli przyjmemy, że $x = x_0 + h$, to iloraz ten można zapisać także w postaci $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Wówczas:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Iloraz różnicowy to stosunek zmiany wartości funkcji do różnicy odpowiednich argumentów. Pochodna zatem ilustruje tempo wzrostu lub spadku wartości funkcji i można za jej pomocą badać monotoniczność funkcji. Tę interpretację pochodnej omówimy w jednym z następnych podrzdziałów.

Zamiast mówić, że istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0 , będziemy też mówili, że funkcja f jest **różniczkowalna** w tym punkcie. Jeżeli funkcja ma pochodną w każdym punkcie pewnego zbioru A , to mówimy, że jest różniczkowalna w zbiorze A .

PRZYKŁAD 1 Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^3 - 5x$ w punkcie 2.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 5(2+h) - (2^3 - 5 \cdot 2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 10 - 5h + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 7h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 6h + 7) = 7 \end{aligned}$$

Odp. Pochodna funkcji f w punkcie 2 wynosi 7.

ZADANIE Oblicz pochodną funkcji $f(x) = 4x^2 - 3$ w punkcie 2.

PRZYKŁAD 2 Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$ w punkcie o pierwszej współrzędnej równej -3 .

$$y = ax + b$$

$$\begin{aligned} a = f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{-3+h} - \frac{4}{-3}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-12 + 12 - 4h}{-3(-3+h) \cdot h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4}{9-3h} = \underline{\underline{-\frac{4}{9}}} \end{aligned}$$

$$f(-3) = -\frac{4}{3}$$

$$-\frac{4}{3} = -\frac{4}{9} \cdot (-3) + b$$

$$b = -\frac{8}{3}$$

$$\text{Równanie stycznej: } y = -\frac{4}{9}x - \frac{8}{3}$$

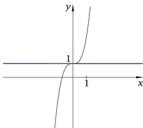
Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o pierwszej współrzędnej -3 jest równy $f'(-3)$.

Współrzędne punktu styczności spełniają równanie stycznej.

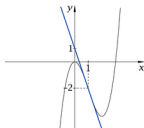
ZADANIE Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $y = \frac{-5}{x}$ w punkcie o pierwszej współrzędnej równej 4 .

ĆWICZENIE B Oblicz pochodną funkcji $f(x) = x^3 - 3$ w punkcie 0 , a następnie znajdź równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $(0, -3)$. Naszkicuj wykres funkcji f oraz wykres ustalonej stycznej.

Styczna może przecinać wykres w punkcie styczności. Oto przykłady:



Styczna do wykresu funkcji
 $f(x) = 2x^3 + 1$
 w punkcie $(0, 1)$ ma równanie
 $y = 1$
 i przecina wykres w tym punkcie.



Styczna do wykresu funkcji
 $f(x) = x^3 - 3x^2$
 w punkcie $(1, -2)$ ma równanie
 $y = -3x + 1$
 i przecina wykres w tym punkcie.

Jeśli styczna do wykresu funkcji przecina wykres w punkcie styczności, to ten punkt nazywamy **punktem przegięcia** wykresu funkcji.

zadania 1–7 ►

II PRZYKŁAD 3 Wykaż, że funkcja $f(x) = |x - 1|$ nie ma pochodnej w punkcie 1.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|1+h-1| - |1-1|}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \vdots \quad h > 0, \text{ więc } |h| = h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad \vdots \quad h < 0, \text{ więc } |h| = -h\end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}, \text{ więc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ nie istnieje.}$$

Wobec tego funkcja f nie ma pochodnej w punkcie 1.

ZADANIE Wykaż, że funkcja $f(x) = |2x - 1|$ nie ma pochodnej w punkcie $\frac{1}{2}$.

Przyjrzyj się wykresom funkcji f , g i h . Funkcje te są określone w punkcie 1, ale żadna z nich nie ma pochodnej w tym punkcie.

$$f(x) = |x - 1| \quad g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \leq 1 \\ x^3 & \text{dla } x > 1 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x} & \text{dla } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$



Funkcja nie ma pochodnej w punkcie x_0 , jeśli na przykład:

- jej wykres w otoczeniu punktu x_0 łamie się, tworząc ostre (zachowuje się podobnie jak np. wykres funkcji f),
- funkcja nie jest ciągła w punkcie x_0 (np. tak jak funkcja g),
- styczna do wykresu w punkcie o pierwszej współrzędnej x_0 jest pionowa (np. wykres funkcji h ma w punkcie o współrzędnych $(1, 0)$ pionową styczną, bo graniczne położenie odpowiednich siecznych to prosta $x = 1$).

Zwróć uwagę, że funkcja może być ciągła w pewnym punkcie x_0 i nie mieć w tym punkcie pochodnej (jak np. funkcje f i h). Można jednak wykazać, że jeśli funkcja ma pochodną w pewnym punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.

zadania 8–10 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz pochodną funkcji f w punkcie x_0 .

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$, $x_0 = 2$

c) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $x_0 = 4$

b) $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = -1$

d) $f(x) = \frac{1}{2x}$, $x_0 = 1$

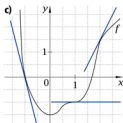
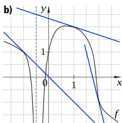
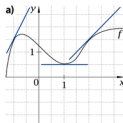
2. a) O pewnej funkcji f wiadomo, że $f(1) = 3$ oraz, że $f'(1) = -2$. Znajdź równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie o pierwszej współrzędnej równej 1.

b) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{x}$ w punkcie o pierwszej współrzędnej równej 2.

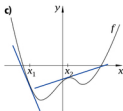
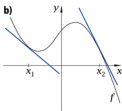
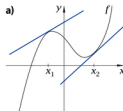
3. Prosta o równaniu $y = -6x + 5$ jest styczna do wykresu pewnej funkcji f w punkcie $P = (2, f(2))$. Wyznacz $f'(2)$ oraz $f(2)$.

4. Przyjmijmy, że wykres funkcji f jest symetryczny względem osi y i $f'(3) = 7$. Oblicz $f'(-3)$.

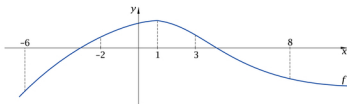
5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f oraz styczne do tego wykresu poprowadzone w punktach o pierwszych współrzędnych: -1 , 1 i 2 . Znajdź punkty krątowe, przez które przechodzą narysowane styczne, i ustal $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(2)$.



6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f i dwie styczne do tego wykresu w punktach o pierwszych współrzędnych x_1 i x_2 . Czy pochodna funkcji f ma większą wartość w punkcie x_1 czy w punkcie x_2 ?



7. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f . Argumenty a, b, c, d, e należą do zbioru $\{-6, -2, 1, 3, 8\}$ oraz wiadomo, że $f'(a) = -\frac{1}{2}$, $f'(b) = -\frac{1}{3}$, $f'(c) = 0$, $f'(d) = \frac{1}{2}$, $f'(e) = 1$. Ustal wartości a, b, c, d, e .



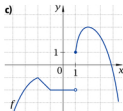
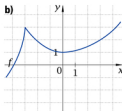
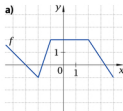
8. Sprawdź, czy funkcja f ma pochodną w punkcie 1.

- a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gd}y \ 0 < x < 1 \\ 2 - x, & \text{gd}y \ x \geq 1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{gd}y \ x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{gd}y \ x \geq 1 \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gd}y \ 0 < x < 1 \\ 3 - 2x, & \text{gd}y \ x \geq 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gd}y \ x \leq 1 \\ -\frac{1}{3}x^3, & \text{gd}y \ x > 1 \end{cases}$

9. Wykaż, że podana funkcja f nie ma pochodnej w punkcie x_0 .

- a) $f(x) = |3x + 6|$, $x_0 = -2$
- b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{gd}y \ x \leq 0 \\ 2x - 2, & \text{gd}y \ x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$
- c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & \text{gd}y \ x \leq 1 \\ x, & \text{gd}y \ x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

10. Korzystając z wykresu funkcji f , podaj, w których punktach z przedziału $(-4; 4)$ nie istnieje pochodna tej funkcji. Określ także, w których punktach z tego przedziału pochodna jest równa 0.



MINISPRAWDZIAN

51. Pochodna funkcji $f(x) = \frac{1}{4x}$ w punkcie 2 jest równa:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{8}$ D. $-\frac{1}{16}$

52. Pochodna funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ w punkcie 0 jest równa 2. Styczna do wykresu funkcji f w punkcie o pierwszej współrzędnej równej 0 ma równanie:

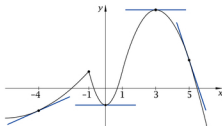
- A. $y = 2x$ B. $y = 2x + 3$ C. $y = 3x + 2$ D. $y = -2x + 3$

53. Prosta o równaniu $y = 7x + 27$ jest styczna w punkcie $P = (-3, f(-3))$ do wykresu funkcji f . Wartość wyrażenia $f(-3) + f'(-3)$ jest równa:

- A. 13 B. 34 C. 33 D. -15

54. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f i cztery proste styczne do tego wykresu w punktach o pierwszych współrzędnych równych: -4, 0, 3, 5. Jakie znaki: $>$, $<$ czy $=$ należy wpisać w kółkach?

- $f'(-4) \quad \bullet \quad 0$ $f'(3) \quad \bullet \quad 0$
 $f'(0) \quad \bullet \quad 0$ $f'(5) \quad \bullet \quad 0$



POCHODNA FUNKCJI

1. ĆWICZENIE A Dana jest funkcja $f(x) = x^2$. Oblicz:

- a) $f'(-3)$ b) $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ c) $f'(5)$

Obliczając pochodną funkcji w różnych punktach za każdym razem wykonujemy podobne operacje. Zamiast je wielokrotnie powtarzać, możemy wyprowadzić wzór pozwalający obliczać pochodną funkcji w dowolnym punkcie.

Niech funkcja f będzie różniczkowalna w zbiorze A . Funkcję, która każdemu argumentowi x ze zbioru A przyporządkowuje wartość pochodnej funkcji f w punkcie x , nazywamy **pochodną funkcji f** i oznaczamy symbolem f' .

Obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x^2$.

Korzystając z definicji pochodnej w punkcie x , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Zatem pochodna funkcji $f(x) = x^2$ w dowolnym punkcie x jest równa $2x$. Możemy to zapisać na dwa sposoby:

$$f'(x) = 2x \quad \text{albo} \quad (x^2)' = 2x$$

Postępując w podobny sposób, można otrzymać wzory podane w ramce obok.

$$(c)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

ĆWICZENIE B Uzasadnij wzory na pochodną funkcji stałej i pochodną funkcji $y = x$.

Obliczając pochodne różnych funkcji, wygodnie jest korzystać z własności pochodnej, o których mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne w zbiorze A , to różniczkowalne w tym zbiorze są także funkcje $y = c \cdot f(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ oraz $y = f(x) \cdot g(x)$ oraz dla argumentów ze zbioru A , dla których $g(x) \neq 0$ — funkcja $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Zachodzą przy tym równości:

$$(c \cdot f(x))' = c f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Udowodnimy dla przykładu drugą i czwartą z tych równości.

Dowód

Niech funkcje f i g będą różniczkowalne w zbiorze A , więc gdy $x \in A$, istnieją granice właściwe:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{oraz} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned}
 (f(x) + g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \\
 (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
 &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Funkcja g jest różniczkowalna, więc jest ciągła, stąd $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x)$.

Wiadomo także, że $\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = f(x)$.

Zatem:

$$\begin{aligned}
 (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) + f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
 &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Korzystając z powyższego twierdzenia, obliczymy pochodną funkcji $y = x^3$.

$$\begin{aligned}
 (x^3)' &= (x^2 \cdot x)' = \\
 &= (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' = \\
 &= 2x \cdot x + x^2 = 3x^2
 \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzorów:
 $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
 oraz $(x^2)' = 2x$ i $(x)' = 1$.

W podobny sposób można wykazać, że:

$$\begin{aligned}
 (x^4)' &= 4x^3 \\
 (x^5)' &= 5x^4 \\
 \text{itd.}
 \end{aligned}$$

Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

ĆWICZENIE C Wyznacz pochodne funkcji $f(x) = x^7$ oraz $g(x) = x^{113}$.

Powyższą równość można uogólnić dla potęg o dowolnym wykładniku.

Niech $p \in \mathbb{R}$ oraz niech x należy do zbioru, w którym funkcja $y = x^p$ jest różniczkowalna. Wówczas zachodzi równość:

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

Korzystając z tego twierdzenia, można obliczyć na przykład pochodną funkcji $y = \sqrt{x}$.

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Uwaga. Dziedzina funkcji $y = \sqrt{x}$ jest przedział $\langle 0; +\infty \rangle$, a ponieważ nie istnieje pochodna tej funkcji w punkcie 0, więc dziedziną pochodnej jest przedział $(0; +\infty)$.

ĆWICZENIE D Korzystając z powyższego twierdzenia, oblicz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$

PRZYKŁAD 1 Oblicz pochodną.

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{x^2} + 6\sqrt{x} \right)' &= \frac{1}{4}(x^3)' - 5(x^{-2})' + 6(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{4} \cdot 3x^2 - 5 \cdot (-2)x^{-3} + 6 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{3}{4}x^2 + \frac{10}{x^3} + \frac{3}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left[(3x^2 - 5x + 2) \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x} \right) \right]' &= \\ &= (3x^2 - 5x + 2)' \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x} \right) + (3x^2 - 5x + 2) \left(x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-1} \right)' = \\ &= (6x - 5) \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x} \right) + (3x^2 - 5x + 2) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{-3x^2 + 4}{2x - 5} \right)' &= \frac{(-3x^2 + 4)'(2x - 5) - (-3x^2 + 4)(2x - 5)'}{(2x - 5)^2} = \\ &= \frac{-6x(2x - 5) - (-3x^2 + 4) \cdot 2}{(2x - 5)^2} = \frac{-6x^2 + 30x - 8}{4x^2 - 20x + 25} \end{aligned}$$

ZADANIE Oblicz pochodną.

a) $y = 4x^5 + \frac{2}{x^3} - 2\sqrt[3]{x}$

b) $y = \left(7x^4 + \frac{2}{x^2} \right) (\sqrt[3]{x} - 5x)$

c) $y = \frac{3x-2}{7x^2-3}$

Czasami warto najpierw przekształcić wzór funkcji, zamiast korzystać ze wzoru na pochodną iloczynu lub ilorazu.

PRZYKŁAD 2 Oblicz pochodną podanej funkcji.

$$\text{a) } ((x^2 - 3)x^3)' = (x^5 - 3x^3)' = (x^5)' - 3 \cdot (x^3)' = \underline{5x^4 - 9x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\frac{5x^4 + 4x^3 - 1}{x^3} \right)' &= \left(5x + 4 - \frac{1}{x^3} \right)' = 5(x)' + (4)' - (x^{-3})' = \\ &= 5 + 0 + 3x^{-4} = \underline{5 + \frac{3}{x^4}} \end{aligned}$$

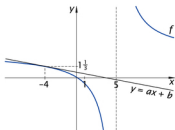
ZADANIE Oblicz pochodną podanej funkcji.

$$\text{a) } y = \left(2x^3 + \frac{5}{x^4} \right) x^2$$

$$\text{b) } y = \frac{6x^5 - 2x^4 + 3}{x^4}$$

zadania 1–10 ►

II PRZYKŁAD 3 Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x}{x-5}$ oraz styczną do tego wykresu w punkcie o współrzędnych $(-4, 1\frac{1}{3})$. Znajdź jej równanie.



$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x)' \cdot (x-5) - (x-5)' \cdot 3x}{(x-5)^2} = \\ &= \frac{3 \cdot (x-5) - 1 \cdot 3x}{(x-5)^2} = \frac{-15}{(x-5)^2} \end{aligned}$$

$$a = f'(-4) = \frac{-15}{(-4-5)^2} = \frac{-15}{81} = -\frac{5}{27}$$

$$y = -\frac{5}{27}x + b$$

$$1\frac{1}{3} = -\frac{5}{27} \cdot (-4) + b$$

$$b = 1\frac{1}{3} - \frac{20}{27} = \frac{16}{27}$$

Odp. Szukaną styczną jest prosta o równaniu $y = -\frac{5}{27}x + \frac{16}{27}$.

Obliczamy pochodną funkcji f .

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) jest równy pochodnej funkcji f w punkcie x_0 .

Współrzędne punktu styczności spełniają równanie stycznej.

ZADANIE Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $y = x^3 - 4\sqrt{x}$ w punkcie $(4, 56)$.

zadania 11–17 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz pochodną funkcji.

a) $f(x) = -5x^6$

d) $f(x) = 3\sqrt{x}$

g) $f(x) = 5x^{-0,3}$

b) $f(x) = \frac{x^{20}}{4}$

e) $f(x) = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$

h) $f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c) $f(x) = \frac{4}{7}x$

f) $f(x) = \frac{9}{x^2}$

i) $f(x) = -28x^{\frac{4}{7}}$

2. Narysuj w tym samym układzie współrzędnych wykres funkcji f i jej pochodnej.

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = x^3$

3. a) Zależność pola koła od promienia można opisać za pomocą funkcji $P(r) = \pi r^2$, gdzie $r \in (0; +\infty)$. Oblicz pochodną tej funkcji. Co można zauważyć?

b) Zależność objętości kuli od promienia tej kuli można opisać wzorem $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, gdzie $r \in (0; +\infty)$. Oblicz pochodną tej funkcji. Co można zauważyć?

4. Oblicz pochodną funkcji.

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 7$

c) $f(x) = -\frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{5\sqrt{x}}{7} - \frac{1}{x^3}$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$

d) $f(x) = \frac{3x^5}{10} + x\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$

5. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = (2x^3 - 6x + 1)(x^5 - 2x)$ na dwa sposoby.

Sposób I. Najpierw przekształć wzór, wykonując mnożenie.

Sposób II. Skorzystaj ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji.

6. Oblicz pochodną funkcji f . Wybierz ten ze sposobów opisanych w poprzednim zadaniu, który jest dogodniejszy.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1\right)(5x - 1)$

c) $f(x) = (2x - 1)(3x^2 + 2)$

b) $f(x) = (x^3 - 2x^2) \cdot x$

d) $f(x) = (x^2 - 3x)\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)$

7. Oblicz pochodną funkcji.

a) $f(x) = \frac{2x - 7}{3x + 1}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

b) $f(x) = \frac{1 - x}{x + 1}$

d) $f(x) = \frac{x^3 + x}{2x^2 - 1}$

8. Oblicz pochodną funkcji.

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$

9. Oblicz pochodną w punkcie 2 funkcji $g(x) = x^2 \cdot f(x)$ oraz funkcji $h(x) = \frac{x^2}{f(x)}$, jeśli wiadomo, że $f(2) = -5$ oraz $f'(2) = 3$.

10. Podaj przykład funkcji f , dla której:

a) $f'(x) = 3x^2$

b) $f'(x) = x$

c) $f'(x) = \frac{1}{2}x^3$

d) $f'(x) = \frac{2}{x^2}$

◀ **11.** Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

a) $f(x) = 2x^2$, $P = (1, 2)$

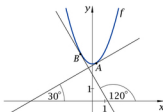
c) $f(x) = \frac{3}{x}$, $P = (2, \frac{3}{2})$

b) $f(x) = x^3 - x$, $P = (-1, 0)$

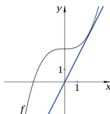
d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $P = (1, \frac{1}{2})$

12. Oblicz kąt nachylenia do osi x stycznej do wykresu funkcji $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x$ w punkcie o współrzędnych $(2, -2)$.

13. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = x^2 + 3$ oraz styczne do tego wykresu. Znajdź współrzędne punktów A i B .



14. Dwie styczne do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie leżącym na osi y . Znajdź równania tych stycznych.



15. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}$ oraz taką styczną do tego wykresu, która przechodzi przez początek układu współrzędnych.

a) Znajdź równanie tej stycznej.

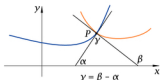
b) Pewna prosta, równoległa do narysowanej, jest także styczna do wykresu funkcji f . Znajdź współrzędne punktu styczności.

16. Znajdź równanie takiej stycznej do wykresu funkcji f , która jest równoległa do prostej o podanym równaniu.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$, $y = x + 11$

b) $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$, $y = 6x - 7$

Załóżmy, że wykresy dwóch funkcji różniczkowalnych przecinają się w punkcie P . Kąt przecięcia tych wykresów jest wyznaczony przez proste styczne do nich w punkcie P . Przyjmujemy, że jest to kąt ostry (lub prosty) między tymi stycznymi.



Aby znaleźć miarę tego kąta (na rysunku oznaczony jest on literą γ), wystarczy znać miary kątów nachylenia stycznych do osi x , a więc wystarczy znać ich współczynniki kierunkowe.

17. Przeczytaj informacje w ramce. Znajdź współrzędne dwóch punktów, w których przecinają się wykresy funkcji $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ i $g(x) = x^3 - 2x + 1$. W którym z tych punktów wykresy przecinają się pod większym kątem?

MINISPRAWDZIAN

51. Pochodna funkcji $f(x) = -\frac{1}{5}x^5 + 3\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^4}$ w punkcie 1 jest równa:

- A. -15 B. -4 C. 1 D. 16

52. Styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x-5}{x-1}$ w punkcie o pierwszej współrzędnej równej 3 można opisać równaniem:

- A. $y = 3x - 7$ B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ C. $y = -2x + 8$ D. $y = \frac{1}{2}x + 2$

53. W którym punkcie styczna do wykresu funkcji $f(x) = (x^3 - 2)(2x - 1)$ jest nachylna do osi x pod kątem 45° ?

- A. (1, -1) B. (1, 1) C. (-1, -1) D. $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, 1\right)$

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

- 1** Rozważmy następujący problem: Jaką długość ma bok kwadratu o polu o 3 większym niż dwa koła, każde o polu x ?

Pole p każdego takiego kwadratu można przedstawić jako funkcję, której argumentem jest x :

$$p(x) = 2x + 3$$

Długość d boku takiego kwadratu można przedstawić jako funkcję, której argumentem jest p :

$$d(p) = \sqrt{p}$$

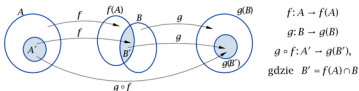
Zatem długość d przedstawiona jako funkcja o argumentie x będzie określona wzorem:

$$d(x) = \sqrt{2x+3}$$

Zauważ, że aby otrzymać ostatnią zależność, dokonaliśmy złożenia dwóch funkcji. Pierwszą z nich była funkcja liniowa, a drugą była funkcja przyporządkowująca liczbom ich pierwiastki kwadratowe. W podobny sposób możemy składać inne funkcje.

Złożeniem funkcji f z g nazywamy funkcję, która każdemu argumentowi x przyporządkowuje wartość $g(f(x))$. Taką funkcję będziemy oznaczać symbolem $g \circ f$.

Dziedziną funkcji $g \circ f$ jest zbiór tych argumentów funkcji f , dla których wartości funkcji f należą do dziedziny funkcji g . Obrazuje to poniższy schematyczny rysunek.



W złożeniu $g(f(x))$ funkcję f będziemy nazywać funkcją wewnętrzną, a funkcję g — zewnętrzną.

PRZYKŁAD 1 Dane są funkcje $f(x) = 5^x$ i $g(x) = x^2 + 3$. Znajdź wzory funkcji $g \circ f$, $f \circ g$ oraz $f \circ g \circ g$.

$$g(f(x)) = (5^x)^2 + 3 = 5^{2x} + 3 = 25^x + 3$$

$$(g \circ f)(x) = 25^x + 3$$

$$f(g(x)) = 5^{x^2+3} = 125 \cdot 5^{x^2}$$

$$(f \circ g)(x) = 125 \cdot 5^{x^2}$$

$$f(g(g(x))) = f((x^2 + 3)^2 + 3) = f(x^4 + 6x^2 + 12) = 5^{x^4 + 6x^2 + 12}$$

$$(f \circ g \circ g)(x) = 5^{x^4 + 6x^2 + 12}$$

ZADANIE Znajdź wzory funkcji $g \circ f$, $f \circ g$ oraz $g \circ f \circ f$, gdy $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \frac{5}{x^2 + 1}$.

zadania 1–5 ►

- II Niech h będzie złożeniem funkcji f z g , czyli $h(x) = g(f(x))$, gdzie funkcje f oraz g są różniczkowalne, oraz przyjmijmy, że $f(x) \neq f(x_0)$. Obliczmy pochodną funkcji h :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Gdy funkcja f jest różniczkowalna, to można udowodnić, że zachodzi implikacja:

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0)$$

Korzystając z tego oraz powyższych przekształceń, możemy zapisać następującą równość:

$$h'(x) = \lim_{f(x) \rightarrow f(x_0)} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Przyjmując $y = f(x)$, otrzymujemy:

$$h'(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y) \cdot f'(x)$$

Uwaga. Powyższy wzór jest również prawdziwy, gdy funkcja f przyjmuje wartość $f(x_0)$ także dla innych argumentów niż x_0 , ale jego dowód jest w takim przypadku bardziej złożony.

Obliczając pochodną funkcji złożonej, będziemy korzystać z następującego wzoru:

Niech funkcji f i g są różniczkowalne. Wówczas:

$$[g(f(x))]'' = g'(y) \cdot f'(x), \text{ gdzie } y = f(x)$$

PRZYKŁAD 2 Oblicz pochodną funkcji $h(x) = (3x^2 - 4x + 2)^5$.

$h(x) = g(f(x))$, gdzie:

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 2, \quad f'(x) = 6x - 4$$

$$g(y) = y^5, \quad g'(y) = 5y^4 \quad \text{ i } \quad y = f(x)$$

$$h'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = 5y^4 \cdot (6x - 4)$$

$$h'(x) = 5(3x^2 - 4x + 2)^4 \cdot (6x - 4)$$

Funkcja h jest funkcją złożoną. Ustalamy funkcję wewnętrzną f i zewnętrzną g tego złożenia oraz ich pochodne.

Korzystamy ze wzoru na pochodną funkcji złożonej.

ZADANIE Oblicz pochodną funkcji $h(x) = \sqrt{3x^2 + 5}$.

PRZYKŁAD 3 Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{4x + 1}$$

w punkcie o pierwszej współrzędnej równej 0.

$f(0) = 0$, więc punkt styczności to $(0, 0)$.

Równanie stycznej ma postać: $y = ax$, gdzie $a = f'(0)$.

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f_2(x) = \sqrt[3]{4x + 1}$$

$f_1(x) = g(h(x))$, gdzie:

$f_2(x) = u(w(x))$, gdzie:

$$h(x) = x^2 + 1 \quad h'(x) = 2x$$

$$w(x) = 4x + 1 \quad w'(x) = 4$$

$$g(y) = \sqrt{y}, \quad g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{ i } y = h(x)$$

$$u(y) = \sqrt[3]{y}, \quad u'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \quad \text{ i } y = w(x)$$

$$f'_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'_2(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \cdot 4 = \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x + 1)^2}}$$

$$f'(x) = f'_1(x) - f'_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{(4x + 1)^2}}$$

$$a = f'(0) = -\frac{4}{3}$$

Odp. Styczną opisuje równanie $y = -\frac{4}{3}x$.

ZADANIE Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = (x^3 - 1)^{-2} + (2x - 2)^3$ w punkcie o pierwszej współrzędnej równej -1 .

zadania 6-9 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Znajdź wzór funkcji $g \circ f$ oraz funkcji $f \circ g$.

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

c) $f(x) = \frac{5}{x}$

e) $f(x) = x^{-2}$

$g(x) = -2x + 7$

$g(x) = 2x - 3$

$g(x) = 2x^2 + 1$

b) $f(x) = 3x - 7$

d) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{3x - 4}$

$g(x) = \frac{x}{2} + 5$

$g(x) = 4x - 5$

$g(x) = \frac{1}{2x + 7}$

2. Dane są funkcje:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = x^3 + 2$$

$$h(x) = \frac{7}{x + 1}$$

Znajdź wzór podanej funkcji.

a) $h \circ g \circ f$

c) $g \circ f \circ h$

e) $h \circ f \circ f$

b) $h \circ f \circ g$

d) $f \circ g \circ f$

f) $g \circ h \circ h$

3. Podaną funkcję można przedstawić jako złożenie dwóch funkcji. Znajdź funkcję wewnętrzną i zewnętrzną tego złożenia.

a) $y = \sqrt{x^3 + x - 7}$

e) $y = \log(4x^3 + x^2)$

b) $y = \frac{9}{4x^2 + x}$

f) $y = \frac{2}{\sin x}$

c) $y = 2^{x^5 + 3}$

g) $y = \cos \sqrt{x}$

d) $y = (2x^3 + x)^{\frac{2}{3}}$

h) $y = \frac{1}{\sqrt{2+x^{11}}}$

4. Dla każdej z podanych funkcji złożonych podaj wzór funkcji wewnętrznej i zewnętrznej.

a) $y = \sin^7 x$ i $y = \sin x^7$

b) $y = \sqrt[3]{\log x}$ i $y = \log \sqrt[3]{x}$

5. Podaj przykład takich funkcji z oraz w , że funkcja złożona $z \circ w$ ma podany wzór. Podaj wzór funkcji $w \circ z$.

a) $(z \circ w)(x) = 5^{x^2+3}$

b) $(z \circ w)(x) = \sqrt[3]{\sin x}$

6. Znajdź pochodną podanej funkcji.

a) $y = \sqrt[3]{2x+1}$

c) $y = (3x-5)^{-7}$

e) $y = \left(3x^4 + \frac{1}{x}\right)^{-2}$

b) $y = -3(x^2 - 7x)^{-1}$

d) $y = \sqrt[3]{5x^3 + 4x^2}$

f) $y = (x^3 + \sqrt{x})^{-\frac{2}{3}}$

7. Znajdź pochodną funkcji f .

a) $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x+1}$

c) $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3+4} \cdot (5x-2)^4$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x}}{2x-3}$

8. Znajdź pochodną funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{x^2+3} - (3x^2+2x-3)^5$

c) $f(x) = \frac{1}{2x^3-5x^2} + \sqrt[3]{5x^4-2x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^3-1} + \sqrt{x^2+2}$

d) $f(x) = (4x^2-3)^6 - \frac{1}{(3x+5)^3}$

9. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o pierwszej współrzędnej x_0 .

a) $f(x) = (5x^2 - 4)^6$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x+4} + \frac{4}{x}$, $x_0 = 4$

b) $f(x) = \sqrt{6x^4+5x}$, $x_0 = -1$

d) $f(x) = x \cdot (x+3)^5$, $x_0 = -2$

MINISPRAWDZIAN

51. Dane są dwie funkcje: $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = 2x + 1$. Który wzór opisuje funkcję $f \circ g \circ g$?

A. $y = 4x^2 + 24x - 40$

B. $y = 16x^2 + 24x + 6$

C. $y = 4x^2 - 9$

D. $y = -4x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 12x - 3$

52. Jaka wartość ma pochodna funkcji $y = \sqrt{3x-1}$ w punkcie 1?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $3\sqrt{2}$

D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

53. Styczną do wykresu funkcji $y = (5x + 6)^4$ w punkcie o współrzędnych $(-1, 1)$ opisuje równanie:

A. $y = 4x + 5$

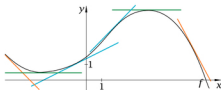
C. $y = 20x + 21$

B. $y = 5x + 6$

D. $y = 20x - 19$

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

- 1 Na rysunku przedstawiono fragment wykresu pewnej funkcji f oraz zaznaczono kilka stycznych do tego wykresu.



Można zauważyć, że jeśli funkcja jest rosnąca w pewnym przedziale, to styczne do wykresu w punktach odpowiadających temu przedziałowi są nachylone do osi x pod kątem ostrym. A jeśli funkcja jest malejąca, to odpowiednie styczne są nachylone do osi x pod kątem rozwartym.

Ponieważ współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji w punkcie $(x, f(x))$ jest wartość pochodnej tej funkcji w punkcie x , za pomocą znaku pochodnej możemy określić monotoniczność funkcji.

Twierdzenie

Jeśli pochodna funkcji jest dodatnia w przedziale $(a; b)$, to funkcja ta jest w tym przedziale rosnąca.

Jeśli pochodna funkcji jest ujemna w przedziale $(a; b)$, to funkcja ta jest w tym przedziale malejąca.

Jeżeli pochodna funkcji jest równa 0 w przedziale $(a; b)$, to funkcja ta jest w tym przedziale stała.

Zwróć uwagę, że twierdzenie pozwala określić monotoniczność funkcji na przedziale otwartym. Warto pamiętać, że jeśli funkcja jest rosnąca w pewnym przedziale $(a; b)$ i jest ciągła w przedziale $\langle a; b \rangle$, to zachowuje monotoniczność także na końcach tego przedziału. Zatem możemy stwierdzić, że jest rosnąca w przedziale $\langle a; b \rangle$. Podobnie jest w wypadku, gdy funkcja jest malejąca.

PRZYKŁAD 1 Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 7$.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 7$$

Dziedzina: $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 16$$

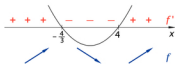
Dziedzina: $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$\Delta = 256 \quad \sqrt{\Delta} = 16$$

$$x_1 = \frac{8-16}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{8+16}{6} = 4$$



$$f'(x) > 0, \text{ gdy } x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (4; +\infty)$$

$$f'(x) < 0, \text{ gdy } x \in \left(-\frac{4}{3}; 4\right)$$

Aby określić monotoniczność funkcji, badamy, jak zmienia się znak jej pochodnej. Ustalamy miejsca zerowe pochodnej i szkicujemy wykres.

Strzałki ilustrują monotoniczność funkcji f .

Z wykresu odczytujemy rozwiązania nierówności.

Odp. Funkcja f jest ciągła w $\mathbb{R}$, więc jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$ oraz w przedziale $(4; +\infty)$ i jest malejąca w przedziale $\left(-\frac{4}{3}; 4\right)$.

ZADANIE Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 6$.

Aby określić monotoniczność funkcji różniczkowalnej, nie musimy rysować dokładnego wykresu pochodnej, wystarczy schematycznie zaznaczyć zmiany znaku tej pochodnej. Ważne jest, aby odczytywać z takiego wykresu przedziały monotoniczności funkcji, nie zapomnieć o dziedzinie rozważanej funkcji i o dziedzinie jej pochodnej.

PRZYKŁAD 2 Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

Dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x-3) - 1 \cdot x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$$

Dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = 0$$

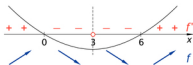
$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 6$$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej.

Mianownik pochodnej ma zawsze wartość dodatnią, więc znak pochodnej jest taki sam jak znak licznika. Zatem wystarczy naszkicować wykres zmiany znaku wartości funkcji z licznika, zaznaczyć punkty, które nie należą do dziedziny, i na podstawie tego rysunku określić, jaki znak ma pochodna w przedziałach, w których jest określona.

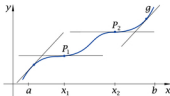


Odp. Funkcja f jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, więc jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$ oraz w przedziale $(6; +\infty)$, a malejąca w przedziale $(0; 3)$ oraz w przedziale $(3; 6)$.

ZADANIE Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$.

ĆWICZENIE Narysuj wykres funkcji $f(x) = x^3$. Czy funkcja ta jest rosnąca? Czy jej pochodna jest dodatnia w każdym punkcie?

Jeśli pochodna funkcji jest dodatnia w pewnym przedziale, to funkcja jest w tym przedziale rosnąca. Tej implikacji jednak nie można odwrócić. Może się bowiem zdarzyć, że funkcja jest rosnąca w pewnym przedziale, a pochodna nie w każdym punkcie tego przedziału jest dodatnia.



Przyjrzyj się wykresowi przedstawionemu obok. Funkcja g jest różniczkowalna i rosnąca w $(a; b)$. Styczne do wykresu we wszystkich punktach są nachylnie do osi x pod kątem ostrym z wyjątkiem dwóch punktów P_1 i P_2 , w których styczne są równoległe do osi x . Pochodna funkcji g w punktach x_1 i x_2 jest równa 0.

zadania 1–8 ►

II **PRZYKŁAD 3** a) Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

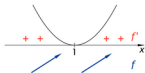
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

Dziedzina: $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\Delta = 0 \quad x_0 = 1$$



$$f'(x) > 0, \text{ gdy } x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

Odp. Funkcja f jest ciągła w $\mathbb{R}$, więc jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$ oraz rosnąca w przedziale $(1; +\infty)$. Zatem funkcja f jest rosnąca.

b) Ustal, dla jakiej wartości parametru p funkcja $f(x) = px^3 + x^2 + px + 1$ jest monotoniczna. Określ, czy jest rosnąca, czy — malejąca.

$$f(x) = px^3 + x^2 + px + 1$$

$$f'(x) = 3px^2 + 2x + p$$

Jeśli $p = 0$, to $f'(x) = 2x$, czyli pochodna jest funkcją liniową, która zmienia znak, więc funkcja f nie jest monotoniczna.

Jeśli $p \neq 0$, to $f'(x) = 3px^2 + 2x + p$ jest funkcją kwadratową i nie zmienia znaku, gdy $\Delta \leq 0$.

$$\Delta \leq 0 \iff 4 - 12p^2 \leq 0$$

$$p^2 \geq \frac{1}{3}, \text{ stąd } p \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ lub } p \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Jeśli $p \in (-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3})$, to wykres funkcji f' jest parabolą o ramionach skierowanych w dół, czyli $f'(x)$ jest zawsze liczbą niedodatnią. Ponieważ funkcja f jest ciągła w $\mathbb{R}$, więc jest malejąca.

Analogicznie, jeśli $p \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, to funkcja f jest rosnąca.

Odp. Funkcja f jest malejąca, gdy $p \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$, i jest rosnąca, gdy $p \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ZADANIE a) Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = -x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}x - 3$.

b) Ustal, dla jakiej wartości parametru a funkcja $f(x) = \frac{a}{3}x^3 - 2x^2 + ax - 2$ jest monotoniczna. Określ, czy jest rosnąca, czy — malejąca.

Funkcje różniczkowalne i monotoniczne spełniają warunek opisany w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie

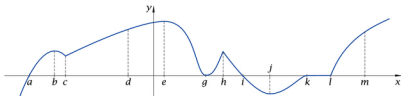
Jeśli funkcja f jest rosnąca i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$, to dla każdego argumentu x z tego przedziału $f'(x) \geq 0$.

Jeśli funkcja f jest malejąca i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$, to dla każdego argumentu x z tego przedziału $f'(x) \leq 0$.

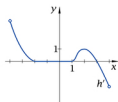
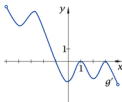
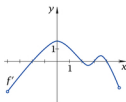
zadania 9–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

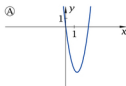
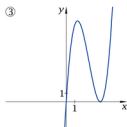
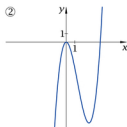
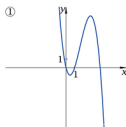
1. Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji f . Na podstawie tego fragmentu podaj przedziały otwarte, w których pochodna funkcji f przyjmuje wartości dodatnie, oraz przedziały, w których pochodna przyjmuje wartości ujemne.



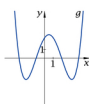
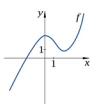
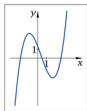
2. Na podstawie wykresów pochodnych f' , g' i h' wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f , g oraz h .



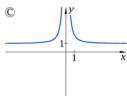
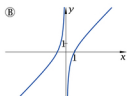
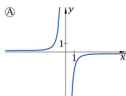
3. Na rysunkach ①, ②, ③ przedstawione są wykresy pewnych funkcji, a na rysunkach ④, ⑤ i ⑥ przedstawiono wykresy pochodnych tych funkcji. Połącz w pary funkcje i ich pochodne.



4. Na rysunku w ramce przedstawiono wykres funkcji, która jest pochodną jednej z funkcji f , g lub h . Którę?



5. Jeden z poniższych rysunków przedstawia wykres pewnej funkcji f , jeden z dwóch pozostałych rysunków przedstawia wykres funkcji f' , a trzeci — wykres pochodnej funkcji f' , czyli f'' . Który z tych wykresów jest wykresem funkcji f , który wykresem funkcji f' , a który — funkcji f'' ?



6. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = x^3 + 18x - 7$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 16x$

e) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 18x^2$

b) $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{9}x + 13$

d) $f(x) = -2x^4 + x^2 - 5$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 6x^3 + 10x^2$

7. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+7}$

e) $f(x) = \frac{3x^2-5}{x^2+1}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2x+1}$

f) $f(x) = \frac{2x^2-6}{x-2}$

8. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = x - \sqrt{x}$

b) $f(x) = 2x + \frac{1}{3x^2}$

c) $f(x) = 3x - \frac{x^2}{\sqrt{x}}$

9. Ustal, dla jakich wartości parametru a funkcja f jest rosnąca.

a) $f(x) = x^5 + ax$

b) $f(x) = ax^3 + ax + 1$

10. Ustal, dla jakich wartości parametru a funkcja f jest malejąca.

a) $f(x) = -x^3 + (a-1)x$

b) $f(x) = ax^5 - 4x$

11. Ustal, dla jakich wartości parametru p funkcja f jest monotoniczna.

a) $f(x) = x^3 + px^2 + x + 1$

c) $f(x) = px^3 - x^2 + 3px + 1$

b) $f(x) = px^3 - px^2 + x + 1$

d) $f(x) = px^3 - px^2 + 2px - 3$

MINISPRAWDZIAN

51. Funkcja $f(x) = x^4 + 4x^3$ jest malejąca w przedziale:

A. $(-\infty; 3)$

B. $(-\infty; -3)$

C. $(-3; 0)$

D. $(-4; 0)$

52. Funkcja $f(x) = \frac{x^2+8}{1-x}$ jest rosnąca w:

A. $(-2; 4)$

C. $(-\infty; -2)$ oraz $(4; +\infty)$

B. $(-\infty; -2)$ oraz $(4; +\infty)$

D. $(-2; 1)$ oraz $(1; 4)$

53. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = (1-m^2)x^3 + mx$ jest rosnąca w zbiorze liczb rzeczywistych?

A. $m \in (-1; 1)$

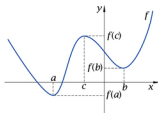
B. $m \in (-\infty; 1)$

C. $m \in (0; 1)$

D. $m \in (0; +\infty)$

EKSTREMA

I Przyjrzyj się wykresowi funkcji f na poniższym rysunku.



Zauważ, że można wskazać taki przedział zawierający argument a , w którym wartość $f(a)$ jest najmniejszą wartością funkcji w tym przedziale. Także $f(b)$ jest najmniejszą wartością funkcji f dla pewnego przedziału zawierającego argument b .

Z kolei dla argumentu c można wskazać przedział zawierający ten argument, w którym wartość $f(c)$ jest największą wartością funkcji f w tym przedziale.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **minimum lokalne właściwe** równe $f(x_0)$, gdy można wskazać takie sąsiedztwo punktu x_0 , że dla każdego argumentu x z tego sąsiedztwa $f(x_0) < f(x)$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **maksimum lokalne właściwe** równe $f(x_0)$, gdy można wskazać takie sąsiedztwo punktu x_0 , że dla każdego argumentu x z tego sąsiedztwa $f(x_0) > f(x)$.

Uwaga. Ogólniejsze pojęcia to minimum lokalne i maksimum lokalne (bez wyrażenia „właściwe”). Przyjmuje się wówczas, że punkt x_0 musi spełniać dla każdej liczby x z pewnego sąsiedztwa punktu x_0 odpowiednio warunki $f(x_0) \leq f(x)$ ($f(x_0) \geq f(x)$).

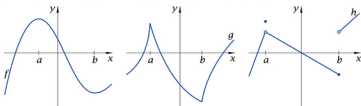
W dalszej części tego rozdziału będziemy dla uproszczenia używać nazwy „minimum”, mając na myśli „minimum lokalne właściwe”. Podobnie zamiast mówić „maksimum lokalne właściwe”, będziemy używać słowa „maksimum”.

Zauważ, że funkcja może mieć kilka minimów i kilka maksimów. Może się też zdarzyć, że niektóre minima są większe od niektórych maksimów. Minimum nie musi być najmniejszą wartością funkcji. Podobnie maksimum nie musi być największą wartością funkcji.

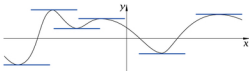
ĆWICZENIE A Narysuj wykres takiej funkcji f , która w punktach -4 i 2 ma maksima, a w punktach -1 i 5 ma minima, przy czym minimum w punkcie 5 jest większe niż maksimum w punkcie -4 , czyli $f(5) > f(-4)$.

Jeśli funkcja osiąga w pewnym punkcie minimum albo maksimum, to będziemy mówili, że osiąga w tym punkcie **ekstremum**.

Każda z poniższych funkcji ma ekstrema w punktach a i b , ale tylko pierwsza z tych funkcji — funkcja f — ma w tych punktach pochodną (pozostałe dwie funkcje nie są różniczkowalne w punktach a i b).



Wiadomo, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna, to w każdym punkcie jej wykresu można poprowadzić styczną. Gdy taka funkcja osiąga ekstremum dla argumentu x_0 , to styczna do jej wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi x . Zatem współczynnik kierunkowy takiej stycznej jest równy 0 , czyli wartość pochodnej w punkcie x_0 jest równa 0 .



Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeśli funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0 i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.

Możemy powiedzieć, że warunek $f'(x_0) = 0$ musi być koniecznie spełniony, aby funkcja f różniczkowalna w punkcie x_0 miała w tym punkcie ekstremum. Warunek ten nie jest jednak wystarczający. Na przykład funkcja $f(x) = x^3$ spełnia w punkcie 0 warunek $f'(x_0) = 0$, a nie ma w tym punkcie ekstremum.

ĆWICZENIE B Narysuj wykres funkcji, która jest ciągła w przedziale $(1;5)$ i która jest malejąca w przedziale $(1;3)$ oraz rosnąca w przedziale $(3;5)$. Czy twoja funkcja osiąga w przedziale $(1;5)$ ekstremum?

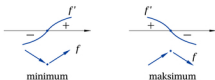
Warunek, który wystarczy, by stwierdzić, że w punkcie x_0 funkcja ma ekstremum, opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia ekstremum)

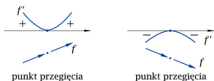
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ oraz $f'(x) < 0$, gdy $x \in (a; x_0)$, oraz $f'(x) > 0$, gdy $x \in (x_0; b)$, to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum.

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ oraz $f'(x) > 0$, gdy $x \in (a; x_0)$, oraz $f'(x) < 0$, gdy $x \in (x_0; b)$, to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum.

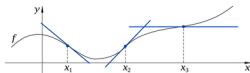
W pewnym uproszczeniu można powiedzieć, że jeśli $f'(x_0) = 0$ i pochodna przy przejściu przez punkt x_0 zmienia znak z „-” na „+”, to funkcja ma w punkcie x_0 minimum. A gdy pochodna zmienia znak z „+” na „-”, to funkcja ma w punkcie x_0 maksimum. Można to zilustrować tak:



Jeśli natomiast $f'(x_0) = 0$ i w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 pochodna nie zmienia znaku tak jak na poniższych rysunkach, to punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu.



Uwaga. Przypomnijmy, że punkt przegięcia to taki punkt wykresu, w którym styczna w tym punkcie przecina wykres. Wykres funkcji f na poniższym rysunku ma trzy punkty przegięcia, o pierwszych współrzędnych x_1, x_2, x_3 , ale spośród tych punktów warunek $f'(x) = 0$ spełnia tylko punkt x_3 .



PRZYKŁAD 1 Zbadaj monotoniczność i znajdź ekstrema funkcji f .

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x - 15}$$

Dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{-3, 5\}$

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - 15 \neq 0, \text{ stąd} \\ & x \neq -3 \text{ i } x \neq 5 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 2x - 15) - x^3(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 15)^2} = \frac{x^4 - 4x^3 - 45x^2}{(x^2 - 2x - 15)^2}$$

Dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{-3, 5\}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4x - 45) = 0$$

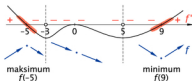
Obliczamy miejsca zerowe pochodnej.

$$x^2 = 0 \text{ lub } x^2 - 4x - 45 = 0$$

$$x = 0 \quad \Delta = 16 + 180 = 196$$

pierwiastek
dwukrotny

$$x = \frac{4 - 14}{2} = -5 \text{ lub } x = \frac{4 + 14}{2} = 9$$



Mianownik pochodnej ma zawsze wartość dodatnią, więc znak pochodnej jest taki sam jak znak licznika. Szkicujemy wykres zmiany znaku wartości funkcji z licznika, zaznaczamy punkty, które nie należą do dziedziny, i rozpatrujemy zmianę znaku pochodnej w sąsiedztwie punktów, w których pochodna jest równa zero.

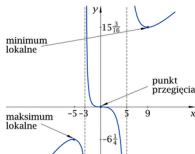
$$f(-5) = \frac{(-5)^3}{(-5)^2 - 2 \cdot (-5) - 15} = -6\frac{1}{4}$$

$$f(9) = \frac{9^3}{9^2 - 2 \cdot 9 - 15} = 15\frac{3}{16}$$

Odp. W każdym z przedziałów $(-\infty; -5)$ i $(9; +\infty)$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziałach $(-5; -3)$, $(-3; 5)$ i $(5; 9)$ jest malejąca. Funkcja f ma w punkcie -5 maksimum równe $-6\frac{1}{4}$, a w punkcie 9 minimum równe $15\frac{3}{16}$.

ZADANIE Zbadaj monotoniczność i znajdź ekstrema funkcji $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5x + 4}$.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji f , rozważanej w powyższym przykładzie. Zwróć uwagę, że $f'(0) = 0$, ale w punkcie 0 funkcja f nie ma ekstremum. Punkt $(0, f(0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f .



zadania 1-8

II PRZYKŁAD 2 Wyznacz liczbę rozwiązań równania $3x^4 + 8x^3 - 18x^2 = m$ w zależności od wartości parametru m .

$$f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x^4 \left(3 + \frac{8}{x} - \frac{18}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = x^4 \left(3 + \frac{8}{x} - \frac{18}{x^2} \right) = +\infty$$

$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 + 24x^2 - 36x = 0$$

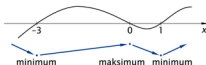
$$12x(x^2 + 2x - 3) = 0$$

$$12x = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) = 16$$

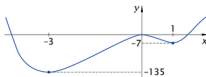
$$x = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad \text{lub} \quad x = \frac{-2+4}{2} = 1$$



$$f(-3) = 3 \cdot (-3)^4 + 8 \cdot (-3)^3 - 18 \cdot (-3)^2 = -135$$

$$f(0) = 3 \cdot 0^4 + 8 \cdot 0^3 - 18 \cdot 0^2 = 0$$

$$f(1) = 3 \cdot 1^4 + 8 \cdot 1^3 - 18 \cdot 1^2 = -7$$



Równanie $f(x) = m$:

nie ma rozwiązań, gdy $m \in (-\infty; -135)$

ma jedno rozwiązanie, gdy $m = -135$

ma dwa rozwiązania, gdy $m \in (-135; -7) \cup (0; +\infty)$

ma trzy rozwiązania, gdy $m \in \{-7, 0\}$

ma cztery rozwiązania, gdy $m \in (-7; 0)$

Ustalamy własności funkcji f istotne do naszkicowania wykresu.

Szkicujemy wykres funkcji f .

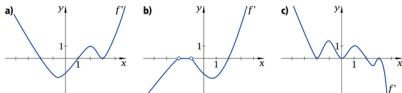
Ustalamy, w ilu punktach prosta $y = m$ przecina wykres funkcji f w zależności od wartości parametru m .

ZADANIE Wyznacz liczbę rozwiązań równania $2x^3 + 15x^2 + 24x = p$ w zależności od wartości parametru p .

zadanie 9

ZESTAW ZADAŃ

1. Rysunek przedstawia fragment wykresu pochodnej funkcji f . Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f oraz podaj punkty, w których osiąga ona ekstrema.



2. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji f .

- a) $f(x) = x^3 - 15x^2 + 6$ d) $f(x) = -3x^4 - 8x^3 + 7$
 b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$ e) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + x^3 - 9x^2 - \frac{3}{4}$
 c) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$ f) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$

3. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji f .

- a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ e) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$
 b) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ f) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 3}$

4. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji f .

- a) $f(x) = x^2|x - 3|$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + |x^2 - 3x|$

5. Znajdź punkty, w których podana funkcja osiąga ekstrema.

- a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 4x + 3}$ b) $f(x) = \frac{x^3}{-x^2 + x + 6}$ c) $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 3x + 1}$

6. Korzystając z własności pochodnej, wyprowadź wzór pozwalający obliczać pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli o równaniu $y = ax^2 + bx + c$.

7. Wykaż podaną własność.

- a) Jeśli $a \neq 0$, to funkcja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma co najwyżej dwa ekstrema.
 b) Jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to funkcja $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ ma dwa ekstrema, ponadto jedno z nich ma w punkcie 0.
 c) Jeśli $ab < 0$, to funkcja $g(x) = ax^3 + bx + c$ ma dwa ekstrema.
 d) Jeśli $a \neq 0$ i $b^2 - 3ac > 0$, to funkcja $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma dwa ekstrema.

8. Wykaż, że funkcja wielomianowa n -tego stopnia ma co najwyżej $n-1$ ekstremów.

II 9. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru p .

a) $-2x^3 + 15x^2 - 36x = p$

c) $\sqrt{x} - x = p$

b) $3x^4 + 16x^3 + 18x^2 = p$

d) $(x^2 - 1)\sqrt{x} = p$

MINISPRAWDZIAN

51. Funkcja $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x$ ma ekstremum w punkcie:

A. 2

B. -3

C. 2 oraz -3

D. 0

52. Dana jest funkcja $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$. Suma osiąganych przez nią ekstremów jest równa:

A. -38

B. 2

C. -2

D. -22

53. Zbiór wszystkich wartości parametru m , dla których równanie $4x^3 - 9x^2 + 6x = m$ ma dwa rozwiązania, to:

A. $\{1, 1\frac{1}{4}\}$

B. $\langle 1; 1\frac{1}{4} \rangle$

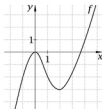
C. $\{\frac{1}{2}, 1\}$

D. $\{1\frac{1}{4}\}$

ZASTOSOWANIA POCHODNEJ

I

ĆWICZENIE A Na rysunku obok przedstawiony jest wykres pewnej funkcji f . Odczytaj ekstrema tej funkcji w przedziale $\langle -1; 4 \rangle$. Jaka jest najmniejsza, a jaka największa wartość funkcji w tym przedziale?



Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle$, to największą wartością funkcji w tym przedziale jest albo największe z maksimów lokalnych w tym przedziale (o ile funkcja takie maksima osiąga), albo jedna z liczb $f(a)$ lub $f(b)$. Podobnie najmniejszą wartością tej funkcji jest albo najmniejsze z minimów w tym przedziale (o ile funkcja takie minima osiąga), albo jedna z liczb $f(a)$ lub $f(b)$.

PRZYKŁAD 1 Ustal najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2$ w przedziale $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{8}$$

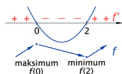
$$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 = 16$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$



$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$$

Odp. W przedziale $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$ najmniejszą wartością funkcji f jest -4 , a największą wartością jest 16 .

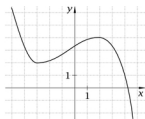
ZADANIE Ustal najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ w przedziale $[-4; 1]$.

Funkcja w przedziale otwartym może nie przyjmować wartości najmniejszej albo największej, mimo że może mieć w tym przedziale ekstremum.

ĆWICZENIE B Ustal, czy funkcja, której wykres przedstawiono na rysunku obok, osiąga ekstremum w podanym przedziale oraz czy przyjmuje wartość najmniejszą lub największą w tym przedziale.

a) $(-4; 4)$

b) $(-5; 3)$



zadania 1-3 ►

II Umiejętność znajdowania ekstremów można wykorzystać przy rozwiązywaniu tzw. zagadnień optymalizacyjnych.

PRZYKŁAD 2 Projektowany basen ma mieć pojemność 60 m^3 oraz dwa razy większą długość niż szerokość. Głębokość tego basenu ma być w każdym miejscu jednakowa. Dno i ściany basenu mają być pokryte kafelkami. Jakie wymiary powinien mieć basen, aby powierzchnia pokryta kafelkami była jak najmniejsza? Wyznacz tę najmniejszą powierzchnię.



V — objętość basenu
 P — pole powierzchni ścian i dna basenu

$$V = 60 \text{ m}^3$$

$$P = 2x \cdot x + 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot 2x \cdot h = 2x^2 + 6xh$$

$$60 = 2x^2 h, \text{ stąd } h = \frac{30}{x^2}$$

$$P = 2x^2 + 6x \cdot h = 2x^2 + 6x \cdot \frac{30}{x^2}$$

$$P(x) = 2x^2 + \frac{180}{x} \quad x \in (0; +\infty)$$

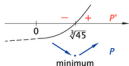
$$P'(x) = 4x - \frac{180}{x^2} \quad x \in (0; +\infty)$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3 - 180}{x^2} = 0$$

$$4x^3 = 180, \text{ stąd } x = \sqrt[3]{45}$$

Znajdujemy wzór pozwalający obliczyć P . We wzorze tym występują dwie zmienne: x i h . Aby przedstawić P jako funkcję tylko jednej zmiennej x , znajdujemy związek między zmiennymi x i h .

Otrzymaliśmy funkcję $P(x)$ określoną dla argumentów dodatnich (x oznacza szerokość basenu, jest więc wielkością dodatnią).



Szukamy minimum funkcji P , tzn. obliczamy pochodną, a następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej i badamy zmianę znaku pochodnej w sąsiedztwie jej miejsc zerowych.

W punkcie $\sqrt[3]{45}$ funkcja P osiąga minimum i $P(\sqrt[3]{45})$ jest najmniejszą wartością tej funkcji.

$$P(\sqrt[3]{45}) = 2 \cdot (\sqrt[3]{45})^2 + \frac{180}{\sqrt[3]{45}} = 6\sqrt[3]{75} + \frac{180}{\sqrt[3]{45}} \approx 75,91$$

$$x = \sqrt[3]{45} \approx 3,56 \quad 2x = 2\sqrt[3]{45} \approx 7,11$$

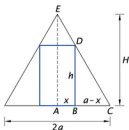
$$h = \frac{30}{(\sqrt[3]{45})^2} = \sqrt[3]{13\frac{1}{3}} \approx 2,37$$

Obliczamy długość i głębokość basenu.

Odp. Wymiary basenu powinny wynosić około: $3,56 \text{ m} \times 7,11 \text{ m} \times 2,37 \text{ m}$. Pokryta kafelkami powierzchnia wyniesie około $75,9 \text{ m}^2$.

ZADANIE Projektowane pudełko bez pokrywki ma mieć kształt prostopadłościanu o objętości 300 cm^3 i jak najmniejsze pole powierzchni. Jego podstawą ma być prostokąt o stosunku długości boków 3:1. Wyznacz wymiary tego pudełka.

PRZYKŁAD 3 W stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt równoboczny o boku o długości $2a$, wpisano walec o największej możliwej objętości. Znajdź wymiary tego walca.



Rysujemy przekrój osiowy stożka z wpisanym walcem.

$$H = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

H — wysokość trójkąta równobocznego o długości boku równej $2a$

V — objętość walca

$$V = \pi x^2 h$$

$$\frac{h}{a-x} = \frac{H}{a}$$

$$\frac{h}{a-x} = \frac{a\sqrt{3}}{a}$$

$$h = \sqrt{3}(a-x)$$

$$V = \pi x^2 \cdot \sqrt{3}(a-x)$$

$$V(x) = \sqrt{3}\pi(ax^2 - x^3) \quad x \in (0; a)$$

$$V'(x) = \sqrt{3}\pi(2ax - 3x^2) \quad x \in (0; a)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\pi(2ax - 3x^2) = 0$$

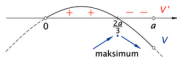
$$x(2a - 3x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = \frac{2a}{3}$$

Znajdujemy wzór pozwalający obliczać objętość walca; w otrzymanym wzorze występują dwie zmienne.

Aby przedstawić V jako funkcję zmiennej x , znajdujemy związek między zmiennymi x i h ; korzystamy z podobieństwa trójkątów BCD i ACE .

Otrzymaliśmy funkcję $V(x)$ określoną dla argumentów z przedziału $(0; a)$, bo x musi być liczbą dodatnią i mniejszą od a .



Funkcja V osiąga maksimum dla argumentu $\frac{2a}{3}$.

Obliczamy maksimum funkcji V .

Wówczas:

$$h = \sqrt{3} \left(a - \frac{2a}{3} \right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Odp. Promień podstawy walca jest równy $\frac{2a}{3}$, a jego wysokość wynosi $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

ZADANIE W stożek, którego przekrojem osiowym jest trójkąt o bokach o długościach 5, 5 i 6, wpisano walec o największej możliwej objętości. Znajdź wymiary tego walca.

zadania 4-31 ►

ZESTAW ZADAŃ

I 1. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$ w przedziale:

- a) $\langle -2; 4 \rangle$ b) $\langle -2; 1 \rangle$ c) $\langle -1; 1 \rangle$ d) $\langle -\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \rangle$

2. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = x^3 - 4,5x^2 + 5$, $\langle -2; 3 \rangle$ c) $f(x) = -x^3 - 9x^2 - 15x$, $\langle -3; 0 \rangle$
 b) $f(x) = x^3 - 12x - 6$, $\langle -1; 4 \rangle$ d) $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x$, $\langle 3; 5 \rangle$

3. Wyznacz zbiór wartości funkcji.

- a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

II 4. a) Znajdź takie dwie liczby dodatnie, których suma jest równa 15, a iloczyn jednej z nich i kwadratu drugiej jest możliwie największy.

b) Znajdź takie dwie liczby dodatnie, których suma jest równa 20, a suma sześciastu jednej z nich i kwadratu drugiej jest możliwie najmniejsza.

c) Znajdź takie dwie liczby dodatnie, których iloczyn jest równy 2, a suma jednej z nich i kwadratu drugiej jest możliwie najmniejsza.

5. Przy ścianie budynku gospodarczego chcemy wyznaczyć dla zwierząt wybieg o powierzchni 100 m^2 . Kształt wybiegu jest przedstawiony na rysunku. Jakie wymiary powinien mieć ten wybieg, aby na jego ogrodzenie zużyć jak najmniej siatki?

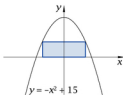


6. Napis reklamowy ma być umieszczony w prostokątnej ramce o polu powierzchni 100 cm^2 . W ramce napis muszą otaczać marginesy: górny i dolny o szerokości 1 cm, a boczne — o szerokości 0,5 cm. Jakie wymiary powinna mieć ta ramka, by powierzchnia przeznaczona na napis była jak największa?

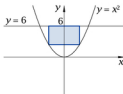
7. Z drutu o długości 6 m chcemy wykonać ramkę w kształcie trójkąta prostokątnego. Wyznacz długości przyprostokątnych takiej ramki, która ogranicza powierzchnię o największym polu.

8. Oblicz, jakie największe pole może mieć prostokąt wpisany (jak na rysunku) w obszar ograniczony:

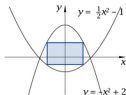
a) parabolą i osią x ,



b) parabolą i prostą,

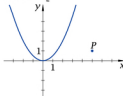


c) dwiema parabolami.

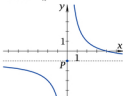


9. Znajdź na wykresie funkcji f punkt położony najbliżej punktu P .

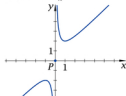
a) $f(x) = \frac{x^2}{2}$



b) $f(x) = \frac{4}{x} - 1$



c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$



10. a) Z drutu o długości 16 cm budujemy szkielet prostopadłościanu o podstawie kwadratowej. Oblicz, jakie powinny być wymiary tego prostopadłościanu, aby jego objętość była jak największa.

b) Z drutu o długości 8 m chcemy zbudować model prostopadłościanu, którego podstawa jest prostokątem o stosunku długości boków 2 : 1. Oblicz, jakie wymiary powinien mieć ten prostopadłościan, aby jego objętość była największa.

c) Wykaż, że spośród wszystkich prostopadłościanów o podstawie kwadratowej i danej sumie długości krawędzi największe pole powierzchni ma sześcian.

11. Z kartonu w kształcie kwadratu należy wyciąć w narożnikach cztery jednakowe kwadraty, a następnie złożyć otwarte pudełko w kształcie prostopadłościanu. Oblicz, jaką długość powinny mieć boki odciętych kwadratów, aby pojemność pudełka była jak największa, jeżeli:

a) karton ma kształt kwadratu o boku o długości 50 cm,



b) karton ma kształt prostokąta o wymiarach 60 cm $\times$ 40 cm.



12. Chcemy wykonać otwartą skrzynkę w kształcie prostopadłościanu o kwadratowym dnie. Skrzynka ma mieć pojemność 1 m^3 . Oblicz, jakie wymiary powinien mieć ten pojemnik, aby łączny koszt materiałów, z których będzie wykonany, był jak najmniejszy, jeżeli:

- a) ścianki mają być wykonane z materiału, którego 1 m^2 kosztuje 2 zł, a dno — z materiału, którego 1 m^2 kosztuje 3 zł,
- b) ścianki mają być wykonane z materiału, którego 1 m^2 kosztuje 2 zł, a dno — z materiału, którego 1 m^2 kosztuje 5 zł,
- c) ścianki i dno mają być wykonane z materiałów o cenach podanych w podpunkcie a), a dodatkowo do pojemnika zrobiono pokrywkę wykonaną z tego samego materiału co ścianki.

Uwaga. Przy obliczeniach pominąć grubość ścianek i dna.

13. Złotnik ma wykonać prostopadłościenne pudełko o kwadratowej podstawie, bez przykrywki. Ścianki i dno, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz, mają być pokryte warstwą złota. Oblicz, jakie wymiary powinno mieć to pudełko, jeśli:

- a) złota przeznaczonego na pokrycie ścianek i dna wystarczy do pozłocenia tylko 100 cm^2 , a złotnik chce, by pudełko miało jak największą pojemność,
- b) ma mieć pojemność 100 cm^3 , a złotnik chce zużyć jak najmniej złota na pokrycie jego ścianek i dna.

Uwaga. Przy obliczeniach pominąć grubość ścianek i dna.

14. Oblicz, jaką największą objętość może mieć graniastosłup prawidłowy trójkątny, w którym suma długości wszystkich krawędzi jest równa 9.

15. Oblicz, jaką największą objętość może mieć graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego krótsza przekątna ma długość 15.

16. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 30° . Oblicz, jaką największą objętość może mieć ten graniastosłup, jeżeli jego pole powierzchni całkowitej wynosi 48.

17. Oblicz, jaka powinna być wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego krawędź boczna ma długość 12, aby jego objętość była największa.

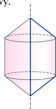
18. Oblicz, jakie powinny być długości boków prostokąta o obwodzie 60 cm, aby objętość walca otrzymanego w wyniku obrotu tego prostokąta wokół jednego z boków była największa.

19. Kwadrat, którego bok ma długość π , rozcięto na dwa prostokąty. Po ich zwinieniu utworzono powierzchnie boczne walców o wysokości π . Jak należy dokonać cięcia, aby suma objętości tych walców była największa?

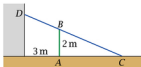
20. Puszka w kształcie walca ma mieć objętość V . Oblicz, jakie wymiary powinna mieć ta puszka, aby na jej wykonanie zużyć jak najmniej materiału.

21. Oblicz, jaką największą objętość może mieć bryła, którą otrzymamy w wyniku obrotu trójkąta równoramiennego o obwodzie 6 wokół podstawy.

22. Trapez równoramienny obracamy wokół dłuższej podstawy. Obwód trapezu wynosi 20, a dłuższa podstawa ma długość 8. Oblicz, jakie długości powinny mieć pozostałe boki trapezu, aby bryła otrzymana w wyniku obrotu miała największą objętość.



23. Oblicz, jaką wysokość powinien mieć stożek, którego tworząca ma długość 3, aby jego objętość była największa.



24. W odległości 3 m od ściany budynku stoi parkan AB o wysokości 2 m (zob. rysunek). Znajdź długość najkrótszej drabiny CD , która oparta o ziemię i parkan sięgnie do ściany budynku.

25. W stożek o promieniu podstawy R i wysokości H wpisujemy prostopadłościan, w którym stosunek długości krawędzi podstawy wynosi 2. Podstawa prostopadłościanu jest zawarta w podstawie stożka. Wyznacz wymiary prostopadłościanu o możliwie największej objętości.

26. W półkulę o promieniu R wpisujemy walec w taki sposób, aby ich podstawy były zawarte w kole ograniczającym półkulę. Oblicz wysokość tego z walców, który ma największą objętość.

27. W kulę o promieniu R wpisano graniastosłup prawidłowy trójkątny o możliwie największej objętości. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

28. Oblicz, jaka powinna być wysokość stożka wpisanego w kulę o promieniu R , aby jego objętość była największa. Oblicz tę objętość.

29. Oblicz, jaką wysokość powinien mieć stożek opisany na kuli o promieniu R , aby jego objętość była najmniejsza. Ile procent objętości tego stożka stanowi objętość kuli?

30. Na kuli o promieniu R opisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o możliwie najmniejszej objętości. Oblicz długość krawędzi podstawy oraz wysokość tego ostrosłupa.

31. W kulę o promieniu R wpisano ostrosłup prawidłowy trójkątny o możliwie największej objętości. Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.

MINISPRAWDZIAN

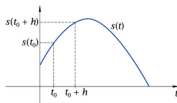
51. Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ w przedziale $\langle -2; 3 \rangle$ jest równa:
A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{2}{5}$
52. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 7 + m$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Dla jakiej wartości m funkcja f osiąga w przedziale $\langle -3; 0 \rangle$ wartość największą równą 0?
A. dla $m = -1$ C. dla $m = 7$
B. dla $m = 4$ D. dla $m = 0$
53. Liczbę 2 przedstawiono w postaci sumy dwóch liczb dodatnich w taki sposób, aby iloczyn sześcianu jednej z nich i kwadratu drugiej był możliwie największy. Iloczyn otrzymanych liczb wynosi:
A. 1 B. 0,96 C. 0,75 D. 0,19
54. Rozważmy romby, których suma długości przekątnych jest równa 6. Jaką największą objętość może mieć bryła otrzymana w wyniku obrotu takiego rombu wokół jednej z przekątnych?
A. $\frac{4}{3}\pi$ B. 8π C. $\frac{8}{3}\pi$ D. $\frac{9}{4}\pi$

ZASTOSOWANIA POCHODNEJ (CD.)

- I Przypuśćmy, że jakaś wielkość zmienia się w czasie, czyli jest pewną funkcją czasu. Wówczas pochodna tej funkcji opisuje, jak szybko zmienia się ta wielkość.

Wyobraź sobie na przykład, że rzucamy kamień pionowo w górę.

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $s(t)$ opisującej zależność wysokości kamienia nad ziemią od czasu t , który upłynął od chwili rzucenia kamienia.



Aby obliczyć, z jaką średnią prędkością poruszał się kamień od chwili t_0 do chwili $t_0 + h$, wystarczy obliczyć iloraz długości drogi (którą przebył kamień) przez czas, jaki upłynął między tymi momentami:

$$v_{\text{średnia}} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{(t_0 + h) - t_0} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Prędkość, jaką miał kamień w chwili t_0 , jest równa granicy tego ilorazu:

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Zatem prędkość w chwili t_0 to pochodna funkcji s w punkcie t_0 . Zauważ, że tak określona prędkość chwilowa może mieć wartość dodatnią (gdy kamień oddala się od ziemi), może także przyjmować wartość ujemną (gdy kamień przybliża się do ziemi), może także być równa zero (gdy kamień jest w najwyższym punkcie lotu).

Jeżeli funkcja s opisuje zmianę odległości w czasie t , to jej pochodna opisuje w tym ruchu prędkość.

$$v(t) = s'(t)$$

Zauważ, że prędkość też może się zmieniać w czasie. Pochodna tej prędkości opisywałaby wówczas tempo tych zmian. Wielkość fizyczna opisująca zmianę prędkości to przyspieszenie (a).

$$a(t) = v'(t)$$

zadania 1–9 ►

ZESTAW ZADAŃ

- ◀ 1. a) W ruchu jednostajnie przyspieszonym przebyłą drogę opisuje wzór:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

s_0 — droga początkowa
 v_0 — prędkość początkowa
 t — czas ruchu
 a — przyspieszenie

Oblicz pochodną funkcji s (porównaj otrzymany wynik ze wzorem na prędkość znanym z fizyki) oraz pochodną funkcji $s'(t)$.

b) Wykaż, że jeśli droga pokonywana przez poruszający się obiekt jest funkcją liniową czasu, to obiekt ten porusza się ruchem jednostajnym (ze stałą prędkością).

2. Kamień rzucono pionowo w górę z pewnej wysokości. Odległość h (w metrach) kamienia od ziemi opisuje funkcja $h(t) = -5t^2 + 30t + 35$, gdzie t oznacza czas w sekundach i $0 \leq t \leq 7$.

- a) Z jakiej wysokości rzucony został kamień?
 b) Jaką prędkość miał kamień po upływie 2 sekund ruchu?
 c) W którym momencie kamień zmienił kierunek ruchu?

3. Trzy piłeczki rozpoczęły ruch w tym samym momencie i poruszały się pionowo. Pierwsza piłeczka upadła na ziemię po 2 sekundach, druga po 3 sekundach, a trzecia — po 4 sekundach. Poniższe funkcje przedstawiają, jak się zmieniały odległości (w metrach) tych piłeczek od ziemi w zależności od czasu t (w sekundach).

$$d_1(t) = -5t^2 - 10t + 40$$

$$d_2(t) = -5t^2 + 45$$

$$d_3(t) = -5t^2 + 20t$$

- Którą piłeczkę rzucono pionowo w dół?
- Która z piłeczek miała prędkość początkową równą $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?
- Z jaką prędkością uderzyła w ziemię każda z tych piłeczek?

4. Wyobraź sobie, że z pojazdu kosmicznego znajdującego się nad powierzchnią planety wyrzucono w jej kierunku przedmiot z prędkością 5 m/s . Podane wzory pozwalają obliczyć odległość d (w metrach) między pojazdem a przedmiotem po upływie czasu t (w sekundach). Oblicz dla każdej z planet, jaką prędkość miałby wyrzucony przedmiot po upływie 1 sekundy i jakie miałby przyspieszenie.

Mars
 $d(t) = 1,85t^2 + 5t$

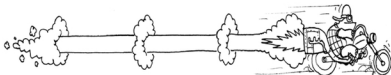
Wenus
 $d(t) = 4,44t^2 + 5t$

Jowisz
 $d(t) = 11,55t^2 + 5t$

- Podczas nadmuchiwania kulistego balonu jego promień r (w centymetrach) zmienia się zgodnie ze wzorem $r = 5\sqrt[3]{t} + 3$, gdzie t oznacza czas (w minutach), który upłynął od początku nadmuchiwania. Jak szybko się zmienia promień balonu po 1 minucie, a jak szybko — po 2 minutach od rozpoczęcia nadmuchiwania?
- Można przyjąć, że temperatura T (w stopniach Celsjusza) w piekarniku jest opisana zgodnie ze wzorem $T(t) = \frac{-220}{t+1} + 240$, gdzie t oznacza czas (w minutach), który upłynął od włączenia piekarnika. Jak szybko zmienia się temperatura po 30 sekundach, a jak szybko — po 2 minutach od włączenia piekarnika?

7. Zaobserwowano, że pewien obiekt poruszał się po linii prostej w taki sposób, że jego odległość d (w centymetrach) od ustalonego punktu P na tej prostej można było obliczyć ze wzoru $d(t) = t^3 - 5t^2 + 3t + 20$, gdzie t jest czasem (w sekundach), który upłynął od początku obserwacji.

- Oblicz prędkość i odległość obiektu od punktu P na początku obserwacji.
- Po jakim czasie od początku obserwacji obiekt zmienił kierunek ruchu?
- Jaka była najmniejsza odległość między obiektem i punktem P ?



8. Pewien obiekt przejechał przez punkt P i od tego momentu poruszał się wzdłuż linii prostej. Jego odległość d (w metrach) od punktu P zmieniała się zgodnie z poniższym wzorem:

$$d(t) = t^3 - 15t^2 + 90t$$

t — czas (w minutach), jaki upłynął od momentu,
w którym obiekt minął punkt P

- Jaka była prędkość obiektu, gdy mijał punkt P ?
- Po jakim czasie obiekt ponownie osiągnął taką prędkość, jaką miał w chwili mijania punktu P ?
- Wykaż, że po minięciu punktu P obiekt oddalał się od tego punktu.
- Oblicz najmniejszą prędkość, z jaką poruszał się obiekt po minięciu punktu P .

- 9.** Do wazonu, w którym było już trochę wody, dolewano wodę przez trzy minuty. W tym czasie głębokość wody w wazonie zmieniała się zgodnie ze wzorem:

$$g(t) = -\frac{t^4}{4} + \frac{5t^3}{3} - \frac{7t^2}{2} + 20t + 1$$

g — głębokość wody w chwili t (w cm)
 t — czas napełniania (w min); $0 \leq t \leq 3$



- Jaka była głębokość wody w wazonie przed rozpoczęciem dolewania, a jaka — po zakończeniu dolewania?
- Jak szybko wznosił się poziom wody w momencie, gdy upłynęły 2 minuty od rozpoczęcia dolewania?
- W którym momencie prędkość podnoszenia się poziomu wody w wazonie była największa, a w którym — najmniejsza?

MINISPRAWDZIAN

51. Częsteczką porusza się wzdłuż linii prostej i jej odległość d (w metrach) od pewnego punktu P po upływie czasu t (w sekundach) od początku ruchu opisuje wzór $d(t) = t^3 + 3t^2 + 2t + 1$. Jaka była prędkość początkowa tej częsteczki?

- A. $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ B. $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ C. $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ D. $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

52. Odległość d (w kilometrach) pociągu od stacji można obliczyć za pomocą wzoru $d(t) = t^3 - 6t^2 + 12t + 5$, gdzie t oznacza czas (w godzinach), jaki upłynął od godziny 12⁰⁰. Po pewnym czasie pociąg się zatrzymał. W jakiej odległości od stacji się wtedy znajdował?

- A. 2 km B. 5 km C. 6 km D. 13 km

1. Oblicz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^6 + 5x - 4$

b) $f(x) = 8\sqrt{x} - \frac{7}{x}$

c) $f(x) = \frac{3x^2}{5x - 2}$

d) $f(x) = \sqrt{3x^2 - \frac{5}{x^2}}$

e) $f(x) = (5x - 2)^6 \cdot (3x + 4)$

2. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 3x^2 - 4x$, równoległej do prostej o równaniu $y = -10x + 7$.

3. Wykaż, że pole dowolnego trójkąta ograniczonego osiami układu współrzędnych oraz styczną do hiperboli o równaniu $y = \frac{1}{x}$ jest równe 2.

4. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności oraz znajdź ekstrema funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = x^3 - 2|x|$

5. Wyznacz zbiór wartości funkcji f .

a) $f(x) = x^6 - 2x^3 + 5$ b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

6. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ w podanym przedziale.

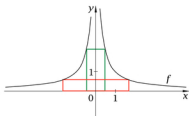
a) $\langle -1; 2 \rangle$

b) $\langle -5; -3 \rangle$

7. Ile rozwiązań ma równanie $f(x) = m$ w zależności od parametru m ?

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

8. Wyobraź sobie takie prostokąty, których dwa wierzchołki leżą na wykresie funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2} + 0,5$, a dwa pozostałe na osi x (zob. rysunek). Wyznacz współrzędne wierzchołków tego z prostokątów, który ma możliwie najmniejsze pole. Oblicz to pole.



9. Oblicz, jakie największe pole może mieć trapez wpisany w okrąg o promieniu 2,5 cm w ten sposób, że dłuższa jego podstawa jest średnicą okręgu.

10. Oblicz, jakie powinny być wymiary walca wpisanego w kulę o promieniu R , aby jego objętość była największa. Oblicz, ile razy objętość kuli jest większa od objętości takiego walca.

11. Objekt porusza się wzdłuż linii prostej. Jego odległość (w metrach) od pewnego punktu P na tej prostej można obliczyć ze wzoru $d(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t$, gdzie t (w sekundach) oznacza czas, który upłynął od rozpoczęcia ruchu.

a) Oblicz prędkość tego obiektu w momencie, gdy upłynęła pierwsza sekunda od rozpoczęcia ruchu.

b) Jaką największą odległość od punktu P osiągnął obiekt w ciągu początkowych 3 sekund ruchu?

Przygotowanie do matury



Działania na liczbach ■ Równania i nierówności ■ Ciągi
■ Własności funkcji. Funkcja liniowa ■ Funkcja kwadratowa
■ Wielomiany i wyrażenia wymierne ■ Funkcje wykładnicze
i logarytmiczne ■ Trygonometria ■ Planimetria ■ Geometria
analityczna ■ Stereometria ■ Granice i pochodne ■ Rachunek
prawdopodobieństwa ■ Procenty. Elementy statystyki

DZIAŁANIA NA LICZBACH

PIERWIASTKI

Niech $k \in \mathbb{N}$ i $k > 1$.

Gdy k jest liczbą parzystą, to dla $a \geq 0$ przyjmujemy, że:

$$\sqrt[k]{a} = b \Leftrightarrow (b^k = a \text{ i } b \geq 0)$$

Gdy k jest liczbą nieparzystą, to dla $a \in \mathbb{R}$ przyjmujemy, że:

$$\sqrt[k]{a} = b \Leftrightarrow b^k = a$$

PRAWA DZIAŁAŃ NA PIERWIASTKACH

Dla parzystej liczby n :

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ gdy } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ gdy } a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

$$\sqrt[n]{a^t} = (\sqrt[n]{a})^t, \text{ gdy } a \geq 0$$

Dla nieparzystej liczby m :

$$\sqrt[m]{a^m} = a$$

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \text{ dla } b \neq 0$$

$$\sqrt[m]{a^t} = (\sqrt[m]{a})^t$$

$$\sqrt[m]{-a} = -\sqrt[m]{a}$$

POTĘGI

Dla $n \in \mathbb{N}$ przyjmujemy, że:

$$a^0 = 1, \text{ gdy } a \neq 0 \quad a^1 = a \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ gdy } a \neq 0$$

Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$ oraz $k \in \mathbb{N}_+$. Wówczas dla $a \geq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k \quad a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^k}, \text{ gdy } a > 0$$

Niech $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oraz (p_n) jest ciągiem o wyrazach wymiernych, takim że $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = q$. Wówczas dla $a \geq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^q = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n}$$

PRAWA DZIAŁAŃ NA POTĘGACH

Niech a, b, s i t są takimi liczbami rzeczywistymi, że istnieją potęgi a^s, a^t i b^s . Wówczas dla $a > 0$ przyjmujemy, że:

$$a^s \cdot a^t = a^{s+t}$$

$$a^s : a^t = a^{s-t}$$

$$(a^s)^t = a^{s \cdot t}$$

$$(ab)^s = a^s b^s$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}, \text{ gdy } b \neq 0$$

Niech a i b będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $a > 0$, $b > 0$ i $a \neq 1$.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Liczbę $\log_{10} x$ nazywamy logarytmem dziesiętnym liczby x i oznaczamy $\log x$.

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW

Niech a, b, c występujące poniżej będą takimi liczbami, że istnieją odpowiednie logarytmy. Wówczas zachodzą równości:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a a^b = b$$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Różnica kwadratów: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Różnica sześciątów: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Wzór ogólny:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{ gdzie } n \in \mathbb{N}_+$$

Suma sześciątów: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Kwadrat sumy: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Sześciąt sumy: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześciąt różnicy: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

SYMBOL NEWTONA I WZÓR NEWTONA

Niech n i k będą takimi liczbami naturalnymi, że $k \leq n$. Wówczas:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \text{ dla } n > 0 \text{ i } 0! = 1)$$

Niech $n \in \mathbb{N}_+$. Wówczas:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

ZESTAW ZADAŃ

Uwaga. Znakiem $\boxtimes$ oznaczono zadania, które mogą się pojawić na egzaminie maturalnym wyłącznie w zakresie rozszerzonym.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Wartość wyrażenia $1001\frac{1}{3} : 2002\frac{2}{3} + \frac{1}{2001} \cdot \left(301\frac{3}{10} - 101\frac{1}{5}\right)$ jest równa:
A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $2\frac{1}{10}$
2. Wartość wyrażenia $(27^6 + 27^6 + 27^6)^3$ jest równa:
A. 3^{22} B. 3^{30} C. 3^{55} D. 3^{57}
3. Jeśli $a = 4$ i $b = -2$, to wartość wyrażenia $a^b + b^a + a^{\frac{1}{b}}$ jest równa:
A. -20 B. $-7\frac{7}{16}$ C. $16\frac{9}{16}$ D. $10\frac{1}{16}$
4. Dane są liczby: $a = 7^2 \cdot \sqrt{7}$, $b = (7^{-6})^{-\frac{2}{3}}$ i $c = \frac{7}{7^3}$. Liczby te spełniają warunek:
A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$
5. Która z podanych równości jest prawdziwa?
A. $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} = 3^{\frac{3}{2}}$ B. $\sqrt[3]{\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{2}}$ C. $\frac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[3]{9}} = 3^{-\frac{1}{2}}$ D. $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{9} = 3^{-\frac{1}{6}}$
6. Która z podanych liczb nie jest równa $0,25^{-2\frac{1}{3}}$?
A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{14}{3}}$ B. $\frac{1}{16\sqrt[3]{4}}$ C. $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$ D. $(4^7)^{-\frac{1}{3}}$
7. Przyjmij, że długość równika Ziemi jest równa 40 000 km, a obwód monety jednogroszowej — 50 mm. Ile razy obróciłaby się ta moneta, gdyby toczono ją wzdłuż drogi o długości równika?
A. $8 \cdot 10^8$ B. $1,25 \cdot 10^9$ C. $8 \cdot 10^5$ D. $0,8 \cdot 10^{10}$
8. Jedna z podanych liczb nie równa się trzem pozostałym. Wskaż tę liczbę.
A. $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $\log_{16} 0,25$ C. $\log_{\frac{1}{25}} 5$ D. $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$
9. Która z podanych liczb nie jest całkowita?
A. $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt{6}$ B. $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[3]{7}$ C. $\log_{\sqrt{5}} 25\sqrt{5}$ D. $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \frac{1}{4}$
10. Które z podanych wyrażeń ma największą wartość?
A. $\log_5 \frac{25}{7} + \log_5 \frac{7}{125}$ B. $\log_7 \frac{5}{7} - \log_7 \frac{5}{49}$ C. $\log_5 125^{\frac{1}{2}}$ D. $\log_7 \sqrt[3]{49}$

11. Przyjmij, że $\log 2 \approx 0,3$ i $\log 5 \approx 0,7$. Która z podanych równości jest fałszywa?

- A. $\log 2,5 \approx 0,4$ C. $\log 125 \approx 2,1$
B. $\log 20 \approx 1,3$ D. $\log \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,07$

12. Wartość wyrażenia $\frac{1}{\log_5 2} + \log_2 0,8$ jest równa:

- A. 1 B. 2 C. $3\frac{1}{2}$ D. 4

13. Wartość wyrażenia $\frac{3 - \log_3 6 + \log_3 4}{0,5 + \log_3 \sqrt{6}}$ jest równa:

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

14. Wartość wyrażenia $\log_{0,2} 8 \cdot \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{2} \cdot \log_{\sqrt[3]{4}} 25 \cdot \log_2 \sqrt[3]{5}$ jest liczbą:

- A. pierwszą C. całkowitą dodatnią
B. z przedziału $(-1; 1)$ D. niewymierną dodatnią

15. Wyrażenie $(5x - 2)^2 + 20x$ można przekształcić do postaci:

- A. $(5x + 2)^2 - 20x$ B. $(5x - 2)(5x + 2)$ C. $(5x - 1)^2 + 10x$ D. $(2x - 1)(5x + 2)$

16. Różnica $12355^2 - 12345^2$ jest równa:

- A. 100 B. 1000 C. 123 500 D. 247 000

17. Wartość wyrażenia $(\sqrt{3} - 2)^3$ jest równa:

- A. $15\sqrt{3} - 26$ B. $3\sqrt{3} - 8$ C. $9\sqrt{3} - 14$ D. $7\sqrt{3} - 14$

18. Wyrażenie $8x^3 - 3\sqrt{3}y^3$ przedstawiono w postaci iloczynu i jednym z czynników jest $2x - \sqrt{3}y$. Zatem drugim czynnikiem jest:

- A. $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2$ C. $4x^2 - 2\sqrt{3}y + 3$
B. $4x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2$ D. $2x^2 + 2\sqrt{3}y + \sqrt{3}$

19. Która z podanych liczb nie jest podzielna przez 5?

- A. $\frac{10!}{6 \cdot 5!}$ B. $\frac{\binom{5}{0}\binom{5}{4}\binom{4}{1}}{\binom{5}{3}}$ C. $\frac{5 \cdot 6!}{5! \cdot 6}$ D. $\binom{11}{9} \cdot \binom{9}{7}$

20. W rozwinięciu wyrażenia $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^7$ współczynnik przy x^5 jest równy:

- A. 8 B. 16 C. 350 D. 560

21. Przyjmuje się, że roztwór danej substancji jest tym bardziej kwasowy, im więcej jest w nim dodatnich jonów wodorowych. Kwasowość roztworu mierzy się za pomocą tzw. współczynnika pH określonego w następujący sposób:

$$\text{współczynnik pH} = -\log s,$$

gdzie s oznacza stężenie jonów wodorowych w danym roztworze (w molach/dm³).

Woda destylowana (czyli roztwór, który nie wykazuje ani kwasowości, ani zasadowości) ma współczynnik pH równy 7. W tabeli obok podano współczynniki pH niektórych substancji.

a) Oblicz stężenie jonów wodorowych w wodzie destylowanej i w roztworze piorącym.

b) Współczynnik pH kawy jest dwa razy większy niż współczynnik pH soku z cytryny. Jaki jest stosunek stężenia jonów wodorowych w tych substancjach?

c) Korzystając z podanego wyżej opisu współczynnika pH, uzasadnij, że im większa kwasowość roztworu, tym niższy współczynnik pH.

Roztwór	pH
sok z cytryny	2,5
sok z jabłek	3
kwaśne mleko	4,4
piwo	4,5
kawa	5
herbata	5,5
mleko krowie	6
krew	7,4
roztwór piorący	10

22. W tabeli przedstawionej obok podano objętość wody w Wielkich Jeziorach w Ameryce Północnej. Zapisz w notacji wykładniczej odpowiedzi na następujące pytania:

a) Jaka jest łączna objętość wody w tych jeziorach?

b) Jak długą krawędź miałby sześcian o objętości równej objętości wody w Wielkich Jeziorach?

c) Ile kropeł można by utworzyć z wody zawartej w Wielkich Jeziorach? Przyjmij, że kropla wody ma objętość około $4,5 \cdot 10^{-2}$ ml.

Jezioro	Objętość wody w m ³
Górne Michigan	$1,16 \cdot 10^{13}$
Huron	$4,68 \cdot 10^{12}$
Ontario	$3,58 \cdot 10^{12}$
Erie	$1,52 \cdot 10^{12}$
	$5,45 \cdot 10^{11}$

23. Aluminiowy drut o długości L milimetrów ogrzany o $t^{\circ}\text{C}$ wydłuży się o p milimetrów. Wydłużenie to można obliczyć ze wzoru $p = 25 \cdot 10^{-6} \cdot t \cdot L$.

a) Aluminiowy drut, który początkowo miał 4 m długości, ogrzano do temperatury 50°C i stwierdzono, że wydłużył się on o 2,1 mm. Oblicz początkową temperaturę drutu.

b) Aluminiowy drut po ogrzaniu o 20°C osiągnął długość 612 cm. Oblicz początkową długość drutu. Wynik zaokrąglij do 1 mm.

Я24. Dla niektórych gatunków ssaków zależność między masą ciała c (w kg) i masą mózgu m (w g) można opisać wzorem $\log m = 0,75 \log c + 0,9$.

a) Oblicz, jaką masę ciała zgodnie z tym wzorem powinien mieć ssak, którego masa mózgu wynosi 1 g.

b) Podaną zależność można też przedstawić w postaci $m = A \cdot c^B$. Znajdź wartości A i B . Wykaż, że zgodnie z tym wzorem, jeśli stosunek mas ciał dwóch ssaków jest równy 2, to stosunek mas ich mózgów wynosi około 1,7.

25. Wykaż, że liczba $2^{15} + 2^{14} + 2^{13} + 2^{12}$ jest podzielna przez 30.

26. Udowodnij, że suma dowolnej liczby dodatniej i jej odwrotności nie może być mniejsza od 2.

27. Udowodnij, że jeżeli reszta z dzielenia pewnej liczby przez 7 jest równa 2, to reszta z dzielenia sześciastu tej liczby przez 7 jest równa 1.

28. Udowodnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą podzielną przez 8.

Я29. Wykaż, że jeżeli $\log_a b > 0$, to $\log_a b + 4 \log_b a \geq 4$.

Я30. Znajdź wszystkie pary liczb (x, y) , które spełniają równość:

$$x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = 2(x^3 + y^3)$$

Я31. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b (gdzie $a \neq 0$) spełniona jest równość:

$$(2a + b)^3 - (8a + b)(a - b)^2 = \frac{b}{a} (3a)^3$$

Я32. Udowodnij, że iloczyn sumy dowolnych dwóch liczb dodatnich i sumy odwrotności tych liczb nie może być mniejszy od 4.

Я33. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność:

$$4a^2b^2 - 8ab + a^2 + 4b^2 + 4 > 0$$

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Układ równań liniowych:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

- może mieć jedno rozwiązanie — taki układ nazywamy oznaczonym,
- może nie mieć rozwiązań, wówczas nazywamy go sprzecznym,
- może mieć nieskończenie wiele rozwiązań, taki układ nazywamy nieoznaczonym; rozwiązaniem układu nieoznaczonego jest każda para liczb spełniająca jedno z równań układu (każda taka para spełnia także drugie z równań).

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

WŁAŚNOŚCI

$$|x| = |-x| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ gdy } y \neq 0$$

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI

Niech $c \geq 0$. Wówczas:

$$|ax + b| = c \iff ax + b = c \text{ lub } ax + b = -c$$

$$|ax + b| \leq c \iff ax + b \leq c \text{ i } ax + b \geq -c$$

$$|ax + b| \geq c \iff ax + b \geq c \text{ lub } ax + b \leq -c$$

Uwaga. Równania i nierówności z wartościami bezwzględnymi można zapisać bez symbolu wartości bezwzględnej, gdy rozpatrujemy odpowiednie przypadki.

RÓWNANIA KWADRATOWE

Liczba rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ zależy od wartości $\Delta = b^2 - 4ac$.

Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Jeżeli równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma dwa pierwiastki x_1, x_2 , to spełnione są równości:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Uwaga. Jeśli równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma tylko jeden pierwiastek x_0 , to spełnione są równości $2x_0 = -\frac{b}{a}$ i $x_0^2 = \frac{c}{a}$.

RÓWNANIA WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Wówczas:

$$\begin{aligned} a^x &= a^y & \Leftrightarrow & \quad x = y \\ \log_a x &= \log_a y & \Leftrightarrow & \quad x = y \end{aligned}$$

Uwaga. Nierówności kwadratowe, wykładnicze i logarytmiczne oraz równania i nierówności wielomianowe i wymierne będą omawiane w rozdziałach dotyczących odpowiednich funkcji.

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Ze wzoru $\frac{3}{p} = \frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ wynika jedna z podanych równości (przy odpowiednich założeniach). Która?

A. $y = \frac{3px}{3x-p}$ B. $y = 3\left(\frac{p}{3} - x\right)$ C. $y = \frac{1}{p} - \frac{1}{3x}$ D. $y = \frac{9x-3p}{xp}$

2. Jeśli $\frac{a+2b}{a+b} = \frac{2}{3}$, to liczba $\frac{a}{b}$ jest równa:

A. -4 B. $-\frac{1}{4}$ C. 0 D. $\frac{2}{3}$

3. Dane są trzy równania:

$$98x + 79 = x(98 + 79) \qquad 93(x + 11) = 93(2x + 13) \qquad 54(x - 47) + 54(x + 47) = 0$$

Suma rozwiązań tych trzech równań wynosi:

A. -96 B. -2 C. -1 D. 0

4. Ile jest liczb naturalnych spełniających nierówność $2x - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 \leq \frac{3}{2} - \frac{(x-8)^2}{4}$?

A. 7 B. 8 C. 14 D. nieskończenie wiele

5. Suma rozwiązań równania $7 - |x + 3| = 2$ wynosi:

A. 0 B. -6 C. 4 D. 5

6. Iloczyn rozwiązań równania $|5x| = |5 - 3x|$ wynosi:

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{25}{64}$ C. $-\frac{25}{16}$ D. $\frac{5}{16}$

7. Suma liczb całkowitych spełniających nierówność $|2x - 3| < 7$ jest równa:

- A. 7 B. 9 C. 10 D. 14

8. Iloczyn rozwiązań równania $|3x - 1| = |x - 5| + 4$ wynosi:

- A. -10 B. -4 C. $-1\frac{3}{5}$ D. $1\frac{2}{3}$

9. Ile jest liczb całkowitych, które spełniają nierówność $|3x + 1| - 2|x - 3| \leq 12$?

- A. 5 B. 19 C. 24 D. 25

10. Dane jest równanie z parametrami a i b : $(x + 2)^3 - (x - 2)^3 = (ax - b)(ax + b)$.
Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Jeśli $a = -2\sqrt{3}$ i $b = \sqrt{3}$, to równanie jest sprzeczne.
B. Jeśli $a = 4$ i $b = \sqrt{3}$, to równanie ma dwa rozwiązania.
C. Jeśli $a = 2\sqrt{3}$ i $b = 4$, to równanie jest tożsamościowe.
D. Jeśli $a = \sqrt{3}$ i $b = -\sqrt{3}$, to równanie nie ma rozwiązań.

11. Suma liczb spełniających układ równań $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{2}{3} \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$ jest równa:

- A. $1\frac{1}{3}$ B. $3\frac{5}{6}$ C. $6\frac{2}{3}$ D. $10\frac{2}{3}$

12. Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x = 3y - 11 \\ 1,5y - x - 5,5 = 0 \end{cases}$. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Para liczb $x = -1$, $y = 3$ jest rozwiązaniem tego układu równań.
B. Ten układ równań jest układem nieoznaczonym.
C. Para liczb $x = -10$, $y = -3$ spełnia ten układ równań.
D. Dowolna para liczb jest rozwiązaniem tego układu równań.

13. Dla jakich wartości parametru p poniższy układ równań nie jest oznaczony?

$$\begin{cases} x - 2y + p = 0 \\ 2x - py - 3 = 0 \end{cases}$$

- A. $p = -4$ B. $p = -2$ C. $p = 2$ D. $p = 4$

14. Wskaż równanie, którego suma rozwiązań jest największa.

- A. $3(x + 4)(2 - 3x) = 0$ C. $x^2 - 5x = 0$
B. $(x - 1)^2 - 9 = 0$ D. $6x^2 - 7 = 0$

15. Dla której z podanych wartości m równanie $9x^2 - 6x + 1 - m = 0$ nie ma rozwiązań?

- A. $m = -1$ B. $m = 0$ C. $m = 1$ D. $m = 2$

16. Liczby a, b są rozwiązaniami równania $-2x^2 + 5x + 12 = 0$ i $a > b$. Wartość wyrażenia a^b jest równa:

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\sqrt[3]{16}$ C. $\frac{16}{81}$ D. 64

17. Iloczyn wszystkich rozwiązań równania $2x^4 - x^2 - 15 = 0$ jest równy:

- A. $-7,5$ B. -3 C. 3 D. $7,5$

18. Dane jest równanie z parametrem p : $2x^2 + (p-3)x - 1 = 0$. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Dla dowolnej wartości parametru p to równanie ma dwa różne rozwiązania.
B. Suma rozwiązań tego równania jest dodatnia, gdy $p > 3$.
C. Dla dowolnej wartości parametru p rozwiązania tego równania mają różne znaki.
D. Suma odwrotności rozwiązań tego równania jest ujemna, gdy $p < 3$.

19. Dla jakiej wartości parametru a równanie $x^2 + ax - a^2 = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma jest dwa razy mniejsza od sumy ich kwadratów?

- A. $\frac{3}{5}$ B. $-\frac{4}{7}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{2}{3}$

20. Określ wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + 10x + m = 0$ ma dwa różne pierwiastki i oba są mniejsze od 3.

- A. $m \in (-\infty; -25) \cup (25; +\infty)$ C. $m \in (-25; 39)$
B. $m \in (-3; 3)$ D. $m \in (-39; 25)$

21. Rozwiązaniem tylko jednego z podanych równań nie jest liczba naturalna. Wskaż to równanie.

- A. $49^{5-x} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ C. $(\sqrt{5})^x = \left(\frac{1}{25}\right)^{x-5}$
B. $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 27^{5-x}$ D. $4^{x+5} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

22. Suma rozwiązań równań $5^{x+2} - 5^x = \frac{24}{25}$ oraz $2^{x-5} + 2^x = 66$ jest równa:

- A. -2 B. 2 C. 4 D. 5

23. Które z podanych równań ma dwa różne rozwiązania?

- A. $4^x + 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ C. $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$
B. $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$ D. $49^x - 7 \cdot 7^x = 0$

24. Jedno z podanych równań nie ma rozwiązań. Wskaż je.

A. $\log_5 (2x - 4) = \log_5 (5 - x)$

C. $\log_6 (5 - x) = \log_6 (x - 1)$

B. $\log (3x - 12) = \log (3 - x)$

D. $\log_{\frac{1}{3}} (4 - x) = \log_{\frac{1}{3}} (2 + x)$

25. Rozwiązanie równania $\log_7 (x - 1) + \log_7 (x + 2) = 2 \log_7 x$ jest:

A. ujemną liczbą całkowitą,

C. liczbą należącą do przedziału $(-1; 0)$,

B. liczbą naturalną,

D. liczbą należącą do przedziału $(1; 2)$.

26. Równanie $\log_{x-2} (x + 2) = 2$:

A. nie ma rozwiązań,

C. ma dwa rozwiązania,

B. ma jedno rozwiązanie,

D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

27. Rozwiązaniem równania $\log_4 9 + \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} x = 1$ jest liczba należąca do przedziału:

A. $(0; 1)$

B. $(1; 2)$

C. $(2; 3)$

D. $(3; +\infty)$

ZADANIA OTWARTE

28. Żadna z planet nie ma kształtu kuli. Odległość a od środka planety do punktu na równiku jest większa od odległości b do bieguna (zob. rysunek obok). Liczbę f , za pomocą której najczęściej opisuje się tzw. spłaszczenie, oblicza się ze wzoru $f = \frac{a-b}{a}$. Można przyjąć, że dla Ziemi $f = \frac{1}{300}$ i $b = 6358$ km. Ustal z dokładnością do 1 km, o ile kilometrów odległość od środka Ziemi do równika jest większa od odległości do bieguna.



29. Wykaż, że suma rozwiązań równania (z niewiadomą x): $|x + a| = b$, gdzie $b > 0$, wynosi $-2a$, a wartość bezwzględna różnicy między tymi rozwiązaniami jest równa $2b$.

30. Znajdź wszystkie liczby, które spełniają jednocześnie dwie nierówności:

$|5x + 4| < 8$ oraz $|3 - 4x| \geq 5$.

31. Rozwiąż równanie: $(x - 1)^4 + 3(x - 1)^2 - 10 = 0$.

32. Wiadomo, że spełnione są warunki: $7 = 3^b$, $\log_p q = b - 2$ oraz $3pq = 7$. Wyznacz p i q .

33. Drut o długości 10 m rozcięto na dwie części i z jednej wygięto ramkę w kształcie kwadratu, a z drugiej — ramkę w kształcie prostokąta, którego jeden bok ma tę samą długość co bok kwadratu. Suma pól obszarów ograniczonych przez te ramki jest równa 3 m². Jakie wymiary mają te ramki?

34. Fabryka produkuje laptopy i tablety. Miesięcznie wytwarza i sprzedaje 1200 urządzeń. Tablety są 4 razy tańsze od laptopów. Gdyby cenę laptopów zwiększyć o 10%, a tabletów o 10% zmniejszyć, to przychód ze sprzedaży by się nie zmienił. Ile laptopów produkuje fabryka?

Я35. Określ liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} ax + 2y = 6 \\ 3x - 4y = b \end{cases}$ w zależności od wartości parametrów a i b .

Я36. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x + y = m \\ 3x - 2y = 2m - 1 \end{cases}$ spełnia nierówność $|x| + |y| \leq 1$.

Я37. Ustal, dla jakiej wartości parametru p równanie $px^2 - 2x - 3 = 0$:

- a) ma dwa różne rozwiązania, których suma wynosi 7,
- b) ma dwa różne rozwiązania, których iloczyn wynosi $-\frac{1}{2}$.

Я38. Wykaż, że jeśli $p \neq 0$, to równanie $\frac{1}{p^2}x^4 + (2+p)x^2 - p^2 - 1 = 0$ ma tylko dwa rozwiązania.

Я39. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 8^x \cdot 4^y = 2 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

Я40. a) Oblicz, dla jakiej wartości a rozwiązaniem równania $\log_4 x + a \log_8 x = 7,5$ jest liczba 32.

b) Rozwiąż równanie $\log_4 x + \log_8 x = 7,5$.

Я41. a) Rozwiąż równanie $\frac{8 \cdot 2^{5x}}{0,5^{-\frac{x}{2}}} = \frac{1}{4^3}$.

b) Oblicz, dla jakiej wartości p rozwiązaniem równania $\frac{8^p \cdot 2^{5x}}{0,5^{-\frac{xp}{2}}} = \frac{1}{4^3}$ jest liczba 3.

CIĄGI

Ciąg to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych dodatnich (ciąg nieskończony) lub na jego skończonym podzbiorze $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ (ciąg skończony). Wartości takiej funkcji nazywamy wyrazami ciągu.

Ciąg, w którym dla każdego dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi nierówność $a_n < a_{n+1}$, nazywamy rosnącym, a gdy zachodzi nierówność $a_{n+1} < a_n$, to ciąg nazywamy malejącym. Ciąg, w którym dla każdego n zachodzi równość $a_{n+1} = a_n$, nazywamy stałym.

CIĄG ARYTMETYCZNY

Ciąg (a_n) nazywamy arytmetycznym, jeśli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje przez dodanie pewnej stałej liczby r (różnicy ciągu) do poprzedniego wyrazu.

Wzór rekurencyjny:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Wzór ogólny:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Własność:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ gdy } n \geq 2$$

Suma n początkowych wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

CIĄG GEOMETRYCZNY

Ciąg (a_n) nazywamy geometrycznym, jeśli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia poprzedniego wyrazu przez pewną stałą liczbę q (iloraz ciągu).

Wzór rekurencyjny:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Wzór ogólny:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Własność:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}, \text{ gdy } n \geq 2$$

Suma n początkowych wyrazów:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ gdy } q \neq 1$$

SZEREK GEOMETRYCZNY

Niech (a_n) oznacza ciąg geometryczny o ilorazie q . Ciąg sum częściowych (S_n) , czyli $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_1q$, $S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2$, ... nazywamy szeregiem geometrycznym.

Jeśli $|q| < 1$, to ciąg (S_n) jest zbieżny, a liczbę $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nazywamy sumą szeregu geometrycznego. Mówimy też, że S jest sumą wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) .

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Niech (p_n) będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (2n-1)(n+2)$. Znajdź siódmy wyraz ciągu $b_n = a_{n+1} - p_n$.

- A. 116 B. 118 C. 131 D. 133

2. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n + 1$. Który z podanych wzorów jest wzorem ogólnym tego ciągu?

- A. $a_n = 2^{n-1} + n - 1$ B. $a_n = 2n - 1$ C. $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ D. $a_n = \sqrt{8n-7}$

3. Wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek $a_{n+1} = a_n + 2n - 1$. Jedenasty wyraz tego ciągu jest równy 25. Wyraz a_{10} jest równy:

- A. -44 B. -6 C. 6 D. 44

4. Jeden z podanych ciągów jest rosnący. Który?

- A. $a_n = 3 - \frac{2}{n}$ B. $b_n = n^2 - 2n$ C. $c_n = \frac{n+1}{2n}$ D. $d_n = |7 - n|$

5. Liczby $1 + \sqrt{2}$ i $1 - \sqrt{2}$ to odpowiednio pierwszy i trzeci wyraz ciągu arytmetycznego. Dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy:

- A. $1 - 17\sqrt{2}$ B. $1 - 9\sqrt{2}$ C. $1 - 8\sqrt{2}$ D. $10 + \sqrt{2}$

6. Oblicz sumę dziesiątego, jedenastego i dwunastego wyrazu ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_3 = 8$ i $a_7 = 6$.

- A. 4,5 B. 5,5 C. 12 D. 15

7. W ciągu arytmetycznym (a_n) spełniony jest warunek $a_7 + a_{11} = 64$. Dziewiąty wyraz tego ciągu jest równy:

- A. 9 B. 18 C. 32 D. 64

8. Piętnasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 37. Suma $a_{10} + a_{20}$ wynosi:

- A. 15 B. 18,5 C. 37 D. 74

9. Piętnasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 40, a suma piętnastu jego początkowych wyrazów jest równa 57. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

- A. -32,4 B. -16,2 C. -36,2 D. $-51\frac{2}{3}$

10. Wszystkie liczby naturalne, dla których reszta z dzielenia przez 7 jest równa 3, ustawiono w ciąg rosnący. Trzynasty wyraz tego ciągu jest równy:

- A. 81 B. 87 C. 88 D. 94

11. Liczby -2 i 4 to odpowiednio drugi i czternasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) . Suma $a_{20} + a_{21} + \dots + a_{30}$ jest równa:

- A. 95 B. 100,5 C. 104,5 D. 110

12. Ciąg określony wzorem $a_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{7}$ jest ciągiem:

- A. arytmetycznym o różnicy $\frac{1}{7}$. C. geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{7}$.
B. arytmetycznym o różnicy $\frac{2}{7}$. D. geometrycznym o ilorazie 7.

13. Poniżej podano wzory ogólne kilku ciągów.

$$a_n = n^3 \quad b_n = 3^n \quad c_n = 3n \quad d_n = 1 - \frac{n}{4} \quad e_n = |n+2| \quad f_n = |n-2|$$

Ile wśród nich jest ciągów arytmetycznych?

- A. jeden B. dwa C. trzy D. cztery

14. W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) , spełniony jest warunek $a_5 = 7a_2$. Iloraz tego ciągu jest równy:

- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ C. $\sqrt[3]{7}$ D. 7

15. W ciągu geometrycznym (a_n) dwa początkowe wyrazy są równe: $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = 3$. Wzór na n -ty wyraz tego ciągu można zapisać w postaci:

- A. $a_n = (\sqrt{3})^n$ B. $a_n = 3^{n-1} \cdot \sqrt{3}$ C. $a_n = 3 \cdot (\sqrt{3})^n$ D. $a_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n$

16. Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = (\sqrt{3})^n$. Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

- A. $40(3 + \sqrt{3})$ C. $\frac{81}{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt{3}$
B. $40(1 + \sqrt{3})$ D. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}$

17. Składniki sumy $2 + 2\sqrt{2} + 4 + \dots + 16\sqrt{2}$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Suma ta wynosi:

- A. $30(\sqrt{2} + 1)$ B. $30(\sqrt{2} - 1)$ C. $34 - 18\sqrt{2}$ D. $15(1 + \sqrt{2})$

18. Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu określonego wzorem $a_n = \frac{4}{5^{n-1}}$ jest równa:

- A. 5 B. 25 C. 50 D. 100

- 19.** Dziesiąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 1, a ostatni wyraz — czterdziesty — jest równy 11. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.
- 20.** Oblicz sumę wszystkich trzycyfrowych parzystych liczb naturalnych.
- 21.** Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są dodatnie i spełniony jest warunek $a_3 - a_2 = 6a_1$. Oblicz iloraz tego ciągu.
- 22.** Wykaż, że liczby $(\sqrt{3})^{4-2\sqrt{3}}$, 9, $3^{2+\sqrt{3}}$ w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Czy iloraz tego ciągu jest liczbą większą od 3?
- 23.** Wykaż, że ciąg $\log_2 10, \log_2 100, \log_2 1000, \dots$ jest ciągiem arytmetycznym. Czy różnica tego ciągu jest liczbą większą od 3?
- 24.** Suma trzech początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego jest równa trzykrotności pierwszego wyrazu. Wiadomo, że ciąg ten nie jest ciągiem stałym. Oblicz iloraz tego ciągu.
- 25.** Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \log_2 10^n$ jest ciągiem arytmetycznym oraz że różnica tego ciągu jest liczbą niewymierną.
- 26.** W pewnym ciągu geometrycznym (a_n) spełniony jest warunek $a_3 \cdot a_7 = 121$. Oblicz a_5 .
- 27.** Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n^2 + 13n - 12$. Uzasadnij, że różnica dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest liczbą parzystą.
- 28.** W pewnym amfiteatrze jest razem 1250 miejsc w 25 rzędach. W drugim rzędzie są o 3 miejsca więcej niż w pierwszym, w trzecim — o 3 miejsca więcej niż w drugim itd. W każdym rzędzie miejsca ponumerowane są liczbami 1, 2, 3 itd.
- a)** Jaki numer miejsca w rzędzie XVI trzeba wybrać, aby siedzieć dokładnie na środku rzędu?
- b)** Bilety na miejsca w rzędach od I do XVI są droższe. Czy droższych biletów jest więcej czy mniej niż połowa?
- 29.** Marcin, który ostatnio zjadał dwie tabliczki czekolady dziennie, postanowił w niedzielę, że od jutra codziennie będzie jadł o 5% czekolady mniej niż dnia poprzedniego.
- a)** Ile czekolady powinien zjeść w następną niedzielę? Wynik zaokrąglaj do części dziesiątych.
- b)** O ile co najmniej procent dziennie Marcin powinien zmniejszać porcję zjadanej czekolady, aby w następną niedzielę po raz pierwszy zjeść mniej niż 1 tabliczkę? Wynik zaokrąglaj do 0,1% tabliczki.

30. Na szpulę o średnicy 7 cm nawijana jest wstążka o długości 5 m. Podczas każdego kolejnego pełnego obrotu szpuli nawija się na nią fragment wstążki o 2 mm dłuższy niż podczas poprzedniego obrotu. Ile razy należy obrócić szpulę, by nawinęła się na nią cała wstążka? Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.

31. Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest geometryczny, to dla dowolnych dodatnich liczb naturalnych n i k , gdzie $k < n$, spełniony jest warunek:

$$|a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$$

32. Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) , gdzie $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$.

33. Ciąg (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 8, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$

Ile różnych liczb występuje w tym ciągu? Podaj siódmy i siedemnasty wyraz tego ciągu.

34. Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = \left(\frac{1}{3x-17}\right)^n$ są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x , dla której jest zbieżny nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$.

35. Suma trzech początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego jest równa 12. Suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $10\frac{2}{3}$. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów. Znajdź najmniejszą parzystą liczbę n , dla której spełniona jest nierówność $S - S_n < \frac{1}{48}$.

WŁASNOŚCI FUNKCJI. FUNKCJA LINIOWA

PODSTAWOWE POJĘCIA

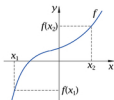
Funkcja f określona na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y to takie przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y .

$$f: X \rightarrow Y$$

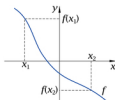
Zbiór X , na którym określona jest funkcja, nazywamy dziedziną funkcji, a każdy element dziedziny nazywamy argumentem funkcji.

Argument a jest miejscem zerowym funkcji f , gdy $f(a) = 0$.

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI



Funkcja f jest rosnąca, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 prawdziwa jest implikacja:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



Funkcja f jest malejąca, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 prawdziwa jest implikacja:
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Funkcję, która dla każdego argumentu przyjmuje taką samą wartość, nazywamy funkcją stałą.

Uwaga. Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami ze zbioru A , takimi że $x_1 < x_2$, i niech A będzie podzbiorem dziedziny funkcji f . Wówczas:

Jeśli $f(x_2) - f(x_1) > 0$, to funkcja f jest rosnąca w zbiorze A .

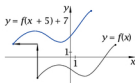
Jeśli $f(x_2) - f(x_1) < 0$, to funkcja f jest malejąca w zbiorze A .

FUNKCJA ZŁOŻONA

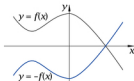
Symbol $g \circ f$ oznacza funkcję złożoną, która argumentowi x przyporządkowuje wartość $g(f(x))$.

Dziedziną funkcji złożonej $g \circ f$ jest taki podzbiór dziedziny funkcji f , który zawiera te argumenty, dla których wartości funkcji f należą do dziedziny funkcji g .

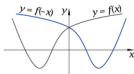
Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ otrzymujemy, przesuając wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, q]$.



Wykres funkcji $y = -f(x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi x .



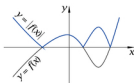
Wykres funkcji $y = f(-x)$ jest symetryczny do wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi y .



Wykres funkcji $y = |f(x)|$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = f(x)$ w następujący sposób:

Punkty wykresu funkcji $y = f(x)$, które znajdują się nad osią x (lub na osi), zostawiamy bez zmian.

Punkty wykresu funkcji $y = f(x)$, które znajdują się pod osią x , odbijamy symetrycznie względem osi x .



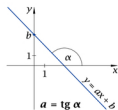
FUNKCJA LINIOWA

Funkcję określoną na zbiorze liczb rzeczywistych, której wzór można zapisać w postaci:

$$y = ax + b,$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi, nazywamy funkcją liniową.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta.

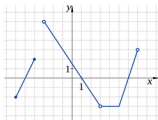


ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

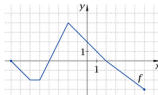
1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Dziedzina funkcji f jest przedział $\langle -6; 7 \rangle$.
- B. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -3; 6 \rangle$.
- C. Funkcja f przyjmuje wartości ujemne dla $x \in \langle -6; -5 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle \cup \langle 3; 6 \rangle$.
- D. W przedziale $\langle -6; -4 \rangle$ funkcja f jest rosnąca.



2. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f . Wskaż zdanie fałszywe.

- A. Suma miejsc zerowych funkcji f jest równa -10 .
- B. Nierówność $f(x) \leq 0$ jest spełniona dla $x \in \langle -8; -4 \rangle \cup \langle 2; 6 \rangle$.
- C. Funkcja f przyjmuje wartość $-0,1$ dla trzech argumentów.
- D. Równanie $f(x) = -2,5$ nie ma rozwiązań.



3. Funkcja f jest określona za pomocą tabeli przedstawionej obok. Który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $g(x) = f(x - 2) - 4$?

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	2	2	0	1



4. Punkt $(5, \frac{1}{4})$ należy do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{m\sqrt{x-1}}{2mx-6}$, gdy:

- A. $m = 3$
- B. $m = 4$
- C. $m = 5$
- D. $m = 6$

5. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3x$. Wskaż przedział, do którego należy rozwiązanie równania $f(x-1) = f(x+3)$.

- A. $(-2; -1)$
- B. $(-1; 0)$
- C. $(0; 1)$
- D. $(1; 2)$

13. Dla jakiej wartości m funkcje $f(x) = mx + m + 5$ i $g(x) = 2x - 5$ mają to samo miejsce zerowe?

- A. dla $m = -1\frac{3}{7}$ B. dla $m = -0,7$ C. dla $m = 0,8$ D. dla $m = \frac{7}{5}$

14. Wykresy funkcji $f(x) = x - 7$ i $g(x) = -8x + 11$ przecinają się w punkcie, którego suma współrzędnych jest równa:

- A. -10 B. -6 C. -3 D. 4

15. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = |x - 5|$, a jej dziedziną jest zbiór liczb całkowitych. Dla ilu argumentów wartość tej funkcji jest mniejsza od 7?

- A. 12 B. 13 C. 14 D. nieskończenie wielu

16. Wykres funkcji $f(x) = -2x^3 + x^2$ przesunięto o wektor $[-2, 0]$, a następnie przekształcono przez symetrię względem osi y . Otrzymano wykres funkcji:

- A. $g(x) = 2x^3 - x^2 - 2$ C. $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 12$
B. $g(x) = 2x^3 - 11x^2 + 20x - 12$ D. $g(x) = 2x^3 + 5x^2 + 12x + 20$

17. Dana jest funkcja $f(x) = ||2x - 4| - 4| + m$. Które zdanie jest fałszywe?

- A. Jeśli $m > 0$, to funkcja f nie ma miejsc zerowych.
B. Jeśli $m = 0$, to funkcja f ma dwa miejsca zerowe.
C. Jeśli $-4 \leq m < 0$, to funkcja f ma cztery miejsca zerowe.
D. Jeśli $m < -4$, to funkcja f ma dwa miejsca zerowe.

18. Suma miejsc zerowych funkcji $f(x) = 3|x - 2| - 2|x + 1| + 3$ jest równa:

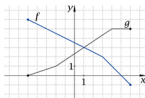
- A. 0 B. 3,6 C. 5 D. 6,4

19. Dane są funkcje $f(x) = 4|x - 3|$ i $g(x) = -2|x + 1|$. Dla jakich argumentów spełniona jest nierówność $f(x) + g(x) < -4$?

- A. $x \in \left(2\frac{1}{3}; 5\right)$ B. $x \in (-\infty; 5)$ C. $x \in (-1; 3)$ D. $x \in \left(1\frac{2}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$

20. Na rysunku są przedstawione wykresy funkcji f i g . Która z równości jest fałszywa?

- A. $f(g(1)) = 2$ C. $f(f(4)) = 3$
B. $g(f(-3)) = 5$ D. $g(g(-2)) = 1$



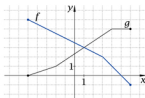
21. Dane są funkcje: $f(x) = x^2 + x$ i $g(x) = 2x + 5$. Wskaż wzór funkcji $h(x) = (f \circ g)(x)$.

- A. $h(x) = 4x^2 + 21x + 25$ C. $h(x) = 4x^2 + 22x + 30$
B. $h(x) = 2x^2 + 2x + 5$ D. $h(x) = 2x^3 + 7x^2 + 5x$

22. Na rysunku są przedstawione wykresy funkcji f i g . Rozważmy funkcję:

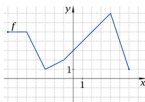
$$h(x) = f(x) - g(x)$$

- Podaj wartość $h(4)$.
- Znajdź miejsca zerowe funkcji h .
- Czy funkcja h jest monotoniczna?
- Dla jakiego argumentu funkcja h przyjmuje wartość największą, a dla jakiego — najmniejszą? Jakie to wartości?



23. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

- Narysuj wykres funkcji $g(x) = f(x + 3) + 1$.
Dla jakich argumentów (należących zarówno do dziedziny funkcji f , jak i do dziedziny funkcji g) spełniony jest warunek $g(x) \geq f(x)$?
- Określ, dla jakich wartości parametru k funkcja $h(x) = f(x) + k$ ma dokładnie dwa miejsca zerowe.



24. Funkcja f ma następujące własności:

- Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.
- Zbiorem wartości jest przedział $(-\infty; 7)$.
- Miejscami zerowymi funkcji f są liczby: -5 , 0 , 3 i 7 .
- Funkcja jest malejąca w przedziałach: $(-\infty; -2)$, $(1; 3)$ oraz $(5; +\infty)$.
- Funkcja jest rosnąca w przedziałach: $(-2; 1)$ i $(3; 5)$.

Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie?

25. a) Wykaż, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to w układzie współrzędnych wszystkie punkty (n, a_n) leżą na jednej prostej.

b) Piąty wyraz pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 15, a różnica tego ciągu wynosi -3 . Znajdź równanie prostej, na której leżą wszystkie punkty wykresu ciągu (a_n) .

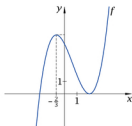
26. Funkcja f każdemu punktowi P płaszczyzny przyporządkowuje sumę współrzędnych tego punktu. Funkcja g każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje iloczyn współrzędnych tego punktu. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, dla których spełniony jest warunek:

- $f(P) \geq 0$
- $g(P) < 0$

Я27. Naskicuj wykres funkcji $y = x^3$, a następnie, odpowiednio przekształcając ten wykres, naskicuj wykres funkcji:

a) $g(x) = |2 - x^3|$

b) $g(x) = |(x - 2)^3|$



Я28. Oznaczmy przez $f(A)$ zbiór wszystkich liczb, które są wartościami funkcji f dla argumentów ze zbioru A , tzn. $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x + 4$$

Niech $A = \langle 1; 3 \rangle$, $B = \langle -2; 1 \rangle$.

a) Znajdź $f(A)$ i $f(B)$.

b) Sprawdź, czy $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Я29. Korzystając z definicji funkcji rosnącej, udowodnij, że funkcja $f(x) = \frac{2x-9}{x-3}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 3)$.

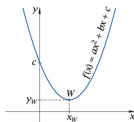
Я30. Korzystając z definicji funkcji rosnącej, udowodnij, że jeśli funkcje f i g są rosnące w przedziale $(a; b)$, to funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$ też jest rosnąca w tym przedziale.

FUNKCJA KWADRATOWA

WZORY FUNKCJI KWADRATOWEJ

Funkcję określoną na zbiorze liczb rzeczywistych, której wzór można zapisać w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a , b i c są liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy funkcją kwadratową.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.



$$x_W = \frac{-b}{2a} \quad y_W = \frac{-\Delta}{4a}$$

Wzór w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right),$$

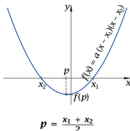
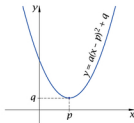
gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

Wzór w postaci kanonicznej:

$$y = a(x - p)^2 + q$$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne:

$$(p, q)$$



$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Wzór w postaci iloczynowej:

Jeśli funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe x_1 , x_2 , to jej wzór można zapisać w postaci:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right)$$

Uwaga. Jeśli funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe x_0 , to jej wzór można zapisać w postaci $y = a(x - x_0)^2$. Wówczas wierzchołek paraboli ma współrzędne $(x_0, 0)$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ zależy od wartości $\Delta = b^2 - 4ac$.

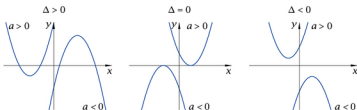
Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ i } \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.



ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+3)(x-1), & \text{gdy } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} - 1, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby:

- A. -3 i 1 B. 3 i -1 C. -3 i 2 D. -6 i -1

2. Wykres funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 10$ przecina wykres funkcji $g(x) = -3x + 10$ w dwóch punktach o współrzędnych:

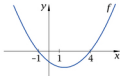
- A. (0, -10) i (5, 5)
 B. (-5, 25) i (4, -2)
 C. (0, 10) i (-5, -5)
 D. $(1 - \sqrt{11}, 13 + 3\sqrt{11})$ i $(1 + \sqrt{11}, 13 - 3\sqrt{11})$

3. Wykresem pewnej funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku $(-3, 2)$, przecinająca oś y w punkcie $(0, -1)$. Wartość tej funkcji dla argumentu -6 jest równa:

- A. -4 B. -1 C. 4 D. 5

4. Funkcję kwadratową, której wykres przedstawiono na rysunku można opisać wzorem:

- A. $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$ C. $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-4)$
B. $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$ D. $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+4)$



5. Punkt W to wierzchołek paraboli o równaniu $y = -2(x+1)(x-5)$. Parabola ta przecina oś x w punktach A i B . Pole trójkąta ABW jest równe:

- A. 6 B. 12 C. 48 D. 54

6. Miejscami zerowymi pewnej funkcji kwadratowej są liczby -1 i 2 . Do wykresu tej funkcji należy punkt $(1, 4)$. Wykres ten przecina oś y w punkcie:

- A. $(0, 4)$ B. $(0, -4)$ C. $(0, \frac{5}{2})$ D. $(0, -\frac{5}{2})$

7. Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku $W = (-7, 9)$. Wówczas prawdziwa jest równość:

- A. $f(9) = f(-7)$ B. $f(-11) = f(-17)$ C. $f(1) = f(-15)$ D. $f(2) = f(-9)$

8. Maksymalny przedział, w którym funkcja $f(x) = -3(x+1)(x-13)$ jest malejąca, to:

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-\infty; 1)$ C. $(6; +\infty)$ D. $(13; +\infty)$

9. Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Jeżeli wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji, ma współrzędne $(-1, 3)$, to spełniony jest warunek:

- A. $2c - b = 6$ B. $a - c = -3$ C. $a = 2b$ D. $c = 3a$

10. Największa wartość funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest równa 2 oraz $f(-6) = f(4) = 7$. Wartość współczynnika a wynosi:

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{5}{9}$ C. 2 D. $\frac{2}{9}$

11. Pewna funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji, ma współrzędne $(-24, 36)$. Suma miejsc zerowych tej funkcji wynosi:

- A. -48 B. -24 C. 36 D. 72

12. Największa wartość funkcji $f(x) = -(x+3)^2 + 20$ w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$ jest równa:

- A. -5 B. 3 C. 19 D. 20

13. Ile jest liczb całkowitych spełniających nierówność $-2x^2 - x + 21 > 0$?

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

14. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n(n - 14)$. Ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 15?

- A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

15. Wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ przesunięto o wektor $\vec{u} = [3, -5]$ i otrzymano wykres $g(x) = 2(x - 1)^2 + 4$. Współczynniki a , b oraz c są równe:

- A. $a = -2$, $b = -8$, $c = 1$ C. $a = 2$, $b = -16$, $c = 31$
 B. $a = -2$, $b = 16$, $c = -33$ D. $a = 2$, $b = 8$, $c = 17$

16. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej f to -3 i 5 . Wówczas $\frac{f(9)}{f(-9)}$ jest równe:

- A. -1 B. 1 C. $-\frac{4}{7}$ D. $\frac{4}{7}$

ZADANIA OTWARTE

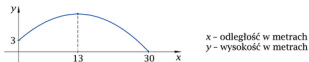
17. Znajdź wszystkie liczby, które spełniają jednocześnie trzy podane nierówności.

$$(1 + 2x)(5 - x) \geq 0$$

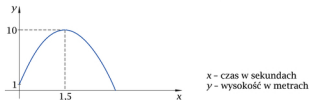
$$x^2 > 8(x - 2)$$

$$(3x - 4)^2 > 6 - 25x$$

18. Woda wypływająca z węża strażackiego porusza się po linii, która jest fragmentem paraboli. Na wykresie przedstawiono tor ruchu wody (kropką zaznaczono wierzchołek paraboli). Oblicz, na jaką największą wysokość sięgnęła woda.



19. Kopnięta piłka poszybowała w górę. Najwyższy punkt osiągnęła po 1,5 s ruchu. Poniższy wykres przedstawia, jak zmieniła się wysokość, na której znajdowała się piłka, od momentu, w którym została kopnięta, do momentu, gdy upadła na ziemię. Wykres ten jest fragmentem paraboli. Oblicz, po jakim czasie piłka spadła na ziemię.



20. Znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g , gdzie:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3, & \text{gdy } x \leq 2 \\ -2x + 7, & \text{gdy } x > 2 \end{cases} \quad g(x) = -x^2 - 6x - 11$$

21. Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = x^2 - 3x - 4$ są większe od wartości funkcji $g(x) = 2x + 10$?

22. Dane są funkcje:

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 3 \quad \text{ i } \quad g(x) = 3x^2 + x - 2$$

Znajdź argument x , dla którego różnica $f(x) - g(x)$ ma największą wartość.

23. Trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0, a wyraz dwudziesty trzeci jest równy 2. Ile co najmniej początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby ich suma była liczbą większą od 100?

24. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $y = -x^2 + 6x + 7$ w przedziale $\langle -10; 20 \rangle$.

25. Z drutu należy wygiąć uchwyt do szuflady. Jakie wymiary powinien mieć prostokąt ograniczony tym uchwytem i ścianką szuflady, aby jego pole było jak największe, jeśli długość widocznej części drutu wynosi 20 cm? Pomiń grubość drutu.



26. Uzasadnij, że jeśli funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe x_1, x_2 , to jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, ax_1x_2)$.

27. Z drutu o długości d należy zbudować ramkę w kształcie równoległoboku, w którym kąt ostry między bokami ma miarę α . Wykaż, że aby ramka ograniczała jak największe pole, powinna mieć kształt rombu.

28. Określ wszystkie wartości parametru p , dla których równanie $px^2 + 3x + 4p = 0$ ma dwa różne pierwiastki, których suma odwrotności jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2}$.

29. Określ wszystkie wartości parametru p , dla których równanie $x^4 + px^2 - p + 1 = 0$ ma cztery pierwiastki.

30. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja określona wzorem $f(x) = x^2 + 2(m+1)x + 4m + 1$ ma dwa pierwiastki o różnych znakach x_1 i x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 2$.

31. Określ wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki mniejsze od 2.

32. Rozwiąż nierówność:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} < 4$$

WIELOMIANY I WYRAŻENIA WYMIERNE

WIELOMIANY

Wielomianem stopnia n zmiennej x nazywamy wyrażenie:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie współczynniki $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są liczbami rzeczywistymi i $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_n \neq 0$.

Dwa wielomiany są równe, gdy mają ten sam stopień oraz mają takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach.

Liczbę, która jest rozwiązaniem równania wielomianowego $W(x) = 0$, nazywamy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

Liczba a jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, gdy $W(x)$ można przedstawić w postaci:

$$(x - a)^k \cdot P(x),$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem i $P(a) \neq 0$.

TWIERDZENIE BÉZOUTA

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x - a$.

TWIERDZENIE O RESZCIE

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest równa $W(a)$.

TWIERDZENIE O ROZWIĄZANIACH WYMIERNYCH

Załóżmy, że w równaniu wielomianowym:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi oraz $a_0 \neq 0$ i $a_n \neq 0$.

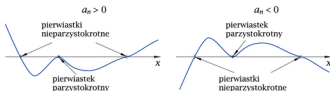
Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba wymierna, to można ją przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie licznik p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a mianownik q jest dzielnikiem współczynnika a_n .

Uwaga. Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli rozwiązaniem wielomianu o współczynnikach całkowitych jest liczba całkowita, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego.

Funkcję określoną na zbiorze liczb rzeczywistych, której wzór można zapisać w postaci $y = W(x)$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem, nazywamy funkcją wielomianową.

Uwaga. Aby naszkicować wykres ilustrujący, jak zmienia się znak wartości funkcji wielomianowej, postępujemy w następujący sposób:

Najpierw znajdujemy pierwiastki wielomianu $W(x)$, określamy ich krotności i zaznaczamy te pierwiastki na osi x . Rysowanie wykresu zaczynamy od prawej strony i gdy $a_n > 0$, to zaczynamy nad osią x , a gdy $a_n < 0$ — pod osią x . Jeśli punkt na osi x odpowiada pierwiastkowi parzystokrotnemu — linia pozostaje po tej samej stronie osi. Gdy punkt odpowiada pierwiastkowi nieparzystokrotnemu — linia przechodzi na drugą stronę osi x .



WYRAŻENIA WYMIERNE

Niech $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami i $V(x)$ nie jest wielomianem zerowym. Wyrażenie:

$$\frac{W(x)}{V(x)}$$

nazywamy wyrażeniem wymiernym. Dziedziną tego wyrażenia jest zbiór liczb rzeczywistych takich, że $V(x) \neq 0$.

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI WYMIERNE

Niech $V(x) \neq 0$.

$$\frac{W(x)}{V(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(x) = 0$$

$$\frac{W(x)}{V(x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(x) \cdot V(x) > 0$$

$$\frac{W(x)}{V(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(x) \cdot V(x) < 0$$

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

- 1.** Wielomiany $(ax^3 + bx)(2x - 1)$ oraz $3x(cx^2 + x) - (2x^3 + dx)$ są równe. Która z wartości jest podana błędnie?
- A. $a = 0$ B. $b = 1\frac{1}{2}$ C. $c = \frac{1}{3}$ D. $d = 1\frac{1}{2}$
- 2.** Reszta z dzielenia wielomianu $-5x^4 + ax^2 + 2ax + 3$ przez dwumian $x + 1$ jest równa 7. Wynika stąd, że:
- A. $a = -9$ B. $a = -3$ C. $a = 3$ D. $a = 7$
- 3.** Liczba 7 jest pierwiastkiem jednego z poniższych wielomianów. Wskaż ten wielomian.
- A. $14x^6 - 5x^3 + 2x^2 + 3$ C. $5x^6 + 14x^4 + 21x^3 - 1$
B. $3x^6 - 21x^5 + 2x - 14$ D. $7x^6 + 3x^5 + 14x^3 + 5$
- 4.** Tylko jedna z podanych liczb jest pierwiastkiem wielomianu $6x^5 + 14x^4 + 9x + 21$. Wskaż tę liczbę.
- A. $-1\frac{2}{5}$ B. $-1\frac{2}{3}$ C. $-2\frac{1}{3}$ D. $-2\frac{4}{7}$
- 5.** Równanie $x^5 - 7x^3 + 12x = 0$ ma:
- A. dwa rozwiązania, C. cztery rozwiązania,
B. trzy rozwiązania, D. pięć rozwiązań.
- 6.** Iloczyn rozwiązań równania $2x^4 - x^3 + 4x - 2 = 0$ jest równy:
- A. 2^{-1} B. $-2^{-\frac{1}{2}}$ C. $-2^{-\frac{2}{3}}$ D. $2^{-\frac{1}{2}}$
- 7.** W wyniku dzielenia wielomianu $2x^3 - 3x^2 - 5x + 1$ przez dwumian $x - 3$ otrzymujemy:
- A. $-2x^2 - 3x - 5$ reszta -2 C. $x^2 - 3x - 5$ reszta 3
B. $2x^2 + 3x + 4$ reszta 13 D. $2x^2 + 9x + 32$ reszta -65
- 8.** Liczba -2 jest pierwiastkiem równania $2x^3 + 2x^2 - 5x - 2 = 0$. Jednym z pozostałych pierwiastków tego równania jest:
- A. $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$
- 9.** Zbiór rozwiązań nierówności $-3x^3(x+3)(x-5)^2 < 0$ jest równy:
- A. $(-\infty; -3) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty)$ C. $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$
B. $(-3; 0) \cup (5; +\infty)$ D. $(-3; 0)$

10. Ile jest liczb całkowitych, które spełniają nierówność $16x^6 - 8x^5 - 4x^4 + 2x^3 \leq 0$?

- A. nie ma takich liczb C. tylko dwie
B. tylko jedna D. nieskończenie wiele

11. Suma $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ jest równa:

- A. $\frac{x^2+2x+3}{x^6}$ B. $\frac{x^2+2x+3}{x^3}$ C. $\frac{6}{x+x^2+x^3}$ D. $\frac{x^3+2x^2+3x}{x^6}$

12. Wyrażenie $\frac{-4x-5}{x^2+3x+2}$ jest równe:

- A. $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+2}{x+1}$ B. $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+1}$ C. $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1}$ D. $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1}$

13. Suma wszystkich rozwiązań równań $\frac{4+x}{2x-5} = 0$ i $\frac{2x+5}{4-x} = 3$ wynosi:

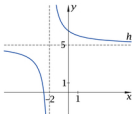
- A. $-5\frac{2}{5}$ B. $-4\frac{5}{7}$ C. $-2\frac{3}{5}$ D. $-2\frac{5}{7}$

14. Największym z rozwiązań równania $\frac{-3x(x-5)^2(x+3)^3(x-2)}{-6(x+3)(x-5)} = 0$ jest:

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 5

15. Wykres funkcji h przedstawiony na rysunku obok powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{3}{x}$. Wskaż wzór funkcji h .

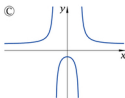
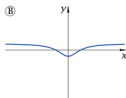
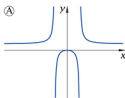
- A. $h(x) = \frac{5x-7}{x-2}$ C. $h(x) = \frac{3x+5}{x+2}$
B. $h(x) = \frac{5x+13}{x+2}$ D. $h(x) = \frac{3x+15}{x-2}$



16. Na poniższych rysunkach przedstawiono fragmenty wykresów funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \quad g(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4} \quad h(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$$

Dopasuj wzory funkcji do wykresów.



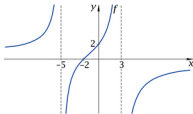
- A. $f - \textcircled{A}$ B. $f - \textcircled{C}$ C. $f - \textcircled{B}$ D. $f - \textcircled{A}$
 $g - \textcircled{C}$ $g - \textcircled{B}$ $g - \textcircled{A}$ $g - \textcircled{B}$
 $h - \textcircled{B}$ $h - \textcircled{A}$ $h - \textcircled{C}$ $h - \textcircled{C}$

- 17.** Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu pewnej funkcji, której wzór ma postać:

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$$

Która z wartości współczynników jest podana błędnie?

- A. $a = 15$ C. $c = 2$
B. $b = -30$ D. $d = -15$



- 18.** Zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{6}{3+5x} \geq 3$ to:

- A. $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ B. $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}; +\infty\right)$ C. $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$ D. $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right)$

- 19.** Nierówność $\frac{-7}{9-2x} < \frac{5}{8x-6}$ jest równoważna nierówności:

- A. $\frac{9-2x}{-7} > \frac{8x-6}{5}$ C. $-7(8x-6) < 5(9-2x)$
B. $(9-2x)(8x-6) < -35$ D. $(9-2x)(8x-6)(-46x-3) < 0$

- 20.** Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $\frac{1}{x^2+2x} + \frac{x+2}{x^2-2x} \leq \frac{1}{x+2}$?

- A. żadna C. pięć
B. dwie D. nieskończenie wiele

ZADANIA OTWARTE

- 21.** Rozważmy następujące wielomiany:

$$U(x): ax^2 + bx \qquad V(x): 2x^3 - 11x^2 + 12x \qquad W(x): x - 3$$

Dla jakich wartości współczynników a i b wielomian $U(x) - V(x)$ jest równy wielomianowi $U(x) \cdot W(x)$?

- 22.** Dzieląc pewien wielomian $W(x)$ przez dwumian $x+2$, otrzymujemy $2x^2+3x-4$ oraz resztę 5.

- a) Znajdź wielomian $W(x)$.
b) Znajdź resztę z dzielenia $W(x) : (x+1)$.
c) Znajdź pierwiastki wielomianu $W(x)$.

- 23.** Równanie $(x+2)(x^2+mx+3m-1) = 0$, gdzie m jest liczbą całkowitą, ma dokładnie dwa rozwiązania i są nimi liczby całkowite. Znajdź te rozwiązania.

- 24.** Oblicz, dla jakiej wartości p wielomian $x^3 + px^2 - 3x - 18$ jest podzielny przez $x+3$. Dla wyznaczonej wartości p rozwiąż nierówność $x^3 + px^2 - 3x - 18 < 0$.

25. Suma pól dwóch prostokątów wynosi 10. Jeden z tych prostokątów ma wymiary $a \times b$, a drugi $(a-1) \times b$. Zapisz wzór funkcji $b = f(a)$, tzn. funkcji, która opisuje, jak wielkość b zależy od wielkości a . Podaj dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji. Naskicuj jej wykres.

26. Rozwiąż równania:

$$p^6 - 2p^4 - p^2 + 2 = 0 \quad \text{ i } \quad \frac{p^6 - 2p^4 - p^2 + 2}{p^2 - p - 2} = 0$$

27. Dla jakiej wartości p wielomiany $5x^4 + 41x + 2$ i $-4x^3 + px^2 - 8$ mają ten sam pierwiastek całkowity?

28. Suma wszystkich współczynników wielomianu $x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Wielomian ten ma trzy pierwiastki, które tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 2. Oblicz współczynniki a , b oraz c . Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

29. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są: początek układu współrzędnych oraz punkty przecięcia się wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3} + 3$ i $g(x) = \frac{4x-2}{x+1}$.

30. Oblicz, dla jakich liczb rzeczywistych a i b nierówność $(x-a)(x-b) > 0$ ma taki sam zbiór rozwiązań jak nierówność $\frac{-2}{2x+5} < 1$?

31. Liczba -3 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu:

$$x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 3x + 45$$

a) Rozłóż ten wielomian na czynniki jak najniższego stopnia.

b) Uzasadnij, że ten wielomian przyjmuje tylko wartości nieujemne.

32. Naskicuj wykresy funkcji $f(x) = (x+2)(x+1)$ i $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$. Oblicz współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g .

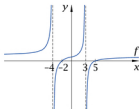
33. Wykaż, że punkty przecięcia wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{x+a} + a$ i $g(x) = \frac{1}{x-a} - a$, gdzie $a \neq 0$, leżą na prostej o równaniu $y = x$.

34. Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji, której wzór ma postać:

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$$

a) Zapisz wzór funkcji f , zastępując litery a , b , c , d odpowiednimi liczbami.

b) Oblicz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji f przecina oś y .



FUNKCJE WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE

FUNKCJA WYKŁADNICZA

Funkcję, której wzór można zapisać w postaci:

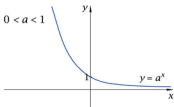
$$y = a^x, \quad \text{gdzie } a > 0,$$

nazywamy funkcją wykładniczą. Dziedzina funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych.

Jeżeli $a > 1$, to funkcja $y = a^x$ jest rosnąca.



Jeżeli $0 < a < 1$, to funkcja $y = a^x$ jest malejąca.



Jeśli $a = 1$ to funkcja $y = a^x$ jest funkcją stałą.

Wykres każdej funkcji wykładniczej przechodzi przez punkt $(0, 1)$. Prosta o równaniu $y = 0$ jest asymptotą wykresu funkcji wykładniczej $y = a^x$, gdy $a \neq 1$.

FUNKCJA LOGARYTMICZNA

Funkcję, której wzór można zapisać w postaci:

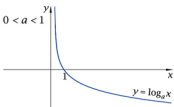
$$y = \log_a x, \quad \text{gdzie } a > 0 \text{ i } a \neq 1,$$

nazywamy funkcją logarytmiczną. Dziedzina funkcji logarytmicznej jest przedział $(0; +\infty)$.

Jeżeli $a > 1$, to funkcja $y = \log_a x$ jest rosnąca.



Jeżeli $0 < a < 1$, to funkcja $y = \log_a x$ jest malejąca.



Wykres każdej funkcji logarytmicznej przechodzi przez punkt $(1, 0)$. Prosta o równaniu $x = 0$ jest asymptotą wykresu funkcji logarytmicznej.

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji:

$$f(x) = 5,2^x \quad g(x) = 0,52^x$$

$$h(x) = \left(\frac{25}{52}\right)^x \quad i(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$$



Poprawne dopasowanie wykresów do funkcji to:

- A. ① – f ② – i ③ – g ④ – h C. ① – h ② – i ③ – f ④ – g
B. ① – h ② – g ③ – f ④ – i D. ① – g ② – h ③ – i ④ – f

2. Jedna z podanych funkcji jest malejąca. Która?

- A. $f(x) = 1 - \log_{\frac{1}{2}} x$ C. $f(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$
B. $f(x) = 1 + \log x$ D. $f(x) = 1 - \log x$

3. Ile wśród poniższych funkcji jest takich, które nie mają miejsc zerowych i są malejące?

$$f_1(x) = -3^x - 4 \quad f_2(x) = 0,1^x + 3 \quad f_3(x) = 7 - \log_5 x \quad f_4(x) = \log_{0,1}(x + 2)$$

- A. jedna B. dwie C. trzy D. cztery

4. Dla jakiej wartości parametru a miejscem zerowym funkcji $f(x) = \log_{0,3}(x - a)$ jest liczba 5?

- A. -4 B. -1 C. 1 D. 4

5. Dziedzina funkcji $f(x) = \log_x(x + 1)(x - 7)$ jest zbiór:

- A. $(7; +\infty)$ C. $(0; 1) \cup (1; +\infty)$
B. $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$ D. $(0; +\infty)$

6. Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = 0,4^{x-1} - 2$ są mniejsze od $\frac{17}{4}$?

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-\infty; 2)$ C. $(-1; +\infty)$ D. $(2; +\infty)$

7. Wzór funkcji $f(x) = \log_3 \sqrt[3]{3x^3}$ zapisano w postaci $f(x) = p + q \log_3 x$. Wówczas:

- A. $p = 0,2$, $q = 0,6$ C. $p = 1$, $q = 0,2$
B. $p = 0,2$, $q = 3$ D. $p = 3$, $q = 0,2$

8. Funkcja $f(x) = 5^x$ przyjmuje wartość 10 dla argumentu:

- A. 2 B. $\log_5 10$ C. $\log 5$ D. $\log \frac{1}{5}$

9. Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = \log_2 x^3 + \log_2 x$ przyjmuje wartości z przedziału $\langle 2; 3 \rangle$?

- A. $x \in \langle \sqrt[3]{4}; 2 \rangle$ C. $x \in \langle 1; \log_2 3 \rangle$
B. $x \in \langle 4; 8 \rangle$ D. $x \in \langle \sqrt{2}; \sqrt[4]{8} \rangle$

10. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{gdy } x < 1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}$$

Który z podanych punktów nie należy do wykresu funkcji f ?

- A. $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ B. $(-1, 2)$ C. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ D. $(2, -1)$

11. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ przechodzi przez punkt $(2, 5)$, gdy:

- A. $a = \log_2 5$ B. $a = \log_5 2$ C. $a = \sqrt{5}$ D. $a = 2^5$

12. Funkcje $f(x) = \log_2 x$ i $g(x) = \log_x 2$ przyjmują taką samą wartość:

- A. dla argumentów 2 i $\sqrt{2}$ C. dla argumentów 2 i $2^{-\sqrt{2}}$
B. dla argumentów 2 i $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. dla argumentów 2 i $\frac{1}{2}$

13. Funkcja $f(x) = x^{\log_2 x} - 2$:

- A. nie ma miejsc zerowych C. ma dwa miejsca zerowe
B. ma jedno miejsce zerowe D. ma trzy miejsca zerowe

14. Funkcje f oraz g są określone wzorami:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{gdy } x \leq 1 \\ \log_2 x, & \text{gdy } x > 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{gdy } x \leq 0 \\ \log_2 x, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

Funkcja h jest określona wzorem $h(x) = f(g(x)) - g(f(x))$. Wówczas wartość funkcji h dla argumentu $\frac{1}{2}$ wynosi:

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$

ZADANIA OTWARTE

15. Podaj równanie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = -2^{x+5} + 1$ oraz miejsce zerowe tej funkcji.

16. Miejscem zerowym funkcji $f(x) = \log_{1,7}(x - a)$ jest liczba 8. Podaj równanie asymptoty wykresu tej funkcji.

17. Tabelka obok przedstawia część wyników pewnego eksperymentu. Na początku eksperymentu badany zapamiętał 50 nowych słów. W kolejnych dniach część tych słów zapominał.

Numer dnia (n)	0	1
Liczba pamiętanych słów (s)	50	45

Uznaje się, że liczbę s zapamiętanych słów po n dniach od rozpoczęcia doświadczenia można obliczyć ze wzoru $s = a - b \log_2(n+1)$, gdzie a i b są pewnymi liczbami.

- a) Ile słów pamiętał badany po upływie tygodnia od rozpoczęcia doświadczenia?
 b) Przez ile dni badany pamiętał ponad połowę nauczonych słów?

18. W pewnym laboratorium badano próbkę zawierającą początkowo masę m_0 izotopu jodu ^{131}I . Na skutek rozpadu promieniotwórczego po upływie t dni masa m izotopu jodu zawartego w próbce zmienia się zgodnie ze wzorem $m(t) = m_0 \cdot 0,917^t$.

- a) Oblicz, o ile procent zmniejszy się masa izotopu jodu zawartego w tej próbce po upływie 2 dni.
 b) Oblicz czas połowicznego rozpadu izotopu jodu ^{131}I , tzn. czas, po którym w próbce pozostanie połowa początkowej masy tego izotopu.

19. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji $f(x) = 0,7^{x-3} + 2$ są większe od $3\frac{3}{7}$.

20. Rozwiąż nierówność $\log_{0,1} x + 2 \log_{0,1} 3 < \log_{0,1} 27$.

21. Wykres funkcji typu $f(x) = \log_a(bx + c)$ ma asymptotę o równaniu $x = -10$ i przecina osie układu współrzędnych w punktach $(5, 0)$ i $(0, -1)$. Oblicz a , b i c .

22. Oblicz, dla jakiego argumentu funkcje $f(x) = \log_2(x+3)$ i $g(x) = 3 + \log_2 x$ mają równe wartości.

23. Rozwiąż nierówność $3 + \log_2 x^3 > \log_2 6x$.

24. Wykaż, że jeżeli wykres funkcji $f(x) = \log_a x$ przecina w pewnym punkcie prostą o równaniu $y = x$, to przez ten punkt przechodzi również wykres funkcji $y = a^x$.

25. Funkcję f można opisać wzorem $f(x) = b \cdot a^x$, gdzie a oraz b są pewnymi liczbami rzeczywistymi i $a > 0$. Wiadomo, że $f(0) = 2$ i $f(-1) = 500$. Oblicz $f(2)$.

26. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja:

$$f(x) = (-x^4 + 3x^3 - 2x^2) \cdot \log(x+1)$$

przyjmuje wartości dodatnie.

TRYGONOMETRIA

PODSTAWOWE DEFINICJE I WŁASNOŚCI

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA OSTRĘGO



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

WARTOŚCI FUNKCJI DLA KĄTÓW 30°, 45° I 60°

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA SKIEROWANEGO



$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \text{gd}y \alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

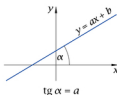
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Jeśli α jest kątem ostrym, to kąt $180^\circ - \alpha$ jest rozwarty i zachodzą równości:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Uwaga. Każdy z tych wzorów można stosować dla dowolnego kąta α , dla którego odpowiednia funkcja jest określona.

KĄT NACHYLENIA PROSTEJ DO OSI x



$$\operatorname{tg} \alpha = a$$

Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest nachylona do osi x pod takim kątem α , dla którego $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Uwaga. Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów omawiane będą w rozdziale *Planimetria*.

Miara łukowa kąta środkowego w okręgu to liczba równa stosunkowi długości łuku, na którym oparty jest ten kąt, do promienia okręgu.



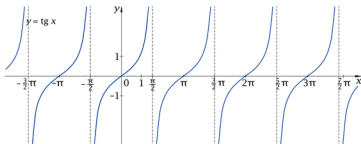
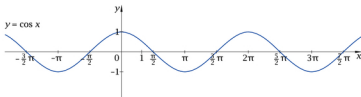
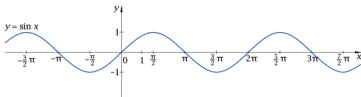
Miara łukowa kąta α wynosi $\frac{l}{r}$.

Kąt o mierze łukowej 1 nazywamy **radianem**. 1 radian (w skrócie 1 rad) to taki kąt, który w okręgu wycina łuk o długości równej promieniowi okręgu. $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$.

MIARY ŁUKOWE NIEKTÓRYCH KĄTÓW

Miara w stopniach	360°	180°	90°	60°	45°	30°
Miara łukowa	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

WYKRESY I WŁASNOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH



$$\sin x = \sin(x + 2k\pi), \text{ gdy } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi), \text{ gdy } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi), \text{ gdy } k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

WZORY REDUKCYJNE

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE SUMY I RÓŻNICY KĄTÓW

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE PODWOJONEGO KĄTA

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

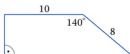
Uwaga. Każdy z tych wzorów można stosować dla takich kątów, dla których odpowiednie funkcje są określone.

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Obwód trapezu przedstawionego na rysunku obok, po zaokrągleniu do części dziesiątych, jest równy:

- A. 36,3 B. 38,3 C. 39,3 D. 40,3

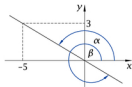


2. Największy kąt trójkąta przedstawionego na rysunku obok ma miarę, która po zaokrągleniu do pełnych stopni jest równa:

- A. 53° B. 62° C. 67° D. 74°



Я3. Na rysunku obok zaznaczono kąty α i β . Która z wartości funkcji trygonometrycznych jest błędna?



A. $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$ C. $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$

B. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{5}$ D. $\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{5}$

4. Wartość wyrażenia $\frac{\sin 60^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ}$ jest równa:

A. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

5. Kąt α spełnia warunki: $\sin \alpha = 0,6$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Wartość $\operatorname{tg} \alpha$ jest równa:

A. 0,75 B. -0,75 C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

6. Równanie prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem 60° i przecina oś x w punkcie o współrzędnych $(2, 0)$, można zapisać w postaci:

A. $y = x\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ B. $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $y = x\sqrt{3} + 2$ D. $y = -x\sqrt{3} + 2$

7. W trójkącie prostokątnym cosinus jednego z kątów ostrych wynosi $\frac{2}{5}$, a przeciwprostokątna ma długość 20. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. 27 B. $28 + 4\sqrt{21}$ C. $22 + 6\sqrt{11}$ D. $24 + 8\sqrt{21}$

8. Kąt nachylenia prostej o równaniu $y = -3x - 7$ do osi x z dokładnością do 1° ma miarę:

A. 72° B. 98° C. 108° D. 119°

9. Jeśli $\operatorname{tg} \alpha = -2$ i $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$, to $\cos \alpha$ jest równy:

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$

10. Jeśli $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3\frac{4}{5}$, to $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ jest równy:

A. $\frac{5}{4}$ B. $-\frac{5}{4}$ C. $\frac{5}{19}$ D. $-\frac{5}{19}$

Я11. Dwa kąty trójkąta mają miary (w radianach): 1 i $0,1\pi$. Trzeci kąt tego trójkąta ma miarę:

A. $0,9(\pi - 1)$ B. $179 - 0,1\pi$ C. $0,9\pi - 1$ D. $180 - 1,1\pi$

Я12. Miara kąta 25° wyrażona w radianach jest równa:

A. $\frac{5}{36}\pi$ B. $\frac{5}{18}\pi$ C. $\frac{1}{8}\pi$ D. $\frac{5}{9}\pi$

Я13. Miara kąta 53 radiany wyrażona w stopniach jest równa:

- A. $53\pi^\circ$ B. 9540° C. $\frac{9540^\circ}{\pi}$ D. $\frac{180^\circ}{53}$

Я14. Wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3}} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3}$ jest równa:

- A. 0 B. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ C. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Я15. Kąt α spełnia warunki: $\cos \alpha = -0,2$ oraz $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Wartość iloczynu $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ jest równa:

- A. 4,8 B. -0,2 C. $-\frac{24}{5}$ D. $-\frac{24}{25}$

Я16. Wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{11}{3}$. Wynika stąd, że wartość $\sin 2\alpha$ jest równa:

- A. $\frac{3}{22}$ B. $\frac{6}{11}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{11}$

Я17. Dana jest funkcja $f(x) = \left| -4 + \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right|$. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Największa wartość funkcji f jest równa 5.
B. Okres funkcji f jest równy 2π .
C. Najmniejsza wartość funkcji f jest równa 3.
D. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, 5)$.

Я18. Dla którego z poniższych kątów wartość sinusa jest inna niż $\sin 15^\circ$?

- A. 165° B. -195° C. 735° D. 345°

Я19. Suma rozwiązań równania $2 \cos x = 1$ należących do przedziału $(-\pi; 2\pi)$ jest równa:

- A. 0 B. $\frac{5\pi}{3}$ C. $\frac{11\pi}{6}$ D. $\frac{7\pi}{3}$

Я20. Zbiorem rozwiązań nierówności $\operatorname{tg}^2 x \leq 3$ jest:

- A. $\left\langle -\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$ C. $\left\langle -\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$
B. $\left\langle \frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$ D. $\left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{3} + k\pi \right\rangle, k \in \mathbb{Z}$

Я21. Dla dowolnego kąta x (gdzie $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$) wyrażenie $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x + \pi)}{\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$ jest równe:

- A. $\sin x$ B. $\cos x$ C. $\operatorname{tg} x$ D. 0

Я22. Przyjmijmy, że $\cos 70^\circ = p$. Wtedy:

- A. $\sin 70^\circ = 1 - p$ B. $\cos 20^\circ = -p$ C. $\sin 160^\circ = p$ D. $\cos 140^\circ = 2p$

Я23. Wartość $\cos 75^\circ$ jest równa:

- A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

Я24. Wiadomo, że $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$. Wynika stąd, że suma $\sin x + \cos x$ jest równa:

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ D. $\sqrt{3} - 1$

Я25. Suma rozwiązań równania $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$ należących do przedziału $\langle 0; \pi \rangle$ jest równa:

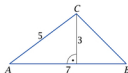
- A. 2π B. $\frac{4\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{3}$ D. $\frac{11\pi}{6}$

Я26. Zbiorem rozwiązań nierówności $4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} - \cos^2 x \leq \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0; \pi \rangle$ jest:

- A. $\left\langle \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\rangle$ C. $\left\langle 0; \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3}; \pi \right\rangle$
B. $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}; \pi \right\rangle$ D. $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\rangle$

ZADANIA OTWARTE

27. Podaj miary kątów trójkąta ABC z dokładnością do 1° .



28. Kąty α i β są kątami ostrymi w pewnym trójkącie prostokątnym. Wykaż, że:

a) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta}$

b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$

29. Uzasadnij tożsamość:

$$\frac{(\sin \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \beta - \cos \alpha)^2 - 2}{2 \cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$$

30. Zgodnie z przepisami budowlanymi podjazdy dla wózków inwalidzkich wewnątrz budynków nie mogą być nachylone pod kątem większym niż 5° . Czy spełnia te wymagania podjazd o długości 2,8 m, który pozwala pokonać różnicę wysokości 30 cm?

Я31. Naskicuj wykres funkcji $y = \frac{\cos x - |\cos x|}{2}$ w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

Я32. Narysuj wykresy funkcji $f(x) = \sin(x - \pi) - 2$ oraz $g(x) = \cos\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) - 1$. Uzasadnij, że $x = -\frac{\pi}{6}$ jest rozwiązaniem równania $f(x) = g(x)$, a następnie znajdź wszystkie pozostałe rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle -\pi; 4\pi \rangle$.

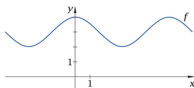
Я33. a) Wykaż, że zachodzi tożsamość $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + 2 \sin^2 \alpha = 1 + \sin^2 \alpha$.

b) Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + 2 \sin^2 \alpha$.

Я34. Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji f otrzymany w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = \cos x$.

a) Zapisz wzór funkcji f .

b) Ustal, jaką najmniejszą, a jaką największą wartość przyjmuje funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$, gdzie $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Ustal, dla jakich argumentów z przedziału $\langle -\pi; 2\pi \rangle$ funkcja h przyjmuje te wartości.



Я35. Rozwiąż równanie $-2 \cos^2 x - 7 \sin x - 2 = 0$.

Я36. Udowodnij tożsamość $2 \sin(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin 2\alpha - \sin 2\beta$.

37. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta nachylenia prostej o równaniu $y = -3x + 5$ do osi x .

38. Wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{8}{3}$. Uzasadnij, że $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{7}{4}$.

39. Znajdź miarę kąta ostrego utworzonego przez proste o równaniach $y = 2x + 4$ i $y = -x + 6$.

Я40. Wykaż, że tangens kąta ostrego, pod którym przecinają się proste o równaniach $y = ax + b$ i $y = cx + d$, gdzie $a \neq c$, jest równy $\left| \frac{a-c}{1+ac} \right|$.

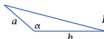
PLANIMETRIA

TRÓJKĄTY

POLE TRÓJKĄTA



$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$



$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

NIERÓWNOŚĆ TRÓJKĄTA

Suma długości dowolnych dwóch boków trójkąta jest większa niż długość trzeciego boku.



$$a + b > c$$

$$b + c > a$$

$$c + a > b$$

TWIERDZENIE PITAGORASA



$$a^2 + b^2 = c^2$$

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA PITAGORASA

Jeśli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

PUNKTY SZCZEGÓLNE W TRÓJKĄCIE

W każdym trójkącie:

- symetralne boków przecinają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta,
- dwusieczne kątów przecinają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od boków trójkąta,
- proste zawierające wysokości przecinają się w jednym punkcie nazywanym ortocentrum
- środkowe przecinają się w jednym punkcie, nazywanym środkiem ciężkości trójkąta. Środek ciężkości trójkąta dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1.

TWIERDZENIE O DWUSIECZNEJ

Jeśli w trójkącie ABC dwusieczna kąta o wierzchołku C przecina bok AB w punkcie D , to stosunek długości odcinków $|AD| : |BD|$ jest równy stosunkowi długości boków $|AC| : |BC|$.



$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



$$R = \frac{2}{3}h$$

$$r = \frac{1}{3}h$$

CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW



Cecha bbb

Jeśli boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



Cecha bkb

Jeśli dwa boki jednego trójkąta mają takie same długości jak odpowiednie boki drugiego trójkąta i miary kątów między tymi bokami są równe, to trójkąty są przystające.



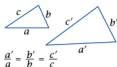
Cecha kbk

Jeśli bok jednego trójkąta ma taką samą długość jak bok drugiego trójkąta, a miary kątów jednego trójkąta przy tym boku są równe miarom odpowiednich kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

CECHY PODOBIEŃSTWA TRÓJKĄTÓW

Cecha bbb

Jeśli długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



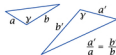
Cecha kk

Jeśli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe odpowiednim miarom kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



Cecha bkb

Jeśli długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta i miary kątów między tymi bokami w obu trójkątach są równe, to trójkąty są podobne.



TWIERDZENIE SINUSÓW

W trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

TWIERDZENIE COSINUSÓW

W trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między nimi.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

WIEŁOKĄTY

Suma miar kątów n -kąta wynosi $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Każdy kąt n -kąta foremnego ma miarę $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

Liczba przekątnych w n -kącie wynosi $\frac{n(n-3)}{2}$.

CZWOROKĄTY

Prostokąt



$$P = a \cdot b$$

Romb



$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

Równoległobok



$$P = a \cdot h$$

$$P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Trapez



$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

W trapezie suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu wynosi 180° .

W równoległoboku przekątne przecinają się w połowie i miary kątów leżących naprzeciw siebie są równe.

W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym.

W prostokącie przekątne mają równe długości.



Długość okręgu:

$$L = 2\pi r$$

Długość łuku:

$$l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Pole koła:

$$P = \pi r^2$$

Pole wycinka koła:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

KĄTY WPISANE I ŚRODKOWE



Kąt środkowy w kole ma 2 razy większą miarę niż kąt wpisany oparty na tym samym łuku.

Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.



Kąt wpisany oparty na średnicy jest kątem prostym.



Styczna do okręgu przechodząca przez koniec cięciwy tworzy z nią kąt ostry o mierze równej mierze kąta ostrego wpisanego opartego na tej cięciwie.

WIELOKĄTY I OKRĘGI

Środek okręgu opisanego na wielokącie leży na przecięciu symetrycznych boków wielokąta.



Środek okręgu wpisanego w wielokąt leży na przecięciu dwusiecznych kątów tego wielokąta.



Na każdym trójkącie można opisać okrąg i w każdy trójkąt można wpisać okrąg.

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów są równe.



$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest wypukły i sumy długości jego przeciwległych boków są równe.



$$a + c = b + d$$

POLE WIELOKĄTA OPISANEGO NA OKRĘGU



$$P = r \cdot p$$

P – pole wielokąta

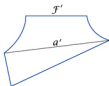
p – połowa obwodu wielokąta

FIGURY PODOBNE



$$\frac{a'}{a} = k$$

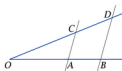
$$\frac{P_{F'}}{P_F} = k^2$$



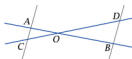
Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

TWIERDZENIE TALESA

Jeżeli dwie proste równoległe przecinają ramiona pewnego kąta, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta.



$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$$



$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$$

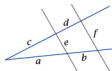
Przy takich oznaczeniach jak na rysunku obok zachodzą również następujące proporcje:

$$\frac{c}{a} = \frac{c+d}{a+b}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

$$\frac{f}{e} = \frac{a+b}{a}$$

$$\frac{e}{a} = \frac{f}{a+b}$$



TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA TALESA

Jeśli na jednym ramieniu kąta o wierzchołku O wybierzemy punkty A i B , a na drugim ramieniu punkty C i D w taki sposób, że zachodzi proporcja

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|},$$

to proste AC i BD są równoległe.

ZESTAW ZADAŃ

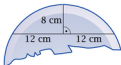
ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Wysokość rombu o przekątnych 3 i 8 jest równa:

- A. $\frac{12\sqrt{73}}{73}$ B. $\frac{48\sqrt{73}}{73}$ C. $\frac{24\sqrt{55}}{55}$ D. $\frac{24\sqrt{73}}{73}$

2. Jaką miarę ma kąt oznaczony literą α na rysunku obok?

- A. $40,5^\circ$ B. 27° C. 39° D. $49,5^\circ$



3. Podczas pewnych badań archeologicznych znaleziono fragment talerza. Na rysunku obok przedstawiono niektóre wymiary tego fragmentu. Oblicz, jaką średnicę miał talerz.

- A. 13 cm B. 26 cm C. 30 cm D. 32 cm

4. Zaznaczona na rysunku cięciwa większego okręgu ma długość d i jest styczna do mniejszego okręgu. Oblicz pole zacieniowanego pierścienia.

- A. $\frac{\pi d^2 \sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\pi}{4} d^2$ C. $\frac{\pi}{2} d^2$ D. πd^2



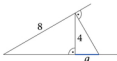
5. Pole zacieniowanego trójkąta jest równe:

- A. $1\frac{2}{5}$ B. 2 C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$



6. Jaką długość ma odcinek oznaczony literą a na rysunku obok?

- A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$



7. W okrąg o promieniu a wpisano trójkąt równoboczny. W ten trójkąt wpisano drugi okrąg, w który z kolei wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt wpisano trzeci okrąg itd. Oblicz promień dziesiątego okręgu.

- A. $\frac{a}{2^{10}}$ B. $\frac{a}{2^8}$ C. $\frac{a}{2^7}$ D. $\frac{a}{2^9}$

8. W sześciokąt foremny, którego dłuższe przekątne mają długość 4, wpisano koło. Stosunek pola koła do pola sześciokąta jest równy:

- A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$ D. $\frac{\pi}{6}$

9. Kwadrat i trójkąt równoboczny wpisano w ten sam okrąg. Ile razy większy jest obwód kwadratu od obwodu trójkąta?

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{3\sqrt{6}}{9}$ D. $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

10. Ile jest wielokątów foremnych, których kąt wewnętrzny ma miarę większą od 150° , ale mniejszą od 170° ?

- A. 23 B. 25 C. 24 D. 26

11. O ile mniej przekątnych ma pięciokąt niż dziesięciokąt?

- A. o 35 B. o 30 C. o 5 D. o 28

12. Pole zacieniowanej figury przedstawionej na rysunku obok jest równe:

- A. $\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$ C. 4
B. $1 + \frac{2}{3}\pi$ D. $2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$



13. Kąt ostry trapezu prostokątnego ma miarę α . Krótsza postawa i dłuższe ramię mają długość a . Pole trapezu jest równe:

- A. $\frac{a^2}{2} \sin \alpha (\cos \alpha + 2)$ C. $2a^2 \sin \alpha (\cos \alpha + 1)$
B. $a^2 (\sin \alpha + \cos \alpha)$ D. $\frac{a^2}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$

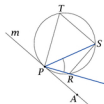
14. Największy z kątów czworokąta przedstawionego na rysunku obok ma miarę:

- A. 90° B. 95° C. 100° D. 105°



15. W równoległoboku boki mają długości 6 cm i 4 cm i jedna z przekątnych ma długość 8 cm. Tangens kąta ostrego tego równoległoboku wynosi:

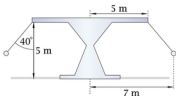
- A. $\sqrt{15}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{2}{3}$



16. Na rysunku obok prosta m jest styczna do okręgu w punkcie P . Dane są $|\angle APR| = 25^\circ$, $|\angle PTS| = 65^\circ$. Jaką miarę ma kąt ostry SPR ?

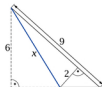
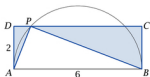
- A. 40° B. 45° C. 50° D. 65°

17. Krzeselka karuzeli są zaczepione na łańcuchach i gdy karuzela się obraca, odchylają się od pionu o 40° . Korzystając z informacji przedstawionych na rysunku obok, oblicz, jak wysoko nad ziemią znajdują się krzeselka, gdy karuzela się kręci.



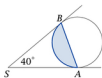
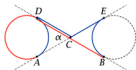
18. Łuki na rysunku obok są półokręgami. Uzasadnij, że niebieska linia jest dłuższa od czerwonej.

19. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą x na rysunku obok.



20. Na rysunku obok okrąg o średnicy AB przecina bok DC prostokąta $ABCD$ w dwóch punktach. Punkt P to ten z tych punktów, który leży bliżej wierzchołka D . Ile razy większe jest pole trójkąta BCP od pola trójkąta PDA ?

21. Okręgi na rysunku obok mają równe promienie i są styczne w punktach A, B, D i E do prostych AC i BC . Punkty A i B połączono dwiema liniami ciągłymi. Jedną z nich zaznaczono kolorem niebieskim, a drugą — czerwonym. Dla jakiego kąta α obie linie mają równe długości?



22. Na rysunku obok okrąg o promieniu 4 jest styczny w punktach A i B do obu ramion kąta ASB o mierze 40° . Oblicz pole zacieniowanego odcinka koła.

23. W trapezie $ABCD$ krótsza podstawa CD ma taką samą długość jak ramię BC . Uzasadnij, że przekątna BD dzieli kąt ABC na dwa kąty o tej samej mierze.

▮24. Wykaż, że przekątne poprowadzone z wierzchołka kąta wielokąta foremnego o n wierzchołkach, dzielą kąt przy tym wierzchołku na kąty o tej samej mierze. Jakie są miary tych kątów?

▮25. Jedna z przekątnych równoległoboku ma długość d i dzieli kąt równoległoboku na kąty α i β . Podaj wzór na obwód tego równoległoboku.

26. Geodeta wykonał w terenie pomiary, stojąc w punkcie oznaczonym na planie literą C . Wyniki pomiarów są przedstawione na rysunku obok. Oblicz, w jakiej odległości od punktów A , B i C znajduje się punkt jednakowo odległy od tych trzech punktów.



27. Kąt ostry rombu ma miarę 80° . Oblicz z dokładnością do 0,1%, o ile procent mniejsze jest pole tego rombu od pola kwadratu o takim samym boku.

28. Najmniejszy z kątów trójkąta ma miarę 18° . Bok leżący naprzeciw tego kąta ma długość 3, a inny z boków tego trójkąta ma długość 5. Oblicz z dokładnością do 0,1 pole tego trójkąta.

29. Przekątne równoległoboku przecinają się pod kątem 60° i mają długości 8 i 5. Oblicz długości boków tego równoległoboku oraz miary jego kątów.

▮30. Na okręgu o promieniu 5 opisano czworokąt o obwodzie równym 28. Dwa sąsiednie boki tego czworokąta mają długości 2 i 3. Oblicz długości dwóch pozostałych boków oraz pole tego czworokąta.

▮31. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w koło oraz wiadomo, że $|AB| = 3$, $|BC| = 7$, $|CD| = 4$ i $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Oblicz długość boku AD tego czworokąta.

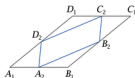


▮32. Pole kwadratu $ABCD$ jest równe p . Punkty E , F , G , H to środki boków tego kwadratu (zob. rysunek obok). Oblicz pole zaciętego czworokąta.

▮33. W równoległoboku $A_1B_1C_1D_1$ dane są:

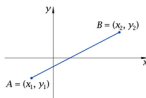
$$|A_1B_1| = 8, \quad |A_1D_1| = 10, \quad \sphericalangle A_1B_1C_1 = 150^\circ.$$

Rozpatrz ciąg równoległoboków, takich że wierzchołki równoległoboku $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ są środkami boków równoległoboku $A_nB_nC_nD_n$. Oblicz sumę pól wszystkich równoległoboków należących do tego ciągu.



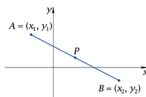
GEOMETRIA ANALITYCZNA

ODCINKI I WEKTORY



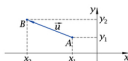
Długość odcinka:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Środek odcinka:

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



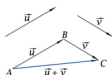
Współrzędne wektora:

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$

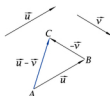
Długość wektora:

Jeśli $\vec{u} = [u_1, u_2]$, to $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

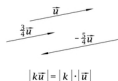
Suma wektorów



Różnica wektorów



Iloczyn wektora przez liczbę



Jeśli $\vec{u} = [u_1, u_2]$ i $\vec{v} = [v_1, v_2]$, to:

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \quad \vec{u} - \vec{v} = [u_1 - v_1, u_2 - v_2] \quad k \cdot \vec{u} = [ku_1, ku_2]$$

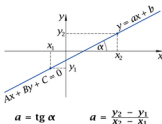
Dwa niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba k , że $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

Równanie każdej prostej można zapisać w postaci ogólnej:

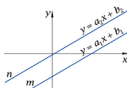
$$Ax + By + C = 0$$

Jeśli prosta nie jest równoległa do osi y , to jej równanie można zapisać w postaci kierunkowej:

$$y = ax + b$$



PROSTE RÓWNOLEGŁE



$$m \parallel n \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

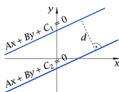
PROSTE PROSTOPADŁE



$$m \perp n \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{a_1}$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, a prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

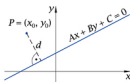
ODLEGŁOŚĆ DWÓCH PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH



Prosta o równaniu $Ax + By + C_1 = 0$ jest równoległa do prostej o równaniu $Ax + By + C_2 = 0$ i odległość między tymi prostymi można wyznaczyć ze wzoru:

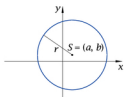
$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ



Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Postać kanoniczna równania okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu r :

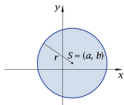
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równanie okręgu w postaci ogólnej:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Uwaga. Jeśli znamy równanie okręgu w postaci ogólnej, to współrzędne środka okręgu $S = (a, b)$ i promień r możemy obliczyć ze wzorów:

$$a = -\frac{A}{2} \quad b = -\frac{B}{2} \quad r^2 = \frac{A^2 + B^2}{4} - C$$



Współrzędne punktów należących do koła o środku $S = (a, b)$ i promieniu r spełniają nierówność:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

PUNKTY WSPÓLNE PROSTYCH I KRZYWYCH

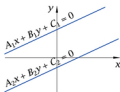
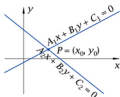
Aby znaleźć wspólne punkty prostych o równaniach $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Jeśli układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest para liczb x_0 i y_0 , to proste przecinają się w punkcie $P = (x_0, y_0)$.

Jeśli układ jest sprzeczny, to proste są równoległe — nie mają punktów wspólnych.

Jeśli układ jest nieoznaczony, to proste mają nieskończenie wiele punktów wspólnych (oba równania opisują tę samą prostą).



Aby znaleźć wspólne punkty prostej z okręgiem lub prostej z parabolą, należy rozwiązać odpowiedni układ równań.

Rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

to współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu.

Rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

to współrzędne punktów wspólnych prostej i paraboli.

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Punkty $(-4, -3)$ i $(2, 5)$ są końcami średnicy pewnego okręgu. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Środkiem tego okręgu jest punkt $(-1, 1)$.
- B. Promień tego okręgu jest równy 10.
- C. Punkt $(2, -3)$ leży na tym okręgu.
- D. Punkt $(-5, 0)$ należy do koła ograniczonego tym okręgiem.

2. Punkt $S = (-5, 7)$ jest środkiem odcinka, którego końcami są punkty $(a, 9)$ i $(-4, b)$. Suma $a + b$ jest równa:

- A. -3
- B. -1
- C. 2
- D. 5

3. Proste o równaniach $y = (m - 1)x + m$ i $2mx + 3y - 1 = 0$ są równoległe. Wynika stąd, że:

- A. $m = -3$
- B. $m = 0,6$
- C. $m = 1$
- D. $m = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$

4. W którym przypadku prosta przechodząca przez punkty $(101, -63)$ i $(116, -83)$ jest równoległa do prostej AB ?

- A. $A = (-63, 101)$, $B = (-83, 116)$
- B. $A = (3, -7)$, $B = (-3, 1)$
- C. $A = (4, 6)$, $B = (5, 26)$
- D. $A = (-11, 10)$, $B = (19, -10)$

5. Które z podanych równań przedstawia prostą prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = -2x - 4$ przechodzącą przez punkt $(1, -2)$?

- A. $x - 2y + 5 = 0$
- B. $-4x - y + 2 = 0$
- C. $x + 2y + 3 = 0$
- D. $-x + 2y + 5 = 0$

6. Symetralna odcinka o końcach w punktach $(-7, 6)$ i $(-3, -4)$ ma równanie:

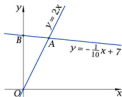
- A. $y = -2,5x - 11,5$
- B. $y = 0,4x + 3$
- C. $y = \frac{2}{5}x + 1$
- D. $y = -\frac{2}{5}x - 1$

7. Proste o równaniach $-3x + 5y = -11$ i $5x + 2y = -23$ oraz jedna z prostych podanych poniżej przecinają się w jednym punkcie. Wskaż tę prostą.

- A. $6x - 7y = 10$
- B. $x + y = 7$
- C. $2x - 5y = 11$
- D. $-4x + 3y = 8$

8. Pole trójkąta OAB przedstawionego na rysunku obok jest równe:

- A. $11\frac{2}{3}$
- B. $12\frac{17}{19}$
- C. $13\frac{9}{10}$
- D. $23\frac{1}{3}$



9. Odległość między punktami, w których prosta o równaniu $y = -2x + 4$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2$, jest równa:

- A. 5 B. $20\sqrt{2}$ C. 10 D. $6\sqrt{5}$

10. Odległość punktu $P = (-3, 5)$ od prostej o równaniu $y = -2x + 4$ jest równa:

- A. $\frac{7}{\sqrt{5}}$ B. $\frac{7}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\sqrt{5}$

11. Które z poniższych zdań dotyczy okręgu o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 34$?

- A. Środek okręgu ma współrzędne $(-3, 5)$.
B. Promień okręgu jest równy 17.
C. Okrąg jest styczny do osi y .
D. Okrąg przechodzi przez początek układu współrzędnych.

12. Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie $(-8, 0)$, który jest styczny zewnętrznie do okręgu o równaniu $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 100$.

- A. $(x + 8)^2 + y^2 = 9$ C. $x^2 + (y + 8)^2 = 9$
B. $x^2 + (y - 8)^2 = 4$ D. $(x - 8)^2 + y^2 = 36$

13. Punkt A_1 jest obrazem punktu $A = (-9, 7)$ w symetrii osiowej względem osi x , a punkt A_2 jest obrazem punktu A w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Okrąg opisany na trójkącie A_1AA_2 ma równanie:

- A. $x^2 + y^2 = 260$ C. $x^2 + y^2 = 130$
B. $(x + 9)^2 + (y - 7)^2 = \sqrt{130}$ D. $(x - 4,5)^2 + (y + 3,5)^2 = 65$

14. Punkty przecięcia się wykresów funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \frac{x+5}{x+1}$ są końcami średnicy okręgu o równaniu:

- A. $(x + 2 - \sqrt{5})^2 + (y - 2 + \sqrt{5})^2 = 40$ C. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 10$
B. $(x - \sqrt{5})^2 + (y + \sqrt{5})^2 = 20$ D. $(x + \sqrt{5})^2 + (y - \sqrt{5})^2 = 2\sqrt{10}$

15. Najkrótszy odcinek łączący początek układu współrzędnych z punktem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 14y + 32 = 0$ ma długość:

- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$

16. Dla jakich wartości a prosta o równaniu $y = ax$ ma punkty wspólne z kołem o środku $(2, 1)$ i promieniu $\sqrt{3}$?

- A. $a \in \left\langle \frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ C. $a \in \left\langle \frac{2-\sqrt{6}}{2}; \frac{2+\sqrt{6}}{2} \right\rangle$
B. $a \in \left\langle 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3} \right\rangle$ D. $a \in \left\langle 2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6} \right\rangle$

17. Wykres funkcji $f(x) = -x^2 + 4$ przecina oś x w punktach A i B . Do tego wykresu należą punkty P_1 i P_2 , takie że trójkąty ABP_1 i ABP_2 są prostokątne. Odległość $|P_1P_2|$ jest równa:

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

18. Niech $P = (-1, 7)$, $Q = (7, -4)$, $A = (t, 5 - t)$ i $B = (1 - t, t + 1)$. Dla jakiej wartości parametru t punkt Q otrzymamy po przesunięciu punktu P o wektor $\overrightarrow{AB}$?

- A. $t = -3,5$ B. $t = -2,5$ C. $t = 1$ D. $t = 1,5$

19. Punkty $A = (-16, 23)$, $B = (24, 43)$ i $C = (14, 63)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Znajdź współrzędne wektora $\overrightarrow{BD}$.

- A. $[-30, -40]$ B. $[-50, 0]$ C. $[20, -10]$ D. $[-40, 10]$

20. Dane są wektory $\vec{u} = [-6, 18]$, $\vec{v} = [5, -8]$ i $\vec{w} = [a, 55]$. Dla jakiej liczby a wektory $\vec{u}$ i $\vec{v} - \vec{w}$ są równoległe?

- A. $a = -21$ B. $a = -16$ C. $a = 38,5$ D. $a = 66$

ZADANIA OTWARTE

21. Dane są punkty $A = (-3, -5)$, $B = (1, 5)$ i $C = (-2, 3)$. Oblicz odległość punktu C od prostej AB oraz pole trójkąta ABC .

22. Punkty $A = (-1, 1 + 2\sqrt{3})$, $B = (-3, 1)$, $C = (-3 - \sqrt{3}, 0)$ są wierzchołkami trójkąta. Oblicz miarę kąta ABC .

23. Punkt $A = (3, 4)$ jest wierzchołkiem równoległoboku, którego dwa boki zawarte są w prostych o równaniach $y = x$ i $y = \frac{1}{2}x + 1$. Znajdź współrzędne punktu przecięcia przekątnych.

24. Uzasadnij, że prosta o równaniu $x + 3y - 9 = 0$ jest styczna do okręgu o równaniu $(x + 1)^2 + y^2 = 10$, i znajdź współrzędne punktu styczności.

25. Znajdź współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (0, 4)$.

26. Znajdź na prostej o równaniu $-x + y = 4$ punkt, którego odległości od punktów $(2, 20)$ i $(14, 24)$ są równe.

27. Znajdź ogólne równanie prostej, która jest obrazem prostej o równaniu $x - 3y + 6 = 0$ w symetrii względem:

- a) osi y , b) środka układu współrzędnych.

- 28.** Znajdź równanie prostej, która w punkcie o współrzędnych $(-1, 3)$ jest styczna do okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$.
- 29.** Znajdź współrzędne końców cięciwy wyciętej z prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + 3$ przez okrąg o równaniu $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9\frac{1}{4}$.
- 30.** Wyznacz wszystkie wartości a , dla których prosta o równaniu $y = ax$ ma przynajmniej jeden punkt wspólny z trójkątem o wierzchołkach $A = (4, 1)$, $B = (2, 3)$ i $C = (-5, 2)$.
- 31.** Dla jakich wartości parametru a parabola o równaniu $y = ax^2$ ma jeden punkt wspólny z okręgiem o równaniu $x^2 + (y-1)^2 = 1$?
- 32.** Oblicz współrzędne obrazu punktu $P = (a, b)$ w symetrii względem prostej o równaniu $y = 2x$.
- 33.** Znajdź współrzędne wektora o długości 3 równoległego do prostej o równaniu $y = -2x + 1$.
- 34.** O jaki wektor należy przesunąć okrąg o równaniu $x^2 + (y-6)^2 = 4$, aby otrzymać okrąg styczny do okręgu o równaniu $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ w punkcie $(5, 0)$?
- 35.** Niech $\overrightarrow{AB} = [a, b]$ i $\overrightarrow{AC} = [-b, a]$.
- Znajdź współrzędne wektora $\overrightarrow{BC}$.
 - Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, udowodnij, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są prostopadłe.
- 36.** Wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = [15, 18]$, $\overrightarrow{AD} = [6, 23]$ i $\overrightarrow{CB} = [6\frac{1}{2}, -8]$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.
- 37.** Na bokach równoległoboku $ABCD$ zbudowano dwa wektory: $\overrightarrow{AB} = [10, 1]$ oraz $\overrightarrow{CB} = [-2, -5]$. Oblicz pole tego równoległoboku.
- 38.** Dane są dwa okręgi o równaniach: $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 25$ i $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. Znajdź równanie prostej, względem której jeden z okręgów jest symetryczny do drugiego okręgu.
- 39.** Na wykresie funkcji $f(x) = x^2$ wybieramy punkty $A = (-1, 1)$ i $B = (3, 9)$. Rozważmy wszystkie trójkąty o wierzchołkach A , B i C , gdzie C jest punktem leżącym na paraboli. Jaki warunek musi spełniać pierwsza współrzędna punktu C , aby kąt przy wierzchołku C był kątem ostrym?

STEREOMETRIA

WIEŁOŚCIANY

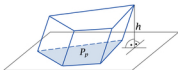
GRANIASTOSŁUPY

W graniastosłupie podstawy są wielokątami przystającymi i leżącymi na płaszczyznach równoległych i krawędzie boczne są równoległe.

Graniastosłup, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw, nazywamy graniastosłupem prostym. W takim graniastosłupie ściany boczne są prostokątami.

Graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw, nazywamy graniastosłupem pochyłym.

Graniastosłup prosty, w którym podstawy są wielokątami foremnymi, nazywamy graniastosłupem prawidłowym.



$$V = P_p \cdot h$$

P_p — pole podstawy graniastosłupa
 h — wysokość graniastosłupa

OSTROSŁUPY

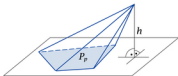
W ostrosłupie podstawa jest wielokątem, a krawędzie boczne mają wspólny punkt nazywany wierzchołkiem ostrosłupa.

Ostrosłup trójkątny jest nazywany czworościanem.

Uwaga. W czworościanie każdą ze ścian możemy uznać za podstawę. Czworościan ma zatem cztery wysokości.

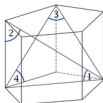
Ostrosłup, w którym podstawa jest wielokątem foremnym i krawędzie boczne mają równe długości, nazywamy ostrosłupem prawidłowym.

Jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają równe długości, to na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg i środek tego okręgu jest spodkiem wysokości ostrosłupa.



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

P_p — pole podstawy ostrosłupa
 h — wysokość ostrosłupa



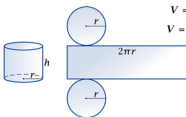
- 1 — kąt między przekątną graniastosłupa a podstawą
 2 — kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią boczną
 3 — kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych
 4 — kąt między przekątną ściany bocznej a podstawą



- 5 — kąt między krawędzią boczną ostrosłupa a krawędzią podstawy
 6 — kąt między krawędzią boczną a podstawą
 7 — kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną
 8 — kąt między wysokością ostrosłupa a ścianą boczną

BRYŁY OBROTOWE

WALEC



$$V = P_p \cdot h$$

$$P_c = 2P_p + P_b$$

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$P_c = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

V — objętość

P_p — pole podstawy

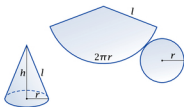
P_b — pole powierzchni bocznej

P_c — pole powierzchni całkowitej

r — promień podstawy

h — wysokość walca

STOŻEK



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h \quad P_b = \pi r l$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \quad P_c = \pi r^2 + \pi r l$$

V — objętość

P_p — pole podstawy

P_b — pole powierzchni bocznej

P_c — pole powierzchni całkowitej

r — promień podstawy

h — wysokość stożka

l — długość tworzącej

KULA



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

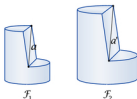
$$P = 4\pi r^2$$

V — objętość kuli

P — pole powierzchni kuli

r — promień kuli

BRYŁY PODOBNE



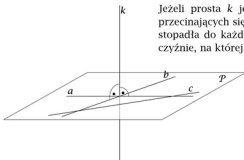
Stosunek objętości brył podobnych jest równy sześcianowi skali podobieństwa.

$$\frac{V_{F_2}}{V_{F_1}} = k^3 \quad \frac{a'}{a} = k$$

Stosunek pól powierzchni brył podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

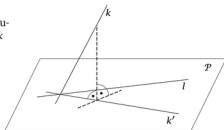
$$\frac{P_{F_2}}{P_{F_1}} = k^2$$

PROSTE W PRZESTRZENI



Jeżeli prosta k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych a i b , to jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie, na której leżą proste a i b .

Niech prosta k' będzie rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę P i niech l oznacza inną prostą na tej płaszczyźnie. Wówczas proste l i k są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy l i k' są prostopadłe.



ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość 6, a krawędź boczna ma długość 8. Krótsza przekątna tego graniastosłupa ma długość:

- A. 10 B. $4\sqrt{13}$ C. $2\sqrt{43}$ D. $2\sqrt{37}$

2. Ile przekątnych ma graniastosłup sześciokątny?

- A. 6 B. 12 C. 18 D. 36

3. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny, którego bok ma długość 8. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy i ma długość 6. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe:

- A. $6\sqrt{5}+16\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{5}+4\sqrt{3}$ C. $8\sqrt{21}+4\sqrt{3}+24$ D. $8\sqrt{21}+16\sqrt{3}+48$

4. Które z poniższych zdań nie musi być prawdziwe w wypadku ostrosłupa prawidłowego czworokątnego?

- A. Wysokość ostrosłupa jest dłuższa od krawędzi podstawy.
B. Krawędź boczna jest dłuższa od wysokości ostrosłupa.
C. Ściany boczne są nachylone do podstawy pod takim samym kątem.
D. Krawędzie boczne są nachylone do podstawy pod takim samym kątem.

5. Objętość czworoscianu foremnego o długości krawędzi 3 wynosi:

- A. $\frac{27}{8}$ B. $\frac{9}{4}\sqrt{2}$ C. $\frac{9}{8}\sqrt{6}$ D. $\frac{27}{4}\sqrt{2}$

6. Pole powierzchni bocznej pewnego walca o wysokości h i średnicy podstawy d jest równe sumie pól obu podstaw. Wynika stąd, że:

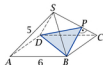
- A. $h = \frac{d}{2}$ B. $h = \frac{d}{\pi}$ C. $h = d$ D. $h = \pi d$

7. W naczyniu w kształcie walca umieszczono kulę, która jest styczna do obu podstaw walca i do jego powierzchni bocznej. Jaką część objętości tego naczynia zajmuje kula?

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

8. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny. Pole trójkąta PDB jest równe:

- A. 18 B. $\frac{18}{5}\sqrt{7}$ C. $\frac{72}{5}\sqrt{5}$ D. $\frac{225}{4}\sqrt{2}$

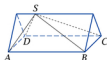


9. Z wycinka koła o kącie środkowym 90° utworzono powierzchnię boczną stożka o promieniu podstawy R_1 . Z pozostałej części koła utworzono powierzchnię boczną stożka o promieniu podstawy R_2 . Stosunek $\frac{R_1}{R_2}$ jest równy:

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

10. Krawędź podstawy graniastopu prawidłowego trójkątnego ma długość 12, a jego wysokość wynosi 10. Z tego graniastopu wycięto ostrosłup $ABCD$ (zob. rysunek). Objętość tego ostrosłupa jest równa:

- A. $240\sqrt{3}$ B. $720\sqrt{3}$ C. 280 D. $144\sqrt{3}$



11. Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy sześciokątny $ABCDEF$. Kąt między krawędzią DS , a podstawą ostrosłupa to:

- A. $\angle EDS$ C. $\angle FDS$
B. $\angle CDS$ D. $\angle ADS$

12. W prostopadłościanie przedstawionym na rysunku obok kąt BHG ma miarę α . Wynika stąd, że:

- A. $\alpha = 30^\circ$ C. $\sin \alpha = \frac{2}{3}\sqrt{5}$
B. $\alpha = 60^\circ$ D. $\tan \alpha = \frac{9}{5}\sqrt{5}$



13. Prostopadłościan o polu powierzchni równym p rozcięto na dwie części płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki (zob. rysunek). O ile większe jest pole powierzchni większej z tych brył od pola powierzchni mniejszej bryły?

- A. o $\frac{1}{6}p$ B. o $\frac{1}{2}p$ C. o $\frac{2}{3}p$ D. o $\frac{5}{6}p$

14. Podstawa ostrosłupa jest prostokątem i jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do podstawy. Ile ścian bocznych tego ostrosłupa to trójkąty prostokątne?

- A. jedna B. dwie C. trzy D. cztery

15. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Wówczas cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy:

- A. $\frac{1}{\sqrt{42}}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{15}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{2}{3\sqrt{5}}$

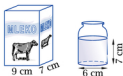
16. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a . Kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi ma miarę α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

17. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny, którego boki mają długości 5 cm, 5 cm, 6 cm i 12 cm. Przekątne tego graniastosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość tego graniastosłupa.

18. Po zwinieniu wycinka kołowego o promieniu 7 i kącie środkowym 135° otrzymano powierzchnię boczną pewnego stożka. Oblicz objętość tego stożka.

19. Pojemnik na ołówki ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego (bez górnej podstawy). Krawędź podstawy tego pojemnika ma długość 5 cm, a wysokość wynosi 9 cm. Czy ołówek o długości 14 cm można włożyć do tego pojemnika tak, aby z niego nie wystawał?

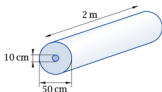
20. Wyobraź sobie, że z zapalek budujemy modele ostrosłupów prawidłowych tak, aby każda krawędź zbudowana była z jednej zapalki. Jakimi wielokątami mogą być podstawy tych ostrosłupów? Oblicz wysokość najniższego z tych ostrosłupów. Przyjmij, że zapalka ma długość 4 cm.



21. Z kartonu zawierającego 1 litr mleka przelano część mleka do słoika (zob. rysunek obok). Oblicz, do jakiej wysokości sięga mleko, które zostało w kartoniku (pomiń grubości ścianek kartonu i słoika).

22. Góra piasku o gęstości 1500 kg/m^3 waży 2 t i ma kształt stożka, w którym tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Po dosypaniu pewnej ilości piasku wysokość stożka wzrosła o 10 cm, a kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy się nie zmienił. Ile ton piasku dosypano?

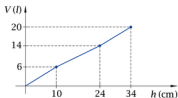
23. Papier nawinięty na rulon o średnicy 10 cm tworzy rolę o średnicy 50 cm i długości 2 m.



a) Gęstość papieru wynosi 800 kg/m^3 . Ile waży papier w tej roli?

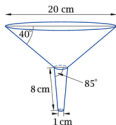
b) Zewnętrzne warstwy papieru w tej roli uległy zniszczeniu tak, że nieuszkodzona część stanowi 40% papieru w roli. Oblicz średnicę nieuszkodzonej części roli.

24. Na fotografii przedstawiona jest butla na wodę. Przyjmij, że część butli wypełniona wodą ma kształt walca o wysokości 34 cm, z którego usunięto pewien fragment. Poniższy wykres opisuje zależność objętości wody (w litrach) od wysokości (w centymetrach), do której sięga woda w butli. Jaka objętość ma usunięty fragment walca? W obliczeniach pominię grubość ścianek butli.



25. W skarbcu Międzynarodowego Urzędu Miar w Sèvres pod Paryżem od ponad stu lat jest przechowywany wzorzec kilograma. Wzorzec ma kształt walca, którego średnica podstawy równa jest wysokości. Został on wykonany ze stopu, w którym 90% stanowi platyna, a 10% — iryd. Gęstość platyny wynosi $21,45 \text{ g/cm}^3$, a irydu $22,65 \text{ g/cm}^3$. Oblicz, jakie są wymiary wzorca kilograma (z dokładnością do 0,1 mm).

26. Plastikowy kubek ma kształt stożka ściętego o takich wymiarach jak na rysunku obok. Oblicz pojemność tego kubka. Pomiń grubość ścianek.



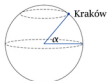
27. Z rysunku obok można odczytać niektóre wymiary lejka. Oblicz, jaką wysokość ma ten lejek. Wynik zaokrąglij do 1 mm.

28. Z kwadratowego arkusza kartonu o boku a wycięto w rogach cztery jednakowe kwadraty, a następnie sklejono prostopadłościennie pudełko. Jaka powinna być długość boku wycinanych kwadratów, aby powierzchnia ścianek bocznych tego pudełka była możliwie największa?



29. Przyjmijmy, że Ziemia ma kształt kuli o promieniu 6371 km. O ile dłuższa byłaby podróż dookoła świata wzdłuż równika od podróży wzdłuż równoleżnika przechodzącego przez Kraków (szerokość geograficzna 50°N)?

Uwaga. Na rysunku kąt α to szerokość geograficzna Krakowa.



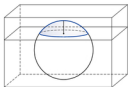
30. Przeczytaj poniższe informacje.

Każda z części, na które płaszczyzna rozcina sferę, nazywa się czaszą. Pole P powierzchni czaszy przedstawionej na rysunku obok można obliczyć ze wzoru $P = 2\pi Rh$.

Wycinkiem kuli nazywamy część kuli ograniczoną czaszą i powierzchnią boczną stożka o wierzchołku w środku tej kuli. Objętość wycinka kuli można obliczyć, mnożąc pole powierzchni czaszy przez $\frac{1}{3}$ promienia kuli.



Wykaż, że objętość V czaszy można obliczyć ze wzoru $V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right)$.

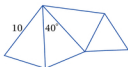


31. Masa pływającego ciała jest równa masie wody wypartej przez to ciało. Piłka o promieniu 10 cm pływa w wodzie tak, że wystaje 3 cm ponad powierzchnię wody. Oblicz masę piłki. Przyjmij, że gęstość wody wynosi 1 g/cm^3 . Skorzystaj ze wzoru wykazanego w poprzednim zadaniu.

32. Od ostrosłupa o wysokości h odcinamy mniejszy ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy. W jakiej odległości od podstawy powinna być poprowadzona płaszczyzna cięcia, aby mniejszy ostrosłup:

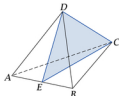
- miał objętość równą połowie objętości większego ostrosłupa,
- miał pole powierzchni równe połowie pola powierzchni większego ostrosłupa?

33. Długość krawędzi sześcianu wynosi 2. Oblicz pole przekroju tego sześcianu płaszczyzną zawierającą przekątną jednej ze ścian oraz przechodzącą przez środki dwóch krawędzi przeciwległej ściany.



34. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę przedstawiono na rysunku obok.

- ▣ **35.** W czworościanie $ABCD$ podstawa ABC jest trójkątem równoramiennym o długościach boków $|AB| = 6$ i $|AC| = |BC| = 5$, a krawędzie AD i BD mają równe długości. Kąt między ścianami ABC i ABD ma miarę 40° , a krawędź CD jest nachylona do ściany ABC pod kątem 30° . Punkt E jest środkiem krawędzi AB . Oblicz pole przekroju CDE .



- ▣ **36.** Rozważmy dwa graniastosłupy prawidłowe sześciokątne o jednakowych podstawach i różnych wysokościach. Ten niższy ma wysokość h , a kąt między krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej zawierającej tę krawędź ma miarę α . Wyższy graniastosłup ma wysokość H , a kąt między krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej zawierającej tę krawędź ma miarę β . Wykaż, że jeżeli dłuższa przekątna niższego graniastosłupa ma taką samą długość jak krótsza przekątna wyższego graniastosłupa, to $\operatorname{tg}^2 \beta = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$.
- ▣ **37.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 4, a krawędź boczna ma długość 7. Oblicz obwód i pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą jedną krawędź podstawy i przechodzącą przez środek krawędzi bocznej, skośnej do tej krawędzi podstawy.

GRANICE I POCHODNE

GRANICE CIĄGÓW

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$$

Jeśli $q \in (-1; 1)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Jeśli $q > 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$.

Jeśli $k > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

Jeśli $q \leq -1$, to ciąg $a_n = q^n$ nie ma granicy.

Uwaga. Ciąg, który ma granicę skończoną, nazywamy zbieżnym. Gdy granica ciągu jest równa $+\infty$ lub $-\infty$ albo ciąg nie ma granicy, to nazywamy go rozbieżnym.

TWIERDZENIE O TRZECZ CIĄGACH

Jeśli prawie wszystkie wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) , (c_n) spełniają warunek $a_n \leq c_n \leq b_n$ oraz ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$, to ciąg (c_n) jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$.

GRANICE FUNKCJI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Jeśli $a \in (0; 1)$, to zachodzą równości:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

Jeśli $a \in (1; +\infty)$, to zachodzą równości:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

WŁASNOŚCI GRANIC WŁAŚCIWYCH

Jeśli istnieją granice $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ i są to granice właściwe, to:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} af(x) = a \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}, \text{ gdy } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$$

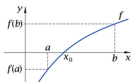
Analogiczne własności mają także granice funkcji w $-\infty$, granice w dowolnym punkcie x_0 oraz granice jednostronne.

Funkcję f nazywamy funkcją ciągłą w punkcie x_0 należącym do jej dziedziny, gdy funkcja f ma w tym punkcie granicę i $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

WŁASNOŚĆ DARBOUX

Jeśli funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale $\langle a; b \rangle$ i $f(a) \neq f(b)$, to funkcja f przyjmuje w przedziale $\langle a; b \rangle$ wszystkie wartości między liczbami $f(a)$ i $f(b)$.

Wynika stąd, że jeśli funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale $\langle a; b \rangle$ oraz $f(a)$ i $f(b)$ mają różne znaki, to $f(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \langle a; b \rangle$.

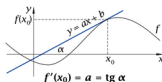


POCHODNA FUNKCJI

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $\langle a; b \rangle$ i niech $x_0 \in \langle a; b \rangle$. Wówczas:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Liczba $f'(x_0)$ jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



WŁASNOŚCI POCHODNYCH

$$(c \cdot f(x))' = c f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \text{ gdzie } g(x) \neq 0$$

$$[g(f(x))]' = g'(y) \cdot f'(x), \text{ gdzie } y = f(x)$$

POCHODNE NIEKTÓRYCH FUNKCJI

$$(c)' = 0 \quad (x)' = 1 \quad \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x^a)' = ax^{a-1}$$

Jeśli $s(t)$ jest funkcją opisującą przemieszczanie obiektu w czasie, to prędkość obiektu $v(t)$ jest jej pochodną, czyli $v(t) = s'(t)$. Natomiast przyspieszenie obiektu a jest pochodną prędkości, czyli $a = v'(t)$.

WŁASNOŚCI FUNKCJI RÓŻNICZKOWALNYCH

Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a; b)$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale $(a; b)$.

Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a; b)$, to funkcja f jest malejąca w przedziale $(a; b)$.

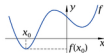
Jeśli $f'(x) = 0$ dla $x \in (a; b)$, to funkcja f jest stała w przedziale $(a; b)$.

Jeśli funkcja f jest rosnąca i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$, to dla każdego argumentu x z tego przedziału $f'(x) \geq 0$.

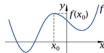
Jeśli funkcja f jest malejąca i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$, to dla każdego argumentu x z tego przedziału $f'(x) \leq 0$.

EKSTREMA

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe równe $f(x_0)$, gdy można wskazać takie sąsiedztwo punktu x_0 , że dla każdego argumentu x z tego sąsiedztwa $f(x_0) < f(x)$.



Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe równe $f(x_0)$, gdy można wskazać takie sąsiedztwo punktu x_0 , że dla każdego argumentu x z tego sąsiedztwa $f(x_0) > f(x)$.



WARUNEK KONIECZNY ISTNIENIA EKSTREMUM

Jeśli funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0 i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.

WARUNEK DOSTATECZNY ISTNIENIA EKSTREMUM



Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (a; x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to funkcja ta ma w punkcie x_0 minimum.



Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (a; x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to funkcja ta ma w punkcie x_0 maksimum.

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Którą z granic ciągów obliczono błędnie?

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 6n^2 - 5}{1 - n^4} = 0$ C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4 + 5n^3 + 1}{-4n^2 + 3n} = +\infty$
B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^5 - 4n^2}{2n^5 - n^2 + 5n} = -3$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 7}{2n^2 + 7n^3} = 1$

2. Granica ciągu $a_n = \frac{8 + 0,7^n}{8 - 7^n}$ jest równa:

- A. 1 B. $-\frac{1}{10}$ C. 0 D. $-\infty$

3. Niech (a_n) , (b_n) , (c_n) są takimi ciągami, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -5$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\infty$. Która z poniższych granic nie jest równa $+\infty$?

- A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n - c_n)$ C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a_n - \frac{b_n}{c_n} \right)$
B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n + a_n \cdot c_n)$ D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{c_n}{a_n} + b_n \right)$

4. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{10}{\log x} + 10^x$. Która z poniższych granic jest liczbą rzeczywistą?

- A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ B. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ C. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

5. Która z poniższych granic jest liczbą wymierną?

- A. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 2x}{4x^2 - 4x + 1}$ B. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x - 6}$ C. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2 - 5x}{x + 1}$ D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 4}{4x - 7}$

6. Dla której z podanych wartości parametru k nie zachodzi poniższa równość?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^2 x^3 - 5kx^2 - 2x - 4}{(k^3 - 5k)x^3 + x + 5 + k} = -2$$

- A. -2,5 B. 0 C. 1 D. 2

7. Dla jakiej wartości parametru p zachodzi poniższa równość?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + 7 + 11 + \dots + (3 + 4n)}{5 + (5 + p) + (5 + 2p) + \dots + (5 + np)} = 3$$

- A. $p = \frac{1}{3}$ B. $p = \frac{3}{4}$ C. $p = \frac{4}{3}$ D. $p = \frac{5}{3}$

8. Funkcja f określona poniższym wzorem jest ciągła. Ile jest równy iloczyn ab ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{5x^3 - 20x}, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \\ a, & \text{gdy } x = -2 \\ b, & \text{gdy } x = 2 \end{cases}$$

- A. $-0,01$ B. -1 C. 1 D. $0,1$

9. Dla jakiej wartości parametru a podana funkcja jest ciągła?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}, & \text{gdy } x < 2 \\ \log_2 \sqrt{ax} + \log_2 a\sqrt{x}, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{2}$

10. Równanie $x^5 - x^4 + x^3 - 6x^2 + 5x - 9 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie i należy ono do jednego z podanych przedziałów. Wskaż ten przedział.

- A. $\langle -1; 0 \rangle$ B. $\langle 0; 1 \rangle$ C. $\langle 1; 2 \rangle$ D. $\langle 2; 3 \rangle$

11. Wskaż funkcję, której pochodna jest określona wzorem $f'(x) = \frac{-4}{\sqrt[3]{x}}$.

- A. $f(x) = -6x^{\frac{5}{3}}$ B. $f(x) = x^{-4}$ C. $f(x) = -4\sqrt[3]{x}$ D. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{2}$

12. Pochodna funkcji $f(x) = \frac{1-x^2}{3x+5}$ w punkcie -2 jest równa:

- A. -4 B. -5 C. $\frac{4}{3}$ D. 5

13. Która z podanych prostych jest równoległa do stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{5x^2 - 1}$ w punkcie $(1, 2)$?

- A. $5x - y + 10 = 0$ C. $10x - \sqrt{19}y - 5 = 0$
B. $5x - 2y - 3 = 0$ D. $20x - y + 5 = 0$

14. Styczna do wykresu funkcji $f(x) = 2x\sqrt{x}$ w punkcie P jest nachylona do osi x pod kątem 60° . Pierwsza współrzędna punktu P wynosi:

- A. $\frac{1}{27}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{3}$

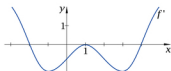
15. Dwie styczne do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 7x^2 + 1$ równoległe do prostej $y = 5x + 2$ przecinają oś y w punktach P_1 i P_2 . Odległość między tymi punktami jest równa:

- A. $75\frac{23}{27}$ B. $72\frac{4}{27}$ C. $3\frac{2}{3}$ D. $1\frac{7}{9}$

Я16. Jaka jest różnica między największą i najmniejszą wartością funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$?

- A. 9 B. 11 C. 20 D. 27

Я17. Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji f . Które z poniższych zdań jest prawdziwe?



- A. Funkcja f osiąga maksimum w punkcie 1.
 B. Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -3; -1 \rangle$.
 C. Funkcja f osiąga minimum w punkcie 4.
 D. Funkcja f osiąga takie same wartości dla argumentów -1 i 3 .

Я18. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = (3x^2 - 6)^{10}$. Które zdanie jest fałszywe?

- A. Funkcja f osiąga minimum lokalne w punkcie $-\sqrt{2}$.
 B. Funkcja f osiąga maximum lokalne w punkcie 0 .
 C. Funkcja f osiąga najmniejszą wartość w punkcie $\sqrt{2}$.
 D. Funkcja f osiąga największą wartość w punkcie 1 .

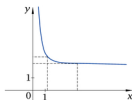
Я19. Funkcja $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$ osiąga maksimum lokalne dla argumentu x_1 i minimum lokalne w punkcie x_2 . Różnica $f(x_1) - f(x_2)$ jest równa:

- A. -4 B. 2 C. 3 D. 4

Я20. Dla jakiej wartości parametru p funkcja $f(x) = px^3 - p^3x$ jest rosnącą w przedziale $\langle -5; 5 \rangle$ i malejącą w każdym z przedziałów $(-\infty; -5)$ oraz $\langle 5; +\infty)$?

- A. $-5\sqrt{3}$ B. $-\frac{5}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{5}{\sqrt{3}}$ D. $5\sqrt{3}$

Я21. Rozważmy prostokąty, których dwa boki leżą na osiach układu współrzędnych, a jeden wierzchołek jest punktem tej części wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$, która leży w I ćwiartce układu współrzędnych (zob. rysunek). Wśród tych prostokątów najmniejsze pole ma prostokąt o polu równym:



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

22. Wiadomo, że jeśli cena c (w złotych) pewnego produktu spełnia warunek $5 \leq c \leq 20$, to liczbę s sprzedanych dziennie sztuk tego produktu można obliczyć ze wzoru $s = -2c^2 + 48c$. Jaka powinna być cena tego produktu, aby kwota uzyskana ze sprzedaży w ciągu jednego dnia była jak najwyższa?

- A. 5 zł B. 12 zł C. 16 zł D. 20 zł

23. Pewien obiekt porusza się wzdłuż prostej, na której zaznaczono punkt P . Odległość d (w metrach) obiektu od punktu P po upływie t sekund od początku ruchu można obliczyć ze wzoru $d = \frac{1}{4}t^4 - 2\frac{2}{3}t^3 + 8t^2$. Które z poniższych zdań błędnie opisuje ruch tego obiektu?

- A. Odległość obiektu od punktu P wzrasta.
B. Prędkość obiektu 4 sekundy po rozpoczęciu ruchu wynosi $0 \frac{m}{s}$.
C. Prędkość obiektu maleje przez $2\frac{2}{3}$ sekundy.
D. Prędkość obiektu osiąga maksimum lokalne 2 sekundy po rozpoczęciu ruchu.

ZADANIA OTWARTE

24. Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{\log \frac{\pi}{2x} + \sin x}{2^x}$ ma co najmniej jedno miejsce zerowe w przedziale $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

25. Znajdź takie dwie liczby dodatnie, by ich suma była równa 12, a iloczyn jednej z tych liczb i kwadratu drugiej był jak największy.

26. Znajdź wszystkie punkty wspólne wykresu funkcji $f(x) = 5x^3 - 4x + 3$ oraz stycznej do tego wykresu w punkcie $P = (1, 4)$.

27. Wykaż, że dla każdej niezerowej wartości parametru p funkcja $f(x) = \frac{px}{x^2 + 1}$ ma jedno minimum i jedno maksimum. Dla jakich wartości p funkcja f osiąga minimum w punkcie 1?

28. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji określonej wzorem $f(x) = x^5 - 10x^4 + 20x^3 - 3$.

29. Przyjmijmy, że wykresy dwóch funkcji różniczkowalnych przecinają się w punkcie P . Kąt ostry (lub prosty) między stycznymi do tych wykresów w punkcie P nazywamy kątem przecięcia tych wykresów. Znajdź miarę kąta przecięcia wykresów funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 1$ i $g(x) = x^2 - 2x - 5$. Wynik zaokrąglaj do 1° .

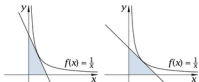
30. Z arkusza kartonu formatu A4 należy wyciąć w narożnikach cztery jednakowe kwadraty, a następnie złożyć pudełko w kształcie prostopadłościanu. Oblicz, jaką długość powinny mieć boki wyciętych kwadratów, aby pojemność pudełka była jak największa. Przyjmij, że arkusz formatu A4 ma wymiary $21 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$.

Я31. Trzy boki trapezu są zawarte w prostych: $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, a czwarty — w stycznej do paraboli $f(x) = x^2 + 1$ w punkcie $P = (t, f(t))$, gdzie $t \in (0; 1)$. Wyznacz współrzędne punktu P tak, aby ten trapez miał największe pole.

Я32. Znajdź na paraboli o równaniu $y = -x^2 + 4$ punkt położony najbliżej prostej o równaniu $y = 2x + 7$.

Я33. Oblicz, jaką największą objętość może mieć graniastosłup prawidłowy sześciokątny, w którym suma długości wszystkich krawędzi jest równa 12.

Я34. Na każdym z rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ i prostą styczną do tego wykresu. Wykaż, że zacieniowane trójkąty mają równe pola niezależnie od wyboru punktu styczności.



RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

PRAWDOPODOBIENSTWO

Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwem zdarzenia losowego A nazywamy iloraz:

$$P(A) = \frac{n_A}{N} \quad \begin{array}{l} N - \text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych} \\ n_A - \text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu } A \end{array}$$

WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIENSTWA

$$\begin{array}{ll} 0 \leq P(A) \leq 1 & \Omega - \text{przestrzeń zdarzeń elemen-} \\ & \text{tarnych} \\ P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1 & \emptyset - \text{zdarzenie niemożliwe} \\ P(A') = 1 - P(A) & A' - \text{zdarzenie przeciwne} \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) & \text{do zdarzenia } A \quad (A' = \Omega \setminus A) \end{array}$$

WARTOŚĆ OCZEKIWANA

Jeśli możliwymi zyskami uczestnika U w pewnej grze są $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, którym odpowiadają prawdopodobieństwa $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, to **wartość oczekiwaną** zysku tego uczestnika obliczamy ze wzoru:

$$EZ_U = p_1 \cdot l_1 + p_2 \cdot l_2 + p_3 \cdot l_3 + \dots + p_n \cdot l_n$$

ZDARZENIA NIEZALEŻNE

Mówimy, że zdarzenia A i B są niezależne, gdy zachodzi równość:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Uwaga. Mówimy, że trzy zdarzenia A, B i C są niezależne, jeśli niezależne są każde dwa spośród nich oraz zachodzi równość $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

PRAWDOPODOBIENSTWO WARUNKOWE

Niech A i B będą zdarzeniami w pewnym doświadczeniu losowym oraz $P(B) > 0$. Wówczas:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

WZÓR BAYESA

Niech A i B będą takimi zdarzeniami, że $P(A) > 0$ oraz $P(B) > 0$. Wówczas:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

PRAWDOPODOBIENSTWO CAŁKOWITE

Niech $B_1, B_2, \dots, B_n$ będą zdarzeniami parami się wykluczającymi, o prawdopodobieństwach większych od 0, takimi że $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$. Wówczas dla każdego zdarzenia A zachodzi równość:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

SCHEMAT BERNOULLLEGO

Schemat Bernoullego to doświadczenie polegające na wykonaniu pewnej liczby jednakowych prób, przy czym wyniki prób nie zależą od siebie oraz w każdej próbie są możliwe dwa wyniki — sukces lub porażka. W schemacie Bernoullego prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów w n próbach obliczamy ze wzoru:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad p - \text{prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie}$$

ELEMENTY KOMBINATORYKI

ZASADA MNOŻENIA

Gdy wynik pewnego postępowania zależy od kolejno podejmowanych decyzji i przy podejmowaniu pierwszej decyzji mamy do wyboru n_1 możliwości, drugiej — n_2 itd., a ostatniej — n_k możliwości, to liczba różnych wyników, które możemy otrzymać, jest równa $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

ZASADA DODAWANIA

Jeśli ustalając liczbę możliwości, możemy rozważyć kilka parami rozłącznych przypadków, to możemy policzyć, ile jest możliwości w każdym z nich i dodać otrzymane wyniki.

PERMUTACJE

Gdy ze wszystkich elementów danego zbioru skończonego utworzymy ciąg, to mówimy, że utworzyliśmy permutację elementów tego zbioru. Liczba permutacji zbioru n -elementowego wynosi $n!$

WARIACJE

Gdy z pewnego zbioru wybierzemy k -elementowy ciąg różnych elementów, to mówimy, że utworzyliśmy k -elementową wariację bez powtórzeń elementów tego zbioru. Liczba k -elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego ($n \geq k$) wynosi:

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Gdy utworzymy k -elementowy ciąg składający się z elementów pewnego zbioru (wyrazy ciągu mogą się powtarzać), to mówimy, że utworzyliśmy k -elementową wariację z powtórzeniami elementów tego zbioru. Liczba k -elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego wynosi n^k .

KOMBINACJE

Jeśli z pewnego zbioru wybierzemy k -elementowy podzbiór, to mówimy, że utworzyliśmy k -elementową kombinację. Liczba kombinacji k -elementowych ze zbioru n -elementowego to:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Rzucamy jeden raz dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Prawdopodobieństwo, że suma oczek na obu kostkach będzie mniejsza niż 10, jest równe:

- A. $\frac{11}{12}$ B. $\frac{8}{9}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

2. Spośród wszystkich liczb naturalnych od 1 do 9 losujemy dwie różne liczby. Prawdopodobieństwo, że suma tych liczb jest równa 13, wynosi:

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{2}{27}$ C. $\frac{1}{24}$ D. $\frac{1}{27}$

3. Spośród wszystkich liczb naturalnych od 1 do 9 wybieramy dwie różne liczby. Prawdopodobieństwo, że jedna z nich jest dzielnikiem drugiej, jest równe:

- A. $\frac{28}{81}$ B. $\frac{14}{81}$ C. $\frac{7}{36}$ D. $\frac{7}{18}$

4. Ze zbioru liczb naturalnych od 1 do 60 losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo, że liczba ta będzie dzielnikiem liczby 60, jest równe:

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{3}{20}$ C. $\frac{2}{17}$ D. $\frac{1}{5}$

5. W jednej przegródce portfela jest pięć banknotów: dwa o nominale 10 zł, dwa — 20 zł i jeden — 50 zł. W drugiej przegródce są cztery banknoty: jeden o nominale 50 zł, dwa o nominale 100 zł i jedna dwustuzłotówka. Losowo wybieramy po jednym banknocie z każdej przegródki. Prawdopodobieństwo, że wyjmemy w sumie kwotę większą niż 120 zł, jest równe:

- A. $\frac{11}{20}$ B. $\frac{7}{20}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{10}$

6. W pewnym teście do każdego z trzech pytań podano pięć możliwych odpowiedzi, z których tylko jedna jest poprawna. Przy każdym pytaniu wskazujemy losowo wybraną jedną z odpowiedzi. Prawdopodobieństwo, że wskażemy trzy poprawne odpowiedzi, jest równe:

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{1}{125}$

7. W wyścigu bierze udział 12 zawodników. Pierwszą trójkę na mecie typujemy, wskazując, kto zajmie pierwsze miejsce, kto — drugie, a kto — trzecie. Ile różnych trójek można w ten sposób wytypować?

- A. 6 B. 48 C. 220 D. 1320

8. Ile trzycyfrowych liczb nieparzystych można utworzyć z cyfr od 2 do 6?

- A. 18 B. 40 C. 50 D. 75

9. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych parzystych, takich że w ich zapisie występuje dokładnie jedna cyfra 5 i dokładnie jedna cyfra 7?

- A. 190 B. 230 C. 290 D. 300

10. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przypadkowo ustawiając litery występujące w słowie BAROK, utworzymy słowo ROBAK?

- A. $\frac{1}{120}$ B. $\frac{1}{24}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{4}$

11. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ustawiając w przypadkowej kolejności litery A, A, B, K, R, utworzymy słowo BARKA?

- A. $\frac{1}{240}$ B. $\frac{1}{120}$ C. $\frac{1}{60}$ D. $\frac{1}{5}$

12. Na loterię przygotowano 100 losów, w tym 8 wygrywających. Po wylosowaniu pewnej liczby losów, wśród których dwa były wygrywające, okazało się, że szansa na wygraną była taka sama jak przed rozpoczęciem loterii. Zatem wylosowano:

- A. 4 losy B. 16 losów C. 20 losów D. 25 losów

13. Przed przystąpieniem do pewnej gry losowej gracz wpłaca ustaloną kwotę organizatorowi. Jeśli gracz przegra, to traci tę kwotę. Jeśli wygra, to organizator wypłaca mu 300 zł. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wygrania jest równe $\frac{2}{3}$. Aby gra była sprawiedliwa, wpłacona na początku gry kwota powinna wynosić:

- A. 120 zł B. 200 zł C. 60 zł D. 180 zł

14. Mamy dwie urny. W pierwszej jest 6 kul białych i 4 kule czarne, a w drugiej jest 6 kul białych i 9 czarnych. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedynka lub szóstka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny. W przeciwnym wypadku losujemy kulę z drugiej urny. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe:

- A. $\frac{2}{25}$ B. $\frac{6}{25}$ C. $\frac{7}{15}$ D. $\frac{2}{3}$

ZADANIA OTWARTE

15. Cztery pączki są nadziewane dżemem, a pięć — budyniem. Losowo wybrano trzy pączki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dwa są nadziewane dżemem, a trzeci — budyniem.

16. Dziesięć osób: 6 kobiet i 4 mężczyzn podzielono w sposób losowy na dwie grupy: sześćo- i czteroosobową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obie grupy są złożone z osób jednej płci.

17. W pewnej firmie na ogłoszenie o wolnym miejscu pracy zgłosiło się 25 kandydatów. W tabelce przedstawiono, ilu z nich ma doświadczenie, a ilu — odpowiednie wykształcenie.

Kandydat	ma doświadczenie	nie ma doświadczenia
ma wykształcenie	3	12
nie ma wykształcenia	2	8

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany kandydat nie ma odpowiedniego wykształcenia lub nie ma doświadczenia.

18. W pudełku jest 500 losów loteryjnych, w tym 60 wygrywających. Wyciągamy dwa losy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej jeden z nich jest wygrywający.

19. Na rysunku przedstawiono fragment mapki, na której zaznaczono pięć miejscowości i wszystkie przechodzące przez nie drogi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że podróżując z A do B i z powrotem, podróżny wybierze dwie różne drogi, ale obie prowadzące przez M .



20. Prawdopodobieństwo uzyskania połączenia z pewnym numerem telefonicznym wynosi 70%. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania połączenia z tym numerem dopiero w czwartej próbie.

21. Układamy hasło ośmioznakowe. W hasle można użyć cyfr od 0 do 3 i wielkich liter A, B, C, D, E. Ile takich różnych haseł można utworzyć, w których:

- występuje co najmniej jedna litera,
- na początku hasła występują dwie cyfry lub dwie litery?

22. Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych podzielnych przez 5, w których występują dokładnie dwie piątki?

23. Spośród wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest ona podzielna przez 12, jeśli wiadomo, że jest podzielna przez 15.

24. W trzech urnach znajdują się kule: w pierwszej — osiem białych i dwie czerwone, w drugiej — pięć białych, trzy czerwone i dwie zielone, a w trzeciej — sześć kul z numerem 1 i cztery kule z numerem 2. Losujemy kulę z trzeciej urny, a następnie kulę z urny wskazanej przez numer na wylosowanej kuli. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że druga wylosowana kula nie jest czerwona.

▣ **25.** Tenisiści A i B mają rozegrać dwa spotkania. Prawdopodobieństwo, że pierwsze spotkanie wygra zawodnik A , wynosi $0,6$. Jeśli rzeczywiście je wygra, prawdopodobieństwo wygrania drugiego spotkania wynosi $0,7$. Jeżeli pierwsze spotkanie przegra zawodnik A , to prawdopodobieństwo jego wygranej w drugim spotkaniu maleje do $0,2$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zawodnik A przegrał pierwsze spotkanie, jeśli wiadomo, że drugie wygrał.

▣ **26.** Prawdopodobieństwo, że orzech jest pusty, wynosi $\frac{1}{20}$. W worku jest 10 orzechów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród nich są co najmniej 3 pełne orzechy.

▣ **27.** Połowa uczniów przy dojeździe do pewnej szkoły korzysta z autobusu, 20% uczniów korzysta z pociągu podmiejskiego, a 60% — z autobusu lub pociągu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przypadkowo spotkany uczeń przy dojeździe do tej szkoły korzysta tylko z autobusu.

▣ **28.** W pewnym parku sprawdzano, czy psy wyprowadzane są na smyczy i czy mają założone kagańce. Wyniki tej kontroli przedstawiono w tabelce obok.

Psy	na smyczy	bez smyczy
z kagańcem	12	4
bez kagańca	20	14

Przyjmijmy oznaczenia:

S — Pies wyprowadzony jest na smyczy.

K — Pies ma założony kagańiec.

Sprawdź, czy zdarzenia S i K są niezależne, i oblicz prawdopodobieństwa warunkowe $P(S|K)$ oraz $P(K'|S)$.

▣ **29.** Na pewną chorobę cierpi 2% ludzi. U 80% osób chorych na nią występuje pewien charakterystyczny objaw, który zdarza się też u 5% osób zdrowych. Przypuśćmy, że u pewnej badanej osoby wystąpił ten charakterystyczny objaw. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że osoba ta jest zdrowa.

▣ **30.** Z pudełka, w którym znajdują się 4 kredki czerwone, 3 niebieskie, 2 zielone i 1 żółta, dwukrotnie losujemy po jednej kredce. Jeżeli za pierwszym razem wylosujemy kredkę czerwoną lub żółtą, to wrzucamy ją z powrotem do pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trakcie tych dwóch prób wylosujemy co najmniej jedną kredkę niebieską.

▣ **31.** Meteorolodzy oceniają, że prawdopodobieństwo dużych opadów śniegu pewnego dnia lutego wynosi $0,8$. W wypadku dużych opadów śniegu tego dnia prawdopodobieństwo, że wystąpią problemy komunikacyjne, wynosi $0,9$; w przeciwnym wypadku prawdopodobieństwo takich kłopotów wynosi $0,2$. Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia w tym dniu kłopotów komunikacyjnych.

PROCENTY. ELEMENTY STATYSTYKI

PROCENTY I PROMILE

$p\%$ liczby a to $\frac{p}{100} \cdot a$.

Liczba a stanowi $\frac{a}{b} \cdot 100\%$ liczby b .

Liczba o $p\%$ większa od a to $a + \frac{p}{100} \cdot a$.

$p\text{‰}$ liczby a to $\frac{p}{1000} \cdot a$.

OBLICZANIE ODSETEK

Procent prosty (odsetki obliczane są od stałej kwoty). Jeśli kapitał początkowy wynosi K_0 , a oprocentowanie jest równe $p\%$, to po n okresach naliczania odsetek kapitał wraz z odsetkami obliczamy ze wzoru:

$$K_n = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot n$$

Procent składany (odsetki obliczane są od kapitału powiększonego o odsetki za wcześniejszy okres). Jeśli kapitał początkowy wynosi K_0 , a po każdym okresie naliczania odsetek stan konta zwiększa się o $p\%$, to po n okresach naliczania odsetek kapitał wraz z odsetkami obliczamy ze wzoru:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

ELEMENTY STATYSTYKI

MEDIANA

Każdy zestaw n liczb można ustawić w taki ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n$, że $a_n \leq a_{n+1}$.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy środkowy wyraz w tym ciągu.

Na przykład gdy $n = 7$, medianą jest a_4 .

$$a_1, a_2, a_3, \overset{\cdot\cdot\cdot}{a_4}, a_5, a_6, a_7$$

$$\text{mediana} = a_4$$

Gdy n jest liczbą parzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów.

Na przykład gdy $n = 6$, medianą jest średnia arytmetyczna liczb a_3 i a_4 .

$$a_1, a_2, a_3, \overset{\cdot\cdot\cdot}{a_4}, a_5, a_6$$

$$\text{mediana} = \frac{a_3 + a_4}{2}$$

DOMINANTA (MODA)

Dominanta zestawu danych to taka wartość, która w tym zestawie występuje najczęściej.

Uwaga. Jeśli w zestawie kilka wartości występuje z tą samą (najwyższą) częstością, to każda z tych wartości jest dominantą.

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ to liczba $\bar{x}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

ŚREDNIA WAŻONA

Średnia ważona liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ z wagami odpowiednio $w_1, w_2, \dots, w_n$ (gdzie $w_1, w_2, \dots, w_n$ są liczbami dodatnimi) to liczba $\bar{s}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{s} = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \dots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

ODCHYLENIE STANDARDOWE

Odchylenie standardowe zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, \dots, x_n$ to liczba σ obliczana według wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

lub według wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2}$$

ZESTAW ZADAŃ

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. Liczba a to 32% liczby dodatniej m , a także 160% liczby dodatniej n . Wynika stąd, że:

- A. $n = 0,2m$ B. $n = 0,5m$ C. $n = 1,28m$ D. $n = 1,92m$

2. W Polsce inflacja w 2018 roku wynosiła 1,6%, w 2019 roku — 2,3%, a w 2020 roku — 3,4%. Jeśli cena pewnego towaru na początku 2018 roku wynosiła 200 zł i wzrastała zgodnie z inflacją, to można się spodziewać, że cena tego towaru w końcu 2020 roku wynosiła około:

- A. 207,30 zł B. 214,60 zł C. 214,94 zł D. 346,00 zł

3. Cenę towaru zmniejszono po sezonie o 36%. Przed kolejnym sezonem podwyższono cenę do poprzedniej wysokości. O ile procent wzrosła wtedy cena towaru?

- A. 36% B. 42,5% C. 56,25% D. 64%

4. Na lokatę roczną wpłacono 50 000 zł. Oprocentowanie tej lokaty wynosi 2% w skali roku. Roczny podatek od odsetek wynosi 19%. Jaki będzie stan konta po 10 latach, jeśli w tym czasie nie będą dokonywane żadne wpłaty ani wypłaty?

- A. 58 716,74 zł B. 60 949,72 zł C. 51 932,82 zł D. 60 000 zł

5. Na lokatę, której oprocentowanie netto w skali roku, czyli po uwzględnieniu podatku od odsetek, wynosi 3%, wpłacono 100 000 zł. Gdyby odsetki doliczano co miesiąc, to ich wielkość po roku byłaby większa od odsetek doliczanych co pół roku. O ile większa?

- A. o 6,18 zł B. o 12,50 zł C. o 19,10 zł D. o 36,49 zł

6. Na lokatę półroczną wpłacono 20 000 zł. Przez 5 lat nie dokonywano żadnych dodatkowych wpłat ani wypłat i po upływie tego czasu kwota na lokacie wzrosła do 26 278,50 zł. Jakie było roczne oprocentowanie tej lokaty netto (po odliczeniu podatków od odsetek)?

- A. 2,8% B. 5,5% C. 7% D. 11,2%

7. Z 1 kg mleka o zawartości 4% tłuszczu zebrano 10 dag śmietany o zawartości 12% tłuszczu. Jaki jest procent tłuszczu w mleku, które pozostało?

- A. około 2,8% B. około 2,9% C. około 3,1% D. około 3,4%

8. W tabeli podano wyniki badania dotyczącego liczby dzieci w rodzinie.

Liczba dzieci	0	1	2	3	4	5	6
Liczba rodzin	9	12	16	8	4	0	1

Na podstawie tych danych można stwierdzić, że średnia liczba dzieci w jednej rodzinie jest równa:

- A. 0,22 B. 1,8 C. 2,08 D. 3

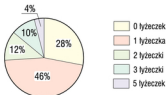
9. Średnia arytmetyczna liczb 1, 3, 5, 5, 6, x jest równa m , a średnia arytmetyczna liczb 1, 3, 5, 5, 6, x , $4x$ jest równa $2m$. Wynika stąd, że suma $x + m$ wynosi:

- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

10. Zestaw A składa się z 50 liczb o średniej arytmetycznej równej 9, a zestaw B – z 30 liczb o średniej arytmetycznej równej 1. Średnia arytmetyczna zestawu powstałego w wyniku połączenia zestawów A i B wynosi:

- A. 1,25 B. 4,5 C. 5 D. 6

11. Pięćdziesiąt osób spytano, ile łyżek cukru dodają do szklanki herbaty. Wyniki tej ankiety przedstawiono za pomocą diagramu kołowego.



Mediana zebranych danych jest równa:

- A. 1 B. 1,3 C. 1,5 D. 2

12. Różnica między średnią arytmetyczną zestawu liczb: 1, 2, 3, 1, 3, 1, 5, 9 a medianą tego zestawu wynosi:

- A. 0,125 B. 0,625 C. 1,125 D. 1,225

13. W pewnej firmie wszyscy oprócz szefa zarabiają tyle samo, a szef zarabia o 2400 zł więcej niż inni. W firmie pracuje 30 osób (razem z szefem). O ile średnia arytmetyczna płac jest większa od mediany płac w tej firmie?

- A. 10 zł B. 60 zł C. 80 zł D. Za mało danych, by to stwierdzić.

14. Średnia arytmetyczna oraz mediana zestawu dziewięciu liczb: 7, 9, 2, 3, 2, 7, 3, a , b są równe 5. Dominantą tego zestawu jest:

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 7

15. Mediana podanego zestawu liczb wynosi 6. Oblicz średnią arytmetyczną tego zestawu.

Wartość danych	2	5	7	9
Liczba wskazań	11	9	x	17

- A. $2\frac{19}{37}$ B. 6 C. $6\frac{1}{40}$ D. $6\frac{4}{43}$

16. Rzucono dziesięciokrotnie sześcienną kostką do gry. W pierwszych ośmiu rzutach otrzymano wyniki: 2, 3, 2, 4, 5, 6, 4, 5. Średnia arytmetyczna wszystkich dziesięciu wyników jest równa 3,4. Jaka jest mediana wszystkich wyników?

- A. 3,4 B. 3,5 C. 4 D. 4,5

17. W tabeli podano liczby i odpowiadające im wagi. Średnia ważona tych liczb to:

Liczba	3	10	12	20
Waga	5	3	1	1

- A. 5,1(3) B. 7,7 C. 11,25 D. 19,251

18. Odchylenie standardowe zestawu danych 1, 2, 2, 2, 2, 3 jest równe:

- A. 0,5 B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

19. Poniżej przedstawiono dane o wzroście zawodników dwóch drużyn.

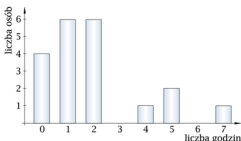
Drużyna A: 168 cm, 179 cm, 180 cm, 183 cm, 190 cm.

Drużyna B: 166 cm, 184 cm, 185 cm, 186 cm, 189 cm.

Niech $\bar{x}_A$ i σ_A oznaczają średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe wzrostu zawodników drużyny A, a $\bar{x}_B$ i σ_B — średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe wzrostu zawodników drużyny B. Która z par nierówności jest prawdziwa?

- A. $\bar{x}_A < \bar{x}_B$ i $\sigma_A < \sigma_B$ C. $\bar{x}_A > \bar{x}_B$ i $\sigma_A < \sigma_B$
B. $\bar{x}_A < \bar{x}_B$ i $\sigma_A > \sigma_B$ D. $\bar{x}_A > \bar{x}_B$ i $\sigma_A > \sigma_B$

20. Na diagramie słupkowym przedstawiono wyniki ankiety na temat liczby godzin poświęconych na uprawianie sportu w ciągu tygodnia. Która z podanych liczb jest najbardziej dokładnym przybliżeniem odchylenia standardowego zebranych danych?



- A. 1,86 C. 2
B. 1,95 D. 2,05

ZADANIA OTWARTE

21. Sprawność pisania na maszynie lub klawiaturze komputerowej określa się w następujący sposób: osoba, która w czasie t (w minutach) napisała tekst składający się z n wyrazów i popełniła b błędów, ma sprawność pisania równą S , gdzie:

$$S = \frac{n - 10b}{t}$$

Pani Jadwiga i pani Henryka pisały na maszynie ten sam tekst i popełniły tyle samo błędów. Pani Jadwiga ma sprawność pisania o 25% wyższą niż pani Henryka. Pani Henryce pisanie tekstu zajęło 15 minut. Jak długo pisała go pani Jadwiga?

22. Średnie miesięczne wynagrodzenie w 1980 roku było w Polsce o 13% wyższe niż w 1979 roku i o 24% wyższe niż w 1978 roku. O ile procent średnie miesięczne wynagrodzenie w 1979 roku było wyższe od średniego miesięcznego wynagrodzenia w roku 1978?

23. Suszone grzyby ważą o 80% mniej niż przed suszeniem i zawierają jeszcze 5% wody.

a) Ile grzybów trzeba zebrać, aby otrzymać 1 kg grzybów suszonych?

b) Ile procent stanowi woda w świeżo zebranych grzybach?

24. Jakie powinno być oprocentowanie netto (po uwzględnieniu podatku) lokaty rocznej, aby po czterech latach przechowywania na niej oszczędności stan konta powiększył się o 50%? O ile procent powiększyłyby się oszczędności na tej lokacie po ośmiu latach?

25. W pewnym banku oprocentowanie lokaty trzymiesięcznej wynosi 6% w skali roku. Po upływie terminu lokaty bank dopisze nam odsetki pomniejszone o podatek, który wynosi 20% kwoty odsetek. O ile procent wzrośnie po trzech miesiącach kwota wpłacona na tę lokatę po dopisaniu odsetek pomniejszonych o podatek?

26. Reklama pewnego funduszu inwestycyjnego głosi, że po trzech latach od zainwestowania w ten fundusz zysk wyniósł 20% wpłaconej kwoty. W tym samym czasie oprocentowanie lokaty wynosiło 6,5% w stosunku rocznym, a odsetki dopisywane były po każdym roku. Realizując zyski z funduszu inwestycyjnego, po trzech latach należało zapłacić jednorazowo podatek od tego zysku. W wypadku lokaty bankowej podatek od odsetek był odliczany co roku. W obu wypadkach wysokość podatku wynosiła 19%. Oblicz procentowy zysk netto (po odliczeniu podatku) z każdej z tych inwestycji.

27. Średnią dobową temperaturę powietrza oblicza się jako średnią arytmetyczną czterech temperatur zanotowanych w ciągu doby:

$$\begin{array}{ll} T_{\max} - \text{temperatury najwyższej,} & T_7 - \text{temperatury o godzinie } 7^{00}, \\ T_{\min} - \text{temperatury najniższej,} & T_{19} - \text{temperatury o godzinie } 19^{00}. \end{array}$$

W pewnym mieście o godzinie 7^{00} zanotowano temperaturę -5°C , a o godzinie 19^{00} było -2°C . Wiadomo, że różnica między najwyższą a najniższą temperaturą w ciągu doby wynosiła 10°C . Czy średnia dobową temperatura tego dnia mogła osiągnąć -1°C ?

28. Pewna gazeta ocenia restauracje, przydzielając im punkty w skali od 0 do 10 w trzech kategoriach: wystrój sali, obsługa i jakość potraw. Ocena końcowa to średnia ważona tych punktów. Poniżej podano liczbę punktów, które zdobyły dwie z ocenianych restauracji. Oblicz wagi punktów w każdej kategorii (przyjmij, że suma wag jest równa 1).

Restauracja	Wystrój sali	Obsługa	Jakość potraw	Ocena końcowa
Telmo	8	4	6	5,8
Keruż	2	2	9	5,5

29. Zgodnie z regulaminem pewnej uczelni wynik końcowy studiów jest średnią ważoną następujących liczb: średniej arytmetycznej ocen wpisanych do indeksu (z wagą 0,5), oceny z pracy dyplomowej (z wagą 0,3) i oceny z egzaminu dyplomowego (z wagą 0,2). Ewelina uzyskała średnią ocen z indeksu równą 3,7, za pracę dyplomową otrzymała ocenę 4,5 i obroniła ją na egzaminie dyplomowym na ocenę 4. Władze uczelni proponują zmianę wag ocen branych pod uwagę przy obliczaniu wyniku końcowego tak, by wagi ocen z pracy dyplomowej i z egzaminu dyplomowego były równe. Gdyby te zmiany weszły w życie, to wynik końcowy Eweliny wyniósłby 3,92. Jakie nowe wagi proponują władze uczelni?

30. W pewnej stacji hodowli roślin trwają próby wyhodowania odmiany grochu o dużych ziarnach i małym zróżnicowaniu wielkości ziaren — średnia masa ziarna ma być większa od 0,06 g, a odchylenie standardowe masy ziaren ma być mniejsze niż 0,001 g. W laboratorium tej stacji zważono 100 ziaren nowej odmiany grochu. Wyniki tego ważenia przedstawiono w poniższej tabeli. Czy ziarna w badanej próbie spełniają oczekiwane wymagania?

Masa ziarna (g)	0,059	0,06	0,061	0,062
Liczba ziaren	40	32	8	20

31. W pewnym zakładzie przetwórstwa owocowego jedna z maszyn odmierza 100-gramowe porcje dżemu i pakuje je do pojemników. Normy zakładowe wymagają, by średnia arytmetyczna mas porcji zawierała się między 98,5 g i 101,5 g, a odchylenie standardowe tych mas nie było większe od 1,5 g. Aby sprawdzić, czy maszyna spełnia te normy, zważono 100 porcji dżemu. Wyniki zebrano w poniższej tabeli. Czy masy sprawdzonych porcji spełniają normy zakładowe?

Masa porcji	97	98	99	100	101	102	103
Liczba porcji	20	30	17	27	0	1	5

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	1	0	46°	0,7193	0,6947	1,0355
1°	0,0175	0,9998	0,0175	47°	0,7314	0,6820	1,0724
2°	0,0349	0,9994	0,0349	48°	0,7431	0,6691	1,1106
3°	0,0523	0,9986	0,0524	49°	0,7547	0,6561	1,1504
4°	0,0698	0,9976	0,0699	50°	0,7660	0,6428	1,1918
5°	0,0872	0,9962	0,0875	51°	0,7771	0,6293	1,2349
6°	0,1045	0,9945	0,1051	52°	0,7880	0,6157	1,2799
7°	0,1219	0,9925	0,1228	53°	0,7986	0,6018	1,3270
8°	0,1392	0,9903	0,1405	54°	0,8090	0,5878	1,3764
9°	0,1564	0,9877	0,1584	55°	0,8192	0,5736	1,4281
10°	0,1736	0,9848	0,1763	56°	0,8290	0,5592	1,4826
11°	0,1908	0,9816	0,1944	57°	0,8387	0,5446	1,5399
12°	0,2079	0,9781	0,2126	58°	0,8480	0,5299	1,6003
13°	0,2250	0,9744	0,2309	59°	0,8572	0,5150	1,6643
14°	0,2419	0,9703	0,2493	60°	0,8660	0,5000	1,7321
15°	0,2588	0,9659	0,2679	61°	0,8746	0,4848	1,8040
16°	0,2756	0,9613	0,2867	62°	0,8829	0,4695	1,8807
17°	0,2924	0,9563	0,3057	63°	0,8910	0,4540	1,9626
18°	0,3090	0,9511	0,3249	64°	0,8988	0,4384	2,0503
19°	0,3256	0,9455	0,3443	65°	0,9063	0,4226	2,1445
20°	0,3420	0,9397	0,3640	66°	0,9135	0,4067	2,2460
21°	0,3584	0,9336	0,3839	67°	0,9205	0,3907	2,3559
22°	0,3746	0,9272	0,4040	68°	0,9272	0,3746	2,4751
23°	0,3907	0,9205	0,4245	69°	0,9336	0,3584	2,6051
24°	0,4067	0,9135	0,4452	70°	0,9397	0,3420	2,7475
25°	0,4226	0,9063	0,4663	71°	0,9455	0,3256	2,9042
26°	0,4384	0,8988	0,4877	72°	0,9511	0,3090	3,0777
27°	0,4540	0,8910	0,5095	73°	0,9563	0,2924	3,2709
28°	0,4695	0,8829	0,5317	74°	0,9613	0,2756	3,4874
29°	0,4848	0,8746	0,5543	75°	0,9659	0,2588	3,7321
30°	0,5000	0,8660	0,5774	76°	0,9703	0,2419	4,0108
31°	0,5150	0,8572	0,6009	77°	0,9744	0,2250	4,3315
32°	0,5299	0,8480	0,6249	78°	0,9781	0,2079	4,7046
33°	0,5446	0,8387	0,6494	79°	0,9816	0,1908	5,1446
34°	0,5592	0,8290	0,6745	80°	0,9848	0,1736	5,6713
35°	0,5736	0,8192	0,7002	81°	0,9877	0,1564	6,3138
36°	0,5878	0,8090	0,7265	82°	0,9903	0,1392	7,1154
37°	0,6018	0,7986	0,7536	83°	0,9925	0,1219	8,1443
38°	0,6157	0,7880	0,7813	84°	0,9945	0,1045	9,5144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	85°	0,9962	0,0872	11,4301
40°	0,6428	0,7660	0,8391	86°	0,9976	0,0698	14,3007
41°	0,6561	0,7547	0,8693	87°	0,9986	0,0523	19,0811
42°	0,6691	0,7431	0,9004	88°	0,9994	0,0349	28,6363
43°	0,6820	0,7314	0,9325	89°	0,9998	0,0175	57,2900
44°	0,6947	0,7193	0,9657	90°	1	0	—
45°	0,7071	0,7071	1				

ODPOWIEDZI

str. 16–22: 1. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{4}{13}$, c) $\frac{1}{32}$, d) $\frac{1}{13}$, e) $\frac{5}{13}$. 2. a) Większe jest prawdopodobieństwo wylosowania figury spośród kierów, b) $\frac{1}{49}$. 3. Losowo wybrany Amerykanin to Smith.
4. a) $\frac{5}{6}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{2}$. 5. a) $\textcircled{C}$, b) $\textcircled{B}$ lub $\textcircled{C}$, c) $\textcircled{B}$. 6. a) $\frac{13}{16}$, b) $\frac{5}{16}$, c) $\frac{1}{8}$, d) $\frac{5}{8}$.
7. a) $\frac{70}{99}$, b) $\frac{2}{9}$. 8. A_1 i A_4 , A_2 i A_7 , A_3 i A_5 ; A'_6 — Liczba oczek jest nieparzysta. 9. A_1 i A_5 , A_3 i A_7 , A_4 i A_6 ; A'_2 — Orzeł nie wypadnie tyle samo razy co reszka. 10. $\frac{39}{40}$; $\frac{9}{16}$. 11. $\frac{1}{10}$; $\frac{9}{10}$.
12. a) $\frac{44}{45}$, b) $\frac{14}{15}$, c) $\frac{4}{45}$. 13. 8 kul czerwonych. 14. 27 osób. 15. 21 kul. 16. a) $\frac{3}{20}$, b) $\frac{2}{5}$, c) $\frac{1}{5}$. 17. $\frac{99}{100}$. 18. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{25}$, c) w dwumasztowiec lub w trójmasztowiec, d) $\frac{29}{97}$, e) $\frac{3}{10}$. Wskazówka e). Ile jest pól zajętych przez wszystkie okręty, a ile — przez dwumasztowce?
19. $\frac{2}{11}$. 20. a) $\frac{1}{13}$, b) $\frac{3}{7}$, c) $\frac{2}{5}$. 21. a) $I - \frac{3}{4}$, $II - \frac{1}{4}$, b) $I - \frac{11}{16}$, $II - \frac{5}{16}$. 22. a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{24}$, c) $\frac{5}{24}$, d) $\frac{1}{30}$. 23. $\frac{\pi}{4} \approx 0,79$.

str. 25–26: 1. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{5}$. 2. a) $\frac{11}{36}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{9}$, d) $\frac{1}{12}$, e) siedem, f) 1. 3. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{6}$. 4. a) Wśród wylosowanych kart nie ma damy; $\frac{3}{14}$, b) wśród wylosowanych kart jest co najwyżej jeden kier; $\frac{27}{28}$, c) wylosowano dwie figury lub dwie blotki; $\frac{3}{7}$. 5. $\frac{2}{9}$. 6. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}$.
7. $\frac{1}{11}$. 8. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{3}{28}$. 9. $\frac{7}{19}$. 10. $P(A) = \frac{7}{18}$; $P(B) = \frac{11}{36}$. 11. a) $\textcircled{B}$, b) nie istnieje.

str. 33–37: 1. a) $\frac{1}{26}$, b) $\frac{1}{104}$, c) $\frac{11}{117}$, d) $\frac{11}{468}$. 2. a) $\frac{3}{20}$, b) $\frac{53}{120}$. 3. $\frac{7}{30}$. 4. a) $\frac{3}{35}$, $\frac{18}{35}$, b) $\frac{51}{112}$. 5. a) $\frac{3}{10}$, b) $\frac{11}{20}$. 6. $\frac{3}{8}$. 7. a) $\frac{31}{32}$, b) $\frac{13}{16}$. 8. a) $\frac{25}{72}$, b) $\frac{7}{8}$. 9. $P(4) = \frac{1}{15}$, $P(5) = \frac{2}{5}$, $P(6) = \frac{1}{3}$, $P(7) = \frac{1}{5}$. 10. a) $\frac{5}{506}$, b) $\frac{56}{253}$, c) $\frac{221}{506}$. 11. a) $\frac{6327}{20825} \approx 0,3$, b) $\frac{15229}{54145} \approx 0,3$.
12. a) 0,01, b) 0,48, c) 0,64, d) 0,41. 13. 0,22. 14. $\frac{14}{15}$. 15. a) 0,343, b) 0,37, c) 0,189, d) 0,63. 17. a) Nie, b) $\frac{48}{3525}$, c) $\frac{1}{4}$, d) $\frac{7}{8}$. 18. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{2}$. 19. a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{2}$. 20. $\frac{29}{35}$.
21. a) $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{18}$, b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{40}$, c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{58}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{59}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{60}$.

str. 40–42: 1. a) $\frac{5}{6}$ pkt, b) 1,5 pkt. 2. a) $\frac{1}{6}$ zł, czyli około 17 gr, b) $-\frac{5}{9}$ zł, czyli około –56 gr. 3. a) Wygrywamy około 23,13 zł, b) $-\frac{15}{14}$ zł, czyli przegrywamy około 1,07 zł. 4. 5 zł.
5. a) Nie, b) około –2,70 zł. 6. 17,50 zł. 7. 4,30 zł. 8. 62 zł i 124 zł. 9. $3\frac{7}{11}$ zł, czyli około 3,64 zł. 10. 40 zł. 11. 2,40 zł. 12. a) 25 zł, b) kul białych powinno być 19 razy więcej niż czarnych.

str. 47–51: 1. 28. 2. 43 minuty 45 sekund. 3. a) Na 24 sposoby, b) 60 możliwości. 4. 17 576 000 000 numerów. 5. a) 20 sposobów, b) 25 sposobów, c) 10 sposobów.
6. a) 27 liczb, b) 18 liczb, c) 64 liczby, d) 8 liczb. 7. a) 2500 liczb, b) 300 liczb, c) 40 liczb, d) 36 liczb. 8. 100. 9. a) 72 liczby, b) 81 liczb, c) 648 liczb, d) 729 liczb.
10. a) 30 spółnic, b) 90 spółnic, c) 120 spółnic. 11. a) $\textcircled{A}$ — 12 sposobów, $\textcircled{B}$ — 6 sposobów, $\textcircled{C}$ — 48 sposobów, b) $\textcircled{A}$ — 36 sposobów, $\textcircled{B}$ — 48 sposobów, $\textcircled{C}$ — 324 sposoby.
12. a) Na 120 sposobów, b) na 600 sposobów, c) na 48 sposobów, d) na 120 sposobów.

13. a) $4 \cdot 11^{14}$ menuetów, około 14,5 miliona stuleci, b) najczęściej szósty, najrzadziej – pierwszy i jedenasty. 14. 21 uścisków dłoni, 42 wizytówki. 15. a) 306 delegacji, b) 315 delegacji. 16. 486 259 200. 17. 468 sposobów. 18. 38 sposobów. 19. a) 85 liczb, b) 162 liczby. 20. a) 117, b) 23. 21. a) 12, b) 75. 22. a) 6499, b) 2408, c) 951. 23. a) 239 500 800, b) 8 709 120, c) 10 886 400, d) 2 177 280. 24. a) 36, b) 240, c) 360, d) 108. 25. a) 1152, b) 1152, c) 1152.

str. 57–59: 1. a) 30, b) 13, c) 24, d) 120, e) 9900, f) $\frac{1}{122}$, g) 9, h) 45, i) 6300, j) $\frac{2}{3}$, k) 63, l) $\frac{22}{15}$. 2. a) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$, b) $n \cdot (n+1)$, c) $\frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot (n+1)}$, d) $n+2$. 3. a) 120!, b) $(2 \cdot 15)!$, c) 100!, d) $(5^2)!$. 4. a) Dla $m = 111$, b) dla $m = 38$. 5. a) 40 320, b) 24, c) 120, d) 125, e) 1728, f) 81, g) 56, h) 17 280, i) 7776. 6. a) $\frac{16!}{2}$, czyli około $1,05 \cdot 10^{13}$ ustawień, b) 12 ustawień. 7. a) 128, b) 2187, c) 78 125. 8. a) 16 807, b) 78 125, c) 120. 9. a) 60, b) 30, c) 20, d) 10. 10. a) 64, b) 18. 11. a) 360, b) 180, c) 60. 12. 63. Wskazówka. Tworząc znak, decydujemy o każdej kropce, czy będzie wypukła, czy nie. 13. 30. 14. 720. 15. a) 39 916 800, b) 7 257 600. 16. a) 144, b) 480.

str. 62–64: 1. a) $\binom{8}{4}$, b) 5 liczb, c) 3 liczby. 2. a) 190, b) 120, c) 4060, d) około $6,35 \cdot 10^{11}$, e) 324 632. 3. 10 sposobów. 4. a) 84, b) 504, c) 4 lub 5 kwadracików. 5. a) 64 350, b) 60, c) 44 100. 6. a) 45, b) 2520. 7. a) 24, b) 22 308. 8. a) Około $8,88 \cdot 10^{19}$, b) około $5,36 \cdot 10^{28}$. 9. a) 435, b) 4060. 10. a) 1225, b) 19 600. 11. a) 43 949 268, b) 24 054 030, c) 14 049 360. 12. a) 252, b) 2520, c) 2520, d) 560. 13. a) 11 040, b) 28 750.

str. 68–69: 1. a) $c^4 + 8c^3 + 24c^2 + 32c + 16$, b) $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$, c) $64 - 96a + 60a^2 - 20a^3 + \frac{15}{4}a^4 - \frac{3}{8}a^5 + \frac{1}{64}a^6$, d) $32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - x^5y^5$, e) $z^4 + 12z^2 + 54 + \frac{108}{z^2} + \frac{81}{z^4}$, f) $\frac{1024}{m^3} - \frac{640}{m^2} + 160m - 20m^4 + \frac{5}{4}m^7 - \frac{1}{32}m^{10}$. 2. a) $28 + 16\sqrt{3}$, b) $10 304 - 4608\sqrt{5}$, c) $15 747\sqrt{7} + 21 109\sqrt{2}$, d) $\frac{5993}{128} + \frac{2143\sqrt{2}}{64}$, e) $\frac{345 448}{27} - \frac{14 608\sqrt{6}}{3}$, f) $\frac{5189\sqrt{2}}{8} - \frac{88 189\sqrt{5}}{250}$. 3. a) 21 składników, 11 liczb wymiernych, b) 31 składników, 6 liczb wymiernych, c) 36 składników, 3 liczby wymierne. 4. a) 3 543 750, b) 3 075 072, c) $\frac{1188}{990 625}$, d) $168\sqrt{2}$, e) 5 837 832, f) 24 903 680. 5. a) $\frac{112}{81}a^4b^6$, b) $\frac{35}{432}p^{10}q^4$. 6. $(2+6x)^4 = 1296x^4 + 1728x^3 + 864x^2 + 192x + 16$. 7. a) p^6 , $6p^5q$, $15p^4q^2$, b) p^7 , $7p^6q$, $21p^5q^2$, c) p^9 , $9p^8q$, $36p^7q^2$. 8. a) u^5 , $5u^4w$, $10u^3w^2$, b) u^{10} , $10u^9w$, $45u^8w^2$, c) u^{12} , $12u^{11}w$, $66u^{10}w^2$. 9. Wskazówka. Zastosuj wzór Newtona dla $(1+1)^n$. 10. a) 1,1, b) 0,82, c) 1,02, d) 0,96. Wskazówka. b) Przedstaw liczbę 0,99 jako różnicę $1 - 0,01$.

str. 73–77: 1. a) $\frac{1}{720}$, b) $\frac{1}{24}$, c) $\frac{1}{216}$, d) $\frac{1}{104}$, e) $\frac{1}{27 403}$. 2. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{2}{15}$. 3. a) $\frac{1}{42}$, b) $\frac{1}{256}$, c) $\frac{2}{21}$, d) $\frac{1}{60 480}$. 4. a) Około $1,57 \cdot 10^{-12}$, b) około $6,3 \cdot 10^{-12}$, c) około 0,0088, d) około $4,57 \cdot 10^{-7}$, e) około 0,026. 5. a) $\frac{1}{720}$, b) $\frac{1}{360}$, c) $\frac{1}{7560}$. 6. a) $\frac{25}{49}$, b) $\frac{37}{147}$. 7. $\frac{1}{3}$. 8. a) $\frac{1}{42}$, b) $\frac{10}{21}$, c) $\frac{5}{21}$. 9. a) $\frac{279 936}{3 628 800} \approx 2,76 \cdot 10^{-7}$, b) $\frac{1}{90}$, c) $\frac{1}{5}$. 10. a) $\frac{1}{720}$, b) $\frac{719}{720}$, c) $\frac{1}{720}$. 11. a) Około 1, b) $\frac{279 936}{823 543} \approx 0,3399$, c) $\frac{65}{1 075 648} \approx 6,04 \cdot 10^{-5}$. 12. a) $\frac{45}{256}$, b) $\frac{15}{64}$. 13. a) $\frac{1}{1296}$, b) $\frac{25}{1296}$, c) $\frac{25}{648}$. 14. a) $\frac{2}{1131}$, b) $\frac{3800}{23 751} \approx 0,16$. 15. a) $\frac{14}{33}$, b) $\frac{12}{33}$.

16. $\frac{12}{25}, \frac{13}{25}$. 17. a) $\frac{1}{11}$, b) $\frac{5}{11}$, c) $\frac{4}{5}$, d) $\frac{2}{5}$. 18. a) $\frac{1}{343}$, b) $\frac{120}{343}$, c) $\frac{24}{343}$. 19. a) $\frac{7}{1650}$, b) $\frac{45}{123521546} \approx 3,64 \cdot 10^{-7}$, c) $\frac{61597}{533585360} \approx 1,19 \cdot 10^{-4}$.

str. 78: 1. a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{3}{4}$. 2. $\frac{n-k+1}{n+1}$. 3. $\frac{1}{8}$. 4. Około 15,48 zł. 5. a) $\frac{6327}{20825} \approx 0,3$, b) $\frac{15229}{54145} \approx 0,28$. 6. $\frac{4}{165}$. 7. a) 240, b) 243, c) 60. 8. a) 720, b) 1000. 9. a) $\frac{1}{128}$, b) $\frac{7}{64}$, c) $\frac{247}{256}$. 10. a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{1}{20}$, c) $\frac{7}{20}$. 11. $1120\sqrt{2}x^{12}y^3$.

str. 83-85: 1. $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{4, 6\}$, $B' = \{1, 2, 3\}$, $A' \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $A' \cap B' = \{1, 3\}$. 2. $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B') = \frac{1}{3}$, $P(A' \cap B') = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A' \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(A' \cup B') = \frac{5}{6}$. 3. a) $C \subset D$, $B \subset D$, $A \subset B$, $A \subset C$, b) $C \cap D$, $A \cap B$. 4. $P(A) < P(B') < P(A')$. 5. a) Tak, b) nie, c) tak, d) tak. 6. a) 1, b) $\frac{1}{3}$, c) 0,4, d) $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{7}$. 7. a) 0,65, b) 0,1, c) 0,9, d) 0,85. 8. $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{4}$. 9. a) 0,6, b) 0,4, c) 0,3. 10. Nie. 11. a) 0,667, b) 0,314, c) 0,233, d) 0,734.

str. 88-91: 1. a) $\frac{2}{17}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, b) $\frac{2}{17}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$. 2. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. 3. a) $\frac{3}{31}$, b) $\frac{10}{31}$, c) $\frac{3}{7}$, d) $\frac{1}{2}$. 4. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{4}$. 5. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{12}$. 6. a) $\frac{13}{102}$, b) $\frac{13}{204}$, c) $\frac{13}{51}$. 7. a) $\frac{2}{9}$, b) $\frac{4}{27}$. 8. $\frac{3}{7}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{3}$. 9. $\frac{1}{11}$; $\frac{5}{66}$; $\frac{49}{166}$; $\frac{19}{33}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{5}{17}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{9}{17}$. 10. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{4}{7}$. 11. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{4}{9}$. 12. a) 0,54, b) 0,3. 13. $\frac{1}{5}$. 14. $\frac{1}{8}$. 15. a) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{7}$. 16. $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$. 17. $\frac{5}{9}$. 18. $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{4}$. 19. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$.

str. 95-96: 1. $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{11}{16}$. 2. $\frac{7}{8}$. 3. $\frac{51}{1000}$. 4. 0,82. 5. a) 0,9415, b) $\frac{2}{1883}$. 6. a) 0,42, b) 0,27, c) 0,69, d) $\frac{28}{31}$. 7. $\frac{1}{4}$; $\frac{89}{180}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{91}{180}$; $\frac{20}{89}$; $\frac{45}{91}$.

str. 101-102: 1. a) Są niezależne, b) nie są niezależne, c) są niezależne, d) nie są niezależne. 2. Nie są niezależne. 3. a) $\frac{3}{20}$, b) $\frac{11}{20}$. 4. a) $\frac{3}{25}$, b) $\frac{9}{50}$, c) $\frac{9}{50}$, d) $\frac{29}{50}$. 5. 0,9603. 6. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{2}{7}$. 7. Są niezależne. 8. $\frac{1}{30}$.

str. 105-109: 1. a) $\frac{15}{64}$, b) $\frac{11}{32}$. 2. a) $\frac{5}{16}$, b) $\frac{25}{216}$, c) $\frac{3024}{15625} \approx 0,1935$, d) $\frac{258048}{9765625} \approx 0,02642$, e) około 0,000201, f) $\frac{489888}{1953125} \approx 0,2508$. 3. Pierwsze zdarzenie. 4. a) Około 0,0376, b) $\frac{73}{729} \approx 0,1001$, c) $\frac{37}{64} \approx 0,5781$. 5. a) Około 0,006, b) około 0,0403, c) około 0,9536, d) około 0,2007, e) około 0,215. 6. a) Około 31,1%, b) około 29,48%, c) około 3,2%. 7. Zasada A. 8. a) $\frac{36}{289}$, b) $\frac{9504}{83521} \approx 0,1138$, c) około 0,1565. 9. a) Około $4,78 \cdot 10^{-4}$, b) około 0,3487, c) około 0,0574, d) około 0,0702, e) około $3,83 \cdot 10^{-3}$. 10. a) Około 0,1074, b) około 0,215, c) około 0,002, d) około 0,0464, e) około $4,2 \cdot 10^{-6}$, f) około 0,9536. 11. a) 25 rzutów — 4; 35 rzutów — 5 lub 6, b) 3, c) 12 lub 11 zdolnych; 19 leniwych. 12. 10 osób; 10 lub 9 osób. 13. a) 6 lub 7 sukcesów, gdy $p = \frac{7}{11}$, 7 sukcesów, gdy $p \in (\frac{7}{11}; \frac{8}{11})$, 7 lub 8 sukcesów, gdy $p = \frac{8}{11}$, b) 10 lub 11 sukcesów, gdy $n = 54$, 11 sukcesów, gdy $n \in \{55, 56, 57, 58\}$, 11 lub 12 sukcesów, gdy $n = 59$. 14. a) 4, b) 4, c) najmniej 6, d) najmniej 5.

str. 110: 1. $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{6}$; 0. 2. 0,38. 3. a) 0,3, b) 0,6, c) 0,2, d) 0,7, e) $\frac{3}{7}$, f) $\frac{4}{7}$.
4. $3p-1$. 5. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{23}{30}$, c) $\frac{8}{15}$. 6. $\frac{26}{49}$. 7. $\frac{1}{6}$. 8. a) $\frac{1}{125}$, b) $\frac{48}{125}$, c) $\frac{61}{125}$, d) $\frac{12}{125}$.
9. Co najmniej 5 meczów.

str. 116-118: 1. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$. 2. a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$, funkcja
 f ma granicę w punkcie -1 , a nie ma granicy w punkcie 3 ; $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 4$,
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 2$, funkcja g nie ma granicy w punkcie -1 , a ma granicę w punkcie 3 ;
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} h(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} h(x) = 2$, funkcja h nie ma granicy w punkcie -1 ,
a ma granicę w punkcie 3 , b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$,
funkcja f ma granicę w punkcie -2 , a nie ma granicy w punkcie 4 ; $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -4} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -4^+} g(x) = -\infty$, funkcja g nie ma granicy w punkcie -2 , a ma granicę w punkcie 4 ;
 $\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -4^-} h(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -4^+} h(x) = +\infty$, funkcja h nie ma granicy w punktach
 -2 i 4 . 3. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$. 6. a) $+\infty$, 0 , 0 , $+\infty$, b) $+\infty$, $-\infty$, $-\infty$, $+\infty$, c) $-\infty$, $+\infty$, $+\infty$, $-\infty$, d) 2 , 2 , $-\infty$,
 $+\infty$. 7. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$, c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. 8. a) f i h , b) h . 9. $2\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$; 4 ; $4\sqrt{2}$; 0 ; 16 . 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = \sqrt{3}$,
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2\sqrt{3}$. 11. $\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 4$.

str. 125: 1. a) 0 , b) $-\frac{2}{3}$, c) $-\infty$. 2. a) 17 , b) 1 , c) 3 . 3. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$,
funkcja f nie ma granicy w punkcie -2 . 7. a) Np. $a_n = n\pi$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}_+$, b) np.
 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_+$, c) np. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

str. 129-131: 1. a) Funkcja f nie jest ciągła w punktach: -2 , -1 , b) funkcja g nie jest
ciągła w punkcie 1 , c) funkcja h nie jest ciągła w punktach: -2 , 4 . 3. a) Tak, b) tak, c) nie,
d) nie. 4. a) $p = \frac{3}{2}$, b) $p = \frac{9}{4}$. 5. a) $p = -3$, $q = -2$, b) $p = 0$, $q = -4$. 6. a) 13 , b) $\frac{1}{2}$,
c) 0 , d) 0 , e) 1 , f) 0 . 7. a) a , b) b . 8. a) $x_0 = 3$, b) $x_0 = 1$, c) $x_0 = 3$, d) $x_0 = -3$ lub
 $x_0 = 3$ e) $x_0 = -3$, f) $x_0 = -2$ lub $x_0 = 3$. 9. Funkcje f i g nie są ciągłe, funkcja h jest ciągła.
10. a) Dla $x \in \mathbb{Z}$, b) dla $x \in \{-\sqrt{n}, \sqrt{n}\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

str. 133-134: 3. a) $x_0 \approx 1,5$, b) $x_0 \approx -3,5$, c) $x_0 \approx 1,5$, d) $x_0 \approx -1,5$. 4. a) Np. $x_0 \approx -0,75$,
b) np. $x_0 \approx 1,375$. 9. Wskazówka. Niech $f(x)$ oznacza odległość, jaką pokonał posłaniec
pierwszego dnia do godziny x , i niech $g(x)$ oznacza odległość, jaka pozostała posłańcowi do
pokonania o godzinie x drugiego dnia. Rozpatrz funkcję $h(x) = f(x) - g(x)$.

str. 140-143: 1. a) 7 , b) -3 , c) 0 , d) $\frac{2}{3}$, e) -90 , f) 0 , g) $\frac{7}{2}$, h) 0 . 2. a) $+\infty$, b) $-\infty$,
c) $-\infty$, d) $+\infty$. 3. a) 0 , b) $+\infty$, c) 0 , d) $\frac{1}{2}$. 4. a) $+\infty$, b) $+\infty$, c) $-\infty$, d) $-\infty$, e) $-\infty$, f) $+\infty$.

5. a) $-\infty$, b) $+\infty$, c) $+\infty$, d) 0, e) 0, f) $+\infty$. 6. a) $+\infty$, b) $+\infty$, c) $-\infty$, d) $-\infty$, e) $+\infty$, f) $+\infty$. 9. a) 2, b) $-\frac{5}{9}$, c) 0, d) 0, e) $+\infty$, f) $+\infty$, g) 2, h) 0, i) $\frac{1}{3}$. 10. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a}{b_m}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a}{b_m}$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, gdy $n - m$ jest liczbą nieparzystą, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$, gdy $n - m$ jest liczbą parzystą. 11. a) Np. $f(x) = \frac{-\sqrt{3}x^2}{x^2}$, b) np. $W(x) = -\frac{3}{2}x^7$. 12. a) $\frac{1}{3}$, b) -1 , c) $\frac{25}{8}$, d) $\frac{2}{5}$. 13. a) $p = -\frac{3}{2}$, b) $p = -\frac{1}{3}$ lub $p = 1$. 14. $p = 4$, $q = \frac{4}{5}$. 15. a) $+\infty$, b) 3. 16. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) -1 , d) $+\infty$, e) $\frac{1}{2}$, f) 0. 17. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = 2$, c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = 0$. 18. a) 0, b) 0, c) 0, d) $-\infty$.

str. 149-151: 1. a) $-\infty$, b) $+\infty$, c) $+\infty$, d) $+\infty$, e) $+\infty$, f) $+\infty$. 2. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$, d) $+\infty$, e) $+\infty$, f) $-\infty$, g) $-\infty$, h) $+\infty$, i) $-\infty$, j) $-\infty$, k) $+\infty$, l) $+\infty$. 4. a) $-\frac{1}{6}$, b) -1 , c) $\frac{7}{2}$, d) -2 , e) 0, f) $\frac{2}{5}$. 5. a) $-\frac{1}{2}$, b) $-\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{10}$, d) $\frac{1}{12}$, e) $-\frac{1}{4}$, f) $-\frac{1}{6}$. 6. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = -\frac{6}{7}$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = -\frac{6}{7}$, $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = 0$. 7. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) - g(x)) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) - g(x)) = -\infty$, b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) - g(x)) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) - g(x)) = +\infty$. 8. a) $-\infty; +\infty; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}; 1; 1$, b) 0; 0; $+\infty; +\infty; 3; 0; 0$. 9. a) $x = -2$, b) $x = -4$, c) $x = 4$ i $x = -2$. 10. a) $y = 0$, b) $y = -6$, c) $y = -3$, $y = 3$. 11. a) $x = 3$, b) $x = -\frac{1}{2}$, c) $x = 5$, $y = 4$, d) $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, e) $x = -1$, $x = 1$, $y = 3$, f) $x = -3$, $x = -1$.

str. 152: 1. a) $-\infty$, b) $-\infty$, c) 0, d) $-\frac{1}{2}$, e) $+\infty$, f) 0, g) 0, h) $+\infty$, i) -3 . 2. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $-\infty$, d) $-\infty$, e) $\frac{5}{2}$, f) $-4\frac{1}{2}$, g) 2, h) 0. 3. a) $+\infty$, b) $+\infty$, c) $+\infty$, d) 0. 4. a) Stopień wielomianu $W(x)$ jest mniejszy od stopnia wielomianu $V(x)$. b) Wielomiany są tego samego stopnia. c) Stopień wielomianu $W(x)$ jest większy od stopnia wielomianu $V(x)$. 6. $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$. 7. Np. $x_0 = -1,5$.

str. 159-160: 1. 1. a) $f'(2) = -1$, b) $f'(-1) = -1$, c) $f'(4) = \frac{1}{8}$, d) $f'(1) = -\frac{1}{2}$. 2. a) $y = -2x + 5$, b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$. 3. $f'(2) = -6$, $f(2) = -7$. 4. $f'(-3) = -7$. 5. a) $f'(-1) = 2$, $f'(1) = 0$, $f'(2) = 1$, b) $f'(-1) = -1$, $f'(1) = -\frac{1}{3}$, $f'(2) = -4$, c) $f'(-1) = -4$, $f'(1) = 0$, $f'(2) = 2$. 6. a) $f'(x_2) > f'(x_1)$, b) $f'(x_1) > f'(x_2)$, c) $f'(x_2) > f'(x_1)$. 7. $a = 3$, $b = 8$, $c = 1$, $d = -2$, $e = -6$. 8. a) Tak, b) nie, c) nie, d) tak. 10. a) Nie istnieje pochodna w punktach: -2 , -1 , 2 , $f'(x) = 0$, gdy $x \in (-1; 2)$, b) nie istnieje pochodna w punkcie: -3 , $f'(x) = 0$, gdy $x = 0$, c) nie istnieje pochodna w punktach: -2 , -1 , 1 , $f'(x) = 0$, gdy $x \in (-1; 1) \cup \{2\}$.

str. 166-168: 1. a) $f'(x) = -30x^5$, b) $f'(x) = 5x^{19}$, c) $f'(x) = \frac{4}{7}$, d) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$, e) $f'(x) = \frac{-2}{9\sqrt{x^2}}$, f) $f'(x) = \frac{-18}{x^3}$, g) $f'(x) = -1,5x^{-1,3}$, h) $f'(x) = \frac{-4}{9\sqrt{x^2}}$, i) $f'(x) = -16x^{-\frac{7}{2}}$. 3. a) $P'(r) = 2\pi r$, długość okręgu o promieniu r , b) $V'(r) = 4\pi r^2$, pole powierzchni kuli o promieniu r . 4. a) $f'(x) = 8x^3 - 6x$, b) $f'(x) = -2x^3 + x^2 - 2x$, c) $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{14\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$, d) $f'(x) = \frac{3}{2}x^4 + \sqrt{2} + \frac{1}{6\sqrt{x^4}}$. 5. $f'(x) = 16x^7 - 36x^5 + 5x^4 - 16x^3 + 24x - 2$. 6. a) $f'(x) = 6\frac{2}{3}x^3 - 8\frac{1}{2}x^2 + x + 5$, b) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, c) $f'(x) = 18x^2 - 6x + 4$, d) $f'(x) = 6x^5 - 15x^4 - 1$. 7. a) $f'(x) = \frac{23}{(3x+1)^2}$.

- b) $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$, c) $f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$, d) $f'(x) = \frac{2x^4-5x^2-1}{(2x^2-1)^2}$. 8. a) $f'(x) = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{x}$,
 b) $f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} - \frac{1}{12\sqrt{x^3}}$. 9. $g'(2) = -8$, $h'(2) = -\frac{32}{25}$. 10. a) Na przykład: $f(x) = x^3$, b) na
 przykład: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, c) na przykład: $f(x) = \frac{1}{8}x^4$, d) na przykład: $f(x) = \frac{-2}{x}$. 11. a) $y = 4x - 2$,
 b) $y = 2x + 2$, c) $y = -\frac{3}{4}x + 3$, d) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. 12. Około 101° . 13. $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, 3\frac{1}{12}\right)$,
 $B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 3\frac{3}{4}\right)$. 14. $y = x - 0,25$, $y = -x - 0,25$. 15. a) $y = 2x$, b) $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$. 16. a) $y = x + 8$,
 b) $y = 6x - 3$. 17. (1, 0) i $(-2, -3)$; wykresy przecinają się pod większym kątem w punkcie (1, 0).

- str. 171-172:** 1. a) $(g \circ f)(x) = -6x^2 + 9$, $(f \circ g)(x) = 12x^2 - 84x + 146$, b) $(g \circ f)(x) = \frac{3x+3}{2}$,
 $(f \circ g)(x) = \frac{3}{2}x + 8$, c) $(g \circ f)(x) = \frac{10}{x} - 3$, $(f \circ g)(x) = \frac{5}{2x-3}$, d) $(g \circ f)(x) = 4\sqrt{x+2} - 5$,
 $(f \circ g)(x) = \sqrt{4x-3}$, e) $(g \circ f)(x) = \frac{2}{x^2} + 1$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{(2x^2+1)^2}$, f) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{3x-4}+7}$,
 $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{\frac{-8x-25}{2x+7}}$. 2. a) $y = \frac{7}{\sqrt{x^2+3}}$, b) $y = \frac{7}{\sqrt{x^2+2}+1}$, c) $y = \sqrt{\left(\frac{7}{x+1}\right)^3} + 2$,
 d) $y = \sqrt{x^3+2}$, e) $y = \frac{7}{\sqrt{x+1}}$, f) $y = \left(\frac{7x+7}{x+8}\right)^3 + 2$. 3. a) $g(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)}$, $f(x) = x^3 + x - 7$,
 b) $g(f(x)) = \frac{9}{f(x)}$, $f(x) = 4x^2 + x$, c) $g(f(x)) = 2^{f(x)}$, $f(x) = x^5 + 3$, d) $g(f(x)) = (f(x))^{\frac{2}{3}}$,
 $f(x) = 2x^3 + x$, e) $g(f(x)) = \log(f(x))$, $f(x) = 4x^3 + x^2$, f) $g(f(x)) = \frac{2}{f(x)}$, $f(x) = \sin x$,
 g) $g(f(x)) = \cos(f(x))$, $f(x) = \sqrt{x}$, h) $g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, $f(x) = 2 + x^{11}$. 4. a) $g(f(x)) = (f(x))^7$,
 $f(x) = \sin x$ oraz $g(f(x)) = \sin f(x)$, $f(x) = x^7$, b) $g(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)}$, $f(x) = \log x$ oraz $g(f(x)) = \log f(x)$,
 $f(x) = \sqrt[3]{x}$. 5. a) $z(x) = 5^x$, $w(x) = x^2 + 3$, $(w \circ z)(x) = 25^x + 3$, b) $z(x) = \sqrt[3]{x}$, $w(x) = \sin x$,
 $(w \circ z)(x) = \sin \sqrt[3]{x}$. 6. a) $\frac{2}{3\sqrt[3]{2x+1}}$, b) $\frac{6x-21}{(x^2-7x)^2}$, c) $\frac{-21}{(3x-5)^2}$, d) $\frac{15x^2+8x}{3\sqrt[3]{(5x^3+4x)^2}}$,
 e) $\frac{-24x^6+2x}{(3x^2+1)^3}$, f) $\frac{2\left(\frac{3x^2+1}{x}\right)}{3\sqrt[3]{(x^3+\sqrt{x})^2}}$. 7. a) $f'(x) = \frac{5x^2+2x+1}{\sqrt{2x+1}}$, b) $f'(x) = \frac{(5x^2+6x^2+80) \cdot (5x-2)^3}{(x^3+4)^2}$,
 c) $f'(x) = \frac{8(x-1)^3}{(x+1)^5}$, d) $f'(x) = \frac{-8x-3}{2(2x-3)^2\sqrt{x^2+x}}$. 8. a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 10(3x+1)(3x^2+2x-3)^4$,
 b) $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^2-1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, c) $f'(x) = \frac{10-6x}{x^4(2x-5)^2} + \frac{20x^2-2}{3\sqrt[3]{(5x^4-2x)^2}}$, d) $f'(x) = 48x(4x^2-3)^5 + \frac{9}{(3x+5)^4}$.
 9. a) $y = 60x - 59$, b) $y = -9,5x - 8,5$, c) $y = -\frac{1}{6}x + 3\frac{2}{3}$, d) $y = -9x - 20$.

- str. 177-179:** 1. $f'(x) > 0$, gdy $x \in (-\infty; b) \cup (c; e) \cup (g; h) \cup (j; k) \cup (l; +\infty)$, $f'(x) < 0$, gdy
 $x \in (b; c) \cup (e; g) \cup (h; j)$. 2. Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -2; 2 \rangle$, $\langle 3; 4 \rangle$,
 malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -4; -2 \rangle$, $\langle 2; 3 \rangle$, $\langle 4; 5 \rangle$. Funkcja g jest rosnąca w przedzia-
 le $\langle -5; -1 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; 4 \rangle$. Funkcja h jest rosnąca w każdym z przedziałów:
 $\langle -4; -2 \rangle$, $\langle 1; 3 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 3; 4 \rangle$ i stała w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$. 3. ① — C,
 ② — A, ③ — B. 4. Funkcja g . 5. A — f'' , B — f , C — f' . 6. a) Funkcja f
 jest rosnąca w $\mathbb{R}$, b) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -\frac{1}{9})$, $(\frac{1}{9}; +\infty)$,
 malejąca w przedziale $\langle -\frac{1}{9}; \frac{1}{9} \rangle$, c) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -8)$,
 $\langle 2; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -8; 2 \rangle$, d) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedzia-
 łów: $(-\infty; -\frac{1}{2})$, $\langle 0; \frac{1}{2} \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -\frac{1}{2}; 0 \rangle$, $\langle \frac{1}{2}; +\infty \rangle$, e) funkcja f
 jest rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, f) funkcja f jest rosną-
 ca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $\langle 0; 10 \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -1; 0 \rangle$,

$\langle 10; +\infty \rangle$. 7. a) Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $\langle \sqrt[3]{2}; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $(0; \sqrt[3]{2})$. b) funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów: $(0; 1)$, $(1; +\infty)$, rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$. c) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -1; 7 \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $\langle 7; +\infty \rangle$. d) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $\langle 0; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $(-1; 0)$. e) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$. f) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 1)$, $\langle 3; +\infty \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $\langle 1; 2 \rangle$, $\langle 2; 3 \rangle$. 8. a) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle \frac{1}{4}; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0; \frac{1}{4} \rangle$. b) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $\langle \sqrt[3]{\frac{1}{3}}; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $(0; \sqrt[3]{\frac{1}{3}})$. c) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(0; 4)$, malejąca w przedziale $\langle 4; +\infty \rangle$. 9. a) Dla $a \geq 0$, b) dla $a > 0$. 10. a) Dla $a \leq 1$, b) dla $a < 0$. 11. a) Dla $p \in \langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$ funkcja jest rosnąca, b) dla $p \in \langle 0; 3 \rangle$ funkcja jest rosnąca, c) dla $p \in (-\infty; -\frac{1}{3})$ funkcja jest malejąca, dla $p \in \langle \frac{1}{3}; +\infty \rangle$ funkcja jest rosnąca, d) dla $p = 0$ funkcja jest stała, dla $p > 0$ funkcja jest rosnąca, dla $p < 0$ funkcja jest malejąca.

str. 185-186: 1. a) Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $\langle 1; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$; maksimum dla $x = -2$, minimum dla $x = 1$. b) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 2; +\infty \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $(-1; 2)$, stała w przedziale $(-2; -1)$; minimum dla $x = 2$. c) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $\langle 2; +\infty \rangle$; maksimum dla $x = 2$. 2. a) Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $\langle 10; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0; 10 \rangle$; maksimum $f(0) = 6$, minimum $f(10) = -494$. b) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 1; 3 \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 1)$, $\langle 3; +\infty \rangle$; maksimum $f(3) = 0$, minimum $f(1) = -\frac{4}{3}$. c) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -1; 0 \rangle$, $\langle 1; +\infty \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $\langle 0; 1 \rangle$; maksimum $f(0) = -5$, minimum $f(-1) = f(1) = -6$. d) funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -2)$, malejąca w przedziale $\langle -2; +\infty \rangle$; maksimum $f(-2) = 23$. e) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -3; 0 \rangle$, $\langle 2; +\infty \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -3)$, $\langle 0; 2 \rangle$; maksimum $f(0) = -\frac{3}{4}$, minima $f(-3) = -48$ i $f(2) = -16\frac{3}{4}$. f) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -2; 1 \rangle$, $\langle 2; +\infty \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $\langle 1; 2 \rangle$; maksimum $f(1) = 1\frac{11}{12}$, minima $f(-2) = -9\frac{1}{3}$ i $f(2) = 1\frac{1}{3}$. 3. a) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle \frac{\sqrt[3]{4}}{2}; +\infty \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $(0; \frac{\sqrt[3]{4}}{2})$; minimum $f(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$. b) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$, $(0; +\infty)$, malejąca w przedziale $(-\sqrt[3]{2}; 0)$; maksimum $f(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$. c) funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$. d) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $\langle 2; +\infty \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $\langle 0; 1 \rangle$, $\langle 1; 2 \rangle$; maksimum $f(0) = 0$, minimum $f(2) = 4$. e) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $\langle 1; +\infty \rangle$; maksimum $f(1) = 1$, minimum $f(-2) = -\frac{1}{2}$. f) funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$; minimum $f(0) = -\frac{2}{3}$. 4. a) Maksimum $f(2) = 4$, minimum $f(0) = 0$, minimum $f(3) = 0$. b) maksimum

$f(-3) = 9$, minimum $f(0) = 0$. 5. a) Maksimum dla $x = -4 - \sqrt{7}$, minimum dla $x = -4 + \sqrt{7}$, b) maksimum dla $x = 1 + \sqrt{19}$, minimum dla $x = 1 - \sqrt{19}$, c) maksimum dla $x = \frac{-3-\sqrt{3}}{2}$, minimum dla $x = \frac{-3+\sqrt{3}}{2}$. 6. $f'(x) = 2ax + b = 0$, czyli $x = -\frac{b}{2a}$. 9. a) Jedno rozwiązanie dla $p \in (-\infty; -28) \cup (-27; +\infty)$, dwa rozwiązania dla $p \in \{-28, -27\}$, trzy rozwiązania dla $p \in (-28; -27)$, b) brak rozwiązania dla $p \in (-\infty; -27)$, jedno rozwiązanie dla $p = -27$, dwa rozwiązania dla $p \in (-27; 0) \cup (5; +\infty)$, trzy rozwiązania dla $p \in \{0, 5\}$, cztery rozwiązania dla $p \in (0; 5)$, c) brak rozwiązania dla $p \in (\frac{1}{4}; +\infty)$, jedno rozwiązanie dla $p \in (-\infty; 0) \cup \{\frac{1}{4}\}$, dwa rozwiązania dla $p \in (0; \frac{1}{4})$, d) brak rozwiązania dla $p \in (-\infty; -\frac{4}{3\sqrt{5}})$, jedno rozwiązanie dla $p \in (0; +\infty) \cup \{-\frac{4}{3\sqrt{5}}\}$, dwa rozwiązania dla $p \in (-\frac{4}{3\sqrt{5}}; 0)$.

str. 190-193: 1. a) Wartość największa: 16, wartość najmniejsza: -128, b) wartość największa: 16, wartość najmniejsza: -11, c) wartość największa: 0, wartość najmniejsza: -11, d) wartość największa: 0, wartość najmniejsza: $-26\frac{7}{16}$. 2. a) Wartość największa: 5, wartość najmniejsza: -21, b) wartość największa: 10, wartość najmniejsza: -22, c) wartość największa: 7, wartość najmniejsza: -9, d) wartość największa: -5, wartość najmniejsza: -27. 3. a) $(-32; +\infty)$, b) $(\frac{-1-\sqrt{2}}{2}; \frac{-1+\sqrt{2}}{2})$. 4. a) 5 i 10, b) $3\frac{1}{3}$ i $16\frac{2}{3}$, c) 1 i 2. 5. a) $5\sqrt{2} \text{ m} \times 10\sqrt{2} \text{ m}$, czyli około $7,07 \text{ m} \times 14,14 \text{ m}$, b) $5\sqrt{2} \text{ m} \times 10\sqrt{2} \text{ m}$, czyli około $7,07 \text{ m} \times 14,14 \text{ m}$, c) sześciokąt o bokach: 8 m, 11 m, 11 m, 4 m, 3 m, 7 m. 6. $5\sqrt{2} \text{ cm} \times 10\sqrt{2} \text{ cm}$, czyli około $7,07 \text{ m} \times 14,14 \text{ m}$. 7. $(6-3\sqrt{2}) \text{ m} \times (6-3\sqrt{2}) \text{ m}$, czyli około $1,76 \text{ m} \times 1,76 \text{ m}$. 8. a) $20\sqrt{5}$, b) $8\sqrt{2}$, c) $4\sqrt{\frac{6}{5}}$. 9. a) $(\sqrt[3]{10}, \frac{\sqrt[3]{1000}}{2})$, b) (2, 1) i (-2, -3), c) $(\frac{4\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{4\sqrt{6}}{3}, -\frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2})$. 10. a) $\frac{4}{3} \text{ cm} \times \frac{4}{3} \text{ cm} \times \frac{4}{3} \text{ cm}$, b) $\frac{4}{3} \text{ m} \times \frac{8}{3} \text{ m} \times \frac{2}{3} \text{ m}$. 11. a) $8\frac{1}{3} \text{ cm}$, b) $\frac{50-10\sqrt{7}}{3} \approx 7,85 \text{ cm}$. 12. a) Krawędź podstawy: $\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \approx 1,1 \text{ m}$, wysokość: $\frac{16\sqrt{33}}{9} \approx 0,8 \text{ m}$, b) krawędź podstawy: $\sqrt[3]{\frac{6}{5}} \approx 1,1 \text{ m}$, wysokość: $\sqrt[3]{\frac{85}{36}} \approx 0,9 \text{ m}$, c) patrz b). 13. a) Krawędź podstawy: $\frac{5\sqrt{6}}{3} \approx 4,1 \text{ cm}$, wysokość: $\frac{5\sqrt{6}}{6} \approx 2 \text{ cm}$, b) krawędź podstawy: $\sqrt[3]{200} \approx 5,8 \text{ cm}$, wysokość: $\frac{\sqrt[3]{200}}{2} \approx 2,9 \text{ cm}$. 14. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 15. 1125. 16. 16. 17. $4\sqrt{3}$. 18. Promień podstawy: 20 cm, wysokość: 10 cm. 19. W połowie długości boku kwadratu. 20. Promień: $\sqrt{\frac{V}{\pi}}$, wysokość: 2. 21. $\frac{9}{4}\pi$. 22. $\frac{9}{4}$, 3, $\frac{9}{2}$. 23. $\sqrt{3}$. 24. Około 7,02 m. 25. Krawędzie podstawy: $\frac{4\sqrt{3}R}{15}$ i $\frac{8\sqrt{3}R}{15}$, wysokość: $\frac{1}{3}H$. 26. $\frac{\sqrt{3}}{3}R$. 27. R^3 . 28. Wysokość: $\frac{4}{3}R$; $V = \frac{32}{81}\pi R^3$. 29. $4R$; 50%. 30. Krawędź podstawy: $2\sqrt{2}R$, wysokość: $4R$. 31. Czworoscian foremny o krawędzi $\frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

str. 195-197: 1. a) $s'(t) = v_0 + at$, to jest wzór na prędkość końcową w ruchu jednostajnie przyspieszonym; $(s'(t))' = a$, to jest wzór na przyspieszenie. 2. a) 35 m, b) $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$, c) po 3 s. 3. a) Pierwsza, b) druga, c) pierwsza: $30\frac{\text{m}}{\text{s}}$; druga: $30\frac{\text{m}}{\text{s}}$; trzecia: $20\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wskazówka. Zwróć uwagę, że jeśli otrzymasz ujemne wartości prędkości, oznacza to, że obiekt zmienił wektor prędkości. 4. Mars: $8,7\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $3,7\frac{\text{m}}{\text{s}}$, Wenus: $13,88\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $8,88\frac{\text{m}}{\text{s}}$, Jowisz: $28,1\frac{\text{m}}{\text{s}}$; $23,1\frac{\text{m}}{\text{s}}$. 5. $\frac{5}{3}\frac{\text{cm}}{\text{min}}$; $\frac{5}{3\sqrt{4}} \approx 1,05\frac{\text{cm}}{\text{min}}$. 6. $\frac{880}{9} \approx 97,8\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$; $\frac{220}{9} \approx 24,4\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$. 7. a) $3\frac{\text{cm}}{\text{s}}$; 20 cm, b) po $\frac{1}{3}$ s i po 3 s, c) 11 cm. 8. a) $90\frac{\text{m}}{\text{min}}$, b) po 10 minutach, d) $15\frac{\text{m}}{\text{min}}$. 9. a) 1 cm; 54,25 cm, b) $18\frac{\text{m}}{\text{min}}$, c) największa po $\frac{7}{3}$, czyli około 2,3 min, najmniejsza po 1 min.

str. 198: 1. a) $f'(x) = -3x^5 + 5$, b) $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{7}{x^2}$, c) $f'(x) = \frac{15x^2 - 12x}{(5x - 2)^2}$, d) $f'(x) = \frac{3x^4 + 5}{x^2 \sqrt{3x^4 - 5}}$, e) $f'(x) = 3(35x + 38)(5x - 2)^5$. 2. $y = -10x - 3$. 4. a) Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(0; 2)$, $(2; +\infty)$, maksimum $f(0) = \frac{1}{4}$, b) funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $(\frac{\sqrt{6}}{3}; +\infty)$, malejąca w przedziale $(0; \frac{\sqrt{6}}{3})$; minimum $f(\frac{\sqrt{6}}{3}) = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$, maksimum $f(0) = 0$. 5. a) $(4; +\infty)$, b) $(-1; 1)$. 6. a) Wartość największa: 1, wartość najmniejsza: 0, b) wartość największa: -8, wartość najmniejsza: -9. 7. a) Jedno rozwiązanie dla $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, dwa rozwiązania dla $m \in \{-4, 0\}$, trzy rozwiązania dla $m \in (-4; 0)$, b) nie ma rozwiązań dla $m \in (0; 4)$, jedno rozwiązanie dla $m \in \{0, 4\}$, dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. 8. $(\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, 0)$; $P = 2\sqrt{2}$. 9. $\frac{75\sqrt{3}}{16}$ cm². 10. Promień podstawy: $\frac{\sqrt{6}}{3}R$, wysokość: $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$; $\sqrt{3}$ razy większa. 11. a) $3\frac{m}{8}$, b) $6\frac{2}{3}m$.

str. 202-205: 1. C. 2. D. 3. C. 4. A. 5. C. 6. C. 7. A. 8. D. 9. B. 10. B. 11. D. 12. B. 13. D. 14. C. 15. A. 16. D. 17. A. 18. A. 19. B. 20. D. 21. a) Woda destylowana: $s = 10^{-7} \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$, roztwór piorący: $s = 10^{-10} \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$, b) $10^{-2.5}$. 22. a) $2,1925 \cdot 10^{13}$ m³, b) około $2,7989 \cdot 10^4$ m $\approx$ 28 km, c) około $4,87 \cdot 10^{20}$ kropeł. 23. a) 29°C, b) około 6117 mm. 24. a) $c = 10^{-1.2} \approx 0,06$ kg, b) $A = 10^{0.9}$, $B = 0,75$. 30. (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

str. 207-211: 1. A. 2. A. 3. C. 4. D. 5. B. 6. C. 7. B. 8. A. 9. D. 10. C. 11. B. 12. D. 13. D. 14. C. 15. A. 16. A. 17. B. 18. B. 19. D. 20. D. 21. D. 22. C. 23. C. 24. B. 25. B. 26. B. 27. C. 28. O 21 km. 30. $x \in (-2\frac{2}{3}; -\frac{1}{2})$. 31. $x = 1 - \sqrt{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$. 32. $p = 3$, $q = \frac{7}{9}$. 33. 1 m $\times$ 1 m i 1 m $\times$ 2 m lub 1,5 m $\times$ 1,5 m i 1,5 m $\times$ 0,5 m. 34. 240. 35. Jeśli $a = -1,5$ i $b = -12$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeśli $a = -1,5$ i $b \neq -12$, to układ nie ma rozwiązania; jeśli $a \neq -1,5$, $b \in \mathbb{R}$, to układ ma jedno rozwiązanie. 36. $m \in \langle -1; 1 \rangle$. 37. a) Dla $p = \frac{2}{7}$, b) dla $p = 6$. 39. $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{8} \end{cases}$. 40. a) Dla $a = 3$, b) $x = 512$. 41. a) $x = -2$, b) dla $p = -14$.

str. 213-216: 1. D. 2. C. 3. C. 4. A. 5. C. 6. C. 7. C. 8. D. 9. A. 10. B. 11. C. 12. B. 13. C. 14. C. 15. A. 16. A. 17. A. 18. A. 19. 180. 20. 247050. 21. $q = 3$. 22. Tak. 23. Tak. 24. $q = -2$. 26. $a_5 = 11$ lub $a_5 = -11$. 28. a) 30, b) mniej. 29. a) Około 1,4, b) o około 9,5%. 30. 21 obrotów, ale ostatni niepełny. 32. Ciąg jest rosnący. 33. 6 liczb; $a_7 = 5$; $a_{17} = -8$. 34. 7. 35. $n = 10$.

str. 219-223: 1. D. 2. D. 3. B. 4. A. 5. C. 6. D. 7. D. 8. D. 9. C. 10. A. 11. C. 12. C. 13. A. 14. C. 15. B. 16. B. 17. C. 18. D. 19. A. 20. D. 21. C. 22. a) $h(4) = -4$, b) $x = 1$, c) tak, jest malejąca, d) wartość największa dla $x = -5$, $h(-5) = 6$; wartość najmniejsza dla $x = 6$, $h(6) = -6$. 23. a) Dla $x \in \langle -4; 2 \rangle$, b) dla $k = -1$ lub $k \in \langle -7; -5 \rangle$. 24. Dla $x \in \langle -5; 0 \rangle \cup \{3\} \cup \langle 7; +\infty \rangle$. 25. b) $y = -3x + 30$. 28. a) $f(A) = \langle 0; 2\frac{1}{2} \rangle$, $f(B) = \langle 0; 4\frac{20}{27} \rangle$, b) nie.

str. 225-228: 1. C. 2. B. 3. B. 4. C. 5. D. 6. A. 7. C. 8. C. 9. B. 10. A.
 11. A. 12. C. 13. B. 14. B. 15. D. 16. D. 17. $x \in \left(-\frac{1}{2}; 4\right) \cup (4; 5)$. 18. $7\frac{9}{40}$ m.
 19. Po około 3,1 sekundy. 20. $(-1, -6)$, $(-8, -27)$. 21. Dla $x \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$.
 22. $x = -\frac{1}{2}$. 23. Co najmniej 47 wyrazów. 24. Wartość największa 16 dla $x = 3$, wartość
 najmniejsza -273 dla $x = 20$. 25. $5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. 28. $p \in \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$. 29. $p \in (-\infty; -2 - 2\sqrt{2})$.
 30. $m \in \left(1 - \sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$. 31. $m \in (-\infty; 1)$. 32. $x \in \left(7 - 4\sqrt{3}; 7 + 4\sqrt{3}\right)$.

str. 231-234: 1. C. 2. A. 3. B. 4. C. 5. D. 6. C. 7. B. 8. D. 9. A. 10. B.
 11. B. 12. A. 13. C. 14. B. 15. B. 16. A. 17. A. 18. C. 19. D. 20. B.
 21. Dla $a = -2$ i $b = 3$. 22. a) $W(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$, b) 0, c) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -3$.
 23. $x = -2$, $x = 5$. 24. Dla $p = 4$; $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 2)$. 25. $D = (1; +\infty)$, zbiorem wartości
 jest przedział $(0; 10)$, $f(a) = \frac{10}{2a-1}$. 26. $p = -\sqrt{2}$, $p = -1$, $p = 1$, $p = \sqrt{2}$; $p = -\sqrt{2}$, $p = 1$, $p = \sqrt{2}$.
 27. Dla $p = -6$. 28. $a = -9$, $b = 23$, $c = -15$ lub $a = -3$, $b = -1$, $c = 3$, lub $a = 3$, $b = -1$,
 $c = -3$. 29. 3,75. 30. Dla $a = -\frac{7}{2}$ i $b = -\frac{5}{2}$ lub $a = -\frac{5}{2}$ i $b = -\frac{7}{2}$. 31. a) $(x+3)^2(x^2 - 3x + 5)$.
 32. $(-2, 0)$, $(0, 2)$. 34. a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + x - 12}$, b) $\left(0, \frac{5}{6}\right)$.

str. 236-238: 1. B. 2. C. 3. B. 4. D. 5. A. 6. C. 7. A. 8. B. 9. D. 10. C.
 11. C. 12. D. 13. C. 14. C. 15. Asymptota pozioma: $y = 1$; miejsce zerowe: $x = -5$.
 16. $x = 7$. 17. a) 35 słów, b) przez mniej niż 31 dni. 18. a) O około 16%, b) około 8 dni.
 19. $x \in (-\infty; 2)$. 20. $x > 3$. 21. $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{15}$, $c = \frac{2}{3}$. 22. Dla $x = \frac{3}{2}$. 23. $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.
 25. $f(2) = \frac{1}{31250}$. 26. $x \in (-1; 0) \cup (1; 2)$.

str. 241-245: 1. C. 2. D. 3. C. 4. B. 5. B. 6. A. 7. B. 8. C. 9. A.
 10. C. 11. C. 12. A. 13. C. 14. B. 15. C. 16. B. 17. D. 18. D. 19. B.
 20. A. 21. D. 22. C. 23. A. 24. D. 25. C. 26. C. 27. 37° , 98° , 45° . 30. Nie.
 32. $x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right\}$. 33. b) $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; $f(\alpha) \in \{1; 2\}$. 34. a) $f(x) = \cos x + 3$,
 b) 1; 5; $h(x) = 1$ dla $x \in \{-\pi, \pi\}$, $h(x) = 5$ dla $x \in \{0, 2\pi\}$. 35. $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$. 37. $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\tan \alpha = -3$. 39. Około 72° .

str. 251-254: 1. D. 2. B. 3. B. 4. B. 5. C. 6. A. 7. D. 8. B. 9. D.
 10. A. 11. B. 12. A. 13. A. 14. B. 15. A. 16. A. 17. Około 2,6 m nad ziemią.
 19. $x = \sqrt{90 - 18\sqrt{5}} \approx 7,1$. 20. $\frac{7+3\sqrt{3}}{2}$ razy. 21. Dla $\alpha = 60^\circ$. 22. $\frac{56}{9}\pi - 8 \sin 40^\circ$. 24. $\frac{180^\circ}{\pi}$.
 25. Obwód = $\frac{2a(\sin \alpha + \sin \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$. 26. 23 m. 27. O około 1,5%. 28. $P \approx 5,7$. 29. 3,5 i około
 5,7; 60° i około 120° . 30. 11 i 12; $P = 70$. 31. $|AD| = 3$. 32. $P = \frac{1}{3}p$. 33. 80.

str. 258-261: 1. B. 2. B. 3. B. 4. B. 5. D. 6. B. 7. A. 8. A. 9. C. 10. D. 11. D.
 12. A. 13. C. 14. C. 15. A. 16. D. 17. D. 18. A. 19. B. 20. B. 21. $\frac{11\sqrt{29}}{20}$; $P = 11$.
 22. 150° . 23. $\left(2\frac{1}{2}, 3\right)$. 24. $(0, 3)$. 25. $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$. 26. $\left(10\frac{1}{2}, 14\frac{1}{2}\right)$. 27. a) $x + 3y - 6 = 0$,
 b) $x - 3y - 6 = 0$. 28. $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$. 29. $\left(1, 3\frac{1}{2}\right)$, $\left(-4\frac{1}{5}, \frac{9}{10}\right)$. 30. $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup$
 $\cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. 31. Dla $a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$. 32. $P' = \left(\frac{4}{3}b - \frac{2}{3}a, \frac{2}{3}b + \frac{4}{3}a\right)$. 33. $\left[-\frac{2\sqrt{5}}{3}, \frac{6\sqrt{5}}{3}\right]$

lub $\left[\frac{3\sqrt{5}}{5}, -\frac{6\sqrt{5}}{5}\right]$. 34. O wektor $\left[6\frac{1}{3}, -4\frac{4}{5}\right]$ lub $\left[3\frac{2}{3}, -7\frac{1}{5}\right]$. 35. a) $\overline{BC} = [-a-b, a-b]$.
 37. $P = 48$. 38. $y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{4}$. 39. $x \in (-\infty; -\sqrt{3}-1) \cup (-1; \sqrt{3}-1) \cup (3; +\infty)$.

str. 265-270: 1. C. 2. C. 3. D. 4. A. 5. B. 6. A. 7. D. 8. B. 9. B.
 10. A. 11. D. 12. C. 13. B. 14. D. 15. B. 16. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6\lg 9}$. 17. $V = 36\sqrt{291}\text{ cm}^3$.
 18. $V = \frac{1020\sqrt{55}}{512}\pi$. 19. Nie. 20. Trójkąt, kwadrat lub pięciokąt foremny; około 2,1 cm.
 21. $\frac{1000-63\pi}{63}\text{ cm} \approx 12,7\text{ cm}$. 22. Około 0,9 tony. 23. a) $96\pi\text{ kg} \approx 301,6\text{ kg}$, b) około 32 cm.
 24. Około 0,4 l. 25. $r \approx 19,5\text{ mm}$, $h \approx 38,9\text{ mm}$. 26. $V = \frac{2325}{3}\pi\text{ l} \approx 0,243\text{ l}$. 27. Około
 154 mm. 28. $\frac{1}{4}a$. 29. O około 14 300 km. 31. $1252\frac{1}{3}\pi\text{ g} \approx 3932\text{ g}$. 32. a) W odległości
 $\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)h$, b) w odległości $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)h$. 33. $P = 4,5$. 34. $V = 62,04$. 35. $P = \frac{4\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 2,74$.
 37. Obwód = 13; $P = \sqrt{65}$.

str. 274-278: 1. D. 2. C. 3. C. 4. A. 5. B. 6. C. 7. C. Wskazówka. Zauważ,
 że składniki sum podanych w liczniku i mianowniku to kolejne wyrazy ciągów arytmetycznych.
 8. A. 9. C. 10. C. 11. A. 12. D. 13. B. 14. D. 15. A. 16. C. 17. C. 18. D.
 19. A. 20. A. 21. D. 22. C. 23. D. 25. 4 i 8. 26. (1, 4), (-2, -29). 27. Dla
 $p < 0$. 28. Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 2)$, $(6; +\infty)$, funkcja jest
 malejąca w przedziale $(2; 6)$. 29. Około 13° . 30. Około 4,1 cm. 31. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$. 32. $(-1, 3)$.
 33. $V = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

str. 281-284: 1. D. 2. A. 3. D. 4. D. 5. B. 6. D. 7. D. 8. C. 9. B. 10. A.
 11. C. 12. D. 13. B. 14. C. 15. $\frac{5}{14}$. 16. $\frac{1}{210}$. 17. $\frac{22}{25}$. 18. $\frac{2817}{12495} \approx 0,226$. 19. $\frac{1}{10}$.
 20. 0,0189. 21. a) 42 981 185, b) 21 789 081. 22. 3132. 23. $\frac{1}{4}$. 24. 0,76. 25. 0,16.
 26. Około 0,9999999984. 27. 0,4. 28. Nie; $P(S|K) = \frac{3}{4}$, $P(K'|S) = \frac{5}{8}$. 29. $\frac{40}{65} \approx 0,75$.
 30. $\frac{31}{60} \approx 0,52$. 31. 0,76.

str. 286-291: 1. A. 2. C. 3. C. 4. A. 5. C. 6. B. 7. C. 8. B. 9. C.
 10. D. 11. A. 12. B. 13. C. 14. D. 15. C. 16. B. 17. B. 18. D. 19. A.
 20. A. 21. 12 minut. 22. O około 10%. 23. a) 5 kg, b) 81%. 24. Około 10,7%;
 o 125%. 25. O 1,2%. 26. Fundusz — 16,2%; lokata — 16,64%. 27. Nie. 28. Wystrój sali
 — 0,2, obsługa — 0,3, jakość potraw — 0,5. 29. Średnia ocen z indeksu: 0,6, ocena z pracy
 dyplomowej: 0,2, ocena z egzaminu dyplomowego: 0,2. 30. Nie, $\sigma \approx 0,00113\text{ g}$. 31. Tak,
 $\bar{x} = 98,8\text{ g}$, $\sigma \approx 1,49\text{ g}$.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl



Podręcznik jest przeznaczony do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełnia on kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i jest zgodny z najnowszą podstawą programową z 2018 roku.

Został dopuszczony przez MEiN do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników.

Numer dopuszczenia: 964/4/2022

