

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony





MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony

Marcin Braun
Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech
Ewa Szymańska
Adam Wojacek



MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony



Redakcja: *Anna Sajko*

Korekta merytoryczna: *Maria Hoffmann, Bogumiła Kamut, Anna Płońska*

Korekta językowa: *Aleksandra Golecka-Mazur*

Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Ilustracje: *Bartłomiej Brosz*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Projekt graficzny: *Joanna Szyller*

Skład (T_EX): *Lukasz Sitko*

ISBN 978-83-8118-698-8

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2022. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Książka została wyprodukowana na papierze z certyfikatami FSC, PEFC, EU-Ecolabel oraz Blue Angel.

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl

lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

SPIS TREŚCI

GEOMETRIA ANALITYCZNA

■ Punkty i odcinki w układzie współrzędnych	10
■ Równanie prostej	13
■ Równanie prostej (cd.)	18
■ Równanie okręgu	23
■ Interpretacja geometryczna układu równań	26
■ Przed sprawdzianem	31
■ Przed maturą	34

PRAWDOPODOBIENSTWO, CZĘŚĆ 1

■ Prawdopodobieństwo — podstawowe pojęcia	39
■ Obliczanie prawdopodobieństwa	43
■ Drzewka	46
■ Wartość oczekiwana	51
■ Zasada mnożenia i zasada dodawania	54
■ Obliczanie prawdopodobieństwa (cd.)	60
■ Wariacje	62
■ Kombinacje	66
■ Dwumian Newtona	69
■ Kombinatoryka i prawdopodobieństwo	71
■ Przed sprawdzianem	79
■ Przed maturą	82

PRAWDOPODOBIENSTWO, CZĘŚĆ 2

■ Suma i iloczyn zdarzeń	86
■ Prawdopodobieństwo warunkowe	91
■ Prawdopodobieństwo całkowite	95
■ Zdarzenia niezależne	101
■ Schemat Bernoullego	105
■ Przed sprawdzianem	110
■ Przed maturą	112

GRANICE FUNKCJI

■ Granice funkcji — intuicje	115
■ Granice funkcji — definicje	118
■ Funkcje ciągłe	120
■ Twierdzenie Darboux	123
■ Obliczanie granic	125
■ Obliczanie granic (cd.)	128
■ Przed sprawdzianem	132
■ Przed maturą	134

POCHODNA FUNKCJI

■ Pochodna funkcji w punkcie	138
■ Pochodna funkcji	140
■ Pochodna funkcji złożonej	143
■ Monotoniczność funkcji	146
■ Ekstrema	148
■ Zastosowania pochodnej	150
■ Zastosowania pochodnej (cd.)	154
■ Przed sprawdzianem	157
■ Przed maturą	159

ZESTAWY MATURALNE	164
--------------------------------	------------

TABELA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH	182
--	------------

ODPOWIEDZI	183
-------------------------	------------

Szarym symbolem ■ oznaczono tematy przeznaczone dla zakresu rozszerzonego, a czarnym symbolem ■ oznaczono tematy przeznaczone tylko dla zakresu podstawowego (tematy te nie są omawiane w podręczniku dla zakresu rozszerzonego). Pomarańczowym symbolem ■ oznaczono tematy przeznaczone dla obu zakresów.

W książce przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

12. — zadanie o średnim poziomie trudności

12. — zadanie trudne

Я — zadanie z zakresu rozszerzonego

Ж — zadanie z zakresu podstawowego, które w zakresie rozszerzonym można pominąć

Wstęp

Zbiór zadań stanowi uzupełnienie podręcznika do nauczania matematyki w klasie czwartej liceum i technikum i jest zgodny z programem *Matematyka z plusem*. Książka ta może być jednak pomocna uczniom i nauczycielom niezależnie od wybranego programu nauczania.

W każdym dziale zostały zebrane najważniejsze wiadomości z teorii, a wszystkie zadania podzielone na trzy grupy. W pierwszej — oznaczonej numerami typu 69. — znalazły się zadania typowe lub łatwe. Z nimi powinni sobie poradzić wszyscy uczniowie.

W drugiej grupie — o numerach typu 69. — znajdują się zadania nieco trudniejsze, przeznaczone dla tych uczniów, którym nie sprawiają kłopotu zadania z pierwszej grupy.

Trzecia grupa zadań — oznaczonych numerami typu 69. — obejmuje zadania raczej trudne. Z nimi powinni sobie poradzić uczniowie zdolniejsi i zainteresowani matematyką.

Dodatkowo przy numerach zadań dotyczących treści nauczania, które nie są obowiązkowe dla zakresu podstawowego, znajduje się symbol $\P$, a przy zadaniach, które są obowiązkowe tylko dla zakresu podstawowego (uczniowie realizujący zakres rozszerzony mogą je pominąć) — symbol $\mathbb{N}$.

Każdy dział kończy się zestawami zadań: „Przed sprawdzianem” — umożliwia powtórzenie materiału z danego zakresu tematycznego, „Przed maturą” — zawiera wybrane oryginalne zadania maturalne z minionych egzaminów. Dzięki nim można przyzwyczaić uczniów do systematycznego przygotowywania się do matury z matematyki i oswoić ich z typowymi zadaniami maturalnymi.

W książce zamieszczono też cztery zestawy zadań (dwa dla zakresu podstawowego i dwa dla zakresu rozszerzonego) wzorowanych na arkuszach maturalnych CKE.

Na końcu książki znajdują się odpowiedzi do niemal wszystkich zadań, a do trudniejszych — także wskazówki.

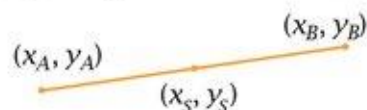
GEOMETRIA ANALITYCZNA

Odległość między punktami

$A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ wynosi:

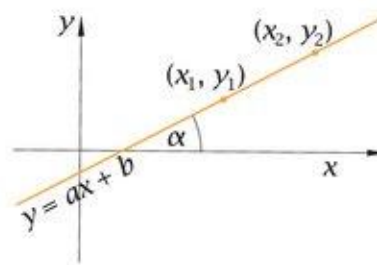
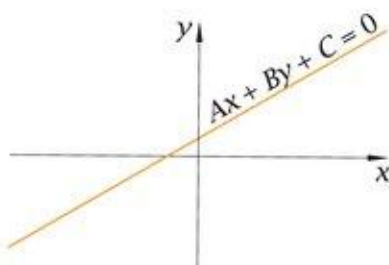
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka



$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

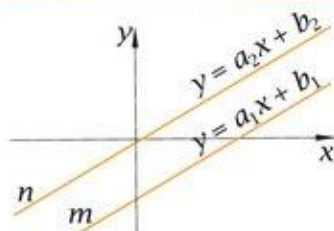
Proste w układzie współrzędnych



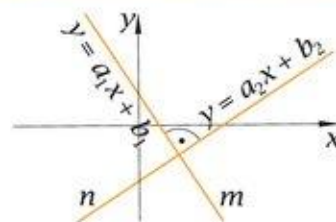
Równanie ogólne prostej: $Ax + By + C = 0$ Równanie kierunkowe prostej: $y = ax + b$

$$a = \tan \alpha$$

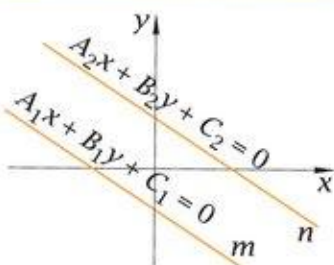
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



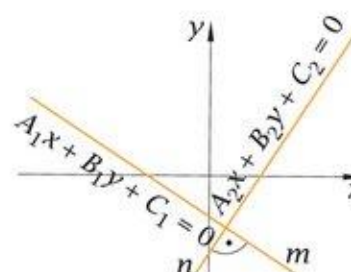
$$m \parallel n \Leftrightarrow a_1 = a_2$$



$$m \perp n \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{a_1}$$



$$m \parallel n \Leftrightarrow A_1 B_2 = A_2 B_1$$



$$m \perp n \Leftrightarrow A_1 A_2 = -B_1 B_2$$

Odległość między prostymi równoległymi o równaniach

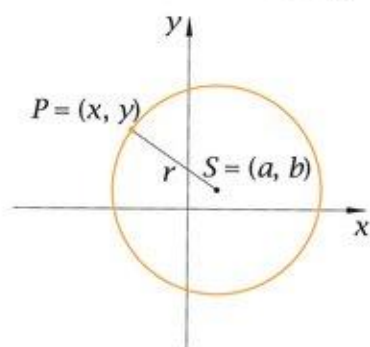
$$Ax + By + C_1 = 0 \text{ i } Ax + By + C_2 = 0:$$

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Okrąg w układzie współrzędnych



Postać kanoniczna równania okręgu:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

PUNKTY I ODCINKI W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

✎ 1. Znajdź współrzędne środka oraz długość odcinka o końcach w punktach A i B.

- | | |
|---|---|
| a) $A = (7, -8), \quad B = (-2, -8)$ | d) $A = (15, 0), \quad B = (0, -5)$ |
| b) $A = (-6, -11), \quad B = (-6, -20)$ | e) $A = (-297, 322), \quad B = (-291, 319)$ |
| c) $A = (-6, -7), \quad B = (6, -2)$ | f) $A = (3\sqrt{2}, -3), \quad B = (-7\sqrt{2}, 2)$ |

✎ 2. Dla jakich wartości p spełnione są podane warunki?

- | | |
|--|--|
| a) $A = (-4, 6), \quad B = (p, -2), \quad AB = 10$ | c) $A = (2, 4), \quad B = (p, -p), \quad AB = 6$ |
| b) $A = (5, p), \quad B = (-1, -3), \quad AB = 8$ | d) $A = (p, 2p), \quad B = (3, p + 1), \quad AB = 2$ |

✎ 3. Punkty M i N są końcami średnicy okręgu. Znajdź promień i współrzędne środka tego okręgu.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $M = (-2, -4), \quad N = (6, 6)$ | b) $M = (0, 8), \quad N = (-7, 19)$ |
|-------------------------------------|-------------------------------------|

- ✎ 4. a) Punkt $(4, 7)$ jest środkiem odcinka AB oraz $A = (1, 3)$. Znajdź współrzędne punktu B .
 b) Punkt $(-123, 52)$ jest środkiem odcinka MN i $N = (-3, 192)$. Znajdź współrzędne punktu M .
 c) Punkt $(2004, -3)$ jest środkiem odcinka PQ i $P = (-3, p)$ oraz $Q = (q, 3)$. Znajdź wartości p i q .
- ✎ 5. Sprawdź, czy podany punkt leży na okręgu o środku w punkcie $(-24, 22)$ i promieniu 10.
 a) $(-30, 30)$ c) $(-15, 22 + \sqrt{19})$
 b) $(-17, 15)$ d) $(-24 - 4\sqrt{6}, 20)$
- ✎ 6. a) Znajdź współrzędne środka oraz średnicę okręgu opisanego na prostokącie o wierzchołkach $(-4, -2)$, $(2, 2)$, $(0, 5)$, $(-6, 1)$.
 b) Znajdź współrzędne środka oraz średnicę okręgu wpisanego w kwadrat o wierzchołkach $(-4, -5)$, $(1, -3)$, $(-1, 2)$, $(-6, 0)$.
- ✎ 7. Znajdź długość środkowej AM trójkąta, którego wierzchołkami są punkty:
 a) $A = (-6, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (8, 4)$
 b) $A = (2, 2)$, $B = (-4, -3)$, $C = (6, -7)$
- ✎ 8. Oblicz pole podanej figury.
 a) kwadrat $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-9, 0)$, $B = (-2, -3)$, $C = (1, 4)$, $D = (-6, 7)$
 b) prostokąt $PQRS$ o wierzchołkach $P = (3, -4)$, $Q = (6, -3)$, $R = (2, 9)$, $S = (-1, 8)$
 c) romb $KLMN$ o wierzchołkach $K = (-9, -5)$, $L = (-2, -9)$, $M = (-1, -1)$, $N = (-8, 3)$
- ✎ 9. Znajdź współrzędne punktów P_1 i P_2 symetrycznych do punktu P odpowiednio względem osi x i y układu współrzędnych oraz punktu P_3 symetrycznego względem początku układu współrzędnych.
 a) $P = (6, 0)$ c) $P = (-3, 8)$
 b) $P = (0, -7)$ d) $P = (5, -9)$
- ✎ 10. a) Punkt $P' = (4, -9)$ jest obrazem punktu $P = (-6, -15)$ w symetrii względem punktu S . Znajdź współrzędne punktu S .
 b) Znajdź współrzędne obrazu punktu $M = (3, 7)$ w symetrii względem punktu $S = (-5, -2)$.
 c) Obrazem punktu K w symetrii względem punktu $S = (8, -1)$ jest punkt $K' = (-9, 10)$. Znajdź współrzędne punktu K .

- ✎ **11.** Oblicz odległości między punktami A , B i C , a następnie sprawdź, czy te punkty są współliniowe.
- a) $A = (-2, -5)$, $B = (1, -1)$, $C = (7, 7)$ b) $A = (1, -2)$, $B = (-2, -11)$, $C = (3, 2)$
- ✎ **12.** Punkty A i B są wierzchołkami, a punkt P jest punktem przecięcia przekątnych podanego czworokąta. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego czworokąta.
- a) romb $ABCD$, $A = (2, -1)$, $B = (4, 5)$, $P = (0, 1)$
 b) prostokąt $ABCD$, $A = (5, 8)$, $B = (3, -2)$, $P = \left(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$
 c) równoległobok $ABCD$, $A = (-2, -2)$, $B = (-3, -5)$, $P = \left(\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right)$
- ✎ **13.** Dany jest odcinek o końcach $(-1, -4)$ i $(p, 2p)$. Znajdź wartość p , dla której środek tego odcinka:
- a) leży na osi y układu współrzędnych, c) ma jednakowe współrzędne,
 b) leży na osi x układu współrzędnych, d) jest odległy od punktu $(0, 0)$ o 1.
- ✎ **14.** a) Znajdź na osi x punkt oddalony o 5 od punktu $(7, -3)$.
 b) Znajdź na osi y punkt oddalony o 8 od punktu $(-4, -6)$.
 c) Znajdź na osi x punkt jednakowo oddalony od punktów $(-1, 1)$ i $(5, 3)$.
 d) Znajdź na osi y punkt jednakowo oddalony od punktów $(2, 3)$ i $(-3, -7)$.
- ✎ **15.** Punkty A i B są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Znajdź współrzędne trzeciego wierzchołka tego trójkąta.
- a) $A = (1, 1)$, $B = (11, 1)$ b) $A = (-3, -4)$, $B = (-3, 2)$
- ✎ **16.** Odcinek o końcach $A = (-1, 0)$ i $B = (4, -7)$ jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC . Znajdź współrzędne wierzchołka C , jeżeli wiadomo, że leży on na jednej z osi układu współrzędnych.
- ✎ **17.** Punkt A leży na osi x , a punkt B — na osi y . Wykaż, że odległość środka odcinka AB od początku układu współrzędnych jest dwa razy krótsza od długości odcinka AB .
- ✎ **18.** Przekątne rombu są równoległe do osi układu współrzędnych. Dwa z jego wierzchołków mają współrzędne $(-4, 2)$ i $(-1, -5)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków.
- ✎ **19.** Wykaż na dwa sposoby, że punkty $Q = (1, 1)$, $R = (2, 5)$, $S = (6, 8)$ i $T = (5, 4)$ są wierzchołkami równoległoboku, raz korzystając ze wzoru na długość odcinka, a drugi raz — ze wzoru na współrzędne środka odcinka.

✎ **20.** Oblicz cosinus najmniejszego kąta trójkąta ABC .

a) $A = (-32, 13)$, $B = (-29, 11)$, $C = (-29, 17)$

b) $A = (23, -14)$, $B = (21, -10)$, $C = (18, -9)$

✎ **21.** a) Na odcinku AB o końcach w punktach $A = (-23, 48)$ i $B = (7, -12)$ zaznaczono taki punkt, że podzielił on odcinek na części, których długości są w stosunku $1:2$. Znajdź współrzędne tego punktu.

b) Znajdź współrzędne punktu przecięcia środkowych trójkąta o wierzchołkach $A = (-7, -4)$, $B = (5, -5)$, $C = (-1, 3)$.

✎ **22.** Pewien punkt dzieli odcinek o końcach w punktach $A = (43, -22)$ oraz $B = (23, -37)$ na dwie części, których długości są w stosunku $2:3$. Znajdź współrzędne tego punktu.

✎ **23.** Znajdź miary kątów trójkąta, którego wierzchołkami są dane punkty.

a) $(0, 3)$, $(4, 0)$, $(12, 8)$

b) $(0, -2)$, $(3, 0)$, $(-1, 2)$

RÓWNANIE PROSTEJ

✎ **24.** Które z punktów A , B , C leżą na prostej l ?

a) $A = (0, -\frac{1}{4})$, $B = (-\frac{4}{3}, \frac{1}{4})$, $C = (5, -4)$, prosta $l: y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

b) $A = (0, -1)$, $B = (-1, 0)$, $C = (-2, -2)$, prosta $l: 2x - y + 2 = 0$

c) $A = (-2, -3)$, $B = (-3, 2)$, $C = (2, 3)$, prosta $l: 3x + 2y - 12 = 0$

d) $A = (-4, -3)$, $B = (1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3})$, $C = (-\frac{1}{6}, \frac{2}{9})$, prosta $l: 2x - 3y + 1 = 0$

✎ **25.** Znajdź wartości a i b , dla których punkty A i B leżą na prostej l .

a) $A = (a, -2)$, $B = (-\frac{5}{6}, b)$, prosta $l: y = -3x + 2$

b) $A = (a, 8)$, $B = (-3, b)$, prosta $l: 2x - 3y - 1 = 0$

c) $A = (a, a)$, $B = (-b, b)$, prosta $l: y = 4x - 5$

d) $A = (a, -a)$, $B = (-b, -b)$, prosta $l: -3x + y - 8 = 0$

✎ **26.** Przekształć równanie ogólne prostej do postaci kierunkowej.

a) $x + 2y + 6 = 0$

c) $-3x + 9y + 21 = 0$

b) $5x - 4y - 20 = 0$

d) $3x + \sqrt{3}y - \sqrt{6} = 0$

✎27. Przekształć równanie kierunkowe prostej do postaci ogólnej, w której wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi.

a) $y = 3x - \frac{2}{5}$ b) $y = -\frac{2}{7}x + 6$ c) $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}$ d) $y = -0,23x - 0,7$

✎28. Trzy z podanych równań przedstawiają tę samą prostą. Zapisz równanie ogólne i równanie kierunkowe tej prostej.

a) $x + y = 3 - \frac{1}{2}y$ $2x = 3y - 6$ $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ $x = 3 - \frac{3}{2}y$

b) $\frac{x-y}{2} = 1 - y$ $x = 3y - 2$ $\frac{x+5}{6} = \frac{y+1}{2}$ $3(x+y+2) = 2(x+3y+2)$

✎29. Znajdź współrzędne punktów przecięcia danej prostej z osiami układu współrzędnych.

a) $y = -\frac{2}{3}x - 22$

c) $2x - 3y + 12 = 0$

b) $y = 1,2x - 6$

d) $-10x + 6y - 2 = 0$

✎30. Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B.

a) $A = (0, -12), B = (-4, 0)$

d) $A = (-1, 8), B = (2, 2)$

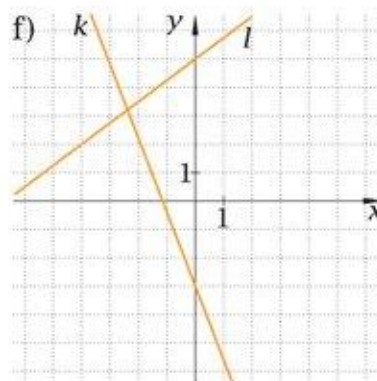
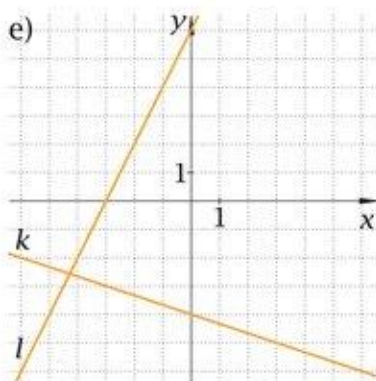
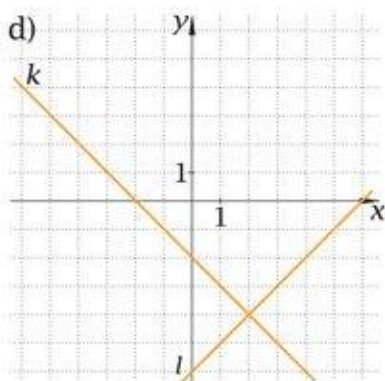
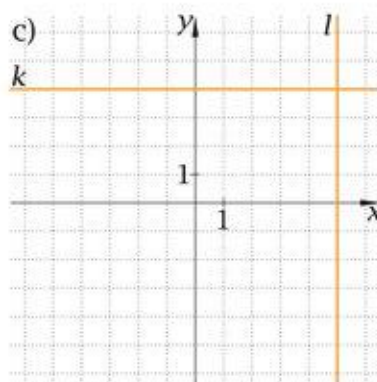
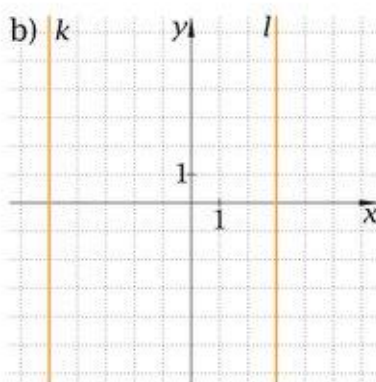
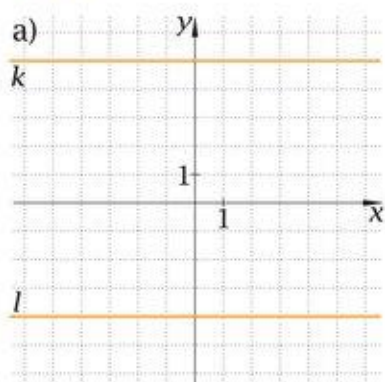
b) $A = (5, 0), B = (0, -20)$

e) $A = (5, 2), B = (-10, 5)$

c) $A = (1, 7), B = (0, -2)$

f) $A = (-7, -6), B = (21, 14)$

✎31. Znajdź równania ogólne prostych k i l przedstawionych na rysunku.



✎32. Podaj równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $(5, -3)$ oraz:

- a) równoległej do osi x ,
- b) równoległej do osi y ,
- c) nachylonej do osi x pod kątem 45° ,
- d) nachylonej do osi x pod kątem 135° .

✎33. Znajdź równanie prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez punkt P .

- a) $y = -\frac{1}{3}x + 6$, $P = (6, 0)$
- b) $y = -22$, $P = (-3, 10)$
- c) $7x - 3y + 8 = 0$, $P = (0, -5)$
- d) $-3x + 2y - 1 = 0$, $P = (-4, 3)$

✎34. Znajdź równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt M .

- a) $y = 3 - 4x$, $M = (0, -2)$
- b) $x = 12$, $M = (-3, 5)$
- c) $3x - 4y = 0$, $M = (-9, 0)$
- d) $6x + 3y = 11$, $M = (-4, -5)$

✎35. Sprawdź, czy podane proste są równoległe.

- a) $y = 3x - 2$, $y = 3x + 17$
- b) $y = -\frac{1}{3}x + 1$, $y = -0,3x - 1$
- c) $y = -2x + 3$, $6x + 3y - 5 = 0$
- d) $y = 8x + 4$, $y + 8x - 2 = 0$
- e) $2x + 6y + 3 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$
- f) $\frac{x}{2} - 3y = 0$, $6y - x + \sqrt{3} = 0$

✎36. Sprawdź, czy podane proste są prostopadłe.

- a) $y = 2x - \frac{1}{3}$, $y = -2x + 3$
- b) $y = \frac{1}{4}x + 11$, $y = -4x + 6$
- c) $y = -\sqrt{2}x - 1$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3$
- d) $2x + 6y + 5 = 0$, $y = 3x - 5$
- e) $x - y + 2 = 0$, $-x + y + 10 = 0$
- f) $7x - 5y + 9 = 0$, $-5x + 7y - 3 = 0$

✎37. Znajdź wśród podanych prostych wszystkie pary prostych równoległych i prostych prostopadłych.

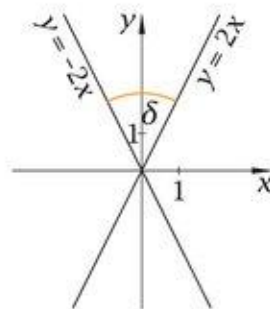
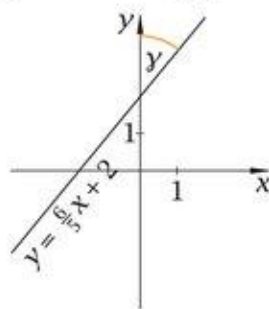
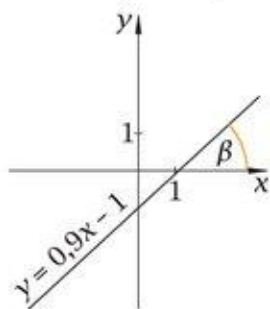
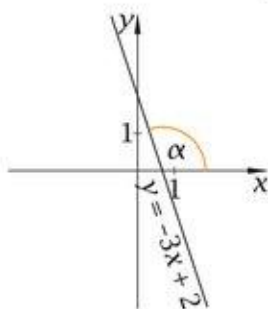
- | | | |
|---------------------------------------|--|---|
| prosta a : $y = -\frac{2}{3}x$ | prosta d : $y = 1,5x - \frac{2}{3}$ | prosta g : $y = -3x$ |
| prosta b : $y = \frac{1}{3}x + 1,5$ | prosta e : $y = -1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$ | prosta h : $y = \frac{x}{3}$ |
| prosta c : $y = \frac{3}{2}x$ | prosta f : $y = \frac{2}{3}x - 5$ | prosta i : $y = 3\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{3}$ |

✎38. a) Znajdź taką wartość m , dla której proste o równaniach $y = -1,4x + 3,7$ i $2x + my + 7 = 0$ są równoległe, oraz taką, dla której te proste są prostopadłe.

b) Znajdź taką wartość p , dla której proste o równaniach $px + 5y = 3$ i $9x + 3y = -5$ są równoległe, oraz taką, dla której te proste są prostopadłe.

- ✎39. a) Sprawdź, czy punkty $P = (1, -1)$, $Q = (7, 2)$ i $R = (51, 24)$ są współliniowe.
b) Znajdź wartość m , dla której punkty $P = (3, 7)$, $Q = (m, m - 1)$ i $R = (-2, -8)$ są współliniowe.
- ✎40. Znajdź współrzędne punktu leżącego na prostej l , którego odległości od punktów A i B są równe.
a) prosta $l: x = 8$, $A = (2, -3)$, $B = (6, 1)$
b) prosta $l: y = -2$, $A = (-3, 2)$, $B = (4, 5)$
c) prosta $l: x - y = 0$, $A = (-6, -1)$, $B = (-2, 7)$
- ✎41. Znajdź równania dwóch prostych przechodzących przez punkt P , poprowadzonych w równych odległościach od punktów A i B .
a) $P = (0, 0)$, $A = (2, -5)$, $B = (-8, -11)$ b) $P = (3, -2)$, $A = (-5, -1)$, $B = (1, 9)$
- ✎42. Znajdź wszystkie wartości parametru p , dla których trzy proste o podanych równaniach przecinają się w jednym punkcie.
a) $x = 3$, $y = -5$, $y = 2x + p$ c) $2x + py - p = 0$, $x = 3$, $y = 7$
b) $y = px - 4$, $x = -7$, $y = p$ d) $px + 3y + p = 0$, $x = p$, $y = -2$
- ✎43. Z punktu $(-1, 4)$ poprowadzono proste prostopadłe do prostych o równaniach $x - 3y + 3 = 0$ i $3x + 2y + 8 = 0$. Znajdź współrzędne wierzchołków czworokąta ograniczonego tymi czterema prostymi.
- ✎44. Wyznacz równania obu osi symetrii odcinka AB .
a) $A = (8, 1)$, $B = (2, 4)$ b) $A = (-5, 3)$, $B = (2, 7)$
- ✎45. Punkty $A = (-1, -4)$, $B = (5, -2)$ i $C = (-3, 6)$ są wierzchołkami trójkąta.
a) Znajdź równanie prostej przechodzącej przez wierzchołek A , która dzieli ten trójkąt na dwie części o równych polach.
b) Znajdź równania prostych przechodzących przez wierzchołek A , które dzielą ten trójkąt na cztery części o równych polach.
- ✎46. Jedna z przyprostokątnych równoramiennego trójkąta prostokątnego zawiera się w prostej o równaniu $x - y + 2 = 0$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-2, 5)$. Podaj równania prostych, w których zawierają się pozostałe boki tego trójkąta.
- ✎47. Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C .
a) $A = (-3, -1)$, $B = (4, 1)$, $C = (3, 7)$ b) $A = (-5, -3)$, $B = (0, -6)$, $C = (2, -1)$

- ✎48. Wierzchołkami trójkąta są punkty: $A = (-3, 5)$, $B = (-1, -3)$, $C = (5, -1)$. Znajdź równanie prostej:
- zawierającej środkową tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A ,
 - równoległej do boku BC i przechodzącej przez wierzchołek A ,
 - zawierającej wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka A ,
 - będącej symetralną boku BC .
- ✎49. Pole rombu jest równe 20, a końcami jednej z jego przekątnych są punkty o współrzędnych $(-4, -4)$ i $(4, 2)$. Znajdź współrzędne końców drugiej przekątnej.
- ✎50. Punkty $O = (0, 0)$, $A = (6, -4)$, $B = (3, 8)$ są wierzchołkami trapezu $OABC$, który nie jest równoległobokiem. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 5$. Znajdź współrzędne wierzchołka C .
- ✎51. Znajdź równanie prostej l równoległej do prostej $m: 3x + 2y - 2 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P = (-2, -5)$, a następnie — równanie prostej k równoległej do prostych l i m i jednakowo od nich oddalonej.
- ✎52. Znajdź na prostej l punkt, który jest położony najbliżej punktu P .
- prosta $l: y = -\frac{1}{2}x + 6$, $P = (0, -2)$
 - prosta $l: 3x + 4y - 8 = 0$, $P = (3, 1)$
- ✎53. Znajdź kąt nachylenia do osi x prostej o równaniu:
- $y = \sqrt{3}x + 2$
 - $\sqrt{3}x - 3y = 4$
 - $x - 2y + 12 = 0$
 - $2x + 3y = 2$
- ✎54. Czy kąt nachylenia podanej prostej do osi x jest ostry czy rozwarty?
- $y = \frac{1}{3}x + 7$
 - $y = 15x - 1$
 - $y = -5x + 3$
 - $y = -\frac{x}{2} + 12$
 - $2x + 3y - 7 = 0$
 - $x - 5y + 1 = 0$
- ✎55. Oblicz miary zaznaczonych kątów. Wyniki zaokrąglaj do 1° .



- ✎56. Podaj (w zaokrągleniu do 1°) miarę kąta ostrego, pod jakim przecinają się proste $3x - 5y + 10 = 0$ i $4x + 2y - 1 = 0$.

✎57. Znajdź miary kątów trójkąta ograniczonego prostymi o danych równaniach.

a) $y = -1$, $y = x - 2$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$ b) $y = 5$, $y = -\sqrt{3}x - 3$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$

✎58. a) Wykaż, że na prostej o równaniu $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$ leży nieskończenie wiele punktów o obu współrzędnych całkowitych.

b) Wykaż, że na prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$ nie leży żaden punkt o obu współrzędnych całkowitych.

✎59. Znajdź równania osi symetrii figury, która składa się z prostych o równaniach $y = ax + b$ i $y = -ax + c$ ($a \neq 0$).

✎60. Prosta k : $Ax + By + C = 0$ ($A \neq 0$, $B \neq 0$) i prosta l o podanym równaniu są symetryczne względem prostej lub punktu. Podaj równanie osi symetrii lub określ położenie środka symetrii.

a) $l: Ax - By - C = 0$ b) $l: Ax - By + C = 0$ c) $l: Ax + By - C = 0$

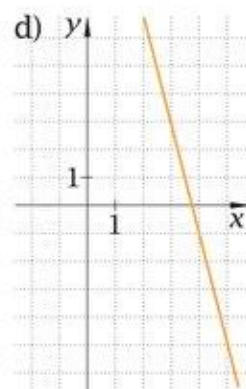
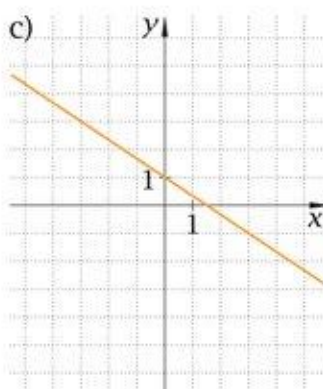
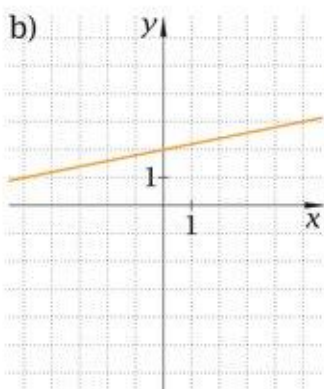
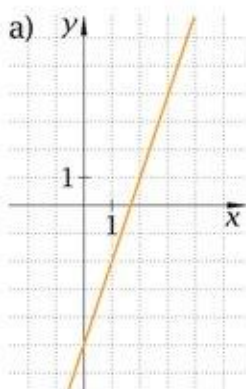
✎61. a) Wykaż, że jeśli prosta przechodzi przez punkty o współrzędnych (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , to jej równanie można zapisać w postaci $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.

b) Wykaż, że jeśli prosta ma współczynnik kierunkowy a i przechodzi przez punkt o współrzędnych (x_1, y_1) , to jej równanie można zapisać w postaci $y - y_1 = a(x - x_1)$.

c) Wykaż, że jeśli prosta nie przechodzi przez początek układu i przecina osie układu w punktach o współrzędnych $(a, 0)$ i $(0, b)$, to jej równanie można zapisać w postaci $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

RÓWNANIE PROSTEJ (CD.)

✎62. Znajdź współczynnik kierunkowy prostej przedstawionej na rysunku. Podaj współczynnik kierunkowy prostej do niej prostopadłej.



✎63. Znajdź współczynnik kierunkowy prostej, na której leżą podane punkty.

a) $(6, 4), (1, 2)$

c) $(-100, 30), (80, -60)$

b) $(42, -77), (40, -81)$

d) $(-23, -19), (-30, -14)$

✎64. Prosta o współczynniku kierunkowym a przechodzi przez punkty A i B . Znajdź wartość p .

a) $a = -2, A = (5, 12), B = (-3, p)$

b) $a = \frac{1}{5}, A = (0, -21), B = (p, -11)$

✎65. Oblicz odległość punktu P od podanej prostej.

a) $P = (3, 5), y = -2$

d) $P = (3, 4), y = -2x$

b) $P = (-1, -3), x = -9$

e) $P = (-2, 1), 3x - y + 3 = 0$

c) $P = (0, 0), y = 2x - 3$

f) $P = (-6, 4), y = -\frac{1}{4}x - 2$

✎66. Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie P , a jeden z boków zawiera się w prostej l . Oblicz pole tego kwadratu.

a) $P = (2, 1)$, prosta $l: x + 3y - 1 = 0$

b) $P = (5, -3)$, prosta $l: -2x + 3y + 6 = 0$

✎67. Wykaż, że podane proste są równoległe, a następnie oblicz odległość między nimi.

a) $3x - y + 1 = 0, 6x - 2y + 3 = 0$

b) $y = \frac{1}{2}x + 5, x - 2y + 8 = 0$

✎68. Okrąg o środku P jest styczny do prostej l . Znajdź promień tego okręgu.

a) $P = (12, 11)$, prosta $l: y = -4$

c) $P = (4, 1)$, prosta $l: x + 5y - 3 = 0$

b) $P = (-7, 3)$, prosta $l: x = 6$

d) $P = (6, 0)$, prosta $l: y = -\frac{2}{3}x + 5$

✎69. Czy czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, rombem, prostokątem, równoległobokiem lub trapezem?

a) $A = (-32, 17), B = (14, -46), C = (23, -43), D = (-26, 19)$

b) $A = (-29, -23), B = (1, -26), C = (5, 4), D = (-25, 7)$

c) $A = (-17, -21), B = (13, -19), C = (11, 11), D = (-19, 9)$

d) $A = (-8, -5), B = (32, 3), C = (30, 13), D = (-10, 5)$

e) $A = (-16, -10), B = (6, -6), C = (16, 14), D = (-6, 10)$

✎70. Znajdź wartość p , dla której prosta o równaniu $2x - 3y + 5 = 0$ oraz prosta przechodząca przez punkty $A = (1, 5)$ i $B = (p, -3)$ są:

a) równoległe,

b) prostopadłe.

- ✎ **71.** Znajdź wartość p , dla której prosta o równaniu $2x + y - 9 = 0$ oraz prosta przechodząca przez punkty $A = (p, 2)$ i $B = (-4, p)$ są:
- równoległe,
 - prostopadłe.
- ✎ **72.** Dane są wierzchołki trójkąta $A = (-4, -1)$, $B = (1, -3)$, $C = (8, 1)$. Oblicz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka B oraz pole tego trójkąta.
- ✎ **73.** Dwa wierzchołki trójkąta to punkty $A = (-4, 2)$ i $B = (-1, -2)$. Prosta $y = -\frac{4}{3}x$ przechodzi przez trzeci wierzchołek. Sprawdź, że ta prosta jest równoległa do prostej AB , a następnie oblicz pole tego trójkąta.
- ✎ **74.** a) Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego wierzchołkami są punkty $A = (-2, -5)$, $B = (5, 1)$, $C = (3, 4)$ i $D = (-4, -2)$.
 b) Oblicz pole trapezu $KLMN$, którego wierzchołkami są punkty $K = (-3, -4)$, $L = (-6, 5)$, $M = (-2, 11)$ i $N = (0, 5)$.
- ✎ **75.** Znajdź współrzędne punktu symetrycznego do punktu P względem prostej l .
- $P = (2, 5)$, prosta $l: y = \frac{1}{2}x - 1$
 - $P = (2, -8)$, prosta $l: 2x + 3y - 6 = 0$
 - $P = (0, -4)$, prosta $l: y = -3x + 6$
 - $P = (3, -6)$, prosta $l: 3x - 5y - 5 = 0$
- ✎ **76.** Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek o końcach $A = (-2, -5)$ oraz $B = (4, -3)$, a jedno z jego ramion zawiera się w prostej o równaniu $y = -x + 1$.
- Znajdź współrzędne trzeciego wierzchołka tego trójkąta.
 - Oblicz pole tego trójkąta.
 - Oblicz długość wysokości opuszczonej na ramię tego trójkąta.
- ✎ **77.** Punkty $(-1, 6)$ i $(3, -2)$ są wierzchołkami trójkąta, a punkt $(0, -1)$ jest jego ortocentrum. Znajdź współrzędne trzeciego wierzchołka tego trójkąta.
- ✎ **78.** Odcinek o końcach $A = (-1, 0)$ i $B = (3, -8)$ jest jednym z boków trójkąta ABC . Znajdź współrzędne punktu C , jeżeli wiadomo, że pole trójkąta ABC wynosi 20, a punkt C leży na osi y .
- ✎ **79.** Podstawa trójkąta równoramiennego zawiera się w prostej $y = 2x + 1$, każde z ramion ma długość $\sqrt{37}$, a jednym z wierzchołków jest punkt o współrzędnych $(5, -2)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.
- ✎ **80.** W trójkącie o wierzchołkach $(-1, 2)$, $(3, 0)$, $(3, 6)$ znajdź współrzędne:
- ortocentrum tego trójkąta,
 - środką okręgu opisanego na tym trójkącie,
 - środką ciężkości tego trójkąta.

- ✎ **81.** Środek okręgu przechodzącego przez punkty $(5, -1)$ i $(-1, -7)$ leży na prostej $y = 3x - 6$. Znajdź współrzędne środka tego okręgu.
- ✎ **82.** Końcami podstawy trójkąta równoramiennego są punkty $(-4, -5)$ i $(-1, -1)$. Trzeci wierzchołek tego trójkąta leży na prostej $2x - 3y - 21 = 0$. Znajdź współrzędne tego wierzchołka.
- ✎ **83.** Jeden z boków kwadratu zawiera się w prostej $2x - 3y - 12 = 0$, a jednym z wierzchołków jest punkt $(-1, 4)$.
- Znajdź pole tego kwadratu.
 - Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.
 - Znajdź równania prostych zawierających przekątne tego kwadratu.
- ✎ **84.** Dwa z boków kwadratu opisanego na okręgu o środku w punkcie $(3, -5)$ zawierają się w prostych o równaniach $4x - 3y + 3 = 0$ i $4x - 3y - 57 = 0$. Znajdź równania prostych, w których zawierają się pozostałe dwa boki tego kwadratu.
- ✎ **85.** Punkty $(-1, 2)$ i $(-3, -8)$ są końcami jednej z przekątnych kwadratu. Znajdź równania prostych, w których zawierają się boki tego kwadratu.
- ✎ **86.** Oś symetrii trapezu równoramiennego $ABCD$ jest prosta $y = 2x + 1$. Punkty $B = (3, -3)$ i $C = (4, 4)$ są końcami ramienia tego trapezu. Znajdź współrzędne punktów A i D .
- ✎ **87.** Sąsiednie boki równoległoboku zawierają się w prostych $4x - 5y + 7 = 0$ oraz $2x + 3y + 9 = 0$, a jedna z przekątnych zawiera się w prostej $x - 4y + 10 = 0$. Znajdź współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.
- ✎ **88.** Sąsiednie boki równoległoboku zawierają się w prostych $x - 3y - 7 = 0$ oraz $x + 2y - 2 = 0$. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie $(-1, 1)$.
- Znajdź współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.
 - Oblicz pole tego równoległoboku.
- ✎ **89.** Punkty $(-6, -4)$, $(-1, -1)$, $(3, 6)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku.
- Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka.
 - Oblicz pole tego równoległoboku.
- ✎ **90.** Dane są punkty $A = (2m + 5, 2)$, $B = (m, 3)$, $C = (-1, m - 2)$. Oblicz, dla jakiej wartości parametru m :
- punkty A , B i C są współliniowe,
 - proste AB i AC są prostopadłe.

- ✖91. Jednym z wierzchołków trójkąta jest punkt $(0, 3)$, a pozostałe leżą na prostej $y = 2x + 8$. Symetralne boków tego trójkąta przecinają się w punkcie $(-3, 7)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.
- ✖92. Znajdź równanie prostej, której odległość od początku układu współrzędnych jest równa 5 i która przechodzi przez punkt $(7, -1)$.
- ✖93. Znajdź na prostej l punkt C taki, że $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$.
- $A = (6, 8)$, $B = (-2, -4)$, prosta $l: y = 0$
 - $A = (-10, 6)$, $B = (-3, -3)$, prosta $l: x = -2$
 - $A = (-1, 3)$, $B = (5, 4)$, prosta $l: x - y = 0$
- ✖94. Pole rombu $ABCD$ jest równe 80. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D , jeżeli wiadomo, że $A = (0, -1)$ i $C = (4, 7)$.
- ✖95. Punkty $A = (0, 3)$ i $D = (3, 4)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$. Prosta $-x + y + 7 = 0$ przechodzi przez punkt C i jest prostopadła do podstaw trapezu.
- Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trapezu.
 - Oblicz pole tego trapezu.
- ✖96. a) Dla jakiej wartości parametru p prosta o równaniu $y = x$ dzieli trójkąt o wierzchołkach $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(1, p)$ na dwie figury o równych polach?
 b) Dla jakiej wartości parametru p prosta o równaniu $y = x - 1$ dzieli trójkąt o wierzchołkach $(1, 2)$, $(4, 6)$, $(p, 2)$ na dwie figury o równych polach?
- ✖97. Znajdź punkty, który leżą w tej samej odległości od punktu $(1, 1)$, od punktu $(3, 1)$ oraz od prostej $x + y + 1 = 0$.
- ✖98. Znajdź równania prostych, które zawierają dwusieczne kątów utworzonych przez proste k i l .
- prosta $k: 5x - y - 20 = 0$, prosta $l: x + 5y - 30 = 0$
 - prosta $k: x - 2y = 0$, prosta $l: 3x - y = 0$
- ✖99. Znajdź na prostej równoległej do prostej l i przechodzącej przez punkt P dwa punkty oddalone od punktu P o 5 jednostek.
- prosta $l: 4x - 3y + 9 = 0$, $P = (-2, -3)$
 - prosta $l: 3x - y - 2 = 0$, $P = (-2, -1)$

✎ **100.** Udowodnij, korzystając ze współrzędnych wierzchołków odpowiedniego wielokąta, że:

- a) odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego z boków,
- b) odcinek łączący środki ramion dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw tego trapezu.

RÓWNANIE OKRĘGU

✎ **101.** Zapisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r .

a) $S = (2, -1), \quad r = 3$

e) $S = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right), \quad r = \frac{1}{6}$

b) $S = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right), \quad r = \sqrt{7}$

f) $S = (-0,2, -2,3), \quad r = 2,5$

c) $S = (0, -5), \quad r = \frac{1}{4}$

g) $S = (2\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}), \quad r = \sqrt[3]{3}$

d) $S = (0, 0), \quad r = 3\sqrt{2}$

h) $S = (-1 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{3}), \quad r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

✎ **102.** Które z podanych punktów leżą na okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 17$?

$A = (1, -3)$

$C = (-2, 1)$

$E = (2, 2)$

$B = (-3, 5)$

$D = (-2, 18)$

$F = (-6, 0)$

✎ **103.** Punkt $P = (x, y)$ należy do koła o środku $S = (a, b)$ i promieniu r , gdy jego współrzędne spełniają nierówność $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$. Zapisz, jaki warunek spełniają podane współrzędne punktów należących do koła o środku S i promieniu r .

a) $S = (0, 0), \quad r = \frac{1}{2}$

d) $S = (3, -5), \quad r = \sqrt{10}$

b) $S = (-2, 0), \quad r = 4$

e) $S = (-1, -4), \quad r = 3\sqrt{2}$

c) $S = (0, -7), \quad r = 2\sqrt{2}$

f) $S = (\sqrt{2}, \sqrt{3}), \quad r = 5$

✎ **104.** Punkt $P = (x, y)$ należy do koła o środku $S = (a, b)$ i promieniu r , gdy jego współrzędne spełniają nierówność $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów spełniających podany warunek.

a) $(x + 1)^2 + (y + \sqrt{2})^2 \leq 1$

d) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{5}$

b) $x^2 + (y + 3)^2 < 5$

e) $x^2 + y^2 > 2$

c) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 \geq 4$

f) $4 \leq (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 9$

✎105. Znajdź równanie okręgu:

- a) którego średnicą jest odcinek o końcach $P = (-3, 8)$, $Q = (-5, 2)$,
- b) o środku $S = (2, -3)$ i przechodzącego przez punkt $A = (5, -1)$,
- c) o środku $S = (-4, -6)$ i stycznego do prostej $y = 2$,
- d) o środku $S = (-2, 0)$ i stycznego do osi y .

✎106. Podaj równania stycznych do okręgu o danym równaniu równoległych do osi układu współrzędnych.

- a) $x^2 + y^2 = 5$
- b) $(x - 5)^2 + y^2 = 100$
- c) $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 16$

✎107. a) Znajdź równanie okręgu symetrycznego względem osi x do okręgu opisanego równaniem $(x + 6)^2 + (y + 5)^2 = 3$.

b) Znajdź równanie okręgu symetrycznego względem osi y do okręgu opisanego równaniem $(x - 8)^2 + y^2 = 11$.

✎108. Znajdź równanie okręgu opisanego na podanej figurze.

- a) trójkąt prostokątny, którego wierzchołkami są punkty $(0, 0)$, $(0, -2)$, $(5, 0)$
- b) trójkąt prostokątny, którego wierzchołkami są punkty $(-2, -4)$, $(8, 1)$, $(4, 4)$
- c) kwadrat, którego wierzchołkami są punkty $(3, 0)$, $(8, -3)$, $(11, 2)$, $(6, 5)$
- d) prostokąt, którego wierzchołkami są punkty $(-6, -2)$, $(6, -8)$, $(8, -4)$, $(-4, 2)$

✎109. Dwoma wierzchołkami trójkąta równobocznego są punkty $(-1, 0)$ i $(5, 0)$. Znajdź równanie okręgu:

- a) wpisanego w ten trójkąt,
- b) opisanego na tym trójkącie.

✎110. a) Zapisz równania wszystkich okręgów o promieniu długości 6, stycznych do prostych $x = -2$ i $y = 3$.

b) Zapisz równania okręgów stycznych do osi y oraz do prostych $x = 3$ i $y = -5$.

c) Zapisz równania okręgów, których środek leży na prostej $x = -2$, stycznych do prostych $x = -5$ i $y = 4$.

d) Podaj równania wszystkich okręgów o promieniu $\sqrt{2}$, stycznych do prostych o równaniach $x - y = 0$ i $x + y + 4 = 0$.

✎111. Znajdź równania okręgów o środku S stycznych do podanego okręgu.

- a) $S = (2, 4)$, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
- b) $S = (1, -2)$, $(x - 6)^2 + (y + 14)^2 = 144$
- c) $S = (0, 4)$, $(x - 3)^2 + y^2 = 81$
- d) $S = (-3, -5)$, $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 64$

» **112.** Sprawdź, czy okręgi o podanych równaniach są styczne, przecinają się czy są rozłączne.

a) $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 16$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 49$

b) $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 2$

$(x-6)^2 + (y+7)^2 = 10$

c) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3$

d) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 36$

$x^2 + y^2 = 4$

e) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 64$

$(x-2)^2 + (y+7)^2 = 25$

f) $(x+5)^2 + y^2 = 9$

$x^2 + (y-4)^2 = 49$

» **113.** Znajdź równanie okręgu symetrycznego do okręgu o podanym równaniu względem prostej l .

a) $(x-5)^2 + (y+6)^2 = 7$, prosta l : $y = -8$

b) $(x+9)^2 + (y+8)^2 = 3$, prosta l : $x = 5$

» **114.** Ustal, w jakich punktach okrąg o podanym równaniu przecina osie układu współrzędnych.

a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13$

b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

c) $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 25$

d) $(x-4)^2 + (y+0,5)^2 = 36,25$

» **115.** Boki trójkąta zawarte są w prostych: k , l , m . Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny, a następnie znajdź równanie okręgu opisanego na nim.

a) prosta k : $y = 1,5x + 2$, prosta l : $2x + 3y - 6 = 0$, prosta m : $7x + 4y - 34 = 0$

b) prosta k : $2x - y - 2 = 0$, prosta l : $x - 5y + 35 = 0$, prosta m : $x + 2y + 14 = 0$

» **116.** Punkt $(-8, 5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o środku w punkcie $(-2, -3)$. Znajdź równanie tego okręgu.

» **117.** Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie o podanych wierzchołkach.

a) $(-3, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 9)$

b) $(-2, -3)$, $(4, -3)$, $(2, 1)$

» **118.** Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których podane równanie opisuje okrąg.

a) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = p^2 + 2p - 3$

b) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = -p^2 - 2p + 8$

- ✎ **119.** a) Znajdź równanie okręgu o środku leżącym na prostej $x - y + 5 = 0$, przechodzącego przez punkty $A = (-7, 4)$ i $B = (-1, 6)$.
 b) Zapisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5, -1)$, $B = (3, -1)$, $C = (-3, 1)$.
- ✎ **120.** Wykaż, że środki wszystkich odcinków o długości 1, których jeden koniec leży na osi x , a drugi na osi y , tworzą okrąg.

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA UKŁADU RÓWNAŃ

- ✎ **121.** Bez wykonywania obliczeń określ, ile ten układ równań ma rozwiązań.
- a) $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = \frac{1}{2}x - 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ \frac{3}{2}x - y = 1,5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$
- ✎ **122.** Sprawdź, czy proste o podanych równaniach przecinają się. Jeśli tak — podaj współrzędne ich punktu przecięcia.
- a) $x = 7$, $2x + y - 4 = 0$ d) $y = -\frac{1}{2}x + 2$, $-5x + 2y = 1$
 b) $y = -2$, $y = -4x + 3$ e) $y + \frac{x}{2} = 1$, $6y + 3x + 1 = 0$
 c) $3x - 5y + 2 = 0$, $y = 0,6x + 0,4$ f) $3x - y + 8 = 0$, $x - 3y = 0$
- ✎ **123.** Sprawdź, czy wszystkie podane proste przecinają się w jednym punkcie.
- a) $x + y + 4 = 0$, $2x - 3y + 3 = 0$, $y = 2x - 5$
 b) $y = -x + 1$, $y = \frac{1}{3}x - 3$, $x - 2y - 7 = 0$
 c) $y = 2x + \frac{3}{2}$, $x + 4y = 1$, $3x + 2y + 2 = 0$
 d) $3x - 2y - 2 = 0$, $x + 2y + 18 = 0$, $y = 2x + 1$
- ✎ **124.** Boki trójkąta zawarte są w prostych o równaniach:
 $x + 2y - 2 = 0$ $2x - y - 4 = 0$ $x - y + 4 = 0$
 Uzasadnij, że trójkąt ten jest prostokątny i oblicz jego pole.
- ✎ **125.** Znajdź równanie stycznej w punkcie P do okręgu o podanym równaniu.
- a) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$, $P = (4, 3)$ c) $(x + 3)^2 + y^2 = 17$, $P = (-2, -4)$
 b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$, $P = (-5, -1)$ d) $x^2 + (y + 1)^2 = 29$, $P = (2, -6)$

✎ **126.** a) Prosta p jest styczna do okręgu $x^2 + y^2 = 10$ w punkcie $(1, 3)$ i przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B . Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty A , B i początek układu współrzędnych.

b) Wierzchołki rombu opisanego na okręgu $x^2 + y^2 = 5$ leżą na osiach układu współrzędnych, a jeden z jego boków jest styczny do tego okręgu w punkcie $(-2, -1)$. Oblicz pole tego rombu.

✎ **127.** Znajdź współrzędne punktów, w których okrąg k przecina prostą l .

a) okrąg $k: x^2 + y^2 = 5$,

b) okrąg $k: x^2 + y^2 = 10$,

prosta $l: y = 3x$

prosta $l: y = 2x - 1$

✎ **128.** Ustal, w jakich punktach prosta $y = 3x - 1$ przecina podany okrąg.

a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$

c) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 6$

b) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{8}{5}$

d) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$

✎ **129.** Prosta $x - 2y - 7 = 0$ przecina okrąg $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ w punktach A i B . Oblicz długość cięciwy AB .

✎ **130.** Znajdź równanie prostej stycznej w punkcie A do okręgu $(x - 4)^2 + y^2 = 25$.

a) $A = (4, 5)$

c) $A = (1, 4)$

b) $A = (-1, 0)$

d) $A = (8, -3)$

✎ **131.** Wykaż, że punkt $(0, 0)$ oraz punkty, w których prosta $x - y + 1 = 0$ przecina parabolę $y = x^2$, są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

✎ **132.** Wierzchołkiem paraboli $y = ax^2 + bx + 1$ jest punkt $W = (2, 5)$. Prosta o równaniu $y = -x + 5$ przecina tę parabolę w punktach A i B . Oblicz pole trójkąta ABW .

✎ **133.** Okrąg o środku S wycina z prostej l cięciwę o długości d . Znajdź równanie tego okręgu.

a) $S = (1, 2)$, prosta $l: x + y + 5 = 0$, $d = 2$

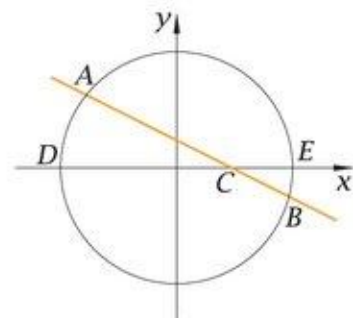
b) $S = (-3, 5)$, prosta $l: x - 4y + 8 = 0$, $d = 1$

✎ **134.** Dana jest prosta $l: y = -2x + 1$ i punkt $S = (-1, -3)$.

a) Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie S , stycznego do prostej l , oraz współrzędne punktu styczności.

b) Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie S , który z prostej l wycina cięciwę o długości 2.

- ✎ **135.** Prosta $y = -\frac{1}{2}x + 1$ przedstawiona na rysunku obok przecina okrąg $x^2 + y^2 = 17$ punktach A i B , a oś x — w punkcie C . Okrąg przecina oś x w punktach D i E . Oblicz sumę pól trójkątów ADC i CBE .



- ✎ **136.** Punkty $A = (-1, -5)$ i $B = (2, -4)$ leżą na okręgu o równaniu $x^2 + (y + 3)^2 = 5$. Znajdź współrzędne punktu C leżącego na tym okręgu takiego, że:
- trójkąt ABC jest prostokątny,
 - trójkąt ABC jest równoramienny i odcinek AB jest jego podstawą.
- ✎ **137.** Punkty $A = (1, -9)$ i $B = (4, \sqrt{19} - 5)$ leżą na okręgu $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 20$ i są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Wyznacz współrzędne punktów C i D .
- ✎ **138.** Prosta $y = -\frac{1}{2}x$ przecina okrąg o środku $S = (0, -2)$ i promieniu 4 w punktach A i B . Znajdź współrzędne takiego punktu C leżącego na tym okręgu, że trójkąt ABC jest równoramienny i odcinek AB jest jego podstawą.
- ✎ **139.** Znajdź równania stycznych do okręgu $(x - 1)^2 + y^2 = 3$:
- równoległych do prostej $y = 3x + 5$,
 - prostopadłych do prostej $x + 2y - 3 = 0$,
 - nachylonych do osi x pod kątem 135° ,
 - nachylonych do osi x pod kątem 60° .
- ✎ **140.** Znajdź równania prostych stycznych do okręgu $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, które są:
- równoległe do prostej $x + 5y + 10 = 0$,
 - prostopadłe do prostej $x + 2y - 4 = 0$.
- ✎ **141.** Znajdź równanie okręgu o środku $S = (5, -4)$, stycznego do prostej $y = 3x + 1$.
- ✎ **142.** Znajdź równania prostych, które są równoległe i jednocześnie styczne do dwóch okręgów o równaniach $(x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 9$ i $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.
- ✎ **143.** Znajdź równanie najmniejszego z okręgów, który jest równocześnie styczny do okręgu $x^2 + y^2 = 16$ i prostej $y = -x - 8$.
- ✎ **144.** Dla jakich wartości p okrąg $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = p$ ma dwa punkty wspólne z prostą $y = 2x - 2$?

- ✎ **145.** Dla jakich wartości parametrów a i b prosta $y = ax + b$ jest równoległa do prostej $3x + y - 6 = 0$ i rozłączna z okręgiem $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$?
- ✎ **146.** Znajdź na okręgu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ taki punkt, którego odległość od prostej $y = 2x + 5$ jest najmniejsza.
- ✎ **147.** Znajdź wszystkie wartości parametru p , dla których prosta opisana równaniem $px + y + 1 = 0$ i okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$:
- mają jeden punkt wspólny,
 - mają dwa punkty wspólne,
 - nie mają punktów wspólnych.
- ✎ **148.** Wierzchołki trójkąta równobocznego leżą na paraboli o podanym równaniu, a jeden z nich jest jej wierzchołkiem. Znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta.
- $y = x^2$
 - $y = x^2 - 4x$
- ✎ **149.** Znajdź na paraboli $y = x^2$ dwa takie punkty A i B , że punkt $(1, 5)$ jest środkiem odcinka AB .
- ✎ **150.** Zapisz równania prostych stycznych do okręgu $x^2 + y^2 = 5$, przechodzących przez punkt $P = (0, 5)$.
- ✎ **151.** Znajdź równania okręgów o promieniu $\sqrt{10}$, stycznych do prostych o równaniach $x - 3y + 3 = 0$ i $x + 3y - 9 = 0$.
- ✎ **152.** Z punktu $P = (0, -1)$ poprowadzono styczne do okręgu $(x + 5)^2 + y^2 = 13$. Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie, którego wierzchołkami są punkty styczności oraz punkt P .
- ✎ **153.** Znajdź równania prostych, które są styczne do okręgu $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ oraz do okręgu $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$.
- ✎ **154.** Znajdź na prostej o równaniu $y = 2x$ taki punkt P , że dwie proste przechodzące przez ten punkt i styczne do okręgu o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ są do siebie prostopadłe.
- ✎ **155.** Dla jakich wartości parametru p okręgi $x^2 + (y + 5)^2 = 16$ i $(x - p)^2 + y^2 = p^2$ są styczne?
- ✎ **156.** Dla jakich wartości parametru p punkt przecięcia prostych o równaniach $2x - y + p = 0$ i $x - y + 2p + 2 = 0$ należy do koła o promieniu 2 i środku w początku układu współrzędnych?

✎ **157.** Dla jakich wartości parametru a początek układu współrzędnych i punkty przecięcia prostej $y = x + 4$ i paraboli $y = ax^2$ ($a > 0$) są wierzchołkami trójkąta prostokątnego?

✎ **158.** Zapisz warunek, który spełniają współrzędne punktów tworzących podaną figurę.

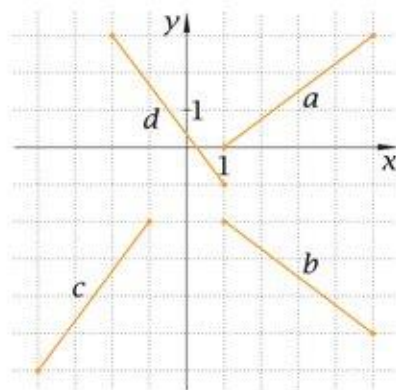
a) trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 4)$, $B = (6, 0)$, $C = (5, 4)$

b) równoległobok o wierzchołkach $A = (-2, -1)$, $B = (0, 4)$, $C = (-2, 7)$, $D = (-4, 2)$

c) trapez o wierzchołkach $A = (-1, -1)$, $B = (7, 1)$, $C = (9, 5)$, $D = (-3, 2)$

PRZED SPRAWDZIANEM

- ✎ 1. Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A = (27, -17)$, $B = (31, -15)$ i $C = (33, -11)$. Środkowa tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C ma długość:
 A. $\sqrt{41}$ B. $\sqrt{5}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $\sqrt{37}$
- ✎ 2. Punkty $A = (-20, 30)$, $B = (-21, 33)$, $C = (-24, 34)$ i $D = (-23, 31)$ są wierzchołkami rombu $ABCD$. Pole tego rombu jest równe:
 A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. 8 D. $8\sqrt{2}$
- ✎ 3. Punkty $A = (7, -9)$, $B = (13, -7)$ i $C = (9, -5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Prosta przechodząca przez środki boków AB i AC ma równanie:
 A. $x + 2y + 6 = 0$ B. $y = \frac{1}{2}x - 8$ C. $x - 2y + 9 = 0$ D. $y = \frac{1}{3}x - 6$
- ✎ 4. Jedno z poniższych równań opisuje inną prostą niż pozostałe trzy równania. Wskaż to inne równanie.
 A. $3x - 9y = 12$ B. $-2x + 6y + 8 = 0$ C. $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ D. $x - 3y + 4 = 0$
- ✎ 5. Na rysunku obok przedstawiono cztery odcinki w układzie współrzędnych. Jeden z nich jest częścią prostej o współczynniku kierunkowym równym $1\frac{1}{3}$. Wskaż ten odcinek.
 A. odcinek a
 B. odcinek b
 C. odcinek c
 D. odcinek d



- ✎ 6. Pole trójkąta ograniczonego prostą $3x - 4y - 24 = 0$ i osiami układu współrzędnych jest równe:
 A. 6 B. 12 C. 24 D. 48
- ✎ 7. Dla jakiej wartości m prosta o równaniu $y = -4x + 5$ jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty $A = (13, -7)$ i $B = (5, m)$?
 A. $m = -39$ B. $m = -9$ C. $m = -5$ D. $m = 25$
- ✎ 8. Dla jakiej wartości p prosta o równaniu $5x - 3y = 2$ jest równoległa do prostej przechodzącej przez punkty $A = (p, 2)$ i $B = (-4, p)$?
 A. $p = -\frac{7}{4}$ B. $p = -\frac{2}{3}$ C. $p = \frac{5}{3}$ D. $p = 11$

- ✎ **9.** Który z poniższych punktów jest współliniowy z punktami $A = (-2, 3)$, $B = (0, -5)$?
- A. $(11, -50)$ B. $(-16, 60)$ C. $(18, -77)$ D. $(-23, 88)$
- ✎ **10.** Boki trójkąta prostokątnego są zawarte w prostych o równaniach $6x - y + 2 = 0$, $x - 6y - 23 = 0$ i $x + 6y - 12 = 0$. Wierzchołkiem kąta prostego jest punkt:
- A. $(-1, -4)$ B. $(\frac{35}{2}, -\frac{11}{12})$ C. $(0, 2)$ D. $(6, 1)$
- ✎ **11.** Prosta o równaniu $-3x + 4y = 2$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $(2, -3)$. Promień tego okręgu ma długość:
- A. $\frac{8}{5}$ B. $\frac{16}{5}$ C. 3 D. 4
- ✎ **12.** Czworokąt $KLMN$ o wierzchołkach $K = (107, 59)$, $L = (113, 61)$, $M = (112, 64)$, $N = (106, 62)$ jest:
- A. trapezem, ale nie jest równoległobokiem,
B. równoległobokiem, ale nie jest prostokątem,
C. prostokątem, ale nie jest kwadratem,
D. kwadratem.
- ✎ **13.** Obrazem okręgu o równaniu $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 7$ w symetrii względem początku układu współrzędnych jest okrąg o równaniu:
- A. $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 7$
B. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 7$
C. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 7$
D. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 49$
- ✎ **14.** Okręgi o równaniach $x^2 + y^2 = 16$ oraz $(x-8)^2 + (y+6)^2 = 36$:
- A. są rozłączne,
B. przecinają się,
C. są styczne wewnętrznie,
D. są styczne zewnętrznie.
- ✎ **15.** Środkiem cięciwy wyciętej z prostej o równaniu $y = 3x$ przez okrąg o równaniu $(x-2)^2 + y^2 = 4$ jest punkt:
- A. $(0, 0)$ B. $(1, 3)$ C. $(\frac{2}{5}, 1\frac{1}{5})$ D. $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$
- ✎ **16.** Znajdź równanie prostej, która przechodzi przez punkt $(-8, 6)$ i jest równoległa do:
- a) osi x , b) osi y , c) prostej $3x + 4y - 7 = 0$.

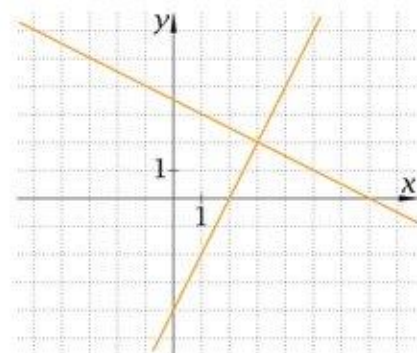
- ✎ **17.** Znajdź na osiach układu współrzędnych punkty oddalone od punktu $(5, -11)$ o 13 jednostek.
- ✎ **18.** Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A = (-5, 2)$, $B = (7, 0)$ i $C = (0, -1)$. Znajdź równanie prostej, w której zawiera się środkowa poprowadzona z wierzchołka C .
- ✎ **19.** Punkty $(14, 5)$ i $(22, 13)$ są przeciwległymi wierzchołkami rombu. Znajdź równania osi symetrii tego rombu.
- ✎ **20.** Wykaż, że prosta $y = 3x + 1$ jest styczna do okręgu $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 40$.

PRZED MATURĄ

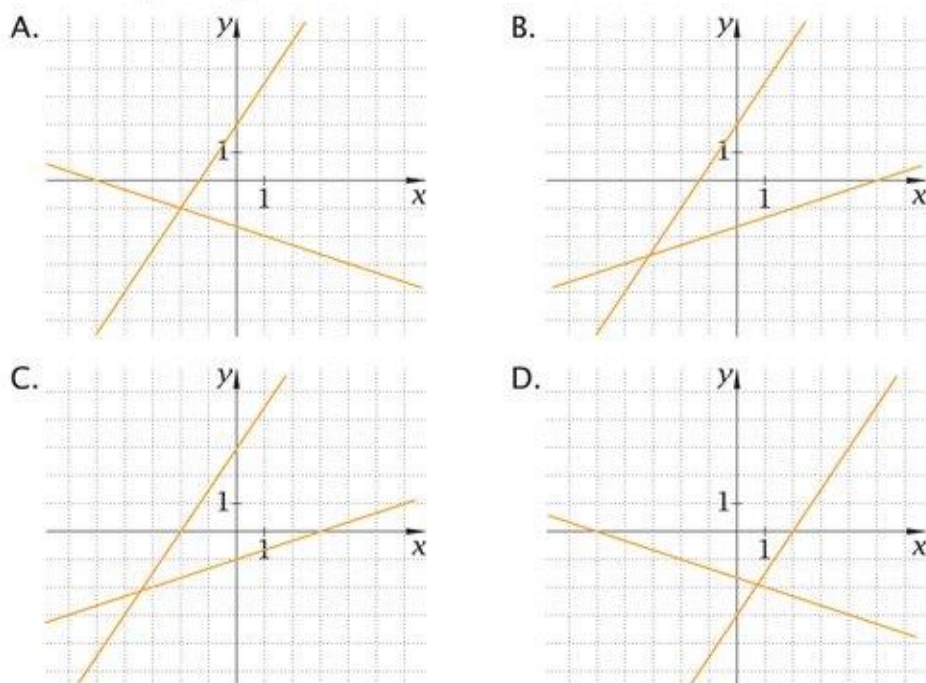
- ✎ 1. Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (4, 2)$, $C = (2, 6)$ jest równe:
A. 5 B. 10 C. 15 D. 20
- ✎ 2. W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (a, 6)$ oraz $B = (7, b)$. Środkiem odcinka AB jest punkt $M = (3, 4)$. Wynika stąd, że:
A. $a = 5$ i $b = 5$ C. $a = 4$ i $b = 10$
B. $a = -1$ i $b = 2$ D. $a = -4$ i $b = -2$
- ✎ 3. Punkt $K = (2, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego KLM , w którym $|KM| = |LM|$. Odcinek MN jest wysokością trójkąta i $N = (4, 3)$. Zatem:
A. $L = (5, 3)$ B. $L = (6, 4)$ C. $L = (3, 5)$ D. $L = (4, 6)$
- ✎ 4. Punkty $A = (-21, 11)$ i $B = (3, 17)$ są końcami odcinka AB . Obrazem tego odcinka w symetrii względem osi x układu współrzędnych jest odcinek $A'B'$. Środkiem odcinka $A'B'$ jest punkt o współrzędnych:
A. $(-9, -14)$ B. $(-9, 14)$ C. $(9, -14)$ D. $(9, 14)$
- ✎ 5. Punkt $A = (-3, 2)$ jest końcem odcinka AB , a punkt $M = (4, 1)$ jest środkiem tego odcinka. Długość odcinka AB jest równa:
A. $2\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{5}$ C. $5\sqrt{2}$ D. $10\sqrt{2}$
- ✎ 6. Dane są punkty o współrzędnych $A = (-2, 5)$ oraz $B = (4, -1)$. Średnica okręgu wpisanego w kwadrat o boku AB jest równa:
A. 12 B. 6 C. $6\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{6}$
- ✎ 7. Okręgi o środkach $S_1 = (3, 4)$ oraz $S_2 = (9, -4)$ i równych promieniach są styczne zewnętrznie. Promień każdego z tych okręgów jest równy:
A. 8 B. 6 C. 5 D. $\frac{5}{2}$
- ✎ 8. Na której z podanych prostych leżą wszystkie punkty o współrzędnych $(m-1, 2m+5)$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą?
A. $y = 2x + 5$ B. $y = 2x + 6$ C. $y = 2x + 7$ D. $y = 2x + 8$
- ✎ 9. Suma odległości punktu $A = (-4, 2)$ od prostych o równaniach $x = 4$ i $y = -4$ jest równa:
A. 14 B. 12 C. 10 D. 8

10. Na rysunku jest przedstawiona graficzna ilustracja układu dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x i y . Wskaż ten układ.

- A. $\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$
- B. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -\frac{2}{3}x + 4 \end{cases}$



11. Na jednym z rysunków przedstawiono interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$. Wskaż ten rysunek.

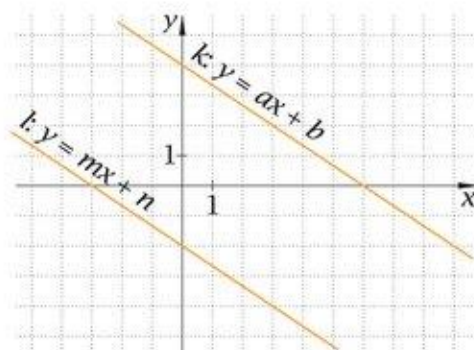


12. Układ równań $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 0,5y = 4 \end{cases}$ opisuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie:

- A. zbiór pusty, C. dokładnie dwa różne punkty,
B. dokładnie jeden punkt, D. zbiór nieskończony.

13. Na rysunku przedstawione są dwie proste równoległe k i l o równaniach $y = ax + b$ oraz $y = mx + n$. Początek układu współrzędnych leży między tymi prostymi. Zatem:

- A. $a \cdot m > 0$ i $b \cdot n > 0$
B. $a \cdot m > 0$ i $b \cdot n < 0$
C. $a \cdot m < 0$ i $b \cdot n > 0$
D. $a \cdot m < 0$ i $b \cdot n < 0$



✎ 14. Prosta l o równaniu $y = m^2x + 3$ jest równoległa do prostej k o równaniu $y = (4m - 4)x - 3$. Zatem:

- A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = -2 - 2\sqrt{2}$ D. $m = 2 + 2\sqrt{2}$

✎ 15. Proste opisane równaniami $y = \frac{2}{m-1}x$ oraz $y = mx + \frac{1}{m+1}$ są prostopadłe, gdy:

- A. $m = 2$ B. $m = \frac{1}{2}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = -2$

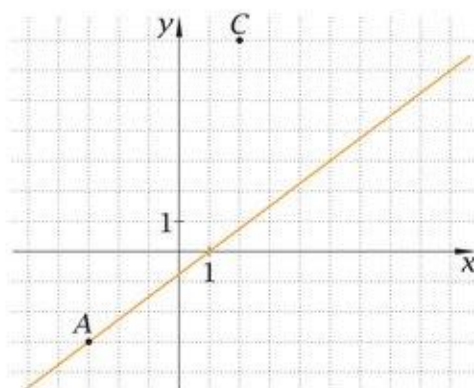
✎ 16. Prosta określona wzorem $y = ax + 1$ jest symetralną odcinka AB , gdzie $A = (-3, 2)$ i $B = (1, 4)$. Wynika stąd, że:

- A. $a = -\frac{1}{2}$ B. $a = \frac{1}{2}$ C. $a = -2$ D. $a = 2$

✎ 17. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Ponadto wiadomo, że $A = (-2, 4)$ i $B = (6, -2)$. Wierzchołek C należy do osi y . Oblicz współrzędne wierzchołka C .

✎ 18. Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, 2)$, $B = (6, -2)$, $C = (10, 6)$.

✎ 19. Na rysunku przedstawione są dwa wierzchołki trójkąta prostokątnego ABC : $A = (-3, -3)$ i $C = (2, 7)$ oraz prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, zawierająca przeciwprostokątną AB tego trójkąta. Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta i długość odcinka AB .



✎ 20. Dane są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -3x + b$, które przecinają się w punkcie leżącym na osi y układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci jest zawarty w osi x .

✎ 21. Punkty $A = (-1, 1)$ i $C = (1, 9)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta.

✎ 22. W układzie współrzędnych punkty $A = (4, 3)$ i $B = (10, 5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Oblicz współrzędne punktu C , dla którego kąt ABC jest prosty.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

CZĘŚĆ 1

Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne w pewnym zdarzeniu losowym są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwem zdarzenia losowego A nazywamy iloraz:

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

N — liczba wszystkich zdarzeń elementarnych

n_A — liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A

Własności prawdopodobieństwa

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad P(\Omega) = 1$$

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Ω — przestrzeń zdarzeń elementarnych

$\emptyset$ — zdarzenie niemożliwe

A' — zdarzenie przeciwne do zdarzenia A ($A' = \Omega \setminus A$)

Wartość oczekiwana

Jeśli możliwymi zyskami uczestnika U w pewnej grze są liczby $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, którym odpowiadają prawdopodobieństwa $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, to **wartość oczekiwaną** zysku tego uczestnika oznaczamy symbolem $\mathbb{E}Z_U$ i obliczamy ze wzoru:

$$\mathbb{E}Z_U = p_1 \cdot l_1 + p_2 \cdot l_2 + p_3 \cdot l_3 + \dots + p_n \cdot l_n$$

Zasada mnożenia

Gdy wynik pewnego postępowania zależy od kolejno podejmowanych decyzji i przy podejmowaniu pierwszej decyzji mamy do wyboru n_1 możliwości, drugiej — n_2 itd., a ostatniej — n_k możliwości, to liczba różnych wyników, które możemy otrzymać, jest równa $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Zasada dodawania

Jeśli ustalając liczbę możliwości, możemy rozważyć kilka rozłącznych przypadków, to możemy policzyć, ile jest możliwości w każdym z nich i dodać otrzymane wyniki.

Elementy kombinatoryki

Permutacje

Gdy ze wszystkich elementów danego zbioru skończonego utworzymy ciąg, to mówimy, że utworzyliśmy permutację elementów tego zbioru. Liczba permutacji zbioru n -elementowego wynosi $n!$

Wariacje

Gdy z pewnego zbioru wybierzemy k -elementowy ciąg różnych elementów, to mówimy, że utworzyliśmy k -elementową wariację bez powtórzeń elementów tego zbioru. Liczba k -elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego ($n \geq k$) wynosi:

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Gdy utworzymy k -elementowy ciąg składający się z elementów pewnego zbioru (wyrazy ciągu mogą się powtarzać), to mówimy, że utworzyliśmy k -elementową wariację z powtórzeniami elementów tego zbioru. Liczba k -elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego wynosi n^k .

Kombinacje

Jeśli z pewnego zbioru wybierzemy k -elementowy podzbiór, to mówimy, że utworzyliśmy k -elementową kombinację. Liczba kombinacji k -elementowych ze zbioru n -elementowego to:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dwumian Newtona

Jeśli a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi i n jest dowolną liczbą naturalną dodatnią, to:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

PRAWDOPODOBIENSTWO

— PODSTAWOWE POJĘCIA

1. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że:

- a) wyrzucimy co najmniej 5 oczek,
- b) wyrzucimy mniej niż 4 oczka,
- c) liczba wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 3,
- d) wyrzucona liczba oczek jest nie większa niż 6,
- e) liczba wyrzuconych oczek jest liczbą złożoną,
- f) wyrzucona liczba oczek jest podzielna przez 8.

2. Rzucamy dwiema różnymi symetrycznymi monetami. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że:

- a) wypadną dwie reszki,
- b) wypadnie orzeł i reszka,
- c) wypadnie przynajmniej jedna reszka,
- d) na obu monetach wypadnie to samo.

3. Państwo Kowalscy mają czworo dzieci: Anię, Szymona, Marysię i Zosię. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) losowo wybrane dziecko państwa Kowalskich to dziewczynka,
- b) losowo wybrana córka państwa Kowalskich to Ania.

4. Krysia przygotowała cztery szklanki herbaty: dwie bez cukru, jedną z jedną łyżeczką cukru i jedną z dwiema łyżeczkami cukru. Piotr wziął jedną z tych szklanek, nie wiedząc, czy herbata została posłodzona. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) wybrał herbatę posłodzoną dwiema łyżeczkami cukru,
- b) wybrał herbatę z cukrem.

5. Matylda w swojej bibliotece ma 12 podręczników, 20 komiksów oraz 8 atlasów. Jej przyjaciółka Zuzia losowo wybiera jedną z tych książek. Oblicz prawdopodobieństwo, że Zuzia wylosowała komiks lub podręcznik. Jak zmieni się to prawdopodobieństwo, jeżeli Matylda usunie z biblioteczki połowę podręczników i połowę atlasów?

6. Spośród wszystkich dzielników liczby 42 losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy:

- a) liczbę pierwszą,
- b) liczbę dwucyfrową,
- c) liczbę podzielą przez 2 lub przez 3.

7. W pudełku znajduje się 60 spinaczy: 10 białych, 15 czerwonych, a pozostałe są zielone.

a) Z pudełka wyciągnięto jeden spinacz czerwony i odłożono go na bok. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że za drugim razem również wyciągniemy spinacz czerwony.

b) Z pudełka usunięto po 5 spinaczy każdego koloru. Oblicz, jakie jest teraz prawdopodobieństwo wylosowania spinacza w kolorze zielonym.

8. W pewnym ogrodzie zoologicznym ptaki stanowią 30% wszystkich zwierząt. Co piąty ptak jest papugą. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrane zwierzę w tym ogrodzie nie jest papugą.

9. Wybieramy losowo jedną z początkowych dwudziestu cyfr występujących po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880 \dots$$

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- | | |
|------------------------------------|----------------------------|
| a) wylosowano cyfrę 0, | c) nie wylosowano cyfry 1, |
| b) wylosowano cyfrę 3 lub 4 lub 5, | d) nie wylosowano cyfry 0. |

10. W urnie znajduje się 16 kul białych i 12 kul czarnych. Ile kul czarnych należy dołożyć do urny, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej wzrosło dwukrotnie?

11. Ze zbioru liczb $\{12, 13, 14, \dots, 20\}$ losujemy jedną liczbę. Do podanego zdarzenia określ zdarzenie przeciwne.

- a) A — Wylosowano liczbę większą od 15.
- b) B — Wylosowano liczbę mniejszą od 20.
- c) C — Wylosowano liczbę podzielną przez 4.
- d) D — Wylosowano 14 lub 15.

12. Ze zbioru wszystkich liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest:

- a) podzielna przez 4,
- b) parzysta i większa od 50,
- c) parzysta lub większa od 50,
- d) podzielna przez 6 lub 8,
- e) liczbą pierwszą większą od 70.

13. Rzucono trzy razy symetryczną monetą. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tych rzutów. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| a) wypadły 3 orły, | c) za drugim razem wypadł orzeł, |
| b) wypadły dokładnie 2 orły, | d) wypadło więcej reszek niż orłów. |

14. Na loterii jest 90 losów przegrywających i 10 wygrywających.

- a) Ile losów wygrywających należy dołożyć, aby prawdopodobieństwo wygranej przy zakupie jednego losu wynosiło $\frac{1}{4}$?
- b) Ile losów przegrywających należy dołożyć, aby prawdopodobieństwo wygranej przy zakupie jednego losu zmalało dwukrotnie?
- c) Do puli wszystkich losów dorzucono jednakową liczbę losów przegrywających i wygrywających. Okazało się wówczas, że prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego jest równe $\frac{7}{30}$. Ile losów dołożono do puli?

15. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z klasy IV c będzie dziewczyną, wynosi $\frac{3}{5}$. Pewnego dnia do szkoły nie przyszło sześcioro uczniów z tej klasy — trzech chłopaków i trzy dziewczyny. Okazało się, że prawdopodobieństwo wylosowania dziewczyny wynosi wówczas $\frac{5}{8}$. Ilu uczniów liczy klasa IV c?

Każdy gen w organizmie człowieka ma dwa allele, jeden od ojca, drugi od matki. Jeden allel określa pewną cechę lub jej brak, np. długie rzęsy (D) lub krótkie rzęsy (K). Dla dwóch alleli są zatem cztery możliwe układy. W przykładzie z rzęsami są to: DD, DK, KD, KK.

Cecha „długie rzęsy” jest dominująca, tzn. człowiek o allelach DD, DK lub KD ma długie rzęsy, a tylko w wypadku układu KK ma krótkie rzęsy. Każdy człowiek przekazuje losowo swojemu dziecku tylko jeden z alleli.

16. Przeczytaj informacje w ramce powyżej. Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia długich rzęs u dziecka, którego rodzice mają geny postaci:

- | | |
|-------------|-------------|
| a) DD i KK, | d) DK i KK, |
| b) DD i DD, | e) DK i DD, |
| c) KK i KK, | f) DK i DK. |

17. W Polsce 12% ludności mieszka w województwie śląskim. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba z tego województwa mieszka w Katowicach, wynosi $\frac{17}{250}$. Oblicz, jaki procent mieszkańców Polski stanowią katowiczanie.

18. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany mieszkaniec Polski jest mężczyzną, jest równe $\frac{12}{25}$.

- a) Oblicz, jaki procent mieszkańców Polski stanowią kobiety.
- b) W miastach mieszka 62% mieszkańców Polski, przy czym odsetek kobiet i mężczyzn jest w miastach w przybliżeniu taki sam jak na wsi. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany mieszkaniec naszego kraju okaże się mężczyzną mieszkającym na wsi.

W grze w oczko gracz losuje kolejne karty z talii 52 kart i oblicza sumę uzyskanych punktów według następujących zasad:

- za dwójkę otrzymuje 2 punkty, za trójkę otrzymuje 3 punkty, ..., za dziesiątkę otrzymuje 10 punktów,
- za waleta, damę lub króla otrzymuje 10 punktów,
- za asa otrzymuje 1 punkt lub 11 punktów (gracz sam o tym decyduje).

Gracz może dobierać karty dowolnie długo. Im więcej punktów, tym lepiej, ale przekroczenie 21 punktów oznacza przegraną. Najlepszym wynikiem jest więc 21 punktów (tzw. oczko).

19. Przeczytaj informacje w ramce powyżej. Wyobraź sobie, że grasz w oczko i otrzymałeś już karty wymienione poniżej. Dobierasz jeszcze jedną z pozostałych kart. Oblicz prawdopodobieństwo, że uzyskasz oczko, oraz prawdopodobieństwo, że przekroczysz 21 punktów.

- a) $K♥, K♠,$ b) $2♥, D♣, 3♠,$ c) $2♥, 3♥, 3♠, 3♦.$

20. W równaniu $kx^2 + kx = 1$ z niewiadomą x w miejsce k wstawiono liczbę wylosowaną spośród liczb: $-8, -5, -4, -2, -1, 0, 1, 4, 8, 10$. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymane równanie:

- a) będzie miało dwa rozwiązania, b) nie będzie miało rozwiązania.

21. Pewna klasa maturalna liczy dwa razy więcej dziewczyn niż chłopców. Wiadomo, że połowa wszystkich dziewczyn oraz 75% chłopców zamierza zdawać maturę rozszerzoną z matematyki. Losujemy jednego ucznia. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowanym uczniem jest:

- a) chłopak, który nie będzie zdawał matury rozszerzonej z matematyki,
b) osoba, która nie zamierza zdawać matury rozszerzonej z matematyki.

22. W pierwszym piórniku znajdują się 3 długopisy czarne, 6 niebieskich i 1 czerwony. W drugim piórniku są 4 długopisy czarne, 2 czerwone i n niebieskich. Ile co najwyżej niebieskich długopisów znajduje się w drugim piórniku, jeżeli wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania niebieskiego długopisu z piórnika pierwszego jest większe niż wylosowanie takiego długopisu z piórnika drugiego?

23. Oszacuj, jakie jest prawdopodobieństwo, że meteoryt spadający na Ziemię wpadnie do oceanu.

24. Wybieramy losowo punkt koła o promieniu długości 6 cm. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowany punkt leży w odległości:

- a) większej niż 5 cm od środka koła, b) co najmniej 1 cm od środka koła.

- Я 25. Wybieramy losowo punkt kwadratu. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany punkt należy do koła wpisanego w ten kwadrat.
- Я 26. W okrąg wpisano n -kąt foremny. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo, że losowo wybrany punkt koła ograniczonego przez ten okrąg należy do danego n -kąta.
- Oblicz p_3 , p_4 i p_6 .
 - Wyznacz granicę ciągu $p_3, p_4, p_5, \dots$

OBLICZANIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA

27. Państwo Nowakowie mają pięcioro dzieci: Agatę, Bartka, Damiana, Ewę i Pawła. Z grupy tej losujemy dwie osoby, które pojedą z rodzicami na zakupy. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- wylosowano Agatę,
- wylosowano wyłącznie dziewczyny,
- wylosowano chłopaka i dziewczynę.

28. Losujemy jedną z figur przedstawionych na rysunku obok. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

- figury czarnej,
- czarnego kwadratu,
- kwadratu,
- figury, która nie jest kwadratem.



29. Rzucamy symetryczną dwunastościenną kostką do gry i symetryczną monetą. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że:

- na monecie wypadnie orzeł, a na kostce co najmniej liczba 2,
- na monecie wypadnie reszka, a na kostce liczba podzielna przez 3 lub 4.

30. Rzucamy dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

- A — Co najmniej raz wyrzucono 4 oczka.
- B — Za pierwszym razem wyrzucono mniej oczek niż za drugim razem.
- C — Suma wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą.
- D — Iloczyn wyrzuconych oczek jest większy od 8.
- E — Za drugim razem wyrzucono o 2 oczka więcej niż za pierwszym razem.

31. W urnie znajdują się 3 kule białe, 5 czerwonych i 2 niebieskie. Kule białe oznaczono numerami 1, 2, 3, kule czerwone — 4, 5, 6, 7, 8, a kule niebieskie — 9, 10. Losujemy z urny jedną kulę. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wylosowano kulę niebieską,
- b) wylosowano kulę czerwoną z numerem parzystym,
- c) wylosowano kulę z numerem podzielny przez 3,
- d) nie wylosowano kuli białej ani kuli z numerem podzielny przez 5.

32. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ losujemy kolejno 2 razy po jednej cyfrze ze zwracaniem. Pierwsza z wylosowanych liczb jest cyfrą dziesiątek, a druga — cyfrą jedności liczby dwucyfrowej. Oblicz prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

- a) A — Otrzymana liczba jest nieparzysta.
- b) B — Otrzymana liczba jest podzielna przez 11.
- c) C — Suma cyfr otrzymanej liczby jest mniejsza od 5.
- d) D — Otrzymano liczbę większą od 21.

33. Ze zbioru cyfr $\{1, 4, 5, 6, 8\}$ losujemy po kolei bez zwracania dwie cyfry. Pierwsza z nich jest cyfrą dziesiątek, a druga — cyfrą jedności liczby dwucyfrowej. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba ta jest:

- a) nieparzysta,
- b) podzielna przez 3,
- c) większa od 51,
- d) liczbą pierwszą.

34. Czwórka rodzeństwa: Ala, Michał, Stefan i Ula przez dwa kolejne dni losuje spośród siebie osobę, która przygotowuje wszystkim śniadanie (dopuszczamy sytuację, że dana osoba może być wylosowana dwukrotnie). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) Michał przygotowuje śniadanie pierwszego dnia, a w drugim dniu będzie wolny,
- b) pierwszego dnia wylosowano dziewczynę, a drugiego — chłopaka,
- c) do przygotowania śniadań wylosowano wyłącznie chłopców.

35. Ze zbioru liczb $\{-3, -2, 2, 3, 4\}$ losujemy po kolei bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wylosowano parę liczb przeciwnych,
- b) iloczyn wylosowanych liczb jest dodatni,
- c) pierwsza z wylosowanych liczb jest większa od drugiej.

36. W klasie IV a ośmiro uczniów uczy się języka hiszpańskiego. Obok przedstawiono oceny śródroczne tych uczniów. Nauczyciel losuje w tej grupie dwóch uczniów do odpow...

Ocena	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	3	2	1

owiedzi. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że obaj wylosowani uczniowie mają ocenę śródroczną wyższą niż średnia ocen wszystkich uczniów w tej grupie.

37. W układzie współrzędnych zaznaczamy punkty (x, y) takie, że: $x \in \{-3, -1, 1, 2\}$, $y \in \{2, -4\}$. Spośród tych punktów losujemy jeden punkt. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- wylosujemy punkt z pierwszej ćwiartki układu współrzędnych,
- wylosujemy punkt należący do prostej o równaniu $2x + y = 0$.

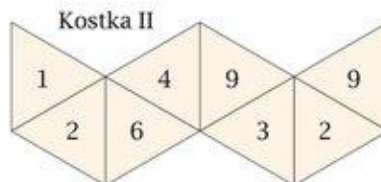
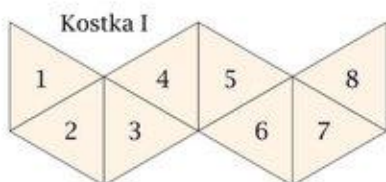
38. Gra polega na rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry oraz rzucie symetryczną monetą. Graczowi przyznawane są punkty według następujących zasad:

- Jeżeli gracz wyrzuci orła, to do wyrzuconej liczby oczek na kostce dodajemy 2 punkty;
- Jeżeli gracz wyrzuci reszkę, to od liczby wyrzuconych oczek na kostce odejmujemy 1 punkt.

Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że gracz zdobędzie:

- dokładnie 4 punkty,
- co najmniej 5 punktów.

39. Na poniższych rysunkach przedstawiono siatki dwóch kostek w kształcie ośmiościanów foremnych.



- Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej czwórki w rzucie kostką I.
- Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej czwórki w rzucie kostką II.
- Rzucamy obiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb na obu kostkach jest równy 8.
- Rzucamy obiema kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że na kostce II uzyskamy większą liczbę niż na kostce I.

40. W rzucie pewną nietypową symetryczną dwunastościenną kostką otrzymujemy jedynkę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, a dwójkę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$.

- Na ilu ścianach tej kostki znajduje się jedynka, a na ilu dwójka?
- Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania liczby większej niż 2.

41. Ile jest losów na loterii, jeśli wybierając jeden z nich, mamy 0,5% szansy na wygranie jednej z pięciu głównych nagród?

42. Wybieramy losowo jeden dzień roku. Czy prawdopodobieństwo, że trafimy na jeden z dni sierpnia, jest w roku przestępnym większe, mniejsze czy takie samo jak w roku, który nie jest przestępny?

43. W szafie znajdują się trzy swetry w kolorach: białym, czarnym i czerwonym oraz cztery pary spodni w kolorach: białym, niebieskim, czarnym i czerwonym. W sposób losowy wyciągamy jeden sweter i jedną parę spodni. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wybierzemy zestaw w różnych kolorach.

44. Agencja turystyczna ma w swojej promocyjnej ofercie wycieczki objazdowe do Włoch, Grecji, Egiptu, Chin i Meksyku. Państwo Kowalscy nie potrafili się zdecydować, jakie dwie wycieczki zakupić, więc postanowili dokonać wyboru drogą losową. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) nie wylosują wycieczki do państwa europejskiego,
- b) wybiorą co najmniej jedno państwo europejskie.

45. W torebce z landrynkami znajdują się 3 landrynki o smaku malinowym, 2 landrynki o smaku pomarańczy oraz 1 landrynka o smaku poziomkowym. Kinga wybiera z torebki losowo dwa cukierki. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

- a) landrynek o tym samym smaku,
- b) co najmniej jednej landrynki o smaku pomarańczy.

46. W torebce z landrynkami znajdują się 4 landrynki malinowe, 2 landrynki o smaku jabłkowym i 1 landrynka o smaku poziomkowym. Paweł wybiera z torebki losowo 3 cukierki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Paweł wylosował:

- a) cukierki w trzech różnych smakach,
- b) co najwyżej dwie landrynki o smaku malinowym.

47. Na półce sklepowej wyłożone są cukierki w ośmiu torebkach: dwie torebki po 50 g, trzy torebki po 100 g, dwie torebki po 150 g i jedna torebka zawierająca 200 g cukierków. Wybieramy losowo trzy torebki. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybraliśmy łącznie co najmniej 350 g cukierków.

DRZEWKA

48. Rzucamy symetryczną monetą, a następnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia:

- a) orła na monecie i szóstki na kostce,
- b) reszki na monecie i parzystej liczby oczek na kostce,
- c) orła na monecie i liczby oczek podzielnej przez 3 na kostce.

49. Rzucamy dwa razy symetryczną monetą i jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) wyrzucimy jednego orła i 5 oczek na kostce,
- b) wyrzucimy co najmniej raz orła i co najmniej 5 oczek.

50. Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) wypadł co najmniej jeden orzeł,
- b) za trzecim razem wypadło to samo co za drugim razem.

51. Rzucamy czterokrotnie symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wyrzucono dokładnie 2 orły,
- b) wyrzucono co najmniej 2 orły,
- c) wyrzucono co najwyżej 3 reszki.

52. Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Czy bardziej prawdopodobne jest, że wylosujemy trzy razy szóstkę, czy że po kolei wypadnie jedynka, dwójka i trójka?

53. W pudełku jest 5 kul niebieskich i 2 zielone. Losujemy 2 kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy:

- a) 2 kule niebieskie,
- b) kule różnych kolorów,
- c) co najmniej 1 kulę niebieską,
- d) co najwyżej 1 kulę niebieską.

54. Rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł, losujemy kartę z talii 52 kart, jeśli wypadnie reszka, losujemy jedną kartę spośród kierów. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaną kartą jest:

- a) król kier,
- b) król pik,
- c) as,
- d) dama lub walet.

55. Z talii 52 kart do gry losujemy 1 kartę. Jeżeli wylosujemy figurę, to rzucamy symetryczną dwunastościenną kostką. W przeciwnym wypadku rzucamy symetryczną sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że na kostce wypadnie:

- a) liczba podzielna przez 3,
- b) liczba nie większa niż 5.

56. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry, a następnie losujemy 1 kartę z talii 36 kart do gry (od dwójek do dziesiątek). Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba na karcie będzie równa liczbie wyrzuconych oczek.

57. W sklepie Bubel & Co sprzedawane są żarówki wyprodukowane w dwóch fabrykach. Z pierwszej fabryki pochodzi 35% żarówek, a z drugiej pozostałe 65%. Wśród żarówek z pierwszej fabryki jest 10% wadliwych, a wśród żarówek z drugiej fabryki żarówki wadliwe stanowią 5%. Oblicz prawdopodobieństwo, że kupiona w tym sklepie żarówka nie ma wady.

58. Rzucamy dwa razy symetryczną dwunastościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że za drugim razem wyrzucimy liczbę nie większą niż za pierwszym razem.

59. Spośród zestawu kart: walet, dama i król losujemy kolejno 2 karty. Przyjmując, że król jest kartą starszą od damy i waleta, a dama — od waleta, oblicz prawdopodobieństwo, że druga wylosowana karta jest starsza od pierwszej w wypadku, gdy po wylosowaniu karty:

- a) wraca do zestawu, b) nie wraca do zestawu.

60. W pudełku jest 20 długopisów niebieskich i 5 zielonych. Losujemy 3 długopisy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszystkie będą tego samego koloru. Czy prawdopodobieństwo zmieniłoby się, gdybyśmy losowali 3 razy po 1 długopisie i wkładali wylosowany długopis do pudełka przed ponownym losowaniem?

61. W pudełku jest 100 losów na loterię, w tym 5 wygrywających. Kupujemy kolejne losy tak długo, aż trafimy na los wygrywający. Oblicz prawdopodobieństwo, że kupimy dokładnie 3 losy.

62. W szufladzie jest 6 kul białych, 10 czarnych i 8 zielonych. Losujemy 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) wszystkie wylosowane kule są tego samego koloru,
b) każda z wylosowanych kul ma inny kolor.

63. W klasie IVa jest 16 chłopców i 16 dziewcząt, w klasie IVb jest 10 chłopców i 20 dziewcząt. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką: jeśli wypadnie więcej niż 4 oczka, to losujemy jedną osobę z klasy IVa, w przeciwnym razie losujemy jedną osobę z klasy IVb. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaną osobą będzie dziewczyna.

64. W obozie uczestniczą uczniowie z Polski, Czech i Słowacji (liczbę uczestników z podziałem na płeć przedstawiono w poniższej tabeli). Na kapitana obozu wybiera się drogą losową jedną osobę w następujący sposób: rzucamy 2 razy monetą i jeśli wypadną dwa orły — losujemy przedstawiciela Czech, jeśli wypadną dwie reszki — losujemy ucznia ze Słowacji, w pozostałych wypadkach losujemy ucznia z Polski.

Państwo	Polska	Czechy	Słowacja
Liczba chłopców	25	40	25
Liczba dziewczyn	35	20	25

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana osoba będzie:

- a) dziewczyną, b) chłopcem niebędącym Polakiem.

65. Właściciel sklepu spożywczego sprowadza jabłka od trzech producentów: Kowalskiego, Nowaka i Iksińskiego w stosunku odpowiednio 5 : 3 : 2. Wiadomo, że 90% wszystkich wyhodowanych przez Kowalskiego jabłek to jabłka pierwszego gatunku. U Nowaka ten odsetek wynosi 85%, u Iksińskiego zaś — 70%. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo zakupione jabłko będzie pierwszego gatunku.

66. W organizowanej w ramach wymiany międzynarodowej wycieczce bierze udział 60 uczniów: 30% jej uczestników stanowią Polacy, 45% — Niemcy, a pozostali są Japończykami. Lokalna telewizja postanowiła przeprowadzić wywiad z dwoma losowo wybranymi uczestnikami wycieczki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

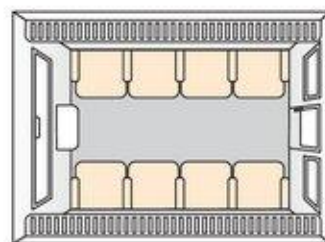
- obie wylosowane osoby są Europejczykami,
- co najmniej jedna z wylosowanych osób jest Japończykiem,
- wylosowano osoby różnej narodowości.

67. Do klasy IVb uczęszcza 15 chłopców i 13 dziewczyn. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych 3 osób znajduje się 1 dziewczyna i 2 chłopcy.

68. Z pojemnika, w którym są trzy losy wygrywające i osiem losów pustych, losujemy trzy razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający.

69. Dwie osoby wybierają po kolei losowo miejsca w pustym przedziale kolejowym (zob. rysunek). Oblicz prawdopodobieństwo, że:

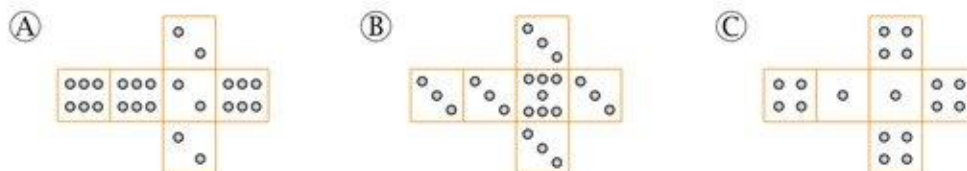
- obie usiądą przy oknie,
- usiadą obok siebie,
- jedna osoba usiadzie przy oknie, a druga przy drzwiach.



70. Pewien uczeń dowiedział się, że w języku polskim głoska „u” w około $\frac{5}{6}$ wypadków zapisywana jest literą „u”, a w pozostałych wypadkach — „ó”. Od tej pory postanowił rzucać symetryczną sześcienną kostką i pisać „ó”, gdy wypadnie sześć oczek, a w pozostałych wypadkach pisać „u”. Pewnego dnia miał napisać wyraz „Rumunów”. Oblicz prawdopodobieństwo, że spośród liter oznaczających głoskę „u”:

- tylko jedną napisał poprawnie,
- tylko dwie napisał poprawnie,
- wszystkie napisał poprawnie,
- żadnej nie napisał poprawnie.

71. Na rysunkach przedstawiono siatki trzech nietypowych symetrycznych sześciennych kostek do gry.



- Jeden z graczy rzuca kostką ①, drugi — kostką ②. Wygrywa ten, kto wyrzuci większą liczbę oczek. Który z graczy ma większe szanse na zwycięstwo?
- Jeden z graczy rzuca kostką ②, drugi — kostką ③. Wygrywa ten, kto wyrzuci większą liczbę oczek. Który z graczy ma większe szanse na zwycięstwo?
- Czy można ustalić bez wykonywania dalszych rachunków, kto ma większe szanse w grze ① przeciwko ③?

72. W pudełku znajduje się 8 losów wygrywających i 12 losów pustych. Z pudełka należy wylosować 2 losy. Ile losów wygrywających należy dołożyć do pudełka, aby:

- a) prawdopodobieństwo wylosowania 2 losów pustych wynosiło $\frac{33}{248}$,
- b) prawdopodobieństwo wylosowania 2 losów wygrywających wynosiło 0,28,
- c) prawdopodobieństwo wylosowania d 1 losu wygrywającego wynosiło $\frac{72}{145}$?

73. W pudełku znajduje się 17 kul białych i 3 kule czarne. Do pudełka należy dołożyć pewną liczbę kul białych i taką samą liczbę kul czarnych. Ile kul należy dołożyć do pudełka, aby przy losowaniu 2 kul:

- a) prawdopodobieństwo wylosowania 2 kul białych wynosiło $\frac{77}{145}$?
- b) prawdopodobieństwo wylosowania kul w tym samym kolorze wynosiło $\frac{11}{18}$?

74. W skrzyni znajduje się 12 jabłek i 16 gruszek. Wybieramy losowo ze skrzyni 2 owoce.

- a) Ile gruszek należy dołożyć do skrzyni, by prawdopodobieństwo wylosowania 2 gruszek było większe od $\frac{2}{5}$?
- b) Ile jabłek należy usunąć ze skrzyni, aby prawdopodobieństwo wylosowania jabłka i gruszki było mniejsze od $\frac{12}{25}$?

75. W pewnej grze komputerowej rycerz, aby uwolnić księżniczkę, musi pokonać smoka (prawdopodobieństwo, że się to uda, wynosi $\frac{1}{4}$), przepłynąć zdradliwą rzekę (prawdopodobieństwo powodzenia wynosi $\frac{1}{3}$), wdrapać się na stromą górę (prawdopodobieństwo powodzenia wynosi $\frac{1}{7}$) i rozbić mieczem drzwi (prawdopodobieństwo powodzenia wynosi $\frac{2}{3}$). Pewien gracz podjął 40 prób, ale nie udało mu się uwolnić księżniczki. Czy księżniczka w tej grze ma wyjątkowego pecha? Oblicz prawdopodobieństwo, że w żadnej z tych 40 prób nie uda się uwolnić księżniczki.

76. W pudełku jest 10 kul zielonych i pewna liczba czerwonych. Gdy losujemy dwie kule, prawdopodobieństwo, że przynajmniej 1 z nich jest zielona, wynosi $\frac{13}{20}$. Ile jest czerwonych kul w pudełku?

77. W pudełku jest 20 kul niebieskich i pewna liczba czarnych. Gdy wylosujemy jedną kulę, wrzucimy ją z powrotem do pudełka i znowu wylosujemy 1 kulę, to z prawdopodobieństwem $\frac{13}{25}$ obie wylosowane kule będą tego samego koloru. Ile jest czarnych kul w pudełku?

78. Na każdej ścianie pewnej nietypowej symetrycznej sześcienniej kostki do gry są 1, 2 lub 3 oczka. Gdy rzucimy kostką raz, to z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$ wyrzucimy 3 oczka. Gdy rzucimy trzy razy, mamy $\frac{19}{27}$ szans na wyrzucenie 2 oczek przynajmniej raz. Na ilu ściankach kostki jest 1 oczko, na ilu — 2 oczka, a na ilu — 3 oczka?

79. Przeczytaj informacje z ramki zamieszczonej przed zadaniem 16. Oblicz prawdopodobieństwo wystąpienia krótkich rzes u dziecka, którego jedna para dziadków ma geny postaci DD i DK, a druga para dziadków — postaci KK i DK.

80. Dwóch graczy wyciąga losowo z talii 24 kart do gry (od dziewiątek do asów) po 3 karty. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że:

- a) pierwszy z nich ma co najmniej jednego asa,
- b) drugi z graczy ma co najmniej jednego asa, jeśli wiadomo, że pierwszy nie ma asów,
- c) drugi z graczy ma co najmniej jednego asa, jeśli wiadomo, że pierwszy ma dwa asy.

WARTOŚĆ OCZEKIWANA

81. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Gdy wypadną mniej niż 3 oczka, to zdobywamy 3 punkty. W przypadku wyrzucenia 3 oczek zdobywamy 2 punkty. W każdym innym wypadku tracimy 2 punkty. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku tej gry.

82. Gra polega na trzykrotnym rzucie symetryczną monetą. Zdobywamy tyle punktów, ile orłów wyrzucimy w rozpatrywanej serii rzutów. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku tej gry.

83. W urnie znajdują się 2 kule białe, 3 kule czerwone i 5 kul niebieskich. Losujemy z urny 1 kulę. Za wylosowanie kuli białej zdobywamy 5 punktów, za wylosowanie kuli czerwonej zdobywamy 1 punkt, a za wylosowanie kuli niebieskiej tracimy 2 punkty. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku tej gry.

84. Losujemy jedną kartę z talii 52 kart do gry. Jeżeli wyciągniemy figurę, to zdobywamy 4 punkty. W przypadku wylosowania blotki z numerem parzystym zdobywamy 2 punkty, a w przypadku wylosowania blotki z numerem nieparzystym tracimy 3 punkty. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku tej gry.

85. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku poniższych gier.

- a) Rzucamy symetryczną dwunastościenną kostką do gry i symetryczną monetą. Jeżeli wypadnie reszka i liczba nieparzysta, wygrywamy 50 zł. Jeżeli wypadnie orzeł i liczba parzysta, wygrywamy 70 zł. W pozostałych wypadkach tracimy 40 zł.
- b) Ze zbioru liczb $\{11, 12, 13, \dots, 20\}$ losujemy jedną liczbę. Jeżeli wylosowana liczba jest parzysta, to zdobywamy tyle punktów, ile wynosi suma cyfr tej liczby. Jeżeli wylosowana liczba jest nieparzysta, to tracimy tyle punktów, ile wynosi suma cyfr tej liczby.

86. Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami do gry: białą i czarną. Jeżeli na białej kostce wyrzucimy mniej oczek niż na kostce czarnej, to przegrywamy 5 zł. Jeżeli liczba oczek jest jednakowa na obu kostkach, to wygrywamy 50 zł. W każdym innym przypadku tracimy 20 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wyniku tej gry, jeżeli wiadomo, że:

- a) obie kostki są sześciennie,
- b) obie kostki są ośmiościenne,
- c) biała kostka jest sześcienna, a czarna jest ośmiościenna,
- d) biała kostka jest ośmiościenna, a czarna jest sześcienna.

87. Sprawdź, czy poniższe gry są sprawiedliwe.

- a) Po dwukrotnym rzucie symetryczną monetą gracz otrzymuje 2 zł za wyrzucenie dwóch orłów i 1 zł za wyrzucenie dwóch reszek. Za wyrzucenie orła i reszki gracz traci 1,50 zł.
- b) Po trzykrotnym rzucie symetryczną monetą za wyrzucenie 3 reszek gracz traci 12 zł, w przeciwnym wypadku otrzymuje tyle złotych, ile wyrzucono orłów.

88. Z urny zawierającej 8 kul białych i 2 kule czarne wyciągamy losowo 1 kulę. Jeżeli będzie to kula biała, to tracimy 5 zł. Jeżeli kula będzie czarna — zyskujemy 15 zł. Ile kul białych należy usunąć z tej urny, aby gra była sprawiedliwa?

89. W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 kule czerwone. Losujemy z urny 2 kule. Jeżeli obie mają ten sam kolor, to tracimy 4 punkty, w przeciwnym wypadku wygrywamy 4 punkty.

- a) Oblicz wartość oczekiwaną wyniku tej gry.
- b) Ile punktów należałoby przyznać za wylosowanie kul w różnych kolorach, aby gra była sprawiedliwa (za wylosowanie kul tego samego koloru nadal tracimy 4 punkty).

90. W klasie liczącej 16 dziewczyn i 14 chłopców wychowawca wylosuje 2 osoby, które będą witać gości balu studniówkowego. Michał i Karol postanowili przy okazji zagrać ze sobą w następującą grę. Jeżeli wylosowane zostaną 2 dziewczyny — Michał płaci Karolowi 20 zł. Jeżeli zostanie wylosowana dziewczyna i chłopak — Karol płaci Michałowi 30 zł. W przypadku wylosowania dwóch chłopców gra pozostaje nierozstrzygnięta.

- a) Ile wynosi wartość oczekiwana gry z punktu widzenia Michała?
- b) Jaką kwotę w przypadku wylosowania 2 dziewczyn powinien zapłacić Michał Karolowi, aby gra była sprawiedliwa?

91. Gracz rzuca symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeżeli wyrzuci mniej niż 3 oczka, wygrywa pewną kwotę. Gdy wyrzuci 6 oczek, to wygrywa kwotę 3 razy większą. We wszystkich pozostałych przypadkach gracz przegrywa 10 zł. Jaka powinna być stawka za wyrzucenie szóstki, by gra była sprawiedliwa?

92. W pudełku nr 1 znajduje się 9 kul białych i 1 czerwona, a w pudełku nr 2 — 10 kul białych i 2 czerwone. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadnie parzysta liczba oczek, to losujemy kulę z pudełka nr 1, w przeciwnym wypadku — losujemy kulę z pudełka nr 2. Za wylosowanie kuli czerwonej gracz wygrywa 130 zł, a za wylosowanie kuli białej gracz przegrywa pewną kwotę. Ustal, jaka to powinna być kwota, aby gra była sprawiedliwa.

93. W czterech kolorowych pudełkach znajdują się losy wygrywające i puste. W tabeli podano, ile losów znajduje się w poszczególnych pudełkach.

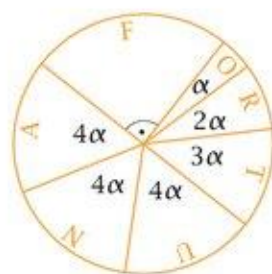
	pudełko białe	pudełko czerwone	pudełko zielone	pudełko niebieskie
Liczba losów pustych	5	6	7	8
Liczba losów wygrywających	5	4	3	2

Rzucamy symetryczną dwunastościenną kostką do gry. Jeżeli wypadnie liczba 12, to losujemy los z pudełka białego. Jeżeli wypadnie liczba 10 lub 11 — wyciągamy los z pudełka czerwonego. Jeżeli wypadnie 9, 8 lub 7 — bierzemy los z pudełka zielonego. W pozostałych wypadkach — losujemy los z pudełka niebieskiego. Za los wygrywający gracz otrzymuje 43 zł, a za pusty — przegrywa pewną kwotę. Jaka powinna to być kwota, jeżeli gra ma być sprawiedliwa?

94. W urnie znajduje się 5 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 5. Losujemy jedną kulę. W przypadku wylosowania kuli z numerem parzystym przegrywamy 4,50 zł. Jeżeli wylosujemy kulę z numerem nieparzystym, to wrzucamy ją z powrotem do urny i losujemy ponownie jedną kulę. Jeśli tym razem wylosujemy kulę z numerem parzystym, to przegrywamy 9 zł, a jeśli nie — wygrywamy pewną kwotę. Jaka to powinna być kwota, jeżeli chcemy, by gra była sprawiedliwa?

95. Rzucamy symetryczną ośmiościenną kostką do gry. Jeśli wyrzucimy liczbę 1, to wygrywamy pewną kwotę. W przeciwnym wypadku rzucamy ponownie kostką i przegrywamy tyle złotych, ile wyrzuciliśmy w drugim rzucie. Jaka powinna być kwota wygranej (za wyrzucenie jedynki w pierwszym rzucie), żeby gra była sprawiedliwa?

96. Gra „Fortuna” polega na wykręceniu na kole szczęścia pola z odpowiednią literką. Plansza przedstawiająca koło znajduje się na rysunku obok. Za wykręcenie pól z literami F, R, T, N zdobywamy odpowiednio 20 zł, 100 zł, 30 zł i 50 zł. Za wykręcenie pól z samogłoskami tracimy 80 zł.



a) Oblicz wartość oczekiwaną wyniku tej gry.

b) Ile powinna wynieść wartość przegranej za wykręcenie pola z samogłoską, aby gra była sprawiedliwa (zakładamy, że nie zmieniamy stawek wygranej za wykręcenie pola ze spółgłoską)?

97. Z urny zawierającej 8 kul białych i 2 kule czarne wyciągamy losowo 2 kule. Jeżeli obie kule są białe, to tracimy 9 zł, a jeżeli obie są czarne, to wygrywamy 5 zł. Jeżeli wylosowane kule są różnych kolorów, to wygrywamy 1 zł. Ile kul czarnych należy dołożyć do urny, aby gra była sprawiedliwa?

98. Na sześciokącie foremnym opisano koło. Losowo wybieramy jeden punkt tego koła. Jeżeli punkt ten należy do sześciokąta, to wygrywamy 10 zł. Jeżeli punkt ten nie należy do sześciokąta, to tracimy 10 zł. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry, wynik zaokrąglaj do pełnych groszy.

ZASADA MNOŻENIA I ZASADA DODAWANIA

99. Oblicz, na ile sposobów możemy wybrać obiad, mając do wyboru:

- a) 5 zup i 6 drugich dań,
- b) 4 zupy, 5 drugich dań i 2 desery,
- c) 3 zupy, 5 drugich dań, 2 desery i 3 kompoty.

100. W pewnej pizzerii jest 10 rodzajów pizzy, a każdy z nich można zamówić na cieście cieniutkim, średnim lub grubym, z sosem ostrym, łagodnym lub bez sosu. Jak długo można stołować się w tej pizzerii, jedząc codziennie inną pizzę?

101. a) Na ile sposobów można ustawić w szeregu 7 osób?

b) W wypożyczalni jest 18 par nart, które pasują każdemu z trzech narciarzy. Na ile sposobów ci narciarze mogą wybrać narty z tej wypożyczalni?

102. Tomek codziennie wybiera jeden z pięciu zestawów obiadowych w stołówce. Na ile sposobów może sobie zaplanować menu na trzy dni, jeśli:

- a) każdego dnia wybiera inny zestaw,
- b) zestawy mogą się powtarzać?

103. Określ, na ile sposobów czterej goście mogą wybrać po jednym z sześciu pokoiów hotelowych:

- a) w różnych terminach,
- b) w tym samym terminie.

104. W stołówce można ułożyć zestaw obiadowy, mając do wyboru 4 rodzaje zup oraz drugie danie składające się z 5 rodzajów mięs i 6 rodzajów sałatek. Ile zestawów obiadowych składających się z zupy i pełnego drugiego dania można skonfigurować w tej stołówce?

105. Wychowawca klasy przygotował uczniom ankietę dotyczącą miejsca wycieczki, czasu jej trwania i środka transportu (zobacz tabela poniżej). Każdy uczeń ma w ankiecie podkreślić jedną opcję w każdej z trzech kategorii. Na ile sposobów można wypełnić tę ankietę?

I. Miejsce wycieczki	II. Czas trwania	III. Środek transportu
Trójmiasto	3 dni	autokar
Warszawa	4 dni	pociąg
Kraków i okolice	5 dni	
Bieszczady		
Tatry		
Beskidy		

106. W turnieju tenisowym bierze udział 6 zawodników. Każdy z nich rozgrywa 2 mecze z każdym z pozostałych 5 zawodników. Ile meczów zostanie łącznie rozegranych w tym turnieju?

107. a) W pewnym hotelu dostępnych jest 16 pojedynczych pokoi. Recepcjonista ma za zadanie ulokować w nich 5 osób. Na ile sposobów może to zrobić ?

b) W pewnym hotelu jest 20 wolnych pokoi: 3 na parterze, 8 na pierwszym piętrze, 4 na drugim i 5 na trzecim. Recepcjonista ma za zadanie ulokować w tych pokojach 3 koleżanki. Panie zażyczyły sobie dostać osobne pokoje, lecz na tej samej kondygnacji. Na ile sposobów można to zrobić?

108. Na międzynarodowy obóz harcerski przyjechało 21 Polaków, 17 Czechów, 22 Słowaków oraz 16 Węgrów. Spośród uczestników należy wylosować grupę osób, które otrzymają różne dodatkowe funkcje. Na ile sposobów można to zrobić, jeśli w jej skład mają wejść:

- cztery osoby,
- cztery osoby, każda z innego państwa,
- trzy osoby, każda z innego państwa,
- trzy osoby, wszystkie z tego samego państwa.

109. Spośród liczb dwucyfrowych mniejszych od 31 wybieramy kolejno dwie różne liczby. Na ile sposobów można je wybrać, aby:

- suma tych liczb była liczbą parzystą,
- suma tych liczb była liczbą nieparzystą,
- iloczyn tych liczb był liczbą parzystą,
- suma tych liczb była podzielna przez 3,
- pierwiastek kwadratowy sumy tych liczb był liczbą naturalną?

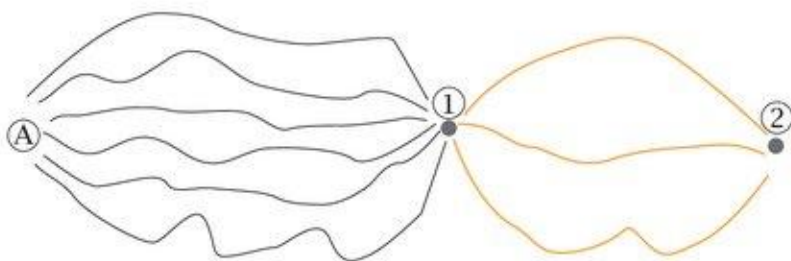
110. Grupa znajomych — 7 kobiet i 5 mężczyzn — wybiera się na wycieczkę w góry. Spośród tych osób należy wylosować 2 uczestników. Pierwszy z nich będzie miał za zadanie opracowanie programu wycieczki, a drugi — oszacowanie kosztów. Na ile sposobów można wylosować te osoby, jeżeli założymy, że:

- a) wybrane osoby mają być różnej płci,
- b) wybrane mają być tylko kobiety,
- c) płeć wybranych osób nie ma znaczenia?

111. Numery rejestracyjne samochodów w pewnym państwie składają się z dwóch dużych liter, za którymi mieści się pięć cyfr. Zakładamy, że mamy 23 litery w alfabecie oraz że litery i cyfry mogą się powtarzać. Ile różnych numerów rejestracyjnych można utworzyć w ten sposób?

112. Szyfr do sejfów w banku składa się z trzech liter i dwóch cyfr. Ile jest możliwych ustawień tego szyfru, jeżeli zakładamy, że mamy do dyspozycji 26 liter, wszystkie litery mają być ustawione na początku szyfru, a żadna cyfra i żadna litera nie może się powtórzyć?

113. Grupa turystów wybiera się w góry. Zaplanowali, że z przystanku autobusowego ① udadzą się szlakiem na szczyt oznaczony ①, następnie z tego szczytu udadzą się na szczyt oznaczony ② (patrz schemat poniżej).



W drodze powrotnej wybierają się na przystanek, wracając przez szczyt ①. Na ile sposobów można zaplanować tę wędrowkę, jeśli wiadomo, że w drodze powrotnej turyści:

- a) będą mogli wracać tym samym szlakiem, którym szli na szczyt ① i ②,
- b) nie będą mogli wracać żadnym ze szlaków, którym szli wcześniej?

114. Ile różnych liczb czterocyfrowych można utworzyć za pomocą cyfr:

- a) 1, 2, 3, 4, jeżeli żadna z cyfr nie może się powtórzyć,
- b) 1, 2, 3, 4, jeżeli cyfry mogą się powtórzyć,
- c) 3, 5, 7,
- d) 0, 4, 7, 9, jeżeli cyfry mogą się powtórzyć,
- e) 0, 4, 7, 9, jeżeli cyfry nie mogą się powtórzyć,
- f) 1 i 9,
- g) 1 i 0?

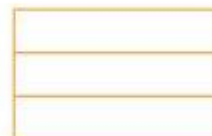
115. Za pomocą cyfr: 0, 2, 4, 5, 8 i 9 tworzymy liczby. Ile można utworzyć liczb:

- a) pięciocyfrowych o różnych cyfrach,
- b) pięciocyfrowych, w których cyfry mogą się powtarzać,
- c) pięciocyfrowych parzystych,
- d) ośmiocyfrowych,
- e) czterocyfrowych podzielnych przez 5, w których cyfry mogą się powtarzać?

116. W pudełku znajduje się 8 kartek z numerami od 2 do 9. Przeprowadzamy losowanie, którego wynikiem jest liczba utworzona z kolejno wyciągniętych cyfr. Ile różnych liczb można otrzymać, jeżeli losujemy:

- a) kolejno 3 kartki i za każdym razem wrzucamy je z powrotem do pudełka,
- b) kolejno 4 kartki i żadnej nie wrzucamy z powrotem do pudełka,
- c) kolejno 5 kartek i tylko po pierwszym i drugim losowaniu wrzucamy karteczkę z powrotem do pudełka?

117. Mając do dyspozycji papierowe paski w 12 różnych kolorach, należy utworzyć flagę jak na rysunku obok. Ile flag można utworzyć z tych pasków, jeżeli:



- a) wszystkie paski we fladze mają być różnych kolorów,
- b) górny i dolny pasek mają być w tym samym kolorze, a środkowy pasek ma być inny?

118. W pewnej krakowskiej kwiaciarni jest na sprzedaż 12 róż, 15 tulipanów, 10 narcyzów i 8 goździków. Na ile sposobów kwiaciarka może wybrać kwiaty dla klienta, który zażyczył sobie:

- a) czterech kwiatów, każdy innego rodzaju,
- b) trzech kwiatów, każdy innego rodzaju,
- c) dwóch kwiatów, każdy innego rodzaju?

119. W pewnym liceum są dwie klasy czwarte, których skład osobowy przedstawiono w tabeli:

Klasa	Liczba wszystkich uczniów	Liczba dziewcząt
IVa	30	19
IVb	28	16

Z każdej klasy losujemy jednego ucznia. Na ile sposobów możemy wybrać parę uczniów, jeżeli:

- a) uczniowie mają być różnej płci,
- b) uczniowie mają być tej samej płci,
- c) płeć uczniów nie ma znaczenia?

120. a) Na ile sposobów można przydzielić dziesięć torów na pływalni dziewięciu pływakom?

b) W skokach narciarskich bierze udział 8 zawodników. Na ile sposobów można obstawić pierwszą trójkę najlepszych skoczków tych zawodów przy założeniu, że nie będzie miejsc *ex aequo*?

c) Każde z dzieci uczestniczących w akademii z okazji Dnia Patrona Szkoły otrzymuje 1 balonik w kolorze białym lub czerwonym. Na ile sposobów można rozdzielić baloniki w 10-osobowej grupie uczniów?

d) Pięć dziewczyn i pięciu chłopaków ma ustawić się w rzędzie. Ile jest wszystkich możliwych sposobów ustawienia się tych uczniów, jeżeli wiadomo, że mają ustawić się tak, aby osoby tej samej płci nie stały obok siebie?

121. Szkolną szafkę z podręcznikami można zamknąć za pomocą szyfrowego zamka elektronicznego. W tym celu należy wprowadzić 3-cyfrowy PIN. Pewnego dnia Julia zapomniała swojego kodu. Ile co najwyżej prób otwarcia zamka będzie musiała przeprowadzić, jeżeli pamięta, że:

a) kod składa się z różnych cyfr parzystych,

b) w kodzie dokładnie dwa razy pojawia się cyfra 7,

c) na pierwszej i ostatniej pozycji kodu znajduje się cyfra 3 lub 6 i żadna z cyfr się nie powtarza?

122. Podczas obozu harcerskiego rozbito dwa obozowiska odległe od siebie o kilkaset metrów. Harcerze ustalili specjalny sposób komunikowania się między sobą. Wymyślili, że ciąg pięciu sygnałów świetlnych będzie oznaczał jedno słowo. Dostępne przez nich latarki rzucają światło w kolorach białym, czerwonym i zielonym. Ile różnych słów można w ten sposób zakodować?

123. Kierowca miejskich linii autobusowych w pewnym mieście obsługuje wyłącznie linie nr: 10, 11, 15, 21, 22, 30, 32 i 40. W bieżącym tygodniu pracuje on przez 5 dni, od wtorku do soboty, i każdego dnia obsługuje tylko jedną linię. Oblicz, na ile sposobów dyspozytor może przydzielić mu linie autobusowe tak, aby:

a) w sobotę jechał linią nr 32,

b) we wtorek i środę nie jechał linią nr 15 ani 22,

c) każdego dnia obsługiwał inną linię,

d) przez cały tydzień roboczy jeździł wyłącznie linią 10 lub 40.

124. Ala ma dwie torebki. W pierwszej z nich znajdują się 4 przegródki, a w drugiej jest 5 przegródek. Do wybranej torebki Ala ma zapakować 3 zeszyty tak, aby każdy zeszyt znajdował się w innej przegródce. Na ile sposobów może to zrobić?

125. Czterech przyjaciół postanowiło wybrać się do jednej z trzech kawiarni. Pierwsza kawiarnia oferuje 3 rodzaje kawy, druga — 6 rodzajów, a trzecia — 4 rodzaje. Na ile sposobów mogą oni wybrać kawiarnię, a w niej po jednej kawie?

126. Każdy gracz pierwszy swój ruch w partii szachów może wykonać jednym z ośmiu pionków, przesuwając go o 1 lub 2 pola, lub jednym z dwóch skoczków, przesuwając go o dwa pola do przodu, a następnie jedno w lewo lub w prawo. Dwaj gracze rozpoczęli partię szachów — każdy z nich wykonał po jednym ruchu. Na ile sposobów mogli to zrobić?

127. Liczba palindromiczna to taka, która czytana od końca i od początku jest tą samą liczbą, np. 31913 albo 312213. Ile jest liczb palindromicznych:

- a) pięciocyfrowych, b) pięciocyfrowych, w których pierwsze trzy cyfry są różne,
- c) czterocyfrowych, d) pięciocyfrowych zaczynających się cyfrą 1?

128. W języku polskim istnieje około 14 500 słów pięcioliterowych (łącznie z nazwami własnymi i różnymi formami tego samego wyrazu). Oblicz, jaki to procent wszystkich pięcioliterowych słów, mających sens lub nie, które można ułożyć z liter polskiego alfabetu (tzn. z 35 liter).

129. a) Na spotkaniu biznesowym każdy z uczestników wymienił się wizytówką z każdą z pozostałych osób. Ile osób wzięło udział w spotkaniu, jeżeli wiadomo, że łącznie wymieniono 702 wizytówki?

b) Podczas spotkania towarzyskiego każdy z gości wymienił się uściskiem dłoni z każdym z pozostałych uczestników spotkania. Ile osób wzięło udział w spotkaniu, jeżeli wiadomo, że łącznie wykonano 120 uścisków dłoni?

130. W turnieju tenisowym biorą udział 3 tenisistki i 3 tenisistów. Ustalono, że zawodnicy zagrają w turnieju miksta (para zawodników różnej płci rozgrywa mecz z inną taką parą). Na ile sposobów można wylosować dwie pary zawodników do pierwszego meczu w tym turnieju?

131. Ze zbioru liczb $A = \{37, 38, 39, \dots, n\}$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, wybieramy równocześnie dwie liczby i dodajemy je do siebie. Wiadomo, że istnieje 121 par, których suma daje liczbę parzystą. Wyznacz największą liczbę w zbiorze A .

132. Ile przekątnych mają bryły foremne przedstawione na poniższym rysunku?

- a) Policz wszystkie przekątne, także przekątne ścian.
- b) Policz tylko przekątne łączące wierzchołki nieleżące na jednej ścianie.



czworościan
foremny



sześcian



ośmiościan
foremny



dwunastościan
foremny



dwudziestościan
foremny

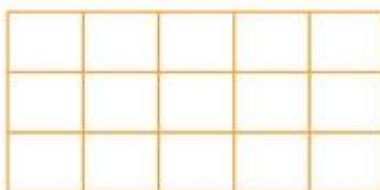
OBLICZANIE PRAWDOPODOBIENSTWA (CD.)

Ten temat przeznaczony jest jedynie dla uczniów realizujących program nauczania dla zakresu podstawowego. Znajdują się tu zadania wybrane z tematu *Kombinatoryka i prawdopodobieństwo* (dla zakresu rozszerzonego), które uczeń może rozwiązać, posługując się jedynie zasadą dodawania i mnożenia.

- ✎ **133.** Czworo rodzeństwa w różnym wieku — Tomek, Ania, Magda i Jaś — ustawia się w rzędzie w losowej kolejności. Oblicz prawdopodobieństwo, że dzieci ustawia się od najstarszego do najmłodszego, zaczynając od lewej strony.
- ✎ **134.** Aby otworzyć zamek szyfrowy, należy ustawić każde z trzech pokręteł w odpowiedniej pozycji, jednej z sześciu możliwych. Oblicz prawdopodobieństwo, że uda się go otworzyć za pierwszym razem po losowym ustawieniu pokręteł.
- ✎ **135.** Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wybierając losowo 9-cyfrowy numer telefoniczny, przypadkiem trafimy na jeden z 30 numerów do naszych znajomych. Numer telefonu nie może zaczynać się cyfrą 0 ani 9.
- ✎ **136.** Grupa przyjaciół, w której jest dwóch chłopców i cztery dziewczyny, siada obok siebie w kinie w jednym rzędzie w przypadkowej kolejności. Oblicz prawdopodobieństwo, że chłopcy usiądą obok siebie.
- ✎ **137.** Sześciu sąsiadów zaparkowało swoje samochody na sześciu miejscach parkingowych obok siebie. Rano każdy z nich o innej porze wyjedzie do pracy. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
- samochody odjadą po kolei (od lewej do prawej),
 - samochód pierwszy od lewej odjedzie jako ostatni,
 - w żadnym momencie nie powstanie wolne miejsce pomiędzy zaparkowanymi samochodami.
- ✎ **138.** Wśród sześciorga dzieci państwa Kowalskich są trojaczki i bliźnięta. Dzieci w losowej kolejności wsiadają do autobusu. Oblicz prawdopodobieństwo, że najpierw wsiadą do autobusu trojaczki.
- ✎ **139.** Na sześciu tabliczkach napisano litery: T, A, R, T, A, K. Oblicz prawdopodobieństwo, że ułożymy z nich słowo TARTAK, jeśli układamy tabliczki obok siebie w rzędzie:
- w losowej kolejności, ale każda z liter ułożona jest we właściwą stronę,
 - całkowicie losowo, każda tabliczka może przybrać położenie pionowe lub poziome.

- » **140.** Rzucamy pięciokrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- a) każda z wyrzuconych liczb zostanie wyrzucona co najwyżej jeden raz,
 - b) za każdym razem wyrzucono tę samą liczbę oczek,
 - c) suma wyrzuconych oczek jest większa od 7,
 - d) iloczyn wyrzuconych oczek jest mniejszy od 4,
 - e) kolejno wyrzucone liczby utworzą ciąg arytmetyczny.

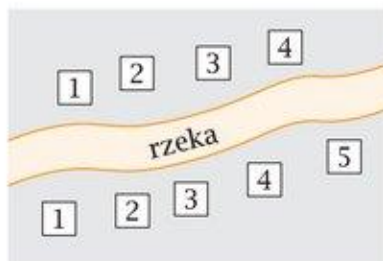
- » **141.** Na poniższym rysunku przedstawiono schemat rozmieszczenia szafek na podrećniki uczniów 15-osobowej klasy.



Wychowawca przydziela szafki poszczególnym uczniom w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że trójka przyjaciółek będzie miała szafki:

- a) w trzech różnych poziomych rzędach,
 - b) w tym samym poziomym rzędzie, obok siebie.
- » **142.** Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem 4 cyfry, z których tworzymy liczbę czterocyfrową zgodnie z kolejnością losowania cyfr. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest:
- a) większa od 4000,
 - b) nieparzysta,
 - c) podzielna przez 5 i mniejsza od 5000.
- » **143.** Spośród cyfr: 9, 8, 7, 6, 5 losujemy kolejno 5 cyfr. Cyfry te zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę pięciocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest większa od 90 000, jeżeli cyfry losujemy:
- a) ze zwracaniem,
 - b) bez zwracania.
- » **144.** W windzie znajdują się cztery osoby. Każda z nich może wysiąść na jednym z osiemnastu pięter. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda z tych osób wysiadzie na innym piętrze.
- » **145.** W szkolnej czytelnicy zaplanowano powiesić w sposób losowy 5 portretów pisarek i 7 portretów pisarzy. Zostaną one zawieszane w jednym rzędzie, jeden obok drugiego. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wizerunki pisarek zawisną bezpośrednio obok siebie.

✎ **146.** Państwo Nowakowie i Malinowscy planują wspólnie spędzić wakacje i zamierzają wynająć dwa domki na pewnym polu campingowym. Na stronie internetowej zobaczyli rozmieszczenie dziewięciu domków dostępnych w interesującym ich terminie (patrz rysunek poniżej).



Domki przydzielane są poszczególnym wczasowiczom losowo poprzez system komputerowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że obu rodzinom:

- zostaną przydzielone domki sąsiadujące ze sobą,
- zostaną przydzielone domki po przeciwnych stronach rzeki.

WARIACJE

✎ **147.** Oblicz.

- | | | |
|-------------------------|--|---|
| a) $\frac{7!}{4!}$ | f) $\frac{18!}{17!}$ | k) $\frac{15!}{12! \cdot 3!}$ |
| b) $\frac{46!}{44!}$ | g) $\frac{31!}{0!}$ | l) $\frac{10! \cdot 12!}{9! \cdot 11!}$ |
| c) $\frac{10!}{6!}$ | h) $\frac{15 \cdot 17!}{15! \cdot 17}$ | m) $\frac{19! \cdot 20}{22!}$ |
| d) $\frac{102!}{99!}$ | i) $\frac{16!}{15 \cdot 16}$ | n) $\frac{7! \cdot 9!}{(8!)^2}$ |
| e) $\frac{1000!}{999!}$ | j) $\frac{9!}{(3!)^3}$ | o) $\frac{98! \cdot 101!}{(100!)^2}$ |

✎ **148.** Podane wyrażenia zapisz bez używania symboli silni.

- | | | |
|----------------------------|--|--|
| a) $\frac{n!}{(n-2)!}$ | c) $\frac{(n+2)! \cdot (n+3)!}{n! \cdot (n+1)!}$ | e) $\frac{(n+1)!}{(n-2)! \cdot 2!}$ |
| b) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$ | d) $\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}$ | f) $\frac{n! \cdot (n+2)! \cdot (n+4)!}{(n-1)! \cdot (n+1)! \cdot (n+3)!}$ |

✎ **149.** Uzasadnij podane równości.

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) $n! + (n+1)! = n! \cdot (n+2)$ | c) $\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+1)! - n!} = \frac{(n+1)(n+3)}{n}$ |
| b) $(n+1)! - n! = (n-1)!n^2$ | d) $\frac{(n-1)! - n!}{(n!)^2} = \frac{(1-n)}{n \cdot n!}$ |

150. a) Na półce należy ustawić 6-tomową encyklopedię. Na ile sposobów można to zrobić?

b) Na siedmiu miejscach należy usadowić 7 osób. Na ile sposobów można to zrobić?

c) W finale zawodów pływackich uczestniczy 10 osób. Na ile sposobów można obstawić pierwszą trójkę w tych zawodach?

d) W sklepiku szkolnym można kupić lemoniadę w siedmiu smakach. Trzy przyjaciółki chcą zamówić po 1 lemoniadzie. Na ile sposobów mogą to zrobić?

e) Bracia: Piotr, Paweł i Michał są podobnej postury i często wymieniają się swoimi ubraniami. W swoich szafach mają w sumie 8 garniturów. Chłopcy wybierają się na wspólną uroczystość. Na ile sposobów mogą wybrać dla siebie garnitury?

f) W szatni znajduje się 7 wolnych wieszaków. Na ile sposobów można powiesić 4 kurtki na tych wieszakach (na jednym wieszaku będzie wisieć tylko jedna kurtka)?

g) Na wystawie kotów prezentują się 3 koty perskie, 5 kotów syberyjskich oraz 6 kotów rasy europejskiej. Na ile sposobów można ustalić kolejność prezentacji kotów tak, aby najpierw zaprezentowały się koty perskie, następnie syberyjskie, a na końcu — koty rasy europejskiej?

h) Podczas rozwiązywania 25 zadań zamkniętych należy przy każdym z nich wybierać dokładnie jedną odpowiedź: A, B, C lub D. Ile różnych zestawów odpowiedzi można utworzyć, jeżeli odpowiedzi będą zaznaczane w sposób losowy?

Я151. Ile pięcioelementowych ciągów liter możemy utworzyć za pomocą liter:

a) X, Y,

b) X, Y, Z,

c) A, B, C, D, E?

152. W windzie znajduje się 6 osób. Każda z nich może wysiąść na jednym z dwudziestu pięter. Na ile sposobów osoby te mogą wysiąść z windy, jeżeli:

a) każda osoba wysiadzie na innym piętrze,

b) osoby mogą wysiąść na tym samym piętrze?

153. W pudełku znajduje się pięć kul ponumerowanych od 1 do 5. Losujemy 8 razy po jednej kuli i za każdym razem wrzucamy ją z powrotem do pudełka. Cyfry z wylosowanych kul zapisujemy kolejno, tworząc liczbę 8-cyfrową. Ile liczb możemy w ten sposób otrzymać?

154. Za pomocą liter A, B, C tworzymy ciąg liter. Ile takich zestawów można utworzyć, jeżeli zestaw ma liczyć:

a) dwie litery,

c) cztery litery,

b) trzy litery.

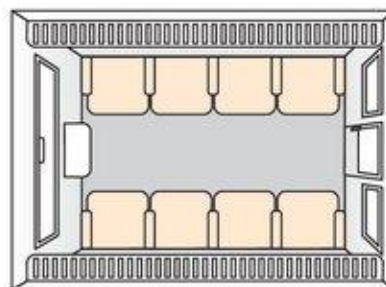
d) dziesięć liter?

Я155. Na ile sposobów można rozmieścić:

a) 6 książek na 4 półkach,

b) 4 książki na 6 półkach?

- Я 156.** W klasie jest 20 dziewczyn i 10 chłopaków. Na ile sposobów można wybrać samorząd (przewodniczącego, zastępcę i skarbnika), jeśli:
- a) nie ma żadnych warunków co do płci wybieranych,
 - b) przewodnicząca ma być dziewczyną,
 - c) przewodniczący ma być chłopakiem, a zastępca — dziewczyną?
- Я 157.** Na ile sposobów pięć dorosłych osób może zająć miejsca w samochodzie pięcioosobowym, jeżeli prawo jazdy:
- a) mają wszystkie osoby,
 - b) mają trzy osoby,
 - c) ma tylko jedna osoba?
- Я 158.** a) Na ile sposobów można zaplanować koncert, jeśli mają na nim wystąpić po kolei (ale w dowolnej kolejności) trzy zespoły, z których jeden ma wykonać 6 utworów, drugi — 5 utworów, a trzeci — 3 utwory? Utwory mogą być wykonywane w różnej kolejności.
- b) Na ile sposobów można podzielić dziewięć różnych przedmiotów pomiędzy trzy osoby? Podział nie musi być równy, dopuszczamy także sytuację, że jedna osoba weźmie wszystko.
- Я 159.** Zamek szyfrowy ma 4 pokręta. Na każdym z nich można ustawić cyfrę od 1 do 9. Jak długo potrwa sprawdzanie wszystkich możliwych ustawień 4 pokręteł, jeśli na każde z tych ustawień przeznaczymy 1 sekundę?
- Я 160.** Dziesięć osób rywalizuje w konkursie.
- a) Ile jest możliwości przyznania pierwszych trzech miejsc (bez miejsc ex aequo)?
 - b) Oprócz nagród za pierwsze trzy miejsca (bez miejsc ex aequo) przewidziano nagrodę *fair play*, którą może dostać jeden z zawodników. Nagroda ta może jednak nie zostać przyznana. Ile jest możliwości przyznania nagród?
- Я 161.** Ile jest możliwych wyników klasówki, jeśli pisało ją 10 uczniów, przy czym:
- a) każdy może dostać ocenę od 1 do 6 (bez plusów i minusów),
 - b) każdy otrzymuje tylko informację „zaliczone” lub „niezaliczone”?
- Я 162.** Cztery małżeństwa zajmują miejsca w ośmioosobowym przedziale kolejowym. Ustal, na ile sposobów mogą je zająć, jeśli:
- a) każdy mężczyzna ma siedzieć obok swojej żony,
 - b) każda kobieta ma siedzieć naprzeciwko swojego męża,
 - c) mężczyźni mają siedzieć po jednej stronie, a kobiety po drugiej,
 - d) kobiety mają siedzieć w rogach przedziału,
 - e) przy oknie mają siedzieć kobiety,
 - f) usadzenie osób jest dowolne.



Я 163. Na balu jest 15 kobiet i 18 mężczyzn.

- a) Na ile sposobów można wybrać spośród nich parę damsko-męską do tańca?
- b) Na ile sposobów można podzielić przybyłych na pary damsko-męskie do tańca, jeśli wszystkie kobiety mają tańczyć?

Я 164. Ile różnych słów mających sens lub nie możemy otrzymać, przestawiając litery podanego słowa?

- a) JABŁKO
- b) BANAN
- c) TRUSKAWKA
- d) ANANAS

Я 165. a) Z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 tworzymy liczby sześciocyfrowe o różnych cyfrach. Ile różnych liczb można otrzymać?

- b) Na 10 tabliczkach zapisano cyfry: 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6. Tabliczki ułożono tak, aby otrzymać liczbę dziesięciocyfrową. Ile różnych liczb można w ten sposób otrzymać?

Я 166. Dwudziestu chłopców i dziesięć dziewczynek należy ustawić w trzech równolicznych rzędach. W pierwszym i trzecim rzędzie mają stać chłopcy, a w rzędzie środkowym — dziewczynki. Ile jest możliwych takich ustawień?

Я 167. Podczas wyjścia klasowego do kina uczniowie klasy IVb zajęli wszystkie 24 miejsca w rzędzie. Cztery przyjaciółki chcą koniecznie usiąść obok siebie. Na ile sposobów można przydzielić uczniom miejsca, aby spełnić życzenie przyjaciółek?

Я 168. Na parkingu jest 10 miejsc w jednym rzędzie. Na ile sposobów można przydzielić te miejsca 5 samochodom osobowym i 5 ciężarowym, jeżeli:

- a) wszystkie samochody tego samego typu mają parkować obok siebie,
- b) wszystkie samochody osobowe mają parkować obok siebie?

Я 169. Cztery małżeństwa zajmują miejsca w ośmioosobowym przedziale kolejowym. Ile jest możliwych sposobów zajęcia miejsc, jeśli:

- a) każdy mężczyzna ma siedzieć obok przynajmniej jednej kobiety,
- b) każdy mężczyzna ma siedzieć obok dokładnie jednej kobiety?

Я 170. Informacja genetyczna jest zakodowana w DNA w taki sposób, że każdemu aminokwasowi odpowiada trójka zasad, z których każda może być adeniną, cytozyną, guaniną lub tyminą. Sprawdź, że trzy zasady wystarczą do oznaczenia 23 aminokwasów występujących w białkach, a dwie by nie wystarczyły.

Я 171. a) Ile podzbiorów ma zbiór pięcioelementowy?

- b) Ile podzbiorów ma zbiór n -elementowy?

KOMBINACJE

Я 172. Oblicz.

a) $\binom{6}{4}$, $\binom{9}{6}$, $\binom{13}{9}$, $\binom{2000}{1998}$, $\binom{25}{20}$, $\binom{49}{6}$

b) $\binom{8}{8}$, $\binom{18}{17}$, $\binom{62}{1}$, $\binom{17}{0}$, $\binom{1234}{1233}$, $\binom{9876}{9876}$

c) $\frac{\binom{8}{6}}{\binom{8}{2}}$, $\frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2}}{6!}$, $\frac{\binom{15}{10}}{(15-10)!}$, $\frac{\binom{129}{101} + \binom{129}{100}}{\binom{130}{101}}$

Я 173. Podane wyrażenia przedstaw w postaci wielomianu lub wyrażenia wymiernego.

a) $\binom{n}{n-1}$

d) $\binom{n+1}{n-1} + \binom{n+2}{n}$

g) $\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n+4}{n}}$

b) $\binom{n}{3}$

e) $\binom{2n}{2n-3}$

h) $\frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{n+3}{n}}$

c) $\binom{n+4}{4}$

f) $\frac{\binom{n}{0}}{\binom{n}{2}}$

i) $\frac{\binom{n+3}{n+1}}{\binom{n+4}{n+2}}$

Я 174. Wyznacz wszystkie wartości n , dla których zachodzi podana równość.

a) $\binom{n}{2} = 45$

b) $\binom{n+1}{n-1} = 66$

c) $\binom{n+5}{n+3} = 300$

d) $\binom{n}{3} = 20$

Я 175. Oblicz, na ile sposobów można wybrać:

- a) trzy kule z pięciu różnych kul,
- b) pięć kul z dwudziestu różnych kul,
- c) dziewiętnaście kul z dwudziestu różnych kul.

Я 176. Na pewnym okręgu zaznaczono pięć różnych punktów. Oblicz, ile można narysować odcinków, a ile wektorów o końcach w tych punktach.

Я 177. Na ile sposobów można z 25-osobowej klasy wybrać:

- a) trzy osoby, jeśli każda ma wziąć udział w jednym z trzech różnych konkursów,
- b) trzy osoby, jeśli wszystkie osoby mają wziąć udział w tym samym konkursie,
- c) osoby, które przez trzy kolejne dni będą pełniły rolę dyżurnego, jeśli wybrana osoba pełniła dyżur przez 1 dzień i może być wybrana kilkakrotnie?

- Я178.** a) Samorządy siedmiu miast postanowiły wybudować ścieżki rowerowe łączące każde miasto z sześcioma pozostałymi. Ile połączeń będzie miała powstała sieć?
- b) Samorządy siedmiu miast postanowiły, że w trzech wybranych miastach zostanie zorganizowany festiwal filmowy. Na ile sposobów można wyłonić te trzy miasta?
- c) W kwiaciarni dostępnych jest 12 różnych gatunków kwiatów ciętych. Na ile sposobów można wybrać kwiaty do bukietu tak, by znalazły się w nim cztery kwiaty różnych gatunków?
- d) Na okręgu zaznaczono 15 różnych punktów. Ile można poprowadzić różnych cięciw o końcach w tych punktach?
- Я179.** Uzasadnij, że w dowolnym n -kacie liczba przekątnych wynosi $\frac{n(n-3)}{2}$.
- Я180.** W grupie studentów przyjętych na pierwszy rok studiów znajduje się 15 kobiet i 7 mężczyzn. Do złożenia uroczystego ślubowania podczas inauguracji nowego roku akademickiego należy wybrać 5 studentów. Na ile sposobów można to zrobić, jeżeli:
- pleć wybranych osób nie ma znaczenia,
 - wybrani mają być 3 mężczyźni i 2 kobiety,
 - wśród wybranych osób mają się znaleźć co najmniej 3 kobiety?
- Я181.** a) W kolekcji płyt znajduje się 12 płyt rockowych, 8 popowych i 15 hip-hopowych. Na ile sposobów można wybrać 8 płyt tak, aby wśród nich były: 3 płyty rockowe, 2 popowe i 3 hiphopowe?
- b) W zestawie znajduje się 15 zadań z geometrii, 18 z algebry i 6 z rachunku prawdopodobieństwa. Na ile sposobów można z tego zestawu wybrać 6 zadań — po 2 z każdego działu?
- Я182.** W pudełku znajduje się 8 kul białych, 6 niebieskich i 7 czarnych. Na ile sposobów można wybrać 4 kule tak, aby wśród nich były:
- dokładnie 2 kule niebieskie,
 - co najmniej 2 kule białe,
 - co najwyżej 2 kule czarne?
- Я183.** W pudełku znajduje się 50 losów, wśród których jest 5 wygrywających. Na ile sposobów można wyciągnąć z pudełka 4 losy tak, aby co najmniej 1 z nich był wygrywający?
- Я184.** a) Na ile sposobów można wybrać 5 spośród 25 rodzajów sałatek w barze?
- b) W barze jest 25 rodzajów sałatek. Na ile sposobów 3 osoby mogą wybrać po jednym zestawie składającym się z 5 różnych sałatek?

- Я185.** W grze Lotto losuje się 6 spośród liczb naturalnych od 1 do 49.
- Ile jest możliwych wyników losowania zawierających liczbę 1?
 - Gracz skreślił 6 liczb. Ile jest możliwości wylosowania zestawu sześciu liczb, z których żadna nie została skreślona przez gracza?
- Я186.** Klasa IVa liczy 30 uczniów, a klasa IVb — 32 uczniów. Na ile sposobów można wybrać sześciuosobową drużynę składającą się z 3 uczniów klasy IVa i 3 uczniów klasy IVb?
- Я187.** Ali postanowił podzielić swoje wielbłądy między czterech synów. Pierwszemu kazał wybrać 8 z nich, drugiemu — 6, trzeciemu — 4, a czwartemu dał pozostałe 2 wielbłądy. Na ile sposobów bracia mogą podzielić stado?
- Я188.** Na ile sposobów można rozdać po równo 52 karty do gry dwóm graczom, a na ile — czterem?
- Я189.** Zbiór 20 różnych starych monet dzielimy pomiędzy 2 osoby. Ile jest możliwych podziałów, jeśli:
- każda z osób ma dostać tyle samo monet,
 - podział nie musi być równy, może się nawet zdarzyć, że jedna osoba weźmie wszystko?
- Я190.** Na ile sposobów można wybrać 4 gałki lodów spośród 10 smaków, jeśli:
- każda gałka lodów ma mieć inny smak i kolejność nałożenia gałek jest istotna,
 - gałki lodów mogą mieć ten sam smak i kolejność nałożenia gałek jest istotna?
- Я191.** W klasie jest 16 chłopców i 14 dziewcząt. Wybieramy i ustawiamy w rzędzie 2 dziewczyny i 3 chłopców. Ile różnych rzędów można w ten sposób ustawić?
- Я192.** Sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny. Ile jest trójkątów o wierzchołkach wybranych spośród punktów A, B, C, D, E oraz F ? Ustal, ile wśród nich jest trójkątów równobocznych.
- Я193.** W grze Lotto maszyna losująca wybiera 6 spośród liczb naturalnych od 1 do 49. Za każdy zakład w tej grze trzeba zapłacić 3 zł. Ile trzeba zapłacić za obstawienie wszystkich możliwych wyników losowania?
- Я194.** a) Na ile sposobów można podzielić 12 znaczków pocztowych między dwóch braci, tak aby każdy z nich miał po 6 znaczków?
b) Na ile sposobów można podzielić 12 znaczków pocztowych między trzech braci, tak aby każdy z nich miał po 4 znaczki?

Я195. W lidze tenisa stołowego uczestniczy 32 zawodników, którzy przydzieleni są do czterech równolicznych grup. W poszczególnych grupach zawodnicy grają systemem „każdy z każdym”. Do półfinału kwalifikują się 3 najlepsze osoby z każdej grupy. W rozgrywkach tych tworzy się dwie równoliczne grupy, w których zawodnicy również grają systemem „każdy z każdym”. Do ścisłego finału wchodzi zwycięzca każdej z grup półfinałowych. Ile meczów zostanie rozegranych podczas trwania tej ligi?

Я196. Na poniższym rysunku przedstawiono wyświetlacz składający się z 7 segmentów. Jego podstawowym zadaniem jest wyświetlanie informacji w postaci cyfr i liter oraz znaków specjalnych.



Segmenty można zamiennie włączać i wyłączać, uzyskując różne znaki (również takie, które nie są literami ani cyframi). Na poniższym rysunku przedstawiono przykładowe znaki możliwe do utworzenia na wyświetlaczu.



Ile różnych znaków (cyfr, liter i takich, które nie są cyframi ani literami) można utworzyć za pomocą tego wyświetlacza?

DWUMIAN NEWTONA

Я197. Przekształć podane wyrażenie, wykorzystując wzór Newtona.

- | | | |
|------------------|---|---|
| a) $(4 + 3x)^4$ | c) $\left(x\sqrt{2} + \frac{2}{y}\right)^5$ | e) $(ab + 3c)^4$ |
| b) $(2x - 5y)^5$ | d) $(1 - 10a)^6$ | f) $\left(\frac{3}{k^2} - \frac{k}{6}\right)^5$ |

Я198. Oblicz.

- | | | |
|------------------------------|---|--|
| a) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^4$ | d) $(3 + 2\sqrt{5})^6$ | g) $(2 - \sqrt{2})^7$ |
| b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ | e) $\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^5$ | h) $(\sqrt{5} + 3)^6$ |
| c) $(1 + \sqrt{6})^6$ | f) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^5$ | i) $\left(\sqrt{10} + \frac{1}{10}\right)^5$ |

Я199. Poniższe wyrażenia można przedstawić w postaci sumy. Podaj ten składnik sumy, przy którym po skróceniu nie występuje zmienna x .

a) $\left(4x + \frac{5}{x}\right)^6$

c) $\left(x^2 - \frac{7}{x}\right)^9$

e) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

b) $\left(3x - \frac{3}{x}\right)^{10}$

d) $\left(2x^6 + \frac{3}{x^4}\right)^{10}$

f) $\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$

Я200. Znajdź ten wyraz rozwinięcia wyrażenia $\left(\frac{x}{6} + 4y^2\right)^6$, w którym występuje:

a) x^3

b) x^5

c) y^8

d) y^{12}

Я201. Znajdź ten wyraz rozwinięcia wyrażenia $\left(ac - \frac{b^3\sqrt{2}}{2}\right)^8$, w którym występuje:

a) a^5

b) c^7

c) b^{12}

d) b^{21}

Я202. Zapisz trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia $(a+b)^n$ zgodnie ze wzorem Newtona, wiedząc, że:

a) współczynniki przy trzecim i piątym wyrazie rozwinięcia są równe,

b) współczynniki przy drugim i dziewiątym wyrazie rozwinięcia są równe,

c) współczynniki przy czwartym i szóstym wyrazie rozwinięcia są równe.

Я203. Zapisz trzy ostatnie wyrazy rozwinięcia $(a-b)^n$ zgodnie ze wzorem Newtona, wiedząc, że:

a) współczynniki przy trzecim i siódmym wyrazie rozwinięcia są równe,

b) współczynniki przy trzecim i czwartym wyrazie rozwinięcia są liczbami przeciwnymi,

c) współczynniki przy drugim i dziewiątym wyrazie rozwinięcia są liczbami przeciwnymi,

d) współczynniki przy szóstym i siódmym wyrazie rozwinięcia są liczbami przeciwnymi.

Я204. Oblicz z dokładnością do części setnych, korzystając ze wzoru Newtona.

a) $1,02^8$

c) $0,99^{15}$

e) $1,003^{11}$

b) $1,002^{20}$

d) $0,998^9$

f) $0,98^{16}$

Я205. Suma współczynników występujących przy czterech początkowych wyrazach rozwinięcia $(a+b)^n$ jest równa 42. Zapisz trzy ostatnie wyrazy tego rozwinięcia.

KOMBINATORYKA I PRAWDOPODOBIENSTWO

- 206.** Czwooro rodzeństwa w różnym wieku — Tomek, Ania, Magda i Jaś — ustawia się w rzędzie w losowej kolejności. Oblicz prawdopodobieństwo, że dzieci ustawią się od najstarszego do najmłodszego, zaczynając od lewej strony.
- 207.** Aby otworzyć zamek szyfrowy, należy ustawić każde z trzech pokręteł w odpowiedniej pozycji, jednej z sześciu możliwych. Oblicz prawdopodobieństwo, że uda się go otworzyć za pierwszym razem po losowym ustawieniu pokręteł.
- 208.** Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wybierając losowo 9-cyfrowy numer telefoniczny, przypadkiem trafimy na jeden z 30 numerów do naszych znajomych. Numer telefonu nie może zaczynać się cyfrą 0 ani 9.
- 209.** Wśród 20 żarówek 6 jest przepalonych. Wybieramy losowo dwie żarówki. Oblicz prawdopodobieństwo, że obie są przepalone.
- 210.** Grupa przyjaciół, w której jest dwóch chłopców i cztery dziewczyny, siada obok siebie w kinie w jednym rzędzie w przypadkowej kolejności. Oblicz prawdopodobieństwo, że chłopcy usiądą obok siebie.
- 211.** Ze zbioru liczb: $\{15, 16, 17, \dots, 34\}$ losujemy równocześnie dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- obie wylosowane liczby są nie większe od 25,
 - co najmniej jedna z wylosowanych liczb jest podzielna przez 3,
 - suma wylosowanych liczb jest parzysta,
 - żadna z wylosowanych liczb nie jest podzielna przez 5.
- 212.** W klasie jest 16 chłopców i 14 dziewcząt. Nauczyciel przyniósł sprawdzone klasówki ułożone w przypadkowej kolejności. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
- klasówki ułożone są według listy w dzienniku,
 - najpierw znajdują się klasówki wszystkich chłopców, potem klasówki wszystkich dziewcząt,
 - klasówki wszystkich chłopców ułożone są jedna po drugiej.
- 213.** W sali stoi 20 krzeseł, z których 5 jest białych, a 15 czarnych. Sześć osób wchodzi do tej sali i losowo zajmuje miejsca. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
- wszystkie usiądą na czarnych krzesłach,
 - wszystkie usiądą na białych krzesłach,
 - dokładnie dwie usiądą na białych krzesłach.

Я214. Sześciu sąsiadów zaparkowało swoje samochody na sześciu miejscach parkingowych obok siebie. Rano każdy z nich o innej porze wyjedzie do pracy. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) samochody odjadą po kolei (od lewej do prawej),
- b) samochód pierwszy od lewej odjedzie jako ostatni,
- c) w żadnym momencie nie powstanie wolne miejsce pomiędzy zaparkowanymi samochodami.

Я215. Wśród sześciorga dzieci państwa Kowalskich są trojaczki i bliźnięta. Dzieci w losowej kolejności wsiadają do autobusu. Oblicz prawdopodobieństwo, że najpierw wsiadą do autobusu trojaczki.

Я216. Na talerzu położono 15 pączków: 8 z marmoladą, 6 z serem i 1 bez nadzienia. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) wśród 4 losowo wybranych pączków nie ma żadnego z marmoladą,
- b) wśród 7 losowo wybranych pączków wszystkie są z marmoladą,
- c) wśród 10 losowo wybranych pączków wszystkie mają nadzienie,
- d) wśród 8 losowo wybranych pączków są 4 pączki z marmoladą, 3 z serem i 1 bez nadzienia.

Я217. Na sześciu tabliczkach napisano litery: M, A, R, C, I, N. Oblicz prawdopodobieństwo, że ułożymy z nich słowo MARCIN, jeśli układamy tabliczki obok siebie w rzędzie:

- a) w losowej kolejności, ale każda z liter ułożona jest we właściwą stronę,
- b) całkowicie losowo, każda tabliczka może przybrać położenie pionowe lub poziome.

Я218. Zastanów się, jak zmieniłyby się odpowiedzi do zadania 217., gdyby litery: MARCIN zamienić na TARTAK.

Я219. Sekretarka miała wysłać jednakowe listy do 15 osób. Wśród tych osób było 10 kobiet i 5 mężczyzn. Starannie przygotowała dwie wersje listu (dla pań i dla panów) i zaadresowała koperty. Niestety, listy trafiły do kopert w sposób zupełnie przypadkowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszyscy adresaci otrzymają wersję listu odpowiednią dla ich płci.

Я220. W składzie pewnego pociągu znajduje się 6 wagonów. W każdym z tych wagonów jest 10 przedziałów z 8 miejscami siedzącymi. Dwoje nieznanym, Ela i Tomek, kupiło bilety z miejscówkami na ten pociąg. Oblicz prawdopodobieństwo, że Ela i Tomek:

- a) znajdą się w tym samym wagonie,
- b) mają miejsca w tym samym przedziale,
- c) usiądą naprzeciwko siebie.

- Я 221.** Losujemy 5 kart z talii 52 kart do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:
- pięciu kart jednakowego koloru,
 - dokładnie dwóch asów,
 - przynajmniej dwóch asów,
 - co najmniej jednej figury.
- Я 222.** Spośród wszystkich wierzchołków sześciokąta foremnego losujemy trzy wierzchołki. Są one wierzchołkami trójkąta. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że trójkąt ten jest prostokątny.
- Я 223.** W grze Lotto maszyna losująca wybiera 6 spośród liczb naturalnych od 1 do 49. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowano:
- kolejne liczby naturalne,
 - wyłącznie liczby podzielne przez 5,
 - 3 liczby parzyste i 3 liczby nieparzyste.
- Я 224.** W grze Lotto maszyna losująca wybiera 6 spośród liczb naturalnych od 1 do 49. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że poprawnie skreślimy co najmniej 4 liczby.
- Я 225.** Rzucamy pięciokrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- każda z wyrzuconych liczb zostanie wyrzucona co najwyżej jeden raz,
 - za każdym razem wyrzucono tę samą liczbę oczek,
 - suma wyrzuconych oczek jest większa od 7.
- Я 226.** Na poniższym rysunku przedstawiono schemat rozmieszczenia szafek na podręczniki uczniów 15-osobowej klasy.
- | | | | | |
|--|--|--|--|--|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
- Wychowawca przydziela szafki poszczególnym uczniom w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że trójka przyjaciółek będzie miała szafki:
- w trzech różnych poziomych rzędach,
 - w tym samym poziomym rzędzie, obok siebie.
- Я 227.** Ze zbioru cyfr $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem 4 cyfry, z których tworzymy liczbę czterocyfrową zgodnie z kolejnością losowania cyfr. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba jest:
- większa od 4000,
 - nieparzysta,
 - podzielna przez 5 i mniejsza od 5000.

Я228. Spośród cyfr: 9, 8, 7, 6, 5 losujemy kolejno 5 cyfr. Cyfry te zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę pięciocyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymana liczba jest większa od 90 000, jeżeli cyfry losujemy:

- a) ze zwracaniem,
- b) bez zwracania.

Я229. W pudełku znajduje się 8 kul białych, 7 czarnych i 5 niebieskich. Losujemy z pudełka 2 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) nie wylosowano kuli czarnej,
- b) wylosowano kule tego samego koloru,
- c) wylosowano co najmniej jedną kulę niebieską.

Я230. W pudełku znajduje się 20 kul oznaczonych numerami od 1 do 20. Losujemy z pudełka trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wylosowano kule z numerami będącymi kolejnymi liczbami naturalnymi,
- b) wylosowano kule z numerami mniejszymi od 11,
- c) wylosowano co najmniej jedną kulę z numerem podzielny przez 3.

Я231. W pudełku znajduje się 5 kul niebieskich, 4 kule zielone i 6 kul czerwonych. Losujemy z pudełka 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- a) każda kula jest innego koloru,
- b) dokładnie dwie kule są w tym samym kolorze,
- c) nie wylosowano kuli czerwonej,
- d) wylosowano co najmniej 1 kulę zieloną,
- e) wylosowano kule w tym samym kolorze.

Я232. W windzie znajdują się cztery osoby. Każda z nich może wysiąść na jednym z osiemnastu pięter. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że każda z tych osób wysiadzie na innym piętrze.

Я233. W puli 50 losów znajdują się 2 losy z wygraną 1000 zł, 4 losy z wygraną 200 zł i 10 losów z wygraną 100 zł. Michał kupił 2 losy. Oblicz prawdopodobieństwo, że Michał:

- a) wylosował co najmniej 1 los z wygraną pieniężną,
- b) wygrał dokładnie 200 zł,
- c) wygrał co najmniej 1000 zł.

Я234. W szkolnej czytelnicy zaplanowano powiesić w sposób losowy 5 portretów pisarek i 7 portretów pisarzy. Zostaną one zawieszone w jednym rzędzie, jeden obok drugiego. Oblicz prawdopodobieństwo tego, wizerunki pisarek zawisną bezpośrednio obok siebie.

- Я235.** Państwo Nowakowie i Malinowscy planują wspólnie spędzić wakacje i zamierzają wynająć dwa domki na pewnym polu campingowym. Na stronie internetowej zobaczyli rozmieszczenie dziewięciu domków dostępnych w interesującym ich terminie (patrz rysunek poniżej).



Domki przydzielane są poszczególnym wczasowiczom losowo poprzez system komputerowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że obu rodzinom:

- zostaną przydzielone domki sąsiadujące ze sobą,
- zostaną przydzielone domki po przeciwnych stronach rzeki.

- Я236.** W urnie znajduje się 6 kul białych i pewna liczba kul czarnych. Losujemy z urny 2 kule. Prawdopodobieństwo tego, że obie będą tego samego koloru, wynosi $\frac{17}{35}$. Ile czarnych kul jest w urnie?

- Я237.** Liczba dziewczyn w pewnej klasie jest o 2 większa od liczby chłopaków. Prawdopodobieństwo tego, że wśród dwóch losowo wybranych osób z tej klasy będzie co najmniej 1 chłopak, wynosi 0,72. Ile osób liczy ta klasa?

- Я238.** W mieszance orzechowej znajdują się orzechy ziemne, laskowe i włoskie. Orzechów włoskich jest dwa razy więcej od ziemnych, a laskowych — trzy razy więcej od ziemnych. Prawdopodobieństwo tego, że przy losowaniu trzech orzechów wylosujemy 3 orzechy różnych gatunków, jest równe $\frac{48}{253}$. Ile jest wszystkich orzechów w tej mieszance?

- Я239.** W pudełku znajduje się 10 długopisów niebieskich i 10 czarnych. Ile co najmniej niebieskich długopisów należałoby dołożyć do pudełka, aby przy losowaniu 2 długopisów prawdopodobieństwo wylosowania obu długopisów w kolorze niebieskim było większe od $\frac{1}{2}$?

- Я240.** Podczas egzaminu student losuje 4 spośród 30 pytań. Aby zdać egzamin, student musi poprawnie odpowiedzieć na co najmniej 2 pytania. Oblicz prawdopodobieństwo, że student zda egzamin, jeżeli wiadomo, że zna odpowiedź:
- na 10 pytań,
 - na 25 pytań.

- Я241.** Magda i Marta ubierają choinkę. Do dyspozycji mają 30 bombek, z czego 4 bombki są w kształcie sople lodu. Dziewczyny losowo wybierają na choinkę 25 bombek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych bombek co najwyżej 2 będą w kształcie sople.

Я242. Z czterech równoległych klas maturalnych losujemy 4 osoby, które udekorują salę na bal studniówkowy. Liczbę osób w poszczególnych klasach z podziałem na płeć przedstawia tabela:

Klasa	IV a	IV b	IV c	IV d
Liczba dziewczyn	20	14	8	16
Liczba chłopców	10	14	16	14

Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowani zostaną wyłącznie chłopcy, jeżeli losowanie osób przebiega według następującej zasady:

- z każdej klasy losujemy po jednej osobie,
- losujemy jedną z czterech klas, a następnie z tej klasy losujemy 4 osoby,
- wszystkie 4 klasy traktujemy zbiorczo i losujemy z nich 4 osoby.

Я243. Dziesięć karteczek z liczbami: 1, 2, 3, ..., 10 położono losowo jedna za drugą. Oblicz prawdopodobieństwo, że karteczki z liczbami 1, 2, 3, 4 będą znajdowały się obok siebie w dowolnej kolejności.

Я244. a) W słowie *lodówka* przestawiamy losowo litery, otrzymując różne 7-literowe ciągi liter. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uzyskamy ciąg, w którym litery: w, o, d, a będą występowały obok siebie w podanej kolejności.

b) Spośród liter, z których składa się słowo *lodówka*, losujemy po kolei bez zwracania 4 litery. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowane kolejno litery utworzą słowo *woda*.

c) Spośród liter, z których składa się słowo *lodówka*, losujemy po kolei ze zwracaniem 4 litery. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowane kolejno litery utworzą słowo *woda*.

d) Spośród liter, z których składa się słowo *lodówka*, losujemy równocześnie 4 litery. Oblicz prawdopodobieństwo, że z wylosowanych liter będzie można utworzyć słowo *woda*.

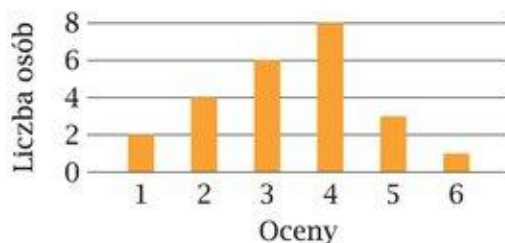
Я245. Rzucono dziesięciokrotnie symetryczną monetą. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że orła otrzymano:

- dokładnie 5 razy,
- co najmniej 3 razy.

Я246. Ze zbioru liczb $\{-5, -4, -3, \dots, 6\}$ losujemy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- obie wylosowane liczby są rozwiązaniami równania $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$,
- żadna z wylosowanych liczb nie należy do zbioru rozwiązań nierówności $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 \geq 0$,
- tylko jedna z wylosowanych liczb jest rozwiązaniem nierówności $\frac{x^3 - 9x^2}{6 - x} \geq 0$.

Я247. Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki uczniów pewnej klasy.



Spośród uczniów, które pisały sprawdzian, losujemy trzy osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- żaden z wylosowanych uczniów nie otrzymał oceny niedostatecznej,
- wśród wylosowanych uczniów znajdują się wyłącznie osoby, które otrzymały ocenę 4 lub 5,
- wylosowano ucznia z oceną celującą,
- co najmniej dwóch uczniów otrzymało oceną dobrą lub wyższą,
- co najmniej jeden uczeń otrzymał ocenę niższą od średniej arytmetycznej wszystkich ocen.

Я248. W brydżu całą talię 52 kart rozdajemy po równo między czterech graczy. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że jeden z graczy otrzyma:

- same piki,
- wszystkie asy,
- wszystkie asy i króle,
- dokładnie trzy damy.

Я249. Ania i Darek są jedną z pięćdziesięciu par, które przyszły na bal. Oblicz prawdopodobieństwo, że podczas tańca kotylionowego (tzn. tańca, w którym pary dobierane są drogą losowania) Ania i Darek będą tańczyli w jednej parze.

Я250. Spośród wszystkich liczb ośmiocyfrowych składających się z cyfr 0, 1 i 2 losujemy dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- iloczyn tych liczb jest liczbą nieparzystą,
- wylosowano dwie liczby niepodzielne przez 10.

Я251. W grze w pokera każdy gracz otrzymuje 5 kart wylosowanych z talii 52 kart. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania następujących układów kart:

- pokera — pięciu kolejnych kart jednego koloru (np. 7, 8, 9, 10, walet), przy czym asa można traktować albo jako kartę młodszą od 2, albo jako starszą od króla,
- karety — czterech kart jednakowej wysokości, np. czterech asów,
- strita — pięciu kolejnych kart bez względu na kolor, przy czym asa można traktować albo jako kartę młodszą od 2, albo jako starszą od króla,
- fula — dwóch kart jednakowej wysokości i trzech innych kart jednakowej wysokości (np. dwóch dam i trzech piątek).

Я 252. Rzucamy 10 razy monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że najdłuższa seria kolejno wypadających orłów będzie miała długość 5.

Я 253. Gdy podamy w bankomacie trzykrotnie błędny PIN, karta zostanie zatrzymana. Oblicz prawdopodobieństwo, że uda się nam wypłacić pieniądze, jeśli pamiętamy, że PIN składał się z dwóch jedynek, siódemki i dziewiątki, ale nie pamiętamy ich kolejności.

Я 254. W pewnej grze liczbowej typuje się jedną spośród 36 liczb oraz cztery liczby spośród 45. W tej grze wypłacane są wygrane pięciu stopni według reguł opisanych w poniższej tabelce.

- a) Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo wygranych każdego z tych stopni.
b) Czy stopnie wygranej odpowiadają ich prawdopodobieństwom?

Stopień wygranej	Liczba wybrana spośród 36	Liczba trafień wśród wybranych czterech spośród 45 liczb
I	trafiona	4
II	nietrafiona	4
III	trafiona	3
IV	nietrafiona	3
V	trafiona	mniej niż 3

255. Mając do dyspozycji dowolną liczbę jednakowych, białych lub czarnych, papierowych kwadratów o boku 1 układamy duży kwadrat o boku 4.

a) Ile możemy otrzymać:

- wszystkich wzorów,
- wzorów o pionowej osi symetrii,
- wzorów o pionowej i poziomej osi symetrii,
- wzorów o skośnej osi symetrii?

b) Odpowiedz na pytanie z podpunktu a) przy założeniu, że mamy tylko 8 kwadratów czarnych i 8 białych.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Ze zbioru wszystkich liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 10 lub przez 12 jest równe:

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{8}{45}$ D. $\frac{4}{45}$

2. W pudełku znajduje się 5 kul ponumerowanych od 1 do 5. Wyciągamy z pudełka po kolei ze zwracaniem 2 kule. Ile jest równe prawdopodobieństwo tego, że za pierwszym razem wylosowano kulę z numerem nie większym niż za drugim razem?

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{9}{20}$

3. W pudełku znajduje się 7 kul niebieskich i 3 kule białe. Losujemy z pudełka 2 kule. Prawdopodobieństwo tego, że obie wylosowane kule są niebieskie, jest równe:

- A. $\frac{7}{15}$ B. $\frac{7}{10}$ C. $\frac{49}{100}$ D. $\frac{2}{30}$

4. Rzucamy dwukrotnie symetryczną ośmiościenną kostką do gry. Za dwukrotne wyrzucenie tej samej liczby gracz otrzymuje 8,40 zł. Za wyrzucenie różnych liczb gracz traci pewną kwotę. Jaka to powinna być kwota, aby gra była sprawiedliwa?

- A. 20 gr B. 1 zł C. 1,20 zł D. 3 zł

5. Karolina otrzymała bon do wykorzystania w pewnej cukierni. Aby go zrealizować, może kupić gofra lub lody. Gofry piecze się z 2 rodzajów ciast i podaje z 4 rodzajami polewy. Lody dostępne są w 8 smakach i w 3 rodzajach rożków waflowych. Ile różnych możliwości zrealizowania bonu ma Karolina?

- A. 32 B. 12 C. 60 D. 192

6. Rzucamy symetryczną dwunastościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyrzucimy liczbę podzielną przez 3 lub 4.

7. Ze zbioru liczb 2, 3, 4, 5, 6 losujemy po kolei ze zwracaniem dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) suma wylosowanych liczb jest liczbą pierwszą,
- b) pierwsza z wylosowanych liczb jest o 2 większa od drugiej,
- c) iloczyn wylosowanych liczb jest liczbą dwucyfrową.

8. W pudełku znajdują się 3 kule białe, 4 kule zielone i 5 kul niebieskich. Losujemy z pudełka jedną kulę. Jeżeli będzie to kula biała, to kończymy doświadczenie. W przeciwnym wypadku losujemy drugi raz i kończymy doświadczenie. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w tym doświadczeniu losowym.

9. Rzucamy czterokrotnie symetryczną monetą. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:

- a) wyrzucimy więcej orłów niż reszek,
- b) wyrzucimy co najwyżej jednego orła.

10. Rzucamy symetryczną dwunastościenną kostką do gry. Jeżeli wyrzucimy wielokrotność liczby 4, to wygrywamy 5 zł. Za wyrzucenie liczby 7 — wygrywamy 26 zł. W każdym innym wypadku tracimy tyle złotych, ile wyrzuciliśmy. Oblicz wartość oczekiwaną tej gry.

11. Ze zbioru liter $\{K, A, T, O, W, I, C, E\}$ wybieramy kolejno litery. Ile różnych ciągów liter możemy utworzyć, jeżeli:

- a) ciąg ma być 8-literowy i każda litera ze zbioru będzie wykorzystana 1 raz,
- b) ciąg ma być 8-literowy, najpierw wybieramy wszystkie spółgłoski, a później wszystkie samogłoski,
- c) ciąg ma być 4-literowy i żadna z liter się nie powtarza,
- d) ciąg ma być 3-literowy i litery mogą się powtarzać.

12. Listonosz rozkłada losowo pięć ulotek do ośmiu skrytek pocztowych. Na ile sposobów może to zrobić?

- A. 5^8 B. $\frac{8!}{3!}$ C. $\binom{8}{5}$ D. 8^5

13. W rozwinięciu wyrażenia $(2x^2 - \frac{1}{2})^9$ przy jednomianie x^{14} występuje współczynnik:

- A. 72 B. 36 C. 4608 D. 1152

14. Spośród liczb 1, 2, 3, ..., 13 losujemy 3 liczby. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że będą to wyłącznie liczby pierwsze.

- A. $\frac{10}{143}$ B. $\frac{6}{13}$ C. $\frac{5}{143}$ D. $\frac{42}{143}$

15. Dany jest zbiór liter $\{O, L, S, Z, T, Y, N\}$. Ile 4-elementowych podzbiorów można utworzyć z elementów tego zbioru?

16. Z zestawu cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 losujemy kolejno cyfry, które zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę.

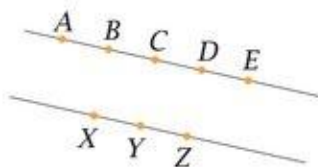
- a) Losujemy dwie cyfry. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy liczbę podzielną przez 5.
- b) Losujemy trzy cyfry. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy liczbę podzielną przez 5.
- c) Losujemy trzy cyfry. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy liczbę nieparzystą większą od 342.

Я 17. W finale międzynarodowych zawodów pływackich wystartuje trzech Polaków. Każdemu pływakowi zostaje losowo przydzielony jeden z 10 torów. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszystkim Polakom zostaną wylosowane tory sąsiadujące ze sobą.

Я 18. W finale pewnego teleturnieju zawodnik losuje po jednym pytaniu w trzech kategoriach. W kategorii „Geografia Azji” zawodnik zna odpowiedzi na wszystkie pytania, w kategorii „Astronomia” zna odpowiedź na 4 z 5 pytań, a w kategorii „Literatura amerykańska” zna odpowiedź tylko na 3 z 6 pytań. Zawodnik zdobywa główną nagrodę, jeżeli prawidłowo odpowie na wszystkie 3 pytania. Jeżeli zawodnik poprawnie odpowie na 2 pytania, zdobędzie nagrodę pocieszenia. W pozostałych wypadkach zawodnik nie zdobędzie nagrody. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zawodnik:

- zdobędzie główną nagrodę,
- zdobędzie nagrodę pocieszenia,
- nie zdobędzie nagrody.

Я 19. Na poniższym rysunku przedstawiono dwie proste równoległe, na których zaznaczono 8 punktów. Odległość między każdymi dwoma sąsiednimi punktami jest jednakowa ($|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |XY| = |YZ|$).



Spośród wszystkich zaznaczonych punktów losujemy 4 punkty. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowane punkty są wierzchołkami:

- trapezu,
- równoległoboku.

Я 20. Z okazji zakończenia nauki w liceum uczniowie 24-osobowej klasy postanowili wykonać kolaż przedstawiający fotografie wszystkich uczniów wraz z fotografią wychowawczynie. Kolaż zostanie wykonany na kwadratowej tablicy podzielonej na 25 małych jednakowych kwadratów. W samym środku tablicy będzie umieszczone zdjęcie wychowawczynie, a na pozostałych polach losowo zostaną rozmieszczone zdjęcia uczniów. Do klasy uczęszcza tylko pięciu chłopców. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zdjęcia chłopców będą umieszczone w jednym rzędzie lub jednej kolumnie.

Я 21. W rozwinięciu wyrażenia $(a + b)^n$ współczynniki przy szóstym i dziesiątym wyrazie są równe. Wyznacz współczynnik przy siódmym i ósmym wyrazie tego rozwinięcia.

PRZED MATURĄ

1. Z wierzchołków sześcianu $ABCDEFGH$ losujemy jednocześnie dwa różne wierzchołki. Prawdopodobieństwo tego, że wierzchołki te będą końcami przekątnej sześcianu $ABCDEFGH$, jest równe:

- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{1}{14}$ D. $\frac{3}{7}$

2. Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, większych od 700, w których każda cyfra należy do zbioru $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ i żadna cyfra się nie powtarza, jest:

- A. 108 B. 60 C. 40 D. 299

3. Gracz rzuca dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry i oblicza sumę liczb wyrzuconych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 4 lub 5, lub 6.

4. Andrzej ma w szafie 4 koszule: czerwoną, żółtą, zieloną i niebieską; 3 pary spodni: niebieskie, czarne i szare; oraz 5 par butów: czarne, szare, zielone, czerwone i niebieskie. Andrzej wybiera z szafy zestaw ubrania: jedną koszulę, jedną parę spodni i jedną parę butów. Zestawy ubrania wybierane przez Andrzeja określimy jako różne, gdy będą różniły się kolorem chociaż jednego rodzaju elementu ubioru w zestawie.

4.1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich możliwych, różnych zestawów ubrań, jakie może wybrać Andrzej, jest równa:

- A. 12 B. 72 C. 60 D. 720

4.2. Oblicz, na ile sposobów można wybrać taki zestaw, w którym dokładnie jeden element ubioru będzie niebieski.

5. Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych parzystych, w których cyfra 7 występuje dokładnie jeden raz, jest:

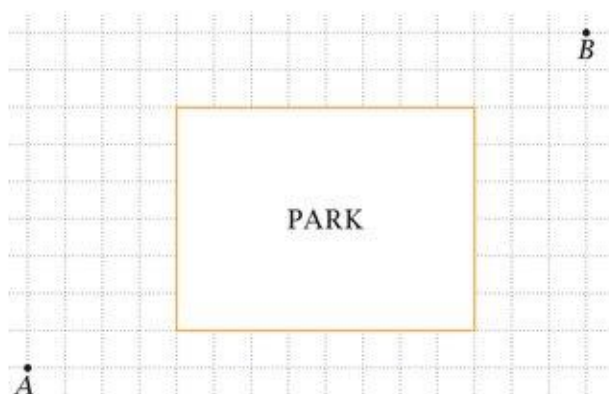
- A. 85 B. 90 C. 100 D. 150

6. Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 5, jest równe:

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{5}{100}$ C. $\frac{5}{90}$ D. $\frac{18}{90}$

7. Spośród wszystkich czterocyfrowych całkowitych liczb dodatnich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba będzie parzysta, a w jej zapisie dziesiętnym wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 3.

- 8.** Paweł i Grzegorz postanowili zagrać w grę losową. Ich wspólny kolega będzie kolejno rzucał sześcienną symetryczną kostką do gry, której ścianki są oznaczone od 1 do 6. Gdy na kostce wypadnie liczba oczek mniejsza od 4, to Grzegorz daje Pawłowi 10 żetonów, a gdy na kostce wypadnie liczba oczek równa 6, to Paweł daje Grzegorzowi x żetonów. W pozostałych przypadkach żaden z graczy nie zyskuje ani nie traci żetonów. Paweł i Grzegorz sprawiedliwie ustalili liczbę x żetonów tak, aby wartość oczekiwana zysku z gry Pawła była równa wartości oczekiwanej zysku z gry Grzegorza. Oblicz ustaloną przez Pawła i Grzegorza liczbę x żetonów.
- 9.** Dane są dwie urny z kulami. W pierwszej urnie jest 10 kul: 8 białych i 2 czarne, w drugiej jest 8 kul: 5 białych i 3 czarne. Wylosowanie każdej z urn jest jednakowo prawdopodobne. Wylosowano jedną z tych urn i wyciągnięto z niej losowo jedną kule. Wyciągnięta kula była czarna. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana kula pochodziła z pierwszej z tych urn, jest równe:
- A. $\frac{2}{18}$ B. $\frac{15}{23}$ C. $\frac{8}{23}$ D. $\frac{5}{18}$
- 10.** Oblicz, ile jest liczb dziesięciocyfrowych takich, że suma cyfr w każdej z tych liczb jest równa 13 i żadna cyfra nie jest zerem. W poniższych kratkach wpisz kolejno — od lewej do prawej — cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.
- | | | |
|--|--|--|
| | | |
|--|--|--|
- 11.** Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią. Ze zbioru
- $$M = \{1, 2, 3, \dots, 3n + 1\}$$
- losujemy jednocześnie trzy liczby. Zdarzenie A odpowiada jednoczesnemu wylosowaniu ze zbioru M trzech liczb, takich że suma tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A .
- 12.** W pewnym mieście jest prostopadły układ ulic, a ruch na każdej z nich jest dwukierunkowy. W centrum miasta znajduje się park, gdzie obowiązuje całkowity zakaz ruchu pojazdów. Schemat ulic w tym mieście wraz z położeniem parku przedstawiono poniżej na rysunku. Tomek znajduje się w punkcie A miasta i chce dojechać najkrótszą drogą do punktu B . Oblicz, ile jest najkrótszych dróg z A do B .



- Я 13.** W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.
- Я 14.** Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.
- Я 15.** Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7, 9, bez powtarzania jakiegokolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

PRAWDOPODOBIENSTWO

CZĘŚĆ 2

Zdarzenia A i B nazywamy **wykluczającymi się**, jeśli $A \cap B = \emptyset$.

Dla dowolnych dwóch zdarzeń A i B zachodzi równość:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Jeśli zdarzenia A i B się wykluczają, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A i B będą zdarzeniami w pewnym doświadczeniu losowym i $P(B) > 0$. **Prawdopodobieństwem warunkowym** zdarzenia A , przy założeniu, że zaszło zdarzenie B , nazywamy iloraz $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Liczbę tę oznaczamy symbolem $P(A|B)$ i obliczamy ze wzoru:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Niech $B_1, B_2, \dots, B_n$ będą zdarzeniami spełniającymi następujące warunki:

- zdarzenia te parami się wykluczają,
- prawdopodobieństwa tych zdarzeń są różne od 0,
- zawsze musi zajść przynajmniej jedno z nich, tzn. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$.

Wówczas dla każdego zdarzenia A zachodzi równość:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Wzór Bayesa

Niech A i B będą zdarzeniami takimi, że $P(A) \neq 0$ oraz $P(B) \neq 0$. Wówczas:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Zdarzenia niezależne

Mówimy, że zdarzenia A i B są **niezależne**, gdy zachodzi równość:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Uwaga. Jeśli w pewnym doświadczeniu losowym zdarzenia A i B są niezależne, to również niezależne są zdarzenia A' i B , A i B' oraz A' i B' .

Mówimy, że trzy zdarzenia A, B i C są niezależne, jeśli niezależne są dowolne dwa spośród nich oraz zachodzi równość:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Schemat Bernoullego

Schemat Bernoullego to doświadczenie polegające na wykonaniu pewnej liczby prób, przy czym:

- wyniki prób nie zależą od siebie,
- w każdej próbie możliwe są dwa wyniki — sukces lub porażka (jeśli prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p , to prawdopodobieństwo porażki jest równe $1 - p$).

W schemacie Bernoullego prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów w n próbach oznaczamy symbolem $P(S_n = k)$. Można je obliczać, korzystając ze wzoru:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

n — liczba prób

k — liczba sukcesów

p — prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie

SUMA I ILOCZYN ZDARZEŃ

Я1. Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Rozważ zdarzenia:

A — Suma wyrzuconych oczek jest liczbą parzystą.

B — Co najmniej raz wyrzucono liczbę oczek podzielną przez 3.

C — Iloczyn wyrzuconych oczek jest liczbą dwucyfrową.

Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu losowemu:

a) $A \cap B$

c) A'

e) $A' \cup C'$

b) $B \cup C$

d) $A' \cap B$

f) $C \cap A'$

Я2. Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. Opisz słowami sumę i iloczyn zdarzeń:

a) A — Wylosowano karo.

B — Wylosowano kiera.

b) A — Wylosowano damę.

B — Wylosowano pika.

c) A — Wylosowano kiera.

B — Wylosowano kartę koloru czerwonego.

Я3. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania gry, w której niemożliwy jest remis, oraz:

- a) prawdopodobieństwo przegranej wynosi $\frac{1}{6}$,
- b) prawdopodobieństwo przegranej jest równe prawdopodobieństwu wygranej,
- c) szansa na wygraną jest cztery razy większa niż ryzyko przegranej.

Я4. Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. Rozważ zdarzenia:

- A — Wylosowano asa.
- B — Wylosowano pika.

Zapisz podane poniżej zdarzenie za pomocą zdarzeń A , B , zdarzeń przeciwnych oraz symboli działań na zbiorach, a następnie oblicz jego prawdopodobieństwo.

- a) Wylosowaną kartą będzie as lub pik.
- b) Wylosowaną kartą będzie as pik.
- c) Wylosowaną kartą nie będzie as ani pik.
- d) Wylosowaną kartą nie będzie as pik.

Я5. Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej raz wypadnie szóstka.

Я6. Losujemy jedną z narysowanych obok figur. Rozważ zdarzenia:

- A — Wylosowano kwadrat.
- B — Wylosowano czarną figurę.
- C — Wylosowano kółko.
- D — Wylosowano pomarańczową figurę.

a) Opisz słowami zdarzenia:

$$A \cap B, C \cup D, A', D', A' \cap B, A' \cap D', A \cup B'.$$

b) Wśród rozważanych zdarzeń wskaż wszystkie pary zdarzeń przeciwnych i wszystkie pary zdarzeń wykluczających się.



Я7. Rzucamy raz symetryczną dwunastościenną kostką do gry. Rozpatrz zdarzenia:

- A — Wyrzucono liczbę podzielną przez 4.
- B — Wyrzucono liczbę nie większą niż 3.
- C — Wyrzucono liczbę będącą liczbą pierwszą.
- D — Wyrzucono liczbę 5, 6 lub 7.

Wśród podanych par zdarzeń wskaż zdarzenia wykluczające się.

- a) $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap D$, $C \cap D$
- b) $A' \cap B'$, $B' \cap C'$, $A' \cap D'$, $C' \cap D'$
- c) $(A \cup B) \cap (C \cap D)$, $(B \cap C)' \cap D$, $B \cap (A' \cap D)$, $(A \cup D)' \cap (B' \cup C')$

Я 8. Losujemy 1 osobę spośród wszystkich mieszkańców Polski. Rozważ zdarzenia:

A — Wylosowana osoba jest płci męskiej.

B — Wylosowana osoba jest dzieckiem.

Zapisz podane poniżej zdarzenie za pomocą zdarzeń A , B , zdarzeń przeciwnych oraz symboli działań na zbiorach:

a) Wylosowana osoba jest płci żeńskiej.

c) Wylosowana osoba jest chłopcem.

b) Wylosowana osoba jest dziewczynką.

d) Wylosowana osoba jest kobietą.

Я 9. Oblicz $P(A \cup B)$, jeżeli:

a) $P(A) = 0,2$

b) $P(A') = \frac{3}{10}$

$P(B) = 0,45$

$P(B') = \frac{3}{5}$

$P(A \cap B) = 0,15$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Я 10. Oblicz $P(A \cap B)$, jeżeli:

a) $P(A) = \frac{2}{9}$

b) $P(A') = \frac{3}{4}$

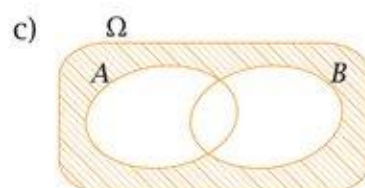
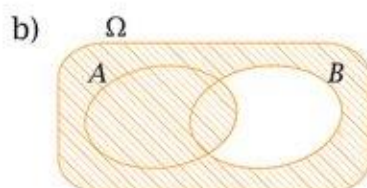
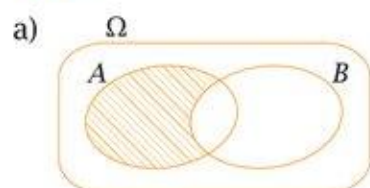
$P(B) = \frac{1}{3}$

$P(B') = \frac{5}{8}$

$P(A \cup B) = \frac{4}{9}$

$P((A \cup B)') = \frac{2}{5}$

Я 11. Zapisz za pomocą symboli A , B , $\cup$, $\cap$, $'$ zdarzenie zaznaczone na diagramie.



Я 12. Wiedząc, że $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, oblicz.

a) $P(A')$

b) $P(A \cap B)$

c) $P(A' \cap B)$

Я 13. Wiedząc, że $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$, $P(A' \cap B') = \frac{3}{10}$, oblicz.

a) $P(B)$

b) $P(B \cap A')$

c) $P(A \cap B')$

Я 14. Wiedząc, że $P(A) = \frac{1}{3} \cdot P(A')$, $P(B') = \frac{1}{4} \cdot P(B)$, $P(A \cup B) = \frac{19}{20}$, oblicz.

a) $P(A \cap B)$

b) $P((A \cup B)')$

c) $P(A' \cup B)$

Я 15. Oblicz $P(A \cap B)$, jeżeli:

a) $P(A' \cup B') = 0,9$

b) $P(A' \cap B') = \frac{1}{7}$, $P(A \cap B') = \frac{2}{7}$, $P(A' \cap B) = \frac{3}{7}$

Я 16. Oblicz $P(A \cup B)$, jeżeli:

a) $P(A \cup B') = \frac{8}{11}$

b) $P(A \cap B) = 0,12$

$P(A') = \frac{7}{11}$

$P(A' \cap B) = 0,18$

$P(B') = \frac{6}{11}$

$P(A') = 0,6$

Я 17. Wiedząc, że $P(A' \cap B') = \frac{1}{5}$, $P(A' \cup B') = \frac{9}{10}$ i $P(A' \cap B) = P(A \cap B')$, oblicz.

a) $P(A \cup B)$

b) $P(A)$

c) $P(A \cup B')$

Я 18. O zdarzeniach A , B , C wiadomo, że zdarzenia A i B są wykluczające się oraz:

$$P(A \cap C) = 0,2 \quad P(B \cap C) = 0,25 \quad P(A) = 0,35 \quad P(B) = 0,4 \quad P((A \cup B \cup C)') = 0,2$$

Oblicz prawdopodobieństwo poniższego zdarzenia.

a) C

b) $A \cup C$

c) $B' \cup C$

Я 19. Z talii 24 kart do gry (od dziewiątek do asów) losujemy 5 kart. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego asa, jeśli wyciągnięte kolejno karty:

a) wracają do talii,

b) nie wracają do talii.

Я 20. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 120\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A — Wylosowano liczbę podzielną przez 6 lub przez 10.

B — Wylosowano liczbę, która nie jest podzielna przez 5 ani przez 4.

Я 21. Z pudełka, w którym znajduje się sześć kul białych ponumerowanych od 1 do 6, osiem kul czarnych ponumerowanych od 7 do 14 oraz jedenaście kul zielonych ponumerowanych od 15 do 25 losujemy jedną kulę. Rozważ zdarzenia:

A — Wylosowano kulę białą lub zieloną.

B — Wylosowano kulę z numerem mniejszym od 10.

C — Wylosowano kulę zieloną z numerem nieparzystym.

Oblicz prawdopodobieństwo poniższego zdarzenia.

a) $A \cap B$

c) $A' \cap B'$

e) $(A \cup B \cup C)'$

b) $A \cup C'$

d) $B \cap C'$

f) $A' \cup B' \cup C'$

Я 22. Około 20% Polaków ma grupę krwi B. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 30 pasażerów autobusu choć jeden ma grupę krwi B.

Я 23. Aneta rzuca trzy razy lotkami do tarczy. Prawdopodobieństwo p trafienia w środek tarczy jest za każdym razem takie samo. Prawdopodobieństwo, że w trzech strzałach trafi ona lotką w środek tarczy przynajmniej jeden raz, wynosi $\frac{7}{8}$. Oblicz p .

Я24. W klasie liczącej 30 uczniów przeprowadzono ankietę dotyczącą języków angielskiego i niemieckiego. Uczniowie mogli zaznaczyć, że lubią jeden język, oba języki lub nie wskazać żadnego z nich. Wyniki tej ankiety były następujące: 60% wskazało wyłącznie język angielski, co szósty uczeń wskazał wyłącznie język niemiecki, cztery osoby wskazały oba te języki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń w tej klasie:

- a) lubi język angielski,
- b) lubi język niemiecki,
- c) nie lubi żadnego z tych języków.

Я25. Czterystu maturzystom zadano dwa pytania: *Czy na maturze zdajesz egzamin z matematyki na poziomie rozszerzonym? Czy na maturze zdajesz egzamin z historii na poziomie rozszerzonym?* Okazało się, że co czwarty maturzysta zdaje rozszerzoną historię, 45% maturzystów zdaje rozszerzoną matematykę, 2% maturzystów wybrało zarówno rozszerzoną matematykę, jak i historię. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany maturzysta:

- a) nie zdaje matury ani z rozszerzonej historii, ani z rozszerzonej matematyki,
- b) zdaje maturę z rozszerzonej historii, ale nie zdaje z rozszerzonej matematyki.

Я26. Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba z pewnej grupy jest wysoka, wynosi 0,7, że ma jasne włosy — 0,35, że nie posiada żadnej z tych cech — 0,05. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba z tej grupy:

- a) jest wysoka i jasnowłosa,
- b) jest niewysoka i ma jasne włosy,
- c) jest wysoka, ale nie ma jasnych włosów,
- d) nie jest wysoka lub ma jasne włosy.

Я27. Marcin kupił herbatę i paluszki w barze w pociągu i niesie je do stolika. Prawdopodobieństwo, że wyleje herbatę, wynosi $\frac{1}{5}$, że rozsypie paluszki — $\frac{1}{10}$, a prawdopodobieństwo, że zarówno wyleje herbatę, jak i rozsypie paluszki, wynosi $\frac{1}{20}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że Marcin:

- a) wyleje herbatę lub rozsypie paluszki,
- b) nie wyleje herbaty ani nie rozsypie paluszków,
- c) wyleje herbatę, ale nie rozsypie paluszków,
- d) rozsypie paluszki, ale nie wyleje herbaty.

Я28. W torebce znajdują się cukierki, z których 20% stanowią cukierki czekoladowe. Wśród cukierków czekoladowych co drugi ma nadzienie. Wśród wszystkich cukierków co drugi ani nie jest czekoladowy, ani nadziewany. Losujemy jeden cukierek. Oblicz prawdopodobieństwo, że trafi nam się cukierek:

- a) nadziewany,
- b) który nie jest czekoladowy,
- c) nadziewany, ale nie czekoladowy,
- d) czekoladowy, ale bez nadzienia.

PRAWDOPODOBIENSTWO WARUNKOWE

Я29. Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania jedynki, jeśli wiadomo, że:

- a) wypadła nieparzysta liczba oczek,
- b) wypadły co najwyżej 2 oczka,
- c) wypadła parzysta liczba oczek,
- d) wypadła liczba niepodzielna przez 3.

Я30. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) suma wyników w obu rzutach wyniesie 6,
- b) suma wyników w obu rzutach wyniesie 6, jeśli wiadomo, że za pierwszym razem wypadły 3 oczka,
- c) suma wyników w obu rzutach wyniesie 6, jeśli wiadomo, że za każdym razem wyrzucono parzystą liczbę oczek,
- d) suma wyników w obu rzutach wyniesie 6, jeśli wiadomo, że za pierwszym razem wyrzucono liczbę oczek nie mniejszą od liczby oczek wyrzuconych za drugim razem.

Я31. a) W dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry za każdym razem wyrzucono nieparzystą liczbę oczek. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że iloczyn wyrzuconych oczek jest większy od 8.

b) W dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry iloczyn wyrzuconych oczek jest większy od 12. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za każdym razem wyrzucono nieparzystą liczbę oczek.

c) W dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry za pierwszym razem wyrzucono mniej oczek niż za drugim razem. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za każdym razem wyrzucono parzystą liczbę oczek.

d) Suma wyrzuconych oczek w dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry jest liczbą większą od 5. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że co najmniej raz wyrzucono parzystą liczbę oczek.

e) Iloczyn wyrzuconych oczek w dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry jest mniejszy od 20. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za każdym razem wyrzucono liczbę oczek będącą liczbą pierwszą.

f) W dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry co najmniej raz wypadła czwórka. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek jest nie mniejsza od 8.

Я32. Wylosowano jedną kartę z talii 52 kart do gry. Rozważ zdarzenia:

A — Wylosowano figurę. B — Wylosowano waleta. C — Wylosowano pika.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

- a) A b) B c) $B|A$ d) $A|B$ e) $B|C$ f) $C|A$

Я33. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 25\}$ losujemy jedną liczbę. Rozpatrz zdarzenia:

A — Wylosowano liczbę podzielną przez 3 lub 4.

B — Wylosowano liczbę większą od 8.

C — Wylosowano liczbę nieparzystą lub liczbę podzielną przez 5.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

a) $A|B$

c) $B|C$

e) $A'|C'$

b) $B|A$

d) $C|A$

f) $C|B'$

Я34. W pudełku są cukierki: 10 czekoladek i 5 krówek. Losujemy dwa cukierki. Oblicz prawdopodobieństwo, że drugim wylosowanym cukierkiem będzie krówka, jeśli:

a) pierwszym wylosowanym cukierkiem jest krówka,

b) pierwszym wylosowanym cukierkiem jest czekoladka.

Я35. W grze w tysiąca używa się talii 24 kart (od dziewiątek do asów). Każda z kart ma określoną wartość: as — 11 punktów, król — 4 punkty, dama — 3 punkty, walet — 2 punkty, dziesiątka — 10 punktów i dziewiątka — 0 punktów. Z talii wylosowano dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) suma punktów przypisanych tym dwóm kartom jest równa 14, jeśli wiadomo, że pierwszą wylosowaną kartą był król,

b) suma punktów przypisanych tym dwóm kartom jest równa 6, jeśli wiadomo, że pierwszą wylosowaną kartą była dama,

c) suma punktów przypisanych tym dwóm kartom jest większa od 10, jeśli wiadomo, że pierwszą wylosowaną kartą był walet,

d) jedną z tych kart jest walet, jeśli wiadomo, że suma punktów przypisanych wylosowanym kartom wynosi 12,

e) jedną z tych kart jest dama, jeśli wiadomo, że suma punktów przypisanych wylosowanym kartom wynosi 14,

f) jedną z tych kart jest król, jeśli wiadomo, że suma punktów przypisanych wylosowanym kartom wynosi 6.

Я36. W pudełku znajduje się 10 kul białych i 6 kul czarnych. Losujemy jedną kulę, zatrzymujemy ją i losujemy następnie drugą kulę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosujemy kulę białą, jeżeli za pierwszym razem wylosowano kulę:

a) czarną,

b) białą.

Я37. Z talii 52 kart do gry wylosowano dwie. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) drugą z wyciągniętych kart jest trefl,

b) pierwszą z wyciągniętych kart jest karo, jeżeli wiadomo, że drugą wyciągniętą kartą jest trefl.

- Я38.** W tabeli podano informacje o liczbie osób krótkowłosych i długowłosych w pewnej grupie liczącej 150 uczniów.

	Liczba osób krótkowłosych	Liczba osób długowłosych	Razem
Liczba dziewczyn	34	36	70
Liczba chłopców	76	4	80
Razem	110	40	150

Z grupy tej wylosowano jedną osobę. Rozważ zdarzenia:

Dz — Wylosowano dziewczynę.

Ch — Wylosowano chłopca.

K — Wylosowano osobę krótkowłosą.

D — Wylosowano osobę długowłosą.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

- | | | |
|----------------|------------|-------------|
| a) $Dz \cap K$ | d) $K Dz$ | g) $Dz K'$ |
| b) $Ch \cap D$ | e) $Ch D$ | h) $D Dz'$ |
| c) $Dz K$ | f) $Ch D'$ | i) $K' Ch'$ |

- Я39.** W klasie IVa uczy się 15 dziewczyn i 9 chłopców. Losujemy z klasy dwie osoby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- za drugim razem wylosowano chłopca, jeżeli za pierwszym razem wylosowano dziewczynę,
- za drugim razem wylosowano dziewczynę, jeżeli za pierwszym razem również wylosowano dziewczynę,
- za drugim razem wylosowano dziewczynę, jeżeli za pierwszym razem wylosowano chłopca.

- Я40.** Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Rozważ zdarzenia:

A — Suma wyników w trzech rzutach jest równa 5.

B — Suma wyników w dwóch pierwszych rzutach jest mniejsza od 4.

C — Trzeci wynik jest większy od drugiego.

Oblicz: $P(A)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(C|A)$, $P(C|B)$.

- Я41.** a) W pewnej klasie 70% uczniów ma rowery, a 40% uczniów ma rowery górskie. Oblicz prawdopodobieństwo, że uczeń, który ma rower, ma rower górski.
- b) Jeśli losowo wybierzemy jedną osobę z całego świata, to z prawdopodobieństwem $\frac{3}{5}$ mieszka ona w Azji. Losowo wybrany mieszkaniec Azji to z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ Chińczyk. Oblicz, jaki procent ludności świata stanowią Chińczycy.

Я42. W pewnej klasie 40% uczniów stanowią chłopcy. Wśród wszystkich uczniów tej klasy 30% będzie zdawać maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym, z czego $\frac{1}{3}$ to chłopcy. Oblicz prawdopodobieństwo, że maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym będzie zdawać:

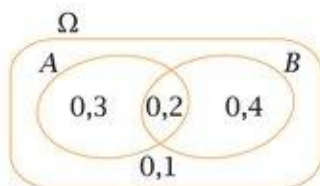
- losowo wybrany uczeń,
- losowo wybrany chłopiec,
- losowo wybrana dziewczyna.

Я43. Rzucamy czterokrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek jest:

- większa od 20, jeśli w trzech pierwszych rzutach wyrzucono same szóstki,
- nie większa od 18, jeśli suma oczek wyrzuconych w dwóch ostatnich rzutach wyniosła 10,
- większa od 15, jeżeli wiadomo, że suma oczek otrzymanych w trzech pierwszych rzutach była równa 11.

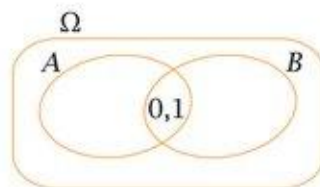
Я44. Liczby podane na diagramie oznaczają prawdopodobieństwa odpowiednich zdarzeń. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

- $A|B$
- $A|B'$
- $B|A$
- $B|A'$
- $A'|B$
- $A'|B'$



Я45. Liczba podana na diagramie oznacza prawdopodobieństwo odpowiedniego zdarzenia. Przerysuj diagram i uzupełnij go, wiedząc, że $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{3}{10}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

- A'
- $A|B$
- $A'|B$
- $B|A$



Я46. Zdarzenia A i B spełniają warunki: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

- $A|B$
- $A'|B$
- $B|A$
- $A|B'$
- $B|A'$
- $A'|B'$

Я47. Wiedząc, że $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$, $P(A' \cap B') = 0,2$, oblicz.

- $P(A'|B')$
- $P(A|B)$
- $P(B|A')$

Я48. a) Wiedząc, że $P(A|B) = \frac{2}{5}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$ i $P(B') = \frac{9}{10}$, oblicz $P(A)$ oraz $P(A \cup B)$.

b) Wiedząc, że $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{5}$ i $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, oblicz $P(A' \cup B')$ oraz $P(A|B)$.

c) Wiedząc, że $P(A \cup B) = \frac{8}{9}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ i $P(A \cap B') = \frac{1}{9}$, oblicz $P(B|A)$ oraz $P(A|B)$.

d) Wiedząc, że $P(A) = P(A')$, $\frac{P(B)}{P(B')} = \frac{5}{3}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, oblicz $P(A'|B)$ oraz $P(B'|A')$.

- Я49.** a) Zdarzenia A i B się wykluczają oraz $P(B) \neq 0$. Wiedząc, że $P(A) \neq 0$, oblicz $P(A|B)$.
b) Oblicz $P(A|A)$ oraz $P(A|A')$.
- Я50.** Uzasadnij, że dla dowolnych zdarzeń A i B , jeśli zdarzenie B nie jest niemożliwe, to $P(A|B) + P(A'|B) = 1$.
- Я51.** Wykaż, że jeżeli $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ i $P(A|B) \geq P(B|A)$, to $P(B) \leq P(A)$.
- Я52.** W torebce z cukierkami znajdują się landrynki o następujących smakach: 4 mandarynkowe, 6 ananasowych i 5 wiśniowych. Wybieramy losowo z torebki jedną landrynkę, a następnie drugą.
a) Wylosowano landrynki różnych smaków. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród nich jest mandarynkowa.
b) Za pierwszym razem nie wylosowano landrynki ananasowej. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy ją za drugim razem.
c) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy landrynki o tym samym smaku, wiedząc, że nie będzie wśród nich landrynki wiśniowej.
d) Co najwyżej jedna z wylosowanych landrynek jest mandarynkowa. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna będzie wiśniowa.
- Я53.** Cztery karty: as pik, as kier, król trefl i dama karo zostały potasowane i rozdane dwóm graczom: A i B .
a) Wiadomo, że gracz A ma asa. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że gracz A ma dwa asy.
b) Wiadomo, że gracz A ma asa pik. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że gracz A ma dwa asy.
- Я54.** Zdarzenia A i B spełniają warunki: $P(A|B) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{2}{5}$ i $P(A|B') = \frac{3}{16}$. Oblicz $P(A)$ oraz $P(B)$.
- Я55.** Wiedząc, że $P(A|B) = \frac{1}{3}$, oblicz $P(A'|B)$.

PRAWDOPODOBIENSTWO CAŁKOWITE

- Я56.** W pewnym klubie rowerowym 20% członków ma nowe rowery, a 80% — stare. Nowy rower może się w czasie wycieczki zepsuć z prawdopodobieństwem 0,02, a stary — z prawdopodobieństwem 0,1. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że podczas wycieczki awarii ulegnie losowo wybrany rower.

Я57. Rzucamy symetryczną monetą. Jeśli wypadnie orzeł, rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry, a jeśli reszka — trzema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Przyjmijmy oznaczenia:

O — Na monecie wypadł orzeł.

A — Na co najmniej jednej kostce wypadła szóstka.

Oblicz $P(A|O)$ oraz $P(A|O')$, a następnie ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite oblicz $P(A)$.

Я58. W fabryce słodczy pewien gatunek cukierków produkowany jest przez trzy maszyny. Pierwsza maszyna wytwarza 50% wszystkich cukierków produkowanych przez fabrykę, druga — 30%, a trzecia — 20%. Masy 12 g nie osiąga 30% cukierków pochodzących z pierwszej maszyny, 20% cukierków z drugiej maszyny i 15% z trzeciej.

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany cukierek wyprodukowany w tej fabryce miał masę mniejszą niż 12 g.

b) Po przeprowadzonej kontroli jakości produkcji zmieniono ustawienia pierwszej maszyny tak, że tylko 8% wytworzonych przez nią cukierków miało masę mniejszą niż 12 g. Oblicz, jakie jest teraz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany cukierek ma masę mniejszą niż 12 g.

c) Aby zredukować do 0,04 prawdopodobieństwo natrafienia na cukierek wyprodukowany w tej fabryce, którego masa nie osiąga 12 g, zmieniono ustawienia wszystkich maszyn tak, że prawdopodobieństwa wyprodukowania przez każdą z nich cukierka o masie mniejszej niż 12 g są równe. Oblicz te prawdopodobieństwa.

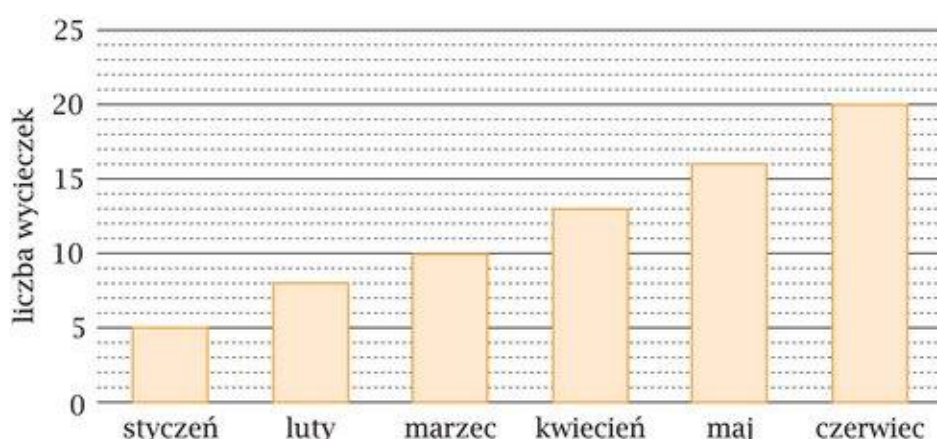
Я59. W pierwszym pudełku znajduje się 7 kul białych i 4 kule czarne, w drugim pudełku — 5 kul białych i 7 kul czarnych. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadnie liczba oczek podzielna przez 3, to losujemy kulę z pierwszego pudełka, w przeciwnym razie — losujemy kulę z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę białą.

Я60. W poniższej tabeli przedstawiono informację o liczbie uczniów w trzech równoległych klasach.

	Klasa Ia	Klasa Ib	Klasa Ic
dziewczyny	13	13	15
chłopcy	17	12	10
Razem	30	25	25

Rzucamy symetryczną ośmiościenną kostką od gry. Jeżeli wypadnie liczba mniejsza niż 5, to losujemy ucznia z klasy Ia, jeżeli wypadnie 5 lub 6 — ucznia z klasy Ib, w pozostałych wypadkach — ucznia z klasy Ic. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowanym uczniem będzie chłopiec.

- Я61.** W urnie znajduje się 6 kul białych i 6 kul czarnych. Rzucamy monetą, jeżeli wypadnie orzeł, to dokładamy jedną kulę białą do urny. Jeżeli wyrzucimy reszkę, to wyjmujemy jedną kulę białą z urny. Następnie losujemy jedną kulę z urny. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę białą.
- Я62.** W koszyku z orzechami umieszczono orzechy sprowadzone od trzech producentów: A, B i C. Wiadomo, że orzechów sprowadzonych od producenta C jest cztery razy więcej niż orzechów sprowadzonych od producenta A i trzy razy więcej niż orzechów sprowadzonych od producenta B. Wiadomo również, że 10% orzechów producenta A to orzechy puste. W przypadku producentów B i C odsetek ten wynosi odpowiednio 8% i 4%. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany orzech z koszyka nie będzie pusty.
- Я63.** Na stu chłopców uczących się w pewnej szkole siedmiu jest leworęcznych. Spośród wszystkich dziewcząt co dziewiąta jest leworęczna. Chłopcy stanowią w tej szkole 46% wszystkich uczniów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany z tej szkoły uczeń jest leworęczny.
- Я64.** Pewien sklep internetowy współpracuje z trzema firmami kurierskimi. Firma A odpowiada za 30% przesyłek, firma B — za 45%, a firma C — za 25%. Ustalono, że 90% przesyłek dystrybuowanych przez firmę A dociera do klientów na czas, w przypadku firm B i C odsetek ten wynosi odpowiednio: 95% i 85%. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z tego sklepu przesyłka dotrze na czas do odbiorcy.
- Я65.** Liczbę wycieczek organizowanych przez pewne biuro podróży w poszczególnych miesiącach pierwszego półrocza przedstawiono na poniższym diagramie.



Wiadomo, że połowę wycieczek organizowanych w okresie marzec-czerwiec stanowią wycieczki zagraniczne. W styczniu i w lutym biuro organizuje tylko dwie zagraniczne wycieczki w miesiącu. Państwo Kowalscy postanowili wybrać wycieczkę drogą losową. W tym celu rzucają najpierw kostką do gry i wybierają miesiąc odpowiadający wyrzuconej liczbie oczek (1 — styczeń, 2 — luty itd.). Następnie losują jedną wycieczkę organizowaną przez to biuro w wylosowanym miesiącu. Oblicz prawdopodobieństwo, że państwo Kowalscy wylosują wycieczkę zagraniczną.

Я66. W pracowni komputerowej pewnej szkoły 70% komputerów pochodzi z firmy ABC, a pozostałe 30% — z firmy XY. Prawdopodobieństwo awarii komputera marki ABC w ciągu roku wynosi 0,01, a komputera marki XY wynosi 0,02.

a) Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku popsuje się co najmniej jeden z 20 komputerów.

b) Oblicz prawdopodobieństwo, że popsuty komputer pochodzi z firmy XY.

Я67. W zajęciach wychowania fizycznego bierze udział 24 uczniów klasy IIb, w tym 8 dziewczyn. Na początku zajęć nauczyciel wybiera losowo uczniów do przeprowadzenia rozgrzewki. W tym celu rzuca kostką do gry. Jeżeli wyrzuci 1, 3 lub 6 oczek, to wybiera losowo jednego ucznia z całej klasy. Jeżeli wyrzuci 2 lub 5 oczek — wybiera dwie osoby z całej klasy. Natomiast jeżeli wyrzuci 4 oczka, to losuje dwie osoby różnej płci. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że do przeprowadzenia rozgrzewki:

a) zostanie wylosowana dokładnie jedna dziewczyna,

b) nie zostanie wylosowany żaden chłopak.

Я68. Pewien koszykarz podczas wykonywania trzech rzutów osobistych rzuca celnie do kosza przy pierwszej próbie z prawdopodobieństwem 0,7. Zauważono, że w wypadku trafienia do kosza prawdopodobieństwo celnego rzutu w kolejnej próbie wzrasta o 0,04. Natomiast w wypadku, gdy zawodnik nie trafi do kosza, to prawdopodobieństwo trafienia w następnej próbie maleje o 0,06. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że koszykarz ten, rzucając trzykrotnie do kosza, odda:

a) trzy celne rzuty,

b) dwa celne rzuty.

Я69. W pewnej loterii fantowej kupujemy 1 los spośród 20 losów. W dostępnej puli losów znajdują się 3 losy wygrywające oraz 4 losy uprawniające do ponownego wyciągnięcia losu. Wybieramy losowo 1 los. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że uda nam się wygrać w tej loterii.

Я70. W biurku znajdują się 3 szuflady. W szufladach nr 1 i 2 znajduje się po 6 niebieskich i po 8 czarnych długopisów. Trzecia szuflada jest początkowo pusta. Z szuflady nr 1 i 2 losujemy po jednym długopisie i umieszczamy je w szufladzie nr 3. Następnie z trzeciej szuflady losujemy jeden długopis. Oblicz prawdopodobieństwo, że z trzeciej szuflady wylosujemy długopis niebieski.

Я71. W pewnym mieście 80% rodzin mieszka w blokach mieszkalnych, a 20% w domkach jednorodzinnych. Komendant straży pożarnej obliczył, że pożar w bloku zdarza się w ciągu roku z prawdopodobieństwem 0,001, a w domku — z prawdopodobieństwem trzykrotnie większym.

Pewnego dnia do remizy przybiegł człowiek, wołając „Pali się!”. „Założę się, że w domku” — pomyślał komendant. Ustal, czy zrobiłby słusznie, gdyby naprawdę się założył. Oblicz, ile procent pożarów stanowią pożary w domkach.

Я72. Na pewną chorobę mężczyźni zapadają pięć razy częściej niż kobiety. Badania nowego leku wykazały, że pomaga on 60% chorych mężczyzn oraz 40% chorych kobiet.

- Oblicz prawdopodobieństwo, że lek pomoże choremu.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba chora, której pomógł lek, jest kobietą.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba chora, której lek nie pomógł, jest kobietą.

Я73. Do klasy IVa uczęszcza 12 dziewczyn i 18 chłopców, a do klasy IVb — 20 dziewczyn i 5 chłopców. Z losowo wybranej klasy wylosowano jedną osobę. Okazało się, że jest nią dziewczyna. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że uczęszcza ona do klasy IVb.

Я74. Wśród pacjentów pewnego szpitala cukrzycę stwierdzono u 12% mężczyzn i 15% kobiet. Wiadomo, że kobiet jest w szpitalu dwa razy więcej niż mężczyzn. Do badania kontrolnego wybrano losowo jedną osobę. Okazało się, że u osoby tej zdiagnozowano wcześniej cukrzycę. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowaną osobą był mężczyzna.

Я75. Kontroler jakości w firmie produkującej długopisy przeprowadza kontrolę długopisów zapakowanych do trzech ponumerowanych pudełek. W poniższej tabeli podano informację o liczbie długopisów w poszczególnych pudełkach.

	Pudełko 1.	Pudełko 2.	Pudełko 3.
Długopis niebieski	60	25	40
Długopis czerwony	10	25	30
Długopis czarny	30	50	30

Kontroler rzuca symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadnie parzysta liczba oczek — losuje dwa długopisy z pierwszego pudełka, jeżeli wypadnie jedno lub trzy oczka — losuje dwa długopisy z drugiego pudełka, jeżeli wypadnie pięć oczek — losuje dwa długopisy z trzeciego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wylosowanych długopisów

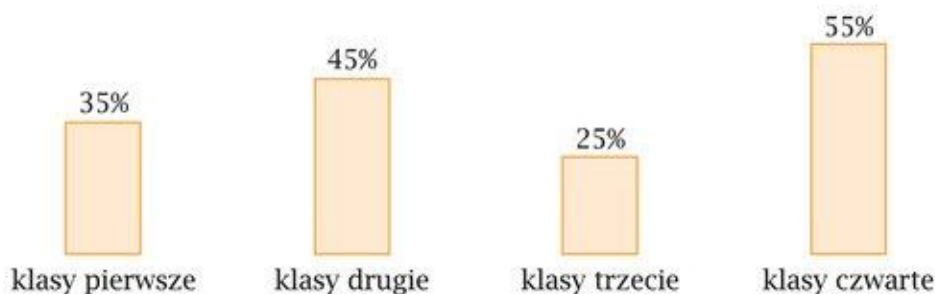
- będzie dokładnie jeden długopis niebieski,
- nie będzie długopisu czarnego.

Я76. W warzywniaku znajdują się dwie skrzynie, w których umieszczono jabłka i gruszki. W pierwszej skrzyni jest 12 jabłek i 8 gruszek, a w drugiej — 10 jabłek i 10 gruszek. Z pierwszej skrzyni przekładamy losowo wybrany owoc do drugiej. Następnie z drugiej skrzyni Ania losuje dwa owoce. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Ania wylosowała:

- dwa jabłka,
- co najmniej jedną gruszkę,
- jedno jabłko i jedną gruszkę.

Я77. W pudełku znajduje się 12 żetonów. Osiem z nich jest z jednej strony białych, a z drugiej czarnych. Cztery żetony są z obu stron białe. Losowo wybranym żetonem rzucono trzykrotnie i za każdym razem żeton upadł białą stroną do góry. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucono żetonem, który miał obie strony w białym kolorze.

Я78. W pewnym liceum sportowym przeprowadzono ankietę. Uczniów zapytano: *Czy regularnie grasz w siatkówkę?* Na diagramie przedstawiono, jaki procent uczniów z klas pierwszych, drugich, trzecich i czwartych udzielił na to pytanie odpowiedzi „tak”.



Z grupy uczniów składającej się z 20 pierwszoklasistów, 20 drugoklasistów, 20 trzecioklasistów i 20 czwartoklasistów wybrano jedną osobę. Okazało się, że gra ona regularnie w siatkówkę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że jest to uczeń klasy czwartej.

Я79. Do sklepu Kamila Urczaka trafiają jajka z dwóch gospodarstw. Z fermy Karola Ury pochodzi 90% wszystkich jaj, a pozostałe 10% dostarcza Kazimierz Woka. Wśród jajek K. Ury tylko 2% stanowią jajka zepsute, a wśród jajek K. Woki jest ich aż 1%.

- Oblicz prawdopodobieństwo, że kupując w sklepie K. Urczaka 10 jajek pochodzących z jednego gospodarstwa, nie trafimy na żadne zepsute.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że zepsute jajko ze sklepu K. Urczaka pochodzi z gospodarstwa K. Ury.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że niezepsute jajko z tego sklepu pochodzi z gospodarstwa K. Woki.

Я80. W pewnej grze komputerowej rycerz pokonuje smoka jednogłowego z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$, trzygłowego z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, a siedmiogłowego z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. W jego królestwie występują tylko smoki o podanej wyżej liczbie głów. Liczba tych smoków jest wprost proporcjonalna do liczby głów.

- Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rycerz pokona pierwszego napotkanego smoka.
- Rycerz pokonał smoka. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że ten smok miał 3 głowy.
- Rycerz nie pokonał smoka. Oblicz prawdopodobieństwo, że ten smok ma więcej niż 2 głowy.

- Я81.** Z jednego peronu odjechały dwa pociągi do dwóch różnych miejscowości. Do pierwszego wsiadło 40% oczekujących na peronie pasażerów, a do drugiego pozostałe 60%. Wśród pasażerów, którzy wsiadli do pierwszego pociągu, 6% wsiadło tam przez pomyłkę. Łącznie 3% wszystkich pasażerów wsiadło do złego pociągu.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że pasażer, który wsiadł do drugiego pociągu, wsiadł tam przez pomyłkę.
 - Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany pasażer wsiadł do pociągu, którym zamierzał jechać.
 - Pewien pasażer pomylił pociąg. Oblicz prawdopodobieństwo, że znalazł się w drugim pociągu.

ZDARZENIA NIEZALEŻNE

- Я82.** Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Sprawdź, czy podane zdarzenia są niezależne.
- A — Wypadła parzysta liczba oczek.
 B — Wypadła liczba oczek mniejsza od 5.
 - A — Wypadła parzysta liczba oczek.
 B — Wypadła liczba oczek mniejsza od 4.
 - A — Wypadła liczba oczek będącą liczbą pierwszą.
 B — Wypadło co najmniej 5 oczek.
- Я83.** W pewnym mieście 30% rodzin ma psy, a 10% ma koty. Rodzin, które mają zarówno psa, jak i kota, jest 2%. Czy zdarzenie: *Wybrana losowo rodzina ma psa* i zdarzenie: *Wybrana losowo rodzina ma kota* są niezależne?
- Я84.** Właściciel sklepu obliczył, że 70% jego klientów kupuje pieczywo, 40% — mleko, a 28% — zarówno pieczywo, jak i mleko. Do sklepu przyszedł kolejny klient. Czy zdarzenia: *Klient ten kupi pieczywo* oraz *Klient ten kupi mleko* są niezależne?

- Я85.** W tabeli obok przedstawiono dane dotyczące liczby ludności miast i wsi w Polsce. Czy zdarzenia: *Losowo wybrany mieszkaniec Polski mieszka w mieście* oraz *Losowo wybrany mieszkaniec Polski jest mężczyzną* są niezależne? Czy można powiedzieć, że miejsce zamieszkania zależy od płci?

	Kobiety	Mężczyźni
Miasto	12,3 mln	11,2 mln
Wieś	7,4 mln	7,3 mln

- Я86.** Młoda lekarka i doświadczona lekarka niezależnie od siebie zbadały tego samego pacjenta. Młoda lekarka myli się w swoich diagnozach przeciętnie w jednym na 10 przypadków, a doświadczona — w 6 na 100 przypadków. Oblicz prawdopodobieństwo, że diagnozy obu lekarek będą błędne.

Я87. We wtorek w ramach akcji promocyjnej 40% klientów sklepu odzieżowego otrzymało po jednej skarpetce. W środę rozdawano takie same skarpetki i co piąty klient otrzymywał po jednej. Jeden z klientów był w tym sklepie zarówno we wtorek, jak i w środę. Oblicz prawdopodobieństwo, że klient ten skompletuje w ten sposób parę skarpet.

Я88. Rozwiąż poniższe zadanie ułożone przez wybitnego polskiego statystyka, Jerzego Spławę-Neymana.

Bombowiec wypełni swoją misję tylko w takim wypadku, gdy nawigator znajdzie obiekt bombardowania, a bombardier trafi w znaleziony obiekt. Dla nawigatorów N i n prawdopodobieństwo znalezienia obiektu bombardowania wynosi odpowiednio 0,9 i 0,8. Dla bombardierów B i b prawdopodobieństwo trafienia w znaleziony obiekt wynosi 0,7 i 0,6. Obie załogi będą działać niezależnie od siebie, a obiekt zostanie zniszczony, jeżeli przynajmniej jedna z załóg wypełni swe zadanie. Jakie skompletowanie załóg: nb i NB czy nB i Nb da większe prawdopodobieństwo wypełnienia misji?

Я89. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Rozważ zdarzenia:

A — Za pierwszym razem wypadła parzysta liczba oczek.

B — W obu rzutach wypadło tyle samo oczek.

C — Suma oczek wyrzuconych na obu kostkach wynosi 4.

D — W obu rzutach wypadły mniej niż 4 oczka.

Sprawdź, czy zdarzenia są niezależne.

a) A i B b) B i C c) A i C d) C i D e) B i D f) A i D

Я90. Z talii 52 kart do gry losujemy po kolei dwie karty. Sprawdź, czy podane zdarzenia są niezależne.

a) A — Pierwsza wylosowana karta to pik.

B — Druga wylosowana karta to pik.

b) A — Pierwsza wylosowana karta to pik.

B — Druga wylosowana karta to trefl.

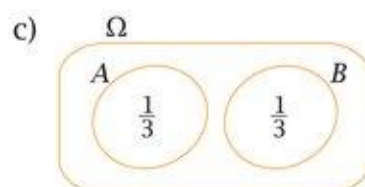
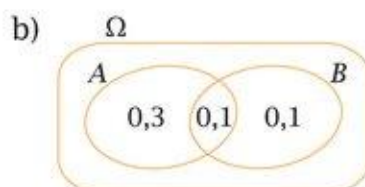
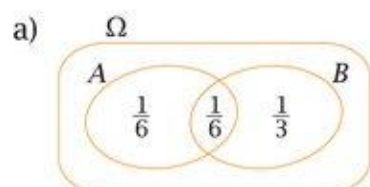
c) A — Pierwsza wylosowana karta to as.

B — Druga wylosowana karta to król.

d) A — Pierwsza wylosowana karta to as.

B — Druga wylosowana karta to trefl.

Я91. Na poniższym diagramie przedstawiono prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

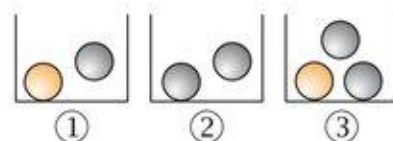


Я92. Dane są zdarzenia losowe A i B takie, że: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{10}$ i $P(A \cup B) = \frac{13}{20}$. Sprawdź, czy zdarzenia A i B' są niezależne.

Я93. W torebce znajduje się 20 cukierków, wśród których jest 16 owocowych i 10 w polewie czekoladowej. Z torebki wybrano losowo jeden cukierek. Czy zdarzenia: *Wylosowany cukierek jest owocowy* oraz *Wylosowany cukierek ma polewę czekoladową* są niezależne?

Я94. W pewnej klasie jest trzydziestu uczniów. Sześciu z nich będzie zdawać na maturze na poziomie rozszerzonym matematykę i fizykę, ośmiu będzie zdawać matematykę, ale nie będzie zdawać fizyki, a jeden będzie zdawał fizykę, ale nie będzie zdawał matematyki. Czy zdarzenia: *Losowo wybrany uczeń tej klasy zdaje matematykę* oraz *Losowo wybrany uczeń tej klasy zdaje fizykę* są niezależne?

Я95. Na rysunku obok przedstawiono trzy pudełka z kulami. Z każdego z tych pudełek losujemy po jednej kuli. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:



A — Wszystkie wyciągnięte kule są pomarańczowe.

B — Tylko jedna z wyciągniętych kul jest pomarańczowa.

C — Pomarańczową kulę wyciągnięto tylko z pudełka ①.

D — Pomarańczowe kule wyciągnięto tylko z pudełek ② i ③.

Sprawdź, czy wśród tych zdarzeń są pary zdarzeń niezależnych.

Я96. Zestaw do gry w domino składa się z 28 klocków. Każdy z nich podzielony jest na dwa pola, na każdym z pól może nie być oczek lub może się znajdować od 1 do 6 oczek oraz klocki się nie powtarzają. Z zestawu do gry wylosowano jeden klocek. Sprawdź, czy wśród podanych poniżej zdarzeń A , B i C są pary zdarzeń niezależnych.

A — Iloczyn liczb oczek na obu polach wylosowanego klocka jest mniejszy od 2.

B — Różnica liczb oczek na obu polach wylosowanego klocka jest równa 4 (od większej odejmujemy mniejszą).

C — Na co najmniej jednym polu klocka znajduje się 1 oczko.

Я97. Prawdopodobieństwo, że Karolina musi czekać na szkolny autobus krócej niż 1 minutę, wynosi 0,1. Oblicz prawdopodobieństwo, że Karolina:

a) będzie czekała na autobus krócej niż 1 minutę przez trzy kolejne dni,

b) w poniedziałek będzie czekała dłużej niż 1 minutę, ale w pozostałe cztery robocze dni tygodnia — krócej niż 1 minutę,

c) co najmniej raz w ciągu 5 roboczych dni tygodnia będzie czekała na autobus krócej niż 1 minutę.

Я 98. Pewne urządzenie składa się z dwóch elementów. Pierwszy z nich produkowany jest przez maszynę, która wytwarza 1% wadliwych elementów, a drugi przez drugą maszynę, która wytwarza 3% wadliwych elementów. Jeśli choć jeden element urządzenia jest wadliwy, to urządzenie nie działa. Oblicz prawdopodobieństwo, że urządzenie nie będzie działało.

Я 99. Na podstawie niektórych przekazów można przypuszczać, że Wilhelm Tell trafiał w środek tarczy z prawdopodobieństwem 0,9, a Robin Hood — z prawdopodobieństwem 0,95. Wyobraźmy sobie, że każdy z nich wykonał dwa strzały do tej samej tarczy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

- Wilhelm Tell trafił dwa razy w środek tarczy, a Robin Hood ani razu,
- wszystkie strzały Wilhelma Tella i Robin Hooda trafiły w środek tarczy,
- Wilhelm Tell i Robin Hood trafili w środek tarczy po jednym razie.

Я 100. Bill założył się z sąsiadem, że trafi strzałem z colta w podrzuconą dziesięciocentówkę. Prawdopodobieństwo, że Bill zgubił colta, wynosi $\frac{1}{100}$, że zapomniał go naładować — $\frac{1}{50}$, że rewolwer się zatnie — $\frac{1}{40}$, że Bill chybi — $\frac{1}{30}$, że nie ma dziesięciocentówki — $\frac{1}{20}$. Przyjmując, że nie ma żadnych innych czynników wpływających na celność trafienia, oblicz prawdopodobieństwo, że Bill wygra zakład z sąsiadem.

Я 101. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Rozważ zdarzenia:

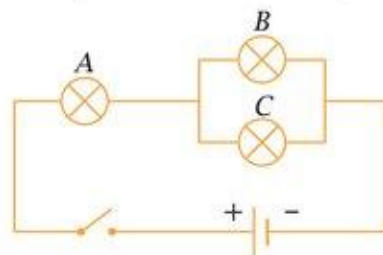
- A — Za pierwszym razem wypadło jedno oczko.
 B — Za drugim razem wypadła parzysta liczba oczek.
 C — Suma wyrzuconych oczek na obu kostkach jest równa 7.

Sprawdź, czy niezależne są zdarzenia:

- A i B
- B i C
- A i C
- A , B i C

Я 102. Budynek chroniony jest przez ochroniarza, psa i czujnik ruchu. Prawdopodobieństwo, że ochroniarz wykryje włamywacza, wynosi 85%, że zrobi to pies — 95%, a czujnik — 90%. Oblicz prawdopodobieństwo, że włamywacz zostanie złapany, jeśli po wykryciu ma 25% szans na ucieczkę.

Я 103. Po włączeniu obwodu każda z żarówek przepala się z prawdopodobieństwem 0,01. Oblicz dla każdej z żarówek prawdopodobieństwo, że będzie świeciła po włączeniu obwodu.



Я 104. Losujemy jedną kartę z talii 24 kart do gry (od dziewiątek do asów). Podaj przykłady zdarzeń A , B i C takich, że:

- A i B , B i C , C i A są niezależne, ale A , B i C nie są niezależne,
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$, ale zdarzenia A i B i C nie są niezależne.

SCHEMAT BERNOULLEGO

Я105. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

- a) dokładnie 1 orła w dwóch rzutach symetryczną monetą,
- b) dokładnie 2 orłów w czterech rzutach symetryczną monetą,
- c) dokładnie 3 orłów w sześciu rzutach symetryczną monetą.

Я106. Rzucamy 5 razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- a) dokładnie trzy razy wypadnie jedno oczko,
- b) co najmniej trzy razy wypadnie jedno oczko.

Я107. W torebce było 20 cukierków, w tym 5 nadziewanych. Jaś wyjął jeden cukierek, obejrzał, wrzucił z powrotem do torebki. Próbował tak 5 razy i dopiero ostatni cukierek zjadł. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród cukierków kolejno wylosowanych przez Jasia był co najmniej jeden nadziewany.

Я108. Paweł strzela z łuku do tarczy. Prawdopodobieństwo trafienia wynosi 0,7 i jest takie samo za każdym razem, gdy oddaje kolejny strzał do tarczy. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia do tarczy:

- a) dokładnie 3 razy w sześciu próbach,
- b) co najmniej 5 razy w sześciu próbach,
- c) co najmniej 2 razy w pięciu próbach,
- d) co najwyżej 2 razy w czterech próbach.

Я109. Zosia ma zestaw 8 kart. Na jednej z nich jest wizerunek królowy Śnieżki, a na każdej z pozostałych kart — wizerunek jednego z siedmiu krasnoludków. Gra polega na tym, że Zosia losuje jedną kartę i wkłada ją z powrotem do zestawu kart. Wygrywa wówczas, gdy wylosuje kartę z wizerunkiem Śnieżki lub wizerunkiem któregoś z czterech krasnoludków: Śpioszka, Apsika, Mędrka lub Wesołka. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Zosia wygra:

- a) dokładnie 3 razy w czterech próbach,
- b) co najmniej 2 razy w trzech próbach,
- c) co najwyżej 3 razy w pięciu próbach.

Я110. Z urny zawierającej 2 kule białe i 1 kulę czarną losujemy 1 kulę, po czym umieszczamy ją z powrotem w urnie. Takie losowanie powtarzamy 10 razy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy:

- a) kulę białą dokładnie 3 razy,
- b) kulę czarną dokładnie 3 razy,
- c) kulę czarną co najwyżej 3 razy,
- d) kulę białą co najmniej 8 razy.

- Я 111.** Rzucamy 5 razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
- dokładnie trzy razy wypadnie parzysta liczba oczek,
 - przynajmniej cztery razy wypadnie pięć lub sześć oczek,
 - co najwyżej raz wypadnie jedno oczko,
 - co najmniej dwa razy wypadnie nieparzysta liczba oczek,
 - co najmniej 3 razy wypadnie liczba oczek nie mniejsza niż 3,
 - co najwyżej 4 razy wypadnie liczba oczek niepodzielna przez 5.
- Я 112.** Gra polega na równoczesnym rzucie dwiema różnymi symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Wygrywamy wówczas, gdy na obu kostkach wyrzucimy parzystą liczbę oczek. Grę powtarzamy pięć razy. Oblicz prawdopodobieństwo, że uda nam się wygrać:
- dokładnie 3 razy,
 - co najmniej 2 razy.
- Я 113.** Załóżmy, że na każdej lekcji nauczyciele wywołują do odpowiedzi losowo wybranych dwóch spośród 30 uczniów pewnej klasy. Oblicz prawdopodobieństwo, że w dniu, w którym jest sześć lekcji z różnych przedmiotów, Tomek zostanie wywołany do odpowiedzi:
- dokładnie raz,
 - co najmniej 5 razy,
 - co najmniej 6 razy.
- Я 114.** W samolocie jest 30 miejsc. Jednak z uwagi na to, że średnio co dziesiąty pasażer rezygnuje w ostatniej chwili z podróży, na rejs sprzedano 32 bilety.
- Oblicz, jak duże jest ryzyko, że w samolocie zabraknie miejsc.
 - Oblicz, jakie szanse na wolne miejsce ma pasażer, który przyszedł na lotnisko bez biletu i ma nadzieję, że kupi go w ostatniej chwili.
- Я 115.** W fabryce produkującej lampy samochodowe prawdopodobieństwo tego, że wyprodukowana lampa posiada usterki techniczne, wynosi 0,03. Kontroler jakości sprawdza partię zawierającą 10 lamp. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- co najwyżej 1 lampa będzie wadliwa,
 - co najmniej 8 lamp będzie sprawnych.
- Я 116.** Przed egzaminem sprawnościowym do Akademii Wychowania Fizycznego zdający otrzymał wykaz 25 zadań sprawnościowych, do których należy się przygotować. Michał potrafi poprawnie wykonać 20 zadań z tej listy. Ustal, w którym z podanych poniżej dwóch wariantów prawdopodobieństwo tego, że Michał zaliczy test sprawnościowy, jest większe.
- Wariant 1 — egzamin będzie zaliczony, jeżeli kandydat prawidłowo wykona co najmniej 4 z 5 ćwiczeń,
 - Wariant 2 — egzamin będzie zaliczony, jeżeli kandydat prawidłowo wykona co najmniej 8 z 10 ćwiczeń.

Я 117. Synoptycy przewidują, że prawdopodobieństwo opadów w pewnym kurorcie jest w każdym kolejnym dniu tygodnia takie samo i wynosi 0,4. Grupa przyjaciół rozpatruje dwie opcje wyjazdu do tego kurortu:

- opcja nr 1 — wyjazd na 4 dni,
- opcja nr 2 — wyjazd na 6 dni.

- Oblicz prawdopodobieństwo, że podczas 4-dniowego pobytu trafi się co najwyżej jeden dzień deszczowy.
- Oblicz prawdopodobieństwo, że podczas 6-dniowego pobytu trafi się co najmniej 5 dni bez deszczu.
- Ustal, w której opcji wyjazdu prawdopodobieństwo tego, że co najmniej połowa dni będzie bezdeszczowa, jest większe.

Я 118. Rozpatrz zdarzenia:

A — Uzyskanie 5 reszek w 10 rzutach symetryczną monetą.

B — Uzyskanie liczby oczek mniejszej od 6 w ośmiu spośród dziesięciu rzutów symetryczną sześcienną kostką do gry.

Ustal, które zdarzenie, A czy B , jest bardziej prawdopodobne.

Я 119. Na poniższym diagramie przedstawiono dane na temat liczby samochodów w gospodarstwach domowych w pewnym mieście.



Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- wśród sześciu wybranych losowo gospodarstw w trzech gospodarstwach są mniej niż 2 samochody,
- wśród pięciu wybranych losowo gospodarstw co najmniej w czterech gospodarstwach są trzy samochody lub więcej.

Я 120. Pewna firma transportowa dysponuje 8 ciężarówkami. Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii w każdej z nich wynosi 0,1. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w tym samym czasie:

- co najwyżej dwie ciężarówki ulegną awarii,
- co najmniej 7 ciężarówek się zepsuje.

Я 121. Dwie drużyny siatkarskie: Pędzące Żółwie i Sunące Ślimaki planują rozegrać ze sobą 6 meczów. Prawdopodobieństwo wygranej Pędzących Żółwi jest 3 razy większe od prawdopodobieństwa wygranej Sunących Ślimaków. Ustal, które zdarzenie jest bardziej prawdopodobne.

A — Wygranie pięciu meczy przez drużynę Pędzących Żółwi.

B — Wygranie co najmniej dwóch meczów przez Sunące Ślimaki.

Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoullego zależy od n (liczby prób) i od p (prawdopodobieństwa sukcesu w jednej próbie). Mówi o tym następujące twierdzenie:

Jeśli iloczyn $p(n+1)$ jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobne jest, że w n próbach Bernoullego otrzymamy $p(n+1) - 1$ albo $p(n+1)$ sukcesów.

Jeśli iloczyn $p(n+1)$ nie jest liczbą całkowitą, to w n próbach Bernoullego najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów jest równa największej z liczb całkowitych mniejszych od $p(n+1)$.

Я 122. Przeczytaj informacje w ramce. W pewnym mieście 3,2% kobiet ma na imię Maria. Ustal, ilu kobiet o imieniu Maria możemy się spodziewać w grupie 423 kobiet.

Я 123. a) Przeczytaj informacje w ramce. Ustal, ilu szóstek można się spodziewać w 18 rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry oraz oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie ich dokładnie tyle.

b) Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów będzie się różniła od znalezionej w podpunkcie a) o co najwyżej 1.

Я 124. a) Przeczytaj informacje w ramce. Państwo Nowakowie planują spędzić 10-dniowy urlop na Mazurach. Z wieloletnich obserwacji meteorologicznych wynika, że w tej miejscowości prawdopodobieństwo bezdeszczowej pogody w danym dniu w tym okresie jest równe $\frac{3}{4}$. Oblicz, jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba bezdeszczowych dni podczas zaplanowanego urlopu.

b) Przeczytaj informacje w ramce. Prawdopodobieństwo, że w grupie obcokrajowców mieszkających w pewnym mieście będzie Azjata, wynosi $\frac{3}{20}$. Jaka liczba Azjatów w grupie 239 obcokrajowców jest najbardziej prawdopodobna?

c) Przeczytaj informacje w ramce. Oblicz, jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba wyrzucenia jedynki lub dwójki w 50 rzutach ośmiościenną kostką do gry.

d) Przeczytaj informacje w ramce. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z pewnej grupy jest szczupła, wynosi $\frac{4}{5}$, a prawdopodobieństwo, że jest wysoka, jest równe $\frac{2}{3}$. Jednocześnie wiadomo, że 90% osób w tej grupie jest szczupłych lub wysokich. Oblicz, jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba osób jednocześnie szczupłych i wysokich wśród 231 osób wybranych z tej grupy.

- Я 125.** W urnie znajdują się 3 kule białe i 6 kul czarnych. Pięciokrotnie dokonujemy losowania 4 kul z tej urny i zwracamy je po każdym losowaniu z powrotem do urny. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:
- 3 razy wylosujemy tyle samo kul białych co czarnych,
 - co najmniej 3 razy wylosujemy więcej kul czarnych niż białych.
- Я 126.** a) Pewne doświadczenie losowe zostało przeprowadzone czterokrotnie. Prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jednego sukcesu wynosiło $\frac{369}{625}$. Ile wynosi prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczym doświadczeniu?
- b) Przy pięciokrotnym wykonywaniu rzutów do kosza prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jednego sukcesu (czyli trafienia do kosza) jest równe $\frac{31}{32}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdobycia co najmniej trzech sukcesów w tej serii rzutów.
- Я 127.** Pewna partia jajek zawiera 5% jajek nadtluczonych. Spośród pozostałych jajek 60% stanowią jajka I gatunku. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że spośród czterech losowo wybranych jajek co najmniej 3 będą pierwszego gatunku.
- Я 128.** Prawdopodobieństwo tego, że kaktus zakupiony w pewnym sklepie ogrodniczym zakwitnie w ciągu najbliższych pięciu lat jest równe 0,05. Ustal, ile co najmniej kaktusów należałoby zakupić, aby prawdopodobieństwo zakwitnięcia przez przynajmniej jeden z nich było równe co najmniej 0,8.
- Я 129.** Według danych statystycznych 25% ciąż bliźniaczych stanowią bliźniaki jednojajowe.
- Na oddziale położniczym leżą 4 pacjentki z ciążami bliźniaczymi. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna z nich urodzi bliźnięta jednojajowe.
 - Ustal, ile pacjentek musiałoby być przyjętych na ten oddział, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym od 0,9 stwierdzić, że wśród nich jest przynajmniej 1 pacjentka w ciąży z bliźniętami jednojajowymi.
- Я 130.** Rzucamy 5 razy pięcioma symetrycznymi monetami. Oblicz prawdopodobieństwo, że:
- dokładnie 2 razy wyrzucimy dokładnie dwa orły,
 - przynajmniej raz wyrzucimy same reszki,
 - przynajmniej 2 razy wyrzucimy więcej orłów niż reszek.
- Я 131.** W każdym z 20 pudełek znajdują się 24 żarówki. Każda z nich może być uszkodzona z prawdopodobieństwem 1%. Jeśli w pudełku znajdują się przynajmniej dwie uszkodzone żarówki, zostaje ono zwrócone do producenta. Oblicz prawdopodobieństwo, że zwrócone zostaną więcej niż 2 pudełka.
- Я 132.** Prawdopodobieństwo, że strzelec trafi w środek tarczy dokładnie dwa na trzy razy, wynosi $\frac{2}{9}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że trafi w środek tarczy, oddając tylko jeden strzał.

PRZED SPRAWDZIANEM

- Я1.** Jeżeli zdarzenia A i B spełniają warunki: $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ oraz $P(A') = \frac{7}{20}$, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A' \cap B$ jest równe:
 A. 0,3 B. 0,05 C. 0,35 D. 0,55
- Я2.** Jeśli zdarzenia A i B spełniają warunki: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{8}$ oraz $P(A|B) = \frac{2}{3}$, to $P(B|A)$ jest równe:
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{1}{4}$
- Я3.** Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ losujemy jedną liczbę. Rozpatrz zdarzenia:
 A — Wylosowano liczbę podzielną przez 3.
 B — Wylosowano liczbę nieparzystą.
 C — Wylosowano liczbę większą od 7.
 Wskaż parę zdarzeń niezależnych.
 A. A' i B' B. B i C C. A i C' D. A i C
- Я4.** Z długotrwałych obserwacji wynika, że w grze w szachy Piotr wygrywa z Pawłem średnio 5 na 9 rozegranych meczów. Prawdopodobieństwo tego, że Piotr wygra co najmniej jeden z czterech meczów rozegranych z Pawłem jest równe:
 A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $\frac{256}{6561}$ D. $\frac{6305}{6561}$
- Я5.** Prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana osoba w pewnej grupie nie jeździ na nartach, wynosi $\frac{2}{3}$. Prawdopodobieństwo, że wylosowana osoba potrafi jeździć na łyżwach, jest równe $\frac{3}{5}$. Jednocześnie wiadomo, że co ósma osoba w tej grupie nie jeździ ani na nartach, ani na łyżwach. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z tej grupy potrafi jeździć na łyżwach, ale nie jeździ na nartach.
- Я6.** Rzucamy dwukrotnie symetryczną ośmiościenną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma otrzymanych liczb jest większa od 10, jeżeli wiadomo, że co najmniej raz wyrzucono liczbę nieparzystą.
- Я7.** W pierwszym pudełku znajduje się 8 losów pustych i 2 losy wygrywające, a w drugim — 7 pustych i 3 losy wygrywające. Rzucamy dwukrotnie symetryczną monetą. Jeżeli wyrzucimy dwie reszki, to losujemy dwa losy z pierwszego pudełka, jeżeli wyrzucimy dwa orły, to losujemy dwa losy z drugiego pudełka. Natomiast jeżeli wyrzucimy jednego orła i jedną reszkę, to losujemy po jednym losie z obu pudełek. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednego losu wygrywającego.

- Я 8.** Kasia, Ola i Zosia rzucają piłką do kosza. Kasia trafia do kosza z prawdopodobieństwem 0,7, Ola — 0,8, a Zosia — 0,6. Każda z dziewczyn rzuca raz do kosza. Przyjmij oznaczenia:

p_1 — prawdopodobieństwo, że wszystkie dziewczyny trafią do kosza,
 p_2 — prawdopodobieństwo, że co najwyżej jedna z dziewczyn trafi do kosza,
 p_3 — prawdopodobieństwo, że dokładnie dwie dziewczyny trafią do kosza.

Liczby p_1 , p_2 , p_3 uporządkuj od najmniejszej do największej.

- Я 9.** Dwie drużyny piłkarskie — „Orły” i „Sokoły” — po zremisowanym meczu przystąpiły do rozegrania rzutów karnych. Podczas tego pojedynku najpierw 5 strzałów na bramkę oddały „Sokoły”, a po nich, także 5 — „Orły”. Wiadomo, że średnio 40% strzałów oddanych przez „Orłów” do bramki „Sokołów” kończy się golem. Oblicz prawdopodobieństwo, że „Orły” wygrają pojedynek, jeżeli wiadomo, że ich przeciwnicy zdobyli w rzutach karnych łącznie 2 gole.

PRZED MATURĄ

- Я1.** Wśród 10 tysięcy mieszkańców pewnego miasta przeprowadzono sondaż dotyczący budowy przedszkola publicznego. Wyniki sondażu przedstawiono w tabeli.

Badane grupy	Liczba osób popierających budowę przedszkola	Liczba osób niepopierających budowy przedszkola
Kobiety	5140	1860
Mężczyźni	2260	740

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrana osoba, spośród ankietowanych, popiera budowę przedszkola, jeśli wiadomo, że jest mężczyzną. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

- Я2.** Dane są zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$ takie, że $P(A) = \frac{2}{7}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$. Oblicz $P(B \setminus A)$, gdzie zdarzenie $B \setminus A$ oznacza różnicę zdarzeń B i A .

- Я3.** Zdarzenia losowe A i B zawarte w Ω są takie, że prawdopodobieństwo $P(B')$ zdarzenia B' , przeciwnego do zdarzenia B , jest równe $\frac{1}{4}$. Ponadto prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B) = \frac{1}{5}$. Wynika stąd, że:

A. $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ B. $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$ C. $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$ D. $P(A \cap B) = \frac{4}{5}$

- Я4.** Mamy dwie urny. W pierwszej są 3 kule białe i 7 kul czarnych, w drugiej jest 1 kula biała i 9 kul czarnych. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek, od jednego oczka do sześciu oczek. Jeśli w wyniku rzutu otrzymamy ściankę z jednym oczkiem, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku — losujemy jedną kulę z drugiej urny. Wtedy prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe:

A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{13}{15}$

- Я5.** Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

- Я6.** Pan Nowak często gra z synem w szachy. Obliczył, że 60% rozegranych partii wygrywa jego syn. Oblicz, ile partii szachów musi rozegrać z synem pan Nowak, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od 0,95.

- 7.** Pewna choroba dotyka 0,2% całej populacji i w początkowym stadium nie daje widocznych objawów chorobowych. W ramach profilaktyki stosuje się pewien test przesiewowy, który daje wynik pozytywny lub negatywny. Prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie chorej, da wynik pozytywny (oznaczający chorobę) jest równe 0,99. Ponadto wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że test wykonany na osobie zdrowej da wynik negatywny, jest równe 0,98. Pan X poddał się testowi, który dał wynik pozytywny. Pozytywny wynik oznacza podejrzenie choroby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Pan X jest rzeczywiście chory.

GRANICE FUNKCJI

Granice funkcji

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Jeśli $a \in (0; 1)$, to zachodzą równości:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

Jeśli $a \in (1; +\infty)$, to zachodzą równości:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g$$

Własności granic właściwych

Jeśli istnieją granice $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ i są to granice właściwe, to:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} af(x) = a \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}, \text{ gdy } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$$

Każdą z tych własności mają także granice funkcji w $-\infty$, granice w dowolnym punkcie x_0 oraz granice jednostronne.

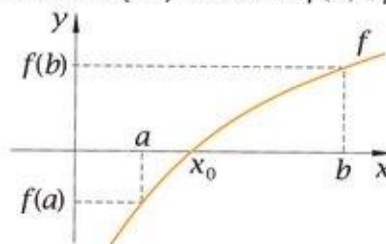
Ciągłość funkcji

Funkcję f nazywamy funkcją ciągłą w punkcie x_0 należącym do jej dziedziny, gdy funkcja f ma w tym punkcie granicę i $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Własność Darboux

Jeśli funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale $\langle a; b \rangle$ i $f(a) \neq f(b)$, to funkcja f przyjmuje w przedziale $\langle a; b \rangle$ wszystkie wartości między liczbami $f(a)$ i $f(b)$.

Wynika stąd, że jeśli funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale $\langle a; b \rangle$ oraz $f(a)$ i $f(b)$ mają różne znaki, to $f(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \langle a; b \rangle$.



GRANICE FUNKCJI — INTUICJE

Я1. Naszkicuj wykres funkcji f , która spełnia warunek:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

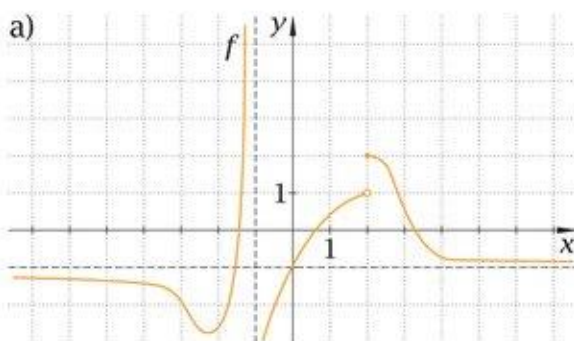
c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -1$ i $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

h) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

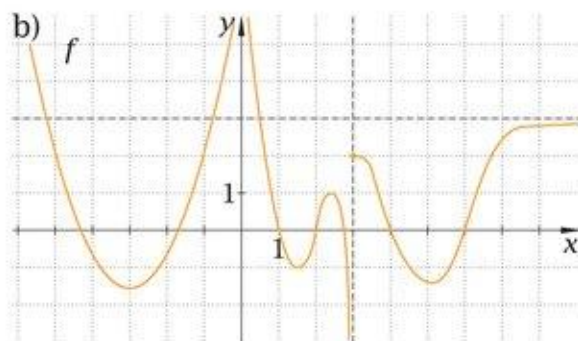
Я2. Określ granice funkcji f na podstawie fragmentu jej wykresu (o ile istnieją).



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x),$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x),$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x),$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x),$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Я3. Naszkicuj wykres odpowiedniej funkcji i podaj wartości wskazanych granic.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4)$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 4)$, $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 4)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x-2} + 1 \right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x-2} + 1 \right)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3}{x-2} + 1 \right)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3}{x-2} + 1 \right)$,
 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{x-2} + 1 \right)$,

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7^x$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\pi} x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\pi} x$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{5}} x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{5}} x$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (-\operatorname{tg} x)$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} \operatorname{tg} 2x$

Я4. Naszkicuj wykres funkcji f , która spełnia warunki:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ i $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ i $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nie istnieje

Я5. Podaj granice w $-\infty$ i w $+\infty$ funkcji $f(x) = a^x$, jeżeli:

a) $a \in (1; +\infty)$

b) $a \in (0; 1)$

c) $a = 1$

Я6. Podaj granice w $-\infty$, $+\infty$ oraz granice jednostronne w punkcie $-b$ funkcji $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$, jeżeli:

a) $a \in (-\infty; 0)$

b) $a \in (0; +\infty)$

c) $a = 0$

Я7. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj wartości granic $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x-2} & \text{dla } x < 2 \\ \frac{-5x}{x-2} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{-2x-7}{x+3}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{dla } x > -1 \\ \frac{3x+4}{x+1} & \text{dla } x < -1 \end{cases}$

Я8. Naskicuj wykres funkcji f i podaj (o ile istnieje) granicę funkcji w punkcie -1 .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{dla } x < -1 \\ -x - 5 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases} & \text{d) } f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{dla } x < -1 \\ 3 & \text{dla } x = -1 \\ -2x & \text{dla } x > -1 \end{cases} \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \leq -1 \\ 2x + 2 & \text{dla } x > -1 \end{cases} & \text{e) } f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{dla } x < -1 \\ 2x^2 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{dla } x > -1 \end{cases} & \text{f) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{dla } x > -1 \end{cases} \end{array}$$

Я9. Czy funkcja f ma granicę w punkcie 0 ? W przypadku istnienia tej granicy podaj jej wartość.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases} & \text{d) } f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x < 0 \\ \log_2(x + 1) & \text{dla } x \geq 0 \end{cases} \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \leq 0 \\ \cos x - 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases} & \text{e) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} 2x & \text{dla } x < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{dla } x \geq 0 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) = \begin{cases} -\operatorname{tg} x - 1 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases} & \text{f) } f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{dla } x \leq 0 \\ 2^{-x} & \text{dla } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

Я10. Rozważ zbiór wszystkich prostokątów o obwodzie 20 . Oznacz przez x długość jednego boku, a przez $d(x)$ długość — drugiego boku prostokąta. Określ $\lim_{x \rightarrow 0^+} d(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow 10^-} d(x)$.

Я11. Rozpatrz zbiór wszystkich równoległoboków o polu 200 . Niech x oznacza długość jednego boku równoległoboku, a $h(x)$ — długość wysokości poprowadzonej do tego boku. Określ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$.

Я12. W okrąg o promieniu 1 wpisano trójkąty równoramienne. Oznacz przez x długość podstawy, a przez $a(x)$ — długość ramienia tego trójkąta. Określ granice $\lim_{x \rightarrow 0^+} a(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} a(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} a(x)$.

Я13. Wierzchołkami trójkąta ABC są punkty $A = (-1, 3)$, $B = (2, 0)$, $C = (x, 0)$. Niech $P(x)$ oznacza pole trójkąta ABC . Ile wynoszą granice $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} P(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} P(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$?

Я 14. Korzystając z wykresów funkcji $f(x) = -x^2$ i $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -1 & \text{dla } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ x-1 & \text{dla } x \in (1; +\infty) \end{cases}$,

określ granice: $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$,
gdzie $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Я 15. Korzystając z wykresów funkcji $f(x) = x^3$ i g określonej poniżej, podaj granice $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$, gdzie $h(x) = f(x) - g(x)$.

a) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $g(x) = -\sqrt[3]{x}$

c) $g(x) = \frac{1}{x}$

GRANICE FUNKCJI — DEFINICJE

Я 16. Korzystając z definicji granicy funkcji, oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 2)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 2x)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6 - 5x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - 3x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x + 9)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (8x^2 - 7x)$

Я 17. Korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x + 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (7x - 1)$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{x-4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (3 - 4x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3)$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{2x+5}$

Я 18. Korzystając z definicji granicy funkcji, oblicz podane granice.

a) $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{dla } x < 3 \\ -x+6 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{dla } x < 0 \\ x^2 - 7 & \text{dla } x > 0 \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

c) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{dla } x \leq 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x & \text{dla } x > 0 \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Я19. Korzystając z definicji granicy funkcji, oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{2x^2+3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{2-5x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4+x-3}{x^2+6}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x^2+4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2+x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+1}{2x^2-3x+4}$

Я20. Korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, oblicz granicę.

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x + \operatorname{tg} x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} ((x+7)^2 \cdot \sin x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{\sqrt{x}}{\log_3 x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} (5^x - \log_5(3+x))$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} (8^x \cdot \log_{1,5} x)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4^x}{\sin x\pi}$

Я21. Korzystając z definicji granicy funkcji, oblicz podane granice.

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 10 & \text{dla } x \leq -2 \\ \frac{-1}{x+2} & \text{dla } -2 < x \leq 2; \\ \frac{1}{x-2} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x),$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} \log(-x) & \text{dla } x < 0 \\ 10^{x-5} & \text{dla } 0 < x \leq 10; \\ 10 + \log_{0,1}(x-10) & \text{dla } x > 10 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$

$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x)$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} x & \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ \cos x & \text{dla } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x),$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x)$

Я22. Korzystając z definicji granicy funkcji, wykaz, że nie istnieje:

a) granica funkcji $f(x) = \frac{3}{x-1}$ w punkcie 1,

b) granica funkcji $f(x) = \sin x$ w $-\infty$,

c) granica funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ w punkcie $\frac{\pi}{2}$,

d) granica funkcji $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{dla } x < 2 \\ x^2-3 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$ w punkcie 2,

e) granica funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{dla } x < -1 \\ 5 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$ w punkcie -1.

Я23. Korzystając z definicji granic jednostronnych, wyznacz taką wartość parametru p , dla której wartości granic jednostronnych w punkcie 1 są równe.

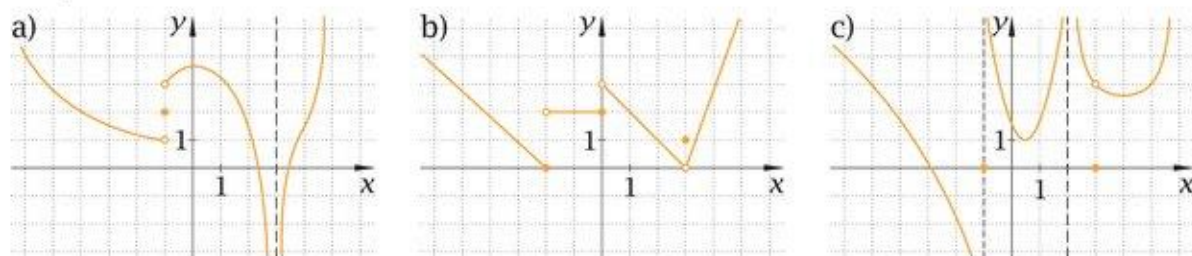
$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2^{x-p} & \text{dla } x < 1 \\ 4^p + \log_2 x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} - p & \text{dla } x < 1 \\ p + \cos \frac{\pi}{x} & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Я24. Korzystając z definicji granicy funkcji, wykaż, że nie istnieje:

- a) granica funkcji $f(x) = \frac{|x|}{x}$ w punkcie 0,
 b) granica funkcji $f(x) = \frac{3x+6}{|x+2|}$ w punkcie -2,
 c) granica funkcji $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ w punkcie 0.

FUNKCJE CIĄGŁE

Я25. Wskaż punkty nieciągłości funkcji, której fragment wykresu przedstawiono na rysunku.



Я26. Wyjaśnij, dlaczego funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0 .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0 \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \neq 2 \\ 5 & \text{dla } x = 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$$

Я27. Na podstawie wykresu funkcji f określ, czy funkcja ta jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny (jeżeli nie, wskaż punkty, w których nie jest ciągła).

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ x^2-4x+4 & \text{dla } (0; +\infty) \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 1 & \text{dla } (0; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ \log_2(x+5) & \text{dla } x \in \langle -1; +\infty \rangle \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 0; 3 \rangle \\ 2x-4 & \text{dla } x \in \langle 3; +\infty \rangle \end{cases}$$

Я28. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^4 - 5x^2 + 1)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 5}}$

e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 1}{4x^2 + 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 3|}{2x^2 + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{0,3^x - 3}{x^3 + 4}$

Я29. Wyjaśnij, dlaczego funkcja f nie jest ciągła w punkcie 1.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x-1|} & \text{dla } x \neq 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{dla } x \neq 1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

Я30. Wyznacz punkt, w którym funkcja f nie jest ciągła.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } |x| \leq 1 \\ x & \text{dla } |x| > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } |x| \geq 1 \\ -x^2 & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$

Я31. Wyznacz taką wartość parametru p , dla której funkcja f jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+12}{-x-6} & \text{dla } x \neq -6 \\ p & \text{dla } x = -6 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-25}{2x-5} & \text{dla } x \neq 5 \\ p & \text{dla } x = 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{6x+3}{1-x} & \text{dla } x \neq -1 \\ p & \text{dla } x = -1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1} & \text{dla } x \neq -1 \\ p & \text{dla } x = -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{dla } x \neq -1 \\ p & \text{dla } x = -1 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{8x^3-27}{2x-3} & \text{dla } x \neq 1,5 \\ p & \text{dla } x = 1,5 \end{cases}$

Я32. Wyznacz taką wartość parametru m , aby funkcja f była ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + m & \text{dla } x \leq -2 \\ mx + 1 & \text{dla } x > -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2^x - m & \text{dla } x < 0 \\ 3x + m & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 1 & \text{dla } x \leq 2 \\ x^3 + m & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} m \cdot 5^x + 1 & \text{dla } x \leq 1 \\ m + \log_5 x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

Я33. Oblicz, dla jakich wartości parametrów a i b funkcja f jest ciągła w punkcie 1.

a) $f(x) = \begin{cases} 3^x + a & \text{dla } x < 1 \\ 3 & \text{dla } x = 1 \\ x^2 + b & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{dla } x < 1 \\ b & \text{dla } x = 1 \\ \log_2 x - 4 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

Я34. Wyznacz wartość x_0 .

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} (5x - 4) = 6$

c) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x+1} = 2$

e) $\lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 - 5x) = -4$

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5}{x+2} = -5$

d) $\lim_{x \rightarrow x_0} 3^x = \frac{1}{9}$

f) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x-1}{2x} = 2$

Я35. Oblicz granice (o ile istnieją): $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 2x+1 & \text{dla } x \in (0; 1) \\ 3 & \text{dla } x \in (1; +\infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 2,5x+3 & \text{dla } x \in (-1; 4) \\ 9-x^2 & \text{dla } x \in (4; +\infty) \end{cases}$

Я36. Wyznacz wartości parametrów a i b , dla których funkcja f jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & \text{dla } |x| \geq 1 \\ ax+b & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{-3}{x+2} - 4 & \text{dla } |x| \leq 1 \\ ax+b & \text{dla } |x| > 1 \end{cases}$

Я37. Sprawdź, czy funkcja f jest ciągła w punktach -1 i 1 .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x|-1} & \text{dla } x \neq -1 \text{ i } x \neq 1 \\ -1 & \text{dla } x = -1 \\ 1 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Я38. Ustal, czy funkcja $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Я39. Niech $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby a . Na przykład: $[2,3] = 2$, $[7,5] = 7$, $[8] = 8$, $[-5] = -5$, $[-5,2] = -6$. Naskicuj wykres funkcji f . W których punktach funkcja ta jest ciągła?

a) $f(x) = x - [x]$

b) $f(x) = x + [x]$

Я40. Udowodnij, że jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0 , to w tym punkcie ciągła jest też funkcja h .

a) $h(x) = f(x) + g(x)$

b) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

TWIERDZENIE DARBOUX

Я41. Wykaż, że równanie ma rozwiązanie w podanym przedziale.

- a) $5x^3 - 7x + 1 = 0$, $(0; 1)$ c) $x^5 + 3x^3 + 2 = 0$, $(-1; 1)$
b) $x^5 - x^2 + 1 = 0$, $(-1; 0)$ d) $x^4 - x^3 - 2 = 0$, $(-2; 1)$

Я42. Wykaż, że równanie ma rozwiązanie w podanym przedziale.

- a) $2\sqrt{x} - 3x = 0$, $(\frac{1}{4}; 1)$ c) $\log_2 x - \frac{x}{4} = 0$, $(1; 2)$
b) $2^x + \frac{3}{x} + 4 = 0$, $(-1; -\frac{1}{2})$ d) $\cos x + \operatorname{tg} x = 0$, $(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6})$

Я43. Wykaż, że równanie ma rozwiązanie w podanym przedziale, a następnie znajdź przybliżoną wartość tego rozwiązania z błędem 0,25.

- a) $x^3 + 2x - 25 = 0$, $\langle 0; 4 \rangle$ c) $x^4 + 2x - 30 = 0$, $\langle -1; 3 \rangle$
b) $x^3 + x + 6 = 0$, $\langle -4; 0 \rangle$ d) $x^3 + x^2 + 15 = 0$, $\langle -5; -1 \rangle$

Я44. Wykaż, że funkcja f przyjmuje wartość p w podanym przedziale.

- a) $f(x) = x^3 - 2x^2$, $p = 7$, $\langle 0; 3 \rangle$
b) $f(x) = 3x + x^2$, $p = 1\frac{1}{2}$, $\langle -2; 1 \rangle$
c) $f(x) = -2x^3 + 6x$, $p = \frac{2}{3}$, $\langle -1; 1 \rangle$

Я45. Wykaż, że $f(-2) \cdot f(2) < 0$. Czy to oznacza, że funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $(-2; 2)$? Odpowiedź uzasadnij.

- a) $f(x) = \frac{3}{x-1} - 2$ c) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{dla } x < 0 \\ -x-3 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$
b) $f(x) = \frac{4}{x+3} - 1$ d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x \leq 0 \\ x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

Я46. Wykaż, że podane równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie. Podaj przykład przedziału $(a; b)$ takiego, że $b - a < 4$ i rozwiązanie równania do niego należy.

- a) $\sin x = x - 1$ c) $2^x + 3 = -x$
b) $\log_{0,5} x = x - 4$ d) $\sqrt{x} + 1 = x$

- Я47.** Wykaż, że równanie ma rozwiązanie w podanym przedziale, a następnie znajdź przybliżoną wartość tego rozwiązania z błędem 0,25.
- a) $2^x - x^2 - 1,4 = 0$, $\langle 2; 6 \rangle$ c) $\frac{3}{x} - \sqrt{x} + 0,6 = 0$, $\langle 1; 5 \rangle$
- b) $x + \sin \pi x + 1,6 = 0$, $\langle -3; 1 \rangle$ d) $x + \cos \frac{\pi x}{2} = 0$, $\langle -4; 0 \rangle$
- Я48.** a) Wykaż, że równanie $x \cdot 2^x = 1$ ma rozwiązanie, które jest dodatnią liczbą mniejszą od 1.
- b) Wykaż, że równanie $\frac{x}{2^x} = -\frac{1}{2}$ ma rozwiązanie, które jest ujemną liczbą większą od -1.
- c) Wykaż, że równanie $x + 2^x = 1$ ma rozwiązanie, którego wartość bezwzględna jest mniejsza od 1.
- Я49.** Wykaż, że funkcja f przyjmuje wartość p w podanym przedziale.
- a) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} + 3x^2$, $p = 3$, $\langle -1; 1 \rangle$
- b) $f(x) = \log x - \cos \pi x$, $p = 0,7$, $\langle 1; 10 \rangle$
- c) $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x + \frac{2\sqrt{x}}{x+2}$, $p = \frac{15}{11}$, $\langle 0; 1 \rangle$
- Я50.** a) Wykaż, że równanie $125x^3 - 600x^2 + 880x - 384 = 0$ ma trzy rozwiązania, które należą do przedziału $\langle 0; 3 \rangle$.
- b) Wykaż, że równanie $x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 31x - 20 = 0$ ma cztery rozwiązania, które należą do przedziału $\langle -2; 5 \rangle$.
- Я51.** Funkcja ciągła f określona w przedziale $\langle a; b \rangle$ ma dokładnie n miejsc zerowych: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, gdzie $a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < b$. Wykaż, że w każdym z przedziałów $(a; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $\dots$, $(x_n; b)$ wartości funkcji f mają stały znak.
- Я52.** Kwadratowy stół ma cztery nogi równej długości, jednak chwieje się, bo podłoga nie jest równa — są w niej wgłębienia i wypukłości, które zmieniają się w sposób ciągły (nie ma pionowych uskoków). Wykaż, że obracając stół o kąt o mierze mniejszej niż 90° , można znaleźć pozycję, w której wszystkie cztery nogi będą stabilnie stały na podłodze.
- Я53.** Wykaż, że każdą figurę wypukłą można rozciąć:
- a) na dwie części o równych polach,
- b) na trzy części o równych polach,
- c) wzdłuż prostych równoległych na trzy części o równych polach.

OBLICZANIE GRANIC

Я 54. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x^2} + 2 \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{x^4} - 1 \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^5} + \frac{3}{2x^2} - \frac{5}{3x} + \sqrt{2} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3x^{10}} - \frac{1}{x^7} - \frac{1}{3} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2} + 3 \right) \left(\frac{-2}{x^4} - \frac{1}{3x^5} - 1 \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x^8} - \frac{3}{x^5} - 2 \right) \left(-5 - \frac{2}{x^3} \right)$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\frac{3}{4x} - \frac{1}{x^2} - 4}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{12}{x^{12}} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x}}{\frac{10}{x^{10}} + \frac{3}{x^3} - 7}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{5}{x^7} - 3}{\frac{2}{x^9} + \frac{5}{x^4} - 4}$

Я 55. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^4 + 2x^3 + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - x^2 + 5)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 2x^4 + 1)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^{10} + 3x^3 + x^2)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^5 - x^3 + 2x^2 - 3)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^4 - x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{8} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1,8x^8 + x^5 - 0,2x^3 - 2)$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x^{11}}{6} - \frac{x^8}{9} + \frac{x^3}{4} - x \right)$

Я 56. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 1}{3x^4 + x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^{10} + 2x}{-x^{10} + x^8 + 2x^4}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{3x^3 - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2x^5 + 4x^2 + 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^5 + 2x^2 + 12}{x^4 - x^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^6 + 5x^5 + 2}{x^3 + x - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 7x^2}{3x^6 + 4x^5 - 7}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 - 3x^2 + 9x}{-4x^3 + 4x^2 - x}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 2x^2 + 1}{1 - 2x^2}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^7 + 2x^5 - 7x}{-6x^7 + 2x + 5}$

Я57. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3(2x^4 - x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^7 + x^3 - 1)(x^5 - x^2 + x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 + 3x)(5 - x^3)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 - x^2 + 1)(5 - x^3 - 2x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^4 + x^3 + x^2)(x^5 + x - 3)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 5x^5)(3x^7 - 2)$

Я58. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 4x - 2x^2}{(3x - 1)(x + 4)}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3x + 2)(4 - x)}{(2x - 1)^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5x^2 - x)(2x + 3)}{x^4 - 3x + 5}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(5 - 2x^3)^2}{(x^2 - 3x)(4x + 1)(x - 2)}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^5 + 2x^4 - 3x}{(2x^2 - x)(2x + 5)}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(7x - 2)^3(5x + 3)^2}{(-5x^2 + x)(4x - 1)^4}$

Я59. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5^x} - 2 \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\log_7 x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x + (0,2)^x}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2 x \cdot \log_{0,1} x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^x + 3 \right) \left(\left(\frac{2}{3} \right)^x + 1 \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0,7^x + \log_{0,7} x}{0,3^x - 7}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x}{2^x + 5^x - 3}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_{0,2} x - 2^x}{\frac{-3}{\log_5 x} + 10}$

Я60. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 \cdot 3^x + 4 \cdot 7^x)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 6^x - 3 \cdot 5^x}{4 \cdot 6^x + 7 \cdot 2^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x)$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 8^x + 2 \cdot 3^x}{3 \cdot 5^x - 4 \cdot 2^x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (6 \cdot 2^x - 4 \cdot 5^x)$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 3^x - 7 \cdot 6^x}{8 \cdot 2^x - 5 \cdot 9^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x}{9^x + 5^x}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 7 \cdot 6^x}{4 \cdot 3^x + 3 \cdot 5^x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6^x + 2^x}{3^x - 5^x}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6 \cdot 4^x + 5}{3 + 6 \cdot 7^x}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x - 5^x}{2^x - 7^x}$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 4 \cdot 5^x + 6 \cdot 8^x}{3 \cdot 8^x - 5 \cdot 4^x + 2}$

Я61. Oblicz, dla jakiej wartości parametru m spełniona jest równość.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^5 - 2mx^4 + 3x}{(2mx^2 - x)((m+1)x^3 + 5x^2)} = 5$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-m)^3(m-2)x}{(mx^2+3x)(3mx^2+5)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m \cdot 5^x - 6 \cdot 3^x}{5 \cdot 2^x - (m+3) \cdot 5^x} = -0,7$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m \cdot 2^x + 5)(m \cdot 2^x - 3)}{((m-1) \cdot 2^x - 4)^2} = 2\frac{1}{4}$$

Я62. Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2-4} - \sqrt{3x^2-1})$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x-2} - \sqrt{4x+3})$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3-2x} - \sqrt{7-2x})$$

Я63. Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{x}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3 - \sqrt{14-x}}{x-5}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{\sqrt{29-x}-5}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{x+3}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{x-7}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+4}}$$

Я64. Oblicz.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 4x - 1}{\sqrt{x^4 + x^2 - 3}}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3\sqrt{x^2+3}}{5x - 3x^4}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + x}{\sqrt{4x^6 + x}}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 6x^3}{x^2\sqrt{4x^2 + x + 1}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x}{\sqrt{9x^4 + x + 1}}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^8 + x^2 - 2}}{4 - x^4}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x\sqrt{2x^2 + x - 3}}{6x^2 + 1}$$

OBLICZANIE GRANIC (CD.)

Я65. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5}{(x-1)^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4-x}{(x+3)^8}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9}{|x|}$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{7}{|x-4|}$

f) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x+3}{|x+5|}$

Я66. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x-1}{4-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{5-2x}{7-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3-2x}{x+5}$

f) $\lim_{x \rightarrow -6^+} \frac{5-3x}{6+x}$

Я67. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x-8}{x(x-3)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x+1}{x|x+4|}$

g) $\lim_{x \rightarrow -10} \frac{2x^2+1}{3x|x+10|}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+7}{x(x+2)^6}$

e) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-8}{|x-7|x|}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-12}{(x^2-9)(x-2)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-18}{(x+5)(x-5)^4}$

f) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{-2x-8}{|x+6|(x-7)}$

i) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2}{x|x+1|(x-4)^2}$

Я68. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x}{x^2-4}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-7}{(x+2)(x-3)}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x+1}{x^2-2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x}{x^2-4}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}^+} \frac{x^2}{(3x+1)(2x-5)}$

j) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2-3x}{x^2-4x-5}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{5-x}{9-x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2-5}{(2x+5)(4-x)}$

k) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^3+2}{x^2+x-6}$

d) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x-12}{25-x^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\frac{4}{3}^+} \frac{3x+1}{(x+1)(3x+4)}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0,4^+} \frac{1+x}{-5x^2-8x+4}$

Я69. Dla podanej funkcji f oblicz granice:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

a) $f(x) = \frac{x-3}{(x+5)(x+3)}$

b) $f(x) = \frac{2x+10}{(x+5)(x+3)}$

c) $f(x) = \frac{1}{(x+5)|x+3|}$

Я70. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 11x - 4}{x^2 - 3x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{6 + 3x}{2x^2 + 3x - 2}$

g) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 2x - 8}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{x^2 + x - 6}$

h) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 6x}{-3x^2 - 4x + 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x - 1}{2x^2 + 7x + 3}$

i) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{4x^2 + 3x - 1}{4x^2 - 9x + 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - x - 6}$

j) $\lim_{x \rightarrow -0,75} \frac{16x^2 - 9}{4x^2 - 5x - 6}$

Я71. Wykaż, że nie istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 .

a) $f(x) = \frac{2}{x-1}, x_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{x^2}{8-2x^2}, x_0 = -2$

b) $f(x) = \frac{3x}{2-5x}, x_0 = \frac{2}{5}$

e) $f(x) = \frac{3x^3 + x}{x^2 + 2x - 3}, x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{4x-1}{x^2-9}, x_0 = 3$

f) $f(x) = \frac{2x^2-9}{-2x^2-7x+4}, x_0 = -4$

Я72. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^3 - 7x + 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 7x + 6}{x^3 + 2x^2 - 5x - 10}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 5x}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6x^2 - 2x^3}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$

Я73. Dla podanej funkcji f oblicz granice:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

a) $f(x) = \frac{3}{x^2 - x - 2}$

b) $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - x - 2}$

c) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$

Я74. Dla podanej funkcji f oblicz granice:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

a) $f(x) = \frac{3x}{-2x^2 + 5x + 3}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{-2x^2 + 5x + 3}$

c) $f(x) = \frac{2x^3 + x^2}{2x^2 - 5x - 3}$

Я75. a) Dla funkcji $f(x) = \frac{9x^2 + 6x + 1}{3x^2 - 2x - 1}$ oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

b) Dla funkcji $g(x) = \frac{12x - 3x^3}{x^2 + x - 6}$ oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

Я76. Oblicz $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x) + g(x))$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (f(x) \cdot g(x))$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

a) $f(x) = \frac{3x}{2x+1}$, $g(x) = \frac{-4}{x-2}$, $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $g(x) = \frac{2-x}{x^2-x-2}$, $x_0 = -1$

c) $f(x) = \frac{2x-1}{4x^2+1}$, $g(x) = \frac{4}{1-2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \frac{2x+1}{9-x^2}$, $g(x) = \frac{3x-x^2}{x^2-2x-3}$, $x_0 = 3$

Я77. Wyznacz równania asymptot pionowych wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-x-2}$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$

e) $f(x) = \frac{2x^2+1}{3x^2+5x-2}$

c) $f(x) = \frac{5x}{x^2+4x+4}$

f) $f(x) = \frac{3x^2-x}{2x^2+5x-12}$

Я78. Wyznacz równanie asymptoty poziomej wykresu funkcji f (o ile istnieje).

a) $f(x) = \frac{3x}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{2+3x-2x^3}{3x^3+x^2+5}$

b) $f(x) = \frac{2x^2+x}{x^2-3x+1}$

e) $f(x) = \frac{5x^2-2x+1}{x^5+2x^2}$

c) $f(x) = \frac{3x^3+2x+1}{x^2-1}$

f) $f(x) = \frac{2x^4+3x}{1-x-4x^4}$

Я79. Oblicz.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{x+5}}{16-x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x+7}-4}{\sqrt{x}-3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-\sqrt{9+x^2}}{5-\sqrt{25+x^2}}$

Я80. Wyznacz równania asymptot pionowych i poziomych wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{-3x^2 - 9x}{x^2 + x - 6}$

d) $f(x) = \frac{-2x^3 - 2x^2}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

b) $f(x) = \frac{-5x^2 + 22x - 8}{2x^2 - 5x - 12}$

e) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{-x^3 + 2x^2 + 3x}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + x - 5}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}$

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną prawostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$.

Prostą, która jest asymptotą ukośną prawostronną i lewostronną jednocześnie, nazywamy asymptotą ukośną obustronną.

Я81. Przeczytaj informacje w ramce powyżej. Wyznacz równanie asymptoty ukośnej wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x + 1}$

c) $f(x) = \frac{-3x^4 + 2x^3 - 2}{x^3 + 1}$

e) $f(x) = \frac{3x^3 + 1}{2x^2}$

b) $f(x) = \frac{3x^3 + 2x}{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \frac{3x^4 - 2x + 1}{x^2 + x - 1}$

f) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{3 - x - 2x^2}$

Я82. Przeczytaj informacje zamieszczone w ramce przed zadaniem 81. Wyznacz równanie asymptoty ukośnej wykresu funkcji f , a następnie, korzystając z niego, oblicz przybliżoną wartość funkcji dla argumentu x_0 .

a) $f(x) = \frac{3x^2 + 10x - 2}{x + 5}$, $x_0 = 725$

c) $f(x) = \frac{3 - 2x^2 - x^4}{3x^3 - 2x + 1}$, $x_0 = 9999$

b) $f(x) = \frac{4x^5 - 3x^4 + 1}{x - 2x^4}$, $x_0 = 1428$

d) $f(x) = \frac{7x^9 + 3x^5 - 2x^4 + 1}{2x^8 + 3x^4 - 4}$, $x_0 = 4978\frac{6}{7}$

Я83. Wyznacz równania asymptot wykresu funkcji f .

a) $f(x) = \frac{2x^2 + |x| - 1}{x^2 - |x|}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{|x| + 4}$

c) $f(x) = \frac{3x^3 + 2|x|x}{x^2 - 1}$

PRZED SPRAWDZIANEM

Я1. Wiadomo, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$. Która z podanych poniżej granic jest błędna?

- A. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$ C. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$
 B. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = -\infty$ D. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Я2. Która z podanych poniżej granic jest błędna?

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 + 4x}{5x^3 - 6} = 0$ C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 4x^2}{10x - 2x^2} = \frac{1}{2}$
 B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x^3 - 10x}{2x^3 + 5} = -4$ D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 10x^3}{9x + 5x^2} = -\infty$

Я3. Która z poniższych granic jest równa $-\infty$?

- A. $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{3+2x}{x+5}$ B. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5+4x}{3-x}$ C. $\lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{2+3x}{x+6}$ D. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1-3x}{4-x}$

Я4. Dla jakiej wartości parametru p funkcja $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(-x+1) & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} + p & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$ jest ciągła?

- A. $p = -1$ B. $p = 0$ C. $p = 1$ D. $p = 2$

Я5. Równanie $x^3 + x^2 = x - 1$ ma jedno rozwiązanie. Do którego z podanych przedziałów należy to rozwiązanie?

- A. $\langle -1; 0 \rangle$ B. $\langle 0; 1 \rangle$ C. $\langle 1; 2 \rangle$ D. $\langle -2; -1 \rangle$

Я6. Tylko jedno z poniższych równań nie ma rozwiązania w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$. Które to równanie?

- A. $2^x - \frac{x}{x+1} = 0$ C. $3x - \log_2(x+2) = 0$
 B. $\cos x - x^3 = 0$ D. $-x^4 + x^3 + 1 = 0$

Я7. Oblicz granicę.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} (3 \cdot 5^x - 7)$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(3 \cdot 5^x - 7) - (5 - 4 \log_3 x)]$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (5 - 4 \log_3 x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(3 \cdot 5^x - 7) \cdot (5 - 4 \log_3 x)]$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(3 \cdot 5^x - 7) + (5 - 4 \log_3 x)]$ f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \cdot 5^x - 7}{5 - 4 \log_3 x}$

- Я 8.** Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{|x-5|}{x-5}$ nie ma granicy w punkcie $x = 5$.
- Я 9.** Sprawdź, czy funkcja $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } |x| > 1 \\ x^3 & \text{dla } |x| \leq 1 \end{cases}$ jest ciągła w punktach -1 oraz 1 .
- Я 10.** Wykaż, że równanie $x^3 - x + 3 = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle -3; 1 \rangle$, a następnie znajdź przybliżoną wartość tego rozwiązania z błędem $0,5$.

PRZED MATURĄ

Я1. Granica $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x+2}{x^2-5x+6}$ jest równa:

- A. $-\infty$ B. -1 C. 0 D. $+\infty$

Я2. Dla jakiej wartości parametru p zachodzi równość $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{px^3-3x+5}{(3x^2-1)(p-2)x} = 7$?

- A. $p = 2$ B. $p = 2,1$ C. $p = \sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $p = \frac{7}{3}$

Я3. Która z podanych poniżej granic jest błędna?

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 \cdot 3^x - 6 \cdot 5^x}{2 \cdot 7^x + 5 \cdot 2^x} = 0$ C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 \cdot 3^x + 6 \cdot 7^x}{2 \cdot 7^x + 5 \cdot 2^x} = \frac{13}{7}$
 B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 \cdot 3^x - 6 \cdot 7^x}{2 \cdot 5^x + 5 \cdot 2^x} = -\infty$ D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 \cdot 7^x - 6 \cdot 5^x}{2 \cdot 3^x + 5 \cdot 2^x} = +\infty$

Я4. Granica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}$ jest równa:

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

Я5. Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Funkcja $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ spełnia warunek $f(-1) \cdot f(1) < 0$, więc równanie $f(x) = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$.
 B. Funkcja $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$ spełnia warunek $f(-1) \cdot f(1) > 0$, więc równanie $f(x) = 0$ nie ma rozwiązań w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$.
 C. Funkcja $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ spełnia warunek $f(-1) \cdot f(1) < 0$, ale równanie $f(x) = 0$ nie ma rozwiązania w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$, ponieważ liczba 2 nie należy do dziedziny tej funkcji.
 D. Funkcja $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ spełnia warunek $\frac{f(-1)}{f(1)} < 0$, więc równanie $f(x) = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$.

Я6. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x-3}{x+2} + 4 \log_{\frac{1}{2}} x$ dla $x > 0$. Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $\langle \frac{1}{2}; 4 \rangle$.

Я7. Wykaż, że równanie $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x - 2 = 0$ ma w przedziale $(-2; 2)$ co najmniej dwa różne rozwiązania.

Я 8. Przedstaw dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{6x^2 + 3}{2x^2 - 8}$ w postaci sumy przedziałów. Znajdź granice funkcji f , gdy argumenty dążą do krańców tych przedziałów.

Я 9. Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru a granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^2 - a - 1)x + a}{-x + 2a}$ nie jest liczbą większą od $1\frac{1}{4}$.

Я 10. Wykaż, że funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \cdot \sin x & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 0,5^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie 0.

Я 11. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x^2-x-2} & \text{dla } x \neq -1 \text{ i } x \neq 2 \\ 1 & \text{dla } x \in \{-1, 2\} \end{cases}$ w punktach -1 oraz 2 .

Я 12. Dana jest funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \leq 3 \\ (x-m)^2 + 2 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$$

- Wyznacz wartości parametru m , dla których funkcja f jest ciągła.
- Dla wyznaczonych wartości m narysuj wykres funkcji f .

Я 13. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + 2x - 1$.

- Korzystając z definicji funkcji rosnącej, wykaż, że funkcja f jest rosnąca.
- Wykaż, że funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

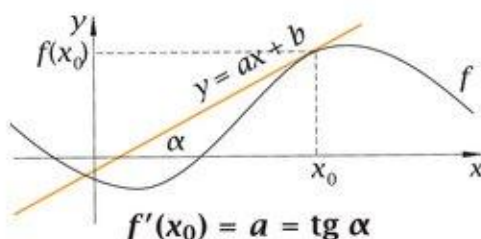
POCHODNA FUNKCJI

Pochodna funkcji

Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a; b)$ i niech $x_0 \in (a; b)$. Wówczas:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Liczba $f'(x_0)$ jest równa współczynnikowi kierunkowemu stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



Własności pochodnych

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \text{ gdzie } g(x) \neq 0$$

$$[g(f(x))]' = g'(y) \cdot f'(x), \text{ gdzie } y = f(x)$$

Pochodne niektórych funkcji

$$(c)' = 0 \quad (x)' = 1 \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x^a)' = ax^{a-1}$$

Przykłady interpretacji fizycznych

Jeśli s jest funkcją opisującą przemieszczenie obiektu w czasie t , to prędkość obiektu v jest jej pochodną, czyli $v(t) = s'(t)$. Natomiast przyspieszenie obiektu a jest pochodną prędkości, czyli $a(t) = v'(t)$.

Własności funkcji różniczkowalnych

Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a; b)$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale $(a; b)$.

Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a; b)$, to funkcja f jest malejąca w przedziale $(a; b)$.

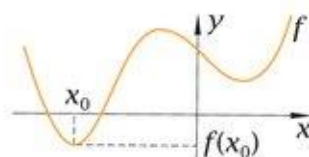
Jeśli $f'(x) = 0$ dla $x \in (a; b)$, to funkcja f jest stała w przedziale $(a; b)$.

Jeśli funkcja f jest rosnąca i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$, to dla każdego argumentu x z tego przedziału $f'(x) \geq 0$.

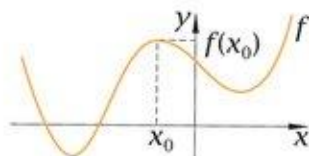
Jeśli funkcja f jest malejąca i różniczkowalna w przedziale $(a; b)$, to dla każdego argumentu x z tego przedziału $f'(x) \leq 0$.

Ekstrema

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe równe $f(x_0)$, gdy można wskazać takie sąsiedztwo punktu x_0 , że dla każdego argumentu x z tego sąsiedztwa $f(x_0) < f(x)$.



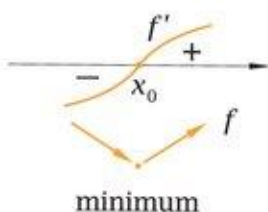
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe równe $f(x_0)$, gdy można wskazać takie sąsiedztwo punktu x_0 , że dla każdego argumentu x z tego sąsiedztwa $f(x_0) > f(x)$.



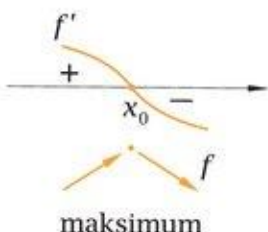
Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeśli funkcja f ma ekstremum w punkcie x_0 i jest w tym punkcie różniczkowalna, to $f'(x_0) = 0$.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum



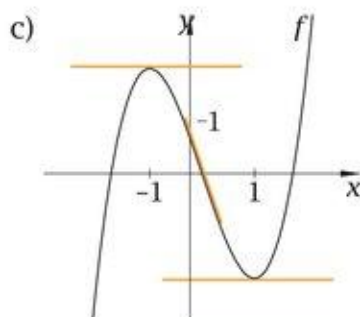
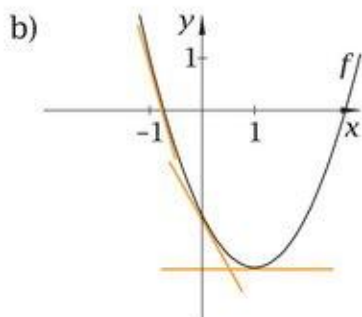
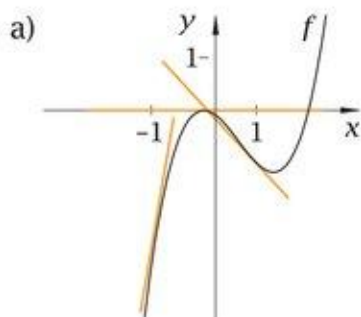
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (a; x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to funkcja ta ma w punkcie x_0 minimum.



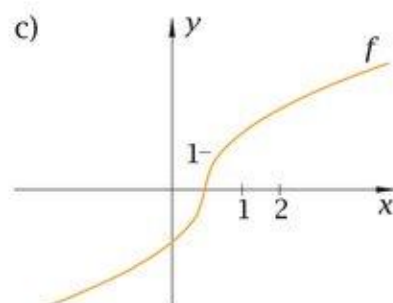
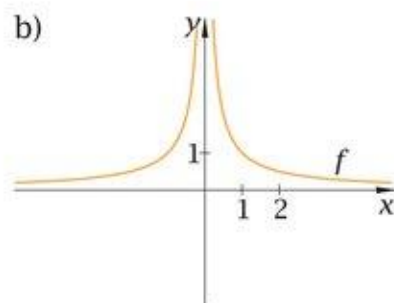
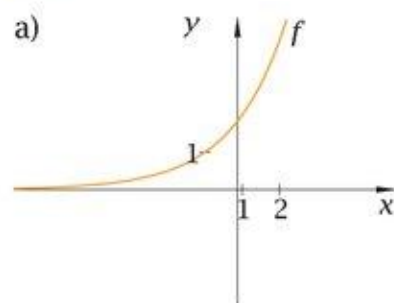
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale $(a; b)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (a; x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0; b)$, to funkcja ta ma w punkcie x_0 maksimum.

POCHODNA FUNKCJI W PUNKCIE

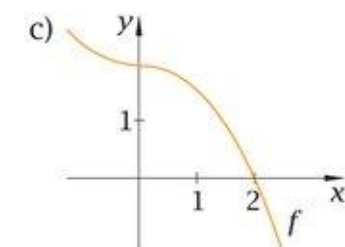
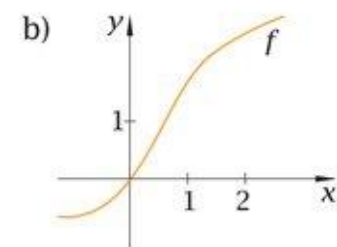
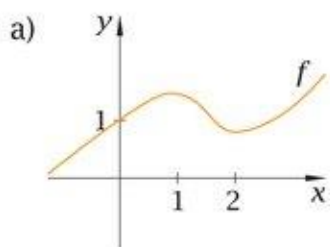
Я1. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji f oraz styczne do tego wykresu poprowadzone w trzech punktach: -1 , 0 i 1 . Określ, czy $f'(-1)$, $f'(0)$ i $f'(1)$ są liczbami dodatnimi, ujemnymi, czy równymi zero.



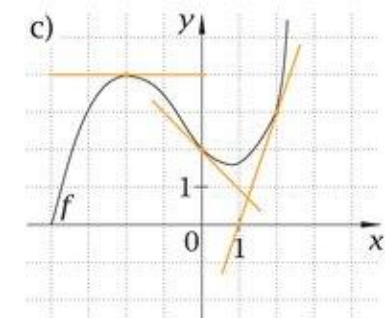
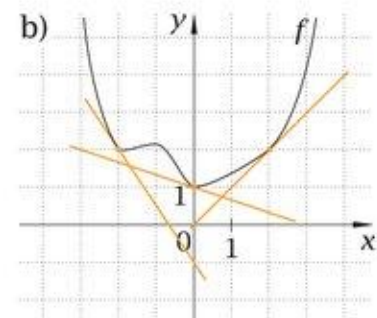
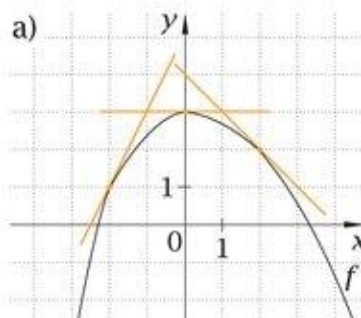
Я2. Na podstawie wykresu funkcji f określ, która z liczb jest większa: $f'(1)$ czy $f'(2)$.



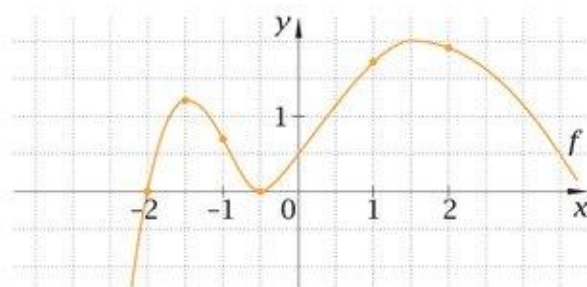
Я3. Na podstawie wykresu funkcji f określ, która z liczb jest największa: $f'(0)$, $f'(1)$ czy $f'(2)$.



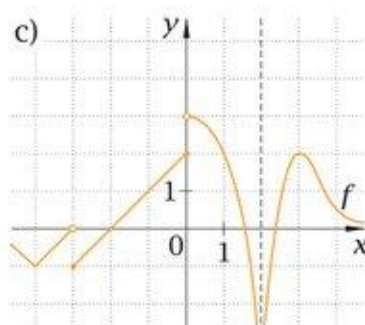
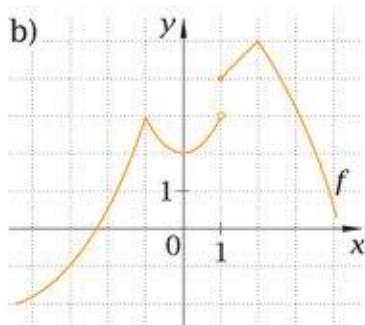
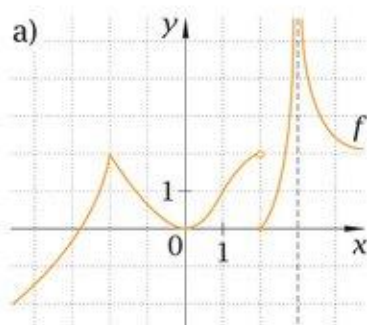
Я4. Narysowane proste są styczne do wykresu funkcji f w punktach o pierwszych współrzędnych -2 , 0 oraz 2 . Określ $f'(-2)$, $f'(0)$ i $f'(2)$.



Я5. Przyłóż linijkę (najlepiej przezroczystą) do wykresu funkcji w każdym z zaznaczonych punktów tak, aby wyznaczona przez nią linia jak najlepiej odpowiadała stycznej do wykresu. Oszacuj znak pochodnej w każdym z zaznaczonych punktów.



Я6. Odczytaj z wykresu, w których punktach swojej dziedziny funkcja f nie ma pochodnej.



Я7. Korzystając z definicji pochodnej funkcji, oblicz $f'(3)$.

a) $f(x) = 4x$

c) $f(x) = -\frac{1}{x}$

b) $f(x) = 2x^2 - x$

d) $f(x) = -x^3$

Я8. Korzystając z definicji pochodnej funkcji, znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji:

a) $f(x) = x^2 + 3$ w punkcie o współrzędnych $(2, 7)$

b) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ w punkcie o współrzędnych $(-1, 0)$

c) $f(x) = x + 3$ w punkcie o współrzędnych $(0, 3)$

Я9. Sprawdź, czy funkcja f ma pochodną w punkcie 2.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla } x \leq 2 \\ x^2 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \leq 2 \\ \frac{x^2}{2} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x \leq 2 \\ \frac{x^2}{4} & \text{dla } x > 2 \end{cases}$

Dla h odpowiednio bliskiego zeru wartość ilorazu różnicowego $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ jest bliska pochodnej $f'(x)$. Korzystając z tego, można oszacować pochodną funkcji w danym punkcie.

Jeśli na przykład chcemy oszacować wartość pochodnej funkcji $f(x) = \sin x$ w punkcie 0, wybieramy odpowiednio małą wartość h i obliczamy wartość ilorazu różnicowego dla tak dobranego h , np.

$$\text{dla } h = 0,1 \text{ mamy } \frac{\sin(0+0,1) - \sin 0}{0,1} \approx 0,998$$

$$\text{dla } h = 0,01 \text{ mamy } \frac{\sin(0+0,01) - \sin 0}{0,01} \approx 0,99998$$

Możemy przyjąć, że $\sin'(0) \approx 1$ (w rzeczywistości jest to dokładnie 1).

Я 10. Przeczytaj informacje w ramce. Opisaną metodą oszacuj wartość pochodnej funkcji f w punkcie x_0 :

a) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0$

c) $f(x) = 3^x, \quad x_0 = 1$

b) $f(x) = 2^x, \quad x_0 = 0$

d) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

Я 11. Wyznacz wartości parametrów p i q tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} x+p & \text{dla } x \leq 3 \\ \frac{q}{x} & \text{dla } x > 3 \end{cases}$ była różniczkowalna w punkcie 3.

POCHODNA FUNKCJI

Я 12. Oblicz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = x^{1,2}$

c) $f(x) = -3\sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = 2\sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{2}{x\sqrt{x}}$

Я 13. Oblicz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = (x-3)(2-x)$

c) $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$

e) $f(x) = (x^3 + 2\sqrt{x})\sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = (x^2 - x)(x - 2)$

d) $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 - 2x)$

f) $f(x) = (x^2 - 2)\sqrt[3]{x}$

Я 14. Oblicz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{5x^2+2}{2x-1}$

b) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \frac{x^2-2}{x}$

f) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-1}$

Я 15. Oblicz pochodną funkcji f na dwa sposoby: 1) zastosuj wzór na pochodną iloczynu (ilorazu); 2) wykonaj najpierw mnożenie (dzielenie), a następnie oblicz pochodną. Porównaj wyniki.

a) $f(x) = (x^2 + 1)(x - 5)$

c) $f(x) = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

b) $f(x) = (x^2 + \sqrt{x})(x - 1)$

d) $f(x) = \frac{x + 2}{x}$

f) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x^2}$

Я 16. Podaj trzy przykłady funkcji f spełniających poniższy warunek. Ile takich przykładów można podać?

a) $f'(x) = 5$

b) $f'(x) = 7x^6 + 2$

c) $f'(x) = x^4$

Я 17. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{4}$ poprowadzono styczne w punktach $(1, \frac{1}{4})$ i $(2, 1)$. Wyznacz punkt przecięcia tych stycznych.

Я 18. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^3 - 8x + 5$.

a) Wyznacz współrzędne punktów, w których styczne do wykresu funkcji f są równoległe do prostej $y = 4x - 7$.

b) Wyznacz współrzędne punktów, w których styczne do wykresu funkcji f są prostopadłe do prostej $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Я 19. Przez punkt $(1, 1)$ przeprowadzono prostą l styczną do wykresu funkcji f . Sprawdź, czy istnieje styczna do wykresu funkcji f prostopadła do prostej l . Jeśli tak, to wyznacz współrzędne punktu, w którym należy ją poprowadzić.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

Я 20. Czy można wskazać dwa różne punkty wykresu funkcji f , w których styczne są do siebie równoległe? Jeśli tak, podaj przykład, jeśli nie — uzasadnij dlaczego.

a) $f(x) = x^3 + x$

b) $f(x) = x^4 + 5$

c) $f(x) = x^4 + 2x^3$

Я 21. Wyznacz (o ile istnieje) równanie stycznej do wykresu funkcji f , nachylonej do osi x pod kątem α .

a) $f(x) = x^2 + 1$, $\alpha = 30^\circ$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\alpha = 45^\circ$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $\alpha = 45^\circ$

Я 22. Przez punkt o podanej odciętej x_0 poprowadzono styczną do wykresu funkcji $y = x^3$. Wyznacz przybliżoną miarę kąta nachylenia tej stycznej do osi x .

a) $x_0 = 1$

b) $x_0 = 2$

c) $x_0 = -4,4$

Я23. Przez punkt o podanej odciętej x_0 poprowadzono styczną do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x^2}{2x-4}$. Oblicz miarę kąta nachylenia tej stycznej do osi x .

a) $x_0 = 4$

b) $x_0 = 2 - 2\sqrt{3}$

c) $x_0 = 2 \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

Я24. Wyznacz odcięte punktów, w których styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ jest nachylona do osi x pod kątem α .

a) $\alpha = 0^\circ$

b) $\alpha = 45^\circ$

c) $\alpha = 135^\circ$

Я25. Wyznacz taką wartość a , aby styczna do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ w punkcie $x_0 = 2$ była nachylona do osi x pod kątem α . Wynik zaokrąglaj do 0,001.

a) $\alpha = 20^\circ$

b) $\alpha = 50^\circ$

c) $\alpha = 80^\circ$

Я26. a) Na paraboli $y = x^2$ wyznacz punkt leżący najbliżej prostej $y = x - 5$.

b) Na hiperboli $y = \frac{1}{x}$ wyznacz punkt leżący najbliżej prostej $y = -9x$.

c) Na wykresie funkcji $y = \sqrt{x}$ wyznacz punkt leżący najbliżej prostej $y = \frac{1}{4}x + 3$.

Я27. Udowodnij wzór: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$, gdzie $g(x) \neq 0$.

Я28. Kątem, pod którym przecinają się dwie krzywe, nazywamy kąt ostry (lub prosty) między prostymi stycznymi do tych krzywych w punkcie ich przecięcia.

a) Jeden z punktów przecięcia się wykresów funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i $g(x) = x^3$ ma współrzędne $(1, 1)$. Znajdź z dokładnością do dziesiątej części stopnia kąt, pod którym wykresy funkcji f i g przecinają się w tym punkcie.

b) Znajdź z dokładnością do dziesiątej części stopnia kąt, pod którym prosta $y = -x + 2$ przecina wykres funkcji $y = \sqrt{x}$.

c) Oblicz, dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = \frac{m}{x}$ i $g(x) = x^2$ przecinają się pod kątem prostym.

Я29. Z punktu P poprowadzono styczne do wykresu funkcji $f(x) = x^4$. Wyznacz równania tych stycznych.

a) $P = (0, -3)$

b) $P = (-1, 0)$

Я30. Niech prosta l będzie styczna do hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$ w punkcie P . Prosta ta przecina osie układu w punktach A i B . Wykaż, że punkt P jest środkiem odcinka AB .

Я31. Wykaż, że styczna do paraboli $y = ax^2$ w punkcie (x_0, y_0) ma równanie $y = 2ax_0x - y_0$.

Zgodnie z definicją pochodnej funkcji f w punkcie x_0 $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, więc można przyjąć, że dla odpowiednio małych dodatnich wartości h zachodzi: $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, a stąd wynika, że $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$. Skorzystamy z tej zależności, aby obliczyć przybliżoną wartość $\sqrt{106}$. Niech $x_0 = 100$, $h = 6$ i $f(x) = \sqrt{x}$ (zatem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$). Wtedy:

$$\sqrt{106} = f(106) = f(100+6) \approx f(100) + f'(100) \cdot 6 = \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \cdot 6 = 10 + \frac{3}{10} = 10,3$$

Я32. Przeczytaj informacje w ramce. Opisaną metodą oblicz przybliżoną wartość:

a) $\sqrt{10008}$

b) $\sqrt[3]{1009}$

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{10012}}$

Я33. Pochodną pochodnej funkcji f nazywamy drugą pochodną funkcji f i oznaczamy $f''(x)$. Pochodną drugiej pochodnej funkcji f nazywamy trzecią pochodną funkcji f i oznaczamy $f'''(x)$. Oblicz wartość $f''(x)$ i $f'''(x)$ w punkcie 4.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

Funkcja f jest funkcją parzystą, jeśli dla każdego argumentu x tej funkcji również $-x$ jest jej argumentem i $f(-x) = f(x)$.

Funkcja f jest funkcją nieparzystą, jeśli dla każdego argumentu x tej funkcji również $-x$ jest jej argumentem i $f(-x) = -f(x)$.

Я34. a) Przeczytaj informacje w ramce. Udowodnij, że jeżeli funkcja jest różniczkowalna i parzysta, to jej pochodna jest funkcją nieparzystą.

b) Przeczytaj informacje w ramce. Udowodnij, że jeżeli funkcja jest różniczkowalna i nieparzysta, to jej pochodna jest funkcją parzystą.

POCHODNA FUNKCJI ZŁOŻONEJ

Я35. Wyznacz wzory funkcji $g \circ f$ oraz $f \circ g$.

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + 5$

e) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = 2 - 4x$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x - 3$

f) $f(x) = 5^x$, $g(x) = -2x - 7$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = -3x + 1$

g) $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$

d) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 0,5x + \pi$

h) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = x^4$

Я36. Podaną funkcję można przedstawić jako złożenie $f(x) = (h \circ g)(x)$. Podaj przykładowe wzory, jakie mogą mieć funkcje g i h .

a) $f(x) = \log_7(5x - 8)$

c) $f(x) = \frac{6}{x^2 + x}$

e) $f(x) = 7^{\cos x} - 5$

b) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{3 - 2^x}$

f) $f(x) = 2 + (4x^3 - 2x)^6$

Я37. Wyznacz pochodną funkcji.

a) $f(x) = (6x + 5)^{10}$

c) $f(x) = \frac{1}{-4x - 7}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{5x^2 + 4x}$

b) $f(x) = \sqrt{5x - 2}$

d) $f(x) = (2x^3 - 3x^2)^{-5}$

f) $f(x) = \frac{2}{(x^4 + 5x^3)^7}$

Я38. Korzystając z wartości funkcji f i g podanych w tabeli oblicz:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	5	3	1	3	4
$g(x)$	5	3	4	2	5	2

a) $(f \circ g)(0)$, $(g \circ f)(0)$, $(f \circ f)(0)$, $(g \circ g)(0)$

b) $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(3)$, $(f \circ f)(4)$, $(g \circ g)(5)$

c) $(f \circ g \circ f)(1)$, $(g \circ f \circ g)(1)$, $(g \circ f \circ f)(1)$, $(g \circ g \circ g)(1)$

d) $(f \circ f \circ g)(0)$, $(f \circ g \circ g)(2)$, $(g \circ g \circ f)(3)$, $(f \circ f \circ f)(5)$

Я39. Wyznacz wzory funkcji $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ oraz $g \circ g$.

a) $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = \frac{3}{x}$

c) $f(x) = \log_2(x - 5)$, $g(x) = 7 \cos 3x$

b) $f(x) = 5x^2 - 2$, $g(x) = 3^x + 2$

d) $f(x) = \frac{4}{x^3 - 6}$, $g(x) = 2\sqrt[3]{x + 1}$

Я40. Wyznacz wzory funkcji $g \circ f$ oraz $f \circ g$.

a) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$

c) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = 3^x - 2x$

b) $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 3 - \log x$

d) $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $g(x) = \frac{2x}{1-x}$

Я41. Wyznacz wzory funkcji $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ oraz $h \circ f \circ g$.

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = 2\sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = x^2$

b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \frac{x}{\pi}$

d) $f(x) = \log_5 x$, $g(x) = 5^x$, $h(x) = x^5$

Я42. Funkcję f można przedstawić jako złożenie $f(x) = (h \circ g)(x)$. Podaj przykładowe wzory, jakie mogą mieć funkcje g i h , oraz znajdź wzór funkcji $k(x) = (g \circ h)(x)$.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $f(x) = \frac{7}{3x - x^2}$

b) $f(x) = \log(x^3 + x)$

d) $f(x) = \sin(2x + 5^x)$

Я43. Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+5}}$ b) $f(x) = \left(\frac{x+4}{5x-2}\right)^5$ c) $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2}$ d) $f(x) = \left(\sqrt[5]{\frac{3x}{x-4}}\right)^9$

Я44. Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = (4x-7)^3 + (3x^2+2x-5)^4$ c) $f(x) = \frac{3}{(2x-9)^5} + \sqrt[3]{4x^2+5x}$
b) $f(x) = (5x^2+4)^{-6} - (x^2-3x+7)^{\frac{5}{3}}$ d) $f'(x) = \sqrt{5x^3-4x^2+3} - \frac{5}{\sqrt[3]{2x-1}}$

Я45. Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = (4x-3)^5 \cdot (2-5x)^7$ c) $f(x) = \sqrt{7x+5} \cdot (3x-4)^8$
b) $f(x) = (6x+5)^4 \cdot (-2x+3)^{-\frac{3}{4}}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{-3x-5} \cdot \sqrt{2x+9}$

Я46. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o pierwszej współrzędnej x_0 .

a) $f(x) = (3x^4-2x)^{-4}$, $x_0 = 1$ c) $f(x) = x \cdot \sqrt{5x-1}$, $x_0 = 2$
b) $f(x) = \sqrt[3]{2x^3+3x^2}$, $x_0 = -1$ d) $f(x) = \frac{1}{(7+2x)^5} - \sqrt{(10+3x)^3}$, $x_0 = -3$

Я47. Funkcję f można przedstawić jako złożenie dwóch funkcji. Zaproponuj, jakie wzory mogą mieć te funkcje. Podaj dwie różne propozycje.

a) $f(x) = \sqrt{x+7}$ b) $f(x) = \frac{5}{6x}$ c) $f(x) = 3^{x+4}$ d) $f(x) = \log_2(8x^3)$

Я48. Przeczytaj informacje w ramce przed zadaniem 34. Udowodnij, że:

- a) złożenie dwóch funkcji parzystych jest funkcją parzystą,
- b) złożenie dwóch funkcji nieparzystych jest funkcją nieparzystą,
- c) złożenie funkcji parzystej i funkcji nieparzystej (niezależnie od kolejności złożenia) jest funkcją parzystą.

Я49. Udowodnij, że:

- a) złożenie dwóch funkcji rosnących jest funkcją rosnącą,
- b) złożenie dwóch funkcji malejących jest funkcją rosnącą,
- c) złożenie funkcji malejącej i funkcji rosnącej (niezależnie od kolejności złożenia) jest funkcją malejącą.

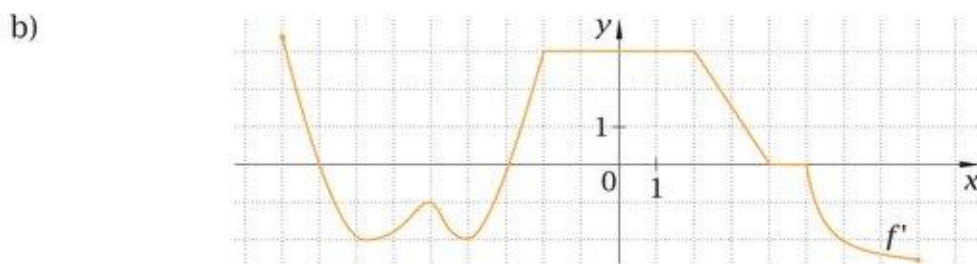
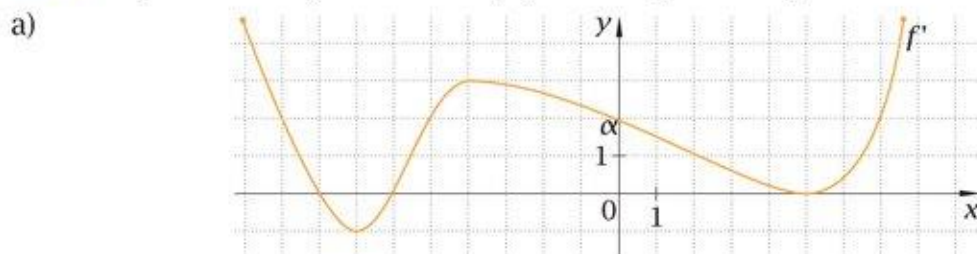
Я50. Udowodnij, że jeśli funkcja $y = g(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 , a funkcja $y = f(x)$ — w punkcie $g(x_0)$, to w tym punkcie x_0 ciągła jest też funkcja $h(x) = (f \circ g)(x)$.

Я51. Wyznacz pochodną funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{(5x^2-4x)^3+2}$ b) $f(x) = \frac{7}{\sqrt[3]{2x^3+7x-3}+5}$

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

Я52. Na podstawie wykresu funkcji f' określ przedziały monotoniczności funkcji f .



Я53. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2$

e) $f(x) = x^4 + 32x$

b) $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$

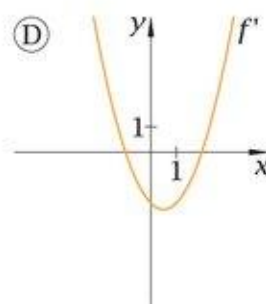
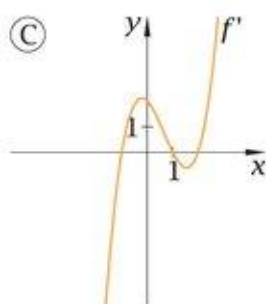
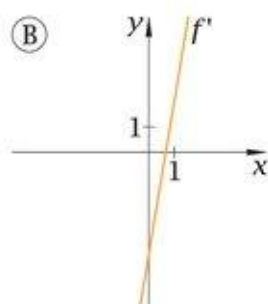
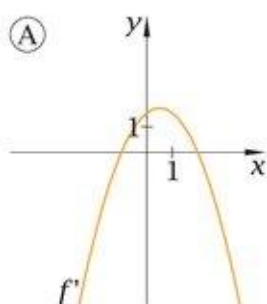
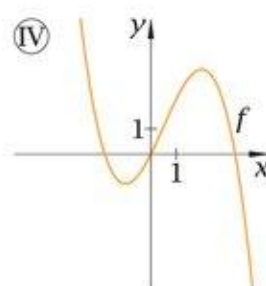
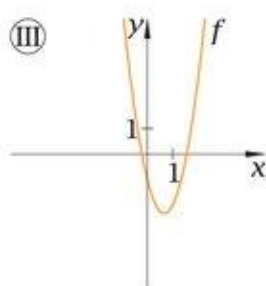
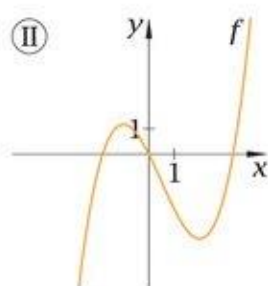
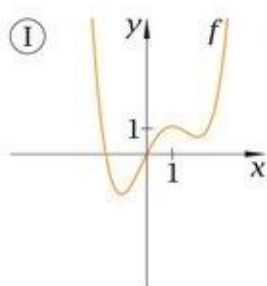
d) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x$

f) $f(x) = -2x^4 + 3$

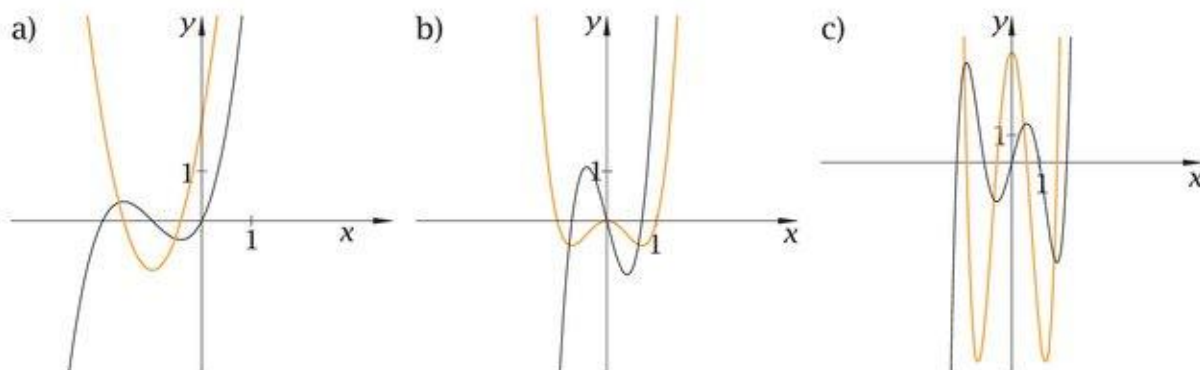
Я54. a) Wykaż, że funkcja $f(x) = 5x^5 + 4x - 6$ jest rosnąca.

b) Wykaż, że funkcja $f(x) = -3x^7 - x + 8$ jest malejąca.

Я55. Do każdej z funkcji o wykresie przedstawionym na jednym z rysunków ① – ④ dopasuj wykres jej pochodnej spośród wykresów ① – ④.



Я56. Jeden z poniższych wykresów przedstawia funkcję f , a drugi — funkcję f' . Który jest który?



Я57. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

d) $f(x) = 3x^5 + 5x^3$

b) $f(x) = 3x^4 + 8x^3$

e) $f(x) = 12x^5 + 15x^4 - 40x^3$

c) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 + x^2$

f) $f(x) = -\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} - x$

Я58. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x$

c) $f(x) = 6x^5 - 20x^3 - 45x^2 - 60x$

b) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{7x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2}$

Я59. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+8}$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{-x^2+6x-8}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

Я60. a) Wykaż, że funkcja $f(x) = 1 - x - \sqrt{x}$ jest malejąca.

b) Wykaż, że funkcja $f(x) = x(1 + \sqrt{x})$ jest rosnąca.

c) Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}$ jest malejąca.

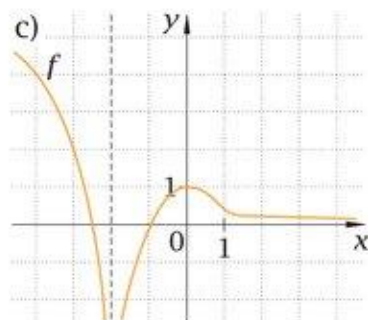
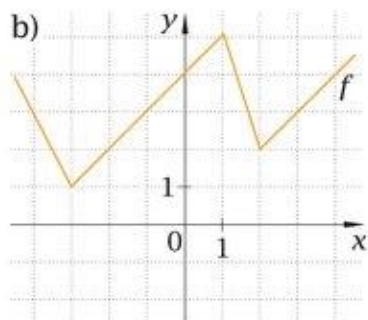
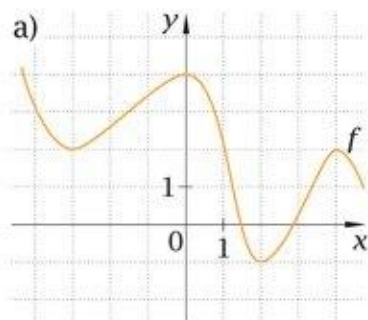
Я61. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}x^2$.

Я62. Dana jest funkcja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Wyznacz, dla jakich wartości parametrów a, b, c, d funkcja f jest rosnąca.

Я63. Określ przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ w zależności od wartości parametrów a i b .

EKSTREMA

Я64. Odczytaj z wykresu funkcji f , w jakich punktach osiąga ona ekstrema.



Я65. Wyznacz ekstrema funkcji f .

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

d) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$

b) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x - 3$

e) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

c) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - 9$

f) $f(x) = -3x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 16$

Я66. Określ przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

Я67. Naszkicuj wykres funkcji f oraz na jego podstawie określ, w jakich punktach funkcja f osiąga ekstrema.

a) $f(x) = \sin x$

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$

e) $f(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \cos x$

d) $f(x) = 2^x$

f) $f(x) = |x|$

Я68. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f i znajdź jej ekstrema.

a) $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 6x + 1$

c) $f(x) = -2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 50x^2 + 102$

b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 30x^2 - 36x + 2005$

d) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 5x^2 + 7$

Я69. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f i znajdź jej ekstrema.

a) $f(x) = \frac{x + \frac{3}{4}}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

e) $f(x) = \frac{x + 3}{(x + 2)^2}$

b) $f(x) = \frac{x + 3}{x + 2}$

d) $f(x) = \frac{-x^2 + x - 2}{x + 1}$

f) $f(x) = -\frac{(x + 1)^2}{x^2 - 9}$

Я70. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$ oraz $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$.

Я71. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f i znajdź jej ekstrema.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 7}{x - 4}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{3 - x}$

Я72. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f i znajdź jej ekstrema.

a) $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$

Я73. Znajdź wartości parametrów a i b , dla których funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{(x+3)^2}$ osiąga ekstremum w punkcie -1 równe $0,5$. Określ, jakiego rodzaju jest to ekstremum.

Я74. Podaj przykład wzoru funkcji oraz naszkicuj wykres funkcji, która:

a) ma w punkcie 1 ekstremum, ale nie ma w nim pochodnej,

b) ma w punkcie 1 pochodną równą 0 , ale nie ma w nim ekstremum.

Я75. Jaki warunek muszą spełniać współczynniki a , b , c oraz d , aby funkcja

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ gdzie } a \neq 0$$

a) nie miała ekstremów,

b) miała dokładnie jedno ekstremum,

c) miała dwa ekstrema?

Я76. Oblicz, dla jakich wartości parametru p funkcja $f(x) = \frac{2x-p}{x^2-p}$ nie ma ekstremów.

Я77. Dla jakich wartości parametru p funkcja $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}p^2x^2 + 2p^2x$ ma dokładnie jedno ekstremum? Czy jest to maksimum czy minimum?

Я78. Znajdź ekstremum funkcji f .

a) $f(x) = x - \sqrt{1+x}$

b) $f(x) = x\sqrt{1-x}$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

Я79. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f i znajdź jej ekstrema.

a) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

b) $f(x) = x^2\sqrt{9-x^2}$

c) $f(x) = x^3\sqrt{25-x^2}$

Я80. Znajdź największy wyraz ciągu.

a) $a_n = \frac{n}{n^2+100}$

b) $a_n = -n^2 + 39n - 100$

c) $a_n = \frac{n^3+100}{-n}$

Я81. Ustal, ile rozwiązań ma równanie w zależności od wartości parametru p .

a) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = p$

b) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = p$

Я82. Ustal, ile rozwiązań ma równanie w zależności od wartości parametru p .

a) $\frac{1}{1-x^2} = p$

b) $\frac{x^2+1}{x^2-4} = p$

Я83. Załóż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej p symbol $g(p)$ oznacza liczbę rozwiązań równania $\frac{2x^2}{(2-x)^2} = p$. Wyznacz wzór funkcji $y = g(p)$ i naskicuj jej wykres.

Я84. Załóż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej m symbol $g(m)$ oznacza liczbę rozwiązań równania $\frac{x^4+3x^2-4}{x^4} = m$. Wyznacz wzór funkcji $y = g(m)$ i naskicuj jej wykres.

Я85. Wyznacz argumenty, dla których funkcja $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, ($a, b > 0$) przyjmuje ekstrema. Wyznacz te ekstrema.

Я86. Wyznacz wartości parametrów a i b , dla których funkcja $f(x) = \frac{ax+b}{(x+1)(x-2)}$ osiąga ekstremum równe -3 dla $x = 1$. Określ, jakiego rodzaju jest to ekstremum. Dla wyznaczonych wartości parametrów a i b znajdź drugie ekstremum i określ jego rodzaj.

ZASTOSOWANIA POCHODNEJ

Я87. Odczytaj z wykresu największą i najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale:

a) $\langle 0; 1 \rangle$

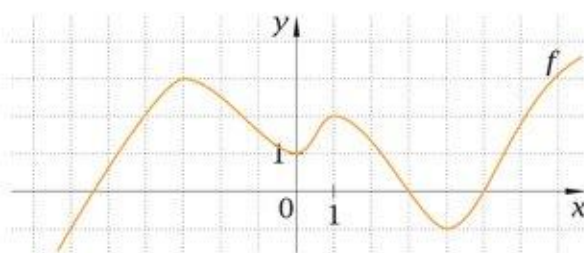
d) $\langle -3; 4 \rangle$

b) $\langle -4; 2 \rangle$

e) $\langle -4; 4 \rangle$

c) $\langle \frac{1}{2}; 3 \rangle$

f) $\langle -5; 3 \rangle$



Я88. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ w przedziale:

a) $\langle -1; 1 \rangle$

b) $\langle 0; 2 \rangle$

c) $\langle -\frac{1}{4}; 1\frac{1}{4} \rangle$

Я89. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $\langle -1; 3 \rangle$

c) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 7$, $\langle -3; 5 \rangle$

b) $f(x) = -2x^3 + 24x - 5$, $\langle -3; 3 \rangle$

d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$, $\langle -3; 2 \rangle$

Я90. Wyznacz najmniejszą i największą wartość (o ile istnieją) funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{4}$ w podanym przedziale.

a) $\langle -2; 0 \rangle$

b) $\langle -1; 1 \rangle$

c) $\langle -2; 3 \rangle$

Я91. Wyznacz najmniejszą i największą wartość (o ile istnieją) funkcji $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ w podanym przedziale.

a) $\langle -1; \frac{1}{2} \rangle$

b) $\langle -2; 0 \rangle$

c) $\langle 1\frac{1}{2}; 3 \rangle$

Я92. Przedstaw liczbę 1 jako sumę takich dwóch dodatnich liczb, aby:

a) suma kwadratów tych liczb była jak najmniejsza,

b) iloczyn jednej z tych liczb i sześciannu drugiej z nich był jak największy,

c) suma jednej z tych liczb i czwartej potęgi drugiej z nich była jak najmniejsza.

Я93. Wyznacz dwie liczby dodatnie a i b , których suma jest równa 4 i podana poniżej suma jest możliwie najmniejsza.

a) $a^3 + b$

b) $a^3 + b^2$

c) $a^3 + b^3$

Я94. Dodatnie półosie układu współrzędnych i prosta l przechodząca przez punkt P ograniczają trójkąt. Wyznacz równanie prostej l , jeżeli pole trójkąta jest możliwie najmniejsze.

a) $P = (1, 2)$

b) $P = (2, 5)$

c) $P = (4, 1)$

Я95. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na prostej l , dwa pozostałe na paraboli p . Oblicz wymiary tego prostokąta, tak aby jego pole było jak największe.

a) $l: y = 4,$

b) $l: y = 0,$

c) $l: y = 5,$

$p: y = x^2$

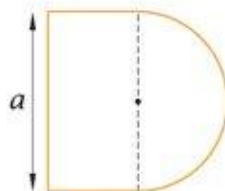
$p: y = -\frac{1}{3}x^2 + 25$

$p: y = 2x^2 - 9$

Я96. Za położenie 1 m^2 płytek na dnie basenu trzeba zapłacić 100 zł, a 1 m^2 płytek na ścianach — 120 zł. Oblicz, jakie powinien mieć pozostałe wymiary prostopadłościenny basen o długości 10 m, by jego pojemność wynosiła 100 m^3 , a koszt położenia płytek był jak najmniejszy.

Я97. Chcemy zbudować szkatułkę na biżuterię w kształcie prostopadłościanu o pojemności 2000 cm^3 , której dwie ze ścianek bocznych są kwadratami. Ściany boczne mają być wykonane z materiału, którego 1 dm^2 kosztuje 5 zł, a dno i pokrywka mają być wykonane z materiału, którego 1 dm^2 kosztuje 10 zł. Oblicz, jakie wymiary powinna mieć ta szkatułka, aby koszt wykorzystanych do jej budowy materiałów był jak najmniejszy.

- Я 98.** Z drutu o długości 10 cm wykonujemy ramkę będącą brzegiem figury złożonej z prostokąta i półkola. Dobierz długość a , tak aby powstała figura miała największe pole powierzchni. Oblicz to pole.



- Я 99.** a) Drewniana tacka w kształcie prostokąta otoczona jest metalową taśmą. Fragment taśmy o długości 1 cm waży 1 g. Tyle samo waży 1 cm^2 deski, z której wykonano tackę. Oblicz, jaki powinien być stosunek długości boków tej tacki, aby jej pole było największe, a waga wynosiła 250 g.
- b) Jak zmieniłaby się odpowiedź na pytanie w podpunkcie a), gdyby tacka była otoczona taśmą tylko z trzech stron?

- Я 100.** Suma długości krawędzi graniastosłupa jest równa 60 cm, a jego objętość jest największa z możliwych. Oblicz długości krawędzi tego graniastosłupa, jeśli jego podstawa jest:

a) kwadratem, b) trójkątem równobocznym, c) sześciokątem foremnym.

- Я 101.** Oblicz, jaką największą objętość może mieć stożek o tworzącej długości:

a) 1 m, b) 1 m.

- Я 102.** Oblicz, jakie wymiary powinien mieć metalowy pojemnik w kształcie walca o objętości 64 dm^3 , aby na jego wykonanie zużyć jak najmniej metalu, jeśli:

a) pojemnik nie ma pokrywki, b) pojemnik ma pokrywkę.

W obliczeniach pominij grubość blachy, z której ma być wykonany pojemnik.

- Я 103.** W kulę o promieniu 1 m wpisujemy walec. Oblicz, jakie wymiary powinien mieć ten walec, aby:

a) jego objętość była jak największa,
b) pole jego powierzchni bocznej było jak największe.

- Я 104.** a) Pewna firma sprzedaje towar, którego cena waha się pomiędzy 50 zł a 100 zł. Liczba sprzedanych dziennie sztuk L zależy od ceny c złotych jednej sztuki towaru zgodnie ze wzorem: $L(c) = 210c - 2c^2$. Oblicz, jaka cena jednej sztuki towaru przynosi największy przychód tej firmie.

b) Miesięcznie pewna firma jest w stanie wyprodukować co najwyżej 500 sztuk towaru. Cena C złotych, jaką firma uzyskuje za jedną sztukę, zależy od liczby wyprodukowanych miesięcznie egzemplarzy towaru t zgodnie ze wzorem: $C(t) = 500 - 0,02t$. Koszty K złotych, jakie firma ponosi, by wyprodukować t sztuk towaru miesięcznie, można obliczyć ze wzoru: $K(t) = 0,001t^3 - 0,5t^2 + 500t$. Oblicz, ile sztuk towaru powinna miesięcznie produkować ta firma, żeby osiągnąć jak największy dochód.

Я 105. a) Oblicz, jakie wymiary powinien mieć prostokąt o obwodzie 10 cm, aby w wyniku obrotu tego prostokąta wokół jednego z boków otrzymać walec o jak największej objętości.

b) Oblicz, jakie wymiary powinien mieć trójkąt równoramienny o obwodzie 10 cm, aby w wyniku obrotu tego trójkąta wokół podstawy otrzymać bryłę o jak największej objętości.

Я 106. W kulę o promieniu 1 m wpisujemy stożek. Oblicz, jakie wymiary powinien mieć ten stożek, aby:

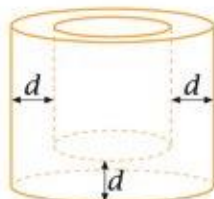
a) jego objętość była jak największa,

b) pole jego powierzchni bocznej było jak największe.

Я 107. Liczbę dodatnią p przedstawiono jako sumę dwóch liczb a i b takich, że suma $a^{10} + b$ jest najmniejszą z możliwych. Wyznacz liczbę a .

Я 108. Znajdź na paraboli o równaniu $y = \frac{x^2}{8}$ taki punkt, którego odległość od punktu $(2, 4)$ jest najmniejsza.

Я 109. Pojemnik bez pokrywki ma mieć kształt walca. Ścianki i dno będą mieć grubość d i jego pojemność ma wynosić 1 litr (zobacz rysunek). Oblicz, jakie wymiary powinna mieć wewnętrzna część tego pojemnika, aby na jego wykonanie zużyć jak najmniej materiału.



Я 110. Hurtownia sprzedaje codziennie 100 sztuk pewnego produktu. Przywóz tego produktu od producenta kosztuje 900 zł bez względu na wielkość dostawy. Jednak przechowywanie 1 sztuki w magazynie kosztuje 2 gr za dzień. Oblicz, co ile dni właściciel hurtowni powinien zamawiać dostawy, aby zminimalizować łączny koszt dostaw i magazynowania.

Я 111. Zużycie paliwa przez pewien samochód (w litrach na 100 km) zależy od jego prędkości v (w km/h). Zależność tę dla $v \in \langle 40; 130 \rangle$ można zapisać wzorem:

$$p(v) = 0,005v^2 - 0,8v + 40$$

a) Oblicz, przy jakiej prędkości samochód spala najmniej paliwa. Ile wtedy spala?

b) Godzina korzystania z takiego samochodu wynajętego w pewnej wypożyczalni kosztuje 32,40 zł. Oprócz tego trzeba zapłacić za paliwo po 4 zł za litr. Oblicz, przy jakiej prędkości podróżowania łączny koszt transportu będzie najmniejszy.

ZASTOSOWANIA POCHODNEJ (CD.)

Я 112. Częsteczka porusza się wzdłuż linii prostej i jej odległość d (w metrach) od ustalonego punktu P na tej prostej jest funkcją czasu t (w sekundach), który upłynął od początku obserwacji. Oblicz odległość od punktu P , prędkość i przyspieszenie cząsteczki w momencie rozpoczęcia obserwacji.

a) $d(t) = t^3 + 5t^2 + 9t + 10$

b) $d(t) = t^4 + 3t^2 + 5t + 7$

c) $d(t) = 2t^4 + 5t^3 + 6t^2$

d) $d(t) = 3t^4 + 2t^3 + 4t$

Я 113. Z dachu domu rzucono w górę piłkę. Jej odległość h (w metrach) od ziemi po upływie czasu t (w sekundach), który upłynął od momentu wyrzutu, opisuje funkcja:
 $h(t) = -5t^2 + 25t + 30$.

a) Określ dziedzinę tej funkcji.

b) Z jaką prędkością piłka uderzyła w ziemię?

c) Po jakim czasie od wyrzutu prędkość piłki była równa $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?



Я 114. Częsteczka porusza się wzdłuż linii prostej, na której ustalono kierunki dodatni i ujemny (tak jak na osi liczbowej). Przemieszczenie d (w metrach) cząsteczki od ustalonego punktu P na tej prostej jest funkcją czasu t (w sekundach), który upłynął od początku obserwacji: $d(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 12$.

a) Oblicz odległość od punktu P , prędkość i przyspieszenie cząsteczki w momencie rozpoczęcia obserwacji. Co oznacza ujemna wartość prędkości?

b) Oblicz odległość od punktu P , prędkość i przyspieszenie cząsteczki po upływie 4 sekund od rozpoczęcia obserwacji. Co oznacza ujemna wartość przyspieszenia?

c) Oblicz odległość od punktu P , prędkość i przyspieszenie cząsteczki po upływie 6 sekund od rozpoczęcia obserwacji. Co oznaczają ujemne wartości prędkości i przyspieszenia?

Я 115. Częsteczka porusza się wzdłuż linii prostej, na której ustalono kierunki dodatni i ujemny (tak jak na osi liczbowej). Przemieszczenie d (w metrach) cząsteczki od ustalonego punktu P na tej prostej jest funkcją czasu t (w sekundach), który upłynął od początku obserwacji: $d(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 5$.

a) Kiedy cząsteczka zmienia kierunek ruchu?

b) Jaką prędkość osiąga cząsteczka w chwili, gdy jej przyspieszenie jest równe $0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

c) Jakie jest największe przemieszczenie w ciągu pierwszych 4 sekund od początku obserwacji?

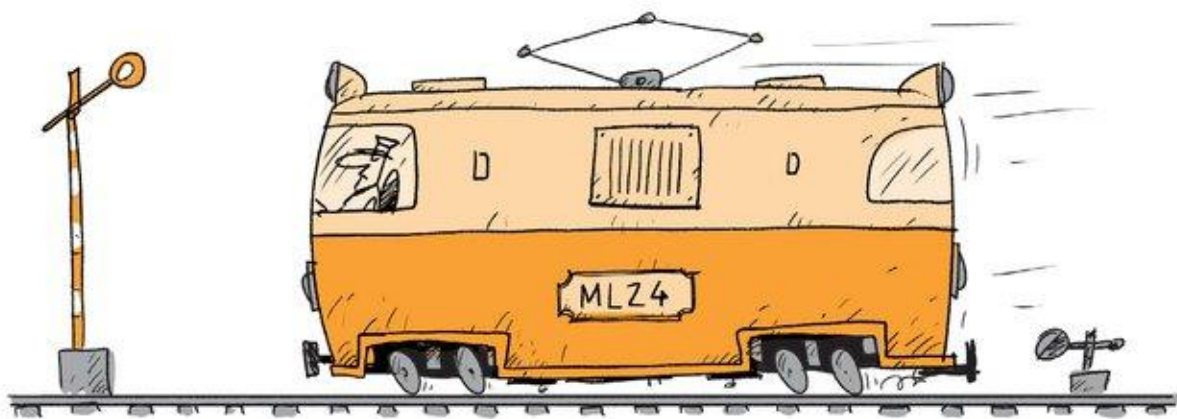
Я 116. Częsteczka porusza się wzdłuż linii prostej, na której ustalono kierunki dodatni i ujemny (tak jak na osi liczbowej). Odległość d (w metrach) częsteczki od ustalonego punktu P na tej prostej jest funkcją czasu t (w sekundach), który upłynął od początku obserwacji: $d(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 7$.

- Kiedy przyspieszenie częsteczki jest równe $0 \frac{m}{s^2}$?
- Jaka jest minimalna prędkość, z którą porusza się częsteczka?
- W jakiej odległości od punktu P znajduje się częsteczka w momencie, gdy osiąga prędkość $6 \frac{m}{s}$?

Я 117. Pewien obiekt poruszający się wzdłuż linii prostej zaczęto obserwować w momencie, gdy znajdował się w punkcie P . Jego odległość d (w metrach) od punktu P po upływie czasu t (w sekundach) od początku obserwacji opisuje wzór $d(t) = \frac{5t}{t^2 + 4}$.

- Znajdź prędkość, z jaką ten obiekt mijał punkt P .
- Po jakim czasie od początku obserwacji obiekt zmienił kierunek ruchu?
- Znajdź największą odległość, na jaką obiekt oddalił się od punktu P .

Я 118. Lokomotywa przez 9 minut poruszała się po prostoliniowym torze. W tym czasie odległość d (w kilometrach) lokomotywy od stacji zmieniała się zgodnie ze wzorem $d(t) = 0,01t\sqrt{100 - t^2}$, gdzie t (w minutach) oznacza czas, jaki upłynął od momentu, gdy lokomotywa mijała stację. Opisz, jak zmieniała się prędkość lokomotywy.



Я 119. Częsteczka porusza się wzdłuż linii prostej, na której ustalono kierunki dodatni i ujemny (tak jak na osi liczbowej). Przemieszczenie d (w metrach) częsteczki od ustalonego punktu P na tej prostej jest funkcją czasu t (w sekundach), który upłynął od początku obserwacji: $d(t) = t^3 - 4,5t^2 - 12t + 10$.

- Naszkicuj wykres, jak zmienia się prędkość $v(t)$ częsteczki w ciągu pierwszych 6 sekund od początku obserwacji.
- Zdefiniujmy szybkość $s(t)$ (w $\frac{m}{s}$) następująco $s(t) = |v(t)|$. Opisz, jak zmienia się szybkość częsteczki w ciągu pierwszych 6 sekund od początku obserwacji.

Я 120. Temperatura T (w stopniach Celsjusza) podgrzewanej wody zmienia się zgodnie ze wzorem $T(t) = 100 - \frac{80}{t+1}$, gdzie t oznacza czas (w minutach) od początku podgrzewania.

- a) Oblicz $T'(t)$ oraz $T''(t)$. Ustal jednostki każdej z tych wielkości.
- b) Jak szybko zmienia się temperatura wody po 3 minutach od początku podgrzewania?
- c) Oblicz $T''(3)$. Zinterpretuj otrzymany wynik.

Я 121. Objętość V (w m^3) wody w zbiorniku jest funkcją czasu t (w godzinach) od momentu rozpoczęcia obserwacji: $V(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 20$.

- a) Jaka była minimalna objętość wody w zbiorniku?
- b) Oblicz $V'(2)$ oraz $V''(2)$. Wyjaśnij znaczenie wyników.
- c) Czy po t godzinach od rozpoczęcia obserwacji, gdzie $V'(t) = 0$, wody w zbiorniku przestało ubywać, czy przestało przybywać?
- d) Czy po t godzinach od rozpoczęcia obserwacji, gdzie $V''(t) = 0$, w zbiorniku ubywa wody w maksymalnym czy w minimalnym tempie?

PRZED SPRAWDZIANEM

- Я1.** Pochodna funkcji $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$ w punkcie 1 jest równa:
 A. -1 B. 1 C. 2,5 D. 3
- Я2.** Pochodna funkcji $f(x) = (x^2 - 5)\sqrt{x^2 + 3}$ ma wzór:
 A. $f'(x) = 2x\sqrt{x^2 + 3} + \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ C. $f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$
 B. $f'(x) = 2x\sqrt{x^2 + 3} + \frac{x^2 - 5}{2\sqrt{x^2 + 3}}$ D. $f'(x) = 2x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$
- Я3.** Styczna do wykresu funkcji $f(x) = (2x - 1)^5$ w punkcie (1, 1) ma równanie:
 A. $y = 80x - 79$ B. $y = 10x - 9$ C. $y = 5x - 4$ D. $y = 2x - 1$
- Я4.** Funkcja $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ jest rosnąca w przedziale:
 A. $\langle -6; 6 \rangle$ B. $(-\infty; 0)$ C. $\langle 6; +\infty \rangle$ D. $\langle 0; 4 \rangle$
- Я5.** Dla której z podanych wartości parametru p funkcja $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + px - 4$ jest malejąca?
 A. $p = -3,29$ B. $p = -1,49$ C. $p = 0,97$ D. $p = 2,81$
- Я6.** Różnica między największą wartością funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ w przedziale $\langle -4; 4 \rangle$ i najmniejszą wartością funkcji f w tym przedziale jest równa:
 A. 96 B. 81 C. 56 D. 32
- Я7.** Dla jakiej wartości parametru a funkcja $f(x) = \frac{x-a}{x\sqrt{x}}$ osiąga maksimum w punkcie 15?
 A. $a = 15$ B. $a = 5$ C. $a = 1$ D. $a = \frac{2}{3}$
- Я8.** Cząsteczka porusza się wzdłuż linii prostej. Jej odległość d (w metrach) od ustalonego punktu P na tej prostej jest funkcją czasu t (w sekundach), który upłynął od początku obserwacji: $d(t) = -t^3 + 15t^2 + 10$ dla $t \in \langle 0; 10 \rangle$. Które z poniższych zdań jest fałszywe?
 A. W momencie, gdy rozpoczęto obserwację, cząsteczka nie poruszała się.
 B. Po upływie 10 sekund od początku obserwacji cząsteczka zatrzymała się.
 C. Największa prędkość, jaką osiągnęła cząsteczka, wynosiła $75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
 D. Przez pierwsze 5 sekund obserwacji cząsteczka oddalała się od punktu P , a przez kolejne 5 sekund przybliżała się do niego.

- Я 9.** Znajdź ekstrema funkcji $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2+2}$.
- Я 10.** Znajdź dwie dodatnie liczby a i b , których suma jest równa 20 i suma $a^2 + b^3$ jest możliwie najmniejsza.
- Я 11.** Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt $(2, 3)$, która wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o najmniejszym polu.
- Я 12.** Znajdź pole powierzchni bocznej walca o możliwie największej objętości, który jest wpisany w kulę o promieniu 2.
- Я 13.** Funkcja f dana jest wzorem $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$. Rozwiąż równanie $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f'(1)$.
- Я 14.** Wykaż, że wszystkie trójkąty ograniczone osiami układu współrzędnych i styczną do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{x}$ mają równe pola.

PRZED MATURĄ

- Я1.** Funkcja $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+4}$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x . Pochodna tej funkcji jest określona wzorem:
- A. $f'(x) = \frac{-3x^2+2x+12}{(x^2+4)^2}$ C. $f'(x) = \frac{3x^2-2x-12}{(x^2+4)^2}$
 B. $f'(x) = \frac{-9x^2+2x-12}{(x^2+4)^2}$ D. $f'(x) = \frac{9x^2-2x+12}{(x^2+4)^2}$
- Я2.** Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x}{2x-8}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$. Wówczas pochodna tej funkcji dla argumentu $x = \sqrt{2} + 4$ jest równa:
- A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$ C. -1 D. $2\sqrt{2}$
- Я3.** Prosta dana równaniem $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ jest prostopadła do stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 5$ w punkcie:
- A. $(-1, 6)$ B. $(0, 5)$ C. $(1, 5)$ D. $(2, 3)$
- Я4.** Która z poniższych funkcji, określonych w zbiorze liczb rzeczywistych, nie ma minimum lokalnego ani maksimum lokalnego?
- A. $f(x) = 4x^2 + 5x$ C. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$
 B. $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ D. $f(x) = (4x+1)^2$
- Я5.** Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{25x^2-9}{x^2+2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Oblicz wartość $f'(10)$ pochodnej tej funkcji dla argumentu 10.
- Я6.** Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$, poprowadzonej w punkcie $A = (6, \frac{36}{5})$ tego wykresu.
- Я7.** Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (1, 0)$.
- Я8.** Punkt $P = (10, 2429)$ leży na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + x + 2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P . Oblicz współczynnik b .
- Я9.** Styczna do paraboli o równaniu $y = \sqrt{3}x^2 - 1$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$ jest nachylna do osi Ox pod kątem 30° . Oblicz współrzędne punktu P .

Я 10. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ dla każdego $x \in (-1; +\infty)$. Wykaż, że f jest funkcją rosnącą.

Я 11. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^4 + 0,5(2x+1)^4$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji.

Я 12. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^6 - 2x^4 - x^3 + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że liczba 5 należy do zbioru wartości tej funkcji.

Я 13. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a , dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

Я 14. Dany jest okrąg o środku S i promieniu 18. Rozpatrujemy pary okręgów: jeden o środku S_1 i promieniu x oraz drugi o środku S_2 i promieniu $2x$, o których wiadomo, że spełniają jednocześnie następujące warunki:

- rozważane dwa okręgi są styczne zewnętrznie;
- obydwa rozważane okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku S i promieniu 18;
- punkty: S, S_1, S_2 nie leżą na jednej prostej.

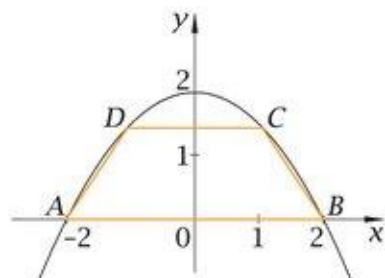
Pole trójkąta o bokach a, b, c można obliczyć ze wzoru Herona

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

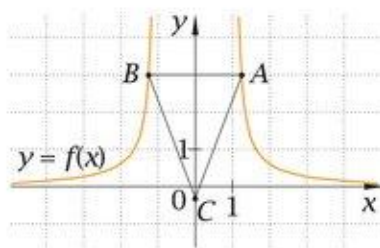
gdzie p — jest połową obwodu trójkąta.

Zapisz pole trójkąta SS_1S_2 jako funkcję zmiennej x . Wyznacz dziedzinę tej funkcji i oblicz długości boków tego z rozważanych trójkątów, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole.

Я 15. Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (-2, 0)$ i $B = (2, 0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB , a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zob. rysunek). Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C . Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.



- Я 16.** Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC , których wierzchołki A i B leżą na wykresie funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{9}{x^4}$ dla $x \neq 0$. Punkt C ma współrzędne $(0, -\frac{1}{3})$, a punkty A i B są położone symetrycznie względem osi Oy (zob. rysunek). Oblicz współrzędne wierzchołków A i B , dla których pole trójkąta ABC jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.



- Я 17.** Firma X wytwarza pewien produkt D . Badania rynku pokazały, że związek między ilością Q produktu D , jaką firma jest w stanie zbyć na rynku, a ceną P produktu jest następujący:

$$P(Q) = 90 - 0,1Q \text{ dla } Q \in \langle 0; 900 \rangle,$$

gdzie P jest ceną za jednostkę produktu w złotych, a Q — ilością produktu w tys. sztuk.

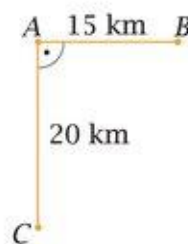
Koszty K wytworzenia produktu D zależą od ilości Q wytwarzanego produktu następująco:

$$K(Q) = 0,002Q^3 + Q^2 + 29,9985Q + 50,$$

gdzie K jest kosztem produkcji w tys. zł.

Oblicz, przy jakiej wielkości produkcji firma X osiąga największy dochód. Wynik podaj zaokrąglony z dokładnością do 100 sztuk.

- Я 18.** Na rysunku obok przedstawiono położenie miejscowości A , B i C oraz zaznaczono odległości między nimi. O godzinie 9:00 z miejscowości A do C wyruszył zastęp harcerzy „Tropiciele” i przemieszczał się z prędkością 4 km/h. O tej samej godzinie z miejscowości B do A wyruszył zastęp harcerzy „Korsarze” i przemieszczał się z prędkością 2 km/h. Wyznacz godzinę, o której odległość między tymi zastępami harcerzy będzie najmniejsza.



- Я 19.** Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zob. rysunek). Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenną pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.



Я20. Pewien zakład otrzymał zamówienie na wykonanie prostopadłościennego zbiornika (całkowicie otwartego od góry) o pojemności 144 m^3 . Dno zbiornika ma być kwadratem. Żaden z wymiarów zbiornika (krawędzi prostopadłościanu) nie może przekraczać 9 metrów. Całkowity koszt wykonania zbiornika ustalono w następujący sposób:

- 100 zł za 1 m^2 dna
- 75 zł za 1 m^2 ściany bocznej.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.

Я21. Rozpatrujemy wszystkie takie prostopadłościany, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 80, pole powierzchni całkowitej jest równe 256 i żadna z krawędzi bryły nie jest krótsza niż 4.

Objętość każdego z rozpatrywanych prostopadłościanów można wyrazić za pomocą funkcji

$$V(c) = c^3 - 20c^2 + 128c$$

gdzie $c \in \left\langle 4; \frac{28}{3} \right\rangle$ jest długością jednej z krawędzi bryły. Spośród rozpatrywanych prostopadłościanów oblicz objętość tego prostopadłościanu, którego objętość jest najmniejsza.

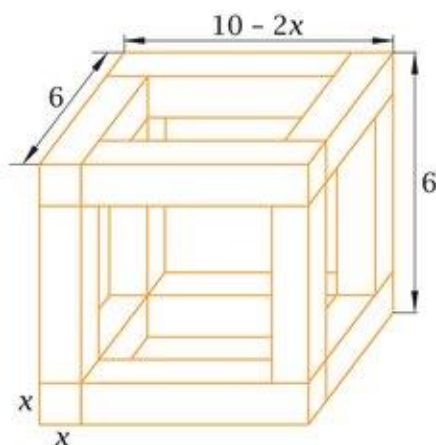
Я22. Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy $1:2$ oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

Я23. Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości x . Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.

a) Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x .

b) Wyznacz dziedzinę funkcji V .

c) Oblicz tę wartość x , dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.



Я24. Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości 2. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

- Я25.** Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe 2π . Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.
- Я26.** Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P . Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.
- Я27.** Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.
- Я28.** Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.
- Я29.** Syzyf codziennie stoi przed zadaniem wtoczenia ciężkiej kamiennej kuli na szczyt pewnej góry. W chwili $t = 0$ znajduje się on w punkcie O oddalonym od szczytu o 4 km, a położenie x Syzyfa wtaczającego kulę jest opisane równaniem

$$x(t) = -t^3 + 16,5t^2 + 180t \quad \text{dla } t \in \langle 0; 24 \rangle$$

gdzie x jest wyrażone w metrach, a t — w godzinach.

Oś Ox jest skierowana do wierzchołka góry i jest styczna w każdym punkcie do zbocza góry. Oblicz najmniejszą odległość, na jaką Syzyf zbliży się do wierzchołka góry, oraz maksymalną prędkość, z jaką wtacza kamień pod górę.

ZESTAW MATURALNY 1. Zakres podstawowy

Zadanie 1.

Na rysunku poniżej przedstawiono zbiór A .



Zadanie 1.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiór A jest rozwiązaniem nierówności:

A. $\left|x - \frac{21}{2}\right| \leq \frac{29}{2}$ B. $\left|x + \frac{21}{2}\right| \geq \frac{29}{2}$ C. $\left|x - \frac{21}{2}\right| \geq \frac{29}{2}$ D. $\left|x + \frac{21}{2}\right| \leq \frac{29}{2}$

Zadanie 1.2. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Do zbioru A należy 10 liczb pierwszych.	P	F
2.	Do zbioru A należy 6 liczb będących kwadratami liczb naturalnych.	P	F

Zadanie 2. (0–1)

Dane są liczby:

$$a = \log_4 \frac{1}{2} \qquad b = 5^{\log_5 0,5} \qquad c = \left(5^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} \qquad d = (-32)^{-0,2}$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Spośród podanych liczb równe są liczby:

A. a i b B. a i c C. a i d D. b i c

Zadanie 3. (0–2)

Wykaż, że jeżeli liczba k przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to kwadrat liczby k przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Zadanie 4. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $10\sqrt{50} + 3\sqrt{2}$ jest równa:

A. $13\sqrt{52}$ B. $13\sqrt{32}$ C. $20\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ D. $53\sqrt{2}$

Zadanie 5.

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + x^2 - 10x - 5$.

Zadanie 5.1. (0–2)

Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5.2. (0–1)

Wyznacz wartość wielomianu $W(x)$ dla $x = -\sqrt{2}$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma dowolnej liczby x ($x \neq 0$) i odwrotności tej liczby jest równa:

- A. 0 B. $\frac{x^2+1}{x}$ C. $\frac{x^2+x}{x}$ D. $\frac{x+1}{x}$

Zadanie 7. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

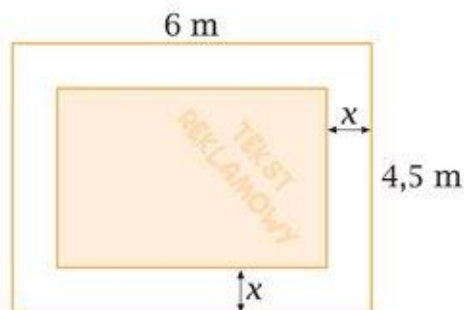
Równanie $\frac{(x^2-4)(x+1)}{2x-4} = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:

- A. nie ma rozwiązań.
B. ma dokładnie trzy rozwiązania będące liczbami całkowitymi.
C. ma dokładnie dwa rozwiązania będące liczbami całkowitymi.
D. ma dokładnie dwa rozwiązania będące liczbami niewymiernymi.

Zadanie 8. (0–2)

Bilbord reklamowy ma kształt prostokątnej tablicy o wymiarach $4,5 \text{ m} \times 6 \text{ m}$. Na bilbordzie należy umieścić materiał reklamowy tak, jak to przedstawiono na rysunku.

Oblicz, jaką szerokość x powinno mieć obramowanie bilbord, aby materiał reklamowy zajmował dokładnie połowę powierzchni całej tablicy. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 9. (0–3)**

Dana jest nierówność $(x+4)^2 \geq (2x+8)(x+2)$.

Rozwiąż tę nierówność, a następnie wyznacz wszystkie liczby całkowite, które należą do zbioru rozwiązań tej nierówności. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–1)

Dany jest układ równań: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$.

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, tak aby zdanie było prawdziwe.

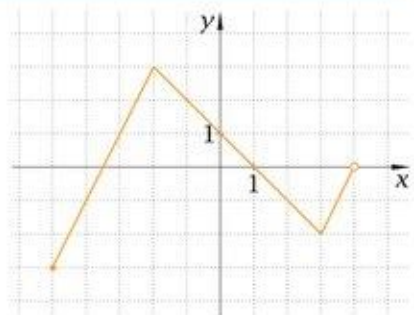
Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb: $x = \dots\dots\dots$ i $y = \dots\dots\dots$.

Zadanie 11. (0–2)

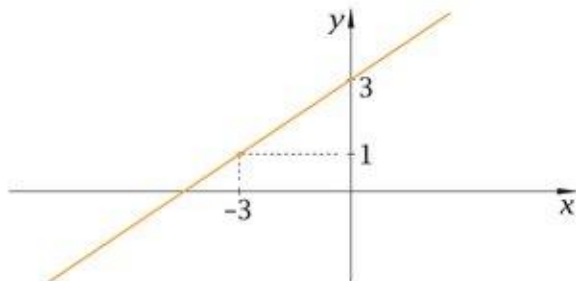
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

Wskaż dwa zdania prawdziwe spośród podanych.

- A. Funkcja f ma trzy miejsca zerowe.
- B. Dziedziną funkcji f jest zbiór $\langle -3; 3 \rangle$.
- C. Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -2; 3 \rangle$.
- D. Przedział $\langle -5; 4 \rangle$ jest zbiorem wartości funkcji f .
- E. Punkt $A = (0, 3)$ należy do wykresu funkcji $y = f(x - 2)$.
- F. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in \langle -3\frac{1}{2}; 1 \rangle$.

**Zadanie 12.**

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu pewnej funkcji liniowej f .

**Zadanie 12.1. (0–1)**

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do wykresu funkcji $y = -f(x)$ należy punkt:

- | | |
|-------------------|------------------|
| A. $A = (-3, -1)$ | C. $C = (3, -1)$ |
| B. $B = (0, 3)$ | D. $D = (3, 1)$ |

Zadanie 12.2. (0–4)

O funkcji kwadratowej g wiadomo, że ma jedno miejsce zerowe oraz że jej wykres przecina oś układu współrzędnych w tych samych punktach co wykres funkcji f . Wyznacz wzór ogólny funkcji g . Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0–1)

Liczby -3 i 5 są odpowiednio pierwszym i trzecim wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) .

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Suma dwunastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 492.	P	F
2.	Drugi, trzeci i ósmy wyraz ciągu (a_n) tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.	P	F

Zadanie 14. (0–1)

Na lokatę wpłacono kwotę 12 000 złotych. Roczne oprocentowanie tej lokaty wynosi 4%, a odsetki naliczane są co trzy miesiące.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po dwóch latach oszczędzania kwota na lokacie bez uwzględnienia podatku jest równa:

- A. $12\,000 \cdot (1,04)^2$ B. $12\,000 \cdot (1,01)^2$ C. $12\,000 \cdot (1,01)^8$ D. $12\,000 \cdot 1,08$

Zadanie 15.

Dany jest ciąg określony wzorem $a_n = \frac{16-2n^2}{3}$ dla każdej liczby $n \geq 1$.

Zadanie 15.1. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Ciąg (a_n) ma dokładnie dwa wyrazy dodatnie.	P	F
2.	Ciąg (a_n) jest rosnący.	P	F

Zadanie 15.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziesiąty wyraz ciągu (a_n) jest równy:

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{184}{3}$ C. -8 D. -128

Zadanie 16. (0–2)

Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $-\frac{1}{2}$. Suma dwóch początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 5. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Zapisz obliczenia.

Zadanie 17. (0-1)

Sinus kąta rozwartego α jest równy $\frac{5}{13}$.

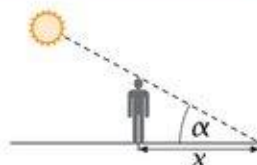
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta α jest równy:

- A. $-\frac{12}{13}$ B. $\frac{12}{13}$ C. $-\frac{5}{12}$ D. $-\frac{5}{13}$

Zadanie 18. (0-1)

Michał ma wzrost 1,86 m. W miejscu, gdzie promienie słoneczne padają na podłogę pod kątem α , długość jego cienia jest równa x metrów (zobacz rysunek).



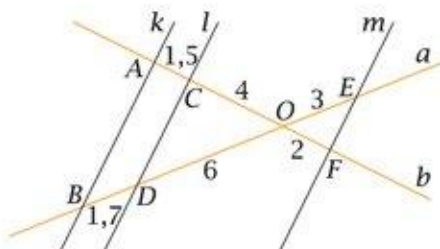
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeżeli $x = 2$, to kąt α ma miarę:

- A. około 47° B. około 68° C. około 22° D. około 43°

Zadanie 19. (0-1)

Proste a i b przecięto prostymi k , l i m (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Spośród prostych k , l i m równoległe są:

A.	proste k i l ,	ponieważ	1.	$\frac{ AC }{ BD } = \frac{ OC }{ OD }$.
B.	proste k i m ,		2.	$\frac{ OF }{ OE } = \frac{ OC }{ OD }$.
C.	proste m i l ,		3.	$\frac{ OA }{ OB } = \frac{ OF }{ OE }$.

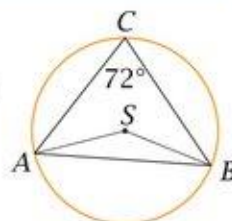
Zadanie 20. (0-1)

Na rysunku przedstawiono okrąg o środku w punkcie S .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta ABS jest równa:

- A. 36° B. 26° C. 30° D. 18°



Zadanie 21.

W równoległoboku $ABCD$ dane są długości boków: $|AB| = 10 \text{ cm}$ i $|AD| = 5 \text{ cm}$. Miara kąta ABC w tym równoległoboku jest równa 120° .

Zadanie 21.1. (0–2)

Oblicz długości przekątnych równoległoboku $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 21.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe:

- A. 50 cm^2 B. $25\sqrt{3} \text{ cm}^2$ C. 25 cm^2 D. $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Zadanie 22.

Odcinek o końcach w punktach $A = (-4, 0)$ i $C = (2, -8)$ jest przekątną kwadratu $ABCD$.

Zadanie 22.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przekątna BD kwadratu $ABCD$ zawiera się w prostej o równaniu:

- A. $y = -\frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$ C. $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$
B. $y = \frac{3}{4}x$ D. $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

Zadanie 22.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole koła opisanego na kwadracie $ABCD$ jest równe:

- A. 25π B. 100π C. $\frac{25}{2}\pi$ D. 10π

Zadanie 23. (0–4)

Dany jest okrąg o środku w punkcie $S = (-3, 2)$ i promieniu $r = 3$. Okrąg ten przecina oś układu współrzędnych w punktach A , B i C . Oblicz pole trójkąta ABC . Zapisz obliczenia.

Zadanie 24. (0–1)

Dwie ołowiane kule o średnicy 2 cm przetopiono na jedną kulę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Średnica otrzymanej kuli jest równa:

- A. 4 cm B. $4\sqrt[3]{2} \text{ cm}$ C. $2\sqrt[3]{2} \text{ cm}$ D. 2 cm

Zadanie 25. (0–1)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

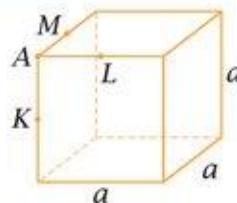
Kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy ma miarę:

- A. około 62° B. około 76° C. około 14° D. około 80°

Zadanie 26. (0–2)

Krawędź sześcianu ma długość a , zaś punkty K , L i M są środkami krawędzi tego sześcianu (zobacz rysunek).

Przez punkty K , L i M poprowadzono płaszczyznę. Oblicz pole powierzchni całkowitej wielościanu $AKLM$. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 27. (0–1)**

Na półce z podręcznikami znajdują się trzy różne podręczniki do matematyki, dwa różne podręczniki do języka polskiego oraz po jednym podręczniku do historii, geografii, biologii i języka angielskiego. Na ile sposobów można ułożyć te podręczniki tak, aby podręczniki do matematyki stały bezpośrednio jeden obok drugiego?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. na 4320 sposobów C. na 5040 sposobów
B. na 7 sposobów D. na 30 240 sposobów

Zadanie 28. (0–1)

Ze zbioru liczb dwucyfrowych większych od 60 losujemy jedną liczbę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo tego, że wylosowana liczba nie jest podzielna przez 3, jest równe:

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{13}{19}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

Zadanie 29. (0–1)

Rodzice i troje ich dzieci losują ze swojego grona dwie osoby, które ubiorą świąteczną choinkę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo tego, że do ustrojenia choinki zostanie wylosowane co najmniej jedno z rodziców, jest równe:

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{7}{10}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{5}$

ZESTAW MATURALNY 2. Zakres podstawowy

Zadanie 1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $(5\sqrt{2} - 3)^2 + 30\sqrt{2}$ jest równa:

- A. 59 B. $59 + 30\sqrt{2}$ C. $59 + 60\sqrt{2}$ D. $9 + 40\sqrt{2}$

Zadanie 2. (0–1)

Cenę samochodu najpierw podniesiono o 5%, a następnie obniżono o 10%. Po obu zmianach cen samochód ten kosztował 37 800 złotych.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Początkowa cena samochodu była równa:

- A. 39 501 zł B. 39 790 zł C. 40 000 zł D. 42 000 zł

Zadanie 3. (0–1)

Dane są liczby $a = 2 \log_{12} 4$ oraz $b = \log_{12} 9$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma liczb a i b jest równa:

- A. $2 \log_{12} 13$ B. 2 C. $\log_{12} 25$ D. $\log_{12} 72$

Zadanie 4. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $4^{-1,5} \cdot \sqrt[3]{125^{-1}}$ jest równa:

- A. $\frac{1}{40}$ B. 40 C. $-\frac{5}{8}$ D. $-\frac{1}{40}$

Zadanie 5. (0–1)

Oblicz: $|4 - 3\sqrt{2}| - |5 - 4\sqrt{2}|$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej wyrażenie $W(x) = x(2x - 3)(2x + 3)$ jest równe:

- A. $4x^3 - 9$ C. $4x^3 + 12x^2 + 9x$
B. $4x^3 - 12x^2 + 9x$ D. $4x^3 - 9x$

Zadanie 7. (0–1)

Dane jest wyrażenie $V(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $V(x)$ można przedstawić w postaci:

- A. $\frac{1}{x-x^2+x^3}$ B. $\frac{1}{x^3}$ C. $\frac{x^2+x+1}{x^3}$ D. $\frac{x^2-x+1}{x^3}$

Zadanie 8.

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + x^2 + ax - 4$.

Zadanie 8.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla $x = 0$ wielomian $W(x)$ przyjmuje wartość:

- A. 0 B. -4 C. 4 D. 1

Zadanie 8.2. (0–3)

Liczba -1 jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(x)$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Dla $a = -2$ równanie $(a^2 - 4)x = a + 2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.	P	F
2.	Rozwiązaniem nierówności $5(3 - x) > 2x + 29$ jest przedział $(-2; +\infty)$.	P	F

Zadanie 10. (0–1)

Wskaż równanie, które nie ma rozwiązań. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{x^2+3x}{x^2-3} = 0$ B. $\frac{x^2-3x}{x^2-3} = 0$ C. $\frac{x^2-3}{x^2+3x} = 0$ D. $\frac{x-3}{x^2-3x} = 0$

Zadanie 11. (0–2)

Rozwiąż nierówność $3(2+x) \geq x(2+x)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–3)

Suma pól dwóch kwadratów jest równa 12,5, a suma obwodów tych kwadratów wynosi 16. Wyznacz długości boków tych kwadratów. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13.

Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej dodatniej x przyporządkowuje najmniejszą liczbę naturalną większą od x , podzielną przez 3.

Zadanie 13.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla $x = 5\sqrt{2}$ funkcja f przyjmuje wartość:

- A. 6 B. 7 C. 9 D. 12

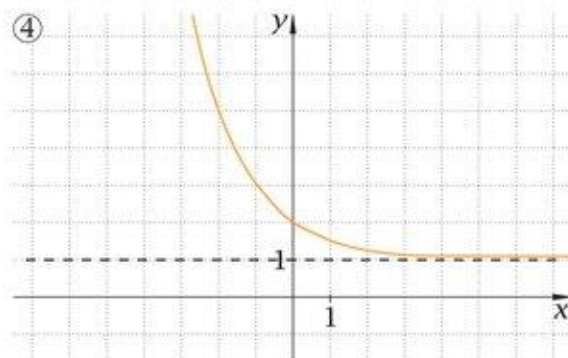
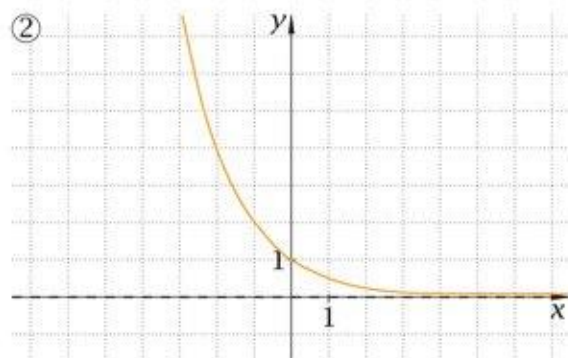
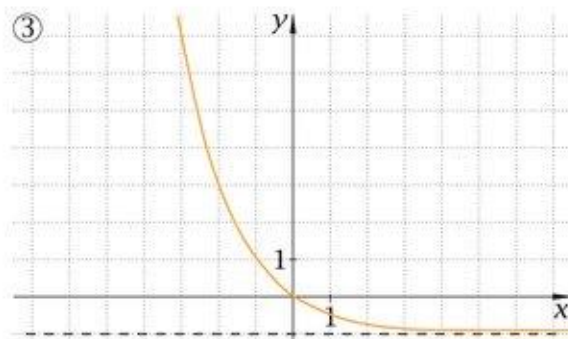
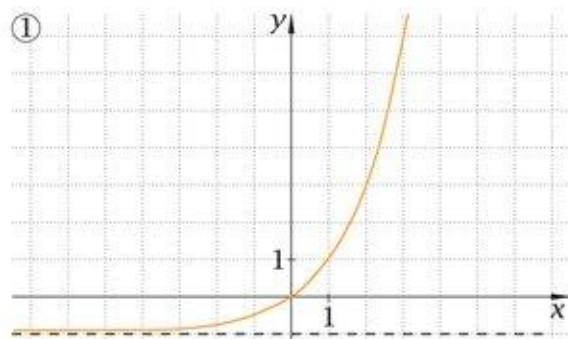
Zadanie 13.2. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb naturalnych dodatnich.	P	F
2.	Dla $x = 33$ funkcja przyjmuje wartość 33.	P	F

Zadanie 14. (0–1)

Na rysunkach przedstawiono wykresy czterech funkcji.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres funkcji $y = 2^{-x} - 1$ przedstawiono:

- A. na rysunku ① C. na rysunku ③
B. na rysunku ② D. na rysunku ④

Zadanie 15. (0–3)

Prosta o równaniu $x = -4$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Parabola ta ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = -2$. Znajdź wzór funkcji f w postaci iloczynowej, wiedząc, że liczba $x = -1$ jest jednym z miejsc zerowych tej funkcji. Zapisz obliczenia.

Zadanie 16. (0–1)

Ciąg (a_n) określony jest wzorem: $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = (a_n)^2 - 2a_n \end{cases}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Trzeci wyraz ciągu (a_n) jest równy:

- A. -2 B. 8 C. 48 D. 64

Zadanie 17. (0–1)

Liczby 20 i 40 są odpowiednio czwartym i szóstym wyrazem pewnego rosnącego ciągu geometrycznego (a_n) .

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy:

- A. $-5\sqrt{2}$ B. $5\sqrt{2}$ C. 10 D. -10

Zadanie 18.

Wojtek przez 14 kolejnych dni przygotowuje się do zawodów kolarskich. W pierwszym dniu zamierza przejechać 16 km, a każdego kolejnego dnia planuje pokonać dystans o 1,5 km dłuższy od dystansu z poprzedniego dnia.

Zadanie 18.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W ostatnim dniu treningu Wojtek pokona dystans:

- A. 34,5 km B. 35 km C. 36 km D. 35,5 km

Zadanie 18.2. (0–1)

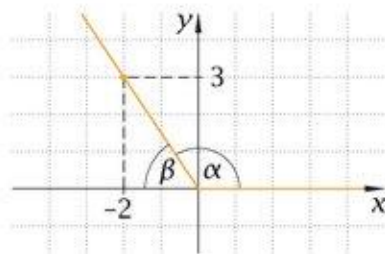
Oblicz, jaki łączny dystans pokona Wojtek przez 14 dni treningu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 19. (0–2)

Wiedząc, że dla pewnego kąta ostrego α zachodzi równość $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$, oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 20.

Na rysunku przedstawiono kąty α i β .

**Zadanie 20.1. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Tangens kąta α jest równy:

- A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3\sqrt{13}}{13}$

Zadanie 20.2. (0–1)

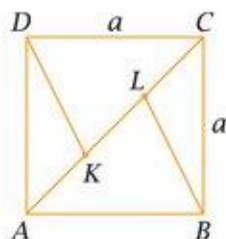
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cosinus kąta β jest równy:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ C. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ D. $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$

Zadanie 21.

Dany jest kwadrat $ABCD$, którego bok ma długość a . Na przekątnej AC tego kwadratu obrano punkty K i L takie, że $|AK| = |KL| = |LC|$ (zobacz rysunek).

**Zadanie 21.1. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odcinek BL ma długość:

- A. $\frac{2}{3}a$ B. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 21.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole trójkąta ADK stanowi:

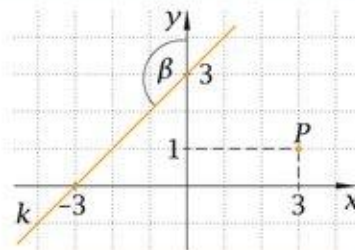
- A. $\frac{1}{6}$ pola kwadratu $ABCD$ C. $\frac{1}{8}$ pola kwadratu $ABCD$
 B. $\frac{1}{4}$ pola kwadratu $ABCD$ D. $\frac{1}{3}$ pola kwadratu $ABCD$

Zadanie 22. (0–2)

W trójkącie ABC boki mają długość: $|AB| = c$, $|AC| = b$. Z wierzchołka A poprowadzono dwusieczną, która przecięła bok BC w punkcie D . Wykaż, że stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ACD jest równy $\frac{c}{b}$.

Zadanie 23.

Na rysunku przedstawiono prostą k , punkt P oraz kąt β .

**Zadanie 23.1. (0–1)**

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Prosta prostopadła do prostej k i przechodząca przez punkt P ma równanie $y = -x + 3$.	P	F
2.	Kąt β ma miarę 135° .	P	F

Zadanie 23.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odległość punktu P od prostej k jest równa:

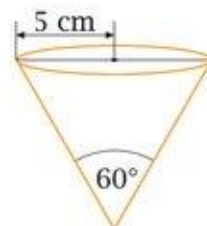
- A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. 4

Zadanie 24. (0–2)

Dana jest prosta k o równaniu $y = 3x + 3$ oraz prosta l o równaniu $y = -\frac{1}{3}x + 3$. Proste k i l przecinają się w punkcie P . Wiadomo, że prosta k przecina oś x w punkcie A , zaś prosta l — w punkcie B . Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABP . Zapisz obliczenia.

Zadanie 25. (0–1)

Producent dropsów postanowił limitowaną serię cukierków zapakować do specjalnych papierowych torebek w kształcie stożka. Wymiary stożka przedstawiono na rysunku.



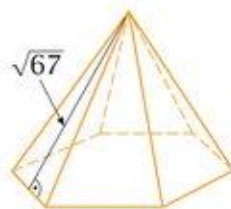
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Do oklejenia powierzchni bocznej tej torebki potrzeba:

- A. około 157 cm^2 papieru C. około 314 cm^2 papieru
B. około 79 cm^2 papieru D. około 140 cm^2 papieru

Zadanie 26. (0–4)

Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny, w którym wysokość ściany bocznej ma długość $\sqrt{67}$ (zobacz rysunek). Krawędź boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy 4. Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

**Zadanie 27. (0–1)**

Ile różnych liczb czterocyfrowych podzielnych przez 25 można utworzyć za pomocą cyfr: 0, 1, 2, 5, 7, 8, 9, jeżeli cyfry nie mogą się powtórzyć?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 48 B. 52 C. 60 D. 72

Zadanie 28. (0–1)

Rzucamy symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadnie nieparzysta liczba oczek, to wygrywamy tyle złotych, ile oczek wyrzuciliśmy. Jeżeli wypadnie parzysta liczba oczek, to przegrywamy tyle złotych, ile oczek wyrzuciliśmy.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość oczekiwana wygranej w tej grze jest równa:

- A. 0,50 zł B. 0 zł C. –0,50 zł D. –1 zł

Zadanie 29. (0–1)

Dany jest zestaw liczb: 3, 2, 4, 10, 5, 4, 5, 10, 1, x. Zestaw ten ma tylko jedną dominantę i jest nią liczba 10.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Mediana tego zestawu jest równa:

- A. 4,5 B. 4 C. 5 D. 8,5

Zadanie 30. (0–2)

W klasie liczącej 30 uczniów przeprowadzono sprawdzian z planimetrii. Wiadomo, że sprawdzianu nie pisało dwóch uczniów z tej klasy. Wyniki sprawdzianu przedstawiono w poniższej tabeli.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	4	6	11	4	1

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń z tej klasy nie pisał sprawdzianu lub uzyskał na sprawdzianie ocenę niższą od średniej arytmetycznej wszystkich ocen w klasie. Zapisz obliczenia.

ZESTAW MATURALNY 3. Zakres rozszerzony

Zadanie 1. (0–3)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = |2x - 1| + 3|x + 2| - 5$.

Wyznacz miejsca zerowe funkcji f . Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–6)

Wyznacz takie wartości parametru p , dla których równanie

$$(p + 2) \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + p - 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–3)

Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{5-2x}{x+3}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; -3)$.

Zadanie 4.

Początkowymi wyrazami ciągu (a_n) są $a_1 = \log_3 4$ i $a_2 = \log_{\frac{1}{9}} p$, gdzie $p > 0$.

Zadanie 4.1. (0–2)

Oblicz wartość parametru p , dla której ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy mniejszej od 1. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4.2. (0–2)

Oblicz wartość parametru p , dla której ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie większym od 1. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0–3)

Dane są ciągi $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}$ i $b_n = \frac{2n \cdot a_n}{2+n}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Oblicz granice ciągów (a_n) i (b_n) . Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0–3)

Znajdź wszystkie rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = \frac{1-2\cos^2 x}{\cos x}$ należące do przedziału $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right\rangle$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–2)

Wykaż, że funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{0,5 - |\sin x|}{2^x}$ ma co najmniej dwa miejsca zerowe w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Zadanie 8. (0–4)

Dane są długości trzech boków czworokąta $ABCD$: $|AB| = 4$, $|BC| = 3$ i $|CD| = 5$. Wiadomo, że na tym czworokącie można opisać okrąg oraz że przekątna BD ma długość $\sqrt{37}$. Oblicz długość boku AD . Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–5)

Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 5 z okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 + 8x - 8y - 17 = 0$ oraz środki tych okręgów. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–3)

Ola zamierza w sposób losowy utworzyć hasło do komputera składające się z sześciu znaków. Każdy znak ma być wybrany spośród czterech liter: A, B, C i D oraz dwóch cyfr: 0 i 1. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzone przez Olę hasło będzie złożone z trzech jedynek i trzech różnych liter. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–3)

Jajka z fermy przewożono do hurtowni ciężarówką. Prawdopodobieństwo, że jajko z tej dostawy zostało uszkodzone w transporcie, wynosi 0,25. Oblicz, ile co najmniej jajek z tej dostawy należy wziąć, aby prawdopodobieństwo, że wszystkie są uszkodzone, było mniejsze niż 0,001. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–5)

Dana jest funkcja

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 2$$

określona w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f oraz jej przedziały monotoniczności. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0–6)

Wojtek projektuje pojemnik na ołówki w kształcie walca bez górnej podstawy. Chce, aby pojemnik miał pojemność 500 cm^3 , a jego pole powierzchni całkowitej było możliwie najmniejsze. Oblicz, jakie wymiary powinien mieć ten pojemnik. Zapisz obliczenia.

ZESTAW MATURALNY 4. Zakres rozszerzony

Zadanie 1. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których proste o równaniach $12x + my - 6 = 0$ i $mx + 3y - 2m = 0$ przecinają się punkcie leżącym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których funkcja f określona wzorem $f(x) = x^2 + 3px + 3p - 1$ ma dwa różne miejsca zerowe i oba są mniejsze od 2. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–3)

Dane są wielomiany:

$$W(x) = 6x^3 - 7x^2 - 25x + 33 \quad \text{i} \quad U(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x - 27$$

Wiadomo, że liczba $\frac{3}{2}$ jest wspólnym pierwiastkiem wielomianów $W(x)$ i $U(x)$. Rozwiąż nierówność $W(x) \leq U(x)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–4)

Dany jest szereg geometryczny: $x + \frac{x+4}{x-2} + \frac{(x+4)^2}{x(x-2)^2} + \dots$. Wyznacz wszystkie wartości x , dla których ten szereg jest zbieżny, oraz oblicz jego sumę dla $x = 5$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0–2)

W ciągach arytmetycznych (a_n) i (b_n) , r_a i r_b oznaczają odpowiednio różnice tych ciągów, a A_n i B_n to odpowiednio sumy ich n początkowych wyrazów. Wykaż, że:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{r_a}{r_b}$$

Zadanie 6. (0–3)

Znajdź wszystkie rozwiązania równania $2 \cos x + \operatorname{tg} 2x = 0$ należące do przedziału $(-2\pi; 2\pi)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–4)

Dwa boki trójkąta mają długości 1 i 3. Kąt między tymi bokami ma miarę dwa razy większą od miary kąta leżącego naprzeciw boku o długości 3. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–5)

W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest dwa razy krótsza od podstawy DC . Ponadto $A = (-4, 6)$, $\overrightarrow{AD} = [-2, 1]$, $\overrightarrow{AB} = [4, 2]$. Oblicz współrzędne punktu C . Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–4)

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego nachylone są do podstawy pod kątem 60° , a krawędź podstawy ma długość 1. Przez krawędź podstawy poprowadzono płaszczyznę, która tworzy z podstawą kąt o mierze 45° . Oblicz pole otrzymanego przekroju. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–4)

Pewna firma reklamuje urządzenie do rozpoznawania fałszywych monet. Prawdopodobieństwo, że urządzenie podejmie słuszną decyzję, tzn. fałszywą monetę uzna za fałszywą, a prawdziwą — za prawdziwą, jest równe 0,9. Aby sprawdzić skuteczność tego urządzenia, przygotowano zestaw monet, w którym 1% to monety podrabiane. Urządzenie uznało monetę z tego zestawu za fałszywą. Oblicz prawdopodobieństwo, że ta moneta rzeczywiście jest podrobiona. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–3)

Wykaż, że jeżeli równanie $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ma trzy różne pierwiastki, to $p^2 > 3q$.

Zadanie 12. (0–2)

Chłopiec steruje samochodem-zabawką. Przez pierwsze 5 minut zabawy samochód porusza się wzdłuż linii prostej i jego odległość d (w metrach) od chłopca po upływie czasu t (w minutach) od początku zabawy można obliczyć za pomocą wzoru $d(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 5t$ dla $0 \leq t \leq 5$. Oblicz prędkość i przyspieszenie samochodu po upływie 1 minuty od początku zabawy. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13.

Wiadomo, że punkt P należy do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2$ oraz że $R = (4, \frac{1}{2})$.

Zadanie 13.1. (0–2)

Wykaż, że odległość punktu P od punktu R wyraża się wzorem: $|RP| = \sqrt{x^4 - 8x + \frac{65}{4}}$, gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu P .

Zadanie 13.2. (0–4)

Wyznacz współrzędne punktu P tak, aby jego odległość od punktu R była możliwie najmniejsza. Zapisz obliczenia.

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	1	0	46°	0,7193	0,6947	1,0355
1°	0,0175	0,9998	0,0175	47°	0,7314	0,6820	1,0724
2°	0,0349	0,9994	0,0349	48°	0,7431	0,6691	1,1106
3°	0,0523	0,9986	0,0524	49°	0,7547	0,6561	1,1504
4°	0,0698	0,9976	0,0699	50°	0,7660	0,6428	1,1918
5°	0,0872	0,9962	0,0875	51°	0,7771	0,6293	1,2349
6°	0,1045	0,9945	0,1051	52°	0,7880	0,6157	1,2799
7°	0,1219	0,9925	0,1228	53°	0,7986	0,6018	1,3270
8°	0,1392	0,9903	0,1405	54°	0,8090	0,5878	1,3764
9°	0,1564	0,9877	0,1584	55°	0,8192	0,5736	1,4281
10°	0,1736	0,9848	0,1763	56°	0,8290	0,5592	1,4826
11°	0,1908	0,9816	0,1944	57°	0,8387	0,5446	1,5399
12°	0,2079	0,9781	0,2126	58°	0,8480	0,5299	1,6003
13°	0,2250	0,9744	0,2309	59°	0,8572	0,5150	1,6643
14°	0,2419	0,9703	0,2493	60°	0,8660	0,5000	1,7321
15°	0,2588	0,9659	0,2679	61°	0,8746	0,4848	1,8040
16°	0,2756	0,9613	0,2867	62°	0,8829	0,4695	1,8807
17°	0,2924	0,9563	0,3057	63°	0,8910	0,4540	1,9626
18°	0,3090	0,9511	0,3249	64°	0,8988	0,4384	2,0503
19°	0,3256	0,9455	0,3443	65°	0,9063	0,4226	2,1445
20°	0,3420	0,9397	0,3640	66°	0,9135	0,4067	2,2460
21°	0,3584	0,9336	0,3839	67°	0,9205	0,3907	2,3559
22°	0,3746	0,9272	0,4040	68°	0,9272	0,3746	2,4751
23°	0,3907	0,9205	0,4245	69°	0,9336	0,3584	2,6051
24°	0,4067	0,9135	0,4452	70°	0,9397	0,3420	2,7475
25°	0,4226	0,9063	0,4663	71°	0,9455	0,3256	2,9042
26°	0,4384	0,8988	0,4877	72°	0,9511	0,3090	3,0777
27°	0,4540	0,8910	0,5095	73°	0,9563	0,2924	3,2709
28°	0,4695	0,8829	0,5317	74°	0,9613	0,2756	3,4874
29°	0,4848	0,8746	0,5543	75°	0,9659	0,2588	3,7321
30°	0,5000	0,8660	0,5774	76°	0,9703	0,2419	4,0108
31°	0,5150	0,8572	0,6009	77°	0,9744	0,2250	4,3315
32°	0,5299	0,8480	0,6249	78°	0,9781	0,2079	4,7046
33°	0,5446	0,8387	0,6494	79°	0,9816	0,1908	5,1446
34°	0,5592	0,8290	0,6745	80°	0,9848	0,1736	5,6713
35°	0,5736	0,8192	0,7002	81°	0,9877	0,1564	6,3138
36°	0,5878	0,8090	0,7265	82°	0,9903	0,1392	7,1154
37°	0,6018	0,7986	0,7536	83°	0,9925	0,1219	8,1443
38°	0,6157	0,7880	0,7813	84°	0,9945	0,1045	9,5144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	85°	0,9962	0,0872	11,4301
40°	0,6428	0,7660	0,8391	86°	0,9976	0,0698	14,3007
41°	0,6561	0,7547	0,8693	87°	0,9986	0,0523	19,0811
42°	0,6691	0,7431	0,9004	88°	0,9994	0,0349	28,6363
43°	0,6820	0,7314	0,9325	89°	0,9998	0,0175	57,2900
44°	0,6947	0,7193	0,9657	90°	1	0	—
45°	0,7071	0,7071	1				

GEOMETRIA ANALITYCZNA

1. a) $(2\frac{1}{2}, -8)$, 9, b) $(-6, -15\frac{1}{2})$, 9, c) $(0, -4\frac{1}{2})$, 13, d) $(7\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$, $5\sqrt{10}$,
e) $(-294, 320\frac{1}{2})$, $3\sqrt{5}$, f) $(-2\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$, 15
2. a) $p = -10$ lub $p = 2$, b) $p = -3 - 2\sqrt{7}$ lub $p = -3 + 2\sqrt{7}$, c) $p = -4$ lub $p = 2$,
d) $p = 1$ lub $p = 3$
3. a) $\sqrt{41}$, $(2, 1)$, b) $\frac{\sqrt{170}}{2}$, $(-3\frac{1}{2}, 13\frac{1}{2})$
4. a) $B = (7, 11)$, b) $M = (-243, -88)$, c) $p = -9$, $q = 4011$
5. a) tak, b) nie, c) tak, d) tak
6. a) $(-2, 1, 5)$, $\sqrt{65}$, b) $(-2, 5, -1, 5)$, $\sqrt{58}$
7. a) $\sqrt{109}$, b) $5\sqrt{2}$
8. a) 58, b) 40, c) 60
9. a) $P_1 = (6, 0)$, $P_2 = (-6, 0)$, $P_3 = (-6, 0)$, b) $P_1 = (0, 7)$, $P_2 = (0, -7)$, $P_3 = (0, 7)$,
c) $P_1 = (-3, -8)$, $P_2 = (3, 8)$, $P_3 = (3, -8)$, d) $P_1 = (5, 9)$, $P_2 = (-5, -9)$, $P_3 = (-5, 9)$
10. a) $S = (-1, -12)$, b) $(-13, -11)$, c) $K = (25, -12)$
11. a) $|AB| = 5$, $|BC| = 10$, $|AC| = 15$, punkty A, B, C są współliniowe,
b) $|AB| = 3\sqrt{10}$, $|BC| = \sqrt{194}$, $|AC| = 2\sqrt{5}$, punkty A, B, C nie są współliniowe
12. a) $C = (-2, 3)$, $D = (-4, -3)$, b) $C = (-2, -1)$, $D = (0, 9)$, c) $C = (3, -1)$, $D = (4, 2)$
13. a) $p = 1$, b) $p = 2$, c) $p = 3$, d) $p = 1$ lub $p = 2\frac{3}{5}$
14. a) $(3, 0)$ lub $(11, 0)$, b) $(0, -6 - 4\sqrt{3})$ lub $(0, -6 + 4\sqrt{3})$, c) $(2\frac{2}{3}, 0)$, d) $(0, -2\frac{1}{4})$
15. a) $(6, 1 + 5\sqrt{3})$ lub $(6, 1 - 5\sqrt{3})$, b) $(-3 + 3\sqrt{3}, -1)$ lub $(-3 - 3\sqrt{3}, -1)$
16. $C = (6\frac{2}{5}, 0)$ lub $C = (0, -4\frac{4}{7})$
18. $(2, 2)$, $(-1, 9)$ lub $(-4, -12)$, $(-7, -5)$
20. a) $\frac{4}{5}$, b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
21. a) $(-13, 28)$ lub $(-3, 8)$, b) $(-1, -2)$
22. $(31, -31)$ lub $(35, -28)$
23. a) około $22,4^\circ$, $59,5^\circ$, $98,1^\circ$, b) około $49,4^\circ$, $60,3^\circ$, $70,3^\circ$. Wskazówka. Skorzystaj z twierdzenia cosinusów.
24. a) A, C , b) B, C , c) C , d) B, C
25. a) $a = 1\frac{1}{3}$, $b = 4\frac{1}{2}$, b) $a = 12\frac{1}{2}$, $b = -2\frac{1}{3}$, c) $a = 1\frac{2}{3}$, $b = -1$, d) $a = -2$, $b = 4$
26. a) $y = -\frac{1}{2}x - 3$, b) $y = \frac{5}{4}x - 5$, c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$, d) $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{2}$
27. a) np. $15x - 5y - 2 = 0$, b) np. $2x + 7y - 42 = 0$, c) np. $-9x + 12y - 10 = 0$,
d) np. $23x + 100y + 70 = 0$
28. a) $2x + 3y - 6 = 0$, $y = -\frac{2}{3}x + 2$, b) $x - 3y + 2 = 0$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
29. a) $(0, -22)$, $(-33, 0)$, b) $(0, -6)$, $(5, 0)$, c) $(0, 4)$, $(-6, 0)$, d) $(0, \frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{5}, 0)$
30. a) $y = -3x - 12$, b) $y = 4x - 20$, c) $y = 9x - 2$, d) $y = -2x + 6$, e) $y = -\frac{1}{5}x + 3$, f) $y = \frac{5}{7}x - 1$
31. a) $k: y - 5 = 0$, $l: y + 4 = 0$, b) $k: x + 5 = 0$, $l: x - 3 = 0$, c) $k: y - 4 = 0$, $l: x - 5 = 0$,
d) $k: x + y + 2 = 0$, $l: x - y - 6 = 0$, e) $k: x + 3y + 12 = 0$, $l: 2x - y + 6 = 0$,
f) $k: 5x + 2y + 6 = 0$, $l: 3x - 4y + 20 = 0$
32. a) $y + 3 = 0$, b) $x - 5 = 0$, c) $x - y - 8 = 0$, d) $x + y - 2 = 0$

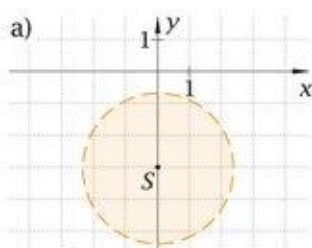
33. a) $y = -\frac{1}{3}x + 2$, b) $y = 10$, c) $y = \frac{7}{3}x - 5$, d) $y = \frac{3}{2}x + 9$
34. a) $y = \frac{1}{4}x - 2$, b) $y = 5$, c) $y = -\frac{4}{3}x - 12$, d) $y = \frac{1}{2}x - 3$
35. a) tak, b) nie, c) tak, d) nie, e) nie, f) tak
36. a) nie, b) tak, c) tak, d) tak, e) nie, f) nie
37. $c \parallel d, b \parallel h, a \perp c, a \perp d, b \perp g, h \perp g, e \perp f$
38. a) równoległe dla $m = 1\frac{3}{7}$, prostopadłe dla $m = -2\frac{4}{5}$,
b) równoległe dla $p = 15$, prostopadłe dla $p = -1\frac{2}{3}$
39. a) tak, b) $m = \frac{1}{2}$
40. a) $(8, -5)$, b) $(2\frac{6}{7}, -2)$, c) $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
41. a) $y = 2\frac{2}{3}x$, $y = \frac{3}{5}x$, b) $y = -1\frac{1}{5}x + 1\frac{3}{5}$, $y = \frac{5}{3}x - 7$. Wskazówka. Jedna z szukanych prostych jest równoległa do prostej AB , druga przechodzi przez środek odcinka AB .
42. a) $p = -11$, b) $p = -\frac{1}{2}$, c) $p = -1$, d) $p = -3$ lub $p = 2$
43. $(-1, 4)$, $(-4, 2)$, $(0, 1)$, $(-\frac{30}{11}, \frac{1}{11})$
44. a) $x + 2y - 10 = 0$ i $4x - 2y - 15 = 0$, b) $4x - 7y + 41 = 0$ i $14x + 8y - 19 = 0$
45. a) $y = 3x - 1$, b) $y = 3x - 1$, $y = x - 3$, $x = -1$
46. Druga przyprostokątna zawiera się w prostej $x + y - 3 = 0$, a przeciwprostokątna zawiera się w prostej $y = 5$ lub w prostej $x = -2$.
47. a) $y = -3,5x + 17,5$, b) $y = \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$
48. a) $y = -\frac{7}{5}x + \frac{4}{5}$, b) $y = \frac{1}{3}x + 6$, c) $y = -3x - 4$, d) $y = -3x + 4$
49. $(1\frac{1}{5}, -2\frac{3}{5})$, $(-1\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$
50. $C = (-1\frac{1}{4}, 5)$
51. $l: y = -\frac{3}{2}x - 8$, $k: y = -\frac{3}{2}x - 3\frac{1}{2}$
52. a) $(\frac{16}{5}, \frac{22}{5})$, b) $(\frac{12}{5}, \frac{1}{5})$
53. a) 60° , b) 30° , c) około 27° , d) około 146°
54. a) ostry, b) ostry, c) rozwarty, d) rozwarty, e) rozwarty, f) ostry
55. $\alpha \approx 108^\circ$, $\beta \approx 42^\circ$, $\gamma \approx 40^\circ$, $\delta \approx 53^\circ$
56. 86°
57. a) 45° , 30° , 105° , b) 30° , 60° , 90°
59. $x = \frac{c-b}{2a}$, $y = \frac{b+c}{2}$
60. a) dwie osie symetrii: $x = 0$, $y = -\frac{C}{B}$, b) dwie osie symetrii: $y = 0$, $x = -\frac{C}{A}$,
c) oś symetrii: $y = -\frac{A}{B}x$, środek symetrii: dowolny punkt na prostej $y = -\frac{A}{B}x$
62. a) $3, -\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{5}, -5$, c) $-\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}$, d) $-4, \frac{1}{4}$
63. a) $\frac{2}{5}$, b) 2 , c) $-\frac{1}{2}$, d) $-\frac{5}{7}$
64. a) $p = 28$, b) $p = 50$
65. a) 7 , b) 8 , c) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, d) $2\sqrt{5}$, e) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$, f) $\frac{18\sqrt{17}}{17}$
66. a) $6,4$, b) 52 . Wskazówka. Odległość punktu P od prostej l jest równa połowie długości boku kwadratu.
67. a) $\frac{\sqrt{10}}{20}$, b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

68. a) 15, b) 13, c) $\frac{3\sqrt{26}}{13}$, d) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$
69. a) trapezem, b) równoległobokiem, c) kwadratem, d) prostokątem, e) rombem
70. a) $p = -11$, b) $p = 6\frac{1}{3}$
71. a) $p = -10$, b) $p = 0$
72. $h = \frac{17\sqrt{37}}{37}$, $P = 17$
73. $P = 5$
74. a) $P = 33$, b) $P = 45$
75. a) (6, -3), b) (6, -2), c) (10, 4), d) (-3, 4)
76. a) (-1, 2), b) 20, c) $4\sqrt{2}$
77. (-4, -3)
78. $C = (0, -12)$ lub $C = (0, 8)$
79. (-1, -1), $(\frac{3}{5}, 2\frac{1}{5})$
80. a) (1, 2), b) (2, 3), c) $(1\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3})$
81. (1, -3)
82. $(1\frac{1}{2}, -6)$
83. a) 52, b) (3, -2), (9, 2), (5, 8) lub (3, -2), (-3, -6), (-7, 0),
c) $y = -\frac{1}{5}x + 3\frac{4}{5}$, $y = 5x - 17$ lub $y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$, $y = 5x + 9$
84. $3x + 4y + 41 = 0$, $3x + 4y - 19 = 0$
85. $y = \frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}x - 6$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{2}x - 12\frac{1}{2}$
86. $A = (-5, 1)$, $D = (0, 6)$
87. (-3, -1), (2, 3), (-1, 5), (-6, 1)
88. a) (2, 8, -1, 4), (4, -1), (-4, 8, 3, 4), (-6, 3), b) 8, 8
89. a) (-2, 3), b) 23
90. a) $m = \frac{1+\sqrt{105}}{2}$ lub $m = \frac{1-\sqrt{105}}{2}$, b) $m = -6,5$ lub $m = -2$
91. (-3, 2), (1, 10)
92. $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$ lub $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$
93. a) $C = (2 - 4\sqrt{3}, 0)$ lub $C = (2 + 4\sqrt{3}, 0)$, b) $C = (-2, -2)$ lub $C = (-2, 5)$,
c) $C = (\frac{11-\sqrt{65}}{4}, \frac{11-\sqrt{65}}{4})$ lub $C = (\frac{11+\sqrt{65}}{4}, \frac{11+\sqrt{65}}{4})$
94. $B = (10, -1)$, $D = (-6, 7)$
95. a) $C = (7, 0)$, $B = (6, -3)$ lub $B = (4, -1)$, b) 16 lub 20
96. a) $p = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, b) $p = 9$
97. $(2, 5 - \sqrt{30})$, $(2, 5 + \sqrt{30})$
98. a) $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 25 = 0$, b) $(3 - \sqrt{2})x - (1 - 2\sqrt{2})y = 0$, $(3 + \sqrt{2})x - (1 + 2\sqrt{2})y = 0$
99. a) (1, 1), (-5, -7), b) $(\frac{-4-\sqrt{10}}{2}, \frac{-2-3\sqrt{10}}{2})$, $(\frac{-4+\sqrt{10}}{2}, \frac{-2+3\sqrt{10}}{2})$
101. a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$, b) $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 7$, c) $x^2 + (y+5)^2 = \frac{1}{16}$, d) $x^2 + y^2 = 18$,
e) $(x+\frac{1}{5})^2 + (y-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{36}$, f) $(x+0,2)^2 + (y+2,3)^2 = 6,25$, g) $(x-2\sqrt[3]{2})^2 + (y-\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{9}$,
h) $(x+1+\sqrt{2})^2 + (y+2-\sqrt{3})^2 = \frac{5}{4}$

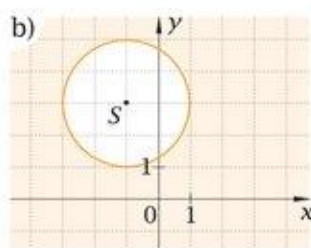
102. B, E, F

103. a) $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, b) $(x+2)^2 + y^2 \leq 16$, c) $x^2 + (y+7)^2 \leq 8$, d) $(x-3)^2 + (y+5)^2 \leq 10$,
e) $(x+1)^2 + (y+4)^2 \leq 18$, f) $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 25$

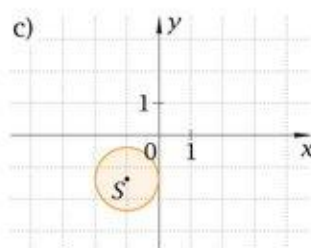
104. a)



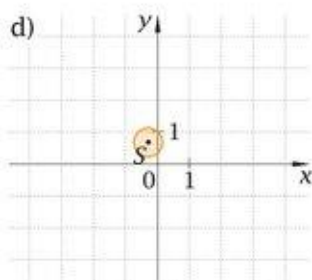
$$S = (0, -3), r = \sqrt{5}$$



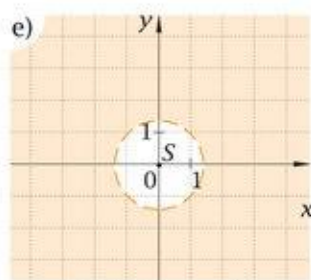
$$S = (-1, 3), r = 2$$



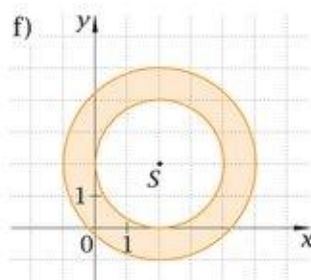
$$S = (-1, -\sqrt{2}), r = 1$$



$$S = \left(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right), r = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



$$S = (0, 0), r = \sqrt{2}$$



$$S = (2, 2), 2 \leq r \leq 3$$

105. a) $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 10$, b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13$, c) $(x+4)^2 + (y+6)^2 = 64$, d) $(x+2)^2 + y^2 = 4$

106. a) $y = \sqrt{5}$, $y = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5}$, b) $y = 10$, $y = -10$, $x = -5$, $x = 15$,
c) $y = 3$, $y = 11$, $x = -8$, $x = 0$

107. a) $(x+6)^2 + (y-5)^2 = 3$, b) $(x+8)^2 + y^2 = 11$

108. a) $(x-2,5)^2 + (y+1)^2 = 7,25$, b) $(x-3)^2 + (y+1,5)^2 = 31,25$, c) $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 17$,
d) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 50$

109. a) $(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3$ lub $(x-2)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 3$, b) $(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 12$ lub
 $(x-2)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 12$

110. a) $(x+8)^2 + (y+3)^2 = 36$, $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$, $(x+8)^2 + (y-9)^2 = 36$, $(x-4)^2 + (y-9)^2 = 36$,
b) $(x-1,5)^2 + (y+3,5)^2 = 2,25$, $(x-1,5)^2 + (y+6,5)^2 = 2,25$, c) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$,
 $(x+2)^2 + (y-7)^2 = 9$, d) $(x+2)^2 + y^2 = 2$, $x^2 + (y+2)^2 = 2$, $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 2$,
 $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 2$

111. a) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$, $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 49$, b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 625$,
c) $x^2 + (y-4)^2 = 16$, $x^2 + (y-4)^2 = 196$,
d) $(x+3)^2 + (y+5)^2 = (8-5\sqrt{2})^2$, $(x+3)^2 + (y+5)^2 = (8+5\sqrt{2})^2$

112. a) styczne, b) przecinają się, c) rozłączne, d) rozłączne, e) styczne, f) przecinają się

113. a) $(x-5)^2 + (y+10)^2 = 7$, b) $(x-19)^2 + (y+8)^2 = 3$

114. a) $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -6)$, b) $(1, 0)$, $(0, \sqrt{3}+2)$, $(0, -\sqrt{3}+2)$, c) $(3, 0)$, $(9, 0)$,
d) $(-2, 0)$, $(10, 0)$, $(0, -5)$, $(0, 4)$

115. a) $(x-4)^2 + (y-1,5)^2 = 16,25$, b) $(x+7,5)^2 + (y-5,5)^2 = 162,5$

116. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$

117. a) $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 25$, b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$

118. a) $p \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, b) $p \in (-4; 2)$

119. a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$, b) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 20$

121. a) jedno, b) nieskończenie wiele, c) jedno

122. a) tak; $(7, -10)$, b) tak; $(1\frac{1}{4}, -2)$, c) nie; proste mają nieskończenie wiele punktów wspólnych, d) tak; $(\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4})$, e) nie, f) tak; $(-3, -1)$
123. a) nie, b) tak, c) nie, d) tak
124. 30
125. a) $y = 3x - 9$, b) $y = -1,5x - 8,5$, c) $y = 0,25x - 3,5$, d) $y = 0,4x - 6,8$
126. a) $16\frac{2}{3}$, b) 25
127. a) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$, b) $(-1, -3)$, $(1, 8, 2, 6)$
128. a) $(2, 5)$, $(0, -1)$, b) $(-\frac{4}{5}, -\frac{17}{5})$, c) nie ma punktów wspólnych,
d) $(\frac{1-\sqrt{11}}{5}, \frac{-2-3\sqrt{11}}{5})$ lub $(\frac{1+\sqrt{11}}{5}, \frac{3\sqrt{11}-2}{5})$
129. $|AB| = 2\sqrt{5}$
130. a) $y = 5$, b) $x = -1$, c) $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4}$, d) $y = \frac{4}{3}x - 13\frac{2}{3}$
132. $P = 3$
133. a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 33$, b) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = \frac{917}{68}$
134. a) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = \frac{36}{5}$, $(\frac{7}{5}, -\frac{9}{5})$, b) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 8,2$
135. $\frac{8}{5} + \frac{9}{5}\sqrt{17}$
136. a) $C = (-2, -2)$ lub $C = (1, -1)$, b) $C = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3)$ lub $C = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} - 3)$
137. $C = (5, -1)$, $D = (2, -5 - \sqrt{19})$
138. $C = (\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5} - 2)$ lub $C = (-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5} - 2)$
139. a) $y = 3x + \sqrt{30} - 3$, $y = 3x - \sqrt{30} - 3$, b) $y = 2x + \sqrt{15} - 2$, $y = 2x - \sqrt{15} - 2$,
c) $y = -x + \sqrt{6} + 1$, $y = -x - \sqrt{6} + 1$, d) $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$
140. a) $x + 5y - 1 + \sqrt{26} = 0$, $x + 5y - 1 - \sqrt{26} = 0$, b) $2x - y - 2 - \sqrt{5} = 0$, $2x - y - 2 + \sqrt{5} = 0$
141. $(x-5)^2 + (y+4)^2 = 40$
142. $y = 2x - 4 - 3\sqrt{5}$, $y = 2x - 4 + 3\sqrt{5}$
143. $(x+2+\sqrt{2})^2 + (y+2+\sqrt{2})^2 = 4(3-2\sqrt{2})$
144. $p > \frac{9}{5}$
145. $a = -3$ i $b \in (-\infty; 5 - 2\sqrt{10}) \cup (5 + 2\sqrt{10}; +\infty)$
146. $(3 - 1,2\sqrt{5}, 1 + 0,6\sqrt{5})$
147. a) $p = 0$ lub $p = -\frac{8}{15}$, b) $p \in (-\infty; -\frac{8}{15}) \cup (0; +\infty)$, c) $p \in (-\frac{8}{15}; 0)$
148. a) $(-\sqrt{3}, 3)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 3)$, b) $(2 - \sqrt{3}, -1)$, $(2, -4)$, $(2 + \sqrt{3}, -1)$
149. $(-1, 1)$, $(3, 9)$
150. $y = 2x + 5$, $y = -2x + 5$
151. $(x-3)^2 + (y+\frac{4}{3})^2 = 10$, $(x-3)^2 + (y-\frac{16}{3})^2 = 10$, $(x-13)^2 + (y-2)^2 = 10$, $(x+7)^2 + (y-2)^2 = 10$
152. $(x+2,5)^2 + (y+0,5)^2 = 6,5$
153. $y = 1$, $y = 5$, $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + 3 - \frac{4\sqrt{5}}{5}$ i $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + 3 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$
154. $P = (\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{2\sqrt{15}}{5})$ lub $P = (-\frac{\sqrt{15}}{5}, -\frac{2\sqrt{15}}{5})$
155. $p = \frac{9}{8}$ lub $p = -\frac{9}{8}$

156. $p \in \left\langle -2; -\frac{4}{5} \right\rangle$

157. $a = \frac{1}{4}$ lub $a = \frac{1}{2}$

158. a) $\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x + 3 \\ y \leq -4x + 24 \\ y \leq 4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} y \geq \frac{5}{2}x + 4 \\ y \leq \frac{5}{2}x + 12 \\ y \geq -\frac{3}{2}x - 4 \\ y \leq -\frac{3}{2}x + 4 \end{cases}$, c) $\begin{cases} y \geq \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \\ y \geq 2x - 13 \\ y \leq \frac{1}{4}x + \frac{11}{4} \\ y \geq -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. A

2. C

3. A

4. D

5. C

6. C

7. B

8. A

9. C

10. C

11. D

12. C

13. C

14. D

15. D

16. a) $y = 6$, b) $x = -8$, c) $y = -\frac{3}{4}x$

17. $(0, -23)$, $(0, 1)$, $(5 - 4\sqrt{3}, 0)$, $(5 + 4\sqrt{3}, 0)$

18. $y = 2x - 1$

19. $y = x - 9$, $y = -x + 27$

PRZED MATURĄ

1. B

2. B

3. B

4. A

5. D

6. C

7. C

8. C

9. A

10. B

11. A

12. B

13. B

14. A

15. C

16. C

17. $C = (0, -\frac{5}{3})$

18. $y = -3x + 16$

19. $B = (7, 4\frac{1}{2}), |AB| = 12,5$

20. $2\frac{2}{3}$

21. $B = (8, 6, 5, 8)$

22. $C = (6, 4, 15, 8)$

PRAWDOPODOBIEŃSTWO, CZĘŚĆ 1

1. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{3}$, d) 1, e) $\frac{1}{3}$, f) 0

2. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $\frac{1}{2}$

3. a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{1}{3}$

4. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{2}$

5. $\frac{4}{5}$; prawdopodobieństwo wzrośnie do $\frac{13}{15}$

6. a) $\frac{3}{8}$, b) $\frac{3}{8}$, c) $\frac{3}{4}$

7. a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{4}{7}$

8. 0,94

9. a) $\frac{3}{20}$, b) $\frac{2}{5}$, c) $\frac{9}{10}$, d) $\frac{17}{20}$

10. 84 kule

11. a) A' — wylosowano liczbę nie większą od 15, b) B' — wylosowano liczbę 20,
c) C' — wylosowano liczbę niepodzielną przez 4, d) D' — wylosowano liczbę mniejszą od 14 lub większą od 15

12. a) $\frac{11}{45}$, b) $\frac{4}{15}$, c) $\frac{7}{9}$, d) $\frac{11}{45}$, e) $\frac{1}{15}$

13. a) $\frac{1}{8}$, b) $\frac{3}{8}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{2}$

14. a) 20, b) 100, c) 50 losów

15. 30 uczniów

16. a) 1, b) 1, c) 0, d) $\frac{1}{2}$, e) 1, f) $\frac{3}{4}$

17. około 0,8%

18. a) 52%, b) $\frac{114}{625}$

19. a) $\frac{2}{25}$; $\frac{23}{25}$, b) $\frac{4}{49}$; $\frac{27}{49}$, c) $\frac{1}{3}$; 0

20. a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{3}{10}$

21. a) $\frac{1}{12}$, b) $\frac{5}{12}$

22. co najwyżej 8 niebieskich długopisów

23. około 0,7, taką część powierzchni Ziemi zajmują oceany

24. a) $\frac{11}{36}$, b) $\frac{35}{36}$

25. $\frac{\pi}{4} \approx 0,785$

26. a) $p_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,41$; $p_4 = \frac{2}{\pi} \approx 0,64$; $p_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,83$, b) 1

27. a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{1}{10}$, c) $\frac{3}{5}$
 28. a) $\frac{13}{20}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{11}{20}$, d) $\frac{9}{20}$
 29. a) $\frac{11}{24}$, b) $\frac{1}{4}$
 30. a) $\frac{11}{36}$, b) $\frac{5}{12}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{5}{9}$, e) $\frac{1}{9}$
 31. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{3}{10}$, c) $\frac{3}{10}$, d) $\frac{1}{2}$
 32. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{3}{8}$, d) $\frac{11}{16}$
 33. a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{2}{5}$, c) $\frac{11}{20}$, d) $\frac{1}{10}$
 34. a) $\frac{3}{16}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{4}$
 35. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{2}{5}$, c) $\frac{1}{2}$
 36. $\frac{3}{28}$
 37. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{4}$
 38. a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{5}{12}$
 39. a) $\frac{5}{8}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{16}$, d) $\frac{7}{16}$
 40. a) na czterech ścianach; na trzech ścianach, b) $\frac{5}{12}$
 41. 1000 losów
 42. mniejsze
 43. $\frac{3}{4}$
 44. a) $\frac{3}{10}$, b) $\frac{7}{10}$
 45. a) $\frac{4}{15}$, b) $\frac{3}{5}$
 46. a) $\frac{4}{105}$, b) $\frac{31}{35}$
 47. $\frac{31}{56}$
 48. a) $\frac{1}{12}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{6}$
 49. a) $\frac{1}{12}$, b) $\frac{1}{4}$
 50. a) $\frac{7}{8}$, b) $\frac{1}{2}$
 51. a) $\frac{3}{8}$, b) $\frac{11}{16}$, c) $\frac{15}{16}$
 52. Oba zdarzenia są jednakowo prawdopodobne. Prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi $\frac{1}{216}$.
 53. a) $\frac{10}{21}$, b) $\frac{10}{21}$, c) $\frac{20}{21}$, d) $\frac{11}{21}$
 54. a) $\frac{5}{104}$, b) $\frac{1}{104}$, c) $\frac{1}{13}$, d) $\frac{2}{13}$
 55. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{55}{78}$
 56. $\frac{5}{54}$
 57. 0,9325
 58. $\frac{13}{24}$
 59. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}$
 60. $\frac{1}{2}$; tak, wyniosłoby $\frac{13}{25}$

61. $\frac{893}{19\,404}$
62. a) $\frac{49}{506}$, b) $\frac{60}{253}$
63. $\frac{11}{18}$
64. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{7}{24}$
65. $\frac{169}{200}$
66. a) $\frac{33}{59}$, b) $\frac{26}{59}$, c) $\frac{387}{590}$
67. $\frac{5}{12}$
68. $\frac{109}{165}$
69. a) $\frac{1}{28}$, b) $\frac{3}{14}$, c) $\frac{1}{7}$
70. a) $\frac{17}{72}$, b) $\frac{5}{8}$, c) $\frac{25}{216}$, d) $\frac{5}{216}$
71. a) Gracz rzucający kostką B (prawdopodobieństwo wygranej wynosi $\frac{7}{12}$), b) gracz rzucający kostką C (prawdopodobieństwo wygranej wynosi $\frac{5}{9}$), c) nie można — wykonaj obliczenia, a zobaczysz, że z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ wygra gracz rzucający kostką A
72. a) 12, b) 6, c) 10
73. a) 10, b) 8
74. a) co najmniej 6 gruszek, b) co najmniej 4 jabłka
75. Nie, sukces odniesie średnio 1 na 126 rycerzy; około 0,73
76. 15
77. 30
78. Na jednej ścianie są trzy oczka, na dwóch ściankach — dwa oczka, na trzech ściankach — jedno oczko.
79. $\frac{3}{16}$
80. a) $\frac{221}{506}$, b) $\frac{65}{133}$, c) $\frac{19}{70}$
81. $\frac{1}{3}$ p.
82. 1,5 p.
83. 0,3 p.
84. $\frac{14}{13}$ p.
85. a) 10 zł, b) -0,4 p.
86. a) około -2,08 zł, b) około -4,69 zł, c) około 2,81 zł, d) około -6,56 zł
87. a) tak, b) tak
88. 2 kule
89. a) $\frac{4}{15}$ p. b) 3,5 p.
90. a) $9\frac{27}{29} \approx 9,93$ zł, b) 56 zł
91. 18 zł
92. 20 zł
93. 17 zł
94. 11 zł
95. 31,50 zł

96. a) $-4\frac{7}{12} \approx -4,58$ zł, b) $67\frac{7}{9} \approx 67,78$ zł
97. 7 kul
98. około 6,54 zł
99. a) 30, b) 40, c) 90
100. 90 dni, czyli około trzech miesięcy
101. a) 5040, b) 4896
102. a) 60, b) 125
103. a) 1296, b) 360
104. 120
105. 36
106. 15
107. a) 524 160, b) 426
108. a) 30 791 400, b) 125 664, c) 26 942, d) 24 660
109. a) 200, b) 220, c) 330, d) 140, e) 34
110. a) 70, b) 42, c) 132
111. 52 900 000
112. 1 404 000
113. a) 324, b) 180
114. a) 24, b) 256, c) 81, d) 192, e) 18, f) 16, g) 8
115. a) 600, b) 6480, c) 4320, d) 1 399 680, e) 360
116. a) 512, b) 1680, c) 21 504
117. a) 1320, b) 132
118. a) 14 400, b) 5400, c) 746
119. a) 404, b) 436, c) 840
120. a) 3 628 800, b) 336, c) 1024, d) 28 800
121. a) 60, b) 27, c) 16
122. 243
123. a) 4096, b) 18 432, c) 6720, d) 32
124. 84
125. 1633
126. 400
127. a) 900, b) 90, c) 648, d) 100
128. około 0,03%
129. a) 27, b) 16
130. 18
131. 59
132. a) 0; 16; 3; 160; 36, b) 0; 4; 3; 100; 36
133. $\frac{1}{24}$
134. $\frac{1}{216}$

135. $3,75 \cdot 10^{-8}$
136. $\frac{1}{3}$
137. a) $\frac{1}{720}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{2}{45}$
138. $\frac{1}{20}$
139. a) $\frac{1}{180}$, b) $\frac{1}{737280}$
140. a) $\frac{5}{54}$, b) $\frac{1}{1296}$, c) $\frac{2585}{2592}$, d) $\frac{11}{7776}$, e) $\frac{5}{3888}$
141. a) $\frac{25}{91}$, b) $\frac{9}{455}$
142. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{5}{9}$, c) $\frac{4}{81}$
143. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{5}$
144. $\frac{170}{243}$
145. $\frac{1}{99}$
146. a) $\frac{7}{36}$, b) $\frac{5}{9}$
147. a) 210, b) 2070, c) 5040, d) 1 030 200, e) 1000, f) 18, g) $31!$, h) 240, i) $14!$,
j) 1680, k) 455, l) 120, m) $\frac{1}{462}$, n) $\frac{9}{8}$, o) $\frac{101}{9900}$
148. a) $(n-1)n$, b) $n(n+1)(n+2)$, c) $(n+1)(n+2)^2(n+3)$, d) $\frac{1}{24}(n-3)(n-2)(n-1)n$,
e) $\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)$, f) $n(n+2)(n+4)$
150. a) 720, b) 5040, c) 720, d) 343, e) 336, f) 840, g) 518 400, h) 4^{25}
151. a) 32, b) 243, c) 3125
152. a) 27 907 200, b) 64 000 000
153. 390 625
154. a) 9, b) 27, c) 81, d) 59 049
155. a) 4096, b) 1296
156. a) 24 360, b) 16 240, c) 5600
157. a) 120, b) 72, c) 24
158. a) 3 110 400, b) 19 683
159. 9^4 s, czyli 1 h 49 min 21 s
160. a) 720, b) 7920
161. a) $6^{10} = 60 466 176$, b) 1024
162. a) 384, b) 384, c) 1152, d) 576, e) 8640, f) 40 320
163. a) 270, b) około 10^{15}
164. a) 720, b) 30, c) 90 720, d) 60
165. a) 60 480, b) 151 200
166. $20! \cdot 10!$
167. $4! \cdot 21!$
168. a) 28 800, b) 86 400
169. a) 9216, b) 2304

- 171.** a) 32, b) 2^n . Wskazówka. Aby utworzyć podzbiór danego zbioru, możemy rozważyć po kolei każdy z elementów tego zbioru i zdecydować, czy wybierzemy go do naszego podzbioru czy nie.
- 172.** a) 15, 84, 715, 1 999 000, 53 130, 13 983 816, b) 1, 18, 62, 1, 1234, 1, c) $1, \frac{1}{8}, 25\frac{1}{40}, 1$
- 173.** a) n , b) $\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n$, c) $\frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$, d) $(n+1)^2$,
e) $\frac{1}{3}n(2n-2)(2n-1)$, f) $\frac{2}{n(n-1)}$, g) $\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$, h) $\frac{6}{(n+2)(n+3)}$, i) $\frac{n+2}{n+4}$
- 174.** a) $n = 10$, b) $n = 11$, c) $n = 20$, d) $n = 6$
- 175.** a) 10, b) 15 504, c) 20
- 176.** 10; 20
- 177.** a) 13 800, b) 2300, c) $253 = 15\,625$
- 178.** a) 21, b) 35, c) 495, d) 105
- 180.** a) 26 334, b) 3675, c) 22 113
- 181.** a) 2 802 800, b) 240 975
- 182.** a) 1575, b) 2982, c) 5460
- 183.** 81 305
- 184.** a) 53 130, b) około 10^{14}
- 185.** a) 1 712 304, b) 6 096 454
- 186.** 20 137 600
- 187.** około $1,75 \cdot 10^9$
- 188.** około $4,96 \cdot 10^{14}$; około $5,36 \cdot 10^{28}$
- 189.** a) 184 756, b) 1 048 576
- 190.** a) 5040, b) 10 000
- 191.** 6 115 200
- 192.** 20; 2
- 193.** 42 mln zł
- 194.** a) 924, b) 34 650
- 195.** 143
- 196.** 127
- 197.** a) $256 + 768x + 864x^2 + 432x^3 + 81x^4$,
b) $32x^5 - 400x^4y + 2000x^3y^2 - 5000x^2y^3 + 6250xy^4 - 3125y^5$,
c) $4\sqrt{2}x^5 + \frac{40x^4}{y} + \frac{80\sqrt{2}x^3}{y^2} + \frac{160x^2}{y^3} + \frac{80\sqrt{2}x}{y^4} + \frac{32}{y^5}$,
d) $1 - 60a + 1500a^2 - 20\,000a^3 + 150\,000a^4 - 600\,000a^5 + 1\,000\,000a^6$,
e) $a^4b^4 + 12a^3b^3c + 54a^2b^2c^2 + 108abc^3 + 81c^4$, f) $\frac{243}{k^{10}} - \frac{135}{2k^7} + \frac{15}{2k^4} - \frac{5}{12k} + \frac{5k^2}{432} - \frac{k^5}{7776}$
- 198.** a) $89 + 28\sqrt{10}$, b) $49 - 20\sqrt{6}$, c) $847 + 342\sqrt{6}$, d) $87\,029 + 38\,916\sqrt{5}$, e) $\frac{1349\sqrt{2}}{8} - \frac{5441}{32}$,
f) $7848\sqrt{3} - 9612\sqrt{2}$, g) $2704 - 1912\sqrt{2}$, h) $10\,304 + 4608\sqrt{5}$, i) $\frac{202\,001\sqrt{10}}{2000} + \frac{5\,010\,001}{100\,000}$
- 199.** a) 160 000, b) -14 880 348, c) 9 882 516, d) 2 449 440, e) 252, f) -98 415
- 200.** a) $\frac{160x^3y^6}{27}$, b) $\frac{x^5y^2}{324}$, c) $\frac{320x^2y^8}{3}$, d) $4096y^{12}$
- 201.** a) $-14\sqrt{2}a^5b^9c^5$, b) $-4\sqrt{2}a^7b^3c^7$, c) $\frac{35a^4b^{12}c^4}{2}$, d) $-\frac{\sqrt{2}ab^{21}c}{2}$

202. a) a^6 , $6a^5b$, $15a^4b^2$, b) a^9 , $9a^8b$, $36a^7b^2$, c) a^8 , $8a^7b$, $28a^6b^2$
203. a) $28a^2b^6$, $-8ab^7$, b^8 , b) $-10a^2b^3$, $5ab^4$, $-b^5$, c) $-36a^2b^7$, $9ab^8$, $-b^9$,
d) $-55a^2b^9$, $11ab^{10}$, $-b^{11}$
204. a) 1,17, b) 1,04, c) 0,86, d) 0,98, e) 1,03, f) 0,72
205. $15a^2b^4$, $6ab^5$, b^6
206. $\frac{1}{24}$
207. $\frac{1}{216}$
208. $3,75 \cdot 10^{-8}$
209. $\frac{3}{38}$
210. $\frac{1}{3}$
211. a) $\frac{11}{38}$, b) $\frac{56}{95}$, c) $\frac{9}{19}$, d) $\frac{12}{19}$
212. a) około $3,8 \cdot 10^{-33}$, b) około $6,9 \cdot 10^{-9}$, c) około 10^{-7}
213. a) $\frac{1001}{7752}$, b) 0, c) $\frac{455}{1292}$
214. a) $\frac{1}{720}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{2}{45}$
215. $\frac{1}{20}$
216. a) $\frac{1}{39}$, b) $\frac{8}{6435}$, c) $\frac{1}{3}$, d) $\frac{280}{1287}$
217. a) $\frac{1}{720}$, b) $\frac{1}{737280}$
218. a) $\frac{1}{180}$, b) $\frac{1}{737280}$
219. $\frac{1}{3003}$
220. a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{1}{60}$, c) $\frac{1}{479}$
221. a) około 0,002, b) około 0,04, c) około 0,042, d) około 0,85
222. $\frac{3}{5}$
223. a) $\frac{1}{317814}$, b) $\frac{1}{166474}$, c) $\frac{2300}{6909}$
224. $\frac{493}{499422}$
225. a) $\frac{5}{54}$, b) $\frac{1}{1296}$, c) $\frac{2585}{2592}$
226. a) $\frac{25}{91}$, b) $\frac{9}{455}$
227. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{5}{9}$, c) $\frac{4}{81}$
228. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{5}$
229. a) $\frac{39}{95}$, b) $\frac{59}{190}$, c) $\frac{17}{38}$
230. a) $\frac{3}{190}$, b) $\frac{2}{19}$, c) $\frac{194}{285}$
231. a) $\frac{24}{91}$, b) $\frac{43}{65}$, c) $\frac{12}{65}$, d) $\frac{58}{91}$, e) $\frac{34}{455}$
232. $\frac{170}{243}$
233. a) $\frac{664}{1225}$, b) $\frac{181}{1225}$, c) $\frac{97}{1225}$
234. $\frac{1}{99}$

235. a) $\frac{7}{36}$, b) $\frac{5}{9}$

236. 9

237. 26

238. 24

239. 15

240. a) $\frac{248}{609}$, b) $\frac{1810}{1827}$

241. $\frac{31}{261}$

242. a) $\frac{7}{135}$, b) $\frac{327\,304}{4\,952\,475}$, c) $\frac{316\,251}{6\,210\,820}$

243. $\frac{1}{30}$

244. a) $\frac{1}{210}$, b) $\frac{1}{840}$, c) $\frac{1}{2401}$, d) $\frac{1}{35}$

245. a) $\frac{63}{256}$, b) $\frac{121}{128}$

246. a) $\frac{5}{33}$, b) $\frac{5}{22}$, c) $\frac{1}{6}$

247. a) $\frac{35}{46}$, b) $\frac{15}{184}$, c) $\frac{1}{8}$, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{41}{46}$

248. a) około $1,6 \cdot 10^{-12}$, b) około $2,64 \cdot 10^{-3}$, c) około $1,7 \cdot 10^{-6}$, d) około 0,041

249. $\frac{1}{50}$

250. a) $\frac{1457}{13\,119}$, b) $\frac{5830}{13\,119}$

251. a) $\frac{1}{64\,974}$, b) $\frac{1}{4165}$, c) $\frac{192}{54\,145}$, d) $\frac{6}{4165}$

252. $\frac{1}{16}$

253. $\frac{1}{4}$

254. a) Wygrana I stopnia — $\frac{1}{36} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{45}{4}} \approx 1,9 \cdot 10^{-7}$, wygrana II stopnia — $\frac{35}{36} \cdot \frac{\binom{4}{1}}{\binom{45}{4}} \approx 6,5 \cdot 10^{-6}$,

wygrana III stopnia — $\frac{1}{36} \cdot \frac{\binom{4}{3}\binom{41}{1}}{\binom{45}{4}} \approx 3,1 \cdot 10^{-5}$, wygrana IV stopnia — $\frac{35}{36} \cdot \frac{\binom{4}{3}\binom{41}{1}}{\binom{45}{4}} \approx 1,1 \cdot 10^{-3}$,

wygrana V stopnia — $\frac{1}{36} \cdot \frac{\binom{4}{2}\binom{41}{2} + \binom{4}{1}\binom{41}{3} + \binom{4}{0}\binom{41}{4}}{\binom{45}{4}} \approx 0,028$, b) tak

255. a) 65 536; 256; 16; 1984, b) 12 870; 70; 6; 150

PRZED SPRAWDZIANEM

1. C

2. B

3. A

4. C

5. A

6. $\frac{1}{2}$

7. a) $\frac{8}{25}$, b) $\frac{3}{25}$, c) $\frac{19}{25}$

8. $\frac{5}{11}$

9. a) $\frac{5}{16}$, b) $\frac{5}{16}$

10. -50 gr

11. a) 40 320, b) 576, c) 1680, d) 512

12. D

13. D

14. A

15. 35

16. a) $\frac{1}{7}$, b) $\frac{1}{7}$, c) $\frac{79}{210}$

17. $\frac{1}{15}$

18. a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{10}$

19. a) $\frac{3}{7}$, b) $\frac{11}{70}$

20. $\frac{1}{5313}$

21. 3003 i 3432

PRZED MATURĄ

1. A

2. B

3. $P(A) = \frac{1}{3}$

4. 4.1. C, 4.2. 26

5. A

6. D

7. $\frac{1}{25}$

8. 30 żetonów

9. C

10. 220

11. $P(A) = \frac{3n^2 - 1}{(3n+1)(3n-1)}$

12. 30 140

13. $\frac{5}{11}$

14. 44 361

15. 6 666 600

PRAWDOPODOBIENSTWO, CZĘŚĆ 2

1. a) $A \cap B = \{(1, 3), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 6), (5, 3), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$,

b) $B \cup C = \{(1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$,

c) $\{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$,

d) $\{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$,

e) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$,

f) $\{(2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 3), (6, 5)\}$

2. a) $A \cup B$ — Wylosowano kartę koloru czerwonego. $A \cap B$ — zdarzenie niemożliwe,

b) $A \cup B$ — Wylosowano damę lub pika. $A \cap B$ — Wylosowano damę pik.

c) $A \cup B$ — Wylosowano kartę koloru czerwonego. $A \cap B$ — Wylosowano kiera.

3. a) $\frac{5}{6}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{4}{5}$
4. a) $P(A \cup B) = \frac{4}{13}$, b) $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$, c) $P(A' \cap B') = \frac{9}{13}$, d) $P((A \cap B)') = \frac{51}{52}$
5. $\frac{671}{1296}$
6. b) zdarzenia przeciwne: B i D , zdarzenia wykluczające się: A i C oraz B i D
7. a) A i B , A i D , b) żadne, c) $(A \cup B)$ i $(C \cap D)$, B i $(A' \cap D)$
8. a) A' , b) $A' \cap B$, c) $A \cap B$, d) $A' \cap B'$
9. a) 0,5, b) 0,85
10. a) $\frac{1}{9}$, b) $\frac{1}{40}$
11. a) $A \cap B'$, b) $A \cup B'$, c) $(A \cup B)'$
12. a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{1}{10}$, c) $\frac{1}{5}$
13. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{5}$, c) $\frac{1}{5}$
14. a) $\frac{1}{10}$, b) $\frac{1}{20}$, c) $\frac{17}{20}$
15. a) $\frac{1}{10}$, b) $\frac{1}{7}$
16. a) $\frac{7}{11}$, b) $\frac{29}{50}$
17. a) $\frac{4}{5}$, b) $\frac{9}{20}$, c) $\frac{13}{20}$
18. a) 0,5, b) 0,65, c) 0,85
19. a) $\frac{4651}{7776}$, b) $\frac{1125}{1771}$
20. $P(A) = \frac{7}{30}$, $P(B) = \frac{3}{5}$
21. a) $\frac{6}{25}$, b) 1, c) $\frac{1}{5}$, d) $\frac{9}{25}$, e) $\frac{1}{5}$, f) 1
22. około 0,9988
23. $p = \frac{1}{2}$
24. a) $\frac{11}{15}$, b) 0,3, c) 0,1
25. a) 0,32, b) 0,23
26. a) 0,1, b) 0,25, c) 0,6, d) 0,4
27. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{3}{20}$, d) $\frac{1}{20}$
28. a) 0,4, b) 0,8, c) 0,3, d) 0,1
29. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) 0, d) $\frac{1}{4}$
30. a) $\frac{5}{36}$, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{2}{9}$, d) $\frac{1}{7}$
31. a) $\frac{4}{9}$, b) $\frac{3}{13}$, c) $\frac{1}{5}$, d) $\frac{10}{13}$, e) $\frac{2}{7}$, f) $\frac{5}{11}$
32. a) $\frac{4}{13}$, b) $\frac{1}{13}$, c) $\frac{1}{4}$, d) 1, e) $\frac{1}{13}$, f) $\frac{1}{4}$
33. a) $\frac{8}{17}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{11}{15}$, d) $\frac{5}{12}$, e) $\frac{3}{10}$, f) $\frac{1}{2}$
34. a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{5}{14}$
35. a) $\frac{4}{23}$, b) $\frac{3}{23}$, c) $\frac{8}{23}$, d) 1, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{8}{11}$
36. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{3}{5}$
37. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{13}{51}$
38. a) $\frac{17}{75}$, b) $\frac{2}{75}$, c) $\frac{17}{55}$, d) $\frac{17}{35}$, e) $\frac{1}{10}$, f) $\frac{38}{55}$, g) $\frac{9}{10}$, h) $\frac{1}{20}$, i) $\frac{18}{35}$
39. a) $\frac{9}{23}$, b) $\frac{14}{23}$, c) $\frac{15}{23}$

40. $P(A) = \frac{1}{36}$, $P(A|B) = \frac{1}{6}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$, $P(C|A) = \frac{1}{3}$, $P(C|B) = \frac{7}{9}$
41. a) $\frac{4}{7}$, b) 20%
42. a) $\frac{3}{10}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{3}$
43. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{13}{18}$, c) $\frac{1}{3}$
44. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{2}{5}$, d) $\frac{4}{5}$, e) $\frac{2}{3}$, f) $\frac{1}{4}$
45. a) 0,8, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{2}{3}$, d) $\frac{1}{2}$
46. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{3}$, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{2}{3}$
47. a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{1}{5}$, c) $\frac{2}{3}$
48. a) $P(A) = \frac{4}{25}$, $P(A \cup B) = \frac{11}{50}$, b) $P(A' \cup B') = \frac{14}{15}$, $P(A|B) = \frac{1}{10}$, c) $P(B|A) = \frac{3}{4}$, $P(A|B) = \frac{3}{7}$,
d) $P(A'|B) = \frac{2}{5}$, $P(B'|A') = \frac{1}{2}$
49. a) $P(A|B) = 0$, b) $P(A|A) = 1$, $P(A|A') = 0$
52. a) $\frac{22}{37}$, b) $\frac{3}{7}$, c) $\frac{7}{15}$, d) $\frac{20}{33}$
53. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{3}$
54. $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{5}$
55. $P(A'|B) = \frac{2}{3}$
56. 0,084
57. $P(A|O) = \frac{11}{36}$, $P(A|O') = \frac{91}{216}$, $P(A) = \frac{157}{432}$
58. a) 0,24, b) 0,13, c) 0,04
59. $\frac{97}{198}$
60. $\frac{151}{300}$
61. $\frac{71}{143}$
62. $\frac{179}{190}$
63. 0,0922
64. 0,91
65. $\frac{53}{120}$
66. a) około 0,23, b) około $\frac{6}{13}$
67. a) $\frac{55}{138}$, b) $\frac{83}{414}$
68. a) 0,40404, b) 0,36828
69. $\frac{3}{16}$
70. $\frac{3}{7}$
71. nie, około 43%
72. a) $\frac{17}{30}$, b) $\frac{2}{17}$, c) $\frac{3}{13}$
73. $\frac{2}{3}$
74. $\frac{2}{7}$
75. a) $\frac{89}{198}$, b) $\frac{1211}{2970}$
76. a) $\frac{17}{70}$, b) $\frac{53}{70}$, c) $\frac{11}{21}$

77. $\frac{4}{5}$

78. $\frac{11}{32}$

79. a) około 0,97, b) około $\frac{9}{14}$, c) około 0,1

80. a) $\frac{4}{11}$, b) $\frac{3}{8}$, c) $\frac{27}{28}$

81. a) 0,01, b) 0,97, c) 0,2

82. a) są niezależne, b) nie są niezależne, c) są niezależne

83. nie są niezależne

84. są niezależne

85. nie są niezależne; nie

86. 0,006

87. 0,08

88. nb i NB

89. a) są niezależne, b) nie są niezależne, c) nie są niezależne, d) nie są niezależne, e) są niezależne, f) są niezależne

90. a) nie są niezależne, b) nie są niezależne, c) nie są niezależne, d) są niezależne

91. a) są niezależne, b) nie są niezależne, c) nie są niezależne

92. są niezależne

93. nie są niezależne

94. nie są niezależne

95. $P(A) = 0$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, $P(D) = 0$; niezależne są zdarzenia: A i B , A i C , A i D , B i D , C i D

96. Zdarzenia A i C są niezależne.

97. a) 0,001, b) 0,00009, c) 0,40951

98. 0,0397

99. a) 0,002025, b) 0,731025, c) 0,0171

100. około 0,87

101. a) są niezależne, b) są niezależne, c) są niezależne, d) nie są niezależne

102. 0,7494375

103. $A = 0,989901$, B i $C = 0,9801$. Wskazówka. Jeśli A , B , C oznaczają odpowiednio zdarzenia, że żarówka A , B , C nie przepaliły się, to prawdopodobieństwo, że będzie świeciła żarówka A można zapisać $P(A \cap (B \cup C))$.

104. Wskazówka. a) Niech $C = \{9\heartsuit, 10\heartsuit, W\heartsuit, D\heartsuit, K\heartsuit, A\heartsuit, 9\spadesuit, 10\spadesuit, W\spadesuit, D\spadesuit, K\spadesuit, A\spadesuit\}$ dobierz odpowiednio A i B . b) Wystarczy, że jedno ze zdarzeń jest niemożliwe.

105. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{8}$, c) $\frac{5}{16}$

106. a) $\frac{125}{3888}$, b) $\frac{23}{648}$

107. $\frac{781}{1024}$

108. a) $\frac{9261}{50\,000}$, b) $\frac{16\,807}{40\,000}$, c) $\frac{498\,461}{500\,000}$, d) 0,3483

109. a) $\frac{375}{1024}$, b) $\frac{175}{256}$, c) $\frac{5067}{8192}$

110. a) $\frac{320}{19683}$, b) $\frac{5120}{19683}$, c) $\frac{11008}{19683}$, d) $\frac{5888}{19683}$
111. a) $\frac{5}{16}$, b) $\frac{11}{243}$, c) $\frac{3125}{3888}$, d) $\frac{13}{16}$, e) $\frac{64}{81}$, f) $\frac{4651}{7776}$
112. a) $\frac{45}{512}$, b) $\frac{47}{128}$
113. a) około 0,283, b) około $7,46 \cdot 10^{-6}$, c) około $8,8 \cdot 10^{-8}$
114. a) około 16%, b) około 63%
115. a) około 0,965, b) około 0,997
116. w wariancie nr 1 (wariant 1: około 0,737, wariant 2: około 0,678)
117. a) $\frac{297}{625}$, b) $\frac{729}{3125}$, c) prawdopodobieństwo w obu opcjach jest takie samo i wynosi $\frac{513}{625}$
118. $P(B) > P(A)$; $P(A) \approx 0,246$, $P(B) \approx 0,291$
119. a) około 0,294, b) około 0,011
120. a) około 0,962, b) około $7,3 \cdot 10^{-7}$
121. $P(B) > P(A)$; $P(A) = \frac{729}{2048}$, $P(B) = \frac{1909}{4096}$
122. trzynastu
123. a) 3; około 0,25, b) około 0,66
124. a) 8, b) 35 lub 36, c) 12, d) 131
125. a) około 0,188, b) około 0,674
126. a) $\frac{1}{5}$, b) $\frac{1}{2}$
127. ok. 0,424
128. co najmniej 32
129. a) $\frac{175}{256}$, b) co najmniej 9
130. a) około 0,32, b) około 0,15, c) $\frac{13}{16}$
131. Prawdopodobieństwo, że zwrócone zostaną więcej niż dwa pudełka wynosi:
 $1 - \left[\binom{20}{0} \cdot (0,02)^0 \cdot (0,98)^{20} + \binom{20}{1} \cdot (0,02)^1 \cdot (0,98)^{19} + \binom{20}{2} \cdot (0,02)^2 \cdot (0,98)^{18} \right] \approx 0,007$.
 Prawdopodobieństwo, że pudełko zostanie zwrócone jest równe:
 $p = 1 - \left[\binom{24}{0} \cdot (0,01)^0 \cdot (0,99)^{24} + \binom{24}{1} \cdot (0,01)^1 \cdot (0,99)^{23} \right] \approx 0,02$.
132. $p = \frac{1}{3}$ lub $p = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$. Wskazówka. Rozwiąż równanie $\binom{3}{2}p^2(1-p) = \frac{2}{9}$.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. B
2. A
3. A
4. D
5. $\frac{13}{24}$
6. $\frac{5}{16}$
7. $\frac{403}{900}$
8. $p_2 < p_1 < p_3$; $p_1 = 0,336$, $p_2 = 0,212$, $p_3 = 0,452$
9. $\frac{992}{3125}$

PRZED MATURĄ

1. 753
2. $\frac{11}{35}$
3. C
4. A
5. $\frac{1}{5}$
6. Pan Nowak musi rozegrać z synem co najmniej sześć partii.
7. około 0,09

GRANICE FUNKCJI

2. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ nie istnieje, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nie istnieje, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ nie istnieje, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$
3. a) $+\infty, +\infty, 5, 8$, b) $1, 1, +\infty, -\infty, 0$, c) $+\infty, 0, 0, +\infty$, d) $-\infty, +\infty, +\infty, -\infty$, e) $0, -1, +\infty, -\infty$
5. a) $0; +\infty$, b) $+\infty; 0$, c) $1; 1$
6. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$, $\lim_{x \rightarrow -b^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -b^+} f(x) = -\infty$,
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$, $\lim_{x \rightarrow -b^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -b^+} f(x) = +\infty$,
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -b^+} f(x) = c$
7. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$,
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$
8. a) -4 , b) 0 , c) 3 , d) nie istnieje, e) 2 , f) nie istnieje
9. a) 1 , b) 0 , c) nie istnieje, d) 0 , e) nie istnieje, f) nie istnieje
10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} d(x) = 10$, $\lim_{x \rightarrow 10^-} d(x) = 0$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$
12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} a(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} a(x) = \sqrt{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1} a(x) = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$
13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2} P(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} P(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$
14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 0$
15. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -1$,
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$,
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$

16. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$, d) $-\infty$, e) $+\infty$, f) $+\infty$
17. a) 11, b) 7, c) -1, d) -1, e) 2, f) -4
18. a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 8$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$, b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -7$,
c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
19. a) $-\frac{1}{2}$, b) 0, c) $-\frac{3}{5}$, d) $-\infty$, e) $+\infty$, f) $\frac{3}{2}$
20. a) -1, b) $\frac{1}{25}$, c) 0, d) -4, e) $2\frac{1}{4}$, f) $-\frac{1}{2}$
21. a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\frac{1}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$,
b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 10^{-5}$, $\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 10^5$, $\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = +\infty$,
c) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0$
23. a) $p = \frac{1}{3}$, b) $p = 0,5$
25. a) -1, b) -2; 0; 3, c) -1; 3
26. a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nie istnieje, b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$
27. a) nie jest ciągła w 0, b) ciągła w $\mathbb{R}$, c) ciągła w $\mathbb{R}$, d) nie jest ciągła w 0
28. a) -1, b) $-\frac{1}{3}$, c) 2, d) $\frac{4}{3}$, e) 0, f) $-2\frac{1}{36}$
29. a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nie istnieje, b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$
30. a) $x = -1$, b) $x = 1$
31. a) $p = -2$, b) $p = -\frac{3}{2}$, c) $p = -2$, d) $p = 15$, e) $p = 3$, f) $p = 27$
32. a) $m = -1$, b) $m = 2\frac{1}{3}$, c) $m = \frac{1}{2}$, d) $m = -\frac{1}{4}$
33. a) dla $a = 0$ i $b = 2$, b) dla $a = -1$ i $b = -4$
34. a) $x_0 = 2$, b) $x_0 = -3$, c) $x_0 = 3$, d) $x_0 = -2$, e) $x_0 = 1$ lub $x_0 = 4$, f) $x_0 = -1$
35. a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nie istnieje, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$, b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{2}$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ nie istnieje
36. a) $a = 0$, $b = 8$, b) $a = 1$, $b = -6$
37. nie jest ciągła w punkcie -1 i jest ciągła w punkcie 1
38. nie jest ciągła w punkcie 0
39. a) w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, b) w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
43. a) $x \approx 2,75$, b) $x \approx -1,75$, c) $x \approx 2,25$, d) $x \approx -2,75$
44. a) Wskazówka. Funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 0; 3 \rangle$, $f(0) = 0$ i $f(3) = 9$, więc $f(0) < 7 < f(3)$, zatem na mocy twierdzenia Darboux istnieje taki argument x_0 należący do przedziału $\langle 0; 3 \rangle$, że $f(x_0) = 7$.
45. a) Nie. Funkcja nie jest określona w przedziale $(-2; 2)$, a więc nie spełnia założenia twierdzenia Darboux w tym przedziale. b) Tak. Funkcja jest ciągła w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$. c) Nie. Funkcja nie jest ciągła w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$. d) Tak. Funkcja jest ciągła w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$.

46. a) np. $(0; \pi)$. Wskazówka. Przedstaw równanie w postaci $\sin x - x + 1 = 0$.
Niech $f(x) = \sin x - x + 1$. Znajdź takie liczby p i q , że $f(p) \cdot f(q) < 0$ i $|q - p| < 4$.
b) np. $(1; 4)$, c) np. $(-4; -3)$, d) np. $(1; 4)$
47. a) $x \approx 4,25$, b) $x \approx -1,75$, c) $x \approx 2,75$, d) $x \approx -0,75$
48. a) Wskazówka. Wykaż, że rozwiązanie równania $x \cdot 2^x - 1 = 0$ należy do przedziału $(0; 1)$.
50. a) Wskazówka. Zauważ, że jeżeli $f(x) = 125x^3 - 600x^2 + 880x - 384$, to $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, $f(2) < 0$ i $f(3) > 0$.
52. Wskazówka. Niech α będzie kątem, o który obracamy stół (w sytuacji wyjściowej $\alpha = 0^\circ$), $d_1(\alpha)$ — sumą odległości między podstawami dwóch przeciwległych nóg a podłogą, $d_2(\alpha)$ — sumą odległości między podstawami drugiej pary przeciwległych nóg a podłogą. Rozważ funkcję $D(\alpha) = d_1(\alpha) - d_2(\alpha)$ i zbadaj znaki wartości $D(0^\circ)$ i $D(90^\circ)$.
54. a) 2, b) -1, c) 0, d) $\sqrt{2}$, e) $-\frac{1}{3}$, f) -3, g) 10, h) -2, i) 0, j) $\frac{3}{4}$
55. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$, d) $-\infty$, e) $-\infty$, f) $+\infty$, g) $+\infty$, h) $+\infty$
56. a) $\frac{2}{3}$, b) -5, c) 0, d) 0, e) $-\infty$, f) $-\infty$, g) 0, h) $+\infty$, i) $-\infty$, j) $-\frac{1}{2}$
57. a) $-\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$, d) $+\infty$, e) $+\infty$, f) $-\infty$
58. a) $-\frac{2}{3}$, b) 0, c) $-\infty$, d) $-\frac{3}{8}$, e) $+\infty$, f) 0
59. a) -2, b) 0, c) $+\infty$, d) $-\infty$, e) 0, f) $-\infty$, g) $+\infty$, h) $-\infty$
60. a) $+\infty$, b) $+\infty$, c) $-\infty$, d) 0, e) $-\infty$, f) -1, g) $\frac{5}{4}$, h) $+\infty$, i) 0, j) $-\infty$, k) 0, l) 2
61. a) $m = -0,9$, b) $m = -2$ lub $m = 1$, c) $m = 7$, d) $m = \frac{3}{5}$ lub $m = 3$
62. a) 0, b) 0, c) 0, d) 0
63. a) $-\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}$, c) 10, d) $\frac{1}{4}$, e) $\frac{1}{6}$, f) 10, g) $-\infty$, h) $+\infty$
64. a) 2, b) $\frac{5}{2}$, c) $\frac{4}{3}$, d) -1, e) $-\frac{2}{3}$, f) 3, g) -3, h) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$
65. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $-\infty$, d) $+\infty$, e) $+\infty$, f) $-\infty$
66. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$, d) $-\infty$, e) $-\infty$, f) $+\infty$
67. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $-\infty$, d) $+\infty$, e) $-\infty$, f) $-\infty$, g) $-\infty$, h) $+\infty$, i) $+\infty$
68. a) $-\infty$, b) $+\infty$, c) $-\infty$, d) $-\infty$, e) $-\infty$, f) $-\infty$, g) $+\infty$, h) $+\infty$, i) $-\infty$, j) $+\infty$, k) $+\infty$, l) $-\infty$
69. a) 0, $-\infty$, $+\infty$, $+\infty$, $-\infty$, 0, b) 0, -1, -1, $-\infty$, $+\infty$, 0, c) 0, $-\infty$, $+\infty$, $+\infty$, $+\infty$, 0
70. a) $\frac{1}{3}$, b) $-\frac{3}{5}$, c) $-\frac{4}{5}$, d) $-\frac{3}{5}$, e) 0, f) $2\frac{3}{5}$, g) 0, h) $-\frac{3}{4}$, i) $-\frac{5}{7}$, j) $2\frac{2}{11}$
72. a) $-\frac{3}{4}$, b) -5, c) -3, d) $-1\frac{5}{13}$
73. a) 0, $+\infty$, $-\infty$, $-\infty$, $+\infty$, 0, b) -2, $-\infty$, $+\infty$, $+\infty$, $-\infty$, -2, c) $-\infty$, $-\infty$, $+\infty$, $3\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{3}$, $+\infty$
74. a) 0, $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$, $-\infty$, 0, b) $-\frac{1}{2}$, $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$, $-\infty$, $-\frac{1}{2}$, c) $-\infty$, $-\frac{1}{14}$, $-\frac{1}{14}$, $-\infty$, $+\infty$, $+\infty$
75. a) 3, 0, -1, $-\infty$, $+\infty$, 3, b) $+\infty$, $+\infty$, $-\infty$, 0, $-4\frac{4}{5}$, $-\infty$
76. a) $-\infty$, $-\infty$, 0, b) -2, $-\infty$, -1, c) $-\infty$, -2, 0, d) $-\infty$, $+\infty$, $+\infty$
77. a) $x = 1$, b) $x = \frac{1}{3}$, c) $x = -2$, d) $x = -1$, $x = 2$, e) $x = \frac{1}{3}$, $x = -2$, f) $x = \frac{3}{2}$, $x = -4$
78. a) $y = 3$, b) $y = 2$, c) nie istnieje, d) $y = -\frac{2}{3}$, e) $y = 0$, f) $y = -\frac{1}{2}$
79. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $-\frac{1}{48}$, d) $1\frac{2}{3}$
80. a) $x = 2$, $y = -3$, b) $x = -1,5$, $y = -2,5$, c) $x = 0$, $y = 0$, d) $x = -2$, $y = -2$, e) $x = 0$, $x = 3$, $y = -1$, f) $y = 1$
81. a) $y = 2x + 1$, b) $y = 3x$, c) $y = -3x + 2$, d) nie istnieje, e) $y = \frac{3}{2}x$, f) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

82. a) $y = 3x - 5$, $f(x_0) \approx 2170$, b) $y = -2x + \frac{3}{2}$, $f(x_0) \approx -2854,5$, c) $y = -\frac{1}{3}x$, $f(x_0) \approx -3333$,
 d) $y = \frac{7}{2}x$, $f(x_0) \approx 17426$
83. a) $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 2$, b) prawostronna $y = x - 5$, lewostronna $y = -x - 3$,
 c) $x = 1$, $x = -1$, prawostronna $y = 3x + 2$, lewostronna $y = 3x - 2$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. D
2. C
3. A
4. A
5. D
6. A
7. a) -4 , b) $+\infty$, c) $+\infty$, d) $-\infty$, e) $-\infty$, f) 0
8. Wskazówka. Oblicz granice jednostronne funkcji f w punkcie 5.
9. Funkcja f jest ciągła w punkcie -1 i nie jest ciągła w punkcie 1.
10. $x \approx -1,5$

PRZED MATURĄ

1. D
2. B
3. C
4. B Wskazówka. Skorzystaj ze wzoru $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
5. D
8. $D = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{-2^+} f(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$
11. Funkcja jest ciągła w punkcie 2 i nie jest ciągła w punkcie -1 .
12. a) $m \in \{2, 4\}$

POCHODNA FUNKCJI

1. a) $f'(-1) > 0$, $f'(0) = 0$, $f'(1) < 0$, b) $f'(-1) < 0$, $f'(0) < 0$, $f'(1) = 0$,
 c) $f'(-1) = 0$, $f'(0) < 0$, $f'(1) = 0$
2. a) $f'(2)$, b) $f'(2)$, c) $f'(1)$
3. a) $f'(0)$, b) $f'(1)$, c) $f'(0)$
4. a) $f'(-2) = 2$, $f'(0) = 0$, $f'(2) = -1$, b) $f'(-2) = -\frac{3}{2}$, $f'(0) = -\frac{1}{3}$, $f'(2) = 1$,
 c) $f'(-2) = 0$, $f'(0) = -1$, $f'(2) = 3$
5. $f'(-2) > 0$, $f'(-\frac{1}{2}) = 0$, $f'(-1) < 0$, $f'(-\frac{1}{2}) = 0$, $f'(1) > 0$, $f'(2) < 0$
6. a) $x = -2$, $x = 2$, b) $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, c) $x = -4$, $x = -3$, $x = 0$
7. a) 4 , b) 11 , c) $\frac{1}{9}$, d) -27
8. a) $y = 4x - 1$, b) $y = -x - 1$, c) $y = x + 3$
9. a) nie, b) nie, c) tak

10. a) $f'(0) \approx 0$, b) $f'(0) \approx 0,7$, c) $f'(1) \approx 3,3$, d) $f'(\frac{\pi}{2}) \approx 0$
11. $p = -6, q = -9$ Wskazówka. Zwróć uwagę, że gdy $a \in \mathbb{R}$, to granica $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a}{h(h+3)} = 0$ tylko wtedy, gdy $a = 0$.
12. a) $f'(x) = 1,2x^{0,2}$, b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, c) $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt{x^2}}$, d) $f'(x) = -\frac{4}{x^3}$, e) $f'(x) = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$,
f) $f'(x) = -\frac{3}{x^2\sqrt{x}}$
13. a) $f'(x) = -2x + 5$, b) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, c) $f'(x) = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$, d) $f'(x) = 1$,
e) $f'(x) = \frac{10}{3}x^2\sqrt[3]{x} + \frac{5}{3\sqrt[3]{x}}$, f) $f'(x) = \frac{7}{3}x\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$
14. a) $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$, b) $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$, c) $f'(x) = \frac{-2x-2}{x^3}$, d) $f'(x) = \frac{x^2+2}{x^2}$,
e) $f'(x) = \frac{10x^2-10x-4}{(2x-1)^2}$, f) $f'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$
15. a) $f'(x) = 3x^2 - 10x + 1$, b) $f'(x) = 3x^2 - 2x + \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, c) $f'(x) = \frac{-x-1}{2x\sqrt{x}}$, d) $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$,
e) $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$, f) $f'(x) = \frac{-2x^2-3x\sqrt{x}}{2x^4}$
17. $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
18. a) $(-2, 13), (2, -3)$, b) $(-\sqrt{2}, 5+6\sqrt{2}), (\sqrt{2}, 5-6\sqrt{2})$
19. a) nie istnieje, b) istnieje; $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$, c) nie istnieje
20. a) tak, np. $f'(1) = f'(-1) = 4$, więc styczne w punktach $(-1, -2)$ i $(1, 2)$ są równoległe.
b) nie, ponieważ f' jest funkcją różnowartościową, c) tak, np. $f'(0) = f'(-\frac{3}{2}) = 0$, więc styczne w punktach $(0, 0)$ i $(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$ są równoległe
21. a) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{11}{12}$, b) nie istnieje, c) $y = x + \frac{1}{4}$
22. a) około 72° , b) około 85° , c) około 89°
23. a) 0° , b) 45° , c) 135°
24. a) $-2, 0$, b) $-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1$, c) $\frac{-3-\sqrt{6}}{3}, \frac{-3+\sqrt{6}}{3}$
25. a) $a \approx 0,091$, b) $a \approx 0,298$, c) $a \approx 1,418$
26. Wskazówka. Znajdź punkty na krzywej, w których styczna jest równoległa do podanej prostej. a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, b) $(-\frac{1}{3}, -3)$ i $(\frac{1}{3}, 3)$, c) $(4, 2)$
27. Wskazówka. $f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) = f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)$
28. a) $53,2^\circ$, b) $71,6^\circ$, c) $m = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ lub $m = \frac{\sqrt{2}}{4}$
29. a) $y = 4x - 3, y = -4x - 3$, b) $y = 0, y = -\frac{256}{27}x - \frac{256}{27}$
32. a) 100,04, b) 10,03, c) $\frac{1000}{10003} \approx 0,09997$
33. a) $f''(4) = 24, f'''(4) = 6$, b) $f''(4) = \frac{1}{32}, f'''(4) = -\frac{3}{128}$, c) $f''(4) = -\frac{1}{32}, f'''(4) = \frac{3}{256}$
35. a) $(g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 5, (f \circ g)(x) = \sqrt{x+5}$, b) $(g \circ f)(x) = \frac{2}{x} - 3, (f \circ g)(x) = \frac{1}{2x-3}$,
c) $(g \circ f)(x) = -3x^2 + 1, (f \circ g)(x) = (-3x+1)^2$,
d) $(g \circ f)(x) = 0,5 \sin x + \pi, (f \circ g)(x) = \sin(0,5x + \pi)$,
e) $(g \circ f)(x) = 2 - 4 \log_3 x, (f \circ g)(x) = \log_3(2 - 4x)$, f) $(g \circ f)(x) = -2 \cdot 5^x - 7, (f \circ g)(x) = 5^{-2x-7}$,
g) $(g \circ f)(x) = \cos^2 x, (f \circ g)(x) = \cos(x^2)$, h) $(g \circ f)(x) = (\frac{1}{2})^{4x}, (f \circ g)(x) = (\frac{1}{2})^{x^4}$
36. a) np. $g(x) = 5x - 8, h(x) = \log_7 x$, b) np. $g(x) = \sin x, h(x) = \sqrt{x}$,
c) np. $g(x) = x^2 + x, h(x) = \frac{6}{x}$, d) np. $g(x) = 3 - 2^x, h(x) = \sqrt[3]{x}$,
e) np. $g(x) = \cos x, h(x) = 7^x - 5$, f) np. $g(x) = 4x^3 - 2x, h(x) = 2 + x^6$

37. a) $f'(x) = 60(6x+5)^9$, b) $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-2}}$, c) $f'(x) = \frac{4}{(-4x-7)^2}$,
 d) $f'(x) = -30(x^2-x)(2x^3-3x^2)^{-6}$, e) $f'(x) = \frac{10x+4}{3\sqrt[3]{(5x^2+4x)^2}}$, f) $f'(x) = \frac{-14(4x^3+15x^2)}{(x^4+5x^3)^8}$
38. a) $(f \circ g)(0) = 4$, $(g \circ f)(0) = 4$, $(f \circ f)(0) = 3$, $(g \circ g)(0) = 2$, b) $(f \circ g)(2) = 3$, $(g \circ f)(3) = 3$,
 $(f \circ f)(4) = 1$, $(g \circ g)(5) = 4$, c) $(f \circ g \circ f)(1) = 3$, $(g \circ f \circ g)(1) = 3$, $(g \circ f \circ f)(1) = 5$,
 $(g \circ g \circ g)(1) = 4$, d) $(f \circ f \circ g)(0) = 3$, $(f \circ g \circ g)(2) = 4$, $(g \circ g \circ f)(3) = 2$, $(f \circ f \circ f)(5) = 1$
39. a) $(g \circ f)(x) = \frac{3}{\sqrt{2x}}$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{6}{x}}$, $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{8x}$, $(g \circ g)(x) = x$, b) $(g \circ f)(x) = 3^{5x^2-2} + 2$,
 $(f \circ g)(x) = 5(3^x + 2)^2 - 2$, $(f \circ f)(x) = 5(5x^2 - 2)^2 - 2$, $(g \circ g)(x) = 3^{3x+2} + 2$,
 c) $(g \circ f)(x) = 7 \cos(3 \log_2(x-5))$, $(f \circ g)(x) = \log_2(7 \cos 3x - 5)$,
 $(f \circ f)(x) = \log_2(\log_2(x-5) - 5)$, $(g \circ g)(x) = 7 \cos(21 \cos 3x)$, d) $(g \circ f)(x) = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3-2}{x^3-6}}$,
 $(f \circ g)(x) = \frac{2}{4x+1}$, $(f \circ f)(x) = \frac{4}{\left(\frac{4}{x^3-6}\right)^3 - 6}$, $(g \circ g)(x) = 2 \cdot \sqrt[3]{2\sqrt[3]{x+1} + 1}$
40. a) $(g \circ f)(x) = \frac{\lg 2x+3}{\lg 2x-1}$, $(f \circ g)(x) = \lg \frac{2x+6}{x-1}$, b) $(g \circ f)(x) = 3 - \log(2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$,
 $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{3 - \log x} - \sqrt[3]{3 - \log x}$,
 c) $(g \circ f)(x) = 3^{x^2+x} - 2x^2 - 2x$, $(f \circ g)(x) = (3^x - 2x)^2 + 3^x - 2x$, d) $(g \circ f)(x) = x$, $(f \circ g)(x) = x$
41. a) $(g \circ f \circ h)(x) = 2^{2\sqrt{x}} + 2$, $(f \circ h \circ g)(x) = 2^{2\sqrt{x+2}}$, $(h \circ f \circ g)(x) = 2\sqrt{2x+2}$,
 b) $(g \circ f \circ h)(x) = \cos\left(\sin \frac{x}{\pi}\right)$, $(f \circ h \circ g)(x) = \sin\left(\frac{\cos x}{\pi}\right)$, $(h \circ f \circ g)(x) = \frac{\sin(\cos x)}{\pi}$,
 c) $(g \circ f \circ h)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $(f \circ h \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $(h \circ f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$,
 d) $(g \circ f \circ h)(x) = x^5$, $(f \circ h \circ g)(x) = 5x$, $(h \circ f \circ g)(x) = x^5$
42. a) np. jeśli $g(x) = x^2 - 2x$ i $h(x) = \sqrt{x}$, to $k(x) = x - 2\sqrt{x}$, b) np. jeśli $g(x) = x^3 + x$
 i $h(x) = \log x$, to $k(x) = \log^3 x + \log x$, c) np. jeśli $g(x) = 3x - x^2$ i $h(x) = \frac{7}{x}$, to $k(x) = \frac{21}{x} - \frac{49}{x^2}$,
 d) np. jeśli $g(x) = 2x + 5^x$ i $h(x) = \sin x$, to $k(x) = 2 \sin x + 5^{\sin x}$
43. a) $f'(x) = \frac{5}{(3x+5)^2} \cdot \left(\frac{2x}{3x+5}\right)^{-\frac{1}{2}}$, b) $f'(x) = \frac{-110}{(5x-2)^2} \cdot \left(\frac{x+4}{5x-2}\right)^4$, c) Wskazówka. Przedstaw
 wzór funkcji w postaci $f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^{\frac{2}{3}}$. $f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} \cdot \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^{-\frac{1}{3}}$,
 d) $f'(x) = -\frac{108}{5(x-4)^2} \left(\sqrt[5]{\frac{3x}{x-4}}\right)^4$
44. a) $f'(x) = 12(4x-7)^2 + 8(3x+1)(3x^2+2x-5)^3$, b) $f'(x) = -60x(5x^2+4)^{-7} - \frac{5}{3}(2x-3)(x^2-3x+7)^{\frac{2}{3}}$,
 c) $f'(x) = -30(2x-9)^{-6} + \frac{1}{3}(8x+5)(4x^2+5x)^{-\frac{2}{3}}$,
 d) $f'(x) = \frac{1}{2}(15x^2-8x)(5x^3-4x^2+3)^{-\frac{1}{2}} + \frac{10}{3}(2x-1)^{-\frac{4}{3}}$
45. a) $f'(x) = 20(4x-3)^4 \cdot (2-5x)^7 - 35(4x-3)^5 \cdot (2-5x)^6$,
 b) $f'(x) = 24(6x+5)^3 \cdot (-2x+3)^{-\frac{3}{4}} + \frac{3}{2}(-2x+3)^{-\frac{7}{4}}(6x+5)^4$,
 c) $f'(x) = \frac{7}{2}(7x+5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x-4)^8 + 24\sqrt{7x+5} \cdot (3x-4)^7$,
 d) $f'(x) = -(-3x-5)^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{2x+9} + \sqrt[3]{-3x-5} \cdot (2x+9)^{-\frac{1}{2}}$
46. a) $y = -40x + 41$, b) $y = 1$, c) $y = \frac{14}{3}x - \frac{10}{3}$, d) $y = -14,5x - 43,5$
47. a) np. $g_1(x) = x + 7$, $h_1(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = (h_1 \circ g_1)(x)$, $g_2(x) = x + 5$, $h_2(x) = \sqrt{x+2}$,
 $f(x) = (h_2 \circ g_2)(x)$, b) np. $g_1(x) = 6x$, $h_1(x) = \frac{5}{x}$, $f(x) = (h_1 \circ g_1)(x)$, $g_2(x) = \frac{1}{x}$, $h_2(x) = \frac{5}{6}x$,
 $f(x) = (h_2 \circ g_2)(x)$, c) np. $g_1(x) = x + 4$, $h_1(x) = 3^x$, $f(x) = (h_1 \circ g_1)(x)$, $g_2(x) = 3^x$, $h_2(x) = 81x$,
 $f(x) = (h_2 \circ g_2)(x)$, d) np. $g_1(x) = 8x^3$, $h_1(x) = \log_2 x$, $f(x) = (h_1 \circ g_1)(x)$, $g_2(x) = \log_2 x$,
 $h_2(x) = 3 + 3x$, $f(x) = (h_2 \circ g_2)(x)$

51. a) $f'(x) = \frac{3(5x-2)(5x^2-4x)^2}{\sqrt{(5x^2-4x)^3+2}}$,

b) $f'(x) = \frac{-7(6x^2+7)}{3(\sqrt[3]{2x^3+7x-3+5})^2 \cdot \sqrt[3]{(2x^3+7x-3)^2}}$

52. a) funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -8; -6 \rangle$, rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -10; -8 \rangle$, $\langle -6; 8 \rangle$, b) funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -8; -3 \rangle$, $\langle 5; 8 \rangle$, rosnąca w każdym z przedziałów $\langle -9; -8 \rangle$, $\langle -3; 4 \rangle$, stała w przedziale $\langle 4; 5 \rangle$

53. a) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $\langle 1; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, b) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -3)$, $\langle 1; +\infty \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -3; 1 \rangle$, c) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $\langle 0; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2; 0 \rangle$, d) funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$, rosnąca w przedziale $\langle 1; +\infty \rangle$, e) funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$, rosnąca w przedziale $\langle -2; +\infty \rangle$, f) funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, a malejąca w przedziale $\langle 0; +\infty \rangle$

55. ① – ③, ② – ④, ③ – ⑤, ④ – ⑥

56. funkcję f przedstawia wykres: a) czarny, b) pomarańczowy, c) czarny

57. a) funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty \rangle$, b) funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$, rosnąca w przedziale $\langle -2; +\infty \rangle$, c) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $\langle -1; 0 \rangle$, rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -2; -1 \rangle$ i $\langle 0; +\infty \rangle$, d) funkcja jest rosnąca w $\mathbb{R}$, e) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$ i $\langle 1; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -2; 1 \rangle$, f) funkcja jest malejąca w $\mathbb{R}$

58. a) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $\langle 1; 4 \rangle$, rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -2; 1 \rangle$, $\langle 4; +\infty \rangle$, b) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $\langle -1; 0 \rangle$, $\langle 3; +\infty \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -2; -1 \rangle$, $\langle 0; 3 \rangle$, c) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $\langle 2; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$, d) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$ i $\langle 2; +\infty \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$

59. a) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 2)$, $\langle 2; +\infty \rangle$, b) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $\langle 1; +\infty \rangle$, c) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $\langle 4; +\infty \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -2; 4 \rangle$, d) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $\langle \frac{8}{3}; +\infty \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; \frac{8}{3} \rangle$, e) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 0)$, malejąca w każdym z przedziałów: $\langle 0; \sqrt{2} \rangle$, $(\sqrt{2}; +\infty)$, f) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $\langle \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 \rangle$, $\langle 1; +\infty \rangle$, rosnąca w każdym z przedziałów: $\langle -\frac{\sqrt{3}}{3}; 0 \rangle$, $\langle 0; \frac{\sqrt{3}}{3} \rangle$

61. funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $\langle 0; 1 \rangle$, malejąca w każdym z przedziałów: $\langle -1; 0 \rangle$, $\langle 1; +\infty \rangle$

62. dla $a > 0$ i $b^2 \leq 3ac$ lub dla $a = 0, b = 0$ i $c > 0$

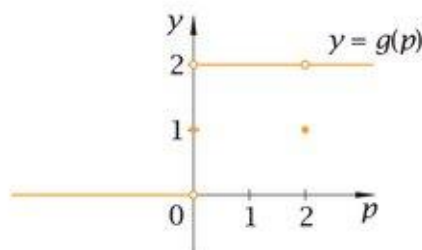
63. Jeśli $a > 0$, to funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $\left(-\infty; -\frac{b}{a} - \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$, $\left(-\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}; +\infty\right)$, rosnąca w przedziale $\left(-\frac{b}{a} - \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}; -\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$, jeśli $a < 0$, to funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\left(-\infty; -\frac{b}{a} - \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$, $\left(-\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}; +\infty\right)$, malejąca w przedziale $\left(-\frac{b}{a} - \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}; -\frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right)$, jeśli $a = 0$ i $b > 0$, to funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, malejąca w przedziale $(0; +\infty)$; jeśli $a = 0$ i $b < 0$, to funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$; jeśli $a = b = 0$, to funkcja jest stała.
64. a) minima w punktach -3 i 2 , maksima w punktach 0 i 4 , b) minima w punktach -3 i 2 , maksimum w punkcie 1 , c) maksimum w punkcie $x = 0$
65. a) maksimum $f(1) = 5$, minimum $f(3) = 1$, b) minimum $f(-2) = 1$, maksimum $f(-1) = 2$, c) brak ekstremów, d) minimum $f(2) = -27$, e) minimum $f(-3) = -189$, $f(2) = -64$, maksimum $f(0) = 0$, f) maksimum $f(0) = 16$
66. a) funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, malejąca w przedziale $(0; +\infty)$; maksimum $f(0) = 1$, b) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, rosnąca w przedziale $(-1; 1)$, minimum $f(-1) = -0,5$; maksimum $f(1) = 0,5$, c) funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$; minimum $f(0) = 0$
67. a) maksima $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, minima $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, b) maksima $x = 2k\pi$, minima $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, c) brak ekstremów, d) brak ekstremów, e) brak ekstremów, f) minimum $x = 0$
68. a) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; \frac{1}{2})$, $\left(1; \frac{3}{2}\right)$, maksimum $f(1) = 0$, minima $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{8}$, b) funkcja jest rosnąca w przedziale $(3; +\infty)$, malejąca w przedziale $(-\infty; 3)$, minimum $f(3) = 1762$, c) funkcja jest rosnąca w przedziale $(0; 2)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$, maksimum $f(2) = 238$, minimum $f(0) = 102$, d) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $(0; 1)$, $(5; +\infty)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-2; 0)$, $(1; 5)$, maksima $f(-2) = 23\frac{4}{15}$, $f(1) = 8\frac{13}{15}$, minima $f(0) = 7$, $f(5) = -159\frac{2}{3}$
69. a) funkcja jest rosnąca w przedziale $(-2; \frac{1}{2})$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $(\frac{1}{2}; +\infty)$, maksimum $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, minimum $f(-2) = -\frac{1}{4}$, b) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$, brak ekstremów, c) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-1; 1)$, $(1; 3)$, maksimum $f(-1) = -2$, minimum $f(3) = 6$, d) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-3; -1)$, $(-1; 1)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -3)$, $(1; +\infty)$, maksimum $f(1) = -1$, minimum $f(-3) = 7$, e) funkcja jest rosnąca w przedziale $(-4; -2)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -4)$, $(-2; +\infty)$, minimum $f(-4) = -\frac{1}{4}$, f) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -9)$, $(-1; 3)$, $(3; +\infty)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-9; -3)$, $(-3; -1)$, maksimum $f(-9) = -\frac{8}{9}$, minimum $f(-1) = 0$

- 70.** funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1 - \sqrt{2})$, $(-1 + \sqrt{2}; +\infty)$, rosnąca w przedziale $(-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2})$, minimum $f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$, maksimum $f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$; funkcja g jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1 - \sqrt{2})$, $(-1 + \sqrt{2}; +\infty)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-1 - \sqrt{2}; -1)$, $(-1; -1 + \sqrt{2})$, maksimum $g(-1 - \sqrt{2}) = -2 - 2\sqrt{2}$, minimum $g(-1 + \sqrt{2}) = -2 + 2\sqrt{2}$
- 71.** a) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$, brak ekstremów, b) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 1)$, $(7; +\infty)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(1; 4)$, $(4; 7)$, maksimum $f(1) = 2$, minimum $f(7) = 14$; c) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$; brak ekstremów
- 72.** a) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -3)$, $(1; +\infty)$, rosnąca w przedziale $(-3; 1)$, minimum $f(-3) = -\frac{1}{8}$, b) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, malejąca w każdym z przedziałów: $(0; 1)$, $(1; +\infty)$, maksimum $f(0) = -1$, c) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, malejąca w przedziale $(-1; 1)$, maksimum $f(-1) = 2$, minimum $f(1) = 0$
- 73.** $a = 2$, $b = 4$, maksimum
- 74.** a) np.: $y = |x - 1|$, b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 5$
- 75.** a) $b^2 \leq 3ac$, b) nie jest to możliwe, c) $b^2 > 3ac$
- 76.** dla $p \in (0; 4)$
- 77.** dla $p = 0$, $p = 2$, $p = -2$; minimum
- 78.** a) minimum $f(-\frac{3}{4}) = -1\frac{1}{4}$, b) maksimum $f(\frac{2}{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, c) minimum $f(2) = 2$
- 79.** a) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-2; -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; 2)$, rosnąca w przedziale $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, minimum $f(-\sqrt{2}) = -2$, maksimum $f(\sqrt{2}) = 2$, b) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-3; -\sqrt{6})$, $(0; \sqrt{6})$, malejąca w każdym z przedziałów: $(-\sqrt{6}; 0)$, $(\sqrt{6}; 3)$, maksimum $f(-\sqrt{6}) = f(\sqrt{6}) = 6\sqrt{3}$, minimum $f(0) = 0$, c) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-5; -\frac{5\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{5\sqrt{3}}{2}; 5)$, rosnąca w przedziale $(-\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2})$, minimum $f(-\frac{5\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1875\sqrt{3}}{16}$, maksimum $f(\frac{5\sqrt{3}}{2}) = \frac{1875\sqrt{3}}{16}$
- 80.** a) Wskazówka. Znajdź ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2 + 100}$. $a_{10} = \frac{1}{20}$, b) $a_{19} = a_{20} = 280$, c) $a_4 = -41$
- 81.** a) 1 rozwiązanie dla $p \in (-\infty; -10) \cup (17; +\infty)$, 2 rozwiązania dla $p \in \{-10, 17\}$, 3 rozwiązania dla $p \in (-10; 17)$, b) brak rozwiązań dla $p \in (-\infty; -37)$, 1 rozwiązanie dla $p = -37$, 2 rozwiązania dla $p \in (-37; -10) \cup (-5; +\infty)$, 3 rozwiązania dla $p \in \{-10, -5\}$, 4 rozwiązania dla $p \in (-10; -5)$
- 82.** a) brak rozwiązań dla $p \in (0; 1)$, 1 rozwiązanie dla $p = 1$, 2 rozwiązania dla $p \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, b) brak rozwiązań dla $p \in (-\frac{1}{4}; 1)$, 1 rozwiązanie dla $p = -\frac{1}{4}$, 2 rozwiązania dla $p \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (1; +\infty)$

83. Zob. rysunek obok. Wskazówka.

Najpierw naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2x^2}{(2-x)^2}$ i odczytaj z niego potrzebne dane.

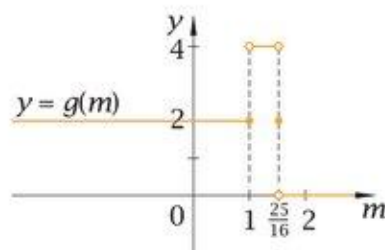
$$g(p) = \begin{cases} 0 & \text{dla } p \in (-\infty; 0) \\ 1 & \text{dla } p \in \{0, 2\} \\ 2 & \text{dla } p \in (0; 2) \cup (2; +\infty) \end{cases}$$



84. Zob. rysunek obok. Wskazówka.

Najpierw naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^4}$ i odczytaj z niego potrzebne informacje.

$$g(m) = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in (\frac{25}{16}; +\infty) \\ 2 & \text{dla } m \in (-\infty; 1) \cup \{\frac{25}{16}\} \\ 4 & \text{dla } m \in (1; \frac{25}{16}) \end{cases}$$



85. maksimum $f\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = -2\sqrt{ab}$, minimum $f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = 2\sqrt{ab}$

86. $a = -3$, $b = 9$, maksimum, drugim ekstremum jest minimum równe $-\frac{1}{3}$ dla $x = 5$

87. a) największa wartość $f(1) = 2$; najmniejsza wartość $f(0) = 1$, b) największa wartość $f(-3) = 3$; najmniejsza wartość $f(2) = 1$, c) największa wartość $f(1) = 2$; najmniejsza wartość $f(3) = 0$, d) największa wartość $f(-3) = 3$; najmniejsza wartość $f(4) = -1$, e) największa wartość $f(-3) = 3$; najmniejsza wartość $f(4) = -1$, f) największa wartość $f(-3) = 3$; najmniejsza wartość $f(3) = 0$

88. a) najmniejsza wartość $f(-1) = -3$; największa wartość $f(0) = 2$, b) najmniejsza wartość $f(1) = 1$; największa wartość $f(2) = 6$, c) najmniejsza wartość $f(1) = 1$; największa wartość $f(0) = 2$

89. a) najmniejsza wartość $f(1) = -1$, największa wartość $f(3) = 19$, b) najmniejsza wartość $f(-2) = -37$, największa wartość $f(2) = 27$, c) najmniejsza wartość $f(0) = 7$, największa wartość $f(-3) = 88$, d) najmniejsza wartość $f(-3) = -21$, największa wartość $f(2) = 24$

90. a) najmniejsza wartość $f(-1) = 0$; największa wartość $f(-2) = 11\frac{3}{4}$, b) najmniejsza wartość $f(1) = -4$; największa wartość $f(0) = 1\frac{3}{4}$, c) najmniejsza wartość $f(3) = -32$; największa wartość $f(-2) = 11\frac{3}{4}$

91. a) najmniejsza wartość $f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -1\frac{1}{2}$; największa wartość $f(0) = -1$, b) najmniejsza wartość $f(-2) = -2\frac{1}{3}$; największa wartość $f(0) = -1$, c) najmniejsza wartość $f(2) = 3$; największa wartość $f\left(1\frac{1}{2}\right) = f(3) = 3\frac{1}{2}$

92. a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, c) $1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

93. a) $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = 4 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, b) $a = 1\frac{1}{3}$, $b = 2\frac{2}{3}$, c) $a = b = 2$

94. a) $y = -2x + 4$, b) $y = -2,5x + 10$, c) $y = -0,25x + 2$

95. a) $\frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2\frac{2}{3}$, b) $10 \times 16\frac{2}{3}$, c) $\frac{2\sqrt{21}}{3} \times 9\frac{1}{3}$

96. szerokość $2\sqrt{6}$ m, głębokość $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ m
97. $10\sqrt[3]{3}$ cm $\times$ $10\sqrt[3]{3}$ cm $\times$ $\frac{20\sqrt[3]{3}}{3}$ cm
98. $a = \frac{20}{4+\pi} \approx 2,8$ cm; $P \approx 7$ cm²
99. a) 1:1, b) tacka byłaby prostokątem o stosunku boków 1:2
100. a) wszystkie krawędzie mają długość 5 cm, b) wszystkie krawędzie mają długość $6\frac{2}{3}$ cm, c) wszystkie krawędzie mają długość $3\frac{1}{3}$ cm
101. a) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$ m³, b) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{27}l^3$ m³
102. a) promień podstawy: $r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ dm, wysokość: $h = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ dm,
b) promień podstawy: $r = \frac{4}{\sqrt[3]{2\pi}}$ dm, wysokość: $h = \frac{8}{\sqrt[3]{2\pi}}$ dm
103. a) promień podstawy: $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ m, wysokość: $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ m,
b) promień podstawy: $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m, wysokość: $h = \sqrt{2}$ m
104. a) 70 zł. Wskazówka. Przychód jest równy $c \cdot L(c)$. b) 320 sztuk. Wskazówka. Dochód jest równy $t \cdot C(t) - K(t)$.
105. a) $3\frac{1}{3}$ cm, $1\frac{2}{3}$ cm,
b) $2\frac{1}{2}$ cm, $3\frac{3}{4}$ cm, $3\frac{3}{4}$ cm
106. a) promień podstawy: $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ m, wysokość: $h = 1\frac{1}{3}$ m,
b) promień podstawy: $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ m, wysokość: $h = 1\frac{1}{3}$ m
107. $\sqrt[9]{0,1}$
108. (4, 2)
109. promień podstawy $\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm $\approx$ 6,8 cm, wysokość $\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm $\approx$ 6,8 cm
110. co 30 dni
111. a) 80 km/h; 8 l/100 km, b) 90 km/h
112. a) 10 m, $9\frac{m}{s}$, $10\frac{m}{s^2}$, b) 7 m, $5\frac{m}{s}$, $6\frac{m}{s^2}$, c) 0 m, $0\frac{m}{s}$, $12\frac{m}{s^2}$, d) 0 m, $4\frac{m}{s}$, $0\frac{m}{s^2}$
113. a) $\langle 0; 6 \rangle$, b) $-35\frac{m}{s}$, c) 2,5 s
114. a) 12 m, $-15\frac{m}{s}$, $18\frac{m}{s^2}$. Częsteczka porusza się w kierunku ujemnym. b) 32 m, $9\frac{m}{s}$, $-6\frac{m}{s^2}$. Przyspieszenie ma przeciwny znak do prędkości, więc częsteczka zwalnia.
c) 30 m, $-15\frac{m}{s}$, $-18\frac{m}{s^2}$. Częsteczka porusza się w kierunku ujemnym z coraz większą prędkością.
115. a) Dwukrotnie: po upływie 2 sekund oraz po upływie 4 sekund od początku obserwacji.
b) $-3\frac{m}{s}$, c) 20 m
116. a) Po upływie 2 sekund od początku obserwacji. b) $3\frac{m}{s}$, c) dwukrotnie: w odległości 17 m oraz 25 m od punktu P.
117. a) $\frac{5}{4}\frac{m}{s}$, b) po upływie 2 s, c) 1,25 m
118. Lokomotywa mijala stację z prędkością $0,1\frac{km}{min}$, przez pierwsze $5\sqrt{2}$ minut (około 7,07 minuty) od momentu minięcia stacji prędkość lokomotywy malała i po upływie $5\sqrt{2}$ minut lokomotywa zatrzymała się i zawróciła z rosnącą prędkością w kierunku stacji; po upływie 9 minut lokomotywa poruszała się z prędkością $0,14\frac{km}{min}$.

119. a) Na początku obserwacji cząsteczka miała prędkość $-12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i malała, aby po upływie 1,5 sekundy osiągnąć wartość minimalną równą $-18,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, następnie rosła, osiągnęła $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po upływie 4 sekund, wciąż rosła i po upływie 6 sekund wynosiła $42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
 b) Na początku obserwacji cząsteczka miała szybkość $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i rosła, aby po upływie 1,5 sekundy osiągnąć wartość (lokalnie) maksymalną równą $18,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, następnie malała, osiągnęła $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ po upływie 4 sekund, po czym ponownie rosła i po upływie 6 sekund wynosiła $42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
120. a) $T'(t) = \frac{80}{(t+1)^2} \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$, $T''(t) = \frac{-160}{(t+1)^3} \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}^2}$, b) $5 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$, c) $-2,5 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}^2}$. Po upływie 3 minut od początku podgrzewania temperatura rośnie (z prędkością 5°C na minutę), ale coraz wolniej (prędkość wzrostu temperatury zmniejsza się w tempie $2,5 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$).
121. a) 4 m^3 , b) $V'(2) = -12 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$, $V''(2) = -6 \frac{\text{m}^3}{\text{h}^2}$. Dwie godziny po rozpoczęciu obserwacji ze zbiornika ubywało wody z prędkością 12 m^3 na godzinę, przy czym ta prędkość wzrastała w tempie $6 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ na godzinę. c) $V'(t) = 0$ gdy $t = 1 \text{ h}$ oraz gdy $t = 4 \text{ h}$. Po jednej godzinie od rozpoczęcia obserwacji wody przestało przybywać, a zaczęło jej ubywać ze zbiornika; po czterech godzinach od rozpoczęcia obserwacji wody przestało ubywać ze zbiornika, a zaczęło jej przybywać. d) $V''(t) = 0$ gdy $t = 2,5 \text{ h}$. Po 2,5 godzinie od rozpoczęcia obserwacji w zbiorniku ubywa wody w maksymalnym tempie $13,5 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. A
2. A
3. B
4. D
5. A
6. B
7. B
8. D
9. maksimum $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 5\frac{1}{2}$, minimum $f(3) = 0$
10. $a = 16\frac{2}{3}$, $b = 3\frac{1}{3}$
11. $y = -1,5x + 6$
12. $P_b = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$
13. $x = -3$ lub $x = 1$

PRZED MATURĄ

1. A
2. C
3. C
4. C

5. $\frac{295}{2601}$
6. 0,96
7. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
8. $b = 2019$
9. $P = \left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}-36}{36}\right)$
11. $\frac{1}{54}$
13. a) $a \in (1; 2)$, c) 1
14. $P(x) = 6x\sqrt{18-3x}$, $x \in (0; 6)$, $P = 24\sqrt{6}$, długości boków trójkąta: 10, 12, 14
15. $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 2x + 4$, $x \in (0; 2)$, $C = \left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$
16. $A = \left(3, \frac{1}{9}\right)$, $B = \left(-3, \frac{1}{9}\right)$, $P = \frac{4}{3}$
17. 25 500 sztuk
18. o godz. 10:30
19. 10 cm, 18 000 cm³
20. 6 m × 6 m × 4 m
21. $V = 256$
22. $P(x) = 4x^2 + \frac{24}{x}$, $x \in (1; 2)$, długości krawędzi: $\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[3]{3}$, $\frac{4\sqrt[3]{3}}{3}$
23. $V(x) = -24x^3 + 88x^2$, $x \in \left(0; \frac{5}{2}\right)$, $V = \frac{42\,592}{243} \approx 175,28$
24. krawędź podstawy: 2, wysokość: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $P = 6\sqrt{3}$
25. promień podstawy: $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $V = \frac{2\sqrt{3}}{9}$
26. promień podstawy: $\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$, wysokość: $\sqrt{\frac{2P}{3\pi}}$, $V = \frac{P}{3}\sqrt{\frac{P}{6\pi}}$
27. promień podstawy: 4, wysokość: $2\sqrt{5}$, $V = \frac{32\sqrt{5}}{3}\pi$
28. wysokość: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, objętość: $\frac{32\sqrt{5}}{375}\pi$
29. 962,5 m, 270,75 m/h

Zestaw maturalny 1. Zakres podstawowy

1. 1.1. A, 1.2. FP
2. C
4. D
5. 5.1. $-\sqrt{5}, -\frac{1}{2}, \sqrt{5}$; 5.2. $W(-2) = 6\sqrt{2} - 3$
6. B
7. C
8. 0,75 m
9. $x \in \langle -4; 0 \rangle$, $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$
10. $x = 1,2$, $y = 0,6$
11. CE
12. 12.1. A; 12.2. $g(x) = \frac{4}{27}x^2 + \frac{4}{3}x + 3$
13. FP
14. C

15. 15.1. PF; 15.2. B

16. $S_5 = 6\frac{7}{8}$

17. A

18. D

19. C2

20. D

21. 21.1. $|DB| = 5\sqrt{3}$ cm, $|AC| = 5\sqrt{7}$ cm; 21.2. B

22. 22.1. C; 22.2. A

23. $2\sqrt{5}$

24. C

25. B

26. $P_c = \frac{a^2(\sqrt{3}+3)}{8}$

27. D

28. D

29. B

Zestaw maturalny 2. Zakres podstawowy

1. A

2. C

3. B

4. A

5. $1 - \sqrt{2}$

6. D

7. D

8. 8.1. B; 8.2. $x = -2$, $x = 2$

9. PF

10. D

11. $x \in \langle -2; 3 \rangle$

12. $\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$

13. 13.1. C; 13.2. FF

14. C

15. $f(x) = \frac{2}{9}(x+1)(x+7)$

16. C

17. B

18. 18.1. D; 18.2. 360,5 km

19. $\frac{9}{32}$

20. 20.1. C; 20.2. B

21. 21.1. C; 21.2. A

23. 23.1. FP; 23.2. B

24. $(x-4)^2 + y^2 = 25$

25. A

26. $V = 16\sqrt{3}$

27. B

28. C

29. A

30. $\frac{7}{15}$

Zestaw maturalny 3. Zakres rozszerzony

1. $x = -2$

2. $p \in \left(1; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$

4. 4.1. $p \in \left(\frac{1}{144}; +\infty\right)$, 4.2. $p \in \left(0; \frac{1}{16}\right)$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 5$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 10$

6. $x \in \left\{\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$

8. $|AD| = 5$

9. $P = 28$

10. $\frac{25}{972}$

11. 5

12. $y \in \langle -2; 15 \rangle$, funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -1; 0 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$

13. promień podstawy: $\frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ cm, wysokość: $5\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ cm

Zestaw maturalny 4. Zakres rozszerzony

1. $m \in (-\infty; -6) \cup (0; 3)$

2. $p \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

3. $x \in (-\infty; -2,5) \cup \langle 1,5; 4 \rangle$

4. $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$, $S = 8\frac{1}{3}$

6. $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

7. $2\sqrt{3}$

8. $C = (2, 11)$

9. $P = 3\sqrt{2} - 1,5\sqrt{6}$

10. $\frac{5}{486}$

11. Wskazówka. Rozważ funkcję $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$. Jeśli ta funkcja ma trzy miejsca zerowe, to ma też jedno maksimum i jedno minimum.

12. prędkość: $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{min}}$, przyspieszenie: $a = -2 \frac{\text{m}}{\text{min}^2}$

13. 13.2. $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$



Podręczniki w wersji uczniowskiej są przeznaczone do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełniają one kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i najnowszej podstawy programowej z 2018 roku. Zostały dopuszczone przez MEiN do użytku szkolnego i wpisane do wykazu podręczników.

Numery dopuszczenia:

964/4/2022 (zakres podstawowy)

963/4/2022 (zakres rozszerzony)

Zestaw dla ucznia składa się z odpowiedniego podręcznika (dla zakresu podstawowego lub rozszerzonego) i zbioru zadań. Uczniom poszukującym dodatkowych ćwiczeń warto polecić zeszyt ćwiczeń lub dostępny online program *Matnau 4*.



zeszyt ćwiczeń



matnau.gwo.pl

