



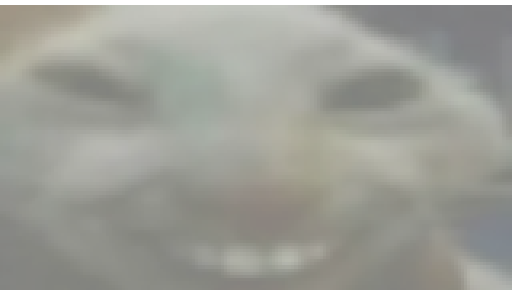
gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



MATEMATYKA Z PLUSEM

podręcznik do liceum i technikum

zakres podstawowy



**MATEMATYKA
Z PLUSEM**

podręcznik do liceum i technikum

zakres podstawowy

Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech

3

MATEMATYKA Z PLUSEM

podręcznik do liceum i technikum

zakres podstawowy



Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Ilustracje: *Bartłomiej Brosz*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Fotografie: Agencja BE&W (okładka, str. 97, 105), Archiwum GWO (str. 49, 76, 122),
Domena publiczna (str. 90), Shutterstock (str. 9, 31, 50, 57, 59, 69, 129)

Skład (T_EX): *Lukasz Sitko, Joanna Szyller*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki (w zakresie podstawowym) na poziomie klasy III liceum i technikum, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr Marii Borowskiej, dr. hab. Gustawa Trelińskiego, dr Gabrieli Olszowskiej.

Numer dopuszczenia: 964/3/2021

ISBN 978-83-8118-132-7

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2021. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Podręcznik został wyprodukowany na papierze posiadającym certyfikaty FSC, PEFC, EU-Ecolabel oraz Blue Angel.

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy. Uwaga. W podręczniku nie należy zapisywać żadnych odpowiedzi, podkreślać ani zaznaczać rozwiązań zadań.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

Spis treści

Wyrażenia wymierne

■ Wyrażenia wymierne	10
■ Równania wymierne	15
■ Przekształcanie wyrażeń algebraicznych	20
■ Hiperbola. Przesuwanie hiperboli	23
■ Powtórzenie	30

Ciągi

■ Przykłady ciągów	32
■ Ciąg arytmetyczny	41
■ Suma wyrazów ciągu arytmetycznego	47
■ Ciąg geometryczny	51
■ Suma wyrazów ciągu geometrycznego	58
■ Procent prosty i procent składany	60
■ Powtórzenie	68

Podobieństwo figur

■ Twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa	70
■ Wielokąty podobne	76
■ Cechy podobieństwa trójkątów	82
■ Cechy podobieństwa trójkątów (cd.)	88
■ Pola figur podobnych	91
■ Powtórzenie	96

Stereometria

■ Wielościany i inne figury przestrzenne	98
■ Figury obrotowe i inne figury przestrzenne	106
■ Proste i płaszczyzny w przestrzeni	109
■ Przekroje graniastosłupów	118
■ Bryły podobne	122
■ Powtórzenie	128

Statystyka

■ Przybliżenia	130
■ Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta	133
■ Średnia ważona	144
■ Odchylenie standardowe	150
■ Powtórzenie	160
TABELA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH	161
ODPOWIEDZI	162

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadania 7–10 ► — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązywać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

◄ **III** — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem **III**

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

Drogie Uczennice!

Drodzy Uczniowie!

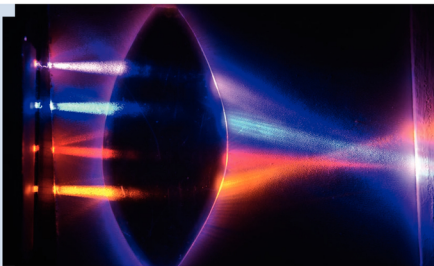
Nazwa *matematyka* pochodzi od greckiego słowa *mathema* — poznanie. W serii *Matematyka z plusem* staramy się traktować matematykę podobnie jak starożytni Grecy — jako poznawanie tego, co da się ogarnąć rozumem. Do uczenia się takiej matematyki potrzeba tylko chęci, nieco wyobraźni oraz wiary we własne możliwości. A jak mawiał poeta Louis Aragon: „Twoja wyobraźnia jest więcej warta, niż sobie wyobrażasz”.

Warto zdobyć się na odrobinę wysiłku, bo — jak powiedział Jonathan Swift, autor *Podróży Guliwera* — „Człowiek nie jest zwierzęciem rozumnym, jest tylko zdolny do rozumowania”.

Autorzy

Wyrażenia wymierne

Za pomocą soczewki wypukłej można skupić wiązkę promieni równoległych w jednym punkcie zwanym ogniskiem. Soczewka ta pozwala też na uzyskanie powiększonych obrazów przedmiotów. Aby opisać zależność między odległościami ogniska, przedmiotu i jego obrazu od soczewki, używa się pewnych wyrażen wymiernych.



- Wyrażenia wymierne ■ Równania wymierne ■ Przekształcanie wyrażen algebraicznych ■ Hiperbola. Przesuwanie hiperboli
- Powtórzenie

WYRAŻENIA WYMIERNE

- I Każde z wyrażeń algebraicznych podanych obok ma postać ułamka, w którego liczniku i mianowniku występuje wielomian.

Przykłady wyrażeń wymiernych:

$$\frac{x^{12} - 5}{x^{12} + 3x^{10} + x^5 + 2} \quad \frac{3x + 2}{x - 5}$$
$$\frac{7y^8 + 2y^7 - 5}{-5y^4 - 9y^3 + 3y} \quad \frac{-3}{2t^2 - 1}$$

Wyrażenie postaci $\frac{W(x)}{V(x)}$, gdzie $W(x)$ i $V(x)$ są wielomianami i $V(x)$ nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **wyrażeniem wymiernym** zmiennej x .

Uwaga. W wyrażeniu wymiernym zmienna może być oczywiście oznaczona dowolną literą. Zauważ też, że każdy wielomian $W(x)$ jest wyrażeniem wymiernym, gdyż można go zapisać w postaci $\frac{W(x)}{1}$.

ĆWICZENIE A Ustal, dla jakich wartości x można określić wartość podanego wyrażenia.

a) $\frac{x+3}{3x(x-2)}$

b) $\frac{3x^5 - 7x^2 + 3}{3x^2 + 2}$

Zbiór tych liczb, dla których można określić wartość wyrażenia $\frac{W(x)}{V(x)}$, nazywamy **dziedzina wyrażenia wymiernego**. Jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których $V(x) \neq 0$.

ĆWICZENIE B Czy dla każdej liczby rzeczywistej wartość wyrażenia $\frac{x}{x^2+1}$ jest taka sama, jak wartość wyrażenia $\frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}$?

Czasami wyrażenie wymierne można uprościć. Należy jednak pamiętać o uwzględnieniu jego dziedziny. Rozważmy na przykład wyrażenie:

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{(x-3)(x+1)}$$

Jego dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od 3 i od -1. Możemy to wyrażenie uprościć:

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{(x-3)(x+1)} = \frac{(x+1)(x+5)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x+5}{x-3}$$

Zatem wyrażenie $\frac{x^2 + 6x + 5}{(x-3)(x+1)}$ jest równe $\frac{x+5}{x-3}$, ale tylko gdy $x \neq 3$ i $x \neq -1$.

PRZYKŁAD 1 Uprość wyrażenie $\frac{2x^3 - 7x^2 + 6x}{x^3(x-2)(x-3)}$.

Wyznaczamy dziedzinę wyrażenia. Jest nią zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że:

$$x^3 \neq 0, \quad x-2 \neq 0 \quad \text{ i } \quad x-3 \neq 0$$

Dziedzina wyrażenia: $x \neq 0$, $x \neq 2$ i $x \neq 3$

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 7x^2 + 6x}{x^3(x-2)(x-3)} &= \frac{x(2x^2 - 7x + 6)}{x^3(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{2(x-1,5)(x-2)}{x^2(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{2(x-1,5)}{x^2(x-3)} \end{aligned}$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Delta = 49 - 48 = 1$$

$$x_1 = \frac{7-1}{4} = 1,5$$

$$x_2 = \frac{7+1}{4} = 2$$

ZADANIE Uprość wyrażenie $\frac{x^4 + 3x^3 - 4x^2}{x(x+2)(x-1)}$.

zadania 1-4 ►

II ĆWICZENIE C Zapisz w postaci jednego ułamka.

a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

b) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$

d) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

Na wyrażeniach wymiernych możemy wykonywać działania w podobny sposób jak na ułamkach.

PRZYKŁAD 2 Wykonaj działanie. Podaj wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{x+1}{x+3} : \frac{2x+6}{2x-1}$

Dziedzina wyrażenia:

$$x \neq -3 \quad \text{ i } \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$$\frac{(x+1) \cdot 2(x+3)}{(x+3)(2x-1)} = \frac{2(x+1)}{2x-1}$$

b) $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x+3}{x^2-1}$

Dziedzina wyrażenia:

$$x-1 \neq 0, \quad x^2-1 \neq 0 \quad \text{ i } \quad \frac{x+3}{x^2-1} \neq 0$$

Zatem: $x \neq 1$, $x \neq -1$ i $x \neq -3$

$$\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x+3} = \frac{(x+1)^2}{x+3}$$

ZADANIE Wykonaj działanie. Wynik przedstaw w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{x-2}{3x^3-x^2} : \frac{3x^2-x}{x^2-2x}$

b) $\frac{3x+1}{x^2} : \frac{9x^2-1}{2x^2-8}$

zadania 5-8 ►

PRZYKŁAD 3 Wykonaj działania. Podaj wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{3x}{x-1} - \frac{2}{x+1}$

$$\frac{3x(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2 + 3x - 2x + 2}{x^2 - 1} = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$$

Dziedzina wyrażenia:

$$x-1 \neq 0 \text{ i } x+1 \neq 0$$

$$\text{Zatem: } x \neq 1 \text{ i } x \neq -1$$

b) $\frac{5}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2x+1}{x^3}$

$$\frac{5 \cdot 2x^2 + x - 2(2x+1)}{2x^3} = \frac{10x^2 + x - 4x - 2}{2x^3} = \frac{10x^2 - 3x - 2}{2x^3}$$

Dziedzina wyrażenia:

$$x \neq 0$$

c) $\frac{2}{x} - \frac{x-1}{x(x+2)}$

$$\frac{2(x+2) - (x-1)}{x(x+2)} = \frac{2x+4-x+1}{x(x+2)} = \frac{x+5}{x(x+2)}$$

Dziedzina wyrażenia:

$$x \neq 0 \text{ i } x \neq -2$$

ZADANIE Wykonaj działanie. Wynik przedstaw w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{3}{x+1} + \frac{x}{x-2}$

b) $\frac{2}{3x} - \frac{3x-1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

c) $\frac{1}{x+3} - \frac{x}{x^2-9}$

zadania 9–14 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Określ dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{3x^3-4}{2x+5}$

c) $\frac{2x-1}{4x^2-1}$

e) $\frac{2x^7-x^5+1}{3x^2+5x+2}$

b) $\frac{x^3+2}{x^2-3x}$

d) $\frac{x^3+2}{x^2-2x-15}$

f) $\frac{2x^3-1}{x^3-100x}$

2. Podaj przykład wyrażenia wymiernego, którego dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ i które dla $x = 1$ przyjmuje wartość -10 .

3. Określ dziedzinę podanego wyrażenia, a następnie przedstaw to wyrażenie w prostszej postaci.

a) $\frac{6x^4+5x^2}{-7x^3+2x^2}$

c) $\frac{3x^3-x}{6x^4-2x^2}$

e) $\frac{20x-5}{4x^3-x^2}$

b) $\frac{15x^7-20x^5}{10x^5+30x^4}$

d) $\frac{2x^6-5x^5}{15x^4-6x^3}$

f) $\frac{6x^2-18x}{9-3x}$

4. Określ dziedzinę podanego wyrażenia, a następnie przedstaw to wyrażenie w prostszej postaci.

a) $\frac{x^2 - 25}{(x + 5)^2}$

c) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

e) $\frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 6x - 7}$

b) $\frac{20x - 50}{16x^2 - 100}$

d) $\frac{300x^2 - 3}{1000x^3 - 1}$

f) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 6x + 5}$

5. Wykonaj działania i zapisz wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{4x - 1}{2x + 8} \cdot 4$

c) $5 : \frac{5x^2 - 4}{5x}$

e) $\frac{3x + 1}{9x^3 + 6} : \frac{1}{3}$

b) $\frac{6x^2 - 3}{4x^2 - 2} : 6$

d) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2x - 5}{10x^2}$

f) $\frac{16x^2 + 4x}{x + 4} : 0,5$

6. Wykonaj działania i zapisz wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{x}{x + 1} \cdot \frac{2x}{x - 1}$

d) $\frac{-8x^2 - 4x}{x^3} \cdot \frac{x + 1}{10x}$

g) $\frac{x}{x - 1} \cdot \frac{3}{x} \cdot \frac{-5}{2x}$

b) $\frac{x^3}{x + 7} : \frac{7}{x}$

e) $\frac{x + 1}{x^2 + 2x + 1} : \frac{1}{x^2}$

h) $\frac{3}{x} \cdot \frac{-2}{x^3} \cdot \frac{7x - 5}{x + 2}$

c) $\frac{5}{x} \cdot \frac{x}{5x + 1}$

f) $\frac{-2x^4 + x^3 - 2x^2}{10x^7 - 7x^5} \cdot \frac{-4}{3x^2}$

i) $\frac{9}{x + 2} \cdot \frac{10}{3x} \cdot \frac{-3x + 6}{x + 1}$

7. Wykonaj działanie.

a) $\frac{x - 3}{3x^2 + 2} \cdot 3x^3$

c) $(2x - 1) \cdot \frac{2x + 1}{x + 1}$

e) $\frac{x + 2}{x + 6} : [(x + 2)(x + 6)]$

b) $\frac{5x + 10}{2x^2 + 4} : (-10x)$

d) $\frac{x - 3}{2x - 1} : (2x - 6)$

f) $(2x + 1)(x - 3) : \frac{x - 3}{2x + 1}$

8. Wykonaj działanie i przedstaw wynik w jak najprostszej postaci.

a) $\frac{4x^2 + 3x}{x - 2} \cdot \frac{1}{x}$

e) $\frac{(x - 3)^2(x + 2)}{4x} \cdot \frac{2}{x - 3}$

i) $\frac{x^3 - 8}{2x^2 + 2x} \cdot \frac{x - 2}{x}$

b) $\frac{4x^2 - 9}{2x} \cdot \frac{4}{2x - 3}$

f) $\frac{12}{3x^2 - 4x} \cdot \frac{x}{18x + 6}$

j) $\frac{3x^2}{x + 4} \cdot \frac{x^2 - 16}{x^2 + x}$

c) $\frac{x}{x + 1} : \frac{1}{x(x^2 - 1)}$

g) $\frac{5}{x^2 - 9} \cdot \frac{x - 3}{x + 3}$

k) $\frac{x^3 - 8}{6 - 2x} \cdot \frac{x^2 - 2x}{x - 3}$

d) $\frac{3x}{4x - 2} \cdot \frac{2x - 1}{9x^2}$

h) $\frac{x^3 + 5x^2}{10x - 5} \cdot \frac{15x - 10}{2x^4}$

l) $\frac{5x^3 - 15x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x - 2)^2}{4x - 12}$

9. Zapisz wynik działania w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{2x}{x+5} + 2$

c) $\frac{4x^3}{x^2-4} + x$

e) $3x - \frac{5x-1}{x-2}$

b) $\frac{2-3x}{2x^3-x} - 3$

d) $\frac{6x^3-4x}{3x^2-2x+5} - 2x$

f) $x + \frac{x^2-1}{3x+2}$

10. Zapisz wynik działania w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$

c) $\frac{3}{x} + \frac{5}{2x-3}$

e) $\frac{2x}{x+1} + \frac{x-1}{3-x}$

b) $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2}$

d) $\frac{4}{x-2} - \frac{5}{x+2}$

f) $\frac{3x+5}{2x+2} - \frac{4}{x-2}$

11. Wykonaj działanie i przedstaw wynik w jak najprostszej postaci.

a) $\frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}$

d) $\frac{1}{x-2} + \frac{x}{(x-2)^2}$

g) $\frac{3x^2-1}{x^2+2x} + \frac{2x}{x+2}$

b) $\frac{3}{2x^3} - \frac{1}{5x}$

e) $\frac{4x^2+1}{(x+1)(x-3)} + \frac{1-5x}{x-3}$

h) $\frac{-3x}{5x-1} - \frac{x^4-6x^3}{10x^3-2x^2}$

c) $\frac{2}{x^3} - \frac{2x+1}{x^2}$

f) $\frac{x+2}{2x-5} - \frac{3x^3-2x^2}{(2x-5)(3+x)}$

i) $\frac{10x^2-5x}{4x^2-9} - \frac{5x}{2x+3}$

12. Przedstaw wynik działania w postaci jak najprostszego ilorazu wielomianów.

a) $\frac{5}{x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{3}{5x^3}$

c) $\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

e) $\frac{1}{x} - \frac{x-1}{2x^2} + \frac{1-x^2}{4x^3} - \frac{x^3+1}{x^4}$

b) $\frac{7}{5x} - \frac{4}{3x^2} + \frac{2}{x^4}$

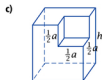
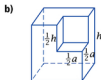
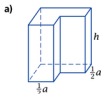
d) $\frac{5}{2x} - \frac{2x+1}{6x^2} - \frac{x-3}{x^3}$

f) $\frac{x^2-3}{x^4} + \frac{x+1}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$

13. a) Od odwrotności liczby naturalnej n większej od 0 odejmujemy odwrotność liczby o 1 większej od n . Zapisz wynik w jak najprostszej postaci.

b) Zapisz w jak najprostszej postaci sumę odwrotności liczby naturalnej n większej od 1, odwrotności liczby o 1 mniejszej od n oraz odwrotności liczby o 1 większej od n .

14. Z prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat o boku a , wycięto inny prostopadłościan w sposób pokazany na rysunku. Objętość tak powstałej bryły wynosi 20. Przedstaw sumę długości wszystkich krawędzi tej bryły w postaci wyrażenia wymiernego zmiennej a .



MINISPRAWDZIAN

51. Dziedziną wyrażenia wymiernego $\frac{(x-5)(x+2)}{x^3-4x}$ jest zbiór:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2, 5\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

52. Wynik działania $\frac{2x^2}{x^2-9} - \frac{x}{x+3}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, można przedstawić w postaci ilorazu wielomianów:

- A. $\frac{x}{x-3}$ B. $\frac{x}{x+3}$ C. $\frac{2x}{x-3}$ D. $\frac{x^2+3}{x^2-9}$

53. Wyrażenie $\frac{3}{(2x-1)^2} \cdot \frac{4x-2}{x+3}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}\}$, jest równe:

- A. $\frac{6}{2x^2+5x-3}$ B. $\frac{3}{(2x-1)(x+3)}$ C. $\frac{3}{x+3}$ D. $\frac{12x-6}{2x^2+5x-3}$

RÓWNANIA WYMIERNE

- 1 Wiadomo, że równość $\frac{a}{b} = 0$, gdzie $b \neq 0$, jest spełniona wtedy, gdy $a = 0$. Tę obserwację można wykorzystać przy rozwiązywaniu równań wymiernych, których przykłady podano w ramce obok.

Przykłady równań wymiernych:

$$\begin{aligned} \frac{-x^3 + x^2 + 1}{2x - 3} &= 3 \\ \frac{2x + 3}{3x + 8} &= 0 & \frac{x + 1}{x + 2} &= \frac{1}{x} \\ \frac{(x - 5)^2}{x^2 + x - 1} &= \frac{x}{x - 3} \end{aligned}$$

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie $\frac{2x^2 - x - 1}{3x + 2} = 0$.

Założenie: $3x + 2 \neq 0$, czyli $x \neq -\frac{2}{3}$

Zatem dziedziną równania to zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$.

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$$

Równanie typu $\frac{a}{b} = 0$ może być spełnione przez liczby, dla których mianownik jest różny od zera.

Równanie typu $\frac{a}{b} = 0$ spełniają tylko te liczby, dla których licznik jest równy zeru.

Obie liczby spełniają założenie.

ZADANIE Rozwiąż równanie $\frac{2x^2 - 4x - 3}{3x + 1} = 0$.

zadania 1-2 ▶

- II Każde równanie wymierne można przekształcić do postaci $\frac{W(x)}{V(x)} = 0$ i rozwiązać w sposób opisany w przykładzie 1. Można też znaleźć rozwiązanie, używając innej metody. W kolejnych przykładach pokazujemy różne sposoby wyznaczania rozwiązań tego samego równania.

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-2}{2x+1} = -12$

Założenie: $2x+1 \neq 0$, czyli $x \neq -\frac{1}{2}$

Zatem dziedzina równania to zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

Sposób I

$$\frac{x-2}{2x+1} = -12$$

Przekształcamy równanie
do postaci $\frac{W(x)}{V(x)} = 0$.

$$\frac{x-2}{2x+1} + 12 = 0$$

$$\frac{x-2+12(2x+1)}{2x+1} = 0$$

$$x-2+24x+12=0$$

$$25x+10=0$$

W obu wypadkach otrzymaliśmy to samo równanie.

$$x = -\frac{10}{25}$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

Otrzymana liczba spełnia założenie.

Sposób II

$$\frac{x-2}{2x+1} = -12 \quad | \cdot (2x+1)$$

Obie strony równania możemy
pomnożyć przez $2x+1$,
bo założyliśmy, że $2x+1 \neq 0$.

$$x-2 = -12(2x+1)$$

$$x-2 = -24x-12$$

$$25x+10=0$$

b) $\frac{3x}{x-1} = \frac{7-x}{x^2-1}$

Założenia: $x-1 \neq 0$ i $x^2-1 \neq 0$, czyli $x \neq 1$ i $x \neq -1$

Zatem dziedzina równania to zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Sposób I

$$\frac{3x}{x-1} = \frac{7-x}{x^2-1}$$

$$\frac{3x}{x-1} - \frac{7-x}{(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\frac{3x(x+1)-(7-x)}{(x-1)(x+1)} = 0$$

$$3x^2+3x-7+x=0$$

$$3x^2+4x-7=0$$

W obu wypadkach otrzymaliśmy to samo równanie kwadratowe,
które należy rozwiązać z uwzględnieniem założeń.

Sposób II

$$\frac{3x}{x-1} = \frac{7-x}{x^2-1} \quad | \cdot (x^2-1)$$

$$3x(x+1) = 7-x$$

$$3x^2+3x = 7-x$$

$$3x^2+4x-7=0$$

$$3x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 100$$

$$x_1 = \frac{-4 - 10}{6} = -\frac{7}{3}$$

$$x_2 = \frac{-4 + 10}{6} = 1$$

$$x = -\frac{7}{3}$$

Liczba $-\frac{7}{3}$ spełnia założenia, a liczba 1 nie spełnia założeń. Zatem rozwiązaniem równania jest liczba $-\frac{7}{3}$.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-2}{x^2-2} = 3$

b) $\frac{x+3}{x+5} = \frac{2x+1}{x^2-25}$

zadania 3-15 ►

ZESTAW ZADAŃ

I 1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x+7}{2x-1} = 0$

c) $\frac{4x^2-12x}{x-3} = 0$

e) $\frac{x^2+3x-10}{2x-1} = 0$

b) $\frac{4x-3}{7+2x} = 0$

d) $\frac{2x^2+x-6}{2x^2+4} = 0$

f) $\frac{6x^2+12x}{x^2-4} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{(x+5)(3x-1)}{(x+4)(x-5)} = 0$

c) $\frac{4x(x+\frac{1}{2})}{(2x+1)(x+3)} = 0$

e) $\frac{(x^2+7)(x-5)^3}{x^3(5x+1)(x+7)} = 0$

b) $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$

d) $\frac{x^2(x+1)(x^2-4)}{x(3x+7)(x-4)} = 0$

f) $\frac{(2x-6)(5x+1)x^3}{x^5(x+\frac{1}{2})(x-3)} = 0$

II 3. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{7x}{x-3} = 5$

c) $\frac{9+x}{2x+5} + 6 = 0$

e) $\frac{3}{4} = \frac{4x-11}{6x+2}$

b) $\frac{6x+1}{5x-4} = -3$

d) $3 - \frac{3x-7}{4-5x} = 0$

f) $\frac{6x-5}{2-7x} + \frac{4}{5} = 0$

4. Przyjrzyj się równaniu i spróbuj je rozwiązać bez przekształcania równania.

a) $\frac{2x}{x-1} = \frac{12}{x-1}$

c) $\frac{1}{1-x} = \frac{-x}{x-1}$

e) $\frac{7x-1}{1-7x} = \frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{x-2} = \frac{3}{x-2}$

d) $\frac{3x+1}{1+3x} = \frac{x}{5}$

f) $\frac{x-3}{x-1} = \frac{3-x}{1-x}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-1}{x+1} = x$

d) $3 - \frac{3}{x+2} = 2x$

g) $\frac{3x-4}{6x+1} = \frac{2x+7}{4x-1}$

b) $x + \frac{1}{x} = 2$

e) $x - 5 = \frac{3x^2}{3x+2}$

h) $\frac{6x-5}{2-3x} - \frac{10x}{6-5x} = 0$

c) $2 - 5x = \frac{8}{x-4}$

f) $2x+1 - \frac{3x}{5x-1} = 0$

i) $0 = \frac{7}{4x+1} + \frac{2x+3}{5-8x}$

6. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$

c) $\frac{x-1}{2} = \frac{2}{x-1}$

e) $\frac{8x-2}{1-x^2} + \frac{2x+1}{x-1} = 0$

b) $\frac{x+1}{x^2} = \frac{x+1}{x^3}$

d) $\frac{2}{x+2} - \frac{4x}{x^2-4} = 0$

f) $\frac{6x+1}{9x^2-1} = \frac{1}{6x+2}$

7. Znajdź miejsca zerowe funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+5}$

c) $f(x) = \frac{(2x+5)(x-3)}{x^2-9}$

e) $f(x) = \frac{x-5}{x+3} - \frac{x+2}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{4x^2+6x}{3x-4}$

d) $f(x) = \frac{-3x(x^2-4)}{x^2+2x}$

f) $f(x) = \frac{2x}{3x+4} + \frac{2x-1}{2x-4}$

8. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{x} - \frac{4}{x+1} = \frac{3}{x+2}$

c) $\frac{2}{x+4} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{x} = \frac{5}{x+1} + \frac{6}{x-1}$

d) $\frac{3}{x} - \frac{2}{1-x} = \frac{5}{x+2}$

9. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x+2} + \frac{7}{x^2-4}$

c) $\frac{1}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2-4} = \frac{5}{x^2-2x}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{5}{x+3} = \frac{3}{x^2+3x}$

d) $\frac{5}{3x^2+x} + \frac{3}{3x^2-x} = \frac{2}{9x^2-1}$

10. Rozwiąż równanie.

a) $(6-3x) : \frac{x+2}{x} = 1$

d) $\frac{x-5}{x} : \frac{2x}{x+1} = \frac{x+1}{x}$

b) $\frac{7x-1}{5-2x} : (3x) = \frac{1}{2}$

e) $\frac{3x+2}{2x^4-x^3} : \frac{6x+4}{4x^3-x} = \frac{6x+3}{x^3}$

c) $\frac{-2}{x+2} : \frac{x+1}{x^2-4} = -3$

f) $\frac{-x^2+x+6}{5-x} : \frac{9-x^2}{25-10x+x^2} = \frac{x+2}{6+2x}$

11. a) Wyznacz wartość a , dla której wykres funkcji określonej wzorem $y = \frac{a}{x-1} + 2$ przechodzi przez początek układu współrzędnych.

b) Znajdź wartość a , dla której wykres funkcji określonej wzorem $y = \frac{3}{x+a} - 5$ przecina oś x w punkcie o współrzędnych $(1, 0)$.

12. Prostokąt $ABCD$ (zob. rysunek) jest zbudowany z kwadratu i takiego prostokąta, że stosunek długości boków w prostokącie $ABCD$ jest taki sam jak stosunek odpowiednich boków w prostokącie $EBCF$, czyli $\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|EB|}$. Oblicz, jaką długość ma krótszy bok prostokąta $ABCD$, jeżeli jego dłuższy bok ma długość 5.



- 13. a)** Suma pewnej liczby a i jej odwrotności jest równa $2\frac{4}{63}$. Znajdź liczbę a .
b) Różnica pewnych dwóch liczb wynosi 1, a suma odwrotności tych liczb jest równa 2. Znajdź te liczby.

14. Wielkość dawki leku dla dziecka lub nastolatka ustalano do niedawna jako procent p dawki dla dorosłego. Pierwszymi próbami ustalenia wartości p były poniższe wzory, gdzie x oznacza wiek młodego pacjenta (w latach). Obecnie dawkę dla dziecka określa się na podstawie wielu czynników (wieku, masy ciała, płci i innych).

Wzór Younga:

$$p = \frac{100x}{x+12}$$

Wzór Augsbergera:

$$p = 4x + 20$$

Wzór Basteda:

$$p = \frac{10(x+3)}{3}$$

- a)** Dla jakiego wieku pacjenta wzory Younga i Basteda podają taką samą wartość p ?
b) Uzasadnij, że niezależnie od wieku pacjenta wzory Younga i Augsbergera podają różne wartości p .

15. Prędkość v dźwięku w powietrzu zależy od temperatury powietrza. Przybliżoną wartość tej prędkości (w m/s) można obliczyć ze wzoru $v = 331 + 0,6T$, gdzie T oznacza temperaturę powietrza wyrażoną w stopniach Celsjusza. Zatem jeśli w czasie t sekund dźwięk pokonuje odległość d metrów, to:

$$t = \frac{d}{331 + 0,6T}$$

W czasie burzy piorun uderzył w odległości 7 km od obserwatora, a grzmot dotarł do niego po upływie 20 sekund. Oblicz, jaka była wtedy temperatura powietrza.

MINISPRAWDZIAN

S1. Równanie $\frac{4x-3}{x-5} - 1 = 0$ ma to samo rozwiązanie jak równanie:

A. $\frac{15x+10}{x+3} = 0$

B. $\frac{2x+3}{x-5} = 0$

C. $\frac{3x+2}{6x+4} = 0$

D. $\frac{3x-2}{x+5} = 0$

S2. Suma rozwiązań równania $\frac{x}{2x-1} = \frac{3x+2}{3x}$ jest równa:

A. $-\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $2\sqrt{17}$

D. $-\frac{\sqrt{17}}{3}$

S3. Ile miejsc zerowych ma funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{x^2(x-3)(x+3)}{2x^2-6x}$?

A. trzy

B. jedno

C. zero

D. dwa

PRZEKSZTAŁCANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

- I Zwróć uwagę, że przy przekształcaniu wzorów wykonujemy często działania podobne jak przy rozwiązywaniu równań wymiernych.

PRZYKŁAD 1 Niech R oznacza opór całkowity układu oporników przedstawionego na rysunku. Wówczas:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}$$

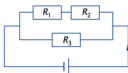
Wyznacz R_1 z tego wzoru.

$$\frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{R_3 - R}{RR_3}$$

$$R_1 + R_2 = \frac{RR_3}{R_3 - R}$$

$$R_1 = \frac{RR_3}{R_3 - R} - R_2$$



.....
Litery występujące we wzorze oznaczają opory, które są liczbami dodatnimi, więc wszystkie niezbędne założenia: $R \neq 0$, $R_1 + R_2 \neq 0$, $R_3 \neq 0$ są spełnione.

.....
Ponieważ opór całkowity R jest różny od R_3 , więc $R_3 - R \neq 0$. Zatem możemy skorzystać z własności proporcji.

ZADANIE Ze wzoru $\frac{1}{A} = \frac{1}{B-C} - \frac{1}{D}$ wyznacz B .

zadania 1-3 ►

- II Umiejętność przekształcania wyrażeń algebraicznych przydaje się też czasem przy dowodzeniu różnych własności liczb.

PRZYKŁAD 2 Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej spełniona jest nierówność.

$$\frac{a^2}{4+a^4} \leq \frac{1}{4}$$

Dziedziną nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych.

$$\frac{a^2}{4+a^4} \leq \frac{1}{4}$$

$$| \cdot 4(4+a^4) |$$

.....
Zapisujemy kolejne nierówności równoważne danej. Suma $4+a^4$ jest dodatnia dla każdej liczby rzeczywistej a .

$$4a^2 \leq 4+a^4$$

$$a^4 - 4a^2 + 4 \geq 0$$

$$(a^2 - 2)^2 \geq 0$$

.....
Kwadrat dowolnej liczby jest liczbą nieujemną.

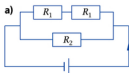
Zatem nierówność spełniają wszystkie liczby rzeczywiste.

ZADANIE Wykaż, że każda liczba rzeczywista spełnia nierówność $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$.

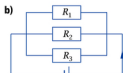
zadania 4-9 ►

ZESTAW ZADAŃ

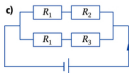
- ◀ I 1. Opór R układu oporników przedstawionego na rysunku można obliczyć, korzystając z podanego wzoru. Wyznacz R_2 .



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{R_2}$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3}$$

2. Przekształć wzór tak, aby wyznaczyć wskazaną wielkość.

a) $\frac{F_1}{d} + \frac{F_2}{f} = 1, \quad f$

d) $p_1 - p_2 = c \left(\frac{T_1}{v_1} - \frac{T_2}{v_2} \right), \quad v_2$

b) $v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad m_1$

e) $C = \frac{p}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}, \quad r_1$

c) $v_1 = v \cdot \frac{1 + \frac{w}{c}}{1 + \frac{u}{c}}, \quad w$

f) $\frac{1}{F} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad n_2$

3. W ramce obok podano definicje różnych średnich dwóch liczb — harmonicznej, geometrycznej i arytmetycznej.

a) Wykaż, że $H = \frac{G^2}{A}$.

b) Wykaż, że $\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

- c) Wykaż, że jeśli pojazd pokonuje połowę drogi z prędkością v_1 , a drugą połowę jedzie z prędkością v_2 , to średnia prędkość na całym dystansie jest średnią harmoniczną prędkości v_1 i v_2 .

Dla liczb dodatnich a i b możemy obliczać następujące średnie:

H — średnia harmoniczna liczb a i b

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

G — średnia geometryczna liczb a i b

$$G = \sqrt{ab}$$

A — średnia arytmetyczna liczb a i b

$$A = \frac{a+b}{2}$$

- d) Wykaż, że iloczyn średniej harmonicznej i średniej arytmetycznej dwóch liczb jest równy iloczynowi tych liczb.

- ◀ II 4. Uprość wyrażenia.

a) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ i $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

b) $(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2})$ i $\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} + \frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

5. a) Zapisz $(\sqrt{x}-1)^2$ w postaci sumy, a następnie wykaż, że gdy $x \geq 1$, to zachodzi równość:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x+1}} = 2$$

b) Zapisz $(2+\sqrt{x-4})^2$ w postaci sumy, a następnie wykaż, że gdy $x \geq 8$, to zachodzi równość:

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 4$$

6. Niech a , b i c będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $0 < a < b < c$.

a) Wykaż, że średnia arytmetyczna liczb a , b i c jest większa od średniej arytmetycznej liczb a i b .

b) Wykaż, że $\frac{c}{2} - \frac{a}{3} > \frac{b}{6}$.

c) Wykaż, że $\frac{b}{2} > \frac{3a-c}{4}$.

7. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a i b spełniona jest podana nierówność.

a) $\frac{a^2+b^2}{2ab} \geq 1$

b) $\frac{ab}{(a+b)^2} \leq \frac{1}{4}$

c) $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq -4$

8. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x , y zachodzi nierówność:

$$\frac{x(x+1)}{y} + \frac{y(y+1)}{x} > 2$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x , y , takich że $x < y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{x+m}{y+m} + \frac{y}{x} > 2$$

MINISPRAWDZIAN

51. Wielkość a wyznaczoną ze wzoru $\frac{1}{a+b} = \frac{m^4}{1+m^2}$, gdzie $a+b \neq 0$, można zapisać w postaci:

A. $a = \frac{1+m^2}{m^4} - b$

C. $a = \frac{m^4}{1+m^2} - b$

B. $a = \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^2} + b$

D. $a = \frac{m^4}{1+m^2} \cdot b$

52. Wartość wyrażenia $\frac{2a^2}{a+2} + \frac{4a^2-8a}{a^2-4}$ dla dowolnej liczby całkowitej a , gdzie $a \neq 2$ i $a \neq -2$, jest:

A. ułamkiem właściwym

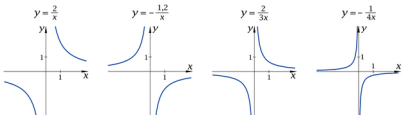
C. liczbą dodatnią

B. liczbą parzystą

D. mniejsza od 4

HIPERBOLA. PRZESUWANIE HIPERBOLI

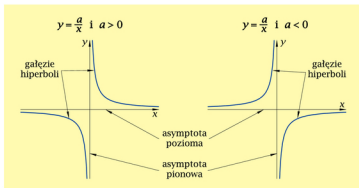
- 1 Poniżej przedstawiono fragmenty wykresów różnych funkcji określonych wzorem postaci $f(x) = \frac{a}{x}$. Przyjrzyj się wzorom i wykresom tych funkcji.



ĆWICZENIE A Zaznacz w układzie współrzędnych kilka punktów należących do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = -\frac{2}{x}$ i naszkicuj jej wykres.

Krzywa, która jest wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, to **hiperbola**. Składa się ona z dwóch rozłącznych części — gałęzi hiperboli. Środkiem symetrii tej krzywej jest początek układu współrzędnych.

Oś y jest jej asymptotą pionową, a oś x jest asymptotą poziomą.

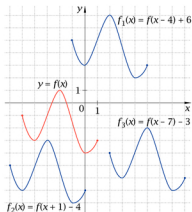


Dziedziną funkcji o wzorze postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, jest zbiór liczb rzeczywistych różnych od zera, czyli $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Jeśli $a > 0$, to funkcja ta jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, a także jest malejąca w przedziale $(0; +\infty)$.

Jeśli $a < 0$, to funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, a także jest rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$.

Uwaga. Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$, nie jest malejąca w całej swej dziedzinie, ponieważ można wskazać takie liczby x_1 oraz x_2 należące do dziedziny funkcji, dla których warunek $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ nie jest spełniony – mogą to być na przykład liczby $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Podobnie funkcja $f(x) = \frac{x}{a}$, gdzie $a < 0$, nie jest rosnąca w całej swej dziedzinie.



Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$ oraz wykresy innych funkcji, które otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f .

Ogólna reguła dotycząca przesuwania wykresów funkcji jest następująca:

Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o p jednostek w prawo i o q jednostek w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - p) + q$.

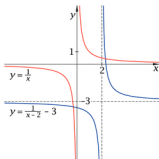
Jeśli wykres funkcji:

$$y = \frac{1}{x}$$

przesuniemy o 2 jednostki w prawo i o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji:

$$y = \frac{1}{x-2} - 3$$

Podobnie przesuną się też asymptoty i przetną się w punkcie $(2, -3)$. Współrzędne punktów leżących na asymptocie pionowej (równoległej do osi y) spełniają warunek $x = 2$, a współrzędne punktów leżących na asymptocie poziomej spełniają warunek $y = -3$.



Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, a zbiorem wartości jest $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

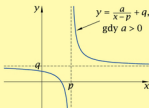
ĆWICZENIE B Naskicuj wykres funkcji $y = \frac{-2}{x}$, a następnie przesuń ten wykres o 3 jednostki w lewo i o 4 jednostki w dół. Zapisz wzór otrzymanej funkcji i ustal równania prostych będących asymptotami jej wykresu.

Wykresem funkcji:

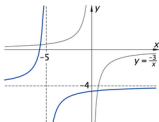
$$y = \frac{a}{x-p} + q, \text{ gdzie } a \neq 0,$$

jest hiperbola, której asymptoty są opisane równaniami $x = p$ oraz $y = q$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{p\}$, a zbiór jej wartości to $\mathbb{R} \setminus \{q\}$.



PRZYKŁAD Określ dziedzinę funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{-3}{x+5} - 4$, naszkicuj jej wykres, określ przedziały monotoniczności tej funkcji i znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.



Najpierw szkicujemy wykres funkcji $y = -\frac{3}{x}$, potem asymptoty szukanego wykresu, czyli proste o równaniach $y = -4$ i $x = -5$, a następnie szkicujemy wykres funkcji f .

Dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$

Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -5)$ i w przedziale $(-5; +\infty)$.

Jeśli $x = 0$, to $y = \frac{-3}{0+5} - 4 = -4\frac{3}{5}$.

Zatem punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią y to $(0, -4\frac{3}{5})$.

Jeśli $y = 0$, to $\frac{-3}{x+5} - 4 = 0$.

Stąd:

$$\frac{-3}{x+5} = 4 \quad | \cdot (x+5)$$

$$-3 = 4x + 20$$

$$x = -\frac{23}{4} = -5\frac{3}{4}$$

Zatem punkt przecięcia wykresu funkcji f z osią x to $(-5\frac{3}{4}, 0)$.

Obie strony równania możemy pomnożyć przez $x+5$, bo $x \neq -5$.

ZADANIE Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{2}{x-3} + 5$, zbadaj jej monotoniczność i znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.

zadania 1–17 ►

ZESTAW ZADAŃ

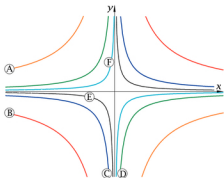
1. Na rysunku obok przedstawione są hiperbole o równaniach:

① $y = \frac{1}{x}$ ④ $y = -\frac{1}{x}$

② $y = \frac{5}{x}$ ⑤ $y = -\frac{5}{x}$

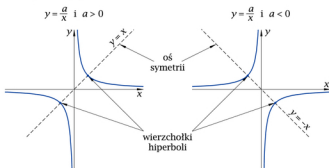
③ $y = \frac{0,3}{x}$ ⑥ $y = -\frac{0,3}{x}$

Dopasuj wzory do wykresów.



Warto wiedzieć

Każda hiperbola o równaniu $y = \frac{a}{x}$ ma dwie osie symetrii. Wierzchołkami hiperboli nazywamy punkty hiperboli, które leżą na jednej z tych osi, czyli leżą na przecięciu hiperboli o równaniu $y = \frac{a}{x}$ z prostą o równaniu $y = x$, gdy $a > 0$, lub z prostą o równaniu $y = -x$, gdy $a < 0$.



2. Przeczytaj informacje w ramce. Znajdź współrzędne wierzchołków podanej hiperboli, a następnie ją naskicuj.

a) $y = \frac{4}{x}$

b) $y = -\frac{0,25}{x}$

c) $y = \frac{9}{4x}$

d) $y = -\frac{2}{x}$

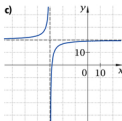
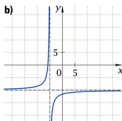
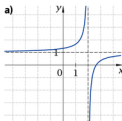
3. Wykres podanej funkcji można otrzymać w wyniku przesunięcia pewnej hiperboli, której asymptotami są osie układu współrzędnych. Zapisz wzór funkcji, której wykresem jest ta hiperbola.

a) $f(x) = \frac{3}{7(x-2)} - 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{2(x+7)} + \sqrt{2}$

c) $f(x) = \frac{5}{2x-6} - 8$

4. Hiperbole, której fragment pokazano na rysunku, otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = -\frac{2}{3x}$. Zapisz wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku.



5. Zapisz równania asymptot wykresu podanej funkcji.

a) $y = \frac{3}{x-1} + 2$

b) $y = \frac{-0,7}{x+12} - \frac{1}{3}$

c) $y = \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}} - \sqrt{5}$

d) $y = \frac{7}{3(x-\frac{1}{2})} + \frac{4}{5}$

6. a) Podaj współrzędne punktu przecięcia asymptot wykresu funkcji $y = -\frac{10}{x+7} - 9$.

b) Podaj współrzędne punktów przecięcia czterech prostych, które są asymptotami wykresów funkcji $y = \frac{-6}{x-12} + 8$ oraz $y = \frac{6}{x+7} - 15$.

7. Podaj wzory kilku funkcji, których wykresami są hiperbole o asymptotach:

a) $x = -5$ i $y = 3$

b) $x = 0,6$ i $y = 0$

8. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres podanej funkcji?

a) $y = \frac{6}{x-3}$

b) $y = \frac{-2}{x} + 7$

c) $y = \frac{1}{x+7} + 5$

d) $y = \frac{-\sqrt{2}}{x-4} + 0,7$

9. Czy wykres funkcji $y = \frac{7}{x-2} + 3$ przechodzi przez wszystkie ćwiartki układu współrzędnych? Odpowiedź uzasadnij.

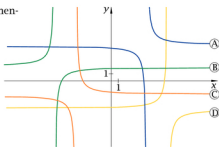
10. Na rysunku przedstawiono fragmenty wykresów następujących funkcji:

① $y = \frac{2}{x+5} - 2$

② $y = \frac{2}{x-5} + 5$

③ $y = -\frac{2}{x+8} + 2$

④ $y = -\frac{2}{x-8} - 4$



Dopasuj wzory funkcji do wykresów.

11. Znajdź współrzędne punktów, w których wykres podanej funkcji przecina oś układu współrzędnych. Naskicuj ten wykres. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji i podaj, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

a) $f(x) = \frac{1}{x+6}$

c) $f(x) = \frac{3}{x+2} - 3$

e) $f(x) = -\frac{1}{x-4} + 2$

b) $f(x) = \frac{-3}{x} + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{5(x-1)} + 0,2$

f) $f(x) = \frac{2}{3-x} - \frac{1}{3}$

12. Podaj liczbę, dla której funkcja f nie jest określona. Naskicuj jej wykres i ustal, dla jakiej wartości a równanie $f(x) = a$ nie ma rozwiązania.

a) $f(x) = \frac{2}{3x} - 4$

c) $f(x) = -\frac{5}{x-7} + 2$

e) $f(x) = \frac{12}{x+\sqrt{3}} + 18$

b) $f(x) = \frac{0,6}{x-0,8}$

d) $f(x) = \frac{13}{x+3} - \frac{1}{7}$

f) $f(x) = \frac{-4}{x-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

13. Naskicuj wykres funkcji $y = f(x)$, a następnie skorzystaj z wykresu i wyznacz zbiór argumentów, dla których wartości funkcji należą do przedziału $(0; 3)$.

a) $f(x) = \frac{-6}{x} + 3$

c) $f(x) = \frac{-3}{x+1} + 3$

e) $f(x) = \frac{4}{x+2} - 1$

b) $f(x) = \frac{6}{x} - 3$

d) $f(x) = \frac{6}{x-4} + 3$

f) $f(x) = \frac{-4}{2x-6}$

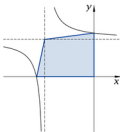
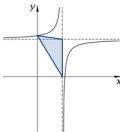
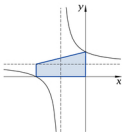
14. Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest hiperbola o asymptocie pionowej o równaniu $x = 1$, przecinająca oś układu współrzędnych w punktach o współrzędnych $(0, 4)$ i $(2, 0)$.

15. Na poniższym rysunku przedstawiono fragment hiperboli będącej wykresem podanej funkcji. Przerywane linie to asymptoty tej hiperboli. Oblicz pole zacienionej figury.

a) $y = \frac{2}{x+2} + 1$

b) $y = -\frac{0,6}{x-2} + 3$

c) $y = \frac{2}{x+4} + 3$



16. a) Hiperbolę o równaniu $y = \frac{3}{x+2} - 5$ przesunięto o 4 jednostki w prawo i o 2 jednostki w górę. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymano.

b) Ustal, jak należy przesunąć hiperbolę o równaniu $y = \frac{-2}{x+1} - 3$, aby otrzymać hiperbolę o równaniu $y = \frac{-2}{x-2} + 7$.

• **17.** Podaj przykład wzoru funkcji, której wykresem jest hiperbola i która:

a) nie ma miejsc zerowych i przecina oś y w punkcie $(0, 2)$,

b) przyjmuje wartości dodatnie tylko wtedy, gdy $x > 3$,

c) przyjmuje wartości ujemne tylko wtedy, gdy $x > 1$.

MINISPRAWDZIAN

51. Asymptoty wykresu funkcji danej wzorem $f(x) = \frac{2}{x+7} - 3$ są asymptotami wykresu funkcji danej wzorem:

A. $g(x) = \frac{2}{x-7} + 3$ C. $g(x) = \frac{-1}{x+7} - 3$

B. $g(x) = \frac{-2}{x-7} - 3$ D. $g(x) = \frac{3}{x+7} - 2$

52. Wykres funkcji danej wzorem $f(x) = \frac{-1}{x+4} - 5$ nie przechodzi przez:

A. ćwiartkę I C. ćwiartkę III

B. ćwiartkę II D. ćwiartkę IV

53. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$. Wynika stąd, że:

A. $a = 2$ C. $c = 6$

B. $b = -1$ D. $a + b + c = 0$

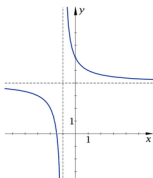
54. Którą z poniższych własności ma funkcja f dana wzorem $f(x) = -2 - \frac{4}{x+1}$?

A. Miejsce zerowe funkcji f to $x = -4$.

B. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie o współrzędnych $(0, -2)$.

C. Asymptotą pionową wykresu funkcji f jest prosta o równaniu $x = 1$.

D. Wykres funkcji f nie przechodzi przez I ćwiartkę układu współrzędnych.



POWTÓRZENIE

1. Określ dziedzinę wyrażenia, a następnie wykonaj działania i przedstaw wynik w jak najprostszej postaci.

a) $\frac{3x}{x+2} \cdot \frac{5x+1}{2x-1}$

c) $\frac{x^2-25}{x} : \frac{x+5}{x^2}$

b) $\frac{5x}{x-3} \cdot \frac{2x-6}{x^2-2x}$

d) $\frac{2x^2+3x}{2x-4} : \frac{2x+3}{(x-2)^2}$

2. Określ dziedzinę wyrażenia, a następnie wykonaj działania i przedstaw wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{3}{x+2} + \frac{5}{x}$

b) $\frac{4x+1}{x-3} - \frac{2}{x}$

c) $\frac{3x-5}{2x+1} - \frac{2x-3}{x-1}$

d) $\frac{3}{x} + \frac{5+x}{x^2} - \frac{3x-4}{x^3}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $2 = \frac{2x-1}{5x+4}$

d) $\frac{2x}{5x+3} = x$

b) $\frac{2x+2}{x+7} = -4$

e) $4x = \frac{x}{10-3x}$

c) $\frac{5}{3} = \frac{3x-2}{x+2}$

f) $\frac{2-3x}{4-x} = -x$

4. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x-5}{x+3} = \frac{2}{x}$

c) $\frac{2}{2x+3} - \frac{x-1}{x-3} = 0$

b) $\frac{3+2x}{x-5} = \frac{4x}{2x-1}$

d) $\frac{x}{6-2x} = \frac{2}{x-3}$

5. Rozwiąż równanie.

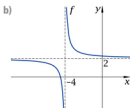
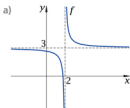
a) $\frac{(3x-2)(x+5)}{(2x+10)(3x+2)} = 0$

c) $\frac{4x^2-25}{2x^2+5x} = 0$

b) $\frac{(x+3)(2x-1)}{x^2-9} = 0$

d) $\frac{x^2+2x-8}{5x^2-10x} = 0$

6. Wykres funkcji f otrzymano w wyniku przesunięcia hiperboli opisanej równaniem $y = \frac{1}{x}$. Podaj wzór funkcji f .



7. Funkcja f dana jest wzorem:

$$f(x) = 4 + \frac{3}{x-5}$$

a) Określ dziedzinę funkcji f .

b) Naszkicuj wykres funkcji f .

c) Podaj równania asymptot wykresu funkcji f .

d) Określ zbiór wartości funkcji f .

e) Znajdź miejsce zerowe funkcji f .

8. Z podanego wzoru wyznacz p .

a) $\frac{M}{N} = \frac{p}{k}$

c) $\frac{S}{T} = \frac{T-3}{p}$

b) $\frac{A}{B} = \frac{C}{p}$

d) $\frac{X}{p+2} = \frac{Y}{Z}$

9. Wykaż, że dla liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Ciągi

W 1965 roku Amerykanin Gordon Moore (czyt. mur) sformułował zasadę znaną jako prawo Moore'a: „Moc obliczeniowa komputerów podwaja się co 18 miesięcy”. Prawo to sprawdzało się przez ponad 40 lat. Oznacza to, że moc obliczeniowa wzrosła w tym czasie ponad milion razy!



Przykłady ciągów ■ Ciąg arytmetyczny ■ Suma wyrazów ciągu arytmetycznego ■ Ciąg geometryczny ■ Suma wyrazów ciągu geometrycznego ■ Procent prosty i procent składany ■ Powtórzenie

PRZYKŁADY CIĄGÓW

- I W pierwszej tabeli uporządkowano kraje należące do ONZ według ich powierzchni, a w drugiej — według liczby ludności. Z tabeli możemy odczytać, które miejsca w danej klasyfikacji zajmują poszczególne państwa.

Gdy pewne elementy ustawimy w kolejności tak, że wiadomo, który jest pierwszy, który drugi, który trzeci itd., to mówimy, że utworzyliśmy **ciąg**. Tak ponumerowane elementy nazywamy **wyrazami ciągu**.

W tabelach są przedstawione dwa różne ciągi państw. Jak widać, w wypadku ciągu ważne jest nie tylko to, z jakich wyrazów się składa, ale też — w jakiej kolejności te wyrazy występują.

ĆWICZENIE A Dla każdego z ciągów podanych w tabelach ustal:

- ile wyrazów ma ciąg,
- którym wyrazem jest Polska,
- ile wyrazów ciągu znajduje się między Chinami a Polską.

Kolejność państw ONZ wg powierzchni w 2012 roku

Kolejność państw ONZ wg liczby ludności w 2012 roku

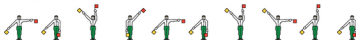
Lp.	Państwo	Lp.	Państwo
1	Rosja	1	Chiny
2	Kanada	2	Indie
3	Chiny	3	USA
4	USA	4	Indonezja
5	Brazylia	5	Brazylia
6	Australia	6	Pakistan
7	Indie	7	Nigeria
8	Argentyna	8	Bangladesz
9	Kazachstan	9	Rosja
10	Algieria	10	Japonia
⋮	⋮	⋮	⋮
70	Polska	33	Polska
71	Oman	34	Algieria
72	Włochy	35	Kanada
⋮	⋮	⋮	⋮
192	Nauru	192	Tuvalu
193	Monako	193	Nauru

Poniżej podajemy kilka przykładów różnych ciągów. Zwróć uwagę, że wyrazy ciągu mogą się powtarzać.

- Ciąg nazw miast — gospodarzy letnich igrzysk olimpijskich od roku 1896 do roku 2016:

Ateny, Paryż, St. Louis, Londyn, Sztokholm, ..., Berlin, Londyn, Helsinki, ..., Ateny, Pekin, Londyn, Rio de Janeiro

- Ciąg kolejnych liter słowa MATEMATYKA w alfabecie semaforowym:



- Ciąg kolejnych znaków numeru rejestracyjnego pewnego samochodu:
G, A, 7, 0, 4, 0, N

- Ciąg figur budowanych z zapalek:



- Ciąg liczb naturalnych podzielnych przez 11:

0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, ...

Dwa ostatnie z podanych ciągów mają nieskończenie wiele wyrazów. Takie ciągi nazywamy **ciągami nieskończonymi**. Gdy ciąg składa się ze skończonej liczby wyrazów, nazywamy go **ciągiem skończonym**.

Wyrazy ciągu oznaczamy zwykle za pomocą małych liter z indeksem (indeksami są liczby naturalne dodatnie), na przykład a_1 to pierwszy wyraz ciągu, a_7 to siódmy wyraz, zaś a_n — to n -ty wyraz ciągu.

Ciąg $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{100}, a_{101}, \dots$ będziemy oznaczać symbolem (a_n) .

Uwaga. Symbole (a_n) będziemy używać do oznaczania zarówno ciągów nieskończonych, jak i ciągów skończonych.

Ciąg (a_n) możemy zinterpretować jako pewną funkcję f , której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich lub jego skończony podzbiór $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ oraz $f(n) = a_n$, czyli $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots$

Ciągi, których wszystkie wyrazy są liczbami, nazywamy ciągami liczbowymi. Oto kilka przykładów takich ciągów:

- 1, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{4}$, 5, $\frac{1}{6}$, 7, ...
- 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...
- -1, -2, 3, 4, -5, -6, 7, 8, ...
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, ...

ĆWICZENIE B W każdym z powyższych ciągów liczbowych kolejne wyrazy powstają według pewnej reguły. Spróbuj odgadnąć tę regułę i podaj trzy następne wyrazy każdego z tych ciągów.

zadania 1–5 ►

- II** Kolejne wyrazy ciągu liczbowego można czasem opisać za pomocą ogólnego wzoru przedstawiającego zależność wyrazu a_n od liczby n . Na przykład ciąg kolejnych liczb naturalnych parzystych: 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... można opisać za pomocą wzoru:

$$a_n = 2(n - 1)$$

Korzystając z tego wzoru, można obliczyć dowolny wyraz ciągu, na przykład setny lub pięćset jedenasty:

$$a_{100} = 2(100 - 1) = 198 \quad a_{511} = 2(511 - 1) = 1020$$

Oto przykłady ciągów opisanych za pomocą wzorów ogólnych:

CIĄG	WZÓR OGÓLNY
• $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$	$a_n = \frac{n}{n+1}$
• $1, -\sqrt{2}, 2, -2\sqrt{2}, 4, \dots$	$b_n = (-\sqrt{2})^{n-1}$
• $2, 6, 12, 20, 30, \dots$	$c_n = n(n+1)$
• $5, 5, 5, 5, \dots$	$d_n = 5$

ĆWICZENIE C a) Oblicz pięćdziesiąty wyraz każdego z powyższych ciągów.

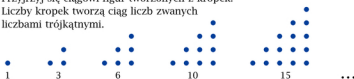
b) Korzystając z pierwszego wzoru, możemy otrzymać równość $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$.
Zapisz w podobny sposób liczby:

$$a_{n+3} \quad b_{n-1} \text{ (gdy } n > 1) \quad c_{n+1} - c_n \quad \frac{d_n + d_{n+1}}{2}$$

zadania 6–13 ►

III Przyjrzyj się ciągowi figur tworzonych z kropek.

Liczby kropek tworzą ciąg liczb zwanych liczbami trójkątnymi.



ĆWICZENIE D Podaj szóstą i dziewiątą liczbę trójkątną.

W ciągu liczb trójkątnych (t_n) pierwszy wyraz to 1 ($t_1 = 1$), drugi wyraz jest o 2 większy od pierwszego ($t_2 = t_1 + 2$), trzeci wyraz jest o 3 większy od drugiego ($t_3 = t_2 + 3$) itd. Ciąg ten można więc określić następująco:

$$t_1 = 1 \quad t_{n+1} = t_n + n + 1$$

Jeśli podajemy pierwszy wyraz ciągu (lub kilka początkowych wyrazów ciągu) i wzór pozwalający obliczyć kolejne wyrazy na podstawie wyrazów poprzednich, to taki sposób opisywania ciągu nazywamy **rekurencyjnym**. Oto przykłady ciągów opisanych za pomocą wzorów rekurencyjnych:

CIĄG	WZÓR REKURENCYJNY
• $-216, -220, -224, -228, \dots$	$a_1 = -216, a_{n+1} = a_n - 4$
• $1, 11, 111, 1111, \dots$	$b_1 = 1, b_{n+1} = 10b_n + 1$
• $3, 5, 4, 4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{4}, \dots$	$c_1 = 3, c_2 = 5, c_{n+2} = \frac{c_n + c_{n+1}}{2}$

Uwaga. Powyższe wzory można też zapisać za pomocą układu warunków:

$$\begin{cases} a_1 = -216 \\ a_{n+1} = a_n - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 10b_n + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 5 \\ c_{n+2} = \frac{c_n + c_{n+1}}{2} \end{cases}$$

ĆWICZENIE E Spróbuj odgadnąć regułę, według której utworzono zapisany ciąg. Podaj wzór rekurencyjny tego ciągu.

a) 100, 94, 88, 82, 76, 70, ...

c) 160, -80, 40, -20, 10, -5, $\frac{5}{2}$, ...

b) 2, 6, 18, 54, 162, ...

d) 5, 5, 10, 15, 25, 40, 65, ...

Zauważ, że gdy ciąg jest określony wzorem ogólnym, to można obliczyć wyraz a_n , nawet gdy nie znamy żadnego innego wyrazu tego ciągu. Gdy jednak ciąg określamy rekurencyjnie, to aby znaleźć wyraz a_n , musimy obliczyć wszystkie poprzedzające go wyrazy.

Niektóre ciągi liczbowe można opisać zarówno za pomocą wzoru rekurencyjnego, jak i wzoru ogólnego. Taką własność ma na przykład ciąg liczb trójkątnych.

Przyjrzyj się rysunkom. Połowa liczby kropek na każdym z nich to liczba trójkątna.



Korzystając z tych rysunków, łatwo zauważyć, że kolejne liczby trójkątne można zapisać w postaci:

$$t_1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad t_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} \quad t_3 = \frac{3 \cdot 4}{2} \quad t_4 = \frac{4 \cdot 5}{2} \quad t_5 = \frac{5 \cdot 6}{2} \quad \dots$$

Wobec tego wzór ogólny pozwalający obliczać liczby trójkątne ma postać:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Oto inne przykłady ciągów, które można zapisać zarówno za pomocą wzoru ogólnego, jak i wzoru rekurencyjnego.

CIĄG	WZÓR OGÓLNY	WZÓR REKURENCYJNY
• 2, 4, 8, 16, ...	$a_n = 2^n$	$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n$
• 10, 20, 30, 40, ...	$b_n = 10n$	$b_1 = 10, \quad b_{n+1} = b_n + 10$
• 1, 4, 9, 16, ...	$c_n = n^2$	$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = c_n + 2n + 1$
• $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$	$d_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$	$d_1 = \frac{1}{2}, \quad d_{n+1} = \frac{d_n + 1}{2}$
• 1, -1, 1, -1, ...	$e_n = (-1)^{n+1}$	$e_1 = 1, \quad e_{n+1} = -e_n$

zadania 14–18 ►

IV Jeśli wyrazy ciągu są liczbami, z których każda następna jest większa od poprzedniej, to ciąg nazywamy **rosnącym**. W takim ciągu dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi nierówność $a_n < a_{n+1}$.

Gdy wyrazy ciągu są liczbami, z których każda następna jest mniejsza od poprzedniej, to ciąg nazywamy **malejącym**. W takim ciągu dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi nierówność $a_n > a_{n+1}$.

Gdy wszystkie wyrazy ciągu liczbowego są równe, to ciąg nazywamy **ciągą stałą**. W takim ciągu dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi równość $a_n = a_{n+1}$.

Będziemy mówili, że ustalamy monotoniczność ciągu, gdy badamy, czy ciąg jest rosnący, malejący, czy stały.

ĆWICZENIE F Podaj przykład ciągu liczbowego, który ma cztery wyrazy i który:

- a) jest ciągiem rosnącym,
- b) jest ciągiem malejącym,
- c) nie jest ciągiem rosnącym ani malejącym, ani stałym.

PRZYKŁAD Zbadaj monotoniczność ciągu.

a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)}{n+1+1} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \\&= \frac{(2n+2)(n+1) - 2n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \\&= \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2 - 2n^2 - 4n}{(n+1)(n+2)} = \\&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0\end{aligned}$$

... Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n liczby $n+1$ oraz $n+2$ są dodatnie.

Dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi nierówność $a_{n+1} - a_n > 0$, więc $a_{n+1} > a_n$. Zatem ciąg (a_n) jest rosnący.

b) $b_n = n^2 - 8n + 7$

$$\begin{aligned}b_{n+1} - b_n &= (n+1)^2 - 8(n+1) + 7 - (n^2 - 8n + 7) = \\&= n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 7 - n^2 + 8n - 7 = \\&= 2n - 7\end{aligned}$$

Wartość różnicy $b_{n+1} - b_n = 2n - 7$ może być liczbą dodatnią (np. gdy $n = 4$) lub ujemną (np. gdy $n = 3$).

Zatem ciąg (b_n) nie jest ani rosnący, ani malejący.

ZADANIE Określ monotoniczność ciągu.

a) $a_n = \frac{1-n}{n+2}$

b) $b_n = n^2 - 5n + 4$

ZESTAW ZADAŃ

1. Zapisz kilka różnych ciągów utworzonych z liter twojego imienia.

2. Antoni Słonimski i Julian Tuwim w „Pracowitej pszczołce. Kalendarzyku encyklopedyczno-informacyjnym na rok 1921” wśród wielu dowcipnych tekstów zamieścili pewien ciąg — spis alfabetyczny wszystkich nazw liczb od jeden do sto. Ułóż podobny ciąg dla liczb naturalnych od zero do dziesięć.

3. Ustal, ile wyrazów ciągu (a_n) znajduje się między wyrazami:

a) a_{22} i a_{30}

b) a_{25} i a_{108}

c) a_n i a_{2n}

d) a_{n+1} i a_{3n}

4. Podaj trzy początkowe wyrazy i wyraz dziesiąty ciągu określonego następująco:

a) n -tym wyrazem ciągu jest liczba zer w liczbie 10^n ,

b) n -ty wyraz ciągu to liczba jedynek w zapisie dziesiętkowym liczby n ,

c) a_n oznacza, ile liter występuje w zapisie liczby n słowami.

5. Podaj wyrazy a_{100} i a_{101} ciągu określonego w następujący sposób:

a) a_n to cyfra jedności liczby $5n$,

c) a_n to cyfra jedności liczby 2^n ,

b) a_n to cyfra jedności liczby 9^n ,

d) a_n to cyfra jedności liczby 3^n .

6. Podaj trzy początkowe wyrazy oraz dziewiąty wyraz ciągu określonego wzorem:

a) $a_n = -7n + \frac{1}{n}$

c) $a_n = -n^3 + 2n + 5$

e) $a_n = (-3)^n + 3^n$

b) $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$

d) $a_n = \sqrt{2^n}$

f) $a_n = \frac{2^n}{n^2}$

7. a) Które wyrazy podanych ciągów są równe 1?

$$a_n = (-1)^{n+1}$$

$$b_n = 1 + (-1)^n + (-1)^{n+1}$$

$$c_n = 3 - 2 \cdot (-1)^n$$

b) Które wyrazy podanych ciągów są liczbami całkowitymi?

$$d_n = 2 + \frac{n}{5}$$

$$e_n = \frac{11 - (-1)^n}{3}$$

$$f_n = \frac{n}{2} + \frac{n}{3}$$

8. Poniżej zapisano wzory ogólne trzech ciągów:

$$a_n = (n-1)(n+3)$$

$$b_n = 5^n + 4$$

$$c_n = \frac{\frac{1}{2}n-1}{n+1}$$

Zapisz wyrażenia przedstawiające liczby:

$$a_{n+1} \text{ i } a_n - a_1$$

$$b_{n-1} \text{ i } b_{n+1} - b_{n-1} \text{ (gdy } n > 1)$$

$$c_{2n+1} \text{ i } \frac{c_n}{c_{n-2}} \text{ (gdy } n > 2)$$

9. Wzór $a_n = n^2 - n + 41$ określa ciąg, którego czterdzieści początkowych wyrazów to liczby pierwsze. Wzór ten podał szwajcarski matematyk Leonhard Euler (czyt. ojler). Wymień kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) i uzasadnij, że a_{41} nie jest liczbą pierwszą.

Jednostka astronomiczna to średnia odległość Ziemi od Słońca. W tabelce obok przedstawiono średnie odległości od Słońca sześciu kolejnych planet. Jako jednostkę odległości przyjęto $\frac{1}{10}$ jednostki astronomicznej.

W 1772 roku niemiecki astronom Daniel Titius zauważył, że gdyby między liczbą 16 i 52 wymienione w tabeli wpisać jeszcze liczbę 28, to otrzymany ciąg można by opisać regułą:

$$a_1 = 4 \quad \text{ i } \quad a_n = 4 + 3 \cdot 2^{n-2}, \quad \text{gdzie } n \geq 2$$

Ku zaskoczeniu astronomów, dzięki znacznie późniejszej obserwacji, znaleziono między Marsem a Jowiszem pas planetoid, którego odległość od Słońca odpowiada w tym ciągu właśnie liczbie 28.

Planeta	Średnia odległość od Słońca
Merkury	4
Wenus	7
Ziemia	10
Mars	16
Jowisz	52
Saturn	100

10. Przeczytaj informacje w ramce.

a) Planetę Uran odkryto dopiero w 1781 roku i dlatego Titius nie uwzględnił jej w swoich rozważaniach. Jednak liczba w ciągu Titiusa odpowiadająca planecie następnej po Saturnie jest zdumiewająco bliska prawdziwej odległości Urana od Słońca. Znajdź tę liczbę.

b) Neptun to następna po Uranie planeta. Znajduje się ona około 30 razy dalej od Słońca niż Ziemia. Sprawdź, czy i tę odległość pozwalał przewidzieć ciąg Titiusa.

11. Ciąg jest określony za pomocą wzoru: $a_n = \frac{2n}{5} - 8$.

a) Którym wyrazem tego ciągu jest liczba 0?

b) Czy wyrazami tego ciągu są liczby $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$?

c) Które wyrazy tego ciągu są większe od 10?

d) Które wyrazy tego ciągu są mniejsze od 13?

12. Podaj wzór ogólny ciągu, którego początkowymi wyrazami są podane liczby.

a) $1 + 5^1, 2 + 5^2, 3 + 5^3, \dots$

d) 1, 8, 27, 64, 125, ...

b) 2, 4, 6, 8, 10, ...

e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

f) -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...

13. Wyrazami każdego z podanych ciągów są kwadraty liczb całkowitych. Znajdź wzory ogólne tych ciągów.

a) 1, 4, 9, 16, 25, ...

b) 0, 4, 16, 36, 64, ...

4, 9, 16, 25, 36, ...

9, 4, 1, 0, 1, 4, ...

25, 36, 49, 64, 81, ...

100, 81, 64, 49, 36, ...

◀ 14. Podaj cztery początkowe wyrazy ciągu określonego rekurencyjnie:

- a) $a_1 = 90$ i $a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + 3$ d) $a_1 = -2$, $a_2 = 2$ i $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$
 b) $a_1 = -5$ i $a_{n+1} = a_n + 3(n-1)^{n+1}$ e) $a_1 = -2$, $a_2 = 5$ i $a_{n+2} = a_n + 3$
 c) $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 2a_n - n$ f) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ i $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

15. Podaj wzór rekurencyjny i wzór ogólny ciągu o początkowych wyrazach:

- a) 5, 10, 15, 20, 25, ... d) 8, -4, 2, -1, $\frac{1}{2}$, ...
 b) 2, -2, 2, -2, 2, ... e) $3a$, $3a-1$, $3a-2$, $3a-3$, ...
 c) 113, 123, 133, 143, ... f) a , $2a+1$, $3a+2$, $4a+3$, ...

Warto wiedzieć

W roku 1202 Leonardo z Pizy, zwany Fibonaccim (czyt. fibonacczchim), opublikował słynną „Księgę abaku”, w której spisał ówczesną wiedzę matematyczną. W jednym z zadań tej książki rozważał pewien ciąg liczb, który (jak się później okazało) ma niezwykle własności. W ciągu tym pierwszy i drugi wyraz to 1, a każdy następny jest sumą dwóch poprzednich. Zatem określony jest następująco:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

Okazuje się, że w różnych zjawiskach przyrodniczych można dostrzec ciąg Fibonacciego. Ciekawe jest to, że ciąg ten jest ściśle związany z często stosowanym przez artystów tzw. złotym podziałem i wynikającą z niego złotą liczbą $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Można bowiem wykazać, że wzór ogólny ciągu Fibonacciego jest następujący:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi} \right)^n \right)$$

16. Przeczytaj informacje w ramce.

- a) Zapisz dziesięć początkowych wyrazów ciągu Fibonacciego.
 b) *Jeśli krowa rodzi swoje pierwsze cielę — jałówkę w wieku dwóch lat, a potem nową jałówkę każdego roku, to ile krów będzie po 12 latach — przy założeniu, że żadna nie padnie?* To zadanie podał znany twórca łamigłówek Henry Dudeney (czyt. henri djudeney). Przyjął on, że każda jałówka po 2 latach także zacznie rodzić cielęta — jałowki. Sprawdź, że liczby krów w kolejnych latach tworzą ciąg Fibonacciego.



- c) Korzystając z podanego w ciekawostce ogólnego wzoru ciągu Fibonacciego, sprawdź, że $a_1 = a_2 = 1$. Posługując się kalkulatorem, oblicz z tego wzoru a_3 i a_4 .

17. a) Wykaż, że jeśli $a_n = (2n)^2$, to $a_1 = 4$ i $a_{n+1} = a_n + 4(2n+1)$.

b) Wykaż, że jeśli $a_n = 6 - 4 \cdot 3^{n-1}$, to $a_1 = 2$ i $a_{n+1} = 3a_n - 12$.

18. a) Przyjmij za wyraz a_1 dowolną liczbę naturalną dwucyfrową. Znajdź wyrazy $a_2, a_3, \dots, a_{10}$, posługując się następującą regułą rekurencyjną:

Wyraz a_{n+1} to liczba liter występujących w nazwie liczby a_n .

Wykonaj to samo polecenie, przyjmując za a_1 inną liczbę naturalną. Co zauważasz?

- **b)** Podobnie jak w ciągu opisanym w podpunkcie a), wyrazy w poniższych ciągach powtarzają się z pewną regularnością. Przyjmij za pierwszy wyraz dowolną liczbę naturalną i odkryj tę regularność.

- $b_{n+1} = 100x + 10y + x + y$, gdzie x to liczba cyfr parzystych w liczbie b_n , zaś y to liczba cyfr nieparzystych w liczbie b_n
- c_{n+1} to suma sześciątów cyfr występujących w zapisie liczby c_n
- d_{n+1} to różnica między największą i najmniejszą z liczb, jakie można ułożyć z cyfr występujących w liczbie d_n
- $$e_{n+1} = \begin{cases} 3e_n + 1, & \text{gdy } e_n \text{ jest liczbą nieparzystą} \\ \frac{e_n}{2}, & \text{gdy } e_n \text{ jest liczbą parzystą} \end{cases}$$

◀ **IV 19.** Wykaż, że ciąg (a_n) jest rosnący, a ciąg (b_n) malejący.

- a) $a_n = 4n - 5$, $b_n = -\frac{3}{4}n - \frac{1}{3}$ c) $a_n = n^2 + 3n - 10$, $b_n = -5n^2 + 10$
b) $a_n = -\frac{7}{n} + 1$, $b_n = \frac{1}{2n} + 2$ d) $a_n = 5^{n+3}$, $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

20. Wykaż, że ciąg (a_n) nie jest ani rosnący, ani malejący.

- a) $a_n = |5 - n|$ b) $a_n = \frac{1}{n-9,5}$ c) $a_n = n^2 - 6n$ d) $a_n = (-2)^{n-1}$

21. Zbadaj monotoniczność podanego ciągu.

- a) $a_n = -2n + 20$ b) $a_n = 1 + (-1)^n$ c) $a_n = \frac{n}{n+1}$ d) $a_n = n^2$

- **22.** Uzasadnij, że podany ciąg jest ciągiem stałym.

- a) $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ c) $c_n = (-1)^{(-1)^n}$
b) $b_n = (-1)^n - (-1)^{n+2}$ d) $d_n = ((-1)^n)^{n+1}$

23. Przyjmijmy, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie. Czy na podstawie podanej nierówności można określić monotoniczność ciągu (a_n) ?

- a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 2$ c) $a_{n+1} > a_n + 2$ d) $a_{n+1} + a_n \geq 0$

24. Zbadaj monotoniczność podanego ciągu.

- a) $a_1 = 8$ i $a_{n+1} = a_n - 3n$ c) $a_1 = \frac{1}{7}$ i $a_{n+1} = -a_n$
b) $a_1 = -10$ i $a_{n+1} = a_n - 5$ d) $a_1 = -\sqrt{2}$ i $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

MINISPRAWDZIAN

51. Cztery początkowe wyrazy ciągu określonego wzorem $a_n = n + (-2)^n$ to:

- A. -1, -2, -5, -12 B. 1, 5, 9, 13 C. -1, 6, -5, 20 D. -1, 6, -3, 12

52. W którym z podanych ciągów jeden z wyrazów jest równy 2?

- A. $a_n = 2n + 2$ B. $b_n = \frac{n+8}{2}$ C. $c_n = 2n^2 - 2$ D. $d_n = \frac{2}{8-n}$

53. Ciąg jest określony wzorem $a_n = \frac{5}{n+1}$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

I	Ciąg jest malejący.	TAK/NIE
II	Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie.	TAK/NIE
III	Dziewiąty wyraz tego ciągu jest 10 razy większy niż a_{99} .	TAK/NIE

54. Ciąg (a_n) jest określony wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = -2a_n + 5$. Piąty wyraz tego ciągu jest równy:

- A. -25 B. -5 C. 0 D. 15

CIĄG ARYTMETYCZNY

1 ĆWICZENIE A Spróbuj odkryć regułę, według której powstają kolejne wyrazy ciągu. Podaj dwa następne wyrazy.

a) 1, 11, 21, 31, 41, ...

c) $1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -1, -1\frac{2}{3}, -2\frac{1}{3}, \dots$

b) 5, 3, 1, -1, -3, -5, ...

d) $\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi, 11\pi, \dots$

W każdym z ciągów z ćwiczenia A kolejny wyraz powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej liczby, zawsze tej samej.

Jeśli ciąg (a_n) ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego pewnej stałej liczby r , to taki ciąg nazywamy **ciągą arytmetycznym**. Liczbę r nazywamy **różnicą ciągu**.

Wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego
o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Aby stwierdzić, czy ciąg jest arytmetyczny, wystarczy sprawdzić, czy różnice między jego kolejnymi wyrazami są równe.

ĆWICZENIE B Zapisz kilka początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o podanym pierwszym wyrazie i różnicy.

a) $a_1 = 10, \quad r = 7$

b) $a_1 = 22, \quad r = -2$

c) $a_1 = 8, \quad r = 0$

Zauważ, że dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} ciągu arytmetycznego o różnicy r zachodzi równość $a_{n+1} - a_n = r$. Zatem ciąg arytmetyczny o różnicy r jest rosnący, gdy $r > 0$, a jest malejący — gdy $r < 0$, i jest ciągiem stałym — gdy $r = 0$.

ĆWICZENIE C Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n) .

a) Który wyraz tego ciągu otrzymamy, gdy do wyrazu a_{50} dodamy $2r$, a który — gdy od wyrazu a_{100} odejmiemy $5r$?

b) Przyjmijmy, że a_n nie jest pierwszym ani ostatnim wyrazem ciągu. Zapisz za pomocą a_n oraz r wyrazy: a_{n-1} , a_{n+1} i oblicz ich średnią arytmetyczną.

W ciągu arytmetycznym każdy wyraz (który nie jest ani pierwszym, ani ostatnim) jest równy średniej arytmetycznej dwóch sąsiednich wyrazów.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Z tej własności zapewne wzięła się nazwa „ciąg arytmetyczny”.

zadania 1–9 ►

II ĆWICZENIE D W ciągu arytmetycznym (a_n) pierwszy wyraz jest równy 7, a różnica tego ciągu wynosi $\sqrt{2}$. Znajdź kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) oraz wyrazy a_{10} , a_{20} , a_{100} . Podaj wzór ogólny tego ciągu.

W ciągu arytmetycznym (a_n) o różnicy r i pierwszym wyrazie a_1 kolejne wyrazy są równe:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

itd.

Na podstawie tych równości można sformułować wzór ogólny ciągu (a_n) .

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego
o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Oto przykłady ciągów arytmetycznych oraz ich wzory rekurencyjne i ogólne.

CIĄG ARYTMETYCZNY	WZÓR REKURENCYJNY	WZÓR OGÓLNY
• $\sqrt{2}, \sqrt{2} + 3, \sqrt{2} + 6, \dots$	$a_1 = \sqrt{2} \quad a_{n+1} = a_n + 3$	$a_n = \sqrt{2} + 3(n-1)$
• $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, \dots$	$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4}$	$a_n = 1 - \frac{1}{4}(n-1)$

ĆWICZENIE E Ciąg $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \dots$ jest arytmetyczny. Zapisz wzór ogólny tego ciągu i ustal dwudziesty wyraz tego ciągu.

PRZYKŁAD W ciągu arytmetycznym dane są $a_5 = 8$ oraz $a_{12} = -6$. Oblicz a_{50} .

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

⋮ Zapisujemy wzór ogólny ciągu arytmetycznego.

$$\begin{cases} 8 = a_1 + 4r \\ -6 = a_1 + 11r \end{cases}$$

⋮ Korzystając z tego, że $a_5 = 8$ i $a_{12} = -6$, zapisujemy układ równań.

$$14 = -7r$$

$$r = -2$$

$$a_1 = 8 - 4r = 8 - 4 \cdot (-2) = 16$$

$$a_{50} = a_1 + 49r = 16 + 49 \cdot (-2) = \underline{-82}$$

ZADANIE W ciągu arytmetycznym dane są $a_7 = -32$ oraz $a_{15} = -74$. Oblicz a_3 .

Uwaga. Aby obliczyć różnicę r w powyższym przykładzie, można też było skorzystać z równości $a_{12} = a_5 + 7r$, a do obliczenia a_{50} można było skorzystać z równości $a_{50} = a_5 + 45r$.

zadania 10–21 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Podany ciąg jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz różnicę tego ciągu i zapisz kolejne dwa jego wyrazy.

a) $-3, 2, 7, \dots$

c) $10, 2, 10, 6, 11, \dots$

e) $1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2}, \dots$

b) $1\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7}, \dots$

d) $125, 5, 120, 114, 5, \dots$

f) $(1 + \sqrt{2})^2, 3, (1 - \sqrt{2})^2, \dots$

2. Zapisz drugi, trzeci i czwarty wyraz ciągu arytmetycznego, w którym:

a) $a_1 = 7, r = -3$

b) $a_5 = 11, r = 2$

c) $a_7 = -4, r = 0$

d) $a_5 = 13, a_6 = 6$

3. Podany ciąg jest ciągiem arytmetycznym. Ustal jego różnicę i podaj dwa początkowe wyrazy tego ciągu.

a) $a_1, a_2, 24, 31, 38, \dots$

c) $a_1, a_2, m+7, m-7, m-21, \dots$

b) $a_1, a_2, -3, -5, -7, \dots$

d) $a_1, a_2, \frac{x-3}{4}, \frac{x-4}{4}, \frac{x-5}{4}, \dots$

4. Znajdź wartość t , dla której podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

a) $-6, -12, 18 - t^2$

b) $\frac{t-1}{2}, 8, \frac{t+3}{2}$

c) $t^2 - 3, 2t, t - 1$

Liczby pierwsze mniejsze od 50:

2 3 5 7 11 13 17 19

23 29 31 37 41 43 47

5. a) Znajdź trójwyrazowy ciąg arytmetyczny, którego wyrazami są liczby pierwsze.

b) Znajdź pięciowyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy 6, którego wyrazami są liczby pierwsze.

6. a) Pierwszym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego jest liczba -3 , a piątym — liczba 15. Znajdź drugi, trzeci i czwarty wyraz tego ciągu.

b) Liczby 2, a , b , c , d , -24 tworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź liczby a , b , c i d .

7. Ile jest nieskończonych ciągów arytmetycznych o wyrazach całkowitych, w których pierwszym wyrazem jest liczba 3, a jednym z wyrazów jest liczba 15?

8. Ciągi (a_n) i (b_n) są arytmetyczne.

a) Wykaż, że ciąg (c_n) , w którym $c_n = a_n + b_n$, też jest arytmetyczny.

b) Wykaż, że ciąg określony wzorem $d_n = 2a_n - b_n$ jest ciągiem arytmetycznym.

9. Oto wzory ogólne czterech ciągów. Które z tych ciągów są arytmetyczne?

$$a_n = -13 - 5n$$

$$b_n = \frac{4n+n^2}{n}$$

$$c_n = \sqrt{3 + (n-1) \cdot 2}$$

$$d_n = \frac{6n^2 + 12n}{n+2}$$

10. a) Zapisz wzory ogólne i rekurencyjne następujących ciągów arytmetycznych:

$$5\frac{1}{7}, 5\frac{4}{7}, 6, \dots \quad 3 + 4\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3}, \dots \quad -27, 4, -26, -24, 6, \dots$$

b) Zapisz wzory ogólne ciągów arytmetycznych (określonych rekurencyjnie):

$$a_1 = -7 \text{ i } a_{n+1} = a_n + 2 \quad b_1 = \frac{1}{4} \text{ i } b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2} \quad c_1 = -13 \text{ i } c_{n+1} = c_n - 0,2$$

c) Zapisz wzory rekurencyjne ciągów arytmetycznych (określonych za pomocą wzorów ogólnych):

$$x_n = 4 + 5(n-1)$$

$$y_n = -2,5 + \frac{n}{2}$$

$$z_n = 104 - 4n$$

11. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) Znajdź a_{10} , jeśli $a_1 = 2$ i $r = 5$.

c) Znajdź a_{13} , jeśli $a_1 = 1$ i $a_2 = 4$.

b) Znajdź a_{21} , jeśli $a_1 = \sqrt{2}$ i $r = \sqrt{2}$.

d) Znajdź a_{100} , jeśli $a_1 = -6$ i $a_2 = -8$.

12. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

a) Znajdź różnicę ciągu oraz a_{12} , jeśli $a_1 = 3$ i $a_{13} = -5,4$.

b) Oblicz a_1 oraz a_{15} , jeśli $a_{31} = 8$, a różnica ciągu wynosi 0,1.

c) Znajdź różnicę tego ciągu oraz a_1 , jeśli $a_{100} = 100$ i $a_{102} = 104$.

d) Znajdź różnicę tego ciągu oraz a_1 , jeśli $a_5 = -8$ i $a_9 = -2$.

13. Wykaż, że jeśli suma trzech kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa p , to środkowy z tych wyrazów jest równy $\frac{p}{3}$.

14. Ustal, ile zapalek potrzeba do ułożenia setnej figury w podanym ciągu.

a)



b)



15. W pewnym ciągu arytmetycznym wyraz dziesiąty jest liczbą 2 razy większą niż wyraz piąty i zarazem liczbą o 2 mniejszą od wyrazu piętnastego. Znajdź pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

16. Podane liczby to początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego. Sprawdź, czy liczba -120 jest wyrazem tego ciągu. Jeśli tak — to którym?

a) $-240, -230, \dots$

b) $26, 22, \dots$

c) $66, 65\frac{1}{2}, \dots$

17. Podany ciąg jest ciągiem arytmetycznym. Ustal, ile ma wyrazów.

a) $7, 11, 15, \dots, 55$

b) $121, 132, 143, \dots, 1100$

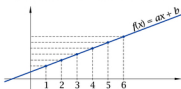
18. Dane są ciągi arytmetyczne: $17, 21, \dots$ oraz $16, 21, \dots$. Uzasadnij, że 41 jest wspólnym wyrazem tych ciągów. Znajdź jeszcze dwa inne wspólne wyrazy tych ciągów.

19. Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to ciąg określony wzorem $b_n = a_{3n}$ też jest ciągiem arytmetycznym.

20. Wybierz dowolną liczbę naturalną większą od 1. Zapisz rosnący ciąg wszystkich liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez wybraną przez siebie liczbę dają resztę 1. Sprawdź, czy otrzymany ciąg jest ciągiem arytmetycznym.

Warto wiedzieć!

Ciąg arytmetyczny ma ścisły związek z funkcją liniową. Dla dowolnej funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ wartości $f(1), f(2), f(3), f(4), \dots$ tworzą ciąg arytmetyczny.



Kolejne wyrazy tego ciągu to:

$a \cdot 1 + b, a \cdot 2 + b, a \cdot 3 + b, a \cdot 4 + b, \dots$

Liczby te można zapisać inaczej:

$a + b, a + b + a, a + b + 2a, a + b + 3a, \dots$

Widać więc, że jest to ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a + b$ i różnicy a .

Wynika stąd m.in., że dla danej funkcji liniowej różnica między jej wartościami dla dwóch kolejnych liczb naturalnych jest zawsze ta sama (zob. rysunek).

Można wykazać ogólniejszą własność: Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy punkty $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$ itd. leżą na jednej prostej.

21. Przeczytaj informacje w ramce.

a) Dana jest funkcja $f(x) = -3x + 5$. Sprawdź, że ciąg $f(1), f(2), f(3), \dots$ jest ciągiem arytmetycznym. Podaj pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

b) Dany jest ciąg arytmetyczny o wyrazach $a_1 = -5, a_2 = -2, a_3 = 1, \dots$. Znajdź wzór takiej funkcji liniowej f , że $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots$

c) Wykaż, że jeśli f jest funkcją liniową, a ciąg $b_1, b_2, b_3, \dots$ jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg $f(b_1), f(b_2), f(b_3), \dots$ też jest ciągiem arytmetycznym.

MINISPRAWDZIAN

51. Jeżeli dziesiątym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego jest 20, a trzynastym wyrazem tego ciągu jest 29, to drugim wyrazem tego ciągu jest:

- A. -4 B. -1 C. 3 D. -7

52. Trzy początkowe wyrazy pewnego skończonego ciągu arytmetycznego to liczby $1, 1\frac{5}{6}, 2\frac{2}{3}$, a ostatnim wyrazem jest liczba 16. Ile wyrazów ma ten ciąg?

- A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

53. Ciąg $p, 6, 5p, \dots$ jest ciągiem arytmetycznym. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:

- A. 9 B. 14 C. 18 D. 30

SUMA WYRAZÓW CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

1 Z historii

Carl Friedrich Gauss (czyt. karł fridriś gałs), jeden z najwybitniejszych matematyków, już od najmłodszych lat wykazywał niezwykle zdolności. Gdy miał 7 lat, nauczyciel w jego klasie kazał uczniom obliczyć sumę liczb naturalnych od 1 do 50. Zapewne miał nadzieję, że zajmie to uczniom dużo czasu i dzięki temu będzie miał spokój do końca lekcji. Można sobie wyobrazić jego zaskoczenie, gdy młody Friedrich podał poprawną odpowiedź już po chwili. Podobno Gauss liczył w następujący sposób: zapisał liczby od 1 do 50, a pod spodem te same liczby w odwrotnej kolejności i wykonał dodawanie.

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49 + 50 \\ + 50 + 49 + 48 + 47 + \dots + 2 + 1 \\ \hline 51 + 51 + 51 + 51 + \dots + 51 + 51 = 51 \cdot 50 \end{array}$$

W ten sposób otrzymał liczbę 2 razy większą niż szukana suma. Zatem:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \frac{51 \cdot 50}{2} = 1275$$

Opisany w powyższej ramce sposób obliczania sumy 50 początkowych liczb naturalnych można wykorzystać do znalezienia sumy początkowych wyrazów dowolnego ciągu arytmetycznego.

Niech (a_n) oznacza ciąg arytmetyczny o różnicy r . Zapiszmy sumę wyrazów od a_1 do a_n , a pod spodem — tę samą sumę, ale składniki ustawmy w odwrotnej kolejności.

$$\begin{array}{r} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 \end{array}$$

Sumy te zapisano poniżej w innej postaci i dodano odpowiednie wyrazy:

$$\begin{array}{r} a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + a_n \\ + a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \dots + a_1 \\ \hline (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n) \cdot n \end{array}$$

Z powyższych rozważań wynika równość:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

ĆWICZENIE Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = -12$ i $r = 0,2$.

PRZYKŁAD Liczby 5, 1, -3 są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Oblicz sumę $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30}$.

$$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30} = S_{30} - S_{10}$$

$$a_1 = 5, \quad r = 1 - 5 = -4$$

$$a_n = 5 + (n - 1) \cdot (-4)$$

$$a_{30} = 5 + 29 \cdot (-4) = -111$$

$$S_{30} = \frac{5 - 111}{2} \cdot 30 = -1590$$

$$a_{10} = 5 + 9 \cdot (-4) = -31$$

$$S_{10} = \frac{5 - 31}{2} \cdot 10 = -130$$

$$S_{30} - S_{10} = -1590 - (-130) = \underline{\underline{-1460}}$$

..... Ustalamy wzór ogólny ciągu (a_n) , korzystając ze wzoru $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

..... Korzystamy ze wzoru $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

ZADANIE Liczby -9, -3, 3 są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) . Oblicz sumę $a_5 + a_6 + \dots + a_{20}$.

Uwaga. Zadanie w powyższym przykładzie można było rozwiązać inaczej — zauważyć, że liczbę $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{30}$ można potraktować jako sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, którego pierwszym wyrazem jest a_{11} , a dwudziestym wyrazem jest a_{30} .

zadania 1–18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Oblicz sumę dwudziestu jeden początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 42$ i $r = -3$.
 b) Oblicz sumę trzydziestu pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 8 - 5n$.
 c) Oblicz sumę stu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $-5\frac{1}{2}, -5, -4\frac{1}{2}, \dots$.
 d) W ciągu arytmetycznym dane są: $a_4 = -1,9$ i $a_7 = -4$. Oblicz sumę dwiętnastu początkowych wyrazów tego ciągu.

2. Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 21 oraz $a_7 = 3\frac{2}{3}$. Oblicz a_1 i r .

3. Oblicz sumę pięćdziesięciu początkowych dodatnich liczb parzystych.

4. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny i $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Znajdź pierwszy wyraz i różnicę ciągu (a_n) , jeżeli wiadomo, że:

a) $S_2 = -24, a_2 = 12$

b) $S_2 = 13, S_3 = 16$

c) $S_n = 4n^2 - 9n$

- 5. a)** Oblicz sumę wyrazów od dziesiątego do trzydziestego ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = -5$ i $r = \frac{1}{2}$.
- b)** Dla ciągu arytmetycznego dane są sumy: $S_{10} = -37,5$, $S_{20} = 25$. Oblicz sumę trzydziestu początkowych wyrazów tego ciągu.
- c)** Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, w którym $S_{20} = 33$ i $S_{30} = 86$.

6. Ile zapalek potrzeba do ułożenia dwudziestu figur podanego ciągu arytmetycznego? Ile figur tego ciągu można ułożyć z 1000 zapalek?



7. W pierwszym rzędzie amfiteatru może zasiąść 40 osób, a w każdym następnym rzędzie — o 8 osób więcej.

- a) Ile miejsc znajduje się w ostatnim, dwudziestym pierwszym rzędzie?
- b) Ile wszystkich miejsc ma ten amfiteatr?



8. Dachówki są ułożone na jednej połaci dachu w szesnastu rzędach. Najniższy rząd składa się ze 130 dachówek, a w każdym następnym rzędzie leży o 5 dachówek mniej niż w rzędzie poprzednim. Ile dachówek leży w najwyższym rzędzie? Ile dachówek leży na całej połaci dachu?

9. Która z dwóch podanych ofert jest bardziej opłacalna? Oblicz w obu przypadkach sumę zarobionych w ciągu 5 lat pieniędzy.

Oferta 1: Wynagrodzenie wypłacane jest co pół roku. Pierwsza wypłata wyniesie 10 000 zł, a po każdym następnym półroczu dostaniesz 100 zł podwyżki.

Oferta 2: Wynagrodzenie wypłacane jest raz w roku. Pierwsza wypłata wyniesie 21 100 zł, a po każdym następnym roku dostaniesz 200 zł podwyżki.

10. Układamy domek z kart tak, że w każdej kondygnacji jest o 3 karty mniej niż w poprzedniej, a najwyższe „piętro” jest zbudowane z dwóch kart.

a) Ile kondygnacji może mieć domek zbudowany z dwóch talii kart (tzn. ze 104 kart)? Ile kart potrzeba do ułożenia parteru tego domku?

b) Według książki rekordów Guinnessa najwyższa budowla ułożona z kart miała 131 kondygnacji. Ile talii kart potrzeba do ułożenia tak wysokiego domku w sposób, który opisano na początku?



11. a) Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 210.

b) Oblicz sumę wszystkich trzycyfrowych liczb naturalnych.

c) Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych większych od 39 i mniejszych od 93.

12. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych:

a) podzielnych przez 3 i mniejszych od 1000,

b) niepodzielnych przez 5 i mniejszych od 500,

c) mniejszych od 200, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 2.

13. Oblicz sumę wyrazów ciągu arytmetycznego.

a) $2 + 4 + 6 + \dots + 248$

c) $-34 - 38 - 42 - \dots - 126$

b) $12,5 + 11,25 + 10 + \dots + (-5)$

d) $29\frac{1}{3} + 28\frac{2}{3} + 28 + \dots + 17\frac{1}{3}$

14. Oblicz sumę.

a) $13,7 + \frac{2}{7} + 13,3 + \frac{5}{7} + 12,9 + 1\frac{1}{7} + \dots + 8,1 + 6\frac{2}{7}$

b) $12 - 7 + 10 - 4 + 8 - 1 + 6 + 2 + \dots - 20 + 41$

c) $-129 - 6 - 123 - 11 - 117 - 16 - 111 - 21 - \dots - 69 - 56$

15. Ile początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego wystarczy dodać, aby otrzymana suma była większa od liczby p ?

a) $-2,7, -2,1, -1,5, -0,9, \dots, \quad p = 2$

c) $a_3 = 1, \quad a_2 = \frac{4}{5}, \quad p = 13$

b) $a_1 = -59, \quad r = 10, \quad p = -29$

d) $S_5 = -35, \quad a_5 = -1, \quad p = 0$

16. Lewa strona równania jest sumą wyrazów ciągu arytmetycznego. Rozwiąż to równanie.

a) $0,2 + (0,2 + x) + (0,2 + 2x) + \dots + (0,2 + 19x) = -129$

b) $x + (x + 3) + (x + 6) + \dots + (x + 57) = 580$

17. Lewa strona równania jest sumą wyrazów ciągu arytmetycznego. Rozwiąż to równanie.

a) $13 + 11 + 9 + \dots + x = -51$

b) $-24,3 - 23,7 - 23,1 - \dots - x = -480$

18. Udowodnij, że:

a) suma wszystkich liczb parzystych od 2 do $2n$ jest równa $n(n+1)$,

b) suma wszystkich liczb nieparzystych od 1 do $2n-1$ jest równa n^2 .

MINISPRAWDZIAN

51. W ciągu arytmetycznym dane są: $a_6 = -1$ i $a_8 = -7$. Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. -48

B. -32

C. 28

D. 48

52. Suma wszystkich dwucyfrowych liczb nieparzystych wynosi:

A. 2200

B. 2420

C. 2475

D. 4895

53. Suma pewnej liczby kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 65. Pierwszy z tych wyrazów jest równy 8, a ostatni 18. Ile wyrazów zsumowano?

A. 13

B. 26

C. 5

D. 9

CIĄG GEOMETRYCZNY

- 1 Załóżmy, że ktoś wysłał do 100 osób SMS o treści, którą podano obok. Przypuśćmy też, że każda osoba, która otrzymała taką wiadomość, wysłała cztery SMS-y o tej samej treści. W takim razie każdego dnia wysyłano takich SMS-ów 4 razy więcej niż dnia poprzedniego.

SMS-OWY ŁAŃCUSZEK SZCZĘŚCIA. Jutro rano wyślij ten SMS do czterech osób. Wkrótce spotka cię coś bardzo miłego. Nie przerywaj łańcuszka! Jacek L. przerwał i wypadły mu włosy. Te same włosy wyrosły z kolei tysemu Marcinowi K., który łańcuszka nie przerwał.

Zatem liczby wysłanych SMS-ów w kolejnych dniach wynosiłyby:

$$100, 100 \cdot 4, 100 \cdot 4^2, 100 \cdot 4^3, 100 \cdot 4^4, 100 \cdot 4^5, 100 \cdot 4^6, \dots$$

Łatwo zauważyć, że dziesiątego dnia liczba wysłanych SMS-ów wyniosłaby $100 \cdot 4^9$, czyli ponad 26 milionów. Liczba SMS-ów wysłanych jedenastego dnia byłaby więc znacznie większa niż liczba mieszkańców Polski.

Kolejne wyrazy ciągu $100, 100 \cdot 4, 100 \cdot 4^2, \dots$ otrzymaliśmy, mnożąc poprzedni wyraz przez 4.

Jeśli ciąg (a_n) ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia poprzedniego wyrazu przez pewną stałą liczbę q , to taki ciąg nazywamy **geometrycznym**. Liczbę q nazywamy **ilorazem ciągu**.

Wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego
o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

ĆWICZENIE A Zapisz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego o podanym pierwszym wyrazie i ilorazie.

a) $a_1 = 18, \quad q = \frac{2}{3}$

b) $a_1 = 1, \quad q = \sqrt{2}$

c) $a_1 = -\pi, \quad q = -1$

Zauważ, że dla dowolnych dwóch kolejnych (niezerowych) wyrazów a_n i a_{n+1} ciągu geometrycznego zachodzi równość $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Zatem aby stwierdzić, czy dany ciąg o wyrazach różnych od 0 jest geometryczny, wystarczy sprawdzić, czy dzieląc wyraz przez wyraz go poprzedzający, otrzymujemy zawsze tę samą liczbę.

ĆWICZENIE B Niech (a_n) oznacza ciąg geometryczny o ilorazie q (gdzie $q \neq 0$).

a) Który wyraz tego ciągu otrzymamy, gdy wyraz a_{37} pomnożymy przez q^2 , a który — gdy wyraz a_{101} podzielimy przez q^5 ?

b) Zapisz za pomocą a_n oraz q wyrazy a_{n-1} i a_{n+1} . Wykaż, że gdy $n > 1$, to zachodzi równość $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

Gdy wyraz a_n ciągu geometrycznego nie jest ani pierwszym, ani ostatnim wyrazem, to zachodzi równość:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Z tej równości wynika, że:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{lub} \quad a_n = -\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Średnią geometryczną liczb dodatnich p i q jest liczba $\sqrt{pq}$. Zatem w ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich wyraz a_n jest średnią geometryczną dwóch sąsiednich wyrazów. Tej własności ciąg geometryczny zawdzięcza zapewne swą nazwę.

- II | **ĆWICZENIE C** Podaj przykład ciągu geometrycznego, który:
- jest rosnący i jego pierwszy wyraz jest liczbą dodatnią,
 - jest malejący i jego pierwszy wyraz jest liczbą ujemną,
 - nie jest ani rosnący, ani malejący,
 - jest stały i jego trzeci wyraz jest liczbą ujemną.

Ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q jest:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| • ciągiem rosnącym, gdy: | • ciągiem malejącym, gdy: |
| $a_1 > 0$ i $q > 1$ | $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$ |
| (np. 0,7, 7, 70, 700, ...) | (np. 6, 3, 1,5, 0,75, ...) |
| lub | lub |
| $a_1 < 0$ i $0 < q < 1$ | $a_1 < 0$ i $q > 1$ |
| (np. -0,5, -0,05, -0,005, ...) | (np. -10, -20, -40, -80, ...) |

Ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie $q < 0$ nie jest ani rosnący, ani malejący.

Ciąg geometryczny o ilorazie $q = 1$ jest ciągiem stałym. Ciągiem stałym jest także ciąg geometryczny, którego pierwszy wyraz jest równy 0.

zadania 11–12 ►

- III | W ciągu geometrycznym (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q kolejne wyrazy są równe:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= a_1 \cdot q \\
 a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 q^2 \\
 a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 q^3 \\
 &\text{itd.}
 \end{aligned}$$

Na podstawie tych równości można sformułować wzór ogólny ciągu (a_n) .

Wzór ogólny ciągu geometrycznego
o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Oto przykłady ciągów geometrycznych i ich wzory rekurencyjne i ogólny:

CIĄG GEOMETRYCZNY	WZÓR REKURENCYJNY	WZÓR OGÓLNY
• $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 9\sqrt{2}, \dots$	$a_1 = \sqrt{2} \quad a_{n+1} = 3a_n$	$a_n = \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}$
• $3, -\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \dots$	$a_1 = 3 \quad a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$	$a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
• $-90, -9, -0,9, \dots$	$a_1 = -90 \quad a_{n+1} = 0,1a_n$	$a_n = -90 \cdot 0,1^{n-1}$

PRZYKŁAD 1 W ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy 2, a piąty wyraz jest o 40 większy od trzeciego. Znajdź wzór ogólny tego ciągu.

$$a_5 = a_3 + 40$$

$$2q^4 = 2q^2 + 40$$

$$q^4 - q^2 - 20 = 0$$

Niech $q^2 = t$. Wówczas $t^2 - t - 20 = 0$

$$\Delta = 1 + 80 = 81$$

$$t_1 = \frac{1+9}{2} = 5 \qquad t_2 = \frac{1-9}{2} = -4$$

$$q^2 = 5 \qquad \text{lub} \qquad q^2 = -4$$

$$q = \sqrt{5} \quad \text{lub} \quad q = -\sqrt{5} \qquad \text{równanie sprzeczne}$$

$$a_n = 2 \cdot (\sqrt{5})^{n-1} \quad \text{lub} \quad a_n = 2 \cdot (-\sqrt{5})^{n-1} \quad \text{Dwa ciągi spełniają warunki zadania.}$$

ZADANIE W ciągu geometrycznym (a_n) o pierwszym wyrazie równym 5 wyraz a_7 jest o 10 większy niż wyraz a_4 . Znajdź wzór ogólny tego ciągu.

zadania 13–18 ►

IV PRZYKŁAD 2 Znajdź różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że $a_6 = 1$ oraz wyrazy a_2 , a_6 i a_{26} to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

$$a_2 = a_6 - 4r = 1 - 4r \qquad a_{26} = a_6 + 20r = 1 + 20r$$

Ciąg a_2 , a_6 i a_{26} jest ciągiem geometrycznym.

Wiemy, że $a_2 \neq 0$.

Gdyby $a_2 = 0$, to każdy kolejny wyraz także byłby równy 0. Wiemy zaś, że $a_6 = 1$.

Zachodzi zatem równanie:

$$\frac{a_{26}}{a_6} = \frac{a_6}{a_2}$$

$$\frac{1+20r}{1} = \frac{1}{1-4r}$$

$$(1+20r)(1-4r) = 1$$

$$1 - 4r + 20r - 80r^2 = 1$$

$$80r^2 - 16r = 0 \quad | : 16$$

$$5r^2 - r = 0$$

$$r(5r - 1) = 0$$

$$r = 0 \quad \text{lub} \quad r = \frac{1}{5}$$

ZADANIE Znajdź różnicę r ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli wiadomo, że $a_1 = 28$ oraz wyrazy a_1 , a_3 i a_4 to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

zadania 19–20 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Czy podany ciąg jest geometryczny?

- a) $-\frac{4}{27}, \frac{2}{9}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ b) $14, 2, \frac{2}{7}, \frac{1}{2}$ c) $5\sqrt{5}, \sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{5\sqrt{5}}$

2. Podany ciąg jest ciągiem geometrycznym. Oblicz iloraz tego ciągu.

- a) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$ d) $-3, -0,3, -0,03, -0,003, -0,0003, \dots$
b) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8, \dots$ d) $1 + \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{6}, 3 + 3\sqrt{2}, 3\sqrt{3} + 3\sqrt{6}, \dots$

3. Podany ciąg jest ciągiem geometrycznym. Znajdź kolejny wyraz tego ciągu.

- a) $10, 100, 1000, \dots$ c) $\frac{3}{7}, -1, \frac{7}{3}, -\frac{49}{9}, \dots$ e) $200, 2, 0,02, 0,0002, \dots$
b) $\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}, 5, 5\sqrt[3]{5}, \dots$ d) $1, -1, 1, -1, \dots$ f) $1 + \sqrt{5}, (1 + \sqrt{5})^3, \dots$

4. Podany ciąg jest ciągiem geometrycznym. Znajdź a_1 oraz a_4 .

- a) $a_1, -3, 15, a_4, \dots$ b) $a_1, 2, 7, a_4, \dots$ c) $a_1, 204, -68, a_4, \dots$

5. Podany ciąg liczb jest ciągiem geometrycznym. Znajdź jego iloraz i oblicz następny wyraz tego ciągu.

- a) $\log 2, \log 4, \log 16, \dots$ b) $\log 3, \log \frac{1}{9}, \log 81, \dots$

6. Znajdź liczbę x , dla której podany ciąg jest geometryczny.

- a) $-6, 15, \frac{x}{2}$ b) $-4, x + 1, -25$ c) $3 + x, x, 3$

7. a) Pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego jest liczba $-0,15$, a trzecim -6 . Znajdź drugi wyraz tego ciągu.

b) Dany jest ciąg geometryczny: $25, x, y, 12\frac{4}{5}$. Znajdź liczby x i y .

c) Wstaw pomiędzy liczby 16 i 81 takie trzy liczby, by razem tworzyły pięć kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

d) Szósty wyraz pewnego ciągu geometrycznego o niezerowych wyrazach jest dwa razy większy od wyrazu trzeciego. Znajdź iloraz tego ciągu.

8. Które z ciągów o podanych wyrazach ogólnych są ciągami geometrycznymi?

$$a_n = 4 - 3^n \quad b_n = \frac{2}{11^n} \quad c_n = 2^n \cdot 7^{n+2} \quad d_n = 3 \cdot 5^{n-3} \quad e_n = 6n^2$$

9. a) Piąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego jest równy -5 . Czy siódmym wyrazem tego ciągu może być liczba 20?

b) Wykaż, że w ciągu geometrycznym o wyrazach różnych od zera wyrazy a_n i a_{n+2} mają taki sam znak.

c) Czy istnieje taki ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_{12} = 8$ i $a_{28} = -64$?

- **10. a)** Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $\sqrt{7}$, a jeden z następnych wyrazów tego ciągu jest równy 0. Podaj a_{127} .
- b)** W ciągu geometrycznym (b_n) czwarty wyraz jest równy 3, a wyrazy b_{17} i b_{25} są jednakowe. Podaj b_{100} .

◀ **11.** Określ monotoniczność podanego ciągu geometrycznego.

- a) $a_n = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ c) $c_n = \frac{-5^n}{10}$ e) $e_n = \frac{-8}{4^n}$
 b) $b_n = 100 \cdot 0,1^n$ d) $d_n = -9 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^n$ f) $f_n = 5 \cdot 1,1^{-n}$

- **12.** Spośród liczb -3 , $-\frac{2}{3}$, 0 , $\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, 5 wybieramy dwie różne i tworzymy ciąg geometryczny (a_n) w taki sposób, że jedna z tych liczb jest pierwszym wyrazem ciągu, a druga — jego ilorazem.

- a)** Wybierz a_1 i q tak, by ciąg (a_n) był ciągiem malejącym. Ile takich ciągów można utworzyć?
- b)** Ustal, ile ciągów rosnących o wyrazach ujemnych można utworzyć w ten sposób.

◀ **13. a)** Podane ciągi są ciągami geometrycznymi. Zapisz wzory ogólne i rekurencyjne tych ciągów.

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \dots \quad 5\sqrt{2}, 10, 10\sqrt{2}, \dots \quad -2, 1, -\frac{1}{2}, \dots$$

- b)** Zapisz wzory ogólne ciągów geometrycznych (określonych rekurencyjnie):

$$a_1 = 13 \text{ i } a_{n+1} = 5a_n \quad b_1 = -0,4 \text{ i } b_{n+1} = \frac{b_n}{7} \quad c_1 = \frac{3}{4} \text{ i } c_{n+1} = -9c_n$$

- c)** Zapisz wzory rekurencyjne ciągów geometrycznych (określonych za pomocą wzorów ogólnych):

$$x_n = 19 \cdot (-0,7)^{n-1} \quad y_n = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad z_n = \frac{-5}{3^n}$$

14. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

- a)** Znajdź iloraz tego ciągu oraz a_{10} , jeśli $a_1 = 1$ i $a_{11} = 32$.
- b)** Znajdź iloraz tego ciągu oraz a_{10} , jeśli $a_9 = 0,28$ i $a_{13} = 175$.
- c)** Znajdź a_4 , jeśli $a_{10} = 24$ i $q = \sqrt{2}$.
- d)** Znajdź a_{10} , jeśli $a_{13} = -1$ i $a_{15} = -\frac{1}{9}$.

15. Sprawdź, czy liczba b jest wyrazem podanego ciągu geometrycznego.

- a)** $1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \dots$ $b = \frac{243}{625}$ **b)** $6, 4, 2\frac{2}{3}, \dots$ $b = \frac{64}{81}$

16. Wyobraź sobie ogromny arkusz papieru o grubości 0,1 mm. Arkusz ten składamy na pół, potem jeszcze raz na pół i jeszcze raz na pół.

- a)** Zapisz wzór pozwalający obliczyć grubość złożonego arkusza po n złożeniach.
- b)** Oblicz grubość złożonego arkusza, gdyby udało się go złożyć 30 razy.

- **17.** Masa pierwiastka promieniotwórczego zmniejsza się o połowę po upływie pewnego określonego dla niego czasu, nazywanego okresem połowicznego rozpadu.
- a) W próbówce znajduje się m_0 gramów pewnego pierwiastka promieniotwórczego. Zapisz wzór pozwalający obliczyć masę tego pierwiastka, który będzie w próbówce po upływie n okresów połowicznego rozpadu.
- b) Okres połowicznego rozpadu izotopu jodu ^{131}I wynosi około 8 dni. Zmierzone, że pewna próbka zawiera 0,4 mg jodu ^{131}I . Oblicz masę izotopu ^{131}I , jaką zawierała ta próbka 40 dni wcześniej.

18. Moc obliczeniowa to największa możliwa liczba operacji wykonywanych przez komputer w ciągu sekundy. W 1965 roku Amerykanin Gordon Moore (czyt. mur) sformułował zasadę znaną jako prawo Moore'a: *Moc obliczeniowa komputerów podwaja się co 18 miesięcy.* W 1994 roku najszybszym komputerem na świecie był Paragon wykonujący około $15 \cdot 10^{10}$ operacji na sekundę. Najszybsze komputery w 2000 roku wykonywały około $2,4 \cdot 10^{12}$ operacji na sekundę. Czy wzrost mocy obliczeniowej w latach 1994–2000 był zgodny z prawem Moore'a?



- ◀ **IV 19.** Pierwszym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego jest liczba 1. Drugi, trzeci i piąty wyraz tego ciągu są kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu geometrycznego. Zapisz wzór ogólny ciągu geometrycznego.

20. Liczby a , b i c to kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Ich suma wynosi 45. Liczby $\frac{a}{4}$, $b - 3$, $c + 30$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znajdź a , b i c .

MINISPRAWDZIAN

51. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym, w którym pierwszy wyraz jest równy 6, a iloraz wynosi $\frac{1}{3}$. Która z poniższych równości nie jest prawdziwa?

- A. $a_3 = \frac{2}{3}$ B. $a_{11} = \frac{2}{3^9}$ C. $\frac{a_{20}}{a_{21}} = 3$ D. $a_{13} \cdot a_{12} = \frac{1}{3}$

52. Piątym wyrazem pewnego ciągu geometrycznego jest $\frac{1}{\sqrt{2}}$, a jego ósmym wyrazem jest 2. Iloraz tego ciągu jest równy:

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 2

53. Iloraz pewnego ciągu geometrycznego wynosi 2, a suma dwóch początkowych wyrazów jest równa 14. Suma czterech początkowych wyrazów jest równa:

- A. 28 B. 56 C. 64 D. 70

SUMA WYRAZÓW CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

- 1 Przyjmijmy, że (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 1$, czyli że (a_n) nie jest ciągiem stałym. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Mnożąc obie strony powyższej równości przez q , otrzymujemy:

$$S_n q = \underbrace{a_1 q}_{a_2} + \underbrace{a_2 q}_{a_3} + \underbrace{a_3 q}_{a_4} + \dots + \underbrace{a_{n-1} q}_{a_n} + \underbrace{a_n q}_{a_{n+1}}$$

Wobec tego liczba $S_n q$ jest równa sumie wyrazów od a_2 do a_{n+1} . Zatem:

$$S_n - S_n q = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1})$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{gd}y \quad q \neq 1$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

ĆWICZENIE Oblicz sumę wyrazów skończonego ciągu geometrycznego:

a) 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729

b) 1, $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $-\frac{8}{27}$, $\frac{16}{81}$

Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = 1$, czyli jest ciągiem stałym, to $S_n = na_1$.

PRZYKŁAD Składniki podanej sumy to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz tę sumę.

$$4 + 12 + 36 + \dots + 4 \cdot 3^{10}$$

$$a_1 = 4, \quad q = \frac{12}{4} = 3, \quad a_n = 4 \cdot 3^{10}$$

$$4 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^{10}$$

$$n - 1 = 10$$

$$n = 11$$

$$S_{11} = 4 \cdot \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 4 \cdot \frac{1 - 177147}{-2} = \underline{354\,292}$$

Korzystając z równości $q = \frac{a_2}{a_1}$, znajdujemy iloraz, a następnie wzór ogólny ciągu.

Ustalamy, którym wyrazem ciągu jest wyraz $4 \cdot 3^{10}$, korzystając ze wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Zatem jest 11 składników sumy.

ZADANIE Składniki sumy $-3 - 6 - 12 - \dots - 3 \cdot 2^{15}$ to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz tę sumę.

zadania 1-7

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz sumę:

- a) pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 3$ i $q = -2$,
- b) siedmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $b_n = \frac{5}{2^n}$,
- c) sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego 22, -66, 198, ...

2. Oblicz podaną sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

- a) $3 + 15 + 75 + \dots + 3 \cdot 5^9$
- b) $-1 - \frac{3}{2} - \frac{9}{4} - \dots - \frac{243}{32}$
- c) $50 - 10 + 2 - \dots + \frac{2}{625}$
- d) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \dots - \frac{1}{3072}$

3. a) Każdy człowiek ma dwoje rodziców, czworo dziadków, ośmioro pradziadków itd. Oblicz liczbę wszystkich swoich przodków w 10 pokoleniach.

b) Przyjmijmy, że co 25 lat rodzi się nowe pokolenie. Ilu twoich przodków urodziło się w ciągu ostatnich 2000 lat? Szacuje się, że od zarania ludzkości na Ziemi żyło $11 \cdot 10^{10}$ ludzi. Wytlumacz sprzeczność między tą liczbą a otrzymanym rezultatem.

4. Grę w szachy wymyślono w Indiach. Legenda głosi, że władca Indii zachwycony tą grą postanowił nagrodzić jej twórcę, proponując mu, by sam wybrał nagrodę. Sprytny wynalazca poprosił o jedno ziarno pszenicy za pierwsze pole szachownicy, dwa ziarna za drugie, a za każde następne 2 razy więcej ziaren niż za pole poprzednie.



- a) Zapisz wzór, który przedstawia liczbę ziaren za n -te pole szachownicy.
- b) Oszacuj, ile ton pszenicy miałby otrzymać wynalazca szachów. Możesz przyjąć, że 4 tony pszenicy to około 10^8 ziaren. Na świecie produkuje się około 600 mln ton pszenicy rocznie. Porównaj otrzymany wynik z tą liczbą.

5. Piłkę upuszczono z wysokości 2 m. Po każdym odbiciu się od podłogi piłka wznosi się na wysokość równą 0,7 wysokości, z której opadała. Oblicz:

- a) wysokość, na którą wzniesie się piłka po piątym odbiciu się od podłogi,
- b) drogę, jaką pokona piłka od momentu puszczenia jej do momentu szóstego odbicia się od podłogi.



6. Sześcian, który jest podstawą budowli przedstawionej na rysunku, ma krawędź długości 30 m. Krawędź każdego następnego sześcianu jest o $\frac{1}{3}$ krótsza od krawędzi sześcianu poniżej. Oblicz wysokość budowli, jej pole powierzchni całkowitej oraz objętość.

7. Oblicz sumę wyrazów ciągu.

a) $5 - 4 + 25 - 8 + 125 - 16 + \dots + 5^7 - 2^8$

b) $3 - 1 + 9 - 4 + 27 - 7 + \dots + 3^{10} - 28$

MINISPRAWDZIAN

51. Suma ośmiu początkowych wyrazów ciągu określonego za pomocą wzoru $a_n = \frac{0,3^n}{9}$, zaokrąglona do części dziesięciotysięcznych, jest równa:

- A. 0,0476 B. 3,6666 C. 0,9303 D. 2,4932

52. Suma czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie $\frac{1}{2}$ wynosi 75. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

- A. $\frac{15}{8}$ B. 8 C. 40 D. 60

53. Składniki sumy $10 + 50 + \dots + 2 \cdot 5^6$ to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Suma ta jest równa:

- A. 39 060 B. 31 248 C. 26 040 D. 156 248

PROCENT PROSTY I PROCENT SKŁADANY

- I Wyobraź sobie, że niespodziewanie odwiedził cię bogaty krewny i obiecał, że przez najbliższe dwa lata będzie ci co miesiąc wypłacał kieszonkowe. Złożył przy tym dwie propozycje do wyboru.

PROPOZYCJA I

W pierwszym miesiącu otrzymasz kwotę 100 zł, a w każdym następnym — więcej niż w poprzednim o kwotę równą 50% kieszonkowego w pierwszym miesiącu.

PROPOZYCJA II

W pierwszym miesiącu otrzymasz 2 zł, a w każdym następnym miesiącu — o 50% więcej niż w poprzednim miesiącu.

Która propozycja wydaje się korzystniejsza?

ĆWICZENIE A Oblicz, ile wyniosłoby kieszonkowe w trzecim miesiącu według pierwszej propozycji, a ile — według drugiej.

Niech K_n oznacza kieszonkowe (w złotych) otrzymane w n -tym miesiącu. Zatem wypłaty w kolejnych miesiącach wyniosłyby:

PROPOZYCJA I	PROPOZYCJA II
$K_1 = 100$	$K_1 = 2$
$K_2 = K_1 + 50 = 100 + 50$	$K_2 = K_1 \cdot 1,5 = 2 \cdot 1,5$
$K_3 = K_2 + 50 = 100 + 2 \cdot 50$	$K_3 = K_2 \cdot 1,5 = 2 \cdot 1,5^2$
$K_4 = K_3 + 50 = 100 + 3 \cdot 50$	$K_4 = K_3 \cdot 1,5 = 2 \cdot 1,5^3$
$\vdots$	$\vdots$
$K_n = K_{n-1} + 50 = 100 + (n-1) \cdot 50$	$K_n = K_{n-1} \cdot 1,5 = 2 \cdot 1,5^{n-1}$

Łatwo zauważyć, że kolejne wypłaty obliczone według reguły z pierwszej propozycji tworzą ciąg arytmetyczny (o pierwszym wyrazie $K_1 = 100$ i różnicy $r = 50$), a według drugiej — ciąg geometryczny (o pierwszym wyrazie $K_1 = 2$ i ilorazie $q = 1,5$). Korzystając z powyższych wzorów ogólnych, można porównać kieszonkowe po pierwszym roku i po drugim.

	PROPOZYCJA I	PROPOZYCJA II
K_{12}	$100 + 11 \cdot 50 = 650$	$2 \cdot 1,5^{11} \approx 173$
K_{24}	$100 + 23 \cdot 50 = 1250$	$2 \cdot 1,5^{23} \approx 22\,445$

Jak widać, w ostatnim miesiącu drugiego roku wypłaty naliczone według drugiej propozycji byłyby zdecydowanie wyższe.

ĆWICZENIE B Propozycja druga stała się w pewnym momencie korzystniejsza. Uzasadnij, że zdarzyło się to w szesnastym miesiącu.

Aby porównać oba warianty, należałoby obliczyć sumę wszystkich wypłat. W tym celu możemy skorzystać ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

PROPOZYCJA I	PROPOZYCJA II
$S_{24} = \frac{K_1 + K_{24}}{2} \cdot 24 =$ $= \frac{100 + 1250}{2} \cdot 24 = 16\,200$	$S_{24} = K_1 \cdot \frac{1 - q^{24}}{1 - q} =$ $= 2 \cdot \frac{1 - 1,5^{24}}{1 - 1,5} \approx 67\,332$

Choć propozycja druga wydawała się początkowo mało atrakcyjna, okazała się jednak dużo korzystniejsza.

Opisane powyżej sytuacje przypominają dwa najczęściej spotykane sposoby naliczania odsetek przy różnych operacjach finansowych.

Jeżeli odsetki są naliczane od stałej kwoty, to mamy do czynienia z procentem prostym. Wtedy kapitał końcowy obliczamy według wzoru podanego obok.

PROCENT PROSTY

$$K_n = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot n$$

K_0 — kapitał początkowy

p — oprocentowanie za jeden okres naliczania odsetek

n — liczba okresów naliczania odsetek

K_n — kapitał z odsetkami po n okresach

PRZYKŁAD 1 Warunki kredytowe są następujące: przez 2 lata należy spłacać co miesiąc 1% pożyczonej kwoty, przy czym w ostatnim miesiącu oprócz odsetek trzeba oddać całą pożyczoną kwotę. Oblicz, jaką sumę trzeba będzie wpłacić pożyczkodawcy w ciągu 2 lat, jeśli na tych warunkach zaciągniemy kredyt 5000 zł.

$$K_0 = 5000 \text{ zł}, \quad p\% = 1\%, \quad n = 24$$

$$K_{24} = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot 24 \quad \vdots \quad K_{24} \text{ — suma do spłacenia po 24 miesiącach}$$

$$K_{24} = 5000 + 0,01 \cdot 5000 \cdot 24 = 6200$$

Odp. Suma wpłat wyniesie 6200 zł.

ZADANIE Warunki kredytu są następujące: przez 3 lata należy spłacać co miesiąc 2% pożyczonej kwoty i w ostatnim miesiącu oddać całą pożyczoną kwotę. Ile wyniesie suma odsetek, jeśli pożyczymy na tych warunkach 10 tysięcy złotych?

Jeżeli odsetki są naliczane od kapitału powiększonego o odsetki za wcześniejszy okres, mamy do czynienia z procentem składanym, tzn. jeśli kapitał początkowy wynosi K_0 , a oprocentowanie jest równe $p\%$, to po kolejnych okresach naliczania odsetek kapitał wraz z odsetkami wynosi:

$$\text{po pierwszym okresie: } K_1 = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

$$\text{po dwóch okresach: } K_2 = K_1 + \frac{p}{100} \cdot K_1 = K_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

$$\text{po trzech okresach: } K_3 = K_2 + \frac{p}{100} \cdot K_2 = K_2 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^3 \text{ itd.}$$

Ten sposób naliczania odsetek jest zwykle stosowany przez banki. Gdy bank dolicza kwotę odsetek do kapitału (stanu konta), to mówimy, że odsetki są kapitalizowane.

PROCENT SKŁADANY

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$$

K_0 — kapitał początkowy

p — oprocentowanie za jeden okres naliczania odsetek

n — liczba okresów naliczania odsetek

K_n — kapitał z odsetkami po n okresach

PRZYKŁAD 2 Na konto, którego oprocentowanie wynosi 4% w skali roku, wpłacono 10 000 zł. Oblicz, jaki będzie stan konta po upływie 5 lat, jeśli właściciel konta nie będzie dokonywał żadnych wpłat ani wypłat.

$$K_0 = 10\,000 \text{ zł}, \quad p\% = 4\%, \quad n = 5$$

$$K_5 = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \quad \vdots \quad K_5 \text{ — kwota na koncie po 5 latach}$$

$$\begin{aligned} K_5 &= 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = \\ &= 10\,000 \cdot (1,04)^5 \approx 12\,166,53 \end{aligned}$$

Odp. Po 5 latach na koncie będzie 12 166,53 zł.

ZADANIE Na konto, którego oprocentowanie wynosi 1% w skali roku, wpłacono 20 000 zł. Oblicz, jaki będzie stan konta po upływie 10 lat, jeśli właściciel nie będzie dokonywał żadnych wpłat ani wypłat.

zadania 1–4 ►

- II Przy lokatach krótszych niż rok bank kapitalizuje odsetki po każdym okresie trwania lokaty. Jeśli na przykład przez dłuższy czas pozostawimy pieniądze na lokacie 3-miesięcznej, to odsetki będą doliczane co kwartał.

Oprocentowanie lokat banki zawsze określają w skali roku, dotyczy to także lokat, które trwają krócej. Trzeba o tym pamiętać przy obliczaniu odsetek. Na przykład: gdy bank podaje, że oprocentowanie lokaty 3-miesięcznej wynosi 4%, to oznacza, że po 3 miesiącach odsetki wynoszą $\frac{3}{12} \cdot 4\%$ kwoty, która była na koncie.

PRZYKŁAD 3 Na lokatę 2-miesięczną wpłacamy 30 000 zł. Oprocentowanie lokaty wynosi 5%. Oblicz sumę odsetek z tej lokaty po półtora roku oszczędzania.

$$K_0 = 30\,000 \text{ zł}$$

$$p\% = \frac{2}{12} \cdot 5\% = \frac{5}{6}\%$$

$$n = 9$$

$$K_9 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^9 \quad \vdots \quad K_9 \text{ — kwota na koncie po 9 okresach naliczania odsetek.}$$

$$K_9 = 30\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{6 \cdot 100}\right)^9 \approx 32\,326,48$$

$$K_9 - K_0 \approx 2326,48 \quad \vdots \quad \text{Obliczamy sumę odsetek.}$$

Odp. Suma odsetek po półtora roku oszczędzania będzie równa 2326,48 zł.

ZADANIE Na lokatę półroczną wpłacamy 20 000 zł. Oprocentowanie lokaty jest równe 2%. Oblicz, ile wyniesie suma odsetek z tej lokaty po 5 latach.

zadania 5–9 ►

- III W przykładach 2 i 3, w których była mowa o oprocentowaniu lokat bankowych, nie uwzględniliśmy podatku. W rzeczywistości odsetki, które dopisuje bank do naszych oszczędności, traktowane są przez państwo jako nasz dochód. Dlatego zapłacimy od nich podatek. Wynosi on w Polsce 19% kwoty odsetek i jest automatycznie przekazywany przez bank do skarbu państwa po każdym naliczeniu odsetek. Po zapłaceniu podatku zostaje więc 81% odsetek. Można więc powiedzieć, że jeśli oprocentowanie lokaty w pewnym okresie wynosi $p\%$, to oprocentowanie netto w tym okresie jest równe $0,81 \cdot p\%$.

PRZYKŁAD 4 Na lokatę 6-miesięczną wpłacono 10 000 zł. Oprocentowanie lokaty jest równe 4%, a podatek od odsetek wynosi 19%. Oblicz, jaką kwotę odsetek otrzyma łącznie po dwóch latach właściciel konta, jeśli:

- będzie wypłacał odsetki co pół roku,
- nie będzie wypłacał pieniędzy z tego konta ani na nie wpłacał przed upływem dwóch lat.

$$K_0 = 10\,000$$

$$p\% \text{ (brutto)} = \frac{4}{2}\% = 2\% \quad \begin{array}{l} \vdots \text{ Obliczamy oprocentowanie brutto po pół roku.} \\ \vdots \end{array}$$

$$n = 4 \quad \begin{array}{l} \vdots \text{ W ciągu 2 lat odsetki zostaną naliczone 4 razy.} \\ \vdots \end{array}$$

$$\text{a) } K_a = 0,81 \cdot \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot n = 0,81 \cdot \frac{2}{100} \cdot 10\,000 \cdot 4 = 648 \text{ zł}$$

Odp. Suma wypłacanych co pół roku odsetek wyniesie 648 zł.

$$\text{b) } K_b = K_0 \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100}\right)^4 - K_0 = 10\,000 \left(1 + 0,81 \cdot \frac{2}{100}\right)^4 - 10\,000 = 663,92 \text{ zł}$$

Odp. Po dwóch latach suma odsetek wyniesie 663,92 zł.

ZADANIE Na lokatę 3-miesięczną wpłacono 50 000 zł. Oprocentowanie lokaty jest równe 2%, a podatek od odsetek wynosi 19%. Oblicz, jaką kwotę odsetek otrzyma łącznie po dwóch latach właściciel konta, jeśli:

- będzie wypłacał odsetki co 3 miesiące,
- nie będzie wypłacał pieniędzy z tego konta ani na nie wpłacał przed upływem dwóch lat.

zadania 10–16 ►

ZESTAW ZADAŃ

- II 1. Kasa pożyczkowa proponuje kredyty, które należy spłacić w całości po upływie ustalonego terminu, a do tego czasu trzeba po upływie każdego miesiąca wpłacać do kasy 2% pożyczonej kwoty (pierwsza wpłata po upływie miesiąca od zaciągnięcia pożyczki). Oblicz, jaką kwotę trzeba by w sumie wpłacić do kasy, pożyczając:

- a) 1000 zł na 1 rok, b) 10 000 zł na 8 miesięcy, c) 15 000 zł na 3 lata.

2. Cena pewnego towaru wynosi 1000 zł. Sprzedawca ma zamiar zmieniać ją co tydzień. Zapisz wzór, który pozwala obliczać, jaka będzie cena towaru po n tygodniach, jeśli co tydzień sprzedawca:

- a) będzie podwyższać cenę o 10% ceny początkowej,
- b) będzie obniżać cenę o 10% ceny początkowej,
- c) będzie podwyższać cenę o 2%,
- d) będzie obniżać cenę o 2%.

Uwaga. Rozwiązuj zadania 3–9, nie uwzględniając podatku od odsetek. Przyjmij też, że właściciel konta nie dokonuje wpłat ani wypłat w trakcie trwania lokaty.

3. Na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosi $p\%$, wpłacono kwotę K zł. Oblicz, jaki będzie stan tego konta, na którym ulokowano pieniądze, po upływie n lat, jeśli:

- | | |
|--|--|
| a) $K = 4000$, $p\% = 3\%$, $n = 5$ | c) $K = 35\,000$, $p\% = 2\%$, $n = 8$ |
| b) $K = 1200$, $p\% = 5\%$, $n = 10$ | d) $K = 5500$, $p\% = 3,5\%$, $n = 6$ |

4. a) Na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosi 3%, wpłacono 2000 zł. Po pewnym czasie stan oszczędności wyniósł 2388,10 zł. Oblicz, ile lat upłynęło.

b) Oblicz, jaką kwotę wpłacono na lokatę roczną, której oprocentowanie wynosiło 10%, skoro po upływie 4 lat oszczędzania na koncie znajdowało się 8052,55 zł.

c) Na lokatę roczną wpłacono 5200 zł i po 4 latach oszczędzania kwota ta wzrosła do 6201,10 zł. Oblicz oprocentowanie tej lokaty.

II **5.** Na lokatę terminową, oprocentowaną $p\%$ w stosunku rocznym, wpłacono kwotę 10 000 zł. Oblicz, jaki będzie stan tej lokaty po upływie okresu t , jeśli:

- a) lokata jest miesięczna, $p\% = 4\%$, $t = 2$ lata,
- b) lokata jest 3-miesięczna, $p\% = 3,5\%$, $t = 3$ lata,
- c) lokata jest 6-miesięczna, $p\% = 3\%$, $t = 3,5$ roku.

6. Pan Adam i pan Jan skorzystali z lokaty rocznej, której oprocentowanie wynosi 3%. Pan Adam wpłacił 10 000 zł, a pan Jan 20 000 zł. Oceń, które z podanych zdań są prawdziwe.

- ① Po trzech latach pan Adam otrzyma w sumie 1500 zł odsetek.
- ② Po drugim roku panu Janowi zostanie dopisana dwa razy większa łączna kwota odsetek niż panu Adamowi.
- ③ Po trzech latach na lokacie pana Jana zgromadzi się dwa razy więcej pieniędzy niż na lokacie pana Adama.
- ④ Po czterech latach pan Adam będzie miał na lokacie tyle samo co pan Jan po dwóch latach.

7. a) Na lokatę miesięczną oprocentowaną w wysokości 2% wpłacono 5000 zł. Po jakim czasie łączna kwota odsetek wyniesie ponad 200 zł?

b) Oblicz, jaką kwotę wpłacono na lokatę 3-miesięczną, której oprocentowanie wynosi 2,5%, skoro po upływie 2 lat oszczędzania na koncie znajduje się 7778,20 zł.

c) Jakie było oprocentowanie lokaty 3-miesięcznej, jeśli wpłacona kwota 7200 zł po trzech latach zwiększyła się o 913,14?

d) Kwotę 12 000 zł wpłacono na lokatę 3-letnią, ale odsetki doliczane były co pół roku. Kwota odsetek wyniosła w sumie 1513,95 zł. Oblicz oprocentowanie lokaty.

8. a) O ile procent wzrosnie po roku kwota wpłacona na lokatę miesięczną, której oprocentowanie wynosi 5%? (Odpowiedź podaj z dokładnością do dziesiątej części procenta).

b) Ustal, jak długo należałoby oszczędzać na lokacie półrocznej, której oprocentowanie wynosi 6%, by kwota na lokacie się podwoiła.

9. Bank proponuje lokatę miesięczną o stałym oprocentowaniu w wysokości 3% i lokatę półroczną o stałym oprocentowaniu 4%. Która z tych lokat przyniesie większe korzyści po dwóch latach od jej założenia?

◀ ||| **10.** Podatek od odsetek wynosi 19%.

a) Kwotę 10 000 zł wpłacono na lokatę półroczną o oprocentowaniu 4%. Oblicz, jaki będzie stan konta po 3 latach oszczędzania.

b) Po pięciu latach oszczędzania na lokacie rocznej, której oprocentowanie wynosiło 3%, stan konta zwiększył się o 5102,01 zł. Oblicz, jaki był stan konta po roku oszczędzania.

11. Pan Kowalski wpłacił 50 000 zł na lokatę miesięczną, której oprocentowanie wynosi 5%, i co miesiąc wypłaca odsetki pomniejszone o 19% podatku. Oblicz, jaką kwotę odsetek wypłaci w ciągu roku. O ile wyższa byłaby to kwota, gdyby łączne odsetki wypłacił po roku?

• **12.** Przypuśćmy, że kwotę 10 000 zł wpłacono na lokatę półroczną, której oprocentowanie wynosi 4%. Wiadomo, że przy tej lokacie co pół roku jest odprowadzany do skarbu państwa podatek od odsetek w wysokości 19%.

a) Oblicz, jaki podatek od odsetek zostanie odprowadzony do skarbu państwa, gdy pieniądze pozostaną na tej lokacie przez 1,5 roku.

b) Oblicz, jaki podatek od odsetek zostałby odprowadzony do skarbu państwa, gdyby podatek ten był obliczany dopiero po 1,5 rocznym oszczędzaniu od całej kwoty uzyskanych odsetek.

13. Miesięczne obroty pewnej firmy początkowo wynosiły 5000 zł, a następnie wzrastały systematycznie o 2% miesięcznie przez 1,5 roku. Oblicz, jakie obroty osiągnęła ta firma po osiemnastu miesiącach takiego wzrostu.

14. Pięć lat temu państwo Malinowscy kupili mieszkanie za 500 000 zł i spodziewali się, że co roku jego wartość będzie wzrastała o 10%. W rzeczywistości jego wartość wzrastała o 6% rocznie. O ile złotych obecna wartość tego mieszkania jest niższa od wartości, jakiej spodziewali się państwo Malinowscy?

15. Cena akcji pewnej firmy przez pięć kolejnych sesji giełdowych spadała o 4%. Oblicz, o ile procent cena po piątej sesji będzie niższa od ceny początkowej.

16. Przyjmijmy, że wartość samochodu co roku spada o 10%. Po ilu latach jego cena będzie mniejsza od połowy ceny początkowej?



MINISPRAWDZIAN

51. Pani Marta wpłaciła 10 000 zł na lokatę roczną, której oprocentowanie jest równe 4%. Każdego roku odsetki z tej lokaty są przekazywane na rachunek bieżący, a kwota na lokacie się nie zmienia. Po upływie 10 lat suma odsetek wpłaconych na rachunek będzie wynosić:

- A. 400 zł B. 3600 zł C. 4000 zł D. 4802 zł

52. Pani Jola wpłaciła 2500 zł na 3-miesięczną lokatę oprocentowaną 4% netto w skali roku. Wskaż stan konta na tej lokacie po dwóch latach.

- A. 2707,14 zł B. 3025 zł C. 3421,42 zł D. 3500 zł

53. Pan Nowak zainwestował 40 tys. zł w przedsięwzięcie i zakłada, że jego wartość po każdym roku będzie rosła o 15%. Po ilu latach wartość jego inwestycji wzrośnie dwukrotnie?

- A. po 4 latach B. po 5 latach C. po 6 latach D. po 7 latach

54. Kwotę K wpłacamy na lokatę 6-miesięczną, której oprocentowanie wynosi $p\%$. Wskaż stan konta po 2 latach, jeśli wiadomo, że podatek wynosi 19%.

- A. $K \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2} \right)^4$ C. $K \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2} \right)^2$
 B. $K \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100} \right)^4$ D. $K \left(1 + 0,81 \cdot \frac{p}{100} \right)^2$

POWTÓRZENIE

1. Dany jest ciąg $a_n = 7 - \frac{2n}{5}$.

a) Znajdź setny wyraz tego ciągu.

b) Którym wyrazem tego ciągu jest $2\frac{3}{5}$?

2. Ile wyrazów ciągu $a_n = n^2 - 30n + 300$ jest mniejszych od 100?

3. a) Znajdź wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie:

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 5a_n$$

b) Znajdź wzór rekurencyjny ciągu określonego wzorem ogólnym:

$$a_n = 2n + 17$$

4. Zapisz wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym $a_1 = 0,4$ oraz $a_{n+1} = a_n + 0,5$.

5. Dla jakiej wartości p liczby $5p - 4$, $p + 5$, 2 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

6. a) Znajdź wyraz a_{26} ciągu arytmetycznego, w którym $a_2 = 7$ i $a_3 = 5$.

b) Znajdź pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu arytmetycznego, w którym $a_{10} = -12$ i $a_5 = 3$.

7. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez 7 i mniejszych od 500.

8. Do pustej skarbanki na początku stycznia wrzucono 50 groszy i odąd co tydzień dorzucano kwotę o 10 groszy większą niż tydzień wcześniej. Jaką kwotę wrzucono do skarbanki w ostatnim tygodniu roku? Ile pieniędzy zgromadziło się w skarbanki przez cały rok? (Przyjmij, że rok to 52 tygodnie).

9. Dana jest funkcja $f(x) = 3x + 7$. Uzasadnij, że liczby $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... tworzą ciąg arytmetyczny. Zapisz wzór ogólny tego ciągu.

10. Oblicz, dla jakiej liczby n sumy n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 6, 18, 30, ... i ciągu arytmetycznego 18, 24, 30, ... są równe.

11. Tylko jeden z ciągów: $a_n = 1 + 2^n$, $b_n = \frac{3^n}{4}$, $c_n = 2^n - 3^n$ jest geometryczny. Wskaż ten ciąg oraz znajdź jego pierwszy wyraz i iloraz.

12. W pewnym ciągu geometrycznym $a_6 = 5$ i $a_8 = 10$. Znajdź a_1 , a_7 i a_{10} .

13. Siódmy wyraz pewnego ciągu geometrycznego jest 16 razy większy od wyrazu trzeciego. Ile razy większy jest dwudziesty wyraz tego ciągu od wyrazu dziesiątego?

14. Dana jest liczba:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$$

Czy liczba a jest większa czy mniejsza od 1? O ile?

15. Do dziesięciu szklanek o pojemności 0,2 l wiano wodę. Pierwszą szklankę napełniono po brzegi. W każdej kolejnej szklance znajdowało się o połowę mniej wody niż w szklance poprzedniej. Czy woda ze wszystkich szklanek zmieści się w dwóch szklankach?

16. Oprocentowanie wieloletniej lokaty wynosi 6% netto w skali roku. Wpłacamy na nią 50 000 zł. Oblicz, o ile większa będzie kwota odsetek po czwartym roku oszczędzania od kwoty odsetek po trzecim roku oszczędzania.

Podobieństwo figur

Filary, które przedstawiono na fotografii, mają taką samą wysokość i stoją w jednakowych odległościach od siebie. Jednak te, które są dalej, wydają się mniejsze i wydaje się, że coraz mniejsze są także odległości między nimi. Wielkości te zmieniają się zgodnie z zasadami perspektywy. Zmianę tę można opisać za pomocą figur podobnych.



Twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

- Wielokąty podobne
- Cechy podobieństwa trójkątów
- Cechy podobieństwa trójkątów (cd.)
- Pola figur podobnych
- Powtórzenie

TWIERDZENIE TALESA I TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA TALESA

- ĆWICZENIE** Naskicuj dowolny kąt i dwie proste równoległe przecinające jego ramiona. Proste oznacz literami k i m , wierzchołek kąta — literą O , a punkty przecięcia prostych k i m z ramionami kąta — literami A, B, C, D tak, aby punkty A i C leżały na jednym ramieniu kąta, a punkty B i D — na drugim. Zmierz długości odpowiednich odcinków i oblicz ilorazy $\frac{|OA|}{|OB|}$ oraz $\frac{|OC|}{|OD|}$.

Twierdzenie Taleasa

Jeżeli dwie proste równoległe przecinają oba ramiona pewnego kąta, to długości odcinków wyznaczonych przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych na drugim ramieniu kąta.



Jeżeli $AB \parallel CD$, to $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$.

Dowód

Przyjmijmy, że proste AB i CD przedstawione na rysunku obok są równoległe.

Trójkąty ACB i ADB mają wspólny bok AB , a z równoległości prostych AB i CD wynika, że wysokości tych trójkątów opuszczone z wierzchołków C i D są równe. Zatem pola trójkątów ACB i ADB są równe.

Wynika stąd, że trójkąty OCB i OAD mają równe pola, ponieważ pole trójkąta OCB jest sumą pól trójkątów OAB i ACB , a pole trójkąta OAD jest sumą pól trójkątów OAB i ADB .

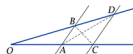
Trójkąty OAB i OCB mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka B , więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości boków OA i OC . Podobnie stosunek pól trójkątów OAB i OAD jest równy stosunkowi długości boków OB i OD .

$$\frac{P_{\triangle OAB}}{P_{\triangle OCB}} = \frac{|OA|}{|OC|} \quad \frac{P_{\triangle OAB}}{P_{\triangle OAD}} = \frac{|OB|}{|OD|}$$

Ponieważ $P_{\triangle OCB} = P_{\triangle OAD}$, więc z powyższych równości wynika równość:

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$$

Stąd: $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$ $\square$



Przyjrzyj się równościom, które zapisa-
no w ramce obok. Każdą z nich moż-
na uzasadnić, korzystając z twierdzenia
Talesa. Na przykład równość $\frac{e}{a} = \frac{e+f}{a+b}$
wynika wprost z tego twierdzenia. Prze-
kształcając tę równość, otrzymamy ko-
leijną równość $\frac{e}{a} = \frac{f}{b}$.

Pokażemy teraz, że zachodzi równość:

$$\frac{d}{c} = \frac{a+b}{a}$$

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku
obok oraz to, że proste AB i CD są
równoległe.

Pole trójkąta OCD jest sumą pól tró-
jkąta OAB i trapezu $CDBA$.

$$\frac{d(p+q)}{2} = \frac{cp}{2} + \frac{(d+c)q}{2}$$

Przekształcając tę równość, otrzymujemy:

$$dp + dq = cp + dq + cq$$

$$dp = c(p+q)$$

$$\frac{d}{c} = \frac{p+q}{p}$$

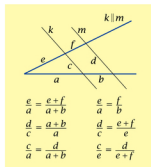
Z twierdzenia Talesa wiemy, że:

$$\frac{p+q}{a+b} = \frac{p}{a}$$

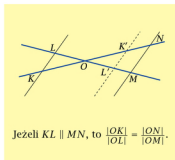
Stąd:

$$\frac{p+q}{p} = \frac{a+b}{a}$$

Wobec tego: $\frac{d}{c} = \frac{a+b}{a}$ $\square$



Twierdzenie Talesa można rozszerzyć do sytuacji, w której dwie równole-
głe proste przecinają dowolne dwie proste przecinające się.



Na rysunku obok przedstawiono równo-
ległe proste KL i MN , które przecina-
ją ramiona kątów wierzchołkowych. Na
półprostych ON i OM wybieramy punk-
ty K' i L' w taki sposób, aby $|OK'| =$
 $|OK|$ i $|OL'| = |OL|$. Trójkąt $OL'K'$ jest
wówczas przystający do trójkąta OLK . Za-
tem $K'L' \parallel NM$, czyli zachodzi równość:

$$\frac{|OK'|}{|OL'|} = \frac{|ON|}{|OM|}$$

Stąd wynika równość:

$$\frac{|OK|}{|OL|} = \frac{|ON|}{|OM|}$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli dwie proste przecinają oba ramiona pewnego kąta i odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.



Jeżeli $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$, to $AB \parallel CD$.

Dowód

Załóżmy, że punkty A i C leżą na jednym ramieniu kąta o wierzchołku O , a punkty B i D leżą na jego drugim ramieniu oraz, że $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$.

Jeśli przez punkt C poprowadzimy prostą równoległą do prostej AB i przetnie ona ramię kąta w punkcie C' , to $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC'|}{|OD|}$, co wynika z twierdzenia Talesa. Z tej równości oraz z założenia $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$ wynika, że $|OC'| = |OD|$, zatem $C' = D$, czyli prosta CD jest równoległa do prostej AB . $\square$

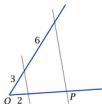
zadania 11–13 ►

ZESTAW ZADAŃ

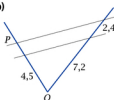
Uwaga. Na rysunkach w zadaniach 1–5 proste zaznaczone czarnym kolorem są równoległe.

1. Oblicz długość odcinka OP .

a)



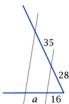
b)



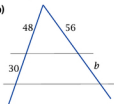
c)

**2. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.**

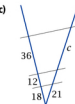
a)



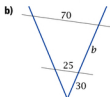
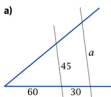
b)



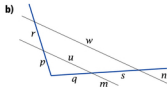
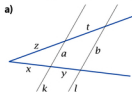
c)



3. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



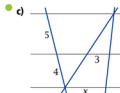
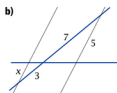
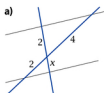
4. Znajdź brakujące wyrazy proporcji.



$$\frac{x}{z} = \frac{x+y}{?} \quad \frac{a}{z} = \frac{b}{?}$$

$$\frac{r}{p+r} = \frac{?}{?} \quad \frac{q+s}{w} = \frac{?}{?}$$

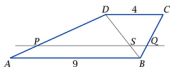
5. Znajdź długość odcinka x .



6. Gdy Mikołaj stoi wieczorem 3 m od latarni, to rzuca cień, który ma długość 1 m. Mikołaj ma 1,8 m wzrostu. Oblicz wysokość latarni.

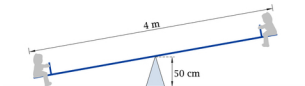
7. Proste m i n przedstawione na rysunku obok są równoległe. Wykaż, że:

$$|AC| \cdot |OD| = |BD| \cdot |OC|$$



8. W trapezie $ABCD$ przedstawionym na rysunku obok punkt P dzieli ramię AD trapezu $ABCD$ w stosunku 1 : 3 i $PQ \parallel AB$. Oblicz długości odcinków PS i SQ .

- 9. a)** Huśtawka przedstawiona na rysunku ma podparcie w środku belki. Oblicz, jak wysoko znajduje się koniec huśtawki, gdy drugi jej koniec dotyka ziemi.

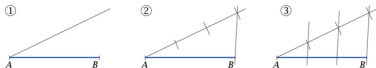


- b)** Jak zmieni się największa wysokość, na którą wznosi się koniec huśtawki, gdy zmienimy długość belki huśtawki, a punkt podparcia ciągle będzie w środku i nie zmieni się jego wysokość?

Warto wiedzieć!

Wiadomo, jak podzielić konstrukcyjnie dany odcinek na połowę i na cztery równe części (stosujemy własności symetralnej odcinka). Korzystając z twierdzenia Talesa, możemy konstrukcyjnie podzielić dany odcinek na dowolnie ustaloną liczbę równych części.

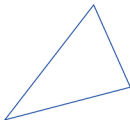
Poniższa konstrukcja pokazuje, jak za pomocą cyrkla i linijki podzielić odcinek AB na trzy równe części.



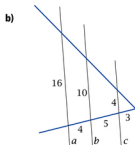
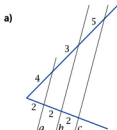
- ① Prowadzimy dowolną półprostą o początku w punkcie A (nachyloną do odcinka AB pod kątem różnym od 180°).
- ② Na półprostej odkładamy kolejno trzy odcinki o jednakowej długości. Prowadzimy prostą przez punkt B i koniec ostatniego odcinka.
- ③ Kreślimy proste równoległe do poprowadzonej prostej, przechodzące przez pozostałe końce odkładanych odcinków. Dzieli one odcinek AB na trzy równe części.

10. Przeczytaj informacje w ramce.

- a)** Narysuj dowolny odcinek i podziel go konstrukcyjnie na pięć równych części.
- b)** Skonstruuj trójkąt równoboczny, który ma taki sam obwód jak trójkąt narysowany obok.
- c)** Narysuj dowolny trójkąt, a następnie podziel go prostymi przechodzącymi przez jeden z wierzchołków na trzy części o równych polach.
- d)** Narysuj dowolny odcinek i podziel go konstrukcyjnie w stosunku $2 : 5$.

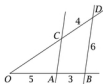


- II 11. Na rysunku podano długości odcinków wyznaczonych przez proste a , b , c na ramionach danego kąta. Które z tych prostych są równoległe?



12. a) Uzasadnij, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta.
 b) Uzasadnij, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu.
 13. Uzasadnij, że jeśli połączymy odcinkami środki kolejnych boków dowolnego czworokąta, to otrzymamy równoległobok.

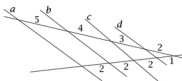
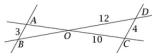
MINISPRAWDZIAN



51. Proste AC i BD przedstawione na rysunku obok są równoległe. Długość boku AC jest równa:
 A. 3,75 C. 3
 B. 2,5 D. 8

52. Proste AB i CD pokazane na rysunku obok są równoległe. Długość odcinka OA to:

- A. 6 C. 8,5
 B. 7,5 D. 9



53. Które z prostych pokazanych na rysunku obok są równoległe?

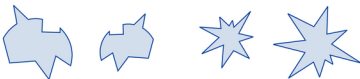
- A. a i b C. a i d
 B. b i d D. b i c

WIELOKĄTY PODOBNE

ĆWICZENIE A Z prawej strony przedstawiony jest spinacz naturalnej wielkości. Poniżej ten sam spinacz (lub jego fragment) przedstawiono w różnych skalach. Zmierz długości odpowiednich odcinków i oblicz te skale.



Jeśli daną figurę $\mathcal{F}$ powiększymy lub pomniejszymy w pewnej skali, to otrzymamy figurę podobną do figury $\mathcal{F}$. Figury pozostaną podobne, gdy jedną z nich przesuniemy, obrócimy lub odbijemy symetrycznie. Na poniższych rysunkach przedstawiono dwie pary figur podobnych.



O figurach podobnych możemy powiedzieć, że mają taki sam kształt, ale różnią się wielkością.

W figurach podobnych stosunek długości każdej pary odpowiadających sobie odcinków jest taki sam.

Figury $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ przedstawione na rysunku obok są podobne. Odcinkowi AB w figurze $\mathcal{F}$ odpowiada odcinek $A'B'$ w figurze $\mathcal{F}'$, odcinkowi CD odpowiada odcinek $C'D'$ itd.



Liczbę równą stosunkowi długości odpowiadających sobie odcinków nazywamy **skalą podobieństwa**.

Figura $\mathcal{F}'$ jest podobna do figury $\mathcal{F}$ w skali $k = \frac{|A'B'|}{|AB|}$. Natomiast figura $\mathcal{F}$ jest podobna do figury $\mathcal{F}'$ w skali $\frac{1}{k} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$.

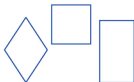


$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|C'D'|}{|CD|} = \frac{|E'F'|}{|EF|} = k$$

W wypadku niektórych figur łatwo jest stwierdzić, czy są podobne. Dotyczy to na przykład wielokątów.

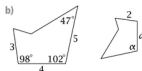
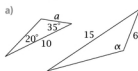
Dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

- *Kąty jednego wielokąta mają miary równe miarom odpowiednich kątów drugiego wielokąta.*
- *Stosunki długości boków jednego wielokąta do długości odpowiadających im boków drugiego wielokąta są równe.*



Zauważmy, że kwadrat i romb, który nie jest kwadratem, mają boki proporcjonalne, ale nie są wielokątami podobnymi, bo odpowiednie kąty nie są równe. Z kolei kwadrat i prostokąt, który nie jest kwadratem, mają równe kąty, ale także nie są wielokątami podobnymi, bo odpowiednie boki nie są proporcjonalne.

ĆWICZENIE B Przedstawione poniżej wielokąty są podobne. Znajdź miarę kąta α , skalę podobieństwa mniejszej figury do większej oraz długość boku a .



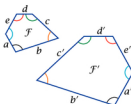
Wielokąt F' przedstawiony na rysunku obok jest podobny do wielokąta F w skali $k = \frac{a'}{a}$ (oczywiście także $k = \frac{b'}{b}$, $k = \frac{c'}{c}$ itd.).

Łatwo zauważyć, że równość:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

jest równoważna równości:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

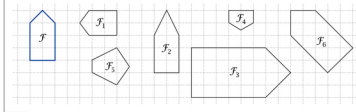


$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e}$$

Wynika stąd poniższa własność wielokątów podobnych.

Dwa wielokąty, których odpowiednie kąty mają równe miary, są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy stosunek długości dowolnych dwóch boków w jednym wielokącie jest równy stosunkowi długości odpowiadających im boków w drugim wielokącie.

ĆWICZENIE C Dwa z pięciokątów $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_6$ są podobne do pięciokąta $\mathcal{F}$. Które?



zadania 1–16

ZESTAW ZADAŃ

1. Figury przedstawione na rysunku są podobne. Ustal, w jakiej skali jedna z figur jest podobna do drugiej.



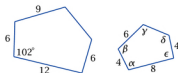
2. a) Kwadrat $A'B'C'D'$ jest podobny do kwadratu $ABCD$ w skali 5. Bok mniejszego kwadratu ma długość 3. Wyznacz długość przekątnej większego kwadratu.

b) Czworokąt $K'L'M'N'$ jest podobny do czworokąta $KLMN$ w skali $\frac{1}{3}$. Oblicz obwód czworokąta $KLMN$, wiedząc, że obwód czworokąta $K'L'M'N'$ jest równy 60.

c) Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali 3. Najmniejszy kąt w trójkącie ABC ma miarę 20° , a największy kąt w trójkącie $A'B'C'$ ma miarę 110° . Oblicz miary kątów trójkąta $A'B'C'$.

d) W trójkącie T_1 o bokach mających długości 3, 10 i 8 dwa kąty mają miary α i β , takie że $\alpha < \beta < 60^\circ$. Trójkąt T_2 jest podobny do trójkąta T_1 w skali $\frac{4}{3}$. Ustal, jaką długość ma w trójkącie T_2 bok leżący naprzeciw kąta α , a jaką — bok leżący naprzeciw kąta β .

3. a) Przedstawione poniżej pięciokąty są podobne. Który z kątów oznaczonych greckimi literami ma miarę 102° ?



b) Przedstawione poniżej pięciokąty są podobne w skali $\frac{3}{4}$. Który spośród boków oznaczonych literami ma długość 6?



4. Przedstawione wielokąty są podobne. Znajdź brakujące wyrazy proporcji.

a)



$$\frac{f}{a} = \frac{?}{b} \quad \frac{a}{?} = \frac{c}{e} \quad \frac{a}{c} = \frac{?}{?} \quad \frac{d}{e} = \frac{?}{?}$$

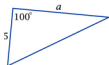
b)



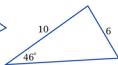
$$\frac{z}{s} = \frac{x}{?} \quad \frac{p}{?} = \frac{t}{y} \quad \frac{p}{r} = \frac{?}{?} \quad \frac{w}{y} = \frac{?}{?}$$

5. Trójkąty przedstawione na rysunku są podobne. Oblicz długość boku a .

a)



b)



6. Wielokąty przedstawione na rysunku są podobne. Oblicz długość boku a oraz miary kątów α i β .

a)

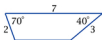
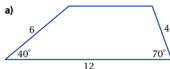


b)

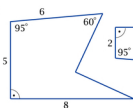


7. Uzasadnij, że figury przedstawione na rysunku nie są podobne.

a)



b)

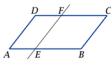


8. Które z poniższych zdań są prawdziwe?

- ① Jeśli stosunki długości dwóch sąsiednich boków dwóch prostokątów są równe, to prostokąty te są podobne.
- ② Dowolne dwa kwadraty są podobne.
- ③ Dwa trapezy prostokątne o takim samym kącie ostrym są podobne.
- ④ Jeśli jeden kąt rombu jest równy kątowi innego rombu, to romby te są podobne.
- ⑤ Jeśli długości przekątnych jednego równoległoboku są proporcjonalne do długości przekątnych drugiego równoległoboku, to równoległoboki te są podobne.

9. a) Wielokąt $\mathcal{F}_1$ jest podobny do wielokąta $\mathcal{F}_2$ w skali 2, a wielokąt $\mathcal{F}_2$ jest podobny do wielokąta $\mathcal{F}_3$ w skali 7. Znajdź skalę podobieństwa wielokąta $\mathcal{F}_3$ do wielokąta $\mathcal{F}_1$.

b) Wielokąt $\mathcal{F}_1$ jest podobny do wielokąta $\mathcal{F}_2$ w skali 5, a do wielokąta $\mathcal{F}_3$ — w skali 3. Znajdź skalę podobieństwa wielokąta $\mathcal{F}_2$ do wielokąta $\mathcal{F}_3$.



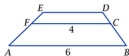
10. Równoległobok $ABCD$ przedstawiony na rysunku obok ma boki o długościach 5 i 7. Prosta EF odcina równoległobok $AEFD$, podobny do równoległoboku $ABCD$. Znajdź długość odcinka AE .

11. Równoległobok $ABCD$ rozcięto na cztery równoległoboki prostymi KM i LN równoległymi do jego boków. Proste te przecinają się w punkcie P , a równoległobok $KPND$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$. Wykaż, że równoległobok $LBMP$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$.



12. Papier produkuje się w prostokątnych arkuszach. Wymiary arkusza dobrane są tak, że po złożeniu go na pół (równolegle do krótszego boku) otrzymujemy prostokąt podobny do całego arkusza. Wyznacz stosunek długości boków arkusza papieru.

13. Trapez $ABCF$ przedstawiony na rysunku obok jest podobny do trapezu $FCDE$. Oblicz długość odcinka ED .

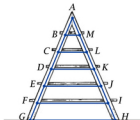


14. Z prostokąta odcięto kwadrat (zob. rysunek obok) i otrzymano prostokąt podobny do tego prostokąta. Oblicz stosunek długości boków prostokąta.

15. Na szczeblach drabiny położono poziomo deski (zob. rysunek). Odległości między kolejnymi szczeblami są jednakowe i równe długości odcinka AB .

a) Wyjaśnij, dlaczego trapezy $FGHI$ i $EFIJ$ nie są podobne.

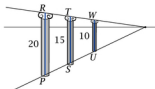
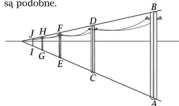
b) Wskaż dwa trapezy podobne do trapezu $BCLM$ oraz trapez podobny do trapezu $BDKM$.



Perspektywa w malarstwie to sposób uzyskiwania wrażenia trójwymiarowości na płaskim rysunku. Opiera się on na wrażeniu pozornego zmniejszania się przedmiotów wraz z oddalaniem się ich od obserwatora i na złudzeniu zbieżności linii biegnących ku horyzontowi.

Już starożytni twórcy próbowali stosować perspektywę, ale po raz pierwszy prawidłowo opisał ją i stosował w malarstwie włoski architekt i rzeźbiarz Filippo Brunelleschi (czyt. bruneleski) na początku XV wieku.

Rysunek poniżej przedstawia rząd słupów, które w rzeczywistości mają równe wysokości i są rozstawione w takich samych odstępach. Takie słupy są narysowane zgodnie z zasadą perspektywy, gdy trapezy $ABDC$, $CDFE$, $EFHG$ itd. są podobne.



16. Przeczytaj informacje w ramce. Rysunek obok został wykonany zgodnie z regułami perspektywy. Kolumny przedstawione na rysunku w rzeczywistości mają równe wysokości. Liczby na rysunku oznaczają długości narysowanych odcinków w milimetrach.

a) Uzasadnij, że w rzeczywistości odległość między kolumnami RP i TS jest inna niż między kolumnami TS i WU .

b) Przypuśćmy, że przed kolumną oznaczoną na rysunku RP w tej samej linii stoi jeszcze jedna kolumna o tej samej wysokości, ale jej odległość (w rzeczywistości) od kolumny RP jest taka sama jak odległość między kolumnami RP i TS . Ustal, jaką długość powinien mieć odcinek przedstawiający tę kolumnę na rysunku.

MINISPRAWDZIAN

51. Który z czworokątów jest podobny do czworokąta przedstawionego obok?

A.



B.



C.



D.



52. Do prostokąta o wymiarach $3\text{ cm} \times 12\text{ mm}$ jest podobny prostokąt o wymiarach:

A. $6\text{ cm} \times 6\text{ mm}$

B. $12\text{ cm} \times 3\text{ mm}$

C. $12\text{ cm} \times 3\text{ mm}$

D. $2\text{ m} \times 5\text{ mm}$

CECHY PODOBIENSTWA TRÓJKATÓW

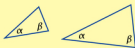
- ĆWICZENIE A** a) Narysuj dowolny trójkąt ABC , a następnie narysuj trójkąt, który ma takie same kąty jak trójkąt ABC , ale boki — innej długości. Sprawdź, czy odpowiadające sobie boki tych dwóch trójkątów są proporcjonalne.
- b) Narysuj dowolny trójkąt KLM , a następnie skonstruuj trójkąt, który ma wszystkie boki 2 razy dłuższe od boków trójkąta KLM . Sprawdź, czy oba te trójkąty mają takie same kąty.

Aby sprawdzić, czy dwa wielokąty są podobne, należy porównać stosunek długości odpowiednich boków i miary odpowiednich kątów. W wypadku trójkątów sprawdzenie obu warunków nie jest konieczne, gdyż jeśli dwa trójkąty mają proporcjonalne boki, to na pewno mają takie same kąty, a także gdy kąty dwóch trójkątów są takie same, to ich boki są proporcjonalne. Wynika to z własności zwanych cechami podobieństwa trójkątów.

CECHY PODOBIENSTWA TRÓJKATÓW

Cecha kk (kąt–kąt)

Jeśli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.



Dowód

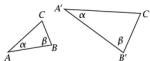
Zalóżmy, że dwa kąty trójkąta ABC mają miary równe miarom dwóch kątów trójkąta $A'B'C'$. Z twierdzenia o sumie kątów trójkąta wynika, że trzeci kąt jest taki sam w obu tych trójkątach.

Pokażemy teraz, że boki tych trójkątów są proporcjonalne. Umieścimy w trójkącie $A'B'C'$ trójkąt $A'B_1C_1$ przystający do trójkąta ABC (zob. rysunek).

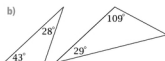
Kąty przy wierzchołkach B_1 i B' są równe, więc proste B_1C_1 i $B'C'$ są równoległe. Zatem z twierdzenia Talesa wynikają równości:

$$\frac{|A'B_1|}{|A'B'|} = \frac{|B'C_1|}{|B'C'|} = \frac{|A'C_1|}{|A'C'|}$$

Wykazaliśmy więc, że trójkąt $A'B_1C_1$ jest podobny do trójkąta $A'B'C'$, zatem jest też podobny do trójkąta ABC . $\square$

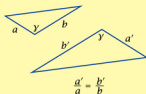


ĆWICZENIE B Czy poniższe trójkąty są podobne?



Cecha bkb (bok-kąt-bok)

Jeśli długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami w obu trójkątach mają równe miary, to trójkąty te są podobne.



Dowód

Załóżmy, że dla trójkątów ABC i $A'B'C'$ zachodzą równości:

$$|\angle ACB| = |\angle A'C'B'| = \gamma$$

$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|}$$

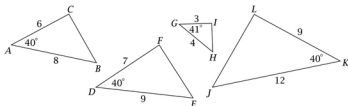
Umieścimy w trójkącie $A'B'C'$ trójkąt A_1B_1C' przystający do trójkąta ABC (zob. rysunek). Wynika stąd proporcja:

$$\frac{|A'C'|}{|A_1C'|} = \frac{|B'C'|}{|B_1C'|}$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $A'B' \parallel A_1B_1$.

Wobec tego w trójkątach $A'B'C'$ i A_1B_1C' kąty o wierzchołkach A' i A_1 są równe i kąty o wierzchołkach B' i B_1 też są równe. Zatem z cechy kk wynika, że trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta A_1B_1C' , jest więc też podobny do trójkąta ABC . $\square$

ĆWICZENIE C Który z trójkątów jest podobny do trójkąta ABC ?



Cecha bbb (bok-bok-bok)

Jeśli długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

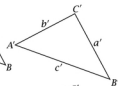


$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

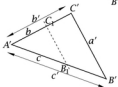
Dowód

Niech trójkąt ABC ma boki o długościach a , b i c , zaś trójkąt $A'B'C'$ ma boki o długościach a' , b' i c' oraz:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$



Na bokach b' i c' trójkąta wybieramy takie punkty B_1 i C_1 , że $|A'B_1| = c$ i $|A'C_1| = b$. Z cechy bkb wynika, że trójkąty $A'B_1C_1$ i $A'B'C'$ są podobne, więc zachodzi równość $\frac{|A'B_1|}{|B_1C_1|} = \frac{b'}{b}$.



Ponieważ $\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$, więc $|B_1C_1| = a$. Wobec tego trójkąt ABC jest przystający do trójkąta $A'B_1C_1$, czyli jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. $\square$

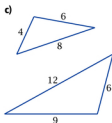
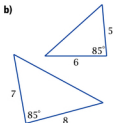
ĆWICZENIE D Który z trójkątów jest podobny do trójkąta ABC ?



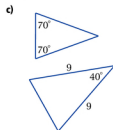
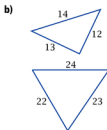
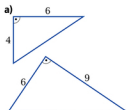
zadania 1-15

ZESTAW ZADAŃ

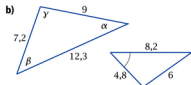
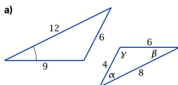
1. Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że trójkąty są podobne?



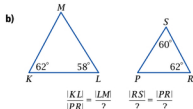
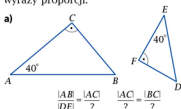
2. Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że trójkąty są podobne?



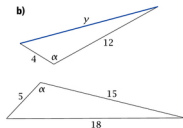
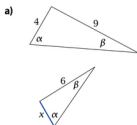
3. Na rysunkach przedstawiono pary trójkątów podobnych. Podaj cechę podobieństwa, na podstawie której można to uzasadnić. Ustal, jaką miarę — α , β czy γ — ma kąt zaznaczony łukiem.



4. Uzasadnij, że trójkąty przedstawione na rysunku są podobne. Znajdź brakujące wyraży proporcji.



5. Uzasadnij, że trójkąty przedstawione na rysunku są podobne. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.



6. a) Dane są długości boków trzech trójkątów: $T_1 - 12, 9, 15$, $T_2 - 20, 16, 12$, $T_3 - 11, 8, 6$. Dwa z tych trójkątów mają odpowiednie kąty przystające. Które to trójkąty?

b) W każdym z trzech trójkątów jeden z kątów ma miarę α . Długości boków leżących na ramionach tego kąta wynoszą w trójkącie T_1 : 3 i 2, w trójkącie T_2 : 4,5 i 3, w trójkącie T_3 : 5 i 3,5. Dwa z tych trójkątów mają odpowiednie kąty przystające. Które to trójkąty?

7. Znajdź na rysunku obok trzy trójkąty podobne do trójkąta ADC .

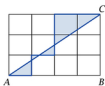


8. Uzasadnij, że wysokość trójkąta prostokątnego opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty do niego podobne.

9. Narysuj prostokąt, a następnie podziel go na:

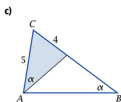
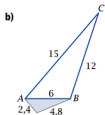
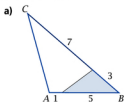
a) trzy trójkąty podobne,

b) pięć trójkątów podobnych.

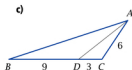


10. Wykaż, że trójkąty zaznaczone na rysunku obok są podobne do trójkąta ABC . Oblicz skalę podobieństwa tych trójkątów do trójkąta ABC i wymień je w kolejności rosnącej.

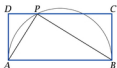
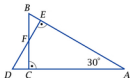
11. Uzasadnij, że zacieniowany trójkąt jest podobny do trójkąta ABC . Znajdź skalę podobieństwa.



12. Uzasadnij, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta DAC . Znajdź skalę tego podobieństwa.



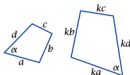
13. Punkt F zaznaczony na rysunku obok jest środkiem odcinka BC . Uzasadnij, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta ADE . Znajdź skalę tego podobieństwa.



14. Punkt P przedstawiony na rysunku obok jest punktem przecięcia okręgu o średnicy AB z bokiem DC prostokąta $ABCD$. Wykaż, że trójkąt ADP jest podobny do trójkąta BPA i do trójkąta PCB .

15. a) Wykaż, że czworokąty przedstawione na rysunku obok są podobne.

b) Rysunek ten ilustruje pewną cechę podobieństwa czworokątów. Sformułuj tę cechę.



MINISPRAWDZIAN

51. Trójkąt ABC ma boki o długościach 10, 8 i 12. Najmniejszy kąt tego trójkąta ma miarę α , a największy — ma miarę β . Który z poniższych trójkątów nie jest podobny do trójkąta ABC ?

A.



B.



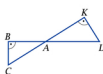
C.



D.



52. Na ilu rysunkach przedstawionych poniżej trójkąt AKL jest podobny do trójkąta ABC ?



A. na jednym

B. na dwóch

C. na trzech

D. na czterech

53. Poniżej podano pewne informacje o trójkątach ABC i KLM . W którym przypadku można stwierdzić, że te trójkąty są podobne?

A. $|AB| = 8$, $|BC| = 6$ oraz $|KL| = 4$, $|KM| = 3$

B. $|AB| = 8$, $|\angle ABC| = 40^\circ$ oraz $|KL| = 4$, $|\angle KLM| = 40^\circ$

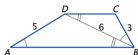
C. $|\angle ABC| = 80^\circ$, $|\angle ACB| = 40^\circ$ oraz $|\angle KLM| = 80^\circ$, $|\angle LKM| = 60^\circ$

D. $|AB| = 8$, $|BC| = 6$, $|\angle ABC| = 40^\circ$ oraz $|KL| = 4$, $|LM| = 3$, $|\angle LKM| = 40^\circ$

CECHY PODOBIENSTWA TRÓJKATÓW (CD.)

- I Cechy podobieństwa trójkątów pozwalają rozwiązywać różne problemy geometryczne (dotyczące nie tylko trójkątów).

PRZYKŁAD W trapezie $ABCD$ ramiona mają długości $|AD| = 5$ i $|BC| = 3$, przekątna BD ma długość 6 i $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBD|$. Oblicz obwód tego trapezu.



$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CBD|$$

$$|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDC|$$

Trójkąty ABD i BDC są podobne.

Zatem:

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AD|}{|BC|} \quad \text{i} \quad \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AD|}{|BC|}$$

Stąd:

$$\frac{|AB|}{6} = \frac{5}{3} \quad \text{i} \quad \frac{6}{|DC|} = \frac{5}{3}$$

$$|AB| = 10 \quad \text{i} \quad |DC| = 3,6$$

$$\text{Obwód} = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 10 + 3 + 3,6 + 5 = 21,6$$

Odp. Obwód trapezu wynosi 21,6.

..... Sporządzamy rysunek pomocniczy.

..... Równość podana w treści zadania.

..... Kąty $\sphericalangle ABD$ i $\sphericalangle BDC$ są naprzemianległe.

..... Boki trójkąta ABD — AB , BD , AD odpowiadają bokom odpowiednio: BD , DC i BC trójkąta BDC .

ZADANIE Trójkąt ABC jest równoramienny i $|AC| = |BC|$. Na boku BC wybrano punkt D tak, że ABD jest trójkątem równoramiennym. Oblicz obwód trójkąta ABC , jeśli wiadomo, że $|AB| = 6$ i $|BD| = 4$.

zadania 1–8 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Trójkąt ABC ma boki o długościach 3, 4 i 5. Oblicz długość odcinka AD .



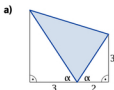
2. W pewnym trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długościach 3 cm i 12 cm. Oblicz długość tej wysokości.

3. Ponad 2500 lat temu Tales z Miletu wzbudził podziw tym, że potrafił obliczyć odległość statku od brzegu. Jego pomiary mogły wyglądać tak: Tales stanął na brzegu w miejscu T leżącym najbliższym statku S i przeszedł wzdłuż brzegu 50 kroków — do punktu A . Tam wbił tyczkę i poszedł 5 kroków dalej — do punktu B . Stamtąd szedł w głąb łądy do takiego punktu C , z którego widział statek i wbił tyczkę w jednej linii.

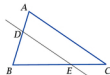


Ustal, jak daleko od brzegu był statek, jeśli z punktu B do punktu C Tales przeszedł 14 kroków.

4. Oblicz pole zacieniowanej figury.



5. W trójkącie ABC dane są $|AC| = |BC| = a$ oraz $|AB| = b$. Prosta równoległa do ramienia AC przecina boki trójkąta w punktach D i E w taki sposób, że $|CE| = |BD|$. Oblicz obwód trójkąta DBE .



6. Podczas całkowitego zaćmienia Słońca Księżyc niemal całkowicie zasłania tarczę słoneczną. Korzystając z poniższych danych, oblicz średnicę Słońca.



Średnica Księżyca – 3,5 tys. km
Odległość Księżyca od Ziemi – 384 tys. km
Odległość Ziemi od Słońca – 150 mln km

7. Jeśli osoba stanie w odległości 4 m od okna w mieszkaniu pewnego budynku, zobaczy przedstawiony na rysunku fragment budynku naprzeciwko. Przyjmij, że jedna kondygnacja ma 3 m wysokości, i oblicz, jaka jest odległość między budynkami.



Prototypem aparatu fotograficznego jest szczelne pudełko z małym otworkiem w jednej ze ścian. Światło wpadające przez ten otwór rzuca na przeciwną ścianę (ekran) odwrócony obraz przedmiotu stojącego przed otworem.



Takie urządzenie nazwano *camera obscura* (czyt. kamera obskura), czyli „ciemna komnata”, i rzeczywiście niekiedy miało ono rozmiary pokoju.



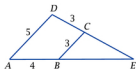
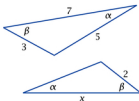
8. Przeczytaj informacje w ramce. Załóżmy, że odległość między otworem a ekranem w camerze obskure wynosi 30 cm.

- a) Ustal, w jakiej odległości od budynku o wysokości 15 m należy umieścić to urządzenie, aby obraz budynku na ekranie miał 10 cm wysokości.
- b) Oblicz wysokość pomnika, którego obraz uzyskany za pomocą camery obskury z odległości 20 m ma wysokość 12 cm.

MINISPRAWDZIAN

51. Korzystając z danych na rysunku obok, oblicz, jaką długość ma odcinek x .

- A. $3\frac{2}{3}$ C. $4\frac{2}{3}$
B. 4 D. 5

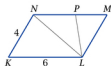


52. Czworokąt $ABCD$ (zob. rysunek obok) jest trapezem. Obwód trójkąta AED jest równy:

- A. 19 B. 22,5 C. 25 D. 25,5

53. Z wierzchołka L równoległoboku $KLMN$ poprowadzono dwa odcinki: LN i LP tak, że trójkąt KLN jest podobny do trójkąta LMP (zob. rysunek obok). Stosunek $|PM| : |PN|$ jest równy:

- A. 1:2 B. 1:3 C. 2:3 D. 4:5



POŁA FIGUR PODOBNYCH

- 1 Park miejski zajmuje powierzchnię 9600 m². Plan tego parku, który przedstawiono poniżej, jest sporządzony w skali 1 : 2000. Jak myślisz, ile centymetrów kwadratowych zajmuje ten park na planie?



ĆWICZENIE A Prostokąt P_1 ma wymiary 2 cm $\times$ 5 cm. Ustal wymiary prostokąta P_2 podobnego do prostokąta P_1 w skali $k = 3$. Oblicz pola obu prostokątów. Ile razy pole prostokąta P_2 jest większe niż pole prostokąta P_1 ?

Przyjrzyj się poniższym rysunkom. Na każdym z nich większy prostokąt jest podobny do prostokąta, który zacieniowano.



Skala podobieństwa $k = 2$. Pole większego prostokąta jest 4 razy większe od pola mniejszego prostokąta.



Skala podobieństwa $k = 3$. Pole większego prostokąta jest 9 razy większe od pola mniejszego prostokąta.

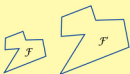


Skala podobieństwa $k = 4$. Pole większego prostokąta jest 16 razy większe od pola mniejszego prostokąta.

Załóżmy, że prostokąt o bokach a' i b' jest podobny w skali k do prostokąta o bokach a i b . Stosunek pól tych prostokątów jest równy:

$$\frac{a' \cdot b'}{a \cdot b} = \frac{ka \cdot kb}{a \cdot b} = \frac{k^2 \cdot a \cdot b}{a \cdot b} = k^2$$

Pokazaliśmy, że stosunek pól prostokątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Taka własność jest prawdziwa także dla dowolnych figur podobnych.



**Stosunek pól figur podobnych
jest równy kwadratowi
skali podobieństwa.**

$\frac{\text{Pole figury } F'}{\text{Pole figury } F} = k^2$, gdzie k to skala podobieństwa figury F' do figury F .

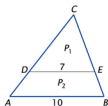
Korzystając z powyższej własności, możemy obliczyć powierzchnię parku na planie z poprzedniej strony.

$$\text{Powierzchnia parku} = \left(\frac{1}{2000}\right)^2 \cdot 9600 \text{ m}^2 = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 24 \text{ cm}^2$$

ĆWICZENIE B a) Figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali $k = \frac{5}{4}$. Oblicz pole figury F_2 , jeśli pole figury F_1 jest równe 72 cm^2 .

b) Figura F_1 jest podobna do figury F_2 i ma pole 5 razy większe od pola figury F_2 . Znajdź skalę podobieństwa figury F_1 do F_2 .

PRZYKŁAD Trójkąt ABC przecięto prostą równoległą do boku AB w taki sposób, że otrzymano mniejszy trójkąt i trapez o podstawach długości 7 i 10. Trójkąt ABC ma pole równe 100. Oblicz pole otrzymanego trapezu.



$$P = P_1 + P_2 = 100$$

P_1 – pole trójkąta DEC

P_2 – pole trapezu $ABED$

Trójkąt DEC jest podobny do trójkąta ABC (cecha kk) w skali:

$$k = \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{7}{10}$$

$$P_1 = k^2 \cdot P = \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot 100 = 49$$

$$P_2 = P - P_1 = 100 - 49 = 51$$

Odp. Pole trapezu jest równe 51.

Z równoległości odcinków AB i DE wynika, że $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEC|$ oraz $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDC|$, czyli trójkąty ABC i DEC są podobne.

Obliczamy skalę podobieństwa trójkąta DEC do trójkąta ABC .

ZADANIE Trójkąt ABC o polu 20 przecięto prostą równoległą do boku AB . Oblicz pola otrzymanych części, jeśli ta prosta podzieliła jeden z boków tego trójkąta na odcinki o długościach 2 i 5. Rozpatrz dwie możliwości.

zadania 1–11 ►

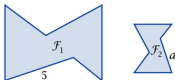
ZESTAW ZADAŃ

1. Figury $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ przedstawione na rysunku są podobne.

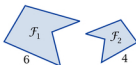
a) Pole figury $\mathcal{F}_1$ wynosi 8. Oblicz pole figury $\mathcal{F}_2$.



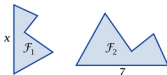
c) Pole figury $\mathcal{F}_1$ jest 5 razy większe od pola figury $\mathcal{F}_2$. Oblicz długość boku a .



b) Pole figury $\mathcal{F}_1$ wynosi 21. Oblicz pole figury $\mathcal{F}_2$.



d) Pole figury $\mathcal{F}_1$ wynosi 15, a pole figury $\mathcal{F}_2$ jest równe 20. Oblicz długość boku x .

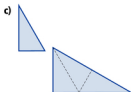
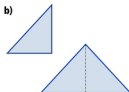


2. Zdjęcie o wymiarach $12\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ przedstawia działkę budowlaną, która na tym zdjęciu zajmuje powierzchnię 54 cm^2 . Po powiększeniu zdjęcia działka zajęła powierzchnię 96 cm^2 . Znajdź wymiary powiększonego zdjęcia.

3. Darek wykonał na kserokopiarce kopię zdjęcia, a następnie postanowił powiększyć je tak, aby każdy jego bok był o 20% dłuższy. Ile razy więcej toneru potrzeba na wykonanie takiego powiększenia niż na wykonanie pierwszej kopii?



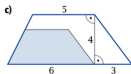
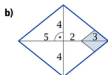
4. Dwie figury przedstawione na rysunkach są podobne. Znajdź skalę podobieństwa mniejszej z tych figur do większej.





5. Figury przedstawione na diagramie są podobne. Druga z tych figur zajmuje większą powierzchnię niż pierwsza figura. Ile razy większą?

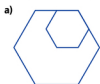
6. W każdym z wielokątów (w trójkącie, w rombie i w trapezie) zaznaczono wielokąt do niego podobny. Oblicz pole zacięniowanej figury.



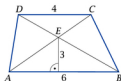
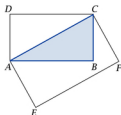
7. a) W trójkącie o polu P przez środki dwóch boków poprowadzono prostą. Oblicz pola figur, na jakie ta prosta podzieliła trójkąt.

b) Prosta równoległa do jednego z boków trójkąta podzieliła trójkąt na dwie części o równych polach. Znajdź stosunek długości odcinków, na które ta prosta podzieliła każdy z dwóch boków trójkąta.

8. W sześciokącie foremnym o polu 16 zaznaczono mniejszy sześciokąt foremny (jeśli wierzchołek mniejszego sześciokąta leży na boku większego sześciokąta, to dzieli ten bok na równe części). Oblicz pole mniejszego sześciokąta.



9. Czworokąt $ABCD$ przedstawiony na rysunku obok jest trapezem. Oblicz pola trójkątów ABE , DEC , AED i BCE .



10. Przekątna AC prostokąta $ABCD$ jest bokiem podobnego do niego prostokąta $AEFC$. Pole części wspólnej tych prostokątów stanowi 40% pola prostokąta $AEFC$. Znajdź skalę podobieństwa prostokąta $ABCD$ do prostokąta $AEFC$.

Warto wiedzieć

Twierdzenie Pitagorasa można sformułować w następujący sposób:

W trójkącie prostokątnym suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

Twierdzenie to można uogólnić, zastępując kwadraty odpowiednimi figurami podobnymi:

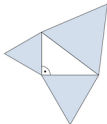
Jeśli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy trzy figury podobne, to suma pól figur zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu figury zbudowanej na przeciwprostokątnej.



$$P_{F_1} + P_{F_2} = P_{F_3}$$

11. a) Uzasadnij uogólnione twierdzenie Pitagorasa podane w ramce powyżej.

b) Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano trójkąty równoboczne w sposób przedstawiony na rysunku. Pole największego z tych trójkątów jest równe 60, a najmniejszego 15. Znajdź długość boku trzeciego z tych trójkątów.



MINISPRAWDZIAN

S1. Wielkość (wysokość) czcionki mierzona jest w punktach. Słowo „figura” poniżej napisano czcionkami o wielkości odpowiednio 12 punktów i 16 punktów.

figura figura

Ile razy więcej tuszu zużyto na wydrukowanie większego napisu niż na wydrukowanie mniejszego?

- A. $\frac{4}{3}$ razy B. $\frac{16}{9}$ razy C. 2 razy D. 3 razy

S2. Wskaż długości przekątnych rombu o polu 108 cm^2 , który jest podobny do rombu o przekątnych 4 cm i 6 cm.

- A. 18 cm i 27 cm B. 12 cm i 18 cm C. 36 cm i 54 cm D. 12 cm i 9 cm

S3. Na planie w skali 1:100 pewien obszar zajmuje powierzchnię 50 cm^2 . Ustal, jaką powierzchnię zajmuje ten obszar na planie w skali 1:500.

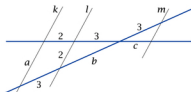
- A. 2 cm^2 B. 250 cm^2 C. 10 cm^2 D. 1250 cm^2

S4. Figura F_1 o polu 7 jest podobna do figury F_2 o polu 63. Wskaż obwód figury F_1 , wiedząc, że figura F_2 ma obwód 30.

- A. 9 B. 10 C. 30 D. 270

POWTÓRZENIE

1. Proste k , l i m przedstawione na poniższym rysunku są równoległe. Oblicz długości odcinków a , b i c .



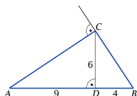
2. Ustal, czy na podstawie poniższych danych można stwierdzić, że trójkąty ABC i UVW są podobne.

- $|AB| = 9$, $|BC| = 6$, $|AC| = 5$,
 $|VW| = \frac{5}{3}$, $|UW| = 2$, $|UV| = 3$
- $|BC| = 10$, $|AC| = 15$, $|\angle ACB| = 70^\circ$,
 $|UW| = 5$, $|VW| = 3$, $|\angle VWU| = 70^\circ$
- $|\angle ABC| = 35^\circ$, $|\angle BCA| = 70^\circ$,
 $|\angle WVU| = 35^\circ$, $|\angle UWV| = 75^\circ$

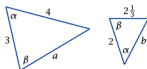
3. Oblicz wysokość budynku, wykorzystując informacje przedstawione na rysunku.



4. Uzasadnij, że trójkąty ACD , ABC i DBC przedstawione na rysunku są podobne. Podaj skale podobieństwa: trójkąta ACD do trójkąta ABC oraz trójkąta ACD do trójkąta DBC .



5. Oblicz długości boków a i b .



6. Trójkąty przedstawione poniżej są podobne. Oblicz:

- długość boku x ,
- stosunek obwodów tych trójkątów,
- stosunek pól tych trójkątów.



7. Pewne dwa wielokąty są podobne. Wiadomo, że jeden z nich ma pole 2 razy większe, a obwód o 10 większy od drugiego wielokąta. Znajdź obwody tych wielokątów.

8. Figury przedstawione na poniższym rysunku są podobne, a stosunek ich pól wynosi 4:1. Oblicz długości odcinków x i y .



9. Wielokąt F_1 jest podobny do wielokąta F_2 w skali k .

- Oblicz obwód wielokąta F_1 , jeśli wiadomo, że wielokąt F_2 ma obwód 30.
- Oblicz pole wielokąta F_2 , jeśli wiadomo, że pole wielokąta F_1 wynosi 3.

Stereometria

Atomium to gigantyczna konstrukcja (ok. 100 m wysokości) zbudowana w 1958 roku na przedmieściach Brukseli z okazji międzynarodowej wystawy osiągnięć techniki. Budowla ta przedstawia powiększony ok. 165 miliardów razy fragment sieci krystalicznej metalu. Dziewięć kul, każda o średnicy 18 m, znajduje się w wierzchołkach sześcianu i na przecięciu jego przekątnych. W rurze pionowej zainstalowano windę, a w pozostałych rurach łączących kule – schody.

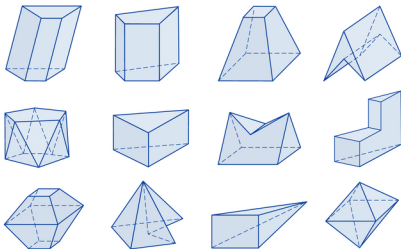


Wielościany i inne figury przestrzenne ■ Figury obrotowe
i inne figury przestrzenne ■ Proste i płaszczyzny w przestrzeni
■ Przekroje graniastópów ■ Bryły podobne ■ Powtórzenie

WIEŁOŚCIANY I INNE FIGURY PRZESTRZENNE

- I Na rysunku przedstawiono przykłady brył zwanych wielościanami. Są one ograniczone wielokątami — ścianami wielościanu — w taki sposób, że każda krawędź wielościanu jest wspólnym bokiem dwóch ścian. Każdy wierzchołek wielościanu to wspólny punkt co najmniej trzech krawędzi.

Uwaga. Rysunki w tym dziale sporządzono zgodnie z zasadami ustalonymi w podręczniku dla klasy 2.



Warto wiedzieć!

Figurę nazywamy wypukłą, gdy każdy z odcinków łączących dwa dowolne punkty figury w całości zawiera się w tej figurze.

Liczba ścian (S), liczba wierzchołków (W) i liczba krawędzi (K) dowolnego wielościanu wypukłego są ze sobą związane zależnością, którą odkrył w 1752 roku wielki matematyk szwajcarski Leonhard Euler (czyt. ojler).

WZÓR EULERA:

$$S + W = K + 2$$

ĆWICZENIE A Przeczytaj informacje w ramce obok.

- Wśród powyższych wielościanów wskaż te, które nie są wypukłe.
- Podaj liczbę ścian, wierzchołków i krawędzi graniastosłupa, którego podstawą jest n -kąt. Sprawdź, czy liczby te spełniają wzór Eulera.
- Podaj liczbę ścian, wierzchołków i krawędzi ostrosłupa, którego podstawą jest n -kąt. Sprawdź, czy liczby te spełniają wzór Eulera.
- Korzystając ze wzoru Eulera, ustal, ile krawędzi ma wielościan wypukły o 10 ścianach i 12 wierzchołkach.

ĆWICZENIE B Wśród wielościanów przedstawionych na stronie obok wskaż graniastosłupy. Dokończ zdania.

- a) *Graniastosłup prosty, to taki graniastosłup, w którym...*
- b) *Graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw, nazywamy...*
- c) *Graniastosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym, nazywamy...*

ĆWICZENIE C Wśród wielościanów przedstawionych na stronie obok wskaż ostrosłupy. Dokończ zdania.

- a) *Ostrosłup prawidłowy to taki ostrosłup, w którym...*
- b) *Czworościan foremny to...*
- c) *Spodek wysokości ostrosłupa to...*

Poniżej przypominamy podstawowe wzory dotyczące graniastosłupów i ostrosłupów.

GRANIASTOSŁUP



Pole powierzchni całkowitej:

$$P = 2P_p + P_b$$

Objętość:

$$V = P_p \cdot h$$

OSTROSŁUP



Pole powierzchni całkowitej:

$$P = P_p + P_b$$

Objętość:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

W powyższych wzorach P_p , P_b i h oznaczają odpowiednio pole podstawy, pole powierzchni bocznej i wysokość. Wzory te można także wykorzystać przy obliczeniach dotyczących niektórych innych wielościanów.

ĆWICZENIE D Graniastosłup prawidłowy czworokątny i ostrosłup prawidłowy czworokątny mają tę samą wysokość i równe objętości. Oblicz stosunek długości krawędzi podstaw tych brył.

PRZYKŁAD 1 Od sześcianu o krawędzi a odcięto naroża płaszczyznami przechodzącymi przez środki krawędzi w sposób pokazany na rysunku. Oblicz pole powierzchni i objętość otrzymanej bryły.



$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Ściany rozważanej bryły to 6 kwadratów o boku x i 8 trójkątów równobocznych o boku x .

$$P = 6x^2 + 8 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x^2(6 + 2\sqrt{3}) = \frac{a^2}{2}(6 + 2\sqrt{3}) = a^2(3 + \sqrt{3})$$

$$V = a^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} = a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{5}{6}a^3$$

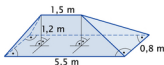
Od objętości sześcianu odejmujemy objętość ośmiu ostrosłupów o podstawie, która jest trójkątem prostokątnym równoramiennym.

Odp. Pole powierzchni bryły jest równe $a^2(3 + \sqrt{3})$, a objętość wynosi $\frac{5}{6}a^3$.

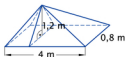
ZADANIE Sześcian o krawędzi a rozcięto na dwie części płaszczyzną przechodzącą przez trzy wierzchołki sześcianu w sposób pokazany na rysunku. Oblicz objętości i pola powierzchni otrzymanych brył.



PRZYKŁAD 2 Oblicz objętość bryły przedstawionej na rysunku.



Bryłę można podzielić na dwa ostrosłupy czworokątne i graniastosłup trójkątny; otrzymane ostrosłupy można „skleić” w jeden ostrosłup, którego podstawa jest prostokątem o wymiarach $4\text{ m} \times 0,8\text{ m}$.



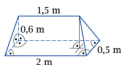
$$V_1 = \frac{0,8 \cdot 1,2}{2} \cdot 1,5 = 0,72 \text{ [m}^3\text{]}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 0,8 \cdot 1,2 = 1,28 \text{ [m}^3\text{]}$$

$$V = V_1 + V_2 = 0,72 + 1,28 = 2 \text{ [m}^3\text{]}$$

Odp. Objętość bryły wynosi 2 m^3 .

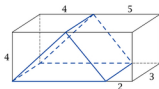
ZADANIE Oblicz objętość bryły przedstawionej na rysunku.



zadania 1–21 ►

ZESTAW ZADAŃ

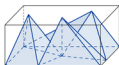
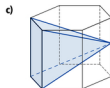
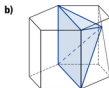
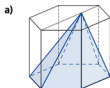
1. Na rysunku obok przedstawiono prostopadłościan podzielony na trzy graniastosłupy proste. Oblicz objętości tych graniastosłupów.



2. Z czterech takich samych sześcianów o krawędzi a wycięto ostrosłupy w sposób przedstawiony na rysunkach. Oblicz objętości tych ostrosłupów.

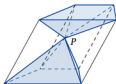


3. Z graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości h wycięto ostrosłup w sposób przedstawiony na rysunku. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



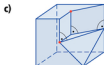
4. Podstawy ostrosłupów wypełniają jedną z podstaw prostopadłościanu, a ich wierzchołki leżą na przeciwległej podstawie (zob. rysunek). Jaką część prostopadłościanu zajmują te ostrosłupy?

5. Wewnątrz graniastosłupa o objętości V wybrano pewien punkt P . Następnie wycięto z graniastosłupa dwa ostrosłupy o wierzchołku P , których podstawami są podstawy graniastosłupa (zob. rysunek obok). Jaką część objętości graniastosłupa stanowi objętość bryły otrzymanej po usunięciu ostrosłupów?



6. Od sześcianu o krawędzi a odcięto w każdym wierzchołku mniejszy sześcián (zob. rysunek obok). Otrzymany wielościan ma wszystkie krawędzie jednakowej długości. Oblicz objętość i pole powierzchni tego wielościanu.

7. Bryłę przedstawioną na rysunku otrzymano w wyniku wycięcia z sześcianu o krawędzi a pewnego wielościanu. Zaznaczony kropką punkt to środek danej ściany. Oblicz objętość tej bryły.



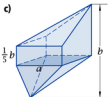
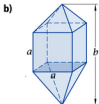
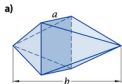
8. Do każdej ściany sześcianu o krawędzi a doklejono jednakowe ostrosłupy prawidłowe czworokątne o krawędzi podstawy a .

a) Jaka powinna być wysokość doklejonych ostrosłupów, aby objętość otrzymanej bryły była cztery razy większa od objętości sześcianu?

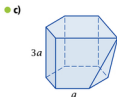
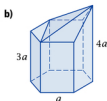
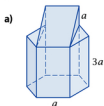


b) Jaka powinna być wysokość ostrosłupów, aby otrzymana bryła miała dwanaście ścian?

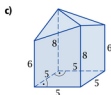
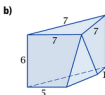
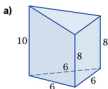
9. Zacieniowany czworokąt jest kwadratem. Literą b oznaczono sumę odległości wierzchołków ostrosłupów od płaszczyzny zawierającej ten kwadrat. Oblicz objętość bryły przedstawionej na rysunku.



10. Bryła pokazana na rysunku powstała w wyniku sklejenia graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego i pewnego graniastosłupa lub ostrosłupa. Oblicz jej objętość.



11. W wyniku odcięcia pewnej bryły od graniastosłupa prawidłowego powstała bryła przedstawiona na rysunku. Oblicz jej objętość.



12. Od czworoscianu foremnego o krawędzi a odcięto ostrosłup płaszczyzną przechodzącą przez dwie wysokości ścian. Oblicz objętość bryły, która pozostała po odcięciu ostrosłupa.

- **13.** Graniastosłup trójkątny rozcięto na dwie bryły w sposób pokazany na rysunku obok. Oblicz stosunek objętości tych brył.



- 14.** Graniastosłup prosty trójkątny o polu podstawy P i wysokości h podzielono na trzy części w sposób przedstawiony na rysunku obok. Oblicz objętość każdej z tych części.

15. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny prostokątny. Przeciwprostokątna podstawy i przekątne dwóch ścian bocznych tworzą trójkąt równoboczny o boku a . Oblicz wysokość tego graniastosłupa.

- **16.** Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a . Jaką wysokość powinien mieć ten graniastosłup, aby trójkąt zbudowany z przekątnej ściany bocznej, dłuższej przekątnej podstawy i krótszej przekątnej graniastosłupa był równoramienny?

Wielościany foremne (zwane bryłami platońskimi) to takie wielościany wypukłe, w których:

- wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi,
- w każdym wierzchołku spotyka się tyle samo ścian.

Istnieje pięć wielościanów foremných.



CZWOROSCIAN FOREMNY

- Ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.
- W każdym wierzchołku spotykają się 3 ściany.



SZESZCIAN

- Ściany są przystającymi kwadratami.
- W każdym wierzchołku spotykają się 3 ściany.



OŚMIOŚCIAN FOREMNY

- Ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.
- W każdym wierzchołku spotykają się 4 ściany.



DWUNASTOŚCIAN FOREMNY

- Ściany są przystającymi pięciokątami foremnymi.
- W każdym wierzchołku spotykają się 3 ściany.



DWUDZIESOŚCIAN FOREMNY

- Ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.
- W każdym wierzchołku spotyka się 5 ścian.

Słynny filozof grecki Platon (427–347 p.n.e.) znalazł cztery wielościany foremne (oprócz dwunastościanu) i nadał im znaczenie symboliczne. Wyobrażał sobie, że wszechświat tworzą cztery elementy: ogień, ziemia, woda i powietrze, a każdy z tych elementów jest zbudowany z cząsteczek, które mają kształt wielościanów foremných. Według Platona na przykład cząsteczki wody mają kształt dwudziestościanów foremných. Piątą bryłę — dwunastościan foremny — odkrył uczeń Platona Teajtetos.

17. Sześcian i ośmiościan foremny mają krawędzie tej samej długości. Oblicz stosunek pól powierzchni oraz stosunek objętości tych brył.



18. a) Oblicz długość przekątnej ośmiościanu foremnego o krawędzi a .

b) Oblicz długość krawędzi ośmiościanu foremnego o przekątnej p .

- **19.** Przedstawione na fotografii Atomium to gigantyczna konstrukcja w kształcie sześcianu. Sześcian został postawiony na jednym z wierzchołków tak, że jedna z jego przekątnych jest pionowa. Każda z kul ma średnicę 18 m, a odległość między środkami kul leżących na tej samej krawędzi sześcianu wynosi 47 m. Kule B , C i D znajdują się na tej samej wysokości nad ziemią. Podobnie kule E , F i G . Ustal, na jakich wysokościach nad ziemią znajdują się środki poszczególnych kul Atomium.

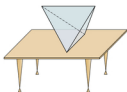


Wskazówka. Rozważ trójkąt ADH . Ustal długości odcinków, na jakie został podzielony bok AH przez wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka D .

- **20.** Wielościan przedstawiony na rysunku obok to *stella octangula* (czyli gwiazda ośmioramienna), którą jako pierwszy opisał Johannes Kepler.

a) Oblicz pole powierzchni i objętość *stelli octanguli*, której ściany są trójkątami równobocznymi o boku a .

b) *Stellę octangulę* można sobie wyobrazić jako dwa przenikające się jednakowe czworościany foremne. Jaką bryłą jest wspólna część tych czworościanów? Oblicz objętość tej bryły, jeśli wiadomo, że każdy z czworościanów ma krawędź o długości b .



- **21. a)** Wyobraź sobie, że czworościan foremny o krawędzi a ustawiamy tak, że jedna z krawędzi leży na stole, a przeciwległa krawędź jest równoległa do blatu stołu (zob. rysunek). Oblicz, jak wysoko nad stołem znajduje się ta krawędź.

b) Czy model czworościanu foremnego o krawędzi 1 m można przenieść przez drzwi o szerokości 0,8 m?

MINISPRAWDZIAN

51. Od sześcianu o krawędzi 5 odcięto narożnik w sposób przedstawiony na rysunku obok. Wskaż objętość tego odciętego narożnika.

- A. 1 B. 4 C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{13}{3}$



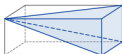
52. Do podstawy ostrosłupa czworokątnego doklejono sześcian o krawędzi a w sposób przedstawiony na rysunku obok. O ile większe jest pole powierzchni otrzymanej bryły od pola powierzchni ostrosłupa?

- A. o $6a^2$ B. o $5a^2$ C. o $4a^2$ D. o $3a^2$



53. Z prostopadłościanu wycięto ostrosłup tak, jak pokazano na rysunku obok. Jaka część objętości całego prostopadłościanu stanowi objętość zacieniowanej bryły?

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$



FIGURY OBROTOWE I INNE FIGURY PRZESTRZENNE

- I Poniżej przypominamy wzory dotyczące figur obrotowych. We wzorach tych P_p , P_b i l oznaczają odpowiednio pole podstawy, pole powierzchni bocznej i tworzącą stożka.

WALEC



Pole powierzchni bocznej:

$$P_b = 2\pi r h$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Objętość:

$$V = \pi r^2 h$$

STOŻEK



Pole powierzchni bocznej:

$$P_b = \pi r l$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l$$

Objętość:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

KULA



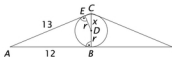
Pole powierzchni:

$$P = 4\pi r^2$$

Objętość:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

PRZYKŁAD Oblicz promień kuli wpisanej w stożek o promieniu podstawy 12 i tworzącej o długości 13.



$$(x + r)^2 = 13^2 - 12^2 = 25$$

$$x + r = 5 \quad \text{lub} \quad x + r = -5$$

$$x = 5 - r \quad \text{sprzeczność}$$

Trójkąty ABC i DEC są prostokątne i mają wspólny kąt o wierzchołku C , są więc podobne (cecha kk). Zatem $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|DC|}$.

$$\frac{12}{13} = \frac{r}{5-r}$$

$$60 - 12r = 13r$$

$$\underline{r = 2\frac{2}{5}}$$



Sporządzamy rysunek przekroju osiowego stożka z wpisaną kulą.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC .

Liczba $x + r$ musi być dodatnia, więc ujemnego rozwiązania nie bierzemy pod uwagę.

ZADANIE Oblicz promień kuli wpisanej w stożek o promieniu podstawy 6 i tworzącej o długości 10.

zadania 1-6 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Ile razy większą objętość ma walec opisany na graniastosłupie prawidłowym czworokątnym od walca wpisanego w ten graniastosłup?



- b) Ile razy większą objętość ma graniastosłup prawidłowy czworokątny opisany na walcu od graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wpisanego w ten walec?



2. Na rysunku jest przedstawiony ostrosłup prawidłowy wpisany w stożek. Jaką część stożka zajmuje ostrosłup?

a)



b)



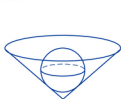
c)



3. Ostrosłup prawidłowy czworokątny i stożek mają wspólny wierzchołek, a podstawa stożka jest wpisana w podstawę ostrosłupa. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° , a tworząca ma długość 4. Oblicz objętość ostrosłupa.

4. Wykaż, że objętość walca o polu powierzchni całkowitej P opisanego na kuli o promieniu r jest równa $\frac{1}{3}Pr$.

5. Rożek zrobiony z papieru ma kształt powierzchni bocznej pewnego stożka. Gdyby do tego rożka wrzucić piłeczkę w kształcie kuli o średnicy 6 cm, to byłaby ona styczna do płaszczyzny podstawy stożka, a gdyby wrzucić piłeczkę o średnicy 8 cm, to nad powierzchnię podstawy wystawałaby połowa tej piłeczki. Oblicz wysokość stożka.





6. Walec wpisano w stożek w sposób przedstawiony na rysunku obok. Stożek ma wysokość 8, a promień jego podstawy jest równy 4. Oblicz objętość walca, jeśli:

- a)** promień podstawy walca jest równy 1,
b) wysokość walca jest równa 1.

MINISPRAWDZIAN

51. W stożek wpisano walec, którego promień podstawy jest 3 razy mniejszy od promienia podstawy stożka. Stosunek objętości walca do objętości stożka wynosi:

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{27}$ D. $\frac{2}{9}$

52. Ostrosłup prawidłowy trójkątny i stożek mają wspólny wierzchołek, a podstawa stożka jest wpisana w podstawę ostrosłupa. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° , a tworząca ma długość 4. Objętość ostrosłupa jest równa:

- A. 24 B. $6\sqrt{3}$ C. $24\sqrt{3}$ D. $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

53. Wskaż powierzchnię kuli wpisanej w stożek, którego promień podstawy ma długość 1, a wysokość jest równa $\sqrt{3}$.

- A. $\frac{4}{3}\pi$ B. $\frac{1}{3}\pi$ C. 12π D. 3π

PROSTE I PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI

- 1** Do tej pory, opisując na przykład graniastosłup, mówiliśmy, że podstawy leżą na płaszczyznach równoległych, a wysokość jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Pojęcie prostopadłości i równoległości w przestrzeni rozumieliśmy intuicyjnie. Uściślimy teraz te pojęcia.

POŁOŻENIE PROSTYCH W PRZESTRZENI

Przez dowolne trzy punkty przestrzeni zawsze można poprowadzić płaszczyznę. Gdy te punkty nie leżą na jednej prostej, to istnieje tylko jedna taka płaszczyzna.

Wynika stąd, że w przestrzeni dwie proste, które się przecinają, leżą zawsze na jednej płaszczyźnie.



Gdy dwie proste w przestrzeni się nie przecinają, to mogą leżeć na jednej płaszczyźnie lub nie.

O dwóch prostych, które nie mają punktów wspólnych i leżą na jednej płaszczyźnie, mówimy, że są **równoległe**. Przyjmujemy, że proste pokrywające się też są równoległe.

O dwóch prostych, które nie mają punktów wspólnych i nie leżą w jednej płaszczyźnie, mówimy, że są **skośne**.

Mówimy, że dwie proste w przestrzeni są **prostopadłe**, gdy istnieje prosta równoległa do jednej z nich, przecinająca drugą pod kątem prostym.

Zwróć uwagę, że w przestrzeni proste prostopadłe mogą być skośne.

Mówimy, że odcinki w przestrzeni są równoległe, gdy leżą na prostych równoległych. Podobnie mówimy, że odcinki są skośne lub prostopadłe, gdy leżą odpowiednio na prostych skośnych lub prostopadłych.

Na poniższych rysunkach zaznaczono w graniastosłupach prawidłowych sześciokątnych po trzy pary odcinków odpowiednio równoległych, skośnych i prostopadłych.



pary odcinków
równoległych



pary odcinków
skośnych

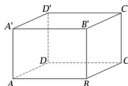


pary odcinków
prostopadłych

W prostopadłościanie każde dwie krawędzie są albo równoległe, albo prostopadłe (niektóre krawędzie prostopadłe są też skośne).

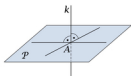
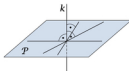
ĆWICZENIE A Na rysunku przedstawiony jest prostopadłościan. Wymień wszystkie krawędzie, które są:

- prostopadłe do krawędzi AA' ,
- równoległe do krawędzi CC' ,
- prostopadłe do odcinka AB' ,
- skośne do odcinka AC ,
- skośne do przekątnej AC' .



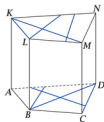
PROSTA PROSTOPADŁA DO PŁASZCZYZNY

Mówimy, że **prosta jest prostopadła do płaszczyzny**, gdy jest prostopadła do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie.



Niech A będzie punktem wspólnym prostej k i płaszczyzny P . Aby stwierdzić, że prosta k jest prostopadła do płaszczyzny P , wystarczy wskazać dwie proste leżące na tej płaszczyźnie i przechodzące przez punkt A , do których prosta k jest prostopadła.

Na rysunku obok przedstawiono graniastosłup prosty. Wszystkie jego ściany boczne są prostokątami, zatem np. krawędź LB jest prostopadła do krawędzi BA i BC , a więc jest także prostopadła do każdego z zaznaczonych na niebiesko odcinków.



Zatem każda krawędź boczna w graniastosłupie prostym jest prostopadła do dowolnego odcinka leżącego na którejś z podstaw graniastosłupa.

W podobny sposób można uzasadnić prostopadłość innych odcinków w bryłach.

Na rysunkach przedstawiono graniastosłupy proste. Na każdym z poniższych rysunków odcinek niebieski jest prostopadły do dwóch odcinków zaznaczonych na zielono. Czerwony odcinek leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez dwa zielone odcinki. Zatem czerwony odcinek jest także prostopadły do niebieskiego odcinka.



prostokątnościan



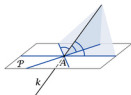
graniastosłup prawidłowy trójkątny



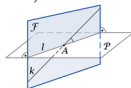
graniastosłup prawidłowy sześciokątny

KĄT MIĘDZY PROSTĄ A PŁASZCZYZNĄ

Niech prosta k przecina płaszczyznę P w punkcie A . Na płaszczyźnie P możemy poprowadzić wiele prostych przechodzących przez punkt A . Prosta k może tworzyć z tymi prostymi różne kąty.

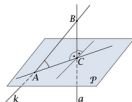


Spośród tych prostych wybierzmy taką prostą l , która leży w płaszczyźnie $\mathcal{F}$ prostopadłej do płaszczyzny P i zawiera prostą k . Miara kąta nachylenia prostej k do płaszczyzny P to miara kąta (ostrego lub prostego) między prostymi k i l .

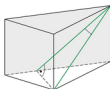


Kąt ostry między prostą k a płaszczyzną P można wyznaczyć w następujący sposób:

Przez dowolny punkt B prostej k ($B \neq A$) prowadzimy prostą a prostopadłą do płaszczyzny P . Przecina ona tę płaszczyznę w pewnym punkcie C . Tak otrzymaną prostą AC będziemy nazywać **rzutem prostokątnym** prostej k na płaszczyznę P . Kąt CAB jest kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny P .



Na poniższych rysunkach zaznaczono kilka kątów między odcinkami i ścianami w graniastosłupach prostych i w ostrosłupie.



ĆWICZENIE B Naszkicuj graniastosłup prawidłowy sześciokątny i zaznacz:

- kąt między krótszą przekątną graniastosłupa a podstawą,
- kąt między dłuższą przekątną graniastosłupa a ścianą boczną.

ĆWICZENIE C Naszkicuj ostrosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz:

- kąt między krawędzią boczną a podstawą,
- kąt między wysokością ostrosłupa a ścianą boczną.

POŁOŻENIE PŁASZCZYZN W PRZESTRZENI

Gdy dwie płaszczyzny w przestrzeni nie mają punktów wspólnych, to mówimy, że są równoległe. Przyjmujemy, że płaszczyzny, które się pokrywają, też są równoległe.

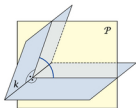
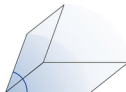


Dwie płaszczyzny, które nie są równoległe, przecinają się wzdłuż prostej.



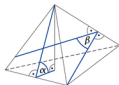
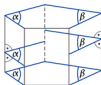
KĄT DWUŚCIENNY

Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z tych części wraz z półpłaszczyznami nazywamy **kątem dwuściennym**.



Niech P będzie dowolną płaszczyzną prostopadłą do krawędzi k kąta dwuściennego. Wspólna część płaszczyzny P i kąta dwuściennego to pewien kąt płaski, którego ramiona są prostopadłe do krawędzi k . Za miarę kąta dwuściennego przyjmujemy miarę tego kąta płaskiego.

Na rysunkach zaznaczono kilka kątów między ścianami graniastosłupa prostego i dwóch ostrosłupów.



ĆWICZENIE D Narysuj ostrosłup prawidłowy czworokątny i zaznacz:

- kąt między ścianą boczną a podstawą,
- kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi,

PRZYKŁAD 1 W graniastosłupie prostym, którego podstawa jest rombem, kąty nachylenia przekątnych do podstawy mają miary 30° i 60° . Oblicz miary kątów między ścianami bocznymi tego graniastosłupa.



$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{|AC|}$$

$$|AC| = \frac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{|D'B'|}$$

$$|D'B'| = \frac{h}{\operatorname{tg} 60^\circ}$$



$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{\frac{1}{2}|AC|} = \frac{|D'B'|}{|AC|} = \frac{\frac{h}{\operatorname{tg} 60^\circ}}{\frac{h}{\operatorname{tg} 30^\circ}} = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}, \text{ więc } \frac{\alpha}{2} \approx 18,435^\circ, \text{ czyli } \alpha \approx 36,9^\circ$$

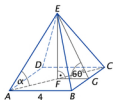
$$\beta = 180^\circ - \alpha \approx 143,1^\circ$$

Obliczamy za pomocą kalkulatora lub odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta $\frac{\alpha}{2}$.

Odp. Kąty między ścianami graniastosłupa mają miary około $36,9^\circ$ i $143,1^\circ$.

ZADANIE W graniastosłupie prostym, którego podstawa jest trójkątem równoramiennym, kąty nachylenia przekątnych ścian bocznych do podstawy wynoszą 45° i 60° . Oblicz miary kątów między ścianami tego graniastosłupa. Rozważ dwa przypadki.

PRZYKŁAD 2 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 4, a kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy ma miarę 60° . Znajdź miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do podstawy.



$$|FG| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|EF|}{|FG|}$$

$$|EF| = |FG| \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$|AF| = \frac{|AC|}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|EF|}{|AF|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ więc } \alpha \approx 51^\circ$$

Kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy to $\angle EGF$ (jego ramiona są prostopadłe do krawędzi BC).

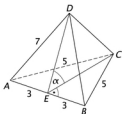
Odcinek AC jest przekątną kwadratu o boku 4, a więc ma długość $4\sqrt{2}$.

Obliczamy za pomocą kalkulatora lub odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta α .

Odp. Krawędź boczna jest nachylona do podstawy pod kątem około 51° .

ZADANIE W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 6, a kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy ma miarę 30° . Znajdź miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy tego ostrosłupa.

PRZYKŁAD 3 Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o podstawie o długości 6 i ramionach o długości 5, a wszystkie krawędzie boczne mają długość 7. Znajdź miarę kąta nachylenia największej ściany bocznej do podstawy.



$$|EC|^2 + |EB|^2 = |BC|^2$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie EBC.

$$|EC|^2 + 3^2 = 5^2$$

$$|EC| = 4$$

$$|ED|^2 + |EB|^2 = |BD|^2$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie EBD.

$$|ED|^2 + 3^2 = 7^2$$

$$|ED| = 2\sqrt{10}$$

$$|DC|^2 = |EC|^2 + |ED|^2 - 2 \cdot |EC| \cdot |ED| \cdot \cos \alpha$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów w trójkącie ECD.

$$7^2 = 4^2 + (2\sqrt{10})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \cos \alpha$$

$$49 = 16 + 40 - 16\sqrt{10} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{16\sqrt{10}} \approx 0,1383, \text{ więc } \alpha \approx 82^\circ$$

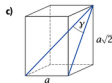
Odp. Kąt nachylenia największej ściany bocznej do podstawy ma około 82° .

ZADANIE Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny o podstawie o długości 4 i ramionach o długości 6, a krawędzie boczne mają długość 8. Pod jakim kątem jest nachylona do podstawy najmniejsza ściana boczna?

zadania 1-14

ZESTAW ZADAŃ

1. Poniższy graniastosłup jest prawidłowy. Oblicz miarę zaznaczonego kąta.



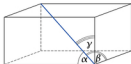
2. a) Znajdź miarę kąta między przekątnymi sześcianu.

b) Czy miara kąta nachylenia przekątnej sześcianu do podstawy sześcianu jest większa niż 30° ?

3. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez, w którym dłuższa podstawa i jedno ramię są prostopadłe i mają tę samą długość a . Dłuższa przekątna graniastosłupa ma długość $2a$. Pod jakim kątem przekątna ta jest nachylona do podstawy?

4. Przekątna prostopadłościanu tworzy z krawędziami wychodzącymi z tego samego wierzchołka kąty α , β , γ . Wykaż, że zachodzi równość:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



5. Wysokość graniastosłupa prostego trójkątnego ma długość 1. Dwie przekątne ścian bocznych poprowadzone z tego samego wierzchołka mają długość $\sqrt{3}$ i są do siebie prostopadłe. Pod jakimi kątami są do siebie nachylone ściany boczne tego graniastosłupa?

6. Graniastosłup prosty ma wysokość $\sqrt{15}$, a jego podstawą jest trapez równoramienny o bokach długości 3, $\sqrt{2}$, 1 i $\sqrt{2}$.

- Znajdź miary kątów między sąsiednimi ścianami bocznymi.
- Pod jakim kątem przekątna graniastosłupa jest nachylona do podstawy?

7. W graniastosłupie prostym, którego podstawa jest rombem, kąty nachylenia przekątnych do podstawy wynoszą 45° i 60° . Oblicz miary kątów między ścianami bocznymi tego graniastosłupa.

8. Na rysunku jest przedstawiony graniastosłup prawidłowy sześciokątny, w którym wszystkie krawędzie mają jednakowe długości. Oblicz miarę kąta α .

a)



b)



c)



9. Graniastosłup prawidłowy sześciokątny ma wysokość $\sqrt{2}$, a krawędź jego podstawy ma długość 1. Znajdź:

- miary kątów nachylenia przekątnych tego graniastosłupa do podstawy,
- miarę kąta między przekątnymi ścian bocznych, wychodzącymi z jednego wierzchołka.

10. Na rysunku przedstawiony jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny. Uzasadnij, że zaznaczony trójkąt jest prostokątny, i oblicz miary kątów ostrych tego trójkąta.



11. W ostrosłupie prawidłowym krawędź podstawy ma długość a . Znajdź kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy, jeśli:

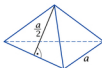
- ostrosłup jest czworokątny i krawędź boczna ma długość $a\sqrt{2}$,
- ostrosłup jest trójkątny i krawędź boczna ma długość $\frac{2}{3}a$,
- ostrosłup jest sześciokątny i krawędź boczna ma długość $2a$.

12. Ostrosłup przedstawiony na rysunku jest prawidłowy. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy.

a)



b)



c)



13. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość a . Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę α . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

14. a) Oblicz miarę kąta między ścianami czworościanu foremnego.

b) Pod jakim kątem krawędź boczna czworościanu foremnego jest nachylona do podstawy?

MINISPRAWDZIAN

51. Krótsza przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Krawędź podstawy ma długość 1. Wysokość tego graniastosłupa jest równa:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 2 C. 1 D. $\sqrt{3}$

52. Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $10\sqrt{2}$, a jego krawędź podstawy ma długość 10. Tangens kąta między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną jest równy:

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

53. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość $4\sqrt{2}$. Przekątne sąsiednich ścian bocznych poprowadzone z tego samego wierzchołka tworzą kąt o mierze 60° . Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe:

- A. $288\sqrt{3}$ C. $96(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$
B. $16(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ D. $32(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$

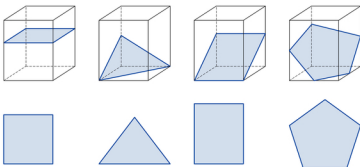
54. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego są nachylone do podstawy pod kątem 60° , a krawędź podstawy ma długość 2. Wskaż wysokość tego ostrosłupa.

- A. 3 B. 6 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

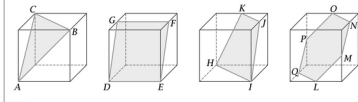
PRZEKROJE GRANIASTOSŁUPÓW

I **Przekrojem bryły** nazywamy jej część wspólną z pewną płaszczyzną.

Na poniższych rysunkach zaznaczono kilka przekrojów pewnego graniastosłupa prawidłowego czworokątnego. Pod rysunkami przedstawiono rzeczywiste kształty tych przekrojów.



ĆWICZENIE Na poniższych rysunkach zaznaczono przekroje sześcianu o krawędzi 2 cm (punkty oznaczone literami to wierzchołki sześcianu lub środki krawędzi). Naszkicuj te wielokąty i podaj długości ich boków.



PRZYKŁAD 1 Oblicz miarę najmniejszego kąta przekroju prostopadłościanu zaznaczonego na rysunku.

$$|AB| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$|AC| = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$$

$$|BC| = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$$



Obliczmy długości boków przekroju ABC , korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$|AB| < |AC|$ i $|AB| < |BC|$, więc $\sphericalangle BCA$ to najmniejszy kąt trójkąta ABC .

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos |\sphericalangle BCA|$$

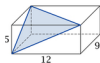
Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$$100 = 136 + 164 - 2 \cdot 2\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{41} \cdot \cos |\sphericalangle BCA|$$

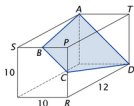
$$\cos |\sphericalangle BCA| = \frac{200}{8\sqrt{1394}} = \frac{25}{\sqrt{1394}} \approx 0,6696, \text{ więc } |\sphericalangle BCA| \approx 48^\circ$$

Odp. Najmniejszy kąt tego przekroju ma miarę około 48° .

ZADANIE Oblicz miarę największego kąta przekroju prostopadłościanu zaznaczonego na rysunku.



PRZYKŁAD 2 Na rysunku zaznaczono przekrój prostopadłościanu. Punkty B i C są środkami krawędzi. Oblicz pole tego przekroju.



$$|CD| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$|AB| = |CD| = 13$$

$$|BC| = 5\sqrt{2}$$

$$|AD| = 10\sqrt{2}$$

Trójkąt RDC jest prostokątny. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

Trójkąty RDC i SAB są przystające.

Trójkąt BPC to połowa kwadratu o boku 5.

Trójkąt ADT to połowa kwadratu o boku 10.



$$x = \frac{10\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}{2} = 2,5\sqrt{2}$$

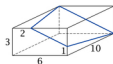
$$h^2 = 13^2 - (2,5\sqrt{2})^2 = \frac{313}{2}$$

$$h = \sqrt{\frac{313}{2}}$$

Przekrój $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.

$$P = \frac{5\sqrt{2} + 10\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{313}}{\sqrt{2}} = 7,5\sqrt{313}$$

ZADANIE Na rysunku zaznaczono przekrój prostopadłościanu. Oblicz pole tego przekroju.



zadania 1–10

ZESTAW ZADAŃ

1. Naskicuj przekrój prostopadłościanu płaszczyzną, która nie zawiera żadnej jego ściany i przechodzi przez:

- krawędź podstawy i środki dwóch krawędzi bocznych,
- przekątną podstawy i środki dwóch przekątnych,
- przekątną podstawy i środek krawędzi bocznej,
- przekątne dwóch sąsiednich ścian,
- przekątne dwóch równoległych ścian.

2. Oblicz pole zaznaczonego przekroju sześcianu.

a)



b)

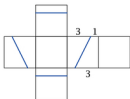


c)

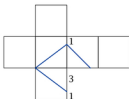


3. Na rysunku jest przedstawiona siatka sześcianu. Zaznaczone odcinki to brzegi pewnego przekroju tego sześcianu. Oblicz pole tego przekroju.

a)



b)



4. Oblicz pole zaznaczonego przekroju prostopadłościanu.

a)



b)



c)



5. Prostopadłościan o wymiarach $6\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ chcemy przeciąć płaszczyzną przechodzącą przez środki dokładnie czterech krawędzi. Podaj wymiary wszystkich przekrojów, jakie możemy w ten sposób otrzymać.

6. Prostopadłościan ma wymiary $3\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 4\text{ cm}$. Ustal, jakie jest największe możliwe pole przekroju tego prostopadłościanu, gdy ten przekrój ma kształt:

- a) prostokąta, b) trójkąta, c) rombu.

7. Przez środki dwóch krawędzi sześcianu poprowadzono dwie płaszczyzny, otrzymując przekroje przedstawione na rysunku obok. Oblicz stosunek pól tych przekrojów.

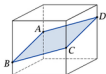


8. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach 2 cm i 3 cm , a wysokość tego prostopadłościanu jest równa 4 cm . Prostopadłościan przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź o długości 2 cm i nachyloną do podstawy pod kątem α . Oblicz pole tak otrzymanego przekroju, gdy:

- a) $\alpha = 30^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ$

9. Sześcian o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem α .

- a) Oblicz pole otrzymanego przekroju, gdy $\alpha = 30^\circ$.
b) Ustal, jaką miarę powinien mieć kąt α , aby pole tego przekroju było o 30% większe od pola ściany sześcianu.



10. Rysunek przedstawia przekrój sześcianu płaszczyzną nachyloną do podstawy pod kątem α . Krawędź sześcianu ma długość a , a punkty A i C to środki krawędzi.

- a) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.
b) Znajdź kąt α , dla którego czworokąt $ABCD$ ma najmniejsze pole, oraz taki — dla którego pole to jest największe. Oblicz te pola.

MINISPRAWDZIAN

S1. Przekrój sześcianu o krawędzi a ma kształt trójkąta. Jakie jest największe możliwe pole tego trójkąta?

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ C. $a^2\sqrt{3}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

S2. Prostopadłościan o wymiarach $3 \times 5 \times 6$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jedną z najdłuższych krawędzi i nachyloną do największej ze ścian pod kątem 60° . Wskaż pole powierzchni otrzymanego przekroju.

- A. $6\sqrt{3}$ B. $12\sqrt{3}$ C. $20\sqrt{3}$ D. 36

BRYŁY PODOBNE

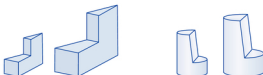
I



ĆWICZENIE A Rzeźba na fotografii przedstawia powiększoną w pewnej skali łatkę do gry w badminton. Wszystkie proporcje zachowano. Poniżej podano jeden z rzeczywistych wymiarów łatki. Zmierz długości odpowiednich odcinków i oszacuj, ile razy wymiary rzeźby są większe od wymiarów prawdziwej łatki. Przyjmij, że mężczyzna na fotografii ma 180 cm wzrostu.



Jeśli daną bryłę $\mathcal{F}$ powiększymy lub pomniejszymy w pewnej skali, to otrzymamy figurę podobną do bryły $\mathcal{F}$. O bryłach podobnych możemy powiedzieć, że mają taki sam kształt, a różnią się tylko wielkością. Na poniższych rysunkach są przedstawione dwie pary brył podobnych.



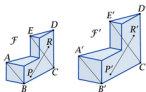
W bryłach podobnych stosunek długości każdej pary odpowiadających sobie odcinków jest taki sam. Liczbę równą temu stosunkowi nazywamy skalą podobieństwa.

Figury przestrzenne $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}'$ przedstawione na rysunku obok są podobne.

Odcinkowi PR w figurze $\mathcal{F}$ odpowiada odcinek $P'R'$ w figurze $\mathcal{F}'$. Figura $\mathcal{F}'$ jest podobna do figury $\mathcal{F}$ w skali:

$$k = \frac{|P'R'|}{|PR|}$$

Jeśli figura $\mathcal{F}'$ jest podobna do figury $\mathcal{F}$ w skali k , to oczywiście figura $\mathcal{F}$ jest podobna do figury $\mathcal{F}'$ w skali $\frac{1}{k}$.



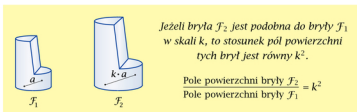
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|C'D'|}{|CD|} = \frac{|E'E'|}{|CE|} = \frac{|P'R'|}{|PR|}$$

ĆWICZENIE B a) Oblicz, jaką wysokość powinien mieć walec o promieniu podstawy równym 3, aby był podobny do walca o wysokości 6 i promieniu podstawy równym 2.

b) Prostopadłościan ma krawędzie o długościach 4, 6 i 12. Czy prostopadłościan o krawędziach 6, 9 i 18 jest do niego podobny?

c) Walec ma wysokość równą 6 i promień podstawy równy 3. Ile jest równe pole powierzchni bocznej walca podobnego do tego walca w skali $\frac{1}{6}$?

Przypomnijmy, że jeśli dwie figury płaskie są podobne w skali k , to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Taka sama zależność zachodzi między polami powierzchni brył podobnych.



Zastanówmy się teraz, jaka jest zależność między objętościami brył podobnych. Przyjrzyj się rysunkom. Na każdym jest przedstawiony prostopadłościan z pokolorowaną jego częścią, która też jest prostopadłościanem.



Większy prostopadłościan jest podobny w skali $k = 2$ do prostopadłościanu zaznaczonego kolorem.

Objętość większego prostopadłościanu jest 8 razy większa od objętości zaznaczonego prostopadłościanu.



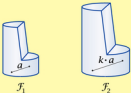
Większy prostopadłościan jest podobny w skali $k = 3$ do prostopadłościanu zaznaczonego kolorem.

Objętość większego prostopadłościanu jest 27 razy większa od objętości zaznaczonego prostopadłościanu.

Załóżmy, że prostopadłościan o wymiarach $a' \times b' \times c'$ jest podobny w skali k do prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$. Wówczas $a' = ka$, $b' = kb$ i $c' = kc$. Obliczmy stosunek objętości tych prostopadłościanów:

$$\frac{a' \cdot b' \cdot c'}{a \cdot b \cdot c} = \frac{ka \cdot kb \cdot kc}{abc} = k^3$$

Pokazaliśmy, że stosunek objętości prostopadłościów podobnych jest równy sześciannowi skali podobieństwa. Taka własność jest także prawdziwa dla dowolnych brył podobnych.



Jeżeli bryła F_2 jest podobna do bryły F_1 w skali k , to stosunek objętości tych brył jest równy k^3 .

$$\frac{\text{Objętość bryły } F_2}{\text{Objętość bryły } F_1} = k^3$$

Oczywiście dowolne dwa sześciany (i dowolne dwie kule) są bryłami podobnymi. Gdy stożek (lub ostrosłup) przetniemy płaszczyzną równoległą do podstawy, to otrzymamy dwie bryły, z których jedna jest stożkiem (ostrosłupem) podobnym do przecinanego stożka (ostrosłupa), a druga figura to tzw. stożek ścięty (ostrosłup ścięty).

PRZYKŁAD Od ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 5 odcięto ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy. Otrzymany w ten sposób ostrosłup ścięty ma wysokość 4, a krawędź jego górnej podstawy ma długość 3. Oblicz objętość tego ostrosłupa ściętego.



$$\frac{5}{3} = \frac{h+4}{h}$$

$$5h = 3(h+4)$$

$$h = 6$$

Dany ostrosłup jest podobny do ostrosłupa odciętego w skali $k = \frac{5}{3}$.

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot (6+4) = \frac{250}{3}$$

V_1 — objętość większego ostrosłupa

$$V_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot V_1 = \frac{27}{125} \cdot \frac{250}{3} = \frac{54}{3}$$

V_2 — objętość mniejszego ostrosłupa

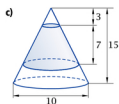
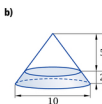
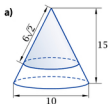
$$V = V_1 - V_2 = \frac{250}{3} - \frac{54}{3} = \frac{196}{3}$$

Odp. Objętość ostrosłupa ściętego jest równa $\frac{196}{3}$.

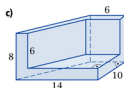
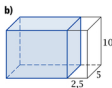
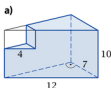
ZADANIE Od ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 6 i krawędzi bocznej 8 odcięto ostrosłup płaszczyzną równoległą do podstawy. Płaszczyzna ta przecięła wysokość w połowie. Oblicz objętość otrzymanego w ten sposób ostrosłupa ściętego.

ZESTAW ZADAŃ

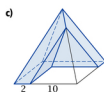
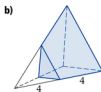
1. Stożki przedstawione na rysunkach rozcięto płaszczyznami równoległymi do ich podstaw. Oblicz objętości zacięniowanych brył.



2. Od graniastopu prostego odcięto graniastop do niego podobny (zob. rysunek). Oblicz objętość zacięniowanej bryły.



3. Od ostrosłupa prawidłowego o wysokości 10 odcięto ostrosłup do niego podobny (zob. rysunek). Oblicz objętość zacięniowanej bryły.



4. Od ostrosłupa o objętości 54 cm^3 odcięto górną część płaszczyzną równoległą do podstawy ostrosłupa. Otrzymano w ten sposób ostrosłup ścięty, którego wysokość jest równa $\frac{1}{3}$ wysokości ostrosłupa. Oblicz objętość tego ostrosłupa ściętego.

5. Pole powierzchni pewnego walca jest dwa razy większe od pola powierzchni walca podobnego do niego. Ustal, ile razy jest większa objętość tego walca.

6. Do stojącego na stole kieliszka w kształcie stożka wiano płyn do $\frac{3}{4}$ wysokości kieliszka. Jaką część pojemności kieliszka zajął płyn? Do jakiego poziomu należałoby nalać płyn, aby wypełnić połowę objętości kieliszka?

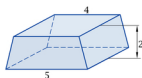
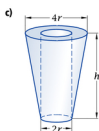
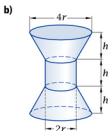
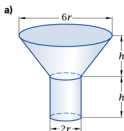
7. a) Stożek przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy, otrzymując przekrój o polu dwukrotnie mniejszym od pola podstawy. Oblicz, w jakim stosunku płaszczyzna przekroju dzieli wysokość tego stożka.

b) Płaszczyzną równoległą do podstawy dzielimy stożek na dwie części o równych objętościach. Oblicz, w jakim stosunku płaszczyzna ta podzieliła tworzącą stożka.

8. Oblicz objętość stożka ściętego o wysokości h , którego promienie podstaw są równe r i R (zob. rysunek obok).



9. W bryłach przedstawionych na rysunkach dostrzec można stożki ścięte i walce. Oblicz objętości całych brył.



10. Na rysunku obok przedstawiony jest ostrosłup ścięty. Podstawy tej bryły są kwadratami. Oblicz objętość tej bryły.



11. Środki krawędzi czworoscianu foremnego są wierzchołkami ośmiościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości czworoscianu do objętości ośmiościanu.



12. Na ilustracji przedstawiono jajo strusia i jajko kurze. Załóżmy, że czas gotowania jaj jest proporcjonalny do ich objętości oraz że jajko kurze i jajo strusia to bryły podobne. Jajko kurze gotuje się na twardo 6 minut. Jak długo powinno się gotować na twardo jajo strusia?

13. Gęstość złota jest około 20 razy większa, a gęstość styropianu około 50 razy mniejsza niż gęstość ciała człowieka. Ustal, jakie wysokości miałyby posągi wiernie oddające proporcje twojego ciała, które ważyłyby tyle samo co ty, gdyby jeden z nich był wykonany ze złota, a drugi — ze styropianu.

W 1638 roku ukazało się dzieło Galileusza „Dialogi i dowodzenia matematyczne”, w którym wyjaśnia m.in., dlaczego zwierzęta nie mogą być dowolnie duże.

Galileusz rozumował tak:

Wytrzymałość kości jest proporcjonalna do pola powierzchni ich przekroju poprzecznego. Gdyby jakieś zwierzę zwiększyło swoje wymiary 3 razy, to jego masa zwiększyłaby się tak jak objętość, tzn. $3^3 = 27$ razy. Pole przekroju

poprzecznego kości natomiast zwiększyłoby się $3^2 = 9$ razy, więc 9 razy wzrosła wytrzymałość kości. Widać z tego, że zwierzęta nie mogłyby być dowolnie duże, gdyż ich masa byłaby zbyt wielka w porównaniu z wytrzymałością kości.

Opisanych przez Galileusza faktów na ogół nie uwzględniają autorzy fantastycznych opowieści i filmów, w których występują nienaturalnie małe lub gigantyczne stwory.

14. Przeczytaj informacje w ramce.

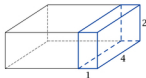
a) Dorosły goryl ma około 1,8 m wzrostu. Filmowi twórcy nadali postaci King Konga proporcje ciała goryla powiększonego do wzrostu 45 m. Znajdź stosunek pól przekroju kości i stosunek mas goryla i King Konga.



b) W książce L. Carrolla „Alicja w krainie czarów” tytułowa bohaterka zmniejsza się gwałtownie i przez część powieści ma tylko $\frac{1}{5}$ swojego normalnego wzrostu. Przypuśćmy, że Alicja ważyła 35 kg i zmniejszała się proporcjonalnie. Ustal, ile powinna ważyć po zmniejszeniu.

MINISPRAWDZIAN

51. Od prostopadłościanu odcięto prostopadłościan do niego podobny o wymiarach $1 \times 2 \times 4$ (zob. rysunek obok). Objętość pozostałej części prostopadłościanu wynosi:



- A. 32 B. 48 C. 56 D. 64

52. Stosunek objętości dwóch brył podobnych jest równy $\frac{3}{8}$. Stosunek pól powierzchni tych brył jest równy:

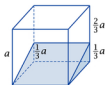
- A. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt[3]{9}}{4}$ D. $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

53. Stożek o wysokości 10 cm rozcięto na dwie bryły płaszczyzną równoległą do podstawy, odległą od niej o 6 cm. Wskaż, jaką część objętości tego stożka stanowi objętość większej z otrzymanych brył.

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{8}{125}$ C. $\frac{117}{125}$ D. $\frac{27}{125}$

POWTÓRZENIE

1. Ustal, jaką część objętości prostopadłościanu przedstawionego na rysunku stanowi objętość zacieniowanej bryły.



2. Bryła przedstawiona na rysunku powstała przez dołączenie dwóch ostrosłupów do graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Oblicz jej objętość.



3. Do walca o średnicy podstawy 6 i wysokości 4 dołączono walec o takiej samej wysokości i dwukrotnie mniejszej średnicy podstawy w taki sposób, że podstawa mniejszego walca leży na jednej z podstaw większego walca. Oblicz pole powierzchni otrzymanej bryły.

4. W ostrosłupie prawidłowym umieszczono stożek o tej samej wysokości. Podstawa stożka jest kołem wpisanym w podstawę ostrosłupa. Oblicz, jaką część ostrosłupa zajmuje ten stożek, gdy ostrosłup jest:

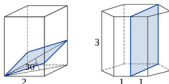
- a) czworokątny, b) trójkątny.

5. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 15, a kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy ma miarę 45° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

6. Piramida Cheopsa ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Jej krawędź podstawy jest równa 230 m, a wysokość — 146 m. Ustal jakim kątem — ostrym, prostym czy rozwartym — jest:

- a) kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi tego ostrosłupa,
b) kąt między przeciwległymi ścianami tego ostrosłupa.

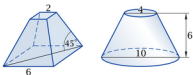
7. Zaznaczone na rysunkach przekroje graniastosłupów prawidłowych to romb i prostokąt. Oblicz ich pola.



8. Dany jest ostrosłup o wysokości 1 cm. Ustal, jaką wysokość powinien mieć jego powiększony model, aby:

- a) pole powierzchni całkowitej modelu było 100 razy większe od pola powierzchni całkowitej ostrosłupa,
b) objętość modelu była 100 razy większa od objętości danego ostrosłupa.

9. Pierwsza z brył przedstawionych na poniższym rysunku to ostrosłup ścięty o podstawach kwadratowych, a druga bryła to stożek ścięty. Oblicz objętości tych brył.



Statystyka

Wielkość bramki piłkarskiej została ustalona w drugiej połowie XIX wieku i od tego czasu się nie zmieniła. Obecnie bramkarze mają jednak dużo łatwiejsze zadanie niż bramkarze sprzed 100 lat. Badania statystyczne wykazały bowiem, że przeciętny wzrost mężczyzny zwiększył się w tym czasie aż o około 10 cm. Z tego powodu władze piłkarskie rozważały nawet zmianę wymiarów bramki.



- Przybliżenia ■ Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta
■ Średnia ważona ■ Odchylenie standardowe ■ Powtórzenie

PRZYBLIŻENIA

I

ĆWICZENIE A Przypuśćmy, że rower kosztuje 827,60 zł, a telewizor 7208,99 zł. Jak myślisz, jakie ceny mogą zapamiętać klienci, którzy zainteresowali się rowerem lub telewizorem?



Jeśli cena jakiegoś towaru wynosi na przykład 17,95 zł, klienci na ogół zapamiętują ją w pewnym przybliżeniu: „około 17 zł”, „około 18 zł”, „około 20 zł”. Każde z tych przybliżeń różni się o pewną kwotę od dokładnej ceny.

Różnicę między dokładną wartością a wartością przybliżoną obliczamy, odejmując od większej z tych wartości mniejszą. Tę różnicę nazywamy **błędem bezwzględnym** przybliżenia. Inaczej mówiąc, błąd bezwzględny to wartość bezwzględna różnicy między wartością dokładną i przybliżoną.

Błąd bezwzględny jest równy wartości bezwzględnej z różnicy między przybliżeniem i wartością dokładną.

Gdy przybliżenie jest mniejsze od dokładnej wartości, mówimy, że jest to przybliżenie z niedomiarem, a gdy jest większe od dokładnej wartości, mówimy, że jest to przybliżenie z nadmiarem. Na przykład:

$17,95 \text{ zł} \approx 17 \text{ zł}$ z błędem bezwzględnym 0,95 zł (z niedomiarem)

$17,95 \text{ zł} \approx 18 \text{ zł}$ z błędem bezwzględnym 0,05 zł (z nadmiarem)

$17,95 \text{ zł} \approx 20 \text{ zł}$ z błędem bezwzględnym 2,05 zł (z nadmiarem)

$17,95 \text{ zł} \approx 17,90 \text{ zł}$ z błędem bezwzględnym 0,05 zł (z niedomiarem)

ĆWICZENIE B Korzystając z podanej dokładnej wartości i jej przybliżenia, oblicz błąd bezwzględny tego przybliżenia.

a) $16250 \text{ m} \approx 16000 \text{ m}$

b) $350 \text{ m} \approx 400 \text{ m}$

c) $8950 \text{ m} \approx 9000 \text{ m}$

Zauważ, że przybliżenie liczby to nie zawsze to samo, co jej zaokrąglenie.

$$17,95 \approx 17$$

↑
przybliżenie, które
nie jest zaokrągleniem

$$17,95 \approx 18$$

↑
przybliżenie, które jest
zaokrągleniem do jednostki

Przyjrzyj się tabeli. Podano w niej masy dwóch zwierząt — małego oraz bardzo dużego, a także pewne przybliżenia tych mas.

	świnka morska	słoń
Masa	0,6 kg	5282,4 kg
Masa w przybliżeniu	1 kg	5282 kg
Błąd bezwzględny przybliżenia	0,4 kg	0,4 kg

W obu wypadkach błąd bezwzględny przybliżenia jest taki sam. Widzimy jednak, że w wypadku świnki morskiej błąd ma dużo większe znaczenie: masę zwierzęcia zawyżono niemal dwukrotnie.

zadania 1–5 ►

- II Obliczając stosunek błędu bezwzględnego do dokładnej wielkości, możemy lepiej ocenić błąd przybliżenia. Ten stosunek nazywamy **błędem względnym**. Często wyrażany jest w procentach i wówczas nazywamy go **błędem procentowym**.

Błąd względny jest równy ilorazowi błędu bezwzględnego przybliżenia i wartości dokładnej.

Korzystając z tabeli, otrzymujemy:

błąd procentowy przybliżenia masy świnki morskiej = $\frac{0,4}{0,6} \approx 0,666 \approx 67\%$

błąd procentowy przybliżenia masy słonia = $\frac{0,4}{5282,4} \approx 0,00008 = 0,008\%$

Łatwo zauważyć, że dokładność przybliżenia masy w wypadku słonia jest nieporównanie większa niż w wypadku świnki morskiej.

ĆWICZENIE C Korzystając z podanej dokładnej wartości i jej przybliżenia, oblicz błąd bezwzględny oraz błąd względny tego przybliżenia.

a) 22,7 kg $\approx$ 25 kg

b) 303,7 m $\approx$ 300 m

c) 11,73 ha $\approx$ 11,8 ha

zadania 6–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

- I 1. Oszacuj wynik działania, a następnie oblicz dokładny wynik za pomocą kalkulatora i określ błąd bezwzględny swojego oszacowania.

a) $79,284 : 4$

c) $7 \cdot 2,98 - 3,5$

e) $253,8 \cdot 4 - 900,24$

b) $5,246 + 17,789$

d) $33,123 - 4 \cdot 7,93$

f) $252,4 : 49,5 + 359,9 : 5,9$

Ciekawostka

$$\pi \approx 3,1415926535898$$

Starożytni Grecy używali przybliżenia $\pi \approx \frac{22}{7}$. W III w. n.e. chiński matematyk Liu Hui (czyt. ljiol hlej) przyjmował, że $\pi \approx 3\frac{7}{50}$. W XIII w. włoski matematyk Fibonacci (czyt. fibonaczczli) korzystał z przybliżenia $\pi \approx \frac{864}{275}$.

2. Która z liczb podanych w ciekawostce przybliża liczbę π z błędem bezwzględnym nie większym niż 0,001?

3. Podaj, jaki może być największy błąd bezwzględny przybliżenia, gdy zaokrąglamy liczbę rzeczywistą:

- a) do dziesiątek, b) do jedności, c) do części setnych.

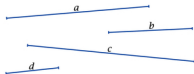
4. Na podstawie podanych informacji oblicz dokładne wartości liczb a i b .

$a \approx 12,5$ z błędem bezwzględnym 0,37; 12,5 to przybliżenie liczby a z nadmiarem
 $b \approx 45$ z błędem bezwzględnym 2,46; 45 to przybliżenie liczby b z niedomiarem

5. a) Prostokątny plac ma wymiary $84 \text{ m} \times 90 \text{ m}$. Podano je z błędem bezwzględnym 50 cm. W jakim przedziale mieścić się rzeczywiste pole powierzchni tego placu?

b) Samochód jechał przez około pół godziny ze średnią prędkością około $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W jakim przedziale mieścić się przejechana odległość, jeśli czas podano z błędem bezwzględnym równym 1 min, a prędkość — z błędem bezwzględnym $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

- 6.** Oszacuj „na oko” długości narysowanych odcinków. Ich rzeczywiste wymiary to: 5,45 cm, 4,62 cm, 2,77 cm i 1,71 cm. O ile różnią się twoje oszacowania od dokładnych długości? Oblicz w każdym przypadku błąd względny.



7. Zaokrąglij podaną liczbę do dziesiątek i oblicz błąd bezwzględny oraz błąd procentowy przybliżenia.

- a) 2572 b) 95 c) 289,7

8. Liczba 350 to przybliżenie z nadmiarem pewnej liczby, a błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 10,37. Oblicz błąd względny tego przybliżenia.

- 9.** Oblicz, jaki może być największy, a jaki najmniejszy możliwy błąd procentowy przybliżenia, gdy zaokrąglamy liczbę czterocyfrową do setek.

10. a) Przybliżenie pewnej liczby naturalnej a z nadmiarem jest równe 3600, a błąd procentowy tego przybliżenia to około 7%. Znajdź liczbę a .

b) Przybliżenie z niedomiarem liczby naturalnej b jest równe 540, a błąd procentowy tego przybliżenia to około 8%. Znajdź liczbę b .

11. a) Koszt remontu oszacowano na 35 000 zł. Po zakończeniu prac okazało się, że koszt był wyższy i błąd względny oszacowania wyniósł 0,3. Jaki był rzeczywisty koszt tego remontu?

b) Kierowca oszacował, że masa jego samochodu ciężarowego z ładunkiem wynosi 28 ton. Po zważeniu okazało się, że ta masa jest mniejsza, a błąd procentowy tego oszacowania jest równy 12%. Jaka była rzeczywista masa samochodu z ładunkiem?

MINISPRAWDZIAN

51. Przybliżona długość prostokątnego stołu wynosi 142 cm, a jego przybliżona szerokość 64 cm. Wiadomo, że oba wymiary podano z błędem bezwzględnym 0,5 cm. Które z poniższych pól nie może być polem powierzchni tego stołu?

- A. 9008 cm^2 B. 9017 cm^2 C. $9080,5 \text{ cm}^2$ D. $9223,5 \text{ cm}^2$

52. Jurek oszacował na 10 minut czas, w którym przebiegł 3 km. W rzeczywistości czas ten był nieco dłuższy, a błąd procentowy oszacowania Jurka wynosi 6,25%. W rzeczywistości bieg Jurka trwał zatem:

- A. 10 minut 15 sekund C. 10 minut 40 sekund
B. 10 minut 24 sekundy D. 11 minut

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA, MEDIANA, DOMINANTA

- 1** Słowo „statystyka” pochodzi od łacińskiego słowa *status*, które oznacza „państwo”. Po raz pierwszy użył go XVIII-wieczny niemiecki uczony Gottfried Achenwall (czyt. gotfrid achenwal). Według niego statystyka to „gromadzenie, przetwarzanie i wykorzystywanie danych przez państwo”.

Ciekawostka

Pierwsze dane statystyczne pochodziły ze spisów ludności przeprowadzanych już 5 tys. lat temu. Służyły one władcom do podejmowania racjonalnych decyzji dotyczących podatków, praw własnościowych, liczebności armii itp. Do dziś spisy ludności służą podobnym celom.

Wzmianki o takich spisach można znaleźć na przykład w Biblii. W Starym Testamencie wspomina się w Księdze Liczb o spisie przeprowadzonym 1500 lat p.n.e. Według Nowego Testamentu Maria z Józefem znaleźli się w Betlejem właśnie z powodu spisu przeprowadzanego w Cesarstwie Rzymskim.

Współcześnie wiele instytucji zbiera różne informacje w celach statystycznych. Jednak samo zebranie danych jeszcze niewiele daje. Dopiero ich opracowanie i uporządkowanie pozwala je właściwie wykorzystać.

Jedną z podstawowych metod opisywania zestawu danych liczbowych jest ustalenie ich wartości przeciętnych. Opiszemy teraz trzy najczęściej stosowane sposoby określania takich wartości na przykładzie danych zebranych poniżej.

W pewnej klasie wszystkim obecnym uczniom zadano pytanie: *Ile jest kieszeni w ubraniu, które masz na sobie?* Odpowiedzi zostały przedstawione w tabelach.

Dziewczęta

Liczba kieszeni	0	1	2	3	4	7
Liczba wskazań	7	3	5	1	1	2

Chłopcy

Liczba kieszeni	3	4	5	6	7	8	10
Liczba wskazań	1	2	3	3	1	1	1

Z pierwszej tabeli można odczytać, że 7 dziewcząt nie miało kieszeni, 3 dziewczęta miały jedną kieszeń itd. Sumy liczb z dolnych wierszy tabeli oznaczają, że w badaniu wzięło udział 19 dziewcząt i 12 chłopców.

Obliczymy teraz na trzy sposoby przeciętną liczbę kieszeni u uczniów tej klasy, którzy wzięli udział w ankiecie.

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to liczba $\bar{x}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Średnia arytmetyczna liczb kieszeni u dziewcząt to średnia arytmetyczna dziewiętnastu liczb: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 7, 7. Wynosi ona:

$$\bar{x}_d = \frac{7 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7}{19} = \frac{34}{19} \approx 1,79$$

Średnia arytmetyczna liczb kieszeni u chłopców wynosi:

$$\bar{x}_{ch} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 10}{12} = \frac{69}{12} = 5,75$$

Średnia arytmetyczna liczb kieszeni u ucznia z tej klasy jest równa:

$$\bar{x}_u = \frac{34 + 69}{19 + 12} = \frac{103}{31} \approx 3,32$$

Uwaga. Nie można obliczać średniej arytmetycznej dla całej klasy, dodając średnią liczbę kieszeni dziewcząt do średniej liczby kieszeni chłopców i dzieląc otrzymany wynik przez 2. (Otrzymalibyśmy wtedy około 3,77).

MEDIANA

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznacza zestaw liczb, w którym każda następna liczba jest nie mniejsza od poprzedniej.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest środkowa liczba.

Gdy n jest liczbą parzystą, to medianą liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest średnia arytmetyczna dwóch środkowych liczb.

Mediana liczb:

środek

1, 2, 3, 3, 4, 5, 7, 11, 13

jest równa 4

Mediana liczb:

środek

1, 3, 7, 8, 9, 10, 10, 11

jest równa $\frac{8+9}{2} = 8,5$

Zwróć uwagę, że mediana dzieli zestaw uporządkowanych danych na dwie równoliczne części: liczby z pierwszej części są mniejsze od mediany lub jej równe. Liczby drugiej części są większe od mediany lub jej równe.

Aby obliczyć medianę liczby kieszeni u dziewcząt i u chłopców, należy zapisać zebrane dane w takiej kolejności, aby każda następna liczba była nie mniejsza od poprzedniej.

Dziewczęta:

Liczb jest 19, więc na środku wypada dziesiąta liczba.

środek

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 7, 7

Mediana = 1

Chłopcy:

Liczb jest 12, więc środek wypada między szóstą i siódmą liczbą.

środek

3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 10

Mediana = $\frac{5+6}{2} = 5,5$

ĆWICZENIE A Znajdź medianę liczb:

a) 17, 2, 8, 8, 15, 11, 5, 4, 12, 9, 8

b) 21, 21, 13, 7, 17, 1, 3, 5, 7, 14

Uwaga. Gdy mamy zestaw danych, to medianę można także znaleźć w następujący sposób: najpierw skreślamy najmniejszą i największą z liczb w zestawie, potem najmniejszą i największą z pozostałych itd. Na końcu zostanie jedna liczba (będzie to mediana) lub dwie liczby (medianą będzie ich średnia arytmetyczna).

Zapisywanie długiej listy danych może być pracochłonne. Czasami jednak łatwo ustalić, które liczby zestawu są środkowe, bez wypisywania wszystkich danych.

Przyjrzyj się poniższej tabeli. Zebrano w niej dane o liczbie kieszeni u wszystkich badanych uczniów.

Liczba kieszeni	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
Liczba wskazań	7	3	5	2	3	3	3	3	1	1

Suma liczb w dolnym wierszu jest równa 31. Zatem gdybyśmy liczby kieszeni uczniów klasy ustawili w odpowiedniej kolejności, to otrzymalibyśmy listę 31 liczb, więc mediana byłaby szesnastą liczbą na tej liście.

Z tabeli widać, że pierwszych 7 liczb tej listy to zera, następne 3 liczby to jedynki itd. Analizując dalej tabelkę w ten sposób, można zauważyć, że szesnasta liczba, a więc szukana mediana, to liczba 3.

DOMINANTA

Dominanta zestawu danych to taka wartość, która w tym zestawie występuje najczęściej. Jeśli w zestawie kilka wartości występuje z tą samą (najwyższą) częstością, to każda z tych wartości jest dominantą.

Jeśli wszystkie wartości w zestawie występują z tą samą częstością, to przyjmujemy, że zestaw nie ma dominanty.

Uwaga. Dominanta nazywana jest też modą lub wartością modalną.

Na przykład dominantą zestawu liczb: 5, 1, 12, 5, 8, 6, 1, 6, 10, 1 jest 1. Zestaw liczb: 4, 3, 1, 2, 3, 2, 1, 5 ma natomiast trzy dominanty: 1, 2 i 3.

Z tabelki na stronie 134 łatwo odczytać, że dominanta liczby kieszeni u dziewcząt jest równa 0, gdyż największa grupa dziewcząt nie ma kieszeni, a u chłopców są dwie dominanty: 5 i 6. Z tabelki umieszczonej powyżej wynika, że dominanta liczby kieszeni dla całej klasy wynosi 0.

ĆWICZENIE B Zbierz w tabelkach dane o liczbie kieszeni u uczniów w twojej klasie. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę oraz dominantę tych danych.

Mając zestaw danych liczbowych, możemy obliczyć zarówno ich średnią arytmetyczną, medianę, jak i dominantę, jednak nie zawsze wszystkie te wielkości są tak samo użyteczne. Na przykład producentów odzieży czy sprzętu sportowego na pewno najbardziej interesuje najczęstsza (dominująca) opinia klientów, czyli dominanta.

ĆWICZENIE C Pewien piekarz badał, po ile bułek kupują jego klienci. W tabeli przedstawiono zebrane przez niego dane. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby kupowanych bułek.

Liczba kupionych bułek	1	2	3	4	6	7	8	10	12
Liczba klientów	7	18	8	18	31	1	5	8	4

Piekarz chce sprzedawać część bułek zapakowanych w woreczki. Którą z obliczonych wartości przeciętnych powinien wziąć pod uwagę przy ustalaniu liczby bułek w woreczku?

Zdarzają się też sytuacje, w których należy wziąć pod uwagę wszystkie trzy wielkości — średnią arytmetyczną, medianę i dominantę — aby we właściwy sposób zinterpretować dane.

Na przykład z informacji podanych obok wynika, że w 2016 roku, mimo że średnia pensja wynosiła 3094 zł, to co najmniej połowa zatrudnionych zarabiała nie więcej niż 2512 zł, a najczęstsza płaca wynosiła 1511 zł netto.

Główny Urząd Statystyczny

PŁACE NETTO W 2016 ROKU
W SEKTORZE PRZEDSIĘBIORSTW

średnia płaca — 3094 zł

mediana płac — 2512 zł

dominanta płac — 1511 zł

II SKALA CENTYLOWA

zadania 1–18 ►

Aby określić, jak dany wynik wypada względem całego zestawu danych, możemy obliczyć, jaki procent danych jest nie większy od tego wyniku. Gdy dane opisane są w ten sposób, to mówimy, że są przedstawione w **skali centylowej**.

W tabeli zebrano informacje o ocenach z matematyki na koniec roku szkolnego grupy 2000 uczniów.

Ocenę 1 otrzymało 40 uczniów, czyli 2% wszystkich uczniów. Mówimy, że ocena 1 odpowiada 2. (drugiemu) centylowi.

Ocenę 2 lub niższą otrzymało 160 uczniów, czyli 8% wszystkich uczniów. Mówimy, że ocena 2 odpowiada 8. (ósmemu) centylowi.

Ocenę 3 lub niższą otrzymało 680 uczniów, czyli 42% wszystkich uczniów. Mówimy, że ocena 3 odpowiada 42. (czterdziestemu drugiemu) centylowi.

Ocena	Liczba uczniów	
1	40	2%
2	120	8%
3	680	42%
4	580	71%
5	420	92%
6	160	100%

Skali centylowej używa się często do opisywania wzrostu i wagi osób, a także wyników egzaminów. Jeśli na przykład dany wynik egzaminu odpowiada 35. centylowi, to możemy przyjąć, że 35% uczniów ma wynik z tego egzaminu taki sam lub niższy.

ĆWICZENIE D Janek Kowalski zdawał maturę w roku 2019. Oto jego wyniki z egzaminów z zakresu podstawowego — z języka polskiego i matematyki.

	wynik procentowy	centyl
język polski	70%	87
matematyka	78%	76

Ile procent uczniów uzyskało lepszy niż Janek Kowalski wynik z egzaminu z języka polskiego, a ile — z matematyki?

Jak myślisz, na którym z tych egzaminów było trudniej uzyskać dobry wynik?

Ciekawostka

Z metod statystycznych korzysta się niemal w każdej dziedzinie życia. Opracowanie danych pozwala czasem potwierdzić lub odrzucić różne hipotezy albo dokonać nowych odkryć. Oto przykłady zastosowań statystyki:

- W 1985 roku odnaleziono wiersz nieznanego XVII-wiecznego autora. Dwaj statystycy, B. Efron (czyt. efron) i R. Thisted (czyt. fystyt), przeprowadzili analizę częstości występowania słów w utworach różnych poetów tego okresu i ustalili, że wiersz ten jest prawdopodobnie dziełem Szekspira.
- Około 100 lat temu duński uczony J. Schmidt (czyt. szmit) badał liczbę kręgów i promieni pletw u ryb. Analizując dane o rybach złowionych w różnych miejscach świata, zauważył, że u węgorzy, w przeciwieństwie do innych gatunków, występują zaskakująco niewielkie różnice badanych cech. Wywnioskował stąd, że wszystkie węgorze muszą mieć wspólne tarlisko. Zostało ono później odkryte w Morzu Sargassowym.
- W 1844 roku belgijski matematyk A. Quételet (czyt. kette) porównał dane dotyczące wzrostu wszystkich Francuzów z danymi na temat wzrostu poborowych przyjętych do armii. Zastosowane przez niego metody statystyczne pozwoliły obliczyć, że około 2000 mężczyzn uchyliło się od służby wojskowej, pozorując, że ich wzrost jest niższy od wymaganego.

zadania 19–21 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb:

a) 120, 102, 108, 102, 98

c) 1, 4, 5, 8, 3, 2, 7, 2, 2, 3, 5

b) 16, 13, 7, 25, 14, 5

d) 9, 9, 9, 3, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 2, 2

2. W dwóch grupach osób przeprowadzono ankietę, zadając każdej osobie pytanie: *Ile gazet kupujesz tygodniowo?* Wyniki tej ankiety są przedstawione w tabelkach.

a) Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby kupowanych gazet dla każdej z tych grup.

b) Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę dla obu tych grup razem.

GRUPA I

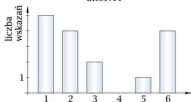
Liczba gazet	1	3	5	6	10
Liczba wskazań	4	2	1	3	5

GRUPA II

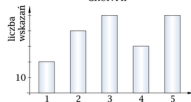
Liczba gazet	2	5	6	8	10
Liczba wskazań	12	14	3	10	13

3. Przechodniom w dwóch różnych punktach miasta zadano pytanie: *Ile osób mieszka w Twoim mieszkaniu?* Wyniki ankiety są przedstawione na diagramach (na osi poziomej zaznaczono liczby podawane przez pytanym przechodniów). Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla każdej z grup przechodniów i dla obu grup razem.

GRUPA I



GRUPA II



4. Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę podanego zestawu danych.

a) Czasy trwania filmów wyświetlanych pewnego dnia w Kinoplexie:

3 godz. 25 min 2 godz. 10 min 1 godz. 45 min 1 godz. 30 min
2 godz. 20 min 1 godz. 40 min 2 godz. 15 min 1 godz. 45 min

b) Wyniki ważenia kilku czekolad tego samego rodzaju:

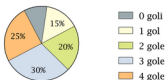
100,4 g 101,2 g 98,8 g 99,6 g 99,3 g 100,7 g 100,4 g 100,1 g 100,4 g

5. W tabeli podano dane o liczbie zapalek w kilkudziesięciu pudełkach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę tego zestawu danych.

Liczba zapalek w pudełku	37	38	39	40	41	42
Liczba pudełek	2	4	9	10	6	1

6. Na diagramie kołowym przedstawiono informacje o bramkach, które padły w 40 meczach piłkarskich. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby bramek w tych meczach.

Liczba goli strzelonych w 40 meczach



7. Wyobraź sobie, że w dziewięciu jednakowych szklankach jest woda. Zaproponuj, jak należy postępować, aby wskazać szklankę, w której znajduje się ilość wody odpowiadająca medianie, a jak — aby wskazać szklankę z ilością wody odpowiadającą dominancie. W jaki sposób można by znaleźć ilość wody odpowiadającą średniej arytmetycznej?

- 8. a)** Czy mediana trzydziestu różnych liczb może być równa jednej z tych liczb?
b) Czy w zestawie dziesięciu liczb może być 6 dominant?
c) Czy średnia arytmetyczna dwudziestu liczb może być większa od dziewiętnastu z tych liczb?

9. Podaj przykład zestawu dziesięciu liczb spełniających warunek:

- a)** mediana jest równa 10, a dominanta jest równa 1,
b) dziewięć liczb jest mniejszych od średniej arytmetycznej całego zestawu,
c) średnia arytmetyczna, dominanta i mediana to te same liczby, choć nie wszystkie liczby w zestawie są równe,
d) mediana jest większa od średniej arytmetycznej,
e) dominanta jest mniejsza od średniej arytmetycznej.

10. Właściciel kawiarni zanotował, po ile kostek cukru klienci używają do osłodzenia kawy, a następnie określił średnią arytmetyczną, medianę i dominantę tych danych. Ustal, którą z tych wielkości powinien wziąć pod uwagę, aby:

- a)** co najmniej połowa klientów była zadowolona z podanej im liczby kostek cukru,
b) określić, ile cukru należy zakupić,
c) liczba podawanych kostek była dobrana tak, aby jak największa grupa klientów otrzymywała dokładnie tyle kostek, ile potrzebuje do osłodzenia kawy.

11. a) Oblicz, dla jakich wartości a i b średnia arytmetyczna liczb 1, 2, 4, 7, 2, 4, 6, a , b wynosi 3,5, a dominanta jest równa 4.

b) Mediana liczb 13, 9, 12, 9, 9, 5, 5, 5, c , d wynosi 8, a dominanta jest równa 5. Znajdź wartości c i d .

c) Dla pewnych liczb naturalnych e i f średnia arytmetyczna liczb 3, 9, 4, 11, 7, 8, 5, e , f wynosi 6, a mediana jest równa 7. Znajdź wartości e i f .

12. Dla każdego zestawu danych podano ich średnią arytmetyczną. Oblicz wartość a . Określ dominantę i medianę tych zestawów danych.

a) $\bar{x} = 5,2$

Wartość x	1	2	a	12
Liczba wskazań	5	8	5	7

c) $\bar{x} = 6,5$

Wartość x	3	6	7	10
Liczba wskazań	a	a	2	10

b) $\bar{x} = 6,65$

Wartość x	2	5	7	11
Liczba wskazań	1	7	9	a

d) $\bar{x} = 5,6$

Wartość x	1	3	7	6
Liczba wskazań	a	$3a$	$6a$	10

13. a) Średnia arytmetyczna wzrostu pięciu koszykarzy grających w pierwszym zespole wynosi 1,95 m. Średnia arytmetyczna wzrostu dziesięciu zawodników rezerwowych wynosi 1,92 m. Oblicz średnią wzrostu wszystkich piętnastu koszykarzy.

b) Na parterze pewnego biura pracuje 12 osób, które wypijają dziennie średnio 2,5 filiżanki kawy na osobę. Na pierwszym piętrze pracuje 15 osób, osoby te wypijają średnio 2,8 filiżanki kawy dziennie. Z kolei 16 osób pracujących na ostatnim — drugim piętrze codziennie wypija średnio 1,5 filiżanki kawy na osobę. Oblicz, ile średnio filiżanek kawy wypija dziennie pracownik tego biura.

14. a) W sadzie zebrano 130 kg jabłek, które średnio ważyły 20,8 dag. Spośród nich wybrano 150 jabłek większych, które ważyły przeciętnie 24 dag. Jaka była średnia waga pozostałych jabłek?

b) Zbiór 112 kg ogórków, z których każdy ważył średnio 14 dag, podzielono na dwie części, oddzielając większe i mniejsze ogórki. Większy ogórek ważył średnio 15 dag, a mniejszy 10 dag. Ile razem ważyły większe, a ile — mniejsze ogórki?

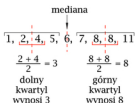
15. Cztery babcie grały w brydża. Średnia ich wieku wynosiła 74 lata. Gdy po pierwszym robrze babcia Matylda zrezygnowała z gry, pozostałe babcie dalej grały „z dziadkiem”, a średnia wieku grających zmniejszyła się o 2 lata. Trzeciego robra wytrwale babcie rozegrały już z dziadkiem Stefanem, który ma 76 lat. Ile lat ma babcia Matylda? Jaka była średnia wieku rozgrywających trzeciego robra?

* W brydżu gra „z dziadkiem” oznacza grę w trzy osoby.

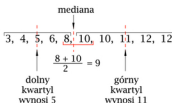
- 16.** W firmie „Komin” pracuje 25 osób, łącznie z szefem. Średnia płaca wynosiła do niedawna 2500 zł, ale ostatnio wszyscy oprócz szefa dostali 10% podwyżki i średnia ta wzrosła do 2600 zł. Ile zarabia szef „Komina”?
- 17.** W pewnej firmie płace 20% pracowników wzrosły o 50 zł. O ile złotych wzrosła średnia płaca w tej firmie?

Mediana dzieli zestaw danych na dwie części. Mediany poszczególnych części nazywane są **dolnym kwartylem** (lub pierwszym kwartylem) oraz **górnym kwartylem** (lub trzecim kwartylem). Poniżej dla dwóch zestawów liczb obliczono ich mediany oraz dolne i górne kwartyle.

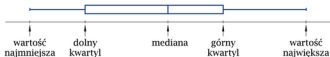
Zestaw I:



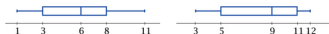
Zestaw II:



Dolny kwartyl, mediana i górny kwartyl dzielą zestaw danych na cztery równoliczne części (tzn. w każdej części znajduje się tyle samo danych). Oznacza to, że między najmniejszą wartością w zestawie a dolnym kwartylem mieści się około 25% danych, między dolnym kwartylem a medianą mieści się również około 25% danych itd. Wartość najmniejsza i największa w zestawie danych oraz kwartyle i medianę danych można przedstawić graficznie za pomocą diagramu zwanego diagramem pudełkowym albo „pudełkiem z wąsami”.

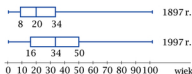


Oto diagramy pudełkowe dla powyższych zestawów liczb:



18. Przeczytaj ciekawostkę. Przyjrzyj się diagramom narysowanym poniżej.

Mieszkańcy Polski według wieku



- a) Określ, jaka część Polaków miała ponad 34 lata w 1897 r., a jaka — w 1997 r.
 b) Czy grupa dzieci w wieku poniżej 8 lat stanowiła większy procent społeczeństwa w roku 1897 czy w roku 1997?
 c) Opisz, jak zmieniła się struktura wieku Polaków w ciągu 100 lat. Jak myślisz, czym te zmiany można tłumaczyć?

19. Ogłaszając wynik pewnego egzaminu, który zdawało 300 uczniów, podano liczbę punktów zdobytych przez ucznia i centyl, który odpowiadał temu wynikowi.

a) Pewien uczeń zdobył 60 punktów i wynik ten odpowiadał 45. centylowi. Ilu uczniów zdających ten egzamin osiągnęło wynik równy co najwyżej 60 punktów?

b) Wynik 50 punktów odpowiadał 43. centylowi, a wynik 70 punktów — 62. centylowi. Ilu było uczniów, którzy zdobyli więcej niż co najmniej 50 punktów, ale co najwyżej 70 punktów?

20. Poniżej przedstawiono fragmenty tabel wyników egzaminów z biologii i chemii.

Biologia			
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	1	50	78
2	2	52	80
3	4	53	81
5	8	55	83
7	12	57	84
...	...	...	...

Chemia			
wynik procentowy	wartość centyla	wynik procentowy	wartość centyla
0	2	50	70
2	4	52	72
3	7	53	73
5	10	55	75
7	12	57	77
...	...	...	...

a) Z którego z tych przedmiotów większy procent zdających uzyskał wynik równy co najwyżej 5%?

b) Z którego z tych przedmiotów większy procent zdających uzyskał wynik wyższy niż 55%?

c) Z którego z tych przedmiotów większy procent zdających uzyskał wynik wyższy niż 3%, ale co najwyżej 53%?

21. Dwie uczelnie przyjmują kandydatów na studia na podstawie wyników egzaminów maturalnych z języka polskiego i matematyki na poziomie podstawowym. Uczelnia X dodaje wyniki punktowe z obu egzaminów, a uczelnia Y dodaje centyle odpowiadające wynikom. W tabeli przedstawiono wyniki trzech kandydatów na studia.

Kandydat	Wyniki egzaminu			
	język polski		matematyka	
	punkty (na 100)	centyle	punkty (na 100)	centyle
A	70	87	70	66
B	53	54	90	89
C	80	97	56	48

a) Oblicz dla każdego kandydata jego wyniki na uczelniach X i Y. Który z kandydatów był najlepszy, a który — najgorszy według regulaminów tych uczelni?

b) Który ze sposobów obliczania wyników — przez uczelnię X czy uczelnię Y — pozwala lepiej ocenić kandydatów?

MINISPRAWDZIAN

51. Jeśli oznaczymy średnią arytmetyczną zestawu liczb 5, 2, 2, 3, 8, 8, 9, 7, 2, 7 literą s , medianę tego zestawu — literą m , a dominantę — literą d , to:

- A. $s < m < d$ B. $d < s < m$ C. $m < d < s$ D. $d < m < s$

52. W tabeli przedstawiono niektóre dane o asach serwisowych wykonanych przez tenisistę w rozegranych ostatnio meczach.

Liczba asów	0	1	2	3
Liczba meczów	8	1		5

Średnia arytmetyczna liczby asów w jednym meczu wyniosła 1,25. Jaka jest mediana tych danych?

- A. 0 B. 0,5 C. 1 D. 1,5

53. Adam i Bogdan z pięcioma innymi uczniami pisali test z języka angielskiego. Zarówno średnia ocen z testu wszystkich tych uczniów, jak i mediana tych ocen wynoszą 4. Adam uzyskał ocenę wyższą niż Bogdan, a pozostali uczniowie otrzymali oceny: 3, 3, 6, 6, 5. Wynika stąd, że Bogdan otrzymał ocenę:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

54. Grupę 12 dzieci o średniej wzrostu 154 cm dołączono do grupy 8 dzieci o średniej wzrostu 158 cm. Średnia wzrostu w połączonej grupie dzieci wynosi:

- A. 155,2 cm B. 155,6 cm C. 156 cm D. 157,1 cm

ŚREDNIA WAŻONA

- I Gdy obliczamy średnią arytmetyczną liczb, wszystkie te liczby traktujemy jednakowo (żadna z nich nie jest wyróżniona). Czasami jednak do niektórych danych przywiązujemy większą wagę i chcemy to uwzględnić przy obliczaniu wartości przeciętnej. Oto przykład:

Egzamin kończący pewien kurs językowy składa się z części pisemnej i ustnej. Ustalono, że wynik egzaminu pisemnego jest cztery razy ważniejszy od wyniku egzaminu ustnego. Dlatego przyjęto, że wynik końcowy egzaminu jest „średnią” obliczoną według następującego wzoru:

$$w = \frac{4 \cdot p + 1 \cdot u}{5}$$

- p — wynik egzaminu pisemnego
 u — wynik egzaminu ustnego
 w — końcowy wynik egzaminu

Zwróć uwagę, że ten sposób obliczania wyników egzaminu można rozumieć jako obliczanie średniej arytmetycznej liczb p, p, p, p, u .

W takim razie zdający, który z części pisemnej otrzymał ocenę 5, a z części ustnej — ocenę 3, uzyska końcowy wynik:

$$\frac{4 \cdot 5 + 1 \cdot 3}{5} = 4,6$$

ĆWICZENIE A Oblicz końcowy wynik zdającego, który otrzymał oceny:

- a) z egzaminu pisemnego: 3, z egzaminu ustnego: 5
- b) z egzaminu pisemnego: 4, z egzaminu ustnego: 4

Ten rodzaj średniej kilku danych wielkości, w którym nie każda wielkość jest jednakowo ważna, nazywamy średnią ważoną. Liczby, które opisują znaczenie, jakie chcemy nadać poszczególnym wielkościom, nazywamy wagami średniej ważonej.

Średnia ważona liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $a_1, a_2, \dots, a_n$ (gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznaczają liczby dodatnie) to liczba $\bar{x}_w$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x}_w = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Uwaga. Gdy wszystkie wagi są równe, średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej.

ĆWICZENIE B Oblicz średnią ważoną liczb 3, 5, 7 i 10 z wagami odpowiednio 1, 1, 3 i 5.

Przyglądając się wzorowi na średnią ważoną, łatwo zauważyć, że rachunki bardzo się upraszczają, gdy suma wag jest równa 1. Dlatego w wielu sytuacjach, w których występuje średnia ważona n liczb, przyjmuje się wagi $a_1, a_2, \dots, a_n$ tak, żeby spełniona była równość $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.

ĆWICZENIE C Oblicz średnią ważoną liczb 100, 130, 400 z wagami odpowiednio 0,6, 0,1 i 0,3.

Uwaga. W opisanych na początku tego rozdziału zasadach ustalanie wyniku egzaminu kończącego kurs językowy można było przyjąć, że waga egzaminu pisemnego wynosi 0,8, a egzaminu ustnego 0,2. Zachowana byłaby wówczas zasada, że egzamin pisemny jest 4 razy ważniejszy od ustnego, i uzyskalibyśmy takie same rezultaty.

ZESTAW ZADAŃ

1. W tabeli podano liczby i odpowiadające im wagi. Oblicz średnią ważoną liczb.

a)

Liczba	18	6
Waga	2	3

c)

Liczba	3	5	7	8	10
Waga	2	4	1	1	2

b)

Liczba	2	3	4
Waga	7	2	1

d)

Liczba	2	5	1	4
Waga	0,3	0,1	0,5	0,1

2. Na pewną uczelnię artystyczną kandydatów przyjmuje się na podstawie średniej ważonej trzech wielkości: wyniku procentowego egzaminu praktycznego z wagą 5, wyniku procentowego egzaminu ustnego z wagą 3 i wyniku procentowego wybranego przedmiotu maturalnego z wagą 4. Jakie rezultaty osiągnęli kandydaci, których wyniki procentowe podano w tabeli?

Kandydat	Egzamin praktyczny	Egzamin ustny	Wybrany przedmiot
A. Nerwowa	30%	30%	50%
A. Wygadany	30%	50%	40%

3. a) Sprawdź, że średnia ważona wartości p, q, r, s z wagami odpowiednio 25, 10, 10 i 5 jest taka sama jak średnia ważona tych wielkości z wagami 0,5, 0,2, 0,2 i 0,1.

b) Znajdź takie liczby a, b, c , aby spełniona była równość $a + b + c = 1$ oraz aby średnia ważona wielkości x, y, z z wagami odpowiednio a, b i c była taka sama jak średnia ważona tych wartości z wagami odpowiednio 4, 7, 9.

4. a) Kiedyś w pewnej szkole obliczano ocenę na półrocze jako średnią ważoną następujących liczb: średniej ocen ze sprawdzianów (z wagą 0,3), średniej ocen z klasówek (z wagą 0,5) oraz oceny za pracę na lekcjach (z wagą 0,2), a następnie otrzymaną liczbę zaokrąglano do liczby całkowitej. Ustal oceny ucznia tej szkoły — Stefana Nierównego — za pierwsze oraz za drugie półrocze.

Nazwisko i imię	I półrocze			Ocena za I półrocze	II półrocze			Ocena za II półrocze	Ocena roczna													
	Sprawdziany	Klasówki	Praca na lekcji		Sprawdziany	Klasówki	Praca na lekcji															
Nierówny Stefan	2	3	5	1	1	4	2	5	2	3	4	6	2	3	3	4	6	5	4	4		

b) Aby zdopingować uczniów do pracy w drugim półroczu, nauczyciel obliczał ocenę roczną jako średnią ważoną oceny za pierwsze półrocze (z wagą 0,4) i oceny za drugie półrocze (z wagą 0,6). Ustal ocenę roczną Stefana Nierównego.

5. Pewna uczelnia przyjmuje kandydatów na studia na podstawie średniej ważonej wyników procentowych z niektórych przedmiotów ze świadectwa maturalnego. W tabeli przedstawiono wyniki maturalne trzech kandydatów.

Kod kandydata	JL3/95	MK2/55	MD6/18
Język polski	40%	90%	50%
Język obcy	40%	90%	50%
Historia	30%	90%	50%
Matematyka	90%	40%	40%
Fizyka	50%	30%	40%
Chemia	40%	40%	50%

a) Na jednym z wydziałów tej uczelni średnią oblicza się na podstawie wyników procentowych z następujących przedmiotów: język polski (z wagą 0,4), historia (z wagą 0,4), język obcy (z wagą 0,2). Oblicz tę średnią ważoną wyników dla każdego z kandydatów.

b) Na innym wydziale oblicza się średnią ważoną wyników procentowych z następujących przedmiotów: matematyka (z wagą 0,3), fizyka (z wagą 0,3), chemia (z wagą 0,2), język polski (z wagą 0,1) i język obcy (z wagą 0,1). Oblicz tę średnią ważoną dla każdego z kandydatów.

6. O przyjęciu na studia na pewnej uczelni decyduje średnia ważona wyników procentowych z egzaminów maturalnych z matematyki. Wynik z zakresu podstawowego ma wagę 0,4, a wynik z zakresu rozszerzonego ma wagę 0,6. Maciek z zakresu podstawowego uzyskał 84%. Jaki co najmniej wynik matury z matematyki w zakresie rozszerzonym musiałby otrzymać, aby rezultat przy rekrutacji był większy niż 75%? (Uwaga. Wynik matury to zawsze całkowita liczba procentów).

7. Przeczytaj ciekawostkę. Korzystając z informacji podanych w tabeli, oblicz masy atomowe wymienionych w niej pierwiastków.

Ciekawostka

Każdy pierwiastek występuje w przyrodzie w postaci kilku izotopów. Podawana w tablicach chemicznych masa atomowa pierwiastka jest równa średniej ważonej liczb masowych wszystkich jego izotopów. Jako wagi przyjmuje się zawartość procentową izotopów. Na przykład około 75% atomów chloru stanowi izotop ^{35}Cl (o liczbie masowej 35), a około 25% atomów to izotop ^{37}Cl (o liczbie masowej 37). Masa atomowa chloru wynosi:

$$\frac{0,75 \cdot 35 + 0,25 \cdot 37}{0,75 + 0,25} = 35,5$$

Pierwiastek	Izotopy i ich zawartość
Potas	^{39}K — 93% ^{41}K — 7%
Miedź	^{63}Cu — 69% ^{65}Cu — 31%
Żelazo	^{54}Fe — 6% ^{56}Fe — 92% ^{57}Fe — 2%
Siarka	^{32}S — 95% ^{33}S — 0,75% ^{34}S — 4,25%
Ołów	^{204}Pb — 1,5% ^{206}Pb — 24% ^{207}Pb — 22% ^{208}Pb — 52,5%

Ciekawostka

Średnia ważona może pomóc w dokonaniu racjonalnego wyboru. Załóżmy na przykład, że wahamy się, który z trzech kursów językowych wybrać. Możemy wtedy ustalić kilka najważniejszych cech kursu, a ponieważ zwykle cechy te nie są dla nas tak samo istotne, więc przydzielamy im odpowiednie wagi. Następnie cechy poszczególnych kursów możemy ocenić, przyznając punkty — na przykład w skali od 1 do 10. Oto jak mogłaby wyglądać tabelka, na podstawie której dokonamy racjonalnego wyboru. Średnia ważona punktów pozwala ustalić, który kurs powinniśmy wybrać.

	Cena kursu (z wagą 0,6)	Opinia znajomych (z wagą 0,3)	Czas i miejsce kursu (z wagą 0,1)	Średnia ważona
Kurs I	2	3	9	$0,6 \cdot 2 + 0,3 \cdot 3 + 0,1 \cdot 9 = 3$
Kurs II	5	6	4	$0,6 \cdot 5 + 0,3 \cdot 6 + 0,1 \cdot 4 = 5,2$
Kurs III	6	5	3	$0,6 \cdot 6 + 0,3 \cdot 5 + 0,1 \cdot 3 = 5,4$

Według przyjętych kryteriów najlepszy okazał się kurs III.

8. Który z kursów językowych opisanych w ciekawostce zostałby wybrany przez osobę, która przyjąłaby dla poszczególnych cech kursu inne wagi: dla ceny kursu — 0,2, dla opinii znajomych — 0,2, a dla czasu i miejsca kursu — 0,6?

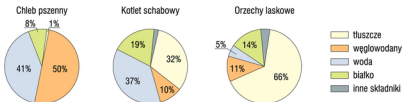
9. a) Przeczytaj ciekawostkę. Marek waha się, który obóz letni wybrać. Aby podjąć najlepszą decyzję, sporządził poniższą tabelkę. Który z obozów powinien wybrać?

	Koszt (z wagą 0,4)	Termin (z wagą 0,1)	Towarzystwo (z wagą 0,3)	Atrakcyjność (z wagą 0,2)
Obóz wędkarski	8	2	8	4
Obóz żeglarski	4	4	6	7
Obóz rowerowy	7	6	5	5

b) W tabeli zamieszczono parametry trzech samochodów. Przy poszczególnych parametrach najlepszej wartości przydziel 10, a pozostałym odpowiednio mniej. Następnie przydziel podanym parametrom wagi. Oblicz średnią ważoną punktów i przekonaj się, który z samochodów jest najlepszy według twoich kryteriów.

Samochód	Moc silnika w KM	Maksymalna pojemność bagażnika w l	Przyspieszenie od 0 km/h do 100 km/h w sek.	Prędkość maksymalna w km/h	Zużycie paliwa w l/100 km	Cena w złotych
Kia Rio 1.4	100	1103	12,2	176	6,0	51 990
Hyundai i20	84	1042	13,1	170	6,1	54 400
Panda 1.2	69	870	14,8	164	5,4	45 100

10. Wartość energetyczną pokarmu można oszacować, obliczając średnią ważoną wartości energetycznych zawartych w nim białek, tłuszczu i węglowodanów. Wagami są procentowe udziały każdego z tych składników. Korzystając z informacji przedstawionych na diagramach, oszacuj, ile kilokalorii zawiera 100 g każdego z wymienionych produktów. Wiadomo, że wartość energetyczna tłuszczu wynosi 900 kcal/100 g, białka — 400 kcal/100 g, a węglowodanów — 400 kcal/100 g.



MINISPRAWDZIAN

51. Ocena semestralna z pewnego przedmiotu jest średnią ważoną trzech elementów: średniej ocen z prac klasowych (z wagą 0,5), średniej ocen ze sprawdzianów (z wagą 0,2) oraz średniej ocen z prac domowych (z wagą 0,3) po zaokrągleniu do jedności. W tabeli przedstawiono średnie oceny trzech uczniów.

Średnia ocen	z prac klasowych	ze sprawdzianów	z prac domowych
Andrzej	4	5	3
Bogdan	5	3	5
Czarek	3	4	6

Jeśli oznaczymy ocenę semestralną Andrzeja literą a , Bogdana — literą b , Czarka — literą c , to:

- A. $a < b < c$ B. $a = c < b$ C. $b < a = c$ D. $b = c < a$

52. Pewien konkurs wiedzy składa się z dwóch etapów: łatwiejszego i trudniejszego. Wynik końcowy ustala się jako średnią ważoną liczby punktów zdobytych w każdym etapie. Przyjęto, że suma wag wynosi 1.

W tabeli podano liczby punktów zdobytych w obu etapach przez dwóch zawodników. Wynik końcowy zawodnika A to 23 punkty. Wynik końcowy zawodnika B wynosi zatem:

- A. 25 punktów C. 28,5 punktu
B. 28 punktów D. 29,5 punktu

Zawodnik	Etap 1	Etap 2
A	32	20
B	28	30

ODCHYLENIE STANDARDOWE

I ĆWICZENIE A Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę dla zestawów danych liczbowych, które przedstawiono obok.

Zestawy liczb w ramce obok są tak dobrane, że średnie arytmetyczne, mediany oraz dominanty we wszystkich czterech przypadkach są równe.

W zestawie I wszystkie dane są jednakowe, w drugim większość danych (poza dwiema skrajnymi) to te same liczby.

W trzecim i w czwartym zestawie dane są zróżnicowane. O danych z zestawów III i IV możemy powiedzieć, że są bardzo rozproszone. Trudno na pierwszy rzut oka ocenić, czy bardziej rozproszony jest zestaw III czy zestaw IV.

Aby zmierzyć poziom rozproszenia, możemy porównać dane z ich średnią arytmetyczną. Wielkością, która dobrze opisuje, jak bardzo dane różnią się od średniej arytmetycznej, jest odchylenie standardowe.

Odchyleniem standardowym zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ , którą obliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}},$$

gdzie $\bar{x}$ oznacza średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Uwaga. Litera σ (czyt. sigma), którą oznaczamy odchylenie standardowe, to mała litera alfabetu greckiego.

Wyrażenie $\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$ występujące w powyższym wzorze pod pierwiastkiem nazywane jest **wariancją**. Łatwo zauważyć, że wariancja jest równa σ^2 .

Zauważ, że odchylenie standardowe jest tym większe, im bardziej dane różnią się od ich średniej arytmetycznej.

Zestaw I

5, 5, 5, 5, 5, 5

Zestaw II

1, 5, 5, 5, 5, 9

Zestaw III

1, 4, 5, 5, 6, 9

Zestaw IV

2, 3, 5, 5, 7, 8

Obliczmy odchylenia standardowe trzeciego i czwartego zestawu liczb z poprzedniej strony.

$$\sigma_{III} = \sqrt{\frac{(1-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (9-5)^2}{6}} = \sqrt{\frac{34}{6}} = \sqrt{\frac{17}{3}} \approx 2,38$$

$$\sigma_{IV} = \sqrt{\frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5)^2}{6}} = \sqrt{\frac{26}{6}} = \sqrt{\frac{13}{3}} \approx 2,08$$

Odchylenie standardowe zestawu IV jest mniejsze niż zestawu III. Możemy powiedzieć, że w zestawie IV dane są mniej rozproszone niż w zestawie III.

Zwróć uwagę, że odchylenie standardowe zestawu I jest równe 0 (żadna z danych w tym zestawie nie różni się od średniej).

ĆWICZENIE B Oblicz odchylenie standardowe zestawu II.

Aby ustalić odchylenie standardowe, na ogół wygodnie jest uporządkować rachunki, zapisując wyniki kolejnych obliczeń w tabelce.

PRZYKŁAD 1 Poniżej przedstawiono wagi ośmiu cieląt urodzonych w pewnym gospodarstwie. Oblicz odchylenie standardowe tego zestawu danych.

38 kg 40 kg 42 kg 42 kg 45 kg 48 kg 50 kg 51 kg

$$\bar{x} = \frac{38+40+42+42+45+48+50+51}{8} = 44,5 \quad \vdots \quad \text{Obliczamy średnią arytmetyczną.}$$

x_k	$x_k - \bar{x}$	$(x_k - \bar{x})^2$
38	-6,5	42,25
40	-4,5	20,25
42	-2,5	6,25
42	-2,5	6,25
45	0,5	0,25
48	3,5	12,25
50	5,5	30,25
51	6,5	42,25
Suma		160,0

$\vdots$ Zapisujemy wyniki kolejnych obliczeń w tabelce.

$$\sigma = \sqrt{\frac{160}{8}} = \sqrt{20} \approx 4,47$$

Odp. Odchylenie standardowe tego zestawu danych jest równe około 4,47 kg.

ZADANIE Karol kupił 5 jabłek, które ważyły: 18 dag, 23 dag, 24 dag, 19 dag i 16 dag. Oblicz odchylenie standardowe mas tych pięciu jabłek.

zadania 1-5 ►

II PRZYKŁAD 2 W tabeli zapisano wagi kilkudziesięciu cieląt urodzonych na dużej farmie. Oblicz odchylenie standardowe.

Waga	33	35	38	40	43	46	48	50	51
Liczba cieląt	5	6	6	7	6	10	6	3	1

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 33 + 6 \cdot 35 + 6 \cdot 38 + 7 \cdot 40 + 6 \cdot 43 + 10 \cdot 46 + 6 \cdot 48 + 3 \cdot 50 + 1 \cdot 51}{50} = 41,8$$

c_k	x_k	$x_k - \bar{x}$	$(x_k - \bar{x})^2$	$c_k(x_k - \bar{x})^2$
5	33	-8,8	77,44	387,20
6	35	-6,8	46,24	277,44
6	38	-3,8	14,44	86,64
7	40	-1,8	3,24	22,68
6	43	1,2	1,44	8,64
10	46	4,2	17,64	176,40
6	48	6,2	38,44	230,64
3	50	8,2	67,24	201,72
1	51	9,2	84,64	84,64
Suma				1476

x_k oznacza wagę cielęcia

c_k oznacza liczbę cieląt o wadze x_k

$$\sigma = \sqrt{\frac{1476}{50}} \approx 5,43$$

Odp. Odchylenie standardowe tego zestawu danych jest równe około 5,43 kg.

ZADANIE W tabeli przedstawiono masy jabłek zebranych z jednego drzewa. Oblicz odchylenie standardowe.

Masa (g)	90	100	110	120	130	140
Liczba jabłek	10	20	25	25	15	5

Na podstawie danych oraz wyników obliczeń w powyższych dwóch przykładach możemy stwierdzić, że:

- cielęta z gospodarstwa ważyły przeciętnie więcej niż te, które urodziły się na farmie,
- dane w pierwszym przykładzie były mniej rozproszone niż dane w przykładzie drugim, tzn. wagi cieląt z gospodarstwa mniej różniły się od średniej niż w wypadku cieląt urodzonych na farmie.

W obu powyższych przykładach dane liczbowe dotyczyły zwierząt tego samego gatunku i tych samych ich cech. Mogliśmy zatem bezpośrednio porównać ich parametry statystyczne. Gdyby jednak jeden zestaw danych dotyczył cieląt, a drugi na przykład prosiąt, to porównywanie parametrów statystycznych byłoby bardziej skomplikowane. Łatwo bowiem zauważyć, że odchylenie standardowe równe 1 kg w wypadku cieląt oznacza niewielkie rozproszenie, a odchylenie 1 kg w wypadku prosiąt oznacza duże zróżnicowanie danych (prosięta po urodzeniu ważą nie więcej niż 1,5 kg).

Przekształcając wyrażenie występujące pod pierwiastkiem we wzorze na odchylenie standardowe, możemy otrzymać inną postać tego wyrażenia i dzięki temu powstanie inny wzór, który jest wygodniejszy przy wykonywaniu obliczeń.

$$\begin{aligned}\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} &= \frac{(x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2) + (x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2) + \dots + (x_n^2 - 2x_n\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2\bar{x} \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2\end{aligned}$$

Odchylenie standardowe możemy obliczać, korzystając ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2}$$

PRZYKŁAD 3 W tabelce podano wyniki klasówki dla dwóch grup uczniów. Oblicz odchylenie standardowe ocen w każdej z grup. W której z grup wyniki klasówek są bardziej wyrównane?

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen w grupie I	1	4	2	1	1	1
Liczba ocen w grupie II	1	3	6	4	4	2

Grupa I

$$\bar{x}_I = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 1}{1 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1} = 3$$

c_k	x_k	x_k^2	$c_k x_k^2$
1	1	1	1
4	2	4	16
2	3	9	18
1	4	16	16
1	5	25	25
1	6	36	36

Suma: 112

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{112}{10} - 3^2} \approx 1,48$$

Grupa II

$$\bar{x}_{II} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 6}{1 + 3 + 6 + 4 + 4 + 2} = 3,65$$

c_k	x_k	x_k^2	$c_k x_k^2$
1	1	1	1
3	2	4	12
6	3	9	54
4	4	16	64
4	5	25	100
2	6	36	72

Suma: 303

$$\sigma_{II} = \sqrt{\frac{303}{20} - 3,65^2} \approx 1,35$$

Odp. Wyniki grupy II są bardziej wyrównane, bo $\sigma_{II} < \sigma_I$.

ZADANIE W tabeli podano informację o dwóch odmianach grochu. W której z odmian liczby ziaren w strąku są bardziej wyrównane?

Liczba ziaren w strąku	0	1	2	3	4	5
Liczba strąków odmiany A	3	2	3	4	5	2
Liczba strąków odmiany B	1	1	0	6	3	5

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz odchylenie standardowe zestawu danych:

a) 2, 4, 5, 9, 10

c) -4, -3, -1, 0, 2, 3

b) 10, 20, 20, 30, 40, 40, 50

d) 1, 1, 1, 4, 7, 8, 9, 9

2. Liczby w zestawach danych oznaczają wyniki pięciu rzutów kostką. Spróbuj odgadnąć, w którym z trzech zestawów średnia arytmetyczna jest największa, a w którym — najmniejsze jest odchylenie standardowe. Następnie sprawdź swoje przypuszczenia, wykonując odpowiednie obliczenia.

a) Zestaw I: 1, 2, 3, 4, 5

c) Zestaw I: 1, 1, 1, 6, 6

Zestaw II: 1, 2, 4, 5, 6

Zestaw II: 1, 1, 6, 6, 6

Zestaw III: 1, 2, 3, 5, 6

Zestaw III: 1, 1, 3, 6, 6

b) Zestaw I: 1, 1, 1, 1, 6

d) Zestaw I: 1, 2, 2, 2, 6

Zestaw II: 1, 6, 6, 6, 6

Zestaw II: 1, 3, 3, 3, 6

Zestaw III: 3, 3, 3, 3, 3

Zestaw III: 1, 5, 5, 5, 6

3. Oblicz średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe dwóch podanych zestawów danych. Porównaj obliczone wielkości.

a) Czasy finalistów w biegu na 100 m podczas olimpiady w Sydney w roku 2000.

kobiety: 10,75 s, 11,12 s, 11,18 s, 11,19 s, 11,20 s, 11,21 s, 11,21 s, 11,29 s

mężczyźni: 9,87 s, 9,99 s, 10,04 s, 10,08 s, 10,09 s, 10,13 s, 10,17 s

b) Średnia miesięczna temperatura powierzchni wód.

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
M. Bałtyckie	2,7°	1,7°	1,9°	3,7°	7,5°	12,8°	15,8°	15,9°	14,2°	11,5°	8,9°	4,9°
M. Czerwone	25,8°	25,4°	26,3°	27,7°	29,2°	30,3°	31,0°	31,4°	31,6°	30,9°	28,6°	26,7°

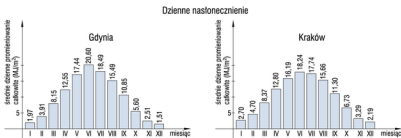
c) Miejsca Adama Małysz i Svena Hannawalda w ostatnich 10 konkursach indywidualnych Pucharu Świata w skokach narciarskich w 2003 roku.

Miejsce konkursu	Sapporo	Tauplitz		Willingen		Oslo	Lahti		Planica	
Adam Małysz	6	3	4	—	—	1	1	1	2	4
Sven Hannawald	—	2	1	1	36	14	3	10	4	2

4. W tabeli podano ceny trzech produktów w kilku sklepach. Oblicz odchylenia standardowe cen tych produktów.

Sklep	I	II	III	IV	V	VI	VII
Cena (w zł) 1 l wody mineralnej	1,99	2,29	2,59	2,30	2,29	1,99	2,59
Cena (w zł) puszki groszku	1,39	1,29	1,39	1,26	1,10	1,39	1,29
Cena (w zł) 1 kg cukru	2,49	2,49	2,49	2,49	2,49	2,49	2,49

5. Porównaj średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe dziennego nasłonecznienia w Gdyni i w Krakowie.



6. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe zestawu danych.

a) Liczba płatków w kwiatach powojnika.

Liczba płatków	4	5	6
Liczba kwiatów	10	21	9

b) Liczba ziarenek fasoli w strąku.

Liczba ziarenek	3	4	5	6
Liczba strąków	7	12	24	17

c) Liczba pestek w winogronach.

Liczba pestek	0	1	2	3
Liczba owoców	6	54	35	5

7. Zmierz długości palców jednej dłoni. Oblicz odchylenie standardowe otrzymanego zestawu danych.

8. a) Przyjrzyj się zestawom danych I i II. Każda liczba z zestawu II jest o 1 większa od odpowiedniej liczby z zestawu I. Porównaj średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe tych zestawów danych.

Zestaw I: 2, 5, 6, 8, 9

Zestaw II: 3, 6, 7, 9, 10

b) Niech $\bar{x}_1$ oznacza średnią arytmetyczną, a σ_1 — odchylenie standardowe zestawu czterech liczb a, b, c, d i niech $\bar{x}_2$ oznacza średnią arytmetyczną, a σ_2 — odchylenie standardowe zestawu liczb $a+k, b+k, c+k, d+k$. Uzasadnij, że:

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + k \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = \sigma_1$$

9. a) Przyjrzyj się zestawom danych A i B. Każda liczba z zestawu B jest 10 razy większa od odpowiedniej liczby z zestawu A. Porównaj średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe tych zestawów danych.

Zestaw A: 1, 3, 6, 10

Zestaw B: 10, 30, 60, 100

b) Niech $\bar{x}_1$ oznacza średnią arytmetyczną, a σ_1 — odchylenie standardowe zestawu liczb a, b, c, d i niech $\bar{x}_2$ oznacza średnią arytmetyczną, a σ_2 — odchylenie standardowe zestawu liczb ka, kb, kc, kd , gdzie $k > 0$. Uzasadnij, że:

$$\bar{x}_2 = k \cdot \bar{x}_1 \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = k \cdot \sigma_1$$

10. W tabeli przedstawiono średnie miesięczne temperatury powietrza (w °C) i miesięczne sumy opadów (w mm) dla trzech miast leżących w różnych strefach klimatycznych. Porównując średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe miesięcznych temperatur oraz opadów, opisz różnice między klimatami: równikowym wilgotnym, zwrotnikowym wilgotnym i śródziemnomorskim.

Typ klimatu	Miejsce	Miesiące											
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
równikowy wilgotny	Manaus, Brazylia	25,9 276	25,8 277	25,8 301	25,9 287	26,4 193	26,6 93	26,9 61	27,5 41	26,9 62	27,7 112	27,3 165	26,7 228
zwrotnikowy wilgotny	Bombaj, Indie	23,9 4	24,0 2	26,1 1	28,1 1	29,6 17	28,6 484	27,3 616	25,9 340	27,0 264	27,9 65	27,2 14	25,5 2
śródziemnomorski	Rzym, Włochy	6,9 77	7,9 89	10,7 78	13,9 77	18,1 64	22,1 47	24,7 14	24,6 22	21,6 68	16,5 129	11,6 116	8,5 106

11. Przeprowadź badanie statystyczne. Zbierz odpowiednie dane i opracuj wyniki. Możesz wybrać jedno z podanych poniżej zagadnień lub zaproponować własne.

- Którą z liczb od 1 do 10 i którą z liczb od 10 do 20 najczęściej wybierają ludzie?
- Czy ludzie są na ogół zadowoleni ze swego wzrostu — jaki wzrost mają, a jaki chcieliby mieć?
- Z ilu liter składają się imiona, a z ilu liter — nazwiska?
- Ile monet i ile banknotów przeciętnie mają ludzie przy sobie?

Aby doświadczalnie wyznaczyć badaną wielkość (np. czas spadania przedmiotu z pewnej wysokości), zwykle wielokrotnie powtarza się eksperyment, za każdym razem dokonując pomiarów.

Na ogół nie można mieć pewności, czy błąd popełniony w trakcie pomiarów nie wypacza wyników doświadczeń. Dokładność pomiarów można ocenić na podstawie odchylenia standardowego. Można bowiem przyjąć, że im większe jest odchylenie standardowe serii pomiarów (tzn. im bardziej wyniki różnią się od wartości przeciętnej), tym mniejsza jest dokładność tych pomiarów.

Oto przykład takich rozważań. Dwie osoby mierzyły czas spadania piłki z wysokości 5 m. W ten sposób otrzymano dwie serie wyników:

seria I

0,8 s, 1,2 s, 0,9 s, 1 s, 0,7 s, 1,2 s, 1,3 s

seria II

0,7 s, 1,2 s, 1,3 s, 0,8 s, 1,2 s, 0,7 s

Odchylenia standardowe tych serii wynoszą: $\sigma_I \approx 0,21$, a $\sigma_{II} \approx 0,25$, więc możemy uznać, że wyniki serii I są dokładniejsze.

Na podstawie wyników takiego eksperymentalnego badania przyjmuje się, że mierzona wielkość jest równa średniej arytmetycznej wyników pomiaru z dokładnością do odchylenia standardowego. Zapisujemy to tak:

$$\bar{x} \pm \sigma \text{ lub } \langle \bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma \rangle$$

Ponieważ $\bar{x}_I \approx 1,01$ i $\bar{x}_{II} \approx 0,98$, możemy powiedzieć, że według jednego z eksperymentatorów czas spadania piłki wynosił $1,01 \pm 0,21$ sekundy, a według drugiego — czas spadania wynosił $0,98 \pm 0,25$ sekundy.

Uwaga. Aby rozważany przykład był bardziej przejrzysty, w obu seriach podaliśmy tylko kilka pomiarów. W badaniach statystycznych rzetelne wnioski można wyciągnąć dopiero na podstawie dużej liczby danych.

12. Przeczytaj ciekawostkę. W pewnym doświadczeniu badano, o ile centymetrów wydłuża się sprężyna, gdy zawieszamy na niej pewien ciężarek. Powtarzając eksperyment, otrzymano następujące wyniki:

27,3 cm 26,8 cm 27,1 cm 27,3 cm 26,6 cm 26,9 cm

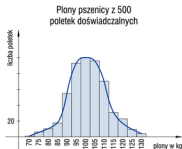
Oblicz odchylenie standardowe tych pomiarów i ustal, w jakim przedziale mieścić się będą wyniki pomiarów.

13. Dawniej na opakowaniach pewnych produktów pojawiały się napisy typu: „masa 170 g $\pm$ 6 g”, co oznaczało, że średnia masa zawartości opakowania powinna wynosić 170 g, a odchylenie standardowe 6 g. Wartości te ustalano, sprawdzając odpowiednio liczną próbkę opakowań produktu. Ustal, jaki napis zgodnie z tymi regułami powinien się znaleźć na opakowaniu herbatników, jeśli wyniki ważenia próbek wynoszą:

256 g 244 g 252 g 242 g 250 g 258 g 245 g

Uwaga. Obecnie przepisy nakazują, by masa towaru nie była mniejsza, niż podano na opakowaniu.

Przyjrzyj się diagramom.



Zjawiska opisywane za pomocą tych diagramów nie mają ze sobą nic wspólnego, chociaż diagramy wyglądają podobnie. Każdy z nich ma charakterystyczny kształt dzwonu.

W obu wypadkach wartości średnie występują najczęściej, a najmniejsze i największe — najrzadziej. Można powiedzieć, że krzywe na rysunkach mają osie symetrii, wyznaczone przez wartości średnie.

Tego typu rozkład danych nazywany jest rozkładem normalnym. Gdy mamy do czynienia z rozkładem normalnym,

około 68% wszystkich danych różni się od wartości średniej $\bar{x}$ nie więcej niż o odchylenie standardowe σ , tzn. mieści się w przedziale $(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$. Około 95% danych mieści się w przedziale $(\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma)$, a ponad 99% danych mieści się w przedziale $(\bar{x} - 3\sigma; \bar{x} + 3\sigma)$.

Rozkład normalny spotkać można w różnych zestawach danych, na przykład dotyczących wzrostu i wagi ludzi, rozmiaru skrzydeł ptaków danego gatunku, przychodów ludności, liczby ziarenek grochu w strąkach itd.

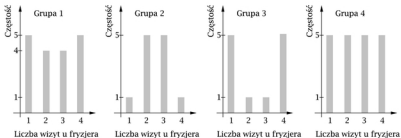
14. Przeczytaj ciekawostkę. Korzystając z informacji w tabeli, odpowiedz:

- W jakim przedziale mieści się wzrost 68% dorosłych Polek, a w jakim — 68% dorosłych Polaków (mężczyzn)?
- W jakim przedziale mieści się wzrost 95% mężczyzn w Japonii, a w jakim — 95% mężczyzn w Polsce?
- W jakim przedziale mieści się wzrost 99% Holenderek, a w jakim — 99% Polek?

PRZECIĘTNY WZROST I ODCHYLENIE STANDARDOWE (w cm)

	Japonia		Holandia		Polska	
	$\bar{x}$	σ	$\bar{x}$	σ	$\bar{x}$	σ
kobiety	153	4,8	169,6	6,7	164,2	5,6
mężczyźni	165,5	5,8	182,5	7,5	176,0	7,4

15. Przyjrzyj się poniższym diagramom. Oceń, który z nich przedstawia zestaw danych o najmniejszym odchyleniu standardowym, a następnie sprawdź swoje przypuszczenie za pomocą obliczeń.



MINISPRAWDZIAN

51. W tabeli przedstawiono liczbę dzieci w pięćdziesięciu losowo wybranych rodzinach.

Liczba dzieci w rodzinie	0	1	2	3	4
Liczba rodzin	5	11	20	7	7

Odchylenie standardowe zebranych danych zaokrąglone do części setnych wynosi:

- A. 1,15 B. 1,32 C. 1,86 D. 0,45

52. Średnia arytmetyczna zestawu czterech liczb 3, 1, a , b wynosi 3, a odchylenie standardowe jest równe $\sqrt{6}$. Wynika stąd, że $a^2 + b^2$ jest równe:

- A. 5 B. 10 C. 14 D. 50

53. Dane są dwa zestawy danych:

zestaw A: 1, 2, 3, 6

zestaw B: 11, 12, 13, 16

Odchylenie standardowe w zestawie B jest:

- A. o 10 większe od odchylenia standardowego w zestawie A
 B. o 10 mniejsze od odchylenia standardowego w zestawie A
 C. 10 razy większe od odchylenia standardowego w zestawie A
 D. takie samo jak odchylenie standardowe w zestawie A

POWTÓRZENIE

1. Oblicz błąd bezwzględny i błąd względny każdego z przybliżeń:

$$9,50 \text{ zł} \approx 10 \text{ zł} \quad 199 \text{ zł} \approx 200 \text{ zł}$$

2. Rowerzysta przebył pewną trasę w ciągu 2 h 36 min, ale powiedział, że pokonał ją w 2,5 godziny. Oblicz błąd względny takiego przybliżenia.

3. Na opakowaniu podano, że towar ma masę około 100 g, a błąd względny wynosi 5%. Jaka jest rzeczywista masa tego towaru, jeśli przybliżoną masę na opakowaniu podano z niedomiarem?

4. Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu liczb:

a) 9, 7, 7, 3, 5, 7, 5, 5, 3

b) 5, 3, 4, 3, 4, 5, 2, 3

5. Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu danych dotyczących długości snu uczniów pewnej klasy:

Liczba godzin snu	6	7	8	9	10	11
Liczba wskazań	3	6	12	6	2	1

6. Średnia arytmetyczna liczb 1, 1, 5, 1, 6, 3, 2, 5, 2, 5, a , b wynosi 3, a dominanta jest równa 1. Znajdź wartości a i b oraz medianę tych liczb.

7. Średnia waga ośmiu wioślarzy pewnej osady wioślarskiej wynosi 85 kg, a waga sternika tej osady jest równa 58 kg. Oblicz średnią wagę wszystkich zawodników tej osady.

8. Oblicz średnią ważoną liczb: 5 (z wagą 3), 4 (z wagą 2) i 7 (z wagą 1).

9. Zgodnie z regulaminem pewnej uczelni wynik końcowy studiów jest średnią ważoną średniej arytmetycznej ocen wpisanych do indeksu (z wagą 0,5), oceny z pracy dyplomowej (z wagą 0,25) i oceny z egzaminu dyplomowego (z wagą 0,25). Agata uzyskała średnią ocen z indeksu równą 4,43, jej pracę dyplomową oceniono na 5, a egzamin dyplomowy na 4,5. Określ wynik końcowy Agaty.

10. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe podanego zestawu danych.

a) Wagi plecaków uczniowskich:

2 kg, 6 kg, 5 kg, 2 kg, 1 kg, 8 kg

b) Wizyty u stomatologa w ciągu roku:

Liczba wizyt	0	1	2	3	4	5
Liczba wskazań	12	9	8	12	5	4

11. Oblicz średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe długości pstrągów i lipieni, a następnie porównaj obliczone wielkości.

Długość (w cm)	25	30	35	40	45
Liczba pstrągów	2	4	11	48	35
Liczba lipieni	18	72	8	2	0

12. Niech $\bar{x}$ oznacza średnią arytmetyczną liczb a , b , c . Uzasadnij, że odchylenie standardowe zestawu trzech liczb: $a - \bar{x}$, $b - \bar{x}$, $c - \bar{x}$ jest takie samo jak odchylenie standardowe zestawu liczb a , b , c .

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	1	0	46°	0,7193	0,6947	1,0355
1°	0,0175	0,9998	0,0175	47°	0,7314	0,6820	1,0724
2°	0,0349	0,9994	0,0349	48°	0,7431	0,6691	1,1106
3°	0,0523	0,9986	0,0524	49°	0,7547	0,6561	1,1504
4°	0,0698	0,9976	0,0699	50°	0,7660	0,6428	1,1918
5°	0,0872	0,9962	0,0875	51°	0,7771	0,6293	1,2349
6°	0,1045	0,9945	0,1051	52°	0,7880	0,6157	1,2799
7°	0,1219	0,9925	0,1228	53°	0,7986	0,6018	1,3270
8°	0,1392	0,9903	0,1405	54°	0,8090	0,5878	1,3764
9°	0,1564	0,9877	0,1584	55°	0,8192	0,5736	1,4281
10°	0,1736	0,9848	0,1763	56°	0,8290	0,5592	1,4826
11°	0,1908	0,9816	0,1944	57°	0,8387	0,5446	1,5399
12°	0,2079	0,9781	0,2126	58°	0,8480	0,5299	1,6003
13°	0,2250	0,9744	0,2309	59°	0,8572	0,5150	1,6643
14°	0,2419	0,9703	0,2493	60°	0,8660	0,5000	1,7321
15°	0,2588	0,9659	0,2679	61°	0,8746	0,4848	1,8040
16°	0,2756	0,9613	0,2867	62°	0,8829	0,4695	1,8807
17°	0,2924	0,9563	0,3057	63°	0,8910	0,4540	1,9626
18°	0,3090	0,9511	0,3249	64°	0,8988	0,4384	2,0503
19°	0,3256	0,9455	0,3443	65°	0,9063	0,4226	2,1445
20°	0,3420	0,9397	0,3640	66°	0,9135	0,4067	2,2460
21°	0,3584	0,9336	0,3839	67°	0,9205	0,3907	2,3559
22°	0,3746	0,9272	0,4040	68°	0,9272	0,3746	2,4751
23°	0,3907	0,9205	0,4245	69°	0,9336	0,3584	2,6051
24°	0,4067	0,9135	0,4452	70°	0,9397	0,3420	2,7475
25°	0,4226	0,9063	0,4663	71°	0,9455	0,3256	2,9042
26°	0,4384	0,8988	0,4877	72°	0,9511	0,3090	3,0777
27°	0,4540	0,8910	0,5095	73°	0,9563	0,2924	3,2709
28°	0,4695	0,8829	0,5317	74°	0,9613	0,2756	3,4874
29°	0,4848	0,8746	0,5543	75°	0,9659	0,2588	3,7321
30°	0,5000	0,8660	0,5774	76°	0,9703	0,2419	4,0108
31°	0,5150	0,8572	0,6009	77°	0,9744	0,2250	4,3315
32°	0,5299	0,8480	0,6249	78°	0,9781	0,2079	4,7046
33°	0,5446	0,8387	0,6494	79°	0,9816	0,1908	5,1446
34°	0,5592	0,8290	0,6745	80°	0,9848	0,1736	5,6713
35°	0,5736	0,8192	0,7002	81°	0,9877	0,1564	6,3138
36°	0,5878	0,8090	0,7265	82°	0,9903	0,1392	7,1154
37°	0,6018	0,7986	0,7536	83°	0,9925	0,1219	8,1443
38°	0,6157	0,7880	0,7813	84°	0,9945	0,1045	9,5144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	85°	0,9962	0,0872	11,4301
40°	0,6428	0,7660	0,8391	86°	0,9976	0,0698	14,3007
41°	0,6561	0,7547	0,8693	87°	0,9986	0,0523	19,0811
42°	0,6691	0,7431	0,9004	88°	0,9994	0,0349	28,6363
43°	0,6820	0,7314	0,9325	89°	0,9998	0,0175	57,2900
44°	0,6947	0,7193	0,9657	90°	1	0	—
45°	0,7071	0,7071	1				

ODPOWIEDZI

- str. 12-14:** 1. a) $x \neq -\frac{5}{2}$, b) $x \neq 0$ i $x \neq 3$, c) $x \neq -\frac{1}{2}$ i $x \neq \frac{1}{2}$, d) $x \neq -3$ i $x \neq 5$, e) $x \neq -1$ i $x \neq -\frac{3}{2}$, f) $x \neq -10$, $x \neq 0$ i $x \neq 10$. 3. a) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{5}{2}$; $\frac{6x^2+5}{-7x+2}$, b) $x \neq 0$ i $x \neq -3$; $\frac{3x^3-4x}{2x+6}$, c) $x \neq -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \neq 0$ i $x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{1}{2x}$, d) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{2}{3}$; $\frac{2x^2-5x^2}{15x-6}$, e) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{1}{2}$; $\frac{5}{x^2}$, f) $x \neq 3$; $-2x$. 4. a) $x \neq -5$; $\frac{x-5}{x+5}$, b) $x \neq -\frac{5}{2}$ i $x \neq \frac{5}{2}$; $\frac{5}{4x+10}$, c) $x \neq -2$ i $x \neq 2$; $\frac{x^2+2x+4}{x+2}$, d) $x \neq \frac{1}{10}$; $\frac{30x+3}{100x^2+10x+1}$, e) $x \neq -1$ i $x \neq 7$; $\frac{x+2}{x+1}$, f) $x \neq -5$ i $x \neq -1$; $\frac{x-4}{x+5}$. 5. a) $x \neq -4$; $\frac{8x-2}{x+4}$, b) $x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{1}{4}$, c) $x \neq -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $x \neq 0$ i $x \neq \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5x^2-4}$, d) $x \neq 0$; $\frac{2x-5}{25x^2}$, e) $x \neq -\sqrt{\frac{3}{3}}$; $\frac{3x+1}{3x^2+2}$, f) $x \neq -4$; $\frac{32x^2+8x}{x+4}$. 6. a) $x \neq -1$ i $x \neq 1$; $\frac{2x^2}{x^2-1}$, b) $x \neq -7$ i $x \neq 0$; $\frac{x^4}{7x+49}$, c) $x \neq -\frac{1}{5}$ i $x \neq 0$; $\frac{25x+5}{x^2+5}$, d) $x \neq 0$; $\frac{-4x^2-6x-2}{5x^3}$, e) $x \neq -1$ i $x \neq 0$; $\frac{x^2}{x+1}$, f) $x \neq -\sqrt{0,7}$, $x \neq 0$ i $x \neq \sqrt{0,7}$; $\frac{8x^2-4x+8}{30x^2-21x^8}$, g) $x \neq 0$ i $x \neq 1$; $\frac{-15}{2x^2-2x}$, h) $x \neq -2$ i $x \neq 0$; $\frac{30-42x}{x^3+2x^2}$, i) $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq -2$ i $x \neq 2$; $\frac{10x+10}{-x^3+4x}$. 7. a) $\frac{3x^4-9x^3}{3x^2+2}$, b) $x \neq 0$; $\frac{-x-2}{4x^3+8x}$, c) $x \neq -1$; $\frac{4x^2-1}{x+1}$, d) $x \neq \frac{1}{2}$ i $x \neq 3$; $\frac{4x+3}{4x-2}$, e) $x \neq -6$ i $x \neq -2$; $\frac{x^2+2x+4}{x^2+12x+36}$, f) $x \neq -\frac{1}{2}$ i $x \neq 3$; $4x^2+4x+1$. 8. a) $x \neq 0$ i $x \neq 2$; $\frac{4x+3}{x-2}$, b) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{3}{2}$; $\frac{4x+6}{x}$, c) $x \neq -1$, $x \neq 0$ i $x \neq 1$; x^3-x^2 , d) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{1}{2}$; $\frac{1}{6x}$, e) $x \neq 0$ i $x \neq 3$; $\frac{x^2-x-6}{2x}$, f) $x \neq -\frac{1}{3}$, $x \neq 0$ i $x \neq \frac{4}{3}$; $\frac{2}{10x^2-9x-4}$, g) $x \neq -3$ i $x \neq 3$; $\frac{5}{x^2+6x+9}$, h) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{1}{2}$; $\frac{3x^2+13x-10}{4x^3-2x^2}$, i) $x \neq -1$, $x \neq 0$ i $x \neq 2$; $\frac{x^2+2x+4}{2x+2}$, j) $x \neq -4$, $x \neq -1$ i $x \neq 0$; $\frac{3x^2-12x}{x+1}$, k) $x \neq 0$, $x \neq 2$ i $x \neq 3$; $\frac{-x^2-2x-4}{2x}$, l) $x \neq -2$, $x \neq 2$ i $x \neq 3$; $\frac{5x^3-10x^2}{4x+8}$. 9. a) $x \neq -5$; $\frac{4x+10}{x+5}$, b) $x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \neq 0$ i $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{-6x^2+2}{x^2-x}$, c) $x \neq -2$ i $x \neq 2$; $\frac{5x^3-4x}{x^2-4}$, d) $\frac{4x^2-14x}{3x^2-2x+5}$, e) $x \neq 2$; $\frac{3x^2-11x+1}{x-2}$, f) $x \neq -\frac{2}{3}$; $\frac{4x^2+2x-1}{3x+2}$. 10. a) $x \neq -1$ i $x \neq 0$; $\frac{2x+1}{3x+2}$, b) $x \neq -3$ i $x \neq -2$; $\frac{-1}{x^2+5x+6}$, c) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{3}{2}$; $\frac{11x-9}{2x^2-3x}$, d) $x \neq -2$ i $x \neq 2$; $\frac{-x+18}{x^2-18}$, e) $x \neq -1$ i $x \neq 3$; $\frac{x^2-6x+1}{x^2-2x-4}$, f) $x \neq -1$ i $x \neq 2$; $\frac{3x^2-9x-18}{2x^2-2x-4}$. 11. a) $x \neq 0$; $\frac{6x+5}{x^2}$, b) $x \neq 0$; $\frac{15-2x^2}{10x^2}$, c) $x \neq 0$; $\frac{-2x^2+x+2}{x^3}$, d) $x \neq 2$; $\frac{2x-2}{x^2-2}$, e) $x \neq -1$ i $x \neq 3$; $\frac{-x^2-4x+2}{x^2-2x-3}$, f) $x \neq \frac{5}{2}$ i $x \neq -3$; $\frac{-3x^3+3x^2+5x+6}{2x^2+x-15}$, g) $x \neq -2$ i $x \neq 0$; $\frac{5x^2-1}{x^2+2x}$, h) $x \neq 0$ i $x \neq \frac{1}{5}$; $\frac{-x^2}{10x-2}$, i) $x \neq -\frac{3}{2}$ i $x \neq \frac{3}{2}$; $\frac{10x}{4x^2-9}$. 12. a) $x \neq 0$; $\frac{75x^2+10x-9}{15x^3}$, b) $x \neq 0$; $\frac{21x^3-20x^2+30}{15x^4}$, c) $x \neq 0$; $\frac{x^2+1}{x^4}$, d) $x \neq 0$; $\frac{13x^2-7x+18}{6x^3}$, e) $x \neq 0$; $\frac{-3x^3+2x^2+x-4}{4x^4}$, f) $x \neq 0$; $\frac{-x^3+x-3}{x^4}$. 13. a) $\frac{1}{m(n+1)}$, b) $\frac{3n^2-1}{(n-1)m(n+1)}$. 14. a) $a > 0$; $\frac{8a^3+160}{a^2}$, b) $a > 0$; $\frac{70a^3+800}{7a^2}$, c) $a > 0$; $\frac{23a^3+160}{2a^2}$.

- str. 17-19:** 1. a) $x = -7$, b) $x = \frac{3}{4}$, c) $x = 0$, d) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{3}{2}$, e) $x_1 = -5$, $x_2 = 2$, f) $x = 0$. 2. a) $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{1}{3}$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, c) $x_1 = 0$, d) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, e) $x = 5$, f) równanie sprzeczne. 3. a) $x = -7,5$, b) $x = \frac{11}{12}$, c) $x = -3$, d) $x = \frac{19}{18}$, e) $x = -25$, f) $x = 8,5$. 4. a) $x = 6$, b) równanie sprzeczne, c) równanie sprzeczne, d) $x = 5$, e) $x = -1$, f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. 5. a) Równanie sprzeczne, b) $x = 1$, c) $x_1 = \frac{11-\sqrt{41}}{3}$, $x_2 = \frac{11+\sqrt{41}}{3}$, d) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 1$, e) $x = -\frac{10}{13}$, f) $x_1 = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $x_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}$, g) $x = -\frac{1}{21}$, h) $x = \frac{30}{41}$, i) $x_1 = \frac{21-\sqrt{137}}{8}$, $x_2 = \frac{21+\sqrt{137}}{8}$. 6. a) $x = -2$, b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, c) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, d) równanie sprzeczne, e) $x = \frac{3}{2}$, f) równanie sprzeczne. 7. a) $x = \frac{2}{3}$, b) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, c) $x = -\frac{5}{2}$, d) $x = 2$, e) $x = -\frac{1}{11}$, f) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{4}{3}$. 8. a) $x_1 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$, $x_2 = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$, b) równanie sprzeczne, c) $x_1 = \frac{-7-\sqrt{33}}{2}$, $x_2 = \frac{-7+\sqrt{33}}{2}$, d) $x = \frac{1}{2}$. 9. a) $x = -3$, b) równanie sprzeczne, c) $x = -6$, d) $x = \frac{1}{11}$. 10. a) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 1$, b) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, c) $x = -7$, d) $x = -5$, e) $x = 6$, f) $x_1 = -2$, $x_2 = 4,5$. 11. a) $a = 2$, b) $a = -\frac{3}{5}$. 12. $\frac{5\sqrt{2}-5}{2}$. 13. a) $a = \frac{7}{9}$ lub $a = \frac{9}{7}$, b) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 14. a) Dla trzech lat oraz dla dwunastu lat. 15. Około 32°C .

str. 21-22: 1. a) $R \neq 0, R_1 \neq 0, R_2 \neq 0 \mid 2R_1 - R \neq 0; R_2 = \frac{2R_1 R}{2R_1 - R}$, b) $R \neq 0, R_1 \neq 0, R_2 \neq 0, R_3 \neq 0 \mid R_1 R_3 - R(R_1 + R_3) \neq 0; R_2 = \frac{R R_1 R_3}{R_1 R_3 - R(R_1 + R_3)}$, c) $R \neq 0, R_1 + R_2 \neq 0, R_1 + R_3 \neq 0 \mid R_1 + R_3 - R \neq 0; R_2 = \frac{R(R_1 + R_3)}{R_1 + R_3 - R} - R_1$. 2. a) $d \neq 0, f \neq 0, d - F_1 \neq 0; f = \frac{d F_2}{d - F_1}$, b) $m_1 + m_2 \neq 0 \mid v_1 - v_0 \neq 0; m_1 = \frac{m_2(v_0 - v_2)}{v_1 - v_0}$, c) $c \neq 0, u + c \neq 0 \mid v \neq 0; w = \frac{v_1}{v} (c + u) - c$, d) $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0, c \neq 0 \mid T_1 c - v_1(p_1 - p_2) \neq 0; v_2 = \frac{T_2 v_1 c}{T_1 c - v_1(p_1 - p_2)}$, e) $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, C \neq 0, r_1 + r_2 \neq 0 \mid r_2 p - C \neq 0; r_1 = \frac{C p}{p r_2 - C}$, f) $R_1 \neq 0, R_2 \neq 0, n_1 \neq 0, F \neq 0 \mid R_1 + R_2 \neq 0; n_2 = n_1 \left(1 + \frac{R_1 R_2}{F(R_1 + R_2)}\right)$. 3. a) $a \geq 0 \mid b \geq 0; a - b; a \neq b, a \geq 0 \mid b \geq 0; \sqrt{a} + \sqrt{b}$, b) $x \in \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{R}; x - y; x \neq y \mid x \neq -y; 2 \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)$. 5. a) $x - 2\sqrt{x} + 1$, b) $x + 4\sqrt{x - 4}$.

str. 26-29: 1. ① - ③, ② - ⑤, ③ - ⑥, ④ - ⑦, ⑤ - ⑧, ⑥ - ⑨. 2. a) $(-2, -2)$, (2, 2), b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, c) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, d) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. 3. a) $y = \frac{3}{7x}$, b) $y = \frac{1}{2x}$, c) $y = \frac{5}{2x}$. 4. a) $y = -\frac{2}{3(x-2)} + 1$, b) $y = -\frac{2}{3(x+5)} - 10$, c) $y = -\frac{2}{3(x+30)} + 20$. 5. a) $x = 1$, $y = 2$, b) $x = -12$, $y = -\frac{1}{3}$, c) $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{5}$, d) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{4}{5}$. 6. a) $(-7, -9)$, b) $(12, 8)$, (12, -15), $(-7, 8)$, $(-7, -15)$. 7. a) Każda funkcja typu $y = \frac{a}{x+3} + 3, a \neq 0$, b) każda funkcja typu $y = \frac{a}{x-0.6}, a \neq 0$. 8. a) I, III, IV, b) I, II, IV, c) I, II, III, d) I, II, IV. 9. Tak. 10. ① - ③, ② - ⑤, ③ - ⑥, ④ - ⑦. 11. a) $\left(0, \frac{1}{12}\right)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -6)$ i w przedziale $(-6; +\infty)$; $x \in (-6; +\infty)$, b) $(3, 0)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i w przedziale $(0; +\infty)$; $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$, c) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ i $(-1, 0)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$ i w przedziale $(-2; +\infty)$; $x \in (-2; -1)$, d) $(0, 0)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i w przedziale $(1; +\infty)$; $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, e) $\left(0, 2\frac{1}{4}\right)$ i $\left(4\frac{1}{2}, 0\right)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 4)$ i w przedziale $(4; +\infty)$; $x \in (-\infty; 4) \cup \left(4\frac{1}{2}; +\infty\right)$, f) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ i $(-3, 0)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 3)$ i w przedziale $(3; +\infty)$; $x \in (-3; 3)$. 12. a) $x = 0$; dla $a = -4$, b) $x = 0.8$; dla $a = 0$, c) $x = 7$; dla $a = 2$, d) $x = -3$; dla $a = -\frac{1}{2}$, e) $x = -\sqrt{3}$; dla $a = 18$, f) $x = \sqrt{2}$; dla $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 13. a) $(2; +\infty)$, b) $(1; 2)$, c) $(0; +\infty)$, d) $(-\infty; 2)$, e) $(-1; 2)$, f) $(-\infty; 2\frac{1}{3})$. 14. $y = -\frac{2}{x-1} + 2$. 15. a) 6, b) 3, c) 14. 16. a) $y = \frac{3}{x-2} - 3$, b) o 3 jednostki w prawo i o 10 jednostek w górę.

str. 30: 1. a) $x \neq -2 \mid x \neq \frac{1}{2}; \frac{15x^2 + 3x}{2x^2 + 3x - 2}$, b) $x \neq 0, x \neq 2 \mid x \neq 3; \frac{10}{x-2}$, c) $x \neq -5 \mid x \neq 0; x^2 - 5x$, d) $x \neq -\frac{3}{2} \mid x \neq 2; \frac{1}{2}x^2 - x$. 2. a) $x \neq -2 \mid x \neq 0; \frac{8x + 10}{x^2 + 2x}$, b) $x \neq 0 \mid x \neq 3; \frac{4x^2 - x + 6}{x^2 - 3x}$, c) $x \neq -\frac{1}{2} \mid x \neq 1; \frac{-x^2 - 4x + 8}{2x^2 - x - 1}$, d) $x \neq 0; \frac{4x^2 + 2x + 4}{x^3}$. 3. a) $x = -\frac{9}{8}$, b) $x = -5$, c) $x = 4$, d) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0$, e) $x_1 = 0, x_2 = \frac{13}{4}$, f) $x_1 = -1, x_2 = 2$. 4. a) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 3$, b) $x = \frac{1}{8}$, c) równanie sprzeczne, d) $x = -4$. 5. a) $x = \frac{2}{3}$, b) $x = \frac{1}{2}$, c) $x = \frac{5}{2}$, d) $x = -4$. 6. a) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$, b) $f(x) = \frac{1}{x+4} + 2$. 7. a) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, c) $x = 5, y = 4$, d) $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, e) $x = 4\frac{1}{2}$. 8. a) $N \neq 0, k \neq 0; p = \frac{Mk}{N}$, b) $A \neq 0, B \neq 0 \mid p \neq 0; p = \frac{BC}{A}$, c) $S \neq 0, T \neq 0 \mid p \neq 0; p = \frac{T^2 - 3T}{S}$, d) $p + 2 \neq 0, Z \neq 0 \mid Y \neq 0; p = \frac{XZ}{Y} - 2$.

str. 37-40: 3. a) 7, b) 82, c) $n - 1$, d) $2n - 2$. 4. a) 1, 2, 3; 10, b) 1, 0, 0; 1, c) 5, 3, 4; 8. 5. a) 0, 5, b) 1, 9, c) 6, 2, d) 1, 3. 6. a) $-6, -13\frac{1}{2}, -20\frac{2}{3}, -62\frac{8}{9}$, b) $3, 1\frac{2}{3}, 1\frac{2}{5}, 1\frac{2}{15}$, c) 6, 1, $-16, -706$, d) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 16\sqrt{2}$, e) 0, 18, 0, 0, f) 2, 1, $\frac{8}{9}, \frac{512}{81}$. 7. a) Wyrazy a_k , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną dodatnią nieparzystą; wszystkie; wyrazy c_k , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną dodatnią parzystą, b) wyrazy d_k , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną dodatnią podzielną przez 5; wyrazy e_k , gdzie k jest dowolną

liczbą naturalną dodatnią nieparzystą; wyrazy f_k , gdzie k jest dowolną liczbą naturalną dodatnią podzieloną przez 6. 8. $a_{n+1} = n^2 + 4n$, $a_n - a_1 = n^2 + 2n - 3$, $b_{n-1} = 5^{n-1} + 4$, $b_{n+1} - b_{n-1} = 5^{n+1} - 5^{n-1}$, $c_{2n+1} = \frac{n - \frac{1}{2}}{2n+2}$, $\frac{c_n}{c_{n-2}} = \frac{(n-1)(\frac{1}{2}n-1)}{(n+1)(\frac{1}{2}n-2)}$. 9. $a_1 = 41$, $a_2 = 43$, $a_3 = 47$, $a_4 = 53$, $a_5 = 61$. 10. a) 196, b) nie. 11. a) Dwudziestym, b) nie, c) wyrazy większe od a_{45} , d) wyrazy od a_1 do a_{52} . 12. a) $a_n = n + 5^n$, b) $a_n = 2n$, c) $a_n = \frac{1}{n}$, d) $a_n = n^3$, e) $a_n = \frac{n}{n+1}$, f) $a_n = n - 5$. 13. a) $a_n = n^2$, $a_n = (n+1)^2$, $a_n = (n+4)^2$, b) $a_n = (2n-2)^2$, $a_n = (n-4)^2$, $a_n = (n-11)^2$. 14. a) $a_1 = 90$, $a_2 = 33$, $a_3 = 14$, $a_4 = 7\frac{2}{3}$, b) $a_1 = -5$, $a_2 = -5$, $a_3 = -2$, $a_4 = 46$, c) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_4 = -3$, d) $a_1 = -2$, $a_2 = 2$, $a_3 = -4$, $a_4 = -8$, e) $a_1 = -2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 1$, $a_4 = 8$, f) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 1$. 15. a) Wzór rekurencyjny: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 5$, wzór ogólny: $a_n = 5n$, b) wzór rekurencyjny: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -a_n$, wzór ogólny: $a_n = 2 \cdot (-1)^{n+1}$, c) wzór rekurencyjny: $a_1 = 113$, $a_{n+1} = a_n + 10$, wzór ogólny: $a_n = 103 + 10n$, d) wzór rekurencyjny: $a_1 = 8$, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$, wzór ogólny: $a_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$, e) wzór rekurencyjny: $a_1 = 3a$, $a_{n+1} = a_n - 1$, wzór ogólny: $a_n = 3a - n + 1$, f) wzór rekurencyjny: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + a + 1$, wzór ogólny: $a_n = na + n - 1$. 16. a) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$, $a_7 = 13$, $a_8 = 21$, $a_9 = 34$, $a_{10} = 55$, c) $a_3 = 2$, $a_4 = 3$. 21. a) Malejący, b) ani rosnący, ani malejący, c) rosnący, d) rosnący. 23. a) Tak, malejący, b) tak, rosnący, c) tak, rosnący, d) nie można określić monotoniczności. 24. a) Malejący, b) malejący, c) ani rosnący, ani malejący, d) rosnący.

str. 43-46: 1. a) $r = 5; 12, 17$, b) $r = -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}, -\frac{6}{5}$, c) $r = 0,4; 11,4, 11,8$, d) $r = -5,5; 109, 103,5$, e) $r = \sqrt{2}; 1 + 4\sqrt{2}, 1 + 5\sqrt{2}$, f) $r = -2\sqrt{2}; 3 - 4\sqrt{2}, 3 - 6\sqrt{2}$. 2. a) $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = -2$, b) $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$, c) $a_2 = -4$, $a_3 = -4$, $a_4 = -4$, d) $a_2 = 34$, $a_3 = 27$, $a_4 = 20$. 3. a) $r = 7$, $a_1 = 10$, $a_2 = 17$, b) $r = -2$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, c) $r = -14$, $a_1 = m + 35$, $a_2 = m + 21$, d) $r = -\frac{1}{4}$, $a_1 = \frac{x-1}{4}$, $a_2 = \frac{x-2}{4}$. 4. a) Dla $t = 6$ lub $t = -6$, b) dla $t = 15$, c) dla $t = -1$ lub $t = 4$. 5. a) Np. 3, 5, 7, b) 5, 11, 17, 23, 29. 6. a) $a_2 = 1,5$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10,5$, b) $a = -3\frac{1}{2}$, $b = -8\frac{2}{3}$, $c = -13\frac{2}{3}$, $d = -18\frac{2}{3}$. 7. Sześć. 9. (a_n) , (b_n) , (d_n) . 10. a) $a_n = \frac{3}{2}n + 4\frac{5}{2}$; $a_1 = 5\frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{3}{2}$; $b_n = -3\sqrt{3}n + 7\sqrt{3} + 3$; $b_1 = 3 + 4\sqrt{3}$, $b_{n+1} = b_n - 3\sqrt{3}$; $c_n = 1,4n - 28,8$; $c_1 = -27,4$, $c_{n+1} = c_n + 1,4$, b) $a_n = 2n - 9$, $b_n = -\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$, $c_n = -0,2n - 12,8$, c) $x_1 = 4$, $x_{n+1} = x_n + 5$; $y_1 = -2$, $y_{n+1} = y_n + 0,5$; $z_1 = 100$, $z_{n+1} = z_n - 4$. 11. a) $a_{10} = 47$, b) $a_{21} = 21\sqrt{2}$, c) $a_{13} = 37$, d) $a_{100} = -204$. 12. a) $r = -0,7$, $a_{12} = -4,7$, b) $a_1 = 5$, $a_{15} = 6,4$, c) $r = 2$, $a_1 = -98$, d) $r = 1,5$, $a_1 = -14$. 14. a) 399, b) 598. 15. $a_1 = \frac{2}{5}$, $r = \frac{2}{5}$. 16. a) Tak, trzynastym, b) nie, c) tak, trzysta siedemdziesiątym trzecim. 17. a) Trzyście, b) dziewięćdziesiąt. 18. Np. 61, 81. 21. a) $a_1 = 2$; $r = -3$, b) $f(x) = 3x - 8$.

str. 48-51: 1. a) $S_{21} = 252$, b) $S_{35} = -2870$, c) $S_{100} = 1925$, d) $S_{19} = -115,9$. 2. $a_1 = -\frac{13}{5}$, $r = \frac{47}{25}$. 3. $S_{50} = 2550$. 4. a) $a_1 = -36$, $r = 48$, b) $a_1 = \frac{23}{5}$, $r = -\frac{7}{3}$, c) $a_1 = -5$, $r = 8$. 5. a) $S = 94,5$, b) $S_{30} = 187,5$, c) $S_{10} = 4\frac{1}{3}$. 6. a) 970 zapalek; 20 figur, b) 800 zapalek; 22 figury. 7. a) 200 miejsc, b) 2520 miejsc. 8. 55 dachówek; 1480 dachówek. 9. Druga; $S_I = 104\,500$ zł, $S_{II} = 107\,500$ zł. 10. a) Osiem; 23 karty, b) 497 talii. 11. a) 21945, b) 494 550, c) 3498. 12. a) 166 833, b) 100 000, c) 2900. 13. a) 15 500, b) 56,25, c) -1920, d) $443\frac{1}{3}$. 14. a) $212\frac{11}{14}$, b) 221, c) -1430. 15. a) 11, b) 13, c) 10, d) 10. 16. a) $x = -0,7$, b) $x = 0,5$. 17. a) $x = -19$, b) $x = -5,1$ lub $x = 5,7$.

str. 55-57: 1. a) Tak, b) nie, c) tak. 2. a) $q = \frac{1}{3}$, b) $q = -2$, c) $q = 0,1$, d) $q = \sqrt{3}$.
 3. a) 10 000, b) $5\sqrt[3]{25}$, c) $\frac{343}{27}$, d) 1, e) 0,000002, f) $(1 + \sqrt{5})^5$. 4. a) $a_1 = \frac{3}{5}$, $a_4 = -75$,
 b) $a_1 = \frac{4}{7}$, $a_4 = 24\frac{1}{2}$, c) $a_1 = -612$, $a_4 = 22\frac{2}{3}$. 5. a) $q = 2$, $\log 256$, b) $q = -2$, $\log \frac{1}{6561}$.
 6. a) $x = -75$, b) $x = 9$ lub $x = -11$, c) $x = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$. 7. a) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ lub $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 b) $x = 20$, $y = 16$, c) 24, 36, 54 lub -24, 36, -54, d) $q = \sqrt[3]{2}$. 8. (b_n) , (c_n) i (d_n) . 9. a) Nie,
 c) nie. 10. a) $a_{127} = 0$, b) $b_{100} = 3$. 11. a) Rosnący, b) malejący, c) malejący, d) ani rosnący,
 ani malejący, ani stały, e) rosnący, f) malejący. 12. a) 6, b) 2. 13. a) $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$; $a_1 = \frac{1}{2}$,
 $a_{n+1} = 3a_n$; $b_n = 5 \cdot (\sqrt{2})^n$; $b_1 = 5\sqrt{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{2}b_n$; $c_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $c_1 = -2$, $c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n$,
 b) $a_n = 13 \cdot 5^{n-1}$; $b_n = -0,4 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}$; $c_n = \frac{3}{4} \cdot (-9)^{n-1}$, c) $x_1 = 19$, $x_{n+1} = -0,7x_n$; $y_1 = -1$,
 $y_{n+1} = \frac{3}{2}y_n$; $z_1 = -\frac{5}{3}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n$. 14. a) $q = \sqrt{2}$, $a_{10} = 16\sqrt{2}$ lub $q = -\sqrt{2}$, $a_{10} = -16\sqrt{2}$,
 b) $q = 5$, $a_{10} = 1,4$ lub $q = -5$, $a_{10} = -1,4$, c) $a_4 = 3$, d) $a_{10} = -27$ lub $a_{10} = 27$. 15. a) Nie,
 b) tak. 16. a) $a_n = 0,1 \cdot 2^n$, b) ok. 107,4 km. 17. a) $m_n = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, b) około 12,8 mg.
 18. Tak. 19. $a_n = 1$. 20. $a = 12$, $b = 15$, $c = 18$ lub $a = 48$, $b = 15$, $c = -18$.

str. 59-60: 1. a) $S_5 = 33$, b) $S_7 = 4\frac{123}{128}$, c) $S_6 = -4004$. 2. a) $S_{10} = 7324218$,
 b) $S_6 = -20\frac{45}{32}$, c) $S_7 = 41\frac{417}{625}$, d) $S_{11} = -\frac{683}{3072}$. 3. a) 2046 przodków, b) $2^{81} - 2$
 przodków. 4. a) $a_n = 2^{n-1}$, b) około $6,4 \cdot 10^{11}$ t. 5. a) Około 34 cm, b) około 9,76 m.
 6. Wysokość: około 78,1 m, pole powierzchni całkowitej: około 8167,6 m², objętość: około
 38280,8 m³. 7. a) 97 147, b) 88 427.

str. 64-67: 1. a) 1240 zł, b) 11 600 zł, c) 25 800 zł. 2. a) $c_n = 1000 + 100n$, b) $c_n = 1000 -$
 $-100n$, c) $c_n = 1000 \cdot 1,02^n$, d) $c_n = 1000 \cdot 0,98^n$. 3. a) 4637,10 zł, b) 1954,67 zł,
 c) 41 008,08 zł, d) 6760,90 zł. 4. a) 6 lat, b) 5500 zł, c) 4,5%. 5. a) 10 831,43 zł,
 b) 11 102,03 zł, c) 11 098,45 zł. 6. ② i ③. 7. a) Po 2 latach, b) 7400 zł, c) 4%,
 d) 4%. 8. a) O 5,1%, b) co najmniej 12 lat. 9. Lokata półroczna. 10. a) 11 012,23 zł,
 b) 40 972 zł. 11. 2025 zł; o 38,02 zł. 12. a) 115,86 zł, b) 116,30 zł. 13. 7 141,23 zł.
 14. O 136 142,21 zł. 15. O 18,46%. 16. Po 7 latach.

str. 68: 1. a) $a_{100} = -33$, b) jedenastym. 2. 9. 3. a) $a_n = 5^n$, b) $a_1 = 19$, $a_{n+1} = a_n + 2$.
 4. $a_n = 0,5n - 0,1$. 5. Dla $p = 4$. 6. a) $a_{26} = -41$, b) $a_1 = 15$, $r = -3$. 7. 17 892. 8. 5,60 zł;
 158,60 zł. 9. $f_n = 3n + 7$. 10. Dla $n = 5$. 11. (b_n) ; $b_1 = \frac{3}{4}$, $q = 3$. 12. $a_1 = \frac{5\sqrt{2}}{8}$, $a_7 = 5\sqrt{2}$
 i $a_{10} = 20$ lub $a_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{8}$, $a_7 = -5\sqrt{2}$ i $a_{10} = 20$. 13. 1024 razy. 14. Mniejsza; o $\frac{1}{1024}$.
 15. Tak. 16. O 3573,05 zł.

str. 72-75: 1. a) 6, b) 6, c) 8. 2. a) 20, b) 35, c) 42. 3. a) 67,5, b) 54, c) 35.
 4. a) $\frac{x}{z} = \frac{x+y}{z+t}$, $\frac{a}{z} = \frac{b}{z+t}$, b) $\frac{r}{p+r} = \frac{x}{s+q}$, $\frac{q+x}{w} = \frac{q}{w}$. 5. a) 1, b) $2\frac{1}{7}$, c) $5\frac{2}{3}$. 6. 7,2 m.
 8. $|PS| = 6\frac{3}{4}$, $|SQ| = 1$. 9. a) 1 m, b) nie zmieni się. 11. a) $a \parallel c$, b) $a \parallel c$.

str. 78-81: 1. a) $k = 3$, b) $k = 2$, c) $k = \sqrt{2}$. 2. a) $15\sqrt{2}$, b) 180, c) 20°, 50°, 110°,
 d) bok leżący naprzeciw kąta α ma długość $2\frac{2}{3}$, a bok leżący naprzeciw kąta $\beta = 6\frac{2}{3}$. 3. a) α ,
 b) d . 4. a) d , f , $\frac{f}{c}$, $\frac{b}{c}$, b) p , x , $\frac{x}{w}$, $\frac{f}{f}$. 5. a) $8\frac{1}{3}$, b) 4,2. 6. a) $a = 7,5$, $\alpha = 130^\circ$, $\beta = 70^\circ$,

b) $a = 8\frac{1}{6}$, $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 120^\circ$. 8. ①, ②, ④. 9. a) $\frac{1}{14}$, b) $\frac{3}{5}$. 10. $3\frac{4}{7}$. 12. $\sqrt{2}$. 13. $2\frac{2}{3}$. 14. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 15. b) *CEJL*, *DGHK* oraz *CGHL*. 16. b) $26\frac{2}{3}$ mm.

str. 84-87: 1. a) Tak, b) nie, c) tak. 2. a) Tak, b) nie, c) tak. 3. a) Cecha bbb, β , b) cecha bbb, β . 4. a) Cecha kk, $|EF|$, $|EF|$, $|DF|$, b) cecha kk, $|PS|$, $|KM|$, $|LK|$. 5. a) $x = 2\frac{3}{5}$, b) $y = 14,4$. 6. a) T_1 i T_2 , b) T_1 i T_2 . 7. *ABE*, *DBF*, *FCE*. 10. $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$. 11. a) $k = \frac{3}{2}$, b) $k = \frac{2}{5}$, c) $k = \frac{4}{5}$. 12. a) $k = \frac{3}{2}$, b) $k = 2$, c) $k = 2$. 13. $k = \frac{4\sqrt{3}}{7}$. 15. b) Dwa czworokąty są podobne, jeżeli długości wszystkich boków jednego czworokąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego czworokąta i kąt między dwoma bokami jednego czworokąta ma taką samą miarę jak kąt między odpowiadającymi bokami drugiego czworokąta.

str. 88-90: 1. a) $\frac{8}{9}$, b) 4,4, c) 3,125. 2. 6 cm. 3. 140 kroków. 4. a) 9, b) $3\frac{5}{6}$, c) $2\frac{1}{4}$. 5. $\frac{a(2a+b)}{a+b}$. 6. Około 1,4 mln km. 7. 56 m. 8. a) 45 m, b) 8 m.

str. 93-95: 1. a) 32, b) $9\frac{1}{3}$, c) $\sqrt{5}$, d) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$. 2. $16 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$. 3. 1,44 razy. 4. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 5. $2\frac{1}{4}$ razy. 6. a) 2,16, b) 3,6, c) $12\frac{4}{9}$. 7. a) $\frac{3}{4}P$, $\frac{1}{4}P$, b) $\sqrt{2}+1$. 8. a) 4, b) 12, c) $5\frac{1}{3}$. 9. $P_{ABE} = 9$, $P_{DEC} = 4$, $P_{AED} = 6$, $P_{BCE} = 6$. 10. $k = \frac{2\sqrt{3}}{5}$. 11. b) $2\sqrt[3]{675}$.

str. 96: 1. $a = 3\frac{1}{3}$, $b = 4\frac{1}{2}$, $c = 2$. 2. a) Tak, b) nie, c) tak. 3. 13,5 m. 4. $k = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; $k = 1,5$. 5. $a = 3\frac{1}{2}$, $b = \frac{8}{3}$. 6. a) $x = \frac{13}{8}$, b) $\frac{8}{5}$ lub $\frac{5}{8}$, c) $\frac{64}{25}$ lub $\frac{25}{64}$. 7. $10(\sqrt{2}+2)$, $10(\sqrt{2}+1)$. 8. $x = 2,5$, $y = 4$. 9. a) Obwód $f_1 = 30k$, b) $P_{f_2} = \frac{3}{k^2}$.

str. 101-105: 1. $V_1 = 24$, $V_2 = 42$, $V_3 = 42$. 2. $V = \frac{a^3}{3}$, $V = \frac{a^3}{3}$, $V = \frac{a^3}{3}$, $V = \frac{a^3}{6}$. 3. a) $\frac{a^2 h \sqrt{3}}{3}$, b) $\frac{a^2 h \sqrt{3}}{3}$, c) $\frac{a^2 h \sqrt{3}}{3}$. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\frac{2}{3}V$. 6. $V = \frac{19}{27}a^3$, $P = 6a^2$. 7. a) $\frac{11}{12}a^3$, b) $\frac{5}{6}a^3$, c) $\frac{37}{48}a^3$. 8. a) $1,5a$, b) $\frac{1}{2}a$. 9. a) $\frac{1}{3}a^2b$, b) $\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^2b$, c) $\frac{7}{15}a^2b$. 10. a) $5\sqrt{3}a^3$, b) $\frac{50\sqrt{3}}{12}a^3$, c) $5\sqrt{3}a^3$. 11. a) $78\sqrt{3}$, b) $67,5\sqrt{3}$, c) $183\frac{1}{3}$. 12. $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$. 13. 1:2. 14. $V_1 = \frac{a^3}{6}$, $V_2 = \frac{2bp}{3}$, $V_3 = \frac{1}{3}P(3h - a - 2b)$. 15. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 16. $a\sqrt{3}$ lub a . 17. Stosunek objętości: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, stosunek pól: $\sqrt{3}$. 18. a) $a\sqrt{2}$, b) $\frac{b\sqrt{2}}{2}$. 19. A: około 9 m; B, C, D: $(\frac{47\sqrt{3}}{3} + 9) \approx 36,1$ m; E, F, G: $(\frac{94\sqrt{3}}{3} + 9) \approx 63,3$ m; H: $(47\sqrt{3} + 9) \approx 90,4$ m; I: $\frac{47\sqrt{3} + 18}{2} \approx 49,7$. 20. a) $P = 6a^2\sqrt{3}$, $V = \sqrt{2}a^3$, b) ośmiościan foremny; $\frac{b^3\sqrt{2}}{24}$. 21. a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, b) tak.

str. 108-109: 1. a) Dwa razy większą, b) dwa razy większą. 2. a) $\frac{2}{\pi}$, b) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, c) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$. 3. 32. 5. 12 cm. 6. a) 6π , b) $\frac{49}{4}\pi$.

str. 115-117: 1. a) 45° , b) 60° , c) 30° . 2. a) Około 71° , b) tak. 3. 45° . 5. 30° , 30° , 120° . 6. a) 45° , 135° , 135° , 45° , b) 60° . 7. 60° , 120° , 60° , 120° . 8. a) Około 51° , b) około 52° , c) około 41° . 9. a) Około 39° i około 35° , b) 60° . 10. Około 55° i około 35° . 11. a) 60° , b) 30° , c) 60° . 12. a) Około 69° , b) około 55° , c) 45° . 13. $\frac{a^3}{6}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}}$ lub $\frac{a^3 \cos \frac{\alpha}{2}}{3\sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2}}$. 14. a) Około 71° , b) około 55° .

str. 120-121: 2. a) $3\sqrt{10}a^2$, b) $3\sqrt{3}a^2$, c) $2\sqrt{6}a^2$. 3. a) $8\sqrt{5}$, b) $\frac{3\sqrt{31}}{2}$. 4. a) $12\sqrt{5}$
b) $4\sqrt{34}$, c) $4\sqrt{22}$. 5. Prostokąty o bokach: 6 cm i 8 cm lub 6 cm i 10 cm lub 8 cm i 10 cm lub
10 cm i 5 cm lub 6 cm i $\sqrt{41}$ cm lub 8 cm i $\sqrt{34}$ cm. 6. a) 20, b) $2\sqrt{34}$, c) $2\sqrt{82}$. 7. 3:1.
8. a) $4\sqrt{3}$ cm², b) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm². 9. a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, b) około 40° lub około 50°; 10. a) $\frac{a^2}{\cos \alpha}$, b) a^2 ,
gdy $\alpha = 0^\circ$, $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, gdy $\alpha = 35^\circ$.

str. 125-127: 1. a) $\frac{216\sqrt{3}}{25}\pi$, b) $37\frac{11}{147}\pi$, c) $36\frac{1}{27}\pi$. 2. a) $\frac{910\sqrt{35}}{27}$, b) 875, c) 462,5.
3. a) $390\sqrt{3}$, b) $\frac{140\sqrt{3}}{3}$, c) $202\frac{2}{9}$. 4. 38 cm³. 5. $2\sqrt{2}$ razy. 6. $\frac{27}{64} \approx 0,42$ pojemności
kieliszka; $\sqrt[3]{0,5} \approx 0,79$ wysokości kieliszka. 7. a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$. 8. $\frac{1}{3}\pi h (r^2 + rR + R^2)$.
9. a) $\frac{16}{3}\pi r^2 h$, b) $\frac{17}{3}\pi r^2 h$, c) $\frac{4}{3}\pi r^2 h$. 10. $40\frac{2}{3}$. 11. 2:1. 12. 162 minuty. 14. a) Kość:
1:625, masa: 1:15625, b) 0,28 kg.

str. 128: 1. $\frac{1}{6}$. 2. $348\sqrt{3}$. 3. 54π . 4. a) $\frac{\pi}{4}$, b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. 5. 2531,25. 6. a) Rozwartym,
b) ostrym. 7. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, $3\sqrt{13}$. 8. a) 10 cm, b) $\sqrt[3]{100}$ cm. 9. $\frac{104\sqrt{2}}{3}$, 78π.

str. 131-133: 2. $\pi \approx \frac{864}{275}$. 3. a) 5, b) 0,5, c) 0,005. 4. $a = 12,13$, $b = 47,46$.
5. a) $\{7473,25 \text{ m}^2; 7647,25 \text{ m}^2\}$, b) $\{31\frac{5}{12} \text{ km}; 38,75 \text{ km}\}$. 7. a) 2570, 2, 0,08%, b) 100, 5,
5,26%, c) 290, 0,3, 0,1%. 8. Około 3,05%. 9. Największy: około 4,76%, najmniejszy: 0%.
10. a) $a \in \{3349; 3380\} \cap \mathbb{N}$, b) $b \in \{584; 590\} \cap \mathbb{N}$. 11. a) 50 000 zł, b) 25 t.

str. 138-143: 1. a) $\bar{x} = 106$, mediana – 102, dominanta – 102, b) $\bar{x} = 13\frac{1}{3}$, mediana –
13,5, dominanty brak, c) $\bar{x} = 3,8(1)$, mediana – 3, dominanta – 2, d) $\bar{x} = 5\frac{1}{3}$, mediana – 5,
dominanta – 3. 2. a) Grupa I: $\bar{x} = 5,5(3)$, mediana – 6, dominanta – 10, grupa II: $\bar{x} \approx 6,19$,
mediana – 5,5, dominanta – 5, b) $\bar{x} \approx 6,04$, mediana – 6, dominanta – 10. 3. Grupa I:
 $\bar{x} = 3$, mediana – 2, dominanta – 1, grupa II: $\bar{x} \approx 3,26$, mediana – 3, dominanty – 3 i 5,
obie grupy: $\bar{x} = 3,24$, mediana – 3, dominanta – 3. 4. a) $\bar{x} = 2$ h 6 min 15 s, mediana –
1 h 57 min 30 s, dominanta – 1 h 45 min, b) $\bar{x} = 100,1$ g, mediana – 100,4 g, dominanta –
100,4 g. 5. $\bar{x} \approx 39,53$ zapalek, mediana – 40 zapalek, dominanta – 40 zapalek. 6. $\bar{x} = 2,45$
gola, mediana – 3 gole, dominanta – 3 gole. 8. a) Nie, b) nie, c) tak. 10. a) Medianę,
b) średnią arytmetyczną, c) dominantę. 12. a) $a = 5$, dominanta – 2, mediana – 2, b) $a = 3$,
dominanta – 7, mediana – 7, c) $a = 9$, dominanta – 10, mediana – 6, d) $a = 1$, dominanta
– 6, mediana – 6,5. 13. a) 1,93 m, b) około 2,2 filiżanek kawy. 14. a) Około 19,8 dag,
b) większe – 96 kg, mniejsze – 16 kg. 15. 80 lat; 73 lata. 16. 37 500 zł. 17. O 10 zł.
18. a) W 1897 roku: około 25% Polaków, a w 1997 roku około 50% Polaków, b) w 1897
roku. 19. a) 135 uczniów, b) 57 uczniów. 20. a) Z chemii, b) z chemii, c) z biologii.
21. a) Uczelnia X: kandydat A: 140 pkt, kandydat B: 143 pkt, kandydat C: 136 pkt, Uczelnia Y:
kandydat A: 153 pkt, kandydat B: 143 pkt, kandydat C: 145 pkt; Według regulaminu uczelni X
najlepszy kandydat to B, a najslabszy kandydat to C. Według regulaminu uczelni Y najlepszy
kandydat to A, a najslabszy kandydat to B.

str. 146-149: 1. a) 10,8, b) 2,4, c) 6,1, d) 2. 2. A. Nerwowa: 36,(6)% , A. Wygadany: 38,(3)%. 3. b) $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{7}{20}$, $c = \frac{9}{20}$. 4. a) Za pierwsze półrocze: 3, za drugie: 4, b) 4. 5. a) JL3/95: 36%, MK2/55: 90%, MD6/18: 50%, b) JL3/95: 58%, MK2/55: 47%, MD6/18: 44%. 6. 70%. 7. Potas: 39,14, miedź: 63,62, żelazo: 55,9, siarka: 32,0925, ołów: 207,24. 8. Kurs I. 9. a) Obóz wędkarski. 10. Chleb pszenny: 241 kcal/100 g, kotlet schabowy: 404 kcal/100 g, orzechy laskowe: 694 kcal/100 g.

str. 154-159: 1. a) Około 3,03, b) około 13,09, c) 2,5, d) około 3,43. 2. a) Średnia największa w zestawie II, a odchylenie najmniejsze w zestawie I, b) średnia największa w zestawie II, a odchylenie najmniejsze w zestawie III, c) średnia największa w zestawie II, a odchylenie najmniejsze w zestawie III, d) średnia największa w zestawie III, a odchylenie najmniejsze w zestawie II. 3. a) Kobiety: $\bar{x} \approx 11,14$ s, $\sigma \approx 0,16$ s, mężczyźni: $\bar{x} \approx 10,05$ s, $\sigma \approx 0,09$ s, b) M. Bałtyckie: $\bar{x} \approx 8,46^\circ$, $\sigma \approx 5,23^\circ$, M. Czerwone: $\bar{x} \approx 28,74^\circ$, $\sigma \approx 2,21^\circ$, c) Adam Małysz: $\bar{x} = 2,75$, $\sigma \approx 1,71$, Sven Hannawald: $\bar{x} \approx 8,11$, $\sigma \approx 10,73$. 4. Woda mineralna: $\sigma \approx 0,23$ zł, puszcza groszku: $\sigma \approx 0,10$ zł, cukier: $\sigma = 0$ zł. 5. Średnia arytmetyczna dziennego nasłonecznienia w Gdyni jest mniejsza niż w Krakowie, a odchylenie standardowe dziennego nasłonecznienia w Gdyni jest większe niż w Krakowie. 6. a) $\bar{x} = 4,975$, $\sigma \approx 0,69$, b) $\bar{x} = 4,85$, $\sigma \approx 0,96$, c) $\bar{x} = 1,39$, $\sigma \approx 0,68$. 8. a) Średnia arytmetyczna danych zestawu I jest mniejsza niż średnia arytmetyczna danych zestawu II, a odchylenia standardowe są równe (zestaw I: $\bar{x} = 6$, $\sigma \approx 2,45$, zestaw II: $\bar{x} = 7$, $\sigma \approx 2,45$). 9. a) Średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe zestawu danych A są mniejsze niż dla zestawu B (zestaw A: $\bar{x} = 5$, $\sigma \approx 3,39$, zestaw B: $\bar{x} = 50$, $\sigma \approx 33,91$). 12. 0,26 cm; $\langle 26,74$ cm; $27,26$ cm $\rangle$. 13. $249,6 \pm 5,7$ g. 14. a) Wzrost Polek: $\langle 158,6; 169,8 \rangle$, wzrost Polaków: $\langle 168,6; 183,4 \rangle$, b) wzrost mężczyzn w Japonii: $\langle 153,9; 177,1 \rangle$, wzrost mężczyzn w Polsce: $\langle 161,2; 190,8 \rangle$, c) wzrost Holenderek: $\langle 149,5; 189,7 \rangle$, wzrost Polek: $\langle 147,4; 181 \rangle$. 15. Grupa 2. Wskazówka. Zauważ, że w każdej grupie średnia arytmetyczna danych jest równa 2,5. Najmniejsze odchylenie standardowe jest w tej grupie, w której największa część danych jest bliska średniej arytmetycznej.

str. 160: 1. Błąd bezwzględny = 0,5, błąd względny $\approx 5,3\%$; błąd bezwzględny = 1, błąd względny $\approx 0,5\%$. 2. 3,8%. 3. Około 105 g. 4. a) $\bar{x} = 5\frac{2}{3}$, mediana = 5, dominanty to 5 i 7, b) $\bar{x} = 3,625$, mediana = 3,5, dominanta to 3. 5. $\bar{x} \approx 8,03$ godzin, mediana to 8 godzin, dominanta to 8 godzin. 6. $a = 1$, $b = 4$ lub $a = 4$, $b = 1$; mediana = 2,5. 7. 82 kg. 8. 5. 9. 4,59. 10. a) $\bar{x} = 4$ kg, $\sigma \approx 2,5$ kg, b) $\bar{x} = 2,02$, $\sigma \approx 1,58$. 11. Pstragi: $\bar{x} = 40,5$ cm, $\sigma \approx 4,44$ cm; lipienie: $\bar{x} = 29,7$ cm, $\sigma \approx 2,9$ cm.



Podręcznik jest przeznaczony do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełnia on kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i jest zgodny z najnowszą podstawą programową z 2018 roku.

Został dopuszczony przez MEiN do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników.

Numer dopuszczenia: 964/3/2021

