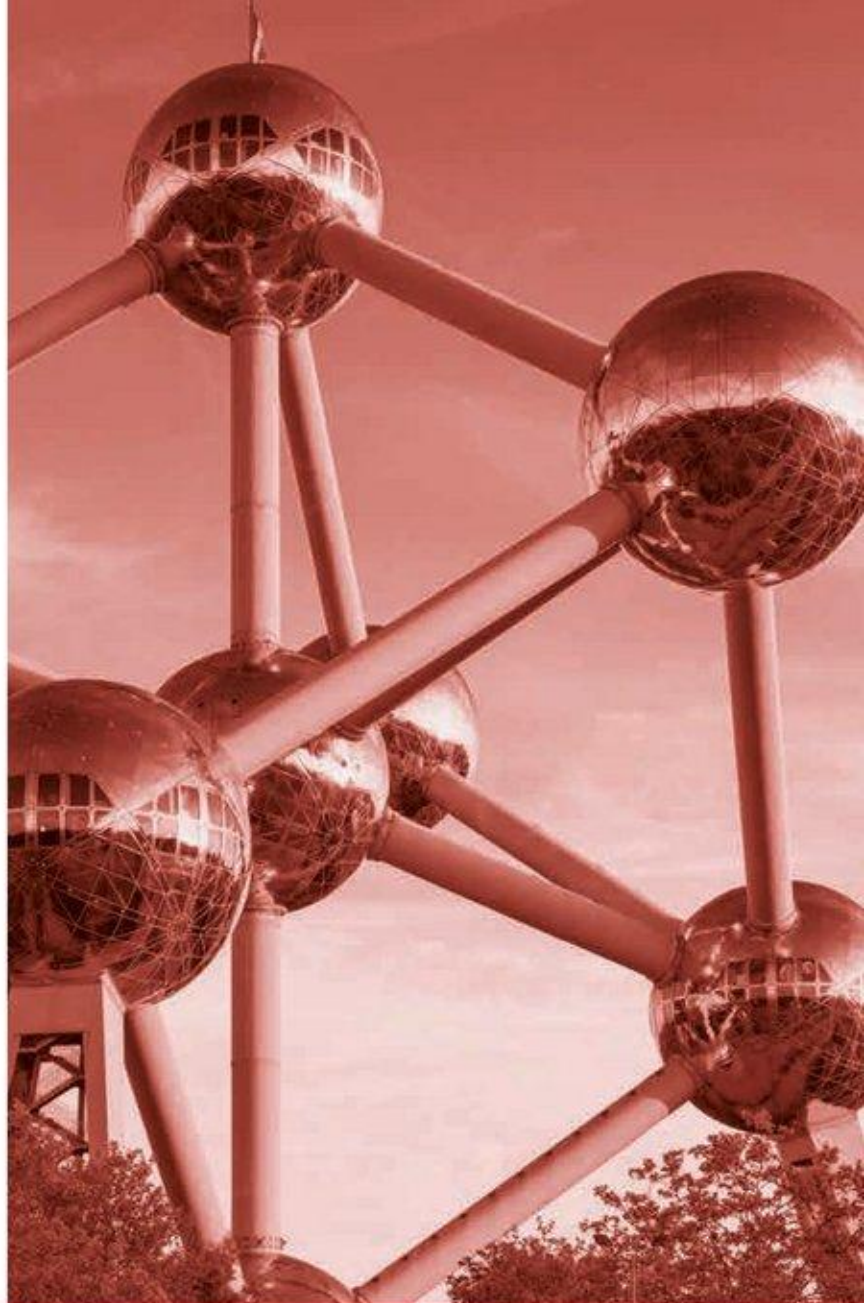


gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony



A large, stylized number '3' in a light gray color, serving as a background for the title text.

MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony

Marcin Braun
Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech
Ewa Szymańska
Adam Wojaczek



MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony



Redakcja: *Anna Sajko*

Korekta merytoryczna: *Agnieszka Frączyk, Kamila Łyczek,
Mirosława Nawrot, Agnieszka Wierzejska*

Korekta językowa: *Aleksandra Golecka-Mazur*

Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Projekt graficzny: *Joanna Szyller*

Skład (T_EX): *Lukasz Sitko*

ISBN 978-83-8118-591-2

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2021. Wydanie pierwsze

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

SPIS TREŚCI

WYRAŻENIA WYMIERNE

■ Wyrażenia wymierne	12
■ Równania wymierne	15
■ Nierówności wymierne	19
■ Przekształcanie wyrażeń algebraicznych	22
■ Hiperbola. Przesuwanie hiperboli	24
■ Funkcje wymierne	27
■ Przed sprawdzianem	32
■ Przed maturą	36

CIĄGI

■ Przykłady ciągów	41
■ Ciąg arytmetyczny	47
■ Suma wyrazów ciągu arytmetycznego	53
■ Ciąg geometryczny	58
■ Suma wyrazów ciągu geometrycznego	64
■ Procent prosty i procent składany	68
■ Granice ciągów	71
■ Obliczanie granic	73
■ Szereg geometryczny	78
■ Przed sprawdzianem	83
■ Przed maturą	88

PODOBIENSTWO FIGUR

■ Twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa	93
■ Wielokąty podobne	98
■ Cechy podobieństwa trójkątów	100
■ Cechy podobieństwa trójkątów (cd.)	104
■ Pola figur podobnych	108
■ Przed sprawdzianem	112
■ Przed maturą	115

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

■ Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	120
■ Kąty o miarach dodatnich i ujemnych	123
■ Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	125
■ Podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi	128
■ Wykres funkcji $y = \sin \alpha$	130
■ Wykres funkcji $y = \cos \alpha$	132
■ Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$	134
■ Wzory redukcyjne	136
■ Miara łukowa kąta	138
■ Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej	141
■ Funkcje o wzorach $y = a \sin x$, $y = \sin ax$	145
■ Równania i nierówności trygonometryczne	147
■ Sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów	151
■ Przed sprawdzianem	154
■ Przed maturą	156

GEOMETRIA ANALITYCZNA

■ Punkty i odcinki w układzie współrzędnych	158
■ Równanie prostej	161
■ Równanie prostej (cd.)	166
■ Równanie okręgu	171
■ Interpretacja geometryczna układu równań	175
■ Przed sprawdzianem	183
■ Przed maturą	186

STEREOMETRIA

■ Wielościany i inne figury przestrzenne	191
■ Figury obrotowe i inne figury przestrzenne	194
■ Proste i płaszczyzny w przestrzeni	196
■ Przekroje graniastosłupów i ostrosłupów	201
■ Bryły podobne	205
■ Przed sprawdzianem	208
■ Przed maturą	211

STATYSTYKA

■ Przybliżenia	214
■ Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta	216
■ Średnia ważona	222
■ Odchylenie standardowe	225
■ Przed sprawdzianem	231
■ Przed maturą	234

TABELA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH	237
--	-----

ODPOWIEDZI	239
-------------------------	-----

Szarym symbolem ■ oznaczono tematy przeznaczone dla zakresu rozszerzonego, a czarnym symbolem ■ oznaczono tematy przeznaczone tylko dla zakresu podstawowego (tematy te nie są omawiane w podręczniku dla zakresu rozszerzonego).

W książce przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

12. — zadanie o średnim poziomie trudności

12. — zadanie trudne

Я — zadanie z zakresu rozszerzonego

Ж — zadanie z zakresu podstawowego, które w zakresie rozszerzonym można pominąć

Wstęp

Zbiór zadań stanowi uzupełnienie podręcznika do nauczania matematyki w klasie trzeciej liceum i technikum i jest zgodny z programem *Matematyka z plusem*. Książka ta może być jednak pomocna uczniom i nauczycielom niezależnie od wybranego programu nauczania.

W każdym dziale zostały zebrane najważniejsze wiadomości z teorii, a wszystkie zadania podzielone na trzy grupy. W pierwszej — oznaczonej numerami typu 69. — znalazły się zadania typowe lub łatwe. Z nimi powinni sobie poradzić wszyscy uczniowie.

W drugiej grupie — o numerach typu 69. — znajdują się zadania nieco trudniejsze, przeznaczone dla tych uczniów, którym nie sprawiają kłopotu zadania z pierwszej grupy.

Trzecia grupa zadań — oznaczonych numerami typu 69. — obejmuje zadania raczej trudne. Z nimi powinni sobie poradzić uczniowie zdolniejsi i zainteresowani matematyką.

Dodatkowo przy numerach zadań dotyczących treści nauczania, które nie są obowiązkowe dla zakresu podstawowego, znajduje się symbol $\mathbb{P}$, a przy zadaniach, które są obowiązkowe tylko dla zakresu podstawowego (uczniowie realizujący zakres rozszerzony mogą je pominąć) — symbol $\mathbb{M}$.

Każdy dział kończy się zestawami zadań: „Przed sprawdzianem” — umożliwia powtórzenie materiału z danego zakresu tematycznego, „Przed maturą” — zawiera wybrane oryginalne zadania maturalne z minionych egzaminów. Dzięki nim można przyzwyczaić uczniów do systematycznego przygotowywania się do matury z matematyki i oswoić ich z typowymi zadaniami maturalnymi.

Na końcu książki znajdują się odpowiedzi do niemal wszystkich zadań, a do trudniejszych — także wskazówki.

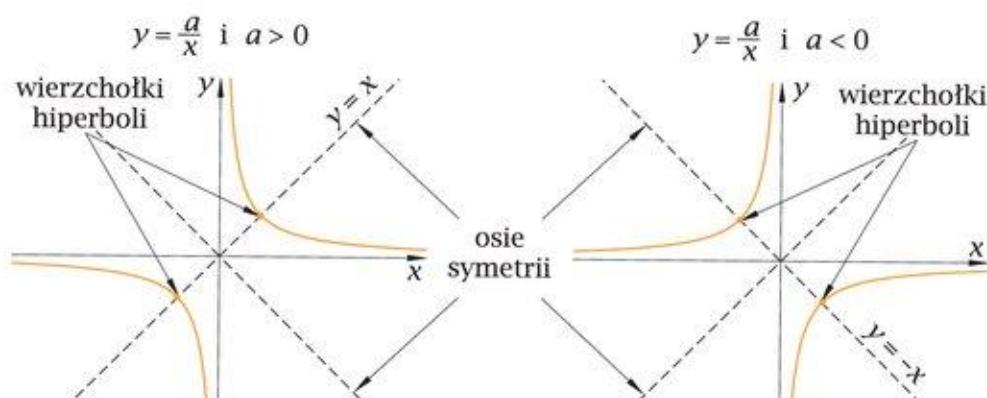
WYRAŻENIA WYMIERNE

Wyrażeniem wymiernym zmiennej x nazywamy wyrażenie postaci $\frac{W_1(x)}{W_2(x)}$, gdzie $W_1(x)$ i $W_2(x)$ są wielomianami i $W_2(x)$ nie jest wielomianem zerowym.

Zbiór tych liczb, dla których można określić wartość wyrażenia $\frac{W_1(x)}{W_2(x)}$, nazywamy będziemy **dziedziną wyrażenia wymiernego**. Jest to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których $W_2(x) \neq 0$.

Hiperbola

Krzywą, która jest wykresem funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **hiperbolą**. Każda hiperbola ma dwie osie symetrii. Wierzchołkami hiperboli nazywamy punkty hiperboli, które leżą na jednej z tych osi. Wierzchołki hiperboli $y = \frac{a}{x}$ leżą na przecięciu tej hiperboli z prostą $y = x$ (gdy $a > 0$) lub $y = -x$ (gdy $a < 0$).



Funkcja homograficzna

Jeśli funkcję można określić za pomocą wzoru $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ i wzoru tego nie można uprościć do postaci liniowej $y = px + q$, to taką funkcję nazywamy **homograficzną**. Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.

Postać ogólna wzoru
funkcji homograficznej

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Postać kanoniczna wzoru
funkcji homograficznej

$$y = \frac{a}{x - p} + q$$

Funkcje wymierne

Funkcję postaci $f(x) = \frac{W_1(x)}{W_2(x)}$, gdzie $W_1(x)$ i $W_2(x)$ są wielomianami i $W_2(x)$ nie jest wielomianem zerowym, nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną takiej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych takich, że $W_2(x) \neq 0$.

WYRAŻENIA WYMIERNE

1. Oblicz wartość wyrażenia dla podanej wartości zmiennej.

a) $\frac{3x^2 - 2x}{x^5 - 3x - 1}$ dla $x = 1$ c) $\frac{4n - 3}{n^2 - 2n + 1}$ dla $n = 1,5$

b) $\frac{x^4 - 5}{-x^2 + 2x + 7}$ dla $x = -2$ d) $\frac{t^3 + 5t^2 - t}{10t + 2}$ dla $t = -0,1$

2. Określ dziedzinę wyrażenia wymiernego.

a) $\frac{3x^2 + 1}{2x - 1}$ d) $\frac{x^3}{x^2 - 3}$ g) $\frac{x^2 + x - 1}{2x^2 + 5x}$ j) $\frac{x^5 - 1}{x^2 + 3x + 5}$

b) $\frac{3x + 5}{(x - 4)(3x + 4)}$ e) $\frac{7x - 4}{9x^2 - 25}$ h) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4}$ k) $\frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 27x}$

c) $\frac{2x^2 - 4x + 7}{(x + 5)^2(5 - 2x)}$ f) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x}$ i) $\frac{x^4 - 2x + 1}{2x^2 - 3x - 2}$ l) $\frac{2x^3 - 5}{x^3 - x^2 - 2x + 2}$

3. Przedstaw wyrażenie w najprostszej postaci i podaj jego dziedzinę.

a) $\frac{6x}{9x^4}$ c) $\frac{4 - x}{x - 4}$ e) $\frac{6x + 10}{3x^2 + 5x}$ g) $\frac{8x^2 - 4x}{2x^2 - 10x}$

b) $\frac{-15x^6}{20x^4}$ d) $\frac{x - 7}{7x - x^2}$ f) $\frac{6x - 12}{3x^2 - 12}$ h) $\frac{-x^3 - x}{x^4 + x^2}$

4. Określ dziedzinę wyrażenia, a następnie przedstaw wynik mnożenia w postaci ilorazu dwóch wielomianów.

a) $4x \cdot \frac{x - 2}{4 - 3x}$ d) $\frac{2x + 7}{x - 9} \cdot \frac{-4x^3}{3}$ g) $\frac{x + 6}{x^2 + 1} \cdot \frac{3x - 1}{2x}$

b) $\frac{3x + 5}{7x^2 + 2} \cdot 2x^3$ e) $\frac{3x - 4}{2x + 5} \cdot \frac{x + 2}{x - 3}$ h) $\frac{x + 1}{2x - 5} \cdot \frac{2x^2 - 1}{3x^2}$

c) $\frac{5x - 2}{3x + 7} \cdot \frac{5}{2x^2}$ f) $\frac{5x + 6}{3x + 5} \cdot \frac{5x + 6}{3x - 5}$ i) $\frac{2x^2 - 3}{3x - 4} \cdot \frac{2x - 1}{-5x^2}$

5. Określ dziedzinę wyrażenia, a następnie przedstaw wynik mnożenia w postaci ilorazu dwóch wielomianów jak najniższego stopnia.

a) $\frac{x^2 - x}{x - 8} \cdot \frac{3}{2x}$ d) $\frac{8x + 5}{2x(x - 3)} \cdot \frac{x - 3}{7x^2}$ g) $\frac{3x - 5}{x - 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{4x}$

b) $\frac{3x^2}{2} \cdot \frac{x + 2}{5x^2 - x}$ e) $\frac{2x + 4}{4x - 1} \cdot \frac{5x^2}{x + 2}$ h) $\frac{5x}{9x^2 - 4} \cdot \frac{3x + 2}{x^2}$

c) $\frac{5x}{4} \cdot \frac{x - 1}{x + 2} \cdot \frac{2}{x}$ f) $\frac{x - 5}{3x + 1} \cdot \frac{3x^2 + x}{4x - 20}$ i) $\frac{3x - 6}{x^2} \cdot \frac{x + 4}{x - 2} \cdot \frac{5x^2}{x + 2}$

6. Określ dziedzinę wyrażenia, a następnie przedstaw wynik dzielenia w postaci ilorazu dwóch wielomianów jak najniższego stopnia.

a) $\frac{2x-1}{x+3} : \frac{x}{x+4}$

d) $\frac{4x-3}{2x+1} : \frac{x+5}{4x+2}$

g) $\frac{2x^2-x}{x-3} : \frac{x}{x+1}$

b) $\frac{3x}{x-2} : \frac{x-2}{5x+1}$

e) $\frac{(x+5)(2x+3)}{x-2} : \frac{x+5}{x}$

h) $\frac{x^2-1}{2x+3} : \frac{x+1}{x+2}$

c) $\frac{3x+2}{x-3} : \frac{3x+2}{x-2}$

f) $\frac{x+5}{2x-1} : \frac{x+5}{(x+3)(2x-1)}$

i) $\frac{2x-3}{x^2-4} : \frac{4x^2-9}{x+2}$

7. Określ dziedzinę wyrażenia, wykonaj działania i przedstaw wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{2}{3x} + \frac{3}{x^2}$

d) $\frac{7}{x-4} - \frac{2}{x+5}$

g) $\frac{3x}{x+1} + \frac{5x+1}{x-1}$

b) $\frac{x-2}{x^2} - \frac{1}{2x^3}$

e) $\frac{2}{x+3} + \frac{x}{x-2}$

h) $\frac{x+2}{5x-1} + \frac{5x+1}{x-2}$

c) $\frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{5x^3}$

f) $\frac{5x}{2x-1} - \frac{3x}{x+4}$

i) $\frac{2x-4}{x-3} - \frac{2x+1}{3x-1}$

8. Przedstaw wyrażenie w najprostszej postaci i podaj jego dziedzinę.

a) $\frac{5x^2-45}{2x^2-6x}$

c) $\frac{4x^2-1}{10x+5}$

e) $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

g) $\frac{3+3x}{x^3+1}$

b) $\frac{16-x^2}{x^2-4x}$

d) $\frac{2x^2-50}{3x+15}$

f) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

h) $\frac{-x^2-x+12}{x^3-27}$

9. Przedstaw wyrażenie w najprostszej postaci i podaj jego dziedzinę.

a) $\frac{x+5}{x^2+4x-5}$

d) $\frac{-2x^2+7x-6}{4x^2-9}$

g) $\frac{3x^2-5x+2}{3x^2+7x-6}$

b) $\frac{x^2+x-6}{2x+6}$

e) $\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$

h) $\frac{2x^2+7x+6}{6x^2+11x+3}$

c) $\frac{x^2-36}{x^2+4x-12}$

f) $\frac{x^2-6x+5}{x^2+3x-4}$

i) $\frac{-2x^2+11x-5}{4x^2+26x-14}$

10. Określ dziedzinę wyrażenia, a następnie przedstaw wynik mnożenia w postaci jak najprostszego wyrażenia wymiernego.

a) $\frac{x^3-1}{4x^2+2} \cdot \frac{6}{x-1}$

d) $\frac{2x^2-4x-6}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x^2-2x-15}{9-x^2}$

b) $\frac{x-2}{4x^2} \cdot \frac{6x^2+2x}{x^2+x-6}$

e) $\frac{x^3-8}{x^3+7x^2+12x} \cdot \frac{x^2+3x}{3x-6}$

c) $\frac{x-5}{x^2+2x+4} \cdot \frac{4x^3}{2x-10}$

f) $\frac{2x^2-7x-4}{-3x^2+8x+3} \cdot \frac{x^2-5x+6}{4x^2-6x-4}$

11. Określ dziedzinę podanego wyrażenia wymiernego, a następnie wykonaj dzielenie i przedstaw wynik w postaci wielomianu lub ilorazu wielomianów.

a) $\frac{2}{x^3 + 3x} : 6$

d) $(4x + 1) : \frac{2x + 1}{x - 2}$

g) $\frac{x^2 + 1}{x + 1} : \frac{x - 2}{x + 4}$

b) $\frac{2x^2 - 3}{2 - 3x} : (2 + 3x)$

e) $(5x^2 - 25x) : \frac{5x}{x + 3}$

h) $\frac{x^2 - 9}{x - 3} : \frac{x + 3}{x + 1}$

c) $\frac{x^2 - 4}{x + 1} : (3x - 6)$

f) $\frac{2}{x^4} : \frac{3x}{x - 1}$

i) $\frac{x + \frac{1}{2}}{4x^2 + 4x + 1} : \frac{2x}{2x + 1}$

12. Określ dziedzinę podanego wyrażenia wymiernego, a następnie wykonaj dzielenie i przedstaw wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 2} : \frac{x^2 + x - 6}{2x + 6}$

d) $\frac{x^2 + 6x + 9}{2x^2 + 2x - 12} : \frac{-x^2 + x + 12}{x^2 - 3x - 4}$

b) $\frac{2x^2 - 7x - 4}{x^3 - 1} : \frac{2x^3 + x^2}{x^3 + x^2 + x}$

e) $\frac{3x^4 + x^3}{9x^2 - 1} : \frac{2x^3 + 5x^2}{-3x^2 - 11x + 4}$

c) $\frac{6 - 3x}{x^3 - 5x^2} : \frac{x^2 + 2x - 8}{4x^3}$

f) $\frac{5x^2}{x^2 + 5} : \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 5} - \frac{x^2 - 5}{x^2 + 5} \right)$

13. Określ dziedzinę wyrażenia, wykonaj działania i przedstaw wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{3 - 2x}{x^2 + x} - 2$

c) $\frac{2x^2 + 7x}{x^2 - 3x + 4} - 3x$

e) $4x - 7 + \frac{3x^2 - 5x + 9}{x^2 + 2}$

b) $2x + \frac{3x - 2x^3}{x^2 - 9}$

d) $5x^2 - \frac{2x^3 - 4x^2 + 7}{2x + 3}$

f) $\frac{6x^4 + x^2 - 5}{2x^2 - x} - 3x^2 + 4$

14. Określ dziedzinę wyrażenia, wykonaj działania i przedstaw wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{x}{x - 4} + \frac{x^2 + 5}{2x^2 - 8x}$

g) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 6x + 9} - \frac{x + 1}{x - 3}$

b) $\frac{3x^2 + 2x}{3x - 6} - \frac{4x - 3}{5x - 10}$

h) $\frac{x - 3}{x^2 + 8x + 16} - \frac{x + 1}{x^2 - 16}$

c) $\frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)(2x + 1)} - \frac{x - 1}{2x + 1}$

i) $\frac{2 - 5x}{2x + 3} - \frac{x^2 - 5x + 1}{2x^2 + x - 3}$

d) $\frac{3x + 1}{2x(x + 3)} + \frac{2x + 3}{(x - 1)(x + 3)}$

j) $\frac{4x}{9 - x^2} + \frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

e) $\frac{2x + 3}{x^2 - 4} + \frac{4}{x + 2}$

k) $\frac{2x - 3}{x^2 + x - 6} + \frac{4x + 3}{x^2 - x - 2}$

f) $\frac{x - 1}{3x - 2} - \frac{5x^2 - 3x - 2}{9x^2 - 4}$

l) $\frac{-x - 3}{x^2 - 3x - 10} - \frac{x + 2}{-x^2 + 6x - 5}$

15. Określ dziedzinę wyrażenia, wykonaj działania i przedstaw wynik w postaci ilorazu wielomianów.

a) $\frac{5x}{x-3} + \frac{4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3}$

c) $\frac{2}{x^2+2x+1} - \frac{3}{x^2-2x+1} - \frac{1}{x^2-1}$

b) $\frac{3}{x+2} + \frac{4x}{x^2+4x+4} - \frac{5}{x^2-4}$

d) $\frac{1}{x^3-8} - \frac{2x}{x^2+2x+4} + \frac{5}{x-2}$

16. Znajdź takie rzeczywiste wartości parametrów m i n , aby zachodziła podana równość:

a) $\frac{4}{(2x+3)(x-1)} = \frac{m}{2x+3} + \frac{n}{x-1}$

d) $\frac{8x+1}{x^2-x-6} = \frac{m}{x+2} + \frac{n}{x-3}$

b) $\frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{m}{x+2} - \frac{n}{x+3}$

e) $\frac{9x-37}{x^2-6x+5} = \frac{m}{x-1} + \frac{n}{x-5}$

c) $\frac{x}{x^2-4} = \frac{m}{x+2} + \frac{n}{2-x}$

f) $\frac{-5x+22}{x^2-8x+12} = \frac{m}{x-6} + \frac{n}{x-2}$

17. Znajdź takie wartości parametrów, aby zachodziła równość:

a) $\frac{x^2+2x-4}{x^2-3x-4} = \frac{mx}{x-4} + \frac{n}{x+1}$

b) $\frac{3x^2-2x-9}{x^2+2x-3} = \frac{mx}{x+3} + \frac{nx+p}{x-1}$

18. Uprość wyrażenie:

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+4)}$$

RÓWNANIA WYMIERNE

19. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5x}{x+2} = 0$

e) $\frac{2x+7}{(x-2)(3x+4)} = 0$

i) $\frac{(4x+2)(3x+1)}{(3x-1)(2x+1)} = 0$

b) $\frac{3x+1}{x-1} = 0$

f) $\frac{(5x-1)(x+6)}{2x+4} = 0$

j) $\frac{(2x+1)(x+1)}{(2x-1)(5x+2)(x-4)} = 0$

c) $\frac{2}{5x+6} = 0$

g) $\frac{(2x+3)(x+2)}{(x+4)(3x-1)} = 0$

k) $\frac{(x+2)(4x+3)(x-2)}{(3x+5)(x-1)} = 0$

d) $\frac{3x-2}{5x+4} = 0$

h) $\frac{(x-5)(x+6)}{(x+2)(x-5)} = 0$

l) $\frac{(x-3)(x+3)(3x-4)}{(x+2)(2x-6)} = 0$

20. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2}{5x-6} = 3$

d) $\frac{x+4}{4x-7} = -1$

g) $\frac{3-x}{x+2} - \frac{1}{4} = 0$

b) $\frac{x}{2-3x} = 2$

e) $\frac{4x-5}{3x+4} = -2$

h) $\frac{2}{3} - \frac{3x+1}{5x+2} = 0$

c) $\frac{-2x}{x+7} = 5$

f) $\frac{3-4x}{2x+5} + 2 = 0$

i) $\frac{2x-3}{6-4x} + \frac{1}{2} = 0$

21. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{x-2} = 1 - 4x$

c) $\frac{3x+1}{1-3x} = 2x-4$

e) $4 - \frac{4x}{3x+3} = x$

b) $\frac{7x}{2x-3} = 3x+8$

d) $2x - \frac{x}{1-3x} = 2$

f) $2x = \frac{6x-5}{2x+3} + 9$

22. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x+2}{x-3} = \frac{8x-2}{x+1}$

d) $\frac{x-3}{3x+2} - \frac{3x+2}{x+3} = 0$

g) $\frac{2}{x} - \frac{x-2}{1-3x} = 2$

b) $\frac{3x-1}{x+1} = \frac{2x-3}{2x+3}$

e) $0 = \frac{x+2}{4x-1} + \frac{2x+6}{3-8x}$

h) $\frac{x-1}{2x-3} + 1 = \frac{1}{x+4}$

c) $\frac{6x-1}{5-3x} + \frac{2x+3}{x-7} = 0$

f) $\frac{x}{x-3} + \frac{x+1}{x-1} = -1$

i) $2 - \frac{3x}{x-2} = \frac{x+2}{x+1}$

23. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x-2}{6-3x} = 0$

e) $\frac{2x-12}{x^2-6x} = 0$

i) $\frac{x+2}{x^2-4} = 0$

b) $\frac{6x+4}{10+15x} = 0$

f) $\frac{4x+16}{5x^2+20x} = 0$

j) $\frac{4x^2-9}{2x-3} = 0$

c) $\frac{x^2-3x}{9-3x} = 0$

g) $\frac{x^2+4x}{x^2+2x} = 0$

k) $\frac{x^2+x}{x^2-1} = 0$

d) $\frac{2x^2+10x}{3x+15} = 0$

h) $\frac{6x-3x^2}{5x^2+x} = 0$

l) $\frac{x^2-25}{x^2+5x} = 0$

24. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4x-3x^2}{3x^2-x} = 0$

c) $\frac{3x^2+5x-2}{3x^2-1} = 0$

e) $\frac{6x^2+7x-3}{-2x^2+3x+9} = 0$

b) $\frac{2x^2+x}{1-x^2} = 0$

d) $\frac{-x^2+2x-7}{4x^2+9x+5} = 0$

f) $\frac{x^2-3x+1}{-5x^2+4x-1} = 0$

25. Rozwiąż równanie jak najprostszą metodą.

a) $\frac{-3}{x+6} = \frac{2x}{6+x}$

b) $\frac{-x}{x^2-4} = \frac{2}{4-x^2}$

c) $\frac{x-2}{x+1} = \frac{6}{2x+2}$

26. Rozwiąż równanie jak najprostszą metodą.

a) $\frac{x+1}{2-x} = \frac{-3x-3}{3x-6}$

b) $\frac{1}{2x+3} = \frac{2x+3}{4}$

c) $\frac{2x+7}{x-3} = \frac{2x+7}{3x+1}$

27. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5x-6}{x^2-2x} - \frac{2}{x-2} = 0$

c) $\frac{4x}{4x^2-25} + \frac{3}{5+2x} = 0$

e) $\frac{6x}{25x^2-1} = \frac{3}{5x-1}$

b) $\frac{2x-1}{x-3} + \frac{3x+1}{9-x^2} = 0$

d) $\frac{x^2+3}{x^2-4} - \frac{4x}{3x+6} = 0$

f) $\frac{2x-4}{3x+4} = \frac{6x-8}{16-9x^2}$

28. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5}{2x^2-3x-2} = \frac{-2}{2x^2+3x+1}$

d) $\frac{2}{-x^3+x^2-9x+9} = \frac{6}{x^3+3x^2+9x+27}$

b) $\frac{-4x}{8x^2-6x-5} + \frac{2}{-4x^2+9x-5} = 0$

e) $\frac{4}{x^3-x^2-4x+4} = \frac{3x}{x^3+2x^2-x-2}$

c) $\frac{5x+3}{2x^3+4x^2-4x-8} - \frac{1}{x^2-2} = 0$

f) $\frac{x}{3x^3+6x^2+x+2} = \frac{2-x}{3x^3-12x^2+x-4}$

29. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x}{x^2-3x} + \frac{4}{2x-6} = 1$

c) $\frac{10}{x+3} - \frac{5x+7}{x^2-9} = 4$

e) $\frac{3x}{x^2-25} - \frac{4}{5+x} = \frac{2}{15}$

b) $\frac{3}{5x+10} + \frac{x-1}{2x^2+4x} = 2$

d) $\frac{3x+4}{x+5} - \frac{1}{2x^2+10x} = \frac{3}{8}$

f) $\frac{2}{3x-3} + \frac{2x+1}{2x^2-2} = \frac{3}{2}$

30. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{x^2-9} + \frac{2}{x-3} = \frac{1}{x+3}$

d) $\frac{5}{3x-1} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-7}{3x^2+5x-2} = 0$

b) $\frac{3}{2x} - \frac{x+3}{x^2+4x} = \frac{-2}{x+4}$

e) $\frac{4}{x-1} = \frac{x-2}{4-x} - \frac{3x+1}{x^2-5x+4}$

c) $\frac{4}{-x^2-x+6} - \frac{2x}{2-x} - \frac{2}{x+3} = 0$

f) $\frac{x-1}{3-x} + \frac{2x+8}{2x^2-5x-3} = \frac{x}{2x+1}$

31. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3}{x^2+x} + \frac{2}{x^2-x} = \frac{8}{x^2-1}$

d) $\frac{4}{x^2-x-6} + \frac{-1}{x^2+2x} + \frac{2}{x+2} = 0$

b) $\frac{1}{4x^2-9} - \frac{5}{2x^2-3x} = \frac{-3}{2x^2+3x}$

e) $\frac{-2}{2x^2-x-3} - \frac{2}{x^2-1} - \frac{6}{x^2-4x+3} = 0$

c) $\frac{2}{x^2-4x} + \frac{1}{16-x^2} = \frac{3}{3x^2+12x}$

f) $\frac{2}{3x+3} - \frac{1}{3x^2+2x-1} + \frac{3}{6x-2} = 0$

32. Znajdź wszystkie wartości parametru p , dla których równanie $\frac{2x}{x+1} + \frac{x+1}{2x} = p$ ma dwa różne rozwiązania.

- 33.** a) Różnica pewnej liczby i jej odwrotności jest równa $2\sqrt{3}$. Znajdź tę liczbę.
 b) Suma kwadratu pewnej liczby i jej odwrotności wynosi 2. Znajdź tę liczbę.
 c) Suma dwóch liczb wynosi 3, a suma odwrotności tych liczb jest równa $2\frac{2}{5}$. Znajdź te liczby.

34. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{5x}{x+y} = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{3}{y} = 3 \end{cases}$$

35. Macocha postawiła przed Kopciuszkiem dwa pojemniki z mieszaniną maku z piaskiem i poleciła, aby Kopciuszek przygotował 12 kg mieszaniny o stosunku maku do piasku równym 3:5. Pierwszy pojemnik zawierał mieszaninę maku z piaskiem wymieszanych w stosunku 2:3, a drugi — w stosunku 3:7. Ile kilogramów mieszaniny musi wziąć Kopciuszek z każdego z pojemników, aby wykonać zadanie?

36. Wojtek kosi trawnik w ogrodzie o 2 godziny dłużej, a Ania o 4,5 godziny dłużej, niż gdyby robili to jednocześnie. Ile czasu skoszenie tego trawnika samodzielnie zajmuje Ani, a ile Wojtkowi?

37. Kłoda płynąca z prądem rzeki pokonuje odległość d w czasie o 2,5 godziny dłuższym od kajakarza płynącego z prądem i o 2,6 godziny dłuższym od tego samego kajakarza pokonującego odległość d na jeziorze (gdzie nie ma prądu). Ile czasu zajmuje kajakarzowi pokonanie odległości d , gdy płynie z prądem rzeki?

Я38. Wykaż, że równanie $\frac{1}{x-u} + \frac{1}{x-w} = 1$ ma rozwiązanie dla dowolnych wartości parametrów u i w .

Я39. Dla jakich wartości parametru p podane równanie ma rozwiązania?

a) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = p$

b) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+1} = p$

Я40. Dla jakich wartości parametru p równanie $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x-1}{x-2} = p$ ma dwa różne rozwiązania i mają one te same znaki?

Я41. Dla jakich wartości parametru p równanie $\frac{px}{p-1} + \frac{p+1}{x} = x+1$ ma dwa pierwiastki, których suma odwrotności jest mniejsza od $2p+1$?

Я42. Określ, jak liczba rozwiązań równania zależy od wartości parametrów a i b .

a) $\frac{x-a}{x-b} = \frac{x+b}{x+a}$

b) $\frac{x-a}{x-b} = \frac{x-b}{x-a}$

c) $\frac{x-a}{x+b} = \frac{x+a}{x-b}$

NIERÓWNOŚCI WYMIERNE

Я43. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{x+3}{x-1} < 0$	c) $\frac{-4x+5}{2x-1} \geq 0$	e) $\frac{3x}{x+1} \geq -3$	g) $\frac{5x-12}{x} + 4 \leq 0$
b) $\frac{3x+4}{2-x} \leq 0$	d) $\frac{x-3}{3x+1} < 2$	f) $\frac{2x+5}{3-4x} > 1$	h) $\frac{x-2}{4-3x} - 3 \geq 0$

Я44. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{(x-2)(x+3)}{x+4} \geq 0$	d) $\frac{(2-x)}{(x+4)(x-1)(x-6)} > 0$	g) $\frac{(x+1)(x-9)^3}{(1-x)^2(x+5)(x-4)} \geq 0$
b) $\frac{-x+7}{(x-2)(x+4)} \leq 0$	e) $\frac{(5-x)(x+6)^2}{(x+2)(x+5)} \leq 0$	h) $\frac{(x+2)^2(6-x)^3(x-2)}{(x+5)(x-7)^3} < 0$
c) $\frac{(x-1)(x+6)}{(x+4)(x-5)} < 0$	f) $\frac{(x+2)^2(1-x)}{(8-x)(x+7)^4} > 0$	i) $\frac{(x-3)(x+3)(4-x)^4}{(x+2)^2(x-6)^3} \geq 0$

Я45. Rozwiąż nierówność jak najprostszym sposobem.

a) $\frac{3}{2-3x} > 0$	e) $\frac{x^2+3}{2x+1} < 0$	i) $\frac{4x+3}{-2x^2+x-1} \geq 0$
b) $\frac{-5}{4x+1} \leq 0$	f) $\frac{3x+10}{(x+1)^2} \geq 0$	j) $\frac{x-3}{x^2-3x} > 0$
c) $\frac{10x^2}{2-x} > 0$	g) $\frac{(x+4)^2}{x^2+1} \leq 0$	k) $\frac{9x^2-4}{3x-2} \geq 0$
d) $\frac{-5x^2}{x-3} \leq 0$	h) $\frac{3x+5}{x^2+x+3} < 0$	l) $\frac{2x^3-8x}{x^2-4} \leq 0$

Я46. Rozwiąż nierówność.

a) $2x + \frac{3}{x} \leq 0$	c) $\frac{x}{2} < \frac{2}{x}$	e) $\frac{4}{x^2} \geq 3 - \frac{1}{x}$	g) $\frac{1}{x} > 1 - \frac{6}{x^2}$
b) $x - \frac{1}{4x} \geq 0$	d) $\frac{1}{x^4} > x$	f) $1 < \frac{10}{x^2} - \frac{3}{x}$	h) $\frac{4}{x} \leq \frac{3}{x^2} + 1$

Я47. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{4}{x-2} + \frac{2}{3x} < 0$	d) $\frac{7}{x-3} > \frac{3}{x-1}$	g) $\frac{6x}{4x+1} \geq \frac{3x-2}{2x-3}$
b) $\frac{1}{3x+2} - \frac{3}{x-1} \leq 0$	e) $\frac{5}{4-3x} \leq \frac{1}{2-x}$	h) $\frac{1-4x}{4-8x} > \frac{2x+1}{4x+3}$
c) $\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{x+3} \geq 0$	f) $\frac{-4}{5x} < \frac{2}{5-2x}$	i) $\frac{3x+1}{3x-1} \leq \frac{2x+3}{2x+7}$

Я48. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1}{x+5} - \frac{3}{(x+5)^2} \leq 0$

c) $\frac{4x+3}{4x^2+12x+9} \geq \frac{1}{2x+3}$

b) $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x^2-4x+4} > 0$

d) $\frac{3}{(2x-1)^2} < \frac{6x}{(2x-1)^3}$

Я49. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1} \geq 0$

c) $\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x+1)^2} > 0$

b) $\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1} \leq 0$

d) $\frac{1}{(x+1)^4} - \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{3}{(x+1)^2} \geq 0$

Я50. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{2x}{x^2-3x} - \frac{1}{x^2+x} < 0$

g) $\frac{3}{x^2-3x-10} < \frac{5}{x^2-25}$

b) $\frac{x}{4x^2-12x+9} + \frac{4x}{4x^2-9} \geq 0$

h) $\frac{2}{1-4x^2} \geq \frac{3x}{2x^2-7x+3}$

c) $\frac{2x-1}{x^2+4x} > \frac{2x+3}{x^2+8x+16}$

i) $\frac{4}{9x^2-12x+4} + \frac{2}{-3x^2+5x-2} \geq 0$

d) $\frac{-6}{3x^2+4x} \leq \frac{4}{x-2x^2}$

j) $\frac{x-1}{x^2+6x+8} - \frac{1}{2x^2+6x-8} < 0$

e) $\frac{5x-2}{1-6x+9x^2} + \frac{4}{3x^2-x} \geq 0$

k) $\frac{2x+3}{3x^2+7x+2} + \frac{1-2x}{3x^2-5x-2} \leq 0$

f) $\frac{4}{9-x^2} - \frac{2x}{x^2-3x} > 0$

l) $\frac{2x}{-2x^2-3x+5} - \frac{10x}{4x^2+20x+25} \geq 0$

Я51. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji f są nie większe od liczby m .

a) $f(x) = \frac{3}{x+2}, \quad m = 2$

c) $f(x) = \frac{1-2x}{x^2-6x+9}, \quad m = 0$

b) $f(x) = \frac{x-4}{2x+3}, \quad m = -1$

d) $f(x) = \frac{2x^2-3x}{x^2+4}, \quad m = 1$

Я52. a) Wyznacz wszystkie liczby dodatnie, które spełniają warunek, że suma liczby i jej odwrotności jest mniejsza od 7.

b) Wyznacz wszystkie liczby, które spełniają warunek, że suma liczby i odwrotności liczby o 1 większej jest większa od 2.

c) Wyznacz wszystkie liczby naturalne, które spełniają warunek, że różnica liczby i odwrotności liczby o 2 mniejszej jest nie większa od 2.

Я53. Określ dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \sqrt{\frac{-6}{2-3x}}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-4}} - 2$

g) $f(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{1-\frac{2x-4}{3x+4}}}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{3x}{2x+8}}$

e) $f(x) = \sqrt{3 + \frac{4x-5}{2x+5}}$

h) $f(x) = \frac{10x+11}{\sqrt{\frac{3x}{x+2} - \frac{2x+1}{x-1}}}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{3-x}}$

f) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}}$

i) $f(x) = \frac{3-2x^2}{\sqrt{\frac{x+4}{x-2}} + 1}$

Я54. Określ dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = \log \frac{x^2+4x+3}{-x^2+x+2}$

b) $f(x) = \log \frac{x^2+6x+9}{(x^2+2x-3)(2-x)}$

c) $f(x) = \log_3 \frac{-x^2-2x+15}{x} + \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

Я55. Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których funkcja f nie ma miejsc zerowych.

a) $f(x) = \frac{p^2}{p+2}x^2 + px - \frac{p+1}{p-2}$

b) $f(x) = \frac{p^3}{p-3}x^2 + (2p-1)x + \frac{p-3}{p+2}$

Я56. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{4}{x^2} \geq 3-x$

c) $\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x} \geq x+1$

b) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} > x$

d) $2-x < \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$

Я57. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3x+1}{x+2} - 3 \geq \frac{5}{x^2-4}$

b) $\frac{x+4}{3-x} + 1 \geq \frac{-16x}{x^2-9}$

c) $\frac{4}{x-1} \leq 2 - \frac{2x-1}{x+1}$

Я58. Rozwiąż nierówność.

a) $\left| \frac{x+1}{x+2} \right| < 1$

b) $\left| x - \frac{2}{x} \right| \geq 2$

c) $\left| \frac{4x+1}{x^2-1} \right| \leq 3$

Я59. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_5 \frac{x^2-6x+9}{x+2} \geq 1$

b) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{x^2+x-2}{x+3} < -\frac{1}{2}$

Я60. Rozwiąż nierówność.

a) $\log_5 \frac{x+2}{x-1} < \log_5 \frac{x}{x+1} + 1$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-3}{x+1} \geq 1 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{x-2}$

PRZEKSZTAŁCANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

61. Wykaż tożsamość.

a) $\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} = a^2 + b^2$

b) $\frac{(a+b)^3}{2} + \frac{(a-b)^3}{2} = a^3 + 3ab^2$

62. Wykaż, że:

a) $\frac{a^3 - 3\sqrt{2}a^2 + 6a - 2\sqrt{2}}{a^2 - 2\sqrt{2}a + 2} = a - \sqrt{2}$, gdy $a \neq \sqrt{2}$

b) $\frac{a^2 - 3}{a^3 + 3\sqrt{3}a^2 + 9a + 3\sqrt{3}} = \frac{a - \sqrt{3}}{a^2 + 2\sqrt{3}a + 3}$, gdy $a \neq -\sqrt{3}$

63. a) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b spełniona jest nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

b) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , jeśli $a > b$, to spełniona jest nierówność $a^3 - b^3 > 3ab(a - b)$.

64. Z podanego wzoru wyznacz wskazane wielkości.

a) $S = \frac{n_p - n}{n_p}$, n_p, n

d) $I_s = \frac{nE}{nR_w + R_z}$, n, R_w

b) $I = \frac{E}{R + R_w}$, R_w, R

e) $I_r = \frac{E}{\frac{R_w}{n} + R_z}$, n, R_w

c) $\frac{U}{U_v} = \frac{R_d + R_v}{R_v}$, R_v, R_d

f) $\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$, n, r_1

65. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a , b i c , jeśli $a < b$, to $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

66. a) Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = |a - b|$$

b) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{a}{b} - 1 \geq 1 - \frac{b}{a}$$

c) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} \geq \frac{1}{a+b}$$

d) Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{a+b}{2a} \geq \frac{2b}{a+b}$$

67. a) Wykaż, że nierówność $a + \frac{1}{a} \geq 2$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a .

b) Wykaż, że nierówność $\left| a + \frac{9}{a} \right| \geq 6$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a różnej od zera.

68. a) Wykaż, że nierówność $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b .

b) Wykaż, że jeśli $p \neq 0$ i $q \neq 0$, to prawdziwa jest nierówność:

$$2 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \geq \frac{2}{p} + \frac{2}{q}$$

69. a) Wykaż, że równość $\frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b i c .

b) Wykaż, że równość $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b i takich, że $a + b + c \neq 0$.

c) Wykaż, że jeżeli $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, to $a = b = c$.

d) Wykaż, że jeżeli $a + b + c = 0$, to $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

70. Wykaż, że jeżeli $p = \frac{a+b}{a-b}$, $q = \frac{c+d}{c-d}$, $r = \frac{ac-bd}{ad+bc}$, to $p + q + r = pqr$.

71. a) Wykaż, że jeżeli $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = ab + bc + ac$, to $abc = 1$.

b) Wykaż, że jeżeli $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, to co najmniej dwie z liczb a , b , c są liczbami przeciwnymi.

72. Wykaż, że jeśli $\frac{x}{y} = \frac{t}{z}$, to:

a) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{t+z}{t-z}$

b) $\frac{2x+3y}{3x+2y} = \frac{2t+3z}{3t+2z}$

73. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest podana nierówność.

a) $2a^2 + b^2 + 2ab + 2a + 2 > 0$

c) $\frac{a^2 + 9b^2 + 6ab + 3}{30a^2 + b^2 - 10ab + 5} \geq 0$

b) $a^2 + 5b^2 - 4ab - 4b + 6 > 0$

d) $\frac{8a^2 + b^2 - 4ab - 4a + 1}{a^2 + 2b^2 - 2ab - 2b + 2} \geq 0$

74. Wykaż, że jeśli $a > 0$, to prawdziwa jest nierówność:

$$a^4 + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} \geq 4$$

75. Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których równanie $x + \frac{1}{x} = p$ nie ma rozwiązania.

76. a) Wykaż, że jeżeli $a > 0$ i $b > 0$, to $\frac{2ab}{a^2 + b^2} \leq 1$.

b) Wykaż, że jeżeli $a > 0$ i $b > 0$, to $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$.

c) Wykaż, że jeżeli $a \in (0; 1)$ i $b \in (0; 1)$, to $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

d) Wykaż, że jeżeli $a \in (0; 1)$ i $b \in (0; 1)$, to $\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2$.

HIPERBOLA. PRZESUWANIE HIPERBOLI

77. Podaj równania asymptot wykresu funkcji.

a) $y = \frac{-2}{x+1} + 3$

c) $y = \frac{7}{x} + \sqrt{2}$

e) $y = 3 + \frac{2\sqrt{3}}{x-4}$

b) $y = \frac{5}{x-2} - \frac{1}{5}$

d) $y = 2 - \frac{3}{x+1}$

f) $y = \frac{-3}{2(x+4)}$

78. Znajdź współrzędne wszystkich punktów przecięcia się sześciu prostych będących asymptotami wykresów funkcji:

$$f(x) = \frac{3}{x-1} + 2, \quad g(x) = \frac{-1}{x+3} - 1, \quad h(x) = \frac{\pi}{x-2} - \sqrt{2}$$

79. Podaj przykłady dwóch wzorów funkcji, których wykresem jest hiperbola o asymptotach:

a) $x = 0, y = 0$

b) $x = 3, y = -2$

c) $x = 5, y = 7$

80. Określ, przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres podanej funkcji.

a) $y = \frac{30}{x-25}$

b) $y = \frac{-2004}{x+20} + 30$

c) $y = \frac{240}{x-50} - 70$

81. Czy do wykresu funkcji f należą punkty o obu współrzędnych dodatnich?

a) $f(x) = \frac{3}{x} - 1$

b) $f(x) = \frac{-2}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{4}{x-2} + 1$

d) $f(x) = \frac{-1}{x+3} - 2$

82. Czy hiperbola o podanym równaniu przecina osie układu współrzędnych? Jeżeli tak, to znajdź współrzędne punktów, w których hiperbola przecina te osie.

a) $y = \frac{4}{x} - 2$

b) $y = \frac{-3}{x+6}$

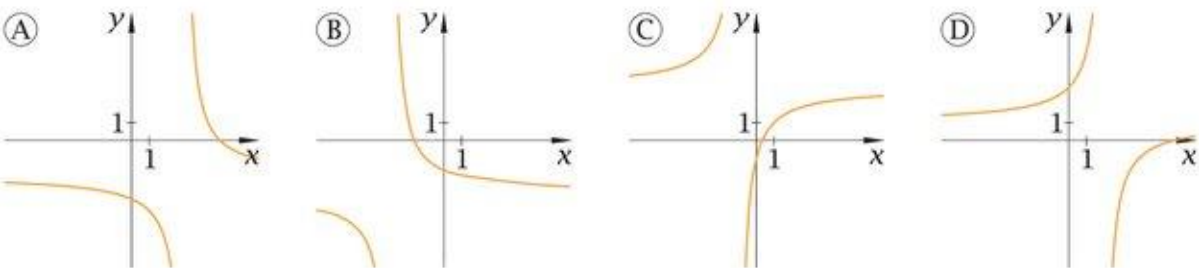
c) $y = \frac{-6}{x+2} - 1$

d) $y = \frac{2}{x-5} + 3$

83. Poniżej przedstawiono fragmenty wykresów następujących funkcji:

① $y = \frac{-4}{x+1} + 3$ ② $y = \frac{4}{x+3} - 3$ ③ $y = \frac{4}{x-3} - 2$ ④ $y = \frac{-4}{x-2} + 1$

Dopasuj wzory funkcji do poniższych wykresów.



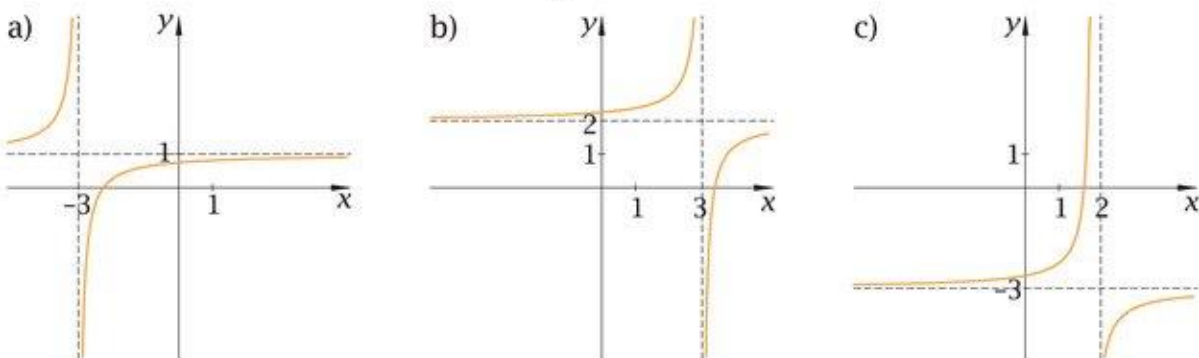
84. Naszkicuj wykres podanej funkcji, a następnie rozwiąż nierówność $f(x) < 0$. Dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ ma rozwiązanie?

a) $f(x) = \frac{3}{x+3} - 2$ b) $f(x) = \frac{-4}{x-1} - \frac{1}{2}$ c) $f(x) = \frac{-2}{x-\frac{1}{2}} + 3$ d) $f(x) = \frac{2}{x+\sqrt{2}} + 1$

85. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsce zerowe, zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, oraz określ jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{2}{x-1} + 3$ c) $f(x) = \frac{2}{x-2} - 5$ e) $f(x) = \frac{-2}{3-x} + 1$
 b) $f(x) = \frac{1}{x+3} - 4$ d) $f(x) = \frac{-1}{x+2} + 4$ f) $f(x) = -\frac{3}{2(x+1)} - 2$

86. Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji, który otrzymano w wyniku przesunięcia hiperboli $y = \frac{-3}{4x}$. Podaj wzór tej funkcji.



87. a) Hiperbolę $y = \frac{-10}{x-2} - 3$ przesunięto o 7 jednostek w lewo i o 4 jednostki w górę. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymano.

b) W jaki sposób należy przesunąć wykres funkcji $y = \frac{12}{x+3} - 1$, aby otrzymać hiperbolę o równaniu $y = \frac{12}{x+5} + 3$?

88. Znajdź współrzędne wierzchołków hiperboli i naszkicuj jej wykres.

a) $y = \frac{3}{x}$ b) $y = \frac{16}{9x}$ c) $y = \frac{-5}{x}$ d) $y = \frac{-0,01}{x}$

89. Podaj współrzędne wierzchołków i równania osi symetrii hiperboli $y = \frac{-4}{x}$, a następnie znajdź współrzędne wierzchołków i równania osi symetrii:

a) hiperboli otrzymanej w wyniku przesunięcia hiperboli $y = \frac{-4}{x}$ o 1 jednostkę w prawo i o 3 jednostki w górę,

b) hiperboli, która jest wykresem funkcji $y = \frac{-4}{x+7} - 5$.

90. Znajdź współrzędne wierzchołków hiperboli.

a) $y = \frac{9}{x+1}$ b) $y = \frac{-9}{x-3} + 2$ c) $y = \frac{1}{x+5} - 3$ d) $y = -\frac{5}{x-2} - 1$

91. Wyznacz równania osi symetrii hiperboli.

a) $y = \frac{3}{x+2}$ b) $y = \frac{-4}{x} - 1$ c) $y = \frac{6}{x-1} + 3$ d) $y = -\frac{4}{x+3} + 5$

92. a) Oblicz pole koła, którego średnicą jest odcinek o końcach będących wierzchołkami hiperboli $y = \frac{4}{x-1} - 2$.

b) Oblicz pole kwadratu, którego dwa wierzchołki są wierzchołkami hiperboli $y = \frac{-9}{x+3} - 1$.

93. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia asymptot hiperboli:

a) $y = \frac{2}{3x+1} - 1$ b) $y = \frac{-3}{4x+\sqrt{2}} + 3$ c) $y = \frac{10}{\frac{3}{4}-2x} - \pi$

94. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty, w których hiperbola o podanym równaniu przecina osie układu współrzędnych, oraz punkt przecięcia asymptot tej hiperboli.

a) $y = \frac{-4}{x-2} - 8$ b) $y = \frac{2}{x+2} - 3$ c) $y = \frac{-2}{x+4} + 2$ d) $y = \frac{1}{x-1} + 4$

95. Wyznacz równanie hiperboli, której asymptotami są proste $x = -2$ oraz $y = 3$ i która przechodzi przez punkt $A = (2, -1)$.

96. Znajdź równanie hiperboli o osiach symetrii $y = x - 4$ i $y = -x - 2$, która przechodzi przez punkt $A = (-2, -4)$.

97. Punkty $(-2, 3)$ i $(-4, 5)$ są wierzchołkami pewnej hiperboli. Wyznacz jej równanie.

98. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia się hiperbol o równaniach $y = \frac{1}{x-2} + 3$ i $y = \frac{5}{x+1} - 1$ oraz początek układu współrzędnych.

99. a) Wykaż, że jeżeli dwie różne hiperbole mają te same asymptoty, to nie mają one punktów wspólnych.

b) Wykaż, że jeżeli dwie hiperbole mają taką samą asymptotę pionową, ale różne asymptoty poziome, to te hiperbole mają jeden punkt wspólny.

FUNKCJE WYMIERNE

Я100. Zapisz wzór podanej funkcji w postaci kanonicznej i naszkicuj jej wykres.

a) $y = \frac{2x+3}{x}$

c) $y = \frac{x+4}{x+3}$

e) $y = \frac{3x+10}{x+4}$

b) $y = \frac{4x-1}{x}$

d) $y = \frac{-x-2}{x-2}$

f) $y = \frac{-4x-10}{x+3}$

Я101. Znajdź równania asymptot wykresu funkcji.

a) $y = \frac{-2x+4}{x}$

c) $y = \frac{2x+4}{x-3}$

e) $y = \frac{5x+1}{x+2}$

b) $y = \frac{x+4}{x-1}$

d) $y = \frac{-3x+7}{x+5}$

f) $y = \frac{3-x}{x-4}$

Я102. Podaj współrzędne punktu przecięcia się asymptot wykresu funkcji.

a) $y = \frac{5x+1}{x}$

c) $y = \frac{2x-4}{x+3}$

e) $y = \frac{4x+3}{2x-1}$

b) $y = \frac{-9x+4}{3x}$

d) $y = \frac{5-4x}{x+2}$

f) $y = \frac{2x-3}{3x+5}$

Я103. Znajdź równania asymptot pionowych wykresu funkcji.

a) $f(x) = \frac{3x}{(x+1)(x-3)}$

f) $f(x) = \frac{5x-20}{x^2-16}$

b) $f(x) = \frac{x-5}{x(x+4)}$

g) $f(x) = \frac{9-x^2}{2x^2-6x}$

c) $f(x) = \frac{x+6}{(x-4)(x+6)}$

h) $f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x^2+5x+4}$

d) $f(x) = \frac{(2x-1)(3-x)}{(x-3)(2x+1)}$

i) $f(x) = \frac{3x^3+2x^2+3x}{9x^3-4x}$

e) $f(x) = \frac{x^2-x}{x(x-1)(x+5)}$

j) $f(x) = \frac{4x^3+4x^2+x}{2x^4-x^3-x^2}$

Я104. Naszkicuj wykres funkcji.

a) $y = \frac{2x+2}{2x-3}$

c) $y = \frac{-2x-4}{-4x+2}$

e) $y = \frac{-x+2}{3x+1}$

b) $y = \frac{3x-3}{3x+2}$

d) $y = \frac{4x-3}{2x+1}$

f) $y = \frac{3x+1}{2x-5}$

Я105. Podaj, ile punktów wspólnych (w zależności od wartości parametru m) mają prosta $x = m$ i wykres funkcji $y = \frac{2x+7}{3x-1}$.

Я 106. Określ, ile punktów wspólnych (w zależności od wartości parametru k) mają prosta $y = k$ i wykres funkcji $y = \frac{4x+1}{2-5x}$.

Я 107. Określ dziedzinę, zbiór wartości i podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu podanej funkcji z osiami układu współrzędnych.

a) $f(x) = \frac{-4x}{x+3}$ b) $f(x) = \frac{3x-5}{4x+6}$ c) $f(x) = \frac{2-5x}{2x-3}$ d) $f(x) = \frac{x+8}{4-3x}$

Я 108. Określ przedziały monotoniczności i podaj zbiór wartości funkcji.

a) $f(x) = \frac{2x+6}{x-5}$ b) $f(x) = \frac{-4x-5}{2x-1}$ c) $f(x) = \frac{4x-3}{3x+2}$ d) $f(x) = \frac{x-4}{6-3x}$

Я 109. Znajdź współrzędne wierzchołków i równania osi symetrii hiperboli.

a) $y = \frac{4-3x}{x}$ b) $y = \frac{5}{x-3}$ c) $y = \frac{2x+7}{x+4}$ d) $y = \frac{-5x+2}{2x-3}$

Я 110. a) Znajdź równania asymptot dowolnej funkcji $f(x) = \frac{2x+a}{x+2}$.

b) Znajdź współrzędne punktu, który należy do wykresu dowolnej funkcji opisanej wzorem $f(x) = \frac{x+2}{ax+2}$.

Я 111. Znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g .

a) $f(x) = \frac{2}{x+2}$, $g(x) = x-2$ e) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$
b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) = 2x+1$ f) $f(x) = \frac{x+1}{3x-2}$, $g(x) = \frac{x+4}{3x+1}$
c) $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$, $g(x) = 2x+3$ g) $f(x) = \frac{3x-15}{x}$, $g(x) = 5x-x^2$
d) $f(x) = \frac{5x+3}{x+4}$, $g(x) = \frac{-8x}{x+1}$ h) $f(x) = \frac{2x-6}{x}$, $g(x) = x^2-2x-3$

Я 112. Naszkicuj wykresy funkcji f i g , a następnie znajdź zbiór rozwiązań nierówności $f(x) \leq g(x)$.

a) $f(x) = \frac{-2x+2}{x-3}$, $g(x) = 1$ d) $f(x) = \frac{x+1}{x+4}$, $g(x) = -\frac{1}{2}x-3$
b) $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$, $g(x) = x-1$ e) $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$, $g(x) = \frac{-1}{x+1}$
c) $f(x) = \frac{x}{2}$, $g(x) = \frac{3x-7}{x-3}$ f) $f(x) = \frac{x+2}{2x}$, $g(x) = \frac{-4x}{x-2}$

Я 113. Zaznacz w układzie współrzędnych wszystkie punkty, których współrzędne spełniają podane równanie.

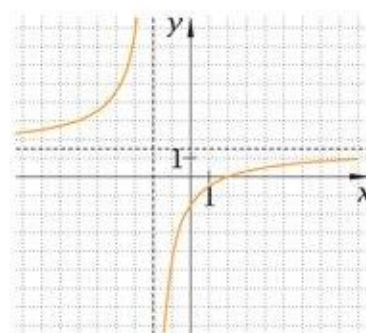
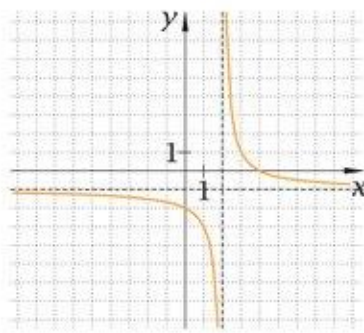
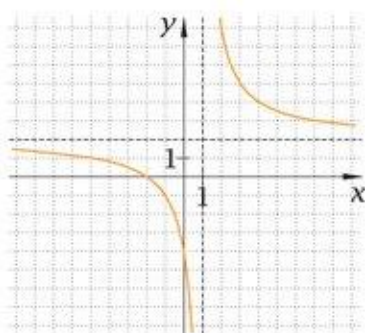
a) $xy-3x-1=0$ b) $xy-x-4y=0$ c) $xy-x+2y+1=0$

Я 114. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f . Wyznacz a , b i c .

a) $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$

b) $f(x) = \frac{x+a}{bx+c}$

c) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+4}$



Я 115. Naszkicuj wykres podanej funkcji.

a) $y = \left| \frac{-2}{x+3} \right|$

b) $y = \left| \frac{2x+1}{x} \right|$

c) $y = \left| \frac{x-3}{x-2} \right|$

d) $y = \left| \frac{-2x+4}{x-1} \right|$

Я 116. Znajdź współrzędne punktów, w których wykresy poniższych funkcji przecinają osie układu współrzędnych. Które z tych funkcji przyjmują tylko wartości ujemne?

$f(x) = \frac{3x}{x^2-12}$

$h(x) = \frac{3x-1}{x^8+4x^4+2}$

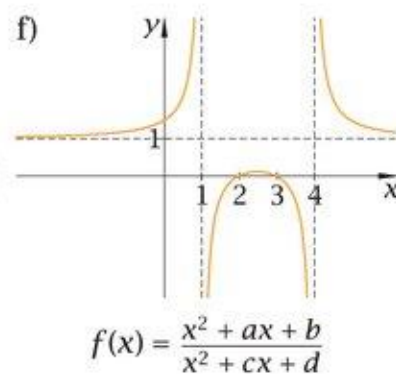
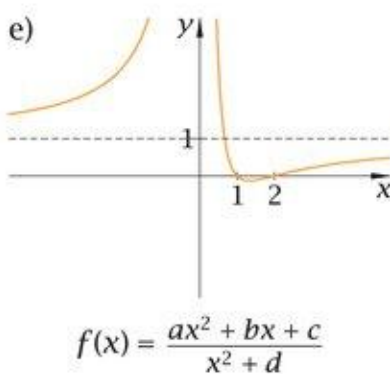
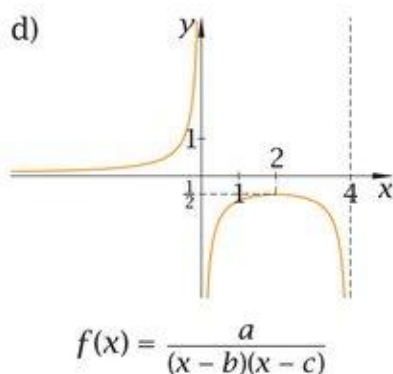
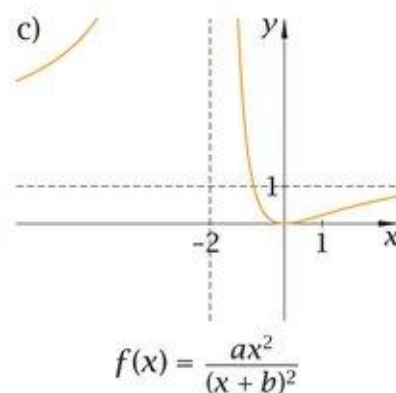
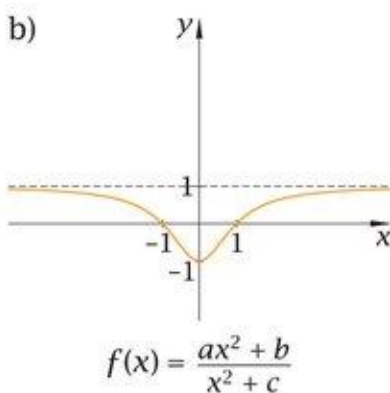
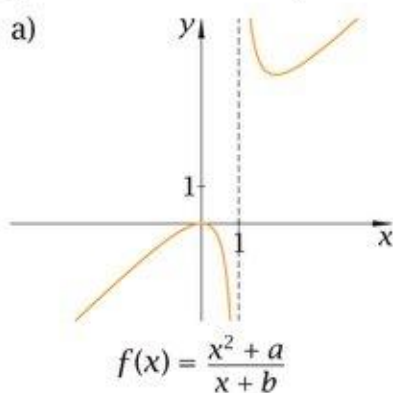
$l(x) = \frac{-x^2+4x-4}{x^6+2x^2+1}$

$g(x) = \frac{-4}{x^2+6x+9}$

$k(x) = \frac{12}{-x^2+3x-6}$

$p(x) = \frac{x^2-2x}{x^4+x^3-6x^2}$

Я 117. Znajdź wartości parametrów we wzorze funkcji, której fragment wykresu przedstawiono na rysunku.



Я 118. Czy funkcje f i g są równe?

a) $f(x) = \frac{2x^3}{x}, \quad g(x) = 2x^2$

e) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-6x+9}, \quad g(x) = \frac{1}{x-3}$

b) $f(x) = \frac{6x^2}{2x}, \quad g(x) = \frac{9x^3}{3x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+x-2}, \quad g(x) = \frac{x}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{5x+5}{x^2+x}, \quad g(x) = \frac{5}{x}$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{4}{(x-2)^2}}, \quad g(x) = \frac{2}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{4}{x^2+1}, \quad g(x) = \frac{4x^2+4}{(x^2+1)^2}$

h) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2+x}}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{2+x}}$

Я 119. Dla jakich wartości parametru m dziedziną podanej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+mx+1}$

b) $f(x) = \frac{(2x+1)^2}{mx^2+mx+1}$

Я 120. Naskicuj wykres funkcji.

a) $y = \frac{2x}{x^2-x}$

b) $y = \frac{-3x+6}{x^2-2x}$

c) $y = \frac{2x-6}{x^2-6x+9}$

d) $y = \frac{x^2+3x}{x^2-9}$

Я 121. Podaj wzory takich dwóch funkcji homograficznych, które spełniają podany warunek.

a) Dziedziną funkcji jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a do jej wykresu należy punkt $A = (2, -1)$.

b) Funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$ oraz $(-2; +\infty)$, a jej wykres nie przecina osi x .

c) Funkcja przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

122. Wyznacz przedziały monotoniczności podanej funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{dla } x \leq -1 \\ \frac{-2}{x+1} & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{-x-1}{x-3} & \text{dla } x < 2 \\ -x+1 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{x-1} & \text{dla } x \leq 0 \\ 4-x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{-x-5}{x+3} & \text{dla } x < -3 \\ \frac{2x+7}{x+3} & \text{dla } x > -3 \end{cases}$

Я 123. Naskicuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{2}{|x|-2}$

b) $f(x) = \frac{|x|}{|x|+2}$

c) $f(x) = \frac{|x|+2}{x+2}$

d) $f(x) = \frac{|x|+x}{x-2}$

Я 124. Znajdź wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $\left| \frac{|x|+4}{2|x|-6} \right| = m$ ma dwa rozwiązania.

Я 125. Znajdź wszystkie wartości parametru p , dla których równanie $\left| \frac{3|x| - 8}{|x| - 2} \right| = p$ ma co najmniej trzy rozwiązania.

Я 126. Poniżej przedstawiono fragmenty wykresów następujących funkcji:

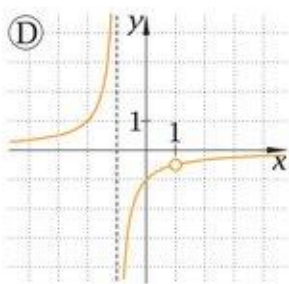
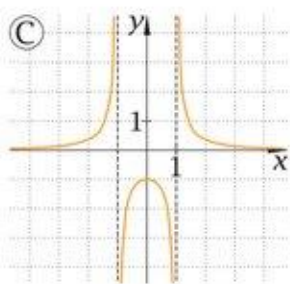
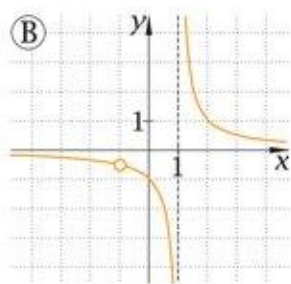
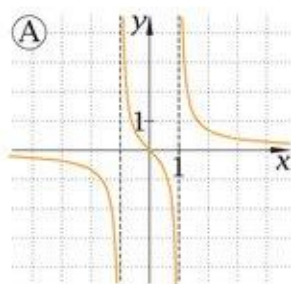
$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$f_2(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$f_3(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

$$f_4(x) = \frac{1 - x}{x^2 - 1}$$

Dopasuj wykresy do wzorów funkcji.



Я 127. a) Dla jakich wartości parametru a dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x - a}$ jest zbiór liczb rzeczywistych i funkcja ma jedno miejsce zerowe?

b) Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2 + x + m}{x^2 - mx + 4}$ jest zbiór liczb rzeczywistych i funkcja nie ma miejsc zerowych?

c) Dla jakich wartości parametru p dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2 - px + 1}{x^2 + px + 9}$ jest zbiór liczb rzeczywistych i funkcja ma dwa miejsca zerowe?

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Dziedzina wyrażenia $\frac{x-4}{(x^2-x-2)(x^2-2x)}$ jest zbiór:

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{0, 2, 4\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$

2. Suma $\frac{3}{x+4} + \frac{x}{x-2}$ jest równa wyrażeniu:

- A. $\frac{3}{x} + \frac{3}{4} + 1 - \frac{x}{2}$ B. $\frac{x+3}{2x-2}$ C. $\frac{x^2+7x-6}{x^2+2x-8}$ D. $\frac{3+x}{(x+4)(x-2)}$

3. Iloraz $\frac{3x-1}{x+2} : \frac{x-4}{5x+3}$ jest równy wyrażeniu:

- A. $\frac{x-4}{5x+3} : \frac{3x-1}{x+2}$ C. $\frac{3x-1}{5x+3} : \frac{x-4}{x+2}$
B. $\frac{3x-1}{x-4} : \frac{5x+3}{x+2}$ D. $\frac{x+2}{3x-1} : \frac{5x+3}{x-4}$

4. Wyrażenie $\frac{5}{x} - \frac{6}{x^2} - \frac{7}{x^3}$ jest równe wyrażeniu:

- A. $\frac{-8}{x^6}$ B. $\frac{5x^2-6x-7}{x^3}$ C. $\frac{-8}{x-x^2-x^3}$ D. $\frac{5-6x-7x^2}{x}$

5. Ile rozwiązań ma równanie $\frac{x+3}{2x-4} : \frac{2-x}{1-x} = 0$?

- A. nie ma rozwiązań B. jedno C. dwa D. trzy

6. Ile rozwiązań ma równanie $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = 0$?

- A. nie ma rozwiązań B. jedno C. dwa D. trzy

7. Iloczyn rozwiązań równania $\frac{x-1}{x+1} - \frac{4x}{x-3} = 0$ jest równy:

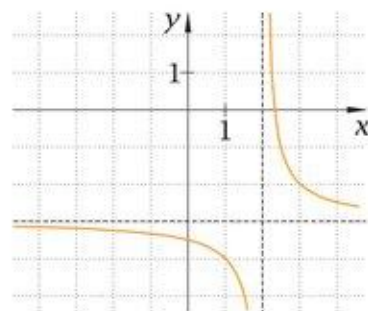
- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

8. Tylko jedno z poniższych równań ma rozwiązanie. Które to równanie?

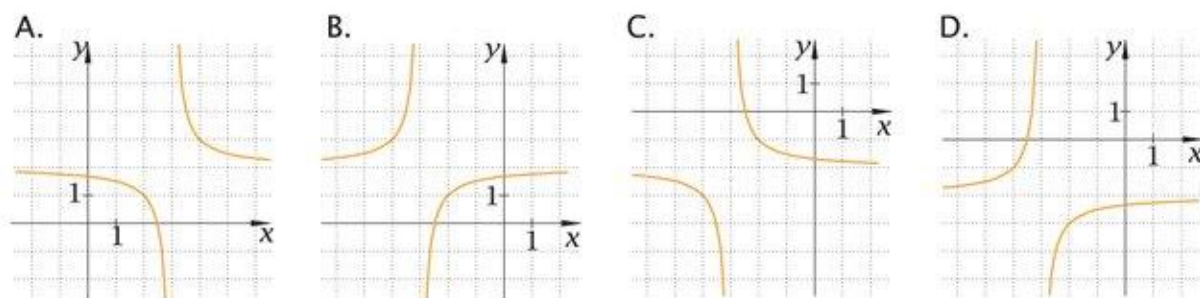
- A. $\frac{x+1}{x^2-1} = 0$ B. $\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x-4)} = 0$ C. $\frac{x+5}{x^2+5x} = 0$ D. $\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)^2} = 0$

9. Fragment wykresu jednej z podanych funkcji przedstawiono na rysunku obok. Która to funkcja?

- A. $f(x) = -3 - \frac{1}{x+2}$ C. $f(x) = -3 + \frac{1}{x-2}$
B. $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$ D. $f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$



10. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = 2 - \frac{1}{x+3}$?



11. Które z poniższych zdań nie dotyczy funkcji $f(x) = -4 - \frac{1}{x-4}$?

- A. Dziedziną funkcji jest zbiór $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.
- B. Miejscem zerowym funkcji jest $x = 3,75$.
- C. Asymptotami funkcji są proste o równaniach $x = 4$ oraz $y = -4$.
- D. Funkcja jest malejąca w przedziale $(4; +\infty)$.

12. Wykres której z podanych funkcji nie przechodzi przez trzecią ćwiartkę układu współrzędnych?

- A. $f(x) = \frac{-1}{x-1} + 5$
- B. $f(x) = \frac{2}{x+1} + 5$
- C. $f(x) = \frac{-3}{x+1} - 5$
- D. $f(x) = \frac{4}{x-1} - 5$

13. Suma pewnej liczby i jej odwrotności jest równa $2\frac{1}{30}$. Jaka to liczba?

14. Ile punktów wspólnych mogą mieć wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$ i prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych? Rozpatrz różne przypadki.

15. Wykaż, że dla dowolnej liczby dodatniej prawdziwa jest podana nierówność.

$$a + \frac{25}{a} \geq 10$$

Я 16. Znajdź liczby a i b , dla których zachodzi równość $\frac{2x+14}{x^2+4x+3} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+1}$.
Iloczyn ab jest równy:

- A. 12 B. -24 C. 28 D. -16

Я 17. Suma rozwiązań równania $\frac{x-2}{x^2-6x+8} + \frac{4-x}{x-2} = 0$ jest równa:

- A. 9 B. 11 C. 13 D. 15

Я 18. Która z poniższych nierówności ma inny zbiór rozwiązań niż nierówność $\frac{(x-1)(x+2)^2}{(x-1)^2(x+2)} \geq 0$?

- A. $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x+2)^2} \geq 0$ C. $\frac{(x-1)(x+2)^3}{(x-1)^3(x+2)} \geq 0$
B. $\frac{(1-x)(x+2)^2}{(1-x)^2(x+2)} \leq 0$ D. $\frac{(x-1)(x+2)^2}{(x-1)^2(x+2)} > 0$

Я 19. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{2}{x-2} < \frac{2x-1}{x^2-4}$ jest:

- A. zbiór pusty C. $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$
B. $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$ D. $(-2; 0) \cup (0; 2)$

Я 20. Wyrażenia $\frac{2x-6}{x+4}$ i $\frac{5-x}{3x-3}$ przyjmują wartości o przeciwnych znakach, gdy:

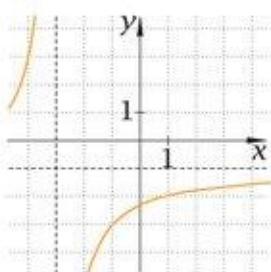
- A. $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$ C. $x \in (-4; 1) \cup (3; 5)$
B. $x \in (-\infty; -4) \cup (1; 3) \cup (5; +\infty)$ D. $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$

Я 21. Dziedzina funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{(x^2+x-6)(x-2)}{x-5}}$ jest zbiór:

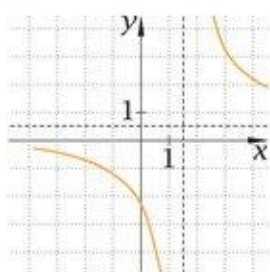
- A. $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty) \cup \{2\}$ C. $(-3; 5) \cup \langle 2; +\infty$
B. $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ D. $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$

Я 22. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = \frac{-2x-7}{x+3}$?

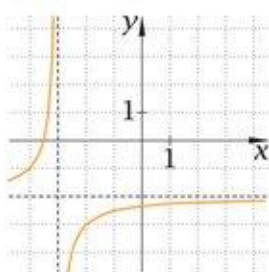
A.



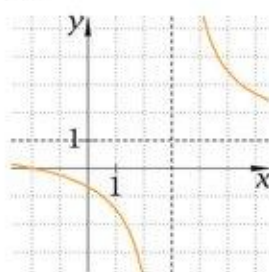
B.



C.



D.

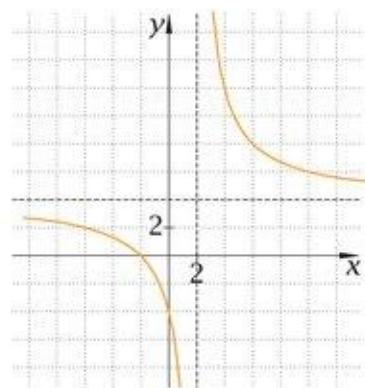


Я 23. Funkcja $f(x) = \frac{-10x + 27}{2x - 6}$ ma taki sam wykres jak funkcja:

- A. $g(x) = -10 - \frac{3}{2x - 6}$ C. $g(x) = \frac{5}{3} + \frac{27}{2x - 6}$
 B. $g(x) = 13,5 - \frac{5}{x - 3}$ D. $g(x) = -5 - \frac{1,5}{x - 3}$

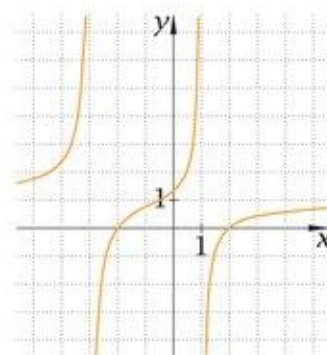
Я 24. Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji o wzorze $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Tylko jeden ze współczynników podanych poniżej nie jest poprawnym współczynnikiem we wzorze tej funkcji. Wskaż go.

- A. $a = 8$ C. $c = 2$
 B. $b = 16$ D. $d = 4$



Я 25. Wskaż funkcję, której fragment wykresu przedstawiono na rysunku obok.

- A. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x + 1)(x - 3)}$
 B. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{(x - 1)(x + 3)}$
 C. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - 1)(x + 3)}$
 D. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{(x + 1)(x - 3)}$



Я 26. Rozwiąż nierówność $x^2 + x \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$.

Я 27. Naszkicuj parabolę $y = x^2 - 3x$ i wykres funkcji $y = \frac{1}{x - 2} - 1$ i zaznacz na rysunku ich punkty wspólne. Znajdź współrzędne tych punktów.

Я 28. Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = \frac{x - 1}{2x - 3}$ są większe od wartości funkcji $g(x) = \frac{x + 4}{3x}$?

Я 29. Przez punkt $(-1, 1)$ poprowadzono prostą, która ma z wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$ jeden punkt wspólny. Znajdź równanie tej prostej.

Я 30. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y , jeśli $x \neq 0$, $y \neq 0$, to spełniona jest nierówność:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 1 > \frac{2}{y^2} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2 y^2} + 1$$

PRZED MATURĄ

1. Równanie wymierne $\frac{3x-1}{x+5} = 3$, gdzie $x \neq 5$,

- A. nie ma rozwiązań rzeczywistych
- B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste
- C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste
- D. ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste

2. Równanie $x - \frac{1}{2x+1} = 0$

- A. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste
- B. ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste
- C. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste
- D. nie ma rozwiązań

3. Równanie $\frac{x-1}{x+1} = x-1$

- A. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 1$
- B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 0$
- C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = -1$
- D. ma dokładnie dwa rozwiązania: $x = 0$, $x = 1$

4. Równanie $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3} = 0$

- A. ma trzy różne rozwiązania: $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$
- B. ma trzy różne rozwiązania: $x = -1$, $x = -3$, $x = 2$
- C. ma dwa różne rozwiązania: $x = 1$, $x = -2$
- D. ma dwa różne rozwiązania: $x = -1$, $x = 2$

5. Równanie $\frac{x^2+2x}{x^2-4} = 0$

- A. ma trzy rozwiązania: $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$
- B. ma dwa rozwiązania: $x = 0$, $x = -2$
- C. ma dwa rozwiązania: $x = -2$, $x = 2$
- D. ma jedno rozwiązanie: $x = 0$

6. Rozwiązaniem równania $\frac{x-7}{x} = 5$, gdzie $x \neq 0$, jest liczba należąca do przedziału:

- A. $(-\infty; -2)$
- B. $\langle -2; -1)$
- C. $\langle -1; 0)$
- D. $(0; +\infty)$

7. Rozwiązaniem równania $\frac{x-2}{3(x+2)} = \frac{1}{9}$ jest liczba:

- A. -2 B. 2 C. 4 D. -4

8. Rozwiązaniem równania $\frac{x+1}{x+2} = 3$, gdzie $x \neq -2$, jest liczba należąca do przedziału:

- A. $(-2; 1)$ B. $(1; +\infty)$ C. $(-\infty; -5)$ D. $(-5; -2)$

9. Rozwiązaniem równania $\frac{(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 9)}{x - 1} = 0$ nie jest liczba:

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

10. Dla $x = \frac{2}{\sqrt{2}}$ oraz $y = \sqrt{2} - 1$ wartość wyrażenia $x^2 - 2xy + y^2$ jest równa:

- A. 4 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

11. Równość $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{a} = 1$ jest prawdziwa dla:

- A. $a = \frac{11}{20}$ B. $a = \frac{8}{9}$ C. $a = \frac{9}{8}$ D. $a = \frac{20}{11}$

12. Rozwiąż równanie $\frac{2x-4}{x} = \frac{x}{2x-4}$, gdzie $x \neq 0$ i $x \neq 2$.

13. Rozwiąż równanie $\frac{x(x+1)}{x-1} = 5x-4$, dla $x \neq 1$.

14. Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{2x} = \frac{2x+1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$ i $x \neq 0$.

15. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , które spełniają podany warunek:

$$\frac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3} = x - 3$$

16. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby x prawdziwa jest nierówność:

$$4x + \frac{1}{x} \geq 4$$

17. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geq \frac{2}{a+b}$$

18. Wykaż, że dla każdej liczby $a > 0$ i dla każdej liczby $b > 0$ prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

19. Wykaż, że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

20. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$, to:

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = ab + ac + bc$$

21. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność:

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2(x^3 + y^3)$$

Я22. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x < y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a , prawdziwa jest nierówność $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$.

Я23. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$.

Я24. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

Я25. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0$.

CIĄGI

Jeśli wyrazy ciągu są liczbami, z których każda następna jest większa od poprzedniej, to ciąg nazywamy **rosnącym**. W takim ciągu dla każdych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi nierówność $a_n < a_{n+1}$.

Gdy wyrazy ciągu są takimi liczbami, że każda następna jest mniejsza od poprzedniej, to ciąg nazywamy **malejącym**. W takim ciągu dla każdych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Gdy wszystkie wyrazy ciągu liczbowego są równe, to ciąg nazywamy **ciągą stałym**. W ciągu stałym dla każdych dwóch kolejnych wyrazów a_n i a_{n+1} zachodzi równość $a_{n+1} = a_n$.

Ciąg (a_n) nazywamy **arytmetycznym**, jeśli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje przez dodanie do poprzedniego wyrazu pewnej stałej liczby r . Wyrazy ciągu arytmetycznego spełniają równość:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Liczbę r nazywamy **różnicą ciągu arytmetycznego**.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) :

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

W ciągu arytmetycznym każdy wyraz (który nie jest ani pierwszym, ani ostatnim wyrazem) jest równy średniej arytmetycznej dwóch sąsiednich wyrazów:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ciąg (a_n) nazywamy **geometrycznym**, jeśli ma co najmniej trzy wyrazy i każdy jego wyraz, z wyjątkiem pierwszego, powstaje w wyniku pomnożenia poprzedniego wyrazu przez pewną stałą liczbę q . Wyrazy ciągu geometrycznego spełniają równość:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Liczbę q nazywamy **ilorazem ciągu geometrycznego**.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie $q \neq 1$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

W ciągu geometrycznym każdy wyraz (który nie jest ani pierwszym, ani ostatnim wyrazem) jest równy średniej geometrycznej dwóch sąsiednich wyrazów lub liczbie do niej przeciwnej:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Obliczanie odsetek

Procent prosty (odsetki obliczane są od stałego kapitału). Jeśli kapitał początkowy wynosi K_0 , a oprocentowanie po upływie jednego okresu naliczania jest równe $p\%$, to po n okresach naliczania odsetek kapitał wraz z odsetkami wyniesie:

$$K_n = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot n$$

Procent składany (odsetki obliczane są od kapitału powiększonego o odsetki za wcześniejszy okres). Jeśli kapitał początkowy wynosi K_0 , a oprocentowanie po upływie jednego okresu naliczania jest równe $p\%$, to po n kolejnych okresach naliczania odsetek kapitał wraz z odsetkami wyniesie:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Granica ciągu

Liczba g jest **granica nieskończonego ciągu** (a_n) , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba naturalna k , że dla wszystkich n takich, że $n \geq k$:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Ciąg, który ma granicę, nazywamy **ciągą zbieżnym**. Ciąg, który nie ma granicy, nazywamy **ciągą rozbieżnym**.

Granice niektórych ciągów

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} c = c \qquad \text{Jeśli } q \in (-1; 1), \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny. Granicą tego ciągu jest liczba $e \approx 2,7183$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Własności granic ciągów zbieżnych

Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to zachodzą równości:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne i wyrazy ciągu (b_n) są różne od 0 oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Dla dowolnej liczby rzeczywistej k , jeśli (a_n) jest ciągiem zbieżnym, to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny i wszystkie jego wyrazy są nieujemne ($a_n \geq 0$), to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

Ciągi rozbieżne

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami rozbieżnym do $+\infty$** , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, jeśli dla dowolnej liczby M istnieje taka liczba naturalna k , że dla $n \geq k$ zachodzi nierówność $a_n > M$.

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągami rozbieżnym do $-\infty$** , czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, jeśli dla dowolnej liczby M istnieje taka liczba naturalna k , że dla $n \geq k$ zachodzi nierówność $a_n < M$.

Własności granic ciągów rozbieżnych do $+\infty$ lub do $-\infty$

Poniżej za pomocą symboli $+\infty$ i $-\infty$ zapisano w skrócie własności granic ciągów rozbieżnych. Na przykład równość $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ oznacza, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

$\frac{1}{+\infty} = 0$	$\frac{1}{-\infty} = 0$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$	$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
$(+\infty) \cdot q = +\infty$ dla $q > 0$	$(+\infty) \cdot q = -\infty$ dla $q < 0$
$(-\infty) \cdot q = -\infty$ dla $q > 0$	$(-\infty) \cdot q = +\infty$ dla $q < 0$

Szeregi geometryczne

Niech (a_n) oznacza ciąg geometryczny o ilorazie q . Ciąg sum częściowych, czyli $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_1q$, $S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2$, ... nazywamy **szeregiem geometrycznym**.

Gdy $|q| < 1$, to ciąg (S_n) jest zbieżny, a liczbę $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nazywamy **sumą szeregu**.

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

PRZYKŁADY CIĄGÓW

1. Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym. Oblicz wskazany wyraz tego ciągu.

- | | | |
|---------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $a_n = n$, a_{10} | c) $a_n = n^2 - 5$, a_7 | e) $a_n = \frac{-2n}{n+3}$, a_1 |
| b) $a_n = 2n + 3$, a_3 | d) $a_n = \frac{1}{n} + 2$, a_8 | f) $a_n = 2^{n-3} + 5$, a_5 |

2. Zapisz w jak najprostszej postaci wyrazy a_{n-1} , a_{n+1} , a_{2n+1} podanego ciągu.

- | | | |
|--------------------|--------------------------|------------------------|
| a) $a_n = n - 1$ | c) $a_n = \frac{1}{n+3}$ | e) $a_n = 2^{n-1} + 3$ |
| b) $a_n = n^2 + 5$ | d) $a_n = 1 - 2n$ | f) $a_n = (-1)^n$ |

3. Znajdź czwarty i piąty wyraz ciągu określonego za pomocą podanego wzoru rekurencyjnego.

a) $a_1 = 4, \quad a_2 = 6, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$

b) $a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} - 2$

c) $a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_{n+2} = a_n a_{n+1}$

d) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

e) $a_1 = 0, \quad a_2 = 7, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

f) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = n a_n a_{n-1}$

4. Czy w ciągu (a_n) występuje liczba 100? Jeśli tak, to którym jest wyrazem?

a) $a_n = n + 5$

c) $a_n = n^2 + 25$

e) $a_n = (n - 20)^2$

b) $a_n = n^3 - 25$

d) $a_n = 2^n + 36$

f) $a_n = (n + 11)^2$

5. Znajdź te wyrazy ciągu określonego wzorem $a_n = 3n - 70$, które:

a) są mniejsze od -5,

b) są większe od 100,

c) należą do przedziału $\langle 10; 50 \rangle$.

6. Dane są dwa ciągi $a_n = \frac{n-7}{n+4}$ i $b_n = \frac{n-10}{n}$.

a) Które wyrazy ciągu (a_n) są większe od $\frac{1}{2}$?

b) Które wyrazy ciągu (b_n) są mniejsze od $-\frac{1}{2}$?

c) Dla jakich wartości n spełniona jest nierówność $a_n > b_n$?

7. Czy liczby -2, 0, $\frac{3}{5}$ są wyrazami ciągu o podanym wzorze? Jeśli tak, to którymi wyrazami?

a) $a_n = \frac{6}{n+2}$

b) $a_n = \frac{n-12}{5}$

c) $a_n = \frac{3-n}{n}$

d) $a_n = \frac{n-9}{n+3}$

8. Określ monotoniczność podanego ciągu skończonego.

a) 1, 2, 3, 4, 5

f) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$

b) 1, 2, 3, 1, 2, 3

g) $\frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}$

c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$

h) 0,3, 0,03, 0,003, 0,0003

d) -1000, -980, -960, -940, -920

i) -4, 5, -6, 7, -8, 9

e) $-1\frac{1}{3}, -1\frac{1}{4}, -1\frac{1}{5}, -1\frac{1}{6}, -1\frac{1}{7}$

j) 2, $\sqrt{3}$, 4, $\sqrt{5}$, 6, $\sqrt{7}$

9. Zbadaj monotoniczność podanego ciągu.

a) $a_n = 5n + 3$

c) $a_n = -10n^2$

e) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

b) $a_n = 5 - 3n$

d) $a_n = (-2)^n$

f) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

10. Podane warunki są spełnione dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n . Na ich podstawie określ, czy ciąg jest rosnący czy malejący.

a) $a_{n+1} - a_n = n$

c) $a_{n+1} - a_n = 3n - 12$

e) $a_{n+1} - a_n = n^2 - 9$

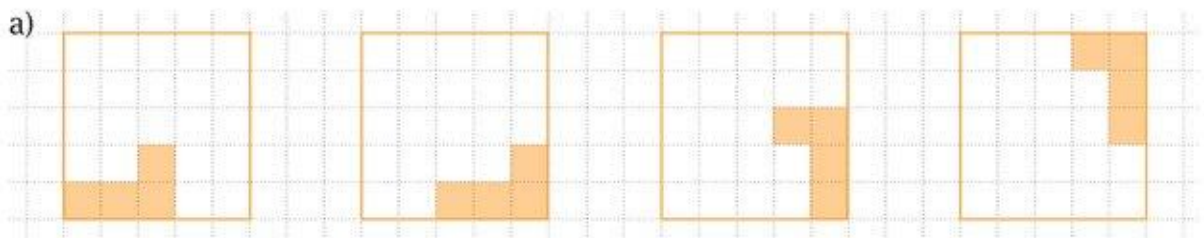
b) $a_{n+1} - a_n = 1 - 2n$

d) $a_{n+1} - a_n = n^2 + 4$

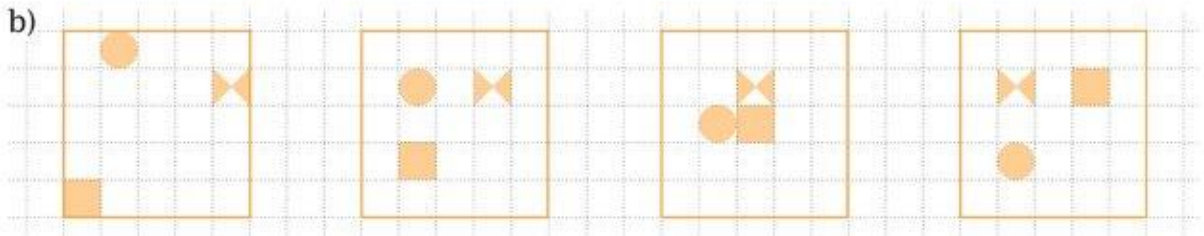
f) $a_{n+1} - a_n = n^2 - n$

11. Kolejne figury powstały według pewnej reguły. Jaka mogłaby być następna figura w tym ciągu? Narysuj kolejny rysunek.

a)



b)



12. Znajdź regułę i podaj kilka następnych wyrazów ciągu.

a) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...

b) 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, ...

c) 1, 23, 456, 78910, ...

d) 12, 24, 36, 48, 510, 612, ...

13. a) Jakie trójwyrazowe ciągi rosnące, jakie malejące i jakie stałe można ułożyć z elementów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ (wyrazy mogą się powtarzać)?

b) Ile jest trójwyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$, gdy wyrazy nie mogą się powtarzać, a ile, gdy wyrazy mogą się powtarzać?

14. Zapisz wzór ogólny ciągu.

a) 1, 3, 5, 7, 9, ...

d) $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \dots$

b) 2, 4, 8, 16, 32, ...

e) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \frac{9}{32}, \frac{11}{64}, \dots$

c) -2, 4, -8, 16, -32, ...

f) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \dots$

15. Dane są ciągi (p_n) i (d_n) :

p_n to n -ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\pi = 3,141592653\dots$

d_n to n -ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$

- a) Znajdź p_2, p_3, d_1, d_5 .
- b) Podaj przykład takiej liczby n , dla której $p_n = 9$.
- c) Ile jest par wyrazów takich, że $p_n \geq d_n$ i $n \leq 9$?
- d) Dla jakich liczb naturalnych n spełnione są warunki $n \leq 9$ i $p_{n+1} = d_n$?

16. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{n+1}{3}$. Zapisz wyrażenia przedstawiające:

- a) wyrazy a_m, a_{n-1}, a_{2k+5} ,
- b) trzy wyrazy następujące po wyrazie a_{n-5} ,
- c) wyrazy znajdujące się między wyrazami a_{2n-1} i a_{2n+2} .

17. Czy liczba x jest wyrazem podanego ciągu (a_n) ? Jeśli tak, to którym?

- a) $a_n = n^2 + 5n - 3, \quad x = 47$
- b) $a_n = n^2 - 7n, \quad x = -12$
- c) $a_n = n^2 + 6n + 6, \quad x = 1$
- d) $a_n = 2^n, \quad x = 32$
- e) $a_n = 3^n, \quad x = \frac{1}{3}$
- f) $a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{-n}, \quad x = 125$

18. Dwoma początkowymi wyrazami ciągu (a_n) są liczby 0 i 2. Znajdź współczynniki s i t .

- a) $a_n = sn^2 + tn$
- b) $a_n = \frac{sn+2}{tn-3}$
- c) $a_n = s \cdot 2^n + t$

19. Które wyrazy podanego ciągu należą do przedziału $\langle 2; 12 \rangle$?

- a) $a_n = n^2 - 9n + 20$
- b) $a_n = -n^2 + 8n - 7$
- c) $a_n = \frac{22n-40}{n}$
- d) $a_n = \frac{11n+16}{n+1}$

20. Wykaż, że wszystkie wyrazy podanego ciągu są dodatnie.

- a) $a_n = 2n^2 - n$
- b) $a_n = \frac{6}{3n-2}$
- c) $a_n = -4(n+5)(-1-n)$
- d) $a_n = \frac{5n+3}{5n-3}$

21. Przyjmijmy, że S_k jest sumą k początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Znajdź a_1, a_2, a_{10} , jeśli:

- a) $S_k = 4k - 3$
- b) $S_k = k^2 - 2k$
- c) $S_k = \frac{2}{k}$
- d) $S_k = \sqrt{k+2}$

22. Oblicz a_{1000} .

a) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -a_n$

c) $a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

b) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$

d) $a_1 = 5, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = 3 - a_n$

23. Ciąg nieskończony (a_n) określony jest wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = a \quad a_2 = b \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$

Uzasadnij, że ciąg ten ma najwyżej sześć różnych wyrazów.

24. Podaj wzór rekurencyjny i ogólny ciągu.

a) 1, 2, 3, 4, ...

c) $\frac{1}{8}, \frac{1}{24}, \frac{1}{72}, \frac{1}{216}, \dots$

b) 8, 7, 6, 5, ...

d) $7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \dots$

25. Podaj wzór rekurencyjny ciągu.

a) $a_n = n + 2$

c) $a_n = \frac{n}{2} + 1$

e) $a_n = 2^{2n}$

b) $a_n = 2n$

d) $a_n = 2^n$

f) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

26. Podane warunki są spełnione dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n . Czy na ich podstawie można stwierdzić, że ciąg jest rosnący albo że jest malejący?

a) $a_n - a_{n+1} = n$ b) $a_{n+2} - a_n = 5$ c) $a_{n+1} = 2a_n$ d) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -3$

27. Zbadaj monotoniczność ciągu.

a) $a_1 = 10, \quad a_{n+1} = a_n + 0,1$

c) $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{4}{n}$

b) $a_1 = -5, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{n}{2}$

d) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

28. Zbadaj monotoniczność ciągu.

a) $a_n = \frac{4n-3}{5}$

e) $a_n = 3n - 2n^2$

i) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - 4$

b) $a_n = \frac{5-2n}{3}$

f) $a_n = 2 - 3n - 2n^2$

j) $a_n = \frac{n+3}{n+2}$

c) $a_n = \frac{5n+4}{-3}$

g) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

k) $a_n = \frac{n+5}{2n+1}$

d) $a_n = n^2 - n$

h) $a_n = 5^n$

l) $a_n = \frac{4n-3}{2n+5}$

29. Wyjaśnij, dlaczego podany ciąg nie jest ani rosnący, ani malejący, ani stały.

a) $a_n = (n-2)(n-4)$

c) $a_n = \frac{1}{2n-5}$

e) $a_n = (-2)^n$

b) $a_n = -25 + 10n - n^2$

d) $a_n = \frac{4n-8}{2n-7}$

f) $a_n = \frac{n+5}{2n+10}$

30. Ciąg (a_n) jest rosnący. Czy ciąg (b_n) jest malejący lub rosnący?

- a) $b_n = -5a_n$ b) $b_n = \frac{a_n}{3}$ c) $b_n = (a_n)^2$ d) $b_n = a_n + a_{n+1}$

31. Podaj wzór ogólny ciągu.

- a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \frac{3}{32}, \frac{7}{128}, \frac{1}{32}, \dots$ c) 0,5, 0,(6), 0,75, 0,8, 0,8(3), ...
b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{6}, \frac{2}{15}, \frac{1}{9}, \dots$ d) 0,5, 0,5, 0,375, 0,25, 0,15625, ...

32. Podaj wzór rekurencyjny ciągu.

- a) 3, 9, 81, 6561, ... c) 1, 4, 9, 16, 25, ...
b) 1, 11, 111, 1111, ... d) 1, 2, 2, 4, 8, 32, ...

33. Przeczytaj informację w ramce. Przyjmij, że $a_1 = 2$ i określ (korzystając z kalkulatora), który wyraz ciągu (a_n) jest przybliżeniem liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do części tysięcznych.

Ciąg (a_n) określony jest w następujący sposób:

$$a_1 = x, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{x}{a_n}}{2}$$

Wyrazami tego ciągu są coraz dokładniejsze przybliżenia liczby $\sqrt{x}$.

34. a) Wykaż, że ciąg określony za pomocą wzoru ogólnego $a_n = n^2 - n$ można opisać za pomocą wzoru rekurencyjnego $a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + 2n$.

b) Wykaż, że ciąg określony za pomocą wzoru ogólnego $a_n = n^3$ można opisać za pomocą wzoru rekurencyjnego $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1$.

c) Wykaż, że ciąg określony za pomocą wzoru ogólnego $a_n = \frac{1}{n}$ można opisać za pomocą wzoru rekurencyjnego $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n^2 + n}$.

35. Ciąg jest określony wzorem rekurencyjnym $a_1 = 7, a_2 = 14, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Znajdź wzór ogólny tego ciągu.

36. Zbadaj monotoniczność ciągu.

- a) $a_n = 8 - \sqrt{n}$ b) $a_n = (-3)^{2n}$ c) $a_n = \sin(\pi n)$ d) $a_n = \cos(\pi n)$

37. Zbadaj monotoniczność ciągu.

- a) $a_n = (-2)^n + 2^n$ b) $a_n = (-2)^{n+1} \cdot (-3)^n$ c) $a_n = (-1)^{n+1} + (-1)^n$

38. Zbadaj monotoniczność ciągu.

- a) $a_n = n^3 + 2n^2 - n - 2$ c) $a_n = n^4 - 2n^2 + 1$
b) $a_n = (n+3)^2 - (n+1)^2 - 4n$ d) $a_n = n^3 - 6n^2 + 8n$

39. a) Określ monotoniczność ciągów $a_n = -n$ i $b_n = \frac{1}{n}$. Zbadaj monotoniczność ciągów $c_n = a_n + b_n$, $d_n = a_n - b_n$ oraz $e_n = a_n \cdot b_n$.

b) Podaj przykłady dwóch ciągów malejących (a_n) i (b_n) takich, że ciąg określony wzorem $d_n = a_n - b_n$ jest rosnący.

c) Podaj przykłady dwóch ciągów malejących (a_n) i (b_n) takich, że ciąg określony wzorem $e_n = a_n \cdot b_n$ jest rosnący.

d) Udowodnij, że jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są malejące, to ciąg określony wzorem $c_n = a_n + b_n$ też jest malejący.

40. Określ dla jakiej wartości parametru p :

a) ciąg $a_n = \frac{n+p}{n}$ jest rosnący,

b) ciąg $a_n = \frac{pn}{n+2}$ jest malejący,

c) ciąg $a_n = \frac{p+n}{np}$ jest malejący.

41. Wykaż, że ciąg określony wzorem ogólnym

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 2^n} \left[(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n \right]$$

jest ciągiem Fibonacciego, tzn. że spełnia warunki $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

42. W roku 1640 Pierre de Fermat, francuski matematyk, podał wzór ogólny ciągu $F_n = 2^{2^n} + 1$ i sformułował hipotezę, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami pierwszymi.

a) Pierwsze cztery wyrazy tego ciągu rzeczywiście są liczbami pierwszymi. Znajdź te wyrazy.

b) W roku 1732 Leonhard Euler, szwajcarski matematyk, wykazał, że F_5 nie jest liczbą pierwszą. Sprawdź, że ten wyraz jest podzielny przez 641.

c) Wykaż, że wzór Fermata spełnia warunki $F_1 = 5$, $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$.

CIĄG ARYTMETYCZNY

43. Podane liczby to dwa początkowe wyrazy pewnego ciągu arytmetycznego. Znajdź różnicę oraz następne dwa wyrazy tego ciągu.

a) 15, 18

c) 1, 11

e) 0,3, -0,2

b) 9, -2

d) $-\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{2}$

f) 0,1, 0,01

44. Czy podany ciąg jest arytmetyczny?

a) 3, 6, 9, 12, 15

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

b) -2, 2, 6, 10

f) -5, -2, 1, 4

c) -5, -3, 3, 5

g) 0,7, 0,9, 0,11, 0,13

d) 123, 123, 123, 123

h) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$

45. Cztery z podanych ciągów są arytmetyczne. Znajdź setne wyrazy tych ciągów.

ciąg (a_n) : $\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{13}{5}, \frac{19}{5}, \dots$

ciąg (d_n) : $4\frac{1}{3}, 5, 6\frac{1}{3}, 7, \dots$

ciąg (b_n) : $9, 7\frac{1}{2}, 6, 4\frac{1}{2}, \dots$

ciąg (e_n) : $3\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, \dots$

ciąg (c_n) : 2,1, 0,4, -1,3, -2, ...

ciąg (f_n) : -13,4, -11,5, -9,6, -7,7, ...

46. Sprawdź, czy ciąg o podanym wzorze ogólnym jest arytmetyczny. Jeśli tak, oblicz a_1 i różnicę tego ciągu.

a) $a_n = -5 + n$

c) $a_n = n^2 + 5n - 3$

e) $a_n = \frac{3n-1}{2}$

b) $a_n = 2 - (3 - n)$

d) $a_n = \frac{1}{2n+1}$

f) $a_n = \sqrt{2n-1}$

47. Ciąg arytmetyczny jest określony wzorem rekurencyjnym. Znajdź pierwsze trzy wyrazy oraz wzór ogólny tego ciągu.

a) $a_1 = 7, a_{n+1} = a_n + 3$

c) $a_1 = -3,2, a_{n+1} = a_n - 0,2$

b) $a_1 = -5, a_{n+1} = a_n + 2,5$

d) $a_1 = \frac{5}{6}, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{3}$

48. Jakimi liczbami należy zastąpić litery a i b , aby otrzymać ciąg arytmetyczny?

a) $a, b, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

c) 6, a , 13, b

e) $a, -4,5, b, -3,5$

b) $a, 9, 5, b$

d) 7, $a, b, 16$

f) $-\frac{5}{12}, a, b, 1\frac{1}{12}$

49. Zapisz wzór ogólny i oblicz osiemnasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r .

a) $a_1 = 8, r = 2$

c) $a_1 = 150, r = \frac{1}{17}$

e) $a_1 = 500, r = -500$

b) $a_1 = 7, r = -1$

d) $a_1 = 2003, r = 0$

f) $a_1 = 200, r = -\frac{1}{2}$

50. Znajdź wzór ogólny ciągu arytmetycznego, którego początkowymi wyrazami są podane liczby. Oblicz dziesiąty wyraz tego ciągu.

a) 8, 10, 12, 14

c) 0,2, 0,45, 0,7, 0,95

e) -0,8, -0,25, 0,3, 0,85

b) 7, -3, -13, -23

d) $\frac{1}{3}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6}, 1\frac{1}{12}$

f) 2, 1,35, 0,7, 0,05

51. Którym wyrazem podanego ciągu arytmetycznego jest liczba x ?

a) $5, 8, 11, \dots$ $x = 38$

c) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$ $x = 3$

b) $-19\frac{1}{2}, -19, -18\frac{1}{2}, \dots$ $x = -11$

d) $27, 24, 21, \dots$ $x = -3$

52. Oblicz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego, jeżeli znany jest jeden z jego wyrazów i różnica.

a) $a_6 = 20, r = 6$

b) $a_{21} = 23, r = 1,5$

c) $a_{17} = 3, r = -\frac{3}{4}$

53. Znajdź wzór ogólny ciągu arytmetycznego spełniającego podane warunki. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.

a) $a_1 = 5, a_3 = 8$

c) $a_{11} = 0, a_{20} = -0,9$

e) $a_4 = -10, a_{10} = 110$

b) $a_3 = 45, a_7 = 34$

d) $a_5 = 31, a_9 = 30$

f) $a_{11} = 4, a_{16} = 5$

54. a) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 7, a trzeci jest równy 19. Który wyraz tego ciągu jest równy 121?

b) Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 15, a jedenasty jest równy -3 . Który wyraz tego ciągu jest równy -15 ?

c) Dwudziesty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 130, a trzynasty jest równy 102. Który wyraz tego ciągu jest równy 70?

55. a) Wstaw pomiędzy liczby 2 i 6 dwie liczby tak, aby razem tworzyły cztery kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

b) Wstaw pomiędzy liczby -10 i 1 trzy liczby tak, aby razem tworzyły pięć kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

56. Siódmy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 16, a suma wyrazu drugiego i czwartego tego ciągu jest równa 8. Oblicz pierwszy i dziesiąty wyraz tego ciągu.

57. a) Znajdź taką liczbę p , że liczby $3, 7+p, 12+p$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

b) Dane są liczby a, b i c . Znajdź taką liczbę p , że liczby $a, b+p, c+p$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

58. Oblicz w pamięci wskazany wyraz ciągu arytmetycznego.

a) $a_{97} = -4, a_{103} = -2, a_{100}$

c) $a_8 = 19, a_{10} = 20, a_{16}$

b) $a_9 = -5, a_{13} = 5, a_{11}$

d) $a_{10} = 45, a_{20} = 40, a_{40}$

59. Pewien ciąg arytmetyczny ma 11 wyrazów. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy -20 , a ostatni 10. Ile wyrazów dodatnich ma ten ciąg?

60. Dla jakich wartości x podane wyrażenia tworzą ciąg arytmetyczny?

a) $x, 5 - x, 18$

c) $x^2, 8x, 3x^2$

b) $7 + x, 9 + 2x, 11 + 3x$

d) $2 + x, 7 + x, 10 + x$

61. Określ monotoniczność ciągu arytmetycznego (a_n) , w którym:

a) $a_n = -12 + 4n$

c) $a_{13} = -6, a_{25} = -7$

b) $a_1 = 120, r = -0,1$

d) $a_{16} = -9, r = \frac{1}{3}$

62. a) Dla dowolnej wartości x wartości wyrażeń $2x - 5, 3x - 1, 4x + 3$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Dla jakich wartości x ten ciąg jest rosnący?

b) Dla pewnych wartości x początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego są $a_1 = x^2, a_2 = x^2 + x + 3, a_3 = x^2 + 3x$. Znajdź czwarty wyraz tego ciągu.

c) Dla pewnych wartości x początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego są $a_1 = x^2 - 7, a_2 = 2x, a_3 = 3x^2 - 1$. Znajdź jedenasty wyraz tego ciągu.

63. a) Dla pewnych wartości x i y wartości wyrażeń $x - y, x + y, x + 2y - 5$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz różnicę tego ciągu.

b) W ciągu arytmetycznym dane są wyrazy: $a_1 = 6x + y, a_2 = 7x - y, a_4 = 5x, a_5 = 5y + 2$, gdzie x, y są pewnymi liczbami. Oblicz trzeci wyraz tego ciągu.

c) W ciągu arytmetycznym dane są wyrazy: $a_1 = x, a_2 = 2x + y, a_4 = y - 2, a_6 = -5x - y$, gdzie x, y są pewnymi liczbami. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

64. a) Suma dwóch początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 32, a suma dwóch następnych wyrazów jest równa 56. Znajdź piąty wyraz tego ciągu.

b) Suma trzech początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa -6 , a suma trzech następnych wyrazów jest równa 39. Znajdź sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

65. Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Suma tych liczb jest równa -12 , a ich iloczyn jest równy 36. Znajdź te liczby.

66. Suma pierwszego i trzeciego wyrazu pewnego ciągu arytmetycznego jest równa 2, a iloczyn pierwszego i czwartego wyrazu tego ciągu jest równy -9 . Znajdź pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

67. Iloczyn początkowych trzech wyrazów ciągu arytmetycznego jest równy -10 , a suma tych wyrazów jest równa 6. Znajdź czwarty wyraz tego ciągu.

68. Wykaż, że ciąg $a_n = \frac{2n^2 + 8n + 6}{n + 1}$ jest arytmetyczny, a ciąg $b_n = \frac{2n^2 + 8n + 6}{n + 2}$ nie jest arytmetyczny.

69. Czy można znaleźć takie liczby a, b, c, d, e , że:

- a) ciąg a, b, c i ciąg c, d, e są arytmetyczne, ale ciąg a, b, c, d, e nie jest arytmetyczny,
- b) ciąg a, b, c i ciąg b, c, d, e są arytmetyczne, ale ciąg a, b, c, d, e nie jest arytmetyczny?

70. Wykaż, że jeśli funkcja f jest liniowa, to podane wartości tej funkcji tworzą ciąg arytmetyczny.

- a) $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$
- b) $f(3), f(6), f(9), \dots, f(3n), \dots$
- c) $f(2), f(7), f(12), \dots, f(5n-3), \dots$

71. a) Wykaż, że w dowolnym ciągu arytmetycznym suma wyrazów piątego i piętnastego jest równa sumie wyrazów szóstego i czternastego.

b) Wykaż, że jeśli $m + n = p + q$ i m, n, p, q są dodatnimi liczbami całkowitymi, to w dowolnym ciągu arytmetycznym suma wyrazów a_n i a_m jest równa sumie wyrazów a_p i a_q .

72. Wykaż, że jeżeli dodatnie liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to liczby $b + c, a + c, a + b$ również tworzą ciąg arytmetyczny.

73. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są wyrazami (niekoniecznie kolejnymi) ciągu arytmetycznego, który nie jest stały, to liczba $\frac{c-b}{b-a}$ jest wymierna.

74. Wykaż, że jeśli liczby a_k, a_n, a_m są różnymi wyrazami (niekoniecznie kolejnymi) ciągu arytmetycznego, to $\frac{a_k - a_n}{k - n} = \frac{a_k - a_m}{k - m} = \frac{a_m - a_n}{m - n}$.

75. Ciągi (a_n) i (b_n) są arytmetyczne. Pierwszy wyraz ciągu (a_n) równy jest różnicy ciągu (b_n) , a różnica ciągu (a_n) jest równa pierwszemu wyrazowi ciągu (b_n) . Udowodnij, że drugie wyrazy tych ciągów są równe.

76. Wykaż, że jeżeli w ciągu arytmetycznym $a_n = m$ i $a_m = n$ ($m \neq n$), to różnica tego ciągu jest równa -1 .

77. W pewnym ciągu arytmetycznym wyrazy czwarty i piąty to liczby przeciwne, a dziesiąty wyraz jest o 10 większy od piętnastego. Znajdź siódmy wyraz tego ciągu.

78. Pierwszy wyraz ciągu (b_n) jest dwukrotnie większy od pierwszego wyrazu ciągu (a_n) . Różnica ciągu (b_n) jest dwukrotnie mniejsza od różnicy ciągu (a_n) . Drugie wyrazy tych ciągów są równe. Który wyraz ciągu (b_n) jest dwukrotnie większy od pierwszego wyrazu tego ciągu?

79. Ustal, dla jakich wartości x podane liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

- a) $\log_2 3, \log_2 x, \log_2(x-1)$
- b) $\log_3 4, \log_3(x-1), \log_3(x+1)$
- c) $\log(x-1), \log(x+1), \log 2x$

80. Dla jakich wartości x podane liczby są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Znajdź różnicę tego ciągu.

- a) $\log 2, \log 2^x, \log(2^x + 1,5)$
- b) $\log 2, \log(2^x - 1), \log(2^x + 3)$
- c) $\log 2, \log(2^x + 3), \log(2^x + 27)$

81. Znajdź sumę wyrazów a_1 i a_4 ciągu arytmetycznego (a_n) , jeżeli wiadomo, że zachodzą w nim podane równości.

- a) $a_1 + a_3 = 12$ i $a_2 a_4 = 84$,
- b) $a_1 + a_3 = 2$ i $a_1 a_4 = 1$.

82. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 30, a suma ich kwadratów jest równa 398. Znajdź te wyrazy.

83. a) Udowodnij twierdzenie:

Jeśli w ciągu (a_n) dla dowolnych dodatnich liczb naturalnych n i m zachodzi równość: $a_n + a_m = a_{n+m}$, to ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

- b) Sformułuj twierdzenie odwrotne do podanego powyżej i udowodnij, że nie jest ono prawdziwe.
- c) Jaki warunek musi zostać spełniony przez ciąg arytmetyczny, aby dla dowolnych dodatnich liczb naturalnych n i m zachodziła równość $a_n + a_m = a_{n+m}$?

84. Wyrazy a_{2k} i a_{2m} pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) spełniają warunek $a_{2k} + a_{2m} = 0$. Wykaż, że $a_{k+m} = 0$.

85. Wykaż, że jeżeli dodatnie liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to liczby $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$ również tworzą ciąg arytmetyczny.

86. Dwie liczby całkowite nazywamy względnie pierwszymi, jeśli jedynym ich wspólnym dzielnikiem jest liczba 1.

- a) Wykaż, że istnieje skończony ciąg arytmetyczny, w którym dowolne dwa wyrazy są względnie pierwsze.
- b) Wykaż, że nie istnieje nieskończony ciąg arytmetyczny, w którym każde dowolne dwa wyrazy są względnie pierwsze.

87. Niech ciąg (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o wyrazach różnych od zera, który nie jest ciągiem stałym. Ciąg (b_n) określony jest za pomocą wzoru $b_n = \frac{1}{a_n}$.

a) Wykaż, że istnieje skończony ciąg (b_n) , który ma co najmniej trzy wyrazy i wszystkie są liczbami całkowitymi.

b) Wykaż, że nie istnieje nieskończony ciąg (b_n) , którego wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi.

88. Wykaż, że liczby $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ nie mogą być wyrazami (niekoniecznie kolejnymi) tego samego ciągu arytmetycznego.

SUMA WYRAZÓW CIĄGU ARYTMETYCZNEGO

89. Oblicz sumę:

a) trzynastu początkowych wyrazów ciągu $a_n = 2(n-1) + 4$,

b) dwudziestu jeden początkowych wyrazów ciągu $a_n = -3(n-1) - 5$,

c) stu początkowych wyrazów ciągu $a_n = 2n + 15$,

d) piętnastu początkowych wyrazów ciągu $a_n = 3 - \frac{n}{2}$,

e) dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie równym -7 i różnicy 5 ,

f) pięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie równym 2 i różnicy $-0,1$.

90. Oblicz.

a) $25 + 26 + 27 + \dots + 173$

d) $42 + 47 + 52 + \dots + 107$

b) $19 + 21 + 23 + \dots + 119$

e) $0,01 + 0,02 + \dots + 1$

c) $-7 - 8 - 9 - \dots - 53$

f) $-0,5 - 0,4 - 0,3 - \dots + 0,3 + 0,4$

91. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy -12 , a różnica jest równa $1,5$. Oblicz, ile wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymana suma:

a) była równa 0 ,

b) była równa 150 ,

c) była większa od 400 .

92. Co najmniej ile początkowych wyrazów podanego ciągu arytmetycznego trzeba dodać, aby ich suma była większa niż 100 ?

a) $3, 4, 5, \dots$

b) $-6, -4, -2, \dots$

c) $-22, -12, -2, \dots$

93. Rozwiąż równanie.

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = 3160$
- b) $3 + 6 + 9 + \dots + 3n = 273$
- c) $2 + 7 + 12 + \dots + (5n - 3) = 1199$

94. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Znajdź sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

- a) $a_{11} = -6$ i $a_{13} = -9$
- c) $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_{11} = 4$
- e) $a_1 = 3$ i $S_3 = 18$
- b) $a_2 = -5$ i $r = -\frac{1}{3}$
- d) $a_{20} = 10$ i $r = 0,3$
- f) $S_2 = -1$ i $r = 5$

95. Oblicz sumę:

- a) wszystkich dodatnich wyrazów ciągu arytmetycznego o początkowych wyrazach 50, 47, 44, ...
- b) wszystkich wyrazów ciągu $a_n = 2n + 7$ mniejszych od 100.

96. a) Ile wyrazów ciągu arytmetycznego 1, 5, 9, ... trzeba dodać, aby otrzymana suma była większa od sumy stu początkowych dodatnich liczb całkowitych?

b) Ile wyrazów ciągu arytmetycznego 1, 7, 13, ... trzeba dodać, aby otrzymana suma była większa od sumy stu początkowych dodatnich parzystych liczb całkowitych?

97. Oblicz sumę wszystkich dodatnich liczb naturalnych:

- a) trzycyfrowych,
- b) trzycyfrowych podzielnych przez 5.

98. Ciąg jest opisany wzorem $a_n = 50 - 6n$.

- a) Oblicz sumę stu początkowych wyrazów tego ciągu.
- b) Oblicz sumę dodatnich wyrazów tego ciągu.
- c) Oblicz sumę stu początkowych ujemnych wyrazów tego ciągu.

99. a) Ile najwięcej dodatnich wielokrotności liczby 7 można dodać, aby ich suma nie przekroczyła liczby 1000?

b) Ile co najwyżej wyrazów ciągu arytmetycznego 18, 18,5, 19, 19,5, ... można dodać, aby ich suma nie przekroczyła liczby 1000?

100. a) Suma początkowych dziesięciu wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego wynosi 45, a suma następnych dziesięciu -255. Ile wynosi suma kolejnych dziesięciu wyrazów tego ciągu?

b) Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , począwszy od dziesiątego, równego 4, a skończywszy na dwudziestym — równym 8.

- 101.** Oblicz sumę tych dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , których indeksy są podzielne przez 3, wiedząc, że $a_2 = -7$ oraz $a_4 = 1$.
- 102.** a) Siedemnasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 35, a suma siedemnastu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 255. Oblicz a_3 .
 b) Suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wynosi 710, a wyraz dwudziesty pierwszy wynosi 67. Oblicz a_2 .
 c) Suma dwunastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wynosi 228, a suma wyrazów trzynastego i czternastego wynosi 94. Oblicz a_5 .
- 103.** a) Suma jedenastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 88, a różnica tego ciągu wynosi 1,5. Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu.
 b) Suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi 160, a dziesiąty wyraz jest równy 6. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.
 c) Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 72, a drugi wyraz jest siedem razy większy od wyrazu piątego. Oblicz sumę dwunastu początkowych wyrazów tego ciągu.
- 104.** a) Suma pierwszego i ostatniego wyrazu pewnego skończonego ciągu arytmetycznego jest równa -20 . Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa -150 . Z ilu wyrazów składa się ten ciąg?
 b) O wyrazach ciągu arytmetycznego (a_n) wiadomo, że $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = 126$ oraz $a_2 + a_{2n} = 12$. Oblicz n .
 c) O wyrazach ciągu arytmetycznego (a_n) wiadomo, że $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n+1} = 880$ oraz $a_1 + a_{2n+1} = 110$. Oblicz n .
- 105.** Pewien kawałek drutu o długości 78 cm podzielono na części, których długości tworzą ciąg arytmetyczny.
 a) Na ile części podzielono ten kawałek drutu, jeśli najdłuższa część ma długość 23 cm, a różnica ciągu jest równa 4 cm?
 b) Jaka jest różnica tego ciągu, jeśli drut podzielono na 13 części, a najkrótsza z nich ma długość 3 cm?
- 106.** Dwa skończone ciągi arytmetyczne mają po tyle samo wyrazów, a suma wszystkich wyrazów obu tych ciągów jest równa 403. Początkowymi dwoma wyrazami pierwszego z tych ciągów są -11 i -8 , a drugiego 66 i 59. Z ilu wyrazów składa się każdy z tych ciągów?
- 107.** a) Znajdź liczbę naturalną, która jest równa sumie wszystkich liczb naturalnych od niej mniejszych.
 b) Znajdź liczbę naturalną, która jest dziesięć razy mniejsza od sumy wszystkich liczb naturalnych od niej mniejszych.

108. a) Trzeci i szósty wyraz ciągu arytmetycznego są równe 5. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

b) Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 0. Oblicz sumę jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu.

c) Suma trzeciego i dziesiątego wyrazu ciągu arytmetycznego jest równa 3. Oblicz sumę dwunastu początkowych wyrazów tego ciągu.

109. a) Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy -20 , a różnica -3 . Oblicz sumę wyrazów od dziesiątego do trzydziestego (włącznie).

b) Oblicz sumę $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{33}$ ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 5 - 4n$.

c) Wykaż, że w ciągu arytmetycznym (a_n) o różnicy r sumę $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$ można obliczyć za pomocą wzoru $a_1(n - m + 1) + \frac{r}{2} [n(n - 1) - (m - 1)(m - 2)]$.

110. a) Wykaż, że dla dowolnej wartości p liczby $(1 + p)^2$, $1 + p^2$, $(1 - p)^2$ tworzą ciąg arytmetyczny.

b) Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, którego początkowymi wyrazami są $(1 + p)^2$, $1 + p^2$, $(1 - p)^2$, jest równa 450. Oblicz wartość p .

111. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, w którym $S_5 = 75$ i $S_{10} = 150$.

112. Trójkąt równoboczny podzielono na n „pięter” małych trójkątów równobocznych. Rysunek obok przedstawia podział dla $n = 5$. Uzasadnij, że liczba małych trójkątów jest równa kwadratowi liczby pięter.



113. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{x+6} + \frac{2}{x+6} + \frac{3}{x+6} + \dots + \frac{x-1}{x+6} + \frac{x}{x+6} = 3$

b) $\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+2} + \dots + \frac{3x-5}{x+2} + \frac{3x-2}{x+2} = 15$

c) $\frac{6}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{11}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{16}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \dots + \frac{5x-4}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} + \frac{5x+1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 11$

114. Początkowe dwa wyrazy pewnego ciągu arytmetycznego to $\log 5x$ oraz $\log 25x$. Dla jakiej wartości x suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $\log 5^{50}$?

115. a) Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \log_2 x^n$, gdzie $x > 0$. Wykaż, że suma n początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem $S_n = \frac{n^2 + n}{2} \log_2 x$.

b) Ciąg (b_n) określony jest wzorem $b_n = \log_2 yx^n$, gdzie $x > 0$, $y > 0$. Wykaż, że suma n początkowych wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem:

$$S_n = n \left(\log_2 y + \frac{n+1}{2} \log_2 x \right)$$

116. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny o różnicy $\frac{1}{2}$ i $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = 875$.

a) Znajdź pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Oblicz sumę $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{100}$.

117. a) Ciąg opisany jest wzorem $a_n = -5n + 75$. Dla jakich wartości n zachodzi równość $11a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$?

b) Ciąg opisany jest wzorem $b_n = 4n + 50$. Dla jakich wartości n zachodzi równość $7b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$?

c) Ciąg opisany jest wzorem $c_n = 48 - 6n$. Dla jakich wartości n zachodzi równość $c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1} = 27c_n$?

118. Ciąg opisany jest wzorem $a_n = 6n - 200$.

a) Oblicz sumę tych dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu, które są podzielne przez 4.

b) Oblicz sumę tych wszystkich ujemnych wyrazów ciągu (a_n) , które są podzielne przez 4.

c) Oblicz sumę tych dwudziestu początkowych dodatnich wyrazów tego ciągu, które są podzielne przez 4.

119. W każdym z poniższych zadań n oznacza dodatnią liczbę naturalną.

a) Oblicz $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot n$.

b) Oblicz $S_n = 2 - 7 + 12 - 17 + 22 - 27 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot (5n - 3)$.

c) Ciąg (a_n) jest arytmetyczny. Wyraż sumę $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_n$ za pomocą n , a_1 oraz r .

120. Oblicz.

a) $2000^2 - 1999^2 + 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + 1994^2 - 1993^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$

b) $2000^2 + 1999^2 - 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 + 1995^2 - 1994^2 - 1993^2 + \dots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2$

121. a) Oblicz sumę wszystkich ułamków o mianowniku 5 należących do przedziału $\langle 1; 10 \rangle$.

b) Oblicz sumę wszystkich nieskracalnych ułamków o mianowniku 7 należących do przedziału $\langle 0; 5 \rangle$.

c) Oblicz sumę wszystkich nieskracalnych ułamków o mianowniku 3 należących do przedziału $\langle a; b \rangle$, gdzie $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ i $b > a$.

122. Udowodnij, że jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny, to dla dowolnej liczby naturalnej k ciąg $b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, $b_2 = a_{k+1} + \dots + a_{2k}$, $b_3 = a_{2k+1} + \dots + a_{3k}$, ... też jest arytmetyczny. Jaka jest różnica ciągu (b_n) ?

123. W pewnym ciągu arytmetycznym $S_{101} = 0$. Znajdź a_{51} .

124. W pewnym ciągu arytmetycznym $\frac{S_{2n}}{S_n} = 3$. Oblicz $\frac{S_{3n}}{S_n}$.

125. Wykaż, że dla dowolnego ciągu arytmetycznego spełniona jest równość $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

126. Wykaż, że jeżeli dla pewnego ciągu arytmetycznego $S_m = S_n$, gdzie $m \neq n$, to $S_{m+n} = 0$.

CIĄG GEOMETRYCZNY

127. Czy podany ciąg jest geometryczny?

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}$

e) $-0,6, -0,06, -0,006, -0,0006$

b) $-5, -2, 1, 4$

f) $4, \frac{1}{4}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$

c) $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

g) $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$

d) $4, 4\sqrt{3}, 12, 12\sqrt{3}$

h) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}, (\sqrt{2}-1)^2, \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}+1}, (\sqrt{2}-1)^4$

128. Cztery z podanych ciągów są geometryczne. Znajdź siódme wyrazy tych ciągów.

$(a_n): \frac{1}{25}, \frac{2}{5}, 4, 40, \dots$

$(d_n): 1\frac{13}{27}, 2\frac{2}{9}, 3\frac{1}{3}, 5, \dots$

$(b_n): 60, -30, 15, -7\frac{1}{2}, \dots$

$(e_n): 40, -20, 10, 5, \dots$

$(c_n): 100, 50, 10, 5, \dots$

$(f_n): -123, 12,3, -1,23, 0,123, \dots$

129. Sprawdź, który z podanych ciągów jest geometryczny.

$a_n = 2n - 3$ $b_n = 5 \cdot 2^n$ $c_n = (-3)^n$ $d_n = \frac{2}{5^n}$ $e_n = \frac{n-1}{n}$ $f_n = 4 - 4^n$

130. Podane liczby to dwa początkowe wyrazy ciągu geometrycznego. Znajdź iloraz oraz dwa następne wyrazy tego ciągu.

a) $5, 1$

b) $-0,2, -0,4$

c) $\frac{2}{3}, -1\frac{1}{3}$

d) $-5, 5$

131. Podany ciąg jest geometryczny. Znajdź jego iloraz oraz brakujące wyrazy.

a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{10}, a_3, a_4$

c) $a_1, 2, a_3, 4$

b) $a_1, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, a_4$

d) $-1, a_2, -\frac{1}{9}, a_4$

132. Zapisz wzór ogólny i oblicz piąty wyraz ciągu geometrycznego, w którym:

a) $a_1 = -16$, $q = \frac{1}{2}$ b) $a_1 = \frac{1}{32}$, $q = -2$ c) $a_1 = 12$, $q = 0,1$

133. Zapisz wzór ogólny ciągu geometrycznego, którego początkowymi wyrazami są podane liczby.

a) $3\frac{1}{2}$, 7, 14 c) $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ e) -3, 0, 0
b) -20, 10, -5 d) 2, $\sqrt{2}$, 1 f) 6, 6, 6

134. Którym wyrazem podanego ciągu geometrycznego jest liczba x ?

a) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \dots$, $x = -32$ c) 16, 12, $\dots$, $x = 6\frac{3}{4}$
b) $1\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \dots$, $x = \frac{1}{135}$ d) $\frac{1}{81}\pi, \frac{1}{27}\pi^2, \dots$, $x = 81\pi^9$

135. a) Zapisz wzory ogólne ciągów określonych rekurencyjnie:

$$a_1 = 0,3 \text{ i } a_{n+1} = 2a_n \quad b_1 = -4 \text{ i } b_{n+1} = \sqrt{5}b_n \quad c_1 = 1 \text{ i } c_{n+1} = -\frac{c_n}{6}$$

b) Zapisz wzory rekurencyjne ciągów określonych za pomocą wzorów ogólnych:

$$d_n = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n \quad e_n = -9 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^n \quad f_n = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$$

136. Określ monotoniczność następujących ciągów geometrycznych:

$$\begin{array}{lll} a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n & c_n = 20 \cdot (\sqrt[3]{3})^n & e_n = (-2,5)^n \\ b_n = -\frac{2}{11^n} & d_n = -3 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^n & f_n = \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^n \end{array}$$

137. Wykaż, że podany ciąg jest geometryczny. Wyznacz iloraz tego ciągu.

a) $a_n = 5 \cdot 2^n + 2^{n+1}$ b) $a_n = 7 \cdot 3^{2n} - 9^n$ c) $a_n = 4 \cdot 5^{-n} - 2 \cdot 5^{-n+5}$

138. Dane są dwa wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz w pamięci, jaką liczbą należy zastąpić znak zapytania.

a) $a_7 = 2$, $a_9 = 10$, $a_{11} = ?$ c) $a_5 = 3$, $a_7 = \frac{3}{2}$, $a_{11} = ?$
b) $a_3 = -4$, $a_9 = -\frac{1}{2}$, $a_6 = ?$ d) $a_{10} = -1$, $a_{20} = -10$, $a_{40} = ?$

139. a) Wstaw pomiędzy liczby 3 i 15 takie dwie liczby, aby wraz z danymi tworzyły cztery kolejne wyrazy ciągu geometrycznego.

b) Wstaw pomiędzy liczby 1 i 9 takie trzy liczby, aby wraz z danymi tworzyły pięć kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

c) Wstaw pomiędzy liczby -121,5 i 16 takie cztery liczby, aby wraz z danymi tworzyły sześć kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

140. a) Czwartym wyrazem malejącego ciągu geometrycznego jest liczba 15, a szóstym — liczba $\frac{3}{5}$. Znajdź piąty wyraz tego ciągu.

b) Liczby 16, a , b , c , $\frac{1}{4}$ tworzą ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich. Znajdź liczby a , b i c .

c) Pomiedzy 64 i 8 wstaw pięć liczb tak, aby razem tworzyły one siedem kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

141. Znajdź wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , jeśli:

a) $a_5 = -\frac{1}{2}$ i $a_{10} = -16$ b) $a_4 = \frac{24}{100}$ i $a_6 = \frac{96}{225}$ c) $a_{100} = -17$ i $a_{253} = 17$

142. Dla jakich wartości x podane liczby tworzą ciąg geometryczny?

a) $\frac{x^2}{2}$, 7, 2

c) 2, $x+1$, $x+4$

b) -16, $2x+4$, -9

d) $2x+1$, 3, $8x-1$

143. a) Czy można znaleźć takie liczby a , b , c , d , e , że ciąg a , b , c i ciąg c , d , e są geometryczne, ale ciąg a , b , c , d , e nie jest geometryczny?

b) Czy można znaleźć takie liczby a , b , c , d , e , że ciąg a , b , c i ciąg b , c , d , e są geometryczne, ale ciąg a , b , c , d , e nie jest geometryczny?

144. Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa -14, a ich iloczyn jest równy 216. Znajdź te liczby.

145. a) W ciągu geometrycznym (a_n) zachodzą równości: $a_1 + a_3 = 7$ i $a_2 + a_4 = 14$. Znajdź pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

b) W ciągu geometrycznym (a_n) zachodzą równości: $a_3 - a_1 = 10$ i $a_4 - a_2 = 15$. Znajdź piąty wyraz tego ciągu.

c) W ciągu geometrycznym (a_n) zachodzą równości: $a_3 + a_4 = 15$ i $a_3 - a_5 = 5$. Znajdź drugi wyraz tego ciągu.

146. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 37, a suma dwóch początkowych wyrazów jest o 5 większa od trzeciego wyrazu. Oblicz iloraz tego ciągu.

147. a) Suma dwóch początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 72, a suma dwóch następnych wyrazów jest równa 8. Znajdź piąty wyraz oraz iloraz tego ciągu.

b) Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 280, a suma trzech następnych wyrazów wynosi 35. Znajdź sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

- 148.** a) W ciągu geometrycznym (a_n) suma dwóch początkowych wyrazów jest równa potrojonej sumie wyrazu drugiego i trzeciego. Znajdź iloraz tego ciągu.
 b) W ciągu geometrycznym (a_n) suma wyrazu drugiego i czwartego jest dwa razy większa od sumy wyrazu pierwszego i trzeciego. Znajdź iloraz tego ciągu.
- 149.** a) Suma czterech początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego jest cztery razy większa od sumy dwóch początkowych wyrazów tego ciągu. Wyznacz iloraz tego ciągu.
 b) Suma dwóch początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 9, a suma czterech początkowych wyrazów wynosi 45. Oblicz iloraz tego ciągu.
- 150.** a) Iloczyn pierwszego i drugiego wyrazu ciągu geometrycznego wynosi 96, a iloczyn drugiego i trzeciego wyrazu tego ciągu jest równy 216. Znajdź czwarty wyraz tego ciągu.
 b) Iloczyn pierwszego i drugiego wyrazu ciągu geometrycznego jest równy 1, a iloczyn trzeciego i czwartego wyrazu tego ciągu wynosi 81. Znajdź piąty wyraz tego ciągu.
 c) Iloczyn pierwszego i czwartego wyrazu ciągu geometrycznego jest równy 5, a iloczyn drugiego i szóstego wyrazu tego ciągu wynosi 10. Znajdź dziesiąty wyraz tego ciągu.
- 151.** a) Wykaż, że w dowolnym ciągu geometrycznym iloczyn wyrazów siódmego i dwudziestego jest równy iloczynowi wyrazów ósmego i dziewiętnastego.
 b) Wykaż, że w dowolnym ciągu geometrycznym iloczyn wyrazów a_n i a_m jest równy iloczynowi wyrazów a_{n+k} i a_{m-k} , gdzie k jest liczbą naturalną oraz $m > k$.
 c) Wykaż, że w ciągu geometrycznym (a_n) zachodzi równość $a_1 \cdot a_n = a_k \cdot a_{n-k+1}$, gdzie k jest liczbą naturalną dodatnią oraz $n > k - 1$.
- 152.** Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q ($q \neq 0$), to ciągiem geometrycznym jest również ciąg (b_n) określony podanym wzorem. Znajdź iloraz ciągu (b_n) .
- a) $b_n = 2a_n$ b) $b_n = \frac{1}{a_n}$ c) $b_n = a_n^2$
- 153.** a) Znajdź liczbę q taką, że liczby 3, $7q$, $12q$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
 b) Dane są trzy liczby: a , b , c . Znajdź liczbę q taką, że liczby a , bq , cq są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
- 154.** Liczby 9, x , y tworzą ciąg arytmetyczny, a liczby 9, $x - 2$, y tworzą ciąg geometryczny. Znajdź trzeci wyraz tych ciągów.
- 155.** W ciągu arytmetycznym -8 , -5 , -2 , ... wyrazy a_k , a_{k+1} , a_{k+5} są trzema kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Znajdź te wyrazy.

- 156.** Wykaż, że jeśli ciąg (a_n) jest arytmetyczny i $b > 0$, to ciąg opisany wzorem $c_n = b^{a_n}$ jest geometryczny.
- 157.** a) Wstaw między 2 i 9 takie dwie liczby, aby pierwsze trzy liczby tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy — ciąg geometryczny.
b) Wstaw między 1 i 4 takie trzy liczby, aby suma wszystkich pięciu liczb była równa 25, pierwsze trzy z tych liczb tworzyły ciąg arytmetyczny, a ostatnie trzy — ciąg geometryczny.
- 158.** Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 7, a suma odwrotności tych liczb jest równa $\frac{7}{9}$. Znajdź te liczby.
- 159.** Suma trzech kolejnych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego wynosi 39, a suma logarytmów dziesiętnych tych wyrazów jest równa 3. Znajdź te wyrazy.
- 160.** Wykaż, że w ciągu geometrycznym o ilorazie równym $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ suma dowolnych dwóch kolejnych wyrazów jest równa następującemu po nich wyrazowi.
- 161.** Ciąg (a_n) jest geometryczny. Wykaż, że ciąg (b_n) opisany podanym wzorem też jest geometryczny.
- a) $b_n = a_n + a_{n+1}$ b) $b_n = a_n a_{n+1}$ c) $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \ (a_n \neq 0)$
- 162.** Ciągi (a_n) i (b_n) są geometryczne i mają różne ilorazy. Czy ciąg (c_n) opisany podanym wzorem też jest geometryczny?
- a) $c_n = a_n + b_n$ b) $c_n = a_n b_n$ c) $c_n = \frac{a_n}{b_n} \ (b_n \neq 0)$
- 163.** Najdłuższy bok trójkąta ma długość a , a wysokość opuszczona na ten bok ma długość h . Pozostałe dwa boki mają długości b i c . Liczby a, b, c, h są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wykaż, że trójkąt jest prostokątny.
- 164.** Wykaż, że jeżeli liczby wyrażające długości boków trójkąta prostokątnego są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to co najmniej jedna z tych liczb nie jest wymierna.
- 165.** Wykaż, że liczby 5, 6, 7 nie mogą być wyrazami (niekoniecznie kolejnymi) tego samego ciągu geometrycznego.
- 166.** a) Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a ich suma jest równa 15. Liczby $a, b-1, c$ tworzą ciąg geometryczny. Znajdź liczby a, b, c .
b) Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a ich suma jest równa 15. Liczby $a+1, b+4, c+19$ tworzą ciąg geometryczny. Znajdź liczby a, b, c .
c) Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a ich suma jest równa 21. Liczby $a-1, b-4, c-3$ tworzą ciąg geometryczny. Znajdź liczby a, b, c .

- 167.** Trzy liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, a liczby $a + b, b + c, c + a$ tworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź stosunek liczby c do liczby a .
- 168.** a) Znajdź cztery liczby w, x, y, z takie, że $w + z = 14, x + y = 12$, liczby w, x, y są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby x, y, z są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
 b) Znajdź cztery liczby w, x, y, z takie, że $w + z = -8, x + y = -4$, liczby w, x, y są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby x, y, z są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
- 169.** Pierwszym wyrazem skończonego ciągu arytmetycznego jest 1, a ostatnim -57 . Drugi, trzeci i szósty wyraz tego ciągu tworzą (w podanej kolejności) ciąg geometryczny. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu arytmetycznego.
- 170.** Liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny. Suma tych liczb jest równa 18. Liczby $a, b, c + 1$ tworzą ciąg geometryczny. Znajdź różnicę ciągu arytmetycznego.
- 171.** a) Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego i ich suma jest równa 26. Liczby $a + 1, b + 6, c + 3$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Znajdź liczby a, b i c .
 b) Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego i ich suma jest równa 21. Liczby $a, 2b, c - 1$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Znajdź liczby a, b i c .
- 172.** Liczby a, b, c, d są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, a liczby $a - 2, b - 3, c - 9, d - 25$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Znajdź piąte wyrazy tych ciągów.
- 173.** a) Pierwszy, trzeci i piąty wyraz ciągu geometrycznego są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Znajdź iloraz tego ciągu geometrycznego.
 b) Pierwszy, trzeci i jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znajdź iloraz tego ciągu geometrycznego.
- 174.** a) Suma trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 21. Wyrazy te są jednocześnie pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Znajdź te wyrazy.
 b) Suma trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 26. Wyrazy te są jednocześnie pierwszym, drugim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Znajdź te wyrazy.
 c) Trzy liczby, których suma jest równa 93, tworzą ciąg geometryczny. Te same liczby stanowią pierwszy, drugi i siódmy wyraz pewnego ciągu arytmetycznego. Znajdź te liczby.

175. Udowodnij, że z nieskończonego ciągu geometrycznego o wzorze ogólnym $a_n = 2^n$ nie można wybrać trzech wyrazów tworzących ciąg arytmetyczny.

176. Wykaż, że kwadrat iloczynu n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q jest równy:

a) $a_1^{2n} \cdot q^{n^2 - n}$

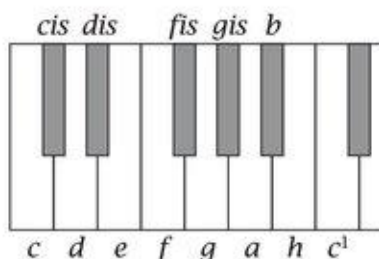
b) $(a_1 \cdot a_n)^n$

177. a) Wykaż, że jeżeli dodatnie liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, to liczby $\log_p a, \log_p b, \log_p c$, gdzie p jest dowolną liczbą dodatnią różną od 1, tworzą ciąg arytmetyczny.

b) Wykaż, że jeżeli dodatnie liczby a, b, c są różne od 1 i tworzą ciąg geometryczny, to liczby $\frac{1}{\log_a p}, \frac{1}{\log_b p}, \frac{1}{\log_c p}$ gdzie p jest dowolną liczbą dodatnią różną od 1, tworzą ciąg arytmetyczny.

178. Wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu arytmetycznego (a_n) są liczbami naturalnymi. Wykaż, że z wyrazów tego ciągu można utworzyć ciąg geometryczny o co najmniej trzech wyrazach.

179. Na rysunku przedstawiono fragment klawiatury fortepianu obejmujący jedną oktavę. Dźwięki kolejnych klawiszy ($c, cis, d, dis, e, \dots, c^1$) różnią się o pół tonu, a stosunek ich częstotliwości wynosi $\sqrt[12]{2}$. Częstotliwość dźwięku a wynosi 440 Hz.



- Jakiemu stosunkowi częstotliwości odpowiada oktawa (np. od c do c^1)?
- Jakiemu stosunkowi częstotliwości odpowiada kwinta (np. od c do g), a jakiemu kwarta (np. od c do f)? Zapisz przybliżone wielkości tych stosunków w postaci ułamków zwykłych o jak najmniejszych licznikach i mianownikach.
- Jaka jest częstotliwość dźwięku fis ?
- Który dźwięk ma częstotliwość najbliższą wartości 330 Hz?

SUMA WYRAZÓW CIĄGU GEOMETRYCZNEGO

180. Oblicz sumę:

- pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 5$ i $q = \frac{1}{2}$,
- sześciu początkowych wyrazów ciągu, w którym $b_n = \frac{6}{3^n}$,
- jedenastu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego 13, -13, 13, ...

181. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 64, a iloraz tego ciągu jest równy $\frac{1}{2}$. Oblicz, ile wyrazów tego ciągu trzeba dodać, aby otrzymana suma:

- a) była równa 126 b) była równa 127,75 c) była większa od 127,9

182. Ile co najmniej początkowych wyrazów podanego ciągu geometrycznego trzeba dodać, aby ich suma była większa niż 100?

- a) 1, 2, 4, ... b) $\frac{1}{3}$, 1, 3, ... c) 2, 3, $4\frac{1}{2}$, ...

183. Uzupełnij tabelkę, wiedząc, że (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

a_1	q	a_n	n	S_n
10	$\frac{1}{4}$		5	
$-\frac{1}{2}$		-64	8	
2	-3	162		
-8		27		13

184. a) Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, którego pierwszy wyraz jest równy 1, a czwarty wyraz jest równy -27.

b) Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, którego siódmy wyraz jest równy 8, a ósmy wyraz jest równy -4.

c) Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, którego trzeci wyraz jest równy 3, a ósmy wyraz jest równy 96.

185. Oblicz sumę wyrazów podanego ciągu geometrycznego.

- a) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{64}$ d) $\frac{3}{2} + 1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^5$
 b) $\frac{23}{10} + \frac{23}{100} + \dots + \frac{23}{10^7}$ e) $190 + 19 + \dots + 0,000019$
 c) $500 + 100 + \dots + \frac{4}{5^4}$ f) $10 + 5 + \dots + \frac{5}{32}$

186. Ciąg (a_n) jest geometryczny. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

- a) $q = 1,5$ i $S_4 = 65$ b) $q = -2$ i $S_5 = 16,5$ c) $q = -0,1$ i $S_6 = 909,09$

187. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym. Oblicz, ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby otrzymać sumę S_n .

- a) $a_1 = 4$, $q = -\frac{1}{2}$, $S_n = 2\frac{21}{32}$ c) $a_1 = 0,9$, $q = \frac{1}{3}$, $S_n = 1\frac{47}{135}$
 b) $a_1 = 1$, $q = 2$, $S_n = 4095$ d) $a_1 = -12$, $q = -5$, $S_n = -156\,252$

188. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego o ilorazie 10 jest równy 3. Ile początkowych wyrazów tego ciągu wystarczy dodać, aby otrzymać sumę większą od 10^6 ?

189. W czasie rozmnażania komórki przez podział na każdym etapie z jednej komórki powstają dwie.

- a) Ile komórek powstanie w wyniku podziału jednej komórki po 20 etapach?
- b) Ile było etapów, jeśli z jednej komórki powstało 67 108 864 komórek?

190. Wyobraź sobie, że projektujesz piramidę zbudowaną z bloków skalnych ułożonych warstwami na planie kwadratu. Załóżmy, że bok pierwszej warstwy takiej piramidy ma długość 200 m, a długość boku każdej następnej stanowi 0,9 długości boku warstwy leżącej bezpośrednio pod nią.

- a) Oblicz, jaką długość miałby bok dziesiątej warstwy.
- b) Oblicz, z co najmniej ilu warstw byłaby zbudowana ta piramida, jeśli ostatnia warstwa miałaby bok krótszy niż 50 m.

191. a) Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 81, a iloraz wynosi $\frac{1}{3}$. Oblicz sumę wyrazów od szóstego do dziesiątego (włącznie).

b) Ciąg geometryczny jest określony wzorem ogólnym $a_n = \frac{1}{32} \cdot 2^n$. Oblicz sumę $a_4 + a_5 + a_6 + \dots + a_{12}$.

c) Wykaż, że w ciągu geometrycznym (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q sumę $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$ można obliczyć za pomocą wzoru $\frac{a_1(q^n - q^{m-1})}{q - 1}$.

192. a) Pierwszy wyraz pewnego ciągu geometrycznego jest równy 2. Suma początkowych ośmiu wyrazów tego ciągu jest 5 razy większa od sumy początkowych czterech wyrazów. Oblicz dziewiąty wyraz tego ciągu.

b) Piąty wyraz malejącego ciągu geometrycznego jest odwrotnością wyrazu pierwszego, a czwarty jest 6 razy mniejszy od sumy wyrazów drugiego i trzeciego. Oblicz drugi wyraz tego ciągu.

193. Znajdź iloraz skończonego ciągu geometrycznego o parzystej liczbie wyrazów, jeżeli wiadomo, że:

- a) suma wszystkich wyrazów jest 6 razy większa od sumy wyrazów o nieparzystych numerach,
- b) suma wszystkich wyrazów jest 10 razy większa od sumy wyrazów o parzystych numerach.

194. Dwa skończone ciągi geometryczne mają po tyle samo wyrazów, a suma wszystkich wyrazów obu tych ciągów jest równa 5621. Dwoma początkowymi wyrazami pierwszego z tych ciągów są liczby 5 i 10, a drugiego z tych ciągów są liczby 1536 i 768. Z ilu wyrazów składa się każdy z tych ciągów?

195. Znajdź wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu 1, 11, 111, ...

196. Liczba naturalna a ma w zapisie $2n$ cyfr i wszystkie są jedynkami, a liczba naturalna b ma w zapisie n cyfr i wszystkie są dwójkami. Wykaż, że różnica $a - b$ jest kwadratem liczby naturalnej.

197. Niech S_k oznacza sumę k początkowych wyrazów ciągu (a_n) . Wiadomo, że $S_1 = p - 1$, $S_2 = 4p - 6$, $S_3 = 13p - 15$, $S_4 = 40p - 28$, $S_5 = 121p - 45$, ...

- Oblicz cztery początkowe wyrazy tego ciągu.
- Znajdź wzór ogólny tego ciągu.
- Znajdź wzór na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

198. Znajdź wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu.

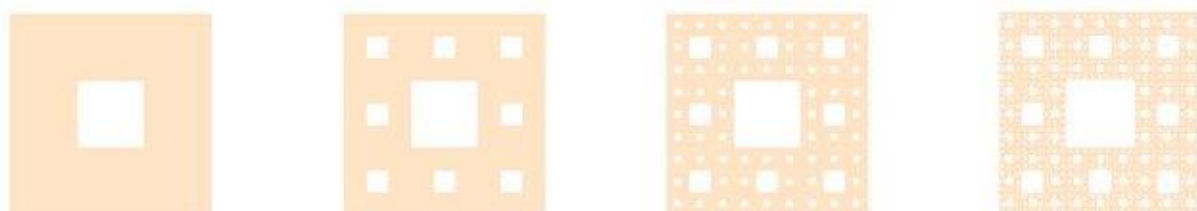
- $1, 2 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 4 \cdot 2^3, \dots, n \cdot 2^{n-1}$
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \dots, \frac{n}{2^n}$

199. Ciąg określony jest wzorem rekurencyjnym $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Znajdź wzór ogólny oraz wzór na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

200. Ciąg (a_n) jest geometryczny o ilorazie q takim, że $|q| \neq 1$. Wykaż, że:

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_{n-1} a_n = \frac{q(a_n^2 - a_1^2)}{q^2 - 1}$$

201. Dywan Sierpińskiego to figura, która powstaje z kwadratu w następujący sposób: w pierwszym etapie należy podzielić kwadrat na dziewięć mniejszych kwadratów i usunąć środkowy z nich. W następnym etapie postępujemy podobnie, tzn. dzielimy każdy z pozostałych kwadratów na dziewięć kwadratów i usuwamy środkowy itd. (zob. rysunek). Przyjmując, że bok pierwszego kwadratu ma długość a , oblicz pole pozostałej części tego kwadratu po piątym etapie.



202. Trójkąt Sierpińskiego to figura, która powstaje z trójkąta równobocznego w następujący sposób: w pierwszym etapie należy podzielić trójkąt równoboczny na cztery trójkąty równoboczne i usunąć środkowy z nich. W następnych etapach postępujemy podobnie (zob. rysunek). Oblicz, jaki procent pola początkowego trójkąta stanowi pole figury otrzymanej po szóstym etapie.



PROCENT PROSTY I PROCENT SKŁADANY

203. Kwota K zł została wpłacona na lokatę oprocentowaną $p\%$ w skali roku. Co roku przez n lat są naliczane i wypłacane odsetki, a początkowa kwota K zł pozostaje na lokacie. Sumę wypłaconych odsetek (w zł) po n latach oznaczmy literą D . Uzupełnij tabelę.

K	2000	45 000	6000	15 000	1200	80 000		
p	6%	1,2%	2%	0,9%			3%	1,5%
n	3	10			12	4	2	8
D			600	945	576	1600	450	2880

204. Na konto oprocentowane $p\%$ w stosunku rocznym wpłacono K zł. Odsetki są naliczane po upływie każdego roku i dodawane do kwoty na lokacie. Oblicz, jaka kwota znajdzie się na koncie po upływie n lat.

- a) $K = 500$, $n = 3$, $p = 3$ c) $K = 4200$, $n = 5$, $p = 2$
 b) $K = 2700$, $n = 2$, $p = 4,5$ d) $K = 50\,000$, $n = 7$, $p = 5,5$

205. Na konto oprocentowane $p\%$ w stosunku rocznym wpłacono pewną kwotę. Odsetki były doliczane po upływie każdego roku. Po upływie n lat na koncie zgromadziło się S zł. Jaką kwotę wpłacono na to konto?

- a) $S = 4405,24$, $n = 5$, $p = 3$ c) $S = 15\,770,90$, $n = 8$, $p = 1,5$
 b) $S = 5628,65$, $n = 4$, $p = 2$ d) $S = 20\,979,41$, $n = 6$, $p = 0,8$

206. Po wpłaceniu na konto kwoty K zł i po upływie n lat stan konta wyniósł S zł. Jakie było oprocentowanie tego konta w stosunku rocznym, jeśli odsetki były kapitalizowane co roku?

- a) $K = 6000$, $S = 6955,64$, $n = 5$ c) $K = 4200$, $S = 5002,27$, $n = 3$
 b) $K = 8500$, $S = 11\,069,21$, $n = 6$ d) $K = 14\,000$, $S = 15\,161,19$, $n = 10$

207. Na konto oprocentowane $p\%$ w stosunku rocznym wpłacono K zł. Odsetki są doliczane po upływie każdego roku. Po ilu latach stan konta wyniesie S zł?

- a) $K = 8000$, $S = 8659,46$, $p = 2$ c) $K = 7500$, $S = 10\,221,73$, $p = 3,5$
 b) $K = 2600$, $S = 3289,83$, $p = 4$ d) $K = 13\,000$, $S = 14\,475,63$, $p = 0,9$

208. Wyobraź sobie, że twoi przodkowie złożyli 1000 lat temu w banku 1 gr na lokatę, której oprocentowanie wynosiło 3% rocznie i odsetki były kapitalizowane co roku. Jaki kapitał zebrałby się na tej lokacie?

209. Na lokatę dwuletnią, której oprocentowanie wynosi 5% w skali roku, wpłacono 10 000 zł. Oblicz, jaka kwota będzie po tym okresie czasu na koncie, jeżeli odsetki będą kapitalizowane:

- a) rocznie, b) co pół roku, c) co kwartał, d) miesięcznie.

210. Bank A oferuje oprocentowanie 3% z roczną kapitalizacją odsetek, a bank B — oprocentowanie 2,5% z miesięczną kapitalizacją odsetek. Do którego z tych banków bardziej opłaca się wpłacić oszczędności? Czy odpowiedź byłaby inna, gdyby wpłacić oszczędności na 5 lat?

211. Podczas 8-tygodniowej, letniej wyprzedaży sprzedawca na początku każdego tygodnia zmniejszał cenę towaru. Oblicz, jaka była cena kurtki na końcu wyprzedaży, jeżeli na początku kosztowała ona 1250 zł, a sprzedawca zmniejszał cenę:

- a) o 5% ceny początkowej, b) o 5%.

212. a) Wartość działki budowlanej wzrasta co roku o 6%. O ile procent wzrośnie jej wartość po upływie 9 lat? Po ilu latach wartość działki się podwoi?

b) Wartość samochodu zmniejsza się co roku o 10%. O ile procent zmniejszy się wartość tego samochodu po upływie 4 lat? Po ilu latach jego wartość będzie mniejsza niż połowa początkowej wartości?

213. Kwota K zł została wpłacona na lokatę oprocentowaną $p\%$ w skali roku. Odsetki były naliczane co m miesięcy. Przez n lat nie dokonywano żadnych wpłat ani wypłat i stan konta zmieniał się jedynie o kapitalizowane odsetki. Odsetki (w zł) zgromadzone na lokacie po n latach oznaczmy literą D , a stan konta (w zł) po upływie n lat — literą S . Uzupełnij tabelę. Kwoty zaokrąglaj do groszy.

K	2000			6500	52 000		7000
p	5%	0,9%	4%			3,7%	2%
m	6	4	3	1	3	12	6
n	4	2	15	5	7		
D			6533,57		7793,38	1096,09	1541,33
S		1425,39		6901,73		5596,09	

214. a) Jaką kwotę wpłacono na lokatę półroczną, której oprocentowanie wynosiło 4% w skali roku, jeżeli po upływie 3 lat stan konta wynosił 2702,80 zł?

b) Na lokatę 2-miesięczną, której oprocentowanie wynosi 3% w skali roku, wpłacono 1500 zł. Po ilu miesiącach stan tej lokaty wyniesie 1576,70 zł?

c) Na lokatę 3-miesięczną wpłacono 3000 zł i po 2 latach kwota ta wzrosła o 216,50 zł. Jakie było oprocentowanie tej lokaty w skali roku?

215. a) O ile procent wzrośnie po 3 latach kwota wpłacona na lokatę półroczną, jeżeli jej oprocentowanie wynosi 4% w stosunku rocznym?

b) Jak długo należałoby oszczędzać na lokacie 3-miesięcznej, której oprocentowanie wynosi 8% w stosunku rocznym, aby zdeponowana kwota wzrosła o 50%?

216. Pan Oszczędnny wpłacił 4 lata temu kwotę 5000 zł na lokatę, której oprocentowanie wynosiło 5%. Jego sąsiad — pan Sprytny — wpłacił w tym samym czasie do innego banku kwotę 4000 zł. Okazało się, że obecnie każdy z nich ma na swoim koncie taką samą kwotę.

a) Oblicz, jakie było oprocentowanie lokaty pana Sprytnego.

b) Oblicz, ile zarobił pan Sprytny na tej transakcji.

217. Katarzyna znalazła na portalu internetowym dwie oferty pracy dodatkowej. W firmie „Pracus” w pierwszym miesiącu zarobi 300 zł, a w każdym następnym o 10% pierwszej wypłaty więcej niż w poprzednim. W firmie „Dorobkiewicz” w pierwszym miesiącu zarobi 200 zł, ale w każdym następnym — o 10% więcej niż w poprzednim.

a) Ustal, w której firmie Katarzyna szybciej zarobi 2000 zł. W którym miesiącu to nastąpi?

b) Ile zarobiłaby, pracując przez dwa lata w firmie „Pracus”, a ile, pracując w firmie „Dorobkiewicz”?

218. W dwóch początkowych latach istnienia fabryki butów produkcja wzrastała rocznie o 8%. W następnych pięciu latach trzeba było zmniejszać produkcję o 2% rocznie. Ustal, czy po tym okresie należało w kolejnym roku zwiększyć, czy zmniejszyć produkcję, aby osiągnęła ona taki sam poziom jak w pierwszym roku istnienia fabryki.

219. Kwotę 50 000 zł wpłacono na 3-miesięczną lokatę, której oprocentowanie wynosi 6% w skali roku.

a) Jaka kwota będzie na koncie po 2 latach, jeżeli od naliczonych odsetek należy odprowadzić do skarbu państwa podatek w wysokości 19%?

b) Ile zarobiono by na tej lokacie, gdyby podatek od odsetek został naliczony po 2 latach od całej kwoty uzyskanych odsetek?

220. Ojciec Zuzanny wpłacił 55 000 zł na lokatę, której oprocentowanie wynosi 6% w skali roku, a odsetki kapitalizowane są co miesiąc. Postanowił, że co miesiąc bank z odsetek będzie przelewał kieszonkowe w wysokości 200 zł na konto jego córki.

a) Jaka kwota będzie na tej lokacie po roku?

b) O ile więcej pieniędzy byłoby na koncie ojca Zuzanny, gdyby nie dokonywano z niego wypłat?

GRANICE CIĄGÓW

Я 221. Oblicz kilka początkowych wyrazów poniższych ciągów zbieżnych i podaj granice tych ciągów.

$$a_n = \frac{2}{n} - 4$$

$$b_n = \frac{1}{3^n} + 2$$

$$c_n = \frac{1}{n^2} + 1$$

$$d_n = \frac{3+n}{n}$$

Я 222. Oblicz granicę.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{100}}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + 2)$$

$$\text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{5n}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} 5n^3$$

$$\text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} (3 - n^3)$$

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{1}{n}\right)$$

Я 223. Czy podany ciąg jest zbieżny? Jeśli tak, to podaj jego granicę, a jeśli nie, to określ, czy jest rozbieżny do $-\infty$ lub $+\infty$.

$$\text{a) } a_1 = -90, \quad a_{n+1} = a_n + 3$$

$$\text{d) } a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$$

$$\text{b) } a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{5}$$

$$\text{e) } a_1 = -2, \quad a_{n+1} = 3a_n$$

$$\text{c) } a_1 = -1, \quad a_{n+1} = a_n^2$$

$$\text{f) } a_1 = 0,1, \quad a_{n+1} = a_n^3$$

Я 224. Podaj przykład ciągu:

a) rosnącego, którego granicą jest liczba 0,

b) malejącego, którego granicą jest liczba 2,

c) rozbieżnego do $+\infty$,

d) rozbieżnego do $-\infty$,

e) o wyrazach ujemnych, którego granicą nie jest liczba ujemna,

f) o wyrazach dodatnich, którego granicą nie jest liczba dodatnia.

Я 225. Podany ciąg jest geometryczny. Oblicz jego granicę.

$$\text{a) } 7, \quad 10\frac{1}{2}, \quad 15\frac{3}{4}, \quad \dots$$

$$\text{c) } a_1 = 0,23, \quad q = 1$$

$$\text{e) } a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_{n+1} = -2a_n$$

$$\text{b) } a_1 = -\sqrt{3}, \quad q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d) } a_n = (-0,3)^n$$

$$\text{f) } a_1 = -3,2, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n}{3}$$

Я 226. Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie, korzystając z tego wykresu, określ granicę ciągu (a_n) .

$$\text{a) } f(x) = -3x(x+1), \quad a_n = -3n(n+1)$$

$$\text{b) } f(x) = 2x(2-x)^2(x+3), \quad a_n = 2n(2-n)^2(n+3)$$

$$\text{c) } f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x-1)(2x-3), \quad a_n = -\frac{1}{2}n^2(n-1)(2n-3)$$

$$\text{d) } f(x) = 10x(1-x)^3(2x+5)^4, \quad a_n = 10n(1-n)^3(2n+5)^4$$

Я227. Czy istnieje granica ciągu (a_n) ? Jeżeli tak, podaj, ile wynosi.

a) $a_n = \begin{cases} 5 & \text{dla } n \leq 2003 \\ 3n & \text{dla } n > 2003 \end{cases}$

c) $a_n = \begin{cases} 7 + n^3 & \text{dla } n < 94 \\ \frac{1}{2^n} - 3 & \text{dla } n \geq 94 \end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} n + 1 & \text{dla } n < 45 \\ \frac{2}{n^2} & \text{dla } n \geq 45 \end{cases}$

d) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 3k + 1 \\ -1 & \text{dla } n = 3k + 2; \text{ gdzie } k \in \mathbb{N} \\ 2 & \text{dla } n = 3k + 3 \end{cases}$

Я228. Oblicz granicę podanego ciągu (o ile istnieje).

a) $a_n = \frac{2^n}{3^n}$

c) $c_n = 5 \cdot (-2)^{n+1}$

e) $g_n = \frac{3^n}{9^{n-2}}$

b) $b_n = \frac{5^n}{n}$

d) $f_n = -\sqrt{2n+3}$

f) $h_n = \frac{(-1)^n}{n^3} + 3$

Я229. Granica podanego ciągu (a_n) jest równa 0. Zgodnie z definicją granicy, dla każdej dodatniej wartości ε prawie wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają nierówność $|a_n| < \varepsilon$. Ustal, które wyrazy ciągu (a_n) spełniają tę nierówność dla podanej wartości ε .

a) $a_n = \frac{1}{n}, \varepsilon = 0,01$

c) $a_n = \frac{1}{2^n}, \varepsilon = 0,01$

b) $a_n = \frac{5}{n^2}, \varepsilon = 0,0001$

d) $a_n = \frac{(-1)^n}{5^n}, \varepsilon = 0,001$

Я230. Ustal granicę ciągu (a_n) . Zgodnie z definicją granicy, dla każdej dodatniej wartości ε prawie wszystkie wyrazy tego ciągu należą do przedziału $(g - \varepsilon; g + \varepsilon)$. Które wyrazy ciągu należą do tego przedziału dla podanej wartości ε ?

a) $a_n = 3 + \frac{5}{2n}, \varepsilon = 0,001$

c) $a_n = -7 - \frac{8}{n^3}, \varepsilon = 0,004$

b) $a_n = 5 - \frac{6}{n}, \varepsilon = 0,0003$

d) $a_n = -4 + \frac{2}{n^2}, \varepsilon = 0,002$

Я231. Ciąg (a_n) jest rozbieżny do $+\infty$. Zgodnie z definicją, w takim ciągu dla dowolnej liczby M prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są większe od M . Które wyrazy ciągu (a_n) są większe od podanego M ?

a) $a_n = 2n - 3, M = 1000$

b) $a_n = 3n^2 + 7, M = 10\,000$

c) $a_n = \frac{2n^3}{3} - 4, M = 2000$

Я232. Ciąg o wzorze $a_n = -n^2 - n$ jest rozbieżny do $-\infty$. Zgodnie z definicją, w tym ciągu dla dowolnej liczby M prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są mniejsze od M . Które wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od $M = -1000$?

OBLICZANIE GRANIC

Я233. Oblicz dla podanych ciągów $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, a następnie $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

a) $a_n = \frac{6n}{2n+5}$, $b_n = \frac{10n-3}{5n-2}$

c) $a_n = \frac{4n-1}{n+3}$, $b_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n - 5$

b) $a_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n$, $b_n = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d) $a_n = -2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$, $b_n = \frac{-3n}{n+4}$

Я234. Oblicz dla podanych ciągów $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, a następnie $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$.

a) $a_n = \frac{2n}{n+3}$, $b_n = 5n$

c) $a_n = \frac{6n}{2n+3}$, $b_n = 1 - 5^n$

b) $a_n = 3^n$, $b_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4$

d) $a_n = \frac{3-5n}{n}$, $b_n = -7^n$

Я235. Oblicz dla podanych ciągów $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, a następnie $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$.

a) $a_n = 6n$, $b_n = \frac{3+n}{4}$

b) $a_n = -5^n$, $b_n = -4n^2$

Я236. Oblicz dla podanych ciągów $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, a następnie $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n)$.

a) $a_n = 2^n$, $b_n = 1 - 3^n$

b) $a_n = 4 - n^3$, $b_n = 5 + 7^n$

Я237. a) Wiadomo, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$. Oblicz granice:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a_n}{5a_n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n}{n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2na_n)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (7a_n - n)$

b) Wiadomo, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Oblicz granice:

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{a_n}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - a_n)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{5}{a_n}\right)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (4na_n)$

Я238. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2+3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+7n-9}{6n-1}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+4n}{6n-n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{5-4n^2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-5n-2}{5n^2+4}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n+7}{2n^3-n^2+1}$

Я239. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3n^3+2n^4}{4n^4+n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+7n}{n^6+2}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6+10n^5}{4n-3n^2-2n^5}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2n^5}{3n^2+2n-3}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4-2n^3+3}{n^2+n+1}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-3n^6}{5n^3+n^2-2n+1}$

Я240. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n - 2\right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - 4 \cdot 0,3^n)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot 7^n + 6)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - 3 \cdot 5^n)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 \cdot 2^n - 9 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^n\right)$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (7 \cdot 0,8^n - 4 \cdot 3^n)$

Я241. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5}{4}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n-2}{-5}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+4}{9}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{6-2^n}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{2-0,7^n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

Я242. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n^5}\right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n^2}\right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11}{3n} - 9\right)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{4n+3}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{n^3} - 8\right)$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (0,8^n - 2)$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,2^n-5}{125}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{7}\right)^n + \frac{6}{5n}\right)$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - 2\right)$

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{1}{n^5}\right) \left(\frac{4}{n} + 2\right)$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2\right) \left((0,21)^n + 3\right)$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2,3 - \frac{4}{n^4}}{(0,2)^n + 2}$

Я243. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} + n^4\right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5 - 2n^3)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - 10)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^2} - 5^n\right)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n^5 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 0,2^n + 1)$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 + 5n - 7)$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{7}\right)^2 + (2,5)^n + n^2\right)$

Я244. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(3 + \frac{1}{n^5} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(0,1^n - 2)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5)(n + 7)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - n)(3^n - 2)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^5 - (0,7)^n) \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n - 2 \right)$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{5}{4} \right)^n - 3 \right) \left(\frac{2}{n^3} + 1 \right)$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((0,6)^n - 1) \left(\frac{3}{n^5} + 3n^4 \right)$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 5) \left(\frac{2}{n^7} + 4n^5 \right)$

Я245. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n + 5}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 3a_n(5 - b_n)$.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -4$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$

Я246. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5}{3n^3(5 - 2n^2)}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4(2n^2 + n)}{(5n^3 + 4)(n - 7)}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2(2n + 3)}{4n^5 + 7}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 + n)(2n - 1)(n^2 + 4)}{n^4 - 3n}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5 - 2n)(n^2 + 3)}{3n^2(n + 2)}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 - 5)(4n^2 + 3)}{(2n + 6)(n^3 - 4)(n^2 + n)}$

Я247. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 6^n}{3 \cdot 6^n - 1}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 7^n}{2^n + 7^n}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 10^{n+1} - 2 \cdot 3^n}{3^n + 10^{n+2}}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2}{5^n - 1}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4^n - 3^n}{5 \cdot 2^n + 4^n}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 5^{n+2} - 2 \cdot 3^{n-2}}{10 \cdot 2^{n-2} - 11^{n+1}}$

Я248. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^3 + n - 1)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(2 - n)(4n - 1)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^4 - n + 3)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1)(3 - 2n^2)(n^3 - 5)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (7 + 3n^3 - n^5)$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n^3(-n^4 + 5)(-3n + 1)$

Я249. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

a) $a_n = 5n^2$, $b_n = 3n$

c) $a_n = -\frac{3}{n^5}$, $b_n = \frac{2}{n^2}$

e) $a_n = -\frac{n^2}{4}$, $b_n = \frac{n^2}{4}$

b) $a_n = \frac{1}{n^3}$, $b_n = 7n^2$

d) $a_n = \frac{3}{n}$, $b_n = -5n^6$

f) $a_n = -2n^7$, $b_n = -\frac{3}{2n^5}$

Я250. Podaj przykłady ciągów (a_n) i (b_n) takich, że ich granice są niewłaściwe, oraz:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -5$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{1}{2}$

Я251. Podaj przykłady ciągów (a_n) i (b_n) takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, oraz:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Я252. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$.

- a) $a_n = 3^{2n}$, $b_n = 3^{-2n+4}$ c) $a_n = 3 - \frac{2}{n}$, $b_n = -n^3$
 b) $a_n = 3n^2 + n$, $b_n = 3n$ d) $a_n = \frac{2}{2n^2 + 1}$, $b_n = 2 - 3n^2$

Я253. Oblicz granicę.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 10^n}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{12^n + 5^n + 9^n}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n + 6^n}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6^n + 7^n + 8^n + 9^n}$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{17^n + 13^n + 11^n + 7^n}$

Я254. Oblicz granicę.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1)}{n^2}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n - 5n^2}{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^2 + 2n}{5 + 2 - 1 + \dots + (8 - 3n)}$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)}{2 - 3n^2}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 2 - 2 - \dots + (10 - 4n)}{3n - 4n^2}$

Я255. Oblicz granicę.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{4 + 7 + 11 + \dots + (3n + 1)}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 6 + 9 + \dots + 3n}{3 + 2\frac{1}{2} + 2 + \dots + (3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n)}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}{1 + 6 + 11 + \dots + (5n - 4)}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3)}{\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} + 2 + \dots + \frac{2}{3}n}$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1)}{10 + 13 + 16 + \dots + (3n + 7)}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} + 2 + 3\frac{1}{3} + \dots + (\frac{4}{3}n - \frac{2}{3})}{\frac{1}{5} - 1 - 2\frac{1}{5} + \dots + (\frac{7}{5} - \frac{6}{5}n)}$

Я 256. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{3^n} \right)$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \dots + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^n}}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{6^n}}{\frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \dots + \left(\frac{3}{5} \right)^n}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,1 + 0,01 + \dots + 0,1^n}{1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \dots + \left(-\frac{1}{7} \right)^{n-1}}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{3^n}}$

Я 257. Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

a) $a_n = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^n$

b) $a_n = 3 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$

c) $a_n = 5 - 3^2 - 3^3 - \dots - 3^n$

d) $a_n = 7 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{2n+3}$

Я 258. Znajdź granicę ciągu $a_n = \frac{(p-5)n}{(p+5)n+5}$ dla podanej wartości parametru p .

a) $p = -15$

b) $p = 1$

c) $p = 5$

d) $p = -5$

Я 259. Oblicz granice ciągów.

$a_n = \frac{5 \cdot (-1)^n}{3n^2 + 2n}$

$b_n = \frac{(0,5)^{n-2}}{2n^3 + 4}$

$c_n = \frac{3 - n^2}{\left(\frac{2}{3} \right)^n}$

Я 260. Znajdź wartość parametru p , dla którego granica ciągu $a_n = \frac{pn^2 + 1}{(p+1)n^2 + n}$ jest równa:

a) 3

b) -1

c) 0

d) $-\infty$

Я 261. Przyjrzyj się obliczeniom przedstawionym obok, a następnie w podobny sposób oblicz podaną granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n})$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-5})$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n+2} - 2\sqrt{n-3})$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n} - n)$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + 2n + 4} - 3n)$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 3n - 1} - \sqrt{2n^2 + 8n})$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} = 0 \end{aligned}$$

Я262. Oblicz granicę.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2+3}}{n^2+1}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3\sqrt{n-6}}{3n^4-n^2+2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^3-2}}{2n-1}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3}+2}{\sqrt{4n-1}}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\sqrt{3n^2-1}}{n^2-4}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-2)\sqrt[3]{n^3-2}}{3n-5n^4}$

Я263. a) Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których granica ciągu $a_n = \frac{(k+4)n^2-n}{4-3n^2}$ jest równa 2.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których ciąg $a_n = \frac{kn^2-3}{(k-1)n^2+n}$ jest rozbieżny do $+\infty$.

c) Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których ciąg $a_n = \frac{(2k-2)n^3-3n}{kn^2+1}$ jest rozbieżny do $-\infty$.

Я264. Niech A_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r_a , a B_n — sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie b_1 i różnicy r_b . Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{r_a}{r_b}$.

Я265. Niech A_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q . Wykaż, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n+1}} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } |q| < 1 \\ \frac{1}{q}, & \text{gdy } |q| > 1 \end{cases}$$

SZEREG GEOMETRYCZNY

Я266. Ustal, czy podany szereg geometryczny jest zbieżny. Jeśli tak — oblicz jego sumę.

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$

f) $20 + 13\frac{1}{3} + 8\frac{8}{9} + 5\frac{25}{27} + \dots$

b) $2 + 2 + 2 + \dots$

g) $\sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \dots$

c) $3 - 3 + 3 - 3 + \dots$

h) $8 - 5,6 + 3,92 - 2,744 + \dots$

d) $2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \dots$

i) $\sqrt{3} + 3(1 - \sqrt{3}) + 6(2\sqrt{3} - 3) + \dots$

e) $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \dots$

j) $2 + 2(\sqrt{2} - 1) + 2(3 - 2\sqrt{2}) + \dots$

- Я267.** Sprawdź, czy szereg geometryczny spełniający podane warunki jest zbieżny. Jeśli tak — oblicz jego sumę.
- Pierwszy wyraz jest równy $-\frac{1}{5}$, iloraz wynosi $\frac{6}{5}$.
 - Pierwszy wyraz jest równy $\frac{6}{5}$, iloraz wynosi $-\frac{1}{5}$.
 - Pierwszy wyraz jest równy 4, drugi wyraz to 3.
 - Pierwszy wyraz jest równy 3, drugi wyraz to $\sqrt{2}$.
 - Iloraz wynosi $\frac{4}{5}$, suma pierwszych dwóch wyrazów jest równa $\frac{18}{5}$.
 - Pierwszy wyraz jest równy -5 , suma pierwszych dwóch wyrazów wynosi 2.
- Я268.** Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 24.
- Jeśli iloraz tego ciągu jest równy $\frac{3}{4}$, to jaki jest jego pierwszy wyraz?
 - Jeśli pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 8, to jaki jest jego iloraz?
- Я269.** Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.
- $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \dots = 8$
 - $x - \frac{2x}{3} + \frac{4x}{9} - \frac{8x}{27} + \dots = -6$
 - $2x + \frac{2x}{5} + \frac{2x}{25} + \frac{2x}{125} + \dots = x + 9$
- Я270.** Ślimak przeszedł w ciągu godziny 80 cm. Tak się tym zmęczył, że w ciągu kolejnej godziny przeszedł tylko 60 cm, czyli $\frac{3}{4}$ odległości pokonanej poprzednio. W ciągu następnej godziny też przeszedł $\frac{3}{4}$ odległości pokonanej w poprzedniej godzinie. Czy jeśli tak dalej pójdzie, ślimak kiedykolwiek przejdzie całą drogę o długości 3 m?
- Я271.** Zamień podany ułamek okresowy na ułamek zwykły nieskracalny.
- | | | |
|----------------|--------------------|----------------------|
| a) 0,545454... | c) 0,536036036... | e) 0,310185185185... |
| b) 0,135135... | d) 0,4592592592... | f) 0,0670454545... |
- Я272.**
- Suma dwóch początkowych wyrazów pewnego nieskończonego ciągu geometrycznego wynosi $\frac{5}{4}$, a suma wszystkich jego wyrazów jest równa $\frac{4}{3}$. Zapisz wzór ogólny tego ciągu.
 - Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 70, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 80. Znajdź pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.
 - Suma trzech początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa 6, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{16}{3}$. Znajdź sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Я273. a) Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy 1, a iloraz jest równy $\frac{2}{3}$. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby ich suma różniła się od sumy wszystkich wyrazów o mniej niż 0,05?

b) Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy 100, a iloraz jest równy 0,9. Ile początkowych wyrazów tego ciągu należy dodać, aby ich suma różniła się od sumy wszystkich wyrazów o mniej niż 1?

Я274. a) Suma początkowych siedmiu wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest równa połowie sumy wszystkich wyrazów tego ciągu. Oblicz iloraz tego ciągu.

b) Suma początkowych dziesięciu wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest trzy razy mniejsza od sumy wszystkich wyrazów tego ciągu. Oblicz iloraz tego ciągu.

Я275. a) W nieskończonym ciągu geometrycznym suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa 128, a suma wyrazów o numerach parzystych jest równa -64. Znajdź trzy początkowe wyrazy tego ciągu.

b) W nieskończonym ciągu geometrycznym suma wyrazów o numerach nieparzystych jest pięć razy większa niż suma wyrazów o numerach parzystych. Znajdź iloraz tego ciągu.

Я276. Dla jakich wartości x dany szereg geometryczny jest zbieżny? Oblicz jego sumę.

a) $2 + 2x + 2x^2 + \dots$

d) $\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \dots$

b) $2 + 4x + 8x^2 + \dots$

e) $(x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \dots$

c) $3 - x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{9} + \dots$

f) $(x+2)^2 + (x+2) + 1 + \frac{1}{x+2} + \dots$

Я277. Dla jakich wartości x podany szereg geometryczny jest zbieżny?

a) $5 + 5(-2x^2 + 9) + 5(-2x^2 + 9)^2 + \dots$

b) $(x^2 - 3) + (x^2 - 3)^2 + (x^2 - 3)^3 + \dots$

c) $3 + 3(-x^2 + x + 1) + 3(-x^2 + x + 1)^2 + \dots$

d) $6(x^2 - x - 7) + 6(x^2 - x - 7)^2 + 6(x^2 - x - 7)^3 + \dots$

Я278. Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

a) $1 + x + x^2 + \dots = 6$

b) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \dots = 5$

c) $x + \frac{x^3}{10} + \frac{x^5}{100} + \dots = 30$

Я279. Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

a) $5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2} + \dots = 0,25$

c) $3^x + 2^3 \cdot 3^{x-2} + 2^6 \cdot 3^{x-4} + \dots = 3^{2x}$

b) $2^x + 2^{x-2} + 2^{x-4} + \dots = 10\frac{2}{3}$

d) $2^{2x} - 2^{2x-1} + 2^{2x-2} - 2^{2x-3} + \dots = \frac{2^x}{48}$

Я280. Wykaż, że jeżeli suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a i ilorazie q jest równa S , to suma kwadratów tych wyrazów jest równa $\frac{a}{1+q}S$.

Я281. Pierwsze wyrazy dwóch ciągów geometrycznych są równe 1, ilorazem jednego z tych ciągów jest q , gdzie $-1 < q < 1$, a ilorazem drugiego z nich jest $-q$. Wyznacz iloczyn sum wszystkich wyrazów tych ciągów. Wykaż, że iloczyn sum wszystkich wyrazów tych ciągów jest równy sumie kwadratów wyrazów jednego z tych ciągów.

Я282. Narysuj wykres funkcji f , wiedząc, że podana suma jest szeregiem geometrycznym (pamiętaj o wyznaczeniu dziedziny funkcji).

a) $f(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{x-1}{x^2} + \frac{x-1}{x^3} + \dots$

b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x} - \frac{x^2-1}{x^2} + \frac{x^2-1}{x^3} - \frac{x^2-1}{x^4} + \dots$

c) $f(x) = (1-x^2) + x(1-x^2) + x^2(1-x^2) + \dots$

d) $f(x) = x^3 + (x^4 + x^3) + (x^5 + 2x^4 + x^3) + (x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3) + \dots$

Я283. Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

a) $x + x\sqrt{x} + x^2 + x^2\sqrt{x} + \dots = 1$

b) $(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{x}-1)^3 + \dots = 1$

Я284. Dla jakich wartości x podany szereg geometryczny jest zbieżny?

a) $1 + \frac{x}{x+2} + \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 + \dots$

c) $2 + \frac{2x^2}{x-2} + 2\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 + \dots$

b) $\frac{x-3}{2x+1} + \left(\frac{x-3}{2x+1}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{2x+1}\right)^3 + \dots$

d) $\frac{x^2-1}{x^2-4x} + \left(\frac{x^2-1}{x^2-4x}\right)^2 + \left(\frac{x^2-1}{x^2-4x}\right)^3 + \dots$

Я285. Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

a) $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots = 11$

b) $1 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + \dots = 5$

c) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4} + \dots = 6x - 1$

Я286. Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

a) $\log_9 x + (\log_9 x)^2 + (\log_9 x)^3 + \dots = \frac{1}{2}$

b) $\log_8 x + \frac{1}{2}(\log_8 x)^2 + \frac{1}{4}(\log_8 x)^3 + \dots = 4$

c) $(1 - \log x) + (1 - \log x)^2 + (1 - \log x)^3 + \dots = \log x^2$

Я287. a) Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest trzy razy mniejsza od sumy wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych. Oblicz iloraz tego ciągu.

b) Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego jest trzy razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych. Oblicz iloraz tego ciągu.

c) Wykaż, że suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego nie może być trzy razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych.

Я288. a) W pewnym nieskończonym ciągu geometrycznym każdy wyraz jest 10 razy większy od sumy wszystkich wyrazów po nim następujących. Znajdź iloraz tego ciągu.

b) W pewnym nieskończonym ciągu geometrycznym każdy wyraz jest p razy większy od sumy wszystkich wyrazów po nim następujących. Znajdź iloraz tego ciągu.

Я289. Znajdź zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które można przedstawić w postaci sumy wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego:

$$1 + (a + 1) + (a + 1)^2 + (a + 1)^3 + \dots,$$

gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą.

Я290. Wykaż, że w nieskończonym ciągu geometrycznym o dodatnich wyrazach suma wszystkich wyrazów nie może być mniejsza niż liczba cztery razy większa od drugiego wyrazu tego ciągu.

Я291. Trójkąt równoboczny dzielimy na cztery przystające trójkąty. Trzy z nich zamalowujemy, czwarty dzielimy na cztery trójkąty przystające, z których trzy pozostawiamy niezamalowane, a z czwartym postępujemy podobnie jak wcześniej (zob. rysunek). Jaki procent powierzchni całej figury zostanie zamalowany, gdy tę procedurę będziemy powtarzać w nieskończoność?



PRZED SPRAWDZIANEM

1. Które z poniższych zdań nie dotyczy ciągu określonego wzorem $a_n = n(n - 5)$?
 A. Dziesiąty wyraz jest równy 50.
 B. Wszystkie wyrazy są liczbami parzystymi.
 C. Tylko cztery wyrazy tego ciągu są liczbami ujemnymi.
 D. $a_{n+1} = (n + 1)(n - 6)$
2. Który z poniższych wzorów opisuje ciąg malejący?
 A. $a_n = n^3$ B. $a_n = \sqrt[3]{n}$ C. $a_n = \frac{3}{n}$ D. $a_n = n - 3$
3. Cztery ciągi są określone wzorami rekurencyjnymi. Wskaż ciąg, którego trzeci wyraz jest najmniejszy.
 A. $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 2$ C. $c_1 = -2, c_{n+1} = \frac{c_n}{2}$
 B. $b_1 = -5, b_{n+1} = -2b_n$ D. $d_1 = -1, d_{n+1} = (d_n)^2$
4. Sumę n początkowych wyrazów ciągu można określić wzorem $S_n = 2n - 11$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy:
 A. 2 B. -5 C. -20 D. 11
5. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy $a_8 = 11$ i $a_{11} = 5$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:
 A. -2 B. 16 C. 25 D. 33
6. Dwa początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego to 23 i 20. Które z poniższych zdań nie dotyczy tego ciągu?
 A. Wyrazy o numerach parzystych są liczbami parzystymi.
 B. Jeden z wyrazów jest równy 0.
 C. Wyraz dziewiąty jest pierwszym ujemnym wyrazem.
 D. Ciąg jest malejący.
7. Suma dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 1, 4, 7, ... jest równa:
 A. 58 B. 295 C. 590 D. 1180
8. W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_{12} = 15$ i $a_{19} = 3a_{17}$. Zatem dziesiąty wyraz tego ciągu jest równy:
 A. 5 B. 45 C. $\frac{15}{\sqrt{3}}$ D. $15\sqrt{3}$

9. Ciąg jest określony wzorem ogólnym $a_n = \frac{2 \cdot 5^n}{15}$. Wskaż wzór rekurencyjny tego ciągu.

A. $a_1 = \frac{2}{15}, a_{n+1} = a_n + 5$

C. $a_1 = \frac{10}{15}, a_{n+1} = \frac{5}{15} a_n$

B. $a_1 = 5, a_{n+1} = \frac{2}{15} a_n$

D. $a_1 = \frac{2}{3}, a_{n+1} = 5 a_n$

10. W pewnym ciągu geometrycznym (a_n) o wszystkich wyrazach dodatnich dane są: $a_1 = x - 1$, $a_2 = x + 3$, $a_3 = 2x$. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:

A. 9

B. 18

C. 27

D. 36

11. W ciągu geometrycznym (a_n) wszystkie wyrazy są dodatnie oraz $3a_1 + 5a_2 = 0$. Iloraz tego ciągu jest równy:

A. $-\frac{5}{3}$

B. $-\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{3}$

12. Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie 2 wynosi 84. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

A. $\frac{3}{4}$

B. $1\frac{1}{3}$

C. 3

D. 7

13. Które z poniższych zdań dotyczy ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = 2 \cdot (-1)^n$?

A. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny i nie jest geometryczny.

B. Ciąg (a_n) jest geometryczny i nie jest arytmetyczny.

C. Ciąg (a_n) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny.

D. Ciąg (a_n) nie jest ani arytmetyczny, ani geometryczny.

14. Na lokatę, której oprocentowanie wynosi 4% w skali roku, a odsetki są kapitalizowane co miesiąc, wpłacono 6500 zł. Kwota odsetek zgromadzonych na tej lokacie po upływie 4 lat wynosi:

A. 1125,79 zł

B. 36 208,43 zł

C. 7625,79 zł

D. 1104,08 zł

15. Na lokatę, na której odsetki naliczane były po upływie każdego roku, wpłacono 12 000 zł. Przez 7 lat nie dokonywano nowych wpłat ani żadnych wypłat z tej lokaty i zgromadziło się na niej 14 264,23 zł. Jakie było oprocentowanie w skali roku tej lokaty?

A. 0,6%

B. 1,2%

C. 1,9%

D. 2,5%

16. Wykaż, że ciąg określony wzorem $a_n = n^2 - n$ jest rosnący.

17. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 30, a czwarty wyraz wynosi 13. Oblicz sumę stu początkowych wyrazów tego ciągu.

- 18.** Piąty wyraz ciągu geometrycznego jest równy 20, a siódmy jest równy 5. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.
- 19.** Wartość pewnego antyku wzrasta co roku o 5%. O ile procent wzrośnie jego wartość po 10 latach?
- 20.** Najkrótszy bok trójkąta ma długość a .
- Długości boków trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Jaki warunek musi spełnić różnica tego ciągu?
 - Długości boków trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Jaki warunek musi spełnić iloraz tego ciągu?
- Я 21.** Ciąg (a_n) jest malejący. Który z ciągów określonych poniższymi wzorami jest rosnący?
- A. $b_n = 5a_n$ B. $b_n = a_n - 5$ C. $b_n = 5 - a_n$ D. $b_n = \frac{a_n}{5}$
- Я 22.** Który z podanych ciągów jest malejący?
- A. $a_n = -(n-1)(n-3)$ C. $a_n = -(n+2)(n+4)$
 B. $a_n = (n-4)(n-1)$ D. $a_n = (n+2)(n-3)$
- Я 23.** Ciąg jest określony wzorem ogólnym $a_n = n^2 + n$. Jeden z poniższych wzorów rekurencyjnych opisuje ten sam ciąg. Który to wzór?
- A. $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2n + 2$ C. $a_1 = 2, a_{n+1} = (a_n + 2)^2$
 B. $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 + n$ D. $a_1 = 2, a_{n+1} = n + a_n$
- Я 24.** Cztery ciągi określone są wzorami rekurencyjnymi. Wskaż ciąg, którego czwarty wyraz jest największy.
- A. $a_1 = 2, a_2 = -1, a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}$ C. $c_1 = -2, c_2 = 1, c_{n+2} = 2c_n : c_{n+1}$
 B. $b_1 = -5, b_2 = -10, b_{n+2} = b_{n+1} - 2b_n$ D. $d_1 = 1, d_2 = 3, d_{n+2} = -2d_{n+1}d_n$
- Я 25.** Sumę n początkowych wyrazów ciągu można określić wzorem $S_n = 100 - n^3$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy:
- A. 73 B. 18 C. -7 D. -19
- Я 26.** Ciąg jest określony wzorem ogólnym $a_n = \frac{3n-13}{10}$. Które z poniższych zdań nie dotyczy tego ciągu?
- Ciąg jest arytmetyczny.
 - Ciąg jest określony wzorem rekurencyjnym: $a_1 = -1, a_{n+1} = a_n + 0,3$.
 - Ciąg ma tylko cztery wyrazy ujemne.
 - Ciąg jest malejący.

- Я27.** Która z podanych równości nie jest prawdziwa dla dowolnego ciągu arytmetycznego (a_n) ?
- A. $a_{13} - a_{11} = a_{27} - a_{25}$ C. $a_7 + a_{15} = a_5 + a_{17}$
 B. $2a_{32} = a_{33} + a_{34}$ D. $a_{10} - a_{20} = 10(a_1 - a_2)$
- Я28.** Skończony ciąg arytmetyczny składa się z 20 wyrazów i dwa końcowe wyrazy to 7 i 10. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa:
- A. -370 B. 170 C. -570 D. 640
- Я29.** Na lokatę, której oprocentowanie wynosi 2,4% w skali roku, a odsetki są kapitalizowane co 3 miesiące, wpłacono 4000 zł. Po jakim czasie kwota na tej lokacie wzrośnie do 4508,37 zł?
- A. Po 5 latach. C. Po 5 kwartałach.
 B. Po 20 miesiącach. D. Po 15 latach.
- Я30.** W ciągu geometrycznym (a_n) iloraz jest równy 2 i $a_1 = 1$. Przez jaką liczbę jest podzielna suma $a_{15} + a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20}$?
- A. 3 B. 5 C. 23 D. 31
- Я31.** Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 5, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu wynosi 20. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu (b_n) , określonego wzorem $b_n = \frac{1}{a_n}$ jest równa:
- A. 0,01 B. $\frac{1}{20}$ C. $\frac{781}{405}$ D. $\frac{781}{1280}$
- Я32.** W nieskończonym ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy 30, a iloraz wynosi 0,7. Niech S oznacza sumę wszystkich wyrazów, a S_n — sumę n początkowych wyrazów tego ciągu. Najmniejsza wartość n , dla której spełniona jest nierówność $S - S_n < 1$, to:
- A. 13 B. 17 C. 27 D. 30
- Я33.** Wiadomo, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$. Wskaż błędną równość.
- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 5$ C. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$
 B. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -5$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{1}{5}$
- Я34.** Które zdanie jest fałszywe?
- A. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. C. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$.
 B. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. D. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Я35. Którą z granic obliczono poprawnie?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+5}{3n+2} = \frac{5}{2}$

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{2n+3} = 3$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{2} = 2$

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{6n+1} = \frac{1}{3}$

Я36. Która z granic jest obliczona błędnie?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+7^n}{2} = +\infty$

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{2-5^n} = 0$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n} = 1$

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+8}{3^n} = 1$

Я37. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego jest równa 76, a suma dwóch początkowych wyrazów jest o 4 większa od trzeciego wyrazu. Oblicz iloraz tego ciągu.

Я38. Pierwszy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego jest równy 1, a suma wszystkich wyrazów wynosi 6. Oblicz sumę kwadratów wyrazów tego ciągu.

Я39. Liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny. Suma tych liczb jest równa 18. Liczby $a, b, c+8$ tworzą ciąg geometryczny. Znajdź iloraz ciągu geometrycznego.

Я40. Rozwiąż równanie, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

$$2 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3} + \dots = 5$$

PRZED MATURĄ

1. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2$ dla $n \geq 1$. Różnica $a_5 - a_4$ jest równa:

- A. 4 B. 20 C. 36 D. 18

2. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (n+3)(n-5)$ dla $n \geq 1$. Liczba ujemnych wyrazów tego ciągu jest równa:

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 9

3. Czternasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 8, a różnica tego ciągu jest równa $(-\frac{3}{2})$. Siódmy wyraz tego ciągu jest równy:

- A. $\frac{37}{2}$ B. $-\frac{37}{2}$ C. $-\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{2}$

4. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$, o którym wiemy, że $a_1 = 2$ i $a_2 = 9$. Wtedy $a_n = 79$ dla:

- A. $n = 10$ B. $n = 11$ C. $n = 12$ D. $n = 13$

5. W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, spełniony jest warunek $2a_3 = a_2 + a_1 + 1$. Różnica r tego ciągu jest równa:

- A. 0 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

6. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 6(n-16)$ dla $n \geq 1$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

- A. -54 B. -126 C. -630 D. -270

7. Dla ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek $a_4 + a_5 + a_6 = 12$. Wtedy:

- A. $a_5 = 4$ B. $a_5 = 3$ C. $a_5 = 6$ D. $a_5 = 5$

8. Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) , określony dla liczb naturalnych $n \geq 1$, o wyrazach dodatnich. Jeśli $a_2 + a_9 = a_4 + a_k$, to k jest równe:

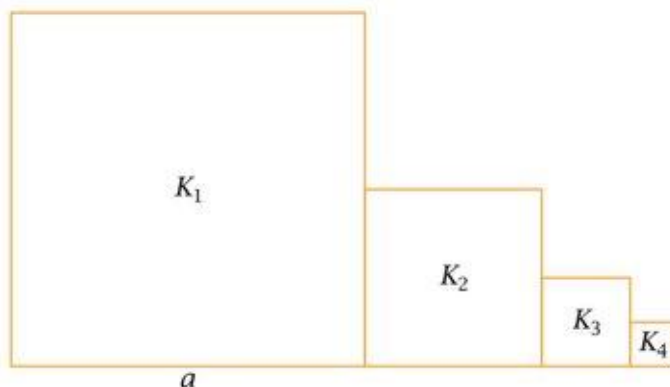
- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

9. Dla pewnej liczby x ciąg $(x, x+4, 16)$ jest geometryczny. Liczba x jest równa:

- A. 8 B. 4 C. 2 D. 0

- 10.** Dany jest ciąg geometryczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie i spełniony jest warunek $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{9}$. Iloraz tego ciągu jest równy:
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. 3 D. $\sqrt{3}$
- 11.** W dziewięciowyrazowym ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich pierwszy wyraz jest równy 3, a ostatni wyraz jest równy 12. Piąty wyraz tego ciągu jest równy:
- A. $3\sqrt[4]{2}$ B. 6 C. $7\frac{1}{2}$ D. $8\frac{1}{7}$
- 12.** Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2^n$ dla $n \geq 1$. Suma dziesięciu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu jest równa:
- A. $2(1 - 2^{10})$ B. $-2(1 - 2^{10})$ C. $2(1 + 2^{10})$ D. $-2(1 + 2^{10})$
- 13.** Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{5-2n}{6}$ dla $n \geq 1$. Ciąg ten jest:
- A. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -\frac{1}{3}$.
 B. arytmetyczny i jego różnica jest równa $r = -2$.
 C. geometryczny i jego iloraz jest równy $q = -\frac{1}{3}$.
 D. geometryczny i jego iloraz jest równy $q = \frac{5}{6}$.
- 14.** Kwotę 1000 zł ulokowano w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 4% w stosunku rocznym. Po zakończeniu lokaty od naliczonych odsetek odprowadzany jest podatek w wysokości 19%. Maksymalna kwota, jaką po upływie roku będzie można wypłacić z banku, jest równa:
- A. $1000 \cdot \left(1 - \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$ C. $1000 \cdot \left(1 + \frac{81}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$
 B. $1000 \cdot \left(1 + \frac{19}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$ D. $1000 \cdot \left(1 - \frac{19}{100} \cdot \frac{4}{100}\right)$
- 15.** Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n$ dla $n \geq 1$. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.
- 16.** W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. Oblicz różnicę $a_{16} - a_{13}$.
- 17.** Suma trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, jest równa 30. Ponadto $a_{30} = 30$. Oblicz różnicę tego ciągu.
- 18.** Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ oraz $a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{12} = 2016$. Oblicz pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n) .

19. Kwadrat K_1 ma bok długości a . Obok niego rysujemy kolejno kwadraty $K_2, K_3, K_4, \dots$ takie, że kolejny kwadrat ma bok o połowę mniejszy od boku poprzedniego kwadratu (zob. rysunek). Wyznacz pole kwadratu K_{12} .



20. Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) , dla $n \geq 1$ taki, że $a_5 = 18$. Wyrazy a_1, a_3 oraz a_{13} tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór na n -ty wyraz ciągu (a_n) .

21. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_{n+1} = a_n + n - 6$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy $a_3 = -1$. Wyraz a_2 jest równy:

- A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

22. Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, w którym iloraz jest trzy razy większy od pierwszego wyrazu, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu wynosi $\frac{1}{4}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy:

- A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{7}{3}$ D. 7

23. Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony w następujący sposób: $a_1 = \frac{3}{5}$ oraz $a_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot a_n$ dla $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa:

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{10}{9}$ C. $\frac{9}{10}$ D. $\frac{9}{5}$

24. Granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n^3 + 3n}{1 + 2n + 3n^2 + 4n^5}$ jest równa:

- A. $-\infty$ B. $-\frac{7}{4}$ C. 0 D. $+\infty$

25. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{3n^2 + 7n - 5}{11 - 5n + 5n^2}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Granica tego ciągu jest równa:

- A. 3 B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{5}{11}$

Я 26. Granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(pn^2 + 4n)^3}{5n^6 - 4}$ jest równa $-\frac{8}{5}$. Wynika stąd, że:

- A. $p = -8$ B. $p = 4$ C. $p = 2$ D. $p = -2$

Я 27. Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki a , b i c . Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

Я 28. Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań:

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$$

Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32 769.

Я 29. Liczby a , b , c są — odpowiednio — pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a - 2, b, 2c + 1)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a , b , c .

Я 30. Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2) , którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.

Я 31. W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}$. Wyrazy a_1 , a_2 , a_3 są — odpowiednio — czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1 .

Я 32. Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{11n^3 + 6n + 5}{6n^3 + 1} - \frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 - 4} \right)$. W poniższych kratkach wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

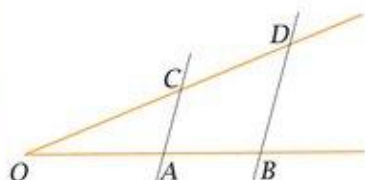
--	--	--

Я 33. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x - 371} \right)^n$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x , dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest zbieżny.

PODOBIENSTWO

FIGUR

Twierdzenie Talesa



Jeżeli dwie proste równoległe przecinają oba ramiona pewnego kąta, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta.

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|}$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeśli na jednym ramieniu kąta o wierzchołku O wybierzemy punkty A i B , a na drugim ramieniu punkty C i D w taki sposób, że zachodzi proporcja:

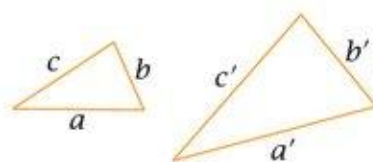
$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|},$$

to proste AC i BD są równoległe.

Cechy podobieństwa trójkątów

Cecha bbb (bok-bok-bok)

Jeśli długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.



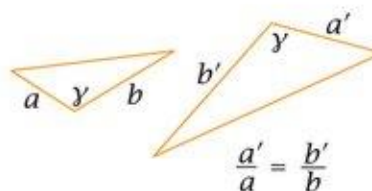
Cecha kk (kąt-kąt)

Jeśli dwa kąty jednego trójkąta są równe odpowiednim kątom drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.



Cecha bkb (bok-kąt-bok)

Jeśli długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich boków drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami w obu trójkątach są równe, to te trójkąty są podobne.



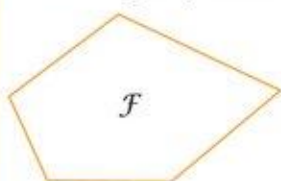
Wielokąty podobne

Dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

- Kąty jednego wielokąta mają takie same miary jak odpowiednie kąty drugiego.
- Stosunki długości boków jednego wielokąta do długości odpowiednich boków drugiego wielokąta są takie same.

Jeśli wielokąt $\mathcal{F}'$ jest podobny do wielokąta $\mathcal{F}$ w skali k , to stosunek długości któregośkolwiek boku wielokąta $\mathcal{F}'$ do odpowiadającego mu boku wielokąta $\mathcal{F}$ jest równy k .

Pola figur podobnych



Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$\frac{\text{Pole figury } \mathcal{F}'}{\text{Pole figury } \mathcal{F}} = k^2$, gdzie k to skala podobieństwa figury $\mathcal{F}'$ do figury $\mathcal{F}$.

TWIERDZENIE TALESA I TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA TALESA

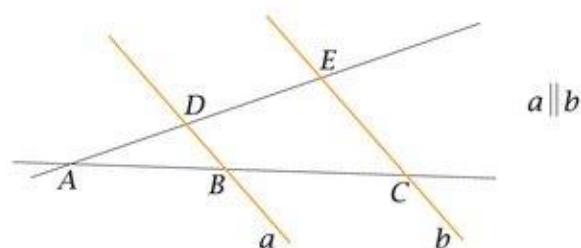
1. Przyjrzyj się rysunkowi. Uzupełnij proporcje.

a) $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{?}$

c) $\frac{|EC|}{|DB|} = \frac{?}{|AB|}$

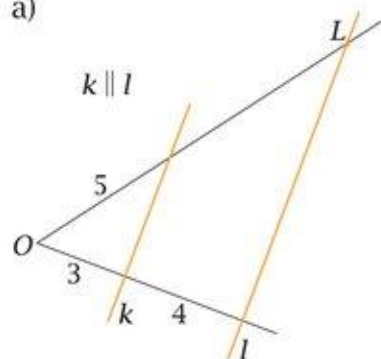
b) $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{?}$

d) $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{?}{|CE|}$

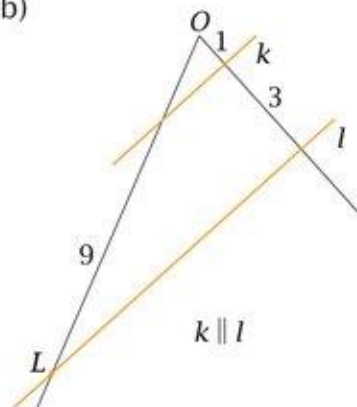


2. Wyznacz długość odcinka LO .

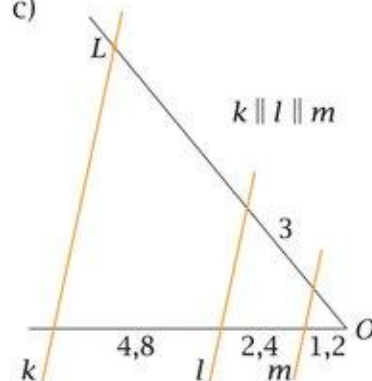
a)



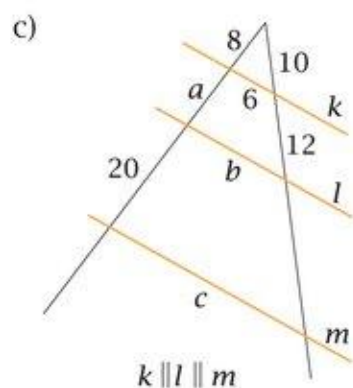
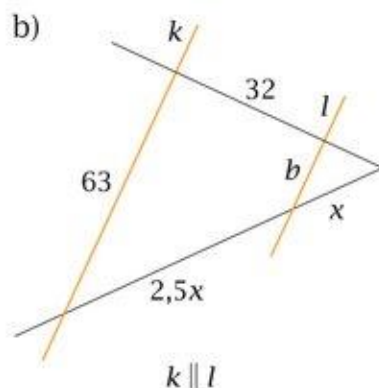
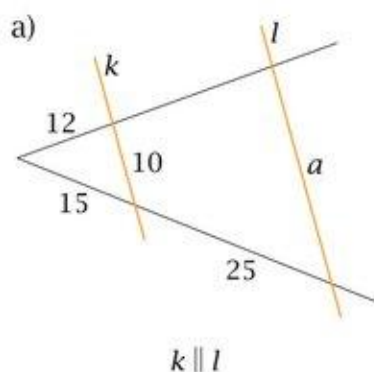
b)



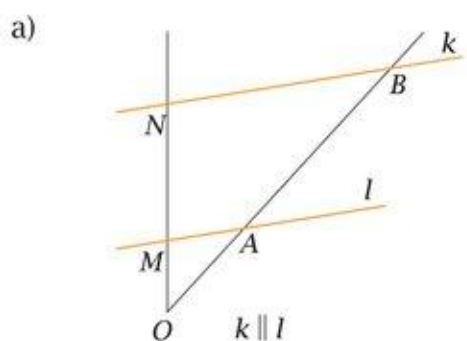
c)



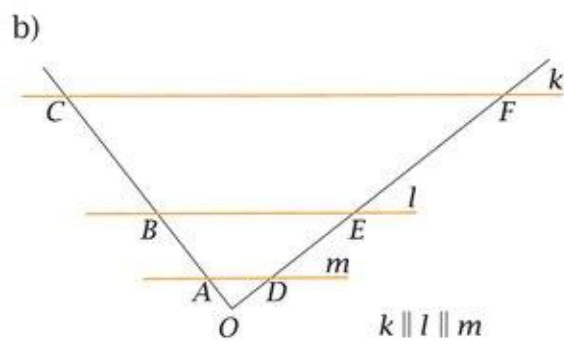
3. Oblicz długości odcinków a , b oraz c .



4. Znajdź brakujące wyrazy proporcji.



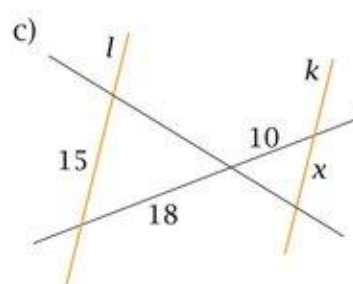
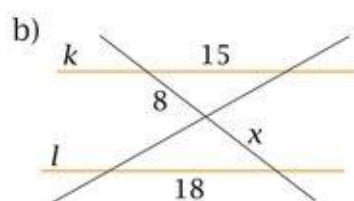
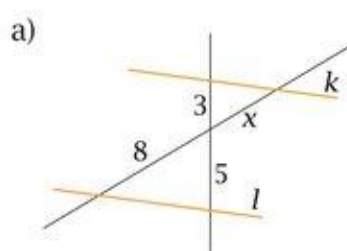
$$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{?}{|OB|} \quad \frac{|BN|}{|OB|} = \frac{?}{?}$$



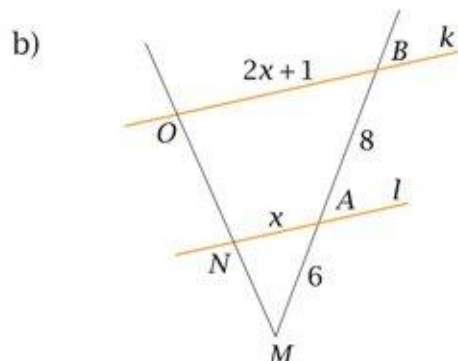
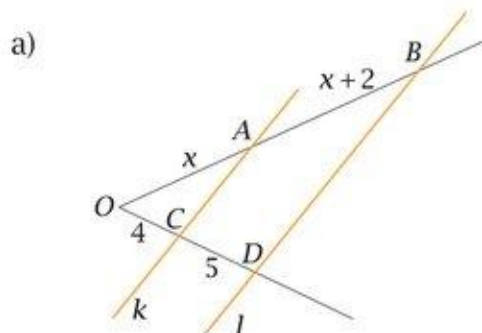
$$\frac{|OE|}{|OF|} = \frac{|OB|}{?} \quad \frac{|EB|}{|CF|} = \frac{?}{|OC|}$$

$$\frac{|AD|}{|OA|} = \frac{|CF|}{?}$$

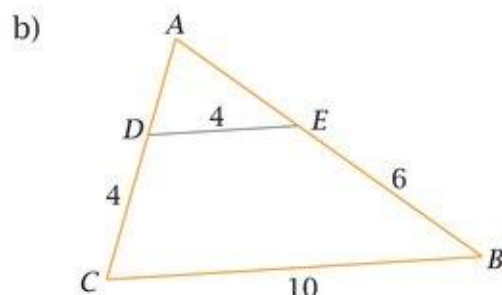
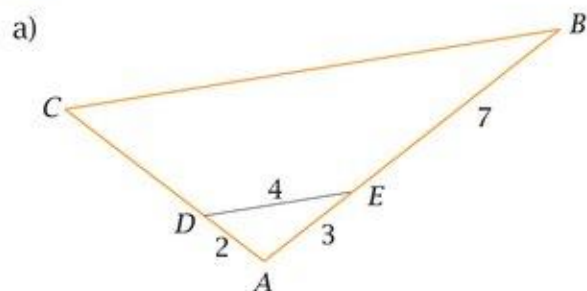
5. Znajdź długość odcinka x , jeżeli wiadomo, że proste k i l są równoległe.



6. Znajdź długość odcinka OB , jeżeli wiadomo, że proste k i l są równoległe.



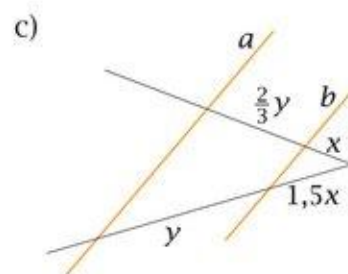
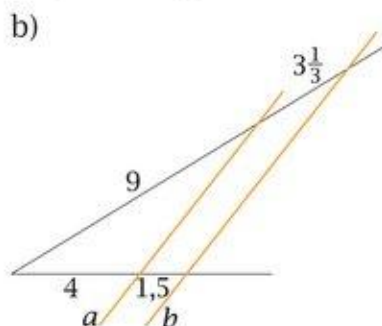
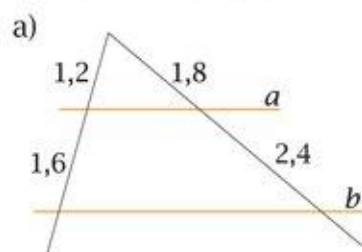
7. Oblicz obwód trójkąta ABC , jeżeli wiadomo, że $ED \parallel BC$.



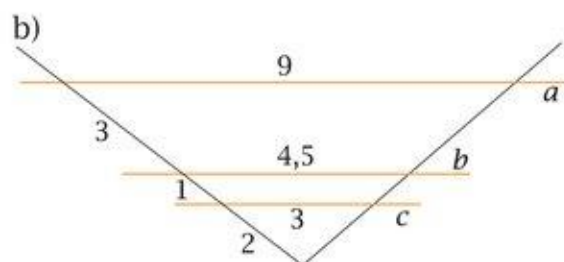
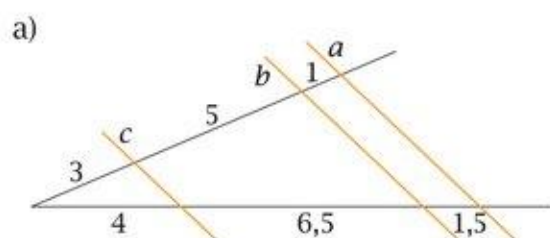
8. a) Zuzia ma 1,6 m wzrostu i stoi obok drzewa o wysokości 8 m. Jaką długość ma cień rzucany przez to drzewo w momencie, gdy cień Zuzi ma 1,2 m długości?

b) Daniel ma 1,8 m wzrostu i stanął w pewnej odległości od masztu o wysokości 12 m tak, że końce jego cienia i cienia masztu pokrywają się. Cień Daniela ma 1 m długości. Oblicz, w jakiej odległości od masztu stanął chłopiec.

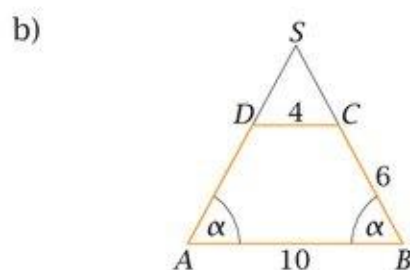
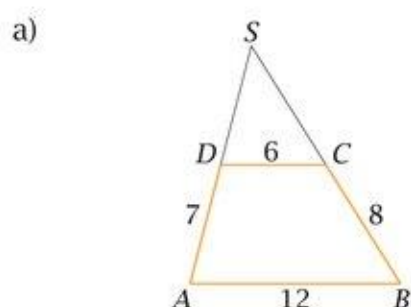
9. Sprawdź, czy proste a i b są równoległe.



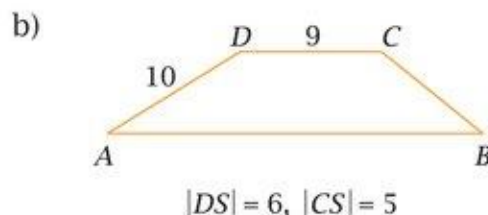
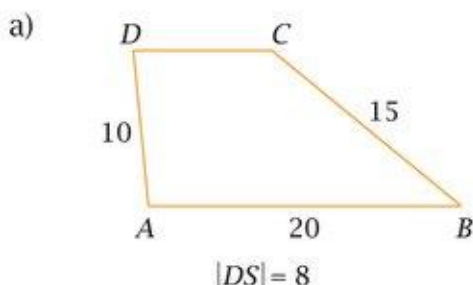
10. Które z prostych a , b oraz c są równoległe?



11. Na rysunku przedstawiono trapez $ABCD$, którego ramiona przedłużono do przecięcia się w punkcie S . Oblicz obwód trójkąta ABS .



12. Na rysunku przedstawiono trapez $ABCD$. Punkt S jest punktem przecięcia prostych zawierających ramiona tego trapezu. Oblicz obwody trapezu $ABCD$ oraz trójkąta ABS .



13. a) Narysuj dowolny odcinek i podziel go konstrukcyjnie na 5 równych części.

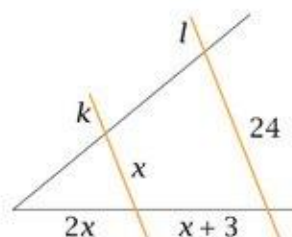
b) Narysuj dowolny odcinek AB i wyznacz na nim konstrukcyjnie taki punkt K , że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{2}{5}$.

c) Skonstruuj sześciokąt foremny, którego obwód jest równy obwodowi czworokąta przedstawionego na rysunku obok.

d) Narysuj dowolny równoległobok i podziel go prostą równoległą do jednego z boków na dwa równoległoboki tak, by pole jednego z nich było dwa razy większe od pola drugiego.



14. Oblicz długość odcinka x , jeżeli wiadomo, że proste k i l są równoległe.



15. Prosta k , równoległa do podstaw AB i CD trapezu $ABCD$, podzieliła ramię AD na dwa odcinki o długościach 3 cm i 5 cm. Wyznacz długości odcinków, na które ta prosta podzieliła drugie ramię tego trapezu, jeżeli wiadomo, że ma ono długość 20 cm.

16. Na bokach AC i BC trójkąta ABC wybrano odpowiednio takie punkty M i N , że $MN \parallel AB$. Wiadomo, że $|BC| = 8$, $|AC| = 10$ oraz $\frac{|BN|}{|NC|} = 0,75$. Wyznacz długość odcinka MA .

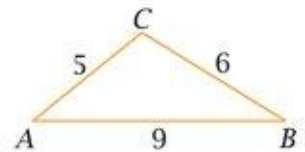
17. Prosta k przecina boki AC i BC trójkąta ABC odpowiednio w punktach K i L . Wiadomo, że $|AK| = 6$, $|CK| = 4$, $|BL| = 9$ i $|LC| = 6$. Uzasadnij, że prosta k jest równoległa do odcinka AB .

18. Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa oraz z twierdzenia Talesa, uzasadnij twierdzenie, że odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku trójkąta i dwa razy od niego krótszy.

19. Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa oraz z twierdzenia Talesa, uzasadnij twierdzenie, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw, a jego długość jest równa średniej arytmetycznej długości podstaw trapezu.

20. a) W trójkącie o bokach długości 3, 4, 5 połączono ze sobą środki boków i otrzymano trójkąt PQR . Wyznacz obwód trójkąta PQR .

b) Dany jest trójkąt ABC przedstawiony na rysunku. Oblicz obwód czworokąta $ABDE$, w którym punkty D i E są środkami boków odpowiednio BC i AC .



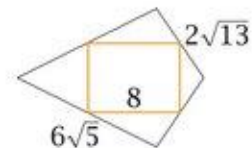
c) Dłuższa podstawa AB trapezu $ABCD$ ma długość 10. Odcinek łączący środki ramion tego trapezu ma długość 8. Oblicz obwód trapezu, jeżeli wiadomo, że $|BC| = |AD| = |CD|$.

d) W trapezie o polu 50 długość wysokości równa jest sumie długości podstaw. Jaką długość ma odcinek łączący środki ramion tego trapezu?

21. W trapezie o polu 40 odcinek łączący środki ramion ma długość 10. Jaką długość ma wysokość tego trapezu?

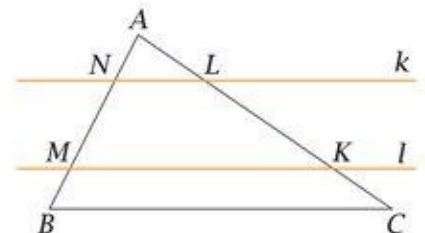
22. W czworokącie wypukłym o przekątnych p i q połączono ze sobą środki kolejnych boków. Wyznacz obwód otrzymanego czworokąta.

23. W deltoidzie przedstawionym na rysunku obok połączono ze sobą środki boków. Znajdź obwód otrzymanego czworokąta.



24. W trapezie prostokątnym $ABCD$ krótsze ramię AD ma długość 6, a podstawy AB i CD mają długości odpowiednio 10 i 7. Ramiona trapezu przedłużono do przecięcia się w punkcie P . Oblicz obwód trójkąta ABP .

25. W trójkącie ABC przedstawionym na rysunku dane są długości boków: $|AB| = 8$, $|AC| = 10$ oraz $|BC| = 12$. Proste k i l są równoległe do boku BC . Punkty M i N dzielą bok AB w stosunku 1:2:1. Oblicz obwód czworokąta $MKLN$.

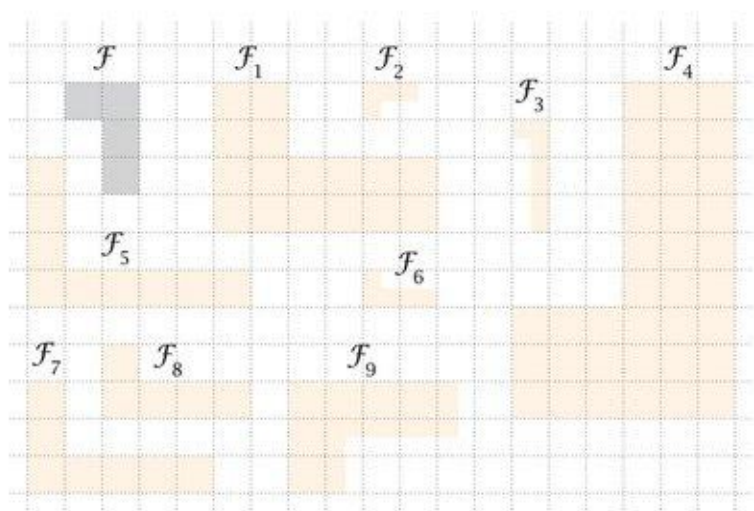


26. a) Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano odpowiednio takie punkty M i N , że $MN \parallel AC$ oraz $|BN| = 3$, $|CB| = 8$, $|BM| = 4$, $|MN| = 5$. Oblicz obwód czworokąta $AMNC$.

b) W trójkącie ABC na boku AC wybrano punkt K , a na boku AB — punkt L . Wiadomo, że $KL \parallel BC$, $|AK| = 2$, $|KC| = 4$, $|BC| = 8$ oraz $|BL| = \frac{20}{3}$. Oblicz pole czworokąta $KLBC$.

WIELOKĄTY PODOBNE

27. Które z przedstawionych na rysunku figur są podobne do figury $\mathcal{F}$? Podaj, w jakiej skali.



28. Narysuj prostokąt podobny w skali k do prostokąta o długościach boków 6 cm i 3 cm.

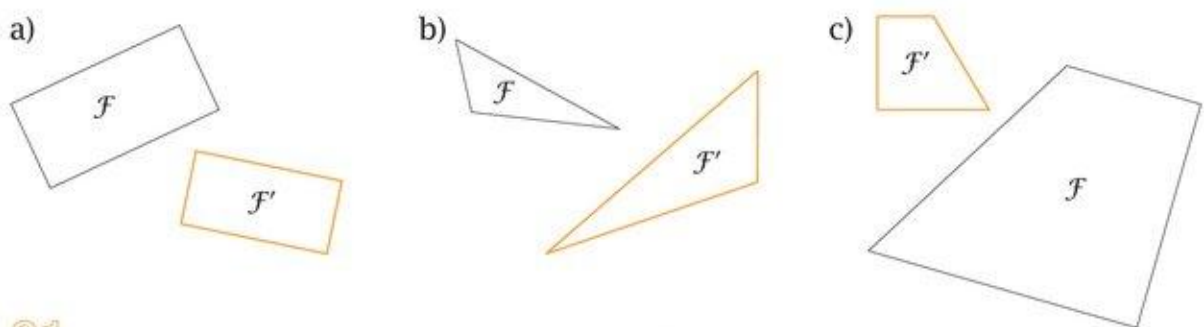
- a) $k = 2$ c) $k = \frac{1}{3}$
b) $k = \frac{3}{2}$ d) $k = \frac{2}{5}$



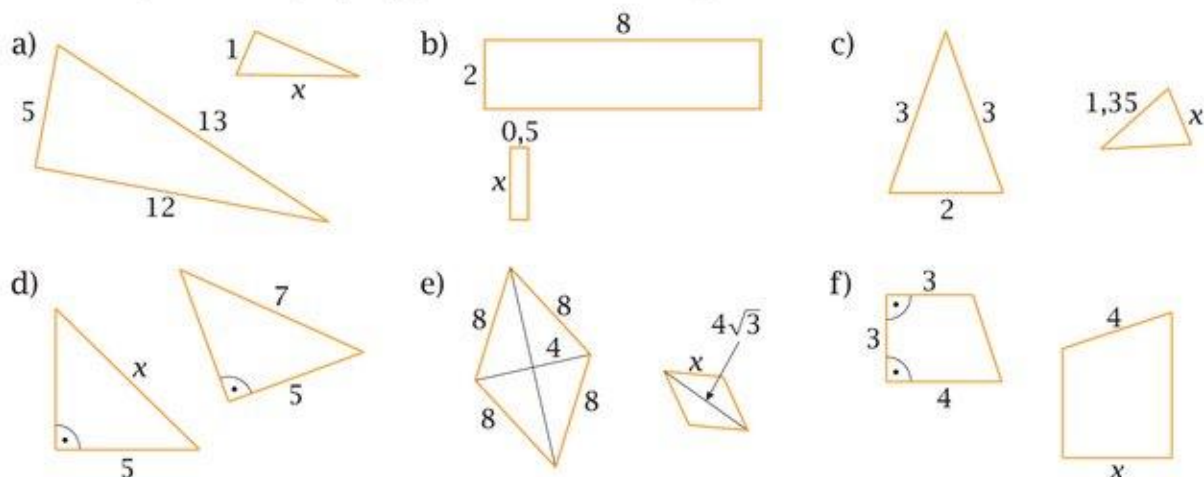
29. Narysuj trójkąt podobny w skali k do trójkąta przedstawionego na rysunku.

- a) $k = 0,2$ c) $k = 1,5$
b) $k = 0,4$ d) $k = 2,1$

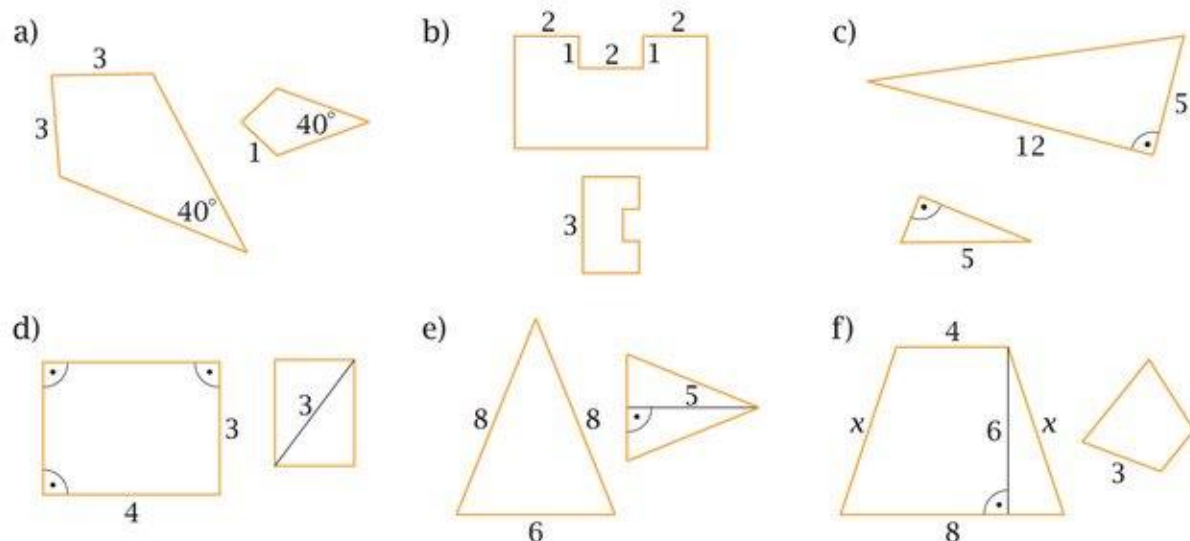
30. Zmierz długości odpowiednich odcinków i oblicz, w jakiej skali figura $\mathcal{F}'$ jest podobna do figury $\mathcal{F}$ oraz w jakiej skali figura $\mathcal{F}$ jest podobna do figury $\mathcal{F}'$.



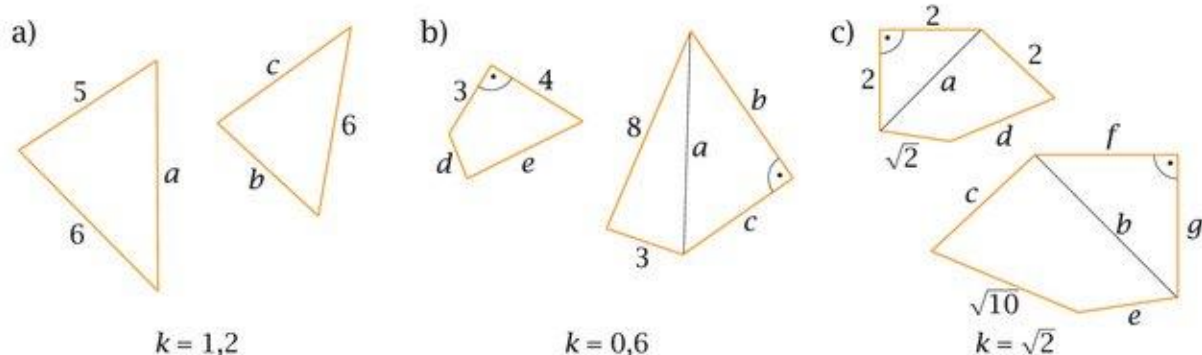
31. Narysowane figury są podobne. Oblicz długość boku x .



32. Figury przedstawione na rysunku są podobne. W jakiej skali mniejsza figura jest podobna do większej?



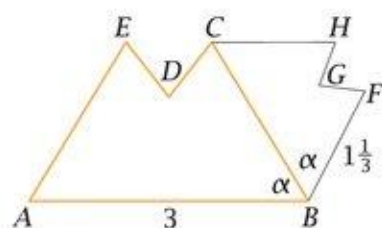
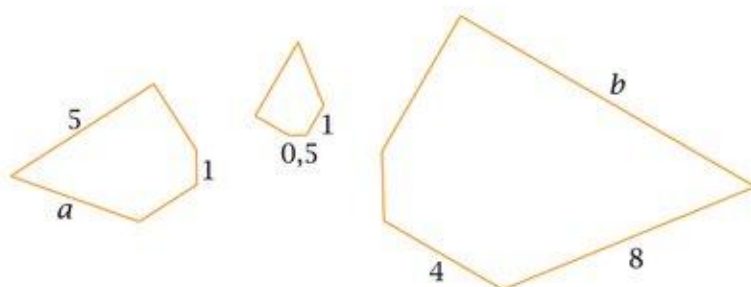
33. Jedna z narysowanych figur jest podobna do drugiej w skali k . Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



34. a) Siedmiokąt foremny $\mathcal{F}$ jest podobny do siedmiokąta $\mathcal{F}'$ w skali $k = 4$. Obwód większego siedmiokąta jest równy 98. Oblicz długość boku mniejszego siedmiokąta.

b) Trójkąt ABC o bokach długości 8, 9, 10 jest podobny do trójkąta $A'B'C'$ w skali $k = \frac{2}{3}$. Oblicz długość najkrótszego boku trójkąta $A'B'C'$.

35. Wszystkie figury przedstawione na rysunku obok są podobne. Oblicz długości boków a i b .



36. Figury $ABCDE$ i $CBFGH$ przedstawione na rysunku obok są podobne. Oblicz długość odcinka BC .

37. Oceń prawdziwość zdań.

- a) Wszystkie romby są podobne.
- b) Każde dwa prostokąty są podobne.
- c) Jeśli dwa prostokąty są podobne w skali k , to stosunek długości ich przekątnych wynosi k .
- d) Jeśli stosunek długości przekątnych dwóch prostokątów wynosi k , to te prostokąty są podobne w skali k .
- e) Jeśli przekątne jednego rombu są proporcjonalne do odpowiednich przekątnych drugiego rombu, to te romby są podobne.
- f) Każde dwa kwadraty są podobne.
- g) Dwa prostokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy są kwadratami.

38. a) Równoległobok $ABCD$ o bokach długości 3 cm i 5 cm podzielono na dwa równoległoboki, z których jeden jest podobny do równoległoboku $ABCD$. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

b) Czy z każdego równoległoboku można odciąć jednym prostym cięciem podobny do niego mniejszy równoległobok?

39. a) Równoległobok o bokach długości 3 i 8 podzielono na dwa podobne do siebie równoległoboki. Oblicz długości boków tych równoległoboków.

b) Czy każdy równoległobok można podzielić na dwa podobne do siebie, ale nieprzystające równoległoboki?

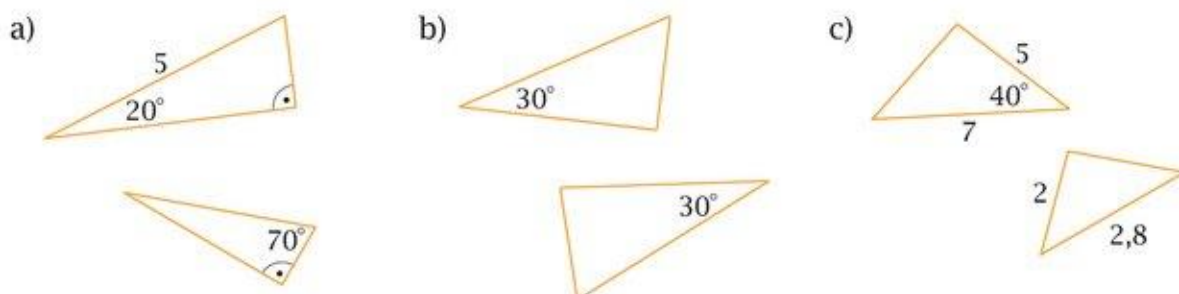
40. Figura $\mathcal{F}_1$ jest podobna do figury $\mathcal{F}_2$ w skali 3, figura $\mathcal{F}_2$ jest podobna do figury $\mathcal{F}_3$ w skali $\frac{1}{5}$, a figura $\mathcal{F}_3$ — do figury $\mathcal{F}_4$ w skali 10. W jakiej skali podobna jest:

- a) figura $\mathcal{F}_1$ do figury $\mathcal{F}_3$,
- b) figura $\mathcal{F}_4$ do figury $\mathcal{F}_2$?

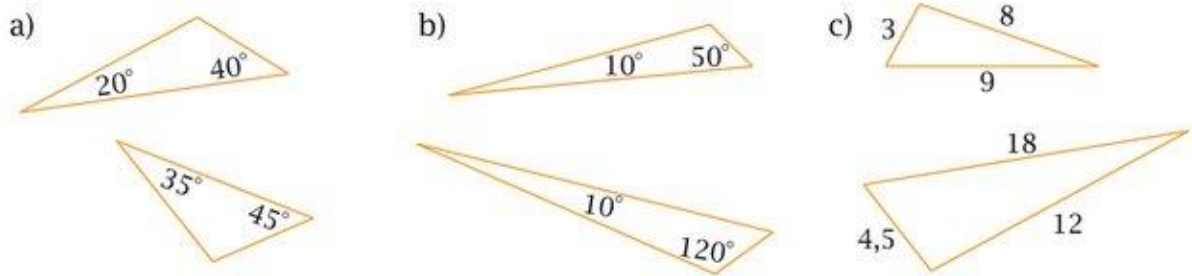
41. Figura $\mathcal{F}_1$ jest podobna do figury $\mathcal{F}_2$ w skali m , a do figury $\mathcal{F}_3$ w skali n . W jakiej skali podobna jest figura $\mathcal{F}_2$ do figury $\mathcal{F}_3$?

CECHY PODOBIENSTWA TRÓJKĄTÓW

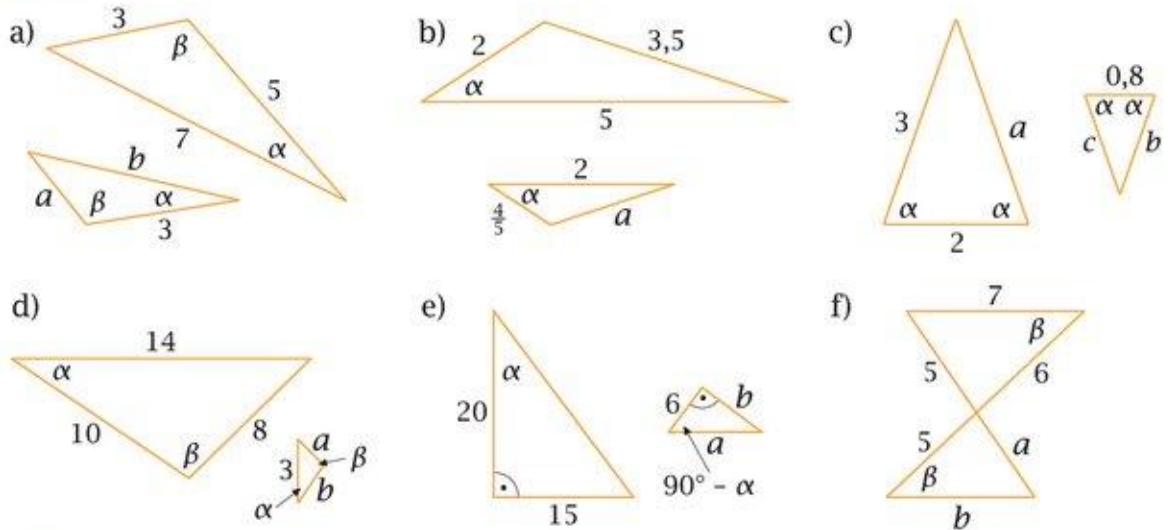
42. Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że trójkąty są podobne?



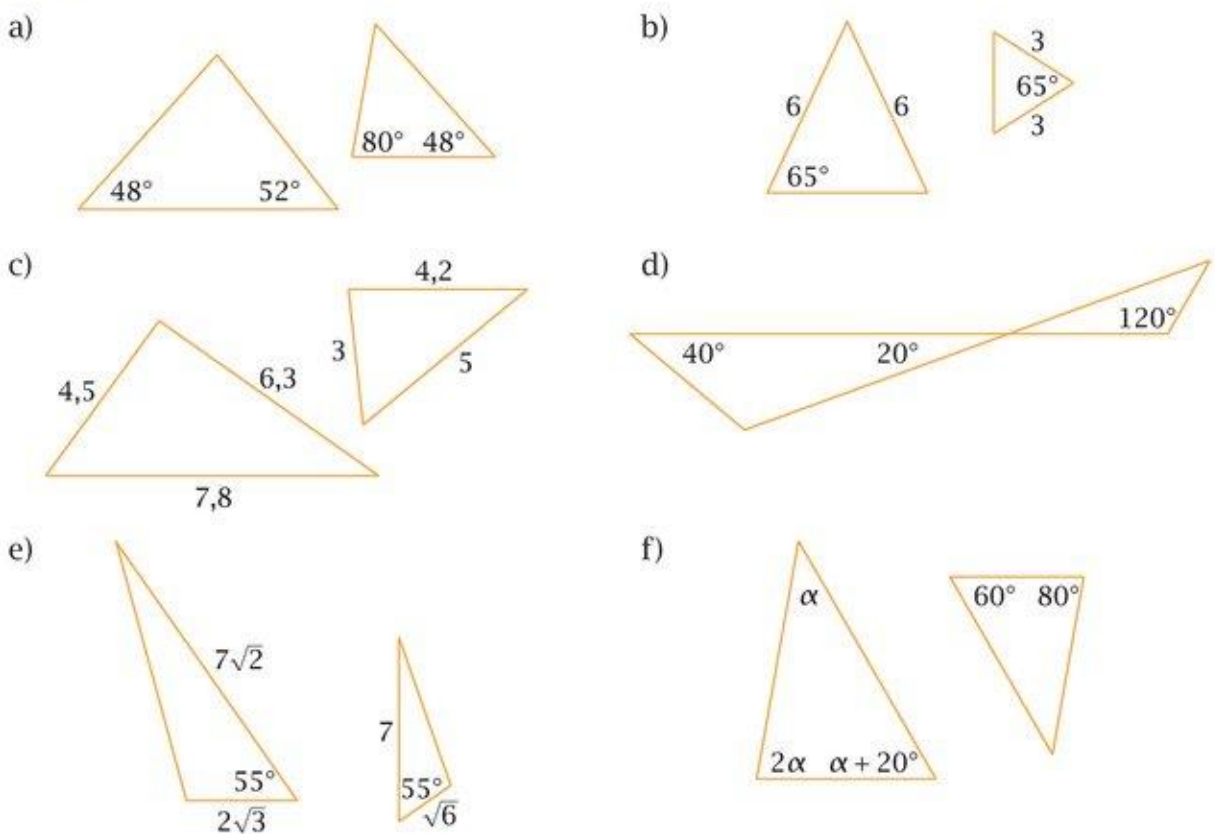
43. Czy z informacji podanych na rysunku wynika, że trójkąty są podobne?



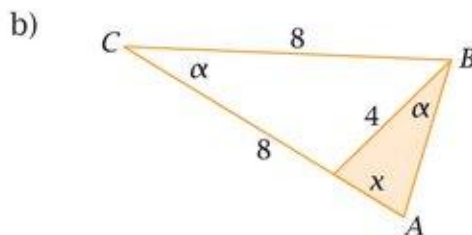
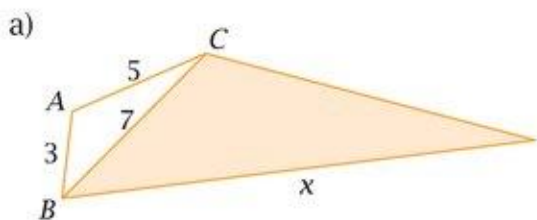
44. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.



45. Czy narysowane poniżej trójkąty są podobne?



46. Zacięnięwany trójkąt jest podobny do trójkąta ABC . Wyznacz skalę k tego podobieństwa oraz długość odcinka x .



47. Sprawdź, czy trójkąty o podanych bokach mają jednakowe kąty wewnętrzne.

- a) 5, 7, 10 oraz $5, 3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$
- b) 7, 15, 12 oraz 4, 5, 2
- c) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ oraz $2, 2\sqrt{2}, \sqrt{6}$

48. Oceń, czy opisane trójkąty prostokątne są podobne.

- a) Trójkąt ABC o kącie ostrym 58° i trójkąt KLM o kącie ostrym 32° .
- b) Trójkąt ABC o przyprostokątnych $\sqrt{6}$ i $\sqrt{2}$ oraz trójkąt KLM o przyprostokątnych $6\sqrt{3}$ i 6.
- c) Trójkąt ABC o przyprostokątnej 7 i przeciwprostokątnej $7\sqrt{3}$ oraz trójkąt KLM o przyprostokątnej 3 i przeciwprostokątnej $3\sqrt{2}$.
- d) Trójkąt ABC , w którym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej, oraz trójkąt KLM o kącie ostrym 60° .

49. W trójkącie ABC wysokości CD i BE przecinają się w punkcie P . Uzasadnij, że $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ACD|$.

50. a) Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$ w skali $\frac{1}{5}$. Oblicz długości boków trójkąta ABC , jeżeli wiadomo, że obwód tego trójkąta jest równy 2 oraz $|A'B'| = 4, |A'C'| = 3$.

b) Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. Oblicz długości boków trójkąta $A'B'C'$, jeżeli wiadomo, że $|AB| = 4, |BC| = 5, |AC| = 6$, a obwód trójkąta $A'B'C'$ wynosi 20.

51. Trójkąty ABC oraz KLM są podobne. Skorzystaj z podanych informacji i wyznacz długości brakujących boków trójkąta KLM .

- a) $|AB| = 5, |BC| = 6, |AC| = 3, |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|, |KL| = 8$
- b) $|BC| = 7, |AC| = 5, |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle MKL| = 90^\circ, |KL| = \sqrt{6}$ (rozpatrz dwa przypadki)
- c) $|AB| = 8, |BC| = 10, |AC| = 16, |KL| = 12$ (rozpatrz wszystkie przypadki)
- d) $|AB| = 4, |BC| = 10, |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle MLK| = 60^\circ, |KM| = 6$

52. Dany jest trójkąt o bokach 6, 7 i 9. Prosta równoległa do najdłuższego boku tego trójkąta rozcina go na trójkąt podobny do niego w skali $\frac{1}{3}$ oraz na trapez. Oblicz obwód tego trapezu.

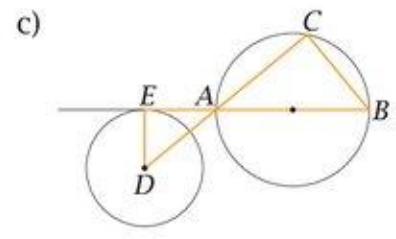
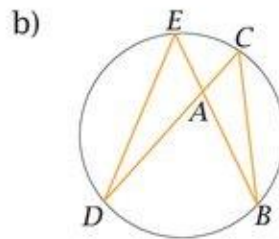
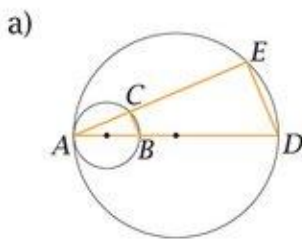
53. Trójkąt ABC o obwodzie 3 m jest podobny do trójkąta o bokach długości 3 łokcie, 4 łokcie, 5 łokci. Oblicz długości boków trójkąta ABC .

54. a) Trójkąt ABC ma takie same kąty jak trójkąt o bokach 2, 3, 4. Najdłuższy bok trójkąta ABC jest o 5 dłuższy od średniego. Jaka jest długość najkrótszego boku?

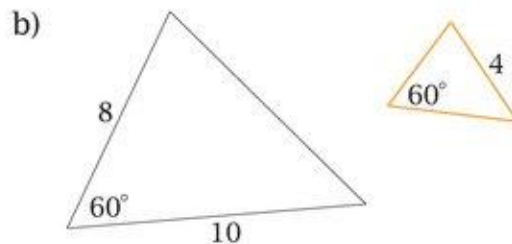
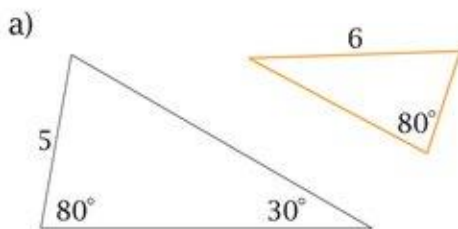
b) Trójkąt ABC ma takie same kąty jak trójkąt o bokach 5, 7, 10. Różnica między długościami najdłuższego i najkrótszego boku trójkąta ABC jest równa 12. Oblicz obwód trójkąta ABC .

c) Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta KLM . Boki trójkąta KLM mają długość 4, 6, 8. Obwody trójkątów ABC i KLM różnią się o 8. Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta ABC . Rozpatrz dwa przypadki.

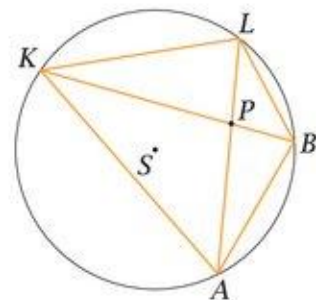
55. Uzasadnij, że trójkąty ABC i ADE przedstawione na poniższym rysunku są podobne.



56. Trójkąty przedstawione na poniższym rysunku są podobne. Znajdź skalę podobieństwa.



57. Rozważ trzy pary trójkątów przedstawionych na rysunku obok: trójkąty ABP i PKL , trójkąty ABK i ALK oraz trójkąty APK i BLP . Czy są wśród nich pary trójkątów podobnych?

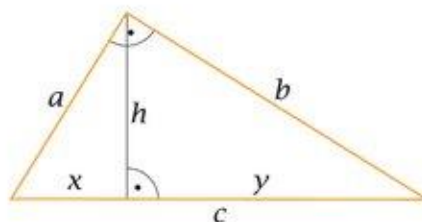


58. Sprawdź, czy trójkąt o bokach długości 6, 8, $2\sqrt{37}$ jest podobny do trójkąta KLM , w którym $\angle MKL = 120^\circ$, $|MK| = 9$, $|KL| = 12$.

59. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC| = |BC| = 8$. Na bokach AB i AC obrano odpowiednio punkty K i L takie, że $|KL| = |AL|$. Wyznacz długość odcinka KL , jeżeli wiadomo, że $\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{4}{3}$.

60. Czy od dowolnego trójkąta można odciąć wzdłuż prostej przechodzącej przez jeden z jego wierzchołków mniejszy trójkąt podobny do danego?

61. Przyjrzyj się rysunkowi. Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów, udowodnij twierdzenie Pitagorasa.

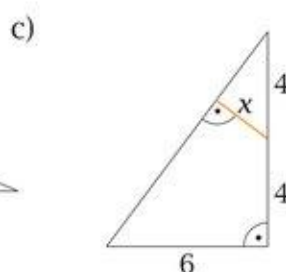
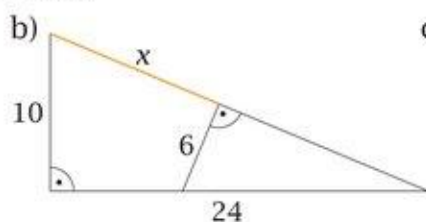
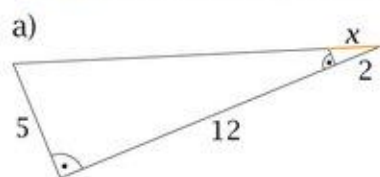


62. Odcinki CD i AE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC . Udowodnij, że trójkąty BDE i BCA są podobne.

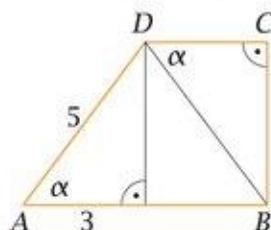
63. W trójkącie różnobocznym ABC każdy z boków podzielono na trzy równe części. Punkty D, E, F, G, H, I wyznaczające ten podział są wierzchołkami sześciokąta. Uzasadnij, że stosunek obwodu tego sześciokąta do obwodu trójkąta ABC wynosi $\frac{2}{3}$.

CECHY PODOBIENSTWA TRÓJKĄTÓW (CD.)

64. Wyznacz długość odcinka x .

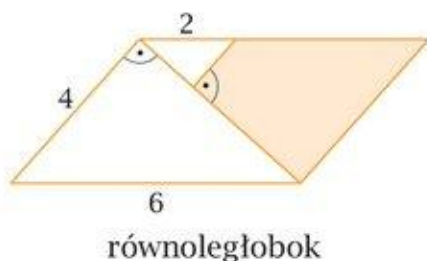


65. Oblicz pole trapezu przedstawionego na poniższym rysunku.

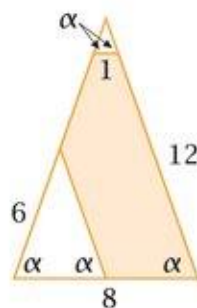


66. Oblicz pole zacieniowanej figury.

a)



b)



67. a) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 5 i 12. Z wierzchołka kąta prostego poprowadzono wysokość, która podzieliła przeciwprostokątną na dwa odcinki. Znajdź długości tych odcinków.

b) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 8 i 6. Z wierzchołka kąta prostego poprowadzono wysokość, która podzieliła trójkąt na dwa trójkąty. Oblicz pola tych trójkątów.

68. W trapezie $ABCD$ podstawy AB i CD mają długości odpowiednio 15 i 5. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie P . Oblicz pole trapezu, jeżeli wiadomo, że $|PD| = 3$, $|PC| = 4$.

69. W trójkącie prostokątnym ABC przeciwprostokątna ma długość 10. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła tę przeciwprostokątną w stosunku 1:4. Oblicz obwód trójkąta ABC .

70. W trapezie o podstawach długości 5 i 7,5 przekątne mają długości 5 i 10. Jakie są długości odcinków, na które dzieli przekątne ich punkt przecięcia?

71. Janek wyciągnął przed siebie palec na odległość 56 cm. Gdy zamknął lewe oko, widział palec na tle jednego końca budynku, gdy zamknął prawe — widział go na tle drugiego końca tego samego budynku. Szerokość budynku wynosi 10 m, a rozstaw oczu Janka 7 cm. Jak daleko od budynku stał Janek?

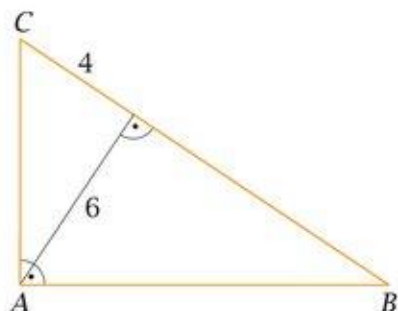
72. Pręt o długości 5 m zawieszono pionowo na pewnej wysokości nad ziemią. Końce cienia pręta znajdują się w odległości 30 m i 50 m od punktu na ziemi, nad którym wisi pręt. Na jakiej wysokości nad ziemią znajduje się dolny koniec pręta?

73. W trójkąt prostokątny równoramienny KLM wpisano kwadrat $ABCD$ w taki sposób, że bok AB kwadratu zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta, a wierzchołki C i D leżą na przyprostokątnych. Wyznacz stosunek pola trójkąta KLM do pola kwadratu $ABCD$.

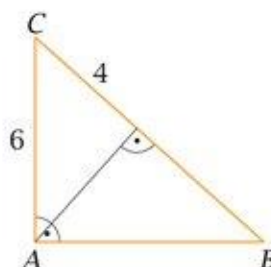
74. Punkt przecięcia przekątnych trapezu dzieli każdą z tych przekątnych w stosunku 2:3. Krótsza podstawa tego trapezu ma długość 60. Oblicz długość odcinka łączącego środki ramion tego trapezu.

75. Oblicz pole trójkąta ABC .

a)



b)

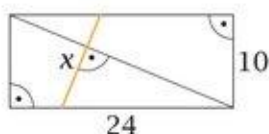


76. W trójkącie ABC dane są długości boków $|AB| = 8$ oraz $|BC| = |AC| = 12$. Symetralne boków AB oraz AC przecinają się w punkcie K . Oblicz obwód trójkąta ACK .

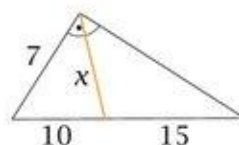
77. W równoległoboku $ABCD$ z wierzchołka A poprowadzono półprostą, która przecięła bok BC w punkcie M , a przedłużenie boku CD — w punkcie N . Oblicz obwód tego równoległoboku, jeżeli wiadomo, że $|MC| = 3$, $|NC| = 7$, $|AB| = 2|BC|$.

78. Oblicz długość odcinka x .

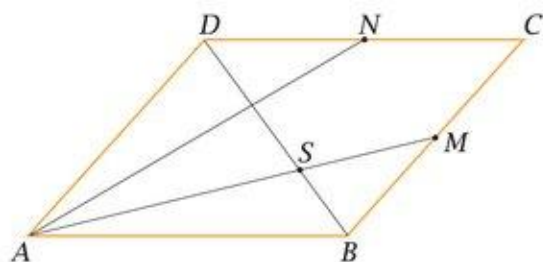
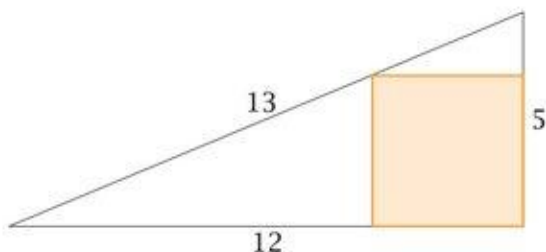
a)



b)

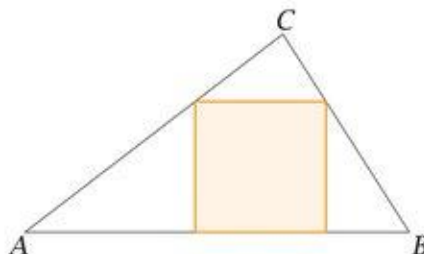


79. Oblicz długość boku zacieniowanego kwadratu.

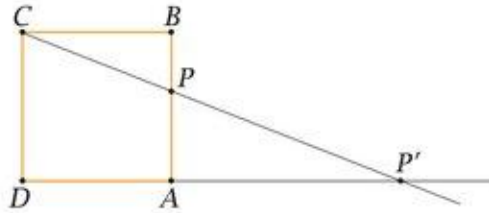


80. W równoległoboku $ABCD$ punkt M jest środkiem boku BC , a punkt N jest środkiem boku CD . Przekątna BD ma długość 12. Jakie są długości odcinków, na które podzieliły ją odcinki AM i AN ?

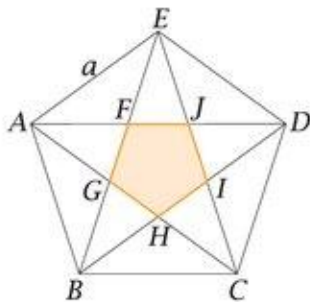
81. Pole trójkąta ABC wynosi 20, bok AB ma długość 8. Oblicz długość boku zacieniowanego kwadratu.



82. Kwadrat $ABCD$ na rysunku poniżej ma bok długości 1. Przekształcenie, w którym każdemu punktowi odcinka AB różnemu od B odpowiada pewien punkt półprostej DA , określamy w następujący sposób: *Obrazem punktu P jest punkt przecięcia półprostej CP z półprostą DA .* Niech P' oznacza obraz punktu P w tym przekształceniu.



- Czy istnieje taki punkt P , że $P = P'$?
- Jaką długość ma odcinek AP' , jeśli $|AP| = \frac{1}{2}$?
- Jaką długość ma odcinek AP' , jeśli $|AP| = \frac{3}{4}$?
- Czy istnieją takie punkty P_1 i P_2 , że $|P_1P_2| < 0,001$ i $|P'_1P'_2| > 1000$? Jeśli tak, podaj przykład.



83. Przekątne pięciokąta foremnego $ABCDE$ o boku długości a wyznaczają wewnątrz niego mniejszy pięciokąt foremny $FGHIJ$.

- Wykaż, że punkt J dzieli odcinek AD w złotym stosunku, tzn. że $\frac{|AD|}{|AJ|} = \frac{|AJ|}{|JD|}$.
- Oblicz długość boku małego pięciokąta.

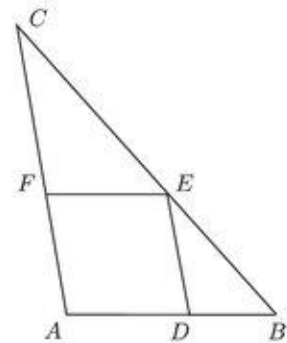
84. W trójkąt ABC przedstawiony na rysunku obok wpisano romb $ADEF$. Wykaż, że:

- długość boku rombu jest średnią geometryczną długości odcinków DB i FC , tzn.

$$|AD| = \sqrt{|DB| \cdot |FC|}$$

- długość boku rombu jest połową średniej harmonicznnej długości odcinków AB i AC , tzn.

$$\frac{1}{|AD|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$$

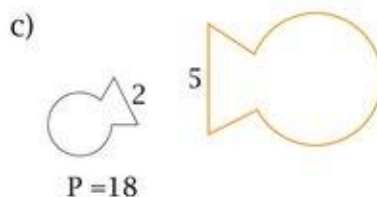
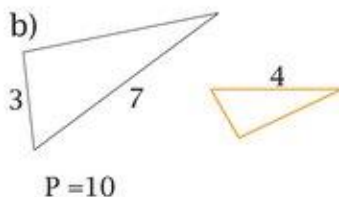
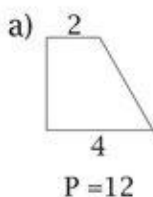


85. W trójkąt równoramienny KLM wpisano kwadrat $ABCD$ w taki sposób, że bok AB zawiera się w podstawie trójkąta, a wierzchołki C i D są środkami jego ramion. Uzasadnij, że pole trójkąta KLM jest dwa razy większe od pola kwadratu $ABCD$.

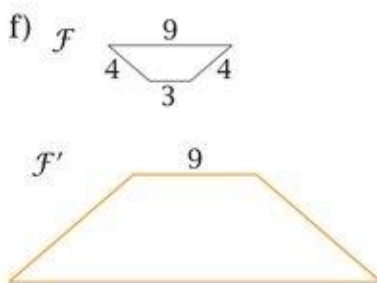
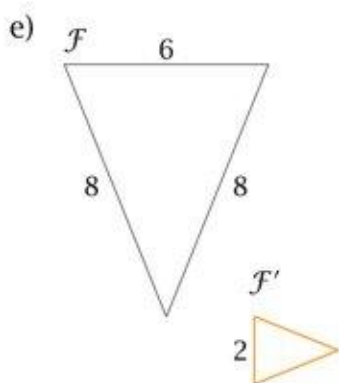
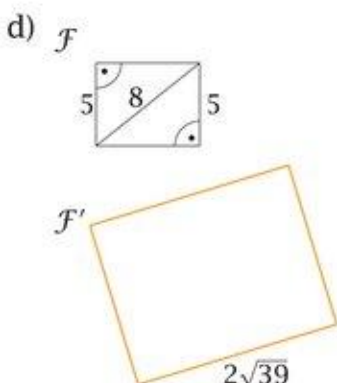
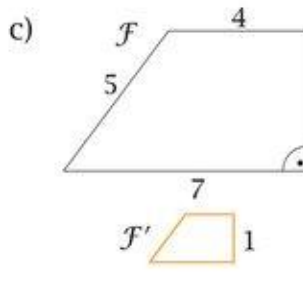
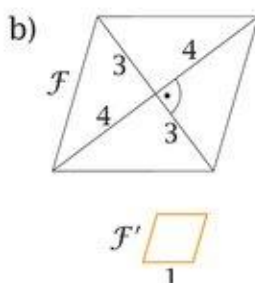
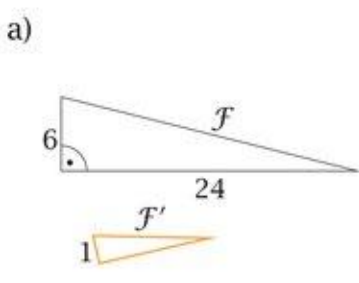
86. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = 10$. Na przekątnej AC obrano taki punkt K , że $|AK| = 4|KC|$. Oblicz pole tego prostokąta, jeżeli wiadomo, że odcinek BK jest prostopadły do przekątnej AC .

POLA FIGUR PODOBNYCH

87. Przedstawione na rysunku figury są podobne. Pole jednej z nich zostało podane. Oblicz pole drugiej figury.



88. Przedstawione na rysunku figury są podobne. Oblicz pole figury $\mathcal{F}'$.



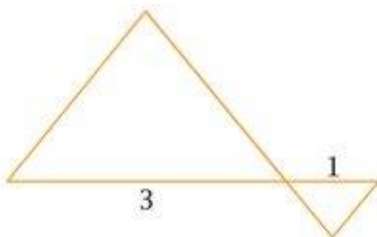
89. a) Dwie figury podobne mają pola 5 cm^2 i 30 cm^2 . Jaka jest skala podobieństwa mniejszej z tych figur do większej?

b) Jeden z dwóch wielokątów podobnych ma pole trzy razy mniejsze od drugiego. Ile razy jego obwód jest mniejszy od obwodu drugiego wielokąta?

c) Dwa trójkąty podobne mają obwody równe odpowiednio 15 cm i 30 cm. Oblicz stosunek pól tych trójkątów.

90. a) Suma pól trójkątów podobnych przedstawionych na rysunku wynosi 8. Oblicz pole mniejszego z nich.

b) Suma pól dwóch wielokątów podobnych jest równa 182. Obwód jednego z nich jest pięciokrotnie większy od obwodu drugiego. Oblicz pole większego wielokąta.



91. W trójkącie ABC na odcinkach AB , BC i AC wybrano środki boków i oznaczono odpowiednio: K , L i M . Wykaż, że pole czworokąta $ABLM$ stanowi 75% pola trójkąta ABC .

92. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego trójkąta ABC podzieliła go na dwa trójkąty o polach 9 i 16. Wyznacz skalę podobieństwa większego z tych trójkątów do trójkąta ABC .

93. Trójkąt ABC o bokach długości 8, 10, 15 jest podobny do trójkąta KLM . Najdłuższy bok trójkąta KLM jest pięciokrotnie dłuższy od najkrótszego boku trójkąta ABC . Wyznacz stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC .

94. Obwód wielokąta W jest równy 12, a jego pole wynosi 20. Wielokąt W' jest podobny do wielokąta W . Oblicz obwód wielokąta W' , jeżeli wiadomo, że pole tego wielokąta jest równe:

a) 80

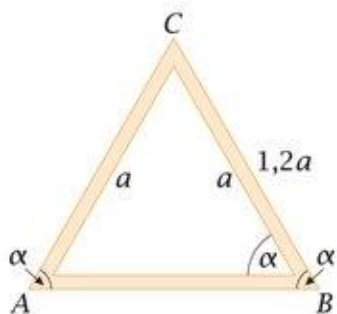
b) 40

c) 2,5

95. a) Wielokąt W_1 jest podobny do wielokąta W_2 . Obwód wielokąta W_1 wynosi 18, a pole tego wielokąta jest równe 6. Oblicz obwód wielokąta W_2 , jeżeli wiadomo, że jego pole wynosi 3.

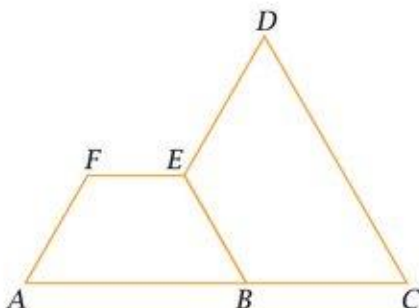
b) Wielokąt W_1 jest podobny do wielokąta W_2 w skali $k:1$. Wielokąt W_2 jest podobny do wielokąta W_3 również w skali $k:1$. Oblicz stosunek pola wielokąta W_3 do pola wielokąta W_1 .

c) Stosunek obwodów dwóch wielokątów podobnych wynosi $\frac{1}{4}$. Różnica między polami tych wielokątów jest równa 225. Oblicz pole większego wielokąta.



96. Na rysunku przedstawiono trójkąt równoramienny ABC . Jaką częścią trójkąta ABC jest zacieniowana figura?

97. Trapezy równoramienne $ABEF$ i $BCDE$ są podobne. Trapez $BCDE$ ma pole czterokrotnie większe od trapezu $ABEF$. Wyznacz stosunek $\frac{|ED|}{|FE|}$.



98. Dany jest trójkąt równoboczny o polu 1. Łącząc środki jego boków, otrzymujemy drugi, mniejszy trójkąt. Łącząc środki boków drugiego trójkąta, otrzymujemy trzeci itd. Oblicz sumę pól wszystkich (nieskończenie wielu) tych trójkątów.



99. a) Jezioro ma powierzchnię 12 km^2 . Oblicz powierzchnię tego jeziora na mapie wykonanej w skali $1 : 100\,000$.

b) Staw ma powierzchnię $2,5 \text{ ha}$. Oblicz powierzchnię tego stawu na mapie wykonanej w skali $1 : 5000$.

100. Działka budowlana o powierzchni 300 m^2 ma na pewnym planie powierzchnię 75 cm^2 . Wyznacz skalę tego planu.

101. Oszacuj wymiary mapy Polski w skali $1 : 1\,000\,000$. W Polsce mieszka ponad 38 mln osób. Czy wobec tego na mapie Polski położonej na podłodze zmieści się 38 osób?

102. a) Trójkąt dzielimy na dwie części prostą przechodzącą przez środki dwóch boków. Oblicz stosunek pól tych dwóch części.

b) Prosta równoległa do jednego z boków trójkąta dzieli go na dwie części o równych polach. W jakim stosunku prosta ta dzieli prostopadłą do niej wysokość trójkąta?

103. a) Bok kwadratu K_2 jest trzy razy krótszy od boku kwadratu K_1 . Z kolei bok kwadratu K_3 jest siedem razy dłuższy od boku kwadratu K_2 . Wyznacz stosunek pola kwadratu K_3 do pola kwadratu K_1 .

b) Dany jest wielokąt W o polu równym 100. Wielokąt W' jest podobny do wielokąta W w skali $\frac{2}{3}$, a wielokąt W'' jest podobny do wielokąta W' w skali $\frac{5}{4}$. Oblicz pole wielokąta W'' .

103. c) W trójkącie ABC środkowe przecinają się w punkcie S . Przez ten punkt poprowadzono prostą równoległą do boku AB . Prosta ta przecięła boki AC i BC odpowiednio w punktach D i E . Wyznacz stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta SEC .

104. Na bokach AB i AD rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio takie punkty K i L , że $\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|AL|}{|AD|} = \frac{1}{4}$. Wyznacz stosunek pola trójkąta AKL do pola pięciokąta $KBCDL$.

105. Przeciwprostokątna BC trójkąta prostokątnego ABC ma długość 18. Oblicz długość przyprostokątnych tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że wysokość AD podzieliła trójkąt na takie dwa trójkąty, że pole jednego z nich jest 9 razy większe od pola drugiego.

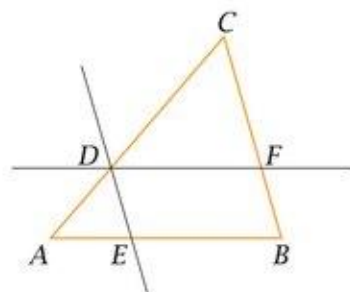
106. W trójkącie prostokątnym ABC wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną w stosunku $1:4$. Wyznacz stosunek pól trójkątów, na które wysokość ta podzieliła trójkąt ABC .

107. W trapezie prostokątnym $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 24 , a krótsza przekątna AC — długość 16 . Przekątne trapezu przecinają się w punkcie P . Pole trójkąta ABP jest 16 razy większe od pola trójkąta DCP . Oblicz pole trapezu.

108. W trójkącie ABC prosta k równoległa do boku BC przecięła pozostałe dwa boki w punktach K i L . W jakim stosunku prosta k podzieliła boki AB oraz AC , jeżeli wiadomo, że pole trójkąta AKL stanowi 4% pola trójkąta ABC ?

109. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę 90° . Na bokach AC i BC obrano odpowiednio punkty M i N takie, że $\frac{|MC|}{|AC|} = \frac{|NC|}{|BC|} = \frac{2}{3}$. Wyznacz stosunek pola czworokąta $ABMN$ do pola trójkąta ABC .

110. Przez punkt D leżący na boku AC trójkąta ABC poprowadzono proste równoległe do pozostałych boków trójkąta. Pole trójkąta AED wynosi 1 , a pole trójkąta CDF jest równe 4 . Oblicz pole trójkąta ABC .



111. W trójkącie ABC kąt ACB jest prosty, a CD jest wysokością. Trójkąt ADC ma pole 54 , a trójkąt DBC ma pole 96 . Oblicz długości boków trójkąta ABC .

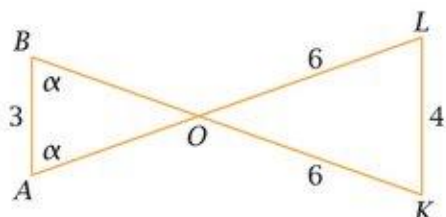
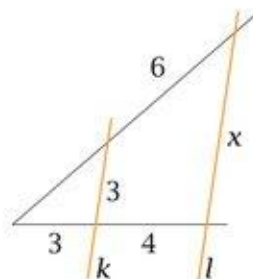
112. Przekątne trapezu równoramiennego $ABCD$, którego krótszą podstawą jest CD , a pole wynosi P , przecinają się w punkcie S . Pole trójkąta DSC wynosi $\frac{1}{16}P$. Znajdź pola pozostałych trzech trójkątów, na które przekątne podzieliły trapez.

113. Punkty K, L, M, N są środkami boków czworokąta wypukłego o polu S . Oblicz pole czworokąta $KLMN$.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Proste k i l przedstawione na rysunku obok są równoległe. Jaką długość ma odcinek x ?

- A. 4 B. 3,5 C. 7 D. 6

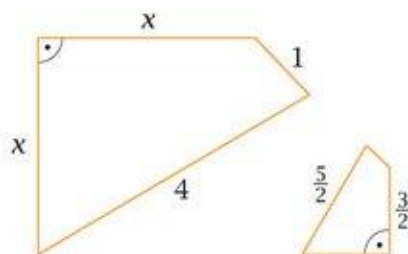


2. Jaką długość ma odcinek AL przedstawiony na rysunku obok?

- A. 4,5 B. 10,5 C. 9 D. 10

3. W trójkącie ABC poprowadzono prostą równoległą do boku BC . Prosta ta przecięła boki AB i AC w punktach odpowiednio M i N . Wiadomo, że $|BC| = 10$, $|MN| = 6$, $|AM| = 4$. Oznacza to, że bok AB ma długość:

- A. 13 B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{20}{3}$ D. 20



4. Czworokąty przedstawione na rysunku obok są podobne. Obwód większego wielokąta jest równy:

- A. 6,125 B. 8,2 C. 9,8 D. 6,875

5. W równoległoboku $ABCD$ dane są: $|AB| = 8$, $|AD| = 6$, $|\sphericalangle DAB| = 30^\circ$. Równoległobok $KLMN$ ma pole równe 216 i jest podobny do równoległoboku $ABCD$. Obwód równoległoboku $KLMN$ wynosi:

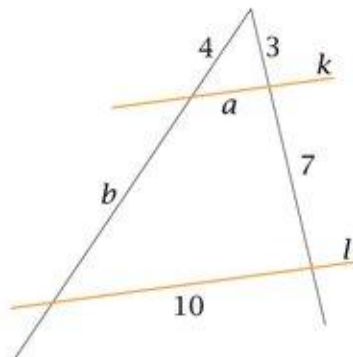
- A. 84 B. 252 C. 42 D. 168

6. W trójkącie ABC dane są $|AC| = 5$ oraz $|BC| = 12,5$. Na bokach AC i BC obrano punkty odpowiednio M i N takie, że $|AM| = 3$, $|BN| = 7,5$. Wykaż, że czworokąt $ABNM$ jest trapezem.

7. Proste k i l przedstawione na rysunku obok są równoległe. Wyznacz długości odcinków a oraz b .

8. a) W trapezie $ABCD$ podstawy mają długości 7 i 10. Trapez $A'B'C'D'$ jest podobny do trapezu $ABCD$ w skali $k = \frac{7}{2}$. Wyznacz długość odcinka łączącego środki ramion trapezu $A'B'C'D'$.

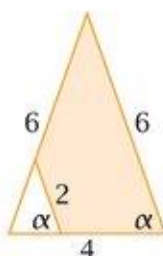
b) Kwadrat $ABCD$ o przekątnej 6 jest podobny do kwadratu $A'B'C'D'$ w skali $k = \frac{3}{5}$. Oblicz pole kwadratu $A'B'C'D'$.



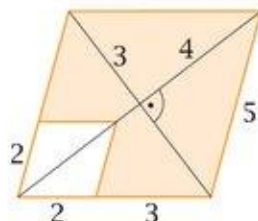
9. Kąt rozwarty rombu $ABCD$ ma miarę 120° , a jego pole jest równe $8\sqrt{3}$. Przekątne rombu $KLMN$ mają długości 10 i $10\sqrt{3}$. Obwód rombu $PQRS$ jest równy 40, a jego dłuższa przekątna ma długość $10\sqrt{2}$. Które z opisanych powyżej rombów są podobne? Wyznacz skalę podobieństwa.

10. Oblicz pole zacieniowanej figury.

a)



b)



11. W trójkącie prostokątnym krótsza przyprostokątna ma długość 6. Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną w stosunku 1:3. Oblicz obwód tego trójkąta.

12. Trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych 4 i 6 jest podobny do trójkąta KLM . Wyznacz obwód trójkąta KLM , jeżeli jego najdłuższy bok ma długość 26.

13. W trapezie równoramiennym dane są długości podstaw $|AB| = 10$, $|CD| = 4$ oraz długości ramion $|BC| = |AD| = 6$. Ramiona trapezu przedłużono aż do przecięcia w punkcie S . Ustal, które zdanie jest prawdziwe.

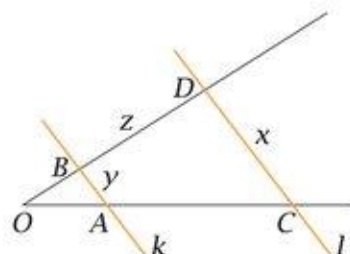
- A. Obwód trójkąta CDS jest większy od 15.
- B. Miara kąta CSD jest równa 90° .
- C. Pole trójkąta CSD stanowi $\frac{2}{5}$ pola trójkąta ABS .
- D. Trójkąt CSD jest równoboczny.

14. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego ABC mają długości 4 i 6. Trójkąt KLM jest podobny do trójkąta ABC , a jego najdłuższy bok ma taką samą długość jak najdłuższa środkowa trójkąta ABC . Skala podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta KLM jest równa:

- A. $\frac{\sqrt{130}}{10}$
- B. $\frac{3}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{130}}{13}$
- D. $\frac{5}{4}$

15. Proste k i l przedstawione na rysunku są równoległe. Oznacza to, że odcinek OB ma długość:

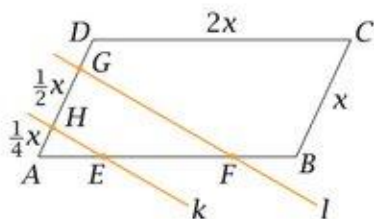
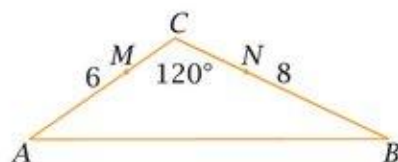
- A. $\frac{yz}{x-y}$
- B. $\frac{xz}{y}$
- C. $\frac{x-y}{z}$
- D. $\frac{yx}{z}$



Я16. W trójkącie równobocznym ABC na bokach AB , BC i AC obrano takie punkty odpowiednio K , L i M , że: $|AK| = \frac{1}{4}|AB|$, $|BL| = \frac{1}{4}|BC|$, $|CM| = \frac{1}{4}|AC|$. Wykaż, że trójkąt KLM jest podobny do trójkąta ABC oraz wyznacz skalę tego podobieństwa.

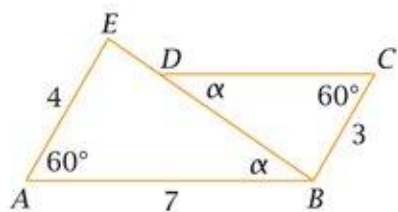
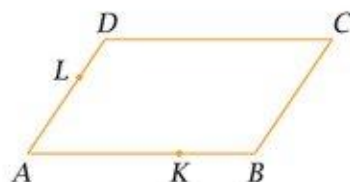
Я17. W trójkącie równoramiennym ABC dane są długości boków $|AB| = 8$ oraz $|AC| = |BC| = 10$. W trójkąt ten wpisano kwadrat tak, że dwa wierzchołki kwadratu leżą na podstawie trójkąta, a dwa pozostałe leżą na jego ramionach. Oblicz długość boku tego kwadratu.

Я18. W trójkącie ABC przedstawionym na rysunku obok na bokach AC i BC obrano takie punkty M i N , że podzieliły one każdy z tych boków w stosunku $2:1$. Z wierzchołka C poprowadzono półprostą, która przecięła bok AB w punkcie K , a odcinek MN — w punkcie L . Oblicz długość odcinka ML , jeżeli wiadomo, że $|AK| = \frac{3}{5}|AB|$.



Я19. Na rysunku obok przedstawiono równoległobok $ABCD$. Proste k i l są równoległe do jego przekątnej. Wyznacz stosunek pola czworokąta $EFGH$ do pola pięciokąta $FBCDG$.

Я20. W równoległoboku przedstawionym na rysunku punkty K i L dzielą boki AB i AD w stosunku $3:2$. Wyznacz stosunek pola pięciokąta $LKBCD$ do pola równoległoboku.

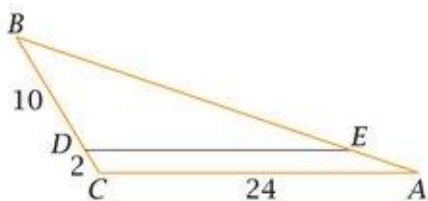
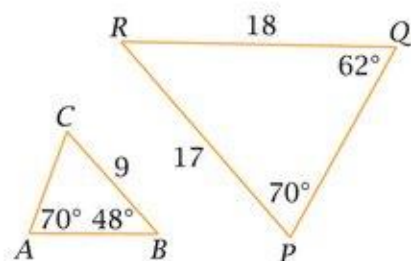


Я21. Oblicz obwód pięciokąta $ABCDE$ przedstawionego na rysunku.

PRZED MATURĄ

1. Przedstawione na rysunku trójkąty ABC i PQR są podobne. Bok AB trójkąta ABC ma długość:

- A. 8 B. 8,5 C. 9,5 D. 10



2. W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC , a punkt E leży na boku AB . Odcinek DE jest równoległy do boku AC , a ponadto $|BD| = 10$, $|BC| = 12$ i $|AC| = 24$ (zob. rysunek). Długość odcinka DE jest równa:

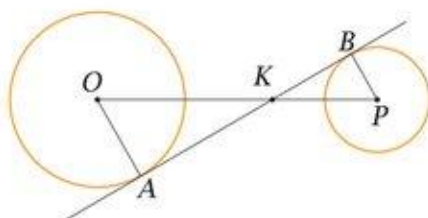
- A. 22 B. 20 C. 12 D. 11

3. Dany jest trójkąt o bokach długości $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$. Trójkątem podobnym do tego trójkąta jest trójkąt, którego boki mają długości:

- A. 10, 15, 20 B. 20, 45, 80 C. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ D. $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$

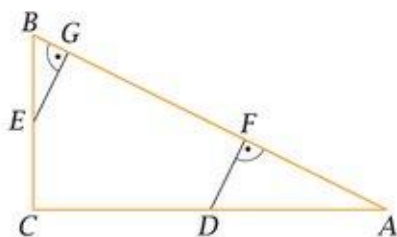
4. Dane są dwa okręgi: okrąg o środku w punkcie O i promieniu 5 oraz okrąg o środku w punkcie P i promieniu 3. Odcinek OP ma długość 16. Prosta AB jest styczna do tych okręgów w punktach A i B . Ponadto prosta AB przecina odcinek OP w punkcie K (zob. rysunek). Wtedy:

- A. $|OK| = 6$
B. $|OK| = 8$
C. $|OK| = 10$
D. $|OK| = 12$



5. Punkty D i E są środkami przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC . Punkty F i G leżą na przeciwprostokątnej AB tak, że odcinki DF i EG są do niej prostopadłe (zob. rysunek). Pole trójkąta BGE jest równe 1, a pole trójkąta AFD jest równe 4. Zatem pole trójkąta ABC jest równe:

- A. 12
B. 16
C. 18
D. 20



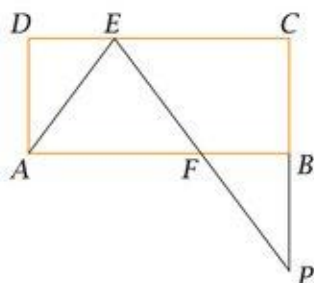
6. W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne AC oraz BD przecinają się w punkcie S . Wykaż, że jeżeli $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$, to pole trójkąta ABS jest 25 razy większe od pola trójkąta DCS .

7. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$ w skali $\frac{5}{2}$, przy czym $|AB| = \frac{5}{2}|A'B'|$. Stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta $A'B'C'$ jest równy:

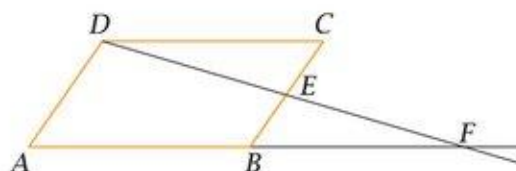
- A. $\frac{4}{25}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{25}{4}$

8. Ramię trapezu równoramienne $ABCD$ ma długość $\sqrt{26}$. Przekątne w tym trapezie są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je w stosunku $2:3$. Oblicz pole tego trapezu.

9. Dany jest prostokąt $ABCD$. Na boku CD tego prostokąta wybrano taki punkt E , że $|EC| = 2|DE|$, a na boku AB wybrano taki punkt F , że $|BF| = |DE|$. Niech P oznacza punkt przecięcia prostej EF z prostą BC (zob. rysunek). Wykaż, że trójkąty AED i FPB są przystające.

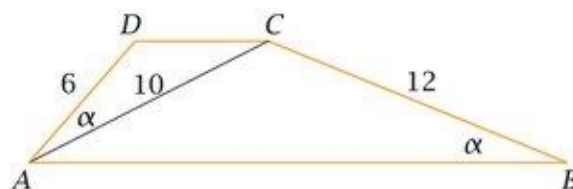


10. W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest środkiem boku BC . Z wierzchołka D poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie E . Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zob. rysunek). Wykaż, że punkt B jest środkiem odcinka AF .

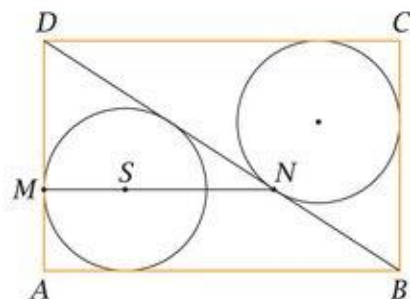


- Я11.** W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD dane są: $|AD| = 6$, $|BC| = 12$, $|AC| = 10$ oraz $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CAD|$ (zob. rysunek). Wówczas długość podstawy AB tego trapezu jest równa:

- A. $|AB| = 18$
 B. $|AB| = 20$
 C. $|AB| = 22$
 D. $|AB| = 24$



- Я12.** Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N . Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M , a środek S tego okręgu leży na odcinku MN , jak na rysunku. Wykaż, że $|MN| = |AD|$.



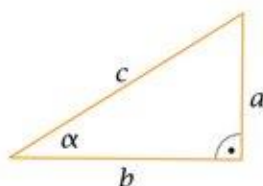
- Я13.** Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M ($M \neq A$ i $M \neq C$), a na ramieniu BC wybrano punkt N , w taki sposób, że $|AM| = |CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T . Udowodnij, że $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$.

- Я14.** Dany jest trójkąt ABC , w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC . Punkt S jest środkiem odcinka BD . Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P . Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.

- Я15.** Trapez równoramienny $ABCD$ o ramieniu długości 6 wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa AB trapezu, o długości 12, jest średnicą tego okręgu. Przekątne AC i BD trapezu przecinają się w punkcie P . Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt ABP .

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego



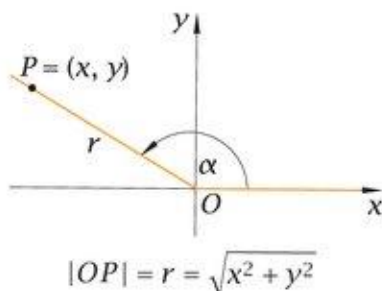
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° i 60°

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta w układzie współrzędnych



$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

Każdy z tych wzorów można stosować dla dowolnego kąta α , dla którego odpowiednia funkcja jest określona.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Inne związki między funkcjami trygonometrycznymi

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Wzory redukcyjne

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$$

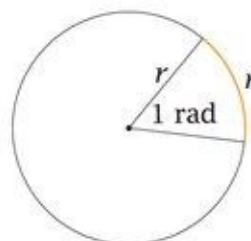
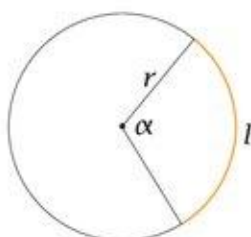
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Miara łukowa kąta

Miara łukowa kąta środkowego w okręgu to liczba równa stosunkowi długości łuku, na którym oparty jest ten kąt, do długości promienia okręgu.

Kąt o mierze łukowej 1 nazywamy **radianem**. 1 radian (w skrócie 1 rad) to taki kąt, który w okręgu wycina łuk o długości równej promieniowi okręgu.



Miara łukowa kąta α wynosi $\frac{l}{r}$.

miara w stopniach	360°	180°	90°	60°	45°	30°
miara łukowa	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Podstawowe własności funkcji trygonometrycznych

Dla dowolnej liczby całkowitej k zachodzą równości:

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

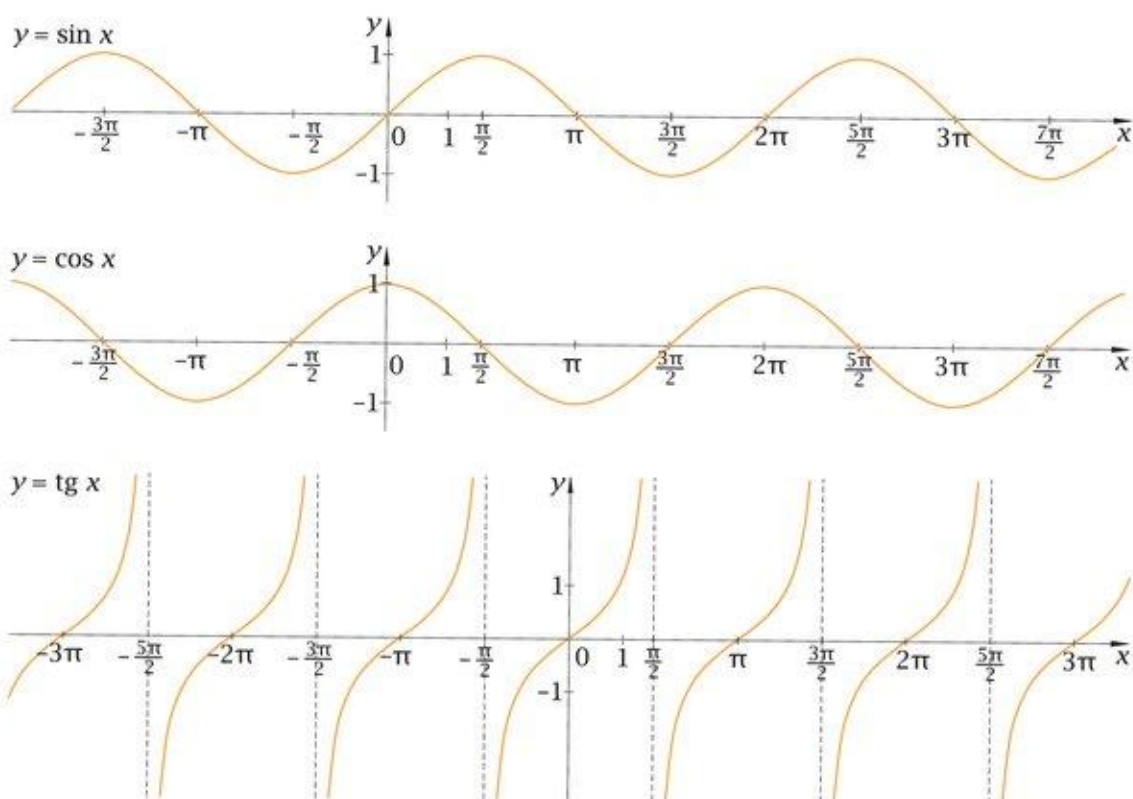
$$\cos x = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$$

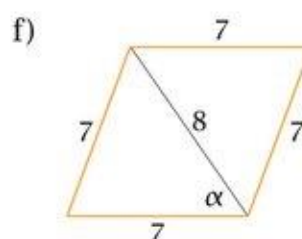
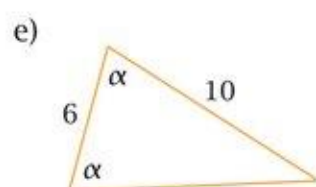
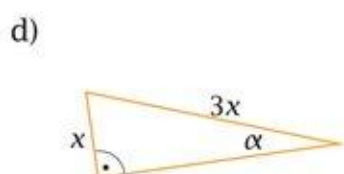
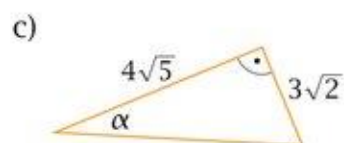
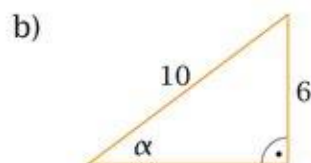
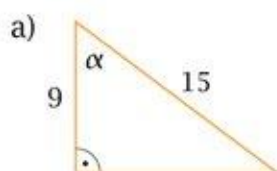
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$

Wykresy funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej

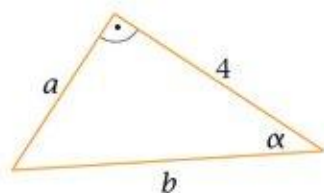


FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE KĄTA OSTREGO

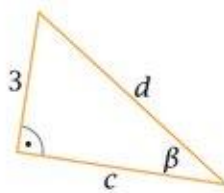
Я1. Oblicz wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych kąta α .



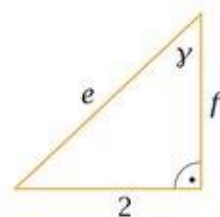
Я2. Oblicz długości boków oznaczonych literami.



$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

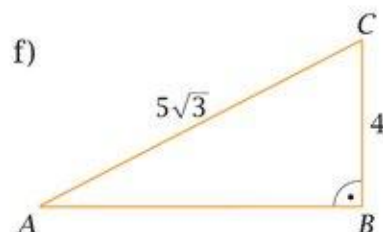
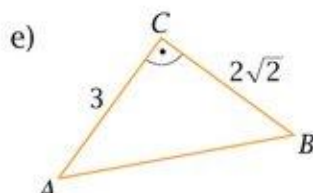
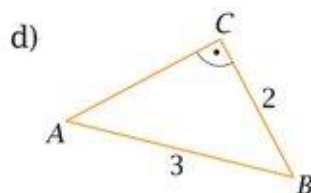
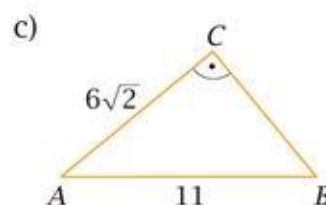
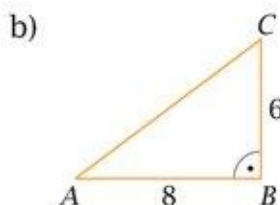
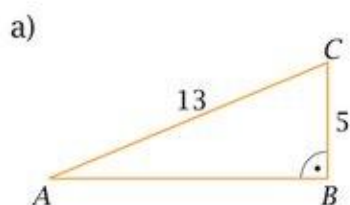


$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}$$

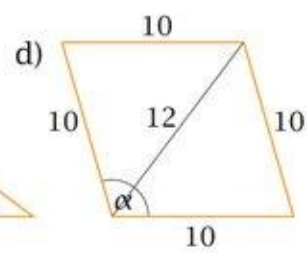
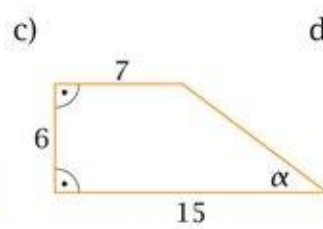
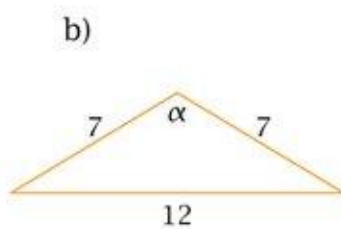
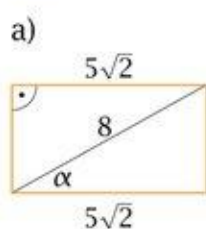


$$\sin \gamma = \frac{3}{4}$$

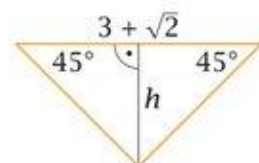
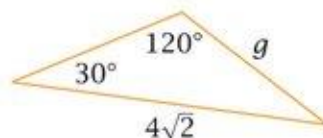
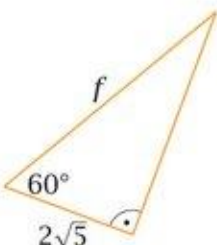
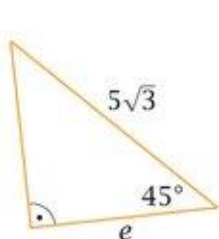
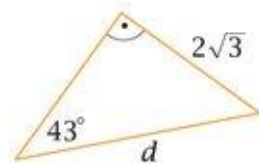
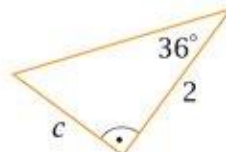
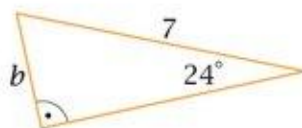
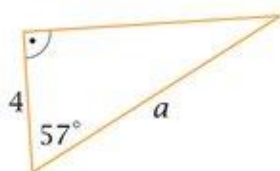
Я3. Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC .



Я4. Oblicz miarę kąta α .



Я5. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

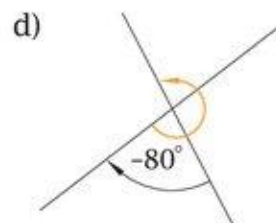
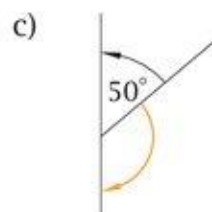
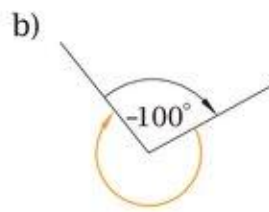
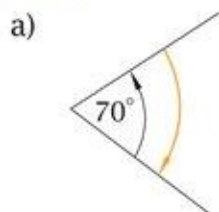


- Я6.** Oblicz stosunek długości dłuższej przyprostokątnej do długości krótszej przyprostokątnej w trójkącie prostokątnym o podanym kącie ostrym.
- a) $\alpha = 23^\circ$ b) $\alpha = 69^\circ$ c) $\alpha = 44^\circ$
- Я7.** W trójkącie prostokątnym ABC bok BC jest przeciwprostokątną. Oblicz długości dwóch boków tego trójkąta, których miar nie podano.
- a) $|AB| = 3$, $|\sphericalangle B| = 60^\circ$ b) $|BC| = 4\sqrt{2}$, $|\sphericalangle C| = 45^\circ$ c) $|AB| = 5$, $|\sphericalangle B| = 30^\circ$
- Я8.** Skonstruuj kąt α taki, że:
- a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ c) $\cos \alpha = 0,6$ d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$
- Я9.** a) Skonstruuj trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 3 cm i kącie ostrym α takim, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ (rozpatrz dwa przypadki).
b) Skonstruuj trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 5 cm i kącie ostrym α takim, że $\sin \alpha = 0,4$.
c) Skonstruuj trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 4 cm i kącie ostrym α takim, że $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ (rozpatrz dwa przypadki).
- Я10.** a) Prostokąt ma boki długości 13 cm i 7 cm. Wyznacz miarę kąta ostrego utworzonego przez jego przekątne.
b) Przekątne rombu mają długości 6 cm i 10 cm. Znajdź miary kątów tego rombu.
c) Ramię trapezu równoramiennego ma długość $4\sqrt{3}$, a różnica między długościami podstaw tego trapezu wynosi 5. Wyznacz miary kątów tego trapezu.
- Я11.** Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α jeżeli:
- a) $\sin \alpha = 0,7$ b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\operatorname{tg} \alpha = 3$
- Я12.** a) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ostrych ma miarę 20° , a przyprostokątna leżąca przy tym kącie ma długość 2.
b) Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątna ma długość 10, a jeden z kątów ostrych ma miarę 65° .
c) Oblicz obwód trójkąta równoramiennego, w którym ramiona mają długość 9, a kąt między nimi zawarty ma miarę 52° .
d) Oblicz obwód prostokąta, w którym przekątna ma długość 8 i tworzy z jednym z boków kąt o mierze 40° .
e) Oblicz obwód rombu, w którym krótsza przekątna ma długość 5, a kąt rozwarty ma miarę 108° .
f) Oblicz obwód trapezu prostokątnego, w którym podstawy mają długość 11 i 8, a dłuższe ramię jest nachylone do podstawy pod kątem 43° .

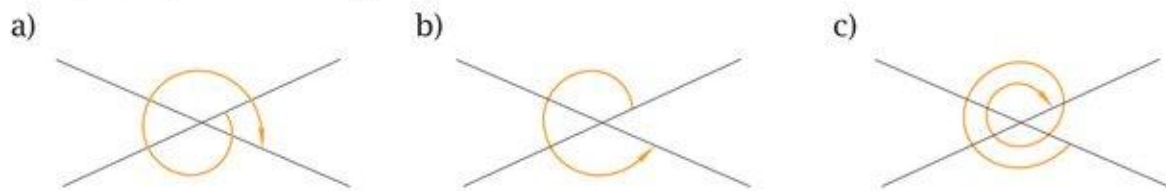
- Я13.** Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ostrych jest o 56° większy od drugiego kąta, a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość 12.
- Я14.** Nie korzystając z kalkulatora ani z tablic trygonometrycznych, uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.
- a) $\sin 2^\circ$, $\sin 20^\circ$, $\sin 22^\circ$ b) $\cos 15^\circ$, $\cos 35^\circ$, $\cos 55^\circ$ c) $\operatorname{tg} 44^\circ$, $\operatorname{tg} 55^\circ$, $\operatorname{tg} 66^\circ$
- Я15.** a) Czy istnieje trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β takich, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$ i $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{3}$?
- b) Skonstruuj trójkąt o kątach ostrych α i β takich, że $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ i $\cos \beta = \frac{1}{3}$.
- Я16.** a) Oblicz miarę kąta środkowego opartego na cięciwie, której długość jest równa połowie długości promienia. Odpowiedź podaj z dokładnością do 1 stopnia.
- b) Oblicz długość cięciwy okręgu o promieniu długości 1, na której oparty jest kąt środkowy o mierze 110° .
- c) W okręgu o środku w punkcie O i promieniu $r = 8$ poprowadzono cięciwę AB . Wyznacz długość tej cięciwy, wiedząc, że $|\sphericalangle OBA| = 26^\circ$.
- Я17.** W trójkącie równoramiennym długość podstawy wynosi 2 dm, a kąt przy podstawie ma miarę 30° . Oblicz stosunek długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
- Я18.** W trapezie równoramiennym dłuższa podstawa ma długość a , natomiast ramię jest nachylone do tej podstawy pod kątem α . Oblicz pole tego trapezu, jeżeli wiadomo, że jego przekątna jest dwusieczną kąta przy dłuższej podstawie trapezu.
- Я19.** a) Wykaż, że dla każdego kąta ostrego α zachodzi nierówność: $\operatorname{tg} \alpha > \sin \alpha$.
- b) Wykaż, że jeśli $45^\circ < \alpha < 90^\circ$, to $\sin \alpha > \cos \alpha$.

KĄTY O MIARACH DODATNICH I UJEMNYCH

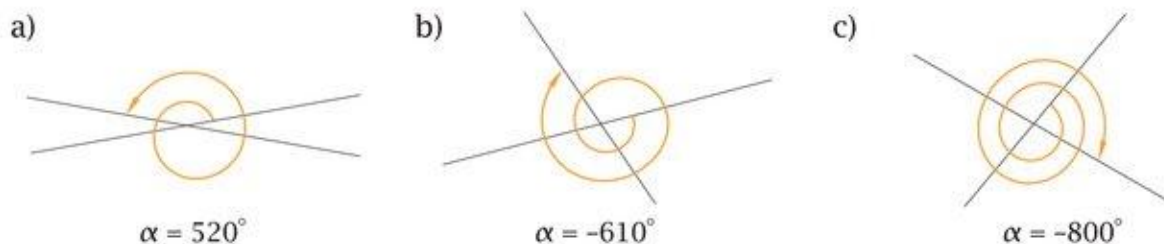
- Я20.** Podaj miarę kąta zaznaczonego pomarańczową strzałką.



Я21. Dwie proste przedstawione na rysunku przecinają się pod kątem ostrym 48° . Podaj miarę zaznaczonego kąta.



Я22. Pod rysunkiem podano miarę zaznaczonego kąta. Oblicz miarę kąta ostrego, pod jakim przecinają się proste przedstawione na rysunku.



Я23. Wśród podanych kątów wskaż te, których ramiona końcowe po umieszczeniu kąta w układzie współrzędnych leżą w III ćwiartce układu współrzędnych.

99° -99° 150° 280° -460° -100° 200° -700°

Я24. Narysuj w układzie współrzędnych kąt o podanej mierze.

- | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) -90° | d) 180° | g) -45° | j) 495° |
| b) 450° | e) -540° | h) 225° | k) -405° |
| c) -270° | f) 1080° | i) -135° | l) -585° |

Я25. Wyznacz miarę kąta α spełniającego warunek $0^\circ < \alpha < 360^\circ$, którego ramiona pokrywają się z ramionami kąta o mierze:

- | | | | |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) 500° | c) 1200° | e) -100° | g) -960° |
| b) 700° | d) -40° | f) -200° | h) -590° |

Я26. Podaj przykład kąta, którego ramiona, po umieszczeniu go w układzie współrzędnych, pokrywają się z ramionami kąta o mierze 10° oraz:

- miara kąta jest ujemna,
- miara kąta jest większa od 400° ,
- miara kąta jest mniejsza od -2000° .

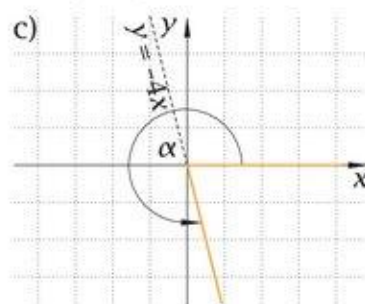
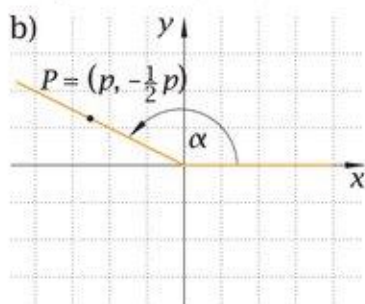
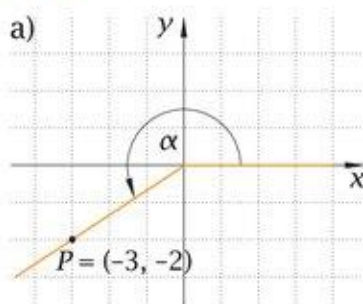
Я27. W układzie współrzędnych umieszczono kąt α o podanej mierze. Punkty A i B leżą na końcowym ramieniu tego kąta. Wyznacz wartości współrzędnych a i b.

- | | |
|--|--|
| a) $\alpha = 855^\circ$, $A = (-2, a)$, $B = (b, 6)$ | c) $\alpha = -30^\circ$, $A = (1, a)$, $B = (b, -\sqrt{3})$ |
| b) $\alpha = 420^\circ$, $A = (3, a)$, $B = (b, 4)$ | d) $\alpha = -510^\circ$, $A = (-5, a)$, $B = (b, -3\sqrt{2})$ |

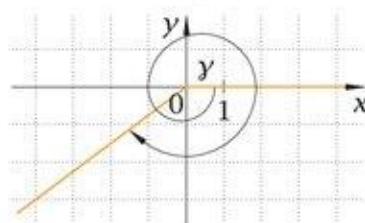
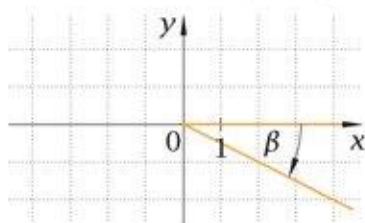
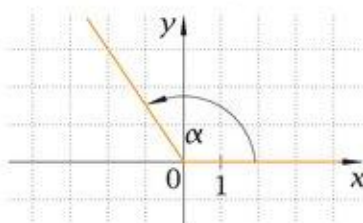
- Я28.** Wyznacz miary wszystkich kątów umieszczonych w układzie współrzędnych, których:
- ramiona pokrywają się z ramionami kąta o mierze 100° ,
 - ramiona leżą na prostych zawierających ramiona kąta o mierze 70° ,
 - ramię końcowe leży na prostej prostopadłej do prostej zawierającej ramię końcowe kąta o mierze 5° ,
 - ramiona pokrywają się z osiami układu współrzędnych.
- Я29.** Zapisz miary wszystkich kątów umieszczonych w układzie współrzędnych, których końcowe ramiona zawierają się w prostej $y = x$ lub $y = -x$.

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA

- Я30.** Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych zaznaczonego kąta α .



- Я31.** Znajdź punkt o obu współrzędnych całkowitych leżący na końcowym ramieniu zaznaczonego kąta. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta.



- Я32.** Wierzchołek kąta α leży w początku układu współrzędnych, ramię początkowe leży na dodatniej osi x , a punkt P leży na końcowym ramieniu tego kąta. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α .

- $P = (2, 3)$
- $P = (-2, 5)$
- $P = (-4, -3)$
- $P = (3, -1)$

- Я33.** Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli po umieszczeniu w układzie współrzędnych końcowe ramię tego kąta zawiera się w podanej prostej.

- $y = 3x$
- $y = -\frac{3}{4}x$
- $y = -\frac{\sqrt{7}}{3}x$

Я34. W układzie współrzędnych dany jest trójkąt ABC . Wyznacz funkcje trygonometryczne kąta BAC .

- a) $A = (0, 0)$, $B = (7, 0)$, $C = (-4, 10)$
b) $A = (0, 0)$, $B = (10, 0)$, $C = (-12, 16)$
c) $A = (0, 0)$, $B = (\sqrt{2}, 0)$, $C = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Я35. Określ, czy podana liczba jest dodatnia, ujemna czy równa 0.

- a) $\sin 175^\circ$ d) $\cos(-10^\circ)$ g) $\cos(-180^\circ)$
b) $\operatorname{tg} 200^\circ$ e) $\operatorname{tg}(-100^\circ)$ h) $\operatorname{tg}(-480^\circ)$
c) $\cos 0,5^\circ$ f) $\sin(-250^\circ)$ i) $\cos 3690^\circ$

Я36. Określ, w której ćwiartce układu współrzędnych leży końcowe ramię kąta α , jeżeli:

- a) $\sin \alpha > 0$ i $\cos \alpha < 0$ b) $\cos \alpha < 0$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$ c) $\sin \alpha < 0$ i $\cos \alpha > 0$

Я37. a) Punkt $P = (-2, k)$ leży na ramieniu końcowym kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych. Wyznacz k , wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$.

b) Punkt $P = (m, -3)$ leży na ramieniu końcowym kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych. Wyznacz m , wiedząc, że $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$.

c) Punkt $P = (n, 5)$ leży na ramieniu końcowym kąta α umieszczonego w układzie współrzędnych. Wyznacz n , wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Я38. Czy wartość podanego wyrażenia jest liczbą dodatnią czy ujemną?

- a) $\sin 547^\circ \cdot \cos 421^\circ \cdot \operatorname{tg} 123^\circ$ d) $\frac{\cos(-153^\circ)}{\sin 179^\circ} \cdot \operatorname{tg}(-357^\circ)$
b) $\frac{\cos 111^\circ \cdot \sin(-222^\circ) \cdot \operatorname{tg} 333^\circ}{\sin(-3601^\circ) \cdot \cos 3601^\circ}$ e) $\frac{\operatorname{tg}(-301^\circ) \cdot \sin 1304^\circ}{\cos 192^\circ \cdot \operatorname{tg}(-271^\circ)}$
c) $\sin 348^\circ - \operatorname{tg} 909^\circ + \cos 269^\circ$ f) $\frac{\cos 291^\circ - \sin 184^\circ - \operatorname{tg} 315^\circ}{\cos(-291^\circ) \cdot \sin(-154^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-315^\circ)}$

Я39. Oblicz.

- a) $\sin 270^\circ$, $\cos(-90^\circ)$, $\operatorname{tg}(-180^\circ)$
b) $\sin(-180^\circ) + \cos(-270^\circ)$, $\operatorname{tg} 720^\circ - \cos(-180^\circ)$, $\operatorname{tg}(-360^\circ) \cdot \sin 0^\circ$
c) $\frac{\cos 0^\circ - \cos 540^\circ}{\sin 450^\circ}$, $\frac{\operatorname{tg}(-180^\circ) + \sin 90^\circ}{\cos(-180^\circ)}$, $\frac{\operatorname{tg} 1080^\circ - \sin 990^\circ}{\cos(-900^\circ)}$

Я40. Narysuj w układzie współrzędnych dwa różne kąty α i β spełniające podany warunek.

a) $\sin \alpha = \sin \beta = \frac{2}{3}$

d) $\sin \alpha = \sin \beta = -\frac{4}{5}$

b) $\cos \alpha = \cos \beta = -0,3$

e) $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{1}{6}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$

f) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = -1,2$

Я41. Narysuj kąt α .

a) $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

d) $\sin \alpha = \frac{3}{7}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

b) $\cos \alpha = 0,25$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

e) $\operatorname{tg} \alpha = -0,75$ i $\sin \alpha < 0$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$ i $\sin \alpha < 0$

f) $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$ i $\sin \alpha \cdot \cos \alpha > 0$

Я42. Oblicz.

a) $\sin(-60^\circ)$

c) $\operatorname{tg}(-30^\circ)$

e) $\cos(-45^\circ)$

b) $\cos 120^\circ$

d) $\sin 150^\circ$

f) $\operatorname{tg} 240^\circ$

Я43. Oblicz.

a) $\sin 315^\circ$

c) $\operatorname{tg} 225^\circ$

e) $\cos 330^\circ$

b) $\cos 405^\circ$

d) $\sin 390^\circ$

f) $\operatorname{tg} 135^\circ$

Я44. Znajdź wszystkie kąty, które spełniają nierówność $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ i podany warunek.

a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$

c) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0$

b) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$

d) $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \leq 0$

Я45. Określ, w której ćwiartce układu współrzędnych leży końcowe ramię kąta α , jeśli:

a) $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$

b) $|\cos \alpha| = \cos \alpha$

Я46. Która z podanych liczb jest większa?

a) $\sin 200^\circ$ czy $\cos 200^\circ$

c) $\sin(-20^\circ)$ czy $\operatorname{tg}(-50^\circ)$

b) $\cos 95^\circ$ czy $\operatorname{tg} 95^\circ$

d) $\cos 740^\circ$ czy $\operatorname{tg}(-314^\circ)$

Я47. Określ znak różnicy.

a) $\sin(-20^\circ) - \sin(-21^\circ)$

c) $\cos 410^\circ - \cos 47^\circ$

b) $\operatorname{tg} 98^\circ - \operatorname{tg} 134^\circ$

d) $\cos 210^\circ - \cos 81^\circ$

PODSTAWOWE ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGNOMETRYCZNYMI

Я48. Oblicz $\cos \alpha$, gdy:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $\sin \alpha = -0,3$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

d) $\sin \alpha = \cos \alpha$

Я49. Oblicz $\sin \alpha$, gdy:

a) $\cos \alpha = -0,6$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

c) $\cos \alpha = \sin \alpha$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{7}$

d) $\sin \alpha = -\cos \alpha$ i $-540^\circ < \alpha < -360^\circ$

Я50. Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$, gdy:

a) $\sin \alpha = \frac{5}{9}$ i $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

c) $\cos \alpha = -\frac{1}{10}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

d) $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ i $-180^\circ < \alpha < -90^\circ$

Я51. Oblicz $\sin \alpha$ oraz $\cos \alpha$, gdy:

a) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 4$ i $-180^\circ < \alpha < -90^\circ$

b) $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$ i $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}$

Я52. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α .

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$

b) $\cos \alpha = -0,6$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 2$

Я53. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α .

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

d) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

b) $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

e) $\operatorname{tg} \alpha = -0,1$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

c) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

f) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

Я54. Uprość wyrażenie.

a) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}$

d) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$

b) $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$

e) $\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right) \operatorname{tg} \alpha$

c) $1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$

f) $\left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) (1 + \cos \alpha)$

Я55. Uzasadnij tożsamość.

a) $\frac{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}{\sin \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

e) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha$

b) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

f) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$

c) $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha$

g) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$

d) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

h) $(\sin \alpha + \cos \alpha) \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}$

Я56. Sprawdź, czy istnieje kąt α , dla którego zachodzą podane równości.

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ i $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-5\sqrt{6}}{12}$

b) $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ i $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

d) $\sin \alpha = -0,2$ i $\operatorname{tg} \alpha = -2,5$

Я57. Uzasadnij tożsamość.

a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

c) $\frac{2}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$

b) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

d) $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

Я58. a) Wiedząc, że $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$, oblicz $\sin \alpha + \cos \alpha$.

b) Wiedząc, że $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{4}$, oblicz $\sin \alpha - \cos \alpha$.

Я59. a) Wiedząc, że $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{5}$, wyznacz $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2$.

b) Wiedząc, że $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{2}$, wyznacz $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2$.

c) Wiedząc, że $\sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{1}{3}$, wyznacz $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2$.

d) Wiedząc, że $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{5}{4}$, wyznacz $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

Я60. Oblicz $\sin \alpha$, gdy:

a) $-5 \cos^2 \alpha + 7 \sin \alpha + 7 = 0$ i $180^\circ < \alpha \leq 270^\circ$

b) $4 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha - 5 = 0$ i $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

c) $\frac{2}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$

d) $\frac{2}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{3 \cos^2 \alpha}$

Я61. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeśli wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha = a$ oraz $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Я62. Wyznacz największą i najmniejszą wartość, jaką może przyjąć wyrażenie.

- a) $\frac{1}{2} \cos \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ c) $(1 + \sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha$
b) $2 - 3 \sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha$ d) $|\cos \alpha(2 - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha|$

Я63. a) Oblicz wartość sinusa kąta ostrego α , jeżeli wartość ta jest dwa razy mniejsza od wartości cosinusa tego kąta.

b) Oblicz wartość cosinusa kąta ostrego α , jeżeli wartość ta jest o $\frac{1}{2}$ mniejsza od wartości sinusa tego kąta.

Я64. a) Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$.

b) Oblicz wartość tangensa kąta α , jeżeli wartość ta jest równa wartości cosinusa tego kąta.

WYKRES FUNKCJI $y = \sin \alpha$

Я65. Odczytaj z wykresu funkcji $y = \sin \alpha$, dla jakich argumentów spełniających warunek $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$:

- a) funkcja przyjmuje wartość 0,
b) funkcja przyjmuje wartość 1,
c) funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
d) funkcja przyjmuje wartości niedodatnie,
e) funkcja jest malejąca.

Я66. Korzystając z sinusoidy, ustal, która z podanych liczb jest większa.

- a) $\sin 363^\circ$ czy $\sin 440^\circ$ d) $\sin(-184^\circ)$ czy $\sin 176^\circ$
b) $\sin 278^\circ$ czy $\sin 337^\circ$ e) $\sin(-227^\circ)$ czy $\sin 530^\circ$
c) $\sin(-175^\circ)$ czy $\sin(-85^\circ)$ f) $\sin 289^\circ$ czy $\sin(-110^\circ)$

Я67. Korzystając z sinusoidy, wymień spośród podanych liczb te, które są dodatnie.

$\sin 99^\circ$ $\sin 719^\circ$ $\sin(-15^\circ)$ $\sin(-180^\circ)$ $\sin(-200^\circ)$ $\sin 350^\circ$ $\sin 399^\circ$

Я68. Korzystając z sinusoidy, określ, która z podanych liczb jest ujemna.

- $a = \sin(-15^\circ) + \sin 200^\circ$, $c = 2 \sin 145^\circ - \frac{1}{2} \sin 305^\circ$,
 $b = \sin(-170^\circ) - \sin(-20^\circ)$, $d = 3(\sin 360^\circ - \sin 228^\circ) - 4 \sin(-98^\circ)$,
 $e = \sin(-300^\circ) \cdot \sin(-200^\circ) \cdot \sin(-100^\circ) \cdot \sin 111^\circ \cdot \sin 777^\circ$

Я69. Ustal, ile punktów wspólnych ma wykres funkcji $y = \sin \alpha$ z prostą $y = p$.

- a) $p = \frac{1}{2}$ i $\alpha \in \langle -180^\circ; 180^\circ \rangle$ c) $p = \frac{3}{5}$ i $\alpha \in \langle -270^\circ; 720^\circ \rangle$
b) $p = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\alpha \in \langle -360^\circ; 360^\circ \rangle$ d) $p = -\frac{4}{9}$ i $\alpha \in \langle -450^\circ; 540^\circ \rangle$

Я70. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $-180^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ oraz równość:

- a) $\sin \alpha = 0$ c) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ e) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
b) $\sin \alpha = -1$ d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\sin \alpha = \sqrt{3}$

Я71. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których wartość funkcji $y = \sin \alpha$ jest równa $\sin 50^\circ$.

- a) $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ b) $-360^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$ c) $360^\circ < \alpha < 720^\circ$ d) $-540^\circ \leq \alpha \leq -180^\circ$

Я72. Wyznacz wszystkie argumenty spełniające warunek $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, dla których funkcja $y = \sin \alpha$ przyjmuje tę samą wartość, co dla podanego kąta.

- a) 55° b) 173° c) 497° d) -16° e) -170° f) -256°

Я73. Wyznacz wszystkie kąty należące do przedziału $\langle -360^\circ; 360^\circ \rangle$, które spełniają dany warunek.

- a) $\sin \alpha = \sin 5^\circ$ c) $\sin \alpha = \sin 213^\circ$ e) $\sin \alpha = \sin (-240^\circ)$
b) $\sin \alpha = \sin 110^\circ$ d) $\sin \alpha = \sin (-80^\circ)$ f) $\sin \alpha = \sin (-166^\circ)$

Я74. Która z podanych liczb jest równa 0?

$$\begin{aligned} a &= \sin 162^\circ + \sin (-18^\circ) \\ b &= \sin 341^\circ - \sin (-341^\circ) - \sin 2^\circ + \sin 178^\circ \\ c &= \sin 99^\circ + \sin (-89^\circ) - \sin (-91^\circ) + \sin (-279^\circ) \\ d &= \sin 206^\circ - \sin (-15^\circ) + \sin 154^\circ + \sin (-165^\circ) \end{aligned}$$

Я75. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $-360^\circ < \alpha < 360^\circ$ oraz równość:

- a) $\sin \alpha = \frac{9}{20}$ b) $\sin \alpha = 0,89$ c) $\sin \alpha = -0,4$ d) $\sin \alpha = -0,62$

Я76. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $-360^\circ < \alpha < 360^\circ$ oraz nierówność:

- a) $\sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin \alpha > -\frac{1}{2}$ c) $\sin \alpha \leq 0$ d) $\sin \alpha < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Я77. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $-180^\circ < \alpha < 180^\circ$ oraz równość:

- a) $|\sin \alpha| = \frac{1}{2}$ b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sin (-\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sin (\alpha - 63^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

WYKRES FUNKCJI $y = \cos \alpha$

Я78. Odczytaj z wykresu funkcji $y = \cos \alpha$, dla jakich argumentów spełniających warunek $-270^\circ \leq \alpha \leq 450^\circ$:

- a) funkcja przyjmuje wartości ujemne,
- b) funkcja przyjmuje wartość 0,
- c) funkcja przyjmuje wartość -1 ,
- d) funkcja przyjmuje wartości niedodatnie,
- e) funkcja jest rosnąca.

Я79. Korzystając z cosinusoidy, oceń, która liczba jest większa.

- a) $\cos 183^\circ$ czy $\cos 190^\circ$
- b) $\cos 50^\circ$ czy $\cos 117^\circ$
- c) $\cos(-107^\circ)$ czy $\cos 100^\circ$
- d) $\cos(-189^\circ)$ czy $\cos(-170^\circ)$
- e) $\cos 80^\circ$ czy $\cos 275^\circ$
- f) $\cos(-283^\circ)$ czy $\cos(-77^\circ)$

Я80. Dla których kątów spośród wymienionych poniżej cosinus jest liczbą ujemną?

99° -199° -270° 265° 359° 410° -600°

Я81. Korzystając z cosinusoidy, określ, która z podanych liczb jest dodatnia.

$$a = \cos(-303^\circ) - \cos 148^\circ$$

$$b = \cos 300^\circ - \cos 405^\circ$$

$$c = 3 \cos 251^\circ + \frac{1}{2} \cos(-95^\circ) - \frac{2}{3} \cos(-270^\circ)$$

$$d = -4 \cos 104^\circ + 3(\cos 358^\circ - \cos(-243^\circ))$$

$$e = \cos(-11^\circ) \cdot \cos 111^\circ \cdot \cos(-222^\circ) \cdot \cos 333^\circ \cdot \cos(-444^\circ)$$

Я82. Korzystając z sinusoidy oraz cosinusoidy, określ, która z podanych liczb jest dodatnia.

$$a = (\cos 271^\circ - \cos 272^\circ) + (\sin 271^\circ - \sin 272^\circ)$$

$$b = \cos(-239^\circ) - \sin(-239^\circ) + \sin 592^\circ - \cos 417^\circ$$

$$c = \sin 470^\circ \cdot \cos(-470^\circ) \cdot \cos 323^\circ \cdot \sin(-379^\circ)$$

Я83. Korzystając z sinusoidy i cosinusoidy, porównaj liczby.

- a) $a = \sin 43^\circ$ i $b = \cos 43^\circ$
- b) $a = \sin(-140^\circ)$ i $b = \cos(-140^\circ)$
- c) $a = \sin 185^\circ$ i $b = \cos 185^\circ$
- d) $a = \sin 319^\circ$ i $b = \cos(-319^\circ)$
- e) $a = \sin 169^\circ$ i $b = \cos(-80^\circ)$
- f) $a = \sin(-183^\circ)$ i $b = \cos(-87^\circ)$

Я84. Korzystając z wykresów funkcji $y = \sin \alpha$ oraz $y = \cos \alpha$ sporządzonych we wspólnym układzie współrzędnych, określ, która z podanych liczb jest ujemna.

$$a = \cos 325^\circ - \sin 325^\circ$$

$$b = \sin(-128^\circ) - \cos(-128^\circ)$$

$$c = \cos 223^\circ - \sin 223^\circ + \cos(-136^\circ) - \sin(-136^\circ)$$

$$d = (\sin 220^\circ - \cos 220^\circ) - (\cos(-138^\circ) - \sin(-138^\circ))$$

Я85. Ustal, ile punktów wspólnych mają wykres funkcji $y = \cos \alpha$ i prosta $y = p$.

a) $p = -\frac{2}{3}$ i $\alpha \in \langle -270^\circ; 180^\circ \rangle$

c) $p = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ i $\alpha \in \langle -360^\circ; 270^\circ \rangle$

b) $p = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ i $\alpha \in \langle -360^\circ; 360^\circ \rangle$

d) $p = \frac{4}{11}$ i $\alpha \in \langle -90^\circ; 450^\circ \rangle$

Я86. Znajdź wszystkie kąty spełniające warunek $-180^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ oraz równość:

a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos \alpha = 1$

e) $\cos \alpha = -\sqrt{2}$

b) $\cos \alpha = 0$

d) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

f) $\cos \alpha = -1$

Я87. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których wartość funkcji $y = \cos \alpha$ jest równa $\cos 20^\circ$.

a) $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ b) $-360^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$ c) $360^\circ < \alpha < 720^\circ$ d) $-540^\circ \leq \alpha \leq -90^\circ$

Я88. Wyznacz wszystkie argumenty spełniające warunek $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, dla których funkcja $y = \cos \alpha$ przyjmuje tę samą wartość, co dla podanego kąta.

a) 47°

b) -103°

c) 201°

d) -348°

Я89. Wyznacz wszystkie kąty należące do przedziału $\langle -360^\circ; 360^\circ \rangle$, które spełniają podany warunek.

a) $\cos \alpha = \cos 75^\circ$

c) $\cos \alpha = \cos 148^\circ$

e) $\cos \alpha = \cos(-350^\circ)$

b) $\cos \alpha = \cos 291^\circ$

d) $\cos \alpha = \cos(-55^\circ)$

f) $\cos \alpha = \cos(-204^\circ)$

Я90. Która z podanych liczb jest równa 0?

$a = \cos 145^\circ + \cos(-145^\circ)$

$c = \cos 130^\circ + \cos(-50^\circ) - \cos 11^\circ + \cos(-11^\circ)$

$b = \cos(-274^\circ) - \cos 274^\circ$

$d = \cos(-117^\circ) + \cos 480^\circ - \cos 300^\circ - \cos 117^\circ$

Я91. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ oraz równość:

a) $\cos \alpha = 0,32$

b) $\cos \alpha = \frac{3}{4}$

c) $\cos \alpha = -0,41$

d) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Я92. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ oraz równość:

a) $\cos(-\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $|\cos \alpha| = \frac{1}{2}$ c) $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos(\alpha + 43^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Я93. Wyznacz miary kątów spełniających warunek $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, dla których funkcja $y = \cos \alpha$ przyjmuje podaną wartość.

a) $\sin 11^\circ$ b) $\sin 73^\circ$ c) $\sin(-126^\circ)$ d) $\sin(-295^\circ)$

Я94. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ i nierówność:

a) $\cos \alpha < 0$ b) $\cos \alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos \alpha \geq -\frac{1}{2}$ d) $|\sin \alpha| \geq \cos \alpha$

WYKRES FUNKCJI $y = \operatorname{tg} \alpha$

Я95. Odczytaj z wykresu funkcji $y = \operatorname{tg} \alpha$, dla jakich argumentów spełniających warunek $-270^\circ < \alpha < 270^\circ$:

- a) funkcja przyjmuje wartości ujemne,
- b) funkcja przyjmuje wartość 1,
- c) funkcja przyjmuje wartość 0,
- d) funkcja jest malejąca.

Я96. Korzystając z tangensoidy, oceń, która z podanych liczb jest większa.

- a) $\operatorname{tg} 80^\circ$ czy $\operatorname{tg} 259^\circ$ c) $\operatorname{tg}(-264^\circ)$ czy $\operatorname{tg}(-132^\circ)$
- b) $\operatorname{tg}(-181^\circ)$ czy $\operatorname{tg} 181^\circ$ d) $\operatorname{tg} 1800^\circ$ czy $\operatorname{tg}(-1^\circ)$

Я97. Wyznacz argument spełniający warunek $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$, dla którego funkcja $y = \operatorname{tg} \alpha$ przyjmuje tę samą wartość co dla podanego kąta.

- a) 137° b) 252° c) -348° d) -1888°

Я98. Korzystając z tangensoidy, wymień liczby, które są dodatnie.

$\operatorname{tg} 138^\circ$ $\operatorname{tg}(-80^\circ)$ $\operatorname{tg}(-97^\circ)$ $\operatorname{tg}(-197^\circ)$ $\operatorname{tg} 255^\circ$ $\operatorname{tg} 360^\circ$ $\operatorname{tg} 790^\circ$

Я99. Korzystając z tangensoidy, określ, która z podanych liczb jest ujemna.

$a = \operatorname{tg}(-148^\circ) + \operatorname{tg} 148^\circ$ $c = 2(\operatorname{tg} 230^\circ - \operatorname{tg} 215^\circ) - \operatorname{tg}(-232^\circ)$
 $b = \operatorname{tg} 95^\circ + \operatorname{tg}(-85^\circ)$ $d = \operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 261^\circ$
 $e = \operatorname{tg}(-111^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-11^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-1^\circ) \cdot \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 11^\circ \cdot \operatorname{tg} 111^\circ$

Я100. Korzystając z sinusoidy, cosinusoidy oraz tangensoidy, określ, która z podanych liczb jest nieujemna.

$$a = \operatorname{tg} 203^\circ - \sin(-123^\circ) + \cos(-399^\circ)$$

$$b = \operatorname{tg}(-225^\circ) - \sin 720^\circ - \cos 540^\circ$$

$$c = \cos 179^\circ + \operatorname{tg} 225^\circ + \sin(-200^\circ) - \cos 256^\circ$$

$$d = \sin 144^\circ \cdot \cos 144^\circ \cdot \operatorname{tg} 144^\circ \cdot \sin(-144^\circ) \cdot \cos(-144^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-144^\circ)$$

$$e = (\sin 2000^\circ - \cos 2000^\circ) \cdot \operatorname{tg} 1800^\circ$$

Я101. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $-180^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ oraz podaną równość.

a) $\operatorname{tg} \alpha = 0$ b) $\operatorname{tg} \alpha = 1$ c) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

Я102. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ oraz podaną równość.

a) $\operatorname{tg} \alpha = 4$ b) $\operatorname{tg} \alpha = 0,1$ c) $\operatorname{tg} \alpha = -2,14$ d) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}$

Я103. Korzystając z wykresów funkcji trygonometrycznych, uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $\sin 20^\circ, \cos 20^\circ, \operatorname{tg} 20^\circ$

b) $\sin 175^\circ, \cos 175^\circ, \operatorname{tg} 175^\circ$

c) $\sin(-170^\circ), \cos(-81^\circ), \operatorname{tg}(-181^\circ)$

Я104. Wyznacz wszystkie kąty należące do przedziału $(-270^\circ; 270^\circ)$, które spełniają następujący warunek:

a) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 30^\circ$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 158^\circ$ e) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-192^\circ)$

b) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 223^\circ$ d) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-88^\circ)$ f) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-135^\circ)$

Я105. Wyznacz wszystkie kąty spełniające podaną równość.

a) $\operatorname{tg}(-\alpha) = 1$ b) $|\operatorname{tg} \alpha| = \sqrt{3}$ c) $\operatorname{tg}(\alpha - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Я106. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ oraz podaną nierówność.

a) $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\operatorname{tg} \alpha > -\sqrt{3}$ c) $\operatorname{tg}^2 \alpha < 1$

WZORY REDUKCYJNE

Я 107. Oblicz.

- | | |
|--|---|
| a) $\sin 98^\circ$, $\sin 107^\circ$, $\sin 173^\circ$ | c) $\sin(-108^\circ)$, $\sin(-156^\circ)$, $\sin(-172^\circ)$ |
| b) $\sin(-16^\circ)$, $\sin(-49^\circ)$, $\sin(-74^\circ)$ | d) $\sin(-30^\circ)$, $\sin 120^\circ$, $\sin(-150^\circ)$ |

Я 108. Oblicz.

- | | |
|---|---|
| a) $\sin 382^\circ$, $\sin 869^\circ$, $\sin(-597^\circ)$ | c) $\sin 225^\circ$, $\sin 330^\circ$, $\sin 510^\circ$ |
| b) $\sin 284^\circ$, $\sin 329^\circ$, $\sin 352^\circ$ | d) $\sin(-300^\circ)$, $\sin(-315^\circ)$, $\sin(-780^\circ)$ |

Я 109. Oblicz.

- | | | | |
|---------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $\cos 150^\circ$ | c) $\cos 300^\circ$ | e) $\cos(-45^\circ)$ | g) $\cos(-390^\circ)$ |
| b) $\cos 240^\circ$ | d) $\cos 420^\circ$ | f) $\cos(-330^\circ)$ | h) $\cos(-495^\circ)$ |

Я 110. Oblicz, korzystając z tablic trygonometrycznych.

- | | |
|--|---|
| a) $\cos(-21^\circ)$, $\cos(-47^\circ)$, $\cos(-81^\circ)$ | c) $\cos(-195^\circ)$, $\cos 257^\circ$, $\cos 352^\circ$ |
| b) $\cos 99^\circ$, $\cos 133^\circ$, $\cos 179^\circ$ | d) $\cos 442^\circ$, $\cos 635^\circ$, $\cos(-454^\circ)$ |

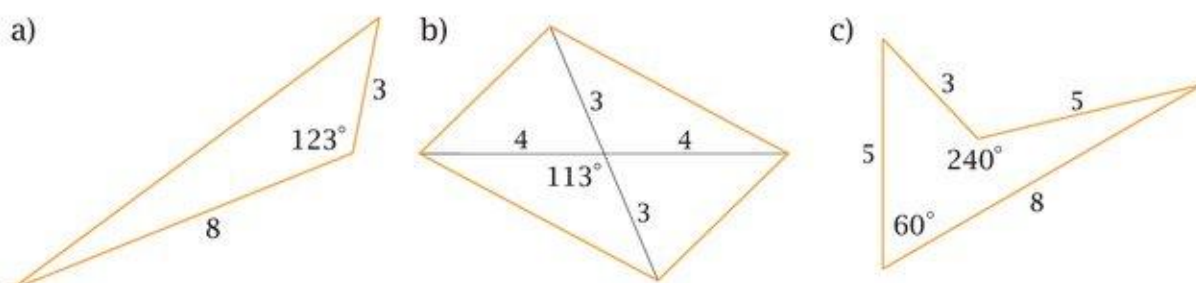
Я 111. Oblicz.

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\operatorname{tg} 120^\circ$ | c) $\operatorname{tg} 330^\circ$ | e) $\operatorname{tg}(-120^\circ)$ | g) $\operatorname{tg}(-300^\circ)$ |
| b) $\operatorname{tg} 240^\circ$ | d) $\operatorname{tg} 315^\circ$ | f) $\operatorname{tg}(-225^\circ)$ | h) $\operatorname{tg}(-390^\circ)$ |

Я 112. Oblicz, korzystając z tablic trygonometrycznych.

- | |
|--|
| a) $\operatorname{tg}(-11^\circ)$, $\operatorname{tg}(-79^\circ)$, $\operatorname{tg}(-154^\circ)$, $\operatorname{tg}(-198^\circ)$, $\operatorname{tg}(-348^\circ)$, $\operatorname{tg}(-400^\circ)$ |
| b) $\operatorname{tg} 121^\circ$, $\operatorname{tg} 263^\circ$, $\operatorname{tg} 311^\circ$, $\operatorname{tg} 172^\circ$, $\operatorname{tg} 357^\circ$, $\operatorname{tg} 470^\circ$ |

Я 113. Oblicz pole figury przedstawionej na rysunku.



Я 114. Pole trójkąta równoramiennego wynosi 16 cm^2 . Oblicz miarę kąta między ramionami tego trójkąta, jeżeli jego ramię ma długość:

- a) 8 cm b) $5\sqrt{2} \text{ cm}$ c) 10 cm

Я 115. Przekątne równoległoboku mają długości 10 cm i 8 cm oraz przecinają się pod kątem α . Dla jakiego kąta α pole tego równoległoboku jest największe? Oblicz to pole.

Я 116. Oblicz, korzystając ze wzorów redukcyjnych i tablic trygonometrycznych.

- a) $\sin 100^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\operatorname{tg} 154^\circ$
b) $\sin 250^\circ$, $\cos 185^\circ$, $\operatorname{tg} 203^\circ$
c) $\sin 290^\circ$, $\cos 310^\circ$, $\operatorname{tg} 347^\circ$

Я 117. Korzystając ze wzorów redukcyjnych oraz tabeli wartości funkcji trygonometrycznych, ustal, która liczba jest większa.

- a) $\sin 248^\circ$ czy $\cos 261^\circ$ d) $\cos(-318^\circ)$ czy $\sin 132^\circ$
b) $\operatorname{tg} 143^\circ$ czy $\cos 160^\circ$ e) $\operatorname{tg}(-348^\circ)$ czy $\cos(-348^\circ)$
c) $\operatorname{tg}(-138^\circ)$ czy $\sin 343^\circ$ f) $\sin(-205^\circ)$ czy $\operatorname{tg}(-145^\circ)$

Я 118. Oblicz dokładną wartość wyrażenia.

- a) $\sin 135^\circ - 2 \cos 150^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ$ d) $\cos(-210^\circ) \cdot \sin(-120^\circ) \cdot \operatorname{tg} 150^\circ$
b) $2 \cos 315^\circ + 6 \operatorname{tg} 210^\circ - \sin 330^\circ$ e) $(\cos 240^\circ + \sin 240^\circ - \operatorname{tg} 240^\circ)^2$
c) $\frac{\operatorname{tg}(-330^\circ) + \sin 210^\circ}{\cos 225^\circ}$ f) $\frac{2 \cos(-135^\circ) + \operatorname{tg}(-300^\circ)}{4 \sin(-315^\circ) - \operatorname{tg} 300^\circ}$

Я 119. Podane wyrażenie przedstaw w prostszej postaci.

- a) $\sin(180^\circ + \alpha) - \sin(360^\circ - \alpha)$ c) $\sin(180^\circ - \alpha) - \sin(360^\circ - \alpha)$
b) $\cos(180^\circ + \alpha) - \cos(360^\circ - \alpha)$ d) $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$

Я 120. Wyznacz wszystkie kąty spełniające warunek $-360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ oraz podaną równość.

- a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ d) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ f) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$

Я 121. Uzasadnij tożsamość.

- a) $\cos^2(360^\circ - \alpha) + \sin^2(180^\circ - \alpha) = 1$ c) $\frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha)} = \frac{\cos(360^\circ - \alpha)}{\sin(\alpha - 360^\circ)}$
b) $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)}{\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)} = -1$ d) $\frac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)} = 1$

Я 122. Uzasadnij tożsamość.

a) $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$

c) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)} = -1$

b) $\cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos \alpha$

d) $\frac{\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)} = -1$

Я 123. Korzystając ze wzorów redukcyjnych, wyznacz kąty spełniające podane warunki.

a) $\sin \alpha = 0,95$ i $0^\circ < \alpha < 360^\circ$

c) $\sin \alpha = -0,63$ i $-90^\circ < \alpha < 270^\circ$

b) $\sin \alpha = -0,44$ i $-180^\circ < \alpha < 180^\circ$

d) $\sin \alpha = 0,2$ i $-270^\circ < \alpha < 180^\circ$

Я 124. Korzystając ze wzorów redukcyjnych, znajdź kąty spełniające warunki:

a) $\cos \alpha = 0,73$ i $0^\circ < \alpha < 360^\circ$

c) $\cos \alpha = -0,97$ i $-180^\circ < \alpha < 180^\circ$

b) $\cos \alpha = 0,53$ i $-90^\circ < \alpha < 360^\circ$

d) $\cos \alpha = -0,1$ i $-270^\circ < \alpha < 180^\circ$

Я 125. Korzystając ze wzorów redukcyjnych, znajdź kąty spełniające warunki:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ i $0^\circ < \alpha < 360^\circ$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -0,4$ i $-90^\circ < \alpha < 270^\circ$

b) $\operatorname{tg} \alpha = 0,84$ i $-180^\circ < \alpha < 180^\circ$

d) $\operatorname{tg} \alpha = -3,5$ i $-270^\circ < \alpha < 180^\circ$

Я 126. Skonstruuj kąt α , który spełnia podane warunki. Za każdym razem rozpatrz wszystkie możliwe przypadki.

a) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$, $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$

c) $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in (-180^\circ; 180^\circ)$

b) $\sin \alpha = 0,6$, $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$

d) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\alpha \in (0^\circ; 360^\circ)$

MIARA ŁUKOWA KĄTA

Я 127. W okręgu o promieniu r kąt środkowy wyznacza łuk o długości l . Podaj miarę łukową tego kąta.

a) $r = 2$, $l = 2,5$

b) $r = 4$, $l = 3$

c) $r = 5$, $l = 7\pi$

d) $r = 7$, $l = 10\pi$

Я 128. W okręgu o promieniu długości r kąt środkowy ma miarę α . Wyznacz długość krótszego łuku utworzonego na okręgu przez ten kąt.

a) $r = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$

b) $r = 7$, $\alpha = \frac{5}{6}\pi$

c) $r = 3\sqrt{2}$, $\alpha = \frac{3}{8}\pi$

d) $r = 6\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{7}{12}\pi$

Я 129. Wyznacz miarę łukową kąta środkowego okręgu opartego na:

a) $\frac{1}{5}$ okręgu

b) $\frac{5}{8}$ okręgu

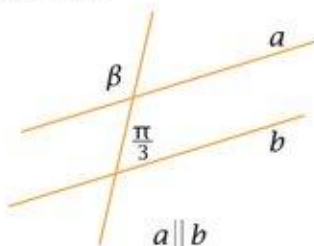
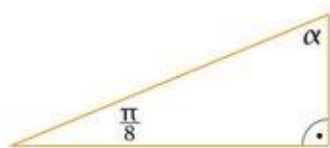
c) $\frac{1}{12}$ okręgu

d) $\frac{4}{9}$ okręgu

Я130. Podane liczby oznaczają miary łukowe kątów. Wskaż wśród nich miary kątów: ostrych, prostych, rozwartych, półpełnych, wklęsłych.

$$\frac{\pi}{10} \quad \pi \quad \frac{4\pi}{3} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{8} \quad \frac{7\pi}{4} \quad 0,8\pi \quad 0,4\pi \quad 1,3\pi$$

Я131. Znajdź miary łukowe kątów α , β i γ .



Я132. Wyraż w radianach podane kąty.

- a) 90° , 45° , $22,5^\circ$, 30° , 60° , 15° c) 10° , 12° , 73° , 50° , 1° , $0,3^\circ$
 b) 120° , 135° , 150° , 180° , 270° d) 95° , 110° , 160° , 200° , 330°

Я133. Podane liczby oznaczają miary łukowe kątów. Wyraż miary tych kątów w stopniach.

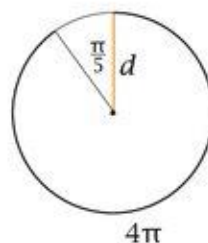
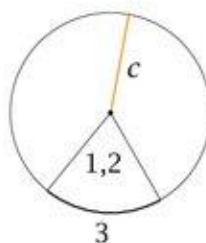
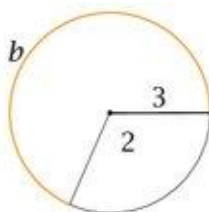
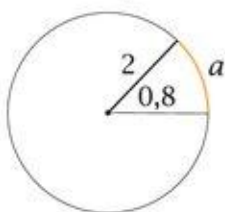
$$\frac{\pi}{15} \quad \frac{2\pi}{9} \quad \frac{7\pi}{5} \quad \frac{8\pi}{3} \quad \frac{3\pi}{100} \quad \frac{17\pi}{3}$$

Я134. Narysuj kilka kątów, zmierz je za pomocą kątomierza, a następnie oblicz ich miary łukowe.

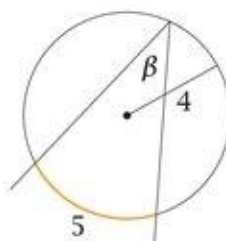
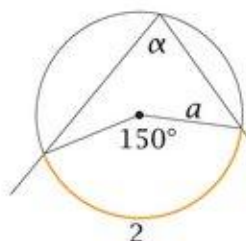
Я135. Podaj wartości:

$$\sin \frac{\pi}{3} \quad \cos \frac{\pi}{2} \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \quad \cos \frac{\pi}{3} \quad \sin \frac{\pi}{4} \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \quad \operatorname{tg} \pi \quad \cos \pi \quad \sin 2\pi$$

Я136. Na poniższych rysunkach miary kątów środkowych wyrażone są w radianach. Wyznacz długości łuków lub odcinków oznaczonych literami.



Я137. Wyznacz miarę łukową kątów α oraz β oraz długość łuku i odcinka oznaczonego literą.



Я 138. Przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Wyniki zaokrąglij do części setnych.

stopnie	10	20	30	45	60	90	120	135	150	180	270
radiany											

Я 139. Wyraż w stopniach kąty o podanej mierze łukowej. Wyniki zaokrąglij do jedności.

0,3 0,5 1 1,3 2,5 4,5

Я 140. Który z kątów jest większy — α czy β ?

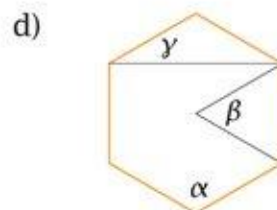
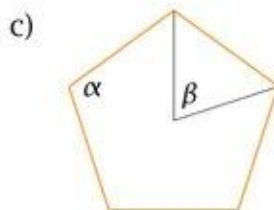
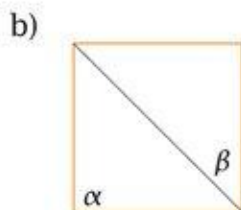
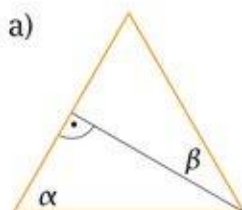
a) $\alpha = 23^\circ$, $\beta = \frac{\pi}{9}$ rad

c) $\alpha = 270^\circ$, $\beta = 5$ rad

b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 1$ rad

d) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = \frac{2\pi}{7}$ rad

Я 141. Oblicz miary łukowe kątów oznaczonych literami w wielokącie foremnym przedstawionym na rysunku.



Я 142. a) Wyraż w radianach sumę miar kątów dziesięciokąta.

b) Wyznacz w radianach miarę kąta wewnętrznego dwunastokąta foremnego.

Я 143. Jeden z kątów trapezu ma miarę 1,5 rad. Czy jest to kąt przy krótszej, czy przy dłuższej podstawie?

Я 144. Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma miarę α . Oblicz miary pozostałych kątów.

a) $\alpha = \frac{5\pi}{7}$

b) $\alpha = \frac{2\pi}{15}$

c) $\alpha = 2$

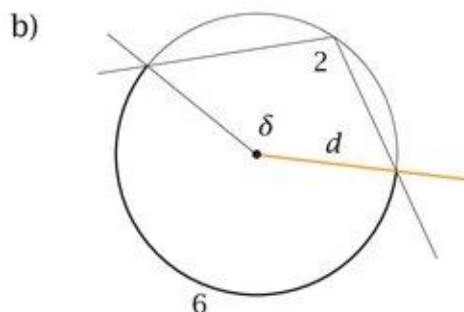
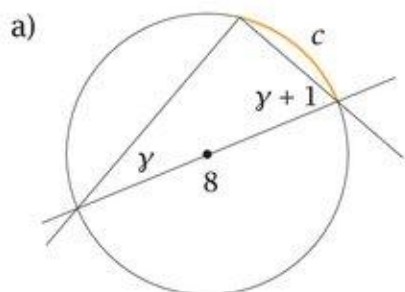
d) $\alpha = 1$

Я 145. Jeden z kątów rombu ma miarę 2,2 rad, a jego bok ma długość 4. Oblicz pole tego rombu.

Я 146. W trójkącie prostokątnym ABC jeden z kątów ostrych ma miarę $\frac{4}{15}\pi$, a przeciwprostokątna BC ma długość 24. Na trójkącie tym opisano okrąg. Wyznacz długości łuków: AB , BC i AC .

- Я147.** a) Oblicz długość łuku wyciętego z okręgu o promieniu 10 przez kąt środkowy o mierze $\frac{3\pi}{2}$ rad.
 b) Oblicz pole wycinka koła o promieniu π wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 2 rad.

- Я148.** Wyznacz miarę łukową kątów γ oraz δ przedstawionych na poniższych rysunkach oraz wyznacz długość łuku i odcinka oznaczonego literą.



FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ

- Я149.** Odczytaj z wykresów, dla jakich argumentów z przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$ funkcja:
- $y = \sin x$ przyjmuje wartości dodatnie,
 - $y = \cos x$ przyjmuje wartości ujemne,
 - $y = \operatorname{tg} x$ przyjmuje wartości większe od -1 .

- Я150.** Porównaj podane liczby, korzystając z wykresów funkcji trygonometrycznych.

- | | | |
|--------------------------|--|--|
| a) $\sin 2$ i $\sin 3$ | d) $\cos(-6)$ i $\cos(-5)$ | g) $\sin 1,5$ i $\sin(-4)$ |
| b) $\sin 1$ i $\sin 5$ | e) $\operatorname{tg}(-1)$ i $\operatorname{tg} 1$ | h) $\operatorname{tg}(-2)$ i $\operatorname{tg}(-3)$ |
| c) $\cos(-2)$ i $\cos 2$ | f) $\operatorname{tg} 1$ i $\operatorname{tg} 2$ | i) $\cos 1$ i $\cos(-3)$ |

- Я151.** Korzystając z wykresów funkcji $y = \sin x$, $y = \cos x$ i $y = \operatorname{tg} x$, określ, która z podanych liczb jest nieujemna.

$$a = \sin 3 - \sin 4$$

$$d = \sin\left(-\frac{16}{5}\right) - \cos\left(-\frac{16}{5}\right) - \operatorname{tg}\left(-\frac{16}{5}\right)$$

$$b = \cos(-3) + \cos 2$$

$$e = \sin 1 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{tg} 3$$

$$c = \operatorname{tg} \frac{5}{9}\pi + \operatorname{tg}(-1,2)$$

$$f = (\sin(-5) + \cos 8 - \operatorname{tg}(-2)) \cdot \operatorname{tg} 7\pi$$

Я 152. Ustal, dla jakich argumentów z przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$ podany warunek jest spełniony.

- a) funkcja $y = \sin x$ przyjmuje wartość $-\frac{1}{2}$
- b) funkcja $y = \cos x$ przyjmuje wartość $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- c) funkcja $y = \operatorname{tg} x$ przyjmuje wartość $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- d) funkcja $y = |\sin x|$ przyjmuje wartość $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- e) funkcja $y = |\cos x|$ przyjmuje wartość $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- f) funkcja $y = |\operatorname{tg} x|$ przyjmuje wartość 1

Я 153. Oblicz, korzystając z tabeli.

- a) $\sin(-0,9)$, $\cos(-0,6)$, $\operatorname{tg}(-0,3)$,
- b) $\sin(\pi - 0,3)$, $\cos(\pi - 1,2)$, $\operatorname{tg}(\pi - 0,9)$,
- c) $\sin(\pi + 0,6)$, $\cos(\pi + 1,2)$, $\operatorname{tg}(\pi + 0,3)$.

x	0,3	0,6	0,9	1,2
$\sin x$	0,30	0,56	0,78	0,93
$\cos x$	0,96	0,83	0,62	0,36
$\operatorname{tg} x$	0,31	0,68	1,26	2,57

Я 154. Oblicz.

- a) $\sin \frac{2\pi}{3}$, $\sin \frac{4\pi}{3}$, $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
- b) $\cos \frac{5\pi}{6}$, $\cos \frac{11\pi}{6}$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
- c) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Я 155. Ustal, ile rozwiązań ma podane równanie.

- a) $\cos x = x$
- b) $\sin x = -x$
- c) $\sin x = x^2$
- d) $\cos x = x^3$
- e) $\operatorname{tg} x = x$
- f) $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}x + 1$

Я 156. Wyznacz zbiór wartości funkcji.

- a) $y = \sin x + 2$
- b) $y = \sin(x - 1) - 1$
- c) $y = -|\cos x| - 4$
- d) $y = |\operatorname{tg} x| - \frac{2}{3}$
- e) $y = \sin^2 x - \frac{1}{2}$
- f) $y = (\cos x + 2)^2 - 3$
- g) $y = 2^{\cos x}$
- h) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x} - \frac{1}{4}$
- i) $y = \sin^2 x - 4 \sin x$

Я 157. Oblicz.

- a) $\sin 20\pi$
- b) $\cos 10,5\pi$
- c) $\sin(-9,5\pi)$
- d) $\cos(-21\pi)$
- e) $\operatorname{tg} 17\pi$
- f) $\sin\left(4\frac{1}{3}\pi\right)$
- g) $\sin\left(-3\frac{3}{4}\pi\right)$
- h) $\cos\left(-7\frac{2}{3}\pi\right)$
- i) $\operatorname{tg} 6\frac{1}{3}\pi$

Я 158. Które spośród funkcji trygonometrycznych są rosnące, a które malejące w podanym przedziale?

- a) $(0; \frac{\pi}{2})$ b) $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ c) $(\pi; \frac{3\pi}{2})$ d) $(\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$

Я 159. Naszkicuj wykres funkcji.

- a) $y = \sin x + 3$ b) $y = \cos x - \frac{1}{2}$ c) $y = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + 1$ d) $y = \operatorname{tg} x \cdot \cos x - 2$

Я 160. Naszkicuj wykres funkcji.

- a) $y = \sin(x - \frac{\pi}{6}) + 1$ e) $y = |\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}|$
b) $y = \cos(x + \pi) - 2$ f) $y = |\cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1| + \frac{1}{2}$
c) $y = -\cos x + 3$ g) $y = \operatorname{tg} |x|$
d) $y = -\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})$ h) $y = |\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6})|$

Я 161. Dla ilu argumentów z przedziału $\langle -\pi; \pi \rangle$ funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość równą k ?

- a) $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 2, k = 2,5$ d) $f(x) = -\cos x + \frac{1}{2}, k = 1\frac{1}{2}$
b) $f(x) = -\operatorname{tg}(x + 3) - 4, k = 8$ e) $f(x) = -\sin |x| - \sqrt{2}, k = -1 - \sqrt{2}$
c) $f(x) = |\cos(x - \frac{\pi}{4})|, k = 0,9$ f) $f(x) = |\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2})|, k = \frac{\pi}{2}$

Я 162. Przesuwając wykres funkcji $f(x)$, można otrzymać wykres funkcji $g(x)$. Wyznacz współrzędne wektora przesunięcia.

- a) $f(x) = \sin x, g(x) = \sin(x - \frac{5}{6}\pi) + 3$
b) $f(x) = \cos x, g(x) = \cos(x + 4) - 1$
c) $f(x) = \sin(x + 1) + 2, g(x) = \sin x$
d) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{6}) - 7, g(x) = \operatorname{tg} x$
e) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) - 2, g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) - 5$
f) $f(x) = \cos(x - \frac{3}{4}\pi) + 6, g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$

Я 163. Oblicz.

- a) $\sin(-201,25\pi)$ c) $\operatorname{tg} \frac{3001\pi}{3}$
b) $\cos(-204\frac{2}{3}\pi)$ d) $\operatorname{tg} 8253\frac{2}{3}\pi$

Я 164. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji f i g , a następnie rozwiąż równanie $f(x) = g(x)$.

a) $f(x) = \sin x$	b) $f(x) = \cos x$	c) $f(x) = \sin x$	d) $f(x) = \cos x$
$g(x) = 2x$	$g(x) = -\frac{2}{\pi}x + 1$	$g(x) = \frac{-2\sqrt{2}}{3\pi}x$	$g(x) = \frac{3x}{2\pi}$

Я 165. Dla jakich wartości a i b wykres funkcji $y = ax + b$ nie przecina wykresu funkcji $y = \sin x$? Dla jakich wartości a i b wykresy te przecinają się w nieskończenie wielu punktach?

Я 166. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$ w zależności od wartości parametru m .

a) $f(x) = \cos x, x \in \langle -\pi; 2\pi \rangle$	d) $f(x) = \sin x , x \in \langle 0; 2\pi \rangle$
b) $f(x) = -\sin x - 3, x \in \langle -\pi; \pi \rangle$	e) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \cos x, x \in \langle -\pi; \pi \rangle$
c) $f(x) = - \operatorname{tg} x , x \in \langle -2\pi; 2\pi \rangle$	f) $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}, x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \rangle$

Я 167. Przesuwając wykres funkcji f , można otrzymać wykres funkcji g . Znajdź współrzędne wektora przesunięcia.

a) $f(x) = \sin(-x), g(x) = -\cos x$
b) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
c) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1, g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 4$
d) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 2, g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 3$

Я 168. Zbadaj liczbę punktów przecięcia wykresów funkcji f i funkcji $y = \cos x$ w zależności od wartości parametru m .

a) $f(x) = x^2 + m$	b) $f(x) = -x^2 + m$
---------------------	----------------------

Я 169. Wyznacz liczbę miejsc zerowych funkcji.

a) $f(x) = \sin x + x$	c) $f(x) = x^2 + \sin x - 1$	e) $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$
b) $f(x) = x^2 - 2 - \sin x$	d) $f(x) = \sin x - x^2 - 1$	f) $f(x) = \sin x - \sqrt{x}$

Я 170. Wyznacz liczbę miejsc zerowych funkcji.

a) $f(x) = \cos x - x$	c) $f(x) = x^2 + 2 - \cos x$	e) $f(x) = -\cos x - \frac{1}{x}$
b) $f(x) = \cos x - x^2 + 1$	d) $f(x) = \cos x - x^2 - 1$	f) $f(x) = 2 \cos x + \sqrt{x}$

FUNKCJE O WZORACH

$y = a \sin x$, $y = \sin ax$...

Я171. Naszkicuj wykres funkcji.

- | | | | |
|------------------------------|--------------------|-----------------------------|---------------------------------------|
| a) $y = 3 \sin x$ | d) $y = -3 \cos x$ | g) $y = -\sin 2x$ | j) $y = -\frac{1}{2} \cos 2x$ |
| b) $y = \frac{1}{4} \cos x$ | e) $y = \sin 0,5x$ | h) $y = 2 \cos \frac{x}{3}$ | k) $y = \frac{3}{2} \sin \frac{x}{2}$ |
| c) $y = -\frac{5}{2} \sin x$ | f) $y = \cos 2x$ | i) $y = -\cos \frac{1}{2}x$ | l) $y = -3 \sin \frac{x}{3}$ |

Я172. Naszkicuj wykres funkcji.

- | | |
|-------------------------|--|
| a) $y = \sin(-2x)$ | c) $y = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ |
| b) $y = -2 \cos 2x + 2$ | d) $y = \left 3 \cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right) \right + 2$ |

Я173. Korzystając z wykresu podanej funkcji, znajdź jej miejsca zerowe.

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|--|
| a) $y = \frac{1}{5} \sin x$ | c) $y = -\frac{2}{3} \cos x$ | e) $y = 3 \sin \frac{x}{4}$ |
| b) $y = \cos 3x$ | d) $y = \sin \frac{x}{5}$ | f) $y = -\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$ |

Я174. Podaj przykład funkcji typu $y = a \cos bx$, której:

- a) zbiorem wartości jest przedział $\langle -7; 7 \rangle$,
- b) okresem zasadniczym jest 6π ,
- c) zbiorem wartości jest przedział $\langle -3\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2} \rangle$ i okresem zasadniczym jest $\frac{\pi}{5}$.

Я175. Znajdź zbiór wartości i okres zasadniczy funkcji.

- | | | |
|-------------------|----------------------------|--|
| a) $y = 2 \sin x$ | c) $y = -\sin \frac{x}{3}$ | e) $y = 3 \cos 5x$ |
| b) $y = \sin 2x$ | d) $y = \cos \frac{3}{2}x$ | f) $y = \frac{1}{4} \cos \frac{3x}{2}$ |

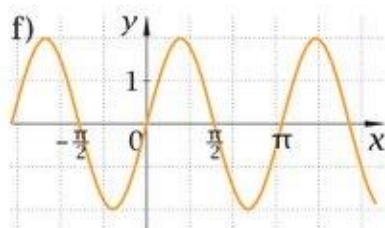
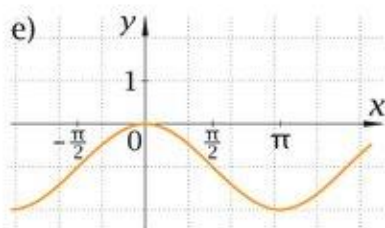
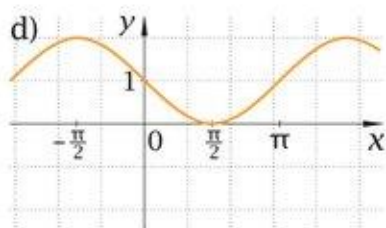
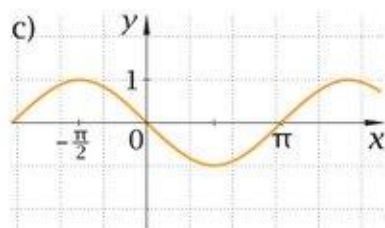
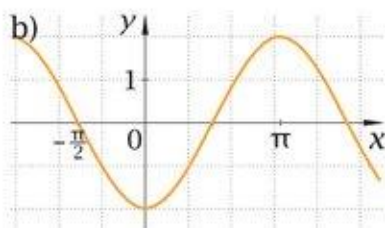
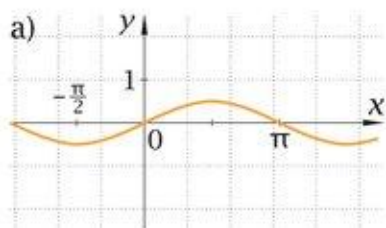
Я176. Określ zbiór wartości funkcji.

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|---|
| a) $y = \cos 6x$ | c) $y = 8 \sin x$ | e) $y = -\sqrt{2} \sin \frac{x}{3}$ |
| b) $y = \sin \frac{\pi}{3}x$ | d) $y = -\frac{1}{5} \cos 4x$ | f) $y = \left \frac{3}{4} \cos \frac{3x}{4} \right $ |

Я177. Określ zbiór wartości funkcji.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ | c) $y = \frac{4}{5} \sin(3x - 2) + \frac{2}{3}$ | e) $y = \left \sqrt{2} \cos \frac{x}{8} \right - 1$ |
| b) $y = -\frac{2}{3} \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ | d) $y = \pi \sin x + \pi$ | f) $y = 4 \sin 5x - 2 $ |

Я178. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji typu $y = a + b \sin cx$ lub $y = a + b \cos cx$. Podaj wzór tej funkcji.



Я179. Podaj przykład funkcji, która:

- jest funkcją parzystą o okresie zasadniczym 6π ,
- jest funkcją nieparzystą o okresie zasadniczym 2,
- ma okres zasadniczy 3 i zbiór wartości $\langle -5; 5 \rangle$,
- jest funkcją parzystą o okresie zasadniczym 1 i zbiorze wartości $\langle 2; 3 \rangle$,
- jest nieparzysta i jej zbiór wartości dla argumentów z przedziału $x \in (-1; 1)$ to zbiór liczb rzeczywistych,
- jest rosnąca w przedziale $(0; 1)$ i jej zbiór wartości dla argumentów z tego przedziału to zbiór liczb rzeczywistych.

Я180. Naskicuj wykres podanej funkcji. Znajdź jej zbiór wartości, okres zasadniczy i miejsca zerowe oraz określ parzystość.

a) $y = \pi \sin 2x$

d) $y = \frac{\sin \pi x}{\pi}$

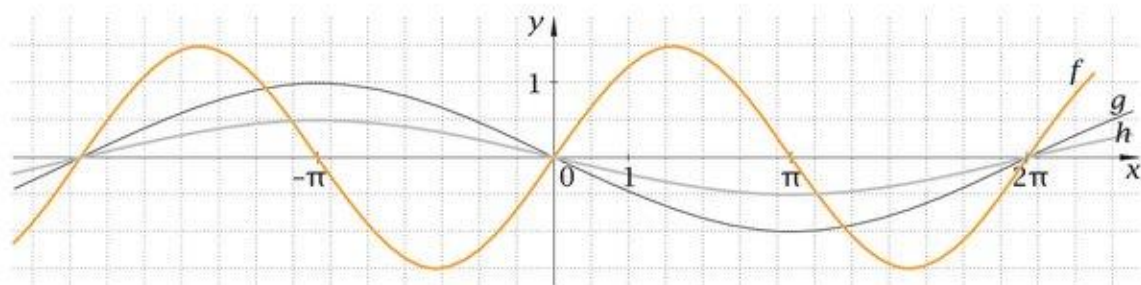
b) $y = 2 \cos \pi x$

e) $y = -\frac{1}{2} \sin(2\pi x)$

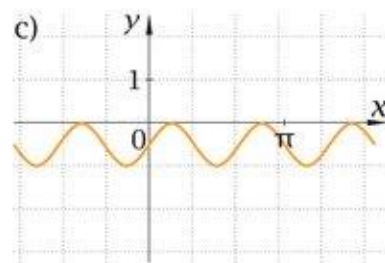
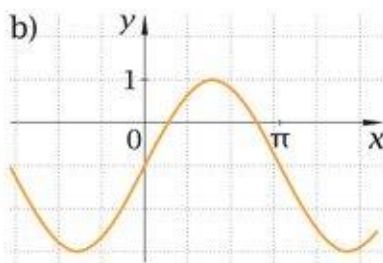
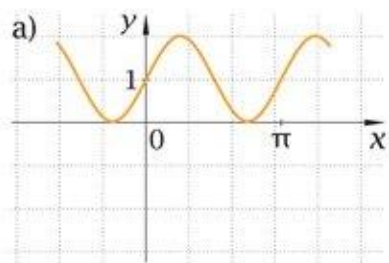
c) $y = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$

f) $y = -2 \cos(3\pi x)$

Я181. Rysunek przedstawia fragmenty trzech wykresów funkcji typu $y = a \sin bx$. Dla każdej z nich znajdź współczynniki a i b .



Я 182. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji typu $y = a + b \sin cx$. Podaj wzór tej funkcji.



Я 183. Naszkicuj wykres funkcji. Podaj zbiór wartości tej funkcji.

a) $y = |\sin x| + \sin x$

c) $y = \cos x + |3 \cos x| - |\cos x|$

b) $y = |\cos x| - \cos x$

d) $y = |2 \sin x| - 3 \sin x$

Я 184. Punkt P należy do wykresu funkcji $f(x)$. Wyznacz wartość współczynnika a .

a) $f(x) = a \cos x$, $P = \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$

e) $f(x) = a \sin x$, $P = \left(\frac{5}{6}\pi, -3\right)$

b) $f(x) = a \sin x$, $P = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\right)$

f) $f(x) = a \cos x$, $P = \left(\frac{5}{3}\pi, \frac{3}{4}\right)$

c) $f(x) = a \sin x$, $P = \left(-\frac{\pi}{4}, 8\right)$

g) $f(x) = a \sin x - \frac{3}{4}$, $P = \left(\frac{5}{4}\pi, 1\right)$

d) $f(x) = a \cos x$, $P = \left(-\frac{\pi}{6}, 1\right)$

h) $f(x) = |a \cos x| - \frac{1}{2}$, $P = \left(\frac{\pi}{3}, 4\right)$

Я 185. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy podanych funkcji, a następnie odczytaj współrzędne punktów przecięcia tych wykresów.

a) $y = \frac{1}{2} \cos 2x$, $y = 2 \cos 2x$

c) $y = 5 \cos \frac{2x}{3}$, $y = 2 \cos 2x$

b) $y = 4 \sin \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2} \sin x$

d) $y = \frac{1}{3} \sin 4x$, $y = 3 \cos 2x$

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

Я 186. Znajdź wszystkie rozwiązania podanego równania należące do przedziału $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$.

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin x = -\frac{1}{2}$

d) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

Я187. Znajdź liczbę spełniającą podane warunki.

a) $2 \sin x = 1$ i $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

e) $2 + \operatorname{tg} x = 3$ i $x \in \langle \pi; 2\pi \rangle$

b) $2 - \cos x = 2,5$ i $x \in \langle 0; \pi \rangle$

f) $\sin^2 x = 0,75$ i $x \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$

c) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 3$ i $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

g) $2 \sin x + 2,2 = 5 \sin x + 0,7$ i $x \in \langle 0; \pi \rangle$

d) $3 \operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ i $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

h) $\cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ i $x \in \langle 0; \pi \rangle$

Я188. Rozwiąż równanie dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

b) $\operatorname{tg}^2 x = 1$

c) $\cos^3 x = 0,125$

Я189. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3$

b) $\sin x = -\frac{1}{2}$

e) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $\sin x = \sin 1,3$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

i) $\cos x = \cos 2$

Я190. Rozwiąż nierówność dla $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

a) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $2 - \cos x < 1,5$

e) $2 \operatorname{tg} x < 2$

b) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-2 \operatorname{tg} x \geq 3$

f) $\sin^2 x < \frac{1}{4}$

Я191. Rozwiąż nierówność dla $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

a) $\sin x \geq \frac{1}{2}$

c) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\operatorname{tg} x < 1$

b) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$

f) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$

Я192. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin x > \frac{1}{2}$

d) $\operatorname{tg} x \geq -1$

g) $2\sqrt{3} - 4 \sin x > 0$

b) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos x < 1$

h) $\sqrt{3} + 2 \cos x < 0$

c) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$

f) $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

i) $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} \leq 0$

Я 193. Sprawdź, czy zbiory A i B są równe.

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Я 194. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 2x = \sqrt{3}$

c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

e) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

b) $\cos 2x = 1$

d) $\operatorname{tg} 3x = 1$

f) $\cos(\pi - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Я 195. Rozwiąż równanie.

a) $\sin x \cos 2x = 0$

c) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \operatorname{tg} x = 0$

b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cos(3x - 1) = 0$

d) $x^2 \operatorname{tg} x = 0$

Я 196. Rozwiąż równanie.

a) $2 \sin^2 x + 7 \sin x = 4$

e) $\cos^2 x - \cos^2 1 = 0$

b) $\cos^2 x - 2 \cos x = 0$

f) $(\sqrt{2} - \sin x)^2 = \frac{1}{2}$

c) $5 \sin x + 2 \cos^2 x = 4$

g) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2$

d) $2 \sin^2 x + \cos x = 2$

h) $\cos^2(2x - \pi) - 4 \cos(2x - \pi) = 5$

Я 197. Rozwiąż równanie.

a) $2 \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$

b) $2 \sin^3 x + \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$

c) $4 \cos^3 x - 8 \cos^2 x - \cos x + 2 = 0$

Я 198. Rozwiąż równanie (wynik zaokrąglaj do części setnych).

a) $\sin x = 2 \cos x$

b) $\cos x + 2 \sin x = 0$

c) $\operatorname{tg} x = 3 \sin x$

Я199. Rozwiąż równanie.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2 x = 1$

c) $\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \cos x$

b) $\sin x + \operatorname{tg} x = 0$

d) $\cos(\pi - x) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2$

Я200. Rozwiąż nierówność.

a) $2 \sin x > 1$

c) $\cos^2 x \geq 1$

e) $\cos x < \cos 3$

b) $\operatorname{tg}^2 x > 1$

d) $\sin x > \sin 2$

f) $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg} 1$

Я201. Rozwiąż równanie.

a) $|\cos x| = \frac{1}{2}$

b) $|\sin x| = 1$

c) $|\operatorname{tg} x| = 1$

Я202. Rozwiąż nierówność.

a) $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $|\sin x| < 1$

e) $|2 \sin x + 1| \geq 1$

b) $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$

d) $\left|\cos x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$

f) $|2 \cos x - 2| > 1$

Я203. a) W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 20$, $|AC| = 5$. Jaką miarę powinien mieć kąt BAC , by pole trójkąta ABC było większe od $25\sqrt{3}$?

b) Boki równoległoboku mają długości 8 i 7. Jaką miarę powinien mieć kąt ostry α , by pole tego równoległoboku było nie większe niż 28?

Я204. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \geq \sqrt{3}$

e) $\sin(x + 1) > \sin 1$

b) $\cos 2x > \frac{1}{2}$

d) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\cos(2x + 1) > \cos 7$

Я205. Rozwiąż nierówność.

a) $\sin x - \sin x \cos^2 x \geq 1$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x \geq \sqrt{3}$

b) $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 \geq 0$

e) $\operatorname{tg} x \cdot \cos x > 0$

c) $\cos(\pi - x) \cos x < -\frac{1}{4}$

f) $\sin x \cdot \cos x > 0$

Я206. Rozwiąż równanie.

a) $4 \cos^2 x + 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \sin x = 4 + \sqrt{6}$

b) $\sin^2 x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \sin x + \sin \frac{\pi}{3} = 0$

Я207. Wyznacz $\operatorname{tg} x$, wiedząc, że $\sin x + 3 \cos x = 2\sqrt{2}$.

Я208. Rozwiąż nierówność.

a) $2 \sin^2 x - \sin x \geq 1$

d) $\cos^2 x + 5 \sin x \geq 7$

b) $2 \sin^2 x - 3\sqrt{3} \sin x + 3 \leq 0$

e) $\frac{1}{\cos^2 x} - 1 > \operatorname{tg} x$

c) $\cos^2 x - 4 \cos x + 4,1 \geq 0$

f) $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x \leq \cos^2 x$

Я209. Niech $f(p)$ będzie liczbą rozwiązań danego równania należących do przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$. Naszkicuj wykres funkcji $y = f(p)$.

a) $\operatorname{tg} x = p$

b) $\sin x = p$

c) $\cos 2x = p$

Я210. a) Prosta $y = ax$ przecina sinusoidę w punkcie o rzędnej $\frac{1}{2}$. Wyznacz wszystkie możliwe wartości współczynnika a .

b) Prosta $y = ax$ przecina cosinusoidę w punkcie o rzędnej $\frac{1}{2}$. Wyznacz wszystkie możliwe wartości współczynnika a .

SINUS, COSINUS I TANGENS SUMY I RÓŻNICY KĄTÓW

Я211. Oblicz, korzystając ze wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów.

a) $\cos 150^\circ$

c) $\cos(-75^\circ)$

e) $\cos 165^\circ$

b) $\sin(-15^\circ)$

d) $\operatorname{tg} 75^\circ$

f) $\sin 120^\circ$

Я212. Uzasadnij tożsamość.

a) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

b) $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

d) $\sin 3\alpha = \sin \alpha (3 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$

Я213. Rozwiąż równanie.

a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sin x$

c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

b) $\sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

d) $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 0$

Я214. Rozwiąż równanie.

a) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos x = 0$

c) $\sin 2x = 2 \sin^2 x$

b) $\frac{\cos x}{\sin 2x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sin 2x = 2 \cos x$

Я215. Wykaż, że podane równości są prawdziwe.

a) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$

b) $\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \cos \alpha$

c) $\cos \alpha \cdot \sin 2\alpha - \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha = \sin \alpha$

d) $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 + \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha$

Я216. Uzasadnij tożsamość.

a) $\sin 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot (1 + \cos 2\alpha)$

b) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$

c) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\beta + \sin \beta \cos \beta \cos 2\alpha$

d) $(\sin \alpha - \cos \beta)^2 + (\cos \alpha - \sin \beta)^2 = 2 - 2 \sin(\alpha + \beta)$

Я217. a) Wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, oblicz $\sin(30^\circ + \alpha)$.

b) Wiedząc, że $\cos \alpha = -\frac{2}{7}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, oblicz $\cos(45^\circ + \alpha)$.

c) Wiedząc, że $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ i $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, oblicz $\sin(\alpha - 60^\circ)$.

d) Wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$, oblicz $\cos(\alpha - 30^\circ)$.

Я218. a) Wiedząc, że $\sin \alpha = 0,1$, $\cos \beta = 0,2$ i $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (0; \frac{\pi}{2})$, oblicz $\sin(\alpha + \beta)$.

b) Wiedząc, że $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, $\sin \beta = \frac{1}{3}$ i $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, $\beta \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$, oblicz $\cos(\alpha - \beta)$.

c) Wiedząc, że $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$, $\cos \beta = -\frac{1}{4}$ i $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$, $\beta \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$, oblicz $\sin(\alpha - \beta)$.

d) Wiedząc, że $\cos \alpha = 0,6$, $\sin \beta = -0,8$ i $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$, $\beta \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$, oblicz $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

Я219. Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) - \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = 2$

e) $2 \cos 2x + 9 \cos x = 5 - 2 \sin^2 x$

b) $\cos 2x = \frac{1}{2} - \sin^2 x$

f) $2 \cos^2 x - 1 = 2 \cos 2x + \sin x$

c) $2 \cos^2 x = 1 - \operatorname{tg} x + \sin 2x$

g) $\frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} = \frac{2}{3}$

d) $\cos 2x = \frac{3}{4} - \sin^2 x$

h) $\cos^3 x + \cos^2 x - \cos 2x = 1$

Я 220. Rozwiąż nierówność.

a) $1 - 2 \sin x \cos x \leq 0$

c) $\sin x < \sin 2x$ i $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

b) $\cos 2x < \cos^2 x$

d) $2 - \sin^2 x > \cos 2x - \cos x$

Я 221. Uzasadnij, że $\cos 4x = \cos^4 x + \sin^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x$.

Я 222. a) Oblicz $\sin 2\alpha$, wiedząc, że $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ i $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

b) Oblicz $\sin 2\alpha$, wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ i $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

c) Oblicz $\cos 2\alpha$, wiedząc, że $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

d) Oblicz $\cos 2\alpha$, wiedząc, że $\sin \alpha = -0,1$.

e) Oblicz $\operatorname{tg} 2\alpha$, wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

f) Oblicz $\operatorname{tg} 2\alpha$, wiedząc, że $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

Я 223. Niech $\sin 42^\circ = a$, $\cos 16^\circ = b$. Wyraż za pomocą a oraz b podane wartości.

a) $\sin 84^\circ$

c) $\sin 58^\circ$

e) $\sin 26^\circ$

g) $\sin 76^\circ$

b) $\cos 32^\circ$

d) $\cos 26^\circ$

f) $\sin 3^\circ$

h) $\cos 29^\circ$

Я 224. Wyznacz te wartości x i y , dla których zachodzi związek.

a) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y$

b) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y$

Я 225. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , wiedząc, że:

a) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ i $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$

b) $\cos 2\alpha = -\frac{5}{6}$ i $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$

c) $\operatorname{tg} 2\alpha = 2,4$ i $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$

Я 226. Rozwiąż równanie.

a) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

d) $\cos x = 1 + \sin x$

b) $\sin x + \cos x = 1$

e) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

c) $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$

f) $2\sqrt{2} \sin x - 2 \cos x = 2\sqrt{2}$

PRZED SPRAWDZIANEM

Я1. Kąt ostry rombu ma miarę α , a krótsza przekątna tego rombu ma długość e . Oznacza to, że pole rombu wynosi:

- A. $e^2 \cdot \sin \alpha$ B. $\frac{e^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2}$ C. $\frac{e^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2}$ D. $\frac{e^2}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$

Я2. Jeżeli $\alpha = 170^\circ$, to:

- A. $\operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha > 0$ C. $\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha < 0$
B. $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ D. $\cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0$

Я3. Dana jest liczba x taka, że $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Która z podanych liczb jest dodatnia?

- A. $\sin x(\cos x - 1)$ C. $\cos(-x) - \sin(-x)$
B. $\cos 2x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ D. $\operatorname{tg} 2x + \cos 3x$

Я4. Wartość liczbową wyrażenia $\sin 150^\circ \cdot \cos 210^\circ - \operatorname{tg} 135^\circ$ wynosi:

- A. $\frac{-4 - \sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{4 - \sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{4 + \sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{-4 + \sqrt{3}}{4}$

Я5. Dane są funkcje: $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \operatorname{tg} x$. Które z podanych zdań jest prawdziwe?

- A. Prosta o równaniu $x = \frac{5\pi}{2}$ jest osią symetrii wykresu funkcji f .
B. W przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ funkcje f oraz g posiadają tyle samo miejsc zerowych.
C. W przedziale $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ wykresy funkcji f i h posiadają jeden punkt wspólny.
D. W przedziale $\left\langle \frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2} \right\rangle$ funkcja g jest malejąca.

Я6. Która z podanych funkcji nie przyjmuje wartości 2?

- A. $y = -2 \cos \frac{x}{2}$ C. $y = \frac{4}{3} \sin \frac{x}{4} + \frac{3}{5}$
B. $y = \frac{1}{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ D. $y = \left| 3 \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| - 1$

Я7. Ile miejsc zerowych w przedziale $\langle -2\pi; 2\pi \rangle$ ma funkcja $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$?

- A. nieskończenie wiele C. siedemnaście
B. pięć D. dwadzieścia

Я8. Suma wszystkich rozwiązań równania $4 \cos^2 x - 3 = 0$ należących do przedziału $\langle -\pi; 2\pi \rangle$ wynosi:

- A. 3π B. 0 C. $\frac{11\pi}{6}$ D. 5π

Я 9. Dane są kąty ostre α i β takie, że: $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin \beta = \frac{2}{3}$. Sinus sumy kątów α i β jest równy:

- A. 1 B. $\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$ C. $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$ D. $\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$

Я 10. Oblicz.

- a) $\frac{\cos 300^\circ - \sin(-135^\circ)}{\operatorname{tg} 120^\circ}$ b) $\frac{\sin \frac{7\pi}{6} + \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos \frac{11\pi}{6} + \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}$

Я 11. Oblicz, wiedząc, że $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{4}$ i $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- a) $\operatorname{tg} x$ b) $\cos 2x$

Я 12. Uzasadnij tożsamość.

- a) $\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x = 1$
b) $\cos(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\sin \beta + \cos \beta)$

Я 13. Ramię końcowe kąta α przechodzi przez punkt $P = (-3, 4)$, a ramię końcowe kąta β przechodzi przez punkt $R = (-2, -4)$. Wyznacz $\cos(\beta - \alpha)$.

Я 14. Naskicuj wykres funkcji.

- a) $y = -2 \cos \frac{x}{2}$ b) $y = \left| \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \frac{1}{2} \right|$

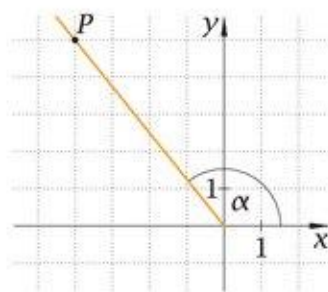
Я 15. Rozwiąż równanie.

- a) $2(\sin x + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$ d) $\sin 2x = \sin x$
b) $1 - 3 \operatorname{tg}^2 x = 0$ e) $1 - \cos 2x = 3 \cos x$
c) $\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{tg} x$

Я 16. Rozwiąż nierówność.

- a) $\sqrt{2} \sin x > 1$ b) $\frac{2 \cos x + 3}{4} \leq \frac{1}{2}$ c) $\sqrt{3} \cos 3x > \frac{3}{2}$ d) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < -3$

PRZED MATURĄ



1. Tangens kąta α zaznaczonego na rysunku jest równy:
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. -1 D. $-\frac{5}{4}$
2. Wartość wyrażenia $\sin 120^\circ - \cos 30^\circ$ jest równa:
 A. $\sin 90^\circ$ B. $\sin 150^\circ$ C. $\sin 0^\circ$ D. $\sin 60^\circ$
3. Kąt α jest ostry i spełnia równość $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{7}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.
4. Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.
- Я 5. Równanie $2 \sin x + 3 \cos x = 6$ w przedziale $(0; 2\pi)$:
 A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.
 B. ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.
 C. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.
 D. ma więcej niż dwa rozwiązania rzeczywiste.
- Я 6. Liczba $\cos^2 105^\circ - \sin^2 105^\circ$ jest równa:
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Я 7. Rozwiąż równanie $(4 \sin^2 x - 1) \cdot \sin x = \cos^2 x - 3 \sin^2 x$, dla $x \in (-\pi; 0)$.
- Я 8. Rozwiąż nierówność $\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.
- Я 9. Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3 \cos x = -2$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.
- Я 10. Udowodnij, że dla dowolnego kąta $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ prawdziwa jest nierówność $\sin(\frac{\pi}{12} - \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{12} + \alpha) < \frac{1}{4}$.

GEOMETRIA ANALITYCZNA

Odległość między punktami

$A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ wynosi:

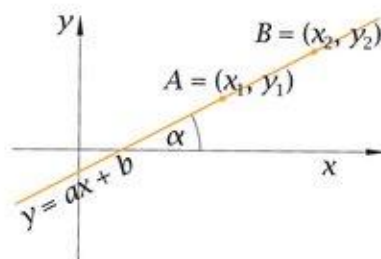
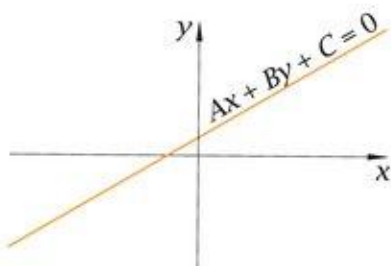
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka

$A = (x_A, y_A)$ $B = (x_B, y_B)$
 $S = (x_S, y_S)$

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Proste w układzie współrzędnych

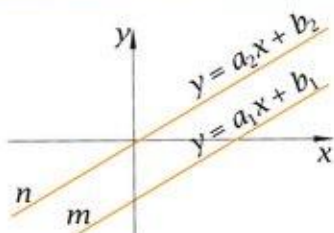


Równanie ogólne prostej: $Ax + By + C = 0$

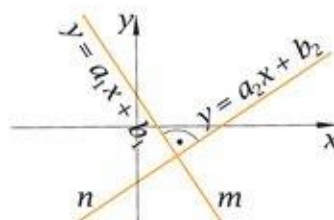
Równanie kierunkowe prostej: $y = ax + b$

$$a = \tan \alpha$$

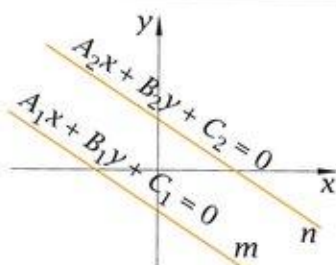
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



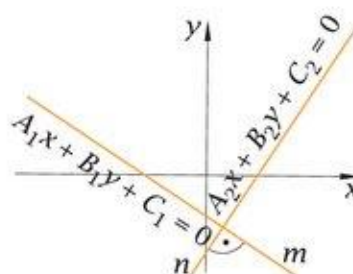
$$m \parallel n \Leftrightarrow a_1 = a_2$$



$$m \perp n \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{a_1}$$



$$m \parallel n \Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1$$



$$m \perp n \Leftrightarrow A_1A_2 = -B_1B_2$$

Odległość między prostymi równoległymi o równaniach

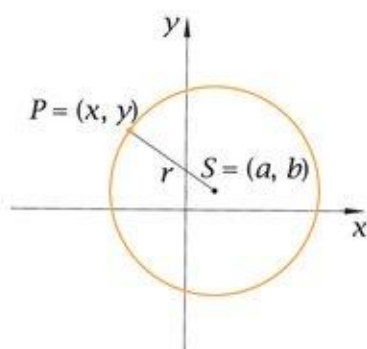
$$Ax + By + C_1 = 0 \text{ i } Ax + By + C_2 = 0:$$

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Okrąg i koło w układzie współrzędnych

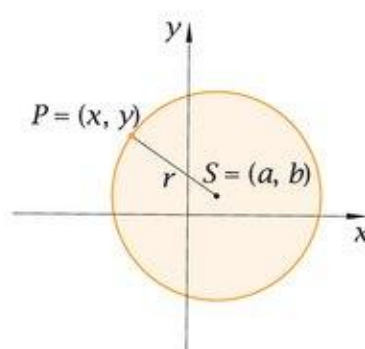


Postać kanoniczna równania okręgu:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Postać ogólna równania okręgu:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{ gdzie } c = a^2 + b^2 - r^2$$



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

PUNKTY I ODCINKI W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Я 1. Znajdź współrzędne środka oraz długość odcinka o końcach w punktach A i B.

a) $A = (7, -8), \quad B = (-2, -8)$

d) $A = (15, 0), \quad B = (0, -5)$

b) $A = (-6, -11), \quad B = (-6, -20)$

e) $A = (-297, 322), \quad B = (-291, 319)$

c) $A = (-6, -7), \quad B = (6, -2)$

f) $A = (3\sqrt{2}, -3), \quad B = (-7\sqrt{2}, 2)$

Я 2. Dla jakich wartości p spełnione są podane warunki?

a) $A = (-4, 6), \quad B = (p, -2), \quad |AB| = 10$

c) $A = (2, 4), \quad B = (p, -p), \quad |AB| = 6$

b) $A = (5, p), \quad B = (-1, -3), \quad |AB| = 8$

d) $A = (p, 2p), \quad B = (3, p + 1), \quad |AB| = 2$

- Я3.** a) Punkt $(4, 7)$ jest środkiem odcinka AB oraz $A = (1, 3)$. Znajdź współrzędne punktu B .
 b) Punkt $(-123, 52)$ jest środkiem odcinka MN i $N = (-3, 192)$. Znajdź współrzędne punktu M .
 c) Punkt $(2004, -3)$ jest środkiem odcinka PQ i $P = (-3, p)$ oraz $Q = (q, 3)$. Znajdź wartości p i q .
- Я4.** Punkty M i N są końcami średnicy okręgu. Znajdź promień i współrzędne środka tego okręgu.
 a) $M = (-2, -4)$, $N = (6, 6)$ b) $M = (0, 8)$, $N = (-7, 19)$
- Я5.** Sprawdź, czy podany punkt leży na okręgu o środku w punkcie $(-24, 22)$ i promieniu 10.
 a) $(-30, 30)$ b) $(-17, 15)$ c) $(-15, 22 + \sqrt{19})$ d) $(-24 - 4\sqrt{6}, 20)$
- Я6.** a) Znajdź współrzędne środka oraz średnicę okręgu opisanego na prostokącie o wierzchołkach $(-4, -2)$, $(2, 2)$, $(0, 5)$, $(-6, 1)$.
 b) Znajdź współrzędne środka oraz średnicę okręgu wpisanego w kwadrat o wierzchołkach $(-4, -5)$, $(1, -3)$, $(-1, 2)$, $(-6, 0)$.
- Я7.** Znajdź długość środkowej AM trójkąta, którego wierzchołkami są punkty:
 a) $A = (-6, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (8, 4)$
 b) $A = (2, 2)$, $B = (-4, -3)$, $C = (6, -7)$
- Я8.** Oblicz pole podanej figury.
 a) kwadrat $ABCD$ o wierzchołkach $A = (-9, 0)$, $B = (-2, -3)$, $C = (1, 4)$, $D = (-6, 7)$
 b) prostokąt $PQRS$ o wierzchołkach $P = (3, -4)$, $Q = (6, -3)$, $R = (2, 9)$, $S = (-1, 8)$
 c) romb $KLMN$ o wierzchołkach $K = (-9, -5)$, $L = (-2, -9)$, $M = (-1, -1)$, $N = (-8, 3)$
- Я9.** Znajdź współrzędne punktów P_1 i P_2 symetrycznych do punktu P odpowiednio względem osi x i y układu współrzędnych oraz punktu P_3 symetrycznego względem początku układu współrzędnych.
 a) $P = (6, 0)$ b) $P = (0, -7)$ c) $P = (-3, 8)$ d) $P = (5, -9)$
- Я10.** a) Punkt $P' = (4, -9)$ jest obrazem punktu $P = (-6, -15)$ w symetrii względem punktu S . Znajdź współrzędne punktu S .
 b) Znajdź współrzędne obrazu punktu $M = (3, 7)$ w symetrii względem punktu $S = (-5, -2)$.
 c) Obrazem punktu K w symetrii względem punktu $S = (8, -1)$ jest punkt $K' = (-9, 10)$. Znajdź współrzędne punktu K .

Я 11. Oblicz odległości między punktami A , B i C , a następnie sprawdź, czy te punkty są współliniowe.

a) $A = (-2, -5)$, $B = (1, -1)$, $C = (7, 7)$ b) $A = (1, -2)$, $B = (-2, -11)$, $C = (3, 2)$

12. Punkty A i B są wierzchołkami, a punkt P jest punktem przecięcia przekątnych podanego czworokąta. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego czworokąta.

a) romb $ABCD$, $A = (2, -1)$, $B = (4, 5)$, $P = (0, 1)$

b) prostokąt $ABCD$, $A = (5, 8)$, $B = (3, -2)$, $P = \left(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$

c) równoległobok $ABCD$, $A = (-2, -2)$, $B = (-3, -5)$, $P = \left(\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right)$

Я 13. Dany jest odcinek o końcach $(-1, -4)$ i $(p, 2p)$. Znajdź wartość p , dla której środek tego odcinka:

a) leży na osi y ,

c) ma jednakowe współrzędne.

b) leży na osi x ,

d) jest odległy od punktu $(0,0)$ o 1.

Я 14. a) Znajdź na osi x punkt oddalony o 5 od punktu $(7, -3)$.

b) Znajdź na osi y punkt oddalony o 8 od punktu $(-4, -6)$.

c) Znajdź na osi x punkt jednakowo oddalony od punktów $(-1, 1)$ i $(5, 3)$.

d) Znajdź na osi y punkt jednakowo oddalony od punktów $(2, 3)$ i $(-3, -7)$.

15. Punkty A i B są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Znajdź współrzędne trzeciego wierzchołka tego trójkąta.

a) $A = (1, 1), \quad B = (11, 1)$

b) $A = (-3, -4)$, $B = (-3, 2)$

Y 16. Odcinek o końcach $A = (-1, 0)$ i $B = (4, -7)$ jest podstawą trójkąta równoramiennego ABC . Znajdź współrzędne wierzchołka C , jeżeli wiadomo, że leży on na jednej z osi układu współrzędnych.

Я 17. Punkt A leży na osi x , a punkt B — na osi y . Wykaż, że odległość środka odcinka AB od początku układu współrzędnych jest dwa razy krótsza od długości odcinka AB .

Я 18. Przekątne rombu są równoległe do osi układu współrzędnych. Dwa z jego wierzchołków mają współrzędne $(-4, 2)$ i $(-1, -5)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków.

Y 19. Wykaż na dwa sposoby, że punkty $Q = (1, 1)$, $R = (2, 5)$, $S = (6, 8)$ i $T = (5, 4)$ są wierzchołkami równoległoboku, raz korzystając ze wzoru na długość odcinka, a drugi raz — ze wzoru na współrzędne środka odcinka.

Я20. Oblicz cosinus najmniejszego kąta trójkąta ABC .

a) $A = (-32, 13)$, $B = (-29, 11)$, $C = (-29, 17)$

b) $A = (23, -14)$, $B = (21, -10)$, $C = (18, -9)$

Я21. a) Na odcinku AB o końcach w punktach $A = (-23, 48)$ i $B = (7, -12)$ zaznaczono taki punkt, że podzielił on odcinek na części, których długości są w stosunku $1:2$. Znajdź współrzędne tego punktu.

b) Znajdź współrzędne punktu przecięcia środkowych trójkąta o wierzchołkach $A = (-7, -4)$, $B = (5, -5)$, $C = (-1, 3)$.

Я22. Pewien punkt dzieli odcinek o końcach w punktach $A = (43, -22)$ oraz $B = (23, -37)$ na dwie części, których długości są w stosunku $2:3$. Znajdź współrzędne tego punktu.

Я23. Znajdź miary kątów trójkąta, którego wierzchołkami są dane punkty.

a) $(0, 3)$, $(4, 0)$, $(12, 8)$

b) $(0, -2)$, $(3, 0)$, $(-1, 2)$

Я24. a) Znajdź równanie krzywej złożonej z wszystkich punktów, których odległość od punktu $(0, 2)$ jest równa odległości od osi x .

b) Znajdź równanie krzywej złożonej z wszystkich punktów, których odległość od punktu $(-2, 0)$ jest dwa razy większa od odległości od osi y .

RÓWNANIE PROSTEJ

Я25. Które z punktów A , B , C leżą na prostej l ?

a) $A = (0, -\frac{1}{4})$, $B = (-\frac{4}{3}, \frac{1}{4})$, $C = (5, -4)$, prosta $l: y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

b) $A = (0, -1)$, $B = (-1, 0)$, $C = (-2, -2)$, prosta $l: 2x - y + 2 = 0$

c) $A = (-2, -3)$, $B = (-3, 2)$, $C = (2, 3)$, prosta $l: 3x + 2y - 12 = 0$

d) $A = (-4, -3)$, $B = (1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3})$, $C = (-\frac{1}{6}, \frac{2}{9})$, prosta $l: 2x - 3y + 1 = 0$

Я26. Znajdź wartości a i b , dla których punkty A i B leżą na prostej l .

a) $A = (a, -2)$, $B = (-\frac{5}{6}, b)$, prosta $l: y = -3x + 2$

b) $A = (a, 8)$, $B = (-3, b)$, prosta $l: 2x - 3y - 1 = 0$

c) $A = (a, a)$, $B = (-b, b)$, prosta $l: y = 4x - 5$

d) $A = (a, -a)$, $B = (-b, -b)$, prosta $l: -3x + y - 8 = 0$

Я27. Przekształć równanie kierunkowe prostej do postaci ogólnej, w której wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi.

a) $y = 3x - \frac{2}{5}$ b) $y = -\frac{2}{7}x + 6$ c) $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}$ d) $y = -0,23x - 0,7$

Я28. Przekształć równanie ogólne prostej do postaci kierunkowej.

a) $x + 2y + 6 = 0$ b) $5x - 4y - 20 = 0$ c) $-3x + 9y + 21 = 0$

Я29. Trzy z podanych równań przedstawiają tę samą prostą. Zapisz równanie ogólne i równanie kierunkowe tej prostej.

a) $x + y = 3 - \frac{1}{2}y$ $2x = 3y - 6$ $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ $x = 3 - \frac{3}{2}y$
 b) $\frac{x-y}{2} = 1 - y$ $x = 3y - 2$ $\frac{x+5}{6} = \frac{y+1}{2}$ $3(x+y+2) = 2(x+3y+2)$

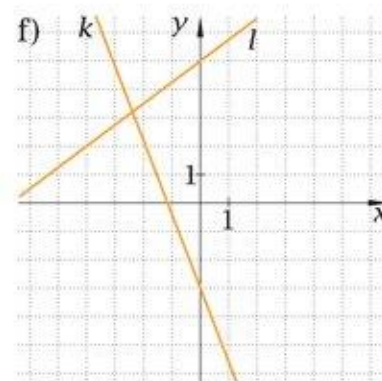
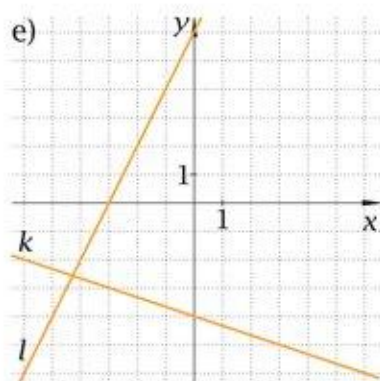
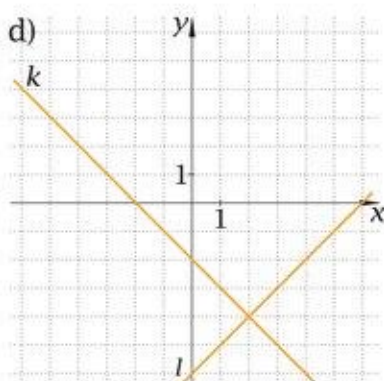
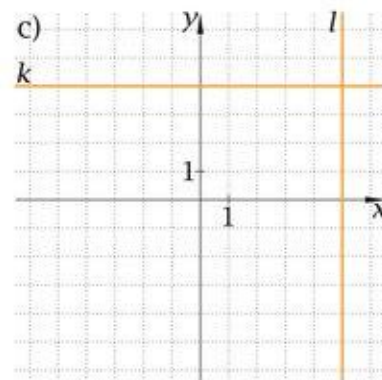
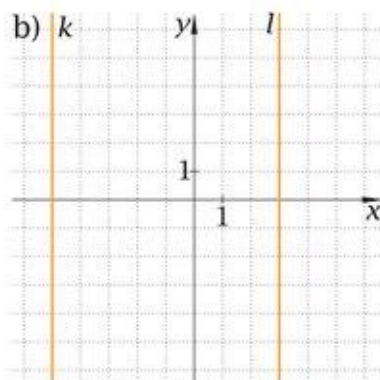
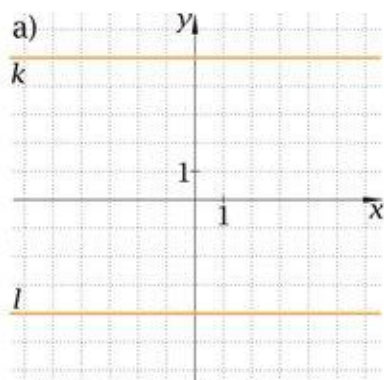
Я30. Znajdź współrzędne punktów przecięcia danej prostej z osiami układu współrzędnych.

a) $y = -\frac{2}{3}x - 22$ b) $y = 1,2x - 6$ c) $2x - 3y + 12 = 0$

Я31. Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B.

a) $A = (0, -12)$, $B = (-4, 0)$ c) $A = (1, 7)$, $B = (0, -2)$ e) $A = (5, 2)$, $B = (-10, 5)$
 b) $A = (5, 0)$, $B = (0, -20)$ d) $A = (-1, 8)$, $B = (2, 2)$ f) $A = (-7, -6)$, $B = (21, 14)$

Я32. Znajdź równania ogólne prostych k i l przedstawionych na rysunku.



Я33. Podaj równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $(5, -3)$ oraz:

- a) równoległej do osi x ,
- b) równoległej do osi y ,
- c) nachylonej do osi x pod kątem 45° ,
- d) nachylonej do osi x pod kątem 135° .

Я34. Znajdź równanie prostej równoległej do danej prostej i przechodzącej przez punkt P .

- a) $y = -\frac{1}{3}x + 6$, $P = (6, 0)$
- b) $y = -22$, $P = (-3, 10)$
- c) $7x - 3y + 8 = 0$, $P = (0, -5)$
- d) $-3x + 2y - 1 = 0$, $P = (-4, 3)$

Я35. Znajdź równanie prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez punkt M .

- a) $y = 3 - 4x$, $M = (0, -2)$
- b) $x = 12$, $M = (-3, 5)$
- c) $3x - 4y = 0$, $M = (-9, 0)$
- d) $6x + 3y = 11$, $M = (-4, -5)$

Я36. Sprawdź, czy podane proste są równoległe.

- a) $y = 3x - 2$, $y = 3x + 17$
- b) $y = -\frac{1}{3}x + 1$, $y = -0,3x - 1$
- c) $y = -2x + 3$, $6x + 3y - 5 = 0$
- d) $y = 8x + 4$, $y + 8x - 2 = 0$
- e) $2x + 6y + 3 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$
- f) $\frac{x}{2} - 3y = 0$, $6y - x + \sqrt{3} = 0$

Я37. Sprawdź, czy podane proste są prostopadłe.

- a) $y = 2x - \frac{1}{3}$, $y = -2x + 3$
- b) $y = \frac{1}{4}x + 11$, $y = -4x + 6$
- c) $y = -\sqrt{2}x - 1$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3$
- d) $2x + 6y + 5 = 0$, $y = 3x - 5$
- e) $x - y + 2 = 0$, $-x + y + 10 = 0$
- f) $7x - 5y + 9 = 0$, $-5x + 7y - 3 = 0$

Я38. Znajdź wśród podanych prostych wszystkie pary prostych równoległych i prostych prostopadłych.

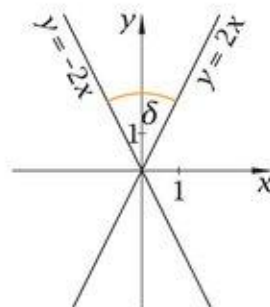
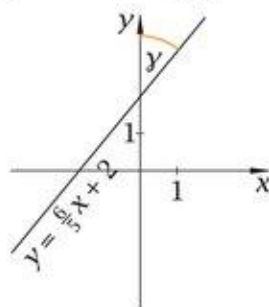
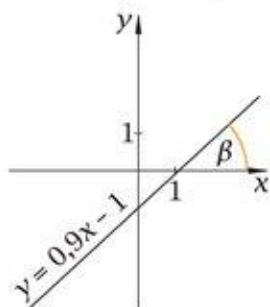
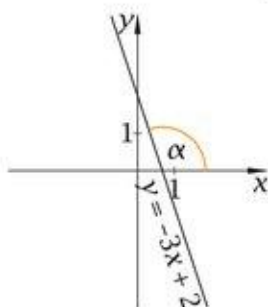
- prosta a : $y = -\frac{2}{3}x$
- prosta b : $y = \frac{1}{3}x + 1,5$
- prosta c : $y = \frac{3}{2}x$
- prosta d : $y = 1,5x - \frac{2}{3}$
- prosta e : $y = -1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
- prosta f : $y = \frac{2}{3}x - 5$
- prosta g : $y = -3x$
- prosta h : $y = \frac{x}{3}$

Я39. a) Znajdź taką wartość m , dla której proste o równaniach $y = -1,4x + 3,7$ i $2x + my + 7 = 0$ są równoległe, oraz taką, dla której te proste są prostopadłe.

b) Znajdź taką wartość p , dla której proste o równaniach $px + 5y = 3$ i $9x + 3y = -5$ są równoległe, oraz taką, dla której te proste są prostopadłe.

- Я40.** a) Sprawdź, czy punkty $P = (1, -1)$, $Q = (7, 2)$ i $R = (51, 24)$ są współliniowe.
 b) Znajdź wartość m , dla której punkty $P = (3, 7)$, $Q = (m, m - 1)$ i $R = (-2, -8)$ są współliniowe.
- Я41.** Znajdź współrzędne punktu leżącego na prostej l , którego odległości od punktów A i B są równe.
 a) prosta $l: x = 8$, $A = (2, -3)$, $B = (6, 1)$
 b) prosta $l: y = -2$, $A = (-3, 2)$, $B = (4, 5)$
 c) prosta $l: x - y = 0$, $A = (-6, -1)$, $B = (-2, 7)$
- Я42.** Znajdź równania dwóch prostych przechodzących przez punkt P , poprowadzonych w równych odległościach od punktów A i B .
 a) $P = (0, 0)$, $A = (2, -5)$, $B = (-8, -11)$ b) $P = (3, -2)$, $A = (-5, -1)$, $B = (1, 9)$
- Я43.** Znajdź wszystkie wartości parametru p , dla których trzy proste o podanych równaniach przecinają się w jednym punkcie.
 a) $x = 3$, $y = -5$, $y = 2x + p$ c) $2x + py - p = 0$, $x = 3$, $y = 7$
 b) $y = px - 4$, $x = -7$, $y = p$ d) $px + 3y + p = 0$, $x = p$, $y = -2$
- Я44.** Z punktu $(-1, 4)$ poprowadzono proste prostopadłe do prostych o równaniach $x - 3y + 3 = 0$ i $3x + 2y + 8 = 0$. Znajdź współrzędne wierzchołków czworokąta ograniczonego tymi czterema prostymi.
- Я45.** Wyznacz równania obu osi symetrii odcinka AB .
 a) $A = (8, 1)$, $B = (2, 4)$ b) $A = (-5, 3)$, $B = (2, 7)$
- Я46.** Punkty $A = (-1, -4)$, $B = (5, -2)$ i $C = (-3, 6)$ są wierzchołkami trójkąta.
 a) Znajdź równanie prostej przechodzącej przez wierzchołek A , która dzieli ten trójkąt na dwie części o równych polach.
 b) Znajdź równania prostych przechodzących przez wierzchołek A , które dzielą ten trójkąt na cztery części o równych polach.
- Я47.** Jedna z przyprostokątnych równoramiennego trójkąta prostokątnego zawiera się w prostej o równaniu $x - y + 2 = 0$, a jeden z jego wierzchołków ma współrzędne $(-2, 5)$. Podaj równania prostych, w których zawierają się pozostałe boki tego trójkąta.
- Я48.** Wyznacz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C .
 a) $A = (-3, -1)$, $B = (4, 1)$, $C = (3, 7)$ b) $A = (-5, -3)$, $B = (0, -6)$, $C = (2, -1)$

- Я49.** Wierzchołkami trójkąta są punkty: $A = (-3, 5)$, $B = (-1, -3)$, $C = (5, -1)$. Znajdź równanie prostej:
- zawierającej środkową tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A ,
 - równoległej do boku BC i przechodzącej przez wierzchołek A ,
 - zawierającej wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka A ,
 - będącej symetralną boku BC .
- Я50.** Pole rombu jest równe 20, a końcami jednej z jego przekątnych są punkty o współrzędnych $(-4, -4)$ i $(4, 2)$. Znajdź współrzędne końców drugiej przekątnej.
- Я51.** Punkty $O = (0, 0)$, $A = (6, -4)$, $B = (3, 8)$ są wierzchołkami trapezu $OABC$, który nie jest równoległobokiem. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 5$. Znajdź współrzędne wierzchołka C .
- Я52.** Znajdź równanie prostej l równoległej do prostej $m: 3x + 2y - 2 = 0$ i przechodzącej przez punkt $P = (-2, -5)$, a następnie — równanie prostej k równoległej do prostych l i m i jednakowo od nich oddalonej.
- Я53.** Znajdź na prostej l punkt, który jest położony najbliżej punktu P .
- prosta $l: y = -\frac{1}{2}x + 6$, $P = (0, -2)$
 - prosta $l: 3x + 4y - 8 = 0$, $P = (3, 1)$
- Я54.** Znajdź kąt nachylenia do osi x prostej o równaniu:
- $y = \sqrt{3}x + 2$
 - $\sqrt{3}x - 3y = 4$
 - $x - 2y + 12 = 0$
 - $2x + 3y = 2$
- Я55.** Czy kąt nachylenia podanej prostej do osi x jest ostry czy rozwarty?
- $y = \frac{1}{3}x + 7$
 - $y = 15x - 1$
 - $y = -5x + 3$
 - $y = -\frac{x}{2} + 12$
 - $2x + 3y - 7 = 0$
 - $x - 5y + 1 = 0$
- Я56.** Oblicz miary zaznaczonych kątów. Wyniki zaokrąglaj do 1° .



- Я57.** Podaj (w zaokrągleniu do 1°) miarę kąta ostrego, pod jakim przecinają się proste $3x - 5y + 10 = 0$ i $4x + 2y - 1 = 0$.

Я58. Znajdź miary kątów trójkąta ograniczonego prostymi o danych równaniach.

a) $y = -1$, $y = x - 2$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$ b) $y = 5$, $y = -\sqrt{3}x - 3$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$

Я59. a) Wykaż, że na prostej o równaniu $y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}$ leży nieskończenie wiele punktów o obu współrzędnych całkowitych.

b) Wykaż, że na prostej o równaniu $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$ nie leży żaden punkt o obu współrzędnych całkowitych.

Я60. Znajdź równania osi symetrii figury, która składa się z prostych o równaniach $y = ax + b$ i $y = -ax + c$ ($a \neq 0$).

Я61. Prosta $k: Ax + By + C = 0$ ($A \neq 0$, $B \neq 0$) i prosta l o podanym równaniu są symetryczne względem prostej lub punktu. Podaj równanie osi symetrii lub określ położenie środka symetrii.

a) $l: Ax - By - C = 0$ b) $l: Ax - By + C = 0$ c) $l: Ax + By - C = 0$

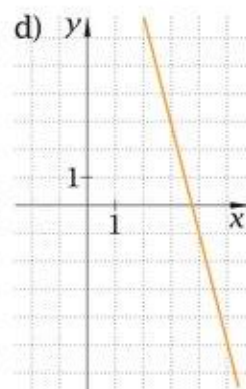
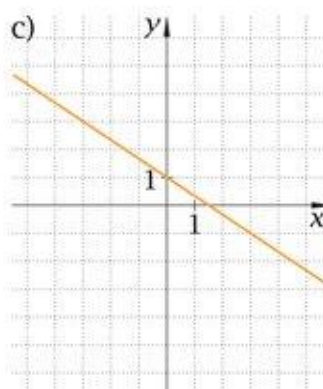
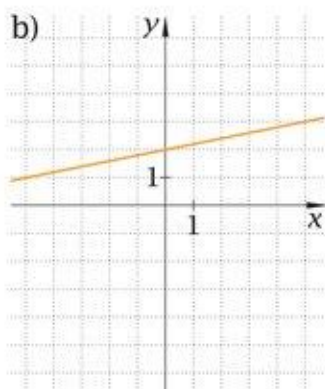
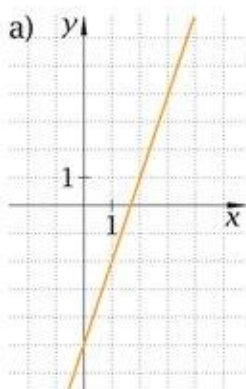
Я62. a) Wykaż, że jeśli prosta przechodzi przez punkty o współrzędnych (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , to jej równanie można zapisać w postaci $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.

b) Wykaż, że jeśli prosta ma współczynnik kierunkowy a i przechodzi przez punkt o współrzędnych (x_1, y_1) , to jej równanie można zapisać w postaci $y - y_1 = a(x - x_1)$.

c) Wykaż, że jeśli prosta nie przechodzi przez początek układu i przecina osie układu w punktach o współrzędnych $(a, 0)$ i $(0, b)$, to jej równanie można zapisać w postaci $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

RÓWNANIE PROSTEJ (CD.)

Я63. Znajdź współczynnik kierunkowy prostej przedstawionej na rysunku. Podaj współczynnik kierunkowy prostej do niej prostopadłej.



Я64. Znajdź współczynnik kierunkowy prostej, na której leżą podane punkty.

- a) $(6, 4)$, $(1, 2)$ c) $(-100, 30)$, $(80, -60)$
b) $(42, -77)$, $(40, -81)$ d) $(-23, -19)$, $(-30, -14)$

Я65. Prosta o współczynniku kierunkowym a przechodzi przez punkty A i B .
Znajdź wartość p .

- a) $a = -2$, $A = (5, 12)$, $B = (-3, p)$ b) $a = \frac{1}{5}$, $A = (0, -21)$, $B = (p, -11)$

Я66. Oblicz odległość punktu P od podanej prostej.

- a) $P = (3, 5), \quad y = -2$
b) $P = (-1, -3), \quad x = -9$
c) $P = (0, 0), \quad y = 2x - 3$
d) $P = (3, 4), \quad y = -2x$
e) $P = (-2, 1), \quad 3x - y + 3 = 0$
f) $P = (-6, 4), \quad y = -\frac{1}{4}x - 2$

67. Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie P , a jeden z boków zawiera się w prostej l . Oblicz pole tego kwadratu.

- a) $P = (2, 1)$, prosta $l: x + 3y - 1 = 0$
b) $P = (5, -3)$, prosta $l: -2x + 3y + 6 = 0$

Я68. Wykaż, że podane proste są równoległe, a następnie oblicz odległość między nimi.

- a) $3x - y + 1 = 0$, $6x - 2y + 3 = 0$ b) $y = \frac{1}{2}x + 5$, $x - 2y + 8 = 0$

Я69. Okrąg o środku P jest styczny do prostej l . Znajdź promień tego okręgu.

- a) $P = (12, 11)$, prosta $l: y = -4$ c) $P = (4, 1)$, prosta $l: x + 5y - 3 = 0$
b) $P = (-7, 3)$, prosta $l: x = 6$ d) $P = (6, 0)$, prosta $l: y = -\frac{2}{3}x + 5$

Я70. Czy czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, rombem, prostokątem, równoległobokiem lub trapezem?

- a) $A = (-32, 17)$, $B = (14, -46)$, $C = (23, -43)$, $D = (-26, 19)$
 b) $A = (-29, -23)$, $B = (1, -26)$, $C = (5, 4)$, $D = (-25, 7)$
 c) $A = (-17, -21)$, $B = (13, -19)$, $C = (11, 11)$, $D = (-19, 9)$
 d) $A = (-8, -5)$, $B = (32, 3)$, $C = (30, 13)$, $D = (-10, 5)$
 e) $A = (-16, -10)$, $B = (6, -6)$, $C = (16, 14)$, $D = (-6, 10)$

Я71. Znajdź wartość p , dla której prosta o równaniu $2x - 3y + 5 = 0$ oraz prosta przechodząca przez punkty $A = (1, 5)$ i $B = (p, -3)$ są:

- a) równoległe, b) prostopadłe.

- Я72.** Znajdź wartość p , dla której prosta o równaniu $2x + y - 9 = 0$ oraz prosta przechodząca przez punkty $A = (p, 2)$ i $B = (-4, p)$ są:
- równoległe,
 - prostopadłe.
- Я73.** Dane są wierzchołki trójkąta $A = (-4, -1)$, $B = (1, -3)$, $C = (8, 1)$. Oblicz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka B oraz pole tego trójkąta.
- Я74.** Dwa wierzchołki trójkąta to punkty $A = (-4, 2)$ i $B = (-1, -2)$. Prosta $y = -\frac{4}{3}x$ przechodzi przez trzeci wierzchołek. Sprawdź, że ta prosta jest równoległa do prostej AB , a następnie oblicz pole tego trójkąta.
- Я75.** a) Oblicz pole równoległoboku $ABCD$, którego wierzchołkami są punkty $A = (-2, -5)$, $B = (5, 1)$, $C = (3, 4)$ i $D = (-4, -2)$.
 b) Oblicz pole trapezu $KLMN$, którego wierzchołkami są punkty $K = (-3, -4)$, $L = (-6, 5)$, $M = (-2, 11)$ i $N = (0, 5)$.
- Я76.** Znajdź współrzędne punktu symetrycznego do punktu P względem prostej l .
- $P = (2, 5)$, prosta $l: y = \frac{1}{2}x - 1$
 - $P = (2, -8)$, prosta $l: 2x + 3y - 6 = 0$
 - $P = (0, -4)$, prosta $l: y = -3x + 6$
 - $P = (3, -6)$, prosta $l: 3x - 5y - 5 = 0$
- Я77.** Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek o końcach $A = (-2, -5)$ oraz $B = (4, -3)$, a jedno z jego ramion zawiera się w prostej o równaniu $y = -x + 1$.
- Znajdź współrzędne trzeciego wierzchołka tego trójkąta.
 - Oblicz pole tego trójkąta.
 - Oblicz długość wysokości opuszczonej na ramię tego trójkąta.
- Я78.** Punkty $(-1, 6)$ i $(3, -2)$ są wierzchołkami trójkąta, a punkt $(0, -1)$ jest jego ortocentrum. Znajdź współrzędne trzeciego wierzchołka tego trójkąta.
- Я79.** Odcinek o końcach $A = (-1, 0)$ i $B = (3, -8)$ jest jednym z boków trójkąta ABC . Znajdź współrzędne punktu C , jeżeli wiadomo, że pole trójkąta ABC wynosi 20, a punkt C leży na osi y .
- Я80.** Podstawa trójkąta równoramiennego zawiera się w prostej $y = 2x + 1$, każde z ramion ma długość $\sqrt{37}$, a jednym z wierzchołków jest punkt o współrzędnych $(5, -2)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.
- Я81.** W trójkącie o wierzchołkach $(-1, 2)$, $(3, 0)$, $(3, 6)$ znajdź współrzędne:
- ortocentrum tego trójkąta,
 - środką okręgu opisanego na tym trójkącie,
 - środką ciężkości tego trójkąta.

- Я82.** Środek okręgu przechodzącego przez punkty $(5, -1)$ i $(-1, -7)$ leży na prostej $y = 3x - 6$. Znajdź współrzędne środka tego okręgu.
- Я83.** Końcami podstawy trójkąta równoramiennego są punkty $(-4, -5)$ i $(-1, -1)$. Trzeci wierzchołek tego trójkąta leży na prostej $2x - 3y - 21 = 0$. Znajdź współrzędne tego wierzchołka.
- Я84.** Jeden z boków kwadratu zawiera się w prostej $2x - 3y - 12 = 0$, a jednym z wierzchołków jest punkt $(-1, 4)$.
- Znajdź pole tego kwadratu.
 - Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.
 - Znajdź równania prostych zawierających przekątne tego kwadratu.
- Я85.** Dwa z boków kwadratu opisanego na okręgu o środku w punkcie $(3, -5)$ zawierają się w prostych o równaniach $4x - 3y + 3 = 0$ i $4x - 3y - 57 = 0$. Znajdź równania prostych, w których zawierają się pozostałe dwa boki tego kwadratu.
- Я86.** Punkty $(-1, 2)$ i $(-3, -8)$ są końcami jednej z przekątnych kwadratu. Znajdź równania prostych, w których zawierają się boki tego kwadratu.
- Я87.** Oś symetrii trapezu równoramiennego $ABCD$ jest prosta $y = 2x + 1$. Punkty $B = (3, -3)$ i $C = (4, 4)$ są końcami ramienia tego trapezu. Znajdź współrzędne punktów A i D .
- Я88.** Sąsiednie boki równoległoboku zawierają się w prostych $4x - 5y + 7 = 0$ oraz $2x + 3y + 9 = 0$, a jedna z przekątnych zawiera się w prostej $x - 4y + 10 = 0$. Znajdź współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.
- Я89.** Sąsiednie boki równoległoboku zawierają się w prostych $x - 3y - 7 = 0$ oraz $x + 2y - 2 = 0$. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie $(-1, 1)$.
- Znajdź współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.
 - Oblicz pole tego równoległoboku.
- Я90.** Punkty $(-6, -4)$, $(-1, -1)$, $(3, 6)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku.
- Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka.
 - Oblicz pole tego równoległoboku.
- Я91.** Dane są punkty $A = (2m + 5, 2)$, $B = (m, 3)$, $C = (-1, m - 2)$. Oblicz, dla jakiej wartości parametru m :
- punkty A , B i C są współliniowe,
 - proste AB i AC są prostopadłe.

Я92. Jednym z wierzchołków trójkąta jest punkt $(0, 3)$, a pozostałe leżą na prostej $y = 2x + 8$. Symetralne boków tego trójkąta przecinają się w punkcie $(-3, 7)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Я93. Znajdź równanie prostej, której odległość od początku układu współrzędnych jest równa 5 i która przechodzi przez punkt $(7, -1)$.

Я94. Znajdź na prostej l punkt C taki, że $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$.

- a) $A = (6, 8)$, $B = (-2, -4)$, prosta $l: y = 0$
- b) $A = (-10, 6)$, $B = (-3, -3)$, prosta $l: x = -2$
- c) $A = (-1, 3)$, $B = (5, 4)$, prosta $l: x - y = 0$

Я95. Pole rombu $ABCD$ jest równe 80. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D , jeżeli wiadomo, że $A = (0, -1)$ i $C = (4, 7)$.

Я96. Punkty $A = (0, 3)$ i $D = (3, 4)$ są wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$. Prosta $-x + y + 7 = 0$ przechodzi przez punkt C i jest prostopadła do podstaw trapezu.

- a) Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trapezu.
- b) Oblicz pole tego trapezu.

Я97. a) Dla jakiej wartości parametru p prosta o równaniu $y = x$ dzieli trójkąt o wierzchołkach $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(1, p)$ na dwie figury o równych polach?

b) Dla jakiej wartości parametru p prosta o równaniu $y = x - 1$ dzieli trójkąt o wierzchołkach $(1, 2)$, $(4, 6)$, $(p, 2)$ na dwie figury o równych polach?

Я98. Znajdź punkty, który leżą w tej samej odległości od punktu $(1, 1)$, od punktu $(3, 1)$ oraz od prostej $x + y + 1 = 0$.

Я99. Znajdź równania prostych, które zawierają dwusieczne kątów utworzonych przez proste k i l .

- a) prosta $k: 5x - y - 20 = 0$, prosta $l: x + 5y - 30 = 0$
- b) prosta $k: x - 2y = 0$, prosta $l: 3x - y = 0$

Я100. Znajdź na prostej równoległej do prostej l i przechodzącej przez punkt P dwa punkty oddalone od punktu P o 5 jednostek.

- a) prosta $l: 4x - 3y + 9 = 0$, $P = (-2, -3)$
- b) prosta $l: 3x - y - 2 = 0$, $P = (-2, -1)$

Я101. Udowodnij, korzystając ze współrzędnych wierzchołków odpowiedniego wielokąta, że:

- a) odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego z boków,
- b) odcinek łączący środki ramion dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw tego trapezu.

RÓWNANIE OKRĘGU

Я102. Zapisz równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu r .

- a) $S = (2, -1), \quad r = 3$
- b) $S = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right), \quad r = \sqrt{7}$
- c) $S = (0, -5), \quad r = \frac{1}{4}$
- d) $S = (0, 0), \quad r = 3\sqrt{2}$
- e) $S = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right), \quad r = \frac{1}{6}$
- f) $S = (-0,2, -2,3), \quad r = 2,5$

Я103. Które z podanych punktów leżą na okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 17$?

- | | | |
|---------------|----------------|---------------|
| $A = (1, -3)$ | $C = (-2, 1)$ | $E = (2, 2)$ |
| $B = (-3, 5)$ | $D = (-2, 18)$ | $F = (-6, 0)$ |

Я104. Wszystkie punkty, których współrzędne spełniają podany warunek, tworzą okrąg. Znajdź środek i promień tego okręgu.

- a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
- b) $x^2 + y^2 + 6y + 1 = 0$
- c) $x^2 + y^2 - 10x - y + 19 = 0$
- d) $x^2 + y^2 + 3x + 8y + 2 = 0$
- e) $x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0$
- f) $x^2 + y^2 - 2x + 10y = 0$

Я105. Zapisz, jaki warunek spełniają podane współrzędne punktów należących do koła o środku S i promieniu r .

- a) $S = (-2, 0), \quad r = 4$
- b) $S = (3, -5), \quad r = \sqrt{10}$
- c) $S = (-1, -4), \quad r = 3\sqrt{2}$
- d) $S = (\sqrt{2}, \sqrt{3}), \quad r = 5$

Я106. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów spełniających podany warunek.

- a) $x^2 + (y+3)^2 < 5$
- b) $(x+1)^2 + (y-3)^2 \geq 4$
- c) $(x+1)^2 + (y+\sqrt{2})^2 = 1$
- d) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \leq \frac{1}{5}$
- e) $x^2 + y^2 > 2$
- f) $4 \leq (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 9$

Я107. Znajdź równanie okręgu:

- a) którego średnicą jest odcinek o końcach $P = (-3, 8)$, $Q = (-5, 2)$,
- b) o środku $S = (2, -3)$ i przechodzącego przez punkt $A = (5, -1)$,
- c) o środku $S = (-4, -6)$ i stycznego do prostej $y = 2$,
- d) o środku $S = (-2, 0)$ i stycznego do osi y .

Я108. Podaj równania stycznych do okręgu o danym równaniu równoległych do osi układu współrzędnych.

- a) $x^2 + y^2 = 5$
- b) $(x - 5)^2 + y^2 = 100$
- c) $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 16$
- d) $x^2 + y^2 + 6x + 7 = 0$
- e) $x^2 + y^2 - 12y = 0$
- f) $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 20 = 0$

Я109. a) Znajdź równanie okręgu symetrycznego względem osi x do okręgu opisanego równaniem $(x + 6)^2 + (y + 5)^2 = 3$.

b) Znajdź równanie okręgu symetrycznego względem osi y do okręgu opisanego równaniem $(x - 8)^2 + y^2 = 11$.

Я110. Znajdź równanie okręgu opisanego na podanej figurze.

- a) trójkąt prostokątny, którego wierzchołkami są punkty $(0, 0)$, $(0, -2)$, $(5, 0)$
- b) trójkąt prostokątny, którego wierzchołkami są punkty $(-2, -4)$, $(8, 1)$, $(4, 4)$
- c) kwadrat, którego wierzchołkami są punkty $(3, 0)$, $(8, -3)$, $(11, 2)$, $(6, 5)$
- d) prostokąt, którego wierzchołkami są punkty $(-6, -2)$, $(6, -8)$, $(8, -4)$, $(-4, 2)$

Я111. Dwoma wierzchołkami trójkąta równobocznego są punkty $(-1, 0)$ i $(5, 0)$. Znajdź równanie okręgu:

- a) wpisanego w ten trójkąt,
- b) opisanego na tym trójkącie.

Я112. a) Zapisz równania wszystkich okręgów o promieniu długości 6, stycznych do prostych $x = -2$ i $y = 3$.

b) Zapisz równania okręgów stycznych do osi y oraz do prostych $x = 3$ i $y = -5$.

c) Zapisz równania okręgów, których środek leży na prostej $x = -2$, stycznych do prostych $x = -5$ i $y = 4$.

d) Podaj równania wszystkich okręgów o promieniu $\sqrt{2}$, stycznych do prostych o równaniach $x - y = 0$ i $x + y + 4 = 0$.

Я113. Znajdź równania okręgów o środku S stycznych do podanego okręgu.

- a) $S = (2, 4)$, $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
- b) $S = (1, -2)$, $(x - 6)^2 + (y + 14)^2 = 144$
- c) $S = (0, 4)$, $(x - 3)^2 + y^2 = 81$
- d) $S = (-3, -5)$, $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 64$

Я 114. Sprawdź, czy okręgi o podanych równaniach są styczne, przecinają się czy są rozłączne.

a) $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 16$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 49$

b) $(x-6)^2 + (y+3)^2 = 2$

$(x-6)^2 + (y+7)^2 = 10$

c) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3$

d) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 36$

$x^2 + y^2 = 4$

e) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 64$

$(x-2)^2 + (y+7)^2 = 25$

f) $(x+5)^2 + y^2 = 9$

$x^2 + (y-4)^2 = 49$

Я 115. Znajdź równanie okręgu symetrycznego do okręgu o podanym równaniu względem prostej l .

a) $(x-5)^2 + (y+6)^2 = 7$, prosta $l: y = -8$

b) $(x+9)^2 + (y+8)^2 = 3$, prosta $l: x = 5$

Я 116. Ustal, w jakich punktach okrąg o podanym równaniu przecina osie układu współrzędnych.

a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13$

c) $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 25$

b) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

d) $(x-4)^2 + (y+0,5)^2 = 36,25$

Я 117. Okrąg o podanym równaniu przecina jedną z osi układu współrzędnych w dwóch punktach. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są te punkty i środek okręgu.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 20x + 18y + 91 = 0$

Я 118. Boki trójkąta zawarte są w prostych: k , l , m . Wykaż, że ten trójkąt jest prostokątny, a następnie znajdź równanie okręgu opisanego na nim.

a) prosta $k: y = 1,5x + 2$, prosta $l: 2x + 3y - 6 = 0$, prosta $m: 7x + 4y - 34 = 0$

b) prosta $k: 2x - y - 2 = 0$, prosta $l: x - 5y + 35 = 0$, prosta $m: x + 2y + 14 = 0$

Я 119. Punkt $(-8, 5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równobocznego opisanego na okręgu o środku w punkcie $(-2, -3)$. Znajdź równanie tego okręgu.

Я 120. Znajdź równanie okręgu symetrycznego względem prostej l do okręgu o podanym równaniu.

a) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$, prosta $l: x - 2y + 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 8x + 12y = 0$, prosta $l: 2x - y - 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$, prosta $l: x - 3y - 12 = 0$

- Я 121.** Dwa okręgi mają równe promienie. Jeden z tych okręgów określony jest wzorem $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$, a środkiem drugiego z nich jest punkt $(1, \sqrt{5} - 3)$.
- Zapisz równanie drugiego okręgu.
 - Oblicz pole części wspólnej kół ograniczonych tymi okręgami.
- Я 122.** Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie o podanych wierzchołkach.
- $(-3, 1), (1, 3), (1, 9)$
 - $(-2, -3), (4, -3), (2, 1)$
- Я 123.** Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których podane równanie opisuje okrąg.
- $x^2 + y^2 + 4x - 2y - p^2 - 2p + 8 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 10x + 6y + p^2 + 2p + 26 = 0$
- Я 124.** a) Znajdź równanie okręgu o środku leżącym na prostej $x - y + 5 = 0$, przechodzącego przez punkty $A = (-7, 4)$ i $B = (-1, 6)$.
- b) Zapisz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5, -1)$, $B = (3, -1)$, $C = (-3, 1)$.
- Я 125.** Wykaż, że środki wszystkich odcinków o długości 1, których jeden koniec leży na osi x , a drugi na osi y , tworzą okrąg.
- Я 126.** Równanie $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ przedstawia okrąg tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 - c > 0$. Jaka jest interpretacja geometryczna tego równania, gdy $a^2 + b^2 - c = 0$, a jaka — gdy $a^2 + b^2 - c < 0$?
- Я 127.** Jaka jest zależność między wartością parametru m a liczbą rozwiązań podanego układu równań?
- $$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ (x+1)^2 + (y-m)^2 = 2 \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x-m)^2 + (y-m)^2 = 4 \end{cases}$$
- Я 128.** W układzie współrzędnych zaznacz opisane poniżej zbiory A i B oraz zbiory $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$.
- $$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 9\}$$
- $$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + (y+2)^2 \geq 4\}$$
- Я 129.** Znajdź pole figury, która jest iloczynem zbiorów punktów A i B .
- $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y \geq |x| - 2\},$
 $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 4\}$
 - $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |y| + |x| \leq 2\},$
 $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 2\}$

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA UKŁADU RÓWNAŃ

Я130. Bez wykonywania obliczeń określ, ile ten układ równań ma rozwiązań.

a) $\begin{cases} y = 2x - 7 \\ y = \frac{1}{2}x - 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ \frac{3}{2}x - y = 1,5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

Я131. Sprawdź, czy proste o podanych równaniach przecinają się. Jeśli tak — podaj współrzędne ich punktu przecięcia.

a) $x = 7, \quad 2x + y - 4 = 0$

d) $y = -\frac{1}{2}x + 2, \quad -5x + 2y = 1$

b) $y = -2, \quad y = -4x + 3$

e) $y + \frac{x}{2} = 1, \quad 6y + 3x + 1 = 0$

c) $3x - 5y + 2 = 0, \quad y = 0,6x + 0,4$

f) $3x - y + 8 = 0, \quad x - 3y = 0$

Я132. Sprawdź, czy wszystkie podane proste przecinają się w jednym punkcie.

a) $x + y + 4 = 0, \quad 2x - 3y + 3 = 0, \quad y = 2x - 5$

b) $y = -x + 1, \quad y = \frac{1}{3}x - 3, \quad x - 2y - 7 = 0$

c) $y = 2x + \frac{3}{2}, \quad x + 4y = 1, \quad 3x + 2y + 2 = 0$

Я133. Boki trójkąta zawarte są w prostych o równaniach: $x + 2y - 2 = 0$, $2x - y - 4 = 0$ i $x - y + 4 = 0$. Uzasadnij, że trójkąt ten jest prostokątny i oblicz jego pole.

Я134. Znajdź równanie stycznej w punkcie P do okręgu o podanym równaniu.

a) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 10, \quad P = (4, 3)$

c) $(x + 3)^2 + y^2 = 17, \quad P = (-2, -4)$

b) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13, \quad P = (-5, -1)$

d) $x^2 + (y + 1)^2 = 29, \quad P = (2, -6)$

Я135. a) Prosta p jest styczna do okręgu $x^2 + y^2 = 10$ w punkcie $(1, 3)$ i przecina osie układu współrzędnych w punktach A i B . Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty A , B i początek układu współrzędnych.

b) Wierzchołki rombu opisanego na okręgu $x^2 + y^2 = 5$ leżą na osiach układu współrzędnych, a jeden z jego boków jest styczny do tego okręgu w punkcie $(-2, -1)$. Oblicz pole tego rombu.

Я136. Znajdź współrzędne punktów, w których okrąg k przecina prostą l .

a) okrąg $k: x^2 + y^2 = 5$, prosta $l: y = 3x$

b) okrąg $k: x^2 + y^2 = 10$, prosta $l: y = 2x - 1$

Я137. Ustal, w jakich punktach prosta $y = 3x - 1$ przecina podany okrąg.

a) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$

c) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 6$

b) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{8}{5}$

d) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$

Я138. Prosta $x - 2y - 7 = 0$ przecina okrąg $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ w punktach A i B . Oblicz długość cięciwy AB .

Я139. Znajdź równanie prostej stycznej w punkcie A do okręgu $(x - 4)^2 + y^2 = 25$.

a) $A = (4, 5)$

b) $A = (-1, 0)$

c) $A = (1, 4)$

d) $A = (8, -3)$

Я140. Znajdź współrzędne punktów, w których okrąg $x^2 + y^2 = 1$ przecina parabolę o podanym równaniu.

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

b) $y = x^2 - 1$

c) $y = 2x^2 - 1$

d) $y = -x^2 + \frac{1}{2}$

Я141. Punkty przecięcia paraboli $y = 2x^2$ i okręgu $x^2 + y^2 = 5$ są dwoma z wierzchołków prostokąta wpisanego w ten okrąg. Oblicz pole tego prostokąta.

Я142. Wykaż, że punkt $(0, 0)$ oraz punkty, w których prosta $x - y + 1 = 0$ przecina parabolę $y = x^2$, są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.

Я143. Wierzchołkiem paraboli $y = ax^2 + bx + 1$ jest punkt $W = (2, 5)$. Prosta o równaniu $y = -x + 5$ przecina tę parabolę w punktach A i B . Oblicz pole trójkąta ABW .

Я144. Osie układu współrzędnych i prosta przechodząca przez punkty przecięcia parabol $y = x^2 + 3x - 12$ i $y = -x^2 - 2x$ ograniczają trójkąt. Oblicz pole tego trójkąta.

Я145. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty wspólne paraboli i okręgu o podanych równaniach.

a) $y = 2x^2 - 2, \quad x^2 + y^2 = 4$

b) $y = -3x^2 + 3, \quad x^2 + y^2 = 9$

Я146. Okrąg o środku S wycina z prostej l cięciwę o długości d . Znajdź równanie tego okręgu.

a) $S = (1, 2), \text{ prosta } l: x + y + 5 = 0, \quad d = 2$

b) $S = (-3, 5), \text{ prosta } l: x - 4y + 8 = 0, \quad d = 1$

Я147. Dana jest prosta $l: y = -2x + 1$ i punkt $S = (-1, -3)$.

a) Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie S , stycznego do prostej l , oraz współrzędne punktu styczności.

b) Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie S , który z prostej l wycina cięciwę o długości 2.

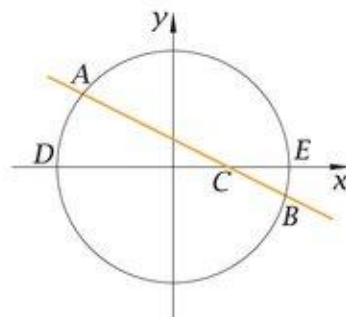
Я 148. Znajdź długość cięciwy, którą okrąg k wycina z prostej l .

- a) prosta $l: y = -5x - 3$, okrąg $k: x^2 + y^2 - 4x - 9 = 0$
- b) prosta $l: x - 2y - 14 = 0$, okrąg $k: (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 10$

Я 149. Prosta o równaniu $2x - y + 2 = 0$ przecina okrąg $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ w punktach A i B .

- a) Znajdź równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB .
- b) Znajdź równanie osi symetrii figury złożonej z danego okręgu i okręgu, którego średnicą jest odcinek AB .

Я 150. Prosta $y = -\frac{1}{2}x + 1$ przedstawiona na rysunku obok przecina okrąg $x^2 + y^2 = 17$ punktach A i B , a oś x — w punkcie C . Okrąg przecina oś x w punktach D i E . Oblicz sumę pól trójkątów ADC i CBE .



Я 151. a) Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 + 14x + 18y + 80 = 0$. Jedna z przekątnych kwadratu wpisanego w ten okrąg zawiera się w prostej $y = 7x + 40$. Znajdź współrzędne wierzchołków tego kwadratu.

b) Jeden z boków prostokąta wpisanego w okrąg $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$ zawiera się w prostej $y = -3x + 1$. Znajdź współrzędne wierzchołków tego prostokąta.

Я 152. Punkty $A = (-1, -5)$ i $B = (2, -4)$ leżą na okręgu o równaniu $x^2 + (y + 3)^2 = 5$. Znajdź współrzędne punktu C leżącego na tym okręgu takiego, że:

- a) trójkąt ABC jest prostokątny,
- b) trójkąt ABC jest równoramienny i odcinek AB jest jego podstawą.

Я 153. Punkty $A = (1, -9)$ i $B = (4, \sqrt{19} - 5)$ leżą na okręgu $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 20$ i są wierzchołkami prostokąta $ABCD$. Wyznacz współrzędne punktów C i D .

Я 154. Prosta $y = -\frac{1}{2}x$ przecina okrąg o środku $S = (0, -2)$ i promieniu 4 w punktach A i B . Znajdź współrzędne takiego punktu C leżącego na tym okręgu, że trójkąt ABC jest równoramienny i odcinek AB jest jego podstawą.

Я 155. Znajdź równania stycznych do okręgu $(x - 1)^2 + y^2 = 3$:

- a) równoległych do prostej $y = 3x + 5$,
- b) prostopadłych do prostej $x + 2y - 3 = 0$,
- c) nachylonych do osi x pod kątem 135° .
- d) nachylonych do osi x pod kątem 60° .

- Я 156.** Znajdź równania prostych stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 2x = 0$, które są:
- równoległe do prostej $x + 5y + 10 = 0$,
 - prostopadłe do prostej $x + 2y - 4 = 0$.
- Я 157.** Znajdź równanie okręgu o środku $S = (5, -4)$, stycznego do prostej $y = 3x + 1$.
- Я 158.** Znajdź równania prostych, które są równoległe i jednocześnie styczne do dwóch okręgów o równaniach $(x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 9$ i $(x - 2)^2 + y^2 = 9$.
- Я 159.** Znajdź równanie najmniejszego z okręgów, który jest równocześnie styczny do okręgu $x^2 + y^2 = 16$ i prostej $y = -x - 8$.
- Я 160.** Dla jakich wartości p okrąg $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = p$ ma dwa punkty wspólne z prostą $y = 2x - 2$?
- Я 161.** Dla jakich wartości parametrów a i b prosta $y = ax + b$ jest równoległa do prostej $3x + y - 6 = 0$ i rozłączna z okręgiem $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$?
- Я 162.** Znajdź na okręgu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$ taki punkt, którego odległość od prostej $y = 2x + 5$ jest najmniejsza.
- Я 163.** Środkiem okręgu $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0$ jest punkt S oraz okrąg ten przecina oś x w punktach A i B . Proste styczne do okręgu w tych punktach przecinają się w punkcie C . Oblicz pole czworokąta $ACBS$.
- Я 164.** Prosta $7x - y - 14 = 0$ przecina okrąg $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ w dwóch punktach. Wykaż, że styczne do okręgu w tych punktach są prostopadłe.
- Я 165.** Znajdź współrzędne punktów, w których okrąg $x^2 + y^2 = 1$ przecina okrąg:
- $x^2 + (y + 1)^2 = 2$
 - $x^2 + (y - 1)^2 = 1$
 - $(x - 2)^2 + y^2 = 3$
 - $(x + 3)^2 + y^2 = 5$
- Я 166.** Znajdź współrzędne punktów, w których podane okręgi się przecinają.
- $x^2 + y^2 = 2$ i $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$
 - $x^2 + y^2 = 3$ i $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$
 - $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$ i $x^2 + y^2 = 4$
- Я 167.** Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań:
- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ y = x^2 \end{cases}$
 - $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \\ (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1 \end{cases}$
 - $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2 \end{cases}$

Я 168. Znajdź pole czworokąta, którego wierzchołkami są środki okręgów o podanych równaniach oraz punkty przecięcia się tych okręgów.

a) $x^2 + (y-1)^2 = 1$ i $(x+2)^2 + y^2 = 4$ b) $(x-2)^2 + y^2 = 4$ i $x^2 + (y+4)^2 = 16$

Я 169. Zanacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają warunek:

a) $\begin{cases} y \geq 2x - 3 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

d) $2x + 3y - 3 \leq 0$ lub $x - 2y + 4 > 0$

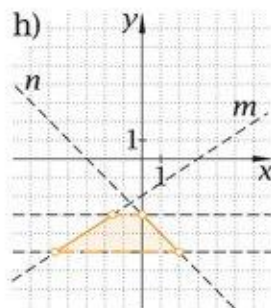
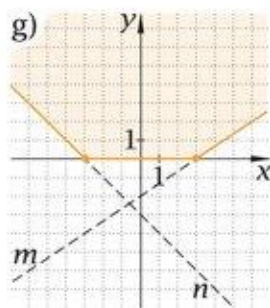
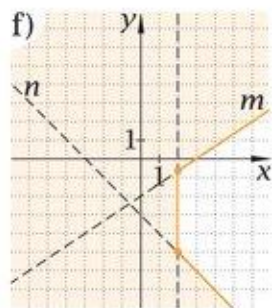
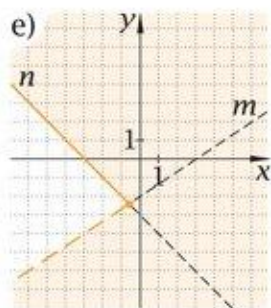
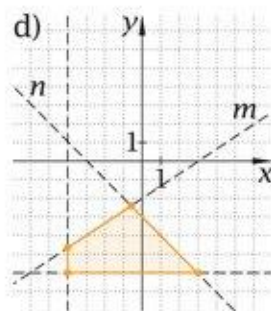
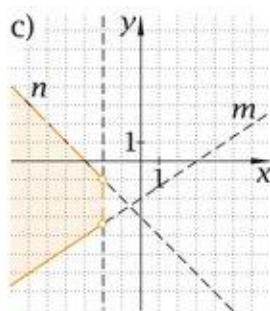
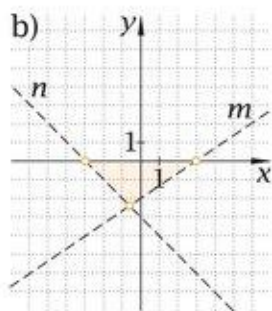
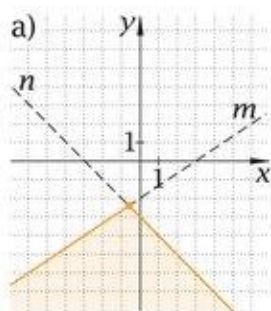
b) $\begin{cases} y > -2 \\ y \leq -\frac{2}{3}x + 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + 2y - 3 \geq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \end{cases}$ lub $y - 1 \leq 0$

c) $\begin{cases} y < -3x + 4 \\ y > -\frac{3}{4}x - 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y < 0 \\ x - 3y < 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} y \leq 0 \\ 2x + y \geq 0 \end{cases}$

Я 170. Proste m i n opisane są równaniami $y = \frac{2}{3}x - 2$ i $y = -x - 3$. Opisz za pomocą nierówności zaznaczony zbiór punktów.



Я 171. Znajdź wszystkie wartości parametru p , dla których prosta opisana równaniem $px + y + 1 = 0$ i okrąg o równaniu $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 16$:

- a) mają jeden punkt wspólny,
- b) mają dwa punkty wspólne,
- c) nie mają punktów wspólnych.

Я 172. Wierzchołki trójkąta równobocznego leżą na paraboli o podanym równaniu, a jeden z nich jest jej wierzchołkiem. Znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta.

a) $y = x^2$

b) $y = x^2 - 4x$

- 173.** Znajdź na paraboli $y = x^2$ dwa takie punkty A i B , że punkt $(1, 5)$ jest środkiem odcinka AB .
- 174.** Określ, jak liczba punktów wspólnych parabol o podanym równaniu i okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ zależy od wartości parametru p .
a) $y = x^2 + p$ b) $y = px^2 - 1$
- 175.** Zapisz równania prostych stycznych do okręgu $x^2 + y^2 = 5$, przechodzących przez punkt $P = (0, 5)$.
- 176.** Znajdź równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$, poprowadzonych z punktu o danych współrzędnych.
a) $(0, 0)$ b) $(0, 1)$ c) $(-1, 0)$ d) $(1, 1)$
- 177.** Znajdź równania okręgów o promieniu $\sqrt{10}$, stycznych do prostych o równaniach $x - 3y + 3 = 0$ i $x + 3y - 9 = 0$.
- 178.** Znajdź równanie okręgu o promieniu długości 5, stycznego do wykresu funkcji $y = |x - 2|$.
- 179.** Z punktu $P = (0, -1)$ poprowadzono styczne do okręgu $x^2 + y^2 + 10x + 12 = 0$. Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie, którego wierzchołkami są punkty styczności oraz punkt P .
- 180.** Znajdź równania prostych, które są styczne do okręgu $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ oraz do okręgu $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$.
- 181.** Znajdź na prostej o równaniu $y = 2x$ taki punkt P , że dwie proste przechodzące przez ten punkt i styczne do okręgu o równaniu $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ są do siebie prostopadłe.
- 182.** Dla jakich wartości parametru p okręgi $x^2 + (y + 5)^2 = 16$ i $(x - p)^2 + y^2 = p^2$ są styczne?
- 183.** a) Dla jakich wartości parametru m okrąg $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 2m^2 - m + 14 = 0$ jest styczny do prostej $x - 2y - 3 = 0$?
b) Dla jakich wartości parametru t prosta $x - 2y - 1 = 0$ jest sieczną okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + tx - t = 0$?
- 184.** Dla jakich wartości parametru p punkt przecięcia prostych o równaniach $2x - y + p = 0$ i $x - y + 2p + 2 = 0$ należy do koła o promieniu 2 i środku w początku układu współrzędnych?

Я 185. Punkt $(2, 6)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 32 = 0$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Я 186. Dla jakich wartości parametru a początek układu współrzędnych i punkty przecięcia prostej $y = x + 4$ i paraboli $y = ax^2$ ($a > 0$) są wierzchołkami trójkąta prostokątnego?

Я 187. Znajdź współrzędne punktów, w których przecinają się okręgi o podanych równaniach.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ i $x^2 + y^2 + 6x + 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 14y - 3 = 0$ i $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$

c) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 11$ i $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 20$

Я 188. Kątem pomiędzy krzywymi nazywamy kąt między stycznymi do tych krzywych w punkcie ich przecięcia.

a) Znajdź kąt, pod jakim przecinają się okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$ oraz $x^2 + y^2 = 4$.

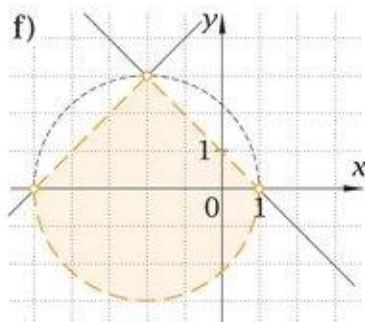
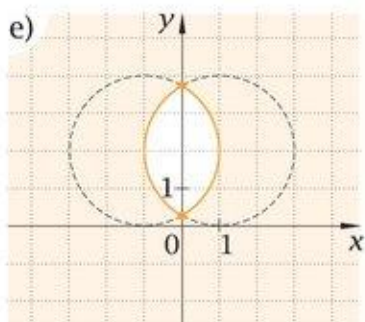
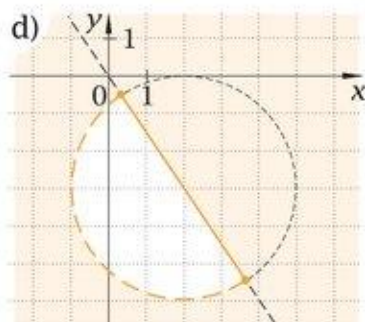
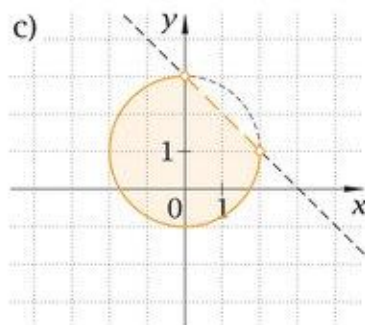
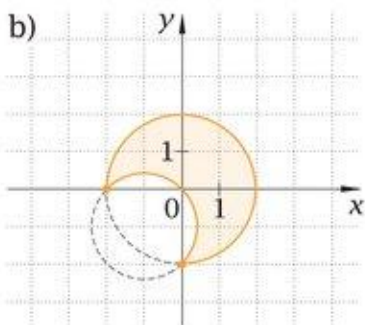
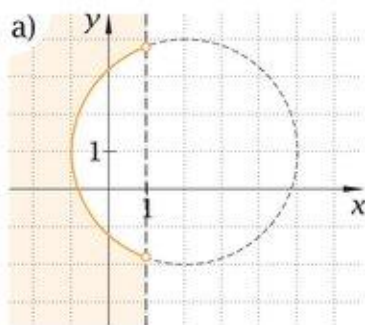
b) Znajdź promień okręgu o środku w początku układu współrzędnych, który przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$ pod kątem prostym.

Я 189. Znajdź równanie krzywej składającej się z punktów, których odległość od podanego okręgu jest równa odległości od danej prostej.

a) $x^2 + y^2 = 1$, $y = 3$

b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$, $y = -1$

Я 190. Opisz za pomocą nierówności zaznaczony zbiór punktów.



Я 191. Zapisz warunek, który spełniają współrzędne punktów tworzących podaną figurę.

- a) trójkąt o wierzchołkach $A = (-2, 4)$, $B = (6, 0)$, $C = (5, 4)$
- b) równoległobok o wierzchołkach $A = (-2, -1)$, $B = (0, 4)$, $C = (-2, 7)$, $D = (-4, 2)$
- c) trapez o wierzchołkach $A = (-1, -1)$, $B = (7, 1)$, $C = (9, 5)$, $D = (-3, 2)$

Я 192. Oblicz pole figury składającej się z punktów o współrzędnych spełniających podany warunek.

- a) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 4$ i $y \geq x + 4$
- b) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 \leq 16$ i $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 \geq 8$
- c) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 2$ i $0 \leq y \leq 2$
- d) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 8$ i $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 \leq 8$

Я 193. W układzie współrzędnych zaznacz zbiór punktów, których współrzędne spełniają podany warunek.

- | | |
|----------------------|----------------------------|
| a) $y - x - 2 < 3$ | c) $ x + y \leq 2$ |
| b) $ x - y \geq 4$ | d) $ x + 2 + y - 1 < 1$ |

PRZED SPRAWDZIANEM

- Я1.** Punkty $K = (a, b)$, $L = (c, d)$ i M są współliniowe, punkt L leży pomiędzy punktami K i M . Wiadomo, że $|LM| = 3|KL|$. Punkt M ma współrzędne:
- A. $(2c - a, 2d - b)$ C. $(3c - 2a, 3d - 2b)$
 B. $(3c + a, 3d + b)$ D. $(4c - 3a, 4d - 3b)$
- Я2.** Punkty $(-4, 2)$, $(5, -10)$ i $(3, 1)$ są wierzchołkami trójkąta. Najkrótsza wysokość tego trójkąta ma długość:
- A. 5 B. $\sqrt{17}$ C. 6,5 D. $\sqrt{5}$
- Я3.** Prosta m przechodzi przez punkty $(-3, -5)$ i $(8, -4)$. Prosta symetryczna do prostej m względem prostej $x + y = 0$ ma równanie:
- A. $y = \frac{1}{11}x + 5\frac{3}{11}$ B. $y = -\frac{1}{11}x - 4$ C. $y = 11x - 52$ D. $y = -11x - 58$
- Я4.** Które z poniższych równań opisuje prostą zawierającą dwusieczne kątów ostrych pomiędzy prostymi $y = x$ i $y = 7x$?
- A. $y = 2x$ B. $y = 2,5x$ C. $y = 3x$ D. $y = 4x$
- Я5.** Największy kąt trójkąta ograniczonego osią x i prostymi $y = -\sqrt{3}x + 10$ oraz $y = x$ ma miarę:
- A. 75° B. 90° C. 115° D. 120°
- Я6.** Boki trapezu zawierają się w prostych o równaniach $y = 3x - 5$, $y = -\frac{1}{4}x + 2$, $y = -3x - 3$ i $y = -\frac{1}{4}x - 1$. Wysokość tego trapezu jest równa:
- A. 3 B. $\frac{12\sqrt{17}}{17}$ C. $\sqrt{17}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$
- Я7.** Które z poniższych równań opisuje okrąg styczny do prostych o równaniach $y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{2}$ i $3x + 4y + 14 = 0$?
- A. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
 B. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$
 C. $(x - 10)^2 + (y + 6)^2 = 16$
 D. $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 8$
- Я8.** Pole czworokąta o wierzchołkach w punktach, w których parabola $y = -2x^2 + 2$ przecina okrąg $x^2 + y^2 = 1$, jest równe:
- A. $2\sqrt{3}$ B. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $1 + \sqrt{3}$

- Я 9.** Styczna do okręgu opisanego równaniem $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 = 0$ w punkcie $(-3, 1)$ ma równanie:
- A. $2x + 3y - 9 = 0$ C. $2x - 3y + 9 = 0$
 B. $3x - 2y + 4 = 0$ D. $3x + 2y - 4 = 0$
- Я 10.** Punkt P jest punktem okręgu $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 12 = 0$ położonym najbliżej prostej $y = 2x - 5$. Oznacza to, że ma on współrzędne:
- A. $(-2, -3)$ B. $(-1\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$ C. $(-2, -2)$ D. $(0, -3)$
- Я 11.** Większy z okręgów ograniczających pierścień o polu 40π można opisać równaniem $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$. Mniejszy okrąg ograniczający ten pierścień ma równanie:
- A. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$ C. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 40$
 B. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ D. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 3$
- Я 12.** Które z podanych równań opisuje okrąg, który jest styczny wewnętrznie do okręgu $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$?
- A. $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 13 = 0$ C. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$
 B. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ D. $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 25 = 0$
- Я 13.** Średnica najmniejszego okręgu, który jest jednocześnie styczny do okręgu $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ i do prostej $y = -3x + 10$, ma długość:
- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
- Я 14.** Długość wspólnej cięciwy okręgów o równaniach $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$ i $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$ jest równa:
- A. $2\sqrt{2}$ B. 10 C. $5\sqrt{2}$ D. 2
- Я 15.** Pole czworokąta, którego wierzchołkami są środki okręgów o równaniach $x^2 + y^2 = 4$ i $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 8 = 0$ oraz punkty przecięcia się tych okręgów, jest równe:
- A. $6\sqrt{2}$ B. 6 C. $9\sqrt{2}$ D. 12
- Я 16.** Punkty $(2, 1)$ i $(6, 3)$ są końcami podstawy trójkąta równoramiennego, a jedno z ramion tego trójkąta zawiera się w prostej $3x + 4y - 30 = 0$. Oblicz obwód tego trójkąta.
- Я 17.** Oblicz pole trapezu o wierzchołkach w punktach $P = (32, 75)$, $Q = (36, 78)$, $R = (33, 82)$, $S = (26, 83)$.

- Я 18.** Dwa z wierzchołków prostokąta wpisanego w okrąg $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 29$ mają współrzędne $(3, 6)$ i $(-2 - 2\sqrt{5}, 1)$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego prostokąta.
- Я 19.** Punkty $(-1, 9)$ i $(7, 3)$ są końcami jednej z przekątnych rombu o polu 40. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.
- Я 20.** Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $(-11, 27)$, $(-8, 32)$ i $(-16, 32)$.
- Я 21.** Znajdź współrzędne punktu, w którym prosta przechodząca przez środki okręgów $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$ i $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$ przecina wspólną cięciwę tych okręgów.

PRZED MATURĄ

1. Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (4, 2)$, $C = (2, 6)$ jest równe:

- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

2. W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (a, 6)$ oraz $B = (7, b)$. Środkiem odcinka AB jest punkt $M = (3, 4)$. Wynika stąd, że:

- A. $a = 5$ i $b = 5$ C. $a = 4$ i $b = 10$
B. $a = -1$ i $b = 2$ D. $a = -4$ i $b = -2$

3. Punkt $K = (2, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego KLM , w którym $|KM| = |LM|$. Odcinek MN jest wysokością trójkąta i $N = (4, 3)$. Zatem:

- A. $L = (5, 3)$ B. $L = (6, 4)$ C. $L = (3, 5)$ D. $L = (4, 6)$

4. Punkty $A = (-21, 11)$ i $B = (3, 17)$ są końcami odcinka AB . Obrazem tego odcinka w symetrii względem osi x układu współrzędnych jest odcinek $A'B'$. Środkiem odcinka $A'B'$ jest punkt o współrzędnych:

- A. $(-9, -14)$ B. $(-9, 14)$ C. $(9, -14)$ D. $(9, 14)$

5. Punkt $A = (-3, 2)$ jest końcem odcinka AB , a punkt $M = (4, 1)$ jest środkiem tego odcinka. Długość odcinka AB jest równa:

- A. $2\sqrt{5}$ B. $4\sqrt{5}$ C. $5\sqrt{2}$ D. $10\sqrt{2}$

6. Dane są punkty o współrzędnych $A = (-2, 5)$ oraz $B = (4, -1)$. Średnica okręgu wpisanego w kwadrat o boku AB jest równa:

- A. 12 B. 6 C. $6\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{6}$

7. Okręgi o środkach $S_1 = (3, 4)$ oraz $S_2 = (9, -4)$ i równych promieniach są styczne zewnętrznie. Promień każdego z tych okręgów jest równy:

- A. 8 B. 6 C. 5 D. $\frac{5}{2}$

8. Na której z podanych prostych leżą wszystkie punkty o współrzędnych $(m-1, 2m+5)$, gdzie m jest dowolną liczbą rzeczywistą?

- A. $y = 2x + 5$ B. $y = 2x + 6$ C. $y = 2x + 7$ D. $y = 2x + 8$

9. Suma odległości punktu $A = (-4, 2)$ od prostych o równaniach $x = 4$ i $y = -4$ jest równa:

- A. 14 B. 12 C. 10 D. 8

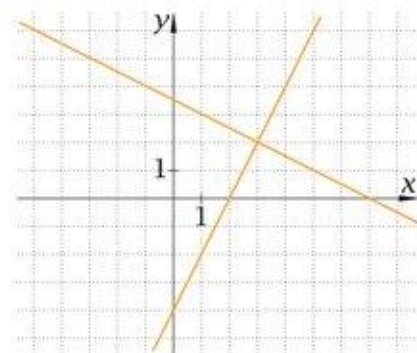
10. Na rysunku jest przedstawiona graficzna ilustracja układu dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x i y . Wskaż ten układ.

A. $\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{2} \end{cases}$

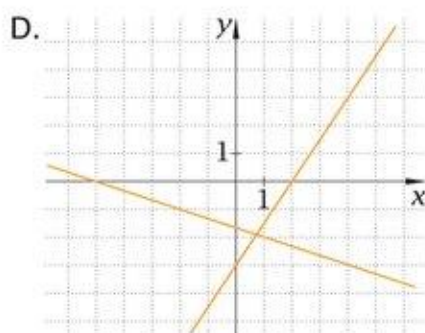
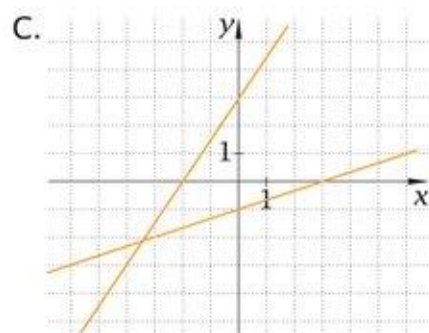
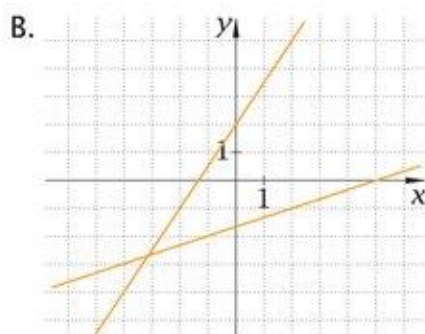
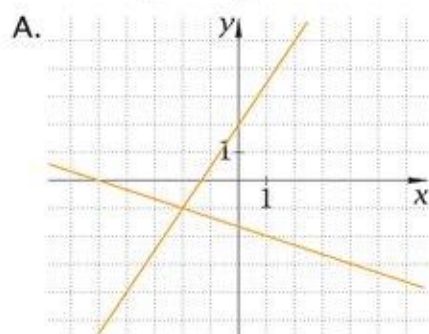
C. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = 3x - 7 \\ y = -\frac{2}{3}x + 4 \end{cases}$



11. Na jednym z rysunków przedstawiono interpretację geometryczną układu równań $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$. Wskaż ten rysunek.



12. Układ równań $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 0,5y = 4 \end{cases}$ opisuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie:

A. zbiór pusty

C. dokładnie dwa różne punkty

B. dokładnie jeden punkt

D. zbiór nieskończony

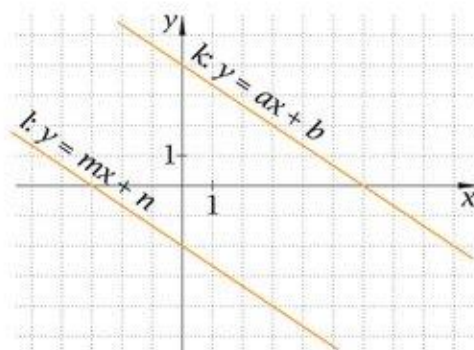
13. Na rysunku przedstawione są dwie proste równoległe k i l o równaniach $y = ax + b$ oraz $y = mx + n$. Początek układu współrzędnych leży między tymi prostymi. Zatem:

A. $a \cdot m > 0$ i $b \cdot n > 0$

B. $a \cdot m > 0$ i $b \cdot n < 0$

C. $a \cdot m < 0$ i $b \cdot n > 0$

D. $a \cdot m < 0$ i $b \cdot n < 0$



14. Prosta l o równaniu $y = m^2x + 3$ jest równoległa do prostej k o równaniu $y = (4m - 4)x - 3$. Zatem:

- A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = -2 - 2\sqrt{2}$ D. $m = 2 + 2\sqrt{2}$

15. Proste opisane równaniami $y = \frac{2}{m-1}x$ oraz $y = mx + \frac{1}{m+1}$ są prostopadłe, gdy:

- A. $m = 2$ B. $m = \frac{1}{2}$ C. $m = \frac{1}{3}$ D. $m = -2$

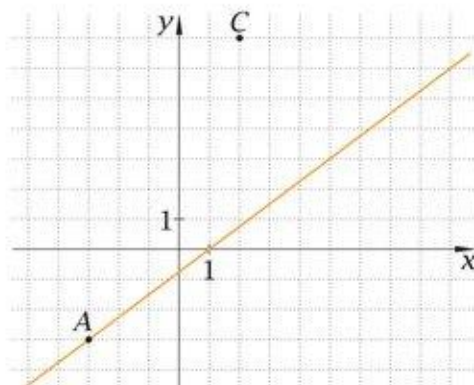
16. Prosta określona wzorem $y = ax + 1$ jest symetralną odcinka AB , gdzie $A = (-3, 2)$ i $B = (1, 4)$. Wynika stąd, że:

- A. $a = -\frac{1}{2}$ B. $a = \frac{1}{2}$ C. $a = -2$ D. $a = 2$

17. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Ponadto wiadomo, że $A = (-2, 4)$ i $B = (6, -2)$. Wierzchołek C należy do osi y . Oblicz współrzędne wierzchołka C .

18. Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, 2)$, $B = (6, -2)$, $C = (10, 6)$.

19. Na rysunku przedstawione są dwa wierzchołki trójkąta prostokątnego ABC : $A = (-3, -3)$ i $C = (2, 7)$ oraz prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, zawierająca przeciwprostokątną AB tego trójkąta. Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta i długość odcinka AB .



20. Dane są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -3x + b$, które przecinają się w punkcie leżącym na osi y układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci jest zawarty w osi x .

21. Punkty $A = (-1, 1)$ i $C = (1, 9)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta.

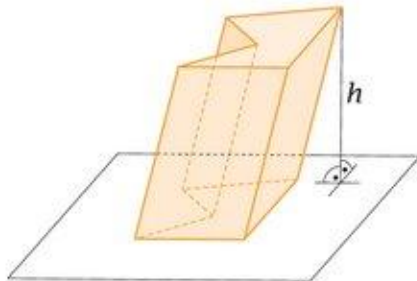
22. W układzie współrzędnych punkty $A = (4, 3)$ i $B = (10, 5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Oblicz współrzędne punktu C , dla którego kąt ABC jest prosty.

- Я23.** Dane są trzy niewspółliniowe punkty: $A = (1, 1)$, $B = (6, 3)$, $C = (4, 5)$. Ile jest wszystkich punktów D takich, że czworokąt o wierzchołkach w punktach A , B , C , D jest równoległobokiem?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- Я24.** Odległość początku układu współrzędnych od prostej o równaniu $y = 2x + 4$ jest równa:
A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. 4
- Я25.** Prosta l , na której leży punkt $P = (8, 2)$, tworzy z dodatnimi półosią układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu 36. Wyznacz równanie prostej l .
- Я26.** Punkty $A = (-7, -2)$ i $B = (4, -7)$ są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego ABC , a wysokość opuszczona z wierzchołka A tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $2x + 19y + 52 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C .
- Я27.** Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu 90. Przekątna BD zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$. Wyznacz długość boku tego rombu.
- Я28.** Punkty $A = (30, 32)$ i $B = (0, 8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x - y + 2 = 0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną AC . Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.
- Я29.** Punkt $A = (7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.
- Я30.** Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi y układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB , BC i CA w punktach — odpowiednio — $P = (0, 10)$, $Q = (8, 6)$ i $R = (9, 13)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A , B i C tego trójkąta.
- Я31.** Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5, 3)$ i $B = (0, 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$.
- Я32.** Dane są okręgi o równaniach:

$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0 \quad \text{ i } \quad x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0.$$
Wyznacz wszystkie wartości parametru a , dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.
- Я33.** Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2 + y^2 = 2^{11-n}$, $n \geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} i wewnętrznym okręgiem o_{2k} . Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k , gdzie $k \geq 1$.

STEREOMETRIA

Graniastosłup



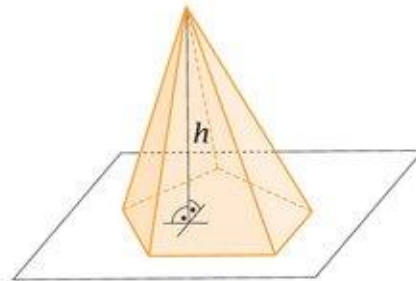
Pole powierzchni całkowitej:

$$P = 2P_p + P_b$$

Objętość:

$$V = P_p \cdot h$$

Ostrosłup



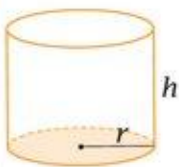
Pole powierzchni całkowitej:

$$P = P_p + P_b$$

Objętość:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

Walec



Pole powierzchni bocznej:

$$P_b = 2\pi r h$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$P = 2P_p + P_b = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Objętość:

$$V = \pi r^2 h$$

Stożek



Pole powierzchni bocznej:

$$P_b = \pi r l$$

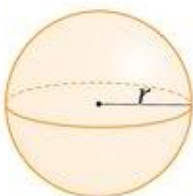
Pole powierzchni całkowitej:

$$P = P_p + P_b = \pi r^2 + \pi r l$$

Objętość:

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Kula

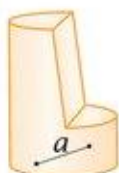


Pole powierzchni:

$$P = 4\pi r^2$$

Objętość:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$



F_1



F_2

Jeżeli bryła F_2 jest podobna do bryły F_1

w skali k , to:

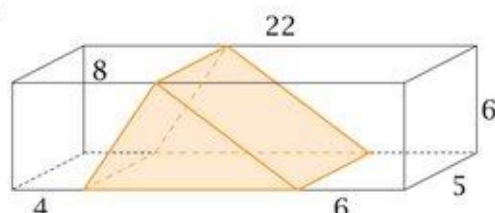
$$\frac{\text{Pole powierzchni bryły } F_2}{\text{Pole powierzchni bryły } F_1} = k^2$$

$$\frac{\text{Objętość bryły } F_2}{\text{Objętość bryły } F_1} = k^3$$

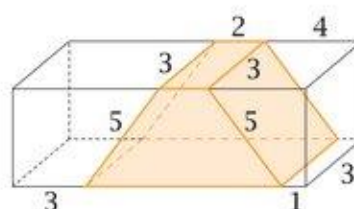
WIEŁOŚCIANY I INNE FIGURY PRZESTRZENNE

1. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan podzielony na trzy graniastosłupy. Oblicz objętość każdego z tych graniastosłupów.

a)

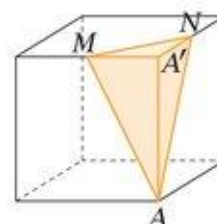


b)



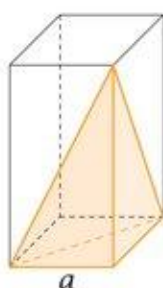
2. Na sześcianie o krawędzi 8 położono sześcian o krawędzi 6, a na nim sześcian o krawędzi 3. Za każdym razem ściana mniejszego sześcianu zawiera się całkowicie w ścianie większego. Oblicz pole powierzchni całkowitej otrzymanej „piramidy”.

3. Na rysunku obok przedstawiono sześcian o krawędzi a . Punkty M i N są środkami krawędzi sześcianu. Oblicz objętość oraz pole powierzchni całkowitej wielościanu o wierzchołkach $MNA A'$.

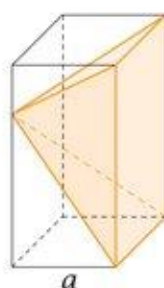


4. Z graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości $2a$ wycięto ostrosłup w sposób przedstawiony na rysunku poniżej. Oblicz objętość ostrosłupa.

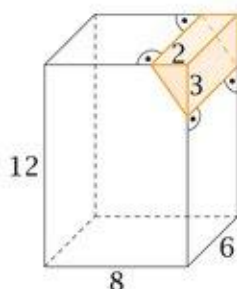
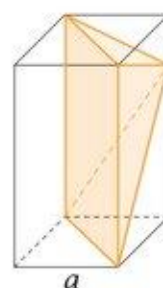
a)



b)

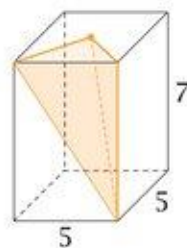
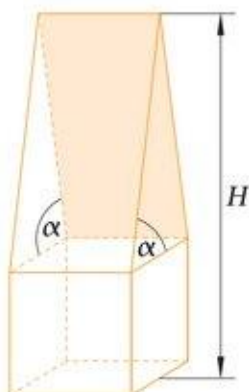


c)

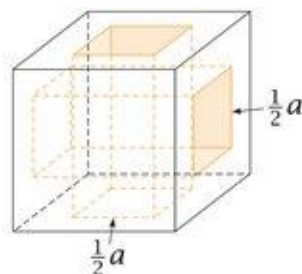


5. Z prostopadłościanu odcięto graniastosłup trójkątny tak, jak to przedstawiono na rysunku. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej większej z otrzymanych brył.

6. Z prostopadłościanu przedstawionego na rysunku odcięto ostrosłup. Kropką zaznaczono środek ściany. Oblicz objętość tej części bryły, która pozostała po wycięciu ostrosłupa.



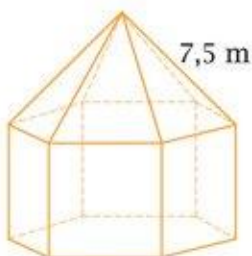
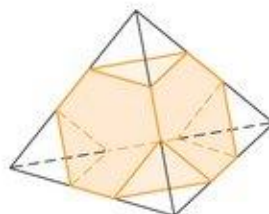
7. Na drewnianym klocku w kształcie sześcianu o krawędzi a położono inny klocek — w kształcie graniastosłupa prostego — w sposób przedstawiony na rysunku. Wiadomo, że oba klocki mają jednakową objętość. Wyznacz wysokość H otrzymanej bryły oraz pole powierzchni zacieniowanej ściany.



8. W sześciacie o krawędzi a wydrążono na wylot dwa graniastosłupy prawidłowe czworokątne w sposób przedstawiony na rysunku. Środki zaznaczonych kwadratów są jednocześnie środkami ścian sześcianu. Oblicz objętość tej części sześcianu, która pozostanie po wyjęciu graniastosłupów.

9. Do każdej ściany czworościanu foremnego o krawędzi a doklejono jednakowe ostrosłupy prawidłowe trójkątne. Podstawa każdego ostrosłupa pokrywa się całkowicie ze ścianą czworościanu foremnego. Objętość otrzymanej bryły jest trzy razy większa od objętości czworościanu foremnego. Wyznacz wysokość doklejonych ostrosłupów.

10. W czworościanie foremnym o krawędzi 10 odcięto cztery narożniki w kształcie czworościanów foremnych o krawędzi 3. Wyznacz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły otrzymanej po odcięciu narożników.

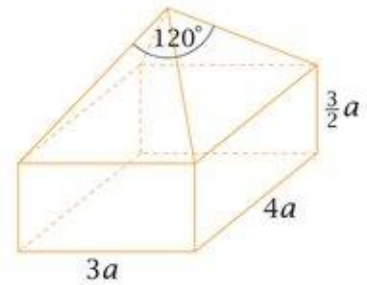


11. Salonik prasowy ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego z nałożonym dachem w kształcie ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego (patrz rysunek). Podstawa graniastosłupa ma powierzchnię 100 m^2 , a jego wysokość wynosi 3 m. Wyznacz:

- kubaturę (objętość) tego obiektu,
- powierzchnię dachu.

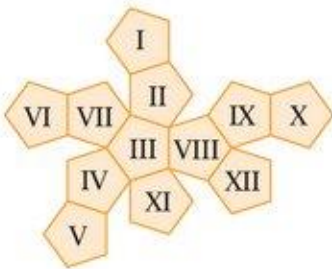
12. Namiot ma kształt i wymiary przedstawione na rysunku obok. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa stanowiącego dach namiotu mają długość 5,5 m. Oblicz:

- całkowitą wysokość namiotu,
- pole powierzchni bocznej namiotu,
- kubaturę (objętość) tego namiotu.



13. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają długość a . Przez środki krawędzi bocznych poprowadzono płaszczyznę, która przecięła ostrosłup na dwie bryły. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej otrzymanego ostrosłupa ściętego.

14. Sześcian i ośmiościan foremny mają jednakowe pola powierzchni. Wyznacz stosunek objętości sześcianu do objętości ośmiościanu.



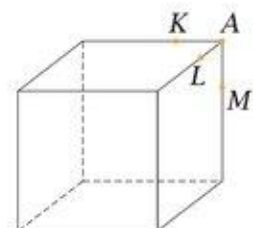
15. Na rysunku obok przedstawiono siatkę dwunastościanu foremnego. Po sklejeniu bryły ściana III znajdzie się naprzeciw ściany X. Znajdź pozostałe pary ścian, które znajdą się naprzeciw siebie.

16. Czy w ośmiościanie foremnym można wskazać dwie ściany leżące w równoległych płaszczyznach? A w dwunastościanie foremnym?

17. Przeczytaj w podręczniku ciekawostkę o wielościanach półforemnych (zakres rozszerzony, str. 259).

- Z sześcianu o krawędzi a otrzymano sześcian ścięty. Jaka jest długość krawędzi tego sześcianu?
- Z ośmiościanu foremnego o krawędzi a otrzymano ośmiościan ścięty. Jaka jest długość jego krawędzi?
- Z czworościanu foremnego o krawędzi a otrzymano czworościan ścięty. Jaka jest długość jego krawędzi?
- Narysuj siatkę i zbuduj model antygraniastoslupa czworokątnego.

18. W sześcianie o krawędzi a odcięto naroże płaszczyzną przechodzącą przez punkty K, L, M (jak na rysunku). Wiedząc, że $|AK| = |AL| = |AM| = \frac{1}{3}a$, oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej większej z otrzymanych brył.



19. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość a , krawędź boczna ma długość $4a$.

a) Przez środki krawędzi bocznych poprowadzono płaszczyznę, która przecięła ostrosłup na dwie bryły. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej otrzymanego ostrosłupa ściętego.

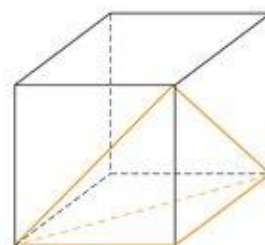
b) Przez wysokości dwóch sąsiednich ścian bocznych ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę, która przecięła ostrosłup na dwie bryły. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej większej z otrzymanych brył.

20. W sześcianie o krawędzi długości 1 wybrano cztery wierzchołki, jak na rysunku obok.

a) Czy czworościan o wierzchołkach w wybranych punktach jest prawidłowy?

b) Ile wysokości o różnych długościach ma ten czworościan? Znajdź te długości.

c) Czy wybierając w inny sposób cztery wierzchołki tego samego sześcianu, możemy uzyskać inny czworościan, nieprzystający do opisanego powyżej? Jeśli tak, wyznacz długości jego krawędzi. Znajdź wszystkie możliwości.



21. Przeczytaj w podręczniku ciekawostkę o antygraniastosłupach (zakres rozszerzony, str. 259). Oblicz wysokość antygraniastosłupa czworokątnego o krawędzi a .

FIGURY OBROTOWE I INNE FIGURY PRZESTRZENNE

22. Wyznacz stosunek objętości sześcianu opisanego na kuli do objętości sześcianu wpisanego w tę kulę.

23. Oblicz objętość kuli opisanej na prostopadłościanie o wymiarach: 4 cm, 8 cm i 10 cm.

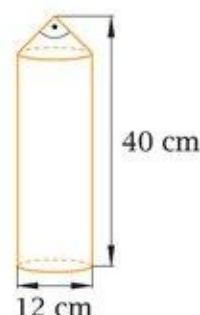
24. a) Ile razy większą objętość ma walec opisany na graniastosłupie prawidłowym trójkątnym od walca wpisanego w ten graniastosłup?

b) Ile razy większą objętość ma graniastosłup prawidłowy trójkątny opisany na walcu od graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wpisanego w ten walec?

25. Romb o przekątnych długości 6 i 8 jest podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 20. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca wpisanego w ten graniastosłup.

26. Walec i graniastosłup prawidłowy czworokątny mają wysokości jednakowej długości oraz jednakowe pola powierzchni bocznych. Oblicz stosunek objętości graniastosłupa do objętości walca.

27. Do wykonania palisady w ogrodzie potrzeba 400 jednakowych betonowych elementów. Kształt i wymiary jednego takiego elementu przedstawiono na rysunku obok. Ile metrów sześciennych zaprawy zużyto do wykonania wszystkich elementów tej palisady?



28. W kuli o promieniu R umieszczono stożek w taki sposób, że środek kuli jest wierzchołkiem stożka, a podstawa stożka jest jednocześnie przekrojem kuli. Wiedząc, że promień podstawy stożka ma długość r , oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej stożka.

29. Oblicz pole powierzchni kuli wpisanej w stożek o wysokości 15 i tworzącej długości 17.

30. W stożek, którego promień podstawy ma długość 12, wpisano kulę o promieniu 4. Oblicz objętość stożka.

31. W kulę wpisano stożek o tworzącej długości 10 i wysokości 8. Oblicz objętość kuli.

32. a) Ile razy większą objętość ma walec opisany na graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym od walca wpisanego w ten graniastosłup?

b) Ile razy większą objętość ma graniastosłup prawidłowy sześciokątny opisany na walcu od graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wpisanego w ten walec?

33. W stożek o wysokości 8 i promieniu podstawy 6 wpisano ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości 4. Wierzchołek ostrosłupa znajduje się w środku podstawy stożka. Wierzchołki podstawy ostrosłupa leżą na powierzchni bocznej stożka. Oblicz objętość ostrosłupa.

34. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny i stożek mają wspólny wierzchołek. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° , a jego wysokość wynosi 6. Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego podstawa jest:

a) wpisana w podstawę stożka,

b) opisana na podstawie stożka.

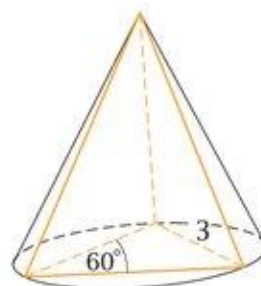
35. Walec opisano na sześciianie o przekątnej długości d w taki sposób, że dwie przeciwległe ściany sześcianu są wpisane w podstawy walca. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

36. Stosunek objętości stożka do objętości walca wpisanego w ten stożek wynosi $\frac{8}{3}$. Podaj zależność między promieniami podstaw tych brył.

37. a) Stożek i walec mają takie same promienie podstaw, wysokości i pola powierzchni bocznych. Oblicz miarę kąta nachylenia tworzącej do podstawy stożka.

b) Stożek i walec mają takie same tworzące, objętości i pola powierzchni bocznych. Oblicz miarę kąta nachylenia tworzącej do podstawy stożka.

38. W stożek, którego tworząca ma taką samą długość jak średnica podstawy, wpisano ostrosłup w sposób przedstawiony na rysunku. Jeden z kątów podstawy ostrosłupa ma miarę 60° , a bok leżący naprzeciwko tego kąta ma długość 3 cm. Znajdź objętość stożka.



PROSTE I PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI

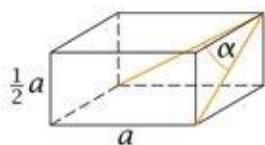
39. Oblicz miarę kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym. Jaki jest kąt między jego ścianą boczną a podstawą?

40. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Znajdź miarę kąta nachylenia przekątnej tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

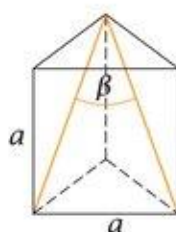
41. Krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego mają tę samą długość co krawędzie podstawy. Wyznacz miary kątów nachylenia przekątnych tego graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

42. Graniastosłup przedstawiony na poniższym rysunku jest prawidłowy. Oblicz miarę zaznaczonego kąta.

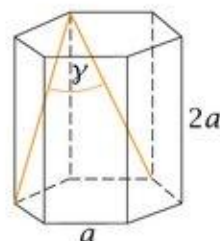
a)



b)



c)



43. Jedna ze ścian prostopadłościanu ma wymiary 6 i 12. Przekątna d prostopadłościanu nachylona jest do tej ściany pod kątem 60° . Oblicz długość przekątnej oraz objętość prostopadłościanu.

44. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach 6 i 8. Wszystkie krawędzie boczne są jednakowej długości. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa ma długość 10, wyznacz miary kątów nachylenia ścian bocznych do podstawy.

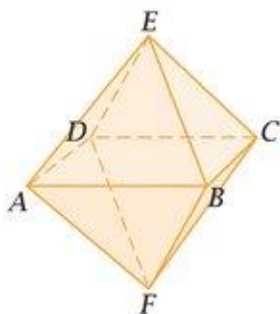
45. W ostrosłupie prawidłowym wysokość ma taką samą długość jak krawędź podstawy. Znajdź miarę kąta nachylenia krawędzi bocznych do podstawy, wiedząc, że rozpatrywany ostrosłup jest:

- a) trójkątny b) czworokątny c) sześciokątny

46. W czworościanie foremnym $ABCS$ z wierzchołka S poprowadzono wysokości dwóch ścian. Oblicz miarę kąta między tymi wysokościami.

47. Podstawa prostopadłościanu ma wymiary 3×4 , a wysokość wynosi 12. Znajdź:

- a) miary kątów pomiędzy przekątnymi ścian bocznych a płaszczyzną podstawy,
b) miarę kąta pomiędzy przekątną prostopadłościanu a jego podstawą,
c) miarę kąta pomiędzy wychodzącymi z jednego wierzchołka przekątnymi dwóch ścian bocznych,
d) miarę kąta pomiędzy przekątną prostopadłościanu a krawędzią długości 3.



48. Bryła $ABCDEF$ jest ośmiościanem foremnym. Oblicz miarę kąta:

- a) nachylenia krawędzi EB do płaszczyzny $ABCD$,
b) pomiędzy ścianą BCE a płaszczyzną $ABCD$,
c) pomiędzy ścianą BCE a ścianą BCF ,
d) pomiędzy płaszczyzną ściany ABE a płaszczyzną ściany BCF .

49. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $6\sqrt{2}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Oblicz:

- a) długości krawędzi tego graniastosłupa,
b) miarę kąta między przekątną graniastosłupa a krawędzią jego podstawy,
c) miarę kąta między przekątną graniastosłupa a jego krawędzią boczną.

50. Dłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 12 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 35° . Jaką długość ma krótsza przekątna tego graniastosłupa? Jaki kąt tworzy ona z podstawą?

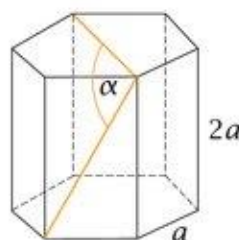
51. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Jaki kąt tworzy ta przekątna z krawędzią podstawy?

52. Dłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° .

a) Jaki kąt tworzy ta przekątna z krótszą przekątną wychodzącą z tego samego wierzchołka?

b) Jaki jest kąt nachylenia krótszej przekątnej do płaszczyzny podstawy?

53. Graniastosłup przedstawiony na rysunku obok jest prawidłowy. Oblicz miarę zaznaczonego kąta.



54. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wysokość wynosi 6, a krótsza przekątna nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Oblicz:

a) objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa;

b) miarę kąta nachylenia dłuższej przekątnej graniastosłupa do podstawy;

c) miarę kąta między przekątnymi graniastosłupa — dłuższą i krótszą — wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

55. W prostopadłościanie długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu wynosi 468, wyznacz miarę kąta nachylenia przekątnej do ściany o najmniejszej powierzchni.

56. Długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z jednego wierzchołka tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 4. Wiedząc, że objętość prostopadłościanu wynosi 231, oblicz miarę kąta nachylenia przekątnej do ściany o największej powierzchni.

57. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt α taki, że $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa, wiedząc, że pole powierzchni całkowitej tej bryły wynosi $30 + 4\sqrt{30}$.

58. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach 2 i 6. Przekątna prostopadłościanu tworzy z podstawą kąt α taki, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Wyznacz objętość tej bryły.

59. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 5 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 50° . Oblicz wysokość tego ostrosłupa i długość krawędzi jego podstawy.

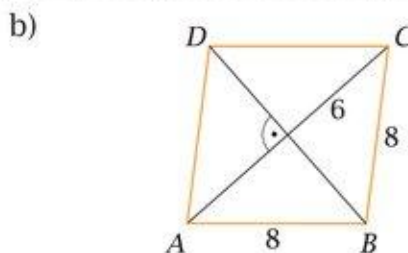
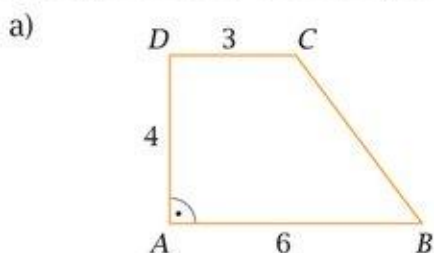
- 60.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 3, a krawędzie boczne mają długość 4. Oblicz:
- wysokość tego ostrosłupa,
 - miarę kąta nachylenia jego krawędzi bocznej do podstawy,
 - miarę kąta nachylenia jego ściany bocznej do podstawy,
 - miarę kąta między jego ścianami bocznymi.
- 61.** a) W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Pod jakim kątem do podstawy nachylona jest krawędź boczna? Jaką miarę ma kąt między ścianami bocznymi tego ostrosłupa?
- b) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Jaką miarę ma kąt między ścianą boczną a podstawą? Jaką miarę ma kąt między ścianami bocznymi?
- 62.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 12, a jego ściana boczna tworzy z podstawą kąt o mierze 70° . Oblicz wysokość tego ostrosłupa i długość krawędzi jego podstawy.
- 63.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do podstawy pod kątem 45° . Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi S . Oblicz jego wysokość i kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
- 64.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest o p dłuższa od krawędzi jego podstawy i jest nachylona do podstawy pod kątem α . Oblicz wysokość tego ostrosłupa.
- 65.** Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest o p dłuższa od krawędzi jego podstawy. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do podstawy pod kątem α . Oblicz długość jego krawędzi bocznej.
- 66.** W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna ma długość 6 i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.
- 67.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ma długość 10, a krawędź boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 68° . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.
- 68.** W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź boczna jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy. Wyznacz miarę kąta między:
- krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy,
 - wysokością ściany bocznej a wysokością ostrosłupa.

69. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego, w którym podstawą jest:

- a) trójkąt o polu $16\sqrt{3}$, a ściana boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 45° ,
- b) kwadrat o boku 5, a krawędź boczna jest nachylona do podstawy pod kątem 74° .

70. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym stosunek pola powierzchni bocznej do pola podstawy wynosi $5:2$. Wyznacz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy oraz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do podstawy.

71. W ostrosłupie o wierzchołku S podstawą jest czworokąt przedstawiony na rysunku. Wiedząc, że krawędź AS jest prostopadła do podstawy oraz, że najdłuższa krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 60° , oblicz objętość ostrosłupa.



72. W ostrosłupie prawidłowym objętość wynosi 36, a pole podstawy jest równe $18\sqrt{3}$. Wyznacz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy, wiedząc, że rozpatrywany ostrosłup jest:

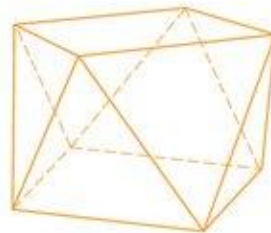
- a) trójkątny
- b) czworokątny
- c) sześciokątny

73. Wyznacz miarę kąta między dwiema ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego, jeśli wiadomo, że:

- a) ostrosłup jest czworokątny, a krawędzie boczne są dwa razy dłuższe od krawędzi podstawy,
- b) ostrosłup jest trójkątny, a pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest dwa razy większe od pola podstawy.

74. Rysunek przedstawia antygraniastosłup czworokątny. Oblicz miarę kąta pomiędzy mającymi wspólną krawędź ścianami:

- a) kwadratową i trójkątną,
- b) trójkątnymi.



75. Niech a , b i c będą przekątnymi graniastosłupa prawidłowego ośmiokątnego, gdzie $a < b < c$. Mając dane a i c , oblicz b .

76. Uzasadnij, że nie istnieje ostrosłup prawidłowy sześciokątny, w którym kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 60° .

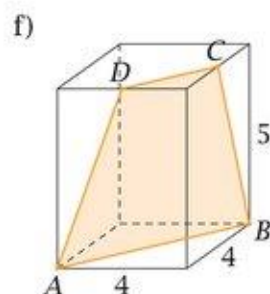
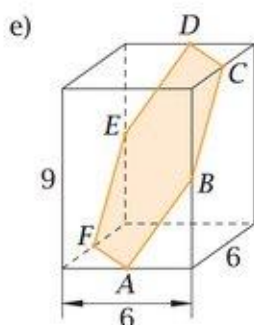
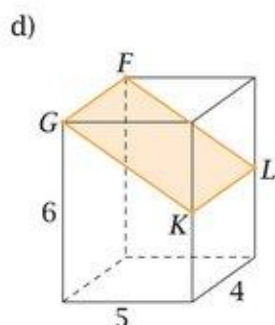
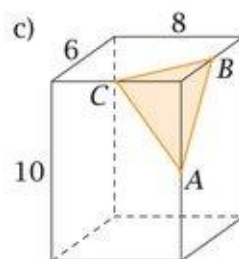
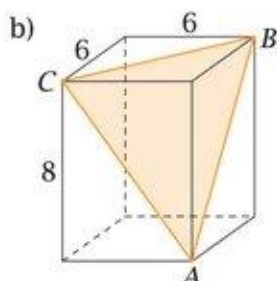
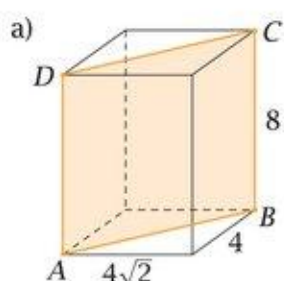
PRZEKROJE GRANIASTOSŁUPÓW I OSTROSŁUPÓW

77. Jaką figurą może być przekrój sześcianu o krawędzi a płaszczyzną zawierającą jego krawędź? Jakie co najmniej, a jakie co najwyżej pole może mieć taki przekrój?

78. Naskicuj graniastosłup prawidłowy trójkątny o wszystkich krawędziach równej długości i zaznacz w nim przykładowy przekrój będący:

- trójkątem o polu mniejszym od pola podstawy graniastosłupa,
- trójkątem o jak największym polu,
- trójkątem równoramiennym, ale nie równobocznym,
- prostokątem o polu dwa razy mniejszym od pola ściany bocznej graniastosłupa,
- trapezem, który nie jest prostokątem.

79. Na poniższych rysunkach zaznaczono przekroje prostopadłościanów. Punkty oznaczone literami są wierzchołkami prostopadłościanu lub środkami krawędzi. Oblicz obwody zaznaczonych przekrojów.



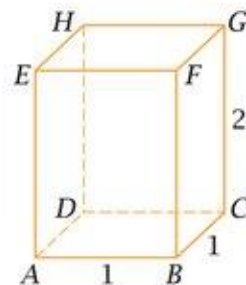
80. W sześcianie o krawędzi a odcinek AB jest krawędzią, a odcinek AG — przekątną tej bryły. Wyznacz pole przekroju otrzymanego w wyniku przecięcia sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez punkty A , B i G .

81. Narysuj przekrój czworościanu foremego $ABCD$ o krawędzi długości 4 cm płaszczyzną:

- przechodzącą przez punkty A , B i środek boku CD ,
- równoległą do ściany ABC i przechodzącą przez środek boku AD .

82. Oblicz pole przekroju prostopadłościanu $ABCDEFGH$ (zob. rysunek) płaszczyzną przechodzącą przez:

- punkty A , C i H ,
- środki krawędzi AB , BC i BF ,
- punkty E i G oraz środki boków AB i BC .

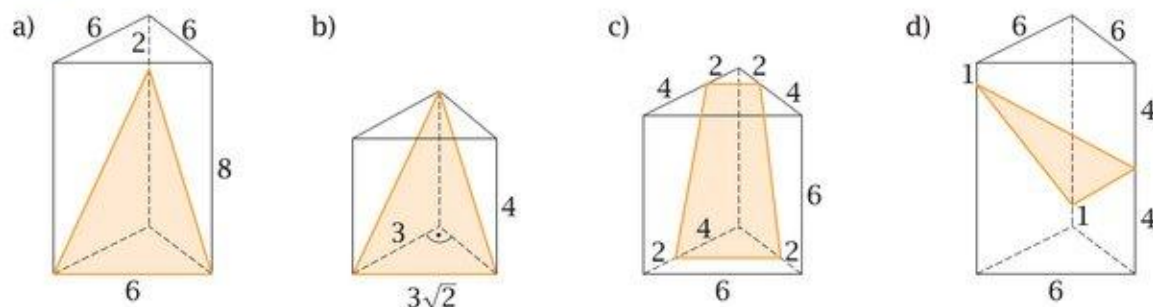


83. W sześcianie o krawędzi a przez środki trzech krawędzi wychodzących ze wspólnego wierzchołka poprowadzono płaszczyznę.

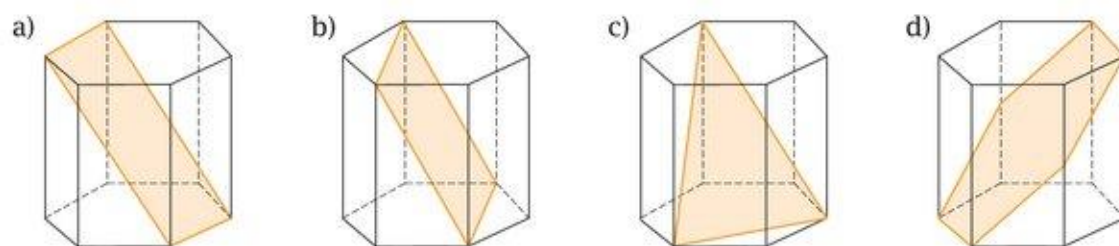
- Wyznacz pole otrzymanego przekroju.
- Wyznacz kąt nachylenia tego przekroju do ściany sześcianu.

84. Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 4 i wysokości 7 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem α . Wiedząc, że pole otrzymanego przekroju wynosi 24, wyznacz miarę kąta α .

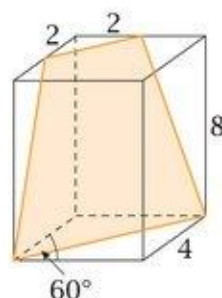
85. Oblicz pole zaznaczonego przekroju graniastosłupa prostego.



86. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy a i wysokości $2a$. Oblicz pole zaznaczonej figury.

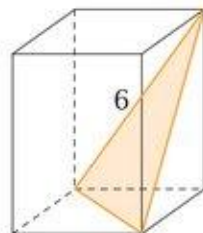


87. Podstawą graniastosłupa prostego przedstawionego na rysunku obok jest romb o boku 4 i kącie ostrym 60° . Oblicz pole zaznaczonego przekroju.

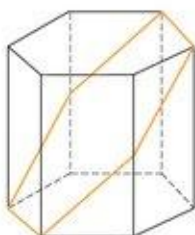


88. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym środki dwóch krawędzi bocznych połączono z punktem K leżącym na trzeciej krawędzi bocznej i dzielącym tę krawędź w stosunku 1:3. Otrzymano w ten sposób przekrój o polu 12. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, wiedząc, że krawędź jego podstawy ma długość 4.

89. Na rysunku obok przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny. Zaznaczony przekrój tworzy z podstawą kąt 60° . Oblicz objętość graniastosłupa.



90. Kiedy przekrój sześcianu płaszczyzną zawierającą jedną z jego przekątnych ma największe pole, a kiedy — najmniejsze? Oblicz największe i najmniejsze pole tego przekroju dla sześcianu o krawędzi a .



91. Przecinając graniastosłup prawidłowy sześciokątny w sposób pokazany na rysunku obok, otrzymamy jako przekrój pewien sześciokąt. Czy można tak dobrać wymiary graniastosłupa, aby przekrój ten był sześciokątem foremnym?

92. W ostrosłupie prawidłowym krawędzie podstawy mają długość a , a krawędzie boczne — $4a$. Przez wysokości dwóch sąsiednich ścian bocznych poprowadzono płaszczyznę. Oblicz pole tak otrzymanego przekroju, wiedząc, że ostrosłup jest:

- a) trójkątny b) czworokątny c) sześciokątny

93. a) Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach 5 i 7. Przez przekątną podstawy i wierzchołek ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę. Pole otrzymanego przekroju wynosi $3\sqrt{74}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa, wiedząc, że wszystkie krawędzie boczne są równej długości.

b) Podstawą ostrosłupa jest romb o boku 9 i kącie ostrym 60° . Przez dwie przeciwległe krawędzie boczne tego ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę. Otrzymany przekrój jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Oblicz objętość ostrosłupa (rozpatrz wszystkie przypadki).

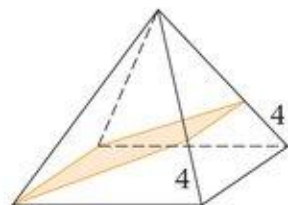
c) Podstawą ostrosłupa jest trapez $ABCD$, w którym odcinki AB i CD są podstawami oraz $|AB| = 7$, $|CD| = 4$, $|\sphericalangle ADC| = 90^\circ$, $|\sphericalangle DCB| = 120^\circ$. Wiadomo, że krawędź boczna DS jest prostopadła do podstawy. Przez dłuższą przekątną podstawy oraz wysokość ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę. Pole otrzymanego przekroju wynosi 12. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

94. Punkty K i L są środkami dwóch nierównoległych do siebie krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wierzchołku S . Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty K , L i S . Otrzymany przekrój tworzy z podstawą kąt o mierze 30° . Wyznacz stosunek długości krawędzi bocznej do długości krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

Я95. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez krótszą przekątną podstawy oraz wierzchołek ostrosłupa. Otrzymany przekrój tworzy z płaszczyzną podstawy ostrosłupa kąt 60° . Wyznacz kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy ostrosłupa.

Я96. Pole podstawy $ABCD$ ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDE$ wynosi P . Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez środki odcinków EA , EB i EC .

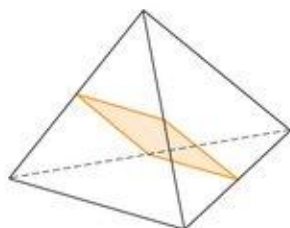
Я97. Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma wszystkie krawędzie długości 12. Oblicz pole przekroju zaznaczonego na rysunku obok.



Я98. Oblicz, jaką wysokość ma ostrosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy a , w którym:

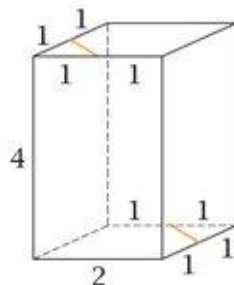
- przekrój płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa i dłuższą przekątną jego podstawy jest trójkątem prostokątnym,
- przekrój płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa i krótszą przekątną jego podstawy jest trójkątem prostokątnym.

Я99. Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy długości 6 cm i wysokość równą 4 cm. Płaszczyzna P przechodzi przez jedną z krawędzi jego podstawy i jest prostopadła do przeciwległej ściany bocznej. Narysuj przekrój ostrosłupa tą płaszczyzną i oblicz pole tego przekroju.



Я100. Rysunek obok przedstawia przekrój czworoscianu foremnego płaszczyzną przechodzącą przez środki jego krawędzi.

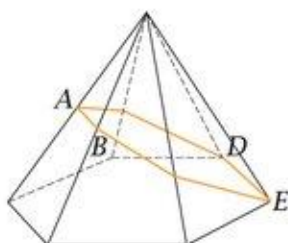
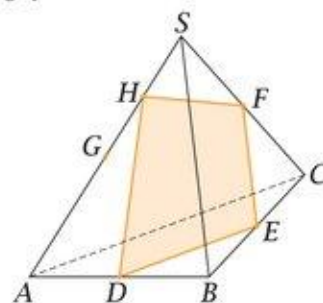
- Wykaż, że przekrój ten jest prostokątem.
- Oblicz pole tego przekroju, jeśli krawędź czworoscianu ma długość a .



Я101. Przerysuj przedstawiony obok rysunek do zeszytu i zacieniuj przekrój prostopadłościanu zawierający zaznaczone odcinki. Jaką figurą geometryczną jest ten przekrój? Oblicz jej obwód.

Я102. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD S$ o wierzchołku S wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Punkty K i L są środkami krawędzi AB i BC . Na krawędzi bocznej DS obrano punkt M , który podzielił ją w stosunku $1:3$. Wyznacz miarę kąta, jaki został utworzony między podstawą ostrosłupa, a przekrojem ostrosłupa przechodzącym przez punkty K , L i M .

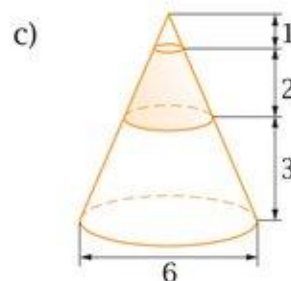
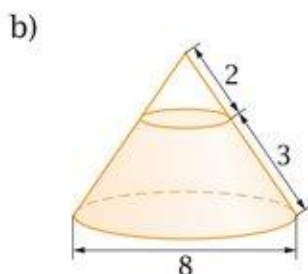
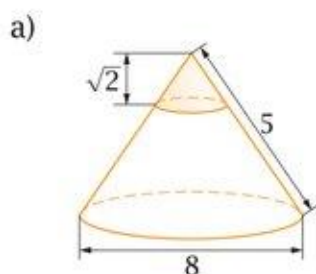
- Я 103.** W jaki sposób przeciąć sześcián o krawędzi długości 1 płaszczyzną zawierającą jedną z jego przekątnych, aby otrzymany przekrój miał pole równe $\frac{3\sqrt{3}}{4}$?
- Я 104.** Sześcián o krawędzi długości 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną jednej z jego ścian i nachyloną do tej ściany pod kątem ostrym α . Jaki kształt ma otrzymany przekrój w zależności od kąta α ? Jakie jest pole tego przekroju?
- Я 105.** Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy 6. Ściana boczna ostrosłupa nachylona jest do podstawy pod kątem 60° . Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy. Oblicz pole otrzymanego przekroju, wiedząc, że tworzy on z podstawą kąt o mierze 30° .
- Я 106.** Punkty D, E, F i G są środkami krawędzi czworoscianu foremnego przedstawionego na rysunku obok. Dłaczego zacieniowana figura nie może być przekrojem tego czworoscianu?
- Я 107.** Ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a i wysokości $a\sqrt{2}$ przecięto płaszczyzną zawierającą wierzchołek podstawy i środki dwóch krawędzi bocznych. Znajdź pole otrzymanego przekroju.



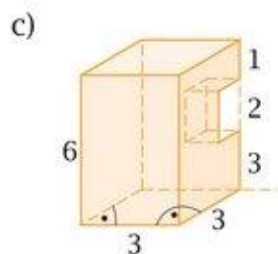
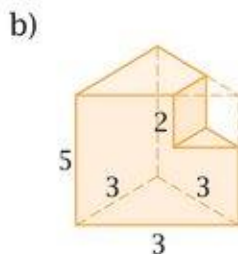
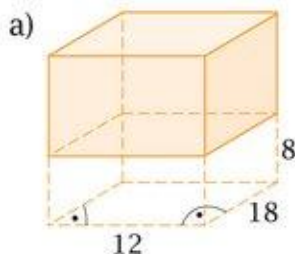
- Я 108.** W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość 2 cm, a krawędź boczna — 4 cm. Punkty A i B są środkami odpowiednich krawędzi bocznych. Oblicz miarę kąta nachylenia przekroju przechodzącego przez punkty A, B, E i D do płaszczyzny podstawy.

BRYŁY PODOBNE

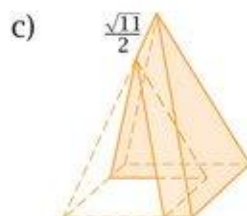
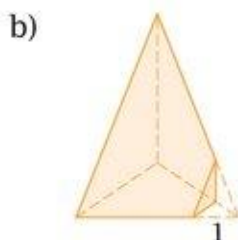
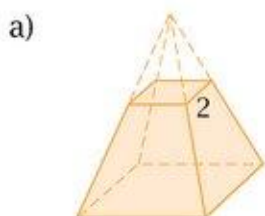
- 109.** Stożek przecięto płaszczyzną (płaszczyznami) równoległą (równoległymi) do jego podstawy. Oblicz objętość zacieniowanej bryły.



110. Z graniastosłupa odcięto (w sposób przedstawiony na rysunku) graniastosłup podobny do niego. Oblicz objętość zacieniowanej bryły.



111. Od ostrosłupa prawidłowego o krawędzi podstawy równej 4 i wysokości wynoszącej 6 odcięto (w sposób przedstawiony na rysunku) ostrosłup podobny do niego. Oblicz objętość zacieniowanej bryły.



112. Jeden z dwóch ostrosłupów podobnych ma 16 razy większą objętość od drugiego. Ile razy większe ma pole powierzchni całkowitej?

113. Stożek o wysokości h przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Pole otrzymanego przekroju jest trzykrotnie mniejsze od pola podstawy stożka. Oblicz odległość płaszczyzny przekroju od wierzchołka stożka.

114. Wieża Eiffla ma wysokość około 300 m i waży około 7000 t. Ile ważyłaby jej miniaturka o wysokości 20 cm zrobiona z tego samego materiału co oryginał wieży?

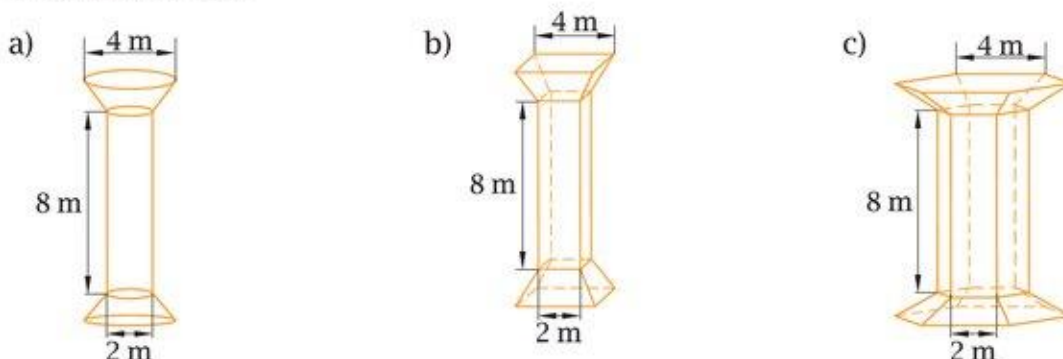
115. Ile waży samolot, którego model wykonany w skali 1:20 z dwa razy lżejszego materiału niż oryginał waży 1,5 kg?

116. Dwa stożki podobne mają w sumie objętość równą 35. Jaką objętość ma każdy z nich, jeżeli wysokość jednego z nich jest trzy razy mniejsza od wysokości drugiego?

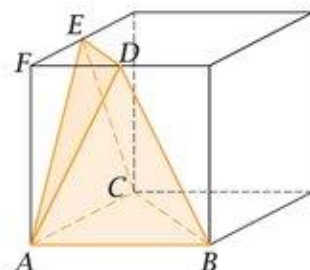
117. Szklanka ma kształt stożka ściętego o wysokości 9 cm i średnicach podstaw 6 cm oraz 8 cm. Ile takich szklanek można wypełnić napojem z butelki?

118. Przed postawieniem pomnika należy zrobić betonowy podest w kształcie ściętego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 40 cm i krawędziach podstaw długości 3 m oraz 2,5 m. Oblicz masę betonu potrzebnego na jego wykonanie, przyjmując, że gęstość betonu wynosi 2300 kg/m^3 .

119. Ile marmuru potrzeba na zbudowanie symetrycznej kolumny przedstawionej na rysunku, której podstawami są ścięte stożki lub ścięte ostrosłupy prawidłowe o wysokości 1 m?



120. Krawędź sześcianu przedstawionego na rysunku obok ma długość a . Punkty D i E są środkami krawędzi. Oblicz objętość zaznaczonej bryły.



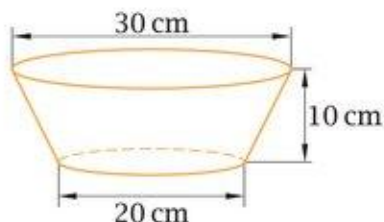
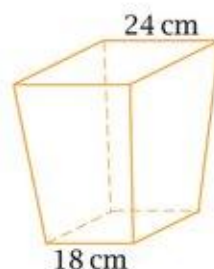
121. Ostrosłup podzielono na kilka części płaszczyznami równoległymi do podstaw i dzielącymi wysokość ostrosłupa na równe części. Oblicz stosunek objętości otrzymanych brył, gdy ostrosłup podzielono na:

a) trzy części

b) cztery części

c) pięć części

122. Naczynie w kształcie ściętego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 12 cm (zob. rysunek obok) napełniono wodą do $\frac{2}{3}$ wysokości. Jaką część pojemności wykorzystano?



123. Miska przedstawiona na rysunku ma kształt stożka ściętego. Do jakiej wysokości należy ją napełnić, aby wykorzystać połowę jej pojemności?

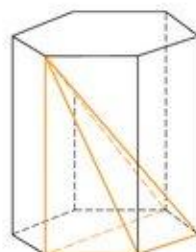
PRZED SPRAWDZIANEM

1. Sześcian przecięto płaszczyzną prostopadłą do ściany i przechodzącą przez przekątną tej ściany. Stosunek pola powierzchni otrzymanego graniastopu do pola powierzchni sześcianu wynosi:

- A. 1:1 B. $\sqrt{2}:6$ C. 2:3 D. $(3 + \sqrt{2}):6$

2. Z graniastopu prawidłowego sześciokątnego wycięto ostrosłup tak, jak przedstawiono na rysunku obok. Ile razy objętość graniastopu jest większa od objętości tego ostrosłupa?

- A. 6 B. 4 C. 3 D. 2



3. W kulę o promieniu r wpisano walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem. Objętość walca wynosi:

- A. $\frac{4}{3}\pi r^3$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi r^3$ C. $\sqrt{2}\pi r^3$ D. πr^3

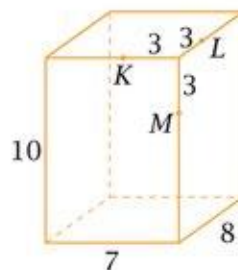
4. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a , a ściana boczna tego ostrosłupa nachylona jest do podstawy pod kątem 45° . Objętość tego ostrosłupa wynosi:

- A. $\frac{a^3}{8}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ C. $\frac{a^3}{24}$ D. $\frac{a^3}{12}$

5. Pole powierzchni pewnego graniastopu jest 10 razy większe od pola powierzchni graniastopu podobnego do niego. Stosunek objętości większego graniastopu do objętości mniejszego graniastopu wynosi:

- A. $10\sqrt{10}$ B. 20 C. 125 D. 100

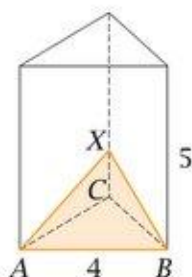
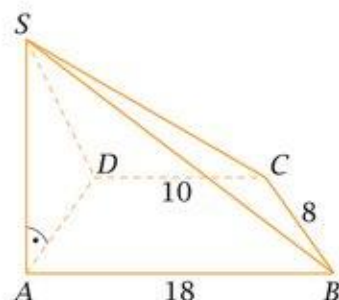
6. W prostopadłościanie przedstawionym na rysunku obok odcięto narożnik płaszczyzną przechodzącą przez punkty K , L , M . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej części prostopadłościanu, która pozostanie po odcięciu narożnika.



7. W stożek, którego wysokość ma długość 8, wpisano walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość walca, wiedząc, że pole powierzchni bocznej stożka wynosi 60π .

8. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o wymiarach 4 i 6. Najkrótsza krawędź boczna jest prostopadła do podstawy, a najdłuższa jest nachylona do podstawy pod kątem 60° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

9. W ostrosłupie przedstawionym na rysunku obok podstawą jest trapez równoramienny, a krawędź SC tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 30° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

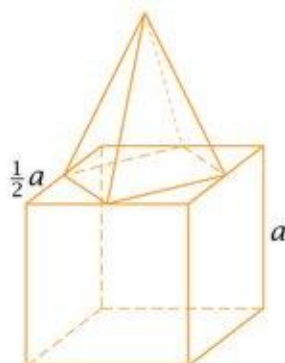


10. Na rysunku obok przedstawiono graniastosłup prawidłowy trójkątny. Przez punkty A , B i X poprowadzono płaszczyznę nachyloną do podstawy graniastosłupa pod kątem 30° . Oblicz:

- pole przekroju,
- miary kątów tego przekroju.

11. Do jednej ze ścian sześcianu doklejono ostrosłup prawidłowy czworokątny w sposób przedstawiony na rysunku obok. Wysokość ostrosłupa jest równa krawędzi sześcianu. Ile wynosi pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły?

- A. $7a^2$ C. $a^2(5 + \sqrt{10})$
 B. $\frac{a^2(11 + 2\sqrt{10})}{2}$ D. $\frac{a^2(11 + 2\sqrt{6})}{2}$



12. W stożek o wysokości równej 6 wpisano kulę o średnicy długości 4. Objętość stożka wynosi:

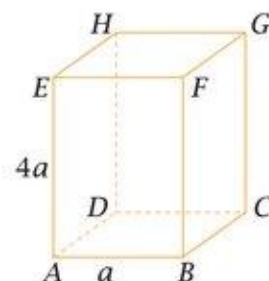
- A. 24π B. 72π C. 16π D. 48π

13. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 1, a kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 120° . Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość:

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. W prostopadłościanie przedstawionym na rysunku obok na krawędzi CG wybrano punkt K . Przez punkty B , D i K poprowadzono płaszczyznę, która utworzyła z podstawą kąt 45° . W jakim stosunku punkt K podzielił krawędź CG ?

- A. 3:1 C. $4\sqrt{2}:1$
 B. 2:1 D. $(4\sqrt{2} - 1):1$

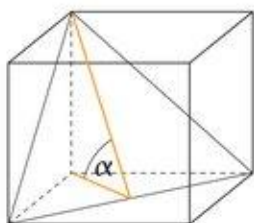
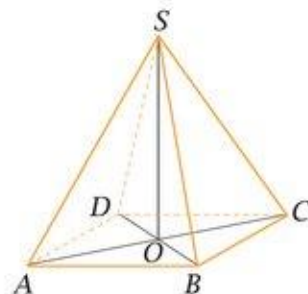


- Я 15.** Dwie statuetki są podobnymi do siebie bryłami wykonanymi z tego samego metalu. Jedna z nich ma dziewięciokrotnie większą powierzchnię od drugiej. Ile waży cięższa statuetka, jeżeli wiadomo, że obie razem ważą 16,8 kg?
- A. 17,5 kg B. 16,2 kg C. 12,6 kg D. 15,12 kg
- Я 16.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego jest czterokrotnie dłuższa od krawędzi podstawy. Znajdź miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy, jeżeli rozpatrywany ostrosłup jest:
- a) trójkątny b) czworokątny c) sześciokątny
- Я 17.** Wyznacz miarę kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, w którym wysokość ściany bocznej jest trzy razy większa od wysokości ostrosłupa.
- Я 18.** Kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę 120° . Wiedząc, że krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość 12, oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość tego ostrosłupa.
- Я 19.** Na wysokości ostrosłupa O obrano punkt P , który podzielił tę wysokość w stosunku 2:3. Przez punkt P poprowadzono płaszczyznę równoległą do podstawy ostrosłupa. Wyznacz stosunek objętości otrzymanego ostrosłupa ściętego do objętości dużego ostrosłupa O .

PRZED MATURĄ

1. Rysunek przedstawia ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$. Kątem między krawędzią CS a płaszczyzną podstawy tego ostrosłupa jest kąt:

- A. DCS C. OSC
B. ACS D. SCB



2. Przekątna podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od wysokości graniastosłupa. Graniastosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i jeden wierzchołek drugiej podstawy (patrz rysunek). Płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą graniastosłupa kąt α o mierze:

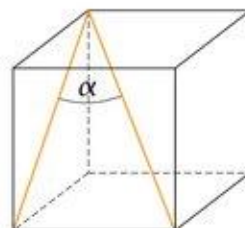
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

3. Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat $ABCD$. Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi. Miara kąta ASC jest równa:

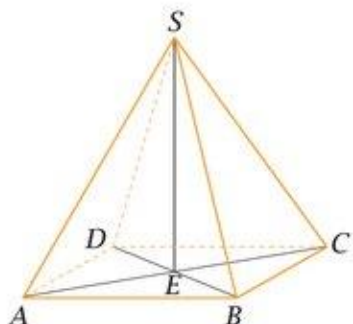
- A. 45° B. 30° C. 75° D. 90°

4. Jeśli α oznacza miarę kąta między przekątną sześcianu a przekątną ściany bocznej tego sześcianu (zobacz rysunek), to:

- A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

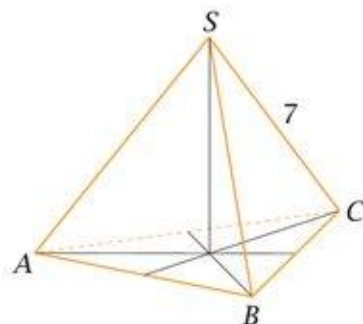


5. Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

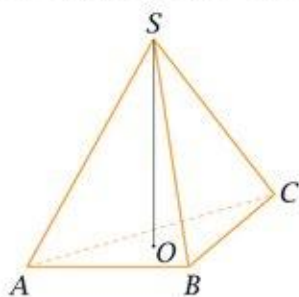


6. Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 3 : 4, a pole jest równe 192 (zobacz rysunek). Punkt E jest wyznaczony przez przecinające się przekątne podstawy, a odcinek SE jest wysokością ostrosłupa. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Oblicz objętość ostrosłupa.

7. Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC . Wysokość SO tego ostrosłupa jest równa wysokości jego podstawy. Objętość tego ostrosłupa jest równa 27. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa $ABCS$ oraz cosinus kąta, jaki tworzą wysokość ściany bocznej i płaszczyzna podstawy ostrosłupa.



8. Trójkąt równoboczny ABC jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$, w którym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° , a krawędź boczna ma długość 7 (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



9. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCS$ krawędź podstawy ma długość a . Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest 2 razy większe od pola jego podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

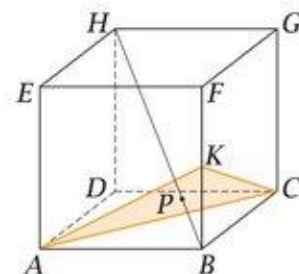
10. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie mają jednakową długość. Wynika stąd, że cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

11. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest 2 razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa.

12. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCD$ o podstawie $ABCD$ wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę 120° . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

13. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Przez wierzchołki A i C oraz środek K krawędzi BF poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną BH w punkcie P (zobacz rysunek). Wykaż, że $|BP| : |HP| = 1 : 3$.



14. W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π , równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty. Oblicz odległość środka S kuli od płaszczyzny π , to jest długość najkrótszego spośród odcinków SP , gdzie P jest punktem płaszczyzny π .

STATYSTYKA

Błąd bezwzględny przybliżenia to wartość bezwzględna różnicy między wartością dokładną a wartością przybliżoną:

$$\text{błąd bezwzględny} = | \text{wartość dokładna} - \text{wartość przybliżona} |$$

Błąd względny przybliżenia to stosunek błędu bezwzględnego do wartości dokładnej:

$$\text{błąd względny} = \frac{\text{błąd bezwzględny}}{\text{wartość dokładna}}$$

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to liczba $\bar{x}$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Dominanta zestawu danych to wartość, która w tym zestawie występuje najczęściej.

Uwaga. Zestaw danych może mieć kilka dominant. Może również nie mieć dominant. (Jeżeli wszystkie wartości w zestawie występują z tą samą częstością, to przyjmujemy, że zestaw nie ma dominanty).

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznacza ciąg liczb, w którym $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, to **medianą** liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy środkowy wyraz w tym ciągu, czyli a_k , gdzie $k = \frac{n+1}{2}$.

Gdy n jest liczbą parzystą, to **medianą** liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów tego ciągu, czyli liczbę $\frac{a_k + a_{k+1}}{2}$, gdzie $k = \frac{n}{2}$.

Aby określić, jak dany wynik wypada względem całego zestawu danych, możemy obliczyć, jaki procent danych jest nie większy od tego wyniku. Gdy dane opisane są w ten sposób, to mówimy, że są przedstawione w **skali centylowej**.

Średnia ważona liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $a_1, a_2, \dots, a_n$ (gdzie $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznaczają liczby dodatnie) to liczba $\bar{x}_w$ obliczana według wzoru:

$$\bar{x}_w = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Odchyleniem standardowym zestawu danych liczbowych $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ , którą obliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

lub ze wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2}$$

gdzie $\bar{x}$ oznacza średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

PRZYBLIŻENIA

✎1. Oszacuj wynik działania, a następnie oblicz dokładny wynik za pomocą kalkulatora oraz określ błąd bezwzględny i względny swojego oszacowania.

- | | | | |
|------------------------|------------------------|----------------------|-----------|
| a) $7,003 + 7,985$ | d) $61,25 - 49,85$ | g) $52,683 + 37,112$ | j) 41^2 |
| b) $5,976 \cdot 6,112$ | e) $49,83 : 7,21$ | h) $8253 - 2179$ | k) 72^2 |
| c) $21,806 : 7,03$ | f) $507,3 \cdot 41,23$ | i) $301 \cdot 302$ | l) 99^3 |

✎2. Oblicz błędy bezwzględny i względny przybliżenia.

- a) Podano, że 1 stycznia 2002 roku w pewnym mieście mieszkało 200 000 osób, chociaż dokładnie miasto liczyło 193 256 osób.
- b) Przyjęto, że ściana o wymiarach $2,45 \text{ m} \times 3,90 \text{ m}$ ma w przybliżeniu powierzchnię równą 10 m^2 .
- c) Przyjęto, że łąka, która ma kształt trapezu prostokątnego o podstawach 200 m i 100 m oraz wysokości 150 m, ma powierzchnię 2 ha.
- d) Akwarium w kształcie prostopadłościanu ma wymiary $2,5 \text{ m} \times 1,2 \text{ m} \times 80 \text{ cm}$. Oszacowano, że zmieści się w nim maksymalnie 2500 litrów wody.
- e) Oszacowano, że odsetki od kredytu w wysokości 5000 zł oprocentowanego 10,5 % w skali roku będą po roku wynosiły 500 zł.

✎3. Oblicz błąd względny przybliżenia.

Lp.	Wartość dokładna	Wartość przybliżona	Lp.	Wartość dokładna	Wartość przybliżona
1	3513 mm	3,5 m	4	0,6357 cm	6,5 mm
2	187,2 dag	1,8 kg	5	823 ml	0,8 l
3	59 s	1 min	6	5372 tys.	5,3 mln

✎4. Zaokrąglaj liczbę do części dziesiątych, do jedności i do dziesiątek. Oblicz błąd względny każdego z otrzymanych przybliżeń.

- a) 515,45 b) 79,82 c) 102,51

✎5. Dywan ma wymiary $6,4 \text{ m} \times 8,2 \text{ m}$.

- a) Zaokrąglaj pole powierzchni tego dywanu do metrów kwadratowych, a następnie oblicz błąd względny dokonanego przybliżenia.
- b) Zaokrąglaj najpierw wymiary dywanu do metrów i oblicz pole powierzchni dywanu dla tak zaokrąglonych wymiarów. Następnie oblicz błąd względny dokonanego przybliżenia.

- ✎ 6. Zaokrąglając liczby 126, 256, 1086, 256536 do dziesiątek, otrzymujemy przybliżenie z takim samym błędem bezwzględnym. Czy możesz odpowiedzieć bez wykonywania obliczeń, w którym wypadku błąd względny jest największy, a w którym — najmniejszy?

- ✎ 7. Poniżej podano kilka liczb oraz ich przybliżenia.

$$a = 2532,79 \approx 2530$$

$$c = 3094,81 \approx 3095$$

$$e = 24,02 \approx 20$$

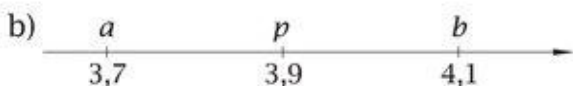
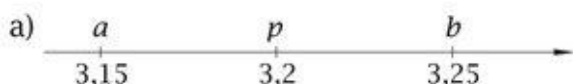
$$b = 27,452 \approx 27,5$$

$$d = 392,9 \approx 400$$

$$f = 5,309 \approx 5,5$$

Wymień, które z tych przybliżeń spełniają warunek:

- jest to przybliżenie z niedomiarem i błąd bezwzględny jest większy od 0,5,
 - jest to przybliżenie z nadmiarem i błąd bezwzględny jest mniejszy niż 1,
 - błąd względny przybliżenia jest większy niż 1%.
- ✎ 8. Przyjrzyj się rysunkowi. Jaki błąd względny popełnimy, gdy liczbę a przybliżymy liczbą p , a jaki — gdy liczbę b przybliżymy liczbą p ?



- ✎ 9. Znajdź liczbę, której przybliżenie wynosi 20, jeśli wiadomo, że:
- jest to przybliżenie z niedomiarem, a jego błąd bezwzględny wynosi 1,5,
 - jest to przybliżenie z nadmiarem, a jego błąd bezwzględny wynosi 2,3,
 - błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 0,05,
 - błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi 1,01.
- ✎ 10. a) Jacek podał, że waży 75 kg, stosując przybliżenie z nadmiarem. Wyznacz błąd względny tego przybliżenia, jeżeli wiadomo, że błąd bezwzględny wynosi 1,1 kg.
 b) Długość szkolnego korytarza przybliżono z niedomiarem do 60 m. Wyznacz błąd względny tego przybliżenia, jeżeli wiadomo, że błąd bezwzględny wynosi 3,4 m.
 c) Koszt remontu pewnego mieszkania oszacowano z nadmiarem na kwotę 15 000 zł. Wyznacz błąd względny tego przybliżenia, jeżeli wiadomo, że błąd bezwzględny jest równy 1230 zł.
- ✎ 11. Waga wykazała, że na samochód załadowano 3 t węgla, chociaż masa tego ładunku wynosiła dokładnie 2995 kg. W laboratorium przyjęto, że porcja pewnej substancji waży 2 g, podczas gdy naprawdę ważyła 2,05 g. W którym z tych przypadków popełniono większy błąd względny?

- ✎ **12.** Piórko strusie waży 7,2 g, a w przybliżeniu podano, że jest to 10 g. Struś waży 126 kg. Jaką masę tego ptaka należałoby podać, aby błąd względny przybliżenia był taki sam jak w wypadku piórka?
- ✎ **13.** a) Przybliżenie z niedomiarem pewnej liczby wynosi 18. Błąd względny przybliżenia jest równy 4%. Znajdź tę liczbę.
b) Znajdź liczbę, której przybliżenie z nadmiarem jest równe 119, jeśli wiadomo, że błąd względny tego przybliżenia jest równy 6,25%.
- ✎ **14.** Podaj, jaki może być:
a) największy możliwy błąd bezwzględny, gdy zaokrąglamy liczbę rzeczywistą do tysięcy,
b) największy możliwy błąd względny, gdy zaokrąglamy liczbę naturalną trzycyfrową do dziesiątek,
c) najmniejszy (różny od zera) błąd względny, gdy zaokrąglamy liczbę dwucyfrową do dziesiątek.
- ✎ **15.** Liczba a' jest przybliżeniem liczby a , liczba b' jest przybliżeniem liczby b (wszystkie te liczby są dodatnie). Błąd bezwzględny obu tych przybliżeń jest jednaki, ale błąd względny jest dwukrotnie większy w wypadku przybliżenia $b \approx b'$. Która liczba jest większa: a czy b ? Ile razy?
- ✎ **16.** Przybliżone wymiary akwarium wynoszą $50 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$. Każdy z tych wymiarów obarczony jest błędem bezwzględnym równym 0,5 cm. Przyjęto, że objętość tego akwarium wynosi 60 litrów. Oblicz największy możliwy błąd względny tego przybliżenia.

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA, MEDIANA, DOMINANTA

- ✎ **17.** Znajdź średnią arytmetyczną, medianę i dominantę danego zestawu liczb.
- 53, 43, 21, 41, 53
 - 4, 5, 4, 9, 47, 101, 9, 51
 - 12, 8, 11, 13, 7, 12, 9, 10, 13, 5
 - 2, 5, 7, 8, 2, 2, 2, 5, 6, 6, 7, 9
 - 11, 8, 8, 10, 12, 11, 14, 21, 8, 8, 8, 10, 22, 34, 12
 - 19, -14, 16, 10, 1, -17, 4, 7, -2, -5, 13, -20, -8, -11

18. W dwóch klasach trzecich pewnego liceum przeprowadzono ankietę, zadając każdej osobie pytanie: „Ile filmów oglądasz miesięcznie w kinie?”. Wyniki ankiety przedstawiono obok.

a) Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby oglądanych filmów dla każdej z tych klas.

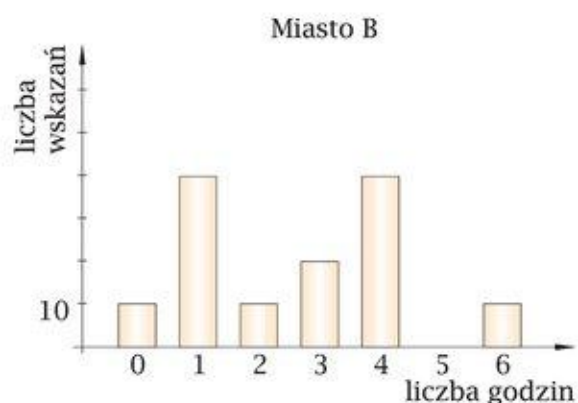
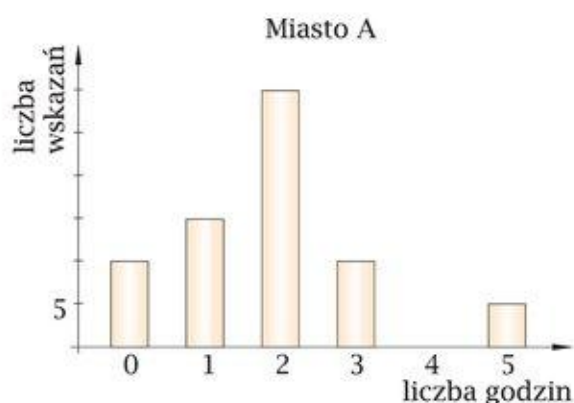
b) Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę dla obu tych klas razem.

c) Przeprowadź tę samą ankietę w swojej klasie i określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby filmów oglądanych miesięcznie.

KLASA III A							
Liczba filmów	0	1	2	3	4	5	6
Liczba wskazań	5	3	3	10	11	2	1

KLASA III B						
Liczba filmów	1	2	4	5	7	8
Liczba wskazań	10	15	3	2	2	1

19. Losowo wybranym osobom w dwóch miastach zadano pytanie: „Ile godzin w tygodniu poświęcasz na uprawianie sportu?”. Wyniki ankiety przedstawione są na diagramach. Określ średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zebranych danych dla każdego miasta i dla obu miast razem.



20. Bilans to bardzo ważne i obowiązkowe badanie. Jego celem jest sprawdzenie, czy dziecko prawidłowo się rozwija w stosunku do całej populacji (z uwzględnieniem płci). Podczas bilansu dziesięcioletka bliźniaki Jacek i Agata uzyskały następujące wyniki dokonanych pomiarów:

	wzrost	centyle	waga	centyle
Jacek	146 cm	75	34 kg	50
Agata	141 cm	50	30 kg	25

- Ile procent dziesięcioletnich chłopców waży co najwyżej 34 kg?
- Ile procent dziesięcioletnich dziewczynek ma co najwyżej 141 cm wzrostu?
- Ile procent dziesięcioletnich chłopców ma wzrost większy niż 146 cm?
- Ile procent dziesięcioletnich dziewczynek waży więcej niż 30 kg?

✎21. Określ średnią arytmetyczną, medianę oraz dominantę opisanego zestawu danych.

a) Wzrost zawodników pewnej drużyny piłki siatkowej:

2,02 m 1,98 m 1,95 m 2 m 1,99 m
2,01 m 1,98 m 2,05 m

b) Wyniki ważenia jedenastu bochenków chleba:

1 kg 1,03 kg 1,05 kg 1,03 kg 0,98 kg 1,05 kg
0,99 kg 0,95 kg 1,05 kg 1,05 kg 0,95 kg

c) Liczba spinaczy w kilkudziesięciu pudełkach:

Liczba pudełek	5	3	15	8	1	3
Liczba spinaczy w pudełku	98	99	100	101	102	103

✎22. W samorządzie uczniowskim pewnego liceum zasiadają uczniowie, których dane o wieku przedstawiono w tabeli.

Wiek	15 lat	16 lat	17 lat	18 lat
Liczba uczniów	4	6	7	3

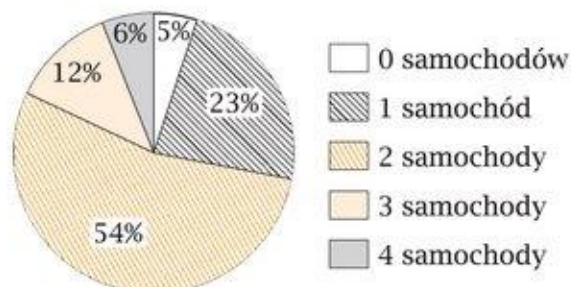
Gdyby uwzględnić również wiek nauczyciela — opiekuna samorządu, to średnia wieku członków tej grupy wzrośnie o 0,55.

a) Ile lat ma opiekun?

b) Ile wynosi mediana członków samorządu uczniowskiego wraz z opiekunem?

✎23. Drużyna piłkarska wraz z zawodnikami rezerwowymi liczy 16 osób. Średnia arytmetyczna wieku wszystkich zawodników wynosi 21,5 roku. Gdyby drużynę opuścił kapitan, to średnia ta wyniosłaby 21 lat. Ile lat ma kapitan?

✎24. W grupie 200 osób przeprowadzono sondę na temat liczby samochodów posiadanych w gospodarstwie domowym. Wyniki sondy przedstawiono na diagramie. Wyznacz średnią arytmetyczną, medianę oraz dominantę tego zestawu danych (zauważ, że niektóre z tych parametrów można wyznaczyć bez przeprowadzania obliczeń).



✎25. Średnia arytmetyczna liczb x , $y+2$, 9 jest równa 12, zaś średnia arytmetyczna liczb $2x$, y , 12 wynosi 16. Wyznacz x i y .

- ✎ **26.** Kamil i Karolina otrzymali w ciągu semestru następujące oceny z zajęć wychowania fizycznego:

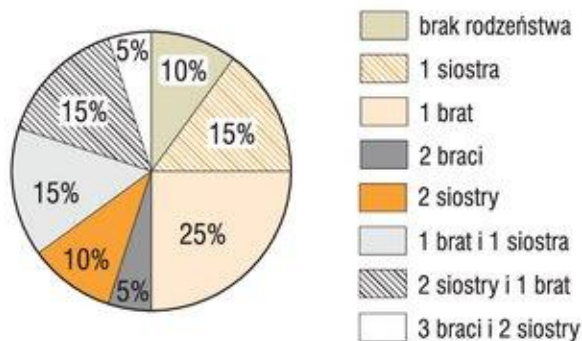
Kamil 3, 6, 4, 3, 5, 5, 4, 3

Karolina 4, 5, 5, 3, 6, 5, 4, 6, 6, 5

a) Nauczyciel wystawia ocenę semestralną na podstawie średniej arytmetycznej ocen cząstkowych zaokrąglonej do całości. Jakie oceny semestralne otrzymają Kamil i Karolina?

b) Oblicz błędy względne przybliżeń dokonanych przy zaokrągleniu ocen semestralnych Kamila i Karoliny.

- ✎ **27.** Na diagramie kołowym przedstawiono informacje o liczbie rodzeństwa 20 uczniów klasy III C. Dla tego zestawu danych znajdź średnią arytmetyczną, medianę i dominantę:



- a) liczby rodzeństwa,
b) liczby braci,
c) liczby sióstr.

- ✎ **28.** a) Średnia arytmetyczna dziesięciu kolejnych liczb naturalnych wynosi 41,5. Wyznacz najmniejszą z tych liczb.
b) Średnia arytmetyczna dziewięciu kolejnych liczb podzielnych przez 9 wynosi 99. Wyznacz największą z tych liczb.
c) Mediana jedenastu kolejnych liczb całkowitych wynosi 3. Wyznacz najmniejszą z tych liczb.
d) Mediana dwunastu kolejnych liczb nieparzystych wynosi 100. Wyznacz największą z tych liczb.
e) Średnia arytmetyczna liczb naturalnych: 31, 16, 25, 29, 27, x jest równa połowie największej z nich. Wyznacz medianę tych liczb.

- ✎ **29.** Uzasadnij, że jeżeli w zestawie danych liczbowych wszystkie liczby wzrosną o 1%, to średnia arytmetyczna również wzrośnie o 1%.

- ✎ **30.** a) Czy mediana dwustu liczb może być równa jednej z tych liczb?
b) Czy średnia arytmetyczna dziesięciu liczb może być większa od dominanty tego zestawu?
c) Jaka może być największa liczba dominant w zestawie piętnastu liczb?
d) Czy średnia arytmetyczna dwudziestu różnych liczb może być równa największej z tych liczb?
e) Czy średnia arytmetyczna stu różnych liczb może być równa najmniejszej z tych liczb?

✎31. Podaj zestaw dziewięciu liczb, dla którego:

- średnia arytmetyczna jest równa 10,5,
- dominanta jest równa 7, a mediana 3,
- średnia arytmetyczna jest mniejsza od dominanty i mediany,
- mediana jest większa od dominanty,
- średnia arytmetyczna i mediana to te same liczby, a dominanta jest liczbą od nich różną.

✎32. Dla każdego zestawu danych podano jego średnią arytmetyczną. Oblicz wartość a . Określ dominantę i medianę tych zestawów danych.

a) $\bar{x} = 8,25$

Wartość x	4	7	9	a
Liczba wskazań	3	8	5	4

c) $\bar{x} = 9,625$

Wartość x	5	6	10	12
Liczba wskazań	a	6	6	$4a$

b) $\bar{x} = 5$

Wartość x	a	4	5	10
Liczba wskazań	3	1	a	2

d) $\bar{x} = 8,2$

Wartość x	2	5	9	10
Liczba wskazań	6	$2a - 1$	a	$5a$

✎33. a) Średnia temperatura w pierwszym tygodniu wakacji wynosiła 21°C , a średnia temperatura w ciągu kolejnych dwóch tygodni wynosiła 30°C . Oblicz średnią temperaturę trzech pierwszych tygodni wakacji.

b) W zarządzie pewnej firmy pracują 3 osoby, które zarabiają przeciętnie 7,5 tys. zł. Oprócz tego w firmie tej pracuje 20 osób w dziale marketingu i 12 osób w dziale technicznym. Średnia płaca w dziale marketingu wynosi 5,3 tys. zł, a w dziale technicznym 3,2 tys. zł. Jaka jest średnia zarobków w tej firmie?

✎34. W ciężarówce przewożono dwa rodzaje paczek. Ładunek ważył razem 4,8 t, a średnia masa paczki wynosiła 16 kg. Większe paczki ważyły średnio po 20 kg, a mniejsze — po 10 kg. Jaka była łączna masa większych paczek?

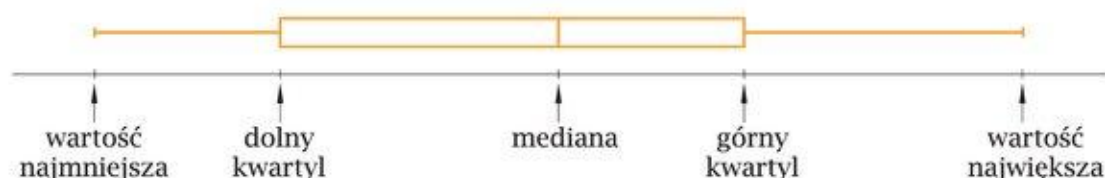
✎35. W pewnej szkole do egzaminu maturalnego z języka angielskiego przystąpiło 250 uczniów.

a) Michał uzyskał na tym egzaminie wynik 72%. Wynik ten odpowiadał 84. centylowi. Ilu uczniów w tej szkole zdobyło wynik lepszy od wyniku Michała?

b) Egzamin uznaje się za zdany, jeżeli uczeń zdobył co najmniej 30% punktów. Ile osób nie zdało egzaminu z języka angielskiego w tej szkole, jeżeli wiadomo, że wynik 29% odpowiada 2. centylowi?

36. Przeczytaj tekst zamieszczony w ramce.

Mediana dzieli zestaw danych na dwie części. Mediany poszczególnych części nazywane są **dolnym kwartylem** (lub pierwszym kwartylem) oraz **górnym kwartylem** (lub trzecim kwartylem). Wartości najmniejsze i największe w zestawie danych oraz kwartyle i medianę danych można przedstawić graficznie za pomocą tzw. **diagramu pudełkowego**.



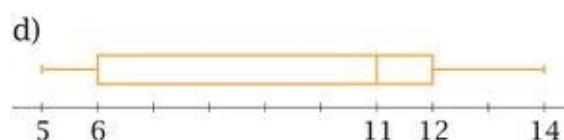
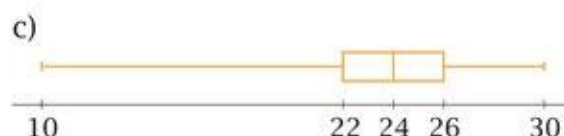
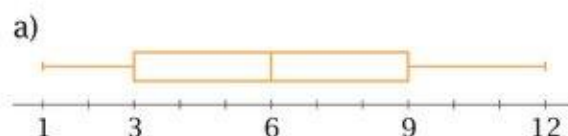
Różnicę między największą a najmniejszą z danych nazywamy **rozstępem danych**. Różnicę między górnym i dolnym kwartylem nazywamy **rozstępem międzykwartylowym**.

Narysuj diagramy pudełkowe odpowiadające poniższym zestawom liczb i oblicz dla każdego z tych zestawów rozstęp danych oraz rozstęp międzykwartylowy.

Zestaw A: 3, 5, 5, 5, 7, 8, 9, 12

Zestaw B: 10, 13, 15, 15, 19, 24, 25, 30, 34, 34, 40, 42, 43, 43, 45

37. Przeczytaj tekst zamieszczony w zadaniu 36. Podaj przykład zestawu danych, którego diagram pudełkowy wygląda tak, jak na rysunku.



38. Przeczytaj tekst zamieszczony w zadaniu 36. Narysuj diagram pudełkowy dla zestawu danych, o którym wiadomo, że:

- największą liczbą jest 55,
- rozstęp danych wynosi 43,
- dolny kwartyl jest liczbą dwa razy większą od najmniejszej wartości,
- rozstęp międzykwartylowy wynosi 15,
- między górnym a dolnym kwartylem jest dziewięć liczb, w tym pięć liczb równych 34.

» **39.** Wiek mieszkańców trzech miejscowości porównano za pomocą diagramów pudełkowych (zob. tekst zamieszczony w zadaniu 36) przedstawionych na rysunku obok.

a) Jakie są mediany wieku mieszkańców w tych miejscowościach?

b) W której miejscowości jest największy rozstęp międzykwartylowy wieku mieszkańców?

c) W której miejscowości jest największy procent dzieci w wieku do 7 lat?

d) W której miejscowości jest największy procent ludzi w wieku powyżej 50 lat?

e) W jakim wieku są najstarsi mieszkańcy tych miejscowości?

f) W których miejscowościach co najmniej 75% osób ma nie więcej niż 40 lat?

Miejscowość A



Miejscowość B



Miejscowość C



» **40.** Gdyby w pewnym zestawie liczb zmniejszyć o 10% najmniejszą z liczb, a największą zwiększyć o 5%, to średnia arytmetyczna by się nie zmieniła. Ile razy największa z liczb jest większa od najmniejszej w tym zestawie?

» **41.** a) Oblicz, dla jakich wartości x i y średnia arytmetyczna liczb: 3, 5, 4, 9, 12, 4, 9, 5, 5, 4, x , y wynosi 6,25, a dominanta jest równa 5.

b) Średnia arytmetyczna zestawu liczb: 1, 3, 7, 4, 9, 10, 2, 4, 8, x , y wynosi 6, a mediana jest równa 5. Oblicz wartości x i y .

c) Dominanta zestawu liczb: 3, 5, 8, 9, 4, 2, 14, 17, x , y wynosi 9, a mediana 7. Znajdź wartości x i y .

» **42.** W pewnym technikum dziewczęta stanowią 40% wszystkich uczniów. Po pierwszym semestrze średnia ocen dziewcząt i średnia ocen chłopców były jednakowe. Na koniec roku średnia ocen dziewcząt wzrosła o 1,2, a mimo to średnia ocen całej szkoły się nie zmieniła. O ile zmniejszyła się średnia ocen chłopców?

ŚREDNIA WAŻONA

» **43.** W tabeli podano liczby i odpowiadające im wagi. Oblicz średnią ważoną tych liczb.

a)

Liczba	7	4	9
Waga	3	1	4

b)

Liczba	1	3	5	7
Waga	6	1	2	1

c)

Liczba	2	5	8	11	10	3
Waga	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3	0,3

d)

Liczba	5	3	9	2	7
Waga	0,5	0,15	0,05	0,2	0,1

✎ 44. a) Podczas pewnego konkursu uczestnicy odpowiadają na dwa zestawy po 10 pytań. Wynik konkursu jest średnią ważoną liczby poprawnych odpowiedzi: liczba poprawnych odpowiedzi na pytania z pierwszego zestawu ma wagę 3, a liczba poprawnych odpowiedzi na pytania z drugiego zestawu — wagę 5. Jaki wynik w tym konkursie uzyskała osoba, która odpowiedziała poprawnie na 3 pytania z pierwszego zestawu i na 7 pytań z drugiego?

b) W zawodach łuczniczych uczestnicy strzelali do tarczy z trzech odległości. Następnie obliczano średnią ważoną wyników tych trzech prób: wynik pierwszego strzelania miał wagę 1, drugiego — miał wagę 2, a trzeciego — miał wagę 3. Oblicz wynik końcowy zawodnika, który w pierwszym strzelaniu uzyskał 10 punktów, w drugim — 7 punktów, a w trzecim — 4 punkty.

✎ 45. W pewnym konkursie kulinarnym jurorzy oceniali pracę drużyn kucharzy i przyznawali punkty w skali od 0 do 10 w czterech kategoriach. Ocena końcowa drużyny to średnia ważona punktów zdobytych w tych kategoriach. W tabeli podano wagi poszczególnych kategorii i wyniki trzech drużyn. Ustal, która z tych drużyn była najlepsza.

Kategoria	Restauracja Sedan	Restauracja Parkowa	Pensjonat Orzeł
Sprawność organizacyjna (waga 0,3)	8	7	8
Utrzymanie czystości na stanowisku pracy (waga 0,1)	2	3	5
Wygląd potrawy (waga 0,2)	9	6	4
Walory smakowe (waga 0,4)	8	8	9

✎ 46. Przyjmijmy, że ocena semestralna to średnia ważona (zaokrąglona do części setnych) następujących liczb: średniej ocen ze sprawdzianów (z wagą 0,25), średniej ocen z klasówek (z wagą 0,55) oraz oceny za pracę na lekcji (z wagą 0,2).

Ocena roczna to zaokrąglona do liczby całkowitej średnia ważona oceny za pierwszy semestr (z wagą 0,35) i oceny za drugi semestr (z wagą 0,65). Wystaw oceny semestralne i oceny roczne uczniom, których wyniki przedstawiono w tabeli.

Nazwisko i imię	I semestr									Ocena za I semestr	II semestr									Ocena za II semestr	Ocena roczna
	Sprawdziany				Klasówki				Praca na lekcji		Sprawdziany				Klasówki				Praca na lekcji		
Dowcipny Jan	2	3	4	2	3	1	4	3		1	3	2	4	2	4	3	4				
Pilna Aneta	5	6	4	5	5	6	6	6		4	4	5	5	3	5	5	6				
Pracowity Adam	4	3	5	4	4	3	4	5		2	3	4	5	4	5	5	5				

- ✎47. a) Ania chce pojechać za granicę, korzystając z oferty last minute. Aby wybrać najlepszą propozycję oferowaną przez biura podróży, sporządziła poniższą tabelę, w której zapisała swoje oceny kilku proponowanych wycieczek, biorąc pod uwagę pięć najważniejszych dla niej kryteriów. Ponieważ kryteria te nie były dla niej jednakowo istotne, przydzieliła im różne wagi. Który wyjazd powinna wybrać?

Kraj	Koszt (z wagą 0,5)	Termin (z wagą 0,2)	Hotel (z wagą 0,1)	Rodzaj transportu (z wagą 0,1)	Wycieczki fakultatywne (z wagą 0,1)
Egipt	6	4	4	9	2
Riwiera Turecka	9	4	7	6	8
Tunezja	8	5	5	6	6
Grecja	5	7	8	7	4

- b) Wojtek chce podjąć sezonową pracę na miesiąc. W tym celu znalazł kilka ofert i sporządził poniższą tabelę. Którą z ofert powinien wybrać?

Firma	Wynagrodzenie (z wagą 0,4)	Czas pracy (z wagą 0,2)	Dyspozycyjność (z wagą 0,2)	Czas dojazdu do pracy (z wagą 0,1)	Samodzielność (z wagą 0,1)
Grosik	10	5	6	8	6
Janex	6	9	8	5	3
Bonix	7	8	6	4	7

- ✎48. W tabeli podano zawartość białka, tłuszczu i węglowodanów w 100 g kilku produktów. Oblicz, ile kilokalorii zawiera 100 g każdego z wymienionych produktów, jeżeli wartość energetyczna tłuszczu wynosi 900 kcal/100 g, białka — 400 kcal/100 g, a węglowodanów — 300 kcal/100 g.

Nazwa produktu	Białko (w g)	Tłuszcze (w g)	Węglowodany (w g)
Ser twarogowy tłusty	18	9	3
Szynka gotowana	23	33	—
Mleko (2%)	3	2	4
Cebula	1	—	6
Czekolada	8	33	55

- ✎49. Wiadomo, że za 1 kg cukierków orzechowych trzeba zapłacić 25 zł, truskawkowych — 21 zł, a za 1 kg cukierków z likierem — 27 zł. Jaka powinna być cena 1 kg mieszanki cukierków, której 30% stanowią cukierki orzechowe, 45% — cukierki truskawkowe, a 25% — cukierki z likierem?

- ✖ **50.** a) Średnia ważona trzech liczb: liczby 5 z wagą 2, liczby 3 z wagą 1 i liczby a z wagą 3 jest równa 3. Znajdź liczbę a .
 b) Średnia ważona trzech liczb: liczby 3 z wagą 1, liczby 5 z wagą 2 i liczby 8 z wagą b jest równa 6. Znajdź liczbę b .
 c) Średnia ważona czterech liczb: liczby 2 z wagą 1, liczby 4 z wagą 3, liczby 5 z wagą 2 i liczby 7 z wagą c jest równa 5. Znajdź liczbę c .
- ✖ **51.** Producent pomidorów sprzedał jednego dnia na giełdzie towarowej 50% przywiezionych pomidorów po 3,50 zł za 1 kg, 30% po 3,20 zł, a resztę tylko po 2 zł za 1 kg. Jaką średnią zapłatę za 1 kg pomidorów otrzymał producent tego dnia?
- ✖ **52.** a) Średnia ważona liczb 5 i 8 jest równa 7. Jaka jest zależność między wagami tych liczb?
 b) Średnia ważona liczb 2 i 7 jest równa 3,5. Jaka jest zależność między wagami tych liczb?
 c) Średnia ważona liczb x i y jest równa z . Jaka jest zależność między wagami tych liczb?
- ✖ **53.** Wyjaśnij, dlaczego średnia ważona zestawu liczb nie może być większa od największej z tych liczb.

ODCHYLENIE STANDARDOWE

- ✖ **54.** Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe zestawu danych.
- | | |
|----------------------|----------------------------|
| a) 4, 3, 7, 12, 15 | c) 1, 2, 2, 1, 6, 1,5, 0,5 |
| b) 5, 8, 2, 13, 4, 4 | d) 54, 12, 32, 78, 23, 17 |
- ✖ **55.** W konkursie wystartowało 15 uczniów klasy III a i 10 uczniów klasy III b. W której z klas wyniki były bardziej wyrównane?
- III a: 23, 22, 30, 12, 45, 47, 49, 28, 17, 3, 18, 24, 44, 48, 40
 III b: 28, 43, 49, 29, 35, 38, 41, 45, 33, 1
- ✖ **56.** Obok podano liczby zdobytych bramek w trzech pierwszych kolejkach meczów polskiej pierwszej ligi piłki nożnej w sezonie 2019/2020. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe liczby bramek w każdej z tych kolejek.
- | |
|--|
| I kolejka: 3, 2, 0, 3, 2, 0, 3, 3, 5 |
| II kolejka: 1, 3, 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1 |
| III kolejka: 3, 5, 2, 3, 3, 5, 3, 3, 8 |

✎57. Zważono jabłka z dwóch koszyków. Oblicz odchylenie standardowe dla każdego z koszyków.

koszyk I: 25 g, 17 g, 28 g, 16 g, 15 g, 17 g, 17 g, 25 g, 29 g, 31 g, 29 g, 18 g, 15 g

koszyk II: 23 g, 23 g, 24 g, 19 g, 21 g, 15 g, 25 g, 24 g, 24 g, 21 g, 25 g

✎58. Z poniższej tabelki można odczytać, w ilu meczach (w regulaminowym czasie i w dogrywce) Mistrzostw Świata w Piłce Nożnej w roku 2018 nie padła ani jedna bramka, w ilu padła jedna bramka, dwie bramki itd. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe liczby bramek.

Liczba bramek	0	1	2	3	4	5	6	7
Liczba meczy	1	15	17	19	5	2	2	3

✎59. W celu obliczenia odchylenia standardowego zestawu n danych obliczono ich sumę S i sumę K kwadratów tych danych. Oblicz to odchylenie standardowe.

a) $n = 10$, $S = 158$, $K = 2590$

b) $n = 20$, $S = 356$, $K = 8684$

c) $n = 100$, $S = 348$, $K = 1296$

✎60. Dwie maszyny pakują pinezki do pudełek. Sprawdzone, ile pinezek znajdowało się w 30 losowo wybranych pudełkach. Wyniki przedstawiono w tabelach.

Maszyna I

Liczba pinezek	48	49	50	51
Liczba pudełek	2	3	5	10

Maszyna II

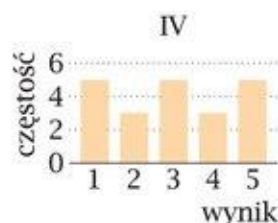
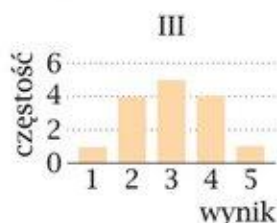
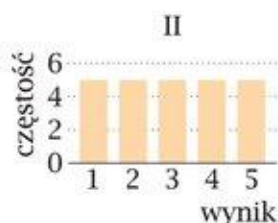
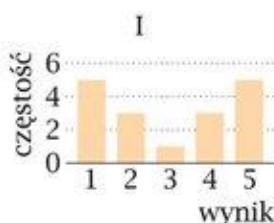
Liczba pinezek	49	50	51	52
Liczba pudełek	7	1	1	1

a) Ile spośród skontrolowanych pudełek było pakowanych przez maszynę I, a ile — przez maszynę II?

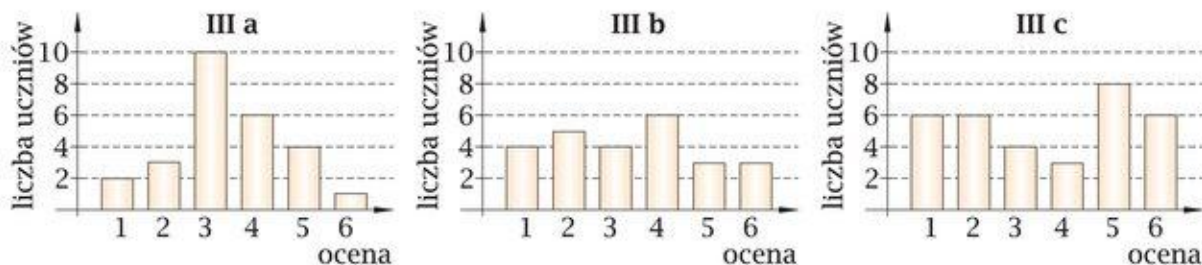
b) W przypadku której z maszyn średnia arytmetyczna liczby zapakowanych pinezek była bliższa 50?

c) W przypadku której z maszyn odchylenie standardowe liczby pakowanych pinezek jest mniejsze?

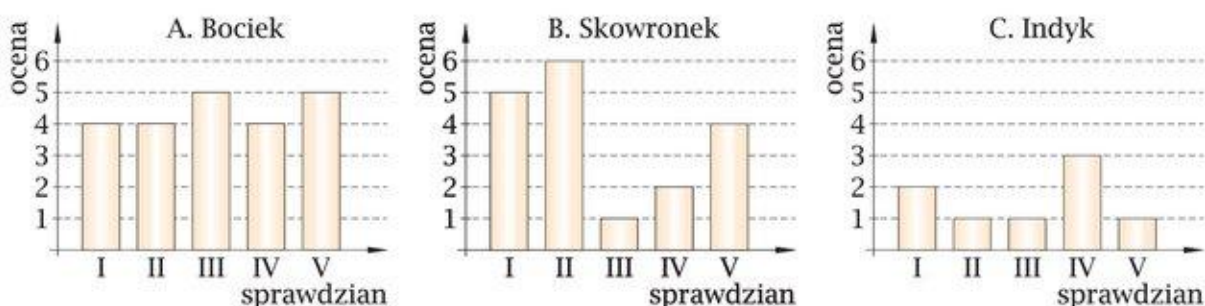
✎61. Bez wykonywania rachunków oceń, który z poniższych diagramów przedstawia zestaw danych o największym, a który — o najmniejszym odchyleniu standardowym. Następnie zweryfikuj swoją odpowiedź za pomocą obliczeń.



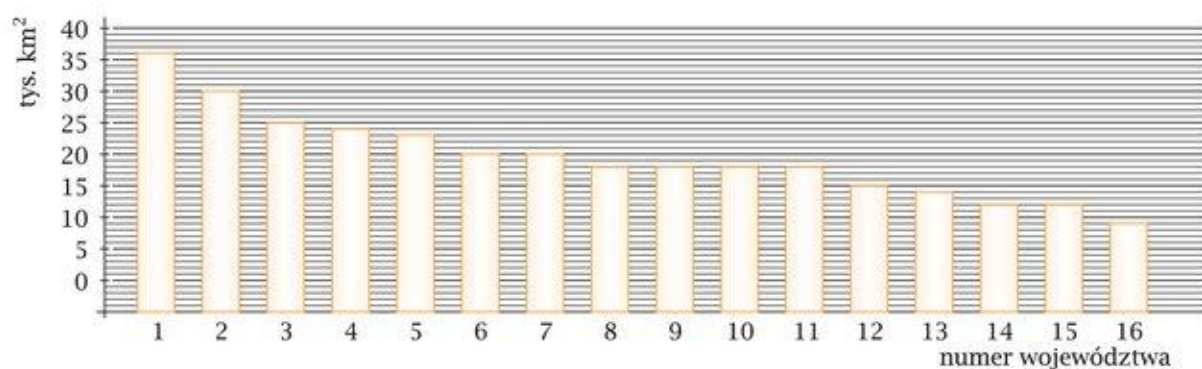
- ✎ **62.** Na diagramie przedstawiono wyniki pewnego sprawdzianu w trzech równoległych klasach liceum. Czy umiesz zgadnąć bez liczenia, w której z nich odchylenie standardowe ocen było największe, a w której najmniejsze? Sprawdź swoje przypuszczenia za pomocą rachunków.



- ✎ **63.** Diagramy przedstawiają oceny z kolejnych pięciu sprawdzianów otrzymane przez trzech uczniów. Oblicz odchylenie standardowe ocen każdego z nich.



- ✎ **64.** Diagram przedstawia powierzchnię województw (z dokładnością do 1000 km²).
- Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tego zestawu danych.
 - Jaki procent województw ma powierzchnię z przedziału $(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$?



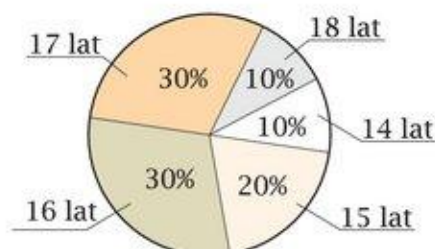
1. mazowieckie
2. wielkopolskie
3. lubelskie
4. warmińsko-mazurskie

5. zachodniopomorskie
6. podlaskie
7. dolnośląskie
8. pomorskie

9. łódzkie
10. kujawsko-pomorskie
11. podkarpackie
12. małopolskie

13. lubuskie
14. śląskie
15. świętokrzyskie
16. opolskie

- ✎ **65.** Do Młodzieżowego Klubu Filmowego należy 20 uczniów. Informacje o ich wieku przedstawiono na diagramie. Oblicz średnią wiek członków tego klubu oraz odchylenie standardowe.



Pensja w zł	Liczba pracowników	
	Firma A	Firma B
1800	7	2
2500	6	2
3500	2	6
5000	2	7
8000	1	—

» **66.** Tabela przedstawia, ilu pracowników w firmie A i ilu w firmie B otrzymuje wynagrodzenie danej wysokości. W której z tych firm średnie wynagrodzenie jest wyższe? W której pensje są bardziej zróżnicowane? Spróbuj odgadnąć odpowiedzi, a następnie sprawdź swoje przypuszczenia, obliczając średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe.

» **67.** Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe długości wyrazów (liczby liter w wyrazach) dla każdego z poniższych fragmentów znanego wiersza Juliana Tuwima *Lokomotywa*.

Fragment 1:

*Już ledwo sapie, już ledwo zipie,
A jeszcze palacz węgiel w nią sypie.*

Fragment 2:

*Buch — jak gorąco!
Uch — jak gorąco!
Puff — jak gorąco!
Uff — jak gorąco!*

Fragment 3:

*Stoi na stacji lokomotywa,
Ciężka, ogromna i pot z niej spływa:
Tłusta oliwa.*

» **68.** Zapisz słowami w dwóch różnych językach liczby od 1 do 10. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe liczby liter zapisanych wyrazów dla poszczególnych języków.

» **69.** Zbierz dane o wynikach w zawodach jakiejś dyscypliny lekkoatletycznej: mistrzostwach kraju czy świata oraz zawodach otwartych dla wszystkich chętnych. W których zawodach odchylenie standardowe wyników jest większe?

» **70.** Bez wykonywania obliczeń ustal, czy odchylenie standardowe powierzchni państw świata byłoby mniejsze, czy większe, gdyby nie wzięto pod uwagę:

- Rosji, Chin, Kanady, Stanów Zjednoczonych i Brazylii,
- Watykanu, Monako i San Marino,
- wszystkich krajów, których powierzchnia różni się od średniej arytmetycznej powierzchni krajów świata o mniej niż 100 000 km².

» **71.** Pewien uczeń, stojąc przy szosie, liczył przejeżdżające samochody i zapisywał, ile ich przejeżdża w ciągu kolejnych minut. Obliczył, że średnia liczba samochodów jadących ze wschodu na zachód była niemal taka sama jak jadących z zachodu na wschód. Jednak odchylenie standardowe było znacznie większe dla samochodów jadących ze wschodu na zachód. Z jednej strony ucznia było skrzyżowanie ze światłami. Czy skrzyżowanie to znajdowało się na wschód czy na zachód od ucznia?

- ✎ **72.** Suma dziesięciu danych jest równa 10, a suma kwadratów tych danych wynosi 11,5.
- Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tych danych.
 - Do tego zestawu danych dołączono dwie o wartości 2 i 3. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tych dwunastu danych.
- ✎ **73.** Średnia arytmetyczna zestawu czterech danych: $-2, 2, x, y$ jest równa 0, a odchylenie standardowe jest równe $\sqrt{\frac{137}{8}}$. Jakie wartości mają x i y ?
- ✎ **74.** Średnia arytmetyczna zestawu czterech danych jest równa 3, a odchylenie standardowe jest równe $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Dwie z tych danych to 2 i 4. Znajdź pozostałe dane.
- ✎ **75.** Na diagramie przedstawiono przybliżone informacje o liczbie osób w gospodarstwach domowych w Polsce w 2018 roku. Jaka była wówczas średnia arytmetyczna liczby osób w gospodarstwie domowym? Jakie było odchylenie standardowe?
- | Liczba osób | Procent |
|-----------------|---------|
| 1 osoba | 22% |
| 2 osoby | 34% |
| 3 osoby | 18% |
| 4 osoby | 16% |
| 5 osób | 6% |
| 6 osób i więcej | 4% |
- Uwaga. Gospodarstwa domowe liczące 6 osób i więcej potraktuj tak, jakby liczyły dokładnie 6 osób.
- ✎ **76.** Jaką liczbę należy dopisać do zestawu liczb 4, 8, 10, 12, aby otrzymany zestaw pięciu liczb miał odchylenie standardowe równe 4?
- ✎ **77.** Jakie dwie liczby należy dopisać do zestawu liczb 2, 5, 6, aby otrzymany zestaw liczb miał średnią arytmetyczną równą 5 i odchylenie standardowe równe 2?
- ✎ **78.** Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb jest równa 10, a odchylenie standardowe jest równe 2.
- Oblicz sumę tych liczb.
 - Oblicz sumę kwadratów tych liczb.
 - Każdą z tych liczb zmniejszono o 5. Oblicz sumę kwadratów tak powstałych liczb.
- ✎ **79.** Suma czterdziestu liczb w zestawie A jest równa 300, a suma kwadratów tych liczb jest równa 5000. Suma sześćdziesięciu liczb w zestawie B jest równa 500, a suma kwadratów tych liczb jest równa 15 000. Oba te zestawy połączono w jeden zestaw liczący 100 liczb. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tego zestawu.

✎80. W tabeli zebrano informacje dotyczące dwóch zestawów danych.

	Liczba danych	Średnia arytmetyczna	Odchylenie standardowe
Zestaw A	10	6	2
Zestaw B	40	5	3

Oba te zestawy połączono w jeden zestaw liczący 50 liczb. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tego zestawu.

✎81. Zestaw danych składa się z n zer i m jedynek. Wykaż, że średnia arytmetyczna tych danych jest równa $\frac{m}{m+n}$, a odchylenie standardowe jest równe $\frac{\sqrt{mn}}{m+n}$.

✎82. Średnia arytmetyczna pewnego zestawu danych jest równa $\bar{x}$, a odchylenie standardowe jest równe s .

a) Do każdej danej tego zestawu dodano liczbę a . Znajdź średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tak powstałego zestawu danych.

b) Każdą daną tego zestawu pomnożono przez liczbę b . Znajdź średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tak powstałego zestawu danych.

✎83. Średnia arytmetyczna pewnego zestawu danych jest równa $\bar{x}$, a odchylenie standardowe jest równe s .

a) Każdą daną tego zestawu pomnożono przez b i do wyniku dodano liczbę a . Znajdź średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tak powstałego zestawu danych.

b) Średnia arytmetyczna pewnego zestawu danych jest równa 5, a odchylenie standardowe jest równe 2. Każdą z tych danych pomnożono przez 6, a następnie dodano do iloczynu 3. Znajdź średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe tak powstałego zestawu danych.

c) Średnia arytmetyczna pewnego zestawu danych jest równa 12, a odchylenie standardowe jest równe 3. Każdą daną x tego zestawu należy zastąpić wynikiem $bx + a$, gdzie a i b są pewnymi liczbami, tak by średnia arytmetyczna zmienionych danych była równa 0, a odchylenie standardowe było równe 1. Znajdź a i b .

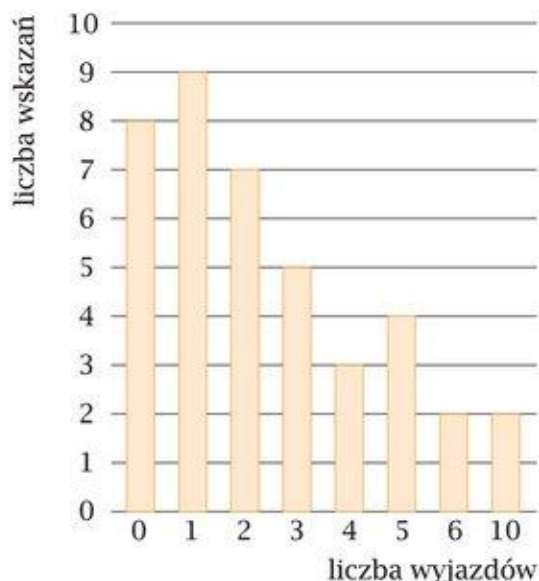
PRZED SPRAWDZIANEM

✎ 1. Liczbę 13,8 przybliżono do 15. Błąd względny tego przybliżenia:

- A. jest równy 1,2
- B. jest większy niż 2%, lecz mniejszy niż 5%
- C. jest większy niż 5%, lecz mniejszy niż 10%
- D. jest większy niż 10%

✎ 2. Losowo wybranych mieszkańców pewnego miasta zapytano o to, ile razy w ciągu minionego roku wyjeżdżali za granicę. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie. Które z podanych zdań jest fałszywe?

- A. Ponad połowa ankietowanych osób była za granicą co najmniej 2 razy w ciągu minionego roku.
- B. Dominanta tego zestawu jest taka sama jak mediana.
- C. Średnia arytmetyczna tego zestawu jest większa od mediany.
- D. Dominanta tego zestawu jest mniejsza od średniej arytmetycznej.



✎ 3. Średnia arytmetyczna zestawu dwunastu liczb jest równa 6,5. Gdyby do tego zestawu dopisano liczbę k , to średnia wyniosłaby 8. Ile wyniosłaby średnia arytmetyczna, gdyby do początkowego zestawu dwunastu liczb zamiast liczby k dopisano liczbę $2k$?

- A. 26
- B. 8
- C. 12
- D. 10

✎ 4. Dominanta zestawu liczb 4, 5, 2, 15, 8, 9, 8, 2, x , y wynosi 2, a średnia arytmetyczna tego zestawu jest równa 6,6. Oznacza to, że:

- A. $x = y$
- B. mediana jest równa 6,5
- C. mediana jest równa 6,6
- D. $x + y = 6$

✎ 5. Średnia ważona trzech liczb: liczby 2 z wagą 3, liczby 5 z wagą 2 i liczby 4 z wagą 5 jest równa:

- A. $3\frac{3}{5}$
- B. $3\frac{29}{30}$
- C. 21
- D. 36

- ✖6. Cztery uczelnie, wybierając kandydatów na studia, obliczają średnią ważoną ich wyników z trzech egzaminów. Wagi przydzielone każdemu z wyników podano w tabeli obok.

Egzamin	Język polski	Język obcy	Matematyka
Uczelnia A	0,2	0,3	0,5
Uczelnia B	0,2	0,4	0,4
Uczelnia C	0,5	0,2	0,3
Uczelnia D	0,6	0,3	0,1

Ada uzyskała na egzaminie 70 punktów z języka polskiego, 90 punktów z języka obcego i 60 punktów z matematyki. Na której uczelni średnia ważona jej wyników jest najwyższa?

- A. na uczelni A B. na uczelni B C. na uczelni C D. na uczelni D

- ✖7. Zestaw *A* danych składa się z czterech liczb: 5, 8, 9, 14. Jeśli usuniemy jedną z nich, to otrzymamy zestaw *B* złożony z trzech danych. Którą daną z zestawu należy usunąć, żeby różnica między odchyleniami standardowymi obu zestawów była jak największa?

- A. 5 B. 8 C. 9 D. 14

- ✖8. Przeliczono zapalki znajdujące w dziesięciu pudełkach. Wyniki przedstawiono w tabeli.

Liczba zapalek	47	48	49
Liczba pudełek	2	3	5

Odchylenie standardowe liczby zapalek w tych dziesięciu pudełkach należy do przedziału:

- A. $(0,5; 0,6)$ B. $(0,7; 0,8)$ C. $(0,9; 1)$ D. $(1,1; 1,2)$

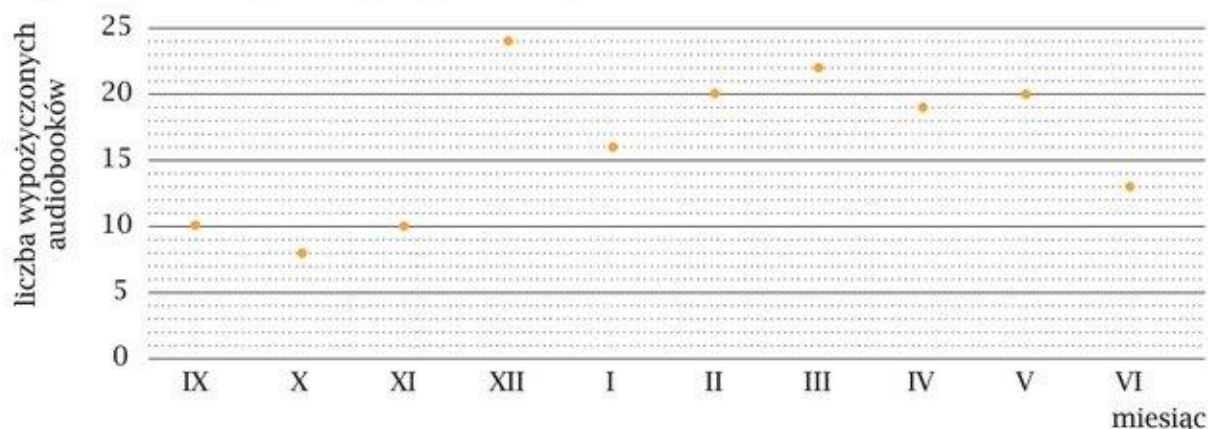
- ✖9. Suma dziesięciu liczb jest równa 41, a suma kwadratów tych liczb jest równa 195. Jakie jest odchylenie standardowe w zestawie tych dziesięciu liczb?

- A. około 1,54 B. około 1,64 C. około 1,75 D. około 3,05

- ✖10. Wzrost Ani oszacowano na 170 cm, a wzrost Michała — na 195 cm. Tymczasem w rzeczywistości Ania mierzy 172 cm i jest o 30 cm niższa od Michała. W przypadku której z tych osób popełniono większy błąd względny przy szacowaniu jej wzrostu?

- ✖11. Liczbę x przybliżono do pewnej wartości. Błąd względny tego przybliżenia wynosi 4,1(6)%, a błąd bezwzględny jest równy 0,12. Wyznacz liczbę x .

- » **12.** Na diagramie przedstawiono, ile audiobooków wypożyczono w pewnej szkolnej bibliotece w poszczególnych miesiącach.



- a) Ile wynosi średnia arytmetyczna, mediana i dominanta miesięcznej liczby wypożyczonych audiobooków?
- b) O ile procent średnia miesięcznej liczby wypożyczonych audiobooków w drugim semestrze jest wyższa od średniej z pierwszego semestru (przyjmij, że pierwszy semestr trwa od września do końca stycznia)?
- » **13.** W pewnym liceum ogólnokształcącym do matury z języka niemieckiego przystąpiło łącznie 25 osób z trzech klas: A, B i C, z czego uczniowie klasy A stanowili 40% zdających. Z klasy C do matury przystąpiło o 3 uczniów więcej niż z klasy B. Średni wynik uczniów klasy B był o 6 punktów procentowych wyższy od średniego wyniku uczniów klasy A i o 2 punkty procentowe niższy od średniego wyniku uczniów klasy C. Średni wynik uzyskany przez wszystkich uczniów wyniósł 78,32%. Oblicz średni wynik z matury uczniów klasy C.
- » **14.** Średnia ważona trzech liczb: liczby 5 z wagą 2, liczby 4 z wagą 3 i liczby 7 z wagą w , jest równa 6. Oblicz wartość w .
- » **15.** Naukowcy zważyli 20 ryb rzadkiego gatunku. Wyniki przedstawili w tabeli.

Masa (kg)	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
Liczba sztuk	3	7	4	5	1

- Następnie postanowili, że dalszym badaniom poddadzą tylko te ryby, których masa w kilogramach należy do przedziału $(\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma)$, gdzie $\bar{x}$ oznacza średnią masę złowionych ryb, a σ — odchylenie standardowe mas złowionych ryb. Ile ryb zostanie poddanych dalszym badaniom?
- » **16.** Średnia arytmetyczna czterech liczb jest równa 7, dominanta jest równa 9, a mediana jest równa 8. Oblicz odchylenie standardowe zestawu tych czterech liczb z dokładnością do części setnych.

PRZED MATURĄ

✎ 1. Liczba 0,3 jest jednym z przybliżeń liczby $\frac{5}{16}$. Błąd względny tego przybliżenia, wyrażony w procentach, jest równy:

- A. 4% B. 0,04% C. 2,5% D. 0,025%

✎ 2. Średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, 9 jest taka sama jak średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, 9, x . Wynika stąd, że:

- A. $x = 0$ B. $x = 3$ C. $x = 5$ D. $x = 6$

✎ 3. Średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, x jest równa n , natomiast średnia arytmetyczna zestawu danych: 2, 4, 7, 8, x , $2x$ jest równa $2n$. Wynika stąd, że:

- A. $x = 49$ B. $x = 21$ C. $x = 14$ D. $x = 7$

✎ 4. Średnia arytmetyczna czterech liczb: $x - 1$, $3x$, $5x + 1$ i $7x$ jest równa 72. Wynika stąd, że:

- A. $x = 9$ B. $x = 10$ C. $x = 17$ D. $x = 18$

✎ 5. Średnia arytmetyczna ośmiu liczb: 3, 5, 7, 9, x , 15, 17, 19 jest równa 11. Wtedy:

- A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = 11$ D. $x = 13$

✎ 6. Jeżeli do zestawu czterech danych: 4, 7, 8, x dołączymy liczbę 2, to średnia arytmetyczna wzrośnie o 2. Zatem:

- A. $x = -51$ B. $x = -6$ C. $x = 10$ D. $x = 29$

✎ 7. Wśród 100 osób przeprowadzono ankietę, w której zadano pytanie o liczbę książek przeczytanych w ostatnim roku. Wyniki ankiety zebrano w poniższej tabeli.

Liczba książek	0	1	2	3	4	5
Liczba osób	23	14	28	17	11	7

Średnia liczba przeczytanych książek przez jedną ankietowaną osobę jest równa:

- A. 0,5 B. 1 C. 2 D. 2,5

✎ 8. Średnia arytmetyczna zestawu danych: x , 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 jest równa 9. Wtedy mediana tego zestawu danych jest równa:

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 16

- » **9.** Abiturient jednego z liceów zestawiał w tabeli oceny ze swojego świadectwa ukończenia szkoły.

Ocena	6	5	4	3	2
Liczba ocen	2	3	5	5	1

Mediana przedstawionego zestawu danych jest równa:

- A. 3 B. 3,5 C. 4 D. 4,5
- » **10.** Mediana zestawu sześciu danych liczb: 4, 8, 21, a , 16, 25 jest równa 14. Zatem:
- A. $a = 7$ B. $a = 12$ C. $a = 14$ D. $a = 20$

- » **11.** W zestawie $\underbrace{2, 2, 2, \dots, 2}_{m \text{ liczb}}, \underbrace{4, 4, 4, \dots, 4}_{m \text{ liczb}}$ jest $2m$ liczb ($m \geq 1$), w tym m liczb 2

i m liczb 4. Odchylenie standardowe tego zestawu liczb jest równe:

- A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{2}$

- » **12.** W tabeli przedstawiono roczne przyrosty wysokości pewnej sosny w ciągu sześciu kolejnych lat.

kolejne lata	1	2	3	4	5	6
przyrost (w cm)	10	10	7	8	8	7

Oblicz średni roczny przyrost wysokości tej sosny w badanym okresie sześciu lat. Otrzymany wynik zaokrąglij do 1 cm. Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia. Podaj ten błąd w procentach.

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	1	0	46°	0,7193	0,6947	1,0355
1°	0,0175	0,9998	0,0175	47°	0,7314	0,6820	1,0724
2°	0,0349	0,9994	0,0349	48°	0,7431	0,6691	1,1106
3°	0,0523	0,9986	0,0524	49°	0,7547	0,6561	1,1504
4°	0,0698	0,9976	0,0699	50°	0,7660	0,6428	1,1918
5°	0,0872	0,9962	0,0875	51°	0,7771	0,6293	1,2349
6°	0,1045	0,9945	0,1051	52°	0,7880	0,6157	1,2799
7°	0,1219	0,9925	0,1228	53°	0,7986	0,6018	1,3270
8°	0,1392	0,9903	0,1405	54°	0,8090	0,5878	1,3764
9°	0,1564	0,9877	0,1584	55°	0,8192	0,5736	1,4281
10°	0,1736	0,9848	0,1763	56°	0,8290	0,5592	1,4826
11°	0,1908	0,9816	0,1944	57°	0,8387	0,5446	1,5399
12°	0,2079	0,9781	0,2126	58°	0,8480	0,5299	1,6003
13°	0,2250	0,9744	0,2309	59°	0,8572	0,5150	1,6643
14°	0,2419	0,9703	0,2493	60°	0,8660	0,5000	1,7321
15°	0,2588	0,9659	0,2679	61°	0,8746	0,4848	1,8040
16°	0,2756	0,9613	0,2867	62°	0,8829	0,4695	1,8807
17°	0,2924	0,9563	0,3057	63°	0,8910	0,4540	1,9626
18°	0,3090	0,9511	0,3249	64°	0,8988	0,4384	2,0503
19°	0,3256	0,9455	0,3443	65°	0,9063	0,4226	2,1445
20°	0,3420	0,9397	0,3640	66°	0,9135	0,4067	2,2460
21°	0,3584	0,9336	0,3839	67°	0,9205	0,3907	2,3559
22°	0,3746	0,9272	0,4040	68°	0,9272	0,3746	2,4751
23°	0,3907	0,9205	0,4245	69°	0,9336	0,3584	2,6051
24°	0,4067	0,9135	0,4452	70°	0,9397	0,3420	2,7475
25°	0,4226	0,9063	0,4663	71°	0,9455	0,3256	2,9042
26°	0,4384	0,8988	0,4877	72°	0,9511	0,3090	3,0777
27°	0,4540	0,8910	0,5095	73°	0,9563	0,2924	3,2709
28°	0,4695	0,8829	0,5317	74°	0,9613	0,2756	3,4874
29°	0,4848	0,8746	0,5543	75°	0,9659	0,2588	3,7321
30°	0,5000	0,8660	0,5774	76°	0,9703	0,2419	4,0108
31°	0,5150	0,8572	0,6009	77°	0,9744	0,2250	4,3315
32°	0,5299	0,8480	0,6249	78°	0,9781	0,2079	4,7046
33°	0,5446	0,8387	0,6494	79°	0,9816	0,1908	5,1446
34°	0,5592	0,8290	0,6745	80°	0,9848	0,1736	5,6713
35°	0,5736	0,8192	0,7002	81°	0,9877	0,1564	6,3138
36°	0,5878	0,8090	0,7265	82°	0,9903	0,1392	7,1154
37°	0,6018	0,7986	0,7536	83°	0,9925	0,1219	8,1443
38°	0,6157	0,7880	0,7813	84°	0,9945	0,1045	9,5144
39°	0,6293	0,7771	0,8098	85°	0,9962	0,0872	11,4301
40°	0,6428	0,7660	0,8391	86°	0,9976	0,0698	14,3007
41°	0,6561	0,7547	0,8693	87°	0,9986	0,0523	19,0811
42°	0,6691	0,7431	0,9004	88°	0,9994	0,0349	28,6363
43°	0,6820	0,7314	0,9325	89°	0,9998	0,0175	57,2900
44°	0,6947	0,7193	0,9657	90°	1	0	—
45°	0,7071	0,7071	1				

WYRAŻENIA WYMIERNE

1. a) $-\frac{1}{3}$, b) -11 , c) 12 , d) $0,149$
2. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{4}{3}, 4\}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, \frac{5}{2}\}$, d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$,
 e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\}$, f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 0\}$, h) $D = \mathbb{R}$,
 i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 2\}$, j) $D = \mathbb{R}$, k) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\sqrt{3}, 0, 3\sqrt{3}\}$, l) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$
3. a) $\frac{2}{3x^3}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, b) $-\frac{3}{4}x^2$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, c) -1 , $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, d) $-\frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 7\}$,
 e) $\frac{2}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}, 0\}$, f) $\frac{2}{x+2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, g) $\frac{4x-2}{x-5}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$, h) $-\frac{1}{x}$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
4. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$, $\frac{4x^2-8x}{4-3x}$, b) $D = \mathbb{R}$, $\frac{6x^4+10x^3}{7x^2+2}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{3}, 0\}$, $\frac{25x-10}{6x^3+14x^2}$,
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{9\}$, $\frac{-8x^4-28x^3}{3x-27}$, e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}, 3\}$, $\frac{3x^2+2x-8}{2x^2-x-15}$, f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\}$,
 $\frac{25x^2+60x+36}{9x^2-25}$, g) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{3x^2+17x-6}{2x^3+2x}$, h) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{5}{2}\}$, $\frac{2x^3+2x^2-x-1}{6x^3-15x^2}$,
 i) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{4}{3}\}$, $\frac{4x^3-2x^2-6x+3}{-15x^3+20x^2}$
5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 8\}$, $\frac{3x-3}{2x-16}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{5}\}$, $\frac{3x^2+6x}{10x-2}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, $\frac{5x-5}{2x+4}$,
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, $\frac{8x+5}{14x^3}$, e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{4}\}$, $\frac{10x^2}{4x-1}$, f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 5\}$, $\frac{x}{4}$,
 g) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $\frac{3x^2+x-10}{4x}$, h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\}$, $\frac{5}{3x^2-2x}$,
 i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $\frac{15x+60}{x+2}$
6. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 0\}$, $\frac{2x^2+7x-4}{x^2+3x}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}, 2\}$, $\frac{15x^2+3x}{x^2-4x+4}$,
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}, 2, 3\}$, $\frac{x-2}{x-3}$, d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -5\}$, $\frac{8x-6}{x+5}$, e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 2\}$, $\frac{2x^2+3x}{x-2}$,
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, -3, \frac{1}{2}\}$, $x+3$, g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}$, $\frac{2x^2+x-1}{x-3}$, h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{3}{2}, -1\}$,
 $\frac{x^2+x-2}{2x+3}$, i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2\}$, $\frac{1}{2x^2-x-6}$
7. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{2x+9}{3x^2}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{2x^2-4x-1}{2x^3}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{20x^2-4x+1}{5x^3}$,
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 4\}$, $\frac{5x+43}{x^2+x-20}$, e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, $\frac{x^2+5x-4}{x^2+x-6}$, f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, \frac{1}{2}\}$,
 $\frac{-x^2+23x}{2x^2+7x-4}$, g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{8x^2+3x+1}{x^2-1}$, h) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{5}, 2\}$, $\frac{26x^2-5}{5x^2-11x+2}$,
 i) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}, 3\}$, $\frac{4x^2-9x+7}{3x^2-10x+3}$
8. a) $\frac{5x+15}{2x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, b) $\frac{-x-4}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, c) $\frac{2x-1}{5}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$,
 d) $\frac{2x-10}{3}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, e) $\frac{x+2}{x-2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, f) $\frac{x+3}{x-3}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, g) $\frac{3}{x^2-x+1}$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, h) $\frac{-x-4}{x^2+3x+9}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
9. a) $\frac{1}{x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$, b) $\frac{x-2}{2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, c) $\frac{x-6}{x-2}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-6, 2\}$, d) $\frac{2-x}{2x+3}$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$, e) $\frac{x-1}{x+3}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$, f) $\frac{x-5}{x+4}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$, g) $\frac{x-1}{x+3}$,
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{2}{3}\}$, h) $\frac{x+2}{3x+1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\}$, i) $\frac{5-x}{2x+14}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-7, \frac{1}{2}\}$
10. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{3x^2+3x+3}{2x^2+1}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 2\}$, $\frac{3x+1}{2x^2+6x}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$, $\frac{2x^3}{x^2+2x+4}$,
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 3\}$, $\frac{-2x+10}{x+1}$, e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -3, 2\}$, $\frac{x^2+2x+4}{3x+12}$,
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 2, 3\}$, $\frac{4-x}{6x+2}$

11. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{1}{3x^3+9x}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$, $\frac{2x^2-3}{4-9x^2}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, $\frac{x+2}{3x+3}$,
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 2\}$, $\frac{4x^2-7x-2}{2x+1}$, e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$, $x^2-2x-15$, f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,
 $\frac{2x-2}{3x^3}$, g) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1, 2\}$, $\frac{x^3+4x^2+x+4}{x^2-x-2}$, h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 3\}$, $x+1$,
 i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$, $\frac{1}{4x}$
12. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, $\frac{2x}{x^2+2}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$, $\frac{x-4}{x^2-x}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 2, 5\}$,
 $\frac{-12x}{x^2-x-20}$, d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 2, 4\}$, $\frac{x+1}{-2x+4}$, e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\}$, $\frac{-x^2-4x}{2x+5}$,
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, 0, \sqrt{5}\}$, $\frac{x^2-5}{4}$
13. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, $\frac{-2x^2-4x+3}{x^2+x}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{-15x}{x^2-9}$, c) $D = \mathbb{R}$, $\frac{-3x^3+11x^2-5x}{x^2-3x+4}$,
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, $\frac{8x^3+19x^2-7}{2x+3}$, e) $D = \mathbb{R}$, $\frac{4x^3-4x^2+3x-5}{x^2+2}$, f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$,
 $\frac{3x^3+9x^2-4x-5}{2x^2-x}$
14. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$, $\frac{3x^2+5}{2x^2-8x}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\frac{15x^2-2x+9}{15x-30}$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\}$, $\frac{-1}{2x+1}$,
 d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1\}$, $\frac{7x^2+4x-1}{2x(x-1)(x+3)}$, e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{6x-5}{x^2-4}$,
 f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$, $\frac{-2x^2+2x}{9x^2-4}$, g) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\frac{3x+1}{(x-3)^2}$, h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, $\frac{-12x+8}{(x+4)^2(x-4)}$,
 i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 1\}$, $\frac{-6x^2+12x-3}{(2x+3)(x-1)}$, j) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2, 3\}$, $\frac{-2x^2+13x-3}{(x-2)(x-3)(x+3)}$,
 k) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 2\}$, $\frac{6x^2+14x+6}{(x+1)(x-2)(x+3)}$, l) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 5\}$, $\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)(x-5)}$
15. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\frac{5x^2+13x+10}{x^2-9}$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{7x^2-13x-22}{x^3+2x^2-4x-8}$,
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{-2x^2-10x}{x^4-2x^2+1}$, d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\frac{3x^2+14x+21}{x^3-8}$
16. a) $m = -\frac{8}{5}$, $n = \frac{4}{5}$, b) $m = -1$, $n = -2$, c) $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$, d) $m = 3$, $n = 5$, e) $m = 7$,
 $n = 2$, f) $m = -2$, $n = -3$
17. a) $m = 1$, $n = 1$, b) $m = 2$, $n = 1$, $p = -3$
18. $\frac{4}{a(a+4)}$
19. a) $x = 0$, b) $x = -\frac{1}{3}$, c) równanie sprzeczne, d) $x = \frac{2}{3}$, e) $x = -3\frac{1}{2}$, f) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -6$,
 g) $x_1 = -1\frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, h) $x = -6$, i) $x = -\frac{1}{3}$, j) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -1$, k) $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{3}{4}$,
 $x_3 = 2$, l) $x_1 = -3$, $x_2 = 1\frac{1}{3}$
20. a) $x = \frac{4}{3}$, b) $x = \frac{4}{7}$, c) $x = -5$, d) $x = \frac{3}{5}$, e) $x = -0,3$, f) równanie sprzeczne, g) $x = 2$,
 h) $x = -1$, i) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$
21. a) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{4}$, b) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, c) $x_1 = \frac{5}{6}$, $x_2 = 1$, d) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, e) $x_1 = -\frac{4}{3}$,
 $x_2 = 3$, f) $x_1 = -1$, $x_2 = 5\frac{1}{2}$
22. a) $x_1 = \frac{1}{7}$, $x_2 = 4$, b) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, c) $x = \frac{11}{21}$, d) równanie sprzeczne, e) $x = 0$,
 f) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{7}{3}$, g) równanie sprzeczne, h) $x_1 = \frac{-3-4\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{-3+4\sqrt{3}}{3}$, i) $x_1 = -\frac{5}{2}$,
 $x_2 = 0$
23. a) równanie sprzeczne, b) równanie sprzeczne, c) $x = 0$, d) $x = 0$, e) równanie sprzeczne,
 f) równanie sprzeczne, g) $x = -4$, h) $x = 2$, i) równanie sprzeczne,
 j) $x = -\frac{3}{2}$, k) $x = 0$, l) $x = 5$
24. a) $x = \frac{4}{3}$, b) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, c) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{3}$, d) równanie sprzeczne, e) $x = \frac{1}{3}$,
 f) $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
25. a) $x = -\frac{3}{2}$, b) równanie sprzeczne, c) $x = 5$

26. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, b) $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$, c) $x_1 = -\frac{7}{2}, x_2 = -2$
27. a) równanie sprzeczne, b) $x_1 = -2, x_2 = 1$, c) $x = \frac{3}{2}$, d) $x_1 = -1, x_2 = 9$, e) $x = -\frac{1}{3}$, f) $x_1 = 1$
28. a) $x = -\frac{1}{7}$, b) równanie sprzeczne, c) $x = \frac{1}{3}$, d) $x = 0$, e) $x_1 = \frac{5-\sqrt{37}}{3}, x_2 = \frac{5+\sqrt{37}}{3}$, f) $x_1 = 1 - \sqrt{3}, x_2 = 1 + \sqrt{3}$
29. a) $x = 6$, b) $x_1 = -\frac{5}{4}, x_2 = -\frac{1}{5}$, c) $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1$, d) $x_1 = -1, x_2 = \frac{4}{21}$, e) $x_1 = -17\frac{1}{2}, x_2 = 10$, f) $x_1 = -\frac{8}{9}, x_2 = 2$
30. a) $x = -12$, b) $x = -\frac{6}{5}$, c) $x_1 = -2, x_2 = 0$, d) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 2$, e) $x_1 = -2 + \sqrt{17}, x_2 = -2 - \sqrt{17}$, f) $x = -1$
31. a) $x = -\frac{1}{3}$, b) $x = -8$, c) równanie sprzeczne, d) równanie sprzeczne, e) $x_1 = \frac{8+\sqrt{37}}{9}, x_2 = \frac{8-\sqrt{37}}{9}$, f) $x = \frac{1}{21}$
32. $p \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \setminus \{2\frac{1}{2}\}$
33. a) $\sqrt{3}+2$ lub $\sqrt{3}-2$, b) 1 lub $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ lub $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, c) $\frac{1}{2}$ i $\frac{5}{2}$
34. a) $x = -2, y = -8$ lub $x = 1, y = 4$, b) $x = 3, y = \frac{3}{2}$ lub $x = -3, y = \frac{3}{4}$
35. 9 kg z pierwszego pojemnika i 3 kg z drugiego pojemnika.
36. Ani — 7,5 godz., Wojtkowi — 5 godz.
37. 0,5 godziny
39. a) $p \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, b) $p \in (-\infty; -12) \cup (0; +\infty)$
40. $p \in (\frac{4}{3}; \frac{3}{2})$
41. $p \in (-1\frac{1}{2}; -1) \cup (0; 1)$
42. a) Jeśli $a = b$ lub $a = -b$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. W pozostałych przypadkach równanie nie ma rozwiązań. b) Jeśli $a = b$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Jeśli $a \neq b$, to równanie ma jedno rozwiązanie ($x = \frac{a+b}{2}$). c) Jeśli $a = -b$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Jeśli $a \neq -b$ i $b \neq 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie ($x = 0$). Jeśli $b = 0$ i $a \neq 0$, to równanie nie ma rozwiązań.
43. a) $x \in (-3; 1)$, b) $x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (2; +\infty)$, c) $x \in (\frac{1}{2}; \frac{5}{4})$, d) $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$, e) $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$, f) $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{3}{4})$, g) $x \in (0; \frac{4}{3})$, h) $x \in (\frac{4}{3}; \frac{7}{5})$
44. a) $x \in (-4; -3) \cup (2; +\infty)$, b) $x \in (-4; 2) \cup (7; +\infty)$, c) $x \in (-6; -4) \cup (1; 5)$, d) $x \in (-4; 1) \cup (2; 6)$, e) $x \in (-5; -2) \cup (5; +\infty) \cup \{-6\}$, f) $x \in (-\infty; -7) \cup (-7; -2) \cup (-2; 1) \cup (8; +\infty)$, g) $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; 4) \cup (9; +\infty)$, h) $x \in (-\infty; -5) \cup (2; 6) \cup (7; +\infty)$, i) $x \in (-3; -2) \cup (-2; 3) \cup (6; +\infty) \cup \{4\}$
45. a) $x \in (-\infty; \frac{2}{3})$, b) $x \in (-\frac{1}{4}; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; 2)$, d) $x \in (3; +\infty) \cup \{0\}$, e) $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$, f) $x \in (-\frac{10}{3}; +\infty) \setminus \{-1\}$, g) $x = -4$, h) $x \in (-\infty; -\frac{5}{3})$, i) $x \in (-\infty; -\frac{3}{4})$, j) $x \in (0; +\infty) \setminus \{3\}$, k) $x \in (-\frac{2}{3}; +\infty) \setminus \{\frac{2}{3}\}$, l) $x \in (-\infty; 0) \setminus \{-2\}$
46. a) $x \in (-\infty; 0)$, b) $x \in (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$, d) $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$, e) $x \in (-1; 0) \cup (0; \frac{4}{3})$, f) $x \in (-5; 2) \setminus \{0\}$, g) $x \in (-2; 0) \cup (0; 3)$, h) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$
47. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{2}{7}; 2)$, b) $x \in (-\frac{7}{8}; -\frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{5}{4}; \frac{1}{2})$, d) $x \in (-\frac{1}{2}; 1) \cup (3; +\infty)$, e) $x \in (\frac{4}{3}; 2) \cup (3; +\infty)$, f) $x \in (-\infty; -10) \cup (0; \frac{5}{2})$, g) $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{2}{13}; \frac{3}{2})$, h) $x \in (-\frac{3}{4}; -\frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, i) $x \in (-\infty; -\frac{7}{2}) \cup (-\frac{5}{8}; \frac{1}{3})$

48. a) $x \in (-\infty; -2) \setminus \{-5\}$, b) $x \in (\frac{4}{5}; +\infty) \setminus \{2\}$, c) $x \in (0; +\infty)$, d) $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$
49. a) $x \in (-1; +\infty)$, b) $x \in (-\frac{4}{3}; -1) \cup (0; +\infty)$, c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, d) $x \in (-2; -\frac{2}{3}) \setminus \{-1\}$
50. a) $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 3)$, b) $x \in (-\frac{3}{2}; 0) \cup (\frac{9}{10}; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$,
 c) $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \setminus \{-4\}$, d) $x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (0; \frac{1}{2})$,
 e) $x \in (\frac{-5-3\sqrt{5}}{5}; 0) \cup (\frac{-5+3\sqrt{5}}{5}; +\infty)$, f) $x \in (-\infty; -5) \cup (-3; 3) \setminus \{0\}$,
 g) $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; \frac{5}{2}) \cup (5; +\infty)$, h) $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}; 3)$,
 i) $x \in (0; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 1)$, j) $x \in (-\infty; -4) \cup (-2; 0) \cup (1; \frac{5}{2})$,
 k) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; -\frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$, l) $x \in (-\infty; 1) \setminus \{-\frac{5}{2}\}$
51. a) dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{1}{2}; +\infty)$, b) dla $x \in (-\frac{3}{2}; \frac{1}{3})$, c) dla $x \in (\frac{1}{2}; +\infty) \setminus \{3\}$,
 d) dla $x \in (-1; 4)$
52. a) $(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}; \frac{7+3\sqrt{5}}{2})$, b) $(-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$, c) 0, 1, 3
53. a) $D = (\frac{2}{3}; +\infty)$, b) $D = (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, c) $D = (-\frac{1}{4}; 3)$, d) $D = (4; 9)$,
 e) $D = (-\infty; -\frac{5}{2}) \cup (-1; +\infty)$, f) $D = (-3; 2)$, g) $D = (-\infty; -8) \cup (-\frac{4}{3}; +\infty)$,
 h) $D = (-\infty; -2) \cup (4-3\sqrt{2}; 1) \cup (4+3\sqrt{2}; +\infty)$, i) $D = (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$
54. a) $D = (-3; -1) \cup (-1; 2)$, b) $D = (-\infty; -3) \cup (1; 2)$, c) $D = (-\infty; -5) \cup (0; 1) \cup (2; 3)$
55. a) $p \in (-4; -2) \cup (0; 2)$, b) $p \in (-\infty; -2) \cup (\frac{7-\sqrt{17}}{8}; \frac{7+\sqrt{17}}{8})$
56. a) $x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0) \cup (0; \frac{1+\sqrt{5}}{2})$,
 c) $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (0; 2)$, d) $x \in (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$
57. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2)$, b) $x \in (-3; \frac{7}{3}) \cup (3; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 1)$
58. a) $x \in (-\frac{3}{2}; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (1-\sqrt{3}; 0) \cup (0; -1+\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}; +\infty)$,
 c) $x \in (-\infty; \frac{-2-\sqrt{10}}{3}) \cup (-\frac{2}{3}; \frac{-2+\sqrt{10}}{3}) \cup (2; +\infty)$
59. a) $x \in (-2; \frac{11-5\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{11+5\sqrt{5}}{2}; +\infty)$, b) $x \in (-3; 1-2\sqrt{3}) \cup (1+2\sqrt{3}; +\infty)$
60. a) $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2+\sqrt{6}}{2}; +\infty)$, b) $x \in (3; 2+\sqrt{3})$
64. a) $n_p = \frac{n}{1-S}$, $n = n_p(1-S)$, $n_p \neq 0$, $S \neq 1$, b) $R_w = \frac{E-IR}{I}$, $R = \frac{E-IR_w}{I}$, $R \neq R_w$, $I \neq 0$,
 c) $R_v = \frac{U_v R_d}{U-U_v}$, $R_d = \frac{R_v(U-U_v)}{U_v}$, $U_v \neq 0$, $R_v \neq 0$, $U \neq U_v$, d) $n = \frac{I_s R_z}{E-IR_w}$, $R_w = \frac{nE-I_s R_z}{nI_s}$,
 $nR_w \neq -R_z$, $nI_s \neq 0$, $I_s R_w \neq E$, e) $n = \frac{I_r R_w}{E-I_r R_z}$, $R_w = \frac{nE-nI_r R_z}{I_r}$, $n \neq 0$, $R_w \neq -R_z n$,
 $I_r R_z \neq E$, $I_r \neq 0$, f) $n = \frac{r_1 r_2}{f(r_1+r_2)} + 1$, $r_1 = \frac{f r_2 (n-1)}{r_2 - f n + f}$, $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $f \neq 0$, $r_1 \neq -r_2$,
 $f n - f - r_2 \neq 0$
71. b) Wskazówka. Zbadaj, jaki warunek muszą spełniać liczby a, b, c ,
 aby $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c} = 0$.
73. Wskazówki. a) Wyrażenie po lewej stronie nierówności można przedstawić w postaci $(a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 + 2a + 1) + 1$. b) Wyrażenie po lewej stronie nierówności można przedstawić w postaci $(a^2 - 4ab + 4b^2) + (b^2 - 4b + 4) + 2$. c) Wyrażenie po lewej stronie nierówności można przedstawić w postaci $\frac{(a^2 + 6ab + 9b^2) + b^2 + 3}{(b^2 - 10ab + 25a^2) + 5a^2 + 5}$. d) Wyrażenie po lewej stronie nierówności można przedstawić w postaci $\frac{(4a^2 - 4ab + b^2) + (4a^2 - 4a + 1)}{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2b + 1) + 1}$.
75. $p \in (-2; 2)$

76. Wskazówki. a) Skorzystaj z tego, że $(a-b)^2 \geq 0$. b) Skorzystaj z nierówności podanej w podpunkcie a). c) Najpierw wykaż, że jeżeli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a} \geq 2$. d) Skorzystaj z nierówności podanych w podpunktach b) i c).
77. a) $x = -1, y = 3$, b) $x = 2, y = -\frac{1}{5}$, c) $x = 0, y = \sqrt{2}$, d) $x = -1, y = 2$, e) $x = 4, y = 3$, f) $x = -4, y = 0$
78. $(1, 2), (1, -1), (1, -\sqrt{2}), (-3, 2), (-3, -1), (-3, -\sqrt{2}), (2, 2), (2, -1), (2, -\sqrt{2})$
79. a) każda funkcja typu $y = \frac{a}{x}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, b) każda funkcja typu $y = \frac{a}{x-3} - 2, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, c) każda funkcja typu $y = \frac{a}{x-5} + 7$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
80. a) I, III, IV, b) I, II, III, IV, c) I, III, IV
81. a) tak, b) nie, c) tak, d) nie
82. a) $(2, 0)$, b) $(0, -\frac{1}{2})$, c) $(0, -4), (-8, 0)$, d) $(0, 2\frac{3}{5}), (4\frac{1}{3}, 0)$
83. ① — ③, ② — ⑥, ③ — ①, ④ — ⑤
84. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{3}{2}; +\infty); m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, b) $x \in (-\infty; -7) \cup (1; +\infty); m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, c) $x \in (\frac{1}{2}; 1\frac{1}{6}); m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, d) $x \in (-\sqrt{2}-2; -\sqrt{2}); m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
85. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; $x_0 = \frac{1}{3}$; funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$; funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; \frac{1}{3})$ i $(1; +\infty)$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$; $x_0 = -2\frac{3}{4}$; funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-3; -2\frac{3}{4})$; funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -3)$ i $(-3; +\infty)$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$; $x_0 = 2\frac{2}{5}$; funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (2; 2\frac{2}{5})$; funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 2)$ i $(2; +\infty)$, d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{4\}$; $x_0 = -1\frac{3}{4}$; funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty; -2) \cup (-1\frac{3}{4}; +\infty)$; funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -2)$ i $(-2; +\infty)$, e) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; $x_0 = 1$; funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 3)$ i $(3; +\infty)$, f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $x_0 = -1\frac{3}{4}$; funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-1\frac{3}{4}; -1)$; funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -1)$ i $(-1; +\infty)$
86. a) $y = \frac{-3}{4(x+3)} + 1$, b) $y = \frac{-3}{4(x-3)} + 2$, c) $y = \frac{-3}{4(x-2)} - 3$
87. a) $y = \frac{-10}{x+5} + 1$, b) o 2 jednostki w lewo i o 4 jednostki w górę
88. a) $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, b) $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}), (-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$, c) $(\sqrt{5}, -\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, d) $(\frac{1}{10}, -\frac{1}{10}), (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$
89. $(2, -2), (-2, 2), y = -x, y = x$, a) $(3, 1), (-1, 5), y = x + 2, y = -x + 4$, b) $(-5, -7), (-9, -3), y = x + 2, y = -x - 12$
90. a) $(-4, -3), (2, 3)$, b) $(0, 5), (6, -1)$, c) $(-4, -2), (-6, -4)$, d) $(\sqrt{5}+2, -\sqrt{5}-1), (-\sqrt{5}+2, \sqrt{5}-1)$
91. a) $y = x + 2, y = -x - 2$, b) $y = x - 1, y = -x - 1$, c) $y = x + 2, y = -x + 4$, d) $y = x + 8, y = -x + 2$
92. a) $P = 8\pi$, b) $P = 36$ lub $P = 72$
93. a) $(-\frac{1}{3}, -1)$, b) $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, 3)$, c) $(\frac{3}{8}, -\pi)$
94. a) $7\frac{1}{2}$, b) $2\frac{2}{3}$, c) $3\frac{3}{4}$, d) $1\frac{7}{8}$
95. $y = \frac{-16}{x+2} + 3$
96. $y = \frac{3}{x-1} - 3$

97. $y = \frac{-1}{x+3} + 4$
98. $1\frac{1}{2}$
100. a) $y = \frac{3}{x} + 2$, b) $y = \frac{-1}{x} + 4$, c) $y = \frac{1}{x+3} + 1$, d) $y = \frac{-4}{x-2} - 1$, e) $y = \frac{-2}{x+4} + 3$,
f) $y = \frac{2}{x+3} - 4$
101. a) $x = 0$, $y = -2$, b) $x = 1$, $y = 1$, c) $x = 3$, $y = 2$, d) $x = -5$, $y = -3$, e) $x = -2$, $y = 5$,
f) $x = 4$, $y = -1$
102. a) $(0, 5)$, b) $(0, -3)$, c) $(-3, 2)$, d) $(-2, -4)$, e) $(\frac{1}{2}, 2)$, f) $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$
103. a) $x = -1$, $x = 3$, b) $x = 0$, $x = -4$, c) $x = 4$, d) $x = -\frac{1}{2}$, e) $x = -5$, f) $x = -4$, g) $x = 0$,
h) $x = -4$, i) $x = \frac{2}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$, j) $x = 0$, $x = 1$
105. dla $m = \frac{1}{3}$ nie mają punktów wspólnych, a dla $m \neq \frac{1}{3}$ mają jeden punkt wspólny
106. dla $k = -\frac{4}{5}$ nie mają punktów wspólnych, a dla $k \neq -\frac{4}{5}$ mają jeden punkt wspólny
107. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$; $(0, 0)$, b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$; zbiór wartości:
 $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{4}\}$; $(0, -\frac{5}{6})$, $(\frac{5}{3}, 0)$, c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$; $(0, -\frac{2}{3})$, $(\frac{2}{5}, 0)$,
d) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$; $(0, 2)$, $(-8, 0)$
108. a) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 5)$ i $(5; +\infty)$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,
b) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; \frac{1}{2})$ i $(\frac{1}{2}; +\infty)$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$,
c) funkcja jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; -\frac{2}{3})$ i $(-\frac{2}{3}; +\infty)$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$,
d) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 2)$ i $(2; +\infty)$; zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$
109. a) $(2, -1)$, $(-2, -5)$, $y = x - 3$, $y = -x - 3$, b) $(\sqrt{5} + 3, \sqrt{5})$, $(-\sqrt{5} + 3, -\sqrt{5})$, $y = x - 3$, $y = -x + 3$,
c) $(-3, 1)$, $(-5, 3)$, $y = x + 6$, $y = -x - 2$, d) $(\frac{3+\sqrt{11}}{2}, \frac{-5-\sqrt{11}}{2})$, $(\frac{3-\sqrt{11}}{2}, \frac{-5+\sqrt{11}}{2})$, $y = x - 4$,
 $y = -x - 1$
110. a) $x = -2$, $y = 2$, b) $(0, 1)$
111. a) $(\sqrt{6}, \sqrt{6} - 2)$, $(-\sqrt{6}, -\sqrt{6} - 2)$, b) $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3} + 2)$, $(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} + 2)$, c) $(1, 5)$, $(-\frac{5}{4}, \frac{1}{2})$,
d) $(-3, -12)$, $(-\frac{1}{13}, \frac{2}{3})$, e) $(3 - \sqrt{10}, \frac{1-\sqrt{10}}{3})$, $(3 + \sqrt{10}, \frac{1+\sqrt{10}}{3})$, f) $(\frac{3}{2}, 1)$, g) $(5, 0)$,
h) $(-2, 5)$, $(1, -4)$, $(3, 0)$
112. a) $x \in (-\infty; \frac{5}{3}) \cup (3; +\infty)$, b) $x \in \langle -1 - \sqrt{6}; -2 \rangle \cup \langle -1 + \sqrt{6}; +\infty \rangle$,
c) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; 7)$, d) $x \in (-\infty; -6 - \sqrt{10}) \cup (-4; -6 + \sqrt{10})$,
e) $x \in \langle -\frac{\sqrt{10}}{2}; -1 \rangle \cup \langle \frac{\sqrt{10}}{2}; 2 \rangle$, f) $x \in \langle -\frac{2}{3}; 0 \rangle \cup \langle \frac{2}{3}; 2 \rangle$
113. Wskazówka. Wyznacz z równania zmienną y .
114. a) $a = 2$, $b = 4$, $c = -1$, b) $a = -4$, $b = -1$, $c = 2$, c) $a = 3$, $b = -6$, $c = 2$
116. $f: (0, 0)$, $g: (0, -\frac{4}{9})$, $h: (0, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{3}, 0)$, $k: (0, -2)$, $l: (0, -4)$, $(2, 0)$, p : brak punktów przecięcia; g, k
117. a) $a = 0$, $b = -1$, b) $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, c) $a = 1$, $b = 2$, d) $a = 2$, $b = 0$, $c = 4$,
e) $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$, $d = 0$, f) $a = -5$, $b = 6$, $c = -5$, $d = 4$
118. a) nie, $D_f \neq D_g$, b) tak, c) nie, $D_f \neq D_g$, d) tak, e) tak, f) nie, $D_f \neq D_g$, g) nie,
h) nie, $D_f \neq D_g$
119. a) dla $m \in (-2; 2)$, b) dla $m \in \langle 0; 4 \rangle$

121. a) każda funkcja typu $y = \frac{a}{x-3} + a - 1$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, b) każda funkcja typu $y = \frac{a}{x+2}$, gdzie $a \in (-\infty; 0)$, c) każda funkcja typu $y = \frac{a}{x-1} + \frac{a}{4}$, gdzie $a \in (0; +\infty)$ lub typu $y = \frac{a}{x+3} - \frac{a}{4}$, gdzie $a \in (-\infty; 0)$
122. a) funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$, funkcja jest rosnąca w przedziale $(-1; +\infty)$, b) funkcja jest malejąca w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$, c) funkcja jest malejąca w $\mathbb{R}$, d) funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$, funkcja jest malejąca w przedziale $(-3; +\infty)$
124. dla $m \in (\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$
125. dla $p \in (0; 3) \cup (4; +\infty)$
126. Ⓐ – f_2 , Ⓑ – f_3 , Ⓒ – f_1 , Ⓓ – f_4
127. a) $a = -2$, b) $m \in (\frac{1}{4}; 4)$, c) $p \in (-6; -2) \cup (2; 6)$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. D
2. C
3. B
4. B
5. B
6. A
7. B
8. D
9. C
10. B
11. D
12. A
13. $\frac{5}{6}$ lub $\frac{6}{5}$
14. Brak punktów wspólnych, gdy prosta leży na jednej z osi układu współrzędnych lub ma współczynnik kierunkowy ujemny; dwa punkty wspólne, gdy współczynnik kierunkowy prostej jest dodatni.
16. B
17. A
18. C
19. C
20. B
21. A
22. C
23. D
24. D
25. C
26. $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$
27. $(1; -2), (3, 0)$
28. $x \in (-\infty; 0) \cup (1\frac{1}{2}; 2) \cup (6; +\infty)$
29. $y = (-3 - 2\sqrt{2})x - 2 - 2\sqrt{2}$ lub $y = (-3 + 2\sqrt{2})x - 2 + 2\sqrt{2}$ lub $x = -1$ lub $y = 1$

PRZED MATURĄ

1. A
2. A
3. D
4. C
5. D
6. B
7. C
8. D
9. C
10. B
11. D
12. $x_1 = 4, x_2 = \frac{4}{3}$
13. $x_1 = 2, x_2 = 0,5$
14. $x_1 = 1, x_2 = -0,5$
15. $x = -2$

CIĄGI

1. a) $a_{10} = 10$, b) $a_3 = 9$, c) $a_7 = 44$, d) $a_8 = 2\frac{1}{8}$, e) $a_1 = -\frac{1}{2}$, f) $a_5 = 9$
2. a) $n-2; n; 2n$, b) $n^2-2n+6; n^2+2n+6; 4n^2+4n+6$, c) $\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n+4}; \frac{1}{2n+4}$, d) $-2n+3; -2n-1; -4n-1$, e) $2^{n-2}+3; 2^n+3; 2^{2n}+3$, f) $(-1)^{n-1}; (-1)^{n+1}; -1$
3. a) $a_4 = 5,5, a_5 = 5,25$, b) $a_4 = 4, a_5 = 5$, c) $a_4 = 25, a_5 = 125$, d) $a_4 = 1, a_5 = \frac{1}{3}$, e) $a_4 = 0, a_5 = -7$, f) $a_4 = 24, a_5 = 384$
4. a) tak; a_{95} , b) tak; a_5 , c) nie, d) tak; a_6 , e) tak; a_{10} i a_{30} , f) nie
5. a) $a_1, a_2, \dots, a_{20}, a_{21}$, b) $a_{57}, a_{58}, a_{59}, \dots$, c) $a_{27}, a_{28}, a_{29}, \dots, a_{40}$
6. a) a_{19} i wszystkie wyrazy po nim następujące, b) sześć początkowych wyrazów, c) $n < 40$
7. a) $a_8 = \frac{3}{5}$, b) $a_2 = -2, a_{12} = 0, a_{15} = \frac{3}{5}$, c) $a_3 = 0$, d) $a_1 = -2, a_9 = 0, a_{27} = \frac{3}{5}$
8. a) rosnący, b) niemonotoniczny, c) malejący, d) rosnący, e) rosnący, f) rosnący, g) stały, h) malejący, i) niemonotoniczny, j) niemonotoniczny
9. a) rosnący, b) malejący, c) malejący, d) niemonotoniczny, e) malejący, f) niemonotoniczny
10. a) rosnący, b) malejący, c) ani rosnący, ani malejący, d) rosnący, e) ani rosnący, ani malejący, f) ani rosnący, ani malejący
12. a) np. 5, 5, 5, 5, 6, 6, ..., b) np. 2, 3, 4, 5, 1, 2, ..., c) np. 1112131415, 161718192021, 22232425262728, ..., d) np. 714, 816, 918, 1020, 1122, ...
13. a) rosnące: 1, 2, 3; 1, 2, 4; 1, 3, 4; 2, 3, 4, malejące: 3, 2, 1; 4, 2, 1; 4, 3, 1; 4, 3, 2, stałe: 1, 1, 1; 2, 2, 2; 3, 3, 3; 4, 4, 4, b) 6; 27
14. a) np. $a_n = 2n-1$, b) np. $a_n = 2^n$, c) np. $a_n = (-2)^n$, d) np. $a_n = -\frac{n}{n+1}$, e) np. $a_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}}$, f) np. $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$
15. a) $p_2 = 4; p_3 = 1; d_1 = 4; d_5 = 1$, b) np. $n = 5$, c) 5, d) dla $n = 1, n = 2, n = 7$
16. a) $a_m = \frac{m+1}{3}, a_{n-1} = \frac{n}{3}, a_{2k+5} = \frac{2k+6}{3}$, b) $a_{n-4} = \frac{n-3}{3}, a_{n-3} = \frac{n-2}{3}, a_{n-2} = \frac{n-1}{3}$, c) $a_{2n} = \frac{2n+1}{3}, a_{2n+1} = \frac{2n+2}{3}$

17. a) tak, piątym, b) tak, trzecim lub czwartym, c) nie, d) tak, piątym, e) nie, f) tak, trzecim
18. a) $s = 1, t = -1$, b) $s = -2, t = 1$, c) $s = 1, t = -2$
19. a) $a_1, a_2, a_3, a_6, a_7, a_8$, b) a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 , c) a_2, a_3, a_4 , d) $a_4, a_5, a_6, \dots$
21. a) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_{10} = 4$, b) $a_1 = -1, a_2 = 1, a_{10} = 17$, c) $a_1 = 2, a_2 = -1, a_{10} = -\frac{1}{45}$,
d) $a_1 = \sqrt{3}, a_2 = 2 - \sqrt{3}, a_{10} = 2\sqrt{3} - \sqrt{11}$
22. a) $a_{1000} = -3$, b) $a_{1000} = \frac{1}{5}$, c) $a_{1000} = -1$, d) $a_{1000} = 1$
24. a) np. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 1; a_n = n$, b) np. $a_1 = 8, a_{n+1} = a_n - 1; a_n = 9 - n$,
c) np. $a_1 = \frac{1}{8}, a_{n+1} = \frac{a_n}{3}; a_n = \frac{1}{8 \cdot 3^{n-1}}$, d) np. $a_1 = 7, a_{n+1} = \frac{a_n}{2}; a_n = \frac{7}{2^{n-1}}$
25. a) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 1$, b) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2$, c) $a_1 = 1\frac{1}{2}, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$, d) $a_1 = 2$,
 $a_{n+1} = 2a_n$, e) $a_1 = 4, a_{n+1} = 4a_n$, f) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$
26. a) tak, malejący, b) nie, c) nie, d) nie
27. a) rosnący, b) rosnący, c) malejący, d) rosnący
28. a) rosnący, b) malejący, c) malejący, d) rosnący, e) malejący, f) malejący, g) malejący,
h) rosnący, i) rosnący, j) malejący, k) malejący, l) rosnący
30. a) malejący, b) rosnący, c) nie można ustalić monotoniczności, d) rosnący
31. a) np. $a_n = \frac{n}{2^n}$, b) np. $a_n = \frac{2}{3^n}$, c) np. $a_n = \frac{n}{n+1}$, d) np. $a_n = \frac{n}{2^n}$
32. a) np. $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2$, b) np. $a_1 = 1, a_{n+1} = 10^n + a_n$,
c) np. $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n} + 1$, d) np. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$
33. a_4
36. a) malejący, b) rosnący, c) stały, d) niemonotoniczny
37. a) ciąg nie jest rosnący, malejący ani stały, b) malejący, c) stały
38. a) rosnący, b) stały, c) rosnący, d) niemonotoniczny
39. a) (a_n) — malejący, (b_n) — malejący, (c_n) — malejący, (d_n) — malejący, (e_n) — stały
40. a) $p < 0$, b) $p < 0$, c) $p \neq 0$
42. a) 5, 17, 257, 65 537 (Uwaga. Ze wzoru Fermata otrzymujemy liczbę pierwszą (3), również gdy $n = 0$)
43. a) $r = 3, a_3 = 21, a_4 = 24$, b) $r = -11, a_3 = -13, a_4 = -24$, c) $r = 10, a_3 = 21$,
 $a_4 = 31$, d) $r = -\frac{7}{16}, a_3 = -\frac{15}{16}, a_4 = -\frac{22}{16}$, e) $r = 0,5, a_3 = -0,7, a_4 = -1,2$, f) $r = -0,09$,
 $a_3 = -0,08, a_4 = -0,17$
44. a), b), d), f), h) — tak, c), e), g) — nie
45. $a_{100} = 119, b_{100} = -139\frac{1}{2}, e_{100} = -195\sqrt{2}, f_{100} = 174,7$
46. a) tak, $a_1 = -4, r = 1$, b) tak, $a_1 = 0, r = 1$, c) nie, d) nie, e) tak, $a_1 = 1, r = 1\frac{1}{2}$,
f) nie
47. a) 7, 10, 13, $a_n = 3n + 4$, b) -5, -2,5, 0, $a_n = 2,5n - 7,5$, c) -3,2, -3,4, -3,6, $a_n = -3 - 0,2n$,
d) $\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, a_n = \frac{7}{6} - \frac{1}{3}n$
48. a) $a = 1, b = \frac{3}{4}$, b) $a = 13, b = 1$, c) $a = 9\frac{1}{2}, b = 16\frac{1}{2}$, d) $a = 10, b = 13$, e) $a = -5$,
 $b = -4$, f) $a = \frac{1}{12}, b = \frac{7}{12}$
49. a) $a_n = 2n + 6, a_{18} = 42$, b) $a_n = -n + 8, a_{18} = -10$, c) $a_n = \frac{1}{17}n + 149\frac{16}{17}, a_{18} = 151$,
d) $a_n = 2003, a_{18} = 2003$, e) $a_n = -500n + 1000, a_{18} = -8000$, f) $a_n = -\frac{1}{2}n + 200\frac{1}{2}$,
 $a_{18} = 191,5$
50. a) $a_n = 2n + 6, a_{10} = 26$, b) $a_n = -10n + 17, a_{10} = -83$, c) $a_n = 0,25n - 0,05, a_{10} = 2,45$,
d) $a_n = \frac{1}{4}n + \frac{1}{12}, a_{10} = \frac{31}{12}$, e) $a_n = 0,55n - 1,35, a_{10} = 4,15$, f) $a_n = -0,65n + 2,65$,
 $a_{10} = -3,85$

51. a) dwunastym, b) osiemnastym, c) szesnastym, d) jedenastym
52. a) $a_{11} = 50$, b) $a_{11} = 8$, c) $a_{11} = 7,5$
53. a) $a_n = 1,5n + 3,5$, $a_6 = 12,5$, b) $a_n = -2,75n + 53,25$, $a_6 = 36,75$, c) $a_n = -0,1n + 1,1$, $a_6 = 0,5$, d) $a_n = -0,25n + 32,25$, $a_6 = 30,75$, e) $a_n = 20n - 90$, $a_6 = 30$, f) $a_n = 0,2n + 1,8$, $a_6 = 3$
54. a) a_{20} , b) a_{15} , c) a_5
55. a) $3\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$, b) $-7\frac{1}{4}$, $-4\frac{1}{2}$, $-1\frac{3}{4}$
56. $a_1 = -2$, $a_{10} = 25$
57. a) $p = 1$, b) $p = a + c - 2b$
58. a) $a_{100} = -3$, b) $a_{11} = 0$, c) $a_{16} = 23$, d) $a_{40} = 30$
59. 4
60. a) dla $x = -\frac{8}{3}$, b) dla $x \in \mathbb{R}$, c) dla $x = 0$ lub $x = 4$, d) nie istnieje taki x
61. a) rosnący, b) malejący, c) malejący, d) rosnący
62. a) dla $x > -4$, b) $a_4 = 63$, c) $a_{11} = 67$ ($x = 2$) lub $a_{11} = 34$ ($x = -1$)
63. a) -10 , b) 28 ($x = 5$, $y = 4$), c) 14 ($x = -6$, $y = 11$)
64. a) $a_5 = 37$, b) $S_7 = 56$
65. -9 , -4 , 1
66. $a_1 = 3$, $r = -2$ lub $a_1 = -1,5$, $r = 2,5$
67. $a_4 = 8$ lub $a_4 = -4$
69. a) można, b) nie można
76. Wskazówka. Można przyjąć bez ograniczania ogólności dowodu, że $m < n$ albo $n < m$.
77. $a_7 = -5$
78. b_3
79. a) nie ma takich wartości, b) dla $x = 3 + 2\sqrt{3}$, c) dla $x = 2 + \sqrt{5}$
80. a) dla $x = \log_2 3$, $r = \log \frac{3}{2}$, b) dla $x = \log_2 5$, $r = \log 2$, c) dla $x = \log_2 5$, $r = \log 4$
81. a) 16, b) 2 lub 2,5
82. 3, 10, 17
83. Wskazówka. Zapisz założenie dla $m = 1$. b) Np. ciąg 3, 4, 5, 6, ... jest arytmetyczny, a nie spełnia twierdzenia odwrotnego, c) $a_1 = r$
86. a) Wskazówka. Zauważ, że wystarczy podać przykład ciągu spełniającego podane warunki.
87. Wskazówka. a) Zauważ, że wystarczy podać przykład ciągu spełniającego warunki zadania. b) Przeprowadź dowód nie wprost.
88. Wskazówka. Przeprowadź dowód nie wprost.
89. a) $S_{13} = 208$, b) $S_{21} = -735$, c) $S_{100} = 11\,600$, d) $S_{15} = -15$, e) $S_{10} = 155$, f) $S_{50} = -22,5$
90. a) 14 751, b) 3519, c) -1410 , d) 1043, e) 50,5, f) $-0,5$
91. a) 17, b) 25, c) co najmniej 34
92. a) 12, b) 15, c) 8
93. a) $n = 79$, b) $n = 13$, c) $n = 22$
94. a) $S_{10} = 22,5$, b) $S_{10} = -61\frac{2}{3}$, c) $S_{10} = 20,75$, d) $S_{10} = 56,5$, e) $S_{10} = 165$, f) $S_{10} = 195$
95. a) 442, b) 2484
96. a) 51, b) 59
97. a) 494 550, b) 98 550

98. a) $S_{100} = -25\,300$, b) 184, c) $-30\,100$
 99. a) co najwyżej 16, b) 37
 100. a) -555 , b) 66
 101. 510
 102. a) $a_3 = 0$, b) $a_2 = 10$, c) $a_5 = 13$
 103. a) $S_{20} = 295$, b) $S_{10} = -120$, c) $S_{12} = -72$
 104. a) 15, b) $n = 21$, c) $n = 15$
 105. a) 6, b) $-\frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{2}$
 106. 13
 107. a) 3, b) 21
 108. a) $S_{10} = 50$, b) $S_{11} = 0$, c) $S_{12} = 18$
 109. a) 777, b) -1909
 110. b) $p = -4$ i $p = 11$
 111. $a_n = 15$
 113. a) $x = 9$, b) $x = 12$, c) $x = 14$
 114. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 116. a) $a_1 = -7$, b) 900
 117. a) $n = 8$ lub $n = 45$, b) $n = 10$, c) $n = 7$ lub $n = 64$
 118. a) -1480 , b) -1568 , c) 2360
 119. Wskazówka. Rozpatrz dwa przypadki: gdy n jest liczbą parzystą i gdy n jest liczbą nieparzystą. a) gdy n jest liczbą parzystą, to $S_n = -\frac{n}{2}$; gdy n jest liczbą nieparzystą, to $S_n = \frac{n+1}{2}$, b) gdy n jest liczbą parzystą, to $S_n = -\frac{5n}{2}$; gdy n jest liczbą nieparzystą, to $S_n = \frac{5n-1}{2}$, c) gdy n jest liczbą parzystą, to $S_n = -\frac{nr}{2}$; gdy n jest liczbą nieparzystą, to $S_n = a_1 + \frac{(n-1)r}{2}$
 120. a) 2 001 000, b) 4 002 000 Wskazówka. Skorzystaj ze wzoru na różnicę kwadratów.
 121. a) 253, b) 75, c) $b^2 - a^2$
 122. $r_b = k^2 r_a$
 123. $a_{51} = 0$
 124. 6
 127. a) tak, b) nie, c) tak, d) tak, e) tak, f) nie, g) nie, h) tak
 128. $a_7 = 40\,000$, $b_7 = 0,9375$, $d_7 = \frac{135}{8}$, $f_7 = -0,000123$
 129. (b_n) , (c_n) , (d_n)
 130. a) $q = \frac{1}{5}$, $a_3 = \frac{1}{5}$, $a_4 = \frac{1}{25}$, b) $q = 2$, $a_3 = -0,8$, $a_4 = -1,6$, c) $q = -2$, $a_3 = \frac{8}{3}$, $a_4 = -\frac{16}{3}$,
 d) $q = -1$, $a_3 = -5$, $a_4 = 5$
 131. a) $q = \frac{2}{5}$, $a_3 = \frac{1}{25}$, $a_4 = \frac{2}{125}$, b) $q = -\frac{1}{2}$, $a_1 = 3$, $a_4 = -\frac{3}{8}$, c) $q = \sqrt{2}$, $a_1 = \sqrt{2}$, $a_3 = 2\sqrt{2}$
 lub $q = -\sqrt{2}$, $a_1 = -\sqrt{2}$, $a_3 = -2\sqrt{2}$, d) $q = \frac{1}{3}$, $a_2 = -\frac{1}{3}$, $a_4 = -\frac{1}{27}$ lub $q = -\frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3}$,
 $a_4 = \frac{1}{27}$
 132. a) $a_n = -16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_5 = -1$, b) $a_n = \frac{1}{32} \cdot (-2)^{n-1}$, $a_5 = \frac{1}{2}$, c) $a_n = 12 \cdot 0,1^{n-1}$,
 $a_5 = 0,0012$
 133. a) $a_n = 3,5 \cdot 2^{n-1}$, b) $a_n = -20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, c) $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$, d) $a_n = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$,
 e) $a_1 = -3$, $a_n = 0$ dla $n \geq 2$, f) $a_n = 6$
 134. a) ósmym, b) szóstym, c) czwartym, d) dziewiątym

135. a) $a_n = 0,3 \cdot 2^{n-1}$, $b_n = -4 \cdot \sqrt{5}^{n-1}$, $c_n = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$, b) $d_1 = 8$, $d_{n+1} = \frac{4}{5}d_n$, $e_1 = -2$,
 $e_{n+1} = -\frac{2}{9}e_n$, $f_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $f_{n+1} = \frac{1}{2}f_n$
136. (a_n) — malejący, (b_n) — rosnący, (c_n) — rosnący, (d_n) — malejący, (e_n) — niemonotoniczny, (f_n) — rosnący
137. a) $q = 2$, b) $q = 9$, c) $q = \frac{1}{5}$
138. a) $a_{11} = 50$, b) $a_6 = \sqrt{2}$ lub $a_6 = -\sqrt{2}$, c) $a_{11} = \frac{3}{8}$, d) $a_{40} = -1000$
139. a) $3\sqrt[3]{5}$, $3\sqrt[3]{25}$, b) $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$ lub $-\sqrt{3}$, 3, $-3\sqrt{3}$, c) 81, -54, 36, -24
140. a) $a_5 = 3$, b) $a = 4\sqrt{2}$, $b = 2$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $32\sqrt{2}$, 32, $16\sqrt{2}$, 16, $8\sqrt{2}$ lub $-32\sqrt{2}$, 32, $-16\sqrt{2}$, 16, $-8\sqrt{2}$
141. a) $a_n = -2^{n-6}$, b) $a_n = \frac{81}{800} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ lub $a_n = -\frac{81}{800} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, c) $a_n = 17 \cdot (-1)^{n-1}$
142. a) dla $x = -7$ lub $x = 7$, b) dla $x = -8$ lub $x = 4$, c) dla $x = -\sqrt{7}$ lub $x = \sqrt{7}$, d) dla $x = -1$ lub $x = \frac{5}{8}$
143. a) można, b) nie można
144. -18, 6, -2
145. a) $a_1 = 1,4$, $q = 2$, b) $a_5 = 40,5$, c) $a_2 = 13,5$
146. $q = \frac{4}{3}$ lub $q = -\frac{4}{7}$
147. a) $a_5 = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ lub $a_5 = \frac{4}{3}$, $q = -\frac{1}{3}$, b) $S_7 = 317,5$
148. a) $q = \frac{1}{3}$ lub $q = -1$, b) $q = 2$
149. a) $q = -\sqrt{3}$ lub $q = \sqrt{3}$, b) $q = 2$ lub $q = -2$
150. a) $a_4 = 27$ lub $a_4 = -27$, b) $a_5 = 27\sqrt{3}$ lub $a_5 = -27\sqrt{3}$, c) $a_{10} = 4\sqrt{10}$ lub $a_{10} = -4\sqrt{10}$
152. a) q , b) $\frac{1}{q}$, c) q^2
153. a) $q = \frac{36}{49}$, b) $q = \frac{ac}{b^2}$
154. $a_3 = 25$ lub $a_3 = 1$
155. $a_4 = 1$, $a_5 = 4$, $a_9 = 16$
157. a) 4, 6 lub $\frac{1}{4}$, $-1\frac{1}{2}$, b) 5, 9, 6 lub $9\frac{8}{9}$, $18\frac{7}{9}$, $-8\frac{2}{3}$
158. 1, -3, 9
159. 4, 10, 25
162. a) nie, b) tak, c) tak
164. Wskazówka. Wykorzystaj definicję ciągu geometrycznego i twierdzenie Pitagorasa.
166. a) $a = 8$, $b = 5$, $c = 2$ lub $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$, b) $a = 2$, $b = 5$, $c = 8$ lub $a = 26$, $b = 5$, $c = -16$, c) $a = 10$, $b = 7$, $c = 4$ lub $a = 2$, $b = 7$, $c = 12$
167. 1:1 lub 4:1
168. a) $w = 12$, $x = 8$, $y = 4$, $z = 2$ lub $w = 1,5$, $x = 4,5$, $y = 7,5$, $z = 12,5$, b) $w = 1$, $x = -1$, $y = -3$, $z = -9$ lub $w = -8$, $x = -4$, $y = 0$, $z = 0$
169. -840
170. $r = -3$ lub $r = 2$
171. a) $a = 2$, $b = 6$, $c = 18$ lub $a = 18$, $b = 6$, $c = 2$, b) $a = 1$, $b = 4$, $c = 16$ lub $a = 16$, $b = 4$, $c = 1$
172. ciąg geometryczny: $a_5 = 80$; ciąg arytmetyczny: $a_5 = 19$ ($a = 5$, $b = 10$, $c = 20$, $d = 40$).
173. a) $q = 1$ lub $q = -1$, b) $q = 1$ lub $q = 4$
174. a) 3, 6, 12 lub 7, 7, 7, b) 2, 6, 18 lub $\frac{26}{3}$, $\frac{26}{3}$, $\frac{26}{3}$, c) 3, 15, 75 oraz 31, 31, 31
179. a) 2:1, b) $1,498 \approx \frac{3}{2}$; $1,334 \approx \frac{4}{3}$, c) około 370 Hz, d) e
180. a) $S_5 = 9\frac{11}{16}$, b) $S_6 = 2\frac{242}{243}$, c) $S_{11} = 13$

181. a) 6, b) 9, c) co najmniej 11

182. a) 7, b) 6, c) 9

183.

a_1	q	a_n	n	S_n
10	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{128}$	5	$13\frac{41}{128}$
$-\frac{1}{2}$	2	-64	8	$-127\frac{1}{2}$
2	-3	162	5	122
-8	$-\frac{3}{2}$	27	4	13

184. a) $S_7 = 547$, b) $S_8 = 340$, c) $S_{10} = 767\frac{1}{4}$

185. a) 2,953125, b) 2,5555553, c) 624,9984, d) $4\frac{115}{486}$, e) $211\frac{1}{9}(1 - 0,1^8)$, f) 19,84375

186. a) $a_1 = 8$, b) $a_1 = 1,5$, c) $a_1 = 1000$

187. a) 8, b) 12, c) 6, d) 7

188. 7

189. a) 2^{20} komórek, b) 26

190. a) około 77,5 m, b) z co najmniej 15 warstw

191. a) $\frac{121}{243}$, b) $255\frac{1}{2}$

192. a) $a_9 = 2^5$, b) $a_2 = 2$

193. a) $q = 5$, b) $q = \frac{1}{9}$

194. 9

195. $S_n = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$. Wskazówka. $\underbrace{111\dots 1}_{k \text{ cyfr}} = 1 + 10 + \dots + 10^{k-1}$

196. Wskazówka. Przedstaw każdą z liczb jako sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

197. a) $a_1 = p - 1$, $a_2 = 3p - 5$, $a_3 = 9p - 9$, $a_4 = 27p - 13$, b) $a_n = p \cdot 3^{n-1} - 4n + 3$,
c) $S_n = \frac{p(3^n - 1)}{2} - n(2n - 1)$

198. a) $S_n = (n - 1) \cdot 2^n + 1$, b) $S_n = 2 - (n + 2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Wskazówka. Sposób I. Rozważaną sumę można przedstawić w postaci:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} +$$

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} +$$

$$2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} +$$

$$2^{n-2} + 2^{n-1} +$$

$$2^{n-1}$$

Zauważ, że każdy wiersz tej sumy jest też sumą kolejnych potęg liczby 2.

Sposób II. Rozważaną sumę wszystkich wyrazów można pomnożyć przez 2, a następnie odjąć stronami.

199. $a_n = 2^n - 1$, $S_n = 2(2^n - 1) - n$

201. $P = \left(\frac{8}{9}\right)^5 a^2 \approx 0,55a^2$

202. około 17,8%

203. K: 7500, 24 000; p: 4%, 0,5%; n: 5, 7; D: 360, 5400

204. a) 546,40 zł, b) 2948,50 zł, c) 4637,10 zł, d) 72 733,90 zł

205. a) 3800 zł, b) 5200 zł, c) 14 000 zł, d) 20 000 zł

206. a) 3%, b) 4,5%, c) 6%, d) 0,8%

207. a) po 4 latach, b) po 6 latach, c) po 9 latach, d) po 12 latach

208. około 68,7 mld zł

209. a) 11 025 zł, b) 11 038,13 zł, c) 11 044,86 zł, d) 11 049,41 zł

210. do banku A; nie

211. a) 750 zł, b) 829,28 zł

212. a) o około 69%; po 12 latach, b) o około 34%; po 7 latach

213.

K	2000	1400	8000	6500	52 000	4500	7000
p	5%	0,9%	4%	1,2%	2%	3,7%	2%
m	6	4	3	1	3	12	6
n	4	2	15	5	7	6	10
D	436,81	25,39	6533,57	401,73	7793,38	1096,09	1541,33
S	2436,81	1425,39	14 533,57	6901,73	59 793,38	5596,09	8541,33

214. a) 2400 zł, b) po 20 miesiącach, c) 3,5%

215. a) o 12,6% b) 5 lat i 3 miesiące

216. a) 11%, b) 2077,50 zł

217. a) w firmie „Pracusz”; w 6 miesiącu, b) w firmie „Pracusz” — 15 480 zł, w firmie „Dorobkiewicz” — 17 699,47 zł

218. zmniejszyć

219. a) 55 071,77 zł, b) o 5122,95 zł

220. a) 55 925,17 zł, b) o 2467,11 zł

221. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -4$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1$

222. a) 0, b) 0, c) 0, d) $+\infty$, e) $+\infty$, f) $-\infty$, g) $+\infty$, h) 6

223. a) rozbieżny do $+\infty$, b) zbieżny do 0, c) zbieżny do 1, d) rozbieżny (ale ani do $-\infty$, ani do $+\infty$), e) rozbieżny do $-\infty$, f) zbieżny do 0

225. a) $+\infty$, b) 0, c) 0,23, d) 0, e) nie istnieje, f) $-\infty$

226. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

227. a) tak; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, b) tak; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, c) tak; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$, d) nie istnieje

228. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, c) nie istnieje, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = -\infty$, e) $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$, f) $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 3$

229. a) wszystkie oprócz 100 początkowych wyrazów, b) wszystkie oprócz 223 początkowych wyrazów, c) wszystkie oprócz 6 początkowych wyrazów, d) wszystkie oprócz 4 początkowych wyrazów

230. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$, $n > 2500$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$, $n > 20\,000$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -7$, $n > 12$,
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -4$, $n > 31$

231. a) $n > 501$, b) $n > 57$, c) $n > 14$

232. $n > 31$

233. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = -15$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = \frac{2}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 5$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 1$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 6$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{3}{2}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = \frac{1}{3}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -5$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = -20$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = -\frac{5}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 9$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -20$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\frac{4}{5}$, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = 10$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = -1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -5$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 6$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3}$

234. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = -10$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -4$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = -\frac{4}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = +\infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = -15$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = -\infty$, d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -5$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = 25$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$
235. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = -\infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty$
236. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = +\infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = +\infty$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$
237. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{4} = -\frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a_n}{5a_n} = \frac{1}{10}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2na_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (7a_n - n) = -\infty$,
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-5a_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{a_n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - a_n) = -\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{5}{a_n}\right) = 7$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (4na_n) = +\infty$
238. a) 3, b) $-\frac{1}{2}$, c) $+\infty$, d) $+\infty$, e) 0, f) 0
239. a) $\frac{1}{2}$, b) 0, c) -5, d) $-\infty$, e) $+\infty$, f) $-\infty$
240. a) -2, b) 3, c) $+\infty$, d) $-\infty$, e) $+\infty$, f) $-\infty$
241. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $\frac{4}{9}$, d) 0, e) 3, f) $+\infty$
242. a) 3, b) 1, c) -9, d) 0, e) -8, f) -2, g) $-\frac{1}{25}$, h) 0, i) -2, j) 8, k) -6, l) 1,15
243. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$, d) $-\infty$, e) $+\infty$, f) $+\infty$, g) $+\infty$, h) $+\infty$
244. a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) $+\infty$, d) $-\infty$, e) $-\infty$, f) $+\infty$, g) $-\infty$, h) $+\infty$
245. a) 12; $\frac{1}{5}$; 0, b) 5; $-\frac{1}{8}$; -6, c) $+\infty$; $+\infty$; $+\infty$, d) $-\infty$; 0; $-\infty$
246. a) $-\frac{4}{3}$, b) 0, c) $-\frac{2}{3}$, d) $+\infty$, e) 2, f) 0
247. a) $\frac{2}{3}$, b) 0, c) -1, d) 2, e) 0,3, f) 0
248. a) $+\infty$, b) $+\infty$, c) $-\infty$, d) $-\infty$, e) $-\infty$, f) $+\infty$
249. a) $+\infty$; $+\infty$; $+\infty$; $+\infty$, b) $+\infty$; $-\infty$; 0; 0, c) 0; 0; 0; 0, d) $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; 0, e) 0; $-\infty$; $-\infty$; -1, f) $-\infty$; $-\infty$; $+\infty$; $+\infty$
252. a) $+\infty$; 0; $+\infty$; 81, b) $+\infty$; $+\infty$; $+\infty$; $+\infty$, c) 3; $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$, d) 0; $-\infty$; $+\infty$; -3
253. a) 10, b) 7, c) 4, d) 12, e) 9, f) 17
254. a) $\frac{3}{2}$, b) 2, c) $-\frac{1}{3}$, d) -5, e) -10, f) $\frac{1}{2}$
255. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{2}{5}$, c) 1, d) -6, e) 6, f) $-\frac{10}{9}$
256. a) 1, b) 3, c) $\frac{8}{5}$, d) $\frac{2}{15}$, e) $\frac{8}{63}$, f) $\frac{1}{2}$
257. a) $\frac{1}{7}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{3}$, d) $\frac{1}{4}$
258. a) 2, b) $-\frac{2}{3}$, c) 0, d) $-\infty$
259. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$
260. a) $p = -\frac{3}{2}$, b) $p = -\frac{1}{2}$, c) $p = 0$, d) $p = -1$
261. a) 0, b) 0, c) 0, d) -1, e) $\frac{1}{3}$, f) $\frac{-5\sqrt{2}}{4}$

262. a) 0, b) $+\infty$, c) $2\sqrt{3}$, d) 0, e) $\frac{1}{2}$, f) 0
 263. a) dla $k = -10$, b) dla $k = 1$, c) dla $k \in (0, 1)$
 266. a) tak; $\frac{3}{2}$, b) nie, c) nie, d) tak; $\frac{3}{2}$, e) nie, f) tak; 60, g) tak; $2\sqrt{2} - 2$, h) tak; $4\frac{12}{17}$,
 i) nie, j) tak; $\sqrt{2} + 2$
 267. a) nie, b) tak; 1, c) tak; 16, d) tak; $\frac{27+9\sqrt{2}}{7}$, e) tak; 10, f) nie
 268. a) $a_1 = 6$, b) $q = \frac{2}{3}$
 269. a) $x = 4$, b) $x = -10$, c) $x = 6$
 270. tak
 271. a) $\frac{6}{11}$, b) $\frac{5}{37}$, c) $\frac{119}{222}$, d) $\frac{62}{135}$, e) $\frac{67}{216}$, f) $\frac{59}{880}$
 272. a) $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ lub $a_n = \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, b) $a_1 = 40$, $q = \frac{1}{2}$, c) $S_5 = 5,5$ ($a_1 = 8$, $q = -\frac{1}{2}$)
 273. a) co najmniej 11, b) co najmniej 66
 274. a) $q = \sqrt[7]{\frac{1}{2}}$, b) $q = \sqrt[10]{\frac{2}{3}}$ lub $q = -\sqrt[10]{\frac{2}{3}}$
 275. a) 96, -48, 24, b) $q = \frac{1}{5}$
 276. a) dla $x \in (-1; 1)$; suma $\frac{2}{1-x}$, b) dla $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; suma $\frac{2}{1-2x}$, c) dla $x \in (-3; 3)$; suma $\frac{9}{3+x}$, d) dla $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; suma $\frac{2}{x+1}$, e) dla $x \in (-2; 0)$; suma $-\frac{x+1}{x}$,
 f) dla $x \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$; suma $\frac{(x+2)^3}{x+1}$
 277. a) $x \in (-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5})$, b) $x \in (-2; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 2)$, c) $x \in (-1; 0) \cup (1; 2)$,
 d) $x \in \left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}; -2\right) \cup \left(3; \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$
 278. a) $x = \frac{5}{6}$, b) $x = 1\frac{3}{7}$, c) $x = 3$
 279. a) $x = -1$, b) $x = 3$, c) $x = 2$, d) $x = -5$
 280. $\frac{1}{1-q^2}$
 282. a) $f(x) = 1$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, b) $f(x) = x - 1$ dla $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$,
 c) $f(x) = x + 1$ dla $x \in (-1; 1)$, d) $f(x) = -x^2$ dla $x \in (-2; 0)$
 283. a) $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, b) $x = \frac{9}{4}$
 284. a) $x \in (-1; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; -4) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, c) $x \in (-2; 1)$,
 d) $x \in \left(-\infty; \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$
 285. a) $x = 1,1$, b) $x = -0,25$, c) $x = \frac{1}{2}$
 286. a) $x = \sqrt[3]{9}$, b) $x = 16$, c) $x = \sqrt{10}$
 287. a) $q = -\frac{2}{3}$, b) $q = \frac{1}{2}$
 288. a) $q = \frac{1}{11}$, b) $q = \frac{1}{p+1}$
 289. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ Wskazówka: Jeśli $a \in (-2; 0)$, to podana suma jest równa $-\frac{1}{a}$. Jakie wartości może przyjmować ten ułamek?
 291. 80%

PRZED SPRAWDZIANEM

1. D
2. C
3. B
4. A
5. C

- 6. B
- 7. C
- 8. A
- 9. D
- 10. C
- 11. B
- 12. B
- 13. B
- 14. A
- 15. D
- 17. $S_{100} = 8275$
- 18. $S_7 = 215$ lub $S_7 = 635$
- 19. o około 63%
- 20. a) $r < a$, b) $1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- 21. C
- 22. C
- 23. A
- 24. D
- 25. D
- 26. D
- 27. B
- 28. A
- 29. A
- 30. A
- 31. C
- 32. A
- 33. D
- 34. B
- 35. D
- 36. B
- 37. $q = \frac{3}{2}$ lub $q = -\frac{3}{5}$
- 38. $3\frac{3}{11}$
- 39. $q = 3$ lub $q = \frac{1}{3}$
- 40. $x = -3\frac{1}{3}$

PRZED MATURĄ

- 1. D
- 2. B
- 3. A
- 4. C
- 5. B
- 6. C
- 7. A

8. B
9. B
10. A
11. B
12. B
13. A
14. C
16. 9
17. $r = 2$
18. $a_1 = 567, r = -42, a_{14} = 21$
19. $\frac{a^2}{2^{22}}$
20. $a_n = 4n - 2$
21. D
22. B
23. D
24. C
25. C
26. D
27. $a = -12, b = 39, c = -28$ lub $a = -3, b = -6, c = 8$, lub $a = 6, b = 3, c = -10$
28. 15
29. $a = 5, b = 9, c = 13$ lub $a = \frac{31}{2}, b = 9, c = \frac{5}{2}$
30. $aq = 3$
31. $a_1 = 3$
32. 1,43
33. 187

PODOBIENSTWO FIGUR

1. a) $|DE|$, b) $|AE|$, c) $|AC|$, d) $|AC|$
2. a) $11\frac{2}{3}$, b) 12, c) 10,5
3. a) $a = \frac{80}{3}$, b) $b = 18$, c) $a = 9,6, b = 13,2, c = 28,2$
4. a) $|OA|, \frac{|AM|}{|OA|}$, b) $|OC|, |OB|, |OC|$
5. a) $x = 4,8$, b) $x = 9,6$, c) $x = 8\frac{1}{3}$
6. a) 18, b) 7
7. a) 30, b) $26\frac{2}{3}$
8. a) 6 m, b) około 5,7 m
9. a) tak, b) nie, c) tak
10. a) a i c, b) wszystkie
11. a) 42, b) 30
12. a) obwód trapezu: $53\frac{8}{9}$, obwód trójkąta: 65,
b) obwód trapezu: $51\frac{1}{3}$, obwód trójkąta: $53\frac{1}{3}$
14. 15
15. 12,5; 7,5

16. $4\frac{2}{7}$
 20. a) 6, b) 19, c) 28, d) 5
 21. 4
 22. $p+q$
 23. 28
 24. $10(3+\sqrt{5})$
 25. 21
 26. a) 30, b) $21\frac{1}{3}$
 27. $\mathcal{F}_1$ — skala 2, $\mathcal{F}_2$ — skala $\frac{1}{2}$, $\mathcal{F}_4$ — skala 3, $\mathcal{F}_9$ — skala $\frac{3}{2}$.
 30. a) $k_1 = 0,8$, $k_2 = 1,25$, b) $k_1 = 1,5$, $k_2 = \frac{2}{3}$, c) $k_1 = 0,4$, $k_2 = 2,5$.
 31. a) $x = 2,6$, b) $x = 2$, c) $x = 0,9$, d) $\frac{35\sqrt{6}}{12}$, e) 4, f) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$
 32. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{5}{13}$, d) 0,6, e) $\frac{\sqrt{55}}{11}$, f) $\frac{3\sqrt{10}}{20}$
 33. a) $a = 7,2$, $b = 4\frac{1}{6}$, $c = 5$, b) $a = 8\frac{1}{3}$, $b = 6\frac{2}{3}$, $c = 5$, $d = 1,8$, $e = 4,8$, c) $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$,
 $c = 2\sqrt{2}$, $d = \sqrt{5}$, $e = 2$, $f = 2\sqrt{2}$, $g = 2\sqrt{2}$
 34. a) 3,5, b) 12
 35. $a = 4$, $b = 10$
 36. 2
 37. a) fałsz, b) fałsz, c) prawda, d) fałsz, e) prawda, f) prawda, g) fałsz
 38. a) 1,8 cm i 3 cm, b) tak, o ile nie jest rombem
 39. a) oba równoległoboki mają boki o długościach 3 i 4 lub jeden ma boki długości 3 i $4 - \sqrt{7}$, a drugi — 3 i $4 + \sqrt{7}$, b) nie
 40. a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{1}{2}$
 41. $\frac{n}{m}$
 42. a) tak, b) nie, c) nie
 43. a) nie, b) tak, c) nie
 44. a) $a = 1,8$, $b = 4,2$, b) $a = 1,4$, c) $a = 3$, $b = c = 1,2$, d) $a = \frac{12}{7}$, $b = \frac{15}{7}$, e) $a = 10$,
 $b = 8$, f) $a = \frac{25}{6}$, $b = \frac{35}{6}$
 45. a) tak, b) nie, c) nie, d) tak, e) tak, f) tak
 46. a) $k = \frac{7}{3}$, $x = \frac{49}{3}$, b) $k = \frac{1}{2}$, $x = 2$
 47. a) tak, b) nie, c) tak
 48. a) tak, b) tak, c) nie, d) tak
 50. a) $|AB| = \frac{4}{5}$, $|AC| = |BC| = \frac{3}{5}$, b) $|A'B'| = \frac{16}{3}$, $|B'C'| = \frac{20}{3}$, $|A'C'| = 8$
 51. a) $\frac{48}{5}$ i $\frac{24}{5}$, b) $\frac{5}{2}$ i $\frac{7}{2}$ lub $\frac{12}{5}$ i $\frac{7\sqrt{6}}{5}$, c) $\frac{15}{2}$ i 6 lub 9,6 i 19,2 lub 15 i 24,
 d) $\frac{12}{5}$ i $\frac{6(1+\sqrt{22})}{5}$
 52. $20\frac{2}{3}$
 53. 75 cm, 100 cm, 125 cm
 54. a) 10, b) 52,8, c) $11\frac{5}{9}$ lub $4\frac{4}{9}$
 56. a) $\frac{5 \sin 80^\circ}{3} \approx 1,65$, b) $\frac{\sqrt{21}}{2} \approx 2,29$
 57. tak, trójkąty ABP i PKL oraz trójkąty APK i BLP
 58. tak
 59. $\frac{32}{7}$
 60. nie, nie jest to możliwe dla trójkąta równobocznego

64. a) $\frac{13}{6}$, b) 11,6, c) 2,4
65. 18
66. a) $\frac{32\sqrt{5}}{9}$, b) $\frac{47\sqrt{2}}{2}$
67. a) $\frac{25}{13}$ i $\frac{144}{13}$, b) 8,64 i 15,36
68. 96
69. $10 + 6\sqrt{5}$
70. 2 i 3 oraz 4 i 6
71. 80 m od budynku
72. 7,5 m
73. $\frac{9}{4}$
74. 75
75. a) 39, b) $9\sqrt{5}$
76. $12 + 9\sqrt{2}$
77. 126
78. a) $\frac{65}{6}$. Wskazówka. Zauważ, że odcinek zawarty w prostokącie i poprowadzony z jego wierzchołka równoległe do odcinka x ma taką samą długość jak odcinek x . b) $\frac{3\sqrt{305}}{5}$
79. $3\frac{9}{17}$
80. 4, 4 i 4. Wskazówka. Trójkąty BSM i DSA są podobne.
81. $3\frac{1}{13}$
82. a) tak, jest nim punkt A , b) $|AP'| = 1$, c) $|AP'| = 3$, d) tak
83. b) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$
86. 50
87. a) 1,92, b) $3\frac{13}{49}$, c) 112,5
88. a) 2, b) 0,96, c) $1\frac{3}{8}$, d) $20\sqrt{39}$, e) $\frac{\sqrt{55}}{3}$, f) $54\sqrt{7}$
89. a) $\frac{\sqrt{6}}{6}$, b) $\sqrt{3}$ razy, c) $\frac{1}{4}$
90. a) 0,8, b) 175
92. $\frac{4}{5}$
93. $\frac{64}{9}$
94. a) 24, b) $12\sqrt{2}$, c) $3\sqrt{2}$
95. a) $9\sqrt{2}$, b) $\frac{1}{k^4}$, c) 240
96. $\frac{11}{36}$
97. $\frac{|ED|}{|FE|} = \frac{4}{1}$. Wskazówka. Znajdź skalę podobieństwa trapezów.
98. $\frac{4}{3}$
99. a) 12 cm^2 , b) 10 cm^2
100. 1:200
101. Nie. Powierzchnia mapy jest nie milion, ale bilion (10^{12}) razy mniejsza od powierzchni Polski.
102. a) 1:3, b) $\sqrt{2}:(2-\sqrt{2})$
103. a) $\frac{49}{9}$, b) $\frac{625}{9}$, c) $\frac{9}{2}$. Wskazówka. Wykorzystaj twierdzenie o środkowych w trójkącie.
104. $\frac{1}{31}$

105. $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ i $\frac{27\sqrt{10}}{5}$

106. 1:4

107. $30\sqrt{55}$

108. 1:4

109. $\frac{5}{9}$

110. 9

111. 15, 20, 25

112. $P_{\triangle ABS} = \frac{9}{16}P$, $P_{\triangle BCS} = P_{\triangle ASD} = \frac{3}{16}P$

113. $\frac{1}{2}S$. Wskazówka. Dorysuj przekątne czworokąta o polu S .

PRZED SPRAWDZIANEM

1. C

2. B

3. C

4. C

5. A

7. $a = 3$, $b = \frac{28}{3}$

8. a) $29\frac{3}{4}$, b) 50

9. Podobne są romby $ABCD$ oraz $KLMN$, skala podobieństwa: $\frac{2}{5}$.

10. a) $\frac{64\sqrt{2}}{9}$, b) $20\frac{4}{25}$

11. $6(3 + \sqrt{3})$

12. $2(13 + 5\sqrt{13})$

13. D

14. A

15. A

16. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

17. $\frac{168 - 32\sqrt{21}}{5}$

18. $\frac{2\sqrt{37}}{5}$

19. $\frac{8}{23}$

20. $\frac{41}{50}$

21. $\frac{77 + \sqrt{37}}{4}$

PRZED MATURĄ

1. B

2. B

3. A

4. C

5. D

7. D

8. 25

11. B

15. $36(7 - 4\sqrt{3})\pi$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

1. a) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, b) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, c) $\sin \alpha = \frac{3}{7}$,
 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{20}$, d) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, e) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$,
 $\cos \alpha = \frac{3}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{91}}{3}$, f) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{33}}{7}$, $\cos \alpha = \frac{4}{7}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{33}}{4}$
2. $a = 3$, $b = 5$, $c = 4,5$, $d = \frac{\sqrt{117}}{2}$, $e = \frac{8}{3}$, $f = \frac{2\sqrt{7}}{3}$
3. a) około 23° , 67° , b) około 37° , 53° , c) około 40° , 50° , d) około 42° , 48° , e) około 47° , 43° ,
f) około 62° , 28°
4. a) $\alpha \approx 28^\circ$, b) $\alpha \approx 118^\circ$, c) $\alpha \approx 37^\circ$, d) $\alpha \approx 106^\circ$
5. $a \approx 7,3$, $b \approx 2,8$, $c \approx 1,5$, $d \approx 5,1$, $e = \frac{5\sqrt{6}}{2}$, $f = 4\sqrt{5}$, $g = \frac{4\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$
6. a) około 2,36, b) około 2,61, c) około 1,04
7. a) $|BC| = 6$, $|AC| = 3\sqrt{3}$, b) $|AB| = 4$, $|AC| = 4$, c) $|AC| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, $|BC| = \frac{10\sqrt{3}}{3}$
10. a) około 57° , b) około 118° , 62° , 118° , 62° , c) około 69° i około 111°
11. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{51}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7\sqrt{51}}{51}$, b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{39}}{3}$, c) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$
12. a) około 4,86, b) około 23,29, c) około 25,9, d) około 22,5, e) około 17,
f) około 25,9
13. około 96,5
14. a) $\sin 2^\circ < \sin 20^\circ < \sin 22^\circ$, b) $\cos 55^\circ < \cos 35^\circ < \cos 15^\circ$, c) $\operatorname{tg} 44^\circ < \operatorname{tg} 55^\circ < \operatorname{tg} 66^\circ$
15. a) nie
16. a) około 29° , b) około 1,64, c) około 14,4
17. $\frac{4\sqrt{3}+6}{3}$
18. $P = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})^2}$
20. a) -70° , b) -260° , c) -130° , d) 260°
21. a) -408° , b) 312° , c) -672°
22. a) 20° , b) 70° , c) 80°
23. -99° , -460° , -100° , 200°
25. a) $\alpha = 140^\circ$, b) $\alpha = 340^\circ$, c) $\alpha = 120^\circ$, d) $\alpha = 320^\circ$, e) $\alpha = 260^\circ$, f) $\alpha = 160^\circ$,
g) $\alpha = 120^\circ$, h) $\alpha = 130^\circ$
27. a) $a = 2$, $b = -6$, b) $a = 3\sqrt{3}$, $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, c) $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = 3$, d) $a = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$, $b = -3\sqrt{6}$
28. a) $\alpha = 100^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $\alpha = 70^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $\alpha = 95^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$,
d) $\alpha = k \cdot 90^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$
29. $\alpha = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$ lub $\alpha = 135^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$
30. a) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, b) $\sin \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{2}$,
c) $\sin \gamma = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\cos \gamma = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\operatorname{tg} \gamma = -4$
31. $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$; $\sin \beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{2}$; $\sin \gamma = -\frac{3}{5}$,
 $\cos \gamma = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{4}$
32. a) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$, b) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \alpha = \frac{-2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{2}$,
c) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$

33. a) $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = 3$ lub $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg} \alpha = 3$,
 b) $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ lub $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$, c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$,
 $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ lub $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$
34. a) $\sin \angle BAC = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \angle BAC = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg} \angle BAC = -2,5$, b) $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$,
 $\cos \angle BAC = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \angle BAC = -\frac{4}{3}$, c) $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \angle BAC = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \angle BAC = -\frac{1}{2}$
35. a) dodatnia, b) dodatnia, c) dodatnia, d) dodatnia, e) dodatnia, f) dodatnia, g) ujemna, h) dodatnia, i) równa 0
36. a) w II, b) w II, c) w IV
37. a) $k = -\frac{6}{5}$, b) $m = -3\sqrt{15}$ lub $m = 3\sqrt{15}$, c) $n = \frac{5\sqrt{2}}{4}$
38. a) dodatnią, b) ujemną, c) ujemną, d) ujemną, e) dodatnią, f) ujemną
39. a) -1, 0, 0, b) 0, 1, 0, c) 2, -1, -1
42. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, f) $\sqrt{3}$
43. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) 1, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, f) -1
44. a) $\alpha \in \{90^\circ; 180^\circ; 270^\circ\}$, b) $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ) \cup (270^\circ; 360^\circ)$, c) $\alpha \in \{180^\circ\}$,
 d) $\alpha \in (90^\circ; 270^\circ)$
45. a) w III lub w IV, b) w I lub w IV
46. a) $\sin 200^\circ$, b) $\cos 95^\circ$, c) $\sin(-20^\circ)$, d) $\operatorname{tg}(-314^\circ)$
47. a) dodatni, b) ujemny, c) ujemny, d) ujemny
48. a) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, b) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{91}}{10}$, c) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{13}}{4}$ lub $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$,
 d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
49. a) $\sin \alpha = -0,8$, b) $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$ lub $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, c) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
50. a) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5\sqrt{14}}{28}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = -2$, c) $\operatorname{tg} \alpha = -3\sqrt{11}$, d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$
51. a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$, $\cos \alpha = \frac{5\sqrt{26}}{26}$, c) $\sin \alpha = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$,
 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, d) $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$ lub $\sin \alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{29}}{29}$
52. a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, b) $\sin \alpha = 0,8$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ lub
 $\sin \alpha = -0,8$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, c) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ lub $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$
53. a) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$, c) $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$,
 d) $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$, e) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{101}}{101}$, $\cos \alpha = \frac{-10\sqrt{101}}{101}$, f) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{22}}{11}$,
 $\cos \alpha = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$
54. a) $\cos^2 \alpha$, b) 1, c) $\cos^2 \alpha$, d) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, e) $\cos \alpha$, f) $\sin \alpha$
56. a) nie, b) tak, c) tak, d) nie
58. a) $\sqrt{2}$ lub $-\sqrt{2}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ lub $-\frac{\sqrt{6}}{2}$
59. a) $\frac{41}{25}$, b) $\frac{7}{4}$, c) $\frac{17}{9}$, d) $\frac{7}{16}$
60. a) $\sin \alpha = -1$ lub $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$, b) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, c) $\sin \alpha = \frac{1}{6}$, d) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{42}}{7}$ lub
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$
61. $\sin \alpha = \frac{-a\sqrt{1+a^2}}{1+a^2}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{1+a^2}}{1+a^2}$
62. a) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}$, b) 6, -1, c) 4; 0, d) 3; 0
63. a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$

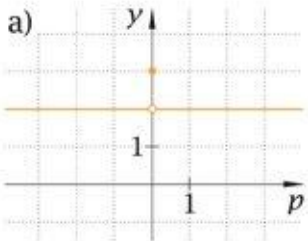
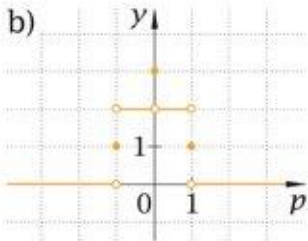
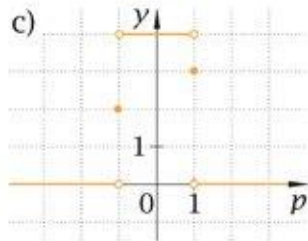
64. a) $\alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$, b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$ lub $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$
65. a) dla $\alpha \in \{-360^\circ, -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ\}$, b) dla $\alpha \in \{-270^\circ, 90^\circ\}$,
 c) dla $\alpha \in (-360^\circ; -180^\circ) \cup (0^\circ; 180^\circ)$, d) dla $\alpha \in \langle -180^\circ; 0^\circ \rangle \cup \langle 180^\circ; 360^\circ \rangle$,
 e) dla $\alpha \in \langle -270^\circ; -90^\circ \rangle, \alpha \in \langle 90^\circ; 270^\circ \rangle$
66. a) $\sin 440^\circ$, b) $\sin 337^\circ$, c) $\sin(-175^\circ)$, d) są równe, e) $\sin(-227^\circ)$, f) $\sin(-110^\circ)$
67. $\sin 99^\circ, \sin(-200^\circ), \sin 399^\circ$
68. a, e
69. a) dwa, b) cztery, c) pięć, d) pięć
70. a) $\alpha_1 = -180^\circ, \alpha_2 = 0^\circ, \alpha_3 = 180^\circ, \alpha_4 = 360^\circ$, b) $\alpha_1 = -90^\circ, \alpha_2 = 270^\circ$, c) $\alpha_1 = 30^\circ, \alpha_2 = 150^\circ$, d) $\alpha_1 = -60^\circ, \alpha_2 = 300^\circ, \alpha_3 = 240^\circ, \alpha_4 = -120^\circ$, e) $\alpha_1 = -135^\circ, \alpha_2 = -45^\circ, \alpha_3 = 225^\circ, \alpha_4 = 315^\circ$, f) nie istnieje taki kąt
71. a) $\alpha = 130^\circ$, b) $\alpha_1 = -310^\circ, \alpha_2 = -230^\circ$, c) $\alpha_1 = 410^\circ, \alpha_2 = 490^\circ$, d) $\alpha_1 = -310^\circ, \alpha_2 = -230^\circ$
72. a) $\alpha \in \{-305^\circ, -235^\circ, 125^\circ\}$, b) $\alpha \in \{-353^\circ, -187^\circ, 7^\circ\}$, c) $\alpha \in \{-317^\circ, -223^\circ, 43^\circ, 137^\circ\}$,
 d) $\alpha \in \{-164^\circ, 196^\circ, 344^\circ\}$, e) $\alpha \in \{-10^\circ, 190^\circ, 350^\circ\}$, f) $\alpha \in \{-284^\circ, 76^\circ, 104^\circ\}$
73. a) $-355^\circ, -185^\circ, 175^\circ$, b) $-290^\circ, -250^\circ, 70^\circ$, c) $-147^\circ, -33^\circ, 327^\circ$,
 d) $-100^\circ, 260^\circ, 280^\circ$, e) $-300^\circ, 60^\circ, 120^\circ$, f) $-14^\circ, 194^\circ, 346^\circ$
74. a, d
75. a) około $-333^\circ, -207^\circ, 27^\circ, 153^\circ$, b) około $-297^\circ, -243^\circ, 63^\circ, 117^\circ$, c) około $-156^\circ, -24^\circ, 204^\circ, 336^\circ$, d) około $-142^\circ, -38^\circ, 218^\circ, 322^\circ$
76. a) $\alpha \in \langle -300^\circ; -240^\circ \rangle \cup \langle 60^\circ; 120^\circ \rangle$, b) $\alpha \in (-360^\circ; -150^\circ) \cup (-30^\circ; 210^\circ) \cup (330^\circ; 360^\circ)$,
 c) $\alpha \in \langle -180^\circ; 0^\circ \rangle \cup \langle 180^\circ; 360^\circ \rangle$, d) $\alpha \in (-135^\circ; -45^\circ) \cup (225^\circ; 315^\circ)$
77. a) $\alpha \in \{-150^\circ, -30^\circ, 30^\circ, 150^\circ\}$, b) $\alpha = 120^\circ$, c) $\alpha \in \{-45^\circ, -135^\circ\}$,
 d) $\alpha \in \{-177^\circ, 123^\circ\}$
78. a) dla $\alpha \in (-270^\circ; -90^\circ) \cup (90^\circ; 270^\circ)$, b) dla $\alpha \in \{-270^\circ, -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ\}$, c) dla $\alpha_1 = -180^\circ, \alpha_2 = 180^\circ$, d) dla $\alpha \in \langle -270^\circ; -90^\circ \rangle \cup \langle 90^\circ; 270^\circ \rangle$,
 e) dla $\alpha \in \langle -180^\circ; 0^\circ \rangle \cup \langle 180^\circ; 360^\circ \rangle$
79. a) $\cos 190^\circ$, b) $\cos 50^\circ$, c) $\cos 100^\circ$, d) $\cos(-170^\circ)$, e) $\cos 80^\circ$, f) są równe
80. $\cos 99^\circ, \cos(-199^\circ), \cos 265^\circ, \cos(-600^\circ)$
81. a, d, e
82. c
83. a) $a < b$, b) $a > b$, c) $a > b$, d) $a < b$, e) $a > b$, f) $a = b$
84. b, c
85. a) trzy, b) zero, c) cztery, d) cztery
86. a) $\alpha_1 = -30^\circ, \alpha_2 = 30^\circ, \alpha_3 = 330^\circ$, b) $\alpha_1 = -90^\circ, \alpha_2 = 90^\circ, \alpha_3 = 270^\circ$,
 c) $\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 360^\circ$, d) $\alpha_1 = -120^\circ, \alpha_2 = 120^\circ, \alpha_3 = 240^\circ$, e) nie istnieje taki kąt α ,
 f) $\alpha_1 = -180^\circ, \alpha_2 = 180^\circ$
87. a) $\alpha_1 = 20^\circ, \alpha_2 = 340^\circ$, b) $\alpha_1 = -340^\circ, \alpha_2 = -20^\circ$, c) $\alpha_1 = 380^\circ, \alpha_2 = 700^\circ$,
 d) $\alpha_1 = -380^\circ, \alpha_2 = -340^\circ$
88. a) $\alpha_1 = -47^\circ, \alpha_2 = -313^\circ, \alpha_3 = 313^\circ$, b) $\alpha_1 = 103^\circ, \alpha_2 = 257^\circ, \alpha_3 = -257^\circ$,
 c) $\alpha_1 = -201^\circ, \alpha_2 = -159^\circ, \alpha_3 = 159^\circ$, d) $\alpha_1 = 348^\circ, \alpha_2 = 12^\circ, \alpha_3 = -12^\circ$
89. a) $-285^\circ, -75^\circ, 285^\circ$, b) $-291^\circ, -69^\circ, 69^\circ$, c) $-212^\circ, -148^\circ, 212^\circ$, d) $-305^\circ, 55^\circ, 305^\circ$,
 e) $-10^\circ, 10^\circ, 350^\circ$, f) $-156^\circ, 156^\circ, 204^\circ$
90. b, c
91. a) około $71^\circ, 289^\circ$, b) około $41^\circ, 319^\circ$, c) około $114^\circ, 246^\circ$, d) około $161^\circ, 199^\circ$

92. a) $\alpha \in \{-150^\circ, 150^\circ\}$, b) $\alpha \in \{-120^\circ, -60^\circ, 60^\circ, 120^\circ\}$, c) $\alpha \in \{-165^\circ, -15^\circ, 15^\circ, 165^\circ\}$,
d) $\alpha \in \{-88^\circ, 2^\circ\}$
93. a) $-281^\circ, -79^\circ, 79^\circ, 281^\circ$, b) $-343^\circ, -17^\circ, 17^\circ, 343^\circ$, c) $-216^\circ, -144^\circ, 144^\circ, 216^\circ$,
d) $-335^\circ, -25^\circ, 25^\circ, 335^\circ$
94. a) $\alpha \in (-270^\circ; -90^\circ) \cup (90^\circ; 270^\circ)$, b) $\alpha \in (-360^\circ; -330^\circ) \cup (-30^\circ; 30^\circ) \cup (330^\circ; 360^\circ)$,
c) $\alpha \in (-360^\circ; -240^\circ) \cup (-120^\circ; 120^\circ) \cup (240^\circ; 360^\circ)$,
d) $\alpha \in (-315^\circ; -45^\circ) \cup (45^\circ; 315^\circ)$
95. a) $\alpha \in (-270^\circ; -180^\circ) \cup (-90^\circ; 0^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ)$, b) $-135^\circ, 45^\circ, 225^\circ$,
c) $-180^\circ, 0^\circ, 180^\circ$, d) nie ma takich argumentów
96. a) $\operatorname{tg} 80^\circ$, b) $\operatorname{tg} 181^\circ$, c) $\operatorname{tg}(-132^\circ)$, d) $\operatorname{tg} 1800^\circ$
97. a) $\alpha = -43^\circ$, b) $\alpha = 72^\circ$, c) $\alpha = 12^\circ$, d) $\alpha = -88^\circ$
98. $\operatorname{tg}(-97^\circ)$, $\operatorname{tg} 255^\circ$, $\operatorname{tg} 790^\circ$
99. b, d, e
100. a, b, c, d, e
101. a) $\alpha_1 = -180^\circ, \alpha_2 = 0^\circ, \alpha_3 = 180^\circ, \alpha_4 = 360^\circ$, b) $\alpha_1 = -135^\circ, \alpha_2 = 45^\circ, \alpha_3 = 225^\circ$,
c) $\alpha_1 = -30^\circ, \alpha_2 = 150^\circ, \alpha_3 = 330^\circ$, d) $\alpha_1 = -120^\circ, \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = 240^\circ$
102. a) około $76^\circ, 256^\circ$, b) około $6^\circ, 186^\circ$, c) około $115^\circ, 295^\circ$, d) około $153^\circ, 333^\circ$
103. a) $\sin 20^\circ < \operatorname{tg} 20^\circ < \cos 20^\circ$, b) $\cos 175^\circ < \operatorname{tg} 175^\circ < \sin 175^\circ$,
c) $\sin(-170^\circ) < \operatorname{tg}(-181^\circ) < \cos(-81^\circ)$
104. a) $-150^\circ, 210^\circ$, b) $-137^\circ, 43^\circ$, c) $-202^\circ, -22^\circ$, d) $-268^\circ, 92^\circ$, e) $-12^\circ, 168^\circ$,
f) $45^\circ, 225^\circ$
105. a) $\alpha = -45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$, b) $\alpha = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$ lub $\alpha = -60^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$,
c) $\alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
106. a) $\alpha \in (-180^\circ; -150^\circ) \cup (-90^\circ; 30^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ)$, b) $\alpha \in (-180^\circ; -90^\circ) \cup (-60^\circ; 90^\circ) \cup$
 $\cup (120^\circ; 180^\circ)$, c) $\alpha \in (-180^\circ; -135^\circ) \cup (-45^\circ; 45^\circ) \cup (135^\circ; 180^\circ)$
107. a) około 0,9903; 0,9563; 0,1219, b) około -0,2756; -0,7547; -0,9613,
c) około -0,9511; -0,4067; -0,1392, d) $-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}$
108. a) około 0,3746; 0,515; 0,8387, b) około -0,9703; -0,515; -0,1392, c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$,
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$
109. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
110. a) około 0,9336; 0,682; 0,1564, b) około -0,1564; -0,682; -0,9998,
c) około -0,9511; -0,225; 0,9903, d) około 0,1392; 0,0872; -0,0698
111. a) $-\sqrt{3}$, b) $\sqrt{3}$, c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, d) -1, e) $\sqrt{3}$, f) -1, g) $\sqrt{3}$, h) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
112. a) około -0,1944; -5,1446; 0,4877, -0,3249, 0,2126, -0,8391 b) około -1,6643; 8,1443;
-1,1504, -0,1405, -0,0524, -2,7475
113. a) $P \approx 10,1$, b) $P \approx 22,1$, c) $P = \frac{25\sqrt{3}}{4}$
114. a) 30° lub 150° , b) około 40° lub 140° , c) około 19° lub 161°
115. $90^\circ; P = 40 \text{ cm}^2$
116. a) około 0,9848; -0,9848; -0,4877, b) około -0,9397; -0,9962; 0,4245,
c) około -0,9397; 0,6428; -0,2309
117. a) $\cos 261^\circ$, b) $\operatorname{tg} 143^\circ$, c) $\operatorname{tg}(-138^\circ)$, d) są równe, e) $\cos(-348^\circ)$, f) $\operatorname{tg}(-145^\circ)$
118. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+1}{2}$, c) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{6}$, d) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$, e) $\frac{14+3\sqrt{3}}{2}$, f) $\frac{3\sqrt{6}-7}{5}$
119. a) 0, b) $-2 \cos \alpha$, c) $2 \sin \alpha$, d) 0

120. a) $-120^\circ, -60^\circ, 240^\circ, 300^\circ$, b) $-330^\circ, -210^\circ, 30^\circ, 150^\circ$, c) $-330^\circ, -30^\circ, 30^\circ, 330^\circ$,
d) $-240^\circ, -120^\circ, 120^\circ, 240^\circ$, e) $-330^\circ, -150^\circ, 30^\circ, 210^\circ$, f) $-240^\circ, -60^\circ, 120^\circ, 300^\circ$
123. a) około $72^\circ, 108^\circ$, b) około $-154^\circ, -26^\circ$, c) około $-39^\circ, 219^\circ$,
d) około $-192^\circ, 12^\circ, 168^\circ$
124. a) około $43^\circ, 317^\circ$, b) około $-58^\circ, 58^\circ, 302^\circ$, c) około $-166^\circ, 166^\circ$,
d) około $-264^\circ, -96^\circ, 96^\circ$
125. a) około $63^\circ, 243^\circ$, b) około $-140^\circ, 40^\circ$, c) około $-22^\circ, 158^\circ$,
d) około $-254^\circ, -74^\circ, 106^\circ$
127. a) 1,25, b) 0,75, c) $1,4\pi$, d) $\frac{10\pi}{7}$
128. a) 2π , b) $\frac{35}{6}\pi$, c) $\frac{9\sqrt{2}}{8}\pi$, d) $\frac{7\sqrt{3}}{2}\pi$
129. a) $\frac{2}{5}\pi$, b) $\frac{5}{4}\pi$, c) $\frac{\pi}{6}$, d) $\frac{8}{9}\pi$
130. ostre: $\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{8}, 0,4\pi$; prosty: $\frac{\pi}{2}$; rozwarte: $\frac{3\pi}{4}, 0,8\pi$; półpełny: π ; wklęsłe: $\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, 1,3\pi$
131. $\alpha = \frac{3\pi}{8}, \beta = \frac{2\pi}{3}, \gamma = 0,8\pi$
132. a) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12}$, b) $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, c) $\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{15}, \frac{73\pi}{180}, \frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{180}, \frac{\pi}{600}$,
d) $\frac{19\pi}{36}, \frac{11\pi}{18}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{11\pi}{6}$
133. $12^\circ, 40^\circ, 252^\circ, 480^\circ, 5,4^\circ, 1020^\circ$
135. $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \frac{\pi}{2} = 0, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{tg} \pi = 0, \cos \pi = -1,$
 $\sin 2\pi = 0$
136. $a = 1,6, b = 6\pi - 6, c = 2,5, d = \frac{20}{9}$
137. a) $a = \frac{12}{5\pi}, \alpha = \frac{5}{12}\pi$, b) $\beta = \frac{5}{8}$
138. kolejne miary łukowe: 0,17; 0,35; 0,52; 0,79; 1,05; 1,57; 2,09; 2,36; 2,62; 3,14; 4,71
139. $17^\circ, 29^\circ, 57^\circ, 74^\circ, 143^\circ, 258^\circ$
140. a) α , b) α , c) β , d) β
141. a) $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}$, b) $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}$, c) $\alpha = \frac{3\pi}{5}, \beta = \frac{2\pi}{5}$, d) $\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{6}$
142. a) 8π , b) $\frac{5}{6}\pi$
143. przy dłuższej podstawie
144. a) $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$, b) $\frac{2\pi}{15}, \frac{11\pi}{15}$ lub $\frac{13\pi}{30}, \frac{13\pi}{30}$, c) $\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2} - 1$, d) 1, $\pi - 2$ lub $\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi-1}{2}$
145. $P \approx 12,9$
146. $\frac{28}{5}\pi, 12\pi, \frac{32}{5}\pi$
147. a) 15π , b) $P = \pi^2$
148. a) $c = 2\pi - 4, \gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$, b) $d = \frac{3}{2}, \delta = 2\pi - 4$
149. a) dla $x \in (0; \pi)$, b) dla $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$, c) dla $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \cup (\frac{3}{4}\pi; \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{7}{4}\pi; 2\pi)$
150. a) $\sin 2 > \sin 3$, b) $\sin 1 > \sin 5$, c) $\cos(-2) = \cos 2$, d) $\cos(-6) > \cos(-5)$, e) $\operatorname{tg}(-1) < \operatorname{tg} 1$,
f) $\operatorname{tg} 1 > \operatorname{tg} 2$, g) $\sin 1,5 > \sin(-4)$, h) $\operatorname{tg}(-2) > \operatorname{tg}(-3)$, i) $\cos 1 > \cos(-3)$
151. a, d, e, f
152. a) $-\frac{\pi}{6}, -\frac{5}{6}\pi$, b) $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$, c) $-\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$, d) $-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$, e) $-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$,
f) $-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$
153. a) $-0,78; 0,83; -0,31$, b) $0,30; -0,36; -1,26$, c) $-0,56; -0,36; 0,31$
154. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $-1, -\sqrt{3}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{3}$
155. a) jedno, b) jedno, c) dwa, d) jedno, e) nieskończenie wiele, f) nieskończenie wiele

156. a) $\langle 1; 3 \rangle$, b) $\langle -2; 0 \rangle$, c) $\langle -5; -4 \rangle$, d) $\langle -\frac{2}{3}; +\infty \rangle$, e) $\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$, f) $\langle -2; 6 \rangle$,
g) $\langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$, h) $\langle 0; 3\frac{3}{4} \rangle$, i) $\langle -3; 5 \rangle$
157. a) 0, b) 0, c) 1, d) -1, e) 0, f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, h) $\frac{1}{2}$, i) $\sqrt{3}$
158. a) sin, tg — rosnące, cos — malejąca, b) sin, cos — malejące, tg — rosnąca, c) sin — malejąca, cos, tg — rosnące, d) sin, cos, tg — rosnące
161. a) dla dwóch argumentów, b) dla dwóch argumentów, c) dla czterech argumentów, d) dla dwóch argumentów, e) dla dwóch argumentów, f) dla czterech argumentów
162. a) np. $[\frac{5}{6}\pi, 3]$, b) np. $[-4, -1]$, c) np. $[1, -2]$, d) np. $[-\frac{\pi}{6}, 7]$, e) np. $[\pi, -3]$, f) np. $[-\frac{11}{12}\pi, -6\frac{1}{2}]$
163. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) $\sqrt{3}$, d) $-\sqrt{3}$
164. a) $x = 0$, b) $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi$, c) $x = 0$, d) $x = \frac{\pi}{3}$
165. dla $a = 0$ i $b > 1$ lub dla $a = 0$ i $b < -1$; dla $a = 0$ i $b \in \langle -1; 1 \rangle$
166. a) brak rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, dwa rozwiązania dla $m \in \{-1, 1\}$, trzy rozwiązania dla $m \in (-1; 1)$, b) brak rozwiązań dla $m \in (-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$, jedno rozwiązanie dla $m \in \{-4, -2\}$, dwa rozwiązania dla $m \in (-4; -2) \setminus \{-3\}$, trzy rozwiązania dla $m = -3$, c) brak rozwiązań dla $m > 0$, pięć rozwiązań dla $m = 0$, osiem rozwiązań dla $m < 0$, d) brak rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, dwa rozwiązania dla $m = 1$, trzy rozwiązania dla $m = 0$, cztery rozwiązania dla $m \in (0; 1)$, e) brak rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; +\infty \rangle$, dwa rozwiązania dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, trzy rozwiązania dla $m = 0$, f) brak rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup \langle 1; +\infty \rangle$, dwa rozwiązania dla $m \in (-1; 0) \cup (0; 1)$
167. a) np. $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, b) np. $[\pi, 0]$, c) np. $[\frac{5}{4}\pi, 5]$, d) np. $[\frac{17}{12}\pi, -1]$
168. a) dla $m > 1$ — nie ma punktów przecięcia, dla $m = 1$ — jeden punkt, $m < 1$ — dwa punkty, b) dla $m > 1$ — dwa punkty przecięcia, dla $m = 1$ — jeden punkt, $m < 1$ — nie ma punktów przecięcia
169. a) 1, b) 2, c) 2, d) 0, e) nieskończenie wiele, f) 1
170. a) 1, b) 2, c) 0, d) 1, e) nieskończenie wiele, f) 2
173. a) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, d) $x = 5k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
e) $x = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$, f) $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
174. a) np. $y = 7 \cos x$, b) np. $y = 5 \cos \frac{1}{3}x$, c) np. $y = -3,5 \cos 10x$
175. a) $\langle -2; 2 \rangle, 2\pi$, b) $\langle -1; 1 \rangle, \pi$, c) $\langle -1; 1 \rangle, 6\pi$, d) $\langle -1; 1 \rangle, \frac{4}{3}\pi$, e) $\langle -3; 3 \rangle, \frac{2\pi}{5}$,
f) $\langle -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \rangle, \frac{4\pi}{3}$
176. a) $\langle -1; 1 \rangle$, b) $\langle -1; 1 \rangle$, c) $\langle -8; 8 \rangle$, d) $\langle -\frac{1}{5}; \frac{1}{5} \rangle$, e) $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$, f) $\langle 0; \frac{3}{4} \rangle$
177. a) $\langle -1; 3 \rangle$, b) $\langle -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3} \rangle$, c) $\langle -\frac{2}{15}; \frac{22}{15} \rangle$, d) $\langle 0; 2\pi \rangle$, e) $\langle -1; \sqrt{2} - 1 \rangle$, f) $\langle 0; 6 \rangle$
178. a) $y = \frac{1}{2} \sin x$, b) $y = -2 \cos x$, c) $y = -\sin x$, d) $y = 1 - \sin x$, e) $y = -1 + \cos x$,
f) $y = 2 \sin 2x$
180. a) $\langle -\pi; \pi \rangle; \pi; x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$; funkcja nieparzysta, b) $\langle -2; 2 \rangle; 2; x = k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}$; funkcja parzysta, c) $\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle; 4; x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$; funkcja parzysta, d) $\langle -\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi} \rangle; 2; x = k, k \in \mathbb{Z}$; funkcja nieparzysta, e) $\langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle; 1; x = \frac{1}{2}k, k \in \mathbb{Z}$; funkcja nieparzysta, f) $\langle -2; 2 \rangle; \frac{2}{3}; x = \frac{1}{6} + \frac{k}{3}, k \in \mathbb{Z}$; funkcja parzysta
181. f: $a = 1,5, b = 1$; g: $a = -1, b = \frac{1}{2}$; h: $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

182. a) $y = \sin 2x + 1$, b) $y = 2 \sin x - 1$, c) $y = \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{2}$
183. a) $\langle 0; 2 \rangle$, b) $\langle 0; 2 \rangle$, c) $\langle 0; 3 \rangle$, d) $\langle -1; 5 \rangle$
184. a) $a = 2\sqrt{3}$, b) $a = \frac{2}{3}$, c) $a = -8\sqrt{2}$, d) $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, e) $a = -6$, f) $a = \frac{3}{2}$, g) $a = -\frac{7\sqrt{2}}{4}$,
h) $a = 9$ lub $a = -9$
185. a) $(\frac{\pi}{4} + k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$,
d) $(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$
186. a) $-\frac{11}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$, b) $-\frac{7}{4}\pi, -\frac{5}{4}\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$, c) $-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$,
d) $-\frac{4}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$
187. a) $x = \frac{\pi}{6}$, b) $x = \frac{2\pi}{3}$, c) $x = \frac{\pi}{3}$, d) $x = \frac{\pi}{6}$, e) $x = \frac{5\pi}{4}$, f) $x = \frac{2\pi}{3}$, g) $x = \frac{\pi}{6}$ lub
 $x = \frac{5}{6}\pi$, h) $x = \frac{\pi}{4}$
188. a) $x \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$, b) $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$, c) $x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = \frac{5\pi}{3}$
189. a) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
c) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
e) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f) $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, g) $x = 3 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, h) $x_1 = 1, 3 + 2k\pi$,
 $x_2 = (\pi - 1, 3) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i) $x_1 = 2 + 2k\pi$, $x_2 = -2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
190. a) $x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$, b) $x \in (0; \frac{\pi}{3})$, c) $x \in (0; \frac{\pi}{3})$, d) nierówność nie ma rozwiązań,
e) $x \in (0; \frac{\pi}{4})$, f) $x \in (0; \frac{\pi}{6})$
191. a) $x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$, b) $x \in (0; \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}; 2\pi)$, c) $x \in (0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}; 2\pi)$,
d) $x \in (\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3})$, e) $x \in (0; \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$, f) $x \in (\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2})$
192. a) $x \in (\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
c) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, e) $x \neq 2k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$, f) $x \in (-\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, g) $x \in (\frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{7}{3}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,
h) $x \in (\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \frac{7}{6}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, i) $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
193. a) tak, b) tak, c) nie, d) tak
194. a) równanie sprzeczne, b) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
d) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, e) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, f) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$
195. a) $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x_1 = -\frac{\pi}{6} + k\pi$,
 $x_2 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
196. a) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub
 $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
e) $x_1 = 1 + 2k\pi$ lub $x_2 = \pi - 1 + 2k\pi$ lub $x_3 = -1 + 2k\pi$ lub $x_4 = \pi + 1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
f) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, g) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, h) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
197. a) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = k\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$,
 $x_3 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x_4 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$
198. a) $x \approx 1,11 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x \approx -0,46 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x_1 \approx 1,23 + 2k\pi$, $x_2 \approx -1,23 + 2k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$
199. a) $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
d) $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

200. a) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, c) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in (\pi - 2 + 2k\pi; 2 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, e) $x \in (3 + 2k\pi; 2\pi - 3 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, f) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; 1 + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
201. a) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
202. a) $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, c) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \setminus \{2k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$, e) $x \in \left(2k\pi; \pi + 2k\pi\right) \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$, f) $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
203. a) $|\angle BAC| \in (60^\circ; 120^\circ)$, b) $\alpha \in (0^\circ; 30^\circ)$
204. a) $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in \left(\frac{k\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$, e) $x \in (2k\pi; \pi - 2 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, f) $x \in (\pi - 4 + k\pi; 3 - \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
205. a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in \mathbb{R}$, c) $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, e) $x \in (2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, f) $x \in (k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
206. Wskazówka do a). Sprawdź, że $\sqrt{20 - 8\sqrt{6}} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$. Wskazówka do b). Przedstaw $\frac{7}{4} - \sqrt{3}$ w postaci $(a - b)^2$. a) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x_4 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
207. $\operatorname{tg} x = 1$ lub $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{7}$
208. a) $x \in \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$ lub $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in \mathbb{R}$, d) nierówność nie ma rozwiązań, e) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$, f) $x \in \left(-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
209. a)  b)  c) 
210. a) $a = \frac{3}{\pi(12k+1)}$ lub $a = \frac{3}{\pi(12k+5)}, k \in \mathbb{Z}$, b) $a = \frac{-3}{\pi(12k+2)}$ lub $a = \frac{3}{\pi(12k+2)}, k \in \mathbb{Z}$
211. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, d) $2 + \sqrt{3}$, e) $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
213. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
214. a) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, c) $x = k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, d) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
217. a) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$, b) $\frac{-2\sqrt{2}-3\sqrt{10}}{14}$, c) $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$, d) $\frac{12\sqrt{3}-5}{26}$
218. a) $\frac{1+6\sqrt{66}}{50}$, b) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$, c) $\frac{3-\sqrt{105}}{16}$, d) 0
219. a) $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, d) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, e) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, f) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, g) $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, h) $x_1 = 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
220. a) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, b) $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, c) $x \in (0; \frac{\pi}{3}) \cup (\pi; \frac{5\pi}{3})$, d) $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

222. a) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$, b) $\frac{24}{25}$, c) $-\frac{17}{25}$, d) $\frac{49}{50}$, e) $-\frac{3}{4}$, f) $-\frac{\sqrt{15}}{7}$ lub $\frac{\sqrt{15}}{7}$

223. a) $2a\sqrt{1-a^2}$, b) $2b^2-1$, c) $ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$, d) $b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}$,
e) $ab-\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$, f) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{1-a^2}-a)$, g) $\frac{b\sqrt{3}+\sqrt{1-b^2}}{2}$, h) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{1-b^2}+b)$

224. a) $x = k\pi$ lub $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

225. a) $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \operatorname{tg} \alpha = -2 \end{cases}$, b) $\begin{cases} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{33}}{6} \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{11} \end{cases}$, c) $\begin{cases} \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3} \end{cases}$

226. a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, c) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x = 2k\pi$ lub $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ lub
 $x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f) $x = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{11}{12}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. D

2. B

3. C

4. B

5. D

6. C

7. C

8. A

9. C

10. a) $\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. a) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{55}}{5}$, b) $\cos 2x = -\frac{3}{8}$

13. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

15. a) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x_1 = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
c) $x_1 = \frac{7\pi}{6} + 4k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
e) $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, f) $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

16. a) $x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$,
c) $x \in \left(-\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi; \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, d) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

PRZED MATURĄ

1. D

2. C

3. $\frac{2}{7}$

4. $\frac{1}{4}$

5. A

6. A

7. $x_1 = -\frac{5\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$, $x_3 = -\frac{\pi}{6}$

8. $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

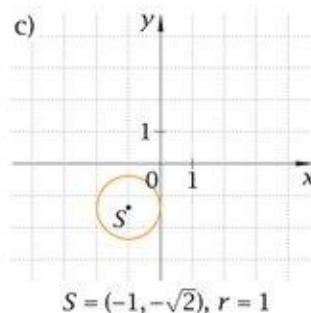
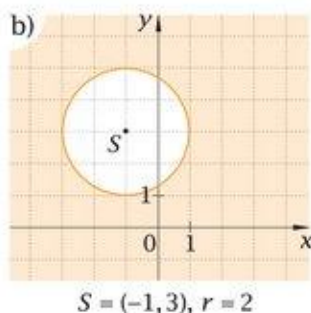
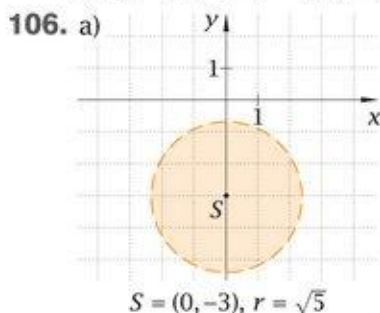
9. $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{4\pi}{3}$

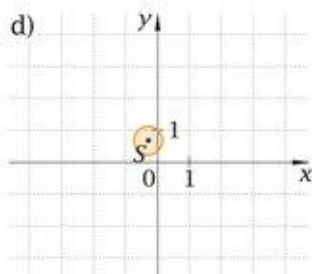
GEOMETRIA ANALITYCZNA

1. a) $(2\frac{1}{2}, -8)$, 9, b) $(-6, -15\frac{1}{2})$, 9, c) $(0, -4\frac{1}{2})$, 13, d) $(7\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2})$, $5\sqrt{10}$, e) $(-294, 320\frac{1}{2})$, $3\sqrt{5}$, f) $(-2\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$, 15
2. a) $p = -10$ lub $p = 2$, b) $p = -3 - 2\sqrt{7}$ lub $p = -3 + 2\sqrt{7}$, c) $p = -4$ lub $p = 2$, d) $p = 1$ lub $p = 3$
3. a) $B = (7, 11)$, b) $M = (-243, -88)$, c) $p = -9$, $q = 4011$
4. a) $\sqrt{41}$, $(2, 1)$, b) $\frac{\sqrt{170}}{2}$, $(-3\frac{1}{2}, 13\frac{1}{2})$
5. a) tak, b) nie, c) tak, d) tak
6. a) $(-2, 1, 5)$, $\sqrt{65}$, b) $(-2, 5, -1, 5)$, $\sqrt{58}$
7. a) $\sqrt{109}$, b) $5\sqrt{2}$
8. a) 58, b) 40, c) 60
9. a) $P_1 = (6, 0)$, $P_2 = (-6, 0)$, $P_3 = (-6, 0)$, b) $P_1 = (0, 7)$, $P_2 = (0, -7)$, $P_3 = (0, 7)$,
c) $P_1 = (-3, -8)$, $P_2 = (3, 8)$, $P_3 = (3, -8)$, d) $P_1 = (5, 9)$, $P_2 = (-5, -9)$, $P_3 = (-5, 9)$
10. a) $S = (-1, -12)$, b) $(-13, -11)$, c) $K = (25, -12)$
11. a) $|AB| = 5$, $|BC| = 10$, $|AC| = 15$, punkty A, B, C są współliniowe, b) $|AB| = 3\sqrt{10}$,
 $|BC| = \sqrt{194}$, $|AC| = 2\sqrt{5}$, punkty A, B, C nie są współliniowe
12. a) $C = (-2, 3)$, $D = (-4, -3)$, b) $C = (-2, -1)$, $D = (0, 9)$, c) $C = (3, -1)$, $D = (4, 2)$
13. a) $p = 1$, b) $p = 2$, c) $p = 3$, d) $p = 1$ lub $p = 2\frac{3}{5}$
14. a) $(3, 0)$ lub $(11, 0)$, b) $(0, -6 - 4\sqrt{3})$ lub $(0, -6 + 4\sqrt{3})$, c) $(2\frac{2}{3}, 0)$, d) $(0, -2\frac{1}{4})$
15. a) $(6, 1 + 5\sqrt{3})$ lub $(6, 1 - 5\sqrt{3})$, b) $(-3 + 3\sqrt{3}, -1)$ lub $(-3 - 3\sqrt{3}, -1)$
16. $C = (6\frac{2}{5}, 0)$ lub $C = (0, -4\frac{4}{7})$
18. $(2, 2)$, $(-1, 9)$ lub $(-4, -12)$, $(-7, -5)$
20. a) $\frac{4}{5}$, b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
21. a) $(-13, 28)$ lub $(-3, 8)$, b) $(-1, -2)$
22. $(31, -31)$ lub $(35, -28)$
23. a) około $22,4^\circ$, $59,5^\circ$, $98,1^\circ$, b) około $49,4^\circ$, $60,3^\circ$, $70,3^\circ$. Wskazówka. Skorzystaj z twierdzenia cosinusów.
24. a) $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$, b) $y^2 = 3x^2 - 4x - 4$
25. a) A, C , b) B, C , c) C , d) B, C
26. a) $a = 1\frac{1}{3}$, $b = 4\frac{1}{2}$, b) $a = 12\frac{1}{2}$, $b = -2\frac{1}{3}$, c) $a = 1\frac{2}{3}$, $b = -1$, d) $a = -2$, $b = 4$
27. a) np. $15x - 5y - 2 = 0$, b) np. $2x + 7y - 42 = 0$, c) np. $-9x + 12y - 10 = 0$,
d) np. $23x + 100y + 70 = 0$
28. a) $y = -\frac{1}{2}x - 3$, b) $y = \frac{5}{4}x - 5$, c) $y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$
29. a) $2x + 3y - 6 = 0$, $y = -\frac{2}{3}x + 2$, b) $x - 3y + 2 = 0$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
30. a) $(0, -22)$, $(-33, 0)$, b) $(0, -6)$, $(5, 0)$, c) $(0, 4)$, $(-6, 0)$
31. a) $y = -3x - 12$, b) $y = 4x - 20$, c) $y = 9x - 2$, d) $y = -2x + 6$, e) $y = -\frac{1}{5}x + 3$, f) $y = \frac{5}{7}x - 1$
32. a) $k: y - 5 = 0$, $l: y + 4 = 0$, b) $k: x + 5 = 0$, $l: x - 3 = 0$, c) $k: y - 4 = 0$, $l: x - 5 = 0$,
d) $k: x + y + 2 = 0$, $l: x - y - 6 = 0$, e) $k: x + 3y + 12 = 0$, $l: 2x - y + 6 = 0$, f) $k: 5x + 2y + 6 = 0$,
 $l: 3x - 4y + 20 = 0$
33. a) $y + 3 = 0$, b) $x - 5 = 0$, c) $x - y - 8 = 0$, d) $x + y - 2 = 0$
34. a) $y = -\frac{1}{3}x + 2$, b) $y = 10$, c) $y = \frac{7}{3}x - 5$, d) $y = \frac{3}{2}x + 9$
35. a) $y = \frac{1}{4}x - 2$, b) $y = 5$, c) $y = -\frac{4}{3}x - 12$, d) $y = \frac{1}{2}x - 3$
36. a) tak, b) nie, c) tak, d) nie, e) nie, f) tak

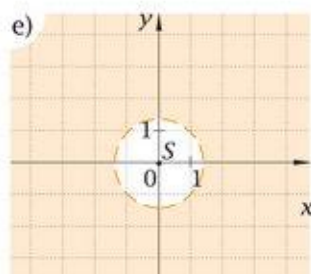
37. a) nie, b) tak, c) tak, d) tak, e) nie, f) nie
38. $c \parallel d, b \parallel h, a \perp c, a \perp d, b \perp g, h \perp g, e \perp f$
39. a) równoległe dla $m = 1\frac{3}{7}$, prostopadłe dla $m = -2\frac{4}{5}$, b) równoległe dla $p = 15$,
prostopadłe dla $p = -1\frac{2}{3}$
40. a) tak, b) $m = \frac{1}{2}$
41. a) $(8, -5)$, b) $(2\frac{6}{7}, -2)$, c) $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
42. a) $y = 2\frac{2}{3}x$, $y = \frac{3}{5}x$, b) $y = -1\frac{1}{5}x + 1\frac{3}{5}$, $y = \frac{5}{3}x - 7$. Wskazówka. Jedna z szukanych prostych jest równoległa do prostej AB , a druga — przechodzi przez środek odcinka AB .
43. a) $p = -11$, b) $p = -\frac{1}{2}$, c) $p = -1$, d) $p = -3$ lub $p = 2$
44. $(-1, 4)$, $(-4, 2)$, $(0, 1)$, $(-\frac{30}{11}, \frac{1}{11})$
45. a) $x + 2y - 10 = 0$ i $4x - 2y - 15 = 0$, b) $4x - 7y + 41 = 0$ i $14x + 8y - 19 = 0$
46. a) $y = 3x - 1$, b) $y = 3x - 1$, $y = x - 3$, $x = -1$
47. Druga przyprostokątna zawiera się w prostej $x + y - 3 = 0$, a przeciwprostokątna zawiera się w prostej $y = 5$ lub w prostej $x = -2$.
48. a) $y = -3,5x + 17,5$, b) $y = \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$
49. a) $y = -\frac{7}{5}x + \frac{4}{5}$, b) $y = \frac{1}{3}x + 6$, c) $y = -3x - 4$, d) $y = -3x + 4$
50. $(1\frac{1}{5}, -2\frac{3}{5})$, $(-1\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$
51. $C = (-1\frac{1}{4}, 5)$
52. $l: y = -\frac{3}{2}x - 8$, $k: y = -\frac{3}{2}x - 3\frac{1}{2}$
53. a) $(\frac{16}{5}, \frac{22}{5})$, b) $(\frac{12}{5}, \frac{1}{5})$
54. a) 60° , b) 30° , c) około 27° , d) około 146°
55. a) ostry, b) ostry, c) rozwarty, d) rozwarty, e) rozwarty, f) ostry
56. $\alpha \approx 108^\circ$, $\beta \approx 42^\circ$, $\gamma \approx 40^\circ$, $\delta \approx 53^\circ$
57. 86°
58. a) 45° , 30° , 105° , b) 30° , 60° , 90°
60. $x = \frac{c-b}{2a}$, $y = \frac{b+c}{2}$
61. a) dwie osie symetrii: $x = 0$, $y = -\frac{C}{B}$, b) dwie osie symetrii: $y = 0$, $x = -\frac{C}{A}$, c) oś symetrii: $y = -\frac{A}{B}x$, środek symetrii: dowolny punkt na prostej $y = -\frac{A}{B}x$
63. a) $3, -\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{5}, -5$, c) $-\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}$, d) $-4, \frac{1}{4}$
64. a) $\frac{2}{5}$, b) 2 , c) $-\frac{1}{2}$, d) $-\frac{5}{7}$
65. a) $p = 28$, b) $p = 50$
66. a) 7 , b) 8 , c) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, d) $2\sqrt{5}$, e) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$, f) $\frac{18\sqrt{17}}{17}$
67. a) $6,4$, b) 52 . Wskazówka. Odległość punktu P od prostej l jest równa połowie długości boku kwadratu.
68. a) $\frac{\sqrt{10}}{20}$, b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
69. a) 15 , b) 13 , c) $\frac{3\sqrt{26}}{13}$, d) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$
70. a) trapezem, b) równoległobokiem, c) kwadratem, d) prostokątem, e) rombem
71. a) $p = -11$, b) $p = 6\frac{1}{3}$
72. a) $p = -10$, b) $p = 0$
73. $h = \frac{17\sqrt{37}}{37}$, $P = 17$

74. $P = 5$
 75. a) $P = 33$, b) $P = 45$
 76. a) $(6, -3)$, b) $(6, -2)$, c) $(10, 4)$, d) $(-3, 4)$
 77. a) $(-1, 2)$, b) 20 , c) $4\sqrt{2}$
 78. $(-4, -3)$
 79. $C = (0, -12)$ lub $C = (0, 8)$
 80. a) $(-1, -1)$, $(\frac{3}{5}, 2\frac{1}{5})$
 81. a) $(1, 2)$, b) $(2, 3)$, c) $(1\frac{2}{3}, 2\frac{2}{3})$
 82. $(1, -3)$
 83. $(1\frac{1}{2}, -6)$
 84. a) 52 , b) $(3, -2)$, $(9, 2)$, $(5, 8)$ lub $(3, -2)$, $(-3, -6)$, $(-7, 0)$, c) $y = -\frac{1}{5}x + 3\frac{4}{5}$, $y = 5x - 17$ lub $y = -\frac{1}{5}x - \frac{7}{5}$, $y = 5x + 9$
 85. $3x + 4y + 41 = 0$, $3x + 4y - 19 = 0$
 86. $y = \frac{2}{3}x + 2\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}x - 6$, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{2}x - 12\frac{1}{2}$
 87. $A = (-5, 1)$, $D = (0, 6)$
 88. $(-3, -1)$, $(2, 3)$, $(-1, 5)$, $(-6, 1)$
 89. a) $(2, 8, -1, 4)$, $(4, -1)$, $(-4, 8, 3, 4)$, $(-6, 3)$, b) $8, 8$
 90. a) $(-2, 3)$, b) 23
 91. a) $m = \frac{1+\sqrt{105}}{2}$ lub $m = \frac{1-\sqrt{105}}{2}$, b) $m = -6,5$ lub $m = -2$
 92. $(-3, 2)$, $(1, 10)$
 93. $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$ lub $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$
 94. a) $C = (2 - 4\sqrt{3}, 0)$ lub $C = (2 + 4\sqrt{3}, 0)$, b) $C = (-2, -2)$ lub $C = (-2, 5)$,
 c) $C = (\frac{11-\sqrt{65}}{4}, \frac{11-\sqrt{65}}{4})$ lub $C = (\frac{11+\sqrt{65}}{4}, \frac{11+\sqrt{65}}{4})$
 95. $B = (10, -1)$, $D = (-6, 7)$
 96. a) $C = (7, 0)$, $B = (6, -3)$ lub $B = (4, -1)$, b) 16 lub 20
 97. a) $p = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, b) $p = 9$
 98. $(2, 5 - \sqrt{30})$, $(2, 5 + \sqrt{30})$
 99. a) $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 25 = 0$, b) $(3 - \sqrt{2})x - (1 - 2\sqrt{2})y = 0$, $(3 + \sqrt{2})x - (1 + 2\sqrt{2})y = 0$
 100. a) $(1, 1)$, $(-5, -7)$, b) $(\frac{-4-\sqrt{10}}{2}, \frac{-2-3\sqrt{10}}{2})$, $(\frac{-4+\sqrt{10}}{2}, \frac{-2+3\sqrt{10}}{2})$
 102. a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$, b) $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 7$, c) $x^2 + (y+5)^2 = \frac{1}{16}$, d) $x^2 + y^2 = 18$,
 e) $(x+\frac{1}{5})^2 + (y-\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{36}$, f) $(x+0,2)^2 + (y+2,3)^2 = 6,25$
 103. B, E, F
 104. a) $(1, -2)$, 3 , b) $(0, -3)$, $2\sqrt{2}$, c) $(5, \frac{1}{2})$, $\frac{5}{2}$, d) $(-\frac{3}{2}, -4)$, $\frac{\sqrt{65}}{2}$, e) $(-1, 0)$, 3 , f) $(1, -5)$, $\sqrt{26}$
 105. a) $(x+2)^2 + y^2 \leq 16$, b) $(x-3)^2 + (y+5)^2 \leq 10$, c) $(x+1)^2 + (y+4)^2 \leq 18$,
 d) $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2 \leq 25$

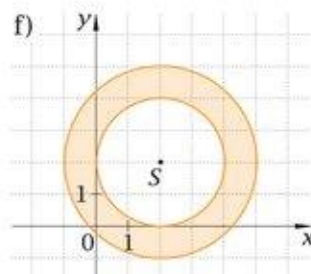




$$S = \left(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right), r = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



$$S = (0,0), r = \sqrt{2}$$



$$S = (2,2), 2 \leq r \leq 3$$

107. a) $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 10$, b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13$, c) $(x+4)^2 + (y+6)^2 = 64$, d) $(x+2)^2 + y^2 = 4$

108. a) $y = \sqrt{5}$, $y = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5}$, b) $y = 10$, $y = -10$, $x = -5$, $x = 15$, c) $y = 3$, $y = 11$, $x = -8$, $x = 0$, d) $y = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$, $x = -3 - \sqrt{2}$, $x = -3 + \sqrt{2}$, e) $y = 0$, $y = 12$, $x = -6$, $x = 6$, f) $y = 5 - \sqrt{6}$, $y = 5 + \sqrt{6}$, $x = 1 - \sqrt{6}$, $x = 1 + \sqrt{6}$

109. a) $(x+6)^2 + (y-5)^2 = 3$, b) $(x+8)^2 + y^2 = 11$

110. a) $(x-2,5)^2 + (y+1)^2 = 7,25$, b) $(x-3)^2 + (y+1,5)^2 = 31,25$, c) $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 17$, d) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 50$

111. a) $(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3$ lub $(x-2)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 3$, b) $(x-2)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 12$ lub $(x-2)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 12$

112. a) $(x+8)^2 + (y+3)^2 = 36$, $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 36$, $(x+8)^2 + (y-9)^2 = 36$, $(x-4)^2 + (y-9)^2 = 36$, b) $(x-1,5)^2 + (y+3,5)^2 = 2,25$, $(x-1,5)^2 + (y+6,5)^2 = 2,25$, c) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$, $(x+2)^2 + (y-7)^2 = 9$, d) $(x+2)^2 + y^2 = 2$, $x^2 + (y+2)^2 = 2$, $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 2$, $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 2$

113. a) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$, $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 49$, b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 625$, c) $x^2 + (y-4)^2 = 16$, $x^2 + (y-4)^2 = 196$, d) $(x+3)^2 + (y+5)^2 = (8-5\sqrt{2})^2$, $(x+3)^2 + (y+5)^2 = (8+5\sqrt{2})^2$

114. a) styczne, b) przecinają się, c) rozłączne, d) rozłączne, e) styczne, f) przecinają się

115. a) $(x-5)^2 + (y+10)^2 = 7$, b) $(x-19)^2 + (y+8)^2 = 3$

116. a) $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,-6)$, b) $(1,0)$, $(0, \sqrt{3}+2)$, $(0, -\sqrt{3}+2)$, c) $(3,0)$, $(9,0)$, d) $(-2,0)$, $(10,0)$, $(0,-5)$, $(0,4)$

117. a) 2, b) 27

118. a) $(x-4)^2 + (y-1,5)^2 = 16,25$, b) $(x+7,5)^2 + (y-5,5)^2 = 162,5$

119. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 25$

120. a) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 25$, b) $x^2 + (y+8)^2 = 52$, c) $(x+1)^2 + (y+11)^2 = 25$

121. a) $(x-1)^2 + (y+3-\sqrt{5})^2 = 9$, b) $6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$

122. a) $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 25$, b) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$

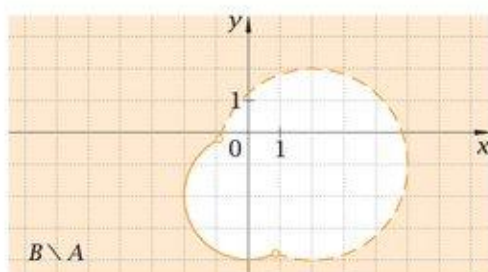
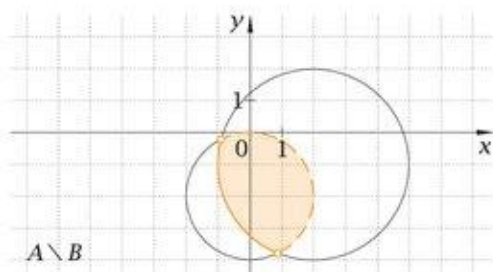
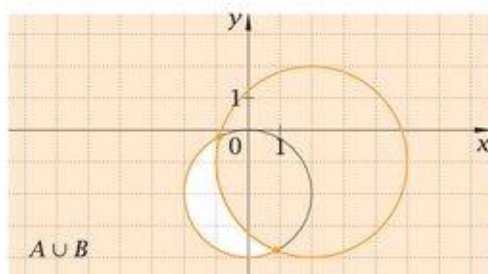
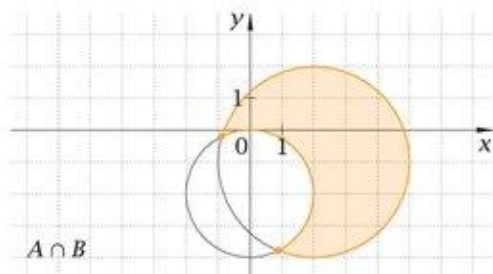
123. a) $p \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, b) $p \in (-4; 2)$

124. a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$, b) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 20$

126. Gdy $a^2 + b^2 - c = 0$, równanie opisuje punkt, a gdy $a^2 + b^2 - c < 0$ — zbiór pusty.

127. a) dla $m \in \{2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\}$ układ równań ma jedno rozwiązanie; dla $m \in (-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}) \cup (2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ — dwa rozwiązania; dla $m \in (-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$ — nie ma rozwiązania, b) dla $m \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$ układ równań nie ma rozwiązania; dla $m = -2\sqrt{2}$ lub $m = 2\sqrt{2}$ — jedno rozwiązanie; dla $m \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \setminus \{0\}$ dwa rozwiązania; dla $m = 0$ — nieskończenie wiele rozwiązań

128.

129. a) $2\pi + 4$, b) $8 - 2\pi$

130. a) jedno, b) nieskończenie wiele, c) jedno

131. a) tak; $(7, -10)$, b) tak; $(1\frac{1}{4}, -2)$, c) nie; proste mają nieskończenie wiele punktów wspólnych, d) tak; $(\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4})$, e) nie, f) tak; $(-3, -1)$

132. a) nie, b) tak, c) nie

133. 30

134. a) $y = 3x - 9$, b) $y = -1,5x - 8,5$, c) $y = 0,25x - 3,5$, d) $y = 0,4x - 6,8$ 135. a) $16\frac{2}{3}$, b) 25136. a) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$, b) $(-1, -3)$, $(1, 8, 2, 6)$ 137. a) $(2, 5)$, $(0, -1)$, b) $(-\frac{4}{5}, -\frac{17}{5})$, c) nie ma punktów wspólnych, d) $(\frac{1-\sqrt{11}}{5}, \frac{-2-3\sqrt{11}}{5})$
lub $(\frac{1+\sqrt{11}}{5}, \frac{3\sqrt{11}-2}{5})$ 138. $|AB| = 2\sqrt{5}$ 139. a) $y = 5$, b) $x = -1$, c) $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4}$, d) $y = \frac{4}{3}x - 13\frac{2}{3}$ 140. a) $(0, -1)$, b) $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, c) $(0, -1)$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, d) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$,
 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

141. 8

143. 3

144. 36

145. a) $\frac{7\sqrt{7}}{4}$, b) $\frac{17\sqrt{17}}{9}$ 146. a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 33$, b) $(x+3)^2 + (y-5)^2 = \frac{917}{68}$ 147. a) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = \frac{36}{5}$, $(\frac{7}{5}, -\frac{9}{5})$, b) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 8,2$ 148. a) $\sqrt{26}$, b) $2\sqrt{5}$ 149. a) $(x + \frac{4}{5})^2 + (y - \frac{2}{5})^2 = \frac{36}{5}$, b) $y = -\frac{1}{2}x$ 150. $\frac{8}{5} + \frac{9}{5}\sqrt{17}$ 151. a) $(-8, -16)$, $(0, -10)$, $(-6, -2)$, $(-14, -8)$, b) $(1, -2)$, $(1\frac{4}{5}, -4\frac{2}{5})$, $(9, -2)$, $(8, 2, 0, 4)$ 152. a) $C = (-2, -2)$ lub $C = (1, -1)$, b) $C = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 3)$ lub $C = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} - 3)$

153. $C = (5, -1)$, $D = (2, -5 - \sqrt{19})$

154. $C = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{8\sqrt{5}}{5} - 2\right)$ lub $C = \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5} - 2\right)$

155. a) $y = 3x + \sqrt{30} - 3$, $y = 3x - \sqrt{30} - 3$, b) $y = 2x + \sqrt{15} - 2$, $y = 2x - \sqrt{15} - 2$,
c) $y = -x + \sqrt{6} + 1$, $y = -x - \sqrt{6} + 1$, d) $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

156. a) $x + 5y - 1 + \sqrt{26} = 0$, $x + 5y - 1 - \sqrt{26} = 0$, b) $2x - y - 2 - \sqrt{5} = 0$, $2x - y - 2 + \sqrt{5} = 0$

157. $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 40$

158. $y = 2x - 4 - 3\sqrt{5}$, $y = 2x - 4 + 3\sqrt{5}$

159. $(x + 2 + \sqrt{2})^2 + (y + 2 + \sqrt{2})^2 = 4(3 - 2\sqrt{2})$

160. $p > \frac{9}{5}$

161. $a = -3$ i $b \in (-\infty; 5 - 2\sqrt{10}) \cup (5 + 2\sqrt{10}; +\infty)$

162. $(3 - 1, 2\sqrt{5}, 1 + 0, 6\sqrt{5})$

163. 10

165. a) $(-1, 0)$, $(1, 0)$, b) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, c) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d) $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{\sqrt{11}}{6}\right)$, $\left(-\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$

166. a) $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, b) $\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{5}, \frac{6-\sqrt{6}}{5}\right)$, $\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{5}, \frac{6+\sqrt{6}}{5}\right)$,
c) $(0, -2)$, $\left(-\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

167. a) $x = -\sqrt{2}$, $y = 2$ lub $x = \sqrt{2}$, $y = 2$, b) $x = \frac{-11+2\sqrt{19}}{10}$, $y = \frac{-8+\sqrt{19}}{10}$ lub $x = \frac{-11-2\sqrt{19}}{10}$,
 $y = \frac{-8-\sqrt{19}}{10}$, c) $x = \frac{9-\sqrt{15}}{8}$, $y = \frac{-9-\sqrt{15}}{8}$ lub $x = \frac{9+\sqrt{15}}{8}$, $y = \frac{-9+\sqrt{15}}{8}$

168. a) 2, b) 8

170. a) $\begin{cases} y \leq \frac{2}{3}x - 2 \\ y \leq -x - 3 \end{cases}$, b) $\begin{cases} y > \frac{2}{3}x - 2 \\ y > -x - 3 \\ y \leq 0 \end{cases}$, c) $\begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x - 2 \\ x < -2 \\ y < -x - 3 \end{cases}$, d) $\begin{cases} y \leq \frac{2}{3}x - 2 \\ y \leq -x - 3 \\ x \geq -4 \\ y \geq -6 \end{cases}$, e) $y \geq -x - 3$ lub
 $y < \frac{2}{3}x - 2$, f) $y \geq \frac{2}{3}x - 2$ lub $y \leq -x - 3$ lub $x \leq 2$, g) $\begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x - 2 \\ y \geq -x - 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$, h) $\begin{cases} y \leq -x - 3 \\ y \leq \frac{2}{3}x - 2 \\ -5 < y < -3 \end{cases}$

171. a) $p = 0$ lub $p = -\frac{8}{15}$, b) $p \in (-\infty; -\frac{8}{15}) \cup (0; +\infty)$, c) $p \in (-\frac{8}{15}; 0)$

172. a) $(-\sqrt{3}, 3)$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 3)$, b) $(2 - \sqrt{3}, -1)$, $(2, -4)$, $(2 + \sqrt{3}, -1)$

173. $(-1, 1)$, $(3, 9)$

174. a) brak punktów wspólnych dla $p > 1$ lub $p < -\frac{5}{4}$, jeden punkt wspólny dla $p = 1$, dwa punkty dla $-1 < p < 1$ lub $p = -\frac{5}{4}$, trzy punkty dla $p = -1$, cztery punkty dla $-\frac{5}{4} < p < -1$,
b) jeden punkt wspólny dla $p \leq \frac{1}{2}$ i $p \neq 0$, trzy punkty dla $p > \frac{1}{2}$

175. $y = 2x + 5$, $y = -2x + 5$

176. a) $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$, b) $y = 2\sqrt{2}x + 1$, $y = -2\sqrt{2}x + 1$, c) $x = -1$, $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, d) $x = 1$,
 $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$

177. $(x-3)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = 10$, $(x-3)^2 + \left(y - \frac{16}{3}\right)^2 = 10$, $(x-13)^2 + (y-2)^2 = 10$, $(x+7)^2 + (y-2)^2 = 10$

178. $(x-2)^2 + (y-5\sqrt{2})^2 = 25$

179. $(x+2, 5)^2 + (y+0, 5)^2 = 6, 5$

180. $y = 1$, $y = 5$, $y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + 3 - \frac{4\sqrt{5}}{5}$ i $y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + 3 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$

181. $P = \left(\frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ lub $P = \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}, -\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$

182. $p = \frac{9}{8}$ lub $p = -\frac{9}{8}$

183. a) $m = 3$ lub $m = -2\frac{1}{3}$, b) $t \in (-\infty; -2 - \sqrt{5}) \cup (-2 + \sqrt{5}; +\infty)$

184. $p \in \langle -2; -\frac{4}{5} \rangle$

185. $(8 - \sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3})$, $(8 + \sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$

186. $a = \frac{1}{4}$ lub $a = \frac{1}{2}$

187. a) $(-2, 2)$, $(-0, 8, -0, 4)$, b) $(-\frac{27}{5}, \frac{6}{5})$, $(\frac{9}{17}, -\frac{2}{17})$, c) $(\frac{2+\sqrt{19}}{5}, \frac{-1+2\sqrt{19}}{5})$, $(\frac{2-\sqrt{19}}{5}, \frac{-1-2\sqrt{19}}{5})$

188. a) około $110,5^\circ$ Wskazówka: Zauważ, że szukany kąt jest równy kątowi w trójkącie, którego wierzchołkami są środki danych okręgów i punkt ich przecięcia. b) 3

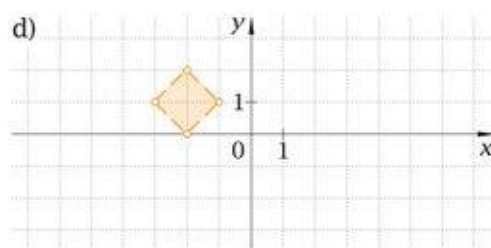
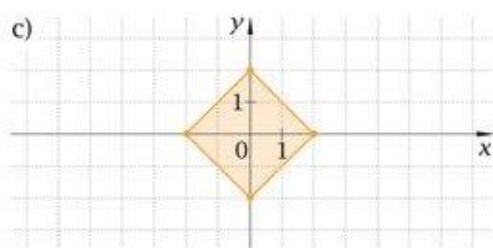
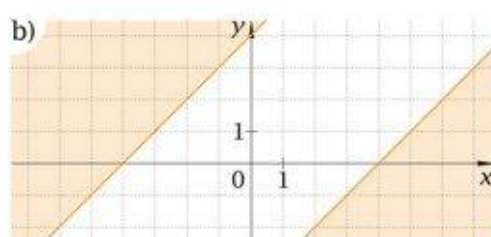
189. a) $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$, b) $y = \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ Wskazówka: Odległość punktu od okręgu to długość najkrótszego z odcinków łączących ten punkt z punktami okręgu.

190. a) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 \geq 9 \\ x < 1 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 2 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 \leq 4 \\ y < -x+3 \end{cases}$, d) $(x-2)^2 +$

$+(y+3)^2 > 9$ lub $y \geq -\frac{3}{2}x$, e) $(x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 4$ lub $(x+1)^2 + (y-2)^2 \geq 4$, f) $\begin{cases} (x+2)^2 + y^2 < 9 \\ y < -x+1 \\ y < x+5 \end{cases}$

191. a) $\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x+3 \\ y \leq -4x+24 \\ y \leq 4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} y \geq \frac{5}{2}x+4 \\ y \leq \frac{5}{2}x+12 \\ y \geq -\frac{3}{2}x-4 \\ y \leq -\frac{3}{2}x+4 \end{cases}$, c) $\begin{cases} y \geq \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \\ y \geq 2x-13 \\ y \leq \frac{1}{4}x + \frac{11}{4} \\ y \geq -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$

192. a) $P = 2\pi$, b) $P = 8\pi$, c) $P = \pi + 2$, d) $P = 4\pi - 8$



PRZED SPRAWDZIANEM

1. D

2. A

3. C

4. A

5. A

6. B

7. C

8. B

9. C

10. C

11. B
 12. C
 13. D
 14. A
 15. B
 16. $10 + 2\sqrt{5}$
 17. 37,5
 18. $(-7, 2)$, $(-2 + 2\sqrt{5}, 7)$
 19. $(5\frac{2}{5}, 9\frac{1}{5})$, $(\frac{3}{5}, 2\frac{4}{5})$
 20. $(x + 12)^2 + (y - 31)^2 = 17$
 21. $(\frac{41}{37}, -\frac{87}{37})$

PRZED MATURĄ

1. B
 2. B
 3. B
 4. A
 5. D
 6. C
 7. C
 8. C
 9. A
 10. B
 11. A
 12. B
 13. B
 14. A
 15. C
 16. C
 17. $C = (0, -\frac{5}{3})$
 18. $y = -3x + 16$
 19. $B = (7, 4\frac{1}{2})$, $|AB| = 12,5$
 20. $2\frac{2}{3}$
 21. $B = (8, 6, 5, 8)$
 22. $C = (6, 4, 15, 8)$
 23. C
 24. B
 25. $y = -\frac{1}{2}x + 6$ lub $y = -\frac{1}{8}x + 3$
 26. $C = (6, 12)$
 27. $3\sqrt{10}$
 28. $C = (\frac{8}{3}, \frac{14}{3})$, $D = (6, 2)$
 29. $B = (-\frac{17}{5}, \frac{31}{5})$, $C = (-3, -\frac{13}{3})$
 30. $A = (0, 25)$, $B = (0, 0)$, $C = (12, 9)$
 31. $x^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = (\frac{17}{3})^2$

32. $a = 6 - 6\sqrt{3}$, $a = 6$ lub $a = 6 + 6\sqrt{3}$

33. $\frac{2048\pi}{3}$

STEREOMETRIA

1. a) $V_1 = 180$, $V_2 = 180$, $V_3 = 300$, b) $V_1 = 54$, $V_2 = 60$, $V_3 = 30$

2. $P_c = 564$

3. $V = \frac{a^3}{24}$, $P_c = a^2$

4. a) $V = \frac{a^3}{3}$, b) $V = \frac{2a^3}{3}$, c) $V = \frac{2a^3}{3}$

5. $V = 558$, $P_c = 6(66 + \sqrt{13})$

6. $V = 160\frac{5}{12}$

7. $H = 3a$, $P = \frac{a^2\sqrt{17}}{2}$

8. $\frac{5a^3}{8}$

9. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

10. $V = \frac{223\sqrt{2}}{3}$, $P_c = 82\sqrt{3}$

11. a) $V \approx 440 \text{ m}^3$, b) $P \approx 127 \text{ m}^2$

12. a) około 5,6 m, b) około 133 m², c) około 164 m³

13. $V = \frac{7a^3\sqrt{2}}{48}$, $P_c = \frac{a^2(5+3\sqrt{3})}{4}$

14. $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} : 1$

15. I — XI, II — V, IV — IX, VI — VIII, VII — XII

16. tak; tak

17. a) $(\sqrt{2} - 1)a$, b) $\frac{a}{3}$, c) $\frac{a}{3}$

18. $V = \frac{161a^3}{162}$, $P_c = \frac{a^2(105+\sqrt{3})}{18}$

19. a) $V = \frac{21a^3\sqrt{5}}{16}$, $P_c = \frac{3a^2(5\sqrt{3}+9\sqrt{7})}{8}$, b) $V = \frac{23\sqrt{5}a^3}{16}$, $P_c = \frac{a^2(23\sqrt{3}+60\sqrt{7}+3\sqrt{83})}{16}$

20. a) tak, b) dwie; 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, c) tak; są jeszcze dwie możliwości: czworościan o krawędziach długości: 1, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{3}$ lub o krawędziach długości: 1, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

21. $\frac{a}{2}\sqrt{2\sqrt{2}}$

22. $3\sqrt{3} : 1$

23. $180\sqrt{5}\pi \text{ cm}^3$

24. a) 4 razy, b) 4 razy

25. $107,52\pi$

26. $\frac{\pi}{4}$

27. około 1,63 m³

28. $V = \frac{r^2\sqrt{R^2-r^2}\pi}{3}$, $P_c = \pi r(r+R)$

29. $\frac{2304\pi}{25}$

30. 432π

31. $\frac{15\,625\pi}{48}$

32. a) $\frac{4}{3}$ raza, b) $\frac{4}{3}$ raza

33. 24

34. a) $324\sqrt{3}$, b) $432\sqrt{3}$

35. $V = \frac{\sqrt{3}\pi d^3}{18}$, $P_c = \frac{(1+\sqrt{2})\pi d^2}{3}$
36. $R = 2r$ lub $R = (\sqrt{5} - 1)r$, gdzie R — promień podstawy stożka, r — promień podstawy walca
37. a) $\alpha = 30^\circ$, b) $\beta \approx 49^\circ$ ($\sin \beta = \frac{3}{4}$)
38. $V = 3\pi \text{ cm}^3$
39. 120° ; 90°
40. około 55°
41. 30° ; około 27°
42. a) $\alpha \approx 78^\circ$, b) $\beta \approx 41^\circ$, c) $\gamma \approx 46^\circ$
43. $d = 12\sqrt{5}$, $V = 432\sqrt{15}$
44. około 68° ; około 73°
45. a) 60° , b) około 55° , c) 45°
46. około 34°
47. a) około 76° ; około 72° , b) około 67° , c) około 23° , d) około 77°
48. a) 45° , b) około 55° , c) około $109,5^\circ$, d) około $70,5^\circ$
49. a) krawędź boczna: 6; krawędź podstawy: $3\sqrt{2}$, b) 60° , c) 45°
50. $\sqrt{144 \sin^2 35^\circ + 108 \cos^2 35^\circ} \approx 10,95 \text{ cm}$; około 39°
51. około 69°
52. a) około 26° , b) około 34°
53. $\alpha \approx 77^\circ$
54. a) $V = 36\sqrt{3}$, $P_c = 12(6 + \sqrt{3})$, b) około 56° , c) około 16°
55. około 48°
56. około 13°
57. $V = 15\sqrt{2}$
58. $V = 48\sqrt{2}$
59. wysokość: $5 \sin 50^\circ \approx 3,83 \text{ cm}$; krawędź podstawy: $5\sqrt{2} \cos 50^\circ \approx 4,55 \text{ cm}$
60. a) $\sqrt{13}$, b) około 64° , c) około $76,5^\circ$, d) około 65°
61. a) około 27° ; około $104,5^\circ$, b) około 68° ; około 98°
62. wysokość: $\frac{12 \operatorname{tg} 70^\circ}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 70^\circ}} \approx 9,7$; krawędź podstawy: $\frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 70^\circ}} \approx 12,2$
63. $\frac{\sqrt{2}-1}{6}S$; około 49°
64. $\frac{\sin \alpha}{1 - \sqrt{3} \cos \alpha} p$
65. $\frac{p}{\operatorname{tg} \alpha - 2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1}$
66. $\frac{81\sqrt{7}}{4}$
67. $V \approx 109$, $P_c \approx 151$
68. a) około 71° , b) około 17°
69. a) $V = 21\frac{1}{3}$, $P_c = 16(\sqrt{3} + \sqrt{6})$, b) $V \approx 103$, $P_c \approx 151$
70. około 66° ; około 58°
71. a) $V = 36\sqrt{3}$, b) $V = 96\sqrt{21}$
72. a) około 35° , b) około 41° , c) 45°
73. a) około 94° , b) około 83°
74. a) około 104° , b) około 128°

75. $b = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}c^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)a^2}$
77. prostokątem; co najmniej: a^2 , co najwyżej: $\sqrt{2}a^2$
79. a) $8(\sqrt{3}+2)$, b) $2(10+3\sqrt{2})$, c) $5+\sqrt{34}+\sqrt{41}$ d) $2(4+\sqrt{34})$, e) $6(\sqrt{2}+\sqrt{13})$,
f) $2(3\sqrt{2}+\sqrt{29})$
80. $a^2\sqrt{2}$
82. a) $P = \frac{3}{2}$, b) $P = \frac{3}{8}$, c) $P = \frac{3\sqrt{33}}{8}$
83. a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$, b) około 55°
84. około 48°
85. a) $9\sqrt{7}$, b) $\frac{3\sqrt{41}}{2}$, c) $3\sqrt{39}$, d) $9\sqrt{6}$
86. a) $a^2\sqrt{7}$, b) $a^2\sqrt{15}$, c) $\frac{5\sqrt{3}a^2}{4}$, d) $\frac{3\sqrt{7}a^2}{2}$
87. $3\sqrt{195}$
88. $8(12\sqrt{6}+\sqrt{3})$
89. $\frac{432\sqrt{15}}{25}$
90. najmniejsze: $P = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$, największe: $P = \sqrt{2}a^2$
91. nie
92. a) $\frac{a^2\sqrt{251}}{16}$, b) $\frac{5\sqrt{5}a^2}{8}$, c) $\frac{3\sqrt{83}}{16}a^2$
93. a) $P_c = \frac{161+5\sqrt{193}}{2}$, b) $V = \frac{243\sqrt{3}}{4}$ lub $V = \frac{729}{4}$ lub $V = \frac{243\sqrt{3}}{2}$ lub $V = \frac{729}{2}$, c) $V = \frac{66\sqrt{57}}{19}$
94. $\frac{\sqrt{78}}{12}$
95. około 41°
96. $\frac{P}{4}$
97. $P = 60\sqrt{3}$
98. a) a , b) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
99. $P = 18\frac{54}{125}\text{ cm}^2$
100. b) $P = \frac{a^2}{4}$
101. sześciokątem; obwód $= 4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$
102. 45° lub około 11°
104. dla $0 < \alpha \leq \alpha_0$ trójkąt o polu $P = \frac{1}{2\cos\alpha}$, dla $\alpha_0 < \alpha < 90^\circ$ trapez o polu
 $P = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$, gdzie $\text{tg } \alpha_0 = \sqrt{2}$, czyli $\alpha_0 \approx 55^\circ$
105. $P = 10,8$
106. Wskazówka. Należy wykazać, że proste DE i HF są skośne. Proste te nie są równoległe, ponieważ $DE \parallel AC$ i $HF \parallel AC$. Proste te nie przecinają się, ponieważ punkt przecięcia musiałby leżeć na prostej AC , a to nie jest możliwe, gdyż $DE \parallel AC$.
107. $P = \frac{\sqrt{2}}{3}a^2$
108. około 34°
109. a) $V = \frac{32\sqrt{2}\pi}{27}$, b) $V = \frac{1872\pi}{125}$, c) $V = \frac{13}{6}\pi$
110. a) $V = 4104$, b) $V = 10,53\sqrt{3}$, c) $V = 47,25$
111. a) $V = 28$, b) $V = \frac{63\sqrt{3}}{8}$, c) $V = \frac{37}{2}$
112. $4\sqrt[3]{4}$ razy
113. $\frac{\sqrt{3}}{3}h$
114. około $2,06\text{ g}$
115. 24 t

116. $V_1 = 1\frac{1}{4}$, $V_2 = 33\frac{3}{4}$

117. około 5,7 szklanki

118. około 6,98 t

119. a) $12\frac{2}{3}\pi \approx 12,7\text{ m}^3$, b) $50\frac{2}{3}\text{ m}^3$, c) $76\sqrt{3} \approx 131,6\text{ m}^3$

120. $V = \frac{1}{4}a^3$. Wskazówka. Od objętości ostrosłupa ściętego odejmij objętość ostrosłupa o podstawie DEF.

121. a) 1:7:19, b) 1:7:19:37, c) 1:7:19:37:61

122. $\frac{602}{999} \approx 0,6$

123. około 6 cm

PRZED SPRAWDZIANEM

1. D

2. A

3. B

4. C

5. A

6. $V = 555,5$, $P_c = \frac{797+9\sqrt{3}}{2}$

7. $P_b = \frac{576\pi}{25}$, $V = \frac{3456\pi}{125}$

8. $16\sqrt{39}$

9. $\frac{112\sqrt{61}}{3}$

10. a) 8, b) około 53° ; około $63,5^\circ$; około $63,5^\circ$

11. A

12. A

13. D

14. D

15. B

16. a) około 86° , b) około 83° , c) około 77°

17. około 161°

18. $P_c = 192(1 + \sqrt{2})$, $V = 256\sqrt{3}$

19. $\frac{117}{125}$ lub $\frac{98}{125}$

PRZED MATURĄ

1. B

2. B

3. D

4. D

5. $144 + 384\sqrt{2}$

6. $\frac{640\sqrt{3}}{3}$

7. $P_b = 9\sqrt{30}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

8. $21\sqrt{7}$

9. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

10. A

11. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

12. $166\frac{2}{3}$

14. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

STATYSTYKA

2. a) błąd bezwzględny 6744; błąd względny około 3,5%, b) błąd bezwzględny 0,445 m²; błąd względny około 4,7%, c) błąd bezwzględny 0,25 ha, błąd względny około 11,1%, d) błąd bezwzględny 1001, błąd względny około 4,2%, e) błąd bezwzględny 25 zł; błąd względny około 4,8%
3. 1: około 0,37%, 2: około 3,8%, 3: około 1,7%, 4: około 2,2%, 5: około 2,8%, 6: około 1,3%
4. a) około 0,01%, 0,09%, 0,88%, b) około 0,03%, 0,23%, 0,23%, c) około 0,01%, 0,48%, 2,45%
5. a) około 52 m², około 0,9%, b) około 48 m², około 8,5%
7. c) *d*, *e*, *f*
8. a) 1,59%, 1,54%, b) 5,41%, 4,88%
9. a) 21,5, b) 17,7, c) 20,05 lub 19,95, d) 21,01 lub 18,99
10. a) około 1,5%, b) około 5,4%, c) około 8,9%
11. w drugim
12. 77 kg lub 175 kg
13. a) 18,75, b) 112
14. a) 500, b) około 4,76%, c) 1,(01)%
15. liczba *a*, dwa razy
16. około 4%
17. średnia arytmetyczna: a) 42,2, b) 28,75, c) 10, d) około 5,08, e) około 13,1, f) -0,5; mediana: a) 43, b) 9, c) 10,5, d) 5,5, e) 11, f) -0,5; dominanta: a) 53, b) 4 i 9, c) 12 i 13, d) 2, e) 8, f) brak
18. a) średnia arytmetyczna: klasa III A około 2,8, klasa III B około 2,5, mediana: klasa III A 3, klasa III B 2, dominanta: klasa III A 4, klasa III B 2, b) średnia arytmetyczna około 2,69, mediana 2, dominanta 2
19. średnia arytmetyczna: miasto A około 1,86, miasto B około 2,62, razem 2,35; mediana: miasto A 2, miasto B 3, razem 2; dominanta: miasto A 2, miasto B 1 i 4, razem 1
20. a) 50%, b) 50%, c) 25%, d) 75%
21. a) średnia arytmetyczna 1,9975 m; mediana 1,995 m; dominanta 1,98 m, b) średnia arytmetyczna około 1,01 kg; mediana 1,03 kg; dominanta 1,05 kg, c) średnia arytmetyczna około 100,17 kg; mediana 100 kg; dominanta 100 kg
22. a) 28 lat, b) 17 lat
23. 29 lat
24. średnia arytmetyczna 1,91, dominanta 2, mediana 2
25. $x = 11$, $y = 14$
26. a) Kamil 4, Karolina 5, b) Kamil około 3,03%, Karolina około 2,04%
27. a) średnia arytmetyczna 1,7; mediana 1,5; dominanta 1, b) średnia arytmetyczna 0,8; mediana 1; dominanta 1, c) średnia arytmetyczna 0,9; mediana 1; dominanta 0
28. a) 37, b) 135, c) -2, d) 111, e) 28
30. a) tak, b) tak, c) siedem, d) nie, e) nie
32. a) $a = 13$, dominanta 7; mediana 7, b) $a = 2$, dominanta 2; mediana 4,5, c) $a = 4$, dominanta 12; mediana 11, d) $a = 10$, dominanta 10; mediana 10
33. a) 27°C, b) około 4768,57 zł
34. 3600 kg

35. a) 40, b) 5
36. zestaw A: rozstęp danych 9; rozstęp międzykwartylowy 3,5, zestaw B: rozstęp danych 35; rozstęp międzykwartylowy 27
39. a) miejscowość A: 30, miejscowość B: 41, miejscowość C: 30, b) w miejscowości A, c) w miejscowości A, d) w miejscowości B, e) Miejscowość A: 96, miejscowość B: 90, miejscowość C: 96, f) w miejscowościach A i C
40. dwa razy
41. a) $x = 5, y = 10$ lub $x = 10, y = 5$, b) $x = 5, y = 13$ lub $x = 13, y = 5$, c) $x = 6, y = 9$ lub $x = 9, y = 6$
42. o 0,8
43. a) 7,625, b) 2,6, c) 6,5, d) 4,5
44. a) 5,5, b) 6 punktów
45. drużyna z restauracji Sedan
46. Dowcipny Jan: sem. I — 2,75; sem. II — 3,08; ocena roczna — 3, Pilna Aneta: sem. I — 5,57; sem. II — 4,71; ocena roczna — 5, Pracowity Adam: sem. I — 4,02; sem. II — 4,44; ocena roczna — 4
47. a) wyjazd na Riwierę Turecką, b) ofertę firmy Grosik
48. ser twarogowy tłusty 162 kcal, szynka gotowana 389 kcal, mleko 42 kcal, cebula 22 kcal, czekolada 494 kcal
49. 23,70 zł
50. a) $\frac{5}{3}$, b) 2,5, c) 3
51. 3,11 zł
52. a) stosunek wag jest równy 1:2, b) stosunek wag jest równy 7:3, c) stosunek wag jest równy $(z - y):(x - z)$
54. a) $\bar{x} = 8,2, \sigma \approx 4,62$, b) $\bar{x} = 6, \sigma \approx 3,6$, c) $\bar{x} = 2, \sigma \approx 1,7$, d) $\bar{x} = 36, \sigma \approx 23,1$
55. w klasie III b
56. kolejka I: $\bar{x} = \frac{21}{9} \approx 2,3, \sigma = \sqrt{\frac{20}{9}} \approx 1,49$, kolejka II: $\bar{x} = \frac{16}{9} \approx 1,8, \sigma = \sqrt{\frac{68}{81}} \approx 0,92$,
kolejka III: $\bar{x} = \frac{35}{9} \approx 3,9, \sigma = \sqrt{\frac{242}{81}} \approx 1,73$
57. koszyk I: około 5,93, koszyk II: około 2,89
58. $\bar{x} = \frac{169}{64} \approx 2,6, \sigma \approx 1,56$
59. a) 3,06, b) 10,83, c) 0,92
60. a) 20 pudełek przez maszynę I, 10 pudełek przez maszynę II, b) w przypadku maszyny I ($\bar{x}_I = 50,15, \bar{x}_{II} = 49,6$), c) w przypadku maszyny I ($\sigma_I \approx 1,01, \sigma_{II} \approx 1,02$)
61. $\sigma_I \approx 1,645, \sigma_{II} \approx 1,414, \sigma_{III} \approx 1,033, \sigma_{IV} \approx 1,480$; największe odchylenie standardowe I, a najmniejsze — III
62. największe — w III c, najmniejsze — w III a
63. $\sigma_A \approx 0,49, \sigma_B \approx 1,855, \sigma_C = 0,8$
64. a) $\bar{x} = 19,5, \sigma \approx 6,7$, b) około 69%
65. $\bar{x} = 16,1, \sigma \approx 1,1$
66. średnia jest wyższa w firmie B, odchylenie standardowe — w firmie A
67. fragment 1: $\bar{x} \approx 4,2, \sigma \approx 1,8$; fragment 2: $\bar{x} \approx 4,2, \sigma \approx 1,3$; fragment 3: $\bar{x} \approx 4,7, \sigma \approx 2,5$
70. a) mniejsze, b) mniejsze, c) większe
71. na wschód od ucznia
72. a) $\bar{x} = 1, \sigma \approx 0,387$, b) $\bar{x} = 1,25, \sigma \approx 0,692$

73. $x = -5,5$ i $y = 5,5$ lub $x = 5,5$ i $y = -5,5$

74. 1 i 5

75. $\bar{x} = 2,62$, $\sigma \approx 1,35$

76. 1 lub 16

77. 4 i 8

78. a) 100, b) 1040, c) 290

79. $\bar{x} = 8$, $\sigma = 2\sqrt{34} \approx 11,66$

80. $\bar{x} = 5,2$, $\sigma = \sqrt{8,16} \approx 2,86$

82. a) średnia = $\bar{x} + a$, odchylenie standardowe = s , b) średnia = $b\bar{x}$, odchylenie standardowe = bs

83. a) średnia = $b\bar{x} + a$, odchylenie standardowe = bs , b) średnia = 33, odchylenie standardowe = 6 Wskazówka. Skorzystaj z rozwiązania podpunktu a). c) $a = -4$, $b = \frac{1}{3}$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. C

2. B

3. D

4. B

5. A

6. D

7. D

8. B

9. B

10. w przypadku Michała (Michał: około 3,47%, Ania: około 1,16%)

11. 2,88

12. a) średnia arytmetyczna 16,2; mediana 17,5; dominanta 10 i 20, b) o około 38,2%

13. 82%

14. 8

15. 11 (tylko te o masie 1,3 kg i 1,4 kg)

16. $\sqrt{6} \approx 2,45$ Wskazówka. Liczbami w zestawie są 3, 7, 9, 9.

PRZED MATURĄ

1. A

2. D

3. A

4. D

5. D

6. A

7. C

8. B

9. C

10. B

11. B

12. około 8 cm, 4%



Podręczniki w wersji uczniowskiej są przeznaczone do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełniają one kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i najnowszej podstawy programowej z 2018 roku. Zostały dopuszczone przez MEiN do użytku szkolnego i wpisane do wykazu podręczników.

Numery dopuszczenia:

964/3/2021 (zakres podstawowy)

963/3/2021 (zakres rozszerzony)

Zestaw dla ucznia składa się z odpowiedniego podręcznika (dla zakresu podstawowego lub rozszerzonego) i zbioru zadań. Uczniom poszukującym dodatkowych ćwiczeń warto polecić zeszyt ćwiczeń lub dostępny online program *Matnau 3*.



zeszyt ćwiczeń



www.matnau.gwo.pl

