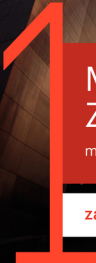




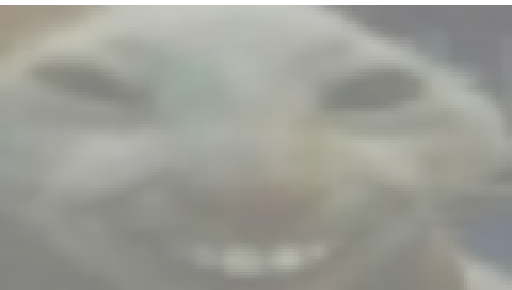
gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



MATEMATYKA Z PLUSEM

multipodręcznik do liceum i technikum

zakres rozszerzony





Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech



MATEMATYKA Z PLUSEM

multipodręcznik do liceum i technikum

zakres rozszerzony



Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Okładka: *Jarosław Zakrzewski*

Ilustracje: *Bartłomiej Brosz*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski, Łukasz Sitko, Joanna Szyller*

Fotografie: *Agencja BE&W* (str. 53, 101), *Archiwum GWO* (str. 79, 98, 154), *Domena publiczna* (str. 198), *Shutterstock* (okładka, str. 9, 27, 56, 77, 91, 135, 185, 186, 201, 235), *The Metropolitan Museum of Art* (str. 118)

Skład (T_EX): *Łukasz Sitko, Joanna Szyller*

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników szkolnych przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki (w zakresie rozszerzonym) na poziomie klasy I liceum i technikum, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr. hab. Jacka Jędrzejewskiego, dr. Edwarda Stachowskiego i dr. Zofii Ireny Krzywickiej-Vauthier.

Numer dopuszczenia: 963/1/2019

Książka jest zgodna z programem nauczania *Matematyka z plusem* i dostosowana do nowej podstawy programowej z 2018 roku.

ISBN 978-83-8118-134-1

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 411

Gdańsk 2019. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Podręcznik został wyprodukowany na papierze posiadającym certyfikaty FSC, PEFC, EU-Ecolabel oraz Blue Angel.

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy.

W podręczniku wykorzystano fragmenty książek z serii *Matematyka z plusem* dla gimnazjum autorstwa: Z. Bolałek, M. Dobrowolskiej, M. Juciewicz, M. Karpińskiego, J. Lecha, A. Mysiora i K. Zarzyckiej.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.
Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

Spis treści

Zbiory

■ Zbiory i działania na zbiorach	10
■ Przedziały liczbowe	19
■ Powtórzenie	26

Wyrażenia algebraiczne

■ Zapisywanie i przekształcanie wyrażeń algebraicznych	28
■ Wylączanie wspólnego czynnika przed nawias	32
■ Wzory skróconego mnożenia	36
■ Przekształcanie wzorów	42
■ Twierdzenia. Dowodzenie twierdzeń	45
■ Powtórzenie	52

Potęgi i pierwiastki

■ Potęgi o wykładnikach całkowitych	54
■ Pierwiastki	60
■ Potęgi o wykładnikach wymiernych	67
■ Potęgi o wykładnikach rzeczywistych	72
■ Powtórzenie	76

Logarytmy

■ Pojęcie logarytmu	78
■ Własności logarytmów	84
■ Powtórzenie	90

Równania, nierówności, układy równań

■ Rozwiązanie równań	92
■ Wielkości wprost proporcjonalne i odwrotnie proporcjonalne	96
■ Rozwiązanie nierówności	102
■ Równania i nierówności z wartością bezwzględną	107
■ Równania i nierówności z wartością bezwzględną (cd.)	112
■ Układy równań	117
■ Układy równań oznaczone, nieoznaczone i sprzeczne	125
■ Zadania tekstowe	129
■ Powtórzenie	134

Funkcje

■ Pojęcie funkcji	136
■ Czytanie wykresów	143
■ Wzory i wykresy funkcji	150
■ Monotoniczność funkcji	158
■ Wzór i wykres funkcji liniowej	165
■ Własności funkcji liniowej	171
■ Proporcjonalność prosta i odwrotna	178
■ Powtórzenie	184

Równania kwadratowe

■ Równania kwadratowe w najprostszej postaci	186
■ Wyróżnik równania kwadratowego. Rozwiązanie równań	190
■ Wzory Viète'a	196
■ Powtórzenie	200

Wektory. Przekształcanie wykresów funkcji

■ Wektory. Działania na wektorach	202
■ Wektory w układzie współrzędnych	209
■ Działania na wektorach w układzie współrzędnych	215
■ Przekształcanie wykresów funkcji	218
■ Przekształcanie wykresów funkcji (cd.)	226
■ Powtórzenie	234

Funkcja kwadratowa

■ Parabola	236
■ Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej	241
■ Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej	247
■ Funkcja kwadratowa — podsumowanie	251
■ Nierówności kwadratowe	257
■ Zastosowania funkcji kwadratowej	262
■ Równania i nierówności z parametrem	266
■ Powtórzenie	274
 ODPOWIEDZI	 275

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadania 7–10 ► — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązywać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

◄ **III** — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem **III**

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

Drogie Uczennice!

Drodzy Uczniowie!

Zaczynacie kolejny etap nauki, który zakończycie egzaminem maturalnym. Staraliśmy się pisać nasz podręcznik tak, aby Was do tego egzaminu jak najlepiej przygotować, ale konieczność zdawania matury nie powinna być głównym powodem, dla którego warto uczyć się matematyki. Minęła bowiem moda na stwierdzenie: „nie umiem matematyki”. Wykształconemu człowiekowi już nie wypada tak mówić.

Wybitny polski uczony Hugo Steinhaus (czyt. Sztajnhaus) powiedział: „Matematyka nie może nikomu wypełnić życia, ale nieznanomość matematyki już niejednemu wypełniła”. Chcielibyśmy, abyście uczyli się ze świadomością, że rozumowanie matematyczne przydaje się w życiu codziennym i będzie potrzebne w dalszej edukacji, a także niemal w każdej działalności zawodowej, której zechcecie się w przyszłości poświęcić. To, że matematyki powinni się pilnie uczyć przyszli informatycy, inżynierowie i ekonomiści, jest oczywiste. Ale potrzebna będzie ona także przyszłym psychologom, socjologom, lekarzom, prawnikom itd. Wielu humanistów pasjonuje się tą dziedziną wiedzy.

Nasze podręczniki piszemy nie tylko z myślą o tych, którzy matematykę lubią i uczą się jej z przyjemnością. Staraliśmy się tak przedstawić różne matematyczne pojęcia i problemy, aby ułatwić Wam samodzielne zgłębianie i ugruntowanie zagadnień, które były omawiane na zajęciach w szkole. W naszym podręczniku można znaleźć ciekawe informacje z rozmaitych dziedzin życia. Staraliśmy się też pokazać, że matematyka, którą poznacie w trakcie nauki, pozwala odkrywać wiele fascynujących interpretacji otaczającego świata.

Mamy nadzieję, że każdy z Was znajdzie w naszej książce coś interesującego.

Autorzy

Zbiory

Według Polskiej Normy skrzynka pocztowa wisząca powinna mieć szerokość $35 \pm 0,5$ cm, wysokość $28,5 \pm 0,5$ cm i głębokość $20,5 \pm 0,5$ cm.

Warunki te można zapisać w języku matematyki.



Zbiory i działania na zbiorach ■ Przedziały liczbowe ■ Powtórzenie

ZBIORY I DZIAŁANIA NA ZBIORACH

I Zbiór to w matematyce pojęcie pierwotne, czyli takie, którego się nie definiuje. Możemy mówić o zbiorze liczb (np. liczb naturalnych, liczb ujemnych), o zbiorze punktów tworzących figurę geometryczną, o zbiorze figur (np. trapezów, prostokątów, trójkątów rozwartokątnych) itp.

- „Przedmioty”, z których utworzony jest zbiór, nazywamy elementami tego zbioru.
- Zbiory oznaczamy zazwyczaj dużymi literami, a ich elementy — małymi.
- Zdanie: *p należy do zbioru A* możemy zapisać w następujący sposób: $p \in A$ (symbol $\in$ czytamy: *należy do*).
- Zdanie: *q nie jest elementem zbioru A* możemy zapisać: $q \notin A$ (symbol $\notin$ czytamy: *nie należy do*).



$$p \in A$$
$$q \notin A$$

Jeśli do zbioru B należą wszystkie elementy zbioru A , to mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B lub że jest **podzbiorem** zbioru B . Zapisujemy to tak: $A \subset B$.



$$A \subset B$$

Zbiór, który ma nieskończenie wiele elementów, nazywamy nieskończonym. Pozostałe zbiory nazywamy skończonymi.

PRZYKŁADY ZBIORÓW NIESKOŃCZONYCH

- zbiór liczb naturalnych parzystych
- zbiór liczb dodatnich
- zbiór liczb większych od 5 i jednocześnie mniejszych od 7
- zbiór liczb pierwszych
- zbiór wszystkich punktów prostej
- zbiór wszystkich prostokątów

PRZYKŁADY ZBIORÓW SKOŃCZONYCH

- zbiór liczb dwucyfrowych
- zbiór liczb całkowitych ujemnych większych od -1000
- zbiór dzielników liczby 60
- zbiór punktów przecięcia stu różnych prostych
- zbiór rozwiązań równania $2x + 1 = 7$

Zbiór, który nie ma żadnego elementu, nazywamy **zbiorem pustym**.

Taki zbiór oznaczamy symbolem $\emptyset$.

Uwaga. Przyjmujemy, że zbiór pusty jest zbiorem skończonym.

Dla dowolnego zbioru A zbiór pusty jest jego podzbiorem, czyli $\emptyset \subset A$, a także zbiór A jest swoim podzbiorem, zatem $A \subset A$.

W ramce poniżej zebrano symbole, którymi będziemy się posługiwać przy oznaczaniu pewnych zbiorów liczbowych.

$\mathbf{N}$ — zbiór liczb naturalnych
 $\mathbf{Z}$ — zbiór liczb całkowitych
 $\mathbf{Q}$ — zbiór liczb wymiernych
 $\mathbf{IQ}$ — zbiór liczb niewymiernych
 $\mathbf{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych

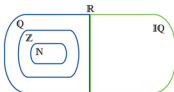
Przypomnijmy, że każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ilorazu liczb całkowitych. Istnieją liczby, których nie da się przedstawić w tej postaci, np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} - 1$, π . Takie liczby nazywamy niewymiernymi. Wszystkie liczby wymierne i niewymierne tworzą zbiór liczb rzeczywistych.

Przyjmujemy ponadto, że $\mathbf{R}_+$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $\mathbf{R}_-$ — zbiór liczb rzeczywistych ujemnych, $\mathbf{Q}_+$ — zbiór liczb wymiernych dodatnich itd.

Zależności między zbiorami liczbowymi można opisać tak:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

$$\mathbf{IQ} \subset \mathbf{R}$$



zadania 1–3 ►

II Zbiory możemy czasem opisać, wymieniając ich elementy. Oto przykłady:

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$

..... Zbiór liczb naturalnych mniejszych od 4
(zbiór skończony).

$$B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

..... Zbiór kwadratów liczb naturalnych
(zbiór nieskończony).

$$C = \{-9, -8, -7, \dots, 7, 8, 9\}$$

..... Zbiór liczb całkowitych od -9 do 9
(zbiór skończony).

Każdy z powyższych zbiorów można też zapisać inaczej:

$$A = \{x \in \mathbf{N} : x < 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} : x = k^2, \text{ gdzie } k \in \mathbf{N}\}$$

$$C = \{x \in \mathbf{Z} : -9 \leq x \leq 9\}$$

zadania 4–6 ►

ĆWICZENIE A Wskaż rysunek, na którym zacieniowano zbiór punktów, które:

- należą jednocześnie do trójkąta i do kwadratu,
- należą do trójkąta lub do kwadratu,
- należą do trójkąta, ale nie należą do kwadratu.

rys. 1



rys. 2



rys. 3

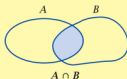


ĆWICZENIE B Narysuj trójkąt i kwadrat. Zaznacz wszystkie punkty, które należą do kwadratu, a nie należą do trójkąta.

Zbiór, którego wszystkie elementy należą do zbioru A i jednocześnie do zbioru B , nazywamy częścią wspólną lub **iloczynem zbiorów** A i B .

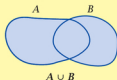
Taki zbiór oznaczamy $A \cap B$.

Iloczyn zbiorów nazywany jest też **przekrojem zbiorów**.



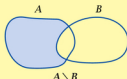
Jeśli zbiory A i B nie mają wspólnych elementów, to mówimy o nich, że są **rozłączne**. Możemy to zapisać tak: $A \cap B = \emptyset$.

Zbiór wszystkich elementów należących do zbioru A lub do zbioru B (również tych, które należą do obu zbiorów) nazywamy **sumą zbiorów** A i B . Oznaczamy go $A \cup B$.



Zbiór utworzony ze wszystkich tych elementów zbioru A , które nie należą do zbioru B , nazywamy **różnicą zbiorów** A i B .

Taki zbiór oznaczamy $A \setminus B$.



PRZYKŁAD 1 Elementami zbiorów, które przedstawiono na rysunkach, są litery. Określ zbiory równe iloczynowi, sumie i różnicy podanych zbiorów.



$$A \cap B = \{c\}$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

$$A \setminus B = \{a, b\}$$

$$B \setminus A = \{d, e\}$$



$$C \cap D = \emptyset$$

$$C \cup D = \{a, b, c, d, e\}$$

$$C \setminus D = C$$

$$D \setminus C = D$$



$$E \cap F \cap G = \{e\}$$

$$(E \cup F) \setminus G = \{b, c, d\}$$

$$(E \setminus F) \cup G = \{a, b, d, e, f\}$$

$$(F \setminus E) \cap G = \emptyset$$

ZADANIE Elementami zbiorów, które przedstawiono na rysunkach, są greckie litery. Określ zbiory równe zbiorom zapisanym pod rysunkami.



$$A \cap B$$

$$A \setminus B$$



$$C \cup D$$

$$D \setminus C$$



$$(E \cap F) \cup G$$

$$(G \setminus F) \cap E$$

zadania 7–10 ►

IV PRZYKŁAD 2 Dane są zbiory:

$$A = \{3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{3, 6, 9\}, \quad C = \{4, 6, 7, 9\}$$

Znajdź zbiory: $A \cap B$, $B \setminus C$, $B \cup C$, $(A \cup B) \setminus C$ oraz $(B \setminus A) \cup (B \cap C)$.

$$A \cap B = \{3, 9\}$$

..... Elementy, które należą jednocześnie do zbioru
..... A i do zbioru B, to 3 i 9.

$$B \setminus C = \{3\}$$

..... Po odrzuceniu ze zbioru B elementów zbioru
..... C pozostaje tylko 3.

$$B \cup C = \{3, 6, 9, 4, 7\}$$

..... Do elementów zbioru B dopisujemy te elemen-
..... ty zbioru C, które nie występują w zbiorze B.

$$(A \cup B) \setminus C = \{3, 5, 7, 9, 6\} \setminus C = \{3, 5\}$$

..... Wyznaczamy zbiór $A \cup B$, a następnie odrzuca-
..... my elementy zbioru C.

$$(B \setminus A) \cup (B \cap C) = \{6\} \cup \{6, 9\} = \{6, 9\}$$

..... Wyznaczamy zbiory $B \setminus A$ i $B \cap C$, a następnie
..... ich sumę.

ZADANIE Dla zbiorów określonych w przykładzie powyżej znajdź:

a) $A \cup C$

c) $C \setminus B$

e) $B \setminus (A \cup C)$

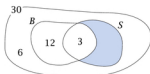
b) $A \cap C$

d) $(A \cap B) \setminus C$

f) $(A \setminus B) \cap C$

zadania 11–21 ►

PRZYKŁAD 3 W 30-osobowej klasie jest 6 jedynaków, 12 osób ma brata, ale nie ma siostry, a 3 osoby mają zarówno brata, jak i siostrę. Niech B i S oznaczać odpowiednio: zbiór osób tej klasy, które mają brata, i zbiór osób, które mają siostrę. Ile elementów ma zbiór $S \setminus B$?



$$30 - (6 + 12 + 3) = 9$$

Odp. Zbiór $S \setminus B$ ma 9 elementów.

Sporządzamy rysunek pomocniczy i dopisujemy na nim podane informacje. (Liczby oznaczają ilość elementów w odpowiednich zbiorach).

Ustalamy liczbę elementów zaznaczonego zbioru.

ZADANIE W koszyku jest 20 owoców. Wśród nich 3 są żółte i kwaśne, 7 jest kwaśnych, ale nie żółtych oraz 6 — ani żółtych, ani kwaśnych. Niech Z i K oznaczać odpowiednio zbiór owoców żółtych i zbiór owoców kwaśnych. Ile owoców należy do zbioru $Z \setminus K$, a ile — do zbioru $Z \cup K$?

zadania 22–26 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Ustal, ile elementów ma podany zbiór.

- Zbiór liczb naturalnych spełniających warunek $x \leq \sqrt{5}$.
- Zbiór liczb całkowitych spełniających warunek $-6,7 \leq x \leq 1$.
- Zbiór liczb całkowitych ujemnych spełniających warunek $-11,3 < x \leq 3,7$.
- Zbiór liczb naturalnych, które nie spełniają warunku $x > 20$.

2. Literami oznaczono zbiory figur:

K — zbiór kwadratów

P — zbiór prostokątów

T — zbiór trójkątów

R — zbiór równoległoboków

RB — zbiór rombów

TR — zbiór trapezów równoramiennych

Wiadomo, że każdy kwadrat jest prostokątem, co można zapisać tak: $K \subset P$. Zapisz za pomocą znaku $\subset$ inne związki między podanymi zbiorami.

3. Zapisz:

- skończony lub nieskończony dowolny podzbiór zbioru $\mathbb{N}$, w którym wszystkie elementy są liczbami parzystymi,
- czteroelementowy podzbiór zbioru $\mathbb{IQ}$,
- nieskończony podzbiór zbioru $\mathbb{Q}_{\leq}$.

◀ II 4. a) Który z podanych zbiorów jest podzbiorem zbioru $\{K, R, A, B\}$?

$$\{A\} \quad \{B, A, R\} \quad \emptyset \quad \{B, A, S\} \quad \{K, A, R, B\} \quad \{B, A, R, O, K\}$$

b) Zapisz kilka innych zbiorów, które zawierają się w zbiorze $\{K, R, A, B\}$.

5. Ustal, ile elementów mają podane zbiory.

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 29, 31\} \quad B = \{21, 22, 23, 24, \dots, 50\}$$

6. Dla każdego z podanych zbiorów ustal, w których spośród zbiorów $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{I}\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}\mathbb{Q}_+$ się zawiera.

$$A = \left\{3\frac{1}{3}\right\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2k + 1, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{22, 24, 26, 28\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} : x = k\sqrt{2}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \{\pi, \sqrt{3}, \sqrt{2} - \sqrt{10}\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{Z} : x = 7k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N}\}$$

$$D = \{5 - \sqrt{2}, 5 - 2\sqrt{2}, 5 - 3\sqrt{2}, \dots\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{l}{5}, \text{ gdzie } l \in \mathbb{Z} \text{ i } l \leq 5\}$$

◀ III 7. Na rysunku obok zaznaczono kropkami wszystkie elementy zbiorów A , B i C . Policz, ile elementów ma zbiór:

a) $A \cup B$

d) $A \cup C$

g) $A \cap (B \cup C)$

b) $A \cap C$

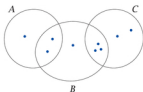
e) $B \setminus (A \cup C)$

h) $C \setminus (A \cap B)$

c) $B \setminus A$

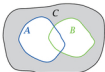
f) $(A \cap B) \setminus C$

i) $(B \setminus C) \cup A$



8. a) Na którym rysunku zaznaczono zbiór $(A \cap B) \setminus C$? Opisz, jakie zbiory zaznaczono na pozostałych dwóch rysunkach.

rys. 1



rys. 2



rys. 3

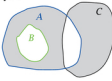


b) Na którym rysunku zaznaczono zbiór $(A \setminus B) \cup (C \setminus A)$? Opisz, jakie zbiory zaznaczono na pozostałych dwóch rysunkach.

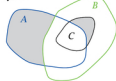
rys. 4



rys. 5



rys. 6



9. W pewnej grupie część osób uczy się języków obcych. Niech A oznacza zbiór tych, którzy uczą się języka angielskiego, F — języka francuskiego, H — języka hiszpańskiego, a G — zbiór wszystkich osób w tej grupie. Opisz słowami zbiór:

$$\begin{array}{llll} Z_1 = F \cup H & Z_3 = G \setminus H & Z_5 = A \cap F \cap H & Z_7 = G \setminus (A \cup F \cup H) \\ Z_2 = H \cap A & Z_4 = F \setminus A & Z_6 = (A \cup F) \setminus H & Z_8 = (G \setminus (A \cap H)) \setminus F \end{array}$$

10. Niech P oznacza zbiór wyrazów pięcioliterowych, A — zbiór wyrazów, w których występuje litera a , zaś T — zbiór wyrazów rozpoczynających się na literę t . Podaj przykłady elementów każdego ze zbiorów:

$$Z_1 = P \cap A \quad Z_2 = P \setminus A \quad Z_3 = P \cap A \cap T \quad Z_4 = T \setminus (P \cup A) \quad Z_5 = (T \cap A) \setminus P$$

◀ **IV 11.** Wypisz wszystkie elementy podanego zbioru, przyjmując, że:

$$\begin{array}{llll} A = \{a, b, c\} & B = \{b, c, d\} & C = \{a, d, e\} & D = \{e, f, g\} \\ \text{a) } A \cap B & \text{c) } C \cup D & \text{e) } A \cup C & \text{g) } A \cup (B \cap C) \\ \text{b) } B \setminus D & \text{d) } A \setminus D & \text{f) } B \cap D & \text{h) } (A \cup C) \setminus D \end{array}$$

12. Znajdź podany zbiór, przyjmując, że:

$$A = \left\{-2, -\frac{1}{3}, 0, \sqrt{2}, \pi, 5, 9\frac{2}{7}\right\}$$

$$\begin{array}{llll} \text{a) } A \cap \mathbb{N} & \text{c) } A \cap \mathbb{IQ} & \text{e) } A \cap \mathbb{R}_- & \text{g) } (Q \cap A) \setminus \mathbb{Z} \\ \text{b) } A \setminus \mathbb{Z} & \text{d) } A \setminus Q_+ & \text{f) } A \cup \mathbb{R} & \text{h) } A \setminus (\mathbb{N} \cup Q_+) \end{array}$$

13. Znajdź podany zbiór, przyjmując, że:

$$A = \left\{-6, -\frac{4}{5}, \sqrt{3}, 7\right\} \quad B = \left\{-6, -\frac{4}{5}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\right\}$$

$$\begin{array}{llll} \text{a) } A \cap B & \text{d) } (A \cup B) \setminus Q & \text{g) } (A \cap B) \setminus \mathbb{N} & \text{j) } (B \cap \mathbb{Z}) \setminus A \\ \text{b) } A \cup B & \text{e) } (A \setminus \mathbb{Z}) \cup B & \text{h) } (B \setminus A) \cap \mathbb{Z} & \text{k) } (A \cap Q) \cap B \\ \text{c) } B \setminus A & \text{f) } (A \setminus B) \cap \mathbb{IQ} & \text{i) } (A \cap \mathbb{N}) \setminus B & \text{l) } (A \cap \mathbb{Z}) \setminus B \end{array}$$

14. Wyznacz podany zbiór, przyjmując, że:

$$\begin{array}{ll} A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} & C = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots, 50\} \\ B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} & D = \{10, 20, 30, 40, \dots, 90, 100\} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{a) } A \setminus C & \text{d) } C \cup D & \text{g) } A \cap B \cap C & \text{j) } (A \setminus D) \cup (C \cap B) \\ \text{b) } D \cap B & \text{e) } C \cap D & \text{h) } (A \cup B) \cap C & \text{k) } (C \cap D) \setminus (A \cup B) \\ \text{c) } A \cup C & \text{f) } D \setminus C & \text{i) } A \cup (B \cap C) & \text{l) } (D \setminus C) \cap (B \setminus A) \end{array}$$

15. Wśród podanych zbiorów wskaż zbiory skończone i ustal, ile mają elementów.

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \quad C = \left\{x \in \mathbb{Q} : \frac{1}{x} > 1\right\} \quad E = \{10, 11, 12, \dots, 99\}$$

$$B = \left\{\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\} \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x < 7\} \quad F = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 16\}$$

Wyznacz zbiory:

a) $A \setminus B$ b) $A \setminus C$ c) $D \cap F$ d) $E \cap F$ e) $F \setminus (C \cap D)$ f) $(E \cup F) \setminus D$

16. Podaj przykład dwóch różnych zbiorów nieskończonych A i B takich, że:

- a) $A \cap B$ jest zbiorem jednoelementowym,
- b) $A \setminus B$ jest zbiorem skończonym,
- c) $A \setminus B$ jest zbiorem nieskończonym, a $B \setminus A$ jest zbiorem skończonym,
- d) $A \cup B$ jest zbiorem liczb naturalnych.

17. Co można powiedzieć o zbiorach $A \cup B$, $A \cap B$ i $A \setminus B$, gdy spełniony jest podany warunek?

a) $A \subset B$ b) $B = \emptyset$ c) $A = B$ d) $A \cap B = A \cup B$

18. O zbiorach A i B wiadomo, że są różne i nie są puste.

a) Które z poniższych równości są prawdziwe, gdy A jest podzbiorem zbioru B ?

$$A \cup B = A \quad A \cap B = A \quad A \setminus B = \emptyset \quad B \setminus A = B$$

b) Które z poniższych równości są prawdziwe, gdy zbiory A i B są rozłączne?

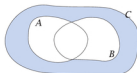
$$A \cup B = A \quad A \cap B = \emptyset \quad A \setminus B = A \quad B \setminus A = B$$

19. a) Zbiór zaznaczony na rysunku obok można zapisać na dwa z podanych sposobów.

$$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \quad (C \cup A) \setminus (C \cup B) \quad C \setminus (A \cup B)$$

Zapisz wynikającą stąd równość.

b) Uzasadnij równość $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$, przedstawiając na rysunkach zbiory $C \setminus (A \cap B)$ oraz $(C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.



Dzielnik liczby naturalnej n to taka liczba naturalna, przez którą n dzieli się bez reszty. Na przykład dzielniki liczby 49 to 1, 7 i 49.

20. Niech D_n oznacza zbiór wszystkich dzielników liczby n . Wyznacz zbiory:

- a) D_{12} , D_6 , D_{20} , D_{81}
- b) $D_5 \cap D_{10}$, $D_{11} \cap D_{15}$, $D_{20} \cap D_{100}$
- c) $D_5 \cup D_{10}$, $D_6 \setminus D_3$, $D_5 \setminus D_7$

21. Niech L_p oznacza zbiór liczb pierwszych, a L_z — zbiór liczb złożonych. Wyznacz zbiór:

- a) $\{0, 1, 2, \dots, 19, 20\} \cap L_p$
 b) $(\{0, 1, 2, \dots, 10\} \setminus L_z) \setminus L_p$
 c) $\mathbb{N}_+ \setminus (L_p \cup L_z)$
 d) $\mathbb{R} \cap (L_p \setminus \{x \in \mathbb{N} : x > 10\})$
 e) $\{x \in L_p : -x < 20\} \cup \{0\}$

Liczbę naturalną n , która ma dokładnie dwa dzielniki, nazywamy *liczbą pierwszą*.

Liczy pierwsze to: 2, 3, 5, 7, 11, ...

Liczbę naturalną, która ma więcej niż dwa dzielniki, nazywamy *liczbą złożoną*.

Liczy 0 i 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.

22. a) Pewien zbiór C ma 20 elementów, zbiór D ma 50 elementów, a zbiór $C \cap D$ ma 5 elementów. Ile elementów mają zbiory: $C \cup D$, $C \setminus D$, $D \setminus C$?
 b) Zbiory E i F mają po 15 elementów, a zbiór $E \cup F$ ma 20 elementów. Ile elementów mają zbiory: $E \cap F$, $E \setminus F$, $F \setminus E$?

23. Do miski włożono 20 cukierków, 11 z nich jest czekoladowych, a wśród czekoladowych cukierków 5 zawiera orzechy. Dwa cukierki zawierają orzechy, ale nie są czekoladowe. Oznaczmy literą C zbiór cukierków czekoladowych, a literą O — zbiór cukierków z orzechami. Ile elementów jest w zbiorze $C \cup O$?



24. W pudełku znajduje się 26 klocków w dwóch kolorach: białym i czerwonym, 10 spośród tych klocków ma kształt sześcianu. Białych sześciennych klocków jest 6, a białych, które nie są sześciennie, jest 9. Przyjmijmy oznaczenia:

K — zbiór wszystkich klocków,

C — zbiór czerwonych klocków,

B — zbiór białych klocków,

S — zbiór klocków sześciennych.

Ustal, ile elementów należy do podanego zbioru:

- a) C b) $S \setminus B$ c) $B \cup S$ d) $K \setminus S$ e) $C \cap S$

25. Każda z 1000 ankietowanych osób odpowiedziała na dwa pytania: czy lubi słodczy oraz czy lubi warzywa. Okazało się, że 830 osób lubi słodczy, 600 lubi warzywa, a 100 — nie lubi ani słodczy, ani warzyw. Ile spośród ankietowanych osób lubi słodczy, ale nie lubi warzyw?



26. W Krasnolandii każdy obywatel jest piękny lub bogaty. Bogaci stanowią 50% ludności. Pięknych Krasnolandian jest 50 tys. (z czego 70% to niebogaci). Ilu mieszkańców ma Krasnolandia? Jaki procent mieszkańców Krasnolandii stanowią piękni i zarazem bogaci?

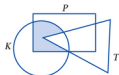
MINISPRAWDZIAN

51. Dany jest zbiór $L = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{a}{5}, \text{ gdzie } -10 \leq a \leq 10 \text{ i } a \in \mathbb{Z}\right\}$. Który z poniższych zbiorów ma najwięcej elementów?

- A. $L \cap \mathbb{N}$ B. $L \setminus \mathbb{Z}$ C. $L \cap \mathbb{Q}_+$ D. $L \setminus \mathbb{R}$

52. Na rysunku zaznaczono prostokąt, koło i trójkąt. Litery P , K i T oznaczają zbiory punktów tworzących te figury. Zacięniowany na rysunku zbiór to:

- A. $(P \cup K) \cap T$ C. $(P \setminus T) \cup K$
B. $(P \cap K) \setminus T$ D. $(T \setminus K) \cap P$



53. Niech: $A = \{\square, \bigcirc, \triangle, \times, \square\}$, $B = \{\bigcirc, \triangle, \times\}$, $C = \{\square, \bigcirc, \sqcap\}$. Który z poniższych zbiorów jest równy $(A \setminus B) \cap (B \cup C)$?

- A. $\{\square, \square\}$ B. $\{\bigcirc, \triangle, \times, \square, \sqcap\}$ C. $\{\square\}$ D. $\{\square, \bigcirc\}$

54. Każdy z uczniów pewnej szkoły uczy się języka niemieckiego lub francuskiego. Języka niemieckiego uczy się 75% uczniów, a francuskiego — 40%. Ile procent uczniów uczy się obu tych języków?

- A. 35% B. 25% C. 15% D. 5%

PRZEDZIAŁY LICZBOWE

1. ĆWICZENIE A Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb rzeczywistych spełniających nierówność $x > 3$, a następnie zbiór liczb spełniających nierówność $x < 7$. Zaznacz zbiór liczb rzeczywistych spełniających nierówność $3 < x < 7$.

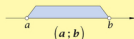
Ciekawostka

Wszystkie liczby, którymi posługujemy się podczas nauki w szkole, to liczby rzeczywiste. Powstaje pytanie, dlaczego wprowadzono nazwę *liczby rzeczywiste*. Czyżby były jakieś inne liczby? Okazuje się, że matematycy, fizycy, chemicy, inżynierowie i przedstawiciele wielu innych dziedzin korzystających z matematyki posługują się także liczbami innymi niż rzeczywiste, np. liczbami, które nazywali *zespolonymi*.



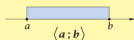
Zbiór liczb rzeczywistych większych od liczby a i jednocześnie mniejszych od liczby b nazywamy **przedziałem otwartym** o końcach a i b . Oznaczamy go symbolem $(a; b)$.

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$$



Zbiór liczb rzeczywistych większych od a lub równych a i jednocześnie mniejszych od b lub równych b nazywamy **przedziałem domkniętym** o końcach a i b . Oznaczamy go symbolem $\langle a; b \rangle$.

$$\langle a; b \rangle = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$$



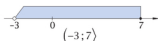
Poniżej przedstawione są różne typy przedziałów o końcach -3 i 7 .



przedział otwarty o końcach -3 i 7



przedział domknięty o końcach -3 i 7



przedział lewostronnie otwarty
i prawostronnie domknięty
o końcach -3 i 7



przedział lewostronnie domknięty
i prawostronnie otwarty
o końcach -3 i 7

ĆWICZENIE B Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej przedziały:

$$(-3; 2)$$

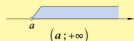
$$\langle 3; 7 \rangle$$

$$\langle -10; -8 \rangle$$

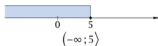
$$(8; 9)$$

Zbiór liczb rzeczywistych większych od a to przykład **przedziału nieograniczonego**. Oznaczamy go symbolem $(a; +\infty)$.

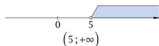
$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$$



Przedziały nieograniczone mogą być otwarte lub jednostronnie domknięte.
Na przykład: $\langle a; +\infty \rangle$, $(-\infty; a)$, $(-\infty; a]$.



przedział prawostronnie domknięty
od minus nieskończoności do 5



przedział otwarty
od 5 do plus nieskończoności

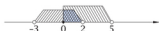
ĆWICZENIE C Zaznacz na osi liczbowej przedział $\langle 2; +\infty \rangle$ oraz przedział $(-\infty; 3]$.

zadania 1-4

II Przedziały to zbiory liczbowe, możemy więc określać ich sumę, różnicę oraz ich część wspólną.

PRZYKŁAD Zapisz każdy z podanych zbiorów w prostszej postaci.

a) $\langle -3; 2 \rangle \cap \langle 0; 5 \rangle$



$$\langle -3; 2 \rangle \cap \langle 0; 5 \rangle = \underline{\langle 0; 2 \rangle}$$

Ilustrujemy oba przedziały na osi liczbowej i zaznaczamy kolorem ich część wspólną.

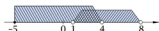
b) $\langle -4; 2 \rangle \cap \langle -4; 3 \rangle$



$$\langle -4; 2 \rangle \cap \langle -4; 3 \rangle = \underline{\langle -4; 2 \rangle}$$

Ilustrujemy oba przedziały na osi liczbowej i zaznaczamy ich część wspólną (na rysunku jest ona zaznaczona kolorem).

c) $\langle -5; 4 \rangle \cup \langle 1; 8 \rangle$



$$\langle -5; 4 \rangle \cup \langle 1; 8 \rangle = \underline{\langle -5; 8 \rangle}$$

Ilustrujemy oba przedziały na osi liczbowej i zaznaczamy kolorem ich sumę.

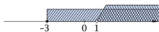
d) $\langle -8; -2 \rangle \setminus \langle -4; 3 \rangle$



$$\langle -8; -2 \rangle \setminus \langle -4; 3 \rangle = \underline{\langle -8; -4 \rangle}$$

Ilustrujemy oba przedziały na osi liczbowej i zaznaczamy kolorem zbiór składający się z liczb, które należą do pierwszego przedziału, a nie należą do drugiego.

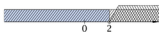
$$e) \langle -3; +\infty \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$$



$$\langle -3; +\infty \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle = \langle -3; +\infty \rangle$$

Ilustrujemy oba przedziały na osi liczbowej i zaznaczamy kolorem ich sumę.

$$f) \mathbb{R} \setminus \langle 2; +\infty \rangle$$



$$\mathbb{R} \setminus \langle 2; +\infty \rangle = (-\infty; 2]$$

Ilustrujemy zbiór $\langle 2; +\infty \rangle$ na osi liczbowej i zaznaczamy zbiór liczb, które do niego nie należą.

$$g) ((-\infty; 5] \cap (-4; 8)) \setminus \langle 1; +\infty \rangle$$



$$(-\infty; 5] \cap (-4; 8) = (-4; 5]$$

Ilustrujemy przedziały $(-\infty; 5]$ i $(-4; 8)$ na osi liczbowej i zaznaczamy ich iloczyn $(-4; 5]$.



$$(-4; 5] \setminus \langle 1; +\infty \rangle = (-4; 1]$$

Ilustrujemy przedziały $(-4; 5]$ i $\langle 1; +\infty \rangle$ na osi liczbowej i zaznaczamy ich różnicę $(-4; 1]$.

ZADANIE Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w jak najprostszej postaci zbiór:

$$a) \langle -8; 7 \rangle \cup \langle 2; 9 \rangle$$

$$d) (-\infty; 6] \cap (-3; +\infty)$$

$$b) (-10; 5) \cap \langle -12; 4 \rangle$$

$$e) \mathbb{R} \setminus (-\infty; 5]$$

$$c) \langle -4; 6 \rangle \setminus (-3; 7)$$

$$f) (\langle -3; 7 \rangle \cap \langle 2; +\infty \rangle) \setminus \langle 6; 10 \rangle$$

zadania 5-18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Zapisz za pomocą przedziału zbiór wszystkich liczb spełniających warunek:

$$a) 0 \leq x < 5$$

$$b) -6 < x < 6$$

$$c) x \geq -3$$

$$d) x < 6$$

2. Zaznacz podany przedział na osi liczbowej. Opisz go za pomocą nierówności.

$$a) \langle -4; 5 \rangle$$

$$c) (-12; -8]$$

$$e) (-\infty; 5]$$

$$g) (-6; +\infty)$$

$$b) (3; 7)$$

$$d) \langle 0; 6 \rangle$$

$$f) \langle 2; +\infty \rangle$$

$$h) (-\infty; -1]$$

3. Według Polskiej Normy skrzynka pocztowa wisząca powinna mieć szerokość $35 \pm 0,5$ cm, wysokość $28,5 \pm 0,5$ cm i głębokość $20,5 \pm 0,5$ cm. Zapisz, w jakich przedziałach powinny się mieścić wymiary skrzynki pocztowej.



4. Zapisz podane zbiory za pomocą przedziałów.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x < 13\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2,3\}$$

5. Zaznacz na osi liczbowej zbiór:

a) $\langle -5; -3 \rangle \cap \langle -4; 2 \rangle$

c) $\langle -3; 7 \rangle \cup \langle 6; 8 \rangle$

e) $(-\infty; 4) \setminus (0; 8)$

b) $(-\infty; -2) \cap \langle -3; 0 \rangle$

d) $\langle -1; 5 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$

f) $\langle -2; 4 \rangle \setminus \langle -1; 0 \rangle$

6. Zapisz w prostszej postaci.

a) $\langle -4; 5 \rangle \cap \langle 2; +\infty \rangle$

d) $(-\infty; 3) \cup \langle 0; 6 \rangle$

g) $(-5; -3) \setminus \langle -4; 7 \rangle$

b) $\langle 3; 10 \rangle \cap \langle -6; 1 \rangle$

e) $(-10; 4) \cup \langle -7; 7 \rangle$

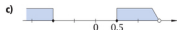
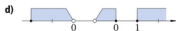
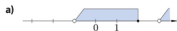
h) $(-\infty; 2) \setminus (-\infty; 0)$

c) $(3; 8) \cap \langle 3; 6 \rangle$

f) $(3; +\infty) \cup \langle -2; +\infty \rangle$

i) $(2; 7) \setminus (2; 5)$

7. Na osi liczbowej zaznaczono zbiór liczb. Zapisz za pomocą sumy przedziałów zbiór wszystkich liczb nienależących do tego zbioru.



8. Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

a) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 5)$

c) $\mathbb{R} \setminus (6; +\infty)$

e) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

b) $\mathbb{R} \setminus \langle -7; 2 \rangle$

d) $\mathbb{R} \setminus (0; 2)$

f) $\mathbb{R} \setminus \{-5, -1\}$

9. Zapisz za pomocą różnicy zbiorów zbiór liczb zaznaczonych na osi liczbowej.



10. Zapisz za pomocą przedziału lub sumy przedziałów.

a) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{3} \text{ lub } x \geq -\sqrt{2}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\sqrt{3}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 3\sqrt{3}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -3,75\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3,7\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : x > 3,14\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \leq \pi\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} : x < 3\sqrt{2}\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{5}\}$

11. Dane są zbiory:

$$A = (-\infty; -10)$$

$$B = (-20; 20)$$

$$C = \langle 10; +\infty \rangle$$

$$D = \langle -5; 5 \rangle$$

Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów zbiór:

a) $C \setminus (A \cap B)$

b) $(B \setminus A) \setminus D$

c) $D \cup (C \setminus B)$

d) $B \setminus (A \cup D)$

12. Zaznacz na osi liczbowej zbiór:

a) $((-3; 5) \cap (-5; -1)) \cup \langle 4; 6 \rangle$

c) $\langle -4; 4 \rangle \setminus ((-4; 7) \cup (-2; 5))$

b) $((-2; 4) \cap \langle -2; 5 \rangle) \cap \langle -1; 3 \rangle$

d) $\langle 0; 3 \rangle \setminus ((-2; 3) \cap (0; 7))$

13. Ustal, ile elementów ma zbiór:

a) $(-1, 5; 3) \cap \mathbb{Z}$

c) $(-1; \pi + 3) \cap \mathbb{Z}$

e) $(-2\pi; \pi) \cap \mathbb{Z}$

b) $\langle -\frac{3}{2}; 16 \rangle \cap \mathbb{N}$

d) $(-\infty; -4) \cap \mathbb{N}$

f) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cap \mathbb{N}$

14. Zapisz w innej postaci.

a) $\mathbb{Z} \cap \langle -3; 2 \rangle$

d) $\mathbb{R}_+ \cup \langle -20; 3 \rangle$

g) $\mathbb{R}_- \cup (-7; 4)$

b) $\mathbb{N} \setminus (-\infty; 5)$

e) $\mathbb{Q}_- \setminus (2; +\infty)$

h) $\mathbb{Z}_+ \cap (-\infty; 3)$

c) $\mathbb{N} \setminus (3; +\infty)$

f) $\mathbb{N} \cap (-10; 5)$

i) $\mathbb{Q}_+ \cup \langle -2; +\infty \rangle$

15. Ustal, ile liczb całkowitych należy do podanego zbioru.

- a) $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{3} \rangle \cup \langle \sqrt{5}; \sqrt{10} \rangle$ c) $\mathbb{R} \setminus \left[\left(-\infty; -3\frac{1}{3} \right) \cup \left(-1\frac{1}{3}; +\infty \right) \right]$
 b) $\langle -\infty; 200 \rangle \cap \langle -200; +\infty \rangle$ d) $\langle -101; 10,1 \rangle \setminus \mathbb{N}$

16. Ustal, ile elementów ma zbiór:

- a) $\langle -2\sqrt{2}; \pi + 3 \rangle \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ c) $\langle -6\pi; 2 + \pi \rangle \cap \langle \sqrt{2}; 20 \rangle \cap \mathbb{Z}$
 b) $\langle -\infty; -2\sqrt{173} \rangle \cap \langle -15,5; +\infty \rangle \cap \mathbb{N}$ d) $(\langle -5; 5 \rangle \cap \mathbb{N}) \setminus \langle 0; +\infty \rangle$

17. Wypisz elementy zbioru:

- a) $\{x \in \mathbb{Z} : -\sqrt{10} < x < \pi\} \cap \langle -\sqrt{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ b) $\{x \in \mathbb{N} : -\pi \leq x \leq \sqrt{50}\} \setminus \langle 3; 2\pi \rangle$

18. Niech P oznacza zbiór liczb pierwszych. Ustal, ile elementów ma zbiór:

- a) $P \cap \langle 2; 27 \rangle$ c) $P \setminus \langle 11; +\infty \rangle$ e) $(\{1, 3, 5, 7, \dots\} \cap P) \setminus \langle 21; +\infty \rangle$
 b) $P \cap \langle -\infty; 13 \rangle$ d) $P \setminus \langle 11; +\infty \rangle$ f) $(P \setminus \langle -5; 5 \rangle) \setminus \langle 17; +\infty \rangle$

MINISPRAWDZIAN

51. Zbiór wszystkich liczb, które są mniejsze od -5 lub większe od 3 , to:

- A. $\langle -5; 3 \rangle$ B. $\langle -5; 3 \rangle$ C. $\langle -\infty; -5 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$ D. $\langle -\infty; -5 \rangle \cap \langle 3; +\infty \rangle$

52. Na którym rysunku zaznaczono zbiór $\mathbb{R} \setminus \langle -2; 3 \rangle$?

- A.  C. 
 B.  D. 

53. Ile liczb całkowitych należy do zbioru $\langle -\sqrt{30}; 7 \rangle \setminus \left[\langle 6; \sqrt{50} \rangle \cup \langle \sqrt{60}; 9 \rangle \right]$?

- A. 16 B. 15 C. 11 D. 10

54. Niech $A = \{x \in \mathbb{R} : x < -9\}$ i $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq -3\}$. Zbiór $(A \cup B) \cap \langle -6; 2 \rangle$ jest równy:

- A. $\mathbb{R}$ B. $\langle -3; 2 \rangle$ C. $\emptyset$ D. $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$

POWTÓRZENIE

1. Dane są zbiory:

$$K = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad L = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$M = \{1, 3, 6\}$$

Wymień wszystkie elementy zbioru:

a) $(L \cup M) \setminus K$ d) $(K \cap L) \cup (M \setminus L)$

b) $(M \setminus L) \cap K$ d) $(K \cup M) \setminus (K \cap L)$

2. Przerysuj poniższy diagram i zaznacz w nim podany zbiór.

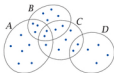


a) $(A \cap C) \cup (C \setminus B)$

b) $(A \setminus C) \cap (B \cup C)$

c) $(A \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

3. Na rysunku zaznaczono kropkami wszystkie elementy zbiorów A , B , C i D . Ustal, ile elementów ma podany zbiór.



a) $(B \cup D) \setminus C$

d) $D \cup (A \cap B \cap C)$

b) $(A \setminus B) \cap D$

e) $(A \cup B \cup C) \cap D$

c) $C \setminus (A \cup B \cup D)$

f) $(C \cap D) \cup (A \setminus B)$

4. Dane są zbiory:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : \frac{x}{3} \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < 10\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : 2x \in \mathbb{N}\}$$

Znajdź zbiór:

a) $(C \cup B) \cap A$

c) $(C \setminus A) \cap B$

b) $(A \setminus B) \cap C$

d) $(A \cap B) \setminus C$

5. Poniżej podano, ile elementów należy do wymienionych zbiorów.

$$A = 50 \quad B = 40 \quad C = 60$$

$$A \cap B = 20 \quad B \cap C = 18 \quad C \cap A = 15$$

$$A \cup B \cup C = 100$$

Oblicz, ile elementów należy do zbioru:

a) $A \cup B$

b) $B \setminus C$

c) $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$

d) $A \cap B \cap C$

6. Podaj najmniejszą liczbę należącą do zbioru:

a) $(-6; +\infty) \cap \mathbb{Z}$

b) $\langle 3\pi; 300 \rangle \setminus \mathbb{Q}$

c) $\langle -5\frac{3}{4}; 12\frac{5}{6} \rangle \cap \mathbb{R}$

7. Zapisz w prostszej postaci.

a) $\langle -9; -2\sqrt{3} \rangle \cup \langle -7; -3 \rangle$

b) $\langle 4; 11 \rangle \cup \langle 2; 2\sqrt{5} \rangle$

c) $\langle -4; 7 \rangle \setminus \langle -2\sqrt{2}; 8 \rangle$

8. Przedstaw w postaci sumy przedziałów.

a) $\mathbb{R} \setminus \langle -4; 7 \rangle$

b) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$

c) $\mathbb{R} \setminus [(-\infty; 3) \cup \langle 4; 5 \rangle]$

9. Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

a) $[\langle -4; 2 \rangle \cap (-1; 9)] \setminus \langle 1; +\infty \rangle$

b) $[(-7; 8) \setminus \langle -3; 5 \rangle] \cup (6; 9)$

c) $[(-\infty; 6) \cup (6; +\infty)] \setminus (12; 20)$

d) $\langle -7; -2 \rangle \cap [(-6; 8) \setminus \langle -3; 11 \rangle]$

Wyrażenia algebraiczne

Wskaźnik BMI (od ang. body mass index – wskaźnik masy ciała) osoby, która waży m kilogramów i ma w metrów wzrostu, oblicza się ze wzoru $BMI = \frac{m}{w^2}$. Zwykle przyjmuje się, że masa ciała jest prawidłowa, gdy wskaźnik BMI jest większy od 20 i mniejszy od 25. Czy potrafisz wyznaczyć swoje BMI?



- Zapisywanie i przekształcanie wyrażeń algebraicznych
- Wylączenie wspólnego czynnika przed nawias
- Wzory skróconego mnożenia
- Przekształcanie wzorów
- Twierdzenia. Dowodzenie twierdzeń
- Powtórzenie

ZAPISYWANIE I PRZEKSZTAŁCANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

ĆWICZENIE Popatrz na rysunek. Kolejne figury są układane z zapalek według pewnej reguły. Jakimi wyrażeniami należy zastąpić w tabelce znaki zapytania?



Figura 1



Figura 2



Figura 3

...

Numer figury	1	2	3	4	5	n
Liczba zapalek	6	$6 + 3$	$6 + 2 \cdot 3$	?	?	?

W powyższym ćwiczeniu należało sformułować ogólne reguły, według których układano zapalczone figury. Takie uogólnienia, zapisywane za pomocą wyrażen algebraicznych, bardzo często występują w matematyce i innych dziedzinach wiedzy. Na przykład:

Przykłady wyrażen algebraicznych:

$$\begin{array}{lll} n + 2 & -2x^2y^7 & \frac{(a+b)h}{2} \\ mgh & 3(a+b) - 2c + 7 & \end{array}$$

- Pole trójkąta równobocznego o boku długości a to: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- Liczba przekątnych w wielokącie o n bokach wynosi $\frac{1}{2}n(n-3)$.
- Dawka leku Winkrystyna dla dziecka, które waży m kilogramów ($m > 21$), powinna wynosić $0,03m + 0,6$ miligramów na dobę.

zadania 1–10 ►

PRZYKŁAD Przedstaw podane wyrażenie w postaci jednomianu albo jak najprostszej sumy algebraicznej.

$$\begin{aligned} \text{a) } p + 1 - \frac{6p+2}{2} &= p + 1 - (3p + 1) = \\ &= p + 1 - 3p - 1 = -2p \end{aligned}$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x(2x + y) - 5(x^2 - 2xy + 3) &= \\ &= \underline{6x^2} + \underline{3xy} - \underline{5x^2} + \underline{10xy} - 15 = \\ &= x^2 + 13xy - 15 \end{aligned}$$

Mnożymy jednomiany przez sumy w nawiasach i redukujemy wyrazy podobne.

$$\begin{aligned} \text{c) } (2a + b)(a - 3b + 1) &= \\ &= 2a^2 - \underline{6ab} + 2a + \underline{ba} - 3b^2 + b = \\ &= 2a^2 - 3b^2 - 5ab + 2a + b \end{aligned}$$

Każdy składnik pierwszej sumy mnożymy przez każdy składnik drugiej sumy. Następnie redukujemy wyrazy podobne.

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{2p}{3} - \frac{3-5p}{15} &= \frac{5 \cdot 2p}{15} - \frac{3-5p}{15} = \\ &= \frac{10p - (3-5p)}{15} = \frac{10p - 3 + 5p}{15} = \\ &= \frac{15p - 3}{15} = p - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Doprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika, zapisujemy w postaci jednego ułamka i redukujemy wyrazy podobne.

ZADANIE Zapisz w postaci jednomianu lub sumy algebraicznej.

a) $5ab^2 - \frac{6-9ab^2}{3}$

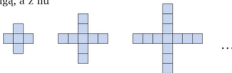
b) $(xy+2)(x+\frac{y}{2}-3) - x^2y$

c) $\frac{1-2n}{7} - \frac{5n-3}{14} + \frac{n}{2}$

zadania 11-16 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Przyjrzyj się rysunkom. Z ilu kwadracików zbudowano pierwszą figurę, z ilu drugą, a z ilu trzecią? Podaj zauważoną prawidłowość. Z ilu kwadracików powinna być zbudowana czwarta, a z ilu n -ta figura?



2. Zapisz:

- sześcián różnicy liczb a i b ,
- iloraz sumy liczb m i n przez iloczyn tych liczb,
- sumę odwrotności kwadratów liczb p i q .

3. a) Zapisz liczby przeciwne do liczb:

$$3p \quad -n \quad b-2c \quad x\sqrt{2}-7$$

b) Zapisz odwrotności liczb:

$$\frac{r}{5} \quad -\frac{1}{y} \quad x \quad \frac{3}{7}p \quad 3a-2b$$

Liczbą przeciwną do liczby a jest liczba $-a$.

Dla $a \neq 0$ odwrotność liczby a to $\frac{1}{a}$.

Liczba całkowita n jest nieparzysta, gdy można ją zapisać w postaci:

$$n = 2k + 1, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

4. W jakiej postaci można zapisać liczbę naturalną n , aby spełniony był podany warunek?

- Liczba n jest parzysta.
- Liczba n jest podzielna przez 5.
- Reszta z dzielenia liczby n przez 4 wynosi 2.

5. Przyjmujemy, że liczby a , b i c są dodatnie. Zapisz:

- 10% liczby a , 130% liczby b , 2% liczby c ,
- liczbę o 40% większą od a , o 7% większą od b , o 0,5% większą od c ,
- liczbę o 15% mniejszą od a , o 6% mniejszą od b , o 80% mniejszą od c .

6. Kilogram jabłek kosztuje j złotych, gruszek — g złotych, a pomarańczy — p złotych. Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych odpowiedzi na poniższe pytania.

a) Iwona kupiła 5 kg jabłek, 2,5 kg gruszek i pomarańcze, które ważyły 78 dag. Zapłaciła banknotem pięćdziesięciozłotowym. Ile złotych reszty powinna otrzymać?

b) Przed zamknięciem sklepu cenę jabłek obniżono o 10%, a cenę gruszek o 20%. Ostatni klient kupił po obniżonych cenach 4 kg jabłek i 2 kg gruszek. Ile zapłacił? O ile więcej by zapłacił, gdyby kupił te same ilości owoców przed obniżką cen?

7. a) Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych liczby: $p\%$ liczby 27, $p\%$ liczby a oraz liczbę o $p\%$ większą od liczby a .

b) Uzasadnij, że $p\%$ liczby q jest równe $q\%$ liczby p .

c) Uzasadnij, że jeśli cenę zwiększymy o $p\%$, a następnie o $q\%$, to otrzymamy taki sam wynik, jak gdybyśmy najpierw zwiększyli ją o $q\%$, a następnie o $p\%$.

8. Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego.

a) $3ab - \frac{5a}{2b}$ dla $a = 4$ i $b = \frac{1}{2}$

c) $\frac{4y-3z}{z^2}$ dla $y = -1$ i $z = -2$

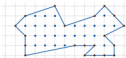
b) $-5(m-n)(3+n)$ dla $m = 5$ i $n = -4$

d) $\frac{1-2x^2}{2}$ dla $x = 1\frac{1}{4}$

9. Wskaźnik BMI (od ang. *body mass index* — wskaźnik masy ciała) osoby, która waży m kilogramów i ma w metrów wzrostu, oblicza się ze wzoru $BMI = \frac{m}{w^2}$. Zwykle przyjmuje się, że masa ciała jest prawidłowa, gdy wskaźnik BMI jest większy od 20 i mniejszy od 25. Oblicz wskaźnik BMI osoby o wzroście 1,7 m, ważącej 63 kg.

Ciekawostka

Każdy wierzchołek narysowanego wielokąta leży w punkcie kratowym, czyli w punkcie przecięcia linii tworzących kratki.



Pole wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych (jednostka pola to powierzchnia jednej kratki) można obliczać tak: do liczby punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta dodajemy połowę liczby punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta i odejmujemy 1. Pole narysowanego wielokąta wynosi więc $25 + \frac{20}{2} - 1 = 34$.

Tę regułę obliczania pól wielokątów odkrył austriacki matematyk Georg Pick w 1899 roku.

10. Korzystając z ciekawostki, zapisz wzór Picka. Przyjmij oznaczenia: w — liczba punktów kratowych wewnątrz wielokąta, b — liczba punktów kratowych na brzegu wielokąta.

a) Narysuj na kartce w kratkę trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych. Oblicz jego pole na dwa sposoby: korzystając ze wzorów znanych ci z geometrii oraz korzystając ze wzoru Picka.

b) Narysuj trzy dowolne wielokąty o wierzchołkach w punktach kratowych i oblicz ich pola, korzystając ze wzoru Picka.

II 11. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $\frac{3a}{7} - a + \frac{a}{3}$

d) $-x - 4(1 - x)$

g) $3x(5 - 2x) + 5(4x - 3)$

b) $0,3p^2q - \frac{4}{5}p^2q$

e) $3(5x - 2) - 5(3 - 4x)$

h) $5x(2 + 3x) - 2(4 - 7x)$

c) $0,1wv^2 - \frac{2}{3}wv^2 - 4wv^2$

f) $5(3 - x) - 2(1 - 5x)$

i) $-2x(3 - x) - 4x(5x - 2)$

12. Przyjmijmy, że $n \in \mathbb{N}$. Zapisz w jak najprostszej postaci średnią arytmetyczną:

a) pięciu kolejnych liczb naturalnych następujących bezpośrednio po liczbie n ,

b) dwóch kolejnych liczb parzystych bezpośrednio poprzedzających liczbę $2n$,

c) trzech kolejnych liczb nieparzystych następujących bezpośrednio po liczbie $2n$,

d) sześciu liczb: dwóch kolejnych liczb parzystych poprzedzających liczbę naturalną $2n - 1$ oraz kolejnych czterech liczb nieparzystych następujących po tej liczbie.

13. Przedstaw wyrażenie w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej.

a) $(4m - 2n)(3m - 5n)$

c) $(3a - b - 4)(a - 2b)$

e) $5 - (2x + 1)(x - 3)$

b) $(3 + 2b)(1 - b + 5c)$

d) $a - (b - a)(-2 + a)$

f) $(-2xy)^2 - (1 - x^2)(y^2 - 1)$

14. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $b - \frac{10b - 5}{5}$

d) $\frac{3a - 4}{5} - 2(6 - 5a)$

g) $\frac{x+3}{2} - \frac{4x+2}{4} + \frac{x}{3}$

b) $\frac{8x-4}{4} - \frac{x}{2}$

e) $x - \frac{x-1}{3} + 3\left(x - \frac{1}{9}\right)$

h) $2m + \frac{3m-1}{5} - \frac{2m-3}{15}$

c) $2(n - 3) - \frac{4n+1}{2}$

f) $\frac{2p+5}{6} + \frac{3-4p}{3}$

i) $\frac{2k-7}{3} - \frac{4+10k}{6} + \frac{k}{5}$

15. Pan de Fraudant wyjechał w podróż służbową z Paryża do Cartouse. Wziął ze sobą x euro pieniędzy prywatnych i dwa razy tyle służbowych. Pieniądże prywatne włożył do lewej kieszeni, a służbowe do prawej.

W poniedziałek pan de Fraudant nic nie wydał, ale zapewne przez pomyłkę przełożył 300 € pieniędzy służbowych do lewej kieszeni. We wtorek zapłacił w restauracji 15 € pieniędzmi z lewej kieszeni, a po południu, znowu przez pomyłkę, przełożył czwartą część pieniędzy z prawej kieszeni do lewej. W której kieszeni miał wówczas więcej pieniędzy i o ile więcej?



16. Dziadek przyniósł wnukom worek, w którym było n cukierków, i powiedział:

— Niech Marek weźmie $\frac{1}{10}$ wszystkich cukierków. Ania weźmie $\frac{1}{10}$ tego, co zostało, i dodatkowo 10 razy mniej cukierków, niż ma Marek.

— Teraz ja — powiedziała Tosia. — Wezmę $\frac{1}{10}$ tego, co zostało, i dodatkowo 10 razy mniej cukierków, niż mają razem Marek i Ania.

Pozostałe cukierki zostały podzielone według tej samej reguły. Kiedy ostatnie z wnucząt wzięło swoją porcję, cukierki się skończyły. Ile było wnucząt?

MINISPRAWDZIAN

51. Średnia arytmetyczna czterech kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 7, z których najmniejsza to n , jest od liczby n większa o:

- A. 7 B. 14 C. $n + 10,5$ D. $10,5$

52. Którego z wyrażeń nie można przekształcić do postaci: $a^4 + a^3 - a^2 - a$?

- A. $-a(1+a-a^2-a^3)$ B. $(a^2-1)(a^2+a)$ C. $a^2+a-(a^3+a)$ D. $(a^3-a)(a+1)$

53. Które z poniższych wyrażeń dla dowolnych liczb a i b ma tę samą wartość jak wyrażenie $10ab - 6a$?

- A. $-2a(3-5b)$ B. $\frac{50ab-6a}{5}$ C. $a-(7a+10ab)$ D. $(5a-2)(2b-5a)$

54. Po przekształceniu wyrażenia $\frac{5a(8a-6b)}{2} - (4a+b)(5a-2b)$ otrzymamy:

- A. $2(b^2 - 8a^2)$ B. $-15ab - 2b^2$ C. $2b(b-6a)$ D. $2b^2 - 18a$

WYŁĄCZANIE WSPÓLNEGO CZYNNIKA PRZED NAWIAS

- I Niektóre iloczyny wyrażeń algebraicznych możemy tak przekształcić, aby otrzymać sumę algebraiczną. Gdy wszystkie wyrazy sumy algebraicznej mają wspólny czynnik, to możemy wykonać operację odwrotną.

ĆWICZENIE A Jakim wyrażeniem należy zastąpić gwiazdkę?

a) $\star \cdot (x+4) = 3x+12$

c) $\star \cdot (x+y) = 4x^2+4xy$

b) $\star \cdot (a-5) = a^2-5a$

d) $\star \cdot (a^2+2ab) = a^3+2a^2b$

PRZYKŁAD 1 Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $15x^2 - 20xy = \underline{5x} \cdot 3x - \underline{5x} \cdot 4y =$
 $= 5x(3x - 4y)$

Wspólnym czynnikiem jednomianów $15x^2$ i $-20xy$ jest jednomian $5x$.

b) $8m^2n + 6m^3 + 2m =$
 $= \underline{2m} \cdot 4mn + \underline{2m} \cdot 3m^2 + \underline{2m} \cdot 1 =$
 $= 2m(4mn + 3m^2 + 1)$

Wspólnym czynnikiem jednomianów $8m^2n$, $6m^3$ i $2m$ jest jednomian $2m$.

ZADANIE Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $12p + 20p^2$

b) $3ab - 15a$

c) $4xy + 6x - 10x^2$

zadania 1–12 ►

III Czasami wspólny czynnik może mieć postać sumy algebraicznej.

ĆWICZENIE B Wskaż wspólny czynnik i przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $(x+7)(y+7) + (x+7)(y-4)$

b) $(5m-2)(3n+1) - (5m-2)(2n-1)$

PRZYKŁAD 2 Przedstaw w postaci iloczynu.

$$\begin{aligned} a^2 - 2a + ab - 2b &= \underline{a(a-2)} + \underline{b(a-2)} \\ &= (a-2)(a+b) \end{aligned}$$

W każdej z dwóch grup wyrazów: $a^2 - 2a$ oraz $ab - 2b$ wyłączamy wspólny czynnik.

Wspólnym czynnikiem wyrażen $a(a-2)$ i $b(a-2)$ jest $a-2$.

ZADANIE Przedstaw w postaci iloczynu.

a) $ab - 2a + 5b - 10$

b) $3x^2 + x - 3xy - y$

Uwaga. Poszukując wspólnego czynnika, wyrazy możemy zwykle grupować na różne sposoby. Na przykład wyrażenie z przykładu 2 można przekształcać tak:

$$a^2 - 2a + ab - 2b = a^2 + ab - 2a - 2b = a(a+b) - 2(a+b) = (a+b)(a-2)$$

PRZYKŁAD 3 Przedstaw w postaci iloczynu.

$$\begin{aligned} 2ab - 15 - 3b + 10a &= \\ &= 2ab + 10a - 3b - 15 = \\ &= 2a\underline{(b+5)} - 3\underline{(b+5)} = (b+5)(2a-3) \end{aligned}$$

Znajdujemy takie grupy wyrazów, aby w każdej z nich dało się wyłączyć wspólny czynnik.

Wspólnym czynnikiem wyrażen $2a(b+5)$ i $-3(b+5)$ jest $b+5$.

ZADANIE Przedstaw w postaci iloczynu.

a) $2mn + 6m + 3n + 9$

b) $3p^2 - 3q + 9p - pq$

zadania 13–18 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Przedstaw w postaci iloczynu.

a) $3x + 15y$

c) $17x^2 + 17$

e) $xy + 3x$

g) $9xy - y$

b) $7x + 14y$

d) $bc - bd$

f) $py - p$

h) $ab + 3b^2$

2. Oblicz sprytnie (wyłącz wspólny czynnik przed nawias).

a) $28 \cdot 17 - 28 \cdot 15$

c) $31 \cdot 15 - 62 \cdot 7$

e) $13 \cdot 49 - 26 \cdot 27$

b) $134 \cdot 135 - 133 \cdot 135$

d) $12 \cdot 13 - 6 \cdot 26$

f) $57^2 - 57 \cdot 55$

$$\frac{2x+6}{2} = \frac{2(x+3)}{2} = x+3$$

3. Wyłącz w liczniku wspólny czynnik, a następnie uprość wyrażenie.

a) $\frac{3x+12}{3}$

c) $\frac{-10a+15}{5} + \frac{12a-18}{6}$

b) $\frac{8y-4}{4}$

d) $\frac{14x-21}{7} - \frac{64-16x}{8}$

4. Wyłącz przed nawias jednomian $2x$.

a) $2x - 2xy$

b) $4x - 8xy$

c) $-6x^2 + 12x$

d) $10xy - 6xz$

5. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $5x^2 - 15x$

c) $-8xy + 8x$

e) $xy - x^2y$

g) $12ab^2 + 16b^2$

b) $-8x^2 - 4x$

d) $10a^2 - 2ab$

f) $14uv^2 - 7uv$

h) $x^2\sqrt{2} - x$

6. Przedstaw sumę $6xy - 12x^2y^2 + 24x^2y$ w postaci iloczynu, wyłączając przed nawias: a) 2, b) $-6x$, c) $3xy$.

7. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $6a - 24b + 30c$

c) $15ab - 5a^2 + 10ac$

e) $9pr + (pr)^2 + 3p^2r^2$

b) $2xy + 3x - x^2y$

d) $st^2 + 2s^2t^3 - 4s^2t^2$

f) $8a^2b - 20a^3b^2 + 4ab$

8. Zastąp gwiazdkę odpowiednią sumą.

a) $2x + 1 = 2(*)$

c) $6ab + 10 = 3(*)$

e) $x^2 - x = 5x(*)$

b) $3a - 5 = 3(*)$

d) $xy - 4x = 2x(*)$

f) $a^2 - 2ab = 2a(*)$

9. Zapisz wyrażenie, które przedstawia:

a) wysokość prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat o boku długości $2a$ i którego objętość wynosi $2a^3 + 4a^2$,

b) wysokość odpowiadającą podstawie $3a$ w trójkącie o polu $\frac{1}{2}a^2 + ab$.

10. Dla pewnych liczb a, b, c wartość wyrażenia $a - 2b + 4c$ wynosi 6. Podaj dla tych samych liczb a, b i c wartość wyrażenia:

a) $-3a + 6b - 12c$

b) $4b - 2a - 8c$

c) $\frac{1}{2}a - b + 2c - 3$

11. Oblicz sprytnie wartość wyrażenia dla podanej wielkości zmiennej x .

a) $x^2 + 0,24x - 0,26$ dla $x = 0,76$

c) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - x + \frac{5}{6}$ dla $x = -\frac{1}{6}$

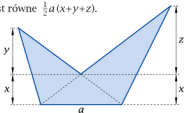
b) $\frac{2x^3 - 4x^2}{x-2}$ dla $x = \frac{5}{8}$

d) $x^3 - x^2 - 1,21x + 1,21$ dla $x = 1,1$

12. Wykaż, że pole poniższego pięciokąta jest równe $\frac{1}{2}a(x+y+z)$.

13. Przedstaw w postaci iloczynu.

- a) $(x+y) \cdot a + (x+y) \cdot b$
 b) $3(z-y) - a(z-y)$
 c) $(m-1)(k-1) + (k-1)(m+1)$
 d) $(a-1)(b+c) - (a-1)(b-c)$



14. Przedstaw sumę w postaci iloczynu.

- a) $p^2 + 5p + pq + 5q$
 b) $x^3 - 2x^2 + x - 2$
 c) $5a - 10b + a^2 - 2ab$
 d) $15a^3 - 21a^2 + 10a - 14$
 e) $st - 5s + t^2 - 5t$
 f) $12x + 3y + 4xy^2 + y^3$

15. Przedstaw sumę w postaci iloczynu.

- a) $st^2 - 4s^2t - st + 4s^2$
 b) $-9u^2v - 3u + 3uv^2 + v$
 c) $8p + 20p^2q - 6q - 15pq^2$
 d) $-18y + 12y^2 + 15x - 10xy$

16. Przedstaw każde z podanych wyrażeń w postaci iloczynu.

$$a^2 + a + ab + b \qquad a^2 - a + ab - b \qquad a^2 + a - ab - b \qquad a^2 - a - ab + b$$

17. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

- a) $15mn + 8 - 6n - 20m$
 b) $10a^2 + 9b - 6a - 15ab$
 c) $3p^2 - 10q + 2p - 15pq$
 d) $6x^2 - 2y - 4xy + 3x$

18. Rozłóż sumy algebraiczne na czynniki.

- a) $2x^5 + 2x^3 + 2x - 3x^4 - 3x^2 - 3$
 b) $5ab + 2b + 5ac + 2c + 5a + 2$
 c) $4p^2q - 2pq + 4pq + 4p - 2q - 2$
 d) $-3xy^5 - 9 - 3xy^3 - 9y^2 - 3xy - 9y^4$

MINISPRAWDZIAN

S1. Jeden z boków prostokąta o polu równym $2a^2b^2 - 8a^2b$ ma długość $2ab$. Jaki obwód ma ten prostokąt?

- A. $2ab - 8a^2b$ B. $3ab - 4a$ C. $a(3b + 4)$ D. $a(6b - 8)$

S2. Wyrażenie $6a^2 + 9ab - 10a - 15b$ można przedstawić jako iloczyn dwóch czynników, z których jednym jest:

- A. $2a - 3b$ B. $3a - 5$ C. $3a + 2b$ D. $5a + 3$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

ĆWICZENIE A Przedstaw w postaci sumy.

a) $(x+2)(x+2)$

b) $(5+x)^2$

c) $(x-3)^2$

Przekształcając niektóre wyrażenia algebraiczne, możemy korzystać ze wzorów, które zapisano obok. Są to przykłady równości, które nazywamy wzorami skróconego mnożenia.

Kwadrat sumy:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat różnicy:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Każdy z tych wzorów można udowodnić, przekształcając lewą stronę równości tak, aby otrzymać prawą.

Dowód wzoru na kwadrat sumy

$$L = (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = P \quad \square$$

Na końcu powyższego dowodu pojawił się mały kwadracik. W ten sposób będziemy oznaczać, że dowód został zakończony.

ĆWICZENIE B Udowodnij wzór na kwadrat różnicy.

Warto wiedzieć

Wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy dla liczb dodatnich można zinterpretować geometrycznie.

Na rysunku obok kwadrat o boku długości $a+b$ podzielono na kwadraty o polach a^2 i b^2 oraz dwa prostokąty, każdy o polu ab . Pole całego kwadratu to suma pól wszystkich tych czworokątów. Stąd otrzymujemy:

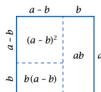
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Na kolejnym rysunku kwadrat o boku długości a podzielono na kwadrat o polu $(a-b)^2$ oraz prostokąty o polach ab i $b(a-b)$. Pole mniejszego kwadratu można obliczyć, odejmując od pola dużego kwadratu sumę pól prostokątów.

$$(a-b)^2 = a^2 - (ab + b(a-b))$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymamy:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



PRZYKŁAD 1 Przekształć wyrażenie.

$$a) (4 + 3x)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3x + (3x)^2 = 16 + 24x + 9x^2$$

$$b) \left(\frac{2}{3}x - y^2\right)^2 = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot y^2 + (y^2)^2 = \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}xy^2 + y^4$$

$$c) (5 + x)^2 - (1 - 5x)^2 = 25 + 2 \cdot 5x + x^2 - (1 - 2 \cdot 5x + (5x)^2) = 25 + 10x + x^2 - 1 + 10x - 25x^2 = -24x^2 + 20x + 24$$

ZADANIE Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, przekształć wyrażenie.

a) $(5 + 6p)^2$

b) $(2x - 3y)^2$

c) $(a - 4b)^2 - (2a + b)^2$

zadania 1-7 ►

- II Korzystając z poznanych wzorów, możemy łatwo udowodnić wzory na sześcian sumy i sześcian różnicy, które zapisano obok.

Sześcian sumy:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Sześcian różnicy:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dowód wzoru na sześcian sumy

$$\begin{aligned} L &= (a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = P \quad \square \end{aligned}$$

ĆWICZENIE C Udowodnij wzór na sześcian różnicy.

PRZYKŁAD 2 Przedstaw podane wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

$$a) \left(\frac{1}{3} + 2p\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2p + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot (2p)^2 + (2p)^3 = \frac{1}{27} + \frac{2}{3}p + 4p^2 + 8p^3$$

$$b) \left(2a - \frac{1}{2}b\right)^3 = (2a)^3 - 3(2a)^2 \cdot \frac{b}{2} + 3 \cdot 2a \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^3 = 8a^3 - 6a^2b + \frac{3ab^2}{2} - \frac{b^3}{8}$$

ZADANIE Przedstaw w postaci sumy algebraicznej.

a) $(3a + 5)^3$

b) $(x - 2y)^3$

zadania 8-10 ►

- III Kolejny wzór pokazuje, jak różnicę kwadratów dwóch liczb można przedstawić w postaci iloczynu.

Różnica kwadratów:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

ĆWICZENIE D Uzasadnij wzór zapisany obok.

Warto wiedzieć

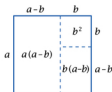
Wzór na różnicę kwadratów dla liczb dodatnich także można zinterpretować geometrycznie.

Gdy od kwadratu o boku długości a odejmiemy kwadrat o boku długości b (zob. rysunek obok), to pozostała część będzie miała pole równe sumie pól $a(a-b)$ i $b(a-b)$.

$$a^2 - b^2 = a(a-b) + b(a-b)$$

Stąd otrzymamy wzór:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$



PRZYKŁAD 3 a) Przedstaw podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

$$9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x - 1)(3x + 1)$$

b) Przedstaw podany iloczyn w postaci sumy algebraicznej.

$$\left(3 + \frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2} - 3\right) = \left(\frac{b}{2} + 3\right)\left(\frac{b}{2} - 3\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 3^2 = \frac{b^2}{4} - 9$$

ZADANIE a) Przedstaw wyrażenie $25x^2 - \frac{1}{4}y^2$ w postaci iloczynu.

b) Przedstaw iloczyn $\left(2a - \frac{b}{3}\right)\left(2a + \frac{b}{3}\right)$ w postaci sumy algebraicznej.

zadania 11–16 ►

- IV** Sumę sześcianów oraz różnicę sześcianów dwóch liczb można rozkładać na czynniki, korzystając ze wzorów podanych obok.

ĆWICZENIE E Uzasadnij podane obok wzory.

Suma sześcianów:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Różnica sześcianów:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

PRZYKŁAD 4 Podaną sumę algebraiczną przedstaw w postaci iloczynu.

$$\text{a) } 8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3 = (2x + 1) \cdot ((2x)^2 - 2x \cdot 1 + 1^2) = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

$$\text{b) } 27a^3 - \frac{b^3}{125} = (3a)^3 - \left(\frac{b}{5}\right)^3 = \left(3a - \frac{b}{5}\right)\left(9a^2 + \frac{3}{5}ab + \frac{b^2}{25}\right)$$

ZADANIE Przedstaw w postaci iloczynu.

$$\text{a) } \frac{64}{125}x^3 + 0,001$$

$$\text{b) } 1000p^3 - \frac{1}{27}q^3$$

zadania 17–18 ►

V Dla różnic wyższych potęg liczb można utworzyć podobne wzory:

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

ĆWICZENIE F Uzasadnij jedną z równości zapisanych obok.

Wszystkie powyższe równości można zapisać w postaci uogólnionego wzoru:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Dowód

$$P = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) =$$

$$= a \cdot a^{n-1} + a(a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) +$$

$$- b(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2}) - b \cdot b^{n-1} =$$

$$= a^n + (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1}) - (a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1}) - b^n =$$

$$= a^n - b^n = L \quad \square$$

PRZYKŁAD 5 Przedstaw podane wyrażenie w postaci iloczynu.

$$\begin{aligned} 32x^5 - 1 &= (2x)^5 - 1^5 = (2x - 1)((2x)^4 + (2x)^3 \cdot 1 + (2x)^2 \cdot 1^2 + 2x \cdot 1^3 + 1^4) = \\ &= (2x - 1)(16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$

ZADANIE Przedstaw wyrażenie $\frac{a^5}{100\,000} - 1$ w postaci iloczynu.

zadania 19-21 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(5 + p)^2$

c) $\left(\frac{2}{a} + 3a\right)^2$

e) $\left(\frac{2}{3}y - 3\right)^2$

b) $(1 - 4x)^2$

d) $(m^2 - 2k)^2$

f) $(1,1a + 0,2b)^2$

2. Uprość wyrażenie.

a) $(3x + 4)^2 - x(2 + 9x)$

c) $(5a - b)^2 + b(10a - b)$

e) $(3m - 2)^2 + (6m + 1)^2$

b) $2p(3 - 8p) + (1 + 4p)^2$

d) $y(4x + y) - (x + 2y)^2$

f) $(5a + b)^2 - (b - 5a)^2$

3. Zastąp symbole $\clubsuit$ i $\spadesuit$ takimi liczbami, aby otrzymać równość, którą spełnia każda liczba rzeczywista.

a) $x^2 + 14x + 49 = (x + \clubsuit)^2$

d) $x^2 - 6x + \spadesuit = (x - \clubsuit)^2$

b) $a^2 - 5a + \frac{25}{4} = (a - \clubsuit)^2$

e) $y^2 - 4y + \spadesuit = (y - \clubsuit)^2$

c) $2t^2 + 20t + 50 = 2(t + \clubsuit)^2$

f) $9x^2 + 12x + \spadesuit = (3x + \clubsuit)^2$

4. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(a+b)(b+a)$

b) $(-a-b)^2$

c) $(-a+b)^2$

d) $(-a-b)(a+b)$

5. Które z poniższych równości są prawdziwe dla każdych liczb a i b ?

① $(a-b)^2 = (b-a)^2$

③ $-(a-b)^2 = (b-a)^2$

⑤ $(-a-b)^2 = (a+b)^2$

② $(-a+b)^2 = (b-a)^2$

④ $(-a-b)^2 = -(a+b)^2$

⑥ $(-a+b)^2 = -(a-b)^2$

6. Jakimi wyrażeniami należy zastąpić symbole?

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - \heartsuit$

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - \spadesuit$

7. Zapisz w postaci sumy algebraicznej wyrażenie $(a-1)^4$.

◀ ||| **8.** Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(2+b)^3$

c) $\left(\frac{x}{2} + 4\right)^3$

e) $\left(\frac{1}{w} + 3w\right)^3$

g) $\left(ac + \frac{c}{3}\right)^3$

b) $(p-0,1)^3$

d) $\left(5v - \frac{1}{5}\right)^3$

f) $\left(\frac{2}{a^2} - \frac{a}{2}\right)^3$

h) $\left(\frac{1}{3y} - z^2\right)^3$

9. Uprość wyrażenie.

a) $(x+2)^3 - 2(x^2 + 2x)$

d) $(x+2y)^3 - 6xy(x+y)$

g) $(m+1)^3 + (m-1)^3$

b) $p^2(3-p) + (p-1)^3$

e) $(p+3)^3 - (p-2)^2$

h) $(x+y)^3 - (x-y)^3$

c) $a^2(15b-a) + (a-5b)^3$

f) $(t+5)^2 + (t-5)^3$

i) $a(a+b)^3 - b(a-b)^3$

10. Uzasadnij równość.

a) $(a-b)^3 + (a+b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$

b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = (2ab)^2$

◀ ||| **11.** Zapisz w postaci iloczynu.

a) $49 - 16x^2$

c) $-x^2 + \frac{4}{9}y^2$

e) $\frac{1}{9} - \frac{a^4}{4}$

g) $100m^2 - \frac{4}{n^2}$

b) $36a^2 - 1$

d) $0,81a^2 - \frac{1}{b^2}$

f) $25x^2 - y^4$

h) $\frac{p^2}{121} - 0,04$

12. Oblicz sprytnie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a) $1001 \cdot 999$

b) $510 \cdot 490$

c) $207 \cdot 193$

d) $705 \cdot 695$

13. Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $\left(4 - \frac{b}{2}\right)\left(4 + \frac{b}{2}\right)$

c) $(a-b)(b+a)$

e) $(a+3b)(3b-a)$

b) $(t^2 - 0,7)(t^2 + 0,7)$

d) $(-a-b)(a-b)$

f) $\left(-\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x\right)$

14. Uprość wyrażenie.

a) $(x-3y)(x+3y) - (x+2y)^2$

c) $(2+a)(a-2) + (-3+2a)^2$

b) $(5x-y)(5x+y) - (5-2y)^2$

d) $(1-2x)(1+2x) - \frac{(2y-4x)^2}{2}$

15. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej.

a) $(a+b+1)(b+1-a)$

b) $(a-b+1)(a-b-1)$

16. Które równości są prawdziwe dla każdych wartości a i b ?

① $(a-b)^3 = (b-a)^3$

③ $(a+b)^2 \cdot (a-b)^2 = (a^2-b^2)^2$

② $(a-b)^2 \cdot (b-a) = (b-a)^3$

④ $(a-b)^4 = (b-a)^2(a-b)^2$

◀ **IV** **17.** Zapisz w postaci iloczynny.

a) $p^3 + 27$

c) $1000 - k^3$

e) $64m^3 - \frac{n^3}{8}$

g) $a^3 + \frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{125} - v^3$

d) $8a^3 + \frac{1}{27}$

f) $\frac{w^3}{1000} + \frac{125}{w^3}$

h) $0,001x^3 - \frac{27}{y^3}$

18. Uzasadnij równość.

a) $\frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab} = a+b$

b) $\frac{a^3-b^3}{a^3+a^2b+ab^2} = 1 - \frac{b}{a}$

◀ **V** **19.** Przedstaw w postaci iloczynny.

a) $w^5 - 1$

b) $1 - b^6$

c) $16 - p^4$

d) $\frac{a^5}{32} - 1$

e) $x^7 - \frac{1}{y^7}$

20. a) Wykaż, że liczba $25^{13} - 14^{13}$ jest podzielna przez 11.

b) Wykaż, że liczba $7^6 - 1$ jest podzielna przez 6.

c) Wykaż, że liczba $9^5 - 32$ jest podzielna przez 7.

21. a) Wykaż, że $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

b) Korzystając ze wzoru w ramce, zapisz sumę $x^7 + y^7$ w postaci iloczynny.

Jeśli n jest liczbą naturalną nieparzystą, to

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots + b^{n-1})$$

c) Uzasadnij wzór podany w ramce.

MINISPRAWDZIAN

51. Wyrażenie $a(a+b)^2 - (a-b)^3$ można zapisać w postaci:

- A. $-a^2b - 3ab^2 - b^3$ C. $-2a^2b - 2a^2b^2 - b^3$
B. $ab^2 + 2a^2b + b^3$ D. $5a^2b - 2ab^2 + b^3$

52. Różnica objętości sześcianu o krawędzi długości a i objętości sześcianu o krawędzi o 1 krótszej jest równa:

- A. $a^3 - 1$ B. $3a^2 + 3a - 1$ C. $3a^2 - 3a + 1$ D. $3a^2 + 1$

53. Wartość wyrażenia $\frac{1}{9}(x^2 - 0,25)$ dla $x = 9,5$ wynosi:

- A. 9 B. 9,5 C. 10 D. 11,5

54. Które z poniższych wyrażeń nie jest równe wyrażeniu $1 - a^4$?

- A. $(a^3 + a^2 + a + 1)(1 - a)$ C. $(a^2 + 1)(a + 1)(1 - a)$
B. $(1 - a^2)(1 + a^2)$ D. $(1 - a)^2(1 + a)^2$

55. Wyrażenie $\frac{8}{27}a^3 + 125b^3$ można przedstawić jako iloczyn dwóch czynników, z których jednym jest $\frac{2}{3}a + 5b$. Drugim czynnikiem jest:

- A. $\frac{2}{3}a^2 + \frac{10}{3}ab + 5b^2$ B. $\frac{4}{9}a^2 + \frac{10}{3}ab + 25b^2$ C. $\frac{4}{9}a^2 + 25b^2$ D. $\frac{4}{9}a^2 - \frac{10}{3}ab + 25b^2$

PRZEKSZTAŁCANIE WZORÓW

I W niektórych krajach temperaturę mierzy się w stopniach Fahrenheita ($^{\circ}\text{F}$). Zależność między skalami Celsjusza i Fahrenheita wyraża wzór:

$$f = \frac{9}{5}c + 32$$

Korzystając z tego wzoru, możemy zamienić temperaturę c (wyrażoną w stopniach Celsjusza) na temperaturę f (w stopniach Fahrenheita).

Jeśli chcemy wykonać operację odwrotną, czyli zamienić temperaturę w skali Fahrenheita na temperaturę wyrażoną w skali Celsjusza, najwygodniej jest najpierw przekształcić wzór $f = \frac{9}{5}c + 32$, wyznaczając z niego c .

$$f = \frac{9}{5}c + 32 \quad | -32$$

$$f - 32 = \frac{9}{5}c \quad | \cdot \frac{5}{9}$$

$$\frac{5}{9}(f - 32) = c$$

$$c = \frac{5}{9}(f - 32)$$

.....
Zamieniamy ze sobą
strony równania.

Przekształcając wzory, postępujemy podobnie jak przy rozwiązywaniu równań. Możemy do obu stron równości dodać lub od obu stron równości odjąć to samo wyrażenie, możemy też obie strony pomnożyć lub podzielić przez to samo wyrażenie (o ile jego wartość jest różna od 0).

zadania 1-3 ►

II PRZYKŁAD Wyznacz b ze wzoru $a = \frac{b}{b+1} + 2$ (zakładamy, że $b+1 \neq 0$, czyli $b \neq -1$).

$$a = \frac{b}{b+1} + 2 \quad | \cdot (b+1)$$

$$a(b+1) = b + 2(b+1)$$

$$ab + a = b + 2b + 2 \quad | - 3b - a$$

$$ab - 3b = 2 - a$$

Wyłączamy wspólny czynnik b przed nawias.

$$b(a-3) = 2-a \quad | : (a-3) \quad \text{Założenie:}$$

$$a \neq 3.$$

$$b = \frac{2-a}{a-3}$$

ZADANIE Wyznacz q ze wzoru: a) $p = \frac{2q}{1-q}$ b) $p = \frac{5}{3+q} + 1$

zadania 4-9 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Z podanej równości wyznacz x oraz y .

a) $2y + x = 6$

c) $2x - 5y = 3$

e) $3y = 10x - 5$

b) $3x - y = 9$

d) $10x + 2y = 5$

f) $12x = 4y - 1$

2. Z podanego wzoru wyznacz wskazaną wielkość.

a) $m = a(3+n)$; n

c) $v = \frac{3a-b}{u}$; b

e) $d = \frac{a+b}{2} - c$; b

b) $u = \frac{2a}{b-1}$; a

d) $w = \frac{2-3r}{p}$; r

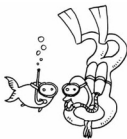
f) $z = \frac{5}{6w-s}$; s

3. Ciśnienie pod wodą zależy od głębokości. Im większa głębokość pod powierzchnią morza, tym wyższe jest ciśnienie. Związek między tymi wielkościami można opisać wzorem $p = \frac{1}{10}x + 1$, gdzie p oznacza ciśnienie wyrażone w atmosferach (atm), a x — głębokość w metrach.

a) Wyznacz x z tego wzoru.

b) Oblicz, jakie ciśnienie panuje na głębokości 15 m.

c) Na jaką głębokość może zejść pletwonurek, aby ciśnienie nie przekroczyło 3 atm?



4. Z podanego wzoru wyznacz wskazaną wielkość.

a) $u = 2k - kr$; k

d) $p = \frac{r}{r-1}$; r

g) $f = \frac{3t}{a-2t} - 1$; t

b) $3a = 2ab - 1$; a

e) $u = \frac{pr}{p+r}$; p

h) $p = 5 - \frac{m}{n+1}$; n

c) $p - 2q = pq + 5$; q

f) $\frac{1}{m} = \frac{k}{p+k}$; k

i) $x = \frac{2xy-3}{2y+2} - 2$; y

5. Jeśli zmieszymy a litrów płynu o temperaturze t_1 i b litrów tego samego płynu o temperaturze t_2 , wówczas otrzymamy mieszaninę o temperaturze t , którą można obliczyć ze wzoru $t = \frac{1}{a+b}(at_1 + bt_2)$. Wyznacz z tego wzoru t_1 oraz a .

6. Przekształć równość tak, aby wyznaczyć wskazaną wielkość.

a) $(m+n)(m-n) = m(4+m)$; m

c) $(u+v)^2 - 4 = u^2 + v^2$; u

b) $\frac{r-p}{r} = \frac{2p+r}{r-p}$; r

d) $(k+l)^3 = k(k^2 + 3kl)$; k

7. Przekształć równość tak, aby wyznaczyć stosunek $\frac{a}{b}$.

a) $a = 4b$

b) $5a - 3b = 0$

c) $\frac{a+3b}{b} = 7$

d) $\frac{5b}{a+b} = 2$

Ciekawostka

Czy wiesz, o ile centymetrów dłuższy jest but, który ma rozmiar o 1 większy od twojego?

W Polsce na ogół stosuje się dwa systemy numeracji obuwia: angielski lub francuski. Numery butów 3, $5\frac{1}{2}$, 9 itp. to numeracja angielska. Rozmiary 36, $37\frac{1}{2}$, 40 itp. występują w numeracji francuskiej. System angielski powstał na początku XIV w. i ma dość skomplikowane zasady numeracji. Jednostką jest tu $\frac{1}{3}$ cala, czyli około 8,5 mm. System francuski powstał pod koniec XVIII w. Zasady numeracji są dużo prostsze, a jednostką jest $\frac{2}{3}$ cm $\approx$ 6,7 mm.

Związek między długością stopy w centymetrach a rozmiarem buta opisują wzory:

$$L = \frac{A+25}{3} \cdot 2,54 \quad L = \frac{2}{3}F$$

L — długość stopy w centymetrach

A — rozmiar buta w numeracji angielskiej

F — rozmiar buta w numeracji francuskiej

Stosując te wzory w praktyce, trzeba pamiętać, że buty produkuje się nie we wszystkich możliwych rozmiarach, a tylko w takich, które wyrażają się liczbą naturalną lub liczbą naturalną powiększoną o $\frac{1}{2}$.

8. a) Przekształć wzory podane w ciekawostce tak, aby można było łatwo obliczyć właściwy rozmiar buta, gdy znana jest długość stopy (w cm). Zmierz długość swojej stopy i oblicz, jaki rozmiar butów w numeracji angielskiej, a jaki — w numeracji francuskiej jest dla ciebie odpowiedni (pamiętaj, że musisz podać otrzymany wynik z dokładnością do 0,5 numeru).

b) Znajdź wzór, który pozwala obliczyć numer buta w numeracji angielskiej, gdy znamy numer buta w numeracji francuskiej.

9. Z podanego wzoru wyznaczn u .

$$r = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{u}}}$$

MINISPRAWDZIAN

51. Jeśli $\frac{a-2b}{3} = \frac{5c-d}{2}$, to:

- A. $a = \frac{-4b+15c-3d}{2}$ C. $c = \frac{2a-4b+3d}{15}$
 B. $b = \frac{-2a-3d-15c}{4}$ D. $d = \frac{-2a+4b-15c}{3}$

52. W prostokącie o polu P jeden z boków ma długość a . Obwód tego prostokąta jest równy:

- A. $2a + 2P$ B. $a + \frac{P}{2a}$ C. $2a + \frac{2a}{P}$ D. $2a + \frac{2P}{a}$

53. Jeśli $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, to:

- A. $b = \frac{c-a}{ac}$ B. $b = \frac{ac}{c-a}$ C. $b = a - c$ D. $b = \frac{a-c}{ac}$

TWIERDZENIA. DOWODZENIE TWIERDZEŃ

- 1 Twierdzenia matematyczne często są formułowane w postaci zdania: *Jeżeli..., to...*. Takie zdanie nazywane jest implikacją i w skrócie możemy je zapisać za pomocą symbolu $\Rightarrow$.

Implikację: *jeżeli p , to q* możemy zapisać krócej:

$$p \Rightarrow q$$

Pierwsza część twierdzenia w postaci implikacji jest nazywana **założeniem**, a druga — **tezą**. Oto przykłady:

Jeżeli bok kwadratu ma długość a , to jego przekątna ma długość $a\sqrt{2}$.

założenie

teza

$$a \geq 0 \text{ i } b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

założenie

teza

$$A \subset B \text{ i } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

założenie

teza

Nawet jeśli twierdzenie nie jest zapisane w postaci implikacji, to zwykle można je na implikację „przerobić”.

Na przykład twierdzenie:

Suma dwóch liczb parzystych jest liczbą parzystą.

można sformułować tak:

Jeśli dwie liczby są parzyste, to ich suma też jest liczbą parzystą.

założenie

teza

Przy dowodzeniu twierdzeń matematycznych najczęściej stosuje się dwa rodzaje uzasadnienia, że implikacja jest prawdziwa. Jeden z nich nazywany jest dowodem wprost, a drugi — dowodem nie wprost.

Gdy twierdzenie w postaci implikacji dowodzimy metodą wprost, przyjmujemy, że prawdziwe jest założenie, i wykazujemy, że teza także jest prawdziwa.

dowód wprost:

założenie



teza

PRZYKŁAD 1 Udowodnij, że dla liczb całkowitych a i b zachodzi twierdzenie:

Jeśli a jest liczbą podzielną przez 6 oraz b jest liczbą podzielną przez 15, to suma liczb a i b jest podzielna przez 3.

Dowód

Zakładamy, że liczba a jest podzielna przez 6 oraz że liczba b jest podzielna przez 15.

Zatem $a = 6m$ i $b = 15n$ dla pewnych liczb całkowitych m i n .

W takim razie:

$$a + b = 6m + 15n = 3 \cdot 2m + 3 \cdot 5n = 3(2m + 5n)$$

Liczby m i n są całkowite, więc liczba $2m + 5n$ też jest całkowita. Liczba $a + b$ jest iloczynem liczby 3 i pewnej liczby całkowitej, zatem jest podzielna przez 3. $\square$

..... Założenie: liczba a jest podzielna przez 6 i liczba b jest podzielna przez 15.

..... Teza: Liczba $a + b$ jest podzielna przez 3.

..... Przyjmujemy, że założenie jest prawdziwe.

..... Wykazaliśmy, że prawdziwa jest teza.

ZADANIE Udowodnij, że gdy od liczby podzielnej przez 8 odejmiemy liczbę podzielną przez 20, to otrzymamy liczbę podzielną przez 4.

Przy dowodzeniu implikacji metodą nie wprost przyjmujemy, że fałszywa jest teza, i wykazujemy, że założenie nie może być prawdziwe.

dowód nie wprost:

nieprawda, że teza



nieprawda, że założenie

PRZYKŁAD 2 Udowodnij twierdzenie:

Jeśli liczba a jest niewymierna, to $a + 3$ też jest liczbą niewymierną.

.....
Założenie: Liczba a jest niewymierna.
.....
Teza: Liczba $a + 3$ jest niewymierna.
.....

Dowód

Przypuśćmy, że liczba $a + 3$ jest wymierna.

.....
Przyjmujemy, że teza jest nieprawdziwa.
.....

Wobec tego:

$a + 3 = \frac{p}{q}$ dla pewnych liczb całkowitych p i q .

Stąd:

$$a = \frac{p}{q} - 3$$

$$a = \frac{p - 3q}{q}$$

Ponieważ p i q są liczbami całkowitymi, więc liczba $p - 3q$ jest liczbą całkowitą.

Wynika stąd, że liczba a jest ilorazem dwóch liczb całkowitych, czyli jest liczbą wymierną. Jest to sprzeczne z założeniem.

Z zaprzeczenia tezy wynikło zaprzeczenie założenia. Wobec tego twierdzenie jest prawdziwe. $\square$

.....
Wykazaliśmy, że gdyby teza była nieprawdziwa, to założenie nie mogłoby być spełnione.
.....

ZADANIE Udowodnij twierdzenie:

Jeżeli a jest liczbą niewymierną, to liczba $\frac{a}{2}$ także jest liczbą niewymierną.

Inny sposób dowodzenia metodą nie wprost polega na tym, że przyjmujemy, iż całe twierdzenie nie jest prawdziwe i w wyniku poprawnego rozumowania dochodzimy do sprzeczności ze znanym faktem matematycznym.

Na przykład takim znanym faktem jest twierdzenie: *Każda liczba naturalna złożona jest podzielna przez jakąś liczbę pierwszą od niej mniejszą.*

W dowodzie metodą nie wprost przedstawionym na następnej stronie dochodzimy do sprzeczności z tym twierdzeniem.

Udowodnijmy twierdzenie:

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

Dowód

Przypuśćmy, że liczb pierwszych jest skończenie wiele.

Przyjmujemy, że twierdzenie nie jest prawdziwe.

Wynika stąd, że wśród liczb pierwszych można wskazać największą. Oznaczmy ją literą p .

Zatem lista wszystkich liczb pierwszych w kolejności od najmniejszej do największej jest następująca:

2, 3, 5, 7, ..., p

Tworzymy liczbę:

$$L = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p + 1$$

Liczba L jest większa od p , zatem nie jest liczbą pierwszą. Musi być więc liczbą złożoną.

Jednocześnie resztą z dzielenia liczby L przez 2 jest 1, resztą z dzielenia liczby L przez 3 też jest 1 i taką samą resztę otrzymamy, dzieląc liczbę L przez każdą z pozostałych liczb pierwszych: 5, 7, ..., p .

Wobec tego nasza złożona liczba L nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą. Jest to sprzeczne z twierdzeniem, że każda liczba naturalna złożona dzieli się przez jakąś liczbę pierwszą od niej mniejszą.

Zaprzecząc twierdzeniu „liczb pierwszych jest nieskończenie wiele”, otrzymaliśmy sprzeczność. Tym samym udowodniliśmy jego prawdziwość. $\square$

zadania 1–9 ►

- II W matematyce można też czasem spotkać twierdzenia, w których występuje zwrot: *wtedy i tylko wtedy, gdy*. Zdanie w takiej formie nazywamy równoważnością i możemy zapisać, używając symbolu $\Leftrightarrow$.

Oto przykłady równoważności:

Trójkąt jest równoramienny wtedy i tylko wtedy, gdy dwa jego kąty mają taką samą miarę.

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \text{ lub } a = -b$$

Równoważność: p wtedy i tylko wtedy, gdy q możemy zapisać krócej:

$$p \Leftrightarrow q$$

Taki zapis oznacza, że zachodzą obie poniższe implikacje:

$$p \Rightarrow q$$

$$q \Rightarrow p$$

Aby udowodnić twierdzenie sformułowane w postaci równoważności, musimy udowodnić dwie implikacje.

Na przykład, aby udowodnić następującą równoważność dotyczącą liczb naturalnych:

*Iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy,
gdy liczba a jest parzysta lub liczba b jest parzysta.*

musimy udowodnić implikację:

*Jeżeli iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą,
to liczba a jest parzysta lub liczba b jest parzysta.*

oraz implikację odwrotną:

*Jeżeli liczba a jest parzysta lub liczba b jest parzysta,
to iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą.*

ĆWICZENIE Udowodnij każdą z powyższych implikacji.

Wskazówka. Pierwszą z tych implikacji udowodnij metodą nie wprost — przyjmij, że teza nie jest prawdziwa, czyli że obie liczby a oraz b są nieparzyste, i udowodnij, że założenie nie może być prawdziwe. Drugą implikację udowodnij metodą wprost.

zadania 10–12 ►

Ciekawostka

W matematyce twierdzeniem nazywamy tylko takie zdanie, którego prawdziwość została udowodniona.

Twierdzenia powstają na ogół w ten sposób, że zauważona prawidłowość, np. dotycząca liczb lub figur, formułowana jest w postaci ogólnej, a następnie zostaje udowodniona.

Jeśli ktoś sformułował pewną prawidłowość, ale jej nie udowodnił, to mówimy, że postawił hipotezę.

Jedną z najsłynniejszych hipotez w historii matematyki była hipoteza Fermata. Na marginesie pewnego dzieła matematycznego Pierre de Fermat napisał, że potrafi udowodnić następującą własność liczb naturalnych:

Dla $n \geq 3$ nie istnieje trójka liczb naturalnych dodatnich x , y , z spełniająca równanie $x^n + y^n = z^n$.

Napisał też, że uzasadnienie nie mieści się niestety na marginesie książki. Do dziś nie wiemy, czy Fermat znał poprawny dowód powyższego faktu.

Hipotezę tę próbowano udowodnić przez ponad 350 lat. Dopiero w 1994 roku matematyk angielski Andrew Wiles znalazł dowód hipotezy Fermata, która od tego momentu może być już nazywana twierdzeniem Fermata.

Oczywiście nie każda hipoteza okazuje się być twierdzeniem. Na przykład nieprawdziwą okazała się inna z hipotez postawionych przez Fermata:

Dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^{2^n} + 1$ jest liczbą pierwszą.

ZESTAW ZADAŃ

1. Uzasadnij, że:

- a) suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3,
- b) suma dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 4,
- c) suma czterech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

2. Udowodnij twierdzenie.

- a) Iloczyn liczby parzystej i liczby nieparzystej jest liczbą parzystą.
- b) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 6, to jest podzielna przez 3.
- c) Różnica kwadratów dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.

3. Udowodnij twierdzenie.

- a) Dla każdej liczby rzeczywistej x liczba $x^2 + 1$ jest dodatnia.
- b) Dla dowolnej liczby rzeczywistej x liczba $x^2 - 4x + 4$ jest nieujemna.
- c) Dla dowolnej liczby rzeczywistej x liczba $x^2 - 2x + 2$ jest liczbą dodatnią.

4. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb a i b :

- a) $(a + b)^2 - 4ab \geq 0$,
- b) jeśli $\frac{4}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, to $a = b$.

5. Niech n oznacza liczbę naturalną. Uzasadnij, że:

- a) liczba $n^2 + n$ jest parzysta,
- c) liczba $3n^2 + 3n$ jest podzielna przez 6,
- b) ostatnią cyfrą liczby $5n^2 + 5n$ jest 0,
- d) liczba $\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2}$ jest liczbą całkowitą.

6. a) Udowodnij, że jeśli a i b są liczbami całkowitymi, to liczba $a^5 - 32b^5$ jest podzielna przez $a - 2b$ (przy założeniu, że $a - 2b \neq 0$).

b) Udowodnij, że jeśli a oraz b są liczbami całkowitymi, to liczba $ab - 4a + b^2 - 4b$ jest podzielna przez $a + b$ (przy założeniu, że $a + b \neq 0$).

7. Uzasadnij twierdzenie.

- a) Jeśli resztą z dzielenia przez 7 liczby naturalnej n jest 5, to resztą z dzielenia przez 7 liczby n^3 jest 6.
- b) Jeśli resztą z dzielenia liczby naturalnej n przez liczbę naturalną k jest 1, to resztą z dzielenia liczby n^2 przez k też jest 1.

8. Uzasadnij twierdzenie.

- a) Jeśli a i b są liczbami wymiernymi, to $a + b$ jest liczbą wymierną.
- b) Jeśli $2a + 3$ jest liczbą wymierną, to a jest liczbą wymierną.
- c) Jeśli $\frac{a-7}{5}$ jest liczbą niewymierną, to a jest liczbą niewymierną.

9. Udowodnij twierdzenie. Przyjmij, że ostatnią cyfrą rozważanej liczby nie jest 0.
- a) Jeżeli od liczby dwucyfrowej odejmiemy liczbę dwucyfrową powstałą z przestawienia cyfr tej liczby, to otrzymamy liczbę podzielną przez 9.
- b) Jeśli od liczby trzycyfrowej odejmiemy liczbę utworzoną przez zamianę cyfry jedności z cyfrą setek, to otrzymamy liczbę podzielną przez 11.

10. Udowodnij, że liczba naturalna n jest dzielnikiem liczby naturalnej m wtedy i tylko wtedy, gdy $n \cdot m$ jest dzielnikiem liczby m^2 .

11. Udowodnij, że liczba trzycyfrowa jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr tej liczby dzieli się przez 3.

Ciekawostka

W 1742 roku pruski matematyk Christian Goldbach postawił następującą hipotezę:

Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych.

Hipoteza ta do dzisiaj nie została ani potwierdzona, ani obalona, mimo że przez jakiś czas można było za to zdobyć nagrodę w wysokości 1 mln dolarów. Aby potwierdzić hipotezę Goldbacha, trzeba podać jej dowód, zaś aby ją obalić — wystarczy podać kontrprzykład, czyli liczbę parzystą, która nie spełnia opisanego warunku.

12. Uzasadnij, że podane zdanie jest fałszywe, podając kontrprzykład.

- a) Różnica dwóch liczb ujemnych jest liczbą ujemną.
- b) Liczba, która jest podzielna przez 4 i przez 6, jest podzielna przez 24.
- c) Średnia arytmetyczna czterech liczb parzystych jest liczbą parzystą.
- d) Jeśli czworokąt ma równe przekątne, to jest prostokątem.

MINISPRAWDZIAN

51. Jeśli w liczbie postaci $1000 \dots 01$ liczba zer jest parzysta, to liczba ta dzieli się przez 11. Założenie tego twierdzenia spełnia liczba:

- A. $10^{21} + 1$ B. $10^{20} + 1$ C. $10 \cdot 11$ D. $21 \cdot 11$

52. W którym z poniższych zdań symbol $\Rightarrow$ można zastąpić symbolem $\Leftrightarrow$?

- A. Liczba a jest wymierna $\Rightarrow$ liczba a^2 jest wymierna.
- B. Liczba n jest podzielna przez 6 $\Rightarrow$ 3 jest dzielnikiem liczby n .
- C. $m > n \Rightarrow 2m - 2n > 0$
- D. $m < 0 \Rightarrow m^4 > 0$

POWTÓRZENIE

1. Zapisz w postaci sumy algebraicznej:

- a) sześcián sumy liczby a i liczby o 1 większej od a ,
- b) iloraz sześciánu liczby $3a+2$ przez 3,
- c) różnicę odwrotności kwadratów liczb $\frac{1}{a}$ i $\frac{1}{a-1}$.

2. Objętość pewnego prostopadłościánu, którego podstawa jest kwadratem o boku a , jest równa $8a^2 + 4a^3$. Zapisz wyrażenie, które przedstawia:

- a) wysokość tego prostopadłościánu,
- b) pole jednej ścianý bocznej tego prostopadłościánu,
- c) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościánu.

3. Liczba n jest pewną liczbą naturalną podzielną przez 11.

- a) Zapisz największą z liczb mniejszych od n , której resztą z dzielenia przez 11 jest 3.
- b) Jaka jest reszta z dzielenia przez 11 liczby $(n+4)^2$?

4. Zapisz w postaci $ax+b$.

- a) $\frac{3x+2}{5} - \frac{2x-1}{2}$
- b) $x - \frac{3-x}{2} + 3(x+1)$
- c) $2x - 1 - \frac{x}{4} + \frac{2-x}{2}$
- d) $3x + \frac{2x-1}{2} - \frac{5x}{3}$

5. Przedstaw w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej.

- a) $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^3 + (x-9)(x+9)$
- b) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - a\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$

6. Przedstaw w postaci iloczynu.

- a) $6a^2 - 15ab + 2a - 5b$
- b) $81x^4 - \frac{y^4}{16}$
- c) $32m^5 - 1$
- d) $p^3 - q^3 + p^2 - q^2$

7. Jeden z boków prostokąta jest równy $2a - \frac{1}{a}$. Ustal, jaką długość ma drugi z boków, jeśli pole prostokąta wynosi:

- a) $8a^3 - \frac{1}{a^3}$
- b) $32a^5 - \frac{1}{a^5}$
- c) $64a^6 - \frac{1}{a^6}$
- d) $128a^7 - \frac{1}{a^7}$

8. Wykaż, że poniższe równości są prawdziwe.

$$a^3 + b^3 = (a+b)((a-b)^2 + ab)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)((a+b)^2 - ab)$$

9. Wyznacz A ze wzoru:

- a) $B = \frac{A+2}{A+B}$
- b) $B = \frac{A-C}{A+C}$
- c) $B = \frac{A+C}{A-C} + C$
- d) $B = \frac{1}{A} + \frac{B+C}{AC}$

10. Sformułuj poniższe twierdzenia w postaci implikacji. Wskaż założenie i tezę każdego z tych twierdzeń.

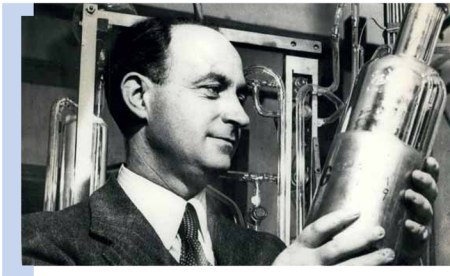
- a) W trójkącie równobocznym wszystkie kąty mają miarę 60° .
- b) Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe.

11. Wykaż, że jeśli kwadrat dowolnej liczby nieparzystej podzielimy przez 4, to zawsze otrzymamy resztę 1.

12. Wykaż, że jeżeli liczba a jest niewymierna, to również liczba $3a - 8$ jest liczbą niewymierną.

Potęgi i pierwiastki

Włoski fizyk Enrico Fermi był jednym z najwybitniejszych uczonych XX wieku. Bardzo lubił rozwiązywać problemy, w których trzeba było szacować nietypowe wielkości, np.: „Ilu stroicielei fortepianów jest w Nowym Jorku?“, „Ile ziaren fasoli zmieści się w słoju?“, „Ile kropel wody potrzeba, aby zapełnić wannę?“. Tego typu pytania nazywamy pytaniami Fermiego. Przy szukaniu odpowiedzi na takie pytania warto skorzystać z notacji wykładniczej.



Potęgi o wykładnikach całkowitych ■ Pierwiastki
■ Potęgi o wykładnikach wymiernych ■ Potęgi o wykładnikach rzeczywistych ■ Powtórzenie

POTĘGI O WYKŁADNIKACH CAŁKOWITYCH

ĆWICZENIE A Oblicz: 6^1 , $\left(1\frac{2}{3}\right)^3$, $1,3^0$, 0^5 , 1^6 , $0,7^2$.

Obok przypominamy definicję potęgi o wykładniku naturalnym.

$$a^n$$

wykładnik potęgi
podstawa potęgi

Uwaga. Wartość potęgi 0^0 nie jest określona, tzn. zapis 0^0 nie oznacza żadnej liczby.

Przyjmujemy, że:

$$a^0 = 1 \quad (\text{dla } a \neq 0)$$

$$a^1 = a$$

Gdy n jest liczbą naturalną i $n > 1$, to:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ czynników}$$

Przekształcając wyrażenia, w których występują potęgi, można korzystać z poniższych równości. Każde z tych praw działań jest twierdzeniem, które można udowodnić.

PRAWA DZIAŁAŃ NA POTĘGACH

Jeśli $a \neq 0$ i $b \neq 0$, to:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Oto jak można udowodnić, że dla liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (a \neq 0 \text{ i } b \neq 0)$$

Dowód

Niech $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Jeśli $n = 0$, to: $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}$

Jeśli $n = 1$, to: $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} = \frac{a^1}{b^1}$

Jeśli $n > 1$, to:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ czynników}} = \frac{\overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}^{n \text{ czynników}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ czynników}}} = \frac{a^n}{b^n} \quad \square$$

Gdybyśmy korzystali z prawa $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ dla $m = 0$, otrzymalibyśmy:

$$\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Jednocześnie wiadomo, że dla liczby naturalnej n i $a \neq 0$ zachodzi równość:

$$\frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Z powyższych rozważań wynika więc równość: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Otrzymana równość skłania do zdefiniowania potęg o wykładnikach całkowitych ujemnych tak, jak w ramce obok.

Zauważ, że a^{-1} to odwrotność liczby a , zaś a^{-n} to odwrotność liczby a^n .

Dla liczby naturalnej n i $a \neq 0$ przyjmujemy, że:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

zadania 1–8 ►

- II Dla potęg o wykładnikach całkowitych ujemnych zachodzą takie same prawa działań jak dla potęg o wykładnikach naturalnych.

Oto jak można udowodnić, że dla liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} \quad (a \neq 0 \text{ i } b \neq 0)$$

Dowód

Niech $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n} \cdot \frac{1}{a^n}} = \frac{1}{\frac{1}{b^n}} = \frac{a^n}{b^{-n}} \quad \square$$

ĆWICZENIE B Udowodnij pozostałe prawa działań na potęgach dla wykładników całkowitych ujemnych.

ĆWICZENIE C Zapisz w postaci potęgi liczby 7.

$$7^{-1} \cdot 7^5 \qquad (7^3)^{-2} \qquad 7^{10} : 7^{-4} \qquad (7^{-2})^{-2}$$

Wiele na pozór bardzo skomplikowanych obliczeń można uprościć, korzystając z praw działań na potęgach.

PRZYKŁAD 1 Przekształć wyrażenie, korzystając z praw działań na potęgach.

$$a) \frac{13^{-7} \cdot 13^3}{13^{-3}} = \frac{13^{-7+3}}{13^{-3}} = \frac{13^{-4}}{13^{-3}} = 13^{-4-(-3)} = 13^{-1} = \frac{1}{13}$$

$$b) \frac{49^{-5}}{7^{20}} = \frac{(7^2)^{-5}}{7^{20}} = \frac{7^{-10}}{7^{20}} = 7^{-10-20} = 7^{-30}$$

$$c) \frac{4^3 \cdot (2^{-3})^4}{2^{-10} \cdot 8} = \frac{(2^2)^3 \cdot (2^{-3})^4}{2^{-10} \cdot 2^3} = \frac{2^6 \cdot 2^{-12}}{2^{-7}} = \frac{2^{-6}}{2^{-7}} = 2^{-6-(-7)} = 2$$

$$d) \frac{3^{-15} - 3^{-17}}{2^{20}} = \frac{3^{-17}(3^2 - 1)}{2^{20}} = \frac{3^{-17} \cdot 8}{2^{20}} = \frac{3^{-17} \cdot 2^3}{2^{20}} = 3^{-17} \cdot 2^{-17} = 6^{-17}$$

ZADANIE Przedstaw w postaci jednej potęgi.

$$a) \frac{(6^{-3})^5}{6^{-4}}$$

$$b) \frac{25^3}{5^9}$$

$$c) \frac{1}{9} \cdot 3^8 \cdot \frac{1}{3^{-4}}$$

$$d) \frac{2^{-16} + 2^{-14}}{5^{17}}$$

zadania 9–18 ►



7 000 000 kg = $7 \cdot 10^6$ kg



0,000004 kg = $4 \cdot 10^{-6}$ kg

ĆWICZENIE D Zapisz w postaci potęgi liczby 10.

0,1	0,00001	$\frac{1}{1\,000\,000}$
0,0000001	$\frac{1}{0,001}$	10 000 000

Przy zapisywaniu liczb bardzo dużych lub bardzo małych wygodnie jest posługiwać się notacją wykładniczą.

Notacja wykładnicza to zapis liczby w postaci:

$$a \cdot 10^n, \text{ gdzie } a \in \langle 1; 10 \rangle \text{ i } n \in \mathbb{Z}$$

PRZYKŁAD 2 Przeciętna kostka lodu ma objętość $2,5 \text{ cm}^3$. Ile takich kostek można byłoby wykroić z góry lodowej o objętości $2 \cdot 10^6 \text{ m}^3$? Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

$$2,5 \text{ cm}^3 = 2,5 \cdot (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Objętość kostki lodu wyrażamy w m^3 .
 $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$, więc $1 \text{ cm}^3 = (10^{-2})^3 \text{ m}^3$

$$\frac{2 \cdot 10^6 \text{ m}^3}{2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3} = \frac{2}{2,5} \cdot 10^{6-(-6)} = 0,8 \cdot 10^{12} = 8 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{12} = 8 \cdot 10^{11}$$

Odp. Z tej góry lodowej można wyciąć $8 \cdot 10^{11}$ kostek lodu.

ZADANIE Dużą łyżką można zaczerpnąć 15 cm^3 wody. Jezioro Śniardwy zawiera około $6,6 \cdot 10^8 \text{ m}^3$ wody. Ile łyżek wody mieści się w tym jeziorze? Odpowiedź zapisz w notacji wykładniczej.

zadania 19–24 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz.

$$5^3 \quad 5^{-3} \quad (-5)^3 \quad (-5)^{-3} \quad -5^3 \quad -5^{-3} \quad 5^0 \quad -5^0 \quad (-5)^0$$

2. Oblicz.

$$\text{a)} \quad 10^{-5} \quad (-4)^{-2} \quad (-2)^{-3} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \quad (-1,2)^{-1} \quad (-0,1)^{-5} \quad -0,02^{-4}$$

$$\text{b)} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \quad \left(1\frac{2}{3}\right)^{-1} \quad (-1,5)^{-3} \quad \left(-3\frac{1}{3}\right)^{-4} \quad -0,01^{-3} \quad -(-0,1)^5 \quad 1,1^{-2}$$

3. Przyjmijmy, że liczba a jest dodatnia. Które z poniższych liczb też są dodatnie?

$$a^3 \quad -a^3 \quad (-a)^3 \quad a^{23} \quad \frac{a^{-2}}{a^{-5}} \quad (-a)^2 \quad (-a)^{-2} \quad -(-a)^{31}$$

4. Zapisz podane liczby w postaci potęg o wykładniku ujemnym.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \quad \left(\frac{3}{8}\right)^3 \quad \frac{1}{7^5} \quad 6^5 \quad \left(2\frac{1}{4}\right)^7$$

5. Które obliczenia wykonano błędnie?

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 2^{-3} = 8 & \text{c)} (-3)^{-2} = \frac{1}{9} & \text{e)} \left(2\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3\frac{1}{2} & \text{g)} \left(1\frac{3}{4}\right)^{-1} = 1\frac{4}{3} \\ \text{b)} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2 & \text{d)} (-1)^{-1} = 1 & \text{f)} (-1)^{-4} = -1 & \text{h)} 0,2^{-1} = 5 \end{array}$$

6. Która z liczb jest większa?

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (-3)^{-8} \text{ czy } 3^{-7} & \text{c)} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \text{ czy } 4^{-6} & \text{e)} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \text{ czy } \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} \\ \text{b)} \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \text{ czy } \left(-\frac{1}{5}\right)^{-5} & \text{d)} \left(\frac{1}{5}\right)^{-8} \text{ czy } 5^6 & \text{f)} (-0,1)^{-3} \text{ czy } 0,1^{-4} \end{array}$$

7. Podaj przykład liczby spełniającej podany warunek.

$$\text{a)} a^2 < a \quad \text{b)} b^{-1} > 1 \quad \text{c)} c^2 > c \text{ i } c < 0 \quad \text{d)} d^{-3} < d \text{ i } d < 0$$

8. Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} 17^2 & 17^3 \quad 17^0 \quad 17^{-2} \quad 17^{-5} \\ \text{b)} 0,6^2 & 0,6 \quad 0,6^{-3} \quad 0,6^{-4} \quad 0,6^4 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{c)} 0,3^3 & 0,2^3 \quad 0,3^{-3} \quad 0,2^{-3} \quad 0,2^0 \\ \text{d)} 0,25^4 & 0,25^{-4} \quad 4^5 \quad 4^{-5} \quad 0,4^{-6} \end{array}$$

9. Zapisz w postaci jednej potęgi.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 6^{-5} : 6^{-2} & \text{d)} 3^{15} \cdot 3^3 \cdot 3^{-2} & \text{g)} (7^{12} : 7^3)^{-3} \cdot 7 & \text{j)} (13^2 : 13^5)^{-1} \cdot 13^{-2} \\ \text{b)} (8^{-3})^{-2} & \text{e)} 4^{-7} \cdot 4^6 \cdot 4^{-2} & \text{h)} (4^5)^3 \cdot 4^{-2} : 4 & \text{k)} (4^2)^{-3} : (4^{-4})^2 : 4^{-1} \\ \text{c)} 15^{-3} \cdot 15^{-7} & \text{f)} \frac{5^{-4} \cdot 5^3}{5^{-2}} & \text{l)} [5^{-1} : (5^2)^3] \cdot 5^3 & \text{m)} (2^3 : 2^{-5})(2^{-4} : 2^{-2})^{-1} \end{array}$$

10. Każdą z liczb zapisz w postaci potęgi liczby 2.

$$4^5 \quad 8^{-3} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \frac{1}{16} \quad \left(\frac{1}{4}\right)^5 \quad \frac{1}{2^5} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad 0,5 \quad 0,25 \quad 0,5^3 \quad 0,25^{-4}$$

11. Porównaj podane liczby.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 125^3 \text{ i } 5^9 & \text{d)} (0,6^5)^{-3} \text{ i } \left(\frac{5}{3}\right)^{-20} & \text{g)} (-8)^3 \text{ i } (-2)^9 \\ \text{b)} (-2)^{150} \text{ i } (-4)^{80} & \text{e)} 0,5^{-7} \text{ i } 0,125^{-3} & \text{h)} (-4)^3 \text{ i } (-2)^6 \\ \text{c)} (2^{-7})^6 \text{ i } (8^{-2})^7 & \text{f)} 2^{-9} \text{ i } 0,25^4 & \text{i)} (3^{-4})^{-2} \text{ i } \left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \end{array}$$

$$2^{10} \approx 10^3 \quad 7^2 \approx 50$$

$$5^{10} \approx 10^7$$

12. Oszacuj podane liczby, korzystając z przybliżeń zapisanych obok.

$$2^{12}$$

$$7^{-4}$$

$$14^4$$

$$5^{-11}$$

13. Wyobraź sobie, że jedna osoba przedziera kartkę formatu A4 na pół i przekazuje jedną połówkę drugiej osobie. Druga osoba przedziera otrzymaną część kartki na pół i przekazuje jedną z otrzymanych części trzeciej osobie itd. Jaką część kartki otrzyma piąta osoba? Oszacuj (w milimetrach kwadratowych), jakiej wielkości byłby kawałek, który otrzymałaby jedenasta osoba.



14. Uprość wyrażenie.

a) $a^6 \cdot (a^2)^{-3}$

c) $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^5 \cdot a^{-2}}{(ba)^2}$

e) $(x^2 y^3 z)^{-2} \cdot z$

b) $\frac{x^5 \cdot x^{-7}}{(x^{-3})^{-2}}$

d) $(p^3 q^{-5})^4 : \frac{p^{-4}}{q}$

f) $\frac{(a^2 b^{-2} c)^{-3}}{a^{-4} \cdot c \cdot a^5}$

15. Oblicz.

a) $2^{82} : 4^{40}$

d) $(5^2)^3 \cdot 2^6$

g) $25^3 \cdot 0,5^{-6}$

j) $\frac{6^{-3} \cdot (6^2)^{-5}}{\left(\frac{1}{36}\right)^6}$

b) $\frac{18^4}{9^4}$

e) $0,2^8 \cdot 25^4$

h) $5^8 : 0,2^{-7}$

k) $\frac{(121^2)^3}{\left(\frac{1}{11}\right)^{-8}} \cdot 11^{-2}$

c) $\frac{2^{15} \cdot 27^4}{6^{15}}$

f) $0,01^{12} \cdot 100^9$

i) $\frac{125^3 \cdot (5^{-2})^4}{25^4 \cdot 25^{-5}}$

l) $\frac{7^5 : 49}{7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

16. Uprość wyrażenie.

a) $\frac{2^{n^2+1}}{2}$

c) $2^{2n-1} : 2^{n-1}$

e) $9^{2n} : 3^{3n}$

g) $(4^n)^2 : 2^{3n-2}$

b) $2^{1-n} \cdot 2^n$

d) $\frac{1}{9} \cdot 3^{2n+2}$

f) $0,25 \cdot 2^{7n+5}$

h) $(2^{2n})^2 : (4^n)^2$

17. Uzasadnij równość.

a) $\frac{3^4 + 3^7}{3^3 \cdot 3^7} = 3^{-6} + 3^{-3}$

c) $3^{-7} + 3^{-6} + 3^{-5} = \frac{13 \cdot 3^{-5}}{9}$

e) $\frac{6^6 - 6^5}{6^{-3}} = \frac{6^{12} - 6^{11}}{6^{-2} \cdot 6^5}$

b) $6^{-9} + 6^{-8} = 6^{-9} \cdot 7$

d) $\frac{7^9}{7^7 + 7^8} = \frac{7^{-10}}{7^{-12} + 7^{-11}}$

f) $\frac{5^4 - 5^{12}}{5^8 + 5^6} = \frac{5^{-2} - 5^6}{26}$

18. Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, uzasadnij równość.

a) $\frac{a^8 - b^8}{(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)} = a - b$

b) $\frac{a^6 - b^6}{(a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)} = a^2 + ab + b^2$



Przedrostek	Symbol	Ułamek
decy	d	10^{-1}
centy	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}

19. Tabela przedstawia przedrostki oznaczające części jednostek podstawowych. Oblicz:

- a) ile nanogramów jest w miligramie,
 b) ile pikometrów jest w decymetrze,
 c) ile mikrometrów jest w centymetrze,
 d) ile mililitrów jest w centylitrze,
 e) ile nanolitów jest w centylitrze.

20. Odpowiedzi na podane pytania zapisz w notacji wykładniczej.

- a) Objętość Słońca to około $1,41 \cdot 10^{18} \text{ km}^3$. Ile to metrów sześciennych?
 b) Powierzchnia Słońca to około $6,07 \cdot 10^{18} \text{ m}^2$. Ile to kilometrów kwadratowych?
 c) Powierzchnia kropli wody to około $1,6 \cdot 10^{-10} \text{ mm}^2$. Ile to metrów kwadratowych?

Prędkość światła
w próżni wynosi
około $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

21. a) Rok świetlny to odległość, jaką w ciągu roku przebywa światło w próżni. Oblicz i zapisz w notacji wykładniczej, ile kilometrów ma rok świetlny.

b) Średnica naszej Galaktyki to około 100 tys. lat świetlnych. Ile to kilometrów?

22. a) Ile razy masa Ziemi jest większa od masy Księżyca?

b) Ile razy średnica Słońca jest większa od średnicy Ziemi?

c) O ile kilometrów średnica Słońca jest dłuższa od średnicy Ziemi?

	Masa [kg]	Średnica [m]
Słońce	$1,9 \cdot 10^{30}$	$1,4 \cdot 10^9$
Ziemia	$5,975 \cdot 10^{24}$	$1,28 \cdot 10^7$
Księżyc	$7,3 \cdot 10^{22}$	$7,0 \cdot 10^6$

23. Objętość kropli wody to około $4,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^3$. Ile kropeł wody mieści się w wannie o pojemności 150 l?

24. Zapisz podane liczby w notacji wykładniczej.

a) $2,2 \cdot 10^5 + 1,8 \cdot 10^3$

c) $7,01 \cdot 10^{15} - 3 \cdot 10^{14}$

b) $6,8 \cdot 10^{-3} + 2,5 \cdot 10^{-4}$

d) $4 \cdot 10^{-8} - 2,1 \cdot 10^{-9}$

MINISPRAWDZIAN

51. Liczba $\frac{2^{-7} \cdot 16^3}{(8^3 \cdot 2^2)^4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ jest równa:

- A. 2^{-63} B. 2^{-35} C. 2^{-28} D. 2^{-24}

52. Suma $7^{-4} + 7^{-5} + 7^{-3}$ jest równa:

- A. $57 \cdot 7^{-5}$ B. $57 \cdot 7^{-3}$ C. 7^{-12} D. $\frac{57}{7} \cdot 7^{-6}$

53. Liczba $0,2^{-14}$ jest od liczby $0,2^{-12}$:

- A. 25 razy większa C. 25 razy mniejsza
B. 5 razy większa D. 5 razy mniejsza

54. Liczba $\frac{240 \cdot 10^{-4}}{9,6 \cdot 10^5} \cdot 50 \cdot 10^{10}$ jest równa:

- A. $1,25 \cdot 10^4$ B. $1,25 \cdot 10^3$ C. $2,5 \cdot 10^{-11}$ D. $3 \cdot 10^{-1}$

PIERWIASTKI

1 ĆWICZENIE A Oblicz.

a) $\sqrt{25}$ $\sqrt{\frac{4}{49}}$ $\sqrt{1,21}$ $\sqrt{1}$ $\sqrt{0}$ b) $\sqrt[3]{27}$ $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$ $\sqrt[3]{0,064}$ $\sqrt[3]{-1}$ $\sqrt[3]{0}$

Wiesz już, że pierwiastek kwadratowy jest określony dla liczb nieujemnych i jest liczbą nieujemną, a pierwiastek sześcienny jest określony dla dowolnej liczby i może być liczbą ujemną. Podobnie określamy pierwiastki wyższych stopni.



Jeśli k jest parzystą liczbą naturalną większą od 1, to dla $a \geq 0$ przyjmujemy, że:

$$\sqrt[k]{a} = b \iff (b^k = a \text{ i } b \geq 0)$$

Jeśli m jest nieparzystą liczbą naturalną większą od 1, to dla dowolnej liczby a przyjmujemy, że:

$$\sqrt[m]{a} = b \iff b^m = a$$

ĆWICZENIE B Oblicz.

a) $\sqrt[3]{16}$ $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ $\sqrt[3]{-100\,000}$ $\sqrt[3]{-1}$ b) $\sqrt{8^2}$ $\sqrt{(-8)^2}$ $\sqrt{39^2}$ $\sqrt{(-39)^2}$

Zauważ, że $\sqrt{(-5)^2}$ wynosi 5, a nie -5 . Warto zatem pamiętać, że jeśli chcemy uprościć wyrażenie $\sqrt{a^2}$, a nie wiemy, jaki jest znak liczby a , musimy zaznaczyć, że wynik jest nieujemny, np. za pomocą znaku wartości bezwzględnej:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Podobnie trzeba postępować w wypadku pierwiastków wyższych parzystych stopni, np. $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, $\sqrt[6]{a^6} = |a|$.

Pierwiastki $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$ itd. są liczbami naturalnymi. Można udowodnić, że pierwiastek kwadratowy z dowolnej liczby naturalnej, która nie jest kwadratem liczby naturalnej, jest liczbą niewymierną. Poniżej pokazujemy dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$.

Twierdzenie: *Liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.*

Dowód

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost.

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną.

..... Zakładamy, że twierdzenie
..... nie jest prawdziwe.

Wobec tego $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dla pewnych liczb naturalnych p i q .

Zatem: $2 = \frac{p^2}{q^2}$

$$2q^2 = p^2$$

Rozważmy liczbę $2q^2$. W jej rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 2 występuje nieparzystą liczbę razy.

..... Jeśli w rozkładzie liczby q na czynniki
..... pierwsze dwójka występuje m razy, to
..... w rozkładzie liczby q^2 występuje $2m$
..... razy. Zatem w rozkładzie liczby $2q^2$
..... dwójka występuje $2m + 1$ razy.

Rozważmy liczbę p^2 . W jej rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 2 występuje parzystą liczbę razy.

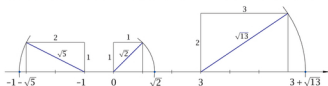
..... Jeśli w rozkładzie liczby p dwójka występuje k razy, to w rozkładzie liczby p^2 występuje $2k$ razy.

Zatem liczby $2q^2$ i p^2 nie mogą być równe, bowiem każdą liczbę można rozłożyć na czynniki pierwsze w sposób jednoznaczny.

Zaprzeczając twierdzeniu, otrzymaliśmy sprzeczność. Tym samym udowodniliśmy, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. $\square$

W podobny sposób można udowodnić, że liczby: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ itd. są liczbami niewymiernymi. Oznacza to, że każda z tych liczb ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe.

Liczby niewymierne pojawiają się w naturalny sposób w geometrii, na przykład przekątna kwadratu o boku długości 1 ma długość $\sqrt{2}$, przekątna prostokąta o bokach 1 i 2 ma długość $\sqrt{5}$ itp. Popatrz, jak można dokładnie wyznaczyć na osi liczbowej liczby $-1 - \sqrt{5}$, $\sqrt{2}$ oraz $3 + \sqrt{13}$.



Wśród liczb niewymiernych są też takie, których nie da się wyrazić za pomocą pierwiastków z liczb wymiernych. Taką liczbą jest na przykład π .

- II Przekształcając wyrażenia z pierwiastkami, możemy korzystać z poniższych równości.

PRAWA DZIAŁAŃ NA PIERWIASTKACH

Dla parzystej liczby k :

$$\sqrt[k]{a^k} = |a|$$

$$\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

$$\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

$$\sqrt[k]{a^t} = (\sqrt[k]{a})^t \quad \text{dla } a \geq 0$$

Dla nieparzystej liczby m :

$$\sqrt[m]{a^m} = a$$

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \quad \text{dla } b \neq 0$$

$$\sqrt[m]{a^t} = (\sqrt[m]{a})^t$$

$$\sqrt[m]{-a} = -\sqrt[m]{a}$$

Poniżej pokazujemy, jak można udowodnić, że jeśli $a \geq 0$, $b \geq 0$ i k jest liczbą parzystą, to zachodzi równość:

$$\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$$

Dowód

Załóżmy, że $a \geq 0$, $b \geq 0$ i k jest liczbą parzystą.

Przyjmijmy oznaczenia: $\sqrt[k]{a} = x$ i $\sqrt[k]{b} = y$, gdzie $x \geq 0$ i $y \geq 0$.

Stąd: $a = x^k$ i $b = y^k$

$$\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{x^k \cdot y^k} = \sqrt[k]{(xy)^k} = |xy| = xy = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} \quad \square$$

Ponieważ $x \geq 0$ i $y \geq 0$,
więc $|xy| = xy$.

W analogiczny sposób można udowodnić pozostałe prawa działań na pierwiastkach.

ĆWICZENIE C Uzasadnij jedno z pozostałych praw działań na pierwiastkach.

Prawa działań na pierwiastkach pozwalają upraszczać niektóre wyrażenia.

PRZYKŁAD 1 Oblicz.

$$\text{a) } (2\sqrt[3]{6})^3 = 2^3 \cdot (\sqrt[3]{6})^3 = 8 \cdot 6 = 48$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\text{b) } \sqrt{2^{10}} = \sqrt{(2^5)^2} = 2^5 = 32$$

$$\text{d) } \sqrt{1\frac{3}{4}} : \sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}} : 7 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

ZADANIE Oblicz.

$$\text{a) } (2\sqrt[4]{3})^4$$

$$\text{b) } (\sqrt[3]{-6})^{10}$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt[3]{-80}}{\sqrt[3]{10}}$$

$$\text{d) } \sqrt[7]{7^3} \cdot \sqrt[7]{7}$$

zadania 7–12 ►

III Czasami wygodnie jest zapisać pierwiastki w innej postaci — wyłączyć czynnik przed symbol pierwiastka albo wykonać operację odwrotną, tzn. włączyć czynnik pod pierwiastek.

PRZYKŁAD 2 Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

$$\text{a) } \sqrt{180} = \sqrt{9 \cdot 20} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{-54} = -\sqrt[3]{27 \cdot 2} = -\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = -3\sqrt[3]{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[4]{5^{13}} = \sqrt[4]{5^{12} \cdot 5} = \sqrt[4]{(5^3)^4} \cdot \sqrt[4]{5} = 125\sqrt[4]{5}$$

$$\text{d) } \left(\sqrt[5]{2}\right)^8 = \left(\sqrt[5]{2}\right)^5 \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = 2\sqrt[5]{8}$$

ZADANIE Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

$$\text{a) } \sqrt{450}$$

$$\text{b) } -\sqrt[3]{160}$$

$$\text{c) } \sqrt[7]{7^{16}}$$

$$\text{d) } \left(\sqrt[3]{3}\right)^7$$

zadania 13–16 ►

IV **PRZYKŁAD 3** Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

$$\text{a) } 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$\text{b) } 2\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{8 \cdot 100} = \sqrt[3]{800}$$

ZADANIE Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

$$\text{a) } 5\sqrt{2}$$

$$\text{b) } 2\sqrt{6}$$

$$\text{c) } 3\sqrt[3]{2}$$

$$\text{d) } 5\sqrt[3]{4}$$

zadanie 17 ►

- V Gdy pierwiastek z liczby wymiernej występuje w mianowniku wyrażenia, to możemy je tak przekształcić, aby w mianowniku była liczba wymierna. Mówimy wtedy, że usuwamy niewymierność z mianownika.

PRZYKŁAD 4 Usuń niewymierność z mianownika.

$$a) \frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(4+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+2}{2} = 2\sqrt{2}+1$$

$$b) \frac{5}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{6}$$

$$c) \frac{2}{2\sqrt{3}-1} = \frac{2 \cdot (2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)} = \frac{4\sqrt{3}+2}{12-1} = \frac{4\sqrt{3}+2}{11}$$

Korzystamy ze wzoru:
 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

ZADANIE Usuń niewymierność z mianownika.

$$a) \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$b) \frac{1-\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$$

$$c) \frac{8}{\sqrt[3]{6}}$$

$$d) \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

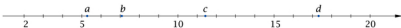
$$e) \frac{7}{\sqrt{3}-2}$$

zadania 18–22 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Na osi liczbowej zaznaczono podane liczby. Oszacuj te liczby i przyporządkuj każdej z nich odpowiednią literę.

$$a) 10\sqrt{3} \quad 5\sqrt{2} \quad \sqrt{27} \quad \sqrt{130}$$



$$b) \sqrt[3]{-100} \quad 2\sqrt[3]{-10} \quad -\frac{1}{2}\sqrt[3]{30} \quad -\sqrt[3]{25}$$



2. Wymień dwie kolejne liczby całkowite, z których jedna będzie mniejsza od podanej liczby, a druga — od niej większa.

$$a) \sqrt{109}$$

$$b) \sqrt{930}$$

$$c) \sqrt[3]{109}$$

$$d) \sqrt[3]{-930}$$

3. Oblicz.

$$a) \sqrt{\sqrt{16}}$$

$$b) \sqrt[3]{\sqrt{0,000001}}$$

$$c) \sqrt[3]{\sqrt{(-8)^2}}$$

$$d) \sqrt{\sqrt[3]{\frac{13}{81}}}$$

4. Znajdź liczby oznaczone literami.

$$\sqrt{a} = 0,2$$

$$\sqrt[3]{b} = -1\frac{1}{3}$$

$$\sqrt[5]{c} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt[9]{d} = -10$$

$$\sqrt[4]{e} = \sqrt{3^2}$$

$$\sqrt[3]{f} = \sqrt[3]{12^5}$$

$$\sqrt[3]{g} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2}$$

5. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $3\sqrt{7} - 12\sqrt{7}$

b) $\sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{9}$

c) $\sqrt[3]{-6} + \sqrt[3]{6}$

d) $\sqrt[5]{7} - 2\sqrt[5]{-7}$

6. Przyjrzyj się przykładom w ramce. Zwróć uwagę, w jaki sposób przekształcono wyrażenia z pierwiastkami. Zapisz każdy z podanych niżej pierwiastków w postaci różnicy dwóch liczb.

a) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

d) $\sqrt[3]{(\sqrt{5}-7)^3}$

b) $\sqrt{(\sqrt{10}-3)^2}$

e) $\sqrt[4]{(3-4\sqrt{5})^4}$

c) $\sqrt{(\sqrt{10}-4)^2}$

f) $\sqrt[5]{(\sqrt{15}-\sqrt{27})^5}$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$$

$$\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^4} = |2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3}$$

$$\sqrt[5]{(3-2\sqrt{7})^5} = 3-2\sqrt{7}$$

7. Zapisz w postaci potęgi liczby 7.

$\sqrt[7]{16}$

$7\sqrt[3]{7^{12}}$

$(7\sqrt{7})^2$

$7\sqrt[3]{7} \cdot (\sqrt[3]{7})^2$

$\left(\sqrt{7\sqrt[3]{76}}\right)^2$

$\frac{1}{7^3} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt[4]{7}$

8. Oblicz.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

c) $(5\sqrt{2})^2$

e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

g) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{-7} \cdot (\sqrt[3]{7})^2$

b) $\sqrt[6]{320} : \sqrt[6]{5}$

d) $\frac{(2\sqrt[3]{2})^3}{6}$

f) $6\sqrt{5} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{125}$

h) $2\sqrt[4]{25} \cdot (8\sqrt[4]{5})^2$

9. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{3}$

c) $\frac{8\sqrt[3]{16}}{16\sqrt[5]{8}}$

e) $\sqrt{3}(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

g) $\sqrt[3]{3}(4-2\sqrt[3]{9})$

b) $2\sqrt[3]{3} \cdot 3\sqrt[3]{-2}$

d) $\frac{2\sqrt[3]{30}}{\sqrt{5}}$

f) $3\sqrt{2}(1-2\sqrt{5})$

h) $5\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}+1)$

10. Przedstaw w postaci sumy.

a) $(3+\sqrt{5})^2$

d) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2$

g) $(1-2\sqrt{5})^3$

b) $(2\sqrt{3}-4)^2$

e) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+5\sqrt{3}\right)^2$

h) $(\sqrt[3]{6}+2)^3$

c) $(\sqrt{7}-6)(6+\sqrt{7})$

f) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

i) $(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})^3$

11. Uzasadnij równość.

a) $\sqrt{a^2+2ab+b^2} = |a+b|$

c) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1} = x+1$

b) $\sqrt{(x^2-2x+1)^3} = |(x-1)^3|$

d) $\sqrt[3]{\left(x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^2} = x^2+\frac{1}{x^2}-2$

12. Uporządkuj podane liczby w kolejności rosnącej (n jest liczbą naturalną, $n > 1$).

$a = \sqrt[4]{4^n}$

$b = \sqrt[8]{8^{2n}}$

$c = \sqrt[2]{2^{2n+1}}$

$d = \sqrt[3]{2^{3n+1}}$

$e = \sqrt[3]{8^{n+1}}$

◀ III 13. Wylącz czynnik przed znak pierwiastka tak, aby pod pierwiastkiem została jak najmniejsza liczba naturalna.

- a) $\sqrt{98}$ $\sqrt{108}$ $\sqrt{99}$ $\sqrt{160}$ c) $\sqrt{15^7}$ $\sqrt{6 \cdot 3^5}$ $\sqrt{5^8 \cdot 10^7}$ $\sqrt{6^3 \cdot 15^5}$
 b) $\sqrt[3]{256}$ $\sqrt[3]{-270}$ $\sqrt[3]{-640}$ $\sqrt[3]{1125}$ d) $\sqrt[3]{7^{10}}$ $\sqrt[4]{4^6}$ $\sqrt[3]{81 \cdot 3}$ $\sqrt[4]{5^7 \cdot 10^3}$

$$1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

14. Zapisz w postaci $a\sqrt{b}$ lub $a\sqrt[3]{b}$ tak, aby b było jak najmniejszą liczbą naturalną (skorzystaj z rozkładów liczb 1575 i 5400 na czynniki pierwsze).

- a) $\sqrt{1575}$ b) $\sqrt{12 \cdot 5400}$ c) $\sqrt[3]{5400}$ d) $\sqrt[3]{1575^2 \cdot 7}$

15. Korzystając z przybliżeń podanych obok, oszacuj każdą z poniższych liczb z dokładnością do części dziesiętych.

$$\sqrt{8} \quad \sqrt{20} \quad \sqrt{500} \quad \sqrt[3]{16} \quad \sqrt[3]{3000} \quad \sqrt[3]{24}$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \quad \sqrt{5} \approx 2,24 \quad \sqrt[3]{3} \approx 1,44$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73 \quad \sqrt[3]{2} \approx 1,26 \quad \sqrt[3]{5} \approx 1,71$$

16. Zapisz w jak najprostszej postaci.

- a) $\sqrt{18} + 4\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{147} - \sqrt{75}$ e) $3\sqrt{24} + 2\sqrt{54} - \sqrt{150}$
 b) $\sqrt{48} - \sqrt{27}$ d) $\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{-108}$ f) $\frac{\sqrt{12} + \sqrt{147}}{\sqrt{3}}$

◀ IV 17. Która z liczb jest większa?

- a) $7\sqrt{2}$ czy $\sqrt{97}$ d) $4\sqrt{5}$ czy 9 g) $9\sqrt{3}$ czy $5\sqrt{5}$
 b) $5\sqrt{6}$ czy $\sqrt{222}$ e) $3\sqrt{11}$ czy 10 h) $3\sqrt{10}$ czy $2\sqrt{23}$
 c) $10\sqrt[3]{7}$ czy $\sqrt[3]{6789}$ f) $2\sqrt[3]{5}$ czy 5 i) $2\sqrt[3]{-7}$ czy $3\sqrt[3]{-2}$

◀ V 18. Usuń niewymierność z mianownika.

- a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{5}+1}{2\sqrt[3]{5}}$ g) $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{6}}$
 b) $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ f) $\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{0,5\sqrt{7}}$ h) $\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{5\sqrt[3]{4}}$

19. Usuń niewymierność z mianownika i porównaj liczby.

- a) $a = \frac{5}{\sqrt{5}}$ i $b = \frac{4}{\sqrt{2}}$ b) $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $d = \frac{2}{\sqrt{5}}$ c) $e = \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$ i $f = \frac{3}{\sqrt[3]{25}}$

20. Usuń niewymierność z mianownika.

- a) $\frac{8}{\sqrt{5}-1}$ c) $\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}-2}$ e) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ g) $\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$
 b) $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+1}$ d) $\frac{3\sqrt{6}-2}{3+2\sqrt{6}}$ f) $\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ h) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}$

21. Uzasadnij, że prawdziwe jest zdanie:

- a) odwrotność liczby $\sqrt{2}$ jest równa połowie tej liczby,
b) odwrotność liczby o 2 większej od $\sqrt{5}$ jest liczbą o 2 mniejszą od $\sqrt{5}$.

22. Zapisz podaną liczbę w postaci ułamka tak, aby mianownik był liczbą wymierną.

- a) $\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{20} - \sqrt{\frac{1}{20}}$ c) $\sqrt[3]{10} + \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ d) $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$

MINISPRAWDZIAN

S1. Liczba $(2\sqrt{3} - \sqrt{6})^3$ jest równa:

- A. $60\sqrt{3} - 42\sqrt{6}$ B. $36\sqrt{3} - 18\sqrt{6}$ C. $60\sqrt{3} - 30\sqrt{6}$ D. $48\sqrt{3} - 15\sqrt{6}$

S2. Liczba $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6+2}}$ jest równa:

- A. $0,75 - \frac{\sqrt{6}}{4}$ B. $1,5 + 0,5\sqrt{6}$ C. $3 - \sqrt{6}$ D. $3 - 2\sqrt{6}$

S3. Ile spośród liczb: $3\sqrt{200}$, $5\sqrt{72}$, $10\sqrt{18}$, $30\sqrt{2}$ jest równych liczbie $\sqrt{1800}$?

- A. żadna B. jedna C. dwie D. wszystkie

POTĘGI O WYKŁADNIKACH WYMIERNYCH

- 1** Umiesz już obliczać potęgi o wykładnikach całkowitych. Można również określić potęgę, której wykładnik nie jest liczbą całkowitą. Zastanówmy się na przykład, jakie liczby mogą kryć się pod zapisami $5^{\frac{1}{3}}$, $5^{\frac{2}{3}}$. Aby zachowane były prawa działań na potęgach, musiałyby zachodzić równości:

$$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 5^1 = 5$$

$$\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{2}{3} \cdot 3} = 5^2$$

Ponieważ liczbę 5 można także zapisać w postaci $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$, więc powinna zachodzić równość:

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

Ponieważ liczbę 5^2 można także zapisać w postaci $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3$, więc powinna zachodzić równość:

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$$

W podobny sposób — za pomocą pierwiastków — definiujemy potęgi o wykładnikach wymiernych.

Jeśli n, k są liczbami naturalnymi oraz $n > 1$ i $k > 0$, to przyjmujemy, że:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (\text{dla } a \geq 0)$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \quad (\text{dla } a \geq 0)$$

$$a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} \quad (\text{dla } a > 0)$$

ĆWICZENIE a) Zapisz za pomocą pierwiastków.

$$7^{\frac{1}{4}} \quad 6^{\frac{2}{3}} \quad 10^{-\frac{5}{2}}$$

b) Zapisz w postaci potęg.

$$\sqrt{15} \quad \sqrt[5]{5} \quad \sqrt[3]{3^4}$$

Zauważ, że pierwiastki stopnia nieparzystego są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych, także ujemnych. Jednak potęgę o wykładniku wymiernym określiliśmy tylko w wypadku, gdy podstawą potęgi jest nieujemna. Gdybyśmy bowiem przyjęli na przykład, że $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8}$, to korzystając z praw działań na potęgach otrzymalibyśmy następującą sprzeczność:

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{ i } \quad (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

PRZYKŁAD 1 Oblicz.

a) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

d) $16^{1,5} = 16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = (\sqrt{16})^3 = 4^3 = 64$

b) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4$

e) $2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2} = 2^{\frac{1}{2}} \sqrt[6]{2}$

c) $32^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32^1}} = \frac{1}{(\sqrt[5]{32})^1} = \frac{1}{8}$

f) $8^{-1\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^4}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^4} = \frac{1}{16}$

ZADANIE Oblicz.

a) $10000^{\frac{1}{4}}$

b) $27^{\frac{2}{3}}$

c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{1,5}$

d) $4^{-2\frac{1}{2}}$

zadania 1-2 ►

III Potęgą o wykładniku wymiernym zdefiniowana jest tak, by spełnione były takie same prawa działań jak dla potęg o wykładnikach całkowitych.

Korzystając z równości zapisanych obok, można przekształcać wyrażenia, w których występują potęgi o wykładnikach wymiernych.

**PRAWA DZIAŁAŃ NA POTĘGACH
O WYKŁADNIKACH WYMIERNYCH**

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \text{dla } a \geq 0$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad \text{dla } a > 0$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \text{dla } a \geq 0$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

PRZYKŁAD 2 Przekształć wyrażenie.

a) $3^{\frac{5}{3}} \cdot 9^{\frac{5}{3}} = 27^{\frac{5}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^5 = \left(\sqrt[3]{27}\right)^5 = 3^5 = 243$

b) $\left(8^{-\frac{5}{3}}\right)^2 = 8^{-\frac{10}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$

c) $3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}} = 3^0 = \sqrt[4]{27}$

d) $\frac{0,5^{-\frac{1}{8}}}{\left(2^{-\frac{1}{8}}\right)^7} = \frac{(2^{-1})^{-\frac{1}{8}}}{2^{-\frac{7}{8}}} = \frac{2^{\frac{1}{8}}}{2^{-\frac{7}{8}}} = 2^{\frac{1}{8} - (-\frac{7}{8})} = 2$

ZADANIE Oblicz.

a) $64^{\frac{3}{4}} : 4^{\frac{3}{4}}$

b) $27^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{4}}$

c) $(10^{-12})^{-\frac{1}{3}}$

d) $\frac{4^{-\frac{1}{3}}}{(2^{-\frac{1}{3}})^5}$

zadania 3–5 ►

III Korzystając z potęg o wykładnikach wymiernych, można także przekształcać niektóre wyrażenia z pierwiastkami.

PRZYKŁAD 3 Przekształć wyrażenie.

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{32}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{10}} = (\sqrt{10})^{\frac{1}{3}} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10}$

c) $\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{9}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot (3^2)^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{3}$

d) $\sqrt[5]{8 \cdot \sqrt[3]{2}} = \left(2^3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(2^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$

ZADANIE Przekształć wyrażenie.

a) $\sqrt{\sqrt{6}}$

b) $\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[4]{5}}$

c) $\sqrt[4]{25} \cdot \sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$

zadania 6–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz.

a) $8^{\frac{1}{3}}$ $16^{\frac{1}{4}}$ $0,01^{0,5}$ $25^{\frac{3}{2}}$ $0,027^{\frac{2}{3}}$ $64^{\frac{4}{3}}$

b) $144^{-\frac{1}{2}}$ $0,0016^{-0,25}$ $2,25^{-0,5}$ $0,125^{-\frac{2}{3}}$ $9^{-1,5}$ $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$

2. Zapisz za pomocą potęg.

a) $\sqrt{13} \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt{2^7} \quad \sqrt[5]{3^3} \quad \sqrt[4]{7^5}$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{8^7}} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \quad \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} \quad \frac{1}{\sqrt[5]{0,7^2}}$

3. Przedstaw każdą z podanych liczb w postaci $a \sqrt[n]{b}$ tak, aby pod pierwiastkiem była jak najmniejsza liczba naturalna. Możesz skorzystać z jednego ze sposobów opisanych w ramce.

$$5^{\frac{8}{7}} \quad 7^{\frac{5}{3}} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{2,5}$$

$$0,1^{-\frac{11}{3}} \quad 0,9^{-3,5}$$

$$3^{\frac{13}{7}} = 3^{2\frac{1}{7}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{7}} = 9 \sqrt[7]{3}$$

$$3^{\frac{13}{7}} = \sqrt[7]{3^{13}} = \sqrt[7]{3^{14} \cdot 3} = \sqrt[7]{(3^2)^7 \cdot 3} = 9 \sqrt[7]{3}$$

4. Przedstaw w postaci jednej potęgi.

a) $5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$

e) $5^{-\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} \cdot 5$

i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{6}}$

b) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{6}}$

f) $3^{-\frac{4}{3}} : 3^{\frac{1}{6}} \cdot 3^2$

j) $3^{-\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{3}{4}}$

c) $7^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{-\frac{1}{10}}$

g) $(7^{\frac{1}{4}})^2 \cdot 7^{\frac{3}{4}}$

k) $25^{\frac{1}{2}} : 5^{-\frac{2}{3}}$

d) $(6^{-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}$

h) $2^{-\frac{1}{2}} : (2^{\frac{3}{4}})^{-\frac{1}{4}}$

l) $4^{-\frac{2}{3}} : 2^{-\frac{3}{10}}$

5. Która z podanych dwóch liczb jest większa?

a) $3^{\frac{2}{5}}, 9^{\frac{1}{3}}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{25}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

e) $\sqrt[5]{4}, 2^{\frac{1}{4}}$

b) $2^{-\frac{7}{9}}, 4^{-\frac{5}{6}}$

d) $2^{\frac{5}{6}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$

f) $\sqrt[4]{27}, \sqrt[5]{3^4}$

Wskazówka. Sprawdź, czy iloraz tych liczb jest liczbą większą czy mniejszą od 1.

6. a) Zapisz każdą z podanych liczb w postaci potęgi liczby 3.

$$\sqrt[5]{9}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

$$27 \sqrt[3]{3}$$

$$9 \sqrt[4]{27}$$

$$\frac{9}{\sqrt[3]{3}}$$

b) Zapisz każdą z podanych liczb w postaci potęgi liczby 2.

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{4}}$$

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[5]{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$$

c) Zapisz każdą z podanych liczb w postaci potęgi liczby 5.

$$\sqrt{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$$

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[3]{5}}$$

7. Oblicz.

a) $(\sqrt[3]{49})^{1,5}$

c) $\frac{4^{0,2}}{\sqrt[5]{2}}$

e) $(\sqrt[3]{\sqrt{8}})^2$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[3]{9}$

b) $(\sqrt[3]{2})^{0,75}$

d) $(\sqrt[3]{0,125})^{\frac{4}{3}}$

f) $(\sqrt[3]{4^{\frac{9}{8}}})^{\frac{20}{3}}$

h) $\frac{7\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7}}{7^{\frac{4}{3}}}$

8. Przedstaw podane wyrażenie w postaci $a \sqrt[n]{b}$ tak, aby pod pierwiastkiem była jak najmniejsza liczba naturalna.

a) $(\sqrt[3]{8})^{\frac{27}{8}}$

b) $\sqrt[5]{5^{\frac{14}{3}}}$

c) $\sqrt[6]{3^{\frac{60}{7}}}$

d) $\sqrt[3]{10^{\frac{55}{3}}}$

9. Jaką liczbą należy zastąpić literę?

a) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[n]{a}$

b) $\sqrt{10} = \sqrt[n]{b}$

c) $\sqrt[3]{3^6} = \sqrt[n]{c}$

d) $\sqrt[5]{7} = \sqrt[n]{d}$

10. Uzasadnij równość.

a) $\sqrt[5]{7^3} \cdot 7^{\frac{3}{5}} = 7 \sqrt[5]{7}$

c) $2^{2,5} \cdot 16^{-0,5} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

e) $8^{0,25} : \sqrt[4]{2} = 4^{\frac{1}{4}}$

b) $\frac{\sqrt[6]{\sqrt[7]{7}} \cdot \sqrt[7]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}$

d) $\frac{4 \cdot (\sqrt[8]{2})^{-1}}{\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt{\sqrt{2}}} = 0,5^{-1,125}$

f) $\frac{2^{-3,3}}{2^{-1,7}} = 0,25 \sqrt[3]{4}$

11. Znajdź liczbę a spełniającą podany warunek.

a) $a^{\frac{1}{4}} = 4$

b) $a^{0,1} = 1$

c) $a^{0,2} = 10$

d) $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

MINISPRAWDZIAN

S1. Liczba $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5}}$ jest równa:

A. 1

B. $5^{-\frac{1}{3}}$

C. $5^{\frac{2}{3}}$

D. $5^{-\frac{2}{3}}$

S2. Liczba $32^{-0,4}$ jest równa:

A. $-2 \sqrt[4]{2}$

B. $32^{\frac{5}{8}}$

C. 0,25

D. $\frac{1}{8}$

S3. Liczba $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[3]{9}$ jest równa:

A. $\sqrt[12]{27 \cdot 9}$

B. $3 \sqrt[12]{3^5}$

C. $3^{\frac{5}{12}}$

D. $\sqrt{3}$

S4. Iloczyn odwrotności liczb $\sqrt[3]{4}$ i $0,5^{-\frac{4}{3}}$ jest równy:

A. $\frac{1}{4}$

B. 4

C. $2^{\frac{3}{4}}$

D. $2^{-\frac{4}{3}}$

POTĘGI O WYKŁADNIKACH RZECZYWISTYCH

- I Wiesz już, jak oblicza się potęgi o podstawach dodatnich i wykładnikach wymiernych. Możemy również rozpatrywać potęgi o podstawach dodatnich, których wykładnik jest dowolną liczbą rzeczywistą, także niewymierną.

Zastanówmy się na przykład, jaką liczbę mógłby oznaczać zapis $3^{\sqrt{2}}$.

Wiadomo, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, a więc ma rozwinięcie nieskończone nieokresowe.

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095 \dots$$

Liczbę $3^{\sqrt{2}}$ możemy przybliżać, zastępując wykładnik potęgi coraz dokładniejszymi przybliżeniami liczby $\sqrt{2}$. Korzystając z odpowiedniego kalkulatora, otrzymamy:

$$\sqrt{2} \approx 1,4, \text{ więc } 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,4} = 4,655536 \dots$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41, \text{ więc } 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,41} = 4,706965 \dots$$

$$\sqrt{2} \approx 1,414, \text{ więc } 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,414} = 4,727695 \dots$$

$$\sqrt{2} \approx 1,4142, \text{ więc } 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,4142} = 4,728733 \dots$$

$$\sqrt{2} \approx 1,41421, \text{ więc } 3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1,41421} = 4,728785 \dots$$

Otrzymywane w ten sposób wyniki coraz bardziej przybliżałyby się do liczby 4,72880438783741494... Przyjmujemy, że potęgą $3^{\sqrt{2}}$ jest równa tej liczbie, czyli:

$$3^{\sqrt{2}} = 4,72880438783741494 \dots$$

Podobnie możemy przybliżać inne potęgi o wykładnikach niewymiernych.

W praktyce wartości potęg o wykładnikach niewymiernych można szacować, korzystając z przybliżeń dziesiętnych wykładników. Na przykład:



$$2^{\sqrt{3}} \approx 2^{2,336} \approx 4,71$$

$$2^{\pi} \approx 2^{3,14} \approx 8,82$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{10}} \approx 0,5^{3,162} \approx 0,112$$

Niektóre kalkulatory pozwalają obliczać potęgi o wykładnikach rzeczywistych z jeszcze większą dokładnością.

ĆWICZENIE A Zastosuj odpowiedni kalkulator i oblicz $2^{\sqrt{3}}$.

Jeśli nie mamy kalkulatora, to wartości potęg o wykładnikach rzeczywistych możemy szacować.

ĆWICZENIE B Ustal, która z dwóch podanych liczb jest większa.

- a) 5^3 czy 5^4 b) $7,2^5$ czy $7,2^4$ c) 2^π czy 2^3 d) $6^{\sqrt{2}}$ czy $6^{\sqrt{5}}$

ĆWICZENIE C Ustal, która z dwóch podanych liczb jest większa.

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ czy $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ b) $0,3^6$ czy $0,3^5$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^\pi$ czy $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ czy $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{5}}$

Gdy szacujemy potęgi, należy pamiętać, że reguła „im większy wykładnik tym większa potęga” dotyczy tylko potęg o podstawie większej od 1. Gdy podstawa potęgi należy do przedziału $(0; 1)$ trzeba stosować regułę „im większy wykładnik, tym mniejsza potęga”.

Jeśli $a > 1$

oraz

$$x < y$$

to

$$a^x < a^y$$

Jeśli $0 < a < 1$

oraz

$$x < y$$

to

$$a^x > a^y$$

PRZYKŁAD 1 Korzystając z nierówności $3 < \sqrt{10} < 4$, oszacuj podaną liczbę.

a) $2^{\sqrt{10}}$

$\sqrt{10} > 3$, więc:

$$2^{\sqrt{10}} > 2^3 = 8$$

$\sqrt{10} < 4$, więc:

$$2^{\sqrt{10}} < 2^4 = 16$$

Wynika stąd, że:

$$8 < 2^{\sqrt{10}} < 16$$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{10}}$

$\sqrt{10} > 3$, więc:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{10}} < \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$\sqrt{10} < 4$, więc:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{10}} > \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Wynika stąd, że:

$$\frac{1}{16} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{10}} < \frac{1}{8}$$

ZADANIE Oszacuj w opisany powyżej sposób liczbę:

a) $3^{\sqrt{10}}$

b) $2^{\frac{1}{\sqrt{5}}}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{7}}$

zadania 1-5 ►

- III Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych obowiązują także dla potęg o wykładnikach rzeczywistych.

PRZYKŁAD 2 Przekształć wyrażenie.

a) $3^{-2\sqrt{2}} \cdot 3^{3\sqrt{2}} = 3^{-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}}$

b) $\left(3^{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{2}} = 3^{\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}} = 3^3 = 27$

c) $\frac{7^2 - \pi}{7^{-\pi}} = 7^{(2-\pi) - (-\pi)} = 7^2 = 49$

ZADANIE Przekształć wyrażenie.

a) $\frac{5^{\sqrt{7}-5}}{5^{\sqrt{7}}}$ b) $\left(8^{\frac{\sqrt{2}}{3}}\right)^{\sqrt{2}}$ c) $(3^{1+\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} \cdot 3^{-\sqrt{2}}$ d) $2^{4-2\pi} \cdot 4^{\pi}$

zadania 6–10 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $7^{-\sqrt{2}}$ 7^0 $7^{\frac{1}{2}}$ $7^{-2,1}$ 7^{π} 7^3

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{3}}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^0$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{\pi}}$

c) $0,6^{0,7}$ $0,6^{-2}$ $0,6^{\sqrt{2}}$ $0,6^{-\frac{1}{3}}$ $0,6^3$ $0,6^{-\frac{1}{2}}$

2. Oszacuj, która z podanych dwóch liczb jest większa: a czy b .

a) $a = 2^{\sqrt{2}}$, $b = 2$ c) $a = 3$, $b = (\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

b) $a = 2^{\pi}$, $b = 8$ d) $a = \pi^{\sqrt{5}}$, $b = 9$

$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73$$

$$\sqrt{5} \approx 2,24$$

$$\pi \approx 3,14$$

3. Uporządkuj podane liczby w kolejności od największej do najmniejszej.

$2^{5\sqrt{2}}$ $4^{\sqrt{3}}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{\pi}$ 32^0 $\left(\frac{1}{16}\right)^2$

4. Która z podanych dwóch liczb jest większa?

a) $2^{\sqrt{2}}$, $(\sqrt{2})^3$ b) $27^{\frac{1}{\pi}}$, $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\pi}$

c) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$, $(\sqrt[3]{\pi})^{-2}$

5. Na osi liczbowej zaznaczono liczby:

$$2^{\pi} \quad 12^{\frac{1}{\pi}} \quad 1^{\sqrt{3}} \quad 4^{\sqrt{5}} \quad \pi^{-\sqrt{2}}$$

Przyporządkuj te liczby odpowiadającym im literom.



6. Oblicz.

a) $(7^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$

c) $(2,25^{-\frac{\sqrt{2}}{4}})^{\sqrt{2}}$

e) $3^{3\sqrt{3}} \cdot 27^{1-\sqrt{3}}$

b) $(11^{\pi})^{-\frac{2}{\pi}}$

d) $(0,2^{\sqrt{6}})^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$

f) $(\frac{1}{5})^{\sqrt{3}} \cdot 125^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

7. Znajdź liczbę a spełniającą warunek:

a) $(3^{\sqrt{2}})^a = 3$

b) $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^a = 3$

c) $\frac{3^{\sqrt{2}}}{3^a} = 3$

8. a) Do jakiej potęgi należy podnieść liczbę $2^{\sqrt{2}}$, aby otrzymać 4?

b) Do jakiej potęgi należy podnieść liczbę $\sqrt{2}$, aby otrzymać $2^{\sqrt{2}}$?

9. Ile razy większa od liczby $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ jest liczba $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$?

10. Uzasadnij, że potęgą liczby niewymiernej o wykładniku niewymiernym może być liczbą wymierną.

MINISPRAWDZIAN

S1. Która z podanych liczb jest wymierna?

A. $(\sqrt{3})^0 + \sqrt{3}$

B. $1^{\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

C. $(\sqrt{3})^1 - \sqrt{3}$

D. $0^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}$

S2. Oszacuj, która z podanych liczb jest największa.

A. $9^{-\pi}$

B. $(\frac{1}{3})^{\sqrt{3}}$

C. $(\sqrt{3})^{\pi}$

D. $3^{\sqrt{2}}$

S3. Oszacuj, która z podanych liczb jest większa od 100.

A. $4^{\sqrt{7}}$

B. 5^{π}

C. $7^{\sqrt{3}}$

D. $10^{\sqrt{2}}$

S4. Liczba $2^{3-2\pi}$ jest równa:

A. $\frac{2^3}{2^2 \cdot 2^{\pi}}$

B. $(2^3 - 2^2)^{\pi}$

C. $(\frac{8}{4})^{\pi}$

D. $8 \cdot \frac{1}{4^{\pi}}$

POWTÓRZENIE

1. Oblicz.

$$5^{-2} \quad \left(\frac{7}{11}\right)^{-1} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \quad 36^{\frac{1}{2}} \\ 125^{\frac{1}{3}} \quad 8^{\frac{2}{3}} \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \quad 0,001^{-\frac{2}{3}}$$

2. Zapisz w notacji wykładniczej:

a) liczbę tysiąc razy większą niż $0,6 \cdot 10^{-4}$,

b) liczbę milion razy mniejszą niż $124 \cdot 10^{-7}$.

3. Która liczba jest większa — $8 \cdot 2^{-17}$ czy $\frac{1}{4} \cdot 2^{-20}$? Ile razy?

4. Zapisz odpowiedzi w notacji wykładniczej.

a) $30 \cdot 10^{17} \text{ m}^3$ — ile to kilometrów sześciennych?

b) $275 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3$ — ile to centymetrów sześciennych?

5. Masa Jowisza — największej planety Układu Słonecznego — wynosi $1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$. Masa Ziemi to $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Ile razy masa Jowisza jest większa od masy Ziemi?

6. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka tak, aby pod pierwiastkiem została jak najmniejsza liczba naturalna.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{2000} & \text{c)} \sqrt[3]{36} \\ \text{b)} \sqrt[3]{-54} & \text{d)} \sqrt[3]{2^{16}} \end{array}$$

7. Usuń niewymierność z mianownika.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{3}{\sqrt{6}} & \text{c)} \frac{10}{\sqrt[3]{4}} \\ \text{b)} \frac{2 - \sqrt{5}}{3\sqrt{5}} & \text{d)} \frac{1 + \sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{5}} \end{array}$$

8. Przedstaw w postaci jednej potęgi.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{6^{\frac{3}{4}} \cdot 6^{-2}}{\sqrt{6}} & \text{d)} 0,25^{-4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \\ \text{b)} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} : 3^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{3}} & \text{e)} \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{2} \cdot 4^{-\frac{1}{3}} \\ \text{c)} \frac{5^{-2} \cdot 0,2^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{25}} & \text{f)} \frac{8^{\frac{1}{2}}}{0,5^{\frac{2}{3}}} : \frac{2^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{45}} \end{array}$$

9. Zapisz za pomocą jednego znaku pierwiastka.

$$\text{a)} \sqrt{\sqrt{7}} \quad \text{b)} \sqrt{\sqrt[3]{2}} \quad \text{c)} \sqrt[3]{\sqrt{6}} \quad \text{d)} \sqrt[3]{3\sqrt{2}}$$

10. Oblicz.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(\sqrt{6\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{2}} & \text{c)} \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}} \\ \text{b)} \left(9\sqrt{5}\right)^{0,1\sqrt{5}} & \text{d)} \left(5 \cdot 5\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}} : 5\sqrt{3} \end{array}$$

11. Udowodnij, że zachodzi równość:

$$\left(\frac{7^{-14} + 7^{-12}}{50}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{49}$$

12. Niech $a = \sqrt{3^9}$ i $b = \sqrt[4]{9}$. Wykaż, że:

$$\text{a)} a : b = 81 \quad \text{b)} a - b = 80\sqrt{3}$$

13. Która z liczb jest większa?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(\frac{1}{4}\right)^{-17} \text{ czy } 0,5^{-15} & \text{d)} \sqrt[3]{4} \text{ czy } \sqrt{2} \\ \text{b)} 1,2^{-12} \text{ czy } \left(\frac{5}{6}\right)^{13} & \text{e)} 10^{\frac{1}{4}} \text{ czy } \sqrt[3]{10} \\ \text{c)} 1,5^{27} \text{ czy } \left(\frac{2}{3}\right)^{-29} & \text{f)} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ czy } \sqrt{1,25} \end{array}$$

14. Udowodnij, że liczba:

$$4^{100} + 4^{101} + 4^{102}$$

jest podzielna przez 7.

Logarytmy

Siłę trzęsienia ziemi mierzy się w stopniach Richtera. Jedne z najsilniejszych zarejestrowanych w Polsce wstrząsów ziemi miały 4,8 stopnia w tej skali (było to w 2010 roku). W Indiach w 1950 roku odnotowano trzęsienie ziemi, które miało 8,7 stopnia w skali Richtera. Nie oznacza to, że w Polsce siła trzęsienia była tylko około 2 razy słabsza. Znając sposób określania skali Richtera oraz własności logarytmów, możemy obliczyć, że wstrząsy w Indiach były 10 000 razy silniejsze niż w Polsce.



Pojęcie logarytmu ■ Własności logarytmów ■ Powtórzenie

POJĘCIE LOGARYTMU

- 1 Rozważmy następujące pytania: *Do jakiej potęgi należy podnieść liczbę 2, aby otrzymać 32? Do jakiej potęgi należy podnieść liczbę 2, aby otrzymać 30?* Pytania te możemy zapisać w postaci równań:

$$2^x = 32$$

$$2^x = 30$$

Łatwo stwierdzić, że rozwiązaniem pierwszego równania jest 5, bo $2^5 = 32$. Trudno jednak ustalić, jaka liczba spełnia równanie $2^x = 30$. Liczbę spełniającą takie równanie będziemy nazywać logarytmem liczby 30 przy podstawie 2 i oznaczać symbolem $\log_2 30$. Można sprawdzić, że $2^{4,91} \approx 30$, czyli $\log_2 30 \approx 4,91$.

Podobnie określamy logarytmy o innych podstawach.

Dla $a > 0$, $b > 0$ i $a \neq 1$
przyjmujemy, że:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Zapis $\log_a b$ czytamy: *logarytm*
liczby b przy podstawie a .

liczba
logarytmowana
 $\log_a b$
podstawa
logarytmu

Można powiedzieć, że liczba $\log_a b$ jest wykładnikiem potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać liczbę b .

Zauważ, że liczba spełniająca równanie $2^x = 32$ to logarytm liczby 32 przy podstawie 2. Ponieważ $2^5 = 32$, więc $\log_2 32 = 5$.

PRZYKŁAD 1 Oblicz.

a) $\log_3 81 = 4$, bo $3^4 = 81$

b) $\log_{10} 0,001 = -3$, bo $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$

c) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$, bo $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = -1$, bo $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

e) $\log_7 7 = 1$, bo $7^1 = 7$

f) $\log_5 1 = 0$, bo $5^0 = 1$

ZADANIE Oblicz.

a) $\log_2 4$, $\log_{10} 10\,000$

b) $\log_7 \frac{1}{7}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

c) $\log_6 6$, $\log_{\frac{1}{2}} 1$, $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$, $\log_8 1$

d) $\log_5 5^4$, $\log_3 3^{12}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3^3}$

Logarytmy są stosowane w różnych dziedzinach wiedzy. Szczególne znaczenie ma logarytm przy podstawie 10, który nazywamy logarytmem dziesiętnym. Zapisujemy go w uproszczony sposób. Zamiast $\log_{10} b$ piszemy $\log b$.

Logarytmy dziesiętne można łatwo obliczać, gdy mamy do dyspozycji odpowiedni kalkulator. Służy do tego klawisz z napisem $\log$.

$\log b$ oznacza $\log_{10} b$

ĆWICZENIE Oblicz za pomocą kalkulatora:

$\log 6$ $\log 89$ $\log 0,2$ $\log 1500$

zadania 1–4 ►

Ciekawostka

Na kalkulatorze — oprócz klawisza $\log$ służącego do obliczania logarytmów dziesiętnych — znaleźć też można klawisz $\ln$. Służy on do obliczania logarytmów, których podstawą jest pewna liczba niewymierna nazywana liczbą e .

$$e = 2,71828182845904\dots$$

Logarytm przy podstawie e nazywamy logarytmem naturalnym i zamiast $\log_e b$ piszemy $\ln b$.



Liczbę e wprowadził do matematyki w XVIII wieku szwajcarski matematyk Leonard Euler (czyt. Ojler). Zauważył on, że kolejne liczby: $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$, $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$, ... zbliżają się do pewnej liczby, którą nazwał liczbą e .

II

Z definicji logarytmu wynika, że dla $a > 0$ i $a \neq 1$ zachodzą równości:

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \quad \log_a a^b = b \quad a^{\log_a b} = b$$

PRZYKŁAD 2 Oblicz.

a) $\log_5 \frac{\sqrt[3]{5}}{125} = \log_5 \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^3} = \log_5 5^{\frac{1}{3} - 3} = \log_5 5^{-2\frac{2}{3}} = -2\frac{2}{3}$

b) $125^{\log_5 2} = (5^3)^{\log_5 2} = (5^{\log_5 2})^3 = 2^3 = 8$

ZADANIE Oblicz.

a) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{16}$

b) $\log_5 \frac{25}{\sqrt[3]{5}}$

c) $9^{\log_3 5}$

d) $0,1^{\log 4}$

zadania 5–9 ►

- III Gdy trudno jest ustalić wartość logarytmu, można się posłużyć metodą przedstawioną poniżej.

PRZYKŁAD 3 Oblicz $\log_9 27$.

$$\log_9 27 = x$$

$$9^x = 27$$

$$(3^2)^x = 3^3$$

$$3^{2x} = 3^3$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Odp. } \log_9 27 = \frac{3}{2}$$

Szukaną liczbę oznaczamy literą x .

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Przekształcamy równość tak, aby otrzymać po obu stronach potęgę o tej samej podstawie.

Korzystamy z tego, że jeśli potęgi o tych samych podstawach są równe, to ich wykładniki też są równe.

ZADANIE Oblicz.

a) $\log_8 \frac{1}{2}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 81$

c) $\log_{25} \sqrt{5}$

d) $\log_{0,1} \sqrt{10}$

zadania 10–16 ►

- IV Logarytmy mogą być liczbami wymiernymi albo niewymiernymi. Na przykład liczby: $\log_2 4$, $\log_{\frac{1}{3}} 27$, $\log \sqrt{10}$ są wymierne, a liczby: $\log_2 5$, $\log_3 7$, $\log \frac{1}{3}$ są niewymierne. Można to udowodnić.

Twierdzenie: *Liczba $\log_2 5$ jest niewymierna.*

Dowód

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost.

Załóżmy, że liczba $\log_2 5$ jest wymierna.

Zakładamy, że twierdzenie nie jest prawdziwe.

Zatem $\log_2 5 = \frac{p}{q}$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich p i q .

Liczba $\log_2 5$ jest dodatnia, więc możemy przyjąć, że p i q też są dodatnie.

Stąd: $2^{\frac{p}{q}} = 5$

Wobec tego: $\left(2^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q$

Zatem: $2^p = 5^q$

W rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 2^p występuje tylko liczba 2, a w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 5^q występuje tylko liczba 5. Zatem liczby 2^p i 5^q nie mogą być równe.

Zaprzeczając twierdzeniu, otrzymaliśmy sprzeczność. Tym samym udowodniliśmy, że liczba $\log_2 5$ jest niewymierna. $\square$

zadanie 17 ►

Na pomysł wprowadzenia logarytmów jako pierwszy wpadł Szkot John Napier (czyt. Dżon Neipier). Swoje rozważania opublikował w 1614 roku w książce „Opisanie cudownych zasad logarytmów”. Logarytmy Napiera różniły się nieco od tych, którymi posługujemy się dzisiaj, ale stanowiły tak ogromny postęp w metodach rachunkowych, że od razu wzbudziły ogromny entuzjazm.

Nazwę *logarytm* wprowadził sam Napier. Powstała ona z greckich słów: *logos* — myślenie i *arithmos* — liczenie.

Zastosowanie logarytmów do obliczeń astronomicznych pomogło Johannesowi Keplerowi odkryć prawa dotyczące ruchu planet. Inny znany uczony Pierre Laplace (czyt. Pier Laplas) twierdził nawet, że „wynalazek logarytmów (...) podwaja życie astronomom”.

ZESTAW ZADAŃ

- ◀ 1. a) Zastąp podaną równość odpowiednią równością typu $a^c = b$.

$$\log_8 4 = \frac{2}{3}$$

$$\log_7 1 = 0$$

$$\log_5 \frac{1}{125} = -3$$

- b) Zapisz liczby a , b , c i d za pomocą logarytmu.

$$5^a = 10$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^b = 7$$

$$0,02^c = \frac{2}{3}$$

$$10^d = 0,6$$

2. Znajdź liczby oznaczone literami.

$$\log_2 a = 4$$

$$\log_5 d = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 g = -5$$

$$\log j = -0,5$$

$$\log_{\frac{1}{2}} b = 5$$

$$\log_{\sqrt{3}} e = \frac{1}{2}$$

$$\log_4 h = 2$$

$$\log k = 2$$

$$\log_{16} c = \frac{1}{4}$$

$$\log_{\frac{2}{3}} f = -1$$

$$\log i = \sqrt{3}$$

$$\log l = \frac{1}{3}$$

3. Znajdź logarytmy.

a) $\log_5 25$

d) $\log_7 \frac{1}{49}$

g) $\log_5 \sqrt{5}$

j) $\log_6 \sqrt[3]{36}$

b) $\log_3 27$

e) $\log_9 3$

h) $\log_7 \sqrt[4]{7}$

k) $\log_2 16$

c) $\log_6 \frac{1}{6}$

f) $\log_{1000} 10$

i) $\log_3 \sqrt[3]{3}$

l) $\log_8 2$

4. Oblicz.

a) $\log 10^{\frac{2}{3}}$

c) $\log \frac{1}{10}$

e) $\log \sqrt{\frac{1}{10}}$

g) $\log 1$

b) $\log 100$

d) $\log 0,001$

f) $\log 10^8$

h) $\log \frac{\sqrt[3]{10}}{10}$

◀ || 5. Oblicz.

- a) $\log_4 4$ $\log_7 1$ $\log_5 5^6$ $\log_3 3^{-7}$ $\log_6 6^{\frac{2}{3}}$
 b) $\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$ $\log_{\frac{5}{3}} \frac{5}{3}$ $\log_{\frac{1}{4}} 1$ $\log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7}\right)^{-6}$
 c) $\log_{\sqrt{3}} 1$ $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^{-\frac{3}{4}}$ $\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{2})^3$ $\log_{\sqrt{6}} \sqrt{6}$ $\log_{\sqrt{7}} (\sqrt{7})^5$

6. Oblicz.

- a) $\log_5 5^{-\frac{2}{3}}$ $\log_5 (5^3)^7$ $\log_5 \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{-6}$ $\log_5 (5^{-4})^{\frac{1}{2}}$
 b) $\log (10^{15})^{-4}$ $\log 0,01$ $\log \left(\sqrt[3]{10}\right)^2$ $\log \frac{1}{\sqrt[5]{100}}$
 c) $\log_{\frac{1}{2}} 2^{-4}$ $\log_{\frac{1}{2}} (0,5^7)^8$ $\log_{\frac{1}{2}} 4^{13}$ $\log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{2})^{18}$

7. Zapisz litery odpowiadające liczbom w kolejności od najmniejszej do największej.

- a) $A = \log_3 81$ $K = \log_3 \frac{1}{9}$ $O = \log_3 \frac{1}{3}$ $R = \log_3 27$
 b) $A = \log_2 \sqrt[5]{2}$ $G = \log_2 \frac{1}{4}$ $R = \log_2 1$ $T = \log_2 2$
 c) $A = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}$ $B = \log_{\frac{1}{2}} 2$ $K = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$ $R = \log_{\frac{1}{2}} 1$
 d) $A = \log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$ $C = \log_5 \sqrt[3]{5}$ $E = \log_5 125$ $R = \log_5 \frac{1}{25}$

8. Oblicz.

- a) $\log_2 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 4 \cdot \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_4 \frac{1}{2}$ c) $\log_3 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 9 \cdot \log_9 \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9$
 b) $\log 0,1 \cdot \log \sqrt{10} \cdot \log_{0,1} \sqrt{10} \cdot \log_{\sqrt{10}} 10$ d) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \log_9 \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} \cdot \log_{\sqrt{9}} 3$

9. Oblicz.

- a) $2^{\log_2 5}$ b) $15^{\log_{15} 6}$ c) $9^{\log_3 7}$ d) $16^{\log_2 3}$

◀ || 10. Która z podanych liczb jest najmniejsza, a która — największa?

- a) $\log_{\frac{1}{7}} 7$ $\log_{\sqrt{7}} 7$ $\log_{49} 7$ c) $\log_{100} 10$ $\log_{0,1} 10$ $\log_{\sqrt{10}} 10$
 b) $\log_2 8$ $\log_{\sqrt{2}} 8$ $\log_{\frac{1}{2}} 8$ d) $\log_{\frac{1}{25}} 25$ $\log_{\frac{1}{5}} 25$ $\log_{125} 25$

11. Oblicz.

- a) $\log_{0,1} 100$ c) $\log_4 8$ e) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{1,5}$ g) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}$
 b) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{5}$ f) $\log_4 \sqrt[3]{2}$ h) $\log 10\sqrt{10}$

12. Oblicz.

a) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{5}$

c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt{2}$

e) $\log_{\sqrt[3]{10}} \sqrt{10^5}$

g) $\log_{\sqrt{11}} \sqrt[5]{\frac{1}{11^2}}$

b) $\log_{\sqrt{3}} 27$

d) $\log_{\sqrt[5]{6}} 6\sqrt{6}$

f) $\log_{\sqrt{7}} \sqrt[3]{49}$

h) $\log_{\sqrt[5]{3}} \frac{\sqrt[5]{5^3}}{5}$

13. Znajdź liczby oznaczone literami.

a) $\log_a 125 = 3$

d) $\log_p 3 = \frac{1}{2}$

g) $\log_s 5 = -2$

b) $\log_b 10\,000 = 2$

e) $\log_q 3^9 = 3$

h) $\log_t 0,0001 = -8$

c) $\log_c \sqrt[3]{2} = 1$

f) $\log_r 7 = -\frac{1}{2}$

i) $\log_w 0,5 = -\frac{1}{2}$

14. Znajdź liczby x , y i z spełniające warunki:

a) $\log_5 x = 3$

b) $\log_{\frac{1}{5}} x = \frac{1}{2}$

c) $\log_{\sqrt{3}} x = -4$

$\log_{\frac{2}{3}} \frac{5}{2} = y$

$\log_7 \sqrt[3]{7} = y$

$\log_{0,1} \sqrt{10} = y$

$\log_x 16 = 4$

$\log_z 100 = -2$

$\log_z 3 = \frac{1}{4}$

15. Przedstaw liczbę l jako logarytm pewnej liczby przy podstawie p .

a) $l = 4, \quad p = 3$

b) $l = -2, \quad p = 6$

c) $l = -\frac{2}{3}, \quad p = 2$

16. Wyznacz ze wzoru wskazaną wielkość. Przyjmij odpowiednie założenia.

a) $a = p^k, \quad k$

c) $T = 3 + r^a, \quad a$

e) $M = m - a \log_2 r, \quad r$

b) $P = Ma^t, \quad t$

d) $D = \log_5(m+1), \quad m$

f) $V = w \log(1+a), \quad a$

IV 17. Wykaż, że:

a) liczba $\log_3 7$ jest niewymierna,

b) liczba $\log_2 6$ jest niewymierna.

MINISPRAWDZIAN51. O dwóch liczbach dodatnich a oraz b wiadomo, że $a^b = 3$. Zatem:

A. $a = \log_3 b$

B. $\log_a b = 3$

C. $b = \log_3 a$

D. $b = \log_a 3$

52. Ile spośród liczb: $\log_2 3$, $\log_5 3$, $\log_{\frac{1}{2}} 0,25$, $\log 0,1$ jest większych od 1?

A. jedna

B. dwie

C. trzy

D. cztery

53. Wskaż liczbę równą $\log_2 \sqrt[3]{4}$.

A. $\frac{2}{3}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW

- I Pojęcie logarytmu jest ściśle związane z pojęciem potęgi. Nic więc dziwnego, że z praw działań na potęgach wynikają pewne własności logarytmów.

ĆWICZENIE A Sprawdź, że spełniona jest podana równość.

a) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2(4 \cdot 8)$

c) $\log_2 4 - \log_2 8 = \log_2(4 : 8)$

b) $\log 100 + \log 1000 = \log 100\,000$

d) $\log 100 - \log 1000 = \log 0,1$

Twierdzenie o logarytmie iloczynu

Jeśli a, b i c są liczbami dodatnimi i $a \neq 1$, to:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Dowód

Przyjmujemy, że $a > 0, b > 0, c > 0$ i $a \neq 1$.

Niech: $\log_a b = x$ i $\log_a c = y$

Wobec tego: $b = a^x$ i $c = a^y$

Zatem: $bc = a^x \cdot a^y$

$$bc = a^{x+y}$$

⋮ Korzystamy z własności potęg.

Stąd: $\log_a(bc) = x + y$

⋮ Korzystamy z definicji logarytmu.

Wobec tego:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \quad \square$$

Twierdzenie o logarytmie ilorazu

Jeśli a, b i c są liczbami dodatnimi i $a \neq 1$, to:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

ĆWICZENIE B Uzasadnij powyższe twierdzenie.

zadania 1–4 ►

- II Zauważ, że korzystając z twierdzenia o logarytmie iloczynu, otrzymamy:

$$\log_a b^2 = \log_a(b \cdot b) = \log_a b + \log_a b = 2 \log_a b$$

Analogiczną własność ma logarytm potęgi o dowolnym wykładniku.

Twierdzenie o logarytmie potęgi

Jeśli a oraz b są liczbami dodatnimi i $a \neq 1$, to dla dowolnej liczby p :

$$\log_a b^p = p \log_a b$$

Dowód

Przyjmujemy, że $a > 0$, $b > 0$ i $a \neq 1$.

Niech: $\log_a b = x$ i $\log_a b^p = y$

Korzystamy z definicji logarytmu.

Wobec tego: $a^x = b$ i $a^y = b^p$

Zatem: $a^y = b^p = (a^x)^p = a^{xp}$, więc $a^y = a^{xp}$

Stąd: $y = px$

Wobec tego: $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$ $\square$

PRZYKŁAD 1 Przedstaw w postaci jednego logarytmu.

a) $-2 \log 10 + \log 80 - \log 20 = \log 10^{-2} + \log 80 - \log 20 = \log \frac{10^{-2} \cdot 80}{20} = \log \frac{1}{25}$

b) $2 - \log_5 2 = 2 \log_5 5 - \log_5 2 = \log_5 5^2 - \log_5 2 = \log_5 \frac{25}{2} = \log_5 12,5$

ZADANIE Przedstaw w postaci jednego logarytmu.

a) $3 \log_7 2 + \frac{1}{2} \log_7 25 - \log_7 20$

b) $4 - 2 \log_3 7$

zadania 5–10 $\blacktriangleright$

III

Twierdzenie o zmianie podstawy logarytmu

Jeśli a , b , c są liczbami dodatnimi i $a \neq 1$ oraz $c \neq 1$, to:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Dowód

Przyjmijmy, że $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$ i $c \neq 1$.

Niech: $\log_a b = x$ i $\log_c a = y$

Wobec tego: $b = a^x$ i $a = c^y$

Zatem: $b = a^x = (c^y)^x$, więc $b = c^{xy}$

Stąd: $xy = \log_c b$, czyli $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$

Ponieważ $a \neq 1$, więc $\log_c a \neq 0$.

Wobec tego: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\square$

Ostatnia własność pozwala wyrazić dowolny logarytm za pomocą logarytmów dziesiętnych i do jego obliczania skorzystać z kalkulatora. Oto przykłady:

$$\log_2 30 = \frac{\log 30}{\log 2} \approx \frac{1,48}{0,3} \approx 4,9$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 20 = \frac{\log 20}{\log \frac{1}{2}} \approx \frac{1,3}{-0,3} \approx -4,3$$

PRZYKŁAD 2 Przedstaw w postaci jednego logarytmu.

$$\log_3 5 + \log_9 4 + 2 = \log_3 5 + \frac{\log_3 4}{\log_3 9} + \log_3 3^2 = \log_3 5 + \frac{1}{2} \log_3 4 + \log_3 9 = \log_3 90$$

ZADANIE Przedstaw $\log_5 15 - 2 \log_5 10 + \log_{25} 400 - 1$ jako jeden logarytm.

zadania 11–20 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Przedstaw podane wyrażenie jako jeden logarytm.

a) $\log \frac{m}{9} + \log 3m$

c) $\log_7 \frac{n}{2} + \log_7 \frac{n}{2} - \log_7 n$

e) $\log_3 2v + \log_3 v - \log_3 3v$

b) $\log 2a - \log 4a$

d) $\log_6 a + \log_6 5b - \log_6 c$

f) $\log x + \log \sqrt{x} - \log \sqrt{2x}$

2. Oblicz.

a) $\log_2 80 + \log_2 0,1$

d) $\log_5 100 - \log_5 4$

g) $\log_2 6 + \log_2 12 + \log_2 \frac{4}{9}$

b) $\log_3 4,5 + \log_3 2$

e) $\log_2 7 - \log_2 56$

h) $\log 3 + \log 2 - \log 6$

c) $\log 2000 + \log \frac{1}{2}$

f) $\log_7 14 - \log_7 2\sqrt{7}$

i) $\log 4 - \log 5 + \log 125$

3. Przedstaw podany logarytm w postaci sumy lub różnicy logarytmów.

a) $\log_2(5x)$

c) $\log \frac{4x}{y}$

e) $\log_{0,1} \frac{u}{7v}$

g) $\log \frac{ab}{c}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{a}{3}$

d) $\log_7 \frac{2}{st}$

f) $\log(abc)$

h) $\log \frac{1}{abc}$

4. Przyjmij, że $\log 7 \approx 0,845$, i oblicz:

$\log 70$

$\log 700$

$\log 7\,000\,000$

$\log 0,7$

$\log 0,07$

$\log(7 \cdot 10^{-10})$

◀ II 5. Niech a będzie taką liczbą, że $\log a = 2$. Oblicz:

a) $\log a^{13}$

c) $\log \frac{1}{a^5}$

e) $\log \sqrt[5]{a^3}$

g) $\frac{(\log a)^2}{\log a^2}$

b) $\log a^{-7}$

d) $\log \sqrt[3]{a}$

f) $\log \frac{1}{\sqrt{a}}$

h) $\log a \cdot \log a^3$

6. a) Przyjmij, że $\log_5 2 \approx 0,43$, i oblicz:

$$\log_5 4 \quad \log_5 32 \quad \log_5 \frac{1}{2} \quad \log_5 \frac{1}{8} \quad \log_5 \frac{1}{210} \quad \log_5 \sqrt[3]{2}$$

b) Przyjmij, że $\log_5 7 \approx 1,21$, i oblicz:

$$\log_5 49 \quad \log_5 \frac{1}{7} \quad \log_5 \frac{1}{76} \quad \log_5 \frac{7^8}{7} \quad \log_5 \sqrt[3]{49} \quad \log_5 \frac{1}{\sqrt{7}}$$

7. Przedstaw podane wyrażenie jako jeden logarytm.

a) $3 \log_2 a + \log_2 b$ **c)** $3 \log_3 4n - 2 \log_3 5n$ **e)** $\log 2k^5 - 5 \log k^3 - 2 \log k$

b) $2 \log_5 4x + 5 \log_5 y$ **d)** $-2 \log z - 4 \log 2z$ **f)** $\log \frac{1}{a} - 2 \log a^2 + 3 \log a$

8. Przedstaw podane wyrażenie jako jeden logarytm.

a) $2 + \log_3 5$ **b)** $\log 2 + 3$ **c)** $\log_2 3 - 4$ **d)** $1 - \log 5$

9. Przyjmij, że $\log_a b = x$ i $\log_a c = y$, i przedstaw wyrażenie za pomocą liczb x i y .

a) $\log_a (b^5 c)$ **b)** $\log_a (b^2 c^3)$ **c)** $\log_a \frac{c^7}{b^5}$ **d)** $\log_a \left(\frac{1}{b^2 c} \right)$

10. Przyjmij, że $\log 2 \approx 0,3$, $\log 5 \approx 0,7$, i oblicz:

a) $\log 20$ $\log 50$ $\log 0,2$ $\log 0,4$ $\log 0,04$ $\log \sqrt{20}$

b) $\log \frac{2}{5}$ $\log \frac{4}{5}$ $\log \frac{25}{64}$ $\log 2,5$ $\log 6,25$ $\log 25\sqrt{2}$

◀ **11.** Przedstaw podane wyrażenie jako jeden logarytm.

a) $\log_2 5 + \log_4 9$ **c)** $\log_{100} 25 - \log 3 + 2$

b) $\log_5 4 - \log_{125} 8$ **d)** $\log_8 27 + \log_2 5 - 3$

12. Przyjmij, że $\log 2 \approx 0,3$ i $\log 5 \approx 0,7$. Oblicz:

a) $\log_2 5$ **b)** $\log_5 4$ **c)** $\log_2 50$ **d)** $\log_4 25$

13. Przedstaw podany logarytm za pomocą logarytmów dziesiętnych i oblicz go za pomocą kalkulatora (wynik podaj z dokładnością do części tysięcznych).

a) $\log_7 2$ **b)** $\log_{0,3} 4$ **c)** $\log_{\frac{1}{3}} 2,9$ **d)** $\log_{1,2} 124$

• **14.** Wykaż, że dla $a > 0$, $a \neq 1$ i $b > 0$ zachodzi równość:

a) $\log_{\frac{1}{a}} b = \log_a \frac{1}{b}$ **b)** $\log_{a^n} b = \log_a b^{\frac{1}{n}}$ **c)** $\log_{\sqrt[n]{a}} b = \log_a b^n$

• **15.** Wykaż, że: **a)** $\log_4 81 + \log_{16} 81 = \log_2 27$ **b)** $\log_9 4 + \log_{\frac{1}{3}} 10 = \log_3 0,2$

• **16.** Przyjmij, że $\log_{15} 3 = a$. Przedstaw liczbę $\log_5 9$ za pomocą a .

- **17.** Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi i różnymi od 1, to zachodzi równość $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, a następnie oblicz: $\ln 7 \cdot \log_7 e$, $\log 5 \cdot \log_5 100$, $\log_3 8 \cdot \log_2 9$.

18. W 1938 roku amerykański psycholog R.S. Woodworth przeprowadził badania nad szybkością zapominania zdobytej wiedzy, gdy nie jest ona utrwalana. Okazało się, że zjawisko zapominania można opisać za pomocą wzoru:

$$M = 100 - 35 \log(t + 1)$$

M — procent pamiętanych wiadomości
 t — liczba dni, które upłynęły od nauczenia się tych wiadomości



a) Oblicz, jaka część wiadomości została zapomniana podczas badań Woodwortha w czasie pierwszych 5 dni, a jaka w czasie 10 dni. Możesz skorzystać z kalkulatora.

b) Po jakim czasie została zapomniana połowa wiadomości?

Ciekawostka

W 1935 roku amerykański seismolog Charles Richter wpadł na pomysł mierzenia siły trzęsień ziemi na podstawie amplitud drgań wywołanych przez wstrząsy. Początkowo za podstawę swej miary chciał obrać stosunek amplitudy drgań (mierzonej w odległości 100 km od epicentrum) do amplitudy wzorcowej, wynoszącej 10^{-4} cm (odpowiada ona drganiom niewyczuwalnym przez człowieka). Okazało się jednak, że otrzymywał w ten sposób liczby od bardzo małych do bardzo dużych (od 0 do 800 000 000), co utrudniało ich porównywanie. Postanowił więc jako miarę intensywności trzęsień ziemi przyjąć logarytm dziesiętny otrzymywanych liczb.

Tak powstała powszechnie dziś używana skala Richtera. Siłę trzęsienia ziemi oblicza się w tej skali ze wzoru:

$$R = \log \frac{A}{A_0}$$

R — siła trzęsienia ziemi mierzona w stopniach w skali Richtera
 A — amplituda trzęsienia ziemi (w cm)
 A_0 — amplituda wzorcowa (10^{-4} cm)

Na przykład: jeśli amplituda trzęsienia ziemi była 100 razy większa od wzorcowej ($\frac{A}{A_0} = 100$), to $R = \log 100 = 2$. Jeśli natomiast trzęsienie ziemi miało 7 stopni w skali Richtera, to z powyższego wzoru można obliczyć, że było ono 10 mln razy silniejsze od trzęsienia o amplitudzie wzorcowej.

19. Przeczytaj ciekawostkę.

- a)** Ile stopni w skali Richtera miało trzęsienie ziemi o amplitudzie 1 cm?
- b)** Naukowcy oceniają (na podstawie obserwowanych do dziś skutków), że najsilniejsze trzęsienie ziemi nawiedziło Polskę 5 czerwca 1443 roku i miało siłę 6 stopni w skali Richtera. Oblicz amplitudę drgań tego trzęsienia.
- c)** Jedno z najsilniejszych trzęsień ziemi w Polsce o sile 4,8 stopnia w skali Richtera zanotowane przez seismografy miało miejsce w 2010 roku. Ile razy mniejsza była amplituda drgań podczas tego trzęsienia ziemi od amplitudy drgań podczas trzęsienia ziemi, które dotknęło Japonię w roku 2011 i miało siłę 9 stopni w skali Richtera?

Ciekawostka

Wyobraź sobie eksperyment, w którym badana osoba ma na przemian trafić wskaźnikiem w dwa jednakowe paski położone obok siebie.



Łatwo zrozumieć, że czas potrzebny do przesunięcia wskaźnika i trafienia w pasek zależy od szerokości pasków i odległości między nimi. W 1954 roku amerykański psycholog P.M. Fitts podał wzór, który przedstawia ten związek.

$$t = a + b \log \frac{2y}{x}$$

t — czas (w sekundach) potrzebny do wykonania ruchu od paska do paska
 y — odległość (w cm) między paskami
 x — szerokość (w cm) każdego z pasków
 a, b — stałe charakterystyczne dla danego eksperymentu

Wzór Fittsa został doceniony m.in. przez projektantów interfejsów systemów komputerowych. Choć opisuje on prostą prawdę, że trafia się w cel tym łatwiej, im jest on większy i bliżej położony, to pomaga zdecydować, czy lepiej umieszczać duże ikony na większej powierzchni, czy małe, ale za to blisko siebie.

20. W pewnym eksperymencie podobnym do opisanego w powyższej ciekawostce ustalono, że stałe a i b wynoszą: $a = 0,2$ s, $b = 0,5$ s. Zatem:

$$t = 0,2 + 0,5 \log \frac{2y}{x}$$

- a) O ile dłuższy jest czas t w wypadku, gdy $y = 3$ cm i $x = 7$ cm, od czasu t w przypadku, gdy $y = 2$ cm i $x = 5$ cm?
- b) O ile wydłuży się czas t , gdy odległość między paskami zwiększymy dwukrotnie, a o ile — gdy zwiększymy ją trzykrotnie?

MINISPRAWDZIAN

51. Liczba $3 \log_3 2 - 2 \log_3 5 + 1$ jest równa:

- A. $\log_3 1,2$ B. $\log_3 1,6$ C. $\log_3 \frac{27}{32}$ D. $\log_3 0,96$

52. Liczba $\log_2(15 \cdot 16)$ jest od liczby $\log_2 15$:

- A. 16 razy większa B. o 16 większa C. 4 razy większa D. o 4 większa

53. Która z podanych liczb nie jest równa $\log_{\frac{1}{5}} 4$?

- A. $\log_5 \frac{1}{4}$ B. $-\log_{25} 16$ C. $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2$

54. Ile z równości zapisanych w ramce jest prawdziwych?

- A. jedna C. trzy
 B. dwie D. cztery

$$\begin{aligned} 2 \log 5 &= \log 10 & \frac{1}{2} \log 25 &= \log 15 - \log 3 \\ \log 25 + \log 4 &= 10 & \log_{100} 5 &= \frac{1}{2} \log 5 \end{aligned}$$

POWTÓRZENIE

1. Oblicz.

- a) $\log_3 81$ e) $\log 1000$
b) $\log_2 \frac{1}{16}$ f) $\log_7 7$
c) $\log_{\frac{1}{2}} 125$ g) $\log_3 \sqrt[3]{3}$
d) $\log_8 1$ h) $\log_{0,2} 0,04$

2. Oblicz.

- a) $\log_{27} 81$ d) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{2}$
b) $\log_4 \frac{1}{32}$ e) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \sqrt{3}$
c) $\log_{2,5} \frac{8}{125}$ f) $\log_{0,2} 125$

3. Uporządkuj liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$a = \log_5 5^{-\frac{2}{3}} \quad b = \log_3 \left(3^{-\frac{1}{5}} \right)^{-18}$$
$$c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{2}$$

4. Oblicz.

- a) $\log_9 27 + \log_9 3$
b) $\log_4 8 + \log_4 2$
c) $\log_6 180 - \log_6 5$
d) $\log 5 \sqrt[3]{10} - \log 5$
e) $2 \log_3 3\sqrt{10} - 2 \log_3 \sqrt{10}$
f) $3 \log_2 10 - \log_2 125$

5. Liczba p jest 1000 razy większa od liczby q . O ile większa jest liczba $\log p$ od liczby $\log q$?

6. Która z podanych dwóch liczb jest większa? O ile jest większa?

- a) $a = \log_2 5$, $b = \log_2 20$
b) $a = \log 3$, $b = \log 300$
c) $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 24$
d) $a = \log_{0,2} 15$, $b = \log_{0,2} 75$

7. Przedstaw jako jeden logarytm.

- a) $\log_3 2x + \log_3 5y$
b) $\log_5 6x + \log_5 \frac{x}{2}$
c) $2 \log ab + \log 3ab$
d) $-\log_7 x^2 + \log_7 2xy$
e) $3 \log_2 4x - \log_2 \frac{y}{x}$
f) $2 \log \frac{5x}{2} - 3 \log \frac{1}{x}$

8. Niech $\log_5 2 = a$. Przedstaw za pomocą a liczbę $\log_{\sqrt{5}} 2$.

9. Korzystając z przybliżeń $\log 2 \approx 0,3$, $\log 5 \approx 0,7$, oszacuj:

- a) $\log 4$ $\log 25$ $\log 125$ $\log 32$
b) $\log \frac{1}{2^{10}}$ $\log \sqrt[3]{2}$ $\log 0,125$ $\log \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$
c) $\log \frac{2}{5}$ $\log 20$ $\log \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\log \frac{8}{125}$

10. Przedstaw jako jeden logarytm.

- a) $\log_2 5 - 3$ c) $\log_4 9 + \log_2 5$
b) $2 - \log_{\frac{1}{2}} 3$ d) $\log_3 5 - \log_{27} 8 - 1$

11. Zapisz podaną liczbę za pomocą logarytmu dziesiętnego.

- a) $\frac{3}{\log_2 10}$ c) $1 - \frac{1}{\log_4 10}$
b) $\frac{1}{2 \log_3 10}$ d) $\frac{1}{\log_3 100} - 2$

12. Wykaż, że:

$$2 \log_2 10 - \frac{1}{\log 2} = \log_2 10$$

13. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $n \log_6 4 + n \log_6 9$ jest parzysta.

14. Wykaż, że liczba $\log_2 7$ jest niewymierna.

Równania, nierówności, układy równań

Pewien profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, zapytany o swój wiek, odpowiedział:

– Siedem lat temu moja uczelnia była ode mnie siedem razy starsza. Siedemdziesiąt lat temu była ode mnie starsza siedemdziesiąt razy.

W którym roku ów profesor wypowiadał te słowa? Ile miał wtedy lat?

Na te pytania można odpowiedzieć, rozwiązując odpowiedni układ równań.



Rozwiązywanie równań ■ Wielkości wprost proporcjonalne i odwrotnie proporcjonalne ■ Rozwiązywanie nierówności ■ Równania i nierówności z wartością bezwzględną ■ Równania i nierówności z wartością bezwzględną (cd.) ■ Układy równań ■ Układy równań oznaczone, nieoznaczone i sprzeczne ■ Zadania tekstowe ■ Powtórzenie

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ

I

Przykłady równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą:

$$2x - 1 = 4 - 3x$$

$$5x + 2 = 2(x + 1) - x$$

$$\frac{x+2}{9} - \frac{x-4}{3} = x$$

ĆWICZENIE A Każde z równań w ramce obok przekształć do postaci $ax + b = 0$.

Równanie, które można przekształcić do postaci:

$$ax + b = 0,$$

gdzie a i b są danymi liczbami, nazywamy **równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą**.

Niektóre równania, w których niewiadoma występuje w drugiej lub wyższej potęgę, też są równaniami pierwszego stopnia, ale widać to dopiero po ich uproszczeniu. Przypomnijmy, że rozwiązując równania, zapisujemy coraz prostsze równania równoważne, czyli takie, które mają to samo rozwiązanie. Możemy przy tym do obu stron równania dodać lub od obu stron równania odjąć tę samą liczbę. Możemy także obie strony równania pomnożyć lub podzielić przez liczbę różną od zera.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

$$(x - 2)^3 - x^2(x - 6) = 7x + 2$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 6x^2 = 7x + 2$$

$$12x - 8 = 7x + 2$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

... Korzystamy ze wzoru:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

... Liczba 2 spełnia rozważane równanie, więc jest jego rozwiązaniem.

ZADANIE Rozwiąż równanie. a) $(6 + x)^2 = (x + 4)^2$ b) $(2x - 5)(2x + 5) = (1 - 2x)^2$

zadania 1-3 ►

II

Równania, które nie mają rozwiązań, nazywamy **sprzecznymi**. Gdy każda liczba spełnia dane równanie, nazywamy je **tożsamościowym**.

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

$$a) \quad 4x(x + 1) = (2x + 1)^2$$

$$4x^2 + 4x = 4x^2 + 4x + 1$$

$$0 \cdot x = 1$$

Równanie spreczne.

... Nie ma liczby, która po pomnożeniu przez 0 byłaby równa 1. Równanie nie ma rozwiązań.

$$\begin{aligned} \text{b) } & x(x+2) - (x+1)^2 + 1 = 0 \\ & x^2 + 2x - (x^2 + 2x + 1) + 1 = 0 \\ & x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1 + 1 = 0 \\ & 0 \cdot x = 0 \end{aligned}$$

Równanie tożsamościowe.

..... Rozwiązaniem równania jest dowolna liczba.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $(2x-1)(2x+1)+2=(2x+1)^2-4x$

b) $(x+4)(x-6)=(x-1)^2$

zadanie 4 ►

III Niektóre równania, które mają postać proporcji, da się rozwiązać, stosując takie same metody, jak przy równaniach pierwszego stopnia. Trzeba jednak pamiętać, że wartości wyrażeń występujących w mianowniku nie mogą być równe 0.

Jeśli $b \neq 0$ i $d \neq 0$, to proporcję:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

można zastąpić równością:

$$ad = bc$$

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż równanie.

a) $\frac{4-x}{5+x} = \frac{5-x}{x+1}$ Założenia: $5+x \neq 0$ i $x+1 \neq 0$
 $x \neq -5$ $x \neq -1$

$$(4-x)(x+1) = (5-x)(5+x)$$

$$4x + 4 - x^2 - x = 25 - x^2$$

$$3x + 4 = 25$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

..... Jeśli $b \neq 0$ i $d \neq 0$, to proporcję $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ można zastąpić równością $ad = bc$.
 Korzystamy ze wzoru
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

..... Liczba 7 spełnia równanie i założenia, więc jest rozwiązaniem równania.

b) $\frac{6-3x}{x-2} = \frac{1-3x}{x}$ Założenia: $x-2 \neq 0$ i $x \neq 0$
 $x \neq 2$

$$(6-3x) \cdot x = (x-2)(1-3x)$$

$$6x - 3x^2 = x - 3x^2 - 2 + 6x$$

$$0 = x - 2$$

$$x = 2$$

..... Jeśli $b \neq 0$ i $d \neq 0$, to proporcję $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ można zastąpić równością $ad = bc$.

Liczba 2 nie spełnia założenia, więc równanie jest sprzeczne.

..... Równanie nie ma rozwiązań.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $\frac{3x+2}{2+x} = \frac{9x+1}{3x+2}$

b) $\frac{9+3x}{x+3} = \frac{3x}{x+1}$

c) $\frac{2x+6}{4x+1} = \frac{3+x}{2x+6}$

zadania 5-13 ►

ZESTAW ZADAŃ

I 1. Rozwiąż równanie.

a) $3x - (2 - x) = -9$

c) $5x = 10x - 2(x + 5)$

b) $x - (x - 3) = 4x - 8$

d) $-4(2x - 5) = 2(3x + 7)$

2. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{2}{3}(5x - 1)$

c) $\frac{2x-3}{5} = \frac{3}{5} - 2x$

e) $\frac{3x+2}{4} = 3 - \frac{5-2x}{2}$

b) $x - \frac{3}{7}(2x + 3) = \frac{2}{7}x$

d) $\frac{2}{9}x - 1 = \frac{1-3x}{9}$

f) $x - \frac{2x-3}{6} = \frac{1+5x}{3}$

3. Rozwiąż równanie.

a) $4x(2 + x) = (2x - 1)^2$

e) $(5x + 1)(5x - 1) = (3 - 5x)^2$

b) $(6x + 5)^2 = 9x(4x + 7)$

f) $(x + 2)^2 = x(x + 6)$

c) $(3 + 4x)(3 - 4x) = 1 - 8x(2x + 1)$

g) $4x^2(3 - 2x) = (1 - 2x)^3$

d) $(2x - 3)^2 = (1 + 2x)^2$

h) $(x - 2)^3 = x(x - 3)^2$

II 4. W każdej grupie równań wskaż równanie sprzeczne oraz równanie tożsamościowe.

a) $x + (x - 3) = 5$

b) $\frac{3(5x-1)}{5} = 3x$

c) $(x - 2)(x + 2) = x^2$

$x - (x - 4) = 5$

$\frac{2(x+5)}{3} = 0$

$(x - 3)^2 = x^2$

$x - (x - 5) = 5$

$\frac{3(2x-3)}{2} = 3x - 4,5$

$(x + 1)(x - 1) + 1 = x^2$

III 5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{5}{3-x} = \frac{7}{x}$

d) $\frac{x}{x-1} = \frac{x+1}{x+3}$

g) $\frac{x+2}{x-3} = \frac{x-1}{x}$

b) $\frac{1}{x+3} = \frac{5}{2x-3}$

e) $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+2}$

h) $\frac{6x}{3x+1} = \frac{2x-1}{x+2}$

c) $\frac{4}{x-1} = \frac{5}{2x-2}$

f) $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{4x}{2x-1}$

i) $\frac{1-4x}{2x} = \frac{4-2x}{x-2}$

6. Zapisz i rozwiąż odpowiednie równanie.

a) Liczba 3 razy większa od x jest równa połowie sumy liczb x i 7.

b) Iloraz liczby x i liczby o 1 od niej większej jest równy $\frac{3}{5}$.

c) Różnica kwadratu liczby x i kwadratu liczby o 2 mniejszej od x jest równa 40.

d) Iloraz liczby o 5 większej od x przez 4 jest równy ilorazowi liczby 2 razy większej od x przez 6.

e) Liczbę x najpierw powiększono o 20%, a następnie otrzymaną liczbę obniżono o 30%. Wynik był równy 63.

7. Stosunek długości boków pewnego prostokąta jest równy 2:5. Jeden z boków jest o 1 m dłuższy od drugiego. Jaki obwód ma ten prostokąt?

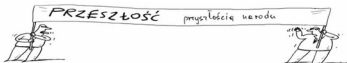
8. Tata Ani jest cukiernikiem. W tłusty czwartek Ania przyniosła do klasy wielkie pudło z pączkami. Antek zjadł $\frac{1}{10}$ wszystkich pączków. Wiesiek i Kazik też okazali się żarłokami — każdy z nich zjadł tylko o 2 pączki mniej niż Antek. Sześciu uczniów zjadło po 3, a Ania i jej dwie koleżanki — po 2 pączki. Reszta uczniów, czyli połowa obecnych, zjadła po jednym pączku. Wychowawca zjadł cztery pączki i w pudle została jeszcze $\frac{1}{4}$ wszystkich pączków. Ile pączków zjedli uczniowie?

9. Jeszcze w zeszłym miesiącu w firmie Macho pracowało 6 pań. W tym miesiącu zatrudniono 7 panów i 2 panie, ale stosunek liczby panów do liczby pań się nie zmienił. Ilu pracowników zatrudnia teraz firma Macho?

10. Do niedawna chłopcy stanowili 30% zespołu pieśni i tańca Biesiada. Wczoraj dołączyło 5 chłopców. Teraz męska część zespołu stanowi 40% liczby wszystkich członków. Jak liczny jest teraz zespół Biesiada?

11. Paweł ma o 100 zł więcej niż Gaweł. Gdyby Paweł oddał Gawłowi połowę swoich pieniędzy, to Gaweł miałby dwa razy więcej pieniędzy niż Paweł. O ile złotych więcej miałby wówczas Gaweł?

12. Kiedyś do partii *Przeszłość* należało 3 razy więcej osób niż do partii *Przyszłość*. W wyniku nieudanych działań w *Przeszłości* 5 osób przeszło do *Przyszłości*. Ostatnio przewodniczący *Przeszłości* przygotował i przeprowadził udaną akcję propagandową, w wyniku której 2 osoby z *Przyszłości* wróciły do *Przeszłości*, a na dodatek przyjęto jeszcze 5 nowych członków. Teraz *Przeszłość* jest dwa razy liczniejsza niż *Przyszłość*. Ile osób należy do *Przeszłości*?



13. Przyjrzyj się rysunkowi. Jaka jest odpowiedź na zadane pytanie?



MINISPRAWDZIAN

51. Ile spośród równań w ramce ma rozwiązanie należące do przedziału $(-3; 1)$?

- A. jedno C. trzy
B. dwa D. cztery

$$x - \frac{2x-1}{3} = 0$$

$$\frac{2x}{1-2x} = \frac{x+1}{2-x}$$

$$8x - 3(2x - 1) = 6$$

$$(3x - 2)(3x + 2) = 3x(3x + 2)$$

52. Które z poniższych równań jest sprzeczne?

- A. $(3x - 2)(3x + 2) = 9x(x - 2)$ C. $4(x + 1)^2 = (2x + 1)^2$
B. $\frac{x}{2x-1} = \frac{2x+1}{4x}$ D. $\frac{2x+5}{3} = \frac{2x+5}{6}$

53. Każdą wypowiedź na forum internetowym można ocenić, przyznając +1, gdy wypowiedź się podoba, lub -1, gdy się nie podoba. Pewną wypowiedź oceniło 57 osób, a suma ocen to +13. Ilu oceniającym osobom ta wypowiedź się podobała?

- A. 13 B. 22 C. 35 D. 44

WIELKOŚCI WPROST PROPORCJONALNE I ODWROTNIE PROPORCJONALNE

- 1 W tabeli przedstawiono, ile złotych trzeba zapłacić za kawałki pewnej wstążki.

x	0,2	0,5	1	1,2	1,5	5	7,5
y	0,10	0,25	0,50	0,60	0,75	2,50	3,75

x — długość wstążki (w metrach)

y — koszt zakupu wstążki (w złotych)

Zauważmy, że dla liczb podanych w tabeli stosunek $\frac{y}{x}$ jest zawsze równy 0,50. Zatem związek między kosztem zakupu a długością wstążki można zapisać w postaci równości:

$$\frac{y}{x} = 0,50$$

Z tej równości wynika, że gdy zwiększa się wielkość x , to tyle samo razy zwiększa się wielkość y .

O zmieniających się wielkościach, których iloraz jest zawsze taki sam, mówimy, że są wprost proporcjonalne.

Zależne od siebie wielkości x i y są **wprost proporcjonalne**, gdy:

$$\frac{y}{x} = a,$$

gdzie a jest stałą i $a > 0$.

PRZYKŁAD 1 Gdy na wadze położono gwoździe z dużej paczki, okazało się, że ważyły 1,05 kg. Po zdjęciu z szalki 24 gwoździ waga wskazała, że pozostałe gwoździe ważą 0,9 kg. Ile sztuk gwoździ było w dużej paczce?

masa gwoździ [kg]	1,05	0,9
liczba gwoździ [szt.]	x	$x - 24$

$$\frac{1,05}{x} = \frac{0,9}{x - 24}$$

Liczba gwoździ i ich masa to wielkości wprost proporcjonalne, więc zachodzi równość ilorazów.

$$1,05(x - 24) = 0,9x$$

$$1,05x - 25,2 = 0,9x$$

$$0,15x = 25,2$$

$$x = 168$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie.

Odp. W dużej paczce było 168 gwoździ.

ZADANIE W słoiku jest 0,9 l miodu, który waży 1,25 kg. Oblicz masę 4,5 l miodu.

zadania 1–8 ►

- III Rozważmy prostokąty o polu 2. W tabeli podano przykłady wymiarów takich prostokątów.

x	0,1	0,2	0,5	1	40
y	20	10	4	2	0,05

Dla liczb podanych w tej tabeli iloczyn xy jest zawsze równy 2. Związek między tymi wielkościami można zapisać w postaci równości:

$$x \cdot y = 2$$

Z tej równości wynika, że gdy zwiększa się liczba x , to tyle samo razy zmniejsza się liczba y .

O zmieniających się wielkościach, których iloczyn jest zawsze taki sam, mówimy, że są odwrotnie proporcjonalne.

Zależne od siebie wielkości x i y są **odwrotnie proporcjonalne**, gdy:

$$y \cdot x = a,$$

gdzie a jest stałą i $a > 0$.

PRZYKŁAD 2 Kierownik schroniska obliczył, że jeśli schronisko odwiedzać będzie 250 turystów dziennie, to zapasów żywności wystarczy na 30 dni. Na ile dni wystarczyłyby tych zapasów, gdyby schronisko odwiedzało dziennie 300 turystów?

liczba osób	250	300
liczba dni	30	x

$$250 \cdot 30 = 300 \cdot x$$

$$x = 25$$

Liczba turystów jest odwrotnie proporcjonalna do liczby dni, na które wystarczy zapasów żywności, więc zapisujemy równość iloczynów.

Rozwiązujemy równanie.

Odp. Zapasów wystarczyłoby na 25 dni.

ZADANIE Hodowca obliczył, że zapas wody w zbiorniku na pastwisku starczy dla 25 krów na 6 dni. Na ile dni starczyłby ten zapas dla 30 krów?

zadania 9–19

ZESTAW ZADAŃ

1. Sprawdź, ile razy wypowiesz frazę: „stół z powyłamywanymi nogami” w ciągu 20 sekund. Ile dni zajęłoby ci wypowiedzenie tej frazy milion razy w tym samym tempie?

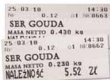


2. Po zmiksowaniu 30 dag truskawek wypełniły one szklankę o pojemności 0,25 l.

- Jaką objętość ma 1,5 kg zmiksowanych truskawek?
- Ile truskawek trzeba zmiksować, aby otrzymać 1,8 l musu?

3. Korzystając z informacji podanych na metkach, oblicz, ile kosztuje większy kawałek sera Gouda.

4. Czas obiegu Ziemi wokół Słońca wynosi 365,25 doby. W tym czasie nasza planeta pokonuje około 340 mln km. Odległość między Warszawą a Nowym Jorkiem wynosi około 6900 km. W jakim czasie Ziemia pokonuje taką odległość?



5. Mrówka, która waży 6 mg, potrafi unieść przedmiot ważący 50 mg. Jaki ciężar mógłby podnieść mężczyzna ważący 70 kg, gdyby był tak silny jak mrówka, a siła ta byłaby wprost proporcjonalna do masy ciała?



- 6. Kostka sześcienna o krawędzi długości 20 cm wykonana z ołowiu waży 91 kg. Ile będzie ważyć ołowiana kostka o krawędzi długości 10 cm?
- 7. Pusta mała beczka o pojemności 20 l waży 3 kg, a duża pusta beczka o pojemności 50 l waży 5 kg. Mała beczka pełna kiszzonej kapusty waży 25 kg. Ile waży duża beczka wypełniona taką kapustą?

8. Lekarstwo Provitt sprzedawane jest w tabletkach o masie 4,2 g i 3,5 g. W większych tabletkach jest o 5 mg więcej witaminy C niż w mniejszych tabletkach. Ile miligramów witaminy C zawiera większa tabletka Provittu?

- II 9. Pan Zenek, kierowca ciężarówki, jedzie zwykle od granicy do domu ze średnią prędkością 60 km/h. Zajmuje mu to 4 godziny i 15 minut. Dziś jechał krócej o pół godziny. Z jaką przeciętną prędkością się poruszał?



10. Dawno temu w pewnym klasztorze dziesięciu mnichów przepisało Biblię w ciągu 300 dni. Ilu równie sprawnych w pisaniu mnichów powinien był dodatkowo zaangażować opat, aby przepisywanie trwało o 50 dni krócej?

11. Agata pocięła wstążkę na 5 jednakowych części. Gdyby podzieliła tę samą wstążkę na 8 jednakowych części, to każda część byłaby o 6 centymetrów krótsza. Jaką długość miała każda z 5 części wstążki?

12. Samochód ciężarowy przywiózł na budowę zapas piasku. W tym celu wykonał 12 kursów. Inny samochód, o ładowności o 2 tony większej, przewiózł taki sam zapas piasku, ale wykonał o 3 kursy mniej. Jaką ładowność ma każdy z tych samochodów? Przyjmij, że w trakcie każdego kursu ładowność samochodu była w pełni wykorzystana.

13. Zając, który biega 1,5 raza szybciej niż wilk, przebiega polanę w 12 sekund. Ile czasu potrzebuje wilk, aby przebiec tę polanę?



14. Dla uczestników rajdu przygotowano kocioł grochówki. Zamiast 40 uczestników w rajdzie wzięło udział 50 osób i rację zupy przypadającą na osobę trzeba było zmniejszyć o 60 ml. Ile litrów grochówki przygotowano na rajd? Ile grochówki przypadło na każdą osobę?



Ciekawostka

Wyobraź sobie deskę podpartą w jednym miejscu. Czy wiesz, że człowiek na takiej huśtawce mógłby się huścić ze słoniem? Wystarczy tylko, by punkt podparcia huśtawki znajdował się znacznie bliżej słonia niż ciebie.

Regułę pozwalającą obliczyć, w którym miejscu należy ustawić punkt podparcia, odkrył grecki matematyk Archimedes (ok. 287–212 r. p.n.e.). Reguła ta, zwana zasadą dźwigni, głosi, że aby dwa przedmioty na huśtawce (dźwigni) były w równowadze, należy je umieścić tak, by odległości od punktu podparcia były odwrotnie proporcjonalne do ich ciężarów.

Zasadę dźwigni można opisać równaniem:



$$Q_1 \cdot d_1 = Q_2 \cdot d_2$$

Po odkryciu zasady dźwigni Archimedes miał powiedzieć: *Dajcie mi punkt podparcia, a poruszę Ziemię.*

Informacje podane w ciekawostce są potrzebne do rozwiązania zadań 15–19.

15. Przeczytaj ciekawostkę. Przyjmij, że słoń waży 5 t i siedzi w odległości 5 m od punktu podparcia, a człowiek waży 50 kg. Oblicz, jak daleko od punktu podparcia huśtawki musiałby usiąść człowiek, by mógł się huścić ze słoniem.



16. Jaki ciężar należałoby ustawić na drugim końcu deski, aby huśtawka pozostała w równowadze?

a)

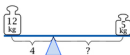


b)



17. W jakiej odległości od punktu podparcia należałoby postawić odważnik o masie 5 kg, aby huśtawka pozostała w równowadze?

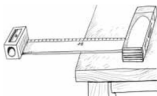
a)



b)



18. Wykorzystując zasadę dźwigni, można oszacować masy małych przedmiotów za pomocą linijki. Popatrz na rysunek obok. Temperówka, guma do żucia o masie 14 g i linijka o długości 30 cm położone są tak, że gdyby przesunąć linijkę (choćby odrobinę) w lewo, to linijka by się przechyliła i temperówka by spadła. Oblicz, ile mniej więcej waży temperówka.



19. Rysunki przedstawiają schematy zawieszonych wag, które pozostają w równowadze. Liczby w kółkach oznaczają ciężar, a liczby przy ramionach wagi oznaczają długości. Jakie ciężary powinny być wpisane w miejscach liter?

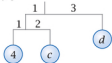
rys. 1



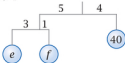
rys. 2



rys. 3



rys. 4



Ciekawostka

Wagi o wielu ramionach, wykorzystujące zasadę dźwigni, są używane przez artystów do tworzenia różnych kompozycji, np. takiej jak na poniższej fotografii.



MINISPRAWDZIAN

51. Taką samą ilością mięsa, jaką zjada 6 lwów, można nakarmić 8 hien. Ilość, jaką zjada 9 lwów, wystarczy dla:

- A. 21 hien B. 12 hien C. 15 hien D. 17 hien

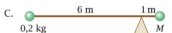
52. Pchła, która ma wysokość 1 mm, potrafi podskoczyć na 13 cm. Na jaką wysokość mógłby skoczyć człowiek o wzroście 1,70 m, gdyby był tak skoczny jak pchła?

- A. 221 m B. 22,1 m C. 221 cm D. $13\frac{1}{13}$ m

53. Sok, który wypełniał kilka pełnych butelek półtoralitrowych, przelano do butelek o pojemności 0,3 l. Teraz sok zajmuje:

- A. o pięć butelek więcej C. pięć razy mniej butelek
B. o pięć butelek mniej D. pięć razy więcej butelek

54. Na rysunkach przedstawiono cztery huśtawki pozostające w równowadze. Na której z nich masa M jest równa 1,2 kg?



ROZWIĄZYWANIE NIERÓWNOŚCI

ĆWICZENIE A Dla każdej z nierówności zapisanej w ramce:

- a) sprawdź, które z liczb: 2, 10, -20 spełniają tę nierówność,
b) podaj przykład liczby (innej niż 2, 10, -20), która spełnia tę nierówność.

Przykłady nierówności:

$$7x - 4 \geq 2$$

$$4x - 6 < x$$

$$\frac{1}{2}x - 5 \leq 0$$

$$\frac{3x}{10} > 4$$

Rozwiązaniem nierówności nazywamy każdą liczbę, która ją spełnia. Nierówność możemy uważać za rozwiązana, jeżeli określimy zbiór wszystkich jej rozwiązań.

ĆWICZENIE B Zapisz dwie dowolne liczby i postaw między nimi odpowiedni znak nierówności. Sprawdź, które z operacji zmieniają zwrot nierówności:

- do obu liczb dodajemy tę samą liczbę (dodatnią lub ujemną),
- od obu liczb odejmujemy tę samą liczbę (dodatnią lub ujemną),
- obie liczby mnożymy przez tę samą liczbę dodatnią,
- obie liczby mnożymy przez tę samą liczbę ujemną,
- obie liczby dzielimy przez tę samą liczbę dodatnią,
- obie liczby dzielimy przez tę samą liczbę ujemną.

Przy rozwiązywaniu nierówności postępujemy bardzo podobnie jak przy rozwiązywaniu równań. Należy jednak pamiętać, że gdy mnożymy lub dzielimy obie strony nierówności przez liczbę ujemną, musimy zmienić zwrot nierówności na przeciwny.

PRZYKŁAD

Rozwiąż nierówność i zaznacz jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $-3x + 4 \leq 10 \quad | -4$

$$-3x \leq 6 \quad | : (-3)$$

$$x \geq -2$$



$$x \in [-2; +\infty)$$

Od obu stron odejmujemy 4.

Obie strony dzielimy przez -3 , zmieniamy zwrot nierówności na przeciwny.

Rozwiązaniami nierówności są wszystkie liczby większe od -2 oraz liczba -2 .

Ilustrujemy zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

Rozwiązanie nierówności możemy przedstawić za pomocą przedziału.

b) $\frac{x-1}{2} < \frac{1}{8}x + \frac{3}{4} \quad | \cdot 8$

$$4(x-1) < x+6$$

$$4x-4 < x+6 \quad | -x+4$$

$$3x < 10 \quad | : 3$$

$$x < 3\frac{1}{3}$$



$$x \in (-\infty; 3\frac{1}{3})$$

Mnożymy obie strony przez 8.

Przekształcamy lewą stronę.

Do obu stron dodajemy $-x+4$.

Obie strony dzielimy przez 3.

Rozwiązaniami nierówności są wszystkie liczby mniejsze od $3\frac{1}{3}$.

Ilustrujemy zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

Rozwiązanie nierówności możemy zapisać za pomocą przedziału.

ZADANIE

Rozwiąż nierówność.

a) $3(2x-5) < 10x+1$

b) $\frac{5x-4}{-3} \geq 2x-6$

zadania 1-3 ►

- III W przykładach na poprzedniej stronie ilustracją zbioru rozwiązań nierówności była półprosta (z początkiem lub bez). Ale nie zawsze tak jest! Przyjrzyj się nierównościom:

$$x - 1 < x$$

$$x + 1 < x$$

Pierwszą z tych nierówności spełnia każda liczba rzeczywista (liczba o 1 mniejsza od x jest zawsze mniejsza od x). Drugiej nierówności nie spełnia żadna liczba (liczba o 1 większa od x nie może być mniejsza od x).

zadania 4–15 ►

ZESTAW ZADAŃ

- ◀ I 1. Rozwiąż nierówności.

$$2a < 1$$

$$5b < -10$$

$$-c \leq 7$$

$$-d \geq -4$$

$$-3e > 9$$

$$-\frac{1}{2}f < 4$$

2. Rozwiąż nierówność i zaznacz jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $4x - 7 < 2x + 3$

e) $3(2 - x) \leq -\frac{2}{3}(6x - 21)$

b) $-x + 4 > -3(x - 1)$

f) $6 - 3x \geq 10x - 3$

c) $2(x + 1) + x \geq 4x$

g) $\frac{4}{3}(x + 25) \leq -0,1(2x - 10)$

d) $-2(x + 6) > 4(3 + 2x)$

h) $7\left(2 - \frac{1}{7}x\right) > -6\left(5 - \frac{1}{2}x\right)$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $\frac{3x}{2} - 1 > \frac{x}{4}$

d) $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+1}{5} \leq \frac{x+1}{10}$

b) $\frac{x}{3} - \frac{3x}{5} \geq -1$

e) $2x - \frac{x-1}{4} < \frac{3x-1}{2} + x$

c) $\frac{x-9}{4} - \frac{2(3x-1)}{3} \geq 0$

f) $\frac{2x+1}{4} - x \geq \frac{1-2x}{2}$

- ◀ II 4. W każdej z grup nierówności wskaż taką, która nie ma rozwiązań, i taką, której rozwiązaniem jest dowolna liczba.

a) $2x + 3 > x + 4$

b) $-3(5 - 2x) \geq 6x$

c) $\frac{4x+5}{2} > 1 + 2x$

$$2x + 5 \geq 2x + 1$$

$$4(3 - 5x) > 1 - 20x$$

$$\frac{4-2x}{5} \geq 3 + x$$

$$2x + 4 < 2x + 3$$

$$-7(1 + 4x) \geq -7x + 4$$

$$\frac{3x-2}{3} \geq x + 5$$

- 5. Rozważmy nierówności:

$$x + 3 < \heartsuit$$

$$3x - 2 \leq \spadesuit$$

$$2(x - 1) > \clubsuit$$

Zastąp symbole $\heartsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$ takimi wyrażeniami, aby otrzymane nierówności:

- a) spełniała każda liczba,

- b) nie miały rozwiązań.

6. Rozwiąż nierówność i zaznacz jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $(2x - 5)^2 \leq 4x^2$

d) $(2x + 5)(2x - 5) < (2x - 9)^2 + 2$

b) $(x - 6)(x + 6) < (x - 6)^2$

e) $(2x - 3)^2 + 5x(x + 5) > (3x - 2)^2$

c) $\frac{(3x - 5)^2}{3} \geq 3x^2 + 5$

f) $x^2 - \frac{2(x - 1)^2}{3} < \frac{(x - 1)(x + 2)}{3}$

7. Ze zbioru A wybierz liczby, które spełniają nierówność:

$$2(x + 1) - 3(4x + 5) \leq -(x - 2)$$

$A = \begin{matrix} -1 & 0 & -2 & 0,01 \\ -1\frac{1}{9} & -1\frac{2}{3} & 1\frac{2}{3} & -1\frac{3}{4} \end{matrix}$

8. Rozwiąż poniższą nierówność, a następnie odpowiedz na pytania.

$$3x - 2(x - 2) \geq 3(x - 4) - 2(2 - 3x)$$

- a) Jakie liczby naturalne należą do zbioru rozwiązań tej nierówności?
b) Ile liczb całkowitych większych od -3 należy do zbioru rozwiązań?
c) Jaka jest najmniejsza liczba parzysta, która nie spełnia tej nierówności?

9. Ile jest liczb dwucyfrowych, które spełniają poniższą nierówność?

$$\frac{6 + x}{2} \geq x - 20$$

10. Ustal, dla jakich wartości zmiennej x wartość wyrażenia $2(3 - x) - 3(x - 1)$:

- a) jest liczbą dodatnią,
b) jest mniejsza od wartości wyrażenia $7(1 - x) - (2x - 2)$.

11. Znajdź wszystkie liczby całkowite, które spełniają jednocześnie dwie podane niżej nierówności.

$$3(x + 2) + 5 \geq 2$$

$$x - \frac{1}{3}(x - 2) > x - \frac{1}{6}$$



12. Popatrz na rysunek obok. Na ile co najmniej pełnych godzin należy wypożyczyć łódź, aby bardziej opłacało się skorzystać z usług firmy Y?

13. Irek ma w indeksie tylko piątki, czwórki i trójki. Trójkę ma najwięcej, o 10 więcej niż piątek. Czwórkę ma 3 razy więcej niż piątek. Ile ma trójkę, czwórkę i piątek, jeśli średnia jego ocen jest niższa niż 3,6?



14. Przyjrzyj się rysunkowi. Dla jakich wartości liczby a pole zacieniowanej figury jest większe od 10?

15. Przyjrzyj się rysunkowi. W kwadracie zaznaczono pewien trapez. Oblicz, dla jakich wartości x pole tego trapezu jest większe od 8.



MINISPRAWDZIAN

51. Zbiór rozwiązań nierówności $x + 2 - (2x + 1) \leq 3$ przedstawiono na rysunku:



52. Ile spośród liczb $-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$ spełnia poniższą nierówność?

$$(2x - 0,5)^2 - 3x(x - 4) < (x + 1,5)^2$$

A. cztery B. pięć C. sześć D. siedem

53. Jaka najmniejsza liczba całkowita spełnia nierówność $2x - 3(x + 1) \leq 4x + 8$?

A. -3 B. -2 C. -1 D. nie ma takiej liczby

54. Z kwadratu o boku 10 wycinamy trapez w sposób pokazany na rysunku. Dla jakiej wartości x pole trapezu będzie mniejsze niż $\frac{1}{3}$ pola kwadratu?



A. $x \in (0; 3\frac{1}{3})$ B. $x \in (3\frac{1}{3}; 5)$ C. $x \in (4\frac{2}{3}; 10)$ D. $x \in (\frac{5}{6}; 5)$

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ

- 1 Metody rozwiązywania równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą można też wykorzystać do wyznaczania liczb spełniających niektóre równania, w których występuje wartość bezwzględna.

ĆWICZENIE A Ustal, ile jest liczb, którymi można zastąpić literę.

$|a| = 4$

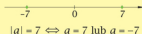
$|b| = 0$

$|c| = -3$

Wartość bezwzględna liczby jest zawsze liczbą nieujemną i wyrażenie $|a|$ możemy zinterpretować jako odległość na osi liczbowej liczby a od 0. Rozważmy równanie:

$|a| = 7$

Spełniają je liczby, których odległość od 0 jest równa 7, czyli liczby 7 i -7 .


$$|a| = 7 \Leftrightarrow a = 7 \text{ lub } a = -7$$

Gdybyśmy w równaniu $|a| = 7$ zastąpili literę a innym wyrażeniem algebraicznym, np. $5 - 3x$, to otrzymalibyśmy równanie, które można również łatwo rozwiązać.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

a) $|5 - 3x| = 7$

$$5 - 3x = 7 \quad \text{lub} \quad 5 - 3x = -7$$

$$-3x = 2 \quad \text{lub} \quad -3x = -12$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad \text{lub} \quad x = 4$$

b) $3 \cdot |5x - 4| = 0 \quad |:3$

$$|5x - 4| = 0$$

$$5x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$|5 - 3x| = 7$



... Równanie ma dwa rozwiązania.

... Przekształcamy równanie do postaci $|a| = b$.

... Liczba 0 to jedyna liczba, której wartość bezwzględna jest równa 0.

$$c) 5 \cdot |2x + 3| + 6 = 0 \quad | -6$$

$$5|2x + 3| = -6 \quad | :5$$

$$|2x + 3| = -\frac{6}{5}$$

Równanie sprzeczne.

Przekształcamy równanie do postaci $|a| = b$.

Nie ma liczb, których wartość bezwzględna jest ujemna.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $|x + 6| - 8 = 0$

b) $\frac{|4 - 3x|}{-5} = 2$

c) $4 \cdot |2x - 6| + 3 = 3$

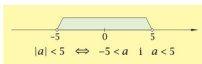
zadania 1-4 ►

III ĆWICZENIE B Podaj przykłady kilku liczb dodatnich i kilku liczb ujemnych, których wartość bezwzględna jest mniejsza od 5.

Rozważmy nierówność:

$$|a| < 5$$

Tę nierówność spełniają liczby, których odległość od 0 (na osi liczbowej) jest mniejsza od 5.



Gdybyśmy w nierówności $|a| < 5$ literę a zastąpili innym wyrażeniem algebraicznym, np. $7 - 3x$, otrzymalibyśmy nierówność $|7 - 3x| < 5$, którą można łatwo rozwiązać.

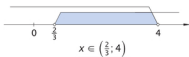
PRZYKŁAD 2 Rozwiąż nierówność $|7 - 3x| < 5$.

$$|7 - 3x| < 5$$

$$7 - 3x > -5 \quad \text{i} \quad 7 - 3x < 5$$

$$-3x > -12 \quad \text{i} \quad -3x < -2$$

$$x < 4 \quad \text{i} \quad x > \frac{2}{3}$$



Zaznaczamy zbiory rozwiązań obu nierówności na osi; wspólna część tych zbiorów to zbiór rozwiązań nierówności $|7 - 3x| < 5$.



ZADANIE Rozwiąż nierówność.

a) $|x - 9| < 4$

b) $|7 + 2x| \leq 3$

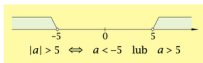
zadanie 5 ►

III **ĆWICZENIE C** Podaj przykłady kilku liczb dodatnich i kilku liczb ujemnych, których wartość bezwzględna jest większa od 5.

Rozważmy teraz nierówność:

$$|a| > 5$$

Spełniają ją te liczby, których odległość od zera (na osi liczbowej) jest większa od 5, a więc liczby mniejsze od -5 , a także liczby większe od 5.



Zastępując w nierówności $|a| > 5$ literę a innym wyrażeniem, np. $3 - 4x$, otrzymalibyśmy nierówność $|3 - 4x| > 5$, którą można łatwo rozwiązać.

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż nierówność $|3 - 4x| > 5$.

$$|3 - 4x| > 5$$

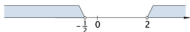
$$3 - 4x < -5 \quad \text{lub} \quad 3 - 4x > 5$$

$$-4x < -8$$

$$-4x > 2$$

$$x > 2$$

$$x < -\frac{1}{2}$$



$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(2; +\infty\right)$$

Zaznaczamy zbiory rozwiązań obu nierówności na osi; suma tych zbiorów to zbiór rozwiązań nierówności $|3 - 4x| > 5$.

ZADANIE Rozwiąż nierówność.

a) $|x + 8| \geq 7$

b) $|4 - 3x| > 8$

ĆWICZENIE D Przyjrzyj się podanym nierównościom. Nie rozwiązując ich, wskaż te, które nie mają rozwiązań, te, których rozwiązaniem jest dowolna liczba, oraz te, które mają tylko jedno rozwiązanie.

$$|2a - 1| \leq -3$$

$$|8c - 9| \geq -5$$

$$\left|\frac{d}{2} + 6\right| + 4 < 0$$

$$5 + |4e - 7| \geq 5$$

$$4 - |f + 10| \geq 4$$

zadania 6-10

ZESTAW ZADAŃ

I 1. Rozwiąż równanie.

a) $|3x + 2| = 7$

d) $7 + |3y| = 9$

g) $\frac{|x+1|}{2} = 3$

b) $\left| \frac{1-x}{2} \right| = 3$

e) $3 \cdot |1 - 2w| - 6 = 0$

h) $6 - |10 - 4t| = 2$

c) $2 \cdot |x - 3| = 8$

f) $5 - |4 - x| = 5$

i) $\frac{|2x-1|+10}{2} = 5$

2. Nie rozwiązując poniższych równań, uzasadnij, że są to równania sprzeczne.

$$5 + |2x + 7| = 4$$

$$1 - |y + 1| = 3$$

$$|z| - 3 \cdot |z| = 8$$

3. Rozwiąż równanie.

a) $|x - 3| = |2x|$

b) $|x + 4| = |2 - x|$

c) $|2x + 5| = |1 - 2x|$

Wskazówka: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ lub $a = -b$.

4. Rozwiąż równanie.

a) $||x| + 1| = 7$

b) $|3 - |2x + 1|| = 15$

c) $||2 - 3x| - 5| = 5$

II 5. Rozwiąż nierówność.

a) $|2x| < 9$

b) $|x - 2| \leq 1$

c) $|3y + 5| \leq 4$

III 6. Rozwiąż nierówność.

a) $|x + 3| > 3$

b) $|4z + 1| > 5$

c) $|5 - 2x| \geq 1$

7. Rozwiąż nierówność.

a) $3 + |2w - 1| \leq 5$

c) $|3 - 5x| - 2 > 0$

e) $\frac{|1-3x|}{2} - 2 < 0$

b) $2 \cdot |3 + 4p| \geq 6$

d) $7 - 2 \cdot |t + 1| > 0$

f) $-\frac{|2v|+1}{3} \geq 3$

8. Nie rozwiązując poniższych nierówności, uzasadnij, że każdą z nich spełnia dowolna liczba rzeczywista.

$$|3x - 7| + 2 \geq 1$$

$$-7 \cdot \left| 1 - \frac{y}{2} \right| \leq 0$$

$$5 \geq 4 - |z - 1|$$

9. Rozwiąż nierówność.

a) $||x| - 5| > 0$

c) $|2 - |t - 1|| > 10$

b) $||z| + 1| < 6$

d) $|4 - |3y - 1|| \leq 7$

Warto wiedzieć

Zauważ, że odległość między liczbami a i b na osi liczbowej jest równa $a - b$, gdy $a > b$, lub jest równa $b - a$, gdy $b > a$. W obu tych przypadkach odległość tę możemy zapisać, używając wartości bezwzględnej, jako $|a - b|$.

Tę własność wartości bezwzględnej możemy wykorzystać do geometrycznej interpretacji niektórych równań i nierówności. Na przykład rozwiązaniami nierówności $|x - 2| > 7$ są liczby, których odległość od 2 na osi liczbowej jest większa niż 7.



Nierówność $|x + 1| < 6$ można zapisać w postaci $|x - (-1)| < 6$, zatem tę nierówność spełniają liczby, których odległość od liczby -1 na osi liczbowej jest mniejsza niż 6.



10. Przeczytaj ciekawostkę.

- a) Zapisz równanie, którego rozwiązaniami są wszystkie liczby, których odległość od liczby -9 na osi liczbowej jest równa 10.
- b) Nie wykonując żadnych przekształceń algebraicznych, zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności $|x - 5| \leq 3$.
- c) Zapisz nierówności z wartością bezwzględną, których zbiory rozwiązań są przedstawione na rysunkach.

rys. 1



rys. 2



rys. 3



rys. 4



MINISPRAWDZIAN

S1. Które z równań spełniają dwie liczby parzyste?

- A. $|x + 5| = 4$ B. $|x + 4| = 3$ C. $|x - 7| = 5$ D. $|x - 6| = 0$

S2. Na rysunku przedstawiono rozwiązanie jednej z poniższych nierówności. Wskaż tę nierówność.



- A. $|x - 2| > 2$ B. $|3x + 1| > 3$ C. $|3 + 2x| > 4$ D. $|2x - 3| > 5$

S3. Która z nierówności ma wśród rozwiązań najwięcej liczb całkowitych?

- A. $|2x + 6| \leq 4$ B. $\left|6 + \frac{1}{3}x\right| < 3$ C. $|3x - 4| \leq 2$ D. $|5 - x| < 1$

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ (CD.)

- 1 Umiesz już rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną, które można tak przekształcić, aby po jednej stronie było wyrażenie w wartości bezwzględnej, a po drugiej stronie — liczba.

Pokażemy teraz, jak można rozwiązywać nieco bardziej skomplikowane równania i nierówności z wartościami bezwzględnymi.

ĆWICZENIE A Ustal, jaki warunek muszą spełniać liczby a , b , c , aby spełnione były równości:

$$|a| = a$$

$$|b + 2| = b + 2$$

$$|c + 1| = -(c + 1)$$

Wartość bezwzględną liczby a można zdefiniować tak:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

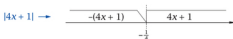
Literę a można zastąpić dowolnym wyrażeniem, zatem na przykład wyrażenie $|4x + 1|$ można zapisać bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

$$|4x + 1| = \begin{cases} 4x + 1 & \text{dla liczb } x \text{ spełniających warunek } 4x + 1 \geq 0 \\ -(4x + 1) & \text{dla liczb } x \text{ spełniających warunek } 4x + 1 < 0 \end{cases}$$

Zapis ten można uprościć:

$$|4x + 1| = \begin{cases} 4x + 1 & \text{dla } x \geq -\frac{1}{4} \\ -(4x + 1) & \text{dla } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Liczba $-\frac{1}{4}$ dzieli oś liczbową na dwa przedziały, więc wyrażenie $|4x + 1|$ można zapisać bez symbolu wartości bezwzględnej, rozważając dwa przypadki, które możemy zilustrować na osi liczbowej.



ĆWICZENIE B Korzystając z powyższej ilustracji, zastąp równanie $|4x + 1| - x = 2$ odpowiednim równaniem bez wartości bezwzględnej:

a) dla $x \in (-\infty; -\frac{1}{4})$

b) dla $x \in (-\frac{1}{4}; +\infty)$

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż poniższe równanie.

$$|x+2| + 3x = 8$$

1. $x \in (-\infty; -2)$ 2. $x \in (-2; +\infty)$

$$-(x+2) + 3x = 8$$

$$x+2 + 3x = 8$$

$$-x-2 + 3x = 8$$

$$4x = 6$$

$$x = 5$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$5 \notin (-\infty; -2)$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{3}{2}$.

ZADANIE Rozwiąż równanie $|3x-6| - 2x = 1$.

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{dla } x < -2 \end{cases}$$

Informacje te przedstawiamy na rysunku pomocniczym.

Rozważamy dwa przypadki. W każdym zapisujemy równanie bez symbolu wartości bezwzględnej, rozwiązujemy je i sprawdzamy, czy otrzymana liczba spełnia założony warunek.

Z otrzymanych liczb tylko $\frac{3}{2}$ spełnia założony warunek.

zadanie 1 ►

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż poniższe równanie.

$$|3-x| - |2x+10| = 5$$

1. $x \in (-\infty; -5)$

$$3-x - (-(2x+10)) = 5$$

$$3-x + 2x + 10 = 5$$

$$x = -8$$

2. $x \in (-5; 3)$

$$(3-x) - (2x+10) = 5$$

$$3-x-2x-10 = 5$$

$$x = -4$$

3. $x \in (3; +\infty)$

$$-(3-x) - (2x+10) = 5$$

$$-3+x-2x-10 = 5$$

$$x = -18, \text{ ale } -18 \notin (3; +\infty)$$

Odp. Rozwiązaniami równania są liczby -8 i -4 .

ZADANIE Rozwiąż równanie $|5-x| + |3x-1| = 14$.

$$|3-x| = \begin{cases} (3-x) & \text{dla } x \leq 3 \\ -(3-x) & \text{dla } x > 3 \end{cases}$$

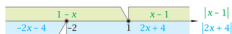
$$|2x+10| = \begin{cases} 2x+10 & \text{dla } x \geq -5 \\ -(2x+10) & \text{dla } x < -5 \end{cases}$$

$x = -8$ spełnia warunek $x \in (-\infty; -5)$

$x = -4$ spełnia warunek $x \in (-5; 3)$

zadanie 2 ►

PRZYKŁAD 4 Rozwiąż nierówność $|x-1| + |2x+4| > 1-2x$ i zaznacz jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej.



$$|x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{dla } x < 1 \\ x-1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

$$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4 & \text{dla } x \geq -2 \\ -2x-4 & \text{dla } x < -2 \end{cases}$$

1. $x \in (-\infty; -2)$

$$1-x-2x-4 > 1-2x$$

$$-x > 4, \text{ czyli } x < -4$$



$$x \in (-\infty; -2) \cap (-\infty; -4) = \underline{(-\infty; -4)}$$

Dla $x \leq -2$:

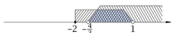
$$|x-1| = 1-x \text{ i } |2x+4| = -2x-4$$

Sprawdzamy, które z liczb spełniających nierówność $x < -4$ należą do rozważanego przedziału.

2. $x \in (-2; 1)$

$$1-x+2x+4 > 1-2x$$

$$3x > -4, \text{ czyli } x > -\frac{4}{3}$$



$$x \in (-2; 1) \cap (-\frac{4}{3}; +\infty) = \underline{(-\frac{4}{3}; 1)}$$

Dla $-2 \leq x < 1$:

$$|x-1| = 1-x \text{ i } |2x+4| = 2x+4$$

Sprawdzamy, które z liczb spełniających nierówność $x > -\frac{4}{3}$ należą do rozważanego przedziału.

3. $x \in (1; +\infty)$

$$x-1+2x+4 > 1-2x$$

$$5x > -2, \text{ czyli } x > -\frac{2}{5}$$

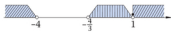


$$x \in (1; +\infty) \cap (-\frac{2}{5}; +\infty) = \underline{(1; +\infty)}$$

Dla $x \geq 1$:

$$|x-1| = x-1 \text{ i } |2x+4| = 2x+4$$

Sprawdzamy, które z liczb spełniających nierówność $x > -\frac{2}{5}$ należą do rozważanego przedziału.



$$x \in \underline{(-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{3}; +\infty)}$$

Zbiór rozwiązań nierówności $|x-1| + |2x+4| > 1-2x$ jest sumą przedziałów.

Odp. Rozwiązaniami nierówności są liczby ze zbioru $(-\infty; -4) \cup (-\frac{4}{3}; +\infty)$.

ZADANIE Rozwiąż nierówność $|2x-3| - |x+2| < 3+2x$ i zaznacz jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

ZESTAW ZADAŃ

I 1. Rozwiąż równanie.

a) $|x| - x = 2$

c) $3x + |5x + 8| = 0$

e) $x - 4|x - 1| + 5 = 0$

b) $|x - 2| + 2x = 4$

d) $2x - |2x + 3| = -3$

f) $2|3x + 8| = 3x + 10$

II 2. Rozwiąż równanie.

a) $|x - 1| + |x| = 5$

d) $|2 - x| - 1 = |1 - 5x|$

b) $|x - 3| - |x| = 3$

e) $|x - 8| + 4|x + 4| = 5x + 8$

c) $|x + 2| - |4 - x| = 7$

f) $3|x + 4| - 5|x - 1| = 25 + x$

III 3. Rozwiąż nierówność.

a) $|x - 2| > x$

c) $4 - 3|x + 2| > 2x$

e) $10 + |11x - 9| > 10x$

b) $3x + |2x - 5| \leq 0$

d) $2|3x - 4| - 5x < 1$

f) $|8x + 7| \leq 5x - 6$

IV 4. Rozwiąż nierówność. Zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

a) $|2x| + |x - 4| \geq 3$

d) $|2x + 1| - |x + 2| \geq 3$

b) $|x - 1| - |x| \leq 0$

e) $|x + 6| - |x + 3| \geq 8x + 11$

c) $|x - 7| + |x + 2| > 9$

f) $|x - 5| + |x + 8| - 2x < 15$

5. Dla jakiej liczby a równanie $|x - 1| + |x + 1| = a$ ma nieskończenie wiele rozwiązań?

6. Udowodnij, że równanie $|x - a| + |x - b| = 1$ ma nieskończenie wiele rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy odległość liczb a i b na osi liczbowej jest równa 1.

7. Nie rozwiązując nierówności, uzasadnij, że:

a) nierówność $5 + |3x - 1| < 5 - |x - 1|$ nie ma rozwiązań,

b) nierówność $|4x - 7| + |2x + 3| > 0$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej.

MINISPRAWDZIAN

51. Suma rozwiązań równania $|x - 2| - |2x - 10| = 2$ wynosi:

A. $1\frac{1}{3}$

B. 8

C. $10\frac{2}{3}$

D. 12

52. Ustal, który z podanych przedziałów zawiera zbiór rozwiązań nierówności $|x - 3| + |x - 2| \leq 1$.

A. $(-2; 1)$

B. $(1; 4)$

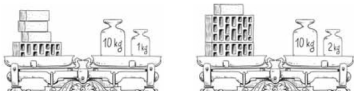
C. $(4; 6)$

D. $(6; 9)$

UKŁADY RÓWNAŃ

- 1 Przyjrzyj się rysunkom. Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie:

Ile waży jedna cegła, a ile — jeden pustak?



Przyjmijmy następujące oznaczenia:

x — masa cegły (w kg)

y — masa pustaka (w kg)

Informacje podane na rysunkach można opisać dwoma równaniami:

$$3x + y = 11$$

$$x + 2y = 12$$

Aby ustalić masę cegły i pustaka, musimy znaleźć taką parę liczb x i y , która spełnia oba równania jednocześnie. Tak postawiony problem można zapisać w postaci tzw. **układu równań**.

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ x + 2y = 12 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \vdots \\ \text{Zapisujemy równania jedno pod} \\ \text{drugim i łączymy je klamrą.} \end{array}$$

Rozważmy najpierw pierwsze z równań tego układu równań. Łatwo sprawdzić, że równanie $3x + y = 11$ spełnia para liczb $x = 3$ i $y = 2$, a także para $x = 2,5$ i $y = 3,5$. Można znaleźć wiele par liczb spełniających to równanie.

ĆWICZENIE a) Zastąp symbole odpowiednimi liczbami tak, aby otrzymane pary liczb spełniały równanie $3x + y = 11$.

$$x = 1 \text{ i } y = \heartsuit \quad x = \clubsuit \text{ i } y = 5 \quad x = \frac{1}{3} \text{ i } y = \spadesuit$$

b) Podaj przykłady par liczb, które spełniają równanie $x + 2y = 12$.

c) Która z par liczb otrzymanych w podpunkcie a) spełnia także równanie $x + 2y = 12$?

Rozwiązując powyższe ćwiczenie, można zauważyć, że para liczb $x = 2$ i $y = 5$ spełnia zarówno pierwsze, jak i drugie równanie układu równań. Mamy więc odpowiedź na nasze pytanie: cegła waży 2 kg, a pustak 5 kg.

Układy równań służą do zapisywania i rozwiązywania tych zadań i problemów, w których występuje więcej niż jedna niewiadoma.

Przykłady układów równań:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3v = 4s \\ s = 2v + 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ y - z = 4 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

zadania 1-4 ►

- II Jeśli układ tworzą dwa równania z dwiema niewiadomymi, to parę liczb, która spełnia oba te równania jednocześnie, nazywamy **rozwiązaniem układu równań**.

Z historii

Rozwiązywaniem układów równań zajmowano się już ponad 3000 lat temu! Najstarsze przykłady układów równań pochodzą z glinianych tabliczek, odkrytych podczas wykopalisk archeologicznych na terenie starożytnej Babilonii. Układy te są zapisane pismem klinowym, które w niczym nie przypomina współczesnej symboliki matematycznej.

Jednak metody ich rozwiązywania wynalezione przez starożytnych rachmistrzów niewiele się różnią od metod stosowanych dzisiaj.



Jedną z metod rozwiązywania układów równań jest **metoda podstawiania**, którą ilustruje poniższy przykład.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 2x + 3y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ 2(-4y) + 3y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ -5y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \cdot (-5) \\ y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = -5 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy x . Korzystając z równości $x = -4y$ w drugim równaniu, w miejsce x podstawiamy $-4y$.

Pierwsze równanie przepisujemy, a drugie równanie (z jedną niewiadomą y) rozwiązujemy.

Ponieważ $y = -5$, więc możemy obliczyć x (z pierwszego równania).

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = 20$ i $y = -5$.

ZADANIE Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 5x = 4 \end{cases}$

Przy rozwiązywaniu układu równań metodą podstawiania można pozwolić sobie na uproszczenie zapisu. Gdy otrzymamy równanie z jedną niewiadomą, możemy je rozwiązać oddzielnie, nie przepisując za każdym razem układu dwóch równań.

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} 2(x+1) = 3y \\ y + 2x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2 = 3y \\ y = 10 - 2x \end{cases}$$

$$2x + 2 = 3(10 - 2x)$$

$$2x + 2 = 30 - 6x$$

$$8x = 28$$

$$x = 3,5$$

$$y = 10 - 2 \cdot 3,5$$

$$\begin{cases} x = 3,5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Pierwsze równanie przekształcamy, z drugiego równania wyznaczamy y .

W pierwszym równaniu w miejsce y podstawiamy $10 - 2x$ i rozwiązujemy otrzymane równanie.

Aby obliczyć wartość y , wstawiamy $3,5$ zamiast x do równania $y = 10 - 2x$.

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = 3,5$ i $y = 3$.

ZADANIE Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 4y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - 3x = 2 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

zadania 5-7 ►

III Kolejne przykłady przedstawiają inny sposób rozwiązywania układów równań — **metodę przeciwnych współczynników**.

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż układ równań.

$$+ \begin{cases} 2x + 6y = 15 \\ 3x - 6y = 25 \end{cases}$$

$$5x = 40$$

$$x = 8$$

$$2 \cdot 8 + 6y = 15$$

$$y = -\frac{1}{6}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Współczynniki przy niewiadomej y są liczbami przeciwnymi; dodajemy do siebie lewe i prawe strony obu równań, pozbywając się w ten sposób jednej niewiadomej, bowiem $6y + (-6y) = 0$.

Otrzymaną wartość $x = 8$ wstawiamy w miejsce x do jednego (dowolnego) równania układu i obliczamy wartość niewiadomej y .

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = 8$ i $y = -\frac{1}{6}$.

ZADANIE Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 7x + 2y = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x - 2y = 13 \\ 4x + 11y = 14 \end{cases}$

Przypadek, gdy współczynniki przy tej samej niewiadomej są liczbami przeciwnymi, zdarza się raczej rzadko. Do takiej sytuacji można jednak w prosty sposób doprowadzić.

PRZYKŁAD 4 Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} 13x + 3y = 1 \\ 2x + y = 5 \quad | \cdot (-3) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 13x + 3y = 1 \\ -6x - 3y = -15 \end{cases}$$

$$7x = -14$$

$$x = -2$$

$$2 \cdot (-2) + y = 5$$

$$y = 9$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 9 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony drugiego równania przez -3 ; otrzymamy w ten sposób układ, w którym współczynniki przy zmiennej y będą liczbami przeciwnymi.

Dodajemy równania stronami.

Obliczamy wartość x .

Wstawiamy $x = -2$ do jednego (dowolnego) równania układu.

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = -2$ i $y = 9$.

ZADANIE Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 5x - y = 10 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

zadanie 8–12 ►

IV Czasami, aby skorzystać z metody przeciwnych współczynników, trzeba oba równania układu pomnożyć przez odpowiednią liczbę.

PRZYKŁAD 5 Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 \quad | \cdot (-3) \\ 3x + 5y = 2 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -6x - 12y = -9 \\ 6x + 10y = 4 \end{cases}$$

$$-2y = -5 \quad | : (-2)$$

$$y = 2,5$$

$$2x + 4 \cdot 2,5 = 3$$

$$2x = -7$$

$$x = -3,5$$

$$\begin{cases} x = -3,5 \\ y = 2,5 \end{cases}$$

Mnożymy oba równania przez takie liczby, aby otrzymać przeciwne współczynniki przy niewiadomej x .

Korzystamy z pierwszego równania układu, aby obliczyć wartość x .

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $x = -3,5$ i $y = 2,5$.

ZADANIE Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -\frac{3}{4}x + 5y = 20 \\ \frac{3}{5}x - 3y = -6 \end{cases}$

zadania 13–24 ►

ZESTAW ZADAŃ

- I** 1. Sprawdź w pamięci, które z podanych obok par liczb spełniają równanie $3y - x = 10$, a które spełniają równanie $2x - 3y + 11 = 0$. Wskaż parę, która spełnia układ równań:

$$\begin{cases} 3y - x = 10 \\ 2x - 3y + 11 = 0 \end{cases}$$

$$A: x = 2 \quad i \quad y = 4$$

$$B: x = 0,5 \quad i \quad y = 4$$

$$C: x = -1 \quad i \quad y = 3$$

$$D: x = 5 \quad i \quad y = 5$$

2. Zapisz dowolny układ równań, którego rozwiązaniem jest para liczb $x = 1$ i $y = 2$.

3. Rozwiąż w pamięci układ równań.

a) $\begin{cases} 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4y - x = 6 \\ 17y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 10 = 50 \\ y = 2x \end{cases}$

4. Podany układ równań spełnia para liczb naturalnych. Zgadnij, jaka to para.

a) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x = y \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$

- II** 5. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3m + n = 9 \\ 2m - 5n = -11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x = 4 - 2y \\ 4x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + 5y = -17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4a - b = 2 \\ 3a + 7b = 1,5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ x + 5y = -9,5 \end{cases}$

6. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

a) $\begin{cases} 3x = 6 - 3y \\ 5x + 2y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ 5x + 3y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 8 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5y = 10x + 5 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0,4x + 0,3y = 1,4 \\ 0,1x + 3y = 2,3 \end{cases}$

7. Zapisz podane informacje w postaci układu równań i znajdź jego rozwiązanie.

a) Frytki kosztują x złotych, a sok kosztuje y złotych. Andrzej kupił 2 porcje frytek i sok i zapłacił 7 zł. Kamila kupiła jedną porcję frytek i 2 soki i zapłaciła 6,50 zł.

b) W pewnej klasie jest x dziewcząt i y chłopców, razem 27 uczniów. Gdyby chłopców było dwa razy więcej, a dziewcząt dwa razy mniej, to klasa liczyłaby 24 uczniów.

8. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ -x - 3y = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 1,1y = 0,7 \\ 0,5x + 1,1y = 4,3 \end{cases}$

9. Pomnóż obie strony równania przez taką liczbę, aby współczynnik przy zmiennej y był równy -2 .

a) $x + 2y = -13$

c) $-x + 4y = 2$

e) $3x - 3y = 1$

b) $3x + y = -5$

d) $x - \frac{1}{2}y = 1$

f) $x + \frac{3}{4}y = 0$

10. Równania podane w zadaniu 9 przekształć tak, aby współczynnik przy zmiennej x był równy 2.

11. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3u + 2v = 2 \\ 5u + 4v = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5 = 3x - y \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ -x - 2y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3s + 5t = -6 \\ 1,5s - 2t = -3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ y + 3x = -5 \end{cases}$



12. Luty i skrupuły to dawne jednostki masy. Pan Albert twierdzi, że 2 luty i 5 skrupułów to 30,624 g. Pan Dionizy twierdzi, że 4 luty i 10 skrupułów to 61,248 g. Pan Zenobiusz twierdzi, że 8 lutów i 20 skrupułów to 120,496 g. Wiadomo, że dwóch z tych panów mówi prawdę, a jeden kłamie. Który kłamie?

13. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 10 \\ 5x + 5y = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + 5y = 12,3 \\ 3x - 2y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5p - 2r = 21 \\ 3p + 5r = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5v_1 + 4v_2 = 4 \\ 7v_1 + 5v_2 = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x - 0,2y = 35 \\ 2,5x - 5y = 5 \end{cases}$

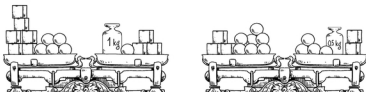
14. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania oraz metodą przeciwnych współczynników. Rozstrzygnij, która metoda jest wygodniejsza.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 0,5 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 8x + \frac{1}{2}y = 35 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

15. Przyjrzyj się rysunkom. Oblicz, ile waży kostka, a ile — kulka.



16. Zapisz i rozwiąż odpowiedni układ równań.

- Liczba x jest o 5 mniejsza od liczby y . Liczba o 1 większa od y jest 3 razy większa od x .
- Liczba a jest o 3 większa od b . Średnia arytmetyczna liczb a i b jest równa 14,5.
- Liczba x jest o 8 mniejsza od liczby y . Liczba y jest 3 razy większa od liczby x .
- Liczba u jest o 6 większa od liczby v . Suma liczb u i v jest 4 razy większa od v .
- Liczba u jest o 5 większa od v , a trzecia część liczby u jest równa połowie liczby v .
- Liczba o 5 większa od x jest o 2 mniejsza od y . Liczba 2 razy mniejsza od x jest 4 razy mniejsza od y .
- Liczba p jest o 3 większa od połowy liczby r , a suma liczb p i r jest równa 18.

17. Figury przedstawione na każdym z rysunków zostały ułożone z dwóch rodzajów elementów. Ustal, jakie pola mają te elementy.

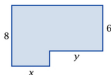


Pole = 16,5



Pole = 29

18. Na podstawie informacji podanych pod rysunkami oblicz, jakie długości mają odcinki oznaczone literami x , y , a , b , m i n .



Obwód = 40
Pole = 80

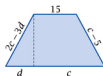
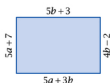


Obwód = 34
Pole = 30



Obwód = 52
Pole = 94

19. Poniższe rysunki przedstawiają prostokąt, trójkąt równoboczny i trapez równoramienny. Oblicz a , b , x , y , c i d .



20. Rozwiąż układ równań.

$$a) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1\frac{1}{3} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 2\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x+2}{5} - 2y = 5 \\ x - \frac{y+2}{6} = 3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{3x-1}{5} + \frac{2y-3}{4} = \frac{3(y+1)}{2} \\ \frac{x+y}{4} - \frac{3y-1}{2} = \frac{x-6y}{4} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y = 2 \\ \frac{1}{2}(2x - y) = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x}{3} = 4 \\ \frac{x-y}{2} + \frac{y}{3} = -3 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \frac{3x-2}{3} - \frac{2x+y}{6} = x + \frac{1}{6} \\ x + y - \frac{-x+y}{5} = \frac{1}{5} - 0,8x \end{cases}$$

21. Ułóż i rozwiąż odpowiedni układ równań.

- a) Liczba o 20% większa od x jest o 10 mniejsza od y . Liczba o 20% mniejsza od y jest o 6 większa od x .
- b) Liczba o 50% mniejsza od liczby y jest o 1 większa od liczby x . 60% liczby x stanowi 25% liczby y .
- c) Suma 30% liczby x i 40% liczby y jest równa 79, a 30% sumy liczb x i y wynosi 66.
- d) Liczba x jest o 10% większa od liczby y . Liczba o 2 mniejsza od y stanowi 90% liczby x .
- e) Liczba m stanowi 30% liczby n , a suma liczb m i n jest równa 65.
- f) Suma $p\%$ liczby 6 i $r\%$ liczby 8 wynosi 5. Suma $r\%$ liczby 6 i liczby o $p\%$ większej od 8 wynosi 12,8.

- 22. Dla jakich wartości a i b rozwiązaniem układu równań zapisanego obok jest para liczb $x = 3$ i $y = -2$?

$$\begin{cases} ax + by = 4 \\ bx - ay = 7 \end{cases}$$

- 23. Rozwiąż układ równań.

$$a) \begin{cases} 2x + 5y + 3z = 8 \\ 11x + 11y - 6z = -7 \\ \frac{1}{2}x - y - \frac{2}{3}z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2y + 1 = -z - \frac{2}{3}x \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 2y + z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} a + b + c + d = 10 \\ a - b + c - d = -2 \\ a + b - c - d = -4 \\ a + b + c - d = 2 \end{cases}$$

24. Suma trzech liczb x , y , z jest równa 18. Liczba z jest równa sumie liczb x i y , a liczba y jest o 5 większa od liczby x . Znajdź x , y i z .

MINISPRAWDZIAN



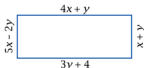
51. Na rysunku obok litery a i b oznaczają pewne liczby. Suma tych liczb jest równa:

- A. 10 B. 20 C. 40 D. 70

52. Rozwiązaniem układu równań podanego obok jest para liczb, których iloczyn jest równy:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 4x - 3y = 14 \end{cases}$$

- A. 1,5 B. 71,5 C. 10 D. -110



53. Obwód prostokąta narysowanego obok jest równy:

- A. 46 B. 9,1 C. 33 D. 14

UKŁADY RÓWNAŃ OZNACZONE, NIEOZNACZONE I SPRZECZNE

1 Każdy z układów równań w poprzednim temacie miał rozwiązanie. Nie zawsze jednak tak jest. Przyjrzyj się następującym układom równań:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Ten układ równań nie ma rozwiązań. Jeżeli bowiem suma dwóch liczb jest równa 3, to nie może być jednocześnie równa 4.

Ten układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, bo każda para liczb, która spełnia pierwsze równanie, spełnia także drugie równanie.

ĆWICZENIE A Wymień kilka par liczb, które są rozwiązaniami drugiego z powyższych układów równań.

Dla każdego układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi zachodzi jeden z trzech przypadków. Układ równań:

- ma jedno rozwiązanie; wtedy nazywamy go **układem oznaczonym**,
- nie ma rozwiązań; taki układ nazywamy **układem sprzecznym**,
- ma nieskończenie wiele rozwiązań; wówczas układ nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Nie zawsze od razu można stwierdzić, czy dany układ jest oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny. Aby to ustalić, trzeba spróbować ten układ rozwiązać.

PRZYKŁAD Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 4y = x + 1 \\ -\frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = x + 1 \\ y = 3 + \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$3x - 4\left(3 + \frac{1}{2}x\right) = x + 1$$

$$3x - 12 - 2x = x + 1$$

$$3x - 2x - x = 12 + 1$$

$$0 \cdot x = 13$$

Układ równań jest sprzeczny
(nie ma rozwiązań).

Otrzymaliśmy równanie sprzeczne.

Żadna liczba x nie spełnia równania $0 \cdot x = 13$, więc na pewno nie istnieje para liczb (x, y) spełniająca rozważany układ równań.

$$\text{b) } \begin{cases} x - 0,3y = 0,2 \\ 5x - 1 = 1,5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0,3y + 0,2 \\ 5x - 1 = 1,5y \end{cases}$$

$$5(0,3y + 0,2) - 1 = 1,5y$$

$$1,5y + 1 - 1 = 1,5y$$

$$1,5y - 1,5y = 0$$

$$0 \cdot y = 0$$

Układ równań jest nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań).

Otrzymaliśmy równanie tożsamościowe.

Każda para liczb x, y , która spełnia równanie $x = 0,3y + 0,2$, jest rozwiązaniem tego układu równań.

Równanie $0 \cdot y = 0$ spełnia każda liczba. Gdy przyjmiemy za y dowolną liczbę, a za x liczbę równą $0,3y + 0,2$, to każda tak otrzymana para liczb spełnia rozważany układ równań.

ZADANIE Rozwiąż układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 6x - 4y = 5 \\ 2y = 3x - 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x = 8y - 1 \\ 4y = x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

ĆWICZENIE B Wymień kilka par liczb, które są rozwiązaniami układu nieoznaczonego przedstawionego w powyższym przykładzie w podpunkcie b).

zadania 1-3 ►

- II Układy równań sprzeczny i nieoznaczony, takie jak w przykładzie na poprzedniej stronie, można tak przekształcić, aby w obu równaniach po jednej stronie występowało to samo wyrażenie, a po drugiej stronie — liczba. Przyjrzyj się układowi równań, które otrzymaliśmy w wyniku przekształceń.

$$\begin{cases} 3x - 4y = x + 1 \\ -\frac{1}{2}x + y = 3 \quad | \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 0,3y = 0,2 \quad | \cdot 5 \\ 5x - 1 = 1,5y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ 2x - 4y = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 1,5y = 1 \\ 5x - 1,5y = 1 \end{cases}$$

Po przekształceniach widać, że równania tworzą układ sprzeczny, gdyż jeśli różnica liczb $2x$ oraz $4y$ wynosi 1 , to nie może być równa -12 .

Oba równania układu przedstawiają tę samą zależność. Zatem układ równań jest nieoznaczony. Każda para liczb, która spełnia jedno z tych równań, spełnia także drugie równanie.

ĆWICZENIE C Nie rozwiązując układu równań, ustal, czy jest to układ sprzeczny czy nieoznaczony.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a - 5b = 6 \\ 2a - 5b = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4y - 5 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$

zadania 4–7 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Ustal, który z podanych układów równań jest oznaczony, który — nieoznaczony, a który — sprzeczny.

① $\begin{cases} 6y - 2x = 9 \\ 3y = x - 6 \end{cases}$

② $\begin{cases} 2y = x \\ x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2y + x = 3 \\ y - 1,5 = -0,5x \end{cases}$

Odp. Układ jest nieoznaczony.

2. Przyjrzyj się przedstawionemu obok rozwiązaniu układu równań. Podaj kilka par liczb, które spełniają ten układ.

3. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 2x - \frac{1}{2}y = 3 \\ y - 4x = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -5x + 10y = -10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x + y = 3 \\ 3x + \frac{1}{2}y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 0,5x + y = 2 \end{cases}$

◀ || 4. Wskaż, które z podanych poniżej układów równań są sprzeczne, a które — nieoznaczone. Postaraj się to ustalić bez rozwiązywania układów równań.

① $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

③ $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y = 10 \\ x + 4y = 20 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} 2(x - y) + 1 = 0 \\ 2y - 2x - 1 = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} x - y = 1 \\ 5x - 5y = 5 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x - y = 4 \\ -2x + 2y = 8 \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} \frac{1}{3}x - (x + y) = 1 \\ y + \frac{2}{3}x = 3 \end{cases}$

5. Z równań podanych w ramce obok wybierz takie dwa, które utworzą układ:

$$\begin{array}{ll} x + y = 5 & x - y = 5 \\ -x + y = -5 & x + y = 3 \end{array}$$

a) oznaczony, b) nieoznaczony, c) sprzeczny.

6. Dla jakiego parametru m podany układ równań jest nieoznaczony?

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ \frac{1}{3}x + y = m \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x + 2y = 1 \\ 9x + 3y = m \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x + 1) - y = 5 \\ 2(y - x) - 2x = m \end{cases}$

7. Dla jakiej liczby a układ równań zapisany obok jest nieoznaczony?

$$\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ 3x + ay = 6 \end{cases}$$

MINISPRAWDZIAN

51. Co można powiedzieć o podanym obok układzie równań?

A. Jest sprzeczny.

B. Jest oznaczony.

C. Jest nieoznaczony.

D. Ma dokładnie dwa rozwiązania.

$$\begin{cases} 0,2x - 3y = 1 \\ x - 12y = \frac{x}{5} + 4 \end{cases}$$

52. Dla jakiej liczby a podany obok układ równań jest nieoznaczony?

A. $a = 3$

C. $a = -6$

B. $a = 6$

D. nie ma takiej liczby

$$\begin{cases} 3y - 3x = a \\ x - y = 2 \end{cases}$$

53. Który z podanych układów równań nie ma rozwiązania?

A. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 3 \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2y - 3x = 5 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ \frac{1}{2}x - y = 2,5 \end{cases}$

ZADANIA TEKSTOWE

PRZYKŁAD W sadzie rosną jabłonie, śliwy i jedna grusza. Jabłonie stanowiły trzy czwarte wszystkich drzew owocowych. Gdy dosadzono jeszcze 2 jabłonie, 5 śliw i 3 grusze, to jabłoni było o 10 więcej niż pozostałych drzew. Ile drzew owocowych rośnie obecnie w sadzie?

x — liczba jabłoni na początku

y — liczba śliw na początku

$x + y + 1$ — liczba wszystkich drzew na początku

$x + 2$ — liczba jabłoni obecnie

$y + 9$ — liczba pozostałych drzew obecnie

Śliw jest $y + 5$, a grusz $1 + 3 = 4$.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}(x + y + 1) \\ x + 2 = (y + 9) + 10 \end{cases}$$

Na początku jabłonie stanowiły $\frac{3}{4}$ wszystkich drzew.
Teraz jabłoni jest o 10 więcej niż pozostałych drzew.

$$\begin{cases} 4x = 3(x + y + 1) \\ y = x - 17 \end{cases}$$

$$4x = 3x + 3(x - 17) + 3$$

$$4x = 3x + 3x - 51 + 3$$

$$-2x = -48$$

$$x = 24$$

$$y = 24 - 17$$

$$y = 7$$

$$\begin{cases} x = 24 \\ y = 7 \end{cases}$$

Na początku w sadzie rosły 24 jabłonie i 7 śliw.

Obecnie:

$$\text{liczba jabłoni} = 24 + 2 = 26$$

$$\text{liczba pozostałych drzew} = 7 + 9 = 16$$

$$\text{liczba wszystkich drzew} = 26 + 16 = 42$$

Odp. W sadzie rosną teraz 42 drzewa owocowe.

ZADANIE W torebce znajdują się krówki. Dwie z nich są mleczne, a pozostałe są czekoladowe i kokosowe. Kokosowe krówki stanowią $\frac{1}{4}$ wszystkich cukierków w torebce. Jurek zjadł 2 krówki czekoladowe i 4 kokosowe i teraz w torebce jest o 10 więcej krówek czekoladowych niż pozostałych. Ile cukierków pozostało w torebce?

zadania 1–23 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Obraz w ramie kosztuje 270 zł. Rama jest o 200 zł droższa od obrazu. Ile kosztuje obraz?

b) Waza z warząchwą waży 900 g. Warząchew jest 3 razy lżejsza niż waza. O ile mniej od wazy waży warząchew?



2. Średnia arytmetyczna dwóch liczb wynosi $3\frac{1}{2}$. Gdybyśmy jedną z liczb zwiększyli o 1, a drugą zmniejszyli o 2, to otrzymalibyśmy liczby równe. O jakich liczbach mowa?

3. Znajdź ułamek zwykły, który ma następującą własność: gdy do licznika i mianownika ułamka dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{3}$, a gdy od licznika i mianownika odejmiemy 1, to otrzymamy $\frac{1}{4}$.

4. a) Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 13. Gdybyśmy przestawili cyfry tej liczby, to otrzymalibyśmy liczbę o 27 mniejszą. O jakiej liczbie mowa?

b) Czwarta część pewnej liczby dwucyfrowej jest równa sumie jej cyfr. Jeżeli między cyfry tej liczby wstawimy zero, to otrzymamy liczbę 8,5 razy większą. Jaka liczba ma tę własność?

5. Państwo Wodzińscy zużyli w marcu 6 m^3 wody zimnej i 7 m^3 wody ciepłej. Zapłacili za to 138 zł. W kwietniu za zużycie 7 m^3 wody zimnej i 6 m^3 wody ciepłej zapłacili 135 zł. Ceny wody w marcu i kwietniu były takie same. Ile kosztował 1 m^3 wody zimnej, a ile — ciepłej?

6. Podczas meczu pewien koszykarz wykonał 19 skutecznych rzutów z gry (czyli za 2 lub za 3 punkty) i zdobył 44 punkty. Ile skutecznych rzutów za 3 punkty wykonał ten zawodnik?

7. Czy można rozmienić złotówkę na monety o nominałach 2 gr i 5 gr tak, aby monet tych było razem 30?



8. Mały Marek często kupuje pieczywo. Wczoraj kupił 2 chleby i 4 bułki. Twierdzi, że wydał 6 zł. Dzisiaj za 3 chleby i 6 bułek zapłacił podobno 10 zł. Mama Marka podejrzewa, że albo sprzedawca się pomylił, albo Marek zgubił część pieniędzy. Czy wątpliwości mamy Marka są uzasadnione?



9. Test kontrolny z matematyki pisali wszyscy uczniowie klas pierwszych. Oceny bardzo dobre otrzymała $\frac{1}{3}$ dziewcząt i $\frac{2}{7}$ chłopców, razem 46 osób. Ocena dobrą uzyskała co szósta uczennica i co czwarty chłopak, razem 32 osoby. Ile osób pisało ten test?

10. Do konkursu „Śpiewać każdy może” przystąpiło 81 osób. W pierwszym etapie odpadła $\frac{1}{5}$ kobiet oraz $\frac{1}{3}$ mężczyzn. Spośród osób, które przystąpiły do drugiego etapu konkursu, odpadła połowa kobiet i połowa mężczyzn. Po tym etapie nastąpił finał, w którym startowało 30 osób. Ile kobiet i ilu mężczyzn przystąpiło do tego konkursu?

11. W pewnym teście za dobrą odpowiedź przyznawano 3 punkty, a za złą odpowiedź lub brak odpowiedzi odejmowano 1 punkt. Małgosia miała dwa razy więcej poprawnych odpowiedzi niż Jaś i zdobyła 64 punkty, a Jaś zdobył 20 punktów. Ile łącznie pytań było w tym teście? Czy za rozwiązanie tego testu można otrzymać 15 punktów?

12. W torebce były irysy oraz krówki. Z bliżej nieznanych przyczyn z torebki zniknęła połowa irysów i trzecia część krówek, łącznie 18 cukierków. W rezultacie w torebce zostało tyle samo irysów co krówek. Ile cukierków zostało w torebce?



13. Dziadek Stefan zbierał kiedyś znaczki pocztowe. Dzisiaj znaczki zbiera jego wnuk Jacek. Gdyby dziadek oddał Jackowi 150 znaczków, to obaj mieliby ich tyle samo. Gdyby zaś oddał Jackowi trzy czwarte swojej kolekcji, to zostałoby mu tyle znaczków, ile Jacek ma teraz. Ile znaczków ma dziadek Stefan, a ile — Jacek?

14. Pewien profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, zapytany o swój wiek, odpowiedział:

— *Siedem lat temu moja uczelnia była ode mnie siedem razy starsza. Siedemdziesiąt lat temu była ode mnie starsza siedemdziesiąt razy.*

W którym roku ów profesor wypowiadał te słowa? Ile miał wtedy lat?

Uniwersytet Jagielloński to najstarsza uczelnia w Polsce, założona przez króla Kazimierza Wielkiego w 1364 roku w Krakowie, ówczesnej stolicy Polski.

15. Helena ulokowała na giełdzie 1000 zł — kupiła akcje firm X i Y. Po roku inwestycja ta przyniosła 10% zysku, przy czym wartość akcji firmy X wzrosła o 20%, a firmy Y o 20% spadła. Ile pieniędzy ulokowała Helena w akcjach firmy Y?

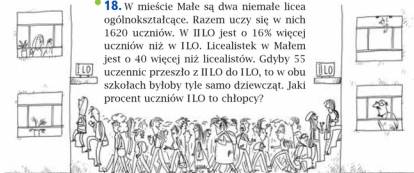
16. Antykwarisz zakupił stół do kawy i lustro za łączną kwotę 4050 zł. Sprzedał lustro, zyskując na transakcji 25%, a sprzedając stół, zyskał 40%. Zarobił w ten sposób 1260 zł. Ile zapłacił za lustro, a ile — za stół?



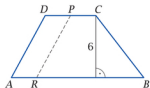
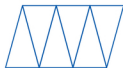
17. Płatki owsiane zawierają 14% białka i 6,4% tłuszczu, a kukurydziane — 8% białka i 0,8% tłuszczu. Jakie ilości płatków każdego rodzaju należy zmieszać, aby mieć:

- a) 0,15 kg mieszanki zawierającej 1,5 dag białka,
- b) 0,28 kg mieszanki zawierającej 5% tłuszczu?

- **18.** W mieście Małe są dwa niemałe licea ogólnokształcące. Razem uczy się w nich 1620 uczniów. W ILO jest o 16% więcej uczniów niż w ILO. Licealistek w Małym jest o 40 więcej niż licealistów. Gdyby 55 uczennic przeszło z ILO do ILO, to w obu szkołach byłoby tyle samo dziewcząt. Jaki procent uczniów ILO to chłopcy?

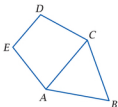
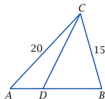


19. Z sześciu jednakowych trójkątów równoramiennych o obwodzie 26 zbudowano równoległobok o obwodzie 66 (zob. rysunek obok). Oblicz długości boków tego równoległoboku.



20. Pole trapezu $ABCD$ jest równe 66. Trapez rozcięto wzdłuż prostej łączącej środki podstawy DC z punktem R tak, jak na rysunku obok. Pole otrzymanego w ten sposób trapezu $RBCP$ jest równe 42. Jakie długości mają odcinki AB i DC ?

21. Obwód trójkąta ABC narysowanego obok jest równy 53. Obwody trójkątów ADC i DBC są jednakowe. Oblicz długości odcinków AD i DB .



22. Popatrz na rysunek obok. Przekątna AC dzieli pięciokąt $ABCDE$ na dwie figury: trapez równoramienny i trójkąt równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest o 6 mniejszy od obwodu trapezu $ACDE$. Obwód pięciokąta jest równy 78, a sumy długości przeciwległych boków trapezu są równe. Oblicz długości boków pięciokąta.

23. Gdy spośród pewnych trzech liczb wybierzemy dwie, to w zależności od tego, które liczby wybierzemy, ich suma może być równa 20, 30 lub 40. Jaka jest suma wszystkich trzech liczb?

MINISPRAWDZIAN

51. Karma dla psa jest sprzedawana w mniejszych i większych puszkach. Cztery duże puszki i pięć mniejszych waży 6,8 kg, a 6 dużych i 2 małe waży 6,9 kg. Mniejsza puszka waży:

- A. 0,35 kg B. 0,6 kg C. 0,75 kg D. 0,9 kg

52. Antek jest o 9 lat starszy od Michała. Pięć lat temu był od niego dwa razy starszy. Wobec tego Antek ma:

- A. 18 lat B. 14 lat C. 23 lata D. 33 lata

53. Jeden z boków prostokąta jest 5 razy krótszy od obwodu prostokąta, a różnica między długościami sąsiednich boków wynosi 6. Jakie pole ma ten prostokąt?

- A. 16 B. 72 C. 216 D. 3240

54. Ania i Kasia zaczynają naukę języka hiszpańskiego. Ania zna już o 20% więcej słówek niż Kasia, Kasia zna o 30 słówek mniej niż Ania. Ile słówek zna Ania?

- A. 150 B. 180 C. 90 D. zadanie nie ma rozwiązania

1. Rozwiąż równanie.

- a) $(x+3)^2 = (x-2)(x+2)$
 b) $\frac{4x-5}{2x-1} = \frac{2}{3}$
 c) $(3x-5)(3x+5) = \frac{(6x+1)^2}{4} - x$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $|5-7x| = 1$
 b) $|3x-5| = 7$
 c) $|5x-8| = |3x-16|$
 d) $|x+3| + |3x-1| = x+4$

3. a) W kanistrze jest 4,5 litra benzyny, której masa jest równa 3,15 kg. Oblicz masę 20 litrów takiej benzyny.

b) Gdyby do karmnika przylatywało dziennie 30 ptaków, to zapas ziarna wystarczyłby na 80 dni. Na ile dni starczy ten zapas, jeśli do karmnika będzie przylatywało 40 ptaków?

4. Rozwiąż nierówność.

- a) $3(x-3) < 5x$
 b) $\frac{1}{2}x - 7 \leq \frac{x+3}{4}$
 c) $\frac{5(3x-2)}{4} - 3 < 5x+3$

5. Rozwiąż nierówność.

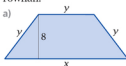
- a) $|2x+7| < 5$
 b) $|1-3x| \geq 7$
 c) $|2x-1| - x \geq 4$
 d) $|x-6| + |2x+6| \leq 3x+1$

6. Cenę butów obniżono najpierw o 10 zł, a potem jeszcze o 20% nowej ceny. Po tych dwóch obniżkach buty kosztują 100 zł. Ustal, o ile złotych ta nowa cena jest mniejsza od ceny sprzed obniżek.

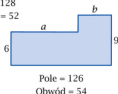
7. Rozwiąż układ równań.

- a) $\begin{cases} 2(x+y) = 1-x \\ 1+3(x-y) = x+4y \end{cases}$
 b) $\begin{cases} 5x = 4(y-2) \\ 2(x+y+3) = -x-1 \end{cases}$

8. Zapisz i rozwiąż odpowiedni układ równań.



b)



9. Gdy od cyfry dziesiątek pewnej liczby dwucyfrowej odejmiemy cyfrę jedności, otrzymamy liczbę 5 razy mniejszą od sumy tych cyfr. Jeśli przestawimy cyfry rozważanej liczby, otrzymamy liczbę o 21 większą od połowy początkowej liczby. Jaka liczba ma tę własność?

10. Liczba o 10% mniejsza od liczby x jest o 3 większa od liczby y , a liczba o 10% większa od liczby y jest o 6 mniejsza od x . Znajdź x i y .

11. Który z układów równań jest sprzeczny, który jest nieoznaczony, a który — oznaczony?

- Ⓐ $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ Ⓒ $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$
 Ⓑ $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$ Ⓓ $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ y-2x=0 \end{cases}$

Funkcje

Elektrokardiogram przedstawia, jak zmienia się napięcie elektryczne w obrębie mięśnia sercowego w ciągu pewnego czasu. W podobny sposób – za pomocą wykresu – można ilustrować także różne inne zależności między dwiema wielkościami.



- Pojęcie funkcji ■ Czytanie wykresów ■ Wzory i wykresy
- Monotoniczność funkcji ■ Wzór i wykres funkcji liniowej
- Własności funkcji liniowej ■ Proporcjonalność prosta i odwrotna
- Powtórzenie

POJĘCIE FUNKCJI

- I Przyjrzyj się poniższej tabeli. Numerom zawodników biorących udział w biegu na 400 m przypisano uzyskane przez nich czasy.

x	189	13	5	75	40	12
y	46,22	47,98	47,36	48,07	46,21	45,88

x — numer zawodnika

y — czas biegu (w sekundach)



Z podobnymi sytuacjami spotykamy się bardzo często. Na przykład każdemu uczniowi jest przypisany jeden numer w dzienniku lekcyjnym, każda książka ma ściśle określoną liczbę stron, każde zwierzę można zakwalifikować do określonego gatunku. Odpowiada to następującemu schematowi:

Mamy pewien zbiór X oraz pewien zbiór Y i każdemu elementowi zbioru X przypisujemy lub — inaczej mówiąc — przyporządkowujemy dokładnie jeden element zbioru Y .

W naszym przykładzie X to zbiór numerów zawodników, a Y — zbiór możliwych do osiągnięcia czasów.

Każdemu zawodnikowi przyporządkowujemy uzyskany czas.

Przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y , nazywamy **funkcją** określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y .

W naszym przykładzie funkcja jest określona na zbiorze numerów zawodników o wartościach w zbiorze możliwych do osiągnięcia czasów.

Zbiór X , na którym jest określona funkcja, nazywamy **dziedziną** funkcji. Każdy element dziedziny nazywamy **argumentem** funkcji.

Zbiór $\{5, 12, 13, 40, 75, 189\}$ jest dziedziną funkcji, a każda liczba z tego zbioru jest argumentem.

Jeżeli argumentowi x jest przyporządkowany element y , to mówimy, że funkcja dla argumentu x przyjmuje **wartość** y .

Na przykład dla argumentu 5 omawiana funkcja przyjmuje wartość 47,36, a dla argumentu 12 — wartość 45,88.

ĆWICZENIE A Rozważ następującą funkcję: *Każdemu uczniowi twojej klasy jest przyporządkowana liczba liter występujących w jego pierwszym imieniu.* Na przykład: jeśli w klasie jest Barbara, to przyporządkowujemy jej liczbę 7.

- Ile elementów ma dziedzina tej funkcji?
- Podaj wartości tej funkcji dla kilku wybranych argumentów.
- Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja?

zadania 1-2 ►

- II Dziedzina funkcji może być dowolny zbiór i wartości funkcji też mogą być elementami dowolnego zbioru. W tym rozdziale będziemy rozważać przede wszystkim takie funkcje, których argumenty i wartości są liczbami.

Funkcję określamy, podając jej dziedzinę i sposób, w jaki argumentom przyporządkowywane są wartości. Możemy to zrobić na różne sposoby, na przykład za pomocą opisu słownego, tabelki, wykresu, wzoru lub grafu. Poniżej tę samą funkcję opisano na pięć różnych sposobów.

Opis słowny:

Każdej liczbie całkowitej x większej od -4 i mniejszej od 4 przyporządkowujemy liczbę y o 2 mniejszą od połowy kwadratu liczby x .

Tabelka:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$2\frac{1}{2}$	0	$-1\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$

Wzór:

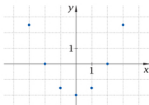
$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

Liczbę x ze zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ funkcja przyporządkowuje liczbę y równą $\frac{1}{2}x^2 - 2$.

Graf:



Wykres:



Zaznaczone punkty tworzą wykres funkcji. Pierwsza współrzędna każdego z nich to argument funkcji, a druga — to wartość funkcji odpowiadająca temu argumentowi.

Dziedzina tej funkcji jest zbiór liczb: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Każdej liczbie z tego zbioru jest przyporządkowana pewna liczba rzeczywista.

Z historii

O funkcji możemy myśleć jako o wzajemnej zależności między dwiema wielkościami.

Poszukiwaniem takich zależności zajmowali się już starożytni Grecy. Termin „funkcja” pojawił się jednak dopiero w XVII wieku,

w pracy niemieckiego matematyka Gottfrieda Leibniza. Definicję funkcji (jako przyporządkowania) pierwszy sformułował matematyk niemiecki Peter Dirichlet w 1837 roku.

Dzisiaj pojęcie funkcji jest jednym z najważniejszych pojęć matematyki.

Zdanie: Funkcja f argumentom ze zbioru X przyporządkowuje wartości ze zbioru Y możemy zapisać tak:

$$f: X \rightarrow Y$$

Zapis $f(x)$ oznacza wartość funkcji f dla argumentu x .

Rozważmy następującą funkcję:

Funkcja f każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje resztę z jej dzielenia przez 3.

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb naturalnych i jej wartościami też są liczby naturalne. Tę informację możemy zapisać tak:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

Obliczmy wartości funkcji f dla argumentów: 0, 1, 20, 28, 42, 67.

$$f(0) = 0, \text{ bo } 0 : 3 = 0 \text{ reszta } 0$$

$$f(28) = 1, \text{ bo } 28 : 3 = 9 \text{ reszta } 1$$

$$f(1) = 1, \text{ bo } 1 : 3 = 0 \text{ reszta } 1$$

$$f(42) = 0, \text{ bo } 42 : 3 = 14 \text{ reszta } 0$$

$$f(20) = 2, \text{ bo } 20 : 3 = 6 \text{ reszta } 2$$

$$f(67) = 1, \text{ bo } 67 : 3 = 22 \text{ reszta } 1$$

ĆWICZENIE B Dla funkcji f określonej powyżej oblicz $f(2)$, $f(10)$, $f(15)$ i $f(100)$. Ile różnych wartości może przyjmować ta funkcja?

Zbiór wszystkich wartości, które przyjmuje funkcja, nazywamy **zbiorem wartości funkcji**.

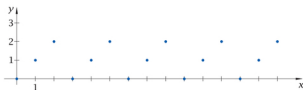
Uwaga. W zapisie $f: X \rightarrow Y$ zbiór X oznacza dziedzinę, ale zbiór wartości funkcji nie musi być równy zbiorowi Y , choć musi być jego podzbiorem.

Zauważmy, że zbiór wartości funkcji f rozważanej powyżej jest trzyelementowy: $\{0, 1, 2\}$ i jest oczywiście podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$.

ĆWICZENIE C Zapisz dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji przedstawionej na poprzedniej stronie.

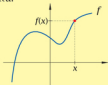
zadania 3–4 ►

III Omawianą funkcję f można przedstawić za pomocą wykresu, którego początkowy fragment (dla argumentów od 0 do 14) wygląda tak:



Powyższy wykres składa się z pojedynczych punktów, bo dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}$. Wykresami funkcji mogą być też linie ciągłe lub ich fragmenty.

Do wykresu funkcji f należą wszystkie punkty o współrzędnych $(x, f(x))$, gdzie x jest elementem dziedziny, a $f(x)$ to wartość funkcji dla tego argumentu.



Gdy rysujemy wykres funkcji, warto pamiętać, że nie mogą do niego należeć dwa punkty o tej samej współrzędnej x , bowiem dowolna funkcja dla każdego argumentu przyjmuje tylko jedną wartość. Może się jednak zdarzyć, że dla różnych argumentów wartości będą jednakowe.

ĆWICZENIE D Narysuj wykres funkcji, która dla argumentów $-2, 0$ i 3 przyjmuje tę samą wartość.

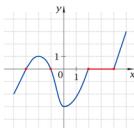
zadania 5–8 ►

IV **ĆWICZENIE E** Dla jakich argumentów f funkcja opisana na poprzedniej stronie przyjmuje wartość 0 ?

Argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0 , nazywamy **miejszczem zerowym** tej funkcji. Inaczej mówiąc, argument x jest miejscem zerowym funkcji f , gdy $f(x) = 0$.

Gdy funkcja jest określona za pomocą wykresu, to zwykle łatwo odczytać jej miejsca zerowe. Są nimi pierwsze współrzędne punktów wykresu leżących na osi x .

Na rysunku obok jest przedstawiony wykres pewnej funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -4; 5 \rangle$. Jej miejscami zerowymi są liczby $-3, -1$ oraz wszystkie liczby z przedziału $\langle 2; 4 \rangle$.



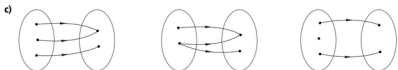
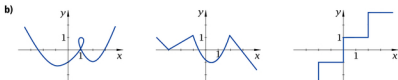
zadania 9–14 ►

ZESTAW ZADAŃ

- ◀ **1.** Opisane przyporządkowanie to przykład funkcji. Określ jej dziedzinę, podaj kilka argumentów oraz odpowiadające im wartości.
- Każdemu słowu w zdaniu: „Nie czyn drugiemu, co tobie niemiłe” przyporządkowana jest liczba liter w tym wyrazie.
 - Numerowi strony podręcznika do matematyki jest przyporządkowana liczba zadań na tej stronie.
 - Uczniowi twojej klasy jest przyporządkowana liczba jego rodzeństwa.
 - Laureatowi Nagrody Nobla jest przyporządkowany kraj, w którym się urodził.
 - Pierwiastkowi chemicznemu jest przyporządkowany jego symbol.
 - Szczytowi górskiemu jest przyporządkowana jego wysokość.

2. Poniżej podano przykłady przyporządkowań (liczbom x są przyporządkowane liczby y). Które z nich nie są funkcjami?

a)	<table><tr><td>x</td><td>-5</td><td>-1</td><td>0</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>-5</td><td>3</td><td>-5</td><td>3</td></tr></table>	x	-5	-1	0	6	y	-5	3	-5	3	<table><tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>-2</td><td>-5</td><td>-7</td></tr></table>	x	-3	-2	-1	-1	y	0	-2	-5	-7	<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>0</td><td>2</td><td>10</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	x	-2	0	2	10	y	4	4	4	4
	x	-5	-1	0	6																												
y	-5	3	-5	3																													
x	-3	-2	-1	-1																													
y	0	-2	-5	-7																													
x	-2	0	2	10																													
y	4	4	4	4																													



3. Dla podanej funkcji wybierz dwa argumenty i podaj odpowiadające im wartości.

- a) $f: \{5, 6, 7, \dots, 99\} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to 10% liczby x
 b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to zaokrąglenie liczby x do jedności
 c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = \frac{x}{3}$

x	-5	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	$2\frac{1}{2}$
$f(x)$	2	-3	-3	$-3\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	0	0

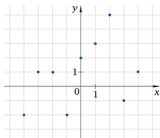
x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2
$g(x)$	2	-2	2	-2	2	-2	2

4. Obok podano dwie funkcje określone za pomocą tabel. Dla każdej z nich ustal:

- a) Jaka jest największa, a jaka najmniejsza wartość funkcji?
 b) Jaki jest zbiór wartości funkcji?
 c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie?
 d) Ilu argumentom jest przyporządkowana liczba 2?

5. Obok przedstawiono wykres pewnej funkcji.

- a) Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.
 b) Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje największą wartość?
 c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?
 d) Podaj przykłady argumentów, dla których funkcja przyjmuje tę samą wartość.
 e) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabeli.



6. Przyporządkujmy każdej liczbie naturalnej od 0 do 9 liczbę liter w słowie ją oznaczającym, np. liczbie 1 (j-e-d-e-n) odpowiada 5. Przedstaw tę funkcję w postaci tabelki i sporządź jej wykres. Której liczbie odpowiada najmniejsza wartość?

7. Poniżej podano wzór i dziedzinę pewnej funkcji. Przedstaw tę funkcję w postaci tabelki i narysuj jej wykres.

a) $y = \frac{4}{x^2}$ Dziedzina: $\{-2, -1, 1, 2\}$ b) $y = \sqrt{x} - 1$ Dziedzina: $\{0, \frac{1}{4}, 1, 4\}$

8. Sporządź tabelkę i narysuj wykres funkcji, która każdej liczbie ze zbioru $\{-1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\}$ przyporządkowuje jej odwrotność. Zapisz wzór tej funkcji.

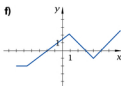
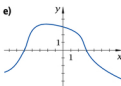
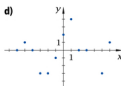
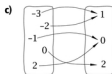
IV 9. Podaj miejsca zerowe, które można odczytać na podstawie podanych informacji o funkcji:

a)

x	-2	-1	0	1	2
y	0	-6	3	-5	3

b)

x	0	1	2	3	4
y	0	1	-1	0	3



10. Przedstaw za pomocą tabelki albo za pomocą wykresu przykład funkcji, której dziedzina ma sześć elementów i która:

- a) ma dwa miejsca zerowe, b) nie ma miejsc zerowych.

11. Ustal, jakie miejsca zerowe ma podana funkcja, i określ jej zbiór wartości.

- a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ i $f(n)$ to reszta z dzielenia n przez 7
 b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ i $f(n)$ to cyfra jedności liczby $5n$
 c) $f: \langle 0; 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to zaokrąglenie liczby x do jedności
 d) $f: (0; 5) \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to cyfra jedności rozwinięcia dziesiętnego liczby x
 e) $f: \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\} \rightarrow \mathbb{N}$ i $f(n)$ to liczba parzystych dzielników liczby n

12. Funkcja g jest określona następująco: Każdej liczbie naturalnej n przyporządkowujemy największą z liczb parzystych mniejszych lub równych n .

- a) Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartość 120?
 b) Jakie miejsca zerowe ma ta funkcja?
 c) Dla ilu argumentów funkcja g przyjmuje wartości mniejsze od 50?

13. Funkcja f określona jest następująco: Każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej przyporządkowujemy sumę jej cyfr.

- Jaką najmniejszą, a jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja?
- Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 4?
- Ile elementów ma zbiór wartości funkcji f ?
- d) Jaką wartość funkcja f przyjmuje najczęściej? Ile razy?

14. Narysuj wykres funkcji spełniającej jednocześnie następujące warunki:

- do wykresu należy punkt $P = (1, 3)$,
- dla argumentu $x = 2$ funkcja przyjmuje wartość 7,
- funkcja przyjmuje wartość 8 dla co najmniej dwóch argumentów,
- funkcja przyjmuje wartość 0 dla argumentu $x = 3$,
- dziedziną funkcji jest zbiór liczb całkowitych większych od -4 i mniejszych od 6.

MINISPRAWDZIAN

51. W tabelce podano niektóre argumenty i wartości funkcji f . Na jednym z rysunków przedstawiono fragment wykresu tej funkcji. Na którym?

x	-3	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{10}$
$f(x)$	-2	0	2	-2



52. Która z przedstawionych poniżej funkcji ma najwięcej miejsc zerowych?

A. $f: \{0, 1, 2, 3, \dots, 45\} \rightarrow \mathbb{N}$ i $f(n)$ to cyfra jedności liczby n

B.

x	-1	0	1	2	3
y	0	0	0	6	7



53. Funkcja g jest określona następująco:

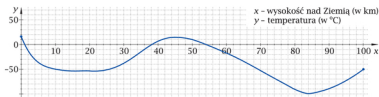
$g: \{10, 11, 12, \dots, 199, 200\} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n)$ to iloczyn cyfr zapisu dziesiętnego liczby n . Ile jest argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartość 6?

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

CZYTANIE WYKRESÓW

- 1 Za pomocą funkcji opisujemy zwykle, w jaki sposób zmienia się jedna wielkość w zależności od drugiej. Najłatwiej obserwować tę zależność na podstawie wykresu.

Funkcja, którą przedstawiono poniżej, opisuje, jak zmienia się temperatura w zależności od wysokości nad powierzchnią Ziemi (do 100 km).



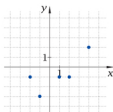
ĆWICZENIE A Odczytaj z wykresu:

- Na jakiej wysokości temperatura jest najniższa?
- Na jakich wysokościach panują temperatury dodatnie?

Czasami argumenty i wartości funkcji nazywa się zmiennymi: argument funkcji — **zmienną niezależną**, a wartość funkcji — **zmienną zależną**.

W powyższym przykładzie zmienną niezależną jest wysokość nad powierzchnią Ziemi, a zmienną zależną — temperatura.

Poniżej zostały przedstawione wykresy trzech funkcji. Na ich podstawie możemy określić dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji. Przyjmujemy, że punkty oznaczone pustym kółeczkiem nie należą do wykresu funkcji.

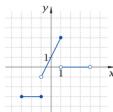


Dziedzina:

$\{-2, -1, 1, 2, 4\}$

Zbiór wartości:

$\{-3, -1, 2\}$

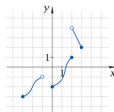


Dziedzina:

$\langle -3; 4 \rangle$

Zbiór wartości:

$\{-3\} \cup \langle -1; 3 \rangle$



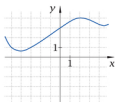
Dziedzina:

$\langle -3; -1 \rangle \cup \langle 0; 3 \rangle$

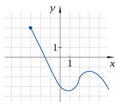
Zbiór wartości:

$\langle -3; 1 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$

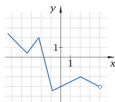
Na kolejnych rysunkach przedstawiono fragmenty wykresów trzech funkcji. Jeżeli wykres nie jest zakończony kropką z lewej lub prawej strony, to przyjmujemy, że dziedziną jest przedział nieograniczony. W przypadkach takich jak poniższe będziemy też przyjmować, że widoczne są wszystkie miejsca zerowe, a niewidoczna część wykresu jest nieprzerwaną linią.



Dziedzina: zbiór $\mathbb{R}$



Dziedzina: $\langle -3; +\infty \rangle$



Dziedzina: $(-\infty; 4)$

Rysunki te przedstawiają tylko fragmenty wykresów, więc na ich podstawie nie możemy określić, jakie są zbiory wartości poszczególnych funkcji, bo nie mamy pewności, jak dalej przebiegają wykresy.



Tak znajdujemy wartość funkcji dla danego argumentu x .

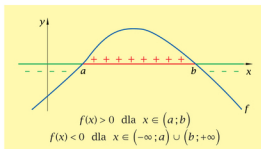


A tak: argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość y .

ĆWICZENIE B Dla jednej z funkcji przedstawionych powyżej odpowiedz na pytania:

- Jaką wartość przyjmuje funkcja dla argumentu 0, a jaką — dla argumentu 2?
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 1?

Gdy znamy miejsca zerowe i korzystamy z wykresu, możemy określić, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich — ujemne.



PRZYKŁAD Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji, największą wartość i najmniejszą wartość oraz miejsca zerowe. Dla jakich argumentów wartości funkcji są ujemne?

Dziedziną jest przedział $\langle -3; 7 \rangle$.

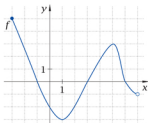
Zbiór wartości to przedział $\langle -3; 5 \rangle$

Wartość największa to $f(-3) = 5$.

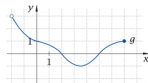
Wartość najmniejsza to $f(1) = -3$.

Miejsca zerowe to liczby: $-1, 3, 6$.

Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (-1; 3) \cup (6; 7)$.



ZADANIE Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji g przedstawionej na wykresie obok oraz podaj, dla jakich argumentów wartości tej funkcji są dodatnie.

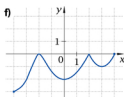
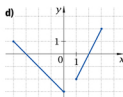
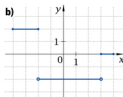
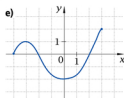
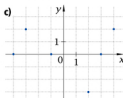
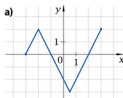


zadania 1–12 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Korzystając z wykresu funkcji, odpowiedz na pytania:

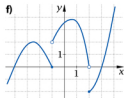
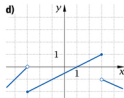
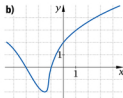
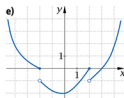
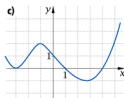
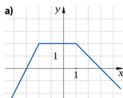
- Jaka jest dziedzina funkcji? Jaki jest zbiór wartości funkcji?
- Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje funkcja?
- Jakie współrzędne ma punkt przecięcia wykresu z osią y ?
- Czy funkcja ma miejsca zerowe? Jeśli tak, to jakie?
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie?
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości większe od -2 ?



2. Która z funkcji przedstawionych w zadaniu 1. na poprzedniej stronie spełnia jednocześnie poniższe warunki?

- Funkcja ma dokładnie trzy miejsca zerowe.
- Dla argumentów z przedziału $(-2; 2)$ funkcja przyjmuje wartości ujemne.
- Najmniejsza wartość funkcji wynosi -2 .

3. Odczytaj miejsca zerowe funkcji przedstawionej za pomocą wykresu i określ, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich — ujemne.



4. a) Narysuj wykres dowolnej funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -5; 5 \rangle$, zbiorem wartości jest przedział $\langle -3; 0 \rangle$ i która ma dwa miejsca zerowe.

b) Narysuj wykres funkcji, której dziedziną jest zbiór $\langle -4; 6 \rangle$ i która nie ma miejsc zerowych, a przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów większych od -3 i jednocześnie mniejszych od 2 .

c) Narysuj wykres funkcji, której dziedziną jest przedział $(-5; 3]$, zbiorem wartości jest $\langle -1; 2 \rangle \cup (4; 6)$ i która tylko dla argumentów mniejszych od -1 przyjmuje wartość 2 .

5. Narysuj taki fragment wykresu funkcji określonej na zbiorze $\mathbb{R}$, z którego widać, że funkcja może spełniać podane warunki.

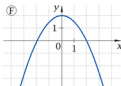
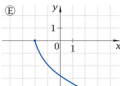
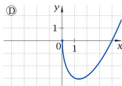
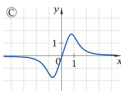
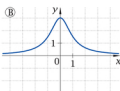
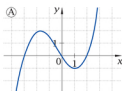
a) Funkcja nie ma miejsc zerowych, przyjmuje tylko wartości ujemne i najmniejszą wartością jest -3 .

b) Funkcja liczbom rzeczywistym dodatnim przyporządkowuje wartość 1 , liczbom ujemnym wartość -1 , a liczbie 0 — wartość 0 .

c) Funkcja dla argumentów większych od 4 przyjmuje wartość 3 , dla pozostałych przyjmuje wartości ujemne, ale wartość -3 przyjmuje tylko dla trzech argumentów.

6. Na rysunkach przedstawiono wykresy sześciu różnych funkcji.

- Dla których z tych funkcji dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych?
- Jedna z tych funkcji przyjmuje tylko wartości dodatnie. Która?
- Dwie z tych funkcji mają jedno miejsce zerowe. Które to funkcje?
- Zbiorem wartości jednej z tych funkcji jest przedział $(-\infty; 0)$. Która to funkcja?



7. Która z funkcji z zadania 6. spełnia jednocześnie poniższe warunki?

- Punkt $(0, 0)$ należy do wykresu funkcji.
- Dla argumentu 1 wartość funkcji jest ujemna.
- Funkcja nie przyjmuje wartości mniejszych od -3 .

Wysokość fali (m)	Stopień skali Beauforta	Wysokość fali (m)	Stopień skali Beauforta
0	0	$(4; 6]$	7
$(0; 0,1]$	1	$(6; 8]$	8
$(0,1; 0,5]$	2	$(8; 10]$	9
$(0,5; 1]$	3	$(10; 12]$	10
$(1; 2]$	4	$(12; 14]$	11
$(2; 3]$	5	$(14; +\infty)$	12
$(3; 4]$	6		

8. Korzystając z informacji przedstawionych w tabeli, narysuj wykres funkcji, która wysokości fali na morzu przyporządkowuje stopień w skali Beauforta.

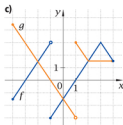
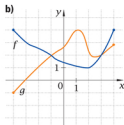
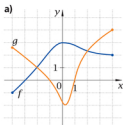


- 9.** Funkcja jest określona następująco: Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkujemy największą z liczb całkowitych nie większych od tej liczby.

Wypisz kilka punktów należących do wykresu tej funkcji. Naszkicuj jej wykres.

10. Na podstawie wykresów funkcji f i g odpowiedz na pytania:

- Jaka jest dziedzina funkcji f , a jaka — funkcji g ?
- Jaki jest zbiór wartości funkcji f , a jaki — funkcji g ?
- Ile miejsc zerowych ma funkcja f , a ile — funkcja g ?
- Dla jakich argumentów wartości funkcji g są dodatnie, a dla jakich argumentów dodatnie są wartości funkcji f ?
- Która z funkcji ma większą wartość dla $x = 1$, a która — dla $x = -3$?
- Dla jakich argumentów wartości funkcji f i g są równe, a dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g ?



11. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy dwóch funkcji f i g określonych na zbiorze liczb rzeczywistych tak, aby:

- a) wartości funkcji g były mniejsze od wartości funkcji f tylko dla $x \in (-3; 7)$,
 b) wartości funkcji g były większe od wartości funkcji f tylko dla $x \in (-\infty; -4)$ oraz dla $x \in (3; 5)$.

12. Wyobraź sobie, że do naczyń, których kształt zilustrowano na rysunkach, wlewamy jednakowym strumieniem wodę.

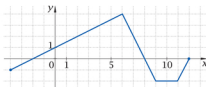


Wykresy przedstawiają, jak zmienia się poziom wody w naczyniach w czasie ich napełniania. Dopasuj wykresy do naczyń.



MINISPAWZDZIAN

Rysunek do zadań S1-S2.



S1. Które zdanie jest prawdziwe?

- A. Największą wartość funkcja przyjmuje dla argumentu 12.
- B. Funkcja przyjmuje wartość -2 dokładnie dla trzech argumentów.
- C. Wartość funkcji dla argumentu 3 jest większa niż dla argumentu 7.
- D. Różnica między największą a najmniejszą wartością funkcji jest równa 5.

S2. Które zdanie jest fałszywe?

- A. Dziedzina funkcji jest zbiór liczb spełniających warunek $-4 \leq x \leq 12$.
- B. Funkcja przyjmuje wartość $2,5$ dla dwóch argumentów.
- C. Miejscami zerowymi funkcji są liczby -2 , 8 i 12 .
- D. Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla argumentów mniejszych od 0 .

S3. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f oraz g . Wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g dla argumentów należących do przedziału:



- A. $(-4; 5)$
- B. $(-3; 2)$
- C. $(-4; -1)$
- D. $(-1; 5)$

S4. Funkcję określamy następująco: Każdej liczbie dodatniej mniejszej od 5 przyporządkowujemy zaokrąglenie tej liczby do jedności. Na którym rysunku przedstawiono wykres tej funkcji?

A.



B.



C.



D.



WZORY I WYKRESY FUNKCJI

I Rozważmy następującą funkcję f :

Każdej liczbie rzeczywistej x większej od -1 przyporządkowujemy iloraz liczby x przez liczbę o 1 większą od x .

Sposób, w jaki argumentom są przyporządkowane wartości tej funkcji, można przedstawić za pomocą wzoru:

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Uwaga. Wzór tej funkcji można też zapisać na inne sposoby. Oto przykłady:

$$y = \frac{x}{x+1}$$

$$x \mapsto \frac{x}{x+1}$$

Wstawiając do wzoru (w miejsce x) liczbę należącą do dziedziny, czyli do zbioru $(-1; +\infty)$, otrzymujemy wartość funkcji. Na przykład dla argumentów 2, $-\frac{1}{2}$, 0, 3 otrzymujemy:

$$f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$f(0) = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} = -1$$

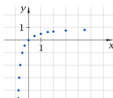
$$f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$

Wyniki te można przedstawić w tabelce. Należy jednak pamiętać, że taka tabelka nie jest pełnym opisem funkcji, gdyż zawiera tylko wybrane argumenty i odpowiadające im wartości.

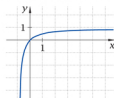
x	2	$-\frac{1}{2}$	0	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	-1	0	$\frac{3}{4}$

Z powyższych obliczeń wynika, że do wykresu rozważanej funkcji należą punkty: $(2, \frac{2}{3})$, $(-\frac{1}{2}, -1)$, $(0, 0)$, $(3, \frac{3}{4})$.

Poniżej zaznaczono kilkanaście punktów należących do wykresu rozważanej funkcji.



Wszystkie punkty wykresu tej funkcji tworzą taką krzywą, jak widać na poniższym rysunku.



ĆWICZENIE A Zaznacz w układzie współrzędnych kilka punktów należących do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$.

zadania 1-2 ►

II PRZYKŁAD 1 Funkcja przedstawiona na wykresie jest określona wzorem $f(x) = |3x + 2| - 4$. Znajdź współrzędne punktów A i B .

Punkt A :

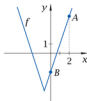
$$f(2) = |3 \cdot 2 + 2| - 4 = 4 \quad \vdots \quad A = (2, f(2))$$

$$\underline{A = (2, 4)}$$

Punkt B :

$$f(0) = |3 \cdot 0 + 2| - 4 = -2 \quad \vdots \quad B = (0, f(0))$$

$$\underline{B = (0, -2)}$$



ZADANIE Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = |2x - 3| - 5$.

a) Punkt P o pierwszej współrzędnej -7 należy do wykresu tej funkcji. Jaka jest druga współrzędna tego punktu?

b) W jakim punkcie wykres tej funkcji przecina oś y ?

PRZYKŁAD 2 Funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ opisuje wzór $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Sprawdź, czy podany punkt należy do wykresu tej funkcji.

a) $A = (2, \frac{1}{4})$

$$f(2) = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Odp. Punkt $A = (2, \frac{1}{4})$ należy do wykresu funkcji f .

b) $B = (-2, 1)$

$$f(-2) = \frac{-2-1}{(-2)^2} = -\frac{3}{4} \neq 1$$

Odp. Punkt $B = (-2, 1)$ nie należy do wykresu funkcji f .

ZADANIE Czy punkty $A = (9, \frac{3}{10})$, $B = (\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2})$ należą do wykresu funkcji $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$?

zadania 3-7 ►

III PRZYKŁAD 3 Które z liczb: $1, -3, -2$ są miejscami zerowymi funkcji określonej wzorem $f(x) = (x+2)\sqrt{x^2-1}$?

$$f(1) = (1+2)\sqrt{1^2-1} = 0$$

$$f(-3) = (-3+2)\sqrt{(-3)^2-1} \neq 0$$

$$f(-2) = (-2+2)\sqrt{(-2)^2-1} = 0$$

Odp. Liczby 1 i -2 są miejscami zerowymi funkcji f .

ZADANIE Które z liczb: $-1, 0, 1, 2$ i 3 są miejscami zerowymi funkcji określonej wzorem $f(x) = (x^3 - 8)\sqrt{x+1}$?

zadania 8-14 ►

IV Niekiedy za pomocą wzoru opisana jest zależność między dwiema wielkościami. Trzeba pamiętać, że argumentami takiej funkcji mogą być tylko takie wielkości, dla których wzór ma sens. Oto przykłady takich zależności:

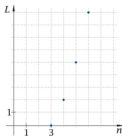
- Liczba (L) przekątnych wielokąta zależy od liczby jego boków (n).

$$L = \frac{n(n-3)}{2}$$

n — liczba boków wielokąta

L — liczba przekątnych

Dziedziną tej funkcji jest zbiór:
 $\{3, 4, 5, 6, \dots\}$.



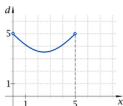
- Długość przekątnej (d) prostokąta o obwodzie 10 zależy od długości jednego z boków (x).

$$d = \sqrt{x^2 + (5-x)^2}$$

x — długość jednego z boków prostokąta

d — długość przekątnej

Dziedziną tej funkcji jest przedział $(0; 5)$.



ĆWICZENIE B Dla każdej z powyższych funkcji oblicz wartości dla kilku wybranych argumentów.

Gdy funkcja jest określona tylko za pomocą wzoru, a jej dziedzina nie jest podana, przyjmujemy, że do dziedziny należą wszystkie liczby rzeczywiste, dla których da się obliczyć wartość funkcji.

PRZYKŁAD 4 Określ dziedzinę funkcji $y = \sqrt{3x} + \frac{6}{x-2}$.

$$3x \geq 0 \text{ i } x - 2 \neq 0$$

Zatem:

$$x \geq 0 \text{ i } x \neq 2$$

Odp. Dziedziną funkcji jest zbiór $\langle 0; +\infty \rangle \setminus \{2\}$.

..... Liczba podpierwiastkowa musi być nieujemna; dzielenie przez zero nie jest określone.

ZADANIE Określ dziedzinę funkcji $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x-1}$.

zadania 15–18 ►

- V Czasami nie dla wszystkich argumentów wartości funkcji są określone za pomocą tego samego wyrażenia. Oto przykład takiej funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & \text{dla } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Zapis ten oznacza, że dla argumentu x mniejszego od 1 wartość funkcji f obliczamy ze wzoru $f(x) = x(x-2)$, a dla argumentu 1 lub większego od 1 — ze wzoru $f(x) = \sqrt{x}$. Na przykład:

$$f(-1) = (-1) \cdot (-1-2) = 3$$

$$f(5) = \sqrt{5}$$

$$f(-5) = (-5) \cdot (-5-2) = 35$$

$$f(8) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

ĆWICZENIE C Podaj przykłady kilku punktów należących do wykresu tej funkcji. Uzasadnij, że 0 jest miejscem zerowym tej funkcji, a 2 nie jest.

zadania 19–20 ►

ZESTAW ZADAŃ

- I 1. Ustal, jaką wartość przyjmuje podana funkcja dla argumentu 0, a jaką — dla argumentu 2.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 10$

c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

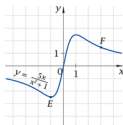
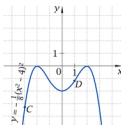
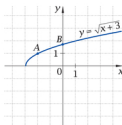
2. Określ współrzędne trzech punktów, które należą do wykresu podanej funkcji.

a) $y = 2x^2 + 1$

b) $y = -3x^3$

c) $y = \frac{-3}{x}$

- II 3. Znajdź współrzędne punktów zaznaczonych na wykresach.



4. Sprawdź, które z punktów A, B, C należą do wykresu podanej funkcji.

a) $y = \frac{2x^2-1}{3x}$; $A = (1, \frac{1}{3})$, $B = (-20, \frac{79}{60})$, $C = (0, -1)$

b) $y = \sqrt{1-5x}$; $A = (\frac{1}{5}, 0)$, $B = (10, 7)$, $C = (-2, \sqrt{11})$

c) $y = x + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$; $A = (0, \frac{1}{2})$, $B = (-3, -2)$, $C = (5, 5\frac{1}{5})$

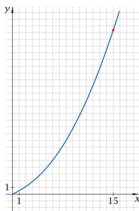
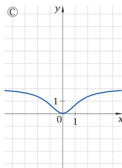
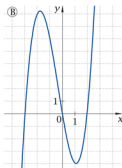
5. Poniżej narysowano wykresy następujących funkcji:

$$f(x) = \frac{-4}{x^2+2} + 2$$

$$g(x) = x^2 + 3x$$

$$h(x) = x^3 + x^2 - 6x$$

Dopasuj te wzory do wykresów.



6. Fotografia przedstawia zawodniczkę pchającą kulę.

W zależności od prędkości początkowej x (w m/s) odległość y (w m), na jaką polecie kula, opisuje wzór:

$$y = \frac{x}{20} (x + \sqrt{x^2 + 80}) \text{ dla } x \geq 0$$



Funkcję opisaną tym wzorem przedstawia wykres. Spróbuj odczytać z wykresu i obliczyć, korzystając ze wzoru, na jaką odległość polecie kula przy prędkości początkowej $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. O ile dalej poleciałaby kula, gdyby prędkość początkowa wynosiła $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

7. Znajdź taką liczbę a , dla której wykres funkcji określonej podanym wzorem przechodzi przez punkt $(2, 5)$.

a) $y = ax^2$

b) $y = \frac{a}{x}$

c) $y = a(x-1)^2$

d) $y = \sqrt{ax}$

8. Sprawdź, które z podanych liczb są miejscami zerowymi funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$

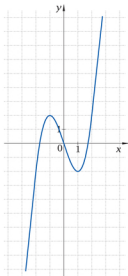
b) $f(x) = x^2 - 5x$

c) $f(x) = 1 - x^3$

0, -3, 3

0, -5, 5

1, -1, 0



9. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem:

$$y = x(x^2 - 3)$$

Ustal, na które z poniższych pytań łatwiej odpowiedzieć, korzystając z wykresu, a na które — korzystając ze wzoru funkcji.

- Jaką wartość przyjmuje funkcja dla $x = -1$?
- Czy wartość funkcji dla $x = 5$ jest większa od 100?
- Czy wartość funkcji dla $x = 1\frac{1}{2}$ jest dodatnia?
- Czy wartość funkcji dla $x = -100$ jest ujemna?
- Czy istnieje argument, dla którego wartość funkcji jest większa od 4000?
- Czy liczba 1,7 jest miejscem zerowym funkcji?
- Czy liczby $f(-20)$ i $f(20)$ są liczbami przeciwnymi?
- Czy punkt $(6, 198)$ należy do wykresu tej funkcji?
- Czy wartość funkcji dla $x = -1,75$ jest większa czy mniejsza niż wartość dla $x = -2,75$?
- Ile jest liczb całkowitych ujemnych, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie?

10. Wśród funkcji podanych w ramce wskaż te, które spełniają podany warunek.

- Wykres funkcji przecina oś y w punkcie $(0, 1)$.
- Wykres funkcji przechodzi przez punkt $(1, 1)$.
- Miejsce zerowe funkcji jest równe 0.

$$y = x^4$$

$$y = \sqrt[3]{x} \quad y = 2x - 1$$

$$y = \sqrt{x} \quad y = x + 1$$

$$y = x^2 \quad y = -x^4 + 1$$

11. a) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2}$. Zapisz wartości $f(a-1)$, $f(2a)$, $f(a^2)$ w postaci wyrażeń algebraicznych.

b) Funkcja g jest określona zbiorze $\mathbb{R}$ każdemu argumentowi x przyporządkowuje wartość $x(x-1)(2x+3)$. Jakie wartości przyjmuje ta funkcja dla argumentów $3x$, $x+1$, $x-\frac{3}{2}$? Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne.

12. Wykaż, że wartości funkcji:

a) $f(x) = \frac{2x^2}{|x|+3}$ dla przeciwnych argumentów są równe,

b) $f(x) = 3x(x^2 + 2)$ dla przeciwnych argumentów są liczbami przeciwnymi.

13. Funkcja jest określona wzorem $y = (x-2)(x+1)$. Wykaż, że dla każdego argumentu a zachodzi równość $f(a+1) - f(a-1) = 4a - 2$.

14. Wykaż, że jeśli różnica między argumentami funkcji $f(x) = \frac{5x-3}{2}$ jest równa 4, to różnica między odpowiadającymi im wartościami wynosi 10.

IV 15. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = x^3 - 5x$

c) $y = \frac{1}{x-2}$

e) $y = \frac{1}{|x-2|}$

b) $y = \sqrt{x}$

d) $y = \sqrt{3-x}$

f) $y = \frac{5}{2x^2+3}$

16. Określ dziedzinę funkcji.

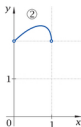
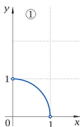
a) $y = \frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x+3}$

b) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{5-x}$

c) $y = \sqrt{\frac{x^2}{x-1}}$

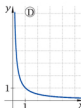
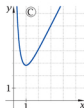
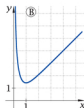
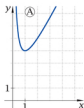
17. Rozważmy trójkąty prostokątne o przeciwprostokątnej długości 1. Niech x oznacza długość jednej z przyprostokątnych. Przedstaw za pomocą wzoru zależność y od x i wskaż wykres, który przedstawia tę zależność, jeśli:

- a) y oznacza długość drugiej z przyprostokątnych,
 b) y oznacza pole trójkąta,
 c) y oznacza obwód trójkąta,
 d) y oznacza długość przeciwprostokątnej.



18. Rozważmy prostokąty o polu równym 1. Niech x oznacza długość jednego z boków. Przedstaw za pomocą wzoru zależność y od x i wskaż wykres, który przedstawia tę zależność, jeśli:

- a) y oznacza długość drugiego boku prostokąta,
 b) y oznacza obwód prostokąta,
 c) y oznacza długość przekątnej,
 d) y oznacza sumę długości przekątnych prostokąta.



◀ V 19. Oblicz $f(-2)$, $f(0)$, $f(10)$, jeśli:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 1 & \text{dla } x \in (-1; 1) \\ 3x^2 & \text{dla } x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{2} & \text{dla } x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \\ x^2 + 21 & \text{dla } x \in (-\sqrt{2}; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{dla } x < 0 \\ 5x^3 - 2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 5 \\ 0,1x - 10 & \text{dla } x > 5 \end{cases}$$

- 20. Niech x oznacza długość jednego z boków prostokąta o obwodzie 12, zaś y — odległość punktu przecięcia przekątnych od dłuższego boku prostokąta. Który z poniższych wzorów przedstawia zależność y od x ?

$$y = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{dla } x \in (0; 3) \\ 3 - \frac{x}{2} & \text{dla } x \in (3; 6) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 3 - \frac{x}{2} & \text{dla } x \in (0; 3) \\ \frac{x}{2} & \text{dla } x \in (3; 6) \end{cases}$$

MINISPRAWDZIAN

51. Przez punkt $(-1, 2)$ przechodzi wykres funkcji:

A. $y = \frac{1-2x^5}{x^6}$

B. $y = x^2 + 2x - 1$

C. $y = \frac{4(x+1)}{2x+2}$

D. $y = \frac{\sqrt{1-3x}}{x+2}$

52. Niech $f(x)$ oznacza pole koła o średnicy x . Zatem:

A. $f(x) = \frac{1}{4}\pi x^2$

C. $f(x) = \pi x^2$

B. $f(x) = \frac{1}{2}\pi x^2$

D. $f(x) = 2\pi x^2$

53. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono wykres funkcji $y = \sqrt{x+4}$?



54. Dziedzina funkcji określonej wzorem $y = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x-3}$ jest zbiór:

A. $(0; 3) \cup (3; +\infty)$

B. $(0; +\infty)$

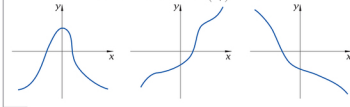
C. $(3; +\infty)$

D. $(0; 3)$

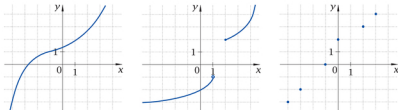
MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

ĆWICZENIE A Jeden z wykresów przedstawia funkcję f spełniającą poniższy warunek. Który to wykres?

$$f(-3) < f(-1,5) < f(0) < f\left(1\frac{1}{7}\right) < f(2,55)$$



Poniżej przedstawiono fragmenty wykresów funkcji, które wraz ze wzrostem argumentów przyjmują coraz większe wartości. O takich funkcjach mówimy, że są rosnące.



Funkcję f nazywamy **rosnącą**, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 jest spełniony warunek:

$$\text{Jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$

PRZYKŁAD 1 Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{7+x}{2}$ jest rosnąca.

Przyjmijmy, że $x_1 < x_2$, czyli $x_2 - x_1 > 0$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{7+x_2}{2} - \frac{7+x_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$$

$f(x_2) - f(x_1) > 0$, więc $f(x_1) < f(x_2)$

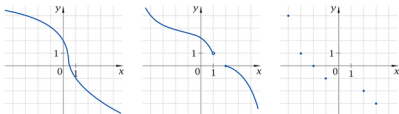
Zatem funkcja f jest rosnąca.

ZADANIE Uzasadnij, że funkcja $f(x) = \frac{x-5}{3}$ jest rosnąca.

ĆWICZENIE B Jeden z wykresów z ćwiczenia A przedstawia funkcję g spełniającą poniższy warunek. Który to wykres?

$$g(-3) > g(-1,5) > g(0) > f\left(1\frac{1}{7}\right) > g(2,55)$$

Kolejne rysunki przedstawiają fragmenty wykresów funkcji, które wraz ze wzrostem argumentów przyjmują coraz mniejsze wartości. O takich funkcjach mówimy, że są malejące. Oto przykłady funkcji malejących:

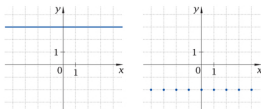


Funkcję f nazywamy **malejącą**, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 jest spełniony warunek:

$$\text{Jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$

ĆWICZENIE C Wzorując się na przykładzie 1, wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{3-x}{5}$ jest malejąca.

Poniżej przedstawiono przykłady funkcji, które przyjmują tylko jedną wartość. Pierwsza z tych funkcji przyjmuje dla każdego argumentu wartość 3, a druga — wartość -2 . O takich funkcjach mówimy, że są stałe.

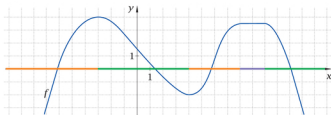


Funkcję, która dla każdego argumentu przyjmuje tę samą wartość, nazywamy **funkcją stałą**.

ĆWICZENIE D Narysuj wykres funkcji f , której dziedziną jest przedział $(-3;4)$ i która każdemu argumentowi przyporządkowuje wartość 2.

zadania 1-3 ►

- III **ĆWICZENIE E** Uzasadnij, że funkcja f , przedstawiona poniżej, nie jest rosnąca. Wskaż takie argumenty x_1 i x_2 , że $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Przyjmijmy, że funkcja przedstawiona powyżej jest określona na zbiorze $\mathbb{R}$, a niewidoczne części wykresu to półproste. Funkcja taka nie jest oczywiście ani rosnąca, ani malejąca, ani stała, ale o funkcji f możemy powiedzieć, że:

- jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$
- jest malejąca w przedziale $\langle -3; 4 \rangle$
- jest rosnąca w przedziale $\langle 4; 8 \rangle$
- jest stała w przedziale $\langle 8; 10 \rangle$
- jest malejąca w przedziale $\langle 10; +\infty \rangle$

Uwaga. Chociaż funkcja f rośnie w przedziale $(-\infty; -3)$ oraz w przedziale $\langle 4; 8 \rangle$, nie możemy powiedzieć, że funkcja ta jest rosnąca w zbiorze $(-\infty; -3) \cup \langle 4; 8 \rangle$, gdyż na przykład dla argumentów $x_1 = -4$ i $x_2 = 5$ spełniony jest warunek $x_1 < x_2$ i jednocześnie nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

Jeśli podajemy przedziały, w których funkcja jest rosnąca, przedziały, w których jest malejąca, oraz takie, w których jest stała, to mówimy, że wyznaczamy **przedziały monotoniczności funkcji**.

zadania 4–8 ►

- III **PRZYKŁAD 2** Wykaż, że funkcja $f(x) = 5x^2 - 7$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

Przyjmijmy, że $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ i $x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= 5x_2^2 - 7 - (5x_1^2 - 7) = \\ &= 5x_2^2 - 7 - 5x_1^2 + 7 = 5(x_2^2 - x_1^2) = \dots x_1, x_2 \in (-\infty; 0), \text{ więc } x_2 + x_1 < 0 \\ &= 5(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0 \dots x_1 < x_2, \text{ więc } x_2 - x_1 > 0. \end{aligned}$$

$$f(x_2) - f(x_1) < 0, \text{ więc } f(x_1) > f(x_2)$$

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

ZADANIE Wykaż, że funkcja $f(x) = 5x^2 - 7$ jest rosnąca w przedziale $\langle 0; +\infty \rangle$.

PRZYKŁAD 3 Wykaż, że funkcja $f(x) = -\frac{4}{x} + 6$ jest rosnąca w przedziale $\langle -5; -2 \rangle$.

Przyjmijmy, że $x_1, x_2 \in \langle -5; -2 \rangle$ i $x_1 < x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= -\frac{4}{x_2} + 6 - \left(-\frac{4}{x_1} + 6\right) = \\ &= -\frac{4}{x_2} + \frac{4}{x_1} = \frac{-4x_1 + 4x_2}{x_1 x_2} = \frac{-4(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} > 0 \end{aligned}$$

$\vdots x_1, x_2 \in \langle -5; -2 \rangle$, więc $x_1 x_2 > 0$
 $\vdots x_1 < x_2$, więc $x_1 - x_2 < 0$.

$f(x_2) - f(x_1) > 0$, więc $f(x_1) < f(x_2)$.

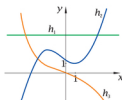
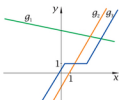
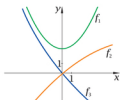
Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -5; -2 \rangle$.

ZADANIE Wykaż, że funkcja $g(x) = \frac{5}{x} - 2$ jest malejąca w przedziale $\langle -3; -1 \rangle$.

zadania 9–12 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Czy któraś z funkcji przedstawionych za pomocą wykresów może być rosnąca, malejąca albo stała?



2. Wśród podanych zależności wskaż takie, które są funkcjami rosnącymi.

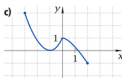
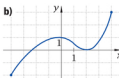
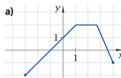
- Zależność długości drogi hamowania od prędkości samochodu.
- Zależność pola kwadratu od długości jego boku.
- Zależność długości grafitu ołówka od czasu używania tego ołówka.

3. Określ dziedzinę funkcji f i uzasadnij podaną własność.

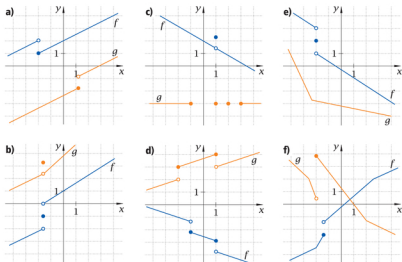
a) Funkcja $f(x) = 3 + 4x$ jest rosnąca.

b) Funkcja $f(x) = \frac{5-x}{2}$ jest malejąca.

4. Podaj maksymalne przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej na wykresie.



5. Czy któraś z dwóch funkcji przedstawionych na rysunku może być rosnąca, malejąca albo stała?

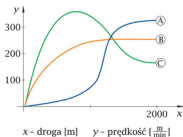


6. Narysuj wykres takiej funkcji, która jednocześnie spełnia warunki:

a) dziedziną jest zbiór $\langle -5; -2 \rangle \cup (0; 5)$, funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -5; -4 \rangle$, jest rosnąca w przedziale $\langle 3; 5 \rangle$, jest malejąca w przedziale $\langle -4; -2 \rangle$, jest malejąca w przedziale $(0; 3)$,

b) dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych, funkcja jest stała w przedziale $\langle -5; -3 \rangle$ oraz w przedziale $\langle 2; 5 \rangle$, a w przedziale $\langle -3; 2 \rangle$ jest rosnąca.

7. W wyścigu wioślarskim na dystansie 2000 m wzięły udział trzy 8-osobowe osady reprezentujące uniwersytety z Kamfort, Oksbridż i z Jelitkowa. Wykresy pokazują, jak zmieniła się prędkość tych osad na trasie wyścigu.

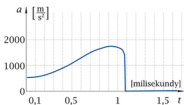
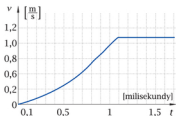
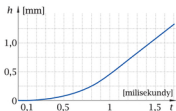


Osada z Kamfort w pierwszej fazie wyścigu rozpedzała się, a w drugiej utrzymywała stałą prędkość. Załoga z Oksbridż szybko uzyskiwała dużą prędkość, jednak wkrótce straciła siły i prędkość ich łódki znacznie zmalała.

a) Które wykresy opisują prędkość osad z Kamfort i Oksbridż?

b) Jak zmieniła się prędkość osady z Jelitkowa?

8. Badania naukowców nad skokami pcheł zaowocowały wykresami, które przedstawiono poniżej.



Pierwszy wykres przedstawia, jak zmienia się wysokość, na jakiej znajduje się pchła (jej środek ciężkości). Drugi wykres przedstawia, jak zmienia się prędkość pchły w tym samym czasie, a trzeci — jak zmienia się przyspieszenie.

a) Jak zmienia się przyspieszenie pchły, a jak — wysokość, na której się znajduje, gdy prędkość pchły jest stała?

b) Na jakiej wysokości znajduje się pchła, gdy ma ona największe przyspieszenie? Jaką ma wówczas prędkość?

c) Z jakim przyspieszeniem pchła rozpoczyna skok? Czy prędkość pchły maleje, gdy maleje jej przyspieszenie?

d) Z jaką prędkością porusza się pchła, gdy znajduje się na wysokości 0,25 mm?



9. Wykaż, że:

- funkcja $f(x) = x^2 - 8$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$,
- funkcja $f(x) = -3x^2 - 4$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$,
- funkcja $f(x) = \frac{4}{x} + 5$ jest malejąca w przedziale $(0; +\infty)$,
- funkcja $f(x) = 2x^3$ jest rosnąca w przedziale $(-10; -1)$.

10. Uzasadnij, że podana funkcja nie jest ani rosnąca, ani malejąca, ani stała.

a) $f(x) = 3x^2 + 2$

b) $f(x) = \frac{5}{x^2}$

c) $f(x) = |2x - 4|$

11. Wykaż, że:

a) funkcja $f(x) = x^2 - 2x$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$ i jest rosnąca w przedziale $(1; +\infty)$,

b) funkcja $f(x) = \frac{2}{x} - 3$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$ i jest malejąca w przedziale $(0; +\infty)$,

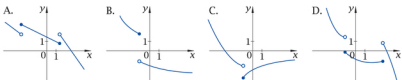
• c) funkcja $f(x) = |x - 5|$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 5)$ i jest rosnąca w przedziale $(5; +\infty)$.

• **12. a)** Funkcje f i g są rosnące i mają tę samą dziedzinę. Uzasadnij, że funkcja $h(x) = f(x) + g(x)$ też jest funkcją rosnącą.

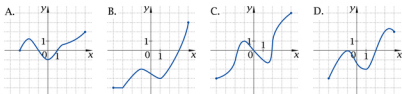
b) Funkcja f jest malejąca, a funkcja g jest stała i obie mają tę samą dziedzinę. Wykaż, że funkcja $h(x) = f(x) - g(x)$ jest malejąca, a funkcja $k(x) = g(x) - f(x)$ jest rosnąca.

MINISPRAWDZIAN

51. Na jednym z rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji malejącej. Na którym?



52. Która z funkcji przedstawionych poniżej spełnia warunek: *jest rosnąca w przedziale $\langle -3; -1 \rangle$ i w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$ oraz malejąca w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$?*



53. O funkcji f wiadomo, że jest rosnąca, a jej dziedziną jest $\mathbb{R}$. Która nierówność jest spełniona dla dowolnego argumentu?

- A. $f(x) > f(x+2)$ B. $f(x) > f(x-2)$ C. $f(x) \leq f(2x)$ D. $f(x) > f\left(\frac{x}{2}\right)$

WZÓR I WYKRES FUNKCJI LINIOWEJ

1 Rozważmy funkcję określoną wzorem:

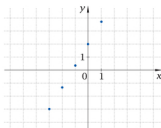
$$f(x) = \frac{5}{3}x + 2$$

Jej dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$. W tabeli podano trzy argumenty i odpowiadające im wartości. Zatem do wykresu rozważanej funkcji należą punkty: $(1, 3\frac{2}{3})$, $(-3, -3)$, $(0, 2)$.

x	1	-3	0
$f(x)$	$3\frac{2}{3}$	-3	2

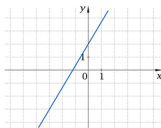
ĆWICZENIE A Znajdź kilka innych punktów należących do wykresu tej funkcji i zaznacz je w układzie współrzędnych.

Poniżej zaznaczono kilka punktów należących do wykresu funkcji f . Zauważ, że punkty te są współliniowe.



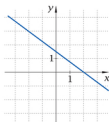
Prowadząc prostą przechodzącą przez te punkty, otrzymamy wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{5}{3}x + 2$$

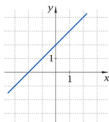


Oto przykłady kilku innych funkcji, których wykresy są liniami prostymi.

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$



$$y = x + 2$$



$$y = -2x$$



Funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{R}$, której wzór można zapisać w postaci

$$y = ax + b,$$

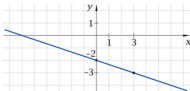
gdzie a i b są danymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy **funkcją liniową**. Wykres takiej funkcji jest linią prostą.

PRZYKŁAD 1 Narysuj wykres funkcji $y = -\frac{1}{3}x - 2$.

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \cdot 0 - 2 = -2$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \cdot 3 - 2 = -3$$

$(0, -2)$ i $(3, -3)$



Aby narysować wykres funkcji liniowej, znajdujemy współrzędne dwóch dowolnych punktów jej wykresu.

Zapisujemy współrzędne szukanych punktów.

Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i rysujemy prostą przechodzącą przez te punkty.

ZADANIE Narysuj wykres podanej funkcji.

a) $y = 3x + 2$

b) $y = -\frac{1}{4}x + 2$

c) $y = -2x - 1$

d) $y = 2x + \frac{3}{2}$

zadanie 1 ►

II Zbadajmy monotoniczność funkcji liniowej.

Rozważmy funkcję określoną wzorem:

$$f(x) = ax + b$$

Niech $x_1 < x_2$.

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$$

Otrzymaliśmy więc równość:

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

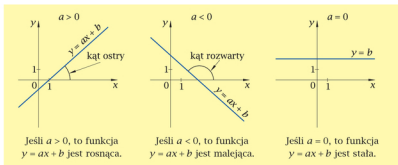
Ponieważ $x_2 - x_1 > 0$, więc znak różnicy $f(x_2) - f(x_1)$ zależy od tego, czy współczynnik a jest liczbą dodatnią, ujemną czy równą zero.

Jeśli $a > 0$, to $f(x_2) - f(x_1) > 0$, więc $f(x_1) < f(x_2)$, czyli funkcja jest rosnąca.

Jeśli $a < 0$, to $f(x_2) - f(x_1) < 0$, więc $f(x_1) > f(x_2)$, czyli funkcja jest malejąca.

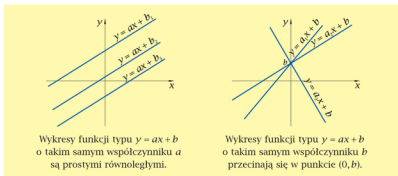
Jeśli $a = 0$, to $f(x_2) - f(x_1) = 0$, więc $f(x_1) = f(x_2)$, czyli funkcja jest stała.

Współczynnik a decyduje więc o tym, czy funkcja $y = ax + b$ jest rosnąca, malejąca czy stała. Od wartości współczynnika a zależy także kąt nachylenia wykresu tej funkcji do osi x . Dlatego liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.

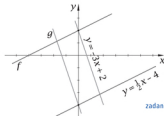


Współczynnik b decyduje o punkcie przecięcia wykresu funkcji $y = ax + b$ z osią y . Zauważmy bowiem, że dla $x = 0$ funkcja ta przyjmuje wartość b . Zatem jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, b)$.

Z powyższych rozważań wynikają następujące własności funkcji liniowych.



ĆWICZENIE B Popatrz na rysunek. Wykres funkcji f jest równoległy do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x - 4$, a wykres funkcji g jest równoległy do wykresu funkcji $y = -3x + 2$. Zapisz wzory funkcji f i g .



zadania 2-9 ►

PRZYKŁAD 2

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} 3x + 10 & \text{dla } x \leq -2 \\ 4 & \text{dla } -2 < x < 4 \\ 0,5x + 2 & \text{dla } x \geq 4 \end{cases}$

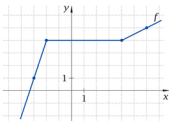
$$f(-2) = 3 \cdot (-2) + 10 = 4$$

$$f(-3) = 3 \cdot (-3) + 10 = 1$$

$$f(4) = 0,5 \cdot 4 + 2 = 4$$

$$f(6) = 0,5 \cdot 6 + 2 = 5$$

$$(-2, 4), (-3, 1), (4, 4) \text{ i } (6, 5)$$



Wykres funkcji f składa się z trzech fragmentów wykresów funkcji liniowych: $y = 3x + 10$, $y = 4$ i $y = 0,5x + 2$. Wykres funkcji $y = 4$ jest równoległy do osi x . Dla pozostałych funkcji znajdujemy po dwa punkty leżące na ich wykresach.

Zapisujemy współrzędne szukanych punktów.

Otrzymane punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i rysujemy wykres funkcji.

ZADANIE

Narysuj wykres funkcji $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x + 6 & \text{dla } x \leq 3 \\ 5 & \text{dla } 3 < x < 5 \\ -2x + 15 & \text{dla } x \geq 5 \end{cases}$

zadania 10–11 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Narysuj wykres funkcji.

a) $y = 2x - 3$

c) $y = 3x + 1$

e) $y = -\frac{1}{2}x - 2$

b) $y = -x + 2$

d) $y = -0,4x + 1$

f) $y = \frac{2}{3}x$

2. Które z podanych funkcji są rosnące, które — malejące, a które — stałe? Dla każdej funkcji podaj współrzędne punktu przecięcia jej wykresu z osią y .

$$f(x) = \frac{x}{7}$$

$$h(x) = -37$$

$$r(x) = \frac{3x-7}{5}$$

$$g(x) = -\frac{2}{3}x + 3$$

$$p(x) = \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)x$$

$$s(x) = \frac{4-\sqrt{3}x}{6}$$

3. Określ monotoniczność funkcji oraz współrzędne punktu przecięcia jej wykresu z osią y .

a) $y = \frac{2-2x}{-4} - x$

b) $y = \frac{1-6x}{3} + 2x$

c) $y = x + 1 - \frac{3+2x}{3}$

4. Dopasuj wzory do wykresów.

$$f_1(x) = \frac{3}{5}x + \frac{3}{2}$$

$$f_3(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{5}$$

$$f_5(x) = \frac{2}{7}x - \frac{2}{3}$$

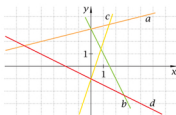
$$f_7(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$$

$$f_2(x) = -\frac{5}{3}x - \frac{3}{2}$$

$$f_4(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{5}$$

$$f_6(x) = -\frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$f_8(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{2}$$



5. a) Dopasuj poniższe wzory do wykresów przedstawionych na rysunku obok.

① $y = 3x - 1$

③ $y = -\frac{1}{2}x - 1$

② $y = -2x + 3$

④ $y = \frac{1}{4}x + 3$

b) Zapisz wzory funkcji, których wykresy są równoległe do prostych a , b , c , d i przechodzą przez punkt $(0, 2)$.

6. Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres podanej funkcji?

a) $y = -\frac{17}{33}x + \frac{3}{7}$

c) $y = \frac{4}{9}x - 7,6$

b) $y = -1,72x - 3,1$

d) $y = \frac{1+x}{2}$



7. Ustal, przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji $y = ax + b$, gdy:

a) $a > 0$ i $b < 0$

b) $a < 0$ i $b < 0$

c) $a > 0$ i $b > 0$

d) $a = 0$ i $b < 0$

8. Niech f będzie funkcją określoną wzorem $f(x) = ax + b$. Uzasadnij, że dla $a > 0$ wartość funkcji f dla argumentu 1 jest o a większa od wartości dla argumentu 0. Sformułuj podobną własność dla $a < 0$.

Warto wiedzieć!

Znając wartości współczynników a i b , możemy łatwo narysować wykres funkcji $y = ax + b$. Na pierwszym rysunku przedstawiono sposób rysowania, gdy współczynnik kierunkowy jest liczbą dodatnią, a na drugim — gdy jest liczbą ujemną.

$$y = ax + b \text{ i } a > 0$$



$$y = ax + b \text{ i } a < 0$$



9. Korzystając z informacji podanej w ciekawostce, narysuj wykres funkcji.

a) $y = 3x - 5$

b) $y = -2x + 4$

c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

10. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{dla } x \leq 3 \\ 2x - 10 & \text{dla } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -1 & \text{dla } x \in [-1; 3) \\ \frac{1}{3}x & \text{dla } x \in [3; +\infty) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in [-1; +\infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } x \leq -2 \\ 3x + 5 & \text{dla } -2 < x < 1 \\ -\frac{1}{2}x & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

11. Zapisz wzór funkcji bez używania wartości bezwzględnej. Narysuj jej wykres.

a) $y = |2x - 1|$

b) $y = |x| + |2x + 1|$

MINISPRAWDZIAN

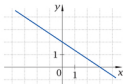
51. Wskaż wzór opisujący funkcję, której wykres przedstawiono na rysunku.

A. $y = \frac{3}{2}x + 2$

C. $y = -\frac{2}{3}x - 2$

B. $y = -\frac{2}{3}x + 2$

D. $y = -\frac{3}{2}x + 2$



52. Wykres pewnej funkcji liniowej przechodzi przez punkt $(2, 7)$, a współczynnik kierunkowy jest ujemny. Miejsce zerowe tej funkcji:

A. jest liczbą mniejszą od -7 ,

C. należy do przedziału $(0; 2)$,

B. jest liczbą większą od 2 ,

D. należy do przedziału $(-7; 0)$.

53. Który warunek musi być spełniony, aby wykres funkcji $y = ax + b$ nie przechodził przez II ćwiartkę układu współrzędnych?

A. $a > 0$ i $b > 0$

B. $a > 0$ i $b < 0$

C. $a < 0$ i $b > 0$

D. $a < 0$ i $b < 0$

WŁASNOŚCI FUNKCJI LINIOWEJ

- 1 Gdy znamy wzór funkcji liniowej, możemy określić różne jej własności, wykonując odpowiednie obliczenia. Rozważmy na przykład funkcję:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$$

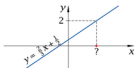
- Aby obliczyć miejsce zerowe tej funkcji, wystarczy rozwiązać równanie:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = 0$$



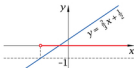
- Argument, dla którego ta funkcja przyjmuje wartość 2, to liczba spełniająca równanie:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = 2$$



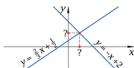
- Argumenty, dla których wartości tej funkcji są większe od -1, tworzą zbiór rozwiązań nierówności:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} > -1$$



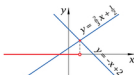
- Aby obliczyć współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ z wykresem funkcji $y = -x + 2$, wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} \\ y = -x + 2 \end{cases}$$



- Zbiór argumentów, dla których wartości funkcji $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ są mniejsze od wartości funkcji $y = -x + 2$, wyznaczamy, rozwiązując nierówność:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} < -x + 2$$



zadania 1-4 ►

- II Na podstawie pewnych informacji o funkcji liniowej można też czasem wyznaczyć wzór tej funkcji.

PRZYKŁAD 1 Wykres pewnej funkcji liniowej jest równoległy do wykresu funkcji $y = -3x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (-2, -5)$. Znajdź wzór tej funkcji.

$$y = ax + b \text{ i } a = -3$$

$$y = -3x + b$$

$$-5 = -3 \cdot (-2) + b, \text{ więc } b = -11$$

Wykres szukanej funkcji $y = ax + b$ jest równoległy do wykresu funkcji $y = -3x + 4$, więc $a = -3$.

Współrzędne punktu $A (x = -2 \text{ i } y = -5)$ spełniają równość $y = -3x + b$.

Odp. Wzór szukanej funkcji jest następujący: $y = -3x - 11$.

ZADANIE Wykres funkcji liniowej g jest równoległy do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x + 7$ i przechodzi przez punkt $P = (6, -5)$. Znajdź wzór funkcji g .

zadania 5-7 ►

III **PRZYKŁAD 2** Wykres funkcji $y = ax + b$ przechodzi przez punkty o współrzędnych $(1, 3)$ i $(-1, 1)$. Znajdź wzór tej funkcji.

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 1 + b \\ 1 = a \cdot (-1) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2b = 4 \\ b = 2 \end{array}$$

$$a + b = 3 \text{ i } b = 2, \text{ więc } a = 1$$

Współrzędne punktów $(1, 3)$ i $(-1, 1)$ spełniają równanie $y = ax + b$.

Rozwiązujemy otrzymany układ równań.

Obliczamy a , wstawiając $b = 2$ do jednego z równań układu.

Odp. Szukana funkcja ma wzór $y = x + 2$.

ZADANIE Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty:

a) $A = (3, 7)$, $B = (5, 1)$

b) $P = (-2, 7)$, $R = (-1, -3)$

zadania 8-22 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Oblicz miejsce zerowe podanej funkcji oraz współrzędne punktów przecięcia wykresu tej funkcji z osiami układu współrzędnych. Narysuj wykres funkcji.

a) $f(x) = -x + 7$

b) $y = 0,8x - 2$

c) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$

d) $y = 7x + \frac{1}{7}$

- 2. a)** Dla jakiego argumentu funkcja $f(x) = \frac{2}{3}x - 5$ przyjmuje wartość 6?
- b)** Funkcja $g(x) = -4x + b$ dla argumentu $x = \frac{1}{2}$ przyjmuje wartość 7. Dla jakiego argumentu ta funkcja przyjmuje wartość -7?
- c)** Wartość funkcji $h(x) = ax + 6$ dla argumentu $x = -3$ jest równa -9. Znajdź argument, dla którego wartość tej funkcji jest równa -3.

- 3. a)** Dla jakich argumentów wartości funkcji $y = 3x - 2$ są dodatnie?
- b)** Dla jakiego argumentu wartość funkcji $f(x) = x\sqrt{3} - 5$ jest równa $3\sqrt{3}$?
- c)** Dla jakich argumentów funkcja $y = -0,2x + 5$ przyjmuje wartości ujemne?
- d)** Dla jakich argumentów wartości funkcji $y = 5x - 7$ są większe od 100?
- e)** Dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = 2(x - 3) - 4$ są mniejsze od -50?

4. Dane są funkcje:

$$f: x \mapsto 3x + 2 \qquad g: x \mapsto -\frac{1}{2}x - 1 \qquad h: x \mapsto -2x + 3$$

- a)** Znajdź współrzędne punktu przecięcia wykresów funkcji f i g .
- b)** Dla jakiego argumentu wartości funkcji f i h są równe?
- c)** Dla jakich argumentów wartości funkcji g są większe od wartości funkcji h ?

◀ || **5.** Podaj wzór funkcji, której wykres spełnia podany warunek.

- a)** Wykres jest równoległy do wykresu funkcji $y = -3x + \sqrt{7}$ i przecina oś y w punkcie $(0, -1)$.
- b)** Wykres jest równoległy do wykresu funkcji $y = \sqrt{2} - x$ i przechodzi przez początek układu współrzędnych.
- c)** Wykres jest równoległy do osi x i przechodzi przez punkt $(-1, 6)$.

6. Znajdź wzór funkcji, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji $y = -3x + 7$, a jej miejsce zerowe jest odległe od początku układu współrzędnych o 5 jednostek.

7. Wykres funkcji g jest równoległy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x - 8$ i przecina oś y w punkcie $(0, 5)$. Oblicz odległość między miejscami zerowymi tych funkcji.

◀ ||| **8.** Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty:

- a)** $(2, 1)$ i $(-2, -3)$ **b)** $(-1, 1)$ i $(-2, 5)$ **c)** $(10, 8)$ i $(-100, -3)$

9. Znajdź wzór funkcji liniowej, której miejscem zerowym jest -3 i której wykres przechodzi przez punkt $(-5, 7)$.

Warto wiedzieć!

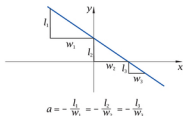
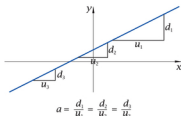
Łatwo wykazać, że dla funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, jeśli wybierzemy dwa różne argumenty x_1, x_2 , to zachodzi równość:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

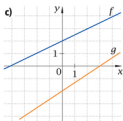
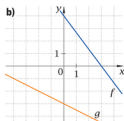
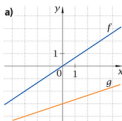
Przyjrzyj się narysowanym wykresom funkcji liniowych oraz zaznaczonym trójkątom prostokątnym. Z powyższej równości wynika, że dla danej funkcji stosunek długości odpowiednich przyprostokątnych jest w każdym trójkącie taki sam.

Jeśli funkcja $y = ax + b$ jest rosnąca, to stosunek długości pionowej przyprostokątnej do poziomej przyprostokątnej jest równy współczynnikowi a .

Jeśli funkcja $y = ax + b$ jest malejąca, to stosunek długości pionowej przyprostokątnej do poziomej przyprostokątnej jest liczbą przeciwną do współczynnika a .



10. Na każdym z poniższych wykresów znajdź punkty o obu współrzędnych całkowitych i korzystając z ciekawostki, zapisz wzory funkcji f i g .



11. Korzystając z ciekawostki, znajdź wzór funkcji liniowej, która spełnia podane warunki.

a) Wykres funkcji przecina osie układu współrzędnych w punktach $(-2, 0)$ i $(0, 7)$.

b) Wykres funkcji przechodzi przez punkty $(0, -50)$ i $(-3, 10)$.

12. Wartość pewnej funkcji liniowej dla $x = 100$ wynosi 1250, a dla $x = 150$ wynosi 1600. Jaka jest wartość tej funkcji dla $x = 50$, a jaka — dla $x = 200$? W którym punkcie wykres tej funkcji przecina oś y ?

13. Tabelka przedstawia kilka argumentów i wartości pewnej funkcji liniowej. Znajdź liczby p , q i r .

x	-1	0	1	q	5
y	p	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{9}{10}$	0	r

14. Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $(-2, -9)$ i jest równoległy do prostej przechodzącej przez punkty $(0, 3)$ i $(\frac{3}{5}, 0)$.

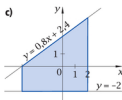
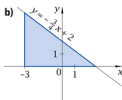
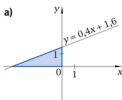
15. Czy punkty $(-7, 0)$, $(5, 6)$ i $(10, 9)$ są współliniowe?

16. a) Dla jakiej wartości p funkcja $f(x) = (p - 4)x + 3p$ jest rosnąca?

b) Dla jakiej wartości k miejscem zerowym funkcji $y = (3k + 1)x - k + 5$ jest -2 ?

c) Dla jakiej wartości m wykres funkcji $h(x) = (5 - 2m)x + 2m - 4$ przechodzi przez punkt $(1, 1)$?

17. Oblicz pole zacieniowanej figury.



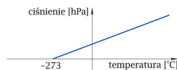
Ciekawostka

Zero bezwzględne to temperatura, w której zamiera ruch postępowy cząsteczek. Wynosi ona około -273°C . Takiej temperatury nie można osiągnąć nawet w warunkach laboratoryjnych. Jak to więc możliwe, że już w XIX wieku obliczono jej wartość?

Okazuje się, że wykorzystano własności funkcji liniowej. Gdybyśmy mierzyli temperaturę i ciśnienie powietrza podgrzewanego w szczelnie zamkniętym naczyniu i zaznaczali otrzymane wyniki

w układzie współrzędnych, zauważylibyśmy, że zależność między tymi wielkościami jest funkcją liniową.

Miejsce zerowe tej funkcji jest właśnie zerem bezwzględnym (gdy zamiera ruch cząsteczek, ciśnienie jest równe 0).



18. Przeczytaj ciekawostkę. W poniższej tabeli podano wyniki bardzo dokładnych pomiarów ciśnienia i temperatury powietrza podgrzewanego w zamkniętym naczyniu. Oblicz, dla jakiej temperatury ciśnienie będzie równe zero.

Temperatura (w $^{\circ}\text{C}$)	10	20
Ciśnienie (w hPa)	962,71	996,71

19. Przeczytaj uważnie zamieszczone poniżej informacje o warunkach wypożyczenia samochodu w dwóch różnych firmach — Pik i Caro.

♠ PIK
WYPOŻYCZALNIA SAMOCHODÓW

Cena za wypożyczenie:
+0,5 zł za każdy przejechany kilometr.



CARO
WYPOŻYCZALNIA SAMOCHODÓW

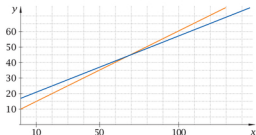
Koszt wypożyczenia
17 zł
+0,4 zł
za każdy przejechany kilometr!



a) Niech y oznacza cenę wypożyczenia samochodu, a x — liczbę przejechanych kilometrów. Podaj wzory zależności y od x dla firmy Pik oraz dla firmy Caro.

b) Na poniższych wykresach przedstawiono zależność y od x dla obu tych firm. Który wykres odpowiada firmie Pik, a który — firmie Caro? Odczytaj z wykresów, z której wypożyczalni bardziej opłaca się skorzystać, jeśli chcemy przejechać:

- 50 km • 100 km • 150 km



c) Odczytaj z wykresu, przy ilu przejechanych kilometrach koszt wypożyczenia samochodu jest taki sam w obu firmach. Sprawdź odczytany wynik, wykonując odpowiednie obliczenia.

20. Znajdź miejsca zerowe funkcji i ustal, dla jakich argumentów wartości funkcji są ujemne.

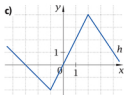
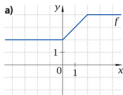
a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \leq 6 \\ x - 7 & \text{dla } x > 6 \end{cases}$

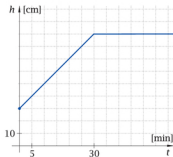
c) $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x \leq -1 \\ 5 & \text{dla } -1 < x < 2 \\ -2x + 9 & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -3x - 6 & \text{dla } x \in (-1; +\infty) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ -x + 4 & \text{dla } x \in [1; 5] \\ -2x + 9 & \text{dla } x \in (5; +\infty) \end{cases}$

21. Wykres funkcji składa się z dwóch półprostych i odcinka. Zapisz wzór funkcji.





22. Wykres przedstawia, jak zmieniała się wysokość lustra wody w pewnej beczce w czasie jej napełniania.

a) Jaka była początkowa wysokość lustra wody?

b) Jaka jest głębokość beczki?

c) O ile centymetrów podnosiło się lustro wody w ciągu minuty, zanim beczkę napełniono?

d) Podaj wzór funkcji opisującej ten wykres.

MINISPRAWDZIAN

51. Wartości funkcji $y = -2x + 8$ są ujemne dla wszystkich argumentów:

- A. mniejszych od 4, C. mniejszych od 2,
B. większych od 4, D. większych od 2.

52. Pewna funkcja jest określona wzorem $y = -\frac{3}{4}x + 30$. Które zdanie jest fałszywe?

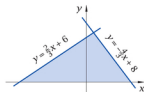
- A. Miejscem zerowym funkcji jest liczba 40.
B. Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x < 40$.
C. Do wykresu funkcji należy punkt $(4, 26)$.
D. Dla argumentów ujemnych wartości funkcji są większe od 30.

53. Zbiór wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji $f(x) = -7x + 12$ są większe od wartości funkcji $g(x) = -2x - 3$, jest równy:

- A. $(-\infty; \frac{5}{3})$ C. $(-\frac{5}{3}; +\infty)$
B. $(3; +\infty)$ D. $(-\infty; 3)$

54. Pole trójkąta zacieniowanego na rysunku obok wynosi:

- A. $48\frac{2}{3}$ B. 50 C. $64\frac{1}{3}$ D. 90



55. Zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{dla } x \leq 4 \\ 2x - 14 & \text{dla } x > 4 \end{cases}$ przyjmuje wartości dodatnie, to:

- A. $(-2; 7)$ C. $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$
B. $(-14; 2)$ D. $(-\infty; -14) \cup (2; +\infty)$

PROPORCJONALNOŚĆ PROSTA I ODWROTNA

- I Przypomnijmy, że o wielkościach x , y mówimy, że są wprost proporcjonalne, gdy ich iloraz jest stały i równy liczbie dodatniej, czyli gdy zachodzi równość $\frac{y}{x} = a$, gdzie $a > 0$. Tę równość można przekształcić, wyznaczając y .

$$y = ax, \text{ gdzie } a > 0$$

Taką zależność nazywamy **proporcjonalnością prostą**, a liczbę a — **współczynnikiem proporcjonalności**.

Wzór $y = ax$ opisuje funkcję liniową, której wykresem jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych. W sytuacjach praktycznych wykresem przedstawiającym zależność między wielkościami wprost proporcjonalnymi jest najczęściej półprosta leżąca w I ćwiartce układu współrzędnych lub jej fragmenty.

Oto przykłady proporcjonalności prostych:

- Obwód kwadratu jest wprost proporcjonalny do długości boku.

x — długość boku kwadratu

y — obwód kwadratu

$$y = 4x$$



- Jeden batonik kosztuje 1,50 zł. Koszt zakupu batoników jest wprost proporcjonalny do liczby zakupionych batoników.

x — liczba batoników

y — koszt zakupu

$$y = 1,5x$$

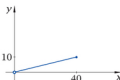


- Maksymalna prędkość, z jaką może jechać pewien kolarz, wynosi $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Droga, którą pokona ten kolarz w ciągu kwadransa, jadąc ze stałą prędkością, jest wprost proporcjonalna do prędkości jazdy.

x — prędkość kolarza w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

y — droga (w km) przejechana w ciągu 15 minut

$$y = 0,25x$$



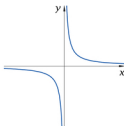
zadania 1-7 ►

- II O dwóch wielkościach x , y mówimy, że są odwrotnie proporcjonalne, gdy ich iloczyn jest stały i równy liczbie dodatniej, czyli $xy = a$, gdzie $a > 0$. Tę równość możemy przekształcić, wyznaczając y .

$$y = \frac{a}{x} \text{ dla } a > 0$$

Taką zależność nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**.

ĆWICZENIE Znajdź kilka punktów wykresu funkcji określonej wzorem $y = \frac{4}{x}$.



Wzór $y = \frac{a}{x}$, gdzie $a > 0$, opisuje funkcję, której wykres przedstawiono na rysunku obok. Zauważ, że jej dziedziną jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Taką krzywą nazywamy hiperbolą.

W sytuacjach praktycznych wykresem przedstawiającym zależność między wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi jest najczęściej część hiperboli leżąca w I ćwiartce układu współrzędnych lub jej fragmenty.

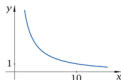
Oto przykłady proporcjonalności odwrotnych:

- Cena 1 kg jabłek i ilość jabłek, którą możemy kupić za 10 zł.

x — cena 1 kg jabłek

y — ilość jabłek (w kg), które możemy kupić

$$y = \frac{10}{x}$$

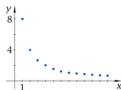


- Drut o długości 8 m dzielimy na jednakowe części. Długość każdej części jest odwrotnie proporcjonalna do liczby części.

x — liczba części, na którą dzielimy drut

y — długość (w m) jednej części

$$y = \frac{8}{x}$$

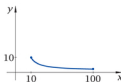


- Samochód może jechać ze średnią prędkością nie większą niż $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i nie mniejszą niż $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Czas potrzebny na pokonanie 100 km jest odwrotnie proporcjonalny do średniej prędkości samochodu.

x — średnia prędkość (w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$)

y — czas (w h) potrzebny na pokonanie 100 km

$$y = \frac{100}{x}$$



zadania 8–13 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Zapisz wzór opisujący, jak wielkość y zależy od wielkości x .

- a) Z kranu wycieka 10 ml wody w ciągu 1 minuty. Po x minutach wycieknie y mililitrów wody.
- b) Wojtek codziennie przebiega 1,5 km. Po x dniach przebiegnie y kilometrów.
- c) Jeśli 1 m drutu waży 10 dag, to x metrów waży y dekagramów.
- d) W czasie ulewy na każdy metr kwadratowy powierzchni spadło 5 litrów wody, zatem na powierzchnię x metrów kwadratowych spadło y litrów wody.

2. Znajdź zależność y od x .

- a) Do ugotowania zupy dla 8 osób potrzeba 240 g koncentratu, czyli do ugotowania takiej zupy dla x osób potrzeba y gramów koncentratu.
- b) Za 5 galek lodów zapłacono 15 zł, więc x galek kosztuje y zł.



c) Poziom wody w zbiorniku podnosi się o 2 cm w ciągu 5 godzin, zatem po x godzinach poziom się podniesie o y centymetrów.

d) Koniec wskazówki zegara pokonuje 5 cm w ciągu 10 minut, wobec tego w ciągu x godzin pokonuje y centymetrów.

3. Zapisz zależność y od x . Czy ta zależność jest proporcjonalnością prostą? Jeśli tak — podaj współczynnik proporcjonalności.

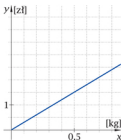
- a) x — długość krawędzi sześcianu, y — objętość sześcianu
- b) x — promień okręgu, y — długość okręgu
- c) x — promień koła, y — pole koła
- d) x — długość boku kwadratu, y — długość przekątnej kwadratu

4. Ślimak porusza się ze stałą prędkością 0,2 centymetra na sekundę. Przedstaw za pomocą wzoru, jak zmienia się długość drogi przebytej przez ślimaka w zależności od czasu. Narysuj wykres tej zależności.

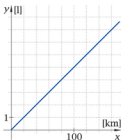


5. Każdy z poniższych wykresów można opisać wzorem $y = ax$ dla $x \geq 0$. Oblicz współczynnik kierunkowy a dla każdego z wykresów i podaj jego interpretację.

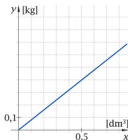
Koszt zakupu jabłek



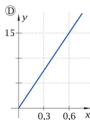
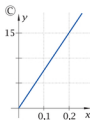
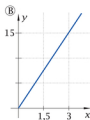
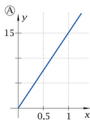
Zużycie paliwa przez samochód



Masa płynnego azotu



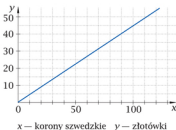
6. Stęp, klus, galop i cwał to rodzaje chodu konia w kolejności od najwolniejszego do najszybszego. Zilustrowano je na poniższych wykresach. Do każdego rodzaju chodu dopasuj odpowiedni wykres.



x – czas (w godzinach)

y – droga (w kilometrach)

7. Marcin przed wyjazdem do Szwecji przygotował sobie poniższy wykres. Jak myślisz, do czego mu służył?



a) Bilet do muzeum kosztował 100 koron. Ile to złotych?

b) Ile koron mógł kupić Marcin za 40 zł?

c) Który z poniższych wzorów opisuje funkcję przedstawioną na wykresie?

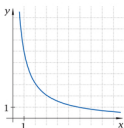
$$y = x \quad y = 0,45x \quad y = 0,55x$$

d) Co oznacza współczynnik proporcjonalności w tym przykładzie?

e) Wyobraź sobie, że jedziesz na wycieczkę po Europie. Sprawdź kurs waluty euro. Narysuj odpowiedni wykres.

8. Zapisz zależność opisującą związek między x i y oraz wyznacz y .

- a) Za kwotę 45 zł kupujemy cukierki. Gdy kilogram cukierków kosztuje x złotych, to za tę kwotę możemy kupić y kilogramów cukierków.
- b) Kelner ma rozlać 2 litry napoju do x szklanek. Powinien nalać y litrów napoju do każdej szklanki.
- c) Drogowcy zamierzają zbudować 200 km drogi w ciągu x dni, zatem każdego dnia powinni budować średnio y kilometrów drogi.
- d) Naukowiec ma w ciągu doby wykonać x pomiarów w odstępach co y godzin.
- e) Wiadomo, że 1 litr farby wystarcza na pomalowanie 10 m^2 powierzchni asfaltu. Na pomalowanie pasa na jezdni o długości y metrów i szerokości x metrów przeznaczono 8 litrów farby.



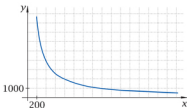
9. Wykres przedstawia zależność między długościami przekątnych x i y rombów o pewnym polu P .

- a) Odczytaj wartości y dla $x = 3$ oraz dla $x = 6$. Oblicz pole P .
- b) Który z poniższych wzorów określa funkcję przedstawioną na wykresie?

$$y = \frac{3}{x} \quad y = 6x \quad y = \frac{6}{x} \quad y = \frac{1}{x}$$

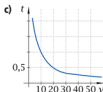
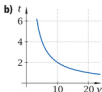
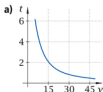
10. Firma Macio chce otrzymać pewien określony kapitał ze sprzedaży akcji. Menedżer przygotował wykres przedstawiający, jak wartość akcji zależałaby od ich liczby (zob. rysunek obok).

- a) Jaki kapitał ze sprzedaży akcji chce otrzymać firma Macio?
- b) Zapisz wzór przedstawiający zależność y od x .



x — liczba akcji y — wartość jednej akcji (w zł)

11. Rowerzysta ma do pokonania pewien dystans. Wykres przedstawia, jak czas jazdy t (w godzinach) zależy od średniej prędkości rowerzysty v (w km/h). Ustal, jaką drogę ma do pokonania rowerzysta. Zapisz wzór opisujący zależność przedstawianą na wykresie.



12. Wyobraźmy sobie, że nagrodę o wartości 10 000 zł dzielimy po równo między wybrane osoby. Narysuj wykres przedstawiający zależność między liczbą osób a kwotą przypadającą na jedną osobę.

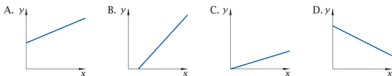
13. a) Wielkość x jest wprost proporcjonalna do wielkości y , a wielkość y jest wprost proporcjonalna do wielkości z . Wykaż, że wielkość x jest wprost proporcjonalna do wielkości z .

b) Wielkość x jest odwrotnie proporcjonalna do wielkości y , a wielkość y jest odwrotnie proporcjonalna do wielkości z . Wykaż, że wielkość x jest wprost proporcjonalna do wielkości z .

c) Wielkość x jest wprost proporcjonalna do wielkości y , zaś wielkość y jest odwrotnie proporcjonalna do wielkości z . Czy wielkości x i z są wprost proporcjonalne czy odwrotnie proporcjonalne?

MINISPRAWDZIAN

51. Na wykresach przedstawiono, w jaki sposób y zależy od x . Który wykres przedstawia zależność między wielkościami wprost proporcjonalnymi?



52. Poniższe wzory opisują zależność y od x . Który wzór nie przedstawia zależności między wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi?

A. $y = \frac{2}{x}$ B. $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$ C. $y = \frac{x}{2}$ D. $y = \frac{1}{2x}$

53. Czy opisane wielkości są wprost proporcjonalne?

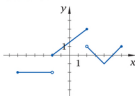
Pole czworokąta i jego obwód.	TAK	NIE
Cena przed obniżką i cena po obniżce o 30%.	TAK	NIE
Wiek ojca i wiek jego dziecka.	TAK	NIE

54. Czy opisane wielkości są odwrotnie proporcjonalne?

Wysokość i pole podstawy w ostrosłupach o objętości 12.	TAK	NIE
Długość krawędzi podstawy i wysokość w graniastosłupach prawidłowych czworokątnych o objętości 1000.	TAK	NIE
Liczby a i b , których suma jest równa 20.	TAK	NIE

POWTÓRZENIE

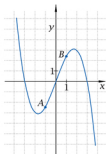
1. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji.



- Podaj dziedzinę i zbiór wartości.
- Znajdź miejsca zerowe.
- Podaj wartości przyjmowane dokładnie dla trzech różnych argumentów.
- Dla jakich argumentów wartości funkcji należą do przedziału $(-2; 0)$?
- Jaka jest najmniejsza, a jaka — największa wartość funkcji?
- Określ monotoniczność funkcji.

2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji określonej wzorem:

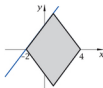
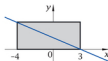
$$y = 3x - \frac{x^3}{3}$$



- Pierwsze współrzędne każdego z zaznaczonych punktów są liczbami całkowitymi. Oblicz drugą współrzędną każdego z tych punktów.
- Odczytaj na podstawie wykresu miejsca zerowe funkcji, a następnie sprawdź to, korzystając ze wzoru.

3. Podaj wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji $f(x) = 2 - x\sqrt{3}$ i przechodzi przez punkt $(2\sqrt{3}, -8)$. W jakich punktach wykres tej funkcji przecina oś układu współrzędnych?

4. Pole zacieniowanego prostokąta wynosi 21, a pole rombu jest równe 24. Znajdź wzory funkcji liniowych, których wykresy zaznaczono kolorem.



5. Wykaż, że funkcja $f(x) = -\frac{5}{x}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

6. Wielkość y jest odwrotnie proporcjonalna do wielkości x . W tabelce podano kilka wartości x i y :

x	2	1	b
y	8	a	4

- Oblicz a i b .
- Podaj wzór, który przedstawia zależność między x i y .

7. Narysuj wykres funkcji określonej następująco: Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy największą z liczb całkowitych mniejszych od tej liczby.

Równania kwadratowe

Najlepsi koszykarze potrafią skoczyć tak wysoko, że mogą się znaleźć nawet 1 m nad ziemią. Rozwiązując odpowiednie równanie, można obliczyć, jak długo trwa taki wyskok koszykarza.



Równanie kwadratowe w najprostszej postaci ■ Wyróżnik równania kwadratowego. Rozwiązywanie równań ■ Wzory Viète'a

- Powtórzenie

RÓWNANIA KWADRATOWE W NAJPROSTSZEJ POSTACI

I ĆWICZENIE A Odpowiedz na pytania.

- a) Ile jest liczb, których kwadrat jest równy 64?
- b) Ile jest liczb, których kwadrat jest równy 0?
- c) Czy istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat jest równy -9?
- d) Podaj liczby, które spełniają równania:

$$x^2 = 4$$

$$y^2 - 9 = 0$$

$$2z^2 = 0$$

$$t^2 = 5$$



Najlepsi koszykarze potrafią skoczyć tak wysoko, że mogą znaleźć się nawet 1 m nad ziemią. Wydaje się wtedy, że sportowiec „frunie” w powietrzu.

Obliczmy, jak długo trwa taki jednometrowy wyskok.

Możemy przyjąć, że czas wznoszenia się jest równy czasowi spadania. Ponadto wiadomo, że jeśli ciało (także ciało koszykarza) spada z wysokości h metrów w czasie t sekund, to związek między tymi wielkościami opisuje wzór:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

gdzie $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ jest przyspieszeniem ziemskim. Przekształcając ten wzór, otrzymamy równość:

$$t^2 = \frac{2h}{g}$$

W takim razie, aby obliczyć, ile sekund koszykarz spada z wysokości 1 m, trzeba rozwiązać równanie:

$$t^2 = \frac{2 \cdot 1}{10}$$

$$t^2 = \frac{1}{5}$$

Istnieją dwie liczby, które spełniają to równanie:

$$t = \sqrt{\frac{1}{5}} \quad \text{lub} \quad t = -\sqrt{\frac{1}{5}}$$

Rozwiązanie $t = -\sqrt{\frac{1}{5}}$ odrzucamy, bo czas wyskoku nie może być ujemny, $\sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0,45$, więc koszykarz spada z wysokości 1 m w ciągu około 0,45 s. Lot w górę i w dół trwa 2 razy dłużej, czyli około 0,9 s. Zatem nawet przy takim wyskoku można się oderwać od ziemi zaledwie na niecałą sekundę.

ĆWICZENIE B Każde z równań w poniższej ramce przekształć do postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Równanie, które można przekształcić do postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie a , b , c są danymi liczbami i $a \neq 0$, nazywamy równaniem drugiego stopnia z jedną niewiadomą albo **równaniem kwadratowym**.

Przykłady równań kwadratowych:

$$3x^2 = 1$$

$$5x^2 = (x + 7)^2$$

$$8x = 3x^2 + 1$$

$$x(x + 5) = 2$$

ĆWICZENIE C Podaj przykład równania typu $ax^2 + bx + c = 0$, w którym:

a) współczynnik b jest równy 0,

b) współczynnik c jest równy 0.

Pokażemy teraz, jak rozwiązuje się niektóre proste równania kwadratowe. Zaczniemy od równań typu $ax^2 + c = 0$.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 30 = 0$

$$2x^2 = 30$$

$$x^2 = 15$$

$$x = \sqrt{15} \text{ lub } x = -\sqrt{15}$$

Istnieją tylko dwie liczby, których kwadrat jest równy 15: liczba $\sqrt{15}$ i liczba $-\sqrt{15}$; równanie ma zatem dwa rozwiązania.

b) $-3x^2 - 6 = 0$

$$-3x^2 = 6$$

$$x^2 = -2$$

Równanie nie ma rozwiązań (jest sprzeczne).

Nie istnieje liczba rzeczywista, której kwadrat byłby liczbą ujemną.

c) $(x - 2)^2 = 4(1 - x)$

$$x^2 - 4x + 4 = 4 - 4x$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Jedyną liczbą, której kwadrat jest równy 0, jest liczba 0; równanie ma jedno rozwiązanie.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$

b) $(5x + 2)^2 = 20x + 4$

c) $5x(3 - 2x) = 15x + 9$

zadania 1-2 ►

ĆWICZENIE D Każde z poniższych równań spełniają dwie liczby. Podaj te liczby.

$$x(x-1)=0$$

$$y(y+2)=0$$

$$z(2z-1)=0$$

Pokażemy teraz, jak rozwiązuje się równania typu $ax^2 + bx = 0$.

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

a) $5x^2 - 3x = 0$

$$x(5x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{5}$$

$$\underline{x = 0 \quad \text{lub} \quad x = \frac{3}{5}}$$

Lewą stronę równania zapisujemy w postaci iloczynu — wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

Iloczyn dwóch liczb jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z tych liczb — pierwsza lub druga — jest równa 0.

Równanie ma dwa rozwiązania.

b) $-x\sqrt{5} = \frac{x^2}{2}$

$$\frac{x^2}{2} + x\sqrt{5} = 0$$

$$x\left(\frac{x}{2} + \sqrt{5}\right) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{x}{2} + \sqrt{5} = 0$$

$$\frac{x}{2} = -\sqrt{5}$$

$$x = -2\sqrt{5}$$

$$\underline{x = 0 \quad \text{lub} \quad x = -2\sqrt{5}}$$

Przekształcamy równanie do postaci $ax^2 + bx = 0$ i wyciągamy wspólny czynnik przed nawias.

Równanie ma dwa rozwiązania.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $7x^2 + 2x = 0$

b) $10x = 2x^2$

$\frac{1}{3}x^2 - 2x = 2x$

Uwaga. Niektóre równania typu $ax^2 + c = 0$ można również rozwiązywać, zapisując lewą stronę w postaci iloczynu. Na przykład równanie $x^2 - 25 = 0$ jest równoważne równaniu $(x - 5)(x + 5) = 0$. Dalej postępujemy tak, jak w powyższym przykładzie.

zadania 3–6 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{1}{2}x^2 = 9$

c) $12 - 3x^2 = 0$

e) $4(x^2 + 2) = 8$

b) $2x^2 - 1 = 17$

d) $6x^2 = 8 - x^2$

f) $\frac{5+x^2}{2} - 4 = 0$

2. Łódka płynąca po spokojnej wodzie tworzy na niej fale. Odległość λ (czyt. lambda) między wierzchołkami tych fal (w metrach) można obliczyć ze wzoru $\lambda = \frac{\pi \cdot v^2}{5}$, gdzie v oznacza prędkość łodzi (w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$). Oszacuj, z jaką prędkością musi płynąć łódka, aby odległość między falami, które tworzy, była równa 10 m.

3. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 2x = 0$

d) $x^2 = -7x$

g) $-\frac{2}{7}x^2 + 2x = x$

b) $3x^2 + 8x = 0$

e) $\frac{x}{2} = 4x^2$

h) $\frac{x^2+2}{2} = 4x+1$

c) $-5x - 4x^2 = 0$

f) $\frac{1}{3}x^2 = 5x$

i) $\frac{x-3}{3} = \frac{x^2-5}{5}$

4. Rozwiąż równanie.

a) $(5x+2)^2 = 20x$

d) $(3+2x)^2 = (3x+2)^2 + 10$

b) $(x-2)(x+2) = 5$

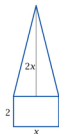
e) $(5x-2)(3-x) = -6(1-x)(1+x)$

c) $(2x-1)(x+2) = 3x-2$

f) $(4x-6)^2 = (x-4)(x-9)$

5. Uzasadnij, że jeśli w równaniu kwadratowym typu $ax^2 + bx = 0$ liczby a oraz b są całkowite, to wszystkie rozwiązania tego równania są liczbami wymiernymi.

6. Na jednym z boków prostokąta zbudowano trójkąt równoramienny, którego wysokość jest dwa razy dłuższa od podstawy (zob. rysunek). Przy jakich wymiarach prostokąta pole trójkąta będzie dwa razy większe od pola prostokąta?



MINISPRAWDZIAN

51. Każda liczba spełniająca równanie $2x^2 = 5x$ jest też rozwiązaniem równania:

A. $2x = 5$

C. $x(2x-5) = 0$

B. $-3x = 0$

D. $x^2(5x-2) = 0$

52. Wszystkie rozwiązania równania $3x^2 - \frac{x}{2} = 0$ należą do przedziału:

A. $(-\infty; 0)$

B. $(0; 1)$

C. $(-1; 0,1)$

D. $(0,1; +\infty)$

53. Długość boku trójkąta równobocznego o polu $10\sqrt{3}$ jest liczbą:

A. wymierną i mniejszą niż 10

C. wymierną i większą niż 10

B. niewymierną i mniejszą niż 10

D. niewymierną i większą niż 10

WYRÓŻNIK RÓWNANIA KWADRATOWEGO. ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ

- I Umiejętność rozwiązywania równań typu $x^2 = d$ można wykorzystać przy rozwiązywaniu równań, w których po jednej stronie jest kwadrat pewnego wyrażenia, a po drugiej — liczba.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż równanie.

$$(2x - 3)^2 = 5$$

$$2x - 3 = \sqrt{5} \quad \text{lub} \quad 2x - 3 = -\sqrt{5}$$

$$2x = 3 + \sqrt{5} \qquad 2x = 3 - \sqrt{5}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

... Istnieją dwie liczby, których kwadrat jest równy 5: liczba $\sqrt{5}$ i liczba $-\sqrt{5}$.

... Równanie ma dwa rozwiązania.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

$$(x - 1)^2 = 64$$

$$(2x + 1)^2 = 10$$

$$(4x - 8)^2 = 0$$

$$(3x - 1)^2 = -9$$

zadanie 1 ►

- II **ĆWICZENIE A** Zapisz lewą stronę równania jako kwadrat sumy lub kwadrat różnicy i rozwiąż równanie:

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$ b) $x^2 - 12x + 36 = 25$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Pokażemy teraz, jak można rozwiązać równanie kwadratowe, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Rozważmy równanie:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Można je tak przekształcić, aby otrzymać równanie typu: $(x - \blacksquare)^2 = \blacktriangle$.

$$x^2 - 6x = -5$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \cdot x \cdot 3 \end{array}$$

... Zapisujemy równanie w innej postaci.

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = -5 + 3^2$$

$$(x - 3)^2 = 4$$

... Po dodaniu 3^2 do obu stron równania otrzymujemy po lewej stronie wyrażenie $(x - 3)^2$.

$$x - 3 = 2 \quad \text{lub} \quad x - 3 = -2$$

$$x = 5 \quad \text{lub} \quad x = 1$$

... Rozwiązujemy otrzymane równanie.

W podobny sposób można rozwiązać każde równanie kwadratowe.

ĆWICZENIE B Rozwiąż podane równanie metodą opisaną powyżej.

a) $x^2 + 10x + 9 = 0$

b) $x^2 - x = 12$

Metodę znajdowania rozwiązań równania kwadratowego opisaną na poprzedniej stronie można zastosować do przekształcenia równania kwadratowego w postaci ogólnej.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$a \neq 0$, bo rozwiązujemy równanie kwadratowe.

Przekształcamy równanie tak, aby po lewej stronie otrzymać kwadrat pewnego wyrażenia.

Liczba rozwiązań tego równania zależy od tego, czy iloraz $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ jest liczbą dodatnią, ujemną czy równą 0. Wartość wyrażenia $4a^2$ jest zawsze dodatnia, zatem liczba rozwiązań równania zależy od wartości wyrażenia $b^2 - 4ac$. To wyrażenie nazywamy **wyróżnikiem równania kwadratowego** i oznaczamy grecką literą Δ (czyt. delta):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Rozważane równanie możemy więc zapisać w postaci:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Gdy $\Delta < 0$, to równanie nie ma rozwiązania.

Gdy $\Delta = 0$, to:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Równanie ma jedno rozwiązanie.

Gdy $\Delta > 0$, to:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

Kwadraty dwóch liczb są równe, gdy te liczby są równe albo gdy są liczbami przeciwnymi. Zatem:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Wobec tego:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lub} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Równanie ma dwa rozwiązania.

Rozwiązywanie równań kwadratowych można ująć w następujący schemat:

Aby rozwiązać równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), najpierw obliczamy wartość wyrażenia:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż równanie.

a) $6x^2 - 13x + 5 = 0$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 49$$

... $\Delta > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania.

$$x_1 = \frac{-(-13) - \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{13 - 7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

... Korzystamy ze wzorów:

$$x_2 = \frac{-(-13) + \sqrt{49}}{2 \cdot 6} = \frac{13 + 7}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{5}{3}$$

b) $6x^2 + 4x + \frac{2}{3} = 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} = 0$$

... $\Delta = 0$, więc równanie ma jedno rozwiązanie.

$$x = \frac{-4}{2 \cdot 6} = -\frac{1}{3}$$

... Korzystamy ze wzoru: $x = \frac{-b}{2a}$

c) $6x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -23 < 0$$

... $\Delta < 0$, więc równanie nie ma rozwiązań.

Równanie nie ma rozwiązań.

ZADANIE Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + x + 20 = 0$

b) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

zadania 2-15 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Rozwiąż równanie metodą pokazaną w przykładzie na stronie 190.

a) $(x-3)^2 = 25$

c) $\frac{1}{3}(6-5x)^2 = 0$

e) $-3\left(5x + \frac{1}{2}\right)^2 = 2$

b) $4(3x+2)^2 = 8$

d) $(0,2x-3)^2 = -1,4$

f) $-0,3(0,7x+1)^2 = -6$

◀ II 2. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 5x - 14 = 0$

c) $-4x^2 + 2x - 5 = 0$

e) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$

b) $-x^2 - 2x + 15 = 0$

d) $6x^2 - x - 1 = 0$

f) $-x^2 + 2x + 1 = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 3x + 7 = 8$

d) $1 + x + 5x^2 = 0$

g) $0,04x^2 = 1 + 0,4x$

b) $x - 5x^2 - 10 = 0$

e) $15 - 3x^2 - 4x = 0$

h) $\frac{1}{2}x^2 = 6x - 10$

c) $x^2 + 10 = 7x$

f) $4x - 3x^2 = 1\frac{1}{3}$

i) $2x = 3x^2 + \frac{1}{6}$

4. Ustal, ile rozwiązań ma równanie.

a) $7x^2 - x + 200 = 0$

d) $12x^2 - 7x - 19 = 0$

g) $x^2 - 24 - 10x = 0$

b) $-2x^2 + 9x + 73 = 0$

e) $-\pi x^2 + x - \pi = 0$

h) $20y = 2y^2 + 50$

c) $100x^2 + 20x + 1 = 0$

f) $\sqrt{2}x^2 - 8x + 2\sqrt{2} = 0$

i) $-z^2 + 2\sqrt{3}z + 6 = 0$

5. Rozwiąż równanie (postaraj się wybrać jak najprostszą metodę).

a) $2x^2 - 7 = 0$

c) $x - 3x^2 = 0$

e) $(3x-1)^2 = 0$

b) $x(5-2x) = 0$

d) $x^2 - 2x + 1 = 0$

f) $(5x)^2 = 7$

6. Rozwiąż równanie.

a) $x(x-3) = 3x-4$

c) $(2-3x)^2 = 4x(x-2)$

e) $20x(x+1) = (5+2x)^2$

b) $3(1-x) = 2x(x-4)$

d) $(4+x)^2 = (2x+7)^2$

f) $\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right) = (x-1)^2$

7. Rozwiąż równanie (zapisz odpowiednie założenia).

a) $\frac{x}{3x-1} = \frac{1}{2x}$

b) $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{2}{x}$

c) $\frac{x}{x-3} = \frac{x-3}{2x}$

d) $\frac{x}{3x-2} = \frac{3x-2}{x+4}$

8. Rozwiąż równanie (zapisz odpowiednie założenia).

a) $x - \frac{5}{x} = 0$

b) $2x - \frac{1}{x} = 3$

c) $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = 4$

d) $\frac{15}{x^2} - \frac{2}{x} - 1 = 0$

9. Rozwiąż układ równań.

a)
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x \cdot y = -33 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

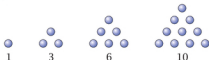
c)
$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

10. Pewne równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania, a wszystkie współczynniki a , b oraz c są liczbami całkowitymi. Uzasadnij, że albo oba rozwiązania są liczbami wymiernymi, albo oba są liczbami niewymiernymi.

11. Mierzac długość śladów, jakie zostawił hamujący samochód osobowy, można ustalić, z jaką jechał prędkością. Trzeba skorzystać z następującej zależności: jeżeli samochód jechał z prędkością v kilometrów na godzinę, to jego droga hamowania wynosi około $0,006v^2 + 0,21v$ metrów. Z jaką prędkością jechał samochód, którego droga hamowania wyniosła 25,5 m?



12. Liczby pod rysunkami to cztery kolejne liczby zwane trójkątnymi. Piąta liczba trójkątna to 15. Ogólnie: n -ta liczba trójkątna jest równa $\frac{1}{2}n(n+1)$. Sprawdź, czy 78 jest liczbą trójkątną.



13. Pole pewnego prostokąta jest równe 195 cm^2 . Jeden z boków jest o 2 cm dłuższy od drugiego boku. Jakie wymiary ma ten prostokąt?

14. Z okna umieszczonego na wysokości d metrów nad ziemią wyrzucamy w górę piłkę z prędkością $v \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Po upływie t sekund piłka znajduje się na wysokości h metrów, którą można obliczyć ze wzoru:

$$h = vt - \frac{gt^2}{2} + d, \text{ gdzie } g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Oblicz, po jakim czasie piłka spadnie na ziemię, gdy rzucimy ją do góry z prędkością $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:

- a) będąc na wysokości 4 m,
b) będąc na wysokości 8 m.



Starożytni Grecy uważali, że wśród możliwych podziałów odcinka na dwie części jest taki, w którym części otrzymane w wyniku podziału mają wyjątkowo piękne proporcje. Ten podział, zwany złotym podziałem, powinien być według nich dobrany tak, aby stosunek długości dłuższej części do krótszej był taki sam, jak stosunek długości całego odcinka do dłuższej części (zob. rysunek).



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Powyżej zapisana proporcja nazywana jest złotą proporcją. Gdy dokonamy złotego podziału odcinka, to niezależnie od jego długości stosunek $\frac{a}{b}$ jest zawsze jednakowy.

Liczba równa temu stosunkowi jest nazywana złotą liczbą i oznaczana grecką literą φ (czyt. fi). Równość $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ można zapisać w innej postaci: $\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$. Przyjmując $\frac{a}{b} = \varphi$, otrzymamy równanie:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

Dodatnie rozwiązanie tego równania to właśnie złota liczba.

Leonardo da Vinci złotą proporcję nazywał boską i stosował ją w wielu swoich dziełach. Zafascynowani nią byli także inni artyści. Złotą proporcję można znaleźć w wielu rzeźbach i obrazach dawnych i współczesnych. Często też występuje w architekturze.

15. Przeczytaj ciekawostkę. Rozwiąż odpowiednie równanie i znajdź złotą liczbę. Podaj jej wartość z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

MINISPRAWDZIAN

51. Ile spośród czterech równań zapisanych w ramce nie ma rozwiązań?

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad -x^2 + x + 1 = 0 \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad x^2 - x - 1 = 0$$

- A. jedno B. dwa C. trzy D. cztery

52. Wszystkie rozwiązania równania $x^2 - 7x + 6 = 5$ są liczbami:

- A. ujemnymi
B. wymiernymi
C. należącymi do przedziału $(0; 7)$
D. większymi od 6

53. Jeden z boków prostokąta jest o 3 cm dłuższy od drugiego boku. Pole tego prostokąta jest równe 10 cm^2 . Jaki obwód ma ten prostokąt?

- A. 14 cm B. 20 cm C. 22 cm D. 26 cm

WZORY VIÈTE'A

- I Wiesz już, że jeśli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania, to można je wyznaczyć, korzystając ze wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Obliczmy sumę liczb x_1 i x_2 oraz ich iloczyn:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(b + \sqrt{\Delta})(b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy proste wzory pozwalające obliczyć sumę oraz iloczyn rozwiązań równania kwadratowego bez rozwiązywania równania.

Jeśli liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, to:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Wzory te odkrył już w XVI wieku francuski matematyk François Viète (czyt. Fransua Wjet). Dlatego też są one nazywane **wzorami Viète'a**. Zwróć uwagę, że wzory te możemy stosować tylko wtedy, gdy mamy pewność, że równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania.

ĆWICZENIE Podane równanie ma dwa rozwiązania. Oblicz sumę tych rozwiązań oraz ich iloczyn.

a) $x^2 - 132x + 25 = 0$ b) $\frac{2}{3}y^2 + y - 1 = 0$ c) $-\sqrt{2}z^2 - 3\sqrt{2}z + 8 = 0$

zadania 1-3 ►

- II Zauważ, że jeśli wiemy, jakie znaki mają iloczyn i suma dwóch liczb, to możemy określić znaki tych liczb.

Liczby x_1 i x_2 mają różne znaki, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$.

Liczby x_1 i x_2 mają te same znaki, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$.

Liczby x_1 i x_2 są dodatnie, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$.

Liczby x_1 i x_2 są ujemne, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 < 0$.

PRZYKŁAD 1 Sprawdź, ile dodatnich rozwiązań ma podane równanie.

$$-2\sqrt{5}x^2 + \sqrt{70}x - 1 = 0$$

$$\Delta = (\sqrt{70})^2 - 4(-2\sqrt{5})(-1) = 70 - 8\sqrt{5} > 0$$

Sprawdzamy, czy równanie ma dwa rozwiązania.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{-2\sqrt{5}} > 0$$

Oba rozwiązania są dodatnie lub oba są ujemne.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-\sqrt{70}}{-2\sqrt{5}} > 0$$

Skoro dodatkowo $x_1 + x_2 > 0$, to oba rozwiązania są dodatnie.

Odp. Równanie ma dwa dodatnie rozwiązania.

ZADANIE Sprawdź, ile dodatnich rozwiązań ma równanie:

a) $3x^2 + 20x - 15 = 0$

b) $-\frac{1}{2}x^2 - 10x - 20 = 0$

zadania 4–6 ►

PRZYKŁAD 2 a) Oblicz sumę odwrotności rozwiązań podanego równania.

$$-623x^2 + 864x + 432 = 0$$

$$\Delta = 864^2 + 4 \cdot 623 \cdot 432 > 0$$

Sprawdzamy, czy równanie ma dwa rozwiązania.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{432}{-623} \neq 0$$

Sprawdzamy, czy istnieją odwrotności tych rozwiązań, tzn. czy $x_1 \neq 0$ i $x_2 \neq 0$ (wystarczy sprawdzić, że $x_1 \cdot x_2 \neq 0$).

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{-b}{c} = \frac{-864}{432} = -2$$

Odp. Suma odwrotności rozwiązań równania wynosi -2 .

b) Oblicz sumę kwadratów rozwiązań podanego równania.

$$-6x^2 + 39x + 34 = 0$$

$$\Delta = 39^2 + 4 \cdot 6 \cdot 34 > 0$$

Sprawdzamy, czy równanie ma dwa rozwiązania.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \left(\frac{-39}{-6}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{34}{-6}\right) = \left(\frac{13}{2}\right)^2 + \frac{34}{3} = \\ &= \frac{169}{4} + \frac{34}{3} = 42\frac{1}{4} + 11\frac{1}{3} = 53\frac{7}{12} \end{aligned}$$

Odp. Suma kwadratów rozwiązań równania wynosi $53\frac{7}{12}$.

ZADANIE Oblicz:

a) sumę odwrotności rozwiązań równania $-2x^2 + 3x + 5 = 0$,

b) sumę kwadratów rozwiązań równania $5x^2 - 8x - 30 = 0$.

zadania 7–11 ►

François Viète (1540–1603) z wykształcenia był prawnikiem, ale najbardziej znany jest ze swych osiągnięć matematycznych (choć w tej dziedzinie był tylko samoukiem). Jako pierwszy wpadł na pomysł, by w równaniach oznaczać literami nie tylko niewiadome, ale także współczynniki. Dzięki temu mógł odkryć swoje słynne wzory.

Viète był znany ze swej sprawności w rozwiązywaniu równań. W 1594 r. holenderski matematyk Adrian Van Roomen rzucił innym matematykom wyzwanie, prezentując bardzo skomplikowane równanie 45 stopnia (czyli takie, w którym niewiadoma występuje w 45 potęgach), którego — jak sądził — nikt nie będzie w stanie rozwiązać. Ku jego zdumieniu, Viète bardzo szybko znalazł 23 rozwiązania tego równania.

Innym słynnym wyczynem Viète'a było złamanie szyfru, którym posługiwał się król Hiszpanii w swojej tajnej korespondencji. Hiszpanie nie mogli uwierzyć, że mógł tego dokonać zwykły człowiek, i zwrócili się do papieża ze skargą, że Francuzi używają czarnej magii.



ZESTAW ZADAŃ

1. Sprawdź, czy równanie ma dwa rozwiązania. Jeśli tak — oblicz ich sumę oraz iloczyn.

a) $x^2 - \frac{3}{2}x - \sqrt{2} = 0$

c) $\frac{2}{3}x^2 - \sqrt{17}x + \frac{1}{4} = 0$

e) $-\sqrt{5}x^2 - 0,12x + 13 = 0$

b) $-x^2 + 97x - 1,2 = 0$

d) $-57x^2 - \frac{3}{\pi}x - 703 = 0$

f) $1,7x^2 + 162x - \sqrt{3} = 0$

2. Oblicz, dla jakich wartości b i c rozwiązaniami równania $x^2 + bx + c = 0$ są liczby 312 i 1, a dla jakich — liczby -79 i 10 .

3. Wybierz dwie różne liczby, z których jedna jest większa od 1, a druga jest mniejsza od -1 . Zapisz dwa różne równania typu $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$ i $a \neq 1$, których rozwiązaniami są wybrane przez ciebie liczby.

4. Które z poniższych zdań są prawdziwe dla podanego równania?

① Równanie ma dwa rozwiązania.

② Rozwiązania równania mają przeciwne znaki.

③ Suma rozwiązań jest liczbą większą od iloczynu rozwiązań.

④ Oba rozwiązania są dodatnie.

a) $2x^2 - 11x - 15 = 0$

c) $x^2 - 15x + 4 = 0$

e) $5x^2 - 7x - 2 = 0$

b) $-3x^2 + 9x - 8 = 0$

d) $2x^2 - 12x + 6 = 0$

f) $-7x^2 - 9x - 1 = 0$

5. Sprawdź, ile rozwiązań ujemnych ma podane równanie.

a) $-315x^2 - 379x + 7,82 = 0$

c) $-8,03x^2 - 852x - 1,67 = 0$

b) $1,79x^2 - 954x + 5,93 = 0$

d) $5,42x^2 + 6,13x - 375 = 0$

6. Rozwiązaniami każdego z poniższych równań są dwie liczby całkowite. Korzystając ze wzorów Viète'a, ustal, czy są to liczby parzyste czy nieparzyste.

a) $x^2 - 67x + 310 = 0$

b) $-x^2 + 159x - 770 = 0$

c) $-x^2 + 34x - 273 = 0$

7. Oblicz sumę odwrotności rozwiązań równania $-1257x^2 + 345x + 609 = 0$.

8. Oblicz średnią arytmetyczną, średnią geometryczną oraz średnią harmoniczną rozwiązań równania:

a) $-x^2 + 16x - 8 = 0$

b) $2x^2 + 30x + 18 = 0$

Średnia arytmetyczna liczb a i b : $\frac{a+b}{2}$

Średnia geometryczna dodatnich liczb a i b : $\sqrt{ab}$

Średnia harmoniczna liczb a i b (różnych od 0): $\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}\right)^{-1}$

9. Oblicz sumę kwadratów rozwiązań równania $x^2 - 300x - 200 = 0$.

10. a) Uzasadnij, że jeśli równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania, to suma odwrotności kwadratów tych rozwiązań jest równa $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$.

b) Oblicz sumę odwrotności kwadratów rozwiązań równania $-x^2 - x + 21 = 0$.

11. Oblicz różnicę sześcianów rozwiązań równania $x^2 - 3x - 2 = 0$.

MINISPRAWDZIAN

51. Suma rozwiązań równania $ax^2 - 8x - 21 = 0$ wynosi 2, gdy:

A. $a = 1$

B. $a = 2$

C. $a = 3$

D. $a = 4$

52. Rozwiązaniami równania $ax^2 + bx + c = 0$ są liczby 10 i 0,1. Wynika stąd, że:

A. $a = -b$

B. $b = 10,1$

C. $a = c$

D. $a = 1$

53. W którym z poniższych równań suma odwrotności rozwiązań jest największa?

A. $16x^2 + 20x - 4 = 0$

C. $-52x^2 - 6x + 1 = 0$

B. $-49x^2 - 5x + 100 = 0$

D. $0,13x^2 - 9x - 4 = 0$

POWTÓRZENIE

1. Rozwiąż równanie.

- a) $8x - 3x^2 = 0$
- b) $7x^2 = 3x$
- c) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{8}x = 0$
- d) $4x^2 - 25 = 0$
- e) $(2x - 1)^2 = 16$
- f) $3(x + 1)^2 - 1 = 0$
- g) $x^2 - 4x + 4 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

- a) $-x^2 + 6x + 1 = 0$
- b) $2x^2 + 7x + 3 = 0$
- c) $11(x^2 + 5) = x$
- d) $(1 - 3x)^2 = 1 - 6x$
- e) $x + 9 = (x - 3)^2$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{x}{5} = \frac{3}{x}$
- b) $\frac{2x-1}{1-x} = \frac{1}{2x+1}$
- c) $\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}} = \frac{2x}{x+1}$
- d) $\frac{4x}{2-x} = \frac{x}{8-x}$
- e) $2x + 1 = \frac{1}{x}$
- f) $\frac{x+3}{3x} = \frac{1}{x-1}$

4. Rozwiąż układ równań.

- a) $\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = -15 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x - y = -1 \\ xy = 2 \end{cases}$

5. Jaka liczba ma podaną własność?

Jeśli od kwadratu liczby o 7 mniejszej od pewnej liczby dodatniej a odejmiemy liczbę 7 razy większą od a, to otrzymamy liczbę o 5 mniejszą od a.

6. Jeden z boków prostokąta jest o 3 dłuższy od drugiego boku. Pole tego prostokąta wynosi 18 cm^2 . Oblicz jego obwód.

7. Zapisz i rozwiąż odpowiednie równanie.

Suma kwadratów pewnych trzech kolejnych dodatnich liczb parzystych wynosi 596. Co to za liczby?

8. Korzystając ze wzoru podanego w ramce, ustal, czy istnieje wielokąt, który ma:

- a) 60 przekątnych,
- b) 90 przekątnych.

Liczba przekątnych n -kąta
jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$.

9. Jeśli równanie ma dwa rozwiązania, oblicz ich sumę i iloczyn.

- a) $x^2 + 1736x - 2150 = 0$
- b) $2x^2 + 884x - 142 = 0$
- c) $-4x^2 - 5236x + 6656 = 0$
- d) $-6x^2 + 36x - 6666 = 0$

10. Sprawdź, że podane równanie ma dwa rozwiązania, a następnie oblicz sumę odwrotności tych rozwiązań.

- a) $6x^2 + 964x + 2 = 0$
- b) $5x^2 + 161x - 23 = 0$
- c) $31x^2 - 125x - 5 = 0$
- d) $-8x^2 - 32x + 800 = 0$

11. Sprawdź, że podane równanie ma dwa rozwiązania, a następnie oblicz sumę kwadratów tych rozwiązań.

- a) $2x^2 - 20x - 7 = 0$
- b) $x^2 + 20x + 10 = 0$
- c) $-x^2 + 25x + 3,5 = 0$
- d) $-0,5x^2 + 10x + 1,5 = 0$

Wektory. Przekształcanie wykresów funkcji

Samochód ciężarowy utknął w błocie. Trzy jednakowe traktory mają go wyciągnąć. Jak (w jakim kierunku) ustawić te traktory, by samochód mógł rozpocząć ruch do przodu? Problem ten można rozwiązać za pomocą działań na wektorach.

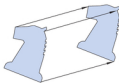


Wektory. Działania na wektorach ■ Wektory w układzie współrzędnych
■ Działania na wektorach w układzie współrzędnych ■ Przekształcanie
wykresów funkcji ■ Przekształcanie wykresów funkcji (cd.) ■ Powtórzenie

WEKTORY. DZIAŁANIA NA WEKTORACH

- I Pojęcie wektora pojawiło się zapewne na lekcjach fizyki. Słowo „wektor” oznacza po łacinie „tragarz”. Dobrze oddaje to znaczenie, jakie nadaje się pojęciu wektora w matematyce.

Gdy daną figurę przesuniemy na płaszczyźnie tak, że każdy jej punkt przemieści się w tym samym kierunku, na taką samą odległość i w tę samą stronę, to mówimy, że figurę tę przesunęliśmy o pewien wektor.



O wektorach równoległych mówimy, że mają ten sam kierunek. Jeśli ponadto działają w tę samą stronę, to mówimy, że mają ten sam zwrot. Wektory, które mają taki sam kierunek, zwrot i taką samą długość, opisują to samo przesunięcie. Dlatego o takich wektorach mówimy, że są równe.



Wektory o tym samym kierunku.



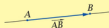
Wektory o tym samym kierunku i tym samym zwrocie.



Wektory o tym samym kierunku, zwrocie i długości, czyli wektory równe.

Wektor możemy opisać za pomocą dwóch punktów, wskazując, który z nich jest punktem początkowym, a który — końcowym. Aby wyznaczyć wektor, wystarczy więc wskazać pewną uporządkowaną parę punktów.

Wektory oznaczamy za pomocą dwóch wielkich liter, np. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{KL}$ (pierwsza litera to początek wektora, a druga to koniec wektora) albo za pomocą małych liter, np. $\vec{a}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$. Długość wektora oznaczamy za pomocą dwóch pionowych krescinek, np. $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{u}|$.



Prosta AB wyznacza kierunek wektora $\overrightarrow{AB}$. Odległość między punktami A i B to długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

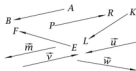
Wektor, którego początek pokrywa się z końcem, nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy $\vec{0}$.



Zauważ, że jeśli $A \neq B$, to wektor $\overrightarrow{AB}$ nie jest równy wektorowi $\overrightarrow{BA}$. O dwóch wektorach, które mają taką samą długość i taki sam kierunek, ale przeciwny zwrot, mówimy, że są **wektorami przeciwnymi**. Wektor przeciwny do wektora $\vec{u}$ oznaczamy $-\vec{u}$. Zatem: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

ĆWICZENIE A a) Znajdź na rysunku wektory równe wektorowi $\vec{u}$ oraz wektory do niego przeciwne.

b) Narysuj trzy dowolne punkty K, L i M . Narysuj wektor o początku K równy wektorowi $\vec{LM}$ oraz wektor o początku L przeciwny do wektora $\vec{KM}$.

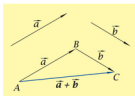
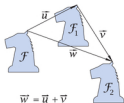


Niech $\vec{u}$ będzie dowolnym wektorem na płaszczyźnie. **Przesunięcie o wektor $\vec{u}$** to przekształcenie geometryczne, w którym każdemu punktowi P płaszczyzny odpowiada punkt P' taki, że $\vec{PP'} = \vec{u}$.

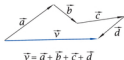
Przesunięcie o wektor $\vec{u}$ nazywamy też translacją (od łacińskiego słowa *translatio* — przeniesienie).

zadania 1-5

- II. Przypuśćmy, że pewną figurę $\mathcal{F}$ przesuwa-
my najpierw o wektor $\vec{u}$, a potem otrzy-
many obraz przesuwa-
my o wektor $\vec{v}$ (zob.
rysunek). Przesunięcia te można zastąpić
jednym przesunięciem — o wektor $\vec{w}$. Taki
wektor nazywamy **sumą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$** .



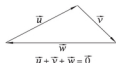
Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Aby wyznaczyć
wektor równy $\vec{a} + \vec{b}$, najpierw wybiera-
my jakikolwiek punkt A i rysujemy wektor
 $\vec{AB} = \vec{a}$, a następnie wektor $\vec{BC} = \vec{b}$. Wów-
czas: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

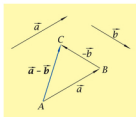


W podobny sposób wyznaczamy wektor,
który jest równy sumie kilku wektorów.

ĆWICZENIE B Narysuj dowolny czworokąt $ABCD$, a następnie wskaż wektory
równe sumom wektorów: $\vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ oraz $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$.

W wyniku dodawania wektorów możemy
czasem otrzymać wektor zerowy.





ĆWICZENIE C Narysuj dwa nierównoległe wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a następnie wektor $-\vec{b}$ oraz wektor $\vec{a} + (-\vec{b})$.

Dla dowolnych dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ możemy także określić ich różnicę:

Wektor $\vec{a} - \vec{b}$ jest równy sumie wektora $\vec{a}$ i wektora $-\vec{b}$ (wektora przeciwnego do $\vec{b}$).

zadania 6–11 ►

III ĆWICZENIE D Narysuj równoległobok $ABCD$. Uzasadnij, że wektor $\vec{AB} + \vec{BC}$ jest równy wektorowi $\vec{AB} + \vec{AD}$.

Uwaga. Aby wyznaczyć sumę oraz różnicę dwóch wektorów, możemy zacząć oba wektory w jednym punkcie i skorzystać z reguły równoległoboku, znanej ci zapewne z lekcji fizyki (zob. rysunek).

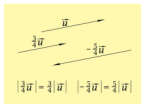


Określiśmy już sumę i różnicę dwóch wektorów. Możemy określić także iloczyn wektora przez dowolną liczbę rzeczywistą.

Jeśli $k > 0$, to wektor $k \cdot \vec{u}$ ma ten sam kierunek i zwrot co wektor $\vec{u}$, a jego długość wynosi $k \cdot |\vec{u}|$.

Jeśli $k < 0$, to wektor $k \cdot \vec{u}$ ma ten sam kierunek co wektor $\vec{u}$, ale przeciwny zwrot, a jego długość wynosi $|k| \cdot |\vec{u}|$.

Jeśli $k = 0$, to wektor $k \cdot \vec{u}$ jest wektorem zerowym, czyli $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.



zadania 12–18 ►

IV

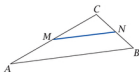
$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \\ k(\vec{a} + \vec{b}) &= k\vec{a} + k\vec{b} \\ \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a} \\ \vec{a} - \vec{a} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Obok zapisano kilka własności działań na wektorach. Jak widać, są one podobne do praw działań na liczbach.

Możemy powiedzieć, że dodawanie wektorów jest przemienne i łączne oraz że mnożenie wektorów przez liczbę jest rozdzielne względem dodawania wektorów.

PRZYKŁAD

Wykaż, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i dwa razy od niego krótszy.



Sporządzamy rysunek pomocniczy punkty M i N są środkami boków trójkąta.

Wykażemy, że $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.

Odcinek MN ma być równoległy do odcinka AB i o połowę od niego krótszy.

$$\begin{aligned}\overline{MN} &= \overline{MC} + \overline{CN} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{AC} + \frac{1}{2} \overline{CB} = \frac{1}{2} (\overline{AC} + \overline{CB}) = \frac{1}{2} \overline{AB}\end{aligned}$$

Wektor $\frac{1}{2} \overline{AB}$ ma taki sam kierunek jak wektor $\overline{AB}$ i jest od niego 2 razy krótszy. Zatem odcinki MN i AB są równoległe oraz $|MN| = \frac{1}{2} |AB|$.

ZADANIE

Wykaż, że odcinek łączący środki dwóch sąsiednich boków dowolnego czworokąta jest równoległy do jednej z jego przekątnych.

zadania 19–22 ►

ZESTAW ZADAŃ

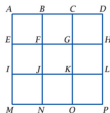
1. Sześciokąt $ABCDEF$ przedstawiony na rysunku obok jest foremny.



a) Wskaż wektory o końcach w zaznaczonych punktach, które mają taki sam kierunek co wektor $\overline{OD}$.

b) Wskaż wektory, które mają tę samą długość co wektor $\overline{FB}$.

c) Które z wektorów $\overline{OC}$, $\overline{ED}$, $\overline{FC}$, $\overline{OF}$, $\overline{AB}$ są przeciwne do wektora $\overline{BA}$?



2. Zapis $T_{\overline{BG}}(F) = K$ oznacza, że po przesunięciu punktu F o wektor $\overline{BG}$ otrzymamy punkt K . Jakimi figurami lub wektorami należy zastąpić znaki zapytania?

- a) $T_{\overline{FK}}(A) = ?$ $T_{\overline{NP}}(F) = ?$ $T_{\overline{EO}}(\triangle BFE) = ?$
 b) $T_{\gamma}(E) = G$ $T_{\gamma}(N) = K$ $T_{\gamma}(\triangle NKO) = \triangle EBF$
 c) $T_{\overline{DJ}}(?) = I$ $T_{\overline{OL}}(?) = \triangle BDL$ $T_{\overline{JC}}(?) = \triangle FGD$

3. Prostokąt o bokach długości 3 i 5 przesunięto o wektor długości 1, równoległy do jednego z boków tego prostokąta. Znajdź pole części wspólnej prostokąta i jego obrazu. Rozważ różne przypadki.

4. Pole części wspólnej rombu i jego obrazu w przesunięciu o wektor $\vec{u}$ jest równe $\frac{1}{4}$ pola tego rombu. Jaką długość ma wektor $\vec{u}$, jeśli jest równoległy do:

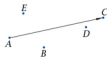
- jednego z boków rombu,
- jednej z przekątnych rombu?

- 5.** Narysuj odcinek AB i dwie proste równoległe k oraz l . Następnie narysuj odcinek A_0B_0 symetryczny do odcinka AB względem prostej k oraz odcinek A_1B_1 symetryczny do odcinka A_0B_0 względem prostej l .

Wykaż, że odcinek A_1B_1 można otrzymać w wyniku przesunięcia odcinka AB o wektor prostopadły do tych prostych, o długości dwa razy większej od odległości między prostymi k i l .

- 6. a)** Wektor $\vec{AC}$ zaznaczony na rysunku obok przedstaw na cztery sposoby jako sumę różnych wektorów wyznaczonych przez punkty A, B, C, D, E .

b) Przedstaw wektor $\vec{AC}$ jako różnicę dwóch wektorów wyznaczonych przez zaznaczone punkty.



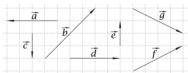
- 7.** Narysuj trzy różne wektory $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$. Wyznacz wektory:

$$\vec{u}_1 = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{b} - \vec{c}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$$

$$\vec{u}_4 = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$



- 8.** Wśród wektorów narysowanych obok znajdź dwa, których suma jest równa wektorowi:

a) $\vec{f}$

b) $\vec{g}$

c) $\vec{c}$

- 9.** Ośmiokąt $ABCDEFGH$ narysowany obok jest foremny. Wskaż wektor o końcach w zaznaczonych punktach równy wektorowi:

a) $\vec{EO} + \vec{AH}$

d) $\vec{DC} + \vec{HG} - \vec{AO}$

b) $\vec{DE} - \vec{AB}$

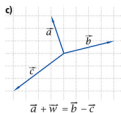
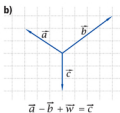
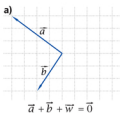
e) $\vec{OF} + \vec{OH} + \vec{OB}$

c) $\vec{OF} + \vec{CB} - \vec{CO}$

f) $\vec{AO} + \vec{OF} - \vec{BO}$



10. Przerysuj rysunek i narysuj wektor $\vec{w}$ spełniający warunek zapisany pod rysunkiem.



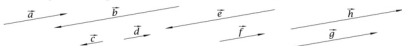
11. Narysuj dowolny czworokąt $ABCD$. Uzasadnij, że zachodzi równość:

a) $\vec{DA} + \vec{AC} = \vec{DB} + \vec{BC}$

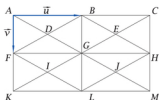
b) $\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{AD} + \vec{DC}$

c) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} - \vec{BC}$

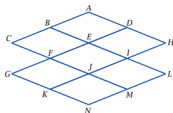
12. Na rysunku poniżej przedstawiony jest wektor $\vec{a}$ oraz wektory równe: $-2\vec{a}$, $-\sqrt{3}\vec{a}$, $-\frac{1}{3}\vec{a}$, $0,4\vec{a}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}$, $\sqrt{2}\vec{a}$, $1,8\vec{a}$. Wskaż te wektory.



13. Na rysunku obok punkty F, L, H, B są środkami boków prostokąta $KMCA$. Wyraż za pomocą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wektory: $\vec{KC}$, $\vec{GJ}$, $\vec{HL}$, $\vec{MF}$, $\vec{BH}$, $\vec{IB}$.



14. Narysowana figura zbudowana jest z rombów. Wskaż wektory o końcach w zaznaczonych punktach równe wektorom:



a) $3\vec{JF}$, $-2\vec{AE}$, $\frac{1}{2}\vec{HC}$

b) $\vec{CB} + \vec{BI}$, $\vec{GN} + \vec{ED}$, $2\vec{IE} + \vec{IK}$

c) $\vec{LI} + \vec{IK} + \vec{KE}$, $\vec{FJ} + \vec{NL} + \vec{HA}$

d) $\vec{ED} - \vec{EB}$, $\vec{JC} - 2\vec{MN}$, $\vec{CK} - \vec{FC}$

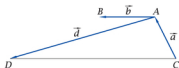
e) $\vec{CI} - \vec{IL} + \vec{ED}$, $\vec{GL} + \vec{LA} - \vec{ML}$

f) $-\frac{2}{3}\vec{BL}$, $\frac{1}{3}\vec{DG} + 2\vec{JL}$, $\frac{2}{3}\vec{MC} + 3\vec{JN}$

15. Jak skonstruować wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeśli dane są wektory $\vec{p}$ i $\vec{q}$?

a) $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$

b) $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$



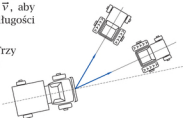
16. Na rysunku obok odcinek AB jest 3 razy krótszy od odcinka CD i jest do niego równoległy. Zapisz:

- a) wektor $\vec{b}$ za pomocą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{d}$,
b) wektor $\vec{d}$ za pomocą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

17. Narysuj dwie przecinające się proste oraz wektor $\vec{w}$ nierównoległy do żadnej z nich. Narysuj wektory równoległe do tych prostych, których suma jest równa $\vec{w}$.

18. a) Narysuj dowolną prostą k i wektor $\vec{u}$ nierównoległy do tej prostej. Znajdź taki wektor $\vec{v}$, aby wektor $\vec{u} + \vec{v}$ był równoległy do prostej k i długości wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ były równe.

- b)** Samochód ciężarowy utknął w błocie. Trzy jednakowe traktory mają go wyciągnąć. Dwa traktory są już ustawione. Jak (w jakim kierunku) ustawić trzeci traktor, by samochód mógł rozpocząć ruch do przodu (wzdłuż linii przerywanej)?



19. Udowodnij, że jeśli w czworokącie $ABCD$ punkty M i N są środkami przekątnych AC i BD , to $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{CD})$.

- 20.** Korzystając z własności wektorów, uzasadnij twierdzenie:

- a) Czworokąt, którego przekątne przecinają się w połowie, jest równoległobokiem.
b) Środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku.
c) Długość odcinka łączącego środki przekątnych trapezu jest równa połowie różnicy długości podstaw (od długości dłuższej podstawy odejmujemy długość krótszej).

21. Wewnątrz trójkąta ABC wybrano dowolny punkt P . Niech M , L i N oznaczają odpowiednio środki boków AB , BC i CA . Wykaż, że zachodzi równość: $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{PM} + \vec{PL} + \vec{PN}$.

22. Przeczytaj informacje w ramce. Udowodnij, że jeśli punkt D jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , tzn. punktem przecięcia środkowych, to $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$.

Warto wiedzieć

Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

W każdym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1.



$$|SA| = 2 \cdot |SA'|$$

$$|SB| = 2 \cdot |SB'|$$

$$|SC| = 2 \cdot |SC'|$$

MINISPRAWDZIAN

51. Na rysunku obok przedstawiono kwadrat podzielony na dziewięć mniejszych kwadratów. Po przesunięciu punktu F otrzymano punkt O . Zatem punkt F przesunięto o wektor równy wektorowi:

- A. $\overrightarrow{OF}$ B. $\overrightarrow{CL}$ C. $\overrightarrow{NE}$ D. $\overrightarrow{HO}$

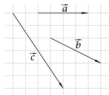


52. Sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny. Wskaż błędną równość.

- A. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EA}$ C. $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$ D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FD}$

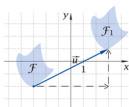
53. Na rysunku obok przedstawiono wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Wynik którego z poniższych działań jest równy wektorowi $\vec{a}$?

- A. $\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $\vec{c} - 2\vec{b}$ C. $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ D. $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$



WEKTORY W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

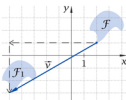
- 1 Zauważmy, że w układzie współrzędnych każde przesunięcie o dany wektor można zinterpretować jako przesunięcie najpierw wzdłuż osi x , a potem wzdłuż osi y . Przyjrzyj się rysunkom.



Przesunięcie o wektor $\vec{u}$ oznacza to samo co przesunięcie o 6 jednostek w prawo i 3 w górę. Przesuwanie w prawo i w górę jest zgodne ze zwrotami obu osi. Takie przesunięcie będziemy opisywać za pomocą liczb dodatnich.

$$\vec{u} = [6, 3]$$

Liczy 6 i 3 to współrzędne wektora $\vec{u}$.



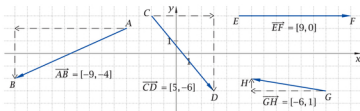
Przesunięcie o wektor $\vec{v}$ oznacza to samo co przesunięcie o 7 jednostek w lewo i 4 w dół. Przesuwanie w lewo i w dół odbywa się w przeciwne strony, niż wskazują zwroty osi. Wówczas przesunięcie będziemy opisywać za pomocą liczb ujemnych.

$$\vec{v} = [-7, -4]$$

Liczy -7 i -4 to współrzędne wektora $\vec{v}$.

ĆWICZENIE A Zaznacz w układzie współrzędnych dowolny punkt A i punkt B otrzymany w wyniku przesunięcia punktu A o 1 jednostkę w prawo i 2 jednostki w dół. Jak myślisz, jakie współrzędne ma wektor $\overrightarrow{AB}$?

W podobny sposób można opisać dowolny wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne wektora informują, jak przesunąć dowolny punkt o dany wektor. Pierwsza współrzędna opisuje przesunięcie wzdłuż osi x , a druga — wzdłuż osi y .

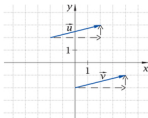


ĆWICZENIE B Narysuj układ współrzędnych i zaznacz wektory:

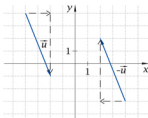
$$\vec{a} = [-3, 0], \quad \vec{b} = [0, 5], \quad \vec{c} = [2, 4], \quad \vec{d} = [-1, 6].$$

Dwa wektory w układzie współrzędnych są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same współrzędne.

Dwa wektory są przeciwne wtedy i tylko wtedy, gdy ich odpowiednie współrzędne są liczbami przeciwnymi.



$$\vec{u} = \vec{v} = [4, 1]$$



$$\vec{u} = [2, -5], \quad -\vec{u} = [-2, 5]$$

zadania 1-3 ►

III **ĆWICZENIE C** Jakie współrzędne ma punkt P' otrzymany w wyniku przesunięcia punktu $P = (5, 1)$ o wektor $\vec{u} = [2, -3]$?

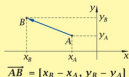
Punkt P' otrzymany w wyniku przesunięcia punktu $P = (x, y)$ o wektor $\vec{u} = [p, q]$ ma współrzędne $P' = (x + p, y + q)$.

ĆWICZENIE D Dane są punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$. Ustal współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ i oblicz różnice: $x_2 - x_1$ oraz $y_2 - y_1$, jeśli:

a) $A = (2, 1)$, $B = (5, 3)$

b) $A = (-4, -3)$, $B = (7, -2)$

WSPÓLRZĘDNE WEKTORA



Gdy znamy współrzędne początku i końca wektora, to obliczając odpowiednie różnice tych współrzędnych, otrzymamy współrzędne wektora.

Zauważ, że jeśli początek wektora leży w punkcie $(0, 0)$, to współrzędne tego wektora są równe współrzędnym jego końca.

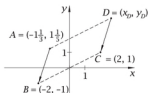
ĆWICZENIE E Wektor $\vec{u}$ ma współrzędne $\vec{u} = [-3, 7]$.

a) Jakie współrzędne ma punkt B , gdy $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ i $A = (4, -5)$?

b) Jakie współrzędne ma punkt C , gdy $\overrightarrow{CD} = \vec{u}$ i $D = (-12, 40)$?

zadania 4-9 ►

PRZYKŁAD Punkty $A = (-1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{5})$, $B = (-2, -1)$ i $C = (2, 1)$ to kolejne wierzchołki równoległoboku. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku.



$$\overrightarrow{AB} = [-2 - (-1\frac{1}{3}), -1 - 1\frac{1}{5}] = [-\frac{2}{3}, -2\frac{1}{5}]$$

$$\overrightarrow{DC} = [2 - x_D, 1 - y_D]$$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, więc:

$$2 - x_D = -\frac{2}{3} \quad 1 - y_D = -2\frac{1}{5}$$

$$x_D = 2\frac{2}{3} \quad y_D = 3\frac{1}{5}$$

Odp. Czwarty wierzchołek równoległoboku ma współrzędne $(2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{5})$.

ZADANIE Punkty $P = (-5, -10)$, $R = (2, -7)$, $S = (1, 5)$ to kolejne wierzchołki równoległoboku. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku.

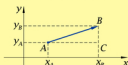
zadania 10-11 ►

IV

ĆWICZENIE F Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (1, 2)$ i $B = (5, 4)$, a następnie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, oblicz długość odcinka AB (dorysuj odpowiedni trójkąt prostokątny).

Długość wektora to odległość między jego początkiem i końcem. Zatem można ją obliczać, korzystając z podanego obok wzoru ($|\vec{AB}| = |AB|$).

DŁUGOŚĆ WEKTORA



Jeśli $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Zauważmy, że liczby $x_B - x_A$ oraz $y_B - y_A$ występujące w powyższym wzorze to współrzędne wektora $\vec{AB}$. Suma kwadratów tych współrzędnych jest równa kwadratowi długości wektora.

$$\text{Jeśli } \vec{u} = [p, q], \text{ to } |\vec{u}| = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

ĆWICZENIE G Oblicz długość wektora:

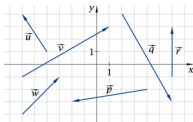
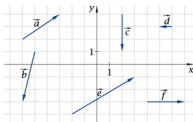
a) $\vec{v} = [4, -2]$

b) $\vec{AB}$, gdzie $A = (4, -7)$ i $B = (-1, -19)$

zadania 12–13 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. a) Podaj współrzędne narysowanych wektorów.



b) Podaj współrzędne wektorów przeciwnych do wektorów $\vec{c}$, $\vec{f}$, $\vec{p}$ i $\vec{q}$.

2. Zaznacz w układzie współrzędnych dowolny punkt P i takie punkty A, B, C, D , aby spełnione były podane warunki:

$$\overrightarrow{PA} = [2, 1]$$

$$\overrightarrow{PB} = [-3, 4]$$

$$\overrightarrow{PC} = [0, 4]$$

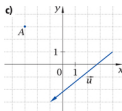
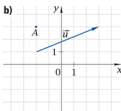
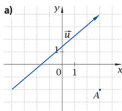
$$\overrightarrow{PD} = [-5, 0]$$

3. a) Podaj współrzędne dwóch wektorów o długości 5, równoległych do osi x oraz dwóch wektorów o długości 5, równoległych do osi y .

b) Wektor $\overrightarrow{PK}$ jest równoległy do osi x , ma zwrot przeciwny do zwrotu osi i ma długość 100. Jakie współrzędne ma punkt K , jeśli $P = (25, -3)$?

c) Wektor $\overrightarrow{MN}$ jest równoległy do osi y , ma zwrot zgodny ze zwrotem osi i ma długość $50\sqrt{2}$. Jakie współrzędne ma punkt M , jeśli $N = (20\sqrt{2}, -30\sqrt{2})$?

4. Znajdź współrzędne punktu otrzymanego w wyniku przesunięcia punktu A o wektor $\vec{u}$.



5. Znajdź współrzędne punktu otrzymanego w wyniku przesunięcia punktu P o wektor $\vec{u}$, jeśli:

a) $P = (-2, -16\sqrt{2})$, $\vec{u} = [2, 0]$

c) $P = (-a, a)$, $\vec{u} = [a, -2a]$

b) $P = (3 + \sqrt{5}, 1 - 4\sqrt{5})$, $\vec{u} = [7, \sqrt{5} - 3]$

d) $P = (a + 3, 3a - 1)$, $\vec{u} = [1 - a, a - 1]$

6. Kwadrat o wierzchołkach $A = (-4, 3)$, $B = (-1, 4)$, $C = (-2, 7)$ i $D = (-5, 6)$ chcemy przesunąć tak, aby otrzymany kwadrat miał dokładnie jeden punkt wspólny z osią x . Jakie współrzędne może mieć wektor takiego przesunięcia?

7. Podaj współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ oraz wektora $\overrightarrow{BA}$, jeśli:

a) $A = (-2\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, $B = (\frac{3}{4}, -1\frac{1}{3})$

c) $A = (a, b)$, $B = (2a, -b)$

b) $A = (2 - \sqrt{7}, 3 - 5\sqrt{7})$, $B = (5 - \sqrt{7}, \sqrt{7})$

d) $A = (a - 1, 2a - 1)$, $B = (a + 2, 1 - 2a)$

8. Znajdź współrzędne punktu P' , który otrzymamy w wyniku przesunięcia punktu $P = (3, -1)$ o wektor $\overrightarrow{KL}$, jeśli:

a) $K = (2, -1)$, $L = (3, -5)$

c) $K = (-1, 0)$, $L = (6, -2)$

b) $K = (0, 6)$, $L = (10, -\frac{1}{2})$

d) $K = (2, 2)$, $L = (-7, 6)$

9. Jakimi współrzędnymi (punktu lub wektora) należy zastąpić znaki zapytania w tabelce obok?

Punkt A	$(-128, 2134)$	$(-15, 14)$	?	?	$(0, 0)$	$(-a, a)$
Punkt B	$(-125, 2130)$	?	$(-103, -2)$	$(a, 1)$	(x, y)	?
Wektor $\overrightarrow{AB}$	?	$[0, 124]$	$[7, -138]$	$[1 + a, 1 - a]$	?	$[a, -a]$

10. Punkty $A = (3, 2)$ i $B = (-4, -6)$ są wierzchołkami równoległoboku. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie $P = (7, -2)$. Znajdź współrzędne jego pozostałych dwóch wierzchołków.

11. O jaki wektor należy przesunąć okrąg o środku $S_1 = (-3, -5)$ i promieniu 2, aby otrzymany okrąg był styczny zewnętrznie w punkcie $(2, -2)$ do okręgu o środku $S_2 = (2, 3)$ i promieniu 5?

12. a) Dane są punkty $A = (2, -3)$, $B = (6, 7)$, $C = (-5, -8)$. Oblicz długości wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$.

b) Oblicz długości wektorów:

$$\vec{v} = [-8, 6], \quad \vec{u} = [10, -1], \quad \vec{t} = [\sqrt{2} - \sqrt{3}, 2\sqrt{6}], \quad \vec{w} = [a - \sqrt{1 - a^2}, a + \sqrt{1 - a^2}].$$

13. Wektor $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A = (1, 0)$, ma długość 5. Punkt B leży na wykresie funkcji $y = 2x$. Jakie współrzędne ma ten punkt?

MINISPRAWDZIAN

51. Które zdanie jest prawdziwe?

A. Jeśli $K = (-2, \sqrt{3})$ i $L = (-\sqrt{5}, 6)$, to $\overrightarrow{KL} = [2 - \sqrt{5}, \sqrt{3} - 6]$.

B. Jeśli $\vec{u} = [7, \sqrt{5}]$ i $\vec{v} = [\sqrt{5}, 7]$, to $\vec{u} = \vec{v}$.

C. Jeśli $R = (\sqrt{3}, 4)$ i $S = (3\sqrt{3}, 6)$, to $|\overrightarrow{RS}| = \sqrt{10}$.

D. Jeśli punkt $(-55, 47)$ przesuniemy o wektor $\vec{u} = [47, -55]$, to znajdzie się w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych.

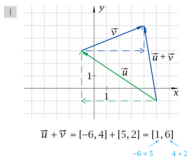
52. Długość wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A = (4, 7)$ i $B = (-3, -2)$, jest równa:

A. $\sqrt{26}$ B. 16 C. $\sqrt{130}$ D. 4

53. Po przesunięciu punktu $(3, -4)$ o pewien wektor otrzymano punkt $(1, 1)$. Jakie są współrzędne punktu, który po przesunięciu o ten sam wektor znalazł się w punkcie $(10, 20)$?

A. $(8, 25)$ B. $(12, 15)$ C. $(6, -2)$ D. $(5, -5)$

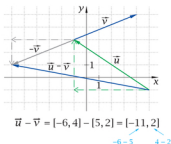
DZIAŁANIA NA WEKTORACH W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH



Wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ na rysunkach obok mają współrzędne:

$$\vec{u} = [-6, 4] \text{ i } \vec{v} = [5, 2]$$

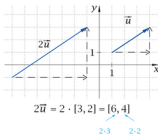
Przesunięcie o wektor $\vec{u} + \vec{v}$ można zinterpretować jako przesunięcie wzdłuż osi x w lewo o 6 jednostek, a potem w prawo o 5, czyli razem o 1 jednostkę w lewo, natomiast wzdłuż osi y w górę o 4 jednostki, a potem jeszcze o 2 w górę, czyli razem o 6 jednostek w górę.



Analogicznie przesunięcie o wektor $\vec{u} - \vec{v}$ można zinterpretować jako przesunięcie wzdłuż osi x o 6 jednostek w lewo, a potem jeszcze o 5 jednostek w lewo, czyli o 11 jednostek w lewo, natomiast wzdłuż osi y o 4 jednostki w górę, a potem o 2 jednostki w dół, czyli razem o 2 jednostki w górę.

Na kolejnym rysunku narysowano wektor $\vec{u} = [3, 2]$ oraz wektor $2\vec{u}$. Zauważ, że współrzędne wektora $2\vec{u}$ są 2 razy większe od odpowiednich współrzędnych wektora $\vec{u}$.

Powyższe wnioski można uogólnić dla dowolnych wektorów.



Jeśli $\vec{u} = [u_1, u_2]$ i $\vec{v} = [v_1, v_2]$, to:

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$$

$$\vec{u} - \vec{v} = [u_1 - v_1, u_2 - v_2]$$

Dla dowolnej liczby k :

$$k \cdot \vec{u} = [ku_1, ku_2]$$

ĆWICZENIE Dane są wektory:

$$\vec{a} = [3, -7], \vec{b} = [-10, 0] \text{ i } \vec{c} = [1, -2].$$

Oblicz współrzędne wektora:

a) $\vec{a} + \vec{b}$

c) $2\vec{a}$

b) $\vec{b} - \vec{c}$

d) $-\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$

zadania 1-8

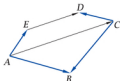
- III Aby sprawdzić, czy dwa niezerowe wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe (mają ten sam kierunek), możemy skorzystać z następującego twierdzenia:

Dwa niezerowe wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba k , że $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.

Uwaga. Przyjmujemy, że wektor zerowy jest równoległy do każdego wektora.

zadania 9–13 ►

- III **PRZYKŁAD** Punkty A, B, C, D, E są kolejnymi wierzchołkami pięciokąta oraz $\vec{AB} = [7, -2]$, $\vec{AE} = [2, 3]$, $\vec{CB} = [-5, -6]$ i $\vec{CD} = [-4, 1]$. Wykaż, że przekątna AC tego pięciokąta jest równoległa do boku ED i jest od tego boku dwa razy dłuższa.



Wykażemy, że $\vec{AC} = 2\vec{ED}$.

$$\begin{aligned}\vec{ED} &= \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = -\vec{AE} + \vec{AB} + (-\vec{CB}) + \vec{CD} = \\ &= [-2, -3] + [7, -2] + [5, 6] + [-4, 1] = [6, 2]\end{aligned}$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} - \vec{CB} = [7, -2] - [-5, -6] = [12, 4] = 2 \cdot [6, 2] = 2\vec{ED} \quad \square$$

Sporządzamy rysunek pomocniczy: rysujemy pięciokąt $ABCDE$ i zaznaczamy wektory, których współrzędne są dane.

Tylko przekątna AC może być równoległa do boku ED (pozostałe przekątne mają z tym bokiem punkt wspólny).

Przekątna ED spełnia warunki zadania, gdy $\vec{AC} = 2\vec{ED}$.

ZADANIE O czworokącie $ABCD$ wiadomo, że: $C = (11, 3)$, $D = (5, 12)$, $\vec{AD} = [7, 12]$, $\vec{BC} = [11, 6]$. Wykaż, że bok CD jest równoległy do boku AB i jest 3 razy od niego dłuższy.

zadania 14–17 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Niech $\vec{a} = [2, -1]$, $\vec{b} = [-3, 4]$, $\vec{c} = [5, 0]$. Znajdź współrzędne wektora:
- a) $\vec{a} + \vec{b}$ c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e) $-2\vec{a}$ g) $5\vec{c} - 4\vec{a} + 2\vec{b}$
 b) $\vec{b} - \vec{a}$ d) $\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$ f) $3\vec{a} - \vec{c}$ h) $2\vec{a} + 3(\vec{c} - 2\vec{b})$
2. Niech $K = (-2, 1)$, $L = (1, 3)$, $R = (4, -5)$, $S = (0, -2)$. Oblicz współrzędne wektora:
- a) $\vec{KL} + \vec{SR}$ b) $\vec{KS} - 2\vec{LK}$ c) $\frac{1}{2}(\vec{KR} + \vec{LR})$ d) $-2\vec{KS} + 3\vec{KR}$
3. Niech $\vec{a} = [-4, 1]$, $\vec{b} = [0, -6]$ i $\vec{c} = [-\frac{1}{2}, 2]$. Znajdź współrzędne wektora:
- a) $2\vec{c} - \frac{1}{2}(4\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$ b) $-2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - 4\vec{c} + 2(\vec{b} + \vec{c})$

4. Znajdź współrzędne wektora $\vec{u}$, gdy:

a) $[1, -3] + \vec{u} = [5, 5]$

c) $4 \cdot [7, 1] - 2\vec{u} = -[-2, 3]$

b) $2\vec{u} - [10, -2] = [4, -1]$

d) $\vec{u} + \left[\frac{1}{3}, -2\right] = 2(\vec{u} - [1, 1])$

5. Niech $A = (-3, 7)$, $B = (-2, -1)$, $C = (5, 8)$. Znajdź współrzędne punktu D , jeżeli:

a) $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{DA} = -3\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

6. Znajdź takie liczby m i n , dla których $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

a) $\vec{a} = [1, -1]$, $\vec{b} = [4, 3]$, $\vec{c} = [-10, -11]$

b) $\vec{a} = [-3, 4]$, $\vec{b} = [6, -8]$, $\vec{c} = [-12, 16]$

7. Dane są wektory: $\vec{u} = [-4, -3]$ i $\vec{v} = [4, 6]$. Uporządkuj podane wektory w kolejności od najdłuższego do najkrótszego.

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} \quad \vec{b} = \vec{u} - \vec{v} \quad \vec{c} = 2\vec{u} \quad \vec{d} = \frac{1}{2}\vec{v} \quad \vec{e} = 2\vec{u} - \vec{v} \quad \vec{f} = \vec{u} - 2\vec{v}$$

8. Niech $\vec{p} = [3, 4]$, $\vec{q} = [5, 0]$, $4\vec{r} = \vec{p} + \vec{q}$, $2\vec{s} = \vec{p} - \vec{q}$. Wykaż, że wektory $\vec{r}$ i $\vec{s}$ mają równe długości oraz że $|\vec{r} + \vec{s}| = |\vec{r} - \vec{s}|$.

◀ **9.** Które z podanych wektorów są równoległe do wektora $\vec{u} = [12, -20]$?

$$\vec{a} = [-6, 10] \quad \vec{b} = [-3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}] \quad \vec{c} = [3, 5] \quad \vec{d} = [-4, 5, 7, 5]$$

10. Oblicz, dla jakiej wartości p wektor $\vec{u}$ jest równoległy do wektora $\vec{v}$.

a) $\vec{u} = [3, -4]$, $\vec{v} = [p, 3]$

b) $\vec{u} = \left[-\frac{2}{3}, 3\sqrt{2}\right]$, $\vec{v} = \left[\frac{3}{2}, p\right]$

11. Znajdź współrzędne wektora o długości a równoległego do wektora $\vec{u}$, jeśli:

a) $a = 1$, $\vec{u} = [3, -4]$,

b) $a = 5$, $\vec{u} = \left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, -1\right]$.

12. Korzystając z własności wektorów, sprawdź, czy proste AB i CD są równoległe.

a) $A = (-3, -2)$, $B = (-1, -5)$, $C = (66, 3)$, $D = (64, 6)$

b) $A = (3 + \sqrt{5}, 4 + \sqrt{2})$, $B = (6 + \sqrt{5}, 4 - \sqrt{2})$, $C = (1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3})$, $D = (4 + \sqrt{2}, 5 + \sqrt{3})$

13. Korzystając z własności wektorów, sprawdź, dla jakich wartości p i q prosta przechodząca przez punkty $A = (2, 3)$ i $B = (5, 7)$ jest równoległa do prostej CD , jeśli $C = (p, q)$ i $D = (2p, q - 1)$.

◀ **14. a)** Niech $A = (1, -1)$, $B = (5, 2)$, $C = (-1, 5)$, $D = (-7, 3)$. Czy czworokąt $ABCD$ jest trapezem? Czy jest on równoległobokiem?

b) W czworokącie $ABCD$ dane są: $\overrightarrow{AD} = [4, 3]$, $\overrightarrow{AC} = [8, 2]$ i $\overrightarrow{DB} = [0, -4]$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

15. O pięciokącie $ABCDE$ wiadomo, że $\overrightarrow{CB} = [-6, -9]$, $\overrightarrow{CD} = [0, 4]$, $\overrightarrow{ED} = [6, 1]$ i $\overrightarrow{EA} = [-2, -11]$. Wykaż, że jedna z przekątnych tego pięciokąta jest równoległa do boku AB , a jedna z pozostałych przekątnych jest równoległa do boku BC .

16. Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie P o współrzędnych $(-3, 7)$, a punkt ten dzieli każdą z nich tak, że $|PC| : |PA| = |PD| : |PB| = 1 : 3$. Wiadomo, że $\overrightarrow{AC} = [4, 6]$ i $\overrightarrow{BD} = [-10, -2]$. Znajdź współrzędne wierzchołków tego czworokąta i wykaż, że jest on trapezem.

17. Punkty $A = (-3, 0)$, $B = (4, -1)$, $C = (5, 1)$, $D = (2, 3)$ są wierzchołkami czworokąta. W jakim stosunku prosta równoległa do boku DC , przechodząca przez punkt B dzieli bok AD ?

MINISPRAWDZIAN

51. Dane są wektory $\vec{u} = [-3, 4]$ i $\vec{w} = [36, -8]$. Wynikiem którego z poniższych działań jest wektor równoległy do osi y ?

- A. $2\vec{u} + \vec{w}$ B. $-3\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{w}$ C. $12\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$ D. $4\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{w}$

52. O czworokącie $ABCD$ wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = [-2, 5]$, $\overrightarrow{BC} = [-3, -6]$ oraz $\overrightarrow{DC} = [-4, -3]$. Bok AD tego czworokąta ma długość:

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{97}$ C. 13 D. $2\sqrt{10}$

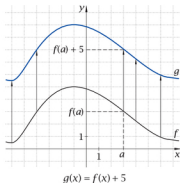
53. Jeśli $A = (90, 20)$ i $B = (30, 50)$, to prosta AB jest równoległa do wektora:

- A. $[2, -1]$ B. $[-3, 6]$ C. $[120, 60]$ D. $[-30, -15]$

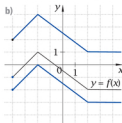
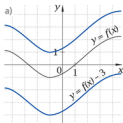
PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

I Popatrz na rysunek obok. Wykres funkcji g powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 5 jednostek w górę, czyli o wektor $[0, 5]$.

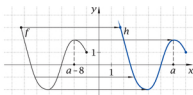
Zauważ, że wartość funkcji g dla argumentu x jest o 5 większa od wartości funkcji f dla tego argumentu. Można więc powiedzieć, że dla każdego argumentu x funkcja g przyjmuje wartość równą $f(x) + 5$.



ĆWICZENIE A Każdy z narysowanych wykresów powstał przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$. Jeden z wykresów został opisany. Opisz pozostałe.



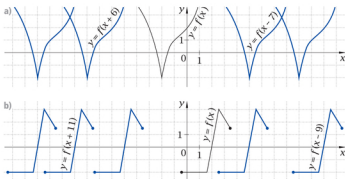
Popatrz na poniższy rysunek. Wykres funkcji h powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o 8 jednostek w prawo, czyli o wektor $[8, 0]$.



$$h(x) = f(x - 8)$$

Zauważ, że wartość funkcji h dla argumentu x jest taka sama, jak wartość funkcji f dla argumentu o 8 mniejszego od x . Możemy więc powiedzieć, że dla każdego argumentu x funkcja h przyjmuje wartość równą $f(x - 8)$.

ĆWICZENIE B Każdy z narysowanych wykresów powstał przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$. Niektóre wykresy zostały opisane. Opisz pozostałe.



Zauważ, że gdy dziedziną funkcji f nie jest zbiór liczb rzeczywistych, to funkcja, której wykres otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f , może mieć inną dziedzinę.

W tabeli zebrano przykłady funkcji, które można otrzymać, przesuwając w pionie albo w poziomie wykres funkcji $y = f(x)$.

Sposób przesunięcia wykresu funkcji $y = f(x)$	Współrzędne wektora przesunięcia	Otrzymana funkcja
przesunięcie o 5 jednostek w górę	$[0, 5]$	$y = f(x) + 5$
przesunięcie o 3 jednostki w dół	$[0, -3]$	$y = f(x) - 3$
przesunięcie o 2 jednostki w prawo	$[2, 0]$	$y = f(x - 2)$
przesunięcie o 6 jednostek w lewo	$[-6, 0]$	$y = f(x + 6)$

ĆWICZENIE C Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor:

a) $[0, -1]$

b) $[-2, 0]$

c) $[10, 0]$

d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Informacje zapisane w tabeli można uogólnić w następujący sposób:

Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o wektor $[0, b]$, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x) + b$.

Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ przesuniemy o wektor $[a, 0]$, to otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - a)$.

PRZYKŁAD 1 a) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2}{x^2} + 5$. Wykres tej funkcji przesunięto o wektor $[0, -9]$. Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymano.

$$y = f(x) - 9$$

$$y = \frac{2}{x^2} + 5 - 9$$

$$y = \frac{2}{x^2} - 4$$

b) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 5\sqrt{x} + 2x - 3$. Wykres tej funkcji przesunięto o wektor $[-5, 0]$. Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymano.

$$y = f(x + 5)$$

... Po przesunięciu wykresu funkcji f o wektor $[-5, 0]$ otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - (-5))$, czyli $y = f(x + 5)$.

$$y = 5\sqrt{x+5} + 2(x+5) - 3$$

$$y = 5\sqrt{x+5} + 2x + 7$$

ZADANIE a) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 3\sqrt{x} - 4$. Wykres tej funkcji przesunięto o wektor $[0, 7]$. Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymano.

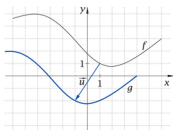
b) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 - 3x$. Wykres tej funkcji przesunięto o wektor $[6, 0]$. Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymano.

- II Zauważmy, że jeśli wykres funkcji f przesuniemy najpierw o wektor $[a, 0]$, a potem otrzymany wykres przesuniemy o wektor $[0, b]$, to będzie oznaczało, że przesunęliśmy wykres funkcji f o wektor $[a, b]$.

Na każdym z poniższych rysunków przedstawiono wykres funkcji f i wykres, który powstał w wyniku jego przesunięcia.

Wykres funkcji f
przesunięto o wektor:

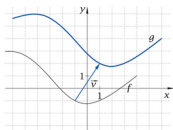
$$\vec{u} = [-2, -3]$$



$$g(x) = f(x + 2) - 3$$

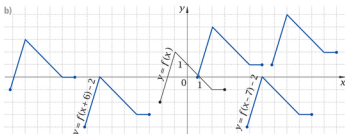
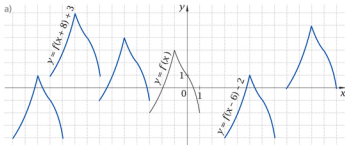
Wykres funkcji f
przesunięto o wektor:

$$\vec{v} = [2, 3]$$



$$h(x) = f(x - 2) + 3$$

ĆWICZENIE D Każdy z narysowanych wykresów powstał przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$. Niektóre wykresy zostały opisane. Opisz pozostałe.



ĆWICZENIE E Jak należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji h określonej wzorem $h(x) = f(x+1) + 4$?

Przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [a, b]$, otrzymujemy wykres funkcji:

$$g(x) = f(x - a) + b$$



PRZYKŁAD 2 Znajdź wzór funkcji, której wykres można otrzymać po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = 4x^3 + 5x + 1$ o wektor $[-2, 7]$.

$$y = f(x+2) + 7$$

$$y = 4(x+2)^3 + 5(x+2) + 1 + 7$$

$$y = 4(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 5x + 10 + 8$$

$$y = 4x^3 + 24x^2 + 53x + 50$$

Po przesunięciu wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[a, b]$ otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - a) + b$.

Dla $a = -2$ i $b = 7$ mamy: $y = f(x+2) + 7$.

ZADANIE Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2}{x} + 5x$. Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymamy w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $[-6, 4]$.

zadania 8–22 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Na rysunku obok przedstawiono wykres pewnej funkcji f . Narysuj wykres funkcji:

a) $y = f(x-2)$

c) $y = f(x+4)$

b) $y = f(x)+1$

d) $y = f(x)-3$

2. Narysuj wykres dowolnej funkcji. Oznacz ją literą f . Narysuj wykres funkcji, którą opisuje równość:

a) $y = f(x)+3$

b) $y = f(x)-2$

c) $y = f(x+3)$

d) $y = f(x-3)$

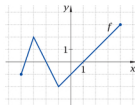
3. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u}$, gdy:

a) $\vec{u} = [0, 7]$

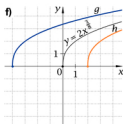
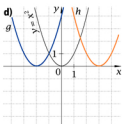
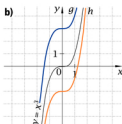
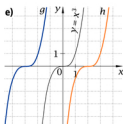
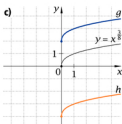
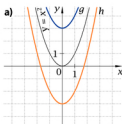
b) $\vec{u} = [0, -7]$

c) $\vec{u} = [7, 0]$

d) $\vec{u} = [-7, 0]$



4. Wykresy funkcji g i h powstały w wyniku przesunięcia wykresu funkcji, której wzór podano na rysunku. Zapisz wzory funkcji g i h .



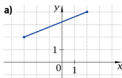
5. a) Miejscem zerowym pewnej funkcji f jest liczba 5. Jaka liczba jest miejscem zerowym funkcji $y = f(x+3)$? Jaka liczba jest miejscem zerowym funkcji $y = f(x-7)$?

b) Czy funkcja f i funkcja $y = f(x) + 3$ mogą mieć to samo miejsce zerowe?

6. W wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = -3x^2 + 2$ równoległe do osi y otrzymano wykres funkcji $g(x) = -3x^2 - 7$. O jaki wektor przesunięto wykres funkcji f ?

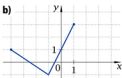
7. W wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x} - 5$ równoległe do osi x otrzymano wykres funkcji $g(x) = \frac{4}{x+3} - 5$. O jaki wektor przesunięto wykres funkcji f ?

8. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji f . Narysuj wykresy funkcji podanych pod rysunkiem.



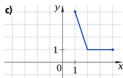
$$y = f(x-3)$$

$$y = f(x-3) - 5$$



$$y = f(x-4)$$

$$y = f(x-4) + 1$$



$$y = f(x+5)$$

$$y = f(x+5) - 3$$

9. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymasz w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = 3x^3$:

a) o wektor $[5, -2]$,

b) o wektor $[-4, 7]$,

c) o wektor $[3, -5]$.

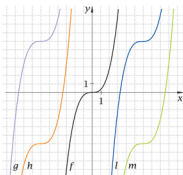
10. Oznaczone kolorami wykresy otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3$. Dopasuj poniższe wzory do wykresów.

① $y = \frac{1}{3}(x-6)^3 - 6$

② $y = \frac{1}{3}(x-6)^3 + 6$

③ $y = \frac{1}{3}(x+6)^3 - 6$

④ $y = \frac{1}{3}(x+6)^3 + 6$



11. Wykres podanej funkcji przesunięto o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano.

a) $y = 2x^2$, $\vec{u} = [1, 6]$

c) $y = 2 - |x|$, $\vec{u} = [2, -3]$

b) $y = 5\sqrt{x}$, $\vec{u} = [-5, 2]$

d) $y = 3x^2 - 1$, $\vec{u} = [-1, 5]$

12. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o wektor $\vec{v}$.

a) $f(x) = \frac{x}{2x+1}$, $\vec{v} = [2, -5]$

c) $f(x) = 5x^2\sqrt{x+1}$, $\vec{v} = [-1, -4]$

b) $f(x) = (x+3)(x-4)$, $\vec{v} = [-3, 1]$

d) $f(x) = \sqrt{3x} - \frac{4}{x-5}$, $\vec{v} = [-5, 7]$

13. Przesuwając wykres funkcji f , można otrzymać wykres funkcji g . Podaj współrzędne wektora przesunięcia, jeśli:

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = (x+3)^2$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \sqrt{x-1} + 7$

b) $f(x) = 2x^3$ $g(x) = 2(x-11)^3$

f) $f(x) = 5x^2$ $g(x) = 5(x+2)^2 - 3$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = \frac{1}{x} - 2$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $g(x) = \sqrt[3]{x-1} + 5$

d) $f(x) = \sqrt[3]{4x}$ $g(x) = \sqrt[3]{4x} + 17$

h) $f(x) = -2x^3$ $g(x) = -2(x-1)^3 - 8$

14. Jak należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ $g(x) = \sqrt{x+7}$

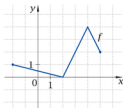
c) $f(x) = 2(x-3)^3 + 5$ $g(x) = 2(x+3)^3$

b) $f(x) = \frac{3}{x} + 7$ $g(x) = \frac{3}{x} - 2$

d) $f(x) = x^2 + x$ $g(x) = (x-1)^2 + x - 2$

15. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.

- a) Znajdź najmniejszą wartość funkcji $y = f(x - 50) + 30$.
b) W jakim przedziale funkcja $y = f(x + 70) - 60$ jest rosnąca?
c) Znajdź miejsce zerowe funkcji $y = f(x + 100) - 4$.
d) Dla jakich argumentów funkcja $y = f(x - 40) - 2$ przyjmuje wartości dodatnie?



16. Największa wartość funkcji f wynosi 15. Określ największą wartość funkcji g , jeśli wiadomo, że:

- a) $g(x) = f(x) - 20$ c) $g(x) = f(x + 13)$ e) $g(x) = f(x - 3) + 5$
b) $g(x) = f(x) + 10$ d) $g(x) = f(x - 8)$ f) $g(x) = f(x + 1) - 4$

17. Dziedziną funkcji f jest zbiór $(-3; 7)$, a zbiorem wartości jest przedział $(-1; 4)$. Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji, której wykres otrzymamy po przesunięciu wykresu funkcji f o wektor:

- a) $[5, 0]$ b) $[0, -7]$ c) $[-3, 4]$ d) $[1, -10]$

18. Funkcja f jest rosnąca tylko w przedziale $\langle -2; 5 \rangle$. Określ przedział, w którym rosnąca jest funkcja g .

- a) $g(x) = f(x - 5)$ b) $g(x) = f(x + 10)$ c) $g(x) = f(x + 7) - 3$

19. Funkcja f jest malejąca tylko w przedziałach $(-\infty; -1)$ oraz $\langle 0; 2 \rangle$. Określ przedziały, w których malejąca jest funkcja g .

- a) $g(x) = f(x + 2)$ b) $g(x) = f(x - 3)$ c) $g(x) = f(x - 10) + 5$

20. Wykres funkcji liniowej f przesunięto o wektor $[p, q]$. Wykaż, że otrzymany w ten sposób wykres jest prostą równoległą do wykresu funkcji f .

21. Wykres funkcji $f(x) = -3x + 7$ przesunięto o wektor $[2, 6]$ i otrzymano prostą p .

- a) Wykaż, że tę prostą można również otrzymać, przesuwając wykres funkcji f o wektor $[4, 0]$ albo o wektor $[0, 12]$.
b) Znajdź dwa inne wektory, o które można przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać prostą p .

22. Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ przesunięto o wektor $[0, q]$ i otrzymano wykres funkcji g . Wykaż, że istnieje taka liczba p , że wykres funkcji g można otrzymać z wykresu funkcji f w wyniku przesunięcia o wektor $[p, 0]$.

MINISPRAWDZIAN

51. Po przesunięciu wykresu funkcji $y = x^5$ o trzy jednostki w prawo otrzymamy wykres funkcji:

- A. $y = x^5 + 3$ C. $y = (x + 3)^5$
 B. $y = x^5 - 3$ D. $y = (x - 3)^5$

52. Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji f . Który z poniższych rysunków przedstawia fragment wykresu funkcji $y = f(x + 2)$?



53. Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x+2} - 5$ można otrzymać z wykresu funkcji $g(x) = \sqrt{x}$ w wyniku przesunięcia o wektor:

- A. $[-2, -5]$ B. $[2, -5]$ C. $[-5, 2]$ D. $[5, 2]$

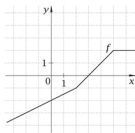
PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI (CD.)

- 1** **ĆWICZENIE A** Podaj współrzędne punktu symetrycznego do punktu $A = (a, b)$:
 a) względem osi x , b) względem osi y .

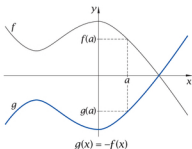
ĆWICZENIE B Na rysunku przedstawiono wykres f .

a) Niech funkcja g będzie określona wzorem $g(x) = -f(x)$. Korzystając z wykresu funkcji f , ustal, jaką wartość przyjmuje funkcja g dla argumentu -2 , a jaką — dla argumentu 3 .

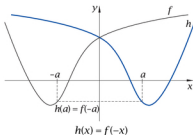
b) Niech funkcja h będzie określona wzorem $h(x) = f(-x)$. Korzystając z wykresu funkcji f , ustal, jaką wartość przyjmuje funkcja h dla argumentu -2 , a jaką — dla argumentu 3 .



Na każdym z rysunków przedstawiony jest wykres pewnej funkcji f oraz jego odbicie symetryczne.



Wykres funkcji g powstał przez odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem osi x . Dla każdego argumentu x wartości funkcji g i f są liczbami przeciwnymi. Zatem dla argumentu x funkcja g przyjmuje wartość $-f(x)$.



Wykres funkcji h powstał przez odbicie symetryczne wykresu funkcji f względem osi y . Dla każdego argumentu x wartość funkcji h jest taka sama jak wartość funkcji f dla argumentu $-x$.

zadania 1-5 ►

II

PRZYKŁAD 1 Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{1-x}$.

a) Zapisz wzór funkcji g , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi x .

$$g(x) = -f(x) = -\left(x^3 - x^2 + \frac{1}{1-x}\right) = -x^3 + x^2 - \frac{1}{1-x}$$

$$\underline{g(x) = -x^3 + x^2 - \frac{1}{x-1}}$$

b) Zapisz wzór funkcji h , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi y .

$$h(x) = f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 + \frac{1}{1-(-x)} = -x^3 - x^2 + \frac{1}{1+x}$$

$$\underline{h(x) = -x^3 - x^2 + \frac{1}{1+x}}$$

ZADANIE Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 3x - 5\sqrt{x} + 7$. Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego wykresu funkcji f :

a) względem osi x ,

b) względem osi y .

zadania 6-7 ►

III PRZYKŁAD 2 Wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2}{2x-1} + 3$ przekształcono najpierw przez symetrię względem osi y , potem przez symetrię względem osi x , a następnie przesunięto o wektor $[-5, -2]$. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymano.

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-1} + 3$$

$$f_1(x) = f(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x)-1} + 3 = \frac{x^2}{-2x-1} + 3$$

$$f_1(x) = \frac{x^2}{-2x-1} + 3$$

$$f_2(x) = -f_1(x) = -\left(\frac{x^2}{-2x-1} + 3\right) = \frac{x^2}{2x+1} - 3$$

$$f_2(x) = \frac{x^2}{2x+1} - 3$$

$$f_3(x) = f_2(x+5) - 2 = \frac{(x+5)^2}{2(x+5)+1} - 3 - 2$$

$$f_3(x) = \frac{(x+5)^2}{2x+11} - 5$$

Zapisujemy wzór funkcji f_1 , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi y .

Zapisujemy wzór funkcji f_2 , której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f_1 względem osi x .

Zapisujemy wzór funkcji f_3 , której wykres otrzymano, przesuwając wykres funkcji f_2 o 5 jednostek w lewo i 2 jednostki w dół.

ZADANIE Wykres funkcji $f(x) = 6\sqrt{x+4} - 2x$ najpierw przekształcono przez symetrię względem osi y , potem przez symetrię względem osi x , a następnie przesunięto o wektor $[-7, 5]$. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano w ten sposób.

PRZYKŁAD 3 Korzystając z wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$, narysuj wykres funkcji

$$y = -\sqrt{x+3} - 2.$$

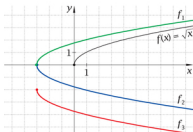
$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f_1(x) = f(x+3) = \sqrt{x+3}$$

$$f_2(x) = -f_1(x) = -\sqrt{x+3}$$

$$f_3(x) = f_2(x) - 2 = -\sqrt{x+3} - 2$$

Zapisujemy wzory funkcji, które możemy otrzymać po kolejnych przekształceniach.



Kolejność przekształceń:

1. Przesuwamy wykres funkcji f o wektor $[-3, 0]$ i otrzymujemy wykres funkcji f_1 .
2. Odbijamy wykres funkcji f_1 względem osi x , otrzymujemy wykres funkcji f_2 .
3. Przesuwamy wykres funkcji f_2 o wektor $[0, -2]$ i otrzymujemy wykres funkcji f_3 .

ZADANIE Korzystając z wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$, narysuj wykres funkcji $y = \sqrt{-x} + 4$.

zadania 8–12 ►

IV Pokażemy teraz jeszcze jeden sposób przekształcania wykresu funkcji.

ĆWICZENIE C Dane są funkcje $f_1(x) = -3x + 2$ i $f_2(x) = |-3x + 2|$. Oblicz wartości każdej z nich dla kilku dodatnich i dla kilku ujemnych argumentów. Narysuj wykresy tych funkcji.

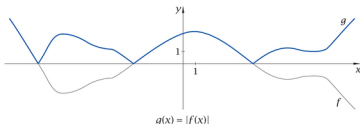
Zastanówmy się, jak przekształcić wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji:

$$g(x) = |f(x)|$$

Dla argumentów, dla których $f(x) \geq 0$, zachodzi równość $g(x) = f(x)$. Dla pozostałych argumentów, czyli tych, dla których $f(x) < 0$, zachodzi równość $g(x) = -f(x)$.

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{gdy } f(x) < 0 \end{cases}$$

Zatem wykres funkcji g otrzymamy w ten sposób, że ta część wykresu funkcji f , która znajduje się nad osią x , pozostanie niezmieniona, a pozostałe części wykresu funkcji f zostaną odbite symetrycznie względem osi x .



PRZYKŁAD 4

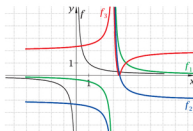
Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, narysuj wykres funkcji $y = \left| \frac{1}{x-3} - 2 \right|$.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_1(x) = f(x-3) = \frac{1}{x-3}$$

$$f_2(x) = f_1(x) - 2 = \frac{1}{x-3} - 2$$

$$f_3(x) = |f_2(x)| = \left| \frac{1}{x-3} - 2 \right|$$



ZADANIE Korzystając z wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, narysuj wykres funkcji $y = \left| 3 - \frac{1}{x} \right|$.

zadania 13–20 ►

ZESTAW ZADAŃ

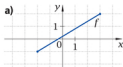
1. Narysuj wykres dowolnej funkcji f , a następnie narysuj wykres funkcji:

a) $y = -f(x)$

b) $y = f(-x)$

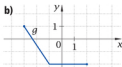
c) $y = -f(-x)$

2. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji f . Narysuj wykresy funkcji podanych pod rysunkiem.



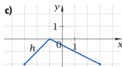
$$y = -f(x) + 1$$

$$y = -f(x + 1)$$



$$y = g(-x) + 1$$

$$y = -g(-x)$$



$$y = 1 - h(x)$$

$$y = -1 - h(x - 1)$$

3. Funkcja f jest rosnąca. Ustal, która z funkcji g , h , j też jest rosnąca, a która — malejąca, jeśli:

$$g(x) = f(-x)$$

$$h(x) = -f(x)$$

$$j(x) = -f(-x)$$

4. Jedynym miejscem zerowym pewnej funkcji f jest liczba -7 . Znajdź miejsce zerowe funkcji g , jeśli:

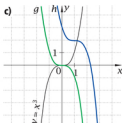
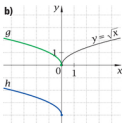
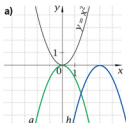
a) $g(x) = -f(x)$

b) $g(x) = f(-x)$

c) $g(x) = -f(x + 5)$

5. Narysuj wykres takiej funkcji f (która nie jest funkcją stałą), aby wykresy funkcji $y = -f(x)$ i $y = f(-x)$ były takie same.

6. Wykresy funkcji g i h powstały w wyniku przekształcenia wykresu funkcji, której wzór podano na rysunku. Zapisz wzory funkcji g i h .



7. Zapisz wzór funkcji g , której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia:

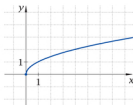
a) wykresu funkcji $f(x) = 5x - 2$ przez symetrię względem osi x ,

b) wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ przez symetrię względem osi y .

◀ III 8. Znajdź wzór funkcji, której wykres powstaje w wyniku przekształceń:

- a) wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{x}$ najpierw przez symetrię względem osi x , a następnie przez przesunięcie o wektor $[0, -4]$,
 b) wykresu funkcji $f(x) = 3x\sqrt{x-1}$ najpierw przez przesunięcie o wektor $[0, -4]$, a następnie przez symetrię względem osi y .
 c) wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x+7} - \frac{1}{x-7}$ najpierw przez przesunięcie o wektor $[7, 0]$, a następnie przez symetrię względem osi y .

9. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = \sqrt{x}$. Przekształcając odpowiednio ten wykres, narysuj wykres funkcji:



- a) $y = -\sqrt{x+5}$ d) $y = -\sqrt{-x} - 4$
 b) $y = 2 - \sqrt{x}$ e) $y = 1 - \sqrt{x-3}$
 c) $y = 3 + \sqrt{-x}$ f) $y = -\sqrt{x+2} - 4$

- 10. a) Jak kolejno należy przekształcać wykres funkcji $y = \sqrt{x}$, aby otrzymać wykres funkcji $y = \sqrt{-x-2}$?
 b) Jak kolejno należy przekształcać wykres funkcji $y = \sqrt{x-2}$, aby otrzymać wykres funkcji $y = \sqrt{-x+2}$?

11. Funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty; 2)$ i rosnąca w przedziale $(2; +\infty)$. Określ przedziały, w których malejąca jest funkcja g .

- a) $g(x) = -f(x)$ c) $g(x) = f(-x)$ e) $g(x) = -f(-x)$
 b) $g(x) = -f(x) + 2$ d) $g(x) = -f(x-3)$ f) $g(x) = 3 + f(-x)$

12. a) Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie tylko w przedziale $(-5; 1)$. W jakim przedziale funkcja $g(x) = -f(x-2)$ przyjmuje wartości ujemne?

- b) Funkcja f przyjmuje największą wartość równą -4 dla argumentu 3. Podaj największą wartość funkcji $g(x) = 5 + f(-x)$ i argument, dla którego jest przyjmowana.
 c) Funkcja f przyjmuje wartość 3 tylko dla argumentów -10 i 5 . Dla jakich argumentów przyjmuje tę wartość funkcja $g(x) = 6 - f(-x)$?

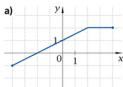
◀ IV 13. Narysuj wykres takiej funkcji f , która przyjmuje wartości dodatnie i ujemne oraz ma trzy miejsca zerowe, a następnie narysuj wykres funkcji:

- a) $y = |f(x)|$ b) $y = -|f(x)|$ c) $y = |f(x+5)|$

14. Odpowiedz, czy wykres funkcji f może być taki sam jak wykres funkcji g , jeśli:

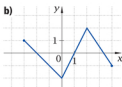
- a) $g(x) = |f(x)|$ b) $g(x) = -|f(x)|$ c) $g(x) = |f(-x)|$

15. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji f . Narysuj wykresy funkcji podanych pod rysunkiem.



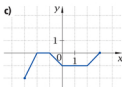
$$y = |f(x)|$$

$$y = |f(x)| - 3$$



$$y = -|f(x)|$$

$$y = |f(x - 2)|$$



$$y = -|f(-x)|$$

$$y = 1 - |f(x)|$$

16. a) Jedynymi miejscami zerowymi funkcji f są liczby -3 i 2 . Jakie miejsca zerowe ma funkcja $g(x) = |f(x + 5)|$?

b) Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, -12)$. W jakim punkcie wykres funkcji $g(x) = |f(x)| - 7$ przecina oś y ?

c) Najmniejsza wartość funkcji f jest równa 10 . Jaka jest największa wartość funkcji $g(x) = 2 - |f(x)|$?

17. Narysuj wykres funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 2$, a następnie, korzystając z tego wykresu, narysuj wykres funkcji:

a) $y = \left| -\frac{1}{2}x + 2 \right|$

b) $y = \left| -\frac{1}{2}(x - 3) + 2 \right|$

c) $y = 2 - \left| -\frac{1}{2}x + 2 \right|$

18. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji $y = x^3$. Przekształcając odpowiednio ten wykres, narysuj wykres funkcji:

a) $y = |x^3|$

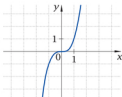
d) $y = |(x - 3)^3|$

b) $y = |x^3| + 2$

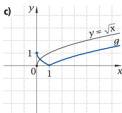
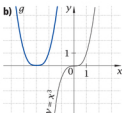
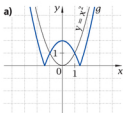
e) $y = 3 + |(x + 1)^3|$

c) $y = -|x^3 - 4|$

f) $y = -|(x + 2)^3 - 1|$

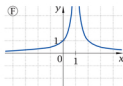
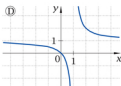
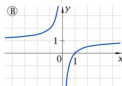
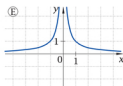
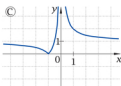
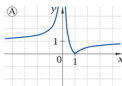


19. Wykres funkcji g powstał w wyniku przekształcenia wykresu funkcji, której wzór podano na rysunku. Zapisz wzór funkcji g .



20. Poniższe wykresy otrzymano w wyniku przekształceń wykresu funkcji $y = \frac{1}{x}$. Dopasuj wzory do wykresów.

$$\begin{array}{lll} f(x) = \left| \frac{1}{x} + 1 \right| & g(x) = \left| \frac{1}{x-1} \right| & h(x) = -\frac{1}{x} + 1 \\ k(x) = \left| -\frac{1}{x} + 1 \right| & l(x) = \left| \frac{1}{x} \right| & m(x) = \frac{1}{x-1} + 1 \end{array}$$



MINISPRAWDZIAN

51. Które z poniższych zdań jest zawsze prawdziwe?

- A. Jeśli funkcja $y = f(x)$ jest rosnąca, to funkcja $y = f(-x)$ też jest rosnąca.
 B. Jeśli funkcja $y = f(x)$ jest malejąca, to funkcja $y = -f(x)$ jest rosnąca.
 C. Funkcje $y = f(x)$ i $y = f(-x)$ mają zawsze takie same miejsca zerowe.
 D. Funkcje $y = f(x)$ i $y = |f(x)|$ przecinają oś y w tym samym punkcie.

52. Po odbiciu symetrycznym wykresu funkcji $y = \frac{3x}{1+x}$ względem osi x otrzymamy wykres funkcji:

- A. $y = \frac{3x}{1-x}$ B. $y = \frac{-3x}{-1-x}$ C. $y = \frac{-3x}{1-x}$ D. $y = \frac{3x}{-1+x}$

53. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = x^3 + 2x^2$. Na którym rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = -x^3 + 2x^2$?



POWTÓRZENIE

1. Na poniższym rysunku przedstawione są trzy wektory: $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Narysuj wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$, takie że:

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{c}$$

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$$

$$\vec{a} + \vec{w} = 3\vec{c} - \vec{b}$$



2. Pięć punktów przedstawionych na rysunku leży na jednej prostej. Odległości między sąsiednimi punktami są jednakowe. Wypisz wszystkie wektory o końcach w tych punktach przeciwne do wektora $\overrightarrow{CA}$.



3. Które z poniższych wektorów mają taką samą długość jak wektor $\overrightarrow{BA}$, jeśli $A = (3, 10)$ i $B = (-5, 7)$? Który z nich jest wektorem przeciwnym do $\overrightarrow{BA}$?

$$\vec{a} = [-3, 8]$$

$$\vec{c} = [5, 4\sqrt{3}]$$

$$\vec{b} = [-8, -3]$$

$$\vec{d} = [2\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$$

4. Punkt $A = (-4, 3)$ jest wierzchołkiem równoległoboku o kolejnych wierzchołkach $ABCD$. Znajdź współrzędne wierzchołków B , C i D , jeśli $\overrightarrow{AB} = [5, 4]$ i $\overrightarrow{AC} = [-3, 7]$.

5. W równoległoboku $KLMN$ dane są $\overrightarrow{KL} = [-1, 2]$ oraz $\overrightarrow{KN} = [5, -2]$. Jakie długości mają przekątne tego równoległoboku?

6. Wiadomo, że: $A = (-2, 5)$, $C = (0, -3)$, $\overrightarrow{BA} = [5, -2]$. Oblicz współrzędne wektora:

$$a) \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$$

$$c) -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA})$$

$$b) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$d) 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}$$

7. Niech $P = (a, 3a + 1)$ i $Q = (a + 4, 2)$. Dla jakiej wartości a wektor $\overrightarrow{PQ}$ jest równoległy do wektora $\vec{u} = [-2, 1]$?

8. Podaj współrzędne wektora, o jaki należałoby przesunąć wykres funkcji $y = f(x)$, aby otrzymać wykres funkcji:

$$a) y = f(x) - 3$$

$$c) y = f(x + 2) + 6$$

$$b) y = f(x - 5)$$

$$d) y = f(x - 5) - 4$$

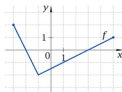
9. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy, przekształcając wykres funkcji f w opisany sposób.

a) Przesuwamy wykres funkcji $f(x) = \frac{5}{x}$ o wektor $[-4, 3]$.

b) Najpierw przesuwamy wykres funkcji $f(x) = 2\sqrt{x}$ o wektor $[1, 5]$, a potem otrzymany wykres odbijamy symetrycznie względem osi x .

c) Najpierw wykres funkcji $f(x) = 4x^3$ odbijamy symetrycznie względem osi y , a potem otrzymany wykres przesuwamy o 3 jednostki w lewo.

10. Dany jest wykres funkcji f :



Narysuj wykres funkcji:

$$a) y = |f(x)|$$

$$c) y = -|f(x + 2)|$$

$$b) y = |f(-x)|$$

$$d) y = 3 - |f(x)|$$

11. Udowodnij twierdzenie.

Odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw, a jego długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw tego trapezu.

Funkcja kwadratowa

Piłka odbita przez siatkarkę porusza się wzdłuż krzywej zwanej parabolą. Korzystając z własności funkcji kwadratowej, można ustalić, jak długo piłka będzie się znajdowała ponad siatką.

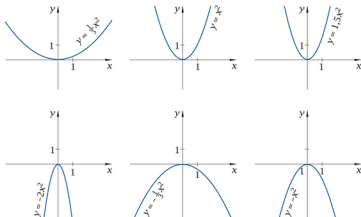


- Parabola
- Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej
- Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej
- Funkcja kwadratowa – podsumowanie
- Nierówności kwadratowe
- Zastosowania funkcji kwadratowej
- Równania i nierówności z parametrem
- Powtórzenie

PARABOLA

ĆWICZENIE A Zaznacz w układzie współrzędnych kilka punktów należących do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ i naskicuj jej wykres.

Poniżej narysowano wykresy kilku różnych funkcji typu $y = ax^2$.



Krzywą, która jest wykresem funkcji $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy **parabolą**. Wierzchołek paraboli $y = ax^2$ leży w początku układu współrzędnych, a oś y jest jej osią symetrii.

Gdy $a > 0$, wykresem funkcji $y = ax^2$ jest parabola o ramionach skierowanych do góry. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle 0; +\infty \rangle$.

Gdy $a < 0$, wykresem funkcji $y = ax^2$ jest parabola o ramionach skierowanych w dół. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $(-\infty; 0]$.



zadanie 1 ►

- II Wiesz już, że po przesunięciu wykresu funkcji $f(x)$ o wektor $[p, q]$ otrzymamy wykres funkcji $y = f(x - p) + q$. Wiadomo także, że po przesunięciu paraboli $y = ax^2$ o wektor $[p, q]$ wierzchołek nowej paraboli znajdzie się w punkcie (p, q) .

ĆWICZENIE B Na rysunku obok przedstawiono trzy krzywe — parabolę $y = -1,5x^2$ oraz parabole, które otrzymano w wyniku jej przesunięcia. Odczytaj współrzędne wektorów przesunięcia i zapisz wzór każdej z tych funkcji.



Wykresem funkcji $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$ jest parabola o wierzchołku (p, q) .



ĆWICZENIE C Podaj przykład wzoru funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku:

a) $(4, -7)$

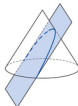
b) $(-5, 8)$

c) $(-6, 0)$

zadania 2-8 ►

Ciekawostka

Jeżeli przetniemy stożek płaszczyzną równoległą do dokładnie jednej jego tworzącej, to otrzymamy przekrój, którego brzeg jest fragmentem paraboli. Gdyby płaszczyzna przecinająca stożek była ustawiona w inny sposób, moglibyśmy otrzymać inne krzywe, np. fragment hiperboli lub elipsę. Takie figury są nazywane krzywymi stożkowymi.



III PRZYKŁAD 1 Jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4$? Ustal zbiór wartości tej funkcji i określ maksymalne przedziały jej monotoniczności.

$$y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4$$

$$y = -\frac{1}{2}(x - (-3))^2 + 4$$

Zapisujemy wzór w postaci
 $y = a(x - p)^2 + q$

Wierzchołek paraboli: $(-3, 4)$



Zaznaczamy wierzchołek i szkicujemy wykres funkcji (ramiona paraboli skierowane są w dół).

Zbiór wartości funkcji: $(-\infty; 4]$

Największą wartością funkcji jest 4;
 funkcja osiąga dowolnie małe wartości.

Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3]$ i jest malejąca w przedziale $[-3; +\infty)$.

ZADANIE Dla funkcji określonej podanym wzorem ustal współrzędne wierzchołka paraboli, która jest jej wykresem, podaj zbiór wartości funkcji i określ maksymalne przedziały jej monotoniczności.

a) $y = \frac{2}{3}(x-7)^2 - 6$

b) $y = -\frac{1}{2}(x+4)^2 + 5$

c) $y = 1,5(x-2)^2 - 3$

zadania 9–11 ►

IV PRZYKŁAD 2 Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku $(13, -5)$, przechodząca przez punkt o współrzędnych $(12, -8)$.

$$y = a(x - p)^2 + q$$

$$y = a(x - 13)^2 - 5$$

$$p = 13 \text{ i } q = -5$$

$$-8 = a(12 - 13)^2 - 5$$

Wzór funkcji spełnia para liczb $x = 12$ i $y = -8$, bo punkt $(12, -8)$ należy do wykresu szukanej funkcji.

$$-8 = a - 5$$

$$a = -3$$

$$y = -3(x - 13)^2 - 5$$

ZADANIE Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku $(-3, 2)$ przechodząca przez punkt $(7, -48)$.

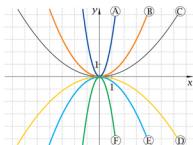
zadania 12–13 ►

ZESTAW ZADAŃ

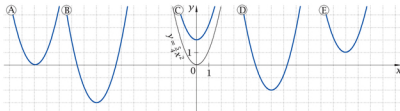
1. Na rysunku obok przedstawiono wykresy następujących funkcji:

① $y = \frac{1}{3}x^2$ ④ $y = -\frac{1}{8}x^2$
 ② $y = -\frac{1}{3}x^2$ ⑤ $y = 3x^2$
 ③ $y = \frac{1}{8}x^2$ ⑥ $y = -3x^2$

Dopasuj wzory funkcji do wykresów.



2. Każda z narysowanych poniżej parabol powstała w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $y = \frac{5}{4}x^2$. Zapisz wzory funkcji, których wykresami są te parabole.



3. Zapisz wzór funkcji otrzymanej po przesunięciu wykresu funkcji f o wektor $\vec{u}$.

a) $f(x) = 3x^2$ $\vec{u} = [2, 3]$

d) $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ $\vec{u} = [-3, -7]$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\vec{u} = [-1, 0]$

e) $f(x) = -x^2$ $\vec{u} = [2, -5]$

c) $f(x) = -0,1x^2$ $\vec{u} = [0, -4]$

f) $f(x) = \frac{x^2}{4}$ $\vec{u} = [-6, -10]$

4. Wykres funkcji $y = x^2$ przesunięto tak, że otrzymano parabolę o wierzchołku A. Zapisz wzór funkcji, której wykres jest ta parabola, jeśli:

a) $A = (10, 0)$

c) $A = (-3, 7)$

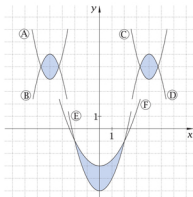
b) $A = (-15, 0)$

d) $A = (-5, -8)$

5. Linie, które narysowano obok, otrzymano, przesuając odpowiednio wykresy następujących funkcji:

$y = x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = 2x^2$ $y = -2x^2$

Zapisz wzory funkcji, których wykresami są te linie.



6. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy podanych funkcji.

a) $y = x^2$, $y = x^2 - 3$, $y = (x - 4)^2 + 1$ b) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2$, $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 4$

7. Podaj przykład wzoru funkcji, której wykresem jest parabola:

a) o wierzchołku leżącym w II ćwiartce układu współrzędnych i o ramionach skierowanych w górę,

b) o wierzchołku leżącym w IV ćwiartce układu współrzędnych i o ramionach skierowanych w dół.

8. Parabole $y = 3x^2$ przesunięto najpierw o wektor $\vec{u}$, a potem o wektor $\vec{v}$. Zapisz wzór otrzymanej funkcji, jeśli:

a) $\vec{u} = [2, 3]$ $\vec{v} = [-5, 10]$

b) $\vec{u} = [-1, -4]$ $\vec{v} = [-7, 12]$

9. Ustal, jakie współrzędne ma wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji określonej wzorem:

a) $y = 3x^2 - 2$

c) $y = -(x - 1)^2 + \sqrt{5}$

e) $y = -\frac{(x - 2)^2}{5} - 1$

b) $y = -2,5(x + 3)^2$

d) $y = \frac{(x + 1)^2}{2} + \frac{3}{4}$

f) $y = \frac{2(x - 1)^2 + 5}{6}$

10. Ustal zbiór wartości podanej funkcji i podaj, ile miejsc zerowych ma ta funkcja.

a) $y = -40x^2 + 25$

c) $y = \frac{3}{14}(x + 5)^2$

e) $y = -\frac{2}{7}(x - 2)^2 + 3$

b) $y = \frac{5}{11}x^2 + \frac{3}{7}$

d) $y = 13(x - 15)^2 - 20$

f) $y = -8(x + 2)^2 - 12$

11. Określ maksymalne przedziały monotoniczności podanej funkcji.

a) $y = x^2 - 5$

c) $y = 1,4(x - 48)^2$

e) $y = 4\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$

b) $y = -\frac{3}{10}x^2 + 12$

d) $y = -35(x + 1,2)^2$

f) $y = -2,7(x - 1,3)^2 - 4,5$

12. Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku W przechodząca przez punkt P .

a) $W = (-1, -1)$, $P = (3, 3)$

c) $W = (-8, 7)$, $P = (1, 6)$

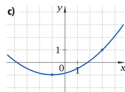
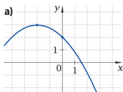
e) $W = (3, 2)$, $P = (-5, 10)$

b) $W = (0, 6)$, $P = (-6, -1)$

d) $W = (-1, 1)$, $P = (4, 0)$

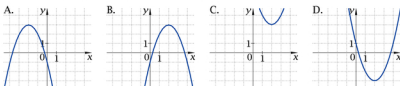
f) $W = (1, 0)$, $P = (0, 8)$

13. Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest narysowana parabola.



MINISPRAWDZIAN

51. Na którym rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = -(x - 2)^2 + 3$?



52. Jaka jest odległość wierzchołka paraboli $y = -2(x + 1)^2 - 7$ od wierzchołka paraboli $y = 5(x - 8)^2 - 7$?

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

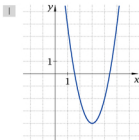
53. Której z podanych własności nie ma funkcja $f(x) = -3(x + 8)^2 - 7$?

- A. Funkcja nie przyjmuje wartości dodatnich.
 B. Wartości funkcji dla argumentów 100 i -116 są równe.
 C. Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -8)$.
 D. Zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty; -7)$.

54. Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = -5(x + 4)^2 - 6$ o wektor $[-3, 4]$ otrzymamy wykres funkcji:

- A. $y = -5(x + 3)^2 + 4$ C. $y = -5(x + 8)^2 - 9$
 B. $y = -5(x + 1)^2 - 2$ D. $y = -5(x + 7)^2 - 2$

WZÓR FUNKCJI KWADRATOWEJ W POSTACI OGÓLNEJ I KANONICZNEJ



Na rysunku obok jest przedstawiony wykres funkcji określonej wzorem:

$$y = 2(x - 3)^2 - 4$$

Wyrażenie występujące po prawej stronie możemy przekształcić:

$$2(x - 3)^2 - 4 = 2(x^2 - 6x + 9) - 4 = 2x^2 - 12x + 14$$

Zatem wzór funkcji możemy zapisać w postaci:

$$y = 2x^2 - 12x + 14$$

Oba wzory opisują oczywiście tę samą funkcję.

Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**. Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

Przykłady funkcji kwadratowych:

$$y = 3x^2 + 2x - 7$$

$$y = 5(x-1)^2 - 5$$

$$y = -3(x-2)(x-3)$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3(x+5)$$

ĆWICZENIE A Ostatni wzór spośród zapisanych w ramce przekształć do postaci $y = ax^2 + bx + c$. Podaj wartości współczynników a, b i c .

Zapis $y = ax^2 + bx + c$ to **postać ogólna** wzoru funkcji kwadratowej. Porównadno omawialiśmy własności funkcji kwadratowych, których wzory zapisywaliśmy w postaci $y = a(x-p)^2 + q$, nazywanej **postacią kanoniczną**.

$$y = ax^2 + bx + c$$

postać ogólna

$$y = a(x-p)^2 + q$$

postać kanoniczna

Przykłady wzorów funkcji kwadratowej:

w postaci ogólnej

$$y = x^2 + 6x + 11$$

$$y = 3x^2 - 42x + 147$$

$$y = -5x^2 + 10x$$

w postaci kanonicznej

$$y = (x+3)^2 + 2$$

$$y = 3(x-7)^2$$

$$y = -5(x-1)^2 + 5$$

Współczynnik a występujący w obu postaciach wzorów decyduje o tym, jak skierowane są ramiona paraboli. Jeśli $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są w górę, a jeśli $a < 0$, to ramiona skierowane są w dół.

ĆWICZENIE B Zapisz dowolny przykład funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i podaj punkt przecięcia jej wykresu z osią y .

Na podstawie wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej możemy ustalić, jakie są współrzędne wierzchołka paraboli. Gdy znamy wzór w postaci ogólnej, to od razu wiadomo, jakie współrzędne ma punkt przecięcia paraboli z osią y .

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ przecina oś y w punkcie $(0, c)$.



zadania 1-3 ►

Zastanówmy się, jak znaleźć współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji określonej wzorem ogólnym $y = ax^2 + bx + c$.

- II Przyjmijmy, że $a \neq 0$ i wzory $y = ax^2 + bx + c$ oraz $y = a(x-p)^2 + q$ określają tę samą funkcję. Wzór w postaci kanonicznej możemy przekształcić:

$$y = a(x-p)^2 + q$$

$$y = a(x^2 - 2px + p^2) + q$$

$$y = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$$

$$y = ax^2 + \underbrace{(-2ap)x}_b + \underbrace{ap^2 + q}_c$$

Zatem:

$$-2ap = b \quad \text{ i } \quad ap^2 + q = c$$

Stąd:

$$p = -\frac{b}{2a} \quad \text{ i } \quad q = c - ap^2$$

$$x_w = p, \quad y_w = q$$

Przekształcamy postać kanoniczną wzoru do postaci ogólnej.

Wzór $y = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$ opisuje tę samą funkcję co wzór $y = ax^2 + bx + c$, więc odpowiednie współczynniki muszą być równe.

Z otrzymanych równości wyznaczamy p i q w zależności od a , b i c .

Z powyższych równości wynika, że:

$$q = c - a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$



Współrzędne (x_w, y_w) wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, można obliczyć, korzystając ze wzorów:

$$x_w = -\frac{b}{2a} \quad y_w = \frac{-\Delta}{4a}$$

PRZYKŁAD 1 Zapisz wzór funkcji $y = -5x^2 - 3x - 2$ w postaci kanonicznej.

$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot (-5)} = -0,3$$

$$a = -5, \quad b = -3, \quad c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-2) = -31$$

$$y_w = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-31)}{4 \cdot (-5)} = -\frac{31}{20} = -1,55$$

Wierzchołek: $(-0,3, -1,55)$

$$y = -5(x + 0,3)^2 - 1,55$$

Zapisujemy wzór w postaci kanonicznej:
 $y = a(x-p)^2 + q$ dla $a = -5$, $p = -0,3$,
 $q = -1,55$.

ZADANIE Znajdź postać kanoniczną wzoru funkcji $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x - 1$.

Aby obliczyć drugą współrzędną wierzchołka paraboli, nie musimy korzystać ze wzoru $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$. Można ją obliczyć, ustalając najpierw, jaka jest pierwsza współrzędna, a następnie wstawić tę wartość do wzoru funkcji.

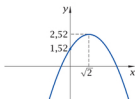
PRZYKŁAD 2 Znajdź współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2 + x\sqrt{2} + 1,52$. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności tej funkcji.

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x\sqrt{2} + 1,52$$

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-\sqrt{2}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = \sqrt{2}$$

$$y_w = f(\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 1,52 = 2,52$$

Wierzchołek paraboli: $(\sqrt{2}, 2,52)$



Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka.

Obliczamy drugą współrzędną wierzchołka, wstawiając $x = \sqrt{2}$ do wzoru funkcji $y_w = f(x_w)$.

Zaznaczamy wierzchołek paraboli, punkt przecięcia z osią y i szkicujemy parabolę.

Funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; \sqrt{2})$ i jest malejąca w przedziale $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Odczytujemy z wykresu przedziały monotoniczności.

ZADANIE Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji $y = 4x^2 - 4x - 3$.

zadania 4–6 ►

III

Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ ma tyle miejsc zerowych, ile rozwiązań ma równanie $ax^2 + bx + c = 0$, czyli liczba miejsc zerowych zależy od wartości wyrażenia $\Delta = b^2 - 4ac$.

Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe. Jeśli $\Delta = 0$, to ma jedno miejsce zerowe. Jeśli $\Delta < 0$, to nie ma miejsc zerowych.



PRZYKŁAD 3 Oblicz miejsca zerowe funkcji $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5$.

$$\frac{1}{4}x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-5) = 9 \quad \sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - 3}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + 3}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 10$$

Miejsca zerowe to -2 i 10 .

ZADANIE W jakich punktach parabola $y = -2x^2 + 4x + 6$ przecina oś układu współrzędnych?

zadania 7–12 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Wykresem podanej funkcji jest parabola. Czy parabola ta ma ramiona skierowane do góry czy w dół? W którym punkcie parabola ta przecina oś y ?

a) $y = x^2 - 2x - 12$

b) $y = (2 - \sqrt{7})x^2 - 3x$

c) $y = 2x - x^2 + 1$

2. Dopasuj wzory do wykresów.

① $y = x^2 - 6x + 8$

② $y = -x^2 + 2x - 1$

③ $y = -x^2 - 4x - 2$

④ $y = x^2 + x - 2$



3. Na rysunku obok są przedstawione wykresy następujących funkcji:

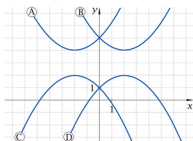
① $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 5$

② $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

③ $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 5$

④ $y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 1$

Dopasuj wzory do wykresów.



◀ III 4. Zapisz wzór podanej funkcji w postaci kanonicznej.

a) $y = 2x^2 + 5x - 5$

c) $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$

e) $y = x^2\sqrt{2} - 4x + \sqrt{2}$

b) $y = -3x^2 + 6x$

d) $y = -x^2 + 0,4x - 0,8$

f) $y = -x^2\sqrt{3} - 2x - \sqrt{3}$

5. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem podanej funkcji, i określ jej zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności.

a) $y = -2x^2 - 8x - 3$

b) $y = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 3$

c) $y = -\frac{3}{8}x^2 + 3x + 2$

6. Udowodnij, że jeśli liczby a, b, c są całkowite oraz $a \neq 0$, to obie współrzędne wierzchołka paraboli $y = ax^2 + bx + c$ są liczbami wymiernymi.

◀ III 7. Ile miejsc zerowych ma podana funkcja?

a) $y = \frac{1}{9}x^2 + x + \frac{9}{4}$

b) $y = 1,2x^2 + 0,7x - 2,3$

c) $y = 9x^2 + 12x + 11$

8. Ustal, która z trzech podanych funkcji ma dwa różne miejsca zerowe. Oblicz je.

a) $y = 2x^2 - 14x + 20$

b) $y = (x - 7)^2 + 6$

c) $y = 15x^2 + 3$

$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{-4}{3}$

$y = -5(x + 1)^2 - 40$

$y = 6x^2 + x$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$

$y = 2(x + 2)^2 - 2$

$y = -3x^2 - 6\frac{3}{4}$

9. Podaj współrzędne punktów przecięcia z osiami współrzędnych paraboli określonej wzorem:

a) $y = 2x^2 + x\sqrt{3} - 3$

b) $y = -5x^2 + 4x\sqrt{2} + 2$

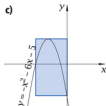
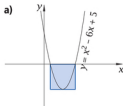
c) $y = -x^2\sqrt{6} + 5x - \sqrt{6}$

10. a) Dla jakich argumentów funkcja $y = -\frac{2}{7}x^2$ przyjmuje wartość $-3\frac{1}{2}$?

b) Dla jakich argumentów funkcja $y = 2x^2 + 15x + 5$ przyjmuje wartość -20 ?

c) Dla jakich argumentów funkcja $y = \frac{2}{5}x^2 - x$ przyjmuje wartość 15 ?

11. Oblicz pole prostokąta zaznaczonego na rysunku.



12. Wykaż, że jeśli liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, to $f(x_1 + x_2) = ax_1x_2$.

MINISPRAWDZIAN

51. W której ćwiartce układu współrzędnych leży wierzchołek paraboli określonej wzorem $y = -3x^2 + 15x - 10$?

- A. w pierwszej B. w drugiej C. w trzeciej D. w czwartej

52. Którego z podanych warunków nie spełnia funkcja $y = x^2 - 4x + 7$?

- A. Przyjmuje najmniejszą wartość.
B. Jest malejąca w przedziale $(-\infty; 2)$.
C. Zbiorem wartości jest przedział $(7; +\infty)$.
D. Przyjmuje tylko wartości dodatnie.

53. Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - x - 12$ przecina osie układu współrzędnych w punktach A, B, C. Pole trójkąta ABC wynosi:

- A. 30 B. 60 C. 90 D. 120

WZÓR FUNKCJI KWADRATOWEJ W POSTACI ILOCZYNOWEJ

1 ĆWICZENIE A Podaj miejsca zerowe funkcji $f(x) = 3(x - 2)(x + 5)$. Następnie uzasadnij, że tak określona funkcja jest funkcją kwadratową.

Jeśli liczby x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej, to jej wzór można zapisać w postaci:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Taką postać wzoru nazywamy **postacią iloczynową**.

Uwaga. Wzoru funkcji kwadratowej, która nie ma miejsc zerowych, nie da się zapisać w postaci iloczynowej. Gdy jedynym miejscem zerowym funkcji kwadratowej jest x_0 , to jej wzór można zapisać w postaci iloczynowej $f(x) = a(x - x_0)^2$.

ĆWICZENIE B Sprawdź, czy podany wzór funkcji można przedstawić w postaci iloczynowej. Jeśli tak — zapisz tę postać.

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 2$$

$$g(x) = x^2 + x + 5$$

$$h(x) = 9x^2 + 6x + 1$$

PRZYKŁAD 1 Znajdź wzór ogólny funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby -1 i 3 i której wykres przechodzi przez punkt $(2, 6)$.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f(x) = a(x + 1)(x - 3)$$

$$f(2) = 6$$

$$6 = a(2 + 1)(2 - 3)$$

$$6 = -3a$$

$$a = -2$$

$$f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$$

$$f(x) = -2(x^2 - 3x + x - 3)$$

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 6$$

Znamy miejsca zerowe funkcji: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, zapisujemy zatem jej wzór w postaci iloczynowej.

Wykres funkcji przechodzi przez punkt $(2, 6)$.

Zapisujemy wzór w postaci iloczynowej i przekształcamy go do postaci ogólnej.

ZADANIE Znajdź wzór ogólny funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby 3 i 4 i której wykres przechodzi przez punkt $(5, 1)$.

zadanie 1-3 ►

II **ĆWICZENIE C** Podaj miejsca zerowe funkcji $y = 3(x - 2)(x - 8)$. W jakim punkcie oś symetrii paraboli, która jest wykresem tej funkcji, przecina oś x ?

Gdy mamy wzór funkcji w postaci iloczynowej, to nie trzeba go przekształcać do postaci ogólnej ani do postaci kanonicznej, aby ustalić współrzędne wierzchołka paraboli.

Zauważmy, że wierzchołek paraboli leży na jej osi symetrii. Zatem pierwsza współrzędna wierzchołka – liczba x_w – leży na osi x pośrodku między miejscami zerowymi x_1 , x_2 . Zatem:

$$x_w - x_1 = x_2 - x_w$$

Stąd:

$$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Średnia arytmetyczna miejsc zerowych funkcji to pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji.



$$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ĆWICZENIE D Znajdź współrzędne wierzchołka paraboli o podanym wzorze.

a) $y = \frac{1}{3}(x - 1)(x - 5)$

b) $y = -2(x + 1)(x - 5)$

PRZYKŁAD 2 Dana jest funkcja $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-6)$. Znajdź jej miejsca zerowe i współrzędne wierzchołka paraboli, która jest jej wykresem. Narysuj wykres funkcji.

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-6)$$

Miejsca zerowe: $x_1 = -2$ $x_2 = 6$

$$x_w = \frac{-2+6}{2} = 2$$

$$y_w = f(2) = -\frac{1}{2}(2+2)(2-6) = 8$$

Wierzchołek paraboli: $(2, 8)$

$$f(0) = -\frac{1}{2}(0+2)(0-6) = 6$$

Punkt przecięcia z osią y : $(0, 6)$



... Odczytujemy miejsca zerowe.

... Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka, korzystając ze wzoru $x_w = \frac{x_1+x_2}{2}$.

... Obliczamy drugą współrzędną wierzchołka paraboli, czyli $f(x_w)$.

... Obliczamy drugą współrzędną punktu przecięcia z osią y , czyli $f(0)$.

ZADANIE Znajdź współrzędne punktów przecięcia z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne wierzchołka paraboli $y = 6(x+3)(x+5)$. Narysuj jej wykres.

zadania 4–6 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Podaj miejsca zerowe funkcji.

a) $y = (x-3)(x+1)$

c) $y = 3(x+3)^2$

e) $y = x(6-x)$

b) $y = -2(x-3)(3-x)$

d) $y = -\frac{2}{9}(x-6)^2$

f) $y = -2x(x+8)$

2. Zapisz w postaci iloczynowej przykład wzoru funkcji kwadratowej, która spełnia podane warunki.

a) Miejscami zerowymi są liczby 5, 1, a parabola, która jest wykresem funkcji, ma ramiona skierowane w dół.

b) Funkcja ma jedno miejsce zerowe równe -8 , a parabola, która jest wykresem tej funkcji, ma ramiona skierowane w górę.

3. Wykres funkcji kwadratowej przechodzi przez punkt P , a funkcja ma podane miejsca zerowe. Znajdź wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

a) $P = (1, -30)$

miejsca zerowe: -2 i 3

c) $P = (0, -100)$

miejsca zerowe: -5 i -10

b) $P = (1, -5)$

miejsce zerowe: 4

d) $P = (5, 7)$

miejsce zerowe: 6

4. Podaj współrzędne wierzchołka oraz punktów przecięcia z osiami układu współrzędnych paraboli o podanym równaniu. Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji, której wykresem jest ta parabola.

a) $y = -\frac{1}{2}(x+4)(x+6)$

c) $y = 4(x-5)^2$

e) $y = -(2-x)^2$

b) $y = \frac{1}{7}(x-2)(x+12)$

d) $y = 2(1-x)(x-3)$

f) $y = (1-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})^2$

5. a) Miejscami zerowymi pewnej funkcji kwadratowej są liczby -5 i 11 , a jej największa wartość jest równa 10 . Zapisz wzór tej funkcji.

b) Pewna parabola ma wierzchołek w punkcie $(-3, 7)$. Odległość między punktami, w których ta parabola przecina oś x , jest równa 8 . Znajdź ich współrzędne.

c) Parabola o wierzchołku w punkcie $(5, 14)$ przecina oś x w dwóch punktach. Jeden z nich ma współrzędne $(-10, 0)$. Znajdź współrzędne drugiego z tych punktów.

6. Wierzchołek pewnej paraboli i punkty przecięcia tej paraboli z osią x leżą na okręgu o promieniu 4 , którego środkiem jest początek układu współrzędnych. Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest ta parabola.

MINISPRAWDZIAN

51. Zbiór wartości funkcji $y = 2(x+1)(3-x)$ to przedział:

A. $\langle 8; +\infty \rangle$

B. $(-\infty; 8)$

C. $(-\infty; 0)$

D. $\langle 0; +\infty \rangle$

52. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej są liczby -5 i 1 , a jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, 5)$. Wzór tej funkcji można zapisać w postaci:

A. $y = (x+5)(x-1)$

C. $y = -x^2 - 4x + 5$

B. $y = (x+5)^2 + 1$

D. $y = x^2 + x + 5$

53. Wzór funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}(x+5)(x-7)$ można zapisać w postaci kanonicznej $f(x) = p(x-m)^2 + n$. Jakie wartości mają parametry p , m i n ?

A. $p = -\frac{1}{3}$, $m = 1$, $n = 12$

C. $p = 3$, $m = 1$, $n = -35$

B. $p = 3$, $m = 6$, $n = 12$

D. $p = -\frac{1}{3}$, $m = 6$, $n = -35$

FUNKCJA KWADRATOWA – PODSUMOWANIE

- 1 Poniżej zebraliśmy informacje, jak można wykorzystać różne postaci wzorów funkcji kwadratowej do ustalenia jej miejsc zerowych i wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.

wzór i wykres	Postać kanoniczna $f(x) = a(x - p)^2 + q$	Postać ogólna $f(x) = ax^2 + bx + c$	Postać iloczynowa $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
			
wierzchołek paraboli	$x_w = p$ $y_w = q$	$x_w = -\frac{b}{2a}$ $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$ lub $y_w = f(x_w)$	$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_w = f(x_w)$
miejsca zerowe	Rozwiązanie równania $a(x - p)^2 + q = 0$ Miejsca zerowe spełniają więc równanie $(x - p)^2 = -\frac{q}{a}$ Liczba miejsc zerowych zależy od tego, czy $-\frac{q}{a}$ jest liczbą dodatnią, ujemną czy równą 0.	Rozwiązanie równania $ax^2 + bx + c = 0$ Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.	Rozwiązanie równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ Miejscami zerowymi są liczby x_1 i x_2 .

PRZYKŁAD 1 a) Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykres przecina oś układu współrzędnych w punktach $(1, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 15)$.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -5$$

Miejscami zerowymi są liczby 1 i -5.

$$y = a(x - 1)(x + 5)$$

Korzystamy z postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$15 = a(0 - 1)(0 + 5)$$

Punkt $(0, 15)$ należy do wykresu szukanej funkcji.

$$15 = -5a$$

$$a = -3$$

$$y = -3(x - 1)(x + 5)$$

Zapisujemy wzór funkcji.

b) Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(5, -7)$ przechodząca przez punkt $(3, -8)$.

$$p = 5, \quad q = -7$$

(p, q) to wierzchołek paraboli.

$$y = a(x - 5)^2 - 7$$

Korzystamy z postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$.

$$-8 = a(3 - 5)^2 - 7$$

Punkt $(3, -8)$ należy do wykresu szukanej funkcji.

$$-1 = a \cdot 4$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x - 5)^2 - 7$$

Zapisujemy wzór funkcji.

c) Wykres funkcji $y = 5x^2$ przesunięto — otrzymana krzywa przecina oś y w punkcie $(0, -4)$ i przechodzi przez punkt $(-2, 6)$. Znajdź wzór otrzymanej funkcji.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Korzystamy z postaci ogólnej wzoru.

$$a = 5$$

Wzór funkcji f ma taki sam współczynnik a jak wzór funkcji $y = 5x^2$.

$$c = -4$$

Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, -4)$.

$$f(x) = 5x^2 + bx - 4$$

$$6 = 5 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) - 4$$

Punkt $(-2, 6)$ należy do wykresu funkcji f .

$$6 = 20 - 2b - 4$$

$$b = 5$$

$$f(x) = 5x^2 + 5x - 4$$

Zapisujemy wzór funkcji.

ZADANIE a) Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby 4 i 6 i której wykres przechodzi przez punkt $(0, 5)$.

b) Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(-2, 5)$ przechodząca przez punkt $(-3, 2)$.

c) Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x$ otrzymano wykres funkcji g , który przecina oś y w punkcie $(0, 6)$ i przechodzi przez punkt $(2, 10)$. Znajdź wzór funkcji g .

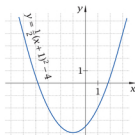
- III Gdy znamy wzór funkcji kwadratowej, to wiemy, jak są skierowane ramiona paraboli, która jest jej wykresem, i możemy stwierdzić, czy y_w (druga współrzędna wierzchołka paraboli) jest najmniejszą czy największą wartością funkcji. Można również ustalić, jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje funkcja w danym przedziale.

ĆWICZENIE Ustal odpowiedź na pytanie, korzystając z wykresu lub wzoru.

a) Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja w przedziale $\langle 1; 5 \rangle$?



b) Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja w przedziale $\langle 1; 3 \rangle$?

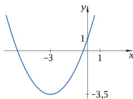


PRZYKŁAD 2 a) Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ dla argumentów z przedziału $\langle -10; 5 \rangle$?

$$x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -3$$

$$x_w \in \langle -10; 5 \rangle$$

$$y_w = f(-3) = \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 1 = -3,5$$



$$f(-10) = \frac{1}{2} \cdot (-10)^2 + 3 \cdot (-10) + 1 = 21$$

$$f(5) = \frac{1}{2} \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 28,5$$

Odp. W przedziale $\langle -10; 5 \rangle$ najmniejszą wartością funkcji f jest $-3,5$, a największą jest $28,5$.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f .

Ponieważ x_w należy do rozpatrywanego przedziału i ramiona paraboli skierowane są w górę, więc najmniejszą wartością jest y_w .

Szkicujemy wykres funkcji f , czyli parabolę o wierzchołku $(-3, -3,5)$ i ramionach skierowanych do góry.

Obliczamy wartości funkcji f na końcach rozważanego przedziału i spośród liczb $f(-10)$ i $f(5)$ wybieramy większą.

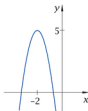
b) Jaka najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje funkcja $y = -3(x+2)^2 + 5$ w przedziale $\langle -12; -8 \rangle$.

$$x_w = -2$$

$$x_w \notin \langle -12; -8 \rangle$$

$$f(-12) = -3(-12+2)^2 + 5 = -295$$

$$f(-8) = -3(-8+2)^2 + 5 = -103$$



Odp. W przedziale $\langle -12; -8 \rangle$ najmniejszą wartością funkcji f jest -295 , a największą jest -103 .

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli nie należy do rozważanego przedziału, więc funkcja osiąga najmniejszą i największą wartość na końcach przedziału.

ZADANIE a) Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$ w przedziale $\langle -9; 0 \rangle$.

b) Znajdź najmniejszą oraz największą wartość funkcji $f(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ w przedziale $\langle -\frac{1}{2}; 2 \rangle$.

zadania 10–13 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Znajdź współrzędne wierzchołka oraz punktów przecięcia z osiami układu współrzędnych paraboli o podanym równaniu. Naskicuj tę parabolę.

a) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 8$

d) $y = x(x+6)$

g) $y = -5(x+1)(3-x)$

b) $y = 3(x+2)^2 - 75$

e) $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$

h) $y = -\frac{1}{2}(5-x)^2 + 2$

c) $y = -5x^2 + 30x - 40$

f) $y = -4x^2 + 2x$

i) $y = 3(x-10)^2$

2. Wykresem podanej funkcji jest parabola. Czy jej ramiona są skierowane w górę czy w dół? W którym punkcie ta parabola przecina oś y ?

a) $y = -3 - 2x + 4x^2$

b) $y = (5+x)(3-x)$

c) $y = -2(1-x)^2 + 2$

3. Ustal zbiór wartości podanej funkcji.

a) $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

c) $y = -\frac{2}{5}(x+5)^2 - 10$

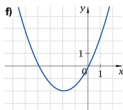
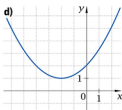
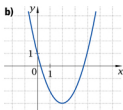
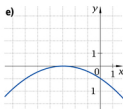
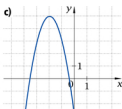
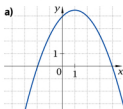
e) $y = -(5-x)(x+2) - 10x$

b) $y = \frac{3}{4}(x-2)(x-6)$

d) $y = 5x^2 + 4x - 7x^2$

f) $y = -3(2+x) + 4x^2$

4. Podaj wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunkach.



5. Znajdź wzór funkcji kwadratowej, która spełnia podany warunek.

- Wykres funkcji przechodzi przez punkty $(0, 3)$, $(1, 2)$ i $(-1, 8)$.
- Wykres funkcji jest parabolą o wierzchołku w punkcie $(-3, 2)$, która przechodzi przez punkt $(0, 5)$.
- Miejscami zerowymi funkcji są liczby 2 i 6, a punkt $(4, -1)$ należy do jej wykresu.
- Funkcja ma największą wartość równą 2, a jej wykres jest symetryczny względem osi y i przechodzi przez punkt $(100, 1)$.

- 6.** Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykres ma z prostą $y = -1$ jeden punkt wspólny, a prosta $y = -2$ przecina ten wykres w punktach $(-5, -2)$ i $(1, -2)$.

7. Podaj przykład wzoru funkcji kwadratowej, która spełnia podany warunek.

- Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$ i rosnąca w przedziale $(-2; +\infty)$.
- Punkt $(0, 6)$ należy do wykresu funkcji i funkcja przyjmuje wartość największą.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów z przedziału $(-3; 7)$.
- Dla argumentu $x = 3$ funkcja przyjmuje wartość największą równą -3 .
- Funkcja przyjmuje wartość największą równą 2 i jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, -3)$.

8. Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i korzystając z tych wykresów, określ, ile punktów wspólnych mają podana parabola i prosta.

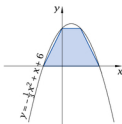
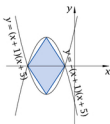
a) $y = -5x^2 + 7$ i $y = 3$

c) $y = 5(x - 3)(x - 7)$ i $y = -20$

b) $y = 2x^2 - 3x - 1$ i $y = -2$

d) $y = -3(x - 7)^2 + 11$ i $y = 12$

9. Na poniższych rysunkach zacieniowano trójkąt równoramienny, romb i trapez równoramienny. Oblicz ich pola.



10. Znajdź największą oraz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 7$ w przedziale:

- a) $\langle -1; 3 \rangle$ b) $\langle 2; 5 \rangle$ c) $\langle 6; 7 \rangle$

11. Znajdź najmniejszą oraz największą wartość funkcji $y = x^2 - 4x + 3$ w przedziale:

- a) $\langle 0; 3 \rangle$ b) $\langle 0; 5 \rangle$ c) $\langle -1; 0 \rangle$

12. Znajdź największą oraz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 10(x+6)(x+4)$ w przedziale:

- a) $\langle -10; -8 \rangle$ b) $\langle -6; 4 \rangle$ c) $\langle -1; 2 \rangle$

13. Znajdź najmniejszą i największą wartość podanej funkcji w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$.

- a) $y = 3(x-1)^2 - 7$ b) $y = -2(x-2)(x-6)$ c) $y = -4x^2 - 4x + 8$

MINISPRAWDZIAN

51. Ustal, jaka jest różnica między największą a najmniejszą wartością funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x+5)$ w przedziale $\langle -4; 5 \rangle$.

- A. $2\frac{1}{3}$ B. 19 C. 21 D. $21\frac{1}{3}$

52. Wykres jednej z podanych funkcji kwadratowych ma wierzchołek leżący w tym samym punkcie co wierzchołek wykresu funkcji $y = -7(x+1)^2 - 6$.

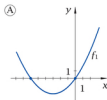
- A. $y = -2x^2 + 3x + 8$ C. $y = x^2 + 2x - 5$
B. $y = -7(x-2)(x+4)$ D. $y = -\frac{4}{7}(x-1)(x+3)$

53. O pewnej funkcji kwadratowej f wiadomo, że dla $x = 0$ przyjmuje największą wartość. Która z podanych wartości funkcji f jest najmniejsza?

- A. $f(-3)$ B. $f(0)$ C. $f(1)$ D. $f(5)$

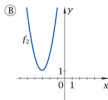
NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

ĆWICZENIE Poniżej narysowano wykresy kilku funkcji kwadratowych. Korzystając z narysowanych wykresów, określ zbiory rozwiązań podanych nierówności.



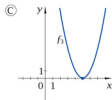
$$f_1(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$$

$$\frac{1}{3}x^2 + 2x \leq 0$$



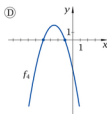
$$f_2(x) = 2x^2 + 12x + 19$$

$$2x^2 + 12x + 19 \geq 0$$



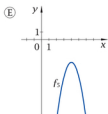
$$f_3(x) = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 10x + 25 > 0$$



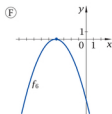
$$f_4(x) = -x^2 - 5x - 4$$

$$-x^2 - 5x - 4 < 0$$



$$f_5(x) = -2x^2 + 16x - 35$$

$$-2x^2 + 16x - 35 > 0$$



$$f_6(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 8$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - 4x - 8 \geq 0$$

Każdą z nierówności zapisanych obok można przekształcić tak, aby po jednej stronie znaku nierówności występowała liczba 0. Wówczas po drugiej stronie nierówności będzie wyrażenie opisujące pewną funkcję kwadratową. Rozwiązanie nierówności kwadratowej możemy odczytać z wykresu takiej funkcji.

Przykłady nierówności kwadratowych:

$$4x^2 - 2x \leq 7$$

$$3x^2 < 5$$

$$\frac{x^2}{2} \geq 3x - 1$$

$$x^2 + x < 3x^2 - 6$$

Uwaga. Wykres, z którego mamy odczytać rozwiązanie nierówności, nie musi być zbyt dokładny — wystarczy znać miejsca zerowe funkcji (jeśli istnieją) i wiedzieć, jak skierowane są ramiona paraboli.

PRZYKŁAD

Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 18 < 0$

$$x^2 - 18 = 0$$

$$x^2 = 18$$

$$x = 3\sqrt{2} \text{ lub } x = -3\sqrt{2}$$



$$x \in (-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$$

 Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = x^2 - 18$.

Zaznaczamy miejsca zerowe i szkicujemy wykres.

 $a > 0$, więc ramiona są skierowane w górę.

Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.

b) $-3x^2 + 6x \leq 0$

$$-3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x - 2 = 0$$

$$x = 2$$



$$x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$$

 Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = -3x(x - 2) = -3x^2 + 6x$.

Zaznaczamy miejsca zerowe i szkicujemy wykres.

 $a < 0$, więc ramiona są skierowane w dół.

Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.

c) $-(x - 7)^2 \geq 2x + 1$

$$-(x^2 - 14x + 49) - 2x - 1 \geq 0$$

$$-x^2 + 14x - 49 - 2x - 1 \geq 0$$

$$-x^2 + 12x - 50 \geq 0$$

$$-x^2 + 12x - 50 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-50) < 0$$



Przekształcamy nierówność.

 Funkcja $y = -x^2 + 12x - 50$ nie ma miejsc zerowych, a jej wykres leży poniżej osi x (ramiona paraboli są skierowane w dół), zatem nierówność $-x^2 + 12x + 50 \geq 0$ nie ma rozwiązań.

Nierówność nie ma rozwiązań.

$$d) \frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} \leq -1$$

$$\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1 \leq 0$$



$$x = -\sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x + 2 = 0$$

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 8 = 8 - 8 = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = \frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1$ i szkicujemy jej wykres.

Szkicujemy wykres funkcji.

Nierówność $\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1 \leq 0$ spełnia tylko liczba $-\sqrt{2}$.

ZADANIE Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 - 5x > 0$

b) $\frac{1}{2}x^2 + 4x < -8$

c) $3x - 2 \leq 5x^2$

zadania 1-15 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Rozwiąż nierówność.

a) $2(x-1)(x+3) \geq 0$

c) $\frac{5}{9}(x+13)(x+17) \geq 0$

e) $(x-0,5)^2 \leq 0$

b) $-2(x-5)(x-7) > 0$

d) $x(x-3) \leq 0$

f) $-2x(x+3) < 0$

2. Znajdź miejsca zerowe funkcji $y = -6x^2 - 5x + 4$, naszkicuj jej wykres, a następnie ustal rozwiązanie nierówności:

a) $-6x^2 - 5x + 4 \geq 0$

c) $6x^2 + 5x - 4 \geq 0$

e) $-12x^2 - 10x + 8 \leq 0$

b) $-6x^2 - 5x < -4$

d) $5x \leq 4 - 6x^2$

f) $x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{2}{3} < 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

c) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

e) $-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5 \leq 0$

b) $-3x^2 + x - 4 < 0$

d) $x^2 - x - 12 < 0$

f) $-4x^2 + 8x + 4 \geq 0$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 49 < 0$

c) $7x^2 + 2x > 0$

e) $-2(x-7)^2 < 0$

b) $3x^2 \geq 120$

d) $6x \geq 5x^2$

f) $\frac{2}{3}(x+5)^2 \leq 0$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 5x > -6$

c) $5(x+3) \leq 2x(x+3)$

e) $-x(x-4) > (x-4)(x+1)$

b) $5x - 10 < 2x^2$

d) $10x < (3x-1)(x+2)$

f) $3x(7-2x) \leq (5x+1)(4-x)$

6. Rozwiąż nierówność.

a) $5(x-2)(x+2) + x \geq 25(1-x)$

c) $2(x-3)^2 - 1 > 7(2-x)$

b) $5x - 1 \leq (2x-1)^2$

d) $(x-2)^3 \leq (x+1)^3 + 9$

7. Zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 4x - 21 < 0$ to przedział $(-3; 7)$. Korzystając z tej informacji, zapisz zbiór rozwiązań nierówności:

a) $x^2 - 4x - 21 \geq 0$

b) $-x^2 + 4x < -21$

c) $4x + 21 \geq x^2$

8. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których:a) wartości funkcji $y = x^2 + 3x - 20$ są mniejsze od 20,b) wartości funkcji $y = x^2 + 2x - 33$ są większe od 66.

9. Znajdź wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g .

a) $f(x) = -7x^2 + 14x + 9$

b) $f(x) = x^2 - x + 1$

c) $f(x) = 3x^2 - x - 2$

$g(x) = -5$

$g(x) = 2x + 1$

$g(x) = -x^2 + 2x + 3$

10. Znajdź wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji $y = -x^2 + 8x - 22$ są większe od -15 i jednocześnie mniejsze od -7 .

11. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji kwadratowej (jej wykres przedstawiono na rysunku obok) należą do przedziału zaznaczonego na osi y .



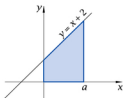
12. Wyznacz wszystkie liczby, które spełniają jednocześnie nierówności:

a) $x^2 - 3x - 10 > 0$ i $\frac{1}{2}x - 1 < 0$

c) $x^2 + 9x + 14 \geq 0$ i $x^2 - 2x \geq 15$

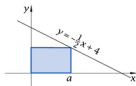
b) $-2x^2 + 13x - 15 < 0$ i $\frac{3}{2}x - 9 \geq 0$

d) $2x^2 + 17x + 30 \geq 0$ i $-\frac{1}{2}x^2 - 4x < 8$

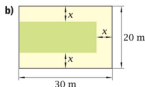
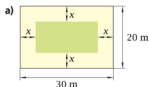


13. Rozważmy trapezy zbudowane tak, jak przedstawiono na rysunku obok. Pole trapezu zależy od liczby a ($a > 0$). Wyznacz wszystkie wartości a , dla których pola odpowiednich trapezów są większe od 510.

14. Na rysunku obok zacięniowano pewien prostokąt. Dla jakiej liczby a pole tego prostokąta jest większe od 5?

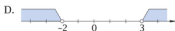


15. W prostokątnym ogrodzie o wymiarach $20\text{ m} \times 30\text{ m}$ chcemy założyć klomb z kwiatami tak, jak przedstawiono na rysunku (klomb to zacięniowany na zielono obszar). Jaka powinna być wartość x , aby klomb zajmował nie więcej niż połowę powierzchni ogrodu?



MINISPRAWDZIAN

51. Zbiór rozwiązań nierówności $(x - 2)(x + 3) < 0$ jest przedstawiony na rysunku:



52. Do zbioru rozwiązań nierówności $-2(x - 1)(x + 7) > 0$ należy liczba:

A. -8 B. -6 C. 6 D. 8

53. Zbiór, który przedstawiono na rysunku obok, jest zbiorem rozwiązań nierówności:



A. $x^2 + 5x < 0$ B. $-x^2 + 5x > 0$ C. $-x^2 - 5x < 0$ D. $x^2 - 5x > 0$



54. Na rysunku obok zacięniowano trapez. Dla jakich wartości a ($a > 0$) pole tego trapezu jest większe od 6 i mniejsze od 12?

A. $a \in (4; 6)$ C. $a \in (6; 12)$
B. $a \in (5; 7)$ D. $a \in (7; 14)$

ZASTOSOWANIA FUNKCJI KWADRATOWEJ

- I Czasami, rozważając jakiś problem, możemy opisać zależność między badanymi wielkościami za pomocą funkcji kwadratowej, a następnie skorzystać z własności tej funkcji. Rozważmy następujący problem: przy brzegu jeziora chcemy wyznaczyć kąpielisko w kształcie prostokąta, odgradząc je sznurem z bojami. W ten sposób można wydzielić kąpieliska o różnych powierzchniach.

PRZYKŁAD Sznurem o długości 80 m mamy odгородzić prostokątne kąpielisko. Jakie powinno mieć wymiary, aby jego powierzchnia była możliwie największa? Oblicz tę powierzchnię.



Jeśli przez x oznaczymy długość boku kąpieliska, który jest prostopadły do brzegu jeziora, to bok kąpieliska równoległy do brzegu ma długość $80 - 2x$ (długości x i $80 - 2x$ są wyrażone w metrach).

p — powierzchnia kąpieliska
(w m^2)

Powierzchnia p kąpieliska zależy od wartości x . Zapisujemy wzór funkcji opisujący tę zależność.

$$p(x) = x(80 - 2x)$$

$$x \in (0; 40)$$

Ustalamy dziedzinę funkcji, biorąc pod uwagę warunki zadania (długość boku x musi być liczbą dodatnią i mniejszą od połowy długości sznura).

$$p(x) = 80x - 2x^2$$

$$p(x) = -2x^2 + 80x$$

Przekształcamy wzór funkcji do postaci $p(x) = ax^2 + bx + c$. Parabola $p(x) = -2x^2 + 80x$ ma ramiona skierowane w dół, więc funkcja p przyjmuje największą wartość dla x_w .

$$x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2 \cdot (-2)} = 20$$

Obliczamy x_w i sprawdzamy, czy otrzymana liczba należy do dziedziny funkcji.

Jeśli $x = 20$, to:

$$80 - 2x = 80 - 2 \cdot 20 = 40$$

Obliczamy długość drugiego boku.

$$p = 20 \cdot 40 = 800$$

Obliczamy pole powierzchni możliwie największego kąpieliska.

Odp. Największą powierzchnię kąpieliska otrzymamy, gdy będzie ono miało wymiary $20\text{ m} \times 40\text{ m}$ (krótszy bok jest prostopadły do brzegu jeziora). Powierzchnia ta będzie równa 800 m^2 .

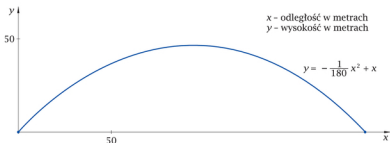
ZADANIE Przy murze chcemy ogrodzić prostokątny plac z trzech stron siatką o łącznej długości 100 m. Jakie wymiary powinien mieć ten plac, aby jego powierzchnia była jak największa?

zadania 1–10 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. W III wieku p.n.e. Archimedes zbudował katapultę, którą można było miotać nawet 80-kilogramowe kamienie. Na poniższym wykresie odtworzono, jak mógł wyglądać tor ruchu kamienia wyrzuconego przez tę katapultę. Korzystając ze wzoru funkcji opisującej ten ruch, odpowiedz na pytania:

- a) Jaki był zasięg katapulty Archimedesa?
b) Na jaką największą wysokość wleciał kamień wyrzucony przez tę katapultę?



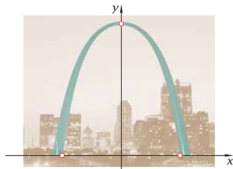
Ciekawostka

W 1965 roku w St. Louis (Stany Zjednoczone) ukończono budowę Gateway Arch, monumentalnego łuku upamiętniającego podbój Dzikiego Zachodu. Wysokość tego łuku wynosi 192 m i jest równa odległości między ramionami mierzonej przy ziemi. Gateway Arch

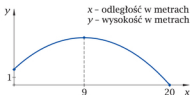
kształtem bardzo przypomina parabolę, choć w rzeczywistości architekt Eero Saarinen przy projektowaniu wykorzystał inną krzywą, tzw. krzywą łańcuchową (taką nazwę nosi krzywa, wzdłuż której układa się np. swobodnie wiszący łańcuch zaczepiony na końcach).

2. a) Korzystając z informacji, które podano w ciekawostce, znajdź wzór paraboli, która przechodzi przez punkty zaznaczone na rysunku obok.

- b) W Stanach Zjednoczonych wymiary podawane są w stopach. Wysokość łuku Gateway Arch i rozpiętość ramion wynoszą 630 stóp. Jaki wzór paraboli opisanej w punkcie a) otrzymaliby twoi amerykańscy rówieśnicy?

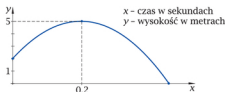


3. Tor ruchu kuli pchniętej przez miotacza podczas zawodów lekkoatletycznych jest fragmentem paraboli. Na wykresie przedstawiono zależność wysokości, na jakiej znajduje się kula, od jej odległości od miotacza (mierzonej w poziomie). Wierzchołek paraboli zaznaczono kropką.



- Znajdź wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku.
- Oblicz, na jakiej wysokości znajduje się kula w najwyższym punkcie swego lotu.

4. Poniższy wykres przedstawia, jak zmieniała się wysokość, na której znajdowała się piłka, od momentu, w którym została odbita przez siatkarkę, do momentu, w którym upadła na ziemię. Wykres ten jest fragmentem paraboli.

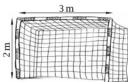


- Znajdź wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku.
- Oblicz, po jakim czasie piłka spadła na ziemię. Jaka jest dziedzina funkcji przedstawionej na wykresie?
- Oblicz, jak długo piłka wznosiła się ponad siatką (górna krawędź siatki znajduje się na wysokości 2,24 m).

5. Z drutu o długości 40 cm można zbudować prostokątne ramki.

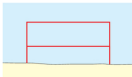
- Znajdź wymiary takiej ramki, która ogranicza największe pole.
- Jakie wymiary powinna mieć ramka, aby ograniczała obszar większy od 25 cm^2 ?

6. Z drutu o długości 2 m chcemy zbudować model prostopadłościanu, którego podstawa jest kwadratem. Jakie wymiary powinien mieć ten prostopadłościan, aby jego pole powierzchni całkowitej było największe?



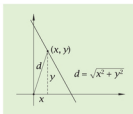
7. Rysunek obok przedstawia bramkę do piłki ręcznej. Słupki i poprzeczka ograniczają obszar o powierzchni 6 m^2 . Jaki największy obszar może ograniczać bramka, której słupki i poprzeczka mają w sumie taką samą długość jak w wypadku bramki do piłki ręcznej?

8. Przy brzegu jeziora chcemy wyznaczyć prostokątne kąpielisko z wydzielonym brodzikiem, odgradzając je sznurem z bojami tak, jak przedstawiono na rysunku. Sznur, którym dysponujemy, ma 80 m długości. Jakie wymiary powinno mieć kąpielisko, aby jego powierzchnia była możliwie największa? Jaka jest ta największa powierzchnia?



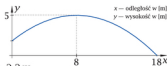
9. Przy narożniku domu chcemy ogrodzić siatką fragment terenu (zob. rysunek). Siatka, którą dysponujemy, ma 20 m długości. Ogródzony teren ma mieć kształt sześciokąta, którego sąsiednie boki są prostopadłe. Jakie długości powinny mieć te boki, aby powierzchnia ogrodzonego obszaru była możliwie największa?

10. Wybierz dowolny punkt należący do wykresu funkcji $y = -3x + 5$ i oblicz odległość tego punktu od początku układu współrzędnych. Znajdź punkt, który należy do wykresu funkcji $y = -3x + 5$ i leży najbliżej początku układu współrzędnych.



MINISPRAWDZIAN

51. Na rysunku przedstawiono tor ruchu rzuconej piłki. Tor ten jest fragmentem paraboli, której wierzchołek ma współrzędne (8, 5). Z jakiej wysokości została rzucona ta piłka?



A. 0,5 m

B. 1,4 m

C. 1,8 m

D. 2,2 m

52. Spośród wszystkich trójkątów prostokątnych, w których suma długości przyprostokątnych jest równa 20, wybieramy jeden o możliwie największym polu. Jego pole jest równe:

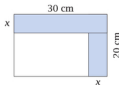
A. 400

B. 200

C. 100

D. 50

53. Od prostokątnej kartki o wymiarach 20 cm $\times$ 30 cm odcinamy z obu jej brzegów dwa paski o takiej samej szerokości x (zob. rysunek). Ta część kartki, która pozostanie po odcięciu pasków, będzie większa od połowy kartki, gdy spełniony będzie warunek:



A. $x^2 + 50x > 300$

C. $-x^2 - 50x < 300$

B. $x^2 - 50x + 300 > 0$

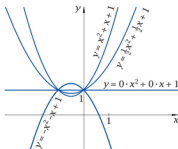
D. $-x^2 + 50x + 300 < 0$

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z PARAMETREM

I Na rysunku obok przedstawione są przykłady kilku funkcji typu:

$$y = mx^2 + mx + 1$$

Każdą z funkcji otrzymano w ten sposób, że literę m zastąpiono pewną liczbą. W tym wzorze litera m gra inną rolę niż x . Litera x jest zmienną, natomiast m jest wielkością, którą możemy traktować jak konkretną liczbę, choć nie jest ona dana. Mówimy, że m jest parametrem w tym wzorze.



Własności funkcji $y = mx^2 + mx + 1$ zmieniają się w zależności od wartości parametru m . Dla $m = 0$ wykresem funkcji tego typu jest prosta, a dla $m \neq 0$ — parabola. Wszystkie wykresy przecinają się w punktach $(0, 1)$ i $(-1, 1)$. Własności funkcji $y = mx^2 + mx + 1$ w zależności od wartości parametru m można badać, rozwiązując odpowiednie równania lub nierówności.

PRZYKŁAD 1 Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja $y = mx^2 + mx + 1$ nie ma miejsc zerowych.

Rozpatrzmy równanie $mx^2 + mx + 1 = 0$.

Przypadek I: $m \neq 0$

$$\Delta < 0$$

$$\Delta = m^2 - 4m$$

$$m^2 - 4m < 0$$

$$m(m - 4) = 0$$

$$m = 0 \text{ lub } m = 4$$



$$m \in (0; 4)$$

Omawiana funkcja nie ma miejsc zerowych, gdy równanie $mx^2 + mx + 1 = 0$ nie ma rozwiązań.

Równanie kwadratowe $mx^2 + mx + 1 = 0$ nie ma rozwiązań, gdy $\Delta < 0$.

Aby rozstrzygnąć, dla jakich wartości parametru m zachodzi nierówność $\Delta < 0$, trzeba rozwiązać nierówność kwadratową $m^2 - 4m < 0$.

Przypadek II: $m = 0$

$$\begin{aligned}0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 &= 0 \\ 1 &= 0\end{aligned}$$

Równanie sprzeczne, więc dla $m = 0$ funkcja nie ma miejsc zerowych.

Równanie $mx^2 + mx + 1 = 0$ nie ma rozwiązań, gdy $m \in (0; 4)$ lub gdy $m = 0$, czyli dla $m \in \langle 0; 4 \rangle$.

Odp. Funkcja $y = mx^2 + mx + 1$ nie ma miejsc zerowych, gdy $m \in \langle 0; 4 \rangle$.

ZADANIE Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których funkcja $y = px^2 + (p+1)x - 1$ ma jedno miejsce zerowe.

zadania 1–13 ►

II W powyższym przykładzie rozpatrywaliśmy równanie z parametrem. Również w nierównościach mogą wystąpić pewne litery pełniące rolę parametru. Możemy wówczas badać na przykład liczbę rozwiązań nierówności w zależności od wartości parametru.

PRZYKŁAD 2 Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których nierówność $2x^2 + kx + 8 \leq 0$ jest sprzeczna.

Równanie $2x^2 + kx + 8 = 0$ nie ma rozwiązań, gdy $\Delta < 0$.

$$\Delta = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = k^2 - 64$$

$$k^2 - 64 < 0$$

$$k^2 = 64$$

$$k = -8 \text{ lub } k = 8$$

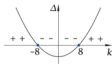
Parabola $y = 2x^2 + kx + 8$ ma ramiona skierowane w górę, zatem nierówność:

$$2x^2 + kx + 8 \leq 0$$

będzie sprzeczna, gdy równanie:

$$2x^2 + kx + 8 = 0$$

nie będzie miało rozwiązań.



$$k \in (-8; 8)$$

Odp. Nierówność $2x^2 + kx + 8 \leq 0$ nie ma rozwiązań dla $k \in (-8; 8)$.

ZADANIE Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których rozwiązaniem nierówności $-3x^2 + mx - 75 \leq 0$ jest każda liczba rzeczywista.

zadania 14–17 ►

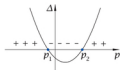
III Czasami, aby znaleźć warunek, jaki ma spełniać parametr, warto korzystać ze wzorów Viète'a.

PRZYKŁAD 3 Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których funkcja $y = x^2 + px + p + 5 = 0$ ma dwa różne miejsca zerowe, będące liczbami dodatnimi.

Warunek 1. $\Delta > 0$

$$\Delta = p^2 - 4(p + 5) = p^2 - 4p - 20$$

$$p^2 - 4p - 20 > 0$$



$$p^2 - 4p - 20 = 0$$

$$\Delta_1 = 16 - 4 \cdot (-20) = 16 + 80 = 96$$

$$\sqrt{\Delta_1} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$$p_1 = \frac{4 - 4\sqrt{6}}{2} = 2 - 2\sqrt{6}$$

$$p_2 = \frac{4 + 4\sqrt{6}}{2} = 2 + 2\sqrt{6}$$

$$p \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{6}) \cup (2 + 2\sqrt{6}; +\infty)$$

Warunek 2. $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \quad \text{i} \quad x_1 + x_2 > 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p+5}{1} = p+5$$

$$p+5 > 0, \quad \text{czyli} \quad p > -5$$

$$p \in (-5; +\infty)$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{1} = -p$$

$$-p > 0, \quad \text{czyli} \quad p < 0$$

$$p \in (-\infty; 0)$$

Oba warunki są spełnione, gdy:

$$p \in [(-\infty; 2 - 2\sqrt{6}) \cup (2 + 2\sqrt{6}; +\infty)] \cap [(-5; +\infty) \cap (-\infty; 0)] = (-5; 2 - 2\sqrt{6})$$

Odp. Podana funkcja ma dwa dodatnie miejsca zerowe dla $p \in (-5; 2 - 2\sqrt{6})$.

ZADANIE Wyznacz wszystkie wartości parametru n , dla których równanie $2x^2 + nx + n - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, będące liczbami ujemnymi.

zadania 18–24 ►

PRZYKŁAD 4 Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których rozwiązania równania $2x^2 - mx + 2 = 0$ są większe od -2 .

Warunek 1. $\Delta \geq 0$

$$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = m^2 - 16$$

$$m^2 - 16 \geq 0$$

$$m^2 \geq 16$$

$$m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$$

Warunek 2. $x_1 > -2$ i $x_2 > -2$

Zatem: $x_1 + 2 > 0$ i $x_2 + 2 > 0$

Te nierówności zachodzą, gdy:

$$x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0 \quad \text{i} \quad (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0$$

$$x_1 + x_2 > -4$$

$$x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 > 0$$

$$\frac{-(-m)}{2} > -4$$

$$x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$m > -8$$

$$\frac{2}{2} + 2 \cdot \frac{-(-m)}{2} + 4 > 0$$

$$m \in (-8; +\infty)$$

$$m > -5$$

$$m \in (-5; +\infty)$$

... Korzystamy ze wzorów
... Viète'a.

Oba warunki są spełnione, gdy:

$$m \in ((-\infty; -4) \cup (4; +\infty)) \cap (-8; +\infty) \cap (-5; +\infty)$$

$$m \in (-5; -4) \cup (4; +\infty)$$

Odp. Rozwiązania równania są większe od -2 dla $m \in (-5; -4) \cup (4; +\infty)$.

ZADANIE Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których rozwiązania równania $x^2 + px + 20 = 0$ są mniejsze od 3.

zadania 25–26 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których podane równanie ma jedno rozwiązanie.

a) $x^2 + x + p = 0$

c) $px^2 + x + 1 = 0$

e) $px^2 + x + p = 0$

b) $x^2 + px + 1 = 0$

d) $x^2 + (p+1)x + 1 = 0$

f) $(1-p)x^2 + x + p = 0$

2. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których równanie ma dwa różne rozwiązania.

- a) $\frac{1}{2}x^2 + 9x - k + 1 = 0$ c) $x^2 + kx + 2k + 1 = 0$ e) $3kx^2 + 6x - 2 = 0$
b) $5x^2 + kx - 5 = 0$ d) $-\frac{1}{4}x^2 + (k + 2)x + k = 0$ f) $2kx^2 - (1 - k)x = \frac{1}{2}$

3. Uzasadnij, że prawdziwe jest podane zdanie.

- a) Dla każdej liczby m równanie $x^2 + 2mx + m^2 = 0$ ma jedno rozwiązanie.
b) Dla każdej liczby k równanie $5x^2 + 3kx - 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania.
c) Nie istnieje liczba s , dla której równanie $3s^2x^2 - sx + 5 = 0$ ma rozwiązanie.

4. Wyznacz wszystkie wartości parametru t , dla których:

- a) równanie $5x^2 + tx + 5 = 0$ ma jedno rozwiązanie, które jest liczbą ujemną,
b) równanie $2x^2 - 3tx + 8 = 0$ ma jedno rozwiązanie, które jest liczbą dodatnią.

5. Przyjrzyj się poniższym równaniom. Wyznacz wszystkie wartości parametrów p , q i r , dla których równania te nie mają rozwiązań.

$$x^2 = p + 1 \qquad x^2 + q^2 = 0 \qquad (x - 4)^2 = (4 - r)^2$$

6. Wykaż, że podane równanie ma rozwiązanie dla każdej wartości parametru m . Zapisz rozwiązania równania w zależności od parametru m .

- a) $x^2 + (m + 1)x + m = 0$ b) $x^2 + (m - 2)x - 2m = 0$

7. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których:

- a) funkcja $y = (k - 1)x^2 + 6x - 3$ nie ma miejsc zerowych,
b) funkcja $y = (1 + k)x^2 + 2x + 5$ ma dwa miejsca zerowe,
c) funkcja $y = kx^2 + 4x + 3$ ma jedno miejsce zerowe,
d) funkcja $y = kx^2 - 2x + k$ przyjmuje tylko wartości ujemne,
e) wierzchołek paraboli $y = -3x^2 + 2kx - k$ leży na osi x ,
f) funkcja $y = (k + 1)x^2 - kx - 1$ przyjmuje najmniejszą wartość i jest ona liczbą ujemną.

8. Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których parabola o równaniu $y = x^2 + 3x + 5$ ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji:

- a) $y = 2x + p$ b) $y = px + 4$ c) $y = px + p$

9. Wyznacz wszystkie wartości parametru t , dla których parabole o równaniach $y = x^2 - 5x + t$ i $y = -x^2 + tx - 5$ przecinają się w dwóch punktach.

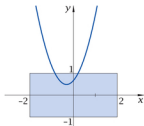
10. a) Jaki wzór ma funkcja liniowa, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji $y = 3x + 5$ i ma z parabolą o równaniu $y = 2x^2$ jeden punkt wspólny?

b) Jaki wzór ma funkcja liniowa, której wykres przecina oś y w punkcie $(0, 2)$ i ma z parabolą o równaniu $y = -\frac{1}{2}x^2$ jeden punkt wspólny?

11. Parabola o równaniu $y = x^2$ nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu $y = 2x - 2$.

a) O ile jednostek w prawo należałoby przesunąć parabolę, aby otrzymana parabola miała z tą prostą jeden punkt wspólny?

b) O ile jednostek w górę należałoby przesunąć prostą, aby miała z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny?



12. Na rysunku obok jest zacieniowany pewien prostokąt. Wyznacz wszystkie wartości parametru t , dla których wierzchołek paraboli o równaniu $y = 2x^2 + 4tx + t$ należy do tego prostokąta.

13. Dana jest rodzina parabol o równaniach $y = x^2 + nx + 2$. Udowodnij, że wierzchołki wszystkich tych parabol tworzą pewną parabolę. Zapisz równanie tej paraboli.

14. Wyznacz wszystkie wartości parametru s , dla których podana nierówność nie ma rozwiązań.

a) $sx^2 + 5 \leq 0$

b) $-2x^2 + sx - 8 > 0$

c) $(s - 1)x^2 + sx + 2 < 0$

15. Wyznacz wszystkie wartości parametru s , dla których:

a) nierówność $sx^2 + 2sx + 3 \leq 0$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej x ,

b) nierówność $(1 + s)x^2 + x + s \geq 0$ ma tylko jedno rozwiązanie.

16. Wyznacz wszystkie wartości parametru p , takie, że dla dowolnego argumentu wartości funkcji $f(x) = -x^2 + px + 2$ są mniejsze od wartości funkcji $g(x) = x^2 - 4x + 7$.

17. Dana jest nierówność $tx^2 + 2tx + 1 + t > 0$. Wyznacz wszystkie wartości:

a) parametru t , dla których nierówność ta jest spełniona dla każdej liczby x ,

b) parametru x , dla których nierówność ta jest spełniona dla każdej liczby t .

18. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie:

a) $6x^2 - x + 6m - 1 = 0$ ma dwa rozwiązania o różnych znakach,

b) $-x^2 + 2mx - m^2 + 3 = 0$ ma dwa rozwiązania dodatnie,

c) $x^2 + 3x + 5m + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania ujemne.

19. Wyznacz wszystkie wartości:

- a) parametru q , dla których nierówność $-x^2 + qx - q - 3 \geq 0$ ma tylko dodatnie rozwiązania,
b) parametru k , dla których funkcja $y = 2x^2 + kx - k + 3$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów ujemnych.

20. Znajdź wartość:

- a) współczynnika m , dla którego równanie $x^2 - 200x + m = 0$ ma dwa rozwiązania, takie że jedno jest trzy razy większe od drugiego,
b) współczynnika p , dla którego równanie $x^2 - 160x + p = 0$ ma dwa rozwiązania, z których jedno jest o 20 większe niż drugie.

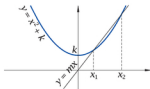
21. Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których suma kwadratów rozwiązań równania $x^2 - (k - 3)x + 17 = 0$ jest większa od 15.

22. Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których równanie $x^2 + px + 9 = 0$ ma dwa rozwiązania, a suma kwadratów tych rozwiązań jest sześć razy większa od sumy tych rozwiązań.

23. Znajdź wszystkie wartości parametru m , dla których suma odwrotności rozwiązań równania $x^2 + 2x - (m^2 + 1) = 0$ jest największa.

Ciekawostka

Popatrz na rysunek obok. Wykres funkcji $y = mx$ przecina parabolę $y = x^2 + k$ w dwóch punktach. Pierwsze współrzędne tych punktów to x_1 i x_2 . Okazuje się, że jeśli prosta przecina parabolę w dwóch punktach, to niezależnie od wartości parametrów k i m zachodzą równości: $x_1 + x_2 = m$, $x_1 x_2 = k$.



24. Przeczytaj ciekawostkę i udowodnij opisane w niej zależności między liczbami x_1 i x_2 oraz parametrami k i m .

- 25. a)** Znajdź wszystkie wartości parametru p , dla których równanie $x^2 + px + 4 = 0$ ma dwa rozwiązania mniejsze od 3.
b) Znajdź wszystkie wartości parametru k , dla których oba rozwiązania równania $2x^2 + kx + k = 0$ są większe od 1.

26. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których jedno z miejsc zerowych funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx + 4\frac{1}{2}$ jest większe od 5, a drugie jest mniejsze od 5.

MINISPRAWDZIAN

51. Równanie $3x^2 + bx + 3 = 0$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy:

- A. $-6 \leq b \leq 6$ B. $b \geq -6$ C. $b \leq 6$ D. $b \leq -6$ lub $b \geq 6$

52. Iloczyn rozwiązań równania $2x^2 - 4x + p = 0$ jest większy od $\frac{1}{2}$ dla każdego p należącego do przedziału:

- A. $(-\infty; 2)$ B. $(1; +\infty)$ C. $(1; 2)$ D. $(-2; 1)$

53. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 - 5mx - 25 = 0$ ma dwa rozwiązania większe od 10?

- A. $m < 3$ B. $m > 8$ C. $3 < m < 8$ D. nie ma takich wartości m

54. Dla pewnych wartości parametru p wykresy funkcji $f(x) = 10x^2 + px + 5$ oraz $g(x) = x^2 + x + 1$ mają jeden punkt wspólny. Suma tych wartości jest równa:

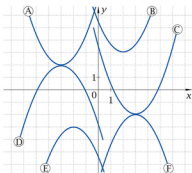
- A. -11 B. -4 C. 2 D. 13

POWTÓRZENIE

1. Na rysunku przedstawione są wykresy następujących funkcji:

- ① $y = 0,6(x - 3)^2 - 2$
- ② $y = 0,6(x + 3)^2 + 2$
- ③ $y = 0,6(x - 2)^2 + 3$
- ④ $y = -0,6(x + 3)^2 + 2$
- ⑤ $y = -0,6(x + 2)^2 - 3$
- ⑥ $y = -0,6(x - 3)^2 - 2$

Dopasuj wzory do wykresów.



2. Przekształć wzór funkcji:

- a) $f(x) = -3(-x + 2)^2 - 5$
do postaci ogólnej,
- b) $g(x) = -2x^2 - 7x - 3$
do postaci iloczynowej,
- c) $h(x) = -2(x - 1)(5 - x)$
do postaci kanonicznej.

3. Ustal zbiór wartości, argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz maksymalne przedziały jej monotoniczności.

- a) $f(x) = 5(x - 9)^2 - 20$
- b) $f(x) = -(x + 6)(x - 8)$
- c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x$

4. Ustal, w której ćwiartce układu współrzędnych leży wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, jeżeli wiadomo, że:

- a) $a > 0, b > 0, c < 0$
- b) $a < 0, b > 0, c > 0$

5. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = -4x^2 + 4x + 15$ w:

- a) $\langle 1; 2 \rangle$
- b) $\langle -1; 1 \rangle$
- c) $\langle -2; 3 \rangle$

6. Znajdź zbiór liczb, które jednocześnie spełniają dwie nierówności:

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0 \quad \text{ i } \quad x^2 + 4x - 5 < 0$$

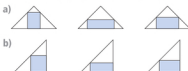
7. Ustal, dla jakich argumentów wartości obu funkcji: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ oraz $g(x) = x^2 + 4x - 5$ mają ten sam znak (wartości obu funkcji są dodatnie albo wartości obu funkcji są ujemne).

8. Dla jakiej wartości parametru p równanie $(p - 1)x^2 + px - 2 = 0$ ma jedno rozwiązanie?

9. Wyznacz wszystkie wartości parametru p , dla których funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - px + 2p - 1$ ma dwa różne:

- a) dodatnie miejsca zerowe,
- b) miejsca zerowe większe niż 3.

10. W trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej długości 10 wpisujemy różne prostokąty w sposób przedstawiony na rysunkach. Jakie wymiary powinien mieć wpisany prostokąt, aby jego pole było największe?



ODPOWIEDZI

str. 14-19: 1. a) 3, b) 8, c) 11, d) 21. 4. a) $\{A\}$, $\{B, A, R\}$, $\emptyset$, $\{K, A, R, B\}$.
 5. $A = 16$ elementów, $B = 30$ elementów. 7. a) 7, b) 0, c) 4, d) 8, e) 1,
 f) 2, g) 2, h) 5, i) 4. 8. a) Rys. 3; rys. 1 — np. $C \setminus (A \cup B)$, rys. 2 — np.
 $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$, b) rys. 6; rys. 4 — np. $((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$, rys. 5
 — np. $A \setminus B \setminus C \cup (C \setminus A)$. 11. a) $\{b, c\}$, b) $\{b, c, d\}$, c) $\{a, d, e, f, g\}$, d) $\{a, b, c\}$,
 e) $\{a, b, c, d, e\}$, f) $\emptyset$, g) $\{a, b, c, d\}$, h) $\{a, b, c, d\}$. 12. a) $\{0, 5\}$, b) $\{-\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, 9\frac{2}{3}\}$,
 c) $\{\sqrt{2}, \pi\}$, d) $\{-2, -\frac{1}{3}, 0, \sqrt{2}, \pi\}$, e) $\{-2, -\frac{1}{3}\}$, f) $\mathbb{R}$, g) $\{-\frac{1}{3}, 9\frac{2}{3}\}$, h) $\{-2, -\frac{1}{3}, \sqrt{2}, \pi\}$.
 13. a) $\{-6, -\frac{4}{3}, \sqrt{3}\}$, b) $\{-6, -\frac{4}{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 7\}$, c) $\{\sqrt{5}\}$, d) $\{\sqrt{3}, \sqrt{5}\}$, e) $\{-6, -\frac{4}{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$, f) $\emptyset$,
 g) $\{-6, -\frac{4}{3}, \sqrt{3}\}$, h) $\emptyset$, i) $\{7\}$, j) $\emptyset$, k) $\{-6, -\frac{4}{3}\}$, l) $\{7\}$. 14. a) $\{6, 7, 8, 9\}$, b) $\{10, 20\}$,
 c) $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$, d) $\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80,$
 90, 100 $\}$, e) $\{10, 20, 30, 40, 50\}$, f) $\{60, 70, 80, 90, 100\}$, g) $\{10\}$, h) $\{5, 10, 20\}$, i) $\{5, 6, 7, 8, 9,$
 10, 20 $\}$, j) $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 20\}$, k) $\{30, 40, 50\}$, l) $\emptyset$. 15. B ma 16 elementów, E ma
 90 elementów, F ma 7 elementów; a) $\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \dots\}$, b) $\{1\}$, c) F , d) $\emptyset$, e) F , f) E .
 17. a) $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \emptyset$, b) $A \cup B = A$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$, c) $A \cup B = A = B$,
 $A \cap B = A = B$, $A \setminus B = \emptyset$, d) $A \cup B = A = B$, $A \cap B = A = B$, $A \setminus B = \emptyset$. 18. a) $A \cap B = A$,
 $A \setminus B = \emptyset$, b) $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$. 19. a) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
 20. a) $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $D_{81} = \{1, 3, 9, 27\}$,
 b) $D_5 \cap D_{10} = \{1, 5\}$, $D_{11} \cap D_{15} = \{1\}$, $D_{20} \cap D_{100} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, c) $D_5 \cup D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$,
 $D_6 \cup D_3 = \{2, 6\}$, $D_5 \setminus D_7 = \{5\}$. 21. a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, b) $\{0, 1\}$, c) $\{1\}$, d) $\{2, 3, 5, 7\}$,
 e) $L_p \cup \{0\}$. 22. a) 65 elementów; 15 elementów; 45 elementów, b) 10 elementów; 5 elemen-
 tów; 5 elementów. 23. 13 elementów. 24. a) 11 elementów, b) 4 elementy, c) 19 elementów,
 d) 16 elementów, e) 4 elementy. 25. 300 osób. 26. 70 tys. mieszkańców; około 21%.

str. 22-25: 1. a) $\{0; 5\}$, b) $\{-6; 6\}$, c) $\{-3; +\infty\}$, d) $\{-\infty; 6\}$. 2. a) $-4 \leq x < 5$, b) $3 < x < 7$,
 c) $-12 < x \leq -8$, d) $0 \leq x \leq 6$, e) $x < 5$, f) $x \geq 2$, g) $x > -6$, h) $x \leq -1$. 3. Szerokość
 w cm: $\{34,5; 35,5\}$, wysokość w cm: $\{28; 29\}$, głębokość w cm: $\{20; 21\}$. 4. $A = \{-3; 5\}$,
 $B = (-\infty; 13)$, $C = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $D = \{-2, 3; +\infty\}$. 6. a) $\{2; 5\}$, b) $\emptyset$, c) $\{3; 6\}$, d) $\{-\infty; 6\}$, e) $\{-10; 7\}$,
 f) $\{-2; +\infty\}$, g) $\{-5; -4\}$, h) $\{0; 2\}$, i) $\{5; 7\}$. 7. a) $(-\infty; -1) \cup (2; 3)$, b) $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$,
 c) $(-1; 0,5) \cup (1,5; +\infty)$, d) $(-\infty; -4) \cup \{-2; -1\} \cup (0; 1)$, e) $\{-3; -2\} \cup (-1; 0)$, f) $\{-\frac{3}{2}; -1\} \cup (0; \frac{1}{2})$.
 8. a) $(5; +\infty)$, b) $(-\infty; -7) \cup (2; +\infty)$, c) $(-\infty; 6)$, d) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, e) $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$,
 f) $(-\infty; -5) \cup (-5; -1) \cup (-1; +\infty)$. 9. a) $\mathbb{R} \setminus (0; 10)$, b) $\mathbb{R} \setminus \{-10\}$, c) $\mathbb{R} \setminus \{101; 208\}$,
 d) $\mathbb{R} \setminus \{[-1; 0,5) \cup (1,5; +\infty)\}$. 10. a) $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{2}; +\infty)$, b) $(-\infty; 2\sqrt{3}) \cup (3\sqrt{3}; +\infty)$,
 c) $(3,7; +\infty)$, d) $(3,14; \pi)$, e) $(-\infty; \sqrt{5})$. 11. a) $(10; +\infty)$, b) $(-10; -5) \cup (5; 20)$,
 c) $(-5; 5) \cup (20; +\infty)$, d) $(-10; -5) \cup (5; 20)$. 13. a) 4 elementy, b) 17 elementów, c) 7
 elementów, d) 0 elementów, e) 10 elementów, f) 2 elementy. 14. a) $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$,
 b) $\{6, 7, 8, 9, \dots\}$, c) $\{0, 1, 2, 3\}$, d) $(-20; +\infty)$, e) $\mathbb{Q}_-$, f) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, g) $(-\infty; 4)$, h) $\{1, 2, 3\}$,

i) $(-2; +\infty)$. 15. a) 4, b) 401, c) 2, d) 100. 16. a) 2 elementy, b) 0 elementów, c) 4 elementy, d) 1 element. 17. a) $\{-1, 0, 1\}$, b) $\{0, 1, 2, 7\}$. 18. a) 9 elementów, b) 5 elementów, c) 4 elementy, d) 5 elementów, e) 7 elementów, f) 4 elementy.

str. 26: 1. a) $\{0, 6\}$, b) $\emptyset$, c) $\{1, 2, 3, 6\}$, d) $\{4, 5, 6\}$. 3. a) 11, b) 0, c) 3, d) 8, e) 2, f) 9. 4. a) A, b) $\{12, 15, 18, 21, \dots\}$, c) $\{\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 7, 7\frac{1}{2}, 8, 8\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}\}$, d) $\emptyset$. 5. a) 70, b) 22, c) 80, d) 3. 6. a) -7 , b) 3π , c) $-5\frac{3}{7}$. 7. a) $(-9; -3)$, b) $(2; 11)$, c) $(-4; -2\sqrt{2})$. 8. a) $(-\infty, -4) \cup (7; +\infty)$, b) $(-\infty; -2) \cup (-2; 5) \cup (5; +\infty)$, c) $(3; 4) \cup (5; +\infty)$. 9. a) $(-1; 1)$, b) $(-7; -3) \cup (5; 9)$, c) $(-\infty; 12) \cup (20; +\infty)$, d) $(-6; -3)$.

str. 29-32: 1. 5; 9; 13; np. 17; $5 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 1$. 2. a) $(a-b)^3$, b) $\frac{m+n}{mn}$, c) $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}$. 3. a) $-3p$, b) $2c - b$, $7 - x\sqrt{2}$, c) $\frac{5}{r}$ dla $r \neq 0$, $-\gamma$, $\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$, $\frac{7}{3p}$ dla $p \neq 0$, $\frac{1}{3a-2b}$ dla $a \neq \frac{2}{3}b$. 4. a) $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, b) $n = 5k$, $k \in \mathbb{N}$, c) $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$. 5. a) 0,1a; 1,3b; 0,02c, b) 1,4a; 1,07b; 1,005c, c) 0,85a; 0,94b; 0,2c. 6. a) $[50 - (5j + 2,5g + 0,78p)] [z]$, b) $4 \cdot 0,9j + 2 \cdot 0,8g = (3,6j + 1,6g) [z]$; $4j + 2g - (3,6j + 1,6g) = (0,4j + 0,4g) [z]$. 7. a) $\frac{p}{100} \cdot 27 = 0,27p$, $\frac{p}{100} \cdot a$, $a + \frac{p}{100} \cdot a$. 8. a) -14 , b) 45, c) $\frac{1}{2}$, d) $-1\frac{1}{10}$. 9. Około 21,8. 10. $P = w + \frac{b}{2} - 1$. 11. a) $-\frac{5}{21}a$, b) $-\frac{1}{2}p^2q$, c) $-4,3wv^2$, d) $3x - 4$, e) $35x - 21$, f) $5x + 13$, g) $-6x^2 + 35x - 15$, h) $15x^2 + 24x - 8$, i) $-18x^2 + 2x$. 12. a) $n + 3$, b) $2n - 3$, c) $2n + 3$, d) $2n + \frac{5}{2}$. 13. a) $12m^2 - 26mn + 10n^2$, b) $-2b^2 - b + 15c + 10bc + 3$, c) $3a^2 + 2b^2 - 7ab - 4a + 8b$, d) $a^2 - a + 2b - ab$, e) $-2x^2 + 5x + 8$, f) $5x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$. 14. a) $-b + 1$, b) $\frac{3}{2}x - 1$, c) $-6\frac{1}{2}$, d) $10,6a - 12,8$, e) $3\frac{2}{3}x$, f) $-p + 1\frac{5}{6}$, g) $-\frac{1}{6}x + 1$, h) $2\frac{7}{15}m$, i) $-\frac{4}{3}k - 3$. 15. W lewej kieszeni o 435 euro. 16. Dziesięcioro wnucząt.

str. 33-35: 1. a) $3(x+5y)$, b) $7(x+2y)$, c) $17(x^2+1)$, d) $b(c-d)$, e) $x(y+3)$, f) $p(y-1)$, g) $y(9x-1)$, h) $b(a+3b)$. 2. a) 56, b) 135, c) 31, d) 0, e) -65 , f) 114. 3. a) $x+4$, b) $2y-1$, c) 0, d) $4x-11$. 4. a) $2x(1-y)$, b) $2x(2-4y)$, c) $2x(-3x+6)$, d) $2x(5y-3z)$. 5. a) $5x(x-3)$, b) $-4x(2x+1)$, c) $-8x(y-1)$, d) $2a(5a-b)$, e) $xy(1-x)$, f) $7uv(2v-1)$, g) $4b^2(3a+4)$, h) $x(x\sqrt{2}-1)$. 6. a) $2(3xy-6x^2y^2+12x^2y)$, b) $-6x(-y+2xy^2-4xy)$, c) $3xy(2-4xy+8x)$. 7. a) $6(a-4b+5c)$, b) $x(2y+3-xy)$, c) $5a(3b-a+2c)$, d) $st^2(1+2st-4s)$, e) $pr(9+pr+3pr) = pr(9+4pr)$, f) $4ab(2a-5a^2b+1)$. 8. a) $x + \frac{1}{2}$, b) $a - \frac{5}{3}$, c) $2ab + \frac{10}{3}$, d) $\frac{1}{2}y - 2$, e) $\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$, f) $\frac{1}{2}a - b$. 9. a) $\frac{1}{2}a + 1$, b) $\frac{a+2b}{3}$. 10. a) -18 , b) -12 , c) 0. 11. a) 0,5, b) $\frac{25}{32}$, c) $\frac{35}{16}$, d) 0. 13. a) $(x+y)(a+b)$, b) $(z-y)(3-a)$, c) $2m(k-1)$, d) $2c(a-1)$. 14. a) $(p+q)(p+5)$, b) $(x-2)(x^2+1)$, c) $(a-2b)(a+5)$, d) $(5a-7)(3a^2+2)$, e) $(t-5)(s+t)$, f) $(4x+y)(y^2+3)$. 15. a) $(t-4s)(st-s) = s(t-4s)(t-1)$, b) $(3uv+1)(v-3u)$, c) $(2+5pq)(4p-3q)$, d) $(3-2y)(5x-6y)$. 16. $(a+b)(a+1)$, $(a+b)(a-1)$, $(a-b)(a+1)$, $(a-b)(a-1)$. 17. a) $(3n-4)(5m-2)$, b) $(5a-3)(2a-3b)$, c) $(p-5q)(3p+2)$, d) $(3x-2y)(2x+1)$. 18. a) $(x^4+x^2+1)(2x-3)$, b) $(5a+2)(b+c+1)$, c) $(2p-1)(2pq+2q+2)$, d) $(y^4+y^2+1)(-3xy-9)$.

str. 39-42: 1. a) $25 + 10p + p^2$, b) $1 - 8x + 16x^2$, c) $\frac{4}{a^2} + 12 + 9a^2$, d) $m^4 - 4m^2k + 4k^2$, e) $\frac{4}{9}y^2 - 4y + 9$, f) $1,21a^2 + 0,44ab + 0,04b^2$. 2. a) $22x + 16$, b) $14p + 1$, c) $25a^2$, d) $-x^2 - 3y^2$, e) $45m^2 + 5$, f) $20ab$. 3. a) 7, b) $\frac{5}{2}$, c) 5, d) 9; 3, e) 4; 2, f) 4; 2. 4. a) $a^2 + 2ab + b^2$,

b) $a^2 + 2ab + b^2$, c) $b^2 - 2ab + a^2$, d) $-a^2 - 2ab - b^2$. 5. ①, ②, ⑤. 6. $2ab, 4ab$. 7. $a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1$. 8. a) $b^3 + 6b^2 + 12b + 8$, b) $p^3 - 0,3p^2 + 0,03p - 0,001$, c) $\frac{x^3}{8} + 3x^2 + 24x + 64$, d) $125v^3 - 15v^2 + \frac{3}{2}v - \frac{1}{125}$, e) $\frac{1}{w^3} + \frac{9}{w} + 27w + 27w^3$, f) $\frac{8}{a^6} - \frac{6}{a^3} + \frac{3}{2} - \frac{a^5}{8}$, g) $a^3c^3 + a^2c^3 + \frac{ac^3}{3} + \frac{c^3}{27}$, h) $\frac{1}{27y^3} - \frac{x^2}{3y^2} + \frac{x^4}{y} - z^6$. 9. a) $x^3 + 4x^2 + 8x + 8$, b) $3p - 1$, c) $75ab^2 - 125b^3$, d) $x^3 + 6xy^2 + 8y^3$, e) $p^3 + 8p^2 + 31p + 23$, f) $t^3 - 14t^2 + 85t - 100$, g) $2m^3 + 6m$, h) $6x^2y + 2y^3$, i) $a^4 + 2a^3b + 6a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$. 11. a) $(7-4x)(7+4x)$, b) $(6a-1)(6a+1)$, c) $(\frac{2}{3}y-x)(\frac{2}{3}y+x)$, d) $(0,9a - \frac{1}{b})(0,9a + \frac{1}{b})$, e) $(\frac{1}{3} - \frac{x}{2})(\frac{1}{3} + \frac{x}{2})$, f) $(5x - y^2)(5x + y^2)$, g) $(10m - \frac{2}{n})(10m + \frac{2}{n})$, h) $(\frac{p}{11} - 0,2)(\frac{p}{11} + 0,2)$. 12. a) 999999, b) 249900, c) 39951, d) 489975. 13. a) $16 - \frac{b^2}{4}$, b) $t^4 - 0,49$, c) $a^2 - b^2$, d) $b^2 - a^2$, e) $9b^2 - a^2$, f) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{4}$. 14. a) $-13y^2 - 4xy$, b) $25x^2 - 5y^2 + 20y - 25$, c) $5a^2 - 12a + 5$, d) $-12x^2 - 2y^2 + 8xy + 1$. 15. a) $b^2 - a^2 + 2b + 1$, b) $a^2 + b^2 - 2ab - 1$. 16. ②, ③, ④. 17. a) $(p+3)(p^2-3p+9)$, b) $(\frac{1}{5} - v)(\frac{1}{25} + \frac{1}{5}v + v^2)$, c) $(10-k)(100+10k+k^2)$, d) $(2a + \frac{1}{3})(4a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9})$, e) $(4m - \frac{a}{2})(16m^2 + 2mn + \frac{n^2}{4})$, f) $(\frac{w}{10} + \frac{5}{w})(\frac{w^2}{100} - \frac{1}{2} + \frac{25}{w^2})$, g) $(a + \frac{1}{2})(a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{4})$, h) $(0,1x - \frac{3}{y})(0,01x^2 + \frac{3x}{10y} + \frac{9}{y^2})$. 19. a) $(w-1)(w^4 + w^3 + w^2 + w + 1)$, b) $(1-b)(1+b+b^2+b^3+b^4+b^5)$, c) $(2-p)(8+4p+2p^2+p^3)$, d) $(\frac{a}{2} - 1)(\frac{a^4}{16} + \frac{a^3}{8} + \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} + 1)$, e) $(x - \frac{1}{y})(x^6 + \frac{x^5}{y} + \frac{x^4}{y^2} + \frac{x^3}{y^3} + \frac{x^2}{y^4} + \frac{x}{y^5} + \frac{1}{y^6})$. 21. b) $(x+y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$.

str. 43-45: 1. a) $x = 6 - 2y$, $y = \frac{6-x}{2}$, b) $x = \frac{9+y}{3}$, $y = 3x - 9$, c) $x = \frac{3+5y}{2}$, $y = \frac{2x-3}{5}$, d) $x = \frac{5-2y}{10}$, $y = \frac{5-10x}{2}$, e) $x = \frac{3y+5}{10}$, $y = \frac{10x-5}{3}$, f) $x = \frac{4y-1}{12}$, $y = \frac{12x+1}{4}$. 2. a) $n = \frac{m-3a}{a}$, $a \neq 0$, b) $a = \frac{uv-5}{2}$, $b \neq 1$, c) $b = 3a - uv$, $u \neq 0$, d) $r = \frac{2-px}{3}$, $p \neq 0$, e) $b = -a + 2c + 2d$, f) $s = \frac{6wz-5}{2}$, $z \neq 0$, $s \neq 6w$. 3. a) $x = 10p - 10$, b) 2,5 atmosfery, c) 20 m. 4. a) $k = \frac{r-u}{r-u}$, $r \neq 2$, b) $a = \frac{1}{2b-3}$, $b \neq \frac{3}{2}$, c) $q = \frac{p-5}{p+2}$, $p \neq -2$, d) $r = \frac{p-5}{p-1}$, $p \neq 1$, $r \neq 1$, e) $p = \frac{ru}{r-u}$, $r \neq u$, $p \neq -r$, f) $k = \frac{m}{m-1}$, $m \neq 1$, $m \neq 0$, $p \neq -k$, g) $t = \frac{af+a}{2f+5}$, $a \neq 2f$, $f \neq -2\frac{1}{5}$, h) $n = \frac{m+p-5}{p-5}$, $p \neq 5$, $n \neq -1$, i) $y = \frac{-2x-7}{4}$, $y \neq -1$. 5. $t_1 = \frac{at+bt-bt_1}{t-t_1}$, $a \neq 0$, $a = \frac{bt-t_1}{t-t_1} = b \cdot \frac{t-t_1}{t-t_1}$, $t \neq t_1$. 6. a) $m = \frac{-n^2}{4}$, b) $r = \frac{p}{4}$, $r \neq 0$, $r \neq p$, c) $u = \frac{2}{v}$, $v \neq 0$, d) $k = -\frac{1}{5}$, $t \neq 0$. 7. a) $\frac{a}{b} = 4$, $b \neq 0$, b) $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, $b \neq 0$, c) $\frac{a}{b} = 4$, $b \neq 0$, d) $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, $b \neq 0$. 8. a) $A = \frac{3F}{2,34} - 25$, $F = \frac{3}{2}L$, b) $A = \frac{2F}{2,34} - 25$. 9. $u = \frac{1-r}{2r-1}$, $u \neq 0$, $u \neq -1$, $u \neq -\frac{1}{2}$, $r \neq \frac{1}{2}$.

str. 52: 1. a) $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$, b) $9a^3 + 18a^2 + 12a + \frac{8}{3}$, c) $2a - 1$. 2. a) $4a + 8$, b) $4a^2 + 8a$, c) $18a^2 + 32a$. 3. a) $n - 8$, b) 5. 4. a) $-\frac{2}{5}x + \frac{9}{10}$, b) $4,5x + 1,5$, c) $1,25x$, d) $2\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. 5. a) $\frac{x^3}{27} + x^2 - x + \frac{9}{4} - \frac{27}{x} - 81$, b) $a + \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}$. 6. a) $(2a-5b)(3a+1)$, b) $(3x - \frac{y}{2})(3x + \frac{y}{2})(9x^2 - \frac{y^4}{4})$, c) $(2m-1)(16m^4 + 8m^3 + 4m^2 + 2m + 1)$, d) $(p-q)(p^2 + q^2 + pq + p + q)$. 7. a) $4a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$, b) $16a^4 + 8a^2 + 4 + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^4}$, c) $32a^5 + 16a^3 + 8a + \frac{4}{a} + \frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^5}$, d) $64a^6 + 32a^4 + 16a^2 + 8 + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^4} + \frac{1}{a^6}$. 9. a) $A = \frac{B^2-2}{1-B}$, $B \neq 1$, $A \neq -B$, b) $A = \frac{BC+C}{1-B}$, $B \neq 1$, $A \neq -C$, c) $A = \frac{C(1-C+B)}{B-C-1}$, $A \neq C$, $B-C \neq 1$, d) $A = \frac{2C+B}{BC}$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

str. 56-60: 1. 125; $\frac{1}{125}$; -125; $-\frac{1}{125}$; -125; $-\frac{1}{125}$; 1; -1; 1. 2. a) 0,00001; $\frac{1}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{9}{4}$; $-\frac{5}{6}$; -100 000; -6 250 000, b) $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{5}$; $-\frac{8}{27}$; $\frac{81}{10000}$; -1000 000; 0,00001; $\frac{100}{121}$. 3. a^3 , a^{23} , $\frac{a^{25}}{a^{25}}$, $(-a)^2$, $(-a)^{-2}$, $(-a)^{31}$. 4. 3^{-4} ; $(\frac{2}{3})^{-3}$; 7^{-5} ; $(\frac{1}{6})^{-5}$; $(\frac{4}{9})^{-7}$. 5. a) b), d), e), f), g). 6. a) 3^{-7} , b) $(\frac{1}{5})^{-4}$, c) $(\frac{1}{4})^5$, d) $(\frac{1}{5})^{-8}$, e) $(-\frac{1}{2})^{-6}$, f) $0,1^{-4}$. 8. a) 17^{-5} , 17^{-2} , 17^0 , 17^2 , 17^3 , b) $0,6^4$, $0,6^2$, $0,6$, $0,6^{-3}$, $0,6^{-4}$, c) $0,2^3$, $0,3^3$, $0,2^0$, $0,3^{-3}$, $0,2^{-3}$, d) 4^{-5} , $0,25^4$, $0,4^{-6}$, $0,25^{-4}$, 4^5 . 9. a) 6^{-3} , b) 8^6 , c) 15^{-10} , d) 3^{16} , e) 4^{-3} , f) 5, g) 7^{-26} , h) 4^{12} , i) 5^{-4} , j) 13, k) 4^3 , l) 2^{10} . 10. 2^{10} ,

2^{-9} , 2^{-3} , 2^{-4} , 2^{-10} , 2^{-5} , 2^2 , 2^{-1} , 2^{-2} , 2^{-3} , 2^8 . 11. a) =, b) <, c) =, d) >, e) <, f) <, g) =, h) <, i) >. 12. 4000; $\frac{1}{2500}$; 40 000; $\frac{1}{50000000}$. 13. $\frac{1}{16}$; około 60 mm². 14. a) 1, b) x^{-8} , c) $\frac{a}{b^2}$, d) $p^{16} \cdot q^{-19}$, e) $x^{-4}y^{-6}z^{-1}$, f) $a^{-7}b^6c^{-4}$. 15. a) 4, b) 16, c) $\frac{1}{27}$, d) 1 000 000, e) 1, f) 0,000001, g) 1 000 000, h) 5, i) 125, j) $\frac{1}{8}$, k) 121, l) 2401. 16. a) 2^{n^2} , b) 2, c) 2^n , d) 3^{2n} , e) 3^n , f) 2^{7n+3} , g) 2^{n+2} , h) 1. 19. a) 10^6 , b) 10^{11} , c) 10^4 , d) 10, e) 10^7 . 20. a) $1,41 \cdot 10^{27}$ m³, b) $6,07 \cdot 10^{12}$ km², c) $1,6 \cdot 10^{-16}$ m². 21. a) Ok. $9,4608 \cdot 10^{12}$ km, b) ok. $9,4608 \cdot 10^{17}$ km. 22. a) Około 80 razy, b) około 100 razy, c) o około $1,4 \cdot 10^6$ km. 23. Około 3,3 mln kropel. 24. a) $2,218 \cdot 10^5$, b) $7,05 \cdot 10^{-3}$, c) $6,71 \cdot 10^{15}$, d) $3,79 \cdot 10^{-8}$.

str. 64-67: 1. a) $a = \sqrt{27}$, $b = 5\sqrt{2}$, $c = \sqrt{130}$, $d = 10\sqrt{3}$, b) $u = \sqrt[3]{-100}$, $w = 2\sqrt[3]{-10}$, $y = -\sqrt[3]{25}$, $z = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{30}$. 2. a) 10, 11, b) 30, 31, c) 4, 5, d) -10, -9. 3. a) 2, b) 0,1, c) 2, d) $1\frac{1}{3}$. 4. $a = 0,04$, $b = -\frac{64}{27}$, $c = \frac{64}{32}$, $d = -10^9$, $e = 81$, $f = 1$, $g = 32$. 5. a) $-9\sqrt{7}$, b) $-\sqrt[3]{9}$, c) 0, d) $3\sqrt[3]{7}$. 6. a) $2 - \sqrt{3}$, b) $\sqrt{10} - 3$, c) $4 - \sqrt{10}$, d) $\sqrt{5} - 7$, e) $4\sqrt{5} - 3$, f) $\sqrt{15} - 3\sqrt{3}$. 7. 7^8 , 7^5 , 7^3 , 7^2 , 7^3 , 7^0 . 8. a) 9, b) 2, c) 50, d) $\frac{8}{3}$, e) 6, f) 50, g) $-\frac{7}{3}$, h) 640. 9. a) $8\sqrt{15}$, b) $-6\sqrt[3]{6}$, c) $\frac{32}{5}$, d) $2\sqrt{6}$, e) $\sqrt{6} - 6$, f) $3\sqrt{2} - 6\sqrt{10}$, g) $4\sqrt[3]{3} - 6$, h) $10 + 5\sqrt[3]{2}$. 10. a) $6\sqrt{3} + 14$, b) $28 - 16\sqrt{3}$, c) -29, d) $38 - 12\sqrt{10}$, e) $76\frac{1}{4} + 5\sqrt{15}$, f) -6, g) $-46\sqrt{5} + 61$, h) $6\sqrt[3]{36} + 12\sqrt[3]{6} + 14$, i) $3\sqrt{3} - 9\sqrt[3]{2} + 3\sqrt{3}\sqrt[3]{4} - 2$. 12. a, d, c, e, b. 13. a) $7\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$, $3\sqrt{11}$, $4\sqrt{10}$, b) $4\sqrt[3]{4}$, $-3\sqrt[3]{10}$, $-4\sqrt[3]{10}$, $5\sqrt[3]{9}$, c) $3375\sqrt{15}$, $27\sqrt{2}$, $625000\sqrt{10}$, $4050\sqrt{10}$, d) $343\sqrt[3]{7}$, $4\sqrt[3]{4}$, $3\sqrt[3]{9}$, $25\sqrt[3]{200}$. 14. a) $15\sqrt{7}$, b) $180\sqrt{2}$, c) $6\sqrt[3]{25}$, d) $105\sqrt[3]{15}$. 15. 2,8; 4,5; 22,4; 2,5; 14,4; 2,9. 16. a) $7\sqrt{2}$, b) $\sqrt{3}$, c) $16\sqrt{3}$, d) $-\sqrt[3]{4}$, e) $7\sqrt{6}$, f) 9. 17. a) $7\sqrt{2}$, b) $\sqrt{222}$, c) $10\sqrt[3]{7}$, d) 9, e) 10, f) 5, g) $9\sqrt{3}$, h) $2\sqrt[3]{23}$, i) $3\sqrt[3]{-2}$. 18. a) $4\sqrt{2}$, b) $\frac{\sqrt{6}}{15}$, c) $\frac{5\sqrt[3]{40}}{7}$, d) $\frac{\sqrt{2}+2}{10}$, e) $\frac{5+\sqrt[3]{25}}{10}$, f) $\frac{12\sqrt[3]{14}+28}{7}$, g) $\frac{3\sqrt[3]{12}-2\sqrt[3]{18}}{6}$, h) $\frac{24+\sqrt[3]{6}}{10}$. 19. a) $a < b$, b) $c < d$, c) $e > f$. 20. a) $2\sqrt{5} + 2$, b) $\frac{6-\sqrt{2}}{17}$, c) $\frac{11+4\sqrt{2}}{3}$, d) $\frac{42-13\sqrt{6}}{15}$, e) $5\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$, f) $7 - \sqrt{35}$, g) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}+4}{3}$, h) $\frac{2\sqrt{70}-17}{3}$. 22. a) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, b) $\frac{19\sqrt{5}}{10}$, c) $\frac{10\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{100}}{10}$, d) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

str. 69-71: 1. a) 2; 2; 0,1; 125; 0,09; 256, b) $\frac{1}{12}$; $5\frac{2}{3}$; $4\frac{1}{27}$; 8. 2. a) $13\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, b) $3\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $0,7\frac{1}{2}$. 3. $5\sqrt[3]{5}$, $7\sqrt[3]{49}$, $\frac{25}{32}\sqrt{5}$, $100\sqrt[3]{10}$, $\frac{1000}{2187}\sqrt{10}$. 4. a) $5\frac{1}{2}$, b) $3\frac{1}{2}$, c) $7\frac{1}{2}$, d) $6\frac{1}{2}$, e) $5\frac{1}{2}$, f) $3\frac{1}{2}$, g) $7\frac{1}{2}$, h) $2\frac{1}{2}$, i) $2\frac{1}{2}$, j) $3\frac{1}{2}$, k) $5\frac{1}{2}$, l) $2\frac{1}{2}$. 5. a) $9\frac{1}{2}$, b) $2\frac{1}{2}$, c) $(\frac{25}{3})^{\frac{1}{3}}$, d) $2\frac{1}{2}$, e) $2\frac{1}{2}$, f) $\sqrt[3]{34}$. 6. a) $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{10}{11}$, $3\frac{11}{12}$, $3\frac{1}{2}$, b) $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{11}{12}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, c) $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$. 7. a) 7, b) $\sqrt[3]{2}$, c) $\sqrt[3]{2}$, d) $\frac{1}{2}$, e) 2, f) 8, g) 3, h) 7. 8. a) $2\sqrt[3]{2}$, b) $25\sqrt[3]{5}$, c) $3\sqrt[3]{27}$, d) $1000\sqrt[3]{100}$. 9. a) $a = 2\frac{1}{2}$, b) $b = 10\frac{1}{2}$, c) $c = 3\frac{10}{11}$, d) $d = 7\frac{1}{2}$. 11. a) $a = 256$, b) $a = 1$, c) $a = 100\,000$, d) $a = 4$.

str. 74-75: 1. a) $7^{-2,1}$, $7^{-\sqrt{2}}$, 7^0 , $7^{\frac{1}{2}}$, 7^3 , 7^π , b) $(\frac{2}{3})^{\sqrt{5}}$, $(\frac{3}{5})^{\sqrt{3}}$, $(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$, $(\frac{2}{3})^0$, $(\frac{2}{3})^{-1}$, c) $0,6^3$, $0,6^{\sqrt{2}}$, $0,6^{0,7}$, $0,6^{-\frac{1}{2}}$, $0,6^{-\frac{1}{2}}$, $0,6^{-2}$. 2. a) a, b) a, c) a, d) a. 3. $2^{5\sqrt{2}}$, $4^{\sqrt{3}}$, $(\sqrt[3]{2})^\pi$, 32^0 , $(\frac{1}{2})^4$, $(\frac{1}{16})^2$. 4. a) $(\sqrt{2})^3$, b) $(\frac{1}{9})^{-\pi}$, c) $(\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}$. Wskazówka. Przedstaw liczby w postaci potęg o tej samej podstawie. 5. $u = \pi^{-\sqrt{2}}$, $w = 1^{\sqrt{3}}$, $x = 12^{\frac{1}{2}}$, $y = 2^\pi$, $z = 4^{\sqrt{5}}$. 6. a) 49, b) $\frac{1}{121}$, c) $\frac{1}{3}$, d) $\frac{1}{125}$, e) 27, f) 1. 7. a) $a = \sqrt[3]{2}$, b) $a = 1 - \sqrt{2}$, c) $a = \sqrt{2} - 1$. 8. a) $\sqrt{2}$, b) $2\sqrt{2}$. 9. 2 razy.

str. 76: 1. $\frac{1}{25}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{16}{9}$, 6, 5, 4, 8, 100. 2. a) $6 \cdot 10^{-2}$, b) $1,24 \cdot 10^{-11}$. 3. $8 \cdot 2^{-17}$; 256 razy. 4. a) $3 \cdot 10^9 \text{ km}^3$, b) $2,75 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$. 5. Około 320 razy. 6. a) $20\sqrt{5}$, b) $-3\sqrt[3]{2}$, c) $3\sqrt[3]{3}$, d) $4\sqrt[3]{4}$. 7. a) $\sqrt[3]{5}$, b) $\frac{2\sqrt{5}-5}{15}$, c) $5\sqrt[3]{2}$, d) $\frac{\sqrt[3]{25}+5}{10}$. 8. a) $6^{-1\frac{1}{2}}$, b) $3^{-2\frac{1}{2}}$, c) $5^{\frac{5}{6}}$, d) $4^{3\frac{1}{2}}$, e) $2^{\frac{5}{6}}$, f) $2^{7\frac{1}{2}}$. 9. a) $\sqrt[3]{7}$, b) $\sqrt[3]{2}$, c) $\sqrt[3]{6}$, d) $\sqrt[10]{18}$. 10. a) 36, b) 3, c) $2^{\sqrt{3}-6}$, d) 125. 13. a) $(\frac{1}{4})^{-17}$, b) $1,2 \cdot 10^{-12}$, c) $(\frac{3}{5})^{-29}$, d) $\sqrt[3]{4}$, e) $\sqrt[3]{10}$, f) $\sqrt{1,25}$.

str. 81-83: 1. a) $8^{\frac{2}{3}} = 4$, $7^0 = 1$, $5^{-3} = \frac{1}{125}$, b) $a = \log_5 10$, $b = \log_{\frac{1}{5}} 7$, $c = \log_{0,02} \frac{2}{3}$, $d = \log 0,6$. 2. $a = 16$, $b = \frac{1}{32}$, $c = 2$, $d = \sqrt{5}$, $e = \sqrt[3]{3}$, $f = \frac{5}{2}$, $g = \frac{1}{32}$, $h = 16$, $i = 10\sqrt{3}$, $j = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $k = 100$, $l = \sqrt[3]{10}$. 3. a) 2, b) 3, c) -1, d) -2, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{1}{3}$, g) $\frac{1}{2}$, h) $\frac{1}{4}$, i) $\frac{1}{3}$, j) $\frac{2}{3}$, k) 4, l) $\frac{1}{3}$. 4. a) $\frac{2}{3}$, b) 2, c) -1, d) -3, e) $-\frac{1}{2}$, f) 8, g) 0, h) $-\frac{2}{3}$. 5. a) 1, 0, 6, $-7\frac{2}{3}$, b) 10, 1, -1, 0, -6, c) 0, $-\frac{3}{4}$, 3, 1, 5. 6. a) $-\frac{2}{3}$, 21, -4, $-\frac{4}{3}$, b) -60, -2, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, c) 4, 56, -26, -9. 7. a) KORA, b) GRAT, c) BRAK, d) RACE. 8. a) 2, b) $\frac{1}{2}$, c) 16, d) $\frac{1}{4}$. 9. a) 5, b) 6, c) 49, d) 81. 10. a) $\log_{\frac{1}{7}} 7$, $\log_{\frac{1}{7}} 7$, b) $\log_{\frac{1}{2}} 8$, $\log_{\sqrt{2}} 8$, c) $\log_{0,1} 10$, $\log_{\sqrt{10}} 10$, d) $\log_{\frac{1}{2}} 25$, $\log_{\frac{1}{3}} 25$. 11. a) -2, b) $-\frac{1}{2}$, c) 1,5, d) $-\frac{1}{4}$, e) $-\frac{1}{2}$, f) $\frac{1}{6}$, g) $-\frac{3}{4}$, h) 1,5. 12. a) $\frac{2}{3}$, b) 6, c) 5, d) 4,5, e) 7,5, f) $\frac{4}{3}$, g) $-\frac{4}{5}$, h) $-\frac{6}{5}$. 13. a) $a = 5$, b) $b = 100$, c) $c = \sqrt{2}$, d) $p = 9$, e) $q = 27$, f) $r = \frac{1}{49}$, g) $s = \frac{\sqrt{5}}{5}$, h) $t = \sqrt{10}$, i) $w = 4$. 14. a) $x = 125$, $y = -1$, $z = 2$, b) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{10}$, c) $x = \frac{1}{9}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 81$. 15. a) $\log_3 81$, b) $\log_6 \frac{1}{36}$, c) $\log_2 \frac{1}{34}$. 16. a) $k = \log_p a$, $p > 0$, $p \neq 1$, $a > 0$, b) $t = \log_a \frac{p}{M}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $\frac{p}{M} > 0$, c) $a = \log_r (T - 3)$, $r > 0$, $r \neq 1$, $T > 3$, d) $m = 5^D - 1$, $m > -1$, e) $r = 2^{\frac{n-N}{a}}$, $r > 0$, $a \neq 0$, f) $a = 10^{\frac{v}{w}} - 1$, $a > -1$, $w \neq 0$.

str. 86-89: 1. a) $\log \frac{m^2}{3}$, b) $\log \frac{1}{2}$, c) $\log_7 \frac{n}{4}$, d) $\log_6 \frac{5ab}{8c}$, e) $\log_3 \frac{2v}{3}$, f) $\log \frac{x\sqrt{2}}{2}$. 2. a) 3, b) 2, c) 3, d) 2, e) -3, f) $\frac{1}{2}$, g) 5, h) 0, i) 2. 3. a) $\log_2 5 + \log_2 x$, b) $\log_{\frac{1}{2}} a - \log_{\frac{1}{2}} 3$, c) $\log 4 + \log x - \log y$, d) $\log_7 2 - \log_7 s - \log_7 t$, e) $\log_{0,1} u - \log_{0,1} 7 - \log_{0,1} v$, f) $\log a + \log b + \log c$, g) $\log a + \log b - \log c$, h) $\log 1 - \log a - \log b - \log c$. 4. 1,845; 2,845; 6,845; -0,155; -1,155; -9,155. 5. a) 26, b) -14, c) -10, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{6}{5}$, f) -1, g) 1, h) 12. 6. a) 0,86; 2,15; -0,43; -1,29; -4,3; 0,14(3), b) 2,42; -1,21; -7,26; 8,47; 0,80(6); -0,605. 7. a) $\log_2 (a^3 b)$, b) $\log_5 (16x^2 y^2)$, c) $\log_3 \frac{64n}{25}$, d) $\log \frac{1}{16x^2}$, e) $\log \frac{7}{12}$, f) $\log \frac{1}{a^2}$. 8. a) $\log_3 45$, b) $\log 2000$, c) $\log_2 \frac{3}{16}$, d) $\log 2$. 9. a) $5x + y$, b) $2x + 3y$, c) $7y - 5x$, d) $-2x - y$. 10. a) 1,3; 1,7; -0,7; -0,4; -1,4; 0,65, b) -0,4; -0,1; -0,4; 0,4; 0,8; 1,55. 11. a) $\log_2 15$, b) $\log_5 2$, c) $\log \frac{500}{3}$, d) $\log_2 \frac{17}{8}$. 12. a) $\frac{7}{3}$, b) $\frac{6}{7}$, c) $\frac{17}{3}$, d) $\frac{7}{3}$. 13. a) $\frac{\log 2}{\log 7} \approx 0,356$, b) $\frac{\log 4}{\log 0,3} \approx -1,151$, c) $\frac{\log 2,9}{\log 0,25} \approx -0,768$, d) $\frac{\log 124}{\log 1,2} \approx 26,438$. 16. $\log_5 9 = \frac{2a}{1-a}$. 17. 1, 2, 6. 18. a) Około 27%; około 36%, b) po 26 dniach. 19. a) 4, b) 100 cm, c) ponad 10 000 razy (dokładnie $10^{4,2}$ razy). 20. a) O około 0,01 s, b) o około 0,15 s; o około 0,24 s.

str. 90: 1. a) 4, b) -4, c) -3, d) 0, e) 3, f) 1, g) $\frac{1}{3}$, h) 2. 2. a) $1\frac{1}{3}$, b) $-2\frac{1}{2}$, c) -3, d) $-\frac{1}{6}$, e) -1, f) -3. 3. a, c, b. 4. a) 2, b) 2, c) 2, d) $\frac{1}{3}$, e) 2, f) 3. 5. O 3. 6. a) b; o 2, b) b; o 2, c) a; o 3, d) a; o 1. 7. a) $\log_3 10xy$, b) $\log_5 3x^2$, c) $\log 3a^3 b^3$, d) $\log_7 \frac{2v}{x}$, e) $\log_2 \frac{64x^5}{y}$, f) $\log \frac{25x^5}{4}$. 8. 2a. 9. a) 0,6; 1,4; 2,1; 1,5, b) -3; 0,1; -0,9; -0,35, c) -0,4; 1,3; 0,05; -1,2. 10. a) $\log_2 \frac{1}{8}$, b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{12}$, c) $\log_2 15$, d) $\log_3 \frac{5}{6}$. 11. a) $\log 8$, b) $\log \sqrt{5}$, c) $\log 2,5$, d) $\log \frac{\sqrt{1}}{100}$.

str. 94-96: 1. a) $x = -1,75$, b) $x = 2,75$, c) $x = 3\frac{1}{2}$, d) $x = \frac{3}{7}$. 2. a) $x = \frac{8}{9}$, b) $x = -9$, c) $x = 0,5$, d) $x = 2$, e) $x = 0$, f) $x = \frac{1}{6}$. 3. a) $x = \frac{1}{12}$, b) $x = 8\frac{1}{3}$, c) $x = -1$, d) $x = 0,5$, e) $x = \frac{1}{3}$, f) $x = 2$, g) $x = \frac{1}{6}$, h) $x = 2\frac{2}{3}$. 4. a) $x - (x - 4) = 5$ — równanie sprzeczne, $x - (x - 5) = 5$ — równanie tożsamościowe, b) $\frac{3(5x-1)}{5} = 3x$ — równanie sprzeczne, $\frac{3(2x-3)}{2} = 3x - 4,5$ — równanie tożsamościowe, c) $(x-2)(x+2) = x^2$ — równanie sprzeczne, $(x+1)(x-1)+1 = x^2$ — równanie tożsamościowe. 5. a) $x = 1\frac{3}{4}$, b) $x = -6$, c) równanie sprzeczne, d) $x = -\frac{1}{3}$, e) równanie sprzeczne, f) $x = \frac{1}{8}$, g) $x = \frac{1}{2}$, h) $x = -\frac{1}{13}$, i) równanie sprzeczne. 6. a) $3x = \frac{1}{2}(x+7)$, $x = 1,4$, b) $\frac{x}{x+1} = \frac{3}{5}$, $x = 1,5$, c) $x^2 - (x-2)^2 = 40$, $x = 11$, d) $\frac{x+5}{4} = \frac{2x}{6}$, $x = 15$, e) $0,7 \cdot 1,2x = 63$, $x = 75$. 7. $4\frac{2}{3}$ m. 8. 56 pączków. 9. 36 osób. 10. 35 osób. 11. O 100 zł. 12. 14 osób. 13. 44 bzdyle.

str. 98-102: 2. a) 1,25 litra, b) 216 dag. 3. 10,32 zł. 4. Około 10 minut 40 sekund. 5. Około 583,3 kg. 6. 11,375 kg. 7. 60 kg. 8. 30 mg. 9. 68 km/h. 10. Dwóch mnichów. 11. 16 cm. 12. 6 t i 8 t. 13. 18 s. 14. 12 litrów, 240 ml. 15. 500 m. 16. a) 6 kg, b) 10 kg. 17. a) 9,6, b) 4,8. 18. Około 9,3 g. 19. $a = 4$, $b = 20$, $c = 2$, $d = 2$, $e = 8$, $f = 24$.

str. 104-106: 1. $a < \frac{1}{2}$, $b < -2$, $c \geq -7$, $d \leq 4$, $e < -3$, $f > -8$. 2. a) $x < 5$, b) $x > -\frac{1}{3}$, c) $x \leq 2$, d) $x < -2,4$, e) $x \leq 8$, f) $x \leq \frac{9}{13}$, g) $x \leq -19$, h) $x < 11$. 3. a) $x > \frac{4}{5}$, b) $x \leq 3\frac{1}{4}$, c) $x \leq \frac{19}{21}$, d) $x \leq 0,8$, e) $x > 1$, f) $x \geq \frac{1}{2}$. 4. a) $2x + 4 < 2x + 3$ — nierówność nie ma rozwiązań, $2x + 5 \geq 2x + 1$ — rozwiązaniem nierówności jest dowolna liczba, b) $-3(5 - 2x) \geq 6x$ — nierówność nie ma rozwiązań, $4(3 - 5x) > 1 - 20x$ — rozwiązaniem nierówności jest dowolna liczba, c) $\frac{3x-2}{3} \geq x + 5$ — nierówność nie ma rozwiązań, $\frac{4x+5}{2} > 1 + 2x$ — rozwiązaniem nierówności jest dowolna liczba. 6. a) $x \geq 1\frac{1}{4}$, b) $x < 6$, c) $x \leq \frac{1}{3}$, d) $x < 3$, e) $x > -\frac{1}{3}$, f) $x < 0$. 7. $-1\frac{2}{3}$; $-1\frac{1}{9}$; -1 ; 0 ; $0,01$; $1\frac{2}{3}$. 8. $x \leq 2\frac{1}{2}$, a) 0, 1, 2, b) 5 liczb, c) 4. 9. 37 liczb. 10. a) Dla $x < 1,8$, b) dla $x < 0$. 11. -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 . 12. Na co najmniej 6 godzin. 13. 1 piątkę, 3 czwórkę, 11 trójkę lub 2 piątki, 6 czwórek, 12 trójkę. 14. Dla $a > 3,5$. 15. a) Dla $x > 4$, b) dla $x > 1\frac{1}{15}$, c) dla $x > 4\frac{2}{3}$.

str. 110-111: 1. a) $x = 1\frac{2}{3}$ lub $x = -3$, b) $x = -5$ lub $x = 7$, c) $x = -1$ lub $x = 7$, d) $y = \frac{2}{3}$ lub $y = -\frac{2}{3}$, e) $w = -0,5$ lub $w = 1,5$, f) $x = 4$, g) $x = -7$ lub $x = 5$, h) $t = 1,5$ lub $t = 3,5$, i) $x = 0,5$. 3. a) $x = -3$ lub $x = 1$, b) $x = -1$, c) $x = -1$. 4. a) $x = -6$ lub $x = 6$, b) $x = -9,5$ lub $x = 8,5$, c) $x = -\frac{8}{3}$ lub $x = 4$ lub $x = \frac{2}{3}$. 5. a) $x \in (-4,5; 4,5)$, b) $x \in (1; 3)$, c) $y \in (-3; -\frac{1}{3})$. 6. a) $x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$, b) $z \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (1; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. 7. a) $w \in (-\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2})$, b) $p \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (0; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$, d) $t \in (-4,5; 2,5)$, e) $x \in (-1; \frac{2}{3})$, f) nierówność nie ma rozwiązań. 9. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5,5\}$, b) $z \in (-5; 5)$, c) $t \in (-\infty; -11) \cup (13; +\infty)$, d) $y \in (-3\frac{1}{3}; 4)$. 10. a) $|x+9| = 10$, b) $x \in (2; 8)$, c) $|x-5| > 1$; $|x-1| \geq 1$; $|x-10| \leq 2$; $|x-2| < 5$.

str. 116: 1. a) $x = -1$, b) $x = 2$, c) $x = -4$ lub $x = -1$, d) $x \in (-\frac{3}{2}; +\infty)$, e) $x = -\frac{1}{5}$ lub $x = 3$, f) $x = -2\frac{8}{9}$ lub $x = -2$. 2. a) $x = -2$ lub $x = 3$, b) $x \in (-\infty; 0)$, c) $x \in \emptyset$, d) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{3}$, e) $x \in (8; +\infty)$, f) $x \in \emptyset$. 3. a) $x \in (-\infty; 1)$, b) $x \in (-\infty; -5)$, c) $x \in (-10; -\frac{2}{5})$.

d) $x \in (\frac{7}{11}; 9)$, e) $x \in \mathbf{R}$, f) $x \in \emptyset$. 4. a) $x \in \mathbf{R}$, b) $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$,
d) $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$, e) $x \in (-\infty; -1)$, f) $x \in (-1; +\infty)$. 5. Dla $a = 2$.

str. 121-125: 1. $3y - x = 10 - A, C, D; 2x - 3y + 11 = 0 - B, C; C$. 3. a) $x = 5, y = 4$,
b) $x = -6, y = 0$, c) $x = 40, y = 80$. 4. a) $x = 5, y = 4$, b) $x = 1, y = 1$, c) $x = 1, y = 0$.
5. a) $x = 4,5, y = -0,5$, b) $x = 3, y = -4$, c) $m = 2, n = 3$, d) $a = 0,5, b = 0$, e) $x = \frac{2}{3}$,
 $y = \frac{1}{3}$, f) $x = 0,5, y = -2$. 6. a) $x = 2, y = 0$, b) $x = -2, y = -3$, c) $x = 0,5, y = -1$,
d) $x = 4, y = 2$, e) $x = 8, y = -2$, f) $x = 3, y = \frac{2}{3}$. 7. a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 6,5 \end{cases}, x = 2,5, y = 2$,
b) $\begin{cases} x + y = 27 \\ \frac{1}{2}x + 2y = 24 \end{cases}, x = 20, y = 7$. 8. a) $x = 2, y = 0,6$, b) $x = 59, y = -25$, c) $x = 2, y = 3$.
9. a) $-x - 2y = 13$, b) $-6x - 2y = 10$, c) $0,5x - 2y = -1$, d) $4x - 2y = 4$, e) $2x - 2y = \frac{2}{3}$,
f) $-\frac{8}{3}x - 2y = 0$. 10. a) $2x + 4y = -26$, b) $2x + \frac{2}{3}y = -\frac{10}{3}$, c) $2x - 8y = -4$, d) $2x - y = 2$,
e) $2x - 2y = \frac{2}{3}$, f) $2x + 1,5y = 0$. 11. a) $x = 9, y = -7$, b) $x = 3, y = -5$, c) $u = -2, v = 4$,
d) $s = -2, t = 0$, e) $x = 3, y = 4$, f) $x = -1, y = -2$. 12. Pan Zenobiusz. 13. a) $x = 2, y = -1$,
b) $p = 3, r = -3$, c) $x = 2, y = -2$, d) $v_1 = 1\frac{1}{3}, v_2 = -\frac{2}{3}$, e) $x = 0,2, y = 2,3$, f) $x = 12, y = 5$.
14. a) $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$, b) $x = 4, y = 6$, c) $x = 10, y = -7$. 15. Kostka waży 0,2 kg, a kulka —
0,1 kg. 16. a) $\begin{cases} x = y - 5 \\ y + 1 = 3x \end{cases}, x = 3, y = 8$, b) $\begin{cases} a = b + 3 \\ \frac{a+b}{2} = 14,5 \end{cases}, a = 16, b = 13$, c) $\begin{cases} x = y - 8 \\ y = 3x \end{cases}, x = 4$,
 $y = 12$, d) $\begin{cases} u = v + 6 \\ u + v = 4v \end{cases}, u = 9, v = 3$, e) $\begin{cases} u = v + 5 \\ \frac{1}{3}u = \frac{1}{2}v \end{cases}, u = 15, v = 10$, f) $\begin{cases} x + 5 = y - 2 \\ \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}y \end{cases}, x = 7$,
 $y = 14$, g) $\begin{cases} p = \frac{1}{2}r + 3 \\ p + r = 18 \end{cases}, p = 8, r = 10$. 17. 2 i 8,5. 18. $x = 4, y = 8; a = 2, b = 3; m = 3, n = 10$.
19. $a = 3, b = 6; x = 15, y = 5; c = 25, d = 10$. 20. a) $x = 4, y = -2$, b) $x = 2,5, y = 1$, c) $x = 3$,
 $y = -2$, d) $x = -3, y = 9$, e) $x = 0,75, y = -2$, f) $x = 10,5, y = -26$. 21. a) $\begin{cases} 1,2x = y - 10 \\ 0,8y = x + 6 \end{cases}, x = 50$,
 $y = 70$, b) $\begin{cases} 0,5y = x + 1 \\ 0,6x = 0,25y \end{cases}, x = 5, y = 12$, c) $\begin{cases} 0,3x + 0,4y = 79 \\ 0,3(x + y) = 66 \end{cases}, x = 90, y = 130$, d) $\begin{cases} x = 1,1y \\ y - 2 = 0,9x \end{cases}$,
 $x = 220, y = 200$, e) $\begin{cases} m = 0,3n \\ m + n = 65 \end{cases}, m = 15, n = 50$, f) $\begin{cases} 0,06p + 0,08r = 5 \\ 0,06r + 8 + 0,08p = 12,8 \end{cases}, p = 30, r = 40$.
22. Dla $a = 2$ i $b = 1$. 23. a) $x = 2, y = -1, z = 3$, b) $x = \frac{4}{3}, y = \frac{31}{105}, z = -1\frac{24}{35}$, c) $a = 1, b = 2$,
 $c = 3, d = 4$. 24. $x = 2, y = 7, z = 9$.

str. 127-128: 1. ① sprzeczny, ② oznaczony, ③ nieoznaczony. 3. a) Układ nieozna-
czony, b) układ sprzeczny, c) $x = 4, y = 1$, d) $x = 0, y = 2$. 4. Sprzeczne: ①, ④, ⑥,
nieoznaczone: ②, ③, ⑤. 5. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x + y = -5 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} -x + y = -5 \\ x + y = 3 \end{cases}$, lub $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$,
b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ -x + y = -5 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$. 6. a) Dla $m = \frac{4}{3}$, b) dla $m = 1,5$, c) dla $m = -6$. 7. Dla $a = 9$.

str. 130-133: 1. a) 35 zł, b) o 450 g. 2. 2 i 5. 3. $\frac{5}{17}$. 4. a) 85, b) 12, 24, 36 lub
48. 5. 9 zł i 12 zł. 6. 6 rzutów. 7. Nie można. 8. Tak. 9. 150 osób. 10. 45
kobiet i 36 mężczyzn. 11. 24 pytania; nie można. 12. 24 cukierki. 13. Dziadek — 400
znaczków, Jacek — 100 znaczków. 14. W 1854 roku; profesor miał wtedy 76 lat. 15. 250 zł.

16. Lustro — 2400 zł, stół — 1650 zł. 17. a) 5 dag płatków owsianych i 10 dag płatków kukurydzianych, b) 21 dag płatków owsianych i 7 dag płatków kukurydzianych. 18. 52%. 19. 24 i 9. 20. $AB = 14$, $DC = 8$. 21. $AD = 6,5$, $DB = 11,5$. 22. 12, 15, 15, 18, 18. 23. 45.

str. 134: 1. a) $x = -\frac{13}{6}$, b) $x = \frac{13}{8}$, c) $x = -\frac{101}{8}$. 2. a) $x = \frac{4}{7}$ lub $x = \frac{6}{7}$, b) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = 4$, c) $x = -4$ lub $x = 3$, d) $x = 0$ lub $x = \frac{2}{3}$. 3. a) 14 kg, b) 60 dni. 4. a) $x \in (-4, 5; +\infty)$, b) $x \in (-8; 31)$, c) $x \in (-6\frac{2}{3}; +\infty)$. 5. a) $x \in (-6; -1)$, b) $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$, d) $x \in (5, 5; +\infty)$. 6. O 35 zł. 7. a) $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{1}{5}$, b) $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$. 8. a) $x = 22$, $y = 10$, b) $a = 12$, $b = 6$. 9. 96. 10. $x = 270$, $y = 240$. 11. A — sprzeczny, B — oznaczony, C i D — nieoznaczone.

str. 139-142: 2. a) Drugie, b) pierwsze i trzecie, c) drugie i trzecie. 4. a) Dla f : $2\frac{1}{2}$, $-3\frac{1}{2}$, dla g : 2, -2, b) $f(x) \in \{-3\frac{1}{2}, -3, 0, 2, 2\frac{1}{2}\}$, $g(x) \in \{-2, 2\}$, c) f : dla $x \in \{-5, 1\}$; g : dla $x \in \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2\}$, d) f : jednemu argumentowi, g : czterem argumentom. 5. a) $x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $f(x) \in \{-2, -1, 1, 2, 3, 5\}$, b) dla $x = 2$, c) dla $x \in \{-4, -1, 3\}$, d) dla $x = -3$, $x = -2$ i $x = 4$ oraz dla $x = -4$ i $x = -1$. 9. a) $x = -2$, b) $x = 0$ i $x = 3$, c) $x = -1$ i $x = 2$, d) $x = -6$, $x = -4$, $x = 2$, $x = 3$, e) $x = -5$ i $x = 3$, f) $x = -2$, $x = 3$, $x = 5$. 11. a) 0, 7, 14, 21, 28, ... (wielokrotności liczby 7), $f(n) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, b) liczby parzyste, $f(n) \in \{0, 5\}$, c) $\{0; 0, 5\}$; $f(x) \in \{0, 1, 2\}$, d) $\{0; 1\}$; $f(x) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, e) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, $f(n) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 12. a) Dla 120 i 121, b) 0 i 1, c) dla pięćdziesięciu argumentów. 13. a) 1, 18, b) dla $x \in \{13, 22, 31, 40\}$, c) osiemnaście, d) 9 i 10; 9 razy.

str. 145-149: 2. Funkcja z podpunktu e). 6. a) A, B, C, F, b) B, c) C, E, d) E. 7. D. 10. a) Dziedzina f i g : $x \in (-4; 4)$; $f(x) \in \{-1; 3\}$, $g(x) \in (-2; 4)$; f — jedno miejsce zerowe, g — dwa miejsca zerowe; $f(x) > 0$ dla $x \in (-3; 4)$, $g(x) > 0$ dla $x \in (-4; -1) \cup (1; 4)$; $f(1) > g(1)$, $g(-3) > f(-3)$; dla $x = -2$ oraz $x = 2$, $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-2; 2)$, b) dziedzina f i g : $x \in (-4; 4)$; $f(x) \in \{1; 4\}$, $g(x) \in \{-1; 4\}$; f — brak miejsc zerowych, g — jedno miejsce zerowe; $f(x) > 0$ dla $x \in (-4; 4)$, $g(x) > 0$ dla $x \in (-3; 4)$; $f(1) < g(1)$, $g(-3) < f(-3)$; dla $x = -1$ oraz dla $x = 3$, $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-4; -1) \cup (3; 4)$, c) dziedzina f i g : $x \in (-4; 4)$; $f(x) \in \{-3; 3\}$, $g(x) \in \{-3; 4, 5\}$; f — dwa miejsca zerowe, g — jedno miejsce zerowe; $f(x) > 0$ dla $x \in (-3; -1) \cup (1; 4)$, $g(x) > 0$ dla $x \in (-4; -1) \cup (1; 4)$; $f(1) < g(1)$, $g(-3) > f(-3)$; dla $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$ oraz $x = 4$, $f(x) > g(x)$ dla $x \in (-2; -1) \cup (0; 1) \cup (2; 4)$. 12. A — 3, B — 1, C — 5, D — 2, E — 4.

str. 153-157: 1. a) $f(0) = 0$, $f(2) = 8$, b) $f(0) = -10$, $f(2) = \sqrt{2} - 10$, c) $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{2}$. 3. $A = (-2, 1)$, $B = (0, \sqrt{3})$, $C = (-3, -3\frac{1}{8})$, $D = (1, -1\frac{1}{8})$, $E = (-1, -2\frac{1}{2})$, $F = (3, 1\frac{1}{2})$. 4. a) A, b) A, C, c) A, B, C. 5. $f - C$; $g - A$; $h - B$. 6. 8 m; o $3(\sqrt{5} - 1)$ m = 3,7 m. 7. a) $a = 1\frac{1}{2}$, b) $a = 10$, c) $a = 5$, d) $a = 12\frac{1}{2}$. 8. a) -3, b) 0,5, c) 1. 10. a) $y = x + 1$, $y = -x^4 + 1$, b) $y = x^4$, $y = 2x - 1$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$, c) $y = x^4$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$. 11. a) $f(a-1) = \frac{3a-3}{a^2-2a+3}$, $f(2a) = \frac{3a}{2a^2+1}$, $f(a^2) = \frac{3a^2}{a^4+2}$, b) $g(3x) = 9x(3x-1)(2x+1)$, $g(x+1) = x(x+1)(2x+5)$, $g(x-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}x(2x-3)(2x-5)$. 15. a) $\mathbb{R}$, b) $(0; +\infty)$, c) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, d) $(-\infty; 3)$, e) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, f) $\mathbb{R}$. 16. a) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, b) $\{-2; 5\}$, c) $(1; +\infty) \cup \{0\}$. 17. a) $y = \sqrt{1-x^2}$, ①, b) $y = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$, ③, c) $y = x + \sqrt{1-x^2} + 1$, ②, d) $y = 1$, ④. 18. a) $y = \frac{1}{x}$, ①.

b) $y = \frac{2x^2+2}{x}$, (A), c) $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$, (B), d) $y = \frac{2\sqrt{x^4+1}}{x}$, (C). 19. a) $f(-2) = 5$, $f(0) = -1$, $f(10) = 99$, b) $f(-2) = 2,5$, $f(0) = 21$, $f(10) = 121$, c) $f(-2) = -8$, $f(0) = 1$, $f(10) = 300$, d) $f(-2) = 2$, $f(0) = -2$, $f(10) = -9$. 20. Pierwszy.

str. 161-164: 1. f_2 rosnąca, f_3 malejąca; g_1 malejąca, g_2 rosnąca; h_1 stała, h_3 malejąca. 2. Dwie pierwsze. 3. a) $D = R$, b) $D = R$. 4. a) Rosnąca w $(-\infty; 1)$, stała w $(1; 3)$, malejąca w $(3; +\infty)$, b) rosnąca w $(-\infty; 0)$, malejąca w $(0; 2)$, rosnąca w $(2; +\infty)$, c) malejąca w $(-\infty; -1)$, rosnąca w $(-1; 0)$, malejąca w $(0; +\infty)$. 5. a) g może być rosnąca, b) f może być rosnąca, c) g może być stała, d) f może być malejąca, e) f i g mogą być malejące, f) f może być rosnąca. 7. a) (B) — Kamfort, (C) — Oksbridż, b) w pierwszej fazie prędkość powoli rosła, w połowie dystansu drużyna szybko nabierała prędkości, a potem utrzymywała prawie stałą prędkość.

str. 168-170: 2. Rosnące: f , r , malejące: g , p , s , stała: h ; f : $(0, 0)$, g : $(0, 3)$, h : $(0, -37)$, p : $(0, 0)$, r : $(0, -\frac{7}{2})$, s : $(0, \frac{3}{2})$. 3. a) Malejąca, $(0, -\frac{1}{2})$, b) stała, $(0, \frac{1}{2})$, c) rosnąca, $(0, 0)$. 4. (A) — f_1 , (B) — f_8 , (C) — f_2 , (D) — f_6 , (E) — f_4 , (F) — f_5 , (G) — f_3 , (H) — f_7 . 5. a) (1) — c , (2) — b , (3) — d , (4) — a , b) $y = 3x + 2$, $y = -2x + 2$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = \frac{1}{4}x + 2$. 6. a) I, II, IV, b) II, III, IV, c) I, III, IV, d) I, II, III. 7. a) I, III, IV, b) II, III, IV, c) I, II, III, d) III, IV.

str. 172-177: 1. a) $x = 7$; $(0, 7)$, $(7, 0)$, b) $x = 2,5$; $(0, -2)$, $(2,5, 0)$, c) $x = \frac{1}{2}$; $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0)$, d) $x = -\frac{1}{49}$; $(0, \frac{1}{7})$, $(-\frac{1}{49}, 0)$. 2. a) Dla $x = 16,5$, b) dla $x = 4$, c) $x = -1,8$. 3. a) Dla $x > \frac{2}{3}$, b) dla $x = 3 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$, c) dla $x > 25$, d) dla $x > 21,4$, e) dla $x < -20$. 4. a) $(-\frac{6}{7}, -\frac{4}{7})$, b) dla $x = \frac{1}{2}$, c) dla $x > 2\frac{2}{3}$. 5. a) $y = -3x - 1$, b) $y = -x$, c) $y = 6$. 6. $y = -3x + 15$ lub $y = -3x - 15$. 7. 39. 8. a) $y = x - 1$, b) $y = -4x - 3$, c) $y = 0,1x + 7$. 9. $y = -3,5x - 10,5$. 10. a) $f(x) = \frac{2}{3}x$, $g(x) = \frac{1}{3}x - 3$, b) $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$, $g(x) = -\frac{1}{2}x - 3$, c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $g(x) = \frac{2}{3}x - 2$. 11. a) $y = 3,5x + 7$, b) $y = -20x - 50$. 12. $f(50) = 900$, $f(200) = 1950$; $(0, 550)$. 13. $p = -3\frac{1}{10}$, $q = \frac{25}{6}$, $r = \frac{1}{2}$. 14. $y = -5x - 19$. 15. Nie są. 16. a) Dla $p > 4$, b) dla $k = \frac{3}{7}$, c) dla $m \in \mathbb{R}$. 17. a) $P = 3,2$, b) $P = 12\frac{1}{24}$, c) $P = 20$. 18. Dla $-273,15^\circ\text{C}$. 19. a) Pik: $y = \frac{1}{2}x + 10$, Caro: $y = 0,4x + 17$, b) pomarańczowy — Pik, niebieski — Caro; 50 km — Pik, 100 km — Caro, 150 km — Caro, c) przy 70 km. 20. a) $x \in [4, 7]$; dla $x \in (4; 7)$, b) brak; dla $x \in \mathbb{R}$, c) $x \in \{-4, 4\frac{1}{2}\}$; dla $x \in (-\infty; -4) \cup (4\frac{1}{2}; +\infty)$, d) $x \in \{0, 4\}$; dla $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. 22. a) 30 cm, b) 90 cm, c) o 2 cm, d) $y = \begin{cases} 2t + 30 & \text{dla } t \in (0; 30) \\ 90 & \text{dla } t > 30 \end{cases}$.

str. 180-183: 1. a) $y = 10x$, b) $y = 1,5x$, c) $y = 10x$, d) $y = 5x$. 2. a) $y = 30x$, b) $y = 3x$, c) $y = 0,4x$, d) $y = 30x$. 3. a) $y = x^3$, nie, b) $y = 2\pi x$, tak, współczynnik: 2π , c) $y = \pi x^2$, nie, d) $y = x\sqrt{2}$, tak, współczynnik: $\sqrt{2}$. 4. $s = 0,2t$, gdzie s — przebyta droga (cm), t — czas (s). 5. $y = 3x$, $a = 3$ — cena 1 kg jabłek (w zł); $y = \frac{1}{20}x$, $a = \frac{1}{20}$ — zużycie paliwa na 1 km (w litrach); $y = 0,8x$, $a = 0,8$ — masa azotu o objętości $0,1 \text{ dm}^3$ (w kg). 6. (A) — klus, (B) — stęp, (C) — cwał, (D) — galop. 7. a) 45 zł, b) 90 koron, c) $y = 0,45x$, d) kurs korony szwedzkiej. 8. a) $xy = 45$, $y = \frac{45}{x}$, b) $xy = 2$, $y = \frac{2}{x}$, c) $xy = 200$, $y = \frac{200}{x}$, d) $xy = 24$, $y = \frac{24}{x}$, e) $xy = 80$, $y = \frac{80}{x}$. 9. a) $f(3) = 2$, $f(6) = 1$, $P = 3$, b) $y = \frac{6}{x}$. 10. a) 1 600 000 zł, b) $y = \frac{1600000}{x}$. 11. a) 30 km, $t = \frac{30}{v}$, b) 20 km, $t = \frac{20}{v}$, c) 10 km, $t = \frac{10}{v}$.

str. 184: 1. a) $D = \{-6; 6\}$, zbiór wartości $= \{-1; 3\} \cup \{-2\}$, b) $x = -2, x = 3, x = 5$, c) wartości z przedziału $(0; 1)$, d) dla $x \in \{-6; -2\} \cup (3; 5)$, e) $-2; 3$, f) funkcja jest stała w $\{-6; -2\}$, rosnąca w $(-2; 2)$ oraz w $(4; 6)$, malejąca w $(2; 4)$. 2. a) $A = (-1, -2\frac{2}{3})$, $B = (1, 2\frac{2}{3})$, b) $x \in \{-3, 0, 3\}$. 3. $y = -\sqrt{3}x - 2$; $(0, -2)$, $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$. 4. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$, $y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$. 6. a) $a = 16, b = 4$, b) $y = \frac{16}{x}$.

str. 188-189: 1. a) $x = 3\sqrt{2}$ lub $x = -3\sqrt{2}$, b) $x = 3$ lub $x = -3$, c) $x = 2$ lub $x = -2$, d) $x = \frac{2\sqrt{14}}{3}$ lub $x = -\frac{2\sqrt{14}}{3}$, e) $x = 0$, f) $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$. 2. Około 4 m/s. 3. a) $x = 0$ lub $x = 2$, b) $x = 0$ lub $x = -2\frac{2}{3}$, c) $x = 0$ lub $x = -1,25$, d) $x = 0$ lub $x = -7$, e) $x = 0$ lub $x = 0,125$, f) $x = 0$ lub $x = 15$, g) $x = 0$ lub $x = 3,5$, h) $x = 0$ lub $x = 8$, i) $x = 0$ lub $x = 1\frac{2}{3}$. 4. a) Brak rozwiązania, b) $x = 3$ lub $x = -3$, c) $x = 0$, d) brak rozwiązania, e) $x = 0$ lub $x = 1\frac{6}{11}$, f) $x = 0$ lub $x = 2\frac{1}{3}$. 6. 4×2 .

str. 193-195: 1. a) $x = 8$ lub $x = -2$, b) $x = \frac{\sqrt{2}-2}{3}$ lub $x = \frac{-\sqrt{2}-2}{3}$, c) $x = 1,2$, d) brak rozwiązania, e) brak rozwiązania, f) $x = \frac{20\sqrt{5}-10}{7}$ lub $x = \frac{-20\sqrt{5}-10}{7}$. 2. a) $x = 7$ lub $x = -2$, b) $x = 3$ lub $x = -5$, c) brak rozwiązań, d) $x = 0,5$ lub $x = -\frac{1}{3}$, e) $x = 2$, f) $x = 1 + \sqrt{2}$ lub $x = 1 - \sqrt{2}$. 3. a) $x = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$ lub $x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$, b) brak rozwiązań, c) $x = 2$ lub $x = 5$, d) brak rozwiązań, e) $x = 1\frac{2}{3}$ lub $x = -3$, f) $x = \frac{2}{3}$, g) $x = 5 - 5\sqrt{2}$ lub $x = 5 + 5\sqrt{2}$, h) $x = 2$ lub $x = 10$, i) $x = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$ lub $x = \frac{2+\sqrt{2}}{6}$. 4. a) 0, b) 2, c) 1, d) 2, e) 0, f) 2, g) 2, h) 1, i) 2. 5. a) $x = -\frac{\sqrt{13}}{2}$ lub $x = \frac{\sqrt{13}}{2}$, b) $x = 0$ lub $x = 2,5$, c) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{3}$, d) $x = 1$, e) $x = \frac{1}{3}$, f) $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ lub $x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$. 6. a) $x = 3 - \sqrt{5}$ lub $x = 3 + \sqrt{5}$, b) $x = 3$ lub $x = -0,5$, c) brak rozwiązań, d) $x = -3$ lub $x = -3\frac{2}{3}$, e) $x = 1,25$ lub $x = -1,25$, f) brak rozwiązań. 7. a) $x = 0,5$ lub $x = 1$, założenia: $x \neq 0, x \neq \frac{1}{3}$, b) $x = -0,5$ lub $x = 2$, założenia: $x \neq -1, x \neq 0$, c) $x = -3 - 3\sqrt{2}$ lub $x = -3 + 3\sqrt{2}$, założenia: $x \neq 0, x \neq 3$, d) $x = 1 - 0,5\sqrt{2}$ lub $x = 1 + 0,5\sqrt{2}$, założenia: $x \neq -4, x \neq \frac{2}{3}$. 8. a) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$, założenie: $x \neq 0$, b) $x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$ lub $x = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$, założenie: $x \neq 0$, c) $x = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ lub $x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, założenie: $x \neq 0$, d) $x = -5$ lub $x = 3$, założenie: $x \neq 0$. 9. a) $\begin{cases} x = 11 \\ y = -3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -3 \\ y = 11 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = -0,4 - 0,2\sqrt{19} \\ y = 0,2 - 0,4\sqrt{19} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -0,4 + 0,2\sqrt{19} \\ y = 0,2 + 0,4\sqrt{19} \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = -0,25 - 0,25\sqrt{33} \\ y = 3,125 + 0,125\sqrt{33} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -0,25 + 0,25\sqrt{33} \\ y = 3,125 - 0,125\sqrt{33} \end{cases}$. 11. 50 km/h. 12. Tak. 13. $13 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$. 14. a) Po 1 s, b) po $\frac{1+\sqrt{161}}{10} \text{ s} \approx 1,4 \text{ s}$. 15. $\varphi \approx 1,62$.

str. 198-199: 1. a) Tak; $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{2}$, b) tak; $x_1 + x_2 = 97$, $x_1 \cdot x_2 = 1,2$, c) tak; $x_1 + x_2 = \frac{5\sqrt{17}}{2}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{8}$, d) nie, e) tak; $x_1 + x_2 = -0,024\sqrt{5}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{13\sqrt{5}}{3}$, f) tak; $x_1 + x_2 = -95\frac{5}{17}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{10\sqrt{3}}{17}$. 2. Dla $b = -313, c = 312$; dla $b = 69, c = -790$. 4. a) ①, ②, ③, b) żadne, c) ①, ③, ④, d) ①, ③, ④, e) ①, ②, ③, f) ①. 5. a) Jedno, b) nie ma, c) dwa, d) jedno. 6. a) Jedna parzysta, druga nieparzysta, b) jedna parzysta, druga nieparzysta, c) obie nieparzyste. 7. $-\frac{113}{203}$. 8. a) $2\sqrt{2}; 1$, b) $-7\frac{1}{2}, 3, -1\frac{1}{2}$. 9. 90 400. 10. b) $\frac{43}{441}$. 11. $-11\sqrt{17}$ lub $11\sqrt{17}$.

str. 200: 1. a) $x_1 = 0, x_2 = \frac{8}{3}$, b) $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{7}$, c) $x_1 = 0, x_2 = 2$, d) $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -\frac{5}{2}$, e) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{5}{2}$, f) $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$, g) $x = 2$. 2. a) $x_1 = 3 - \sqrt{10}, x_2 = 3 + \sqrt{10}$,

b) $x_1 = -3$, $x_2 = -0,5$, c) brak rozwiązań, d) $x = 0$, e) $x_1 = 0$, $x_2 = 7$. 3. a) $x_1 = -\sqrt{15}$, $x_2 = \sqrt{15}$, b) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{33}}{8}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{33}}{8}$, c) brak rozwiązań, d) $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, e) $x_1 = -1$, $x_2 = 0,5$, f) $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. 4. a) $\begin{cases} x = \frac{9+\sqrt{141}}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{141}}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = \frac{9-\sqrt{141}}{2} \\ y = \frac{9+\sqrt{141}}{2} \end{cases}$, b) $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$. 5. $11 - \sqrt{67}$ lub $11 + \sqrt{67}$. 6. 18 cm. 7. 12, 14 i 16. 8. a) Nie, b) tak. 9. a) Suma: -1735, iloczyn: -2150, b) suma: -442, iloczyn: -71, c) suma: -1309, iloczyn: -1664, d) brak rozwiązań. 10. a) -482, b) 7, c) -25, d) $\frac{25}{2}$. 11. a) 107, b) 380, c) 632, d) 406.

str. 205-209: 1. a) $\overline{DO}$, $\overline{OA}$, $\overline{AO}$, $\overline{BC}$, $\overline{CB}$, $\overline{EF}$, $\overline{FE}$, $\overline{AD}$, $\overline{DA}$, b) $\overline{BF}$, $\overline{AC}$, $\overline{CA}$, $\overline{BD}$, $\overline{DB}$, $\overline{CE}$, $\overline{EC}$, $\overline{DF}$, $\overline{FD}$, $\overline{AE}$, $\overline{EA}$, c) $\overline{AB}$, $\overline{ED}$, $\overline{OC}$. 2. a) $F, H, \triangle LPO$, b) np. $\overline{EG}$, $\overline{NK}$, $\overline{KB}$, c) C , $\triangle EGO$, $\triangle MNK$. 3. 10 lub 12. 4. a) $\frac{3}{4}$ długości boku rombu, b) $\frac{1}{2}$ długości przekątnej, do której wektor jest równoległy. 9. a) Np. $\overline{OH}$, b) np. $\overline{DF}$, c) $\vec{0}$, d) np. $\overline{OA}$, e) np. $\overline{DO}$, f) np. $\overline{AO}$. 12. $\vec{b} = -2\vec{a}$, $\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{a}$, $\vec{d} = 0,4\vec{a}$, $\vec{e} = -\sqrt{3}\vec{a}$, $\vec{f} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}$, $\vec{g} = \sqrt{2}\vec{a}$, $\vec{h} = 1,8\vec{a}$. 13. $\overline{KC} = 2(\vec{v} - \vec{v})$, $\overline{GJ} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{u})$, $\overline{HL} = \vec{v} - \vec{u}$, $\overline{MF} = -2\vec{u} - \vec{v}$, $\overline{BH} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overline{IB} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$. 16. a) $\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{d})$, b) $\vec{d} = 3\vec{b} - \vec{a}$.

str. 212-214: 1. a) $\vec{a} = [3, 2]$, $\vec{b} = [-1, -4]$, $\vec{c} = [0, -3]$, $\vec{d} = [-1, 0]$, $\vec{e} = [5, 3]$, $\vec{f} = [3, 0]$, $\vec{u} = [-2, 3]$, $\vec{v} = [7, 4]$, $\vec{w} = [3, 3]$, $\vec{p} = [-6, -1]$, $\vec{q} = [4, -7]$, $\vec{r} = [0, 4]$, b) $-\vec{c} = [0, 3]$, $-\vec{f} = [-3, 0]$, $-\vec{p} = [6, 1]$, $-\vec{q} = [-4, 7]$. 3. b) $K = (-75, -3)$, c) $M = (20\sqrt{2}, -80\sqrt{2})$. 4. a) (10, 4), b) (3, 5), c) (-8, -1). 5. a) $(0, -16\sqrt{2})$, b) $(10 + \sqrt{5}, -2 - 3\sqrt{5})$, c) $(0, -a)$, d) $(4, 4a - 2)$. 6. $[a, -3]$ lub $[a, -7]$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. 7. a) $\overline{AB} = [3\frac{1}{2}, -2]$, $\overline{BA} = [-3\frac{1}{2}, 2]$, b) $\overline{AB} = [3, 6\sqrt{7} - 3]$, $\overline{BA} = [-3, -6\sqrt{7} + 3]$, c) $\overline{AB} = [a, -2b]$, $\overline{BA} = [-a, 2b]$, d) $\overline{AB} = [3, -4a + 2]$, $\overline{BA} = [-3, 4a - 2]$. 8. a) (4, -5), b) $(13, -7\frac{1}{2})$, c) (10, -3), d) (-6, 3). 9. $[3, -4]$; $(-15, 138)$; $(-110, 136)$; $(-1, a)$; $[x, y]$; (0, 0). 10. (11, -6), (18, 2). 11. [5, 1]. 12. a) $|\overline{AB}| = 2\sqrt{29}$, $|\overline{AC}| = \sqrt{74}$, $|\overline{BC}| = \sqrt{346}$, b) $|\vec{v}| = 10$, $|\vec{u}| = \sqrt{101}$, $|\vec{r}| = \sqrt{29 - 2\sqrt{6}}$, $|\vec{w}| = \sqrt{2}$. 13. $(2\frac{2}{5}, 4\frac{4}{5})$ lub $(-2, -4)$.

str. 216-218: 1. a) $[-1, 3]$, b) $[-5, 5]$, c) $[4, 3]$, d) $[-6, 3]$, e) $[-4, 2]$, f) $[1, -3]$, g) $[11, 12]$, h) $[37, -26]$. 2. a) $[7, -1]$, b) $[8, 1]$, c) $[4\frac{1}{2}, -7]$, d) $[14, -12]$. 3. a) $[6\frac{3}{4}, 6]$, b) $[9, -20]$. 4. a) $[4, 8]$, b) $[7, -1\frac{1}{2}]$, c) $[13, 3\frac{1}{2}]$, d) $[2\frac{1}{2}, 0]$. 5. a) $(-9, -10)$, b) $(18\frac{1}{2}, 30)$. 6. a) $n = -3$, $m = 2$, b) $n \in \mathbb{R}$ i $m = 2n + 4$. 7. $\vec{f}$, $\vec{e}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{a}$. 9. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$. 10. a) Dla $p = -2\frac{1}{2}$, b) dla $p = -\frac{27\sqrt{2}}{4}$. 11. a) $[\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}]$ lub $[-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}]$, b) $[-\frac{5\sqrt{3}}{2}, -3\frac{1}{2}]$ lub $[\frac{5\sqrt{3}}{2}, 3\frac{1}{2}]$. 12. a) Są równoległe, b) nie są równoległe. 13. Dla $p = -\frac{3}{4}$, $q \in \mathbb{R}$. 14. a) Jest trapezem, ale nie jest równoległobokiem. 16. $A = (-6, 2\frac{1}{2})$, $B = (4\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2})$, $C = (-2, 8\frac{1}{2})$, $D = (-5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2})$. 17. 11: 8.

str. 222-226: 3. a) $y = f(x) + 7$, b) $y = f(x) - 7$, c) $y = f(x - 7)$, d) $y = f(x + 7)$. 4. a) $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = x^2 - 3$, b) $g(x) = x^3 + 3$, $h(x) = x^3 - 2$, c) $g(x) = x^{\frac{3}{2}} + 2$, $h(x) = x^{\frac{3}{2}} - 4$, d) $g(x) = (x + 2)^2$, $h(x) = (x - 3)^2$, e) $g(x) = (x + 3)^3$, $h(x) = (x - 2)^3$, f) $g(x) = 2(x + 4)^{\frac{1}{2}}$, $h(x) = 2(x - 2)^{\frac{1}{2}}$. 5. a) $x = 2$, $x = 12$, b) nie. 6. $\vec{u} = [0, -9]$. 7. $\vec{u} = [-3, 0]$. 9. a) $y = 3(x - 5)^3 - 2$, b) $y = 3(x + 4)^3 + 7$, c) $y = 3(x - 3)^3 - 5$. 10. $m = \textcircled{1}$; $l = \textcircled{2}$; $h = \textcircled{3}$; $g = \textcircled{4}$. 11. a) $y = 2(x - 1)^2 + 6$, b) $y = 5\sqrt{x + 5} + 2$, c) $y = -|x - 2| - 1$, d) $y = 3(x + 1)^2 + 4$.

12. a) $y = \frac{x-2}{2x-3} - 5$, b) $y = (x+6)(x-1) + 1$, c) $y = 5(x+1)^2\sqrt{x+2} - 4$, d) $y = \sqrt{3x+15} - \frac{4}{x} + 7$.
 13. a) $[-3, 0]$, b) $[11, 0]$, c) $[0, -2]$, d) $[0, 17]$, e) $[1, 7]$, f) $[-2, -3]$, g) $[1, 5]$, h) $[1, -8]$.
 14. a) O wektor $[-5, 0]$, b) o wektor $[0, -9]$, c) o wektor $[-6, -5]$, d) o wektor $[1, -1]$.
 15. a) 30, b) $(-68; -66)$, c) $x = -96$, d) dla $x \in (43; 45)$. 16. a) -5, b) 25, c) 15, d) 20, e) 20, f) 11. 17. a) $x \in (2; 12)$, $y \in (-1; 4)$, b) $x \in (-3; 7)$, $y \in (-8; -3)$, c) $x \in (-6; 4)$, $y \in (3; 8)$, d) $x \in (-2; 8)$, $y \in (-11; -6)$. 18. a) $(3; 10)$, b) $(-12; -5)$, c) $(-9; -2)$. 19. a) $(-\infty; -3)$, $(-2; 0)$, b) $(-\infty; 2)$, $(3; 5)$, c) $(-\infty; 9)$, $(10; 12)$.

str. 230-233: 3. g — malejąca; h — malejąca; f — rosnąca. 4. a) $x = -7$, b) $x = 7$, c) $x = -12$. 6. a) $g(x) = -x^2$, $h(x) = -(x-3)^2$, b) $g(x) = \sqrt{-x}$, $h(x) = \sqrt{-x} - 4$, c) $g(x) = -x^3$, $h(x) = -(x-1)^3 + 2$. 7. a) $g(x) = -5x + 2$, b) $g(x) = -\frac{1}{x} + 1$. 8. a) $g(x) = -2x^2 + \frac{1}{x} - 4$, b) $g(x) = -3x\sqrt{-x-1} - 4$, c) $g(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{x+14}$. 11. a) $(2; +\infty)$, b) $(2; +\infty)$, c) $(-\infty; -2)$, d) $(5; +\infty)$, e) $(-2; +\infty)$, f) $(-\infty; -2)$. 12. a) $(-3; 3)$, b) $y = 1$ dla $x = -3$, c) dla $x \in \{-5, 10\}$. 14. a) Tak, b) tak, c) tak. 16. a) $x \in [-8, -3]$, b) $(0, 5)$, c) $y = -8$. 19. a) $g(x) = |x^2 - 2|$, b) $g(x) = |(x+3)^3|$, c) $g(x) = |\sqrt{x} - 1|$. 20. $f - \textcircled{C}$; $g - \textcircled{F}$; $h - \textcircled{B}$; $k - \textcircled{A}$; $l - \textcircled{E}$; $m - \textcircled{D}$.

str. 234: 2. $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$. 3. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$; $\vec{b}$. 4. $B = (1, 7)$, $C = (-7, 10)$, $D = (-12, 6)$. 5. 4 i $4\sqrt{13}$. 6. a) $[2, -8]$, b) $[-3, -6]$, c) $[0, 0]$, d) $[8, 4]$. 7. Dla $a = 1$. 8. a) $[0, -3]$, b) $[5, 0]$, c) $[-2, 6]$, d) $[5, -4]$. 9. a) $y = \frac{5}{x+4} + 3$, b) $y = -2\sqrt{x-1} - 5$, c) $y = -4(x+3)^3$.

str. 239-241: 1. 1 — $\textcircled{B}$, 2 — $\textcircled{E}$, 3 — $\textcircled{C}$, 4 — $\textcircled{D}$, 5 — $\textcircled{A}$, 6 — $\textcircled{F}$. 2. $\textcircled{A}$ $y = \frac{5}{4}(x+13)^2$, $\textcircled{B}$ $y = \frac{5}{4}(x+8)^2 - 3$, $\textcircled{C}$ $y = \frac{5}{4}x^2 + 2$, $\textcircled{D}$ $y = \frac{3}{4}(x-6)^2 - 2$, $\textcircled{E}$ $y = \frac{3}{4}(x-12)^2 + 1$. 3. a) $y = 3(x-2)^2 + 3$, b) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$, c) $y = -0,1x^2 - 4$, d) $y = \frac{3}{4}(x+3)^2 - 7$, e) $y = -(x-2)^2 - 5$, f) $y = \frac{1}{4}(x+6)^2 - 10$. 4. a) $y = (x-10)^2$, b) $y = (x+15)^2$, c) $y = (x+3)^2 + 7$, d) $y = (x+5)^2 - 8$. 5. $\textcircled{A}$ $y = 2(x+4)^2 + 4$, $\textcircled{B}$ $y = -2(x+4)^2 + 6$, $\textcircled{C}$ $y = 2(x-4)^2 + 4$, $\textcircled{D}$ $y = -2(x-4)^2 + 6$, $\textcircled{E}$ $y = x^2 - 5$, $\textcircled{F}$ $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$. 8. a) $y = 3(x+3)^2 + 13$, b) $y = 3(x+8)^2 + 8$. 9. a) $(0, -2)$, b) $(-3, 0)$, c) $(1, \sqrt{5})$, d) $(-1, \frac{3}{4})$, e) $(-2, 1)$, f) $(1, \frac{5}{6})$. 10. a) $(-\infty; 25)$, 2 miejsca zerowe, b) $(\frac{3}{2}; +\infty)$, brak miejsc zerowych, c) $(0; +\infty)$, 1 miejsce zerowe, d) $(-20; +\infty)$, 2 miejsca zerowe, e) $(-\infty; 3)$, 2 miejsca zerowe, f) $(-\infty; -12)$, brak miejsc zerowych. 11. a) Malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$, rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$, b) rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, malejąca w przedziale $(0; +\infty)$, c) malejąca w przedziale $(-\infty; 48)$, rosnąca w przedziale $(48; +\infty)$, d) rosnąca w przedziale $(-\infty; -1,2)$, malejąca w przedziale $(-1,2; +\infty)$, e) malejąca w przedziale $(-\infty; -\frac{2}{3})$, rosnąca w przedziale $(-\frac{2}{3}; +\infty)$, f) rosnąca w przedziale $(-\infty; 1,3)$, malejąca w przedziale $(1,3; +\infty)$. 12. a) $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 1$, b) $y = -\frac{7}{36}x^2 + 6$, c) $y = -\frac{7}{81}(x+8)^2 + 7$, d) $y = -\frac{1}{25}(x+1)^2 + 1$, e) $y = \frac{1}{8}(x-3)^2 + 2$, f) $y = 8(x-1)^2$. 13. a) $y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 3$, b) $y = 2(x-2)^2 - 1$, c) $y = \frac{1}{8}(x+1)^2 - 1$.

str. 245-247: 1. a) Ramiona w górę, $(0, -12)$, b) ramiona w dół, $(0, 0)$, c) ramiona w dół, $(0, 1)$. 2. $\textcircled{1} - \textcircled{D}$, $\textcircled{2} - \textcircled{C}$, $\textcircled{3} - \textcircled{A}$, $\textcircled{4} - \textcircled{B}$. 3. $\textcircled{1} - \textcircled{B}$, $\textcircled{2} - \textcircled{D}$, $\textcircled{3} - \textcircled{A}$, $\textcircled{4} - \textcircled{C}$. 4. a) $y = 2(x + \frac{5}{4})^2 - 8\frac{1}{8}$, b) $y = -3(x-1)^2 + 3$, c) $y = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 3$, d) $y = -(x-0,2)^2 - 0,76$, e) $y = \sqrt{2}(x-2)^2 - \sqrt{2}$, f) $y = -\sqrt{3}(x + \frac{\sqrt{3}}{3})^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 7. a) Jedno miejsce zerowe, b) dwa miejsca

zerowe, c) brak miejsc zerowych. 8. a) Pierwsza: $x_1 = 5, x_2 = 2$, b) trzecia: $x_1 = -1, x_2 = -3$, c) druga: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{6}$. 9. a) $(0, -3), (-\sqrt{3}, 0), (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, b) $(0, 2), (\sqrt{2}, 0), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, c) $(0, -\sqrt{6}), (\frac{\sqrt{6}}{2}, 0), (\frac{\sqrt{6}}{3}, 0)$. 10. a) Dla $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -\frac{7}{2}$, b) dla $x_1 = -5, x_2 = -\frac{5}{2}$, c) dla $x_1 = \frac{15}{2}, x_2 = -5$. 11. a) 16, b) 18, c) 45.

str. 249-250: 1. a) 3, -1, b) 3, c) -3, d) 6, e) 0, 6, f) 0, -8. 3. a) $y = 5x^2 - 5x - 30$, b) $y = -\frac{5}{9}x^2 + \frac{40}{9}x - \frac{80}{9}$, c) $y = -2x^2 - 30x - 100$, d) $y = 7x^2 - 84x + 252$. 4. a) $(-5, \frac{1}{2})$; $(-4, 0), (-6, 0), (0, -12)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -5)$, a malejąca w przedziale $(-5; +\infty)$, b) $(-5, -7); (2, 0), (-12, 0), (0, -\frac{24}{7})$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-5; +\infty)$, a malejąca w przedziale $(-\infty; -5)$, c) $(5, 0); (5, 0), (0, 100)$; funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; 5)$, a rosnąca w przedziale $(5; +\infty)$ d) $(2, 2); (1, 0), (3, 0), (0, -6)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(2; +\infty)$, a malejąca w przedziale $(-\infty; 2)$, e) $(2, 0); (2, 0), (0, -4)$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, a malejąca w przedziale $(2; +\infty)$, f) $(\sqrt{3}, 0); (\sqrt{3}, 0), (0, 3 - 3\sqrt{3})$; funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; \sqrt{3})$, a malejąca w przedziale $(\sqrt{3}; +\infty)$. 5. a) $y = -\frac{5}{32}(x+5)(x-11)$, b) $(1, 0), (-7, 0)$, c) $(20, 0)$. 6. $y = \frac{1}{3}x^2 - 4$ lub $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4$.

str. 254-256: 1. a) $p = 2, q = -9$; z osią x : $(8, 0), (-4, 0)$; z osią y : $(0, -8)$, b) $p = -2, q = -75$; z osią x : $(3, 0), (-7, 0)$; z osią y : $(0, -63)$, c) $p = 3, q = 5$; z osią x : $(2, 0), (4, 0)$; z osią y : $(0, -40)$, d) $p = -3, q = -9$; z osią x : $(0, 0), (-6, 0)$; z osią y : $(0, 0)$, e) $p = 0, q = -3$; z osią x : $(3, 0), (-3, 0)$; z osią y : $(0, -3)$, f) $p = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}$; z osią x : $(0, 0), (\frac{1}{2}, 0)$; z osią y : $(0, 0)$, g) $p = 1, q = -20$; z osią x : $(-1, 0), (3, 0)$; z osią y : $(0, -15)$, h) $p = 5, q = 2$; z osią x : $(7, 0), (3, 0)$; z osią y : $(0, -\frac{21}{2})$, i) $p = 10, q = 0$; z osią x : $(10, 0)$; z osią y : $(0, 300)$. 2. a) W górę, $(0, -3)$, b) w dół, $(0, 15)$, c) w dół, $(0, 0)$. 3. a) $(\frac{1}{6}; +\infty)$, b) $(-3; +\infty)$, c) $(-\infty; -10)$, d) $(-\infty; 2)$, e) $(-52\frac{1}{4}; +\infty)$, f) $(-\frac{9}{16}; +\infty)$. 4. a) $y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$, b) $y = (x-2)^2 - 3$, c) $y = -2(x+2)^2 + 5$, d) $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 + 1$, e) $y = -\frac{1}{9}(x+3)^2$, f) $y = \frac{1}{2}x(x+4)$. 5. a) $y = 2x^2 - 3x + 3$, b) $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 + 2$, c) $y = \frac{1}{3}(x-2)(x-6)$, d) $y = -\frac{1}{10000}x^2 + 2$. 6. $y = -\frac{1}{9}(x+2)^2 - 1$. 8. a) Dwa punkty wspólne, b) dwa punkty wspólne, c) jeden punkt wspólny, d) brak punktów wspólnych. 9. 8, 16, 36. 10. a) $f_{\min}(-1) = -5,5, f_{\max}(3) = 6,5$, b) $f_{\max}(4) = 7, f_{\min}(2) = 5$, c) $f_{\min}(7) = 2,5, f_{\max}(6) = 5$. 11. a) $f_{\min}(2) = -1, f_{\max}(0) = 3$, b) $f_{\min}(2) = -1, f_{\max}(5) = 8$, c) $f_{\max}(-1) = 8, f_{\min}(0) = 3$. 12. a) $f_{\min}(-8) = 80, f_{\max}(-10) = 240$, b) $f_{\min}(-5) = -10, f_{\max}(4) = 800$, c) $f_{\max}(2) = 480, f_{\min}(-1) = 150$. 13. a) $f_{\min}(-1) = -7, f_{\max}(3) = f_{\max}(-1) = 5$, b) $f_{\max}(3) = 6, f_{\min}(-1) = -42$, c) $f_{\min}(3) = -40, f_{\max}(-\frac{1}{2}) = 9$.

str. 259-261: 1. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, b) $x \in (5; 7)$, c) $x \in (-\infty; -17) \cup (-13; +\infty)$, d) $x \in \{0; 3\}$, e) $x = \frac{1}{2}$, f) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$. 2. a) $x \in (-1\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, b) $x \in (-\infty; -1\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -1\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, d) $x \in (-1\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, e) $x \in (-\infty; -1\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, f) $x \in (-1\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. 3. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, b) $x \in \mathbb{R}$, c) $x = \frac{1}{2}$, d) $x \in (-3; 4)$, e) $x \in (-\infty; -2) \cup (10; +\infty)$, f) $x \in (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$. 4. a) $x \in (-7; 7)$, b) $x \in (-\infty; -2\sqrt{10}) \cup (2\sqrt{10}; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -\frac{2}{7}) \cup (0; +\infty)$, d) $x \in \{0; \frac{6}{5}\}$, e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$, f) $x = -5$. 5. a) $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, b) $x \in \mathbb{R}$, c) $x \in (-\infty; -3) \cup (2\frac{1}{2}; +\infty)$, d) $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$, e) $x \in (-\frac{1}{2}; 4)$, f) $x \in \mathbb{R}$. 6. a) $x \in (-\infty; -\frac{13 - \sqrt{394}}{5}) \cup (-\frac{13 + \sqrt{394}}{5}; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; \frac{1}{4}) \cup (2; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; 1) \cup (1\frac{1}{2}; +\infty)$.

d) $x \in \mathbb{R}$. 7. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$, c) $x \in (-3; 7)$. 8. a) Dla $x \in (-8; 5)$, b) dla $x \in (-\infty; -11) \cup (9; +\infty)$. 9. a) Dla $x \in (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$, b) dla $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$, c) dla $x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{89}}{8}) \cup (\frac{3+\sqrt{89}}{8}; +\infty)$. 10. Dla $x \in (1; 3) \cup (5; 7)$. 11. Dla $x \in (3 - \sqrt{5}; 3 - \sqrt{2}) \cup (3 + \sqrt{2}; 3 + \sqrt{5})$. 12. a) $x \in (-\infty; -2)$, b) $x \in (6; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -7) \cup (5; +\infty)$, d) $x \in (-\infty; -6) \cup (-2\frac{1}{2}; +\infty)$. 13. Dla $a > 30$. 14. Dla $a \in (4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6})$. 15. a) $x \in (\frac{25-5\sqrt{13}}{2}; 10)$, b) $x \in (20 - 5\sqrt{10}; 10)$.

str. 263-265: 1. a) 180 m, b) na 45 m. 2. a) $y = -\frac{1}{48}x^2 + 192$, b) $y = -\frac{2}{315}x^2 + 630$. 3. a) $y = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{9}{10}x + 2$, b) $6\frac{1}{20}$ m. 4. a) $y = -75x^2 + 30x + 2$, b) po ok. 0,46 s; dziedzina: $(0; 0,46)$, c) ok. 0,38 s. 5. a) $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$, b) $x, y \in (10 - 5\sqrt{3}; 10 + 5\sqrt{3})$. 6. Powinien być sześcianiem o krawędzi $\frac{1}{6}$ m. 7. 6,125 m². 8. $20 \text{ m} \times 20 \text{ m}$; 400 m². 9. 7 m, 7 m, 3 m, 3 m, 4 m, 4 m. 10. $(1\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Wskazówka. Pierwiastek z danego wyrażenia przyjmuje wartość najmniejszą, gdy wartość tego wyrażenia jest najmniejsza.

str. 269-273: 1. a) $p = \frac{1}{4}$, b) $p = 2$ lub $p = -2$, c) $p = \frac{1}{4}$ lub $p = 0$, d) $p = -3$ lub $p = 1$, e) $p = \frac{1}{2}$ lub $p = -\frac{1}{2}$ lub $p = 0$, f) $p = \frac{1}{2}$ lub $p = 1$. 2. a) $k \in (-39,5; +\infty)$, b) $k \in \mathbb{R}$, c) $k \in (-\infty; 4 - 2\sqrt{5}) \cup (4 + 2\sqrt{5}; +\infty)$, d) $k \in (-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$, e) $k \in (-\frac{3}{2}; 0) \cup (0; +\infty)$, f) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. 4. a) $t = 10$, b) $t = \frac{8}{3}$. 5. $p < -1$; $q \neq 0$; nie ma takiego r (równanie zawsze ma rozwiązanie). 6. a) $x_1 = -m$, $x_2 = -1$, b) $x_1 = -m$, $x_2 = 2$. 7. a) $k \in (-\infty; -2)$, b) $k \in (-\infty; -1) \cup (-1; -\frac{4}{3})$, c) $k = 0$ lub $k = \frac{4}{3}$, d) $k \in (-\infty; -1)$, e) $k = 0$ lub $k = 3$, f) $k \in (-1; +\infty)$. 8. a) $p = \frac{19}{4}$, b) $p = 1$ lub $p = 5$, c) $p = 1 - 2\sqrt{3}$ lub $p = 1 + 2\sqrt{3}$. 9. $t \in (-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$. 10. a) $y = 3x - \frac{9}{8}$, b) $y = 2x + 2$ lub $y = -2x + 2$. 11. a) $O \frac{1}{2}$ jednostki, b) $O 1$ jednostkę. 12. $t \in (-\frac{1}{2}; 1)$. 13. $y = -x^2 + 2$. 14. a) $s > 0$, b) $s \in (-8; 8)$, c) $s \in (4 - 2\sqrt{2}; 4 + 2\sqrt{2})$. 15. a) Nie ma takiego s , b) $s = -\frac{1-\sqrt{2}}{2}$. 16. Dla $p \in (-4 - 2\sqrt{10}; -4 + 2\sqrt{10})$. 17. a) $t \in (0; +\infty)$, b) $x = -1$. 18. a) $m \in (-\infty; \frac{1}{6})$, b) $m \in (\sqrt{3}; +\infty)$, c) $m \in (-0,4; 0,05)$. 19. a) $q \in (6; +\infty)$, b) $k \in (-4 + 2\sqrt{10}; 3)$. 20. a) $m = 7500$, b) $p = 6300$. 21. $k \in (-\infty; 3 - 2\sqrt{17}) \cup (3 + 2\sqrt{17}; +\infty)$. 22. $p = -3 - 3\sqrt{3}$. 23. $m = 0$. 25. a) $p \in (-4\frac{1}{3}; -4) \cup (4; +\infty)$, b) nie istnieje takie k . 26. $m \in (-\infty; -3\frac{2}{3})$.

str. 274: 1. ① - C, ② - A, ③ - B, ④ - D, ⑤ - E, ⑥ - F. 2. a) $f(x) = -3x^2 + 12x - 17$, b) $g(x) = -2(x + \frac{1}{2})(x + 3)$, c) $h(x) = 2(x - 3)^2 - 8$. 3. a) $(-20; +\infty)$; funkcja jest rosnąca w $(9; +\infty)$, a malejąca w $(-\infty; 9)$; $x \in (-\infty; 7) \cup (11; +\infty)$, b) $(-\infty; 49)$; funkcja jest rosnąca w $(-\infty; 1)$, a malejąca w $(1; +\infty)$; $x \in (-6; 8)$, c) $(-8; +\infty)$; funkcja jest rosnąca w $(-4; +\infty)$, a malejąca w $(-\infty; -4)$; $x \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$. 4. a) w III ćwiartce, b) w I ćwiartce. 5. a) $f_{\max}(1) = 15$, $f_{\min}(2) = 7$, b) $f_{\max}(\frac{1}{2}) = 16$, $f_{\min}(-1) = 7$, c) $f_{\max}(\frac{1}{2}) = 16$, $f_{\min}(-2) = f_{\min}(3) = -9$. 6. $x \in (-1; 1)$. 7. Dla $x \in (-5; -1) \cup (1; 3)$. 8. Dla $p = 1$ lub $p = -4 - 2\sqrt{6}$ lub $p = -4 + 2\sqrt{6}$. 9. a) $p \in (\frac{1}{2}; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$, b) $p \in (2 + \sqrt{2}; +\infty)$. 10. a) $2,5 \times 5$, b) $2,5\sqrt{2} \times 2,5\sqrt{2}$.



Podręcznik jest przeznaczony do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełnia on kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i jest zgodny z najnowszą podstawą programową z 2018 roku.

Został dopuszczony przez MEN do użytku szkolnego i wpisany do wykazu podręczników.

Numer dopuszczenia: 963/1/2019

