

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



1

MATEMATYKA Z PLUSEM

dla liceum i technikum

zbiór zadań





MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony

Marcin Braun
Małgorzata Dobrowolska
Marcin Karpiński
Jacek Lech
Adam Wojaczek



MATEMATYKA Z PLUSEM

zbiór zadań dla liceum i technikum

zakres podstawowy
i rozszerzony



Redakcja: *Elżbieta Bagińska-Stawiarz*

Korekta merytoryczna: *Agnieszka Frączyk, Hanna Lenz-Terlecka, Anna Płońska*

Korekta językowa: *Grażyna Kompowska*

Projekt okładki: *Iwona Duczmal*

Ilustracje: *Bartłomiej Brosz*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski, Joanna Szyller*

Projekt graficzny i skład (T_EX): *Joanna Szyller*

ISBN 978-83-8118-589-9

© Copyright by Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80-309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2019. Wydanie pierwsze

Niniejsza publikacja podlega ochronie przewidzianej w przepisach Ustawy z dnia 4.02.1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych. Każdy przypadek kopiowania lub zwielokrotniania fragmentu lub całości publikacji stanowi niedozwolone naruszenie praw twórcy lub wydawcy, o ile nie odbywa się zgodnie z przepisami wyżej wymienionej ustawy.

Wszystkie książki Wydawnictwa są dostępne w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia można składać w księgarni internetowej: www.ksiegarnia.gwo.pl
lub nadsyłać listownie pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80-305 Gdańsk 5, skrytka pocztowa 80
tel. 801 643 917, 58 340 63 63
fax 58 340 63 61, 58 340 63 66
<http://www.gwo.pl> e-mail: handel@gwo.pl

SPIS TREŚCI

ZBIORY

■ Zbiory i działania na zbiorach	12
■ Przedziały liczbowe	18
■ Przed sprawdzianem	22

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

■ Zapisywanie i przekształcanie wyrażeń algebraicznych	25
■ Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias	28
■ Wzory skróconego mnożenia	31
■ Przekształcanie wzorów	33
■ Twierdzenia. Dowodzenie twierdzeń	35
■ Przed sprawdzianem	37
■ Przed maturą	39

POTĘGI I PIERWIASTKI

■ Potęgi o wykładnikach całkowitych	41
■ Pierwiastki	47
■ Potęgi o wykładnikach wymiernych	52
■ Potęgi o wykładnikach rzeczywistych	54
■ Przed sprawdzianem	57
■ Przed maturą	58

LOGARYTMY

■ Pojęcie logarytmu	59
■ Własności logarytmów	62
■ Przed sprawdzianem	67
■ Przed maturą	68

RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

■ Rozwiązanie równań	70
■ Wielkości wprost proporcjonalne i odwrotnie proporcjonalne	73
■ Rozwiązanie nierówności	75
■ Równania i nierówności z wartością bezwzględną	77
■ Równania i nierówności z wartością bezwzględną (cd.)	80
■ Układy równań	81
■ Układy równań oznaczone, nieoznaczone i sprzeczne	85
■ Zadania tekstowe	86
■ Przed sprawdzianem	89
■ Przed maturą	91

FUNKCJE

■ Pojęcie funkcji	94
■ Czytanie wykresów	98
■ Wzory i wykresy funkcji	101
■ Monotoniczność funkcji	105
■ Wzór i wykres funkcji liniowej	110
■ Własności funkcji liniowej	113
■ Proporcjonalność prosta i odwrotna	118
■ Przed sprawdzianem	122
■ Przed maturą	125

RÓWNANIA KWADRATOWE

■ Równania kwadratowe w najprostszej postaci	127
■ Wyróżnik równania kwadratowego. Rozwiązanie równań	129
■ Wzory Viète'a	133
■ Przed sprawdzianem	137
■ Przed maturą	139

WEKTORY. PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

■ Wektory. Działania na wektorach	141
■ Wektory w układzie współrzędnych	145
■ Działania na wektorach w układzie współrzędnych	148
■ Przekształcanie wykresów funkcji	151
■ Przekształcanie wykresów funkcji (cd.)	155
■ Przed sprawdzianem	158

FUNKCJA KWADRATOWA

■ Parabola	160
■ Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej	163
■ Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej	168
■ Funkcja kwadratowa — podsumowanie	170
■ Nierówności kwadratowe	173
■ Zastosowania funkcji kwadratowej	176
■ Równania i nierówności z parametrem	178
■ Przed sprawdzianem	184
■ Przed maturą	186

ODPOWIEDZI	188
------------------	-----

Szarym symbolem ■ oznaczono tematy wykraczające poza zakres podstawowy.

W książce przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

12. — zadanie o średnim poziomie trudności

12. — zadanie trudne

■ — zadanie z zakresu rozszerzonego

Wstęp

Zbiór zadań stanowi uzupełnienie podręcznika do nauczania matematyki w klasie pierwszej liceum i technikum i jest zgodny z programem *Matematyka z plusem*. Książka ta może być jednak pomocna uczniom i nauczycielom niezależnie od wybranego programu nauczania.

W każdym dziale zostały zebrane najważniejsze wiadomości z teorii, a wszystkie zadania podzielone na trzy grupy. W pierwszej — oznaczonej numerami typu 69. — znalazły się zadania typowe lub łatwe. Z nimi powinni sobie poradzić wszyscy uczniowie.

W drugiej grupie — o numerach typu 69. — znajdują się zadania nieco trudniejsze, przeznaczone dla tych uczniów, którym nie sprawiają kłopotu zadania z pierwszej grupy.

Trzecia grupa zadań — oznaczonych numerami typu 69. — obejmuje zadania raczej trudne. Z nimi powinni sobie poradzić uczniowie zdolniejsi i zainteresowani matematyką.

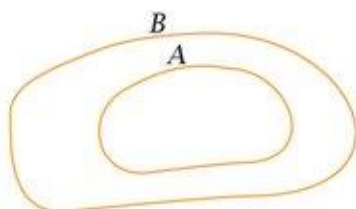
Dodatkowo przy numerach zadań dotyczących treści nauczania, które nie są obowiązkowe dla zakresu podstawowego, znajduje się symbol Я.

Każdy dział kończy się zestawami zadań: „Przed sprawdzianem” — umożliwia powtórzenie materiału z danego zakresu tematycznego, „Przed maturą” — zawiera wybrane oryginalne zadania maturalne z minionych egzaminów. Dzięki nim można przyzwyczaić uczniów do systematycznego przygotowywania się do matury z matematyki i oswoić ich z typowymi zadaniami maturalnymi.

Na końcu książki znajdują się odpowiedzi do niemal wszystkich zadań, a do trudniejszych — także wskazówki.

ZBIORY

Zapis $p \in A$ czytamy „ p jest elementem zbioru A ” albo „ p należy do zbioru A ”.
Jeśli p nie jest elementem zbioru A , to piszemy $p \notin A$.



$$A \subset B$$

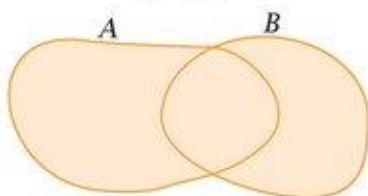
Jeżeli $p \in A$, to $p \in B$.

Mówimy, że zbiór A jest podzbiorem zbioru B (lub zawiera się w zbiorze B), jeśli każdy element zbioru A należy także do zbioru B .

Zbiór, który nie ma żadnego elementu, nazywamy **zbiorem pustym**. Taki zbiór oznaczamy symbolem $\emptyset$. Zbiór pusty jest zbiorem skończonym i jest podzbiorem każdego zbioru.

Suma zbiorów

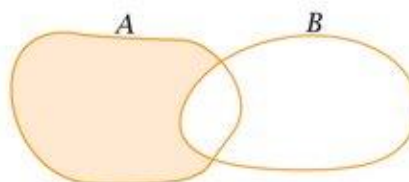
$$A \cup B$$



$$p \in A \text{ lub } p \in B$$

Różnica zbiorów

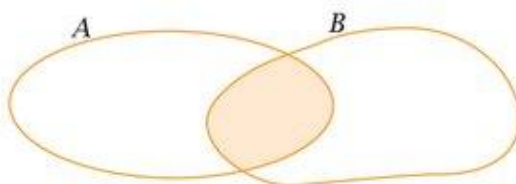
$$A \setminus B$$



$$p \in A \text{ i } p \notin B$$

Iloczyn zbiorów

$$A \cap B$$



$$p \in A \text{ i } p \in B$$

Oznaczenia zbiorów liczbowych

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych

$\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych

$\mathbb{I}\mathbb{Q}$ – zbiór liczb niewymiernych

$\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych

$\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych

Przedziały liczbowe

$x \in (a; b)$, gdy $a < x < b$

$x \in \langle a; b \rangle$, gdy $a \leq x \leq b$

$x \in (-\infty; b)$, gdy $x < b$

$x \in \langle a; +\infty \rangle$, gdy $x \geq a$

ZBIORY I DZIAŁANIA NA ZBIORACH

1. a) Dany jest zbiór $A = \{1, 2, 3\}$. Które z zapisanych zależności są błędne?

$$5 \in A \quad \{3, 1\} \subset A \quad \{3, 1, 2\} = A \quad \{1, 4\} \subset A \quad 0 \notin A \quad A \subset \{1, 2, 3, 5\}$$

b) Które z zapisanych zależności są błędne?

$$-7 \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{N} \quad 3\frac{2}{7} \notin \mathbb{Q} \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \quad \mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ \quad \{0, 5, 9\} \subset \mathbb{N} \quad 3\sqrt{5} \in \mathbb{R}$$

2. Podaj po trzy elementy każdego ze zbiorów.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 7\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{IQ} : x < \sqrt{2}\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} : x < 2\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}_- : x < -\pi \text{ i } x > -5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z}_- : x < 2 \text{ lub } x > 2\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} : x < 1 \text{ lub } x \geq 7\}$$

3. Wypisz wszystkie elementy zbioru.

$$a) \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x \leq 3\}$$

$$c) \{x \in \mathbb{R} : x < 5\} \cap \mathbb{N}$$

$$b) \{x \in \mathbb{N} : x < 7\}$$

$$d) \mathbb{Z} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x < -5 \text{ lub } x > 5\}$$

4. Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{0, 5\}$. Wypisz wszystkie elementy zbioru:

$$a) A \cup B$$

$$c) A \setminus B$$

$$e) B \cap C$$

$$g) (A \setminus B) \cap C$$

$$b) A \cap B$$

$$d) B \setminus A$$

$$f) (A \cap B) \cup C$$

$$h) (A \cup C) \setminus B$$

5. Dane są zbiory: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, e\}$. Oceń prawdziwość warunków.

$$a) a \in A \cup B$$

$$c) c \notin A \cup B$$

$$e) c \in A \setminus B$$

$$g) e \notin A \setminus B$$

$$b) a \in A \cap B$$

$$d) c \notin A \cap B$$

$$f) c \in B \setminus A$$

$$h) e \notin B \setminus A$$

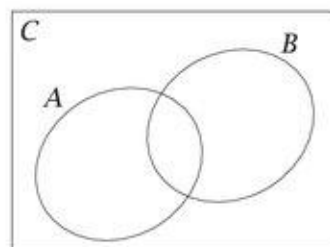
6. Diagram obok przedstawia trzy zbiory A , B i C . Przerysuj go i zaznacz podany zbiór.

$$a) C \setminus (A \cap B)$$

$$c) A \cup (C \setminus B)$$

$$b) C \setminus (A \setminus B)$$

$$d) (C \setminus A) \cap B$$



7. Dane są zbiory: $A = \{\square, \boxplus\}$, $B = \{\square, \oplus\}$ i $C = \{\square, \circ, \oplus\}$. Za pomocą tych zbiorów oraz odpowiednich działań przedstaw podany zbiór.

$$a) \{\square, \boxplus, \circ, \oplus\}$$

$$c) \{\circ\}$$

$$e) \{\square, \oplus\}$$

$$g) \{\circ, \oplus\}$$

$$b) \{\oplus\}$$

$$d) \{\square\}$$

$$f) \{\square, \boxplus, \oplus\}$$

$$h) \emptyset$$

8. Niech litery W , P i S oznaczają następujące zbiory miast polskich: W — siedziby wojewodów, P — porty morskie, S — miasta powyżej 100 tys. mieszkańców. Podaj przykład miasta należącego do danego zbioru.

- a) $W \cap P$ b) $W \setminus P$ c) $S \setminus (W \cup P)$ d) $P \setminus W$

9. Podaj pięć elementów zbioru.

- a) $\{x \in \mathbb{R} : x = a^3 \text{ i } a \in \mathbb{Z}\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} : x = n + \frac{1}{n} \text{ i } n \in \mathbb{N}_+\}$
 b) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{b}{2} \text{ i } b \in \mathbb{Z}\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{m+1} \text{ i } m \in \mathbb{N}\}$

10. Ile elementów ma podany zbiór?

- a) $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\}$ c) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 15\}$
 b) $\{x \in \mathbb{N} : \frac{2}{x} \geq 1\}$ d) $\{x \in \mathbb{N} : \frac{x}{2} \leq 10\}$

11. Czy podany zbiór jest skończony? Jeśli tak, to ile ma elementów?

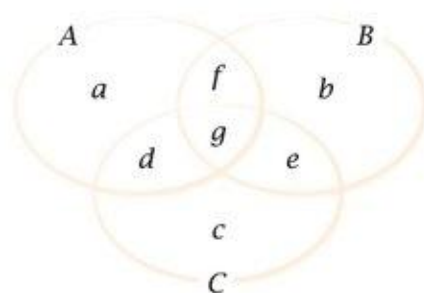
- a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} \setminus \mathbb{R}_+$ e) $\mathbb{N} \setminus \{x \in \mathbb{Z} : x > 3\}$
 b) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\} \cap \mathbb{R}$ f) $\{x \in \mathbb{N} : x < 5\} \cup \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 4\}$
 c) $\{x \in \mathbb{R} : x < 3\frac{1}{7}\} \cap \mathbb{N}$ g) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{N} : -5 < x < 5\}$
 d) $\{x \in \mathbb{Q} : -\pi < x < \pi\} \cap \mathbb{Z}$ h) $(\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Z}) \setminus \mathbb{N}$

12. Wśród podanych zbiorów znajdź zbiory skończone i podaj liczbę ich elementów, jeżeli $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$, $B = \{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{6}{5}, \dots\}$, $C = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\}$.

- $A \cup B$ $A \cap B$ $B \cap \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \cap C$
 $\mathbb{Z} \cap C$ $A \cap B \cap \mathbb{N}$ $(A \cap \mathbb{N}) \cup (B \cap C)$ $A \cap (B \setminus \mathbb{N})$

13. Małymi literami oznaczono wszystkie elementy zbiorów A , B , C . Czy podane poniżej zbiory są równe?

- a) $A \cap (B \cup C)$ oraz $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
 b) $(A \cap B) \cup C$ oraz $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
 c) $A \setminus (B \cap C)$ oraz $(A \setminus B) \cap C$
 d) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ oraz $A \setminus (B \cup C)$

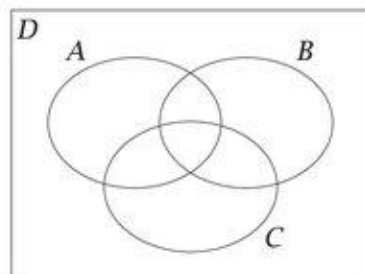


14. Na dwóch diagramach, takich jak narysowany obok zadania 6, zaznacz zbiory X i Y , a następnie sprawdź, czy $X = Y$.

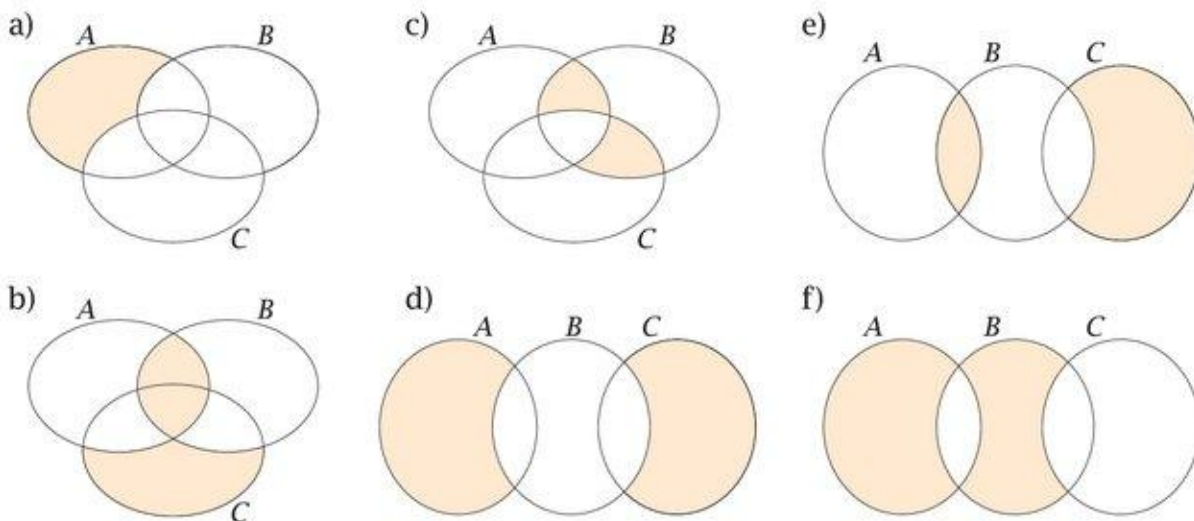
- a) $X = A \setminus B$, $Y = A \cap (C \setminus B)$ d) $X = C \setminus (A \setminus B)$, $Y = C \setminus (B \setminus A)$
 b) $X = (A \setminus B) \cap C$, $Y = (A \cap C) \setminus B$ e) $X = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$, $Y = C \setminus (A \cap B)$
 c) $X = (A \cup B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ f) $X = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$, $Y = C \setminus (A \cup B)$

15. Diagram obok przedstawia cztery zbiory: A, B, C i D . Przerysuj go i zaznacz podany zbiór.

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a) $A \cap (B \cup C)$ | e) $D \setminus (A \cup B \cup C)$ |
| b) $A \cup (B \setminus C)$ | f) $D \setminus [(A \cap B) \cup C]$ |
| c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ | g) $(A \cup B) \cap (D \setminus B)$ |
| d) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ | h) $(D \setminus A) \cap B \cap C$ |



16. Zapisz za pomocą działań na zbiorach, jaki zbiór zacieniowano na diagramie.



17. Narysuj diagram, w którym zbiory A, B i C spełniają podany warunek.

- | | | |
|--------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| a) $A \cup B \cup C = A$ | c) $A \setminus B = A \cup C$ | e) $(A \cap C) \cup B = C$ |
| b) $A \cap B \cap C = A$ | d) $A \cap C = B \cap C$ | f) $A \cap B \cap C = A \cap C$ |

18. Podaj przykłady takich zbiorów A i B , które spełniają podany warunek.

- | | | |
|-------------------|------------------------------------|---|
| a) $A \cup B = B$ | c) $A \cap B = A \cup B$ | e) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = \emptyset$ |
| b) $A \cap B = B$ | d) $A \setminus B = B \setminus A$ | f) $(A \cap B) \cup (B \setminus A) = A$ |

19. Zbiory X i Y nie są puste. Rozważ poniższe warunki.

- I. $X \cup Y = X$ II. $X \setminus Y = X$ III. $X \cap Y = X$ IV. $Y \setminus X = Y$

- a) Które z warunków są spełnione, gdy X jest podzbiorem Y i $X \neq Y$?
- b) Które z warunków są spełnione, gdy zbiory X i Y są rozłączne (tzn. nie mają wspólnych elementów)?

20. Spośród zbiorów $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ wskaż te, których podzbiorem są podane zbiory.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x = \frac{1}{n} \text{ i } n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{m} \text{ i } m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{N} : x = a^2 \text{ i } a \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{Z} : x = 7b \text{ i } b \in \mathbb{Z} \right\}$$

21. Zbiór A ma 10 elementów, a zbiór B ma 20 elementów. Jaką najmniejszą, a jaką największą liczbę elementów może mieć podany zbiór?

- a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ d) $B \setminus A$

22. Dane są zbiory: $A = \{\square, \boxplus, \triangle\}$, $B = \{\square, \oplus, \diamond\}$ i $C = \{\square, \circ, \oplus\}$. Za pomocą tych zbiorów oraz odpowiednich działań przedstaw podany zbiór.

- a) $\{\square, \boxplus, \triangle, \circ\}$ c) $\{\square, \boxplus, \triangle, \diamond\}$ e) $\{\square, \boxplus, \triangle, \oplus\}$ g) $\{\circ, \diamond\}$
 b) $\{\boxplus, \triangle, \circ\}$ d) $\{\oplus\}$ f) $\{\boxplus, \triangle, \oplus, \diamond, \circ\}$ h) $\emptyset$

23. a) Dane są zbiory: $B = \{1\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{1, 2, 3\}$. Wypisz wszystkie podzbiory każdego z danych zbiorów. (Pamiętaj, że dla każdego zbioru X jego podzbiorem jest zbiór pusty i zbiór X , czyli $\emptyset \subset X$ i $X \subset X$).

b) Zbiór E ma n elementów. Ile podzbiorów ma ten zbiór?

24. Przyjmijmy oznaczenia:

T — zbiór wszystkich trójkątów

T_1 — zbiór wszystkich trójkątów, które nie są równoramienne

T_2 — zbiór wszystkich trójkątów równoramiennych

T_3 — zbiór wszystkich trójkątów równobocznych

O — zbiór wszystkich trójkątów ostrokątnych

P — zbiór wszystkich trójkątów prostokątnych

R — zbiór wszystkich trójkątów rozwartokątnych

a) Wśród poniższych zbiorów wskaż zbiory puste. Dla każdego ze zbiorów niepustych narysuj po jednym przykładzie trójkąta, który należy do tego zbioru.

$T_1 \cap P$	$T_2 \setminus T_3$	$T \cup T_3$	$O \setminus (T_1 \cup T_3)$
$T_2 \cap R$	$O \setminus T_3$	$T \setminus R$	$(O \cup P) \cap T_2$
$T_3 \cap P$	$T_3 \setminus O$	$O \cap P$	$(R \cup P) \setminus T_3$

b) Zapisz podane zbiory, korzystając z przyjętych oznaczeń i symboli: $\cup$, $\cap$, $\setminus$.

- ① Zbiór wszystkich trójkątów, które nie są prostokątne.
- ② Zbiór wszystkich trójkątów ostrokątnych równoramiennych.
- ③ Zbiór wszystkich trójkątów ostrokątnych i wszystkich trójkątów prostokątnych.
- ④ Zbiór wszystkich trójkątów prostokątnych, ale nie równoramiennych.

c) W którym wypadku znak $*$ można zastąpić znakiem: $\subset$? W którym wypadku można go zastąpić znakiem: $=$?

- | | | |
|-------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| ① $T_1 \cup T_2 \cup T_3 * T$ | ③ $T_3 * O$ | ⑤ $T_1 \cap T_2 * P \cap R$ |
| ② $O \cup P * T$ | ④ $O \cup P * T_1 \cup T_2$ | ⑥ $T_1 \cap T_3 * O$ |

25. a) Zbiór A ma 5 elementów, zbiór B ma 8 elementów, zbiór $A \cup B$ ma 10 elementów. Po ile elementów mają zbiory: $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$?

b) Zbiór A ma 6 elementów, zbiór B ma 3 elementy, zbiór $A \cap B$ ma 2 elementy. Po ile elementów mają zbiory: $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$?

c) Zbiór A ma 100 elementów, zbiór B ma 500 elementów, zbiór $A \setminus B$ ma 85 elementów. Po ile elementów mają zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$?

d) Zbiór $A \cup B$ ma 120 elementów, zbiór $A \setminus B$ ma 30 elementów, zbiór $B \setminus A$ ma 45 elementów. Po ile elementów mają zbiory A i B ?

26. Zbiór A ma 5 elementów, zbiór B — 10 elementów, a zbiór C — 20 elementów. Jaką najmniejszą, a jaką największą liczbę elementów może mieć dany zbiór?

a) $A \cup B \cup C$

c) $(C \setminus B) \setminus A$

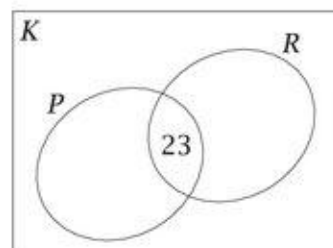
e) $(B \cup C) \setminus A$

b) $A \cap B \cap C$

d) $(B \cap C) \setminus A$

f) $(C \setminus B) \cap A$

27. Klasa I liczy 32 uczniów. Spośród nich 24 uczniów potrafi pływać, 28 — jeździć na rowerze, a 23 potrafi pływać i jeździć na rowerze. Niech P oznacza zbiór uczniów klasy I, którzy potrafią pływać, R — zbiór uczniów klasy I, którzy potrafią jeździć na rowerze, a K — zbiór wszystkich uczniów tej klasy. Na diagramie przedstawiono te zbiory i w jeden z obszarów wpisano odpowiadającą mu liczbę elementów.



a) Przerysuj diagram i wpisz w pozostałe obszary odpowiednie liczby elementów.

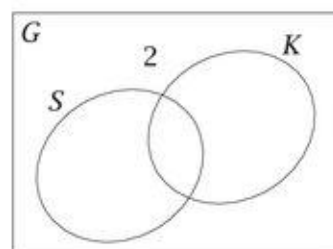
b) Zapisz za pomocą działań na zbiorach P , R i K poniżej opisane zbiory i podaj, ile elementów do nich należy.

A — zbiór uczniów klasy I, którzy potrafią jeździć rowerem, ale nie potrafią pływać;

B — zbiór uczniów klasy I, którzy nie potrafią jeździć rowerem ani pływać;

C — zbiór uczniów klasy I, którzy potrafią jeździć rowerem albo potrafią pływać, ale nie opanowali obu tych umiejętności naraz.

28. W grupie 20 osób jest 4 kibiców siatkówki i koszykówki, 10 kibiców tylko siatkówki i 2 osoby, które nie kibicują żadnej z tych dyscyplin. Niech G oznacza zbiór wszystkich osób z tej grupy, S — zbiór kibiców siatkówki, a K — zbiór kibiców koszykówki. Na diagramie przedstawiono te zbiory i w jeden z obszarów wpisano odpowiadającą mu liczbę elementów.



a) Przerysuj diagram i wpisz w pozostałe obszary odpowiednie liczby elementów.

b) Zapisz za pomocą działań na zbiorach G , S i K poniżej opisane zbiory osób należących do grupy i podaj, ile elementów do nich należy.

A — zbiór tych, którzy kibicują co najmniej jednej z tych dwóch dyscyplin;

B — zbiór tych, którzy kibicują tylko koszykówce;

C — zbiór tych, którzy kibicują tylko jednej z tych dwóch dyscyplin.

29. W pewnej szkole są trzy klasy pierwsze. Wszyscy pierwszoklasiści uczą się języka francuskiego lub niemieckiego. Niech F oznacza zbiór uczniów danej klasy uczących się francuskiego, a N — zbiór uczniów uczących się niemieckiego. Dla każdej z klas oblicz, ile elementów należy do zbioru $F \cup N$, a ile — do zbioru $F \setminus N$.

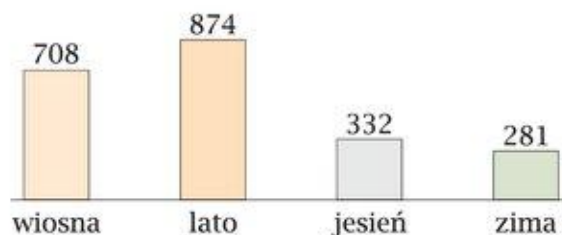
- W Ia po 20 osób uczy się francuskiego i niemieckiego, w tym 8 osób uczy się obydwu tych języków.
- W Ib 15 osób uczy się i francuskiego, i niemieckiego, o 8 osób mniej — tylko niemieckiego. Francuskiego uczy się 20 osób.
- W Ic niemieckiego uczy się 20 osób, spośród których 25% uczy się także francuskiego. Osoby uczące się francuskiego stanowią 40% klasy.

30. Niech $n(X)$ oznacza „liczbę elementów zbioru X ”. Wiadomo, że $n(A) = n(B) = n(C) = 12$, $n(A \cap B) = 7$, $n(A \cap C) = 6$, $n(B \cap C) = 8$ oraz $n(A \cap B \cap C) = 5$. Oblicz:

- | | | |
|-----------------------|--------------------------------|---|
| a) $n(B \setminus C)$ | c) $n(A \setminus (B \cup C))$ | e) $n((A \cap B) \cup (A \cap C))$ |
| b) $n(A \cup C)$ | d) $n((A \cup B) \setminus C)$ | f) $n((A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C))$ |

31. Wybranej grupie 1000 osób zadano pytanie: *Jaką porę roku lubisz?*

Można było wskazać więcej niż jedną odpowiedź (ale przynajmniej jedną). Wyniki tej ankiety przedstawiono na diagramie obok.



Niech W oznacza zbiór ankietowanych osób, które lubią wiosnę, L — zbiór tych, którzy lubią lato, J — zbiór miłośników jesieni, a Z — miłośników zimy.

- Czy na podstawie tych wyników można stwierdzić, że ponad połowa ankietowanych należy do zbioru $J \cup Z$?
- Ilu co najwyżej ankietowanych należy do zbioru $W \cap L$, a ilu — co najmniej?
- Ilu co najmniej ankietowanych należy do zbioru $W \setminus Z$?
- Ilu co najwyżej ankietowanych należy do zbioru $J \cup Z$?
- Ilu co najwyżej ankietowanych należy do zbioru $W \cap L \cap J \cap Z$?
- Ilu co najmniej ankietowanych należy do zbioru $(W \cup L \cup J \cup Z) \setminus (W \cup Z)$?

32. Dane są zbiory $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{k}{2} \text{ i } k \in \mathbb{N}\}$ oraz $B = \{0, 1, 2\}$. Czy znak $*$ można zastąpić znakiem $\subset$?

- | | | |
|---------------------|----------------------------|---------------------------------|
| a) $B * A$ | c) $B * \mathbb{N}$ | e) $A \cap B * \mathbb{N}$ |
| b) $\mathbb{N} * A$ | d) $\mathbb{N} * A \cup B$ | f) $A \setminus B * \mathbb{N}$ |

33. Niech N_k oznacza zbiór liczb naturalnych podzielnych przez k . Wymień wszystkie liczby mniejsze od 20 należące do podanego zbioru.

- | | | |
|-------------------|------------------------|--|
| a) $N_2 \cap N_3$ | c) $N_5 \setminus N_2$ | e) $(N_3 \cup N_4) \setminus (N_3 \cap N_4)$ |
| b) $N_4 \cap N_8$ | d) $N_7 \cup N_9$ | f) $(N_5 \cup N_2) \setminus N_4$ |

PRZEDZIAŁY LICZBOWE

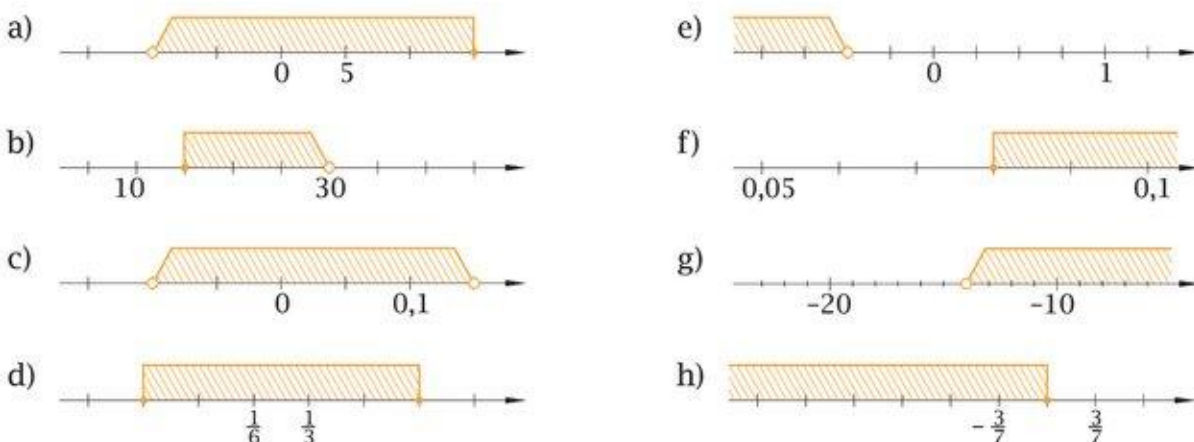
34. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających podany warunek i zapisz ten zbiór w postaci przedziału.

- | | | | |
|-------------|----------------|----------------------|--------------------|
| a) $x > -2$ | c) $x \geq -1$ | e) $1 \leq x \leq 2$ | g) $-5 < x \leq 2$ |
| b) $x < 2$ | d) $x \leq 3$ | f) $-3 \leq x < -2$ | h) $7 < x < 9$ |

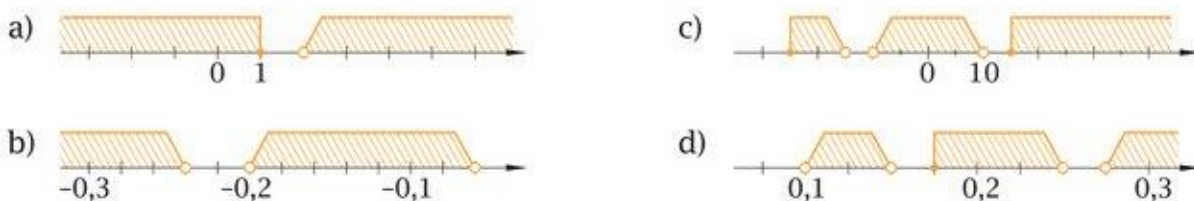
35. Zaznacz na osi liczbowej dany przedział i opisz go za pomocą nierówności.

- | | | | |
|--------------------|--------------------------|---------------------|--------------------|
| a) $(-\infty; 5)$ | c) $\langle 0; +\infty)$ | e) $(-5; 4)$ | g) $(-3; -1)$ |
| b) $(-\infty; -3)$ | d) $(2; +\infty)$ | f) $\langle -4; 5)$ | h) $\langle 0; 3)$ |

36. Zapisz zbiór zaznaczony na osi liczbowej za pomocą przedziału i nierówności.



37. Zbiór zaznaczony na osi liczbowej zapisz w postaci sumy przedziałów.



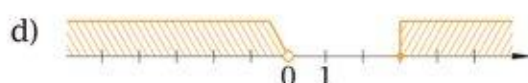
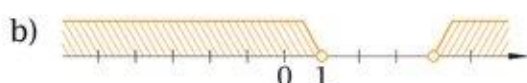
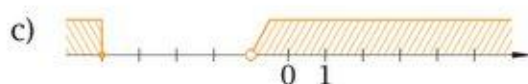
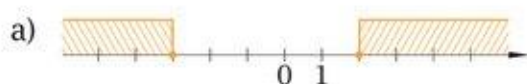
38. Zapisz w postaci przedziału.

- | | | |
|--|---|----------------------------------|
| a) $(-3; 5) \cap (-1; 9)$ | e) $(-\infty; -5) \cap \langle -6; -2)$ | i) $\langle -2; 4) \cap (-5; 5)$ |
| b) $\langle -5; 2) \cap \langle -7; -4)$ | f) $(-1; 9) \cap \langle 3; +\infty)$ | j) $\langle -9; 4) \cap (2; 4)$ |
| c) $(2; 8) \cap (-1; 6)$ | g) $(-\infty; 4) \cap (-3; +\infty)$ | k) $(-7; -1) \cap (-8; +\infty)$ |
| d) $\langle -9; -4) \cap \langle -7; 8)$ | h) $(3; +\infty) \cap (-\infty; 7)$ | l) $(-\infty; 6) \cap (-3; 6)$ |

39. Zapisz w postaci przedziału.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $(-9; -5) \cup (-7; 7)$ | e) $(-\infty; 6) \cup (-2; 9)$ | i) $\langle -2; 4 \rangle \cup (-2; 4)$ |
| b) $\langle 4; 8 \rangle \cup \langle -2; 5 \rangle$ | f) $\langle -7; 8 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$ | j) $(-7; 5) \cup \langle -7; 5 \rangle$ |
| c) $(-5; 0) \cup (-1; 6)$ | g) $(-\infty; 4) \cup (-3; 2)$ | k) $(0; 7) \cup (-1; +\infty)$ |
| d) $\langle -7; 3 \rangle \cup \langle -4; 5 \rangle$ | h) $(3; +\infty) \cup (3; 7)$ | l) $(-\infty; -6) \cup (-9; -6)$ |

40. Zbiór zaznaczony na osi liczbowej zapisz na dwa sposoby: jako sumę dwóch przedziałów oraz jako różnicę zbioru liczb rzeczywistych i pewnego przedziału.



41. Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\mathbb{R} \setminus (5; +\infty)$ | d) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; -13)$ | g) $\mathbb{R} \setminus \langle -7; 19 \rangle$ |
| b) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 7)$ | e) $\mathbb{R} \setminus \langle 3; 8 \rangle$ | h) $\mathbb{R} \setminus (-12; -5)$ |
| c) $\mathbb{R} \setminus \langle -9; +\infty \rangle$ | f) $\mathbb{R} \setminus (3; 15)$ | i) $\mathbb{R} \setminus (-\sqrt{2}; 4)$ |

42. Zapisz w postaci sumy przedziałów.

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|--|
| a) $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ | c) $\mathbb{R} \setminus \{2, 5\}$ | e) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 6\}$ |
| b) $\mathbb{R} \setminus \{-7\}$ | d) $\mathbb{R} \setminus \{-9, -1\}$ | f) $\mathbb{R} \setminus \{-8, -2, 3, 9\}$ |

43. Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $(-8; -2) \setminus \langle -4; 5 \rangle$ | e) $(8; 18) \setminus \langle 14; 15 \rangle$ | i) $(-3; 7) \setminus \langle 2; +\infty \rangle$ |
| b) $\langle -3; 7 \rangle \setminus (2; 9)$ | f) $(-3; 20) \setminus (-2; 2)$ | j) $\langle 4; 9 \rangle \setminus (-\infty; 6)$ |
| c) $(-4; -1) \setminus (-3; -1)$ | g) $(-\infty; 7) \setminus \langle 2; 5 \rangle$ | k) $(-\infty; -5) \setminus \langle -6; +\infty \rangle$ |
| d) $\langle 2; 8 \rangle \setminus \langle 8; 9 \rangle$ | h) $(-8; +\infty) \setminus \langle -7; -6 \rangle$ | l) $\langle -4; +\infty \rangle \setminus (-\infty; 3)$ |

44. Zaznacz podany zbiór na osi liczbowej i zapisz go w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- | | |
|---|--|
| a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 5 \text{ lub } x < 1\}$ | e) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 3 \text{ lub } x \geq 4\}$ |
| b) $\{x \in \mathbb{R} : x > 3 \text{ i } x \leq 4\}$ | f) $\{x \in \mathbb{R} : x < 5 \text{ i } x \geq 2\}$ |
| c) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 5 \text{ i } x > 6\}$ | g) $\{x \in \mathbb{R} : x < -3 \text{ lub } x > 3\}$ |
| d) $\{x \in \mathbb{R} : x < 3 \text{ lub } x > 2\}$ | h) $\{x \in \mathbb{R} : -7 \leq x \leq 7\}$ |

45. Wymień wszystkie liczby całkowite należące do danego przedziału.

- a) $\langle -1; \sqrt{2} + 2 \rangle$ c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + 1; 5\sqrt{3} - 7 \right)$ e) $\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}; \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \right)$
 b) $\left(2\pi - 2; \frac{5}{2}\pi + 1 \right)$ d) $\left\langle \frac{1 - \sqrt{2}}{2}; \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right\rangle$ f) $\left(\frac{1 - \sqrt{29}}{2}; \frac{1 + \sqrt{19}}{2} \right)$

46. Zapisz podany zbiór w innej postaci (za pomocą jednego przedziału).

- a) $\langle \pi - 3,14; 1,41 \rangle \cap (0; \sqrt{2})$ d) $\langle \sqrt{2} + \sqrt{3}; \sqrt{3} + \sqrt{5} \rangle \cup (2\sqrt{2}; 2\sqrt{5})$
 b) $\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \cap \left\langle \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5} + 2}{2} \right\rangle$ e) $(\sqrt{2} - \pi; \sqrt{2} + \pi) \setminus \langle 0; 2\pi \rangle$
 c) $\left\langle \frac{\pi}{3}; 30\pi \right\rangle \cup \left(\frac{3}{\pi}; 90 \right)$ f) $\left\langle \frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2} \right\rangle \setminus \left(\frac{\sqrt{7}}{2}; \sqrt{5} \right)$

47. Zapisz w postaci sumy przedziałów.

- a) $[\mathbb{R} \setminus \{4\}] \setminus (6; 9)$ c) $\mathbb{R} \setminus [\{-7, 5\} \cup \langle -3; 0 \rangle]$
 b) $\mathbb{R} \setminus [\{-2\} \cup (3; 7)]$ d) $\mathbb{R} \setminus [\langle -4; 5 \rangle \setminus (-1; 3)]$

48. Zapisz za pomocą sumy przedziałów zbiór, który tworzą wszystkie liczby spełniające podane warunki.

- a) $x > -3$ i $x \neq 0$ d) $x < 9$, $x \neq 7$ i $x \neq -1$
 b) $x \leq 5$ i $x \neq -7$ e) $-8 \leq x < 5$, $x \neq -7$ i $x \neq 3$
 c) $x \geq -6$, $x \neq -2$ i $x \neq 4$ f) $-2 < x \leq 5$, $x \neq -3$, $x \neq 1$ i $x \neq 5$

49. Jaka jest największa możliwa odległość na osi liczbowej między dwiema liczbami, z których jedna należy do zbioru A , a druga do zbioru B ?

- a) $A = \langle -1; 7 \rangle$, $B = \langle -10; -5 \rangle$
 b) $A = \langle -11; 3 \rangle \setminus (-9; 0)$, $B = \langle -5; -3 \rangle$
 c) $A = \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 8; 12 \rangle$, $B = (-\infty; 6) \cap \langle 2; +\infty \rangle$
 d) $A = \langle 14; 47 \rangle$, $B = \{-10, 44\} \cup \langle 50; 70 \rangle$

50. Wyznacz podane zbiory (wypisz ich elementy).

$$\begin{aligned} A &= (-5; 4) \cap (\sqrt{2}; 7) \cap \mathbb{Z} & D &= \mathbb{N} \cap \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\} \cap \langle 0; 50 \rangle \\ B &= (-\infty; -8) \cap (-8; \sqrt{7}) \cap \mathbb{N} & E &= \left\{ \sqrt{2}, \sqrt{\frac{9}{4}}, \sqrt{4} \right\} \cap \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \\ C &= (-\infty; -2) \cap (-\infty; 7) \cap \mathbb{Z} & F &= \{\pi, \pi + 1, \pi + 2, \pi + 3, \dots\} \setminus (10; +\infty) \end{aligned}$$

51. Czy podany zbiór jest skończony? Jeśli tak, to ile ma elementów?

- a) $\mathbb{N} \setminus (1000; +\infty)$ c) $(-\infty; \pi) \cap \mathbb{Q}$ e) $((1; 2) \cup (3; 5)) \cap \mathbb{Z}$
 b) $(-\infty; 8) \cap \mathbb{Z}$ d) $(-\infty; 0) \cap \mathbb{N}$ f) $(1; 2) \cup ((3; 5) \cap \mathbb{Z})$

52. Wśród podanych zbiorów wskaż pary zbiorów równych.

$$\begin{aligned} A &= \{5, 6, 7, 8, 9, \dots\} & B &= \{x \in \mathbb{N} : x > 5\} & C &= (5; +\infty) \cap \mathbb{N} \\ D &= \mathbb{N} \setminus (-\infty; 5) & E &= \{x \in \mathbb{N} : x \geq 5\} \\ F &= \mathbb{N} \setminus (-\infty; 5) & G &= \{x \in \mathbb{Z} : x > 4\} & H &= \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

53. Liczby a, b, c, d spełniają warunek $a < b < -1 < c < d < 0$. Zapisz w innej postaci (za pomocą przedziału lub sumy przedziałów) dany zbiór.

- a) $(a; -b) \cap (c; -d)$ d) $\mathbb{R} \setminus \{c^2, c^4\}$ g) $(a; -c) \setminus (-1; 1)$
 b) $(-d; -b) \setminus (-c; -a)$ e) $(a; 0) \setminus \{d^3, d^5\}$ h) $(0; \infty) \cap \{d - c\}$
 c) $\mathbb{R} \setminus (d; -a)$ f) $(b^3; a^2) \setminus (d; c^2)$ i) $(1 + d; 1 - c) \cup (\frac{1}{a}; -2b)$

54. Do jakiego przedziału należą liczby, których:

- a) zaokrąglenie do jedności jest równe 6,
 b) zaokrąglenie do części dziesiątych jest równe 4,5,
 c) zaokrąglenie do części setnych jest równe 0,20,
 d) zaokrąglenie do tysięcy jest równe 10 000?

55. Do jakiego przedziału lub sumy przedziałów należą liczby:

- a) których odległość od liczby zero na osi liczbowej jest mniejsza od 5,
 b) których odległość od liczby zero na osi liczbowej jest większa od 3 lub równa 3,
 c) których kwadrat jest nie większy od 100 lub równy 100,
 d) których kwadrat jest większy od 25,
 e) z których pierwiastek kwadratowy jest mniejszy od 4 lub równy 4,
 f) z których pierwiastek kwadratowy jest nie mniejszy od 7?

56. a) Zbiór wszystkich liczb spełniających warunek $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ można zapisać za pomocą przedziału $\langle 2; 3 \rangle$. Zapisz zbiór wszystkich liczb spełniających warunek $x^2 - 5x + 6 > 0$.

b) Zbiór wszystkich liczb spełniających warunek $x^3 - x > 0$ można zapisać za pomocą sumy przedziałów $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$. Zapisz zbiór wszystkich liczb spełniających warunek $x^3 - x \leq 0$.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Który z poniższych zapisów jest fałszywy?

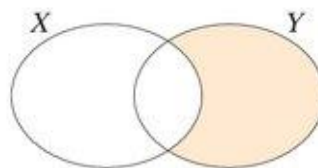
- A. $\{6, -5\frac{2}{7}\} \subset \mathbb{Q}$ B. $\mathbb{N}_+ = \mathbb{Z}_+$ C. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$ D. $3\sqrt{5} \in \mathbb{R}$

2. Niech $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $Z = \{4, 5\}$. Który ze zbiorów ma najwięcej elementów?

- A. $Y \cap Z$ B. $X \cup Y$ C. $X \setminus Z$ D. $Y \setminus Z$

3. Który z poniższych zapisów nie opisuje zbioru zacieniowanego na diagramie obok?

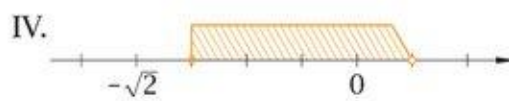
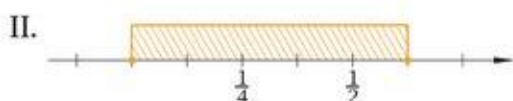
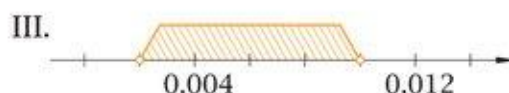
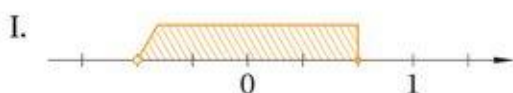
- A. $(X \cup Y) \setminus X$ C. $(X \cap Y) \cap Y$
B. $Y \setminus (X \cap Y)$ D. $Y \setminus X$



4. Która z podanych liczb należy do zbioru $\langle -3\frac{2}{3}; 6\frac{1}{3} \rangle \setminus \mathbb{Z}$?

- A. $-3,7$ B. $-\sqrt{5}$ C. 2 D. $6\frac{1}{3}$

5. a) Zapisz za pomocą przedziału zbiór przedstawiony na każdym z rysunków.



b) Zapisz za pomocą sumy przedziałów zbiór liczb, który jest różnicą $\mathbb{R}$ i przedziału przedstawionego na rysunku.

6. Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $\langle -2; 5 \rangle \cup (-1; 6)$ c) $\langle -2; 5 \rangle \setminus (-1; 6)$
b) $\langle -2; 5 \rangle \cap (-1; 6)$ d) $(-1; 6) \setminus \langle -2; 5 \rangle$

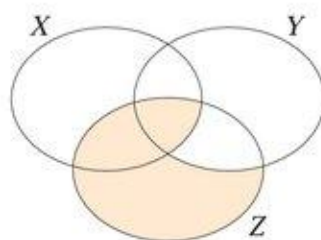
Я7. Niech $X = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 5\}$, $Y = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x \leq 3\}$, $Z = \{x \in \mathbb{N} : 4 \leq x \leq 5\}$. Który z podanych zbiorów jest równy X ?

- A. $(X \cup Z) \setminus Y$ B. $X \cap (Y \setminus Z)$ C. $Y \cup (X \cap Z)$ D. $(Z \setminus Y) \cup X$

Я8. Która z równości jest fałszywa dla dowolnych zbiorów X i Y ?

- A. $(X \cup Y) \setminus X = Y \setminus X$ C. $X \cap Y = X \cap (X \cap Y)$
B. $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$ D. $(X \setminus Y) \cup X = (Y \setminus X) \cup X$

Я9. Który z poniższych zapisów opisuje zbiór zacieniowany na diagramie?



- A. $(X \cap Y \cap Z) \cup (Y \setminus Z)$
B. $Z \setminus [Y \setminus (X \cap Y \cap Z)]$
C. $(Z \cup X) \setminus [(X \cup Y) \setminus Z]$
D. $(X \cap Y) \cup [Z \setminus (X \cup Y)]$

Я10. Który z podanych zbiorów ma najwięcej elementów?

- A. $[\langle -\sqrt{5}; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle -\sqrt{3}; \sqrt{2} \rangle] \cap \mathbb{N}$
B. $[\langle -\sqrt{5}; -\sqrt{2} \rangle \setminus \langle -\sqrt{3}; \sqrt{2} \rangle] \cap \mathbb{Z}$
C. $[\langle -\sqrt{5}; -\sqrt{2} \rangle \cap \langle -\sqrt{3}; \sqrt{2} \rangle] \cap \mathbb{N}$
D. $[\langle -\sqrt{3}; \sqrt{2} \rangle \setminus \langle -\sqrt{5}; -\sqrt{2} \rangle] \cap \mathbb{Z}$

Я11. Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów.

- a) $(-\infty; 7) \setminus [\langle -2; 5 \rangle \cap (-2; 6)]$
b) $[(-8; -1) \cup \langle -5; 0 \rangle] \cap \langle -4; -2 \rangle$
c) $[\mathbb{R} \setminus \{3, 9\}] \cap \langle 3; 10 \rangle$

Я12. Niech $n(X)$ oznacza „liczbę elementów zbioru X ”. O zbiorach A, B, C wiadomo, że $n(A) = 10$, $n(B) = 11$, $n(C) = 12$, $n(A \cap B) = 3$, $n(A \cap C) = 6$, $n(B \cap C) = 5$ oraz $n(A \cap B \cap C) = 2$. Oblicz:

- a) $n(A \setminus B)$ b) $n(A \cup (B \cap C))$ c) $n(A \cup B \cup C)$

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Sześcian sumy: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześcian różnicy: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Suma sześciątów: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Różnica sześciątów: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Różnica n -tych potęg:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Twierdzenie matematyczne zwykle można sformułować w postaci implikacji. Wówczas poprzednik nazywany jest **założeniem**, a następnik — **tezą**.

$$p \Rightarrow q$$

Jeżeli p , to q .

Sposoby dowodzenia twierdzeń

dowód wprost:

założenie



teza

dowód nie wprost:

nieprawda, że teza



nieprawda, że założenie

ZAPISYWANIE I PRZEKSZTAŁCANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

1. Liczby x i y są dodatnie. Zapisz:

- a) iloczyn liczby x i liczby o 3 mniejszej od y ,
- b) sumę liczby 2 razy większej od x i liczby o 3 większej od y ,
- c) kwadrat sumy liczb x i y ,
- d) pierwiastek kwadratowy z liczby 4 razy mniejszej od y ,
- e) iloczyn liczby przeciwnej do x i odwrotności liczby y ,
- f) kwadrat liczby o 5 mniejszej od x ,
- g) liczbę o 3 mniejszą od kwadratu liczby y ,
- h) iloraz liczby o 7 większej od y przez liczbę 7 razy większą od y ,
- i) sześcian liczby o 3 mniejszej od x ,
- j) sześcian sumy liczby x i odwrotności liczby y .

2. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

- a) obwód trójkąta równoramiennego o podstawie długości a i ramieniu b ,
- b) długość ramienia trójkąta równoramiennego o podstawie a i obwodzie c ,
- c) pole kwadratu o obwodzie a ,
- d) obwód prostokąta o polu P , którego jeden z boków ma długość b ,
- e) pole powierzchni całkowitej sześcianu, w którym suma długości wszystkich krawędzi jest równa s ,
- f) objętość sześcianu, którego pole powierzchni całkowitej jest równe P .

3. Zapisz odpowiedź w jak najprostszej postaci.

- a) $2x$ metrów i x centymetrów — ile to centymetrów?
- b) n kilometrów i n metrów — ile to kilometrów?
- c) x godzin, $2x$ minut i 5 sekund — ile to minut?
- d) x dób, x godzin i kwadrans — ile to dób?

4. Odpowiedź na podane pytanie zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.

- a) Zenek ma x banknotów dwudziestozłotowych i o 5 mniej banknotów stużłotowych. Ile ma pieniędzy?
- b) Bilet ulgowy do kina kosztuje x złotych i jest o 5 zł tańszy od biletu normalnego. Ile zapłacono za 2 bilety normalne i 3 ulgowe?
- c) Karolina ma x lat i jest starsza od Zosi o 3 lata. Ile lat miała Karolina, a ile Zosia 2 lata temu?
- d) Jacek i Placek są bliźniakami i każdy z nich ma x lat. Ich siostra Ala za 3 lata będzie dwa razy starsza od każdego z braci. Ile w sumie lat ma obecnie rodzeństwo?

5. Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego dla podanych liczb x i y .

a) $\frac{-x^2}{y}$ $x = -2, y = 0,5$

e) $1 - \frac{x-1}{1-y}$ $x = -3, y = -5$

b) $\frac{(-x)^2}{y}$ $x = -2, y = 0,5$

f) $(x-y)^2 + (x+y)^2$ $x = -7, y = 2$

c) $x\sqrt{2} - (1-y)$ $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{3} - 1$

g) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ $x = 0,7, y = -0,7$

d) $x^3y^2 - y^3x^2$ $x = -1, y = -2$

h) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$

6. Przedstaw wyrażenie w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej.

a) $(1-a) - (a-1)$

g) $(3-x)x + 2(x^2-x) - 5(0,2-0,6x)$

b) $5(a-7) - 2(a+3)$

h) $\frac{12-4(k+1)}{2}$

c) $-2(a-3) - 3(2-3a)$

i) $\frac{-6y-2x(y-x)+2y(x+3)}{2x}$

d) $5a^2 + 2a(1-a)$

j) $3y - \frac{3x-2y}{3}$

e) $4x(2x-7) - 3(2x-7) + 8$

k) $\frac{2k-3}{4} + \frac{5-3k}{2} - \frac{3k+1}{6}$

f) $(3x^2-7x+2)(5x-3)$

l) $2x(3x-0,5y) - \frac{x(y-2)}{0,5}$

7. Załóżmy, że $n \in \mathbb{N}$. Przedstaw w postaci jak najprostszej sumy algebraicznej:

a) sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych poprzedzających liczbę $2n+1$,

b) iloczyn dwóch kolejnych liczb parzystych następujących po liczbie $2n$,

c) sumę trzech kolejnych liczb naturalnych następujących po liczbie $10n$,

d) sumę czterech kolejnych liczb, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3 i następują po liczbie $5n$,

e) średnią arytmetyczną trzech kolejnych liczb, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1 i następują po $4n$,

f) iloczyn liczby $2n$ i pomniejszonej o 3 odwrotności tej liczby,

g) iloczyn sumy dwóch kolejnych liczb parzystych następujących po liczbie $4n$ oraz liczby nieparzystej poprzedzającej liczbę $4n$.

8. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla podanych liczb x i y .

a) $(7x-3)(7x+3)$ $x = 2\sqrt{2}$

b) $(5x-3)(2+y) - 5(xy-1)$ $x = 3, y = -2$

c) $(4y+6)(2y-1) - 8(y^2-3y-2)$ $y = -\frac{1}{4}$

d) $3x(y^2-x) - 5y^2(x+2)$ $x = 3, y = -\sqrt{7}$

e) $-\frac{4x(x-y)}{2} + \frac{6y(y-x)}{3}$ $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$

9. Siłę wiatru można wyrazić w stopniach Beauforta. Gdy znana jest prędkość wiatru v (w m/s), możemy obliczyć siłę wiatru w skali Beauforta w następujący sposób: obliczamy wartość wyrażenia $0,12v + 1,38\sqrt{v} - 0,35$ dla danej prędkości v , a następnie zaokrąglamy otrzymany wynik do jedności (w skali Beauforta posługujemy się tylko liczbami całkowitymi). Oblicz siłę wiatru w stopniach Beauforta, gdy wiatr wieje z prędkością:

- a) 1 m/s b) 5 m/s c) 10 m/s d) 100 km/h

10. Przeczytaj ciekawostkę. Oznaczmy literą t czas (w minutach) bezpiecznego opalania się bez użycia kremu.

- a) Jak długo można przebywać na słońcu bez poparzeń po zastosowaniu kremu o współczynniku SPF równym 12?
b) Zapisz wyrażenie, które pomaga dobrać odpowiedni krem, gdy chcemy przebywać na słońcu g godzin.

Skuteczność ochrony przeciwsłonecznej, którą zapewnia krem do opalania, określa współczynnik SPF (ang. Sun Protection Factor). Współczynnik SPF równy n oznacza, że posmarowanie skóry kremem pozwala na n -krotne wydłużenie czasu przebywania na słońcu.

11. Odpowiedź na podane pytanie zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.

- a) Chcemy rozlać y litrów przecieru jabłkowego do słoików półlitrowych i słoików o pojemności 0,3 litra. Słoików półlitrowych jest p . Ile powinniśmy przygotować słoików o pojemności 0,3 litra?
b) W jakim czasie samochód pokona trasę o długości m kilometrów, jeśli pierwszych 10 km będzie jechał z prędkością w kilometrów na godzinę, a pozostałą część trasy z prędkością o 5 km/h większą?
c) Stół ma długość a metrów i szerokość b centymetrów. Jakie jest pole powierzchni prostokątnego obrusu, który zwisa 15 cm z każdej strony stołu?
d) Prostopadłościenną skrzynię bez wieka zbito z desek o grubości a mm. Skrzynia ma wymiary zewnętrzne $1,5 \text{ m} \times 0,9 \text{ m} \times 0,6 \text{ m}$. Oblicz, jaką może mieć pojemność.
e) Jeden kilogram truskawek kosztuje t złotych, a jeden kilogram czereśni jest o 1,50 zł droższy. Kupiono 5 kg truskawek. Ile kupiono czereśni, skoro za zakupy zapłacono 20 zł?
f) Jeden z boków prostokąta jest o 2 cm krótszy, a drugi o 2 cm dłuższy od boku pewnego kwadratu. Który z czworokątów ma większe pole i o ile większe?

12. Dana jest liczba trzycyfrowa n . Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę, która powstanie przez dopisanie:

- a) cyfry 0 z prawej strony liczby n ,
b) cyfry 1 z prawej strony liczby n ,
c) cyfry 1 z lewej strony liczby n ,
d) cyfry 1 z prawej oraz lewej strony liczby n ,
e) kolejno cyfr 2 i 5 z prawej strony liczby n .

WYŁĄCZANIE WSPÓLNEGO CZYNNIKA PRZED NAWIAS

13. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- | | | | |
|---------------|----------------|---------------|-----------------|
| a) $7x + 7y$ | d) $3p - 12r$ | g) $ab + ac$ | j) $25uv - 10v$ |
| b) $6m - 6n$ | e) $8a + 20b$ | h) $3x - xy$ | k) $12p^2 + 8p$ |
| c) $15s + 5t$ | f) $21c - 14d$ | i) $2mn + 6m$ | l) $9a^2 - 12a$ |

14. Przekształć wyrażenie w na różne sposoby — za każdym razem wyłącz przed nawias jeden z podanych czynników.

- | | | | | |
|------------------------------|----|-----|-------|--------|
| a) $w = 12xy - 3x$ | 3 | x | $3x$ | $-3x$ |
| b) $w = -30x^2 + 20x$ | 5 | x | -10 | $10x$ |
| c) $w = 6x^2 + 10x^3$ | 2 | x | x^2 | $2x^2$ |
| d) $w = 16x^3 - 12x$ | 4 | x | $2x$ | $-4x$ |
| e) $w = 10xy - 5x^2$ | -5 | 10 | x | $5x$ |
| f) $w = 18xy^2 - 30xy$ | -3 | y | xy | $6xy$ |
| g) $w = 60x^3 - 30x^2 + 15x$ | 15 | x | $-5x$ | $15x$ |

15. Zapisz sumę $4x^2 - 20x$ w postaci iloczynu, w którym wystąpi podany czynnik.

- a) x b) 4 c) $4x$ d) 20 e) -4 f) $-4x$ g) -20 h) $-20x$

16. Zapisz sumę $-24x^3 - 6x^2 + 12x$ w postaci iloczynu, w którym wystąpi podany czynnik.

- | | | | |
|--------|---------|----------|-----------|
| a) x | c) $3x$ | e) -24 | g) $-12x$ |
| b) 6 | d) 12 | f) $-4x$ | h) $24x$ |

17. Przedstaw sumę w postaci iloczynu (wyłącz przed nawias wspólny czynnik).

- | | |
|-------------------------------|------------------------------------|
| a) <i>dziewanna + dzielna</i> | d) <i>dziewanna + wysokopienna</i> |
| b) <i>dziewanna + senny</i> | e) <i>dziewanna + wanna</i> |
| c) <i>dziewanna + zwiewna</i> | f) <i>dziewanna + dzienna</i> |

18. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- | | | |
|---------------------|-------------------------|-----------------------------|
| a) $5a + 10b - 15c$ | d) $12x + 5xy + 8x^2$ | g) $5a + 0,7a^2 + 10abc$ |
| b) $12x - 3y - 27z$ | e) $5a^2 + 15a + 20a^3$ | h) $-3k - 6k^3 - 18klm$ |
| c) $3uw + 7uv + 2u$ | f) $15p - 6p^3 - 3p^2$ | i) $10x^4 + 50x^2 - 100x^3$ |

19. Przekształć wyrażenie w na różne sposoby — za każdym razem wyłącz przed nawias jeden z podanych czynników.

- | | | | |
|--------------------------------------|-----|-------|----------|
| a) $w = -15x^3 + 9x^2 + 3x$ | 3 | -3 | $3x$ |
| b) $w = 12x - 30x^2 - 18x^3$ | 6 | -2 | $6x$ |
| c) $w = 6xyz^2 + 4xyz - 8xy$ | 2 | $4x$ | $4xy$ |
| d) $w = 20x^3y - 5x^2y + 25xy$ | 5 | xy | $5xy$ |
| e) $w = -20x^2y^2 - 16x^2y + 8xy^2$ | 4 | xy | $-4xy$ |
| f) $w = 15xy^2z - 30x^2y^2 - 15xy^2$ | -15 | $15x$ | $15xy^2$ |

20. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

- | | | |
|------------------|---------------------------|----------------------------------|
| a) $8x^2 - 16x$ | c) $12x^2y - 18xy^2$ | e) $x^2y + xy^2 + x^2y^2$ |
| b) $2x^3 - 6x^7$ | d) $5x^3y + 30xy + 15x^2$ | f) $5a^2b^3 - 3(ab)^2 - 4a^3b^2$ |

21. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias w liczniku i w mianowniku ułamka, a następnie uprość wyrażenie.

- | | | |
|-------------------------------------|---|--|
| a) $\frac{2x^2 + 2xy}{7x + 7y}$ | c) $\frac{4 + 20x - 12x^2}{3x^3 - 5x^2 - x}$ | e) $\frac{x^2yz + xy^2z + xyz^2}{-x - y - z}$ |
| b) $\frac{20x^2 - 60x}{10x^2 + 5x}$ | d) $\frac{6x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 3x}{12x^3 + 4x^2 - 18x - 6}$ | f) $\frac{2x^2y^3 - 4x^2y^2 + 6x^2y}{2x^2y^2 - 2x^2y}$ |

22. Doprowadź do postaci sumy algebraicznej, zredukuj wyrazy podobne, a następnie przedstaw wynik w postaci iloczynu.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| a) $7(2x - 3) - 5(2 - x) + x + 1$ | d) $k^2(1 - 3k) + 3(k^3 - 1) - (k^2 - 3) + 1$ |
| b) $6a(a + 1) - 9(a^2 - a) + 8a^2$ | e) $3a^2(-a + 3) - 2a(4a + 1) - a^2$ |
| c) $2x^2(x + 1) + x^2(1 - x) + x^3$ | f) $4a(4a - 1) - 2a(4a^2 - a - 2) - 2a^2$ |

23. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu.

- | | |
|--------------------------|---------------------------------------|
| a) $a(4 + b) + 5(4 + b)$ | d) $8(a - 2) + 2b(-a + 2) + c(2 - a)$ |
| b) $7(a - 5) - b(a - 5)$ | e) $ab(a - b) - a^2(b - a)$ |
| c) $a(b - 3) + c(3 - b)$ | f) $a^2(ab - 1) - a(ab - 1)$ |

24. Przedstaw sumę w postaci iloczynu.

- | | |
|------------------------------|-------------------------|
| a) $xz + 5x + yz + 5y$ | f) $2ab - b - 4a + 2$ |
| b) $5xy + 10xt + 2by + 4bt$ | g) $2ax - 2a + x - 1$ |
| c) $x^3 + x^2 + 3x + 3$ | h) $3xy - 6x - y + 2$ |
| d) $7x^2 + 7xy + 2x + 2y$ | i) $2x + 5y - xy - 10$ |
| e) $2x^2y - 10x^2 - 3y + 15$ | j) $4xy + 8x - 6y - 12$ |

25. Uprość wyrażenie.

a) $\frac{3ac+9a+3bc+9b}{4c+12}$

b) $\frac{5x^3-20x^2-2x+8}{2-5x^2}$

c) $\frac{2xy-6x-5yz+15z}{zy-3z+y-3}$

26. Jakie liczby należy wpisać w miejscach prostokątów?

a) $10a^2 - 4 = \square (5a^2 - \square)$

d) $6a^2 - 30a + 12 = \square (\square - \square + 2)$

b) $5a^2 + 10a = \square (\square + 2a)$

e) $15ab^2 + 6a^2b^2 = \square (5b + \square)$

c) $8a^2 - 3a = \square (8a - \square)$

f) $-30ab^2 - 15ab + 15a^2b = \square (6b + \square - \square)$

27. Zapisz sumę $x^2 - 6x$ w postaci iloczynu, w którym wystąpi podany czynnik.

a) 2

b) 3

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{3}x$

e) $10x$

f) $-6x$

28. W pewnym sklepie przeceniono komplet przyborów do pisania, który składa się z ołówka, długopisu i flamastra. Do kupna tego kompletu zachęca hasło: „Teraz cena każdego przyboru mniejsza o 10%, a więc komplet jest tańszy o 30%!”. Wyjaśnij, dlaczego informacja zawarta w hasle jest błędna.



29. Sprawdź, że:

a) iloczyn dwóch dowolnych liczb parzystych jest liczbą parzystą,

b) suma dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 4,

c) suma trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 6.

30. a) Udowodnij, że suma dowolnej liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przestawienia jej cyfr jest liczbą podzielną przez 11.

b) Wykaż, że jeśli od liczby dwucyfrowej odejmiemy liczbę powstałą z przestawienia jej cyfr, to otrzymamy liczbę podzielną przez 9.

c) Ile różnych liczb trzycyfrowych można zapisać za pomocą trzech różnych od zera i różnych między sobą cyfr a , b i c ? Przez jaką liczbę podzielna jest suma wszystkich tych liczb?

31. a) Uzasadnij, że jeśli długość każdego z boków wielokąta zwiększymy a razy, to jego obwód też zwiększy się a razy.

b) Każdy z boków pięciokąta o obwodzie S najpierw skrócono o połowę, a następnie wydłużono o 10 cm. Ile wynosi obwód zmienionego pięciokąta?

c) Każdy z boków pięciokąta o obwodzie S najpierw wydłużono o 10 cm, a następnie skrócono o połowę. Ile wynosi obwód zmienionego pięciokąta?

32. Wyrażenie $a^2 + 5a + 4$ można przedstawić w postaci iloczynu, przekształcając je w następujący sposób:

$$a^2 + 5a + 4 = a^2 + a + 4a + 4 = a(a + 1) + 4(a + 1) = (a + 1)(a + 4)$$

Skorzystaj z tego sposobu i przedstaw w postaci iloczynu podane wyrażenie.

a) $a^2 + 3a + 2$

c) $2a^2 + 3a + 1$

e) $a^2 + 6a + 8$

b) $a^2 + 9a + 8$

d) $6a^2 + 11a + 5$

f) $3a^3 + 5a^2 + 2a$

33. Wyłącz w liczniku i w mianowniku ułamka wspólny czynnik przed nawias, a następnie uprość wyrażenie.

a) $\frac{a^2 + 5a + 4}{a^2 + 4a + 3}$

b) $\frac{4a^2 + 7a + 3}{3a^2 + 7a + 4}$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

34. Przedstaw wyrażenie w postaci (jak najprostszej) sumy algebraicznej.

a) $(x + 5y)^2$

e) $\left(\frac{1}{4}p - 2\right)^2$

i) $(-a + \sqrt{2}b)^2$

b) $\left(3a - \frac{b}{2}\right)^2$

f) $(a\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

j) $(-2y - \sqrt{x})^2$

c) $(2n + 1)^2$

g) $(6x - 7y)(6x + 7y)$

k) $\left(-\frac{1}{2}a - \sqrt{3}b\right)\left(-\frac{1}{2}a + \sqrt{3}b\right)$

d) $(3k + 2w)^2$

h) $\left(\frac{1}{3}w + \sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{3}w - \sqrt{3}\right)$

l) $\left(-\frac{2}{3a} + \frac{2a}{3}\right)\left(\frac{2}{3a} + \frac{2a}{3}\right)$

35. Przedstaw wyrażenie w postaci (jak najprostszej) sumy algebraicznej.

a) $4(x - 1)(x + 1) - (2(x + 1))^2$

d) $-2(2 - x)(y - 1) - (x + y)^2 + 4(y - 1)$

b) $-3(2 - x)(x - 1) - (x - 2)^2$

e) $((3k + 2l) + 5)((3k + 2l) - 5) - 3(3k^2 - 1)$

c) $(p + \sqrt{2})^2 - (-p - \sqrt{2})(\sqrt{2} - p)$

f) $((x + y) + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

36. Przedstaw wyrażenie w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy.

a) $a^2 - 2a + 1$

c) $c^2 + 12c + 36$

e) $9x^2 + 12x + 4$

b) $x^2 + 4x + 4$

d) $y^2 - 20y + 100$

f) $25x^2 - 10x + 1$

37. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(3a - 10b)(3a + 10b)(9a^2 + 100b^2)$

d) $(5p + 3q - r)(5p + 3q + r)$

b) $(x^2 - y)(x^4 + y^2)(x^2 + y)$

e) $\left(2c + d + \frac{1}{2}f\right)\left(\frac{1}{2}f - d - 2c\right)$

c) $(m + n + k + l)(m + n - k - l)$

f) $\left(\frac{2}{3}u - \frac{1}{3}v + \frac{1}{2}w\right)\left(\frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v - \frac{1}{2}w\right)$

38. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x-4)^3$ c) $(p-\sqrt{3})^3$ e) $\left(a+\frac{b\sqrt{3}}{3}\right)^3$
b) $(y+2)^3$ d) $(x^2-2y)^3$ f) $(a+b+1)^3$

39. Przedstaw wyrażenie w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy.

- a) $4k^2+4k\sqrt{3}+3$ e) $\frac{9}{4}p^2q^6+\frac{1}{4}q^6+\frac{3}{2}pq^6$
b) $3u^2+2w^2-2uw\sqrt{6}$ f) $5u^2-20\sqrt{3}uv+60v^2$
c) $\frac{1}{49}a^2+\frac{2}{35}a+\frac{1}{25}$ g) $\frac{4}{3}mn^2+\frac{3}{4}n^3-2n^2\sqrt{mn}$
d) $0,01x^4+1,21-0,22x^2$ h) $\frac{1}{18}r^4s^2t^{10}+\frac{1}{\sqrt{6}}r^2s^3t^6+\frac{3}{4}s^4t^2$

40. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

- a) $(x+5)^3+(x+4)^3$ d) $(5x+y)(2x-3y)-(3x-4y)^3$
b) $(2n+3)^3-(2n+1)^3$ e) $\left(\frac{5n+3}{2}\right)^3+\left(\frac{5n+1}{2}\right)^3$
c) $(2x-y)(2x+y)+3(2x-y)^3$ f) $(2x-1)^4+(3x-1)^3$

41. Przedstaw wyrażenie w postaci sześcienu sumy lub sześcienu różnicy.

- a) $u^3+v^3+3v^2u+3u^2v$ c) $1000-900xy+270x^2y^2-27x^3y^3$
b) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$ d) $-150m^7u^2+125m^6u^3+60m^8u-8m^9$

42. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu.

- a) x^3-64 b) $27a^3b^3-8$ c) $2\sqrt{2}x^3-1$

43. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu.

- a) $8y^3+125$ c) $\frac{a^3}{125}+5$ e) $64y^6-1000$
b) $216-27x^3y^3$ d) $8\sqrt{2}a^7-b^7$ f) $243a^5-32$

44. a) Wykaż, że jeżeli od sumy kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych odejmiemy sumę kwadratów dwóch innych kolejnych liczb naturalnych, to otrzymamy liczbę podzielną przez sumę wszystkich tych czterech liczb.

b) Wykaż, że jeżeli od sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych odejmiemy sumę kwadratów trzech innych kolejnych liczb naturalnych, to otrzymamy liczbę podzielną przez sumę wszystkich tych sześciu liczb.

45. Wykaż, że jeśli od kwadratu liczby dwucyfrowej odejmiemy kwadrat liczby powstałej z przestawienia jej cyfr, to otrzymamy liczbę podzielną przez 99.

46. a) Sprawdź, że $7 \cdot \frac{7}{6} = 7 + \frac{7}{6}$. Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b spełniona jest poniższa równość. Znajdź trzy pary liczb, których iloczyn jest równy ich sumie.

$$\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+b}{b} = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}$$

b) Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b spełniona jest poniższa równość. Znajdź trzy pary liczb, których iloczyn jest równy ich różnicy.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{a}{b} - \frac{a}{a+b}$$

47. Przedstaw wyrażenie w postaci iloczynu.

a) $a^2 - 5ab + 6b^2$

b) $3x^2 - xy - 2y^2$

c) $a^2 + ab - 12b^2$

48. Uzasadnij równość.

a) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

b) $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

PRZEKSZTAŁCANIE WZORÓW

49. Wyznacz x (jeśli to konieczne, zapisz odpowiednie założenia).

a) $y = 2x + 7$

d) $t = -\frac{3x}{a}$

g) $m = \frac{n}{x+1}$

b) $y = 1 - 2(x-3)$

e) $p = \frac{2-x}{p+1}$

h) $k = \frac{a-2x}{b}$

c) $c = \frac{t+1}{ax}$

f) $b = \frac{2x+c}{c+7}$

i) $s = \frac{st-3x}{1+t}$

50. Sprawność pisanja na maszynie to nie tylko umiejętność szybkiego pisanja, ale także pisanja bezbłędnego. Sprawność tę można określić za pomocą podanego poniżej wzoru. Wyznacz z tego wzoru t , w oraz b .

$$s = \frac{w - 10b}{t}$$

s — sprawność pisanja

t — czas pisanja

w — liczba wyrazów napisanych w czasie t

b — liczba popełnionych błędów

51. Wyznacz x (jeśli to konieczne, zapisz odpowiednie założenia).

a) $a + bx = x + c$

c) $y = \frac{8z}{x-2} + 1$

e) $y + \sqrt{5} = \frac{2}{x\sqrt{2} - z\sqrt{3}}$

b) $x - 2t = \frac{x}{m}$

d) $\frac{1}{a} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

f) $y = \sqrt{z} - \frac{2}{\frac{x}{2} - \frac{z}{3}}$

52. Z podanego wzoru wyznacz wskazane wielkości (jeśli to konieczne, zapisz odpowiednie założenia).

a) $p = srl + sr^2$; l, s

g) $S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$; a_1, r

b) $a = \sqrt{2}bc - bd$; b, d

h) $q = \frac{4ac - b^2}{4a}$; a, b

c) $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$; b, h

i) $x = \frac{2\pi}{a-c^2} + \frac{d}{2}$; a, d

d) $S = \frac{a_1}{1-q}$; q

j) $f = \frac{4\pi^2 a}{2(a-b)}$; a, b

e) $P = \pi r(r+l)$; l

k) $s = a^2 + \frac{4(a^2-1)}{2} + 5b$; a

f) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$; r, n

l) $E = \frac{mv^2}{2} + mgh$; h, m

53. Ciało o masie m poruszające się z prędkością v ma energię kinetyczną $\frac{mv^2}{2}$. Jeśli ciało zostało wyrzucone w górę, ta energia zmienia się stopniowo w energię potencjalną, która na wysokości h jest równa mgh . Wyprowadź wzór pozwalający obliczyć:

a) na jaką maksymalną wysokość wzniesie się ciało wyrzucone pionowo w górę z prędkością v ,

b) z jaką prędkością należy wyrzucić ciało do góry, aby wzniosło się na wysokość h .

54. Podaj przykład liczb a, b i c , dla których równość $a + bc = (a+b) \cdot (a+c)$ jest fałszywa. Jaki warunek muszą spełniać liczby a, b i c , aby ta równość była spełniona?

55. Wyznacz a z równości $\frac{a}{b} + \frac{4b}{a} = 4$.

56. Korzystając z podanych wzorów, wyznacz t w zależności od x i y . Doprowadź otrzymany wzór do jak najprostszej postaci. Zapisz potrzebne założenia.

a) $t = ab$; $a = x^2y$; $b = xy^2$

c) $x+t = at$; $x+y = ax$

b) $t = a+b$; $x = \frac{a}{2}$; $y = \frac{b+2}{5}$

d) $t+ay = bx$; $y+t = a$; $x+t = b$

57. Z podanej zależności wyznacz iloczyn xy .

a) $2x = \frac{3}{y}$

c) $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 2$

b) $\frac{xy^2+y}{y} = \sqrt{2}$

d) $\frac{x^3-y^3-(x-y)(x^2+y^2)}{x-y} = 4$

58. Z podanej zależności wyznacz wskazaną wielkość.

a) $\frac{a+b}{a} = 7$; $\frac{a}{b}$

c) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$; $a+b$

b) $ab + 2a^2b + a^3b = 3(a+1)^2$; ab

d) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = 3$; $\frac{b}{a}$

TWIERDZENIA. DOWODZENIE TWIERDZEŃ

59. Sformułuj twierdzenie w postaci implikacji. Wskaż założenie i tezę. Sformułuj implikację odwrotną.

- a) Kwadrat liczby większej od 10 jest liczbą większą od 100.
- b) Każda liczba podzielna przez 4 jest parzysta.
- c) Każda liczba, którą można otrzymać, przestawiając cyfry w liczbie 1623, jest podzielna przez 3.
- d) Kwadrat ma przekątne równej długości.
- e) Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe.

60. Uzasadnij, że podane zdanie nie jest twierdzeniem (tzn. podaj przykład takiej liczby, dla której zdanie jest fałszywe).

- a) Jeżeli liczba naturalna jest dwucyfrowa, to jest parzysta.
- b) Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 4, to suma jej cyfr dzieli się przez 4.
- c) Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 3, to dzieli się przez 7.
- d) Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 5, to jej ostatnią cyfrą jest 5.
- e) Jeśli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to $|x| > 0$.
- f) Jeśli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to $5x > x$.
- g) Jeśli $x^2 > x$, to $x > 1$.
- h) Jeśli $x < 3$, to $x^2 < 3x$.

61. Udowodnij twierdzenie.

- a) Kwadrat liczby całkowitej podzielnej przez 6 jest liczbą podzielną przez 9.
- b) Suma dwóch liczb całkowitych podzielnych przez 3 jest podzielna przez 3.
- c) Iloczyn dwóch liczb całkowitych jest podzielny przez 3, jeśli przynajmniej jedna z nich jest podzielna przez 3.
- d) Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6.
- e) Iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.
- f) Suma kwadratów czterech kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 8.
- g) Kwadrat różnicy dwóch liczb podzielnych przez 8 jest podzielny przez 64.
- h) Iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48.
- i) Różnica kwadratów dwóch liczb, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1, jest liczbą podzielną przez 8.
- j) Reszta z dzielenia sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych przez 3 jest równa 2.

62. Udowodnij twierdzenie.

- a) Jeśli n jest liczbą naturalną, to ostatnią cyfrą liczby $9^{n+1} + 9^n$ jest zero.
- b) Jeśli n jest liczbą naturalną, to liczba $7^{n+2} + 7^n$ jest podzielna przez 50.

63. Udowodnij twierdzenie.

- a) Jeśli liczba x jest wymierna, to liczba $x + 1$ jest wymierna.
- b) Jeśli liczba x jest niewymierna, to liczba $x + 1$ jest niewymierna.
- c) Jeśli liczba dodatnia x jest niewymierna, to $\sqrt{x}$ też jest liczbą niewymierną.
- d) Jeśli suma dwóch liczb jest dodatnia, to co najmniej jedna z liczb jest dodatnia.

64. a) Wykaż, że liczba $17^{17} - 11^{17}$ jest podzielna przez 6.

- b) Wykaż, że liczba $24^{15} - 9^{15}$ jest podzielna przez 5.
- c) Wykaż, że liczba $99^{10} - 1024$ jest podzielna przez 97.
- d) Wykaż, że liczba $1234569^{18} - 1234567^{18} + 1234567$ jest nieparzysta.

65. Podaj dowód twierdzenia.

- a) Liczba całkowita jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy jej kwadrat jest liczbą podzielną przez 4.
- b) Liczba całkowita jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy jej kwadrat jest liczbą podzielną przez 3.
- c) Liczba x jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $x + 2$ jest wymierna.
- d) Liczba x jest niewymierna wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $2x$ jest niewymierna.

66. Wykaż, że:

- a) jeżeli $n \in \mathbb{N}$, to liczba $5n^2 + 5n$ jest podzielna przez 10,
- b) jeżeli p jest liczbą parzystą, to reszta z dzielenia sumy kwadratów liczb: $p, p + 1$ oraz $p + 2$ przez 12 jest równa 5,
- c) reszta z dzielenia sumy kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych przez 3 jest równa 2,
- d) reszta z dzielenia sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych przez 12 jest równa 11,
- e) suma sześciątów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą.

67. Przeczytaj twierdzenie i jego dowód w ramce obok. Udowodnij, że:

- a) suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną,
- b) iloraz liczby wymiernej różnej od zera przez liczbę niewymierną jest liczbą niewymierną.

Twierdzenie:

Jeśli a jest liczbą niewymierną i w jest liczbą wymierną, to $a - w$ jest liczbą niewymierną.

Dowód (metodą nie wprost):

Przypuśćmy, że liczba $x = a - w$ jest wymierna. Wówczas także liczba $x + w$ jest wymierna (bo suma liczb wymiernych jest liczbą wymierną). Ponieważ $x + w = a - w + w = a$, więc liczba a musiałaby być wymierna, co jest sprzeczne z założeniem.

68. Uzupełnij i udowodnij twierdzenie: *Iloczyn liczby wymiernej x i liczby niewymiernej y jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy...*

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Wartość wyrażenia $\frac{x^2y - y^2x}{x - y}$ dla $x = -\frac{1}{2}$ oraz $y = 3$ jest równa:

- A. -2,5 B. -3,5 C. -1,5 D. 1

2. W klasie II uczy się x chłopców i jest ich o 3 mniej niż dziewcząt. Chłopcy postanowili, że z okazji Dnia Kobiet każdy z nich kupi każdej z koleżanek kwiatek o wartości 8 zł, a wspólnie nabędą czekoladki, których łączny koszt wynosi 100 zł. Która z podanych zależności przedstawia kwotę potrzebną chłopcom do zrealizowania tych planów?

- A. $8x^2 - 24x + 100$ B. $8x^2 + 24x + 100$ C. $8x^2 + 100x$ D. $8x^2 + 24x$

3. Które z podanych wyrażeń przyjmuje dla każdej liczby naturalnej tę samą wartość co wyrażenie $(x + 3)^2 - 2(x - 4)^2$?

- A. $-x^2 + 41$ B. $-x^2 - 10x - 23$ C. $-x^2 + 22x + 41$ D. $-x^2 + 22x - 23$

4. Jeżeli $\frac{a-3b}{b} = 4$, to wartość ilorazu $\frac{b}{a}$ jest równa:

- A. 7 B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{4}$ D. 4

5. Pole sześciokąta foremnego o boku a można wyznaczyć ze wzoru $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Ile wynosi obwód sześciokąta foremnego o polu $P = 6\sqrt{3}$?

- A. 2 B. 24 C. 12 D. $4\sqrt{3}$

6. Zapisz wyrażenie w jak najprostszej postaci.

- a) $4(5a - 2b) - (a + 3)(6 - b)$ b) $\frac{5x(x-2)}{6} + \frac{(x+1)(x-3)}{4}$ c) $(2a + 5)^3 - (8a + 3)^2$

7. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

- a) $6x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ b) $2k - km + 10 - 5m$ c) $4k^2 + 28k + 49$ d) $0,01y^2 - 6$

8. Wyznacz ze wzorów wskazaną zmienną (jeśli to konieczne, zapisz odpowiednie założenia).

- a) $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}; \quad r$ b) $Q_1 = c_w m_1 (T - T_1); \quad T$

9. Wykaż, że:

- a) jeżeli liczba a jest niewymierna, to liczba $2a + 5$ również jest niewymierna,
b) suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5,
c) suma kwadratów trzech dowolnych liczb nieparzystych przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3.

Я 10. Wiadomo, że $p - 12q + 3r = 4$. Zatem wyrażenie $r - 4q + \frac{1}{3}p - (2p - 24q + 6r)^2 - 1$ przyjmuje wartość:

- A. $-7\frac{2}{3}$ B. $-63\frac{2}{3}$ C. -61 D. $-62\frac{2}{3}$

Я 11. Która z podanych równości zachodzi dla dowolnych liczb x oraz y ?

- A. $(x - y)^2(y - x)^2 = x^4 - y^4$ C. $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2 + xy\sqrt{2})(x^2 + y^2 - xy\sqrt{2})$
 B. $(x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ D. $(x + y)(x^2 + y^2) = x^3 + y^3$

Я 12. Tylko jedna z podanych liczb nie jest podzielna przez 7. Która to liczba?

- A. $13^9 - 6^9$ B. $777^7 - 77^7$ C. $9^{10} - 1024$ D. $15^8 - 7^8$

Я 13. Jeżeli zachodzi zależność $\frac{(a-b)^2}{6a^2-6b^2} = \frac{1}{3}$, to iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy:

- A. -1 B. -3 C. $-\frac{1}{3}$ D. 3

Я 14. Wykaż, że jeśli w dowolnej liczbie czterocyfrowej k cyfrę tysięcy przestawimy z cyfrą jedności, a cyfrę setek z cyfrą dziesiątek, to różnica między nowo otrzymaną liczbą a liczbą k jest podzielna przez 9.

Я 15. Przedstaw podaną sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

- a) $k - 3 + 2(k - 3)^2$ b) $x(p\sqrt{3} - 1) - y^2(6p^2 - 2)$ c) $x^3 + 3\sqrt{3}$ d) $8y^6 - 2$

Я 16. Wykaż, że dla każdej liczby parzystej p liczba $(p + 2)^3 - (p - 2)^3$ jest podzielna przez 16.

Я 17. Oto dwa twierdzenia:

- ① *Jeśli trójkąt jest równoboczny, to wszystkie jego kąty są równe.*
 ② *Jeśli wszystkie kąty trójkąta są równe, to jest on równoboczny.*

Z którego z tych twierdzeń korzystano w podanym rozumowaniu?

- a) Trójkąt ABC ma trzy równe kąty, a więc jest równoboczny.
 b) W trójkącie KLM mamy $|KL| = |LM| = |MK|$, a więc wszystkie jego kąty są równe.
 c) W trójkącie PQR kąt przy wierzchołku P jest większy od kąta przy wierzchołku R , a więc ten trójkąt nie jest równoboczny.
 d) W trójkącie XYZ bok XY jest dłuższy od boku YZ , a więc nie jest prawdą, że wszystkie kąty tego trójkąta mają równe miary.

PRZED MATURĄ

1. Wyrażenie $16 - (3x + 1)^2$ jest równe:
 A. $(3 - 3x)(5 + 3x)$ B. $(15 - 3x)^2$ C. $(5 - 3x)(5 + 3x)$ D. $15 - 9x^2$
2. Liczba $(2\sqrt{7} - 5)^2(2\sqrt{7} + 5)^2$ jest równa:
 A. 9 B. 3 C. 2809 D. $28 - 20\sqrt{7}$
3. Dla $x = \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$ oraz $y = \sqrt{2} - 1$ wartość wyrażenia $x^2 - 2xy + y^2$ jest równa:
 A. 4 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
4. Dane są dwie sumy algebraiczne: $3x^3 - 2x$ oraz $-3x^2 - 2$. Iloczyn tych sum jest równy:
 A. $-9x^5 + 4x$ C. $-x^5 + 6x^3 - 6x^2 + 4x$
 B. $-9x^6 + 6x^3 - 6x^2 + 4x$ D. $-9x^6 + 4x$
5. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $3a^2 - 2ab + 3b^2 \geq 0$.
6. Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 8 jest równa 6.
7. W rozwinięciu wyrażenia $(2\sqrt{3}x + 4y)^3$ współczynnik przy iloczynie xy^2 wynosi:
 A. $32\sqrt{3}$ B. 48 C. $96\sqrt{3}$ D. 144
8. Dane są liczby a i b , takie że $a - b = 4$ i $ab = 7$. Oblicz $a^3b + ab^3$. Zakoduj w kratkach obok kolejno, od lewej do prawej, cyfry setek, dziesiątek i jednostki otrzymanego wyniku.
9. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$.
10. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $5x^2 + y^2 - 4xy + 6x + 9 \geq 0$.
11. Udowodnij, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 9.
12. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba $k^3m - km^3$ jest podzielna przez 6.

POTĘGI I PIERWIASTKI

Potęga o wykładniku całkowitym

$$a^0 = 1 \quad (\text{dla } a \neq 0)$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (\text{dla } a \neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{dla } a \neq 0)$$

Własności potęg

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (\text{dla } a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (\text{dla } b \neq 0)$$

Potęga o wykładniku wymiernym

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (\text{dla } a \geq 0)$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \quad (\text{dla } a \geq 0)$$

$$a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} \quad (\text{dla } a > 0)$$

Pierwiastek n -tego stopnia

Dla $a \geq 0$ i parzystej liczby naturalnej n większej od 1:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b \geq 0 \text{ i } b^n = a.$$

Dla liczby naturalnej nieparzystej n większej od 1:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a.$$

Własności pierwiastków
dla nieparzystej liczby n

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{dla } b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

Własności pierwiastków
dla parzystej liczby n

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n \quad \text{dla } a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

Niektóre jednostki

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

(litr)

$$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

(mililitr)

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$$

(hektolitr)

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$$

(hektar)

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

(ar)

$$1 \text{ q} = 100 \text{ kg}$$

(kwintal)

Notacja wykładnicza

$$a \cdot 10^n, \text{ gdzie } a \in \langle 1; 10 \rangle \text{ i } n \in \mathbb{Z}$$

Duże liczby

$$1 \text{ mld} = 1000 \text{ mln} = 10^9$$

$$1 \text{ bln} = 1000 \text{ mld} = 10^{12}$$

POTĘGI O WYKŁADNIKACH CAŁKOWITYCH

1. Oblicz.

- a) 2^3 $(-2)^3$ 2^4 $(-2)^4$ -2^4 2^{-3} $(-2)^{-3}$ 2^{-4} $(-2)^{-4}$
- b) $\left(\frac{1}{5}\right)^0$ $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ $\frac{1}{5^{-3}}$ $\left(-\frac{1}{5}\right)^0$ $\frac{1}{5^3}$ $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$ $\frac{1}{(-5)^3}$ $\frac{1}{(-5)^{-3}}$
- c) $0,5^3$ $-0,5^3$ $(-0,5)^3$ $0,5^{-3}$ $(-0,5)^{-3}$ $-0,5^{-3}$ $\frac{1}{0,5^3}$ $\frac{1}{0,5^0}$ $\frac{1}{(-0,5)^3}$
- d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^1$ $-\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$ $-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$
- e) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $\left(1\frac{1}{3}\right)^0$ $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$ $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$ $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$ $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-3}$

2. Oblicz (zapisz wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka zwykłego).

- a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\left(1\frac{1}{5}\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ c) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1}$ $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $\left(5\frac{1}{9}\right)^0$
- b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$ d) $0,1^4$ $0,2^{-3}$ $0,01^{-5}$

3. Przedstaw za pomocą potęgi o wykładniku naturalnym.

- a) a^{-7} b) b^{-9} c) $\left(\frac{1}{c}\right)^{-5}$ d) $\left(\frac{d}{e}\right)^{-6}$ e) $\frac{1}{m^{-8}}$ f) $\frac{x^{-4}}{y^{-4}}$

4. Które z poniższych liczb są dodatnie? Które są większe od 1? Odpowiedz, nie wykonując dokładnych rachunków.

- a) 835^6 $(-835)^6$ -835^6 835^{-6} $(-835)^{-6}$ -835^{-6}
- b) $0,746^8$ $-0,746^8$ $(-0,746)^8$ $0,746^{-8}$ $-0,746^{-8}$ $(-0,746)^{-8}$

5. Zapisz w postaci jednej potęgi.

- a) $17^8 \cdot 17^{-2}$ d) $8^9 : 8^{-4}$ g) $((-6)^7)^3$
- b) $3^{13} \cdot 3^{13}$ e) $0,5^{-3} : 0,5^7$ h) $0,2^{(-5)^3}$
- c) $(-5)^{-6} \cdot (-5)^{-3}$ f) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2} : \left(-\frac{2}{7}\right)^{-9}$ i) $\left(\left(2\frac{3}{7}\right)^{-4}\right)^{-6}$

6. Zapisz w postaci potęgi liczby 2.

- a) 8^{-7} d) $4^7 \cdot 2^5$ g) $8^{-7} : 4^{-5}$
- b) $0,25^6$ e) $4^{-5} \cdot 8^{-3}$ h) $0,25^7 : 4^{-2}$
- c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-5}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot 32$ i) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-6} : 16$

7. Zapisz w postaci potęgi liczby 10.

- | | | |
|---------------|----------------------------|--|
| a) 1000^4 | d) $1000^{-3} \cdot 0,1^8$ | g) $0,001^{-2} \cdot 0,01^{-3} \cdot 0,1^{-4}$ |
| b) $0,01^5$ | e) $100^{-7} : 0,001^9$ | h) $0,1^4 \cdot 100^{-12} : 1000^{-5}$ |
| c) 100^{-4} | f) $0,1^5 : 0,01^6$ | i) $(0,01^{-3})^{-5} \cdot (100^2)^3$ |

8. Ile zer ma podana liczba w zapisie dziesiętnym?

- a) $5 \cdot 10^8$ b) $4,97 \cdot 10^{17}$ c) $8,5936 \cdot 10^{29}$ d) $7,368 \cdot 10^{103}$

9. Zapisz każdą z podanych liczb w notacji wykładniczej.

- | | | |
|--------------------|----------------------|-------------------------|
| $a = 40\,000\,000$ | $c = 8420\,000\,000$ | $e = 0,0000000035$ |
| $b = 57\,000\,000$ | $d = 0,000007$ | $f = 0,000000000000153$ |

10. a) Zapisz każdą z podanych liczb w notacji wykładniczej.

700 tys. 5 mln 800 mln 150 mln 5,6 mld 250 mld

b) Zapisz podane liczby, używając skrótów tys., mln lub mld.

$8 \cdot 10^4$ $3,4 \cdot 10^5$ $5 \cdot 10^7$ $1,5 \cdot 10^8$ $2,8 \cdot 10^{10}$ $5,3 \cdot 10^{11}$

11. Wykonaj obliczenia, wynik zapisz w notacji wykładniczej.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $8,5 \cdot 10^{13} \cdot 3$ | c) $(4 \cdot 10^{-3}) \cdot (6 \cdot 10^2)$ | e) $(2 \cdot 10^5)^{-3}$ |
| b) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3,4 \cdot 10^3)$ | d) $(4 \cdot 10^5)^2$ | f) $(1,6 \cdot 10^{14}) : (8 \cdot 10^{-5})$ |

12. Ile razy liczba a jest większa od liczby b ?

- | | |
|--|--|
| a) $a = 2 \cdot 10^{15}$, $b = 2 \cdot 10^8$ | d) $a = 4 \cdot 10^9$, $b = 2 \cdot 10^4$ |
| b) $a = 7 \cdot 10^6$, $b = 7 \cdot 10^{-2}$ | e) $a = 9 \cdot 10^7$, $b = 3 \cdot 10^{-3}$ |
| c) $a = 6 \cdot 10^{-3}$, $b = 6 \cdot 10^{-7}$ | f) $a = 6 \cdot 10^{-4}$, $b = 2 \cdot 10^{-6}$ |

13. Ile cyfr ma podana liczba w zapisie dziesiętnym?

- a) $2^{17} \cdot 5^{18}$ b) $2^{14} \cdot 5^{13} \cdot 3,41$ c) $20^{16} : 2^{17}$ d) $\frac{30^{18}}{3^{19}} \cdot 6,66$

14. Która z podanych liczb jest większa?

- | | | |
|--|--|--|
| a) $a = 7^8$, $b = 7^{10}$ | e) $a = \left(\frac{3}{8}\right)^{-19}$, $b = \left(\frac{3}{8}\right)^{-17}$ | i) $a = (-9)^{-8}$, $b = (-9)^{-7}$ |
| b) $a = \left(\frac{6}{11}\right)^{15}$, $b = \left(\frac{6}{11}\right)^{13}$ | f) $a = 6^8$, $b = (-6)^9$ | j) $a = 6^9$, $b = 5^9$ |
| c) $a = 5^{-9}$, $b = 5^{-10}$ | g) $a = (-7)^7$, $b = (-7)^6$ | k) $a = \left(\frac{2}{7}\right)^8$, $b = \left(\frac{5}{7}\right)^8$ |
| d) $a = \left(\frac{1}{5}\right)^{-12}$, $b = \left(\frac{1}{5}\right)^{-20}$ | h) $a = (-5)^{-10}$, $b = 5^{-11}$ | l) $a = 5^{-10}$, $b = 8^{-10}$ |

15. Porównaj liczby, nie wykonując dokładnych obliczeń.

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| a) $1,01^6$ i $1,01^9$ | d) $0,241^{-5}$ i $0,241^4$ | g) $0,174^{-5}$ i $0,215^{-5}$ |
| b) $0,53^0$ i $0,53^2$ | e) $8,19^{-4}$ i $8,19^{-7}$ | h) $5,4^7$ i $0,2^{-7}$ |
| c) $0,23^0$ i $0,23^{-2}$ | f) $0,75^{-5}$ i $0,75^{-4}$ | i) $10,2^{-4}$ i $0,1^4$ |

16. Podaj przykłady liczb a , b i c spełniających warunki:

$$a^3 < a < 0 \qquad b^5 < b^3 \qquad 0 < c^{-3} < c$$

17. Znajdź x .

- | | | |
|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $2^x = \frac{1}{8}$ | d) $0,5^x = 0,25$ | g) $0,1^x = 1000$ |
| b) $2^x = 0,25$ | e) $0,5^x = \frac{1}{8}$ | h) $1,5^x = \frac{2}{3}$ |
| c) $2^x = 0,0625$ | f) $0,5^x = 32$ | i) $1,25^x = 0,512$ |

18. Porównaj podane liczby.

- | | | |
|---|---|--|
| a) 3^{10} i $\left(\frac{1}{9}\right)^{-4}$ | d) 4^{-50} i 2^{-25} | g) $(5^5)^{-1}$ i $\left(\left(\frac{1}{36}\right)^{-2}\right)^{-5}$ |
| b) 4^{-7} i $\left(\frac{1}{2}\right)^{14}$ | e) $(-9)^8$ i $(-3)^{14}$ | h) $(7^{-3})^{10}$ i $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}\right)^5$ |
| c) 5^0 i $(-5)^0$ | f) $\left(-\frac{1}{7}\right)^5$ i $(-5)^7$ | i) $\left(\frac{1}{27}\right)^4$ i $(9^{-2})^5$ |

19. Która z podanych liczb jest większa?

- | | | |
|-------------------------------------|---|--|
| a) $a = 4^{15}$, $b = 8^9$ | d) $a = \left(\frac{1}{9}\right)^{19}$, $b = 27^{-13}$ | g) $a = 2,5^{60}$, $b = 6^{30}$ |
| b) $a = 81^{29}$, $b = 27^{39}$ | e) $a = 2^{30}$, $b = 3^{20}$ | h) $a = 5^{-150}$, $b = 10^{-100}$ |
| c) $a = 25^{-25}$, $b = 125^{-20}$ | f) $a = 2^{50}$, $b = 1,5^{100}$ | i) $a = 0,3^{-15}$, $b = (0,4)^{-20}$ |

20. Zapisz w postaci jednej potęgi.

- | | | |
|---|----------------------------|--------------------------------------|
| a) $(3^2)^7 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^5$ | d) $4^6 \cdot 3^{12}$ | g) $(0,2^7 \cdot 5^7)^{-3}$ |
| b) $\frac{4}{9} : 1,5^{-2}$ | e) $6^{-7} \cdot 5^7$ | h) $(3^8 \cdot 9^{-3})^7 : 27^4$ |
| c) $(2^5 : 8^6)^{17}$ | f) $(25^4 \cdot 2^8)^{-7}$ | i) $(7^9 : 49^{-5})^2 \cdot 7^{-40}$ |

21. Zapisz w postaci potęgi liczby 2.

- | | | |
|----------------------------|----------------------|--|
| a) $2^{10} + 2^{10}$ | c) $16^7 + 16^7$ | e) $2^{-8} + 2^{-8} + 2^{-8} + 2^{-8}$ |
| b) $4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5$ | d) $4^{-9} + 4^{-9}$ | f) $16^{-4} + 16^{-4} + 16^{-4} + 16^{-4}$ |

22. Oblicz.

a) $\frac{5^7 \cdot 6^5}{30^5}$

d) $\frac{3^{10} \cdot 13^{11}}{13^3 \cdot 39^9}$

g) $\frac{35^{-9}}{5^{-7} \cdot 7^{-10}}$

b) $\frac{21^8}{3^7 \cdot 7^9}$

e) $\frac{(42^3)^5}{7^{15} \cdot 6^{13}}$

h) $\frac{6^{-8} \cdot 11^{-9}}{66^{-10} \cdot 6^4}$

c) $\frac{22^5 \cdot 4}{2^8 \cdot 11^4}$

f) $\frac{(2^2)^8 \cdot (7^5)^3}{14^{14}}$

i) $\frac{(3^4)^{-5} \cdot (13^{-6})^3}{39^{-19}}$

23. Uprość wyrażenie.

a) $a^{-5} \cdot a^2 \cdot a^{-6}$

c) $\frac{x^5 \cdot x^{-7}}{x^{-6}}$

e) $(y^{-6} \cdot y^2)^5$

g) $\left(\frac{b^3}{b^{-5}}\right)^{-8}$

b) $4m^8 \cdot m^3 \cdot 7m^{-4}$

d) $\frac{12p^{-2}}{4p^9 \cdot p^{-5}}$

f) $(2n^7 \cdot 5n^{-9})^{-3}$

h) $\left(\frac{15w^{-6}}{5w^{-8}}\right)^2$

24. Uprość wyrażenie i przedstaw je jako sumę lub różnicę dwóch potęg o tych samych podstawach.

a) $\frac{7^{30} + 7^{12} \cdot 7^{10}}{(7^4)^5}$

c) $\frac{(19^2)^5 - 19 \cdot 19^{-10}}{19^2 \cdot (19^3)^4}$

e) $\frac{8^5 \cdot 4^3 + (2^6)^2}{(8 \cdot 2^4)^4}$

b) $\frac{11^{12} \cdot 11^{13} + (11^3)^5}{(11 \cdot 11^5)^3}$

d) $\frac{25^7 - 5^4 \cdot 125}{(5^5)^2}$

f) $\frac{3^{-8} \cdot 9^{-4} - 27^{-5}}{27 \cdot 9^{-6}}$

25. Uprość wyrażenie.

a) $(2x)^7 \cdot 4^{-3}$

d) $\left(\frac{5x}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{0,6}{xy}\right)^{-2}$

g) $(0,1x^3 : y^2)^2 \cdot (1000xy)^3$

b) $125 \cdot (x^2 : 25)^3$

e) $(8x^{-6} \cdot 2y^2 : x^5)^{-3}$

h) $(2x^2)^{13} \cdot (5y^{-2})^{13} \cdot 0,01^6$

c) $(2xy)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)^{-3}$

f) $\left(\frac{25x^6y^5}{(5xy^2)^3}\right)^{-2}$

i) $42^5 \cdot \left(\frac{x^2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}y^3\right)^3$

26. Odpowiedzi na poniższe pytania zapisz w notacji wykładniczej.

a) Ile to centylitrów?

1,5 l, 250 ml, 50 ml, 0,07 hl

b) Ile to hektopaskali?

5 Pa, 13 MPa, 0,3 MPa, 1800 mPa

c) Ile to herców?

150 kHz, 103,7 MHz, 1,03 GHz

d) Ile to amperów?

13 mA, 105,2 mA, 500 μ A

Przedrostek	Mnożnik
G (giga)	1 000 000 000
M (mega)	1 000 000
k (kilo)	1000
h (hekto)	100
dag (deka)	10
d (decy)	0,1
c (centy)	0,01
m (mili)	0,001
μ (mikro)	0,000001
n (nano)	0,000000001

27. Oblicz iloczyn ab oraz iloraz $\frac{a}{b}$ i przedstaw wyniki w notacji wykładniczej.

a) $a = 6 \cdot 10^{14}$, $b = 3 \cdot 10^6$

e) $a = 8 \cdot 10^{-14}$, $b = 2 \cdot 10^6$

b) $a = 7 \cdot 10^9$, $b = 2 \cdot 10^{15}$

f) $a = 9 \cdot 10^{-8}$, $b = 2 \cdot 10^{-12}$

c) $a = 4,8 \cdot 10^{25}$, $b = 1,2 \cdot 10^5$

g) $a = 5,5 \cdot 10^7$, $b = 1,1 \cdot 10^{-13}$

d) $a = 6,3 \cdot 10^{11}$, $b = 4,2 \cdot 10^{19}$

h) $a = 3 \cdot 10^{-14}$, $b = 1,2 \cdot 10^{-8}$

28. Oblicz pole i obwód kwadratu o boku o podanej długości, a następnie pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu o takiej samej długości krawędzi. Wyniki podaj w notacji wykładniczej.

a) $5 \cdot 10^7$ m

b) $1,2 \cdot 10^8$ m

c) $5,12 \cdot 10^{-3}$ m

Średnica protonu: $1,7 \cdot 10^{-15}$ m

Grubość włosa: 10^{-4} m

Średnica Ziemi: $1,3 \cdot 10^7$ m

Odległość Ziemia-Słońce: $1,5 \cdot 10^{11}$ m

29. Oblicz, ile razy większa jest:

a) odległość Ziemia-Słońce od średnicy Ziemi,

b) grubość włosa od średnicy protonu,

c) średnica Ziemi od grubości włosa,

d) średnica Ziemi od średnicy protonu.

30. Uporządkuj liczby x^5 , x^4 , x^{-3} , x^{-2} w kolejności od najmniejszej do największej, jeśli wiadomo, że x jest liczbą:

a) większą od 1,

c) ujemną większą od -1 ,

b) dodatnią mniejszą od 1,

d) mniejszą od -1 .

31. Uporządkuj podane liczby od najmniejszej do największej.

a) 2^{150} , 3^{100} , 5^{50}

b) 2^{80} , 3^{60} , 5^{40}

c) 20^{40} , 30^{30} , 40^{20}

32. Znajdź liczbę a .

a) $32^{-12} = \left(\frac{1}{4}\right)^a$

b) $\left(\frac{1}{27}\right)^3 = 9^a \cdot 81^5$

c) $\frac{25^5}{125} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^a\right)^3$

33. Która z podanych liczb jest większa?

a) $a = 99^{50}$, $b = 1001^{25}$

b) $a = 10^{60}$, $b = 25^{40}$

c) $a = 15^{15}$, $b = 9^{20}$

34. Która z podanych liczb jest większa?

a) $a = 44^4$, $b = 55^3$

b) $a = 33^{44}$, $b = 44^{33}$

c) $a = 35^{30}$, $b = 45^{20}$

35. Oblicz.

a) $6^{15} \cdot 36^{12} \cdot 9^{-19} : 8^{13}$

b) $\frac{10^5 \cdot 0,01^3}{20^{-3}} \cdot 16^{-1}$

c) $\frac{12,5^6 \cdot 2^{18}}{0,1^{-8}} + 0,2^{-3} \cdot 8 : 0,1^{14}$

36. Przeczytaj informacje podane obok.

a) Ile waży cząsteczka wody?

b) Ile cząsteczek jest w szklance wody o pojemności 250 ml ?

c) Z ilu cząsteczek składa się ciało człowieka o masie 70 kg? (Możesz założyć, że składa się ono głównie z wody).

1 mol to $6,02 \cdot 10^{23}$ cząsteczek

1 mol wody waży 18 g

37. Kapitan Nemo, bohater powieści Juliusza Verne'a, uzyskiwał złoto z wody morskiej. Rzeczywiście w morzach pierwiastek ten jest obecny, choć w bardzo małym stężeniu — zaledwie $4 \cdot 10^{-9}\%$ (symbol $\%$ oznacza promil, czyli jedną tysięczną część wielkości). W ilu kilogramach wody morskiej znajduje się 1 g złota? Wynik podaj w notacji wykładniczej.

38. Oblicz (wynik podaj w notacji wykładniczej).

a) $5 \cdot 10^9 + 6 \cdot 10^8$

h) $7 \cdot 10^{-18} + 4 \cdot 10^{-19}$

b) $4,3 \cdot 10^{13} + 5,7 \cdot 10^{12}$

i) $6,5 \cdot 10^{-15} + 4,2 \cdot 10^{-14}$

c) $9 \cdot 10^{20} + 6,8 \cdot 10^{22}$

j) $2,7 \cdot 10^{-10} + 9,1 \cdot 10^{-12}$

d) $8 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^8$

k) $6 \cdot 10^{-7} - 5 \cdot 10^{-8}$

e) $6 \cdot 10^{13} - 1,5 \cdot 10^{11}$

l) $3,8 \cdot 10^{-9} - 0,8 \cdot 10^{-11}$

f) $1,6 \cdot 10^{19} - 9,7 \cdot 10^{18}$

m) $3,2 \cdot 10^{-14} - 7,5 \cdot 10^{-16}$

g) $2,2 \cdot 10^{12} - 1,2 \cdot 10^9$

n) $6 \cdot 10^{-48} - 6,5 \cdot 10^{-50}$

39. Przeczytaj tekst w ramce.

Każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych. Takie przedstawienie liczby nazywamy rozkładem liczby na czynniki pierwsze. Na przykład:

$$1944 = 2^3 \cdot 3^5$$

$$11\,011 = 7^1 \cdot 11^2 \cdot 13^1$$

Korzystając z rozkładu na czynniki pierwsze liczb a i b , odpowiedz na podane pytania.

$$a = 61\,740 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$$

$$b = 120\,050 = 2^1 \cdot 5^2 \cdot 7^4$$

a) Które z liczb: 6, 15, 45, 25, 75, 28 są dzielnikami liczby a , a które — liczby b ?

b) Znajdź największy wspólny dzielnik obu tych liczb.

c) Zapisz kilka dzielników liczby a , które są wielokrotnościami liczby 30.

d) Podaj rozkład na czynniki pierwsze następujących liczb:

$$10a \quad a \cdot b \quad a^3 \quad \frac{36b}{a} \quad \frac{a}{63}$$

40. Przeczytaj tekst zamieszczony w ramce.

W dziesiętkowym systemie liczbowym każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w postaci sumy (skończonej lub nieskończonej) iloczynów liczb jednocyfrowych i potęg liczby 10. Na przykład:

$$207,351 = 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3}$$

W informatyce stosowany jest dwójkowy system liczbowy, w którym każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci sumy iloczynów liczb jednocyfrowych i potęg liczby 2. Na przykład liczba 45 jest równa:

$$101101_{(2)} = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Na liczbach zapisanych w systemie dwójkowym można wykonywać działania, podobnie jak na liczbach naturalnych. Oto reguły dodawania i mnożenia.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

•	0	1
0	0	0
1	0	1

- a) Liczby $10_{(2)}$, $101_{(2)}$, $10001_{(2)}$ i $1110_{(2)}$ zapisz w systemie dziesiętkowym.
 b) Liczby 9, 16, 17 i 40 zapisz w systemie dwójkowym.
 c) Wykonaj podane działania na liczbach w systemie dwójkowym. Sprawdź wyniki, zapisując liczby w systemie dziesiętkowym.

$$10101_{(2)} + 10_{(2)}$$

$$10100_{(2)} + 101_{(2)}$$

$$10110_{(2)} + 111_{(2)}$$

$$101_{(2)} \cdot 11_{(2)}$$

$$11001_{(2)} \cdot 10_{(2)}$$

$$1110_{(2)} \cdot 101_{(2)}$$

PIERWIASTKI

41. Oblicz.

a) $\sqrt{\frac{36}{49}}$

c) $\sqrt{1,21}$

e) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

g) $\sqrt[4]{0,0081}$

b) $\sqrt{0,81}$

d) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$

f) $\sqrt[3]{-0,064}$

h) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

42. Oblicz.

a) $\sqrt{25 - 16}$

b) $\sqrt{6^2 \cdot 4^2}$

c) $\sqrt{1 + \frac{9}{16}}$

d) $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16}}$

$$\sqrt{25 : 16}$$

$$\sqrt{10^2 - 6^2}$$

$$\sqrt{\frac{25}{4} - 4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{12^2}}$$

$$\sqrt{25 \cdot 16}$$

$$\sqrt{13^2 - 12^2}$$

$$\sqrt{49 \cdot \frac{9}{25}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{25}}$$

43. Oblicz.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{\sqrt{81}} & \sqrt{\sqrt{0,0001}} & \sqrt{\sqrt{\frac{16}{81}}} & \text{c) } \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{64}}} & \sqrt[3]{\sqrt{1000\,000}} & \sqrt{\sqrt[3]{7^6}} \\ \text{b) } \sqrt{5\sqrt{25}} & \sqrt{12\sqrt{\frac{1}{9}}} & \sqrt{\sqrt{2\sqrt{64}}} & \text{d) } \sqrt[3]{3\sqrt{81}} & \sqrt{10\sqrt[3]{1000}} & \sqrt[3]{20\sqrt{\frac{4}{25}}} \end{array}$$

44. Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} & \text{e) } \sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{0,4} & \text{i) } \frac{6\sqrt{200}}{9\sqrt{2}} \\ \text{b) } 4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{12} & \text{f) } 10\sqrt[3]{-3} \cdot (-2\sqrt[3]{9}) & \text{j) } 4\sqrt{75} : \sqrt{12} \\ \text{c) } \sqrt{1\frac{1}{14}} \cdot \sqrt{\frac{10}{21}} & \text{g) } \sqrt[3]{1\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{4}{15}} & \text{k) } \sqrt[4]{768} : \sqrt[4]{3} \\ \text{d) } -3\sqrt{\frac{6}{7}} \cdot 2\sqrt{10\frac{1}{2}} & \text{h) } 2\sqrt[3]{-0,9} \cdot 5\sqrt[3]{-\frac{6}{25}} & \text{l) } 12\sqrt[4]{160} : 3\sqrt[4]{10} \end{array}$$

45. Oblicz.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } (3\sqrt[3]{2})^3 & \text{d) } (2\sqrt[4]{1,5})^4 & \text{g) } \sqrt[4]{5^{12}} & \text{j) } (\frac{1}{3}\sqrt[3]{3})^6 \\ \text{b) } (\frac{\sqrt{5}}{4})^2 & \text{e) } \sqrt[3]{7^6} & \text{h) } \sqrt[5]{10^{10}} & \text{k) } \sqrt{9 \cdot 5^4} \\ \text{c) } (0,1\sqrt[3]{3})^5 & \text{f) } \sqrt{3^6} & \text{i) } (2\sqrt{2})^4 & \text{l) } \sqrt[4]{16 \cdot 10^{12}} \end{array}$$

46. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 5\sqrt{2} & 3\sqrt{5} & 0,2\sqrt{7} & 1,2\sqrt{10} & \text{b) } 2\sqrt[3]{10} & 3\sqrt[3]{2} & 0,2\sqrt[3]{100} & 1,1\sqrt[3]{20} \end{array}$$

47. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka tak, aby pod pierwiastkiem pozostała jak najmniejsza liczba naturalna.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{8} & \sqrt{18} & \sqrt{27} & \sqrt{175} & \text{c) } \sqrt[3]{24} & \sqrt[3]{56} & \sqrt[3]{375} \\ \text{b) } \sqrt{600} & \sqrt{2800} & \sqrt{5000} & \text{d) } \sqrt[3]{3000} & \sqrt[3]{16\,000} & \sqrt[3]{500\,000\,000} \end{array}$$

48. Zapisz w jak najprostszej postaci.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{32} + 5\sqrt{2} & \text{c) } 3\sqrt[3]{40} - 4\sqrt[3]{5} & \text{e) } \frac{4\sqrt{50} - 3\sqrt{32}}{\sqrt{2}} \\ \text{b) } \sqrt{63} - \sqrt{28} + \sqrt{175} & \text{d) } 3\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{3000} - 5\sqrt[3]{81} & \text{f) } \frac{5\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{54}}{2\sqrt[3]{2}} \end{array}$$

49. Usuń niewymierność z mianownika.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{1}{\sqrt{5}} & \text{d) } \frac{1}{\sqrt[3]{25}} & \text{g) } \frac{1+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} & \text{j) } \frac{\sqrt[3]{9}-2}{2\sqrt[3]{3}} \\ \text{b) } \frac{5}{6\sqrt{7}} & \text{e) } \frac{3}{5\sqrt[3]{2}} & \text{h) } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \text{k) } \frac{\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{2}} \\ \text{c) } -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} & \text{f) } -\frac{7\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{9}} & \text{i) } \frac{5+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{25}} & \text{l) } \frac{2\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}{5\sqrt[3]{9}} \end{array}$$

50. Przedstaw wyrażenie w postaci sumy.

- | | | |
|---|-------------------------------------|---|
| a) $(2 + 3\sqrt{5})(4 - 2\sqrt{5})$ | e) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{6})^2$ | i) $(3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})^2$ |
| b) $(3 - 2\sqrt[3]{9})(1 + \sqrt[3]{3})$ | f) $(4 - 5\sqrt{2})^2$ | j) $(5 + 2\sqrt{11})(5 - 2\sqrt{11})$ |
| c) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(\sqrt{10} - 2\sqrt{5})$ | g) $(3\sqrt{2} - \sqrt{7})^2$ | k) $(2\sqrt{6} - \sqrt{7})(2\sqrt{6} + \sqrt{7})$ |
| d) $(5 + 3\sqrt{7})^2$ | h) $(\sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3})^2$ | l) $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{10})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{10})$ |

51. Przekształć wyrażenie.

- | | |
|--|--|
| a) $(3\sqrt{24} - 5\sqrt{6}a)^2$ | d) $(\sqrt{5 - \sqrt{21w}} + \sqrt{5 + \sqrt{21w}})^2$ |
| b) $(5x\sqrt{3x} + 0,1\sqrt{75x^3})^2$ | e) $(\sqrt{6y + 2\sqrt{5y}} + \sqrt{6y - 2\sqrt{5y}})^2$ |
| c) $(\sqrt{4t + \sqrt{7}} - \sqrt{4t - \sqrt{7}})^2$ | f) $(\sqrt{\sqrt{7m} - \sqrt{3n}} - \sqrt{\sqrt{3n} + \sqrt{7m}})^2$ |

52. Usuń niewymierność z mianownika.

- | | | | |
|-------------------------------------|---|--|--|
| a) $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ | d) $\frac{4\sqrt{3}}{7 - 2\sqrt{3}}$ | g) $\frac{2 - 4\sqrt{2}}{5 + 2\sqrt{2}}$ | j) $\frac{4 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$ |
| b) $\frac{7}{5 + \sqrt{6}}$ | e) $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ | h) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{6}}$ | k) $\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ |
| c) $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5} - 4}$ | f) $\frac{1 + 7\sqrt{5}}{-1 - \sqrt{5}}$ | i) $\frac{\sqrt{10} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ | l) $\frac{4\sqrt{10} - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2\sqrt{10}}$ |

53. Przedstaw wyrażenie w postaci sumy.

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(3 + \sqrt{6})^3$ | c) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^3$ | e) $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5})^3$ |
| b) $(\sqrt{4} - \sqrt{2})^3$ | d) $(2 - \sqrt[3]{5})^3$ | f) $(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})^3$ |

54. Przedstaw wyrażenie w postaci sumy.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\left(\frac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)^2$ | c) $\left(\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\right)^2$ | e) $\left(\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{3}}\right)^3$ |
| b) $\left(\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2$ | d) $\left(\frac{1 + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{6}}\right)^3$ | f) $\left(\frac{2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}\right)^3$ |

55. Znajdź liczby a, b, c, d, e, f .

$$\sqrt[3]{a} = 4 \quad \sqrt{b} = 9 \quad \sqrt[4]{c} = 1\frac{1}{2} \quad \sqrt[5]{d} = 0,1 \quad \sqrt[6]{e} = 2 \quad \sqrt[7]{f} = 0,0001 = 0,01$$

56. Porównaj podane liczby.

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $\sqrt{138}$ i $5\sqrt{5}$ | b) $4\sqrt{37}$ i $\sqrt{592}$ | c) $5\sqrt[3]{6}$ i $3\sqrt[3]{25}$ | d) $3\sqrt[3]{7}$ i $2\sqrt[3]{23}$ |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

57. Uprość wyrażenie ($b > 0$; $n \in \mathbb{N}$).

- | | | |
|-----------------------|--|--|
| a) $\sqrt{a^4}$ | d) $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[3]{a^4b^2}$ | g) $(\sqrt[4]{a^2} + \sqrt{b})(-\sqrt[4]{a^2} - \sqrt{b})$ |
| b) $\sqrt[5]{a^{30}}$ | e) $\frac{\sqrt{a^2b}}{\sqrt{b}}$ | h) $\sqrt[3]{3b^2} \cdot \sqrt[3]{9b^5}$ |
| c) $\sqrt{4^n}$ | f) $(\sqrt{b})^3$ | i) $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2 + a^2}$ |

58. Włącz czynnik pod znak pierwiastka ($a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$).

- | | | | |
|---------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------|
| a) $2a\sqrt{a}$ | c) $\frac{1}{2}ab^2\sqrt{212}$ | e) $2ab\sqrt[3]{b}$ | g) $2^{2n}\sqrt{2^{1-2n}}$ |
| b) $5a\sqrt{\frac{1}{3}}$ | d) $5^n\sqrt{5b}$ | f) $2ab\sqrt[3]{\frac{1}{b}}$ | h) $1\frac{1}{4} \cdot a\sqrt{0,8b}$ |

59. Wśród podanych liczb wskaż pary liczb, w których jedna jest odwrotnością drugiej.

$$\begin{array}{lll} a = \sqrt{8} + \sqrt{7} & b = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{3} & c = 2 - \sqrt{3} \\ d = \sqrt{3} + 2 & e = 2\sqrt{2} - \sqrt{7} & f = \sqrt{28} - \sqrt{27} \end{array}$$

60. Oblicz.

- | | |
|--|--|
| a) $\sqrt{6-2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6+2\sqrt{5}}$ | e) $\frac{1}{5\sqrt{3}-4} + \frac{1}{5\sqrt{3}+4}$ |
| b) $\sqrt{3\sqrt{7}+\sqrt{14}} \cdot \sqrt{3\sqrt{7}-\sqrt{14}}$ | f) $\frac{3}{3\sqrt{7}+7\sqrt{3}} + \frac{3}{7\sqrt{3}-3\sqrt{7}}$ |
| c) $\sqrt[3]{8-\sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8+\sqrt{37}}$ | g) $\frac{\sqrt{5}}{2-3\sqrt{5}} + \frac{2}{3\sqrt{5}+2}$ |
| d) $\sqrt{4\sqrt{5}-2\sqrt{11}} \cdot \sqrt{4\sqrt{5}+2\sqrt{11}}$ | h) $\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{6}}$ |

61. Oblicz.

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{4}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{5}}}$ | b) $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{20+\sqrt{21}}}$ |
|--|--|

62. Wykaż, że zachodzi poniższa równość.

- | | | |
|--|--|--|
| a) $1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ | b) $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$ | c) $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}}}$ |
|--|--|--|

63. Wykaż, że podane liczby są równe.

- | | |
|--|---|
| a) $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{8+2\sqrt{15}}$ | b) $a = 2\sqrt{4-\sqrt{15}}$, $b = \sqrt{10} - \sqrt{6}$ |
|--|---|

64. Wykaż podaną równość.

- | | |
|---|---|
| a) $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{6}$ | b) $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}} = \sqrt{2}$ |
|---|---|

65. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka ($a > 0, b > 0, c > 0; n \in \mathbb{N}$).

- a) $\sqrt{a^2 b}$ c) $\sqrt{4^n(a+1)}$ e) $\sqrt{\frac{bc^2}{4a^2}}$ g) $\sqrt[3]{a^6 b^3 c}$
 b) $\sqrt{a^4 b^3}$ d) $\sqrt{3^{2n} a^2 b}$ f) $\sqrt{\frac{9b}{4a^3}}$ h) $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3 + 1}}$

66. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka w taki sposób, aby pod pierwiastkiem pozostała liczba 2.

$$\sqrt{0,5} \quad \sqrt{4,5} \quad \sqrt{2,88} \quad \sqrt{3\frac{5}{9}} \quad \sqrt[3]{0,002} \quad \sqrt[3]{\frac{16}{27}} \quad \sqrt[3]{0,054} \quad \sqrt[4]{0,0162}$$

67. Uzasadnij, że podane liczby są liczbami przeciwnymi.

- a) $2 - \sqrt{5}$ i $\frac{1}{2 + \sqrt{5}}$ b) $\frac{4}{\sqrt{20} + \sqrt{24}}$ i $2(\sqrt{5} - \sqrt{6})$ c) $\sqrt{72} - 2\sqrt{19}$ i $\frac{2}{\sqrt{18} + \sqrt{19}}$

68. Oblicz.

- a) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}$ b) $\frac{(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27})^2}{6 - 4\sqrt{3}}$ c) $\frac{1 - 2\sqrt[4]{7} + \sqrt{7}}{(\sqrt{2} - \sqrt[4]{28})^2}$

69. Wykaż, że podana liczba jest niewymierna.

- a) $\sqrt{11}$ c) $\sqrt{20}$ e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ g) $2 + \sqrt{5}$
 b) $\sqrt{6}$ d) $5\sqrt{3}$ f) $\frac{2}{3}\sqrt{13}$ h) $\sqrt{17} - 3$

70. Czy podana liczba jest wymierna?

- a) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ c) $\sqrt{5 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{5 + \sqrt{2}}$
 b) $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})$ d) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

71. Tylko trzy z podanych liczb są wymierne. Wskaż te liczby.

$$\sqrt[3]{54^{54}} \quad \sqrt[111]{7^{7777}} \quad \sqrt[3]{1222222} \quad \sqrt[18]{18^{9999}} \quad \sqrt[4]{77744} \quad \sqrt[3]{2002^{2002}}$$

72. Usuń niewymierność z mianownika.

- a) $\frac{7}{2 + \sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{5}}{2 + \sqrt[3]{5}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{25}}{1 + \sqrt[3]{5}}$
 b) $\frac{4}{3 - \sqrt[3]{2}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{4}}{5 - \sqrt[3]{2}}$ f) $\frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}$

73. Usuń niewymierność z mianownika.

- a) $\frac{1}{\sqrt[4]{3} - 1}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{4} - \sqrt[4]{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2}}$

74. Usuń niewymierność z mianownika.

- a) $\frac{\sqrt{7 + \sqrt{7}}}{\sqrt{7} - \sqrt{7}}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{5}}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}$

Я75. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{12}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

b) $\frac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

c) $\frac{\sqrt{7\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$

Я76. Uprość wyrażenie.

a) $\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

c) $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right) \cdot \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

b) $\frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$

d) $\left(\frac{1+\sqrt{5-a}}{5-a+\sqrt{5-a}}-\frac{1-\sqrt{5-a}}{5-a-\sqrt{5-a}}\right) \cdot \sqrt{\frac{5}{a}-1}$

Я77. Przedstaw w prostszej postaci.

a) $\sqrt{9-4\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

Я78. a) Uzasadnij wzór podany w ramce obok.

b) Korzystając z tego wzoru, uzasadnij równości:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

① $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} = \sqrt{a-1} + 1$ dla $a \geq 2$

② $\sqrt{2+2\sqrt{a(2-a)}} = \sqrt{a} + \sqrt{2-a}$ dla $0 \leq a \leq 2$

POTĘGI O WYKŁADNIKACH WYMIERNYCH

79. a) Zapisz każdą z podanych liczb za pomocą pierwiastka.

$3^{\frac{1}{2}}$

$5^{\frac{1}{3}}$

$7^{\frac{2}{3}}$

$4^{-\frac{1}{3}}$

$11^{-\frac{2}{3}}$

$10^{\frac{4}{3}}$

$5^{2,5}$

$7^{-1,5}$

b) Zapisz każdą z podanych liczb w postaci potęgi liczby naturalnej mniejszej od 10.

$\sqrt[3]{6}$

$\sqrt[9]{2}$

$(\sqrt[5]{3})^4$

$\sqrt{5^3}$

$\frac{1}{\sqrt{7}}$

$\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$

$\frac{1}{\sqrt[7]{2^5}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^3$

80. Oblicz.

$4^{\frac{1}{2}}$

$8^{-\frac{1}{3}}$

$27^{\frac{2}{3}}$

$32^{1,6}$

$81^{-1,25}$

$9^{2,5}$

$0,01^{-1,5}$

$0,0016^{0,75}$

$\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{3}}$

$\left(5\frac{1}{16}\right)^{-1\frac{1}{4}}$

$100\,000^{-0,4}$

81. Zapisz każdą z podanych liczb w postaci potęgi liczby 2.

$\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

$(\sqrt{8})^5$

$\frac{1}{\sqrt[7]{16}}$

$\sqrt[8]{0,5}$

82. Uprość wyrażenie.

a) $a^5 \cdot a^{\frac{1}{3}}$

d) $d^2 \cdot d^{-\frac{1}{2}} : d^{-2}$

g) $(g^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}} : g^{-2}$

b) $b^{\frac{2}{5}} : b^{-3}$

e) $\frac{e^{-3} \cdot e^{\frac{2}{3}}}{e^2}$

h) $\left(\frac{h^{-2}}{h^3 \cdot h^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

c) $(c^{\frac{1}{6}})^2$

f) $(f^{-5})^{-\frac{2}{3}} \cdot f^4$

i) $\frac{i^{-3} \cdot i}{i^{\frac{3}{4}} \cdot i^{\frac{1}{2}}}$

83. Zapisz wynik działania jako potęgę liczby 3.

a) $27^{\frac{1}{4}}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{9^{-3}}$

g) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}$

b) $\sqrt[5]{9}$

e) $\sqrt{27} \cdot 81^{-2}$

h) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$

c) $\frac{9}{\sqrt[3]{3}}$

f) $\sqrt[3]{9^{-5}}$

i) $\sqrt{\sqrt[5]{3}}$

84. Zapisz wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $a^2 \cdot \sqrt{a}$

c) $\frac{\sqrt[4]{c}}{c^3}$

e) $\frac{e}{\sqrt[4]{e}}$

g) $\sqrt[3]{g\sqrt{g}}$

b) $\sqrt[3]{b^{-4}}$

d) $\sqrt{d} \cdot \sqrt[3]{d}$

f) $\sqrt{\sqrt[3]{f}}$

h) $\sqrt[4]{h\sqrt[3]{h}}$

85. Porównaj liczby.

a) $\sqrt[3]{5}$ i $5^{0,3}$

c) $5^{2,5}$ i $25\sqrt{5}$

e) $0,01^{\frac{1}{3}}$ i $10^{-\frac{2}{3}}$

g) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$ i $\sqrt[4]{\sqrt[3]{6}}$

b) $7\sqrt{7}$ i $7^{1,7}$

d) $32^{0,6}$ i $4\sqrt{4}$

f) $0,5^{-\frac{1}{4}}$ i $\sqrt{\sqrt{2}}$

h) $\sqrt{3^5}$ i $\sqrt[3]{9^4}$

86. Znajdź n .

a) $\sqrt[n]{5} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[12]{5}$

b) $\sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[n]{7} = \sqrt[5]{7}$

c) $\frac{\sqrt[7]{3}}{\sqrt[n]{3}} = \sqrt[8]{3}$

87. Przedstaw wyrażenie w postaci potęgi o podstawie 5.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{5}}$

e) $\sqrt{0,2} : \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{125}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{125}}$

f) $\sqrt{\sqrt[3]{25}} : \sqrt[3]{\sqrt[4]{125}}$

88. Uzasadnij, że dla $a \geq 0$ prawdziwa jest dana równość.

a) $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$

b) $\sqrt[6]{a^9} = a\sqrt{a}$

c) $\sqrt[6]{a^8} = a\sqrt[3]{a}$

d) $\sqrt[4]{a^{10}} = a^2\sqrt{a}$

89. Sprawdź, czy na twoim kalkulatorze można obliczać potęgi o wykładnikach wymiernych. Jeśli można, to oblicz: $13^{\frac{1}{6}}$, $7^{0,6}$, $0,3^{0,3}$. Wyniki podaj z dokładnością do części tysięcznych.

90. Przeczytaj poniższy tekst.

Dziesięciobój to dyscyplina, w której startują wyłącznie mężczyźni. Składa się z następujących konkurencji: bieg na 100 m, skok w dal, pchnięcie kulą, skok wzwyż, bieg na 400 m, bieg przez płotki na 110 m, rzut dyskiem, skok o tyczce, rzut oszczepem, bieg na 1500 m.

Łączną liczbę punktów oblicza się, sumując punkty za poszczególne konkurencje.

W każdej konkurencji punkty oblicza się z odpowiedniego wzoru. Na przykład zawodnik, który w biegu na 100 m uzyskał czas x sekund, otrzymuje:

$$25,4347(18 - x)^{1,81} \text{ punktów.}$$

Za wynik x centymetrów w skoku w dal zawodnik otrzymuje:

$$0,14352(x - 220)^{1,4} \text{ punktów.}$$

- a) Zawodnik przebiegł 100 m w czasie 10 s. Korzystając z informacji podanych w ramce, oblicz, ile punktów można uzyskać za taki wynik w dziesięcioboju.
b) Ile punktów w dziesięcioboju można otrzymać za skok w dal na odległość 8 m?

91. Przedstaw w postaci potęgi, której podstawą jest liczba całkowita.

- a) $2^{-0,2} \cdot \sqrt[5]{4} : 8^{-\frac{2}{3}}$ c) $3^{2,5} : 81^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{-\frac{3}{8}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{54}} \cdot \sqrt{25^3 \cdot 125^{-5}}$
b) $\sqrt[6]{7\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[7]{7}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{6}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[3]{36}} : \sqrt{6}$ f) $\frac{1}{\sqrt[3]{49}} : \sqrt{7\sqrt{7}}$

92. Znajdź liczbę x spełniającą podany warunek.

- a) $x^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$ b) $x^{\frac{2}{3}} = 3$ c) $x^{-\frac{1}{4}} = 2$ d) $x^{-\frac{3}{4}} = 1$

93. Uprość wyrażenie.

- a) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} - (ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$ c) $(x + y)^{\frac{1}{3}} (x^2 + 2xy + y^2)^{\frac{1}{3}}$
b) $[(m - n)(m^2 + mn + n^2)]^{\frac{1}{3}}$ d) $\left(p - 3p^{\frac{2}{3}}q^{\frac{1}{3}} + 3p^{\frac{1}{3}}q^{\frac{2}{3}} - q\right)^{\frac{1}{3}}$

POTĘGI O WYKŁADNIKACH RZECZYWISTYCH

94. Oblicz.

- a) $64^{\frac{1}{3}}$ $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$ $\left(2\frac{3}{4}\right)^{-1}$ $1,96^{\frac{1}{2}}$ $0,027^{-\frac{1}{3}}$ $0^{\sqrt{5}}$
b) $9^{\frac{3}{2}}$ $16^{-\frac{3}{4}}$ $4^{2,5}$ $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ $0,0081^{-0,25}$ $0,36^{-1,5}$ $1^{-\pi}$

95. Zapisz każde z podanych wyrażeń w postaci potęgi liczby 3.

a) 81 $\frac{1}{9}$ $\sqrt[4]{3}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ $\sqrt[7]{27}$ $\frac{1}{3^{\sqrt{7}}}$ $\left(\frac{1}{3}\right)^\pi$
 b) $3\sqrt{3}$ $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$ $\frac{1}{9\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$ $\frac{27\sqrt{3}}{\sqrt[5]{9}}$ $3\sqrt{3^\pi}$ $27^{-\sqrt{2}}$

96. Oblicz.

a) $(5^{2\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ $(4^\pi)^{-\frac{2}{\pi}}$ $(2^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}$ $(0,5^{-\frac{\sqrt{3}}{3}})^{\sqrt{3}}$ $(3^{1+\sqrt{2}})^{1-\sqrt{2}}$
 b) $3^{1+\sqrt{2}} \cdot 3^{1-\sqrt{2}}$ $\frac{5^{\sqrt{2}-1}}{5^{\sqrt{2}+1}}$ $4^{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot 2^{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$ $\frac{25^{\sqrt{7}-1}}{5^{2\sqrt{7}}}$ $\frac{7^{2\sqrt{3}+3}}{49^{\sqrt{3}+2}}$

97. Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

a) $4^{\frac{1}{3}}$, $4^{-3,2}$, 4^π , 4 , $4^{2,3}$, $4^{-\sqrt{2}}$
 b) $0,3^{2,1}$, $0,3^0$, $0,3^{2\sqrt{2}}$, $0,3^{1,3}$, $0,3^{\frac{1}{\pi}}$, $0,3^{\sqrt{3}}$

98. Zapisz podaną liczbę w innej postaci, używając symbolu pierwiastka.

a) $3^{\frac{2}{7}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $7^{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ d) $2^{1\frac{1}{4}}$ e) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{\pi}{4}}$ f) $10^{1,4}$ g) $2^{-2,5}$ h) $5^{-\frac{\sqrt{6}}{2}}$ i) $0,01^{-0,75}$ j) $\sqrt{2^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$

99. Podaj z dokładnością do części setnych wartość potęgi (użyj kalkulatora).

a) $12^{\sqrt{2}}$ b) $21^{\sqrt{5}}$ c) $(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$ d) π^π e) $(\sqrt{13})^\pi$

100. Które z podanych liczb są równe liczbie zapisanej w ramce?

a) $3^{\frac{4}{3}}$ $\sqrt[3]{3^4}$ $3^{1,3}$ $9^{\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt{3}}}$ $\sqrt[4]{3^3}$ $3^{\frac{3}{\sqrt{3}}}$ $9^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ $\sqrt[3]{81}$
 b) $\sqrt{1000}$ $(\sqrt{10})^3$ $\left(\frac{1}{10}\right)^{-\frac{3\pi}{2\pi}}$ $10^{1,5}$ $10^{\frac{2}{3}}$ $0,9^{-\frac{\sqrt{3}}{4}}$ $(\sqrt[4]{100})^3$ $(\sqrt[3]{10})^2$
 c) $\sqrt[3]{2^{\sqrt{18}}}$ $2^{\sqrt[6]{18}}$ 2 $2^{\sqrt{2}}$ $4^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\sqrt[6]{36}$ $2^{2^{\frac{1}{2}}}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2\sqrt{2}}$

101. Znajdź dwie kolejne liczby całkowite, między którymi leży wartość wykładnika potęgi, a następnie oszacuj wartość potęgi.

a) $a = 3^{\sqrt{7}}$ b) $b = \left(\frac{2}{5}\right)^\pi$ c) $c = \left(1\frac{2}{3}\right)^{-\sqrt{6}}$ d) $d = 10^{\sqrt{30}-3}$ e) $p = 7^{-\sqrt{5}+1}$

102. Przedstaw podane wyrażenia w postaci potęgi o podstawie a ($a > 0$).

a) $(a^4 : a^{-\frac{1}{3}})^{-3} \cdot a^5$ $(a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}})^{\sqrt{2}} : (a^{\sqrt{2}})^2$ $(a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{a^3})^5$ $(a^{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{a^{\sqrt{3}}})^{\sqrt{6}}$
 b) $\sqrt{\sqrt[3]{a}\sqrt{a}}$ $\sqrt[3]{a^{2\sqrt{5}} : \sqrt{a^{\sqrt{5}}}}$ $\sqrt{a^3\sqrt{a^2\sqrt[5]{a}}}$ $\sqrt{\sqrt[3]{a^\pi} : \sqrt[6]{a^{3\pi}}}$

103. Znajdź x .

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad (7\sqrt{3})^x = 7^3 & \text{c)} \quad \left(3^{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)^x = \sqrt{3} & \text{e)} \quad 2^{1-2\sqrt{6}} \cdot 2^x = 2^7 & \text{g)} \quad (5^{\sqrt{2}-1})^x = 5 \\ \text{b)} \quad 5^{6+\sqrt{7}} \cdot 5^x = 5^6 & \text{d)} \quad \left(5^{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^x = 1 & \text{f)} \quad 6^{\sqrt{5}-2} : 6^x = \frac{1}{6^3} & \text{h)} \quad \frac{(\sqrt{5})^x}{5^{\sqrt{2}+2}} = 5 \end{array}$$

104. Wykaż, że jeżeli dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$, to:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad a^{1-\pi} \cdot b^{1-\pi} \cdot c^{1-\pi} = 1 \\ \text{b)} \quad a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} + c^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \\ \text{c)} \quad (ab)^{-1} + (bc)^{-1} + (ac)^{-1} = a + b + c \end{array}$$

105. Na osi liczbowej zaznaczono następujące liczby:

$$2^{\frac{1}{\pi}} \quad \pi^{\sqrt{3}} \quad \sqrt{2}^{\pi} \quad 6^{\sqrt{2}} \quad (\sqrt{2})^{-\sqrt{3}} \quad 3^{\sqrt{3}}$$

Przyporządkuj te liczby odpowiadającym im literom.



106. Oblicz.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \frac{9^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}}{3^{\frac{1}{4}} \cdot 81^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{7}{12}}} & \text{e)} \quad (0,1^{\sqrt{10}})^{\sqrt{\frac{2}{5}}} \\ \text{b)} \quad \frac{1}{25} \cdot \sqrt{125} \cdot 25^{-1,5} \cdot \left(\frac{1}{625}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{5} & \text{f)} \quad \left[\left(1\frac{9}{16}\right)^{\frac{3\pi}{2}}\right]^{-\frac{1}{3\pi}} \\ \text{c)} \quad \frac{\frac{1}{3} \cdot 7^{-\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{5}}}{\left(392^{\frac{1}{12}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{0,3}\right)^{-2}} & \text{g)} \quad (6^{\sqrt{3}-\pi})^2 \cdot 36^{\pi-\sqrt{3}} \\ \text{d)} \quad \left[\left(\frac{5}{7}\right)^0\right]^{-7,5} - 3,5 \cdot 4^{-\frac{3}{2}} - 4^{-2} + 81^{0,25} & \text{h)} \quad \left(\frac{7^{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{7^{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{array}$$

107. Uporządkuj podane liczby w kolejności od najmniejszej do największej.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad 3^{2\sqrt{3}} & 3^{\sqrt{2}} & \sqrt{3} & 3^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \quad (3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} \quad 3^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad 3^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ \text{b)} \quad \frac{9}{16} & \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}} & 0,75^{-\sqrt{3}} & \left(1\frac{1}{3}\right)^{-2\pi} \quad \left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{4}{3}} \quad \left(\frac{4}{3}\right)^0 \\ \text{c)} \quad 5^{3\sqrt{3}} & 25^{-2} & 0,2^{-1} & \left(\sqrt[3]{25}\right)^{\sqrt{7}} \quad \left(\frac{1}{125}\right)^{\pi} \quad 0,04^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

108. Znajdź x .

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \quad x^{\sqrt{2}} = 3 & \text{b)} \quad x^{\sqrt{3}-1} = 1 & \text{c)} \quad x^{\pi} = 8 & \text{d)} \quad x^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} = 4 \end{array}$$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Liczba $5^{-\frac{10}{3}}$ jest równa:

A. $-\frac{5^{10}}{5^3}$ B. $\frac{1}{125\sqrt[3]{5}}$ C. $\frac{1}{5^{\frac{3}{10}}}$ D. 5^{-7}
2. Wskaż równość prawdziwą:

A. $\sqrt{123^3} = \sqrt[3]{123^2}$ C. $\sqrt[3]{(-123)^3} = \sqrt{(-123)^2}$
 B. $(-123)^3 = -123^3$ D. $(-123)^2 = -123^2$
3. Niech $a = -\frac{1}{2}$ i $b = 4$. Wartość wyrażenia $a^b \cdot b^a$ jest równa:

A. -2^5 B. 1 C. 2^{-5} D. $\frac{1}{4}$
4. Dla każdej liczby dodatniej a wyrażenie $\frac{(a^{1,2})^{-5} \cdot a^{1,2}}{a^{-4}}$ jest równe:

A. $a^{-8,8}$ B. $a^{1,2}$ C. $a^{-0,8}$ D. a^{-9}
5. Dane są liczby $a = 6 \cdot 10^7$, $b = 12 \cdot 10^{-13}$. Oblicz ab oraz $\frac{a}{b}$. Wyniki zapisz w notacji wykładniczej.
6. a) Dane są liczby $a = 2^{4\pi}$, $b = 4^{3\pi}$, $c = 8^{2\pi}$, $d = 16^\pi$. Wykaż, że $ab = cd$.
 b) Dane są liczby $u = (8\pi)^{-2}$, $w = (4\pi)^4$, $x = (2\pi)^6$, $y = \pi^{-8}$. Wykaż, że $uwx = y = 2^8$.
7. Liczba $5^{\frac{2}{3}} : (\sqrt[3]{5^4})^2$ jest równa:

A. $\frac{1}{25}$ B. $\frac{1}{5}$ C. 25 D. 125
8. Które wyrażenie ma taką samą wartość jak wyrażenie $\frac{(\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3})^3}{9}$?

A. $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ B. 1 C. $1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{6}$ D. $1 + 3\sqrt[3]{6}$
9. Które z podanych wyrażień nie jest równe $a^{\frac{1}{12}}$?

A. $\sqrt[8]{\sqrt[9]{a^6}}$ B. $\sqrt[4]{\frac{a}{a}}$ C. $\sqrt[7]{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a}}$ D. $\frac{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[10]{a}}{\sqrt[3]{a}}$
10. Która z podanych liczb jest mniejsza od $\frac{1}{4}$?

A. $0,2^{-\sqrt{3}}$ B. $4^{\frac{1}{4}}$ C. $(\sqrt{5})^{-3}$ D. $(\frac{1}{2})^{\frac{\pi}{3}}$
11. Dane są liczby $a = 3,6 \cdot 10^{-7}$, $b = 9 \cdot 10^{-9}$.

a) Ile razy liczba a jest większa od liczby b ?
 b) O ile liczba a jest większa od liczby b ?
12. Wykaż, że liczba $\sqrt{10} - 3$ jest niewymierna.

PRZED MATURĄ

1. Liczba naturalna $n = 2^{14} \cdot 5^{15}$ w zapisie dziesiętnym ma:
 A. 14 cyfr B. 15 cyfr C. 16 cyfr D. 30 cyfr
2. Liczba $\frac{8^{20} - 2 \cdot 4^{20}}{2^{20} \cdot 4^{10}}$ jest równa:
 A. 0 B. $2^{20} - 2$ C. 2^{19} D. $4 - 2^{10}$
3. Liczba $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2$ jest równa:
 A. 4 B. 9 C. $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ D. $4 + 2\sqrt{3}$
4. Liczba $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ jest równa:
 A. $\sqrt[6]{3}$ B. $\sqrt[4]{3}$ C. $\sqrt[3]{3}$ D. $\sqrt{3}$
5. Dane są liczby $x = 4,5 \cdot 10^{-8}$ oraz $y = 1,5 \cdot 10^2$. Wtedy iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy:
 A. $3 \cdot 10^{-10}$ B. $3 \cdot 10^{-6}$ C. $6,75 \cdot 10^{-10}$ D. $6,75 \cdot 10^{-6}$
6. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc = 1$, to

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = ab + ac + bc.$$
7. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $1,5^{100} < 6^{25}$.
8. Liczba $\frac{27^{665} \cdot \sqrt[3]{3^{-92}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{152}{3}}}$ jest równa:
 A. 3^{725} B. 3^{1995} C. 3^{2015} D. 3^{2045}
9. Dane są liczby: $a = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$, $b = \frac{1}{2\sqrt[4]{8}}$, $c = \sqrt[4]{8}$, $d = \frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ oraz $k = 2^{-\frac{1}{4}}$. Prawdziwa jest równość:
 A. $k = a$ B. $k = b$ C. $k = c$ D. $k = d$
10. Liczba $(3 - 2\sqrt{3})^3$ jest równa:
 A. $27 - 24\sqrt{3}$ B. $27 - 30\sqrt{3}$ C. $135 - 78\sqrt{3}$ D. $135 - 30\sqrt{3}$
11. Liczba $(\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}})^2$ jest równa:
 A. 2 B. 4 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$
12. Liczba $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}$ jest równa:
 A. 1 B. -1 C. $3 - 2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2} + 1$

LOGARYTMY

Niech a i b oznaczają liczby dodatnie i $a \neq 1$. **Logarytmem liczby b przy podstawie a** nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać liczbę b .

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Uwaga. $\log b$ oznacza to samo co $\log_{10} b$, $\ln b$ oznacza to samo co $\log_e b$ (gdzie $e \approx 2,72$).

Własności logarytmów

Jeśli a i b są liczbami dodatnimi i $a \neq 1$, to zachodzą równości:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^b = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \quad (\text{dla } c > 0)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad (\text{dla } c > 0)$$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{dla } c > 0 \text{ i } c \neq 1)$$

POJĘCIE LOGARYTMU

1. Zapisz wartość x za pomocą logarytmu.

a) $7^x = 2$

b) $0,3^x = 10$

c) $5^x = \frac{3}{7}$

d) $10^x = 0,9$

2. Oblicz wartość b .

a) $\log_3 b = 3$

c) $\log_7 b = -1$

e) $\log b = \frac{1}{3}$

g) $\ln b = \frac{2}{3}$

b) $\log_{\frac{1}{5}} b = 2$

d) $\log_{\frac{3}{4}} b = -2$

f) $\log b = -3$

h) $\ln b = -\frac{1}{2}$

3. Oblicz wartość a .

a) $\log_a 25 = 2$

d) $\log_a 8 = \frac{1}{2}$

g) $\log_a 2 = -\frac{1}{3}$

j) $\log_a 2\sqrt{2} = 3$

b) $\log_a 9 = 1$

e) $\log_a \frac{1}{49} = -2$

h) $\log_a 4 = \frac{2}{3}$

k) $\log_a \sqrt[6]{3} = \frac{1}{3}$

c) $\log_a 6 = -1$

f) $\log_a \frac{1}{64} = -3$

i) $\log_a \frac{16}{81} = -4$

l) $\log_a \frac{1}{11} = -2$

4. Oblicz.

- a) $\log_3 27$ $\log_2 \frac{1}{4}$ $\log_{\frac{1}{5}} 25$ $\log_8 2$ $\log_{0,2} 0,0016$
 b) $\log_8 1$ $\log_{13} \frac{1}{13}$ $\log_5 \sqrt[3]{5}$ $\log_{0,11} 0,11$ $\log_{1,4} 1,96$
 Я c) $\ln e^5$ $\ln \frac{1}{e}$ $\ln \sqrt[5]{e}$ $\ln \sqrt[3]{e^2}$ $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$
 d) $\log 1$ $\log 10\,000$ $\log 0,01$ $\log \sqrt[3]{100}$ $\log 10^{24}$
 e) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}$ $\log_{\sqrt{3}} 3$ $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$ $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{3}$

5. Znajdź x.

- a) $\log_{\frac{1}{9}} 27 = x$ b) $\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = x$ c) $\log 10\sqrt[3]{100} = x$
 $\log_x 0,04 = -2$ $\log_x 0,3 = \frac{1}{2}$ $\log_x \sqrt{6} = -0,25$
 $\log_{\sqrt{2}} x = -\frac{1}{3}$ $\log_{16} x = \frac{3}{4}$ $\log_{1,2} x = -3$

6. Oblicz.

- a) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[5]{2}$ b) $\log_{\sqrt{2}} 8\sqrt[6]{2}$ c) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ d) $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[4]{2}}{4}$ e) $\log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt[5]{4}}$

7. Oblicz.

- a) $\log_{27} 81$ $\log_{\frac{1}{36}} 6$ f) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{2}$ $\log_{0,6} \sqrt[5]{0,36}$
 b) $\log_4 \frac{1}{32}$ $\log_{25} 125$ g) $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt[3]{4}$ $\log_{0,2} 25\sqrt{5}$
 c) $\log_{\frac{1}{343}} 49$ $\log_{16} \frac{1}{128}$ h) $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt[7]{27}$ $\log_{0,01} 100\sqrt{10}$
 d) $\log_{\frac{2}{3}} 3,375$ $\log_{2,5} \frac{4}{25}$ Я i) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \sqrt[3]{3}$ $\log_{\sqrt[3]{e}} \sqrt[4]{e}$
 e) $\log 0,00001$ $\log_{\frac{2}{11}} 30,25$ j) $\log_{\frac{\sqrt{2}}{8}} 16$ $\log_{3\sqrt[4]{3}} 9\sqrt[3]{3}$

8. Przedstaw liczbę b jako logarytm pewnej liczby przy podstawie a.

- a) $b = \frac{1}{2}$, $a = 3$ c) $b = 0$, $a = \sqrt{3}$ e) $b = -2$, $a = \frac{2}{3}$ g) $b = -\frac{2}{5}$, $a = 10$
 b) $b = -1$, $a = \frac{2}{3}$ d) $b = -\frac{1}{2}$, $a = 0,2$ f) $b = -\frac{1}{2}$, $a = 144$ Я h) $b = \frac{3}{7}$, $a = e$

9. Oblicz.

- a) $\log_7 7^{-\frac{3}{8}}$ $\log_7 (7^4)^9$ $\log_7 \left(7^{-\frac{4}{9}}\right)^{-27}$ $\log_7 \left(7^{\frac{1}{12}}\right)^{-18}$
 b) $\log (10^{-4})^{12}$ $\log (\sqrt{10})^{\frac{3}{4}}$ $\log \left(\frac{1}{\sqrt[3]{10}}\right)^7$ $\log \frac{10\sqrt[3]{10}}{\sqrt[5]{10}}$
 c) $\log_{\frac{1}{3}} 3^{-\frac{1}{5}}$ $\log_{\frac{1}{3}} (\sqrt{3})^9$ $\log_{\frac{1}{3}} 9^{14}$ $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right)^{10}$

10. Dla każdego z podanych wyrażeń podaj założenia dotyczące liczby a , a następnie oblicz wartość tego wyrażenia.

- | | | | | |
|-----------------------------|----------------------------|---------------------------------|------------------------------------|--|
| a) $\log_a a^{17}$ | $\log_a a^{0,12}$ | $\log_a \sqrt[9]{a^5}$ | $\log_a \frac{\sqrt{a}}{a^2}$ | $\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$ |
| b) $\log_a 1$ | $\log_{a^5} a$ | $\log_{\sqrt[3]{a}} a$ | $\log_{\frac{1}{a^3}} a$ | $\log_{\frac{\sqrt[3]{a}}{a}} a$ |
| c) $\log_{a^3} a^8$ | $\log_{\sqrt{a}} a^3$ | $\log_{\frac{1}{a^3}} a^{12}$ | $\log_{\frac{1}{\sqrt[5]{a}}} a^7$ | $\log_{\frac{\sqrt{a}}{a^3}} a^{10}$ |
| d) $\log_{a^4} \sqrt[3]{a}$ | $\log_{a^3} \frac{1}{a^5}$ | $\log_{\sqrt{a}} \frac{1}{a^3}$ | $\log_{\frac{1}{a^2}} \sqrt[4]{a}$ | $\log_{\sqrt[6]{a}} \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$ |

11. Znajdź takie dwie kolejne liczby całkowite, że jedna z nich jest mniejsza, a druga większa od podanej liczby.

- | | | | |
|---------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------------|
| a) $\log_3 5$ | c) $\log_{\frac{1}{4}} 6$ | e) $\log_{\frac{5}{6}} 2$ | g) $\log_{\sqrt{3}} 4$ |
| b) $\log_7 3$ | d) $\log_{0,4} 15$ | f) $\log_6 \frac{1}{9}$ | h) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{3}$ |

12. Z podanego wzoru wyznacz x .

- | | | |
|--------------------------|------------------------------|------------------------|
| a) $F = A + mr^x$ | c) $f = 3 - c^{\frac{x}{b}}$ | e) $r = g + m \log 3x$ |
| b) $H = a^{\frac{1}{x}}$ | d) $s = t - 5 \log_a x$ | f) $v = 8 \log(x - 1)$ |

13. Które z podanych liczb są dodatnie, a które — ujemne?

- $\log_3 21$ $\log_5 \frac{1}{31}$ $\log_{\frac{1}{5}} 34$ $\log_7 201$ $\log_{0,9} 0,23$ $\log_{\frac{2}{3}} 1001$ $\log_{0,4} 1,2$

14. Które z liczb a, b, c są mniejsze od 1, a które — większe od 1?

- | | | |
|------------------------------------|--|-----------------------------|
| a) $\log_3 a = 1,3$ | b) $\log_{\frac{1}{4}} a = 2,8$ | c) $\log_a 0,2 = 0,5$ |
| $\log_{\frac{1}{10}} b = \sqrt{2}$ | $\log_{2,3} b = 0,04$ | $\log_b \pi = -\sqrt[3]{6}$ |
| $\log_{0,3} c = \pi$ | $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} c = -\sqrt{10}$ | $\log_c 8,2 = \sqrt{2}$ |

15. Wiadomo, że $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ i $\log_c x = 6$. Oblicz $\log_{abc} x$.

16. a) Wyjaśnij, dlaczego $a^{\log_a b} = b$ dla $a > 0$, $b > 0$ i $a \neq 1$.

b) Oblicz.

$7^{\log_7 11}$ $10^{\log 3,2}$ $e^{\ln \frac{5}{9}}$ $4^{\log_2 6}$ $0,1^{\log 6}$ $(\sqrt{e})^{\ln 4}$

17. Oblicz.

- | | | |
|-----------------------|-------------------------------|---|
| a) $3^{4 + \log_3 2}$ | c) $5^{-3 + 2 \log_5 4}$ | e) $2^{\log_4 25 + \log_{0,5} 7}$ |
| b) $10^{2 - \log 5}$ | d) $9^{\log_9 10 + \log_3 7}$ | f) $4^{\frac{1}{2} \log_2 \sqrt{2} 27 + \log_{0,25} 9}$ |

18. a) Wiadomo, że $a = \log_5 x$. Wyraż $\log_{125} x$ za pomocą a .

b) Wiadomo, że $b = \log_{49} x$. Wyraż $\log_{\sqrt{7}} x$ za pomocą b .

c) Wiadomo, że $c = \log_{\sqrt{2}} x$. Wyraż $\log_{\frac{1}{\sqrt[5]{2}}} x$ za pomocą c .

19. Wiadomo, że $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$ oraz $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$. Wykaż, że $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$.

20. Wykaż, że podana liczba jest niewymierna.

a) $\log_5 13$

b) $\log_{11} 4$

c) $\log_6 3$

d) $\log_7 35$

e) $\log 15$

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW

21. Oblicz.

a) $\log_9 27 + \log_9 3$

d) $\log_6 72 - \log_6 2$

g) $\log_7 49^{2,5}$

b) $\log 5 + \log 20$

e) $\log_7 2 - \log_7 98$

h) $\log_3 27^{-20}$

c) $\log_{0,5} 6,4 + \log_{0,5} 5$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 12 - \log_{\frac{1}{3}} 4^{\sqrt[3]{3}}$

i) $\log_{0,1} 0,0001^{-11,2}$

22. Oblicz.

a) $\log 15 + \log 50 - \log \frac{3}{4}$

e) $3 \log 5 + \log 8$

b) $\log 7 - \log 14 + \log 0,2$

f) $2 \log_{\frac{4}{3}} 3 - 4 \log_{\frac{4}{3}} 2$

c) $\log 2\sqrt{10} - \log 4 - \log 0,5$

g) $4 \log_2 6 + 2 \log_2 \frac{1}{3} - \log_2 9$

d) $2 \log_3 6 - \log_3 4$

h) $\frac{1}{2} \log 4 - 2 \log 5 - 3 \log 2$

23. Wiadomo, że $\log_2 x = 6$. Oblicz.

a) $\log_2 x^5$

c) $\log_2 \frac{1}{x}$

e) $\log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

g) $\log_2 \frac{x^3}{\sqrt{x}}$

b) $\log_2 x^{-3}$

d) $\log_2 \sqrt[6]{x^5}$

f) $\log_2 \frac{1}{x^{11}}$

h) $\log_2 \sqrt[3]{x} x^2$

24. Przedstaw podany logarytm za pomocą wyrażeń $\log a$, $\log b$, $\log c$ i $\log d$.

a) $\log b^2 c$

c) $\log \frac{1}{bc^3}$

e) $\log \frac{\sqrt{ab}}{d^2 c}$

b) $\log b\sqrt{d}$

d) $\log \frac{\sqrt[3]{bc}}{d^3}$

f) $\log \frac{ab}{\sqrt[4]{cd^3}}$

25. Wiadomo, że $\log a = 2$, $\log b = 3$ i $\log c = 5$. Oblicz.

a) $\log abc$

b) $\log \frac{a}{bc}$

c) $\log ab^2 c^3$

d) $\log \frac{\sqrt{a}}{cb^4}$

26. Przedstaw podane wyrażenie jako jeden logarytm.

- a) $\log_5 3x - \log_5 4y$ e) $3 \log_2 5 + \frac{1}{2} \log_2 a$
b) $\log_3 5x + \log_3 \frac{2}{x^2}$ f) $\log 6x + \log \frac{x}{2} - \log 2x^5$
c) $\log_6 x - 2 \log_6 3y$ g) $\ln 3a - \ln 2b^2 + 3 \ln c$
Я d) $\ln 8a - \frac{1}{2} \ln 9b$ h) $2 \log \frac{3x}{2} - \log \frac{8}{x} - \log 3$

27. Przedstaw podane wyrażenie jako jeden logarytm.

- a) $\log_3 5 - 4$ c) $5 + \log 2$ e) $\log_{16} 5 + \frac{1}{4}$
b) $3 - \log_{\frac{1}{4}} 3$ Я d) $\frac{1}{3} - \ln 4$ Я f) $\frac{3}{7} + \ln 5$

28. Przyjmij, że $\log 4 \approx 0,602$ i oblicz.

- a) $\log 400$ c) $\log 0,004$ e) $\log(4 \cdot 10^{12})$
b) $\log 0,4$ d) $\log 400\,000$ f) $\log(4 \cdot 10^{-9})$

29. Wiadomo, że $\log 2 = x$ i $\log 3 = y$. Przedstaw logarytm za pomocą x i y .

- a) $\log 12$ b) $\log 4,5$ c) $\log \sqrt{1,5}$ d) $\log \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$

30. Przyjmij, że $\log 3 \approx 0,5$, $\log 7 \approx 0,8$ i oblicz.

- a) $\log 27$ $\log \frac{1}{9}$ $\log \sqrt{3}$ $\log 243$ $\log \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$
b) $\log 49$ $\log \frac{1}{7}$ $\log \sqrt[3]{7}$ $\log \frac{1}{7\sqrt{7}}$ $\log \frac{\sqrt{7}}{7}$
c) $\log 21$ $\log \frac{3}{7}$ $\log \frac{\sqrt{3}}{49}$ $\log 0,21$ $\log \sqrt[3]{0,63}$
d) $\log 4\frac{2}{7}$ $\log \frac{27}{49}$ $\log 3,43$ $\log \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}$ $\log 63\sqrt{7}$

Я **31.** Wskaż wśród podanych liczb te, które są równe liczbie zapisanej w ramce.

- a) $\log_9 16$ $\frac{1}{2} \log_3 16$ $\frac{1}{\log_{16} 9}$ $\frac{\log_5 9}{\log_5 16}$ $\frac{2}{\log_2 3}$
b) $\log e$ $(\ln 10)^{-1}$ $-\ln 10$ $-\log_{0,1} e$ $2 \log_{100} e$

Я **32.** Przedstaw podany logarytm za pomocą logarytmów o podstawie 2, a następnie oblicz jego wartość.

- a) $\log_{32} 4$ b) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{16}$ c) $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{2}$ d) $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} 8$

Я33. Niech a będzie taką liczbą, że $a = \log_2 3$. Przedstaw logarytm za pomocą a .

- | | | |
|-----------------|--------------------------|--------------------------------------|
| a) $\log_2 6$ | c) $\log_3 18$ | e) $\log_{\sqrt{2}} 6\sqrt{3}$ |
| b) $\log_2 1,5$ | d) $\log_{27} 8\sqrt{3}$ | f) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{4}{81}$ |

Я34. Przyjmijmy, że $a = \ln 2$ i $b = \ln 5$. Przedstaw logarytm za pomocą a i b .

- | | | |
|---------------|----------------|----------------------------|
| a) $\log_5 2$ | c) $\log_4 50$ | e) $\log_{20} 5\sqrt{5}$ |
| b) $\log 8$ | d) $\log 1,25$ | f) $\log_{0,2} 10\sqrt{2}$ |

Я35. Przedstaw logarytm za pomocą logarytmów dziesiętnych i oblicz jego wartość za pomocą kalkulatora (wynik podaj z dokładnością do części tysięcznych).

- | | | |
|------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $\log_3 7$ | c) $\log_{\frac{2}{3}} 10$ | e) $\log_{14} 2,4$ |
| b) $\log_{11} 6$ | d) $\log_{1,23} 8,2$ | f) $\log_{19} 123,1$ |

Я36. Oblicz x , a następnie, korzystając z kalkulatora, podaj wynik z dokładnością do części setnych.

- | | | |
|---------------|---------------|-----------------|
| a) $3 = 10^x$ | c) $10 = e^x$ | e) $1500 = 5^x$ |
| b) $10 = 2^x$ | d) $7 = 3^x$ | f) $0,4 = 8^x$ |

Poziom L głośności dźwięku (w decybelach) można obliczyć ze wzoru:

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

I — natężenie dźwięku w W/m^2

I_0 — natężenie dźwięku odpowiadające progowi słyszalności ($I_0 = 10^{-2} \text{ W/m}^2$)

37. Przeczytaj tekst w ramce.

Zgodnie z przepisami BHP poziom hałasu wytwarzanego przez kserokopiarke nie może przekroczyć 70 dB. Pewna zepsuta kserokopiarka powoduje hałas 75 dB. Ile razy przekroczone zostało dopuszczalne natężenie dźwięku?

38. Przeczytaj poniższy tekst.

Starożytny astronom Klaudiusz Ptolemeusz podzielił gwiazdy na sześć kategorii według jasności (gwiazdami pierwszej wielkości nazwał najjaśniejsze, szóstej wielkości — najślabsze, które są widoczne gołym okiem). Po latach okazało się, że opisaną przez Ptolemeusza wielkość gwiazdową można w przy-

bliżeniu obliczyć, korzystając z poniższego wzoru:

$$m = -2,5 \log L - 14,05$$

L — jasność gwiazdy w luksach

m — wielkość gwiazdowa

Obecnie ten wzór przyjmowany jest jako definicja wielkości gwiazdowej.

Syriusz ma wielkość gwiazdową $-1,44$, a Gwiazda Polarna $+2,0$. Korzystając z powyższych informacji, oblicz, która z tych gwiazd jest jaśniejsza i ile razy?

39. Przeczytaj informacje w ramce.

Kwasowość roztworu mierzy się za pomocą tzw. współczynnika pH . Współczynnik ten jest równy $-\log s$, gdzie s oznacza stężenie jonów wodorowych w roztworze (w molach/dm³).

Woda destylowana (czyli roztwór niewykazujący ani kwasowości, ani zasadowości) ma $pH = 7$. Im mniejsza wartość pH , tym większa kwasowość roztworu.

Oto współczynniki pH kilku innych substancji.

roztwór	pH
sok z cytryny	2,3
kwaśne mleko	4,4
świeże mleko	6,5
krew	7,4

- a) Oblicz współczynnik pH wody sodowej, w której stężenie jonów wodorowych wynosi $1,3 \cdot 10^{-4}$ moli/dm³.
- b) Oblicz stężenie jonów wodorowych we krwi i w soku z cytryny.
- c) Oblicz, ile razy stężenie jonów wodorowych w kwaśnym mleku jest większe od stężenia tych jonów w świeżym mleku.

40. Znajdź liczbę x .

a) $\log_2(\log_2(\log_2 x)) = 1$ b) $\log_8(\log_9(\log x)) = -\frac{1}{3}$ c) $\log_4(\log_4(\log_4 x)) = -\frac{1}{2}$

Я41. Oblicz.

a) $\log_3 5 \cdot \log_5 27$ d) $\log_{\sqrt[3]{3}} 4 \cdot \log_{32} 9$ g) $5^{\frac{1}{\log_4 5}} \cdot 36^{\frac{1}{\log_2 6}}$
b) $\log_2 27 \cdot \log_9 8$ e) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$ h) $9^{\log_{27} 7 - \log_3 4 \cdot \log_4 5}$
c) $\log_{121} 6 \cdot \log_{36} \frac{1}{11}$ f) $9^{\log_2 7} - 7^{\log_2 9}$ i) $4^{\log_{\sqrt{2}} 5 + \frac{1}{2} \log_{0,5} 9}$

Я42. Wiadomo, że $\log_{14} 3 = a$ i $\log_{14} 5 = b$. Wyraż podaną liczbę za pomocą a i b .

a) $\log_3 5$ b) $\log_{125} 9$ c) $\log_{15} 25$ d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 1,8$

Я43. Przyjmijmy, że $a = \log_{15} 3$. Wyraż liczbę $\log_5 81$ za pomocą a .

Я44. Wiadomo, że $\log_{ab} a = 5$. Oblicz.

a) $\log_{ab} \frac{\sqrt{a}}{b}$ b) $\log_{ab} \frac{a \sqrt[3]{b}}{\sqrt{b}}$ c) $\log_{\frac{1}{a}} \frac{a^2 b}{\sqrt{a}}$

Я45. Wykaż podaną równość.

a) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log 9 = \log 2$
b) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{255} 256 = 8$

46. Wykaż podaną równość.

a) $\log(2 + \sqrt{3}) = -\log(2 - \sqrt{3})$

b) $\log_4 81 + \log_{16} 81 = \log_2 27$

47. Wykaż, że dla $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ oraz $ab \neq 1$ zachodzi poniższa równość.

a) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

d) $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a \left(1 + \frac{y}{x}\right)$

b) $-\log_a b = \log_{\frac{1}{a}} b$

e) $\log_a(x - y) = \log_a x + \log_a \left(1 - \frac{y}{x}\right)$

c) $\log_a x \cdot \log_b y = \log_b x \cdot \log_a y$

f) $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} = \frac{1}{\log_{ab} x}$

48. a) Wykaż, że aby zapisać wynik potęgowania 2^{50} , potrzeba 16 cyfr.

b) Wykaż, że aby zapisać wynik potęgowania 5^{80} , potrzeba 56 cyfr.

c) Wykaż, że aby zapisać wynik potęgowania 3^{100} , potrzeba 48 cyfr.

$$\log 2 \approx 0,301$$

$$\log 3 \approx 0,477$$

$$\log 5 \approx 0,699$$

49. Wartości $\log 2$ oraz $\log 3$ zaokrąglone do dziewiątego miejsca po przecinku wynoszą $\log 2 \approx 0,301029996$ i $\log 3 \approx 0,477121255$.

a) Oblicz wartość $\log 5$ i $\log 6$ z dokładnością do 3 miejsc po przecinku.

b) Wykaż, że $5 \cdot 10^{47} < 3^{100} < 6 \cdot 10^{47}$.

c) Znajdź pierwszą cyfrę liczby 3^{100} .

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Liczba $\log_6 \sqrt[3]{36}$ jest równa:
 A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
2. Wiadomo, że $\log_{\frac{2}{3}} a = -3$, $\log_b 4 = \frac{1}{2}$ i $\log_3 c = -1$. Iloczyn abc jest równy:
 A. $-1,5$ B. 6 C. 12 D. 18
3. Liczba $\log_{0,5} \frac{8}{5} + \log_{0,5} \frac{5}{2}$ jest równa:
 A. $\log_{0,5} \frac{13}{7}$ B. -2 C. $\log_{0,5} \frac{41}{10}$ D. 4
4. Wyrażenie $\log_3 \sqrt{2} + \frac{1}{2} \log_3 2 - 2 \log_3 8$ jest równe:
 A. $-\log_3 60$ B. $\log_3 14$ C. $\log_3 \frac{1}{16}$ D. $\log_3 \frac{1}{32}$
5. Wiadomo, że $\log_2 10 = a$. Przedstaw $\log_2 5$ za pomocą a .
6. Uporządkuj liczby $a = \log_5 \sqrt{5}$, $b = \log_{\frac{1}{5}} 25$, $c = \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25}$, $d = \log_{25} \frac{1}{5}$ w kolejności od najmniejszej do największej.
7. Liczba x spełnia warunek $\log_4 (\log_3 (\log_2 x)) = 0,5$. Liczba ta jest równa:
 A. $24^{0,5}$ B. 2^9 C. $9^{0,5}$ D. $((4^3)^2)^{0,5}$
8. Które z poniższych wyrażeń nie jest równe $\log_3 36$?
 A. $2 + \log_3 4$ B. $\frac{2 \log 6}{\log 3}$ C. $(\log_3 6)^2$ D. $\log_3 72 - \log_3 2$
9. Wiadomo, że $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ oraz że $(\log_a b)^2 - \log_b a^2 = 0$. Wynika stąd, że:
 A. $b = a^{\sqrt[3]{2}}$ B. $\log_a b = \log_b a$ C. $a = b^2$ D. $\log_2 a = \log_b 2$
10. Różnica $5^{\log_7 2} - 2^{\log_7 5}$ jest równa:
 A. $3^{\log_7 3}$ B. 0 C. $(\frac{5}{2})^{\log_7 \frac{2}{5}}$ D. 1
11. Wykaż, że $\log_{\sqrt[4]{2}} 3 \cdot \log_{81} 16 = 4$.
12. Przedstaw wyrażenie $\log_2 \frac{\sqrt{2a}}{8^b \cdot 2^b}$ w postaci $pa + qb$, zastępując litery p i q odpowiednimi liczbami.

PRZED MATURĄ

- 1.** Dane są liczby $a = -\frac{1}{27}$, $b = \log_{\frac{1}{4}} 64$, $c = \log_{\frac{1}{3}} 27$. Iloczyn abc jest równy:
 A. -9 B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 3
- 2.** Liczba $\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}$ jest równa:
 A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. 3
- 3.** Dane są liczby $a = \log_{\frac{1}{2}} 8$, $b = \log_4 8$, $c = \log_4 \frac{1}{2}$. Liczby te spełniają warunek:
 A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $b > c > a$
- 4.** Liczba $2\log_2 3 - 2\log_2 5$ jest równa:
 A. $\log_2 \frac{9}{25}$ B. $\log_2 \frac{3}{5}$ C. $\log_2 \frac{9}{5}$ D. $\log_2 \frac{6}{25}$
- 5.** Liczba $\frac{\log_3 729}{\log_6 36}$ jest równa:
 A. $\log_6 693$ B. 3 C. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{81}{4}$ D. 4
- 6.** Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R = \log \frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy — mniejsza od 100 cm.
- 7.** Liczba $\log_4 25 + \log_2 10$ jest równa:
 A. $\log_2 15$ B. $\log_2 50$ C. $\log_2 210$ D. $\log_2 635$
- 8.** Wartość wyrażenia $2\log_5 10 - \frac{1}{\log_{20} 5}$ jest równa:
 A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
- 9.** Niech $L = \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} 4$. Wtedy:
 A. $L = 1$ B. $L = 2$ C. $L = 3$ D. $L = 4$
- 10.** Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ wartość wyrażenia $(\log_{\frac{1}{x}} y)(\log_{\frac{1}{y}} x)$ jest równa:
 A. $x \cdot y$ B. $\frac{1}{x \cdot y}$ C. -1 D. 1
- 11.** Oblicz $\log_3 \sqrt[4]{27} - \log_3 (\log_3 \sqrt[3]{3})$.

RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

Równania liniowe

Równaniem liniowym nazywamy każde równanie postaci $ax + b = 0$, gdzie x jest niewiadomą, zaś a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Rozwiązaniem równania jest każda liczba spełniająca to równanie.

Równanie liniowe:

- może mieć dokładnie jedno rozwiązanie
- może mieć nieskończenie wiele rozwiązań (wówczas jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą) — takie równanie nazywamy tożsamościowym
- może nie mieć rozwiązania — takie równanie nazywamy sprzecznym

Nierówności liniowe

Nierównością liniową nazywamy każdą z następujących nierówności: $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, gdzie x jest niewiadomą, zaś a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi.

Rozwiązaniem nierówności jest każda liczba, która spełnia tę nierówność.

Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Układ równań:

- może mieć dokładnie jedno rozwiązanie — taki układ nazywamy oznaczonym
- może mieć nieskończenie wiele rozwiązań — taki układ nazywamy nieoznaczonym
- może nie mieć rozwiązania — taki układ nazywamy sprzecznym

Wielkości wprost proporcjonalne

Wielkości x oraz y nazywamy wprost proporcjonalnymi, jeżeli zachodzi między nimi zależność: $\frac{y}{x} = a$, gdzie a jest stałą liczbą dodatnią.

Wielkości odwrotnie proporcjonalne

Wielkości x oraz y nazywamy odwrotnie proporcjonalnymi, jeżeli zachodzi między nimi zależność: $xy = a$, gdzie a jest stałą liczbą dodatnią.

Wartość bezwzględna

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ

1. Przyjmijmy, że kilogram czereśni kosztuje x złotych. Zapisz każde z poniższych zdań w postaci równania.

- a) Za kilogram czereśni i 2 kilogramy tańszych o 4 zł truskawek zapłacono 16 zł.
- b) Za 2 kilogramy czereśni zapłacono tyle samo co za 3 kilogramy tańszych o 3 zł truskawek.
- c) Za 2 kg czereśni, 3 kg tańszych dwukrotnie truskawek i 0,5 kg droższych od czereśni o 2 zł moreli zapłacono tyle samo co za 2 kg moreli, kilogram czereśni i kilogram truskawek.
- d) Gdyby czereśnie były 2 razy tańsze, to za 12 zł można byłoby ich kupić o 1,5 kg więcej niż dotychczas.

2. Rozwiąż równanie.

- a) $6x - 7 = 7x - 6$
- b) $5(4x - 3) = 10(2x + 1) - 25$
- c) $4(3x - 7) + 5(3 - 4x) = 9(2x - 3)$
- d) $\frac{1}{2}(x + 3) = 2x - 4$
- e) $3(x + 2) - 7(2 - 3x) = 8(x - 3)$
- f) $3 - 2(5 - 3x) = 1 + 6(x + 1)$

3. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{x+3}{5} = \frac{x-4}{3}$
- b) $\frac{2(x+5)}{4} = \frac{5(3-x)}{8}$
- c) $\frac{4x-1}{3} = \frac{2x+5}{8} + \frac{5}{6}$
- d) $3 - \frac{2x+3}{2} = \frac{17}{6} - \frac{3x+2}{2}$
- e) $2 - \frac{4x-5}{5} = 1,9 - \frac{1-x}{2}$
- f) $\frac{0,7x+5}{7} = 0,1\left(x + \frac{2}{7}\right)$

4. Rozwiąż równanie (jeśli to konieczne, zapisz odpowiednie założenia).

- a) $\frac{6}{x+1} = \frac{2}{x}$
- b) $\frac{4}{x+9} = \frac{2}{2x-3}$
- c) $\frac{2x-5}{x+1} = \frac{5}{3}$
- d) $\frac{3+x}{x-2} = \frac{5-x}{-x+1}$
- e) $\frac{7}{7x-10} = \frac{5}{5x-20}$
- f) $\frac{x-2}{-x} = \frac{1-x}{x-2}$

5. Rozwiąż równanie.

- a) $(x+2)^2 = (x-3)^2$
- b) $(5x-3)^2 = (5x+4)(5x-4)$
- c) $(6x+1)^2 = (9x-2)(4x+1) - 19$
- d) $\frac{(2x+5)^2}{4} = \frac{(x+1)(x-1)}{3} + \frac{x(4x-3)}{6}$
- e) $(x+2)^3 = x^2(x+2) + (2x-1)^2$
- f) $(4x-1)^3 + (16x-3)(2x+5) = x(8x-1)^2 - 101$

6. Rozwiąż równanie, za każdym razem usuń niewymierność z mianownika ułamka będącego rozwiązaniem równania.

- a) $3 - x\sqrt{5} = 2$
- b) $x\sqrt{3} + 6 = 3x$
- c) $x\sqrt{6} - 4 = x\sqrt{5}$
- d) $\frac{3+x\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$
- e) $\frac{5x-2}{6} = \frac{x\sqrt{3}+1}{4}$
- f) $(x+\sqrt{6})^2 = x(x-3)$

7. Ustal niewiadomą, oznacz ją dowolną literą i zapisz za pomocą równania informacje podane w poniższym zdaniu.

- a) Połowę wszystkich gości na imieninach dziadka Antoniego stanowiły kobiety, $\frac{1}{3}$ — mężczyźni, a dzieci było pięcioro.
- b) Dziadek Antoni, zapytany przez wnuka o swój wiek, odpowiedział zagadkowo, że za 20 lat będzie 2 razy starszy niż był 20 lat temu.
- c) Syn pana Andrzeja na przyjęcie dotarł po 6 godzinach jazdy, przy czym $\frac{2}{3}$ trasy jechał ze średnią prędkością 60 km/h, ale pozostałą część — z prędkością 45 km/h.

8. Ułóż i rozwiąż odpowiednie równania.

- a) Średnia arytmetyczna liczby x i liczby o 40% większej od x jest o 2 większa od x .
- b) Średnia arytmetyczna liczby x i liczby o 20% większej od x jest o 10% większa od x .

9. Kangurzyca z kangurzątkiem waży 73 kg. Kangurzyca jest o 70 kg cięższa od kangurzątki. Ile waży mały kangur?

10. Projekcja filmu w telewizji rozpoczęła się o godz. 20⁵⁵, a skończyła o 23⁰⁵. Film trzykrotnie przerywano blokami reklamowymi. Każdy z takich bloków trwał tyle samo i był o 15 minut krótszy od każdej z części filmu. Iluminutowy film wyświetlono?

11. Średnia wieku pewnego kwartetu smyczkowego wynosiła 32 lata. Gdy do tego kwartetu dołączyła jeszcze jedna skrzypaczka, średnia wieku zespołu (już teraz kwintetu) obniżyła się i wynosi 31 lat. Ile lat ma skrzypaczka?



12. Przebadano grafologicznie pewną grupę licealistów. Okazało się, że 52,5% uczniów ma pismo pochylone w prawo, 7,5% ma pismo pochylone w lewo, $\frac{3}{8}$ badanych pisze prosto, a u sześciorga pozostałych nie można było ustalić rodzaju pochylenia. Jak liczną grupę przebadano?

13. W pewnej klasie chłopcy stanowią tylko 4% wszystkich uczniów. Gdyby było ich o 5 więcej, ich odsetek wynosiłby 20%. Ile dziewcząt jest w tej klasie?

14. a) Licznik ułamka $\frac{51}{78}$ zmniejszono o pewną liczbę i o tę samą liczbę zwiększono jego mianownik. Jaka to liczba, jeśli otrzymany ułamek jest równy $\frac{1}{2}$?

b) Jaką cyfrę można wstawić między cyfry licznika i mianownika ułamka $\frac{17}{26}$, aby wartość ułamka pozostała bez zmian?

15. Trzech miłośników łamigłówek zapytano o ich wiek.

Pan A powiedział: *Teraz jestem 6 razy starszy od syna, ale już za 20 lat będę od niego starszy tylko 2 razy.*

Pan B powiedział: *Cztery lata temu byłem starszy od mojej córki 4 razy, a 10 lat temu byłem starszy od niej 10 razy.*

Pan C powiedział: *Gdy pan B był 2 razy starszy od pana A, to ja byłem 3 razy młodszy, niż będę za 4 lata.*

Ile lat mają panowie A, B i C?

16. Zadanie w ramce pochodzi z wydanej w roku 1553 książki Bernarda Wojewódki *Algorithm*, jednego z pierwszych polskich podręczników matematyki. W tych czasach 1 zł dzielił się na 30 groszy, 1 grosz na 3 szelągi, a 1 szeląg na 2 kwatniki. Rozwiąż to zadanie.

Ieden kupiec bogaty iechał do Skarmierza y kupił woz yaiec po 7 iay za kwatnik, a przywiozł ie do Krakowa na targ y sprzedał zasię po 6 za ieden kwatnik y zyskał 4 złote. Jest pytanie, wiele było iaiec na onem wozie y zacz ie sam miał w Skarmirzu.

17. Dla jakiej wartości parametru a podane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań?

a) $ax - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - 3$ b) $\frac{3-ax}{2} = 1,5$ c) $5x = a(x-1) + 5$ d) $a^2x = a + 3(3x+1)$

18. Dla jakiej wartości parametru a podane równanie jest sprzeczne?

a) $ax + 4 = 7$ b) $9 = 8 - ax$ c) $ax = 2(3x+1) - 6$ d) $x + a - 1 = a^2x$

19. Zbadaj liczbę rozwiązań podanego równania w zależności od parametru a .

a) $(2a-1)x = 6$ b) $4 - (3+a)x = 4$ c) $(a^2-2)x = a - \sqrt{2}$

20. Pociąg z A do B jechał ze średnią prędkością 45 km/h, a samochód jechał drogą biegnącą wzdłuż torów ze średnią prędkością 60 km/h. Pociąg i samochód wyjechały o tej samej porze, ale samochód dojechał 25 minut wcześniej. Jaka drogę pokonał każdy z pojazdów z A do B?

21. Aby przejechać samochodem z miasta A do miasta B, trzeba pokonać trasę o długości 240 km. Połączenie kolejowe między tymi miastami jest o 50 km krótsze. Pociąg z A do B jedzie ze średnią prędkością 60 km/h. Z jaką prędkością musiałby jechać samochód, który wyjechał z A 10 minut później niż pociąg, aby dojechać do B przed przyjazdem pociągu?

WIELKOŚCI WPROST PROPORCJONALNE I ODWROTNIE PROPORCJONALNE

22. Przeczytanie 36 stron książki zajęło Markowi 40 minut.

- a) Ile czasu zajmie Markowi przeczytanie całej książki, jeżeli wiadomo, że liczy ona 414 stron (zakładamy, że Marek będzie czytał książkę w tym samym tempie)?
b) Ile stron zdoła przeczytać Marek w czasie półtorej godziny?

23. Koszty poniesione w styczniu na zakup niektórych produktów w pewnym hotelu przedstawiono w tabeli.

Produkt	Liczba	Koszt
Ręcznik	28 szt.	358,40 zł
Żarówki	16 szt.	135,20 zł
Krzesła	9 szt.	621 zł

- a) Ile kosztowałyby 20 żarówek zakupionych przez ten hotel?
b) Ile najwięcej ręczników można by kupić za 600 zł?
c) W lutym właściciel hotelu musiał kupić 26 ręczników, 17 żarówek i 11 krzeseł. W którym miesiącu, styczniu czy lutym, wydał większą kwotę na zakupy? O ile złotych większą?

24. Do obsadzenia sadu młodymi jabłoniemi zatrudniono ośmiu pracowników, którzy pracowali przez pięć dni po sześć godzin dziennie. Ilu pracowników pracujących z tą samą wydajnością należałoby zatrudnić, gdyby czas pracy skrócić do dwóch dni i przy założeniu, że będą pracować po osiem godzin?

25. Kolarz pokonał pewną trasę w czasie 10 minut, jadąc z prędkością 30 km/h. Z jaką prędkością musiałby jechać, żeby pokonać tę samą trasę w ciągu 6 minut?

26. Siedmioro dzieci dostało po 12 baloników. Po ile baloników przypadłoby na jedno dziecko, gdyby zamiast siedmiorga było 21 dzieci?

27. Sok bananowy o pojemności 100 ml dostarcza 80 kcal, a sok ananasowy o takiej samej pojemności — 48 kcal. Zmieszano soki bananowy i ananasowy w proporcji odpowiednio 2 : 3 i uzyskano 240 ml napoju. Oblicz jego wartość energetyczną. Wynik zaokrąglaj do całości.

28. Właściciel firmy produkującej gry planszowe zakupił cztery jednakowe drukarki 3D, które w ciągu pięciu godzin potrafią wydrukować 600 plastikowych pionków do gry. Ile pionków można by wydrukować w ciągu ośmiu godzin, gdyby właściciel nabył o jedną drukarkę mniej?

29. Dwa prostokąty mają takie same pola. Jeden z nich ma wymiary 4 cm × 15 cm. Podaj wymiary drugiego prostokąta, jeżeli jeden z jego boków ma długość:

- a) 12 cm b) 8 cm c) 5 mm

30. Piętnastoosobowa grupa znajomych wybrała się na wycieczkę pociągiem. Ponieważ przewoźnik nie oferował ulgi na przejazdy grupowe, wszyscy kupili bilety w normalnej cenie za łączną kwotę 78 zł.

- a) Ile wyniósłby koszt przejazdu grupy 18-osobowej?
- b) Ile co najwyżej osób mogłoby pojechać na tę wycieczkę, gdyby na jazdę pociągiem przeznaczono 200 zł?

31. Podróżując ze średnią prędkością $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, można pokonać pewną drogę w czasie 5 godzin. Ile czasu zajmie pokonanie tej samej drogi z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? Które wielkości wymienione w tym zadaniu są odwrotnie proporcjonalne?

32. W ciągu dwóch godzin Krzysztof przeczytał w jednostajnym tempie 110 stron książki.

- a) Ile stron przeczytał Krzysztof w ciągu godziny?
- b) W jakim tempie Krzysztof musiałby czytać, aby przeczytanie książki liczącej 264 strony zajęło mu 4 godziny?

33. Katamaran płynący z prędkością 30 węzłów przebywa odległość między dwoma portami w ciągu 2 tygodni. Jak długo trwa podróż między tymi portami statkiem płynącym z prędkością 21 węzłów?



34. Uczniowie 24-osobowej klasy planują wycieczkę autokarową. Koszt wynajmu autokaru jest niezależny od liczby uczestników. Gdyby wszyscy uczniowie pojechali na tę wycieczkę, to każdy z nich zapłaciłby za autokar 12,50 zł.

- a) O ile złotych wzrósłby koszt wynajmu autokaru w przeliczeniu na jednego ucznia, gdyby z wycieczki zrezygnowało czterech uczniów?
- b) O ile złotych zmalałby koszt wynajmu autokaru w przeliczeniu na jednego ucznia, gdyby do udziału w wycieczce dołączyło 6 osób z równoległej klasy?
- c) Ostatecznie z powodu epidemii grypy część uczniów nie wzięła udziału w wycieczce. Wówczas koszt wynajmu autokaru wyniósł 18,75 zł na osobę. Ile osób nie wzięło udziału w wycieczce?

35. Dwanaście pszczół w ciągu całego swojego życia potrafi dostarczyć w sumie jedną łyżeczkę miodu. Przyjmij, że łyżeczka ma pojemność 5 ml.

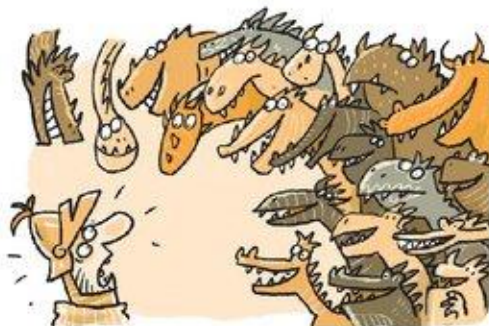
- a) Ile litrów miodu mogłoby dostarczyć 1000 pszczół w ciągu ich całego życia?
- b) Ile pszczół wystarczy do wyprodukowania jednego litra miodu w ciągu ich życia?

36. Zbiorniki na paliwo lotnicze w samolocie Boeing 787-8 Dreamliner mają pojemność około 125 tys. litrów. Lotniskowa cysterna pompuje około 1,5 tys. litrów paliwa w ciągu minuty. Jak długo trwać będzie tankowanie dreamlinera do pełna, jeżeli wiadomo, że na początku bak jest zapełniony jedynie w 15 procentach?

37. Tomek i Janek plewią ogródek. Gdyby każdy z chłopców plewił sam, to Tomkowi zajęłoby to 10 godzin, a Jankowi — 15 godzin.

- a) Jaką część ogródka w ciągu godziny wyplewi Tomek, a jaką — Janek?
b) Ile czasu zajmie chłopcom wyplewienie całego ogródka, jeżeli będą pracować jednocześnie?

38. Kilku rycerzy wybrało się na wyprawę do Smokonii, aby walczyć ze smokami. Po drodze dołączyło jeszcze dwóch. Gdy doszli na miejsce, obliczyli, że na każdego z nich przypada 20 smoków. Gdyby nie dodatkowi towarzysze, ta liczba byłaby o 8 smoków większa. Ilu rycerzy dotarło do Smokonii?



39. Tomek Sawyer razem z trzema kolegami miał pomalować płot, jednak jeden z kolegów zrezygnował, przez co praca trwała o pół godziny dłużej. Jak długo chłopcy malowali płot (przyjmij, że wszyscy pracowali z taką samą wydajnością)?

40. Janek jeździ rowerem ze Sterławek do Wroniek z prędkością $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Czasami jedzie szybciej — z prędkością $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ — i wtedy podróż trwa o 6 minut krócej. Jak daleko jest ze Sterławek do Wroniek?

ROZWIĄZYWANIE NIERÓWNOŚCI

41. Rozwiąż nierówność i zapisz zbiór rozwiązań za pomocą przedziału.

- a) $-5x + 2 \geq 3(2 - x)$ d) $\frac{1}{2}(2x - 5) > \frac{2}{3}(6 + 1,5x)$
b) $5,3 + x > -10(0,3 - 0,2x)$ e) $4(3x - 2) - 5(7 - 4x) \leq 6(3x + 4)$
c) $6(5x - 2) < 7 - 3(2x + 1)$ f) $2(5x + 8) > 4(6 - x) + 7(2x - 3)$

42. Rozwiąż nierówność i zapisz zbiór rozwiązań za pomocą przedziału.

- a) $\frac{x}{3} \geq \frac{7-x}{4}$ f) $\frac{3x+5}{-3} > \frac{21-\frac{1}{3}x}{-5}$
b) $\frac{x}{6} + \frac{1}{7} < \frac{x}{7} + \frac{1}{6}$ g) $\frac{5(x-2)}{4} - \frac{2(3x+4)}{3} \leq 2$
c) $2 - 3(3 - 2x) > 3 - \frac{19-12x}{2}$ h) $\frac{7x+3}{12} + \frac{2x+3}{9} > \frac{5x-3}{4}$
d) $5 - \frac{2x-3}{3} > 4 - \frac{4x+2}{6}$ i) $1,2(x - 4) - 0,8(x + 6) < \frac{3x+5}{4}$
e) $\frac{6x-5}{6} + \frac{2}{5} < \frac{4-6x}{3}$ j) $-\frac{x-2}{0,4} < \frac{x-\frac{1}{4}}{0,2} + \frac{5}{16}x$

43. Rozwiąż nierówność i przedstaw zbiór jej rozwiązań na osi liczbowej.

- a) $(7-x)^2 > (x-6)^2$ d) $\frac{(5x-3)^2}{12} - \frac{2x-3}{3} \leq \frac{(5x+1)^2}{12} - \frac{17x+11}{6}$
b) $(8x+3)\left(\frac{1}{2}x-1\right) < (2x-5)^2 - 1$ e) $(x-2)^3 < x(x-3)^2$
c) $24x + (6x - \sqrt{3})(6x + \sqrt{3}) < (6x+2)^2$ f) $27x^2(x+1) + 1 > (3x+1)^3$

44. Rozwiąż nierówność.

- a) $x\sqrt{2} < x+4$ d) $3(2x-7) < 5(0,8x+3) + x\sqrt{6}$
b) $3x > 6 + x\sqrt{10}$ e) $\sqrt{6}(x-1) > \sqrt{5}(x+1)$
c) $(2x - \sqrt{3})^2 \geq 4 - (4x+1)(1-x)$ f) $\frac{x\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{3}}{5} > \frac{x\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}$

45. a) Ile liczb naturalnych należy do zbioru rozwiązań nierówności?

$$5(7-x) + 2(3x-4) \geq 8(2x+1) - (3x-7)$$

b) Wskaż największą liczbę całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności:

$$\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} > \frac{x+2}{4}$$

c) Wymień wszystkie liczby pierwsze należące do zbioru rozwiązań nierówności:

$$(x-9)^2 - 2(x+5) > (x-10)(x+2) - 3\left(2x + \frac{1}{3}\right)$$

d) Wskaż najmniejszą liczbę naturalną, która nie należy do zbioru rozwiązań nierówności:

$$(x+1)^3 > (x+1)(x+2)(x+3) - 3x^2$$

46. a) Spośród wszystkich liczb całkowitych nie mniejszych od -2 wskaż te, które są rozwiązaniem nierówności:

$$\frac{2x+5}{2} - 2(4+3x) > -22$$

b) Podaj zbiór, do którego należą liczby będące równocześnie rozwiązaniami nierówności $4(2x-5) - 3(2-3x) \leq 8(2x-1)$ oraz nierówności $\frac{5x-2}{3} + 0,3(x+5) < \frac{6x-1}{2}$.

c) Wymień wszystkie liczby całkowite, które są równocześnie rozwiązaniami nierówności $\frac{(x+3)^2}{2} - \frac{2x+9}{3} \geq \frac{x^2-5}{2} + x$ oraz nierówności $(5x-3)(3x-5) > 5x(3x-2) - 35$.

d) Wymień liczby naturalne, które są rozwiązaniami nierówności $\frac{3x}{4} + 2 < \frac{4x}{3}$ lub nierówności $(4x-5)^2 \geq (8x-3)(2x+1) - 54$.

47. Państwo Kowalscy podczas pobytu na zagranicznym wyjeździe postanowili wypożyczyć samochód. W tym celu zapoznali się z ofertą dwóch firm. Firma „Island Travel” pobiera za wypożyczenie samochodu opłatę startową w kwocie 20 € oraz 1,50 € za każdą godzinę wypożyczenia samochodu. Natomiast firma „Blue Car” pobiera odpowiednio 32 € opłaty startowej oraz 1,20 € za godzinę wypożyczenia. Przy jakiej minimalnej liczbie godzin wypożyczenie samochodu w firmie „Blue Car” jest bardziej opłacalne niż w firmie „Island Travel”?

48. Koszt zbudowania myjni samochodowej na trzy stanowiska wynosi 250 000 zł. Szacuje się, że miesięczny zysk z jednego stanowiska wynosi 3500 zł. Po ilu pełnych miesiącach zwróci się koszt wybudowania myjni?



49. Wskaż możliwie największą liczbę naturalną n , która spełnia następujący warunek: różnica kwadratu liczby n oraz kwadratu liczby o 5 od niej mniejszej jest mniejsza od 1000.

50. Wykaż, że:

- dla dowolnych liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2$,
- jeżeli różnica między dwiema liczbami jest równa 8, to suma kwadratów tych liczb jest nie mniejsza od 32,
- dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \geq \frac{4}{a+2b}$,
- dla dowolnych liczb a i b prawdziwa jest nierówność $\frac{a^2+b^2}{4} \geq a+b-2$.

51. Dane są zbiory:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{3x-9}{2} - \frac{2x+1}{3} \leq 1 \right\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+ : (1-3x)^2 > (3x+2)(3x-2)\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : 2(x\sqrt{2}+1) < 4x+3\}$$

Wyznacz następujące zbiory:

a) $A \cap C$

b) $B \setminus A$

c) $C \setminus B$

d) $A \cup B$

52. Ustal liczbę elementów zbioru $A = \left\{ k \in \mathbb{Z} : \frac{8k-5}{3} \leq 2k + \frac{5}{3} < 3 + \frac{8k}{3} \right\}$.

53. a) Dla jakich wartości a rozwiązaniem nierówności $a(ax-1) < 4(4x+1)$ są wszystkie liczby rzeczywiste?

b) Dla jakich wartości a nierówność $a+100x \geq 10+a^2x$ nie ma rozwiązania?

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ

54. Rozwiąż równanie.

a) $|x| = 3,4$

d) $|x + \sqrt{3}| = \sqrt{3}$

g) $|x+5| = 3-2\sqrt{3}$

b) $|x-3| = 4$

e) $|x-\pi| = 3,14$

h) $|x+4-\sqrt{3}| = |4-\sqrt{3}|$

c) $|x+7| = 0,1$

f) $|x+11| = 0$

i) $|x-2| = |1-\sqrt{2}|$

55. Rozwiąż równanie.

a) $|5x + 2| = 3$

e) $5 - 2|x + 1| = 3$

i) $7|x| + 5 = 0$

b) $|9 - 10x| = 1$

f) $5|4x + 5| - 6 = 0$

j) $\frac{|2x+3|}{4} = 1$

c) $|4 - 2x| = \sqrt{2}$

g) $\frac{|1-3x|}{4} = 4$

k) $3|x| = |x| + 3$

d) $12 + |7 - x| = 5$

h) $\left| \frac{5x}{6} + \frac{2}{3} \right| = \frac{3}{4}$

l) $\frac{|x+2|}{2} = |x+2| - 7$

56. Rozwiąż nierówność.

a) $|x| < 7$

d) $|x + 6| \leq 9\frac{1}{2}$

g) $|x + 2| > 0$

b) $|x - 5| \leq 3$

e) $|x - \sqrt{2}| \geq \sqrt{2}$

h) $|x + 2| \leq 0$

c) $|x + 2| > \frac{1}{2}$

f) $|x + 2| < 0$

i) $|x + 2| \geq 0$

57. Rozwiąż równanie.

a) $|2x + 3| = |3x + 2|$

c) $|x - 1| = |x - 2|$

b) $|7 - 8x| = |8x|$

d) $|3x| - |4x - 3| = 0$

58. Rozwiąż nierówność.

a) $|2x + 1| < 7$

c) $-2|3x - 1| \leq 6$

e) $3|1 - 2x| > 3 + |2x - 1|$

b) $|3x + 2| \geq 3$

d) $5 - 2|4x + 3| > 4$

f) $|3 - x| + |3x - 9| \leq \frac{1}{3}$

59. Ile liczb całkowitych spełnia podaną nierówność?

a) $|x| < 2$

c) $2 + |x + 1| < 5$

e) $\frac{3}{4}|1 - x| < 2$

b) $|x - 3| \leq 4$

d) $\frac{1}{2}|x + 2| \leq 10$

f) $-4|2x + 1| \geq -7$

60. Które z poniższych równań są sprzeczne?

$|13x + 4| = -5$

$4 - |5 - x| = 0$

$||x| + 1| = |x| + 1$

61. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{6}{|x|} = 3$

d) $\frac{5}{|2-x|+3} = \frac{8}{|2-x|+1}$

g) $\left| \frac{x-2}{x-2} \right| = |x-1|$

b) $\frac{1}{|x|} = \frac{2}{|x|+2}$

e) $\frac{|2x+6|}{|x+3|} = |x-1|$

h) $\frac{|3x+3|}{|x+1|} = |x+4|$

c) $\frac{10}{|x|+1} = \frac{4}{2|x|-1}$

f) $\left| \frac{x}{x} \right| = x+1$

i) $2|x-3| = \frac{|4x-20|}{|x-5|}$

62. Rozwiąż nierówność.

a) $3(2 + |x|) > 8 - 4|x|$

c) $9 - |5x - 10| \leq 4|x - 2|$

b) $2(|1 - x| + 1) > |1 - x| + 3$

d) $3(|2x + 3| + 2) \leq 10 + |2x + 3|$

63. Które z nierówności są spełnione przez dowolną liczbę rzeczywistą x ?

I. $2 - |x + 1| \leq 2$

III. $2|x| + 3 < 3$

V. $|6x - 7| \leq |7 - 6x|$

II. $|x| \geq x$

IV. $|5x - 2| > 2$

VI. $||x - \sqrt{3}| + 2| > 0$

64. Jaką najmniejszą wartość może mieć podane wyrażenie?

a) $|x| + 3$

b) $|6x + 11| - 5$

c) $\frac{5|x+7|-3}{2}$

65. Jaką największą wartość może mieć podane wyrażenie?

a) $-|x + 5|$

c) $3 - |2x - 5|$

e) $\frac{1}{6 + |x|}$

b) $5 - |x|$

d) $5 - 3|x + 10|$

f) $\frac{18}{9 + |x - 3|}$

66. Jaką najmniejszą i jaką największą wartość może mieć wyrażenie w podanym przedziale?

a) $\frac{1}{8 - |x|}$ dla $x \in \langle -6; 7 \rangle$

b) $\frac{12}{3 - |x + 9|}$ dla $x \in \langle -5; 4 \rangle$

67. Rozwiąż równanie.

a) $||x| + 2| = 12$

e) $||2 - 5x| - 7| = 0$

b) $||x - 10| + 2| = 9$

f) $||x + 1| - 1| + 1| = 3$

c) $|3 - |x - 4|| = 6$

g) $||x| - 3| = x - 1$

d) $||2x + 3| + 4| = 5$

h) $||2x - 4| - 1| = x$

68. Rozwiąż nierówność.

a) $||5 - 3x| - 2| < 3$

c) $||5x + 2| - 1| \geq 3$

b) $||2x + 3| - 4| \leq 1$

d) $|6 - |3 - 2x|| > 3$

69. Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności $|x - a| < b$. Wyznacz a oraz b .

a) $A = (-4; 4)$

d) $A = (0; \frac{3}{7})$

b) $A = (3; 7)$

e) $A = (-49; -15)$

c) $A = (-101; 110)$

f) $A = (\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ (CD.)

Я70. a) Rozważmy równanie:

$$|3x - 1| + |2x + 8| = 12$$

Z definicji wartości bezwzględnej wiadomo, że:

$$|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1, & \text{gdy } 3x - 1 \geq 0, \text{ czyli dla } x \geq \frac{1}{3} \\ -3x + 1, & \text{gdy } 3x - 1 < 0, \text{ czyli dla } x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$|2x + 8| = \begin{cases} 2x + 8, & \text{gdy } 2x + 8 \geq 0, \text{ czyli dla } x \geq -4 \\ -2x - 8, & \text{gdy } 2x + 8 < 0, \text{ czyli dla } x < -4 \end{cases}$$

Znajdź rozwiązania rozważanego równania — w tym celu rozważ trzy przypadki:

1. $x \in (-\infty; -4)$ 2. $x \in \left[-4; \frac{1}{3}\right)$ 3. $x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$

b) Rozwiąż w podobny sposób równania:

① $|2x - 4| + |x + 3| = 14$ ② $|x - 5| + 2|x| = 10$

Я71. Rozwiąż równanie.

a) $|x - 1| + x = 4$ c) $2x - |x + 1| = 5$ e) $\frac{|4 - 5x|}{3} = \frac{x + 1}{4}$
b) $|x - 3| + x = 3$ d) $|3x - 2| + 2x = 1$ f) $|4x - 1| = 2(x + 2)$

Я72. Rozwiąż równanie.

a) $|x + 3| + |x - 1| = 5$ f) $|x| + |x + 1| + |x + 2| = 6$
b) $|x - 3| + |x + 2| = 4$ g) $|2x - 1| + |3x - 2| = 4 + |x + 3|$
c) $|2x + 5| - 2|x - 2| = 9$ h) $|x| - \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 5 - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$
d) $|3x - 1| = |5x + 1| - 10$ i) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} - \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 1}$
e) $\frac{|3x + 2|}{4} = 3\frac{1}{2} - \frac{|x - 5|}{6}$ j) $10 - \sqrt{1 - 10x + 25x^2} = \sqrt{4x^2 + 12x + 9} - |x|$

Я73. Rozwiąż nierówność.

a) $|x - 4| > 3x + 8$ c) $5 - 2x < |3x - 1|$ e) $x - |x| + 5 > 0$
b) $|x + 3| \leq x + 3$ d) $3x - 2 \geq |2x - 3|$ f) $\frac{|6x - 1|}{3} \leq \frac{2 - 3x}{5}$

Я74. Rozwiąż nierówność.

a) $|x + 3| + |x| < 7$ d) $\sqrt{16x^2 - 24x + 9} > 6 - |2 + 3x|$
b) $|6 - 3x| + |x + 5| \geq 8$ e) $\frac{|x - 5|}{2} - \frac{|2x + 1|}{3} \geq 2$
c) $|2x - 5| + |x + 3| < 2$ f) $|2x - 1| < |2x + 3| - |2x + 2| + 5$

Я75. Dane są zbiory:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{|3x-7|}{2} < 6x\right\} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{|3x-7|}{2} < |6x|\right\} \quad C = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{|3x-7|}{2} < 6\right\}$$

Wyznacz podany zbiór.

- a) $A \cup C$ b) $B \cap C$ c) $B \setminus A$ d) $C \setminus (A \cup B)$

Я76. Wykaż, że każda liczba rzeczywista spełnia podaną nierówność.

- a) $2|x-1| + |x+4| > 1$ b) $7 + |7-3x| \geq \sqrt{9x^2}$

Я77. Wyznacz wszystkie liczby, które równocześnie spełniają obie nierówności:

$$|6-3x| > x \text{ oraz } |2x-1| + |3x-1| > 4$$

Я78. Wyznacz wszystkie liczby, które spełniają nierówność $|x-6| - |2x+5| \geq 1$ lub nierówność $3x+1 > |2x+1|$.

Я79. Wyznacz wszystkie liczby całkowite, które są rozwiązaniem nierówności:

$$|5x-6| - |6x-5| > -4$$

Я80. Wskaż najmniejszą liczbę całkowitą k spełniającą warunek:

$$6-k < |k+2| \leq |2k+5|$$

UKŁADY RÓWNAŃ

81. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

- a) Suma liczb x i y wynosi 7, a suma podwojonej liczby x i połowy liczby y to 11.
b) Liczba a jest 10 razy większa od liczby b , a liczba b jest o 10 mniejsza od a .
c) Liczba x jest o 3 większa od liczby y . Liczba y jest o 6 większa od połowy liczby x .

82. Zapisz podane informacje w postaci układu równań.

- a) Prostokąt o bokach a i b ma pole równe 12 i obwód równy 14.
b) W równoległoboku kąt rozwarty ma miarę x stopni, a kąt ostry ma miarę y stopni. Kąt rozwarty jest o 20 stopni większy od kąta ostrego.
c) Koło o promieniu r i kwadrat o boku b mają równe obwody. Pole koła jest większe od pola kwadratu o 10.

83. Przyjmijmy, że Ewa ma x lat, a Iwona ma y lat. Zapisz każde z poniższych zdań w postaci równania z dwiema niewiadomymi.

- a) Iwona jest starsza od Ewy o 6 lat.
- b) Ewa jest dwukrotnie starsza od Iwony.
- c) Rok temu Iwona była 3 razy starsza od Ewy.
- d) Za trzy lata Ewa będzie 3 razy starsza od Iwony.
- e) Średnia arytmetyczna wieku Ewy i Iwony jest liczbą o 3 większą od wieku Ewy.
- f) Gdy Ewa się urodziła, to Iwona miała tyle lat co Ewa dwa lata temu.

84. Sprawdź, czy podana para liczb spełnia dany układ równań.

- a) $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ 2y + x = 17 \end{cases}$ $x = 5, y = 6$
- c) $\begin{cases} 5x - y = 53 \\ x + y = 7 \end{cases}$ $x = 10, y = -3$
- b) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + y = 13 \end{cases}$ $x = 4, y = 3$
- d) $\begin{cases} 6x - y = 14 \\ 2y + 7x = 10 \end{cases}$ $x = 2, y = -2$

85. Podana w ramce liczba spełnia dany układ równań. Wyznacz drugą liczbę stanowiącą rozwiązanie tego układu. Następnie sprawdź, czy podana para liczb spełnia dany układ równań.

- a) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases}$ $x = -2$
- d) $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 1 \\ x + \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$ $x = \sqrt{2}$
- b) $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 7x - 8y = -4 \end{cases}$ $y = \frac{1}{2}$
- e) $\begin{cases} \frac{x+3y}{3} = 4 \\ \frac{1}{6}x + 0,1y = 0 \end{cases}$ $x = -3$
- c) $\begin{cases} -x + 2y = -18 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$ $y = -6$
- f) $\begin{cases} 2(x - y) = x - 4 \\ 3(x + y) = y + 20 \end{cases}$ $y = 4$

86. Podaj przykład układu równań, którego rozwiązaniem jest dana para liczb.

- a) $x = 3, y = 1$
- b) $x = -1, y = 2$
- c) $x = 0, y = 8$

87. Podaj trzy pary liczb, które spełniają równanie.

- a) $x + y = 10$
- b) $x - y = 30$
- c) $2x - y = 20$

88. Rozwiąż podany układ równań metodą podstawiania.

- a) $\begin{cases} x + y = -7 \\ x = 2 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} l = k + 4 \\ 2k + l = 13 \end{cases}$
- e) $\begin{cases} 3t - z = 9 \\ 2t + 3z = -16 \end{cases}$
- g) $\begin{cases} 2c + 6d = 2 \\ 2d - 3c = 19 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 2a - 3b = -14 \\ a = -2b \end{cases}$
- d) $\begin{cases} y - 2x = 5 \\ 2y + x = 10 \end{cases}$
- f) $\begin{cases} 2m + 10n = 0 \\ m - n = 12 \end{cases}$
- h) $\begin{cases} 4p - 3r = 5 \\ 6p + 5r = -2 \end{cases}$

89. Rozwiąż podany układ równań metodą przeciwnych współczynników.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 4x + 2y = -2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x + 5y = -8 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ -5x + 3y = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - y = 17 \\ 3x - 2y = 45 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 6x + 2y = 5 \\ 4x - 6y = -26 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x + 6y = 4 \\ 5x + 4y = -2 \end{cases}$

90. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} 9x - y = 1 \\ 2x + 3y = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ x + 1 = 2(3 - y) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 2(x - 1) = 2 - 3(1 - y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x + y) = -5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 5(y + 1) = 3 \\ 2x - 3(y - x) = 16 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4(x - y - 2) = x + 1 \\ 5(x - 1) = 3(y + 1) + 7 \end{cases}$

91. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} y - \frac{5-2x}{2} = -3 \\ \frac{x-2y}{3} = \frac{1}{3}(x-y) - \frac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{3x-4y}{5} - \frac{y-9x}{2} = 3 \\ \frac{15x-7y}{4} = \frac{2x-3y}{3} + 1\frac{7}{9} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 - 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ (x-1)(x+2) = (x-1)(x+7) \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{5}(6x + 14y) = 3x + 0,8 \\ 7 + 2 \cdot \frac{20x+y}{7} = y - (7x + \frac{6}{7}) \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x-3)(y-2) = (x-2)(y-3) + 0,5 \\ (x+3)^2 - (x-2)^2 = y(y-4) - y^2 - 10 \end{cases}$

92. Odgadnij parę liczb spełniającą układ równań.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 15 \\ x = y \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x + 5 \\ 581x + y = 5 \end{cases}$

93. Gdy licznik pewnego ułamka zwiększymy dwukrotnie, a mianownik powiększymy o 2, to otrzymamy $1\frac{1}{3}$, a gdy licznik tego ułamka zwiększymy o 3, a mianownik zwiększymy trzykrotnie, to otrzymamy $\frac{1}{3}$. O jakim ułamku mowa?

94. Pięć lat temu Karol był starszy od Filipa 3 razy, a za 2 lata będzie od niego starszy 2 razy. Ile lat ma Karol, a ile — Filip?

95. Cztery lata temu Zuzia była 4 razy młodsza od Asi. Kiedy Zuzia będzie w wieku, w jakim teraz jest Asia, to Asia będzie 3 razy starsza niż Zuzia teraz. Ile lat ma Zuzia, a ile — Asia?

Я96. Zapisz podane informacje w postaci dwóch równań z trzema niewiadomymi. Następnie podaj przynajmniej jedną trójkę liczb, która spełnia oba równania.

a) Suma trzech liczb jest równa 10, a ich iloczyn wynosi 20.

b) Iloczyn pewnej liczby i sumy dwóch innych liczb jest równy 33, a suma tych trzech liczb wynosi 14.

Я97. Rozwiąż układ równań.

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = -6 \\ y = z - 2x \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} a - b - c = 4 \\ 2a + 2b + c = 0 \\ 4a - 2b + 3c = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} w + x + y - z = -24 \\ w + x - y + z = 36 \\ w - x + y + z = 36 \\ -w + x + y + z = 36 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = 6 \\ 2x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 6x + 5y + 2z = 3 \\ 3x - 4y + 3z = 10 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ a + b + c = d - 2 \\ a - 2b = d \\ c - d = a - b \end{cases}$$

Я98. Rozwiąż układ równań.

$$a) \begin{cases} 2(x + y) - z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ x - 6(y - z) = 7 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} (2x - y)(2x + y) = (2x + 3)^2 - y^2 + z - 1 \\ (z - 2)^2 = z(z - 3) + x + y \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2(x - y) + 3(z - y) + 4(z - x) = 10,3 \\ 4(2 - 2z) + 5x = y + 0,4 \\ -3(x - 2y) + 2(y - x + z) = -3,1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} p + q + r + s = 4 \\ 2p + 5q + 2(r - s) = 7 \\ 2(p + q) = 18 - 2(r + s) \\ 5(p - q + r) + 2(q - 2p) = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{c - 2b}{2} = \frac{a + 12}{3} \\ \frac{a}{5} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} = 0 \\ a - b + c = 6 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3a - 4b + 2c + 5d = -4 \\ -a + 5b - c - 6d = 10,5 \\ 2a + b + 2c + d = 1 \\ \frac{1}{2}a - 7b - 10c - \frac{1}{3}d = 4 \end{cases}$$

Я99. Rozwiąż układ równań.

$$a) \begin{cases} |x + y| = 3 \\ y - x = 7 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} |2x| + |y| = 10 \\ x - y = -7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} |y| - 3x = 5 \\ x - y = 13 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} y - 2x = 18 \\ |x + 3| - |y - 4| = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} |x - y + 2| = 5 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} |y - 4| - |x - 3| = 10 \\ y - 5 = 2x \end{cases}$$

UKŁADY RÓWNAŃ OZNACZONE, NIEOZNACZONE I SPRZECZNE

100. Które z podanych układów równań są oznaczone, które — nieoznaczone, a które — sprzeczne?

I. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$

IV. $\begin{cases} -15x - 35y = -5 \\ 3x + 7y = -1 \end{cases}$

II. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 8 \end{cases}$

V. $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 12y + 10x = 14 \end{cases}$

III. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$

VI. $\begin{cases} \frac{2x-y}{3} = \frac{1}{2} \\ 8y - 16x + 12 = 0 \end{cases}$

101. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 6y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -6y - 9x = -7 \\ 6x + 9y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y - 4 = 0 \\ -1,5x - y + 2 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{3y-2x}{5} = 0,1 \\ 6y - 2x = 0,5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 7 - 3x \\ -x - \frac{1}{3}y = -\frac{7}{3} \end{cases}$

f) $\begin{cases} y - x\sqrt{2} = \sqrt{3} \\ -y\sqrt{2} + 2x = -\sqrt{6} \end{cases}$

102. Jaką liczbą zastąpić literę k , aby układ równań był nieoznaczony?

a) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 3x - 9y = k \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 5x - 2 \\ x = ky + 0,4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + \frac{y}{2} = 7 \\ 2x + ky = 3,5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x-2y}{k} = 1 \\ 2x - 4y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} kx - 0,1y = 0,3 \\ x = 10y + 30 \end{cases}$

f) $\begin{cases} kx - \frac{y\sqrt{6}}{3} = 0 \\ 3x = y\sqrt{2} \end{cases}$

103. Jaką liczbą zastąpić literę k , aby układ równań był sprzeczny?

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ kx + 6y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2y - 6x = 1 \\ ky + 2x = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 6 \\ ky - x = 6 \end{cases}$

104. Dla jakich wartości a oraz b podany układ równań jest nieoznaczony?

a) $\begin{cases} (a+3)x + (b-2)y = 6 \\ (2b-1)x - (4-a)y = -12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x - (a+2b)y = 1 \\ -4x + (2a-b)y = a-b \end{cases}$

ZADANIA TEKSTOWE

105. Średnia arytmetyczna sześciu kolejnych liczb naturalnych wynosi 55,5. Znajdź najmniejszą spośród tych liczb.

106. Nitka jest 20 razy dłuższa od igły. Po nawleczeniu igła ze złożoną podwójnie nitką ma długość 45 cm. Uszko znajduje się w odległości 1 mm od końca igły. Jaką długość ma igła?

107. Gospodarz postanowił sprzedać swoje pole o łącznej powierzchni 21,5 ha czterem zainteresowanym kupcom. Pierwszemu z nich sprzedał 8 ha, a trzem kolejnym sprzedał pozostałą część pola, przy czym podzielił ją w stosunku 2 : 3 : 4. Jaki obszar zajmuje pole o najmniejszej powierzchni?

108. Po przestawieniu cyfr pewnej liczby dwucyfrowej otrzymamy liczbę o 27 większą. Znajdź tę liczbę, jeśli wiadomo, że suma jej cyfr wynosi 13.

109. Rodzice wraz z trójką swoich dzieci udali się do kina. Za dwa bilety normalne i trzy ulgowe zapłacili 93 zł. W następnym tygodniu do kina udał się ojciec wraz z dziećmi i ich kolegą. Wówczas za bilety (jeden normalny i cztery ulgowe) zapłacił 84 zł. O ile procent cena biletu ulgowego jest niższa od ceny biletu normalnego?

110. Zapisz podane informacje w postaci układu równań. Następnie rozwiąż ten układ.

a) Sznurek o długości 8 m podzielono na dwa kawałki, dłuższy miał a metrów, a krótszy — b metrów. Długości tych kawałków różniły się o 3 m.

b) Paweł ma x braci i y siostr. Siostr ma trzy razy więcej niż braci. W sumie Paweł ma czworo rodzeństwa.

c) Zapałka ma długość z cm, a wykałaczka — w cm. Dwie zapałki i jedna wykałaczka mają łączną długość 15 cm, a cztery zapałki mają taką samą długość jak trzy wykałaczki.

111. a) Po dopisaniu cyfry 6 z prawej strony pewnej liczby naturalnej otrzymano liczbę o 222 większą. Jaką liczbę otrzymano?

b) Jeżeli do pewnej liczby dwucyfrowej dopiszemy z lewej strony 1, a z prawej strony 5, to otrzymamy liczbę 25 razy większą. O jakiej liczbie dwucyfrowej mowa?

112. Paulina przeliczyła pieniądze, które miała w dwóch kieszeniach spodni. W lewej kieszeni ma cztery razy większą kwotę niż w prawej. Gdyby przełożyła 13,50 zł z lewej kieszeni do prawej, to w obu kieszeniach miałyby jednakową kwotę. Jaką kwotę Paulina miała w lewej kieszeni?

113. Łączny wiek matki i jej dwóch córek wynosi 58 lat. Między wiekiem dziewcząt są dwa lata różnicy. Za trzy lata matka będzie trzy razy starsza od młodszej córki. Ile lat ma obecnie starsza córka?

114. Grupa wolontariuszy z pewnego technikum kwestowała na rzecz miejskiego hospicjum. Przez cztery kolejne dni udało się im zebrać kwotę 4920 zł. W drugim dniu zbiórki wolontariusze zebrali o 20% więcej niż w pierwszym. Trzeciego dnia zebrali tyle samo co łącznie w pierwszym i drugim dniu. W czwartym dniu uzbierali połowę kwoty z pierwszego i trzeciego dnia zbiórki. Jaka kwota została zebrana w pierwszym dniu zbiórki?

115. Połowę trasy z ośrodka wczasowego do najbliższego miasteczka pan Zenek przebiegł ze średnią prędkością 15 km/h, a drugą połowę przeszedł ze średnią prędkością 5 km/h. Pokonanie całej trasy zajęło mu 2 godziny. W jakiej odległości od ośrodka jest miasteczko?

116. Wydawnictwo otrzymuje za książkę 70% ceny detalicznej. Zysk hurtowni stanowi 8% ceny detalicznej, a zysk księgarni — 22%. Koszt przygotowania pewnej książki wyniósł 7,20 zł za egzemplarz.

a) Jaką cenę detaliczną powinno ustalić wydawnictwo, aby jego zysk na każdym egzemplarzu tej książki wyniósł 2,60 zł?

b) Przy jakiej cenie detalicznej zysk wydawnictwa na każdym egzemplarzu byłby taki sam jak zysk księgarni?

117. a) Ile soli należy dosypać do 38 kg wody, aby otrzymać solankę pięcioprocentową?

b) Ile wody należy dolać do 6 kg solanki pięcioprocentowej, aby otrzymać solankę dwuprocentową?

c) Ile soli należy dosypać do 24 kg solanki dwuprocentowej, aby otrzymać solankę czteroprocentową?

d) Ile solanki dwuprocentowej należy dodać do 9 kg solanki sześcioprocentowej, aby otrzymać solankę pięcioprocentową?

e) Z 20 kg solanki trzyprocentowej odparowano część wody i otrzymano solankę czteroprocentową. Ile solanki otrzymano?

f) Z solanki sześcioprocentowej odparowano 2 kg wody i otrzymano solankę ośmioprocentową. Ile solanki było na początku?

g) Zmieszano solankę o stężeniu 3% z solanką o stężeniu 7% i otrzymano 20 kg solanki o stężeniu 4%. Ile wzięto solanki trzyprocentowej?

118. Do ogrodzenia prostokątnej działki potrzeba siatki ogrodzeniowej o długości 376 m. Gdyby jeden bok działki był krótszy o 20%, a drugi dłuższy o 10 m, to działka miałaby kształt kwadratu. Jaką powierzchnię ma ta działka? Wynik podaj w arach.

119. Firma wynajmująca rowery w pewnym mieście oferuje dwie możliwości skorzystania ze swych usług. W pierwszej klient ponosi opłatę startową w wysokości 15 zł, a następnie płaci 4 zł za każdą rozpoczętą godzinę wypożyczenia. W drugim wariantie nie ma opłaty startowej — klient płaci 6 zł za każdą nowo rozpoczętą godzinę wypożyczenia. Przy jakiej minimalnej liczbie godzin korzystania z usług tej firmy wariant pierwszy jest bardziej opłacalny od wariantu drugiego?

120. Suma trzech kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest większa od 784 i równocześnie nie większa od 798. Znajdź te liczby.

121. Zapisz odpowiedni układ równań. Następnie rozwiąż ten układ.

a) W pewnej klasie jest x dziewcząt i y chłopców, w sumie 22 uczniów. Dziewcząt jest tam o 20% więcej niż chłopców.

b) Zeszyt kosztuje x złotych, a książka y złotych, w sumie 24 zł. Zeszyt jest o 80% tańszy od książki.

c) Bułka i jogurt kosztowały w sumie 2,25 zł. Cena bułki zwiększyła się o 20%, a cena jogurtu — o 5% i teraz w sumie kosztują 2,46 zł. (Oznacz cenę bułki przed podwyżką literą x , a cenę jogurtu przed podwyżką — literą y).

122. Ułóż i rozwiąż odpowiedni układ równań.

a) Suma 20% liczby x i liczby o 20% większej od y jest równa 9,1, a 40% sumy liczb x i y wynosi 3,2.

b) Liczba x stanowi 15% liczby y , a liczba o 30 większa od x jest o 22,5% mniejsza od y .

c) Średnia arytmetyczna liczb x i y wynosi 3,4. Jeżeli jedną z tych liczb zwiększymy o 25%, a drugą zmniejszymy o 1,4, to otrzymamy liczby równe.

123. Julek pojechał rowerem z Wojtkowic do odległych o 28 km Bartoszczyk. W drodze zepsuł mu się rower i dalszą część drogi Julek pokonał piechotą. Pokonanie całej trasy zajęło mu 2 godziny i 45 minut. Rowerem jechał ze średnią prędkością 21 km/h, a szedł z prędkością 4 km/h. W jakiej odległości od Wojtkowic zepsuł mu się rower?

124. Państwo Maria i Stanisław Kowalscy mają razem 91 lat. Kiedy pan Stanisław był w wieku pani Marii, to pani Maria była dwa razy młodsza niż jej mąż teraz. W jakim wieku są państwo Kowalscy?

125. W sadzie owocowym rosną jabłonie, grusze i czereśnie. Jabłonie stanowią $\frac{2}{3}$ wszystkich drzew. Gdyby w sadzie zasadzono dodatkowo 420 sztuk czereśni, to jabłoni i gruszy byłoby w sumie tyle samo co czereśni. Gdyby natomiast wycięto $\frac{2}{3}$ wszystkich czereśni, to w sadzie pozostałoby 660 drzew. Ile jabłoni rośnie w sadzie?

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Rozwiązaniem równania $\frac{5x-1}{2} + \frac{3x+1}{4} = 9\frac{1}{2}$ jest liczba należąca do przedziału:

- A. $(-\infty; -2)$ B. $(-2; 1)$ C. $(1; 3)$ D. $(3; +\infty)$

2. Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność

$$(4x+2)(3-x) < 1 - (2x-5)^2$$

jest:

- A. -4 B. 4 C. 3 D. nie istnieje taka liczba

3. Ile liczb naturalnych należy do zbioru rozwiązań nierówności $|2-x| \leq 4$?

- A. nieskończenie wiele B. 9 C. 6 D. 7

4. Który z podanych układów równań jest nieoznaczony?

- A. $\begin{cases} 6y+3x=-1 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y-7x=\frac{3}{5} \\ 70x-10y=-6 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y-7x=\frac{3}{5} \\ -10y+70x=6 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x+3y=-5 \\ 6x+9y=-5 \end{cases}$

5. Dwunastu pracowników zbierało jabłka w sadzie, pracując po 8 godzin przez 10 dni. Ile osób należałoby dodatkowo zatrudnić, żeby tę samą pracę wykonały, pracując (z taką samą wydajnością) po 6 godzin przez 5 dni?

- A. 32 osoby B. 24 osoby C. 20 osób D. 15 osób

6. Rozwiąż równanie.

- a) $5(x-2) - 2(3x+1) = 4 - 3(7-x)$ b) $3x + (x-4)^2 = (x+4)^2 - 13x$

7. Rozwiąż równanie i nierówność.

- a) $|3x-7| = 2$ b) $|x+3| > 9$

8. Rozwiąż układ równań.

- a) $\begin{cases} 3x-2y=-16 \\ x=8-2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{5x-2}{3} + \frac{2(y+1)}{5} = 2 \\ x^2+y^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6(x+2y) = 1 \\ 2(x+2y) = 3 \end{cases}$

9. Kamil, Robert i Martyna porównali liczby swoich znajomych na portalu społecznościowym i zauważyli, że Kamil ma dwa razy więcej znajomych niż Robert i o dwóch znajomych więcej niż Martyna. Ilu znajomych ma Martyna, jeżeli wiadomo, że grono znajomych całej trójki liczy łącznie 998 osób?

Я 10. Dane są równania:

$$\text{I. } \frac{3(x-2)}{4} + \frac{1}{3} = 0,75x - \frac{7}{6}$$

$$\text{II. } \frac{x-4}{2x-8} = 2$$

$$\text{III. } (3x-1)^2 = 9x^2 - 2$$

Które z tych równań są sprzeczne?

- A. wszystkie B. tylko I C. tylko II D. I i II

Я 11. Ile liczb całkowitych spełnia nierówność $||x-5|+2| \leq 6$?

- A. nieskończenie wiele B. 9 C. 7 D. 0

Я 12. Suma wszystkich liczb, które są rozwiązaniami równania $|2x-1|-|x+6|=-2$, jest równa:

- A. 4 B. 13 C. 8 D. 14

Я 13. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2a+b-c=-11 \\ 3a+2b+c=-1 \\ a-3b+2c=6 \end{cases}$ jest trójka liczb a, b, c , takich że:

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

Я 14. Rozwiąż równanie.

$$\text{a) } (2x-1)^3 = 8x(x-2)^2 + 20x^2$$

$$\text{b) } \frac{3x}{x^2-9} = \frac{3}{x-3}$$

$$\text{c) } (2x-\sqrt{3})^2 = 4x(x-2) + 5$$

Я 15. Wyznacz wszystkie liczby całkowite należące do zbioru $A \cap B$, jeżeli:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(2x-3)(8x+1)}{4} \geq \frac{(4x+1)^2}{8} + \frac{24x^2-5}{12} \right\}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R} : 2x-4 < 2\sqrt{3}x+16 \}$$

Я 16. Rozwiąż równania i nierówności.

$$\text{a) } |3x-5| = |2x-7| - 3$$

$$\text{c) } 6 + 3\sqrt{3} < |2x - \sqrt{3}|$$

$$\text{b) } \sqrt{x^2+6x+9} = 3 - \sqrt{10}$$

$$\text{d) } \sqrt{x^2-8x+16} + |x+5| \leq 9$$

Я 17. Dla jakiej wartości parametru p podane równania i nierówność nie mają rozwiązania?

$$\text{a) } (p-5)x = \frac{3x-2}{4}$$

$$\text{b) } (p^2-16)x = 4-p$$

$$\text{c) } \frac{6x}{5} \geq 2 - px$$

Я 18. Pewna liczba pracowników zdołała pomalować drewniany płot w ciągu trzech godzin. Gdyby zatrudniono dodatkowo pięć osób, to czas przeznaczony na pomalowanie tego płotu skróciłby się o $\frac{1}{3}$. Ilu pracowników było zatrudnionych przy malowaniu płotu?

PRZED MATURĄ

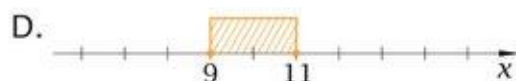
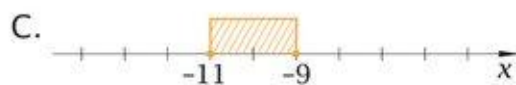
1. Równość $\frac{m}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$ zachodzi dla:

- A. $m = 5$ B. $m = 4$ C. $m = 1$ D. $m = -5$

2. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2-x}{3} - \frac{2x-1}{2} < x$ jest przedział:

- A. $(-\infty; \frac{1}{2})$ B. $(-\infty; \frac{1}{14})$ C. $(\frac{1}{14}; +\infty)$ D. $(\frac{1}{2}; +\infty)$

3. Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór wszystkich liczb x spełniających warunek: $11 \leq 2x - 7 \leq 15$.



4. Dane jest równanie $3x + 4y - 5 = 0$. Z którym z poniższych równań tworzy ono układ sprzeczny?

- A. $6x + 8y - 10 = 0$ C. $9x + 12y - 10 = 0$
B. $4x - 3y + 5 = 0$ D. $5x + 4y - 3 = 0$

5. Para liczb $x = 2$ i $y = 2$ jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} ax + y = 4 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$ dla:

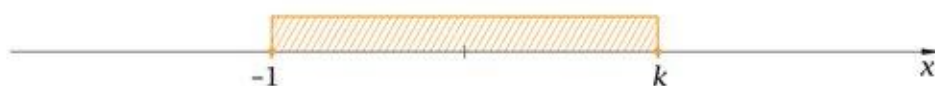
- A. $a = -1$ B. $a = 1$ C. $a = -2$ D. $a = 2$

6. Zbiorem rozwiązań nierówności $ax + 4 \geq 0$ z niewiadomą x jest przedział $(-\infty; 2]$. Wyznacz a .

7. Jeżeli do licznika pewnego nieskracalnego ułamka dodamy 32, a mianownik pozostawimy bez zmian, to otrzymamy liczbę 2. Jeżeli natomiast od licznika i od mianownika tego ułamka odejmiemy 6, to otrzymamy liczbę $\frac{8}{17}$. Wyznacz ten ułamek.

8. Rejsowy samolot z Warszawy do Rzymu przelatuje nad Austrią każdorazowo tą samą trasą z taką samą zakładaną prędkością przelotową. We wtorek jego średnia prędkość była o 10% większa niż prędkość przelotowa, a w czwartek średnia prędkość była o 10% mniejsza od zakładanej prędkości przelotowej. Czas przelotu nad Austrią w czwartek różnił się od wtorkowego o 12 minut. Jak długo trwał przelot tego samolotu nad Austrią we wtorek?

- Я 9. Na rysunku przedstawiony jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $|2x - 8| \leq 10$.



Stąd wynika, że:

- A. $k = 2$ B. $k = 4$ C. $k = 5$ D. $k = 9$
- Я 10. Spośród poniższych nierówności wskaż tę, którą spełniają dokładnie trzy liczby całkowite.

- A. $\left|\frac{3}{4}x + 5\right| < 2$ B. $\left|\frac{4}{3}x + 5\right| < 2$ C. $\left|\frac{3}{5}x + 4\right| < 2$ D. $\left|\frac{4}{5}x + 3\right| < 2$

- Я 11. Równanie $||x - 4| - 2| = 2$ ma dokładnie:

- A. dwa rozwiązania rzeczywiste
B. jedno rozwiązanie rzeczywiste
C. cztery rozwiązania rzeczywiste
D. trzy rozwiązania rzeczywiste

- Я 12. Równanie $||x| - 2| = |x| + 2$:

- A. nie ma rozwiązań
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie
C. ma dokładnie dwa rozwiązania
D. ma dokładnie cztery rozwiązania

- Я 13. Liczba n jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą równanie:

$$2|x + 57| = |x - 39|$$

Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $|n|$.

--	--	--

- Я 14. Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $|x| < |x - 1025|$. W poniższe kratki wpisz — kolejno — cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności otrzymanego wyniku.

--	--	--

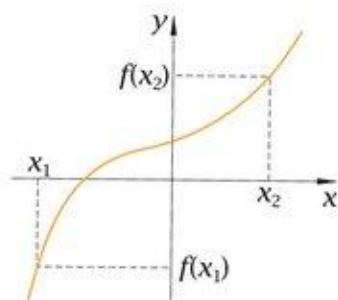
FUNKCJE

Funkcja f określona na zbiorze X o wartościami w zbiorze Y ($f: X \rightarrow Y$) to takie przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y .

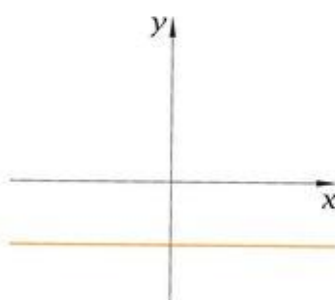
Do wykresu funkcji f należą wszystkie punkty o współrzędnych $(x, f(x))$, gdzie x jest elementem dziedziny.

Zbiór X , na którym funkcja jest określona, nazywamy **dziedziną funkcji**, a każdy element dziedziny nazywamy **argumentem funkcji**.

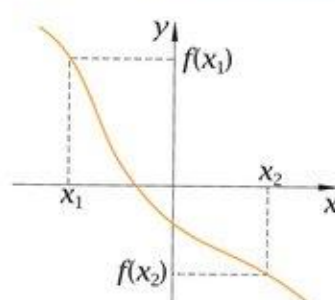
Argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0, nazywamy **miejscem zerowym** tej funkcji. Innymi słowy, argument a jest miejscem zerowym funkcji f , gdy $f(a) = 0$.



Funkcję f nazywamy **rosnącą**, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.



Funkcję, która dla każdego argumentu przyjmuje taką samą wartość, nazywamy **funkcją stałą**.



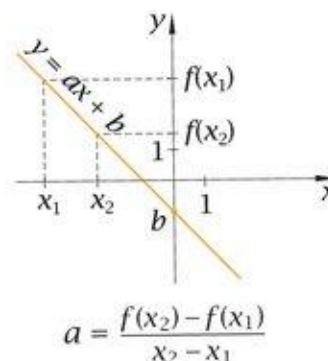
Funkcję f nazywamy **malejącą**, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

Jeśli podajemy przedziały, w których funkcja jest rosnąca, przedziały, w których jest malejąca, oraz przedziały, w których jest stała, to mówimy, że wyznaczamy przedziały **monotoniczności funkcji**.

Każdą funkcję określoną na zbiorze liczb rzeczywistych, której wzór można zapisać w postaci $y = ax + b$, gdzie a i b są danymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy **funkcją liniową**.

Wykres funkcji liniowej $y = ax + b$ przecina oś y w punkcie $(0, b)$.

Współczynnik a decyduje o nachyleniu wykresu funkcji $y = ax + b$ do osi x . Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.



POJĘCIE FUNKCJI

1. Dla każdej z funkcji określonych poniżej za pomocą tabelki ustal:

- dziedzinę,
- zbiór wartości,
- wartości najmniejszą i największą,
- wartość dla argumentu 1,
- dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 2,
- miejsca zerowe funkcji,
- dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	0	1	2	3	4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	-2	1	-2	0	2	-1	2

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	-3	5	0	1	2	0

x	10	12	14	16	18	20
$s(x)$	0	2	4	6	8	0

2. Poniżej określono funkcje za pomocą opisu słownego. Przedstaw te funkcje za pomocą grafu i tabelki.

- Liczbowi całkowitemu należącemu do przedziału $(-4; 2)$ przyporządkowujemy liczbę o 6 większą.
- Liczbowi dwucyfrowemu podzielny przez 15 przyporządkowujemy sumę cyfr występujących w tej liczbie.

3. Poniżej określono funkcje za pomocą opisu słownego. Przedstaw te funkcje za pomocą tabelki i wykresu.

- Każdej liczbie całkowitej należącej do przedziału $\langle -4; 4 \rangle$ przyporządkowujemy wartość bezwzględną tej liczby.
- Każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ przyporządkowujemy resztę z dzielenia tej liczby przez 4 pomniejszoną o 2.

4. Funkcję określono za pomocą wzoru i podano jej dziedzinę. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabelki i wykresu.

- $f(x) = 2x - 5, \quad x \in \left\{-3, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2, 4, 5\frac{1}{4}\right\}$
- $f(x) = \frac{12}{x} - 3, \quad x \in \{-6, -4, -3, -2, 1, 2, 3, 4, 6\}$
- $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$
- $f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
- $f(x) = |x + 2| - 2, \quad x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

5. Poniżej określono słownie następujące funkcje:

- a) funkcja f_1 każdej liczbie dwucyfrowej mniejszej od 50 przyporządkowuje iloczyn cyfr występujących w zapisie tej liczby,
- b) funkcja f_2 każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 6,
- c) funkcja f_3 każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje wartość bezwzględną liczby o 3 większej od x ,
- d) funkcja f_4 każdemu argumentowi ze zbioru $\{4, 10, 16, 17, 18, 20\}$ przyporządkowuje liczbę parzystych dzielników tego argumentu.

Dla każdej z tych funkcji:

- I. wyznacz wartości dla argumentów: 16, 18, 20,
- II. sprawdź, czy funkcja przyjmuje wartość 5,
- III. wyznacz miejsca zerowe,
- IV. znajdź zbiór wartości.

6. Znajdź miejsca zerowe funkcji (o ile istnieją), która każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) liczbę o 1 większą od x , | e) sześcian liczby x powiększony o 1, |
| b) liczbę dwa razy większą od x , | f) liczbę o 1 większą od $ x $, |
| c) kwadrat liczby x , | g) liczbę o 5 mniejszą od $\sqrt{ x }$, |
| d) odwrotność liczby x , | h) odwrotność liczby $x^2 + 1$. |

7. Pewna funkcja każdej dodatniej liczbie naturalnej przyporządkowuje odwrotność tej liczby.

- a) Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu 52?
- b) Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 0,01?
- c) Czy funkcja przyjmuje wartość 1,5?
- d) Dla jednocyfrowych dodatnich liczb naturalnych przedstaw funkcję za pomocą tabelki.
- e) Na podstawie tabeli z punktu d) sporządź wykres funkcji.
- f) Czy istnieje wartość najmniejsza lub największa tej funkcji?
- g) Znajdź zbiór wartości tej funkcji.

8. Funkcja f jest określona następująco:

Każdej liczbie ze zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowujemy kwadrat tej liczby pomniejszony o 4.

- a) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabelki i wykresu.
- b) Podaj miejsca zerowe tej funkcji.
- c) Dla ilu argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie?
- d) Dla których argumentów funkcja ta przyjmuje wartości mniejsze od -2 ?

9. Funkcja f jest określona następująco:

Każdej liczbie rzeczywistej ujemnej przyporządkowujemy jej odwrotność, a każdej liczbie rzeczywistej nieujemnej — liczbę do niej przeciwną.

- a) Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.
- b) Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.
- c) Oblicz wartość wyrażenia: $f(2) + f(-2)$.
- d) Uzasadnij, że dla $k \neq 0$ iloczyn liczb $f(k)$ oraz $f(-k)$ jest liczbą stałą.

10. Podane przyporządkowanie jest funkcją. Podaj kilka argumentów i odpowiadające im wartości oraz miejsca zerowe (jeśli istnieją).

- a) *Każdemu miastu w Polsce jest przyporządkowane województwo, w którym to miasto leży.*
- b) *Każdemu państwu europejskiemu jest przyporządkowana liczba mórz, które z tym państwem graniczą.*
- c) *Każdemu dniowi bieżącego tygodnia przyporządkowana jest liczba lekcji, które masz tego dnia.*
- d) *Każdemu uczniowi twojej klasy przyporządkowujemy liczbę jego rodzeństwa.*
- e) *Każdej planecie układu słonecznego przyporządkowujemy liczbę jej księżyców.*

11. Dla jakich argumentów opisana funkcja przyjmuje wartość 3, a dla jakich — wartość 4?

- a) *Każdej osobie przyporządkowujemy liczbę liter występujących w jej imieniu.*
- b) *Liczbie naturalnej n przyporządkowujemy liczbę uczniów twojej klasy, których imię ma n liter.*
- c) *Każdej osobie przyporządkowujemy liczbę określającą, ile razy w jej imieniu wystąpiła litera „a”.*
- d) *Każdej liczbie n ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ przyporządkowujemy liczbę uczniów twojej klasy, w których imionach występuje n samogłosek.*

12. Oblicz wartości funkcji dla wskazanych argumentów.

- a) $y = 9x - 2$ $f(0), f(-4), f\left(\frac{2}{3}\right)$
- b) $y = x\sqrt{2} - 3$ $f(1), f(\sqrt{2}), f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- c) $y = x^2 - 4x + 2$ $f(3), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right)$
- d) $y = -3$ $f(2), f(-3), f(\sqrt{2} - 9)$

9e)
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{dla } x < 4 \\ 5 - 4x & \text{dla } x \geq 4 \end{cases} \quad f(-1), f(4), f(10)$$

9f)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 2 & \text{dla } x \in [-1; 1) \\ \frac{3}{x} + 4 & \text{dla } x \in [1; +\infty) \end{cases} \quad f(-3), f(-1), f\left(\frac{3}{2}\right)$$

13. Poniżej podano cennik opłat za krajowy list zwykły w zależności od tego, ile waży ten list. Przedstaw za pomocą wykresu zależność opłaty za list krajowy od masy listu.

Listy ważące 500 g lub mniej	3,30 zł
Listy ważące więcej niż 500 g, ale nie więcej niż 1000 g	4,00 zł
Listy ważące więcej niż 1000 g, ale nie więcej niż 2000 g	6,60 zł

14. Naszkicuj wykres funkcji, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- dziedziną jest przedział $\langle -5; 10 \rangle$,
 • do wykresu funkcji należą punkty $(-2, -2)$, $(1, 5)$, $(8, 4)$ i $(9, 4)$,
 • funkcja ma dwa miejsca zerowe: -5 i -1 ,
 • najmniejszą wartość funkcja przyjmuje dla argumentu -3 ,
 • największą wartość, jaką przyjmuje funkcja, wynosi 6 ,
- dziedziną jest przedział $\langle -8; 7 \rangle$,
 • wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych,
 • największą wartość funkcja przyjmuje dla argumentu -8 ,
 • funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $\langle -8; -3 \rangle$,
 • funkcja przyjmuje dla argumentów -8 i 7 wartości, które są liczbami przeciwnymi.

15. Na zbiorze wszystkich słów języka polskiego określamy trzy funkcje l , g oraz s . Jeśli przez x oznaczymy słowo w języku polskim, to $l(x)$ oznacza liczbę liter występujących w słowie x , $g(x)$ — liczbę głosek w tym słowie, $s(x)$ — liczbę sylab, z których składa się to słowo.

- Oblicz wartość każdej z tych funkcji dla słowa „rzeżucha”.
- Podaj przykład takich słów a , b , c oraz d , że: $l(a) = g(a)$, $s(b) = l(b) - g(b)$, $l(c) = 2 \cdot s(c)$, $l(d) = g(d) = s(d)$.
- Uzasadnij, że dla każdego argumentu x spełniona jest nierówność $s(x) \leq l(x)$.

16. Podaj miejsca zerowe funkcji f i g , określonych w następujący sposób:

$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to największa wielokrotność liczby 5 mniejsza od x ,
 $g: \mathbb{IQ} \rightarrow \mathbb{Z}$ i $g(x)$ to największa z liczb całkowitych mniejszych od x .

17. Podaj najmniejszą i największą wartość funkcji f .

- $f: \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to najmniejsza różna od 0 wspólna wielokrotność liczb x i 10.
- $f: \langle 0,01; 0,1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to suma trzech pierwszych cyfr po przecinku występujących w rozwinięciu dziesiętnym liczby x .
- Funkcja f każdej liczbie naturalnej o sumie cyfr równej 7 przyporządkowuje iloczyn cyfr tej liczby.

18. Dane są funkcje f , g oraz h określone następująco:

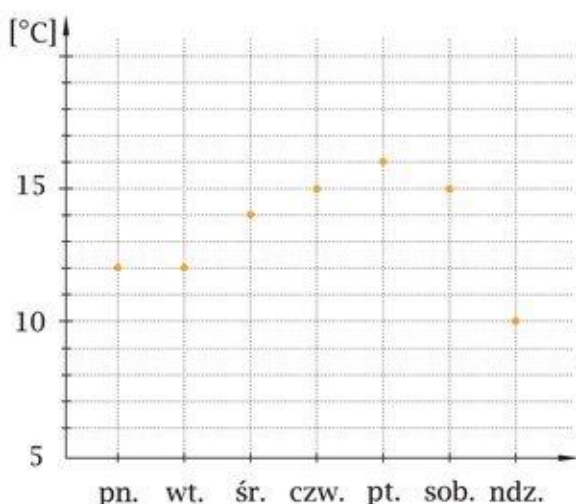
- funkcja f każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje największy dzielnik tej liczby różny od n ,
- funkcja g każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje liczbę jej dzielników,
- funkcja h każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje najmniejszą liczbę pierwszą nie mniejszą od n .

a) Czy któraś z tych funkcji ma miejsce zerowe?

b) Wyznacz następujące wartości: $f(f(12))$, $g(g(15))$, $h(h(36))$.

c) Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{f(g(24)) + g(f(24))}{g[h(f(24))] - f[h(g(24))]}.$

CZYTANIE WYKRESÓW



19. Na wykresie obok przedstawiono temperatury zanotowane w południe w kolejnych dniach.

a) Jaka była temperatura w czwartek?

b) W których dniach temperatura w południe wynosiła 12°C?

c) Którego dnia temperatura była najwyższa? Ile wynosiła?

d) Którego dnia temperatura była najniższa? Ile wynosiła?

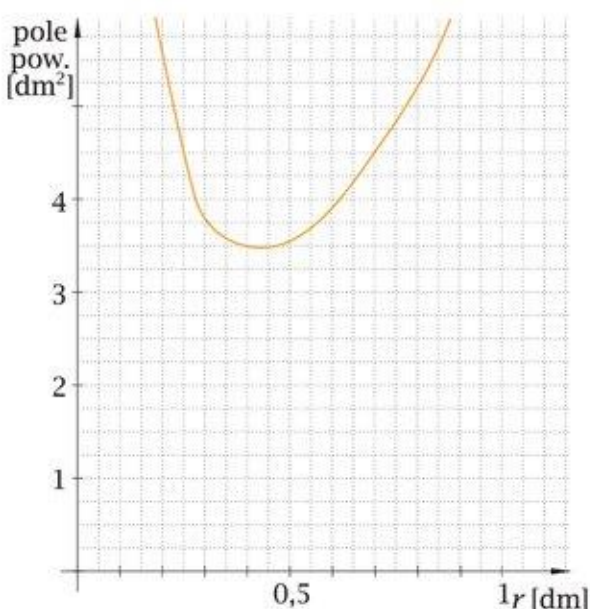
e) O ile stopni niższa była temperatura w środę niż w piątek?

20. Wykres przedstawia zależność między polem powierzchni całkowitej a promieniem podstawy puszki o objętości 0,5 litra. Korzystając z wykresu, odpowiedz na poniższe pytania (odpowiedzi podaj w przybliżeniu).

a) Jaki jest promień podstawy puszki, o polu powierzchni całkowitej 4,5 dm²?

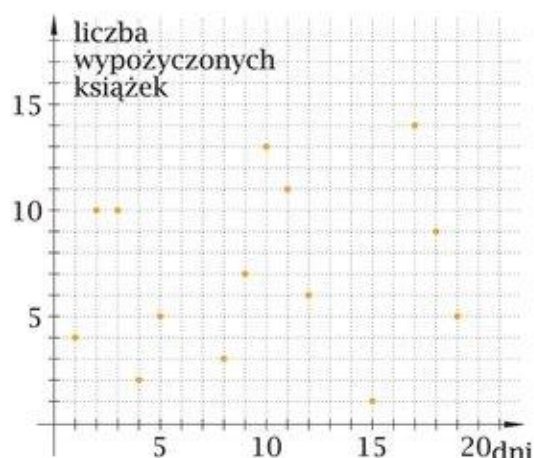
b) Jakie jest najmniejsze możliwe pole powierzchni puszki? Jaki jest wówczas promień podstawy puszki?

c) Dla jakich długości promienia pole powierzchni puszki maleje wraz ze wzrostem promienia, a dla jakich — rośnie?



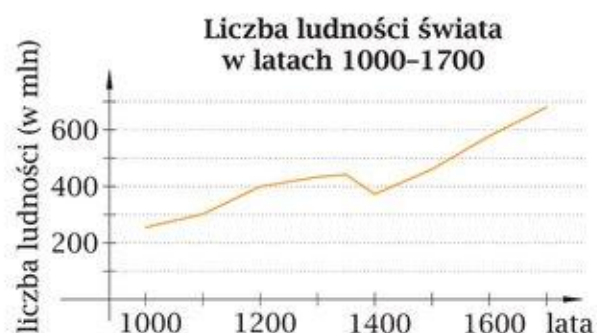
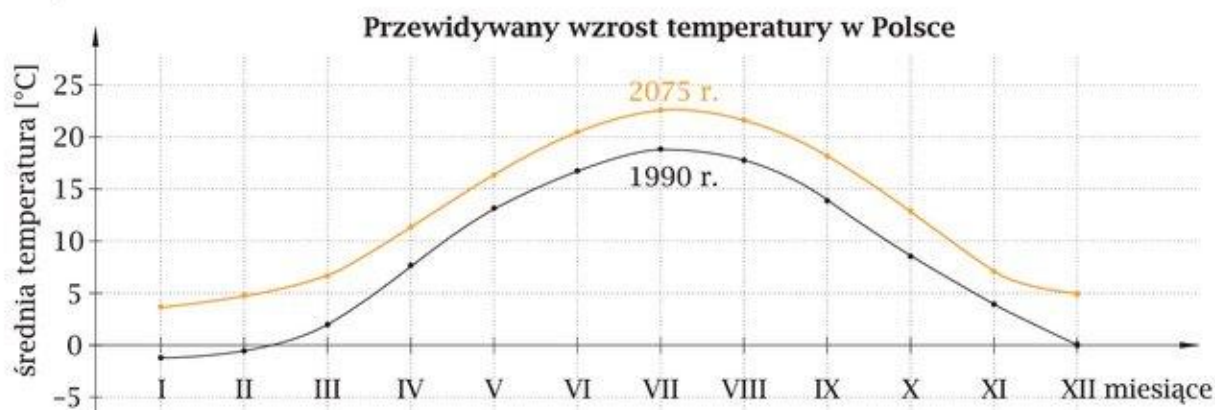
21. Na wykresie przedstawiono liczbę książek wypożyczonych w bibliotece szkolnej (czynnej od poniedziałku do piątku) w dwudziestu kolejnych dniach września przez uczniów klas pierwszych.

- Ile książek wypożyczyli pierwszoklasiści w pięciu początkowych dniach września?
- W którym dniu pierwszoklasiści wypożyczyli największą liczbę książek? Ile to było książek?
- O ile więcej książek wypożyczono 10 września w porównaniu z 1 września?
- Z uwagi na nieobecność bibliotekarza pewnego roboczego dnia biblioteka była zamknięta. Którego dnia bibliotekarz był nieobecny?



22. Odpowiedz na pytania na podstawie wykresów.

- Jaka była średnia temperatura kwietnia 1990 r.?
- W jakich miesiącach 1990 r. średnia temperatura była ujemna?
- W jakich miesiącach 2075 r. przewiduje się średnią temperaturę powyżej 15°C?
- O ile stopni wzrośnie średnia temperatura marca w latach 1990–2075?
- Czy wzrost średniej temperatury między 1990 r. a 2075 r. będzie większy w lecie czy w zimie?
- Okres wegetacyjny to okres, w którym średnia temperatura miesięczna jest wyższa od 5°C. O ile miesięcy dłuższy będzie okres wegetacyjny w Polsce w 2075 r. w porównaniu z rokiem 1990?

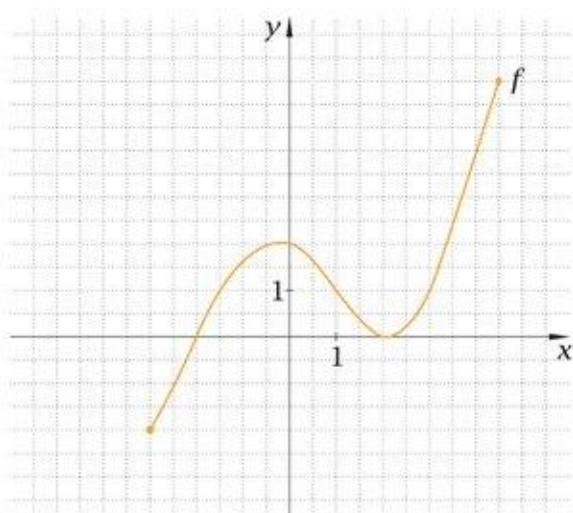
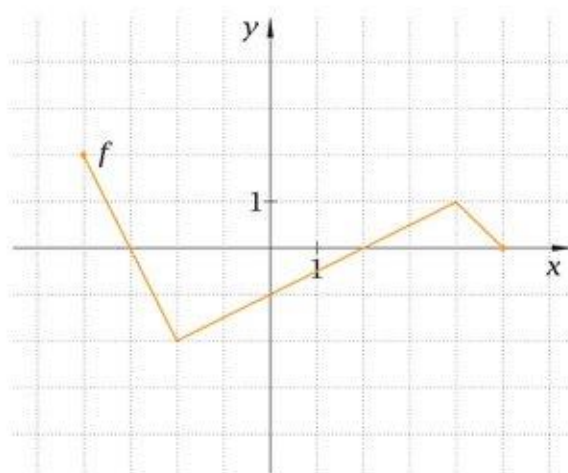


23. Odpowiedz na pytania.

- O ile wzrosła liczba ludności między 1100 r. a 1200 r.?
- W którym wieku liczba ludności przekroczyła 500 mln?
- Na wykresie widać skutki epidemii dżumy zwanej czarną śmiercią. W którym wieku panowała ta epidemia?

24. Odczytaj z wykresu funkcji f :

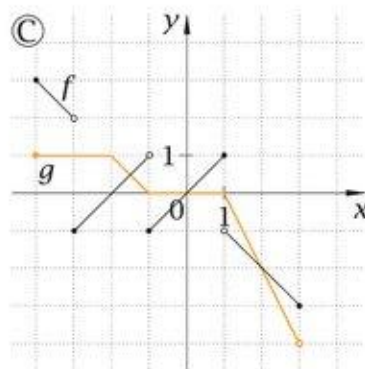
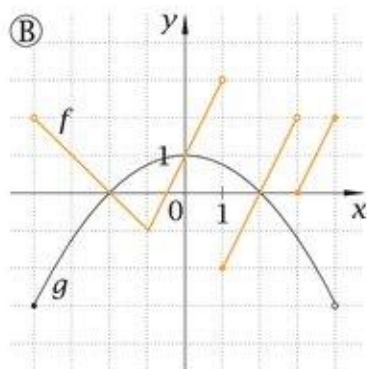
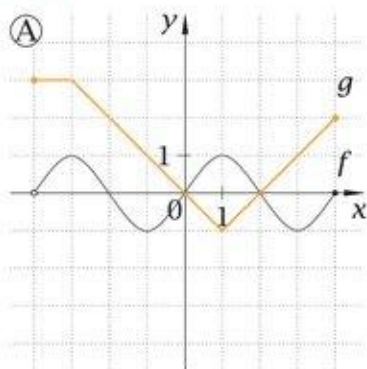
- dziedzinę i zbiór wartości funkcji,
- wartości $f(-4)$, $f(0)$ i $f(5)$,
- dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 1, a dla jakich wartość -1 ,
- dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich — nieujemne,
- największą i najmniejszą wartość funkcji,
- miejsca zerowe funkcji.



25. Odczytaj z wykresu funkcji f :

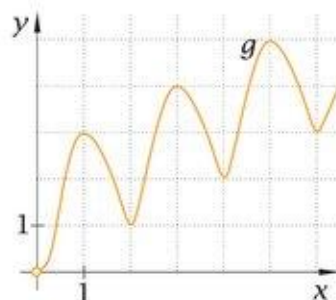
- wartości funkcji f dla argumentów: -3 , -1 , 0 i $3,5$,
- miejsca zerowe funkcji f ,
- w jakim przedziale funkcja f przyjmuje wartości nieujemne,
- dla jakich argumentów przyjmuje wartości większe od 1,
- jaka jest najmniejsza, a jaka największa wartość funkcji w przedziale $\langle -1; 4,5 \rangle$,
- dla ilu argumentów funkcja przyjmuje wartość 2.

26. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji f oraz g .



- Dla jakich argumentów wartości funkcji przedstawionych na wykresach spełniają nierówność $f(x) > g(x)$?
- Dla jakich argumentów zachodzi równość $f(x) = g(x)$?
- Dla jakich argumentów wartości funkcji f są mniejsze od wartości funkcji g lub są im równe?
- Dla jakich argumentów funkcje f i g przyjmują jednocześnie wartości ujemne?
- Dla jakich argumentów wartości obu funkcji są jednocześnie mniejsze od 2?

27. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji g (dalsza jego część powstałaby według tej samej reguły).



a) Jakich wartości funkcji można się spodziewać dla argumentów 100, 101, 153?

b) Ile rozwiązań może mieć równanie $g(x) = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$? Ile rozwiązań ma równanie $g(x) = 115$?

WZORY I WYKRESY FUNKCJI

28. Określ dziedzinę funkcji f i oblicz $f(1)$, $f(3)$, $f(-3)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(\sqrt{2})$.

a) $f(x) = 5 - 3x$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 2}$

e) $f(x) = |x| + x$

b) $f(x) = \frac{3}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{3 - x}$

f) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

29. Narysuj wykres funkcji $f: \{-2, -\frac{1}{9}, 0, 1\frac{1}{3}, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ określonej wzorem:

a) $f(x) = -3x + 2$

c) $f(x) = \frac{1 - 3x}{x + 1}$

e) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{1 - x}$

d) $f(x) = \sqrt{7 - x}$

f) $f(x) = |2x - 1|$

30. Czy do wykresu podanej funkcji należy punkt $A = (0, 2)$? Czy należy punkt $B = (2, 0)$?

a) $f(x) = x^3 + 2$

c) $h(x) = 2 - \frac{x^2}{2}$

e) $l(x) = |x - 2|$

b) $g(x) = x^2 - 2$

d) $k(x) = \frac{2}{x} - 1$

f) $m(x) = ||2x| - 2| - 2$

31. Dana jest funkcja $f(x) = |2x|$.

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 3.

b) Utwórz tabelkę funkcji f dla pięciu wybranych przez siebie argumentów.

c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 1?

d) Znajdź miejsce zerowe funkcji.

32. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{20}{x}$.

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu -15 .

b) Utwórz tabelkę funkcji f dla pięciu dowolnie wybranych argumentów.

c) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3?

d) Czy funkcja f ma miejsce zerowe?

e) Oblicz wartość wyrażenia $f(2) - f(\sqrt{2})$.

Я33. Opisz wzorem funkcję, która danej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje:

- liczbę o 5 większą,
- sześcian tej liczby,
- połowę kwadratu tej liczby,
- pierwiastek z liczby o 3 mniejszej od danej,
- odwrotność sześciannu tej liczby,
- wartość bezwzględną z trzykrotności tej liczby.

Я34. Wykres której z podanych funkcji narysowano poniżej?

a) $y = -\sqrt{x}$

$y = \sqrt{-x}$

$y = |\sqrt{x}|$

b) $y = -x^2$

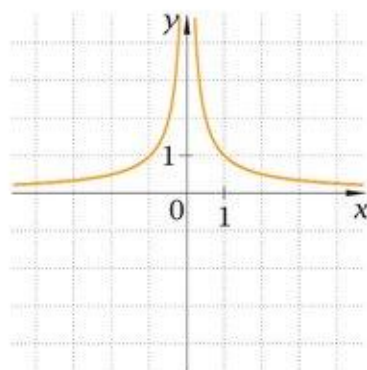
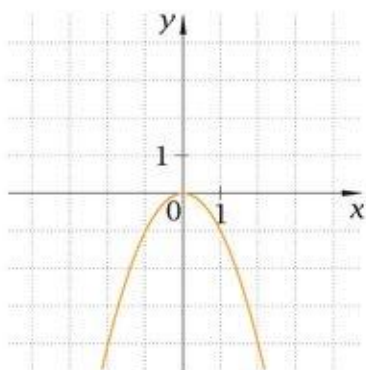
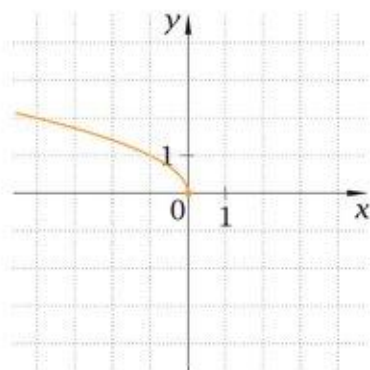
$y = (-x)^2$

$y = |x^2|$

c) $y = -\frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{-x}$

$y = \left| \frac{1}{x} \right|$



Я35. Który z punktów: A, B czy C jest punktem przecięcia wykresów funkcji f i g ?

a) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $g(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + 5$ $A = (6, 9)$ $B = (9, 6)$ $C = (-1, 3)$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{10}$ $A = \left(2, \frac{2}{5}\right)$ $B = (0, 0)$ $C = \left(-1, \frac{1}{10}\right)$

c) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = -x^2 + 17$ $A = (-2, -5)$ $B = (4, 1)$ $C = (7, 2)$

d) $f(x) = \frac{3}{2x-1}$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ $A = (0, -3)$ $B = \left(3, 1\frac{2}{3}\right)$ $C = (-1, -1)$

e) $f(x) = \frac{x}{x+3}$, $g(x) = \frac{4}{x^2} - 3$ $A = (2, 1)$ $B = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ $C = (-2, -2)$

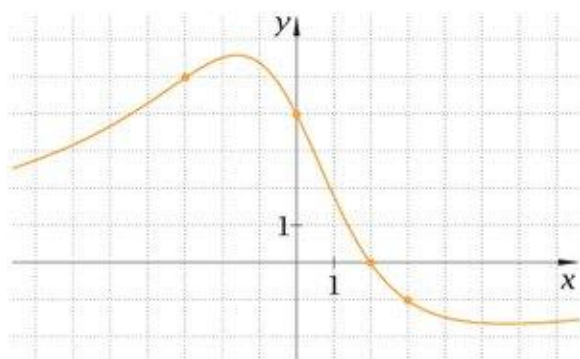
Я36. Jeden z podanych wzorów opisuje funkcję przedstawioną na wykresie. Który?

① $y = x^2 - 4x + 4$

② $y = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

③ $y = \sqrt{8(2-x)}$

④ $y = \frac{18(2-x)}{x^2+9}$



Я37. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = 2x^4 - x^3 + 4x - 7 + \frac{3}{x}$

c) $y = \sqrt{3x-2}$

e) $y = \frac{1}{2x+8}$

g) $y = \frac{x-2}{x^2+2}$

b) $y = 2|x-5|+9$

d) $y = \sqrt{9-8x}$

f) $y = \frac{x}{x^2-1}$

h) $y = \frac{4}{|x+2|-1}$

Я38. Określ dziedzinę funkcji.

a) $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x}$

e) $y = \sqrt{4x+1} + \sqrt{6-2x}$

b) $y = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2+2x+1}$

f) $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$

c) $y = \frac{2x-5}{5x-2} - \frac{1}{x^2-25}$

g) $y = \frac{x-10}{\sqrt{9-10x}} + \frac{\sqrt{4+2x}}{3x+1}$

d) $y = \sqrt{3x-7} + \sqrt{2x+15}$

h) $y = \frac{\sqrt{5}}{|x|-x}$

Я39. Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji.

a) $y = \frac{2x+7}{x^2-4}$

c) $y = \frac{x(x+8)}{\sqrt{x+8}}$

e) $y = \frac{2x(x-5)}{\sqrt{x-3}}$

b) $y = \frac{\sqrt{2x+1}}{3x^2-9x}$

d) $y = \frac{x^2-2}{x^2-2x+1}$

f) $y = \frac{(2x+13)^2}{\sqrt{2x+13}}$

Я40. Sprawdź, czy liczby -1 i 3 należą do zbioru wartości funkcji f .

a) $f(x) = |x-2|$

c) $f(x) = \frac{12}{x}$

b) $f(x) = |2x+1|-2$

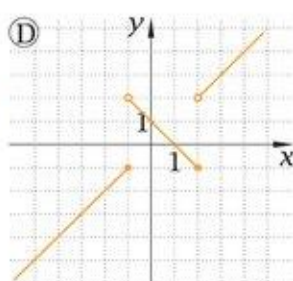
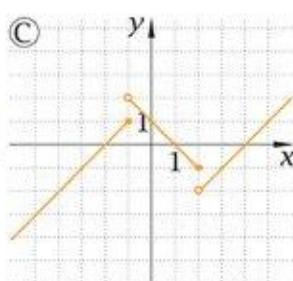
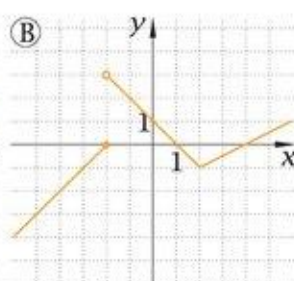
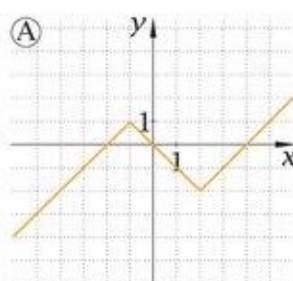
d) $f(x) = x^2+3$

Я41. Oblicz $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$, $f(7)$, gdzie f jest funkcją określoną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x \leq 0 \\ x+1 & \text{dla } x \in (0; 5) \\ x^2 & \text{dla } x \geq 5 \end{cases}$$

Я42. Jeden z poniższych rysunków przedstawia wykres funkcji f , której wzór podano poniżej. Który to rysunek?

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -x+1 & \text{dla } x \in (-1; 2) \\ x-4 & \text{dla } x \in (2; +\infty) \end{cases}$$



Я43. Oblicz, dla jakiej wartości a wykres funkcji przechodzi przez punkt A .

a) $y = ax^3 - 2$, $A = (-3, 4)$

c) $y = (x - a)^2 + 2ax$, $A = \left(\frac{1}{3}, 1\right)$

b) $y = \frac{ax}{x+3}$, $A = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$

d) $y = \sqrt{3ax - 2a}$, $A = \left(\frac{5}{6}, \frac{6}{5}\right)$

Я44. Oblicz, dla jakich wartości a i b wykres funkcji przechodzi przez punkty A i B .

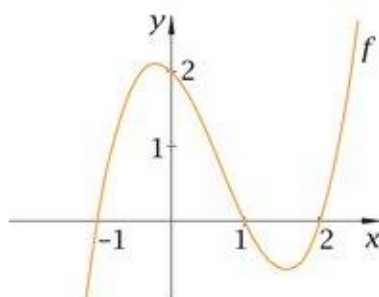
a) $y = ax^2 + bx - 3$ $A = (1, -2)$, $B = (2, 3)$

b) $y = (a - b)x + \frac{1}{2}b$ $A = \left(3, -1\frac{1}{2}\right)$, $B = \left(-9, 6\frac{1}{2}\right)$

c) $y = \frac{ax+b}{x+4}$ $A = (-6, 4)$, $B = (-3, -5)$

d) $y = |ax - 2| + b$ $A = (-2, 12)$, $B = \left(\frac{1}{3}, 5\right)$

Я45. Czy można tak dobrać liczby c i d ($c \neq d$), aby wykresy funkcji $y = \frac{c}{x}$ i $y = \frac{d}{x}$ miały punkty wspólne? Odpowiedź uzasadnij.



Я46. Wzór funkcji, której wykres przedstawiony jest na rysunku obok, ma następującą postać:

$$f(x) = (x + a)(x + b)(x + c)$$

Znajdź wartości a , b i c ($a < b < c$).

Я47. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = x^2 + x + 5$. Oblicz, dla jakiej liczby a spełniona jest dana równość.

a) $f(a) = f(a + 1)$

b) $f(a - 3) = f(a + 3)$

c) $f(2a + 1) = f(2a)$

Я48. Dane są funkcje $f(x) = \sqrt{x + 6}$ i $g(x) = x^2 + 7x + 10$. Określ dziedzinę funkcji h .

a) $h(x) = f(x + 1) + g(x)$

b) $h(x) = \frac{g(x)}{f(2x)}$

c) $h(x) = \frac{f(2x - 1)}{g(x) - 7x}$

Я49. Naszkicuj wykres funkcji.

a) $f(x) = \frac{5x - 10}{x - 2}$

c) $g(x) = \frac{x^2}{x}$

e) $h(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = 1 + \frac{6 - 2x}{x - 3}$

d) $g(x) = \frac{x(x + 1)}{x + 1}$

f) $h(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2}$

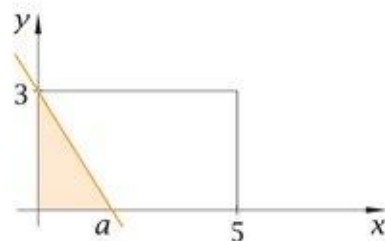
Я50. Niech x oznacza długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego o polu 10. Przedstaw za pomocą wzoru zależność y od x , gdy y oznacza:

a) długość przeciwprostokątnej,

b) długość najkrótszej z wysokości trójkąta,

c) pole koła opisanego na trójkącie.

Я51. Na rysunku przedstawiono prostokąt oraz prostą przechodzącą przez punkty $(0, 3)$ i $(a, 0)$, gdzie $a > 0$, która jest wykresem funkcji $y = -\frac{3}{a}x + 3$. Znajdź wzór funkcji, która liczbie a przyporządkowuje pole zacieniowanego obszaru, czyli tej części prostokąta, która leży poniżej podanej prostej.



Я52. Znajdź miejsca zerowe funkcji f .

a)

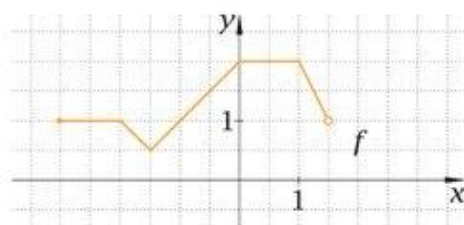
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{dla } x < 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{7} & \text{dla } x \leq -\pi \\ x^2 - 9 & \text{dla } -\pi < x < 3 \\ x - 3 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$$

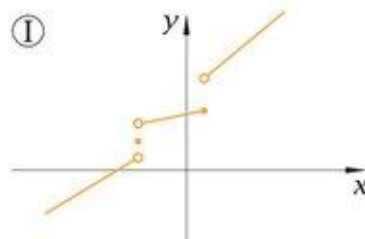
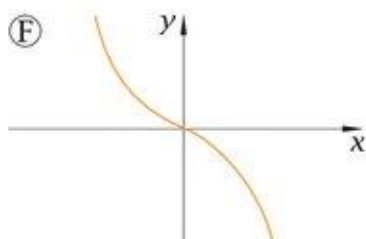
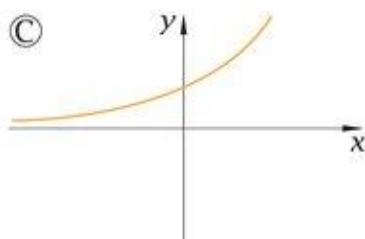
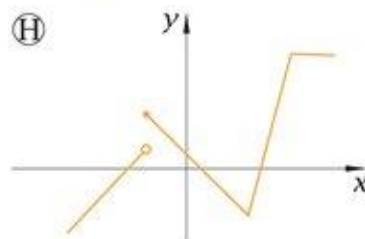
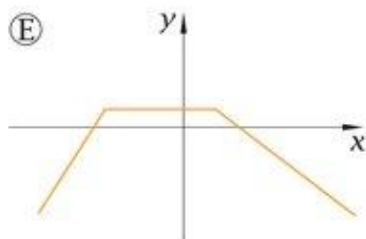
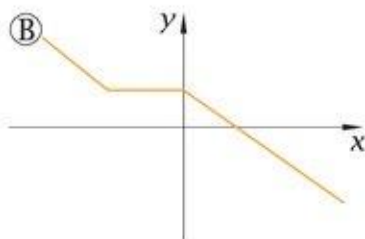
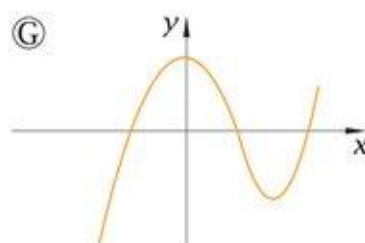
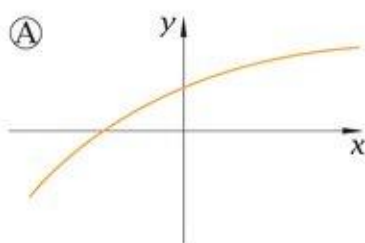
Я53. Rysunek obok przedstawia wykres funkcji f . Naskicuj wykres funkcji g określonej w następujący sposób:

$$g: \left(-3; 1\frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \text{ i } g(x) = \frac{1}{f(x)}$$



MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

54. Które z funkcji przedstawionych na wykresach są rosnące, które — malejące, a które — stałe?



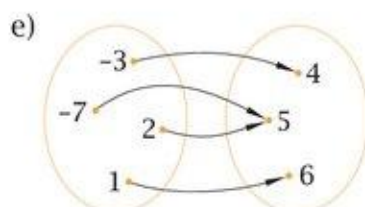
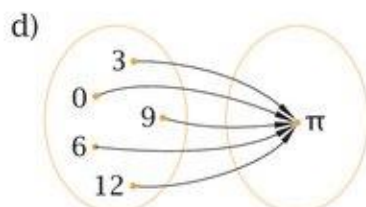
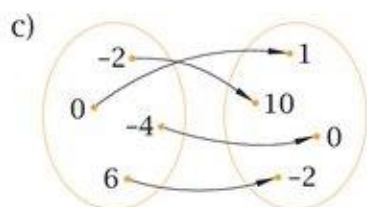
55. Określ monotoniczność funkcji podanych za pomocą tabelki lub grafu.

a)

x	-5	-2	-1	0	2	5	6
y	-7	-1	0	3	4	5	8

b)

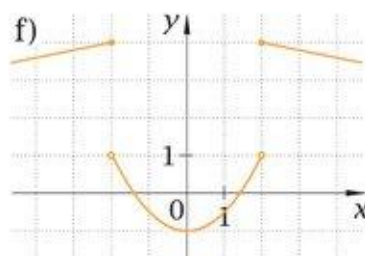
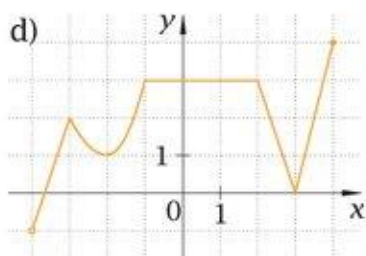
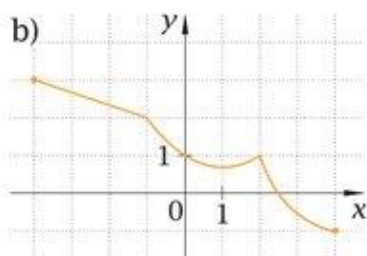
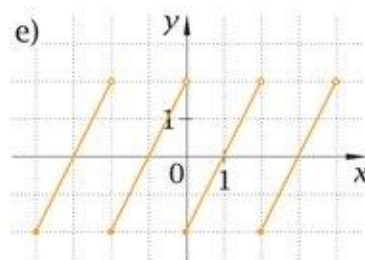
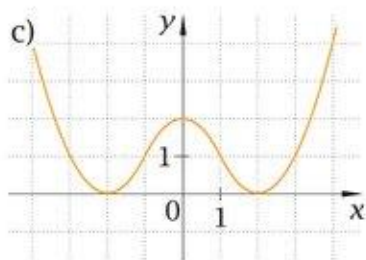
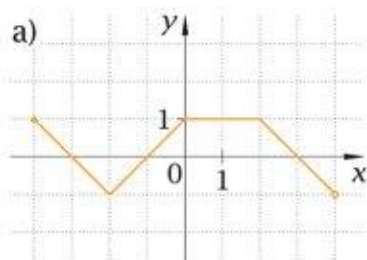
x	1	2	3	4
y	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$3 + \sqrt{2}$	$6 - \sqrt{3}$



56. Określ monotoniczność funkcji określonej w podany sposób.

- Każdej liczbie niedodatniej przyporządkowujemy kwadrat tej liczby powiększony o 4.
- Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy dwukrotność tej liczby.
- Każdej liczbie dodatniej przyporządkowujemy jej odwrotność.
- Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy jej wartość bezwzględną.
- Każdej liczbie naturalnej czterocyfrowej przyporządkowujemy sumę cyfr występujących w zapisie tej liczby.
- Każdej liczbie naturalnej podzielnej przez 10 przyporządkowujemy iloczyn cyfr występujących w zapisie tej liczby.
- Każdej liczbie ujemnej przyporządkowujemy różnicę między tą liczbą a wartością bezwzględną tej liczby.
- Każdej liczbie niedodatniej przyporządkowujemy sumę tej liczby i wartości bezwzględnej tej liczby.

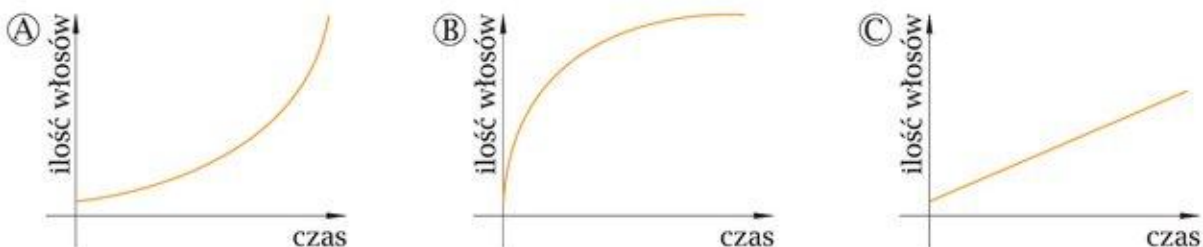
57. Odczytaj przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej na wykresie.



58. Narysuj wykres funkcji, która spełnia podane warunki.

- a) Dziedzina jest zbiór liczb rzeczywistych, funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$, malejąca w przedziale $(-3; -1)$, stała w przedziale $(-1; 1)$ i malejąca w przedziale $(1; +\infty)$.
- b) Dziedzina jest zbiór liczb rzeczywistych, funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$, stała w przedziale $(-2; 3)$, rosnąca w przedziale $(3; +\infty)$ i wszystkie wartości tej funkcji są ujemne.
- c) Dziedzina funkcji jest zbiór $(-3; 4)$, zbiorem wartości przedział $(-1; 3)$, funkcja jest rosnąca w przedziałach $(-3; -1)$ oraz $(2; 4)$, stała w przedziale $(-1; 0)$, malejąca w przedziale $(0; 2)$, miejscami zerowymi funkcji są liczby: $-2, 1, 3$.

59. Dopasuj poniższe wykresy do haseł reklamowych pewnych preparatów na porost włosów.



- I. Stosując nasz preparat, w krótkim czasie zauważysz gwałtowny przyrost ilości włosów, a następnie ich ilość ulegnie stabilizacji.
- II. Początkowo efekty stosowania naszej odżywki są niewielkie, ale po pewnym czasie ilość włosów gwałtownie się zwiększa.
- III. Stosując naszą odżywkę, uzyskasz stały przyrost ilości włosów.

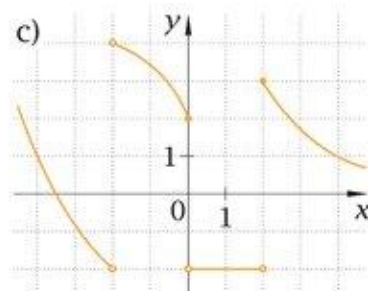
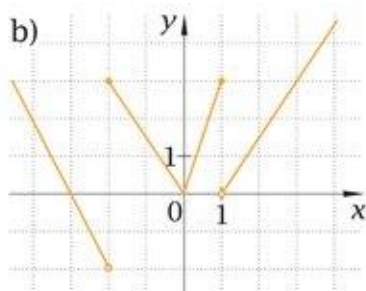
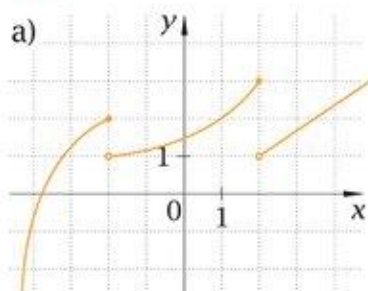
60. Wśród podanych zależności wskaż takie, które są funkcjami malejącymi.

- a) Zależność wysokości, na której znajduje się spadające ciało, od czasu spadania.
- b) Zależność ilości benzyny pozostałej w baku samochodu od przejechanej odległości (bez tankowania).
- c) Zależność drogi pokonanej przez hamujący pojazd od czasu, który upłynął od początku hamowania.
- d) Zależność ilości napoju w butelce od ilości wypitego już napoju z tej butelki.

61. Wśród podanych funkcji są takie, które są rosnące. Które to funkcje?

- a) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy liczbę o 2 mniejszą.
- b) Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy średnią arytmetyczną wszystkich liczb naturalnych mniejszych od niej.
- c) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy najmniejszą z liczb całkowitych większych od x .
- d) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy jej kwadrat.

62. Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji.



63. Korzystając z definicji funkcji rosnącej lub z definicji funkcji malejącej, wykaż, że:

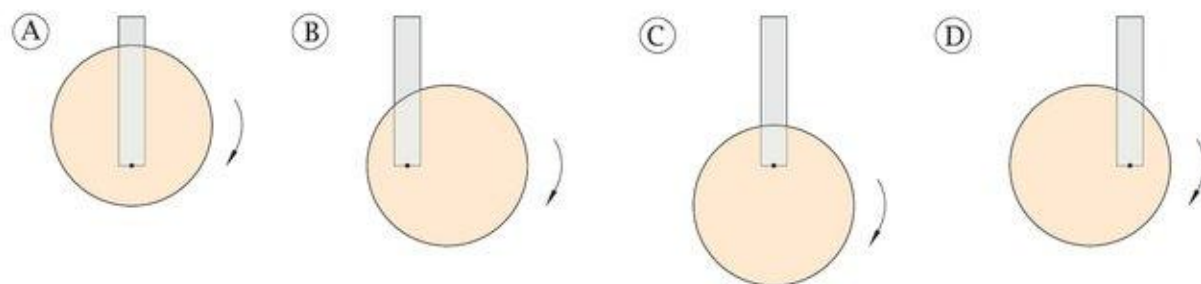
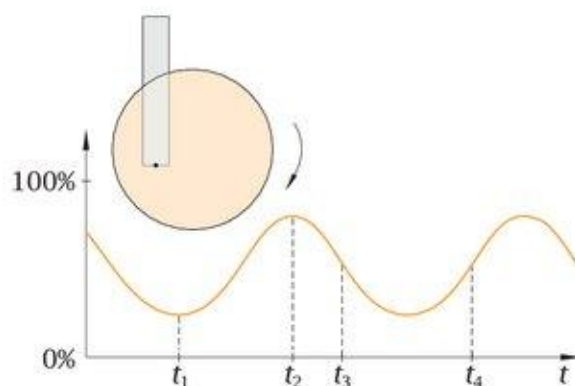
- funkcja $f(x) = 5 - 2x$ jest malejąca,
- funkcja $f(x) = \frac{6+3x}{4}$ jest rosnąca,
- funkcja $f(x) = 5 - x^2$ jest rosnąca dla $x \leq 0$,
- funkcja $f(x) = \frac{4}{x} + 2$ jest malejąca dla $x > 0$,
- funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 5$ jest malejąca dla $x \leq 3$ i rosnąca dla $x \geq 3$,
- funkcja $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ jest rosnąca dla $x \leq 2$ i malejąca dla $x \geq 2$,
- funkcja $f(x) = |2x - 3|$ jest malejąca dla $x \leq \frac{3}{2}$ i rosnąca dla $x \geq \frac{3}{2}$,
- funkcja $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$ jest rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$,
- funkcja $f(x) = \frac{2}{x} - x$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$,
- funkcja $f(x) = \frac{x}{1-x}$ jest rosnąca w przedziale $(1; +\infty)$,
- funkcja $f(x) = \frac{-2x}{x+2}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$.

64. Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$. Które z poniższych zdań są zawsze prawdziwe?

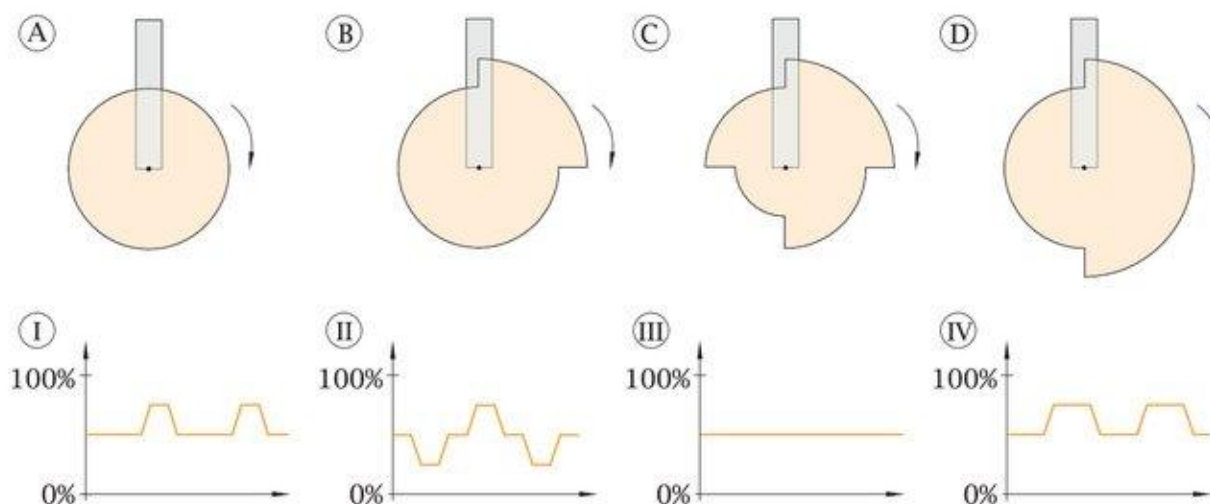
- Jeśli a i b są argumentami z przedziału $\langle 0; 5 \rangle$, to $f(a) < f(b)$.
- Jeśli $f(5) < 0$, to funkcja f przyjmuje w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$ tylko wartości ujemne.
- Jeśli $f(0) < 0$ i $f(5) > 0$, to funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$.
- Największą wartość w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$ funkcja f przyjmuje dla argumentu 5.
- Funkcja f ma w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$ co najwyżej jedno miejsce zerowe.

65. Narysuj wykres takiej funkcji, której dziedziną jest zbiór $\langle -7; 0 \rangle \cup (0; 7 \rangle$, że funkcja ta jest rosnąca w przedziale $\langle -7; 0 \rangle$ i jest rosnąca w przedziale $(0; 7 \rangle$, ale nie jest rosnąca w zbiorze $\langle -7; 0 \rangle \cup (0; 7 \rangle$.

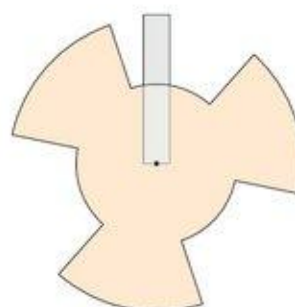
66. a) Na obracającej się ze stałą prędkością osi zamocowano kawałek kartonu o kształcie przedstawionym na rysunku. Obracając się, karton zakrywa raz większą, a raz mniejszą część prostokątnego paska. Wykres przedstawia, jaka część jest w danej chwili zasłonięta. Dopasuj zaznaczone na wykresie chwile t_1 , t_2 , t_3 , t_4 do przedstawionych położeń układu (A), (B), (C), (D).



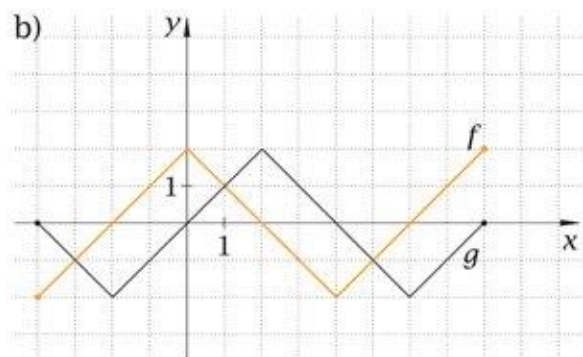
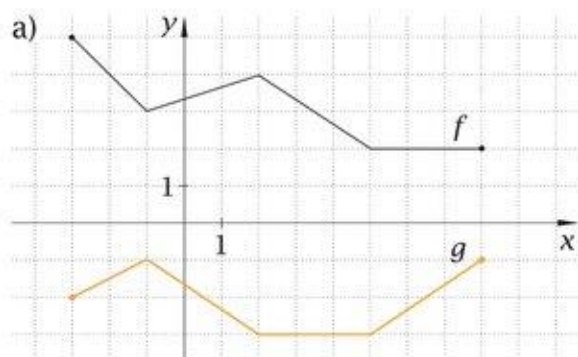
b) Gdyby zmienić kształt kawałka kartonu, zmieniłby się również wykres. Poniżej narysowano kartony o czterech różnych kształtach. Dopasuj do każdego z nich odpowiedni wykres.



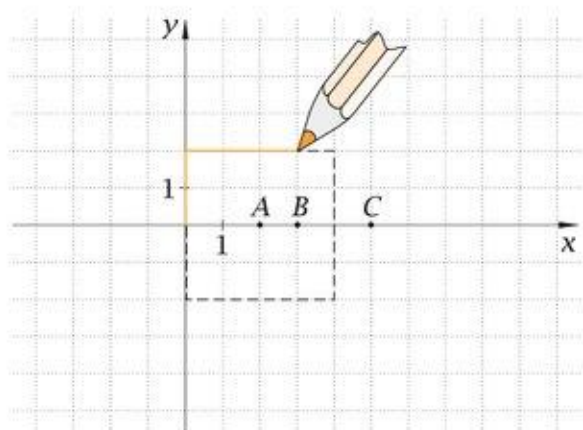
c) Naskicuj wykres funkcji opisującej, jaką część prostokąta zasłania obracająca się (ze stałą prędkością) tarcza przedstawiona na rysunku obok.



67. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g . Określ przedziały monotoniczności funkcji r i s , gdzie $r(x) = f(x) - g(x)$ oraz $s(x) = f(x) + g(x)$.



68. Wyobraź sobie, że koniec ołówka ustawiamy w początku układu współrzędnych i zaczynamy rysować kwadrat tak, jak na rysunku obok. Oznaczmy przez d długość już narysowanej kreski. Funkcje $f(d)$, $g(d)$ i $h(d)$ określamy jako odległość końca ołówka od punktów odpowiednio A , B i C w momencie, gdy kreska ma długość d . Wyznacz przedziały monotoniczności każdej z tych funkcji.



WZÓR I WYKRES FUNKCJI LINIOWEJ

69. Sporządź wykres funkcji.

- | | | | |
|------------------|---------------------------|----------------------------|-------------------|
| a) $y = x - 3$ | c) $y = 3x - 4$ | e) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ | g) $y = 5x - 1$ |
| b) $y = -2x + 5$ | d) $y = \frac{1}{2}x - 1$ | f) $y = -3\frac{1}{2}$ | h) $y = 4 - 1,5x$ |

70. Uzasadnij, że dana funkcja jest funkcją typu $y = ax + b$ i podaj wartości współczynników a i b .

- | | | |
|--------------------------|----------------------|-----------------------------|
| a) $y = \frac{x}{3} - 2$ | c) $y = -x$ | e) $y = x^2 + x(1 - x) + 3$ |
| b) $y = \frac{x-3}{2}$ | d) $y = 2(x-1) - 2x$ | f) $y = x(x-1) - x(x+1)$ |

71. Wyznacz miejsce zerowe funkcji.

- | | | |
|---------------------------|--------------------------------------|-------------------------|
| a) $y = 6x - 3$ | d) $y = 0,9x + 7$ | g) $y = 0$ |
| b) $y = 5 - 2x$ | e) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{6}$ | h) $y = x\sqrt{2} + 2$ |
| c) $y = \frac{3}{8}x - 4$ | f) $y = 14$ | i) $y = \frac{5-3x}{4}$ |

72. Podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu podanej funkcji z osiami układu współrzędnych. Określ monotoniczność tej funkcji.

a) $y = 2x - 7$

e) $y = \frac{4}{7}x - 9$

i) $y = \frac{2x+12}{3}$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 5$

f) $y = \frac{x}{3} + \sqrt{2}$

j) $y = \frac{1-x}{3} + 3$

c) $y = 6x - 3$

g) $y = \sqrt{3}$

k) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x-3}{2}$

d) $y = -x + 7$

h) $y = \frac{12-9x}{2}$

l) $y = x\sqrt{2} - \frac{1+2x}{\sqrt{2}}$

73. Zapisz wzór i określ monotoniczność funkcji, która każdej liczbie x przyporządkowuje:

a) liczbę o 1 większą od x ,

b) liczbę 5,

c) liczbę o 7 mniejszą od liczby przeciwnej do x ,

d) liczbę przeciwną do połowy liczby o 12 większej od x .

74. Podaj przykład wzoru funkcji liniowej, której wykres:

a) jest równoległy do osi x ,

b) przechodzi przez początek układu współrzędnych,

c) przechodzi przez I, II i III ćwiartkę układu współrzędnych,

d) jest równoległy do wykresu funkcji $y = \frac{x}{3} + 17$ i przechodzi przez I, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

e) jest równoległy do wykresu funkcji $y = 5x + 2$ i nie przechodzi przez IV ćwiartkę układu współrzędnych,

f) przechodzi wyłącznie przez III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

75. Określ, przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres danej funkcji.

a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{100}$

c) $y = (2\sqrt{2} - 3)x + 3,14 - \pi$

e) $y = 4\sqrt{6}$

b) $y = 12 - 15x$

d) $y = \frac{-2+x\sqrt{5}}{6}$

f) $y = -\sqrt{5}x$

76. Dla jakich wartości k funkcja f spełnia podany warunek?

a) Funkcja jest opisana wzorem $f(x) = (k - 3)x + 5$ i jest rosnąca.

b) Funkcja jest opisana wzorem $f(x) = (4 - 5k)x + 2$ i jest malejąca.

c) Funkcja jest opisana wzorem $f(x) = 6x + k - 2$ i jej wykres przechodzi przez ćwiartki I, II i III układu współrzędnych.

d) Funkcja jest opisana wzorem $f(x) = (5k - 1)x - 3$ i nie ma miejsc zerowych.

e) Funkcja jest opisana wzorem $f(x) = (3k + 5)x + k - 4$, jest rosnąca oraz jej wykres przechodzi przez ćwiartki I, III i IV układu współrzędnych.

f) Funkcja jest opisana wzorem $f(x) = (k^2 - 4)x + k + 2$ i ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

77. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$. Znajdź wzór funkcji liniowej g , jeżeli:

- a) wykres funkcji g przechodzi przez początek układu współrzędnych i nie ma z wykresem funkcji f żadnego punktu wspólnego,
- b) funkcja g nie ma miejsc zerowych, a jej wykres przecina oś y w tym samym punkcie, co wykres funkcji f ,
- c) funkcja g ma to samo miejsce zerowe, co funkcja f , a jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, 5)$.

78. Narysuj wykres funkcji i określ jej przedziały monotoniczności oraz wyznacz miejsca zerowe.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{dla } x \leq 0 \\ 2x + 2 & \text{dla } x > 0 \end{cases} & \text{d) } f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 0 & \text{dla } x \in (1; 3) \\ 3x - 10 & \text{dla } x \in (3; +\infty) \end{cases} \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x < 0 \\ -x + 1 & \text{dla } 0 \leq x < 1 \\ -x + 2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} & \text{e) } f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x < -1 \\ -x + 2 & \text{dla } -1 \leq x < 3 \\ 1 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ -1 & \text{dla } x \in (-1; 1) \\ -x & \text{dla } x \in (1; +\infty) \end{cases} & \text{f) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2 & \text{dla } |x| \geq 2 \\ -1 & \text{dla } |x| < 2 \end{cases} \end{array}$$

79. Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ leży między wykresami funkcji g i h . Jaką wartość może mieć współczynnik b funkcji f ?

- a) $g(x) = 2x$, $h(x) = 2x + 5$
- b) $g(x) = -x - 2$, $h(x) = -x - 8$
- c) $g(x) = 0$, $h(x) = \sqrt{3}$
- d) $g(x) = \frac{1}{2}x + 7$, $h(x) = \frac{1}{2}x - 4$

80. a) Jaką wartość może mieć współczynnik kierunkowy funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych i ma punkt wspólny z odcinkiem o końcach $(5, -3)$ i $(7, 0)$?

b) Jakie miejsce zerowe może mieć funkcja liniowa, której wykres przechodzi przez punkt $(2, 3)$ i ma punkt wspólny z odcinkiem o końcach $(5, -3)$ i $(7, 0)$?

81. Sporządź wykres funkcji oraz podaj zbiór wartości, miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności funkcji.

- a) $f(x) = |x| + x$
- b) $f(x) = |3x - 2| - 1$
- c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25} + x - 2$
- d) $f(x) = |x + 4| + |x - 4|$
- e) $f(x) = |x + 4| - |x - 4|$
- f) $f(x) = |x + 3| - |2x - 1|$
- g) $f(x) = |2x - 3| + |x - 3|$
- h) $f(x) = \left| \frac{x+2}{2} \right| + 2|x - 1|$

WŁASNOŚCI FUNKCJI LINIOWEJ

82. Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkty A i B.

a) $A = (1, 5), \quad B = (-1, -1)$

d) $A = \left(3, -1\frac{1}{4}\right), \quad B = \left(5, -2\frac{1}{4}\right)$

b) $A = (5, -4), \quad B = (-2, 3)$

e) $A = (0, 4, -0, 4), \quad B = (-0, 6, -0, 7)$

c) $A = (8, 5), \quad B = (17, 5)$

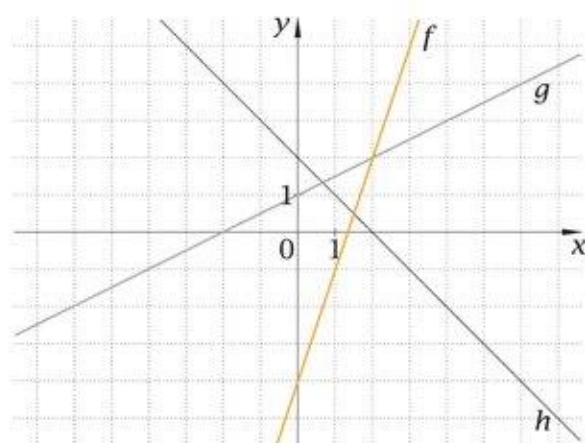
f) $A = (2, 0), \quad B = (2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$

83. Znajdź wzory funkcji liniowych, których wykresy przedstawiono na rysunku obok. Oblicz, dla jakich argumentów:

a) wartości wszystkich trzech funkcji są jednocześnie dodatnie,

b) wartości funkcji h są większe od 100,

c) wartości funkcji h są większe od wartości funkcji f i jednocześnie mniejsze od wartości funkcji g .



84. Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu funkcji f i przechodzi przez punkt P .

a) $f(x) = -2x, \quad P = (0, 3)$

e) $f(x) = -4x + 999, \quad P = (100, 0)$

b) $f(x) = 3x + 5, \quad P = (3, 7)$

f) $f(x) = 4, \quad P = (2, 7)$

c) $f(x) = -x + 2, \quad P = (3, -3)$

g) $f(x) = \sqrt{5}x + \pi, \quad P = (-1, 2\sqrt{5})$

d) $f(x) = 6x - 7, \quad P = (-2, 3)$

h) $f(x) = \frac{2x-7}{3}, \quad P = \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$

85. Jakie współrzędne mają punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej f z osiami układu współrzędnych, jeżeli:

a) $f(1) = -1, \quad f(2) = 1$

d) $f(5) = -5, \quad f(-15) = 11$

b) $f(-4) = 2, \quad f(12) = -2$

e) $f(\sqrt{2} - 1) = f(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{3} - 1$

c) $f(3) = 19, \quad f(-1) = 3$

f) $f(\sqrt{2}) = 2 + 3\sqrt{2}, \quad f(-4) = -\sqrt{2}$

86. a) Do wykresu funkcji $f(x) = (3p-8)x + 2p+1$ należy punkt $K = (-2, 1)$. Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.

b) Liczba $x = -3$ jest miejscem zerowym funkcji $f(x) = (3 - 2p)x - 1 - p$. Wyznacz współrzędne punktu przecięcia wykresu tej funkcji z osią y .

87. Czy punkty A , B i C są współliniowe (czyli czy leżą na jednej prostej)?

- a) $A = (6, 1)$, $B = (-2, -7)$, $C = (10, 16)$
- b) $A = (-200, 100)$, $B = (300, 100)$, $C = (100, 200)$
- c) $A = \left(2, \frac{5}{2}\right)$, $B = (-20, -3)$, $C = (60, 17)$
- d) $A = (-3, 18)$, $B = (4, -3)$, $C = (6, 9)$

88. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

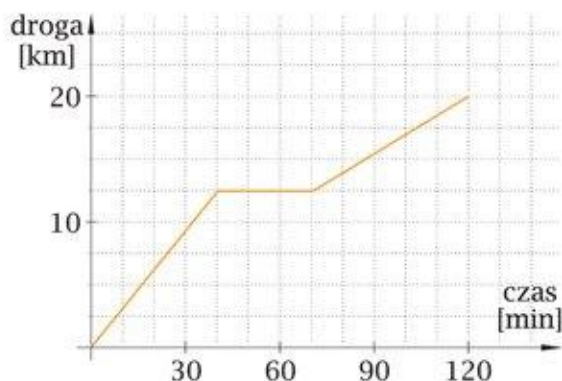
- a) $f(x) = 2x + 4$, $\langle -3; 1 \rangle$
- c) $f(x) = \frac{x}{3} - 2$, $\langle 0; \frac{1}{3} \rangle$
- b) $f(x) = -\frac{3}{4}x - 1$, $\langle 7; 12 \rangle$
- d) $f(x) = -13x + 10$, $\langle -2; 2 \rangle$

89. Wykresy funkcji: $y = 2x + 2$, $y = 2x - 2$, $y = -2x + 2$, $y = -2x - 2$ zawierają boki pewnego czworokąta. Uzasadnij, że jest to romb. Oblicz jego pole.

- 90.** a) Dla jakich argumentów funkcja $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{3}{5}$ przyjmuje wartości dodatnie?
b) Dla jakich argumentów funkcja $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ przyjmuje wartości ujemne?
c) Dla jakich argumentów wartości funkcji $y = -x + 7\frac{1}{2}$ są większe lub równe 2?
d) Dla jakich argumentów wartości funkcji $y = -\sqrt{2}x + \sqrt{7}$ są nie większe od 3?
e) Dla jakich argumentów funkcja $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ przyjmuje wartości należące do przedziału $\langle -1; 3 \rangle$?
f) Dla jakiego argumentu funkcja $y = -3x + 1$ przyjmuje wartość przeciwną do tego argumentu? Wyznacz tę wartość.
g) Dla jakiego argumentu funkcja $y = 2x - 6$ przyjmuje wartość trzykrotnie większą od tego argumentu? Wyznacz tę wartość.
h) Dla jakiego argumentu funkcja $y = 0,1x + 0,2$ przyjmuje wartość o 1 mniejszą od tego argumentu? Wyznacz tę wartość.

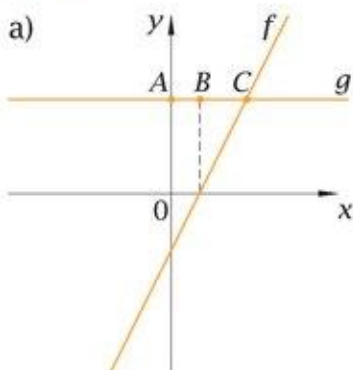
91. Wykres przedstawia drogę przebytą przez rowerzystę w czasie wycieczki. Odpowiedz na pytania, prędkość podaj w kilometrach na godzinę.

- a) Z jaką prędkością rowerzysta poruszał się na początku, a z jaką — pod koniec wycieczki?
- b) Jaka była średnia prędkość jazdy rowerzysty w czasie całej wycieczki?



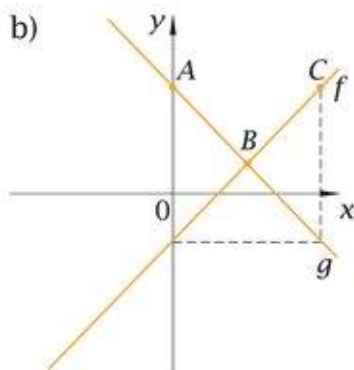
92. Znajdź wzory funkcji liniowych, których wykresy zawierają boki trójkąta równobocznego ABC , jeśli wiadomo, że $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$ i punkt C leży w I ćwiartce układu współrzędnych.

93. Korzystając z podanych wzorów, oblicz współrzędne punktów A, B i C.



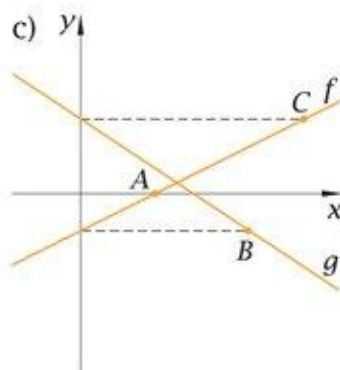
$$f(x) = 2x - 3$$

$$g(x) = 5$$



$$f(x) = x - 2,5$$

$$g(x) = -x + 6$$



$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

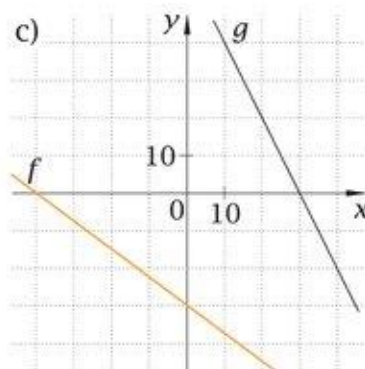
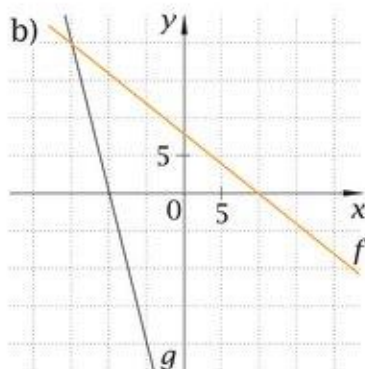
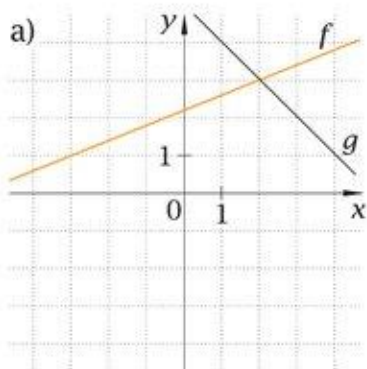
$$g(x) = -\frac{2}{3}x + 4$$

94. Wyznacz wzór funkcji liniowej f , o której wiadomo, że:

- a) dla $x > -2$ przyjmuje wartości dodatnie, dla $x < -2$ przyjmuje wartości ujemne, wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, 3)$.
- b) przyjmuje wartości niedodatnie wyłącznie dla $x \in \langle 4; +\infty \rangle$, punkt $P = (1, 1)$ należy do wykresu funkcji f .

95. Pewna funkcja liniowa przyjmuje wartości większe od 10 tylko dla $x < 5$ i wartości mniejsze od -6 tylko dla $x > 12$. Znajdź punkty przecięcia wykresu tej funkcji z osiami układu współrzędnych.

96. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji f i g oraz osią y .



- 97.** a) Wykres funkcji $f(x) = ax - 3$ wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu 12. Wyznacz wartość a . Rozważ dwie możliwości położenia trójkąta.
- b) Wykres funkcji $y = ax + a$ wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu 5. Wyznacz wartość a . Rozważ dwie możliwości położenia trójkąta.
- c) Wykres funkcji $y = -\frac{1}{2}x + b$ wraz z osiami układu współrzędnych ogranicza trójkąt o polu 9. Wyznacz wartość b . Rozważ dwie możliwości położenia trójkąta.

98. Wykres funkcji $f(x) = ax + b$ przecina osie układu współrzędnych w tych samych punktach, co wykres funkcji g . Znajdź liczby a i b .

a) $g(x) = x^3 - 8$

b) $g(x) = \frac{2}{x-4} - 1$

99. Dla jakich argumentów wartości funkcji f są mniejsze od wartości funkcji g ?

a) $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 7x - 3$

c) $f(x) = -1,5x + 5,5$, $g(x) = 2,3x - 0,2$

b) $f(x) = -x + 7$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

d) $f(x) = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$, $g(x) = -x + 2$

100. Dla jakich argumentów wartości funkcji f są nie mniejsze od wartości funkcji g i jednocześnie większe od wartości funkcji h ?

a) $f(x) = x$, $g(x) = 2x - 3$, $h(x) = \frac{1}{2}x - 5$

b) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -4x + 8$, $h(x) = x - 7$

c) $f(x) = 2 - 5x$, $g(x) = x - 3$, $h(x) = -6x + 3$

d) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$, $g(x) = -\frac{1}{2}x$, $h(x) = -\frac{4}{3}x - 4$

e) $f(x) = \frac{1}{5}x - 1$, $g(x) = \sqrt{2} - 1$, $h(x) = \frac{1-2x}{2}$

f) $f(x) = x\sqrt{2}$, $g(x) = 2 - x$, $h(x) = 2x - \sqrt{2}$

101. Oblicz, dla jakiej liczby p spełniony jest podany warunek.

a) Funkcja $y = -3x + p$ przyjmuje wartość 5 dla argumentu $-\frac{1}{2}$.

b) Funkcja $y = px - 10$ ma miejsce zerowe równe 0,4.

c) Funkcja $y = (2 - p)x + 3$ przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x < -7$.

d) Funkcja $y = \frac{1}{4}x + p - 5$ przyjmuje wartości większe od 3 tylko dla $x > \frac{3}{4}$.

e) Wykresy funkcji $y = px + 2p$ i $y = 2x - p$ przecinają się w punkcie o pierwszej współrzędnej równej -2 .

f) Funkcja $y = px - 4$ przyjmuje wartości mniejsze od wartości funkcji $y = -3x + p + 3$ tylko dla $x < 2$.

102. Dla jakiej wartości p wykresy podanych funkcji są do siebie równoległe?

a) $y = (p - 1)x + 2$, $y = -2x + 3$

b) $y = (2p - 3)x - 7$, $y = \frac{1}{2}x + 9$

c) $y = (6 - 5p)x + 1$, $y = (3p + 11)x - 3\sqrt{2}$

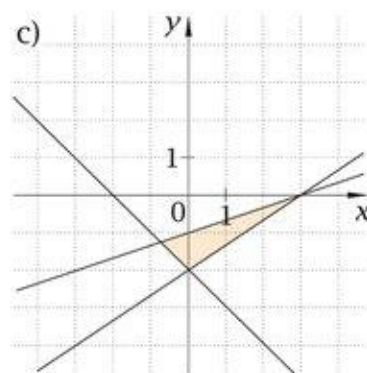
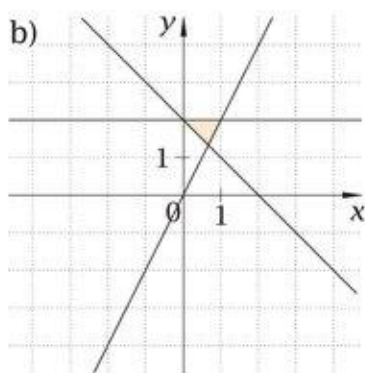
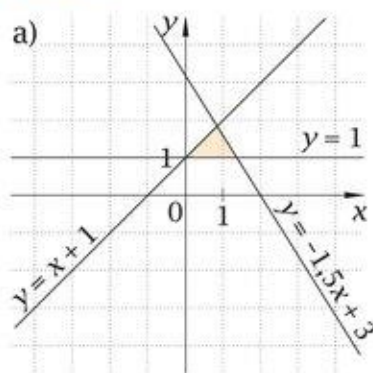
d) $y = (p + 1)x + 6$, $y = \frac{px - 2}{4}$

e) $y = (4p + 3)x + 4p + 3$, $y = (2p - 9)x + 2p - 9$

f) $y = px + p - 2$, $y = 4$

g) $y = (p - 2)x + 3$, $y = (-2 + p)x - p$

103. Oblicz pole zacieniowanego trójkąta.



104. Ustal, co się stanie z wartością funkcji $y = 2x + 6$, jeżeli argument:

a) wzrośnie o 1

b) wzrośnie o 5

c) zmaleje o 3

105. Ustal, co się stanie z wartością funkcji $y = -3x + 5$, jeżeli argument:

a) wzrośnie o 2

b) zmaleje o 6

c) zmaleje o $\frac{1}{2}$

106. Czy czworokąt ograniczony wykresami funkcji $y = \frac{x}{\sqrt{2}} - 2$, $y = \sqrt{2}(x - \sqrt{2})$, $y = 2(2 + \sqrt{2}x)$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{2}x + 2)$ jest trapezem? Czy jest równoległobokiem?

107. Miejsca zerowe dwóch funkcji liniowych są liczbami przeciwnymi. Wykresy tych funkcji przecinają się w punkcie $(1, 5)$ i wraz z osią x ograniczają trójkąt o polu 10. Znajdź wzory tych funkcji.

108. Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres przecina oś y w punkcie $(0, -7)$ oraz przechodzi przez punkty $A = (m, k)$ i $B = (m + 2, k - 5)$.

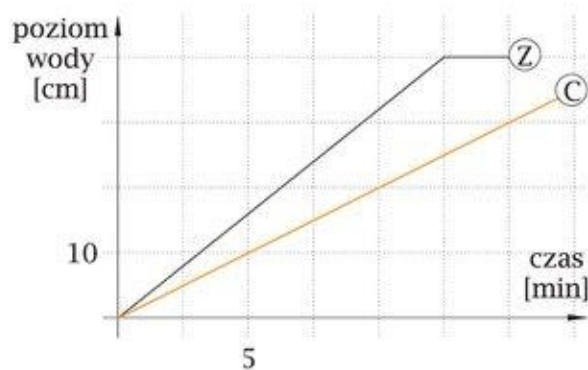
109. Wykaż, że na wykresie dowolnej funkcji liniowej zawsze można znaleźć co najmniej jeden punkt, którego rzędna jest taka sama jak odcięta.

110. Wykresy pokazują, jak zmieniałyby się poziom wody w wannie, gdyby odkręcono całkowicie kran z zimną wodą (wykres Z), a jak — gdyby odkręcono kran z ciepłą wodą (wykres C).

a) Jaka jest głębokość wanny?

b) Narysuj wykres przedstawiający, jak zmieniałyby się poziom wody w wannie, gdyby jednocześnie odkręcono oba krany.

c) Narysuj wykres przedstawiający, jak zmieniałyby się poziom wody w wannie, gdyby odkręcono najpierw kran z ciepłą wodą, a po 5 minutach dodatkowo kran z zimną wodą.



PROPORCJONALNOŚĆ PROSTA I ODWROTNA

111. Wielkości x i y przedstawione w tabeli są wprost proporcjonalne. Ułóż na tej podstawie odpowiednie równanie i je rozwiąż.

a)

x	2	7
y	6	a

d)

x	$d - 2$	4
y	3	10

g)

x	3	1
y	2	$\frac{1}{2}g + 1$

b)

x	2	b
y	6	7

e)

x	1	$3e - 5$
y	0,1	20

h)

x	2	4
y	$5h + 3$	14

c)

x	5	9
y	8	c

f)

x	9	12
y	$3f - 4$	8

i)

x	$i - 1$	$i + 1$
y	2	3

112. Wielkości x i y przedstawione w tabeli są odwrotnie proporcjonalne. Ułóż na tej podstawie odpowiednie równanie i je rozwiąż.

a)

x	12	120
y	a	12

d)

x	$d + 10$	110
y	10	15

g)

x	5	20
y	$53g - 5$	65

b)

x	16	24
y	b	4

e)

x	7	49
y	21	$2e - 5$

h)

x	$20h + 47$	77
y	11	121

c)

x	$c - 1$	4
y	5	20

f)

x	36	$3f + 6$
y	81	9

i)

x	14	$2i - 9$
y	15	10

113. Na szkolnej stołówce przygotowano 20 litrów kompotu i rozlano go do 90 jednakowych kubków.

a) Ile takich kubków należałoby dodatkowo przygotować, aby rozlać 24 litry kompotu?

b) Ile litrów kompotu wystarczyłoby do napełnienia nim 81 kubków?

114. Mariola pędziła na skuterze z prędkością $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i w ciągu 8 minut pokonała trasę z domu do biblioteki.

- a) Ile czasu zajmie jej przejechanie tej samej trasy z prędkością $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- b) Z jaką prędkością wracała do domu z biblioteki, jeżeli przejazd zajął jej 7 i pół minuty?



115. Za 260 dolarów w pewnym kantorze trzeba było zapłacić 1001 zł.

- a) Ile należałoby zapłacić w tym kantorze za 600 dolarów?
- b) Ile dolarów można by kupić za 4000 zł?

116. Przygotowano 24 ciasteczka na podwieczorek. Początkowo miały na nim być 3 osoby, ale ich liczba wzrosła najpierw do 6, a ostatecznie — do 8 osób. Jeżeli przyjmujemy, że każda z osób zjadła po tyle samo ciasteczek, to ile ciasteczek przypadało na jedną osobę w każdej z tych trzech sytuacji? Które z opisanych wielkości są odwrotnie proporcjonalne? Zilustruj rozwiązanie zadania odpowiednią tabelą.

117. Janek potrafi czytać książki w różnym tempie. Jeśli czyta szybko, to książkę liczącą 160 stron pochłonie w godzinę. Jeśli czyta wolno, na lekturę książki o tej samej objętości potrzebuje 4 godzin. Określ w liczbie stron na godzinę oba tempa czytania książek przez Janka. Wskaż wielkości odwrotnie proporcjonalne. Zilustruj rozwiązanie zadania odpowiednią tabelą.

118. Jedna osoba wykonuje pewną pracę w ciągu 10 godzin. Ile czasu zajęłoby wykonanie tej pracy 7 osobom, gdyby wszystkie pracowały z taką samą wydajnością jak ta jedna osoba? Które wielkości wymienione w tym zadaniu są odwrotnie proporcjonalne?

119. Trzech kucharzy obierało 20 kg ziemniaków przez pół godziny.

- a) O ile minut krócej pracę tę wykonaliby pięciu kucharzy, gdyby pracowali w takim samym tempie jak ich koledzy?
- b) Ilu kucharzy należałoby dodatkowo zaangażować, aby obrać ziemniaki w ciągu 10 minut?

120. Koszt wynajmu domku letniskowego wynosi 1080 zł na 3 dni i nie zależy od liczby wynajmujących. Koszt wynajmu domku jest wprost proporcjonalny do liczby dni.

- a) Oblicz, ile kosztowałoby wynajęcie tego domku na 5 dni.
- b) Grupa przyjaciół dysponuje łącznie kwotą 2500 zł. Na ile co najwyżej dni grupa będzie mogła wynająć ten domek?

121. Pociąg pospieszny pokonuje odległość między stacjami Jackowo Centralne i Markowice Główne w ciągu 28 minut.

a) Jak długo trwa przejazd między tymi stacjami pociągiem osobowym, jeśli średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie wynosi $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a osobowego $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Z jaką średnią prędkością porusza się na tej trasie pociąg ekspresowy, jeżeli pokonanie trasy zajmuje mu 18 minut mniej niż pociągowi osobowemu?

122. Na tarczy zegarowej znajdują się trzy wskazówki: godzinowa, minutowa oraz sekundowa. W ciągu jednej minuty wskazówka sekundowa obróci się o 360° .

a) O ile stopni obróci się w tym czasie wskazówka minutowa, a o ile — wskazówka godzinowa?

b) O ile stopni obróci się wskazówka minutowa w ciągu 25 minut?

c) Jaki kąt tworzą ze sobą wskazówki godzinowa oraz minutowa o godzinie 12.40 (podaj miarę większego z tych kątów)?

123. Pan Karol sprawdził zużycie paliwa w swoim samochodzie. W tabeli zanotował dane uzyskane po zatankowaniu do pełna i przejechaniu 100 km, 200 km i 300 km.

Liczba przejechanych kilometrów	100	200	300
Objętość (w litrach) paliwa w baku	33	26	19
Objętość (w litrach) zużytego paliwa	7	14	21

a) Czy wśród wielkości przedstawionych w tabeli są wielkości wprost proporcjonalne lub odwrotnie proporcjonalnie? Odpowiedź uzasadnij.

b) Jaką pojemność ma bak samochodu pana Karola?

c) Jakie jest zużycie paliwa w samochodzie pana Karola?

124. Chiński pociąg magnetyczny *maglev* kursuje między centrum Szanghaju a lotniskiem. Dystans o długości 30,5 km pokonuje w ciągu zaledwie 7 minut. Tymczasem pociąg relacji Szczecin — Przemyśl przy średniej prędkości $74 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pokonuje całą trasę w ciągu 12 godzin. O ile skróciłby się czas przejazdu pociągu ze Szczecina do Przemyśla, gdyby na tej trasie kursował *maglev*? Przyjmij do obliczeń, że pociąg nie zatrzymuje się na żadnych stacjach pośrednich.

125. Dwunastu harcerzy wybrało się na 14-dniowy obóz. Druh kwatermistrz stwierdził, że na każde 5 dni obozu przypada 180 konserw. O ile dłużej mógłby trwać obóz harcerski, gdyby na jednego harcerza przypadała dziennie jedna konserwa mniej?

126. Za pewną ilość ziemniaków pani Kowalska zapłaciła w sklepie 31,05 zł. Następnie razem pani Kowalska kupiła o 4 kg ziemniaków więcej i zapłaciła wówczas 39,33 zł. Oblicz, ile kilogramów ziemniaków kupiła pani Kowalska za drugim razem, jeżeli wiadomo, że cena ziemniaków się nie zmieniła.

127. Pizzeria przygotowuje w dni powszednie (od poniedziałku do piątku) średnio 63 sztuki pizzy dziennie, a w soboty i w niedziele średnio 90 sztuk dziennie. Średnica każdej pizzy jest równa 32 cm. Do wyrobu ciasta wykorzystuje się recepturę przedstawioną obok.

a) Ile kilogramów drożdży, soli, mąki i cukru zostanie wykorzystanych przez tę pizzerię w ciągu tygodnia? Do obliczeń przyjmij, że łyżeczka soli waży 6 g, a łyżeczka cukru 5 g. Masę wszystkich produktów zaokrąglaj do 0,5 kilograma.

b) Ile litrów oliwy wykorzystuje się w ciągu tygodnia do wypieku pizzy? Do obliczeń przyjmij, że łyżka stołowa ma objętość 15 ml. Wynik zaokrąglaj do pełnych litrów.

c) Właściciel pizzerii kupił ostatnio produkty do wypieku ciasta w hurtowni z artykułami spożywczymi. Za zakupy otrzymał przedstawiony poniżej paragon. Oblicz, jaką kwotę (brutto) tygodniowo trzeba przeznaczyć łącznie na wszystkie produkty potrzebne do wyrobu ciasta. Wynik zaokrąglaj do pełnych złotych.



Lp	Nazwa towaru lub usługi	Jm.	Ilość	Wartość netto	Stawka VAT	Kwota VAT	Wartość brutto
1	mąka	kg	12	23,76	23%	5,52	29,28
2	cukier	kg	15	34,95	23%	8,10	43,05
3	sól	kg	5	4,45	23%	1,00	5,45
4	oliwa z oliwek	l	5	89,70	23%	20,64	110,34
5	drożdże piekarskie	kg	5	179,70	23%	41,34	221,04
W tym				332,56	23%	76,60	409,16
Razem				332,56		76,60	409,16

Sposób płatności przelew

Do zapłaty 409,04 PLN

Słownie czteryście dziewięć 04/100 PLN

128. W pokoju w internacie na każdego mieszkańca przypadały 4 m^2 powierzchni, ale obecnie — gdy do każdego pokoju dokwaterowano jeszcze jednego ucznia — powierzchnia przypadająca na osobę zmniejszyła się do 3 m^2 . Ilu uczniów mieszka teraz w każdym pokoju?

129. Ilu diabłów kręciło bicze z piasku?



PRZED SPRAWDZIANEM

1. Poniżej określono funkcję za pomocą tabeli.

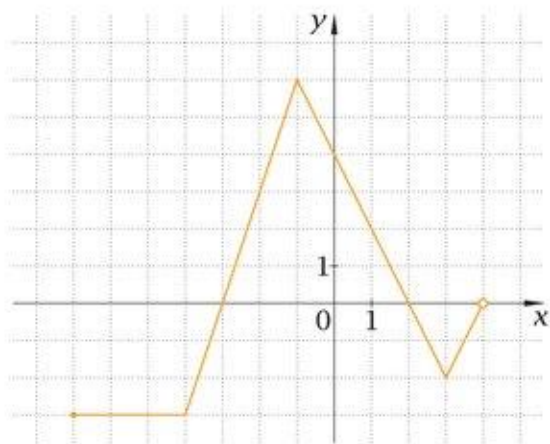
x	-7	-5	$-3\frac{1}{2}$	-1	0	2	$4\frac{1}{2}$	6
y	4	$-\frac{1}{2}$	-2	0	3	-1	7	2

Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle -2; 7 \rangle$.
B. Funkcja przyjmuje wartości nieujemne dla pięciu argumentów.
C. Liczba 3 jest miejscem zerowym tej funkcji.
D. Liczba 4 należy do dziedziny tej funkcji.

2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Funkcja przyjmuje największą wartość równą 6 dla argumentu -1 .
B. Funkcja ma trzy miejsca zerowe.
C. Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in \langle -3; 2 \rangle$.
D. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -7; 4 \rangle$.



3. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{4x-3}{2} - \frac{5}{2}x$. Które z podanych zdań jest fałszywe?

- A. Funkcja f jest malejąca.
- B. Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, -\frac{3}{2})$.
- C. Liczba $-\frac{3}{2}$ jest miejscem zerowym funkcji f .
- D. Wykres funkcji f przechodzi przez II, III i IV ćwiartkę układu współrzędnych.

4. Która z podanych funkcji ma miejsce zerowe równe -5 i wykres równoległy do wykresu funkcji $y = 0,6x - 2$?

- A. $y = -0,6x - 3$ B. $y = 0,6x - 5$ C. $y = 2x + 10$ D. $y = \frac{3}{5}x + 3$

5. Wielkości x i y przedstawione w tabeli są odwrotnie proporcjonalne. Oznacza to, że:

- A. $k = 90$ B. $k = 7$ C. $k = \frac{13}{15}$ D. $k = \frac{292}{3}$

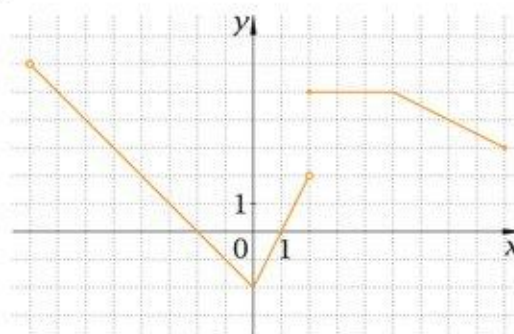
x	12	$13k - 1$
y	15	2

6. Funkcja $y = f(n)$ każdej naturalnej liczbie trzycyfrowej przyporządkowuje sumę cyfr występujących w tej liczbie pomniejszoną o 3.

- Oblicz wartość wyrażenia $\frac{f(415) + 2 \cdot f(709)}{f(553)}$.
- Wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji.
- Wyznacz wszystkie miejsca zerowe tej funkcji.

7. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

- Jaki zbiór jest dziedziną funkcji f ?
- Jaki jest zbiór wartości tej funkcji?
- Dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartość 3?
- Dla jakich argumentów funkcja ta przyjmuje wartości nieujemne?
- Ile wynosi wartość wyrażenia $\frac{f(2) - 3 \cdot f(0)}{f(-1)}$?
- Jakie liczby są miejscami zerowymi funkcji f ?
- W jakich przedziałach funkcja f jest malejąca?



8. Punkty $A = (13, 18)$ oraz $B = (-9, -26)$ należą do wykresu funkcji liniowej f . Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji f z osiami układu współrzędnych.

9. Pan Kowalski planuje podróż z Gdańska do Cieszyna samochodem, który spala średnio 9,8 litra paliwa (Pb95) na 100 kilometrów. Trasa w jedną stronę liczy 634 km. Przyjmij, że litr benzyny Pb95 kosztuje średnio 5,38 zł, i oblicz, jaki będzie koszt podróży Pana Kowalskiego (wraz z drogą powrotną). Wynik zaokrąglaj do pełnych złotych.

10. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje odległość tej liczby od zera na osi liczbowej. Wskaż zdanie prawdziwe.

- Dla argumentu $x = -\frac{2}{\sqrt{2}}$ funkcja f przyjmuje większą wartość niż dla argumentu $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Funkcja f jest rosnąca.
- Funkcja f nie ma miejsca zerowego.
- Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór wszystkich liczby rzeczywistych.

Я 11. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 1 & \text{dla } x \leq -1 \\ \frac{-2}{x+2} & \text{dla } -1 < x \leq 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

Wskaż prawdziwą zależność.

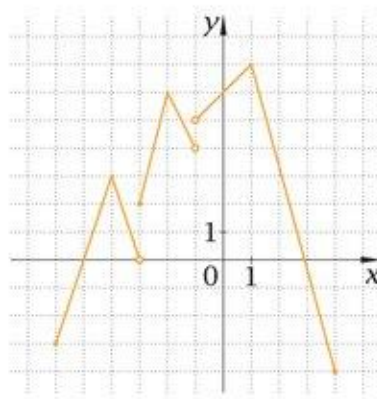
- A. $f(-2) \leq f(-1) \leq f(0) \leq f(1)$ C. $f(1) \leq f(-1) \leq f(-2) \leq f(0)$
 B. $f(0) \leq f(-2) \leq f(-1) \leq f(1)$ D. $f(-1) \leq f(1) \leq f(-2) \leq f(0)$

Я 12. Która z podanych funkcji ma nieskończenie wiele miejsc zerowych?

- A. $y = |x|$ B. $y = |x| + 2x$ C. $y = \frac{|x|}{x}$ D. $y = |x| + x$

Я 13. Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji f .

- a) Jaki zbiór jest dziedziną funkcji f ?
 b) Jaki jest zbiór wartości tej funkcji?
 c) Dla ilu argumentów funkcja ta przyjmuje wartość 4?
 d) Jakie liczby są miejscami zerowymi funkcji f ?
 e) Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie?
 f) Ile wynosi wartość wyrażenia $\frac{f(0) - 2 \cdot f(4)}{f(-2)}$?
 g) W jakich przedziałach funkcja ta jest malejąca?



Я 14. Określ dziedzinę podanej funkcji.

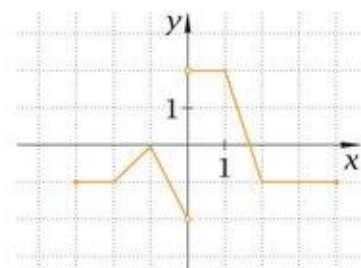
- a) $y = \frac{3x+2}{x^2-16}$ b) $y = \sqrt{2x+3} - \sqrt{2-3x}$ c) $y = \frac{3}{2x-5} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

Я 15. Wykaż, że funkcja $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$.

Я 16. Sporządź wykres funkcji $y = |x-2| + |x+1| - 4$.

Я 17. Funkcja liniowa f ma takie samo miejsce zerowe, jak funkcja $g(x) = \frac{2}{3}x - 6$. Wykres funkcji f jest równoległy do wykresu funkcji $h(x) = \frac{7-8x}{4}$. Oblicz pole trójkąta ABC , gdzie A jest punktem przecięcia wykresu funkcji f z osią y , B jest punktem przecięcia wykresu funkcji f z osią x , C jest punktem przecięcia wykresu funkcji h z osią y .

PRZED MATURĄ



1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Zbiorem wartości funkcji f jest:

- A. $(-2; 2)$ B. $\langle -2; 2 \rangle$ C. $\langle -2; 2 \rangle$ D. $(-2; 2)$

2. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x^3}{x^4 + 1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Wtedy liczba $f(-\sqrt{2})$ jest równa:

- A. $-\frac{8}{5}$ B. $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$ D. $-\frac{4}{3}$

3. Funkcja liniowa f określona wzorem $f(x) = 2x + b$ ma takie samo miejsce zerowe, jakie ma funkcja liniowa $g(x) = -3x + 4$. Stąd wynika, że:

- A. $b = 4$ B. $b = -\frac{3}{2}$ C. $b = -\frac{8}{3}$ D. $b = \frac{4}{3}$

4. Proste o równaniach $2x - 3y = 4$ i $5x - 6y = 7$ przecinają się w punkcie P . Stąd wynika, że:

- A. $P = (1, 2)$ B. $P = (-1, 2)$ C. $P = (-1, -2)$ D. $P = (1, -2)$

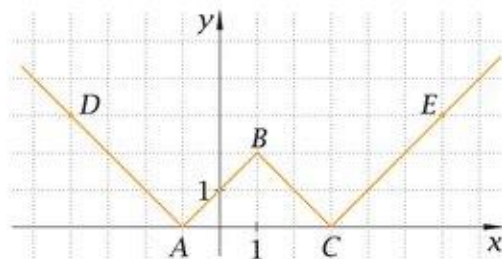
5. Funkcja liniowa f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x . Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Funkcja f jest malejąca i jej wykres przecina oś y w punkcie $P = (0, \frac{1}{3})$.
 B. Funkcja f jest malejąca i jej wykres przecina oś y w punkcie $P = (0, -1)$.
 C. Funkcja f jest rosnąca i jej wykres przecina oś y w punkcie $P = (0, \frac{1}{3})$.
 D. Funkcja f jest rosnąca i jej wykres przecina oś y w punkcie $P = (0, -1)$.

6. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji $y = f(x)$, który jest złożony z dwóch półprostych AD i CE oraz dwóch odcinków AB i BC , gdzie $A = (-1, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (3, 0)$, $D = (-4, 3)$, $E = (6, 3)$.

Wzór funkcji to:

- A. $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$
 B. $f(x) = ||x - 1| - 2|$
 C. $f(x) = ||x - 1| + 2|$
 D. $f(x) = |x - 1| + 2$



7. Dana jest funkcja f określona wzorem: $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla } x \leq 0 \\ ||x + 3| - 4| & \text{dla } x > 0 \end{cases}$. Równanie $f(x) = 1$ ma dokładnie:

- A. jedno rozwiązanie C. cztery rozwiązania
 B. dwa rozwiązania D. pięć rozwiązań

RÓWNANIA KWADRATOWE

Równaniem kwadratowym nazywamy każde równanie, które można przekształcić do postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

Rozwiązywanie równań typu $ax^2 + c = 0$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Jeśli $-\frac{c}{a} > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Jeśli $-\frac{c}{a} = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = 0$.

Jeśli $-\frac{c}{a} < 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Rozwiązywanie równań typu $ax^2 + bx = 0$, gdzie $b \neq 0$

$$x(ax + b) = 0$$

Równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Rozwiązywanie równań typu $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{-b}{2a}$.

Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma rozwiązań.

Typowe metody pozwalające zastosować wzory Viète'a

- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$
- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$
- $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2}$

- pierwiastki x_1 i x_2 są tego samego znaku, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$
- pierwiastki x_1 i x_2 są różnych znaków, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$
- oba pierwiastki x_1 i x_2 są dodatnie, gdy $x_1 + x_2 > 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$
- oba pierwiastki x_1 i x_2 są ujemne, gdy $x_1 + x_2 < 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$

Wzory Viète'a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

RÓWNANIA KWADRATOWE W NAJPROSTSZEJ POSTACI

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 = 2\frac{1}{4}$

d) $5x^2 = 6,05$

g) $3x^2 - 5 = 4$

b) $x^2 + 9 = 0$

e) $-2x^2 - 50 = 0$

h) $7 = 3 - x^2 + 4$

c) $\frac{1}{3}x^2 = 12$

f) $3 - x^2 = 3$

i) $8 - 2x^2 = 2(x^2 - 4)$

2. Rozwiąż równanie.

a) $3x^2 + 8 = x^2 + 58$

d) $5(3 - 2x^2) = 15(x^2 - 1)$

g) $\frac{x^2 + 4}{2} - 4 = 6$

b) $x^2 - 5 = 4x^2 + 4$

e) $2x(x + 3) = 6(x + x^2) - 1$

h) $3 - \frac{2x^2 - 5}{4} = 4\frac{1}{4}$

c) $3(x^2 - 2) = x^2 - 6$

f) $3(x^2 + 3) - x(x + 3) = x(x - 3)$

i) $2 - \frac{3 - 5x^2}{5} = 1,6$

3. Ciało wyrzucone pionowo w górę z prędkością v wzniesie się na maksymalną wysokość $h = \frac{v^2}{2g}$ (g oznacza przyspieszenie grawitacyjne). Oblicz, z jaką prędkością należy wyrzucić piłkę, aby wzniosła się na wysokość 10 m:

a) na Ziemi ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$)

b) na Księżycu ($g \approx 1,6 \text{ m/s}^2$)

4. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 - 5x = 0$

d) $7x^2 = 3,5x$

g) $\frac{x^2}{5} = \frac{3x}{2}$

b) $2x^2 + 4x = 0$

e) $3x - 12x^2 = 0$

h) $-\frac{2x}{7} = \frac{4x^2}{3}$

c) $x^2 = -6x$

f) $50x - 8x^2 = 0$

i) $\frac{5x + x^2}{6} = -\frac{x^2 + x}{2}$

5. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{2x^2 - x}{5} = \frac{x^2 + x}{3}$

c) $2 - \frac{x^2 - x + 5}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{1 - x^2}{2} + \frac{2x^2 - 1}{2} = \frac{x^2 + x}{4}$

b) $\frac{x^2 - 5x}{2} = \frac{5x - x^2}{3}$

d) $\frac{2(x^2 - 5) + 10(1 - 2x)}{5} = x^2$

f) $\frac{x^2 + 2x}{3} + \frac{x^2 + 3x}{2} = 0$

6. Rozwiąż równanie.

a) $(x - 5)(x + 5) = 11$

e) $3(x - 3)^2 - 6(2 - 3x) = 0$

b) $(3x - 2)^2 = 4(1 - 3x)$

f) $(x + 7)^2 = (7 - x)(x + 7)$

c) $(2x + 1)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 0$

g) $2(x - 2)^2 + (-x + 3)(x + 3) = 17$

d) $\frac{(3 - 4x)^2}{3} = 3 - 2x$

h) $\frac{(x - 4)^2}{4} - \frac{(x - 2)^2}{2} = 1$

7. Liczba x_1 jest jednym z rozwiązań podanego równania. Znajdź wartość współczynnika m i drugie rozwiązanie tego równania.

a) $x^2 = m$, $x_1 = 5\sqrt{3}$

c) $mx^2 + x = 0$, $x_1 = \frac{3}{5}$

b) $3x^2 - m = 0$, $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $x^2 = mx$, $x_1 = -\sqrt{5}$

8. Ułóż takie dwa równania postaci $x^2 + bx + c = 0$, że jeden ze współczynników (b lub c) jest równy zero i jednym z rozwiązań tego równania jest podana liczba.

a) 5

b) $-\sqrt{7}$

c) $-\frac{2}{3}$

d) $\frac{-2\sqrt{3}}{5}$

9. Rozwiąż równanie.

a) $(x-2)^3 = (x+2)^3 + 4$

c) $(x+2)^3 - (x+1)^3 = 7$

b) $(x-1)^3 = (x+3)^3 - 28$

d) $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 14$

10. a) Jeśli $\frac{2}{3}$ kwadratu pewnej liczby pomniejszymy o 100, to otrzymamy 50. Co to za liczba?

b) Różnica między $\frac{1}{3}$ kwadratu pewnej liczby a $\frac{1}{4}$ kwadratu tej liczby jest równa 1. Znajdź tę liczbę.

c) $\frac{3}{4}$ kwadratu pewnej liczby jest równe średniej arytmetycznej tej liczby i jej kwadratu. Co to za liczba?

11. Rozwiąż równanie.

a) $x^2(x-2) = 0$

e) $(x^2-5)^2 = 4$

b) $(x^2-25)(2x-5) = 0$

f) $((x^2-10)^2-9)^2 = 0$

c) $(x^2-6)(x^2+5) = 0$

g) $x^4-2x^2 = 0$

d) $(x^4-49)(x^2-49) = 0$

h) $4x^6-6x^4 = 0$

12. Rozwiąż równanie.

a) $((x^2-1)^2+2)^2-9 = 0$

c) $((x^2-4)^2-5)^2-16 = 0$

b) $((x^2+2)^2-3)^2-4 = 0$

d) $((x^2+3)^2+2)^2-25 = 0$

13. Skorzystaj z metody rozwiązywania równania kwadratowego przedstawionej w ramce i rozwiąż poniższe równanie.

a) $(x-4)(3x+7) = (x-4)(x+5)$

b) $2x(x+3) = (x-6)(x+3)$

c) $(x+7)(7x+11) = (x+7)(2x+1)$

d) $(2x-5)(6x-7) = (2x-5)(4x+3)$

e) $(3x+2)(x-5) = (3x+2)^2$

$$(x-3)(2x+1) = (x-3)(x-8)$$

$$(x-3)(2x+1) - (x-3)(x-8) = 0$$

$$(x-3)[(2x+1) - (x-8)] = 0$$

$$(x-3)(x+9) = 0$$

$$x-3 = 0 \text{ lub } x+9 = 0$$

$$x = 3 \text{ lub } x = -9$$

WYRÓŻNIK TRÓJMIANU KWADRATOWEGO. ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ

14. Ile rozwiązań ma podane równanie?

- a) $-7x^2 - 328x + 19 = 0$ c) $\frac{1}{4}x^2 + 97x - 68 = 0$ e) $-900x^2 - 60x - 1 = 0$
b) $101x^2 + 202x + 101 = 0$ d) $-2,7x^2 + x - 17,9 = 0$ f) $1,3x^2 - 2x + 637 = 0$

15. Rozwiąż równanie (postaraj się to zrobić bez obliczania wyróżnika trójmianu kwadratowego).

- a) $(x - 7)^2 = 4$ d) $-3(x + 2)^2 = -21$ g) $\frac{2}{3}(4x - 9)^2 = -6$
b) $(x + 5)^2 = 3$ e) $5(2x - 3)^2 = 20$ h) $-\frac{5}{7}(3x + 2)^2 = 0$
c) $2(x - 6)^2 = 50$ f) $-6(5x + 1)^2 = -18$ i) $\frac{1}{2}(6x - 2)^2 = 5$

16. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{3}{x} = \frac{x}{12}$ b) $\frac{x}{5} = \frac{3}{x}$ c) $\frac{5}{x} = \frac{x}{10}$ d) $\frac{3x}{2} = \frac{1}{6x}$

17. Rozwiąż równanie (postaraj się wybrać jak najprostszą metodę).

- a) $8x^2 = 2$ e) $x^2 = 9x$ i) $2x^2 + 7 = 0$
b) $(5x + 3)^2 = 0$ f) $5x^2 - 15 = 0$ j) $4x^2 + 1 = 4x$
c) $(3 - x)(2x - 3) = 0$ g) $x(x - 10) = -25$ k) $(5 - 8x)(x + 2) = 0$
d) $x^2 + 6x + 9 = 0$ h) $(8x + 12)\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 0$ l) $2x^2 + 8x + 8 = 0$

18. Rozwiąż równanie.

- a) $x^2 - 10x + 4 = 0$ f) $-6x^2 + 3x + 18 = 0$ k) $3x^2 + 2x - 3 = 0$
b) $x^2 + 7x - 8 = 0$ g) $-2x^2 + 6x - 4,5 = 0$ l) $-x^2 + \sqrt{3}x + 1,5 = 0$
c) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ h) $7x^2 + 5x + 3 = 0$ m) $-5x^2 + 20\sqrt{5}x - 100 = 0$
d) $-4x^2 + 4x + 8 = 0$ i) $-4x^2 + 4x + 15 = 0$ n) $-x^2 + 2\sqrt{13}x - 14 = 0$
e) $2x^2 + 10x - 168 = 0$ j) $-0,5x^2 - 3x - 2 = 0$ o) $-x^2 + \sqrt{2}x + 49,5 = 0$

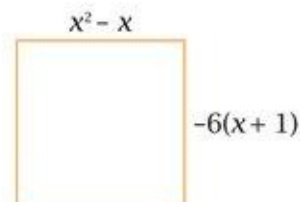
19. Ile rozwiązań ma równanie $x^2 + bx + c = 0$, jeżeli jego współczynniki b i c spełniają podane warunki?

- a) $b < 0$ i $c < 0$ c) $b < -10$ i $c < 25$ e) $-2 < b < 20$ i $c > b^2$
b) $b > 10$ i $c < -10$ d) $-10 < b < 10$ i $c > 25$ f) $-20 < b < 5$ i $c = \frac{1}{4}b^2$

20. Dla jakiej wartości parametru m równanie ma jedno rozwiązanie? Znajdź je.

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------|
| a) $5x^2 + 2x + m = 0$ | f) $-\frac{3}{4}x^2 - 3mx - 1 = 0$ | k) $x^2 - 3mx - 2m = 0$ |
| b) $-6x^2 + 5x + m = 0$ | g) $mx^2 + 2x + 1 = 0$ | l) $-2x^2 + 5mx - 10m = 0$ |
| c) $-\frac{1}{3}x^2 - 4x - 2m = 0$ | h) $mx^2 - 5x - 5 = 0$ | m) $mx^2 + 4x + m = 0$ |
| d) $3x^2 + mx + 3 = 0$ | i) $2mx^2 - 3x + 2 = 0$ | n) $mx^2 + mx - 5 = 0$ |
| e) $-2x^2 + mx - 5 = 0$ | j) $x^2 + mx + m = 0$ | o) $3mx^2 - 5mx + 1 = 0$ |

21. a) Oblicz długość boku kwadratu przedstawionego na rysunku.



b) Prostokąt o bokach długości x i $x - 3$ ma takie samo pole jak prostokąt o bokach długości $x - 2$ i $\frac{1}{2}x$. Jakie wymiary mają te prostokąty?

c) Pewien romb ma bok długości x , wysokość równą $x - 1$, a przekątne długości $x + 5$ i $x + 15$. Oblicz długość boku tego rombu.

22. a) Wykresy funkcji $f(x) = (-m^2 + 8)x + m$ i $g(x) = -2mx - 12$ są równoległe. Oblicz współczynnik kierunkowy tych funkcji.

b) Wykresy funkcji $f(x) = 3x + m^2$ i $g(x) = -5x - 4m + 5$ przecinają oś y w tym samym punkcie. Jakie współrzędne ma ten punkt?

c) Wykresy funkcji $f(x) = (m^2 + 2m)x + m$ i $g(x) = 15x - 12$ są równoległe. W jakim punkcie wykres funkcji f przecina oś y ?

23. Przeczytaj informacje w ramce.

Leonhard Euler [czyt. ojler] (1707-1783) w Szwajcarii uważany jest za matematyka szwajcarskiego, w Rosji — za rosyjskiego, w Niemczech — za niemieckiego, bo żył i pracował we wszystkich tych krajach. Nazywany bywa najpłodniejszym matematykiem, zarówno z powodu liczby wydanych prac naukowych (886), jak i liczby dzieci (13). Jego dzieła dotyczą wszystkich dziedzin matematyki, a także jej zastosowań, takich jak budowa okrętów, balistyka czy muzyka. Przez ostatnie 17 lat życia Euler był niewidomy, więc wszystkie rozumowania i obliczenia wykonywał w pamięci, a następnie dyktował. W ten sposób powstała też książka *Pełne wprowadzenie do algebry*.

Oto przykłady zadań z książki Leonharda Eulera *Pełne wprowadzenie do algebry*. Rozwiąż je.

a) Mam dwie liczby, pierwsza jest o 6 większa od drugiej, a ich iloczyn wynosi 91. Co to za liczby?

b) Szukam takiej liczby, że gdy dodam do niej 5 i odejmę od niej 5, i pomnożę otrzymaną sumę i różnicę, dostanę 96.

c) Szukam takiej liczby, że gdy pomnożę jej połowę przez jej trzecią część, a potem do tego iloczynu dodam $\frac{1}{2}$ szukanej liczby, otrzymam 30.

24. Zapisz i rozwiąż odpowiednie równanie.

- a) Suma kwadratów pewnych trzech kolejnych liczb naturalnych wynosi 6350. Co to za liczby?
b) Suma kwadratów pewnych trzech kolejnych liczb nieparzystych wynosi 9083. Co to za liczby?

25. Na przyjęcie przygotowano 10 litrów napoju. Ponieważ przyszło o 5 osób więcej niż się spodziewano, na każdą osobę wypadło o 100 ml napoju mniej. Ile osób było na przyjęciu?

26. O ile centymetrów należy zwiększyć długość i szerokość prostokąta o wymiarach $8\text{ cm} \times 5\text{ cm}$, aby jego pole zwiększyło się o 30 cm^2 ?

27. Prostokątne lustro wraz z ramą (o stałej szerokości) ma wymiary $1,5\text{ m} \times 1\text{ m}$. Jego powierzchnia jest o 4600 cm^2 większa od powierzchni samej lustrzanej szyby. Jaka jest szerokość ramy?

28. Jaki powinien być promień podstawy walca, aby przy wysokości 8 cm pole powierzchni całkowitej tego walca było równe 100 cm^2 ? Przyjmij $\pi \approx 3$.

Pole powierzchni całkowitej walca:

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

29. W firmie PARA-BOLL zatrudnionych jest (łącznie z dyrektorem) 111 osób. Każdy z zastępców dyrektora naczelnego zarządza grupą pracowników, których jest 4 razy więcej niż zastępców dyrektora. Oprócz tego w firmie zatrudnione są dwie sprzątaczk i trzech portierów. Ilu zastępców ma dyrektor naczelny tej firmy?

30. Na pewnym przyjęciu para gospodarzy podjęła 30 gości. Część gości opuściła przyjęcie wcześniej. Żegnając się, wymienili uściski dłoni z wszystkimi pozostałymi gośćmi i z gospodarzami. Uścisków dłoni było 156. Ilu gości wyszło wcześniej?

31. Rozwiąż równanie.

a) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 3x + 2} = 0$

d) $\frac{2x^2 - x - 10}{x^2 - 9} = 1$

g) $\frac{5}{x-3} = \frac{x}{2x-6}$

b) $\frac{2x^2 + 9x - 5}{3x^2 + 13x - 10} = 0$

e) $\frac{3x+1}{x+3} = \frac{5}{x}$

h) $\frac{4x}{2-x} = \frac{x}{8-x}$

c) $\frac{4x^2 + x + 1}{x^2 + 3x - 2} = -2$

f) $\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}} = \frac{2x}{x+1}$

i) $\frac{x-4}{x} - \frac{5-x}{x+1} = 0$

32. Rozwiąż równanie.

a) $3x + \frac{3}{x} + 10 = 0$

c) $2x + 1 = \frac{6}{x}$

e) $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} = 5$

b) $x + \frac{8}{x} = 6$

d) $\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} + 1 = 0$

f) $\frac{3}{x^2} + 4 = \frac{13}{x}$

33. Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$

c) $x^4 + 2\sqrt{2}x^2 + 2 = 0$

e) $x^4 + 2 = 4x^2$

b) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

d) $2x^4 - 6x^2 + 10 = 0$

f) $4x^4 - 20x^2 + 25 = 0$

34. Rozwiąż równanie.

a) $x + 4 = 5\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x} + 2x = 1$

e) $\frac{36}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 13$

b) $x - \sqrt{x} = 6$

d) $x = 8\sqrt{x} - 15$

f) $\sqrt[3]{x^2} - 9\sqrt[3]{x} + 8 = 0$

35. Rozwiąż równanie.

a) $|x^2 - 5x| = 6$

b) $|x^2 + 4x| = 3$

c) $|x^2 - 4x| = 2$

36. Rozwiąż równanie.

a) $x^2 + 5|x| - 6 = 0$

b) $x^2 - 4|x| + 3 = 0$

c) $x^2 + 6|x| + 8 = 0$

37. a) Wykaż, że jeżeli rozwiązanie równania $ax + b = 0$ jest również rozwiązaniem równania $x^2 + ax + b = 0$, to $b = 0$.

b) Wykaż, że jeżeli rozwiązanie równania $ax + b = 0$ jest również rozwiązaniem równania $ax^2 + bx + c = 0$, to $c = 0$.

38. a) Liczby a i b są różnymi rozwiązaniami równania $x^2 + ax + b = 0$. Znajdź te liczby.

b) Liczby a i b są różne od zera i są rozwiązaniami równania $ax^2 + x + b = 0$. Znajdź te liczby.

39. Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x - y = -1 \\ xy = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - 4x + y^2 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = y^2 \\ x - y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

40. Znajdź dwie liczby dodatnie, których suma jest trzykrotnie większa od różnicy, a iloczyn trzykrotnie większy od sumy.

41. Uczestników turnieju tenisa stołowego podzielono na 8 równolicznych grup. W pierwszym etapie turnieju każdy z uczestników rozegrał po dwie partie z pozostałymi zawodnikami swojej grupy. Z każdej grupy wyłoniono po dwóch zwycięzców i od tego momentu rozgrywano spotkania metodą pucharową (zwycięzca partii przechodzi dalej, pokonany odpada). Łącznie rozegrano 255 spotkań. Ilu zawodników wystartowało w turnieju?

42. Przeczytaj ogłoszenie.

WYCIECZKA DO POZNANIA!

Cena wycieczki to 1000 zł za grupę + 10 zł za osobę. Dołącz do nas! Im więcej osób się zgłosi, tym taniej! Jeśli znajdziemy jeszcze 10 chętnych, każdy z uczestników wycieczki zapłaci o 5 zł mniej!

O ile złotych mniej zapłaci każdy z uczestników wycieczki, jeśli zgłosi się 5 nowych chętnych?

43. Radek co kilka dni kupuje za 3 zł wafelki na wagę. Gdy pewnego dnia cena kilograma wafelków wzrosła o 3 zł, Radek mógł za swoje 3 zł kupić ich o 5 dag mniej niż dotychczas. Ile kosztują wafelki po podwyżce?

44. Pan Kowalski złożył w banku 20 000 zł na lokatę długoterminową z roczną kapitalizacją odsetek. Jakie było roczne oprocentowanie w tym banku, jeżeli po dwóch latach na koncie pana Kowalskiego było 20 808 zł (po uwzględnieniu dwudziestoprocentowego podatku od odsetek)?

45. a) Równanie czwartego stopnia $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$ przekształć tak, by podstawiając zmienną y za wyrażenie $x - \frac{1}{x}$ otrzymać równanie kwadratowe $y^2 + 5y + 6 = 0$. Następnie rozwiąż to równanie i wyznacz rozwiązania podanego równania czwartego stopnia.

b) Równanie czwartego stopnia $8x^4 + 18x^3 - 61x^2 - 18x + 8 = 0$ przekształć tak, by podstawiając zmienną y za wyrażenie $x - \frac{1}{x}$, otrzymać równanie kwadratowe $8y^2 + 18y - 45 = 0$. Następnie rozwiąż to równanie i wyznacz rozwiązania podanego równania czwartego stopnia.

WZORY VIÈTE'A

46. Równanie $-2x^2 + 5x + 7 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1 i x_2 . Nie rozwiązując równania, oblicz:

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 x_2$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

47. Jeśli równanie ma dwa rozwiązania, oblicz ich sumę i iloczyn.

a) $x^2 + 2532x - 3894 = 0$

d) $-7x^2 + 49x - 7777 = 0$

b) $2x^2 + 68842x - 1426 = 0$

e) $-\frac{1}{2}x^2 - 5231x + 44250 = 0$

c) $-10x^2 - 85237x + 65536 = 0$

f) $\frac{1}{4}x^2 + 5372x + 5372^2 = 0$

Я48. Sprawdź, że podane równanie ma dwa rozwiązania, a następnie oblicz sumę odwrotności tych rozwiązań.

a) $72x^2 + 963x + 3 = 0$

c) $25x^2 - 625x - 5 = 0$

b) $-35x^2 + 105x - 21 = 0$

d) $-7x^2 - 28x + 700 = 0$

Я49. Korzystając ze wzorów Viète'a, ułóż równanie kwadratowe, którego rozwiązaniami są podane liczby. Ile takich równań można ułożyć?

a) 5 i 6

c) $\frac{3}{5}$ i $\frac{2}{5}$

e) $-\sqrt{7}$ i 5

b) $-\sqrt{2}$ i $3\sqrt{2}$

d) $-\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$

f) π i -2π

Я50. Każde z poniższych równań ma dwa rozwiązania. Jakie znaki mają te rozwiązania?

a) $83x^2 + 5723x - 4581 = 0$

e) $153x^2 - 2899x - 582 = 0$

b) $-53x^2 + 852x - 162 = 0$

f) $176x^2 + 253\sqrt{2}x + 17 = 0$

c) $-35x^2 - 287x + 543 = 0$

g) $-\pi x^2 + 35x + 5\sqrt{8} = 0$

d) $-78x^2 - 415x - 126 = 0$

h) $\sqrt{83}x^2 - 87x + \sqrt{19} = 0$

Я51. Wiadomo, że równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania. Ustal znaki tych rozwiązań, jeżeli:

a) wszystkie współczynniki równania są dodatnie,

b) $a > 0$, $b < 0$ i $c < 0$,

c) $a > 0$, $b > 0$ i $c < 0$,

d) $a < 0$, $b > 0$ i $c < 0$,

e) wszystkie współczynniki równania są ujemne.

Я52. Równanie $x^2 + 100x + 2 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1 i x_2 . Nie rozwiązując równania, oblicz:

a) $x_1^2 + x_2^2$

b) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

d) $x_1^3 + x_2^3$

Я53. Sprawdź, że podane równanie ma dwa rozwiązania, a następnie oblicz sumę kwadratów tych rozwiązań.

a) $x^2 - 10x - 3,5 = 0$

c) $-2x^2 + 50x + 7 = 0$

b) $-x^2 + 20x + 3 = 0$

d) $0,5x^2 + 10x + 5 = 0$

Я54. Sprawdź, że podane równanie ma dwa rozwiązania, a następnie oblicz sumę odwrotności kwadratów tych rozwiązań.

a) $4x^2 + 12x + 0,5 = 0$

c) $0,1x^2 + 0,3x + 0,01 = 0$

b) $-5x^2 + 30x - 10 = 0$

d) $-x^2 + 7x + 0,5 = 0$

Я55. Równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa rozwiązania x_1 i x_2 . Wyraż podaną sumę za pomocą a , b i c .

a) $x_1^2 + x_2^2$

b) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

d) $x_1^3 + x_2^3$

Я56. a) Dla jakich wartości m równanie $x^2 + 5mx - m^2 - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, których suma odwrotności jest równa 2?

b) Dla jakich wartości p suma kwadratów rozwiązań równania $x^2 + 2px - p^2 - 3 = 0$ jest równa 30?

c) Dla jakich wartości t równanie $x^2 - tx - t^2 - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 takie, że $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = -2,9$?

Я57. Dla jakich wartości m dwa różne rozwiązania równania $x^2 + mx - 2 = 0$ spełniają podany warunek?

a) Suma rozwiązań jest o 3 większa od ich iloczynu.

b) Suma odwrotności rozwiązań jest równa iloczynowi tych rozwiązań.

c) Suma kwadratów rozwiązań jest równa iloczynowi liczby 5 i sumy rozwiązań.

Я58. Znajdź wartość współczynnika c , dla której równanie $x^2 - 3x + c = 0$ ma dwa różne rozwiązania spełniające warunek $3x_1 + 5x_2 = 5$.

Я59. a) Dla jakich wartości m równanie $x^2 + x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania o jednakowych znakach? Czy wtedy oba te rozwiązania są dodatnie, czy ujemne?

b) Dla jakich wartości p równanie $x^2 - 2x + p + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania o jednakowych znakach? Czy wtedy oba te rozwiązania są dodatnie, czy ujemne?

c) Dla jakich wartości t równanie $(t-2)x^2 + 4x - 1 = 0$ ma dwa rozwiązania o różnych znakach?

Я60. Znajdź wartości m , dla których równanie $x^2 + mx - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 spełniające podany warunek.

a) $\frac{1}{x_1^2 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2^2} = 5$

c) $x_1^4 - x_2^4 = 6(x_1^2 - x_2^2)$

e) $x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^4 = 3$

b) $x_1^2 + x_2^2 = 3(x_1 + x_2)$

d) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3$

f) $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = 7$

Я61. Równanie $x^2 + 110x + 101 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 . Nie rozwiązując tego równania, napisz równanie kwadratowe, którego rozwiązaniami są:

a) $2x_1$ i $2x_2$

b) $x_1 + 2$ i $x_2 + 2$

c) $\frac{x_1 - 2}{2}$ i $\frac{x_2 - 2}{2}$

- Я62.** a) Dla jakich wartości m równanie $x^2 + 6x + m = 0$ ma dwa rozwiązania: jedno większe od 2, a drugie mniejsze od 2?
 b) Dla jakich wartości p równanie $x^2 - 4x + 1 - p = 0$ ma dwa rozwiązania: jedno większe od -4 , a drugie mniejsze od -4 ?
- Я63.** a) Dla jakich wartości m równanie $x^2 + 2x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania większe od -2 ?
 b) Dla jakich wartości p równanie $x^2 - 8x - p = 0$ ma dwa różne rozwiązania większe od 3?
 c) Dla jakich wartości t równanie $x^2 + 2x + t - 3 = 0$ ma dwa różne rozwiązania mniejsze od 1?
- Я64.** a) Dla jakich wartości m równanie $x^2 - 6x - m + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania należące do przedziału $(2; 5)$?
 b) Dla jakich wartości p równanie $x^2 + 4x + p - 3 = 0$ ma dwa różne rozwiązania należące do przedziału $(-3; 1)$?
- Я65.** Każde z równań występujących w tym zadaniu ma dwa różne rozwiązania, które są liczbami całkowitymi. Wykaż, że:
 a) przynajmniej jedno z rozwiązań równania $x^2 - 4187x + 37\,782 = 0$ jest liczbą podzielną przez 3,
 b) żadne z rozwiązań równania $x^2 + 43\,657x - 70\,787\,4398 = 0$ nie dzieli się przez 5.
- Я66.** Równanie $x^2 + bx + c = 0$, gdzie c jest liczbą pierwszą, ma dwa różne rozwiązania całkowite. Wykaż, że jednym z tych rozwiązań jest liczba c lub liczba $-c$.
- Я67.** Wykaż, że jeżeli równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma różne rozwiązania x_1, x_2 , to rozwiązaniami równania $cx^2 + bx + a = 0$ są liczby $\frac{1}{x_1}$ i $\frac{1}{x_2}$.
- Я68.** a) Udowodnij, że równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa różne rozwiązania, które są liczbami przeciwnymi wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 0$ i $\frac{c}{a} < 0$.
 b) Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma dwa różne rozwiązania, z których jedno jest odwrotnością drugiego. Co można powiedzieć o współczynnikach a, b, c ?

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Które z poniższych równań ma dwa różne rozwiązania?

- A. $3x^2 = 2x^2 - 1$ C. $5x^2 - 2x^2 = 1$
B. $2x^2 = 1 + 4x^2$ D. $6x^2 + 2x^2 = 0$

2. Oba rozwiązania równania $4x^2 + 6x = 0$ należą do przedziału:

- A. $\langle -6; -4 \rangle$ B. $\langle -2; 1 \rangle$ C. $\langle -1; 5 \rangle$ D. $\langle -\frac{1}{2}; 10 \rangle$

3. Które z podanych równań nie ma rozwiązań?

- A. $-17x^2 + 2x + 89 = 0$ C. $x^2 - 91x + 65 = 0$
B. $47x^2 - 109x - 6 = 0$ D. $-23x^2 + 5x - 71 = 0$

4. Suma rozwiązań równania $5(x - 2000)(x - 1) = 0$ jest liczbą całkowitą:

- A. podzielną przez 2 C. podzielną przez 5
B. podzielną przez 3 D. pierwszą

5. Rozwiąż równanie.

- a) $\frac{1-2x^2}{2} + \frac{x^2-4}{3} = -5$
b) $(-2x-2)(2x+2) = (x-2)(x+2)$
c) $5(3-x)^2 + 15(3+2x) = 0$

6. Jaką wartość musi mieć parametr m , aby równanie $3x^2 + mx + m = 0$ miało jedno rozwiązanie?

7. Wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka A jest o 3 cm krótsza od boku BC . Pole tego trójkąta jest równe 14 cm^2 . Oblicz długość boku BC .

Я 8. Wiadomo, że a i b są dodatnimi liczbami wymiernymi. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. Równanie $ax^2 + b = 0$ nie ma rozwiązań.
- B. Co najmniej jedno z rozwiązań równania $ax^2 = b$ jest liczbą wymierną.
- C. Jeśli równanie $ax^2 - b = 0$ ma dwa rozwiązania, to ich suma jest równa 0.
- D. Równanie $b - ax^2 = 0$ ma zawsze dwa rozwiązania.

Я 9. Równanie $x^2 + px + \frac{p}{2} = 0$ ma jedno rozwiązanie i $p \neq 0$. Rozwiązanie tego równania należy do przedziału:

- A. $\langle -4; -2 \rangle$
- B. $\langle -2; 0 \rangle$
- C. $\langle 0; 2 \rangle$
- D. $\langle 2; 4 \rangle$

Я 10. Równanie $x^2 + bx + c = 0$ ma dwa dodatnie rozwiązania. Która z poniższych nierówności jest fałszywa?

- A. $bc < 0$
- B. $b < c$
- C. $c - b < 0$
- D. $4c < b^2$

Я 11. Rozwiązaniami równania $ax^2 + bx + c = 0$ są liczby całkowite. Wynika stąd, że:

- A. współczynniki a , b i c muszą być liczbami całkowitymi
- B. iloraz $\frac{a}{b}$ musi być liczbą całkowitą
- C. wyróżnik równania $b^2 - 4ac$ musi być liczbą całkowitą
- D. iloraz $\frac{c}{a}$ musi być liczbą całkowitą

Я 12. Rozwiąż równanie.

a) $3 + \frac{14}{x} = \frac{5}{x^2}$

b) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Я 13. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru p równanie $2x^2 + px - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania i suma kwadratów tych rozwiązań jest nie mniejsza od 1.

PRZED MATURĄ

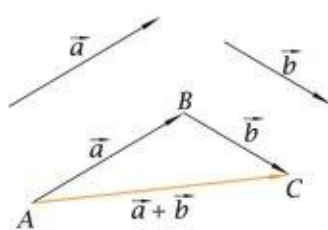
1. Równanie $(2x - 1)(x - 2) = (1 - 2x)(x + 2)$ ma dwa rozwiązania. Są to liczby:
 A. -2 oraz $\frac{1}{2}$ B. 0 oraz $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ oraz 2 D. -2 oraz 2
2. Liczby x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania $-2(x + 3)(x - 5) = 0$, zatem:
 A. $x_1 + x_2 = -8$ B. $x_1 + x_2 = -2$ C. $x_1 + x_2 = 2$ D. $x_1 + x_2 = 8$
3. Jeśli równanie $x^2 + 2x + 3a = 0$ nie ma rozwiązań, to liczba a spełnia warunek:
 A. $a < -1$ B. $-1 \leq a < 0$ C. $0 \leq a < \frac{1}{3}$ D. $a > \frac{1}{3}$
4. Prosta l o równaniu $y = m^2x + 3$ jest równoległa do prostej k o równaniu $y = (4m - 4)x - 3$. Zatem:
 A. $m = 2$ B. $m = -2$ C. $m = -2 - 2\sqrt{2}$ D. $m = 2 + 2\sqrt{2}$
5. Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $c \neq 0$, ma dwa różne rozwiązania, których suma jest równa ich podwojonemu iloczynowi. Wynika stąd, że:
 A. $b = 2c$ B. $c = 2b$ C. $b = -2c$ D. $2b = -c$
6. Równanie kwadratowe $5x^2 + 4x - 3 = 0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste: x_1 oraz x_2 . Wartość wyrażenia $\frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}$ jest równa:
 A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{4}$
7. Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite, takie że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

WEKTORY.

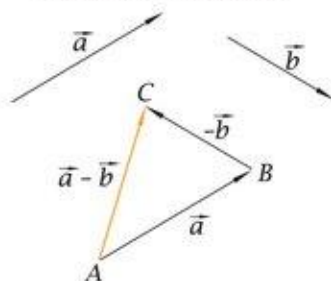
PRZEKSZTAŁCANIE

WYKRESÓW FUNKCJI

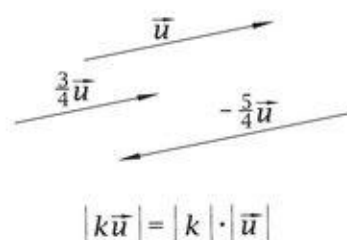
Suma wektorów



Różnica wektorów



Iloczyn wektora przez liczbę



Własności działań na wektorach

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

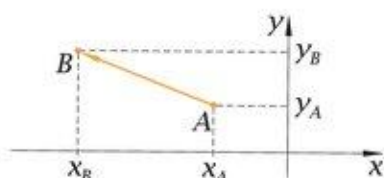
$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

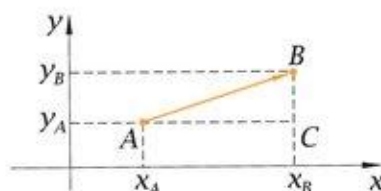
$$k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

Współrzędne wektora



$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Długość wektora



$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

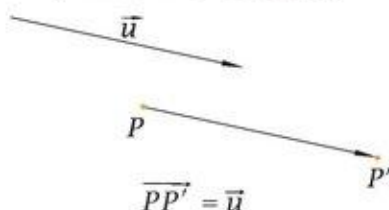
Jeśli $\vec{u} = [u_1, u_2]$, $\vec{v} = [v_1, v_2]$, to:

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$$

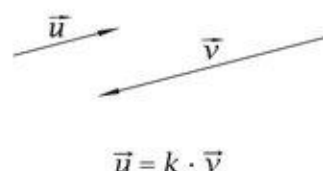
$$\vec{u} - \vec{v} = [u_1 - v_1, u_2 - v_2]$$

$$k \cdot \vec{u} = [ku_1, ku_2]$$

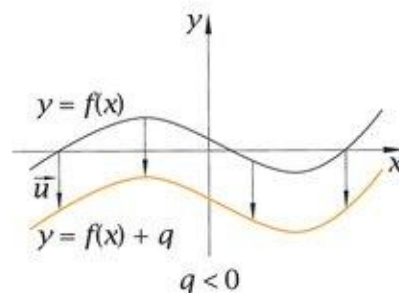
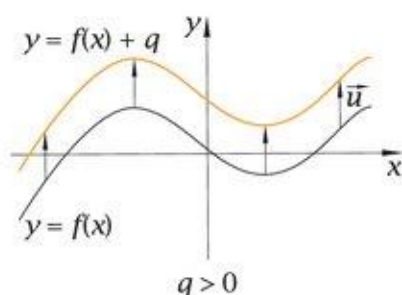
Przesunięcie równoległe punktu P o wektor $\vec{u}$



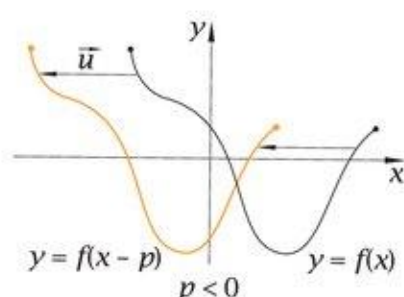
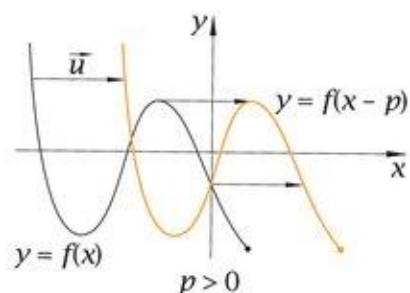
Warunek równoległości wektorów



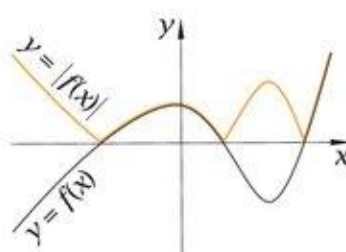
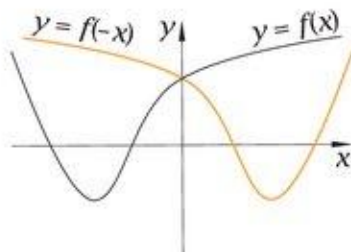
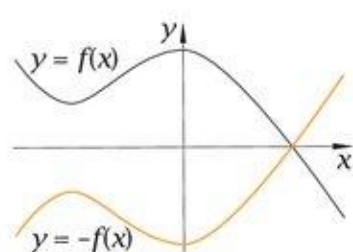
Przesuwanie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [0, q]$



Przesuwanie wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, 0]$



Przekształcanie wykresów funkcji



WEKTORY. DZIAŁANIA NA WEKTORACH

Я 1. Narysuj równoległobok $ABCD$. Zapisz w jak najprostszej postaci wektor równy wektorowi:

a) $\vec{AB} + \vec{BC}$

c) $\vec{BA} - \vec{DA}$

e) $\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{DC}$

b) $\vec{AB} + \vec{AD}$

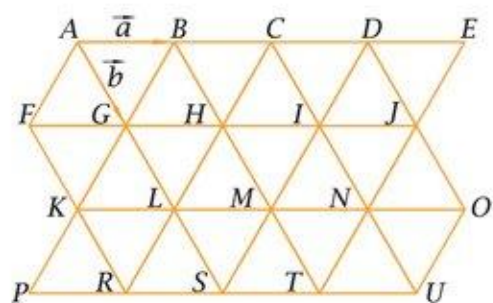
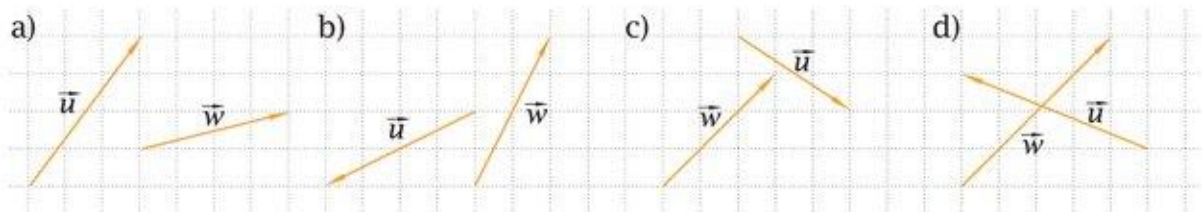
d) $\vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB}$

f) $\vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BD}$

Я2. Narysuj na kartce w kratkę dowolny czworokąt $ABCD$, którego wierzchołki leżą w punktach przecięcia linii krutek. Narysuj wektor równy wektorowi:

- | | | |
|--|-------------------------------------|---|
| a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ | d) $3\overrightarrow{BD}$ | g) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$ |
| b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ | e) $-2\overrightarrow{AD}$ | h) $-2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB})$ |
| c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$ | f) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ | i) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ |

Я3. Przerysuj podane wektory, a następnie wyznacz wektory $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{u} - \vec{w}$, $2\vec{u}$, $\vec{w} - \vec{u}$ oraz $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}$.



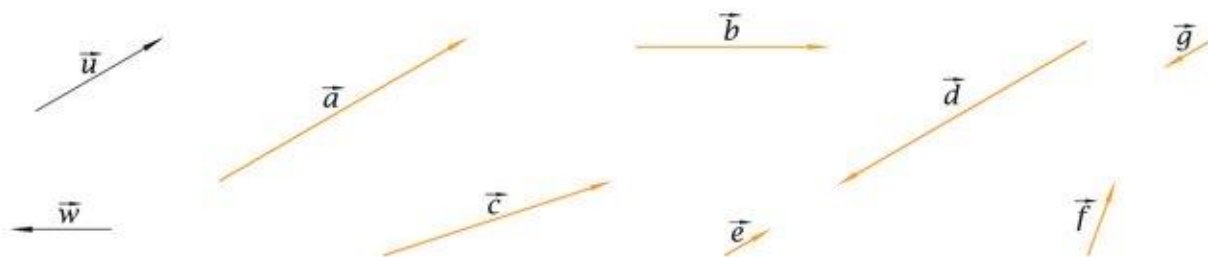
Я4. Figura na rysunku obok utworzona jest z trójkątów równobocznych. Zapisz za pomocą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wektory:

- | |
|--|
| a) $\overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{UT}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{LO}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{OK}$ |
| b) $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HO}$, $\overrightarrow{FS}$, $\overrightarrow{LH}$, $\overrightarrow{MS}$, $\overrightarrow{LB}$ |
| c) $\overrightarrow{SN}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{UA}$, $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{PE}$ |

Я5. Na rysunku, oprócz wektorów $\vec{u}$ i $\vec{w}$, przedstawiono następujące wektory:

$$-2\vec{u} \quad 2\vec{u} \quad \frac{1}{3}\vec{u} \quad -2\vec{w} \quad \vec{u} + \vec{w} \quad \vec{u} - \vec{w} \quad -\frac{1}{3}\vec{u}$$

Wskaż te wektory.

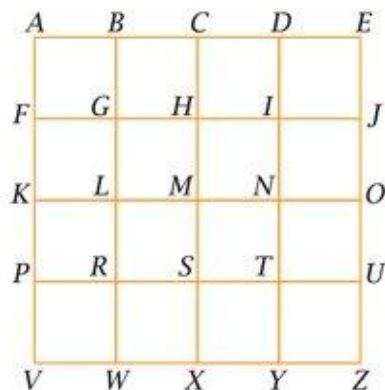


Я6. Punkt O jest środkiem symetrii sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Wyznacz wektor równy wektorowi:

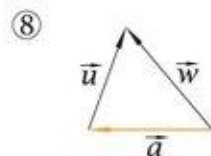
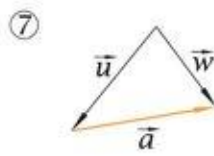
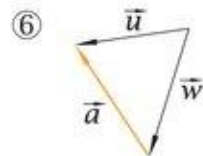
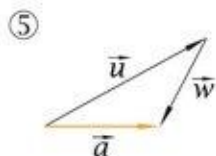
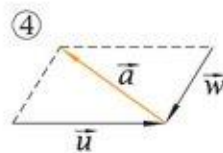
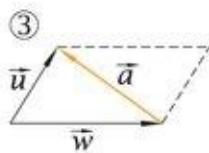
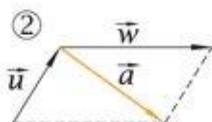
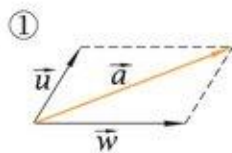
- | | | |
|--|--|--|
| a) $2\overrightarrow{OC}$ | d) $\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OC}$ | g) $\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$ |
| b) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DC}$ | e) $\frac{1}{2}\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{CB}$ | h) $\overrightarrow{AO} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ |
| c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ | f) $\frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ | i) $4\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE}$ |

Я7. Wskaż wektory równe danym wektorom.

- a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{HW} + \overrightarrow{WR}$, $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IZ}$
- b) $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{TJ}$, $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{ET}$
- c) $\overrightarrow{LS} - \overrightarrow{NS}$, $\overrightarrow{KY} - \overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{WO}$
- d) $2\overrightarrow{AG}$, $2\overrightarrow{IU}$, $-3\overrightarrow{TZ}$
- e) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BY}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{WJ}$, $-\frac{3}{2}\overrightarrow{FS}$



Я8. Wskaż te rysunki, na których $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$, te, na których $\vec{a} = \vec{u} - \vec{w}$, oraz te, na których $\vec{a} = \vec{w} - \vec{u}$.



Я9. Czy wektor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ może być krótszy od wektora $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$? Czy może zachodzić równość $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}|$?

Я10. Narysuj dowolne dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o wspólnym początku i różnych kierunkach. Skonstruuj taki wektor $\vec{u}$, że:

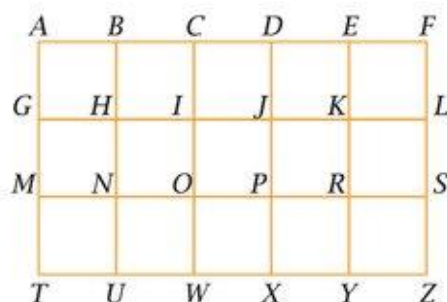
- a) $\vec{a} + \vec{u} = \vec{b}$
- b) $\vec{b} + 2\vec{u} = \vec{a}$
- c) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{u} = 2\vec{b}$
- d) $\vec{a} - 3\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{b}$

Я11. Kwadrat o wierzchołkach ABCD przesunięto o wektor $\vec{u}$. Bok kwadratu ma długość 2 cm. Oblicz pole części wspólnej kwadratu i jego obrazu, jeżeli:

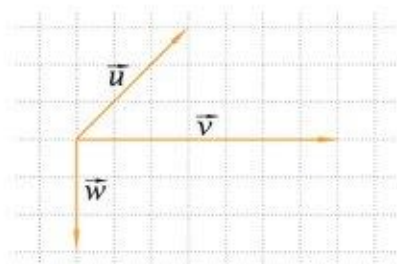
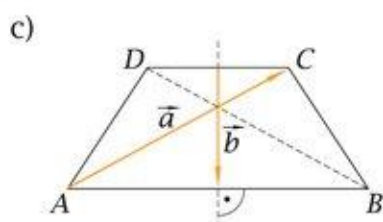
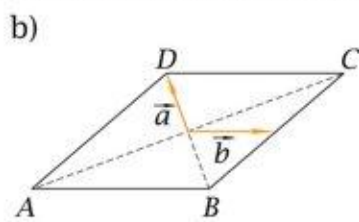
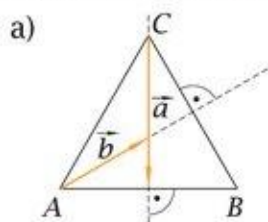
- a) $\vec{u} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
- b) $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
- c) $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- d) $\vec{u} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$

Я12. Wskaż takie wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, że:

- a) $\overrightarrow{NI} + \vec{u} = \overrightarrow{TR}$, $\overrightarrow{PZ} - \vec{v} = \overrightarrow{HR}$
- b) $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{EL} + \vec{u} = \overrightarrow{MR}$, $\overrightarrow{UD} - \overrightarrow{YL} - \vec{v} = \overrightarrow{ZE}$
- c) $-2\overrightarrow{UO} + \overrightarrow{KS} + 2\vec{u} = \overrightarrow{EH}$,
 $\frac{1}{2}\overrightarrow{MR} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DT} + \frac{1}{2}\vec{v} = \overrightarrow{GE}$



Я13. Na poniższych rysunkach przedstawiono trójkąt równoboczny, romb i trapez równoramienny. Zapisz wektory $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$ jako wyniki działań na wektorach, których początki i końce są wierzchołkami tych wielokątów.



Я14. Dane są wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ (zob. rysunek). Skonstruuj takie wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, że:

- | | |
|--|---|
| a) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{a} = 2\vec{w}$ | c) $2\vec{u} + \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{w}$ |
| b) $\vec{v} - 2\vec{w} - 2\vec{b} = \vec{u}$ | d) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{d} = \vec{0}$ |

Я15. Narysuj dowolne wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Skonstruuj takie wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, że:

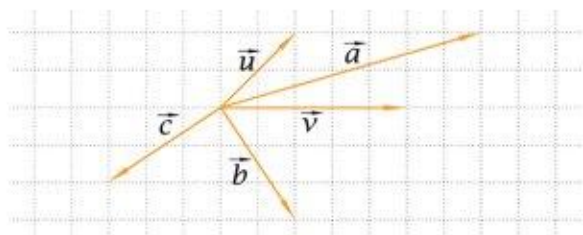
- | | |
|---|---|
| a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$ | b) $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b}$ |
|---|---|

Я16. Narysuj dowolne dwa prostopadłe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oraz wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nie-równoległe do $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Przedstaw każdy z wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jako sumę dwóch wektorów: jednego równoległego do $\vec{u}$, jednego równoległego do $\vec{v}$.

Я17. a) Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają wspólny początek, tworzą kąt 120° oraz $|\vec{a}| = |\vec{b}| = a$. Oblicz $|\vec{a} + \vec{b}|$ i $|\vec{a} - \vec{b}|$.

b) Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają wspólny początek, tworzą kąt 135° oraz $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}a$. Oblicz $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Я18. a) Na rysunku obok przedstawiono pięć wektorów o wspólnym początku. Przedstaw każdy z wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jako sumę dwóch wektorów, z których jeden jest równoległy do wektora $\vec{u}$, a drugi do wektora $\vec{v}$.



b) Jaki warunek muszą spełniać dwa wektory $\vec{s}$ i $\vec{t}$, aby każdy wektor dało się przedstawić w postaci $p\vec{s} + q\vec{t}$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{R}$?

Я19. Korzystając z własności wektorów, uzasadnij twierdzenie:

Odcinek łączący środki przeciwległych boków równoległoboku jest równoległy do pozostałych boków i ma taką samą długość jak te boki.

Я20. Pole równoległoboku $ABCD$ jest równe P . Jakie pole ma równoległobok $KLMN$, jeśli $\vec{KL} = \vec{AC} + \vec{BD}$ i $\vec{KN} = \vec{AC} - \vec{BD}$?

WEKTORY W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Я21. Podaj współrzędne i długości wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, jeśli $A = (2, 1)$, $B = (5, -1)$, $C = (-2, 4)$, $D = (-2, -1)$.

Я22. Uzupełnij tabelkę.

A	B	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BA}$
$(25, -123)$	$(-74, -99)$		
$(-19, 2003)$		$[-21, 0]$	
	$(-7, 249)$		$[-100, -255]$
$(a, 7)$	(a, b)		
	$(0, 2m)$	$[m, m + 3]$	
$(k, k + 1)$			$[-2, 3 - k]$

Я23. Podaj przykłady dwóch takich par punktów A i B , że tworzą one wektor $\overrightarrow{AB}$ o danych współrzędnych.

a) $\overrightarrow{AB} = [3, 7]$

c) $\overrightarrow{AB} = [0, 17]$

e) $\overrightarrow{AB} = [6, -2]$

b) $\overrightarrow{AB} = [-5, 2]$

d) $\overrightarrow{AB} = [31, 0]$

f) $\overrightarrow{AB} = [-8, -7]$

Я24. Narysuj dziewięciokąt $ABCDEFGHI$, jeśli $\overrightarrow{AB} = [7, 0]$, $\overrightarrow{BC} = [3, 3]$, $\overrightarrow{CD} = [-4, 0]$, $\overrightarrow{DE} = [0, 9]$, $\overrightarrow{EF} = [-8, -7]$, $\overrightarrow{GF} = [-7, 0]$, $\overrightarrow{GH} = [0, -2]$, $\overrightarrow{IH} = [8, 0]$.

Я25. Oblicz długość wektora.

$\vec{a} = [4, -6]$

$\vec{d} = \left[0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

$\vec{g} = [1 + \sqrt{7}, 1 - \sqrt{7}]$

$\vec{b} = [2, 6]$

$\vec{e} = [-10, 2\sqrt{11}]$

$\vec{h} = [m^2 - 1, 2m]$

$\vec{c} = [3\sqrt{2}, 0]$

$\vec{f} = [-\sqrt{3}, -\sqrt{3}]$

$\vec{i} = [\sqrt{m}, \sqrt{n}]$

Я26. Znajdź obraz punktu M w przesunięciu o wektor $\vec{w}$.

a) $M = (-7, 12)$, $\vec{w} = [-2, 8]$

e) $M = (\pi, 2 - \pi)$, $\vec{w} = [-\pi, 8]$

b) $M = (5, -8)$, $\vec{w} = [3, -2]$

f) $M = (-2, -2\sqrt{2})$, $\vec{w} = [0, 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}]$

c) $M = (\sqrt{2}, -4)$, $\vec{w} = [-\sqrt{2}, 3]$

g) $M = (m - 2, 2m)$, $\vec{w} = [3m, -1]$

d) $M = (\sqrt{3} - 1, 3)$, $\vec{w} = [-3, -2]$

h) $M = (\sqrt{2} - m, 2m + 7)$, $\vec{w} = [\sqrt{2}, m]$

Я27. Punkt N jest obrazem punktu M w przesunięciu o wektor $\vec{w}$. Znajdź współrzędne punktu M .

- | | |
|---|--|
| a) $N = (11, -9), \quad \vec{w} = [-3, -7]$ | e) $N = (3, 3 + \pi), \quad \vec{w} = [2\pi, \pi]$ |
| b) $N = \left(-5, -\frac{1}{2}\right), \quad \vec{w} = [6, -3]$ | f) $N = (3\sqrt{3}, 4), \quad \vec{w} = [2 - \sqrt{2} - \sqrt{3}, 0]$ |
| c) $N = (1, \sqrt{10}), \quad \vec{w} = [-4, 3\sqrt{10}]$ | g) $N = (3n, n + 5), \quad \vec{w} = [-2, 2n + 1]$ |
| d) $N = (2 - \sqrt{6}, 8), \quad \vec{w} = [-2, -2]$ | h) $N = \left(\frac{n+1}{2}, n - \sqrt{2}\right), \quad \vec{w} = \left[\frac{1}{2}, 2n + \sqrt{2}\right]$ |

Я28. Wierzchołki trójkąta mają współrzędne $A = (-1, -2), B = (6, 3), C = (8, -5)$. Jakie współrzędne mają wierzchołki trójkąta otrzymanego w wyniku przesunięcia trójkąta ABC o dany wektor?

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| a) $\vec{AB}$ | b) $\vec{BA}$ | c) $\vec{AC}$ | d) $\vec{CB}$ |
|---------------|---------------|---------------|---------------|

Я29. a) Dla jakiej wartości p wektor $[p, -2p]$ ma długość 5?

b) Dla jakiej wartości q wektory $[q, 3]$ i $[2, q + 1]$ mają taką samą długość?

c) Dla jakiej wartości p wektor $[p + 1, p - 1]$ jest dwa razy krótszy od wektora $[-10, 14]$?

Я30. Wektor $\vec{AB}$ jest równy wektorowi $\vec{u}$. Znając współrzędne wektora $\vec{u}$ oraz jednego z punktów, A lub B , oblicz współrzędne drugiego z tych punktów.

- | | |
|---|---|
| a) $B = (3, -4), \quad \vec{u} = [10, -6]$ | d) $A = (-3, 6), \quad \vec{u} = [4, -5]$ |
| b) $B = \left(-7\frac{1}{2}, 8\right), \quad \vec{u} = \left[-8, 7\frac{1}{2}\right]$ | e) $A = (1, 9), \quad \vec{u} = [-4 + \sqrt{2}, 3]$ |
| c) $B = (-2, \sqrt{3}), \quad \vec{u} = [\sqrt{5}, 0]$ | f) $A = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{4}\right), \quad \vec{u} = [-\pi, -2]$ |

Я31. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku oraz jego obwód.

- | |
|---|
| a) $A = (-6, -3), B = (1, -3), C = (4, 2)$ |
| b) $A = (1, -2), B = (5, 3), C = (2, 6)$ |
| c) $B = (-21, 17), C = (4, 35), D = (-12, 21)$ |
| d) $A = (\sqrt{2}, -4\sqrt{2}), B = (3\sqrt{2}, -7\sqrt{2}), D = (-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ |

Я32. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Wyznacz współrzędne brakujących wierzchołków.

- | |
|--|
| a) $A = (-5, -3), \quad \vec{AB} = [2, -1], \quad \vec{BC} = [7, 6], \quad \vec{DA} = [0, -3]$ |
| b) $C = (4, 4), \quad \vec{BA} = [-2, -5], \quad \vec{BC} = [2, -1], \quad \vec{CD} = [4, -7]$ |

Я33. Korzystając z własności wektorów, udowodnij, że środek odcinka o końcach $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ ma współrzędne $C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

- Я34.** Punkt S jest środkiem odcinka AB . Znając współrzędne dwóch spośród punktów A, B, S , oblicz współrzędne trzeciego z nich.
- a) $A = (12, -10), B = (-68, 52)$ d) $A = (-24, 18), S = (13, -15)$
 b) $A = (3, 5\frac{1}{2}), B = (-2, 3\frac{1}{4})$ e) $B = (\sqrt{3}, \frac{1}{2}), S = (0, -4)$
 c) $A = (-2, -5), S = (7, -3)$ f) $S = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3}), A = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$
- Я35.** Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$, a S jest punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Wyznacz współrzędne brakujących wierzchołków tego równoległoboku.
- a) $A = (-7, 9), B = (2, 6), S = (-1, 8)$
 b) $B = (5, 5), C = (-3, 2), S = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
 c) $D = (-14, 15), A = (-13, -16), S = (3, -1)$
 d) $C = (0, \sqrt{2}), D = (-4, -5\sqrt{2}), S = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$
- Я36.** Punkty $A = (-123, 321)$ i $B = (200, -100)$ są końcami średnicy pewnego okręgu. Wyznacz współrzędne środka tego okręgu.
- Я37.** Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Z wierzchołka C poprowadzono wysokość CS . Wyznacz współrzędne wierzchołka B , jeżeli $A = (-2\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3})$ i $S = (5\frac{1}{2}, -5\frac{1}{3})$.
- Я38.** Punkt P dzieli odcinek AB w ten sposób, że $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{1}{2}$. Znając współrzędne dwóch spośród punktów A, B, P , znajdź współrzędne trzeciego z nich.
- a) $A = (-1, 3), B = (3, 0)$ c) $A = (1, 1), P = (3, 2\frac{1}{3})$
 b) $A = (3, -2), B = (-4, -4)$ d) $B = (6, 2), P = (5\frac{1}{3}, -1\frac{1}{3})$
- Я39.** Znajdź współrzędne takiego punktu P , który dzieli odcinek o końcach $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ w ten sposób, że $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{2}{3}$.
- Я40.** Po przesunięciu prostej $y = -5x + 2$ o pewien wektor otrzymano tę samą prostą. Podaj przykład wektora przesunięcia.
- Я41.** Prosta $y = -2x + 6$ przesunięto o wektor $[p, p + 3]$. Dla jakiej wartości p prosta otrzymana w wyniku przesunięcia będzie przechodzić przez początek układu współrzędnych?
- Я42.** W trójkącie ABC dany jest wierzchołek $A = (-4, -1)$, punkt $S = (2, 1)$, który jest środkiem boku AB , oraz wektor $\overrightarrow{BC} = [-4, 4]$. Oblicz pole trójkąta ABC .

DZIAŁANIA NA WEKTORACH W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Я43. Dane są wektory $\vec{u} = [2, -3]$, $\vec{v} = [0, 4]$, $\vec{z} = [1, -5]$. Znajdź współrzędne wektora:

- | | | |
|------------------------|-----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\vec{u} + \vec{z}$ | c) $\vec{u} - \vec{z} - \vec{v}$ | e) $\frac{1}{2}\vec{v} + 3\vec{u}$ |
| b) $\vec{v} - \vec{u}$ | d) $\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{z}$ | f) $2(\vec{u} - \vec{z}) - 3\vec{u}$ |

Я44. Niech $\vec{a} = [-2, -3]$, $\vec{b} = [-2, -3]$. Oblicz długość wektora:

- | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| a) $\frac{1}{3}\vec{b}$ | c) $\vec{a} + \vec{b}$ | e) $2\vec{a} + \vec{b}$ |
| b) $2\vec{a}$ | d) $\vec{a} - \vec{b}$ | f) $\vec{a} - 2\vec{b}$ |

Я45. Dane są punkty $A = (-3, 5)$, $B = (-2, 1)$, $C = (-2, 4)$, $D = (-6, -3)$. Oblicz współrzędne wektora:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ | d) $2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}$ | g) $4\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC}$ |
| b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ | e) $4\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ | h) $\frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$ |
| c) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$ | f) $\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$ | i) $6\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right)$ |

Я46. W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (2, -3)$, $B = (5, 1)$, $C = (-1, -2)$. Wyznacz współrzędne punktu D tak, aby zachodziła podana równość.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ | d) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ | g) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DA}$ |
| b) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$ | e) $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA}$ | h) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{CD}$ |
| c) $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$ | f) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$ | i) $-\overrightarrow{DC} = 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD})$ |

Я47. Korzystając z podanej równości, oblicz współrzędne wektora $\vec{u}$.

- | | |
|---|--|
| a) $\vec{u} + [2, -3] = 2[7, -4]$ | d) $\frac{2\vec{u} - [-5, 6]}{3} = \vec{u} + [3, 3]$ |
| b) $[-5, 1] - 3\vec{u} = [4, -5]$ | e) $3\vec{u} - [1, 6] = 2(\vec{u} + [-3, -2])$ |
| c) $\frac{1}{4}\vec{u} + [7, -2] = \left[2, \frac{3}{2}\right]$ | f) $-([0, 3] + 4\vec{u}) = \frac{1}{2}(\vec{u} - 4[-6, -2])$ |

Я48. Czy wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ są równoległe?

- | | |
|--|---|
| a) $\vec{u} = [2, -6]$, $\vec{w} = [1, -3]$ | d) $\vec{u} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$, $\vec{w} = [3, 2]$ |
| b) $\vec{u} = [-1, 5]$, $\vec{w} = [1, -5]$ | e) $\vec{u} = [1, \sqrt{3}]$, $\vec{w} = [\sqrt{3}, 3]$ |
| c) $\vec{u} = [4, 7]$, $\vec{w} = [7, 4]$ | f) $\vec{u} = [1 - \sqrt{2}, 1]$, $\vec{w} = [2, \sqrt{2} - 2]$ |

Я49. Dla jakiej wartości m wektory $\vec{u}$ oraz $\vec{v}$ są równoległe?

- | | |
|--|---|
| a) $\vec{u} = [3, -2], \quad \vec{v} = [12, m]$ | e) $\vec{a} = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right], \quad \vec{b} = [3, m]$ |
| b) $\vec{a} = [4, -2], \quad \vec{b} = \left[m, -\frac{1}{3}\right]$ | f) $\vec{a} = [m, 2], \quad \vec{b} = [m+1, 4]$ |
| c) $\vec{u} = [7, -9], \quad \vec{v} = [m, 24]$ | g) $\vec{u} = [m+1, 12], \quad \vec{v} = [m, 8]$ |
| d) $\vec{u} = [2m-1, 8], \quad \vec{v} = [6, 9]$ | h) $\vec{a} = [m, 7], \quad \vec{b} = [-2m, m-4]$ |

Я50. Dane są wektory $\vec{a} = [-10, 5], \vec{b} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \vec{c} = [-5, -5]$. Znajdź współrzędne wektora:

- | | |
|--|--|
| a) $3(4\vec{a} + 2\vec{b}) - \frac{1}{5}(\vec{c} + 25\vec{a})$ | c) $\frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{c}) + \frac{1}{2}(\vec{a} - 3\vec{b})$ |
| b) $\frac{1}{10}\vec{c} - \frac{1}{5}(\vec{a} - 10\vec{b}) - 2\vec{b}$ | d) $4(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) + \frac{3}{5}\vec{c} + 2(\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c})$ |

Я51. Niech $P = (-4, 5), Q = (2, -1), R = (3, 7)$. Znajdź współrzędne punktu S , jeżeli:

- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ}$ | b) $3\overrightarrow{PR} - 2\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{RS} - \overrightarrow{PQ}$ |
|--|--|

Я52. Sprawdź, czy istnieją takie liczby p i r , że spełniona jest równość $\vec{x} = p\vec{u} + r\vec{v}$.

- | | |
|---|--|
| a) $\vec{u} = [3, -6], \quad \vec{v} = [-4, 2], \quad \vec{x} = [8, -13]$ | b) $\vec{u} = [3, 2], \quad \vec{v} = \left[-1, -\frac{2}{3}\right], \quad \vec{x} = [7, 0]$ |
|---|--|

Я53. Dane są punkty $M = (8, -20)$ oraz $N = (20, 30)$. Znajdź współrzędne punktu K , który dzieli odcinek MN :

- a) w stosunku 1 : 3, licząc od punktu M ,
- b) w stosunku 2 : 1, licząc od punktu M ,
- c) w stosunku 3 : 2, licząc od punktu N .

Я54. Znajdź współrzędne wektora:

- a) o długości 2, równoległego do wektora $\vec{u} = [\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$,
- b) o długości $\sqrt{15}$, równoległego do wektora $\vec{u} = [-5, 10]$,
- c) o długości 10, równoległego do wektora $\vec{u} = [-12, 5]$,
- d) o długości $\frac{1}{2}$, równoległego do wektora $\vec{u} = [\sqrt{2}-1, 1-\sqrt{2}]$.

Я55. Czy punkty $A = (35, -17), B = (43, 17), C = (24, 61), D = (16, 27)$ są wierzchołkami równoległoboku?

Я56. Znajdź długości przekątnych równoległoboku $ABCD$, jeśli $\overrightarrow{AB} = [3, -5]$ oraz $\overrightarrow{AD} = [-4, -3]$.

Я57. W pięciokącie $ABCDE$ dane są wektory:

$$\overrightarrow{AB} = [5, 4] \quad \overrightarrow{CB} = [2, -4] \quad \overrightarrow{CD} = [-4, 0] \quad \overrightarrow{EA} = [0, -5]$$

- Znajdź współrzędne wektora $\overrightarrow{ED}$.
- Oblicz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{CE}$ i $\overrightarrow{BD}$.
- Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków pięciokąta, jeśli $E = (-2, 3)$.

Я58. Sprawdź (bez wyznaczania równań prostych), czy prosta AB jest równoległa do prostej CD , jeżeli:

- $A = (-1, -2)$, $B = (5, 2)$, $C = (-9, 10)$, $D = (-12, 8)$
- $A = (-3, 6)$, $B = (12, -4)$, $C = (18, 11)$, $D = (-9, 29)$
- $A = \left(\frac{1}{5}, -7\right)$, $B = (2, 2)$, $C = (10, 52)$, $D = \left(-\frac{2}{5}, -1\right)$
- $A = (\sqrt{7} - 1, 2\sqrt{7})$, $B = (1 + \sqrt{7}, 5)$, $C = (5, 3\sqrt{7})$, $D = (7, \sqrt{7})$

Я59. Sprawdź (bez wyznaczania równań prostych), czy podane punkty są współliniowe (czyli czy leżą na jednej prostej).

- $A = (-6, -6)$, $B = (4, -1)$, $C = (36, 15)$
- $A = (2, 4)$, $B = (-5, -17)$, $C = (10, 27)$
- $A = (8, -1)$, $B = (11, -2)$, $C = (-4, 5)$
- $A = (-3, 7)$, $B = (18, -7)$, $C = (30, -15)$

Я60. Sprawdź, czy istnieje taka wartość m , że wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są równoległe.

- $\vec{a} = [2m, m - 1]$, $\vec{b} = [3m, m + 1]$
- $\vec{a} = [2m + 4, m + 2]$, $\vec{b} = [1, m - 2]$

Я61. Przeczytaj informacje w ramce.

a) Oblicz współrzędne środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (-6, 2)$, $B = (4, 3)$, $C = (-1, 2)$.

b) Uzasadnij, że jeśli punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , to zachodzi równość

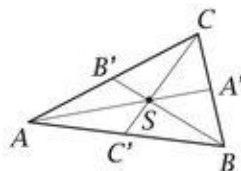
$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}.$$

c) Środek ciężkości czworokąta $ABCD$ to taki punkt S , że spełniony jest warunek

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}.$$

Wykaż, że każda współrzędna środka ciężkości czworokąta jest średnią arytmetyczną odpowiednich współrzędnych jego wierzchołków.

Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.



Środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, nazywanym środkiem ciężkości trójkąta. Punkt ten dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1.

PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

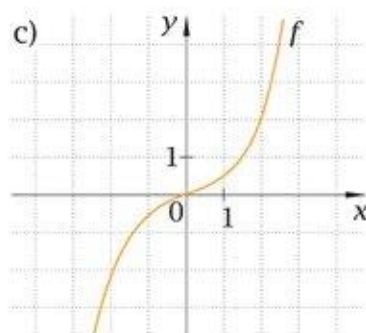
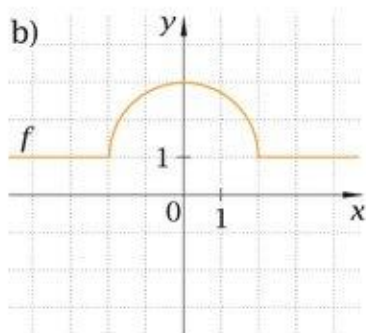
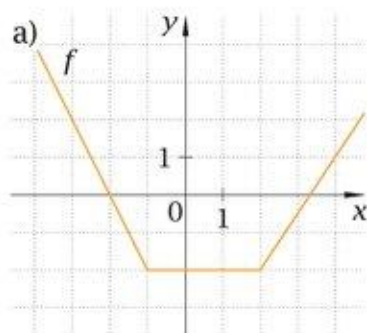
Я62. Rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji f . Narysuj wykresy funkcji:

$$g_1(x) = f(x) + 2$$

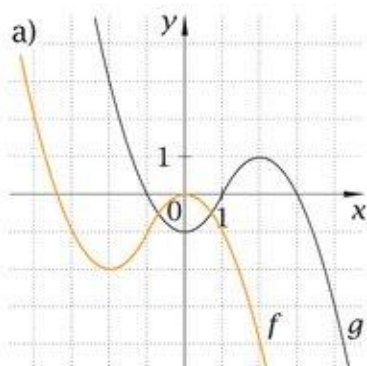
$$g_2(x) = f(x) - 3$$

$$g_3(x) = f(x - 1)$$

$$g_4(x) = f(x + 4)$$



Я63. Rysunek przedstawia wykresy funkcji f i g . Która z podanych równości opisuje zależność między tymi funkcjami?

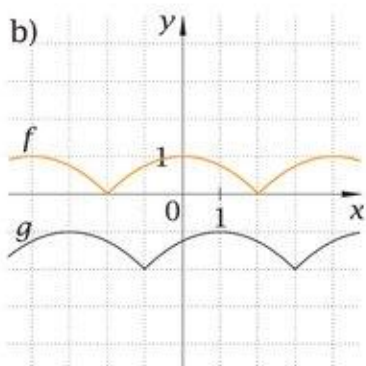


$$g(x) = f(x + 2) + 1$$

$$g(x) = f(x - 2) + 1$$

$$g(x) = f(x + 2) - 1$$

$$g(x) = f(x - 2) - 1$$

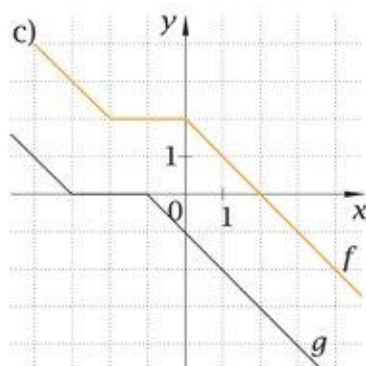


$$g(x) = f(x - 1) - 2$$

$$g(x) = f(x - 2) - 1$$

$$g(x) = f(x + 1) - 2$$

$$g(x) = f(x - 2) + 1$$



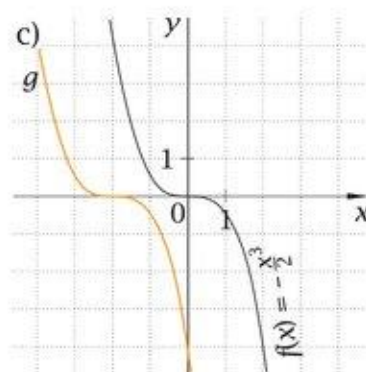
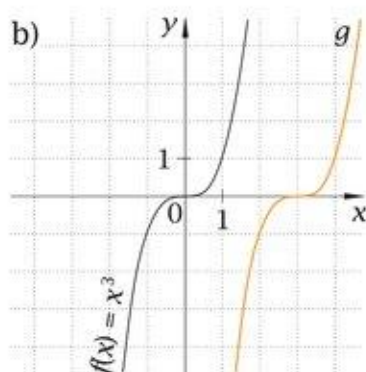
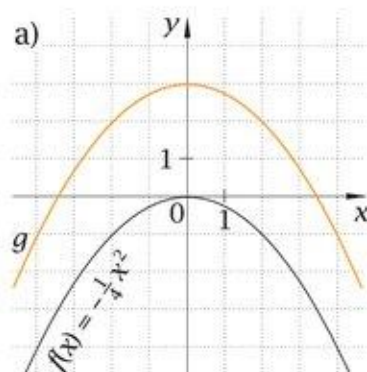
$$g(x) = f(x + 1) - 2$$

$$g(x) = f(x - 1) - 2$$

$$g(x) = f(x - 2) + 1$$

$$g(x) = f(x - 2) - 1$$

Я64. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f . Zapisz wzór funkcji g .



Я65. Zapisz wzór funkcji g i opisz, w jaki sposób należy przesunąć wykres funkcji f , aby otrzymać wykres funkcji g .

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x - 5)$ | e) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = f(x + 4) - 5$ |
| b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = f(x + 2)$ | f) $f(x) = \frac{3}{x-4}$, $g(x) = f(x - 4) - 3$ |
| c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = f(x + 3) - 4$ | g) $f(x) = x - 4 $, $g(x) = f(x + 2) - 7$ |
| d) $f(x) = x^3 + 5$, $g(x) = f(x - 1) + 2$ | h) $f(x) = 3x - 2 + 5 $, $g(x) = f\left(x - \frac{2}{3}\right) + 5$ |

Я66. Zapisz wzór funkcji, której wykres powstaje z wykresu funkcji $y = -2x^7$ przez przesunięcie o dany wektor.

- | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--|
| a) $[0, 2]$ | c) $[-1, 0]$ | e) $[-3, 1]$ | g) $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ |
| b) $[0, -3]$ | d) $[2, 0]$ | f) $[2, -1]$ | h) $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ |

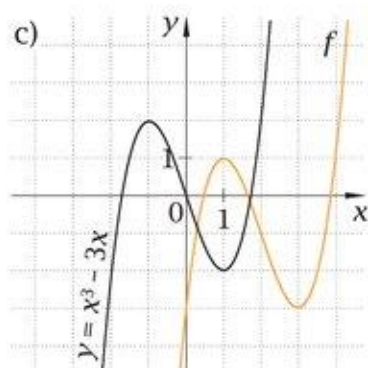
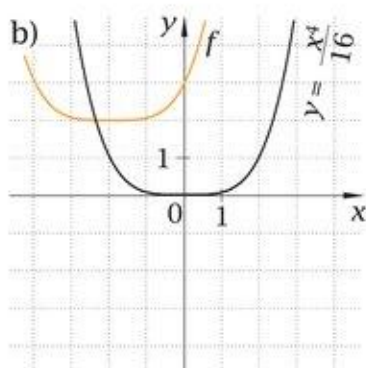
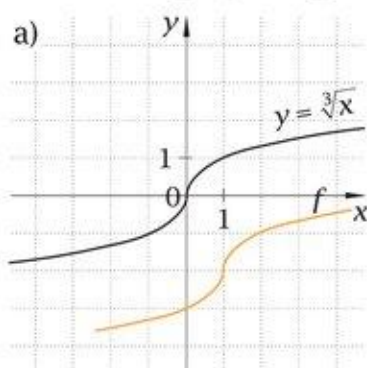
Я67. Przesuwając wykres funkcji f , można otrzymać wykres funkcji g . Znajdź współrzędne wektora przesunięcia.

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = x $, $g(x) = x - 3 $ | f) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x + 5} - 3$ |
| b) $f(x) = x $, $g(x) = x - 5$ | g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sqrt[3]{x - 2} + 1$ |
| c) $f(x) = x $, $g(x) = x + 1 - 2$ | h) $f(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x - 2} - 1$ |
| d) $f(x) = x^2$, $g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}$ | i) $f(x) = \frac{2}{x - 1} + 3$, $g(x) = \frac{2}{x + 3} - 1$ |
| e) $f(x) = 2x^3$, $g(x) = 2(x - 6)^3 - 4$ | j) $f(x) = \sqrt{x + 1} - 9$, $g(x) = \sqrt{x - 11} + 11$ |

Я68. Wykres funkcji f przesunięto o wektor $\vec{u}$. Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymano.

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = 2x - 1$, $\vec{u} = [-3, 5]$ | c) $f(x) = 2 x + 1$, $\vec{u} = [\sqrt{2}, -2]$ |
| b) $f(x) = 5x^2 + 2$, $\vec{u} = [-2, 0]$ | d) $f(x) = \frac{3}{x - 1}$, $\vec{u} = [4, 1]$ |

Я69. Zapisz wzór funkcji f , której wykres otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji opisanej danym wzorem.



Я70. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f . Podaj współrzędne wektora przesunięcia.

a) $f(x) = x^{20}$, $g(x) = (x+2)^{20} + 1$

b) $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + 3$, $g(x) = \sqrt[4]{x+1} + 5$

c) $f(x) = \frac{3}{x^2}$, $g(x) = \frac{3}{(x+1)^2} - \sqrt{2}$

Я71. Wykres funkcji f przesunięto o wektor $\vec{u}$ i otrzymano wykres funkcji g . Wyznacz wzór funkcji f .

a) $g(x) = x^2$, $\vec{u} = [-2, 5]$

c) $g(x) = |x-2| + 1$, $\vec{u} = [-1, 2]$

b) $g(x) = \frac{3}{x}$, $\vec{u} = [4, 6]$

d) $g(x) = \sqrt{x + \frac{1}{2}} - 4$, $\vec{u} = [-3, -5]$

Я72. O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $f(x) = (x-3)^2 + 7$, aby otrzymać wykres funkcji g ?

a) $g(x) = (x-3)^2 + 9$

d) $g(x) = (x+1)^2 + 7$

b) $g(x) = (x-3)^2 - 7$

e) $g(x) = (x+2)^2 + 5$

c) $g(x) = (x-4)^2 + 7$

f) $g(x) = (x-4)^2 - 2$

Я73. Wyznacz współrzędne wektora, o jaki należy przesunąć wykres funkcji $y = x^2$, aby otrzymać wykres funkcji g .

a) $g(x) = (x+1)(x-1)$

d) $g(x) = x^2 - 10x + 25$

b) $g(x) = x^2 + 2x + 1$

e) $g(x) = x^2 - 10x + 28$

c) $g(x) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

f) $g(x) = x^2 + 4x - 2$

Я74. Wykres funkcji g powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o dany wektor $\vec{u}$. Wyznacz współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji f i g .

a) $f(x) = 5x - 2$, $\vec{u} = [10, -6]$

c) $f(x) = |x|$, $\vec{u} = [-3, -1]$

b) $f(x) = x^2$, $\vec{u} = [2, 4]$

d) $f(x) = x^3$, $\vec{u} = [-2, -8]$

Я75. Dziedzina funkcji f jest przedział $(2; 7)$, a zbiorem wartości jest przedział $\langle 4; 6 \rangle$. Wykres funkcji g otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f . Jaka jest dziedzina funkcji g ? Jaki jest jej zbiór wartości?

a) $g(x) = f(x) - 2$

d) $g(x) = f(x+6) + 9$

b) $g(x) = f(x-2)$

e) $g(x) = f(x-5) + 12$

c) $g(x) = f(x-1) + 4$

f) $g(x) = f(x+21) - 16$

Я76. Określ, ile miejsc zerowych ma funkcja f , nie wyznaczając tych miejsc.

a) $f(x) = |x - 2|$

b) $f(x) = |x + 4| - 0,1$

Я77. a) Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 3)$ i malejąca w przedziale $(3; +\infty)$. Określ przedziały monotoniczności funkcji $g(x) = f(x + 1) - 12$.

b) Funkcja f przyjmuje największą wartość równą 5 dla argumentu 3. Dla jakiego argumentu przyjmuje największą wartość funkcja $g(x) = f(x - 2) + 3$? Podaj tę wartość.

c) Liczby $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 9 - 3\sqrt{2}$ są miejscami zerowymi funkcji f . Wyznacz miejsca zerowe funkcji $\tilde{f}(x + 5)$.

Я78. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy przez przesunięcie wykresu funkcji f o 2 jednostki w lewo i 1 jednostkę w dół.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 5 \\ x + 3 & \text{dla } x \geq 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x < -1 \\ 5 - x & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$

Я79. Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} & \text{dla } x \leq 1 \\ |x - 4| - 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

a) Wyznacz zbiór wartości, przedziały monotoniczności i miejsca zerowe funkcji f .

b) Dla jakiej wartości m wykresy funkcji $f(x)$ oraz $g(x) = m$ przecinają się w dwóch punktach?

Я80. Funkcja f określona jest następującym wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in \langle -4; 1 \rangle \\ -x + 4 & \text{dla } x \in (1; 3) \\ x^2 - 2 & \text{dla } x \in \langle 3; 5 \rangle \end{cases}$$

Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f :

a) o 10 jednostek w dół,

b) o 4 jednostki w prawo,

c) o 3 jednostki do góry i 7 jednostek w lewo.

Я81. Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f(x - 4)$ przecięły się w punkcie $(2, 5)$. Które z poniższych zdań na pewno są prawdziwe?

I. Funkcja f nie jest ani rosnąca, ani malejąca.

II. Punkty $(2, 5)$ i $(-2, 5)$ należą do wykresu funkcji f .

III. Funkcja f jest różnowartościowa.

IV. Wykres funkcji f jest symetryczny względem osi y .

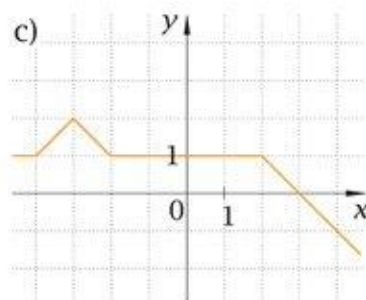
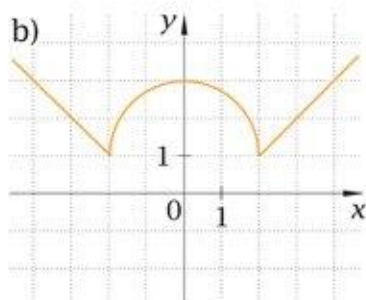
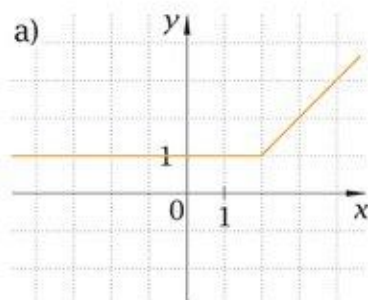
Я82. a) Wykres funkcji $y = 5x$ przesunięto o 3 jednostki w prawo, a następnie o q jednostek w górę i otrzymano prostą pokrywającą się z wykresem funkcji $y = 5x$. Oblicz q .

b) Wykres funkcji $y = ax + b$ przesunięto o p jednostek w prawo, a następnie o q jednostek w górę i otrzymano z powrotem wykres funkcji $y = ax + b$. Zapisz, jaki warunek spełniają liczby a , p i q .

PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI (CD.)

Я83. Dany jest wykres funkcji f . Narysuj wykresy funkcji:

$$g_1(x) = -f(x) \quad g_2(x) = f(-x) \quad g_3(x) = -f(x) + 1 \quad g_4(x) = f(1 - x)$$



Я84. Narysuj wykres funkcji $y = |x|$, a następnie wykres funkcji:

a) $y = -|x|$

c) $y = |2 - x|$

b) $y = -|x + 1|$

d) $y = -|x - 5| + 3$

Я85. Narysuj wykres funkcji f , a następnie wykres funkcji $y = |f(x)|$.

a) $f(x) = x + 1$

d) $f(x) = -\frac{1}{4}x$

b) $f(x) = -2x + 1$

e) $f(x) = |x| - 2$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

f) $f(x) = |x - 3| - 3$

Я86. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymano w podany sposób.

a) Przesuwamy wykres funkcji $y = x^3$ o 2 jednostki w lewo, a następnie przekształcamy otrzymany wykres przez symetrię względem osi x .

b) Przekształcamy wykres funkcji $y = \frac{\sqrt{3}}{x^7}$ przez symetrię względem osi x , a następnie przesuwamy otrzymany wykres o 3 jednostki w górę.

c) Przesuwamy wykres funkcji $y = \frac{x^4}{3}$ o 2 jednostki w prawo, a następnie przekształcamy otrzymany wykres przez symetrię względem osi y .

Я87. Zapisz wzór funkcji g , której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia:

- wykresu funkcji $f(x) = -3x + 2$ przez symetrię względem osi x ,
- wykresu funkcji $f(x) = -3x + 2$ przez symetrię względem osi y ,
- wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 3$ przez symetrię względem osi x ,
- wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 3$ przez symetrię względem osi y ,
- wykresu funkcji $f(x) = |x - 2| + 1$ przez symetrię względem osi x ,
- wykresu funkcji $f(x) = |x - 2| + 1$ przez symetrię względem osi y ,
- wykresu funkcji $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$ najpierw przez przesunięcie o wektor $\vec{w} = [0, 3]$, a następnie przez symetrię względem osi y ,
- wykresu funkcji $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$ najpierw przez symetrię względem osi y , a następnie przez przesunięcie o wektor $\vec{w} = [0, 3]$,
- wykresu funkcji $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$ najpierw przez przesunięcie o wektor $\vec{w} = [0, 3]$, a następnie przez symetrię względem osi x ,
- wykresu funkcji $f(x) = 2x - \frac{3}{x}$ najpierw przez symetrię względem osi x , a następnie przez przesunięcie o wektor $\vec{w} = [0, 3]$,
- wykresu funkcji $f(x) = 3x + \sqrt{2-x}$ najpierw przez przesunięcie o wektor $\vec{w} = [0, -5]$, a następnie przez symetrię względem osi x ,
- wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{x-1}$ najpierw przez symetrię względem osi y , a następnie przez przesunięcie o wektor $\vec{w} = [-1, 2]$.

Я88. Wykres funkcji f przekształcono przez symetrię względem osi x , a następnie przez symetrię względem osi y i otrzymano wykres funkcji g . Wyznacz wzór funkcji g .

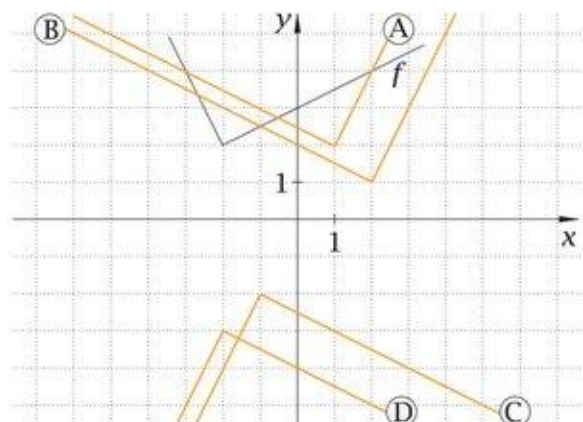
- | | | |
|--------------------------|---------------------------|---|
| a) $f(x) = 2x + 3$ | c) $f(x) = \sqrt{x-2}$ | e) $f(x) = \frac{4}{x} + x^2$ |
| b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ | d) $f(x) = x^3 + x^2 - x$ | f) $f(x) = \sqrt{x} - 3x + \frac{1}{x}$ |

Я89. Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty; 5)$ i malejąca w przedziale $(5; +\infty)$. Określ przedziały monotoniczności funkcji:

- | | | |
|----------------|----------------------|----------------------|
| a) $y = -f(x)$ | c) $y = -f(-x)$ | e) $y = f(2-x) - 1$ |
| b) $y = f(-x)$ | d) $y = -f(x-1) + 2$ | f) $y = -f(1-x) + 2$ |

Я90. Wykresy ①, ②, ③ i ④ powstały w wyniku przekształcenia wykresu funkcji f . Dopasuj wzory ①, ②, ③ i ④ do tych wykresów.

- $y = -f(x) - 1$
- $y = -f(x-1)$
- $y = f(-x-1)$
- $y = f(-x) - 1$



Я91. Sporządź wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{dla } x \leq -3 \\ -1 & \text{dla } -3 < x \leq 2 \\ 2x-5 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$. Następnie wyznacz:

- a) zbiór wartości funkcji $y = -f(x)$,
- b) maksymalne przedziały, w których funkcja $y = |f(x)|$ jest malejąca,
- c) miejsca zerowe funkcji $y = f(-x)$,
- d) zbiór wartości funkcji $y = |f(x-3) - 3| - 3$,
- e) maksymalny przedział, w którym funkcja $y = -f(x+4) - 1$ jest rosnąca,
- f) maksymalny przedział, w którym funkcja $y = -f(-x)$ jest stała.

Я92. Narysuj wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$, a następnie wykres funkcji:

- a) $y = -\left|\frac{1}{x}\right|$
- b) $y = -\frac{1}{|x-2|}$
- c) $y = 2 - \left|\frac{1}{x}\right|$
- d) $y = \frac{1}{|3-x|}$

Я93. Funkcja f przyjmuje największą wartość równą 5 dla argumentu 3. Co można na tej podstawie powiedzieć o największej wartości funkcji g ?

- a) $g(x) = f(-x)$
- b) $g(x) = -f(x+2)$
- c) $g(x) = f(3-x) + 1$

Я94. Dziedziną funkcji f jest przedział $\langle -5; 7 \rangle$, a jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -3; 2 \rangle$. Jaka jest dziedzina i zbiór wartości funkcji g ?

- a) $g(x) = -f(x)$
- b) $g(x) = f(-x)$
- c) $g(x) = f(x+3)$
- d) $g(x) = -f(1-x) + 3$

Я95. Liczby $x_1 = -3$ oraz $x_2 = 5$ są miejscami zerowymi funkcji f . Wyznacz miejsca zerowe podanej funkcji.

- a) $y = f(-x)$
- c) $y = |f(x)|$
- e) $y = -f(x-5)$
- b) $y = -f(x)$
- d) $y = -f(-x)$
- f) $y = f(1-x)$

Я96. Czy na podstawie podanych informacji o największej lub najmniejszej wartości funkcji f można znaleźć największą lub najmniejszą wartość funkcji $g(x) = |f(x)|$?

- a) najmniejsza wartość to 5
- c) największa wartość to 5
- b) najmniejsza wartość to -5
- d) największa wartość to -5

Я97. Narysuj wykres danej funkcji.

- a) $y = \sqrt{(x+3)^2}$
- b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$
- c) $y = \sqrt{2x^2 - 4x + 2}$

Я98. Narysuj wykres danej funkcji.

- a) $y = ||x| - 1|$
- b) $y = ||x - 1| - 2|$
- c) $y = |2 - |x||$
- d) $y = |||x| - 3| - 3|$

Я99. Czy istnieje funkcja f , która nie jest stała, ale funkcją stałą jest funkcja g ?

- a) $g(x) = -f(x)$
- b) $g(x) = f(-x)$
- c) $g(x) = |f(x)|$

PRZED SPRAWDZIANEM

Я1. Punkty A, B, C, D są kolejnymi wierzchołkami kwadratu. Środkami boków AB oraz BC są odpowiednio punkty E oraz F . Wówczas zachodzi równość:

- A. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ C. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
 B. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ D. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB})$

Я2. W równoległoboku $ABCD$ dane są dwa przeciwległe wierzchołki: $A = (-18, -21)$ i $C = (1, 29)$. Równoległobok ten przesunięto o wektor $\vec{v} = [3, -4]$. Przekątne otrzymanego równoległoboku przecinają się w punkcie:

- A. $S' = \left(-\frac{17}{2}, 4\right)$ B. $S' = \left(-\frac{11}{2}, 0\right)$ C. $S' = (-5, 0)$ D. $S' = \left(-\frac{23}{2}, 8\right)$

Я3. Wykres funkcji $f(x) = (x-4)^2 + 3$ odbito symetrycznie względem osi y , a następnie przesunięto o wektor $\vec{u} = [-5, -1]$. W ten sposób otrzymano wykres funkcji, którą można opisać wzorem:

- A. $g(x) = (x+9)^2 + 2$ C. $g(x) = -(x+1)^2 - 4$
 B. $g(x) = (-x+4)^2 + 3$ D. $g(x) = (x-1)^2 + 2$

Я4. Końce odcinka AB mają współrzędne $A = (a, b)$ i $B = (7, -13)$. Na odcinku tym obrano punkt $K = (a+1, b-1)$, taki że: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KB}$. Wyznacz a i b .

Я5. Dany jest czworokąt o wierzchołkach $A = (-6, -7)$, $B = (2, -3)$, $C = (10, 8)$ i $D = (-14, -4)$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Я6. Dana jest funkcja $f(x) = |x-2| - 1$. Sporządź wykres funkcji g .

- a) $g(x) = -f(x) + 2$ b) $g(x) = |f(x+3)|$ c) $g(x) = f(3-x) + 1$

FUNKCJA KWADRATOWA

Każdą funkcję, której wzór można zapisać w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie a , b i c są danymi liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$, nazywamy **funkcją kwadratową**. Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

Jeśli $a < 0$, to parabola ma ramiona skierowane w dół. Jeśli $a > 0$, to parabola ma ramiona skierowane w górę.

Wzór funkcji kwadratowej

Postać kanoniczna: $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne (p, q) .

Postać iloczynowa:

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$ i x_1, x_2 są miejscami zerowymi

Wierzchołek paraboli ma współrzędne $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$.

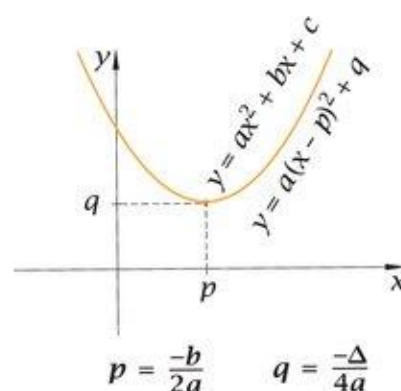
Wzór funkcji kwadratowej można zapisać w postaci iloczynowej tylko wtedy, gdy ma ona miejsca zerowe.

Postać ogólna:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$

Wierzchołek paraboli ma współrzędne $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$,
gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ zależy od wartości wyrażenia $\Delta = b^2 - 4ac$.



Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe $x = \frac{-b}{2a}$.

Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Wzory Viète'a

Jeżeli funkcja $y = ax^2 + bx + c$ ma miejsca zerowe x_1 i x_2 , to:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

PARABOLA

1. Poniżej narysowano wykresy następujących funkcji:

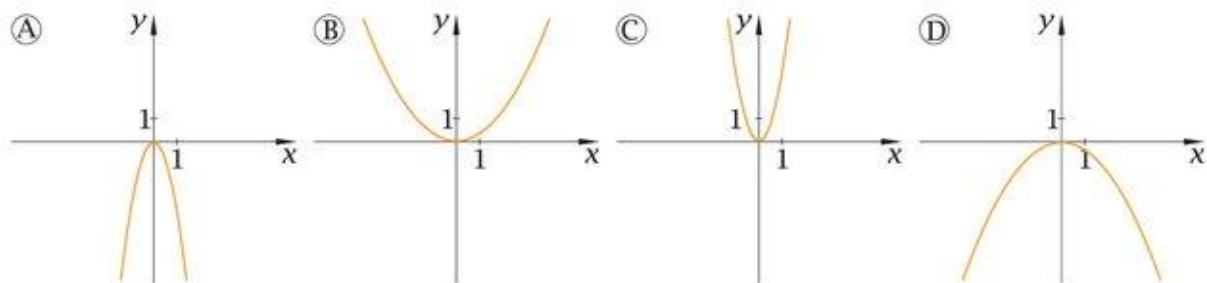
$$y = 3x^2$$

$$y = -3x^2$$

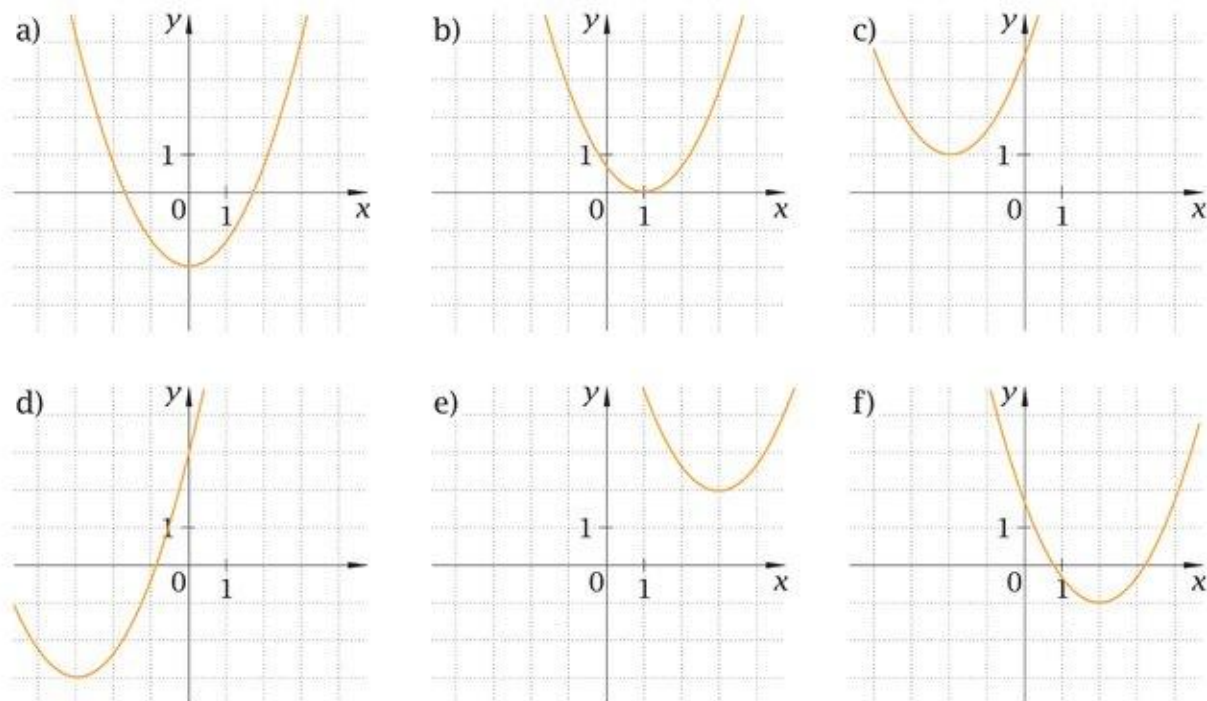
$$y = \frac{1}{3}x^2$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2$$

Dopasuj te wzory do wykresów.



2. Parabola narysowana poniżej powstała w wyniku przesunięcia paraboli $y = \frac{2}{3}x^2$. Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest ta parabola.



3. Zapisz wzór funkcji, której wykres otrzymamy, przesuważąc wykres funkcji:

a) $y = 2x^2$ o 3 jednostki w lewo,

b) $y = -5x^2$ o 5 jednostek w dół,

c) $y = \frac{3}{5}x^2$ o 0,4 jednostki w lewo i o 4,2 jednostki w dół,

d) $y = -0,3x^2$ o $\frac{1}{4}$ jednostki w prawo i $\frac{1}{2}$ jednostki w górę.

4. Zapisz wzór funkcji, której wykresem jest parabola o wierzchołku W i przechodząca przez punkt P .

a) $W = (0, 4), \quad P = (-2, -8)$

d) $W = (5, 9), \quad P = (4, 10)$

b) $W = (0, -10), \quad P = (2, 6)$

e) $W = (2, 3), \quad P = (3, 5)$

c) $W = (-3, 0), \quad P = (-4, -5)$

f) $W = (-7, 5), \quad P = (-9, 1)$

5. Narysuj wykres funkcji.

a) $y = x^2 + 3$

d) $y = -x^2 + 1$

g) $y = -2(x - 1)^2 - 1$

b) $y = (x + 3)^2$

e) $y = -(x + 2)^2 - \frac{3}{4}$

h) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2$

c) $y = (x - 1)^2 + 2$

f) $y = 2(x + 1)^2 + 2$

i) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + \frac{1}{2}$

6. Po przesunięciu paraboli $y = ax^2$ otrzymano wykres podanej funkcji. Podaj współczynnik a i opisz, w jaki sposób przesunięto parabolę.

a) $f(x) = 4x^2 + 9$

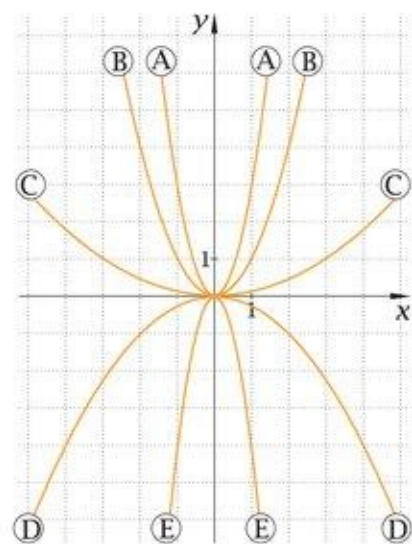
c) $f(x) = 5(x - 4)^2$

e) $f(x) = -1\frac{3}{7}(x - 2)^2 - 8$

b) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 7$

d) $f(x) = -1,2(x + 6)^2$

f) $f(x) = 38(x + 5)^2 + 11$



7. Podaj wzory funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunku. (Na każdym wykresie można znaleźć punkt różny od $(0, 0)$, którego współrzędne są całkowite).

8. Po przesunięciu paraboli $y = ax^2$ otrzymano wykres podanej funkcji. Podaj współczynnik a i opisz, w jaki sposób przesunięto parabolę.

a) $y = \frac{2(x+1)^2}{3} + 1$

d) $y = [3(x + \sqrt{5})]^2$

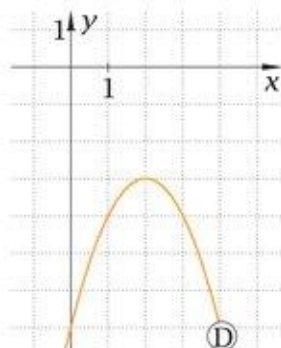
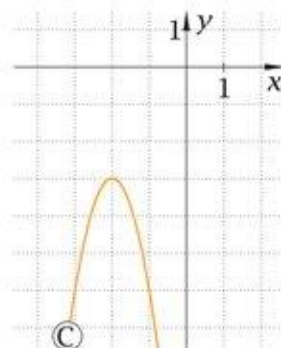
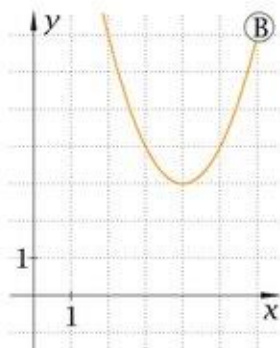
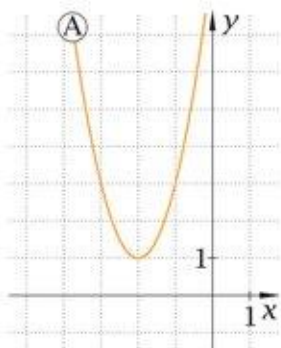
b) $y = -\frac{3(x-7)^2 - \sqrt{2}}{5}$

e) $y = (2x + 4)^2 - 2$

c) $y = (2x)^2 + 1$

f) $y = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 - 5$

9. Znajdź wzory funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunkach.



10. Zapisz wzory trzech funkcji, których wykresem jest parabola o wierzchołku W , przy czym jeden wzór ma opisywać funkcję, która nie ma miejsc zerowych, drugi — funkcję z jednym miejscem zerowym, a trzeci — funkcję o dwóch miejscach zerowych.

- a) $W = (0, 19)$ b) $W = \left(0, -\frac{3}{5}\right)$ c) $W = (2, -71)$ d) $W = (-32, 15)$

11. Określ monotoniczność funkcji oraz liczbę jej miejsc zerowych.

- a) $y = 2(x - 3)^2$ c) $y = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$ e) $y = 1,2(x + 0,1)^2 - 3,4$
b) $y = -x^2 + 5$ d) $y = \frac{1}{7}(x - \sqrt{7})^2 + \sqrt{2}$ f) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{3}$

12. Zapisz wzór dowolnej funkcji, której wykresem jest parabola i która spełnia podany warunek:

- a) zbiorem wartości jest przedział $\langle -3; +\infty \rangle$,
b) zbiorem wartości jest przedział $\langle -\infty; 5 \rangle$,
c) funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -\infty; 2 \rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 2; +\infty \rangle$,
d) funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -\infty; 3 \rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 3; +\infty \rangle$,
e) funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -\infty; -1 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1; +\infty \rangle$,
a zbiorem jej wartości jest przedział $\langle -\infty; 2 \rangle$.

13. Ile punktów wspólnych mają wykresy funkcji f i g ? Rozwiąż to zadanie dwiema metodami: algebraiczną (rozwiązując równanie) i graficzną (rysując wykresy).

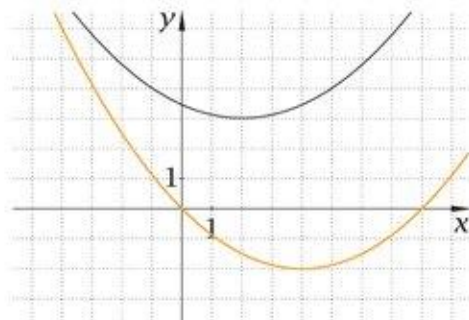
- a) $f(x) = -(x - 3)^2 + 2$, $g(x) = x$
b) $f(x) = 2(x + 2)^2 - 3$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$
c) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1$, $g(x) = -x + 2$
d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, $g(x) = 3(x - 1)^2 - 2$
e) $f(x) = 2(x - 5)^2 + 4$, $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 5)^2$
f) $f(x) = -2(x + 2)^2 + 5$, $g(x) = (x - 1)^2$

14. Czy można znaleźć w układzie współrzędnych punkt, przez który nie przechodzi wykres żadnej funkcji typu $y = ax^2$ dla $a \neq 0$?

15. Opisz, jak należy przesunąć wykres funkcji $y = 2x^2$, aby otrzymać parabolę przechodzącą przez punkty A i B . Zapisz wzór funkcji, której wykresem jest przesunięta parabola.

- a) $A = (5, 3)$, $B = (6, 5)$ c) $A = (1, 5)$, $B = (-2, 11)$
b) $A = (3, 3)$, $B = (-2, 33)$ d) $A = (1, 9)$, $B = (3, 33)$

16. Na rysunku obok przedstawiono fragmenty dwóch parabol. Czy parabole te się przecinają?



17. a) Wierzchołek paraboli ma współrzędne $(7, -9)$. Punkty A i B mają pierwsze współrzędne równe odpowiednio 3 i 11. Wykaż, że ich drugie współrzędne są takie same.

b) Wierzchołek paraboli ma współrzędne (p, q) . Punkty A i B mają pierwsze współrzędne równe odpowiednio $p - r$ oraz $p + r$. Wykaż, że ich drugie współrzędne są równe.

c) Wierzchołek paraboli ma współrzędne (p, q) . Punkty A i B mają taką samą drugą współrzędną. Wykaż, że p jest średnią arytmetyczną pierwszych współrzędnych tych punktów.

18. Kwadrat leży w obszarze ograniczonym osią x i parabolą o danym wzorze. Po dwa wierzchołki kwadratu leżą na paraboli i na osi x . Oblicz pole kwadratu.

a) $y = -x^2 + 3$

b) $y = x^2 - 8$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}$

WZÓR FUNKCJI KWADRATOWEJ W POSTACI OGÓLNEJ I KANONICZNEJ

19. Które z poniższych funkcji są funkcjami kwadratowymi? Przekształć wzory tych funkcji do postaci $y = ax^2 + bx + c$ i odczytaj współczynniki a , b , c .

a) $y = (5x - 1)(2 - 4x)$

d) $y = (x^2 + 1)^2 + 2$

g) $y = \frac{1}{3}(x - 6)(3 - x)$

b) $y = -3x^2 - x + 3x^2 + 7$

e) $y = (x + 2)^2 - (x - 2)^2$

h) $y = -3(x + 7)\left(\frac{1}{2}x - 100\right)$

c) $y = x + \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2}}$

f) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3x + 4}{16}$

i) $y = (x^2 + 2)^2 - x(x^3 - 5)$

20. Zapisz wzór funkcji $y = ax^2 + bx + c$ dla:

a) $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$

c) $a = -\frac{3}{4}$, $b = 5$, $c = 0$

b) $a = -2\frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = 0$

d) $a = -\sqrt{3} + 1$, $b = 2 - \sqrt{17}$, $c = 5\sqrt{3}$

21. Czy ramiona paraboli będącej wykresem podanej funkcji są skierowane w dół czy w górę? Znajdź współrzędne punktu przecięcia tej paraboli z osią y .

a) $y = 5x^2 + 3x + 7$

c) $y = -2x^2 - 5x + 3$

e) $y = (\sqrt{5} - 3)x^2 + 7x - \pi$

b) $y = \sqrt{3}x^2 + 2x - 2$

d) $y = -4x^2 + 6x - 3$

f) $y = \left(\frac{\sqrt{17}}{2} - 2\right)x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{8}$

22. a) Wykres funkcji $f(x) = px^2 - 8x + 2$ przechodzi przez punkt $(-1, 6)$. Znajdź wartość współczynnika p .

b) Druga współrzędna punktu, w którym wykres funkcji $f(x) = x^2 + x + k$ przecina oś y , jest równa -9 . Znajdź wartość współczynnika k .

c) Jednym z miejsc zerowych funkcji $f(x) = -2x^2 + tx + 10$ jest -5 . Znajdź wartość współczynnika t .

23. Znajdź współrzędne wierzchołka paraboli i zapisz jej wzór w postaci kanonicznej. Znajdź współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią y i naskicuj ten wykres.

a) $y = x^2 - 6x + 7$

c) $y = x^2 - 14x + 49$

e) $y = -5x^2 + 10x - 6$

b) $y = -x^2 - 8x + 5$

d) $y = 3x^2 + 2x + 1$

f) $y = -4x^2 + 12x - 29$

24. Funkcja, której wykresem jest parabola, przyjmuje dla $x = 4$ wartość największą równą 5 . Punkt $P = (2, 3)$ należy do tej paraboli. Znajdź postać ogólną wzoru tej funkcji.

25. Zapisz w postaci ogólnej wzór dowolnej funkcji kwadratowej, której:

a) zbiór wartości to przedział $\langle 2; +\infty \rangle$,

c) najmniejszą wartością jest -22 ,

b) zbiór wartości to przedział $(-\infty; -1]$,

d) największą wartością jest -7 .

26. Punkt W jest wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Wykres ten przechodzi przez punkt A . W jakim punkcie ten wykres przecina oś y ? Zapisz wzór funkcji f w postaci ogólnej.

a) $W = (2, 3)$, $A = (3, 4)$

c) $W = (2, 3)$, $A = (-1, -6)$

b) $W = (-5, 1)$, $A = (1, 73)$

d) $W = (-1, 2)$, $A = (1, 0)$

27. Sprawdź, czy funkcja $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ przyjmuje wartość a . Jeśli tak, to dla jakich argumentów?

a) $a = 0$

b) $a = 3$

c) $a = -2$

d) $a = -1$

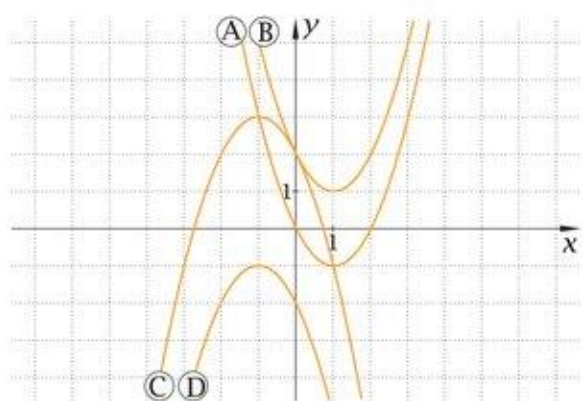
28. Na rysunku przedstawione są wykresy czterech funkcji. Wzory tych funkcji zapisano poniżej. Dopasuj wzory do wykresów.

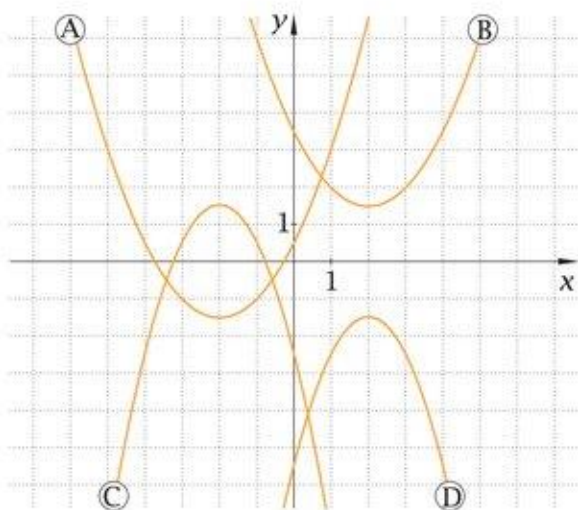
Ⅰ $y = -x^2 - 2x - 2$

Ⅱ $y = -x^2 - 2x + 2$

Ⅲ $y = x^2 - 2x + 2$

Ⅳ $y = x^2 - 2x$





29. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji, których wzory zapisano poniżej. Dopasuj wzory do wykresów.

- ① $y = -x^2 - 4x - 2,5$
- ② $y = 0,5x^2 - 2x + 3,5$
- ③ $y = 0,5x^2 + 2x + 0,5$
- ④ $y = -x^2 + 4x - 5,5$

30. Czy wykres funkcji kwadratowej może nie przecinać osi x ? Czy może przecinać oś x w więcej niż jednym punkcie? Czy może nie przecinać osi y ? Czy może przecinać ją w więcej niż jednym punkcie? Odpowiedź uzasadnij.

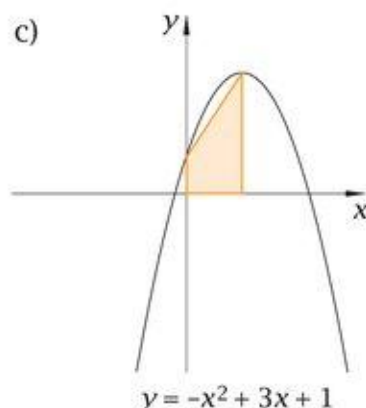
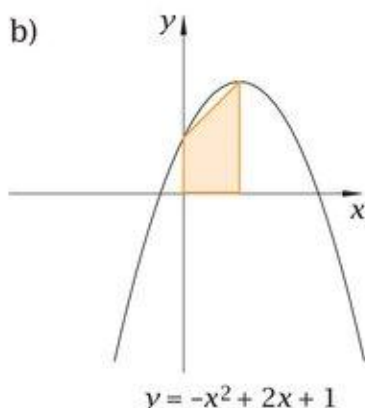
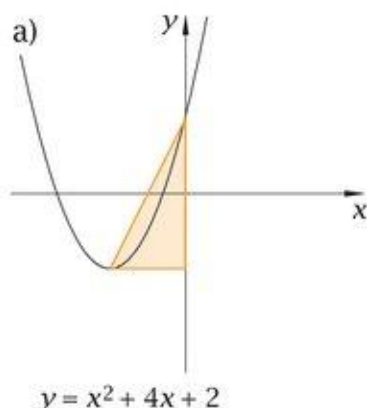
31. Zbadaj monotoniczność funkcji.

- a) $y = x^2 + 2x + 6$
- b) $y = -x^2 + 4x + 10$
- c) $y = 2x^2 - 2x + 3$
- d) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4x - 20$
- e) $y = 5x^2 + 10\sqrt{3}x + 12$
- f) $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x + 1$

32. Czy funkcja osiąga wartość największą czy najmniejszą? Jaka jest ta wartość? Dla jakiego argumentu jest osiągana?

- a) $y = -x^2 + 3x - 12$
- b) $y = 3x^2 - 27x - 11$
- c) $y = -2x^2 + 0,3x - 1$
- d) $y = 5x^2 - x$
- e) $y = -2x^2 + 3$
- f) $y = -x^2 + 6x$

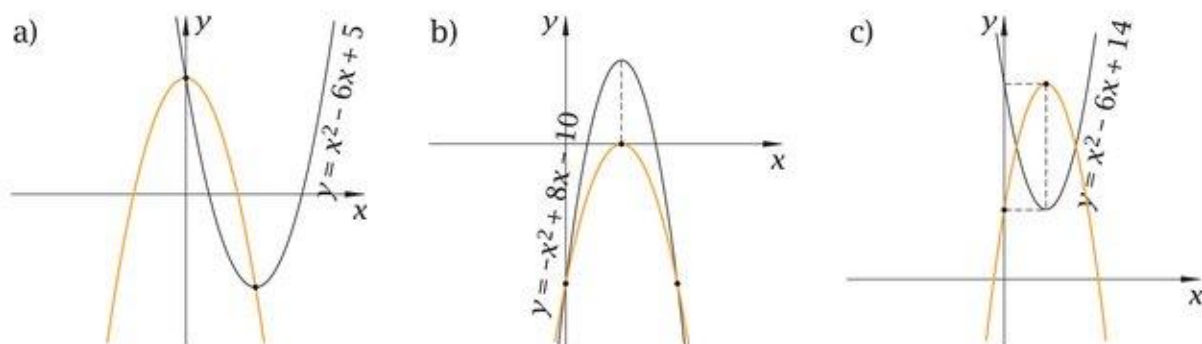
33. Oblicz pola zaznaczonych figur.



34. W jaki sposób należy przesunąć parabolę $y = -2x^2$, aby otrzymać wykres podanej funkcji?

- a) $y = -2x^2 - 4x + 1$
- b) $y = -2x^2 + 8x$
- c) $y = -2x^2 - 2x - 2$

35. Parabola zaznaczona na pomarańczowo przecina parabolę o podanym wzorze. Znajdź wzór funkcji, której wykresem jest parabola zaznaczona na pomarańczowo.



36. a) Funkcja $f(x) = x^2 + tx + s$ spełnia warunek $f(2) = f(8)$. Znajdź wartość współczynnika t .

b) Funkcja $f(x) = 3x^2 - mx + n$ spełnia warunek $f(-7) = f(-3)$. Znajdź wartość współczynnika m .

c) Funkcja $f(x) = -2(x - p)^2 + q$ spełnia warunek $f(-1) = f(5)$. Znajdź wartość współczynnika p .

d) Funkcja $f(x) = 17(x + u)^2 - w$ spełnia warunek $f(-10) = f(4)$. Znajdź wartość współczynnika u .

37. Podaj warunki, jakie muszą spełniać współczynniki funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, aby:

- punkt $(1, 1)$ leżał na wykresie tej funkcji,
- punkt $(0, 5)$ leżał na wykresie tej funkcji,
- jednym z miejsc zerowych była liczba 0,
- jednym z miejsc zerowych była liczba 1,
- oś y była osią symetrii wykresu tej funkcji,
- punkt $(1, 0)$ był wierzchołkiem wykresu tej funkcji.

38. a) Zbiorem wartości funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest przedział $(-\infty; -5]$. Określ znaki współczynników a i c oraz wyróżnika Δ .

b) Zbiorem wartości funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest przedział $[3; +\infty)$. Określ znaki współczynników a i c oraz wyróżnika Δ .

39. a) Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe i dla dodatnich argumentów przyjmuje ujemne wartości. Określ znaki współczynników a , b i c .

b) Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe i dla ujemnych argumentów przyjmuje dodatnie wartości. Określ znaki współczynników a , b i c .

40. Przeczytaj przykład podany obok i korzystając z przedstawionej w nim metody, przekształć wzór funkcji do postaci kanonicznej.

- a) $y = x^2 + 4x + 5$
- b) $y = x^2 - 3x - 7$
- c) $y = 2x^2 - 8x + 1$
- d) $y = -3x^2 - x + 12$
- e) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$
- f) $y = -0,1x^2 - 0,5x + 1,1$

Wzór funkcji $y = 2x^2 + 2x + 4$ można przekształcić do postaci kanonicznej, wykonując następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 4 &= 2(x^2 + x + 2) = \\ &= 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\right) = \\ &= 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2\right) = \\ &= 2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

41. Która z poniżej podanych wartości funkcji $f(x) = -3x^2 + 96x - 7\sqrt{3}$ jest największa, a która — najmniejsza?

$$f(17,37) \quad f(15,37) \quad f(16 - \sqrt{2}) \quad f(7\pi) \quad f\left(\frac{100}{7}\right)$$

42. Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola przechodząca przez punkty A , B i C .

- a) $A = (0, -4,5)$, $B = (3, 0)$, $C = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$
- b) $A = (1, 1)$, $B = (-1, -1)$, $C = (2, 11)$

43. Podaj przedziały monotoniczności funkcji:

- a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{dla } x < 1 \\ -x^2 + 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 & \text{dla } x \leq \sqrt{2} \\ x^2 - 6x + 4 & \text{dla } x > \sqrt{2} \end{cases}$

44. Wykaż, że wierzchołki parabol, które są wykresami rodziny funkcji o wzorze $f(x) = x^2 + bx + 1$, tworzą parabolę. Znajdź równanie tej paraboli.

45. a) Dla jakiego argumentu funkcja $f(x) = (-x^2 + 4x - 2)^2$ przyjmuje najmniejszą wartość? Znajdź tę wartość.

b) Określ przedziały monotoniczności funkcji $g(x) = |x^2 + 4x - 12|$.

c) Dla jakiego argumentu funkcja $h(x) = \frac{1}{|-x^2 + 6x - 10|}$ przyjmuje największą wartość? Znajdź tę wartość.

46. a) Wyznacz zmienną y ze wzoru $x^2 = xy + 2y^2$.

b) Wyznacz zmienne x oraz y ze wzoru $5xy = x^2 + 4y^2 + 1$. Zapisz odpowiednie założenia.

c) Wyznacz zmienne x oraz y ze wzoru $2x^2y^2 + 1 = x^2 + 2xy$. Zapisz odpowiednie założenia.

WZÓR FUNKCJI KWADRATOWEJ W POSTACI ILOCZYNOWEJ

47. Wymień miejsca zerowe podanej funkcji.

a) $f(x) = 7(x-1)(x-13)$

d) $f(x) = \frac{3}{7}\left(x - 1\frac{2}{3}\right)\left(x + 3\frac{1}{3}\right)$

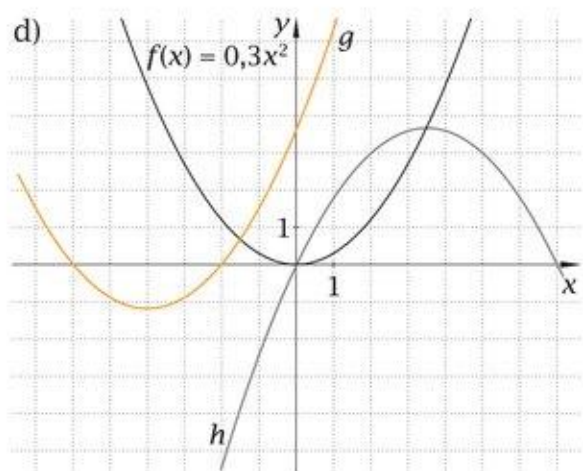
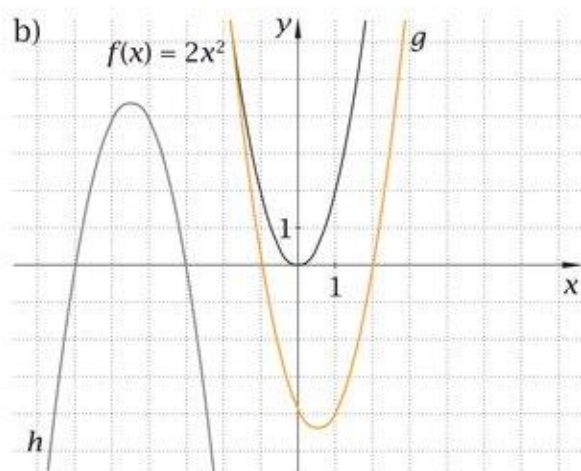
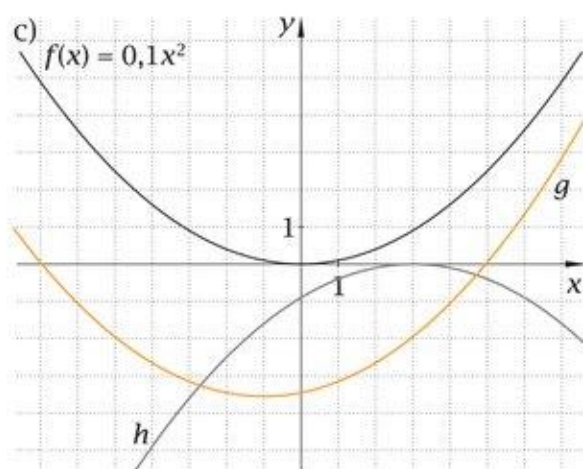
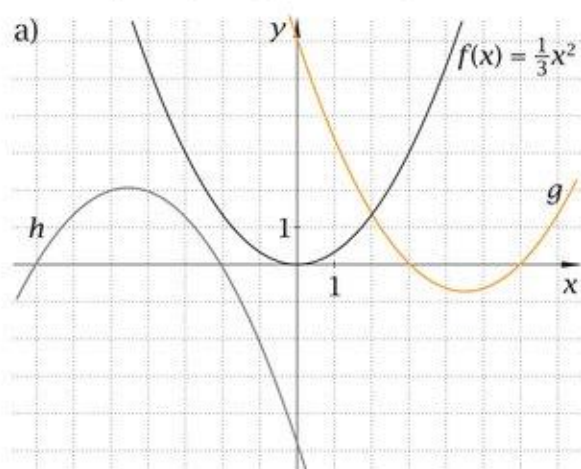
b) $f(x) = -\frac{9}{11}\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right)$

e) $f(x) = -83(2-x)(2x+1)$

c) $f(x) = -6,4(x+0,7)(x+1,9)$

f) $f(x) = 0,7(3x+9)(5x-3)$

48. Wszystkie wykresy przedstawione w jednym układzie współrzędnych mają taki sam kształt (parabole są przystające). Odczytaj miejsca zerowe funkcji g i h , a następnie podaj ich wzory.



49. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie?

a) $f(x) = 9(x+2)(x+5)$

c) $f(x) = -7,3(x-2,1)(x+1,9)$

e) $f(x) = -67x(x+5)$

b) $f(x) = -3(x-7)(x-1)$

d) $f(x) = \frac{2}{11}\left(x + \frac{5}{7}\right)\left(x - \frac{4}{9}\right)$

f) $f(x) = 3,2(x+7)(x+7)$

50. Znajdź współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f .

a) $f(x) = (x - 5)(x - 11)$

c) $f(x) = -0,1(x + 1)(x - 5)$

b) $f(x) = -5(x + 4)(x + 8)$

d) $f(x) = \frac{3}{4}(x + 7)(1 - x)$

51. Podaj przedziały monotoniczności funkcji.

a) $f(x) = 9(x - 3)(x - 7)$

c) $f(x) = 1,8(x + 5)(x + 7)$

e) $f(x) = 47(x - 9)(x + 1)$

b) $f(x) = -7(x - 2)(x - 6)$

d) $f(x) = -\frac{4}{9}(x + 2)(x + 3)$

f) $f(x) = -0,03(x + 7)(x - 2)$

52. Znajdź pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty, w których wykres podanej funkcji przecina osie układu współrzędnych.

a) $f(x) = -2(x + 4)(x - 2)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 7)(x - 10)$

c) $f(x) = -5(x + 9)(x + 1)$

53. Znajdź postać iloczynową wzoru funkcji kwadratowej, o której wiadomo, że:

a) jej miejscami zerowymi są 2 i 10, a na wykresie leży punkt $(1, -18)$,

b) jej miejscami zerowymi są -5 i 5, a na wykresie leży punkt $(0, 5)$,

c) jej miejscami zerowymi są -4 i 0, a na wykresie leży punkt $(-2, -1)$.

54. Wśród podanych funkcji wskaż te, które mają takie same wykresy, oraz te, które mają różne wykresy, ale jednakowe miejsca zerowe.

a) $f(x) = (2x - 1)(2x + 2)$

b) $f(x) = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$

c) $f(x) = 10(x - 0,2)(x + 0,5)$

$g(x) = 2(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$g(x) = (x + 1)(x + 2)$

$g(x) = (5x + 1)(1 - 2x)$

$h(x) = -4(x + 1)\left(\frac{1}{2} - x\right)$

$h(x) = 5(1 - 3x)(2 - 3x)$

$h(x) = -10\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$i(x) = -2(2x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$i(x) = \frac{1}{3}(3x - 1)(2 - 3x)$

$i(x) = -5\left(\frac{1}{5} - x\right)(2x + 1)$

55. Wykresy funkcji f i g mają tę samą oś symetrii. Znajdź wartość p .

a) $f(x) = 9(x - 2)(x - 12)$, $g(x) = -5(x - 1)(x + p)$

b) $f(x) = 2(x + 7)(x + 4)$, $g(x) = 8(x + 6)(x + p)$

c) $f(x) = -7(x - 2)(x + p)$, $g(x) = -2(x - 5)(x + 2)$

d) $f(x) = -(x + p)(x + 9)$, $g(x) = 6(x - 2)(x + 4)$

56. Wykres funkcji f ma jeden punkt wspólny z prostą $y = m$. Znajdź wartość m .

a) $f(x) = -(x - 1)(9 - x)$

b) $f(x) = 1,2(3 + x)(3 + 3x)$

c) $f(x) = -\frac{3}{4}(1 + 2x)(3 - 2x)$

57. Podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości m .

a) $|7(x - 1)(x - 5)| = m$

b) $|-2(x + 3)(x - 11)| = m$

58. Narysuj wykres podanej funkcji.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} (x+5)(x+1) & \text{dla } x < -1 \\ (x+1)(x-3) & \text{dla } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} (x+2)(x-2) & \text{dla } x < 2 \\ -(x-2)(x-4) & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$$

59. Parabola, która jest wykresem pewnej funkcji kwadratowej, ma wierzchołek w punkcie A i przecina oś x w punktach B i C . Wykaż, że pole trójkąta ABC jest równe wartości bezwzględnej iloczynu współrzędnych punktu A .

60. Wykaż, że odległość między wierzchołkami parabol będących wykresami funkcji $y = a_1(x-m)(x-n)$ oraz $y = a_2(x-m)(x-n)$ jest równa $\frac{(m-n)^2}{4}|a_1 - a_2|$.

FUNKCJA KWADRATOWA – PODSUMOWANIE

61. Określ liczbę miejsc zerowych podanej funkcji.

$$\text{a) } f(x) = -15(x+4)^2 - 124$$

$$\text{d) } f(x) = -\frac{5}{7}\left(x + \frac{2}{9}\right)^2$$

$$\text{b) } f(x) = 1,3(x-2,6)^2 - 5,8$$

$$\text{e) } f(x) = -0,01x^2 + 2x - 100$$

$$\text{c) } f(x) = 0,1(x-1,34)(x-0,87)$$

$$\text{f) } f(x) = 2x^2 + 3x + 449$$

62. W jakim przedziale podana funkcja jest rosnąca?

$$\text{a) } f(x) = 98(x+19)^2 - 73$$

$$\text{d) } f(x) = x^2 - 20x - 509$$

$$\text{b) } f(x) = -\frac{5}{9}\left(x - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{4}{5}$$

$$\text{e) } f(x) = -7,3(x-8,4)(x+1,4)$$

$$\text{c) } f(x) = -2,5x^2 + 55x - 23,9$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{1}{6}\left(x - \frac{5}{8}\right)\left(x + \frac{5}{8}\right)$$

63. Znajdź współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji.

$$\text{a) } f(x) = -4,7(x-9,3)^2 + 1,4$$

$$\text{d) } f(x) = -x^2 - 10x - 1$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{3}{7}\left(x + \frac{9}{11}\right)^2 - \frac{7}{9}$$

$$\text{e) } f(x) = 10(x+4)(x+6)$$

$$\text{c) } f(x) = 2x^2 - 8x + 11$$

$$\text{f) } f(x) = -1,1(x-8)(x-2)$$

64. Określ zbiór wartości podanej funkcji.

$$\text{a) } f(x) = 0,12(x-7)^2 - 13,2$$

$$\text{d) } f(x) = 2 - 9x - 10x^2$$

$$\text{b) } f(x) = -\frac{7}{13}\left(x + \frac{1}{9}\right)^2 + \frac{5}{6}$$

$$\text{e) } f(x) = -(x-1)(x+11)$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x - 5$$

$$\text{f) } f(x) = 10(x-6)(x-4)$$

65. Znajdź miejsca zerowe podanej funkcji (jeśli istnieją).

a) $y = x(x + 1)$

c) $y = x^2 + 5$

e) $y = (x - 2)(x + 3)$

b) $y = x^2 - 4$

d) $y = (x - 2)^2$

f) $y = (x + 3)^2$

66. Znajdź miejsca zerowe podanej funkcji (jeśli istnieją).

a) $f(x) = -\frac{6}{11}\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(x - \frac{5}{8}\right)$

c) $f(x) = 9(x - 4)^2 + 25$

e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

b) $f(x) = 7,3(x + 6,2)(x - 6,2)$

d) $f(x) = -3(x + 1)^2 + 12$

f) $f(x) = 6x^2 - x - 1$

67. Wykresy podanych funkcji przecinają się tylko w jednym punkcie. Znajdź współrzędne tego punktu.

a) $f(x) = -5(x - 7)(x - 3)$, $g(x) = -5(x - 3)(x + 7)$

b) $f(x) = 4x^2 - 24x + 6$, $g(x) = 4x^2 + 12x + 6$

c) $f(x) = -7(x - 6)^2 - 8$, $g(x) = \frac{1}{7}(x - 6)^2 - 8$

68. Znajdź wzór funkcji kwadratowej (w dowolnej postaci), która spełnia podane warunki.

a) Miejscami zerowymi funkcji są liczby 6 i 7, a punkt $(5, -2)$ leży na jej wykresie.

b) Parabola, która jest wykresem funkcji, przechodzi przez punkt $(-9, 3)$, a jej wierzchołek ma współrzędne $(-10, -2)$.

c) Punkty $(0, -6)$, $(-1, -20)$ i $(1, -18)$ leżą na wykresie funkcji.

69. Zapisz w postaci iloczynowej i ogólnej wzór dowolnej funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są podane liczby.

a) 5 i 7

b) -2 i 4

c) -5 i -3

70. Największa wartość funkcji f jest taka sama jak największa wartość funkcji $g(x) = -81(x + 72)^2 + 9$, a miejsca zerowe funkcji f są takie same jak miejsca zerowe funkcji $h(x) = 29(x - 1)(x + 3)$. Znajdź wzór funkcji f w postaci ogólnej.

71. Zapisz wzór podanej funkcji w postaci iloczynowej i kanonicznej.

a) $y = -3x^2 + 2x + 1$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

b) $y = x^2 + x\sqrt{2} - 4$

d) $y = \sqrt{3}x^2 + 6x - 9\sqrt{3}$

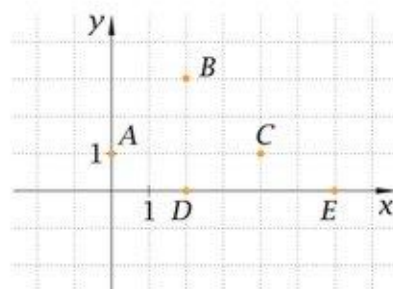
72. Zapisz w postaci ogólnej wzór funkcji kwadratowej o miejscach zerowych 4 oraz 6:

a) której największą wartością jest 3,

b) której najmniejszą wartością jest -1.

73. Znajdź postać ogólną wzoru funkcji kwadratowej, której wykres przechodzi przez wszystkie wierzchołki danego trójkąta.

- a) trójkąt ABC
- b) trójkąt CDE
- c) trójkąt ADE



74. Czy wykresy podanych funkcji się przecinają? Jeśli tak, to w jakich punktach?

- a) $y = x^2$ i $y = 4x$
- b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ i $y = -3x + 6$
- c) $y = -x^2 + 4x - 3$ i $y = x - 3$
- d) $y = x^2 - 4x + 5$ i $y = x + 1$
- e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ i $y = \frac{1}{4}x^2 - x$
- f) $y = -2x^2 + 8x - 4$ i $y = 2x^2$
- g) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ i $y = \frac{3}{2}x^2 - 18x + 48$
- h) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$ i $y = -x^2 - 2x$

75. a) Ustal, w ilu punktach przecinają się wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$ oraz $g(x) = m$ w zależności od wartości m .

b) Ustal, dla ilu argumentów funkcja $h(x) = -\frac{2}{3}(x + 5)^2 - 7$ przyjmuje wartość t w zależności od wartości t .

c) Ustal, ile rozwiązań ma równanie $-4(x - 1)(x + 9) = p$ w zależności od wartości p .

76. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

- a) $f(x) = 3(x + 5)^2 - 10$, $\langle -6; 5 \rangle$
- b) $f(x) = -2(x - 9)^2 + 3$, $\langle -1; 8 \rangle$
- c) $f(x) = -(x + 6)(x - 2)$, $\langle 2; 4 \rangle$
- d) $f(x) = 5(x - 1)(x - 5)$, $\langle -1; 6 \rangle$
- e) $f(x) = -x^2 + 2x - 10$, $\langle 3; 10 \rangle$
- f) $f(x) = 2x^2 + 12x + 5$, $\langle -5; 0 \rangle$

77. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -2; 3 \rangle$.

- a) $f(x) = x^2 - 6$
- b) $f(x) = -5x^2 + 4$
- c) $f(x) = 2x^2 - 4x$
- d) $f(x) = -4x^2 - 12x$
- e) $f(x) = x^2 - 8x + 1$
- f) $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$

78. a) Znajdź wzory funkcji, których wykresy otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego względem osi x wykresów funkcji $f(x) = -7x^2 - 5x + 4$ oraz $g(x) = 6(x + 9)^2 - 8$.

b) Znajdź wzory funkcji, których wykresy otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego względem osi y wykresów funkcji $f(x) = 6x^2 - 9x - 5$ oraz $g(x) = -7(x + 5)(x - 8)$.

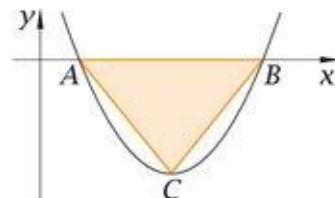
c) Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego względem prostej $y = 3$ wykresu funkcji $f(x) = -4(x + 5)^2 - 6$.

d) Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego względem prostej $x = 7$ wykresu funkcji $f(x) = 5(x - 2)(x - 8)$.

Я79. a) Uzasadnij, że jeśli funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe, to pierwsza współrzędna wierzchołka jest ich średnią arytmetyczną.

b) Punkty (p, q) i (r, q) należą do paraboli. Wykaż, że pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa $\frac{p+r}{2}$.

Я80. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez wierzchołki trójkąta równoramiennego ABC (zob. rysunek). Wyprowadź wzór na pole tego trójkąta w zależności od współczynników a, b, c .



Я81. Znajdź największą wartość funkcji $y = |2x^2 + 4x - 2|$ w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$.

82. Określ, która z poniższych wartości funkcji $f(x) = -3x^2 - 9x + 12$ jest dodatnia.

$$f(1,0438) \quad f\left(-\frac{5\pi}{7}\right) \quad f(-2 - \sqrt{5}) \quad f\left(\frac{37}{145}\right) \quad f(\sqrt{55} - \sqrt{35})$$

83. Punkty $(-2, 0)$ i $(5, 0)$ leżą na wykresie funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wykaż, że współczynniki a i c mają przeciwne znaki, zaś b i c — takie same znaki.

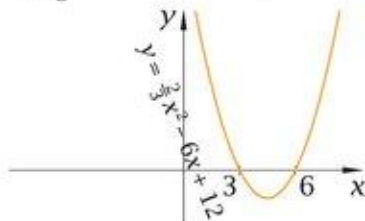
84. Wykaż, że jeśli parabole $y = x^2 + px + q$ i $y = x^2 + qx + p$ ($p \neq q$) mają wspólne miejsce zerowe, to jest nim liczba 1 oraz spełniony jest warunek $p + q + 1 = 0$.

Я85. Niech $f(p)$ oznacza długość odcinka, którego końcami są miejsca zerowe funkcji $y = (x - 5)^2 + p$. Znajdź wzór funkcji f oraz narysuj jej wykres.

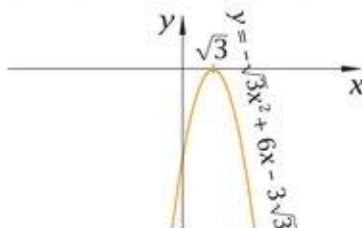
NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

86. Rozwiąż nierówność, korzystając z podanego wykresu.

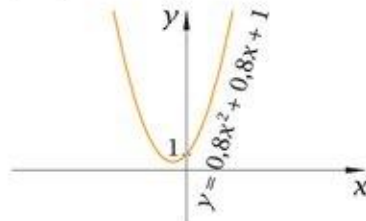
a) $\frac{2}{3}x^2 - 6x + 12 \leq 0$



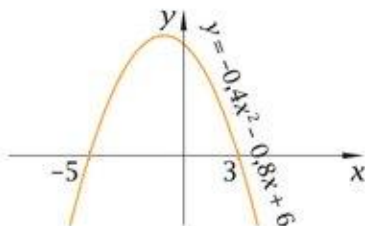
c) $-\sqrt{3}x^2 + 6x - 3\sqrt{3} \geq 0$



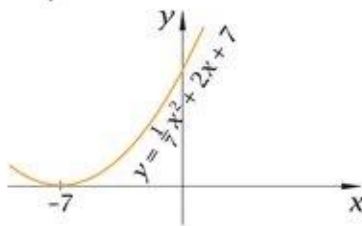
e) $0,8x^2 + 0,8x + 1 < 0$



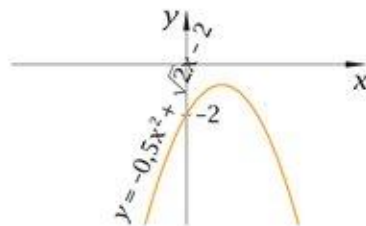
b) $-0,4x^2 - 0,8x + 6 < 0$



d) $\frac{1}{7}x^2 + 2x + 7 > 0$



f) $-0,5x^2 + \sqrt{2}x - 2 \leq 0$



87. Ile rozwiązań ma podana nierówność?

a) $x^2 + 3 \geq 0$

d) $(x - 1)^2 \leq 0$

g) $-5x^2 + 2x - 1 > 0$

b) $x^2 - 1 \geq 0$

e) $(x - 1)^2 < 0$

h) $x^2 + 2x - 7 > 0$

c) $(x - 1)^2 \geq 0$

f) $x^2 - 3x + 10 > 0$

i) $-2x^2 + 5x + 3 \geq 0$

88. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 1 \geq 0$

c) $x^2 \geq x$

e) $3x^2 \geq 27$

g) $2x^2 + 5 \leq 0$

b) $x^2 - 2x > 0$

d) $x^2 + 2 > 0$

f) $-3x^2 \geq 2$

h) $(x + 7)(x - 5) \leq 0$

89. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - x + 2 > 0$

d) $x^2 + 6x + 9 > 0$

g) $-x^2 + 8x - 16 \leq 0$

b) $x^2 - x - 6 \leq 0$

e) $-x^2 + 18x - 81 \leq 0$

h) $x^2 + 3x + 15 < 0$

c) $-x^2 + x + 12 > 0$

f) $x^2 - 14x + 49 < 0$

i) $-x^2 + 3x + 10 < 0$

90. Rozwiąż nierówność.

a) $-6x^2 + x + 1 > 0$

e) $(x - 2)(x + 2) < 5x - 7$

i) $x^2 + \sqrt{12}x + 3 > 0$

b) $10x^2 + 8x + 0,7 \leq 0$

f) $9x + 5 < 2x^2$

j) $-3,5x^2 + 5x - \sqrt{5} \leq 0$

c) $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x - 1 \geq 0$

g) $(x - 1,5)^2 \leq 6,25$

k) $4x^2 + 2\sqrt{5} - 2 < 0$

d) $x^2 - x - 0,2 > 0$

h) $(2x - 6)^2 \leq 4x - 13$

l) $x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{7}x + \sqrt{14} \leq 0$

91. a) Dla jakich argumentów wartości funkcji $y = x^2 - 2x + 2$ należą do przedziału $(2; +\infty)$, a dla jakich — do przedziału $\langle 0; 2 \rangle$?

b) Dla jakich argumentów wartości funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$ należą do przedziału $(-\infty; 3)$, a dla jakich — do przedziału $(1; 5)$?

92. Znajdź wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność.

a) $(x - 1,2)(x - 3,4) < 0$

d) $2x^2 - 0,6x - 16,2 < 0$

b) $-x^2 + 3,6x \geq 0$

e) $-\sqrt{2}x^2 + 8x - 6\sqrt{2} > 0$

c) $x^2 - 6,25 < 0$

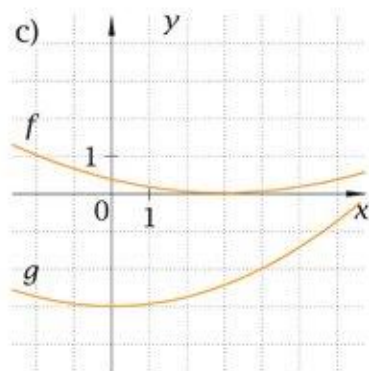
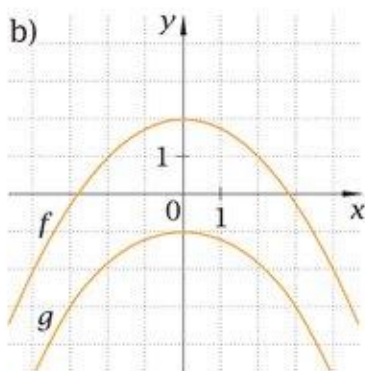
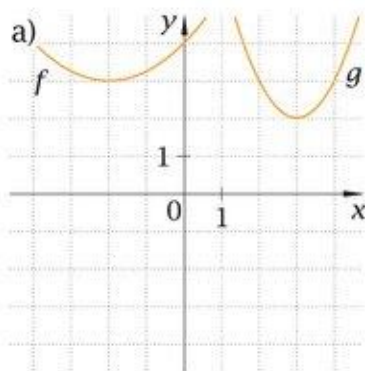
f) $-\sqrt{3}x^2 + \sqrt{21}x + 42\sqrt{3} \leq 0$

93. a) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 2x^2 - 2x - 36$ przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja $g(x) = x^2 - 1$?

b) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^2 - 2x + 9$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $s(x) = 3x + 2$?

- c) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = -x^2$ przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja $g(x) = 2x^2 - 5x - 2$?
- d) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 3$ przyjmuje wartości co najwyżej takie jak funkcja $g(x) = x^3 + x^2 + 2x$?
- e) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 2x^2 - x - 2 + \sqrt{x}$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x^2 + \sqrt{x}$?

94. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja g ? Obie funkcje są funkcjami kwadratowymi.



95. Wyznacz zbiór liczb, które spełniają jednocześnie obie podane nierówności, oraz zbiór liczb, które spełniają co najmniej jedną z podanych nierówności.

- | | |
|--|--|
| a) $x^2 - 1 > 0$, $x^2 + 3x \leq 0$ | d) $x^2 + 4x + 1 \leq 0$, $-x^2 - 2 < 0$ |
| b) $x^2 - 2x > 0$, $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ | e) $2x^2 - 5x + 1 \geq 0$, $x^2 - 3x + \frac{7}{4} < 0$ |
| c) $9x^2 + 9x + 2 < 0$, $9x^2 - 9x + 2 < 0$ | f) $x^2 - \sqrt{7}x < 0$, $-x^2 + \sqrt{2}x + 3 > 0$ |

96. a) Rozwiąż nierówności $-x^2 + 4x \geq 0$ oraz $2(x-1)^2 - 8 > 0$, a następnie rozwiąż nierówność $(-x^2 + 4x)(2(x-1)^2 - 8) < 0$.

b) Rozwiąż nierówność $(x^2 - x - 6)(2x^2 - 11x + 5) \geq 0$.

97. Wyznacz zbiór.

- | | |
|--|--|
| a) $\{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 2x + 5 > 0\} \cap \{1, 2, 3\}$ | c) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 7 \geq 0\}$ |
| b) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 5x - 3 \leq 0\} \cap \mathbb{Z}$ | d) $\mathbb{N} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 13x + 40 \geq 0\}$ |

98. Znajdź dziedzinę funkcji.

- | | | |
|----------------------------------|---|--|
| a) $f(x) = \sqrt{6x^2 + 7x - 3}$ | b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-5x^2 - 3x + 2}}$ | c) $f(x) = \frac{2 + \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 3x}}$ |
|----------------------------------|---|--|

99. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność.

- | | |
|--|---|
| a) $x^2y^2 + x^2 - 2xy^2 + y^2 \geq 0$ | c) $-2x^2y^2 - 3x^2 + xy - y^2 - 2 < 0$ |
| b) $x^2y^2 + x^2 - xy + y^2 + 1 > 0$ | d) $-3x^2y^2 - 2x^2 + 2xy - y^2 - 1 \leq 0$ |

100. Narysuj wykres funkcji $y = |x^2 - 4| - 1$, a następnie rozwiąż nierówność.

- a) $|x^2 - 4| - 1 < 0$ b) $|x^2 - 4| \geq 1$ c) $1 \geq |x^2 - 4|$ d) $1 < |x^2 - 4|$

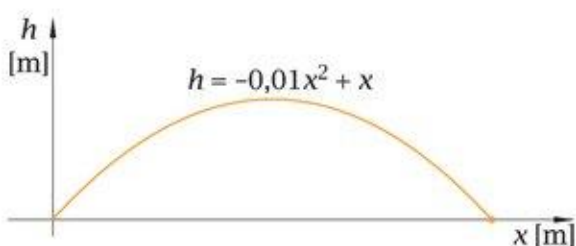
101. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nieujemne?

- a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{dla } x \leq \frac{5}{3} \\ x^2 - 7x + 12 & \text{dla } x > \frac{5}{3} \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{dla } x \leq 1 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$
- b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + 10 & \text{dla } x < -2 \\ x^2 - 7x + 12 & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 4 & \text{dla } x \leq -1 \\ x^2 - 4x - 5 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$

ZASTOSOWANIA FUNKCJI KWADRATOWEJ

102. Ciało upuszczone swobodnie nad powierzchnią Ziemi w czasie t sekund przebywa drogę równą (w metrach) $s = 5t^2$. Narysuj wykres zależności s od t .

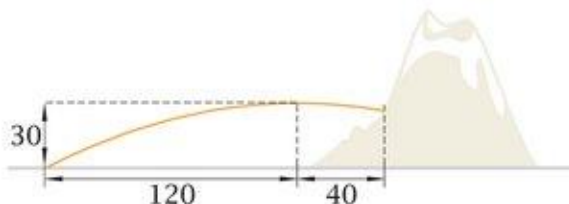
103. Rysunek przedstawia przybliżony tor lotu pocisku. Oblicz największą wysokość, na jaką wzniósł się pocisk, oraz zasięg strzału.



104. Piłkę rzucono do góry. Za pomocą wzoru $h = -5t^2 + 20t + 15$ można obliczyć, na jakiej wysokości h (w metrach) nad ziemią znajdowała się ta piłka po upływie t sekund od momentu wyrzucenia.

- a) Z jakiej wysokości rzucono piłkę?
b) Po jakim czasie piłka spadła na ziemię?
c) Jak wysoko nad ziemią znajdował się najwyższy punkt lotu piłki? Po jakim czasie piłka osiągnęła tę wysokość?

105. Rysunek przedstawia tor lotu pocisku, stanowiący fragment paraboli. Na jakiej wysokości względem miejsca wystrzelenia pocisk trafił w cel?

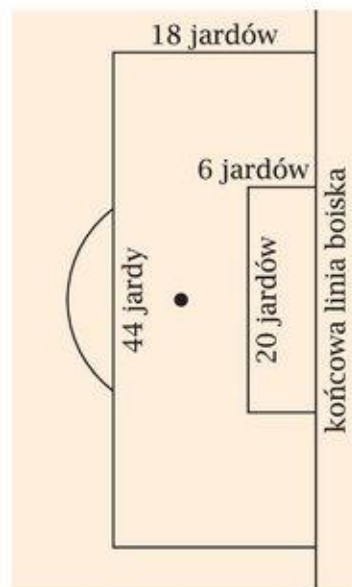


106. a) Oblicz, dla jakiego argumentu x różnica $f(x) - g(x)$ jest największa, jeśli $f(x) = -x^2 + 2$ i $g(x) = 2x + 4$.

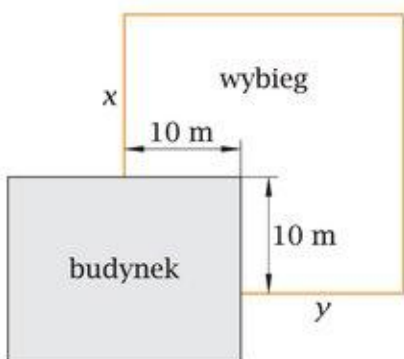
b) Oblicz, dla jakiego argumentu x różnica $f(x) - g(x)$ jest najmniejsza, jeśli $f(x) = x^2 - 2x + 4$ i $g(x) = -x^2 + 4x - 2$.

107. Dawno temu w pewnym królestwie pазerny minister finansów rozkazał, aby każdy płacił tyle procent podatku dochodowego, ile talarów (brutto) miesięcznie zarabia. Płace brutto w tym królestwie nie przekraczały 70 talarów. Przy jakim dochodzie brutto dochód netto (czyli po odliczeniu podatku dochodowego) był największy?

108. a) Na boisku piłki nożnej, przy linii końcowej tuż przed bramką, trzy odcinki ograniczają prostokątne pole bramkowe o wymiarach 6 jardów $\times$ 20 jardów (patrz rysunek obok). Jakie wymiary ma prostokąt o największym polu, który można by wyznaczyć przy linii końcowej za pomocą trzech odcinków o takiej łącznej długości, jaką mają łącznie trzy odcinki ograniczające pole bramkowe? Wynik podaj w jardach.



b) Na boisku piłki nożnej, przy linii końcowej, trzy odcinki ograniczają prostokątne pole karne o wymiarach 18 jardów $\times$ 44 jardy (patrz rysunek obok). Jakie jest największe możliwe pole prostokąta ograniczonego linią końcową i trzema odcinkami o takiej łącznej długości, jaką mają łącznie trzy odcinki ograniczające pole karne? Wynik podaj w jardach kwadratowych.

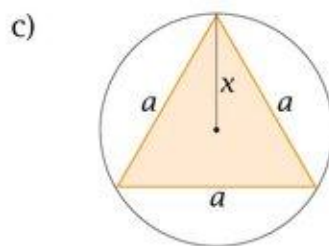
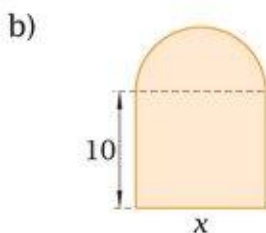
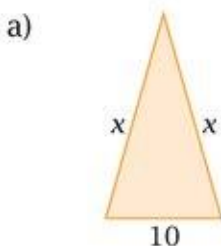


109. Na ogrodzenie wybiegu o kształcie sześciokąta, którego każde dwa sąsiednie boki są prostopadłe (jak na rysunku obok), przeznaczono 100 metrów siatki.

- Jaką długość powinien mieć bok oznaczony na rysunku literą x , aby pole wybiegu było równe 200 m^2 ?
- Jakie jest możliwe największe pole takiego wybiegu?

110. Chcemy zbudować prostokątną zagrodę podzieloną na dwie prostokątne części. Możemy zużyć tylko 90 m siatki. Jakie wymiary powinna mieć ta zagroda, aby ogrodzona powierzchnia była jak największa?

111. Dla jakiej liczby x pole figury zacieniowanej na rysunku jest większe od 10? Odpowiedź podaj z dokładnością do części dziesiątych.



112. Producent chusteczek higienicznych stwierdził, że jeśli cena sprzedaży paczki chusteczek wynosi 30 gr, to sprzedaje się 7000 paczek dziennie. Podniesienie ceny paczki o każdy grosz powoduje zmniejszenie sprzedaży o 100 paczek. Wyprodukowanie paczki kosztuje 20 gr. Jaką cenę powinien ustalić producent, aby osiągnąć największy zysk? Jaki jest ten zysk?

113. Rozważmy pięciokąt o obwodzie 2 zbudowane z prostokąta i trójkąta prostokątnego równoramiennego w sposób pokazany na rysunkach. Jakie największe pole może mieć taki pięciokąt?



114. Drut o długości 20 cm należy podzielić na dwie części, a następnie z jednej części utworzyć ramkę w kształcie trójkąta równobocznego, a z drugiej — ramkę w kształcie kwadratu. Jak długa powinna być każda z dwóch części drutu, by suma pól obszarów ograniczonych ramkami była najmniejsza?

115. Ciało wyrzucone pionowo w górę z prędkością v_0 po czasie t znajduje się na wysokości $h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$. Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się to ciało? Po jakim czasie od wyrzucenia to nastąpi?

116. Za pomocą siatki o ustalonej długości chcemy ogrodzić prostokątny obszar.

- Wykaż, że obszar o największym polu jest kwadratem.
- Obszar jednym bokiem przylega do muru, więc siatką należy ograniczyć go tylko z trzech stron. Wykaż, że obszar o największym polu ma bok równoległy do muru dwa razy dłuższy od boku prostopadłego do muru.

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z PARAMETREM

Я 117. Znajdź wartość parametru p , dla którego równanie ma jedno rozwiązanie.

a) $4x^2 - 3x + p = 0$

c) $px^2 + x + 3p = 0$

b) $-\frac{1}{2}x^2 + 2px - 4 = 0$

d) $px^2 + 5px + 10 = 0$

Я 118. Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne rozwiązania?

a) $-\frac{1}{3}x^2 - 4x + 9m = 0$

c) $mx^2 + 2x + 5m = 0$

b) $4x^2 - 3mx + \frac{1}{4} = 0$

d) $-mx^2 - mx - 9 = 0$

Я119. Znajdź wartość parametru t , dla którego równanie nie ma rozwiązań.

a) $0,1x^2 + 0,7x - 10t = 0$

c) $tx^2 - 5x + 4t = 0$

b) $-5x^2 + 6tx + 2 = 0$

d) $tx^2 + 3tx + 1 = 0$

Я120. Określ liczbę miejsc zerowych funkcji w zależności od parametru p .

a) $y = x^2 - 2px + 2p^2 + 2$

d) $y = (p - 2)x^2 + x + p + 2$

b) $y = -x^2 + (2p + 6)x + 2p^2 + 6p$

e) $y = (p^2 - 1)x^2 + (p - 1)x + 2$

c) $y = px^2 + (p - 1)x + 5p$

f) $y = (p + x)^2 + p$

Я121. Znajdź wartości parametru u , dla których wykresy funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + u$ oraz $g(x) = ux + 1$:

a) przecinają się w dwóch punktach,

b) mają tylko jeden punkt wspólny,

c) nie mają punktów wspólnych.

Я122. a) Dla jakich wartości parametru m suma dwóch różnych rozwiązań równania $x^2 + mx + m = 0$ jest mniejsza od -1 ?

b) Dla jakich wartości parametru p iloczyn dwóch różnych rozwiązań równania $x^2 - px + 2p = 0$ jest mniejszy od 6?

c) Dla jakich wartości parametru t suma odwrotności dwóch różnych rozwiązań równania $x^2 + (t - 2)x + 1 = 0$ jest większa od 4?

Я123. Określ warunki, jakie muszą spełniać parametry k i m , aby wierzchołek paraboli $y = 5(x - k + 1)^2 - m$:

a) leżał na osi x ,

b) leżał na osi y .

Я124. Zapisz warunki, jakie powinny spełniać parametry k oraz m we wzorze $f(x) = x^2 + kx + m$, aby:

a) funkcja f miała dokładnie jedno miejsce zerowe i aby było ono liczbą ujemną,

b) funkcja f miała dwa miejsca zerowe, które są liczbami dodatnimi,

c) funkcja f dla wszystkich argumentów ujemnych przyjmowała wartości dodatnie, a jej wykres przechodził przez początek układu współrzędnych,

d) wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f , leżał w III ćwiartce układu współrzędnych,

e) wykres funkcji f nie miał punktów wspólnych z prostą $y = 5$,

f) wykres funkcji f był symetryczny względem osi y i by funkcja miała miejsca zerowe należące do przedziału $\langle -10; 10 \rangle$.

Я 125. Dla jakich wartości parametru p wierzchołek paraboli znajduje się na osi y ?

a) $y = x^2 + 2(p+3)x + p^2 + 7p + 7$ b) $y = (p+x)^2 + 2x + p + 1$

Я 126. Dla jakich wartości parametru p :

a) wykres funkcji $y = px^2 + x - 1$ nie przechodzi przez I i II ćwiartkę układu współrzędnych,

b) wykres funkcji $y = -\frac{1}{4}(p-2)x^2 + x + p$ nie przechodzi przez III i IV ćwiartkę układu współrzędnych?

Я 127. Dla jakich wartości parametru k wykresy podanych funkcji nie mają punktów wspólnych?

a) $y = x^2 - 2x + 2$ i $y = kx - 2$ b) $y = kx^2 + 5x + k$ i $y = 5x + 1$

Я 128. Zbadaj, ile punktów wspólnych mają wykresy podanych funkcji w zależności od parametru p .

a) $y = 2x^2 + px + \frac{3}{4}$ i $y = x^2 + x + p$ b) $y = x^2 + px + 1$ i $y = px^2 + x + 1$

Я 129. Zapisz, jakie warunki musi spełniać parametr m , aby zachodził warunek:

a) równanie $x^2 + (2m+1)x + \frac{1}{4} = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie,

b) równanie $mx^2 - m^2x - 4x + 4m = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie,

c) równanie $x^2 - 2mx + 2m^2 = 0$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie,

d) równanie $-(2m+1)x^2 + x + m - 2 = 0$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie,

e) równanie $(m+1)x^2 - mx + m + 1 = 0$ nie ma rozwiązań,

f) równanie $m^2x^2 - mx - 1 = 0$ nie ma rozwiązań.

Я 130. Dla jakich wartości parametru m najmniejsza wartość funkcji f należy do podanego przedziału?

a) $f(x) = x^2 + 2x + m^2$, $(3; 8)$ b) $f(x) = x^2 - 4x + m^2 - m$, $\langle -4; -2 \rangle$

Я 131. Oblicz, dla jakiej wartości parametru p równanie $x^2 + px + 2p + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania:

a) których suma wynosi 5,

b) których suma należy do przedziału $\langle 3; 7 \rangle$,

c) których iloczyn wynosi -3 ,

d) których iloczyn należy do przedziału $\langle -2; 3 \rangle$.

Я 132. Oblicz, dla jakiej wartości parametru p równanie $px^2 + (p-3)x - 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 spełniające podany warunek. Znajdź x_1 i x_2 .

a) x_1 jest liczbą przeciwną do x_2

b) x_1 jest odwrotnością liczby x_2

- Я 133.** Oblicz, dla jakich wartości parametru p równanie $x^2 + px + p^2 - 4 = 0$ ma dwa różne rozwiązania:
- o różnych znakach,
 - dodatnie,
 - ujemne,
 - jedno dodatnie, a drugie równe zero.
- Я 134.** Wyjaśnij, dlaczego jeśli równanie $x^2 - 2tx + t + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, to mają one ten sam znak. Dla jakich wartości parametru t są one dodatnie, a dla jakich — ujemne?
- Я 135.** Oblicz, dla jakich wartości parametru p równanie $0,5x^2 + 5px + 6,25 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, których:
- suma kwadratów wynosi 75,
 - kwadrat różnicy jest równy 150.
- Я 136.** Oblicz, dla jakich wartości parametru k równanie $-x^2 + kx - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, których:
- suma odwrotności jest większa niż -1 ,
 - suma odwrotności kwadratów jest większa niż 1.
- Я 137.** Dla jakiej wartości parametru p iloczyn dwóch różnych rozwiązań podanego równania jest najmniejszy? Jaką wartość ma ten minimalny iloczyn?
- $x^2 + 4x + p^2 - 3 = 0$
 - $x^2 + 2x + p^2 - p - 2 = 0$
- Я 138.** Dla jakiej wartości parametru p suma odwrotności dwóch różnych rozwiązań podanego równania jest największa?
- $-x^2 + (p^2 - 7p - 8)x + 1 = 0$
 - $-x^2 + (p^2 - 5)x + 1 = 0$
- Я 139.** a) Dla jakich wartości parametru m suma odwrotności dwóch różnych rozwiązań równania $x^2 - 9x + m = 0$ jest cztery razy większa od iloczynu tych rozwiązań?
- b) Dla jakich wartości parametru p suma kwadratów dwóch różnych rozwiązań równania $x^2 + px + 1 = 0$ jest dwa razy większa od sumy tych rozwiązań?
- Я 140.** Dla jakich wartości parametru k podana nierówność jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej?
- $kx^2 + x + 5 > 0$
 - $(k^2 - 5k + 6)x^2 + kx + \frac{1}{4} < 0$
- Я 141.** Dla jakich wartości parametru k podana nierówność nie ma rozwiązania?
- $-2x^2 + (k - 1)x - k \geq 0$
 - $(k - 2)x^2 + 2kx + k + 5 > 0$

- Я 142.** Oblicz, dla jakich wartości parametru k zbiór rozwiązań podanej nierówności zawiera tylko liczby dodatnie.

$$-2x^2 + (k+1)x - 2k > 0$$

- Я 143.** Znajdź wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + (m-1)x + m + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 spełniające warunek:

a) $x_1^2 + x_2^2 < 4(x_1 + x_2)$ b) $x_1 > x_2$ i $x_1^3 - x_2^3 > 3(x_1^2 - x_2^2)$

- Я 144.** a) Znajdź wartości parametru m , dla których równanie $2x^2 - (m+3)x + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 1,5$.

b) Znajdź wartości parametru p , dla których równanie $2x^2 - (3p+2)x + 12 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| = 1$.

c) Znajdź wartości parametru m , dla których równanie $x^2 + mx + m - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| < 1$.

d) Znajdź wartości parametru p , dla których równanie $x^2 + (p+2)x + p + 3 = 0$ ma dwa różne ujemne rozwiązania x_1 i x_2 spełniające warunek $|x_1 - x_2| > 1$.

- Я 145.** Określ liczbę rozwiązań podanego równania w zależności od wartości parametru m .

a) $mx^2 + (m+1)x + m - 1 = 0$ b) $(m-1)x^2 + mx + m + 2 = 0$

- Я 146.** a) Znajdź wartości parametru s , dla których równanie $x^2 - (s+1)x + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania mniejsze od 4.

b) Znajdź wartości parametru k , dla których równanie $\frac{1}{4}x^2 + (2k+1)x - k = 0$ ma dwa różne rozwiązania mniejsze od 5.

c) Znajdź wartości parametru u , dla których równanie $x^2 + (u-3)x + u = 0$ ma dwa różne rozwiązania większe od -7.

- Я 147.** a) Znajdź wartości parametru s , dla którego równanie $x^2 + sx + 5 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1 i x_2 , które spełniają warunek $2 \in (x_1; x_2)$.

b) Znajdź wartości parametru p , dla którego równanie $x^2 + (p+2)x + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 , które spełniają warunek $6 \in (x_1; x_2)$.

c) Znajdź wartości parametru t , dla którego równanie $x^2 - tx + t - 3 = 0$ ma dwa rozwiązania x_1 i x_2 , które spełniają warunek $-5 \in (x_1; x_2)$.

- Я 148.** a) Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + mx + 9 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, które należą do przedziału $(-4; 5)$?

b) Dla jakich wartości parametru p równanie $x^2 - px + p + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, które należą do przedziału $(1; 3)$?

c) Dla jakich wartości parametru t równanie $x^2 + (t-2)x + t - 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, które należą do przedziału $(-5; 1)$?

Я 149. Określ, jak liczba rozwiązań równania zależy od wartości parametru p .

a) $|x^2 - 9| = p$ b) $|x^2 - 4x + 1| = p$ c) $|-x^2 - 10x - 20| = p$

Я 150. Określ, jak liczba rozwiązań równania zależy od wartości parametru m .

a) $|x^2 + 3x + 1| - |x^2 + 3x + 2| = m$ b) $|x^2 + 6x + 5| + |x^2 + 6x + 1| = m$

Я 151. Znajdź wartości parametru p , dla których równanie:

a) $x^4 + (p + 1)x^2 + 9 = 0$ ma cztery rozwiązania,

b) $x^4 + px^2 - p^2 + 4 = 0$ ma trzy rozwiązania.

Я 152. Niech $f(p)$ oznacza sumę różnych rozwiązań równania $y = \frac{1}{2}x^2 + (p - 1)x + 2$ dla danej wartości p . Narysuj wykres funkcji $y = f(p)$.

Я 153. Niech $f(p)$ oznacza liczbę punktów wspólnych wykresów funkcji opisanych wzorami $y = px^2 + 2x + 1$ oraz $y = 3x^2 + p + 2$ dla danej wartości p . Narysuj wykres funkcji $y = f(p)$.

Я 154. Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $(0, -1)$ i ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą $y = x^2$. Podaj współrzędne tego punktu.

Я 155. Oblicz, dla jakich wartości parametru p zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - (2p + 3)x + p^2 + 3p < 0$ jest przedział $(9; 12)$.

Я 156. a) Uzasadnij, że równanie $x^2 - bx + c = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie tylko wtedy, gdy parametry a i b spełniają warunki: $b > 0$, $b^2 > 4c$ i $c > 0$. W układzie współrzędnych, w którym oś odciętych jest osią b , a osią rzędnych jest oś c , zaznacz obszar, w którym współrzędne punktów spełniają te warunki.

b) Jakie warunki muszą spełniać parametry b i c , aby równanie $x^2 - bx + c = 0$ miało dwa różne rozwiązania mniejsze od 1? W układzie współrzędnych, w którym oś odciętych jest osią b , a osią rzędnych jest oś c , zaznacz obszar, w którym współrzędne punktów spełniają te warunki.

Я 157. Wykaż, że jeżeli liczby p_1, p_2, q_1, q_2 spełniają warunek $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$, to co najmniej jedno z równań: $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ lub $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ ma rozwiązania.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. Wzór funkcji kwadratowej $f(x) = 3 - 2x(5x + 4)$:

- A. nie może być przedstawiony w postaci kanonicznej,
- B. nie może być przedstawiony w postaci ogólnej,
- C. nie może być przedstawiony w postaci iloczynowej,
- D. można przedstawić w każdej z tych trzech postaci.

2. Liczby -3 i 5 są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = 4x^2 + bx + c$. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

- A. $f(-4) > 0$
- B. $f(5) = 0$
- C. $f(1) < f(2)$
- D. $f(4) > 0$

3. Która z poniższych funkcji ma wszystkie wartości dodatnie?

- A. $f(x) = (x + 1)^2 - 1$
- B. $f(x) = -(x + 1)^2 + 1$
- C. $f(x) = (x - 1)^2 + 1$
- D. $f(x) = -(x - 1)^2 - 1$

4. Wykresem której z podanych funkcji jest parabola o wierzchołku leżącym w III ćwiartce układu współrzędnych?

- A. $f(x) = 5(x + 7)(x + 1)$
- B. $f(x) = -6(x - 5)(x + 9)$
- C. $f(x) = 7(x - 6)(x - 4)$
- D. $f(x) = -9(x + 3)(x + 8)$

5. a) Przedstaw wzór funkcji $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$ w postaci kanonicznej oraz w postaci iloczynowej.

b) Rozwiąż nierówność $-5x^2 + 10x + 15 < 0$.

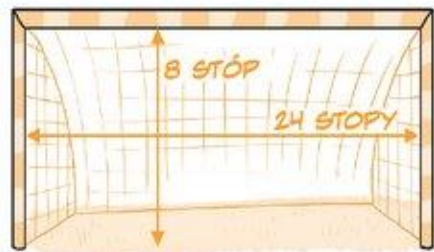
6. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w przedziale $\langle -5; 1 \rangle$.

- a) $f(x) = -(x + 3)^2 + 2$
- b) $y = 2x^2 - 8x + 5$

7. Znajdź wzór takiej funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, o której wiadomo, że $f(0) = f(6) = 7$.

8. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są wierzchołek paraboli o równaniu $y = -\frac{1}{2}(x - 3)(x + 5)$ oraz punkty przecięcia tej paraboli z osią x .

- 9.** Liczba p jest jedynym miejscem zerowym funkcji kwadratowej opisanej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Które z poniższych zdań jest fałszywe?
- A. $b = -2ap$
 B. wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f ma współrzędne $(p, 0)$
 C. $f(x) = a(x + p)^2$
 D. $4ac - b^2 = 0$
- 10.** Zbiorem wartości której z podanych funkcji jest przedział $(-\infty; 12)$?
- A. $f(x) = -7(x - 12)^2 - 8$ C. $f(x) = 6(x - 7)^2 + 12$
 B. $f(x) = -4x^2 + 8x + 12$ D. $f(x) = 3(x + 3)(1 - x)$
- 11.** Zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej $ax^2 + bx + c > 0$ jest przedział $(m; n)$. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
- A. Równanie $ax^2 + bx + c = 1$ ma co najmniej jedno rozwiązanie.
 B. Równanie $ax^2 + bx + c = -1$ ma dwa rozwiązania.
 C. Równanie $ax^2 + bx + c = 1000$ nie ma rozwiązań.
 D. Równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie.
- 12.** Funkcja $f(x) = (2m + 1)x^2 + mx + 1$ przyjmuje tylko wartości dodatnie dla:
- A. $m \in (-\infty; 4 - 2\sqrt{5})$ C. $m \in (4 - 2\sqrt{5}; 4 + 2\sqrt{5})$
 B. $m \in (-0,5; 4 - 2\sqrt{5})$ D. $m \in (4 + 2\sqrt{5}; +\infty)$
- 13.** Liczby p i r są miejscami zerowymi funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$, a liczba q spełnia warunek $p < q < r$. Wykaż, że $a \cdot f(q) < 0$.
- 14.** Znajdź zbiór wartości funkcji $f(x) = -2x^2 + 20x - 5$, gdy jej dziedziną jest:
- a) zbiór liczb rzeczywistych,
 b) przedział $\langle -5; 0 \rangle$.
- 15.** Na rysunku obok przedstawiono wymiary bramki do piłki nożnej wyrażone w stopach. Jakie wymiary powinna mieć bramka, której łączna długość słupków i poprzeczki byłaby taka sama jak bramki piłkarskiej, ale ograniczałaby możliwie największy obszar? Ile wynosi pole tego obszaru? Wyniki podaj w stopach i stopach kwadratowych.

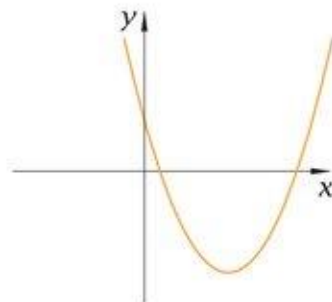


PRZED MATURĄ

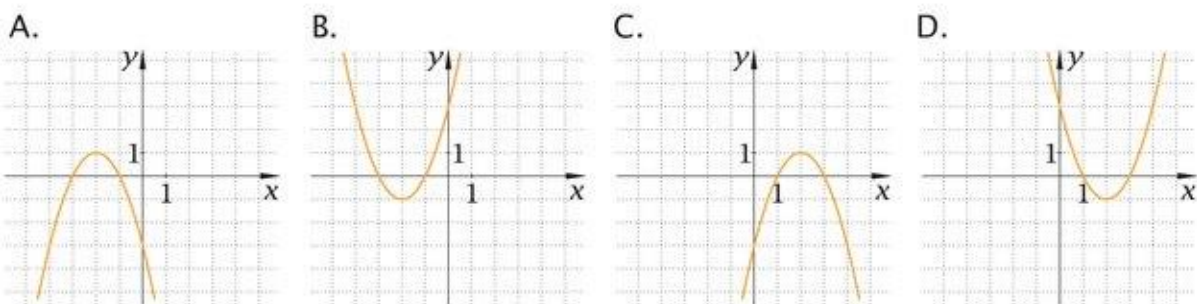
1. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$.

Współczynniki b i c spełniają warunki:

- A. $b < 0, c > 0$ C. $b > 0, c > 0$
 B. $b < 0, c < 0$ D. $b > 0, c < 0$



2. Na jednym z rysunków przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = -(x-1)(3-x)$. Wskaż ten rysunek.



3. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = -2(x+5)(x-11)$. Wskaż maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca.

- A. $(-\infty; 3)$ B. $(-\infty; 5)$ C. $(-\infty; 11)$ D. $(6; +\infty)$

4. Największą wartością funkcji $y = -(x-2)^2 + 4$ w przedziale $(3; 5)$ jest:

- A. 4 B. 3 C. 0 D. 5

5. Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 2x - 11$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt o współrzędnych:

- A. $(-2, -3)$ B. $(-2, -12)$ C. $(1, -8)$ D. $(1, -12)$

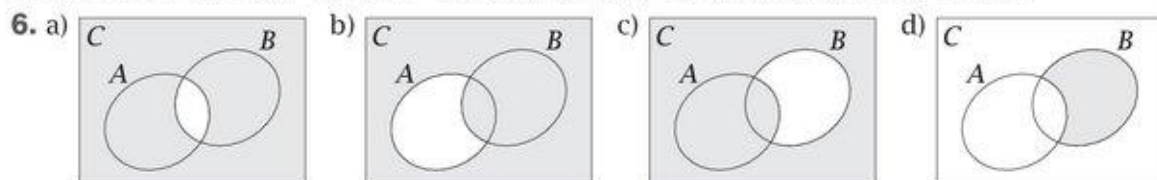
6. Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$ jest parabola, na której leży punkt $A = (0, -5)$. Oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x = 7$. Oblicz wartości współczynników b i c .

7. Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > (x+3)(x-2)$.

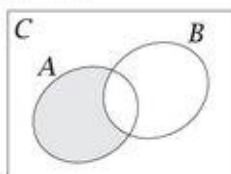
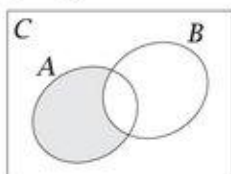
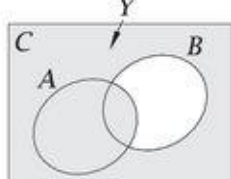
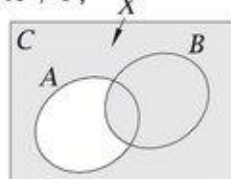
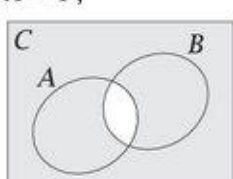
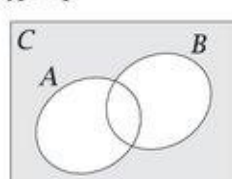
- Я 8.** Liczby -1 i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f . Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.
- Я 9.** Funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = -1$ i $x_2 = 12$. Oblicz największą wartość tej funkcji.
- Я 10.** Rozwiąż nierówność $|x^2 - 3x + 2| \geq |x - 1|$.
- Я 11.** Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność $20x^2 - 24mx + 18m^2 \geq 4x + 12m - 5$.
- Я 12.** Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$.
- Я 13.** Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie
- $$x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$$
- ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału $(-\infty; 3)$.
- Я 14.** Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie
- $$4x^2 - 6mx + (2m + 3)(m - 3) = 0$$
- ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 , przy czym $x_1 < x_2$, spełniające warunek:
- $$(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$$
- Я 15.** Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = x^2 + 2(m + 1)x + 6m + 1$. Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m , dla których ten trójmian ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 tego samego znaku, spełniające warunek: $|x_1 - x_2| < 3$.

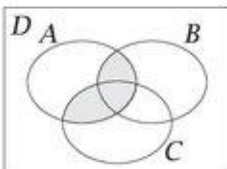
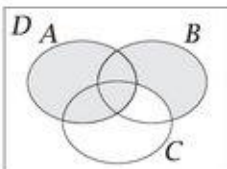
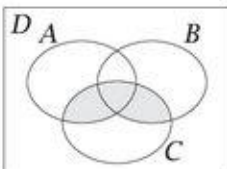
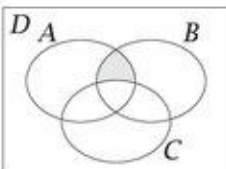
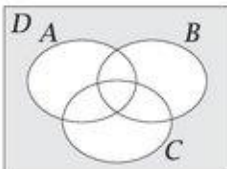
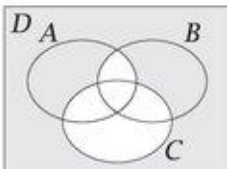
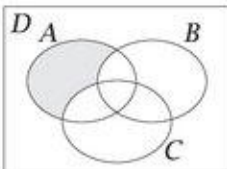
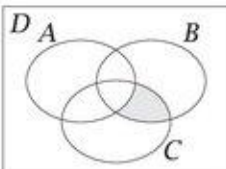
ZBIORY

1. a) $5 \in A$, $\{1, 4\} \subset A$, b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$, $3\frac{2}{7} \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$
 3. a) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, b) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, c) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$,
 d) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 4. a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, b) $\{2, 4\}$, c) $\{1, 3, 5\}$, d) $\{6, 8\}$, e) $\emptyset$, f) $\{0, 2, 4, 5\}$, g) $\{5\}$,
 h) $\{0, 1, 3, 5\}$
 5. a) prawda, b) fałsz, c) fałsz, d) fałsz, e) fałsz, f) fałsz, g) prawda, h) fałsz



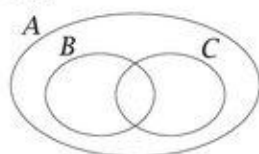
7. a) np. $A \cup C$, b) np. $B \setminus A$, c) np. $C \setminus B$, d) np. $A \cap B$, e) np. $B \cap C$, f) $A \cup B$, g) np. $C \setminus A$,
 h) np. $B \setminus C$
 9. a) np. 0, 1, 8, 125, 1000, b) np. -3, 0, $\frac{1}{2}$, 5, $10\frac{1}{2}$, c) np. 2, $2\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{6}$, $10\frac{1}{10}$, $28\frac{1}{28}$, d) np.
 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{17}{18}$
 10. a) 9 elementów, b) 2 elementy, c) 7 elementów, d) 21 elementów
 11. a) nie, b) tak — 0 elementów, c) tak — 4 elementy, d) tak — 7 elementów, e) tak —
 4 elementy, f) tak — 7 elementów, g) tak — 5 elementów, h) tak — 0 elementów
 12. $\mathbb{Z} \cap C$: 1 element, $A \cap B$: 24 elementy, $A \cap B \cap \mathbb{N}$: 4 elementy, $(A \cap \mathbb{N}) \cup (B \cap D)$: 9 elementów,
 $\mathbb{N} \cap C$: 1 element, $A \cap (B \setminus \mathbb{N})$: 20 elementów
 13. a) tak, b) nie, c) nie, d) tak
 14. a) $X = Y$, b) $X = Y$, c) $X = Y = \emptyset$,

d) $X \neq Y$,e) $X = Y$,f) $X = Y$ 

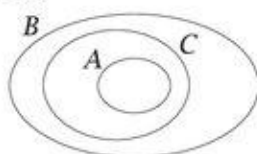
15. a)  b)  c)  d) 
 e)  f)  g)  h) 

16. a) np. $A \setminus (B \cup C)$, b) np. $(A \cup B \cup C) \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)]$, c) np. $[(A \cap B) \cup (B \cap C)] \setminus (A \cap C)$,
 d) np. $(A \cup B \cup C) \setminus B$, e) np. $(A \cap B) \cup (C \setminus B)$, f) np. $(A \setminus B) \cup [(B \setminus A) \cap (B \setminus C)]$

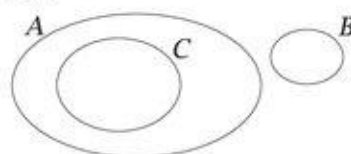
17. a) np.



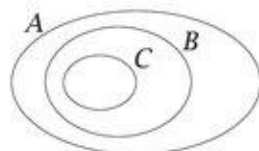
b) np.



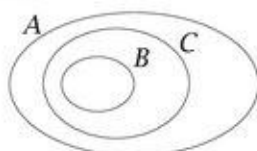
c) np.



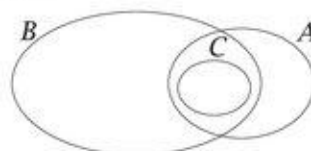
d) np.



e) np.



f) np.



18. a) Wskazówka. Zauważ, że $A \subset B$. b) Wskazówka. Zauważ, że $B \subset A$. c), d), f) Wskazówka. Zauważ, że $A = B$. e) Wskazówka. Zauważ, że $B = \emptyset$.

19. a) III, b) II i IV

20. $A \subset \mathbb{Q}$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{Z}$, $B \subset \mathbb{Q}$, $B \subset \mathbb{R}$, $C \subset \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{Z}$, $D \subset \mathbb{Q}$, $D \subset \mathbb{R}$

21. a) 20, 30, b) 0, 10, c) 0, 10, d) 10, 20

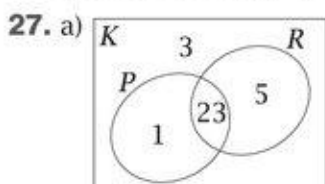
22. a) np. $A \cup (C \setminus B)$, b) np. $(A \cup C) \setminus B$, c) np. $A \cup (B \setminus C)$, d) np. $(B \cap C) \setminus A$,
e) np. $A \cup (B \cap C)$, f) np. $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B)$, g) np. $(C \setminus B) \cup (B \setminus C)$, h) np. $(A \cap B) \setminus C$

23. a) zbiór B : $\emptyset$, B ; zbiór C : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, C ; zbiór D : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, D ,
b) 2^n podzbiorów

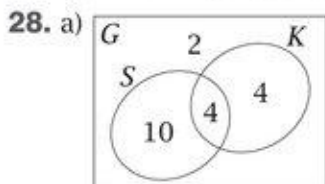
24. a) $T_3 \cap P$, $T_3 \setminus O$, $O \cap P$, b) ① $T \setminus P$, ② $O \cap T_2$, ③ $O \cap P$, ④ $P \setminus T_2$, c) znakiem $\subset$: ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥; znakiem $=$: ①, ⑤

25. a) 3 elementy; 2 elementy; 5 elementów, b) 7 elementów; 4 elementy; 1 element,
c) 585 elementów; 15 elementów; 485 elementów, d) 75 elementów; 90 elementów

26. a) 20 elementów, 35 elementów, b) 0 elementów, 5 elementów, c) 5 elementów,
20 elementów, d) 0 elementów, 10 elementów, e) 15 elementów, 30 elementów,
f) 0 elementów, 5 elementów



b) $A = R \setminus P$, 5 elementów; $B = K \setminus (P \cup R)$, 3 elementy; $C = (P \cup R) \setminus (P \cap R)$, 6 elementów



b) $A = S \cup K$, 18 elementów; $B = K \setminus S$, 4 elementy; $C = (S \cup K) \setminus (S \cap K)$, 14 elementów

29. Ia: $F \cup N$ — 32 elementy; $F \setminus N$ — 12 elementów, Ib: $F \cup N$ — 27 elementów; $F \setminus N$ — 5 elementów, Ic: $F \cup N$ — 25 elementów; $F \setminus N$ — 5 elementów

30. a) 4, b) 18, c) 4, d) 8, e) 8, f) 15

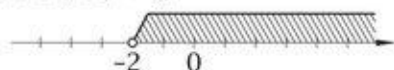
31. a) Nie, część z tych osób może lubić obie te pory roku. b) 708 ankietowanych, 582 ankietowanych Wskazówka. Zauważ, że zbiór $W \cap L$ ma najwięcej elementów, gdy $W \subset L$, a najmniej, gdy do sumy tych zbiorów należą wszyscy ankietowani. c) 427 ankietowanych Wskazówka. Zauważ, że zbiór $W \setminus Z$ ma najmniej elementów, gdy $Z \subset W$.

d) 613 ankietowanych Wskazówka. Zauważ, że zbiór $J \cup Z$ ma najwięcej elementów, gdy $J \cap Z = \emptyset$, czyli gdy zbiory J i Z są rozłączne. e) 281 ankietowanych Wskazówka. Zauważ, że zbiór $W \cap L \cap J \cap Z$ może mieć co najwyżej tyle elementów, ile zawiera się w zbiorze o najmniejszej liczbie elementów, czyli gdy $W \cap L \cap J \cap Z = Z$. f) 11 ankietowanych Wskazówka. Zauważ, że zbiór $W \cup L \cup J \cup Z$ liczy 1000 elementów. Rozważana różnica zbiorów $(W \cup L \cup J \cup Z) \setminus (W \cup Z)$ liczy najmniej elementów, gdy zbiór $W \cup Z$ zawiera możliwie najwięcej elementów (czyli gdy zbiory W i Z są rozłączne).

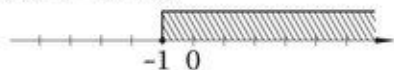
32. a) tak, b) tak, c) tak, d) tak, e) tak, f) nie

33. a) 0, 6, 12, 18, b) 0, 8, 16, c) 5, 15, d) 0, 7, 9, 14, 18, e) 3, 4, 6, 8, 9, 15, 16, 18, f) 2, 5, 6, 10, 14, 15, 18

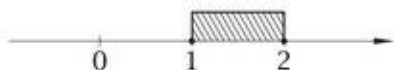
34. a) $x \in (-2; +\infty)$,



c) $x \in (-1; +\infty)$,



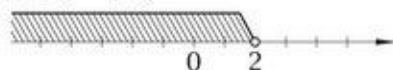
e) $x \in (1; 2)$,



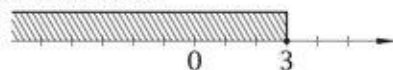
g) $x \in (-5; 2)$,



b) $x \in (-\infty; 2)$,



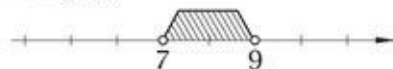
d) $x \in (-\infty; 3)$,



f) $x \in (-3; -2)$,



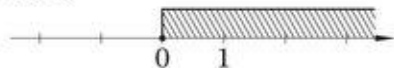
h) $x \in (7; 9)$



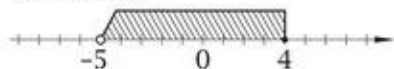
35. a) $x < 5$,



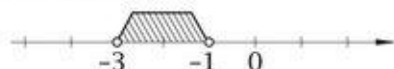
c) $x \geq 0$,



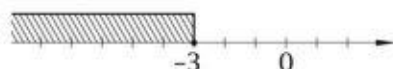
e) $-5 < x \leq 4$,



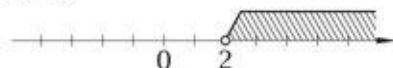
g) $-3 < x < -1$,



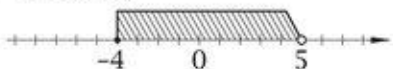
b) $x \leq -3$,



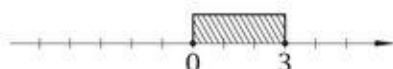
d) $x > 2$,



f) $-4 \leq x < 5$,



h) $0 \leq x \leq 3$



36. a) $(-10; 15)$, $-10 < x < 15$, b) $(15; 30)$, $15 < x < 30$, c) $(-0,1; 0,15)$, $-0,1 < x < 0,15$, d) $(-\frac{1}{6}; \frac{2}{3})$, $-\frac{1}{6} < x < \frac{2}{3}$, e) $(-\infty; -0,5)$, $x < -0,5$, f) $(0,08; +\infty)$, $x > 0,08$, g) $(-14; +\infty)$, $x > -14$, h) $(-\infty; 0)$, $x \leq 0$

37. a) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$, b) $(-\infty; -0,24) \cup (-0,2; -0,06)$, c) $(-25; -15) \cup (-10; 10) \cup (15; +\infty)$, d) $(0,1; 0,15) \cup (0,175; 0,25) \cup (0,275; +\infty)$

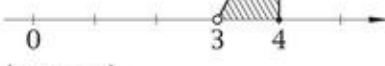
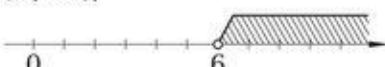
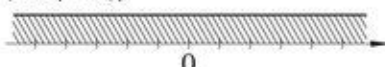
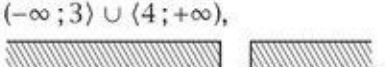
38. a) $(-1; 5)$, b) $(-5; -4)$, c) $(2; 6)$, d) $(-7; -4)$, e) $(-6; -5)$, f) $(3; 9)$, g) $(-3; 4)$, h) $(3; 7)$, i) $(-2; 4)$, j) $(2; 4)$, k) $(-7; -1)$, l) $(-3; 6)$

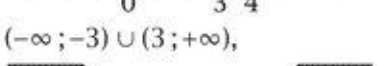
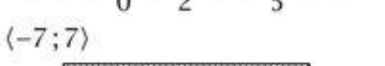
39. a) $(-9; 7)$, b) $(-2; 8)$, c) $(-5; 6)$, d) $(-7; 5)$, e) $(-\infty; 9)$, f) $(-7; +\infty)$, g) $(-\infty; 4)$, h) $(3; +\infty)$, i) $(-2; 4)$, j) $(-7; 5)$, k) $(-1; +\infty)$, l) $(-\infty; -6)$

40. a) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty) = \mathbb{R} \setminus (-3; 2)$, b) $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty) = \mathbb{R} \setminus (1; 4)$, c) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty) = \mathbb{R} \setminus (-5; -1)$, d) $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty) = \mathbb{R} \setminus (0; 3)$

41. a) $(-\infty; 5)$, b) $(7; +\infty)$, c) $(-\infty; -9)$, d) $(-13; +\infty)$, e) $(-\infty; 3) \cup (8; +\infty)$, f) $(-\infty; 3) \cup (15; +\infty)$, g) $(-\infty; -7) \cup (19; +\infty)$, h) $(-\infty; -12) \cup (-5; +\infty)$, i) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (4; +\infty)$

42. a) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$, b) $(-\infty; -7) \cup (-7; +\infty)$, c) $(-\infty; 2) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$,
 d) $(-\infty; -9) \cup (-9; -1) \cup (-1; +\infty)$, e) $(-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 6) \cup (6; +\infty)$,
 f) $(-\infty; -8) \cup (-8; -2) \cup (-2; 3) \cup (3; 9) \cup (9; +\infty)$
43. a) $(-8; -4)$, b) $(-3; 2)$, c) $(-4; -3)$, d) $(2; 8)$, e) $(8; 14) \cup (15; 18)$, f) $(-3; -2) \cup (2; 20)$,
 g) $(-\infty; 2) \cup (5; 7)$, h) $(-8; -7) \cup (-6; +\infty)$, i) $(-3; 2)$, j) $(6; 9)$, k) $(-\infty; -6)$, l) $(3; +\infty)$
44. a) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$,

 b) $(3; 4)$,

 c) $(6; +\infty)$,

 d) $(-\infty; +\infty)$,

 e) $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$,

 f) $(2; 5)$,

 g) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$,

 h) $(-7; 7)$,

45. a) -1, 0, 1, 2, 3, b) 5, 6, 7, 8, c) nie ma takiej liczby, d) 0, 1, e) 1, 2, 3, 4, f) -2, -1, 0, 1, 2
46. a) $(\pi - 3,14; 1,41)$, b) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, c) $\left(\frac{3}{\pi}; 30\pi\right)$, d) $(2\sqrt{2}; 2\sqrt{5})$, e) $(\sqrt{2} - \pi; 0)$,
 f) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
47. a) $(-\infty; 4) \cup (4; 6) \cup (9; +\infty)$, b) $(-\infty; -2) \cup (-2; 3) \cup (7; +\infty)$,
 c) $(-\infty; -7) \cup (-7; -3) \cup (0; 5) \cup (5; +\infty)$, d) $(-\infty; -4) \cup (-1; 3) \cup (5; +\infty)$
48. a) $(-3; 0) \cup (0; +\infty)$, b) $(-\infty; -7) \cup (-7; 5)$, c) $(-6; -2) \cup (-2; 4) \cup (4; +\infty)$,
 d) $(-\infty; -1) \cup (-1; 7) \cup (7; 9)$, e) $(-8; -7) \cup (-7; 3) \cup (3; 5)$, f) $(-2; 1) \cup (1; 5)$
49. a) 17, b) 8, c) 10, d) 57
50. $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \emptyset$, $C = \{\dots, -5, -4, -3\}$, $D = \{1, 2, 3, \dots, 49, 50\}$, $E = \left\{\frac{3}{2}\right\}$,
 $F = \{\pi, \pi + 1, \pi + 2, \pi + 3, \pi + 4, \pi + 5, \pi + 6\}$
51. a) tak — 1001 elementów, b) nie, c) nie, d) tak — 0 elementów, e) tak — 1 element, f) nie
52. $A = D$; $A = E$; $A = G$; $D = G$; $B = C$; $B = F$; $B = H$; $D = E$; $C = F$; $C = H$; $E = G$; $F = H$
53. a) $(c; -d)$, b) $(-d; -c)$, c) $(-\infty; d) \cup (-a; +\infty)$, d) $(-\infty; c^4) \cup (c^4; c^2) \cup (c^2; +\infty)$,
 e) $(a; d^3) \cup (d^3; d^5) \cup (d^5; 0)$, f) $(b^3; d) \cup (c^2; a^2)$, g) $(a; -1)$, h) $\{d - c\}$, i) $\left\langle \frac{1}{a}; -2b \right\rangle$
54. a) $(5,5; 6,5)$, b) $(4,45; 4,55)$, c) $(0,195; 0,205)$, d) $(9500; 10\,500)$
55. a) $(-5; 5)$, b) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$, c) $(-10; 10)$, d) $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$, e) $(0; 16)$,
 f) $(49; +\infty)$
56. a) $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, b) $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. C

2. B

3. C

4. B

5. a) I: $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, II: $\left\langle 0; \frac{5}{8} \right\rangle$, III: $(0,002; 0,01)$, IV: $\left\langle -\frac{3\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\rangle$, b) I: $(-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$,
 II: $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{5}{8}; +\infty\right)$, III: $(-\infty; 0,002) \cup (0,01; +\infty)$, IV: $(-\infty; -\frac{3\sqrt{2}}{4}) \cup \left\langle \frac{\sqrt{2}}{4}; +\infty \right\rangle$

6. a) $(-2; 6)$, b) $(-1; 5)$, c) $(-2; -1)$, d) $(5; 6)$

7. C

8. D

9. B

10. D

11. a) $(-\infty; -2) \cup (5; 7)$, b) $(-4; -2)$, c) $(3; 9) \cup (9; 10)$

12. a) 7, b) 13, c) 21

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

1. a) $x(y-3)$, b) $2x+y+3$, c) $(x+y)^2$, d) $\frac{1}{2}\sqrt{y}$, e) $-\frac{x}{y}$, f) $(x-5)^2$, g) y^2-3 , h) $\frac{y+7}{7y}$,
i) $(x-3)^3$, j) $\left(x+\frac{1}{y}\right)^3$

2. a) $a+2b$, b) $\frac{1}{2}(c-a)$, c) $\frac{a^2}{16}$, d) $\frac{2P}{b}+2b$, e) $\frac{s^2}{24}$, f) $\frac{P\sqrt{6P}}{36}$

3. a) $201x$ cm, b) $1,001n$ km, c) $\left(62x+\frac{1}{12}\right)$ min, d) $\left(\frac{25}{24}x+\frac{1}{96}\right)$ doby

4. a) $(120x-500)$ zł, b) $(5x+10)$ zł, c) Karolina: $x-2$, Zosia: $x-5$, d) $4x+3$

5. a) -8 , b) 8 , c) $\sqrt{3}-4$, d) 4 , e) $1\frac{2}{3}$, f) 106 , g) $1,4$, h) $-\frac{5}{6}$

6. a) $-2a+2$, b) $3a-41$, c) $7a$, d) $3a^2+2a$, e) $8x^2-34x+29$, f) $15x^3-44x^2+31x-6$,
g) x^2+4x-1 , h) $4-2k$, i) x , j) $3\frac{2}{3}y-x$, k) $-\frac{3}{2}k+\frac{19}{12}$, l) $6x^2-3xy+4x$

7. a) $6n-9$, b) $4n^2+12n+8$, c) $30n+6$, d) $20n+42$, e) $4n+5$, f) $1-6n$, g) $32n^2+16n-6$

8. a) $49x^2-9$; 383 , b) $10x-3y-1$; 35 , c) $32y+10$; 2 , d) $-2xy^2-3x^2-10y^2$; -139 ,
e) $-2x^2+2y^2$; 0

9. a) 1 , b) 3 , c) 5 , d) 10

10. a) $12t$, b) $\frac{60g}{t}$

11. a) $\frac{y-0,5p}{0,3}$, b) $\left(\frac{10}{w}+\frac{m-10}{w+5}\right)$ godzin, c) $(100a+30)(b+30)$ cm²,
d) $(1500-2a)(900-2a)(600-a)$ mm³ lub $(1500-2a)(900-a)(600-2a)$ mm³ lub
 $(1500-a)(900-2a)(600-2a)$ mm³, e) $\frac{20-5t}{t+1,5}$ kg, f) kwadrat; o 4 cm²

12. a) $10n$, b) $10n+1$, c) $n+1000$, d) $10n+10001$, e) $100n+25$

13. a) $7(x+y)$, b) $6(m-n)$, c) $5(3s+t)$, d) $3(p-4r)$, e) $4(2a+5b)$, f) $7(3c-2d)$, g) $a(b+c)$,
h) $x(3-y)$, i) $2m(n+3)$, j) $5v(5u-2)$, k) $4p(3p+2)$, l) $3a(3a-4)$

14. a) $w=3(4xy-x)=x(12y-3)=3x(4y-1)=-3x(-4y+1)$,

b) $w=5(-6x^2+4x)=x(-30x+20)=-10(3x^2-2x)=10x(-3x+2)$,

c) $w=2(3x^2+5x^3)=x(6x+10x^2)=x^2(6+10x)=2x^2(3+5x)$,

d) $w=4(4x^3-3x)=x(16x^2-12)=2x(8x^2-6)=-4x(-4x^2+3)$,

e) $w=-5(-2xy+x^2)=10\left(xy-\frac{1}{2}x^2\right)=x(10y-5x)=5x(2y-x)$,

f) $w=-3(-6xy^2+10xy)=y(18xy-30x)=xy(18y-30)=6xy(3y-5)$,

g) $w=15(4x^3-2x^2+x)=x(60x^2-30x+15)=-5x(-12x^2+6x-3)=15x(4x^2-2x+1)$

15. a) $x(4x-20)$, b) $4(x^2-5x)$, c) $4x(x-5)$, d) $20\left(\frac{1}{5}x^2-x\right)$, e) $-4(-x^2+5x)$, f) $-4x(-x+5)$,
g) $-20\left(-\frac{1}{5}x^2+x\right)$, h) $-20x\left(-\frac{1}{5}x+1\right)$

16. a) $x(-24x^2-6x+12)$, b) $6(-4x^3-x^2+2x)$, c) $3x(-8x^2-2x+4)$, d) $12\left(-2x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right)$,
e) $-24\left(x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\right)$, f) $-4x\left(6x^2+\frac{3}{2}x-3\right)$, g) $-12x\left(2x^2+\frac{1}{2}x-1\right)$, h) $24x\left(-x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)$

17. a) $dziena(wan+l)$, b) $en^2(dziwa^2+sy)$, c) $ziewan(dna+w)$, d) $iewn^2a(dza+y skpo^2)$,
e) $wa^2n^2(dzie+1)$, f) $dzien^2a(wa+1)$

18. a) $5(a+2b-3c)$, b) $3(4x-y-9z)$, c) $u(3w+7v+2)$, d) $x(12+5y+8x)$, e) $5a(a+3+4a^2)$,
f) $3p(5-2p^2-p)$, g) $a(5+0,7a+10bc)$, h) $-3k(1+2k^2+6lm)$, i) $10x^2(x^2+5-10x)$

19. a) $w = 3(-5x^3 + 3x^2 + x) = -3(5x^3 - 3x^2 - x) = 3x(-5x^2 + 3x + 1)$,
 b) $w = 6(2x - 5x^2 - 3x^3) = -2(-6x + 15x^2 + 9x^3) = 6x(2 - 5x - 3x^2)$,
 c) $w = 2(3xyz^2 + 2xyz - 4xy) = 4x\left(\frac{3}{2}yz^2 + yz - 2y\right) = 4xy\left(\frac{3}{2}z^2 + z - 2\right)$,
 d) $w = 5(4x^3y - x^2y + 5xy) = xy(20x^2 - 5x + 25) = 5xy(4x^2 - x + 5)$,
 e) $w = 4(-5x^2y^2 - 4x^2y + 2xy^2) = xy(-20xy - 16x + 8y) = -4xy(5xy + 4x - 2y)$,
 f) $w = -15(-xy^2z + 2x^2y^2 + xy^2) = 15x(y^2z - 2xy^2 - y^2) = 15xy^2(z - 2x - 1)$
20. np. a) $8x(x - 2)$, b) $2x^3(1 - 3x^4)$, c) $6xy(2x - 3y)$, d) $5x(x^2y + 6y + 3x)$, e) $xy(x + y + xy)$,
 f) $a^2b^2(5b - 3 - 4a)$
21. a) $\frac{2x}{7}$, b) $\frac{4(x-3)}{2x+1}$, c) $-\frac{4}{x}$, d) $\frac{x}{2}$, e) $-xyz$, f) $\frac{y^2-2y+3}{y-1}$
22. a) $10(2x - 3)$, b) $5a(a + 3)$, c) $x^2(2x + 3)$, d) 1 , e) $-a(3a^2 + 2)$, f) $-8a^2(a - 2)$
23. a) $(4 + b)(a + 5)$, b) $(a - 5)(7 - b)$, c) $(b - 3)(a - c)$, d) $(a - 2)(8 - 2b - c)$, e) $a(a - b)(a + b)$,
 f) $a(a - 1)(ab - 1)$
24. a) $(x + y)(z + 5)$, b) $(y + 2t)(5x + 2b)$, c) $(x + 1)(x^2 + 3)$, d) $(x + y)(7x + 2)$, e) $(y - 5)(2x^2 - 3)$,
 f) $(2a - 1)(b - 2)$, g) $(x - 1)(2a + 1)$, h) $(y - 2)(3x - 1)$, i) $(2 - y)(x - 5)$, j) $(y + 2)(4x - 6)$
25. a) $\frac{3}{4}(a + b)$, b) $4 - x$, c) $\frac{2x-5z}{z+1}$
26. a) $2, 2$, b) $5, a^2$, c) $a, 3$, d) $6, a^2, 5a$, e) $3ab, 2ab$, f) $-5ab, 3, 3a$
27. a) $2\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right)$, b) $3\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x\right)$, c) $\frac{1}{2}(2x^2 - 12x)$, d) $\frac{1}{3}x(3x - 18)$, e) $10x\left(\frac{1}{10}x - \frac{6}{10}\right)$,
 f) $-6x\left(-\frac{1}{6}x + 1\right)$
28. x, y, z — ceny odpowiednio ołówka, długopisu i flamastra; komplet przecenionych przyborów kosztuje $0,9x + 0,9y + 0,9z = 0,9(x + y + z)$, a komplet o 30% tańszy — $0,7(x + y + z)$
30. a), b) Wskazówka. Przedstaw liczbę dwucyfrową w postaci $10a + b$. c) 6 liczb; np. przez liczbę 222
31. b) $\frac{5}{2} + 50$, c) $\frac{5}{2} + 25$
32. a) $(a + 2)(a + 1)$, b) $(a + 1)(a + 8)$, c) $(2a + 1)(a + 1)$, d) $(6a + 5)(a + 1)$, e) $(a + 2)(a + 4)$,
 f) $a(3a + 2)(a + 1)$
33. a) $\frac{a+4}{a+3}$, b) $\frac{4a+3}{3a+4}$ Wskazówka. Skorzystaj ze sposobu opisanego w poprzednim zadaniu.
34. a) $x^2 + 10xy + 25y^2$, b) $9a^2 - 3ab + \frac{b^2}{4}$, c) $4n^2 + 4n + 1$, d) $9k^2 + 12kw + 4w^2$, e) $\frac{1}{16}p^2 - p + 4$,
 f) $2a^2 - 2a\sqrt{6} + 3$, g) $36x^2 - 49y^2$, h) $\frac{1}{9}w^2 - 3$, i) $a^2 - 2\sqrt{2}ab + 2b^2$, j) $4y^2 + 4y\sqrt{x} + x$,
 k) $\frac{1}{4}a^2 - 3b^2$, l) $\frac{4a^2}{9} - \frac{4}{9a^2}$
35. a) $-8x - 8$, b) $2x^2 - 5x + 2$, c) $4 + 2\sqrt{2}p$, d) $-x^2 - y^2 - 2x$, e) $4l^2 + 12kl - 22$, f) $2xy + 2xz + 2yz$
36. a) $(a - 1)^2$, b) $(x + 2)^2$, c) $(c + 6)^2$, d) $(y - 10)^2$, e) $(3x + 2)^2$, f) $(5x - 1)^2$
37. a) $81a^4 - 10000b^4$, b) $x^8 - y^4$, c) $m^2 + 2mn + n^2 - k^2 - 2kl - l^2$, d) $25p^2 + 30pq + 9q^2 - r^2$,
 e) $\frac{1}{4}f^2 - 4c^2 - 4cd - d^2$, f) $\frac{4}{9}u^2 - \frac{1}{4}w^2 + \frac{1}{3}wv - \frac{1}{9}v^2$
38. a) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$, b) $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$, c) $p^3 - 3p^2\sqrt{3} + 9p - 3\sqrt{3}$, d) $x^6 - 6x^4y + 12x^2y^2 - 8y^3$,
 e) $a^3 + a^2b\sqrt{3} + ab^2 + \frac{b^3\sqrt{3}}{9}$, f) $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2 + 3b^2 + 6ab + 3a + 3b + 1$
39. a) $(2k + \sqrt{3})^2$, b) $(u\sqrt{3} - w\sqrt{2})^2$, c) $\left(\frac{1}{7}a + \frac{1}{5}\right)^2$, d) $(0,1x^2 - 1,1)^2$, e) $\left(\frac{3}{2}pq^3 + \frac{1}{2}q^3\right)^2$,
 f) $(\sqrt{5}u - 2\sqrt{15}v)^2$, g) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{mn} - \frac{\sqrt{3}}{2}n\sqrt{n}\right)^2$, h) $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}r^2st^5 + \frac{\sqrt{3}}{2}s^2t\right)^2$
40. a) $2x^3 + 27x^2 + 123x + 189$, b) $24n^2 + 48n + 26$, c) $24x^3 - 3y^3 + 4x^2 - y^2 - 36x^2y + 18xy^2$,
 d) $-27x^3 + 108x^2y + 10x^2 - 144xy^2 - 3y^2 - 13xy + 64y^3$, e) $\frac{125}{4}n^3 + \frac{150}{4}n^2 + \frac{75}{4}n + \frac{7}{2}$,
 f) $16x^4 - 5x^3 - 3x^2 + x$
41. a) $(u + v)^3$, b) $(2a + b)^3$, c) $(10 - 3xy)^2$, d) $(5m^2u - 2m^3)^3$
42. a) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16)$, b) $(3ab - 2)(3a^2b^2 + 6ab + 4)$, c) $(\sqrt{2}x - 1)(2x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

43. a) $(2y+5)(4y^2-10y+25)$, b) $(6-3xy)(36+18xy+9x^2y^2)$, c) $\left(\frac{a}{5} + \sqrt[3]{5}\right)\left(\frac{a^2}{25} - \frac{a\sqrt[3]{5}}{5} + \sqrt[3]{25}\right)$,
 d) $(\sqrt{2}a-b)(8a^6+4\sqrt{2}a^5b+4a^4b^2+2\sqrt{2}a^3b^3+2a^2b^4+\sqrt{2}ab^5+b^6)$, e) $(4y^2-10) \cdot (16y^4+40y^2+100)$ lub $(2y-\sqrt[3]{10})(32y^5+16\sqrt[3]{10}y^4+8\sqrt[3]{100}y^3+40y^2+20\sqrt[3]{10}y+10\sqrt[3]{100})$
 lub $(8y^3-10\sqrt[3]{10})(8y^3+10\sqrt[3]{10})$, f) $(3a-2)(81a^4+54a^3+36a^2+24a+16)$
44. Wskazówka. Wyrażenia, o których mowa w zadaniu, przedstaw w postaci iloczynów.
45. Wskazówka. Przedstaw liczbę dwucyfrową w postaci $10a+b$.
47. a) $(a-3b)(a-2b)$, b) $(x-y)(3x+2y)$, c) $(a+4b)(a-3b)$ Wskazówka. Skorzystaj ze sposobu podanego w zadaniu 32 na s. 31.
49. c) $a, x, c \neq 0, x = \frac{t+1}{ca}$, d) $a \neq 0, x = -\frac{at}{3}$, e) $p \neq -1, x = 2-p(p+1)$, f) $c \neq -7, x = \frac{b(c+7)-c}{2}$,
 g) $x \neq -1, m \neq 0, x = \frac{n-m}{m}$, h) $b \neq 0, x = \frac{a-kb}{2}$, i) $t \neq -1, x = -\frac{s}{3}$
50. $t = \frac{w-10b}{s}$; $w = st + 10b$; $b = \frac{w-st}{10}$
51. a) $b \neq 1, x = \frac{c-a}{b-1}$, b) $m \neq 0, m \neq 1, x = \frac{2mt}{m-1}$, c) $y \neq 1, x \neq 2, x = \frac{8z}{y-1} + 2$, d) $a \neq -y$,
 $a \neq 0, x \neq 0, y \neq 0, x = \frac{ay}{a+y}$, e) $x \neq z\sqrt{\frac{3}{2}}, y \neq -\sqrt{5}, x = \frac{2+zy\sqrt{3}+z\sqrt{15}}{y\sqrt{2}+\sqrt{10}}$, f) $z \geq 0, \sqrt{z} \neq y$,
 $x \neq \frac{2}{3}z, x = \frac{4}{\sqrt{z}-y} + \frac{2}{3}z$
52. a) $s \neq 0, r \neq 0, l = \frac{p-sr^2}{sr}$; $l \neq -r, r \neq 0, s = \frac{p}{rl+r^2}$, b) $\sqrt{2}c \neq d, b = \frac{a}{\sqrt{2}c-d}$; $b \neq 0$,
 $d = \frac{\sqrt{2}bc-a}{b}$, c) $h \neq 0, b = \frac{2p}{h} - a$; $a \neq -b, h = \frac{2p}{a+b}$, d) $S \neq 0, q = \frac{S-a_1}{S}$, e) $r \neq 0$,
 $l = \frac{p-\pi r^2}{\pi r}$, f) $n \neq 1, r = \frac{a_n-a_1}{n-1}$; $r \neq 0, n = \frac{a_n-a_1}{r} + 1$, g) $n \neq 0, a_1 = \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}(n-1)r$; $n \neq 0$,
 $n \neq 1, r = \frac{2S_n-2na_1}{n(n-1)}$, h) $a(c-q) \geq 0, c \neq q, a \neq 0, a = \frac{b^2}{4(c-q)}$; $b = 2\sqrt{a(c-q)}$, i) $a \neq c^2$,
 $2x \neq d, a = \frac{4\pi}{2x-d} + c^2$; $a \neq c^2, d = 2x - \frac{4\pi}{a-c^2}$, j) $f \neq 2\pi^2, a \neq b, a = \frac{2fb}{2f-4\pi^2}$; $a \neq b$,
 $f \neq 0, b = a - \frac{2\pi^2 a}{f}$, k) $s \geq 5b-2, a = \sqrt{\frac{s-5b+2}{3}}$ lub $a = -\sqrt{\frac{s-5b+2}{3}}$, l) $g \neq 0, m \neq 0$,
 $h = \frac{2E-mv^2}{2mg}$; $\frac{v^2}{2} \neq -gh, m = \frac{E}{\frac{v^2}{2}+gh}$
53. a) $h = \frac{v^2}{2g}$, b) $v = \sqrt{2gh}$
54. $a = 0$ lub $a+b+c = 1$
55. $a = 2b$ ($a \neq 0, b \neq 0$) Wskazówka. Podaną nierówność można przekształcić do postaci $a^2 - 4ab + 4b^2 = 0$. Skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia.
56. a) $t = x^3y^3$, b) $t = 2x+5y-2$, c) $x \neq 0, y \neq 0, t = \frac{x^2}{y}$, d) $x-y \neq 1, t = \frac{x^2-y^2}{1-x+y}$
57. a) $xy = \frac{3}{2}$ ($y \neq 0$), b) $xy = \sqrt{2}-1$ ($y \neq 0$), c) $xy = \frac{1}{2}$, d) $xy = 4$ ($x \neq y$)
58. a) $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$ ($a \neq 0, b \neq 0$), b) $ab = 3$ ($a \neq -1$) Wskazówka. Lewą stronę nierówności można przekształcić do postaci $ab(a+1)^2$. c) $a+b = 1$ ($a \neq 0, b \neq 0$), d) $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$ ($a \neq 0, a \neq -b$)
61. g) Wskazówka. Kwadrat różnicy dwóch liczb podzielnych przez 8 przedstaw jako iloczyn liczby 64 oraz liczby całkowitej. i) Wskazówka. Liczbę, która przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, można zapisać w postaci $4k+1, k \in \mathbb{Z}$.
62. Wskazówka. a) Zauważ, że $9^{n+1} = 9 \cdot 9^n$. Następnie liczbę $9^{n+1} + 9^n$ przedstaw jako wielokrotność liczby 10. b) Zauważ, że $7^{n+2} = 49 \cdot 7^n$. Następnie liczbę $7^{n+2} + 7^n$ przedstaw jako wielokrotność liczby 50.
63. b), c), d) Przeprowadź dowód nie wprost.
64. Wskazówka. Skorzystaj ze wzoru na $a^n - b^n$.
65. Wskazówka. Aby udowodnić równoważność, należy udowodnić dwie implikacje. Jedną z nich udowodnij wprost, a drugą nie wprost.
67. Wskazówka. Skorzystaj z faktu, że suma i iloraz liczb wymiernych są liczbami wymiernymi.

68. $x = 0$ Wskazówka. Aby udowodnić równoważność, należy udowodnić dwie implikacje. Jedną z nich udowodnij wprost, a drugą nie wprost.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. C
2. B
3. D
4. B
5. C
6. a) $ab + 14a - 5b - 18$, b) $\frac{13x^2 - 26x - 9}{12}$, c) $8a^3 - 4a^2 + 102a + 116$
7. a) $(2x^2 + 1)(3x - 1)$, b) $(k + 5)(2 - m)$, c) $(2k + 7)^2$, d) $(0,1y - \sqrt{6})(0,1y + \sqrt{6})$
8. a) $r = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{F}}$, $Gm_1m_2 \geq 0$, $r \neq 0$, $F \neq 0$, b) $T = \frac{Q_1}{c_w m_1} + T_1$, $c_w \neq 0$, $m_1 \neq 0$
10. B
11. C
12. D
13. B
15. a) $(k - 3)(2k - 5)$, b) $(p\sqrt{3} - 1)(x - 2\sqrt{3}py^2 - 2y^2)$, c) $(x + \sqrt{3})(x^2 - x\sqrt{3} + 3)$,
d) $(\sqrt[6]{8}y - \sqrt[6]{2})((\sqrt[6]{8})^5y^5 + (\sqrt[6]{8})^4y^4 \cdot \sqrt[6]{2} + (\sqrt[6]{8})^3y^3 \cdot (\sqrt[6]{2})^2 + (\sqrt[6]{8})^2y^2 \cdot (\sqrt[6]{2})^3 + \sqrt[6]{8}y \cdot (\sqrt[6]{2})^4 + (\sqrt[6]{2})^5)$
lub $(2y^2 - \sqrt[3]{2})(4y^4 + 2\sqrt[3]{2}y^2 + \sqrt[3]{4})$ lub $(2\sqrt{2}y^3 - \sqrt{2})(2\sqrt{2}y^3 + \sqrt{2})$
17. a) ②, b) ①, c) ①, d) ②

PRZED MATURĄ

1. A
2. A
3. A
4. A
6. Wskazówka. Zapisz rozważaną sumę w postaci $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2$ i przekształć ją do postaci $4n(n+1) + 6$. Zauważ, że n i $n+1$ to kolejne liczby naturalne, więc jedna z nich musi być parzysta.
7. C
8. 210
9. Wskazówka. Zauważ, że $-x^2 = -2x^2 + x^2$.
11. Wskazówka. Zapisz rozważaną sumę w postaci $x^3 + (x-1)^3 + (x+1)^3$ i przekształć ją do najprostszej postaci. Następnie rozpatrz trzy przypadki: liczba x jest podzielna przez 3, liczba x przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 oraz liczba x przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.
12. Wskazówka. Przekształć wyrażenie do postaci iloczynowej, a następnie rozważ osobno jego podzielność przez 2 i przez 3.

POTĘGI I PIERWIASTKI

1. a) 8, -8, 16, 16, -16, $\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}$, b) 1, $\frac{1}{125}$, 125, 125, 1, $\frac{1}{125}$, $-\frac{1}{125}$, -125, c) 0,125, -0,125, -0,125, 8, -8, -8, 8, 1, -8, d) $2\frac{1}{4}$, $-\frac{8}{27}$, $2\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{9}$, $-\frac{4}{9}$, $-1\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{8}$, e) $\frac{3}{4}$, 1, $-2\frac{10}{27}$, $1\frac{7}{9}$, $\frac{9}{16}$, $-1\frac{7}{9}$, $\frac{9}{16}$, $-\frac{27}{64}$
2. a) $\frac{1}{8}$, $1\frac{11}{25}$, $\frac{8}{27}$, b) 16, 27, $3\frac{3}{8}$, c) $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{125}$, 1, d) $\frac{1}{10000}$, 125, 10 000 000 000
3. a) $(\frac{1}{a})^7$, b) $(\frac{1}{b})^9$, c) c^5 , d) $(\frac{e}{d})^6$, e) m^8 , f) $(\frac{y}{x})^4$

4. a) dodatnie: 835^6 , $(-835)^6$, 835^{-6} , $(-835)^{-6}$; większe od 1: 835^6 , $(-835)^6$, b) dodatnie: $0,746^8$, $(-0,746)^8$, $0,746^{-8}$, $(-0,746)^{-8}$; większe od 1: $0,746^{-8}$, $(-0,746)^{-8}$
5. a) 17^6 , b) 3^{26} , c) $(-5)^{-9}$, d) 8^{13} , e) $0,5^{-10}$, f) $(-\frac{2}{7})^7$, g) $(-6)^{21}$, h) $0,2^{-125}$, i) $(2\frac{3}{7})^{24}$
6. a) 2^{-21} , b) 2^{-12} , c) 2^{20} , d) 2^{19} , e) 2^{-19} , f) 2^{-4} , g) 2^{-11} , h) 2^{-10} , i) 2^{14}
7. a) 10^{12} , b) 10^{-10} , c) 10^{-8} , d) 10^{-17} , e) 10^{13} , f) 10^7 , g) 10^{16} , h) 10^{-13} , i) 10^{-18}
8. a) 8 zer, b) 15 zer, c) 25 zer, d) 100 zer
9. $a = 4 \cdot 10^7$, $b = 5,7 \cdot 10^7$, $c = 8,42 \cdot 10^9$, $d = 7 \cdot 10^{-6}$, $e = 3,5 \cdot 10^{-8}$, $f = 1,53 \cdot 10^{-12}$
10. a) $7 \cdot 10^5$, $5 \cdot 10^6$, $8 \cdot 10^8$, $1,5 \cdot 10^8$, $5,6 \cdot 10^9$, $2,5 \cdot 10^{11}$, b) 80 tys., 340 tys., 50 mln, 150 mln, 28 mld, 530 mld
11. a) $2,55 \cdot 10^{14}$, b) $6,8 \cdot 10^8$, c) $2,4 \cdot 10^0$, d) $1,6 \cdot 10^{11}$, e) $1,25 \cdot 10^{-16}$, f) $2 \cdot 10^{18}$
12. a) 10^7 razy, b) 10^8 razy, c) 10^4 razy, d) $2 \cdot 10^5$ razy, e) $3 \cdot 10^{10}$ razy, f) $3 \cdot 10^2$ razy
13. a) 18 liczb, b) 14 liczb, c) 16 liczb, d) 19 liczb
14. a) b, b) b, c) a, d) b, e) a, f) a, g) b, h) a, i) a, j) a, k) b, l) a
15. a) $1,01^6 < 1,01^9$, b) $0,53^0 > 0,53^2$, c) $0,23^0 < 0,23^{-2}$, d) $0,241^{-5} > 0,241^4$, e) $8,19^{-4} > 8,19^{-7}$, f) $0,75^{-5} > 0,75^{-4}$, g) $0,174^{-5} > 0,215^{-5}$, h) $5,4^7 > 0,2^{-7}$, i) $10,2^{-4} < 0,1^4$
17. a) $x = -3$, b) $x = -2$, c) $x = -4$, d) $x = 2$, e) $x = 3$, f) $x = -5$, g) $x = -3$, h) $x = -1$, i) $x = -3$
18. a) $3^{10} > (\frac{1}{9})^{-4}$, b) $4^{-7} = (\frac{1}{2})^{14}$, c) $5^0 = (-5)^0$, d) $4^{-50} < 2^{-25}$, e) $(-9)^8 > (-3)^{14}$, f) $(-\frac{1}{7})^5 > (-5)^7$, g) $(5^5)^{-1} > ((\frac{1}{36})^{-2})^{-5}$, h) $(7^{-3})^{10} < ((\frac{1}{7})^{-3})^5$, i) $(\frac{1}{27})^4 > (9^{-2})^5$
19. a) a, b) b, c) a, d) a, e) b, f) b, g) a, h) b, i) b Wskazówka. W podpunktach a)-d) przekształć potęgi tak, by miały taką samą podstawę, w e)-i) — tak, by miały taki sam wykładnik.
20. a) 3^4 , b) $(\frac{2}{3})^0$, c) 2^{-221} , d) 6^{12} , e) $(\frac{5}{6})^7$, f) 10^{-56} , g) 1, h) 3^2 , i) 7^{-2}
21. a) 2^{11} , b) 2^{12} , c) 2^{29} , d) 2^{-17} , e) 2^{-6} , f) 2^{-14}
22. a) 25, b) $\frac{3}{7}$, c) $5\frac{1}{2}$, d) $\frac{3}{13}$, e) 36, f) 28, g) $\frac{7}{25}$, h) $\frac{11}{36}$, i) $4\frac{1}{3}$
23. a) a^{-9} , b) $28m^7$, c) x^4 , d) $3p^{-6}$, e) y^{-20} , f) $0,001n^6$, g) b^{-64} , h) $9w^4$
24. a) $7^{10} + 7^2$, b) $11^7 + 11^{-3}$, c) $19^{-4} - 19^{-23}$, d) $5^4 - 5^{-3}$, e) $2^{-7} + 2^{-16}$, f) $3^{-7} - 3^{-6}$
25. a) $2x^7$, b) $\frac{x^6}{125}$, c) $2^8x^2y^5$, d) $(\frac{3y}{5x})^2$, e) $2^{-12}x^{33}y^{-6}$, f) $25x^{-6}y^2$, g) $\frac{10^7x^9}{y}$, h) $10 \cdot (\frac{x}{y})^{26}$, i) $1764x^6y^9$
26. a) $1,5 \cdot 10^2$ cl, $2,5 \cdot 10$ cl, $5 \cdot 10^0$ cl, $7 \cdot 10^2$ cl, b) $5 \cdot 10^{-2}$ hPa, $1,3 \cdot 10^5$ hPa, $3 \cdot 10^3$ hPa, $1,8 \cdot 10^{-2}$ hPa, c) $1,5 \cdot 10^5$ Hz, $1,037 \cdot 10^8$ Hz, $1,03 \cdot 10^9$ Hz, d) $1,3 \cdot 10^{-2}$ A, $1,052 \cdot 10^{-1}$ A, $5 \cdot 10^{-4}$ A
27. a) $ab = 1,8 \cdot 10^{21}$, $\frac{a}{b} = 2 \cdot 10^8$, b) $ab = 1,4 \cdot 10^{25}$, $\frac{a}{b} = 3,5 \cdot 10^{-6}$, c) $ab = 5,76 \cdot 10^{30}$, $\frac{a}{b} = 4 \cdot 10^{20}$, d) $ab = 2,646 \cdot 10^{31}$, $\frac{a}{b} = 1,5 \cdot 10^{-8}$, e) $ab = 1,6 \cdot 10^{-7}$, $\frac{a}{b} = 4 \cdot 10^{-20}$, f) $ab = 1,8 \cdot 10^{-19}$, $\frac{a}{b} = 4,5 \cdot 10^4$, g) $ab = 6,05 \cdot 10^{-6}$, $\frac{a}{b} = 5 \cdot 10^{20}$, h) $ab = 3,6 \cdot 10^{-22}$, $\frac{a}{b} = 2,5 \cdot 10^{-6}$
28. a) $P = 2,5 \cdot 10^{15}$ m², $Obw = 2 \cdot 10^8$ m; $P_c = 1,5 \cdot 10^{16}$ m², $V = 1,25 \cdot 10^{23}$ m³, b) $P = 1,44 \cdot 10^{16}$ m², $Obw = 4,8 \cdot 10^8$ m; $P_c = 8,64 \cdot 10^{16}$ m², $V = 1,728 \cdot 10^{24}$ m³, c) $P \approx 2,62 \cdot 10^{-5}$ m², $Obw = 2,048 \cdot 10^{-2}$ m; $P_c \approx 1,57 \cdot 10^{-4}$ m², $V \approx 1,34 \cdot 10^{-7}$ m³
29. a) około $1,15385 \cdot 10^4$ razy, b) około $5,8823 \cdot 10^{10}$ razy, c) $1,3 \cdot 10^{11}$ razy, d) około $7,6471 \cdot 10^{21}$ razy
30. a) x^{-3} , x^{-2} , x^4 , x^5 , b) x^5 , x^4 , x^{-2} , x^{-3} , c) x^{-3} , x^5 , x^4 , x^{-2} , d) x^5 , x^{-3} , x^{-2} , x^4
31. a) 5^{50} , 2^{150} , 3^{100} , b) 2^{80} , 5^{40} , 3^{60} , c) 40^{20} , 30^{30} , 20^{40} Wskazówka. Przedstaw liczby w postaci potęg o takim samym wykładniku.

32. a) $a = 30$, b) $a = -14\frac{1}{2}$, c) $a = -2\frac{1}{3}$
33. a) a , b) a , c) b Wskazówka. Przedstaw podane liczby w postaci potęg o takim samym wykładniku.
34. a) a Wskazówka. $44^4 = (4 \cdot 11)^4 = 256 \cdot 11^4$, b) a , c) a
35. a) 3, b) 50, c) $10^{17} + 10^4$
36. a) około $2,99 \cdot 10^{-23}$ g, b) około $8,36 \cdot 10^{24}$ cząsteczek, c) około $2,34 \cdot 10^{27}$ cząsteczek
37. $2,5 \cdot 10^8$ kg
38. a) $5,6 \cdot 10^9$, b) $4,87 \cdot 10^{13}$, c) $6,89 \cdot 10^{22}$, d) $7,7 \cdot 10^9$, e) $5,985 \cdot 10^{13}$, f) $6,3 \cdot 10^{18}$, g) $2,1988 \cdot 10^{12}$, h) $7,4 \cdot 10^{-18}$, i) $4,85 \cdot 10^{-14}$, j) $2,791 \cdot 10^{-10}$, k) $5,5 \cdot 10^{-7}$, l) $3,792 \cdot 10^{-9}$, m) $3,125 \cdot 10^{-14}$, n) $5,935 \cdot 10^{-48}$
39. a) dzielniki a to 6, 15, 45, 28, a dzielnik b to 25, b) 3430, c) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ itd., d) $10a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3$; $a \cdot b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^7$; $a^3 = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^9$; $\frac{36b}{a} = 2 \cdot 5 \cdot 7$; $\frac{a}{63} = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$
40. a) 2; 5; 17; 14, b) 1001₍₂₎; 10000₍₂₎; 10001₍₂₎; 101000₍₂₎, c) I wiersz: 10111₍₂₎; 11001₍₂₎; 11101₍₂₎; II wiersz: 1111₍₂₎; 11001₍₂₎; 1000110₍₂₎
41. a) $\frac{6}{7}$, b) 0,9, c) 1,1, d) $1\frac{3}{5}$, e) $1\frac{1}{2}$, f) -0,4, g) 0,3, h) $-\frac{1}{2}$
42. a) 3, $1\frac{1}{4}$, 20, b) 24, 8, 5, c) $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{5}$, d) $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{60}$, $\frac{4}{15}$
43. a) 3, 0,1, $\frac{2}{3}$, b) 5, 2, 2, c) $\frac{1}{2}$, 10, 7, d) 3, 10, 2
44. a) 4, b) 120, c) $\frac{5}{7}$, d) -18, e) 2, f) 60, g) $-\frac{2}{3}$, h) 6, i) $6\frac{2}{3}$, j) 10, k) 4, l) 8
45. a) 54, b) $\frac{5}{16}$, c) 0,00003, d) 24, e) 49, f) 27, g) 125, h) 100, i) 64, j) $\frac{1}{81}$, k) 75, l) 2000
46. a) $\sqrt{50}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{0,28}$, $\sqrt{14,4}$, b) $\sqrt[3]{80}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{0,8}$, $\sqrt[3]{26,62}$
47. a) $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{7}$, b) $10\sqrt{6}$, $20\sqrt{7}$, $50\sqrt{2}$, c) $2\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[3]{7}$, $5\sqrt[3]{3}$, d) $10\sqrt[3]{3}$, $20\sqrt[3]{2}$, $500\sqrt[3]{4}$
48. a) $9\sqrt{2}$, b) $6\sqrt{7}$, c) $2\sqrt[3]{5}$, d) $\sqrt[3]{3}$, e) 8, f) 2
49. a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, b) $\frac{5\sqrt{7}}{42}$, c) $\frac{-3\sqrt{10}}{5}$, d) $\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$, e) $\frac{3\sqrt[3]{4}}{10}$, f) $-\frac{7\sqrt[3]{6}}{6}$, g) $\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{30}}{12}$, h) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$, i) $\frac{5\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{10}}{5}$, j) $\frac{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}{6}$, k) $\frac{1+5\sqrt[3]{2}}{3}$, l) $\frac{6-\sqrt[3]{9}}{15}$
50. a) $8\sqrt{5}-22$, b) $-2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}-3$, c) $6\sqrt{10}-6\sqrt{5}+10\sqrt{2}-20$, d) $30\sqrt{7}+88$, e) $4\sqrt{30}+29$, f) $66-40\sqrt{2}$, g) $25-6\sqrt{14}$, h) $9\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}+18$, i) $9\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}-12$, j) -19, k) 17, l) -70
51. a) $150a^2-360a+216$, b) $90,75x^3$, c) $8t-2\sqrt{16t^2-7}$, d) $10+2\sqrt{25-21w}$, e) $12y+4\sqrt{9y^2-5y}$, f) $2\sqrt{7m}-2\sqrt{7m-3n}$
52. a) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, b) $\frac{35-7\sqrt{6}}{19}$, c) $\frac{15+4\sqrt{5}}{29}$, d) $\frac{24+28\sqrt{3}}{37}$, e) $10\sqrt{6}-20$, f) $\frac{3\sqrt{5}-17}{2}$, g) $\frac{26-24\sqrt{2}}{17}$, h) $\frac{13\sqrt{3}-9\sqrt{2}}{23}$, i) $\frac{2\sqrt{5}+5\sqrt{2}-3\sqrt{10}-6}{3}$, j) $\frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{2}-3-\sqrt{6}}{2}$, k) $\frac{23-4\sqrt{15}}{17}$, l) $\frac{17-6\sqrt{2}}{7}$
Wskazówka. Pomnóż licznik i mianownik ułamka przez takie wyrażenie, by w mianowniku można było skorzystać ze wzoru $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
53. a) $81+33\sqrt{6}$, b) $20-14\sqrt{2}$, c) $132\sqrt{3}+162\sqrt{2}$, d) $3+6\sqrt[3]{25}-12\sqrt[3]{5}$, e) $8+3\sqrt[3]{75}+3\sqrt[3]{45}$, f) $12+12\sqrt[3]{4}-24\sqrt[3]{2}$
54. a) $3+\frac{4}{3}\sqrt{5}$, b) $2-\frac{2}{5}\sqrt{21}$, c) $1\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\sqrt{6}$, d) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$, e) $-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\sqrt[3]{50}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{20}$, f) $39+18\sqrt[3]{18}+27\sqrt[3]{12}$
55. $a = 64$, $b = 81$, $c = 5\frac{1}{16}$, $d = 10^{-5}$, $e = 3$, $f = 2$
56. a) $\sqrt{138} > 5\sqrt{5}$, b) $4\sqrt{37} = \sqrt{592}$, c) $5\sqrt[3]{6} > 3\sqrt[3]{25}$, d) $3\sqrt[3]{7} > 2^3\sqrt[3]{23}$ Wskazówka. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.
57. a) a^2 , b) a^6 , c) 2^n , d) a^2b , e) $|a|$, f) $b\sqrt{b}$, g) $-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, h) $3b^2\sqrt[3]{b}$, i) $2 \cdot |a|$

58. a) $\sqrt{4a^3}$, b) $\sqrt{\frac{25a^2}{3}}$, c) $\sqrt{53a^2b^4}$, d) $\sqrt{5^{2n+1}b}$, e) $\sqrt[3]{8a^3b^4}$, f) $\sqrt[3]{8a^3b^2}$, g) $\sqrt{2^{2n+1}}$, h) $\sqrt{1,25a^2b}$
59. a i e, b i f, c i d
60. a) 4, b) 7, c) 3, d) 6, e) $\frac{10\sqrt{3}}{59}$, f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, g) $\frac{-19+4\sqrt{5}}{41}$, h) 14
61. a) $-1+\sqrt{5}$, b) $-1+\sqrt{21}$ Wskazówka. Usuń niewymierność z mianowników.
63. Wskazówka. Jeśli liczby a i b są dodatnie i ich kwadraty są równe, to $a = b$.
64. Wskazówka. Podnieś wyrażenia po obu stronach równości do potęgi drugiej.
65. a) $a\sqrt{b}$, b) $a^2b\sqrt{b}$, c) $2^n\sqrt{a+1}$, d) $3^na\sqrt{b}$, e) $\frac{c\sqrt{b}}{2a}$, f) $\frac{3}{2a}\sqrt{\frac{b}{a}}$, g) $a^2b\sqrt[3]{c}$, h) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{b^3+1}}$
66. $0,5\sqrt{2}$, $1,5\sqrt{2}$, $1,2\sqrt{2}$, $\frac{4}{3}\sqrt{2}$, $0,1\sqrt[3]{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$, $0,3\sqrt[3]{2}$, $0,3\sqrt[4]{2}$ Wskazówka. Liczbę pod pierwiastkiem podziel i pomnóż przez 2.
67. Wskazówka. Suma liczb przeciwnych jest równa 0.
68. a) 1, b) -1, c) $\frac{1}{2}$
69. g) Wskazówka. Zauważ, że gdyby liczba $2+\sqrt{5}$ była równa pewnej liczbie wymiernej $\frac{a}{b}$ (dla pewnych liczb całkowitych a i b), to liczba $\sqrt{5}$ byłaby równa liczbie $\frac{a}{b}-2$, która też byłaby wymierna.
70. a) tak, b) nie, c) nie, d) tak
71. $\sqrt[3]{54^{54}}$, $\sqrt[111]{77777}$, $\sqrt[4]{77744}$
72. a) $\frac{28-14\sqrt[3]{3}+7\sqrt[3]{9}}{11}$, b) $\frac{36+12\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}{25}$, c) $\frac{5+4\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{25}}{13}$, d) $\frac{10+25\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}}{123}$, e) $\frac{-5+\sqrt[3]{25}+5\sqrt[3]{5}}{6}$, f) $\frac{10\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{100}+4\sqrt[3]{5}}{3}$ Wskazówka. Pomnóż licznik i mianownik ułamka przez takie wyrażenie, by w mianowniku można było skorzystać ze wzoru $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ albo $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.
73. a) $\frac{\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{3}+1}{2}$, b) $\frac{2+2\sqrt[4]{2}+2\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}}{2}$, c) $\frac{\sqrt[4]{125}+\sqrt[4]{20}-\sqrt[4]{50}-\sqrt[4]{8}}{3}$
74. a) $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{7}+1)}{6}$, b) $(\sqrt{15}-3)\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, c) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{12}}{6}$
75. a) $3\sqrt{2}+\sqrt{30}-2\sqrt{3}$, b) $\frac{4+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{22}$, c) $\frac{(7\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{145}}{145}$
76. a) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{2(x+y)}$, b) 1, c) $4x$, d) $\frac{2\sqrt{a}}{a}$
77. a) $2\sqrt{2}-1$, b) $3-\sqrt{5}$, c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ Wskazówka. Liczbę pod pierwiastkiem przedstaw w postaci kwadratu sumy lub różnicy. Pamiętaj, że $\sqrt{a^2}=|a|$.
78. Wskazówka. a) Porównaj kwadraty obu stron równości.
79. a) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{49}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{121}}$, $\sqrt[3]{10\,000}$, $\sqrt{3125}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{343}}$, b) $6^{\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{1}{9}}$, $3^{\frac{4}{5}}$, $5^{\frac{3}{2}}$, $7^{-\frac{1}{2}}$, $3^{-\frac{1}{6}}$, $2^{-\frac{5}{7}}$, $5^{-\frac{3}{4}}$
80. 2, $\frac{1}{2}$, 9, 256, $\frac{1}{243}$, 243, 1000, $\frac{1}{125}$, $\frac{81}{16}$, $\frac{32}{243}$, $\frac{1}{100}$
81. $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{3}{2}}$, $2^{-\frac{2}{3}}$, $2^{\frac{15}{2}}$, $2^{-\frac{4}{7}}$, $2^{-\frac{1}{8}}$
82. a) $a^{\frac{16}{3}}$, b) $b^{\frac{17}{5}}$, c) $c^{\frac{1}{3}}$, d) $d^{3,5}$, e) $e^{-\frac{13}{3}}$, f) f^6 , g) $g^{\frac{11}{6}}$, h) $h^{\frac{11}{6}}$, i) $i^{-\frac{13}{4}}$
83. a) $3^{\frac{3}{4}}$, b) $3^{\frac{2}{5}}$, c) $3^{\frac{5}{3}}$, d) $3^{6,5}$, e) $3^{-6,5}$, f) $3^{-\frac{10}{3}}$, g) $3^{\frac{3}{4}}$, h) $3^{\frac{1}{6}}$, i) $3^{\frac{1}{10}}$
84. a) $a^{2,5}$, b) $b^{-\frac{4}{3}}$, c) $c^{-2,75}$, d) $d^{\frac{5}{6}}$, e) $e^{\frac{3}{4}}$, f) $f^{\frac{1}{6}}$, g) $g^{\frac{1}{2}}$, h) $h^{\frac{1}{3}}$
85. a) $\sqrt[3]{5} > 5^{0,3}$, b) $7\sqrt{7} < 7^{1,7}$, c) $5^{2,5} = 25\sqrt{5}$, d) $32^{0,6} = 4\sqrt{4}$, e) $0,01^{\frac{1}{3}} = 10^{-\frac{2}{3}}$, f) $0,5^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{2}}$, g) $\sqrt[3]{45} < \sqrt[4]{36}$, h) $\sqrt{3^5} < \sqrt[3]{9^4}$
86. a) $n = 3$, b) $n = 30$, c) $n = 56$
87. a) $5^{\frac{13}{12}}$, b) $5^{\frac{7}{12}}$, c) $5^{\frac{7}{24}}$, d) $5^{-\frac{1}{12}}$, e) $5^{-\frac{5}{12}}$, f) $5^{\frac{1}{12}}$
88. Wskazówka. Zapisz pierwiastki w postaci potęg o wykładnikach wymiernych.
89. $13^{\frac{1}{6}} \approx 1,533$, $7^{0,6} \approx 3,214$, $0,3^{0,3} \approx 0,697$

90. a) około 1096,527 punktów, b) około 1060,991 punktów
91. a) $2^{\frac{7}{5}}$, b) $7^{\frac{1}{2}}$, c) $3^{-\frac{1}{4}}$, d) $6^{-\frac{1}{5}}$, e) $5^{-\frac{35}{6}}$, f) $7^{-\frac{17}{12}}$
92. a) $x = \frac{1}{32}$, b) $x = 3\sqrt{3}$, c) $x = \frac{1}{16}$, d) $x = 1$
93. a) $a + b$, b) $\sqrt[3]{m^3 - n^3}$, c) $x + y$, d) $\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q}$
94. a) $4, \frac{3}{2}, 81, \frac{4}{11}, 1,4, 3\frac{1}{3}, 0$, b) $27, \frac{1}{8}, 32, \frac{16}{81}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{17}{27}, 1$
95. a) $3^4, 3^{-2}, 3^{\frac{1}{4}}, 3^{-5}, 3^{-\frac{1}{3}}, 3^{\frac{3}{7}}, 3^{-\sqrt{7}}, 3^{-\pi}$, b) $3^{\frac{3}{2}}, 3^{-\frac{2}{5}}, 3^{-2,5}, 3^{-\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{6}}, 3^{3,1}, 3^{1+\frac{\pi}{2}}, 3^{-3\sqrt{2}}$
96. a) $625, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{3}$, b) $9, \frac{1}{25}, 1, \frac{1}{25}, \frac{1}{7}$
97. a) $4^{-3,2} < 4^{-\sqrt{2}} < 4^{\frac{1}{3}} < 4 < 4^{2,3} < 4^{\pi}$, b) $0,3^{2\sqrt{2}} < 0,3^{2,1} < 0,3^{\sqrt{3}} < 0,3^{1,3} < 0,3^{\frac{1}{\pi}} < 0,3^0$
98. a) np. $\sqrt[7]{9}$, b) np. $5\sqrt{5}$, c) np. $\sqrt[3]{7\sqrt{5}}$, d) np. $2\sqrt[4]{2}$, e) np. $\sqrt[4]{6\pi}$, f) np. $10\sqrt[5]{100}$, g) np. $\frac{\sqrt{2}}{8}$,
h) np. $\sqrt{\frac{1}{5\sqrt{6}}}$, i) np. $10\sqrt{10}$, j) np. $\sqrt[3]{2\sqrt{7}}$
99. a) 33,59, b) 904,84, c) 2,59, d) 36,46, e) 56,21
100. a) $\sqrt[3]{34}, 9^{\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt{3}}}, 3^{\frac{3}{\sqrt{3}}}, \sqrt[3]{81}$, b) $(\sqrt{10})^3, (\frac{1}{10})^{-\frac{3\pi}{2}}, 10^{1,5}, (\sqrt[4]{100})^3$, c) $2^{\sqrt{2}}, 4^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, 2^{2^{\frac{1}{2}}}$
101. a) $9 < a < 27$, b) $\frac{16}{625} < b < \frac{8}{125}$, c) $\frac{27}{125} < c < \frac{9}{25}$, d) $100 < d < 1000$, e) $\frac{1}{49} < p < \frac{1}{7}$
102. a) $a^{-8}, a^{0,5\sqrt{5}}, a^{10,5}, a^{4,5\sqrt{2}}$, b) $a^{\frac{1}{4}}, a^{0,5\sqrt{2}}, a^{\frac{13}{15}}, a^{-\frac{\pi}{12}}$
103. a) $x = \sqrt{3}$, b) $x = -\sqrt{7}$, c) $x = \sqrt{2}$, d) $x = 0$, e) $x = 2\sqrt{6} + 6$, f) $x = \sqrt{5} + 1$, g) $x = \sqrt{2} + 1$,
h) $x = 6 + 2\sqrt{2}$
105. $k = (\sqrt{2})^{-\sqrt{3}}, l = 2^{\frac{1}{\pi}}, m = (\sqrt{2})^{\pi}, x = \pi^{\sqrt{3}}, y = 3^{\sqrt{3}}, z = 6^{\sqrt{2}}$
106. a) $\frac{1}{9}$, b) 5^{-12} , c) 2, d) $3\frac{1}{2}$, e) 0,01, f) $\frac{4}{5}$, g) 1, h) 49
107. a) $3^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} < \sqrt{3} < 3^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} < 3^{\sqrt{2}} < (3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} < 3^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} < \sqrt{3}^{2\sqrt{3}}$, b) $(\frac{1}{3})^{-2\pi} < (\frac{27}{64})^{\frac{4}{3}} < (\frac{3}{4})^{\sqrt{e}} < \frac{9}{16} < (\frac{4}{3})^0 < (0,75)^{-\sqrt{3}}$, c) $(\frac{1}{125})^{\pi} < 25^{-2} < (0,04)^{\frac{1}{2}} < (0,2)^{-1} < (\sqrt[3]{25})^{\sqrt{7}} < 5^{3\sqrt{3}}$
108. a) $3^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, b) 1, c) $8^{\frac{1}{\pi}}$, d) $4^{-\frac{2\sqrt{3}}{5}}$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. B
2. B
3. C
4. C
5. $ab = 7,2 \cdot 10^{-5}, \frac{a}{b} = 5 \cdot 10^{19}$
7. A
8. A
9. D
10. C
11. a) 40 razy, b) o $3,51 \cdot 10^{-7}$

PRZED MATURĄ

1. B
2. B
3. D
4. D
5. A
8. C
9. A

10. C
11. A
12. A

LOGARYTMY

1. a) $x = \log_7 2$, b) $x = \log_{0,3} 10$, c) $x = \log_5 \frac{3}{7}$, d) $x = \log 0,9$
2. a) $b = 27$, b) $b = \frac{1}{25}$, c) $b = \frac{1}{7}$, d) $b = 1\frac{7}{9}$, e) $b = \sqrt[3]{10}$, f) $b = \frac{1}{1000}$, g) $b = \sqrt[3]{e^2}$,
h) $b = \frac{1}{\sqrt{e}}$
3. a) 5, b) 9, c) $\frac{1}{6}$, d) 64, e) 7, f) 4, g) $\frac{1}{8}$, h) 8, i) 1,5, j) $\sqrt{2}$, k) $\sqrt{3}$, l) $\sqrt{11}$
4. a) 3, -2, -2, $\frac{1}{3}$, 4, b) 0, -1, $\frac{1}{3}$, 1, 2, c) 5, -1, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, d) 0, 4, -2, $\frac{2}{3}$, 24, e) 1, 2, -1, -4, $\frac{1}{2}$
5. a) $-\frac{3}{2}$, 5, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, b) 3, 0,09, 8, c) $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{125}{216}$
6. a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{19}{3}$, c) $-\frac{8}{3}$, d) $-\frac{7}{2}$, e) $\frac{16}{5}$
7. a) $\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{2}$, b) $-\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$, c) $-\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{4}$, d) -3, -2, e) -5, -2, f) $-\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, g) $-\frac{5}{6}$, $-\frac{5}{2}$, h) $-\frac{10}{7}$, $-\frac{5}{4}$,
i) $-\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, j) $-\frac{8}{5}$, $\frac{28}{15}$
8. a) $\log_3 \sqrt{3}$, b) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}$, c) $\log_{\sqrt{3}} 1$, d) $\log_{0,2} \sqrt{5}$, e) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$, f) $\log_{144} \frac{1}{12}$, g) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$,
h) $\ln \sqrt[7]{e^3}$
9. a) $-\frac{3}{8}$, 36, 12, $-\frac{3}{2}$, b) -48, $\frac{3}{8}$, $-\frac{7}{3}$, $\frac{17}{15}$, c) $\frac{1}{5}$, $-\frac{9}{2}$, -28, $\frac{20}{3}$
10. a) $a > 0$ i $a \neq 1$; 17, 0,12, $\frac{5}{9}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{2}{3}$, b) $a > 0$ i $a \neq 1$; 0, $\frac{1}{5}$, 7, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{2}$, c) $a > 0$ i $a \neq 1$;
 $\frac{8}{3}$, 6, -4, -35, -4, d) $a > 0$ i $a \neq 1$; $\frac{1}{12}$, $-\frac{5}{3}$, -6, $-\frac{1}{8}$, -2
11. a) 1 i 2, b) 0 i 1, c) -2 i -1, d) -3 i -2, e) -4 i -3, f) -2 i -1, g) 2 i 3, h) -2 i -1
12. a) $x = \log_r \frac{F-A}{m}$, b) $x = \frac{1}{\log_a H}$, c) $x = b \log_c (3-f)$, d) $x = a^{\frac{t-s}{5}}$, e) $x = \frac{1}{3} \cdot 10^{\frac{r-m}{m}}$,
f) $x = 10^{\frac{v}{8}} + 1$
13. dodatnie: $\log_3 21$, $\log_7 201$, $\log_{0,9} 0,23$; ujemne: $\log_5 \frac{1}{31}$, $\log_{\frac{1}{5}} 34$, $\log_{\frac{2}{3}} 1001$, $\log_{0,4} 1,2$
14. a) $a > 1$, $b < 1$, $c < 1$, b) $a < 1$, $b > 1$, $c > 1$, c) $a < 1$, $b < 1$, $c > 1$
15. 1
16. b) 11, 3,2, $\frac{5}{9}$, 36, $\frac{1}{6}$, 2
17. a) 162, b) 20, c) $\frac{16}{125}$, d) 490, e) $\frac{5}{7}$, f) 1
18. a) $\frac{a}{3}$, b) $4b$, c) $-2,5c$
19. Wskazówka. Wyznacz z pierwszej równości liczbę z.
21. a) 2, b) 2, c) -5, d) 2, e) -2, f) $-\frac{2}{3}$, g) 5, h) -60, i) -44,8
22. a) 3, b) -1, c) $\frac{1}{2}$, d) 2, e) 3, f) -2, g) 4, h) -2
23. a) 30, b) -18, c) -6, d) 5, e) -2, f) -66, g) 15, h) 14
24. a) $2 \log b + \log c$, b) $\log b + \frac{1}{2} \log d$, c) $-\log b - 3 \log c$, d) $\frac{1}{3} \log b + \log c - 3 \log d$,
e) $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b - \log c - 2 \log d$, f) $\log a + \log b - \frac{1}{4} \log c - \frac{3}{4} \log d$
25. a) 10, b) -6, c) 23, d) -16
26. a) $\log_5 \frac{3x}{4y}$, b) $\log_3 \frac{10}{x}$, c) $\log_6 \frac{x}{9y^2}$, d) $\ln \frac{8a}{3\sqrt{b}}$, e) $\log_2 125\sqrt{a}$, f) $\log \frac{3}{2x^3}$, g) $\ln \frac{3ac^3}{2b^2}$,
h) $\log \frac{3x^3}{32}$
27. a) $\log_3 \frac{5}{81}$, b) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{192}$, c) $\log 200\,000$, d) $\ln \frac{\sqrt[3]{e}}{4}$, e) $\log_{16} 10$, f) $\ln 5\sqrt[7]{e^3}$

28. a) 2,602, b) -0,398, c) -2,398, d) 5,602, e) 12,602, f) -8,398
29. a) $2x + y$, b) $2y - x$, c) $\frac{1}{2}(y - x)$, d) $\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}x$
30. a) 1,5; -1; 0,25; 2,5; $-\frac{1}{8}$, b) 1,6; -0,8; $\frac{4}{15}$; -1,2; -0,4, c) 1,3; -0,3; -1,35; -0,7; $-\frac{1}{15}$,
d) 0,7; -0,1; 0,4; 1,05; 2,2
31. a) $\frac{1}{2} \log_3 16$, $\frac{1}{\log_{16} 9}$, $\frac{2}{\log_2 3}$, b) $(\ln 10)^{-1}$, $-\log_{0,1} e$, $2 \log_{100} e$
32. a) $\frac{\log_2 4}{\log_2 32} = \frac{2}{5}$, b) $\frac{\log_2 \frac{1}{16}}{\log_2 \sqrt{2}} = -8$, c) $\frac{\log_2 \sqrt[3]{2}}{\log_2 \frac{1}{8}} = -15$, d) $\frac{\log_2 8}{\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}} = -9$
33. a) $a + 1$, b) $a - 1$, c) $\frac{2a+1}{a}$, d) $\frac{a+6}{6a}$, e) $3a + 2$, f) $\frac{2a-1}{a}$
34. a) $\frac{a}{b}$, b) $\frac{3a}{a+b}$, c) $\frac{a+2b}{2a}$, d) $\frac{b-2a}{a+b}$, e) $\frac{3b}{4a+2b}$, f) $-\frac{3a+2b}{2b}$
35. a) $\frac{\log 7}{\log 3} = 1,771$, b) $\frac{\log 6}{\log 11} = 0,747$, c) $\frac{1}{\log \frac{7}{3}} = -5,679$, d) $\frac{\log 8,2}{\log 1,23} = 10,164$,
e) $\frac{\log 2,4}{\log 14} = 0,332$, f) $\frac{\log 123,1}{\log 19} = 1,635$
36. a) $x = \log 3 \approx 0,48$, b) $x = \log_2 10 \approx 3,32$, c) $x = \ln 10 \approx 2,30$, d) $x = \log_3 7 \approx 1,77$,
e) $x = \log_5 1500 \approx 4,54$, f) $x = \log_8 0,4 \approx -0,44$
37. $\sqrt{10}$ razy, czyli ponad 3 razy
38. Syriusz; około 24 razy
39. a) $pH \approx 3,89$, b) we krwi: około $4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{moli}}{\text{dm}^3}$; w soku z cytryny: około $5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{moli}}{\text{dm}^3}$,
c) około 126 razy
40. a) $x = 16$, b) $x = 1000$, c) $x = 16$
41. a) 3, b) 4,5, c) $-\frac{1}{4}$, d) $-\frac{8}{5}$, e) 0, f) 0, g) 16, h) $\frac{\sqrt[3]{49}}{25}$, i) $\frac{625}{9}$
42. a) $\frac{b}{a}$, b) $\frac{2a}{3b}$, c) $\frac{2b}{a+b}$, d) $\frac{-4a+b}{a}$
43. $\frac{4a}{1-a}$
44. a) 6,5, b) $5\frac{2}{3}$, c) -0,7
48. Wskazówka. Aby wyznaczyć liczbę cyfr potrzebnych do zapisania liczby a^b , oblicz $c = \log a^b$. Zauważ, że $10^c = a^b$.
49. a) $\log 5 = 0,699$, $\log 6 = 0,778$ Wskazówka. $\log 5 = \log \frac{10}{2}$, b) Wskazówka. Rozwiąż nierówność $\log(5 \cdot 10^{47}) < \log 3^{100} < \log(6 \cdot 10^{47})$. c) 5

PRZED SPRAWDZIANEM

1. C
2. D
3. B
4. D
5. $\log_2 5 = a - 1$
6. c, b, d, a
7. B
8. C
9. A
10. B
12. $\frac{1}{2}a - 4b$, $p = \frac{1}{2}$ ($q = -4$)

PRZED MATURĄ

1. B
2. D
3. D

4. A
5. B
6. $A = 10^{2,2}$, większa
7. B
8. C
9. D
10. D
11. $2\frac{3}{4}$

RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

1. a) $x + 2(x - 4) = 16$, b) $2x = 3(x - 3)$, c) $2x + 3 \cdot \frac{x}{2} + 0,5(x + 2) = 2(x + 2) + x + \frac{x}{2}$,
d) $12 : \frac{x}{2} = \frac{12}{x} + 1,5$
2. a) $x = -1$, b) równanie tożsamościowe, c) $x = \frac{7}{13}$, d) $x = \frac{11}{3}$, e) $x = -1$, f) równanie sprzeczne
3. a) $x = \frac{29}{2}$, b) $x = -\frac{5}{9}$, c) $x = \frac{43}{26}$, d) $x = \frac{2}{3}$, e) $x = \frac{16}{13}$, f) równanie sprzeczne
4. a) $x = \frac{1}{2}$ ($x \neq 0$, $x \neq -1$), b) $x = 5$ ($x \neq -9$, $x \neq 1,5$), c) $x = 20$ ($x \neq -1$), d) $x = \frac{13}{9}$ ($x \neq 1$, $x \neq 2$), e) równanie sprzeczne ($x \neq \frac{10}{7}$, $x \neq 4$), f) $x = \frac{4}{3}$ ($x \neq 0$, $x \neq 2$)
5. a) $x = \frac{1}{2}$, b) $x = \frac{5}{6}$, c) $x = -2$, d) $x = -\frac{79}{66}$, e) $x = -\frac{7}{16}$, f) $x = -1$
6. a) $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, b) $x = 3 + \sqrt{3}$, c) $x = 4(\sqrt{5} + \sqrt{6})$, d) $x = \frac{8-3\sqrt{2}}{2}$, e) $x = \frac{7(10+3\sqrt{3})}{73}$,
f) $x = \frac{2(3-2\sqrt{6})}{5}$
7. a) g — liczba gości; $g = \frac{1}{2}g + \frac{1}{3}g + 5$, b) w — wiek dziadka; $w + 20 = 2(w - 20)$,
c) s — trasa, jaką przebył syn pana Andrzeja; $6 = \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}s$
8. a) $\frac{x+1,4x}{2} = x + 2$; $x = 10$, b) $\frac{x+1,2x}{2} = 1,1x$; równanie tożsamościowe
9. 1,5 kg
10. 100-minutowy
11. 27 lat
12. 240-osobową
13. 24 dziewcząt
14. a) 8, b) 8
15. Pan A — 30 lat, pan B — 40 lat, pan C — 32 lata
16. Yaiec było 30 240, w Skarmirzu kupił je za 4320 kwartników.
17. a) $a = 0$, b) $a = 0$, c) $a = 5$, d) $a = -3$
18. a) $a = 0$, b) $a = 0$, c) $a = 6$, d) $a = -1$
19. a) dla $a = \frac{1}{2}$ równanie jest sprzeczne, dla $a \neq \frac{1}{2}$ równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, b) dla $a = -3$ równanie jest tożsamościowe, $a \neq -3$ równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, c) dla $a = \sqrt{2}$ równanie jest tożsamościowe, dla $a = -\sqrt{2}$ równanie jest sprzeczne, dla $a \neq -\sqrt{2}$ i $a \neq \sqrt{2}$ równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie
20. 75 km
21. większą niż 80 km/h
22. a) 7 godzin i 40 minut, b) 81 stron
23. a) 169 zł, b) 46 szt., c) w lutym, o 120,85 zł większą

24. 15 pracowników
 25. $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 26. po 4 baloniki
 27. 146 kcal
 28. 720 pionków
 29. a) $12 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$, b) $8 \text{ cm} \times 7,5 \text{ cm}$, c) $5 \text{ mm} \times 120 \text{ cm}$
 30. a) 93,60 zł, b) 38 osób
 31. 7 godzin; prędkość pokonywania drogi i czas potrzebny na jej przebycie
 32. a) 55 stron, b) 66 stron na godzinę
 33. 20 dni
 34. a) o 2,50 zł, b) o 2,50 zł, c) 8 osób
 35. a) około 0,42 litra, b) 2400 pszczoł
 36. około 71 minut
 37. a) Tomek — $\frac{1}{10}$, Janek — $\frac{1}{15}$, b) 6 godzin
 38. 7 rycerzy
 39. 2 godziny
 40. 8 km
 41. a) $x \in (-\infty; -2)$, b) $x \in (-\infty; 8,3)$, c) $x \in (-\infty; \frac{4}{9})$, d) nierówność sprzeczna, e) $x \in (-\infty; \frac{67}{14})$, f) $x \in \mathbb{R}$
 42. a) $x \in (3; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; 1)$, c) $x \in \emptyset$, d) $x \in \mathbb{R}$, e) $x \in (-\infty; \frac{53}{90})$, f) $x \in (-\infty; 2\frac{3}{8})$, g) $x \in (-\frac{86}{9}; \infty)$, h) $x \in (-\infty; 3)$, i) $x \in (-31; +\infty)$, j) $x \in (\frac{4}{5}; +\infty)$
 43. a) $x < \frac{13}{2}$, b) $x < 2$, c) $x \in \mathbb{R}$, d) $x \geq 3$, e) $x < \frac{8}{3}$, f) $x < 0$
 44. a) $x < 4(\sqrt{2} + 1)$, b) $x < -6(3 + \sqrt{10})$, c) $x \leq 0$, d) $x > -18(2 + \sqrt{6})$, e) $x > 11 + 2\sqrt{30}$, f) $x < -1$
 45. a) dwie, b) -3, c) 2, 3, 5, 7, 11, 13, d) 0
 46. a) -2, -1, 0, 1, 2, 3, b) $x \in (\frac{40}{31}; 18)$, c) -3, -2, -1, 0, 1, 2, d) 0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...
 47. przy 41 godzinach
 48. po 24 miesiącach
 49. 102
 51. $A = (-\infty; 7)$, $B = (0; \frac{5}{6})$, $C = (\frac{-2-\sqrt{2}}{4}; +\infty)$;
 a) $(\frac{-2-\sqrt{2}}{4}; 7)$, b) $\emptyset$, c) $(\frac{-2-\sqrt{2}}{4}; 0) \cup (\frac{5}{6}; +\infty)$, d) A
 52. 7 elementów
 53. a) $a = 4$, b) $a = -10$
 54. a) $x = -3,4$ lub $x = 3,4$, b) $x = -1$ lub $x = 7$, c) $x = -7,1$ lub $x = -6,9$, d) $x = -2\sqrt{3}$ lub $x = 0$, e) $x = \pi - 3,14$ lub $x = \pi + 3,14$, f) $x = -11$, g) brak rozwiązania, h) $x = 2\sqrt{3} - 8$ lub $x = 0$, i) $x = 3 - \sqrt{2}$ lub $x = 1 + \sqrt{2}$
 55. a) $x = -1$ lub $x = \frac{1}{5}$, b) $x = \frac{4}{5}$ lub $x = 1$, c) $x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, d) równanie sprzeczne, e) $x = -2$ lub $x = 0$, f) $x = -\frac{31}{20}$ lub $x = -\frac{19}{20}$, g) $x = -5$ lub $x = \frac{17}{3}$, h) $x = -\frac{17}{10}$ lub $x = \frac{1}{10}$, i) równanie sprzeczne, j) $x = -\frac{7}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$, k) $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$, l) $x = -16$ lub $x = 12$
 56. a) $x \in (-7; 7)$, b) $x \in (2; 8)$, c) $x \in (-\infty; -2\frac{1}{2}) \cup (-1\frac{1}{2}; +\infty)$, d) $x \in (-15\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2})$, e) $x \in (-\infty; 0) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$, f) brak rozwiązań, g) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, h) $x = -2$, i) $x \in \mathbb{R}$
 57. a) $x = -1$ lub $x = 1$, b) $x = \frac{7}{16}$, c) $x = \frac{3}{2}$, d) $x = \frac{3}{7}$ lub $x = 3$

58. a) $x \in (-4; 3)$, b) $x \in (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$, c) $x \in \mathbb{R}$, d) $x \in (-\frac{7}{8}; -\frac{5}{8})$,
e) $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{5}{4}; +\infty)$, f) $x \in (2\frac{11}{12}; 3\frac{1}{12})$
59. a) trzy, b) dziewięć, c) pięć, d) czterdzieści jeden, e) pięć, f) dwie
60. pierwsze
61. a) $x = -2$ lub $x = 2$, b) $x = -2$ lub $x = 2$, c) $x = -\frac{7}{8}$ lub $x = \frac{7}{8}$, d) równanie sprzeczne,
e) $x = -1$ lub $x = 3$, f) równanie sprzeczne, g) $x = 0$, h) $x = -7$, i) $x = 1$
62. a) $x \in (-\infty; -\frac{2}{7}) \cup (\frac{2}{7}; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$, c) $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$,
d) $x \in (-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2})$
63. I, II, V, VI
64. a) 3, b) -5, c) $-\frac{3}{2}$
65. a) 0, b) 5, c) 3, d) 5, e) $\frac{1}{6}$, f) 2
66. a) najmniejszą: $\frac{1}{8}$, największą: 1, b) najmniejszą: -12, największą: -1,2
67. a) $x = -10$ lub $x = 10$, b) $x = 3$ lub $x = 17$, c) $x = -5$ lub $x = 13$, d) $x = -2$ lub $x = -1$,
e) $x = -1$ lub $x = \frac{9}{5}$, f) $x = -4$ lub $x = 2$, g) $x = 2$ Wskazówka. Zauważ, że wartość
bezwzględna z dowolnego wyrażenia jest nieujemna, więc prawa strona nierówności
także musi być nieujemna. h) $x = 1$ lub $x = 5$
68. a) $x \in (0; 3\frac{1}{3})$, b) $x \in (-4; -3) \cup (0; 1)$, c) $x \in (-\infty; -\frac{6}{5}) \cup (\frac{2}{5}; +\infty)$,
d) $x \in (-\infty; -3) \cup (0; 3) \cup (6; +\infty)$
69. a) $a = 0$, $b = 4$, b) $a = 5$, $b = 2$, c) $a = 4,5$, $b = 105,5$, d) $a = b = \frac{3}{14}$, e) $a = -32$, $b = 17$,
f) $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$
70. a) $x = -3$ lub $x = 1$, b) ① $x = -\frac{13}{3}$ lub $x = 5$, ② $x = -\frac{5}{3}$ lub $x = 5$
71. a) $x = \frac{5}{2}$, b) $x \in (-\infty; 3)$, c) $x = 6$, d) brak rozwiązania, e) $x = \frac{13}{23}$ lub $x = \frac{19}{17}$, f) $x = -\frac{1}{2}$
lub $x = \frac{5}{2}$.
72. a) $x = -\frac{7}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$, b) brak rozwiązania, c) $x \in (2; +\infty)$, d) $x = -6$ lub $x = 4$,
e) $x = -\frac{38}{11}$ lub $x = \frac{26}{7}$, f) $x = -3$ lub $x = 1$, g) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = \frac{5}{2}$, h) $x = -4$ lub $x = 6$,
i) $x = -\frac{3}{5}$ lub $x = \frac{7}{3}$, j) $x = -2$ lub $x = \frac{4}{3}$
73. a) $x \in (-\infty; -1)$, b) $x \in (-3; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; -4) \cup (\frac{6}{5}; +\infty)$, d) $x \in (1; +\infty)$,
e) $x \in (-\frac{5}{2}; +\infty)$, f) $x \in (-\frac{1}{21}; \frac{11}{39})$
74. a) $x \in (-5; 2)$, b) $x \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (\frac{9}{4}; +\infty)$, c) $x \in \emptyset$, d) $x \in (-\infty; -\frac{5}{7}) \cup (1; +\infty)$,
e) $x \in (-5; \frac{1}{7})$, f) $x \in (-\frac{3}{2}; \frac{7}{2})$
75. $A = (\frac{7}{15}; +\infty)$, $B = (-\infty; -\frac{7}{9}) \cup (\frac{7}{15}; +\infty)$, $C = (-\frac{5}{3}; \frac{19}{3})$; a) $A \cup C = (-\frac{5}{3}; +\infty)$,
b) $B \cap C = (-\frac{5}{3}; -\frac{7}{9}) \cup (\frac{7}{15}; \frac{19}{3})$, c) $B \setminus A = (-\infty; -\frac{7}{9})$, d) $C \setminus (A \cup B) = (-\frac{7}{9}; \frac{7}{15})$
77. $x \in (-\infty; -\frac{2}{5}) \cup (3; +\infty)$
78. $(-10; +\infty)$
79. -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2
80. $k = 3$
81. a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + \frac{1}{2}y = 11 \end{cases}$, b) $\begin{cases} a = 10b \\ b = a - 10 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x = y + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 6 \end{cases}$
82. a) $\begin{cases} ab = 12 \\ 2a + 2b = 14 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x + y = 180 \\ x = y + 20 \end{cases}$, c) $\begin{cases} 2\pi r = 4b \\ \pi r^2 = b^2 + 10 \end{cases}$
83. a) $y = x + 6$, b) $x = 2y$, c) $y - 1 = 3(x - 1)$, d) $x + 3 = 3(y + 3)$, e) $\frac{x+y}{2} = x + 3$, f) $y - x = x - 2$
84. a) tak, b) nie, c) tak, d) tak

85. a) $y = 1$, b) $x = 0$, c) $x = 6$, d) $y = -1$, e) $y = 5$, f) $x = 4$
88. a) $x = 2$, $y = -9$, b) $a = -4$, $b = 2$, c) $k = 3$, $l = 7$, d) $x = 0$, $y = 5$, e) $z = -6$, $t = 1$,
f) $m = 10$, $n = -2$, g) $c = -5$, $d = 2$, h) $p = \frac{1}{2}$, $r = -1$
89. a) $x = 7$, $y = -4$, b) $x = \frac{1}{5}$, $y = 0$, c) $x = -2$, $y = 3$, d) $x = 11$, $y = -6$, e) $x = 8$, $y = -8$,
f) $x = -\frac{1}{2}$, $y = 4$, g) $x = -2$, $y = -4$, h) $x = -\frac{14}{9}$, $y = \frac{13}{9}$
90. a) $x = 1$, $y = 8$, b) $x = -3$, $y = -7$, c) $x = 5,5$, $y = -0,25$, d) $x = \frac{37}{17}$, $y = -\frac{29}{17}$, e) $x = 2$,
 $y = 1$, f) $x = 3$, $y = 0$
91. a) $x = -5$, $y = 4,5$, b) $x = 0$, $y = 1$, c) $x = -\frac{750}{1201}$, $y = -\frac{139}{1201}$, d) $x = \frac{1}{3}$, $y = -1$, e) $x = 1$,
 $y = 3$, f) $x = -\frac{13}{14}$, $y = -\frac{10}{7}$
92. a) $x = y = 1$, b) $x = y = 5$, c) $x = 0$, $y = 5$
93. $\frac{10}{13}$
94. Karol — 26 lat, Filip — 12 lat
95. Zuzia — 6 lat, Asia — 12 lat
96. a) $\begin{cases} x+y+z=10 \\ xyz=20 \end{cases}$, np. $x = 1$, $y = 4$, $z = 5$, b) $\begin{cases} a(b+c)=33 \\ a+b+c=14 \end{cases}$, np. $a = 3$, $b = 1$, $c = 10$
97. a) $x = -2$, $y = 4$, $z = 0$, b) $x = 9$, $y = -8$, $z = -5$, c) $a = 1\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -2$, d) $x = 1$,
 $y = -1$, $z = 1$, e) $w = 3$, $x = 3$, $y = 3$, $z = 33$, f) $a = -1$, $b = -2$, $c = 4$, $d = 3$
98. a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, b) $x = 0,3$, $y = -0,5$, $z = 1,2$, c) $a = 0$, $b = -2$, $c = 4$, d) $x = -1$,
 $y = 1$, $z = 4$, e) układ sprzeczny, f) $a = 2$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2}$, $d = -3$
99. a) $x = -2$, $y = 5$ lub $x = -5$, $y = 2$, b) $x = 2$, $y = -11$, c) $x = -2$, $y = 5$ lub $x = \frac{4}{3}$, $y = -\frac{5}{3}$,
d) $x = -3$, $y = 4$ lub $x = 1$, $y = 8$, e) $x = -7$, $y = 4$, f) $x = -14$, $y = -23$ lub $x = 6$, $y = 17$
100. układy oznaczone: III, V, układy nieoznaczone: I, VI, układy sprzeczne: II, IV
101. a) układ sprzeczny, b) układ nieoznaczony, c) układ nieoznaczony, d) $x = \frac{7}{15}$, $y = \frac{7}{15}$,
e) $x = -\frac{1}{4}$, $y = 0$, f) układ nieoznaczony
102. a) $k = 6$, b) $k = \frac{1}{4}$, c) $k = 0,01$, d) $k = \frac{1}{5}$, e) $k = 7$, f) $k = \sqrt{3}$
103. a) $k = 3$, b) $k = -\frac{2}{3}$, c) $k = 1$
104. a) $a = -13$, $b = 10,5$, b) $a = -2$, $b = -1,5$
105. 53
106. 41 mm
107. 3 ha
108. 58
109. o 37,5%
110. a) $\begin{cases} a+b=8 \\ a-b=3 \end{cases}$, $a = 5,5$, $b = 2,5$, b) $\begin{cases} y=3x \\ x+y=4 \end{cases}$, $x = 1$, $y = 3$, c) $\begin{cases} 2z+w=15 \\ 4z=3w \end{cases}$, $w = 6$,
 $z = 4,5$
111. a) 246, b) 67
112. 36 zł
113. 12 lat
114. 820 zł
115. 15 km
116. a) 14 zł, b) 15 zł
117. a) 2 kg, b) 9 kg, c) 0,5 kg, d) 3 kg, e) 15 kg, f) 8 kg, g) 15 kg
118. 85,8 a
119. 8 godzin

120. 261, 264 i 267

121. a) $\begin{cases} x+y=22 \\ x=1,2y \end{cases}$, $x=12$, $y=10$, b) $\begin{cases} x+y=24 \\ x=0,2y \end{cases}$, $x=4$, $y=20$, c) $\begin{cases} x+y=2,25 \\ 1,2x+1,05y=2,46 \end{cases}$,
 $x=0,65$, $y=1,6$

122. a) $\begin{cases} 0,2x+1,2y=9,1 \\ 0,4(x+y)=3,2 \end{cases}$, $x=0,5$, $y=7,5$, b) $\begin{cases} x=0,15y \\ 0,775y=x+30 \end{cases}$, $x=7,2$, $y=48$,
 c) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}=3,4 \\ 1,25x=y-1,4 \end{cases}$, $x=2,4$, $y=4,4$

123. 21 km

124. pani Maria — 39 lat, pan Stanisław — 52 lata

125. 520 jabłoni

PRZED SPRAWDZIANEM

1. D

2. B

3. D

4. B

5. C

6. a) $x = \frac{5}{4}$, b) $x \in \mathbb{R}$

7. a) $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = 3$, b) $x \in (-\infty; -12) \cup (6; +\infty)$

8. a) $x = -2$, $y = 5$, b) $x = 4$, $y = -11$, c) układ sprzeczny

9. 398 znajomych

10. C

11. B

12. A

13. B

14. a) $x = -\frac{1}{26}$, b) $x \in \emptyset$, c) $x = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

15. $-13, -12, -11, \dots, -1$; $A = (-\infty; -\frac{11}{156})$, $B = (-5 - 5\sqrt{3}; +\infty)$

16. a) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{9}{5}$, b) $x \in \emptyset$, c) $x \in (-\infty; -3 - \sqrt{3}) \cup (3 + 2\sqrt{3}; +\infty)$, d) $x \in \{-5; 4\}$

17. a) $p = \frac{23}{4}$, b) $p = -4$, c) $p = -\frac{6}{5}$

18. 10 pracowników

PRZED MATURĄ

1. B

2. D

3. D

4. C

5. B

6. $a = -2$

7. $\frac{14}{23}$

8. 54 minuty

9. D

10. B

11. D

12. B

13. 153

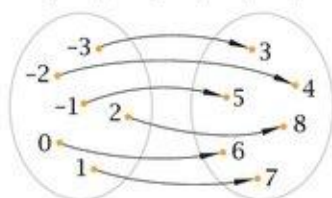
14. 512

FUNKCJE

1. funkcja f : a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, b) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, c) 0 i 4, d) 1, e) $x = 4$, f) $x = 2$, g) $x \in \{1, 3, 4, 5, 6\}$; funkcja g : a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, b) $\{-3, 0, 1, 2, 5\}$, c) -3 i 5 , d) -3 , e) $x = 5$, f) $x = 3$, g) $x \in \{2, 4, 5\}$; funkcja h : a) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, b) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, c) -2 i 2 , d) 2, e) $x = 1$ i $x = 3$, f) $x = 0$, g) $x \in \{-2, 1, 3\}$; funkcja s : a) $\{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, b) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$, c) 0 i 8, d) brak, e) $x = 12$, f) $x = 10$ i $x = 20$, g) $x \in \{12, 14, 16, 18\}$

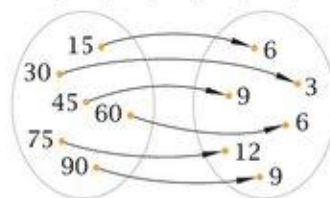
2. a)

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	3	4	5	6	7	8



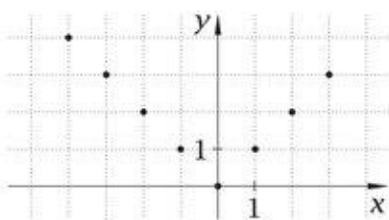
b)

x	15	30	45	60	75	90
y	6	3	9	6	12	9



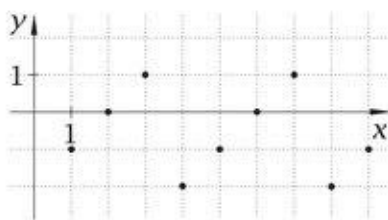
3. a)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4	3	2	1	0	1	2	3



b)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-1	0	1	-2	-1	0	1	-2	-1



4. a)

x	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	4	$5\frac{1}{4}$
$f(x)$	-11	-6	-5	-3	-1	3	$5\frac{1}{2}$

b)

x	-6	-4	-3	-2	1	2	3	4	6
$f(x)$	-5	-6	-7	-9	9	3	1	0	-1

c)

x	0	1	2	4	5	8	9
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	3

d)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

e)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	-1	-2	-1	0	1	2	3	4

5. a) I. $f_1(16) = 6$, $f_1(18) = 8$, $f_1(20) = 0$, II. $f_1(15) = 5$, III. $x = 10$, $x = 20$, $x = 30$, $x = 40$, IV. $ZW = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 32, 36\}$,
 b) I. $f_2(16) = 4$, $f_2(18) = 0$, $f_2(20) = 2$, II. $f_2(5) = f_2(11) = f_2(17) = 5$, III. $x = 6$, $x = 12$, $x = 18$, IV. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, c) I. $f_3(16) = 19$, $f_3(18) = 21$, $f_3(20) = 23$, II. $f_3(2) = f_3(-8) = 5$, III. $x = -3$, IV. $ZW = (0, +\infty)$, d) I. $f_4(16) = 4$, $f_4(18) = 3$, $f_4(20) = 4$, II. funkcja nie przyjmuje wartości 5, III. $x = 17$, IV. $ZW = \{0, 2, 3, 4\}$
6. a) $x = -1$, b) $x = 0$, c) $x = 0$, d) brak miejsc zerowych, e) $x = -1$, f) brak miejsc zerowych, g) $x = 25$, $x = -25$, h) brak

7. a) $\frac{1}{52}$, b) $x = 100$, c) nie,

d)	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$

f) wartość najmniejsza nie istnieje;
wartość największa jest równa 1,

g) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\}$

8. a)	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	5	0	-3	-4	-3	0	5

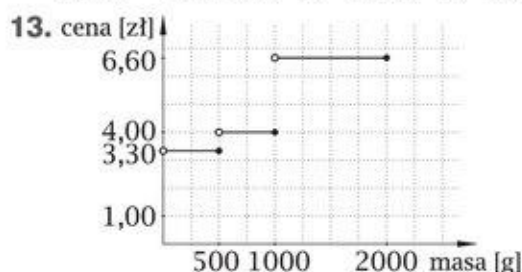
b) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$,

c) dla dwóch argumentów,

d) $x \in \{-1, 0, 1\}$

9. a) $x = 0$, b) $(-\infty; 0)$, c) -2,5

12. a) $f(0) = -2$, $f(-4) = -38$, $f(\frac{2}{3}) = 4$, b) $f(1) = \sqrt{2}-3$, $f(\sqrt{2}) = -1$, $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -4$, c) $f(3) = -1$,
 $f(-2) = 14$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, d) $f(2) = -3$, $f(-3) = -3$, $f(\sqrt{2}-9) = -3$, e) $f(-1) = -5$, $f(4) = -11$,
 $f(10) = -35$, f) $f(-3) = 21$, $f(-1) = 2$, $f(\frac{3}{2}) = 6$



15. a) $l(\text{rzeżucha}) = 8$, $g(\text{rzeżucha}) = 6$, $s(\text{rzeżucha}) = 3$, b) np. $a = \text{mama}$, $b = \text{rzeczka}$,
 $c = \text{żaba}$, $d = o$

16. $f(x) = 0$ dla $x \in (0; 5)$; $g(x) = 0$ dla $x \in (0; 1) \cap \mathbb{I}\mathbb{Q}$

17. a) najmniejsza wartość: 10, największa: 90, b) najmniejsza wartość: 1, największa: 18,
c) najmniejsza wartość: 0, największa: 12

18. a) nie, b) $f(f(12)) = 3$, $g(g(15)) = 3$, $h(h(36)) = 41$, c) 10, $f(g(24)) = 4$, $g(f(24)) = 6$,
 $g[h(f(24))] = 2$, $f[h(g(24))] = 1$

19. a) 15°C , b) w poniedziałek i we wtorek, c) w piątek, 16°C , d) w niedzielę, 10°C ,
e) o 2°C

20. a) około 0,25 dm lub około 0,7 dm, b) około $3,5 \text{ dm}^2$ dla promienia równego około
0,4 dm, c) maleje dla $r \leq 0,4 \text{ dm}$, a rośnie dla $r \geq 0,4 \text{ dm}$

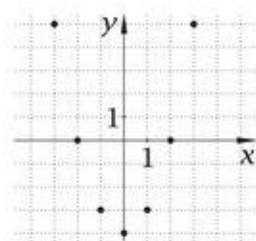
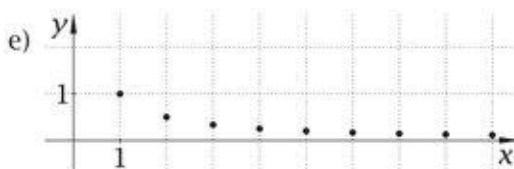
21. a) 31 książek, b) 17 IX, 14 książek, c) o 9 książek, d) 16 IX

22. a) około $7,5^\circ\text{C}$, b) w styczniu i lutym, c) od maja do września, d) ponad 4°C , e) w zi-
mie, f) o około 3 miesiące

23. a) o 100 mln, b) w XVI w., c) w XIV w.

24. a) dziedzina: $\langle -4; 5 \rangle$, zbiór wartości: $\langle -2; 2 \rangle$, b) $f(-4) = 2$, $f(0) = -1$, $f(5) = 0$, c) $f(-3,5) = 1$
i $f(4) = 1$; $f(-2,5) = -1$ i $f(0) = -1$, d) ujemne dla $x \in (-3; 2)$, nieujemne dla
 $x \in \langle -4; -3 \rangle \cup \langle 2; 5 \rangle$, e) najmniejsza wartość: -2, największa wartość: 2, f) $x = -3$,
 $x = 2$, $x = 5$

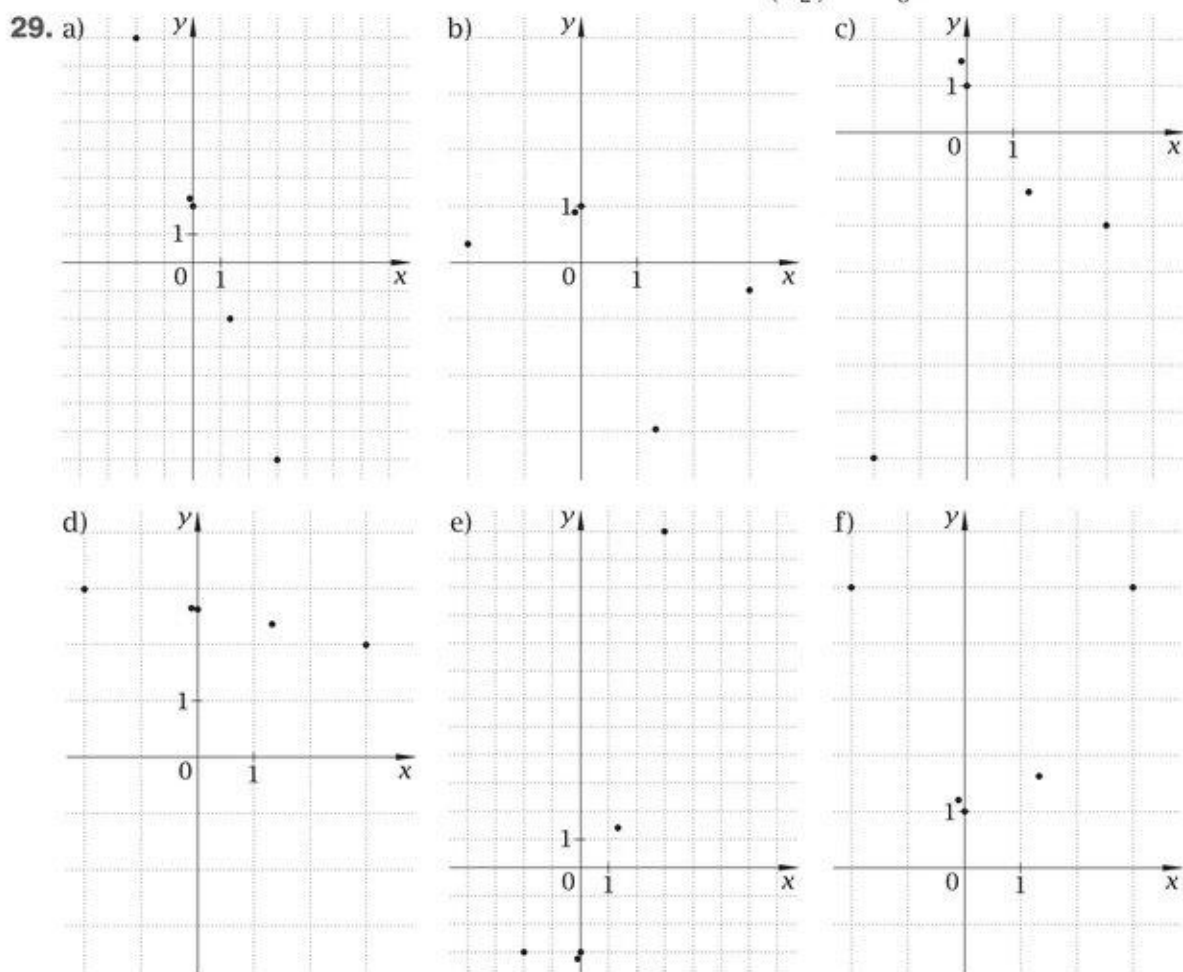
25. a) $f(-3) = -2$, $f(-1) = 1,5$, $f(0) = 2$, $f(3,5) = 2,5$, b) $x = -2$, $x = 2$, c) $x \in \langle -2; 4\frac{1}{2} \rangle$,
d) $x \in (-1,5; 1) \cup (3; 4\frac{1}{2})$, e) najmniejsza wartość: 0, największa wartość: 5,5, f) dla
dwóch argumentów



26. A: a) $x \in (0; 2)$, b) $x = 0, x = 2$, c) $x \in (-4; 0) \cup (2; 4)$, d) $x \in \emptyset$, e) $x \in (-2; 4)$,
 B: a) $x \in (-4; -2) \cup (0; 1) \cup (2; 4)$, b) $x = -2, x = 0, x = 2$, c) $x \in (-2; 0) \cup (1; 2)$, d) $x \in \emptyset$,
 e) $x \in (-4; \frac{1}{2}) \cup (1; 4)$,
 C: a) $x \in (-4; -3) \cup (-1,5; -1) \cup (0; 1) \cup (2; 3)$, b) $x = -1,5, x = 0, x = 2$,
 c) $x \in (-3; -1,5) \cup (-1; 0) \cup (1; 2)$, d) $x \in (1; 3)$, e) $x \in (-3; 3)$

27. a) $g(100) = 50, g(101) = 53, g(153) = 79$, b) 0, 1, 2, 3, 4 lub 5; pięć rozwiązań

28. a) $x \in \mathbb{R}; f(1) = 2, f(3) = -4, f(-3) = 14, f(-\frac{1}{2}) = 6\frac{1}{2}, f(\sqrt{2}) = 5 - 3\sqrt{2}$, b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$
 $f(1) = 3, f(3) = 1, f(-3) = -1, f(-\frac{1}{2}) = -6, f(\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}; f(1) = 1, f(3) = 7,$
 $f(-3) = -1\frac{2}{5}, f(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{10}, f(\sqrt{2}) = 0$, d) $x \in (-\infty; 3); f(1) = \sqrt{2}, f(3) = 0, f(-3) = \sqrt{6},$
 $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{3\frac{1}{2}}, f(\sqrt{2}) = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$, e) $x \in \mathbb{R}; f(1) = 2, f(3) = 6, f(-3) = 0, f(-\frac{1}{2}) = 0,$
 $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, f) $x \in \mathbb{R}; f(1) = 2, f(3) = 14, f(-3) = -70, f(-\frac{1}{2}) = -4\frac{3}{8}, f(\sqrt{2}) = 7(\sqrt{2} - 1)$



30. a) A — tak, B — nie, b) A — nie, B — nie, c) A — tak, B — tak, d) A — nie, B — tak,
 e) A — tak, B — tak, f) A — nie, B — tak

31. a) $f(3) = 6$, c) $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$, d) $x = 0$

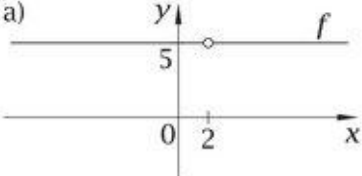
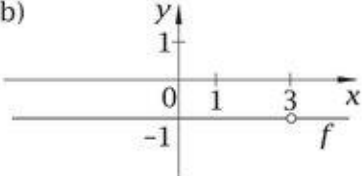
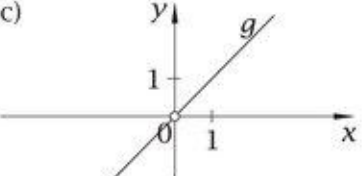
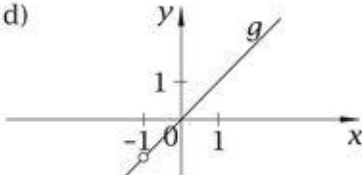
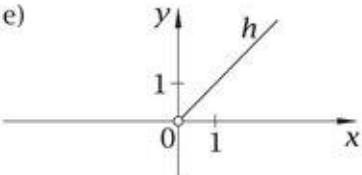
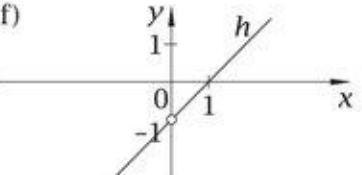
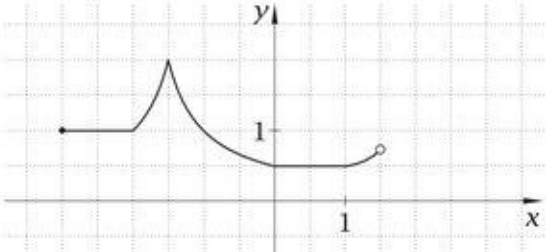
32. a) $f(-15) = -\frac{4}{3}$, c) $x = \frac{20}{3}$, d) nie, e) $10(1 - \sqrt{2})$

33. a) $y = x + 5$, b) $y = x^3$, c) $y = \frac{x^2}{2}$, d) $y = \sqrt{x - 3}$, e) $y = \frac{1}{x^3}$, f) $y = |3x|$

34. a) $y = \sqrt{-x}$, b) $y = -x^2$, c) $y = \left| \frac{1}{x} \right|$

35. a) B, b) B, c) B, d) C, e) C

36. ④

37. a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, b) $\mathbb{R}$, c) $\langle \frac{2}{3}; +\infty \rangle$, d) $(-\infty; \frac{9}{8})$, e) $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$, f) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, g) $\mathbb{R}$, h) $\mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$
38. a) $\langle -1; +\infty \rangle \setminus \{0\}$, b) $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, c) $\mathbb{R} \setminus \{-5, \frac{2}{5}, 5\}$, d) $\langle \frac{7}{3}; +\infty \rangle$, e) $\langle -\frac{1}{4}; 3 \rangle$, f) $\{5\}$, g) $\langle -2; \frac{9}{10} \rangle \setminus \{-\frac{1}{3}\}$, h) $(-\infty; 0)$
39. a) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; $x = -3, 5$, b) $\langle -\frac{1}{2}; +\infty \rangle \setminus \{0, 3\}$; $x = -0, 5$, c) $(-8; +\infty)$; $x = 0$, d) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$, e) $(3; +\infty)$; $x = 5$, f) $(-\frac{13}{2}; +\infty)$, brak miejsc zerowych
40. a) -1 — nie, 3 — tak; b) -1 — tak, 3 — tak; c) -1 — tak, 3 — tak; d) -1 — nie, 3 — tak
41. $f(-3) = 3$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(5) = 25$, $f(7) = 49$
42. ©
43. a) $a = -\frac{2}{9}$, b) $a = -\frac{1}{4}$, c) $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ lub $a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, d) $a = 2\frac{22}{25}$
44. a) $a = 2$, $b = -1$, b) $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$, c) $a = 1$, $b = -2$, d) $a = -\frac{33}{5}$, $b = \frac{4}{5}$ lub $a = 3$, $b = 4$
45. nie
46. $a = -2$, $b = -1$, $c = 1$ Wskazówka. Rozwiązania równania $(x+a)(x+b)(x+c) = 0$ to miejsca zerowe funkcji f .
47. a) $a = -1$, b) $a = -\frac{1}{2}$, c) $a = -\frac{1}{2}$
48. a) $\langle -7; +\infty \rangle$, b) $(-3; +\infty)$, c) $\langle -\frac{5}{2}; +\infty \rangle$
49. a)  b)  c) 
- d)  e)  f) 
50. a) $y = \sqrt{x^2 + \frac{400}{x^2}}$, b) $y = 20\sqrt{\frac{x^2}{400 + x^4}}$, c) $y = \pi \cdot \frac{400 + x^4}{4x^2}$
51. $f(a) = \begin{cases} \frac{3}{2}a & \text{dla } a \in (0; 5) \\ 15 - \frac{37,5}{a} & \text{dla } a \in (5; +\infty) \end{cases}$
52. a) $x = \frac{1}{3}$, $x = \sqrt{2}$, b) $x = -3$, $x = 3$
53. 
54. funkcje rosnące: (A), (C), (I), funkcja malejąca: (F), funkcja stała: (D), funkcje: (B), (E), (G), (H) nie są ani rosnące, ani malejące
55. a) rosnąca, b) ani rosnąca, ani malejąca, c) ani rosnąca, ani malejąca, d) stała, e) ani rosnąca, ani malejąca
56. a) malejąca, b) rosnąca, c) malejąca, d) ani rosnąca, ani malejąca, e) ani rosnąca, ani malejąca, f) stała, g) rosnąca, h) stała

57. a) funkcja rosnąca w przedziale $\langle -2; 0 \rangle$, malejąca w przedziałach $\langle -4; -2 \rangle$ oraz $\langle 2; 4 \rangle$, stała w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$, b) funkcja malejąca w przedziałach $\langle -4; 1 \rangle$ oraz $\langle 2; 4 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$, c) funkcja rosnąca w przedziałach $\langle -2; 0 \rangle$ oraz $\langle 2; +\infty \rangle$, malejąca w przedziałach $\langle -\infty; -2 \rangle$ oraz $\langle 0; 2 \rangle$, d) funkcja rosnąca w przedziałach $\langle -4; -3 \rangle$, $\langle -2; -1 \rangle$ oraz $\langle 3; 4 \rangle$, malejąca w przedziałach $\langle -3; -2 \rangle$ oraz $\langle 2; 3 \rangle$, stała w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$, e) funkcja rosnąca w przedziałach: $\langle -4; -2 \rangle$, $\langle -2; 0 \rangle$, $\langle 0; 2 \rangle$, $\langle 2; 4 \rangle$, f) funkcja rosnąca w przedziałach: $\langle -\infty; -2 \rangle$ oraz $\langle 0; 2 \rangle$, malejąca w przedziałach $\langle -2; 0 \rangle$ oraz $\langle 2; +\infty \rangle$

59. I. B, II. A, III. C

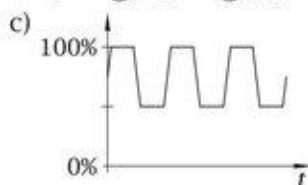
60. a), b) i d)

61. a), b)

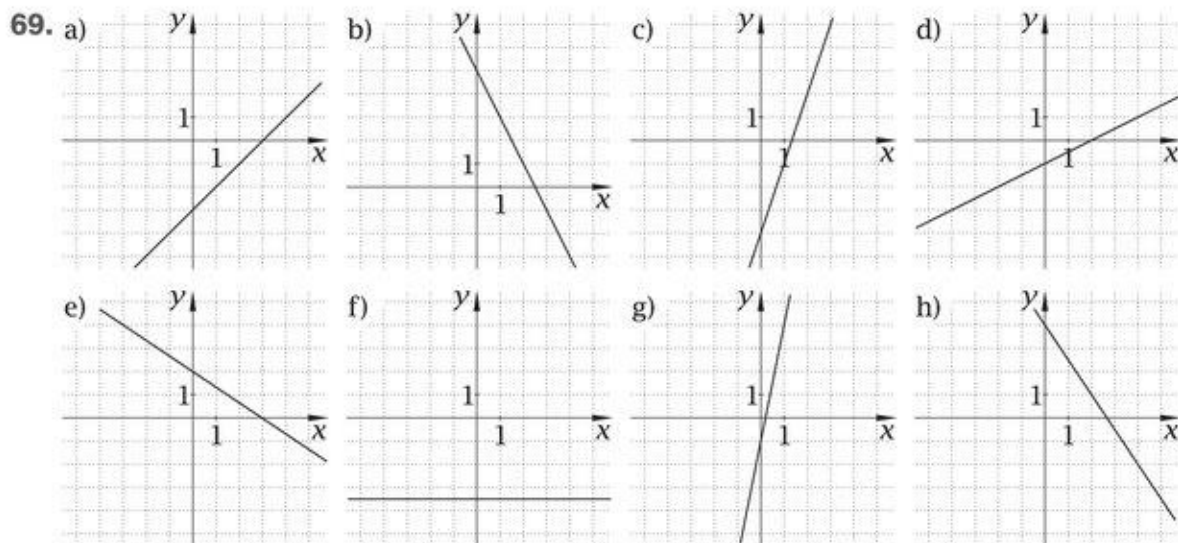
62. a) funkcja rosnąca w przedziałach $\langle -\infty; -2 \rangle$, $\langle -2; 2 \rangle$ oraz $\langle 2; +\infty \rangle$, b) funkcja rosnąca w przedziałach $\langle 0; 1 \rangle$ oraz $\langle 1; +\infty \rangle$, malejąca w przedziałach $\langle -\infty; -2 \rangle$ oraz $\langle -2; 0 \rangle$, c) funkcja malejąca w przedziałach $\langle -\infty; -2 \rangle$, $\langle -2; 0 \rangle$ oraz $\langle 2; +\infty \rangle$, stała w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$

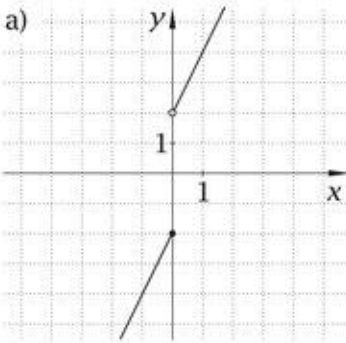
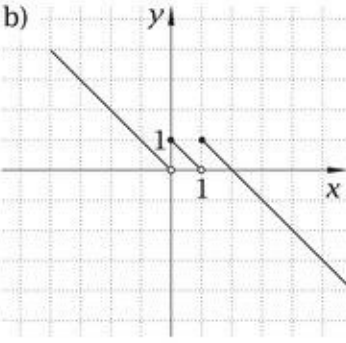
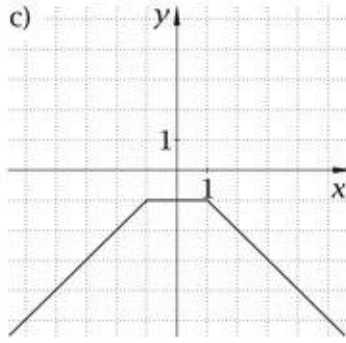
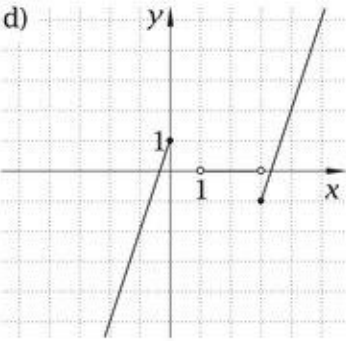
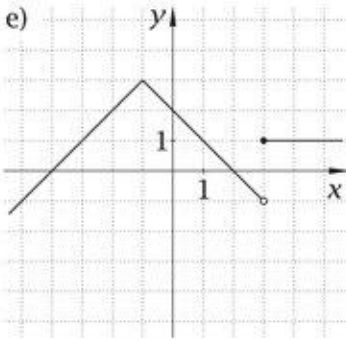
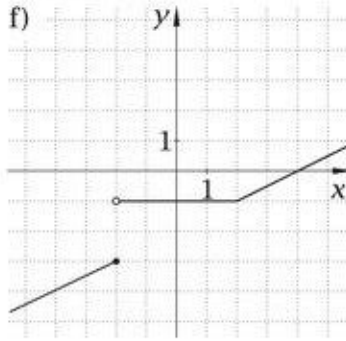
64. II, IV, V

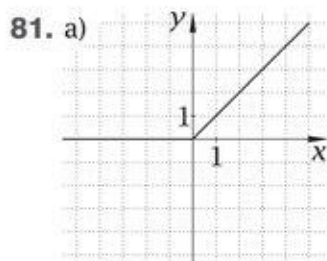
66. a) $t_1 - \textcircled{C}$, $t_2 - \textcircled{A}$, $t_3 - \textcircled{B}$, $t_4 - \textcircled{D}$, b) $\textcircled{A} - \textcircled{III}$, $\textcircled{B} - \textcircled{I}$, $\textcircled{C} - \textcircled{II}$, $\textcircled{D} - \textcircled{IV}$



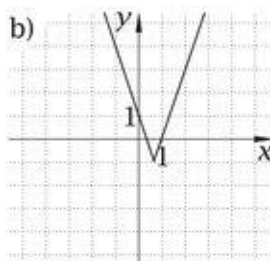
67. a) funkcja r rosnąca w przedziale $\langle -1; 2 \rangle$, malejąca w przedziałach $\langle -3; -1 \rangle$ oraz $\langle 2; 8 \rangle$; funkcja s rosnąca w przedziale $\langle 5; 8 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle -3; 5 \rangle$, b) funkcja r rosnąca w przedziałach $\langle -4; -2 \rangle$ oraz $\langle 4; 6 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$, stała w przedziałach $\langle -2; 0 \rangle$, $\langle 2; 4 \rangle$ oraz $\langle 6; 8 \rangle$; funkcja s rosnąca w przedziałach $\langle -2; 0 \rangle$ oraz $\langle 6; 8 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 2; 4 \rangle$, stała w przedziałach $\langle -4; -2 \rangle$, $\langle 0; 2 \rangle$ oraz $\langle 4; 6 \rangle$
68. funkcja f rosnąca w przedziałach $\langle 0; 2 \rangle$, $\langle 4; 6 \rangle$, $\langle 8; 10 \rangle$ oraz $\langle 12; 14 \rangle$, malejąca w przedziałach $\langle 2; 4 \rangle$, $\langle 6; 8 \rangle$, $\langle 10; 12 \rangle$ oraz $\langle 14; 16 \rangle$; funkcja g rosnąca w przedziałach $\langle 0; 2 \rangle$, $\langle 5; 6 \rangle$, $\langle 8; 10 \rangle$ oraz $\langle 11; 14 \rangle$, malejąca w przedziałach $\langle 2; 5 \rangle$, $\langle 6; 8 \rangle$, $\langle 10; 11 \rangle$ oraz $\langle 14; 16 \rangle$; funkcja h rosnąca w przedziałach $\langle 0; 2 \rangle$ oraz $\langle 8; 14 \rangle$, malejąca w przedziałach $\langle 2; 8 \rangle$ oraz $\langle 14; 16 \rangle$



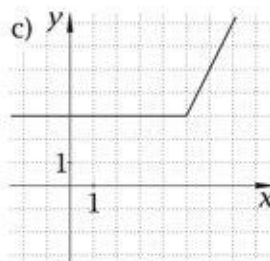
70. a) $a = \frac{1}{3}, b = -2$, b) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$, c) $a = -1, b = 0$, d) $a = 0, b = -2$, e) $a = 1, b = 3$, f) $a = -2, b = 0$
71. a) $x = \frac{1}{2}$, b) $x = \frac{5}{2}$, c) $x = \frac{32}{3}$, d) $x = -\frac{70}{9}$, e) $x = \frac{2}{9}$, f) brak miejsc zerowych, g) $x \in \mathbb{R}$, h) $x = -\sqrt{2}$, i) $x = \frac{5}{3}$
72. a) $(0, -7), (\frac{7}{2}, 0)$, funkcja rosnąca, b) $(0, 5), (10, 0)$, funkcja malejąca, c) $(0, -3), (\frac{1}{2}, 0)$, funkcja rosnąca, d) $(0, 7), (7, 0)$, funkcja malejąca, e) $(0, -9), (\frac{63}{4}, 0)$, funkcja rosnąca, f) $(0, \sqrt{2}), (-3\sqrt{2}, 0)$, funkcja rosnąca, g) $(0, \sqrt{3})$, brak punktu przecięcia z osią x , funkcja stała, h) $(0, 6), (\frac{4}{3}, 0)$, funkcja malejąca, i) $(0, 4), (-6, 0)$, funkcja rosnąca, j) $(0, 3\frac{1}{3}), (10, 0)$, funkcja malejąca, k) $(0, \frac{3}{2}), (-6\sqrt{3} - 9, 0)$, funkcja rosnąca, l) $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, funkcja stała
73. a) $y = x + 1$, funkcja rosnąca, b) $y = 5$, funkcja stała, c) $y = -x - 7$, funkcja malejąca, d) $y = -\frac{x+12}{2}$, funkcja malejąca
75. a) I, II, III, b) I, II, IV, c) II, III, IV, d) I, III, IV, e) I, II, f) II, IV
76. a) $k > 3$, b) $k > \frac{4}{5}$, c) $k > 2$, d) $k = \frac{1}{5}$, e) $k \in (-\frac{5}{3}; 4)$, f) $k = -2$
77. a) $g(x) = \frac{2}{3}x$, b) $g(x) = -1$, c) $g(x) = -\frac{10}{3}x + 5$
78. a) 
funkcja rosnąca dla $x \in \mathbb{R}$,
brak miejsc zerowych
- b) 
funkcja malejąca w $(-\infty; 0)$,
 $(0; 1)$ oraz $(1; +\infty)$, miejsce
zerowe $x = 2$
- c) 
funkcja rosnąca w $(-\infty; -1)$,
malejąca w $(1; +\infty)$, stała
w $\langle -1; 1 \rangle$, brak miejsc ze-
rowych
- d) 
funkcja rosnąca w $(-\infty; 0)$
oraz $(3; +\infty)$, stała w $(1; 3)$,
miejsca zerowe: $x = -\frac{1}{3}$,
 $x \in (1; 3)$, $x = \frac{10}{3}$
- e) 
funkcja rosnąca w $(-\infty; -1)$,
malejąca w $\langle -1; 3 \rangle$, stała
w $(3; +\infty)$, miejsca zerowe:
 $x = -4$, $x = 2$
- f) 
funkcja rosnąca w $(-\infty; -2)$
oraz $(2; +\infty)$, stała w $(-2; 2)$,
miejsca zerowe: $x = 4$
79. a) $b \in (0; 5)$, b) $b \in (-8; -2)$, c) $b \in (0; \sqrt{3})$, d) $b \in (-4; 7)$
80. a) $a \in \langle -\frac{3}{5}; 0 \rangle$, b) $x \in \langle 3, 5; 7 \rangle$



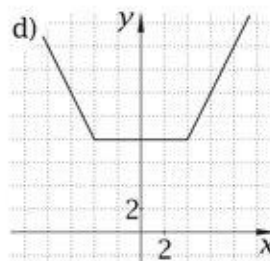
ZW = $\langle 0; +\infty \rangle$,
miejsca zerowe:
 $x \in (-\infty; 0)$, funk-
cja stała w $(-\infty; 0)$,
rosnąca w $\langle 0; +\infty \rangle$



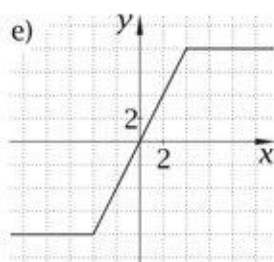
ZW = $\langle -1; +\infty \rangle$,
miejsca zerowe:
 $x = \frac{1}{3}$, $x = 1$,
funkcja malejąca
w $(-\infty; \frac{2}{3})$,
rosnąca w $\langle \frac{2}{3}; +\infty \rangle$



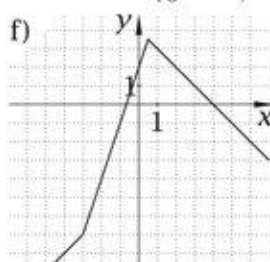
ZW = $\langle 3; +\infty \rangle$,
brak miejsc zero-
wych, funkcja stała
w $(-\infty; 3)$, rosnąca
w $\langle 3; +\infty \rangle$



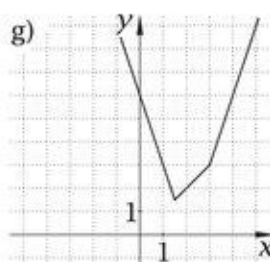
ZW = $\langle 8; +\infty \rangle$,
brak miejsc zero-
wych, funkcja ma-
lejąca w $(-\infty; -4)$,
stała w $\langle -4; 4 \rangle$, ro-
snąca w $\langle 4; +\infty \rangle$



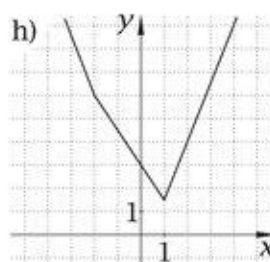
ZW = $\langle -8; 8 \rangle$, miej-
sce zerowe: $x = 0$,
funkcja rosnąca
w $\langle -4; 4 \rangle$, stała
w $(-\infty; -4)$ oraz
 $\langle 4; +\infty \rangle$



ZW = $(-\infty; 3, 5)$,
miejsca zerowe:
 $x = -\frac{2}{3}$, $x = 4$,
funkcja rosnąca
w $(-\infty; \frac{1}{2})$, maleją-
ca w $\langle \frac{1}{2}; +\infty \rangle$



ZW = $\langle 4, 5; +\infty \rangle$,
brak miejsc zero-
wych, funkcja ma-
lejąca w $(-\infty; -\frac{3}{2})$,
rosnąca w $\langle -\frac{3}{2}; +\infty \rangle$



ZW = $\langle 1, 5; +\infty \rangle$,
brak miejsc ze-
rowych, funkcja
malejąca w $(-\infty; 1)$,
rosnąca w $\langle 1; +\infty \rangle$

82. a) $y = 3x + 2$, b) $y = -x + 1$, c) $y = 5$, d) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, e) $y = 0,3x - 0,52$, f) $y = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$

83. $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $h(x) = -x + 2$, a) $x \in (\frac{4}{3}; 2)$, b) $x \in (-\infty; -98)$, c) $x \in (\frac{2}{3}; \frac{3}{2})$

84. a) $y = -2x + 3$, b) $y = 3x - 2$, c) $y = -x$, d) $y = 6x + 15$, e) $y = -4x + 400$, f) $y = 7$,
g) $y = \sqrt{5}x + 3\sqrt{5}$, h) $y = \frac{2}{3}x - \frac{25}{9}$

85. a) $(0, -3)$ i $(\frac{3}{2}, 0)$, b) $(0, 1)$ i $(4, 0)$, c) $(0, 7)$ i $(-\frac{7}{4}, 0)$, d) $(0, -1)$ i $(-\frac{5}{4}, 0)$, e) $(0, \sqrt{3} - 1)$,
brak punktu przecięcia z osią x , f) $(0, 3\sqrt{2})$ i $(-3, 0)$

86. a) $p = 4$, $x = -\frac{9}{4}$, b) $p = 2$, $(0, -3)$

87. a) nie (prosta AB: $y = x - 5$), b) nie (prosta AB: $y = 100$), c) tak (prosta AB: $y = \frac{1}{4}x + 2$),
d) nie (prosta AB: $y = -3x + 9$)

88. a) wartość najmniejsza: -2 , wartość największa: 6 , b) wartość najmniejsza: -10 , war-
tość największa: $6\frac{1}{4}$, c) wartość najmniejsza: -2 , wartość największa: $-1\frac{8}{9}$, d) wartość
najmniejsza: -16 , wartość największa: 36

89. $P = 4$

90. a) $x \in (-2\frac{2}{5}; +\infty)$, b) $x \in (\frac{2}{3}; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; 5\frac{1}{2})$, d) $x \in \langle \frac{\sqrt{14} - 3\sqrt{2}}{2}; +\infty \rangle$,
e) $x \in \langle -\frac{2}{3}; 4\frac{2}{3} \rangle$, f) $x = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, g) $x = -6$, $f(-6) = -18$, h) $x = -1\frac{1}{3}$, $f(1\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$

91. a) na początku: $18,75$ km/h, pod koniec: 9 km/h, b) $13\frac{1}{3}$ km/h

92. $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$

93. a) $A = (0, 5)$, $B = (1\frac{1}{2}, 5)$, $C = (4, 5)$, b) $A = (0, 6)$, $B = (4\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4})$, $C = (8\frac{1}{2}, 6)$, c) $A = (4, 0)$,
 $B = (9, -2)$, $C = (12, 4)$

94. a) $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$, b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

95. $(9\frac{3}{8}, 0)$, $(0, 21\frac{3}{7})$

96. a) 2,8, b) 360, c) 3240

97. a) $a = \frac{3}{8}$ lub $a = -\frac{3}{8}$, b) $a = -10$ lub $a = 10$, c) $b = -3$ lub $b = 3$

98. a) $a = 4$, $b = -8$, b) $a = \frac{1}{4}$, $b = -1\frac{1}{2}$

99. a) $x > 1,6$, b) $x > 13,5$, c) $x > 1,5$, d) $x < \frac{7\sqrt{3}-9}{6}$

100. a) $x \in (-10; 3)$, b) $x \in (1; +\infty)$, c) nie ma takich argumentów, d) $x \in (-9; 12)$,
e) $x \in (5\sqrt{2}; +\infty)$, f) $x \in (2\sqrt{2} - 2; 1 + \sqrt{2})$

101. a) $p = 3,5$, b) $p = 25$, c) nie ma takiej liczby p , d) $p = 7\frac{13}{16}$, e) $p = -4$, f) $p = 1$

102. a) $p = -1$, b) $p = 1\frac{3}{4}$, c) $p = -\frac{5}{8}$, d) $p = -1\frac{1}{3}$, e) $p = -6$, f) $p = 0$, g) $p \in \mathbb{R}$

103. a) $\frac{8}{15}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $1\frac{7}{8}$

104. a) wzrośnie o 2, b) wzrośnie o 10, c) zmaleje o 6

105. a) zmaleje o 6, b) wzrośnie o 18, c) wzrośnie o $\frac{3}{2}$

106. tak; nie

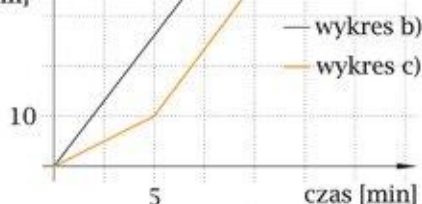
107. $y = \frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$, $y = -5x + 10$

108. $y = -\frac{5}{2}x - 7$

110. a) 40 cm,

b), c) poziom

wody
[cm]



111. a) $a = 21$, b) $b = \frac{7}{3}$, c) $c = \frac{72}{5}$, d) $d = 3,2$, e) $e = \frac{205}{3}$, f) $f = \frac{10}{3}$, g) $g = -\frac{2}{3}$, h) $h = 0,8$,
i) $i = 5$

112. a) $a = 120$, b) $b = 6$, c) $c = 17$, d) $d = 155$, e) $e = 4$, f) $f = 106$, g) $g = 5$, h) $h = 40$,
i) $i = 15$

113. a) 18 kubków, b) 18 litrów

114. a) 9 minut, b) $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

115. a) 2310 zł, b) około 1039 dolarów

116. 8 ciasteczek, 4 ciasteczka, 3 ciasteczka;
liczba osób i liczba ciasteczek przypadających na jedną osobę

Liczba osób	3	6	8
Liczba ciasteczek	8	4	3

117. 160 stron na godzinę, 40 stron na godzinę; tempo czytania (w stronach na godzinę) i czas (w godzinach) potrzebny na przeczytanie książki

Tempo czytania [liczba stron/h]	160	40
Czas czytania [h]	1	4

118. około 1,4 godziny; liczba pracujących osób i czas wykonania pracy

119. a) o 12 minut, b) 6 kucharzy

120. a) 1800 zł, b) 6 dni

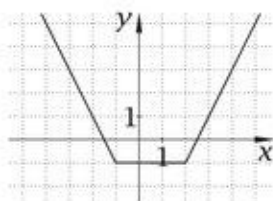
121. a) 42 minuty, b) $105 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

122. a) odpowiednio o 6° i o $0,5^\circ$, b) o 150° , c) 220°

123. a) wielkości wprost proporcjonalne — liczba przejechanych kilometrów i ilość zużytego paliwa, wielkości odwrotnie proporcjonalnych nie ma, b) 40 litrów, c) 7 litrów na 100 km
124. o prawie 8 godzin i 36 minut
125. o 7 dni
126. 19 kg
127. a) drożdże: $4,125 \text{ kg} \approx 4 \text{ kg}$, sól: $1,98 \text{ kg} \approx 2 \text{ kg}$, mąka: $82,5 \text{ kg}$, cukier: $2,475 \text{ kg} \approx 2,5 \text{ kg}$,
b) $9,9 \text{ litra} \approx 10 \text{ l}$, c) 872 zł (drożdże: 294,72 zł, sól: 2,18 zł, mąka: 201,30 zł, cukier: 7,16 zł, oliwa: 366,80 zł)
128. czterech uczniów
129. 10 diabłów

PRZED SPRAWDZIANEM

1. B
2. A
3. C
4. D
5. B
6. a) 3,3 b) wartość najmniejsza: -2 , wartość największa: 24 , c) $n = 102$, $n = 111$, $n = 120$,
 $n = 201$, $n = 210$, $n = 300$
7. a) $(-8; 9)$, b) $(-2; 6)$, c) $x = -5$ oraz $x = 9$, d) $x \in (-8; -2) \cup (1; 9)$, e) -11 , f) $x = -2$,
 $x = 1$, g) $(-8; 0)$ oraz $(5; 9)$
8. $(0, -8)$ oraz $(4, 0)$
9. 669 zł
10. A
11. B
12. D
13. a) $(-6; 4) \setminus \{-1\}$, b) $(-4; 7)$, c) dla dwóch argumentów, d) $x_1 = -5$, $x_2 = 3$,
e) $(-6; -5) \cup (3; 4)$, f) $\frac{7}{3}$, g) $(-4; -3)$, $(-2; -1)$ oraz $(1; 4)$
14. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$, b) $x \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$, c) $x \in (1; +\infty) \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$
- 16.



17. $P = 73\frac{1}{8}$

PRZED MATURĄ

1. D
2. C
3. C
4. C
5. D
6. B
7. A

RÓWNANIA KWADRATOWE

1. a) $x = -1\frac{1}{2}$ lub $x = 1\frac{1}{2}$, b) brak rozwiązań, c) $x = -6$ lub $x = 6$, d) $x = -1,1$ lub $x = 1,1$, e) brak rozwiązań, f) $x = 0$, g) $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$, h) $x = 0$, i) $x = -2$ lub $x = 2$
2. a) $x = -5$ lub $x = 5$, b) brak rozwiązań, c) $x = 0$, d) $x = -\frac{\sqrt{30}}{5}$ lub $x = \frac{\sqrt{30}}{5}$, e) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{2}$, f) brak rozwiązań, g) $x = -4$ lub $x = 4$, h) $x = 0$, i) $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ lub $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$
3. a) około 14 m/s, b) około 6 m/s
4. a) $x = 0$ lub $x = 5$, b) $x = 0$ lub $x = -2$, c) $x = 0$, $x = -6$, d) $x = 0$ lub $x = \frac{1}{2}$, e) $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$, f) $x = 0$ lub $x = 6\frac{1}{4}$, g) $x = 0$ lub $x = 7\frac{1}{2}$, h) $x = 0$ lub $x = -\frac{3}{14}$, i) $x = 0$ lub $x = -2$
5. a) $x = 0$, $x = 8$, b) $x = 0$ lub $x = 5$, c) $x = 0$ lub $x = 1$, d) $x = 0$ lub $x = -6\frac{2}{3}$, e) $x = 0$ lub $x = 1$, f) $x = 0$ lub $x = -2\frac{3}{5}$
6. a) $x = -6$ lub $x = 6$, b) $x = 0$, c) $x = 0$ lub $x = -\frac{4}{13}$, d) $x = 0$ lub $x = 1\frac{1}{8}$, e) równanie sprzeczne, f) $x = 0$ lub $x = -7$, g) $x = 0$ lub $x = 8$, h) $x = -2$ lub $x = 2$
7. a) $m = 75$, $x_2 = -5\sqrt{3}$, b) $m = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, c) $m = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 0$, d) $m = -\sqrt{5}$, $x_2 = 0$
8. a) np. $x^2 - 25 = 0$, $x^2 - 5x = 0$, b) np. $x^2 - 7 = 0$, $x^2 + \sqrt{7}x = 0$, c) np. $x^2 - \frac{4}{9} = 0$, $x^2 + \frac{2}{3}x = 0$, d) np. $x^2 - \frac{12}{25} = 0$, $x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{5}x = 0$
9. a) brak rozwiązań, b) $x = 0$, $x = -2$, c) $x = 0$, $x = -3$, d) $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$
10. a) 15 lub -15, b) $-2\sqrt{3}$ lub $2\sqrt{3}$, c) 0 lub 2
11. a) $x = 0$ lub $x = 2$, b) $x = -5$ lub $x = 5$ lub $x = \frac{5}{2}$, c) $x = \sqrt{6}$ lub $x = -\sqrt{6}$, d) $x = \sqrt{7}$ lub $x = -\sqrt{7}$ lub $x = 7$ lub $x = -7$, e) $x = \sqrt{7}$ lub $x = -\sqrt{7}$ lub $x = \sqrt{3}$ lub $x = -\sqrt{3}$, f) $x = -\sqrt{13}$ lub $x = \sqrt{13}$ lub $x = -\sqrt{7}$ lub $x = \sqrt{7}$, g) $x = 0$ lub $x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$, h) $x = 0$ lub $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$
12. a) $x = 0$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, b) $x = -\sqrt{5-2}$, $x = \sqrt{5-2}$, c) $x = -1$, $x = 1$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{7}$, $x = \sqrt{7}$, d) brak rozwiązań
13. a) $x = 4$ lub $x = -1$, b) $x = -3$ lub $x = -6$, c) $x = -7$ lub $x = -2$, d) $x = 2,5$ lub $x = 5$, e) $x = -\frac{2}{3}$ lub $x = -3,5$
14. a) dwa, b) jedno, c) dwa, d) brak rozwiązań, e) jedno, f) brak rozwiązań
15. a) $x = 5$ lub $x = 9$, b) $x = -5 - \sqrt{3}$ lub $x = -5 + \sqrt{3}$, c) $x = 1$ lub $x = 11$, d) $x = -2 - \sqrt{7}$ lub $x = -2 + \sqrt{7}$, e) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = 2\frac{1}{2}$, f) $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{5}$ lub $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{5}$, g) brak rozwiązań, h) $x = -\frac{2}{3}$, i) $x = \frac{2-\sqrt{10}}{6}$ lub $x = \frac{2+\sqrt{10}}{6}$
16. a) $x = -6$ lub $x = 6$, b) $x = -\sqrt{15}$ lub $x = \sqrt{15}$, c) $x = -5\sqrt{2}$ lub $x = 5\sqrt{2}$, d) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = \frac{1}{3}$
17. a) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, b) $x = -\frac{3}{5}$, c) $x_1 = 1\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$, d) $x = -3$, e) $x_1 = 0$, $x_2 = 9$, f) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$, g) $x = 5$, h) $x_1 = -6$, $x_2 = -1\frac{1}{2}$, i) równanie sprzeczne, j) $x = \frac{1}{2}$, k) $x_1 = \frac{5}{8}$, $x_2 = -2$, l) $x = -2$
18. a) $x_1 = 5 - \sqrt{21}$, $x_2 = 5 + \sqrt{21}$, b) $x_1 = 1$, $x_2 = -8$, c) $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$, d) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, e) $x_1 = 7$, $x_2 = -12$, f) $x_1 = 2$, $x_2 = -1\frac{1}{2}$, g) $x = 1\frac{1}{2}$, h) równanie sprzeczne, i) $x_1 = 2\frac{1}{2}$, $x_2 = -1\frac{1}{2}$, j) $x_1 = -3 - \sqrt{5}$, $x_2 = -3 + \sqrt{5}$, k) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{10}}{3}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$, l) $x_1 = \frac{\sqrt{3}+3}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}-3}{2}$, m) $x = 2\sqrt{5}$, n) równanie sprzeczne, o) $x_1 = \frac{-9\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{11\sqrt{2}}{2}$
19. a) dwa, b) dwa, c) dwa, d) brak rozwiązań, e) brak rozwiązań, f) jedno

20. a) $m = \frac{1}{5}$, $x = -\frac{1}{5}$, b) $m = -1\frac{1}{24}$, $x = \frac{5}{12}$, c) $m = 6$, $x = -6$, d) $m = 6$, $x = -1$ lub $m = -6$, $x = 1$, e) $m = 2\sqrt{10}$, $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ lub $m = -2\sqrt{10}$, $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, f) $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = -2\frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$, g) $m = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ lub $m = 1$, $x = -1$, h) $m = 0$, $x = -1$ lub $m = -1\frac{1}{4}$, $x = -2$, i) $m = 0$, $x = \frac{2}{3}$ lub $m = \frac{9}{16}$, $x = 1\frac{1}{3}$, j) $m = 0$, $x = 0$ lub $m = 4$, $x = -2$, k) $m = 0$, $x = 0$ lub $m = -\frac{8}{9}$, $x = -1\frac{1}{3}$, l) $m = 0$, $x = 0$ lub $m = 3\frac{1}{5}$, $x = 4$, m) $m = 0$, $x = 0$ lub $m = 2$, $x = -1$, lub $m = -2$, $x = 1$, n) $m = -20$, $x = -\frac{1}{2}$, o) $m = \frac{12}{25}$, $x = \frac{5}{6}$
21. a) 12 lub 6, b) 4×1 lub 2×2 , c) 25
22. a) -8 lub 4, b) (0, 1) lub (0, 25), c) (0, 3) lub (0, -5)
23. a) 7 i 13 lub -7 i -13, b) -11 lub 11, c) -15 lub 12
24. a) 45, 46, 47, b) 53, 55, 57
25. 25 osób
26. o 2 cm
27. 10 cm
28. około 1,7 cm
29. 5 zastępców
30. 6 lub 26 gości
31. a) $x = 4$, b) $x = 0,5$, c) $x = -1\frac{1}{2}$ lub $x = \frac{1}{3}$, d) $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ lub $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e) $x = -1\frac{2}{3}$, $x = 3$, f) równanie sprzeczne, g) $x = 10$, h) $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, i) $x = 2 - \sqrt{6}$ lub $x = 2 + \sqrt{6}$
32. a) $x = -3$ lub $x = -\frac{1}{3}$, b) $x = 2$ lub $x = 4$, c) $x = -2$ lub $x = 1,5$, d) $x = -1$ lub $x = -3$, e) $x = -\frac{2}{5}$ lub $x = 1$, f) $x = \frac{1}{4}$ lub $x = 3$
33. a) $x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$ Wskazówka. Zastosuj podstawienie $t = x^2$. b) $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{3}$ lub $x = \sqrt{3}$, c) równanie sprzeczne, d) równanie sprzeczne, e) $x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x = -\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ lub $x = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, f) $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ lub $x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$
34. a) $x = 16$ lub $x = 1$ Wskazówka. Pamiętaj, że w przypadku pierwiastka kwadratowego wyrażenie podpierwiastkowe musi przyjmować wartości nieujemne. b) $x = 9$, c) $x = \frac{1}{4}$, d) $x = 9$ lub $x = 25$, e) $x = 16$ lub $x = 81$, f) $x = 1$ lub $x = 512$
35. a) $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$ lub $x = 6$, b) $x = -2 - \sqrt{7}$, $x = -2 + \sqrt{7}$, $x = -1$ lub $x = -3$, c) $x = 2 - \sqrt{2}$, $x = 2 + \sqrt{2}$, $x = 2 - \sqrt{6}$ lub $x = 2 + \sqrt{6}$
36. a) $x = 1$ lub $x = -1$, b) $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ lub $x = 3$, c) brak rozwiązań
38. a) $a = 1$, $b = -2$, b) $a = 1$, $b = -2$ lub $a = -1$, $b = 2$
39. a) $x = -2$, $y = -1$ lub $x = 1$, $y = 2$, b) $x = 2$, $y = 2$, c) $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ lub $x = 2 - \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$, d) $x = 1$, $y = -1$ lub $x = 4$, $y = 2$, e) $x = 3$, $y = \sqrt{3} + 2$ lub $x = 3$, $y = -\sqrt{3} + 2$, f) $x = 1$, $y = 1$ lub $x = -1$, $y = 1$
40. 4,5 i 9
41. 48 zawodników
42. o około 2,78 zł
43. 15 zł
44. 2,5%
45. a) $x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$, $x = -1 - \sqrt{2}$ lub $x = -1 + \sqrt{2}$, b) $x = -4$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$ lub $x = 2$ Wskazówka. Sprawdź, że $x = 0$ nie jest rozwiązaniem danego równania, a następnie podziel obie strony równania przez x^2 .
46. a) $2\frac{1}{2}$, b) $-3\frac{1}{2}$, c) $-\frac{5}{7}$
47. a) -2532; -3894, b) -34 421; -713, c) -8523,7; -6553,6, d) równanie nie ma rozwiązań, e) -10 462; -88 500, f) równanie ma jedno rozwiązanie

48. a) -321, b) 5, c) -125, d) $\frac{1}{25}$
49. Wskazówka. Szukając równania $ax^2 + bx + c = 0$, przyjmij za a dowolną liczbę.
50. a) jedno rozwiązanie jest dodatnie, a drugie ujemne, b) oba rozwiązania są dodatnie, c) jedno rozwiązanie jest dodatnie, a drugie ujemne, d) oba rozwiązania są ujemne, e) jedno rozwiązanie jest dodatnie, a drugie ujemne, f) oba rozwiązania są ujemne, g) jedno rozwiązanie jest dodatnie, a drugie ujemne, h) oba rozwiązania są dodatnie
51. a) oba rozwiązania są ujemne, b) jedno rozwiązanie jest dodatnie, a drugie ujemne, c) jedno rozwiązanie jest dodatnie, a drugie ujemne, d) oba rozwiązania są dodatnie, e) oba rozwiązania są ujemne
52. a) 9996 Wskazówka. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ b) 4998, c) 2499, d) -999400 Wskazówka. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$
53. a) 107, b) 406, c) 632, d) 380
54. a) 560, b) 8, c) 880, d) 200
55. a) $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ Wskazówka. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. b) $\frac{b^2 - 2ac}{ac}$, c) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$, d) $\frac{3abc - b^3}{a^3}$
Wskazówka. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$
56. a) $m = 0,5$ lub $m = 2$, b) $p = -2$ lub $p = 2$, c) $t = -3$ lub $t = 3$
57. a) $m = -1$, b) $m = -4$, c) $m = -4$ lub $m = -1$
58. $c = -10$
59. a) $m \in (0; \frac{1}{4})$, ujemne, b) $p \in (-1; 0)$, dodatnie, c) $t \in (2; +\infty)$
60. a) $m = -5$, b) $m = -2$ lub $m = -1$, c) $m = -2$, $m = 2$, $m = 0$, d) $m = 0$, e) $m = -\frac{1}{2}$ lub $m = \frac{1}{2}$, f) $m = -1$ lub $m = 1$
61. a) $x^2 + 220x + 404 = 0$, b) $x^2 + 106x - 115 = 0$, c) $x^2 + 57x - 81,25 = 0$
62. a) $m < -16$ Wskazówka. Jeśli $x_1 > 2$ i $x_2 < 2$, to liczba $x_1 - 2$ jest dodatnia, a liczba $x_2 - 2$ jest ujemna, a więc ich iloczyn jest ujemny. b) $p > 33$
63. a) $m \in (0; 1)$ Wskazówka. Jeśli $x_1 > -2$, $x_2 > -2$, to liczby $x_1 + 2$ oraz $x_2 + 2$ są dodatnie, więc ich suma i iloczyn są dodatnie. b) $p \in (-16; -15)$, c) $t \in (0; 4)$
64. a) $m \in (-7; -6)$, b) $p \in (6; 7)$
65. a) Wskazówka. Wystarczy wykazać, że $x_1 \cdot x_2$ jest liczbą podzielną przez 3.
68. b) $a = c$ i $(\frac{b}{a} > 2$ lub $\frac{b}{a} < -2)$

PRZED SPRAWDZIANEM

1. C
2. B
3. D
4. B
5. a) $x = -\frac{5}{2}$ lub $x = \frac{5}{2}$, b) $x = 0$ lub $x = -\frac{8}{5}$, c) równanie sprzeczne
6. $m = 0$ lub $m = 12$
7. 7 cm
8. B
9. B
10. C
11. D
12. a) $x = -5$ lub $x = \frac{1}{3}$, b) $x = 1$ lub $x = 2$

PRZED MATURĄ

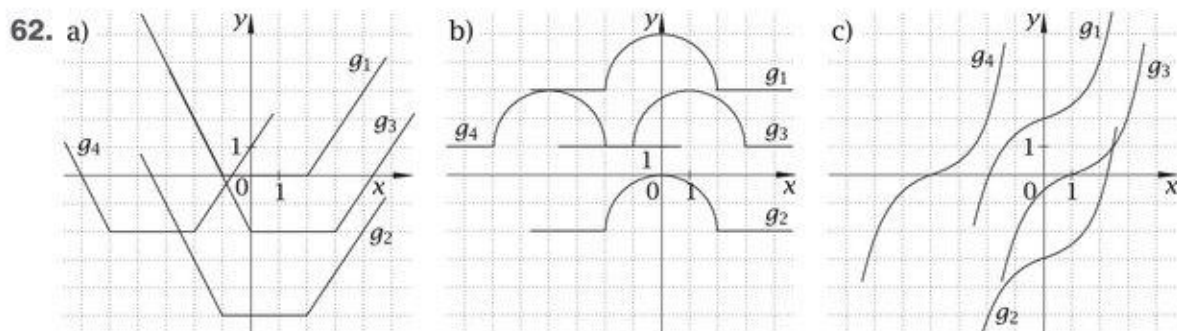
1. B

2. C
3. D
4. A
5. C
6. B
7. -1, 0, 1, 2

WEKTORY. PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESÓW FUNKCJI

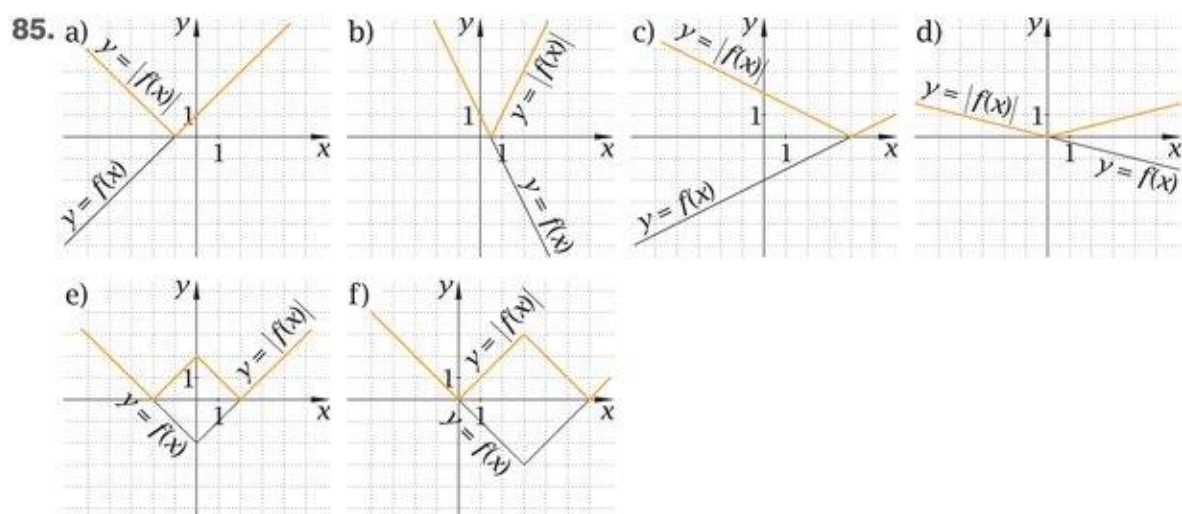
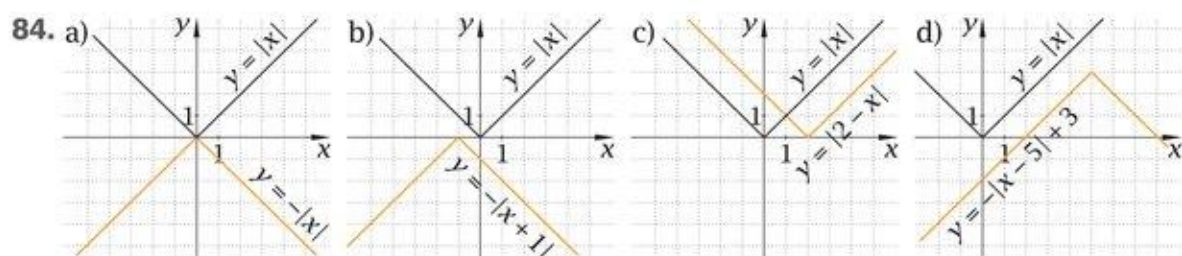
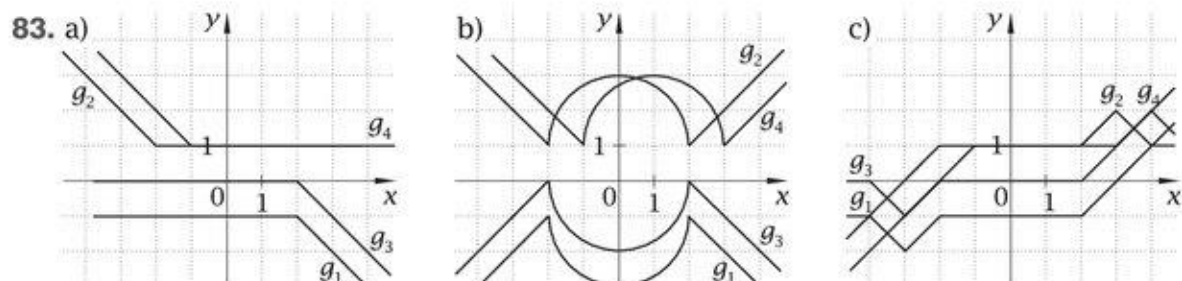
1. a) $\overrightarrow{AC}$, b) $\overrightarrow{AC}$, c) $\overrightarrow{BD}$, d) $\overrightarrow{AB}$, e) $\overrightarrow{AD}$, f) $\overrightarrow{AD}$
 4. a) $\vec{b}$, $-\vec{a}$, $\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-2\vec{b}$, $-4\vec{a}$, b) $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$, c) $2\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a} + 2\vec{b}$, $-2\vec{a} - 3\vec{b}$, $-4\vec{a} + 2\vec{b}$, $-\vec{a} + 2\vec{b}$, $6\vec{a} - 3\vec{b}$.
 5. $-2\vec{u} = \vec{d}$, $2\vec{u} = \vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{u} = \vec{e}$, $-2\vec{w} = \vec{b}$, $\vec{u} + \vec{w} = \vec{f}$, $\vec{u} - \vec{w} = \vec{c}$, $-\frac{1}{3}\vec{u} = \vec{g}$
 6. a) np. $\overrightarrow{FC}$, b) $\vec{0}$, c) np. $\overrightarrow{EC}$, d) np. $\overrightarrow{EA}$, e) np. $\overrightarrow{OC}$, f) np. $\overrightarrow{EO}$, g) np. $\overrightarrow{CF}$, h) np. $\overrightarrow{AB}$, i) np. $\overrightarrow{FD}$
 7. a) np. $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HR}$, $\overrightarrow{GZ}$, b) np. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{LX}$, c) np. $\overrightarrow{LN}$, $\overrightarrow{KO}$, $\overrightarrow{IW}$, d) np. $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CZ}$, $\overrightarrow{ZG}$, e) np. $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{WN}$, $\overrightarrow{YF}$
 8. ①, ⑤; ③, ⑥; ②, ⑦, ⑧
 9. tak; tak, gdy wektory te są prostopadłe
 11. a) $\frac{4}{3}$, b) 3, c) 1, d) $\frac{1}{4}$
 12. a) np. $\vec{u} = \overrightarrow{IL}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PO}$, b) np. $\vec{u} = \overrightarrow{YS}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CR}$, c) np. $\vec{u} = \overrightarrow{XO}$, $\vec{v} = \overrightarrow{JL}$
 13. a) np. $\vec{a} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, b) np. $\vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, c) np. $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
 17. a) $|\vec{a} + \vec{b}| = a$, $|\vec{a} - \vec{b}| = a\sqrt{3}$, b) $|\vec{a} + \vec{b}| = a$
 18. a) $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, $\vec{b} = \vec{v} - 1,5\vec{u}$, $\vec{c} = -\vec{u} - \frac{1}{5}\vec{v}$, b) $\vec{s} \neq \vec{0}$ i $\vec{t} \neq \vec{0}$ oraz $\vec{s}$ i $\vec{t}$ nie mogą być równoległe
 20. 4P
 21. $\overrightarrow{AB} = [3, -2]$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$, $\overrightarrow{AD} = [-4, -2]$, $|\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{5}$, $\overrightarrow{DB} = [7, 0]$, $|\overrightarrow{DB}| = 7$, $\overrightarrow{BD} = [-7, 0]$, $|\overrightarrow{BD}| = 7$, $\overrightarrow{CD} = [0, -5]$, $|\overrightarrow{CD}| = 5$, $\overrightarrow{AC} = [-4, 3]$, $|\overrightarrow{AC}| = 5$
 22. A: $(-107, -6)$, $(-m, m-3)$, B: $(-40, 2003)$, $(k+2, 2k-2)$, $\overrightarrow{AB}: [-99, 24]$, $[100, 255]$, $[0, b-7]$, $[2, k-3]$, $\overrightarrow{BA}: [99, -24]$, $[21, 0]$, $[0, 7-b]$, $[-m, -m-3]$
 25. $|\vec{a}| = 2\sqrt{13}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{10}$, $|\vec{c}| = 3\sqrt{2}$, $|\vec{d}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $|\vec{e}| = 12$, $|\vec{f}| = \sqrt{6}$, $|\vec{g}| = 4$, $|\vec{h}| = m^2 + 1$, $|\vec{i}| = \sqrt{m+n}$
 26. a) $M' = (-9, 20)$, b) $M' = (8, -10)$, c) $M' = (0, -1)$, d) $M' = (\sqrt{3} - 4, 1)$, e) $M' = (0, 10 - \pi)$, f) $M' = (-2, 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})$, g) $M' = (4m - 2, 2m - 1)$, h) $M' = (2\sqrt{2} - m, 3m + 7)$
 27. a) $M = (14, -2)$, b) $M = (-11, 2\frac{1}{2})$, c) $M = (5, -2\sqrt{10})$, d) $M = (4 - \sqrt{6}, 10)$, e) $M = (3 - 2\pi, 3)$, f) $M = (4\sqrt{3} - 2 + \sqrt{2}, 4)$, g) $M = (3n + 2, 4 - n)$, h) $M = (\frac{n}{2}, -n - 2\sqrt{2})$
 28. a) $A' = (6, 3)$, $B' = (13, 8)$, $C' = (15, 0)$, b) $A' = (-8, -7)$, $B' = (-1, -2)$, $C' = (1, -10)$, c) $A' = (8, -5)$, $B' = (15, 0)$, $C' = (17, -8)$, d) $A' = (-3, 6)$, $B' = (4, 11)$, $C' = (6, 3)$
 29. a) $p = -\sqrt{5}$ lub $p = \sqrt{5}$, b) $q = 2$, c) $p = -6$ lub $p = 6$
 30. a) $A = (-7, 2)$, b) $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, c) $A = (-2 - \sqrt{5}, \sqrt{3})$, d) $B = (1, 1)$, e) $B = (-3 + \sqrt{2}, 12)$, f) $B = (-\frac{\pi}{2}, -2\frac{3}{4})$
 31. a) $D = (-3, 2)$, Obw. = $2(7 + \sqrt{34})$, b) $D = (-2, 1)$, Obw. = $2(\sqrt{41} + 3\sqrt{2})$, c) $A = (-37, 3)$, Obw. = $2(2\sqrt{113} + \sqrt{949})$, d) $C = (0, 2\sqrt{2})$, Obw. = $2(6\sqrt{5} + \sqrt{26})$

32. a) $B = (-3, -4)$, $C = (4, 2)$, $D = (-5, 0)$, b) $A = (0, 0)$, $B = (2, 5)$, $D = (8, -3)$
34. a) $S = (-28, 21)$, b) $S = \left(\frac{1}{2}, 4\frac{3}{8}\right)$, c) $B = (16, -1)$, d) $B = (50, -48)$, e) $A = \left(-\sqrt{3}, -8\frac{1}{2}\right)$,
f) $B = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}, \frac{11}{12}\right)$
35. a) $C = (5, 7)$, $D = (-4, 10)$, b) $A = (4, -3)$, $D = (-4, -6)$, c) $B = (20, -17)$, $C = (19, 14)$,
d) $A = (2\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$, $B = (2\sqrt{2} + 4, \sqrt{2})$
36. $S = \left(38\frac{1}{2}, 110\frac{1}{2}\right)$
37. $B = \left(13\frac{2}{3}, -15\frac{1}{3}\right)$
38. a) $P = \left(\frac{1}{3}, 2\right)$, b) $P = \left(\frac{2}{3}, -2\frac{2}{3}\right)$, c) $B = (7, 5)$, d) $A = (5, -3)$
39. $P = \left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2, \frac{3}{5}y_1 + \frac{2}{5}y_2\right)$
41. $p = -3$
42. $P = 32$
43. a) $[3, -8]$, b) $[-2, 7]$, c) $[1, -2]$, d) $[4, -9]$, e) $[6, -7]$, f) $[-4, 13]$
44. a) $\frac{1}{3}\sqrt{13}$, b) $2\sqrt{13}$, c) $2\sqrt{13}$, d) 0 , e) $3\sqrt{13}$, f) $\sqrt{13}$
45. a) $[5, 3]$, b) $[-3, -5]$, c) $[-4, -10]$, d) $[-6, -13]$, e) $\left[-16\frac{1}{2}, -26\right]$, f) $\left[1, 3\frac{2}{3}\right]$, g) $[-14, -18]$,
h) $\left[\frac{2}{5}, -2\frac{4}{5}\right]$, i) $[-14, -13]$
46. a) $D = (-4, -6)$, b) $D = \left(-1, -4\frac{1}{2}\right)$, c) $D = \left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$, d) $D = (8, 5)$, e) $D = (2, 12)$,
f) $D = \left(-2\frac{1}{2}, -4\right)$, g) $D = \left(1, -2\frac{2}{3}\right)$, h) $D = \left(0, -\frac{2}{3}\right)$, i) $D = (-7, 0)$
47. a) $\vec{u} = [12, -5]$, b) $\vec{u} = [-3, 2]$, c) $\vec{u} = [-20, 14]$, d) $\vec{u} = [-4, -15]$, e) $\vec{u} = [-5, 2]$,
f) $\vec{u} = \left[-2\frac{2}{3}, -1\frac{5}{9}\right]$
48. a) tak, b) tak, c) nie, d) tak, e) tak, f) nie
49. a) $m = -8$, b) $m = \frac{2}{3}$, c) $m = -\frac{56}{3}$, d) $m = \frac{19}{6}$, e) $m = -3\sqrt{6}$, f) $m = 1$, g) $m = 2$,
h) $m = -10$ lub $m = 0$
50. a) $[-67, 39]$, b) $\left[1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right]$, c) $\left[-11\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right]$, d) $[9, 10]$
51. a) $S = (3, 7)$, b) $S = (-26, -9)$
52. a) tak, $p = 2$, $r = -\frac{1}{2}$, b) nie
53. a) $K = \left(11, -7\frac{1}{2}\right)$, b) $K = \left(16, 13\frac{1}{3}\right)$, c) $K = \left(12\frac{4}{5}, 0\right)$
54. a) $\left[\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{3\sqrt{10}}{5}\right]$ lub $\left[-\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{3\sqrt{10}}{5}\right]$, b) $[\sqrt{3}, -2\sqrt{3}]$ lub $[-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$, c) $\left[\frac{120}{13}, -\frac{50}{13}\right]$ lub
 $\left[-\frac{120}{13}, \frac{50}{13}\right]$, d) $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$ lub $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$
55. tak
56. $\sqrt{65}$, $\sqrt{53}$
57. a) $\overrightarrow{ED} = [-1, 3]$, b) $\overrightarrow{AC} = [3, 8]$, $\overrightarrow{EB} = [5, -1]$, $\overrightarrow{CE} = [-3, -3]$, $\overrightarrow{BD} = [-6, 4]$, c) $A = (-2, -2)$,
 $B = (3, 2)$, $C = (1, 6)$, $D = (-3, 6)$
58. a) tak, b) tak, c) nie, d) nie
59. a) tak, b) nie, c) nie, d) tak
60. a) tak; $m = 0$ lub $m = 5$, b) tak; $m = \frac{5}{2}$
61. a) $\left(-1, 2\frac{1}{3}\right)$



63. a) $g(x) = f(x-2) + 1$, b) $g(x) = f(x-1) - 2$, c) $g(x) = f(x+1) - 2$
64. a) $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3$, b) $g(x) = (x-3)^3$, c) $g(x) = -\frac{(x+2)^3}{2}$
65. a) $g(x) = (x-5)^2$; o 5 jednostek w prawo, b) $g(x) = \sqrt{x+2}$; o 2 jednostki w lewo,
 c) $g(x) = \frac{1}{x+3} - 4$; o 3 jednostki w lewo i o 4 jednostki w dół, d) $g(x) = (x-1)^3 + 7$;
 o 1 jednostkę w prawo i o 2 jednostki w górę, e) $g(x) = x^2 + 6x + 6$; o 4 jednostki w lewo
 i o 5 jednostek w dół, f) $g(x) = \frac{3}{x-8} - 3$; o 4 jednostki w prawo i o 3 jednostki w dół,
 g) $g(x) = |x-2| - 7$; o 2 jednostki w lewo i 7 jednostek w dół, h) $g(x) = ||3x-4| + 5| + 5$;
 o $\frac{2}{3}$ jednostki w prawo i 5 jednostek w górę
66. a) $y = -2x^7 + 2$, b) $y = -2x^7 - 3$, c) $y = -2(x+1)^7$, d) $y = -2(x-2)^7$, e) $y = -2(x+3)^7 + 1$,
 f) $y = -2(x-2)^7 - 1$, g) $y = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{2}$, h) $y = -2\left(x + \sqrt{2}\right)^7 - \sqrt{2}$
67. a) $[3, 0]$, b) $[0, -5]$, c) $[-1, -2]$, d) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$, e) $[6, -4]$, f) $[-5, -3]$, g) $[2, 1]$, h) $[2, -1]$,
 i) $[-4, -4]$, j) $[12, 20]$
68. a) $y = 2x + 10$, b) $y = 5(x+2)^2 + 2$, c) $y = 2|x - \sqrt{2}| - 1$, d) $y = \frac{3}{x-5} + 1$
69. a) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} - 2$, b) $f(x) = \frac{(x+2)^4}{16} + 2$, c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$
70. a) $[-2, 1]$, b) $[-3, 2]$, c) $[-1, -\sqrt{2}]$
71. a) $f(x) = (x-2)^2 - 5$, b) $f(x) = \frac{3}{x+4} - 6$, c) $f(x) = |x-3| - 1$, d) $f(x) = \sqrt{x-2} \frac{1}{2} + 1$
72. a) $[0, 2]$, b) $[0, -14]$, c) $[1, 0]$, d) $[-4, 0]$, e) $[-5, -2]$, f) $[1, -9]$
73. a) $[0, -1]$, b) $[-1, 0]$, c) $[0, -3]$, d) $[5, 0]$, e) $[5, 3]$, f) $[-2, -6]$
74. a) brak punktów przecięcia, b) $(2, 4)$, c) $(-1, 1)$, d) $(0, 0)$ oraz $(-2, -8)$
75. a) $x \in (2; 7)$; $g(x) \in (2; 4)$, b) $x \in (4; 9)$; $g(x) \in (4; 6)$, c) $x \in (3; 8)$; $g(x) \in (8; 10)$,
 d) $x \in (-4; 1)$, $g(x) \in (13; 15)$, e) $x \in (7; 12)$, $g(x) \in (16; 18)$, f) $x \in (-19; -14)$,
 $g(x) \in (-12; -10)$
76. a) jedno, b) dwa
77. a) funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, malejąca w przedziale $(2; +\infty)$, b) funkcja g
 osiąga największą wartość równą 8 dla argumentu 5, c) $x_1 = -8$, $x_2 = -4\frac{1}{2}$, $x_3 = 4 - 3\sqrt{2}$
78. a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{dla } x < 3 \\ x + 4 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} |x+2| - 1 & \text{dla } x < -3 \\ 2 - x & \text{dla } x \geq -3 \end{cases}$
79. a) $f(x) \in \mathbb{R}$, funkcja rosnąca dla $x \in (-\infty; 1)$ oraz dla $x \in (4; +\infty)$, funkcja malejąca dla
 $x \in (1; 4)$, miejsca zerowe: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, b) $m = -1$ lub $m = 2$
80. a) $f(x) = \begin{cases} -5 & \text{dla } x \in (-4; 1) \\ -x - 6 & \text{dla } x \in (1; 3) \\ x^2 - 12 & \text{dla } x \in (3; 5) \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } x \in (0; 5) \\ -x + 8 & \text{dla } x \in (5; 7) \\ (x-4)^2 - 2 & \text{dla } x \in (7; 9) \end{cases}$
- c) $f(x) = \begin{cases} 8 & \text{dla } x \in (-11; -6) \\ -x & \text{dla } x \in (-6; -4) \\ (x+7)^2 + 1 & \text{dla } x \in (-4; -2) \end{cases}$
81. I, II

82. a) $q = 15$, b) $q = ap$



86. a) $y = -(x+2)^3$, b) $y = -\frac{\sqrt{3}}{x^2} + 3$, c) $y = \frac{(-x-2)^4}{3} = \frac{(x+2)^4}{3}$

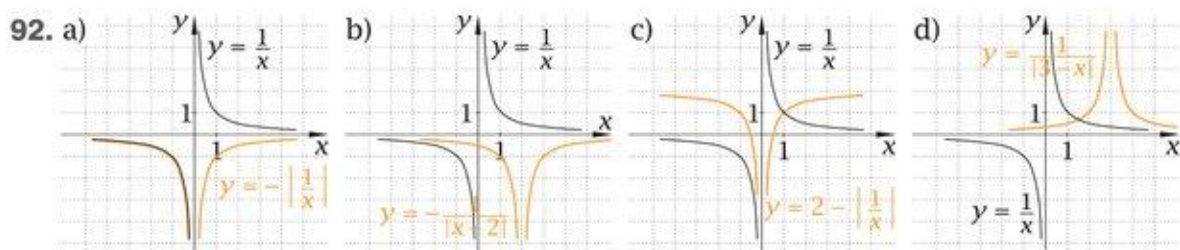
87. a) $g(x) = 3x - 2$, b) $g(x) = 3x + 2$, c) $g(x) = -x^2 + 2x - 3$, d) $g(x) = x^2 + 2x + 3$,
e) $g(x) = -|x - 2| - 1$, f) $g(x) = |x + 2| + 1$, g) $g(x) = -2x + \frac{3}{x} + 3$, h) $g(x) = -2x + \frac{3}{x} + 3$,
i) $g(x) = -2x + \frac{3}{x} - 3$, j) $g(x) = -2x + \frac{3}{x} + 3$, k) $g(x) = -3x - \sqrt{2-x} + 5$, l) $g(x) = -\frac{2}{x+2} + 2$

88. a) $g(x) = 2x - 3$, b) $g(x) = -x^2 - 4x - 5$, c) $g(x) = -\sqrt{-x-2}$, d) $g(x) = x^3 - x^2 - x$,
e) $g(x) = \frac{4}{x} - x^2$, f) $g(x) = -\sqrt{-x} - 3x + \frac{1}{x}$

89. a) malejąca w przedziale $(-\infty; 5)$ i rosnąca w przedziale $(5; +\infty)$, b) rosnąca w przedziale $(-\infty; -5)$ i malejąca w przedziale $(-5; +\infty)$, c) malejąca w przedziale $(-\infty; -5)$ i rosnąca w przedziale $(-5; +\infty)$, d) malejąca w przedziale $(-\infty; 6)$ i rosnąca w przedziale $(6; +\infty)$, e) rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$ i malejąca w przedziale $(-3; +\infty)$, f) malejąca w przedziale $(-\infty; -4)$ i rosnąca w przedziale $(-4; +\infty)$

90. ① — ④, ② — ③, ③ — ①, ④ — ②

91. a) $y \in (-\infty; 1)$, b) $x \in (-\infty; -4)$ oraz $x \in \langle 2; \frac{5}{2} \rangle$, c) $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 4$, d) $y \in (-3; +\infty)$,
e) $x \in (-\infty; -7)$, f) $x \in (-2; 3)$



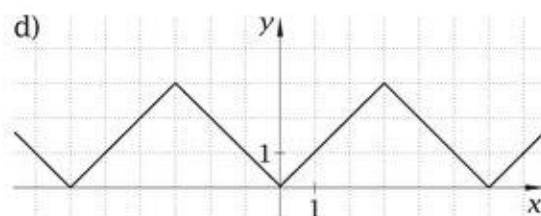
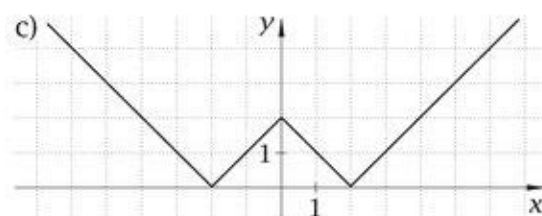
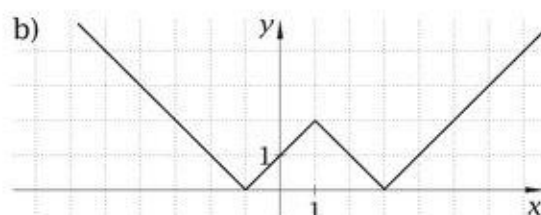
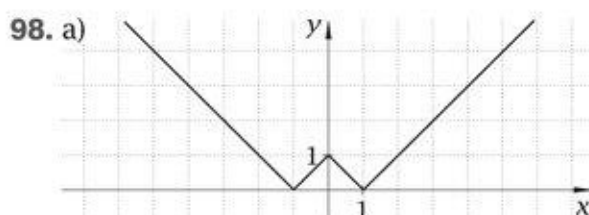
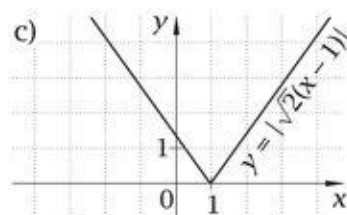
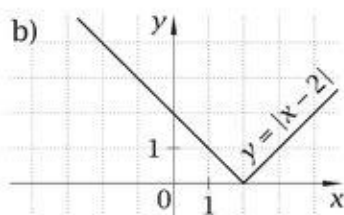
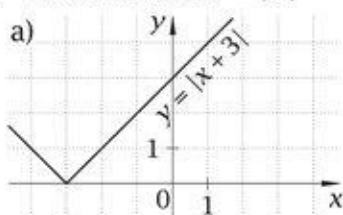
93. a) funkcja g przyjmuje największą wartość równą 5 dla argumentu -3 , b) nie można stwierdzić, jaka jest największa wartość funkcji g , c) funkcja g przyjmuje największą wartość równą 6 dla argumentu 0

94. a) dziedzina: $\langle -5; 7 \rangle$; zbiór wartości: $\langle -2; 3 \rangle$, b) dziedzina: $\langle -7; 5 \rangle$; zbiór wartości: $\langle -3; 2 \rangle$, c) dziedzina: $\langle -8; 4 \rangle$; zbiór wartości: $\langle -3; 2 \rangle$, d) dziedzina: $\langle -6; 6 \rangle$; zbiór wartości: $\langle 1; 6 \rangle$

95. a) $x_1 = -5$, $x_2 = 3$, b) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, c) $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, d) $x_1 = -5$, $x_2 = 3$, e) $x_1 = 2$, $x_2 = 10$, f) $x_1 = -4$, $x_2 = 4$

96. a) tak, najmniejszą wartością funkcji g jest 5 (nie można stwierdzić, jaka jest największa wartość funkcji g), b) nie można stwierdzić, jaka jest najmniejsza ani największa wartość funkcji g , c) nie można stwierdzić, jaka jest najmniejsza ani największa wartość funkcji g , d) tak, najmniejszą wartością funkcji g jest 5 (nie można stwierdzić, jaka jest największa wartość funkcji g)

97. Wskazówka. $\sqrt{a^2} = |a|$



99. a) nie, b) nie, c) tak, np. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leq 1 \\ -2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

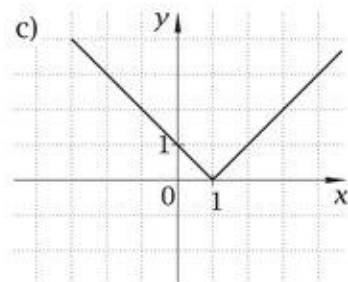
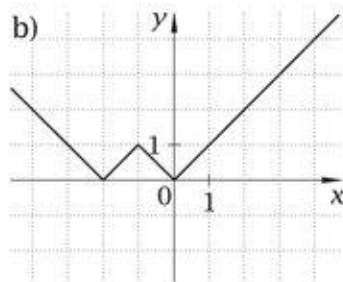
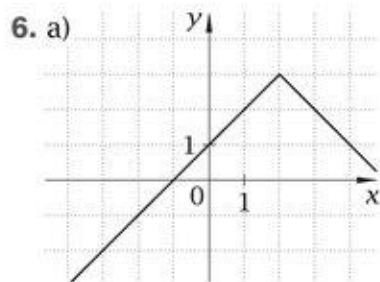
PRZED SPRAWDZIANEM

1. D

2. B

3. A

4. $a = 3$, $b = -9$



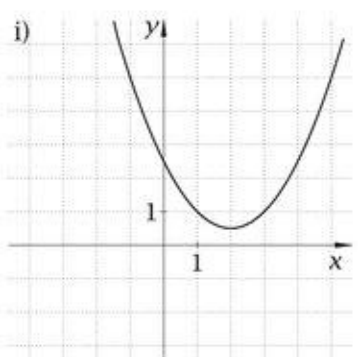
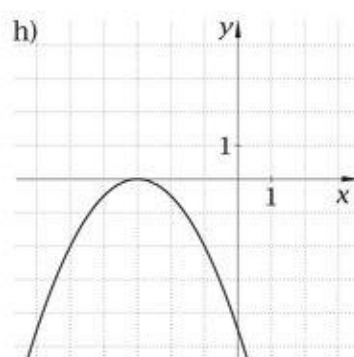
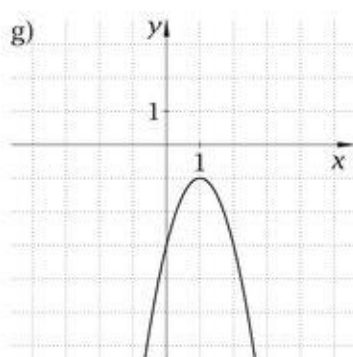
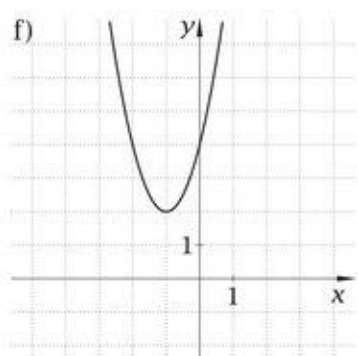
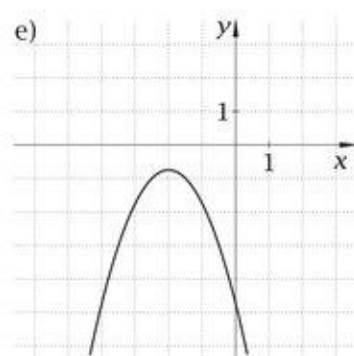
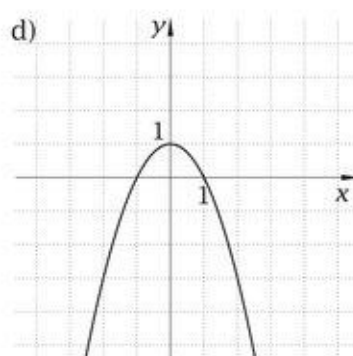
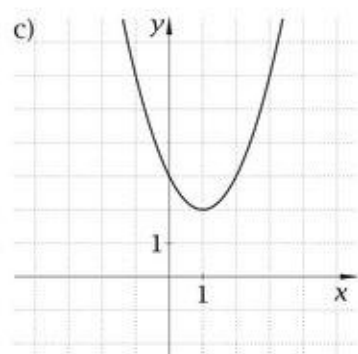
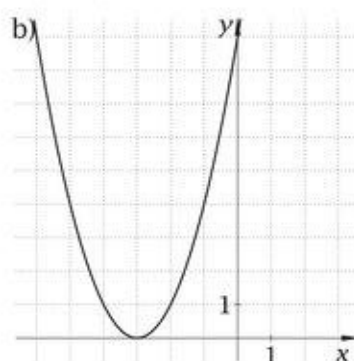
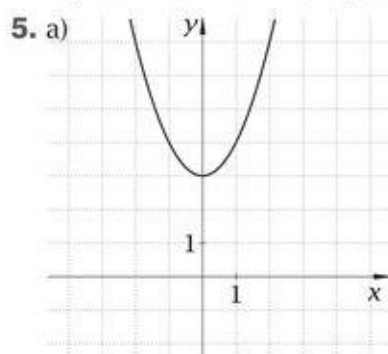
FUNKCJA KWADRATOWA

1. ① $y = -3x^2$, ② $y = \frac{1}{3}x^2$, ③ $y = 3x^2$, ④ $y = -\frac{1}{3}x^2$

2. a) $y = \frac{2}{3}x^2 - 2$, b) $y = \frac{2}{3}(x-1)^2$, c) $y = \frac{2}{3}(x+2)^2 + 1$, d) $y = \frac{2}{3}(x+3)^2 - 3$, e) $y = \frac{2}{3}(x-3)^2 + 2$,
f) $y = \frac{2}{3}(x-2)^2 - 1$

3. a) $y = 2(x+3)^2$, b) $y = -5x^2 - 5$, c) $y = \frac{3}{5}(x+0,4)^2 - 4,2$, d) $y = -0,3\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}$

4. a) $f(x) = -3x^2 + 4$, b) $f(x) = 4x^2 - 10$, c) $f(x) = -5(x+3)^2$, d) $f(x) = (x-5)^2 + 9$,
e) $f(x) = 2(x-2)^2 + 3$, f) $f(x) = -(x+7)^2 + 5$



6. a) $a = 4$; 9 jednostek do góry, b) $a = \frac{2}{3}$; 7 jednostek w dół, c) $a = 5$; 4 jednostki w prawo, d) $a = -1,2$; 6 jednostek w lewo, e) $a = -1\frac{3}{7}$; 2 jednostki w prawo i 8 jednostek w dół, f) $a = 38$; 5 jednostek w lewo i 11 jednostek do góry
7. ① $y = 3x^2$, ② $y = x^2$, ③ $y = \frac{1}{9}x^2$, ④ $y = -\frac{1}{4}x^2$, ⑤ $y = -4x^2$
8. a) $a = \frac{2}{3}$; 1 jednostka w lewo i 1 jednostka w górę, b) $a = -\frac{3}{5}$; 7 jednostek w prawo i $\frac{\sqrt{2}}{5}$ jednostki w dół, c) $a = 4$; 1 jednostka w górę, d) $a = 9$; $\sqrt{5}$ jednostek w lewo, e) $a = 4$; 2 jednostki w lewo i 2 jednostki w dół, f) $a = \frac{1}{4}$; 2 jednostki w prawo i 5 w dół
9. ① $y = 2(x+2)^2 + 1$, ② $y = (x-4)^2 + 3$, ③ $y = -3(x+2)^2 - 3$, ④ $y = -(x-2)^2 - 3$
11. a) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; 3)$, rosnąca w przedziale $(3; +\infty)$; jedno miejsce zerowe, b) funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 0)$, malejąca w przedziale $(0; +\infty)$; dwa miejsca zerowe, c) funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; -2)$, malejąca w przedziale $(-2; +\infty)$; brak miejsc zerowych, d) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; \sqrt{7})$, rosnąca w przedziale $(\sqrt{7}; +\infty)$; brak miejsc zerowych, e) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -0,1)$, rosnąca w przedziale $(-0,1; +\infty)$; dwa miejsca zerowe, f) funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; \frac{1}{2})$, malejąca w przedziale $(\frac{1}{2}; +\infty)$; dwa miejsca zerowe
12. a) np. $y = x^3 - 3$, b) np. $y = -x^2 + 5$, c) np. $y = (x-2)^2$, d) np. $y = -(x-3)^2$, e) np. $y = -(x+1)^2 + 2$
13. a) brak, b) dwa, c) jedno, d) dwa, e) brak, f) brak
14. tak
15. a) 5 jednostek w prawo, 3 jednostki w górę; $y = 2(x-5)^2 + 3$, b) 2 jednostki w prawo, 1 jednostka w górę; $y = 2(x-2)^2 + 1$, c) 3 jednostki w górę; $y = 2x^2 + 3$, d) 1 jednostka w lewo, 1 jednostka w górę; $y = 2(x+1)^2 + 1$
16. tak
18. a) 4, b) 16, c) 4
19. a) $y = -20x^2 + 14x - 2$; $a = -20$; $b = 14$; $c = -2$, c) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + x + \frac{\sqrt{2}}{2}$; $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $b = 1$; $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, f) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{1}{4}$; $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{16}$; $c = \frac{1}{4}$, g) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3x - 6$; $a = -\frac{1}{3}$; $b = 3$; $c = -6$, h) $y = -1,5x^2 + 289,5x + 2100$; $a = -1,5$; $b = 289,5$; $c = 2100$, i) $y = 4x^2 + 5x + 4$; $a = 4$; $b = 5$; $c = 4$, b), d), e) funkcje nie są funkcjami kwadratowymi
20. a) $y = -x^2 + 1$, b) $y = -2\frac{1}{3}x^2$, c) $y = -\frac{3}{4}x^2 + 5x$, d) $y = (-\sqrt{3}+1)x^2 + (2-\sqrt{17})x + 5\sqrt{3}$
21. a) w górę; $(0, 7)$, b) w górę; $(0, -2)$, c) w dół; $(0, 3)$, d) w dół; $(0, -3)$, e) w dół; $(0, -\pi)$, f) w górę; $(0, \sqrt{8})$
22. a) $p = -4$, b) $k = -9$, c) $t = -8$
23. a) $(3, -2)$; $y = (x-3)^2 - 2$; $(0, 7)$, b) $(-4, 21)$; $y = -(x+4)^2 + 21$; $(0, 5)$, c) $(7, 0)$; $y = (x-7)^2$; $(0, 49)$, d) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; $y = 3(x+\frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}$; $(0, 1)$, e) $(1, -1)$; $y = -5(x-1)^2 - 1$; $(0, -6)$, f) $(1\frac{1}{2}, -20)$; $y = -4(x-1\frac{1}{2})^2 - 20$; $(0, -29)$
24. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$
25. a) np. $y = x^2 + 2$, b) np. $y = -x^2 - 1$, c) np. $y = x^2 - 22$, d) np. $y = -x^2 - 7$
26. a) $(0, 7)$; $y = x^2 - 4x + 7$, b) $(0, 51)$; $y = 2x^2 + 20x + 51$, c) $(0, -1)$; $y = -x^2 + 4x - 1$, d) $(0, 1\frac{1}{2})$; $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1\frac{1}{2}$
27. a) tak; dla $x = 0$ lub $x = 4$, b) tak; dla $x = -2$ lub $x = 6$, c) nie, d) tak; dla $x = 2$
28. ① — ④, ② — ③, ③ — ②, ④ — ①
29. ① — ③, ② — ②, ③ — ①, ④ — ④
30. tak; tak; nie; nie

31. a) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -1)$, rosnąca w przedziale $(-1; +\infty)$, b) funkcja malejąca w przedziale $(2; +\infty)$, rosnąca w przedziale $(-\infty; 2)$, c) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; \frac{1}{2})$, rosnąca w przedziale $(\frac{1}{2}; +\infty)$, d) funkcja malejąca w przedziale $(6; +\infty)$, rosnąca w przedziale $(-\infty; 6)$, e) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -\sqrt{3})$, rosnąca w przedziale $(-\sqrt{3}; +\infty)$, f) funkcja malejąca w przedziale $(\sqrt{2}; +\infty)$, rosnąca w przedziale $(-\infty; \sqrt{2})$
32. a) największą: $-9,75$ dla $x = 1,5$, b) najmniejszą: $-71,75$ dla $x = 4,5$, c) największą: $0,98875$ dla $x = 0,075$, d) najmniejszą: $-0,05$ dla $x = 0,1$, e) największą: 3 dla $x = 0$, f) największą: 9 dla $x = 3$
33. a) $P = 4$, b) $P = 1,5$, c) $P = \frac{51}{16}$
34. a) 1 jednostkę w lewo, 3 jednostki w górę, b) 2 jednostki w prawo, 8 jednostek w górę, c) $\frac{1}{2}$ jednostki w lewo, $\frac{3}{2}$ jednostki w dół
35. a) $y = -x^2 + 5$, b) $y = -\frac{5}{8}x^2 + 5x - 10$, c) $y = -x^2 + 6x + 5$
36. a) $t = -10$, b) $m = -30$, c) $p = 2$, d) $u = 3$
37. a) $a + b + c = 1$, b) $c = 5$, c) $c = 0$, d) $a + b + c = 0$, e) $b = 0$, f) $a = c = -\frac{b}{2}$
38. a) $a < 0, c < 0, \Delta < 0$, b) $a > 0, c > 0, \Delta < 0$
39. a) $a < 0, b < 0, c \leq 0$, b) $a > 0, b < 0, c \geq 0$
40. a) $y = (x + 2)^2 + 1$, b) $y = (x - \frac{3}{2})^2 - 9\frac{1}{4}$, c) $y = 2(x - 2)^2 - 7$, d) $y = -3(x + \frac{1}{6})^2 + 12\frac{1}{12}$, e) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 3$, f) $y = -0,1(x + 2,5)^2 + 1,725$
41. największa: $f(15,37)$; najmniejsza: $f(7\pi)$ Wskazówka. Oblicz najpierw pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.
42. a) $y = -0,5x^2 + 3x - 4,5$, b) $y = 3x^2 + x - 3$
43. a) funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$, malejąca w przedziale $(1; \infty)$, b) funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 1)$ oraz w przedziale $(3; \infty)$, malejąca w przedziale $(1; 3)$
44. $y = -x^2 + 1$
45. a) najmniejsza wartość równa 0 osiągana dla $x = 2 - \sqrt{2}$ oraz dla $x = 2 + \sqrt{2}$, b) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -6)$ oraz w przedziale $(-2; 2)$, rosnąca w przedziale $(-6; -2)$ oraz w przedziale $(2; +\infty)$, c) największa wartość równa 1 osiągana dla $x = 3$
46. a) $y = -x$ lub $y = \frac{x}{2}$ Wskazówka. Przekształć wzór do postaci $-2y^2 - xy + x^2 = 0$ i otrzymane równanie rozwiąż jako równanie kwadratowe, w którym niewiadomą jest y . b) $x = \frac{5y - \sqrt{9y^2 - 4}}{2}$ lub $x = \frac{5y + \sqrt{9y^2 - 4}}{2}$, gdzie $9y^2 - 4 \geq 0$; $y = \frac{5x - \sqrt{9x^2 - 16}}{8}$ lub $y = \frac{5x + \sqrt{9x^2 - 16}}{8}$, gdzie $9x^2 - 16 \geq 0$, c) $x = \frac{y - \sqrt{1 - y^2}}{2y^2 - 1}$ lub $x = \frac{y + \sqrt{1 - y^2}}{2y^2 - 1}$, gdzie $1 - y^2 \geq 0$ i $2y^2 - 1 \neq 0$, lub $x = \frac{1}{2y}$, gdzie $y \in \{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$; $y = \frac{1 - \sqrt{2x^2 - 1}}{2x}$ lub $y = \frac{1 + \sqrt{2x^2 - 1}}{2x}$, gdzie $2x^2 - 1 \geq 0$ i $x \neq 0$
47. a) $x = 1, x = 13$, b) $x = \frac{2}{3}, x = \frac{5}{6}$, c) $x = -0,7, x = -1,9$, d) $x = 1\frac{2}{3}, x = -3\frac{1}{3}$, e) $x = 2, x = -\frac{1}{2}$, f) $x = -3, x = \frac{3}{5}$
48. a) $x = 3, x = 6, g(x) = \frac{1}{3}(x - 3)(x - 6); x = -2, x = -7, h(x) = -\frac{1}{3}(x + 2)(x + 7)$, b) $x = -1, x = 2, g(x) = 2(x + 1)(x - 2), x = -3, x = -6; h(x) = -2(x + 3)(x + 6)$, c) $x = -7, x = 5, g(x) = 0,1(x + 7)(x - 5); x = 3, h(x) = -0,1(x - 3)^2$, d) $x = -2, x = -6, g(x) = 0,3(x + 2)(x + 6); x = 0, x = 7, h(x) = -0,3x(x - 7)$
49. a) $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; +\infty)$, b) $x \in (1; 7)$, c) $x \in (-1,9; 2,1)$, d) $x \in (-\infty; -\frac{5}{7}) \cup (\frac{4}{9}; +\infty)$, e) $x \in (-5; 0)$, f) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7\}$

50. a) $(8, -9)$, b) $(-6, 20)$, c) $(2, 0, 9)$, d) $(-3, 12)$

51. a) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; 5)$ i rosnąca w przedziale $(5; +\infty)$, b) funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; 4)$ i malejąca w przedziale $(4; +\infty)$, c) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; -6)$ i rosnąca w przedziale $(-6; +\infty)$, d) funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; -2,5)$ i malejąca w przedziale $(-2,5; +\infty)$, e) funkcja malejąca w przedziale $(-\infty; 4)$ i rosnąca w przedziale $(4; +\infty)$, f) funkcja rosnąca w przedziale $(-\infty; -2,5)$ i malejąca w przedziale $(-2,5; +\infty)$

52. a) $P = 48$, b) $P = 52,5$, c) $P = 180$

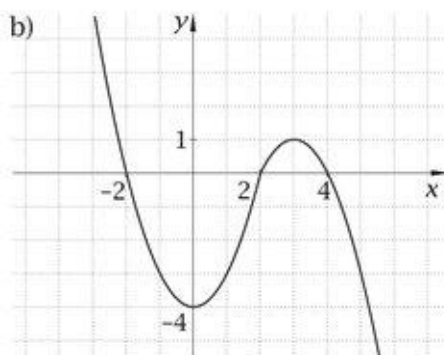
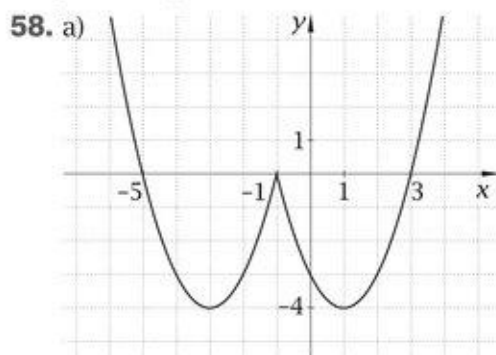
53. a) $f(x) = -2(x-2)(x-10)$, b) $f(x) = -\frac{1}{5}(x-5)(x+5)$, c) $f(x) = 0,25x(x+4)$

54. a) f oraz h , wszystkie cztery funkcje mają takie same miejsca zerowe, b) f oraz i , funkcje f , h , i mają takie same miejsca zerowe, c) f oraz i , g oraz h , brak funkcji o różnych wykresach i jednakowych miejscach zerowych

55. a) $p = -13$, b) $p = 5$, c) $p = -1$, d) $p = -7$

56. a) $m = -16$, b) $m = -3,6$, c) $m = -3$

57. a) brak rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, dwa rozwiązania dla $m \in (28; +\infty) \cup \{0\}$, trzy rozwiązania dla $m = 28$, cztery rozwiązania dla $m \in (0; 28)$, b) brak rozwiązań dla $m \in (-\infty; 0)$, dwa rozwiązania dla $m \in (98; +\infty) \cup \{0\}$, trzy rozwiązania dla $m = 98$, cztery rozwiązania dla $m \in (0; 98)$ Wskazówka. Narysuj wykres funkcji, której wzór jest taki jak lewa strona równania.



61. a) brak miejsc zerowych, b) dwa, c) dwa, d) jedno, e) jedno, f) brak miejsc zerowych

62. a) $(-19; +\infty)$, b) $(-\infty; \frac{3}{7})$, c) $(-\infty; 11)$, d) $(10; +\infty)$, e) $(-\infty; 3,5)$, f) $(0; +\infty)$

63. a) $(9, 3, 1, 4)$, b) $(-\frac{9}{11}, -\frac{7}{9})$, c) $(2, 3)$, d) $(-5, 24)$, e) $(-5, -10)$, f) $(5, 9\frac{9}{10})$

64. a) $(-13, 2; +\infty)$, b) $(-\infty; \frac{5}{6})$, c) $(-14; +\infty)$, d) $(-\infty; 4\frac{1}{40})$, e) $(-\infty; 36)$, f) $(-10; +\infty)$

65. a) $x = -1$, $x = 0$, b) $x = -2$, $x = 2$, c) brak miejsc zerowych, d) $x = 2$, e) $x = -3$, $x = 2$, f) $x = -3$

66. a) $x = -\frac{2}{7}$, $x = \frac{5}{8}$, b) $x = -6,2$, $x = 6,2$, c) brak miejsc zerowych, d) $x = -3$, $x = 1$, e) $x = 1$, f) $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$

67. a) $(3, 0)$, b) $(0, 6)$, c) $(6, -8)$

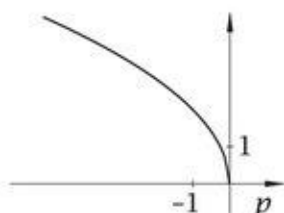
68. a) $f(x) = -(x-6)(x-7)$, b) $f(x) = 5(x+10)^2 - 2$, c) $f(x) = -13x^2 + x - 6$

69. a) np. $y = (x-5)(x-7)$; $y = x^2 - 12x + 35$, b) np. $y = (x+2)(x-4)$; $y = x^2 - 2x - 8$, c) np. $y = (x+5)(x+3)$ i $y = x^2 + 8x + 15$

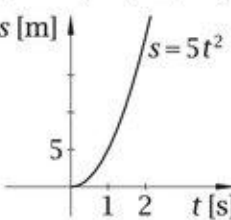
70. $f(x) = -2,25x^2 - 4,5x + 6,75$

71. a) $y = -3(x + \frac{1}{3})(x-1)$, $y = -3(x - \frac{1}{3})^2 + 1\frac{1}{3}$, b) $y = (x+2\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$, $y = (x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 4\frac{1}{2}$, c) $y = -\frac{1}{2}(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$, $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$, d) $y = \sqrt{3}(x-\sqrt{3})(x+3\sqrt{3})$, $y = \sqrt{3}(x+\sqrt{3})^2 - 12\sqrt{3}$

72. a) $y = -3x^2 + 30x - 72$, b) $y = x^2 - 10x + 24$
73. a) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$, b) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$, c) $y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$
74. a) tak; (0, 0), (4, 16), b) tak; (2, 0), (4, -6), c) tak; (0, -3), (3, 0), d) tak; (1, 2), (4, 5), e) tak; (0, 0), (4, 0), f) tak; (1, 2), g) tak; (4, 0), (6, -6), h) nie
75. a) dwa punkty przecięcia dla $m > -4$, jeden punkt dla $m = -4$, brak punktów przecięcia dla $m < -4$, b) dla dwóch argumentów, gdy $t < -7$, dla jednego argumentu, gdy $t = -7$, brak argumentów, gdy $t > -7$, c) dwa rozwiązania dla $p < 100$, jedno rozwiązanie dla $p = 100$, brak rozwiązań dla $p > 100$
76. a) najmniejsza wartość: -10, największa wartość: 290, b) najmniejsza wartość: -197, największa wartość: 1, c) najmniejsza wartość: -20, największa wartość: 0, d) najmniejsza wartość: -20, największa wartość: 60, e) najmniejsza wartość: -90, największa wartość: -13, f) najmniejsza wartość: -13, największa wartość: 5
77. a) najmniejsza wartość: -6, największa wartość: 3, b) najmniejsza wartość: -41, największa wartość: 4, c) najmniejsza wartość: -2, największa wartość: 16, d) najmniejsza wartość: -72, największa wartość: 9, e) najmniejsza wartość: -14, największa wartość: 21, f) najmniejsza wartość: -25, największa wartość: 2
78. a) $f_1(x) = 7x^2 + 5x - 4$, $g_1(x) = -6(x+9)^2 + 8$, b) $f_1(x) = 6x^2 + 9x - 5$, $g_1(x) = -7(x-5)(x+8)$, c) $f_1(x) = 4(x+5)^2 + 12$, d) $f_1(x) = 5(x-6)(x-12)$
79. Wskazówka. Skorzystaj ze wzorów Viète'a.
80. $P = \frac{(b^2 - 4ac)^{\frac{3}{2}}}{8a^2}$
81. 28
82. $f\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$, $f\left(\frac{37}{145}\right)$ Wskazówka. Wyznacz miejsca zerowe funkcji f i naskicuj jej wykres.
83. Wskazówka. Rozpatrz dwa przypadki: $a > 0$ oraz $a < 0$.
84. Wskazówka. Znajdź współrzędne punktu przecięcia tych parabol.
85. $f(p) = 2\sqrt{-p}$, $p \leq 0$



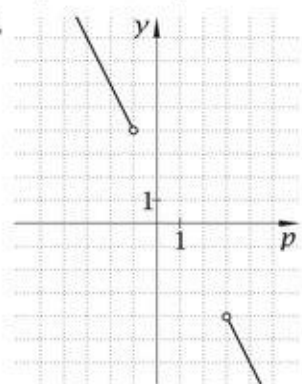
86. a) $x \in \langle 3; 6 \rangle$, b) $x \in (-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$, c) $x = \sqrt{3}$, d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7\}$, e) $x \in \emptyset$, f) $x \in \mathbb{R}$
87. a), b), c), f), h), i) nieskończenie wiele rozwiązań, d) jedno rozwiązanie, e) brak rozwiązań, g) brak rozwiązań
88. a) $x \in (-\infty; -1) \cup \langle 1; +\infty \rangle$, b) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, c) $x \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; +\infty \rangle$, d) $x \in \mathbb{R}$, e) $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$, f) brak rozwiązań, g) brak rozwiązań, h) $x \in \langle -7; 5 \rangle$
89. a) $x \in \mathbb{R}$, b) $x \in \langle -2; 3 \rangle$, c) $x \in (-3; 4)$, d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, e) $x \in \mathbb{R}$, f) brak rozwiązań, g) $x \in \mathbb{R}$, h) brak rozwiązań, i) $x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$
90. a) $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$, b) $x \in \langle -0,7; -0,1 \rangle$, c) $x \in \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$, d) $x \in \left(-\infty; \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \cup \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}; +\infty\right)$, e) $x \in \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$, f) $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (5; +\infty)$, g) $x \in \langle -1; 4 \rangle$, h) $x = \frac{7}{2}$, i) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}\}$, j) $x \in \mathbb{R}$, k) brak rozwiązań, l) $x \in \langle -\sqrt{7}; -\sqrt{2} \rangle$ Wskazówka. Zauważ, że $\Delta = (\sqrt{2} - \sqrt{7})^2$.
91. a) $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; $x \in \langle 0; 2 \rangle$, b) $x \in \mathbb{R}$; nie istnieje taki argument

92. a) $x \in \{2, 3\}$, b) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, c) $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, d) $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
e) $x \in \{2, 3, 4\}$, f) $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
93. a) $x \in (-5; 7)$, b) $x \in \mathbb{R}$, c) $x \in \left(-\frac{1}{3}; 2\right)$, d) $x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$, e) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$
94. a) $x \in \left(-\infty; \frac{14-4\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{14+4\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$, b) $x \in (-\infty; -6\sqrt{3}) \cup (6\sqrt{3}; +\infty)$,
c) $x \in \left(-\infty; -\frac{56}{3}\right) \cup (8; +\infty)$
95. a) $x \in (-3; -1)$; $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, b) $x \in (-1; 0) \cup (2; 3)$; $x \in \mathbb{R}$,
c) zbiór pusty; $x \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, d) $x \in (-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3})$; $x \in \mathbb{R}$,
e) zbiór pusty; $x \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{3-\sqrt{2}}{2}; \frac{3+\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$, f) $x \in \left(0; \frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}\right)$;
 $x \in \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}; \sqrt{7}\right)$
96. a) $x \in (0; 4)$, $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$, $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 3) \cup (4; +\infty)$,
b) $x \in (-\infty; -2) \cup (0, 5; 3) \cup (5; +\infty)$
97. a) $\{1, 2, 3\}$, b) $\{0, 1, 2, 3\}$, c) $\emptyset$, d) $\{6, 7\}$
98. a) $\left(-\infty; -1\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, b) $\left(-1; \frac{2}{5}\right)$, c) $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$
99. Wskazówka. Zinterpretuj nierówność $x^2y^2 + x^2 - 2xy^2 + y^2 \geq 0$ jako nierówność kwadratową. Za niewiadomą przyjmij jedną ze zmiennych (x lub y).
100. a) $x \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$, b) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$,
c) $x \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$, d) $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$
101. a) $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 3) \cup (4; +\infty)$, b) $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; 3) \cup (4; +\infty)$,
c) $x \in (-\infty; -2) \cup \{1\} \cup (3; +\infty)$, d) $x \in \{-2\} \cup (5; +\infty)$
102. 
103. 25 m; 100 m
104. a) 15 m, b) $(2 + \sqrt{7})$ s, czyli około 4,6 s, c) 35 m, po 2 s
105. $26\frac{2}{3}$
106. a) $x = -1$, b) $x = 1\frac{1}{2}$
107. 50 talarów
108. a) 8 jardów $\times$ 16 jardów, b) 800 jardów kwadratowych
109. a) $(20 + 10\sqrt{6})$ m, czyli około 44,5 m, b) 800 m²
110. 15 m $\times$ 22,5 m
111. a) $x \geq 5,4$, b) $x \geq 1$, c) $x \geq 2,8$
112. 60 gr; 1600 zł
113. $p = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}$
114. dla ramki trójkątnej — około 11,3 cm i dla ramki kwadratowej — około 8,7 cm
115. $\frac{V_o^2}{2g}$; $\frac{V_o}{g}$
117. a) $p = \frac{9}{16}$, b) $p = -\sqrt{2}$ lub $p = \sqrt{2}$, c) $p = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ lub $p = \frac{\sqrt{3}}{6}$ lub $p = 0$, d) $p = 1\frac{3}{5}$
118. a) $m \in \left(-1\frac{1}{3}; +\infty\right)$, b) $m \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, c) $m \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \setminus \{0\}$,
d) $m \in (-\infty; 0) \cup (36; +\infty)$
119. a) $t < -0,1225$, b) nie istnieje taka wartość t , c) $t < -1\frac{1}{4}$ lub $t > 1\frac{1}{4}$, d) $0 \leq t < \frac{4}{9}$

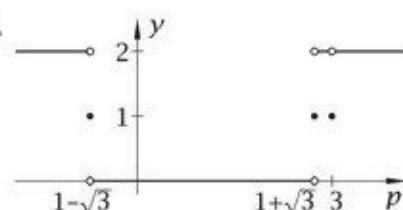
- 120.** a) funkcja nie ma miejsc zerowych dla $p \in \mathbb{R}$, b) funkcja nie ma miejsc zerowych dla $p \in (-3; -1)$, ma jedno miejsce zerowe dla $p = -3$ lub $p = -1$, ma dwa miejsca zerowe dla $p \in (-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$, c) funkcja nie ma miejsc zerowych dla $p \in (-\infty; \frac{-1-2\sqrt{5}}{19}) \cup (\frac{-1+2\sqrt{5}}{19}; +\infty)$, ma jedno miejsce zerowe dla $p = \frac{-1-2\sqrt{5}}{19}$, $p = 0$ lub $p = \frac{-1+2\sqrt{5}}{19}$, ma dwa miejsca zerowe dla $p \in (\frac{-1-2\sqrt{5}}{19}; \frac{-1+2\sqrt{5}}{19}) \setminus \{0\}$, d) funkcja nie ma miejsc zerowych dla $p \in (-\infty; -\frac{\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{17}}{2}; +\infty)$, ma jedno miejsce zerowe dla $p = -\frac{\sqrt{17}}{2}$, $p = 2$ lub $p = \frac{\sqrt{17}}{2}$, ma dwa miejsca zerowe dla $p \in (-\frac{\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}}{2}) \setminus \{2\}$, e) funkcja nie ma miejsc zerowych dla $p \in (-\infty; -1\frac{2}{7}) \cup (1; +\infty)$, ma jedno miejsce zerowe dla $p = -1\frac{2}{7}$ lub $p = 1$, ma dwa miejsca zerowe dla $p \in (-1\frac{2}{7}; 1) \setminus \{-1\}$, f) funkcja nie ma miejsc zerowych dla $p \in (0; +\infty)$, ma jedno miejsce zerowe dla $p = 0$, ma dwa miejsca zerowe dla $p \in (-\infty; 0)$
- 121.** a) $u \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty)$, b) $u = -1-\sqrt{3}$ lub $u = -1+\sqrt{3}$, c) $u \in (-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3})$
- 122.** a) $m \in (4; +\infty)$, b) $p \in (-\infty; 0)$, c) $m \in (-\infty; -2)$
- 123.** a) $k \in \mathbb{R}$, $m = 0$, b) $k = 1$, $m \in \mathbb{R}$
- 124.** a) $k^2 = 4m$ i $k > 0$, b) $k^2 > 4m$, $k < 0$ i $m > 0$, c) $k \leq 0$ i $m = 0$, d) $k^2 > 4m$ i $k > 0$, e) $k^2 - 4m < -20$, f) $k = 0$ i $-100 \leq m \leq 0$
- 125.** a) $p = -3$, b) $p = -1$
- 126.** a) $p \leq -\frac{1}{4}$, b) $p = 1$
- 127.** a) $-6 < k < 2$, b) $k \leq 0$ lub $k > 1$
- 128.** a) dwa punkty dla $p \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty)$, jeden punkt dla $p = -1-\sqrt{3}$ i $p = -1+\sqrt{3}$, nie mają punktów wspólnych dla $p \in (-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3})$, b) dwa punkty dla $p \neq 1$, nieskończenie wiele punktów dla $p = 1$
- 129.** a) $m = -1$ lub $m = 0$, b) $m = -2$, $m = 0$ lub $m = 2$, c) $m = 0$, d) $m \leq \frac{3-\sqrt{23}}{4}$ lub $m \geq \frac{3+\sqrt{23}}{4}$, e) $m < -2$ lub $m > -\frac{2}{3}$, f) $m = 0$
- 130.** a) $m \in (-3; -2) \cup (2; 3)$, b) $m \in (-1; 0) \cup (1; 2)$
- 131.** a) $p = -5$, b) $-7 \leq p \leq -3$, c) $p = -2$, d) $-\frac{3}{2} \leq p < 4 - 2\sqrt{5}$
- 132.** a) $p = 3$; $x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$, b) $p = -2$; $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -2$
- 133.** a) $p \in (-2; 2)$, b) $p \in (-\frac{4\sqrt{3}}{3}; -2)$, c) $p \in (2; \frac{4\sqrt{3}}{3})$, d) $p = -2$
- 134.** dodatnie dla $t \in (0; \frac{1+\sqrt{5}}{2})$, a ujemne dla $t \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0)$
- 135.** a) $p = -1$ lub $p = 1$, b) $p = -\sqrt{2}$ lub $p = \sqrt{2}$
- 136.** a) $k > 2$, b) $k < -2$ lub $k > 2$
- 137.** a) $p = 0$; -3 , b) $p = \frac{1}{2}$; $-2\frac{1}{4}$
- 138.** a) $p = 3,5$, b) $p = 0$
- 139.** a) $m = -1,5$, $m = 1,5$, b) $p = -1 - \sqrt{3}$
- 140.** a) $k > \frac{1}{20}$, b) nie istnieje takie k
- 141.** a) $5 - 2\sqrt{6} < k < 5 + 2\sqrt{6}$, b) nierówność zawsze ma rozwiązanie
- 142.** $0 \leq k < 7 - 4\sqrt{3}$ lub $k > 7 + 4\sqrt{3}$
- 143.** a) $m \in (-\sqrt{7}; -1)$, b) $m \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$ Wskazówka. Warunek $x_1^3 - x_2^3 > 3(x_1^2 - x_2^2)$ można przekształcić do postaci $(x_1 - x_2)((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 3(x_1 + x_2)) > 0$. Zauważ, że ta nierówność jest spełniona, gdy $(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) > 0$, ponieważ $x_1 > x_2$, czyli $x_1 - x_2 > 0$.

144. a) $m = 2$ lub $m = -8$ Wskazówka. $|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|$, b) $p = -4$ lub $p = 2\frac{2}{3}$, c) $m \in (1; 2) \cup (2; 3)$, d) $p \in (3; +\infty)$
145. a) równanie nie ma rozwiązań dla $m \in \left(-\infty; \frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, ma jedno rozwiązanie dla $m \in \left\{\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right\}$, ma dwa rozwiązania dla $m \in \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$, b) równanie nie ma rozwiązań dla $m \in \left(-\infty; \frac{-2-2\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$, ma jedno rozwiązanie dla $m \in \left\{\frac{-2-2\sqrt{7}}{3}, 1, \frac{-2+2\sqrt{7}}{3}\right\}$, ma dwa rozwiązania dla $m \in \left(\frac{-2-2\sqrt{7}}{3}; 1\right) \cup \left(1; \frac{-2+2\sqrt{7}}{3}\right)$
146. a) $s \in (-\infty; -1 - 2\sqrt{2}) \cup (-1 + 2\sqrt{2}; 3, 5)$ Wskazówka. Jeśli $x_1 < 4$ i $x_2 < 4$, to $x_1 - 4 < 0$ i $x_2 - 4 < 0$. Aby ten warunek był spełniony, wystarczy, żeby $(x_1 - 4)(x_2 - 4) > 0$ oraz $(x_1 - 4) + (x_2 - 4) < 0$. b) $-\frac{5}{4} < k < -1$ lub $k > -\frac{1}{4}$, c) $u \in (-\infty; 1) \cup \left(9; 11\frac{2}{3}\right)$
147. a) $s \in (-\infty; -4, 5)$ Wskazówka. Jeśli $2 \in (x_1; x_2)$, to $x_1 < 2$ i $x_2 > 2$, czyli $x_1 - 2 < 0$ oraz $x_2 - 2 > 0$. Aby te warunki były spełnione, wystarczy, żeby $(x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0$. b) $p \in \left(-\infty; -8\frac{1}{6}\right)$, c) $t \in \left(-\infty; -3\frac{2}{3}\right)$
148. a) $m \in (-6, 8; -6) \cup (6; 6, 25)$ Wskazówka. Jeśli $x_1 \in (-4; 5)$, to $x_1 < 5$ i $x_1 > -4$, czyli $x_1 - 5 < 0$ oraz $x_1 + 4 > 0$. Podobnie dla x_2 mamy: $x_2 - 5 < 0$ oraz $x_2 + 4 > 0$. Aby te warunki były spełnione, wystarczy, żeby $(x_1 - 5)(x_2 - 5) > 0$ i $x_1 - 5 + x_2 - 5 > 0$ oraz $(x_1 + 4)(x_2 + 4) > 0$ i $x_1 + 4 + x_2 + 4 > 0$. b) $p \in (2 + 2\sqrt{2}; 5)$, c) $t \in (1; 4 - 2\sqrt{2}) \cup (4 + 2\sqrt{2}; 8, 5)$
149. a) cztery rozwiązania dla $p \in (0; 9)$, trzy rozwiązania dla $p = 9$, dwa rozwiązania dla $p \in (9; +\infty)$ oraz dla $p = 0$, brak rozwiązań dla $p \in (-\infty; 0)$, b) cztery rozwiązania dla $p \in (0; 3)$, trzy rozwiązania dla $p = 3$, dwa rozwiązania dla $p \in (3; +\infty)$ oraz dla $p = 0$, brak rozwiązań dla $p \in (-\infty; 0)$, c) cztery rozwiązania dla $p \in (0; 5)$, trzy rozwiązania dla $p = 5$, dwa rozwiązania dla $p \in (5; +\infty)$ oraz dla $p = 0$, brak rozwiązań dla $p \in (-\infty; 0)$
150. a) brak rozwiązań dla $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, dwa rozwiązania dla $m \in (-1; 1)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = -1$ oraz dla $m = 1$, b) brak rozwiązań dla $m \in (-\infty; 4)$, dwa rozwiązania dla $m \in (12; +\infty)$, trzy rozwiązania dla $m = 12$, cztery rozwiązania dla $m \in (4; 12)$, nieskończenie wiele rozwiązań dla $m = 4$
151. a) $p < -7$, b) $p = -2$

152.

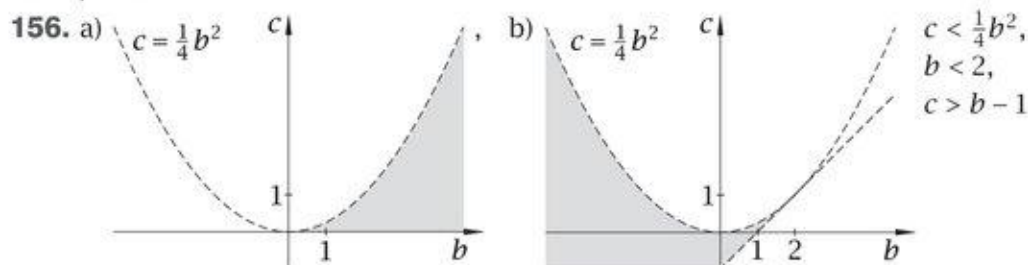


153.



154. $y = 2x - 1$ i punkt styczności $(1, 1)$ lub $y = -2x - 1$ i punkt styczności $(-1, 1)$

155. $p = 9$



157. Wskazówka. Przeprowadź dowód metodą nie wprost, czyli przyjmij, że żadne z równań nie ma rozwiązania. Zapisz warunek, jaki wówczas spełnia wyróżnik Δ każdego z równań. Zauważ też, że skoro $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$, to $(p_1 p_2)^2 = 4(q_1 + q_2)^2$.

PRZED SPRAWDZIANEM

1. D
2. D
3. C
4. A
5. a) $f(x) = -5(x - 1)^2 + 20$, $f(x) = -5(x + 1)(x - 3)$, b) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$
6. a) najmniejsza wartość to -14 , największa wartość to 2 , b) najmniejsza wartość to -1 , największa wartość to 95
7. $y = x^2 - 6x + 7$
8. 32
9. C
10. D
11. B
12. C
14. a) $(-\infty; 45)$, b) $(-155; -5)$
15. 10 stóp $\times$ 20 stóp, 200 stóp kwadratowych

PRZED MATURĄ

1. A
2. D
3. A
4. B
5. D
6. $b = -14$, $c = -5$
7. $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$
8. $\frac{7}{39}$
9. 42,25
10. $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$
13. $m \in (-\infty; -2)$
14. $m \in (-6\frac{1}{2}; -6) \cup (-6; -5\frac{1}{2})$
15. $m \in (-\frac{1}{6}; 0) \cup (4; \frac{9}{2})$



Podręczniki w wersji uczniowskiej są przeznaczone do nauki matematyki w czteroletnim liceum lub pięcioletnim technikum. Spełniają one kryteria *Ustawy o systemie oświaty* i najnowszej podstawy programowej z 2018 roku. Zostały dopuszczone przez MEN do użytku szkolnego i wpisane do wykazu podręczników.

Numery dopuszczenia:

964/1/2019 (zakres podstawowy)

963/1/2019 (zakres rozszerzony)

Zestaw dla ucznia składa się z odpowiedniego podręcznika (dla zakresu podstawowego lub rozszerzonego) i zbioru zadań. Uczniom poszukującym dodatkowych ćwiczeń warto polecić zeszyt ćwiczeń lub dostępny online program *Matnau 1*.



zeszyt ćwiczeń



www.matnau.gwo.pl

