

NOWA ODŚŁONA

Matematyka

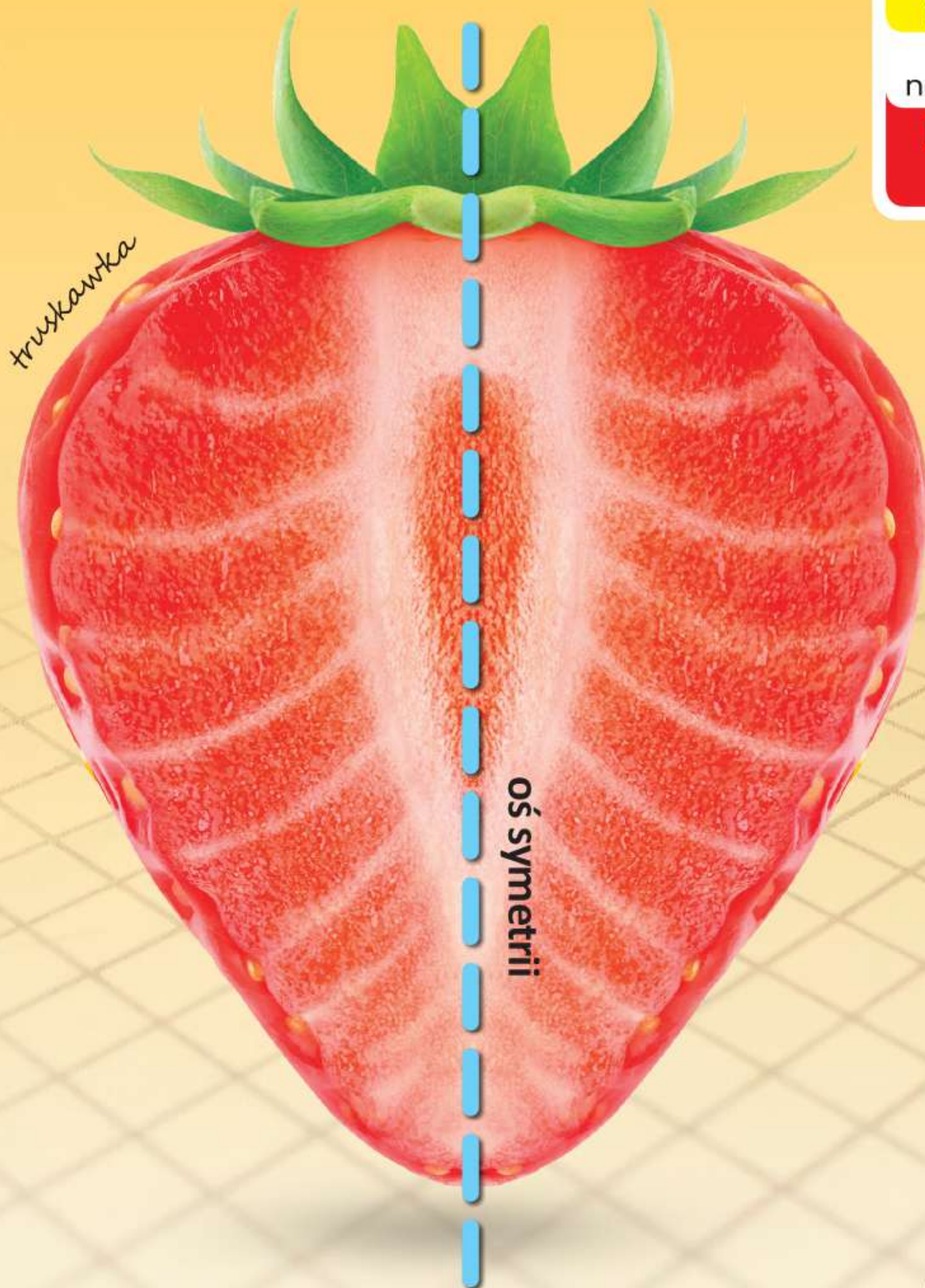
wokół nas

podręcznik do szkoły podstawowej

Oznaczono
zmiany
i wykreślenia

E-book
na eduranga.pl

**PODSTAWA
2024**



6

Drogi WSiP,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby być zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regulame książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę, w której papier nie jest beczelnie marnowany dla pieniędzy.

Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

SPIS TREŚCI

Jak korzystać z podręcznika	5
Wakacje, wakacje i... po wakacjach	6

I. Liczby naturalne

1. Działania na liczbach naturalnych	10
2. Podzielność liczb naturalnych	16
3. Największy wspólny dzielnik	20
4. Najmniejsza wspólna wielokrotność	23
5. Średnia arytmetyczna liczb	26
6. Liczby naturalne wokół nas	30
Zadania utrwalające	34
Zadania sprawdzające	36
Czy „średnio” to „po tyle samo”? – infografika	38

II. Wyrażenia algebraiczne i równania

1. Wyrażenia algebraiczne	40
2. Równania	46
3. Wyrażenia algebraiczne i równania w zadaniach	50
Zadania utrwalające	54
Zadania sprawdzające	56

III. Własności figur płaskich

1. Prosta, kąty	58
2. Symetria wokół nas	65
3. Figury płaskie	69
4. Trójkąty	75
5. Czworokąty	81
Zadania utrwalające	86
Zadania sprawdzające	88
Symetria wokół nas – infografika	90

IV. Działania na ułamkach

1. Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych	92
2. Mnożenie i dzielenie ułamków zwykłych	96
3. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych	102
4. Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych	105
5. Przybliżenia dziesiętne	109
6. Działania na ułamkach	115
7. Droga, prędkość i czas	120
Zadania utrwalające	128
Zadania sprawdzające	130

V. Liczby wymierne

1. Liczby ujemne	132
2. Wartość bezwzględna liczby	137
3. Dodawanie liczb całkowitych	141
4. Odejmowanie liczb całkowitych	145
5. Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych	150
6. Mnożenie liczb całkowitych	154
7. Dzielenie liczb całkowitych	158
8. Mnożenie i dzielenie liczb wymiernych	161
9. Działania na liczbach wymiernych	166
10. Liczby wymierne wokół nas	168
Zadania utrwalające	172
Zadania sprawdzające	174

VI. Pola wielokątów

1. Pole czworokąta	176
2. Pole trójkąta	182
3. Pole dowolnego wielokąta	185
Zadania utrwalające	190
Zadania sprawdzające	192

VII. Procenty

1. Ułamki o mianowniku 100	194
2. Obliczanie procentu danej liczby	198
3. Zadania z procentami	202
4. Diagramy procentowe	209
Zadania utrwalające	218
Zadania sprawdzające	220
Bilans energetyczny w procentach – infografika	222

VIII. Figury przestrzenne

1. Graniastosłupy proste	224
2. Pole powierzchni graniastosłupa	229
3. Objętość prostopadłościanu	233
4. Ostrosłupy	240
5. Bryły obrotowe	245
Zadania utrwalające	252
Zadania sprawdzające	254
Jednostki pojemności – infografika	256
Odpowiedzi do zadań	258



Przeczytaj, zrozum, zapamiętaj

Sowa uczy

Najmniejsza wspólna wielokrotność – **NWW** – danych liczb to najmniejsza (różna od 0) liczba, która jest wielokrotnością każdej z tych liczb.



O figurze, która ma co najmniej jedną oś symetrii, mówimy, że jest **osiowosymetryczna**.

ważne informacje do zapamiętania

wprowadzenie nowych treści

Ćwicz i rozwiązuj zadania

Przykład 1.

W okresie promocji kurtka kosztowała 360 zł, a później jej cena wzrosła do 450 zł. O ile procent podniesiono cenę kurtki?

Obliczmy, o ile podrożała kurtka.

$$450 \text{ zł} - 360 \text{ zł} = 90 \text{ zł}$$

Obliczmy, jaką częścią ceny promocyjnej jest 90 zł. Ile to procent?

$$\frac{90}{360} = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

Odpowiedź. Cenę kurtki podniesiono o 25% ceny promocyjnej.

Sprawdź się!

- Trójkątem ostrokątnym **nie jest** trójkąt, którego miary dwóch kątów wewnętrznych są równe
A. $50^\circ, 80^\circ$ B. $55^\circ, 35^\circ$ C. $40^\circ, 60^\circ$ D. $45^\circ, 55^\circ$
- Narysuj trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm. Zmierz przeciwprostokątną i oblicz obwód tego trójkąta.
- Podaj długości trzech odcinków, z których można zbudować trójkąt, oraz długości trzech odcinków, z których nie można zbudować trójkąta.

wzorcowo rozwiązane zadania

zadania na zakończenie każdego tematu

Utrwal i sprawdź swoje umiejętności

Zadania utrwalające

- Liczby: $\frac{2}{5}$; 0,15; $\frac{3}{4}$; 2; 1,1; $\frac{14}{40}$; $\frac{3}{25}$ zamień na procenty.
- Podane procenty przedstaw w postaci ułamków dziesiętnych: 10%, 75%, 5%, 150%, 30%.
- Podane procenty zapisz w postaci ułamków zwykłych nieskracalnych: 30%, 1%, 45%, 350%, 50%.

powtórzenie wiadomości

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- Wartość wyrażenia $a^2 - 2m$ dla $a = 7$, $m = 5$ jest równa
A. 4 B. 24 C. 0 D. 39
- Wartością wyrażenia $\frac{ab}{2}$ dla $a = 3$ i $b = 6$ jest
A. $18\frac{1}{2}$ B. 9 C. $4\frac{1}{2}$ D. 18

sprawdzenie umiejętności

Zwróć uwagę na ciekawostki i wyzwania

A to ciekawe!

Jeżeli ułamki są równe, to odpowiednie iloczyny też są równe.

$$\frac{3}{4} = \frac{21}{28}, \text{ to } 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21$$

Można też w ten sposób porównywać ułamki.

$$\frac{2}{3} \text{ i } \frac{3}{5} \quad 2 \cdot 5 > 3 \cdot 3, \text{ więc } \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

Porównaj ułamki:

$$\text{a) } \frac{8}{10} \text{ i } \frac{4}{5}, \quad \text{b) } \frac{5}{6} \text{ i } \frac{7}{8}, \quad \text{c) } \frac{3}{4} \text{ i } \frac{4}{6}$$

interesujące wiadomości matematyczne

Wyzwanie

Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 180, a ich największy wspólny dzielnik jest równy 3. Co to za liczby? Czy istnieje tylko jedna para takich liczb?

zadania dla dociekliwych

Pamiętaj!

Odpowiedzi do wszystkich zadań zamieszczonych w podręczniku zapisuj w zeszycie przedmiotowym.

Wakacje, wakacje i... po wakacjach

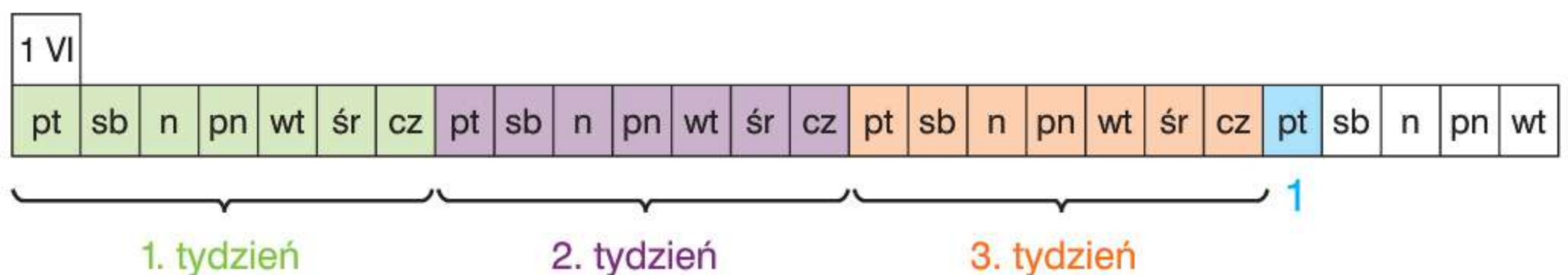
Znajdźmy matematykę w naszych wakacyjnych wspomnieniach.

Przykład 1.

Tata Adriana obchodził urodziny 22 czerwca, a Adrian 40 dni później. W jakim dniu tygodnia obchodził urodziny każdy z nich w roku, w którym 1 czerwca wypadł w piątek? Podaj miesiąc i dzień urodzin Adriana.

Sprawdźmy, ile tygodni minęło od początku miesiąca do urodzin taty.

$22 : 7 = 3$ reszty 1, czyli 3 tygodnie i 1 dzień



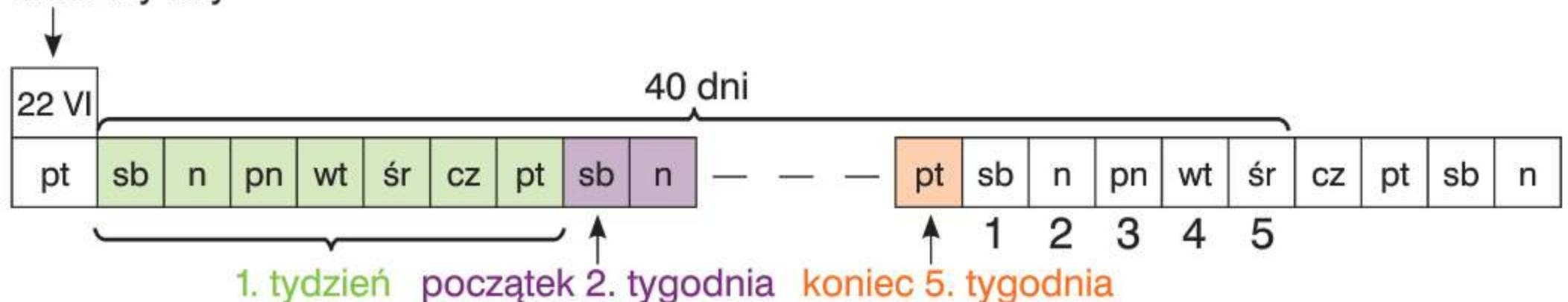
Tydzień rozpoczął się w piątek, a skończył w czwartek.

22 czerwca to pierwszy dzień czwartego tygodnia, czyli piątek.

Obliczmy, ile tygodni zawiera się w 40 dniach i jaki dzień tygodnia wypada po tym czasie.

$40 : 7 = 5$ reszty 5, czyli 5 tygodni i 5 dni

urodziny taty



Jeżeli pierwszym dniem tygodnia była sobota, to piątym była środa.

Obliczmy dzień i miesiąc urodzin Adriana.

$30 - 22 = 8$ [dni] od urodzin taty do końca czerwca

$8 + 31 = 39$ [dni] od urodzin taty do końca lipca

Czterdziesty dzień od urodzin taty wypada 1 sierpnia.

Odpowiedź. Adrian obchodził swoje urodziny w środę, a jego tata w piątek. Adrian urodził się 1 sierpnia.



- 1 Wakacje Adriana rozpoczęły się 23 czerwca w sobotę i trwały do 31 sierpnia włącznie. Od 14 lipca Adrian był na dwutygodniowym obozie w Łebie.

- Ile dni trwały wakacje Adriana?
- Którym dniem tygodnia był 1 września?
- Którego dnia wakacji Adrian pojechał na obóz?
- Podaj datę ostatniego dnia obozu.



Łeba

- 2 Przed wyjazdem na obóz Adrian otrzymał 120 zł kieszonkowego. Za 0,5 tej kwoty kupił sobie pamiątkę, a 30 zł wydał na smakołyki. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
- Pamiątka kosztowała A / B. A. 60 zł B. 50 zł
- Na smakołyki Adrian wydał C / D kieszonkowego. C. 0,3 D. 0,25

- 3 Tata odwoził Adriana na obóz. Jechali samochodem przez 3 godziny z prędkością średnią $55 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Obóz był oddalony od domu
- A. o 55 km. B. o 110 km. C. o 165 km. D. o 160 km.

- 4 Uczestnicy obozu byli zakwaterowani w 15 pokojach trzyosobowych, 9 pokojach czteroosobowych i 3 pokojach dwuosobowych. Ile osób było na obozie, jeżeli wszystkie łóżka w pokojach były zajęte? Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. 81 osób,	ponieważ	I. uczestników zakwaterowano w 27 pokojach, średnio po 3 osoby.
B. 87 osób,		II. w pokojach trzyosobowych mieszkało 45 osób, w czteroosobowych – 36 osób, a w dwuosobowych – 6 osób.

- 5 Na obozie Adrian miał codziennie zajęcia sportowe w godzinach od 10.15 do 11.00 i od 16.10 do 18.45. Ile czasu zajmowały te zajęcia w ciągu dnia?
- 6 O godzinie 9.30 uczestnicy obozu wyjechali autokarem do odległego o 120 km parku krajobrazowego. Nie zatrzymywali się po drodze i na miejsce dotarli o godzinie 11.30. Z jaką prędkością średnią jechał autokar?



- 7 Na planie wykonanym w skali 1 : 6500 odległość od pensjonatu, w którym zakwaterowani byli uczestnicy obozu, do jeziora Łebsko jest równa 4 cm. Ile wynosi ta odległość w rzeczywistości?

A. 260 m,	ponieważ	I. 1 cm na tej mapie to 6,5 km w rzeczywistości.
B. 2 km 600 m,		II. 1 cm na tej mapie to 65 m w rzeczywistości.

- 8 Uczestnicy obozu często korzystali z dwóch siłowni. Jedna mieściła się na kwadratowej działce, a druga na działce prostokątnej o szerokości 9 m. Każda z działek miała powierzchnię 144 m^2 .

- a) Jaką długość miał bok działki kwadratowej, a jaką drugi bok działki prostokątnej?
- b) Obydwie działki ogrodzono płotkiem w cenie 23 zł za 1 m. Zostawiono przy tym otwór wejściowy o szerokości 1 m. Ogrodzenie której działki było droższe i o ile droższe?



- 9 Pobyt Adriana na obozie kosztował 1460 zł. Koszt wyżywienia stanowił $\frac{1}{2}$ tej kwoty. Noclegi kosztowały o 270 zł mniej niż wyżywienie. Na wycieczki przeznaczono $\frac{1}{10}$ tego, co na wyżywienie, a na wyjście do kina $\frac{1}{10}$ tego, co na noclegi. Reszta z kwoty, którą za obóz zapłacili rodzice Adriana, była przeznaczona na opiekę medyczną i ubezpieczenie. Ile pieniędzy przeznaczono na opiekę medyczną i ubezpieczenie? Jaką częścią ceny za obóz była kwota za noclegi?
- 10 Przyjaciółki Maja i Lena były razem na wczasach i umówiły się, że wydatkami na produkty spożywcze podzielą się po równo. Maja zapłaciła rachunki na kwoty: 37 zł, 98 zł, 116 zł i 75 zł, a Lena: 58 zł, 83 zł, 127 zł i 18 zł. Która z nich otrzyma od przyjaciółki zwrot pieniędzy i w jakiej kwocie?
- 11 Podaj:
- a) liczbę dni roku, w którym rozpoczynasz klasę szóstą;
- b) liczbę dni i tygodni w latach 2020 i 2021.
- 12 Ułóż i rozwiąż zadanie o swoich wakacjach.



Sprawdź się!

- 1 Prostokątna działka ma wymiary $20\text{ m} \times 15\text{ m}$.
Które zdanie jest **fałszywe**?
A. Obwód działki wynosi 70 m.
B. Powierzchnia działki jest równa 3 a.
C. Długość dłuższego boku działki stanowi $\frac{2}{7}$ obwodu.
D. Na planie w skali 1 : 50 działka ma wymiary $40\text{ cm} \times 25\text{ cm}$.

- 2 W sobotę Agata przez $\frac{1}{5}\text{ h}$ rozmawiała z przyjaciółką przez telefon, $0,75\text{ h}$ pływała w basenie, a przez 1 h 3 min oglądała film.
Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

Łącznie czynności te trwały A / B.
A. 130 min B. 120 min
Czas przeznaczony na te czynności stanowił C / D doby.
C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{3}{8}$

- 3 We wtorek 4 września Agata dowiedziała się, że za 9 dni jej klasa ma napisać sprawdzian z matematyki. Podaj dzień tygodnia i miesiąca, w którym odbędzie się ten sprawdzian.

- 4 Odległość w linii prostej pomiędzy hotelem a plażą jest równa 330 m. Jaką długość ma ten odcinek na planie w skali 1 : 5500?

- 5 W szkole Adriana sprawdzian po I semestrze zapowiedziano na 22 lutego. Rozpoczęcie roku szkolnego odbyło się 3 września w poniedziałek.
a) Ile dni minie od rozpoczęcia roku szkolnego do sprawdzianu?
b) Ile pełnych tygodni minie od rozpoczęcia roku szkolnego do sprawdzianu?
c) Którego dnia tygodnia odbędzie się sprawdzian?
d) W każdym tygodniu są 4 lekcje matematyki. Oblicz, ile lekcji matematyki może odbyć się do dnia sprawdzianu. Pamiętaj o odliczeniu 4 tygodni na dni wolne od nauki.



1. Działania na liczbach naturalnych



Sowa przypomina

• Suma i iloczyn

suma liczb 16, 31 i 44

$$\overbrace{16 + 31 + 44}^{\text{składniki}} = (16 + 44) + 31 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suma}}}{91}$$

iloczyn liczb 20, 13 i 50

$$\overbrace{20 \cdot 13 \cdot 50}^{\text{czynniki}} = (20 \cdot 50) \cdot 13 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{iloczyn}}}{13\ 000}$$

Dodawanie i mnożenie są przemienne i łączne.

$$7 \cdot 13 = 7 \cdot (10 + 3) = 7 \cdot 10 + 7 \cdot 3 = 70 + 21 = 91$$

$$6 \cdot 28 = 6 \cdot (30 - 2) = 6 \cdot 30 - 6 \cdot 2 = 180 - 12 = 168$$

Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania i odejmowania.

• Różnica i iloraz

różnica liczb 85 i 39

$$\overbrace{85 - 39}^{\text{odjemna} \quad \text{odjemnik}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{różnica}}}{46}$$

iloraz liczb 6300 i 30

$$\overbrace{6300 : 30}^{\text{dzielna} \quad \text{dzielnik}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{iloraz}}}{210}$$

Dzielenie przez zero jest niewykonalne.

$$69 : 3 = (60 + 9) : 3 = 60 : 3 + 9 : 3 = 20 + 3 = 23$$

$$92 : 4 = (100 - 8) : 4 = 100 : 4 - 8 : 4 = 25 - 2 = 23$$

Dzielenie jest rozdzielne względem dodawania i odejmowania.

• **Dzielenie z resztą**

$$\begin{array}{ccccccc} 32 & : & 5 & = & 6 & r & 2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{dzielna} & & \text{dzielnik} & & \text{iloraz} & & \text{reszta} \end{array}$$

Sprawdzenie: $6 \cdot 5 + 2 = 32$

• **Potęgowanie** można zapisać jako mnożenie takich samych czynników.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{wykładnik potęgi} & & & & \\ & & \swarrow & & & & \\ 2^5 & = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 & = & 32 \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ \text{podstawa potęgi} & & & & \text{wartość potęgi} \end{array}$$

2^5 czytamy: **piąta potęga liczby 2**
lub **dwa do potęgi piątej**

Przykład 1.

Na parkingu stały samochody i rowery. Wszystkich pojazdów było 18 i miały one razem 52 koła. Samochodów było

A. 15 B. 10 C. 8 D. 9

Rozwiążmy to zadanie przez sprawdzenie kolejnych odpowiedzi z warunkami zadania.

Odpowiedź A trzeba od razu wyeliminować, gdyż 15 samochodów ma $15 \cdot 4 = 60$ kół i jest to więcej niż liczba podana w zadaniu.

W celu wykonania pozostałych obliczeń (wyjątkowo) narysujmy tabelkę. Takie obliczenia można wykonywać w pamięci.

Liczba samochodów	Liczba kół w samochodach	Liczba rowerów	Liczba kół w rowerach	Suma wszystkich kół	Komentarz
B. 10	40	$18 - 10 = 8$	16	56	za dużo kół
C. 8	32	$18 - 8 = 10$	20	52	są 52 koła

Poprawną odpowiedzią jest C.
Na parkingu stało 8 samochodów.

Ponieważ w zadaniach tego typu tylko jedna odpowiedź jest prawdziwa, nie trzeba sprawdzać odpowiedzi D.



Przykład 2.

Banknot dwudziestozłotowy rozmieniono na monety jedno- i dwuzłotowe.

Oblicz, ile było monet każdego rodzaju, jeżeli monet jednozłotowych było o 2 więcej niż dwuzłotowych.

**Sposób I**

Takie zadanie można rozwiązać **metodą prób i błędów**.

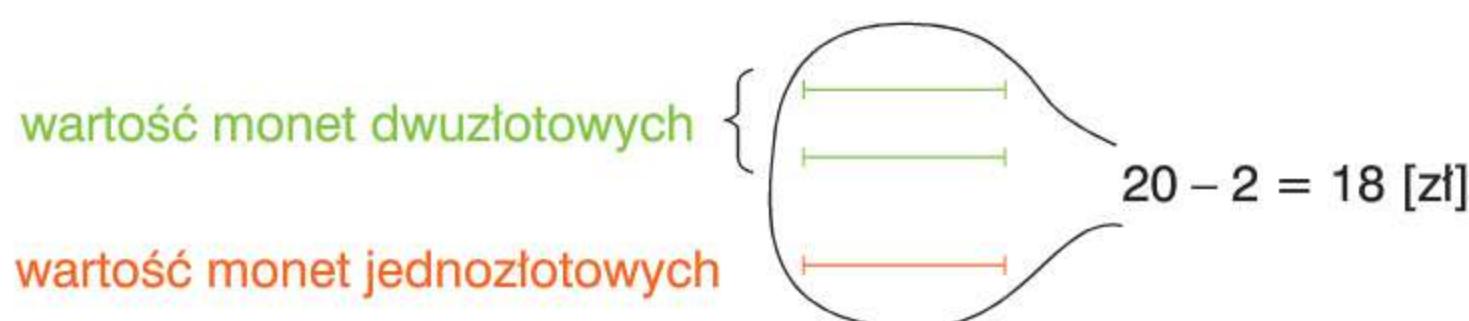
Banknot dwudziestozłotowy rozmieniono na monety dwóch rodzajów, więc monet po 2 zł musiało być mniej niż 10 (bo $10 \cdot 2 \text{ zł} = 20 \text{ zł}$), a monet po 1 zł mniej niż 20 (bo $20 \cdot 1 \text{ zł} = 20 \text{ zł}$).

Narysujmy tabelkę. Wpiszmy liczby monet zgodnie z treścią zadania.

Liczba monet		Wartość	Porównanie z 20 zł
po 2 zł	po 1 zł (o 2 sztuki więcej niż po 2 zł)		
9	11	$9 \cdot 2 + 11 \cdot 1 = 29$	$29 > 20$
8	10	$8 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 26$	$26 > 20$
7	9	$7 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 23$	$23 > 20$
6	8	$6 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 20$	$20 = 20$

Sposób II

Monet jednozłotowych jest o 2 więcej niż monet dwuzłotowych. Jeśli odłożymy dwie monety jednozłotowe, to monet jedno- i dwuzłotowych będzie po tyle samo, a ich łączna wartość zmaleje o 2 zł. Wartość monet dwuzłotowych jest 2 razy większa od wartości monet jednozłotowych.



Wartość monet jednozłotowych bez dwóch sztuk: $18 : 3 = 6 \text{ [zł]}$.

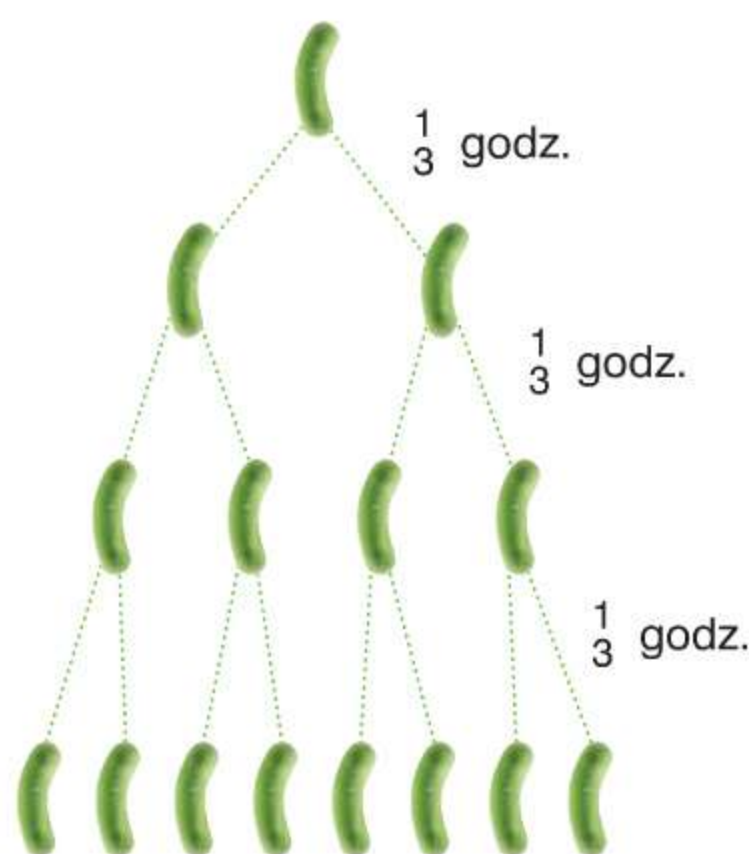
Wartość monet dwuzłotowych: $6 \cdot 2 = 12 \text{ [zł]}$.

Liczba monet dwuzłotowych: $12 : 2 = 6$.

Liczba monet jednozłotowych: $6 + 2 = 8$.

Odpowiedź. Monet po 1 zł było 8 sztuk, a po 2 zł – 6 sztuk.

- 1** Wykonaj dzielenie i sprawdź.
 a) $28 : 5$ b) $52 : 6$ c) $64 : 9$ d) $40 : 7$
- 2** Oblicz w pamięci i zapisz wyniki. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań. Sprawdź wyniki za pomocą kalkulatora.
 a) $112 + 46 + 58$ b) $83 - 49 + 12$ c) $46 - 6 \cdot (450 : 90)$
 $4 \cdot 18 \cdot 50$ $72 : 9 \cdot 2$ $7 \cdot 80 + 320 : 40$
- 3** Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Wartość wyrażenia $2^3 \cdot 5^2$ jest równa A / B. A. 150 B. 200
 Wartość wyrażenia $3^3 + 4^2 \cdot 5$ jest równa C / D. C. 215 D. 107
- 4** Bakterie to organizmy jednokomórkowe. Mogą wywoływać wiele chorób, między innymi cholerę, zatrucia pokarmowe, tężec, zapalenie płuc. Bakterie rozmnażają się przez podział, w którym z jednej bakterii powstają dwie identyczne bakterie. Proces ten może następować co $\frac{1}{3}$ godziny. Ile bakterii może powstać z jednej bakterii w ciągu 1 godziny, a ile w ciągu 4 godzin? Wynik zapisz w postaci potęgi liczby 2.



- 5** Zamiast ■ napisz takie cyfry, aby zachodziła równość:
 $\blacksquare 212 + 10 \blacksquare + 2 \blacksquare 92 = 65 \blacksquare 7$.
- 6** Oblicz z zastosowaniem rozdzielności mnożenia lub dzielenia względem dodawania lub odejmowania.
 a) $7 \cdot 28$ b) $47 \cdot 5$ c) $96 : 6$ d) $155 : 5$ e) $405 \cdot 6$
- 7** Na wycieczkę pojechały 24 osoby. Koszt wycieczki dla jednej osoby był równy 93 zł. Ile pieniędzy należało wpłacić do biura turystycznego za wszystkich uczestników tej wycieczki?
- 8** Mama Pawła dostała nagrodę pieniężną równą 1970 zł. Kupiła sobie płaszcz za 780 zł, a Pawłowi buty za 165 zł i grę komputerową za 98 zł. Resztę pieniędzy odłożyła na wakacje. Ile pieniędzy odłożyła mama na wakacje?

- 9 W sklepie zoologicznym było razem 48 ptaków i chomików. Zwierzęta te miały łącznie 144 nogi. Ptaków w tym sklepie było
- A. 6 B. 10 C. 12 D. 24

- 10 Banknot pięćdziesięci złotowy rozmienniono na monety pięcio- i dwuzłotowe. Monet pięciozłotowych było o 3 więcej niż dwuzłotowych. Ile było monet pięciozłotowych, a ile dwuzłotowych?



- 11 Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 6. Cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry jedności. Co to za liczba? Zastosuj metodę prób i błędów.
- 12 Na podwórzu pana Andrzeja były psy, koty i drób. Wszystkie zwierzęta miały razem 33 głowy i 80 nóg. Ile było psów i kotów łącznie?
Wskaż poprawną odpowiedź A, B lub C i jej uzasadnienie I, II lub III.

A. 14,	ponieważ	I. 12 ptaków ma 24 nogi, a 56 nóg należy do czworonogów.
B. 13,		II. 26 ptaków ma 52 nogi, a czworonogi mają 28 nóg.
C. 7,		III. 13 czworonogów ma tyle samo nóg co 26 ptaków.

- 13 Rower treningowy kosztuje 378 zł. Jeśli kupi się go na raty, trzeba wpłacić 72 zł i jeszcze przez rok wpłacać co miesiąc po 32 zł.
- a) Jaki będzie całkowity koszt roweru, jeżeli kupi się go na raty?
- b) O ile więcej trzeba zapłacić za rower, jeśli kupi się go na raty?
- c) Po ile złotych miesięcznie trzeba byłoby oszczędzać przez rok, aby kupić taki rower za gotówkę? Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 zł.
- 14 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
- a) $(121 - 37) : 7 + 4^3 + (3^3 - 12) \cdot 6 + 36$
- b) $28 \cdot 34 - 832 : 16 + 11 \cdot (1047 - 865) - 999$
- 15 Uczniowie zajęli miejsca w kinie w dwóch rzędach. W pierwszym rzędzie były to miejsca od 11 do 26, a w drugim od 15 do 28. Ile miejsc zajęli uczniowie?
- 16 Ułóż i rozwiąż zadanie na wzór **Przykładu 1.** lub **Przykładu 2.**, s. 11.–12.

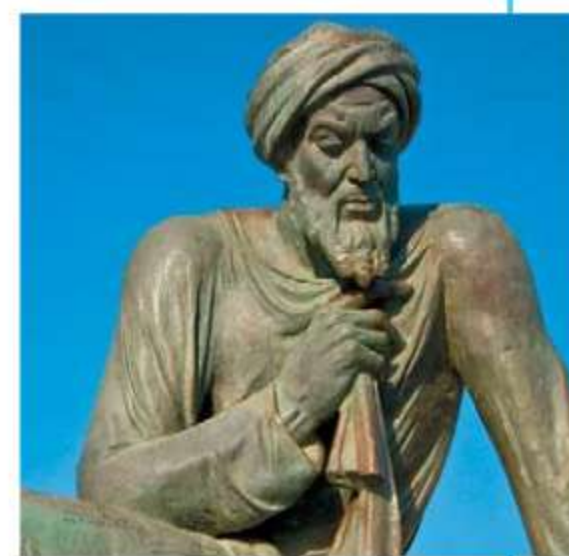


A to ciekawe!

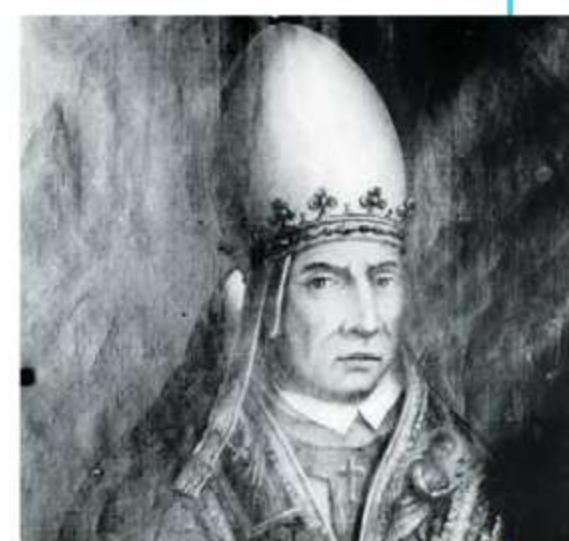
Zapis w pozycyjnym systemie dziesiętkowym jest znany od 683 roku. Prawdopodobnie pochodzi z Indii. W Europie rozpowszechnił się między IX a XIII wiekiem. Przyczynili się do tego: Alchwarizmi, matematyk z Azji Środkowej, i Gerbert z Aurillac (czytamy: żerber z orjak) – od 999 roku papież Sylwester II. Gerbert jako pierwszy człowiek w świecie kultury łacińskiej zaczął używać cyfr arabskich.

Nazwy liczb takie jak bilion, trylion, ..., nonylion wymyślił w 1484 roku matematyk francuski Nicolas Chuquet (czytamy: nikola szyukie). Pojawiły się one w 1520 roku w książce jego ucznia Estienne'a de La Roche'a (czytamy: estina delarosza).

Odszukaj nazwy liczb większych od trylionu i mniejszych od nonyliona. Ile zer ma liczba nonylion?



Alchwarizmi

papież
Sylwester II

Sprawdź się!

- 1 Oblicz iloraz liczby 11 280 przez liczbę 48.
- 2 Dwutomowa encyklopedia kosztuje 141 zł, a album malarstwa jest o 78 zł tańszy. Ile kosztują encyklopedia i album razem?
- 3 Wartością wyrażenia $(1742 - 873) \cdot 26$ jest liczba
A. 67 990 B. 2584 C. 22 594 D. 22 494
- 4 Banknot stużłotowy rozmienniono na monety pięcio- i jednożłotowe. Monet jednożłotowych było o 4 więcej niż monet pięciożłotowych. Ile było monet pięciożłotowych?
A. 18 B. 17 C. 20 D. 16
- 5 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
a) $9 \cdot 17 - 156 : 4 + 8 \cdot (112 - 87) - 15$
b) $25^2 - (5407 - 394) : 9 + 13 \cdot (299 + 11)$



2. Podzielność liczb naturalnych



Sowa przypomina

- **Dzielniki liczb**

Liczba 18 dzieli się bez reszty przez: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Liczby: 1, 2, 3, 6, 9, 18 to **dzielniki liczby 18**.

- **Wielokrotności liczb**

$0 \cdot 7 = 0$ $1 \cdot 7 = 7$ $2 \cdot 7 = 14$ $3 \cdot 7 = 21$...

Liczby: 0, 7, 14, 21, ... to **wielokrotności liczby 7**.

- **Liczby pierwsze**

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... Mają tylko dwa różne dzielniki:
1 i samą siebie.

- **Liczby złożone**

4, 6, 8, 9, 10, ... Mają więcej niż dwa dzielniki.

Liczby 0 i 1 nie są liczbami ani pierwszymi, ani złożonymi.

- **Cechy podzielności**

Jeśli liczba dzieli się:

przez 2 – w rzędzie jedności liczby jest cyfra 0, 2, 4, 6 lub 8;

przez 5 – w rzędzie jedności liczby jest cyfra 0 lub 5;

przez 10 – w rzędzie jedności liczby jest cyfra 0;

przez 100 – w rzędzie jedności i dziesiątek liczby jest cyfra 0;

przez 4 – dwie ostatnie cyfry liczby tworzą liczbę podzielną
przez 4;

przez 3 – suma cyfr liczby dzieli się przez 3;

przez 9 – suma cyfr liczby dzieli się przez 9.

- **Każdą liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze, np.**

12	2
6	2
3	3
1	

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

Przykład 1.

Rozłóżmy na czynniki pierwsze liczbę 495 oraz podajmy jej najmniejszy i największy dzielnik, różne od 1 i 495.

Podczas rozkładu liczby na czynniki pierwsze sprawdzamy, czy kolejne liczby pierwsze (zaczynając od najmniejszej) są dzielnikami liczb występujących po lewej stronie pionowej kreski.

W przypadku sprawdzania podzielności przez 2, 3 i 5 korzystamy z poznanych cech podzielności.

Jeżeli otrzymana po lewej stronie pionowej linii liczba nie dzieli się ani przez 2, ani przez 3, ani przez 5, to sprawdzamy, czy jest wielokrotnością kolejnych liczb pierwszych, czyli 7, 11, 13, 17, 19 itd.

495	3	Liczba 495 nie dzieli się przez 2, ale dzieli się przez 3.
165	3	Liczba 165 nie dzieli się przez 2, ale dzieli się przez 3.
55	5	Liczba 55 nie dzieli się przez 2 i 3, ale dzieli się przez 5.
11	11	Liczba 11 nie dzieli się przez 2, 3, 5 i 7, ale dzieli się przez 11.
1		

Wobec tego $495 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

Gdy patrzymy na rozkład liczby 495, widzimy, że najmniejszym jej dzielnikiem (różnym od 1) jest 3, a największym (różnym od niej samej) jest 165.

- 1 Napisz dwie czterocyfrowe liczby parzyste i dwie czterocyfrowe liczby nieparzyste podzielne przez 3.
- 2 Napisz trzy liczby trzycyfrowe i trzy – czterocyfrowe, które dzielą się przez 4.
- 3 Dane są liczby:
A. 2367 B. 954 C. 1424 D. 739

Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnym odpowiedziom.

Która liczba jest podzielna przez 9?	A	B	C	D
Która liczba jest liczbą pierwszą?	A	B	C	D
Która liczba jest podzielna przez 4?	A	B	C	D
Która liczba jest podzielna przez 6?	A	B	C	D

- 4 Jaka liczba ma rozkład na czynniki pierwsze $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$, a jaka $5 \cdot 7^2 \cdot 13$?
- 5 Rozłóż liczbę na czynniki pierwsze i podaj jej najmniejszy dzielnik inny niż 1, a także największy dzielnik inny niż ta liczba.
- a) 48 b) 210 c) 910 d) 5100
228 675 1050 8085
- 6 Ile jest liczb trzycyfrowych mniejszych od 200 podzielnych przez 5?
- 7 Podaj przykład pokazujący, że zdanie jest fałszywe.
- a) Każda liczba parzysta, której suma cyfr jest podzielna przez 4, dzieli się przez 4.
- b) Każda liczba, której suma cyfr jest wielokrotnością liczby 5, dzieli się przez 5.
- c) Każda liczba, która w rozkładzie na czynniki pierwsze ma ich co najmniej pięć, jest liczbą większą od 100.
- 8 Pewna liczba naturalna przy dzieleniu przez 4, jak i przez 5 daje resztę 1. Znajdź tę liczbę. Czy jest tylko jedna taka liczba?
- 9 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.
- | | | |
|---|---|---|
| Każda z liczb: 10, 15, 21, 26 ma dokładnie 4 dzielniki. | P | F |
| Liczba 32 ma o 4 dzielniki mniej niż liczba 36. | P | F |
- 10 Podaj liczbę, która jest podzielna jednocześnie przez:
- a) 2 i 3, b) 3 i 5, c) 17 i 13.



A to ciekawe!

Liczby lustrzane to np. 25 i 52, 78 i 87.

Wśród liczb lustrzanych są liczby pierwsze, np. 13 i 31, 17 i 71, 37 i 73, 79 i 97, 113 i 311.

Suma par dwucyfrowych liczb lustrzanych jest podzielna przez 11:

$$25 + 52 = 77, \quad 77 : 11 = 7; \quad 78 + 87 = 165, \quad 165 : 11 = 15.$$

Wypisz kilka par dwucyfrowych liczb lustrzanych i zbadaj dla nich tę własność.

Wyzwanie

Liczba naturalna jest doskonała, jeżeli suma wszystkich jej dzielników mniejszych od niej samej jest jej równa.

Liczby doskonałe były znane już w starożytności, a Euklides, matematyk grecki żyjący na przełomie IV i III wieku p.n.e., podał metodę ich znajdowania.

28 jest liczbą doskonałą, bo jej dzielnikami są liczby: **1, 2, 4, 7, 14, 28**, a suma jej dzielników różnych od niej samej jest równa: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

1. Czy wśród liczb: 4, 6, 8, 12, 32, 36 są liczby doskonałe?
2. Czy potrafisz podać jeszcze inną liczbę doskonałą?



Euklides

Sprawdź się!

1. Ile jest liczb dwucyfrowych większych od 50 i podzielnych przez 3?
2. Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Liczba 1356 dzieli się przez 3 oraz przez 4.	P	F
Liczba 101 jest najmniejszą trzycyfrową liczbą pierwszą.	P	F
Liczba 51 474 jest wielokrotnością liczby 9.	P	F
Każda liczba parzysta dzieli się przez 10 i przez 5.	P	F

3. Liczbę 96 rozłóż na czynniki pierwsze i podaj wszystkie jej dzielniki.
4. Z cyfr 1, 2, 3 i 4 utworzono wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe takie, że cyfry w jednej liczbie się nie powtarzały.
Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Utworzono A / B liczb pierwszych. A. 5 B. 4
Utworzono C / D liczb parzystych. C. 6 D. 8
5. Podaj przykład pokazujący, że zdanie jest fałszywe.
 - a) Liczba większa od 10, która w rzędzie jedności ma cyfrę 1, 3 lub 7, jest liczbą pierwszą.
 - b) Każda liczba, która w rzędzie jedności ma cyfrę 4 lub 8 i której suma cyfr jest parzysta, dzieli się przez 4.

3. Największy wspólny dzielnik



Sowa uczy

Największy wspólny dzielnik – NWD – danych liczb to największa liczba, która jest dzielnikiem każdej z tych liczb.

Przykład 1.

Znajdźmy największy wspólny dzielnik liczb 24 i 36.

Sposób I

Co robimy	Co otrzymujemy
Wypisujemy dzielniki każdej z danych liczb.	dzielniki 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 dzielniki 36 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
Zaznaczamy, np. kolorem, te dzielniki, które są wspólne.	dzielniki 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 dzielniki 36 : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36
Wybieramy największy z zaznaczonych dzielników.	12

Wobec tego największy wspólny dzielnik liczb 24 i 36 jest równy 12, co zapisujemy: $\text{NWD}(24, 36) = 12$.

Sposób II

Rozkładamy obydwie liczby na czynniki pierwsze i zaznaczamy te czynniki, które występują w obydwu rozkładach.

24		2		36		2
12		2		18		2
6		2		9		3
3		3		3		3
1				1		

Obliczamy iloczyn zaznaczonych w jednym rozkładzie czynników pierwszych.

$$\text{NWD}(24, 36) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Przykład 2.

Znajdźmy największy wspólny dzielnik liczb 66 i 175.

Rozłóżmy na czynniki pierwsze dane liczby.

$$\begin{array}{r|l} 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Ponieważ w rozkładach na czynniki pierwsze tych liczb nie ma jednakowych czynników, liczby te nie mają wspólnego dzielnika większego od 1.

Liczby, które nie mają wspólnego dzielnika innego niż 1, nazywamy **względnie pierwszymi**.



- 1 Liczbę 168 rozłóż na czynniki pierwsze.
- 2 Jaka liczba ma rozkład na czynniki pierwsze $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$, a jaka $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$? Zanim podasz te liczby, spróbuj na podstawie ich rozkładów stwierdzić, która z nich jest większa.
- 3 Oblicz największy wspólny dzielnik liczb.

a) 12, 28	b) 35, 48	c) 90, 120
36, 18	75, 125	360, 480
42, 35	160, 240	80, 112
- 4 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Największym wspólnym dzielnikiem liczb 42 i 54 jest iloczyn dwóch najmniejszych liczb pierwszych.	P	F
Liczby 91 i 154 są względnie pierwsze.	P	F
Liczby 18 i 28 mają po tyle samo dzielników, a ich największym wspólnym dzielnikiem jest najmniejsza liczba pierwsza.	P	F

- 5 Spośród danych par liczb wypisz te, które są względnie pierwsze.
- a) 3 i 5 b) 11 i 19 c) 10 i 12 d) 13 i 39
 3 i 9 22 i 17 15 i 16 4 i 25
- 6 Na przyjęcie urodzinowe Adam przygotował 42 śliwki i 28 mandarynek. Ile dzieci może zaprosić Adam, aby każdy uczestnik imprezy dostał tyle samo owoców każdego rodzaju? Ile rozwiązań ma to zadanie?



Wyzwanie

Iloczyn dwóch liczb naturalnych jest równy 180, a ich największy wspólny dzielnik jest równy 3. Co to za liczby? Czy istnieje tylko jedna para takich liczb?



Sprawdź się!

- 1 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Liczby 32 i 36 mają A / B wspólne dzielniki. A. 2 B. 3
 Największym wspólnym dzielnikiem liczb 32 i 36 jest C / D. C. 4 D. 6
- 2 Rozłóż podane liczby na czynniki pierwsze i oblicz:
 a) NWD(63, 84), b) NWD(189, 98).
- 3 Która informacja jest **nieprawdziwa**?
 A. $\text{NWD}(28, 35) = 7$ B. $\text{NWD}(36, 60) = 12$
 C. $\text{NWD}(28, 56) = 14$ D. $\text{NWD}(75, 100) = 25$
- 4 Jaki największy wspólny dzielnik mają liczby, których rozkłady na czynniki pierwsze są następujące: $3 \cdot 7$, $3^2 \cdot 7$, $2^2 \cdot 3 \cdot 7$?
- 5 Dzieci przygotowały dla pacjentów hospicjum 18 maskotek, 36 moreli i 27 kolorowych rysunków. Ile najwięcej osób mogą obdarować, jeżeli każda z nich ma otrzymać taką samą liczbę poszczególnych prezentów?



4. Najmniejsza wspólna wielokrotność



Sowa uczy

Najmniejsza wspólna wielokrotność – **NWW** – danych liczb to najmniejsza (różna od 0) liczba, która jest wielokrotnością każdej z tych liczb.

Przykład 1.

Znajdźmy najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 18 i 24.

Sposób I

Wypiszmy kolejne różne od 0 wielokrotności liczb 18 i 24 oraz zaznaczmy kolorem te wielokrotności, które są wspólne.

Wielokrotności **18**: 18, 36, 54, **72**, 90, 108, 126, **144**, 162, 180, 198, **216**, 234, 252, 270, **288**, ...

Wielokrotności **24**: 24, 48, **72**, 96, 120, **144**, 168, 192, **216**, 240, 264, **288**, ...

Wobec tego najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 18 i 24 jest równa 72, co zapisujemy: $NWW(18, 24) = 72$.

Sposób II

Rozkładamy dane liczby na czynniki pierwsze. W rozkładzie drugiej liczby skreślamy te czynniki pierwsze, które wystąpiły w rozkładzie pierwszej liczby. Obliczamy iloczyn wszystkich czynników z pierwszego rozkładu oraz tych czynników z drugiego rozkładu, których nie było w rozkładzie pierwszym.

$$\begin{array}{r|l}
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$NWW(18, 24) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 72$$

Przykład 2.

Beata i Darek jeździli na rowerach po ścieżce wokół stadionu. Jedno okrążenie zajmowało Beacie 90 s, a Darkowi 72 s. Po ilu minutach dzieci spotkały się w miejscu, z którego wyruszyły?

Ile razy okrążyło stadion każde z dzieci?

Musimy znaleźć czas (liczbę sekund), w którym każde z nich okrążyło stadion całkowitą liczbę razy, czyli musimy obliczyć $\text{NWW}(90, 72)$.



90	2	72	2
45	3	36	2
15	3	18	2
5	5	9	3
1		3	3
		1	

wszystkie czynniki
pierwsze liczby 90

$$\text{NWW}(90, 72) = \overbrace{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}^{\text{wszystkie czynniki pierwsze liczby 90}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{\text{czynniki pierwsze liczby 72, których nie było w rozkładzie liczby 90}} = 360$$

czynniki pierwsze
liczby 72, których nie było
w rozkładzie liczby 90

$$360 \text{ s} = 6 \text{ min}$$

Obliczamy liczbę okrążeń stadionu wykonanych przez Beatę.

$$360 \text{ s} : 90 \text{ s} = 4$$

Obliczamy liczbę okrążeń stadionu wykonanych przez Darka.

$$360 \text{ s} : 72 \text{ s} = 5$$

Odpowiedź. Beata i Darek spotkają się po 6 minutach. Przez ten czas Beata okrąży stadion 4 razy, a Darek 5 razy.

1 Oblicz najmniejszą wspólną wielokrotność liczb.

a) 12, 18

b) 26, 39

c) 120, 180

75, 60

28, 42

240, 360

64, 88

72, 120

324, 540

2 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Liczby 78, 134 i 502 są wielokrotnościami liczby 4.	P	F
Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 18 i 54 jest większa z tych liczb.	P	F



- 3 Wskaż zdanie **nieprawdziwe**.
- a) Najmniejszym wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{8}$ jest liczba 48.
- b) Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 34 i 102 jest liczba 204.
- c) Liczby 105, 75, 90 są wielokrotnościami liczby 15.
- 4 W maszynie są 2 zazębiające się koła, jedno ma 35, a drugie 14 zębów. Ile obrotów musi wykonać każde z kół, aby te same zęby znów się spotkały?
- 5 Trzej przyjaciele spotkali się w piątek w kręgielni i ustalili, że przy następnym spotkaniu zagrają razem. Pan Tomasz przychodzi na kręgle co 4 dni, pan Jan co 3 dni, a pan Marek co 6 dni. Po ilu co najmniej dniach i w jakim dniu tygodnia znowu się spotkają?



Sprawdź się!

- 1 Oblicz NWW(64, 80) i NWW(18, 60).
- 2 Która informacja jest **nieprawdziwa**?
- A. $\text{NWW}(25, 15) = 75$ B. $\text{NWW}(16, 24) = 48$
 C. $\text{NWW}(30, 40) = 240$ D. $\text{NWW}(18, 24) = 72$
- 3 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.
- | | | |
|--|---|---|
| NWW(30, 45) jest o 18 większa od NWW(24, 36). | P | F |
| Wspólnym mianownikiem ułamków może być NWW tych mianowników. | P | F |
- 4 W maszynie są 2 zazębiające się koła. Jedno z nich ma 6 zębów, a drugie 9. Ile obrotów musi wykonać każde z kół, aby te same zęby znów się spotkały?
- 5 Marek i Zosia jeżdżą na tyżworolkach po ścieżce wokół stadionu. Marek jedno okrążenie wykonuje w czasie 4 min, a Zosia – 6 min. Wystartowali z tego samego miejsca w tym samym kierunku. Ile razy w czasie 1 h spotkali się w miejscu startu?

5. Średnia arytmetyczna liczb



Sowa uczy

Średnia arytmetyczna liczb – to suma tych liczb podzielona przez ich liczbę.

Przykład 1.

Wojtek pisał dwie klasówki. Z jednej klasówki dostał ocenę dostateczną, a z drugiej – bardzo dobrą. Jaką średnią ocenę z klasówek otrzymał Wojtek?

Dodajemy liczby
oznaczające oceny.

$$\overbrace{3 + 5} = 8$$

liczba ocen



$$8 : 2 = 4$$

Sumę **dwóch** danych liczb
dzielimy przez **2**.

Mówimy, że 4 jest **średnią arytmetyczną** liczb 3 i 5.

Odpowiedź. Średnia ocena z klasówek Wojtka to czwórka (dobry).

Przykład 2.

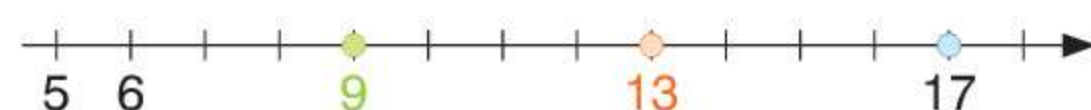
Średnia arytmetyczna dwóch liczb wynosi 13. Jedną z liczb jest 9. Jaka jest druga liczba?

Jeżeli średnia arytmetyczna dwóch liczb jest równa 13, to ich suma jest **2 razy** większa i wynosi 26.

Jedna z liczb jest równa 9, więc druga liczba jest równa: $26 - 9 = 17$.

Sprawdźmy: $(9 + 17) : 2 = 26 : 2 = 13$.

Zaznaczymy na osi liczbowej liczby 9 i 17 oraz ich średnią arytmetyczną.



Punkt oznaczający liczbę 13 jest środkiem odcinka, który wyznaczają na osi liczbowej punkty odpowiadające liczbom 9 i 17.

Przykład 3.

Zmieszano 1 kg cukierków owocowych po 15 zł i 2 kg cukierków czekoladowych po 27 zł za 1 kilogram. Jaka powinna być cena 1 kilograma takiej mieszanki?

Obliczmy, ile kosztowały wszystkie cukierki, a następnie rozdzielimy tę kwotę na tyle równych części, ile jest kilogramów mieszanki.



$$1 \cdot 15 + 2 \cdot 27 = 15 + 54 = 69 \text{ [zł]} - \text{cena wszystkich cukierków}$$

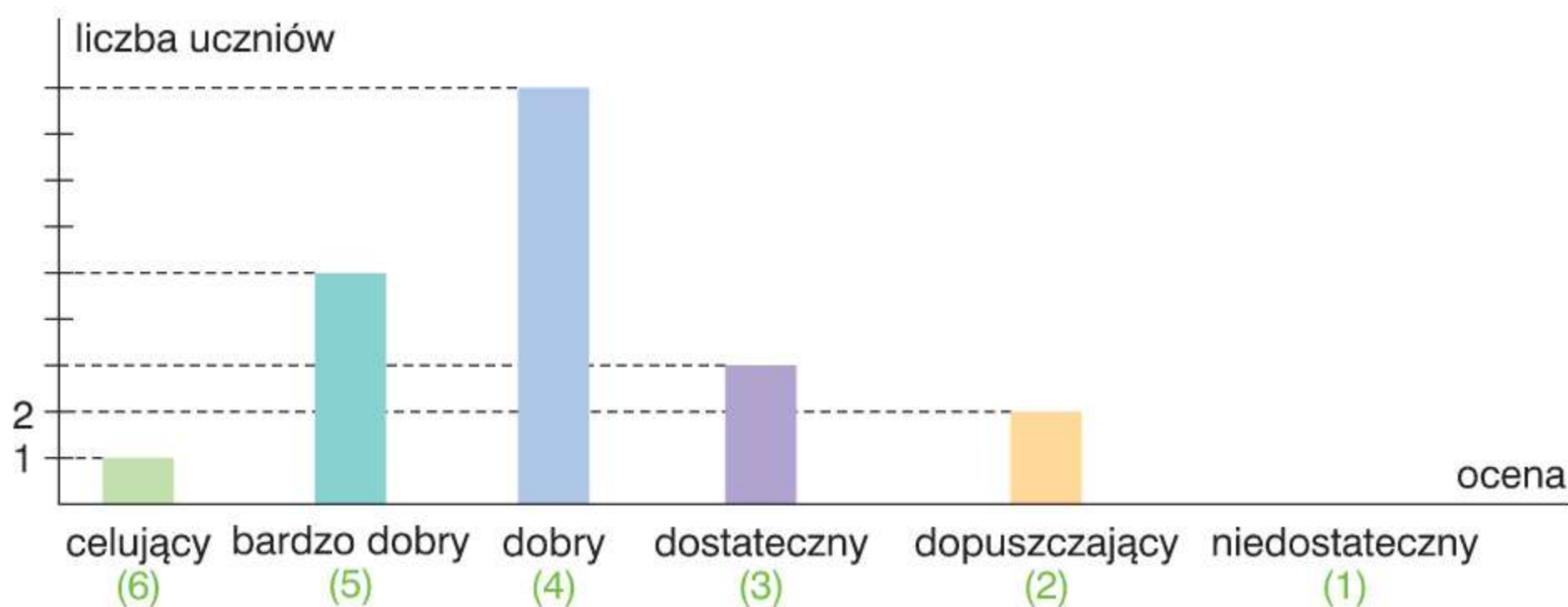
$$1 + 2 = 3 \text{ [kg]} - \text{masa wszystkich cukierków}$$

$$69 : 3 = 23 \text{ [zł]} - \text{cena 1 kg mieszanki}$$

Odpowiedź. Cena 1 kg takiej mieszanki powinna być równa 23 zł.

Przykład 4.

Na podstawie diagramu wyników klasówki z matematyki obliczmy, jaka jest średnia ocena.



Obliczmy, ilu uczniów pisało klasówkę (ile jest ocen).

$$1 + 5 + 9 + 3 + 2 + 0 = 20$$

Obliczmy sumę wartości wszystkich ocen.

$$1 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 80$$

Obliczmy średnią **dwudziestu** ocen.

$$80 : 20 = 4 \quad \text{Sumę wartości wszystkich ocen dzielimy przez 20.}$$

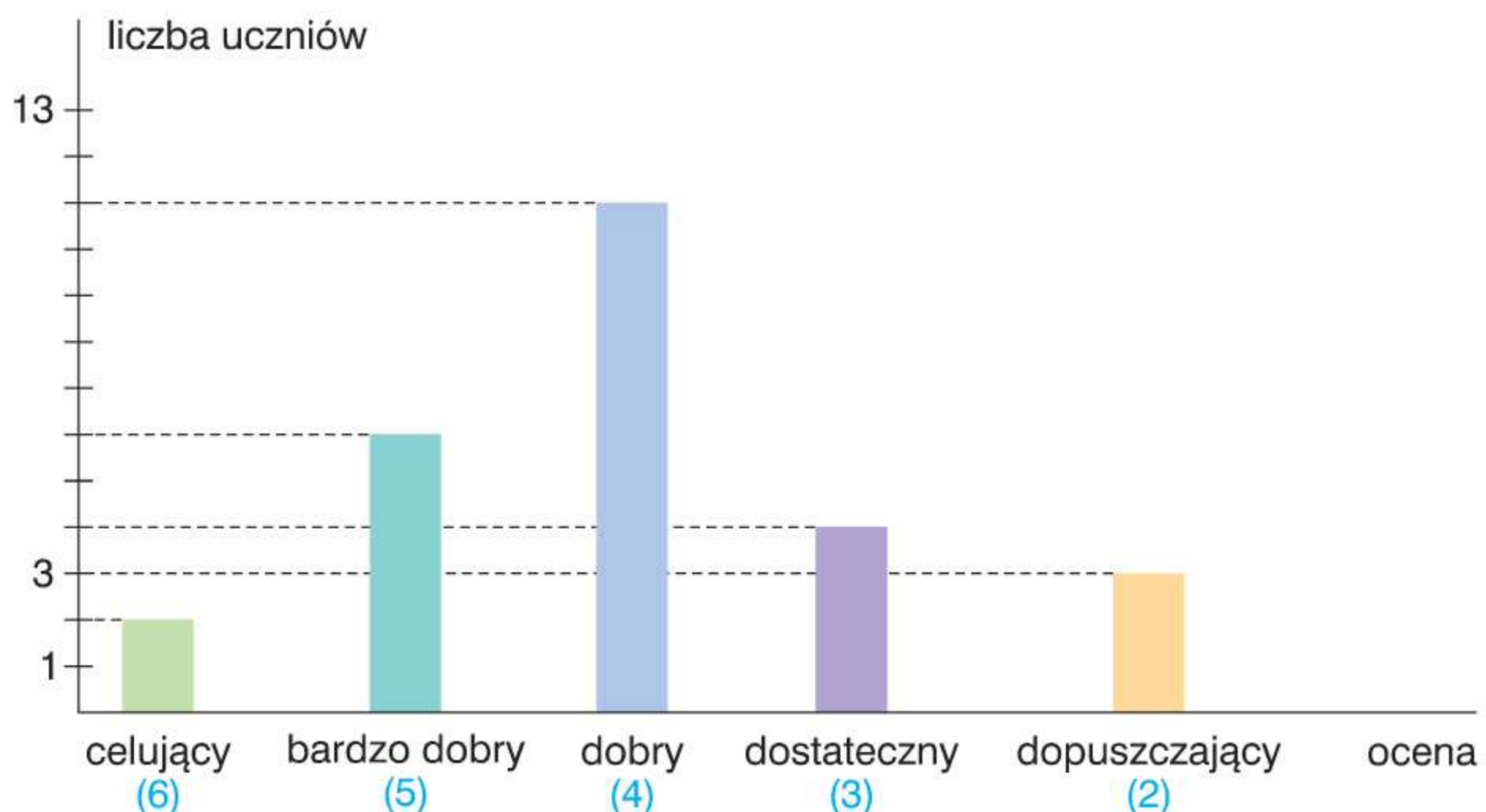
Odpowiedź. Średnia ocena z tej klasówki to 4 (dobry).

- 1 Oblicz średnią arytmetyczną liczb 28 i 52. Na osi liczbowej zaznacz te liczby oraz ich średnią arytmetyczną.
- 2 Oblicz w pamięci średnią arytmetyczną liczb:
a) 43 i 17, b) 12, 18 i 24, c) 110, 120, 130 i 140.

- 3 Grindwal, spokrewniony z delfinem, żyje w chłodnych morzach. W ciągu 30 dni zjada 1350 kg pożywienia. Ile kilogramów pożywienia zjada średnio w ciągu jednego dnia?



- 4 Zuzia ma z matematyki następujące oceny: dopuszczający, dobry, bardzo dobry, dopuszczający, bardzo dobry oraz celujący. Jaka jest jej średnia ocena z matematyki?
- 5 Zmieszano 1 kg ciastek po 16 zł i 1 kg po 24 zł za kilogram. Cena 1 kilograma takiej mieszanki powinna być równa
A. 16 zł B. 20 zł C. 22 zł D. 24 zł
- 6 Liczba 24 jest średnią arytmetyczną dwóch liczb. Jedna liczba jest równa 26. Znajdź drugą liczbę.
- 7 Na diagramie pokazano wyniki klasówki z matematyki w klasie szóstej.



Oblicz średnią arytmetyczną ocen z tej klasówki.

- 8 Robert w ciągu tygodnia notował, ile czasu ogląda telewizję. Obliczył, że oglądał ją średnio przez 2 godziny w ciągu każdego dnia. Ile godzin w ciągu tygodnia spędził Robert przed telewizorem?
- 9 Każdego dnia w ciągu tygodnia notuj, ile czasu oglądasz telewizję. Oblicz, ile średnio godzin w ciągu jednego dnia spędzasz przed telewizorem. Czy wiesz, jaki wpływ na zdrowie ma długie oglądanie telewizji?

 Sprawdź się!

- 1 Średnia arytmetyczna liczb 13, 19 i 22 jest równa
A. 15 B. 16 C. 17 D. 18
- 2 Zrobiono mieszankę z suszonych owoców. Połączono po 1 kg: gruszek po 11 zł, jabłek po 9 zł i śliwek po 16 zł za kilogram. Jaka powinna być cena 1 kilograma takiej mieszanki?
- 3 Uczestnicy obozu rowerowego przejechali 200 km w ciągu 5 dni. Każdego dnia jechali średnio przez 120 minut. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
W ciągu jednego dnia rowerzyści przejeżdżali średnio A / B.
A. 40 000 m B. 4000 m
Całą trasę pokonali z prędkością średnią C / D.
C. 33 km/h D. 20 km/h
- 4 Szachista rozegrał dwie partie i średnia arytmetyczna czasu trwania jednej partii była równa 52 minuty. Druga partia trwała 56 minut. Oblicz, ile trwała pierwsza partia.
- 5 W czasie czterodniowego rajdu uczestnicy przechodzili kolejno dziennie: 13 km, 11 km, 9 km i 7 km. Przedstaw na diagramie słupkowym liczbę kilometrów, które przebyli uczestnicy rajdu w poszczególnych dniach. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodzili średnio ci uczestnicy.



6. Liczby naturalne wokół nas

- 1 Podaj trzy przykłady zastosowania liczb naturalnych.
- 2 Łabędź niemy wysiada zwykle od 5 do 9 jaj w roku. Ile średnio jaj wysiada ten ptak?

- 3 Ciekawym, lecz groźnym zjawiskiem na kuli ziemskiej są erupcje (wybuchy) wulkanów. W Europie najwyższym wulkanem jest Etna. Jej wysokość to 3340 m n.p.m. Ten wulkan jest wyższy od leżącego również we Włoszech Wezuwiusza o 2059 m, a niższy od najwyższego wulkanu świata – Fudzi (w Japonii) – o 436 m.



wulkan Fudzi

Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A, B i C oraz D, E i F.

Wezuwiusz ma wysokość A / B / C.

A. 2495 m

B. 1281 m

C. 5405 m

Fudzi jest wyższy od Wezuwiusza o D / E / F.

D. 1281 m

E. 1629 m

F. 2495 m

- 4 W 1777 roku znany żeglarz, kapitan James Cook (czytamy: dżejms kuk), ofiarował królewskiej rodzinie na wyspie Tonga żółwia promienistego. Tego żółwia uważa się za jednego z najstarszych na świecie, gdyż żył do roku 1965, a więc co najmniej



żółw promienisty

A. 188 lat.

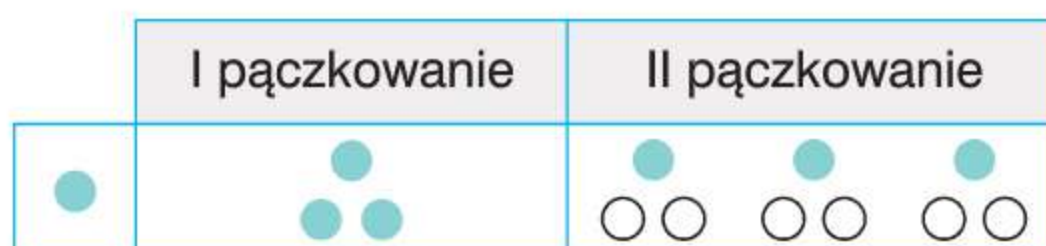
B. 160 lat.

C. 178 lat.

D. 200 lat.

- 5 Drzewo eukaliptus może osiągnąć 100 m wysokości.
 - a) Ile książek o grubości 25 mm trzeba ułożyć jedna na drugiej, aby utworzony z nich stos miał wysokość tego drzewa?
 - b) Jedno piętro budynku ma 18 schodów o wysokości 18 cm każdy. Co jest wyższe: eukaliptus czy biurowiec, który ma 30 pięter?

- 6 Drożdże rozmnażają się przez pączkowanie. Proces ten można opisać następująco: komórka macierzysta drożdży tworzy uwypuklenia, które powiększają się i tworzą nowe komórki stanowiące organizmy potomne. Jeśli drożdże mają odpowiednią ilość wilgoci i pokarmu (cukru), od komórki macierzystej odrywają się 2 pączki.



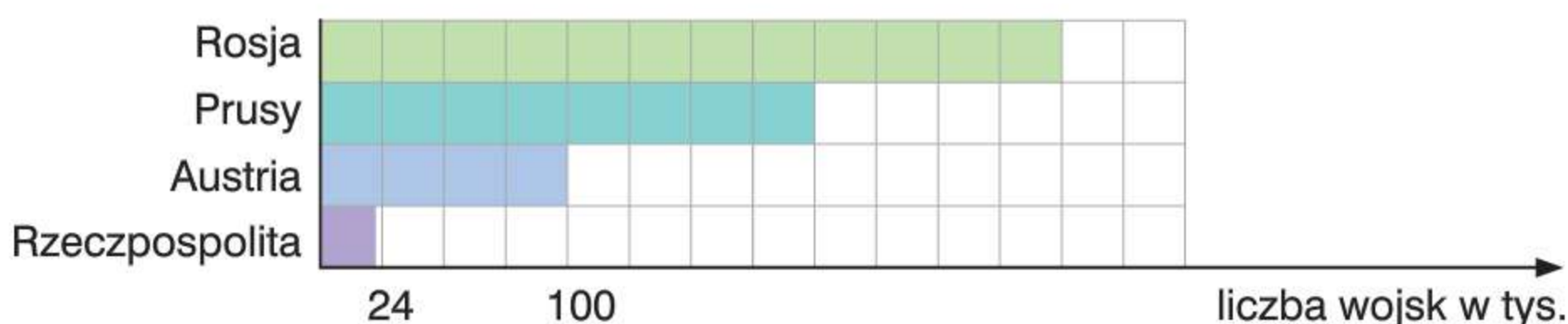
Ile będzie wszystkich osobników po trzecim pączkowaniu, a ile po piątym? Wynik zapisz w postaci potęgi liczby 3.

- 7 Most Second Lake Pontchartrain Causeway (czytamy: sekend lej k ponczetrej kozłej) w Luizjanie w USA ma 38 422 m długości. Zapisz długość tego mostu z dokładnością do 1 km.



most w Luizjanie

- 8 Na diagramie przedstawiono stan liczebny wojsk Rzeczypospolitej (Polski i Litwy) i jej sąsiadów w połowie XVIII wieku.



- a) Podaj stan liczebny wojsk każdego wymienionego państwa.
 b) Ile razy mniejsze liczebnie było wojsko Rzeczypospolitej w stosunku do wojsk wymienionych państw? Odpowiedź podaj w zaokrągleniu do jedności.
- 9 Czteroosobowa rodzina za tydzień pobytu w pensjonacie zapłaciła 980 zł. Nocleg każdej osoby kosztował tyle samo. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D. Jeden nocleg kosztował A / B.
 A. 35 zł B. 27 zł
 Za 3 noclegi dla 23 uczniów trzeba byłoby zapłacić C / D.
 C. 1863 zł D. 2415 zł

- 10 Przejazd wyciągiem dla osoby dorosłej kosztuje 15 zł w obie strony, a 12 zł w jednym kierunku. Dla dzieci i młodzieży uczącej się przejazd w obie strony jest o 2 zł tańszy niż dla osoby dorosłej. Cena biletu dla grup szkolnych w obie strony to 11 zł od osoby.

- a) Ile zapłacą za przejazd wyciągiem w obie strony rodzice z trojgiem dzieci w wieku szkolnym?
b) Ile trzeba zapłacić za przejazd wyciągiem w obie strony 26-osobowej grupy młodzieży szkolnej?



Big Ben w Londynie

- 11 Odległość między Londynem i Birmingham na mapie w skali 1 : 2 000 000 wynosi 9 cm. Jaka jest rzeczywista odległość między tymi miastami?

- A. 180 km B. 80 km
C. 18 km D. 1800 km

- 12 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Pralka kosztuje 1098 zł, zatem 9 razy tańsza suszarka do włosów kosztuje 122 zł.	P	F
Serwis kawowy kosztuje 218 zł, a obiadowy jest 3 razy droższy, więc kosztuje 664 zł.	P	F
Bartek miał 516 zł, a Janek o 119 zł mniej, czyli 397 zł.	P	F
Ania ma 817 zł, więc do 1000 zł brakuje jej 183 zł.	P	F

- 13 Najbardziej ciągliwym metalem jest złoto, gdyż z 1 g złota można uzyskać bardzo cienki drut długości 2400 m. Ile gramów złota trzeba byłoby zużyć, aby otrzymać taki drut o długości 12 km?

- 14 W każdym roku 1 kwietnia i 1 lipca przypadają w tym samym dniu tygodnia. W 2002 roku i w 2013 roku 22 kwietnia był w poniedziałek, a 16 lipca we wtorek. Wskaż zdania **fałszywe**.

- a) W 2002 roku 1 kwietnia i 1 lipca wypadły w poniedziałek.
b) W 2002 roku 9 kwietnia wypadł w środę.
c) Dni 8, 15, 22 i 29 kwietnia i lipca wypadły w poniedziałek.
d) Ostatnim dniem lipca 2002 roku był czwartek.
e) W kwietniu i lipcu 2002 roku niedziele wypadły 7, 14, 21, 28 dnia tych miesięcy.

Wyzwanie

Zamek w Łańcucie to jedno z najpiękniejszych miejsc w Polsce. Jego budowę zakończono w MDCXLII roku. Rok rozpoczęcia budowy to liczba czterocyfrowa, w której cyfra tysięcy nie jest ani liczbą pierwszą, ani złożoną, cyfra jedności to kwadrat liczby 3, cyfra dziesiątek to najmniejsza liczba pierwsza, a cyfra setek jest średnią arytmetyczną dwóch największych jednocyfrowych liczb pierwszych. Ile lat trwała budowa zamku w Łańcucie?

Sprawdź się!

Na podstawie poniższych informacji rozwiąż zadania 1. i 2.

Odległość Księżyca od Ziemi nie jest stała. W 2018 roku najdalej od Ziemi Księżyc znajdował się 15 stycznia. Odległość ta wynosiła wówczas 406 466 km. Najbliżej Ziemi w 2018 roku jej naturalny satelita znajdował się 1 stycznia i wtedy odległość ta była o 49 882 km mniejsza niż 15 stycznia.

- 1 Jaka była najmniejsza odległość Księżyca od Ziemi w 2018 roku?
- 2 Oblicz średnią arytmetyczną podanych odległości Księżyca od Ziemi.
- 3 Zaćmienie Księżyca, które miało miejsce 27 lipca 2018 roku, trwało 1 h 43 min, czyli
 A. 143 minuty. B. 1 h 3 kwadransy.
 C. 103 minuty. D. 93 minuty.
- 4 W pewnej stacji krwiodawstwa jest zarejestrowanych 8 tysięcy honorowych dawców krwi. Kobiet jest 3 razy mniej niż mężczyzn. Ilu mężczyzn jest zarejestrowanych w tej stacji krwiodawstwa?
- 5 Dorosły człowiek raz na kwartał może oddać około 450 ml krwi. Do jednego przeszczepu wątroby potrzeba około 23 l krwi. Ile razy co najmniej trzeba pobrać od dawców krew, aby można było przeprowadzić jeden przeszczep wątroby?



zaćmienie Księżyca

Zadania utrwalające

- 1 Oblicz.
a) $4 \cdot 26 \cdot 25$ b) $450 \cdot 30$ c) $516 + 3247$
 $9600 : 60$ $1530 : 510$ $7800 - 194$
- 2 Uczniowie klasy szóstej pisali test sprawdzający wiadomości z matematyki od godziny 8.10 do 8.35. Ile sekund trwał ten test?
- 3 Ile kilometrów jest równa w rzeczywistości długość odcinka, który na mapie w skali 1 : 1 000 000 ma długość 4 cm?
- 4 W pewnym mieście odległość w linii prostej między miejskim ratuszem a szpitalem jest równa 2 km. Jaka odległość będzie dzielić od siebie te budynki na planie miasta wykonanym w skali 1 : 8000?
- 5 Które z liczb: 80, 96, 102, 340, 1005 są podzielne przez:
a) 2, b) 5, c) 3, d) 4?
- 6 Dane są liczby: 16, 21, 29, 33, 41, 54. Które z nich są liczbami pierwszymi?
- 7 Liczby 42 i 68 rozłóż na czynniki pierwsze. Napisz wszystkie dzielniki każdej tych liczb.
- 8 Podczas powrotu z wakacji Kuba jechał pociągiem przez 9 godzin z prędkością średnią $55 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów przejechał Kuba pociągiem?
- 9 Jacek oglądał film od 18.00 do 19.15. Ile minut Jacek oglądał film?
- 10 Pewnego roku 28 sierpnia przypadł w piątek. Którym dniem tygodnia był 17 października tego samego roku?
- 11 Napisz liczbę czterocyfrową, w której w rzędzie jedności tysięcy jest najmniejsza nieparzysta liczba pierwsza, w rzędzie setek – trzykrotność cyfry jedności tysięcy, w rzędzie dziesiątek – o 3 mniej niż w rzędzie setek, a w rzędzie jedności – najmniejsza liczba naturalna. Rozłóż tę liczbę na czynniki pierwsze.



- 12 Zmieszano orzechy: włoskie – 1 kg za 38 zł, laskowe – 2 kg po 45 zł za 1 kg, pistacjowe – 1 kg za 53 zł, nerkowca – 2 kg po 41 zł za 1 kg i brazylijskie – 1 kg za 59 zł. Jaka powinna być cena tej mieszanki?
- 13 Oblicz.
a) $NWW(30, 36)$ b) $NWW(315, 90)$
- 14 Oblicz.
a) $NWD(84, 210)$ b) $NWD(125, 1050)$ ✂
- 15 Dane są liczby: 21, 26, 52, 65.
a) Które z tych liczb są liczbami względnie pierwszymi?
b) Oblicz $NWD(26, 52)$.
c) Oblicz $NWW(26, 65)$.
- 16 Podaj przykład dwóch liczb, których:
a) największym wspólnym dzielnikiem jest liczba 15,
b) najmniejszą wspólną wielokrotnością jest liczba 42.
- 17 W Dniu Ziemi szkoła przeznaczyła 200 zł na zakup drzew i krzewów do szkolnego ogrodu. Sadzonki drzew kosztowały 6 zł za 1 sztukę, a krzewów – 4 zł za 1 sztukę. Uczniowie kupili 15 sadzonek drzew i 18 sadzonek krzewów. Ile pieniędzy zostało uczniom po tych zakupach?
- 18 W gospodarstwie było 30 świń i kur. Razem miały one 72 nogi. Ile w tym gospodarstwie było świń, a ile kur?
- 19 Sypialnia ma kształt kwadratu o boku 4 m. Jaki obwód ma ten kwadrat na planie wykonanym w skali 1 : 80?
- 20 Oblicz wartość wyrażenia:
 $10\,001 - 7475 : 25 + 19^2$.
- 21 Podczas przygotowań do zawodów siatkarze trenowali: pierwszego dnia 1 h 45 min, drugiego – 2 h 10 min. Średnia czasu treningu z trzech dni jest równa 2 h 6 min. Ile czasu trwał trening trzeciego dnia?



Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- 1 Samolot, który leci z prędkością średnią $800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, odległość 2400 km pokona w czasie
A. 4 h B. 3 h C. 2 h D. 1 h
- 2 Biuro podróży „Wypoczynek” zaoferowało wyjazd na weekend do Paryża za 1235 zł od osoby. Wpłacenie pełnej kwoty na trzy miesiące przed terminem wyjazdu obniża cenę wycieczki o 159 zł, czyli będzie ona równa
A. 1394 zł B. 1176 zł C. 1076 zł D. 1086 zł
- 3 Pani Basia kupiła buty zimowe za 126 zł i spodnie za 67 zł. Ile powinna otrzymać reszty, jeśli dała kasjerce 200 zł?
A. 17 zł B. 37 zł C. 8 zł D. 7 zł
- 4 W sadzie zebrano 565 kg jabłek i o 278 kg mniej gruszek. Śliwek zebrano o 96 kg więcej niż gruszek.
Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Zebrano A / B gruszek. A. 387 kg B. 287 kg
Razem zebrano C / D owoców. C. 1145 kg D. 1235 kg
- 5 W piątek Krystian rozpoczął czytanie książki od strony 126, a zakończył po przeczytaniu strony 172. Ile stron przeczytał w piątek?
A. 48 B. 38 C. 47 D. 45
- 6 Do ssaków morskich należą między innymi płetwal błękitny oraz słoń morski. Płetwal błękitny żywi się głównie krylem (małymi skorupiakami), a słoń morski – rybami i ośmiornicami. Porcja dzienna płetwała to około 3 t pokarmu, a słonia morskiego jest 15 razy mniejsza i wynosi około
A. 2 t B. 3800 kg C. 20 kg D. 200 kg
- 7 Uczniowie klas szóstych prezentowali swoje pomysły na szkolne obchody andrzejek. Prezentacja klasy 6a trwała 8 min, 6b – 12 min, a 6c – 7 min. Średni czas jednej prezentacji był równy
A. 9 min B. 10 min C. 8 min D. 7 min



płetwal błękitny

- 8 Z czterech grusz zebrano owoce o masie: 32 kg, 27 kg, 43 kg i 38 kg. Jaka jest średnia masa gruszek zebranych z jednego drzewa?
A. 34 kg B. 35 kg C. 36 kg D. 37 kg
- 9 Liczby pierwsze to
A. 0, 13, 39 B. 3, 21, 37 C. 1, 11, 14 D. 7, 19, 53
- 10 Przez 9 **nie jest** podzielna liczba
A. 11 124 B. 999 000 C. 3474 D. 2742
- 11 Dane są liczby:
A. 14 B. 30 C. 33 D. 42

Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnym odpowiedziom.

Które dwie liczby są liczbami względnie pierwszymi?	A	B	C	D
Największym wspólnym dzielnikiem których dwóch liczb jest liczba 6?	A	B	C	D
Która z liczb jest równa NWW(7, 6)?	A	B	C	D
Najmniejsza wspólna wielokrotność których dwóch liczb jest iloczynem tych liczb?	A	B	C	D

- 12 Które zdanie jest **fałszywe**?
A. Najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb pierwszych jest iloczynem tych liczb.
B. Największym wspólnym dzielnikiem dwóch liczb pierwszych jest liczba 1.
C. $NWD(48, 64) = 8$
D. Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 17 i 42 jest liczbą trzycyfrową.
- 13 Który iloczyn przedstawia rozkład liczby 126 na czynniki pierwsze?
A. $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ B. $2 \cdot 3^2 \cdot 7$ C. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ D. $2 \cdot 3 \cdot 7$
- 14 Która liczba jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 35 i 42? Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. 210,	ponieważ	I. $420 = 12 \cdot 35 = 10 \cdot 42$.
B. 420,		II. $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Czy „średnio” to „po

Pan Michał jest analitykiem finansowym. Pewnego dnia został poproszony o analizę zarobków pracowników w **trzech firmach**.

1

Wszystkim po tyle samo

W pierwszej firmie każdy z siedmiu pracowników zarabia po **5000 zł**.



$$7 \cdot 5000 \text{ zł} = 35\,000 \text{ zł}$$

$$35\,000 \text{ zł} : 7 = 5000 \text{ zł}$$

Zatem średnia pensja w tej firmie **to 5000 zł**.

2

Pół na pół

W drugiej firmie czterech pracowników zarabia po **3000 zł**, a kolejnych czterech zarabia po **7000 zł**.



$$4 \cdot 3000 \text{ zł} + 4 \cdot 7000 \text{ zł} = 40\,000 \text{ zł}$$

$$40\,000 \text{ zł} : 8 = 5000 \text{ zł}$$

Średnia pensja w drugiej firmie **również wynosi 5000 zł**.

tyle samo”?



3

Różne zadania, różne płace

W trzeciej firmie pracuje **8 pracowników**,
z których każdy zarabia po **3000 zł**,

księgowa, która zarabia
6500 zł...



... oraz **prezes**, który
co miesiąc otrzymuje pensję
w wysokości **19 500 zł**.



$$8 \cdot 3000 \text{ zł} + 6500 \text{ zł} + 19\,500 \text{ zł} = 50\,000 \text{ zł}$$

$$50\,000 \text{ zł} : 10 = 5000 \text{ zł}$$

Średnia pensja w trzeciej firmie
to także 5000 zł.



W której firmie
pracuje najwięcej
osób zarabiających
powyżej średniej
pensji?

1. Wyrażenia algebraiczne



Sowa przypomina

- Najprostszymi **wyrażeniami algebraicznymi** są:
litery, np. a, b, c, x, y ,
liczby, np. $32; 4,5; 7\frac{3}{5}$,
liczby i litery połączone znakami działań, np. $3 \cdot a, \frac{1}{2} \cdot a \cdot b, b^2, \frac{1}{4} + x, 8 - d, m : 5$.
- Przy zapisie pewnych wyrażeń algebraicznych można opuścić znaki mnożenia oraz czynnik równy 1, np.
 $3 \cdot a = 3a, \quad \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2}ab, \quad 1 \cdot m \cdot n = mn.$
- Wyrażenia algebraiczne: $2cdx, 3abc, mnx$ są **uporządkowane**, bo w iloczynie pierwszym czynnikiem jest liczba, a litery występują w kolejności alfabetycznej.
- Wyrażenia algebraiczne: $\frac{3}{5}ab^2, -4ab^2, 1,5b^2a$ to **wyrazy podobne**, ponieważ są iloczynami takich samych liter w tej samej potęgze i różnią się co najwyżej współczynnikiem liczbowym.
- Wyrazy podobne możemy dodawać i odejmować, np.
 $4a + a - 2a = 3a,$
 $5a + 2b - 3a + b = (5a - 3a) + (2b + b) = 2a + 3b.$
- Jeżeli występujące w wyrażeniu algebraicznym litery zastąpimy liczbami i wykonamy wskazane działania, zgodnie z kolejnością wykonywania działań, to otrzymany wynik jest **wartością liczbową wyrażenia**, np.
wartością liczbową wyrażenia $2a + b^2 - 4$ dla $a = 5, b = 3$ jest liczba 15, bo $2 \cdot 5 + 3^2 - 4 = 15$.
To samo wyrażenie może mieć inną wartość liczbową, jeżeli występujące w nim litery zastąpimy innymi liczbami, np.
wartością liczbową wyrażenia $2a + b^2 - 4$ dla $a = 2, b = 6$ jest liczba 36, bo $2 \cdot 2 + 6^2 - 4 = 36$.



Sowa uczy

Nazwa wyrażenia algebraicznego pochodzi od nazwy działania, które podczas obliczania wartości liczbowej tego wyrażenia zgodnie z kolejnością wykonywania działań **należy wykonać jako ostatnie**.

$a + 2m$ – to **suma**, w której pierwszym składnikiem jest liczba a , a drugim składnikiem iloczyn $2m$.

$(a + c) : 3$ – to **iloraz**, w którym dzielną jest suma liczb a i c , a dzielnikiem liczba 3.

$5 \cdot (a + b)$ – to **iloczyn**, w którym pierwszym czynnikiem jest liczba 5, a drugim czynnikiem suma liczb a i b .

$3a - x$ – to **różnica** potrojonej liczby a i liczby x .

$(5 + a)^3$ – to trzecia **potęga** sumy liczb 5 i a .

Wyrażenia algebraiczne wykorzystuje się do zapisu:

– **własności działań**, np.

$$16 + 31 + 44 = (16 + 44) + 31 \quad \text{czyli} \quad a + b + c = (a + c) + b$$

– **działań**, np.

$$32 : 5 = 6 \text{ r } 2$$

stąd:

$$32 = 5 \cdot 6 + 2 \quad \text{czyli} \quad a = b \cdot q + r = bq + r$$

– **wzorów**, np.

$$L = 2 \cdot (3 + 4)$$

czyli:

$$L = 2 \cdot (a + b) = 2(a + b)$$

$$P = 3 \cdot 4, \quad \text{czyli} \quad P = a \cdot b = ab$$

$$L = 4 \cdot 5$$

czyli:

$$L = 4 \cdot a = 4a$$

$$P = 5 \cdot 5, \quad \text{czyli} \quad P = a \cdot a = a^2$$

$$b = 4$$



$$a = 3$$

$$a = 5$$

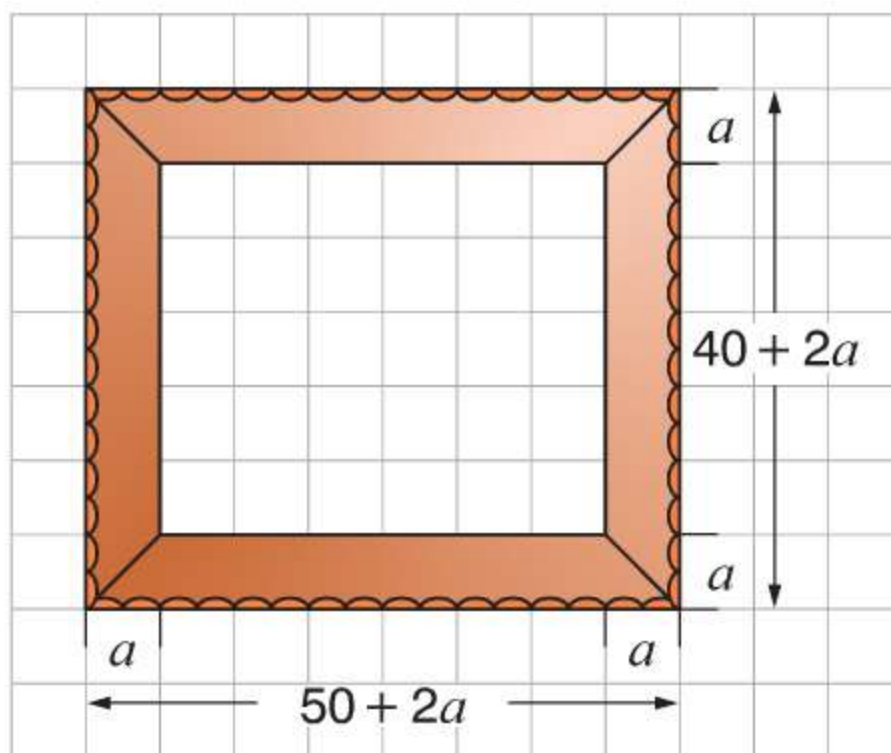


$$a = 5$$

Przykład 1.

Pan Karol chce oprawić obrazek o wymiarach $40\text{ cm} \times 50\text{ cm}$.

- Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące, ile centymetrów listwy o szerokości $a\text{ cm}$ musi kupić, aby oprawić obrazek.
- O ile centymetrów mniejszy jest obwód obrazka od długości listwy potrzebnej do wykonania ramy?
- Oblicz potrzebną długość listwy o szerokości 6 cm .



Na rysunku pokazano sposób wykonania ramy i jej wymiary w centymetrach.

- Zapiszmy wyrażenie algebraiczne opisujące długość listwy potrzebnej do wykonania ramy.

$$[(50 + 2a) + (40 + 2a)] \cdot 2 = (50 + 40 + 2a + 2a) \cdot 2 = (90 + 4a) \cdot 2 = 180 + 8a$$

- Obliczmy obwód obrazka.

$$2 \cdot (50 + 40) = 180\text{ [cm]}$$

Obliczmy różnicę długości listwy i obwodu obrazka.

$$(180 + 8a) - 180 = 8a\text{ [cm]}$$

- Obliczmy potrzebną długość listwy o szerokości 6 cm .

$$180 + 8 \cdot 6 = 228\text{ [cm]} \quad 228\text{ cm} = 2,28\text{ m}$$

Odpowiedź. Do oprawy obrazka potrzeba $2,28\text{ m}$ listwy o szerokości 6 cm i jest to o $8a\text{ cm}$ więcej, niż wynosi obwód obrazka.

- Napisz wyrażenia w prostszej postaci.

$$\begin{aligned} \text{a) } m + m + m \\ a + a + 3a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x \cdot x \\ a \cdot a \cdot a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2x + 3y + 5x - 2y \\ 7a - 4b - 3b + 1 \end{aligned}$$

- Podaj nazwę wyrażenia algebraicznego.

$$\begin{aligned} \text{a) } a + 2b \quad \text{b) } (c - 4)^2 \quad \text{c) } 2x + y^2 \quad \text{d) } (m - n) \cdot 3 \quad \text{e) } \frac{k - 3}{4} \end{aligned}$$

- 3 Napisz wyrażenie algebraiczne:
- a) liczba m zwiększona o 6, b) czwarta część liczby x ,
 c) pięciokrotność liczby b , d) podwojona liczba a zmniejszona o 4.
- 4 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

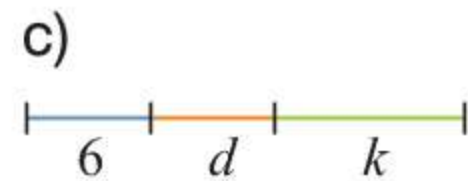
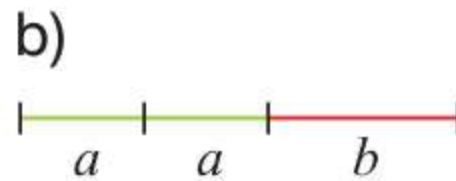
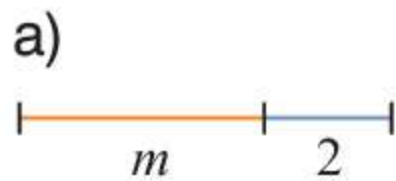
$a^3 - 4$ to różnica sześcianu liczby a i liczby 4.	P	F
Wyrazami podobnymi są: $3x$; $3x^3$; $3xy$.	P	F
Gdy w wyrażeniu $a = b \cdot q + r$ zamiast a wstawimy liczbę 45, a zamiast q liczbę 6, to $r = 3$, $b = 7$.	P	F

- 5 Który wyraz **nie jest** podobny do wyrazu $0,5ab^2c$?
 A. $\frac{1}{3}ab^2c$ B. $2b^2ac$ C. $0,5abc^2$ D. $2\frac{1}{2}acb^2$
- 6 Oblicz wartość wyrażenia dla $m = 10$, $p = 5$.
 a) $3mp$ b) $4m + 16$ c) $m^2 - 12p$ d) $(2m : 4) \cdot p^2$
- 7 Uzupełnij zadania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Ostatnim działaniem, które trzeba wykonać podczas obliczania wartości liczbowej wyrażenia $2^3 - a$, jest A / B.
 A. potęgowanie B. odejmowanie
 Ostatnim działaniem, które trzeba wykonać podczas obliczania wartości liczbowej wyrażenia $9 + 4b$, jest C / D.
 C. dodawanie D. mnożenie
- 8 Karolina kupiła dwie pary butów. Za jedną parę zapłaciła a zł, a za drugą b zł. Wyrażenie opisujące wartość zakupu Karoliny to
 A. $2a$ B. $2b$ C. $2a + b$ D. $a + b$

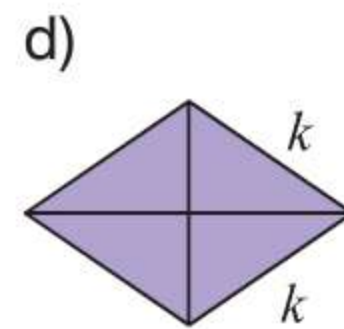
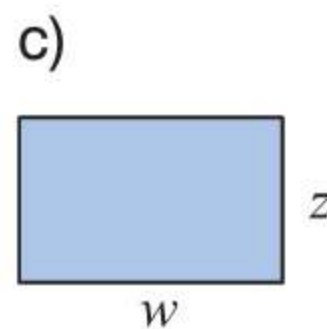
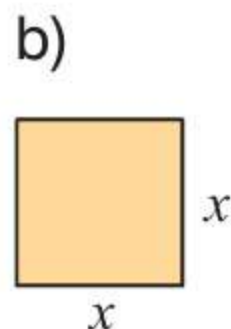
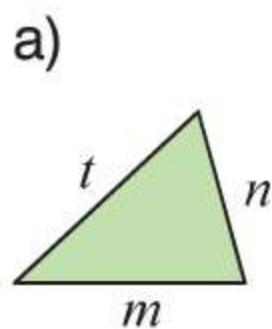


- 9 Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące wartość zakupów.
- a) Agata kupiła trzy zeszyty po a zł, cyrkiel za c zł i papier śniadaniowy, którego cena była o 2 zł wyższa od ceny cyrkla.
 b) Wiktor kupił 2 kg jabłek po a zł za kilogram, 1,5 kg gruszek po g zł za kilogram i ananasa za 8,50 zł.
 c) Magda kupiła spódnicę za s zł i dwie bluzki: jedną za 125 zł, a drugą o b zł tańszą.

- 10 Znajdź reszty z dzielenia liczby 40 przez jednocyfrowe liczby pierwsze. Zapisz ilorazy w postaci $40 = b \cdot q + r$.
- 11 Napisz w najprostszej postaci wyrażenie algebraiczne opisujące długość odcinka.



- 12 Napisz obwód wielokąta w postaci wyrażenia algebraicznego.



- 13 Kwadratową serwetkę, której obwód jest równy 160 cm, Ania obszyła kolorową krajką tak, jak na rysunku.

- a) Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące liczbę centymetrów krajki o szerokości b cm, którą musiała kupić Ania, aby obszyć serwetkę. Nazwij to wyrażenie.
- b) Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące, o ile centymetrów mniejszy jest obwód serwetki od długości potrzebnej krajki.
- c) Oblicz wartości zapisanych wyrażeń dla $b = 4$.



- 14 Obraz ma kształt prostokąta o wymiarach $60 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Ozdobna rama ma szerokość m cm. Wykonaj rysunek pomocniczy i napisz wyrażenie algebraiczne opisujące obwód obrazu wraz z ramą.



Wyzwanie

Napisz wyrażenie algebraiczne:

- a) „różnica dwóch różnych liczb naturalnych a oraz b ” i określ, jakie muszą być te liczby, aby ich różnica też była liczbą naturalną;
- b) „iloraz liczby naturalnej c przez liczbę naturalną p ” i określ, jaką liczbą powinna być liczba p , aby wynik dzielenia też był liczbą naturalną.

 Sprawdź się!

- 1 Wyrażenie algebraiczne będące ilorazem, w którym dzielna jest sumą kwadratu liczby p i liczby c , a dzielnikiem liczba 7 to

A. $(p^2 + c) \cdot 7$ B. $p^2 + \frac{c}{7}$ C. $(p^2 + c) : 7$ D. $p^2 + 7c$

- 2 Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

- a) różnicę, w której odjemną jest kwadrat liczby a , a odjemnikiem połowa liczby b ;
b) drugą potęgę sumy liczb a i b .

- 3 Dane są wyrażenia:

A. $4a^2b$ B. $2ab$ C. $3ab$ D. $2 + a + b$ E. $6a^2b$

Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż literę przypisaną poprawnej odpowiedzi.

Wartość którego wyrażenia dla $a = 2$ i $b = 3$ jest równa 12?	A	B	C	D	E
Wartość którego wyrażenia dla $a = 5$ i $b = 1$ jest największa?	A	B	C	D	E

- 4 Czekolada kosztowała c zł, opakowanie draży d zł, a paczka biszkoptów b zł. Antek kupił czekoladę, dwa opakowania draży i paczkę biszkoptów.

Zosia kupiła dwie czekolady, trzy paczki biszkoptów i jedno opakowanie draży.

Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

Wartość zakupów Antka opisuje wyrażenie A / B.

A. $c + 2d + b$ B. $c + d + b$

Wartość zakupów Zosi opisuje wyrażenie C / D.

C. $d + 3b + 2c$ D. $d + 2b + 3c$



- 5 Napisz przykład pokazujący, że mnożenie jest przemienne, a następnie napisz tę własność z wykorzystaniem wyrażeń algebraicznych.

2. Równania

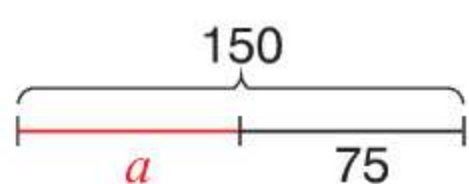


Sowa przypomina

Rozwiązać równanie to znaczy znaleźć liczbę, która spełnia to równanie.

$$a + 75 = 150$$

$$a = 150 - 75$$



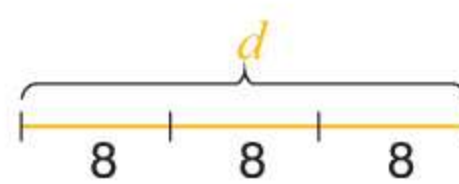
$$b - 38 = 45$$

$$b = 45 + 38$$



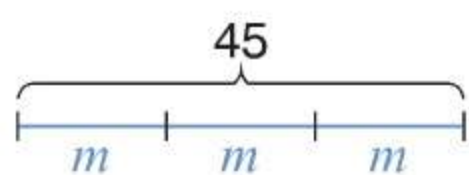
$$d : 8 = 3$$

$$d = 3 \cdot 8$$



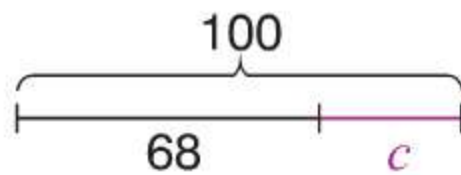
$$3 \cdot m = 45$$

$$m = 45 : 3$$



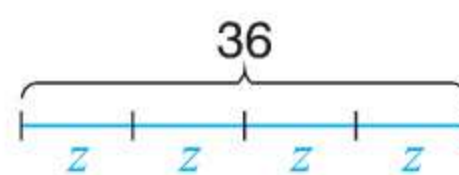
$$100 - c = 68$$

$$c = 100 - 68$$



$$36 : z = 4, z \neq 0$$

$$z = 36 : 4$$



Przykład 1.

Rozwiążmy równanie i sprawdźmy, czy rozwiązanie jest poprawne.

a) $4a - 6 = 14$

b) $(20 - b) : 7 = 2$

c) $5 \cdot (8 + c) = 60$

a) $4a - 6 = 14$ W tym równaniu po lewej stronie jest różnica.

Ponieważ niewiadoma a jest w odjemnej:

$$4a = 14 + 6$$

$$4a = 20$$

W tym równaniu po lewej stronie jest iloczyn.

Ponieważ niewiadoma a jest jednym z czynników:

$$a = 20 : 4$$

$$a = 5$$

Sprawdzenie. $L = 4 \cdot 5 - 6 = 20 - 6 = 14$ $P = 14$ $L = P$

b) $(20 - b) : 7 = 2$ W tym równaniu po lewej stronie jest iloraz.

Ponieważ niewiadoma b jest w dzielniej:

$$(20 - b) = 2 \cdot 7$$

$$20 - b = 14 \quad \text{W tym równaniu po lewej stronie jest różnica.}$$

Ponieważ niewiadoma b jest odjemnikiem:

$$b = 20 - 14$$

$$b = 6$$

$$\text{Sprawdzenie. } L = (20 - 6) : 7 = 14 : 7 = 2 \quad P = 2 \quad L = P$$

c) $5 \cdot (8 + c) = 60$ W tym równaniu po lewej stronie jest iloczyn.

Ponieważ niewiadoma c jest w jednym z czynników:

$$(8 + c) = 60 : 5$$

$$8 + c = 12 \quad \text{W tym równaniu po lewej stronie jest suma.}$$

Ponieważ niewiadoma c jest jednym ze składników:

$$c = 12 - 8$$

$$c = 4$$

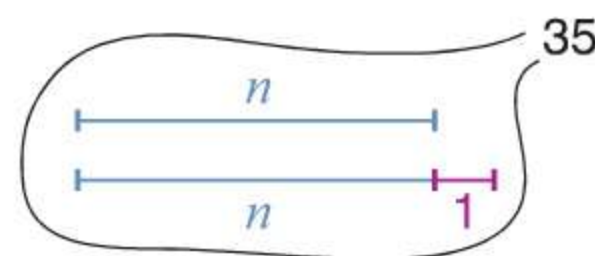
$$\text{Sprawdzenie. } L = 5 \cdot (8 + 4) = 5 \cdot 12 = 60 \quad P = 60 \quad L = P$$

Przykład 2.

Suma dwóch kolejnych liczb naturalnych jest równa 35. Co to za liczby?

Zapiszmy treść zadania w postaci równania.

W tym celu oznaczmy mniejszą z szukanych liczb literą n . Ponieważ następna liczba naturalna jest o 1 większa, jest ona równa $n + 1$.



Napiszmy sumę tych liczb, o której wiemy, że jest równa 35.

$$n + n + 1 = 35$$

$$2n + 1 = 35$$

$$2n = 35 - 1$$

$$2n = 34$$

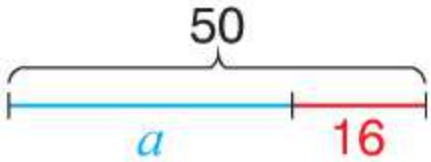
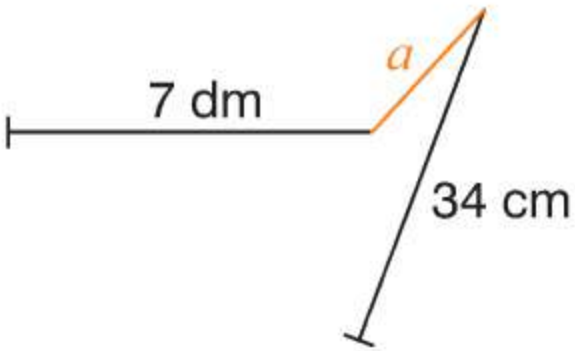
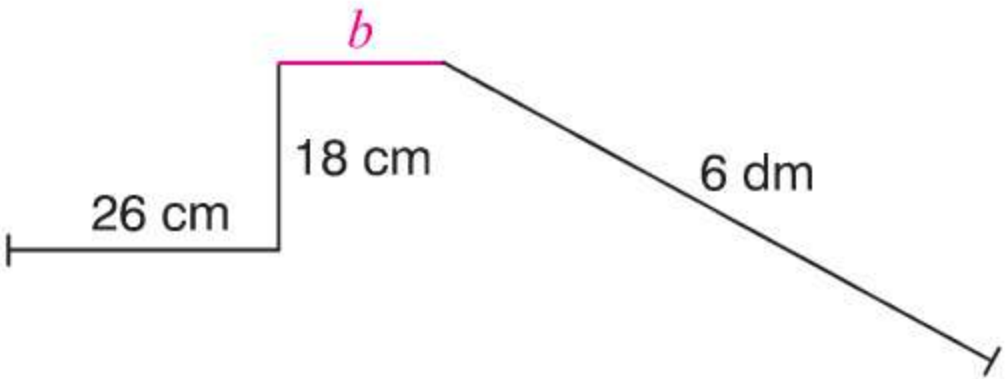
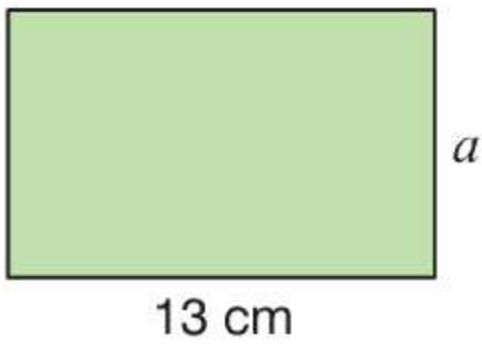
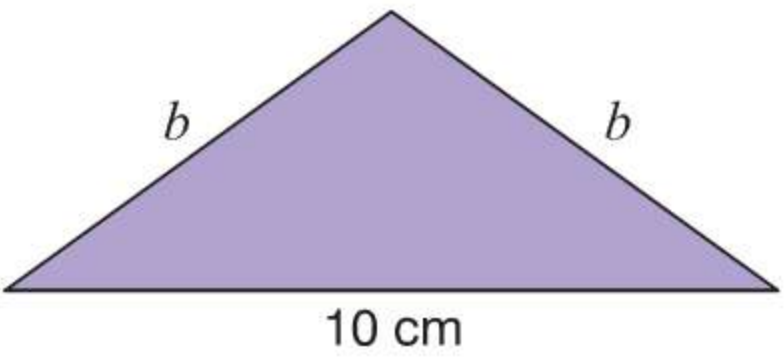
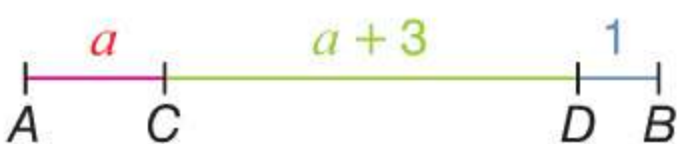
$$n = 34 : 2$$

$$n = 17$$

$$n + 1 = 18$$

$$\text{Sprawdzenie. } 17 + 18 = 35$$

Odpowiedź. Szukane liczby to 17 i 18.

- 1 Rozwiąż równanie.
 a) $24 + x = 51$ b) $m - 17 = 16$ c) $12y = 60$ d) $84 : a = 7$
- 2 Rozwiązaniem równania $2a + 16 = 20$ jest liczba
 A. 4 B. 2 C. 1 D. 6
- 3 Sprawdź bez rozwiązywania równania, która z liczb: 3, 5, 6, 8 jest jego rozwiązaniem.
 a) $(a - 2) \cdot 11 = 44$ b) $3c - 9 = 15$ c) $56 : (2^2 + b) = 8$
- 4 Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenia.
 a) $(21 - x) : 6 = 3$ b) $5c - 17 = 13$ c) $(20 + p) \cdot 3 = 150$
 $48 : (7 + m) = 3$ $10 - 4d = 2$ $7 \cdot (12 - t) = 84$
- 5 Suma dwóch kolejnych liczb naturalnych jest równa 73. Co to za liczby? Napisz i rozwiąż równanie opisujące treść zadania.
- 6 Ania miała 50 zł. Zrobiła zakupy za a zł i otrzymała 16 zł reszty. Napisz równanie opisujące treść zadania i je rozwiąż.
- 
- 7 Długość łamanej jest równa 120 cm. Napisz odpowiednie równanie i oblicz nieznaną długość jej boku.
- a)
- 
- b)
- 
- 8 Obwód figury jest równy 36 cm. Ułóż odpowiednie równanie i oblicz nieznaną długość jej boku.
- a)
- 
- b)
- 
- 9 Długość odcinka AB jest równa 12 cm. Jaką długość mają odcinki AC i CD ? Ułóż odpowiednie równanie i je rozwiąż.
- 

- 10 Zauważ prawidłowość, według której tworzą sumy.

$$1 + 2 + 3 = 6$$

$$2 + 3 + 4 = 9$$

$$3 + 4 + 5 = 12$$

- Napisz 3 kolejne sumy.
- Napisz 21. sumę.
- Napisz odpowiednie równanie i sprawdź, czy istnieje taka suma równa 100.



Sprawdź się!

- 1 Rozwiązaniem równania $30 : (2a - 1) = 6$ jest

A. $a = 2$

B. $a = 1$

C. $a = 3$

D. $a = 6$

- 2 Dane są równania:

A. $5a = 35$

B. $26 - a = 19$

C. $42 : a = 7$

D. $a - 6 = 12$

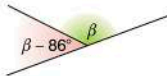
Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż literę przypisaną poprawnej odpowiedzi.

Rozwiązanie którego równania jest liczbą największą?	A	B	C	D
W którym równaniu niewiadoma jest dzielnikiem?	A	B	C	D
W którym równaniu po lewej stronie jest iloczyn?	A	B	C	D

- 3 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.

$$(2 + c) \cdot 4 = 56$$

- 4 Ułóż odpowiednie równanie i oblicz miarę kąta β .



- 5 Rozwiązanie czterech zadań zajęło Julce 23 minuty. Pierwsze zadanie rozwiązała w ciągu 5 minut. Ile czasu średnio poświęciła na rozwiązanie każdego z trzech pozostałych zadań? Ułóż odpowiednie równanie i je rozwiąż.

3. Wyrażenia algebraiczne i równania w zadaniach

Przykład 1.

Suma trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 72. Jakie to liczby?

Oznaczmy najmniejszą z tych liczb literą n .

Ponieważ kolejne liczby parzyste różnią się o 2, szukane liczby możemy zapisać:

Liczba I	Liczba II	Liczba III
n	$n + 2$	$(n + 2) + 2$

Napiszmy sumę tych liczb i dodajmy wyrazy podobne.

$$n + n + 2 + (n + 2) + 2 = 3n + 6$$

Ułóżmy równanie i je rozwiążmy.

$$3n + 6 = 72$$

Ponieważ niewiadoma n jest w jednym ze składników:

$$3n = 72 - 6$$

$$3n = 66$$

Ponieważ niewiadoma n jest jednym z czynników:

$$n = 66 : 3$$

$$n = 22$$

Otrzymaliśmy liczbę parzystą, czyli zgodną z warunkami zadania.

Znajdźmy kolejne liczby.

Liczba I	Liczba II	Liczba III
n	$n + 2$	$(n + 2) + 2$
22	$22 + 2 = 24$	$24 + 2 = 26$

Sprawdzenie. $22 + 24 + 26 = 72$

Odpowiedź. Szukanymi liczbami są: 22, 24 i 26.

Przykład 2.

Krysia kupiła 3 kg jabłek po a złotych za 1 kilogram i 4 owoce awokado po b złotych za 1 sztukę. Ile reszty otrzymała, jeżeli zapłaciła banknotem 50-złotowym?

Zapiszmy wyrażenia opisujące wartość kupionych owoców.

$3a$ – wartość jabłek – iloczyn masy (w kg) i ceny za 1 kg

$4b$ – wartość awokado – iloczyn liczby owoców i ceny za 1 szt.



$3a + 4b$ – wartość kupionych owoców

Zapiszmy wyrażenie opisujące otrzymaną resztę.

$50 - (3a + 4b)$

Odpowiedź. Krysia otrzymała $[50 - (3a + 4b)]$ zł reszty.

Przykład 3.

Wojtek przechowywał zdjęcia w czterech kopertach. W każdej kopercie miał tyle samo zdjęć. Dał babci 12 zdjęć i wówczas zostało mu 48 zdjęć. Ile zdjęć było w każdej kopercie na początku?

Oznaczmy niewiadomą liczbę zdjęć w jednej kopercie literą x .

Liczba zdjęć w czterech kopertach:

$$x + x + x + x = 4x$$

Liczba zdjęć po daniu 12 sztuk babci: $4x - 12$

Ułóżmy równanie i je rozwiążmy.

$$4x - 12 = 48$$

$$4x = 60$$

$$x = 15$$

Sprawdzenie. Wojtek początkowo miał $4 \cdot 15 = 60$ zdjęć.

Dał babci 12 zdjęć, więc pozostało mu $60 - 12 = 48$ zdjęć.

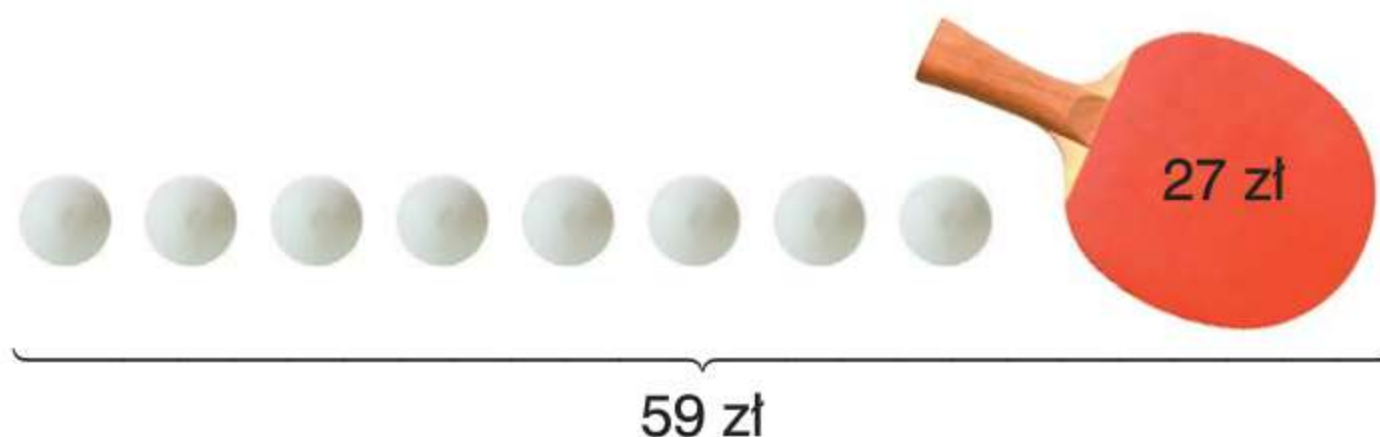
Odpowiedź. Na początku w każdej kopercie było 15 zdjęć.



- 1 Zosia ułożyła swoje ulubione książki na trzech półkach. Na pierwszej położyła a książek, na drugiej o 8 więcej, a na trzeciej o 6 mniej niż na pierwszej. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące, ile książek ułożyła Zosia, i oblicz jego wartość liczbową dla $a = 19$.
- 2 Oceń prawdziwość zdań. Wskaż TAK, jeżeli zdanie jest prawdziwe, lub NIE, jeśli jest fałszywe.

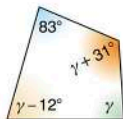
W równaniu $3a + 6 = 27$ po lewej stronie jest suma, której jednym ze składników jest iloczyn $3a$.	TAK	NIE
Suma połowy liczby c i podwojonego kwadratu liczby d to $\frac{1}{2}c + 2d^2$.	TAK	NIE

- 3 Pan Marek chce kupić 2 słoiki na przyprawy, które kosztują k zł za sztukę, 6 podkładek pod talerze po p zł za sztukę, komplet łyżek za m zł i pojemnik na sztućce za d zł. Zapisz wyrażenie algebraiczne, które opisuje wartość jego zakupów.
- 4 Suma trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 69. Napisz odpowiednie równanie i wyznacz szukane liczby.
- 5 Za 8 piłeczek do tenisa stołowego i raketkę zapłacono 59 zł. Raketka kosztowała 27 zł. Ile kosztowała jedna piłeczka? Ułóż odpowiednie równanie i je rozwiąż.



- 6 Odpowiedź zapisz w postaci opisującego ją wyrażenia algebraicznego.
 - a) Pan Tadeusz kupił 2 ananasy po a zł za sztukę i mango za m zł. Ile otrzymał reszty z 50 zł?
 - b) Tort orzechowy kosztował m zł, a tort czekoladowy był o 18 zł tańszy. Ile łącznie zapłacono za obydwa torty?
 - c) Pani Helena otrzymała w lipcu p zł premii, a w sierpniu t zł. Jaka była średnia wysokość jej premii w tych miesiącach?
- 7 Suma dwóch liczb, z których jedna jest o 4 mniejsza od drugiej, jest równa 32. Napisz odpowiednie równanie i wyznacz szukane liczby.

- 8 Ułóż odpowiednie równanie i oblicz miarę kąta γ w narysowanym obok czworokącie. Jakie miary mają pozostałe kąty tego czworokąta?



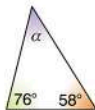
- 9 Ułóż zadanie, do którego odpowiedzią będzie wyrażenie $50 - 3a$.

- 10 Kasia poprawnie rozwiązała 12 zadań za 1 punkt, kilka zadań za 2 punkty, 8 zadań za 3 punkty i łącznie zdobyła 54 punkty. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D. Aby obliczyć, ile zadań za 2 punkty Kasia rozwiązała poprawnie, można rozwiązać równanie A / B. A. $2a + 8 = 54$ B. $2a + 36 = 54$ Kasia poprawnie rozwiązała C / D zadań. C. 29 D. 26

Sprawdź się!

- 1 Tomek kupił 3 pary skarpet po c zł za parę i ochraniacze na kolana za b zł. Zapłacił banknotem 100-złotowym. Które wyrażenie opisuje, ile otrzymał reszty?
- A. $100 - 3c + b$ B. $100 + 3c - b$
C. $100 - (3c + b)$ D. $3c + b$

- 2 Ułóż odpowiednie równanie i oblicz miarę kąta α .
- 3 Suma dwóch kolejnych liczb parzystych jest równa 70. Co to za liczby? Napisz odpowiednie równanie i wyznacz szukane liczby.



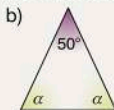
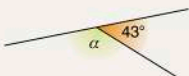
- 4 Za 4 bilety do kina i 2 paczki popcornu po 13 zł za paczkę rodzina zapłaciła 134 zł. Wszystkie bilety były w tej samej cenie. Jaka była cena jednego biletu? Ułóż odpowiednie równanie i je rozwiąż.



- 5 Na klasówce z matematyki Karolina otrzymała 31 punktów. Poprawnie rozwiązała 5 zadań za c punktów każde, a za pozostałe zadania otrzymała 16 punktów. Ile punktów otrzymała za rozwiązanie każdego z pięciu zadań? Ułóż odpowiednie równanie i je rozwiąż.

Zadania utrwalające

- 1 Napisz wyrażenie algebraiczne w prostszej postaci.
 - a) $4k - 2k$
 - b) $x \cdot x$
 - c) $a + a + 3a$
- 2 Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:
 - a) liczbę o 5 mniejszą od liczby k ,
 - b) dwukrotność liczby p ,
 - c) liczbę o 4 większą od liczby a ,
 - d) szóstą część liczby m .
- 3 Napisz wyrażenie algebraiczne:
 - a) suma liczby 4 i kwadratu liczby b ;
 - b) kwadrat różnicy liczb m i n ;
 - c) iloraz, którego dzielną jest suma liczb c i d , a dzielnikiem kwadrat liczby 3;
 - d) iloczyn, którego pierwszym czynnikiem jest różnica potrojonej liczby x oraz liczby y , a drugim czynnikiem liczba z .
- 4 Podaj nazwę wyrażenia algebraicznego.
 - a) $a^3 - 2bc$
 - b) $p^2 + k^3$
 - c) $x : (t - y)$
 - d) $(m + 2t) \cdot s$
- 5 Sprawdź bez rozwiązywania równania, która z liczb: 2, 5, 6, 9 jest jego rozwiązaniem.
 - a) $45 - 2a = 33$
 - b) $48 : (17 - b) = 6$
 - c) $5x + 24 = 34$
- 6 Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenia.
 - a) $3a - 6 = 27$
 $5c \cdot 19 = 1900$
 - b) $(b - 16) : 4 = 16$
 $9z : 60 = 3$
 - c) $86 + 2x = 206$
 $259 - 3w = 79$
- 7 Zapisz sumę trzech kolejnych liczb parzystych, jeżeli pierwsza z nich jest równa $2n$.
- 8 Ułóż do rysunku odpowiednie równanie i oblicz miarę kąta α .
 - a)
 - b)



- 9 Odpowiedź do zadania podaj w postaci opisującego ją wyrażenia algebraicznego, a następnie napisz nazwę tego wyrażenia.
- a) Jaką długość ma bok kwadratu, którego obwód jest równy m cm?
 - b) Jacek kupił koszulkę za k zł i spodnie, które były 3 razy droższe. Ile kosztowały te zakupy?
 - c) Ile kosztuje 5 jednakowych gier po a zł?
 - d) Jaka jest masa k opakowań ziemniaków po 3 kg każde?
 - e) Ile kilometrów przejedzie samochód przez 4 h, jeżeli będzie jechał z prędkością średnią $b \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- 10 Za kilka zeszytów po 4 zł za sztukę i cyrkiel za 5 zł Franek zapłacił 29 zł. Napisz odpowiednie równanie i oblicz, ile zeszytów kupił Franek.
- 11 Za 3 jednakowe żarówki i latarkę Marysia zapłaciła 39 zł. Latarka kosztowała 12 zł. Ile kosztowała jedna żarówka? Napisz odpowiednie równanie i je rozwiąż.
- 12 Ala napisała siedem kartkówek. Z sześciu otrzymała następujące oceny: 2, 4, 3, 5, 5, 3. Oceny z ostatniej kartkówki jeszcze nie zna. Oznacz ocenę z ostatniej kartkówki literą n i napisz wyrażenie algebraiczne opisujące średnią arytmetyczną siedmiu ocen Ali.
- 13 Obwód prostokąta jest równy p cm. Dłuższy bok tego prostokąta ma długość a cm. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące długość krótszego boku tego prostokąta. Oblicz jego wartość liczbową dla $p = 36$ i $a = 11$.
- 14 Pan Jan kupił 3 brzozy po b zł, 2 akacje po a zł, 4 buki po c zł za sztukę. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące, jaką resztę powinien otrzymać z 500 zł.
- 15 Cenę kurtki, która kosztowała m zł, obniżono o czwartą jej część. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące cenę kurtki po obniżce, a następnie oblicz jego wartość liczbową dla $m = 160$.
- 16 Długość boku AB łamanej $ABCDE$ jest równa m cm. Bok BC jest o 3 cm dłuższy od boku AB , bok CD jest 2 razy krótszy od boku AB , a bok DE ma długość równą sumie długości boków AB i BC . Wykonaj rysunek pomocniczy. Przy każdym boku napisz wyrażenie algebraiczne opisujące jego długość. Oblicz długość łamanej i podaj ją w najprostszej postaci.

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- 1 Wartość wyrażenia $a^2 - 2m$ dla $a = 7$, $m = 5$ jest równa
A. 4 B. 24 C. 0 D. 39
- 2 Wartością wyrażenia $\frac{ab}{2}$ dla $a = 3$ i $b = 6$ jest
A. $18\frac{1}{2}$ B. 9 C. $4\frac{1}{2}$ D. 18
- 3 Dane są wyrażenia:
A. $7 \cdot (a + b)$ B. $b - 5a$ C. $2ab$ D. $b : a$

Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż literę przypisaną poprawnej odpowiedzi.

Wartość którego wyrażenia dla $a = 7$ i $b = 42$ jest równa 6?	A	B	C	D
Wartość którego wyrażenia dla $a = 3$ i $b = 36$ jest największa?	A	B	C	D
Wartość którego wyrażenia dla $a = 0,1$ i $b = 4$ jest największa?	A	B	C	D

- 4 Janek kupił dwie pary skarpetek. Za jedną parę zapłacił a zł, a za drugą b zł. Wyrażenie opisujące wartość zakupu Janka to
A. $2a$ B. $2b$ C. $2a + b$ D. $a + b$
- 5 Dane są wyrażenia:
A. $\frac{1}{3}m$ B. m^3 C. $\frac{m}{3}$ D. $3m$

Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnym odpowiedziom.

Które wyrażenie jest wielokrotnością liczby m ?	A	B	C	D
Które wyrażenie opisuje trzecią część liczby m ?	A	B	C	D
Które wyrażenie jest trzecią potęgą liczby m ?	A	B	C	D

- 6 Która z liczb jest rozwiązaniem równania $(6a - 8) : 2 = 8$?
A. 4 B. 2 C. 6 D. 1

- 7 Rozwiązaniem którego równania **nie jest** liczba 5?
 A. $15a - 32 = 43$ B. $55 + 3y = 70$
 C. $2x : 8 = 5$ D. $68 - 4m = 48$
- 8 Michał kupił 2 pudełka mazaków po a zł każde i długopis za d zł. Zapłacił banknotem 20-złotowym. Które zdanie jest **fałszywe**?
 A. Mazaki kosztowały $2a$ zł.
 B. Wartość zakupów Michała, to $(d + 2a)$ zł.
 C. Nazwa wyrażenia algebraicznego, które opisuje wartość zakupów Michała, to: suma liczb d i a .
 D. Reszta, którą powinien otrzymać Michał, to $[20 - (2a + d)]$ zł.
- 9 W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość a , a ramię – c . Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D. Obwód tego trójkąta opisuje wyrażenie A / B.
 A. $a + 2c$ B. $c + 2a$
 Dla $a = 2$ dm i $c = 25$ cm obwód tego trójkąta jest równy C / D.
 C. 7 dm D. 65 cm
- 10 Wiktoria kupiła 5 jednakowych kartek świątecznych i czasopismo za 7 zł. Za zakupy zapłaciła 22 zł. Rozwiązanie którego równania pozwoli nam obliczyć cenę jednej kartki świątecznej?
 A. $k + 7 = 22$ B. $(k + 7) : 5 = 22$
 C. $5k - 7 = 22$ D. $5k + 7 = 22$
- 11 Rozwiązaniem którego równania **nie jest** liczba 7?
 A. $(2x + 11) : 5 = 5$ B. $(2x + 21) : 5 = 10$
 C. $(21 - 2x) \cdot 3 = 21$ D. $(5x - 19) \cdot 2 = 32$
- 12 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

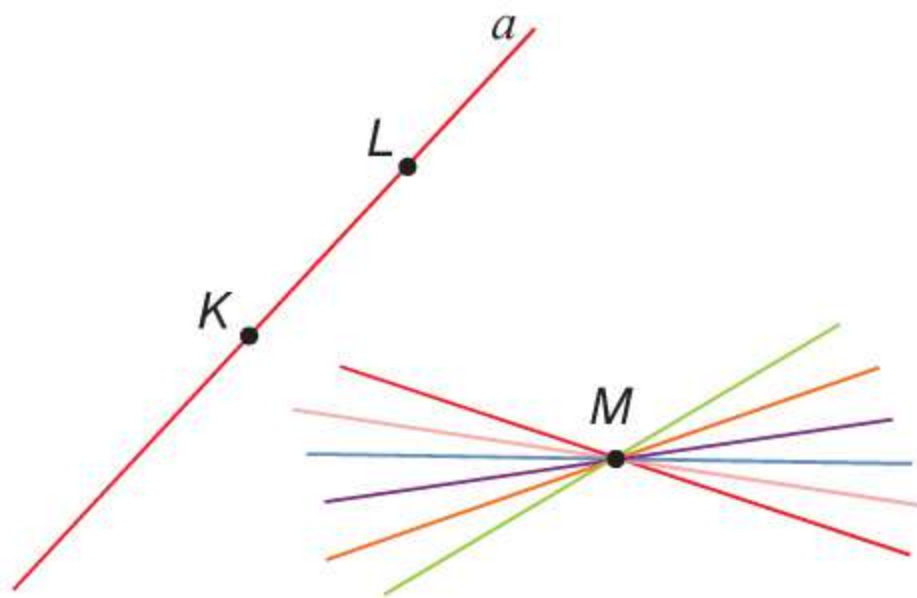
Liczba 7 spełnia równanie $21 : (14 - a) = 4$.	P	F
Wartością wyrażenia $2x^2 - 5$ dla $x = 4$ jest liczba 3^3 .	P	F
Jeżeli równoległobok ma boki o długościach a i b , to jego obwód można opisać wyrażeniem $2(a + b)$.	P	F
Wartość wyrażenia $4a + b$ dla $a = 8$ i $b = 16$ można zapisać w postaci potęgi liczby 2.	P	F

1. Prosta, kąty



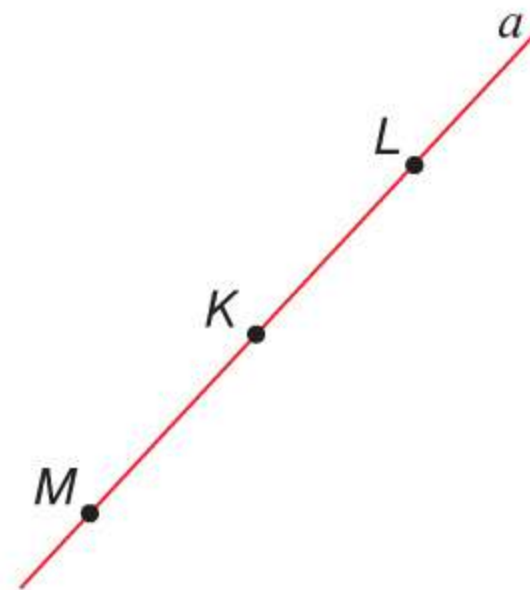
Sowa przypomina

● Prosta



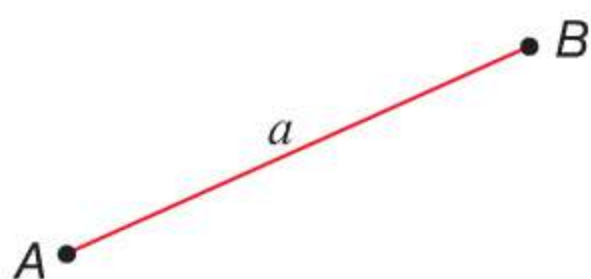
Przez dwa różne punkty można poprowadzić tylko jedną **prostą**. Przez jeden punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych. Prostą najczęściej oznaczamy małą literą alfabetu, np. a , b .

● Półprosta



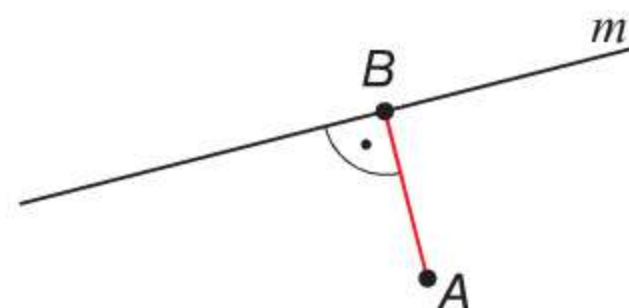
Punkt K dzieli prostą na dwie **półproste**: półprostą KL o początku K , przechodzącą przez punkt L , i półprostą KM o początku K , przechodzącą przez punkt M .

● Odcinek



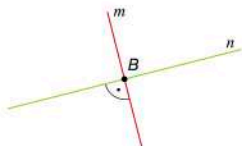
Długość odcinka AB to odległość między punktami A i B . Oznaczamy ją jako $|AB|$ lub a , $|AB| = a$. Odcinek oznaczamy dwiema wielkimi literami alfabetu.

● Odległość punktu od prostej



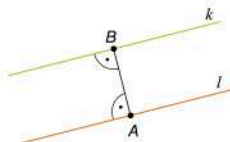
Odcinek AB jest prostopadły do prostej m : $AB \perp m$. Jest to najkrótszy odcinek łączący punkt A z prostą m . $|AB|$ to odległość punktu A od prostej m .

• Proste prostopadłe



Proste m i n przecinają się pod kątem prostym. Są to **proste prostopadłe**. Zapisujemy to jako: $m \perp n$.

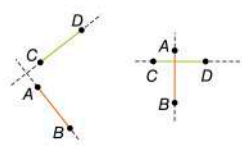
• Proste równoległe



Proste k i l nie przecinają się. Są to **proste równoległe**. Zapisujemy to jako: $k \parallel l$.

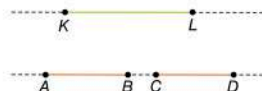
$|AB|$ to odległość między prostymi równoległymi: $AB \perp k$, $AB \perp l$.

• Odcinki prostopadłe



Odcinki są prostopadłe, jeżeli leżą na prostych prostopadłych: $AB \perp CD$.

• Odcinki równoległe

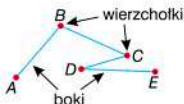


Odcinki są równoległe, jeżeli leżą na prostych równoległych: $AB \parallel KL$, $CD \parallel KL$

lub

leżą na jednej prostej: $AB \parallel CD$.

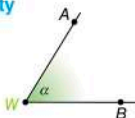
• Łamana



Długość łamanej $ABCDE$ to suma długości jej boków:

$$|AB| + |BC| + |CD| + |DE|$$

• Kąty



W to wierzchołek kąta.

WB i WA to ramiona kąta (półproste WA i WB).

Kąt oznaczamy jako: $\sphericalangle AWB$ lub $\sphericalangle BWA$, lub α .

Kąt zerowy



Ramiona kąta zerowego pokrywają się. Miara kąta zerowego jest równa 0° : $\sphericalangle AWA = 0^\circ$.

Kąt ostry



Miara kąta ostrego jest większa od 0° i mniejsza od 90° : $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Kąt prosty



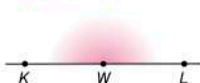
Miara kąta prostego jest równa 90° : $\beta = 90^\circ$.

Kąt rozwarty



Miara kąta rozwartego jest większa od 90° i mniejsza od 180° : $90^\circ < \gamma < 180^\circ$.

Kąt półpełny



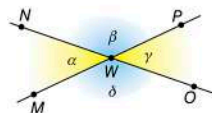
Ramiona kąta półpełnego tworzą prostą. Miara kąta półpełnego jest równa 180° : $\sphericalangle KWL = 180^\circ$.

Kąt pełny



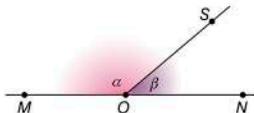
Ramiona kąta pełnego pokrywają się. Miara kąta pełnego jest równa 360° : $\sphericalangle BWB = 360^\circ$.

Kąty wierzchołkowe



Kąty wierzchołkowe to: $\sphericalangle MWN$ i $\sphericalangle OWP$ oraz $\sphericalangle NWP$ i $\sphericalangle MWO$.
Ich ramiona tworzą proste.
Kąty wierzchołkowe mają równe miary: $\alpha = \gamma$ oraz $\beta = \delta$.

Kąty przyległe



Kąty przyległe $\sphericalangle MOS$ i $\sphericalangle SON$ mają jedno ramię wspólne, a ich pozostałe ramiona tworzą prostą. Suma miar kątów przyległych jest równa 180° : $\alpha + \beta = 180^\circ$.



Sowa uczy

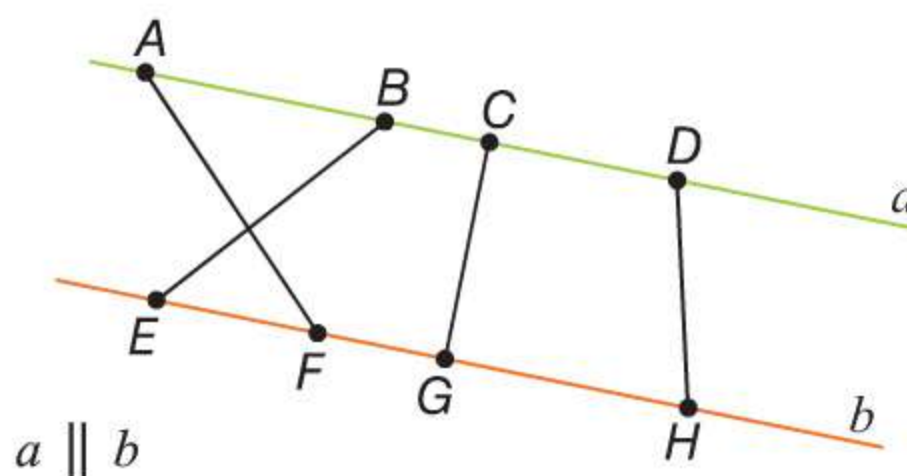
Każda prosta jest równoległa do samej siebie.



- 1 Narysuj odcinek AB o długości 3 cm 6 mm, odcinek KL o 3 cm od niego dłuższy i odcinek MN 2 razy dłuższy od odcinka AB .
a) Podaj długości narysowanych odcinków.
b) O ile centymetrów odcinek MN jest dłuższy od odcinka AB ?
- 2 Łamana $ABCDE$ ma długość 15 cm. Bok AB jest 3 razy krótszy od boku BC , $|BC| = 6$ cm. Bok CD jest o 2 cm krótszy od boku BC . Oblicz długość czwartego boku łamanej. Narysuj taką łamaną.

- 3 Odległość między prostymi a i b to długość odcinka

A. BE B. AF
C. DH D. CG



- 4 Narysuj prostą d oraz punkt L oddalony od niej o 4 cm i zaznacz odcinek LM wyznaczający tę odległość. Narysuj prostą a równoległą do odcinka LM . Jak są położone względem siebie proste a i d ?
- 5 Znajdź na mapie miejscowość, która jest oddalona od wybranej drogi Warszawa – Poznań w linii prostej o 3 cm. Jaka jest ta odległość w rzeczywistości?

- 6 Prosta m przecina odcinki AB , CD oraz EF i jest do każdego z nich prostopadła.

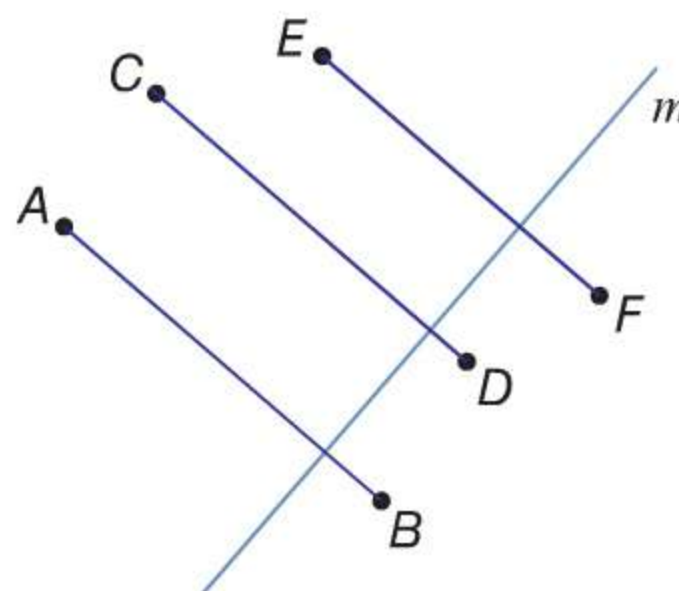
Uzupełnij zdanie. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

Odcinki AB i EF są A / B.

A. równoległe B. prostopadłe

Prosta m jest równoległa do C / D.

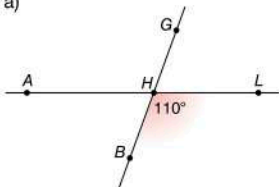
C. odcinka CD D. prostej m



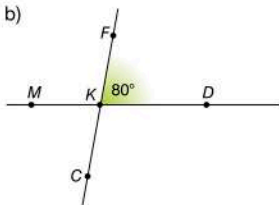
- 7 Narysuj łamaną o sześciu bokach tak, aby:
- pierwszy bok miał 3 cm długości, a każdy następny był o 0,5 cm dłuższy od poprzedniego;
 - każde dwa kolejne boki były prostopadłe.
- Zaznacz jednakowym kolorem boki równoległe. Oblicz długość łamanej.

- 8 Wypisz dwie pary kątów przyległych i dwie pary kątów wierzchołkowych. Podaj ich miary.

a)



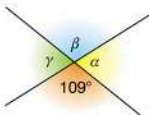
b)



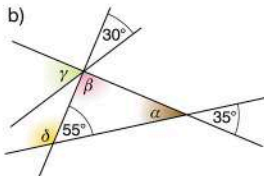
Narysuj dwa kąty: jeden o mierze kąta GHL , a drugi o mierze kąta MKF .

- 9 Oblicz miary zaznaczonych kątów.

a)



b)



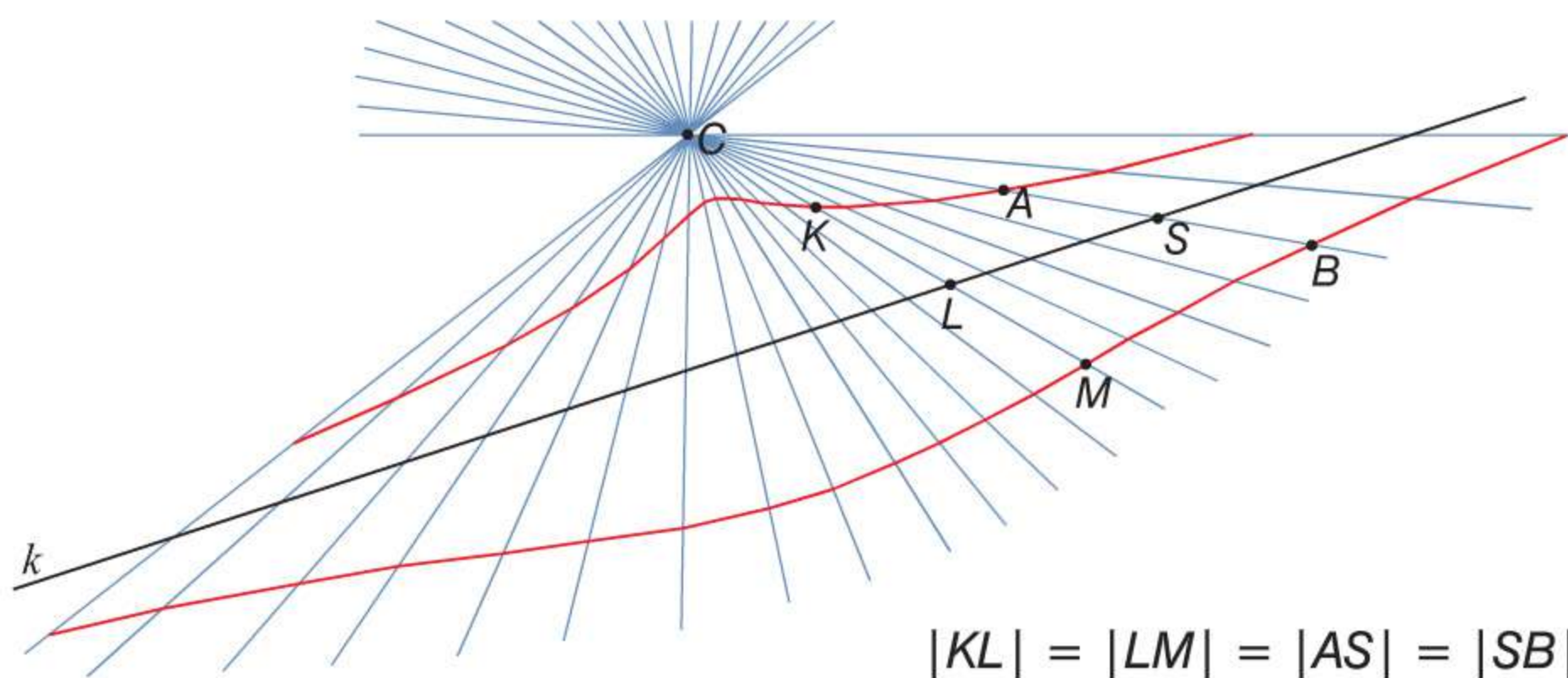
- 10 Narysuj kąt $\alpha = 70^\circ$ oraz kąt β do niego przyległy. Jaka jest miara kąta β ?
- 11 Narysuj kąt rozwarty α oraz prostą a prostopadłą do jednego ramienia i prostą b prostopadłą do drugiego ramienia tego kąta. Zmierz kąt α . Podaj kąty, jakie tworzą ze sobą proste a i b .
- 12 Podaj miarę i nazwę opisanego kąta.
- Miara kąta jest 4 razy większa od miary połowy kąta prostego.
 - Kąt przyległy do kąta 3 razy mniejszego od kąta półpełnego.
 - Miara kąta to czterokrotność miary kąta prostego.
 - Kąt wierzchołkowy do połowy największego kąta w ekierce.



A to ciekawe!

Narysowano kilka prostych przechodzących przez punkt C (pęk prostych). Można też powiedzieć, że są to półproste o wspólnym początku. Prosta k przecina narysowane proste.

Od punktu przecięcia każdej prostej z prostą k odłożono na wszystkich prostych w obie strony od prostej k odcinek tej samej długości. Połączono zaznaczone punkty. Otrzymano krzywe, które są nazywane **muszlą Nikomedesa**.



Narysuj takie krzywe. Twój rysunek będzie tym dokładniejszy, im więcej półprostych narysujesz.

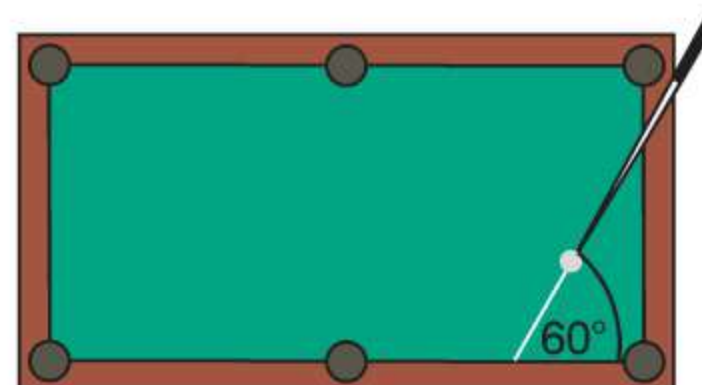
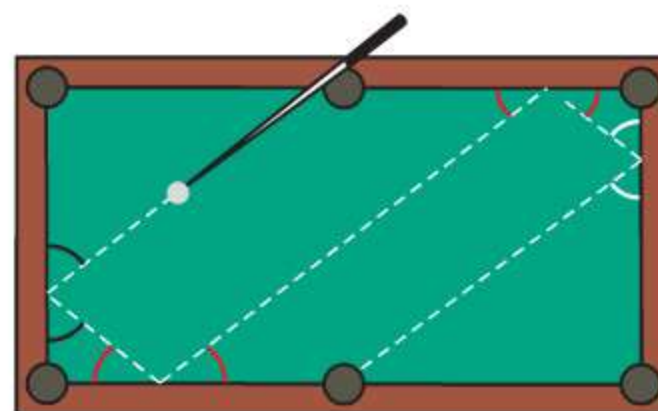


Wyzwanie

Ważnym elementem gry w bilard jest ustalenie kąta, pod jakim kula bilardowa (bila) odbije się od bandy. Przyjrzyj się liniom wyznaczonym przez toczącą się bilę i zaznaczonym kątom.

Kąty jednakowo oznaczone są równe.

Przerysuj do zeszytu zamieszczony rysunek stołu bilardowego. Skorzystaj z kątomierza i zaznacz dalszą część drogi, którą potoczy się bila. Czy trafi ona do jednego z otworów (łuzu)? Sprawdź, czy inne osoby w klasie mają takie samo rozwiązanie.



 Sprawdź się!

- 1 Narysuj łamaną $META$, której $|ME| = 4\text{ cm}$, bok ET jest krótszy o 6 mm od boku ME , a bok TA jest dłuższy od boku ME o 1,2 cm. Oblicz długość tej łamanej.

- 2 Na którym rysunku zaznaczono kąty przyległe?

A.



B.



C.



D.



- 3 Największe oczy wśród ssaków (w stosunku do wielkości ciała) ma jeden z najmniejszych ssaków świata – wyrak upiór żyjący na wyspie Celebes. Jest to zwierzę, które może odwrócić głowę o kąt półpełny w każdą stronę.

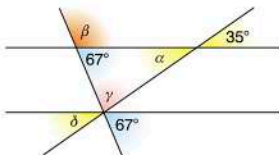
Jaki jest pełny zakres jego pola widzenia?

- A. 180° B. 360°
C. 90° D. 270°



wyrak upiór

- 4 Oblicz miary kątów: α , β , γ i δ .



- 5 Z dwóch kątów przyległych jeden jest o 40° większy od drugiego. Jakie miary mają te kąty?

Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. 110° i 70° ,	ponieważ	I. kąty te tworzą kąt półpełny i spełniają warunki zadania.
B. 130° i 50° ,		II. miarę większego z nich opisuje wyrażenie $180^\circ : 2 + 40^\circ$.

2. Symetria wokół nas



Sowa przypomina

Niektóre litery, cyfry, przedmioty, budowle składają się z dwóch takich części, że jedna jest lustrzanym odbiciem drugiej.

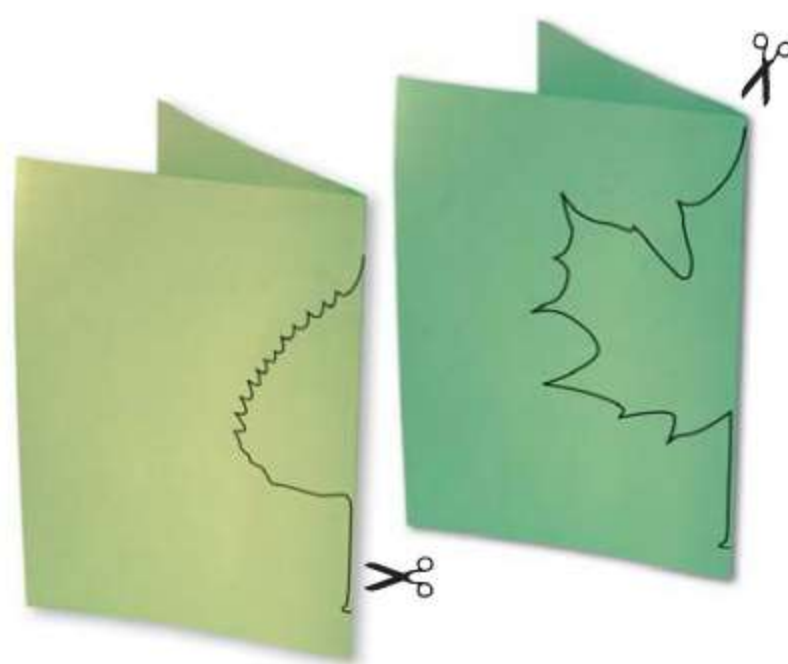


Przykład 1.

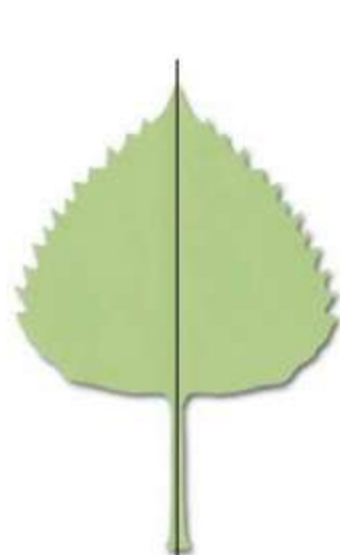
Wykonajmy wycinanki, odwzorowujące kształty liści niektórych drzew, np. klonu i lipy.

Na każdej złożonej kartce odrysujmy połowę liścia.

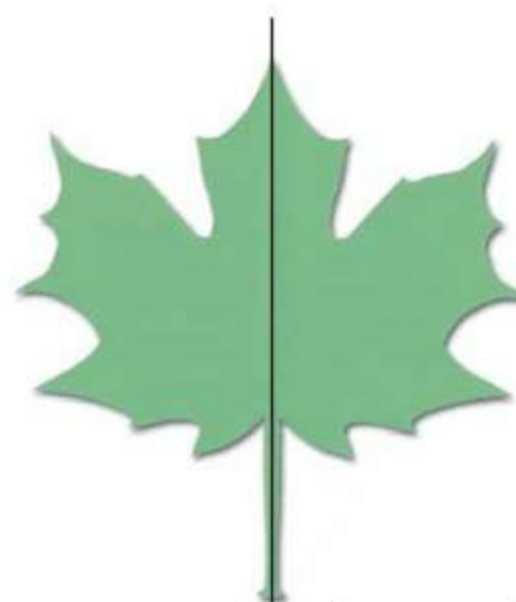
Wytnijmy je tak, jak pokazano na rysunkach.



Po rozłożeniu wycinanek otrzymujemy wycięte z papieru liście, które składają się z dwóch identycznych części.



oś symetrii



oś symetrii

Linia złożenia to **oś symetrii**.

Mówimy, że obie części wyciętych liści są **symetryczne**.



Sowa uczy

Mamy wrażenie, że symetria często występuje w przyrodzie, że otaczające nas przedmioty, zwierzęta oraz rośliny mają **budowę symetryczną**: składają się z dwóch identycznych części, z których jedna jest lustrzanym odbiciem drugiej.

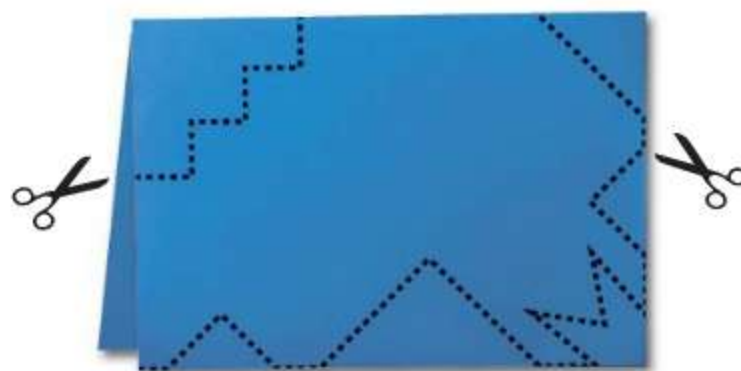
W rzeczywistości można jednak zaobserwować drobne odchylenia od stanu idealnego.

Przyjrzyjmy się przedstawionemu obok motylowi. To niepylak apollo. Występuje on w Polsce w Pieninach i w Tatrach. Podlega ochronie gatunkowej. Czy ma on budowę symetryczną?

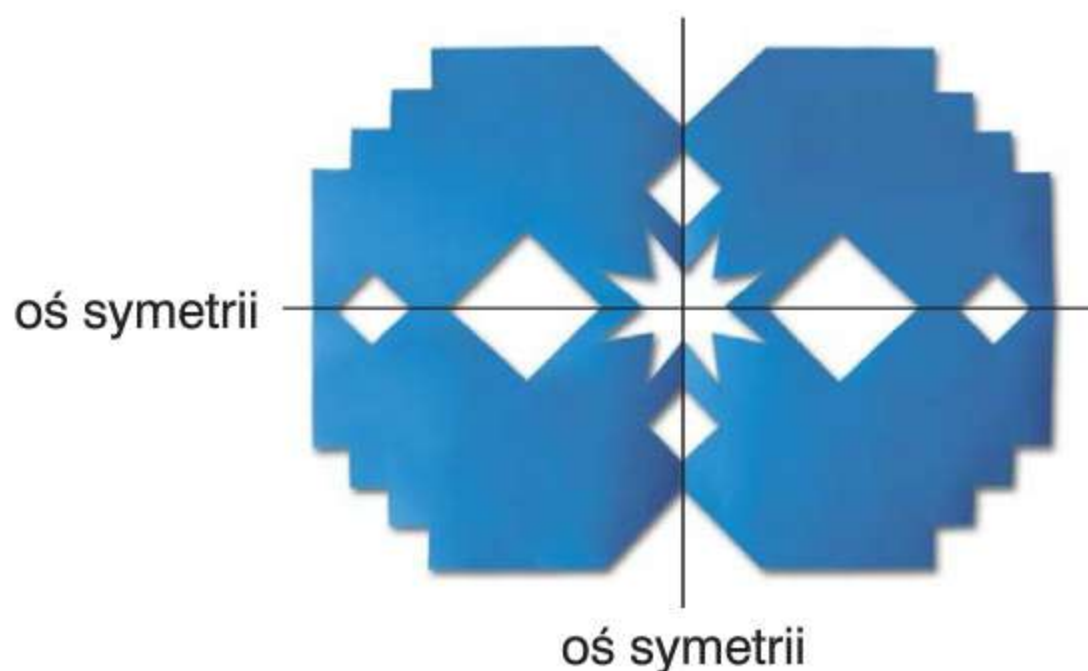


Przykład 2.

Złożmy kartkę na cztery równe części i zrobmy wycinankę.



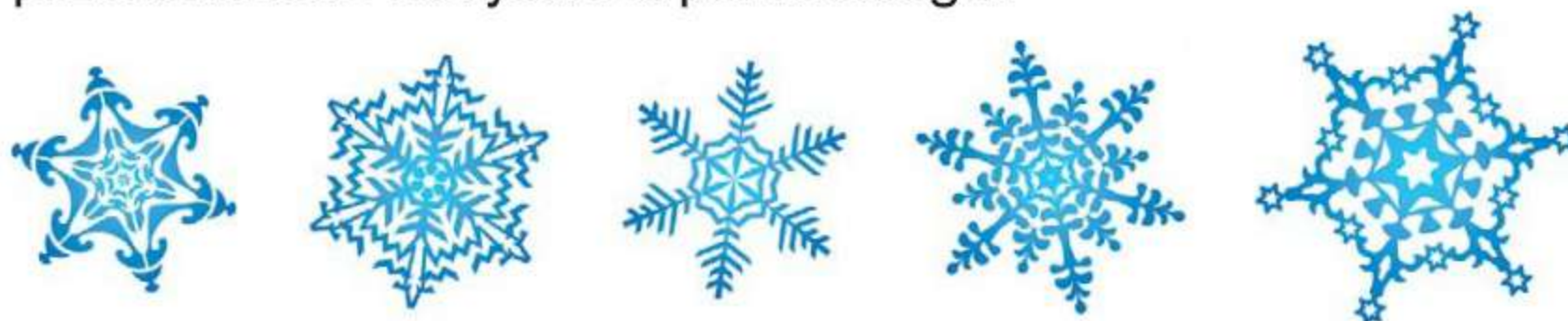
Po rozłożeniu kartki otrzymujemy:



Linie złożenia to osie symetrii. Sprawdź to – przyłóż odpowiednio lusterko. Ta wycinanka ma dwie osie symetrii.



- 1 Narysuj trzy figury, które mają budowę symetryczną. Mogą to być twoje własne kompozycje.
- 2 Płatki śniegu przybierają różne kształty. Ile osi symetrii mają przedstawione na rysunku płatki śniegu?



A. 2

B. 4

C. 6

D. 12

- 3 Przyjrzyj się poniższym obiektom. Czy widoczne na zdjęciach ich ściany frontowe mają budowę symetryczną? Jeśli tak, wskaż ich oś symetrii, jeśli nie, wyjaśnij dlaczego.



*Cytadela – Brama Straceń
w Warszawie*



*Grób Nieznanego Żołnierza
w Warszawie*

- 4 Popatrz na domy lub inne obiekty w swojej okolicy. Wskaż te, które mają budowę symetryczną. Narysuj fragment ściany budynku, która ma oś symetrii.
- 5 Złóż kartkę dwukrotnie na pół. Przerysuj wzór z rysunku. Wytnij po zaznaczonych liniach. Rozłóż kartkę i sprawdź, czy otrzymana figura jest symetryczna. Wklej ją do zeszytu.

W podobny sposób wykonaj własny projekt wycinanki i sprawdź, czy otrzymane wzory są symetryczne. Kartkę możesz złożyć dwa lub trzy razy, zawsze na pół.



- 6 Coraz częściej można spotkać karetkę pogotowia ratunkowego z napisem:

2WBUŁA

Odczytaj ten napis za pomocą ustawionego odpowiednio lusterka. Jak myślisz, dlaczego na karetce napis jest umieszczony w taki sposób?

- 7 Narysuj dowolną figurę. Ustaw lusterko tak, żeby było widać figurę symetryczną do narysowanej. Przyjrzyj się jej. W miejscu ustawienia lusterka narysuj prostą – oś symetrii. Odłóż lusterko i dorysuj odbicie lustrzane narysowanej figury.



A to ciekawe!

W 1816 roku po raz pierwszy wykonano kalejdoskop. Różnobarwne, symetryczne figury, które można obserwować w kalejdoskopie, powstają na skutek wielokrotnego odbicia promieni światła w odpowiednio rozmieszczonych lusterkach.



Sprawdź się!

- 1 Która z narysowanych liter **nie ma** osi symetrii?
A. **H** B. **A** C. **O** D. **F**
- 2 Wytnij prostokąt i złoż go na dwie równe części. Na linii złożenia ustaw lusterko i sprawdź, czy jest to oś symetrii. Czy prostokąt ma tylko jedną oś symetrii?
- 3 Podaj trzy przykłady przedmiotów lub figur geometrycznych o budowie symetrycznej.
- 4 Ustaw odpowiednio lusterko i odczytaj poniższe wyrazy.
2SKOFA KŁA2A
- 5 Napisz literami drukowanymi swoje imię w taki sposób, żeby można je było poprawnie odczytać w lusterku.

3. Figury płaskie

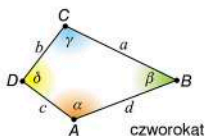
Sowa przypomina

• Wielokąty

Nazwa wielokąta (trójkąt, czworokąt, pięciokąt...) zależy od liczby kątów wewnętrznych w tym wielokącie.

Liczba boków, liczba wierzchołków i liczba kątów wewnętrznych w danym wielokącie jest taka sama.

Obwód wielokąta (L) to suma długości wszystkich jego boków.



Punkty A, B, C, D to **wierzchołki** czworokąta.

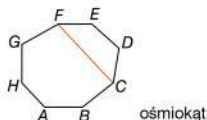
Odcinki AB, BC, CD, DA to **boki** czworokąta.

Kąty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ to **kąty wewnętrzne** czworokąta.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

a, b, c, d to długości odpowiednich boków.

$$L = a + b + c + d$$



Odcinek FC to **przekątna** ośmiokąta.

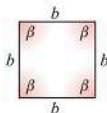
Przekątna łączy 2 wierzchołki wielokąta, ale nie jest jego boki.

• Wielokąty foremne



$$\alpha = 60^\circ$$

trójkąt równoboczny



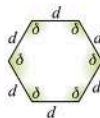
$$\beta = 90^\circ$$

kwadrat



$$\gamma = 108^\circ$$

pięciokąt foremny

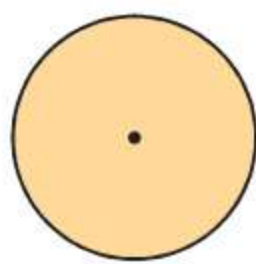


$$\delta = 120^\circ$$

sześciokąt foremny

Wielokąt foremny ma boki równej długości i wszystkie kąty wewnętrzne takiej samej miary.

• Koło i okrąg

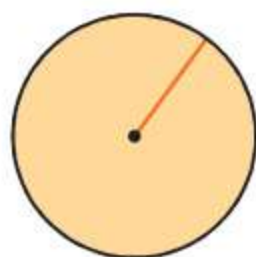


koło

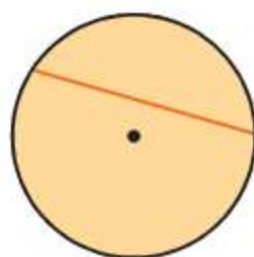


okrąg

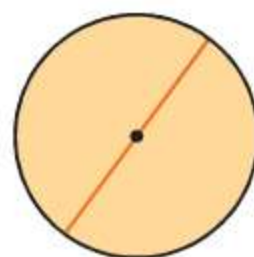
Środek koła jest jego częścią. Środek okręgu nie należy do okręgu.



promień
koła



cięciwa
koła



średnica
koła

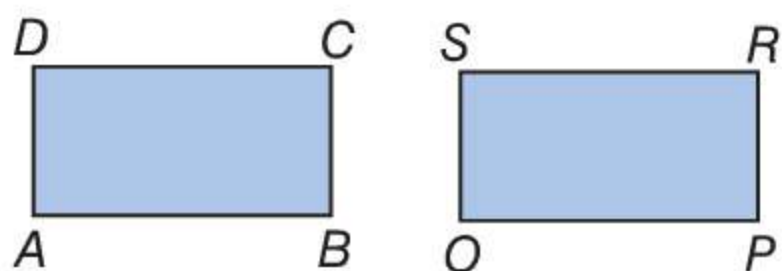
Promień to odcinek łączący środek koła i punkt leżący na okręgu.

Cięciwa to odcinek łączący 2 punkty na okręgu.

Średnica to najdłuższa cięciwa, przechodzi ona przez środek koła.

Okrąg i koło nie są wielokątami.

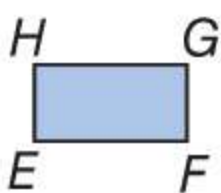
• Skala



skala 1 : 1

$$|AB| = |OP|$$

$$|BC| = |PR|$$



$$|EF| = \frac{1}{2}|AB|$$

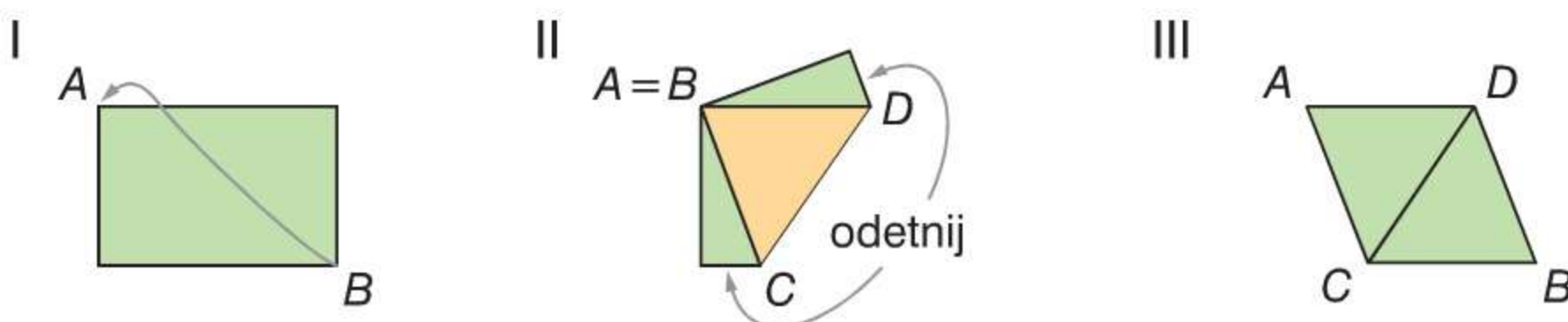
Prostokąt $EFGH$ ma wymiary boków 2 razy mniejsze niż prostokąt $ABCD$. Prostokąt $EFGH$ powstał w wyniku narysowania prostokąta $ABCD$ w skali 1 : 2.



Prostokąt $KLMN$ ma wymiary boków 2 razy większe niż prostokąt $ABCD$. Prostokąt $KLMN$ powstał w wyniku narysowania prostokąta $ABCD$ w skali 2 : 1.

Przykład 1.

Adam złożył prostokątną kartkę tak, aby dwa przeciwległe wierzchołki się pokryły (I). Odciął powstałe trójkąty prostokątne (II) i rozłożył pozostałą część kartki (III). Jaki czworokąt otrzymał?



Zauważmy, że przekątna CD dzieli otrzymany czworokąt $CBDA$ na dwa trójkąty, które po złożeniu figury wzdłuż tej przekątnej się pokrywają.

Również przekątna AB dzieli czworokąt $CBDA$ na dwa trójkąty, które po złożeniu figury wzdłuż tej przekątnej się pokrywają.

Czworokąt $CBDA$ ma dwie osie symetrii: jedną jest prosta zawierająca przekątną CD , a drugą prosta zawierająca przekątną AB . Punkty A i B oraz C i D podczas składania figury pokrywały się, czyli są symetryczne względem odpowiednich linii złożenia.



O figurze, która ma co najmniej jedną oś symetrii, mówimy, że jest **osiowosymetryczna**.

- 1 Zrób na kartce mokrą plamę farbą lub atramentem. Złóż kartkę i mocno przyciśnij do siebie obydwie części. Następnie rozłóż kartkę i zaznacz na powstałej plamie dwa punkty symetryczne względem linii złożenia.
- 2 Narysuj dowolny prostokąt i go wytnij. Następnie poprzez składanie figury znajdź osie symetrii prostokąta. Wklej figurę do zeszytu i różnymi kolorami zaznacz trzy punkty symetryczne względem różnych osi symetrii.
- 3 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Każdy prostokąt jest figurą osiowosymetryczną.	P	F
Każdy trójkąt ma oś symetrii.	P	F

- 4 Narysuj kwadrat, którego obwód ma 12 cm. Poprowadź jego osie symetrii. Ile osi symetrii ma kwadrat?

- 5 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Ośmiokąt foremny ma A / B osi symetrii. A. 16 B. 8
 Suma miar kątów wewnętrznych ośmiokąta foremnego wynosi C / D. C. 960° D. 1080°

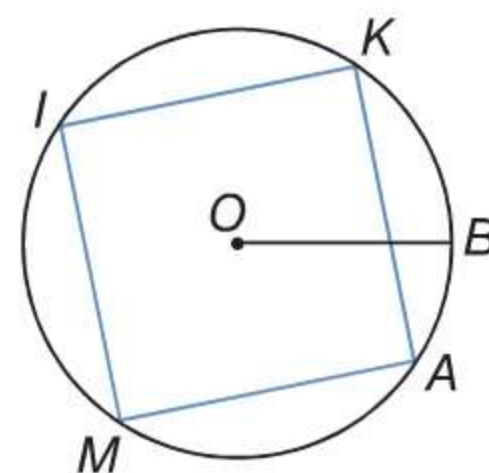
- 6 Oceń prawdziwość zdań.
- Każdy znak ostrzegawczy ma trzy osie symetrii, bo ma kształt trójkąta równobocznego.
 - Znak „nakaz jazdy prosto” ma jedną oś symetrii.
 - Znak informacyjny „przejście dla pieszych” ma jedną oś symetrii.
 - Znak „stop” ma kształt ośmiokąta foremnego.
 - Znak ostrzegawczy „skrzyżowanie o ruchu okrężnym” ma trzy osie symetrii.



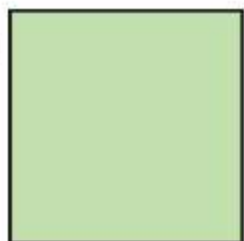
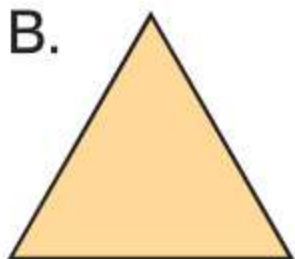
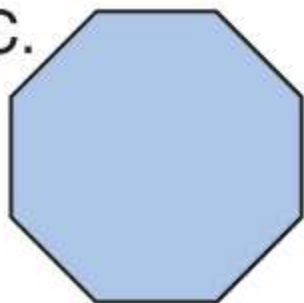
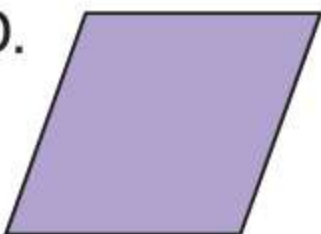
- 7 Ile jest przekątnych w sześciokącie?
 Wskaż poprawną odpowiedź A, B lub C i jej uzasadnienie I, II lub III.

A. 6 przekątnych,	ponieważ	I. z każdego wierzchołka wychodzą 3 przekątne.
B. 9 przekątnych,		II. przekątnych jest tyle, ile wierzchołków.
C. 18 przekątnych,		III. z każdego wierzchołka wychodzą 3 przekątne i każda z nich pokrywa się z jedną przekątną wychodzącą z innego wierzchołka.

- 8 Wierzchołki kwadratu *MAKI* leżą na okręgu.
- Wypisz co najmniej dwie cięciwy okręgu.
 - Jaką długość ma przekątna kwadratu, jeżeli $|OB| = 4 \text{ cm}$?

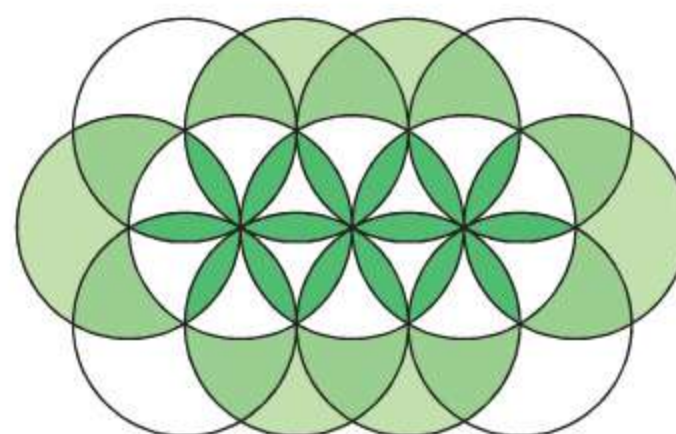
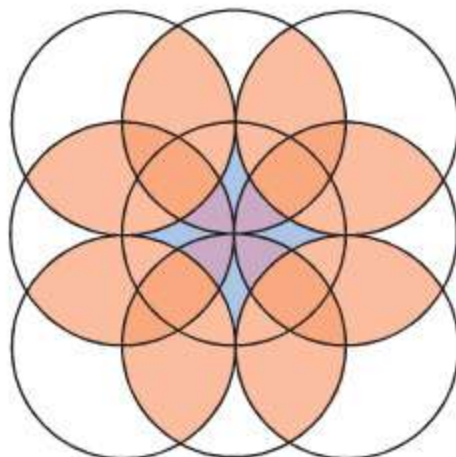
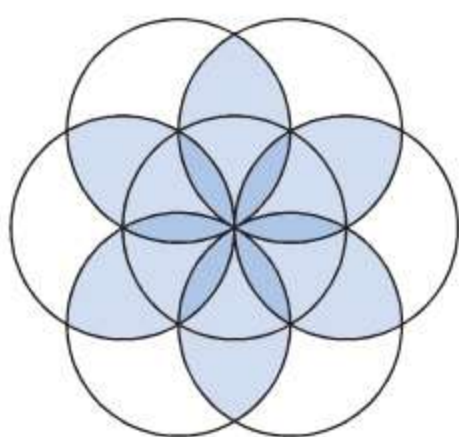




- 9 W Sielcu, na trasie turystycznej, rośnie dwustuletni jesion – pomnik przyrody. Pień drzewa ma średnicę 110 cm. Oblicz średnicę i promień pnia w skali 1 : 10.
- 10 Narysuj w skali 1 : 10 koło, którego najdłuższa cięciwa ma 70 cm.
- 11 Na planie w skali 1 : 200 korytarz jest prostokątem o wymiarach 2 cm × 6 cm. Jaka jest długość i szerokość korytarza w rzeczywistości?
- 12 Która figura **nie jest** wielokątem foremnym?
- A.  B.  C.  D. 
- 13 Czworokąt ma boki o długości: 15 cm, 13 cm 8 mm, 16 cm 7 mm, 14 cm 6 mm. Oblicz obwód tego czworokąta.
- 14 W czworokącie trzy boki mają długości: 5,4 cm; 3 cm; 3,8 cm. Jaka długość ma czwarty bok, jeżeli obwód jest równy 16,1 cm?
- A. 2 cm 9 mm B. 3,9 cm C. 4 cm D. 3,8 cm
- 15 W trójkącie jeden z boków ma długość 35 cm, drugi bok jest o 5 cm od niego dłuższy, a trzeci bok jest o 2 cm krótszy od drugiego boku. Oblicz obwód tego trójkąta.

**A to ciekawe!**

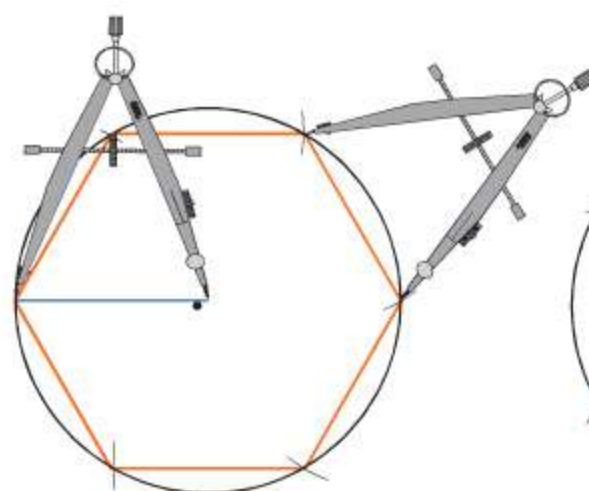
Przyjrzyj się uważnie rysunkom i spróbuj narysować takie figury.



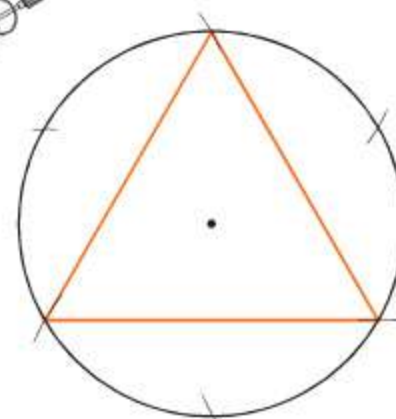
Czy te figury mają osie symetrii? Skorzystaj z lusterka.

Wyzwanie

Jeżeli narysujemy okrąg o dowolnym promieniu i taką samą rozwartością cyrkla wyznaczmy punkty na okręgu, które odpowiednio połączymy, otrzymamy albo sześciokąt foremny, albo trójkąt foremny.

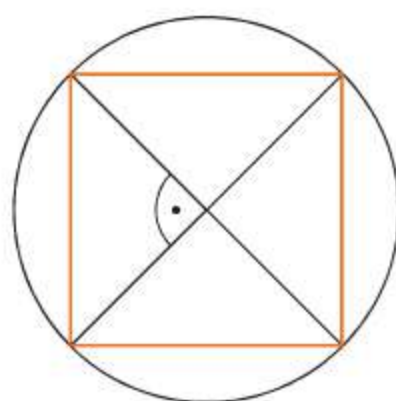


sześciokąt foremny



trójkąt foremny

Jeżeli narysujemy okrąg o dowolnym promieniu i jego dwie prostopadłe średnice, to po połączeniu powstałych na okręgu punktów otrzymamy kwadrat.

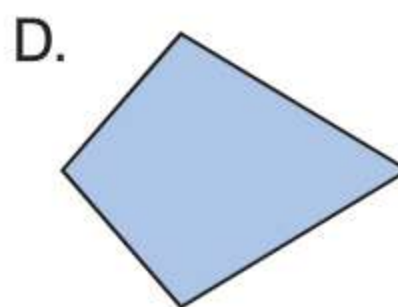
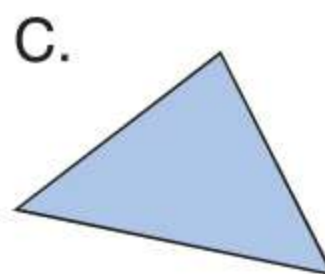
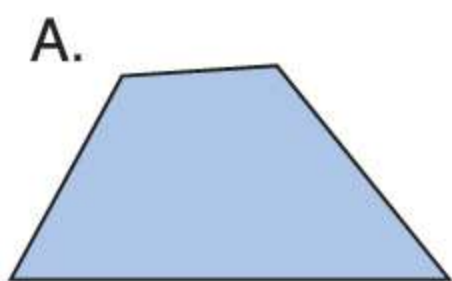


czworokąt foremny

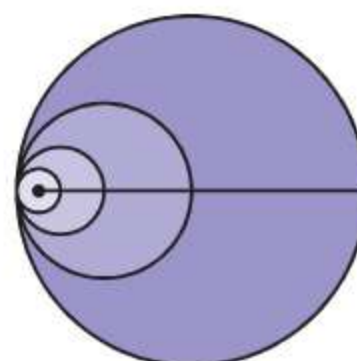
1. Narysuj sześciokąt foremny i jego osie symetrii.
2. Narysuj w okręgu czworokąt foremny i wszystkie jego osie symetrii. Połącz kolejno wszystkie punkty na okręgu. Jaki wielokąt powstał?

Sprawdź się!

1. Która figura **nie jest** wielokątem osiowosymetrycznym?



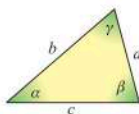
2. Podaj w skali 1 : 1 długość promienia koła, którego średnica w skali 1 : 2 ma długość 3 cm.
3. Oblicz obwód trójkąta, w którym jeden bok ma 48 mm długości, a każdy następny jest o 6 mm dłuższy od poprzedniego. Wynik podaj w centymetrach.
4. Narysuj pięciokąt i wszystkie jego przekątne wychodzące z tego samego wierzchołka. Oblicz sumę miar kątów wewnętrznych pięciokąta.
5. Promień najmniejszego koła z rysunku obok jest równy 0,3 cm. Jaką średnicę ma największe koło?



4. Trójkąty

Sowa przypomina

• Trójkąt



a, b, c – długości
boków trójkąta
 α, β, γ – kąty
wewnętrzne trójkąta



Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Suma długości dwóch boków trójkąta zawsze jest większa od długości trzeciego boku (nierówność trójkąta).

$$a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$$



• Trójkąt różnoboczny

Każdy bok takiego trójkąta ma inną długość.

trójkąt ostrokątny



$$\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ, \gamma < 90^\circ$$

trójkąt prostokątny



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

trójkąt rozwartokątny

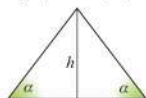


$$\alpha + \beta < 90^\circ$$

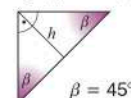
• Trójkąt równoramienny

Dwa boki takiego trójkąta (ramiona) są tej samej długości.

trójkąt ostrokątny

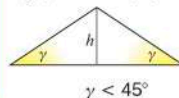


trójkąt prostokątny



$$\beta = 45^\circ$$

trójkąt rozwartokątny

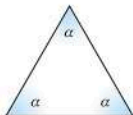


$$\gamma < 45^\circ$$

Wysokość h dzieli na połowy podstawę trójkąta i kąt między ramionami.

• Trójkąt równoboczny

Wszystkie boki takiego trójkąta są tej samej długości.



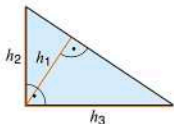
Trójkąt równoboczny to także trójkąt równoramienny.

Trójkąt taki jest figurą foremną.

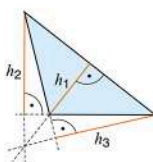
$$\alpha = 60^\circ$$

• Wysokość trójkąta

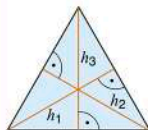
Każdy trójkąt ma trzy wysokości. Wysokości trójkąta lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie.



W trójkącie różnobocznym wysokości są różnej długości.



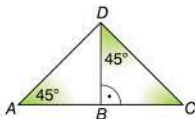
W trójkącie równoramiennym dwie wysokości są tej samej długości.
 $h_2 = h_3$



W trójkącie równobocznym wszystkie wysokości są tej samej długości.

Przykład 1.

Zbadajmy własności trójkąta prostokątnego równoramiennego.



Wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli:

- przeciwprostokątną na połowy: $|AB| = |CB|$,
- kąt prosty na dwa kąty równej miary:
 $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB$.

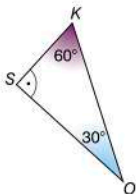
Powstałe trójkąty ABD i CBD są równoramienne: $|AB| = |DB| = |CB|$.



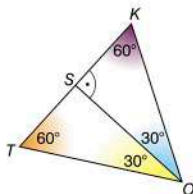
W trójkącie prostokątnym równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość równą połowie długości przeciwprostokątnej.

Przykład 2.

Zbadajmy własności trójkąta prostokątnego o kątach wewnętrznych 30° i 60° .



Dorysujmy drugi trójkąt symetryczny względem przyprostokątnej OS , jak pokazano obok.



Powstały trójkąt TOK jest trójkątem równobocznym, bo wszystkie jego kąty wewnętrzne mają po 60° . Odcinek OS to wysokość tego trójkąta.

Przyprostokątna SK trójkąta SOK jest więc połową odcinka KT :

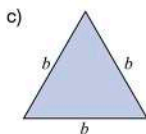
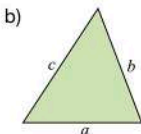
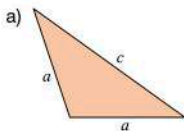
$$|SK| = \frac{1}{2}|KT| = \frac{1}{2}|OK|.$$

W trójkącie prostokątnym o kątach wewnętrznych 30° i 60° długość krótszej przyprostokątnej jest połową długości przeciwprostokątnej.

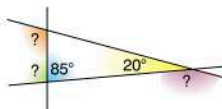


- 1 Narysuj trójkąt rozwartokątny i oznacz jego wierzchołki. Czy trójkąt ten jest osiowosymetryczny? Pokoloruj kąty wewnętrzne trójkąta. Zmierz boki trójkąta i oblicz jego obwód.
- 2 Skonstruuuj trójkąt o bokach: 3 cm, 4 cm, 5 cm. Podaj jego nazwę ze względu na boki i kąty. Oblicz obwód tego trójkąta.
- 3 Narysuj dwa różne trójkąty prostokątne o kątach wewnętrznych 30° i 60° . Zmierz długość krótszej przyprostokątnej i podaj długość przeciwprostokątnej.
- 4 Obwód trójkąta równobocznego jest równy 66 cm. Bok tego trójkąta ma długość
A. 66 cm B. 33 cm C. 22 cm D. 16,5 cm

- 5 Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące obwód trójkąta. Oblicz wartość tego wyrażenia dla: $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $c = 10$ cm.



- 6 Narysuj trójkąt, w którym jeden bok ma 6 cm długości, a kąty wewnętrzne do niego przyległe mają miary 50° i 60° . Co to za trójkąt? Podaj jego nazwę ze względu na boki i kąty.
- 7 Kąt między ramionami trójkąta równoramiennego jest równy 130° . Oblicz miary pozostałych kątów wewnętrznych tego trójkąta.
- 8 Które z kątów **nie mogą** być kątami wewnętrznymi trójkąta?
- A. $70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$ B. $100^\circ, 20^\circ, 60^\circ$
C. $35^\circ, 90^\circ, 55^\circ$ D. $60^\circ, 40^\circ, 70^\circ$
- 9 Podane są miary dwóch kątów wewnętrznych pewnego trójkąta. Oblicz miarę trzeciego kąta. Podaj nazwę tego trójkąta ze względu na kąty i boki. Ile osi symetrii ma ten trójkąt?
- a) $60^\circ, 60^\circ$ b) $30^\circ, 120^\circ$ c) $25^\circ, 65^\circ$ d) $80^\circ, 40^\circ$
- 10 Z których odcinków **nie można** zbudować trójkąta?
- A. 14 cm, 8 cm, 8 cm B. 6 cm, 9 cm, 2 cm
C. 25 cm, 16 cm, 20 cm D. 7 m, 5 m, 11 m
- 11 Narysuj takie trzy odcinki, aby suma ich długości była równa 18 cm, a jeden z nich był o 2 cm krótszy od drugiego i o 4 cm krótszy od trzeciego. Skonstruuj trójkąt, którego bokami są narysowane odcinki.
- 12 Narysuj i wytnij dwa identyczne trójkąty prostokątne równoramienne. Jakiele wielokąty możesz ułożyć z tych trójkątów? Narysuj je i napisz, co to za wielokąty. Który z nich ma oś symetrii?
- 13 Przerysuj trójkąt i wpisz miarę trzeciego kąta wewnętrznego oraz miary zaznaczonych kątów przyległych do kątów wewnętrznych.





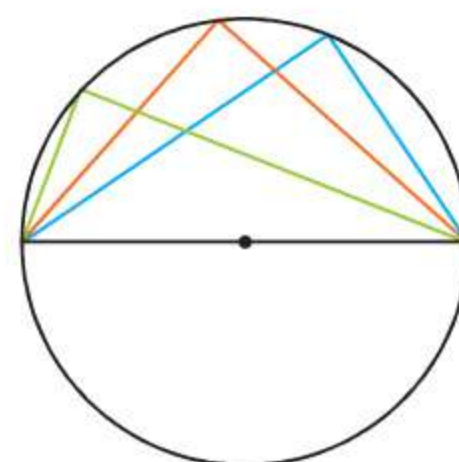
- 14** Narysuj trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej równej 6 cm. Jaką długość ma wysokość tego trójkąta poprowadzona na przeciwprostokątną? Uzasadnij podany wynik.
- 15** Kotek Mruczek wdrapał się na drzewo i zaplątał w gałęziach. Pan Robert ustawił drabinę, jak na rysunku, i wszedł na drzewo po Mruczka. Jaką długość ma ta drabina?
- 16** Jeden z kątów wewnętrznych trójkąta ma miarę 5 razy mniejszą od miary drugiego kąta i 3 razy mniejszą od miary trzeciego kąta. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego trójkąta.
- 17** W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest kątem przyległym do kąta o mierze 141° . Kąt przy wierzchołku B ma miarę o 21° większą od miary kąta przy wierzchołku A , a kąt przy wierzchołku C ma miarę o 21° większą od miary kąta przy wierzchołku B . Jakie miary mają kąty trójkąta ABC ? Jaki to trójkąt ze względu na boki i kąty?
- 18** Narysuj dwa różne odcinki i kąt. Narysuj trójkąt, którego dwa boki są równe tym odcinkom, a kąt między tymi bokami jest równy narysowanemu kątowi. Czy zawsze jest możliwe wykonanie tego zadania? Odpowiedź uzasadnij.
- 19** Wytlumacz, dlaczego nie istnieje trójkąt prostokątny równoboczny.



A to ciekawe!

Jeżeli w okręgu narysujemy dowolną średnicę i jej końce połączymy z dowolnie wybranym na tym okręgu punktem, to otrzymamy trójkąt prostokątny.

1. Narysuj kilka okręgów o różnej długości promienia. W każdym narysuj średnicę i jej końce połącz z dowolnym punktem na okręgu. Sprawdź, czy otrzymasz trójkąt prostokątny.
2. Narysuj trójkąt prostokątny równoramienny, którego przeciwprostokątna jest średnicą okręgu.

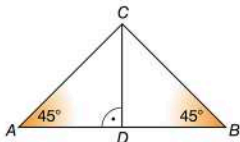


Wyzwanie

Narysuj dwie proste m i k przecinające się w punkcie S tak, by jeden z kątów między prostymi był równy 60° . Na prostych m i k zaznacz w tej samej odległości od punktu S punkty: M , N , O i P . Połącz kolejne punkty. Oblicz miary kątów wewnętrznych wszystkich utworzonych trójkątów. Podaj nazwy otrzymanych trójkątów ze względu na kąty i boki. Sprawdź, czy inne osoby w klasie narysowały takie same trójkąty. Która z utworzonych figur jest osiowo symetryczna?

Sprawdź się!

- 1 Trójkątem ostrokątnym **nie jest** trójkąt, którego miary dwóch kątów wewnętrznych są równe
A. 50° , 80° B. 55° , 35° C. 40° , 60° D. 45° , 55°
- 2 Narysuj trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 cm i 8 cm. Zmierz przeciwprostokątną i oblicz obwód tego trójkąta.
- 3 Podaj długości trzech odcinków, z których można zbudować trójkąt, oraz długości trzech odcinków, z których nie można zbudować trójkąta.
- 4 Co to za trójkąt, który ma dwa boki tej samej długości, a miara jednego z jego kątów wewnętrznych wynosi 60° ?
- 5 Dany jest trójkąt ABC taki, jak na rysunku poniżej.



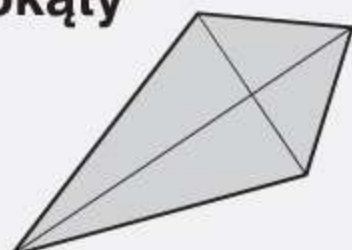
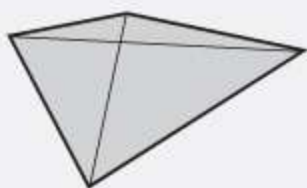
- a) Podaj nazwę trójkąta ABC ze względu na boki i kąty.
- b) Jak nazywają się w trójkącie ABC boki AC i BC , a jak AB ?
- c) Podaj nazwy trójkątów ADC i DBC ze względu na boki i kąty.
- d) Jaką długość ma odcinek CD , jeżeli $|AB| = 12$ cm?
Odpowiedź uzasadnij.

5. Czworokąty

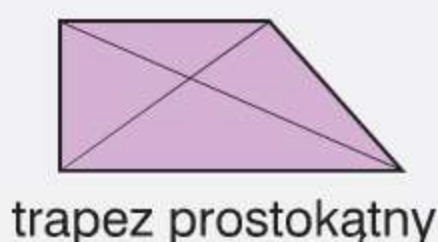
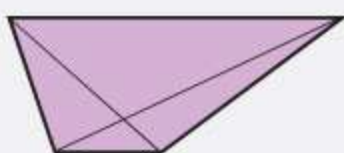


Sowa przypomina

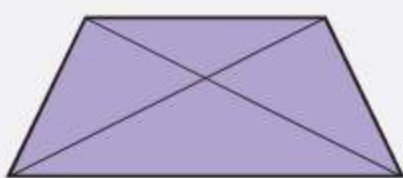
Czworokąty



Trapezy



trapez prostokątny



trapez równoramienny

Równoległoboki



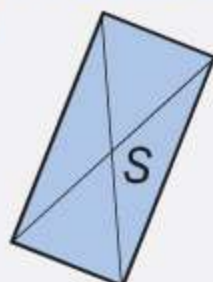
równoległobok

Romby

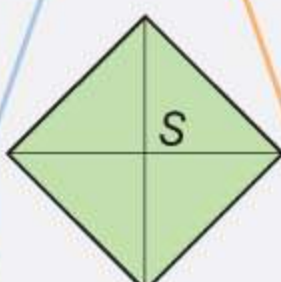


romb

Prostokąty



prostokąt



kwadrat

W czworokącie suma miar kątów wewnętrznych jest równa 360° .
Każdy czworokąt ma dwie przekątne.

Trapez to czworokąt o co najmniej jednej parze boków równoległych.

W **trapezie prostokątnym** o jednej parze boków równoległych ramię jest prostopadłe do podstaw, a przekątne są różnej długości.

W **trapezie równoramiennym** o jednej parze boków równoległych kąty przy podstawie mają taką samą miarę, a przekątne są równej długości.

Równoległobok to trapez o dwóch parach boków równoległych. Punkt przecięcia przekątnych (oznaczony S) dzieli je na połowy.

Równoległobok o dwóch równych kątach wewnętrznych ostrych i dwóch równych kątach rozwartych ma przekątne różnej długości.

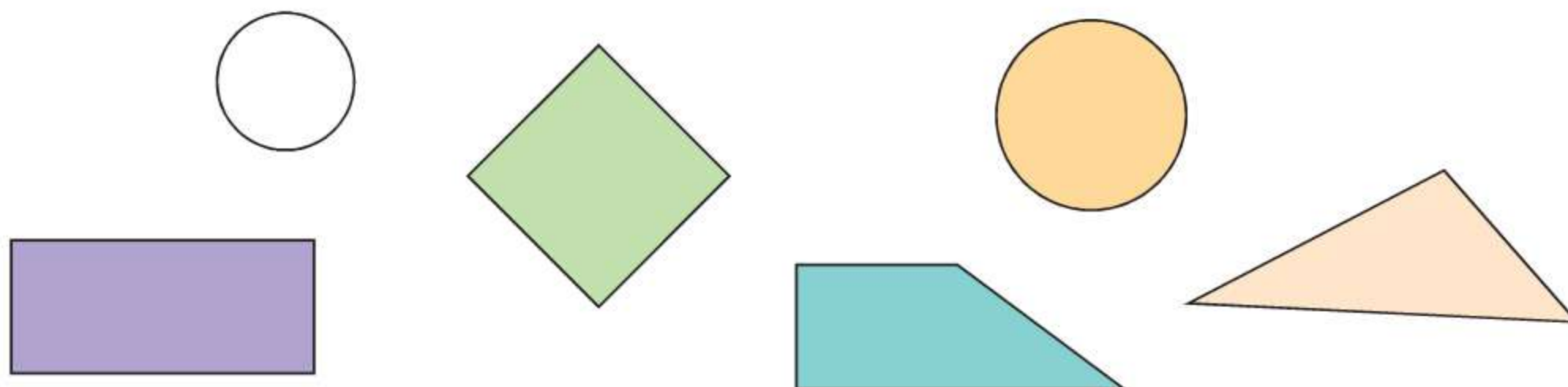
Romb to równoległobok o bokach równej długości. Jego przekątne są prostopadłe.

Prostokąt to równoległobok, którego kąty wewnętrzne są proste. Jego przekątne są równej długości.

Kwadrat to prostokąt o równych bokach. Jego przekątne są prostopadłe.

We wszystkich zadaniach, w których jest to możliwe, wykonaj rysunek pomocniczy.

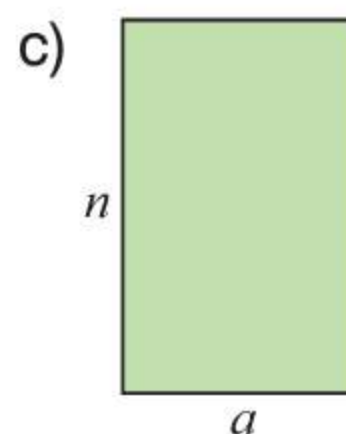
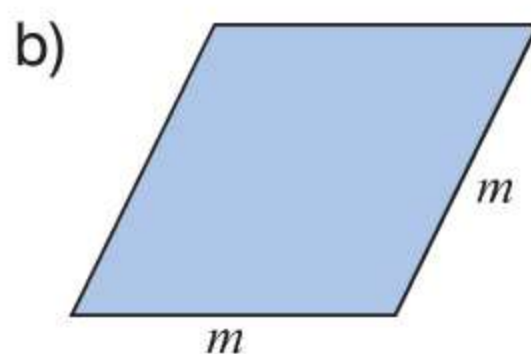
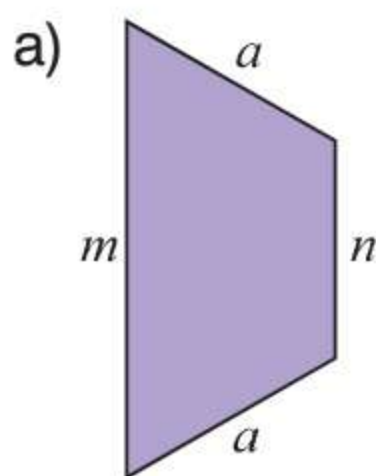
- 1 Wśród przedstawionych poniżej figur są czworokąty. Napisz nazwę każdego czworokąta i dwa zdania o nim. Jeżeli jest to figura osiowosymetryczna, narysuj ją w zeszycie wraz z osiami symetrii.



- 2 Przepisz do zeszytu te zdania, które są prawdziwe.
- a) Kwadrat to romb o kątach prostych.
 - b) Przekątne trapezu równoramiennego, który ma jedną parę boków równoległych, są równej długości.
 - c) Każdy równoległobok jest prostokątem.
 - d) Każdy prostokąt jest trapezem.
 - e) Każdy trapez równoramienny jest kwadratem.
- 3 Skonstruuj równoległobok o bokach 4 cm i 2 cm. Czy wszyscy w klasie otrzymali taki sam równoległobok? Zastanówcie się, jakie wspólne cechy mają te równoległoboki, a czym się różnią.
- 4 Prostopadłe przekątne ma każdy
- A. romb.
 - B. prostokąt.
 - C. równoległobok.
 - D. trapez prostokątny.
- 5 Wymień i narysuj trapezy, które mają przekątne równej długości. Czy takie trapezy są figurami osiowosymetrycznymi?
- 6 Przekątne podzieliły czworokąt na cztery trójkąty prostokątne równoramienne. Ten czworokąt to
- A. romb.
 - B. prostokąt.
 - C. trapez prostokątny.
 - D. kwadrat.
- 7 Z prostokątnej kartki papieru odcinaj trójkąty prostokątne tak, aby otrzymać czworokąt. Jaki czworokąt powstanie, gdy odetniesz:
- a) jeden trójkąt prostokątny,
 - b) dwa identyczne trójkąty prostokątne?
- Wklej do zeszytu wszystkie otrzymane figury i podaj nazwę każdej z nich. Pokoloruj figury osiowosymetryczne.



- 8 Jeden z kątów wewnętrznych trapezu równoramiennego ma miarę 80° . Pozostałe kąty wewnętrzne są równe
 A. $90^\circ, 100^\circ, 90^\circ$ B. $80^\circ, 90^\circ, 90^\circ$ C. $80^\circ, 100^\circ, 100^\circ$ D. $80^\circ, 80^\circ, 100^\circ$
- 9 Obwód równoległoboku jest równy 60 cm. Jeden bok ma długość 8 cm. Podaj długości pozostałych boków. Narysuj ten równoległobok w skali 1 : 4.
- 10 Narysuj romb, którego bok ma 4 cm 5 mm długości, a jeden z kątów między bokami ma miarę 120° . Oblicz obwód tego rombu.
- 11 Narysuj czworokąt, którego przekątne są równej długości i są prostopadłe. Napisz o nim cztery zdania.
- 12 Narysuj czworokąt, który ma tylko jedną parę boków równoległych, a dwa jego kąty wewnętrzne to kąty proste. Podaj nazwę tego czworokąta.
- 13 Obwód trapezu równoramiennego jest równy 42 dm. Równoległe podstawy mają długości 17 dm i 90 cm. Ramię ma długość
 A. 16 dm B. 8 dm C. 16 cm D. 8 cm
- 14 Podaj nazwę czworokąta. Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące jego obwód. Oblicz wartość tego wyrażenia dla: $m = 14$ cm, $n = 8$ cm, $a = 5$ cm.



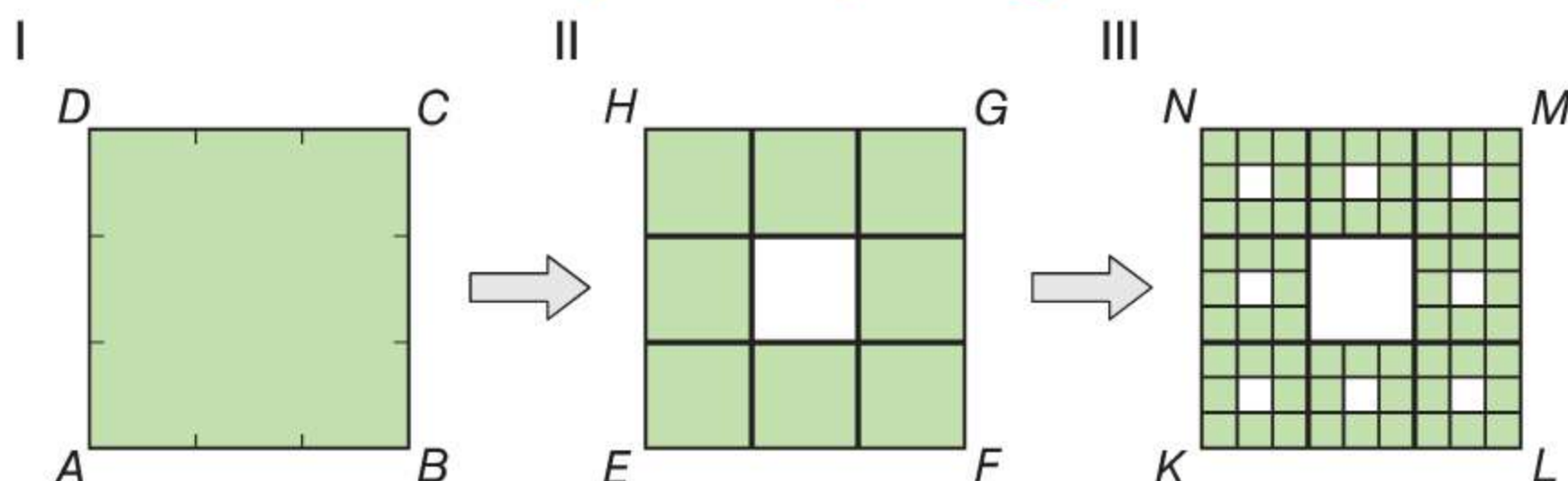
- 15 Obwód równoległoboku jest równy 36 dm, a jeden jego bok jest 2 razy krótszy od drugiego. Jaką długość ma dłuższy bok równoległoboku? Wskaż poprawną odpowiedź A, B lub C i jej uzasadnienie I lub II.

A. 6 dm,	ponieważ	I. suma długości tego boku i jego połowy to 0,5 obwodu figury.
B. 12 dm,		II. suma długości dłuższego i krótszego boku to obwód figury.
C. 24 dm,		



A to ciekawe!

Przyjrzyj się kolejno narysowanym kwadratom. Boki pierwszego kwadratu dzielimy na trzy równe części (I), łączymy punkty podziału na przeciwległych bokach i otrzymujemy dziewięć identycznych kwadratów. Środkowy kwadrat usuwamy (II). Pozostałe osiem kwadratów znów dzielimy w taki sam sposób na dziewięć identycznych kwadratów i usuwamy środkowy (III). Możemy to kontynuować dowolnie długo. Tak tworzona figura to **dywan Sierpińskiego**.

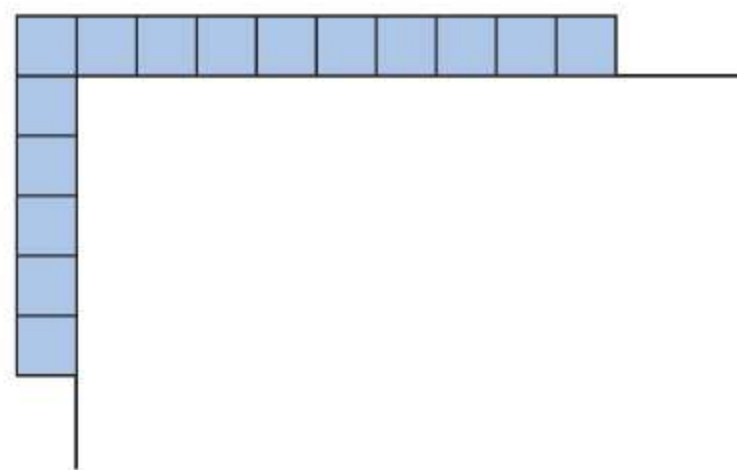
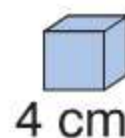


1. Ile zielonych kwadratów jest w kwadracie $KLMN$?
2. Ile zielonych kwadratów powstanie po następnym podziale?
3. Bok kwadratu $ABCD$ ma 27 cm. Oblicz:
 - a) obwód i pole kwadratu $ABCD$,
 - b) pole części kwadratu $EFGH$ po usunięciu kwadratu środkowego,
 - c) pole części kwadratu $KLMN$ po usunięciu dziewięciu kwadratów.



Wyzwanie

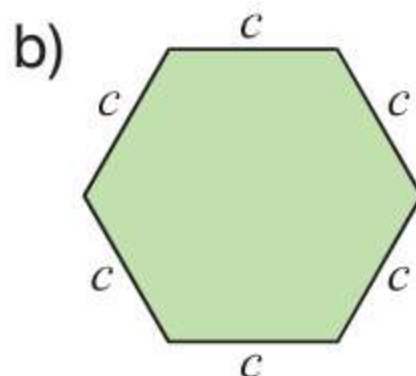
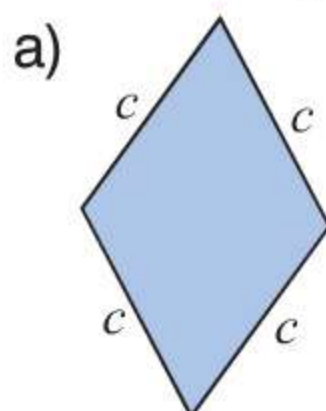
Patryk narysował na podłodze prostokąt i układał ramkę z sześciennych klocków wokół jego boków. Podstawą klocka był kwadrat o boku 4 cm. Ramka składała się z 44 klocków.



1. Jakie mogły być wymiary narysowanego prostokąta? Ile jest poprawnych odpowiedzi?
2. Ile klocków o krawędzi 1 cm należy ułożyć wokół obrazka o wymiarach 20 cm $\times$ 30 cm, aby utworzyć ramkę? O ile mniejszy jest obwód tego obrazka od obwodu obrazka z ramką?

 Sprawdź się!

- 1 Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące obwód figury. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $c = 5$ cm.



- 2 Obwód kwadratu jest równy 3,6 dm. Długość boku tego kwadratu wynosi

A. 1,8 dm B. 9 cm C. 9 mm D. 1,2 dm

- 3 Jeden z kątów wewnętrznych rombu ma miarę 64° . Jakie są miary kątów wewnętrznych trójkątów, na które dzieli romb jego przekątne?

Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. 32° , 58° , 90° ,	ponieważ	I. są to trójkąty ostrokątne.
B. 64° , 58° , 58° ,		II. suma miar kątów ostrych w tych trójkątach jest równa 90° .

- 4 Które zdanie jest **fałszywe**?

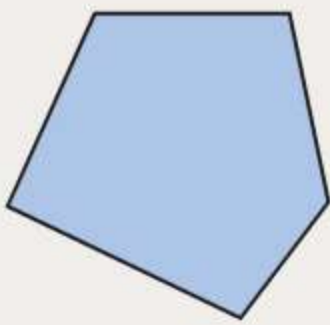
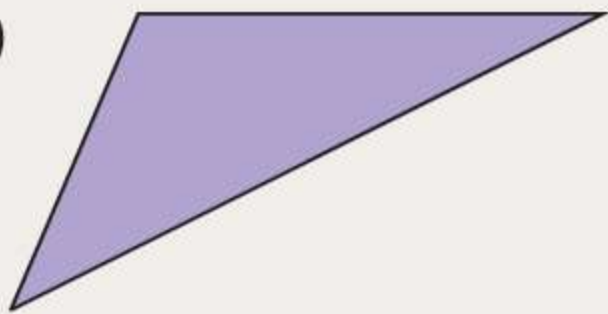
- A. Prostokąt to równoległobok, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są proste.
 B. Prostokąt, kwadrat i trapez równoramienny o jednej parze boków równoległych mają przekątne równej długości.
 C. We wszystkich czworokątach punkt przecięcia przekątnych dzieli je na połowy.
 D. Romb o przekątnych różnej długości nie jest wielokątem foremnym.

- 5 Podaj przykład czworokąta, który ma:

- a) jedną oś symetrii,
 b) dwie osie symetrii,
 c) cztery osie symetrii.

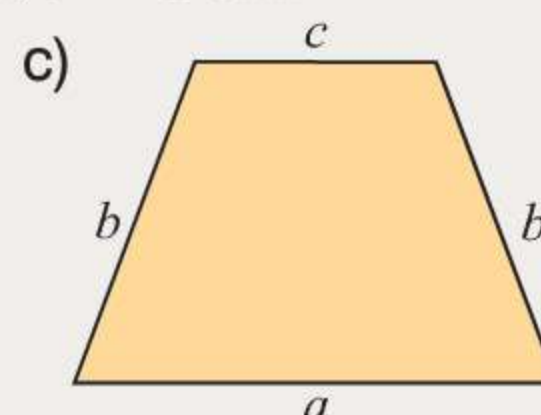
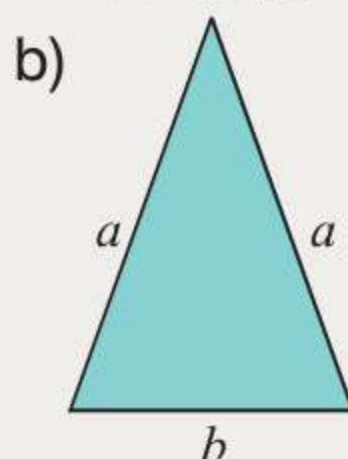
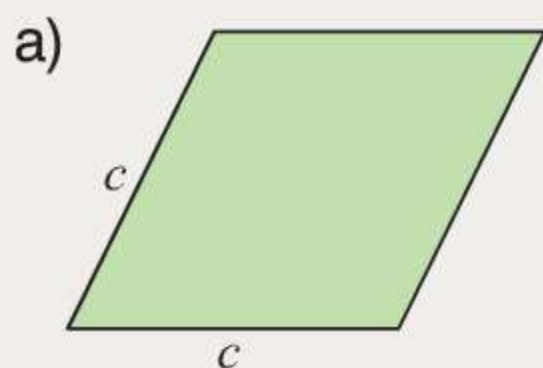
Narysuj dwa z wymienionych czworokątów i ich osie symetrii. Skorzystaj z lusterka i sprawdź poprawność wykonania zadania.

Zadania utrwalające

- 1 Narysuj:
 - a) proste m , k , t tak, aby $m \parallel t$ i $k \perp m$; zapisz za pomocą symboli wzajemne położenie prostych t i k ;
 - b) dwie półproste o początku w punkcie B ;
 - c) kąty wierzchołkowe, z których jeden ma miarę 40° ;
 - d) dwa prostopadłe odcinki CU i MA .
- 2 Narysuj prostą m i punkt P , który nie leży na tej prostej. Narysuj odcinek PA , który wyznacza odległość punktu P od prostej m .
- 3 Narysuj trzy różne kąty mniejsze od kąta półpełnego. Podaj ich nazwy, zmierz je i zapisz ich miary.
- 4 Narysuj figurę, która ma budowę symetryczną. Narysuj jej oś symetrii.
- 5 Podaj nazwę każdego z narysowanych wielokątów. Napisz po dwa zdania o każdym z nich.
 - a) 
 - b) 
 - c) 
- 6 Narysuj koło o średnicy 5 cm. Zaznacz w nim promień i dwie prostopadłe do siebie cięciwy.
- 7 Narysuj każdą z opisanych figur i wymień jeszcze inną jej cechę.
 - a) Czworokąt, który ma dwa boki równoległe, przekątne różnej długości i jeden bok, który jest prostopadły do boków równoległych.
 - b) Czworokąt foremny.
 - c) Wielokąt o najmniejszej liczbie boków i dwóch bokach równej długości.
- 8 Skonstruuj trójkąt foremny i napisz po jednym zdaniu o jego bokach, kątach i wysokościach.
- 9 Poprowadź wysokości w trójkącie różnobocznym rozwartokątnym.
- 10 Narysuj romb $KOSZ$ i poprowadź wysokości z wierzchołka S . Porównaj ich długości.



- 11** Oblicz pozostałe miary kątów wewnętrznych:
- rombu, w którym jeden z kątów ma miarę 98° ,
 - równoległoboku, w którym jeden z kątów ma miarę 35° .
- 12** Skorzystaj z poniższych informacji i narysuj odpowiednie trójkąty. Podaj ich nazwy ze względu na boki i kąty. Poprowadź wysokości. Napisz jedną własność narysowanych wysokości.
- Jeden z boków tego trójkąta to przeciwprostokątna, a dwa pozostałe boki są równej długości.
 - Jeden z kątów wewnętrznych tego trójkąta ma miarę 60° i jest to trójkąt równoramienny.
- 13** W czworokącie dwa kąty wewnętrzne mają po 75° , a trzeci kąt ma miarę 105° . Jaki to czworokąt? Sprawdź swoją odpowiedź z odpowiedziami innych osób w klasie.
- 14** Dwa kąty trójkąta mają miary 55° i 70° . Oblicz miarę trzeciego kąta. Jaki to trójkąt ze względu na boki i kąty?
- 15** W czworokącie dwa boki mają po 3 cm długości. Trzeci bok jest o 1,5 cm dłuższy, a czwarty bok jest o 0,5 cm krótszy od trzeciego boku. Oblicz obwód tego czworokąta.
- 16** Jeden z boków trójkąta ma długość 8 cm, drugi jest 2 razy krótszy, a trzeci jest o 1,5 cm dłuższy od pierwszego boku. Oblicz obwód tego trójkąta.
- 17** Obwód prostokąta jest równy 23 cm, a jeden z boków jest o 4,5 cm dłuższy od drugiego. Jakie długości mają boki tego prostokąta?
- 18** Tomek miał zbudować trójkąt z odcinków. Jeden z nich miał długość 6 cm, a drugi 4,5 cm. Zaproponuj długość trzeciego odcinka, aby:
- Tomek mógł zbudować trójkąt – narysuj ten trójkąt,
 - Tomkowi nie udało się zbudować trójkąta – napisz, dlaczego z tych odcinków nie można zbudować trójkąta.
- 19** Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące obwód wielokąta. Oblicz jego wartość liczbową dla: $a = 14$ cm, $b = 10$ cm, $c = 8$ cm.



Zadania sprawdzające

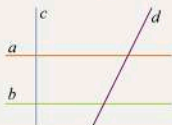
Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszytce.

- 1 Która litera ma oś symetrii?

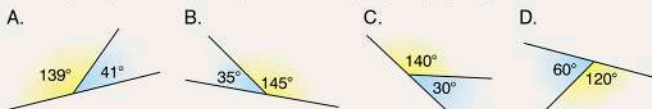
A. N B. G C. X D. L

- 2 Który zapis **nie jest** zgodny z ilustracją?

A. $a \parallel b$ oraz $c \perp a$ B. $c \perp b$ oraz $a \parallel b$
C. $c \perp a$ oraz $b \perp c$ D. $a \parallel b$ oraz $c \parallel d$

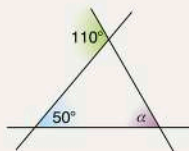


- 3 Na którym rysunku **błędnie** podano miary kątów przyległych?

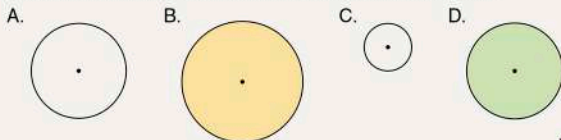


- 4 Zaznaczony na rysunku kąt α ma miarę

A. 60° B. 70°
C. 50° D. 110°

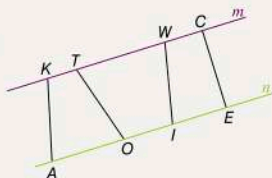


- 5 Na którym rysunku przedstawiono okrąg o średnicy 2 cm?



- 6 Który z odcinków ma długość równą odległości między prostymi równoległymi m i n ?

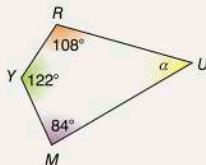
A. KA B. TO
C. WI D. CE





- 7 Czworokątem, którego przekątne są różnej długości i punkt ich przecięcia nie dzieli ich na połowy, jest
- A. trapez prostokątny. B. romb.
C. trapez równoramienny. D. równoległobok.

- 8 W czworokącie *MURY* kąt α ma miarę
- A. 84° B. 56°
C. 46° D. 36°



- 9 W trapezie równoramiennym kąt rozwarty ma miarę 3 razy większą niż kąt ostry. Jaką miarę ma kąt rozwarty?
- A. 90° B. 120° C. 135° D. 180°

- 10 Obwód której figury opisuje wyrażenie $2a + 2c$?

A.



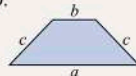
B.



C.



D.



- 11 Dwie wysokości trójkąta są równej długości i równocześnie stanowią boki tego trójkąta. Jest to trójkąt

A. prostokątny różnoboczny.
C. ostrokątny równoramienny.

B. rozwartokątny różnoboczny.
D. prostokątny równoramienny.

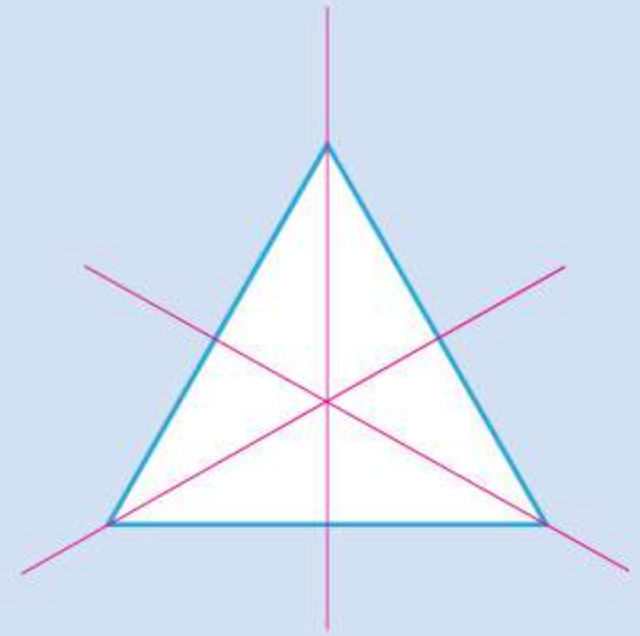
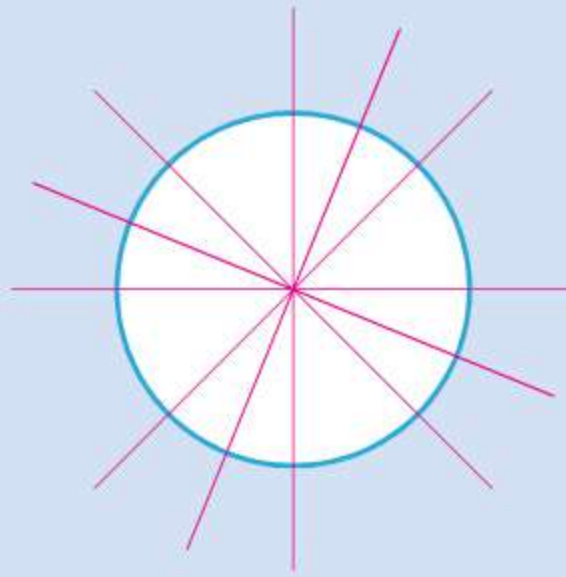
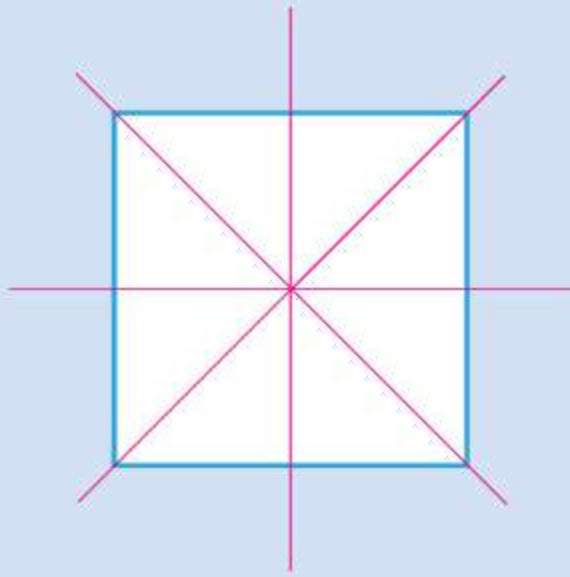
- 12 W równoległoboku *CDEF* punkt *A* dzieli bok *CD* na dwie równe części, punkt *B* dzieli na dwie równe części bok *FE* oraz $|CD| = 2|CF|$. Wykonaj rysunek takiego równoległoboku. Ile razy większe jest pole równoległoboku *CDEF* od pola trójkąta *ADB*?

Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. 3 razy,	ponieważ	I. równoległobok można podzielić na cztery takie same trójkąty równoramienne.
B. 4 razy,		II. równoległobok można podzielić na trzy trójkąty o równych polach.

Symetria wokół nas

Wiele obiektów matematycznych ma oś symetrii. Niektóre mają ich kilka, a nawet nieskończenie wiele.



Również w przyrodzie, sztuce, architekturze możemy dostrzec obiekty osiowosymetryczne.

Ile osi symetrii mają te obiekty?



Symetria wokół nas

Chociaż niektóre obiekty wydają nam się osiowo symetryczne, to zazwyczaj w każdym można znaleźć drobny szczegół, który tę symetrię zaburza.

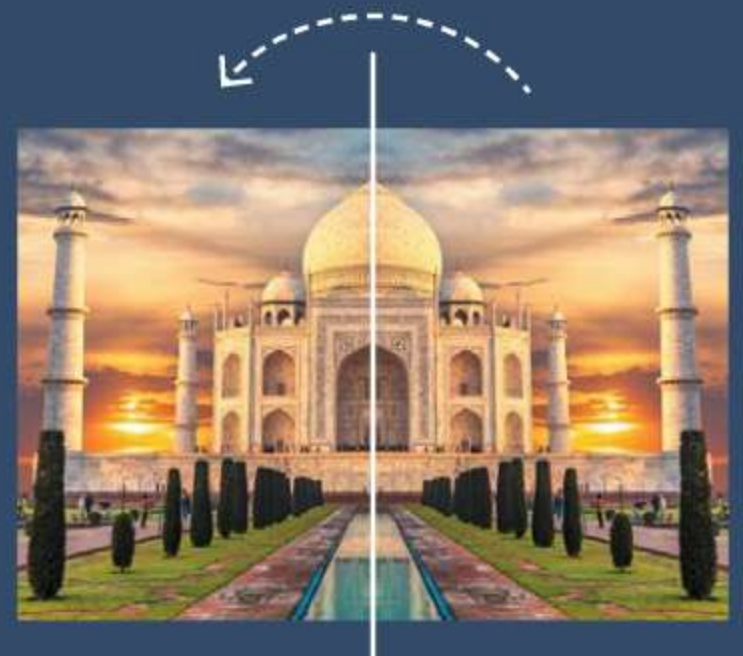
Zaznaczmy na poniższym zdjęciu prostą, która mogłaby być osią symetrii twarzy.

A teraz prawą część twarzy odbijmy symetrycznie względem tej prostej. Oto efekt:



Porównaj zdjęcia. Czy to nadal ta sama osoba?

Spójrzmy teraz na zdjęcie **Tadź Mahalu** – indyjskiego mauzoleum wzniesionego przez cesarza Szahdżahana na pamiątkę przedwcześnie zmarłej żony Mumtaz Mahal.



Czy drugie zdjęcie jest identyczne z pierwszym, gdy jego prawą część odbijemy symetrycznie względem zaznaczonej prostej? Odpowiedź uzasadnij.



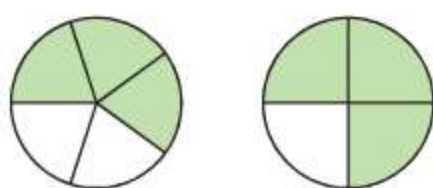
1. Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych



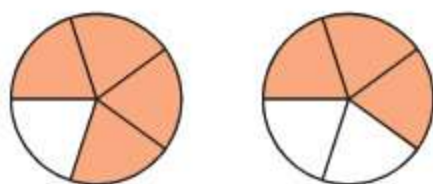
Sowa przypomina

• Porównywanie ułamków

$$\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$$



$$\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$$



$$\frac{3}{4} < \frac{5}{6}, \text{ bo } \frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \text{ a } \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{2}{7} < \frac{3}{8}, \text{ bo } \frac{2}{7} = \frac{6}{21}, \text{ a } \frac{3}{8} = \frac{6}{16}$$

Jeżeli ułamki mają równe **liczniki**, to ten ułamek jest większy, który ma mniejszy mianownik.

Jeżeli ułamki mają równe **mianowniki**, to ten ułamek jest większy, który ma większy licznik.

Jeżeli ułamki mają różne mianowniki i różne liczniki, to aby je porównać, należy sprowadzić je do **jednakowego mianownika** lub **jednakowego licznika**.

• Dodawanie i odejmowanie ułamków

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4-3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$

$$12\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} = 12\frac{2}{4} - 3\frac{3}{4} = 11\frac{6}{4} - 3\frac{3}{4} = 8\frac{3}{4}$$

lub

$$12\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} = \left(12\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(3\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 12\frac{3}{4} - 4 = 8\frac{3}{4}$$

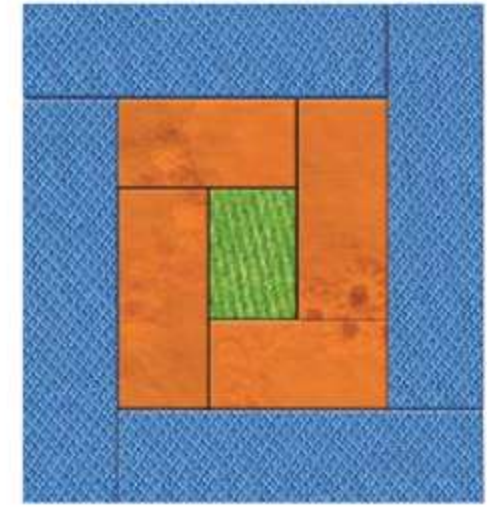
Jeżeli ułamki mają jednakowe mianowniki, to dodajemy (odejmujemy) liczniki, a mianownik zostawiamy bez zmian.

Aby dodać lub odjąć ułamki o różnych mianownikach, sprowadzamy je najpierw do jednakowego mianownika i postępujemy jak wyżej.

Do odjemnej i odjemnika dodajemy taką samą liczbę, aby odjemnik był liczbą naturalną.

Przykład 1.

Pani Danusia szyła patchworki (czytamy: paczłorki). Kupiła $1\frac{3}{4}$ m materiału w kolorze zielonym i o $2\frac{1}{2}$ m więcej w kolorze pomarańczowym, a materiału w kolorze niebieskim kupiła o $1\frac{3}{4}$ m więcej niż w pomarańczowym. O ile więcej metrów materiału w kolorze niebieskim niż w zielonym kupiła pani Danusia?



Wykonajmy rysunek pomocniczy i zauważmy, że do rozwiązania tego zadania nie są potrzebne długości zakupionych materiałów.

Wystarczy obliczyć zaznaczoną na rysunku wielkość a .

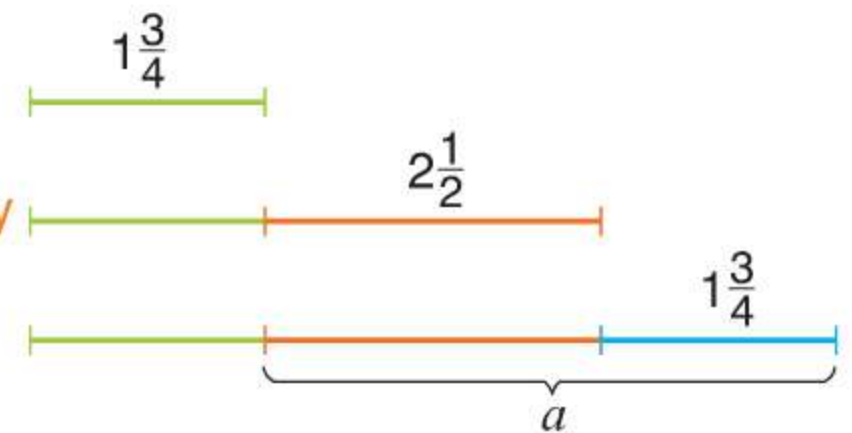
$$a = 2\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} = 2\frac{2}{4} + 1\frac{3}{4} = 4\frac{1}{4}$$

kolor

zielony

pomarańczowy

niebieski



Odpowiedź. Pani Danusia kupiła o $4\frac{1}{4}$ m więcej materiału niebieskiego niż zielonego.

1. Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.
 - a) $\frac{7}{8} \blacklozenge \frac{7}{9}$ b) $\frac{5}{4} \blacklozenge 1\frac{1}{4}$ c) $1\frac{2}{5} \blacklozenge \frac{13}{10}$
 - $\frac{1}{2} \blacklozenge \frac{3}{6}$ $\frac{7}{8} \blacklozenge \frac{5}{6}$ $2\frac{3}{4} \blacklozenge \frac{33}{12}$
2. Do czterech dzbanków wiano kolejno $\frac{5}{6}$ l, $\frac{3}{4}$ l, $\frac{7}{8}$ l, $\frac{2}{3}$ l soku. W którym dzbanku było najmniej, a w którym najwięcej soku?
3. Leszek ma 28 gier komputerowych, z których 12 to gry sportowe, a 7 to gry historyczne. Jaką częścią wszystkich gier są gry sportowe, a jaką historyczne?
4. Na pendrivie o pojemności 16 gigabajtów Jola zapisała plik, który zajął 4 gigabajty. Jaka część pamięci pendrive'a jest jeszcze wolna?

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{4}{16}$
5. Uporządkuj podane liczby rosnąco.

a) $\frac{7}{18}$, $\frac{3}{18}$, $\frac{19}{18}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{5}{18}$, 0, $\frac{15}{18}$ b) $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{2}$, 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{10}$

- 6 Zaznacz podane liczby na osi liczbowej.

a) $\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$, $\frac{12}{4}$

b) $\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{6}$, $\frac{6}{3}$, $1\frac{5}{6}$, $1\frac{2}{3}$

- 7 Wykonaj obliczenia. Ułamki zapisz w postaci nieskracalnej.

a) $3 - 1\frac{5}{6}$
 $2\frac{3}{8} - \frac{5}{8}$

b) $1\frac{5}{9} + 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{6}$
 $3\frac{4}{5} + 2\frac{1}{2} + \frac{7}{10}$

c) $4\frac{1}{6} - 1\frac{3}{5} + 2\frac{1}{2}$
 $4\frac{1}{2} - 2\frac{3}{5} - 1\frac{2}{3}$

- 8 Czy zapis $\frac{6}{10} = \frac{a}{20}$ będzie prawdziwy, jeżeli literę a zastąpimy liczbą 12? Wskaż poprawną odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie I lub II.

TAK,	ponieważ	I. mianownik jest wielokrotnością licznika.
NIE,		II. ułamek z lewej strony można rozszerzyć i otrzymać ułamek z prawej strony.

- 9 Ania napisała trzy liczby, z których każda następna jest o $2\frac{5}{6}$ większa od poprzedniej. Druga z nich jest równa 8. Oblicz różnicę największej i najmniejszej z nich.
- 10 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.
- a) $3\frac{1}{2} + b = 5\frac{1}{5}$ b) $c - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{2}$ c) $4\frac{1}{8} - d = 2\frac{5}{6}$
- 11 Do sernika pan Maciej zużył $\frac{1}{4}$ kg rodzynek, o $\frac{1}{10}$ kg więcej migdałów i o $\frac{17}{20}$ kg więcej białego sera niż migdałów. O ile kilogramów więcej białego sera niż rodzynek zużył pan Maciej?
- 12 Długość prostokąta jest równa $14\frac{3}{4}$ dm, a jego szerokość jest o 4 dm krótsza. Oblicz obwód tego prostokąta.



A to ciekawe!

Jeżeli ułamki są równe, to odpowiednie iloczyny też są równe.

$\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$, to $3 \cdot 28 = 4 \cdot 21$

Można też w ten sposób porównywać ułamki.

$\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{5}$ $2 \cdot 5 > 3 \cdot 3$, więc $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$

Porównaj ułamki:

a) $\frac{8}{10}$ i $\frac{4}{5}$,

b) $\frac{5}{6}$ i $\frac{7}{8}$,

c) $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{6}$.

 Wyzwanie

W tabelce przedstawiono zapis współczesny i egipski wybranych ułamków.

Zapis współczesny	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
Zapis egipski (ok. IV w. p.n.e.)					

Napisz podane niżej wyrażenie w zapisie współczesnym i oblicz jego wartość. Wynik przedstaw w zapisie egipskim.

$$\left(\left[- \overline{\text{III}} \right) + \left(\overline{\text{III}} - \overline{\text{III}} \right)$$

 Sprawdź się!

1. Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.

a) $\frac{5}{11} \blacklozenge \frac{7}{11}$

b) $\frac{3}{7} \blacklozenge \frac{3}{8}$

c) $2\frac{3}{5} \blacklozenge \frac{8}{5}$

d) $\frac{5}{6} \blacklozenge \frac{7}{8}$

2. Oblicz.

a) $2\frac{3}{4} + 1\frac{3}{5}$

b) $3\frac{1}{6} - 1\frac{4}{9}$

c) $3\frac{1}{5} - 2\frac{4}{5} + 1\frac{3}{5}$

3. Ania, Basia i Celinka miały po tyle samo pieniędzy. Ania wydała $\frac{3}{5}$ swoich pieniędzy, Basia $\frac{2}{3}$, a Celinka $\frac{4}{7}$.

Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Ania i Celinka razem wydały tyle samo pieniędzy co Basia.	P	F
Basia wydała mniej pieniędzy niż Ania.	P	F

4. Jeden z boków trójkąta ma długość $6\frac{3}{4}$ m, drugi jest od niego o $1\frac{2}{5}$ m krótszy, a trzeci jest o $1\frac{1}{2}$ m dłuższy od drugiego boku. Oblicz obwód tego trójkąta.

5. Drużyny klas szóstych rozgrywały szkolny turniej siatkówki. Mecz między 6a i 6b trwał $\frac{5}{6}$ h, mecz między 6a i 6c o $\frac{1}{5}$ h dłużej, a mecz między 6b i 6c o $\frac{3}{10}$ h dłużej niż rozgrywka klas 6a i 6c. O ile dłużej trwał mecz pomiędzy klasami 6b i 6c niż pomiędzy klasami 6a i 6b?

2. Mnożenie i dzielenie ułamków zwykłych



Sowa przypomina

- **Mnożenie ułamka przez liczbę naturalną**

$$\frac{4}{9} \cdot 6 = \frac{4 \cdot \cancel{6}^2}{\cancel{9}_3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

- **Mnożenie ułamków**

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 8} = \frac{3}{16}$$

- **Potęgowanie**

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

- **Obliczanie ułamka danej liczby**

$$\frac{1}{4} \text{ liczby } 800 \text{ to: } \begin{array}{c} 800 \\ \hline \frac{1}{4} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\frac{3}{4}} \end{array}$$

$$800 : 4 = 200.$$

$\frac{3}{4}$ liczby 800 to 3 razy więcej niż $\frac{1}{4}$ liczby 800:

$$(800 : 4) \cdot 3 = 200 \cdot 3 = 600.$$

- **Odwrotność liczby**

$$4 = \frac{4}{1} \quad \text{odwrotność to } \frac{1}{4}$$

$$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{odwrotność to } \frac{3}{8}$$

- **Dzielenie ułamków**

$$30 : \frac{1}{2} = 30 \cdot \frac{2}{1} = 30 \cdot 2 = 60$$

$$1\frac{5}{9} : \frac{8}{3} = \frac{14}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{14 \cdot 3}{9 \cdot 8} = \frac{7}{12}$$

Aby pomnożyć ułamek przez liczbę naturalną (lub odwrotnie), mnożymy **licznik** ułamka przez tę **liczbę**, a mianownik zostawiamy bez zmian.

Aby pomnożyć ułamek przez ułamek, mnożymy **liczniki** ułamków, a następnie **mianowniki** tych ułamków.

Aby podnieść do potęgi liczbę mieszaną, zapisujemy ją jako ułamek niewłaściwy, a następnie podnosimy do potęgi ten ułamek.

Aby obliczyć ułamek danej liczby, należy ten ułamek pomnożyć przez daną liczbę.

$$\frac{1}{4} \text{ liczby } 800 \text{ to:}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 800 = 200.$$

$$\frac{3}{4} \text{ liczby } 800 \text{ to:}$$

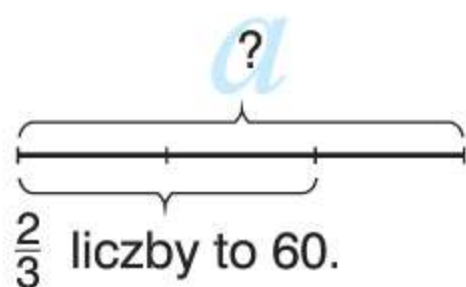
$$\frac{3}{4} \cdot 800 = \frac{3 \cdot \cancel{800}^{200}}{\cancel{4}_1} = 600.$$

Iloczyn liczby i jej odwrotności jest równy 1.

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad 2\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} = 1$$

Aby podzielić dwie liczby, należy dzielną pomnożyć przez odwrotność dzielnika.

● **Obliczanie liczby, gdy dana jest jej część**



$\frac{1}{3}$ liczby to $60 : 2 = 30$,
nieznana liczba to $\frac{3}{3}$,
 $3 \cdot 30 = 90$.

Aby obliczyć liczbę, gdy dana jest jej część, można nieznana liczbę zastąpić literą, zapisać równanie i je rozwiązać.

Na przykład:

a – nieznana liczba

$$\frac{2}{3}a = 60$$

$$60 : \frac{2}{3} = 60 \cdot \frac{3}{2} = 90$$

$$a = 90$$

Przykład 1.

Uporządkujmy malejąco wyrażenia: $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\frac{2^2}{3}$, $\frac{2}{3^2}$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \quad \text{Potęga dotyczy całego ułamka: licznika i mianownika.}$$

$$\frac{2^2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{Potęga dotyczy tylko licznika.}$$

$$\frac{2}{3^2} = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9} \quad \text{Potęga dotyczy tylko mianownika.}$$

$$\text{Wobec tego: } \frac{2^2}{3} > \left(\frac{2}{3}\right)^2 > \frac{2}{3^2}.$$

Przykład 2.

Operator telefonii komórkowej przygotował dwie prezentacje multimedialne. Pierwszą trwającą 2 minuty i drugą trwającą 180 sekund. Zdecydował, że wyemituje prezentację pierwszą powiększoną o $\frac{3}{5}$ czasu drugiej. Jak długo będzie trwała zmieniona prezentacja?

Wyraźmy czas prezentacji w takich samych jednostkach.

$$180 \text{ s} = 3 \text{ min}$$

Obliczmy czas doliczony do pierwszej prezentacji.

$$\frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5} [\text{min}]$$

Obliczmy czas trwania zmienionej prezentacji.

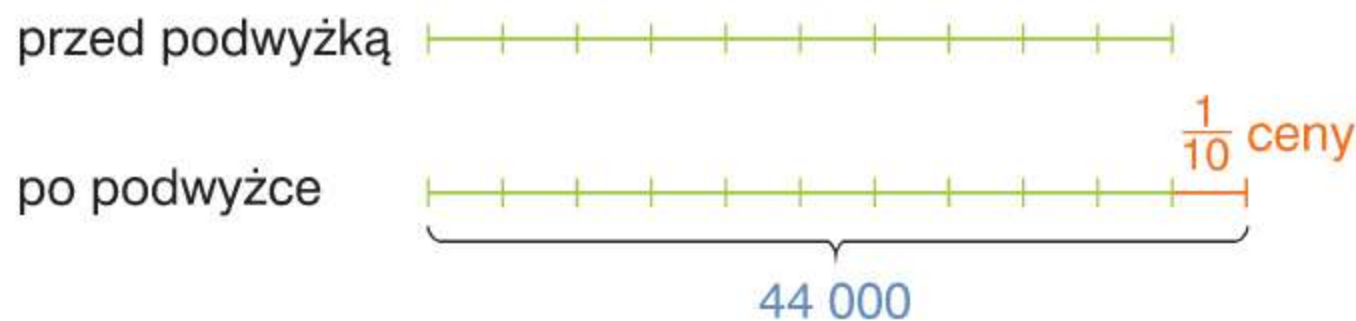
$$2 + 1\frac{4}{5} = 3\frac{4}{5} [\text{min}]$$

Odpowiedź. Zmieniona prezentacja będzie trwała $3\frac{4}{5}$ min.

Przykład 3.

Po podwyżce ceny o $\frac{1}{10}$ jej wartości samochód kosztował 44 000 zł.
Jaka była cena samochodu przed podwyżką?

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



Po podwyżce $1 + \frac{1}{10} = 1\frac{1}{10} = \frac{11}{10}$

cena podwyżka po podwyżce

**Sposób I**

$\frac{1}{10}$ ceny jest 11 razy mniejsza niż
cena po podwyżce i wynosi:

$$44\,000 : 11 = 4000.$$

Przed podwyżką samochód
kosztował $\frac{10}{10}$ ceny, czyli:

$$10 \cdot 4000 = 40\,000.$$

Sposób II

Zastąpmy nieznaną cenę samochodu
przed podwyżką literą c . Zapiszmy
równanie i je rozwiążmy.

$$1\frac{1}{10} \cdot c = 44\,000$$

$$44\,000 : 1\frac{1}{10} = 44\,000 \cdot \frac{10}{11} = 4000 \cdot 10$$

$$c = 40\,000$$

Odpowiedź. Cena samochodu przed podwyżką była równa 40 000 zł.

Przykład 4.

Rozwiążmy równanie $\frac{a-4}{3} = 5$.

Sposób I

Przedstawmy liczbę 5 w postaci
ułamka o mianowniku 3.

$$\frac{a-4}{3} = \frac{15}{3}$$

Liczniki są równe, więc:

$$a - 4 = 15$$

$$a = 15 + 4$$

$$a = 19$$

Sposób II

Zapiszmy ułamek w postaci dzielenia.

$$\frac{a-4}{3} = (a-4) : 3$$

Stąd:

$$(a-4) : 3 = 5 \quad \text{Niewiadoma jest w dzielnej.}$$

$$(a-4) = 5 \cdot 3$$

$$a - 4 = 15 \quad \text{Niewiadoma jest odjemną.}$$

$$a = 15 + 4$$

$$a = 19$$

Sprawdzenie. $L = \frac{19-4}{3} = \frac{15}{3} = 5$

$$P = 5$$

$$L = P$$

- 1 Oblicz.
 - a) $1\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}$
 - b) $2\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1\frac{3}{5}$
 - c) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$
 - d) $1\frac{1}{3} : 1\frac{1}{2}$
- 2 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.
 - a) $(\frac{1}{2})^3 \blacklozenge \frac{2}{3}$
 - b) $\frac{3^2}{2} \blacklozenge \frac{4}{3^2}$
 - c) $\frac{5^2}{6} \blacklozenge \frac{3^3}{7}$
 - d) $(\frac{3}{8})^2 \blacklozenge \frac{3}{2^3}$
- 3 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie taką liczbę, aby równość była prawdziwa.
 - a) $\blacklozenge \cdot \frac{1}{4} = 1$
 - b) $\frac{2}{3} \cdot \blacklozenge = 1$
 - c) $1\frac{2}{3} \cdot \blacklozenge = 1$
- 4 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
 - a) $1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2} + 9 \cdot 1\frac{1}{6}$
 - b) $(1\frac{1}{2})^2 - 1\frac{3}{5} : 2\frac{2}{3}$
 - c) $3\frac{1}{4} : [(2\frac{5}{8} - 1\frac{1}{6}) : \frac{5}{2^2}]$
- 5 Adam miał 48 zł, Sebastian 54 zł, a Julia 45 zł oszczędności. Babcia, która miała w portfelu 72 zł, postanowiła dać Adamowi $\frac{1}{3}$, Sebastianowi $\frac{1}{4}$, a Julii $\frac{3}{8}$ tej kwoty. Ile oszczędności miały dzieci po otrzymaniu pieniędzy od babci? Czy babcia rozdała wszystkie pieniądze, które miała w portfelu?
- 6 Pan Mateusz kupił 3 kg truskawek i 200 dag agrestu. Ze wszystkich kupionych truskawek i z $\frac{3}{4}$ kupionego agrestu zrobił konfiturę. Jaką masę miały owoce użyte do konfitury?
 
- 7 Pensja pani Teresy po podwyżce o $\frac{1}{4}$ jest równa 3260 zł. Jaką pensję otrzymywała pani Teresa przed podwyżką?
- 8 Wzdłuż ogrodzenia działki posadzono 150 drzew iglastych. Świerki stanowiły $\frac{5}{6}$ drzew, a reszta to jodły. Ile jodeł posadzono?
 - A. 125
 - B. 130
 - C. 30
 - D. 25
- 9 Andrzej i Agata mierzyli krokami długość drogi z domu do szkoły. Andrzej ma do szkoły 500 kroków, a długość jego jednego kroku jest równa $\frac{3}{5}$ m. Agata ma do szkoły $\frac{1}{2}$ kilometra i jest to 1000 jej kroków.
 - a) W jakiej odległości od szkoły mieszka Andrzej?
 - b) Jaką długość ma krok Agaty?

- 10 Ania i Kasia kupiły łącznie 24 zeszyty. Gdyby Ania dała Kasi $\frac{1}{4}$ swojego zakupu, to miałyby po tyle samo zeszytów. Ile zeszytów kupiła każda z nich?

- 11 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.

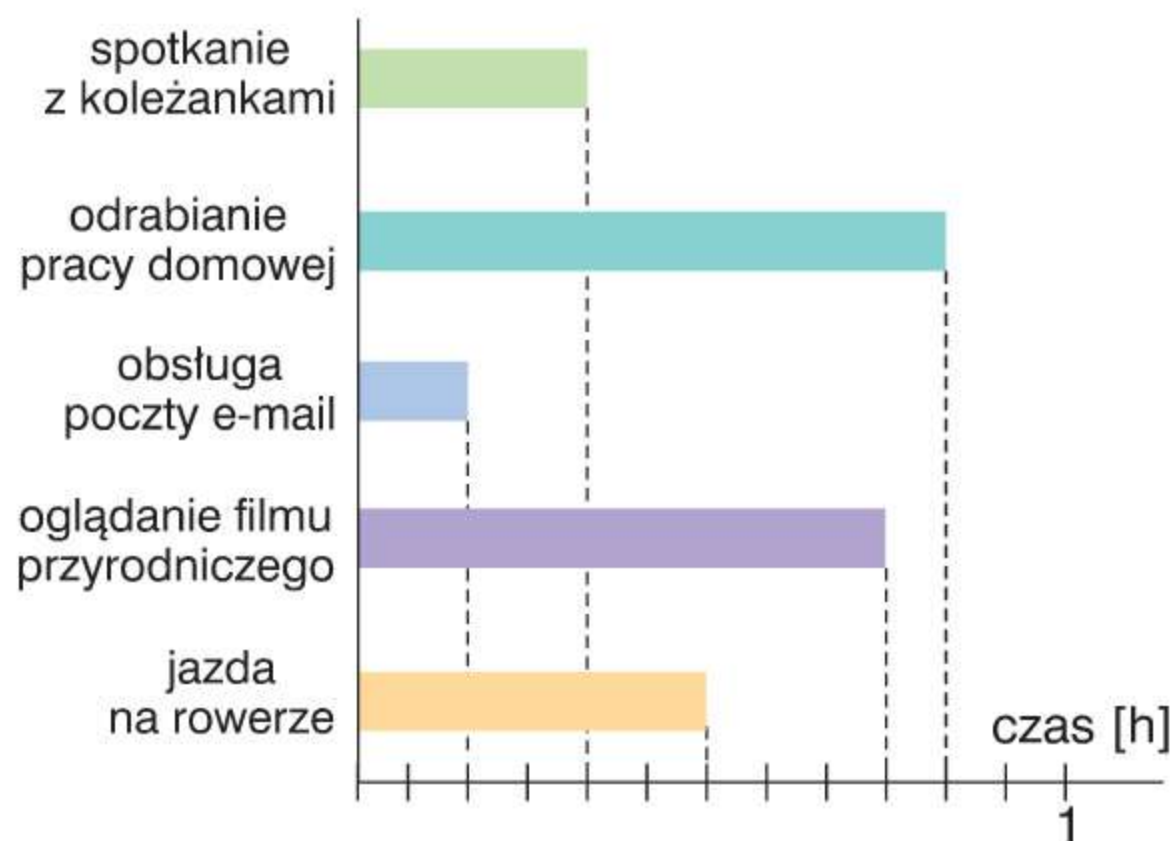
a) $\frac{y-7}{4} = 5$

b) $\frac{a+4}{6} = 3$

c) $\frac{5-c}{2} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{2x}{3} = 4$

Na podstawie diagramu, na którym Zuzia przedstawiła, jak spędziła czas po lekcjach, rozwiąż zadania 12.–14.



- 12 Jaką część godziny trwało każde z zajęć Zuzi? Ułamki zapisz w postaci nieskracalnej.
- 13 Ile minut trwały poszczególne zajęcia Zuzi?
- 14 O jaką część godziny więcej zajęło Zuzi odrabianie pracy domowej niż oglądanie filmu przyrodniczego?

Wskaż poprawną odpowiedź A, B lub C i jej uzasadnienie I, II lub III.

A. O $\frac{1}{4}$ h,	ponieważ pracę domową Zuzia odrabiała dłużej	I. o 5 min.
B. O $\frac{1}{12}$ h,		II. o 10 min.
C. O $\frac{1}{6}$ h,		III. o 15 min.

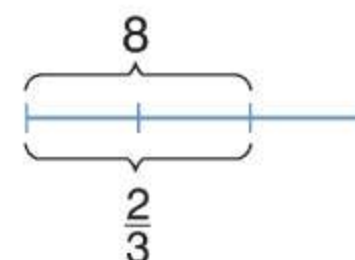
- 15 Co to za liczba, której $\frac{2}{3}$ jest równe 8?

A. $\frac{1}{12}$

B. $5\frac{1}{3}$

C. $7\frac{1}{3}$

D. 12



Na podstawie poniższych informacji rozwiąż zadania 16.–19.

Panowie Rafał i Kamil byli na spotkaniu koleżeńskim w Poznaniu. Po spotkaniu każdy z nich wyjechał samochodem do domu o godzinie 6:00. Pan Rafał pojechał na wschód, a pan Kamil na zachód. Pan Rafał jechał z prędkością średnią $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a pan Kamil $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po $1\frac{1}{2}$ godziny jazdy zatrzymali się na śniadanie, które trwało $\frac{3}{4}$ godziny.



Poznań – katedra

- 16 O której godzinie panowie zatrzymali się na śniadanie, a o której godzinie je skończyli?
- 17 Ile kilometrów łącznie przejechali panowie do śniadania?
- 18 Przed śniadaniem pan Rafał przejechał $\frac{1}{4}$ drogi, a panu Kamilowi po śniadaniu pozostało do przejechania $\frac{2}{3}$ drogi. Ile kilometrów zostało każdemu z nich do przejechania po śniadaniu?
- 19 O której godzinie pan Kamil, a o której pan Rafał dojechaliby do swoich domów, gdyby pozostałą do przejechania po śniadaniu drogę pokonali z taką prędkością średnią, z jaką jechali przed śniadaniem?



Sprawdź się!

- 1 Oblicz.

a) $\frac{7}{8} \cdot 2\frac{2}{3}$
b) $1\frac{3}{5} : \frac{4}{9}$
c) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
- 2 W bukietcie było 15 róż. Róże purpurowe stanowiły $\frac{3}{5}$ liczby wszystkich róż. Ile było róż w innych kolorach niż purpurowy?

A. 3
B. 6
C. 9
D. 12
- 3 Co jest większe: $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$ czy $\frac{4^2}{5}$?
- 4 Bilet wstępu do aquaparku dla ucznia kosztował 20 zł i było to $\frac{4}{7}$ ceny biletu dla osoby dorosłej. Ile musiała zapłacić za bilet osoba dorosła?
- 5 Znajdź liczbę, jeżeli wiadomo, że:

a) $\frac{3}{4}$ tej liczby to 15,
b) $1\frac{2}{3}$ tej liczby to $3\frac{3}{4}$.

3. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych



Sowa przypomina

- Ułamki dziesiętne**

$$\frac{2}{10}; \frac{3}{100}; \frac{15}{100}; \frac{6}{1000}; \frac{96}{1000}; \frac{542}{1000}$$

$$0,2; 0,03; 0,15; 0,006; 0,096; 0,542$$

Mianownikami ułamków dziesiętnych są liczby: 10, 100, 1000, Ułamki takie można zapisać w postaci dziesiętnej.

- Rozszerzanie i skracanie ułamków dziesiętnych**

$$0,75 = 0,75000 \quad 2 = 2,00$$

$$0,40000 = 0,4 \quad 0,507000 = 0,507$$

Ułamki dziesiętne rozszerzamy przez dopisanie zer za ostatnią cyfrą po przecinku, a skracamy przez pominięcie końcowych zer po przecinku.

- Porównywanie ułamków dziesiętnych**

$$12,609$$

$$12,611$$

$$12 = 12 \quad 6 = 6 \quad 0 < 1$$

$$12,609 < 12,611$$

Porównujemy całości, a następnie kolejno cyfry w rzędzie części dziesiątych, części setnych,

- Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych**

$$127,08 + 34,212$$

$$\begin{array}{r} 127,080 \\ + 34,212 \\ \hline 161,292 \end{array}$$

$$291,3 - 35,18$$

$$\begin{array}{r} 291,30 \\ - 35,18 \\ \hline 256,12 \end{array}$$

Rozszerzamy ułamki.

Gdy dodajemy lub odejmujemy ułamki dziesiętne sposobem pisemnym, zwracamy uwagę na to, aby w podpisanych liczbach przecinek był pod przecinkiem, jedność pod jednością, część dziesiąta pod częścią dziesiątą itd.

Jeżeli w odjemnej jest mniej cyfr po przecinku niż w odjemniku, to rozszerzamy odjemną do takich części, jakie są w odjemniku.

1. Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.
- a) $0,7 \blacklozenge 0,6$ b) $0,6 \blacklozenge 0,60$ c) $6,006 \blacklozenge 6,06$
 $1,9 \blacklozenge 1,09$ $100,3 \blacklozenge 99,9$ $38,01 \blacklozenge 38,010$
 $25,199 \blacklozenge 25,2$ $0,004 \blacklozenge 0,0041$ $99,99 \blacklozenge 100$
2. Uporządkuj malejąco liczby:
 $6,008$; $7,3$; $17,001$; $6,09$; $7,05$; 70 ; $0,779$; $7,03$; $7,14$; $7,1$.
3. Która z liczb **nie jest** równa liczbie $29,02$?
A. $29,0200$ B. $29,002$ C. $29,020$ D. $29,02000$
4. Różnicą liczb $8,205$ i $6,015$ jest liczba
A. $7,19$ B. $2,25$ C. $2,19$ D. $2,109$
5. Oblicz w pamięci, a następnie użyj kalkulatora i sprawdź swój wynik.
- a) $2,5 + 4,8 + 1,5$ b) $4,75 - 1,25 - 0,5$
 $2,05 + 13,5$ $13,155 - 1,142 + 0,02$
 $16,94 - 13,7$ $3,75 + 1,92 + 1,25 + 0,08$
6. Oblicz.
- a) $25,3 + 0,089$ b) $206,2 - 141,48$ c) $9,04 - 7,155 + 11,84$
 $135,7 + 97,94$ $83,06 - 39,503$ $100 - 4,87 - 28,906$
7. Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenia.
- a) $81,6 - c = 7,89$ b) $x + 2,7 = 2,118 + 4,782$
 $a + 7,58 = 10$ $10,35 - y = 14,87 - 7,58$
 $b - 4,782 = 3,018$ $z - 2,6 = 10 + 14,8$
8. Najstarszy tunel żeglugowy o długości 173 m znajduje się we Francji. Na igrzyska olimpijskie w Atlancie wybudowano tunel o długości $9,37$ km. O ile kilometrów dłuższy jest tunel wybudowany w Atlancie od najstarszego tunelu żeglugowego we Francji?



- 10 Pan Marek zapłacił za zakupy 324,85 zł. Ile reszty otrzymał, jeżeli dał kasjerce tylko banknoty dwustuzłotowe?
- 11 Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4,5 dm. Ramię jest o 1 dm dłuższe od podstawy. Oblicz obwód tego trójkąta.



A to ciekawe!

O ułamkach dziesiętnych i działaniach na nich po raz pierwszy wspomniał w 1427 roku matematyk z Azji Środkowej al-Kaszi (czytamy: alkaszi) w książce *Klucz do arytmetyki*. W Europie po raz pierwszy o ułamkach dziesiętnych pisał w 1585 roku matematyk holenderski Simon Stevin (czytamy: simon stewin) w książce *System dziesiętny*. Oddzielanie kropką całości od części dziesiętnych było pomysłem szkockiego matematyka Johna Napiera (czytamy: dzona nejpiera) (1550–1617).

Kiedy w codziennym życiu używamy ułamków dziesiętnych?



Sprawdź się!

- 1 Oblicz.
a) $36,8 + 104,16$ b) $56,53 - 8,9$
- 2 Rozwiązaniem równania $10 - (a - 1,3) = 8,8$ jest
A. $a = 2,5$ B. $a = 1,5$ C. $a = 2,25$ D. $a = 0,7$
- 3 Pani Joasia kupiła szynkę za 16,09 zł, ser za 12,11 zł i sok pomidorowy za 4,85 zł. Czy po zapłaceniu banknotem 50 zł powinna otrzymać 17 zł 95 gr reszty?
Wskaż poprawną odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie I lub II.
- | | | |
|------|----------|---|
| TAK, | | I. zakupy kosztowały 32 zł 5 gr. |
| NIE, | ponieważ | II. zakupy kosztowały 33,05 zł, więc reszta powinna być równa 17 zł bez 5 groszy. |
- 4 Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 1,6 dm i 2,4 dm. Ramiona są krótsze od dłuższej podstawy: jedno o 1,8 dm, a drugie o 14 cm. Wykonaj rysunek pomocniczy i oblicz obwód tego trapezu.
- 5 Prostokątna działka ma długość 38,2 m, a jej szerokość jest o 9,55 m krótsza. Oblicz obwód tej działki.

4. Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych



Sowa przypomina

- **Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000, ...**

$$13,26 \cdot 10 = 132,6$$

$$13,26 \cdot 100 = 1326$$

$$13,26 \cdot 1000 = 13260$$

Dopisano zero.

$$46,5 : 10 = 4,65$$

$$46,5 : 100 = 0,465$$

Dopisano zera.

$$46,5 : 1000 = 0,0465$$

Kiedy mnożymy ułamek dziesiętny przez: 10, 100, 1000, ..., przesuwamy przecinek o jedno, dwa, trzy, ... miejsca w prawo.

Kiedy dzielimy ułamek dziesiętny przez: 10, 100, 1000, ..., przesuwamy przecinek o jedno, dwa, trzy, ... miejsca w lewo.

- **Mnożenie ułamków dziesiętnych**

$$3,2 \cdot 8 = 25,6$$

jedna cyfra po przecinku

$$2,53 \cdot 1,4 = 3,542$$

dwie cyfry jedna cyfra trzy cyfry

$$\begin{array}{r} 2,53 \\ \cdot 1,4 \\ \hline 1012 \\ + 253 \\ \hline 3,542 \end{array}$$

Ułamki dziesiętne mnożymy tak, jak liczby naturalne. Podpisujemy je bez zwracania uwagi na przecinek. W wyniku oddzielamy przecinkiem tyle cyfr końcowych, ile było cyfr łącznie po przecinku w obu czynnikach.

- **Dzielenie ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną**

$$135 : 3 = 45$$

$$\begin{array}{r} 4,5 \\ 13,5 : 3 \\ -12 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$13,5 : 3 = 4,5$$

$$\begin{array}{r} -15 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ułamek dziesiętny można podzielić pisemnie przez liczbę naturalną tak jak liczbę naturalną. W ilorazie przecinek umieszczamy nad przecinkiem dzielnej.

- **Dzielenie ułamków dziesiętnych**

$$0,36 : 0,2 = \frac{0,36 \cdot 10}{0,2 \cdot 10} = \frac{3,6}{2} = 1,8$$

$$0,36 : 0,02 = \frac{0,36 \cdot 100}{0,02 \cdot 100} = \frac{36}{2} = 18$$

Dzielną i dzielnik trzeba rozszerzyć przez: 10, 100, 1000, ... tak, aby dzielnik był liczbą naturalną.

Przykład 1.

Tomek przez 1,5 godziny jechał rowerem z prędkością średnią $21 \frac{\text{km}}{\text{h}}$,
a Aneta jechała 3 kwadranse z prędkością średnią $31 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Ile kilometrów przejechał Tomek, a ile przejechała Aneta?

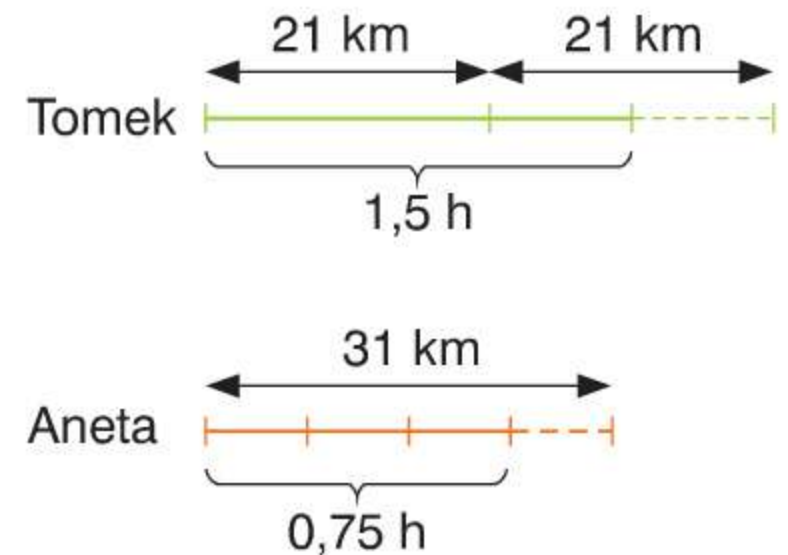
Obliczmy, ile kilometrów przejechał Tomek.

$$1,5 \cdot 21 = 31,5 \text{ [km]}$$

Obliczmy, ile kilometrów przejechała Aneta.

$$3 \text{ kwadranse, to } \frac{3}{4} \text{ h} = 0,75 \text{ h}$$

$$0,75 \cdot 31 = 23,25 \text{ [km]}$$



Odpowiedź. Tomek przejechał 31,5 km, a Aneta przejechała 23,25 km.

- 1 Oblicz w pamięci.

a) $7 \cdot 0,4$	b) $0,8 \cdot 0,6$	c) $0,6 \cdot 0,15$
$4,9 : 7$	$1,5 : 0,5$	$3,2 : 0,04$
- 2 Oblicz w pamięci.

a) $4,25 \cdot 10$	b) $2,85 : 10$	c) $102,3 : 1000$
$100 \cdot 0,508$	$30,01 : 100$	$0,075 \cdot 100 : 10$
- 3 Jedna mila morska jest równa 1,852 km, a 100 mil morskich to
 A. 18,52 km B. 185,2 km C. 1852 km D. 18 520 km
- 4 Z 1000 kg buraków cukrowych można otrzymać 0,17 t cukru.
 Ile cukru otrzymuje się z 1 kg buraków?
- 5 Oblicz.

a) $4,9 \cdot 0,56$	b) $120,06 \cdot 12,45$	c) $5,3 \cdot 0,05 \cdot 1,4$
$10,488 : 4,6$	$7,546 : 3,08$	$0,75 \cdot 3,5 : 0,6$
- 6 Oblicz: $(0,1)^2$; $(0,2)^3$; $(1,2)^2$; $(1,1)^3$.
- 7 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $9,8 \cdot 0,15 + 33 : 2,5$	b) $100,6 - 9,8 : 0,28 + (0,2)^2$
c) $(98,07 + 197,13) : 4,8 - (0,1)^3$	d) $(3,01 + 12,91) \cdot 3,5 - 1,008$

- 8 Kozica żyjąca w Tatrach, Alpach i Pirenejach jest w stanie pokonać wysokość 1000 m w czasie 0,25 h. W jakim czasie mogłaby wspiąć się na wysokość 1800 m?
- 9 Ala jechała rowerem 5 kwadransów z prędkością średnią $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Jaś jechał 0,8 h z prędkością średnią $22 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów łącznie przejechali?
- 10 Pani Zofia kupiła 2,8 kg twarogu po 13 zł za 1 kg oraz 1,75 kg wędliny po 22 zł za 1 kg. Za co zapłaciła więcej i o ile więcej?
- 11 Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenia.
- a) $p \cdot 6,4 = 2,88$ b) $0,5a + 1 = 23,5$ c) $\frac{x+6}{2} = 3,6$
 $0,894 : d = 14,9$ $1,8 : (0,9 + b) = 1$ $\frac{y-1}{3} = 0,9$

Skorzystaj z informacji zawartych w cenniku i rozwiąż zadania 12.–14.

Cennik

Kwiaty

cena za 1 szt.

	róża	5,70 zł
	anturium	9,80 zł
	frezja	3,30 zł
	gerbera	4,70 zł
	tulipan	1,90 zł
	słonecznik	6,10 zł
	irys	2,50 zł

Ozdoby do jednej wiązanki

	ozdobne liście	1,40 zł
	kłosa	3,80 zł
	trawy	1,30 zł
	gipsówka	1,40 zł
	wstążka	1,90 zł

Uwaga!

Za doręczenie bukietu pod wskazany adres do ceny bukietu dolicza się 0,25 jego wartości.

- 12 Ceny której pary kwiatów różnią się o 1,40 zł za sztukę?
 A. Anturium i frezji. B. Gerbery i tulipana.
 C. Słonecznika i gerbery. D. Anturium i róży.
- 13 Pan Jan zamówił z dostawą do domu bukiet złożony z 9 róż, ozdobiony liśćmi, gipsówką i wstążką. Oblicz koszt tego zamówienia.
- 14 Adaś kupił mamie na imieniny bukiet złożony ze słoneczników, przyozdobiony kłosami, trawą i wstążką. Wartość bukietu była równa 25,30 zł. Ile słoneczników było w tym bukiecie?

- 15** Oblicz:
- a) 0,75 liczby 150, b) 0,6 liczby 0,18, c) 1,4 liczby 50,5.
- 16** Znajdź liczby, których:
- a) 0,75 to 6,3, b) 0,3 to 4,02, c) 1,2 to 72,
0,2 to 10,4, 0,7 to 45,5, 2,4 to 25,2.
- 17** Basia i Marek uczestniczyli w dwuetapowej grze. Na wykonanie zadań z pierwszego etapu przewidziano 0,9 h, a z drugiego – 75 min. Dzieci wykorzystały cały czas przeznaczony na pierwszy etap i 0,6 czasu przewidzianego na drugi etap. Ile godzin potrzebowali Basia i Marek na wykonanie zadań z obydwóch etapów? A ile minut?
- 18** Pan Karol kupił kwadratową działkę o boku 17,5 m, a pani Jola prostokątną działkę o bokach długości 20,8 m i 14,2 m. Oblicz obwody i powierzchnie tych działek.
- 19** Zamień:
- a) na kilometry: 3000 m, 850 m, 76 m;
b) na dekagramy: 0,9 kg, 3,7 kg, 48 g;
c) na kilogramy: 36 dag, 55 g, 620 dag.



Sprawdź się!

- 1** Oblicz.
- a) $0,14 \cdot 0,5$ b) $3,5 : 0,7$ c) $1,5 \cdot 4,6 + 3,38 : 1,3$
- 2** Metr kwadratowy płytek II gatunku kosztuje 36,40 zł. Za 1 m² płytek I gatunku trzeba zapłacić 1,5 raza więcej, czyli
- A. 24,30 zł B. 37,90 zł C. 34,90 zł D. 54,60 zł
- 3** Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.
- a) $1,8 - 0,4c = 0,2$ b) $(7 - a) : 3 = 1,8$
- 4** Odcinek *CD* ma długość 8,5 cm, a odcinek *AB* – 7 cm. Oblicz długość odcinka *AB*, skróconego o 0,4 długości odcinka *CD*.
- 5** Pani Maria kupiła samochód na raty. W każdym miesiącu wpłacała 780 zł, co stanowiło 0,2 jej miesięcznego budżetu domowego. Oblicz miesięczny budżet domowy pani Marii.



5. Przybliżenia dziesiętne



Sowa przypomina

Symbol „ $\approx$ ” czytamy: **równy w zaokrągleniu**.

- Zaokrąglanie kwoty z dokładnością do 1 złotówki**

12 zł 42 gr $\approx$ 12 zł Pomijamy liczbę mniejszą niż pół złotówki.

54 zł 50 gr $\approx$ 55 zł Pomijamy liczbę równą lub większą niż pół

3 zł 84 gr $\approx$ 4 zł złotówki, ale jednocześnie zwiększamy liczbę złotych o 1.

- Zasady zaokrąglania liczb naturalnych z dokładnością do rzędu dziesiątek**

Odnajdujemy w liczbie cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności zastępujemy zerem.

2**3**4 $\approx$ 230 Jeśli zastąpiona zerem cyfra jedności jest mniejsza od 5 (czyli wynosi 0, 1, 2, 3, 4), to cyfrę dziesiątek zostawiamy bez zmian.

1**7**6 $\approx$ 180 Jeśli zastąpiona zerem cyfra jedności jest równa 5 lub większa od 5 (czyli wynosi 5, 6, 7, 8, 9), to cyfrę dziesiątek zwiększamy o 1.

- Zasady zaokrąglania liczb naturalnych z dokładnością do rzędu setek**

Odnajdujemy w liczbie cyfrę setek i cyfry z jej prawej strony (w rzędach dziesiątek i jedności) zastępujemy zerami.

749 $\approx$ 700 Jeśli pierwsza zastąpiona zerem cyfra (w rzędzie dziesiątek) jest mniejsza od 5 (czyli wynosi 0, 1, 2, 3, 4), to cyfrę setek zostawiamy bez zmian.

853 $\approx$ 900 Jeśli pierwsza zastąpiona zerem cyfra (w rzędzie dziesiątek) jest równa 5 lub większa od 5 (czyli wynosi 5, 6, 7, 8, 9), to cyfrę setek zwiększamy o 1.

Przykład 1.

Zosia kupiła 35 dag sera po 22,70 zł za kilogram. Ile zapłaciła?

$$35 \text{ dag} = 0,35 \text{ kg}$$

Obliczmy wartość zakupów za pomocą kalkulatora.

$$0,35 \cdot 22,70 = 7,945 \text{ [zł]}$$

Nie ma monety 0,005 zł ($\frac{1}{2}$ gr), więc zaokrąglamy kwotę do 1 gr.

Kierujemy się taką samą zasadą, jak podczas zaokrąglania liczb dwumianowych.

7,945 zł = 794,5 gr Liczbę równą lub większą niż pół grosza pomijamy,

794,5 gr $\approx$ 795 gr ale jednocześnie zwiększamy liczbę groszy o 1.

Możemy więc zapisać jak poniżej.

7,945 $\approx$ 7,95 Jest 5 tysięcznych, więc o 1 zwiększamy części setne.

$$4 + 1 = 5$$

Odpowiedź. Zosia zapłaciła 7,95 zł.

Przykład 2.

Zapiszmy ułamek zwykły $\frac{3}{8}$ w postaci dziesiętnej.

Sposób I

Wśród liczb: 10, 100, 1000, 10 000, ... najmniejszą wielokrotnością liczby 8 jest 1000. Ułamek $\frac{3}{8}$ rozszerzmy do mianownika 1000.

$$\frac{3}{8} = \frac{?}{1000}$$

$$1000 : 8 = 125$$

Ułamek trzeba rozszerzyć przez 125.

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0,375$$

Sposób II

Kreskę ułamkową zastępujemy znakiem dzielenia. $\frac{3}{8} = 3 : 8$ $3 = 3,000$

Możemy wykonać dzielenie sposobem pisemnym lub skorzystać z kalkulatora.

Otrzymujemy ułamek $\frac{3}{8}$ w postaci dziesiętnej.

$$\frac{3}{8} = 0,375$$

Mówimy, że ułamek $\frac{3}{8}$ ma **rozwiniecie dziesiętne skończone**.

Przykład 3.

Zapiszmy ułamek zwykły $\frac{2}{11}$ w postaci dziesiętnej.

Ponieważ żadna z liczb: 10, 100, 1000, ... nie jest wielokrotnością liczby 11 i ułamek $\frac{2}{11}$ jest nieskracalny, wykonajmy dzielenie sposobem pisemnym.

$$\frac{2}{11} = 2 : 11 \quad 2 = 2,000$$

$$\begin{array}{r} 0,1818... \\ 2,000 : 11 \\ \underline{11} \\ 90 \\ \underline{88} \\ 20 \\ \underline{11} \\ 90 \end{array}$$

Dzielenie to nie ma końca. Reszta na przemian jest równa 9, następnie 2 i znów 9. Iloraz jest równy 0,1818... .

Kropki oznaczają, że dzielenie nie ma końca i kolejno powtarzają się cyfry 1 i 8.

Mówimy, że ułamek $\frac{2}{11}$ ma **rozwiniecie dziesiętne nieskończone**.

Zapiszmy ułamek $\frac{2}{11}$ w postaci dziesiętnej w zaokrągleniu do części dziesiątych i setnych.

Przy zaokrąglaniu liczb zapisanych w postaci dziesiętnej kierujemy się takimi samymi zasadami jak przy zaokrąglaniu liczb naturalnych.

Zaokrąglić do części dziesiątych to znaczy zostawić jedną cyfrę po przecinku.

$$\frac{2}{11} = 0,1818... \approx 0,2$$

Pierwsza z odrzuconych cyfr to 8.

Ponieważ $8 > 5$, cyfrę części dziesiątych zwiększamy o 1.

Jest to **przybliżenie z nadmiarem**, bo $0,1818... < 0,2$.

Ułamek $\frac{2}{11}$ został **zaokrąglony w górę**.

Zaokrąglić do części setnych to znaczy zostawić dwie cyfry po przecinku.

$$\frac{2}{11} = 0,1818... \approx 0,18$$

Pierwsza z odrzuconych cyfr to 1.

Ponieważ $1 < 5$, cyfrę części setnych pozostawiamy bez zmian.

Jest to **przybliżenie z niedomiarem**, bo $0,1818... > 0,18$.

Ułamek $\frac{2}{11}$ został **zaokrąglony w dół**.

Przykład 4.

Która liczba jest większa: $\frac{1}{3}$ czy 0,33?

Znajdźmy rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{1}{3}$. Wykonajmy dzielenie za pomocą kalkulatora.

$$\frac{1}{3} = 0,3333333...$$

Ułamek dziesiętny 0,33 można rozszerzyć: $0,33 = 0,3300000$.

$$0,33\textcolor{blue}{33333}... > 0,33\textcolor{blue}{00000} \qquad \frac{1}{3} > 0,33$$

- 1 Podaj zaokrąglenia liczb z dokładnością do:
 - a) całości: 46,78; 60,76; 230,26; 3,087; 88,718;
 - b) części dziesiątych: 8,37; 17,056; 5,89; 2,049; 35,836;
 - c) części tysięcznych: 34,0365; 8,9677; 6,9999; 25,1414; 48,5858.
- 2 Zapisz w postaci dziesiętnej ułamki zwykłe:

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{7}{14}, \frac{7}{8}, \frac{9}{12}, \frac{14}{40}, \frac{3}{25}, \frac{11}{50}, \frac{6}{400}.$$
- 3 Podaj rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych: $\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}$ z dokładnością do części:
 - a) dziesiątych,
 - b) setnych,
 - c) tysięcznych.
- 4 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.
 - a) $\frac{1}{6} \blacklozenge 0,1666$
 - b) $1\frac{1}{4} \blacklozenge 1,25$
 - c) $2,22 \blacklozenge 2\frac{2}{9}$
 - d) $2\frac{3}{5} \blacklozenge 2,6$
- 5 Uporządkuj rosnąco liczby: $2\frac{1}{3}$; 1,755; $1\frac{3}{4}$; 0,33; $\frac{1}{3}$; 2,333.

W zadaniach 6.–11. podaj wyniki w zaokrągleniu do 1 gr.

- 6 Jeden kilogram chałwy kosztuje 19,50 zł. Ile trzeba zapłacić za:
 - a) 10 dag chałwy,
 - b) 15 dag chałwy,
 - c) 23 dag chałwy?
- 7 Za 1 kg orzechów trzeba zapłacić 26,50 zł. Za 15 dag takich orzechów Ania zapłaciła
 - A. 2,65 zł
 - B. 5,30 zł
 - C. 3,98 zł
 - D. 3,15 zł

- 8 Grześ zebrał jednakowej wielkości 1100 puszek po napojach. W punkcie skupu otrzymał za nie 30,47 zł. Według cennika 1 kg puszek miał wartość 2,31 zł.
- Ile pieniędzy uzyskał Grześ za jedną puszkę?
 - Ile – z dokładnością do 1 kg – ważyły puszki zebrane przez Grzesia?
 - Jaka – z dokładnością do 1 g – była masa jednej puszki?
- 9 Michał kupił 24 dag kielbasy szynkowej po 24,75 zł za kilogram, 32 dag parówek po 7,50 zł za kilogram i 0,15 kg pasztetu po 9,40 zł za kilogram. Ile zapłacił?
- 10 Zuzia kupiła 0,21 kg czarnego ryżu po 22,50 zł za kilogram. Ile otrzymała reszty z 20 zł?
Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.
- | | | |
|--------------|--|----------------|
| A. 15,28 zł, | ponieważ kupiony ryż w zaokrągleniu do 0,01 zł kosztował | I. 4 zł 73 gr. |
| B. 15,27 zł, | | II. 4,72 zł. |
- 11 Samochód pani Zofii spala średnio 7,5 l benzyny na 100 km. Jeden litr benzyny kosztuje 5,39 zł. Ile trzeba zapłacić za benzynę potrzebną do przejechania 200 km?



A to ciekawe!

Iloraz obwodu koła przez długość jego średnicy jest wartością stałą, czyli nie zależy od wyboru koła.

W Papirusie Rhinda (czytamy: rajnda), który powstał ok. 1650 roku p.n.e., wartość tej stałej przedstawiono jako iloraz liczby 256 przez liczbę 81. Dokładniejszą wartość równą ilorazowi liczby 22 przez liczbę 7 podał Archimedes w III wieku p.n.e.

W 1706 roku William Jones (czytamy: tyliam džons) do oznaczenia tej stałej użył symbolu π (czytamy: pi).

$$\frac{\text{obwód koła}}{\text{długość średnicy koła}} = \pi = 3,1415926535\dots$$

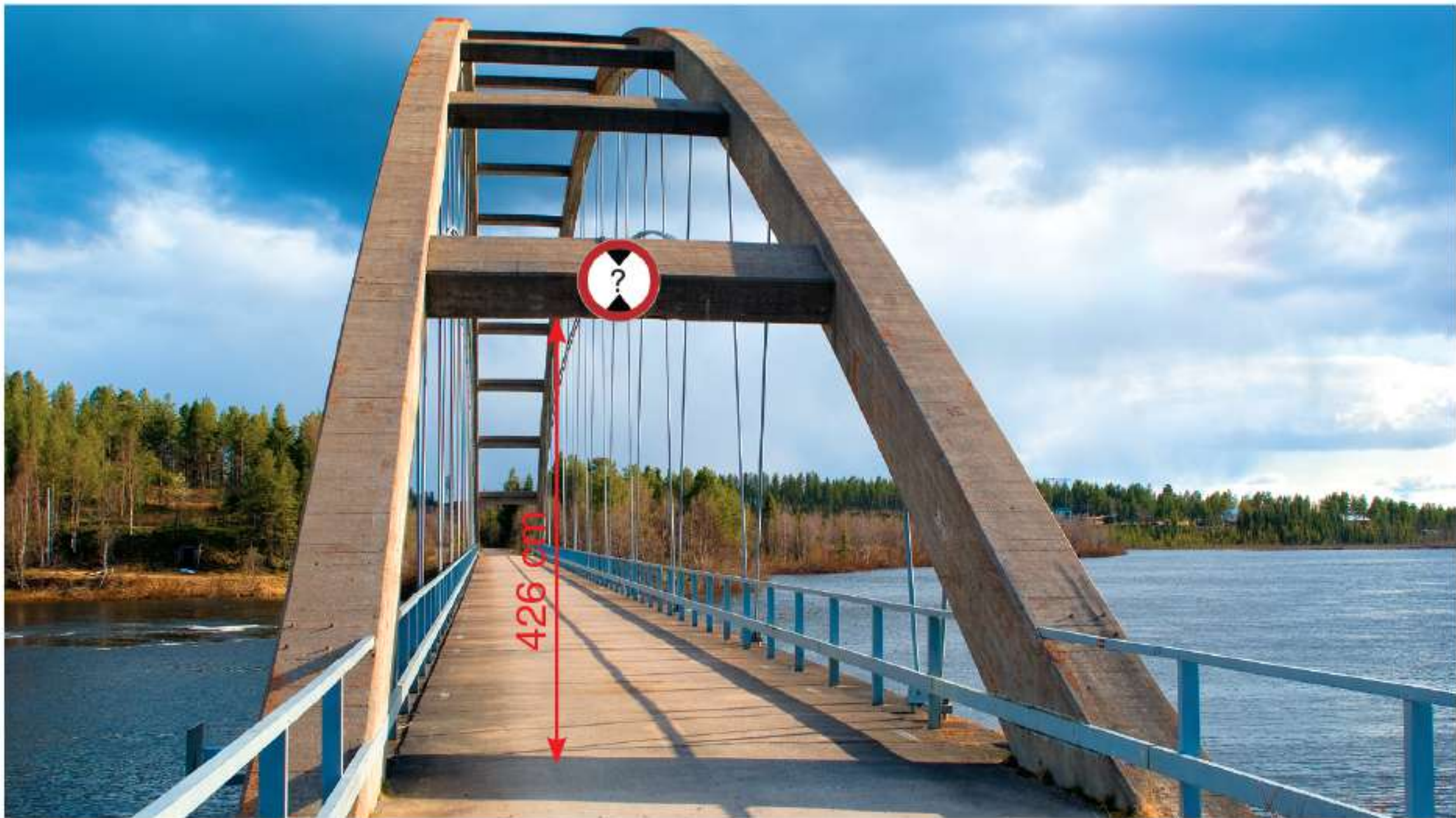
Podaj zaokrąglenia liczby π , ilorazu liczby 256 przez liczbę 81 i ilorazu liczby 22 przez liczbę 7 z dokładnością do części setnych.



Archimedes

Wyzwanie

Przed tunelami i wiaduktami są ustawiane znaki zakazu wjazdu pojazdów o wysokości ponad podaną liczbę metrów. Wysokość jest podawana w metrach z dokładnością do części dziesiątych. Na znaku podaje się wartość o 0,5 m mniejszą od wysokości wiaduktu nad jezdnią. Jaką liczbę należałoby umieścić na tym znaku?



Sprawdź się!

- 1 Zapisz w postaci dziesiętnej ułamki: $\frac{3}{4}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{5}{11}$.
- 2 Która liczba jest mniejsza:
a) $\frac{5}{6}$ czy 0,83, b) $\frac{3}{7}$ czy 0,43?
- 3 Zaokrąglenie do części tysięcznych ułamka $\frac{5}{9}$ to
A. 0,56 B. 0,6 C. 0,555 D. 0,556
- 4 Motocykl pana Jana spala średnio 3,8 l benzyny na 100 km. Jeden litr benzyny kosztuje 5,27 zł. Ile będzie kosztowała benzyna potrzebna do przejechania tym motocyklem 450 km?
- 5 Patrycja za kwotę 1000 zł kupiła dolary. Ile dolarów otrzymała, jeżeli średni kurs dolara wynosił 3,8198 zł? Wynik podaj w zaokrągleniu do całości.



6. Działania na ułamkach



Sowa uczy

Jeżeli w wyrażeniu arytmetycznym występują ułamki zwykłe i dziesiętne, to możemy obliczyć wartość tego wyrażenia wtedy, gdy wszystkie występujące w nim ułamki zapiszemy w postaci zwykłej albo dziesiętnej.

Przykład 1.

Obliczmy: $\frac{7}{8} + 0,3$.

Sposób I

Zapiszmy $\frac{7}{8}$ w postaci dziesiętnej.

$$7 : 8 = 0,875$$

$$\frac{7}{8} + 0,3 = 0,875 + 0,3 = 1,175$$

Sposób II

Zamieńmy 0,3 na ułamek zwykły.

Wspólnym mianownikiem dla 8 i 10 jest liczba 40.

$$\frac{7}{8} + 0,3 = \frac{7}{8} + \frac{3}{10} = \frac{35}{40} + \frac{12}{40} = \frac{47}{40} = 1\frac{7}{40}$$

Sprawdźmy, czy w obu przypadkach otrzymaliśmy taki sam wynik.

$$1,175 = 1\frac{175}{1000} = 1\frac{7}{40}$$

$$1\frac{7}{40} = 1\frac{7 \cdot 25}{40 \cdot 25} = 1\frac{175}{1000} = 1,175$$

Rozszerzamy ułamek przez 25.

Jeżeli ułamki zwykłe występujące w działaniu mają skończone rozwinięcia dziesiętne, to aby otrzymać dokładny wynik działania, obliczenia możemy wykonywać zarówno na ułamkach zwykłych, jak i dziesiętnych.



Przykład 2.

Obliczmy: $\frac{5}{6} \cdot 0,25$.

Sposób I

Wykonajmy działanie na ułamkach zwykłych.

$$\frac{5}{6} \cdot 0,25 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$$

Sposób II

Wykonajmy działanie na ułamkach dziesiętnych.

Ułamek $\frac{5}{6}$ można przedstawić w postaci dziesiętnej tylko w zaokrągleniu, np. do części setnych: $\frac{5}{6} \approx 0,83$.

Wobec tego wartość wyrażenia też otrzymamy w zaokrągleniu.

$$\frac{5}{6} \cdot 0,25 \approx 0,83 \cdot 0,25 = 0,2075$$

Gdy wykonywaliśmy obliczenia na ułamkach zwykłych, otrzymaliśmy wynik dokładny, a na ułamkach dziesiętnych – w zaokrągleniu.

Przykład 3.

Obliczmy dokładną wartość wyrażenia $(2\frac{2}{3} - 1,75) : 1\frac{5}{6} + 4\frac{3}{8}$.

Ponieważ ułamki zwykłe $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{6}$ nie mają rozwinięcia dziesiętnego skończonego, obliczenia trzeba wykonać na ułamkach zwykłych.

Ustalmy kolejność wykonywania działań i wykonajmy każde z nich osobno.

$$(2\frac{2}{3} - 1,75) : 1\frac{5}{6} + 4\frac{3}{8}$$

$$1. \quad 2\frac{2}{3} - 1,75 = 2\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4} = 2\frac{8}{12} - 1\frac{9}{12} = \frac{11}{12}$$

$$2. \quad \frac{11}{12} : 1\frac{5}{6} = \frac{11}{12} : \frac{11}{6} = \frac{11}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{1}{2}$$

$$3. \quad \frac{1}{2} + 4\frac{3}{8} = \frac{4}{8} + 4\frac{3}{8} = 4\frac{7}{8} = 4,875$$

Wartością wyrażenia jest $4\frac{7}{8} = 4,875$.

1 Oblicz.

a) $\frac{1}{2} + 1,5$

b) $2,4 \cdot \frac{3}{8}$

c) $(0,5)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$3,2 - 1\frac{1}{3}$

$2\frac{3}{4} : 2,75$

$(0,1)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^2$

$\left(0,2 + \frac{1}{2}\right)^2$

$\left(6\frac{1}{5} - 5,94\right)^2$

$(1,4)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2$

2 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $12\frac{1}{2} : \frac{1}{5} \cdot 2,5$

b) $5,7 : \left(5\frac{3}{7} - 3,8\right)$

$2,5 \cdot 4\frac{1}{2} - 5\frac{17}{20} : 0,9$

$3 \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot (0,5)^3$

3 Liczba 7 **nie jest** rozwiązaniem równania

A. $(2x + 2,1) : 5 = 3,22$

B. $\frac{1}{3}x + 3,7 = 6$

C. $\frac{3x + 4,5}{0,5} = 51$

D. $\frac{1}{5}(4x - 6,2) = 4,36$

4 Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenia.

a) $2\frac{1}{3} \cdot a = 0,7$

b) $2\frac{5}{6} + x = 3,5 : 0,5$

c) $\frac{3d}{4} = 1\frac{3}{4}$

$2,5 - b = 1\frac{5}{6}$

$2,7 : y = 1\frac{3}{4} - 0,85$

$\frac{w-3}{2} = 4,9 \cdot \frac{5}{7}$

5 Masa skrzynki z jabłkami jest równa $5\frac{3}{4}$ kg. Masa skrzynki to 1,85 kg. Ile wynosi masa jabłek?

6 Narysuj równoległobok o bokach $10\frac{3}{5}$ cm i 3,8 cm oraz kącie między bokami 60° . Oblicz obwód tego równoległoboku.

7 Ogon niedźwiedzia ma długość $\frac{1}{20}$ m, a jego ciało jest o 1,15 m dłuższe.

Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

Ogon niedźwiedzia ma długość A / B.

A. 20 cm

B. 0,5 dm

Ciało niedźwiedzia ma długość C / D.

C. 1,2 m

D. 135 cm



niedźwiedź brunatny

8 Oblicz średnią arytmetyczną liczb.

a) 5,5; $7\frac{3}{4}$; 4

b) 1,75; $2\frac{1}{4}$; 2; $1\frac{5}{6}$; $2\frac{1}{6}$

Skorzystaj z podanych informacji i rozwiąż zadania 9.–11.

W tabelce znajdują się informacje o głębokościach, na których znaleziono wymienione zwierzęta. Dla porównania William Trubridge (czytamy: trubrydż) podczas nurkowania na wstrzymanym oddechu w 2016 roku zszedł na głębokość 122 m.

				
ZWIERZĘ	krewetka	jeżowiec	rozgwiezda	ukwiał
GŁĘBOKOŚĆ	6373 m	7340 m	9,99 km	10 770 m

- 9 Ukwiał znaleziono głębiej niż rozgwiezdę
 A. o 760 m. B. o $\frac{39}{50}$ km. C. o 720 m. D. o $\frac{4}{5}$ km.
- 10 O ile kilometrów bliżej powierzchni morza znaleziono jeżowca niż rozgwiezdę? Wynik podaj w kilometrach w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego i ułamka dziesiętnego.
- 11 Ile razy większa jest głębokość, na której znaleziono krewetkę, niż głębokość, na którą w 2016 roku zszedł William Trubridge? Wynik podaj w zaokrągleniu do jedności.
- 12 Oblicz, ile jest liczb pierwszych wśród liczb od 1 do 1000, jeśli stanowią one $\frac{21}{125}$ wszystkich tych liczb.
- 13 Liczba 4,8 pomniejszona o $\frac{2}{3}$ liczby 1,8 to
 A. 1,2 B. $3\frac{3}{5}$ C. $2\frac{3}{5}$ D. 6
- 14 Po okresie promocji cenę roweru górskiego podwyższono o $\frac{1}{5}$ jego ceny promocyjnej i wtedy kosztował 1020,60 zł. Jaka była cena promocyjna roweru?
- 15 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
 a) $0,75 : \frac{1}{3} + 1,28 : 0,04 - 2\frac{1}{4} \cdot (3,5 - 2\frac{1}{3}) + 1,65$
 b) $(2,5 - 1\frac{2}{3}) : 1\frac{7}{8} - (\frac{1}{3})^2 + 1,25 : 0,05 - 16,8$
 c) $1\frac{1}{4} : 0,5 + 0,954 : 0,09 - 3\frac{1}{2} \cdot (2\frac{7}{8} - 1,275) + 2,6$



- 16** Marcin kupił 0,4 kg pierwszych wiosennych truskawek. Zapłacił za nie 6 zł. W sezonie cena zmniejszyła się o $\frac{2}{3}$ ceny wiosennej. Ile Marcin zapłacił za 2 kg truskawek w sezonie?
- 17** Sebastian ma 120 zł oszczędności, a jego siostra Ania 0,5 tej kwoty. Gdyby Ania otrzymała od Sebastiana $\frac{1}{4}$ jego oszczędności, wówczas mieliby po równo. Po ile pieniędzy miałyby dzieci? O jaką część wzrosłyby wtedy oszczędności Ani?
- 18** Maryla podzieliła się przygotowanymi przez siebie konfiturami. Rodzicom Diany dała 0,5 zrobionych słoików, Gilbertowi połowę pozostałych, a $\frac{1}{3}$ reszty zapasów – Józsi. Wtedy okazało się, że w spiżarni jest jeszcze 8 słoików konfitur. Ile słoików konfitur przygotowała Maryla? Czy wiesz, z jakiej powieści są postacie występujące w tym zadaniu?
- 19** W klasie Julki liczba chłopców jest równa wartości wyrażenia: $\left(\frac{1}{2} \cdot 1,8 + 2,8 : 1\frac{3}{4}\right) \cdot 7,2 - 2$ i stanowi $\frac{4}{7}$ liczby uczniów tej klasy. W samorządzie klasowym jest co ósmy chłopak i co druga dziewczyna. Czworo uczniów ma zdolności plastyczne. Ile dziewcząt i ilu chłopców należy do samorządu klasowego? Jaka część uczniów tej klasy ma zdolności plastyczne?



Sprawdź się!

- 1** **Nieprawdą** jest, że
 A. $2,75 = 2\frac{3}{4}$ B. $1,6 > 1\frac{2}{5}$ C. $\frac{7}{20} < 0,38$ D. $3,18 > 3\frac{9}{25}$
- 2** Oblicz.
 a) $2,75 + 3\frac{1}{2}$ b) $4\frac{1}{5} - 2,15$ c) $2\frac{1}{3} \cdot 1,2$ d) $2,4 : 1\frac{5}{7}$
- 3** Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
 a) $2\frac{1}{2} \cdot 1,3 + 4\frac{7}{8} : 1,25$ b) $\left(5\frac{1}{4} - 5,05\right)^2 - \frac{1}{25}$
- 4** Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.
 a) $\frac{1}{4}c - 0,8 = 2,2$ b) $\frac{z+6}{3} = 3,4$
- 5** Paweł kupił za 35 zł bilet na mecz siatkówki i wydał na niego $\frac{1}{3}$ swoich oszczędności. Za 0,3 oszczędności kupił pizzę. Ile oszczędności miał Paweł? Ile Paweł zapłacił za pizzę?

7. Droga, prędkość i czas



Sowa przypomina

- Jednostki prędkości**

$1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ – czytamy: 1 kilometr na godzinę.

$1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ – czytamy: 1 metr na sekundę.

- Obliczanie drogi, gdy znamy czas i prędkość**

Czas jazdy: 3 h. Prędkość: $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



$$\text{Droga: } 3 \cdot 18 = 54 \text{ [km].}$$

- Obliczanie prędkości, gdy znamy drogę i czas**

Droga: 200 km. Czas: 4 h.



$$\text{Prędkość: } 200 : 4 = \frac{200}{4} = 50 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right].$$

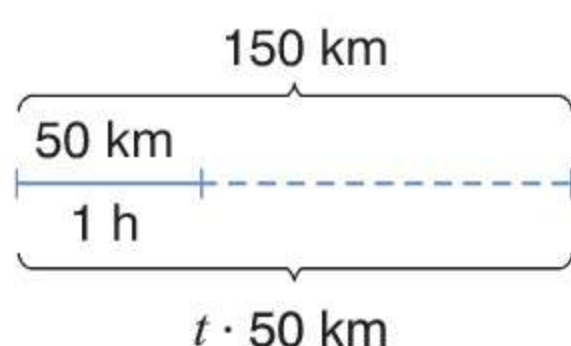
Przykład 1.

Pan Jan planuje wyjazd samochodem do miejscowości oddalonej o 150 km. Przewiduje, że będzie jechać z prędkością średnią $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

O której godzinie pan Jan musi wyjechać z domu,

aby być na miejscu o godzinie 12.30?

Liczbę godzin podróży oznaczmy literą t .



$$t \cdot 50 = 150$$

$$150 : 50 = 3$$

$$t = 3$$

Podróż samochodem powinna trwać 3 godziny.

$$12.30 - 3 = 9.30$$

Odpowiedź. Pan Jan musi wyjechać z domu najpóźniej o godzinie 9.30.



Przykład 2.

Maratończyk biegnie z prędkością około $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ile kilometrów mógłby przebiec w czasie 1 godziny, gdyby biegł cały czas z taką prędkością? Podaj tę prędkość w $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Jeżeli maratończyk w czasie 1 sekundy przebiega 6 m, to w czasie 1 godziny przebiegnie 3600 razy więcej, bo $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$.

$$6 \cdot 3600 = 21\,600 \text{ [m]}$$

Jeżeli maratończyk w czasie 1 godziny przebiega 21 600 m, to w kilometrach przebiegnie:

$$21\,600 \text{ m} = 21,600 \text{ km, więc:}$$

$$6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 21,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Odpowiedź. Gdyby maratończyk biegł cały czas z prędkością $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, to w czasie 1 godziny mógłby przebiec 21,6 km.

**Przykład 3.**

Samolot odrzutowy może rozwinąć prędkość około $3906 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile mniej więcej metrów może przelecieć ten samolot w czasie 1 minuty, a ile w czasie 1 sekundy?

Sposób I

W czasie 1 h samolot przelatuje 3 906 000 m.

$$3906 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 3\,906\,000 \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

W czasie 1 min samolot przelatuje 60 razy mniej niż w czasie 1 h.

$$3\,906\,000 : 60 = 65\,100$$

$$3\,906\,000 \frac{\text{m}}{\text{h}} = 65\,100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

W czasie 1 s samolot przelatuje 60 razy mniej niż w czasie 1 min.

$$65\,100 : 60 = 1085$$

$$3906 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 65\,100 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 1085 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sposób II

$$3906 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 3906 \frac{1000 \text{ m}}{\text{h}} = 3\,906\,000 \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

$$3\,906\,000 \frac{\text{m}}{\text{h}} = \overset{65\,100}{\cancel{3\,906\,000}} \frac{\text{m}}{\cancel{60} \underset{1}{\text{min}}} = 65\,100 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$$65\,100 \frac{\text{m}}{\text{min}} = \overset{1085}{\cancel{65\,100}} \frac{\text{m}}{\cancel{60} \underset{1}{\text{s}}} = 1085 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Odpowiedź. Samolot odrzutowy może przelecieć około 65 100 m w czasie 1 minuty, a około 1085 m w czasie 1 sekundy.

Przykład 4.

Samochód wyjechał z Krakowa do Gdańska i jechał z prędkością średnią $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W tym samym czasie inny samochód wyjechał z Gdańska do Krakowa i jechał tą samą drogą o długości 572 km z prędkością średnią $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po jakim czasie i w jakiej odległości od miejsca wyjazdu samochody się minęły?

Wykonajmy rysunek pomocniczy.



W czasie każdej godziny jazdy samochodów odległość między nimi zmniejszała się o $50 \text{ km} + 60 \text{ km} = 110 \text{ km}$.

Samochody minęły się po $572 : 110 = 5,2 \text{ [h]}$, czyli po 5 h 12 min.

Do miejsca spotkania samochody jechały 5,2 h.

Samochód jadący z Krakowa przejechał: $50 \cdot 5,2 = 260 \text{ [km]}$.

Samochód jadący z Gdańska przejechał: $60 \cdot 5,2 = 312 \text{ [km]}$.

Odpowiedź. Samochody minęły się po 5,2 h jazdy w odległości 260 km od Krakowa i 312 km od Gdańska.

Przykład 5.

Rodzice Roberta zaplanowali wycieczkę do odległego o 60 km Sandomierza. Ich samochód zużywa 7 l paliwa na 100 km. Jeden litr paliwa kosztuje 5,30 zł. Ile zapłacą za paliwo na przejazd w obie strony? Do Sandomierza i z powrotem jest: $2 \cdot 60 = 120 \text{ [km]}$.

Sposób I

Obliczmy, ile paliwa potrzeba do przejechania 1 km.

$$7 : 100 = 0,07 \text{ [l]}$$

Obliczmy, ile paliwa potrzeba do przejechania 120 km.

$$120 \cdot 0,07 = 8,4 \text{ [l]}$$

Obliczmy koszt paliwa.

$$8,4 \cdot 5,30 = 44,52 \text{ [zł]}$$



Sandomierz

Sposób II

Droga: $120 \text{ km} = 100 \text{ km} + 20 \text{ km}$.

20 km to 5 razy mniej niż 100 km, paliwa też potrzeba 5 razy mniej.

Droga	100 km	20 km	120 km
Zużyte paliwo	7 l	$7 : 5 = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$ [l]	$7 + 1\frac{2}{5} = 8\frac{2}{5} = 8,4$ [l]

Obliczmy koszt paliwa.

$$8,4 \cdot 5,30 = 44,52 \text{ [zł]}$$

Odpowiedź. Za paliwo na przejazd w obie strony trzeba zapłacić 44,52 zł.

- 1 Oblicz w pamięci:
 - a) jaką drogę przejedzie samochód w czasie $\frac{1}{2} \text{ h}$, jeśli będzie jechał z prędkością $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$;
 - b) jaką drogę przebędzie chodźarz w czasie kwadransa, jeśli będzie szedł z prędkością $8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- 2 Pociąg jechał z prędkością średnią $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile kilometrów przejechał w czasie 4 godzin?
- 3 Pani Zofia jechała z prędkością średnią $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przez t godzin. Napisz wyrażenie algebraiczne, które opisuje, jaką drogę przejechała pani Zofia.
- 4 W czasie 3 godzin pan Mateusz przejechał samochodem 162 km. Z jaką prędkością średnią jechał samochód?
- 5 Pan Jan przejechał s km w czasie t h. Napisz wyrażenie algebraiczne, które opisuje, z jaką prędkością średnią jechał pan Jan.
- 6 Z Katowic do Warszawy jest około 300 km. W jakim czasie przebędzie tę drogę pociąg jadący z prędkością średnią $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a w jakim samochód jadący z prędkością średnią $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?



Katowice

- 7 Od domu Tomka do domu jego babci jest 15 km. Ile minut zajęło Tomkowi przejechanie tej drogi na rowerze, jeśli jechał z prędkością średnią $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- 8 Tosia przejechała rowerem s km z prędkością średnią $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Napisz wyrażenie algebraiczne, które opisuje, ile czasu jechała rowerem Tosia.
- 9 Samochód pana Romana spala 7 l benzyny na 100 km. Ile trzeba zapłacić za benzynę potrzebną do przejechania tym samochodem 150 km, jeżeli 1 l benzyny kosztuje 5,50 zł?
- 10 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiednie liczby.
- a) $20 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \blacklozenge \frac{\text{m}}{\text{h}}$ b) $60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \blacklozenge \frac{\text{m}}{\text{h}} = \blacklozenge \frac{\text{m}}{\text{min}}$
- $4000 \frac{\text{m}}{\text{h}} = \blacklozenge \frac{\text{km}}{\text{h}}$ $80 \frac{\text{m}}{\text{min}} = \blacklozenge \frac{\text{m}}{\text{h}} = \blacklozenge \frac{\text{km}}{\text{h}}$



- 11 Podwodne wstrząsy skorupy ziemskiej wywołują w oceanach fale zwane tsunami. Przemieszczają się one z prędkością dochodzącą do $15 \frac{\text{km}}{\text{min}}$. Żaglica pacyficzna może osiągnąć prędkość $108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ na krótkim dystansie. Co może się szybciej przemieszczać: żaglica czy fale tsunami?



żaglica pacyficzna

- 12 Najszybszym drapieżnikiem wśród ptaków jest sokół wędrowny, który w locie poziomym osiąga prędkość ok. $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a pionowo nurkuje z prędkością dochodzącą nawet do $400 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



sokół wędrowny

- a) Jaką prędkość w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ w zaokrągleniu do części dziesiątych osiąga sokół wędrowny podczas lotu pionowego?
- b) Sokół leciał poziomo z prędkością maksymalną przez 2 s. Ile metrów przeleciał w tym czasie? Wynik podaj z dokładnością do 1 m.
- c) Ile minut potrzebuje sokół, aby w locie poziomym przelecieć 5 km?

- 13** Przyjmijmy, że dźwięk rozchodzi się z prędkością $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Lwy słyszą pomruki innych lwów z odległości około 3 km, a ryki bizonów są słyszalne dla innych bizonów z odległości 6 km.



- a) Po jakim czasie od wydania głosu przez jednego lwa usłyszy go drugi lew z odległości 2,550 km?
- b) Po jakim czasie od wydania ryku przez jednego bizona usłyszy go drugi bizon, który znajduje się w odległości 6 km od niego? Wynik podaj z dokładnością do dziesiątych części sekundy.
- 14** Droga z Mysłowic do Bydgoszczy ma około 440 km długości.
- a) W jakim czasie pokonałby tę drogę autobus jadący z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- b) W jakim czasie można byłoby przejechać tę drogę z prędkością $110 \frac{\text{km}}{\text{h}}$? O ile to godzin i minut krócej niż jazda autobusem?
- 15** Pan Jan drogę długości 60 km pokonał rowerem w ciągu 4 h. Jego brat Krzysztof tę samą drogę przejechał skuterem w czasie 2 razy krótszym. Pan Krzysztof jechał z prędkością średnią
- A. $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ B. $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ C. $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ D. $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- 16** Z jaką prędkością średnią jechał motocyklista, który drogę o długości 150 km przejechał w 3 godziny?
- 17** Pani Edyta wyjechała z Mysłowic do Bydgoszczy i jechała z prędkością średnią $55 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Pani Ewa wyjechała z Bydgoszczy do Mysłowic o tej samej godzinie. Jechała z prędkością średnią $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Obie panie jechały tą samą drogą o długości 440 km. O ile zmniejszy się odległość między paniami po 2 godzinach jazdy?
- 18** Motocyklista wyjechał z Bydgoszczy i jechał do Koła drogą o długości 150 km z prędkością średnią $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O tej samej godzinie z Koła wyjechał do Bydgoszczy kolarz i jechał tą samą drogą co motocyklista z prędkością średnią $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po jakim czasie i w jakiej odległości od Bydgoszczy miną się kolarz i motocyklista?



Bydgoszcz

Na podstawie poniższych informacji rozwiąż zadania 19.–21.

Samochód pana Darka spala 9,5 l paliwa na 100 km. Włączenie klimatyzacji w samochodzie zwiększa zużycie paliwa o 1 l na każde 100 km.

- 19** Pan Darek przejechał 2550 km bez włączonej klimatyzacji. Ile zapłacił za paliwo, jeżeli 1 l kosztował 5,40 zł?
- 20** W trzecim kwartale roku pan Darek przejechał 36 000 km z włączoną klimatyzacją. O ile mniej benzyny zużyłby samochód pana Darka, gdyby nie miał włączonej klimatyzacji?
- 21** Pani Jola przejechała 1800 km. Jej samochód spalił 126 l paliwa w czasie jazdy. Czyj samochód spala więcej paliwa: pani Joli czy pana Darka?
- 22** Kombajn zbożowy kosi na szerokość 5 m. Porusza się z prędkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ile czasu trzeba kosić pole w kształcie prostokąta o wymiarach $500 \text{ m} \times 100 \text{ m}$, jeżeli pominiemy czas potrzebny na zawracanie kombajnem?
- 23** Pan Grzegorz ma pług o wydajności $1,5 \frac{\text{ha}}{\text{h}}$, czyli w czasie 1 godziny może nim zaorać 1,5 ha ziemi. Jego sąsiad Janek ma pług o wydajności $2 \frac{\text{ha}}{\text{h}}$. Pan Grzegorz miał zaorać 5 ha ziemi, a pan Janek – 7 ha. Który z panów wcześniej skończył pracę? Odpowiedź uzasadnij.



A to ciekawe!

Prędkość rozchodzenia się światła wynosi około $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Od najbliższej gwiazdy, położonej dalej od Ziemi niż Słońce, światło biegnie do Ziemi aż 4 lata. Ile kilometrów od Ziemi znajduje się ta gwiazda?





Wyzwanie

Stentor to starożytny bohater słynący z potężnego głosu – stąd powiedzenie *głos stentorowy*. Przypuśćmy, że masz głos stentorowy i wołasz kolegę z odległości 3400 m. Po jakim czasie usłyszałby cię kolega, jeżeli przyjmiesz, że głos rozchodzi się z prędkością $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?



Sprawdź się!

- 1 Ile czasu na przejechanie drogi o długości 100 km potrzebuje rowerzysta jadący z prędkością średnią $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- 2 Jaka jest długość drogi łączącej Dalachów z Załęczem Wielkim, jeżeli turysta idący z prędkością średnią $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pokonuje ją w ciągu 1,5 h?
- 3 Trasę długości 135 km śmigłowiec przeleciał w czasie 45 minut. Z jaką prędkością średnią leciał śmigłowiec?

- 4 Pani Helena jechała z Wałbrzycha do Poznania. Trasę długości 264 km przejechała w czasie 4 h samochodem, który spala 8 l benzyny na 100 km.

Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

Prędkość średnia samochodu była równa A / B.



Wałbrzych – zamek Książ

A. $66 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

B. $86 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

W czasie jazdy samochód spalił ponad C / D benzyny.

C. 21 l

D. 22 l

- 5 Tornado o prędkości $450 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ przeszło 2 IV 1958 roku nad miastem Wichita Falls (czytamy: liczita fols) w stanie Teksas w USA. Prędkość tornada była równa

A. $45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

B. $125 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

C. $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

D. $120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



Zadania utrwalające

- 1 Oblicz w pamięci lub sposobem pisemnym.

a) $0,8 \cdot 0,03$	b) $0,012 : 0,004$	c) $0,009 : 0,03$
d) $0,004 \cdot 0,65$	e) $16 \cdot 2,9 \cdot 7,4$	f) $0,856 : 0,016 : 0,5$
- 2 Oblicz.

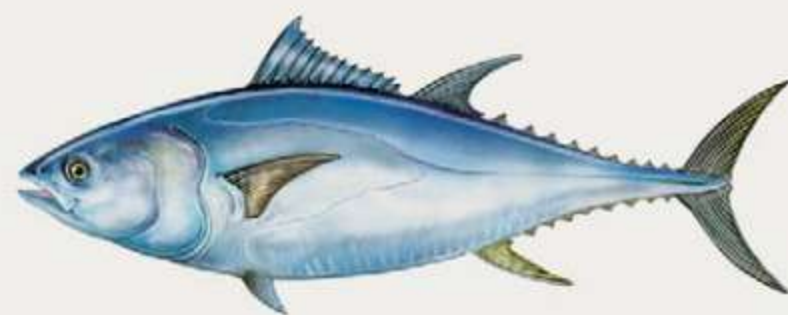
a) $1\frac{1}{7} \cdot 1\frac{3}{4}$	b) $2\frac{1}{3} : 3,2$	c) $5,12 : (5 - 2,44)$
$1\frac{1}{3} : 12$	$1,04 \cdot 3\frac{1}{8}$	$2^3 + (3\frac{1}{5} - 1\frac{1}{3})$
$3\frac{1}{6} - 1,4$	$5,75 + 1\frac{3}{5}$	$13,5 - 3\frac{1}{2} : 5,25$
- 3 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $(\frac{1}{3})^2 + \frac{3}{7} \cdot 2,1 - \frac{2}{3} \cdot (2,25 : 2,5)$	b) $1\frac{5}{7} \cdot (0,28 : 0,4) - (0,1)^2 + 0,9 : 2\frac{1}{4}$
---	---
- 4 Ułamki dziesiętne: 0,85; 2,75; 1,125 przedstaw w postaci ułamków zwykłych nieskracalnych lub w postaci liczb mieszanych.
- 5 Ułamki: $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{10}{11}$; $\frac{16}{32}$ przedstaw w postaci dziesiętnej skończonej lub w zaokrągleniu do części setnych.
- 6 Podaj zaokrąglenie ułamka z dokładnością do części setnych.

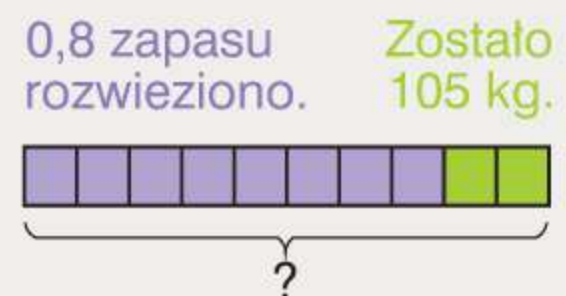
a) 0,135	b) 7,408	c) 18,014
----------	----------	-----------
- 7 W każdym miesiącu pani Zofia otrzymywała na konto pensję w wysokości 2730 zł. W grudniu pani Zofia otrzymała nagrodę i na jej konto wpłynęła kwota o $\frac{2}{3}$ większa niż zwykle. Ile pieniędzy otrzymała pani Zofia w grudniu?
- 8 Tuńczyk może osiągnąć prędkość $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, kiedy ściga swoją ofiarę. Jaką odległość pokonałby, gdyby płynął z taką prędkością przez 15 minut?
- 9 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.

a) $1,8 \cdot c = 5,85$	b) $\frac{1}{3}p + 2,15 = 2\frac{1}{4}$	c) $\frac{6,5 - m}{2} = 3$
-------------------------	---	----------------------------
- 10 Zamiast ♦ napisz w zeszycie odpowiednie liczby.

a) $545 \text{ m} = \text{♦ km}$	b) $36 \text{ dag} = \text{♦ kg}$	c) $48 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \text{♦} \frac{\text{m}}{\text{min}}$
$15 \text{ cm} = \text{♦ m}$	$7 \text{ g} = \text{♦ kg}$	$25 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{♦} \frac{\text{km}}{\text{h}}$



- 11** Uczniowie uszyli na lekcje WF szarfy w trzech kolorach: żółtym, niebieskim i czerwonym. Wstążki żółtej zużyli $9\frac{1}{5}$ m, wstążki niebieskiej o $1\frac{1}{2}$ m więcej, a wstążki czerwonej o $\frac{3}{4}$ m więcej niż niebieskiej. O ile metrów więcej zużyli wstążki czerwonej niż żółtej?
- 12** Obwód czworokąta jest równy $20\frac{1}{5}$ cm. Dwa boki tego czworokąta mają po 4,3 cm, a trzeci bok ma 5,5 cm. Jaką długość ma czwarty bok tego czworokąta?
- 13** W sklepie „Zwierzaki” sprzedano $5\frac{3}{4}$ kg karmy dla ptaków, a w sklepie „Nasze zwierzęta” 3 razy więcej. Ile karmy dla ptaków sprzedano w obu sklepach razem?
- 14** Pan Jan zarabiał brutto 4285 zł. Na podatki i ubezpieczenia potrącano 0,4 jego pensji. Pensja netto (po odliczeniu potrąceń) była wpłacana na konto pana Jana. Jaką kwotę otrzymywał na konto pan Jan?
- 15** W klasie szóstej jest 24 uczniów, w tym 16 dziewcząt. W zajęciach koła informatycznego uczestniczy 0,75 liczby chłopców i $\frac{1}{8}$ liczby dziewcząt. Ile dziewcząt i ilu chłopców uczestniczy w zajęciach tego koła?
- 16** Z hurtowni rozwieziono do sklepów 0,8 zapasu kasz. Ile kilogramów kasz było w hurtowni na początku, jeżeli po rozwiezieniu zostało 105 kg?



- 17** Halina za 0,6 swoich oszczędności kupiła prezent, który kosztował 72 zł. Ile pieniędzy zostało Halinie?
- 18** Chęć uczestniczenia w wycieczce wyraziło 72 szóstoklasistów, czyli o $\frac{1}{3}$ uczniów mniej niż liczba wszystkich szóstoklasistów w tej szkole. Ilu uczniów uczy się w klasach szóstych tej szkoły?
- 19** Kilogram żółtego sera kosztuje 28,25 zł. Ile trzeba zapłacić za 22 dag tego sera? Cenę podaj w przybliżeniu do 1 gr.
- 20** Pan Adam jednego dnia skosił połowę swoich łąk. Drugiego dnia – połowę tego, co pozostało. Na trzeci dzień zostało mu 6 ha łąki do skoszenia. Ile hektarów łąki ma pan Adam? O ile więcej hektarów łąki skosił pierwszego dnia niż ostatniego?

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- 1 Słonie morskie to najwięksi przedstawiciele fokowatych. Osiągają one długość do $6\frac{1}{2}$ m, czyli
 A. 65 cm B. 650 cm
 C. 625 cm D. 6 m 40 cm
- 2 Który ułamek ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone?
 A. $\frac{3}{50}$ B. $\frac{12}{24}$
 C. $\frac{11}{25}$ D. $\frac{3}{7}$
- 3 Rozwiązaniem równania $3a - 1\frac{3}{4} = 4,85$ jest
 A. $a = 1\frac{2}{5}$ B. $a = 2,2$ C. $a = 1,2$ D. $a = 1$
- 4 Uczniowie klas piątych i szóstych wzięli udział w biegu przełajowym. Trasa klasy piątej miała długość $\frac{3}{5}$ km, a trasa klasy szóstej była o 0,3 km dłuższa i wynosiła
 A. 0,9 km B. 0,8 km C. 0,65 km D. 0,95 km
- 5 Kilogram sernika kosztuje 26,40 zł. Za kawałek sernika, który waży 37 dag, zapłacimy
 A. 9,76 zł B. 9,78 zł C. 9,77 zł D. 9,67 zł
- 6 Kurtka kosztowała 180 zł. Cenę obniżono o $\frac{1}{4}$ jej wartości. Po obniżce kurtka kosztuje
 A. 45 zł B. 130 zł C. 135 zł D. 145 zł
- 7 Obwód prostokąta jest równy 12,8 m i stanowi $\frac{4}{5}$ obwodu kwadratu. Jeden z boków prostokąta ma długość 2,2 m. Obwód kwadratu wynosi
 A. 16 m B. 15,25 m C. 10,24 m D. 15,36 m
- 8 Krok Antka ma długość $\frac{2}{5}$ m, a krok jego ojca jest dłuższy o 0,5 długości kroku Antka.
 Uzupełnij zdanie. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Aby przejść 240 m, Antek musi zrobić A / B kroków, a ojciec C / D kroków.
 A. 600 B. 500 C. 300 D. 400



słoń morski

- 9 Na szkolnym festynie klasy szóste uzyskały ze sprzedaży ciast kwoty: 46,70 zł, 38,40 zł, 40,30 zł. Średnio jedna klasa szósta uzyskała
- A. 62,70 zł B. 41,80 zł C. 31,35 zł D. 125,40 zł
- 10 Samiczka kolibra zniosła jajka o masie 0,365 g i $\frac{3}{8}$ g. O ile mniej niż 1 gram ważyły razem obydwa jajeczka?
- A. O $\frac{1}{4}$ grama. B. O 0,36 grama.
C. O $\frac{1}{2}$ grama. D. O 0,26 grama.



rekin wielorybi

- 11 Największy z rekinów, rekin wielorybi, może osiągnąć długość 18 m. Najmniejsze rekiny zamieszkują wody Pacyfiku. Długość ich ciała to $\frac{1}{120}$ długości ciała rekinów wielorybich. Czy długość ciała najmniejszych rekinów jest równa 15 cm?

Wskaż poprawną odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie I lub II.

TAK,	ponieważ	I. 15 cm to $\frac{1}{120}$ ze 180 cm.
NIE,		II. 15 to liczba 120 razy mniejsza od 1800.

- 12 Pociąg jechał z prędkością średnią $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Przejechał 90 km. Ile czasu jechał ten pociąg?
- A. 45 min B. 1,5 h C. 1 h 3 min D. 30 min
- 13 Uczniowie klas szóstych wykonali na kiermasz charytatywny figurki aniołów i kartki okolicznościowe. Cena jednej kartki była równa 2,40 zł i stanowiła $\frac{3}{5}$ ceny anioła. Ile kosztował anioł?
- A. 3,60 zł B. 3 zł
C. $4\frac{1}{2}$ zł D. 4 zł



- 14 Miara kąta α jest równa 175° i stanowi 1,75 miary kąta β . Kąt β ma miarę
- A. 100° B. 125° C. 200° D. 84°
- 15 Liczba $2\frac{5}{8}$ pomniejszona o $\frac{2}{3}$ liczby $1\frac{1}{5}$ to
- A. $3\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $1\frac{29}{40}$ D. $1\frac{33}{40}$

1. Liczby ujemne



Sowa przypomina

• Liczby ujemne

-2 , czytamy: minus dwa.

Liczby ujemne są mniejsze od zera.

• Liczby przeciwne



Liczby przeciwne na osi liczbowej leżą w jednakowej odległości od zera, po obu stronach zera.

Liczbą przeciwną do liczby 3 jest -3 .

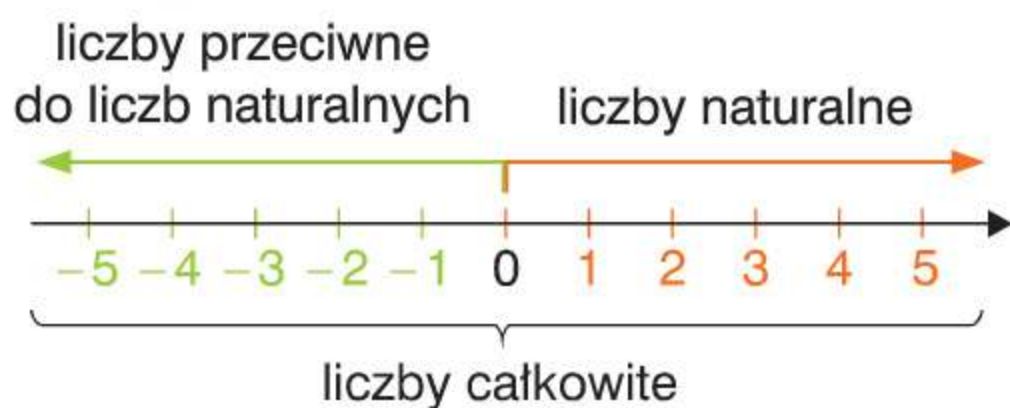
Liczbą przeciwną do liczby dodatniej jest liczba ujemna.

Liczbą przeciwną do liczby -3 jest 3, czyli $-(-3) = 3$.

Liczbą przeciwną do liczby ujemnej jest liczba dodatnia.

↑
Ten znak oznacza liczbę przeciwną.

• Liczby całkowite



Liczby całkowite to liczby naturalne i liczby do nich przeciwne.

Liczby przeciwne do liczb naturalnych (poza 0) są liczbami ujemnymi.

Liczba naturalna 0 nie jest ani dodatnia, ani ujemna.

• Porównywanie liczb całkowitych



$$-5 < 0, \quad -5 < 1, \quad -5 < 4$$

Każda liczba ujemna jest mniejsza od 0 i od każdej liczby dodatniej.

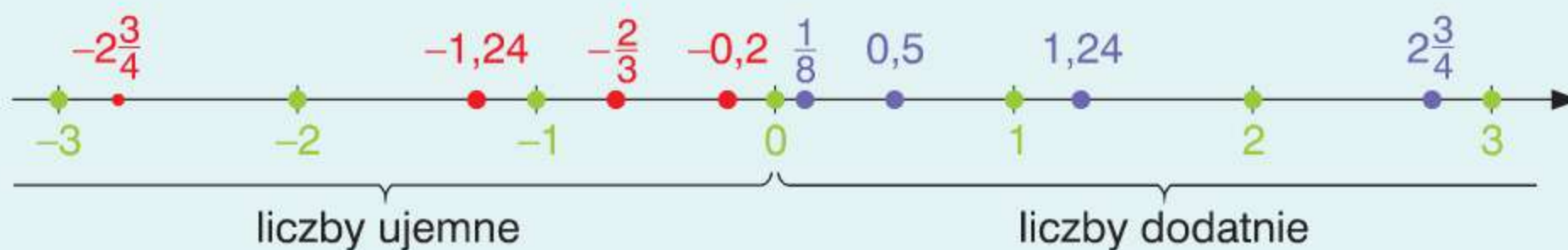
$$-5 < -3, \quad -5 < -1, \quad -3 < -1$$

Z dwóch liczb ujemnych ta jest mniejsza, która leży dalej od zera.



Sowa uczy

Liczby wymierne to liczby **całkowite** wraz z **dodatnimi** i **ujemnymi** ułamkami. Wszystkie zaznaczone na osi liczby to liczby wymierne.



Liczbą przeciwną do liczby $-2\frac{3}{4}$ jest $2\frac{3}{4}$, zatem $-(-2\frac{3}{4}) = 2\frac{3}{4}$.

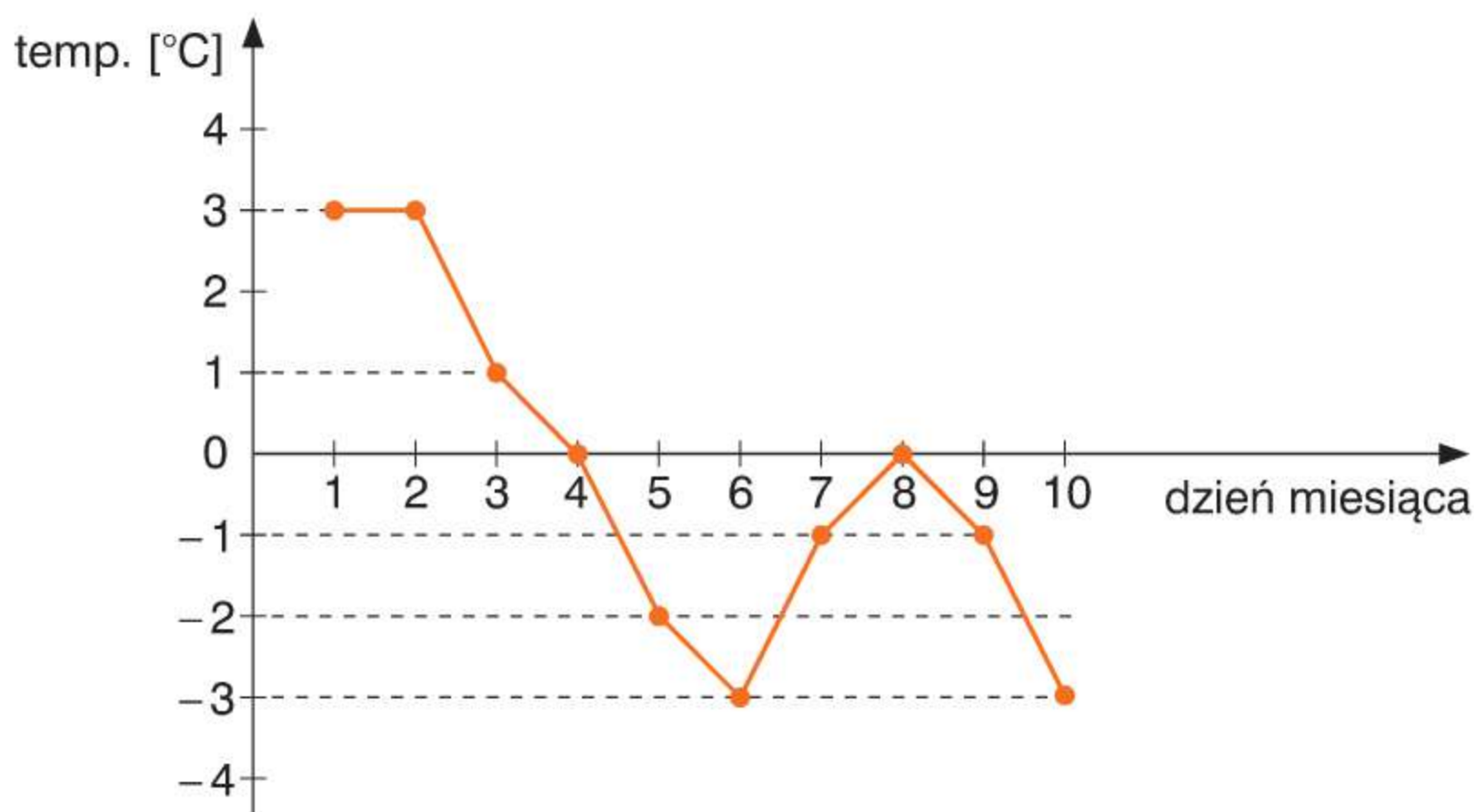
Liczby wymierne porównujemy tak, jak liczby całkowite.

Przykład 1.

Przez 10 kolejnych dni Staś zapisywał temperaturę powietrza.

Dzień miesiąca	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura w °C	3	3	1	0	-2	-3	-1	0	-1	-3

Obserwacje przedstawił na **liniowym wykresie** temperatur.



Z wykresu można np. odczytać, że:

- najwyższa temperatura była pierwszego i drugiego dnia (3°C), a najniższa szóstego i dziesiątego dnia (-3°C);
- temperatury malały od drugiego do szóstego dnia oraz od ósmego do dziesiątego dnia;
- od szóstego do ósmego dnia temperatury rosły.

- 1 Napisz cztery liczby całkowite i cztery liczby ujemne, które nie są całkowite.
- 2 Które spośród liczb: -8 ; $4\frac{2}{5}$; 0 ; $3,7$; -87 ; 4 ; $-5\frac{3}{7}$; $-32,4$ są liczbami:
 - a) naturalnymi,
 - b) całkowitymi,
 - c) wymiernymi dodatnimi,
 - d) wymiernymi ujemnymi?
- 3 Zapisz liczby wymierne wyróżnione na osi liczbowej kolorem w postaci:
 - a) ułamków zwykłych nieskracalnych,
 - b) dziesiętnej.



- 4 Zaznacz podane liczby na osi liczbowej.
 - a) -8 ; 3 ; 0 ; -11 ; -6
 - b) -6 ; $1\frac{1}{2}$; $-2,2$; $-0,5$; $2\frac{2}{5}$
- 5 Napisz trzy liczby mniejsze od -4 i jednocześnie większe od -7 .
- 6 Napisz liczby przeciwne do danych.
 - a) 4 ; -5 ; -10
 - b) $0,8$; $-9,7$; $-\frac{3}{8}$
 - c) $-6\frac{1}{4}$; $2,1$; $-(-4,6)$
- 7 Jaka to liczba?
 - a) $-(-1)$
 - b) $-(-16)$
 - c) $-(-5\frac{1}{2})$
 - d) $-(-7,25)$
- 8 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.
 - a) $-141 \blacklozenge 0$
 - b) $-305 \blacklozenge -306$
 - c) $48 \blacklozenge -51,7$
 - $0 \blacklozenge -86$
 - $-200,1 \blacklozenge -199,8$
 - $-8,6 \blacklozenge -8,1$
- 9 Uporządkuj rosnąco liczby.
 $-10,2$; $-10,08$; $12,9$; $-0,7$; $-9,999$; $-0,077$; $12,89$; -12 ; 0
- 10 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

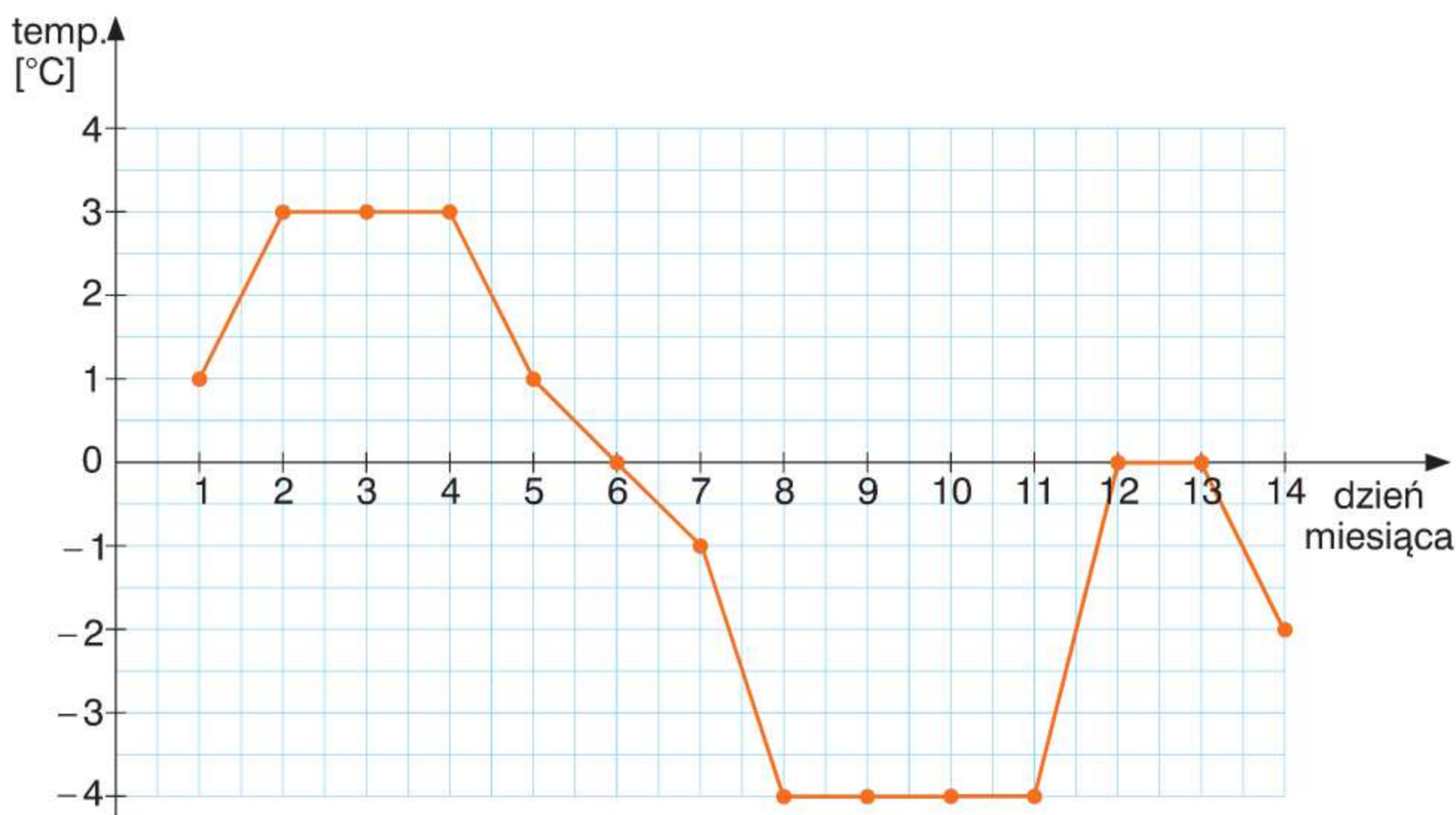
Liczba -5 jest większa od liczby $-\frac{1}{5}$.	P	F
Liczba $-17,7$ jest mniejsza od liczby -7 .	P	F

- 11 W tabelce przedstawiono temperatury powietrza w ciągu 10 dni.

Dzień miesiąca	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperatura w $^{\circ}\text{C}$	3	1	5	2	-1	0	-3	-4	-2	0

- a) Wykonaj liniowy wykres temperatur na podstawie tabelki.
- b) Kiedy temperatura była najwyższa, a kiedy najniższa?

- 12 Kasia zapisywała temperatury powietrza przez dwa pierwsze tygodnie miesiąca i wyniki przedstawiła na wykresie.



- Przedstaw w tabelce temperaturę zaobserwowaną każdego wymienionego dnia.
- Kiedy temperatura była najniższa?
- Kiedy temperatura była równa 0°C ?
- W których dniach temperatury były jednakowe?
- W których dniach temperatury malały?



A to ciekawe!

Liczby ujemne były znane już w VII wieku. Hindusi zapisywali za ich pomocą dług, natomiast bogactwo, własność – za pomocą liczb dodatnich. Jednak dopiero na początku XIX wieku zaczęto powszechnie używać liczb ujemnych.

Podaj trzy przykłady użycia liczb ujemnych.



Wyzwanie

Podaj pięć takich liczb, aby liczby do nich przeciwne były dodatnie, oraz cztery takie liczby, aby liczby do nich przeciwne były ujemne.


Sprawdź się!

1 Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej liczby:

a) -7 , 1 , $\frac{6}{2}$, $-\frac{8}{2}$;

b) $-\frac{1}{4}$, $2,5$, $-3,5$, $-1\frac{3}{8}$.

2 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.

a) $-168 \blacklozenge 3$ b) $0 \blacklozenge -19$ c) $-5\frac{1}{2} \blacklozenge -3\frac{3}{4}$ d) $-8,6 \blacklozenge -(-8,6)$

3 Liczbą przeciwną do liczby -17 jest

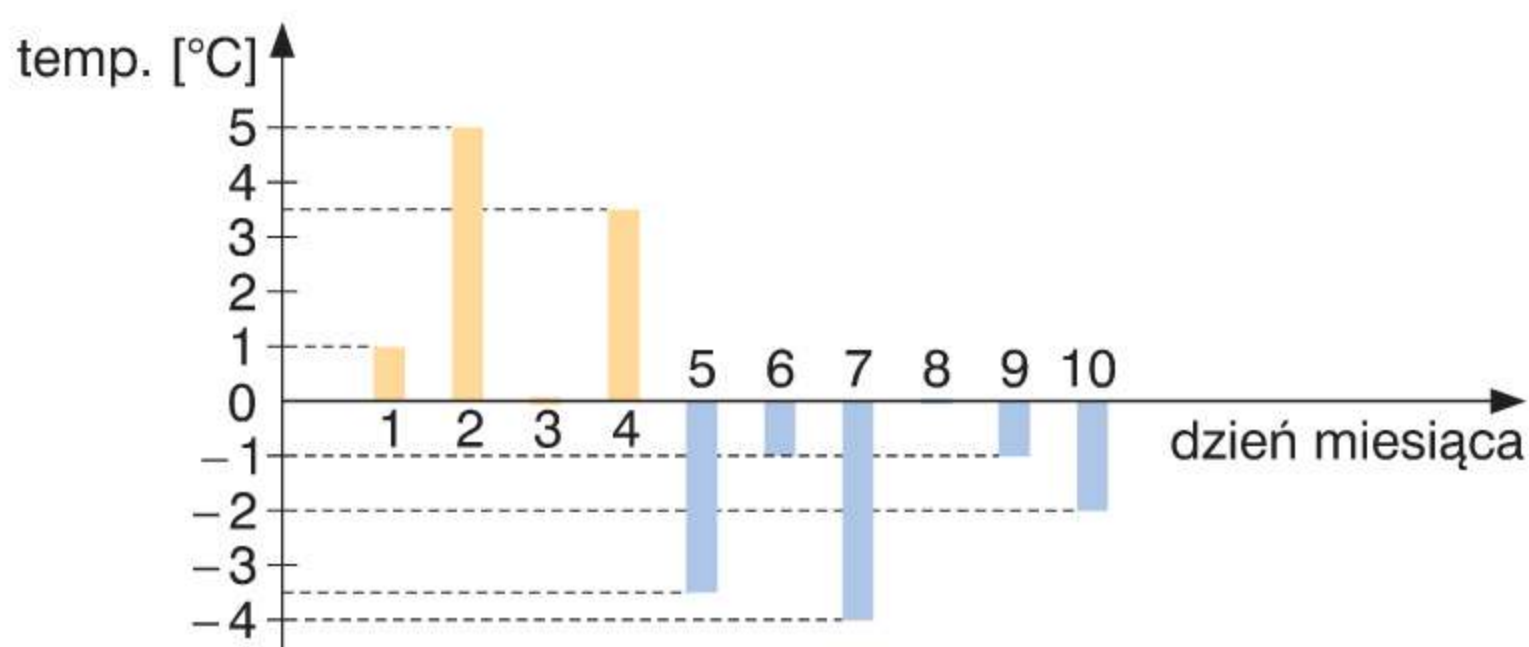
A. $-\frac{1}{17}$

B. $-\frac{170}{10}$

C. 17

D. $\frac{1}{17}$

4 Na diagramie słupkowym przedstawiono wyniki obserwacji temperatur w ciągu pierwszych 10 dni miesiąca.



a) Odczytaj temperaturę zaobserwowaną każdego dnia. Wykonaj wykres liniowy.

b) Którego dnia temperatura była najwyższa, a którego najniższa?

c) Którego dnia temperatura była równa 0°C ?

5 Dane są liczby:

A. $1\frac{1}{2}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-1,2$

Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnym odpowiedziom.

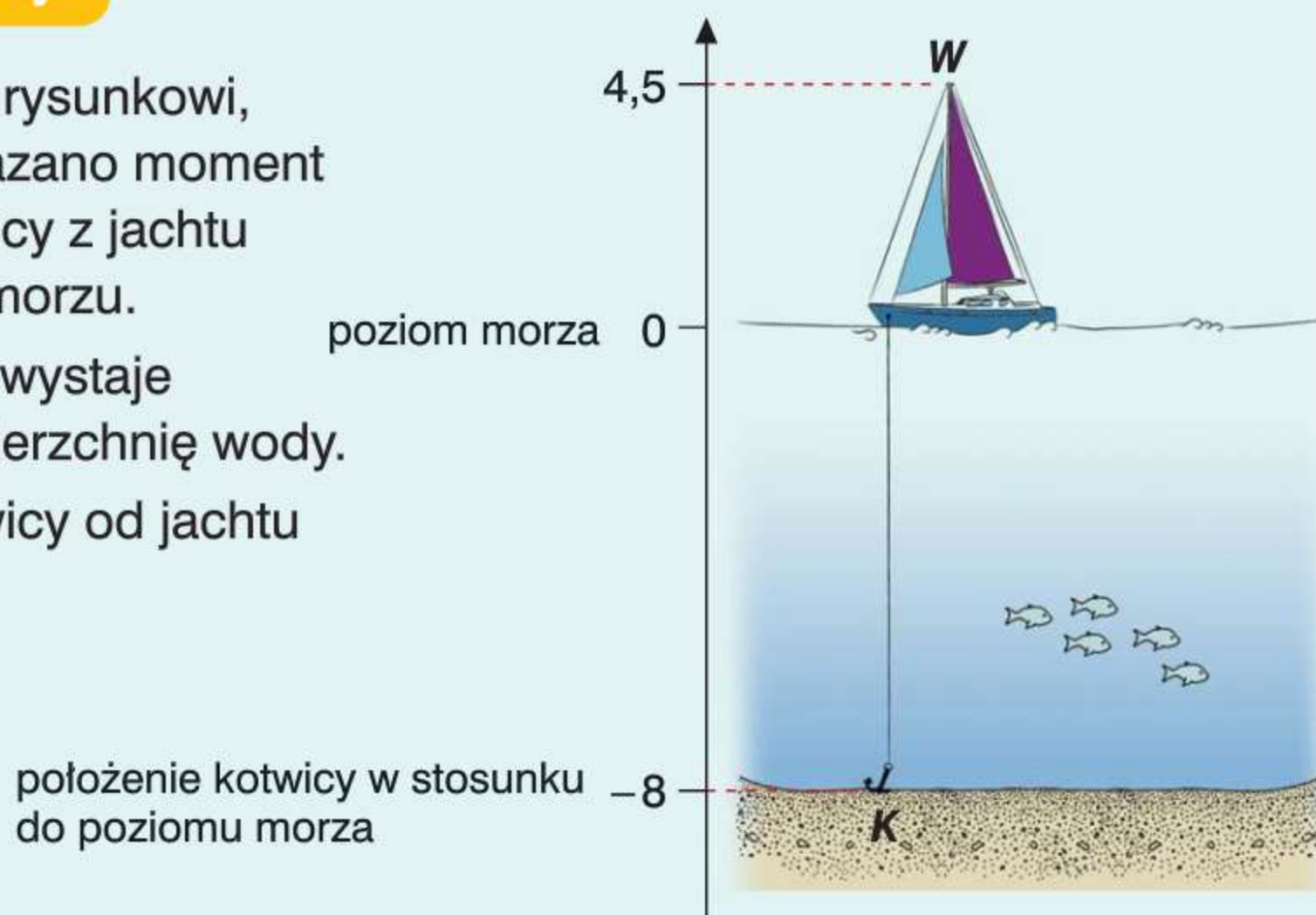
Które liczby są liczbami przeciwnymi?	A	B	C	D
Które liczby są liczbami odwrotnymi?	A	B	C	D
Która liczba jest najmniejsza?	A	B	C	D
Która liczba jest większa od -1 ?	A	B	C	D

2. Wartość bezwzględna liczby



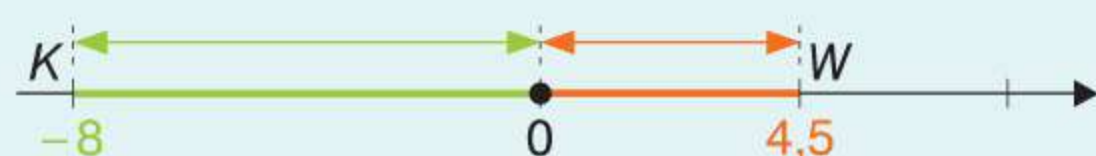
Sowa uczy

Przyjrzyjmy się rysunkowi, na którym pokazano moment zrzucenia kotwicy z jachtu płynącego po morzu. Koniec masztu wystaje 4,5 m nad powierzchnię wody. Odległość kotwicy od jachtu jest równa 8 m.



Liczba określająca położenie kotwicy (punkt K) jest wyrażona liczbą ujemną, bo kotwica znajduje się poniżej poziomu morza, a najwyższy punkt jachtu (punkt W) wyrażony jest liczbą dodatnią.

Na osi liczbowej punkty K i W są po przeciwnych stronach zera.



Odległość punktu K od zera wynosi 8 jednostek, a odległość punktu W od zera wynosi 4,5 jednostki.

Odległość liczby od zera na osi liczbowej nazywamy **wartością bezwzględną** tej liczby.

Wartością bezwzględną liczby -8 jest 8, co zapisujemy: $|-8| = 8$, a czytamy: wartość bezwzględna liczby -8 jest równa 8.

Wartością bezwzględną liczby $4,5$ jest 4,5, co zapisujemy: $|4,5| = 4,5$, a czytamy: wartość bezwzględna liczby $4,5$ jest równa 4,5.

Wartość bezwzględna liczby 0 jest równa 0.

Przykład 1.

Zapiszmy i porównajmy wartości bezwzględne liczb: 5 i -5 , $-6\frac{1}{2}$ i $6\frac{1}{2}$, 10,25 i $-10,25$.

$$|5| = 5$$

$$|-6\frac{1}{2}| = 6\frac{1}{2}$$

$$|10,25| = 10,25$$

$$|-5| = 5$$

$$|6\frac{1}{2}| = 6\frac{1}{2}$$

$$|-10,25| = 10,25$$

$$|5| = |-5|$$

$$|-6\frac{1}{2}| = |6\frac{1}{2}|$$

$$|-10,25| = |10,25|$$



Liczby przeciwne mają równe wartości bezwzględne.

Przykład 2.

Uporządkujmy rosnąco liczby ujemne: -10 ; $-2,4$; $-3\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{5}$, a następnie porównajmy ich wartości bezwzględne.

$$-10 < -3\frac{1}{2} < -2,4 < -\frac{1}{5}$$

$$|-10| = 10; \quad |-3\frac{1}{2}| = 3\frac{1}{2}; \quad |-2,4| = 2,4; \quad |-\frac{1}{5}| = \frac{1}{5}$$

$$\text{Wobec tego: } |-10| > |-3\frac{1}{2}| > |-2,4| > |-\frac{1}{5}|.$$

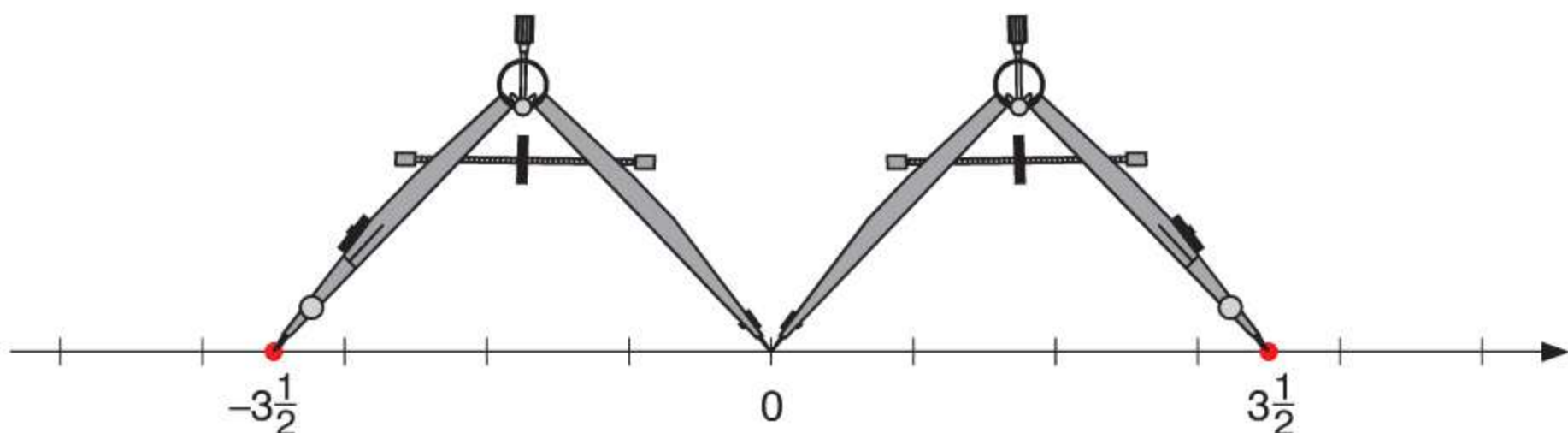


Liczba ujemna jest tym mniejsza, im większa jest jej wartość bezwzględna.

Przykład 3.

Na osi liczbowej zaznaczmy liczbę a taką, że: $|a| = 3\frac{1}{2}$.

Jeżeli wartość bezwzględna liczby jest równa $3\frac{1}{2}$, to leży ona na osi liczbowej w odległości $3\frac{1}{2}$ jednostki od zera.



Są dwie takie liczby $3\frac{1}{2}$ i $-3\frac{1}{2}$, więc $a = -3\frac{1}{2}$ lub $a = 3\frac{1}{2}$.

- 1 Podaj wartości bezwzględne poniższych liczb i podkreśl tę liczbę, która na osi liczbowej znajduje się najdalej od zera.
a) 140; -65; -3; 0; 70; -140 b) $-8\frac{1}{2}$; -3,6; $-5\frac{2}{3}$; $-5\frac{1}{2}$; 6,82; 4,05
- 2 Spośród liczb: -4; 1; -10,5; 3; 4; $10\frac{1}{2}$ wypisz pary liczb, których wartości bezwzględne są równe.
- 3 Która z liczb: 3,8; -100; $-2\frac{1}{2}$; 1 ma najmniejszą wartość bezwzględną? Wskaż poprawną odpowiedź A, B, C lub D i jej uzasadnienie I, II lub III.

A. 3,8,	ponieważ	I. jest to największa liczba spośród podanych.
B. -100,		II. jest to liczba położona najdalej od zera spośród podanych.
C. $-2\frac{1}{2}$,		III. jest to liczba położona najbliżej zera spośród podanych.
D. 1,		

- 4 Napisz trzy pary liczb przeciwnych i podaj ich wartości bezwzględne.
- 5 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.
a) $|-4| \blacklozenge |-5|$ b) $|0| \blacklozenge |-1|$ c) $|24,3| \blacklozenge |-42,5|$
 $|-7| \blacklozenge |2|$ $|3\frac{1}{2}| \blacklozenge |-3\frac{1}{2}|$ $|-6,7| \blacklozenge |6,7|$
 $|\frac{1}{2}| \blacklozenge |-\frac{1}{2}|$ $|-57| \blacklozenge |-58|$ $|16,2| \blacklozenge |16\frac{1}{5}|$
- 6 Które wyrażenie jest większe: $|-2| \cdot 3$ czy $|-15| - |-7|$?
- 7 Na osi liczbowej zaznacz liczbę b taką, że $|b| = 5$.
- 8 Jakie liczby zostały zastąpione przez litery?
 $|a| = 1,2$ $|b| = 390,4$ $|c| = 0,11$ $|d| = |-88,3|$
- 9 Ania przez pół roku mieszkała w Norwegii. W tabelce przedstawiła średnie miesięczne temperatury z tego okresu.

Miesiąc	I	II	III	IV	V	VI
Temperatura [°C]	-2,4	-3,1	-2,2	0,6	3,9	7,5

- a) Wyniki zawarte w tabelce przedstaw na wykresie.
b) Podaj wartości bezwzględne liczb z tabelki.

**Wyzwanie**

Napisz dwie liczby całkowite i dwie takie, które nie są całkowite, o wartości bezwzględnej mniejszej od 6.

**Sprawdź się!**

- 1 Jakie liczby wymierne wyróżniono kolorem na osi liczbowej?



- 2 Wartość bezwzględna której liczby jest inna niż wartości bezwzględne trzech pozostałych liczb?

A. $-2\frac{4}{5}$ B. $-\frac{24}{10}$ C. 2,8 D. $-\frac{14}{5}$

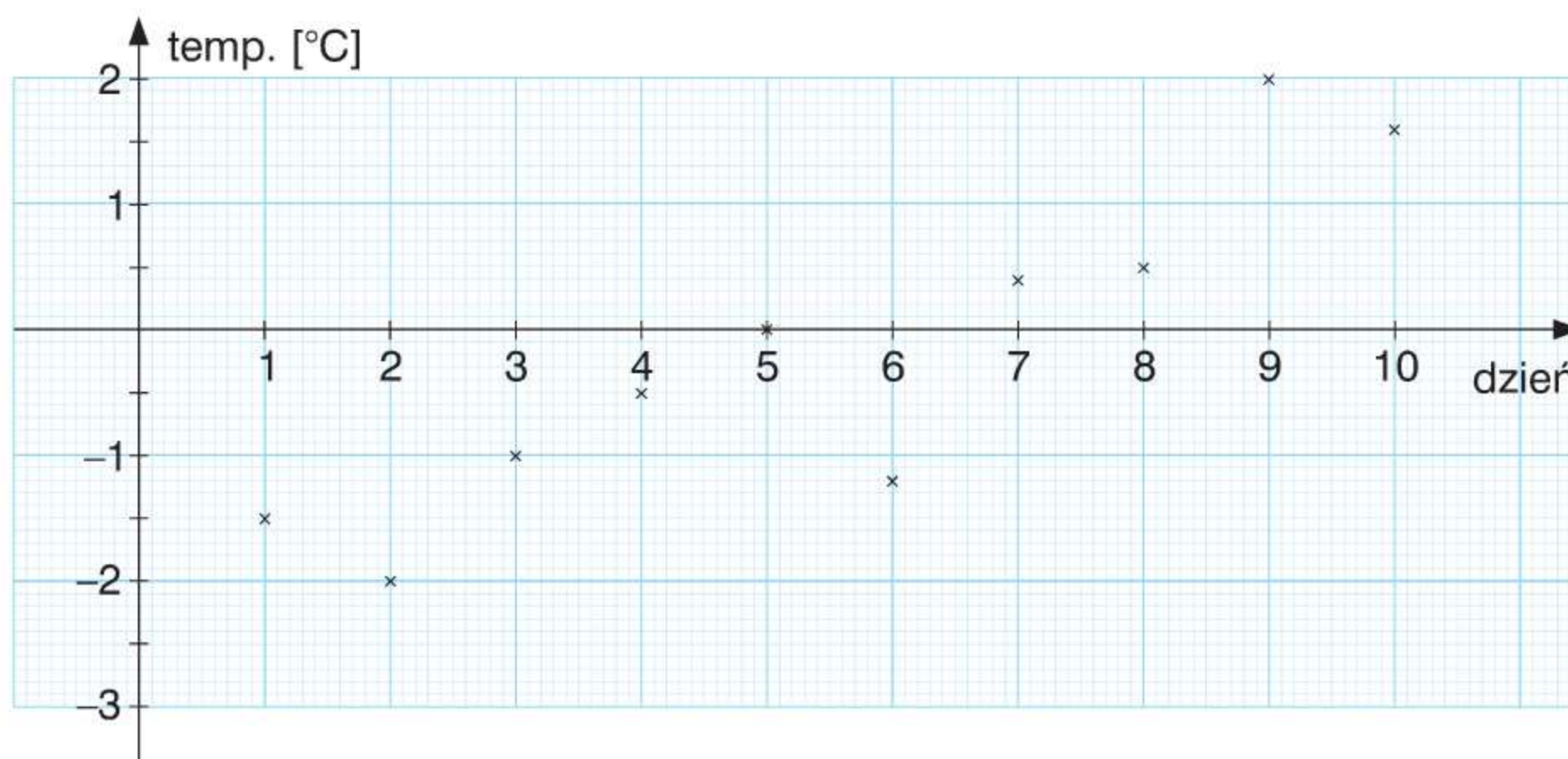
- 3 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.

a) $\frac{11}{3} \blacklozenge 3,75$ b) $-0,8 \blacklozenge -\frac{3}{5}$ c) $|-2,5| \blacklozenge \left|\frac{5}{2}\right|$

- 4 Z podanych liczb największą wartość bezwzględną ma

A. -3 B. $5\frac{3}{4}$ C. -9 D. -10,2

- 5 Adam przedstawił na wykresie średnie temperatury 10 kolejnych dni.



- a) Uporządkuj malejąco temperatury przedstawione na wykresie.
 b) W których dniach temperatury rosły?
 c) W których dniach wartości bezwzględne temperatur były liczbami odwrotnymi?

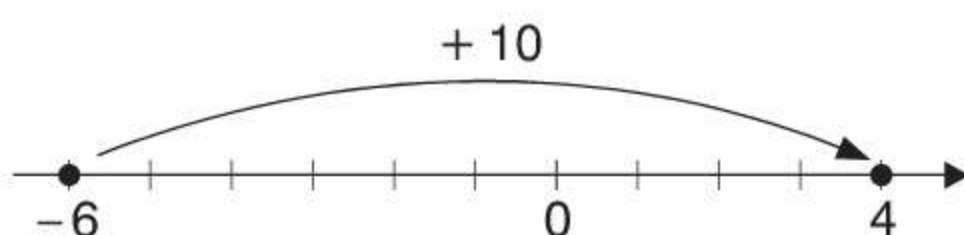
3. Dodawanie liczb całkowitych



Sowa przypomina

• Dodawanie liczby dodatniej

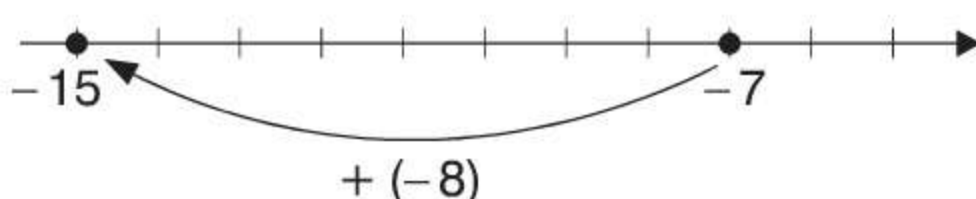
$$-6 + 10 = 4$$



Jeżeli do danej liczby dodajemy liczbę dodatnią, to na osi liczbowej przesuwamy się w prawo.

• Dodawanie liczby ujemnej

$$(-7) + (-8) = -7 + (-8) = -15$$

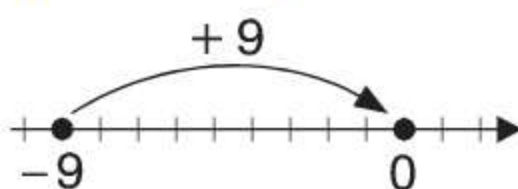


Jeżeli do danej liczby dodajemy liczbę ujemną, to na osi liczbowej przesuwamy się w lewo.

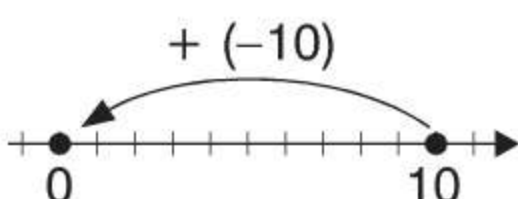
Liczbę ujemną występującą na początku wyrażenia lub po znaku = można zapisać bez nawiasu.

• Dodawanie liczb przeciwnych

$$-9 + 9 = 0$$



$$10 + (-10) = 0$$



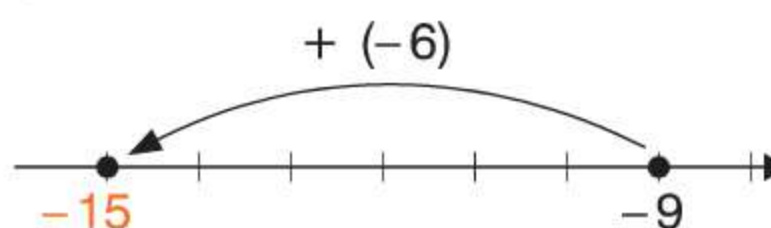
Suma liczb przeciwnych jest równa zero.

Przykład 1.

Obliczmy sumę liczb ujemnych: $-9 + (-6)$.

$$-9 + (-6) = -15$$

$$|-9| = 9, |-6| = 6 \text{ oraz } 9 + 6 = 15$$



Suma dwóch liczb całkowitych ujemnych jest liczbą ujemną. Obliczamy ją przez dodawanie wartości bezwzględnych liczb, a przed wynikiem stawiamy znak minus.



Przykład 2.

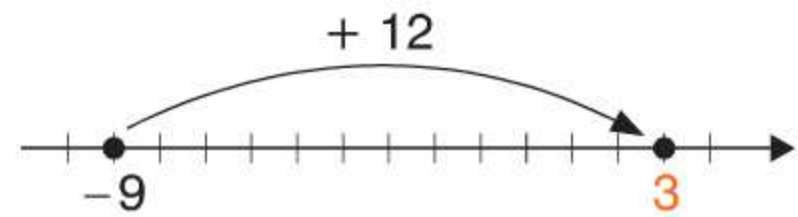
Obliczmy sumę liczb różnych znaków.

a) $-9 + 12$

b) $10 + (-15)$

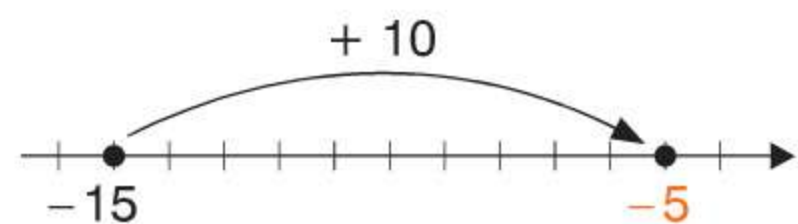
a) $-9 + 12 = 3$

Ta liczba ma większą wartość bezwzględną.
 $|12| > |-9|$ oraz $12 - 9 = 3$



b) $10 + (-15) = -15 + 10 = -5$

Ta liczba ma większą wartość bezwzględną.
 $|-15| > |10|$ oraz $15 - 10 = 5$



Jeśli chcemy obliczyć sumę dwóch liczb całkowitych różnych znaków, to musimy porównać wartości bezwzględne tych liczb i od większej wartości bezwzględnej odjąć mniejszą, a przed wynikiem wstawić znak liczby, której wartość bezwzględna jest większa.

Przykład 3.

Obliczmy sumę liczb.

a) $-6 + 4 + (-8) + (-5) + 7$

b) $12 + (-9) + 4 + (-2)$

$$\begin{aligned} \text{a) } & -6 + 4 + (-8) + (-5) + 7 = \\ & = -6 + (-8) + (-5) + 4 + 7 = \\ & = -19 + 11 = \\ & = -8 \end{aligned}$$

Zmieniamy kolejność składników.

Dodajemy osobno liczby ujemne i osobno liczby dodatnie.

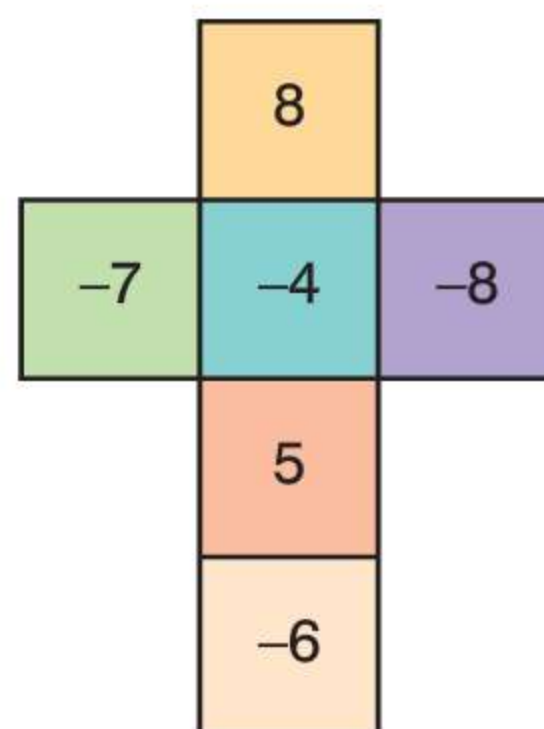
Od większej wartości bezwzględnej liczby odejmujemy mniejszą wartość bezwzględną liczby: $19 - 11 = 8$.

Przed wynikiem stawiamy znak liczby o większej wartości bezwzględnej.

b) $12 + (-9) + 4 + (-2) = 12 + 4 + (-9) + (-2) = 16 + (-11) = 5$

Ta liczba ma większą wartość bezwzględną.

- 1 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$ lub $<$.
- a) $-4 + (-5) \blacklozenge 0$ b) $-100 + 89 \blacklozenge 0$ c) $0 \blacklozenge -11 + (-36)$
 $21 + (-18) \blacklozenge 0$ $-89 + 100 \blacklozenge 0$ $0 \blacklozenge 23 + (-24)$
 $-19 + 17 \blacklozenge 0$ $-100 + (-89) \blacklozenge 0$ $0 \blacklozenge -45 + 100$
- 2 Oblicz.
- a) $-2 + (-7)$ b) $-14 + 3$ c) $-5 + 11$ d) $-23 + 8$
 $-4 + (-19)$ $8 + (-16)$ $9 + (-6)$ $17 + (-12)$
 $-6 + (-10)$ $-20 + 15$ $-18 + 20$ $-21 + (-23)$
- 3 Sumą liczby -8 i liczby o 2 od niej większej jest liczba
A. -18 B. -14 C. 14 D. -6
- 4 Oblicz.
- a) $-1 + (-3) + (-8)$ b) $-6 + (-7) + 5$ c) $-8 + 4 + (-7) + 14$
 $-23 + (-17) + (-23)$ $-56 + (-31) + 26$ $-11 + 7 + (-29) + 23$
- 5 Przygotuj dziewięć kartek. Każdą z liczb: $-7, -9, -12, -15, -2, 4, 5, 6, 10$ napisz na innej kartce. Wylosuj dwie kartki i oblicz sumę wylosowanych liczb. Następnie wylosuj trzy kartki spośród pozostałych i również oblicz sumę wylosowanych liczb. Potem oblicz sumę liczb z pozostałych czterech kartek. Dodaj otrzymane trzy sumy. Porównaj swój wynik z wynikami innych osób w klasie. Jak wytłumaczysz wyniki swoje i innych osób w klasie?
- 6 Wypisz liczby całkowite większe od -7 i mniejsze od 5 . Oblicz ich sumę.
- 7 Narysuj trzy osie liczbowe i na każdej z nich zaznacz dwie liczby: na pierwszej osi – dodatnie, na drugiej – ujemne, a na trzeciej liczby o różnych znakach. Ponadto na każdej osi zaznacz kolorem liczbę, która jest sumą zaznaczonej pary liczb.
- 8 Bartek narysował siatkę sześcianu (rysunek obok), a następnie zrobił z niej kostkę do gry i zagrał z kolegą w grę *Rzuć dwa razy kostką*. Odpowiedz na pytania, a następnie ułóż dwa dodatkowe pytania dotyczące tej gry.
Jakie liczby musiały zostać wyrzucone, aby:
a) ich wartość bezwzględna była taka sama,
b) ich suma była równa -2 lub 2 ,
c) ich suma była większa od -4 ?



**A to ciekawe!**

W drugiej połowie III wieku Diofantos – grecki uczoney pochodzący z Aleksandrii – stosował już reguły działań na liczbach ujemnych. Napisz takie trzy liczby, aby suma tych liczb i liczb -6 i -9 była równa 0 .

**Wyzwanie**

Dane są dwie liczby całkowite a i b takie, że $a < b$ i $b > 0$.

- Jaki będzie znak sumy tych liczb, jeżeli $a > 0$?
- Jaki może być znak sumy tych liczb, jeżeli $a < 0$?
- Jaka musi być liczba a , aby suma tych liczb była równa 0 ?

**Sprawdź się!**

1 Oblicz.

a) $51 + (-26)$

b) $-34 + 19$

c) $-17 + (-24)$

2 Oblicz.

a) $-15 + (-67) + 37$

b) $-12 + 13 + (-14) + 15$

c) $-7 + 4 + (-2) + 6$

d) $12 + (-4) + (-9) + 9 + (-8)$

3 Liczba o 14 większa od liczby -20 jest równa

A. -20

B. 14

C. -6

D. 7

4 Stan konta pani Karoliny był równy -150 zł (mówimy, że miała na koncie debet). Otrzymała na konto pensję w wysokości 2340 zł. Jaki był stan jej konta po wpłacie pensji?

Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. 2190 zł,	ponieważ	I. debet zwiększył kwotę, która wpłynęła na konto, o 150 zł.
B. 2490 zł,		II. wpłata zmniejszyła się o kwotę równą debetowi.

5 Napisz dwie liczby, których sumą jest liczba -5 i które są:

a) ujemne,

b) różnych znaków.

Czy inne osoby w klasie mają takie same liczby? Dlaczego?

4. Odejmowanie liczb całkowitych

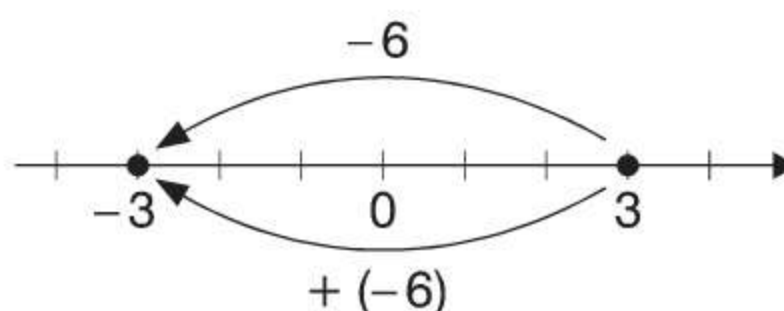


Sowa przypomina

$$3 - 6 = 3 + (-6) = -3$$

$$7 - (-8) = 7 + 8 = 15$$

$$-5 - (-5) = -5 + 5 = 0$$



Aby odjąć liczbę, można ją dodać z przeciwnym znakiem.



Sowa uczy

Na podstawie *Sowa przypomina* i łączności dodawania otrzymujemy:

$$-2 + 4 - 1 = -2 + 4 + (-1) = -2 + [4 + (-1)] = -2 + (4 - 1).$$

Wobec tego: $-2 + (4 - 1) = -2 + 4 - 1$.

Przykład 1.

Z 26-osobowej klasy na zawody wytypowano 18 uczniów. W dniu zawodów okazało się, że 2 wytypowanych uczniów zachorowało. Ilu uczniów tej klasy nie uczestniczyło w zawodach?

Sposób I

$$26 - (18 - 2) = 26 - 16 = 10$$

Liczba uczniów biorących udział w zawodach zmniejszyła się o 2.

Sposób II

$$26 - 18 + 2 = 8 + 2 = 10$$

Liczba uczniów nieuczestniczących w zawodach zwiększyła się o 2 uczniów, którzy zachorowali.

Wobec tego: $26 - (18 - 2) = 26 - 18 + 2 = 10$.

Odpowiedź. W zawodach nie uczestniczyło 10 uczniów.

Jeżeli przed nawiasem jest znak plus, to możemy opuścić ten znak i nawias, a liczby, które są w nawiasie, zapisać bez zmiany znaków. Jeżeli przed nawiasem jest znak minus, to możemy opuścić ten znak i nawias, a liczby, które są w nawiasie, zapisać ze znakami przeciwnymi.



Przykład 2.

Obliczmy wartość wyrażenia: $-9 + (16 - 20) - (-14 + 9)$.

Sposób I

$$\begin{aligned} -9 + (16 - 20) - (-14 + 9) &= && \text{Najpierw wykonujemy obliczenia w nawiasach.} \\ &= -9 + (-4) - (-5) = && \text{Opuszczamy nawiasy.} \\ &= -9 - 4 + 5 = \\ &= -13 + 5 = -8 \end{aligned}$$

Sposób II

$$\begin{aligned} -9 + (16 - 20) - (-14 + 9) &= && \text{Najpierw opuszczamy nawiasy.} \\ &= -9 + 16 - 20 + 14 - 9 = && \text{Grupujemy liczby ujemne i dodatnie.} \\ &= -9 - 20 - 9 + 16 + 14 = \\ &= -38 + 30 = -8 \end{aligned}$$

Przykład 3.

Obliczmy różnicę między -6°C i -15°C .



Jeżeli obliczamy różnicę między temperaturami, to od wyższej temperatury odejmujemy niższą.

1 Oblicz.

a) $14 + 6$	b) $-14 + 6$	c) $-7 + (-10)$	d) $7 + 10$
$14 - 6$	$-14 - 6$	$-7 - 10$	$7 - 10$
$14 + (-6)$	$-14 + (-6)$	$-7 - (-10)$	$7 - (-10)$
$14 - (-6)$	$-14 - (-6)$	$-7 + 10$	$7 + (-10)$

2 Oblicz.

a) $8 - (-9) + (-11) - 5$	b) $16 - (-4 + 7) + (5 - 9)$
$-21 + (-7) - 15 - (-32)$	$(-8 + 12 - 3) - (-6 + 13)$
$-11 - (-6) + (-5 + 8)$	$-19 - (-18 - 7) + (-34)$
$-(6 - 9) - (-12 + 15)$	$-27 + (-26 - 17) + 14$

- 3 Budynek ma 14 kondygnacji nad ziemią (parter i 13 pięter) oraz 2 piętra poniżej parteru: piwnice oznaczone numerem -2 i garaże oznaczone numerem -1 . Rafał, który mieszka na 6. piętrze, zjechał do piwnicy, a następnie pojechał 4 piętra do góry, żeby odwiedzić Maćka.
- Ile pięter w dół przejechał Rafał?
 - Na którym piętrze mieszka Maciek?
 - Jaka jest różnica między najwyższą i najniższą kondygnacją?

- 4 Pan Michał zapłacił za wycieczkę 2230 zł za pomocą karty płatniczej. Na koncie miał 1980 zł. Ile pieniędzy musi wpłacić na konto, aby zlikwidować debet?

- 5 W morzach o dużym zasoleniu woda zamarza przy -2°C . Z uwagi na obecność ciepłych prądów temperatura wody w morzu może być równa 32°C . Różnica między tymi temperaturami to
- A. 34°C B. -34°C C. 30°C D. -30°C

- 6 W 2008 roku najwyższą temperaturę w Polsce zanotowano w lipcu w miejscowości Lubnicko. Była ona równa 36°C . Najniższą temperaturę w tym samym roku zanotowano w styczniu w Słubicach. Wynosiła -26°C . Oblicz różnicę między tymi temperaturami.

- 7 Na stacji Wostok na Antarktydzie zanotowano temperaturę -89°C , na Syberii w okolicach wioski Tomtor -72°C , a w Kalifornii w Dolinie Śmierci 52°C . Oblicz różnicę między temperaturami w Dolinie Śmierci i na stacji Wostok oraz między temperaturami w okolicach wioski Tomtor i na stacji Wostok.



Dolina Śmierci

- 8 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Różnica liczb przeciwnych jest równa 0.	P	F
Suma liczb dodatniej i ujemnej jest zawsze liczbą ujemną.	P	F
Liczba przeciwna do liczby całkowitej mniejszej od zera jest liczbą naturalną.	P	F

- 9 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.

a) $-6 + a = 14$

b) $11 - x = 15$

c) $y - (-7) = -12$



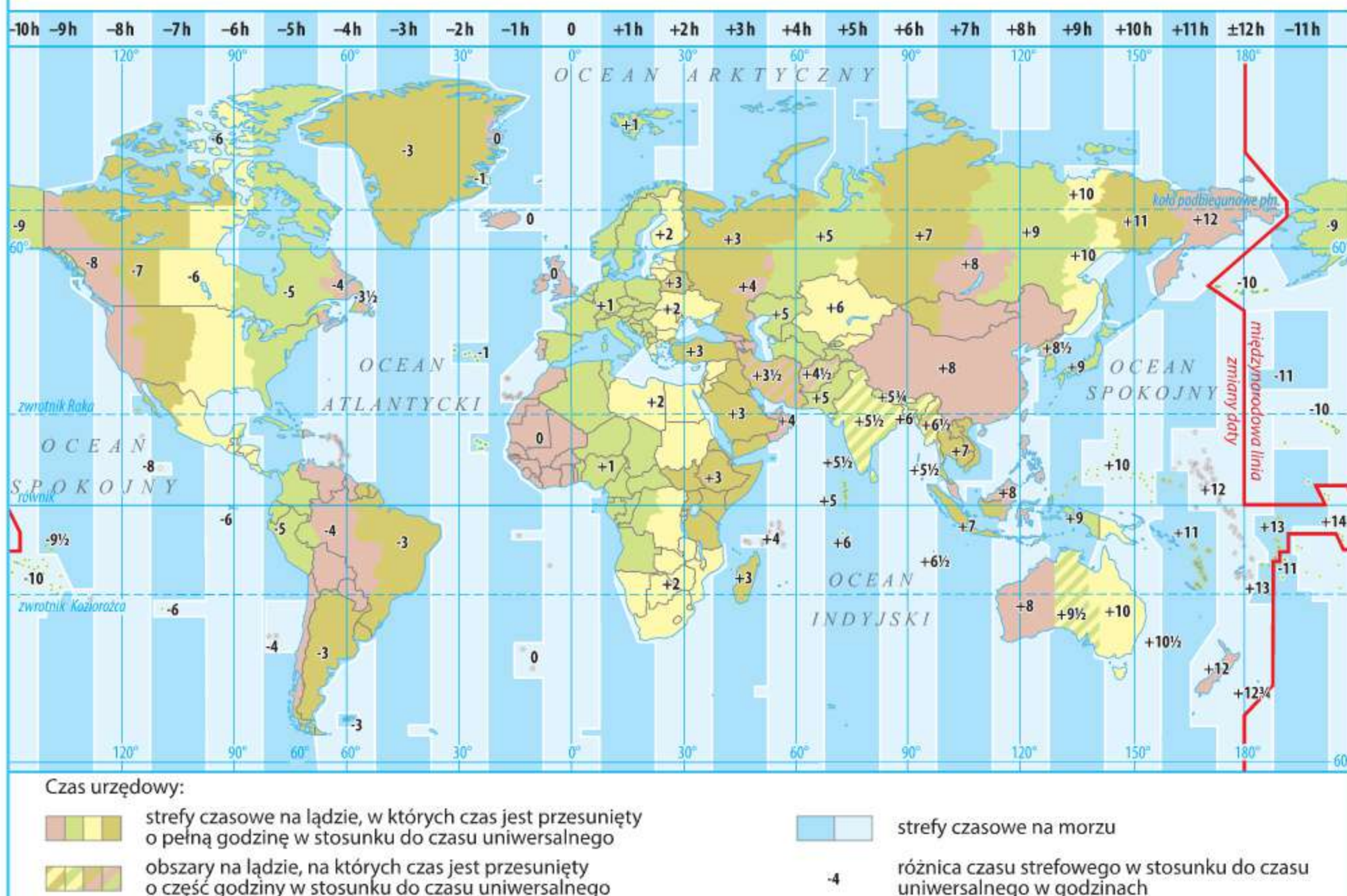
A to ciekawe!

Ponieważ Ziemia obraca się wokół własnej osi, nie jest możliwe, aby we wszystkich krajach była ta sama pora dnia lub nocy w tym samym momencie. Jeżeli mamy dzień, to znaczy, że w tym samym czasie po przeciwnej stronie kuli ziemskiej panuje noc.

W dawnych czasach posługiwano się zegarami słonecznymi. Zegary te w różnych miejscowościach wskazywały inny czas, zgodny z czasem słonecznym (np. obecnie między wschodnią a zachodnią granicą Polski różnica w czasie słonecznym jest równa 40 minut i 8 sekund).

Ze względu na ogromne różnice czasu na świecie glob ziemski podzielono na 24 strefy czasowe. Przyjęto, że czas liczyć się będzie od południka zerowego (0°) przechodzącego przez Greenwich pod Londynem; jest to czas zachodnioeuropejski, zwany także czasem uniwersalnym. Czas uniwersalny i strefy czasowe wprowadzono w 1884 roku.

Po przekroczeniu linii strefy czasowej powinno się przestawić wskazówki zegara. Jeżeli w Wielkiej Brytanii jest godzina 8.00, to w Polsce jest 9.00, a w Nowym Jorku 3.00.



1. Pan Tadeusz kupił bilet lotniczy do Moskwy. Na bilecie było napisane: wylot samolotu z Warszawy 12.45, przylot do Moskwy 16.50, czas lotu 2 h 5 min. Wyjaśnij, jak to jest możliwe.

name of passanger Kowalski Tadeusz			date 25.05.2021			name of passanger Kowalski Tadeusz		
from Warszawa			gate 15	seat 28A		from Warszawa	gate 15	seat 28A
to Moskwa			flight number HGK815			to Moskwa		
departure 12 : 45			time of flight 2 : 05			flight number HGK815		
arrival 16 : 50						boarding time 11 : 45		

2. Maria, mieszkająca w Poznaniu, zadzwoniła o godzinie 21.00 do koleżanki mieszkającej w Nowym Jorku. Która godzina była w tym czasie w Nowym Jorku?



Sprawdź się!

- 1 Oblicz.

a) $-12 - 18$

b) $16 - (-17)$

c) $-7 - (-19)$

- 2 Które zdanie jest **nieprawdziwe**?

A. Sumą liczb -36 i -15 jest liczba -51 .

B. Liczba -15 jest o 2 mniejsza od liczby -13 .

C. Różnicą liczb -19 i -13 jest liczba -6 .

D. Liczba -21 jest o 2 większa od liczby -19 .

- 3 W schronisku górskim notowano temperatury powietrza przed budynkiem. O godzinie 17.00 było 8°C , a o godzinie 2.00 w nocy -3°C .

Jaka jest różnica zanotowanych temperatur?



Tatry - hala Ornak

- 4 Pani Ala zapłaciła za zakupy 820 zł za pomocą karty płatniczej. Po zapłaceniu rachunku stan jej konta był równy -45 zł. Ile pieniędzy miała na koncie pani Ala przed zapłaceniem rachunku?

- 5 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.

a) $b + (-7) = -12$

b) $2y - 9 = -5$

c) $3x - (-8) = 20$

5. Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych

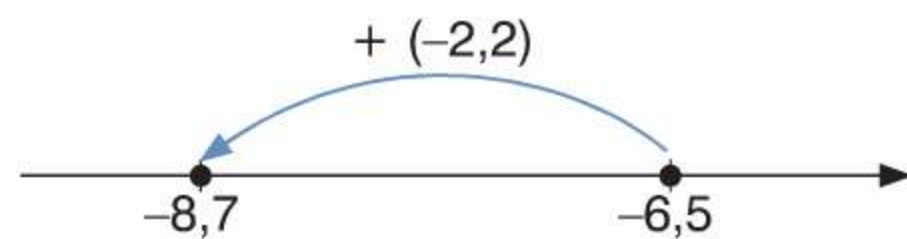
Przykład 1.

Obliczmy sumę liczb.

a) $-6,5 + (-2,2)$ b) $-4,2 + 6\frac{2}{5}$ c) $-5\frac{1}{3} + 2\frac{5}{6}$

a) $(-6,5) + (-2,2) = -8,7$

Aby dodać dwie liczby wymierne ujemne, dodajemy ich wartości bezwzględne, a przed wynikiem piszemy znak minus.



b) $-4,2 + 6\frac{2}{5}$

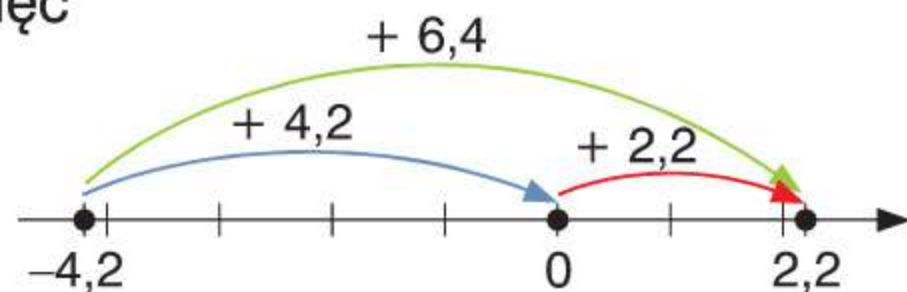
Sposób I

$6\frac{2}{5} = 6,4$ oraz $6,4 = 4,2 + 2,2$, więc

$$-4,2 + 6\frac{2}{5} = -4,2 + 4,2 + 2,2 =$$

Suma liczb przeciwnych jest równa zero.

$$= 0 + 2,2 = 2,2$$



Sposób II

$$-4,2 + 6\frac{2}{5} = -4,2 + 6,4 = 6,4 + (-4,2) = 6,4 - 4,2 = 2,2$$

Ponieważ liczba dodatnia ma większą wartość bezwzględną ($|6,4| > |-4,2|$), suma jest liczbą dodatnią.

c) $-5\frac{1}{3} + 2\frac{5}{6} = -5\frac{2}{6} + 2\frac{5}{6} = -4\frac{8}{6} + 2\frac{5}{6} = -2\frac{3}{6} = -2\frac{1}{2}$

Ponieważ liczba ujemna ma większą wartość bezwzględną ($|-4\frac{8}{6}| > |2\frac{5}{6}|$), suma jest liczbą ujemną.



Suma dwóch liczb wymiernych ujemnych jest liczbą ujemną.
Suma dwóch liczb wymiernych różnych znaków ma znak liczby o większej wartości bezwzględnej.

Przykład 2.

Obliczmy wartość wyrażenia: $-5,4 + 3,6 + 2,5 + (-7,3)$.

$$-5,4 + 3,6 + 2,5 + (-7,3) =$$

$$= -5,4 + (-7,3) + 3,6 + 2,5 =$$

$$= -12,7 + 6,1 =$$

$$= -6,6$$

Grupujemy liczby dodatnie i ujemne, zmieniając kolejność składników.

Od większej wartości bezwzględnej liczby odejmujemy mniejszą wartość bezwzględną liczby i w wyniku wstawiamy znak liczby, o większej wartości bezwzględnej.

Przykład 3.

Obliczmy różnicę: $-17,5 - (-4\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4})$.

Sposób I

$$-17,5 - (-4\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}) =$$

$$= -17,5 - (-7) = -17,5 + 7 = -10,5$$

Najpierw wykonujemy działanie w nawiasie.

Sposób II

$$-17,5 - (-4\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}) =$$

$$= -17,5 + 4\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} = -17,5 + 7 = -10,5$$

Najpierw opuszczamy nawias.

↑
Dodajemy liczby dodatnie.

- 1** Zilustruj działanie na osi liczbowej.

a) $-4\frac{1}{2} + (-2)$

b) $1,4 + (-7)$

c) $-8\frac{3}{4} + 4$

d) $6,2 + (-10,2)$

- 2** Wynik którego działania **nie jest** równy 0?

A. $-3\frac{1}{2} + 3,5$

B. $-9 + 9$

C. $8\frac{3}{5} - \frac{86}{10}$

D. $-4\frac{2}{3} - 0$

- 3** Do każdej z liczb: $-16,3$; 0 ; $-0,23$; $4\frac{3}{5}$; $-71\frac{1}{3}$; $25,8$ dodaj taką liczbę, aby ich suma była równa 0. Jakimi liczbami są składniki?

- 4** Oblicz.

a) $1,4 + 2,6$

b) $-1,4 + 2,6$

c) $1\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4}$

d) $-1\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4}$

$1,4 + (-2,6)$

$-1,4 + (-2,6)$

$1\frac{1}{2} + (-2\frac{3}{4})$

$-1\frac{1}{2} + (-2\frac{3}{4})$

5 Oblicz.

a) $1,7 - 1,5$ b) $-1,7 - 1,5$ c) $2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{9}$ d) $-2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{9}$
 $1,7 - (-1,5)$ $-1,7 - (-1,5)$ $2\frac{1}{3} - (-1\frac{2}{9})$ $-2\frac{1}{3} - (-1\frac{2}{9})$

6 Oblicz.

a) $2,5 - (-1\frac{2}{3})$ b) $-1\frac{5}{8} - 1,6$ c) $-1,2 - (-2\frac{4}{5})$ d) $-2\frac{1}{4} - 1,25$

7 Oblicz.

a) $-\frac{1}{4} + (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{8}$ b) $-14\frac{1}{3} - (-6,5) - 11\frac{5}{6}$
 $5,75 + (-8,5) + (-0,31)$ $4,2 - (-5\frac{2}{3}) - (-2\frac{3}{5})$
 $4,5 + (-\frac{9}{2}) + (-1,2)$ $-7\frac{5}{8} - 2,075 - (-9,7)$

8 Oblicz.

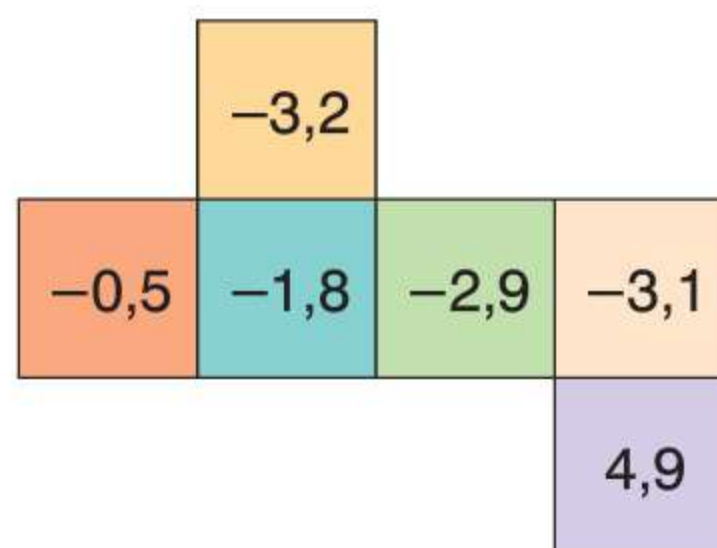
a) $-16,2 + (-7,8 + 5\frac{1}{3})$ b) $-13,2 - (9,4 - 10\frac{3}{4})$
 $12,6 + (3\frac{3}{4} - 14,6)$ $5\frac{2}{3} - (-2\frac{5}{6} + 11\frac{1}{2})$
 $19\frac{3}{4} + (-10,3 - 5)$ $-20\frac{1}{2} - (-1\frac{1}{6} - 9\frac{2}{3})$

9 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Suma liczb przeciwnych jest równa 0.	P	F
Suma każdych dwóch liczb ujemnych jest mniejsza od 0.	P	F
Różnica dwóch dowolnych liczb ujemnych jest zawsze liczbą ujemną.	P	F

10 Wykonaj kostkę, której siatkę przedstawiono obok, i rzuć nią 3 razy.

a) Oblicz sumę trzech wyrzuconych liczb.
 b) Oblicz różnicę dwóch z wyrzuconych liczb.



11 Rozwiąż równanie.

a) $a - 1\frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}$ b) $-4\frac{3}{4} - b = 1\frac{1}{4}$ c) $5\frac{5}{6} + x = 8\frac{1}{6}$

12 Temperatura wrzenia tlenu jest równa $-182,96^{\circ}\text{C}$, a topnienia wynosi $-218,78^{\circ}\text{C}$. Oblicz różnicę między temperaturami wrzenia i topnienia tego gazu.

- 13 Na Saharze, największej pustyni świata, notuje się duże różnice temperatur między zachodem i wschodem słońca. Pewnego dnia różnica ta wynosiła $24,8^{\circ}\text{C}$, a liczba stopni Celsjusza o wschodzie słońca była przeciwna do liczby stopni Celsjusza o zachodzie. Jaka była temperatura o wschodzie, a jaka o zachodzie słońca?



Sahara

Sprawdź się!

- Oblicz.
a) $-0,75 + (-2,8)$ b) $-4\frac{1}{5} + 2\frac{3}{5}$ c) $-3\frac{1}{2} - (-1\frac{2}{3})$ d) $3\frac{7}{8} - (-1,5)$
- Liczbą o 1,25 mniejszą od liczby $-1\frac{4}{5}$ jest
A. $-3,05$ B. $3\frac{1}{20}$ C. $-3,15$ D. $\frac{1}{20}$
- W 1983 roku najniższą temperaturę, która wynosiła $-89,2^{\circ}\text{C}$, zanotowano na Antarktydzie. W Libii zanotowano wtedy $58,4^{\circ}\text{C}$. Oblicz różnicę tych temperatur.
- Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.
 $a + (-3\frac{5}{6}) = -2,8$
- Dane są wyrażenia:
A. $2 - (2,25 + 1\frac{3}{8})$ B. $1\frac{1}{3} - (2\frac{3}{4} - 2,5)$
C. $-2\frac{3}{8} + 1,6$ D. $-1,5 + 2\frac{7}{12}$



Antarktyda

Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnym odpowiedziom.

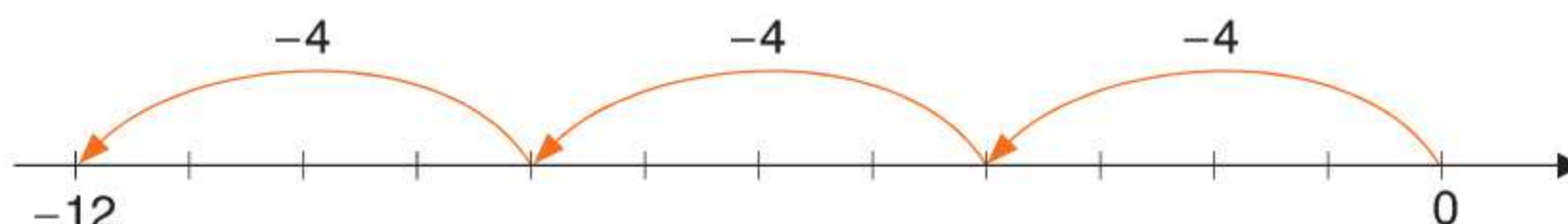
Wartości których wyrażen są równe?	A	B	C	D
Wartość którego wyrażenia jest liczbą ujemną większą od -1 ?	A	B	C	D
Wartość którego wyrażenia nie jest liczbą dodatnią?	A	B	C	D

6. Mnożenie liczb całkowitych

Przykład 1.

Mnożenie liczby naturalnej przez liczbę ujemną przedstawmy w postaci dodawania i obliczmy sumę.

$$\text{a) } 3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$$



$$\text{b) } -5 \cdot 2 = 2 \cdot (-5) = (-5) + (-5) = -10$$



Iloczyn dwóch liczb całkowitych: ujemnej i dodatniej jest liczbą ujemną.

Przykład 2.

Obliczmy wartość wyrażenia: $(-3) \cdot [5 + (-5)]$.

$$(-3) \cdot \underbrace{[5 + (-5)]}_0 = (-3) \cdot 0 = 0$$

Wyrażenie można również rozpisać tak, jak poniżej.

$$(-3) \cdot [5 + (-5)] = (-3) \cdot 5 + (-3) \cdot (-5)$$

Wiemy, że wartość tego wyrażenia jest równa 0.

$$\underbrace{(-3) \cdot 5}_{-15} + \underbrace{(-3) \cdot (-5)}_{\text{■}} = 0$$

Do kratki należy wpisać liczbę przeciwną do -15 .

$$-15 + 15 = 0$$

Wobec tego: $(-3) \cdot (-5) = 15$.



Iloczyn dwóch liczb całkowitych ujemnych jest liczbą dodatnią.

Przykład 3.

Obliczmy wartość wyrażenia z wykorzystaniem przemienności i łączności mnożenia.

a) $(-5) \cdot 6 \cdot (-4) \cdot (-2)$

b) $8 \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (-10)$

c) $(-4) \cdot (-7) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-25)$

$$\text{a) } (-5) \cdot 6 \cdot (-4) \cdot (-2) = \overbrace{6 \cdot (-4)}^{-24} \cdot \overbrace{(-5) \cdot (-2)}^{10} = -240$$

$$\text{b) } 8 \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (-10) = \overbrace{8 \cdot (-10)}^{-80} \cdot \overbrace{[4 \cdot (-5)]}^{-20} \cdot \overbrace{(-2) \cdot (-5)}^{10} = \\ = 16\,000$$

$$\text{c) } (-4) \cdot (-7) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-25) = \overbrace{(-7) \cdot (-3) \cdot (-5)}^{-105} \cdot \overbrace{(-4) \cdot (-25)}^{100} = \\ = -10\,500$$

1 Oblicz w pamięci.

a) $(-4) \cdot 6$

$(-9) \cdot 11$

$(-14) \cdot 7$

$(-10) \cdot (-15)$

b) $8 \cdot (-6)$

$9 \cdot (-8)$

$7 \cdot (-7)$

$20 \cdot (-20)$

c) $(-2) \cdot (-9)$

$(-25) \cdot (-1)$

$(-6) \cdot (-7)$

$(-12) \cdot (-8)$

2 Oblicz w pamięci.

a) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-2)$

$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

$(-5) \cdot (-1) \cdot (-7)$

b) $(-5) \cdot (-6) \cdot (-2)$

$(-8) \cdot (-1) \cdot (-5) \cdot (-2)$

$(-6) \cdot 2 \cdot (-5) \cdot (-1)$

3 Pewnego dnia temperatura była równa 0°C . Przez kolejne trzy dni spadała o 3°C każdego dnia. Trzeciego dnia była równa

A. 9°C

B. -6°C

C. -3°C

D. -9°C

4 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

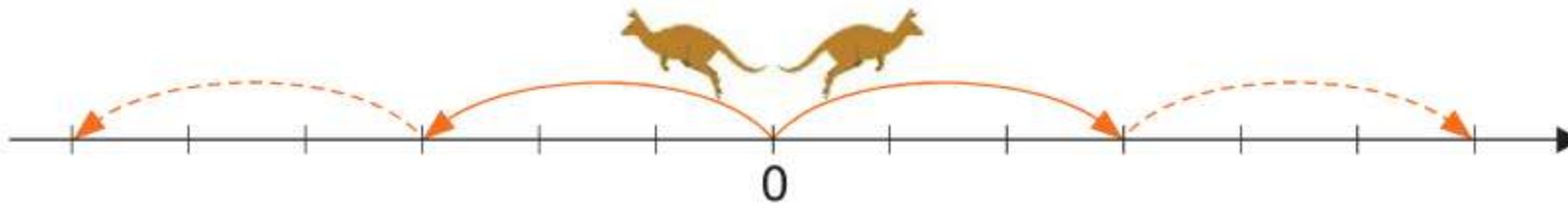
a) $-3 \cdot (8 - 15) - 6 \cdot 5$

$-9 + (-3) \cdot (-4) \cdot (-8 + 5)$

b) $-8 + 8 \cdot (-12) - (-59)$

$4 \cdot [-13 - (-5)] - 7 \cdot (-5)$

- 5 Dwa kangury skaczą jednocześnie w przeciwnie strony. Długość jednego skoku jest równa trzem jednostkom. Zabawę zaczynają w tym samym miejscu.



Jaka jest odległość między kangurami po wykonaniu przez każdego z nich:
a) 4 skoków, b) 15 skoków?

Napisz odpowiednie działania.

Skorzystaj z podanych informacji i rozwiąż zadania 6.–8.

Jeżeli wznosimy się nad Ziemię, to temperatura powietrza maleje o 3°C co 500 m.

Wysokość	Temperatura
2000 m = $4 \cdot 500$	$7^{\circ}\text{C} - 4 \cdot 3^{\circ}\text{C}$
1500 m = $3 \cdot 500$	$7^{\circ}\text{C} - 3 \cdot 3^{\circ}\text{C}$
1000 m = $2 \cdot 500$	$7^{\circ}\text{C} - 2 \cdot 3^{\circ}\text{C}$
500 m	$7^{\circ}\text{C} - 3^{\circ}\text{C}$
0 m	7°C



- 6 Temperatura na Ziemi jest równa 20°C . Oblicz temperaturę nad Ziemią na wysokości:

a) 2500 m, b) 5000 m.

- 7 Temperatura na Ziemi wynosi 15°C . Na jakiej wysokości nad Ziemią jest równa:

a) 0°C , b) -15°C ?

- 8 Pani Kasia leciała samolotem z Bangkoku (stolica Tajlandii) do Moskwy (stolica Rosji). Nad Tajlandią, w której temperatura była równa 30°C , samolot wzniósł się na wysokość 10 000 m i przez całą drogę utrzymywał taką średnią wysokość.

a) Jaka była temperatura na zewnątrz samolotu nad Tajlandią?
b) Gdy samolot wleciał nad terytorium Rosji, temperatura na zewnątrz samolotu była równa -68°C . Jaka była wówczas temperatura na Ziemi?

Wyzwanie

Jaki znak ma liczba b , jeżeli iloczyn jest ujemny?

- a) $4b$ b) $-2 \cdot (-15)b$ c) $-2 \cdot 9b$

Sprawdź się!

1 Oblicz.

a) $6 \cdot (-13)$

b) $4 \cdot (-5) \cdot (-8) \cdot (-2)$

$-5 \cdot (-12)$

$-3 \cdot 4 \cdot (-5) \cdot 8$

2 Pani Zofia miała w banku na koncie 800 zł. Pięciokrotnie zapłaciła za zakupy po 300 zł kartą kredytową. Jaki był stan konta pani Zofii po tych zakupach?

3 O godzinie 7.00 termometr za oknem wskazywał -1°C . Przez kolejne dwie godziny temperatura spadała o 2°C co godzinę. Po dwóch godzinach była równa

- A. -4°C B. -5°C C. -3°C D. 2°C

4 Dane są wyrażenia arytmetyczne:

A. $15 \cdot (-4) - (-3) \cdot (-17) - (-70)$

B. $-49 - 2 \cdot (-27) - 64$

C. $-7 \cdot (-12) + 25 \cdot (-5)$

D. $-(-27) + (-5) \cdot (-2) \cdot (-9) - (-100)$



Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnym odpowiedziom.

Wartości których wyrażen są równe?	A	B	C	D
Które z wyrażen ma najmniejszą wartość?	A	B	C	D
Które z wyrażen ma największą wartość?	A	B	C	D
Wynik którego wyrażenia ma największą wartość bezwzględną?	A	B	C	D

5 Oblicz wartość liczbową wyrażenia $3a - (-5)a$ dla $a = -5$.

7. Dzielenie liczb całkowitych

Przykład 1.

Trzech kolegów miało taki sam stan konta w banku. Każdy z nich miał debet. Razem mieli -360 zł. Jaki był stan konta każdego z nich?

Gdyby koledzy mieli 360 zł i taki sam stan konta, wówczas każdy z nich miałby:

$$360 : 3 = 120 \text{ [zł]}$$

Stan konta każdego z nich był ujemny (debet), więc mieli po -120 zł.

$$-360 : 3 = -120 \text{ [zł]}$$

Odpowiedź. Stan konta każdego z kolegów był równy -120 zł.

Przykład 2.

Obliczmy iloraz liczb.

a) $24 : (-8)$

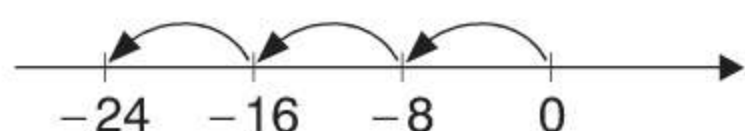
b) $-24 : (-8)$

a) $24 : (-8) = \blacksquare$

W kratkę należy wpisać taką liczbę, która pomnożona przez -8 jest równa 24 .

$$-3 \cdot (-8) = 24, \text{ a więc } 24 : (-8) = -3$$

b) Dzielenie przedstawmy na osi liczbowej.



W liczbie -24 liczba -8 mieści się 3 razy.

$$-24 : (-8) = 3, \text{ bo } 3 \cdot (-8) = -24$$



Iloraz dwóch liczb całkowitych o różnych znakach jest liczbą ujemną, a o jednakowych znakach jest liczbą dodatnią.

1 Oblicz w pamięci.

a) $-21 : 3$

b) $-21 : (-3)$

c) $-72 : 9$

$21 : (-3)$

$-32 : (-4)$

$55 : (-11)$

d) $44 : (-4)$

e) $120 : (-15)$

f) $-600 : 120$

$0 : (-9)$

$-510 : 3$

$-480 : (-16)$

2. Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.
- a) $-24 : (-6) \blacklozenge 0$
 $-42 : 7 \blacklozenge 0$
 $-54 : (-9) \blacklozenge 0$
 $16 \cdot (-2) : (-8) \blacklozenge 0$
- b) $-3 \cdot (-20) : (-2) \blacklozenge 0$
 $44 : (-11) \cdot 0 \blacklozenge 0$
 $-36 : (-4) : (-3) \blacklozenge 0$
 $5 \cdot (-6) : (-2) : (-3) \blacklozenge 0$
3. Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.
- a) $-16 : 4 \blacklozenge -16 : 2$
 $9 : (-3) \blacklozenge -9 : 3$
 $-15 : (-5) \blacklozenge 15 : 5$
 $-(-12) \cdot (-3) \blacklozenge -(-12) : (-3)$
- b) $-(-4) : [-(-1)] \blacklozenge -(-4) : (-2)$
 $-(-24) : (-6) \blacklozenge -(-12) : (-6)$
 $-12 : (-4) \blacklozenge -12 : [-(-2)]$
 $-[(-14) : (-1)] \blacklozenge -[(-15) \cdot (-1)]$
4. Pan Piotr miał na koncie debet w wysokości -1800 zł. Spłacił ten dług w trzech równych ratach. Jaka była wysokość jednej raty? Podaj stan jego konta po wpłacie każdej raty.
5. Liczba -6 jest wynikiem dzielenia
 A. $-72 : (-12)$ B. $-42 : (-7)$ C. $72 : (-12)$ D. $-24 : (-4)$
6. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.
- a) $99 : (-3) : (-11)$
 $-400 - [(-50) : 10]$
 $(-21 : 3 + 7) : (-32)$
- b) $-40 \cdot 5 + 160 : (-8)$
 $100 : (-4) + 4 \cdot (-6)$
 $[-16 - (-8)] : (-2)$
7. Dane są wyrażenia:
 $(-18 + 6) : (-2)$ i $-18 + [6 : (-2)]$.
 Wartość którego wyrażenia jest większa i o ile większa?
8. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
 Wartość wyrażenia $-7 \cdot 7 + 49$ jest równa A / B. A. 0 B. -98
 Wartość wyrażenia $-27 + 16 \cdot (-5)$ jest równa C / D. C. 55 D. -107
9. Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenia.
- a) $a : (-4) = -9$
 $b : 9 = -63$
 $-540 : d = -90$
- b) $2x - (-6) = 4$
 $12 - (-2b) = 88$
 $-27 \cdot z = -81$
- c) $-7 + a : (-2) = -3$
 $-4 \cdot (c - 17) = -48$
 $(6y - 2) : (-4) = 8$
10. Oblicz różnicę ilorazów: -121 przez -11 oraz -84 przez 12 .

- 11 W czasie weekendu Zuzia mierzyła temperaturę powietrza, a wyniki przedstawiła w tabelce.

Sobota			Niedziela		
rano	południe	wieczór	rano	południe	wieczór
-3°C	0°C	-2°C	-4°C	-3°C	-6°C

Oblicz średnią arytmetyczną temperatur z tabelki.

- 12 W każdą kratkę wpisz taką samą jednocyfrową liczbę i wykonaj działania.

$$\{[(2 \cdot \blacksquare + 16) : 2] - \blacksquare\} + (-10)$$

Sprawdź otrzymany wynik z wynikami innych osób w klasie.

- 13 Liczbę 256 podziel przez -2 . Otrzymany wynik ponownie podziel przez -2 . W ten sposób oblicz 8 ilorazów. Ostatni iloraz jest liczbą pierwszą czy złożoną?



Wyzwanie

Napisz trzy pary liczb, które spełniają podaną równość.

a) $\blacksquare \cdot \blacksquare = -24$

b) $\blacksquare : \blacksquare = -5$



Sprawdź się!

- 1 Oblicz.

a) $-56 : 8$

b) $-70 : (-5)$

$45 : (-3)$

$-12 : 3 + (-24) : (-8)$

- 2 Wartością wyrażenia $45 : (-9) - (-6) \cdot 3$ jest liczba

A. 23

B. -13

C. 14

D. 13

- 3 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.

$$(a - 29) \cdot (-7) = 84$$

- 4 Oblicz średnią arytmetyczną liczb: $-6, 5, -12, -7$.

- 5 Adam pomyślał pewną liczbę i pomnożył ją przez -3 . Do wyniku dodał 6 i otrzymał 9. Napisz odpowiednie równanie i oblicz liczbę, którą pomyślał Adam.



8. Mnożenie i dzielenie liczb wymiernych

Przykład 1.

Obliczmy iloczyn liczb.

a) $3 \cdot \left(-2\frac{1}{4}\right)$

b) $-2\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$

c) $-3,5 \cdot (-2) \cdot (-1,6)$

a) $3 \cdot \left(-2\frac{1}{4}\right)$

Sposób I

$$3 \cdot \left(-2\frac{1}{4}\right) = -2\frac{1}{4} + \left(-2\frac{1}{4}\right) + \left(-2\frac{1}{4}\right) = -6\frac{3}{4}$$

Mnożenie zastępujemy dodawaniem.

Sposób II

Iloczyn dwóch liczb całkowitych o różnych znakach jest liczbą ujemną.

$$3 \cdot \left(-2\frac{1}{4}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{3 \cdot (-9)}{4} = \frac{-27}{4} = -6\frac{3}{4}$$

b) $-2\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$

Iloczyn dwóch liczb całkowitych ujemnych jest liczbą dodatnią.

$$-2\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-5}{2} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{-5 \cdot (-4)}{2 \cdot 5} = \frac{20}{10} = 2$$

c) $-3,5 \cdot (-2) \cdot (-1,6) = 7 \cdot (-1,6) = -11,2$

↑
liczba
dodatnia

↑
liczba
ujemna

Jeżeli żaden z czynników nie jest zerem, a liczba czynników ujemnych jest:

- nieparzysta, to iloczyn jest ujemny,
- parzysta, to iloczyn jest dodatni.



Przykład 2.

Obliczmy iloraz liczb i wykonajmy sprawdzenie.

a) $-12,6 : 0,3$

b) $-1,28 : (-1,6)$

a) $-12,6 : 0,3 =$

$$= \frac{-12,6}{0,3} =$$

$$= \frac{-126}{3} = -42$$

Iloraz zapisujemy za pomocą kreski ułamkowej.

Rozszerzamy ułamek przez 10.

Iloraz dwóch liczb całkowitych o różnych znakach jest liczbą ujemną.

Sprawdzenie. $-42 \cdot 0,3 = -12,6$

b) $-1,28 : (-1,6) =$

$$= \frac{-1,28}{-1,6} =$$

$$= \frac{-128}{-160} = 0,8$$

Iloraz zapisujemy za pomocą kreski ułamkowej.

Rozszerzamy ułamek przez 100.

Iloraz dwóch liczb całkowitych ujemnych jest liczbą dodatnią.

Sprawdzenie. $0,8 \cdot (-1,6) = -1,28$



Iloraz dwóch liczb wymiernych o różnych znakach jest liczbą ujemną, a liczb o jednakowych znakach jest liczbą dodatnią.

Przykład 3.

Obliczmy potęgę liczby ujemnej i porównajmy wynik z liczbą 0.

a) $(-4)^2$

b) $(-2\frac{1}{2})^2$

c) $(-\frac{1}{5})^3$

d) $(-0,1)^3$

a) $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

$$(-4)^2 > 0$$

b) $(-2\frac{1}{2})^2 = (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4} = 6,25$

$$(-2\frac{1}{2})^2 > 0$$

c) $(-\frac{1}{5})^3 = (-\frac{1}{5}) \cdot (-\frac{1}{5}) \cdot (-\frac{1}{5}) = -\frac{1^3}{5^3} = -\frac{1}{125}$

$$(-\frac{1}{5})^3 < 0$$

d) $(-0,1)^3 = (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) = -0,001$

$$(-0,1)^3 < 0$$



Kwadrat ujemnej liczby wymiernej jest liczbą dodatnią.
Trzecia potęga ujemnej liczby wymiernej jest liczbą ujemną.

Przykład 4.

Czy liczby $(-3)^2$ i -3^2 są równe?

Zapis $(-3)^2$ oznacza: trzeba podnieść do kwadratu liczbę ujemną -3 .

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

Zapis -3^2 oznacza: trzeba podnieść do kwadratu liczbę 3 i utworzyć liczbę przeciwną do otrzymanej.

$$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$$

Odpowiedź. $(-3)^2 > -3^2$

- 1** Bez wykonywania obliczeń ustal, jaki znak: $>$, $<$ czy $=$ należy wpisać zamiast $\blacklozenge$.

a) $-2 \cdot 0,73 \cdot (-1\frac{1}{3}) \blacklozenge 0$

b) $-6,4 : (-8) \blacklozenge 0$

$-4 \cdot (-0,1) \cdot (-2) \blacklozenge 0$

$0 : (-2,42) \blacklozenge 0$

$-8,2 \cdot (-1) \cdot 0 \cdot (-0,6) \blacklozenge 0$

$1,42 : (-7,1) \blacklozenge 0$

- 2** Oblicz w pamięci.

a) $-2,2 \cdot (-3)$
 $-1,1 \cdot 1,1$

b) $-0,64 : 0,8$
 $-3,2 : (-0,4)$

c) $-0,3 \cdot 0,7 \cdot (-2)$
 $-2,4 \cdot (-0,2) \cdot (-1)$

- 3** Wyniki działań $(-5)^2$ i -5^2 to odpowiednio

A. $-25, 25$

B. $25, -25$

C. $10, -25$

D. $25, -10$

- 4** Oblicz.

a) $-2,8 \cdot 0 \cdot (-1,1)$

b) $-2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{5} \cdot (-1\frac{1}{9})$

c) $-12\frac{2}{3} : 3\frac{1}{6}$

$1,2 \cdot (-1,2) \cdot (-2)$

$-3\frac{3}{4} \cdot (-3\frac{3}{5}) \cdot (-1\frac{1}{9})$

$4\frac{1}{6} : (-1\frac{2}{3})$

$-1,1 \cdot (-11,1) \cdot (-1)$

$-2\frac{2}{3} \cdot (-1\frac{1}{2}) \cdot (-1)$

$-6,3 : (-2,1)$

$-2 \cdot (-4,4) \cdot (-1) \cdot (-3,3)$

$\frac{5}{3} \cdot (-2\frac{2}{5}) \cdot (-1\frac{3}{4}) \cdot \frac{1}{14}$

$0 : (-172,3)$

- 5** Oblicz.

a) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot (-1,5)$

b) $-2,1 \cdot (-\frac{2}{7}) \cdot \frac{5}{6}$

c) $-\frac{2}{3} \cdot (-1,5) \cdot (-3,6)$

$(-\frac{3}{8}) : (-0,6) : (-1\frac{2}{3})$

$(-3,2) : (-1\frac{1}{7}) : (-1,4)$

$(-1,8) : (-1,5)^2 : (-\frac{2}{15})$

- 6** Oblicz.

a) $-\frac{12,1}{2}$

b) $\frac{-6,4}{-0,8}$

c) $\frac{14}{-3}$

d) $-\frac{7}{0,5}$

e) $\frac{-18}{0,03}$

f) $\frac{-3,06}{-0,6}$

7 Oblicz.

a) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$

b) $(-0,2)^3$

c) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$

$\left(-\frac{3}{10}\right)^3$

$(-0,15)^2$

$(-2,5)^2$

8 Oblicz.

a) $-1,5^2$

b) $-\frac{1}{2^3}$

c) $-\left(1\frac{1}{4}\right)^2$

d) $-\frac{2^2}{5}$

e) -1^2

9 Oblicz.

a) $2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 2^2$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$

c) $-2^3 \cdot 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$5 \cdot 2^3 - 4 \cdot 3^2$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - (-5)^3$

$\left(-2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2$

10 Napisz w postaci iloczynu i oblicz: $(-3)^3$, -3^3 , $(-2,5)^4$, $-2,5^4$. Która liczba jest największa, a która najmniejsza? Skorzystaj z kalkulatora.

11 Zamiast $\blacklozen$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.

a) $-5^2 \blacklozen (-5)^3$

b) $(-2)^3 \blacklozen (-1)^4$

c) $(-4)^2 \blacklozen -(-2)^3$

d) $\frac{(-2)^2}{3} \blacklozen \frac{2}{-3^2}$

12 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.

a) $y : \left(-1\frac{5}{6}\right) = -0,6$

b) $z : 2,5 = -\frac{1}{5^2}$

c) $-2\frac{2}{3} \cdot w = \left(-\frac{2}{3}\right)^2$

13 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $-0,75 : \frac{1}{2} + 0,24 : 0,08 - 2 \cdot \left(1,5 - 1\frac{1}{4}\right)$

b) $1,1 : (-0,1) + 2,6 : (-0,13) + 1,6 : (-0,4)$

14 Napisz dwa dowolne wyrażenia arytmetyczne, których wartość jest taka sama jak wartość wyrażenia $-2,8 : 1\frac{3}{4}$.

15 Dane są równania:

A. $a : \left(-\frac{1}{4}\right) = 22$

B. $-1\frac{7}{8} : b = -0,9$

C. $c \cdot \frac{1}{3} = -4,5$

Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż literę przypisaną poprawnej odpowiedzi.

Rozwiązaniem którego równania jest liczba dodatnia?	A	B	C
Rozwiązanie którego równania jest liczbą najmniejszą?	A	B	C
Rozwiązaniem którego równania jest liczba przeciwna do 5,5?	A	B	C

**A to ciekawe!**

Pomyśl liczbę ujemną większą od -1 i pomnóż ją przez 2. Do wyniku dodaj 3. Następnie od otrzymanej sumy odejmij liczbę pomyślaną i dodaj $-1,5$. Od wyniku znów odejmij liczbę pomyślaną i otrzymaną liczbę pomnóż przez $-1,1$. Wykonaj te obliczenia również dla innych liczb i porównaj wyniki.

**Wyzwanie**

Jakiego znaku musi być a , aby iloraz był liczbą ujemną?

a) $\frac{a}{5}$

b) $\frac{-4}{a}$

c) $-6 : [-(-a)]$

d) $[-(-5)] : (-a)$

**Sprawdź się!**

1 Oblicz.

a) $0,26 \cdot \left(-\frac{1}{13}\right) \cdot (-10)$

b) $-1\frac{5}{9} : 1,4$

c) $1\frac{1}{8} : (-0,3)$

2 Oblicz średnią arytmetyczną liczb: $-2,6$; 4 ; 0 ; $-1,8$; $-4,3$; $-3,7$.

3 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Liczby $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ i $-0,5^2$ są równe.	P	F
Liczba $2,25$ jest kwadratem liczby $-1\frac{1}{2}$.	P	F
Liczba $\frac{19}{27}$ jest o 1 większa od sześciannu liczby $\left(-\frac{2}{3}\right)$.	P	F

4 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.

$$-2,5 : a = -1\frac{2}{3}$$

5 Oblicz.

$$-\frac{1}{4} : 0,5 - 6,4 : 0,2 + 1\frac{1}{5} \cdot \left(1,25 - \frac{5}{6}\right) - 0,9$$

9. Działania na liczbach wymiernych

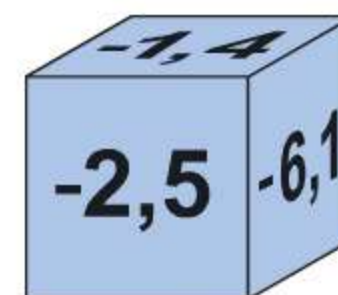
1 Dane są liczby:

A. $|-16|$ B. -12 C. $|-4,5|$ D. 0 E. $\frac{1}{2}$

Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnym odpowiedziom.

Która liczba jest największa?	A	B	C	D	E
Która liczba jest najmniejsza?	A	B	C	D	E
Suma których liczb jest równa 4?	A	B	C	D	E
Liczba przeciwna do której liczby jest mniejsza od -1 ?	A	B	C	D	E

2 Na kostce sześciiennej suma liczb umieszczonych na równoległych ścianach jest równa -5 . Podaj liczby na niewidocznych ścianach.



3 Oblicz.

a) $-9 + (-5)$

$0 + (-4\frac{3}{5})$

$-12 - (-8)$

$-7\frac{2}{3} - (-9,25)$

b) $-1 \cdot (-3) \cdot (-2)$

$1,5 \cdot (-1,1) \cdot 1\frac{2}{3}$

$64 : (-4)$

$-4\frac{2}{3} : (-3\frac{1}{2})$

c) $125 : (-5) - (-2)$

$-3 + (-6) \cdot (-5)$

$-24,12 : 6 - (-7,8 + 3,4)$

$3,2 : (-2\frac{2}{3}) + (-\frac{6}{7}) \cdot (-2\frac{1}{3})$

4 Rozwiąż równania.

a) $17 - z = -34$

$b - 3\frac{2}{3} = -2\frac{1}{2}$

b) $x \cdot (-12) = 600$

$4,5 \cdot 2c = -14,4$

c) $600 : z = -4$

$3d : (-10,8) = 0,5$

5 Które zdanie jest prawdziwe?

a) Suma sześciu liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.

b) Iloczyn dwudziestu jeden liczb ujemnych jest liczbą ujemną.

c) Różnica liczby ujemnej i liczby 0 jest równa 0.

6 Porównaj z liczbą zero:

a) iloczyn wszystkich liczb całkowitych od -11 do -3 włącznie,

b) iloczyn jednocyfrowych liczb pierwszych i liczb do nich przeciwnych.

- 7 Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

$$2,25 \cdot (-1,6) + (-19,5) : \left(-2\frac{1}{2}\right)$$

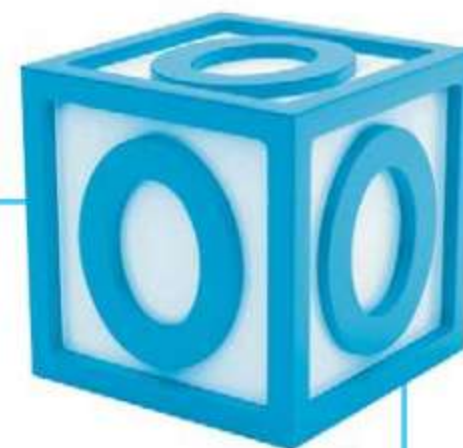


A to ciekawe!

Cyfra zero została wprowadzona dużo później niż inne cyfry systemu dziesiętkowego.

Współczesny symbol zera pochodzi z Indii. Zero najpierw zostało przyjęte w Kambodży i Chinach, a później w świecie arabskim. Do Europy dotarło w okresie krucjat podejmowanych w XII wieku. Współczesna nazwa zero jest znana od 1491 roku.

Napisz trzy takie działania, których wynikiem jest liczba 0.



Wyzwanie

Znajdź taką liczbę, aby iloczyn tej liczby i liczby $-2\frac{1}{2}$ był liczbą ujemną większą od $-\frac{1}{2}$.



Sprawdź się!

- 1 Oblicz.

a) $-3 - (-1)^3 + (-1)^4$

b) $-24 : \left|-7\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\right|$

- 2 Rozwiąż równanie i wykonaj sprawdzenie.

a) $-3,6 \cdot a = 1\frac{1}{5}$

b) $-5b : 9 = 1\frac{2}{3}$

- 3 Która liczba jest większa: $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ czy $-\frac{3^2}{4}$?

- 4 Wartością wyrażenia $-3,6 : \left(-2\frac{1}{4}\right) - 2\frac{2}{3} \cdot 1,5$ jest liczba

A. $-3\frac{3}{5}$

B. $-2\frac{2}{5}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $1\frac{1}{2}$

- 5 Oblicz pole kwadratu o boku 5,5 dm oraz pole prostokąta, którego jeden bok jest o $3\frac{1}{4}$ dm dłuższy, a drugi o $3\frac{1}{4}$ dm krótszy od boku kwadratu. Pole której figury jest większe i o ile?

10. Liczby wymierne wokół nas



Sowa uczy

Lata przed narodzeniem Chrystusa możemy zapisać za pomocą liczb ujemnych. Na przykład: poeta rzymski Horacy zmarł w ósmym roku przed naszą erą (8 rok p.n.e.), więc możemy zapisać, że było to w -8 roku.



Przykład 1.

Pojazdy kołowe (ciągnięte przez woły) powstały około 3500 lat p.n.e. w Mezopotamii, a piramida Cheopsa w Gizie (Egipt) około 2600 lat p.n.e. Ile lat przed powstaniem tej piramidy powstały pojazdy kołowe?

Sposób I

$$3500 \text{ rok p.n.e.} - 2600 \text{ rok p.n.e.} = 900 \text{ lat}$$

Sposób II

Lata przed naszą erą możemy zapisać jako liczby ujemne.

3500 rok p.n.e. to -3500

2600 rok p.n.e. to -2600

$$-2600 - (-3500) = -2600 + 3500 = 900$$



Odpowiedź. Pojazdy kołowe powstały około 900 lat przed powstaniem piramidy Cheopsa.

- 1 Stan konta pani Renaty był równy -2256 zł. Pani Renata wpłaciła na konto 200 zł. Jaki był stan konta po wpłacie?
- 2 Pan Adam wszedł na Baranią Górę, która ma wysokość 1220 m n.p.m. W tym samym czasie pan Jacek nurkował w jeziorze na głębokości 15 m poniżej poziomu morza. Różnica wysokości, na jakich znajdowali się obydwaj panowie, była równa

A. 1205 m
B. 1245 m
C. 1230 m
D. 1235 m

- 3 Bitwa pod Maratonem między Ateńczykami a Persami miała miejsce w 490 roku p.n.e. Bitwę tę przegrali Persowie. Pierwsze udokumentowane igrzyska olimpijskie w Grecji odbyły się w 776 roku p.n.e.
- Co było wcześniej: bitwa pod Maratonem czy pierwsze igrzyska olimpijskie w Grecji?
 - Ile lat różnicy było między igrzyskami w Grecji a zwycięstwem Ateńczyków?



- 4 Pan Karol kupił 1000 akcji przedsiębiorstwa TOP i 500 akcji przedsiębiorstwa TOL. Po pewnym czasie na każdej akcji TOP stracił 8,23 zł, a na każdej akcji TOL zyskał 11,08 zł. Czy ostatecznie pan Karol zyskał czy stracił?
- 5 Jezioro Mamry na Pojezierzu Mazurskim jest położone 116 m powyżej poziomu morza, a Morze Kaspijskie około 144 m niżej niż polskie jezioro. Na jakiej wysokości znajduje się Morze Kaspijskie?
- 6 Pitagoras to matematyk i filozof grecki. Przyczynił się do rozwoju matematyki. Urodził się około 572 roku p.n.e., a zmarł około roku 497 p.n.e. Ile lat żył Pitagoras?
- 7 Ślady pobytu człowieka znalezione m.in. w Biskupinie, Brudzeniu, Czersku i Grudziądzu pochodzą sprzed 10 000–14 000 lat (paleolit). Ile lat przed naszą erą powstały te ślady?



Biskupin

- 8 Na Kujawach 5500 lat temu wznoszono grobowce – nasypy z glazami do 120 m długości.
- Ile wieków przed narodzeniem Chrystusa powstały grobowce na Kujawach?
 - Na osi liczbowej zaznacz wiek, w którym wznoszono grobowce na Kujawach, i wiek obecny.
- 9 Na Górze Zamkowej w Bieczu odkryto fragmenty ceramiki i resztki wału obronnego. Mają one 2200–2300 lat. W którym wieku mógł powstać wał obronny na Górze Zamkowej?



Kopiec kujawski

- 10 Najwyższy szczyt Europy to Mont Blanc. Ma on około 4810 m n.p.m. Największa depresja na tym kontynencie to brzeg Morza Kaspijskiego, położony około 28 m p.p.m. Jaka jest różnica wysokości między najwyższym i najniższym punktem w Europie?



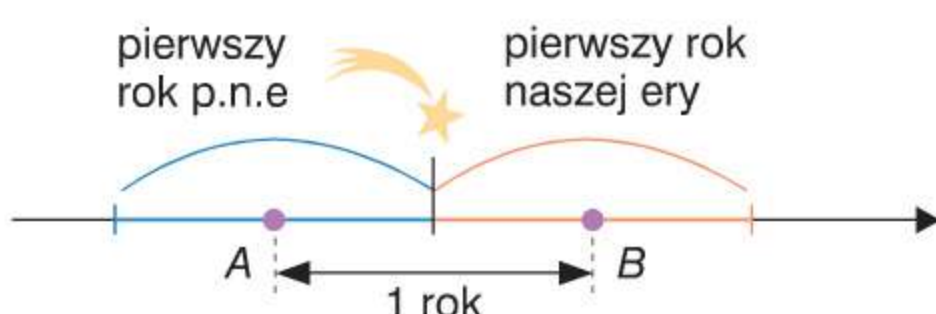
Mont Blanc

- 11 Tata Bartka miał na koncie 785 zł. Za zakupy w centrum handlowym zapłacił 452,80 zł. Potem kupił jeszcze kurtkę za 349,99 zł. Za wszystko płacił kartą płatniczą. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
- Łącznie tata wydał na zakupy A / B. A. 832,79 zł B. 802,79 zł
- Saldo konta po zakupach było równe C / D. C. 157,79 zł D. -17,79 zł

Wyzwanie

Anna urodziła się w pierwszym roku przed naszą erą, a jej brat w pierwszym roku naszej ery. O ile lat Anna była starsza od brata?

W kalendarzu gregoriańskim, którym się posługujemy, nie ma roku zerowego. Odczytujemy z osi czasu, że Anna była o jeden rok starsza od brata.



$$[1 - (-1)] - 1 = 2 - 1 = 1$$

Uwzględniamy brak roku zerowego.

Odpowiedź. Anna była o rok starsza od brata.

1. Kalendarz juliański wprowadził Gajusz Juliusz Cezar w 45 roku p.n.e. Reformę tego kalendarza ogłosił papież Grzegorz XIII w 1582 roku (kalendarz gregoriański). Przez ile lat nie był reformowany kalendarz juliański?
2. Jednym z władców Cesarstwa Rzymskiego był Oktawian August, który urodził się w 63 roku p.n.e., a panował od 27 roku p.n.e. do 14 roku n.e. Ile lat miał Oktawian August, kiedy został cesarzem, i ile lat panował?

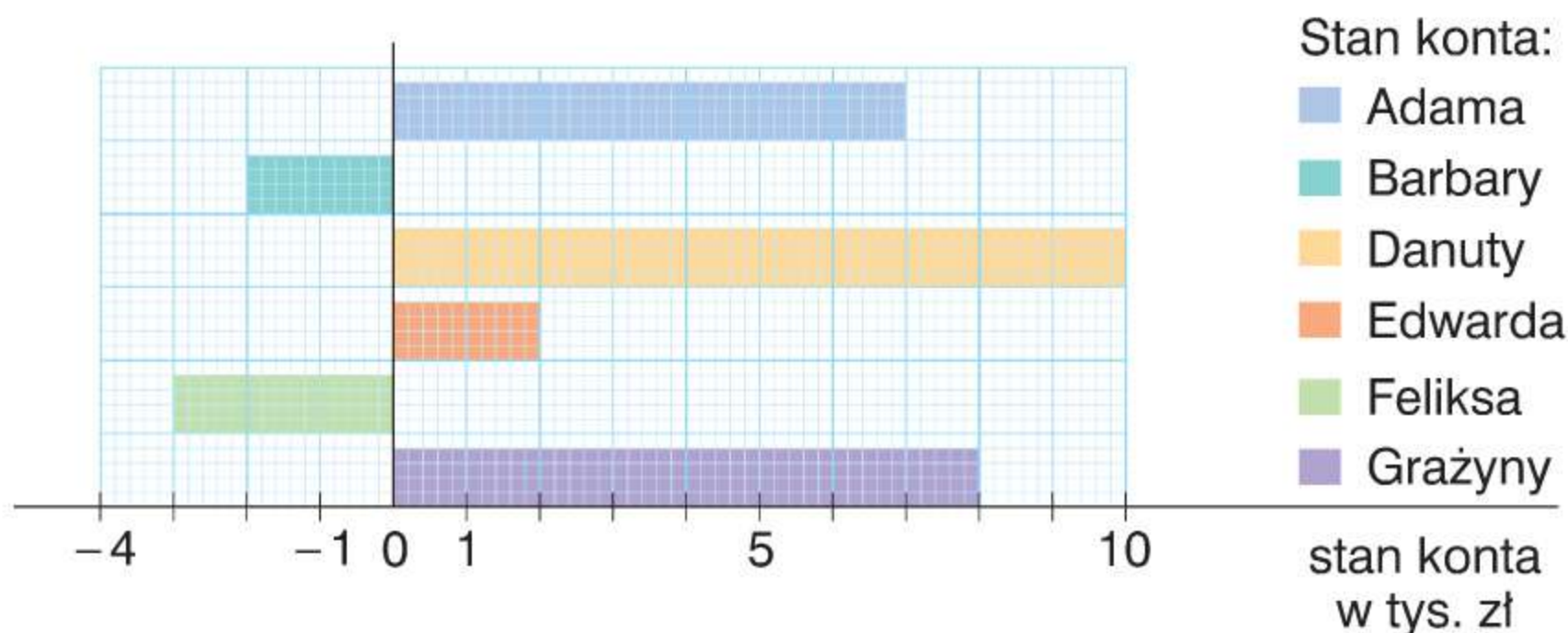
 Sprawdź się!

Skorzystaj z podanych informacji i rozwiąż zadania 1.–3.

W 753 roku p.n.e. został założony Rzym, a w Grecji w 776 roku p.n.e. odbyły się pierwsze igrzyska olimpijskie.

- 1 Które z tych wydarzeń nastąpiło wcześniej?
- 2 Między wydarzeniami upłynęły

A. 123 lata.
B. 23 lata.
C. 33 lata.
D. 24 lata.
- 3 Złote monety z pieczęcią władcy pojawiły się w greckich miastach 76 lat przed pierwszymi igrzyskami olimpijskimi. W którym roku pojawiły się pierwsze złote monety z pieczęcią władcy?
- 4 Na diagramie przedstawiono stan konta bankowego sześciu osób.



- a) Odczytaj stan konta każdej z osób.
- b) Która z osób miała na koncie najwięcej pieniędzy?
- c) Ile pieniędzy musiałby wpłacić pan Feliks, aby stan jego konta był równy 0 zł?
- d) Jaka jest różnica między stanem konta pana Adama i stanem konta pani Barbary?
- 5 Na zawodach narciarskich Adrian uzyskał czas 2 min 7 s. Na ekranie obok jego wyniku była liczba +18 s, która oznacza różnicę między czasem Adriana a czasem najlepszego zawodnika. Najlepszy zawodnik uzyskał czas

A. 2 min 25 s
B. 145 s
C. 1 min 49 s
D. 1 min 39 s

Zadania utrwalające

- 1 Na mapie przedstawiono temperatury w niektórych miastach Polski.
- W których miastach temperatury powietrza nie były dodatnie?
 - Podane temperatury uporządkuj rosnąco.
 - Jaka jest różnica między najwyższą i najniższą temperaturą na tej mapie pogody?



- 2 Podaj liczbę o 70 większą od każdej z liczb: -18 , 15 , -23 , -4 .
- 3 Podaj liczbę o 50 mniejszą od każdej z liczb: -50 , 28 , -28 , -16 .
- 4 Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej liczby:
 $-(-3)$, $|-1|$, $-\frac{8}{4}$, $1,5$, $-2\frac{3}{4}$.
- 5 Napisz liczby przeciwne do liczb: -9 , 7 , $-(-5)$, $|-3\frac{2}{3}|$, $5,37$.
- 6 Podaj liczby, których wartością bezwzględną jest:
- 4,
 - 1,
 - $\frac{3}{4}$,
 - 7,4.
- 7 Oblicz.
- $|-700|$
 - $|-200| - |-650|$
 - $|-420| + |320|$
- 8 Liczbę -24 zapisz jako:
- sumę i różnicę dwóch liczb, które nie są całkowite;
 - iloczyn i iloraz dwóch liczb całkowitych.
- 9 Napisz cztery liczby wymierne większe od $-3,5$, ale mniejsze od $-2\frac{1}{3}$. Oblicz sumę tych liczb.
- 10 Oblicz w pamięci.
- $(-3)^2$
 -10^2
 -11^2
 - $(-5)^2 - (-2)$
 $4 \cdot (-7) + 1$
 $(-4^2 - 4) : 4$
 - $-7 + 12,3$
 $-16 + 22\frac{1}{3}$
 $26 + (-40\frac{2}{5})$

11 Oblicz.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ b) $(-0,5)^2$ c) $(-1)^2$ d) $(-1)^3$ e) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$

12 Oblicz.

a) $8 + (-5) - 8 - (-5)$
 $-15 - (-26) + 4 - 26 + 24$
 $-45 : (-3) - (-11) \cdot 3$
 $[63 : (-9) + (-13)] \cdot (-8)$

b) $26\frac{1}{2} + (-18\frac{2}{3}) - 6\frac{1}{6} + (-12\frac{5}{6})$
 $-17,2 - (-14,5) + (-8) - 24,7$
 $36 + (-40,2) - (-21\frac{3}{5}) - 4,3$
 $3\frac{1}{5} : 1\frac{1}{15} \cdot (-\frac{5}{6})$

13 Zapisz wyrażenie arytmetyczne i oblicz jego wartość.

- a) Kwadrat liczby $\frac{3}{4}$ pomniejszony o 1,9.
 b) Iloraz liczb 2,4 i $-1\frac{1}{7}$ powiększony o $1\frac{1}{3}$.
 c) Różnica iloczynu liczb $-1,5$ i $2\frac{2}{3}$ i ilorazu liczb $1\frac{7}{8}$ i $-1,2$.
 d) Suma sześcienu liczby $-\frac{1}{2}$ i kwadratu liczby $-0,2$.

14 Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenia.

a) $16 : (-3 + b) = -2$ b) $4x + 7 = -5$ c) $(2m - 10) - (-2) = 0$
 $(2p - 3) \cdot 4 = -36$ $24 - 3d = 30$ $(8 - 3y) : (-4) = 16$

15 Do pewnej liczby dodano -6 i otrzymano wynik równy różnicy liczb $-7,5$ i $-2\frac{1}{3}$. Co to za liczba?

16 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiedni znak: $>$, $<$ lub $=$.

a) $-1,75 - (-2,9) \blacklozenge -(-3\frac{1}{6}) - 1\frac{1}{4}$ b) $2\frac{1}{3} \cdot (-2,1) \blacklozenge -5,4 : 2\frac{1}{4}$

17 Oblicz: $(|-3,4| + |2\frac{2}{3}|) : |-\frac{1}{30}|$.

18 Napisz sumę trzech liczb, która będzie równa $-46,7$, a co najmniej jeden składnik tej sumy będzie dodatni.

19 Pani Iza kupiła 400 jednostek funduszy skarbowych i 220 jednostek funduszy korporacyjnych. Po pewnym czasie cena jednostki funduszu skarbowego wzrosła o 12,20 zł, a jednostki funduszy korporacyjnych zmalała o 5,40 zł. Jaki zysk miałyby pani Iza, gdyby po tych zmianach sprzedała wszystkie jednostki funduszy?

Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

- 1 Rano temperatura była równa -18°C . O ile stopni wzrosła, jeżeli w południe wynosiła -11°C ?
Wskaż poprawną odpowiedź A, B lub C i jej uzasadnienie I lub II.

A. O -7°C ,	ponieważ różnicę temperatur opisuje działanie	I. $-11 - (-18)$.
B. O 29°C ,		II. $-18 - (-11)$.
C. O 7°C ,		

- 2 Wynik którego działania należałoby wpisać w kwadracik, aby wyrażenie $-3 \cdot \blacksquare \cdot (-8)$ miało wartość mniejszą od 0?
A. $-16 + 24$ B. $-2 \cdot 4$ C. $-18 : (-2)$ D. $-2 - (-4)$
- 3 Która z podanych liczb ma największą wartość bezwzględną?
A. $-5,6$ B. $9,9$ C. -16 D. 0
- 4 Liczbą przeciwną do liczby -4 jest
A. -4 B. 4 C. 0 D. $-\frac{1}{4}$
- 5 Liczbą przeciwną do $-3\frac{2}{3}$ **nie jest**
A. $-(-3\frac{2}{3})$ B. $3\frac{2}{3}$ C. $\frac{11}{3}$ D. $-\frac{11}{3}$
- 6 Która z podanych liczb jest największa?
A. -4^2 B. $(-4)^2$ C. -8 D. -8^2
- 7 Która z podanych liczb jest dodatnia?
A. $(-1)^2$ B. -9 C. -2^2 D. -1^2
- 8 Najmniejszą liczbą spośród podanych jest
A. $\frac{1}{3}$ B. $(-\frac{1}{3})^2$ C. $-\frac{1^2}{3}$ D. $-\frac{1}{3^2}$
- 9 Sumą liczb -43 i $-58,5$ jest liczba
A. $101,5$ B. $-15,5$ C. $-91,5$ D. $-101,5$
- 10 Wynikiem którego z podanych działań jest liczba ujemna?
A. $-4 \cdot (-3)$ B. $-7\frac{1}{2} + 10\frac{3}{5}$ C. $-7 - (-4,3)$ D. $-25 : (-5)$

- 11 Liczbą o 1 większą od ilorazu liczby 84 przez liczbę -4 jest
A. -21 B. -20 C. 20 D. 21
- 12 Które z podanych wyrażeń **nie jest** równe 4 ?
A. $|-4|$ B. $|-10| - |-6|$ C. $|-20| : (-5)$ D. $|-2| \cdot 2$
- 13 Wartość wyrażenia $4\frac{1}{2} \cdot (-3) - \frac{3}{4}$ jest równa
A. $-14\frac{1}{4}$ B. $10\frac{1}{8}$ C. $14,25$ D. -12
- 14 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Iloczyn liczb $1\frac{5}{6}$ i $-1,5$ jest większy od $-2,8$.	P	F
Ilorazem liczby $-1,8$ przez liczbę $0,09$ jest -20 .	P	F

- 15 Która liczba jest rozwiązaniem równania $a \cdot (-7) = 56$?
A. -8 B. -7 C. 8 D. 7
- 16 Która liczba spełnia równanie $(4a - 24) : 6 = -16$?
A. 18 B. 5 C. -34 D. -18

- 17 Pewnego roku średnia temperatura stycznia na Kasprowym Wierchu wynosiła $-9,8^{\circ}\text{C}$, a w Białymstoku była o $5,7^{\circ}\text{C}$ wyższa.

Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

W Białymstoku średnia temperatura stycznia była równa A / B .

A. $-4,1^{\circ}\text{C}$ B. $4,5^{\circ}\text{C}$

Suma średnich temperatur stycznia w Białymstoku i na Kasprowym Wierchu to C / D .

C. $-13,9^{\circ}\text{C}$ D. $-4,1^{\circ}\text{C}$



Kasprowy Wierch

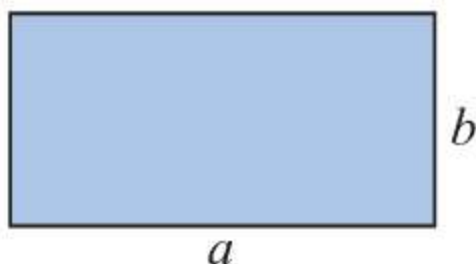
- 18 W latach osiemdziesiątych XX wieku najwyższa temperatura w Kielcach była równa $32,9^{\circ}\text{C}$, a najniższa wynosiła $-33,9^{\circ}\text{C}$. Jaka była różnica między tymi temperaturami?
A. 1°C B. $66,8^{\circ}\text{C}$ C. -1°C D. $-66,8^{\circ}\text{C}$

1. Pole czworokąta



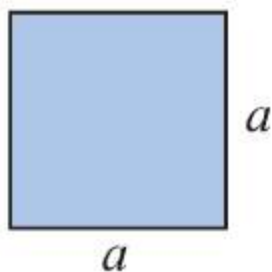
Sowa przypomina

• Pole prostokąta i kwadratu



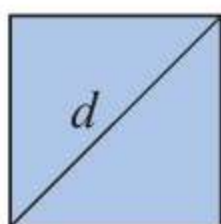
$$P = a \cdot b$$

Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości dwóch sąsiednich boków.



$$P = a^2$$

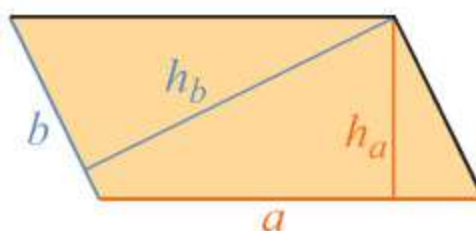
Pole kwadratu jest równe kwadratowi długości boku.



$$P = \frac{d^2}{2}$$

Pole kwadratu jest równe połowie kwadratu długości przekątnej.

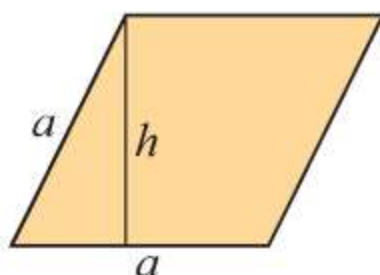
• Pole równoległoboku i rombu



$$P = a \cdot h_a$$

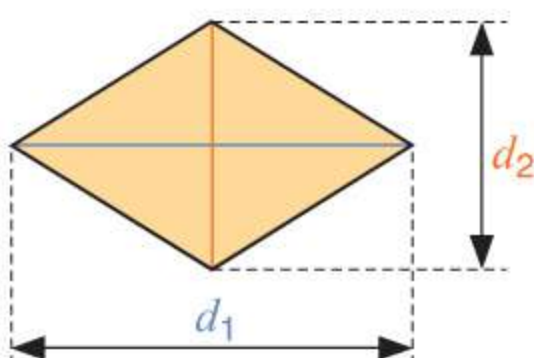
$$P = b \cdot h_b$$

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.



$$P = a \cdot h$$

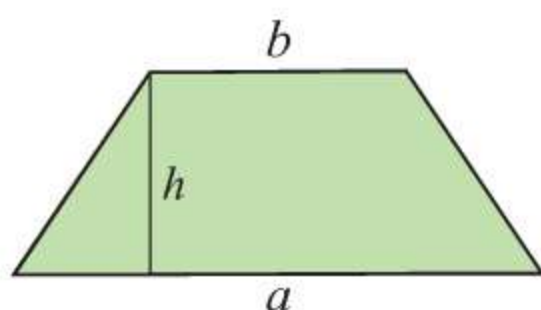
Pole rombu jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.



$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Pole rombu jest równe połowie iloczynu długości przekątnych.

● Pole trapezu



$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

Pole trapezu jest równe połowie iloczynu sumy długości podstaw i wysokości.

● Jednostki pola

1 kilometr kwadratowy – 1 km²

1 hektar – 1 ha

1 ar – 1 a

1 metr kwadratowy – 1 m²

1 decymetr kwadratowy – 1 dm²

1 centymetr kwadratowy – 1 cm²

1 milimetr kwadratowy – 1 mm²

$$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha}$$

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a}$$

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ a} = 0,01 \text{ ha}$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ mm}^2 = 0,01 \text{ cm}^2$$

Przykład 1.

Romb ma przekątne o długościach 6 cm i 8 cm, a jego bok ma długość 5 cm. Obliczmy wysokość rombu.

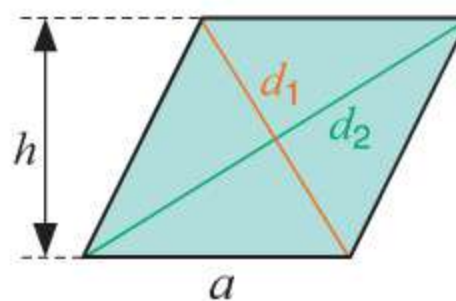
Gdybyśmy znali pole rombu, to ze wzoru $P = a \cdot h$ moglibyśmy obliczyć tę wysokość.

Obliczmy pole rombu ze wzoru $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$.

$$P = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obliczmy wysokość rombu ze wzoru $P = a \cdot h$.

$$24 = 5 \cdot h \quad 24 = 5 \cdot h \quad h = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ [cm]}$$



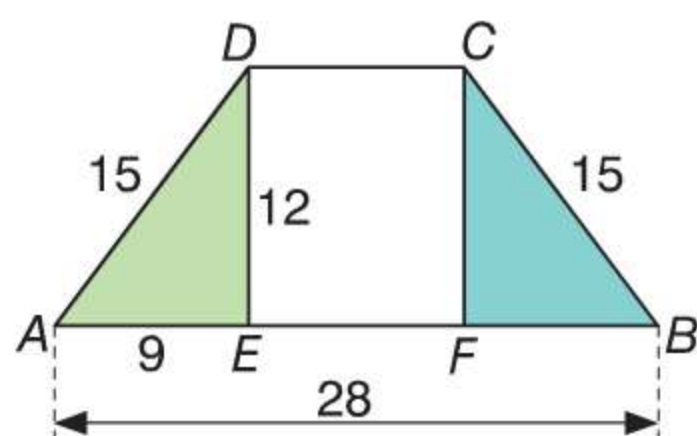
Odpowiedź. Wysokość rombu jest równa 4,8 cm.

Przykład 2.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ poprowadzono wysokość $|DE| = 12$ cm. Utworzono w ten sposób trójkąt AED o bokach długości 9 cm, 12 cm i 15 cm. Dłuższa podstawa trapezu ma 28 cm długości. Obliczmy pole tego trapezu.

Trójkąt AED jest trójkątem prostokątnym, bo $DE \perp AB$. Najdłuższy bok trójkąta jest przeciwprostokątną i ramieniem trapezu.

Wykonajmy rysunek pomocniczy i zaznaczmy drugą wysokość CF .



Poprowadzone wysokości podzieliły trapez na prostokąt i dwa trójkąty.

Trójkąty AED i FBC są identyczne, bo trapez jest równoramienny, więc $|FB| = 9$ cm.

Aby obliczyć pole trapezu, trzeba obliczyć długość podstawy CD .

Ponieważ $|EF| = |CD|$, obliczmy długość odcinka EF .

$$|AB| = |AE| + |EF| + |FB|, \text{ czyli } 28 = 9 + |EF| + 9$$

$$|EF| = |DC| = 10 \text{ [cm]}$$

Obliczmy pole trapezu.

$$P = \frac{(28 + 10) \cdot 12}{2} = 38 \cdot 6 = 228 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Odpowiedź. Pole trapezu jest równe 228 cm^2 .

- 1 Oblicz pole prostokąta o wymiarach $6,2 \text{ dm} \times 45 \text{ cm}$. Pole podaj w cm^2 .
- 2 Jeden bok prostokątnej działki ma 15 m, a drugi jest o 5 m dłuższy. Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Powierzchnia działki jest równa A / B. A. 3 a B. 75 m^2
Obwód działki wynosi C / D. C. 35 m D. 70 m
- 3 Pole prostokąta jest równe $13,2 \text{ cm}^2$. Jeden bok ma długość 12 cm. Oblicz długość drugiego boku tego prostokąta.
- 4 Pani Basia i pani Zosia uszyły obrusy w kształcie kwadratu. Bok obrusa pani Basi ma 1 m 40 cm długości, a przekątna w obrusie pani Zosi ma długość 140 cm. Który obrus ma większą powierzchnię?



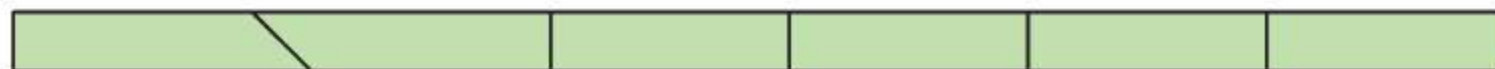
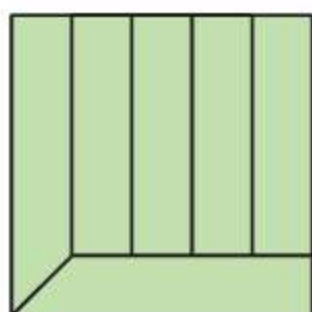
- 5 Na ogrodzenie kwadratowej działki pan Stefan zużył 138 m bieżących siatki. W ogrodzeniu była brama z furtką o szerokości 6 m. Ile arów ma ta działka?

A. 1296 B. 129,6
C. 12,96 D. 1,296

- 6 Szkółka leśna ma kształt równoległoboku, o bokach długości 40 m i 25 m. Odległość między dłuższymi bokami jest równa 18 m. Jaka jest powierzchnia tej szkółki?

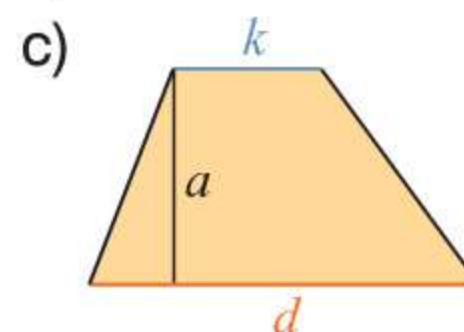
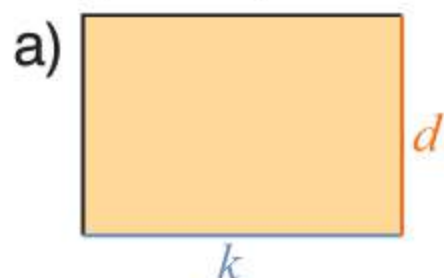


- 7 Oblicz pole rombu o przekątnych 12 cm i 16 cm. Jaka jest odległość między przeciwległymi bokami rombu, jeżeli jego bok jest równy 10 cm?
- 8 Przedstawiony na rysunku kwadrat ma pole równe 400 cm^2 . Z figur, na które go podzielono, utworzono prostokąt, taki jak na rysunku. Oblicz pola dwóch figur różnych kształtów, z których jest zbudowany prostokąt, oraz obwód utworzonego prostokąta.

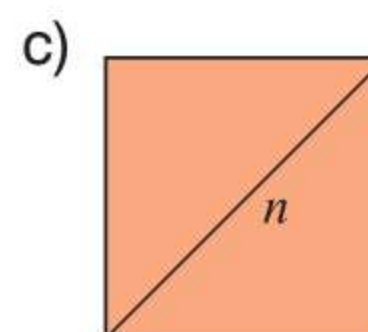
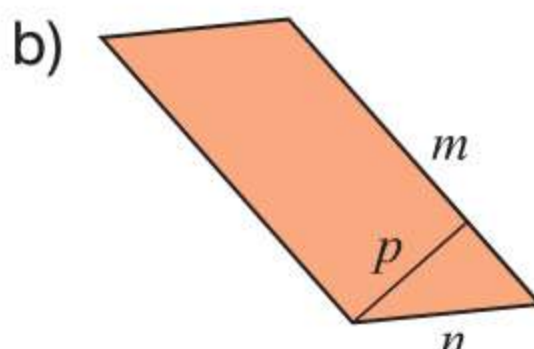
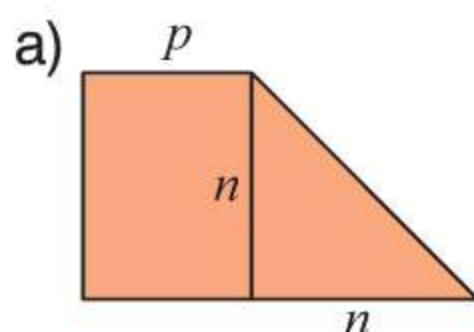


- 9 Miejsce na trawnik ma kształt trapezu równoramienne, którego równoległe boki są odległe od siebie o 24 m i jeden z nich ma 20 m długości, a drugi jest o 10 m dłuższy. Jedno opakowanie nasion trawy kosztuje 16,50 zł i wystarczy na obsianie 80 m^2 powierzchni. Ile opakowań nasion trzeba kupić i ile za nie zapłacimy?

- 10 Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące pole wielokąta.



- 11 Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące pole wielokąta. Zapisz słownie nazwę tego wyrażenia. Oblicz jego wartość dla: $m = 8,5$; $n = 4$; $p = 3,4$.



- 12 W tabelce podano powierzchnie największych jezior województwa warmińsko-mazurskiego.

Jezioro	Jeziorak	Mamry	Nidzkie	Śniardwy
Powierzchnia	3220 ha	1 028 000 a	18 180 000 m ²	113,4 km ²

- a) Powierzchnie jezior uporządkuj rosnąco.
b) O ile kilometrów kwadratowych powierzchnia jeziora Śniardwy jest większa od powierzchni najmniejszego jeziora wymienionego w tabelce?

Na podstawie poniższych informacji rozwiąż zadania 13.–14.

W początkach swego istnienia Zamość miał cechy renesansowego miasta idealnego. Wyjątkowy w polskiej architekturze plan katedry nawiązywał do kościołów włoskich z XV i XVI wieku. Katedra miała w podstawie prostokąt o wymiarach 45 m × 30 m. Wymiary te były 15-krotnym pomniejszeniem wymiarów całego ówczesnego Zamościa. Płyta Rynku Wielkiego miała kształt kwadratu o boku 100 m.



Zamość

- 13 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

Powierzchnia płyty Rynku Wielkiego w Zamościu jest równa 1 ha.	P	F
Zamość zbudowano na planie prostokąta o wymiarach 675 m × 450 m.	P	F
W początkach istnienia Zamość zajmował powierzchnię 31 ha.	P	F
Pierwotnie powierzchnia podstawy katedry była równa 1350 m ² .	P	F

- 14 Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.
Gdy Zamość był budowany, powierzchnia podstawy katedry wynosiła A / B powierzchni miasta.

A. $\frac{1}{225}$ B. $\frac{1}{215}$

Płyta Rynku Wielkiego w Zamościu w skali 1 : 2000 ma bok długości C / D.

C. 5 cm D. 2 cm



A to ciekawe!

W XIX wieku używano różnych jednostek powierzchni.

Na przykład w Królestwie Polskim jednostką powierzchni była morga nowopolska = 0,5598 ha, w Galicji – morga austriacka = 57,55 a, a w zaborze pruskim – wielka morga = 5673 m² i mała morga = 2553 m².

1. Która morga ma większą powierzchnię: nowopolska czy austriacka?
2. Która z wymienionych mórg ma najmniejszą powierzchnię?



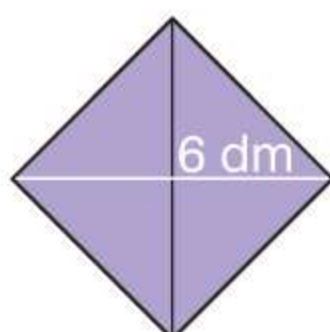
Królestwo Polskie
(Kongresowe)



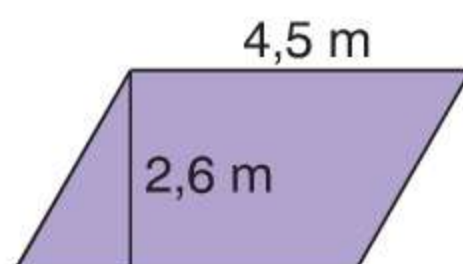
Sprawdź się!

1. Oblicz pole wielokąta.

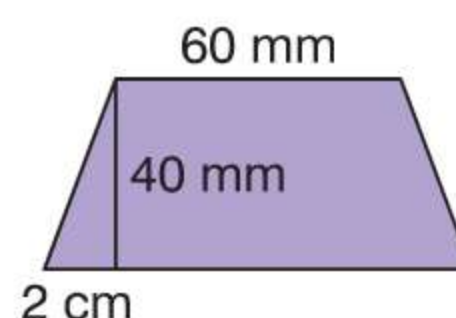
a)



b)



c)

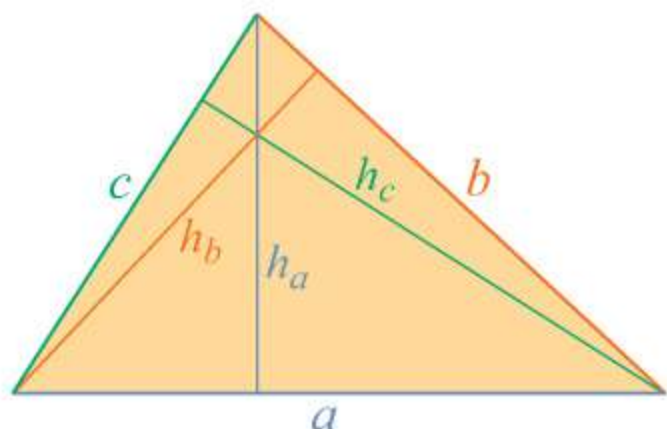


2. W trapezie boki równoległe mają długości 18 cm i 11 cm. Długość boku prostopadłego do obu podstaw jest równa 5,4 cm. Oblicz pole tego trapezu.
3. Pole prostokąta jest równe 14 cm². Jeden jego bok ma 3,5 cm długości. Długość drugiego boku wynosi
A. 0,4 dm B. 3,6 cm C. 40 dm D. 0,36 dm
4. Działka o powierzchni 1200 m² ma kształt trapezu prostokątnego, którego równoległe boki mają długości 20 m i 60 m. Oblicz długość ramienia prostopadłego do podstaw, jeżeli drugie ramię ma 50 m.
5. Pole równoległoboku jest równe 23,8 cm². Boki mają długości 68 mm i 4,2 cm. Oblicz wysokość tego równoległoboku opuszczoną na dłuższy bok.

2. Pole trójkąta



Sowa przypomina



$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

Przykład 1.

Boki trójkąta prostokątnego mają długości 9 cm, 1,5 dm oraz 120 mm. Obliczmy wysokość poprowadzoną na przeciwprostokątną tego trójkąta.

Długości boków trójkąta wyrażmy w jednakowych jednostkach i wykonajmy rysunek pomocniczy.

$$1,5 \text{ dm} = 15 \text{ cm}$$

$$120 \text{ mm} = 12 \text{ cm}$$

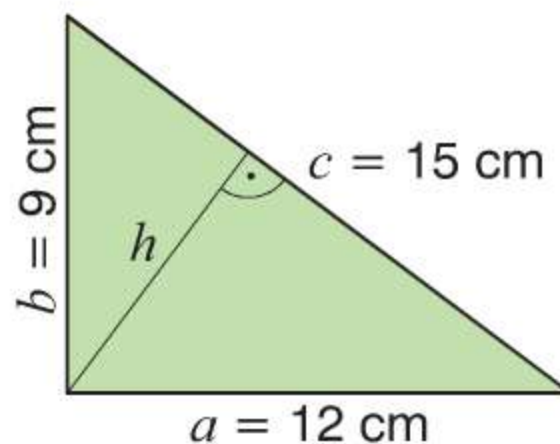
Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem.

Obliczmy pole trójkąta ze wzoru $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \quad P = 54 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Obliczmy wysokość trójkąta za pomocą wzoru $P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$.

$$54 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot h \quad 54 = 7,5 \cdot h \quad h = \frac{54}{7,5} = 7,2 \text{ [cm]}$$



Odpowiedź. Wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną jest równa 7,2 cm.

- 1 Podstawa trójkąta ma długość 74 mm, a wysokość opuszczona na nią jest równa 4,8 cm. Oblicz pole tego trójkąta w mm² i cm².



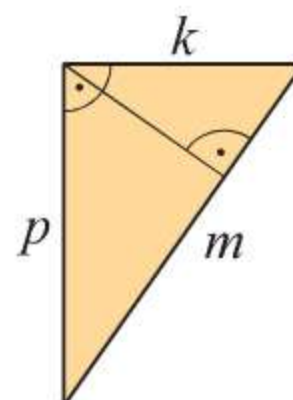
- 2 Skorzystaj z oznaczeń na rysunku i uzupełnij zdania.

Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

Pole trójkąta opisuje wzór A / B. A. $\frac{1}{2}mp$ B. $\frac{1}{2}kp$

Dla $k = 6$ cm, $p = 8$ cm i $m = 10$ cm

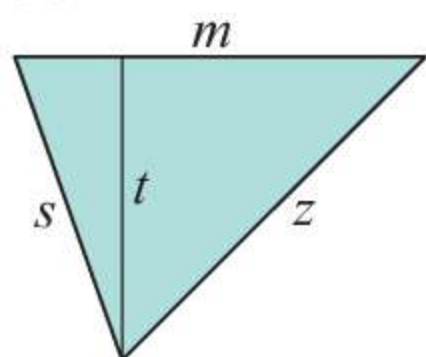
pole jest równe C / D. C. 24 cm^2 D. 48 cm^2



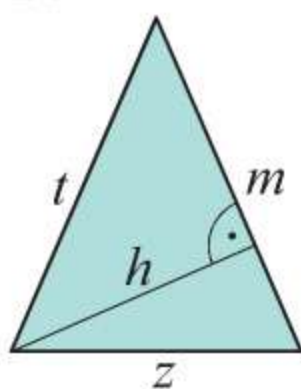
- 3 Narysuj trójkąt o podstawie 8 cm i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej 5 cm. Oblicz jego pole, a następnie narysuj prostokąt o polu równym polu tego trójkąta.

- 4 Pole, którego z trójkątów jest równe połowie iloczynu z i t ?

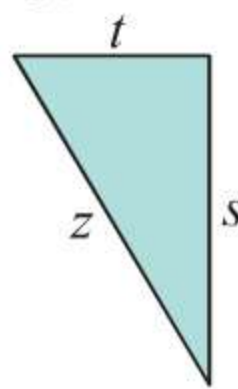
A.



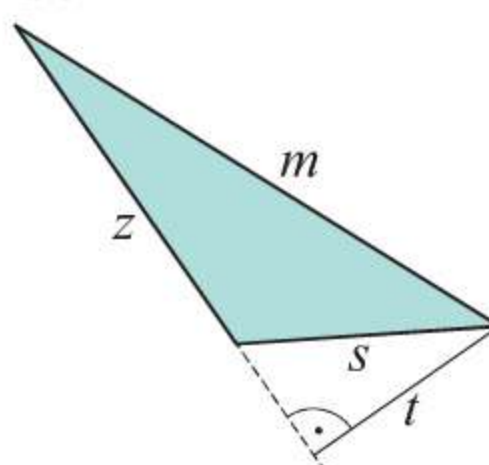
B.



C.

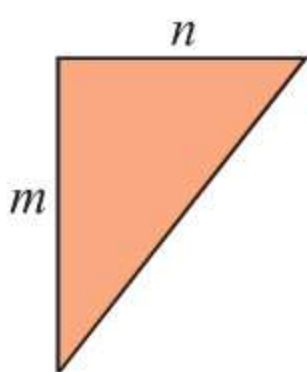


D.

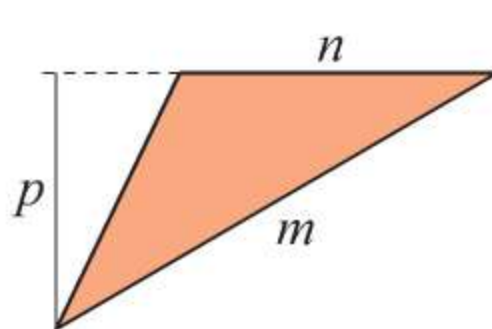


- 5 Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące pole narysowanego trójkąta. Zapisz słownie nazwę tego wyrażenia. Oblicz jego wartość liczbową dla: $m = 8,5$; $n = 4$; $p = 3,4$.

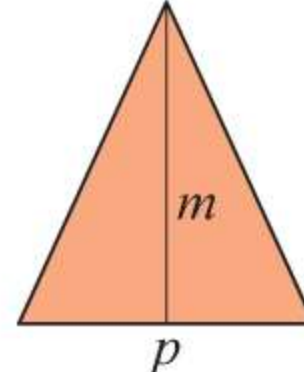
a)



b)



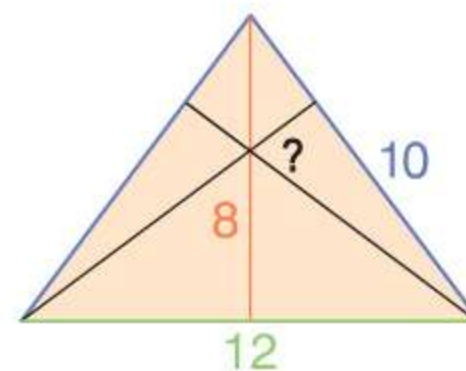
c)



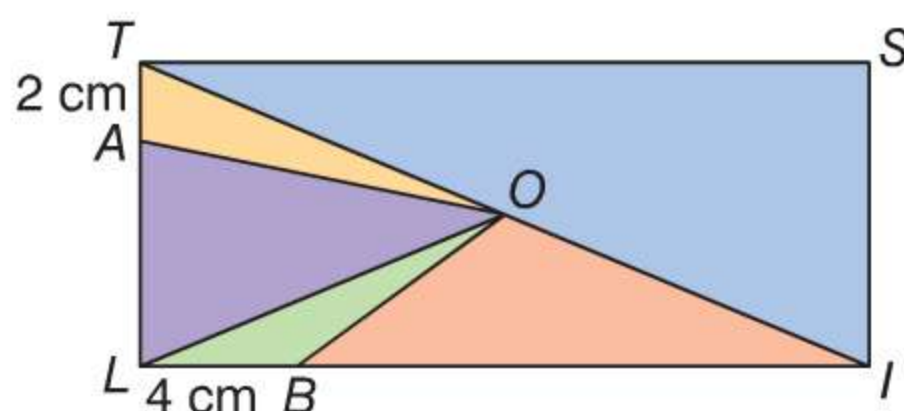
- 6 Wysokość trójkąta jest równa 12 cm i jest ona 4 razy dłuższa od boku, na który jest poprowadzona. Oblicz pole tego trójkąta.

- 7 Działka o powierzchni 2400 m^2 ma kształt trójkąta prostokątnego. Jedna przyprostokątna ma długość 0,08 km, a najdłuższy bok – 100 m. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

- 8 Trójkąt równoramienny ma podstawę równą 12 dm, a jego ramiona mają po 10 dm. Wysokość opuszczona na podstawę ma 8 dm. Oblicz wysokość opuszczoną na ramię trójkąta.



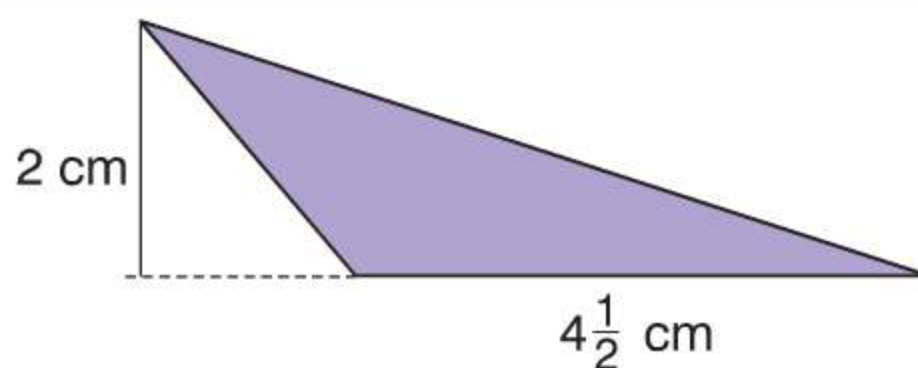
- 9 Prostokąt LST ma wymiary $10\text{ cm} \times 24\text{ cm}$. Jego przekątna ma 26 cm długości, a punkt O jest jej środkiem. Oblicz pola wszystkich widocznych na rysunku trójkątów.



- 10 Trapez równoramienny $KOZA$ ma ramiona KA i OZ o długości 13 cm , a jego krótsza podstawa AZ ma 6 cm długości. Różnica między długościami podstaw jest równa 10 cm . Na krótszej podstawie obrano punkt B tak, że długość odcinka BZ jest trzecią częścią długości odcinka AZ . Poprowadzono również wysokość AC równą 12 cm i połączono punkt B z punktami C i O . Oblicz pola powstałych trójkątów.

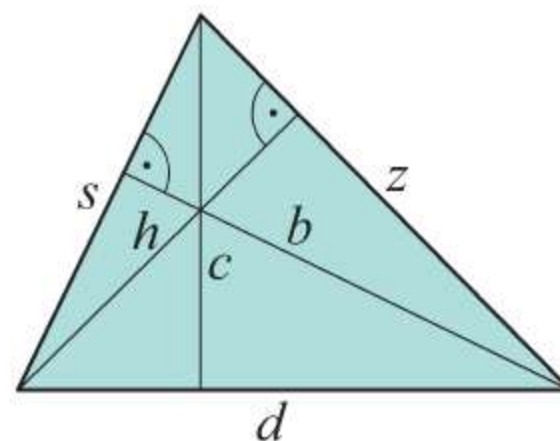
Sprawdź się!

- 1 Oblicz pole trójkąta.



- 2 Które wyrażenie **nieprawidłowo** opisuje pole narysowanego obok trójkąta?

- A. $\frac{1}{2}zh$ B. $\frac{1}{2}dh$
C. $\frac{1}{2}dc$ D. $\frac{1}{2}bs$

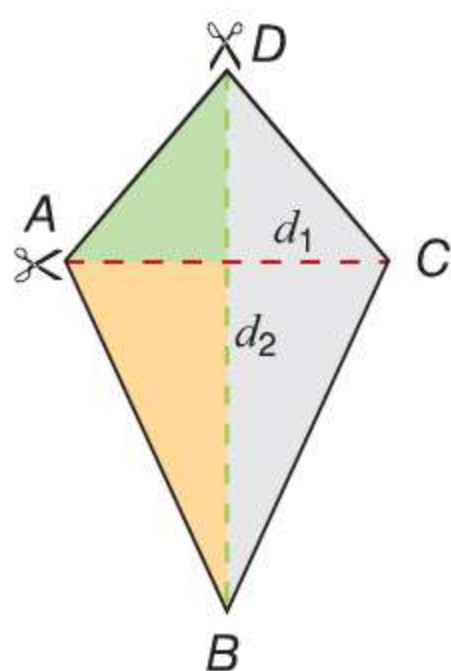
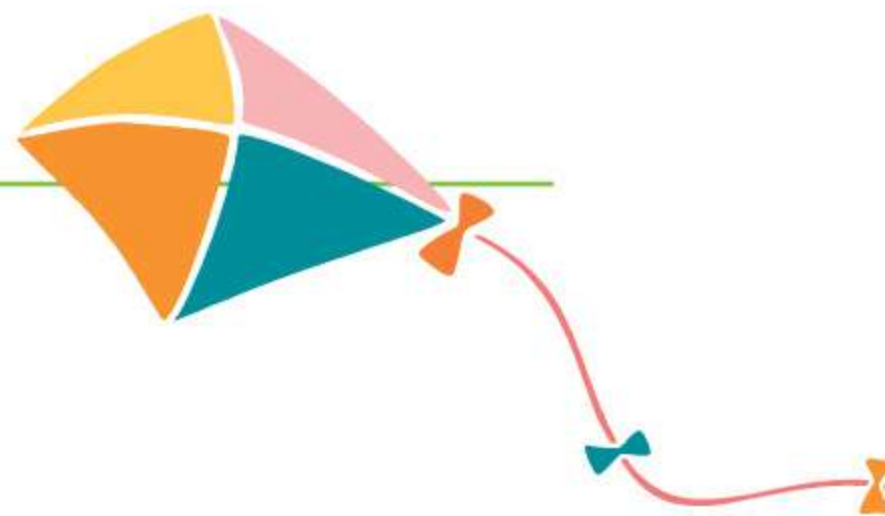


- 3 Trójkąt prostokątny ma boki o długościach 5 cm , 12 cm i 13 cm . Podaj jego wysokości.
- 4 Narysuj trójkąt, którego pole jest równe 12 cm^2 . Zaznacz na rysunku te wymiary trójkąta, które pozwoliły obliczyć jego pole.
- 5 Na parceli państwa Kwiatkowskich miejsce na trawnik ma kształt trójkąta prostokątnego, którego długości przyprostokątnych są równe 24 m i 10 m .
- a) Ile paczek nasion trawy muszą kupić państwo Kwiatkowscy, jeżeli jedna paczka wystarczy na obsianie powierzchni 50 m^2 ?
- b) Ile zapłacą za nasiona państwo Kwiatkowscy, jeżeli jedna paczka nasion kosztuje $19,98\text{ zł}$?

3. Pole dowolnego wielokąta

Przykład 1.

Sebastian miał wykonać latawiec na zawody. Przed zakupem potrzebnych materiałów postanowił obliczyć powierzchnię latawca.



Narysował na kartce figurę $ABCD$ i jej przekątne, które oznaczył d_1 i d_2 . Zauważył, że przekątne są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli jedną z nich na pół.

Rozciął figurę wzdłuż przerywanych linii. Wycięte części ułożył tak jak na rysunku po prawej stronie.

Pole figury $ABCD$ jest równe polu prostokąta $BEFD$.

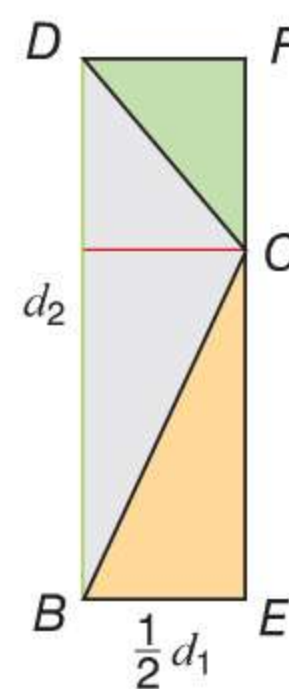


Figura $ABCD$ to **deltoid**.

Pole deltoidu $ABCD$ i prostokąta $BEFD$ jest równe: $P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

Przykład 2.

Pani Ela chciała obliczyć powierzchnię swojej działki, która ma kształt czworokąta $ABCD$. W tym celu podzieliła czworokąt przekątną DB i zauważyła, że oba powstałe trójkąty są prostokątne.

Długości boków w metrach są pokazane na rysunku pomocniczym.

Pani Ela obliczyła pole każdego trójkąta osobno.

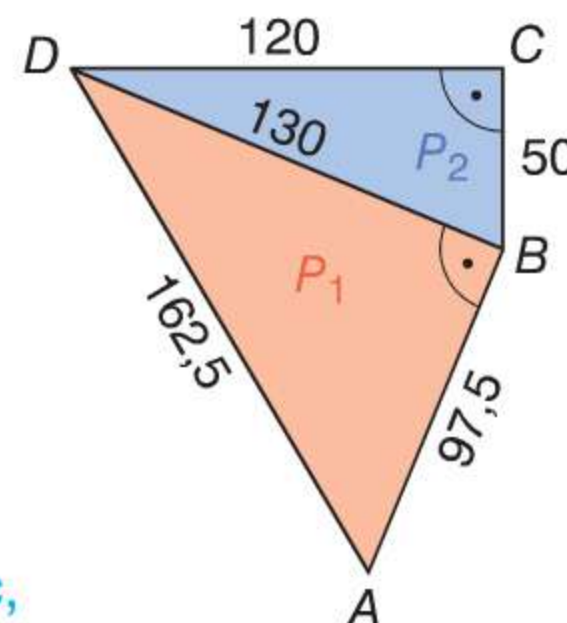
$$P_1 = P_{ABD} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |BD|$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 97,5 \text{ m} \cdot 130 \text{ m} \quad P_1 = 6337,5 \text{ m}^2$$

$$P_2 = P_{BCD} = \frac{1}{2} |BC| \cdot |CD|$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \text{ m} \cdot 120 \text{ m} \quad P_2 = 3000 \text{ m}^2$$

Pole dowolnego wielokąta często można łatwiej obliczyć, gdy podzieli się go na inne znane wielokąty.

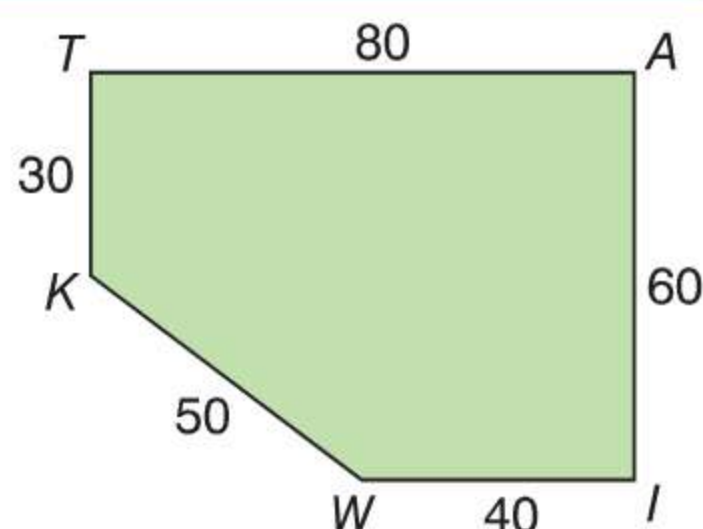


Odpowiedź. Powierzchnia działki pani Eli jest równa $9337,5 \text{ m}^2$.

Przykład 3.

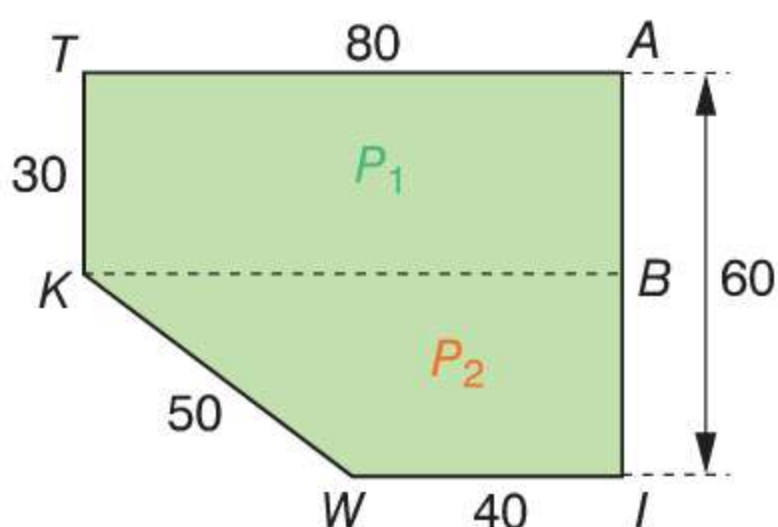
Pan Andrzej miał pole w kształcie pięciokąta i posadził na nim las. Ile hektarów pola przeznaczył pan Andrzej na las?

Na rysunku wymiary są podane w metrach.



Sposób I

Podzielimy pięciokąt na prostokąt i trapez.



Pole pięciokąta jest równe sumie pola prostokąta $KBAT$ i pola trapezu $WIBK$: $P_1 + P_2$.

Pole prostokąta:

$$P_1 = 80 \cdot 30 = 2400 \text{ [m}^2\text{]}$$

Pole trapezu:

$$|IB| = 60 - 30 = 30 \text{ [m]}$$

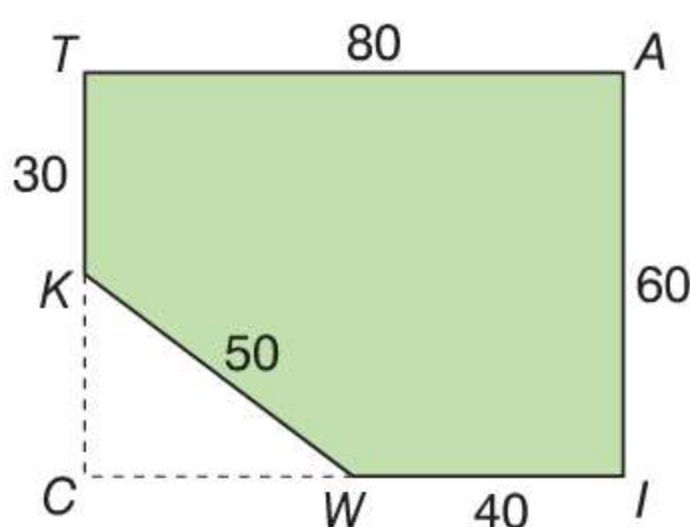
$$P_2 = \frac{(80 + 40) \cdot 30}{2} = 120 \cdot 15 = 1800 \text{ [m}^2\text{]}$$

Pole pięciokąta: $P_1 + P_2$

$$2400 + 1800 = 4200 \text{ [m}^2\text{]}$$

Sposób II

Utwórzmy prostokąt $CIAT$.



Pole pięciokąta jest równe różnicy pola prostokąta $CIAT$ i pola trójkąta CWK : $P_1 - P_2$.

Pole prostokąta:

$$P_1 = 80 \cdot 60 = 4800 \text{ [m}^2\text{]}$$

Pole trójkąta:

$$|CW| = 80 - 40 = 40 \text{ [m]}$$

$$|CK| = 60 - 30 = 30 \text{ [m]}$$

$$P_2 = \frac{40 \cdot 30}{2} = 20 \cdot 30 = 600 \text{ [m}^2\text{]}$$

Pole pięciokąta: $P_1 - P_2$

$$4800 - 600 = 4200 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$$

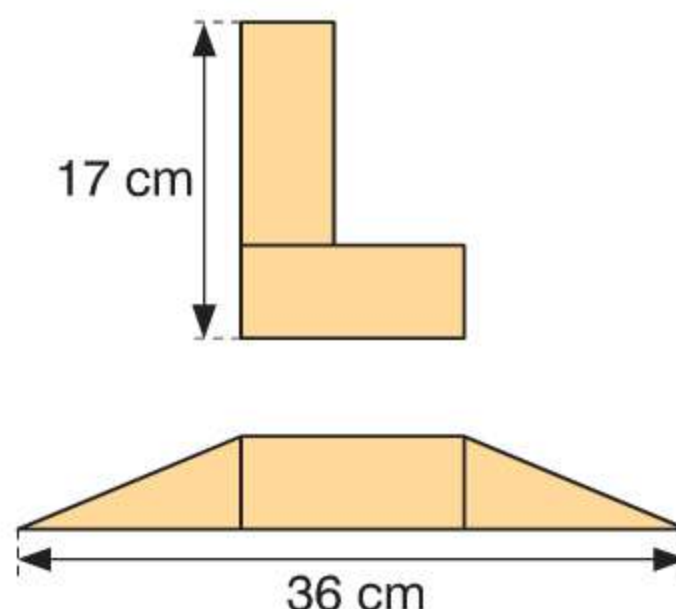
$$4200 \text{ m}^2 = 0,42 \text{ ha}$$

Odpowiedź. Pan Andrzej przeznaczył na las 0,42 ha pola.



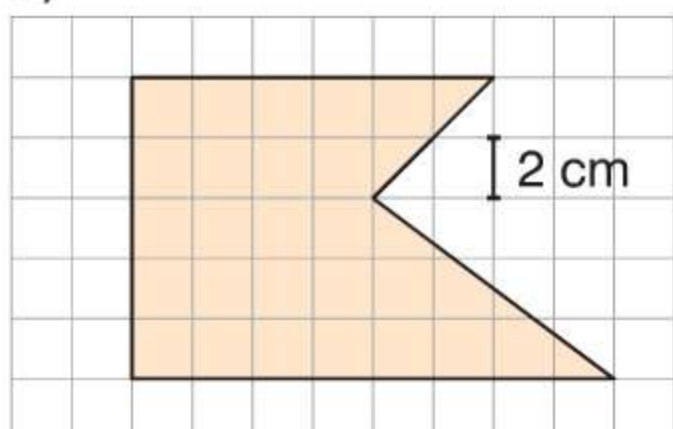
- 1 Natalka wycięła z papieru dwa jednakowe trójkąty prostokątne o bokach 8 cm, 6 cm, 10 cm. Jakie figury może z nich ułożyć? Ułóż czworokąt i oblicz jego pole. Wynik podaj w mm^2 , cm^2 , dm^2 .

- 2 Adam przygotował dwa identyczne prostokąty i ułożył z nich pewną liczbę w systemie rzymskim. Następnie jeden z prostokątów przeciął wzdłuż przekątnej i zbudował trapez, taki jak na rysunku. Oblicz obwód sześciokąta i pole trapezu.

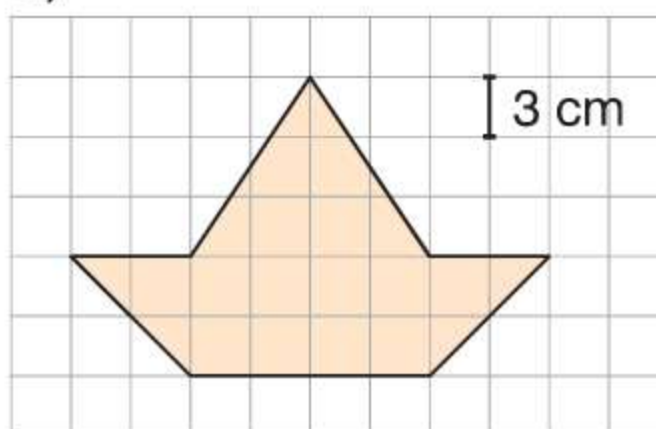


- 3 Przerysuj wielokąt do zeszytu. Oblicz jego pole. Jeżeli wielokąt jest figurą osiowąsymetryczną, to narysuj jego oś symetrii.

a)

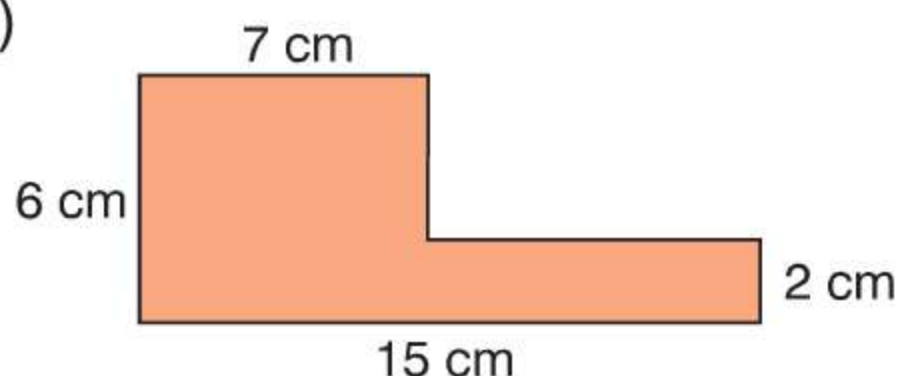


b)

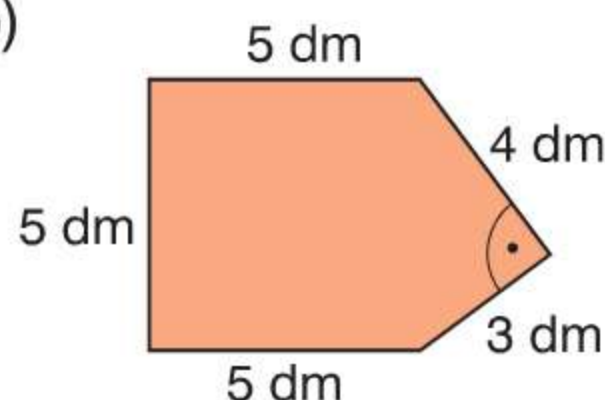


- 4 Oblicz obwód i pole wielokąta.

a)



b)

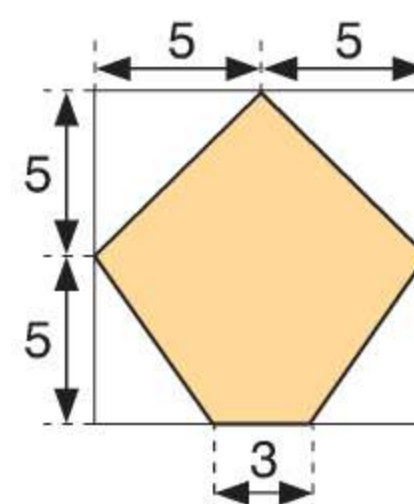


- 5 Pole pięciokąta przedstawionego na rysunku obok wynosi 57,5.

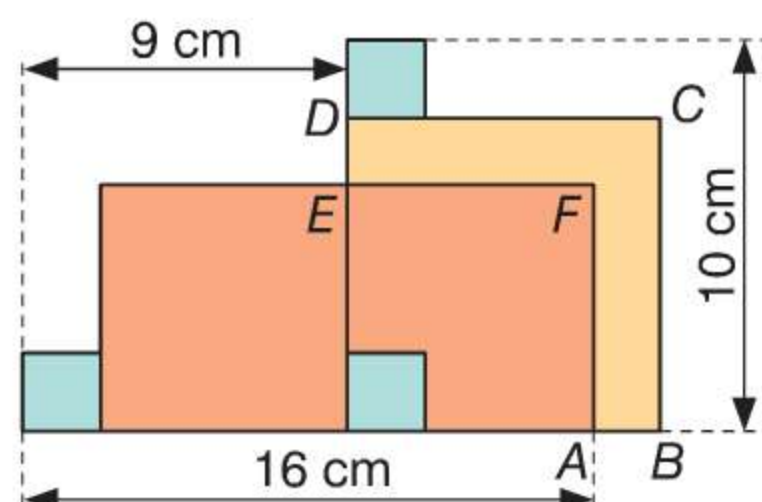
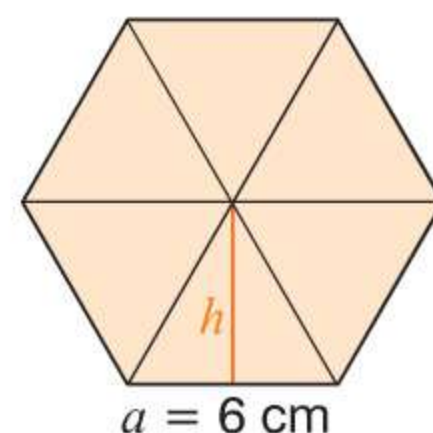
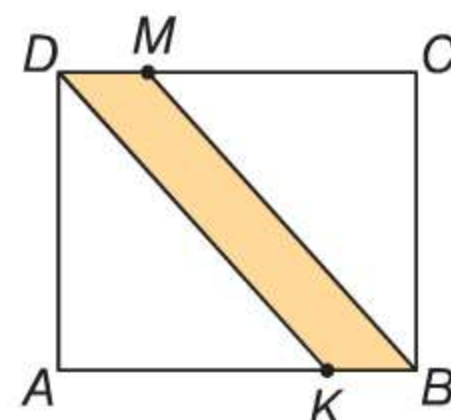
Oceń poprawność każdego z podanych poniżej sposobów obliczania pola tego pięciokąta.

- a) Pole tego pięciokąta można obliczyć jako sumę pola trójkąta o podstawie 10 i wysokości 5 oraz pola trapezu o podstawach 10 i 3 oraz wysokości 5.

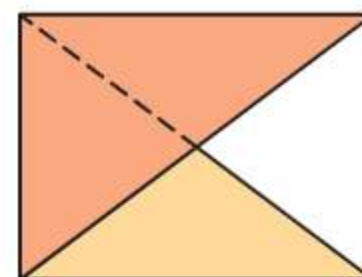
- b) Pole tego pięciokąta można obliczyć jako różnicę pola kwadratu o boku 10 i pól czterech trójkątów o podstawie 5, z których dwa mają wysokość 5, a dwa – wysokość 3,5.



- 6 Narysuj deltoid, którego przekątne mają długości 4 cm i 6 cm. Oblicz pole narysowanej figury. Sprawdź, czy inne osoby w klasie mają taki sam rysunek i wynik.
- 7 Narysuj czworokąt, który nie jest trapezem. Zmierz długości potrzebnych odcinków i oblicz jego pole.
- 8 Latawiec w kształcie deltoidu ma przekątne o długościach 60 cm i 15 cm. Powierzchnia takiego latawca jest równa
A. 900 cm^2 B. 450 cm^2 C. 225 cm^2 D. 75 cm^2
- 9 Do zrobienia konstrukcji latawca w kształcie deltoidu Sławek użył listewek o długościach 80 cm i 40 cm. Stanowiły one przekątne latawca. Listewki znajdowały się między dwiema warstwami papieru. Oblicz, ile co najmniej decymetrów kwadratowych papieru zużył Sławek.
- 10 Prostokąt $ABCD$ ma wymiary $10 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$. Na dłuższych bokach obrano punkty K i M w odległości 0,25 długości boku od wierzchołków B i D i utworzono czworokąt, jak pokazano na rysunku. Co to za czworokąt? Oblicz jego pole.
- 11 W sześciokącie foremnym o boku długości 6 cm poprowadzono trzy przekątne, które podzieliły ten sześciokąt na trójkąty równoboczne, jak pokazano na rysunku. Wysokość h trójkąta równobocznego o boku a jest równa około $0,87a$. Oblicz w przybliżeniu pole sześciokąta. Czy potrafisz obliczyć pole takiego sześciokąta w jeszcze inny sposób?
- 12 Prostokąt $ABCD$ ma wymiary $6 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Bok AB ma długość 10 cm, a jego środek oznaczono literą E . Na pozostałych bokach prostokąta zaznaczono punkty F, G, H tak, że $|BF| = \frac{1}{3}|BC|$, $|DG| = \frac{4}{5}|CD|$, $|AH| = \frac{2}{3}|AD|$. Oblicz pole czworokąta $EFGH$.
- 13 Z kolorowych kwadratów Zuzia ułożyła przedstawioną obok figurę. Na podstawie informacji zawartych na rysunku oblicz pole sześciokąta $ABCDEF$.

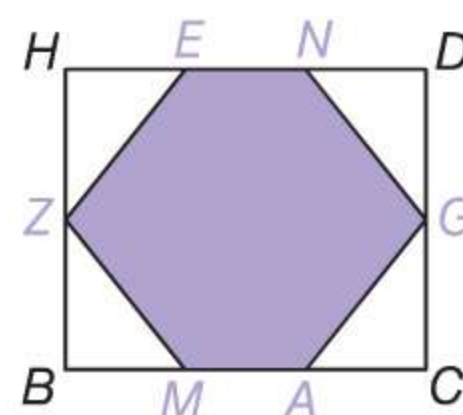
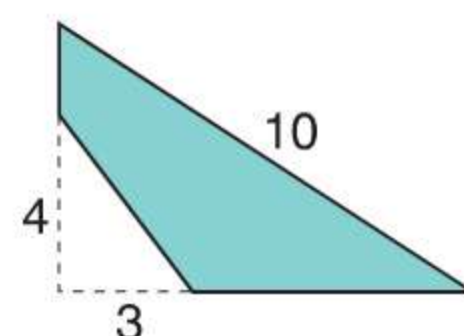
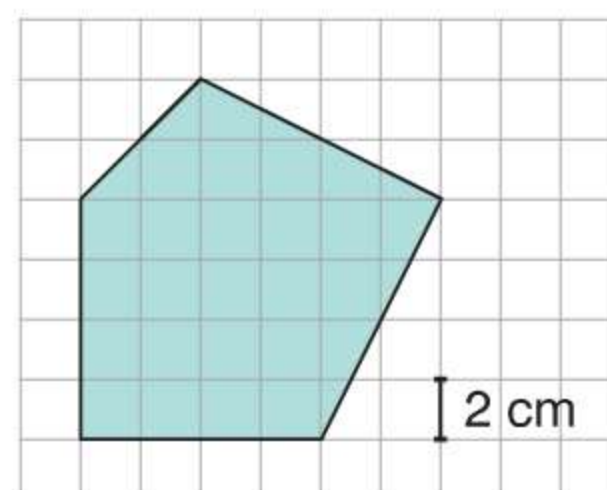
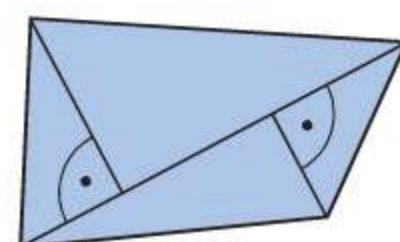


- 14 Rzemieślnik wykonał ozdobną lampkę, której klosz tworzą ściany boczne prostopadłościanu. Na każdej ścianie klosza umieścił witraż w kształcie deltoidu o przekątnych 2 dm i 12 cm. Koszt 1 dm² witrażu to 45 zł. Koszt witraży stanowił 0,8 kosztu lampy. Ile kosztowała ta lampa?
- 15 Dwa trójkąty prostokątne o bokach długości 12 cm, 16 cm i 20 cm ułożono tak, że powstał pięciokąt, jak na rysunku obok. Oblicz jego pole.



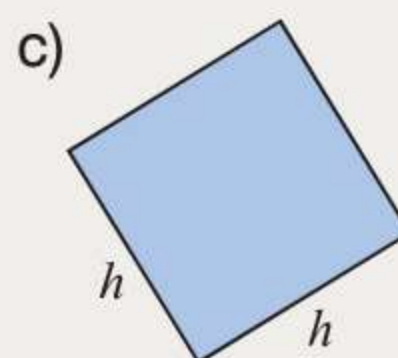
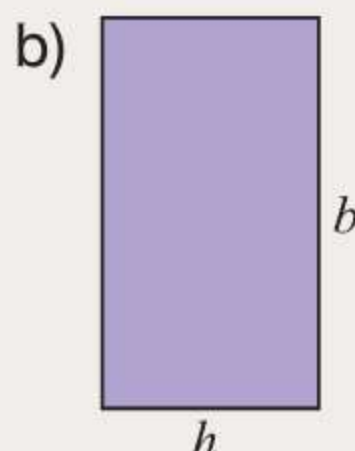
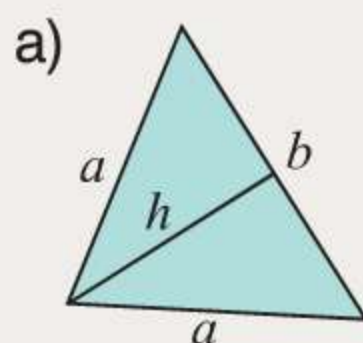
Sprawdź się!

- Przekątna czworokąta ma 10 dm długości i dzieli czworokąt na dwa trójkąty. Poprowadzono wysokości tych trójkątów opuszczone na przekątną. Wysokości są równe 4 dm i 8 dm. Pole czworokąta wynosi
A. 120 dm² B. 60 dm² C. 40 dm² D. 80 dm²
- Latawiec Zuzi ma kształt deltoidu o przekątnych długości 10 dm i 18 dm. Oblicz powierzchnię tego latawca.
- Oblicz pole narysowanego obok pięciokąta.
- Z trójkąta prostokątnego o bokach 6 cm, 8 cm, 10 cm odcięto trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 cm i 4 cm. Oblicz pole pozostałej części.
- Prostokąt ma wymiary 10 cm × 12 cm. Na dłuższych bokach obrano po dwa punkty tak, że podzieliły one te boki na trzy równe części. Na krótszych bokach obrano punkty wyznaczające ich środek. Oblicz pole sześciokąta *MAGNEZ*.

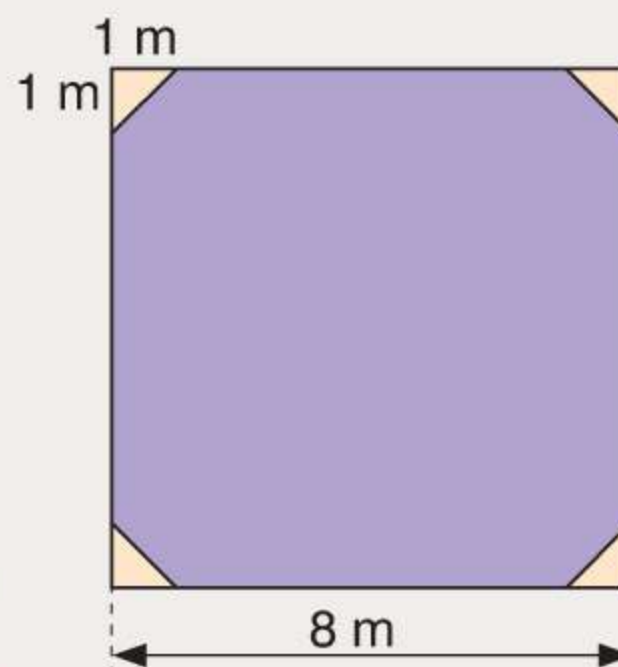


Zadania utrwalające

- 1 Napisz wzory opisujące obwód i pole narysowanego wielokąta. Napisz słownie, jak obliczamy jego pole. Oblicz obwód i pole dla: $a = 10$ cm; $b = 1,2$ dm; $h = 0,8$ dm.

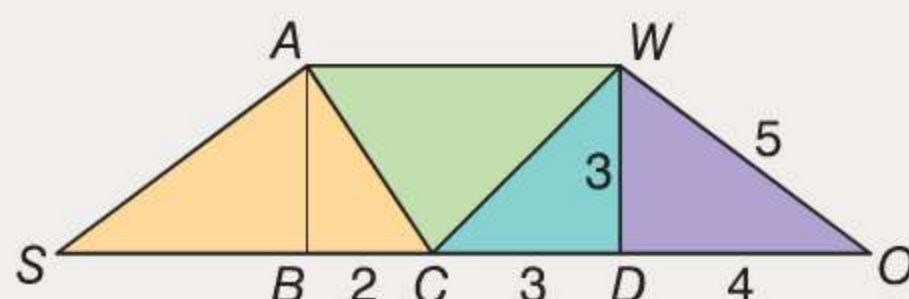


- 2 Na kwadratowej działce o powierzchni 144 m^2 pani Basia posiała różne zioła. Działkę chce ogrodzić niskim płotkiem, którego 1 metr bieżący kosztuje 6,30 zł. Ile metrów płotka musi kupić? Ile zapłaci za płotek?
- 3 Podłoga w klasie ma kształt prostokąta, a długość jednego boku tej figury wynosi 8,5 m. Całą podłogę przykryto wykładziną o powierzchni 51 m^2 . Jaka jest długość drugiego boku tego prostokąta?
- 4 Boki równoległoboku mają długości 6 cm i 3,5 cm. Wysokość opuszczona na krótszy bok jest równa $4\frac{2}{5}$ cm. Oblicz pole i obwód tego równoległoboku.
- 5 Oblicz pole rombu, którego bok ma długość $8\frac{1}{2}$ cm, a wysokość jest o 35 mm krótsza.
- 6 Równoległe boki trapezu mają długości 12,8 dm i 6 dm. Wysokość trapezu jest równa połowie dłuższej podstawy. Oblicz pole tego trapezu. Wynik podaj w cm^2 .
- 7 Sufit w pokoju Janka ma kształt prostokąta, którego obwód jest równy 15 m, a jeden z boków ma długość 3,5 m. Ile należy kupić ozdobnych płyt do wyłożenia tego sufitu? Płyty mają kształt kwadratu o boku $\frac{1}{2}$ m.
- 8 Krzyś posadził kwiaty na kwadratowej rabatce, której rogi wyłożył kamyczkami. Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz, jaką powierzchnię rabatki zajmują kwiaty.

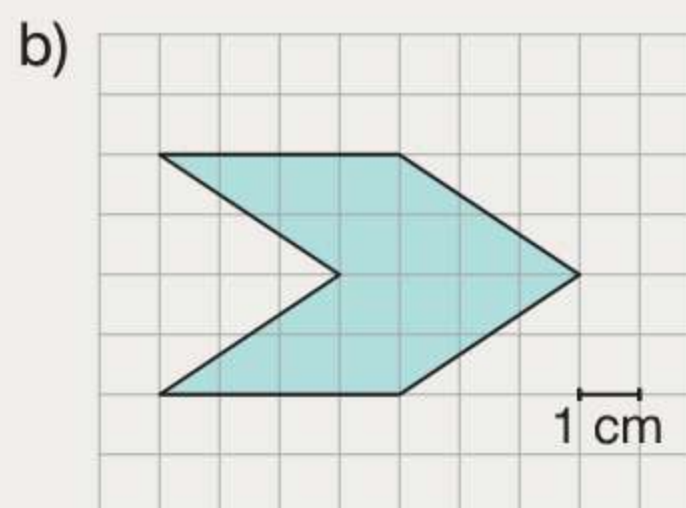
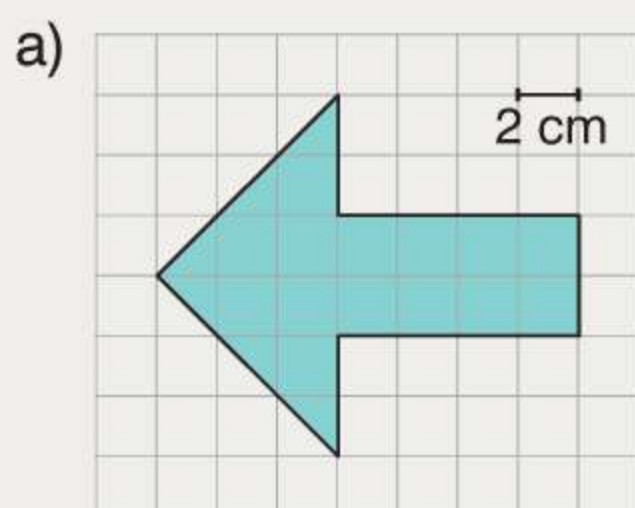




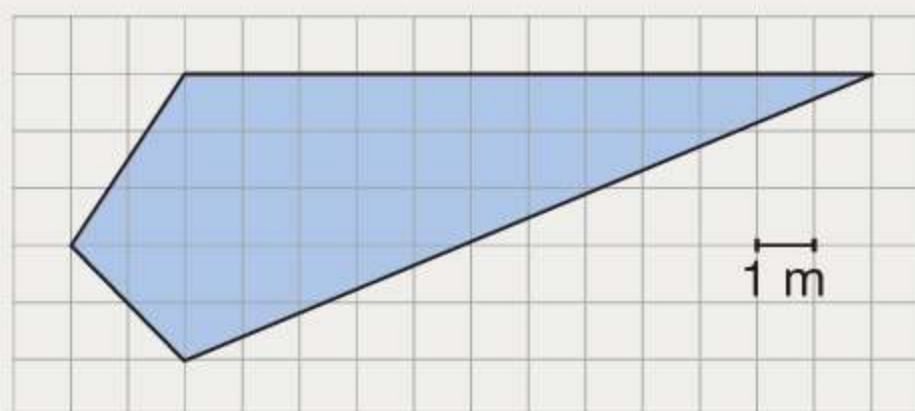
- 9 Trapez równoramienny SOWA podzielony jest na trójkąty. Oblicz pola wszystkich trójkątów utworzonych w tym trapezie. Wymiary na rysunku podane są w centymetrach.



- 10 Przerysuj wielokąt do zeszytu. Oblicz jego pole. Jeżeli wielokąt jest figurą osiowąsymetryczną, narysuj oś symetrii.



- 11 Na działce, której kształt pokazano na rysunku, pani Marta posadziła krzewy ozdobne i całą powierzchnię działki pokryła korą. Worek kory kosztował 18,60 zł i wystarcza na pokrycie 3 m^2 powierzchni. Ile co najmniej worków musiała kupić pani Marta? Ile zapłaciła za korę?

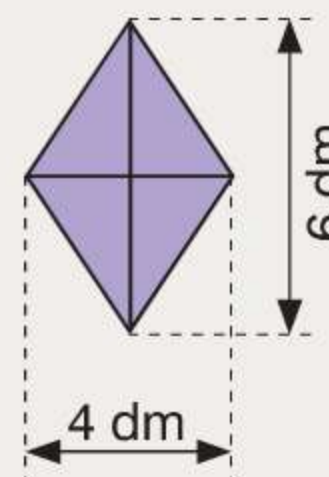


- 12 W pracowni artystycznej tka się ręcznie gobeliny. Jeden metr kwadratowy gobelinu kosztuje 1850 zł. Który prostokątny gobelin będzie droższy: o wymiarach $2,2 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ czy o wymiarach $1,8 \text{ m} \times 1,8 \text{ m}$? O ile droższy?



Sprawdź w słowniku znaczenie słowa „gobelin”.

- 13 Skrzydło drzwi ma wymiary $1 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$. Ich ozdobą jest szyba, taka jak na rysunku obok. Zewnętrzną powierzchnię drzwi należy pomalować dwukrotnie farbą. Czy wystarczy na to puszka farby, na której jest informacja, że można nią pomalować $4,5 \text{ m}^2$ powierzchni?



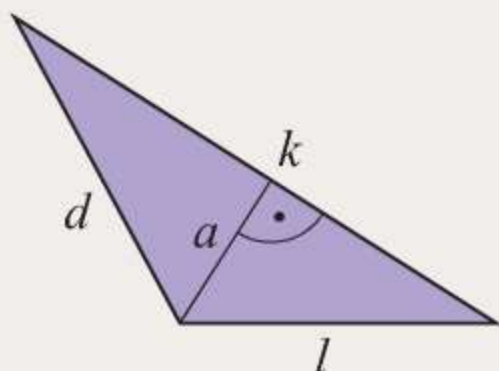
Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

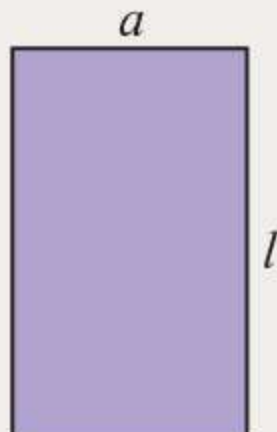
- 1 Pole pewnego wielokąta to iloczyn długości dwóch sąsiednich jego boków. Wielokątem tym jest
A. romb. B. trapez. C. prostokąt. D. trójkąt prostokątny.

- 2 Pole którego wielokąta opisuje wyrażenie algebraiczne $\frac{1}{2}al$?

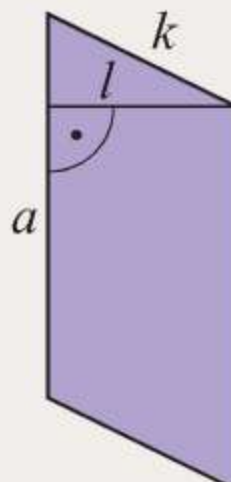
A.



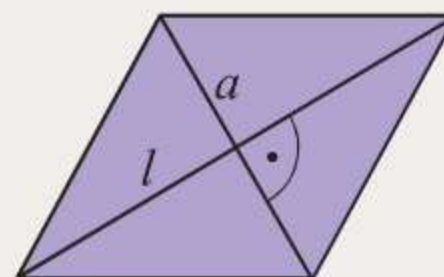
B.



C.

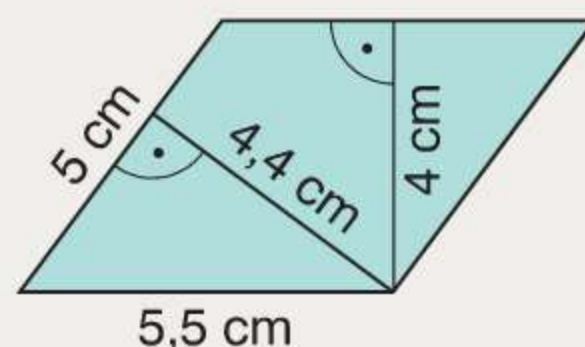


D.



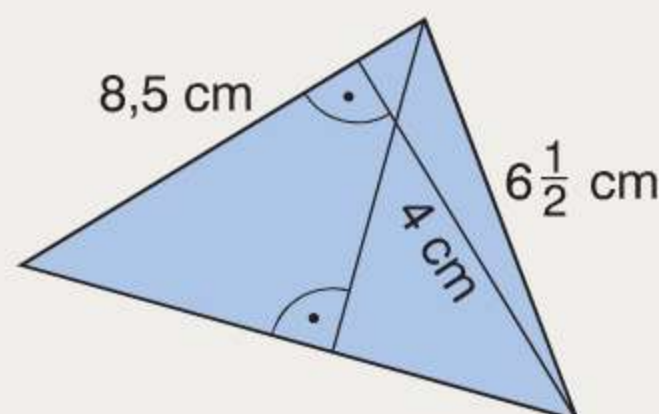
- 3 Pole równoległoboku o wymiarach przedstawionych na rysunku jest równe

- A. 24 cm^2 B. 22 cm^2
C. $28,6 \text{ cm}^2$ D. 22 cm



- 4 Pole trójkąta o wymiarach przedstawionych na rysunku jest równe

- A. 34 cm^2 B. 26 cm^2
C. 13 cm^2 D. 17 cm^2



- 5 Prostokąt ma wymiary $9 \text{ dm} \times 4 \text{ dm}$. Kwadrat o polu równym polu tego prostokąta ma bok długości

- A. 18 dm B. 9 dm C. 6 cm D. 6 dm

- 6 Pole prostokąta jest równe 55 cm^2 , a długość jednego boku wynosi $12,5 \text{ cm}$. Długość drugiego boku to

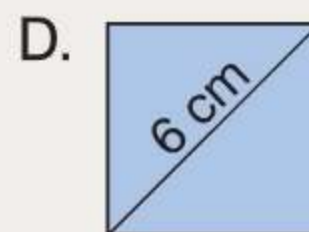
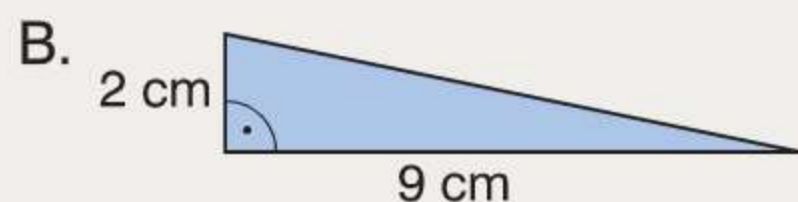
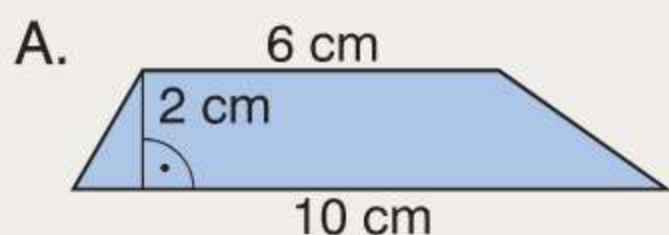
- A. $4,4 \text{ cm}$ B. 4 cm C. $5,4 \text{ cm}$ D. 15 cm

- 7 W trapezie prostokątnym krótsze ramię ma długość 8 cm . Jedna podstawa ma 12 cm długości, a druga jest o 8 cm dłuższa. Pole tego trapezu jest równe

- A. 226 cm^2 B. 80 cm^2 C. 128 cm^2 D. 150 cm^2



8 Dane są figury:



Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnym odpowiedziom.

Pole której figury jest równe 18 cm^2 ?	A	B	C	D
Pola których figur są równe?	A	B	C	D
Pole której figury jest 2 razy mniejsze niż pole figury D?	A	B	C	D

9 Podłoga w pokoju Bartka ma kształt prostokąta. Na planie wykonanym w skali 1 : 50 ma ona wymiary $8 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$. Jaką powierzchnię ma ta podłoga w rzeczywistości? Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

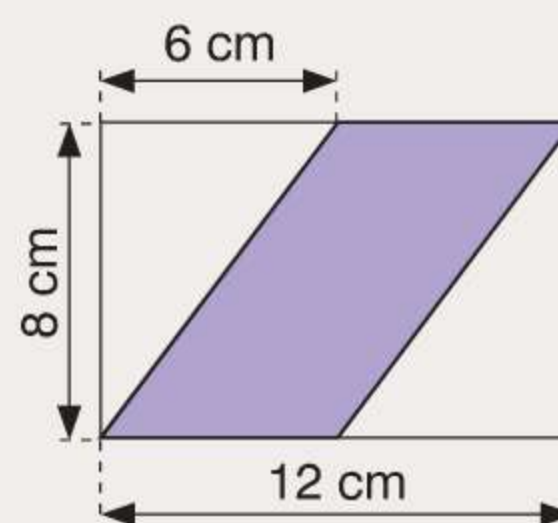
A. 14 m^2 ,	ponieważ	I. w rzeczywistości podłoga ma wymiary $4 \text{ m} \times 3,5 \text{ m}$.
B. 10 m^2 ,		II. 1 cm na planie odpowiada 0,05 m w rzeczywistości.

10 Pan Marek zamówił drzwi, w których był otwór w kształcie rombu o przekątnych 8 dm i 6 dm. W to miejsce wbudował witraż, który wykonał z kolorowych szkiełek. Jedna paczka szkiełek wystarczyła na położenie wzoru na 250 cm^2 powierzchni i kosztowała 18,40 zł. Ile pan Marek zapłacił za szkiełka?

A. 294,40 zł B. 202,40 zł C. 184 zł D. 165,60 zł

11 Pole fioletowej figury na rysunku obok jest równe

A. 46 cm^2 B. 48 cm^2
C. 96 cm^2 D. 58 cm^2



1. Ułamki o mianowniku 100



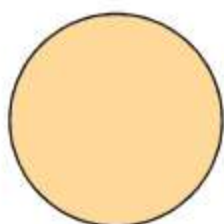
Sowa przypomina

● Procent

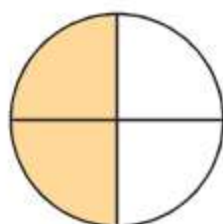
0,01 pewnej wielkości to 1% tej wielkości.

● Zamiana ułamków na procenty

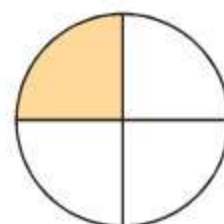
– Ułamek można rozszerzyć do mianownika 100.



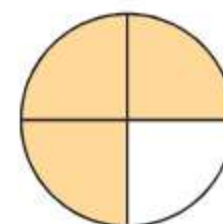
$$1 = \frac{100}{100} = 100\%$$



$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$$



$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$



$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$$

– Ułamek można skrócić tak, aby w mianowniku była liczba 100.

$$\frac{150}{200} = \frac{75}{100} = 75\%$$

– Ułamek można pomnożyć przez 100% (obliczyć ułamek ze 100%).

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 75\%$$

– W ułamkach przedstawionych w postaci dziesiętnej można przesunąć przecinek o 2 miejsca w prawo i dopisać symbol % (mnożymy w pamięci przez 100%).

$$0,05 = 5\% \quad 0,25 = 25\%$$

● Zamiana procentów na ułamki

– Procent można zapisać w postaci ułamka zwykłego o mianowniku 100 i jeśli się da, skrócić lub wyciągnąć całości.

$$35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

$$120\% = \frac{120}{100} = 1\frac{1}{5}$$

– Procent można zapisać w postaci dziesiętnej przez przesunięcie w liczbie przecinka o 2 miejsca w lewo i usunięcie symbolu % (dzielimy w pamięci przez 100%).

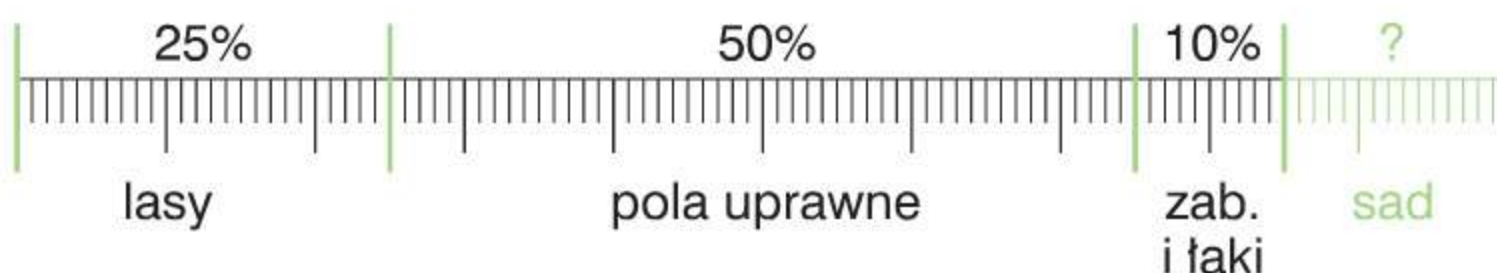
$$15\% = 0,15$$

$$250\% = 2,50 = 2,5$$

Przykład 1.

W pewnym gospodarstwie lasy zajmują 25% jego powierzchni, pola uprawne 50%, zabudowania i łąki 10%, a sad resztę. Ile procent powierzchni gospodarstwa zajmuje sad?

Ponieważ procenty to ułamki o mianowniku 100, dobrze jest ilustrować je na odcinku o długości 100 mm (1 mm to 1%).



Z rysunku odczytujemy odpowiedź lub wykonujemy obliczenia:

$$100\% - (25\% + 50\% + 10\%) = 15\%.$$

Odpowiedź. Sad zajmuje 15% powierzchni gospodarstwa.

Przykład 2.

W skupie rolnik mógł sprzedać wiśnie po 2,50 zł za 1 kg. Na bazarze wiśnie kosztowały 7,50 zł za 1 kg.



- Ile procent ceny 1 kg wiśni w skupie stanowiła cena 1 kg wiśni na bazarze?
- O ile procent wyższa była cena 1 kg wiśni na bazarze niż w skupie?

- Sprawdźmy, ile razy droższe były wiśnie na bazarze niż w skupie.

$$7,50 : 2,50 = 3$$

$$3 = 300\%$$



w skupie (100%)



na bazarze (300%)

- Wykonajmy rysunek pomocniczy i obliczmy **różnicę** cen wiśni.

w skupie ———

na bazarze ———
różnica cen

$$7,50 - 2,50 = 5 \text{ [zł]}$$

Obliczmy, ile razy cena wiśni w skupie mieści się w różnicy cen.

$$5 : 2,50 = 2 \quad 2 = 200\%$$

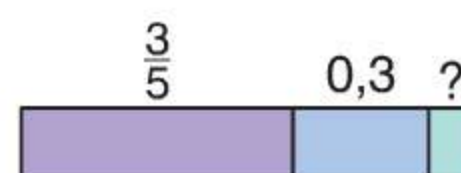
Odpowiedź. Cena 1 kg wiśni na bazarze to 300% ceny w skupie. Cena 1 kg wiśni na bazarze jest większa o 200% od ceny 1 kg wiśni w skupie.

- 1 Zapisz ułamki w postaci procentów.
 a) 1,4; 0,08; 0,35 b) $\frac{4}{400}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{3}{5}$ c) 1,2; $1\frac{8}{200}$; $2\frac{1}{4}$

- 2 Zapisz w postaci ułamków:
 a) zwykłych: 20%, 8%, 12%, 92%, 175%;
 b) dziesiętnych: 15%, 225%, 38%, 60%, 55%.

- 3 W klasie Julki jest 18 dziewcząt i 6 chłopców. Jakim procentem wszystkich uczniów klasy są dziewczęta, a jakim chłopcy?

- 4 Jaki procent narysowanego obok prostokąta pokolorowany jest na poszczególne kolory?



- 5 Na odcinku o długości 1 dm Ania zilustrowała zawartość swojej biblioteczki.

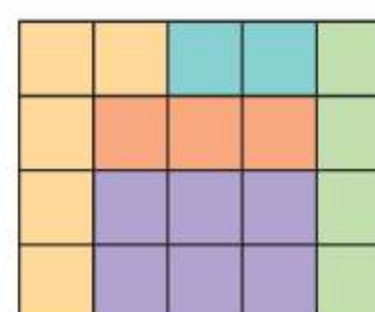


Jaki procent książek w bibliotece Ani stanowią pozycje historyczne, jaki przyrodnicze, a jaki przygodowe?

- 6 W domu państwa Nowaków 35% dochodu przeznaczają się na opłaty, a 50% na wyżywienie i środki czystości. Na odcinku o długości 10 cm przedstaw dane z zadania, a następnie podaj procent dochodów przeznaczanych na wydatki inne niż wymienione.

- 7 Do stołówki szkolnej we wrześniu zapisało się 9 uczniów klasy 6a. W październiku liczba uczniów korzystających z obiadów w tej klasie wzrosła o 100%. Ilu uczniów klasy 6a jadło obiady w tej stołówce w październiku?

- 8 Zapisz, jaką częścią prostokąta są pola zamalowane na poszczególne kolory. Każdy z ułamków zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, ułamka dziesiętnego i procentu.



- 9 Które zdanie jest prawdziwe?
 A. 60% wielkości jest równe $\frac{3}{4}$ tej wielkości.
 B. Sosna syberyjska kosztowała 50 zł, a jodła 40 zł, zatem cena jodły to 70% ceny sosny.
 C. W bukiecie jest 12 tulipanów, w tym 6 czerwonych, więc czerwone tulipany to 75% bukietu.
 D. 15% wielkości jest równe 0,15 tej wielkości.

- 10** Paulina ma 80 zł, a jej brat Wiktor 160 zł.
 a) Ile procent oszczędności Wiktora ma Paulina?
 b) Ile procent oszczędności Pauliny ma Wiktor?
 c) O ile procent więcej oszczędności ma Wiktor niż Paulina?
- 11** Za 3 bilety normalne i 4 ulgowe zapłacono 120 zł. Cena biletu ulgowego jest 2 razy mniejsza niż cena biletu normalnego.
 a) Jakim procentem ceny biletu normalnego jest cena biletu ulgowego?
 b) O ile procent wyższa była cena biletu normalnego od ceny biletu ulgowego?
- 12** Bilet kolejowy z Warszawy do Piaseczna kosztuje 10,50 zł. Pani Danuta przejechała tę trasę taksówką i zapłaciła 94,50 zł. Ile procent opłaty za przejazd pociągiem stanowi opłata za przejazd taksówką? O ile procent więcej kosztował przejazd taksówką niż przejazd pociągiem?



Sprawdź się!

- 1** Który z ułamków **nie jest** równy 30%?
 A. 0,3 B. $\frac{6}{20}$ C. $\frac{20}{50}$ D. $\frac{30}{100}$
- 2** Zamień ułamki na procenty.
 a) $\frac{4}{5}$; $\frac{9}{25}$ b) 0,09; 0,42 c) 1,3; 3,05
- 3** Narysuj prostokąt o wymiarach 6 cm $\times$ 5 cm. Zamaluj na czerwono 20% jego powierzchni, na zielono 40%. Jaka część powierzchni prostokąta została niezamalowana? Jaki to procent powierzchni?
- 4** Tomek ma 24 gry komputerowe, a Marysia 48. Jakim procentem liczby gier Tomka jest liczba gier Marysi? O ile procent więcej gier miała Marysia niż Tomek?
- 5** Na działce pana Stefana posadzono 24 drzewa iglaste, 15 drzew liściastych i 21 krzewów. Jakim procentem wszystkich sadzonek są ich poszczególne rodzaje? Narysuj odcinek o długości 10 cm i zilustruj na nim obliczone wielkości procentowe.



2. Obliczanie procentu danej liczby



Sowa uczy

W banku można pożyczać pieniądze. Pożyczka w banku nazywa się **kredytem**. Trzeba jednak zwrócić więcej pieniędzy, niż się pożyczyło, bo za każdy rok pożyczki bank dolicza **odsetki**. Odsetki to kwota, którą bank oblicza na podstawie ustalonego procentu od pożyczonej kwoty. Ten procent to tzw. **oprocentowanie kredytu**. W różnych bankach oprocentowanie kredytu może być różne.

Przykład 1.

Pan Karol wziął w banku 5000 zł kredytu, a pani Basia 1000 zł. Po roku musieli zwrócić o 25% pieniędzy więcej, niż pożyczyli, bo bank doliczył odsetki. Ile złotych odsetek doliczył bank każdemu z nich? Czy są to takie same kwoty?

Zapiszmy procent jako ułamek: $25\% = 0,25$.

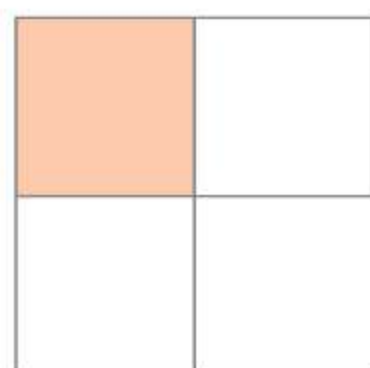
Obliczmy ułamek danej liczby.

Pamiętasz? Aby obliczyć ułamek danej liczby, trzeba pomnożyć ten ułamek przez daną liczbę.

Odsetki od kredytu pana Karola:

$$0,25 \cdot 5000$$

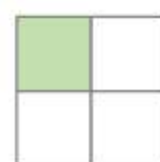
$$0,25 \cdot 5000 = 1250 \text{ [zł]}$$



Odsetki od kredytu pani Basi:

$$0,25 \cdot 1000$$

$$0,25 \cdot 1000 = 250 \text{ [zł]}$$



$$1250 > 250$$

Odpowiedź. Bank doliczył 1250 zł odsetek panu Karolowi, a 250 zł pani Basi.



Takie samo oprocentowanie dla różnych kwot kredytu wyznacza odsetki różnej wysokości.

Przykład 2.

Sukienka kosztowała 160 zł. W czasie wyprzedaży posezonowej jej cenę obniżono o 25%. Jaka była cena sukienki na wyprzedaży?

Sposób I

Zapiszmy procent jako ułamek: $25\% = 0,25 = \frac{1}{4}$.

Obniżka to $\frac{1}{4}$ ze 160, czyli $\frac{1}{4} \cdot 160 = 40$ [zł].

Cena sukienki po obniżce wyniosła:

$$160 - 40 = 120 \text{ [zł]}.$$

Sposób II

Cena sukienki przed obniżką stanowi 100%.

Sukienka po obniżce kosztowała o 25% mniej.

$$100\% - 25\% = 75\%$$

$$75\% = 0,75$$

Wobec tego cena sukienki po obniżce to 0,75 jej ceny przed obniżką.

$$0,75 \cdot 160 = 120 \text{ [zł]}$$

Sposób III

1% ze 160 zł – to 100 razy mniej niż 160 zł.

$$160 : 100 = 1,6$$

25% to 25 razy więcej niż 1%.

$$25 \cdot 1,6 = 40 \text{ [zł]} \text{ – obniżka}$$

$$160 - 40 = 120 \text{ [zł]}$$

Odpowiedź. Na wyprzedaży sukienka kosztowała 120 zł.

**Przykład 3.**

Pani Beata zarabia 3000 zł. Od tej kwoty trzeba zapłacić 18% podatku. Oszacuj, ile pieniędzy otrzyma pani Beata po odliczeniu podatku.

Podany procent zaokrąglimy do pełnych dziesiątek: $18\% \approx 20\%$.

$$20\% = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} \text{ z } 3000 \text{ zł} \quad \text{to} \quad \frac{1}{5} \cdot 3000 = 600 \text{ [zł]}$$

$$3000 - 600 = 2400 \text{ [zł]} \text{ (pieniądze po odliczeniu 20\% podatku)}$$

Ponieważ $18\% < 20\%$, więc 18% z 3000 to mniej niż 600 (20% z 3000).

3000 zł pomniejszone o mniej niż 600 zł to więcej niż 2400 zł.

Odpowiedź. Pani Beata otrzyma trochę więcej niż 2400 zł.

- 1 Oblicz w pamięci.
 a) 10% ze 100 b) 100% ze 100 c) 1% z 200 d) 50% z 8,5
 50% ze 100 25% z 1000 75% ze 100 10% z 420,5
- 2 Pani Basia otrzymała 2800 zł pensji oraz premię, która była równa 25% pensji. Ile wynosiła premia?
 A. 25 zł B. 280 zł C. 560 zł D. 700 zł
- 3 Zimą kurtka kosztowała 300 zł. Na wiosnę jej cenę obniżono o 20%. O ile złotych obniżono cenę kurtki? Ile kosztowała kurtka na wiosnę?
- 4 Pan Tomasz kupił lodówkę za 1000 zł, zmywarkę za 1600 zł i robota kuchennego za 400 zł. Właściciel sklepu udzielił zniżki równej 20% ceny każdego produktu. Oblicz, o ile mniej zapłacił pan Tomasz za każdy sprzęt, a ile wyniesie opłata za cały zakup. Czy pan Tomasz zyskałby, gdyby odliczył 20% od sumy cen zakupionego sprzętu?
- 5 W sklepie elektronicznym za zakup co najmniej trzech produktów można było uzyskać rabat 25% na każdy z nich. Pani Iwona kupiła laptop za 2400 zł, drukarkę za 720 zł i niszczarkę za 224 zł. Ile zyskała pani Iwona? Czy korzystniej jest odliczyć rabat od każdej kwoty osobno, czy od całości zakupu?
- 6 Jabłka podczas suszenia tracą 75% masy wagi. Jaka będzie masa 200 kg jabłek po ususzeniu?
- 7 Co jest większe:
 a) 50% liczby 120 czy 25% liczby 240,
 b) 10% liczby 95 czy 75% liczby 12?
- 8 Pani Ania zarabia netto 3200 zł. 25% tej kwoty to opłaty domowe, 50% to koszty utrzymania, a 10% to nieprzewidziane wydatki. Ile pieniędzy przeznacza pani Ania na poszczególne wydatki?
- 9 Narty kosztowały 600 zł. Po sezonie ich cenę obniżono o 48%. Zaokrąglaj podany procent do dziesiątek i oszacuj w pamięci cenę tych nart po sezonie.

Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. Trochę mniej niż 300 zł,	ponieważ	I. 48% ceny przed obniżką to prawie połowa ceny po sezonie.
B. Trochę więcej niż 300 zł,		II. od ceny przed obniżką odejmuje się trochę mniej niż 50% tej ceny.



10 Oblicz cenę ubrań po obniżce.

a)  ~~110 zł~~ **-25%** po obniżce ? zł

b)  ~~320 zł~~ **-20%** po obniżce ? zł

c)  ~~40 zł~~ **-10%** po obniżce ? zł

Wyzwanie

Aparat fotograficzny kosztował 680 zł. Jego cenę zmniejszono o 10%, a później obniżono nową cenę o kolejne 10%. Jaka była cena aparatu po dwóch obniżkach? Czy obniżki były w takiej samej wysokości?

Sprawdź się!

- 1 W śmietanie jest 25% tłuszczu. Ile mililitrów tłuszczu znajduje się w 500 ml śmietany?
A. 125 ml B. 12,5 ml C. 250 ml D. 25 ml
- 2 Przed obniżką kombinezon narciarski kosztował 320 zł. Oblicz jego cenę po obniżce o 30%.
- 3 Dwutygodniowe wczasy nad morzem kosztowały w maju 1260 zł od osoby. W lipcu były o 20% droższe. Ile kosztowały wczasy w lipcu?
- 4 Wśród uczniów klas 6a i 6b przeprowadzono ankietę dotyczącą uprawiania sportów w czasie ferii. Oto jej wyniki:

Rodzaj sportu Klasa	Jazda na nartach	Jazda na snowboardzie	Jazda na sankach	Jazda na łyżwach
6a (20 uczniów)	25%	10%	50%	15%
6b (30 uczniów)	40%	20%	30%	10%

- a) Ilu uczniów z klasy 6a jeździło na sankach?
 - b) Ilu uczniów z klas szóstych jeździło na snowboardzie?
- 5 Płytki na podłogę kosztują netto 1200 zł. Do tej kwoty trzeba doliczyć 23% VAT. Zaokrąglaj procent do dziesiątek i oszacuj, ile trzeba zapłacić za te płytki, jeśli do ceny netto doliczymy podatek VAT.

3. Zadania z procentami

Przykład 1.

W okresie promocji kurtka kosztowała 360 zł, a później jej cena wzrosła do 450 zł. O ile procent podniesiono cenę kurtki?

Obliczmy, o ile podrożała kurtka.

$$450 \text{ zł} - 360 \text{ zł} = 90 \text{ zł}$$

Obliczmy, jaką częścią ceny promocyjnej jest 90 zł. Ile to procent?

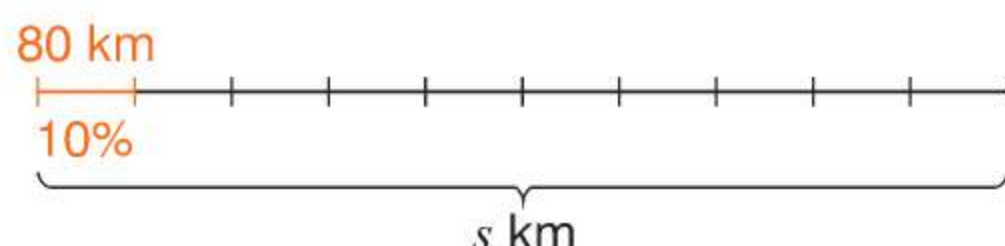
$$\frac{90}{360} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

Odpowiedź. Cenę kurtki podniesiono o 25% ceny promocyjnej.

Przykład 2.

Państwo Kwiatkowscy wybrali się na wycieczkę. Pierwszego dnia przejechali 80 km, czyli 10% wyznaczonej trasy. Ile kilometrów miała wyznaczona trasa?

Długość trasy nie jest znana. Oznaczmy liczbę jej kilometrów literą s .



Sposób I

Jeżeli 10% trasy to 80 km, to 100% tej trasy jest wielkością 10 razy większą, czyli: $80 \cdot 10 = 800$ [km].

Sposób II

Jeżeli 10% trasy to 80 km, to 1% tej trasy jest wielkością 10 razy mniejszą, więc: $80 : 10 = 8$ [km].

Cała trasa to 100%, więc jest 100 razy dłuższa niż 8 km:

$$100 \cdot 8 = 800 \text{ [km]}.$$

Sposób III

$$10\% = 0,10 = 0,1$$

$$0,1 \text{ liczby } s \text{ to } 80. \qquad 0,1 \cdot s = 80 \qquad s = 80 : 0,1 \qquad s = 800$$

Odpowiedź. Wyznaczona trasa miała 800 km.

Przykład 3.

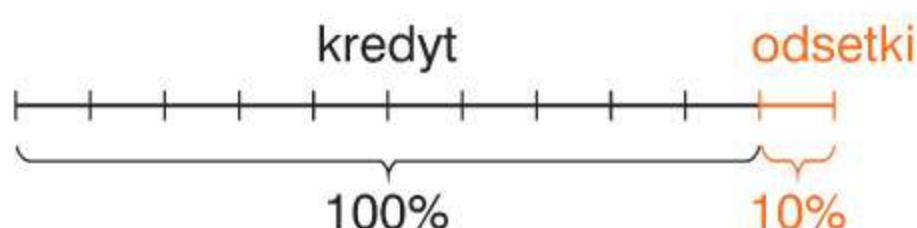
Pan Jan wziął z banku kredyt na rok. Roczne oprocentowanie kredytu wynosi 10%. Po roku pan Jan wpłacił do banku 2200 zł – pożyczone pieniądze i odsetki. Jaką kwotę pożyczył przed rokiem pan Jan?

Sposób I

Kwota kredytu to 100%.

Kwota oddana bankowi to:

$$100\% + 10\% = 110\%$$



Jest 11 takich samych części.

$$2200 : 11 = 200 \text{ [zł]} - \text{to odsetki.}$$

10% kredytu to 200 zł, więc

100% to 10 razy więcej niż 10%, czyli

$$10 \cdot 200 \text{ zł} = 2000 \text{ zł}$$

lub

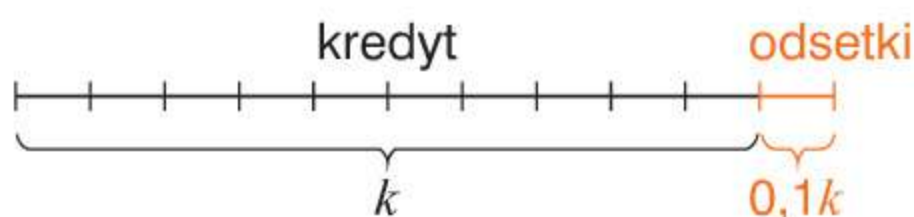
$$2200 \text{ zł} - 200 \text{ zł} = 2000 \text{ zł.}$$

Sposób II

Nieznana jest kwota kredytu.

Oznaczmy liczbę złotych kredytu literą k .

10% liczby k to $0,1k$.



Kredyt + odsetki to 1,1 liczby k .

Wobec tego 1,1 liczby k to 2200.

Napiszmy równanie i rozwiążmy je.

$$1,1 \cdot k = 2200$$

$$k = 2200 : 1,1$$

$$k = 2000$$

Odpowiedź. Pan Jan wziął z banku 2000 zł kredytu.



**Sowa uczy**

Do banku można wpłacić pewną kwotę pieniędzy i zobowiązać się, że przez jakiś czas nie będzie się ich wypłacać (np. przez 3 miesiące, pół roku, 1 rok). Mówimy wówczas, że zakładamy lokatę. Jest to pewien rodzaj umowy z bankiem. Bank zobowiązuje się wypłacić wpłaconą kwotę wraz z należnymi odsetkami, gdyż inwestuje nasze pieniądze i osiąga zysk. Banki mogą oferować oprocentowanie lokat różnej wysokości. Na przykład w Banku Słonecznym można założyć lokatę oprocentowaną 1% w stosunku rocznym, a w Banku Leśnym – 4% w stosunku rocznym. Mówimy, że oprocentowanie lokaty w Banku Leśnym jest o 3 punkty procentowe wyższe niż w Banku Słonecznym. Zamiast wyrażenia punkty procentowe piszemy w skrócie: p.p.

Przykład 4.

Pan Henryk założył lokatę na 5000 zł z oprocentowaniem 1% w stosunku rocznym w Banku Solidnym. Pani Krystyna założyła lokatę na 5000 zł w Banku Pewnym z oprocentowaniem 3% w stosunku rocznym.

- a) O ile punktów procentowych oprocentowanie lokaty w Banku Pewnym było wyższe niż w Banku Solidnym?
- b) O ile procent więcej odsetek otrzymała pani Krystyna w porównaniu z panem Henrykiem?

- a) Oprocentowanie lokaty w Banku Pewnym było wyższe o 2 p.p.
 $3 - 1 = 2$

- b) Najpierw trzeba obliczyć, ile odsetek dopisano po roku każdej z osób.
 $1\% = 0,01 \quad 3\% = 0,03$

Pan Henryk: $0,01 \cdot 5000 = 50$ [zł]

Pani Krystyna: $0,03 \cdot 5000 = 150$ [zł]

Pani Krystyna otrzymała o 100 zł więcej, więc różnica ta jest 2 razy większa niż odsetki, które otrzymał pan Henryk. Pani Krystyna otrzymała o 200% więcej odsetek niż pan Henryk.

Odpowiedź.

- a) W Banku Pewnym oprocentowanie lokaty było wyższe niż w Banku Solidnym o 2 p.p.
- b) Pani Krystyna otrzymała o 200% więcej odsetek niż pan Henryk.

Przykład 5.

W pewnej szkole jest 200 uczniów. 50% z nich dojeżdża do szkoły autobusem, 40% chodzi pieszo, a 10% dojeżdża rowerem.

- a) O ile punktów procentowych więcej uczniów dojeżdża do szkoły, niż chodzi pieszo?
 b) O ile procent więcej uczniów dojeżdża do szkoły, niż chodzi pieszo?

- a) Uczniowie dojeżdżający do szkoły autobusem lub rowerem stanowią $50\% + 10\% = 60\%$ wszystkich uczniów.

Jest ich o 20 p.p. więcej niż uczniów, którzy chodzą pieszo, bo:
 $60 - 40 = 20$.

- b) Trzeba obliczyć, ilu uczniów dojeżdża, a ilu chodzi pieszo.

Uczniów dojeżdżających autobusem jest 50% liczby 200, czyli:
 $0,50 \cdot 200 = 100$.

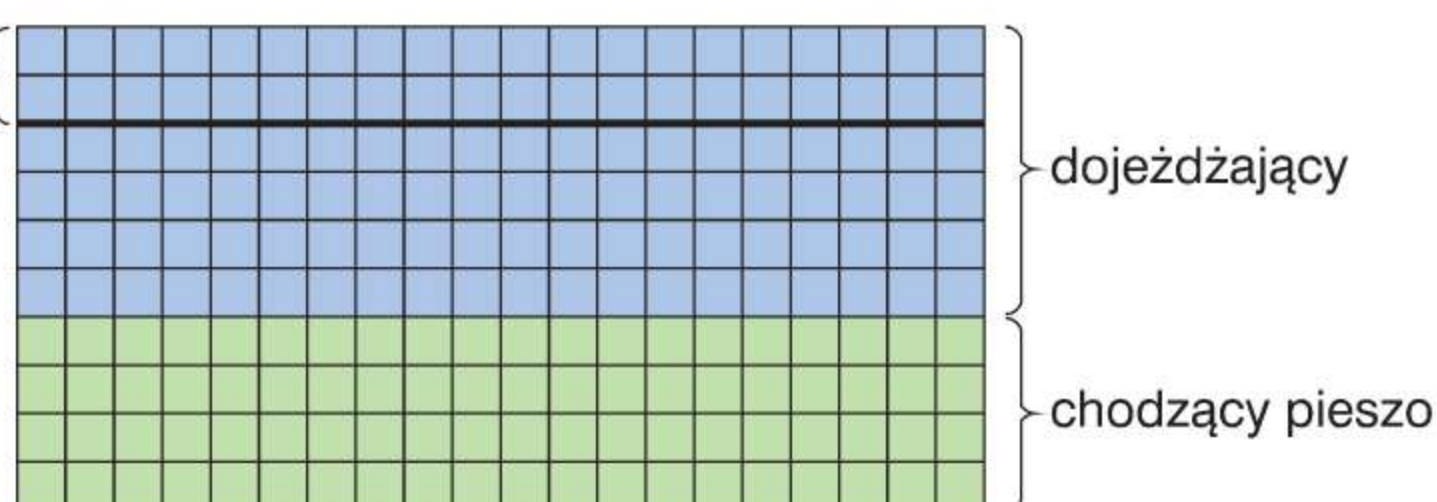
Uczniów dojeżdżających rowerem jest 10% liczby 200, czyli:
 $0,10 \cdot 200 = 20$.

Uczniów, którzy chodzą pieszo, jest 40% liczby 200, czyli:
 $0,40 \cdot 200 = 80$.

Narysujmy diagram prostokątny.

Uczniów dojeżdżających jest $100 + 20 = 120$, a chodzących pieszo 80, więc uczniów dojeżdżających jest o 40 więcej niż chodzących pieszo ($120 - 80 = 40$).

O tylu więcej dojeżdża, niż przychodzi pieszo.



Z diagramu można odczytać, że różnica liczby osób dojeżdżających i chodzących pieszo to połowa liczby osób chodzących pieszo, czyli 50%.

Wykonajmy obliczenia: $\frac{40}{80} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Odpowiedź.

- a) O 20 p.p. więcej uczniów dojeżdża do szkoły, niż chodzi pieszo.
 b) O 50% więcej uczniów dojeżdża do szkoły, niż chodzi pieszo.

- 1 W zawodach brało udział 32 chłopców, czyli 50% członków SKS. Ilu członków liczy ten klub?
- 2 Na wiosnę kurtka kosztowała 1000 zł, a jesienią – aż 1500 zł. O ile procent wzrosła cena kurtki?
- 3 Ile procent obwodu kwadratu o boku 8 cm stanowi długość jego boku?
- 4 Paulina ma 150 zł, a jej brat Wiktor o 50% pieniędzy więcej. Ile pieniędzy mają razem?

Skorzystaj z podanych informacji i rozwiąż zadania 5. i 6.

W tabelce jest podana przybliżona liczba ludności z 1700 roku w niektórych miastach Europy oraz przyrost ludności w tych miastach po upływie 100 kolejnych lat.

Miasta	Berlin	Londyn	Paryż	Petersburg	Warszawa	Wiedeń
Liczba ludności	55 tys.	575 tys.	500 tys.	2 tys.	40 tys.	114 tys.
Przyrost ludności w procentach	o 212%	o 64%	o 10%	o 10 900%	o 275%	o 116%

- 5 O ile punktów procentowych wyższy był przyrost liczby ludności w Petersburgu niż w Warszawie?
A. O 10 735 p.p. B. O 40 p.p. C. O 10 625 p.p. D. O 11 175 p.p.
- 6 O ile osób wzrosła liczba ludności Warszawy i Petersburga? O ile procent, w zaokrągleniu do całości, wyższy był przyrost liczby ludności w Petersburgu niż w Warszawie?
- 7 W czasie 10 godzin lotu kondor wielki traci 5% masy ciała. O ile więcej ważył kondor przed 10-godzinnym lotem, jeśli po nim ważył 14,25 kg?
- 8 Znajdź liczbę, której:
 - a) 1% jest równy 2, b) 25% jest równe 250,
 - c) 75% jest równe 18, d) 150% jest równe 240.
- 9 Kolonie letnie miały kosztować 1200 zł, ale przed wyjazdem obniżono ich cenę do 900 zł. O ile złotych obniżono cenę? Ile to procent pierwotnej ceny?



- 10 Romek oszczędza na rower. Ma już 257 zł 50 gr i jest to 25% ceny roweru. Ile kosztuje rower?
- 11 W sklepie odkurzacz kosztuje o 60 zł więcej niż w hurtowni, co stanowi 25% ceny hurtowej. Ile kosztuje odkurzacz w hurtowni, a ile w sklepie?
- 12 Góry lodowe są niebezpieczne dla żeglugi, bo prawie 90% ich objętości znajduje się pod wodą. Jaką objętość ma góra lodowa, gdy nad wodę wystaje jej wierzchołek o objętości $3,5 \text{ m}^3$?
- 13 Po okresie promocji deskorolka kosztowała 360 zł i cena ta była o 20% wyższa niż w promocji. Ile kosztowała deskorolka w promocji?
A. 300 zł B. 432 zł C. 330 zł D. 270 zł
- 14 Pani Amelia wzięła z firmy kredyt na rok. Spłacała raty po 402,50 zł miesięcznie. Roczne oprocentowanie było równe 15%. Jaka była kwota pożyczki?

Wyzwanie

Robert zbierał monety. W klaserze miał ich 200 sztuk. Oddał bratu 20% swego zbioru.

- a) Ile sztuk monet zostało Robertowi?
b) O ile procent Robert musi zwiększyć swój obecny zbiór, by znowu mieć 200 sztuk monet?

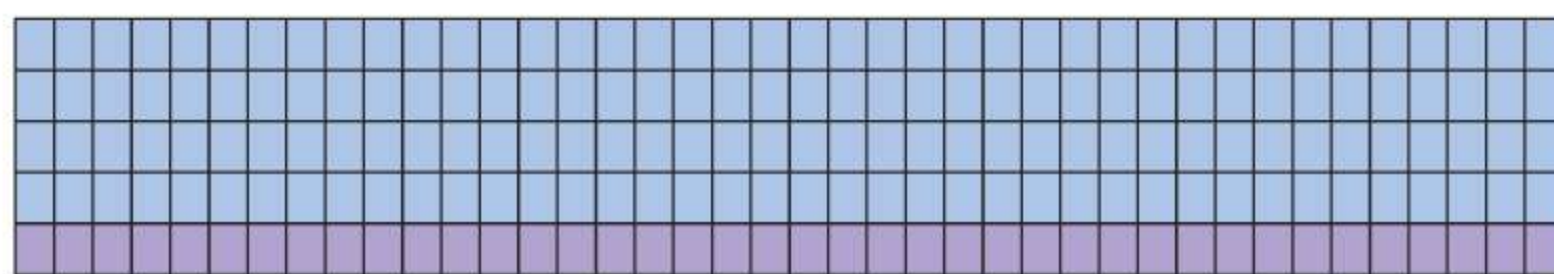
Robert oddał:

$$0,2 \cdot 200 = 40 \text{ [monet]}.$$



Robertowi zostało:

$$200 - 40 = 160 \text{ [monet]}.$$



Tyle monet Robertowi zostało.
Tylu monet mu brakuje.

Z diagramu widać, że brakuje 40 sztuk i jest to $\frac{1}{4}$ zbioru monet, które zostały Robertowi: $\frac{1}{4} = 25\%$.

Odpowiedź. Robertowi zostało 160 monet. Aby znów mieć 200 monet, Robert musi zwiększyć swój zbiór o 25%.

1. W zakładzie krawieckim wyceniono kurtki na 800 zł. W okresie promocyjnym kurtki te sprzedawano o 50% taniej. O ile procent trzeba podwyższyć promocyjną cenę kurtki, by była równa 800 zł?


Sprawdź się!

- 1 Leśnicy posadzili w szkółce 1600 sadzonek. Nie przyjęło się 25% sadzonek. Ile sadzonek się przyjęło?

- 2 W bukiecie było 5 czerwonych gerber i było to 50% wszystkich kwiatów. Ile kwiatów było w tym bukiecie?



- 3 Jaki procent odcinka PR zaznaczono kolorem zielonym?



- 4 Panu Janowi zwiększono wynagrodzenie o 20%. Otrzymał o 500 zł więcej. Ile zarabiał pan Jan przed podwyżką, a ile po podwyżce? Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. Przed podwyżką – 2500 zł, a po podwyżce – 3000 zł,	ponieważ	I. 20% z 500 zł jest równe 100 zł, więc pensja przed podwyżką była 10 razy większa, a po podwyżce wzrosła o 500 zł.
B. Przed podwyżką – 1000 zł, a po podwyżce – 1500 zł,		II. $20\% = 0,2 = \frac{1}{5}$, więc pensja przed podwyżką była 5 razy wyższa od podwyżki.

- 5 Pani Nowak kupiła 150 akcji firmy „Sady” za 2220 zł. Po roku sprzedała wszystkie akcje za 5550 zł.

Uzupełnij zdania. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D.

W dniu zakupu jedna akcja kosztowała A / B.

A. 14,60 zł B. 14,80 zł

W ciągu roku wartość akcji wzrosła o C / D.

C. 250% D. 150%

4. Diagramy procentowe



Sowa przypomina

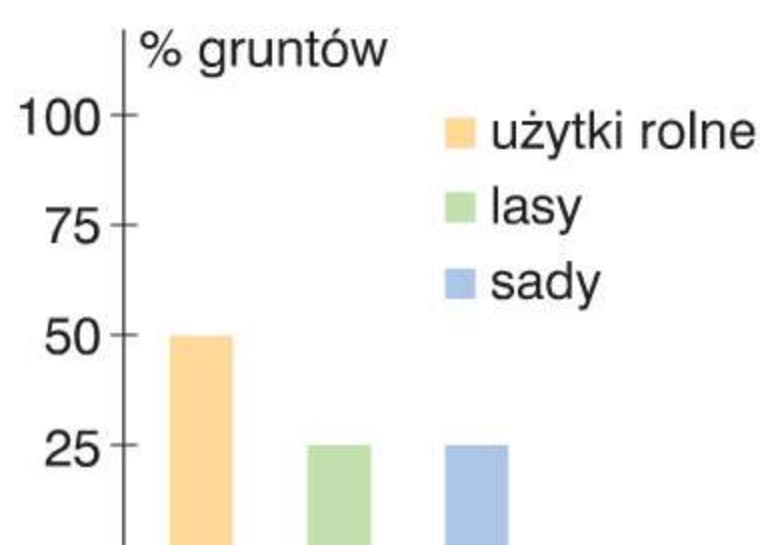
Informacje, które gromadzimy, możemy przedstawiać w różnej formie, np. przeznaczenie gruntów w pewnym gospodarstwie można podać w postaci tabeli lub diagramu: słupkowego, prostokątnego, kołowego.

• Tabela

Przeznaczenie gruntów	Użytki rolne	Lasy	Sady
Procent gruntów	50%	25%	25%

Na użytki rolne przeznaczono największą część ziemi.

• Diagram słupkowy



Słupek przedstawiający użytki rolne jest najdłuższy. Pozostałe słupki są równe, bo przedstawiają taką samą część gruntów.

• Diagram prostokątny



Na użytki rolne przeznaczono połowę ziemi $50\% = 0,5$, a więc na diagramie prostokątnym pokolorowano połowę prostokąta. Lasy zajmują $25\% = 0,25$; wyróżniono $\frac{1}{4}$ prostokąta.

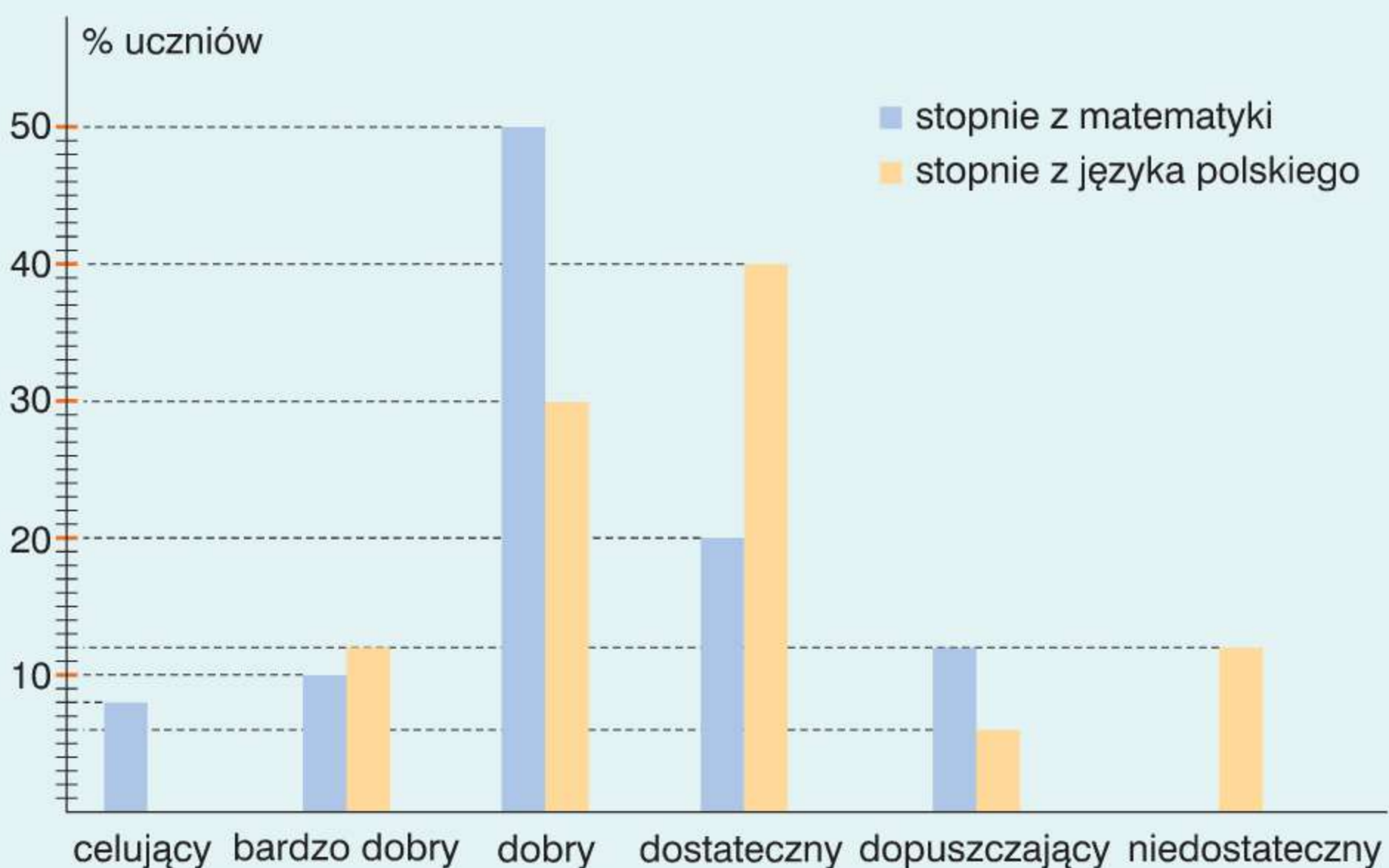
• Diagram kołowy



Lasy zajmują $25\% = \frac{1}{4}$ wszystkich gruntów, a użytki rolne dwie takie części, więc o 100% więcej niż lasy. Użytki rolne zajmują o 25 punktów procentowych więcej ziemi niż lasy: $50 - 25 = 25$ [p.p.].



Wyniki klasówki w klasach szóstych z matematyki i z języka polskiego przedstawiono na jednym **diagramie**.



Przy każdym stopniu jest co najmniej jeden słupek – koloru niebieskiego lub żółtego. Słupek koloru niebieskiego opisuje wyniki klasówki z matematyki, słupek koloru żółtego – z języka polskiego.

Z diagramu można odczytać, że z języka polskiego nie było stopnia celującego, a z matematyki – niedostatecznego, bo przy stopniu celującym jest tylko słupek koloru niebieskiego, a przy stopniu niedostatecznym – tylko słupek koloru żółtego.

Z matematyki stopień bardzo dobry otrzymało 10% uczniów, a z języka polskiego – o 2 p.p. więcej.

Z matematyki stopień dobry otrzymało 50% uczniów, a z języka polskiego – o 20 p.p. mniej.

Z matematyki stopień dostateczny otrzymało 20% uczniów, a z języka polskiego – o 20 p.p. więcej.

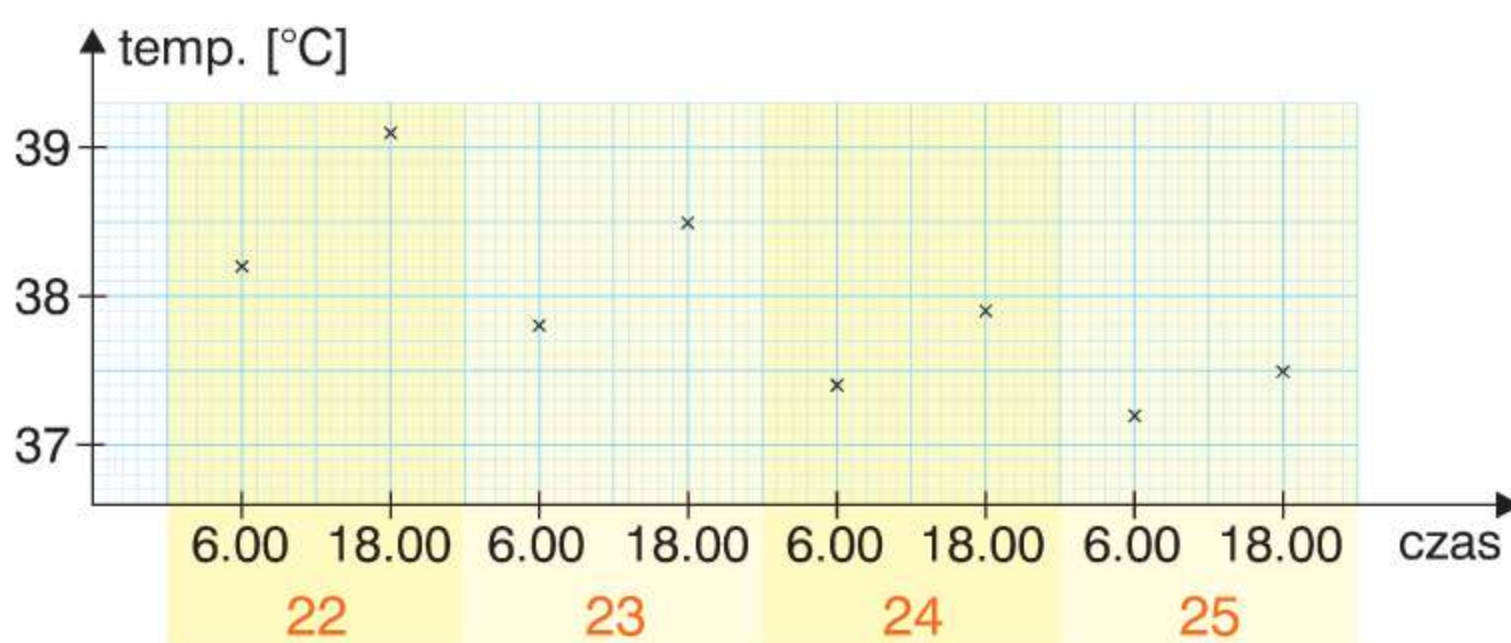
Z matematyki stopień dopuszczający otrzymało 12% uczniów, a z języka polskiego – o połowę punktów procentowych mniej.

Przykład 1.

Kinga była w szpitalu. Mierzono jej temperaturę ciała rano i wieczorem. Wyniki zapisano w tabelce.

Data	22		23		24		25	
Godzina	6.00	18.00	6.00	18.00	6.00	18.00	6.00	18.00
Temperatura	38,2°C	39,1°C	37,8°C	38,5°C	37,4°C	37,9°C	37,2°C	37,5°C

Na podstawie tych danych, zamiast rysować diagram słupkowy pokazujący temperaturę w odpowiednim dniu, można zaznaczyć tylko punkty w miejscach, do których sięgałby słupek.



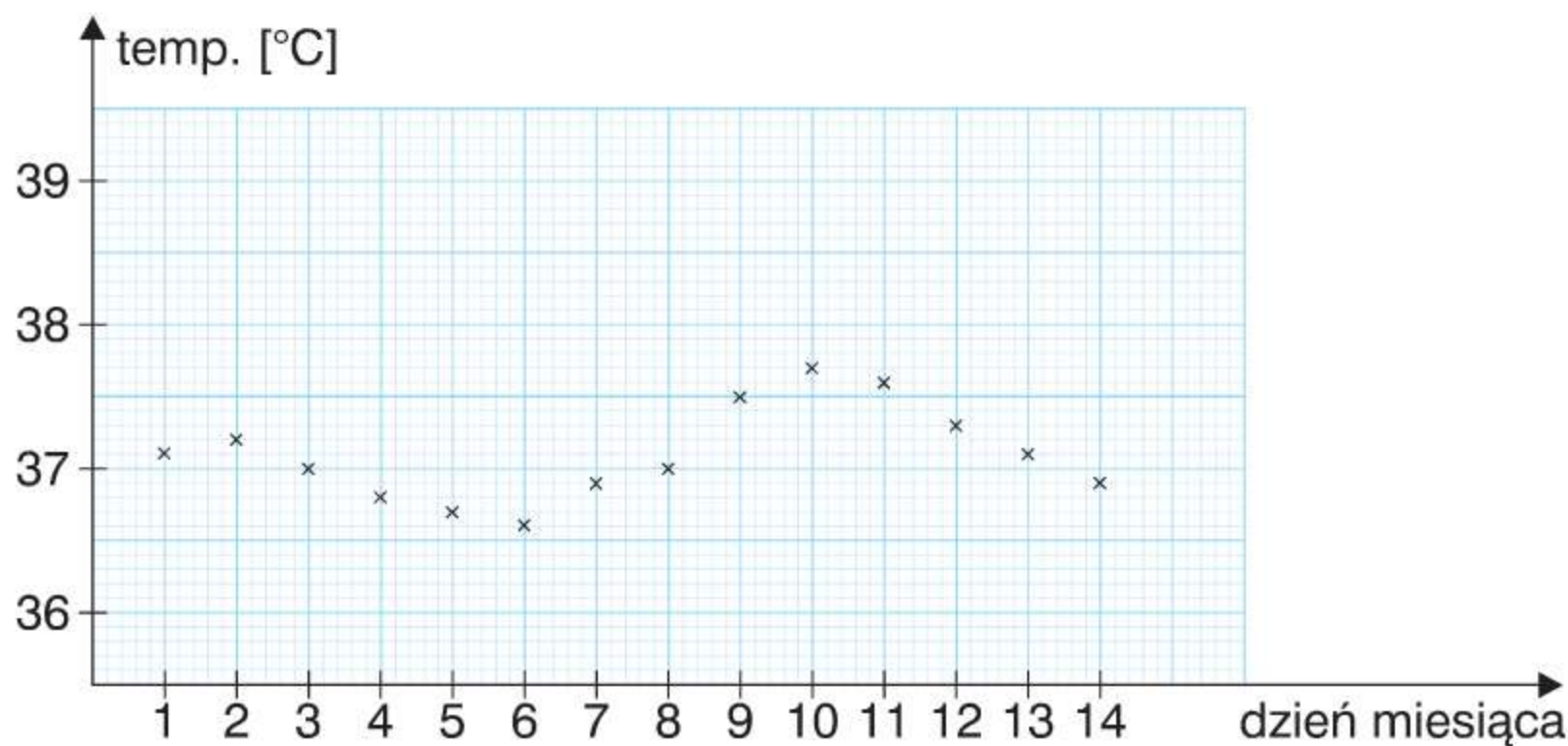
Ponieważ zmiana temperatury polega na tym, że przy przejściu np. od 38,2°C do 39,1°C temperatura przyjmuje wartości pośrednie, czasami łączymy te punkty odcinkami bez zwracania uwagi na szczegóły i w ten sposób otrzymujemy **wykres liniowy** temperatury.



Dzięki takiemu wykresowi możemy lepiej zobaczyć, jak zmieniała się temperatura w ustalonym czasie – rosła czy malała.

Zastanów się, w jakiej porze doby temperatura rosła, a w jakiej malała.

- 1 Skorzystaj z diagramu w **Sowa uczy** i odczytaj, ile procent wszystkich uczniów stanowili ci, którzy otrzymali stopień celujący z matematyki, a ile procent ci, którzy dostali stopień niedostateczny z języka polskiego.
- 2 W klasach szóstych, o których mowa w **Sowa uczy**, jest 50 uczniów i wszyscy pisali klasówki. Ilu uczniów otrzymało poszczególne stopnie z matematyki, a ilu z języka polskiego?
- 3 Karolina mierzyła codziennie przez 14 dni temperaturę ciała i na podstawie otrzymanych pomiarów wykonała wykres.



Odczytaj z wykresu:

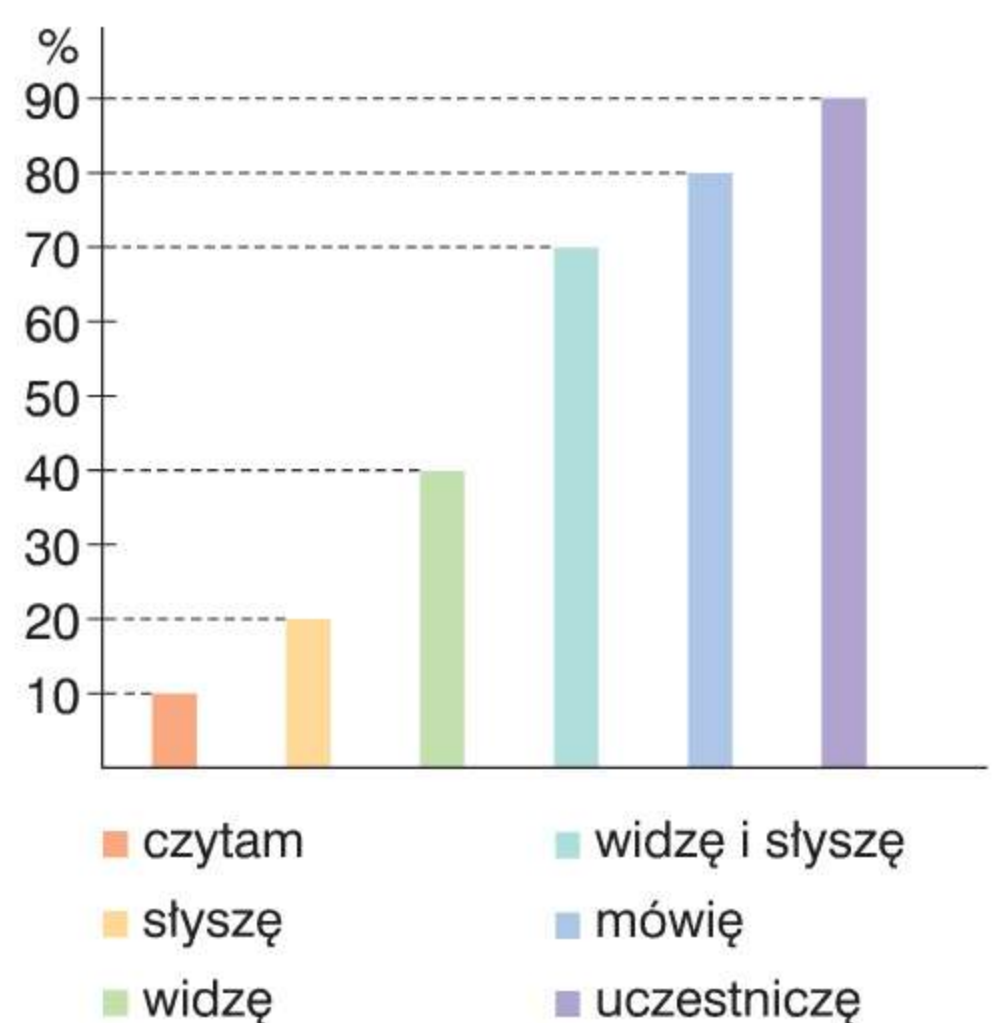
- a) którego dnia Karolina miała najwyższą temperaturę, a którego najniższą;
- b) kiedy Karolina miała temperaturę równą 37°C;
- c) w jakich dniach temperatura malała.

- 4 Przyjrzyj się diagramowi, który pokazuje, jak większość ludzi zapamiętuje wiadomości. Ile procent wiadomości zapamięta człowiek:

- a) jeżeli o nich czyta,
- b) jeżeli o nich mówi,
- c) jeżeli uczestniczy w wydarzeniach?

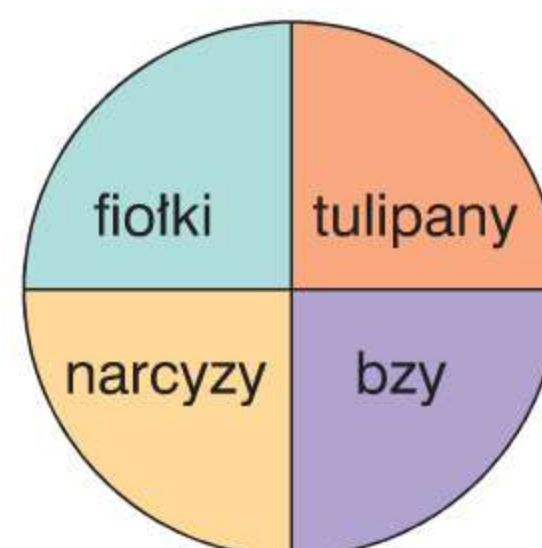
W jakim przypadku najczęściej wiadomości zostaje zapamiętanych?

O ile punktów procentowych więcej wiadomości zapamiętujemy, gdy mówimy o nich sami, niż gdy tylko słuchamy innych?



- 5 Odczytaj z diagramu kołowego, ile procent kwiatów stanowią:

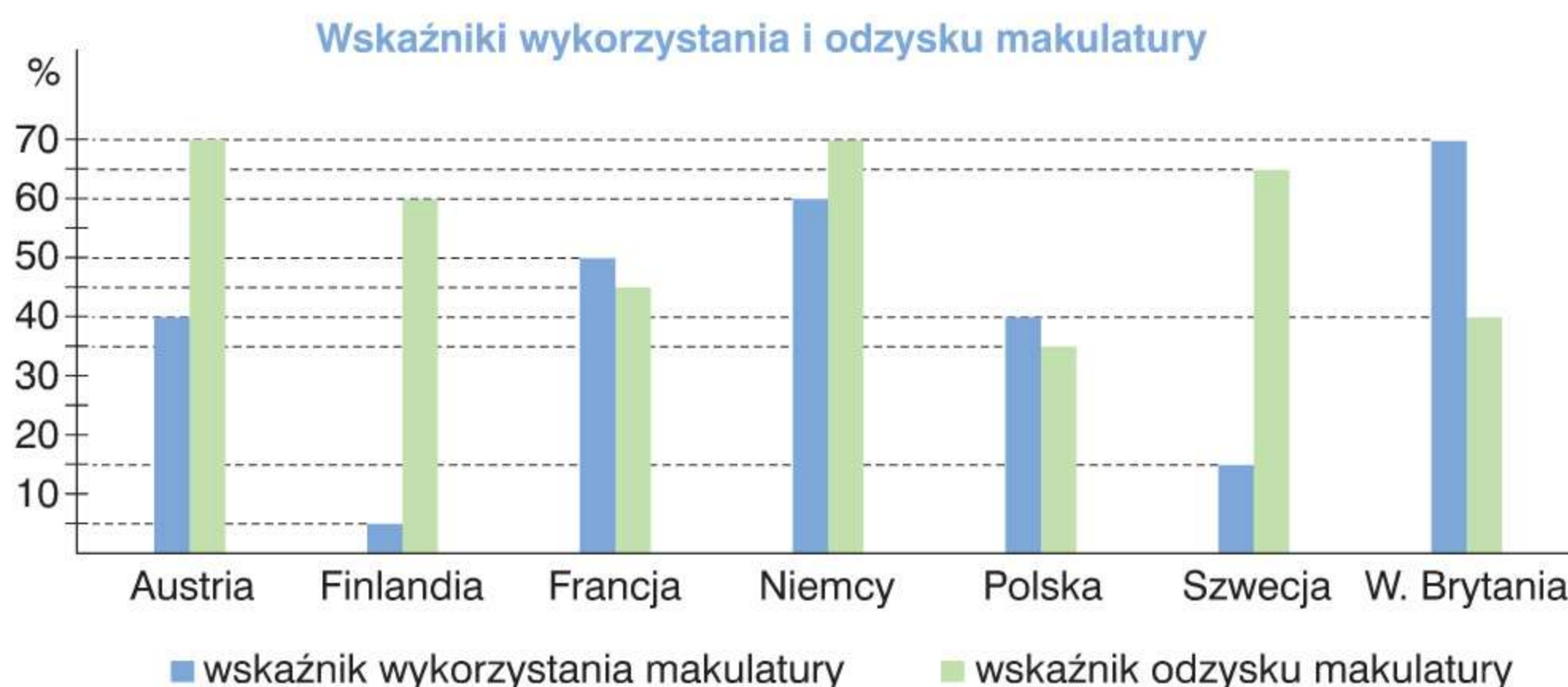
- a) narcyzy,
- b) krzewy,
- c) rośliny cebulowe,
- d) kwiaty niekwitjące na krzewach.



- 6 Przedstaw dane z tabelki na jednym diagramie słupkowym.

Klasa	4a	4b	5a	5b	6a	6b
Dziewczęta	12	10	13	14	10	12
Chłopcy	8	11	12	10	7	8

- 7 W niektórych krajach europejskich odzyskuje się więcej makulatury, niż wykorzystuje się jej do ponownego przetworzenia. W takich krajach nadmiar makulatury się eksportuje (sprzedaje do innych krajów). Na diagramie przedstawiono wskaźniki wykorzystania i odzysku makulatury w wybranych krajach.

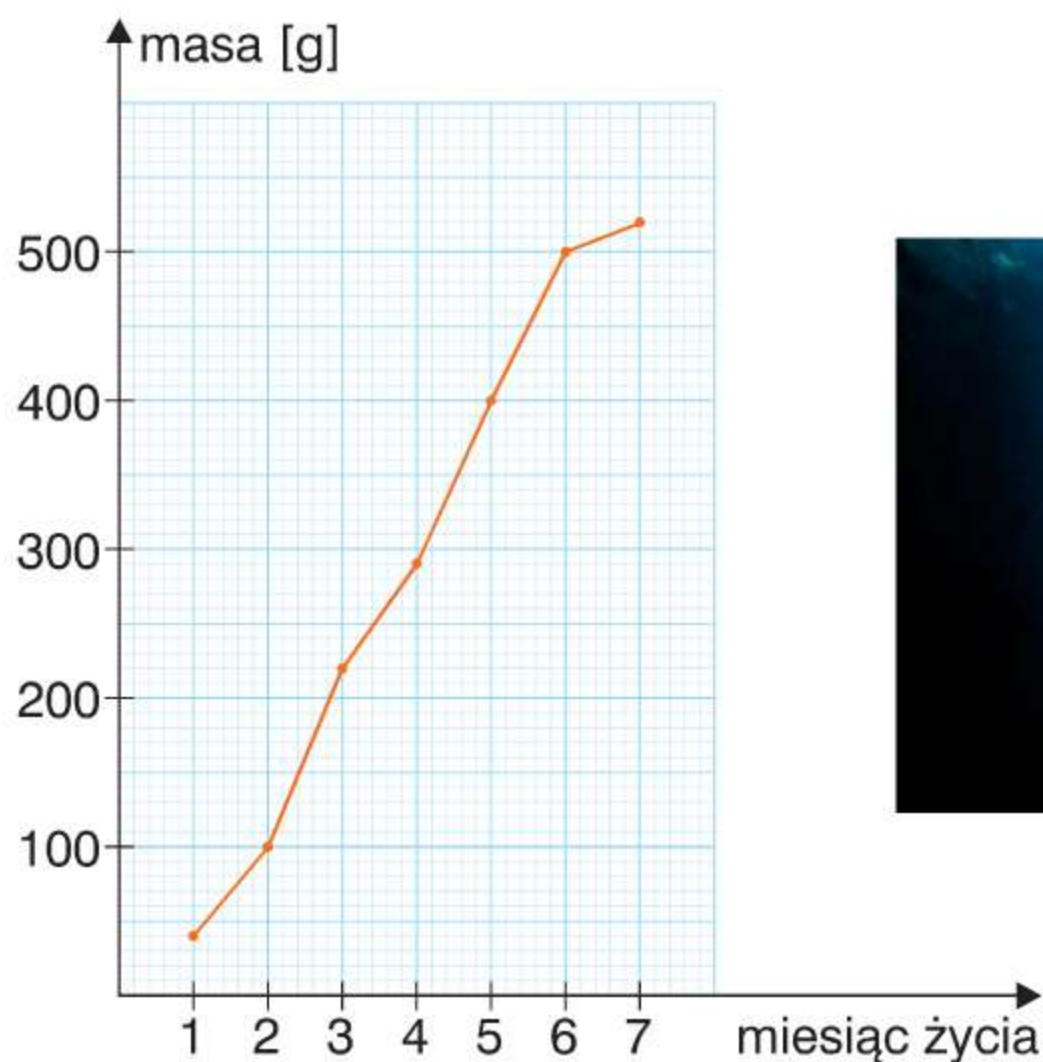


- a) W których krajach wykorzystanie makulatury jest mniejsze niż jej odzysk?
- b) Które kraje importują makulaturę? Sprawdź w słowniku znaczenie wyrazu „import”.
- c) O ile punktów procentowych mniej makulatury odzyskuje się w Polsce, niż się jej wykorzystuje?



Skorzystaj z wykresu i rozwiąż zadania 8.–14.

Na wykresie przedstawiono masę dorsza w zależności od długości życia.

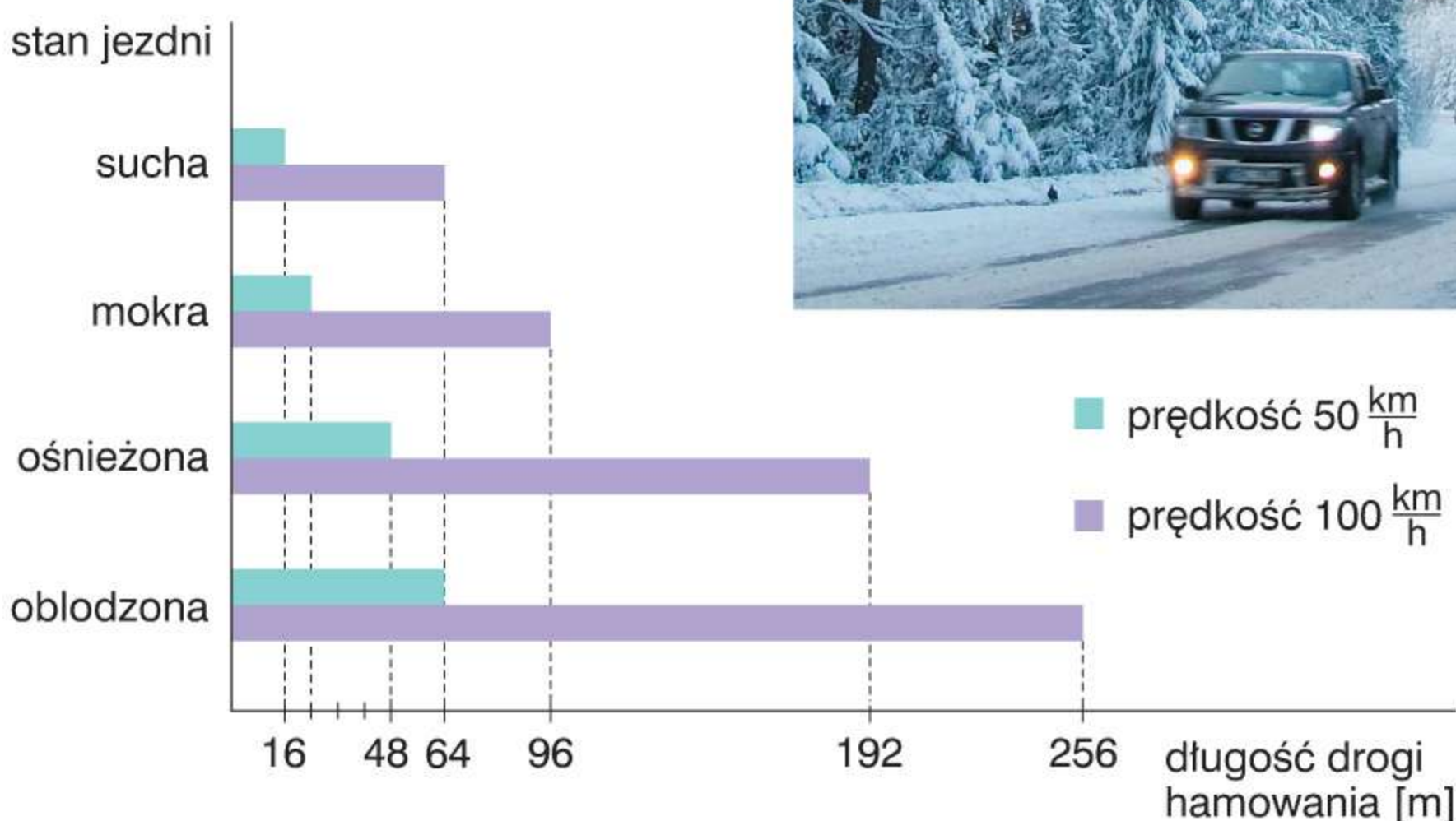


- 8 Ile waży miesięczny dorsz, a ile trzymiesięczny?
- 9 W którym miesiącu dorsz osiągnie masę 400 g?
- 10 O ile gramów wzrośnie masa dorsza od drugiego do szóstego miesiąca?
- 11 O ile procent wzrośnie masa dorsza od drugiego do szóstego miesiąca?
- 12 Jakim procentem masy dorsza półrocznego jest masa dorsza dwumiesięcznego?
- 13 Napisz wyrażenie opisujące, ile kosztuje siedmiomiesięczny dorsz, jeżeli cena za 1 kg jest równa a zł. Oblicz wartość wyrażenia dla $a = 27,50$.
- 14 Uzupełnij zdanie. Wybierz poprawne odpowiedzi spośród A i B oraz C i D. Między piątym a szóstym miesiącem masa dorsza wzrosła o A / B, czyli o C / D.
 A. 10 dag B. 0,01 kg C. 40% D. 25%
- 15 Znajdź w internecie, prasie lub podręcznikach do innych przedmiotów tabele, diagramy lub rysunki przedstawiające dowolne dane. Napisz o nich trzy zdania.

Na podstawie poniższych informacji i diagramu rozwiąż zadania 16.–18.

Jeżeli jezdnia jest mokra, zaśnieżona lub oblodzona, to samochód ma dłuższą drogę hamowania. Na diagramie przedstawiono długości drogi hamowania od momentu użycia hamulca dla samochodu jadącego

z prędkością $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i dla samochodu jadącego z prędkością $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



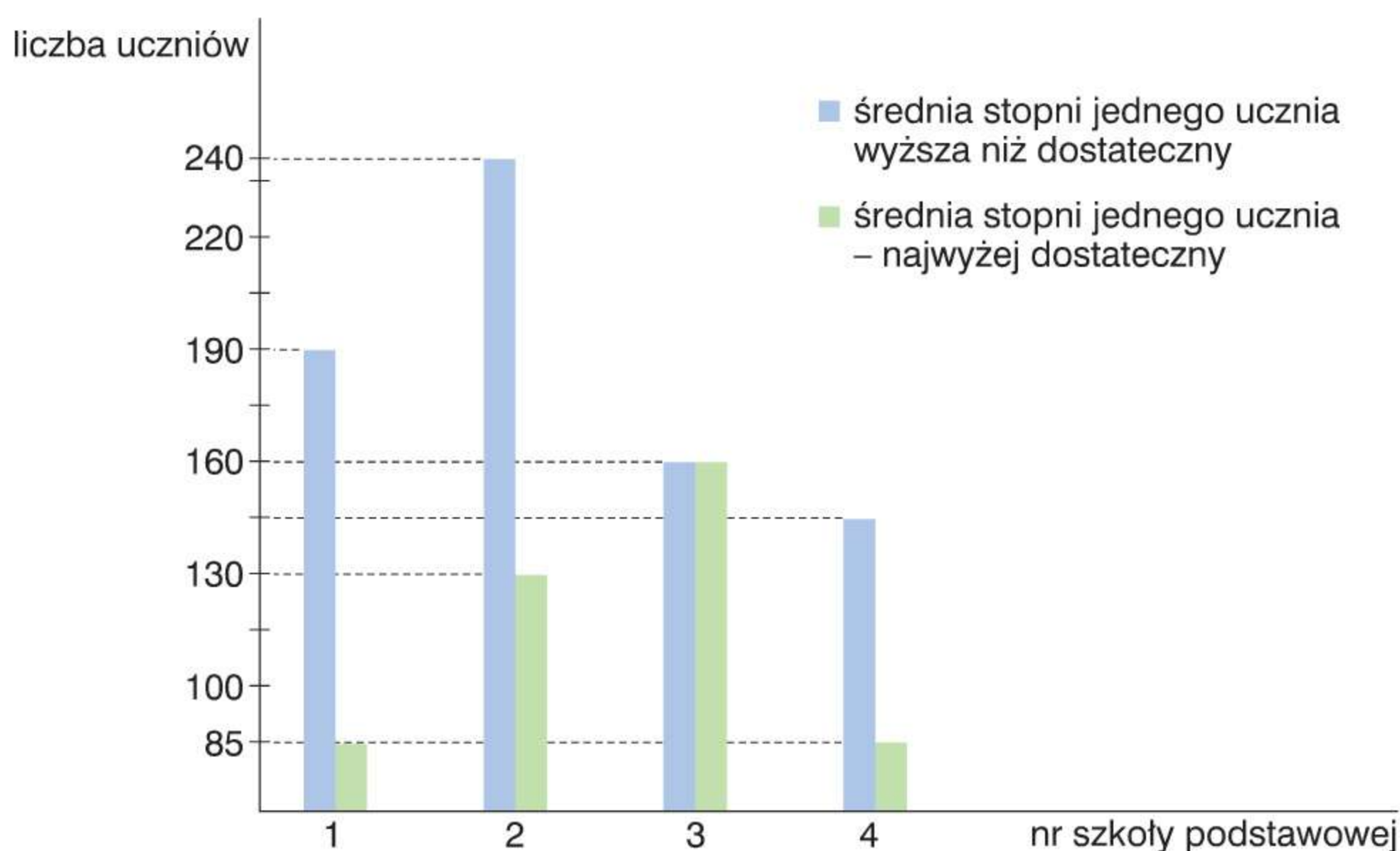
- 16** Porównaj, ile razy dłuższa jest droga hamowania na nawierzchni ośnieżonej od drogi hamowania na nawierzchni suchej przy prędkości:
- a) $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, b) $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- 17** Ile razy wydłuża się długość drogi hamowania na poszczególnych nawierzchniach, gdy prędkość wzrasta z $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ do $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?
- 18** O ile procent dłuższa jest droga hamowania samochodu o prędkości $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ od drogi hamowania samochodu o prędkości $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ na jezdni:
- a) mokrej, b) oblodzonej?

- 19** W Polsce jest 6 typów gleb: biellicowe i brunatne, które stanowią 82% wszystkich typów gleb, mady – 5%, czarnoziemy – 1%, rędziny – 1%, błotne (hydrogeniczne) – 9%, czarne ziemie – 2%. Przedstaw podział procentowy gleb w Polsce na diagramie prostokątnym.



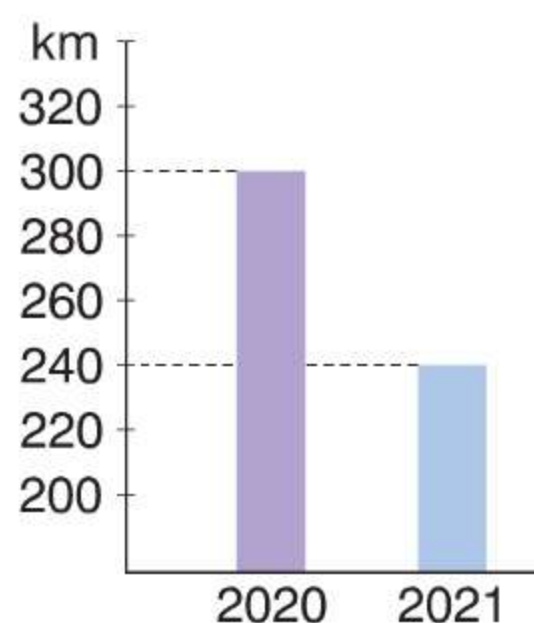
gleba biellicowa

- 20 W prasie ukazały się informacje o pewnych szkołach podstawowych.



- Podaj liczbę uczniów każdej wymienionej szkoły podstawowej.
- Ile procent wszystkich uczniów w szkole podstawowej nr 3 to uczniowie, których średnia stopni jest wyższa niż dostateczny?
- O ile procent więcej uczniów ze średnią stopni wyższą niż dostateczny było w szkole nr 2 niż w szkole nr 3?
- Ułóż dwa inne pytania dotyczące diagramu i na nie odpowiedz.

- 21 Na diagramie przedstawiono liczbę kilometrów przejechanych na rowerach przez rodzinę Nowaków podczas wakacji w 2020 i 2021 roku. Czy liczba przejechanych w 2021 roku kilometrów była o 50% mniejsza od liczby kilometrów przejechanych w 2020 roku? Wskaż odpowiedź TAK lub NIE i jej uzasadnienie I lub II.

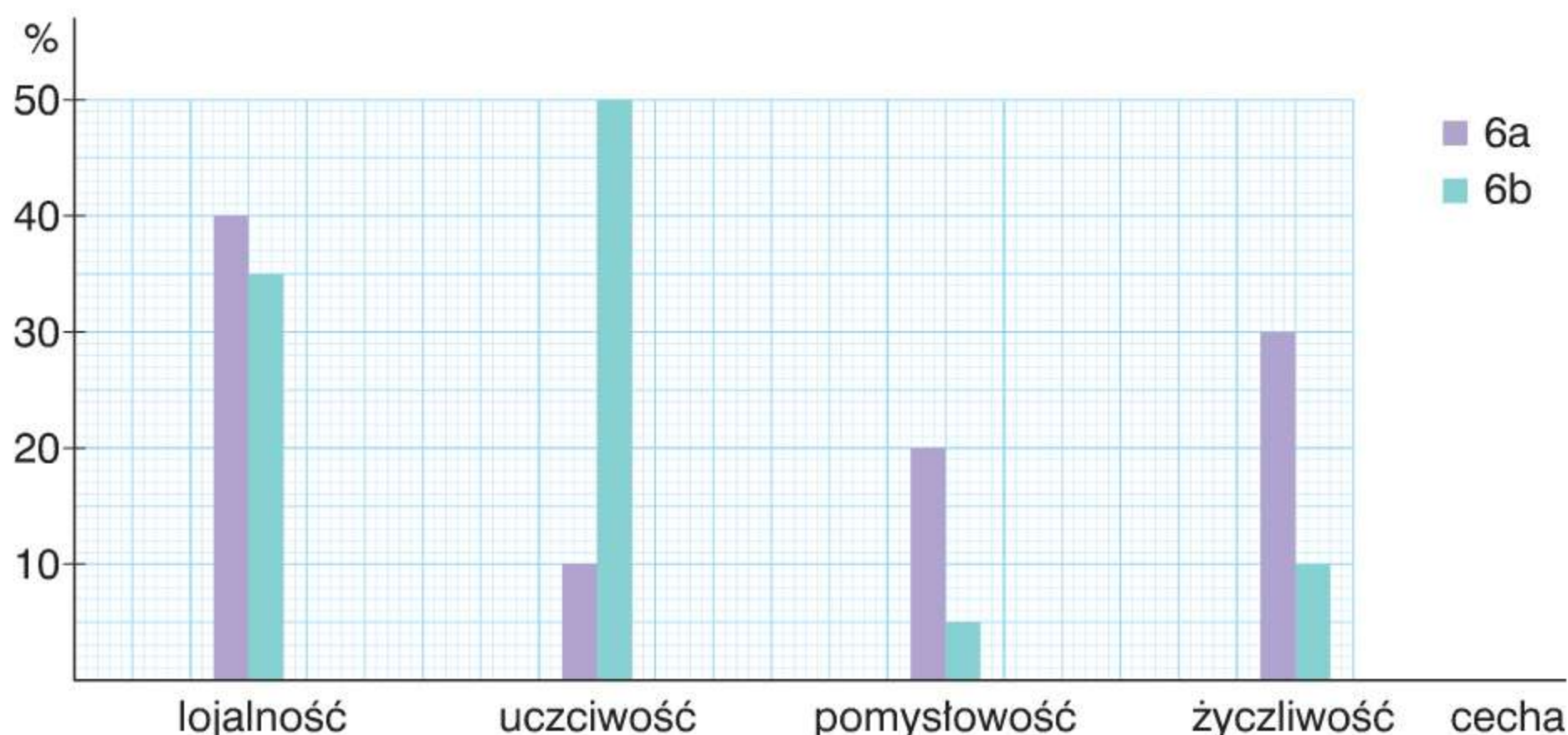


TAK,	ponieważ	I. pierwszy słupek na diagramie jest 2 razy wyższy niż drugi.
NIE,		II. liczba kilometrów przejechanych w 2021 roku była o 20% mniejsza od liczby kilometrów przejechanych w 2020 roku.


Sprawdź się!

Na podstawie poniższych informacji i diagramu rozwiąż zadania 1.–3.

Przeprowadzono ankietę, w której trzeba było wskazać jedną najważniejszą cechę przyjaciela. W ankiecie brało udział 30 uczniów klasy 6a i 20 uczniów klasy 6b.



- Ile procent uczniów klasy 6a i ile procent uczniów klasy 6b stanowili ci, którzy głosowali na poszczególne cechy?
- W klasie 6b cechę „uczciwość” wskazało
A. 2 uczniów. B. 5 uczniów. C. 10 uczniów. D. 8 uczniów.
- Ilu uczniów z klasy 6a wskazało „lojalność” jako najważniejszą cechę przyjaciela?
- Według danych GUS z 2020 roku w Polsce mieszka około 38 milionów ludzi. Blisko 20% osób ma poniżej 20. roku życia, około 61% to osoby w przedziale wiekowym 20–64 lata, a resztę stanowią seniorzy mający co najmniej 65 lat. Przedstaw te dane na diagramie prostokątnym. Podaj liczbę osób poniżej 20. roku życia.
- Przez 10 kolejnych dni o godzinie 7.00 rano Joasia zapisywała temperaturę powietrza. Swoje obserwacje przedstawiła w tabelce.

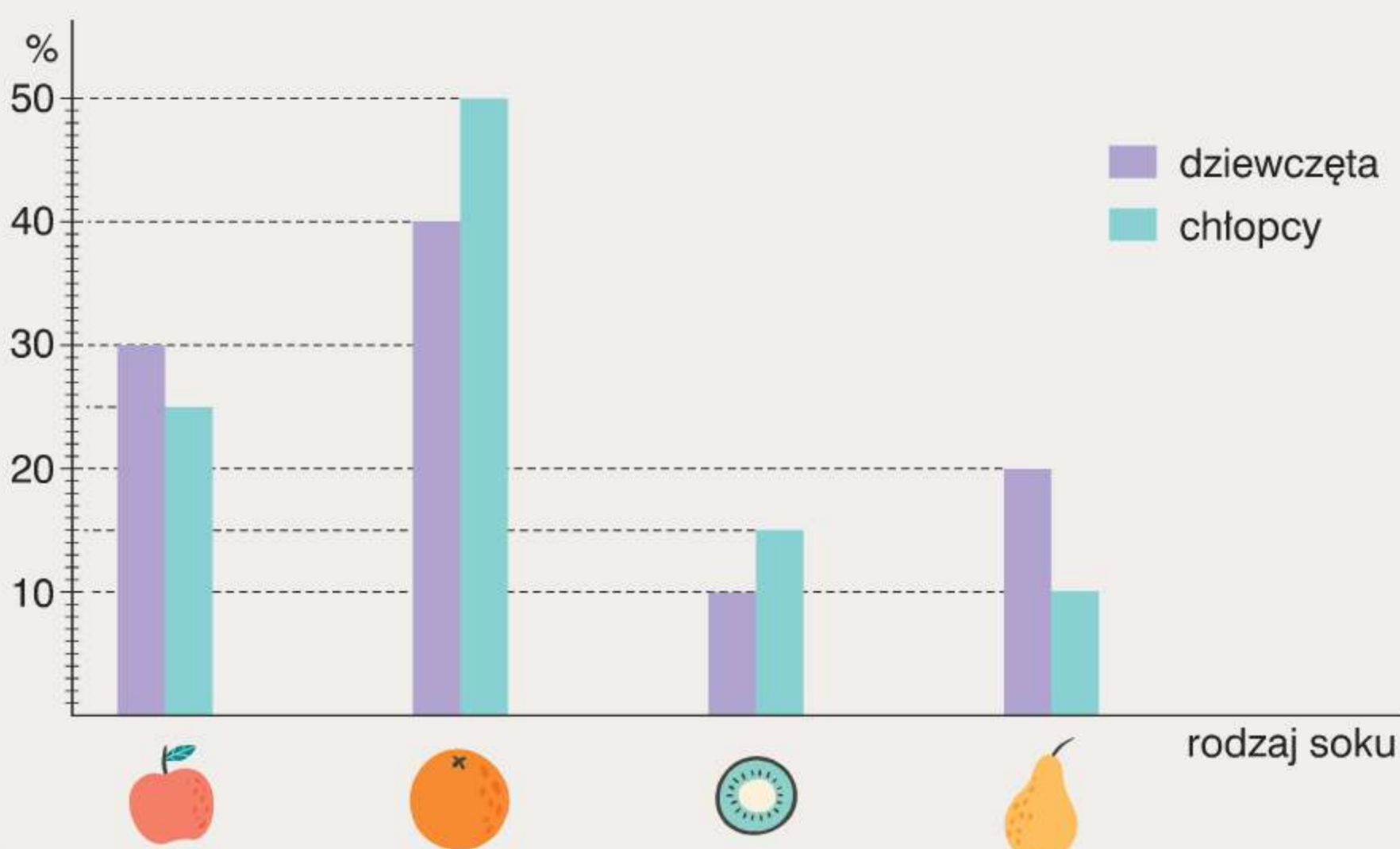
Dzień obserwacji	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura [°C]	–2	–2	–4	–1	0	3	3	3	4	2

- Na podstawie tabelki wykonaj wykres liniowy temperatury.
- W jakich dniach temperatura rosla, a w jakich była stała?
- Jaka była średnia temperatura w tym okresie?

- 11** Kąt *KOS* ma miarę 18° i jest to 15% miary kąta *MAK*. Jaką miarę ma kąt *MAK*? Jak nazywamy kąty o mierze takiej jak kąt *KOS*, a jak o mierze kąta *MAK*?

Na podstawie poniższych informacji i diagramu rozwiąż zadania 12.–14.

Uczniowie klas szóstych przeprowadzili sondaż na temat tego, jakie soki kupić do szkolnego bufetu. W sondażu wzięło udział 40 chłopców i 50 dziewcząt, a każda osoba mogła wskazać tylko jeden rodzaj soku. Wyniki sondażu pokazano na procentowym diagramie słupkowym.



- 12** Ile procent chłopców, a ile procent dziewcząt wybrało sok pomarańczowy?
- 13** O ile punktów procentowych więcej dziewcząt niż chłopców wybrało sok jabłkowy? Jakim procentem liczby chłopców głosujących na sok jabłkowy jest liczba dziewcząt głosujących na ten sok?
- 14** O ile procent trzeba byłoby zwiększyć liczbę chłopców głosujących na sok jabłkowy, aby ich liczba była równa liczbie dziewcząt wybierających sok jabłkowy?
- 15** Pan Grzegorz od 1 lipca do 20 sierpnia był ratownikiem na plaży. Codziennie zapisywał na tablicy informacyjnej temperaturę wody w Bałtyku. Zauważył, że przez cały lipiec i 40% dni sierpniowych, podczas których dyżurował, temperatura nie przekraczała 20°C . Ile było razem dni z temperaturą niższą niż 20°C ?

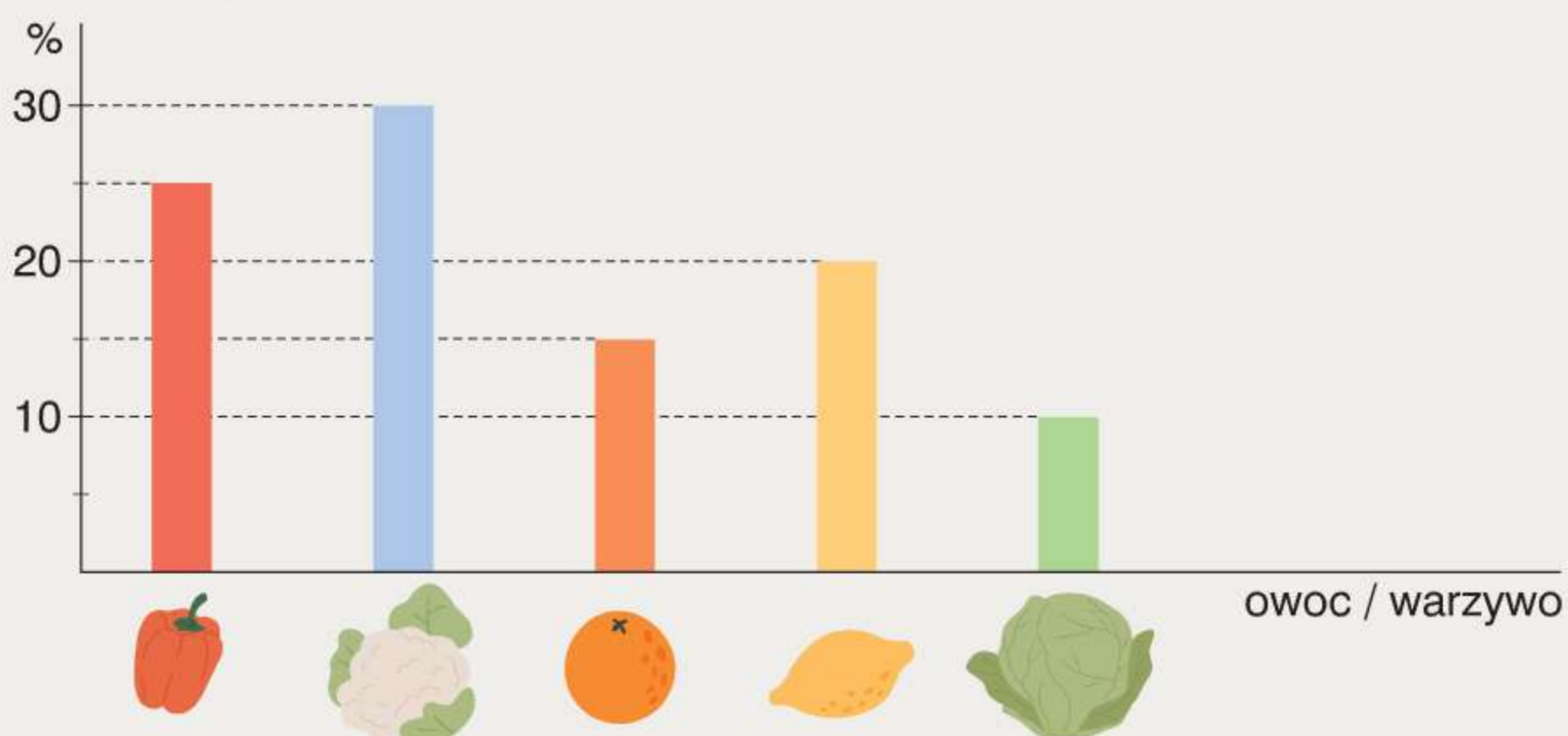


Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

Na podstawie poniższych informacji i diagramu rozwiąż zadania 1.–4.

Na lekcji przyrody każdy z 80 uczniów klas szóstych miał podać przykład jednego owocu lub warzywa, które według niego jest najbogatsze w witaminę C.



- 1 Najczęściej wskazywano

A. czerwoną paprykę.
C. kalafior.

B. białą kapustę.
D. pomarańczę.
- 2 O ile punktów procentowych więcej było uczniów, którzy wskazali kalafior jako najbogatszy w witaminę C, niż uczniów, którzy wskazali białą kapustę?

A. O 20 p.p.

B. O 10 p.p.

C. O 5 p.p.

D. O 15 p.p.
- 3 Cytrynę jako źródło witaminy C wskazało

A. 0,4 wszystkich uczniów.
C. 0,05 wszystkich uczniów.

B. $\frac{2}{5}$ wszystkich uczniów.
D. $\frac{1}{5}$ wszystkich uczniów.
- 4 Ilu uczniów wskazało kalafior jako główne źródło witaminy C?
Wskaż poprawną odpowiedź A, B lub C i jej uzasadnienie I, II lub III.

A. 16,	ponieważ	I. jest to różnica liczby uczniów i liczby 30.
B. 24,		II. jest to 0,2 liczby uczniów.
C. 50,		III. jest to 30% liczby 80.

- 5 W pierwszym semestrze Kamil otrzymał z matematyki 6 ocen bardzo dobrych, które stanowiły 20% jego wszystkich ocen. W pierwszym semestrze Kamil otrzymał łącznie
- A. 12 ocen. B. 18 ocen. C. 24 oceny. D. 30 ocen.

Skorzystaj z podanych informacji i rozwiąż zadania 6.–9.

Centrum handlowe umieściło przy wejściu głównym następującą informację.

◆ ◆ ◆ **Szanowni Państwo!** ◆ ◆ ◆

Za zakupy:

poniżej 200 zł	RABAT 5%	powyżej 500 zł do 1000 zł	RABAT 15%
od 200 zł do 500 zł	RABAT 10%	powyżej 1000 zł	RABAT 20%

Rabat to zniżka procentowa od wyznaczonej ceny towaru.

W powyższej informacji oznacza to, że za zakupy za 400 zł po rabacie 10% trzeba zapłacić $400 \text{ zł} - 40 \text{ zł} = 360 \text{ zł}$.

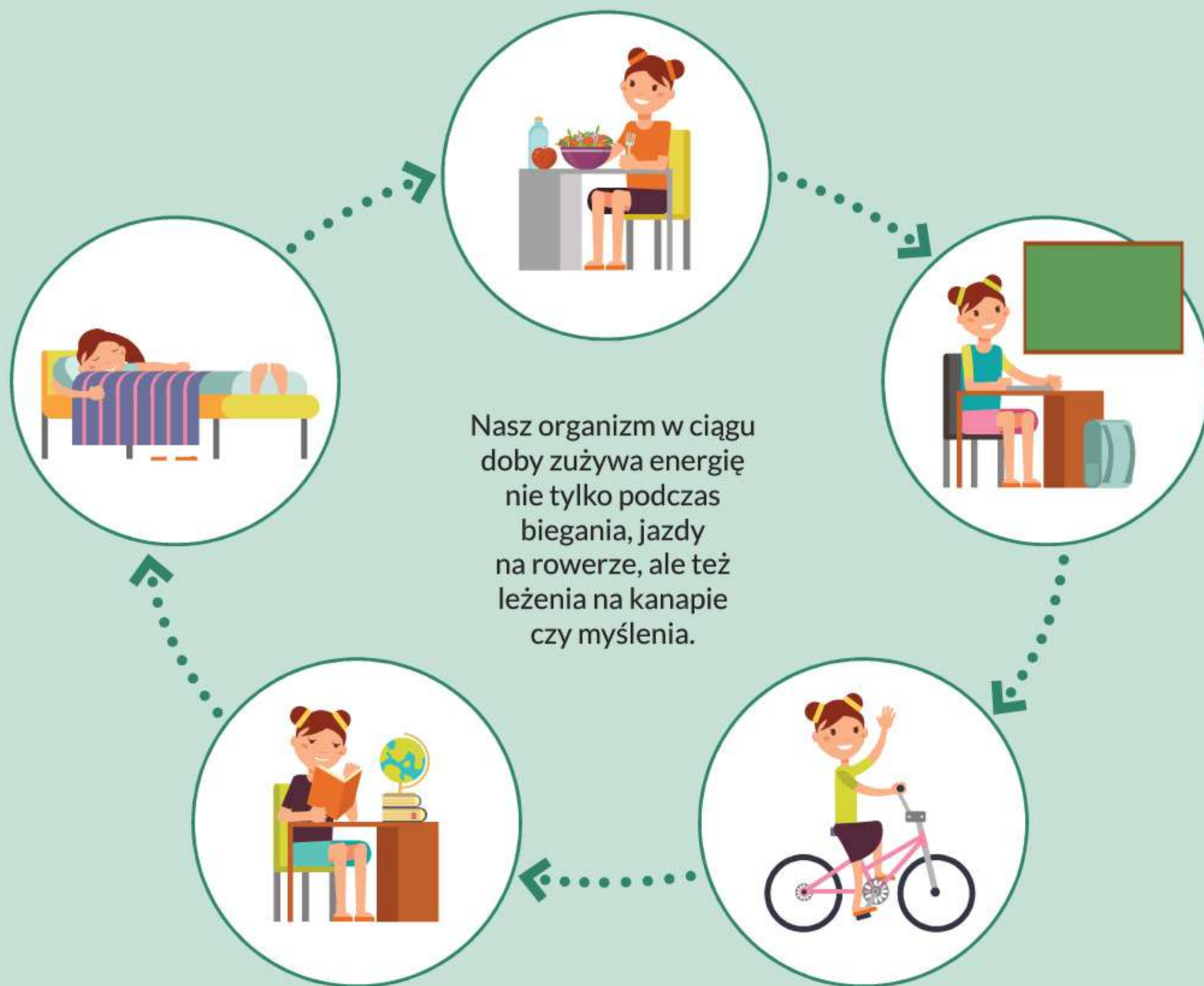
- 6 Ile rabatu otrzyma Marek, jeżeli zrobi zakupy za 190 zł?
- A. 9,50 zł B. 19 zł C. 28,50 zł D. 38 zł
- 7 Nauczyciel wychowania fizycznego kupił stroje dla szkolnej drużyny sportowej: 10 koszulek po 29,90 zł, 10 par spodenek po 21,60 zł oraz 10 par podkolanówek po 8,50 zł. Ile otrzymał reszty z 600 zł?
- A. 510 zł B. 90 zł C. 60 zł D. 0 zł
- 8 Alina kupiła: kostium kąpielowy za 49 zł, pletwy za 53 zł, czepek kąpielowy za 18 zł i maskę do nurkowania za 90 zł. Ile zapłaciła za swoje zakupy?
- Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. 199,50 zł,	ponieważ	I. od wartości zakupów należy odjąć rabat w wysokości 21 zł.
B. 189 zł,		II. od wartości zakupów należy odjąć rabat w wysokości 10,50 zł.

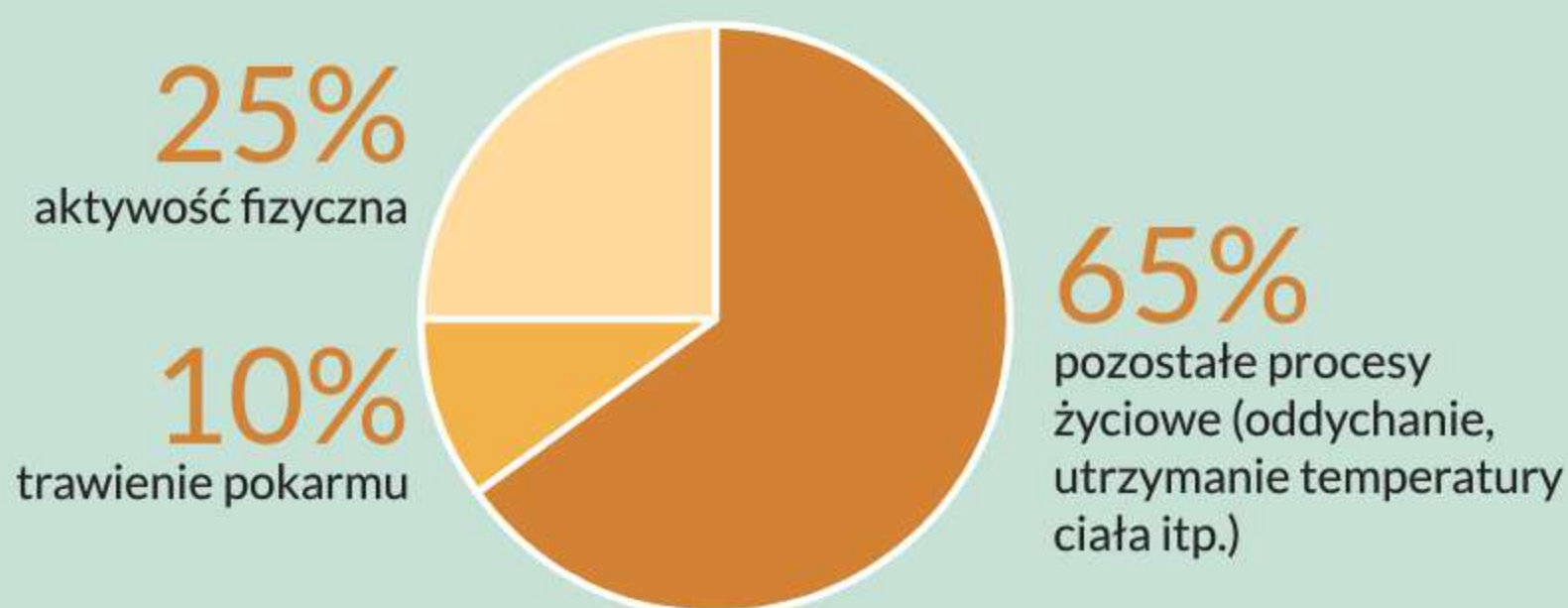
- 9 Rodzice kupili Krzysiowi sprzęt narciarski, za który zapłacili 1020 zł. Gdyby nie było rabatu, ten sprzęt kosztowałby
- A. 1275 zł B. 1225 zł C. 925 zł D. 255 zł

Bilans energetyczny

Bilans energetyczny to różnica pomiędzy dostarczaną organizmowi ilością energii (liczbą kilokalorii zawartych w pokarmie) a ilością energii, którą on zużywa. Ujemny bilans energetyczny skutkuje utratą masy ciała, a dodatni gromadzeniem tkanki tłuszczowej.



Na wykresie przedstawiono przykładowe **zużycie energii** w ciągu doby.



w procentach

Podczas obliczania **liczby kilokalorii (kcal)**, którą powinniśmy dostarczyć w ciągu doby naszemu organizmowi, musimy uwzględnić między innymi: wiek, płeć, stopień aktywności fizycznej, masę ciała, stan zdrowia.



2000 kcal

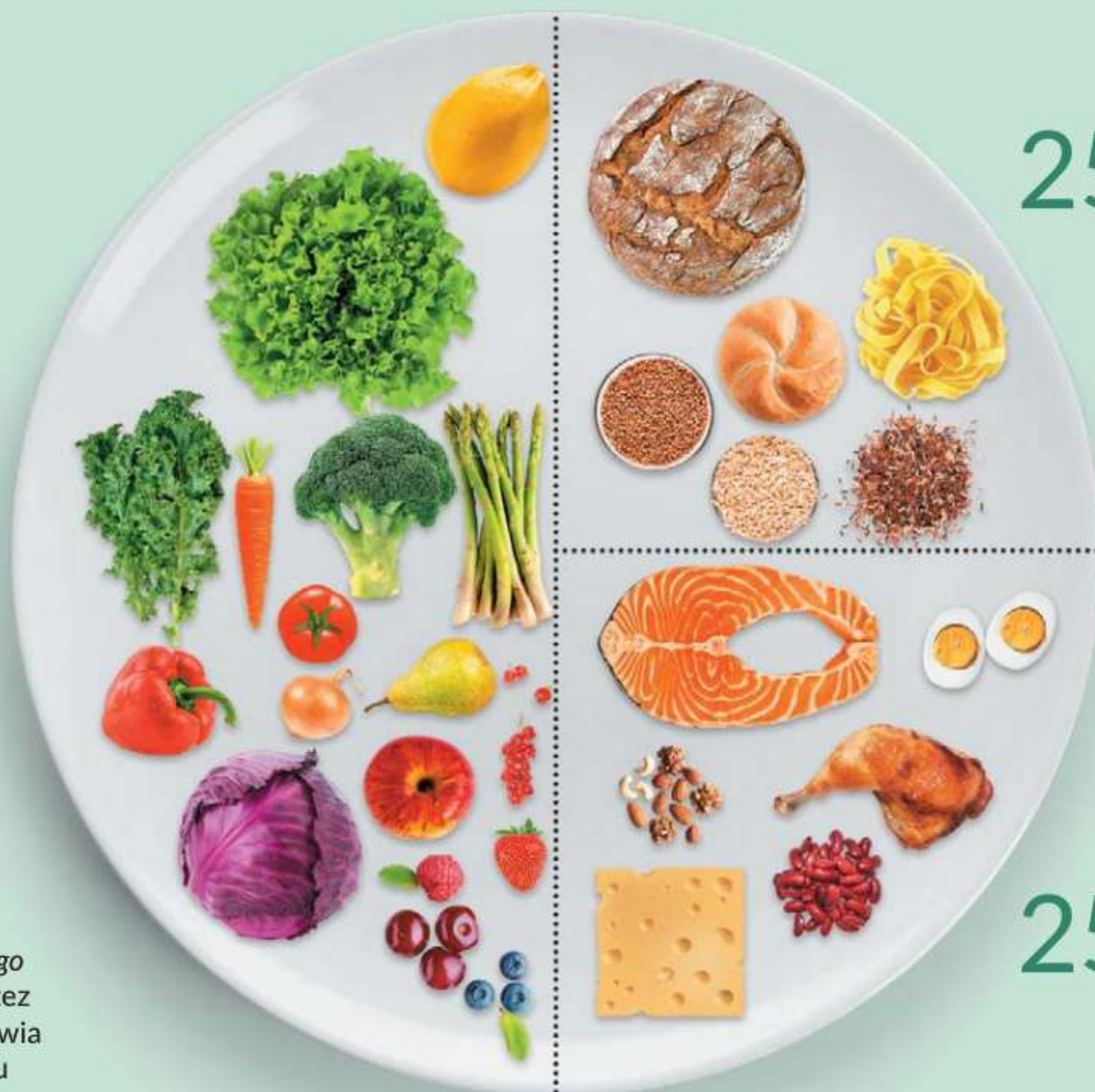
Aktywny 12-latek powinien zjadać dziennie posiłki o wartości kalorycznej około 2500 kcal (chłopiec) lub około 2000 kcal (dziewczynka).



2500 kcal

Liczy się nie tylko liczba dostarczanych kilokalorii, ale także to, jakie produkty spożywamy. **Talerz zdrowego żywienia** pokazuje, jak prawidłowo komponować posiłki.

50%



25%

25%

Czy zwracasz uwagę na to, co jesz?

1. Graniastostupy proste



Sowa przypomina

• Prostopadłościan



Prostopadłościan to graniastostup prosty czworokątny, którego podstawą jest prostokąt.

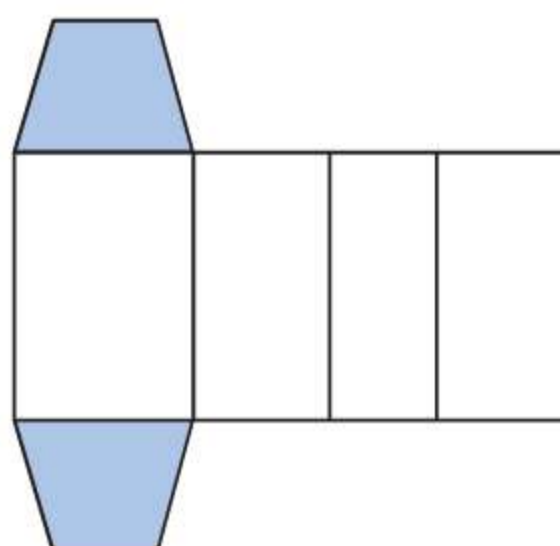
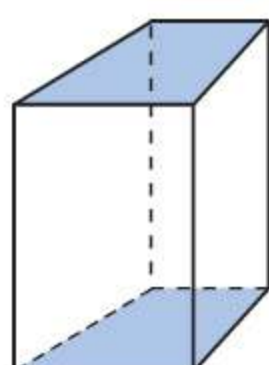
Sześcian to prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami.

Prostopadłościan ma 6 ścian: 4 ściany boczne i 2 podstawy.
Równoległe ściany mają takie same wymiary.
Prostopadłościan ma 8 wierzchołków i 12 krawędzi.

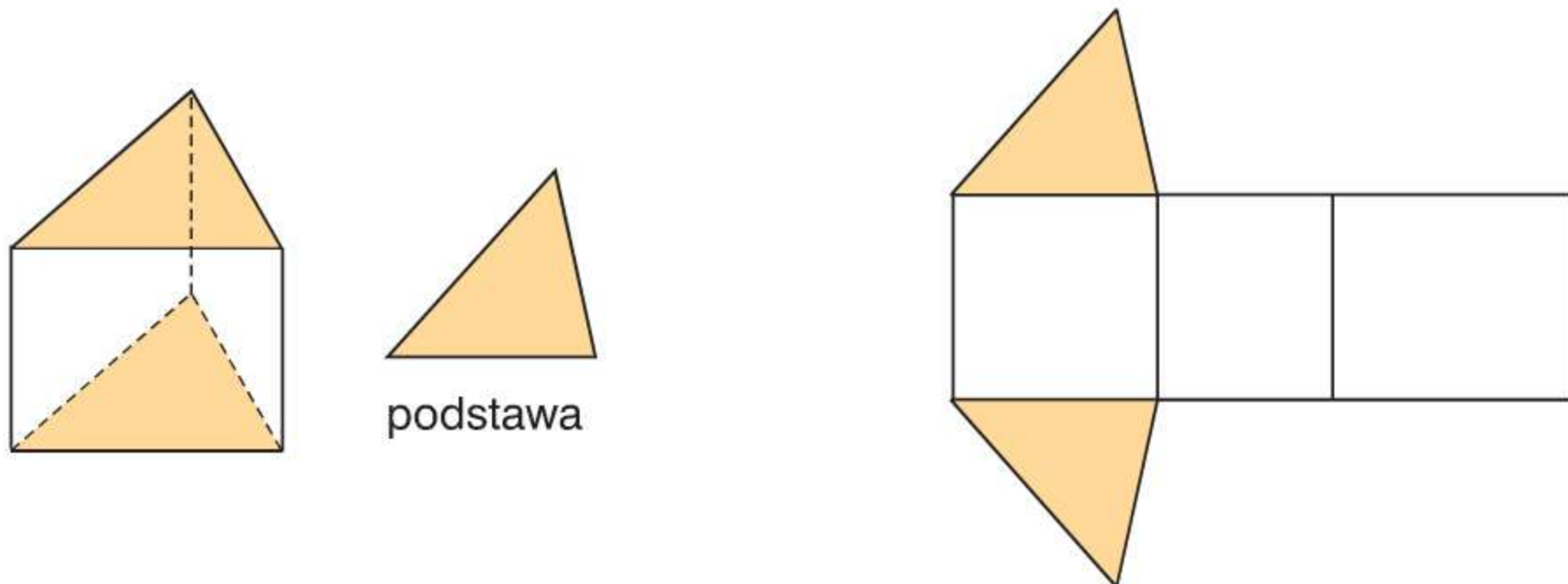
• Graniastostup prosty

Graniastostup prosty ma dwie równoległe i identyczne podstawy.
Podstawą może być dowolny wielokąt.
Ściany boczne to prostokąty prostopadłe do podstaw.

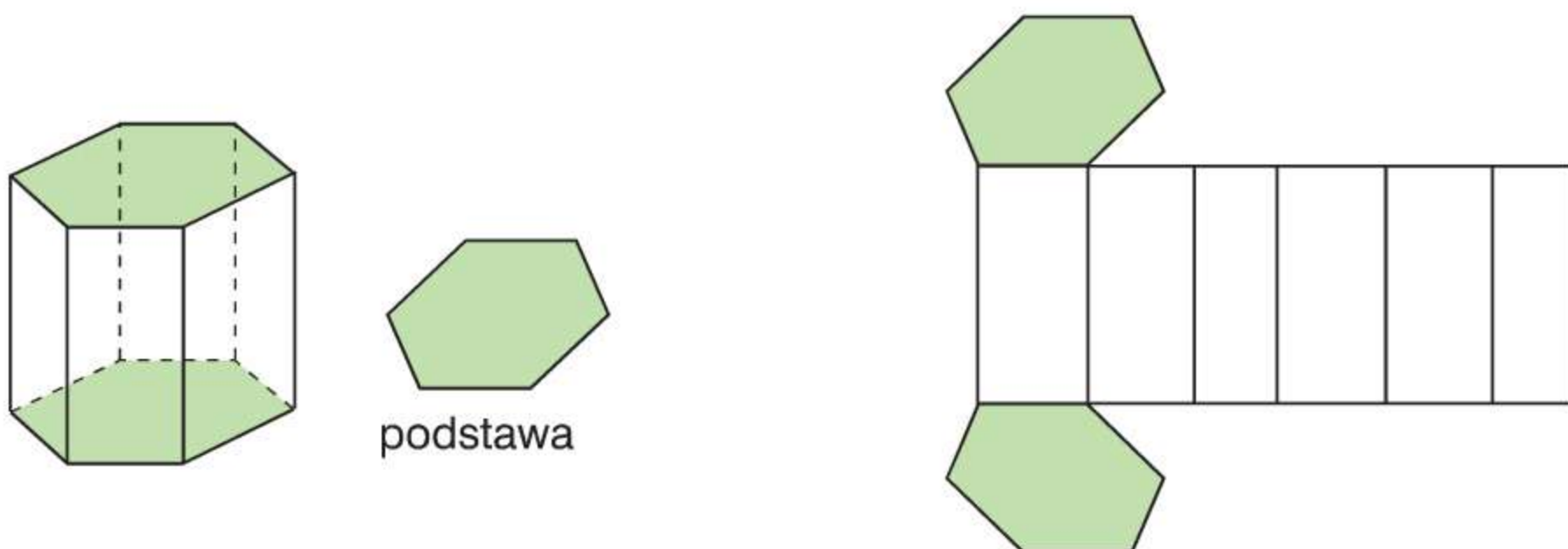
Graniastostup prosty czworokątny ma: 6 ścian (4 ściany boczne i 2 podstawy), 12 krawędzi i 8 wierzchołków.



Graniastosłup prosty trójkątny ma: 5 ścian, 9 krawędzi i 6 wierzchołków.

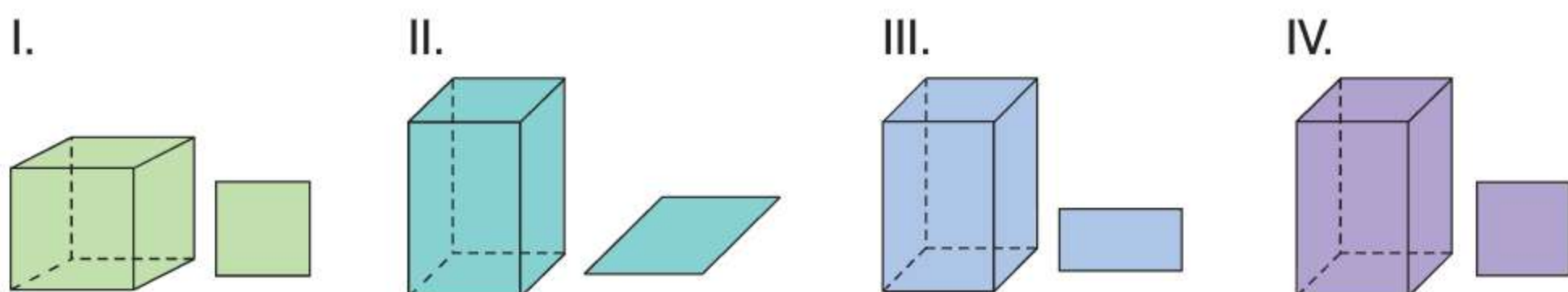


Graniastosłup prosty sześciokątny ma: 8 ścian, 18 krawędzi i 12 wierzchołków.



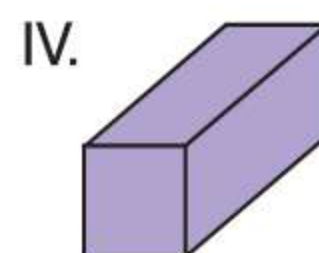
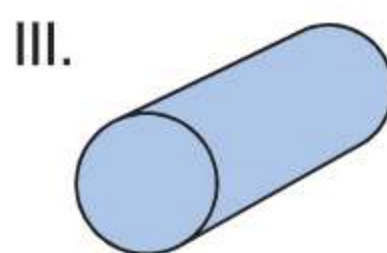
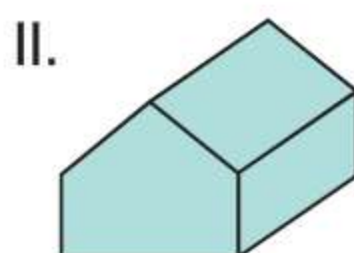
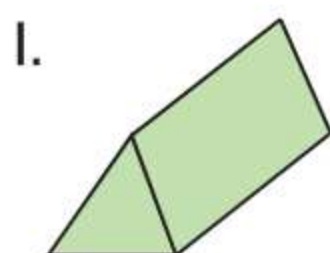
W klasie szóstej zajmiemy się tylko graniastosłupami prostymi. Będziemy je nazywać graniastosłupami.

- 1 Wśród narysowanych graniastosłupów są sześcian i inne prostopadłościany. Obok każdej figury jest narysowana jej podstawa. Wskaż sześcian i inne prostopadłościany. Uzasadnij swój wybór.

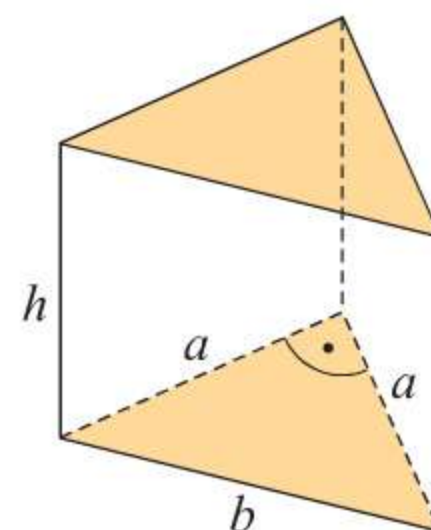


- 2 Narysuj graniastosłup, którego podstawą jest trójkąt. Pokoloruj na czerwono wierzchołki, a na zielono krawędzie boczne. Ile wszystkich ścian ma ten graniastosłup?
- 3 Graniastosłup o 18 krawędziach ma w podstawie
- A. kwadrat. B. trójkąt. C. pięciokąt. D. sześciokąt.

- 4 Na wykonanie szkieletu sześcianu Karol zużył 120 cm drutu. Podaj długość krawędzi takiego sześcianu. Narysuj w skali 1 : 5 siatkę sześcianu, którego szkielet wykonał Karol.
- 5 Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 6 cm. Suma długości wszystkich krawędzi bryły jest równa 88 cm. Jaka jest wysokość prostopadłościanu?
- 6 Wśród narysowanych brył jedna **nie jest** graniastostupem. Która? Odpowiedź uzasadnij. Podaj nazwy pozostałych brył.



- 7 Napisz nazwę narysowanej obok bryły, a następnie wyrażenie algebraiczne, które opisuje sumę długości wszystkich jej krawędzi.



- 8 Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Suma długości krawędzi tej bryły jest równa 92 cm. Jakie wymiary może mieć prostopadłościan?

A. $9\text{ cm} \times 9\text{ cm} \times 7\text{ cm}$
C. $9\text{ cm} \times 7\text{ cm} \times 7\text{ cm}$

B. $7\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 7\text{ cm}$
D. $6\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 7\text{ cm}$

- 9 Ile wszystkich ścian ma graniastostup ośmiokątny?

A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

- 10 Podaj nazwę graniastostupa, którego kształt ma obiekt budowlany, jego część lub przedmiot przedstawiony na ilustracji.

a)



b)



c)



- 11 Każda ściana boczna graniastostupa trójkątnego jest

A. trójkątem. B. prostokątem. C. równoległobokiem. D. kołem.

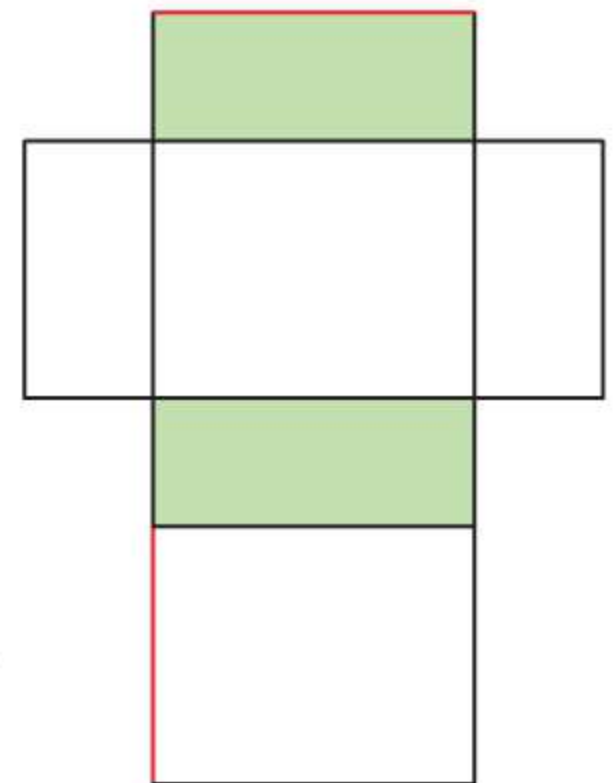


- 12 Na podstawie opisu bryły narysuj jej siatkę i wykonaj rysunek pomocniczy. Podaj nazwę tej bryły. Na rysunku pomocniczym zaznacz: na niebiesko – krawędzie podstaw, na czerwono – krawędzie boczne, na zielono – podstawy.

- Jest to prostopadłościan o równych krawędziach.
- Jest to prostopadłościan, którego podstawą jest czworokąt foremny.
- Jest to graniastosłup, którego podstawą jest trójkąt foremny.

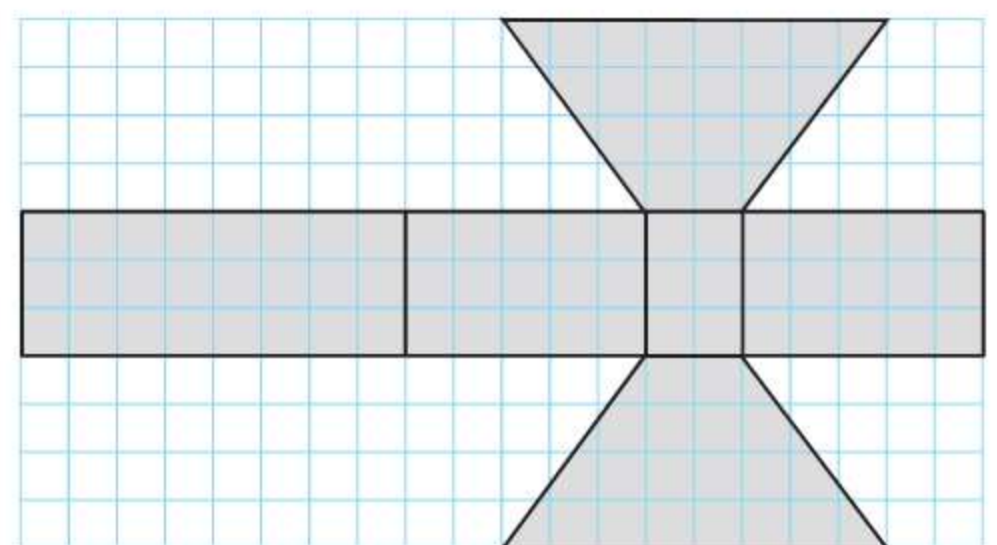
- 13 Wskaż **fałszywe** zdanie o graniastosłupie, którego siatkę przedstawiono na rysunku.

- Na siatce kolorem zielonym zaznaczono dwie ściany, które po sklejeniu modelu będą równoległe.
- Na rysunku przedstawiono siatkę prostopadłościanu.
- Na czerwono zaznaczono na siatce dwie krawędzie, które po sklejeniu modelu będą prostopadłe.
- Na rysunku przedstawiono siatkę prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat.



- 14 Na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa.

- Podaj nazwę tego graniastosłupa.
- Przerysuj siatkę do zeszytu i zamaluj jednakowym kolorem te ściany, które po sklejeniu modelu będą równoległe.
- Napisz, ile wierzchołków, krawędzi, wszystkich ścian oraz ścian bocznych ma przedstawiony graniastosłup.



- 15 Na podstawie własności graniastosłupa podaj jego nazwę. Napisz inne zdanie opisujące tę bryłę.

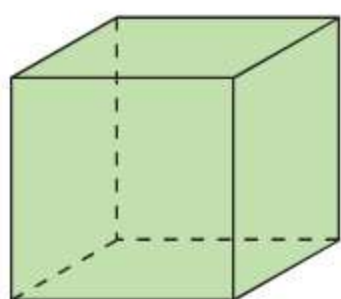
- Podstawą graniastosłupa jest czworokąt o bokach parami równych i równoległych, a także o nieprostokątnych przekątnych różnej długości.
- Graniastosłup ma 6 ścian bocznych, które są prostokątami o tych samych wymiarach.
- Podstawą graniastosłupa jest czworokąt o równych bokach i prostokątnych przekątnych różnej długości.
- Graniastosłup ma 24 krawędzie jednakowej długości.

- 16 Graniastosłup, którego podstawą jest pięciokąt, ma
 A. 10 wierzchołków, 15 krawędzi. B. 10 wierzchołków, 10 krawędzi.
 C. 8 wierzchołków, 12 krawędzi. D. 10 wierzchołków, 5 krawędzi.
- 17 Pokój Mateusza ma kształt prostopadłościanu. Wymiary podłogi to $4\text{ m} \times 3\text{ m}$. Wysokość pokoju ma $2,5\text{ m}$. Na złączeniach sąsiednich ścian i ścian z sufitem umieszczono ozdobną listwę. Jeden metr listwy kosztował $8,40\text{ zł}$. Ile kosztowała listwa na wykończenie tego pokoju?

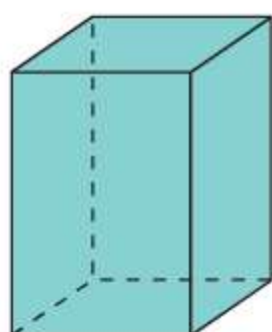
 Sprawdź się!

- 1 Który z podanych graniastosłupów ma 5 ścian?

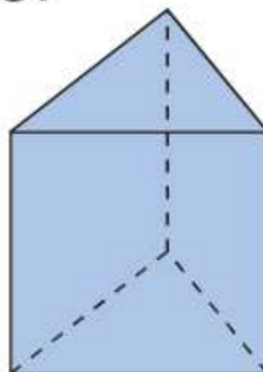
A.



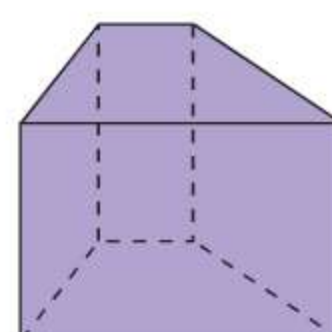
B.



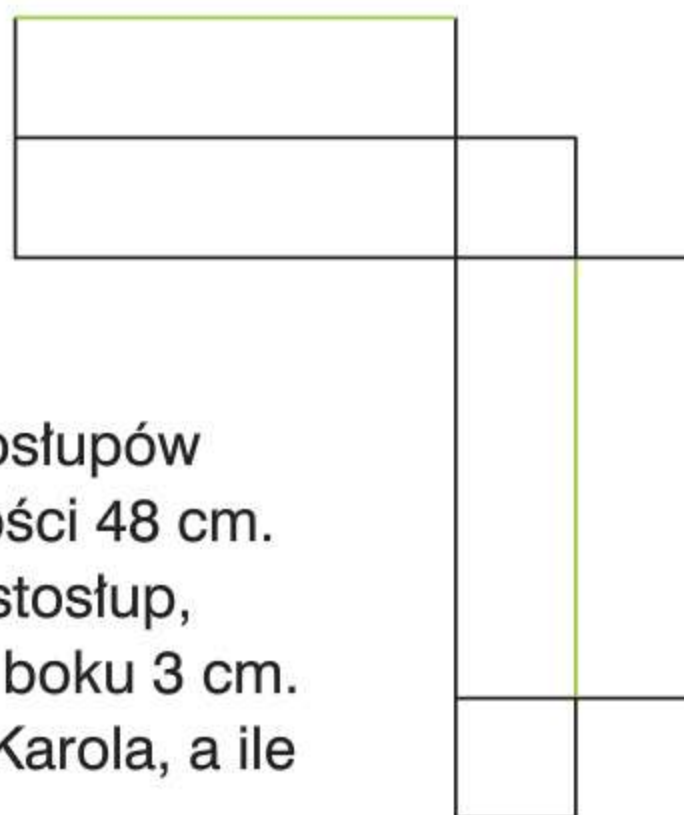
C.



D.



- 2 Podaj nazwę graniastosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku. Jakie będzie wzajemne położenie zielonych krawędzi, jeżeli z tej siatki sklei się model graniastosłupa?



- 3 Karol i Agata wykonali modele graniastosłupów z drutu. Każde z nich miało drut o długości 48 cm . Karol wykonał sześciian, a Agata graniastosłup, którego podstawą był trójkąt foremny o boku 3 cm . Ile wynosi długość krawędzi sześcianu Karola, a ile wysokość graniastosłupa Agaty?
- 4 Graniastosłup ma 9 ścian. Jakim wielokątem jest podstawa tego graniastosłupa?
- 5 Podstawą graniastosłupa jest romb. Krawędź podstawy ma długość 4 cm , a suma długości wszystkich krawędzi jest równa 56 cm . Narysuj siatkę graniastosłupa o takich wymiarach i zaznacz na niej dowolnym kolorem parę krawędzi równoległych, a innym kolorem parę krawędzi prostopadłych.

2. Pole powierzchni graniastopu



Sowa przypomina

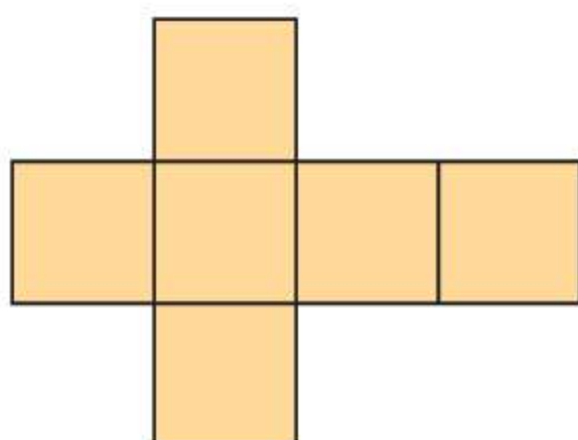
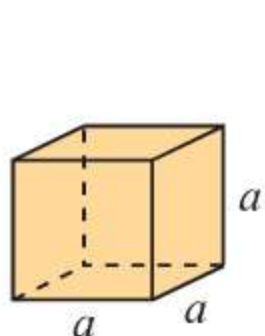
• Pole powierzchni całkowitej graniastopu

Pole powierzchni całkowitej graniastopu to suma pól ścian bocznych i pól dwóch podstaw.

P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

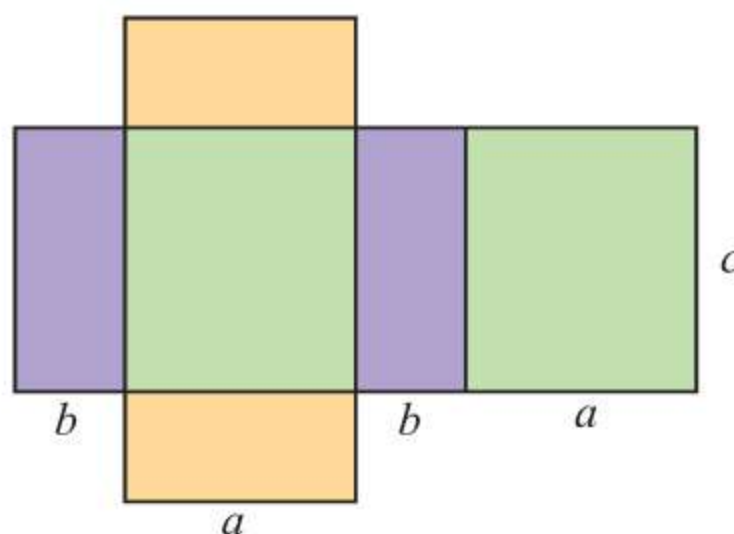
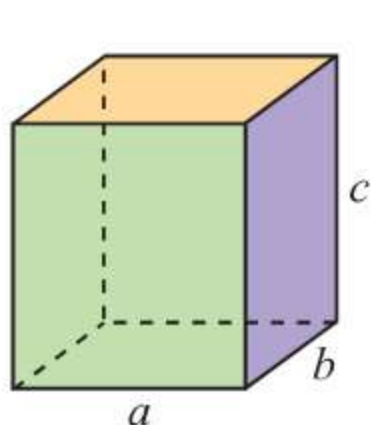
P_c – pole powierzchni całkowitej



Wszystkie ściany mają takie same wymiary.

$$P_c = 6 \cdot P_s \quad P_c = 6a^2$$

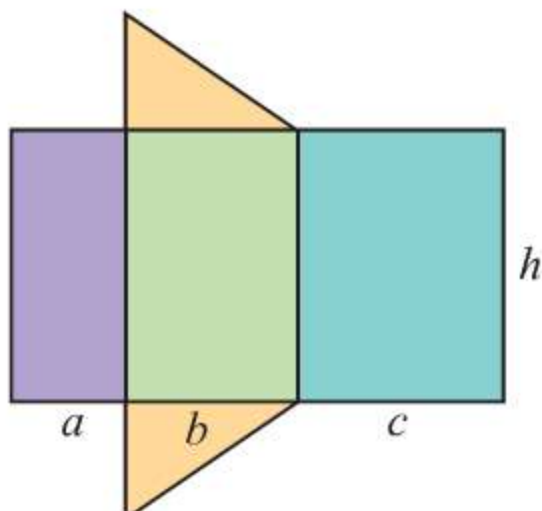
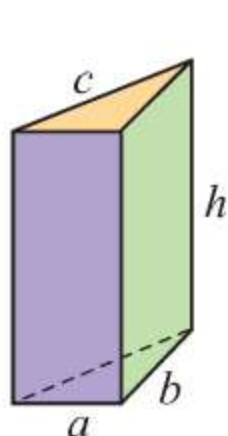
P_s – pole dowolnej ściany



$$P_c = 2P_p + P_b$$

$$P_b = (2a + 2b) \cdot c$$

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$



$$P_c = 2P_p + P_b$$

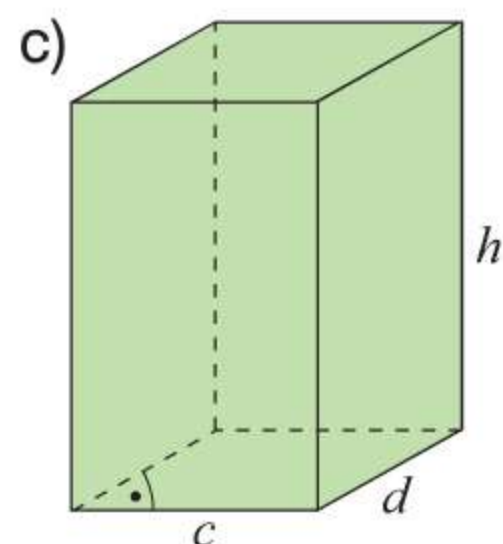
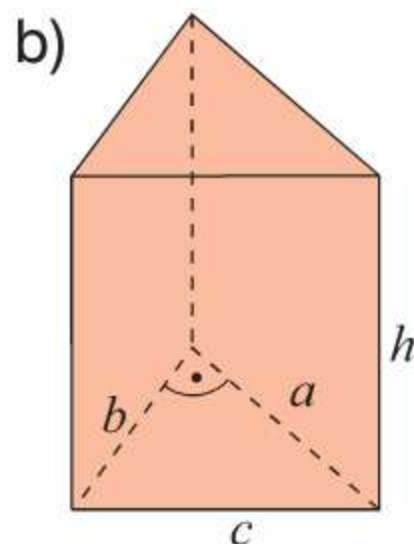
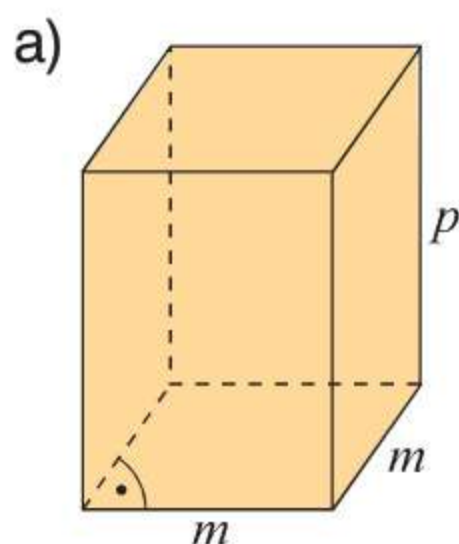
$$P_p = \frac{ab}{2}$$

$$P_b = (a + b + c) \cdot h$$

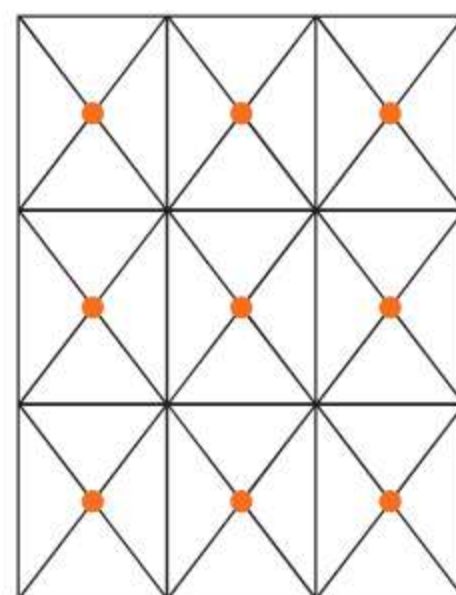
$$P_c = ab + (a + b + c) \cdot h$$

h – wysokość graniastopu

- 1 Narysuj siatkę sześcianu o krawędzi 4 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.
- 2 Narysuj siatkę prostopadłościanu o wymiarach 2 cm $\times$ 3 cm $\times$ 5 cm. Na siatce zaznacz, które ściany wybierasz jako podstawy bryły. Oblicz pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu. Porównaj z innymi osobami w klasie otrzymane wyniki.
- 3 Narysuj siatkę graniastostupa, którego podstawą jest trójkąt równoboczny. Zmierz odpowiednie odcinki i oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastostupa.
- 4 Łazienka ma kształt prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat o boku 2 m. Wysokość łazienki wynosi 2,6 m. Ile metrów kwadratowych glazury należy kupić, aby wyłożyć nią ściany tej łazienki? Nie odliczamy powierzchni drzwi.
A. 28,8 m² B. 24,6 m² C. 20,8 m² D. 26,4 m²
- 5 Napisz wzór opisujący pole powierzchni bocznej (P_b) i pole powierzchni całkowitej (P_c) graniastostupa.



- 6 Sufit w sklepie ma wymiary 6 m $\times$ 8 m. Elektrycy zamontowali w nim punkty świetlne w taki sposób, że powierzchnię całego sufitu podzielono na prostokąty o wymiarach 1,5 m $\times$ 1 m (rysunek fragmentu sufitu obok). W każdym prostokącie w punkcie przecięcia przekątnych umieszczono żarówkę. Ile żarówek było na tym suficie?

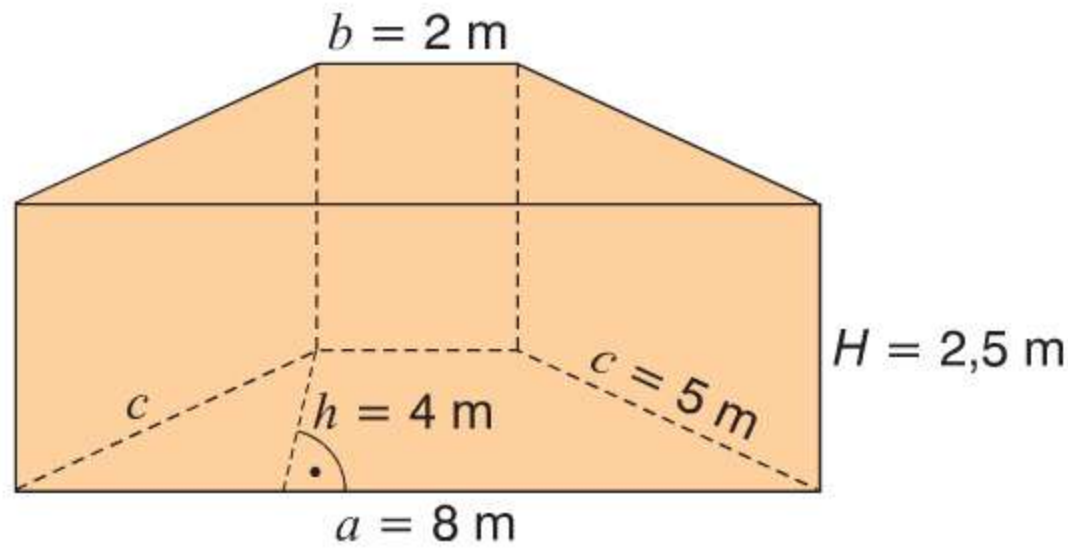


- 7 Wszystkie krawędzie graniastostupa czworokątnego są takiej samej długości, a suma tych długości jest równa 144 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastostupa. Jakimi figurami mogą być podstawy tej bryły?



Na podstawie poniższych informacji i rysunku rozwiąż zadania 8.–11.

Do jednej ściany salonu państwa Kamińskich dobudowano oranżerię w kształcie graniastopłu, którego podstawą jest trapez. Dwie równoległe do siebie ściany boczne są całkowicie przeszklone. W odpowiednim słowniku znajdź wyjaśnienie słowa „oranżeria”.



- 8 Jaka jest powierzchnia podłogi oranżerii?
- 9 Pomiędzy salonem a oranżerią jest szklana ściana o wymiarach $8\text{ m} \times 2,5\text{ m}$. Za jej wykonanie państwo Kamińscy zapłacili 2480 zł. Jaka była cena wykonania 1 m^2 tej ściany?
- 10 Szerokość oszklonych drzwi prowadzących z oranżerii na taras jest równa 2 m. Które wyrażenie algebraiczne opisuje sposób obliczenia powierzchni tych drzwi?
- A. $a \cdot H$ B. $c \cdot H$ C. $b \cdot H$ D. $\frac{1}{2}(a + b) \cdot h$
- 11 Nierównoległe ściany boczne oranżerii wyłożono tapetą korkową. Ile zapłacono za tapetę, jeżeli kupiono ją w rolkach po 4 m^2 , a każda rolka kosztowała 86 zł?

Wskaż poprawną odpowiedź A, B lub C i jej uzasadnienie I lub II.

A. 516 zł,	ponieważ trzeba było kupić	I. 6 rolek tapety.
B. 430 zł,		II. 7 rolek tapety.
C. 602 zł,		

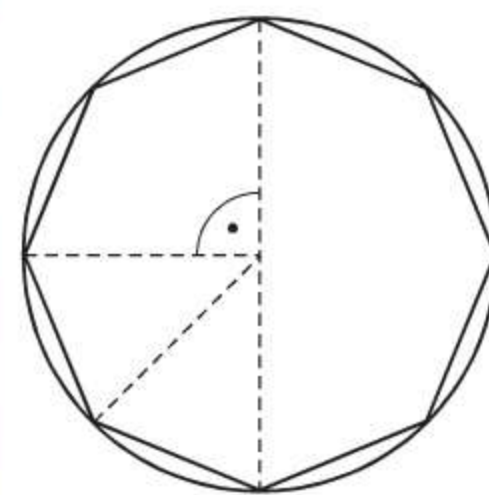
- 12 Sala lekcyjna ma kształt prostopadłościanu o wymiarach $55\text{ dm} \times 8,5\text{ m} \times 260\text{ cm}$. Sufit tej sali pomalowano dwukrotnie białą farbą, a ściany – także dwukrotnie – farbą zieloną.

- a) Ile pojemników farby białej, a ile zielonej trzeba było kupić na pomalowanie tej sali?
- b) Ile kosztowały farby na pomalowanie tej sali?
- Nie odliczaj powierzchni drzwi i okien.



- 13 Mysia Wieża w Kruszwicy nad Gopłem jest pozostałością po XIV-wiecznym zamku Kazimierza Wielkiego.

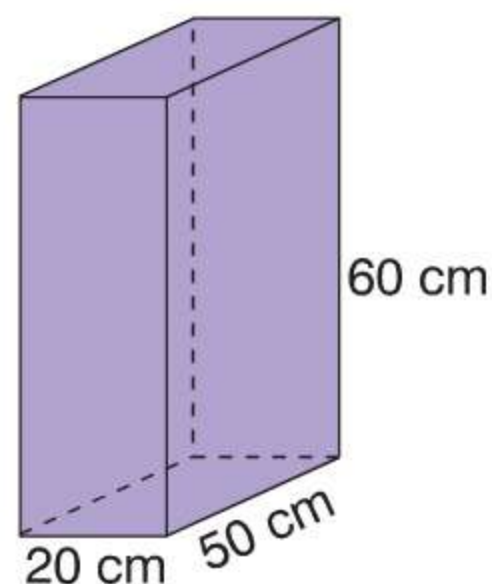
Podstawą wieży jest ośmiokąt foremny o długości boku 3,23 m, taki jak na rysunku. Wysokość wieży mierzona od powierzchni ziemi jest 10 razy większa niż długość boku ośmiokąta.



- Jaki kształt ma budynek Mysiej Wieży?
- Oblicz wysokość wieży i jej powierzchnię boczną.

Sprawdź się!

- Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach podanych na rysunku i wyraż je w cm^2 oraz dm^2 .
- Pole powierzchni bocznej sześcianu wynosi $24\,600 \text{ mm}^2$. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe
A. 2560 cm^2 B. $36\,000 \text{ mm}^2$
C. 6150 mm^2 D. 369 cm^2
- Dany jest sześcian o krawędzi 7 cm oraz prostopadłościan o wysokości 7 cm i podstawie w kształcie kwadratu o boku 6 cm. Która bryła ma większe pole powierzchni całkowitej i o ile większe?
- Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 210 cm^2 . Podstawa tego prostopadłościanu to kwadrat o boku 5 cm. Oblicz pole jednej ściany bocznej tej bryły.
- Kuchnia w domu Moniki ma kształt prostopadłościanu. Wymiary tego pomieszczenia to: szerokość 2,6 m, długość 4 m i wysokość 2,5 m. Na wszystkich ścianach kuchni położono pionowo panele. Deska panelowa ma kształt prostokąta o szerokości 20 cm i długości 2,5 m. Ile takich desek trzeba było kupić, aby wykonać tę pracę? Nie odliczaj powierzchni drzwi i okna.



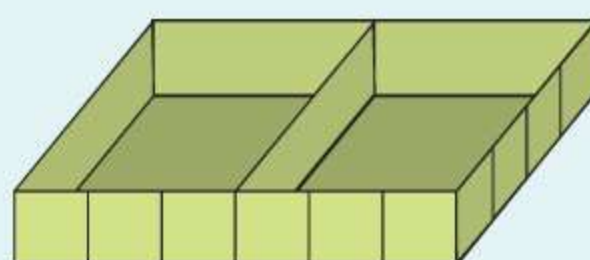
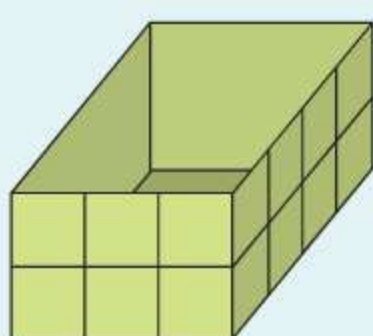
3. Objętość prostopadłościanu



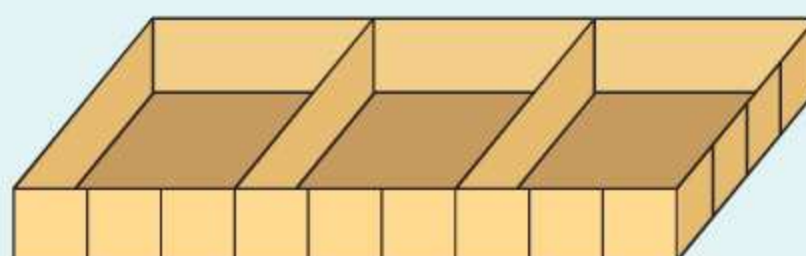
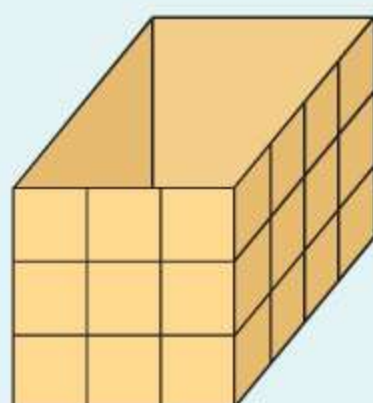
Sowa uczy

Każda bryła zajmuje część przestrzeni. Tę część przestrzeni można zmierzyć. Wynik pomiaru to **objętość bryły**.

Aby wypełnić te dwa pudełka, należy włożyć do nich po tyle samo jednakowych klocków. Łączna objętość klocków w każdym z zielonych pudełek jest taka sama.



Aby wypełnić beżowe pudełka, należy włożyć do nich więcej takich samych klocków.



Łączna objętość klocków wypełniających beżowe pudełko jest większa niż łączna objętość klocków wypełniających pudełko zielone.



Do czajniczka można wlać 6 filiżanek wody. Mówimy, że czajniczek ma 6 razy większą **pojemność** niż filiżanka.

Przykład 1.

Klaudia zbudowała prostopadłościan z pudełek po zapałkach. Ilu pudełek użyła Klaudia do zbudowania takiej bryły?

Wzdłuż jednej krawędzi prostopadłościanu ułożone są 3 pudełka po zapałkach, a wzdłuż drugiej – 2. Są 4 warstwy pudełek.

Obliczmy, ile pudełek jest w jednej warstwie.

W jednej warstwie jest $(3 \cdot 2)$ pudełek.

Są 4 warstwy, więc razem jest pudełek:

$$4 \cdot (3 \cdot 2) = 4 \cdot 6 = 24$$

Jeśli przyjmiemy jedno pudełko za jednostkę objętości, możemy powiedzieć, że zbudowany prostopadłościan ma objętość 24 jednostek.

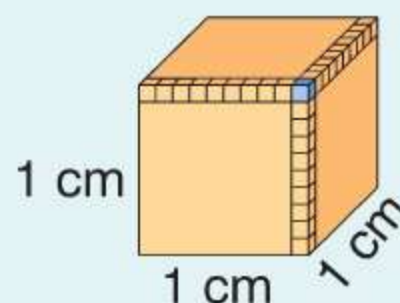


Sowa uczy

Poznajmy jednostki objętości:

1 mm³ – czytamy: **1 milimetr sześcienny**

objętość sześcianu o krawędzi 1 mm



1 cm³ = $(10 \cdot 10 \cdot 10) \text{ mm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$

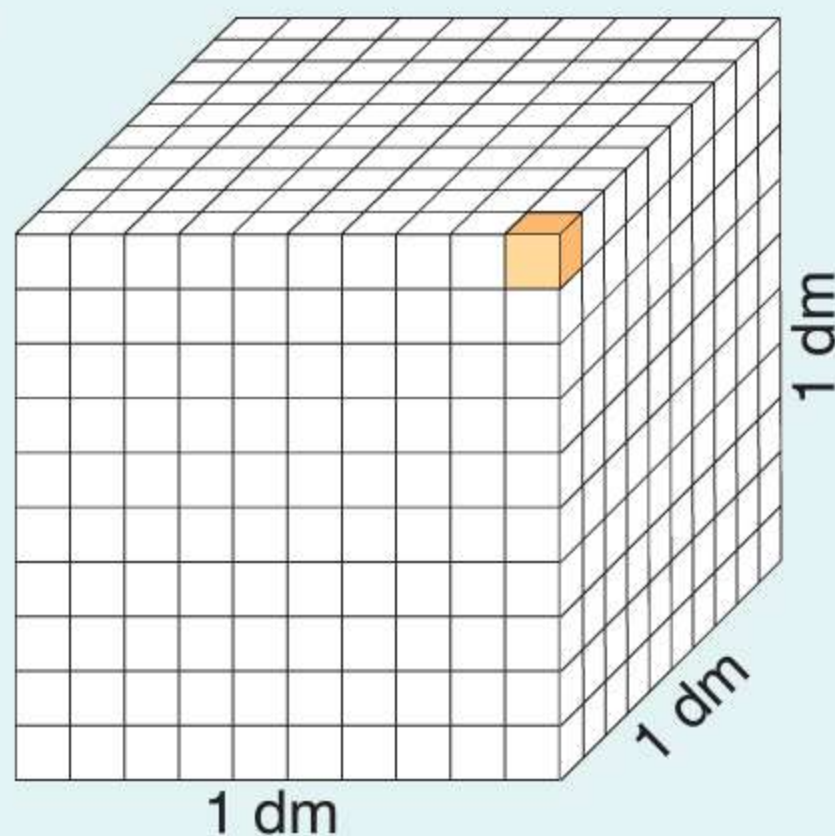
objętość sześcianu o krawędzi 1 cm

1 dm³ = $(10 \cdot 10 \cdot 10) \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

objętość sześcianu o krawędzi 1 dm

1 m³ = $(10 \cdot 10 \cdot 10) \text{ dm}^3 = 1000 \text{ dm}^3$

objętość sześcianu o krawędzi 1 m





Sowa uczy

Powszechnie stosowaną jednostką pojemności jest **1 litr** (1 l).

1 litr wody lub kaszy zajmuje tyle samo miejsca co 1 dm^3 . Możemy sprawdzić, że **$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$** , jeśli przesypimy 1 l kaszy lub piasku do sześcianu o krawędzi 1 dm.

1 l wody o temperaturze 4°C **ma masę 1 kg**.



Mniejszą jednostką pojemności jest **1 mililitr (1 ml)**. Jednostka ta jest używana np. w przepisach kulinarnych, na etykietach butelek.

$$1 \text{ l} = 1000 \text{ ml} \quad 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1000 \text{ ml} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

Więszą jednostką pojemności jest **1 hektolitr (1 hl)**, **$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$** .

Przykład 2.

Ala ma pudełko o wymiarach $4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$. Jaką pojemność ma to pudełko?

Obliczmy, ile cm^3 (centymetrów sześciennych) mieści się w tym pudełku.

W jednej warstwie jest **$(4 \cdot 3)$** centymetrów sześciennych.

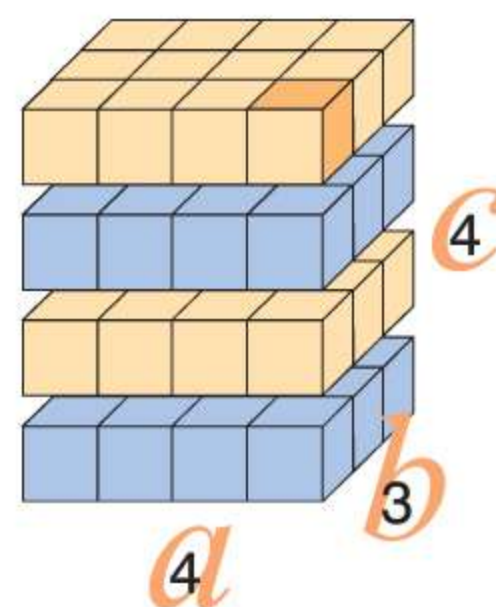
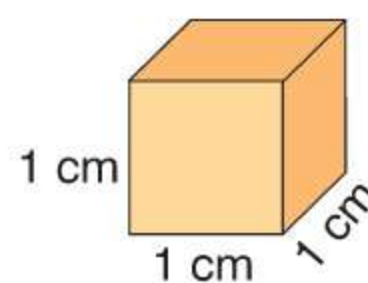
Ponieważ są 4 takie warstwy, objętość prostopadłościanu zbudowanego z sześcianów jednostkowych wypełniających to pudełko jest równa:

$$(4 \cdot 3) \cdot 4 = 12 \cdot 4 = 48 [\text{cm}^3].$$

Wyraz **objętość** najczęściej zastępujemy literą V .

$$V = a \cdot b \cdot c \quad V = 48 \text{ cm}^3$$

Odpowiedź. Pudełko Ali ma pojemność 48 cm^3 .



Przykład 3.

Obliczmy, ile najwyżej litrów wody pomieści ogrodowy basen w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $2\text{ m} \times 3\text{ m} \times 50\text{ cm}$.

Aby obliczyć pojemność tego basenu, musimy wszystkie wymiary podać w tych samych jednostkach. Obierzmy jako jednostkę decymetr.

$$a = 2\text{ m} = 20\text{ dm}$$

$$b = 3\text{ m} = 30\text{ dm}$$

$$c = 50\text{ cm} = 5\text{ dm}$$

$$V = abc \quad V = 20 \cdot 30 \cdot 5 = 3000 [\text{dm}^3]$$

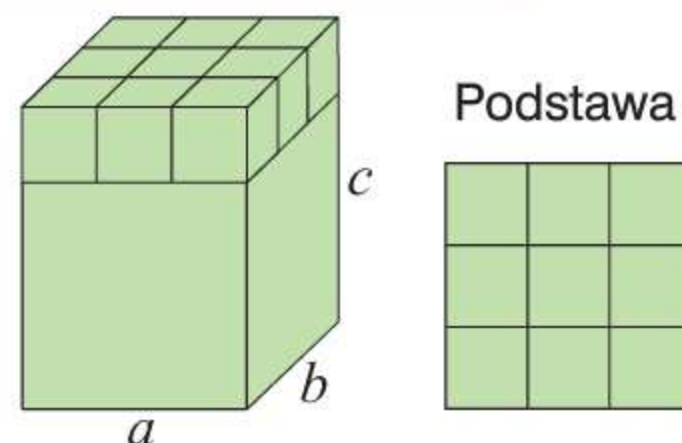
Ponieważ $1\text{ dm}^3 = 1\text{ l}$, $3000\text{ dm}^3 = 3000\text{ l}$.



Odpowiedź. Ogrodowy basen pomieści najwyżej 3000 l wody.

Przykład 4.

Robert ma 36 sześciennych klocków o krawędzi 1 cm. Zbudował z nich prostopadłościan, którego podstawą jest kwadrat o boku 3 cm. Jaka jest wysokość prostopadłościanu (długość krawędzi bocznej)?



Sposób I

Obliczmy, ile klocków mieści się w jednej warstwie:

$$a \cdot b = 3 \cdot 3 = 9$$

W jednej warstwie mieści się 9 klocków.

Ponieważ $V = 36$:

$$36 = 9 \cdot c$$

$$c = 36 : 9$$

$$c = 4$$

Są 4 warstwy.

Sposób II

Wypiszmy dane:

$$a = b = 3, \quad V = 36$$

Ponieważ $V = abc$ oraz $a = b$:

$$V = a^2c$$

Podstawmy dane do wzoru i rozwiążmy równanie:

$$36 = 3^2 \cdot c$$

$$c = 36 : 9$$

$$c = 4$$

Odpowiedź. Wysokość prostopadłościanu ma 4 cm.

Przykład 5.

Objętość sześcianu jest równa 216 cm^3 . Jaką długość ma krawędź tego sześcianu?

Objętość sześcianu to $a \cdot a \cdot a = a^3$, gdzie a to długość krawędzi sześcianu.

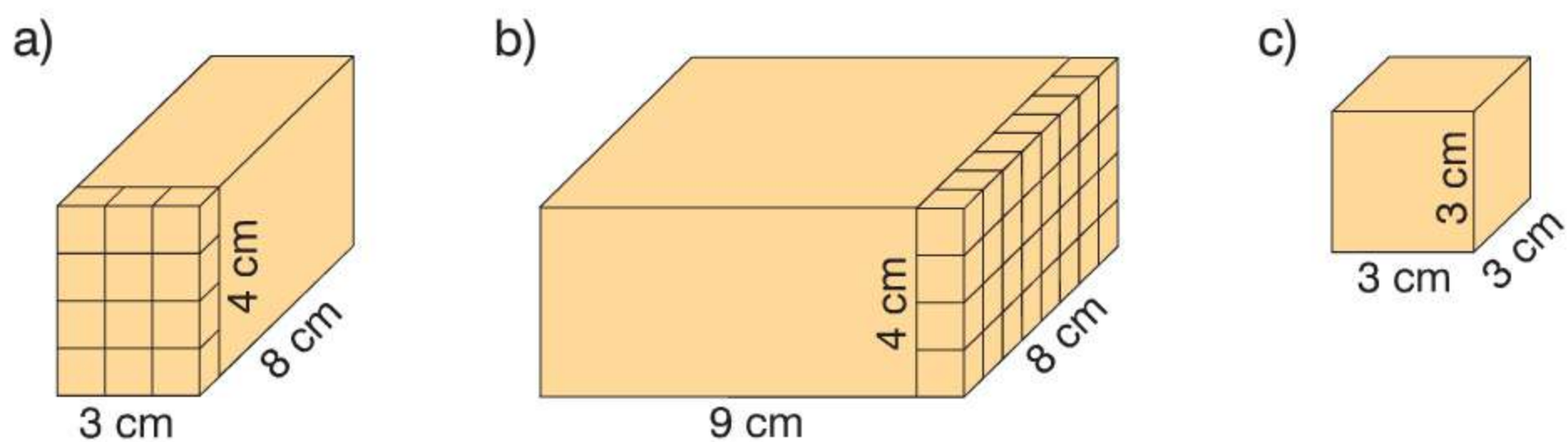
Liczbę 216 rozłóżmy na czynniki pierwsze.

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

Po prawej stronie pionowej linii trzeba znaleźć 3 jednakowe liczby, których iloczyn jest równy 216.
 $(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Odpowiedź. Sześcian o objętości 216 cm^3 ma krawędź o długości 6 cm.

- 1 Narysuj siatkę sześcianu o krawędzi 1 dm. Wytnij ją i sklej. Sprawdź z innymi osobami w klasie, czy wszystkie przyniesione modele 1 dm^3 można ułożyć tak, by otrzymać prostopadłościan o objętości 1 m^3 .
- 2 Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach podanych na rysunku pomocniczym.



- 3 Oblicz objętość sześcianu o krawędzi:
 - a) 6 cm,
 - b) 10 dm,
 - c) 5 m.
- 4 Robotnicy wykopali dół w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $8 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 1 \text{ m}$. Objętość wykopanej ziemi jest równa
 - A. 36 m^2
 - B. 32 m^3
 - C. 24 m^3
 - D. 72 dm^3
- 5 Krawędzie podstawy prostopadłościanu są równe i mają po 7 cm. Wysokość prostopadłościanu wynosi 10 cm. Oblicz sumę długości krawędzi tego prostopadłościanu i jego objętość.

- 6 Czy prostopadłościan o wymiarach $8\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 12\text{ cm}$ ma objętość większą czy mniejszą niż 1 litr?
- 7 Ile najwyżej wody może zmieścić się w 3-litrowym garnku?
A. 30 cm^3 B. 3000 cm^3 C. 300 cm^2 D. 3 cm^2
- 8 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiednie liczby.
a) $0,9\text{ dm}^3 = \blacklozenge\text{ cm}^3$ b) $53\text{ cm}^3 = \blacklozenge\text{ dm}^3$ c) $75\text{ dm}^3 = \blacklozenge\text{ l}$
 $450\text{ cm}^3 = \blacklozenge\text{ dm}^3$ $0,15\text{ m}^3 = \blacklozenge\text{ dm}^3$ $6\text{ l} = \blacklozenge\text{ ml}$
- 9 Podstawą graniastostupa jest kwadrat o boku 15 cm . Wysokość graniastostupa wynosi 2 dm . Oblicz objętość tego graniastostupa. Wynik podaj w cm^3 .
- 10 Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 11 dm , a jego objętość jest równa 2420 dm^3 . Oblicz wysokość tego prostopadłościanu.
- 11 Objętość sześcianu jest równa 27 cm^3 . Krawędź tego sześcianu ma
A. 3 cm^2 B. 6 cm C. 9 cm D. 3 cm
- 12 Jaką długość ma krawędź sześcianu, którego objętość jest równa:
a) 64 cm^3 , b) 1000 cm^3 , c) 512 cm^3 ?
- 13 Akwarium ma wymiary wewnętrzne: długość 40 cm , szerokość 20 cm i wysokość 3 dm . Ile litrów wody znajduje się w akwarium, jeżeli jest napełnione do $\frac{2}{3}$ wysokości?
- 14 Graniastostup ma 12 krawędzi. Wszystkie krawędzie są jednakowej długości, a suma ich długości wynosi 840 cm . Ile litrów wody wypełni ten graniastostup?
- 15 Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 294 cm^2 . Oblicz objętość tego sześcianu.
- 16 Jedna krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość 40 cm , druga jest od niej 2 razy dłuższa. Wysokość bryły jest o 2 dm krótsza od dłuższej krawędzi podstawy. Oblicz objętość tego prostopadłościanu. Wynik podaj w litrach.
- 17 Prostopadłościan ma wymiary $4\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 9\text{ cm}$. Objętość tego prostopadłościanu jest taka sama jak objętość pewnego sześcianu. Jakiej długości krawędź ma ten sześcian?



- 18** Pojemnik na klocki ma kształt prostopadłościanu o wymiarach wewnętrznych $4\text{ dm} \times 4\text{ dm} \times 50\text{ cm}$. Ile klocków o wymiarach $5\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ potrzeba, aby szczelnie wypełnić pojemnik?



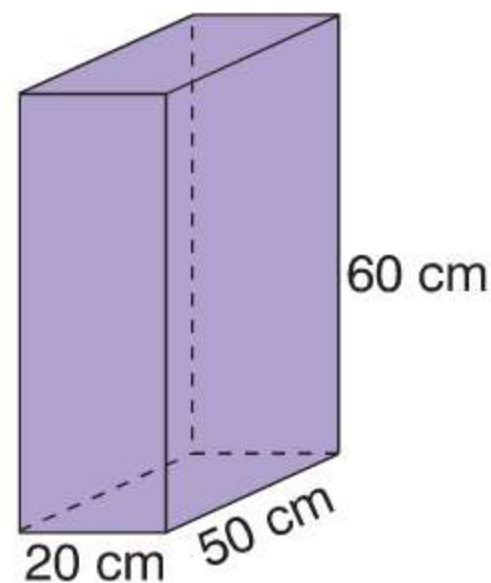
- 19** Kłosek ma kształt sześciannu o krawędzi 5 cm . Takie klocki włożono do pudła w kształcie prostopadłościanu. Zaproponuj wymiary wewnętrzne tego pudła tak, aby wypełniły je 64 takie klocki. Porównaj swoją odpowiedź z odpowiedziami innych osób w klasie.

Wyzwanie

1. Jakie wymiary może mieć prostopadłościan o objętości 24 cm^3 , jeżeli wiadomo, że długości jego krawędzi wyrażają się całkowitą liczbą centymetrów? Czy wśród nich może być sześciann?
2. Z sześciannów o krawędzi 1 cm złożono sześciann o krawędzi 3 cm , którego zewnętrzne ściany pomalowano na czerwono. Ile małych sześciannów ma pomalowaną co najmniej jedną ścianę? Ile ścian może być zamalowanych w małych sześciannach?

Sprawdź się!

1. Oblicz objętość sześciannu o krawędzi 11 cm .
2. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach podanych na rysunku obok.
3. Objętość sześciannu jest równa 125 cm^3 . Krawędź tego sześciannu ma
A. 25 cm B. 10 cm
C. 5 dm D. 5 cm
4. Co ma większą masę: woda wypełniająca 20-litrowy pojemnik czy woda wypełniająca prostopadłościenne akwarium o wymiarach wewnętrznych $40\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 30\text{ cm}$? Odpowiedź uzasadnij.
5. Cegła ma wymiary $25\text{ cm} \times 12\text{ cm} \times 6,5\text{ cm}$. Ile takich cegieł potrzeba do wypełnienia otworu w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $2,5\text{ m} \times 0,6\text{ m} \times 0,39\text{ m}$?



4. Ostrosłupy



Sowa uczy

Bryły przedstawione na poniższych rysunkach to ostrosłupy.

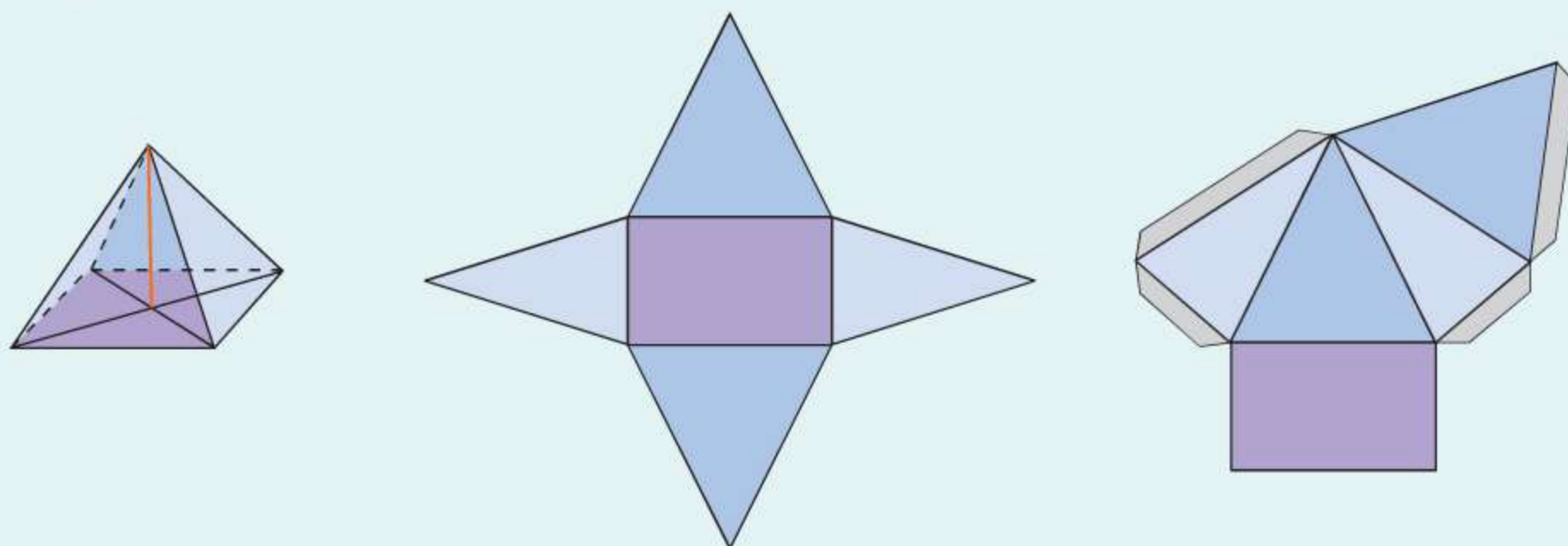


ostrosłup czworokątny

ostrosłup trójkątny

Podstawą ostrosłupa może być dowolny wielokąt. Ostrosłup ma jedną podstawę. Ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Gdy rozetniemy model ostrosłupa wzdłuż odpowiednich krawędzi, otrzymamy siatkę tego ostrosłupa. Na rysunku przedstawiono dwie siatki ostrosłupa czworokątnego, którego podstawą jest prostokąt. Do jednej z siatek dorysowano „skrzydełka”, które umożliwiają sklejenie modelu.



Ostrosłup ten ma:

- 5 wierzchołków, w tym 4 wierzchołki podstawy;
- 5 ścian: 1 podstawę i 4 ściany boczne;
- 8 krawędzi: 4 krawędzie podstawy i 4 krawędzie boczne równej długości;
- ściany boczne w kształcie trójkątów równoramiennych, 2 pary identycznych trójkątów.

Przygotuj model takiego ostrosłupa i wskaż wyżej wypisane elementy.

Przykład 1.

Narysujmy ostrosłup czworokątny, którego podstawą jest prostokąt.

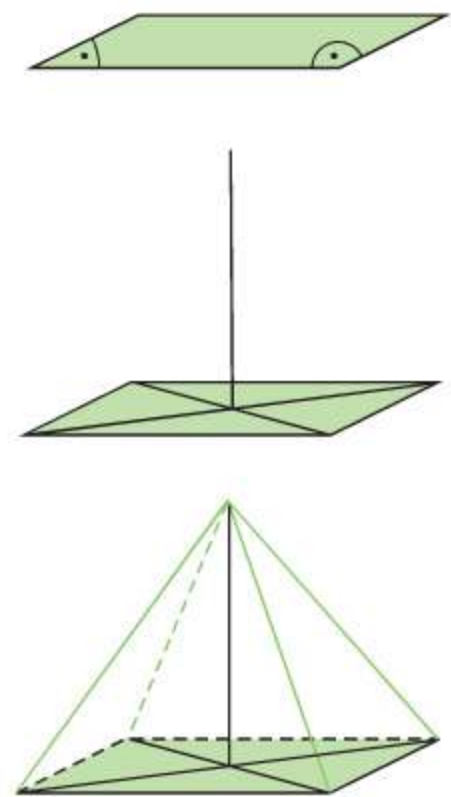
Jeżeli prostokąt umieścimy odpowiednio w promieniach słońca, to możemy otrzymać cień, który jest równoległobokiem.

Narysujmy przekątne podstawy i wysokość ostrosłupa. Spodek wysokości umieścmy w miejscu przecięcia przekątnych.

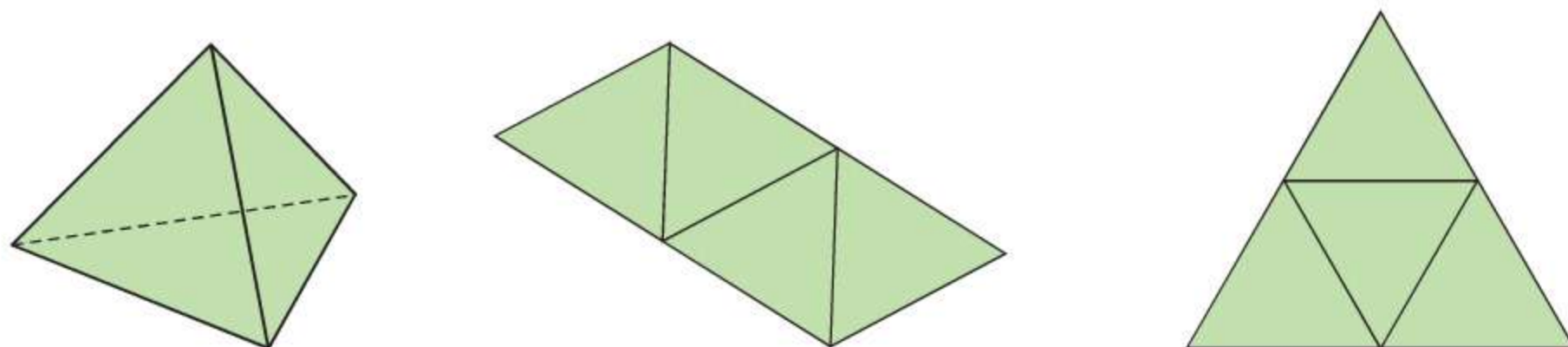
Wysokość jest prostopadła do podstawy.

Narysujmy krawędzie boczne ostrosłupa.

Krawędzie niewidoczne są narysowane linią przerywaną.

**Przykład 2.**

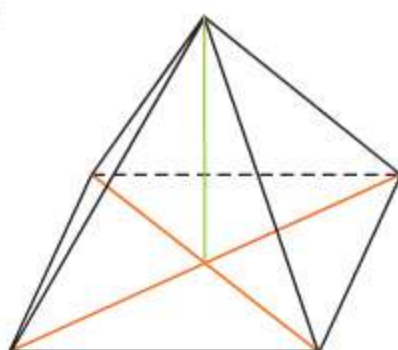
Narysujmy ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt równoboczny i wszystkie krawędzie są tej samej długości, a następnie narysujmy jego siatkę.



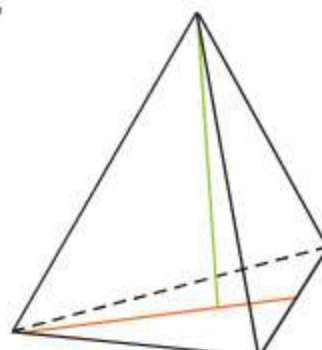
Wszystkie ściany i podstawa są identycznymi trójkątami równobocznymi. Taki ostrosłup nazywamy **czworościanem foremym**.

1 Dane są bryły:

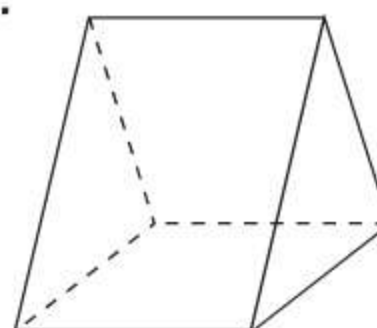
I.



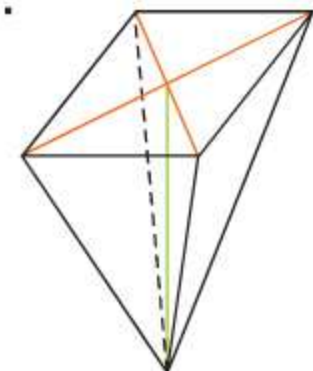
II.



III.

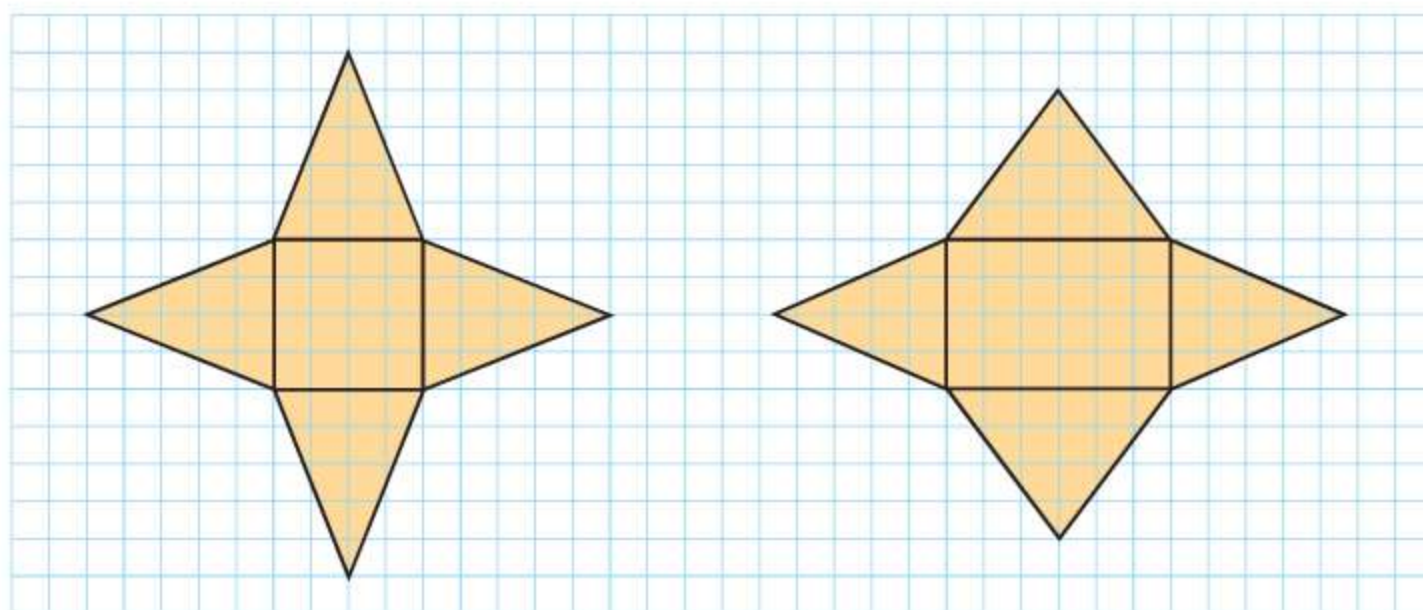


IV.



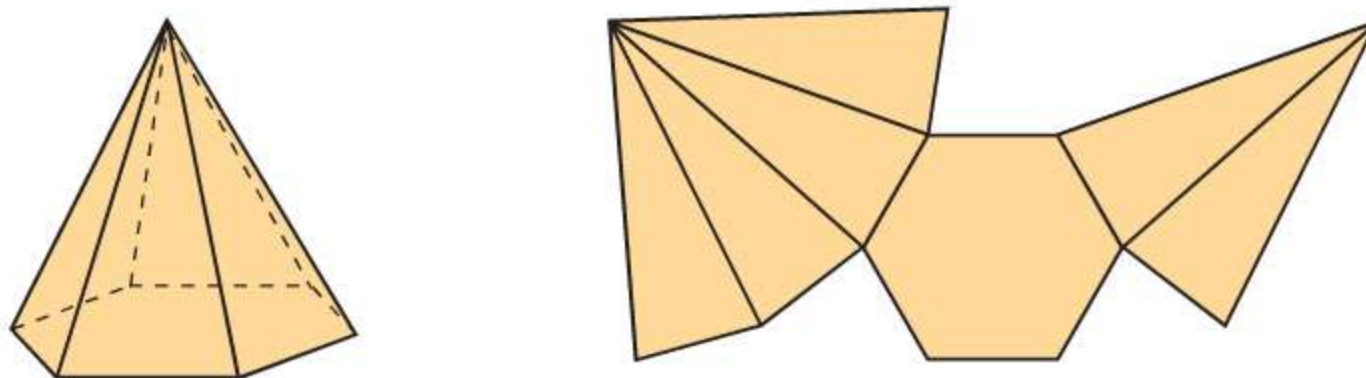
Która z narysowanych brył **nie jest** ostrosłupem?
Odpowiedź uzasadnij. Podaj nazwy ostrosłupów.

- 2 Przerysuj siatki ostrosłupów w skali 4 : 1 (policz kratki). Zauważ, że wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają równe długości; sprawdź to cyrklem. Wytnij siatki i je sklej. Pamiętaj o wcześniejszym dorysowaniu „skrzydełek”. Na otrzymanych modelach wskaż krawędzie boczne, krawędzie podstawy i wierzchołek. Przyjrzyj się modelom i napisz trzy własności wybranego ostrosłupa.



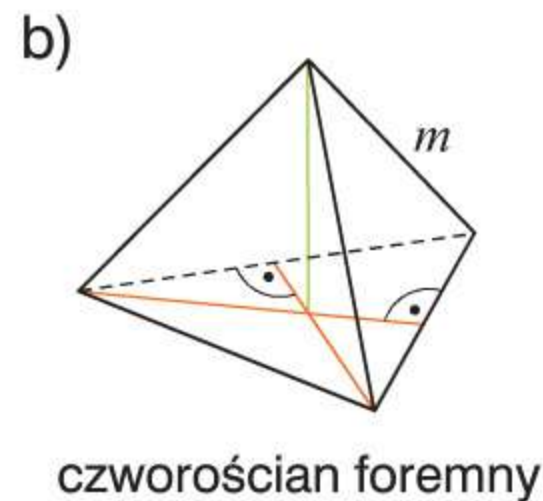
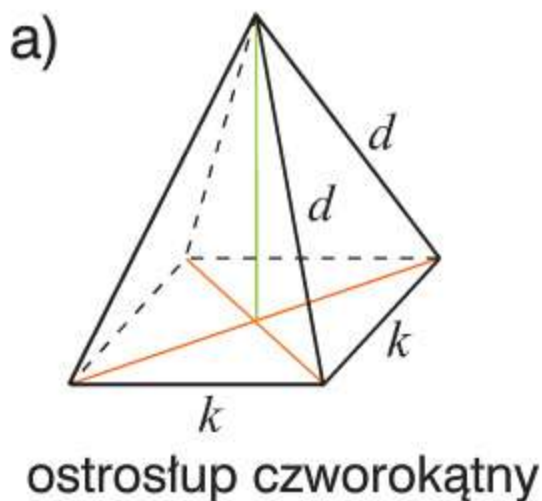
- 3 Ostrosłup ma 8 ścian. Jaki wielokąt jest podstawą tego ostrosłupa?
A. Ósmiokąt. B. Siedmiokąt. C. Sześciokąt. D. Pięciokąt.
- 4 Ostrosłup ma 16 krawędzi. Jaki wielokąt jest podstawą tego ostrosłupa?
A. Szesnastokąt. B. Dziesięciokąt. C. Ósmiokąt. D. Czworokąt.

Na podstawie rysunku bryły i jej siatki rozwiąż zadania 5.–8.



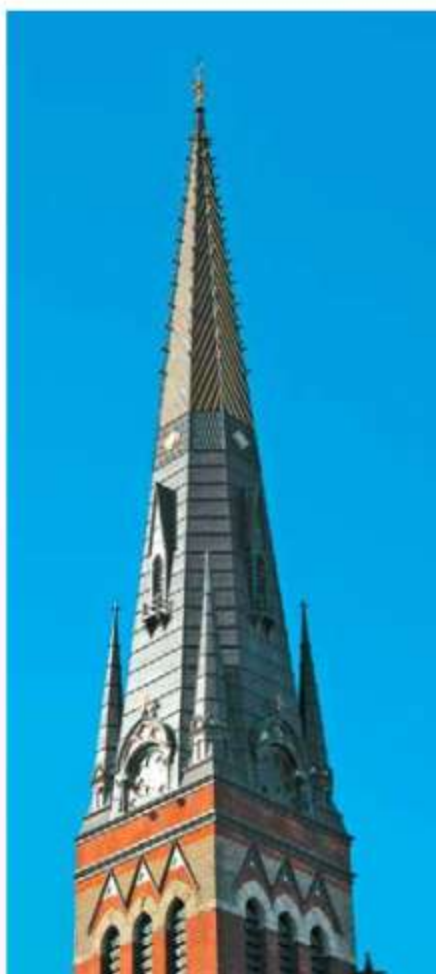
- 5 Podaj nazwę bryły.
- 6 Jakim wielokątem jest ściana boczna tej bryły?
- 7 Ile krawędzi i ile wierzchołków ma ta bryła?
- 8 Narysuj siatkę tej samej bryły rozciętej wzdłuż innych krawędzi.
- 9 Ile ścian ma ostrosłup o 10 wierzchołkach?

- 10** Na podstawie opisu ostrosłupa podaj jego nazwę. Narysuj ten ostrosłup, a na rysunku zaznacz: na niebiesko – podstawę, na zielono – ścianę boczną, na czerwono – krawędź podstawy, na żółto – krawędź boczną.
- a) Jest to ostrosłup, który ma 6 krawędzi jednakowej długości.
 b) Podstawą tego ostrosłupa jest równoległobok o równych kątach i przekątnych tej samej długości.
- 11** Napisz wyrażenie algebraiczne opisujące sumę długości krawędzi narysowanego ostrosłupa.



A to ciekawe!

Przez wieki powstawały budowle o różnych kształtach.



wieża kościoła
w Victorii
w Kanadzie

budynek
w San
Francisco



twierdza
Alhambra
w Hiszpanii



zamek nad
Jeziołem
Genewskim
w Szwajcarii

Kształty jakich brył można wyróżnić na powyższych zdjęciach?

Wyzwanie

Piramida Cheopsa ma kształt ostrosłupa o długości krawędzi bocznej około 220 m. Podstawa piramidy jest kwadratem o boku około 230 m.



piramida Cheopsa

1. Skonstruuj trójkąt, którego boki mają takie wymiary, jak ściana piramidy Cheopsa w skali 1 : 2000.
2. Gdyby sześciany o krawędzi równej 1 stopie angielskiej (30,48 cm) można było ułożyć jeden na drugim, aby powstał prostopadłościan o wysokości równej $\frac{2}{3}$ długości równika (około 40 000 km), to jego objętość byłaby równa objętości piramidy Cheopsa. Jaką objętość miałby ten prostopadłościan?

Sprawdź się!

1. Narysuj ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat o boku 3 cm. Kolorem zielonym zaznacz wierzchołek, niebieskim – krawędzie podstawy, a czerwonym – krawędzie boczne.
2. Jaka figura jest podstawą ostrosłupa, który ma 4 wierzchołki i 6 krawędzi?

Wskaż poprawną odpowiedź A, B lub C i jej uzasadnienie I, II lub III.

A. Prostokąt,	ponieważ	I. ma 6 boków.
B. Trójkąt,		II. ma 4 wierzchołki.
C. Sześciokąt,		III. liczba krawędzi podstawy jest 2 razy mniejsza niż liczba wszystkich krawędzi.

3. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt równoboczny. Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma 2 cm, a krawędzie boczne są 3 razy dłuższe.
4. Narysuj siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o boku 3 cm, a krawędzie boczne są o 100% dłuższe. Wykonaj rysunek pomocniczy tego ostrosłupa.
5. Ostrosłup ma 6 wierzchołków i 10 krawędzi. Jaka figura jest podstawą tego ostrosłupa? Wyjaśnij dlaczego.

5. Bryły obrotowe



Sowa uczy

Przedmioty przedstawione na zdjęciach mają kształt figur przestrzennych.



Szklanka ma kształt **walca**.

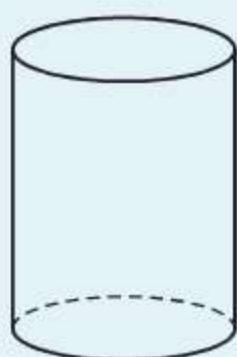


Kapelusz ma kształt **stożka**.

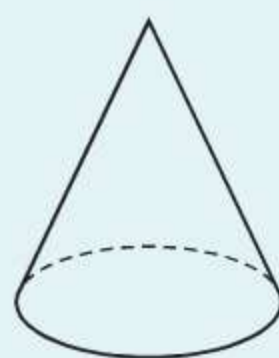


Piłka ma kształt **kuli**.

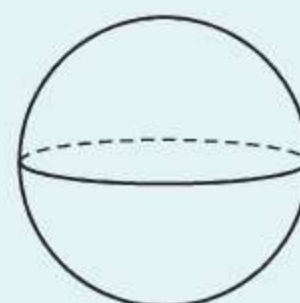
Te figury będziemy przedstawiali na rysunkach tak, jak pokazano poniżej.



walec



stożek



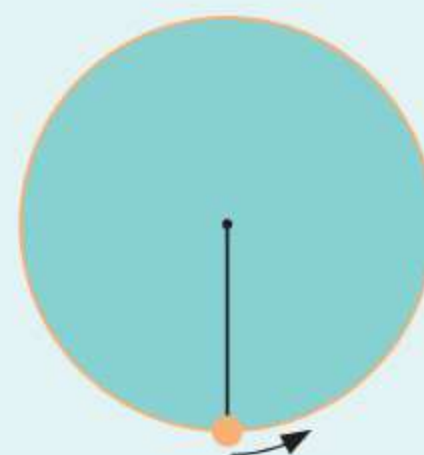
kula

Są to **bryły obrotowe**.

Nazwa bryła obrotowa pochodzi stąd, że taka bryła może powstać w wyniku obrotu figury płaskiej.

Wykonajmy doświadczenie.

Weźmy sznurek i umocujmy na jego końcu ciężarek, np. guzik. Sznurek z ciężarkiem wprawiamy w ruch i obracamy tak, aby ciężarek zakreślił okrąg. Jeżeli zwiększymy prędkość obrotu, możemy zauważyć, że sznurek z ciężarkiem zakreśla koło.



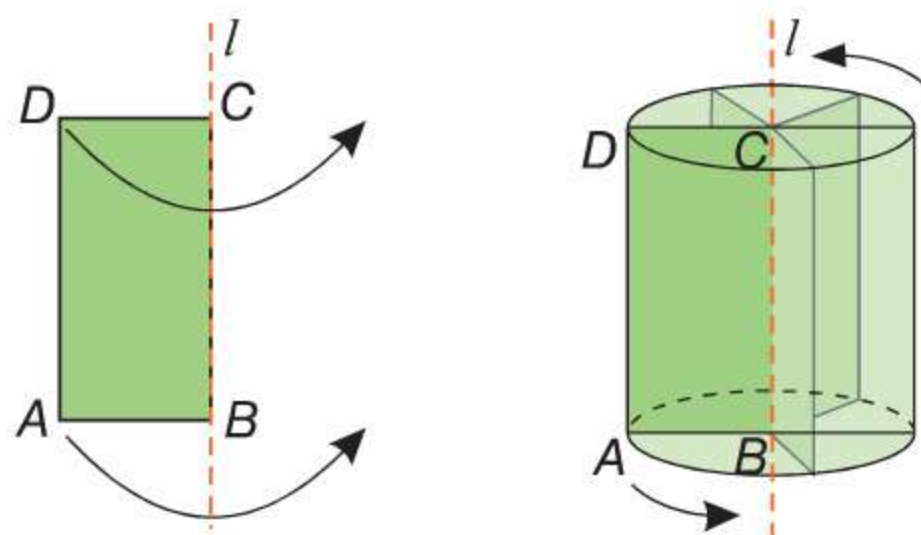
Obracający się odcinek wyznacza koło, a jeden z końców odcinka – okrąg.



*taniec z ogniem
z użyciem poi
(nasączony łatwopalną
substancją ciężarek
na uwięzi)*

Przykład 1.

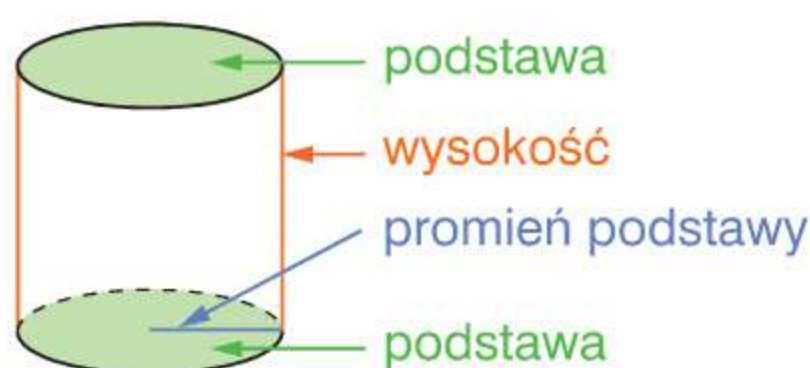
Wytnijmy dowolny prostokąt $ABCD$. Obróćmy go względem boku BC . Jaką otrzymamy bryłę?



Punkt D zakreśla **okrąg**. Odcinek DC w czasie obrotu zakreśla **koło** o środku w punkcie C . Punkt A zakreśla **okrąg**. Odcinek AB w czasie obrotu zakreśla **koło** o środku w punkcie B . Krótsze boki tego prostokąta – AB i DC – wyznaczają promienie tych kół.

Odcinek AD wędruje wraz z punktami D i A i tworzy powierzchnię boczną bryły.

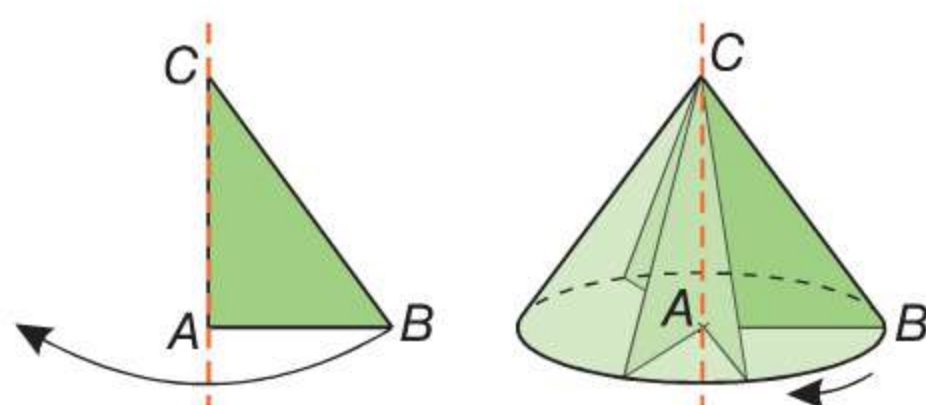
Powstała w ten sposób bryła to **walec**. Prosta l nazywa się **osią obrotu**.



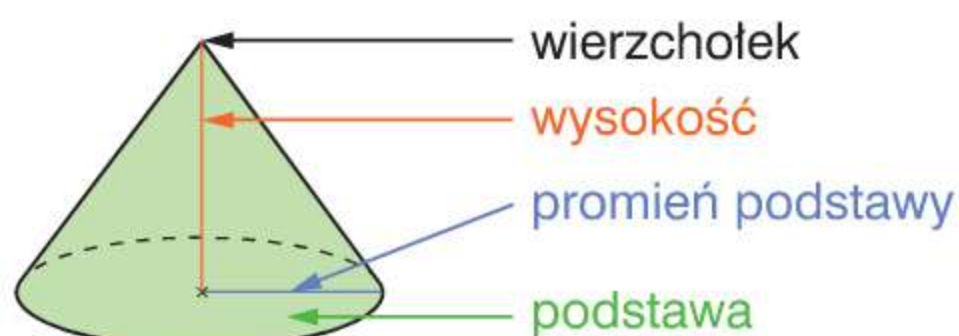
Walec ma dwie równoległe identyczne podstawy – 2 koła o takim samym promieniu.

Przykład 2.

Wytnijmy z kartonu model trójkąta prostokątnego ABC i obróćmy go względem przyprostokątnej AC .



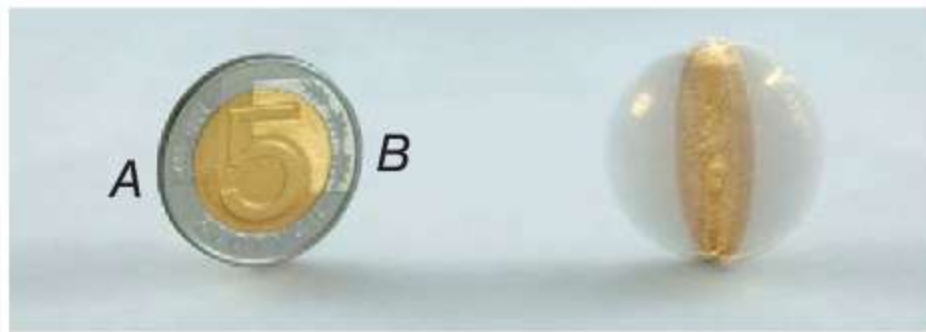
Punkt B zakreśla okrąg. Odcinek AB zakreśla koło. Odcinek CB zakreśla powierzchnię boczną bryły. Powstała w ten sposób bryła to **stożek**.



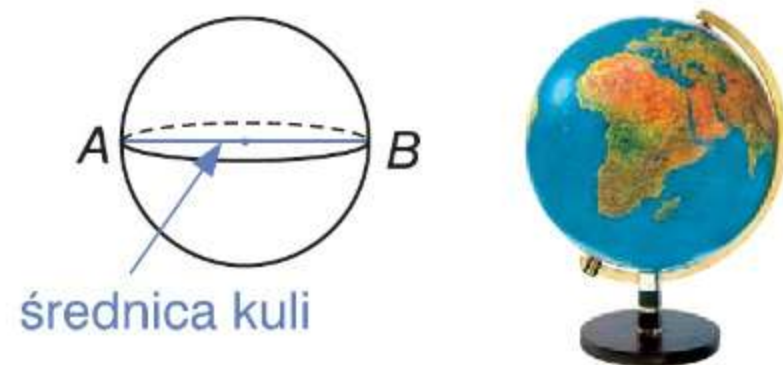
Stożek ma jedną podstawę. Podstawą stożka jest koło.

Przykład 3.

Jeżeli weźmiemy np. monetę (model koła) i wprowadzimy ją w ruch, jak pokazano na zdjęciu, to obracająca się moneta wyznaczy kulę.



Końce średnicy AB zataczają na kuli okrąg.

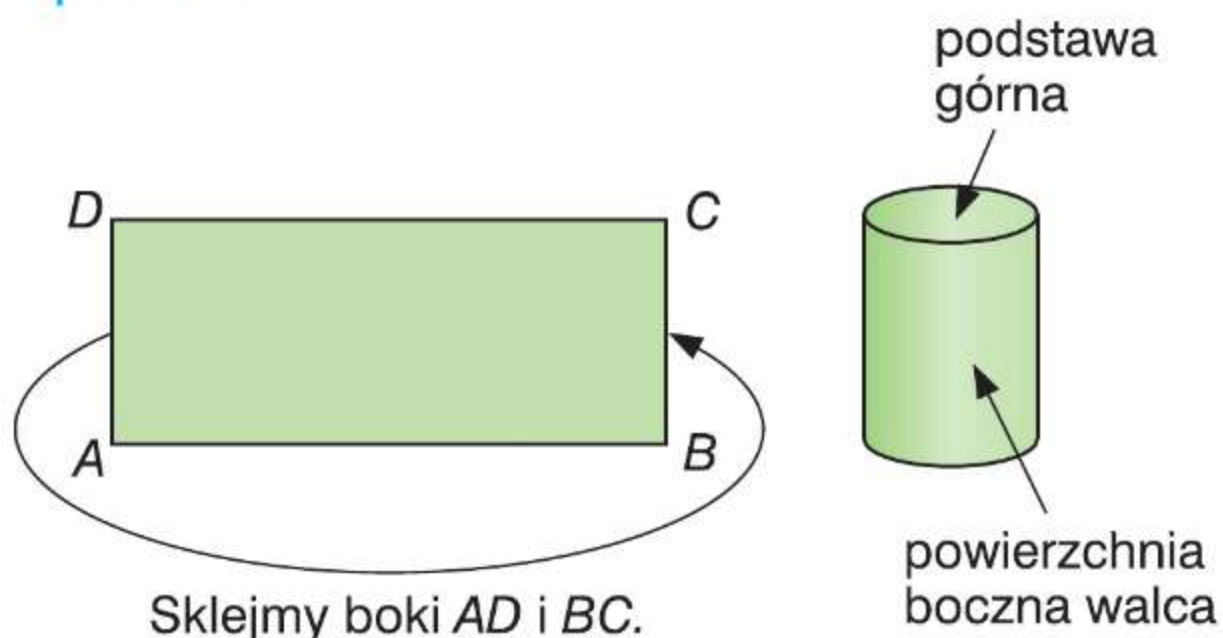
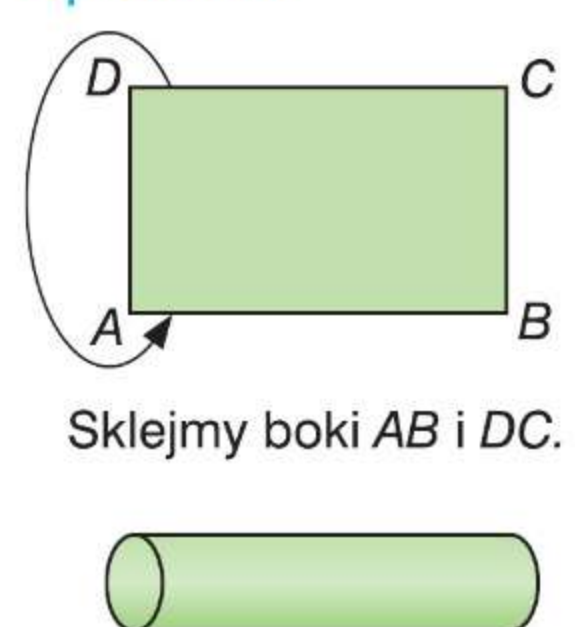


Globus ma kształt kuli. Jednym z okręgów na globusie jest równik.

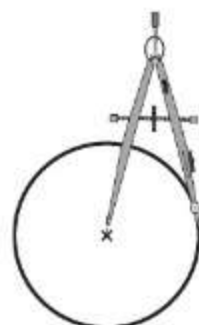
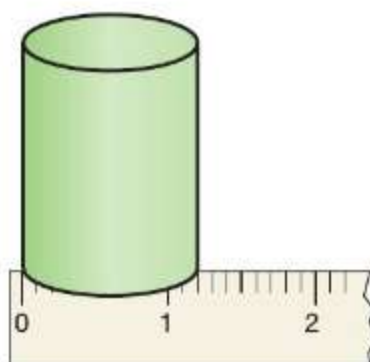
Przykład 4.

Zbudujmy model walca.

Przygotujmy prostokątną kartkę i połączmy taśmą jej równoległe boki.

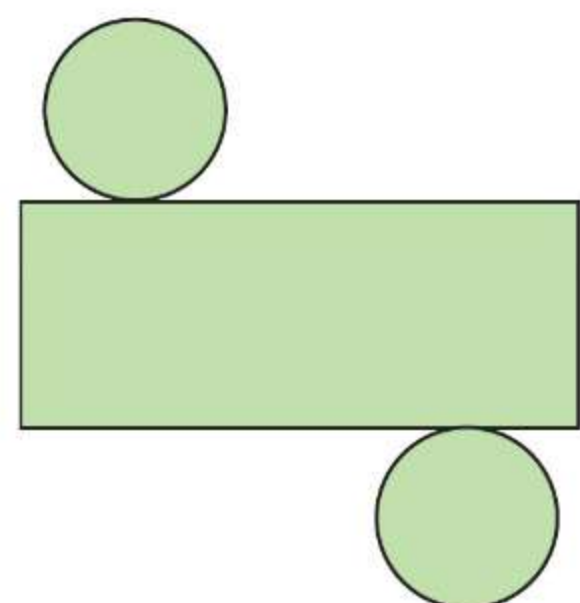
Sposób I**Sposób II**

Aby otrzymać model walca, potrzebne są dwie identyczne równoległe podstawy. Zmierzmy średnicę podstawy powstającego walca i cyrklem narysujmy okrąg.



Wytnijmy 2 takie koła.

Jeśli mamy prostokąt i 2 odpowiednio dobrane koła, możemy zbudować walec. Powierzchnią boczną walca jest prostokąt.



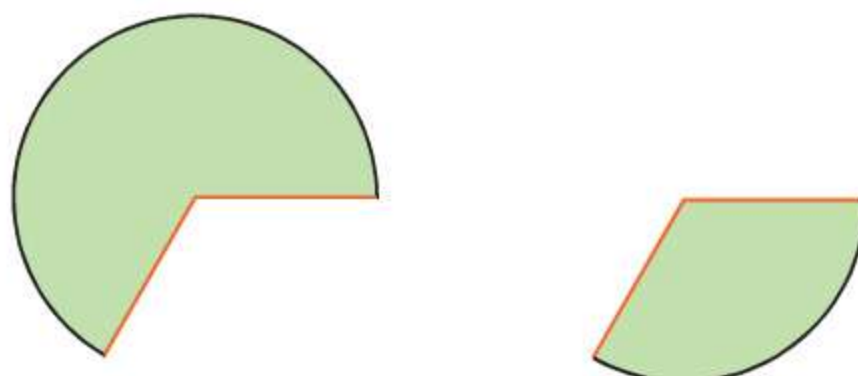
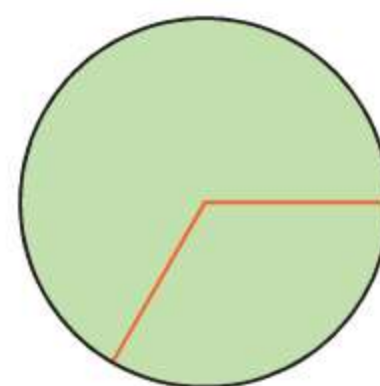
Przykład 5.

Zbudujmy model stożka.

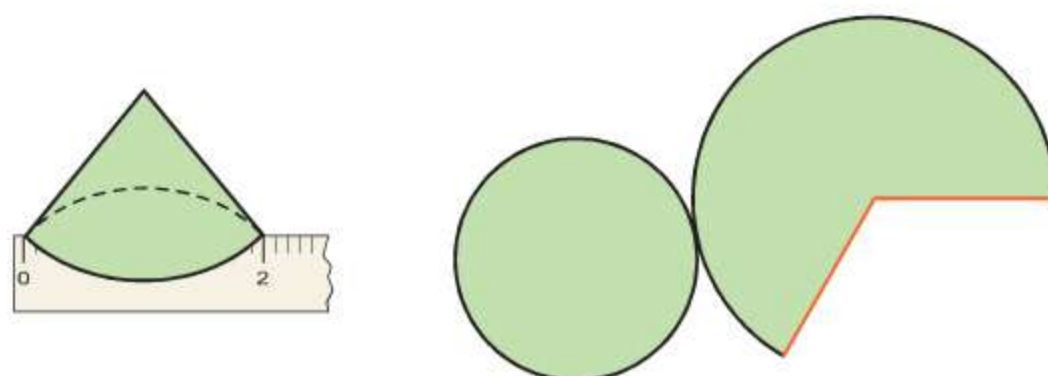
Wytnijmy z kartki koło o dowolnym promieniu.

Narysujmy 2 promienie i przetnijmy wzdłuż nich koło.

Możemy otrzymać takie części:



Każdą z tak otrzymanych części można złączyć promieniami i skleić taśmą. Sklejmy jedną z otrzymanych części. Zmierzmy średnicę podstawy i narysujmy koło o takiej samej średnicy.



Z tych części możemy zbudować model stożka.

- 1 Kształty jakich brył obrotowych nadano koronom drzew i krzewów?



- 2 Wymień po dwa przedmioty ze swojego otoczenia, które mają kształt walca, stożka i kuli.
- 3 Narysuj walec, stożek i kulę. W walcu i stożku pokoloruj podstawy, a w kuli – największy okrąg i jego promień.

4 Kształtu walca **nie może** mieć

A. świeca.

B. garnek.

C. rura.

D. lejek.

5 Orzechy kokosowe w Tajlandii sprzedaje się najczęściej po częściowej obróbce, jak pokazano na zdjęciu. Kształty jakich brył można dostrzec w tak przygotowanym do sprzedaży orzechu kokosowym?

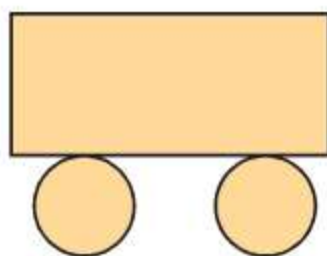


6 Kształty jakich brył można wyróżnić w afrykańskiej chacie?

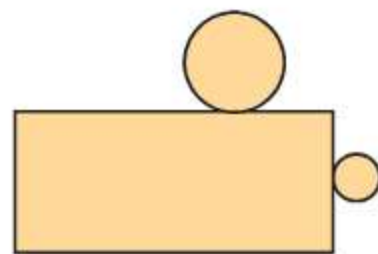


7 Czy na rysunkach A, B, C, D przedstawiono siatki walca?

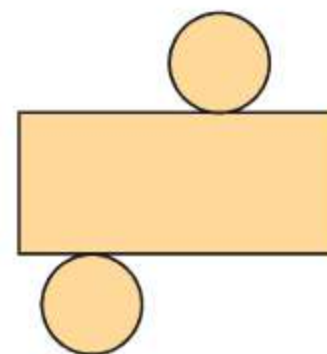
A.



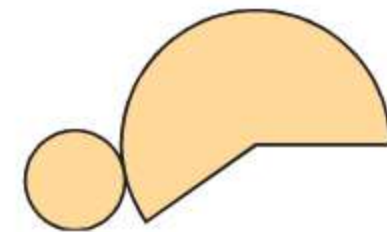
B.



C.



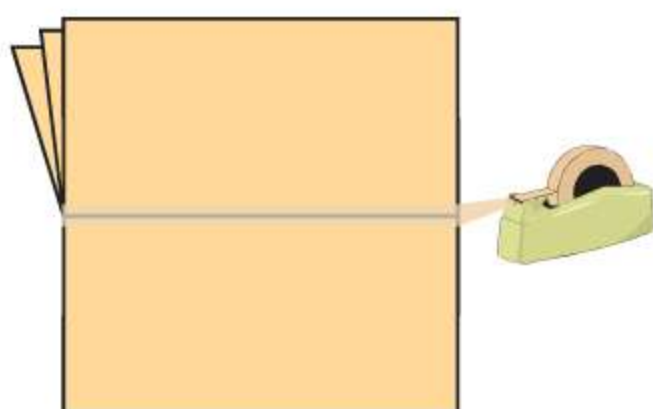
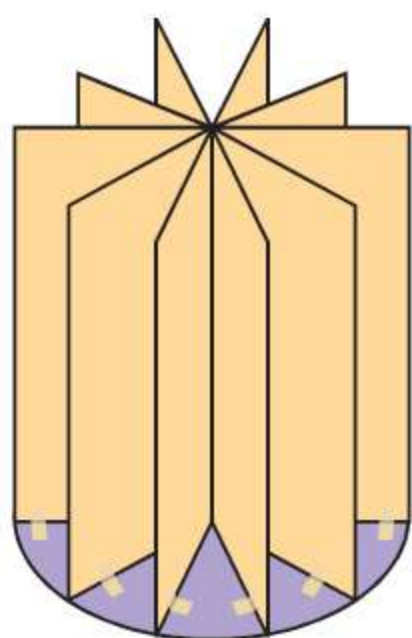
D.



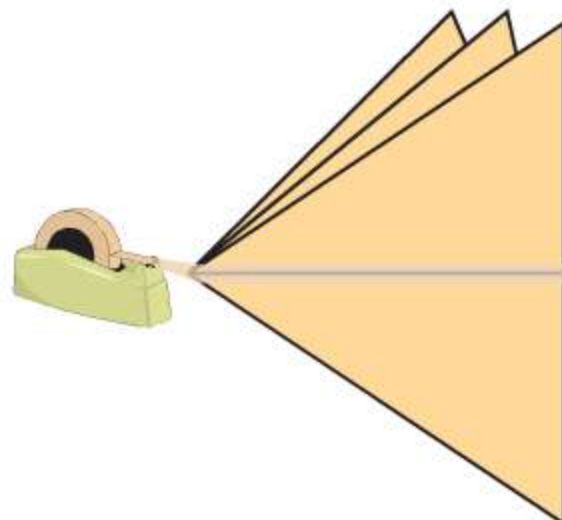
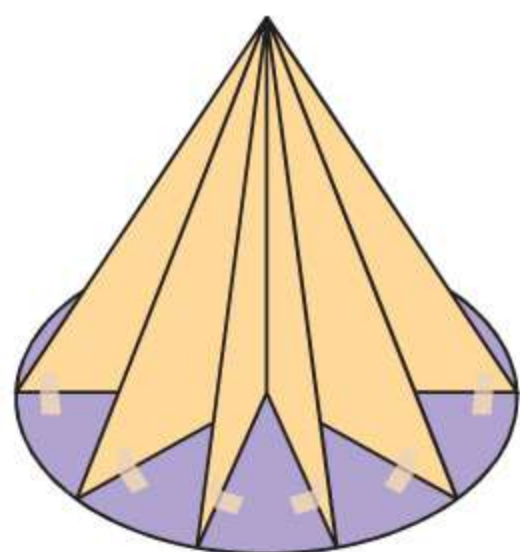
Wskaż poprawne odpowiedzi TAK lub NIE i ich uzasadnienia I, II, III lub IV.

A. TAK / NIE,	ponieważ	I. podstawy leżą przy jednym boku prostokąta.
B. TAK / NIE,		II. podstawy leżą przy równoległych bokach prostokąta i są identyczne.
C. TAK / NIE,		III. w skład siatki nie wchodzi ani prostokąt, ani 2 identyczne koła.
D. TAK / NIE,		IV. podstawy nie są identyczne i leżą przy prostokątnych bokach prostokąta.

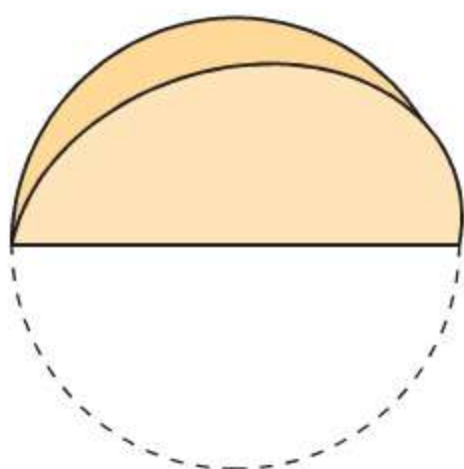
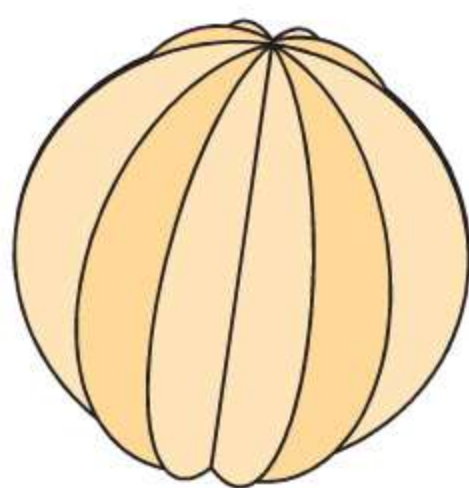
8 Przyjrzyj się pracom Wiktora i Mateusza. Może wykonasz podobne?



a) Chłopcy narysowali i wycięli: 10 prostokątów o wymiarach $4\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ i koło o średnicy 8 cm . Połączyli taśmą prostokąty i koło tak, jak pokazano na rysunku. Kształt jakiej bryły chcieli uzyskać chłopcy?

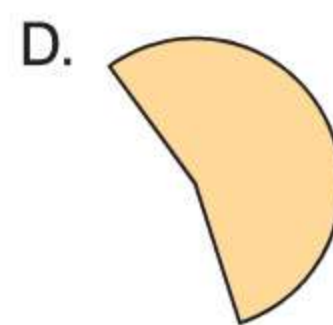
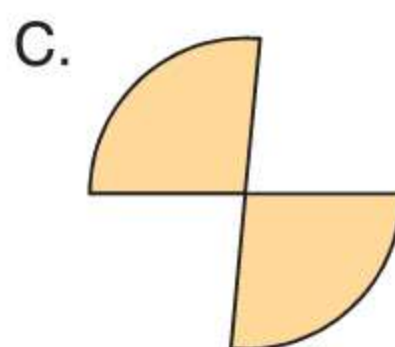
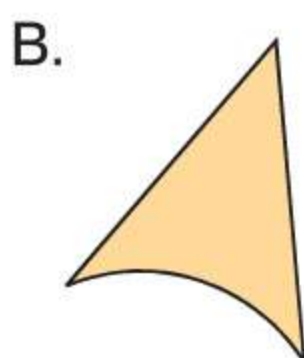
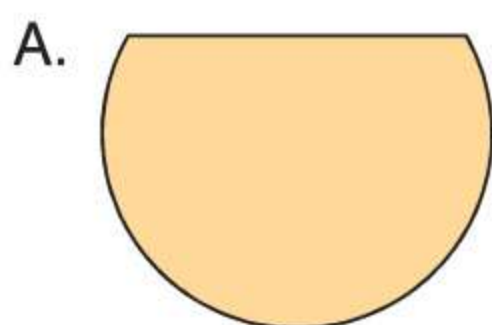


b) Wiktor połączył taśmą 10 trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych 4 cm i 6 cm oraz koło o promieniu 4 cm . Koło połączył taśmą z trójkątami tak, jak pokazano na rysunku. Kształt jakiej bryły chciał uzyskać Wiktor?



c) Mateusz wyciął koła o promieniu 3 cm . Złożył każde z nich wzdłuż średnicy. Połączył taśmą wszystkie koła wzdłuż zagiętych średnic. Kształt jakiej bryły chciał uzyskać Mateusz?

9 Z którego kawałka kartonu można wykonać czapkę w kształcie stożka?



10 Wytnij prostokąt o wymiarach $10\text{ cm} \times 20\text{ cm}$. Sklej jego dwa boki równoległe i obrysuj podstawę otrzymanej bryły. Sprawdź, czy wszyscy w klasie narysowali okrąg o tej samej średnicy.



- 11 W wyniku obrotu koła wokół prostej zawierającej średnicę powstanie
 A. walec. B. stożek. C. ostrosłup. D. kula.

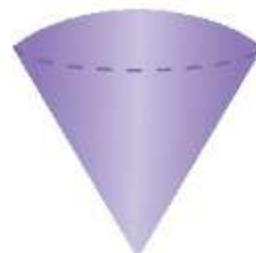
 Sprawdź się!

- 1 Jaka bryła jest przedstawiona na rysunku?

a)



b)



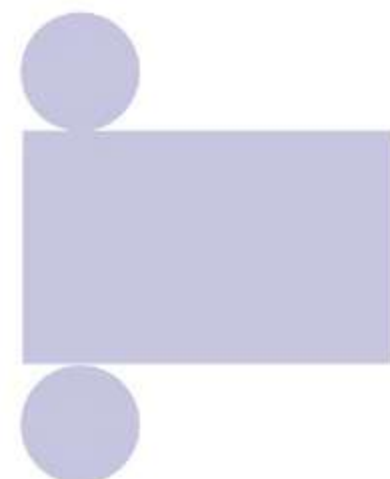
c)



- 2 Oceń prawdziwość zdań. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, wskaż P, jeżeli fałszywe – F.

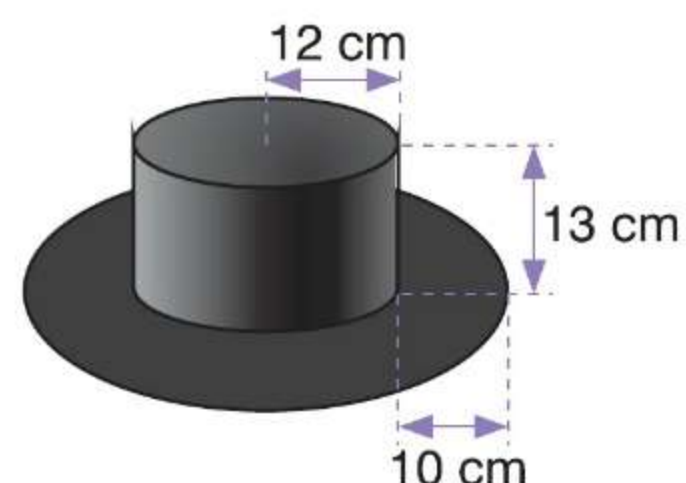
Stożek powstanie w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół przyprostokątnej.	P	F
Z każdego prostokąta można utworzyć powierzchnię boczną walca.	P	F
Kula powstanie w wyniku obrotu koła wokół cięciwy.	P	F

- 3 Podaj przykład przedmiotu o kształcie bryły, którą można zbudować z prostokąta i dwóch kół takich, jak na rysunku obok.



- 4 Narysuj koło o promieniu 5 cm i jego 2 promienie tak, aby kąt między nimi był równy 100° . Przetnij koło po wyznaczonych promieniach i sklej każdą jego część taśmą wzdłuż rozcięć. Otrzymasz czapki w kształcie stożków. Który z modeli stożków będzie wyższy?

- 5 Czy do pudełka w kształcie walca o średnicy podstawy 50 cm i wysokości 15 cm zmieści się cylinder o wymiarach podanych na rysunku?



Zadania utrwalające

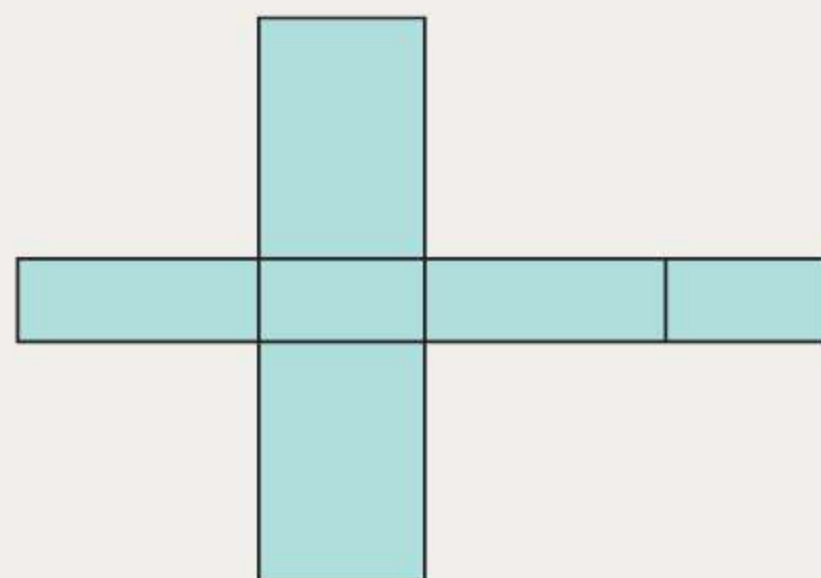
- 1 Ania położyła na stole modele brył. Podaj ich nazwy.



- 2 Na rysunku jest siatka graniastostupa.

a) Podaj nazwę tego graniastostupa i napisz o nim trzy zdania.

b) Narysuj inną siatkę tego graniastostupa, a następnie przedstaw ją w skali 2 : 1.



- 3 Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Krawędź podstawy ma długość 4 cm, a wysokość jest o 50% od niej dłuższa. Wykonaj rysunek pomocniczy prostopadłościanu i narysuj jego siatkę. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego prostopadłościanu.
- 4 Wykonaj rysunki pomocnicze sześcianu o krawędzi p i prostopadłościanu o krawędziach: n , a , m . Napisz wzory opisujące sumę długości krawędzi, pole powierzchni całkowitej i objętość narysowanych graniastostupów.
- 5 Narysuj siatkę graniastostupa, który ma 5 cm wysokości, a jego podstawą jest trójkąt foremny o boku 2,5 cm.
- 6 Podaj nazwę graniastostupa, który ma 12 wierzchołków.
- 7 Zamiast $\blacklozenge$ napisz w zeszycie odpowiednie liczby.

a) $0,7 \text{ m}^2 = \blacklozenge \text{ dm}^2$

$1,6 \text{ a} = \blacklozenge \text{ m}^2$

$0,06 \text{ ha} = \blacklozenge \text{ a}$

b) $2 \text{ dm}^3 = \blacklozenge \text{ cm}^3$

$200 \text{ cm}^3 = \blacklozenge \text{ dm}^3$

$0,4 \text{ m}^3 = \blacklozenge \text{ dm}^3$

c) $3,5 \text{ dm}^3 = \blacklozenge \text{ l}$

$65 \text{ l} = \blacklozenge \text{ hl}$

$\frac{1}{2} \text{ l} = \blacklozenge \text{ ml}$



- 8 Spragniony dromader może wypić w ciągu kilku minut 100 l wody. Zapisz objętość tej wody w:
a) dm^3 , b) hl, c) m^3 , d) ml.

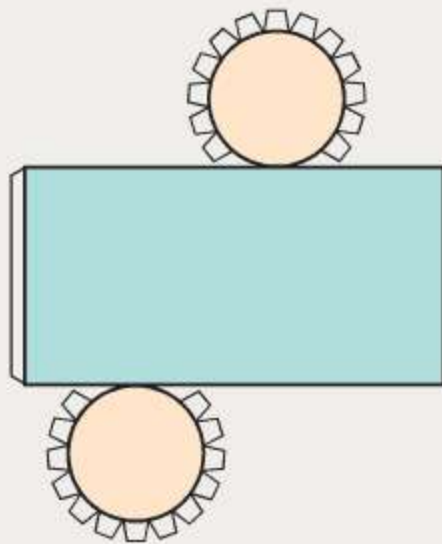
- 9 W prostopadłościanie jedna z trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka ma długość 8 cm, druga jest o 50% dłuższa od pierwszej, a trzecia jest o 50% dłuższa od drugiej. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.



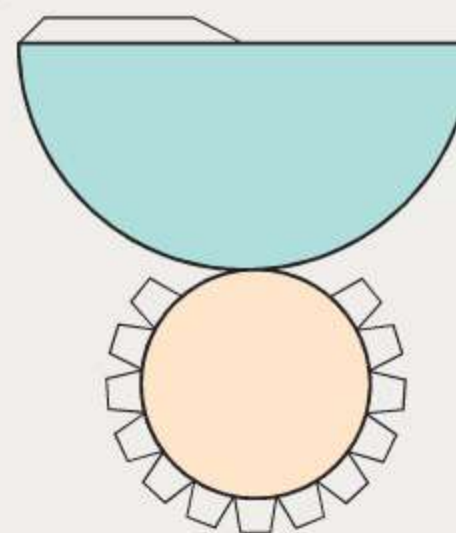
- 10 Pudełko na prezent ma kształt sześcianu o krawędzi 30 cm. Do oklejenia tego pudełka Zosia chce kupić arkusze ozdobnego prostokątnego papieru o wymiarach $90 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Ile arkuszy tego papieru musi kupić Zosia?
- 11 W czasie ulewy w lipcu 2009 roku w Poznaniu spadło 100 l deszczu na 1 m^2 . Wyobraź sobie, że woda ta gromadziłaby się w zbiorniku w kształcie prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat o boku 1 m. Jaką wysokość osiągnęłaby woda w tym zbiorniku?

- 12 Model jakiej bryły można zbudować z tych elementów?

a)



b)

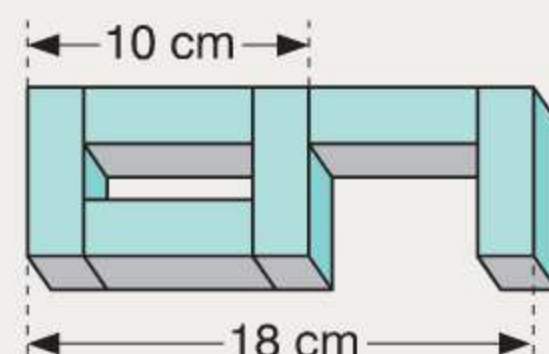


- 13 Wymień przedmioty użytkowe, które mają kształt:
a) stożka, b) walca, c) kuli.

- 14 Narysuj ostrosłup, który ma 5 wierzchołków. Podaj jego nazwę.

- 15 Kasia narysowała siatkę ostrosłupa, którego podstawą jest trójkąt foremny o boku 4 cm, a krawędzie boczne mają po 8,6 cm długości. Narysuj siatkę tego ostrosłupa w skali 1 : 2.

- 16 Z identycznych klocków w kształcie graniastopupów o kwadratowej podstawie Alek ułożył cyfrę 6 tak, jak pokazano na rysunku. Jaką objętość mają te klocki?



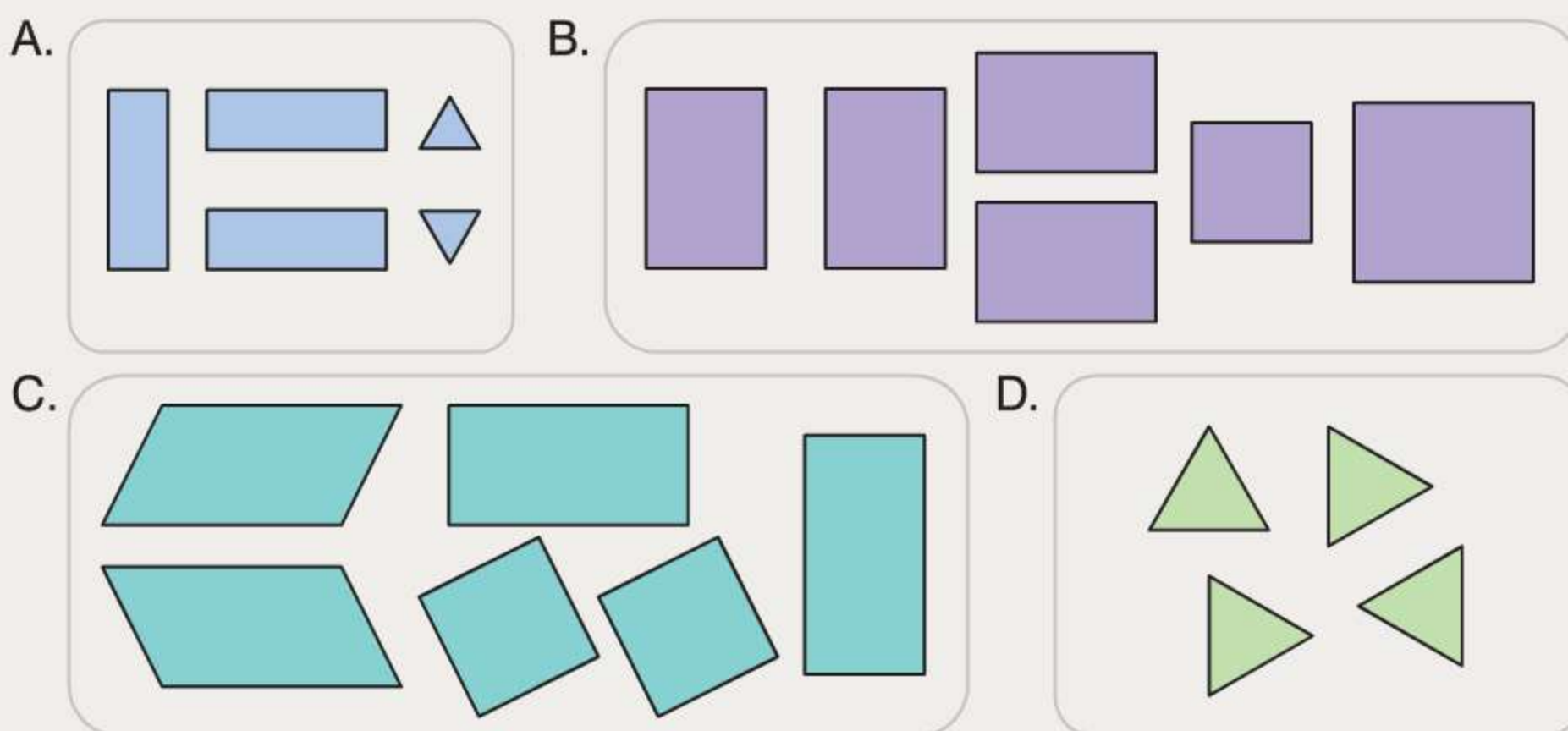
Zadania sprawdzające

Obliczenia i odpowiedzi zapisz w zeszycie.

1 Wskaż zdanie **nieprawdziwe**.

- A. Każdy prostopadłościan ma 6 identycznych ścian.
- B. Ostrosłup o podstawie w kształcie kwadratu ma 8 krawędzi.
- C. Walec jest bryłą obrotową o dwóch równoległych podstawach w kształcie kół.
- D. Graniastosłup, którego podstawą jest trójkąt, ma 9 krawędzi.

2 Dane są zestawy wielokątów:



Odpowiedz na pytania zamieszczone w tabelce. Przy każdym z nich wskaż litery przypisane poprawnym odpowiedziom.

Z którego zestawu figur nie można zbudować bryły?	A	B	C	D
Z którego zestawu figur można ułożyć siatkę ostrosłupa?	A	B	C	D
Z którego zestawu figur można ułożyć siatkę graniastosłupa?	A	B	C	D

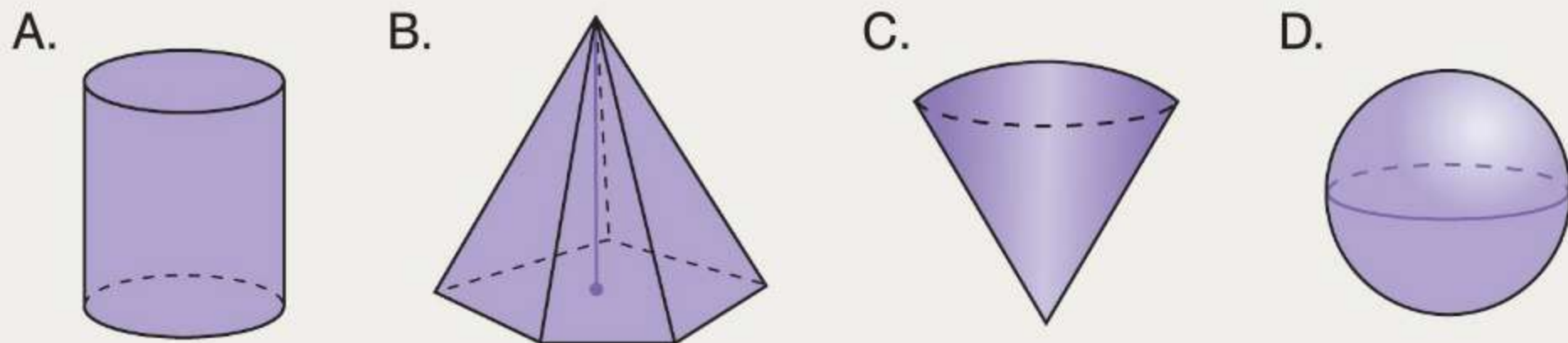
3 Pole powierzchni całkowitej sześcianu wynosi 24 cm^2 . Krawędź tego sześcianu jest równa

- A. 4 cm
- B. 6 cm
- C. 2 cm
- D. 8 cm



- 4 Objętość 8 dm^3 jest równa
 A. 800 ml B. 80 cm^3 C. $0,08 \text{ m}^3$ D. 8 l

- 5 Na którym rysunku **nie przedstawiono** bryły obrotowej?



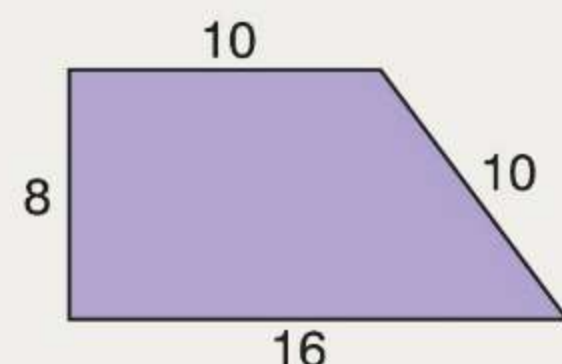
- 6 Z drutu o długości 24 cm zbudowano szkielet czworościanu foremnego. Jaką długość ma krawędź tego ostrosłupa?

Wskaż poprawną odpowiedź A lub B i jej uzasadnienie I lub II.

A. 2 cm,	ponieważ	I. ostrosłup ma 4 ściany, a każda ściana ma 3 krawędzie.
B. 4 cm,		II. ostrosłup ma 6 równych krawędzi.

- 7 Ściany boczne ostrosłupa są
 A. równoległobokami. B. prostokątami.
 C. trójkątami. D. dowolnymi wielokątami.
- 8 Liczba krawędzi bocznych dowolnego ostrosłupa jest równa
 A. 4. B. podwojonej liczbie krawędzi podstawy.
 C. 3. D. liczbie krawędzi podstawy.

- 9 Wysokość graniastostupa jest równa 10 dm, a jego podstawą jest trapez, którego wymiary w decymetrach są podane na rysunku. Pole powierzchni bocznej tego graniastostupa to
 A. 440 dm^2 B. 104 dm^2
 C. 648 dm^2 D. 1040 dm^2



- 10 Tylko jedną podstawę, która jest kołem, ma
 A. ostrosłup. B. walec. C. stożek. D. graniastostup.

Jednostki pojemności

DAWNIEJ

W dawnych czasach objętość, podobnie jak długość czy masę, mierzono na wiele sposobów. Zazwyczaj każda lokalna społeczność posiadała własną jednostkę miary. W 1764 roku w Rzeczypospolitej spróbowano ujednolicić system miar i od tej pory miarami objętości cieczy miały być: kwarta, garniec, konew i beczka.

Kwarta

to prawie tyle samo
co 1 litr (0,9422 litra).



Garniec

(miara podstawowa)
to tyle samo co 4 kwarty.



Konew

to tyle samo
co 5 garnców.



Beczka

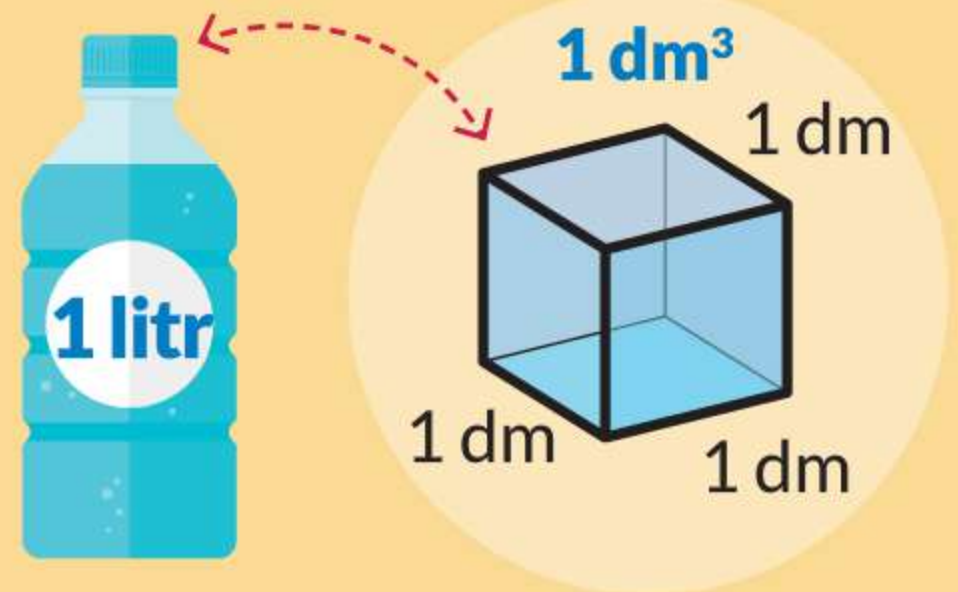
to tyle samo
co 14,5 konwi.



DZIŚ

Obecnie podstawową i najczęściej stosowaną w Europie jednostką pojemności jest **litr**.

W 1793 roku we Francji **1 litr** został zdefiniowany jako **1 decymetr sześcienny**.



Mniejszą od litra jednostką pojemności jest **mililitr** (ml).

1 ml to pojemność kostki sześciennej o krawędzi 1 cm, czyli 1 cm^3 .

Szklanka
wody
to 250 ml.



Łyżka
to 15 ml.



Łyżeczka
do herbaty
to 5 ml.



W Stanach Zjednoczonych podstawową i używaną jednostką pojemności jest **galon**.

Jeden galon amerykański to mniej więcej 4 litry.



Większą od galonu i stosowaną w handlu ropą naftową jednostką pojemności jest **baryłka**.

Jedna baryłka ropy naftowej to 42 galony, czyli około 159 litrów.



Samochód osobowy spala średnio 1,5 galonu oleju napędowego na 100 km. Dokąd mógłbyś nim dotrzeć z miejsca swojego zamieszkania, dysponując jedną baryłką oleju napędowego?

Odpowiedzi do zadań

Wakacje, wakacje i... po wakacjach / 7

1. a) 70 b) sobota c) 22 dnia d) 27 lipca 2. AD 3. C 4. B II
5. 3 godz. 20 min 6. $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ 7. A II
8. a) 12 m, 16 m b) prostokątnej o 46 zł 9. 151 zł; $\frac{23}{73}$ 10. Maja, 20 zł
11. b) 2020 rok: 366 dni, 52 tygodnie i 2 dni, 2021 rok: 365 dni, 52 tygodnie i 1 dzień

Sprawdź się! / 9

1. D 2. BC 3. czwartek, 13 września 4. 6 cm
5. a) 172 dni b) 24 c) piątek d) więcej niż 80, ale mniej niż 84

I. Liczby naturalne

1. Działania na liczbach naturalnych / 13

1. a) 5 r 3 b) 8 r 4 c) 7 r 1 d) 5 r 5 2. a) 216, 3600 b) 46, 16 c) 16, 568
3. BD 4. $2^3, 2^{12}$ 5. $4212 + 103 + 2192 = 6507$
6. a) 196 b) 235 c) 16 d) 31 e) 2430 7. 2232 zł 8. 927 zł
9. D 10. 8 pięciozłotowych, 5 dwuzłotowych 11. 42 12. C II
13. a) 456 zł b) o 78 zł c) 32 zł 14. a) 202 b) 1903 15. 30

Sprawdź się! / 15

1. 235 2. 204 zł 3. C 4. D 5. a) 299 b) 4098

2. Podzielność liczb naturalnych / 17

3. AB, D, C, B 4. 396, 3185 5. a) $48 = 2^4 \cdot 3$, 2 i 24; $228 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19$, 2 i 114
b) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, 2 i 105; $675 = 3^3 \cdot 5^2$, 3 i 225
c) $910 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, 2 i 455; $1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, 2 i 525
d) $5100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17$, 2 i 2550; $8085 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$, 3 i 2695
6. 20 8. np. 21; nie 9. PF 10. a) np. 6 b) np. 15 c) np. 221

Sprawdź się! / 19

1. 17 2. PPFF 3. $96 = 2^5 \cdot 3$, dzielniki: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96
4. AC

3. Największy wspólny dzielnik / 21

1. $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ 2. 180, 210 3. a) 4, 18, 7 b) względnie pierwsze, 25, 80
c) 30, 120, 16 4. PFP 5. a) 3 i 5 b) 11 i 19, 22 i 17 c) 15 i 16 d) 4 i 25
6. jedno, sześcioro lub trzynastororo; 3

Sprawdź się! / 22

1. BC 2. a) 21 b) 7 3. C 4. 21 5. 9

4. Najmniejsza wspólna wielokrotność / 24

1. a) 36, 300, 704 b) 78, 84, 360 c) 360, 720, 1620 2. FP 3. b)
4. pierwsze dwa obroty, drugie pięć obrotów 5. po 12 dniach, w środę

Sprawdź się! / 25

1. 320, 180 2. C 3. PP 4. pierwsze trzy obroty, drugie dwa 5. 5 razy

5. Średnia arytmetyczna liczb / 28

1. 40 2. a) 30 b) 18 c) 125 3. 45 kg 4. dobry (4)
5. B 6. 22 7. dobry (4) 8. 14

Sprawdź się! / 29

1. D 2. 12 zł 3. AD 4. 48 minut 5. 10 km

6. Liczby naturalne wokół nas / 30

2. 7 3. BF 4. A 5. a) 4000 b) eukaliptus 6. $3^3, 3^5$ 7. 38 km
8. a) Rosja: 300 tys., Prusy: 200 tys., Austria: 100 tys., Rzeczypospolita: 24 tys.
b) Rosja: 13 razy, Prusy: 8 razy, Austria: 4 razy
9. AD 10. a) 69 zł b) 286 zł 11. A 12. PFPP 13. 5 g 14. b), d)

Sprawdź się! / 33

1. 356 584 km 2. 381 525 km 3. C 4. 6000 5. 52 razy

Zadania utrwalające / 34

1. a) 2600, 160 b) 13 500, 3 c) 3763, 7606 2. 1500 sekund
3. 40 km 4. 25 cm
5. a) 80, 96, 102, 340 b) 80, 340, 1005 c) 96, 102, 1005 d) 80, 96, 340 6. 29, 41
7. $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, dzielniki: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42; $68 = 2 \cdot 2 \cdot 17$, dzielniki: 1, 2, 4, 17, 34, 68
8. 495 km 9. 75 minut 10. sobota 11. 3960; $3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
12. 46 zł 13. a) 180 b) 630 14. a) 42 b) 25
15. a) 21 i 26, 21 i 52, 21 i 65 b) 26 c) 130 16. a) np. 30 i 45 b) np. 6 i 7
17. 38 zł 18. 6 świń, 24 kury 19. 20 cm 20. 10 063 21. 2 h 23 min

Zadania sprawdzające / 36

1. B 2. C 3. D 4. BD 5. C 6. D 7. A 8. B
9. D 10. D 11. AC, BD, D, AC 12. C 13. B 14. A II

II. Wyrażenia algebraiczne i równania

1. Wyrażenia algebraiczne / 42

1. a) $3m, 5a$ b) x^2, a^3 c) $7x - y, 7a - 7b + 1$
2. a) suma liczb a i iloczynu liczb 2 i b b) kwadrat różnicy liczb c i 4
c) suma iloczynu liczb 2 i x oraz kwadratu liczby y
d) iloczyn różnicy liczb m i n oraz liczby 3 e) iloraz różnicy liczb k i 3 przez liczbę 4
3. a) $m + 6$ b) $\frac{x}{4}$ c) $5b$ d) $2a - 4$
4. PFP 5. C 6. a) 150 b) 56 c) 40 d) 125 7. BC 8. D
9. a) $3a + c + c + 2$ b) $2a + 1,5g + 8,50$ c) $s + 125 + 125 - b$
10. $40 = 2 \cdot 20 + 0$, $40 = 3 \cdot 13 + 1$, $40 = 5 \cdot 8 + 0$, $40 = 7 \cdot 5 + 5$
11. a) $m + 2$ b) $2a + b$ c) $6 + d + k$ 12. a) $m + n + t$ b) $4x$ c) $2w + 2z$ d) $4k$
13. a) $160 + 8b$ b) $8b$ c) 192; 32 14. $200 + 8m$

Sprawdź się! / 45

1. C 2. a) $a^2 - \frac{b}{2}$ b) $(a + b)^2$ 3. B, E 4. AC

2. Równania / 48

1. a) $x = 27$ b) $m = 33$ c) $y = 5$ d) $a = 12$ 2. B
3. a) $a = 6$ b) $c = 8$ c) $b = 3$
4. a) $x = 3, m = 9$ b) $c = 6, d = 2$ c) $p = 30, t = 0$

5. $x + x + 1 = 73$; 36 i 37 6. $a + 16 = 50$; $a = 34$
 7. a) $70 + a + 34 = 120$; $a = 16$ [cm] b) $26 + 18 + b + 60 = 120$; $b = 16$ [cm]
 8. a) $2a + 26 = 36$; $a = 5$ [cm] b) $2b + 10 = 36$; $b = 13$ [cm]
 9. $a + a + 3 + 1 = 12$; $a = 4$; $|AC| = 4$, $|CD| = 7$
 10. a) $4 + 5 + 6 = 15$, $5 + 6 + 7 = 18$, $6 + 7 + 8 = 21$ b) $21 + 22 + 23 = 66$
 c) $x + x + 1 + x + 1 + 1 = 100$, $3x = 97$; 97 nie dzieli się bez reszty przez 3.

Sprawdź się! / 49

1. C 2. D, C, A 3. $c = 12$ 4. $\beta + \beta - 86^\circ = 180^\circ$; $\beta = 133^\circ$
 5. $3x + 5 = 23$; $x = 6$

3. Wyrażenia algebraiczne i równania w zadaniach / 52

1. $a + a + 8 + a - 6$; 59 2. TAK, TAK 3. $2k + 6p + m + d$
 4. $x + x + 2 + x + 4 = 69$; 21, 23, 25 5. $8p + 27 = 59$; $p = 4$ [zł]
 6. a) $50 - 2a - m$ b) $m + m - 18$ c) $\frac{p+t}{2}$ 7. $x + x - 4 = 32$; 18 i 14
 8. $\gamma + \gamma + 31^\circ + 83^\circ + \gamma - 12^\circ = 360^\circ$; $\gamma = 86^\circ$; $83^\circ, 74^\circ, 117^\circ$ 10. BC

Sprawdź się! / 53

1. C 2. $76^\circ + 58^\circ + \alpha = 180^\circ$; $\alpha = 46^\circ$ 3. $2x + 2 = 70$; 34 i 36
 4. $4x + 26 = 134$; $x = 27$ [zł] 5. $5c + 16 = 31$; $c = 3$ [punkty]

Zadania utrwalające / 54

1. a) $2k$ b) x^2 c) $5a$ 2. a) $k - 5$ b) $2p$ c) $a + 4$ d) $\frac{m}{6}$
 3. a) $4 + b^2$ b) $(m - n)^2$ c) $\frac{c+d}{3^2}$ d) $(3x - y) \cdot z$
 4. a) różnica sześcianu liczby a i podwojonego iloczynu liczb b i c
 b) suma kwadratu liczby p i sześcianu liczby k
 c) iloraz liczby x przez różnicę liczb t i y d) iloczyn, którego pierwszy czynnik to suma liczby m i podwojonej liczby t , a drugi to liczba s
 5. a) 6 b) 9 c) 2 6. a) $a = 11$, $c = 20$ b) $b = 80$, $z = 20$ c) $x = 60$, $w = 60$
 7. $2n + 2n + 2 + 2n + 4$
 8. a) $\alpha + 43^\circ = 180^\circ$; $\alpha = 137^\circ$; b) $50^\circ + 2\alpha = 180^\circ$; $\alpha = 65^\circ$;
 9. a) $\frac{m}{4}$, iloraz liczby m przez liczbę 4 b) $k + 3k$, suma liczby k i trzykrotności tej liczby
 c) $5a$, iloczyn liczby 5 i liczby a d) $3k$, iloczyn liczby 3 i liczby k
 e) $4b$, iloczyn liczby 4 i liczby b
 10. $4x + 5 = 29$; 6 sztuk 11. $3y + 12 = 39$; 9 zł
 12. $(2 + 4 + 3 + 5 + 5 + 3 + n) : 7$ 13. $(p - 2a) : 2$; 7
 14. $500 - 3b - 2a - 4c$ 15. $m - \frac{m}{4}$, 120 16. $(4\frac{1}{2}m + 6)$ cm

Zadania sprawdzające / 56

1. D 2. B 3. D, A, D 4. D 5. D, AC, B 6. A 7. C
 8. C 9. AC 10. D 11. B 12. FPPF

III. Własności figur płaskich

1. Prosta, kąty / 61

1. a) $|KL| = 6$ cm 6 mm, $|MN| = 7$ cm 2 mm b) o 3,6 cm 2. 3 cm
 3. D 4. prostopadłe 6. AD 7. długość łamanej: 25,5 cm
 9. a) $\alpha = 71^\circ$, $\beta = 109^\circ$, $\gamma = 71^\circ$ b) $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\delta = 125^\circ$ 10. 110°
 11. $180^\circ - \alpha$, α 12. a) 180° , półpełny b) 120° , rozwarty c) 360° , pełny d) 45° , ostry

Sprawdź się! / 64

1. 12,6 cm 2. D 3. B 4. $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 113^\circ$, $\gamma = 78^\circ$, $\delta = 35^\circ$ 5. A I

2. Symetria wokół nas / 67

2. C

Sprawdź się! / 68

1. D 2. nie

3. Figury płaskie / 71

3. PF 4. 4 5. BD 6. a) nie b) tak c) nie d) tak e) nie 7. B III
8. b) 8 cm 9. średnica: 11 cm, promień: 5,5 cm 10. promień: 3,5 cm
11. 4 m $\times$ 12 m 12. D 13. 60,1 cm 14. B 15. 113 cm

Sprawdź się! / 74

1. A 2. 3 cm 3. 16,2 cm 4. 540° 5. 4,8 cm

4. Trójkąty / 77

2. różnoboczny, prostokątny; 12 cm 4. C 5. a) $2a + c$; 24 cm
b) $a + b + c$; 22 cm c) $3b$; 15 cm 6. różnoboczny, ostrokątny 7. 25° , 25°
8. D 9. a) 60° ostrokątny, równoboczny; 3 osie symetrii b) 30° rozwartokątny, równoramienny; 1 oś symetrii c) 90° prostokątny, różnoboczny; brak osi symetrii
d) 60° ostrokątny, różnoboczny; brak osi symetrii
10. B 11. długości odcinków: 4 cm, 6 cm, 8 cm
13. trzeci kąt trójkąta: 75° , kąty przyległe: 105° , 95° , 160° 14. 3 cm
15. 360 cm 16. 20° , 100° , 60° 17. 39° , 60° , 81° ; różnoboczny, ostrokątny

Sprawdź się! / 80

1. B 2. 10 cm, $L = 24$ cm 4. równoboczny
5. a) równoramienny, prostokątny b) przyprostokątne, przeciwprostokątna
c) równoramienne, prostokątne d) 6 cm

5. Czworokąty / 82

2. zdania prawdziwe: a), b), d) 4. A 5. tak 6. D
7. a) trapez prostokątny b) trapez równoramienny, równoległobok, romb 8. C
9. 22 cm, 8 cm, 22 cm 10. $L = 18$ cm 11. kwadrat
12. trapez prostokątny 13. B
14. a) trapez równoramienny; $2a + m + n$; 32 cm b) romb; $4m$; 56 cm
c) prostokąt; $2a + 2n$; 26 cm 15. B I

Sprawdź się! / 85

1. a) $4c$; 20 cm b) $6c$; 30 cm 2. B 3. A II 4. C
5. a) np. trapez równoramienny o jednej parze boków równoległych b) np. prostokąt
c) kwadrat

Zadania utrwalające / 86

5. a) pięciokąt b) trapez prostokątny c) trójkąt różnoboczny, rozwartokątny
7. a) trapez prostokątny b) kwadrat c) trójkąt równoramienny
11. a) 82° , 98° , 82° b) 145° , 35° , 145° 12. a) równoramienny, prostokątny
b) równoboczny, ostrokątny 13. równoległobok 14. 55° , równoramienny, ostrokątny
15. 14,5 cm 16. 21,5 cm 17. 3,5 cm i 8 cm
18. a) więcej niż 1,5 cm i mniej niż 10,5 cm b) mniej niż 1,5 cm lub więcej niż 10,5 cm
19. a) $4c$; 32 cm b) $2a + b$; 38 cm c) $a + 2b + c$; 42 cm

Zadania sprawdzające / 88

1. C 2. D 3. C 4. A 5. A 6. D 7. A 8. C
9. C 10. B 11. D 12. B I

IV. DZIAŁANIA NA UŁAMKACH

1. Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych / 93

1. a) $>$, $=$ b) $=$, $>$ c) $>$, $=$ 2. najmniej: $\frac{2}{3}$ l, najwięcej: $\frac{7}{8}$ l
3. sportowe: $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$, historyczne: $\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ 4. B 5. a) $0, \frac{3}{18}, \frac{5}{18}, \frac{7}{18}, \frac{11}{18}, \frac{15}{18}, \frac{19}{18}$
b) $\frac{5}{10}, \frac{5}{9}, \frac{5}{6}, 1, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}$ 7. a) $1\frac{1}{6}, 1\frac{3}{4}$ b) $7\frac{1}{18}, 7$ c) $5\frac{1}{15}, \frac{7}{30}$ 8. TAK, II
9. $5\frac{4}{6} = 5\frac{2}{3}$ 10. a) $b = 1\frac{7}{10}$ b) $c = 4\frac{1}{6}$ c) $d = 1\frac{7}{24}$
11. o $\frac{19}{20}$ kg 12. $L = 51$ dm

Sprawdź się! / 95

1. a) $<$ b) $>$ c) $>$ d) $<$ 2. a) $4\frac{7}{20}$ b) $1\frac{13}{18}$ c) 2
3. FF 4. $L = 18\frac{19}{20}$ m 5. o $\frac{1}{2}$ h

2. Mnożenie i dzielenie ułamków zwykłych / 99

1. a) $1\frac{1}{5}$ b) 3 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{8}{9}$ 2. a) $<$ b) $>$ c) $>$ d) $<$ 3. a) 4 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{5}$
4. a) $11\frac{1}{6}$ b) $1\frac{13}{20}$ c) $2\frac{11}{14}$ 5. wszyscy po 72 zł; nie 6. 4 kg 50 dag
7. 2608 zł 8. D 9. a) 300 m b) $\frac{1}{2}$ m 10. Ania: 16, Kasia: 8
11. a) $y = 27$ b) $a = 14$ c) $c = 4$ d) $x = 6$
12. spotkanie z koleżankami: $\frac{1}{3}$, odrabianie pracy domowej: $\frac{5}{6}$, obsługa poczty e-mail: $\frac{1}{6}$,
oglądanie filmu przyrodniczego: $\frac{3}{4}$, jazda na rowerze: $\frac{1}{2}$
13. spotkanie z koleżankami: 20, odrabianie pracy domowej: 50, obsługa poczty e-mail: 10,
oglądanie filmu przyrodniczego: 45, jazda na rowerze: 30
14. B I 15. D 16. o 7:30, o 8:15 17. 171 km
18. Rafał: 243 km, Kamil: 180 km 19. Rafał: 12:45, Kamil: 11:15

Sprawdź się! / 101

1. a) $2\frac{1}{3}$ b) $3\frac{3}{5}$ c) $\frac{8}{27}$ 2. B 3. $(1\frac{1}{2})^3$ 4. 35 zł 5. a) 20 b) $2\frac{1}{4}$

3. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych / 103

1. a) $>$, $>$, $<$ b) $=$, $>$, $<$ c) $<$, $=$, $<$
2. 70; 17,001; 7,3; 7,14; 7,1; 7,05; 7,03; 6,09; 6,008; 0,779
3. B 4. C 5. a) 8,8; 15,55; 3,24 b) 3; 12,033; 7
6. a) 25,389; 233,64 b) 64,72; 43,557 c) 13,725; 66,224
7. a) $c = 73,71$; $a = 2,42$; $b = 7,8$ b) $x = 4,2$; $y = 3,06$; $z = 27,4$
8. o 9,197 km 9. 1769,11 zł 10. 75,15 zł 11. $L = 15,5$ dm

Sprawdź się! / 104

1. a) 140,96 b) 47,63 2. A 3. NIE, II 4. $L = 5,6$ dm 5. $L = 133,7$ m

4. Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych / 106

1. a) 2,8; 0,7 b) 0,48; 3 c) 0,09; 80 2. a) 42,5; 50,8 b) 0,285; 0,3001
c) 0,1023; 0,75 3. B 4. $0,00017$ t = 0,17 kg
5. a) 2,744; 2,28 b) 1494,747; 2,45 c) 0,371; 4,375 6. 0,01; 0,008; 1,44; 1,331
7. a) 14,67 b) 65,64 c) 61,499 d) 54,712 8. 0,45 h 9. 40,1 km

10. za wędlinę, o 2,10 zł 11. a) $p = 0,45$; $d = 0,06$ b) $a = 45$; $b = 0,9$
 c) $x = 1,2$; $y = 3,7$ 12. C 13. 70 zł 14. 3
 15. a) 112,5 b) 0,108 c) 70,7 16. a) 8,4; 52 b) 13,4; 65 c) 60; 10,5
 17. 1,65 h; 99 minut 18. pan Karol: 70 m, 306,25 m²; pani Jola: 70 m, 295,36 m²
 19. a) 3; 0,85; 0,076 b) 90; 370; 4,8 c) 0,36; 0,055; 6,2

Sprawdź się! / 108

1. a) 0,07 b) 5 c) 9,5 2. D 3. a) $c = 4$ b) $a = 1,6$ 4. 3,6 cm 5. 3900 zł

5. Przybliżenia dziesiętne / 112

1. a) 47; 61; 230; 3; 89 b) 8,4; 17,1; 5,9; 2; 35,8 c) 34,037; 8,968; 7; 25,141; 48,586
 2. 0,5; 0,8; 0,5; 0,875; 0,75; 0,35; 0,12; 0,22; 0,015
 3. a) 0,2; 0,3; 0,4; 0,4 b) 0,17; 0,29; 0,44; 0,42 c) 0,167; 0,286; 0,444; 0,417
 4. a) $>$ b) $=$ c) $<$ d) $=$ 5. 0,33; $\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{3}$; 1,755; 2,333; $2\frac{1}{3}$
 6. a) 1,95 zł b) 2,93 zł c) 4,49 zł 7. C
 8. a) 0,03 zł b) 13 kg c) 12 g 9. 9,75 zł 10. B I 11. 80,85 zł

Sprawdź się! / 114

1. 0,75; 0,8; 0,4545... 2. a) 0,83 b) $\frac{3}{7}$ 3. D 4. 90,12 zł 5. 261

6. Działania na ułamkach / 117

1. a) 2; $1\frac{13}{15}$; 0,49 b) 0,9; 1; 0,0676 c) $\frac{17}{72}$; 0,041; 2,6
 2. a) 156,25; 4,75 b) 3,5; $8\frac{1}{12}$ 3. B
 4. a) $a = 0,3$; $b = \frac{2}{3}$ b) $x = 4\frac{1}{6}$; $y = 3$ c) $d = 2\frac{1}{3}$; $w = 10$ 5. 3,9 kg
 6. 28,8 cm 7. BC 8. a) 5,75 b) 2 9. B 10. $2\frac{13}{20}$ km; 2,65 km
 11. 52 razy 12. 168 13. B 14. 850,50 zł 15. a) 33,275 b) $8\frac{8}{15}$ c) 10,1
 16. 10 zł 17. 90 zł; o $\frac{1}{2}$ 18. 48 19. 6 dziewcząt i 2 chłopców; $\frac{1}{7}$

Sprawdź się! / 119

1. D 2. a) 6,25 b) 2,05 c) 2,8 d) 1,4 3. a) 7,15 b) 0
 4. a) $c = 12$ b) $z = 4,2$ 5. 105 zł; 31,50 zł

7. Droga, prędkość i czas / 123

1. a) 40 km b) 2 km 2. 240 km 3. vt 4. $54\frac{\text{km}}{\text{h}}$ 5. $\frac{s}{t}$ 6. 3 h, 5 h
 7. 90 min 8. $\frac{s}{v}$ 9. 57,75 zł 10. a) 20 000; 4 b) 60 000; 1000; 4800; 4,8
 11. fale tsunami 12. a) $111,1\frac{\text{m}}{\text{s}}$ b) 56 m c) 3 minuty 13. a) 7,5 s b) 17,6 s
 14. a) 8,8 h b) 4 h; 4 h i 48 min 15. B 16. $50\frac{\text{km}}{\text{h}}$ 17. o 270 km
 18. po 2 h, w odległości 100 km 19. 1308,15 zł 20. 360 l
 21. pana Darka 22. 2,5 h 23. pan Grzegorz

Sprawdź się! / 127

1. 4 h 2. 9 km 3. $180\frac{\text{km}}{\text{h}}$ 4. AC 5. B

Zadania utrwalające / 128

1. a) 0,024 b) 3 c) 0,3 d) 0,0026 e) 343,36 f) 107
 2. a) 2; $\frac{1}{9}$; $1\frac{23}{30}$ b) $\frac{35}{48}$; 3,25; 7,35 c) 2; $9\frac{13}{15}$; $12\frac{5}{6}$ 3. a) $\frac{37}{90}$ b) 1,59
 4. $\frac{17}{20}$; $2\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{8}$ 5. 0,83; 0,28; 0,91; 0,5 6. a) 0,14 b) 7,41 c) 18,01

7. 4550 zł 8. 22,5 km 9. a) $c = 3,25$ b) $p = 0,3$ c) $m = 0,5$
 10. a) 0,545; 0,15 b) 0,36; 0,007 c) 800; 90 11. o $2\frac{1}{4}$ m 12. 6,1 cm
 13. 23 kg 14. 2571 zł 15. 2 dziewczynki i 6 chłopców 16. 525 kg
 17. 48 zł 18. 108 19. 6,22 zł 20. 24 ha; o 6 ha

Zadania sprawdzające / 130

1. B 2. D 3. B 4. A 5. C 6. C 7. A 8. AD
 9. B 10. D 11. TAK, II 12. B 13. D 14. A 15. D

V. LICZBY WYMIERNE

1. Liczby ujemne / 134

2. a) 0; 4 b) -8; 0; -87; 4 c) $4\frac{2}{5}$; 3,7; 4 d) -8; -87; $-5\frac{3}{7}$; -32,4
 3. a) $-1\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ b) -1,5; -1,25; -0,75; -0,5; 0,5; 0,75
 6. a) -4; 5; 10 b) -0,8; 9,7; $\frac{3}{8}$ c) $6\frac{1}{4}$; -2,1; -4,6
 7. a) 1 b) 16 c) $5\frac{1}{2}$ d) 7,25 8. a) <, > b) >, < c) >, <
 9. -12; -10,2; -10,08; -9,999; -0,7; -0,077; 0; 12,89; 12,9
 10. FP 11. b) najwyższa: 5. dnia miesiąca, najniższa: 10. dnia miesiąca
 12. b) 8., 9., 10. i 11. dnia miesiąca c) 6., 12 i 13. dnia miesiąca
 d) 1. i 5. oraz 2., 3. i 4., oraz 6., 12. i 13., oraz 8., 9., 10. i 11. dnia miesiąca
 e) od 4. do 8. dnia miesiąca oraz od 13. do 14. dnia miesiąca

Sprawdź się! / 136

2. a) < b) > c) < d) < 3. C
 4. b) najwyższa: 2. dnia, najniższa: 7. dnia c) 3. i 8. 5. BC, AC, D, ABC

2. Wartość bezwzględna liczby / 139

1. a) 140; 65; 3; 0; 70; 140; najdalej od zera: -140 i 140
 b) $8\frac{1}{2}$; 3,6; $5\frac{2}{3}$; $5\frac{1}{2}$; 6,82; 4,05; najdalej od zera: $-8\frac{1}{2}$ 2. -4 i 4 oraz -10,5 i $10\frac{1}{2}$
 3. D III 5. a) <, >, = b) <, =, < c) <, =, = 6. drugie 7. -5 i 5
 8. $a = 1,2$ lub $a = -1,2$; $b = 390,4$ lub $b = -390,4$; $c = 0,11$ lub $c = -0,11$;
 $d = 88,3$ lub $d = -88,3$ 9. b) 2,4; 3,1; 2,2; 0,6; 3,9; 7,5

Sprawdź się! / 140

1. -2; $-1\frac{1}{6}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; 1; $1\frac{1}{3}$ 2. B 3. a) < b) < c) = 4. D
 5. a) 2°C; 1,6°C; 0,5°C; 0,4°C; 0°C; -0,5°C; -1°C; -1,2°C; -1,5°C; -2°C
 b) od 2. do 5. oraz od 6. do 9. c) 2. i 8., 2. i 4., 9. i 8., 9. i 4.

3. Dodawanie liczb całkowitych / 143

1. a) <, >, < b) <, >, < c) >, >, <
 2. a) -9, -23, -16 b) -11, -8, -5 c) 6, 3, 2 d) -5, 5, -44
 3. B 4. a) -12, -63 b) -8, -61 c) 3, -10 5. suma wszystkich liczb: -20
 6. $-6 + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = -11$
 8. a) 8 i -8 b) -7 i 5, 8 i -6
 c) -7 i 8, -7 i 5, -4 i 8, -4 i 5, -8 i 5, -8 i 8, 5 i 8, -6 i 8, -6 i 5

Sprawdź się! / 144

1. a) 25 b) -15 c) -41 2. a) -45 b) 2 c) 1 d) 0 3. C 4. A II

4. Odejmowanie liczb całkowitych / 146

1. a) 20, 8, 8, 20 b) -8, -20, -20, -8 c) -17, -17, 3, 3 d) 17, -3, 17, -3

2. a) 1, -11, -2, 0 b) 9, -6, -28, -56 3. a) 8 b) na 2. c) 16 pięter
 4. 250 zł 5. A 6. 62°C 7. 141°C, 17°C 8. FFP
 9. a) $a = 20$ b) $x = -4$ c) $y = -19$

Sprawdź się! / 149

1. a) -30 b) 33 c) 12 2. D 3. 11°C 4. 775 zł
 5. a) $b = -5$ b) $y = 2$ c) $x = 4$

5. Dodawanie i odejmowanie liczb wymiernych / 151

2. D 3. 16,3; 0; 0,23; $-4\frac{3}{5}$; $71\frac{1}{3}$; -25,8; przeciwnymi
 4. a) 4; -1,2 b) 1,2; -4 c) $4\frac{1}{4}$; $-1\frac{1}{4}$ d) $1\frac{1}{4}$; $-4\frac{1}{4}$
 5. a) 0,2; 3,2 b) -3,2; -0,2 c) $1\frac{1}{9}$; $3\frac{5}{9}$ d) $-3\frac{5}{9}$; $-1\frac{1}{9}$
 6. a) $4\frac{1}{6}$ b) $-3\frac{9}{40}$ c) $1\frac{3}{5}$ d) -3,5 7. a) $-\frac{5}{8}$; -3,06; -1,2 b) $-19\frac{2}{3}$; $12\frac{7}{15}$; 0
 8. a) $-18\frac{2}{3}$; 1,75; 4,45 b) -11,85; -3; $-9\frac{2}{3}$ 9. PPF
 11. a) $a = 9\frac{1}{3}$ b) $b = -6$ c) $x = 2\frac{1}{3}$ 12. 35,82°C
 13. o wschodzie: -12,4°C, o zachodzie: 12,4°C

Sprawdź się! / 153

1. a) -3,55 b) $-1\frac{3}{5}$ c) $-1\frac{5}{6}$ d) 5,375 2. A 3. 147,6°C
 4. $a = 1\frac{1}{30}$ 5. BD, C, AC

6. Mnożenie liczb całkowitych / 155

1. a) -24, -99, -98, 150 b) -48, -72, -49, -400 c) 18, 25, 42, 96
 2. a) -2, 1, -35 b) -60, 80, -60 3. D 4. a) -9, -45 b) -45, 3
 5. a) 24 jednostki b) 90 jednostek 6. a) 5°C b) -10°C
 7. a) 2500 m b) 5000 m 8. a) -30°C b) -8°C

Sprawdź się! / 157

1. a) -78, 60 b) -320, 480 2. -700 zł 3. B 4. AC, B, D, B 5. -40

7. Dzielenie liczb całkowitych / 158

1. a) -7, -7 b) 7, 8 c) -8, -5 d) -11, 0 e) -8, -170 f) -5, 30
 2. a) >, <, >, > b) <, =, <, < 3. a) >, =, =, < b) >, <, >, >
 4. 600 zł; -1200 zł, -600 zł, 0 zł 5. C 6. a) 3, -395, 0 b) -220, -49, 4
 7. pierwszego, o 27 8. AD 9. a) $a = 36$, $b = -567$, $d = 6$
 b) $x = -1$, $b = 38$, $z = 3$ c) $a = -8$, $c = 29$, $y = -5$
 10. 18 11. -3°C 13. ósmy iloraz: 1; ani pierwszą, ani złożoną

Sprawdź się! / 160

1. a) -7, -15 b) 14, -1 2. D 3. $a = 17$ 4. -5 5. $-3x + 6 = 9$; $x = -1$

8. Mnożenie i dzielenie liczb wymiernych / 163

1. a) >, <, = b) >, =, < 2. a) 6,6; -1,21 b) -0,8; 8 c) 0,42; -0,48
 3. B 4. a) 0; 2,88; -12,21; 29,04 b) $6\frac{2}{3}$; -15; -4; $\frac{1}{2}$ c) -4; $-2\frac{1}{2}$; 3; 0
 5. a) 0,6; $-\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}$; -2 c) -3,6; 6 6. a) -6,05 b) 8 c) $-4\frac{2}{3}$ d) -14
 e) -600 f) 5,1 7. a) $\frac{4}{49}$; $-\frac{27}{1000}$ b) -0,008; 0,0225 c) $-37\frac{1}{27}$; 6,25
 8. a) -2,25 b) $-\frac{1}{8}$ c) $-1\frac{9}{16}$ d) $-\frac{4}{5}$ e) -1
 9. a) 42; 4 b) $\frac{7}{16}$; $124\frac{19}{27}$ c) $-23\frac{3}{4}$; 18,5

10. -27 ; -27 ; $39,0625$; $-39,0625$; największa: $(-2,5)^4$; najmniejsza: $-2,5^4$
 11. a) $>$ b) $<$ c) $>$ d) $>$ 12. a) $y = 1,1$ b) $z = -0,1$ c) $w = -\frac{1}{6}$
 13. a) 1 b) -35 14. wartość wyrażenia: $-1,6$ 15. B, C, A

Sprawdź się! / 165

1. a) $0,2$ b) $-1\frac{1}{9}$ c) $-3\frac{3}{4}$ 2. $-1,4$ 3. FPP 4. $a = 1,5$ 5. $-32,9$

9. Działania na liczbach wymiernych / 166

1. A, B, AB, AC 2. lewa: $1,1$; dolna: $-6,4$; tylna: $-2,5$
 3. a) -14 ; $-4\frac{3}{5}$; -4 ; $1\frac{7}{12}$ b) -6 ; $-2\frac{3}{4}$; -16 ; $1\frac{1}{3}$ c) -23 ; 27 ; $0,38$; $0,8$
 4. a) $z = 51$, $b = 1\frac{1}{6}$ b) $x = -50$, $c = -1,6$ c) $z = -150$, $d = -1,8$
 5. prawdziwe: b) 6. a) mniejszy od 0 b) większy od 0 7. $4,2$

Sprawdź się! / 167

1. a) -1 b) -4 2. a) $a = -\frac{1}{3}$ b) $b = -3$ 3. $(-\frac{2}{3})^3$ 4. B
 5. $30,25 \text{ dm}^2$; $19,6875 \text{ dm}^2$; kwadratu, o $10,5625 \text{ dm}^2$

10. Liczby wymierne wokół nas / 168

1. -2056 zł 2. D 3. a) igrzyska olimpijskie b) 286 4. stracił
 5. 28 m p.p.m. (-28 m) 6. 75 7. $12000 - 8000 \text{ p.n.e.}$ 8. a) 35
 9. III lub II wiek p.n.e. 10. 4838 m 11. BD

Sprawdź się! / 171

1. igrzyska olimpijskie 2. B 3. w 852 roku p.n.e.
 4. a) Adam: 7000 zł , Barbara: -2000 zł , Danuta: $10\ 000 \text{ zł}$, Edward: 2000 zł , Feliks: -3000 zł , Grażyna: 8000 zł b) Danuta c) 3000 zł d) 9000 zł 5. C

Zadania utrwalające / 172

1. a) w Krakowie, w Lublinie, w Białymstoku, w Gdańsku
 b) -8°C , -3°C , -1°C , 0°C , 1°C , 2°C , 4°C c) 12°C
 2. $52, 85, 47, 66$ 3. $-100, -22, -78, -66$ 5. 9 ; -7 ; -5 ; $-3\frac{2}{3}$; $-5,37$
 6. a) 4 ; -4 b) 1 ; -1 c) $\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{4}$ d) $7,4$; $-7,4$ 7. a) 700 b) -450 c) 740
 10. a) 9 ; -100 ; -121 b) 27 ; -27 ; -5 c) $5,3$; $6\frac{1}{3}$; $-14\frac{2}{5}$
 11. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 1 d) -1 e) $-\frac{27}{64}$
 12. a) 0 ; 13 ; 48 ; 160 b) $-11\frac{1}{6}$; $-35,4$; $13,1$; $-2,5$
 13. a) $(\frac{3}{4})^2 - 1,9 = -1\frac{27}{80}$ b) $2,4 : (-1\frac{1}{7}) + 1\frac{1}{3} = -\frac{23}{30}$
 c) $-1,5 \cdot 2\frac{2}{3} - 1\frac{7}{8} : (-1,2) = -2\frac{7}{16}$ d) $(-\frac{1}{2})^3 + (-0,2)^2 = -\frac{17}{200}$
 14. a) $b = -5$, $p = -3$ b) $x = -3$, $d = -2$ c) $m = 4$, $y = 24$
 15. $\frac{5}{6}$ 16. a) $<$ b) $<$ 17. 182 19. 3692 zł

Zadania sprawdzające / 174

1. C I 2. B 3. C 4. B 5. D 6. B 7. A 8. C 9. D 10. C
 11. B 12. C 13. A 14. PP 15. A 16. D 17. AC 18. B

VI. POLA WIELOKĄTÓW

1. Pole czworokąta / 178

1. 2790 cm^2 2. AD 3. $1,1 \text{ cm}$ 4. pani Basi 5. C 6. 720 m^2

7. 96 cm^2 ; $9,6 \text{ cm}$ 8. 64 cm^2 , 72 cm^2 , 208 cm
 9. 8, 132 zł 10. a) kd b) $\frac{kd}{2}$ c) $\frac{k+d}{2} \cdot a$
 11. a) $\frac{2p+n}{2} \cdot n$; iloczyn, w którym pierwszy czynnik to iloraz sumy liczb $2p$ i n przez liczbę 2, a drugi to liczba n ; 21,6
 b) mp ; iloczyn liczb m i p ; 28,9 c) $\frac{n^2}{2}$; połowa kwadratu liczby n ; 8
 12. a) $18\,180\,000 \text{ m}^2$; 3220 ha ; $1\,028\,000 \text{ a}$; $113,4 \text{ km}^2$ b) $95,22 \text{ km}^2$
 13. PPFP 14. AC

Sprawdź się! / 181

1. a) 18 dm^2 b) $11,7 \text{ m}^2$ c) 32 cm^2 2. $78,3 \text{ cm}^2$ 3. A 4. 30 m 5. $3,5 \text{ cm}$

2. Pole trójkąta / 182

1. 1776 mm^2 ; $17,76 \text{ cm}^2$ 2. BC 3. 20 cm^2 4. D
 5. a) $\frac{1}{2} \cdot n \cdot m$; połowa iloczynu liczb n i m ; 17 b) $\frac{1}{2} \cdot n \cdot p$; połowa iloczynu liczb n i p ; 6,8
 c) $\frac{1}{2} \cdot p \cdot m$; połowa iloczynu liczb p i m ; 14,45
 6. 18 cm^2 7. 60 m 8. $9,6 \text{ dm}$
 9. $P_{\text{IST}} = P_{\text{LIT}} = 120 \text{ cm}^2$, $P_{\text{BIO}} = 50 \text{ cm}^2$, $P_{\text{LIO}} = 60 \text{ cm}^2$, $P_{\text{LBO}} = 10 \text{ cm}^2$, $P_{\text{LOT}} = 60 \text{ cm}^2$,
 $P_{\text{LOA}} = 48 \text{ cm}^2$, $P_{\text{AOT}} = 12 \text{ cm}^2$
 10. $P_{\text{KCA}} = 30 \text{ cm}^2$, $P_{\text{CBA}} = 24 \text{ cm}^2$, $P_{\text{COB}} = 66 \text{ cm}^2$, $P_{\text{OZB}} = 12 \text{ cm}^2$

Sprawdź się! / 184

1. $4,5 \text{ cm}^2$ 2. B 3. 5 cm , 12 cm , $4\frac{8}{13} \text{ cm}$ 5. a) 3 b) $59,94 \text{ zł}$

3. Pole dowolnego wielokąta / 187

1. trójkąty i czworokąty; $4800 \text{ mm}^2 = 48 \text{ cm}^2 = 0,48 \text{ dm}^2$ 2. $L = 58 \text{ cm}$, $P = 120 \text{ cm}^2$
 3. a) 112 cm^2 b) 162 cm^2 4. a) $L = 42 \text{ cm}$, $P = 58 \text{ cm}^2$ b) $L = 22 \text{ dm}$, $P = 31 \text{ dm}^2$
 5. a) poprawny b) poprawny 6. 12 cm^2
 8. B 9. 32 dm^2 10. równoległobok, 30 cm^2 11. $93,96 \text{ cm}^2$
 12. 33 cm^2 13. 15 cm^2 14. 270 zł 15. 144 cm^2

Sprawdź się! / 189

1. B 2. 90 dm^2 3. 104 cm^2 4. 18 cm^2 5. 80 cm^2

Zadania utrwalające / 190

1. a) $L = 2a + b = 32 \text{ cm}$, $P = \frac{1}{2}bh = 48 \text{ cm}^2$
 b) $L = 2h + 2b = 40 \text{ cm}$, $P = bh = 96 \text{ cm}^2$ c) $L = 4h = 32 \text{ cm}$, $P = h^2 = 64 \text{ cm}^2$
 2. 48 m , $302,40 \text{ zł}$ 3. 6 m 4. $P = 15,4 \text{ cm}^2$, $L = 19 \text{ cm}$ 5. $42,5 \text{ cm}^2$
 6. 6016 cm^2 7. 56 8. 62 m^2
 9. $P_{\text{SBA}} = 6 \text{ cm}^2$, $P_{\text{BCA}} = 3 \text{ cm}^2$, $P_{\text{SCA}} = 9 \text{ cm}^2$, $P_{\text{CWA}} = 7,5 \text{ cm}^2$, $P_{\text{CDW}} = 4,5 \text{ cm}^2$,
 $P_{\text{DOW}} = 6 \text{ cm}^2$, $P_{\text{COW}} = 10,5 \text{ cm}^2$
 10. a) 68 cm^2 b) 16 cm^2 11. 12; $223,20 \text{ zł}$
 12. o wymiarach: $2,2 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$; o 111 zł 13. nie

Zadania sprawdzające / 192

1. C 2. D 3. B 4. D 5. D 6. A 7. C
 8. D, AC, B 9. A I 10. C 11. B

VII. PROCENTY

1. Ułamki o mianowniku 100 / 196

1. a) 140%, 8%, 35% b) 1%, 28%, 60% c) 120%, 104%, 225%
2. a) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{23}{25}$, $1\frac{3}{4}$ b) 0,15; 2,25; 0,38; 0,6; 0,55
3. dziewczęta: 75%, chłopcy: 25%
4. na niebiesko: 30%, na fioletowo: 60%, na zielono: 10%
5. historyczne: 45%, przyrodnicze: 30%, przygodowe: 25% 6. 15% 7. 18
8. na żółto: $\frac{1}{4}$; 0,25; 25%; na fioletowo: $\frac{3}{10}$; 0,3; 30%; na zielono: $\frac{1}{5}$; 0,2; 20%;
na niebiesko: $\frac{1}{10}$; 0,1; 10%; na pomarańczowo: $\frac{3}{20}$; 0,15; 15% 9. D
10. a) 50% b) 200% c) o 100% 11. a) 50% b) o 100% 12. 900%; o 800%

Sprawdź się! / 197

1. C 2. a) 80%, 36% b) 9%, 42% c) 130%, 305%
3. $\frac{2}{5}$, 40% 4. 200%; o 100% 5. drzewa iglaste: 40%, drzewa liściaste: 25%, krzewy: 35%

2. Obliczanie procentu danej liczby / 200

1. a) 10, 50 b) 100, 250 c) 2, 75 d) 4,25; 42,05 2. D 3. 60 zł; 240 zł
4. lodówka: 200 zł mniej, zmywarka: 320 zł mniej, robot kuchenny: 80 zł mniej; 600 zł; nie
5. 836 zł; bez różnicy 6. 50 kg 7. a) równe b) 10% liczby 95
8. opłaty domowe: 800 zł, koszty utrzymania: 1600 zł, nieprzewidziane wydatki: 320 zł
9. B II 10. a) 82,50 zł b) 256 zł c) 36 zł

Sprawdź się! / 201

1. A 2. 224 zł 3. 1512 zł 4. a) 10 b) 8 5. trochę więcej niż 1440 zł

3. Zadania z procentami / 206

1. 64 2. o 50% 3. 25% 4. 375 zł 5. C
6. Warszawa: o 110 000 osób, Petersburg: o 218 000 osób; o 100% 7. o 0,75 kg
8. a) 200 b) 1000 c) 24 d) 160 9. o 300 zł; 25% 10. 1030 zł
11. w hurtowni: 240 zł, w sklepie: 300 zł 12. 35 m³ 13. A 14. 4200 zł

Sprawdź się! / 208

1. 1200 2. 10 3. a) 45% b) 60% 4. A II 5. BD

4. Diagramy procentowe / 212

1. a) celujący z matematyki: 8% uczniów, niedostateczny z j. polskiego: 12% uczniów
2. matematyka: celujący 4 uczniów, bardzo dobry 5 uczniów, dobry 25 uczniów,
dostateczny 10 uczniów, dopuszczający 6 uczniów, niedostateczny 0 uczniów;
j. polski: celujący 0 uczniów, bardzo dobry 6 uczniów, dobry 15 uczniów, dostateczny 20
uczniów, dopuszczający 3 uczniów, niedostateczny 6 uczniów
3. a) najwyższą: 10. dnia, najniższą: 6. dnia b) 3. i 8. dnia
c) od 2. do 6. oraz od 10. do 14. dnia
4. a) 10% b) 80% c) 90%; podczas uczestnictwa; o 60 p.p.
5. a) 25% b) 25% c) 50% d) 75%
7. a) w Austrii, w Finlandii, w Niemczech, w Szwecji b) Francja, Polska, W. Brytania
c) o 5 p.p. 8. 40 g, 220 g 9. w 5. miesiącu 10. o 400 g 11. o 400%
12. 20% 13. 0,52a; 14,30 zł 14. AD 16. a) 3 razy b) 3 razy
17. 4 razy 18. a) o 300% b) o 300 %
20. a) 275, 380, 320, 230 b) nr 4 c) 50% 21. NIE, II

Sprawdź się! / 217

1. lojalność: 6a 40%, 6b 35%, uczciwość: 6a 10%, 6b 50%, pomysłowość 6a 20%, 6b 5%,
życzliwość: 6a 30%, 6b 10% 2. C 3. 12 4. 7 600 000
5. b) rosła: od 3. do 6. dnia oraz od 8. do 9. dnia; była stała: od 1. do 2. dnia oraz od 6.
do 8. dnia c) $0,6^{\circ}\text{C}$

Zadania utrwalające / 218

1. 40%, 15%, 75%, 200%, 110%, 35%, 12% 2. 0,1; 0,75; 0,05; 1,5; 0,3
3. $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{9}{20}$, $3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 4. a) 25% b) 75% c) 35%
5. a) 1 dag; 150 dag b) 0,5 zł; 1,30 zł c) 40 cm; 7,5 cm d) 10 m, 24 m
7. 3 8. a) 0; 4 b) -8; 0; -87; 4 c) $4\frac{2}{5}$; 3,7; 4 d) -8; -87; $-5\frac{3}{7}$; -32,4
9. 7500 zł 10. 16 11. 120° ; kąt KOS: ostry, kąt MAK: rozwarty
12. chłopcy: 50%, dziewczęta: 40% 13. o 5 p.p.; 150% 14. o 50% 15. 39

Zadania sprawdzające / 220

1. C 2. A 3. D 4. B III 5. D 6. A 7. B 8. A II 9. A

VIII. FIGURY PRZESTRZENNE

1. Graniastosłupy proste / 225

1. sześcián: I, prostopadłościány: I, III, IV 2. 5 ścian 3. D
4. 10 cm; długość krawędzi w skali: 2 cm 5. 10 cm
6. III; I – graniastosłup trójkątny, II – graniastosłup pięciokątny, IV – graniastosłup
czworokątny
7. graniastosłup trójkątny, $4a + 2b + 3h$ 8. C 9. C
10. a) graniastosłup trójkątny b) graniastosłup czworokątny
c) całość obiektu: graniastosłup pięciokątny, część obiektu: graniastosłup trójkątny,
graniastosłup czworokątny
11. B
12. a) sześcián b) prostopadłościán o kwadracie w podstawie
c) graniastosłup o trójkącie równobocznym w podstawie
13. D
14. a) graniastosłup czworokątny c) 8 wierzchołków, 12 krawędzi, 6 ścian,
4 ściany boczne
15. a) graniastosłup czworokątny o równoległoboku w podstawie
b) graniastosłup sześciokątny o podstawie sześciokąta
c) graniastosłup czworokątny o rombie w podstawie
d) graniastosłup ośmiokątny
16. A 17. 201,60 zł

Sprawdź się! / 228

1. C
2. graniastosłup czworokątny o kwadracie w podstawie; zielone krawędzie – równoległe
3. krawędź sześciánu: 4 cm, wysokość graniastosłupa trójkątnego: 10 cm
4. siedmiokątem
5. wysokość graniastosłupa: 6 cm

2. Pole powierzchni graniastosłupa / 230

1. 96 cm^2 2. $P_c = 62\text{ cm}^2$ 4. C

5. a) $P_b = 4mp$, $P_c = 4mp + 2m^2$ b) $P_b = ah + bh + ch$, $P_c = ah + bh + ch + ab$
 c) $P_b = 2ch + 2dh$, $P_c = 2ch + 2dh + 2cd$
 6. 32 7. 576 cm^2 ; kwadratami lub rombami 8. 20 m^2 9. 124 zł 10. C
 11. C II 12. a) biała: 6 puszek, zielona: 7 puszek b) 886,30 zł
 13. a) graniastosłupa ośmiokątnego b) 32,3 m; $834,632 \text{ m}^2$

Sprawdź się! / 232

1. $10\,400 \text{ cm}^2 = 104 \text{ dm}^2$ 2. D 3. sześcian, o 54 cm^2 4. 40 cm^2 5. 66

3. Objętość prostopadłościanu / 237

2. a) 96 cm^3 b) 288 cm^3 c) 27 cm^3
 3. a) 216 cm^3 b) 1000 dm^3 c) 125 m^3 4. B 5. 96 cm , 490 cm^3
 6. mniejszą 7. B 8. a) 900; 0,45 b) 0,053; 150 c) 75; 6000
 9. 4500 cm^3 10. 20 dm 11. D 12. a) 4 cm b) 10 cm c) 8 cm
 13. 16 14. 343 15. 343 dm^3 16. 192 l 17. 6 cm 18. 2000

Sprawdź się! / 239

1. 1331 cm^3 2. 60 dm^3 3. D 4. woda w akwarium 5. 300

4. Ostrosłupy / 241

1. III; I – ostrosłup czworokątny, II – ostrosłup trójkątny, IV – ostrosłup czworokątny
 3. B 4. C 5. ostrosłup sześciokątny
 6. trójkątem 7. 12 krawędzi, 7 wierzchołków 9. 10
 10. a) ostrosłup trójkątny o trójkącie równobocznym w podstawie; czworościan foremny b) ostrosłup czworokątny o prostokącie w podstawie
 11. a) $4(k + d)$ b) $6m$

Sprawdź się! / 244

2. B III 3. długość krawędzi bocznych: 6 cm
 4. długość krawędzi bocznych: 6 cm 5. pięciokąt

5. Bryły obrotowe / 248

1. walca, stożka, kuli 4. D 5. walec, stożek 6. walec, stożek
 7. A. NIE, I; B. NIE, IV; C. TAK, II; D. NIE, III 8. a) walca b) stożka c) kuli
 9. D 11. D

Sprawdź się! / 251

1. a) kula b) stożek c) walec 2. PPF 5. tak

Zadania utrwalające / 252

1. 1 – graniastosłup trójkątny, 2 – walec, 3 – ostrosłup czworokątny, 4 – stożek, 5 – prostopadłościan, 6 – kula
 2. a) graniastosłup czworokątny, prostopadłościan 3. $P_c = 128 \text{ cm}^2$, $V = 96 \text{ cm}^3$
 4. sześcian: $12p$, $6p^2$, p^3 ; prostopadłościan: $4(n + a + m)$, $2(na + nm + am)$, nam
 6. graniastosłup sześciokątny
 7. a) 70; 160; 6 b) 2000; 0,2; 400 c) 3,5; 0,65; 500
 8. a) 100 dm^3 b) 1 hl c) $0,1 \text{ m}^3$ d) 100 000 ml 9. 1728 cm^3 10. 2
 11. 1 dm 12. a) walec b) stożek 14. ostrosłup czworokątny 16. 144 cm^3

Zadania sprawdzające / 254

1. A 2. BC, D, A 3. C 4. D 5. B 6. B II
 7. C 8. D 9. A 10. C

Źródła fotografii i ilustracji

Okładka: s. 1 (truskawka) photomaru/iStock Photo/Getty Images, (kratka) Valerio Rosati/EyeEm/Getty Images

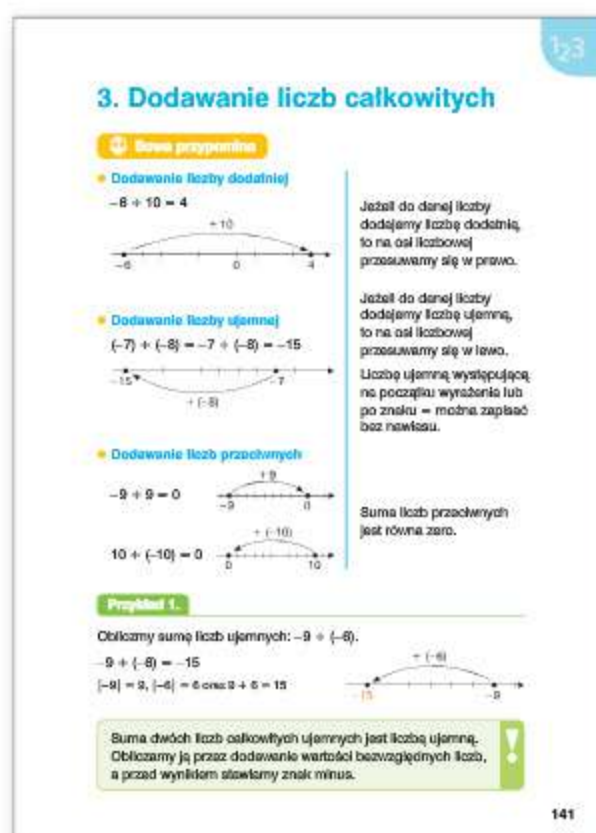
Tekst główny: s. 7 (leba) Agnieszka i Włodek Bilińscy; s. 8 (siłownia) rumka_vodki/Shutterstock.com; s. 9 (chłopiec) Lisa F. Young/Shutterstock.com; s. 11 (parking) ART.SOLO/Shutterstock.com; s. 15 (Alchwarizmi) dbimages/Alamy/BE&W, (papież Sylwester II) AKG/East News, (książki) Incomible/Shutterstock.com; s. 19 (Euklides) Hulton Archive/Getty Images; s. 22 (miś) Sagittarius_13/Shutterstock.com; s. 24 (rowerzyści) GoodStudio/Shutterstock.com; s. 25 (kręgle) Strejman/Shutterstock.com; s. 27 (opakowanie na cukierki) Pack/Shutterstock.com, (cukierki po lewej) Ruth Black/Shutterstock.com, (cukierki po prawej) ViktoriyaFivko/Shutterstock.com; s. 28 (grindwał) bekirevren/Shutterstock.com; s. 29 (owoce) dariatasheva/Shutterstock.com, (turyści) Olena Viktorova/Shutterstock.com; s. 30 (Fudzi) warasit photothisuk/Shutterstock.com, (żółw) Victor1153/Shutterstock.com; s. 31 (most) Mark Runde/Shutterstock.com; s. 32 (Big Ben) ESB Professional/Shutterstock.com; s. 33 (Księżyc) Damian Jableka/WSiP; s. 34 (pociąg) Tommy Alven/Shutterstock.com; s. 35 (siatkarz) OSTILL is Franck Camhi/Shutterstock.com; s. 36 (płetwał błękitny) Konstantin G/Shutterstock.com; s. 38–39 (wszystkie postacie i przedmioty) tynyuk/Shutterstock.com; s. 43 (buty jasne) Anna Klepatckaya/Shutterstock.com, (buty ciemne) perfectlab/Shutterstock.com; s. 44 (serwetka) maksimee/Shutterstock.com; s. 45 (czekolada) Drozhzhina Elena/Shutterstock.com; s. 51 (jabłko) GSDesign/Shutterstock.com, (awokado) Maks Narodenko/Shutterstock.com, (koperty) filuykusu/Shutterstock.com; s. 52 (pileczki) Africa Studio/Shutterstock.com, (rakietka) inxti/Shutterstock.com; s. 53 (popcorn) M. Unal Ozmen/Shutterstock.com; s. 57 (kartki) Aga Es/Shutterstock.com; s. 64 (wyrak upiór) Igor Tichonow/Shutterstock.com; s. 66 (motyl) romm/Shutterstock.com; s. 67 (Cytadela – Brama Straceń) Agnieszka i Włodek Bilińscy, (Grób Nieznanego Żołnierza) Gmurczyk/BE&W; s. 68 (kalejdoskop) Helena Lewicka; s. 79 (drzewo) CorelDRAW X7/Shutterstock.com, (kot) Tunsale Ismaylova/Shutterstock.com; s. 90 (liść) Valentina Razumova/Shutterstock.com, (fontanna) Katerina Kreker/Shutterstock.com, (biedronka) 3DMI/Shutterstock.com, (Wieża Eiffla) Engineer studio/Shutterstock.com, (motyl) Lotus_studio/Shutterstock.com, (wycinanka) lliveinocober/Shutterstock.com; s. 91 (twarz kobiety) IKO-studio/Shutterstock.com, (Tadź Mahal) AlexAnton/Shutterstock.com; s. 95 (rulon papieru) OlgaChernyak/Shutterstock.com; s. 98 (samochód) Rawpixel.com/Shutterstock.com; s. 99 (konfitura) Pixel-Shot/Shutterstock.com; s. 101 (Poznań) PAP/Adam Ciereszko, s. 103 (tunel żeglugowy) Belle Vue/Alamy Stock Photo/BE&W; s. 108 (samochód) Nerthuz/Shutterstock.com; s. 113 (Archimedes) Public domain; s. 114 (most) Andrey Tirakhov/Shutterstock.com, (motocyklista) Oleksandr Lysenko/Shutterstock.com; s. 117 (niedźwiedź) Volodymyr Burdiak/Shutterstock.com; s. 118 (woda) rangizzz/Shutterstock.com, (krewetka) Reimar/Shutterstock.com, (jeźowiec) Sean Lema/Shutterstock.com, (rozgwiazda) RonaldL/Shutterstock.com, (ukwiał) Natalia Fedori/Shutterstock.com, (rower) Pavel Shchukin/Shutterstock.com; s. 119 (konfitura) Anna Kucherova/Shutterstock.com; s. 120 (samochód) LeManna/Shutterstock.com; s. 121 (biegacz) OSTILL is Franck Camhi/Shutterstock.com; s. 122 (Sandomierz) Nahlik/Shutterstock.com; s. 123 (pociąg) Oleksiy Mark/Shutterstock.com, (Katowice) Curioso.Photography/Shutterstock.com; s. 124 (rowerzystka) Romariolen/Shutterstock.com, (żaglica) wildestanimal/Shutterstock.com, (sokół) Alen thien/Shutterstock.com; s. 125 (lew) Eric Isselee/Shutterstock.com, (Bydgoszcz) Tomasz Guzowski/Shutterstock.com; s. 126 (kombajn) My Portfolio/Shutterstock.com, (traktor) handsomepictures/Shutterstock.com, (gwiazdy) nienora/Shutterstock.com; s. 127 (Wałbrzych) Haidamac/Shutterstock.com, (tornado) Todd Shoemake/Shutterstock.com; s. 128 (tuńczyk) Anna L. e Marina Durante/Shutterstock.com; s. 130 (stoń morski) Zaruba Ondrej/Shutterstock.com; s. 131 (rekin) Katja Tsvetkova/Shutterstock.com, (aniołek) Ulrike Stein/Shutterstock.com; s. 135 (monety) wk1003mike/Shutterstock.com; s. 147 (Dolina Śmierci) Radoslaw Lecyk/Shutterstock.com; s. 149 (Hala Ornak) MrMR/Shutterstock.com; s. 153 (Sahara) alex7370/Shutterstock.com, (Antarktyda) Stu Shaw/Shutterstock.com; s. 156 (samolot) IM_photo/Shutterstock.com; s. 157 (termometr) zedspider/Shutterstock.com; s. 160 (chłopak) Pixel-Shot/Shutterstock.com; s. 165 (dziewczyna) Dean Drobot/Shutterstock.com; s. 167 (kostka) xtock/Shutterstock.com; s. 169 (Grecja) Ververidis Vasilis/Shutterstock.com, (Biskupin) franka555/Shutterstock.com, (Kopiec kujawski) Lartos_82/Shutterstock.com; s. 170 (Mont Blanc) macumazahn/Shutterstock.com; s. 171 (monety) I. Pilon/Shutterstock.com; s. 175 (Kasprowy Wierch) Bartosz Zakrzewski/Shutterstock.com; s. 179 (szkółka leśna) Meryll/Shutterstock.com; s. 180 (Zamość) Curioso.Photography/Shutterstock.com; s. 181 (Królestwo Polskie) Adrian Bergiel; s. 185 (latawiec) Aleksandra/Shutterstock.com; s. 190 (kwiaty) Chansom Pantip/Shutterstock.com; s. 191 (gobelin) Eliza Goszczyńska; s. 195 (wiśnie) Shulevskyy Volodymyr/Shutterstock.com; s. 197 (pociąg) Denis Belitsky/Shutterstock.com, (ludzik) chuckchee/Shutterstock.com; s. 199 (dziewczyna z torbami) Roman Samborskyi/Shutterstock.com, (sukienka) Vlad Teodor/Shutterstock.com; s. 200 (narty) Ryszard Piątkowski/WSiP; s. 201 (kurtka) Artem Avetisyan/Shutterstock.com, (marynarka) Elnur/Shutterstock.com, (rękawiczki) Diana Taliun/Shutterstock.com; s. 203 (baner) KindlenaShutterstock.com, (elementy do baneru) chanut iamnoy/Shutterstock.com; s. 206 (kondor) MartaKwiatkowska/Shutterstock.com; s. 208 (sadzonka) FotoHelin/Shutterstock.com; s. 213 (makulatura) beccarra/Shutterstock.com; s. 214 (dorsz) slowmotiongli/Shutterstock.com; s. 215 (samochód) JuliusKielaitis/Shutterstock.com, (gleba) Mariusz Szubert/WSiP; s. 218 (czosnek i papryka) Fedor Selivanov/Shutterstock.com; s. 219 (sok) gresei/Shutterstock.com, (owoce) Tartila/Shutterstock.com; s. 220 (warzywa) GoodStudio/Shutterstock.com, (owoce) Tartila/Shutterstock.com; s. 222 (dzień z życia dziewczynki) MicroOne/Shutterstock.com, (sałatka) Katy Flaty/Shutterstock.com; s. 223 (dziewczynka z motylkiem, chłopiec z piłką) MicroOne/Shutterstock.com, (talerz) Aquarius Studio/Shutterstock.com, (udko kurczaka) seksan wangjaisuk/Shutterstock.com, (orzechy) digieye/Shutterstock.com, (fasola) Superheang168/Shutterstock.com, (jajka) siloto/Shutterstock.com, (żółty ser) Karamazov Brother/Shutterstock.com, (makaron) Thirteen/Shutterstock.com, (chleb) Eivaisla/iStockphoto/Getty Images, (porzeczkę) Nataliia Pyzhova/Shutterstock.com, (jabłko, szparagi) StudioPhotoDFlorez/Shutterstock.com, (wiśnia, malina, jagoda) MaraZe/Shutterstock.com, (truskawka) Pektoral/Shutterstock.com, (nasiona w miseczkach) Prostock-studio/Shutterstock.com, (nasiona na kupce) Svetlana Lukienko/Shutterstock.com, (pomidor, marchewka) Valentina Razumova/Shutterstock.com, (bułka) Gerisima/Shutterstock.com, (kapusta czerwona) Kaiskynet Studio/Shutterstock.com, (jarmuż) Binh Thanh Bui/Shutterstock.com, (sałata) Peter Hermes Furian/Shutterstock.com, (cytryna) Valentyn Volkov/Shutterstock.com, (łosoś) Smit/Shutterstock.com, (cebula) Albo003/Shutterstock.com, (papryka) Anna Minsk/Shutterstock.com, (brokuł) Volosina/Shutterstock.com, (gruszka) Kyselova Inna/Shutterstock.com; s. 226 (dom) uygargundayphotography/Shutterstock.com, (paczki) mama_mia/Shutterstock.com, (szklarnia) Casa Media/Shutterstock.com; s. 231 (oranżeria) Snowshill/Shutterstock.com, (puszki)

horiyan/Shutterstock.com; s. 232 (Mysia Wieża) Renata i Marek Kosińscy; s. 233 (czajniczek i filiżanka) master24/Shutterstock.com; s. 234 (zapałki) Eliza Goszczyńska; s. 235 (waga) Piotr Kubat/fotoputto.com/WSiP, (stoik) Grażyna Bryk/WSiP, (odważnik) Ingram Publishing/ThETA; s. 236 (dziecko w baseniku) Helena Lewicka; s. 239 (pudełko) Eliza Goszczyńska; s. 243 (wieża kościoła) 2009fotofriends/Shutterstock.com, (zamek w Szwajcarii) PixHound/Shutterstock.com, (Alhambra) S.Borisov/Shutterstock.com, (budynek w San Francisco) Z.H.CHEN/Shutterstock.com; s. 244 (piramida) givaga/Shutterstock.com; s. 245 (szklanka) Grażyna Bryk/WSiP, (kapelusz) Miao/Shutterstock.com, (piłka) Ingram Publishing/ThETA, (taniec z ogniem) Katrina Brown/Shutterstock.com; s. 247 (wirująca moneta) Wojciech Wójtowicz/WSiP, (globus) Central Stock/ThETA; s. 248 (drzewa walce) a9photo/Shutterstock.com, (drzewo: kula, stożek, walec) paul prescott/Shutterstock.com, (drzewa kule) Buturimov Pavlo/Shutterstock; s. 249 (kokos) Helena Lewicka, (chata afrykańska) Media Union/Shutterstock.com; s. 252 (dziewczyna z bryłami) Helena Lewicka; s. 253 (wielbłąd) AzizAlbagshi/Shutterstock.com; s. 257 (butelka 1 l) Mr. Kaizer/Shutterstock.com

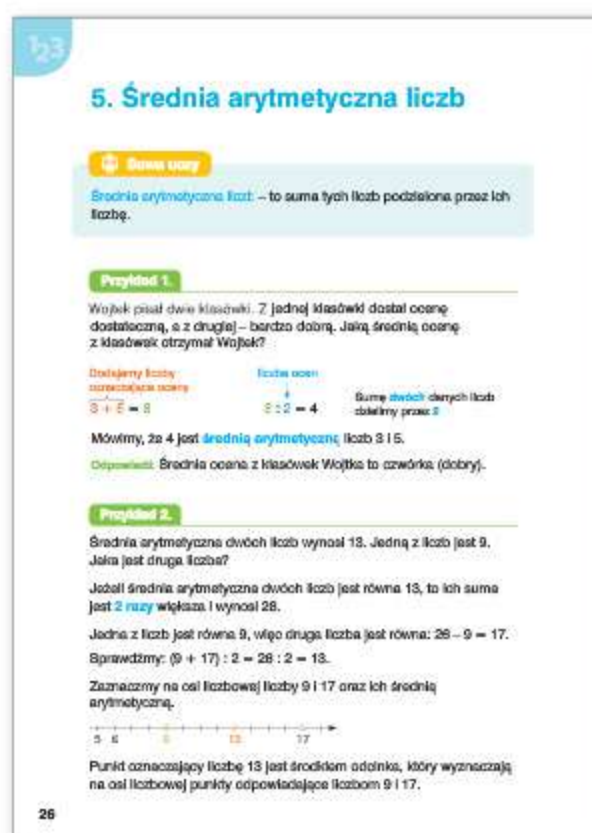
Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że podjęły starania mające na celu dotarcie do właścicieli i dysponentów praw autorskich zamieszczonych utworów. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, przytaczając w celach dydaktycznych utwory lub fragmenty, postępują zgodnie z art. 27¹ ustawy o prawie autorskim. Jednocześnie Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że są jedynym podmiotem właściwym do kontaktu autorów tych utworów lub innych podmiotów uprawnionych w wypadkach, w których twórcy przysługuje prawo do wynagrodzenia.

Matematyka wokół nas

O podręczniku



Przypomnienie wiadomości na początku tematu porządkuje je i utrwala.



Dobrze wyjaśnione pojęcia matematyczne umożliwiają samodzielną naukę.



Przykłady rozwiązane krok po kroku pomagają w zrozumieniu tematu.



Duża liczba zadań różnych typów pomaga wyćwiczyć wymagane umiejętności.



Ciekawostki matematyczne zachęcają do nauki matematyki.



Zadania utrwalające przygotowują do sprawdzianów.