

NOWOŚĆ
2024

MATEMATYKA W PUNKT



Oznaczono
zmiany
i wykreślenia

E-book
na eduranga.pl

PODSTAWA
2024



Podręcznik
Szkola podstawowa

5

Drogi WSiP,

Nigdy bym nie publikowała publicznie książek wydawnictw, które działają na uczciwych zasadach.

Wasza firma jednak promuje masowy dodruk, całkowicie niepotrzebnych książek, które mogłyby być zastąpione wersjami elektronicznymi!

Co prawda e-booki są dostępne na waszej stronie, jednak:

- W przeciwieństwie do fizycznej książki, licencja na e-book kończy się po roku. Oznacza to, że jeżeli moja córka chciałaby powtórzyć sobie całą wiedzę do matury, musiałabym jej kupić wszystkie wasze książki od nowa.
- Waszych e-booków nie da się pobrać! Wymagają one dostęp do internetu, co uniemożliwia ich użycie na naszej wsi, gdzie zasięg jest ograniczony.
- Wasze e-booki nie działają na telefonach komórkowych!
- Wasze e-booki sprzedawane są po tej samej (albo wyższej) cenie co regulame książki. Cena e-booka powinna być niższa, gdyż e-booki wymagają elektronicznego czytnika (tabletu)!

Czas rozpocząć nową erę, w której papier nie jest bezczelnie marnowany dla pieniędzy.

Przedstawiam e-book, który spełnia wszystkie oczekiwania uczniów.

Dbajmy o środowisko, zróbmy to dla młodych pokoleń.

Spis treści

Jak korzystać z podręcznika	6
-----------------------------------	---

Dział I. W świecie działań na liczbach

1. Działania pamięciowe	8
2. Kolejność wykonywania działań	12
3. Dodawanie i odejmowanie pisemne	15
4. Mnożenie pisemne	19
5. Dzielenie pisemne	25
6. Zadania tekstowe	29
Podsumowanie działu I	32

Dział II. W świecie własności liczb naturalnych

1. Cechy podzielności przez 2, 5, 10, 100 i 4	38
2. Cechy podzielności przez 3 i 9	43
3. Dzielniki	47
4. Liczby pierwsze i złożone	51
5. Rozkład liczby na czynniki pierwsze	55
6. Największy wspólny dzielnik	59
7. Najmniejsza wspólna wielokrotność	64
Podsumowanie działu II	69

Dział III. W świecie figur płaskich

1. Wzajemne położenie prostych i odcinków	76
2. Odległość punktu od prostej	80
3. Kąty	84
4. Kąty przyległe i wierzchołkowe	88
5. Jednostki długości	93
6. Skala	97
Podsumowanie działu III	101

Dział IV. W świecie wielokątów

1. Wielokąty	108
2. Trójkąty	112
3. Miary kątów w trójkątach	117
4. Prostokąty	122
5. Równoległoboki	126
6. Miary kątów w równoległobokach	131
7. Trapezy	135
8. Miary kątów w trapezach	140
9. Klasyfikacja czworokątów	144
Podsumowanie działu IV	149

Dział V. W świecie ułamków zwykłych

1. Ułamki zwykłe i liczby mieszane	156
2. Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika	160
3. Porównywanie ułamków	164
4. Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach	168
5. Dodawanie i odejmowanie ułamków o różnych mianownikach	172
6. Mnożenie ułamków	177
7. Dzielenie ułamków	182
8. Ułamek liczby naturalnej	187
9. Zadania tekstowe	192
Podsumowanie działu V	195

Dział VI. W świecie pól wielokątów

1. Pole prostokąta	202
2. Jednostki pola	206
3. Pole równoległoboku	210
4. Pole trójkąta	215
5. Pole trapezu	220
6. Pola wielokątów	224
Podsumowanie działu VI	229

Dział VII. W świecie ułamków dziesiętnych

1. Ułamki zwykłe a dziesiętne	236
2. Ułamki dziesiętne i wyrażenia dwumianowane	240
3. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych	244
4. Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000... ..	248
5. Mnożenie ułamków dziesiętnych	253
6. Dzielenie ułamków dziesiętnych	258
7. Zadania tekstowe	263
Podsumowanie działu VII	267

Dział VIII. W świecie liczb całkowitych

1. Liczby całkowite	274
2. Dodawanie liczb całkowitych	278
3. Odejmowanie liczb całkowitych	283
4. Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych	288
Podsumowanie działu VIII	293

Dział IX. W świecie figur przestrzennych

1. Figury przestrzenne	300
2. Prostopadłościany i ich siatki	304
3. Pole powierzchni prostopadłościanu	310
4. Graniastosłupy proste i ich siatki	314
5. Pole powierzchni graniastosłupa	320
6. Ostrosłupy proste i ich siatki	325
Podsumowanie działu IX	331

Odpowiedzi	337
------------------	-----



treści usunięte wg podstawy programowej 2024



Pamiętasz nas? Jestem Bruno!



Ela!



Pola.



Kuba.



Cezary!



A ja jestem Zosia.

Jak korzystać z podręcznika

W trakcie lekcji



Odkrywaj!

Ten moduł wprowadza w temat lekcji.



Analizuj!

Ten moduł zawiera przykłady zagadnień poruszanych podczas lekcji.



Tu znajdziesz definicje i ważne treści matematyczne, które przydadzą ci się w dalszej nauce.

Poćwicz!

1. Różnorodne zadania związane z omawianymi zagadnieniami.



2. Zadania nietypowe i o wyższym stopniu trudności.



3. Zadania zespołowe, wycinanki, gry matematyczne itp.



4. Zadania, które można rozwiązać z użyciem kalkulatora.

W dymkach znajdziesz wskazówki, które pomogą ci ominąć trudności.



A to ciekawe

Informacje w takich ramkach poszerzą twoją wiedzę i zachęcą cię do dalszych badań.

Sprawdź, co umiesz!

Trzy krótkie zadania podsumowujące lekcję.

Na koniec działu

Powtórz wiadomości

Najważniejsze zagadnienia.

Poćwicz przed sprawdzianem

Zadania powtórzeniowe.

Podejmij wyzwanie

Zadania mające formę zagadki.

Wykorzystaj w praktyce

Wiedza matematyczna na co dzień.

Pamiętaj! Rozwiązania zadań zapisuj w zeszycie przedmiotowym.

DZIAŁ

W ŚWIECIE DZIAŁAŃ NA LICZBACH

Jaką długość ma
droga z moło
w Brzeźnie
do moło w Orłowie
i z powrotem?

Czy pokonanie jej
rowerem może
zająć mi mniej niż
5 kwadransów?

Najniżej położone miejsce
na trasie znajduje się
na wysokości 2 m n.p.m.
Na jakiej wysokości
znajduje się najwyżej
położone miejsce?



1 • Działania pamięciowe

► Jak sprawnie wykonywać w pamięci dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb wielocyfrowych?



Analizuj!

Bruno i Kuba przygotowują razem referat. Postanowili zilustrować go fotografiami. Bruno zrobił 99 zdjęć, a Kuba – 72. Wszystkie fotografie zapisali na komputerze Kuby w folderze REFERAT. Ile zdjęć znalazło się w tym folderze? Jak to obliczyć?

Sposób 1

$$99 + 72 = 90 + 9 + 70 + 2 = 160 + 11 = 171$$

Sposób 2

$$99 + 72 = 99 + 1 + 71 = 100 + 71 = 171$$

Sposób 3

$$99 + 72 = 90 + 9 + 10 + 62 = 100 + 71 = 171$$

Sposób 4

$$99 + 72 = 100 - 1 + 72 = 172 - 1 = 171$$

W folderze REFERAT znalazło się 171 zdjęć.



Chłopcy usunęli 88 zdjęć z folderu REFERAT. Ile ich zostało w folderze? Jak to obliczyć?

Sposób 1

$$171 - 88 = 100 + 71 - 88 = 12 + 71 = 83$$

Sposób 2

$$171 - 88 = 171 - 71 - 17 = 100 - 17 = 83$$

Sposób 3

$$171 - 88 = 171 - 100 + 12 = 71 + 12 = 83$$

Sposób 4

$$171 - 88 = (171 + 12) - (88 + 12) = 183 - 100 = 83$$

W folderze REFERAT zostały 83 zdjęcia.



Pola i Zosia podczas wakacji odwiedziły fokarium. Podczas prelekcji dowiedziały się, że jedna foka zjada do 9 kg śledzi dziennie. Ile maksymalnie kilogramów śledzi należałoby przygotować dla 17 fok? Jak to obliczyć?

Sposób 1

$$17 \cdot 9 = 10 \cdot 9 + 7 \cdot 9 = 90 + 63 = 153$$

Sposób 2

$$17 \cdot 9 = 17 \cdot 3 \cdot 3 = 51 \cdot 3 = 153$$

Dla 17 fok należałoby przygotować maksymalnie 153 kg śledzi.



Śledzie dostarczane są do fokarium w pojemnikach. W każdym pojemniku znajdują się 4 opakowania zawierające po 4 ryby. Ile ryb znajduje się w 4 pojemnikach? W jaki sposób można zapisać obliczenia?

Sposób 1 – za pomocą mnożenia

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Sposób 2 – za pomocą potęgowania

$$4^3 = 64$$

W 4 pojemnikach znajdują się 64 ryby.



Przyjmijmy, że 5 średniej wielkości śledzi waży 1 kg. Ile kilogramów śledzi przygotowano na popołudniowe karmienie fok, jeśli w pojemniku znajduje się 160 śledzi? Jak to obliczyć?

Sposób 1

$$160 : 5 = 100 : 5 + 60 : 5 = 20 + 12 = 32$$

Sposób 2

$$160 : 5 = 160 : 10 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$$

Na popołudniowe karmienie fok przygotowano 32 kg śledzi.

Twoja kolej! Oblicz sumę liczb 68 i 96, różnicę liczb 250 i 98, iloczyn liczb 24 i 8 oraz iloraz liczb 540 i 5. Wybierz najwygodniejszy dla siebie sposób postępowania albo zaproponuj własny.



Poćwicz!

1. Oblicz w pamięci. W jaki sposób możesz sprawdzić poprawność swoich rachunków?

a) $25 + 63$

b) $54 + 36$

c) $87 - 65$

d) $97 - 27$

e) $38 + 43$

f) $68 + 37$

g) $92 - 28$

h) $100 - 57$

i) $230 + 560$

j) $780 + 290$

k) $550 - 320$

l) $710 - 360$

2. Oblicz w pamięci, a następnie zapisz w zeszycie wyniki w porządku rosnącym, dopisz odpowiadające im litery i odczytaj hasło.

$9 \cdot 3$

R

$47 \cdot 2$

Ż

$52 : 4$

U

$85 : 5$

I

$28 \cdot 4$

N

$24 \cdot 5$

I

$87 : 3$

Ó

$96 : 8$

S

$83 \cdot 6$

C

$74 \cdot 8$

A

$96 : 6$

A

$98 : 7$

M

3. Oblicz w pamięci i zapisz wyniki w zeszycie. Sprawdź poprawność rachunków na kalkulatorze. Ile przykładów udało ci się rozwiązać bezbłędnie?

a) $87 + 99$

b) $124 + 98$

c) $281 + 97$

d) $178 - 99$

e) $382 - 98$

f) $574 - 97$

g) $540 + 999$

h) $1347 - 998$

i) $999 + 998 + 997$

4. Oblicz w pamięci, a następnie zapisz w zeszycie kolejne obliczenia.

a) $123 \cdot 3$

b) $220 \cdot 4$

c) $150 : 5$

d) $380 : 4$

e) $4100 \cdot 9$

f) $12\,000 \cdot 5$

g) $81\,000 : 9$

h) $16\,000 : 8$

5. Oblicz.

a) 8^2

b) 9^2

c) 4^3

d) 6^3

e) 3^5

f) 2^0

g) 0^9

h) 1^7

6. Ile wynosi reszta z dzielenia podanych liczb?

a) $87 : 4$

b) $97 : 9$

c) $87 : 7$

d) $325 : 8$

e) $430 : 7$

f) $650 : 8$

Oto mój sposób na obliczenie reszty z dzielenia 57 przez 6. Najpierw sprawdzam, ile razy 6 mieści się w 57.

$$6 \cdot 8 = 48 \quad 6 \cdot 9 = 54 \quad 6 \cdot 10 = 60$$

Potem sprawdzam, ile brakuje do 57.

$$57 - 54 = 3$$

To oznacza, że $57 : 6 = 9 \text{ r } 3$, czyli reszta wynosi 3.



7. Podczas wakacji Japończycy często wędrują po swoim kraju, a na pamiątkę odwiedzenia niektórych miejsc zbierają pieczętki. Midori zebrała 160 pieczętek, a Fumiko – aż 800.
- Ile pieczętek łącznie zebrały dziewczynki?
 - O ile pieczętek więcej zebrała Fumiko od Midori?
 - Ile razy mniej pieczętek zebrała Midori niż Fumiko?



8. Oblicz:
- różnicę największej liczby trzycyfrowej oraz trzeciej potęgi liczby 3,
 - iloczyn liczby 600 oraz liczby 30 razy od niej mniejszej,
 - sumę różnicy liczb 94 i 59 oraz ilorazu liczb 145 i 5.



9. Ela dostała z okazji urodzin ilustrowane siedmiotomowe wydanie *Opowieści z Narnii*. Wszystkie tomy cyklu przeczytała w ciągu 15 dni. Jeśli Ela dziennie czytała 95 stron, to ile stron łącznie mają wszystkie części *Opowieści z Narnii*?



Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż wszystkie prawdziwe równości.

A. $320 + 490 = 810$

B. $68 : 8 = 64 \text{ r } 4$

C. $271 - 69 = 202$

D. $34 \cdot 3 = 102$

E. $5^3 = 625$

F. $72 : 4 = 18$

2. Gra komputerowa *Podbój Makemake* kosztuje 240 zł i jest trzykrotnie droższa niż jej wersja planszowa. Do gry planszowej przewidziany jest też dodatek, którego cena jest o 30 zł niższa niż cena gry planszowej. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Dodatek do gry planszowej jest 8 razy tańszy od gry komputerowej.	P	F
Gra planszowa wraz z dodatkiem kosztuje 130 zł.	P	F

3. Do pracowni przyrodniczej zamówiono 9 globusów. Każdy kosztował 68 zł.

- Ile będzie trzeba zapłacić za zamówione globusy?
- Na zakup globusów przeznaczono 700 zł. Czy można by zamówić o jeden globus więcej?

2. Kolejność wykonywania działań

- ▶ Jak obliczać zgodnie z kolejnością wykonywania działań?
- ▶ Jak postępować, gdy w nawiasie znajduje się nawias?



Analizuj!

Wykonywanie działań w określonej kolejności ma duże znaczenie w przypadku bardziej złożonych wyrażeń arytmetycznych.

1 W pierwszej kolejności wykonaj **działania w nawiasach**.

[()]

2 Jeśli nie ma nawiasów, najpierw wykonaj **potęgowanie**.

a^2

3 **Mnożenie** i **dzielenie** to działania równorzędne. Wykonuj je w kolejności występowania.

· :
· :
· :

4 **Dodawanie** i **odejmowanie** to działania równorzędne. Wykonuj je w kolejności występowania.

+ -
+ -
+ -

Po wykonaniu wszystkich obliczeń w nawiasach okrągłych **zastąp nawias kwadratowy nawiasem okrągłym**.

$$[(18 - 16)^3 \cdot 7 + 12] : 4 =$$

$$= (2^3 \cdot 7 + 12) : 4 =$$

$$= (8 \cdot 7 + 12) : 4 =$$

$$= (56 + 12) : 4 =$$

$$= 68 : 4 = 17$$

Jeśli potęgowanie nie znajduje się w nawiasach, to potęgowanie i działania w nawiasach można wykonywać równolegle.

$$11^0 - (10 - 4) : 2 + 7 = 1 - 6 : 2 + 7$$

Zawsze można stosować prawa przemienności dodawania i mnożenia.

Twoja kolej! Oblicz wartość wyrażenia:
 $5 \cdot [(81 - 9) : 6 + 7^0]$.



Poćwicz!

1. Przepisz przykłady do zeszytu i wykonaj obliczenia. Na każdym etapie rozwiązania podkreśl działanie, które wykonasz w pierwszej kolejności.

a) $63 - 13 + 7$

b) $34 + 6 : 2$

c) $(26 + 14) : 4$

d) $5 \cdot (8 + 7)$

e) $4 \cdot 9 : 3$

f) $90 : 9 + 1$

g) $4^2 + 2 \cdot 6$

h) $(87 - 79)^2 : 8$

i) $7^2 - (3^3 + 4^2)$

2. Przyporządkuj litery do wartości kolejnych wyrażeń, aby dowiedzieć się, jak po angielsku zapisać temat tej lekcji.

$15 + 25 \cdot 2 - 20$ **E**

$(23 + 17) : 4 \cdot 2$ **N**

$6 \cdot (15 - 6) + 1$ **I**

$8 \cdot 5 + 10 : 5$ **F**

$(2 + 1)^2 + 15 \cdot 6 : 9$ **O**

$100 - (4 \cdot 5 + 3 \cdot 8) : 2$ **D**

$51 + 3 \cdot 6 + 80 : 8$ **P**

$72 : 9 + 3 + 2 \cdot 8$ **R**

$(78 - 4^2) : 2 + 10$ **T**

$52 - 4 \cdot 12 : 6 + 2$ **A**

$(15 - 12)^3 \cdot 2 + 13 \cdot 3$ **S**

19	27	78	45	27

19	42

19	79	45	27	46	41	55	19	20	93

3. Oblicz.

a) $(73 + 27) : 10^2 + 800 : 80$

b) $(870 - 530) \cdot (542 - 442) : 10^3$

c) $60 \cdot [(9^2 + 3 \cdot 7) : 6 + 13]$

d) $(4200 : 600 + 20^2 + 31 \cdot 3) : 25$

e) $1999 + 72 \cdot 8 - (72 + 8 \cdot 2) \cdot 2$

f) $360 : [60 \cdot 150 - (9 - 7)^2 \cdot 10^3]^0$

4. Zapisz wyrażenie za pomocą symboli matematycznych i oblicz jego wartość.

a) Podwojona różnica liczb 43 i 17.

b) Suma różnicy liczb 56 i 14 oraz ilorazu liczb 45 i 9.

c) Kwadrat sumy liczb 3 i 2 pomniejszony o 8.

5. Kuba kupił mamie kwiaty z okazji jej urodzin: cztery czerwone róże, dwie żółte róże oraz trzy tulipany. Dodatkowo poprosił o ozdobną wstążkę. Ile reszty otrzymał Kuba, jeśli podał sprzedawcy sześć banknotów dziesięciozłotowych? Zapisz rozwiązanie za pomocą jednego wyrażenia arytmetycznego i wykonaj obliczenia.



6 zł/szt.



7 zł/szt.



4 zł/szt.



5 zł/szt.

6. We wrześniu mama Brunona opłaciła rachunek za prąd w wysokości 108 zł oraz fakturę za telefon, która była trzy razy niższa niż rachunek za prąd. Za wydaną łącznie kwotę mogłaby opłacić pół roku dostępu do platformy filmowej. Ile wynosi miesięczna opłata za tę platformę? Zapisz rozwiązanie za pomocą jednego wyrażenia arytmetycznego i wykonaj obliczenia.



7. Jaki znak należy wstawić w miejsce ♥, aby równość była prawdziwa?

a) $4 \cdot (19 \heartsuit 14 : 7) = 68$

b) $2^2 + 72 : (2 \heartsuit 4) = 13$

c) $6^2 + 14 \heartsuit 2 + 4 \cdot 5 - 1^7 = 62$

d) $[(7 \cdot 7 + 17^0) : 10 \heartsuit 29] \cdot 4 = 136$



8. Ela pomyślała pewną liczbę. Zwiększyła ją trzykrotnie, a potem do otrzymanego wyniku dodała 12. Tę sumę pomniejszyła o 20. Uzyskaną różnicę zmniejszyła czterokrotnie. W wyniku tych operacji Ela otrzymała liczbę 10. O jakiej liczbie pomyślała Ela?

Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż wartość wyrażenia $68 - 18 : 2 + 4 \cdot 5$.

A. 145

B. 39

C. 79

D. 315

2. Oblicz.

a) $9^2 - 55 : 5 + 66 : 2^1$

b) $57 - (8 \cdot 7 + 4^2) : 2$

c) $(5^2 + 45) : 5 + (3 + 2)^2 \cdot 10^0$

d) $[102 - (6 + 19 \cdot 2^3 : 2)] : 5 \cdot 4$

3. Dany jest odcinek o długości 18 cm. Jakiej długości odcinek otrzymasz, jeśli skrócisz go trzy razy, za każdym razem o 2 cm, następnie odcinek otrzymany w wyniku tych operacji przedłużysz o 8 cm i na koniec nowy odcinek pięciokrotnie zmniejszysz? Zapisz kolejne operacje matematyczne za pomocą jednego wyrażenia arytmetycznego i wykonaj obliczenia.

3. Dodawanie i odejmowanie pisemne

- ▶ Jak dodawać sposobem pisemnym więcej niż dwie liczby wielocyfrowe?
- ▶ Jak odejmować sposobem pisemnym z wielokrotnym pożyczaniem?



Analizuj!

Organizatorzy wojewódzkiego konkursu programistycznego dla szkół podstawowych postanowili, że laureat konkursu otrzyma robota edukacyjnego oraz dwie części *Poradnika młodego programisty*. Jaką wartość ma ta nagroda?

449 zł



165 zł



207 zł



1 $9 + 5 + 7 = 21$

21 jedności to **2 dziesiątki** i **1 jedność**, więc **1 zapisz w rzędzie jedności**, a **2 dopisz do rzędu dziesiątek**.

2 $2 + 4 + 6 + 0 = 12$

12 dziesiątek to **1 setka** i **2 dziesiątki**, więc **2 zapisz w rzędzie dziesiątek**, a **1 dopisz do rzędu setek**.

3 $1 + 4 + 1 + 2 = 8$

Wartość nagrody dla laureata wynosi 821 zł.

W pierwszym etapie konkursu wzięło udział 4009 uczniów. Do drugiego etapu zostało zakwalifikowanych 1286 uczniów. Ilu uczniów nie przeszło do drugiego etapu konkursu?

$$\begin{array}{r} 4009 \\ - 1286 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \quad 9 - 6 = 3$$

$$2 \quad 0 - 8$$

$$3 \quad 0 - 2$$

$$4 \quad 4 - 1$$



Aby wykonać odejmowanie w rzędach dziesiątek i setek, zastosuj pożyczanie.

$$1 \text{ T} = 10 \text{ S}$$

$$1 \text{ S} = 10 \text{ D}$$

$$1 \text{ D} = 10 \text{ J}$$

Pożycz z rzędu tysięcy $1 \text{ T} = 10 \text{ S}$.

W rzędzie tysięcy zostanie 3 T .

W rzędzie setek znajdzie się 10 S .

$$\begin{array}{r} 3 \quad 10 \\ \cancel{4} \quad \cancel{0} \quad 0 \quad 9 \\ - 1286 \\ \hline \end{array}$$

Możesz skreślić w odjemnej 4 i 0 i zapisać nad nimi nowe wartości: 3 i 10 .

Pożycz z rzędu setek $1 \text{ S} = 10 \text{ D}$.

W rzędzie setek zostanie 9 S .

W rzędzie dziesiątek znajdzie się 10 D .

$$\begin{array}{r} \quad 9 \\ 3 \quad \cancel{10} \quad 10 \\ \cancel{4} \quad \cancel{0} \quad \cancel{0} \quad 9 \\ - 1286 \\ \hline \end{array}$$

Możesz skreślić w odjemnej 10 i 0 i zapisać nad nimi nowe wartości: 9 i 10 .

$$\begin{array}{r} \quad 9 \\ 3 \quad \cancel{10} \quad 10 \\ \cancel{4} \quad \cancel{0} \quad \cancel{0} \quad 9 \\ - 1286 \\ \hline 2 \quad 7 \quad 2 \quad 3 \end{array}$$

$$1 \quad 9 - 6 = 3$$

$$2 \quad 0 - 8$$

$$3 \quad 0 - 2$$

$$4 \quad 4 - 1$$

$$10 - 8 = 2$$

$$9 - 2 = 7$$

$$3 - 1 = 2$$

Do drugiego etapu nie przeszło 2723 uczniów.



Oblicz sumę i różnicę liczb 30 087 i 9725.

Poćwicz!

1. Oblicz sposobem pisemnym.

- a) $362 + 637$ b) $2186 + 584$ c) $10\,584 + 9466$
d) $299\,679 + 32\,186$ e) $2015 + 8479 + 948$ f) $7\,890\,342 + 58\,295 + 100\,004$

2. Oblicz sposobem pisemnym. Wykonaj sprawdzenie za pomocą dodawania.

- a) $795 - 624$ b) $2624 - 2453$ c) $8162 - 547$
d) $5008 - 3679$ e) $20\,007 - 10\,589$ f) $406\,008 - 99\,999$

3. Kuba i Zosia rywalizują w grze w kulki. Oto ich statystyki z czerwca, lipca i sierpnia.

- a) Ile punktów Zosia zdobyła łącznie w ciągu tych trzech miesięcy? Ile punktów zdobył Kuba?
b) Kto zdobył więcej punktów w ciągu tych trzech miesięcy – Zosia czy Kuba? O ile więcej?

Zosia	Kuba
czerwiec 209	czerwiec 241
lipiec 563	lipiec 258
sierpień 479	sierpień 487

4. Pluton, którego średnica ma około 2376 km długości, został odkryty w 1930 r. W 2006 r. Międzynarodowa Unia Astronomiczna odebrała mu status planety.

- a) Ile lat Pluton był uznawany za planetę?
b) O ile kilometrów długość średnicy Plutona jest mniejsza od długości średnicy Ziemi, która ma około 12 742 km długości?

5. Oto wybrane produkty z gazetki promocyjnej sklepu Podwodny Świat.

- a) Pan Mariusz kupił płetwy, maskę i strój do nurkowania po przecenie, a pani Maria, tydzień wcześniej, przed przeceną. O ile więcej zapłaciła pani Maria za swoje zakupy?
b) Pan Bartosz chce kupić maskę do nurkowania i aparat do robienia zdjęć pod wodą. Ma na koncie 1000 zł. Jaka kwota zostanie mu po zakupach?
c) Pani Iza kupiła dwie pary płetw i dwie maski do nurkowania. Ile banknotów i w jakich nominałach mogła podać sprzedawcy, jeśli otrzymała 24 zł reszty?



6. W zamieszczonej obok tabeli podano tytuły filmów oraz przychód ze sprzedanych biletów na dzień 12.04.2023.

Tytuł	Rok produkcji	Przychód (w dolarach)
<i>Król Lew</i>	2019	1 662 899 439
<i>Kraina Lodu</i>	2013	1 281 508 100
<i>Kraina Lodu II</i>	2019	1 450 026 933
<i>Toy Story 4</i>	2019	1 073 394 593

- a) Które przychody z biletów były większe: z filmu *Kraina Lodu* czy *Kraina Lodu II*?
- b) O ile dolarów więcej przychodu uzyskano z filmu *Król Lew* niż z filmu *Toy Story 4* (czytaj: toj stori for)?

7. Biblioteka Narodowa w Warszawie jest największą biblioteką w Polsce. Na koniec 2019 r. jej zbiory główne liczyły 8 147 462 publikacje, a zbiory specjalne, m.in. rękopisy, nuty i mapy, 1 537 650 publikacji. Na koniec 2020 r. w zbiorach biblioteki znalazły się łącznie 9 855 394 publikacje.

- a) O ile liczniejsze były zbiory główne od zbiorów specjalnych w 2019 r.?
- b) Ile publikacji dostarczono do biblioteki w 2020 r.?



8. Kryptarytm to łamigłówka polegająca na zastępowaniu liter cyframi w taki sposób, aby liczby, które powstaną, tworzyły poprawne działanie. Jednej literze odpowiada jedna cyfra, a różnym literom odpowiadają różne cyfry. Rozwiąż zamieszczony obok kryptarytm. Podaj wszystkie możliwości.

		O	K	O	
	+	O	K	O	
		N	O	S	

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz sposobem pisemnym.

- a) $363 + 232$ b) $363 - 232$ c) $10\,309 + 7952$
d) $10\,309 - 7952$ e) $300\,008 - 9219$ f) $16\,099 + 4465 + 2\,771\,008$

2. O ile suma liczb 8723 i 5908 jest większa od ich różnicy?

- A. 11 814 B. 11 816 C. 12 224 D. 11 406

3. Największym jeziorem na świecie jest Morze Kaspjskie. Jego powierzchnia wynosi obecnie około $371\,800\text{ km}^2$. Drugim największym jeziorem świata jest Jezioro Górne, którego powierzchnia jest o $289\,390\text{ km}^2$ mniejsza od powierzchni Morza Kaspjskiego. Największe jezioro w Polsce – Śniardwy – zajmuje powierzchnię około 113 km^2 . O ile kilometrów kwadratowych większe od jeziora Śniardwy jest Jezioro Górne, a o ile – Morze Kaspjskie?

4. Mnożenie pisemne

- ▶ Jak mnożyć pisemnie przez liczby wielocyfrowe?
- ▶ Jak mnożyć pisemnie liczby wielocyfrowe zakończone zerami?



Odkrywaj!

1. Cezary organizuje przyjęcie urodzinowe, na które zaprosił 18 osób. Postanowiliśmy wspólnie podarować mu kolejną część jego ulubionej gry z serii *Podbój Makemake*. Każdy z zaproszonych gości wpłacił 17 zł. Ile kosztuje ta gra?

Sposób 1: można wykonać obliczenia „po kawałku” w pamięci.

$$17 \cdot 18 = 17 \cdot 10 + 17 \cdot 8 = 170 + 136 = 306$$

Sposób 2: można wykonać obliczenia „po kawałku” sposobem pisemnym.

		1	7	
	.		1	0
		1	7	0

		5		
		1	7	
	.		8	
		1	3	6

		1		
		1	7	0
	+	1	3	6
		3	0	6

Sposób 3: można wykonać obliczenia pisemne w jednym słupku.

			5		
			1	7	
	.		1	8	
		1	3	6	
	+	1	7	0	
		3	0	6	



Jak myślisz, w jaki sposób wykonano to mnożenie?



Analizuj!

Za udział w klasowej wycieczce do planetarium każdy uczeń musi zapłacić 35 zł. Jaką kwotę musi zebrać skarbnik od grupy liczącej 27 osób?

1			
		3	
		2	7
	.	3	5
		1	3
			5

- 1 Wykonaj **mnożenie przez cyfrę jedności**.

$$5 \cdot 7 = 35$$

35 jedności to **3 dziesiątki** i **5 jedności**, więc **5 zapisz w rzędzie jedności** pod kreską, a **3 zachowaj w pamięci**, aby wykorzystać przy mnożeniu w następnym kroku.

$$5 \cdot 2 + 3 = 13$$

13 dziesiątek to **1 setka** i **3 dziesiątki**.

2			
		2	
		3	
		2	7
	.	3	5
		1	3
			5
		8	1
			0

- 2 Wykonaj **mnożenie przez cyfrę dziesiątek**.

$$3 \cdot 7 = 21$$

1 zapisz w rzędzie dziesiątek pod kreską, a **2 zachowaj w pamięci**.

$$3 \cdot 2 + 2 = 8$$

8 zapisz w rzędzie setek.

3			
		2	
		3	
		2	7
	.	3	5
		1	3
			5
		8	1
			0
	+		
		9	4
			5

Zauważ, że **mnożenie przez cyfrę dziesiątek** wykonuje się w ten sam sposób, co **mnożenie przez cyfrę jedności**, z tym że kolejne cyfry zapisuje się z przesunięciem o jedną kratkę (na wysokości cyfry dziesiątek). Pod cyfrą jedności można od razu wpisać 0.

- 3 Dodaj otrzymane wyniki.

$$135 + 810 = 945$$

Skarbnik musi zebrać 945 zł.



LOTERIA SZCZĘŚCIARZ

168 losów gwarantuje wygraną w wysokości 124 zł!
120 losów gwarantuje wygraną w wysokości 240 zł!
75 losów gwarantuje wygraną w wysokości 3600 zł!



Jaką kwotę przeznaczono na nagrody, z których każda wynosi 124 zł?

Na etapie dodawania kolejnych iloczynów **liczbę, którą należy dodać po przekroczeniu progu dziesiątkowego, można zapamiętać albo dopisać** – jak przy dodawaniu pisemnym.

Na nagrody w wysokości 124 zł przeznaczono 20 832 zł.

			1	1	
			2	3	
			1	6	8
			·	1	2
				4	
				1	6
				7	2
				3	3
				6	0
				1	6
				8	0
				0	0
				2	0
				8	3
				2	

Jaką kwotę przeznaczono na nagrody w wysokości 240 zł?

Zauważ, że $120 \cdot 240 = 12 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 10 = 12 \cdot 24 \cdot 100$.

			1	2	0
			·	2	4
				0	0
				4	8
				2	4
				0	0
				2	8
				8	0
				0	0

Oddziel zera.

Po wykonaniu obliczeń dopisz oddzielone zera.

Na nagrody w wysokości 240 zł przeznaczono 28 800 zł.

Jaką kwotę przeznaczono na wszystkie nagrody?



Poćwicz!

1. Oblicz sposobem pisemnym. Zadbaj o właściwy zapis.

a) $324 \cdot 8$

b) $2419 \cdot 7$

c) $9 \cdot 3176$

d) $22 \cdot 14$

e) $332 \cdot 13$

f) $511 \cdot 52$

2. Oblicz sposobem pisemnym. Zadbaj o właściwy zapis.

a) $19 \cdot 15$

b) $184 \cdot 22$

c) $708 \cdot 39$

d) $7204 \cdot 48$

e) $125 \cdot 304$

f) $2659 \cdot 706$

3. Oblicz sposobem pisemnym. Zadbaj o właściwy zapis.

a) $5600 \cdot 17$

b) $2400 \cdot 190$

c) $34\,200 \cdot 430$

d) $61\,900 \cdot 7800$

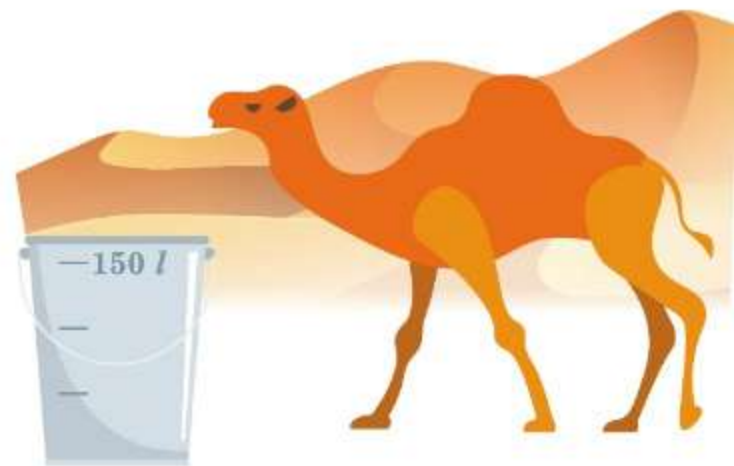
e) 260^3

f) $93\,400^2$

4. Wielbłąd jednogarbny może wypijać jednorazowo nawet 150 l wody i pokonywać 86 km dziennie.

a) Ile kilometrów maksymalnie może pokonać w ciągu tygodnia wielbłąd jednogarbny?

b) Ile najwięcej litrów wody może jednorazowo wypić 18 takich wielbłądów?



5. Pani Joanna chce kupić regał na zbiór płyt winylowych. Regał Alfa ma 14 półek, a każda z nich pomieści 28 płyt. Regał Beta ma 16 półek, na każdej z nich zmieszczą się 23 płyty. Na którym regale można ustawić więcej płyt? O ile płyt więcej?

6. Cezary i Bruno korzystają z aplikacji, która monitoruje czas spędzony na oglądaniu filmów online. We wrześniu Cezary oglądał filmy przez 12 godzin, Bruno – o dwie godziny więcej.

a) Ile megabajtów (MB) zużył we wrześniu każdy z chłopców, jeśli Cezary odtwarzał filmy w jakości 720p, a Bruno – w jakości 480p?

Jakość odtwarzania	480p	720p
Zużycie MB na 1 min	9 MB	32 MB

b) Czy któryś z chłopców potrzebował dodatkowego pakietu danych, jeśli obaj korzystają z pakietu 10 gigabajtów (GB), a $1\text{ GB} = 1024\text{ MB}$?

7. Za jedną noc w pokoju pięcioosobowym w pensjonacie Marzenie trzeba zapłacić 196 zł od osoby dorosłej i o 76 zł mniej od dziecka. Wyżywienie jest płatne dodatkowo za każdy dzień pobytu – 85 zł w przypadku osób dorosłych i 59 zł w przypadku dzieci. Ile państwo Nowakowie zapłacą za cały pobyt, jeśli zamówili 14 noclegów oraz wyżywienie na 13 dni?

Cel podróży / nazwa obiektu

Pensjonat Marzenie

Od

poniedziałek 1 lipca 2024

Do

poniedziałek 15 lipca 2024

Pobyt: 2 tygodnie

2 dorosłych / 3 dzieci / 1 pokój

Szukaj

Pokaż na mapie

Zarezerwuj teraz

Bardzo dobry **9,2**

Miejsce położone blisko wspaniałej plaży. Cisza i spokój. Bardzo miły personel. Pyszne posiłki.

Klaudia Polska

8. Na lotnisku w Chicago (czytaj: szikago) w 2019 r. wykonano najwięcej lądowań i startów na świecie. Gdyby każdego dnia lądowało tam bądź startowało tyle samo samolotów, to liczba tych operacji lotniczych wykonywanych dziennie wyniosłaby 2520.
- a) Ile takich operacji wykonano by w kwietniu?
- b) Ile takich operacji wykonano by w ciągu roku? Rozważ dwa przypadki.

9. Przeanalizuj dane w tabeli i odpowiedz na pytania.

Produkt	Cena
Zestaw brył	259 zł za zestaw
Przybory geometryczne do tablic	639 zł za komplet
Tablica multimedialna	3799 zł
Laptop	2945 zł

- a) Ile trzeba zapłacić za 15 zestawów brył oraz 3 komplety przyborów geometrycznych do tablic?
- b) Czy 18 000 zł wystarczy na zakup 2 tablic multimedialnych, 3 laptopów i 2 kompletów przyborów geometrycznych? Jaka kwota zostanie albo jakiej kwoty zabraknie?
- c) Czy 80 000 zł wystarczy na zakup 26 laptopów i jednej tablicy multimedialnej? Jaka kwota zostanie albo jakiej kwoty zabraknie?

10. Oblicz wartość wyrażenia i zapisz wynik słownie.

a) $1607^2 - 32^3$

b) $(19\,034 - 17\,999)^2 - 64^3$

c) $(1180 : 5)^3$



A to ciekawe

Mnożyć pisemnie można nie tylko w słupku. Sprawdź, jak mnożyć metodą przekątnych.

Aby obliczyć $174 \cdot 38$, należy zapisać odpowiednio liczby, a następnie kolejno pomnożyć:

1 i **3** (dostajemy 0 dziesiątek i 3 jedności),

7 i **3** (dostajemy 2 dziesiątki i 1 jedność),

4 i **3** (dostajemy 1 dziesiątkę i 2 jedności),

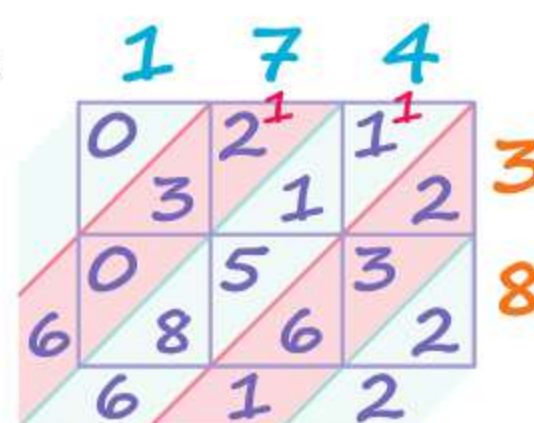
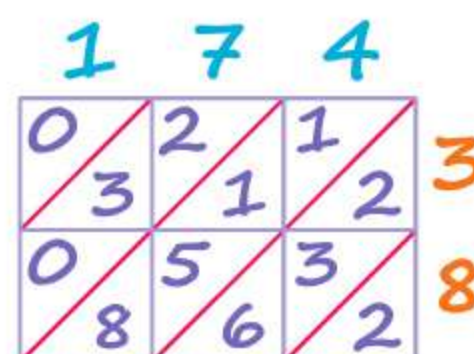
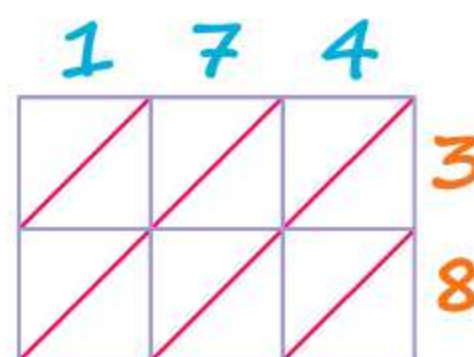
1 i **8** (dostajemy 0 dziesiątek i 8 jedności),

7 i **8** (dostajemy 5 dziesiątek i 6 jedności),

4 i **8** (dostajemy 3 dziesiątki i 2 jedności).

Potem trzeba zsumować liczby w kolejnych pasach, zaczynając od prawej strony. Jeśli wynik w pasie jest równy 10 lub większy od 10, należy zapisać pod pasem jedności, a dziesiątki przenieść do kolejnego pasa (rzędu). Na koniec pozostaje odczytać wynik od lewej do prawej: **6612**.

Czy potrafisz wyjaśnić przedstawiony tutaj sposób mnożenia dwóch liczb? Oblicz metodą przekątnych $21 \cdot 13$ oraz $136 \cdot 43$.



Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $465 \cdot 13$

b) $207 \cdot 194$

c) $36\,400 \cdot 120$

d) $617\,000 \cdot 320$

2. Kuba każdego dnia poświęca 45 minut na naukę angielskich słówek. Ile minut łącznie poświęcił na naukę w lipcu i sierpniu?

A. 1395 min

B. 1350 min

C. 2700 min

D. 2790 min

3. W wakacje, podczas półkolonii, grupa złożona z 27 uczniów i 3 opiekunów wybrała się do parku rozrywki. Ile zapłacono za wstęp tej grupy, jeśli dla każdego ucznia kupiono bilet ulgowy, a dla każdego opiekuna bilet normalny?

BILET JEDNODNIOWY

	Sezon wysoki*	Sezon niski
Normalny	189 zł	179 zł
Ulgowy	140 zł	130 zł

* Sezon wysoki – wakacje i święta

5. Dzielenie pisemne

- ▶ Jak dzielić pisemnie przez liczby wielocyfrowe?
- ▶ Jak dzielić pisemnie liczby wielocyfrowe zakończone zerami?



Analizuj!

W grze planszowej *Łącz siły!* trzeba działać razem, aby osiągnąć sukces. Czterech graczy zdobyło wspólnie 18 400 punktów. Ile punktów zostanie zapisanych na koncie każdego z tych graczy, jeśli zdobyte punkty zostaną podzielone między nich po równo?

			4	6	0	0	
	1	8	4	0	0	:	4
-	1	6					
		2	4				
-		2	4				
			0				



- 1 Ile razy liczba 4 mieści się w liczbie 1? Zero. A ile razy w liczbie 18?

$$18 : 4 = 4 \text{ r } 2$$

$$4 \cdot 4 = 16$$

$$18 - 16 = 2$$

- 2 $24 : 4 = 6 \text{ r } 0$

$$6 \cdot 4 = 24$$

$$24 - 24 = 0$$



- 3 Gdy **wynikiem** ostatniego **odejmowania** jest 0, a **w dzielnej zostały tylko zera**, **dopisz te zera do wyniku** nad kreską.

Na koncie każdego z graczy zostanie zapisanych 4600 punktów.

Porównaj zamieszczone obok oferty sprzedaży trzypokojowych mieszkań. Czy cena za metr kwadratowy mieszkania na osiedlu Biała Łąka jest taka sama jak na osiedlu Zielone Wzgórze? Sprawdź to – podziel cenę za mieszkanie przez jego powierzchnię.



3 POKOJE
Osiedle Biała Łąka



Powierzchnia: **71 m²**
Cena: **656 750 zł**



OKAZJA!
Mieszkanie na osiedlu Zielone Wzgórze



3 pokoje
Cena: **8000 zł/m²**

$$\begin{array}{r}
 9250 \\
 656750 : 71 \\
 - 639 \\
 \hline
 177 \\
 - 142 \\
 \hline
 355 \\
 - 355 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

1 $656 : 71 = 9 \text{ r } 17$

$9 \cdot 71 = 639$

$656 - 639 = 17$

2 $177 : 71 = 2 \text{ r } 35$

$2 \cdot 71 = 142$

$177 - 142 = 35$

3 $355 : 71 = 5 \text{ r } 0$

$5 \cdot 71 = 355$

$355 - 355 = 0$

- 4 Wynikiem ostatniego odejmowania jest 0. Ponieważ **w dzielnej zostało jedno 0**, a iloraz liczby 0 i dowolnej liczby różnej od 0 jest równy 0, **dopisz jedno 0 do wyniku**.

Ceny za metr kwadratowy mieszkania na obu osiedlach są różne: cena na osiedlu Zielone Wzgórze wynosi 8000 zł, a na osiedlu Biała Łąka – 9250 zł.



W 2023 r. w Bydgoszczy za nowe mieszkanie o powierzchni 63 m² trzeba było zapłacić średnio 576 450 zł. Ile wynosiła cena za 1 m²?

Poćwicz!

1. Oblicz sposobem pisemnym i wykonaj sprawdzenie za pomocą mnożenia.

a) $46\,200 : 3$

b) $3\,328\,000 : 4$

c) $345\,600 : 6$

d) $1512 : 12$

e) $12\,810 : 15$

f) $28\,944 : 24$

2. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $8053 : 11$

b) $44\,877 : 15$

c) $50\,240 : 21$

d) $38\,007 : 18$

e) $112\,256 : 32$

f) $600\,150 : 25$

g) $58\,300 : 30$

h) $87\,000 : 2100$

i) $105\,320 : 1500$

Jeśli dzielna i dzielnik są zakończone zerami, **skreśl w obu liczbach jednakową liczbę zer** i dopiero wykonaj dzielenie.

$$365\,000 : 500 = 3650 : 5$$



3. Za 14 takich samych regałów do biblioteki zapłacono 10 332 zł. Ile kosztował jeden regał?

A. 737 zł

B. 738 zł

C. 739 zł

D. 748 zł

4. Pan Tomasz i pan Michał kupili po 12 krzeseł. Pan Tomasz zapłacił za swój zakup 1980 zł, a pan Michał – 1872 zł. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

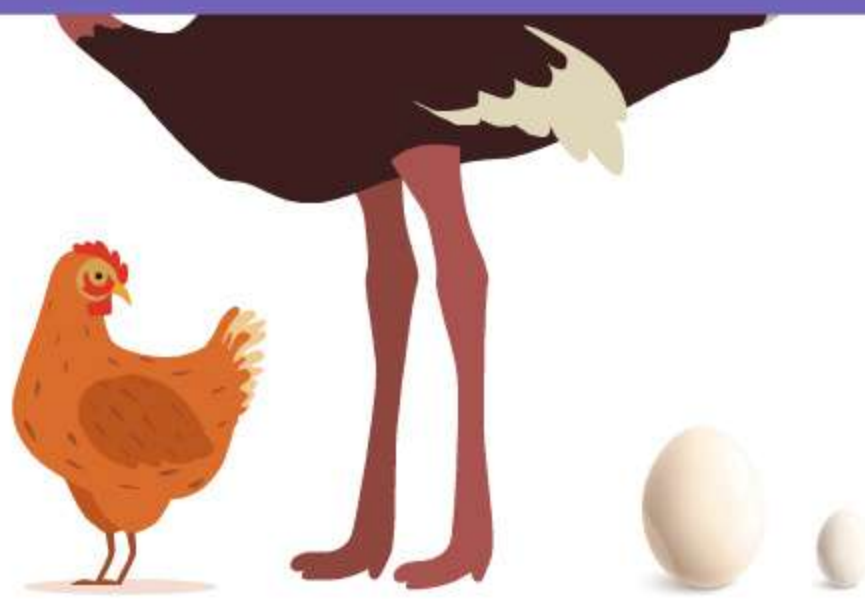
Jedno krzesło z kompletu pana Tomasza kosztowało 156 zł.	P	F
Jedno krzesło z kompletu pana Tomasza było o 11 zł droższe od krzesła z kompletu pana Michała.	P	F

5. Bruno i Kuba rozegrali kilka rund planszowej gry strategicznej, w której zbiera się pojazdy z kategorii: łodzie motorowe, samoloty i samochody. W tabeli zestawiono punkty zdobyte przez Brunona i Kubę.

	 15 p.	 21 p.	 35 p.
Bruno	570 punktów	945 punktów	3570 punktów
Kuba	1485 punktów	441 punktów	3920 punktów

- a) Ile punktów łącznie zdobył każdy z chłopców? Kto wygrał tę rozgrywkę?
 b) Ile poszczególnych pojazdów zdobył Bruno, a ile Kuba?

6. Największe jaja na świecie znosi struś. Ile jaj kurzych o masie 60 g będzie ważyło tyle samo co jedno jajo strusie o masie 1 kg 62 dag?



7. Kasia przygotowuje plan salonu na konkurs architektoniczny. Salon ma mieć kształt prostokąta o wymiarach rzeczywistych $7,8 \text{ m} \times 9,6 \text{ m}$. Czy zmieści rysunek na arkuszu formatu A1 ($594 \text{ mm} \times 841 \text{ mm}$), jeżeli pomniejszy wymiary rzeczywiste piętnastokrotnie? Uzasadnij odpowiedź, podając wymiary salonu na planie.



8. Zosia pomyślała o pewnej liczbie, którą następnie zwiększyła dwukrotnie. Otrzymała w ten sposób liczbę zmniejszyła 50-krotnie, a ten wynik zwiększyła 30 razy. W rezultacie przeprowadzonych operacji Zosia otrzymała liczbę 1 130 400. O jakiej liczbie pomyślała?



9. W ciągu miesiąca liczącego 23 dni nauki szkolnej Karolina pokonała łącznie 55 km 200 m, idąc z domu do szkoły i z powrotem. Jaką długość będzie miała trasa ze szkoły do domu Karoliny zaznaczona na planie wykonanym w skali 1 : 40 000?

Sprawdź, co umiesz!

Pamiętasz? Skala 1 : 100 oznacza, że każdy wymiar został zmniejszony stukrotnie.



1. Wskaż wynik dzielenia liczb 30 054 i 12.

A. 2504 r 1

B. 254 r 6

C. 2504 r 6

D. 2504 r 2

2. Hania w ciągu roku zaoszczędziła 1500 zł. Każdego miesiąca odkłada taką samą kwotę. Ile pieniędzy zaoszczędzi Hania przez kolejnych 37 miesięcy?

3. Biuro podróży ma w swojej ofercie wycieczkę dookoła świata, która trwa 274 dni. Za udział dwóch osób w tej wyprawie trzeba zapłacić 270 000 zł. Dodatkowe opłaty wynoszą 18 500 zł.

a) Ile pełnych tygodni potrwa ta wyprawa?

b) Państwo Kwiatkowscy wpłacili zaliczkę w wysokości 72 000 zł. Pozostałą kwotę uregulują w 25 równych ratach. Ile wyniesie każda z rat?

6. Zadania tekstowe

- ▶ Jak zapisywać rozwiązania złożonych zadań tekstowych?
- ▶ Jak rozwiązywać zadania, które mają nadmiar danych?



Analizuj!

Bruno i Cezary porządkują dane na swoich laptopach. Dane, które chcą zachować, przenoszą na dyski zewnętrzne. Poniżej znajdują się informacje dotyczące przenoszonych danych. Ile plików zawiera folder CEZARY, jeśli wiadomo, że znajduje się w nim 17 razy więcej plików niż w folderze BRUNO?



BRUNO

Typ: Folder plików
Lokalizacja: C:\Users\Bruno\Desktop
Rozmiar: 67 GB
Zawiera: 2683 plików, 16 folderów



CEZARY

Typ: Folder plików
Lokalizacja: C:\Users\Cezary\Desktop
Rozmiar: 257 GB
Zawiera: ? plików, 29 folderów

W tym zadaniu występuje **nadmiar danych**. Opisy kopiowanych folderów są bardzo szczegółowe, podczas gdy **do udzielenia odpowiedzi na postawione pytanie wystarczy informacja o liczbie plików w folderach** – pozostałe dane są niepotrzebne.

- liczba plików w folderze BRUNO: 2683
- liczba plików w folderze CEZARY: 17 razy więcej niż w folderze BRUNO

		4	5	2	
		2	6	8	3
		.		1	7
		1	8	7	8
	+	2	6	8	3
		4	5	6	1

W folderze CEZARY znajduje się 45 611 plików.

Jak rozwiązywać zadania tekstowe



- 1 Przeczytaj uważnie treść zadania.
- 2 Wypisz najważniejsze informacje.
- 3 Zapisz wszystkie obliczenia.
- 4 Sprawdź wynik i zapisz odpowiedź.

Poćwicz!

1. Bruno i Kuba rozegrali partię gry *Podbój Makemake* i liczą punkty. Bruno zebrał 140 kryształów mocy i 214 kryształów zręczności. Kuba zdobył 4 razy więcej kryształów mocy niż Bruno i o 97 mniej kryształów zręczności.

- a) Ile kryształów mocy zebrał Kuba? Ile kryształów zręczności?
- b) Kto zdobył więcej dukatów, jeśli kryształ mocy ma wartość 12 dukatów, a kryształ zręczności – 14 dukatów? O ile więcej?

2. Na wycieczkę do Kotliny Kłodzkiej pojechało 27 uczniów z klasy 5a.

- a) Ile będzie kosztował wstęp dla wszystkich uczniów do Kopalni Złota, jeśli bilet ulgowy kosztuje 36 zł?
- b) Wychowawczyni klasy 5a przeznaczyła 3500 zł z budżetu wycieczkowego na zakup biletów wstępu dla swoich podopiecznych. Uczniowie zwiedzili już Kopalnię Złota, Jaskinię Niedźwiedzia oraz Błędne Skały. Ceny biletów ulgowych do wymienionych atrakcji to odpowiednio: 36 zł, 40 zł, 6 zł i 30 zł. Jaka kwota zostanie po zakupie biletów do Kopalni Uranu?



3. Mieszkańcy osiedla Trzy Dęby otrzymali dotację w wysokości 156 500 zł na realizację projektu *Przyjazne Osiedle*. Pieniądze zamierzają przeznaczyć na:

- zagospodarowanie 12 zielonych placów w cenie 2500 zł każdy,
 - zakup 20 drewnianych leżaków miejskich w cenie 1700 zł za sztukę,
 - zakup wyposażenia placu zabaw w cenie 27 000 zł.
- a) Czy wykorzystają całą dotację? Jeśli nie, to ile pieniędzy im zostanie?
 - b) Stawka za godzinę pracy dla montera placu zabaw to 43 zł. Ile trzeba będzie zapłacić za pracę trzech monterów, którzy będą składali plac zabaw przez 6 godzin?

4. Podczas akcji *Sadzimy Las* uczniowie klas piątych zasadzili 14 rzędów dębów po 50 drzew w rzędzie, 200 buków oraz 30 rzędów topoli po 70 drzew w rzędzie. Ile dębów zasadzili uczniowie klas piątych podczas tej akcji, a ile topoli? Czy wszystkie dane są potrzebne do udzielenia odpowiedzi? Jeśli nie wszystkie, to wskaż dane zbędne.



5. Do sklepu przywieziono na trzech paletach 170 jednakowych opakowań mandarynek. Cena jednego opakowania wynosi 13 zł. Jaka jest wartość dostarczonych mandarynek, jeśli na pierwszej palecie znajdowało się 50 opakowań mandarynek, na drugiej – 75, a na trzeciej – 45? Czy wszystkie dane są potrzebne do udzielenia odpowiedzi? Jeśli nie wszystkie, to wskaż dane zbędne.
6. O godzinie 8.30 Kuba i Cezary, jak zwykle w tygodniu o tej porze, maszerują do szkoły. Kuba mówi: „Za 1000 godzin znów będziemy szli do szkoły”. Cezary nie zgadza się z kolegą. Który z chłopców ma rację? Uzasadnij swoje zdanie.

Sprawdź, co umiesz!

1. Mieszanka przypraw Aroma di Erbe składa się ze 165 g oregano, 345 g papryki, 142 g czosnku oraz 180 g bazylii.
- Ile gramów waży ta mieszanka przypraw?
 - Zosia przygotowała taką mieszankę samodzielnie i postanowiła rozsypać ją do 16 jednakowych saszetek. Ile gramów mieszanki znajdzie się w każdej z saszetek?
2. Monitor bezprzewodowy kosztuje 2019 zł i jest o 1287 zł tańszy od notebooka (czytaj: nołtbuka). Konsola do gier jest o 587 zł tańsza od monitora. Ile kosztuje notebook z dodatkowym monitorem?
3. W ramach promocji firma deweloperska postanowiła zaoferować mieszkania o powierzchni 75 m^2 w cenie 6500 zł za 1 m^2 .
- Ile trzeba zapłacić za takie mieszkanie?
 - Pan Tomasz zdecydował się kupić mieszkanie z promocji. W ramach zawartej umowy wpłacił 350 000 zł, a pozostałą część kwoty ma uiścić w 25 równych ratach. Oblicz wysokość jednej raty.

PODSUMOWANIE DZIAŁU I

W świecie działań na liczbach

Powtórz wiadomości

Kolejność wykonywania działań

[()]

działania w nawiasach

a^2

potęgowanie

· :

mnożenie i dzielenie

+ -

dodawanie i odejmowanie

Jeśli w wyrażeniu występują tylko mnożenie i dzielenie albo tylko dodawanie i odejmowanie, działania te wykonuje się w kolejności występowania.

Dodawanie pisemne

Zaczynamy od rzędu **jedności**.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 5 \quad 2 \quad 8 \quad 3 \\ + \quad 4 \quad 9 \quad 7 \\ \hline 5 \quad 7 \quad 8 \quad 0 \end{array}$$

Jeżeli suma składników w kolumnie jest równa 10 lub większa, zapisz pod kreską cyfrę **jedności** wyniku, a nad kolejnym rzędem dopisz **1**.

Odejmowanie pisemne

$$\begin{array}{r} 9 \quad 9 \\ 6 \quad 10 \quad 10 \quad 12 \\ 7 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 7 \\ - \quad 5 \quad 8 \quad 4 \quad 2 \\ \hline 6 \quad 4 \quad 1 \quad 8 \quad 5 \end{array}$$

Zaczynamy od rzędu **jedności**.

Jeżeli masz odjąć od mniejszej cyfry większą, „**pożycz**” dziesiątkę z następnego rzędu.

Mnożenie pisemne

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 8 \\ \cdot \quad 3 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 5 \quad 6 \\ + \quad 3 \quad 8 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 4 \quad 0 \quad 9 \quad 6 \end{array}$$

Wyniki mnożenia kolejnych cyfr pierwszego czynnika przez cyfrę dziesiątek drugiego czynnika zapisujemy od rzędu dziesiątek. Pod cyfrą **jedności** możesz od razu wpisać **0**.

Dzielenie pisemne

$$534 \, 000 : 120 = 53 \, 400 : 12$$

$$\begin{array}{r} 4 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \\ 5 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \quad 0 : 12 \\ - 4 \quad 8 \\ \hline 5 \quad 4 \\ - 4 \quad 8 \\ \hline 6 \quad 0 \\ - 6 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Jeśli wynikiem ostatniego odejmowania jest **0** i w dzielnej zostały zera, **dopisz zera do wyniku**.

Poćwicz przed sprawdzianem

- Ile razy suma liczb 51 i 42 jest większa od różnicy liczb 79 i 48?
A. 31 B. 3 C. 34 D. 62
- Jak zapisać sześcián różnicy liczb 4 i 3 powiększony o 5?
A. $4^3 - 3^3 + 5$ B. $(4 - 3)^6 + 5$ C. $(4 - 3)^3 + 5$ D. $(4 - 3 + 5)^6$
- Wskaż wartość wyrażenia $[36 \cdot 8 - 1404 : (3^3 - 21)] \cdot 2$.
A. 108 B. 45 C. 90 D. 54
- Na podstawie informacji na rysunku oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

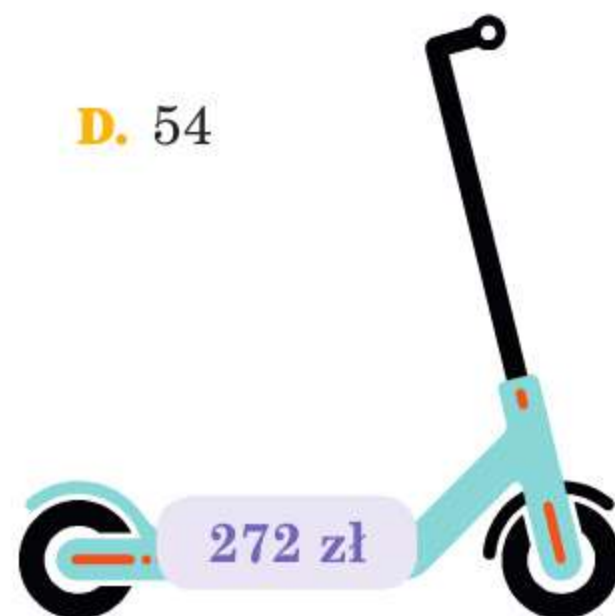
148 zł



415 zł



272 zł



Hulajnoga jest o 134 zł droższa od deskorolki.	P	F
Za trzy deskorolki trzeba zapłacić 444 zł.	P	F
Za dwie pary rolek trzeba zapłacić tyle samo co za pięć deskorolek.	P	F

- Oblicz.
a) $3400 \cdot 180$ b) $51\,800 : 25$ c) $270\,450 : 120$
- Trzy klasy piąte biorą udział w zbiórce makulatury. Klasa 5a zebrała 388 kg makulatury, klasa 5b – o 156 kg więcej niż klasa 5a, natomiast klasa 5c zebrała cztery razy mniej makulatury niż klasa 5b. Ile kilogramów makulatury zebrały w sumie klasy piąte?
- Zosia postanowiła przygotować się do konkursu matematycznego i każdego dnia poświęca 45 minut na rozwiązywanie zadań. Ile minut poświęciła Zosia w styczniu na rozwiązywanie zadań konkursowych? Ile to pełnych godzin?
- Czteroosobowa rodzina Nowaków zużyła w 2022 r. 248 005 l wody. Rodzina Brzeszczyńskich, która liczy tyle samo osób, zużyła w tym samym roku o 34 929 l wody mniej. Przeciętnie jeden mieszkaniec Stanów Zjednoczonych zużywa w ciągu roku 113 000 l wody. Ile zużytych litrów wody w roku 2022 przypada na jednego członka rodziny Brzeszczyńskich?
- Państwo Mączyńscy wykupili wycieczkę dla dwóch osób do Grecji. Cena za jedną osobę to 2827 zł. Wpłacili już 759 zł zadatku, a resztę kwoty rozłożyli na 11 równych rat. Ile wynosi jedna rata?

Podejmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał polskiego wynalazcę, którego dokonania w dziedzinie techniki zmieniły bieg historii. Powodzenia!



1 (1872–1926) to słynny polski wynalazca porównywany do Thomasa Edisona, wynalazcy **2**. Opracował wiele innowacyjnych urządzeń oraz technologii dla przemysłu włókienniczego, zaproponował też ciekawe rozwiązania związane z dziedzinami fotografii oraz filmu i telewizji. Jego **3** wykonana z **4** z cienkimi stalowymi blaszkami ocaliła hiszpańskiego króla Alfonsa XIII podczas próby zamachu. Inny rewolucyjny wynalazek, tektroskop, uważany jest za przodka dzisiejszych **5**, ponieważ pozwalał przysyłać na odległość **6**.

1. Oblicz wartość wyrażenia ♣ : ♥.

$$\clubsuit = [(37 + 33) \cdot (95 - 35) - 200] : 2$$

$$\heartsuit = 500 : (4^2 \cdot 3 + 7 \cdot 7 + 3^1)$$

1995	400	820
Ignacy Łukasiewicz	Jan Szczepanik	Mieczysław Wolfke

2. W pewnym sklepie sportowym obowiązuje promocja – za każde wydane 100 zł przy kasie naliczany jest rabat w wysokości 5 zł. Pani Ewa kupiła matę do ćwiczeń za 84 zł, ciężarki za 139 zł oraz dres za 245 zł. Ile reszty otrzymała, jeśli zapłaciła banknotem o nominale 500 zł?



32 zł	47 zł	52 zł
telefonu	silnika spalinowego	żarówki

3. Pani Olga wybrała się na pięciodniową wycieczkę objazdową. W ciągu pięciu dni autokar przejechał 770 km: pierwszego dnia pokonał 158 km, drugiego dnia o 64 km więcej, trzeciego dnia trzy razy mniej niż drugiego, a czwartego i piątego dnia po tyle samo kilometrów. Ile kilometrów pokonał autobus piątego dnia?

316 km	237 km	158 km
zbroja rycerska	tarcza ochronna	kamizelka kuloodporna

4. Drużyna licząca 24 zawodników złożyła się na prezent dla swojego trenera po 19 zł od osoby. Okazało się, że w dniu zakupu prezentu obowiązywała promocja i za prezent zapłacono 399 zł. Za różnicę postanowiono kupić kwiaty. Jaka kwota przeznaczono na zakup kwiatów?

57 zł	63 zł	54 zł
jedwabnej tkaniny	metalowej blachy	grubej wełny

5. Najstarsze zoo w Polsce znajduje się we Wrocławiu. Żyje tam ponad 10 500 zwierząt. W 2017 r. rekordowa dzienna liczba odwiedzających wyniosła 28 300 osób. Na początku 2023 r. bilet ulgowy kosztował 60 zł, a bilet normalny – 70 zł. Ile pieniędzy trafiłoby do kasy zoo w dniu, w którym powtórzyłaby się rekordowa dzienna liczba odwiedzających, zakładając, że połowa odwiedzających to dzieci, a druga połowa – dorośli?



3 679 000 zł	1 839 500 zł	682 500 zł
odtwarzaczy muzycznych	telewizorów	telefonów

6. Do szkolnej pracowni muzycznej kupiono 16 zestawów tablic muzycznych i 18 pulpitów na nuty. Jeden pulpit kosztował 67 zł, a łączny koszt zakupów wyniósł 3078 zł. Ile kosztował jeden zestaw tablic?

107 zł	171 zł	117 zł
zaszyfrowane wiadomości	krótkie dźwięki	kolorowy obraz wraz z dźwiękiem

Do przyjaznych dla środowiska, odnawialnych źródeł energii elektrycznej należą energia wiatru oraz energia słoneczna.

Do pozyskiwania energii z wiatru używa się turbin wiatrowych. W wyniku podmuchu wiatru łopaty turbiny zaczynają się poruszać, a wraz z nimi obracają się elementy generatora prądu. Wytworzona w ten sposób energia elektryczna jest dostarczana do gospodarstw domowych.

Z kolei do pozyskiwania energii słonecznej wykorzystuje się panele fotowoltaiczne. Zbudowane są one z krzemowych ogniw fotowoltaicznych, które pochłaniają padające na nie promieniowanie słoneczne. Uzyskana w ten sposób energia jest zamieniana na energię elektryczną.



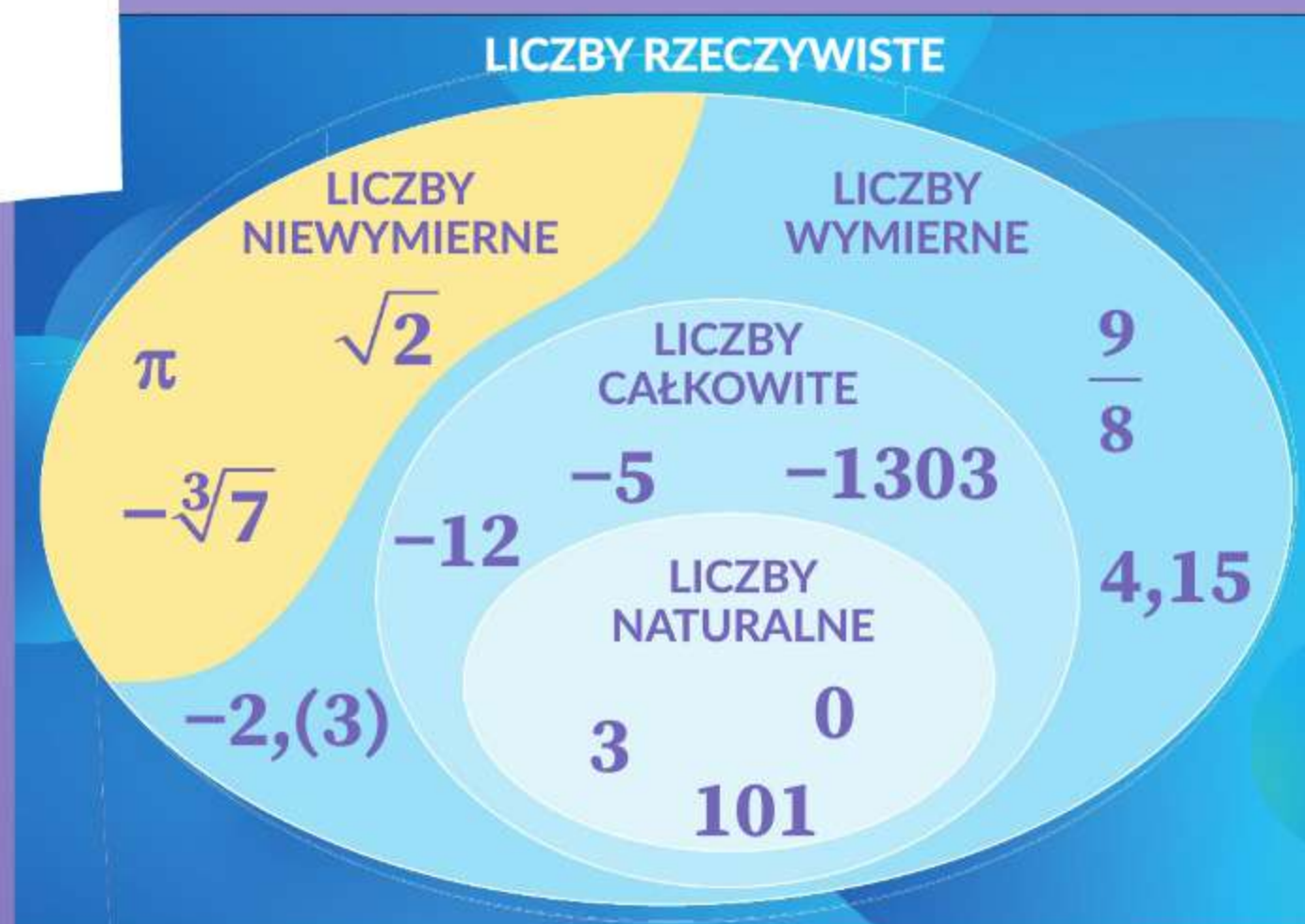
- 1.** Państwo Nowakowie postanowili zainwestować w przydomową elektrownię wiatrową. Energię uzyskaną z wiatru zamierzają wykorzystać do ogrzewania domu. Koszt zainstalowania elektrowni wiatrowej to 35 000 zł. Do tej pory miesięczny rachunek za ogrzewanie ich domu wynosił 500 zł.
 - a)** Państwo Nowakowie wpłacili na konto firmy mającej zainstalować elektrownię zadatek w wysokości 17 000 zł, a pozostałą do zapłaty kwotę rozłożyli na dziewięć równych rat. Ile wyniesie każda z tych rat?
 - b)** Po ilu pełnych miesiącach zwróci się państwu Nowakom instalacja przydomowej elektrowni wiatrowej? Załóż, że będzie to ich jedyne źródło ciepła.
- 2.** Rachunek za prąd w domu państwa Kowalskich wynosił 5000 zł rocznie. Państwo Kowalscy postanowili zainstalować panele fotowoltaiczne na dachu swojego domu. Koszt instalacji wyniósł 25 000 zł. Obecnie płacą za prąd 1800 zł rocznie.
 - a)** O ile złotych mniej rocznie płacą państwo Kowalscy za prąd?
 - b)** Po ilu pełnych latach zwróci się państwu Kowalskim instalacja paneli?

DZIAŁ



W ŚWIECIE WŁASNOŚCI LICZB NATURALNYCH

Na matematycznym portalu konkursowym znalazłem taki schemat przedstawiający podział liczb.



Którego rodzaju liczby już znasz?
Co możesz o nich powiedzieć?

1. Cechy podzielności przez 2, 5, 10, 100 i 4

- ▶ Jakie liczby nazywamy naturalnymi?
- ▶ W jaki sposób bez wykonywania dzielenia można ustalić, czy dana liczba jest podzielna przez 2, 5, 10, 100 lub przez 4?



Odkrywaj!

1. Dawniej lokalizacja budynków była opisowa i odnosiła się do ich elementów dekoracyjnych (dom Pod Kogutkiem), nazwiska właściciela (dom Uphagena) czy sąsiedztwa (drugi dom na prawo od wieży wodnej). Wraz z rozwojem miast konieczne stało się numerowanie budynków. Przyjrzyj się fragmentowi planu Łodzi.

- a) W jaki sposób ponumerowano budynki i działki przy ul. Lipowej?
- b) Ustal numery budynków oznaczonych ♥, ★, ▲, ■ i zapisz je w zeszycie.
- c) Podkreśl cyfrę jedności w zapisanych liczbach. Co zauważasz?



2. Przyjrzyj się podanym liczbom.

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
1000	1010	1100	1350	2000	2930	3300	4780	10 000	12 560

- a) Ile wynosi reszta z dzielenia tych liczb przez 10?
- b) Wypisz liczby dwu-, trzy- lub czterocyfrowe zakończone kolejno cyframi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Czy któreś z tych liczb dzielą się przez 10 bez reszty?
- c) Co zauważasz? Kiedy liczby dzielą się przez 10 bez reszty?



Analizuj!

Liczby naturalne to liczby



Najmniejszą liczbą naturalną jest 0.

Każda kolejna liczba naturalna jest o 1 większa od poprzedniej.

Nie istnieje największa liczba naturalna.

Liczby naturalne mają pewne **cechy, które ułatwiają rozpoznanie, czy jedna liczba dzieli się przez drugą liczbę bez reszty**. Jak rozpoznać, że liczba dzieli się bez reszty przez 2, przez 5, przez 10, przez 100 albo przez 4? Przeanalizuj poniższe ilorazy. Zwróć uwagę na cyfry w rzędzie jedności, dziesiątek, setek itd.



$$100 : 2 = 50 \text{ r } 0$$

$$105 : 2 = 52 \text{ r } 1$$

$$520 : 2 = 260 \text{ r } 0$$

$$101 : 2 = 50 \text{ r } 1$$

$$106 : 2 = 53 \text{ r } 0$$

$$42 : 2 = 21 \text{ r } 0$$

$$102 : 2 = 51 \text{ r } 0$$

$$107 : 2 = 53 \text{ r } 1$$

$$364 : 2 = 182 \text{ r } 0$$

$$103 : 2 = 51 \text{ r } 1$$

$$108 : 2 = 54 \text{ r } 0$$

$$6006 : 2 = 3003 \text{ r } 0$$

$$104 : 2 = 52 \text{ r } 0$$

$$109 : 2 = 54 \text{ r } 1$$

$$2158 : 2 = 1079 \text{ r } 0$$

Liczba dzieli się bez reszty przez 2, jeśli jej ostatnią cyfrą jest: 0, 2, 4, 6 lub 8. Cyfry w pozostałych rzędach nie mają znaczenia.



$$100 : 5 = 20 \text{ r } 0$$

$$105 : 5 = 21 \text{ r } 0$$

$$110 : 5 = 22 \text{ r } 0$$

$$101 : 5 = 20 \text{ r } 1$$

$$106 : 5 = 21 \text{ r } 1$$

$$400 : 5 = 80 \text{ r } 0$$

$$102 : 5 = 20 \text{ r } 2$$

$$107 : 5 = 21 \text{ r } 2$$

$$35 : 5 = 7 \text{ r } 0$$

$$103 : 5 = 20 \text{ r } 3$$

$$108 : 5 = 21 \text{ r } 3$$

$$1520 : 5 = 304 \text{ r } 0$$

$$104 : 5 = 20 \text{ r } 4$$

$$109 : 5 = 21 \text{ r } 4$$

$$705 : 5 = 141 \text{ r } 0$$

Liczba dzieli się bez reszty przez 5, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5. Cyfry w pozostałych rzędach nie mają znaczenia.



$100 : 10 = 10 \text{ r } 0$

$105 : 10 = 10 \text{ r } 5$

$110 : 10 = 11 \text{ r } 0$

$101 : 10 = 10 \text{ r } 1$

$106 : 10 = 10 \text{ r } 6$

$111 : 10 = 11 \text{ r } 1$

$102 : 10 = 10 \text{ r } 2$

$107 : 10 = 10 \text{ r } 7$

$500 : 10 = 50 \text{ r } 0$

$103 : 10 = 10 \text{ r } 3$

$108 : 10 = 10 \text{ r } 8$

$1620 : 10 = 162 \text{ r } 0$

$104 : 10 = 10 \text{ r } 4$

$109 : 10 = 10 \text{ r } 9$

$10\,700 : 10 = 1070 \text{ r } 0$

Liczba dzieli się bez reszty przez 10, jeśli jej ostatnią cyfrą jest 0. Cyfry w pozostałych rzędach nie mają znaczenia.



$100 : 100 = 1 \text{ r } 0$

$105 : 100 = 1 \text{ r } 5$

$110 : 100 = 1 \text{ r } 10$

$101 : 100 = 1 \text{ r } 1$

$106 : 100 = 1 \text{ r } 6$

$320 : 100 = 3 \text{ r } 20$

$102 : 100 = 1 \text{ r } 2$

$107 : 100 = 1 \text{ r } 7$

$600 : 100 = 6 \text{ r } 0$

$103 : 100 = 1 \text{ r } 3$

$108 : 100 = 1 \text{ r } 8$

$1000 : 100 = 10 \text{ r } 0$

$104 : 100 = 1 \text{ r } 4$

$109 : 100 = 1 \text{ r } 9$

$89\,300 : 100 = 893 \text{ r } 0$

Liczba dzieli się bez reszty przez 100, jeśli jej ostatnie dwie cyfry to zera. Cyfry w pozostałych rzędach nie mają znaczenia.



$100 : 4 = 25 \text{ r } 0$

$105 : 4 = 26 \text{ r } 1$

$110 : 4 = 27 \text{ r } 2$

$101 : 4 = 25 \text{ r } 1$

$106 : 4 = 26 \text{ r } 2$

$32 : 4 = 8 \text{ r } 0$

$102 : 4 = 25 \text{ r } 2$

$107 : 4 = 26 \text{ r } 3$

$200 : 4 = 50 \text{ r } 0$

$103 : 4 = 25 \text{ r } 3$

$108 : 4 = 27 \text{ r } 0$

$128 : 4 = 32 \text{ r } 0$

$104 : 4 = 26 \text{ r } 0$

$109 : 4 = 27 \text{ r } 1$

$564 : 4 = 141 \text{ r } 0$

Liczba dzieli się bez reszty przez 4, jeśli jej dwie ostatnie cyfry są zerami lub tworzą liczbę podzieloną przez 4. Cyfry w pozostałych rzędach nie mają znaczenia.



Mieszkańcy Archipelagu Arytmetyki mają do dyspozycji pięć monet.

2
talary

4
talary

5
talarów

10
talarów

100
talarów

Czy mogą zbierać podane niżej kwoty z monet o takim samym nominale? Ustal to, nie wykonując dzielenia.

132

404

573

650

700

Jeśli jedna liczba dzieli się przez drugą bez reszty, to jest przez nią **podzielna**.



Poćwicz!

1. Spośród podanych liczb wybierz wszystkie liczby:

a) podzielne przez 2,

b) podzielne przez 5,

c) podzielne przez 10,

d) podzielne przez 100,

e) podzielne zarówno przez 2, jak i przez 10,

f) podzielne przez 5, ale niepodzielne przez 2.

203

0

7965

27

184

10

5416

29 005

7891

19 358

9800

987 654

1 000 000

1

2. Na podstawie cechy podzielności ustal, czy liczba jest podzielna przez 4.

a) 616

b) 754

c) 8000

d) 25 460

e) 81 008

3. Przepisz liczby z ramki do zeszytu. Kolorem zielonym podkreśl te liczby, które są podzielne przez 2, a kolorem niebieskim te, które są podzielne przez 5. Co możesz powiedzieć o liczbach, które są podkreślone dwoma kolorami?

32 • 784 • 575 • 320 • 458 • 800 • 58 • 426 • 15

4. Zastąp ★ cyfrą tak, aby liczba była podzielna przez 4. Podaj wszystkie możliwości.

a) 39 36★

b) 84 47★

c) 56 2★2

d) 25★8

5. Cezary powiedział Eli, że w ciągu 5 dni przeczytał 121 stron *Sposobu na Alcybiadesa*, przy czym każdego dnia czytał tyle samo pełnych stron. Czy to możliwe? Uzasadnij swoją odpowiedź właściwą cechą podzielności.

6. W jednej paczce kolorowego papieru znajduje się 100 kartek. Paczki pakowane są w jednakowe kartony – po 10 sztuk w kartonie. Ile takich kartonów zostanie całkowicie wypełnionych przez 51 000 kartek?



7. Czy iloczyn widocznych liczb jest podzielny przez liczbę podaną w kółku? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a)

15		
	8	
		30

25

b)

		18
	25	
7		

50

Sprawdź, co umiesz!

1. Spośród podanych liczb wypisz wszystkie:

a) podzielne przez 2,

b) podzielne przez 4,

c) podzielne przez 5, ale niepodzielne przez 10.

82

210

1000

576

5806

88 555

39 450

245

85 644

37 212

2. Wskaż wszystkie liczby, przez które podzielna jest liczba 32 840.

A. 2

B. 4

C. 5

D. 10

E. 100

3. Pewien sklep odzieżowy oferuje bon z rabatem na kolejne zakupy, jeśli za obecne zapłaci się tylko monetami lub banknotami tego samego nominału.

a) Czy za buty w cenie 308 zł można zapłacić za pomocą samych dwuzłotówek albo samych pięciozłotówek?

b) Czy kwotę należną za zakup butów w cenie 308 zł i sukienki w cenie 142 zł można zapłacić samymi banknotami o nominale 10 zł?



2. Cechy podzielności przez 3 i 9

- ▶ W jaki sposób bez wykonywania dzielenia można ustalić, czy dana liczba jest podzielna przez 3 lub przez 9?
- ▶ Czy wszystkie liczby podzielne przez 3 dzielą się przez 9?
- ▶ Czy wszystkie liczby podzielne przez 9 dzielą się przez 3?



Odkrywaj!

1. Postanowiliśmy sprawdzić z Kubą, czy w przypadku liczb 3 i 9 też można zauważyć jakieś prawidłowości. Ja mnożyłem różne liczby przez 3, a Kuba przez 9. Oto nasze wyniki.



12

111

1002

33

114

1203

81

702

4113



18

45

81

297

576

909

1998

3798

4959

- a) Przyjrzyj się wynikom mnożenia przez 3. Oblicz sumę cyfr każdej z liczb. Co zauważasz?
- b) Przyjrzyj się wynikom mnożenia przez 9. Oblicz sumę cyfr każdej z liczb. Co zauważasz?

2. Zapisz w zeszycie wyniki poniższych działań. Co zauważasz?

$$3 \cdot 85 = ?$$

$$3 \cdot 452 = ?$$

$$3 \cdot 549 = ?$$

$$9 \cdot 96 = ?$$

$$9 \cdot 111 = ?$$

$$9 \cdot 324 = ?$$



Analizuj!



Pola korzysta z aplikacji do nauki polskiego języka migowego, w której zbiera się punkty umożliwiające odblokowanie kolejnych aktywności. Poli udało się zebrać 2427 punktów. Chce przypisać po tyle samo punktów do każdej z trzech wybranych aktywności. Czy to możliwe?

Czy liczba 2427 jest podzielna przez 3?

Liczba jest podzielna przez 3, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 3.

$$2 + 4 + 2 + 7 = 15$$

Liczba 15 jest podzielna przez 3, zatem liczba 2427 jest podzielna przez 3.

Pola może przypisać po tyle samo punktów do każdej z trzech wybranych aktywności.



Cezary również zbiera punkty w tej aplikacji. Czy może przypisać po tyle samo punktów do dziewięciu wybranych aktywności?

Czy liczba 3258 jest podzielna przez 9?

Liczba jest podzielna przez 9, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

$$3 + 2 + 5 + 8 = 18$$

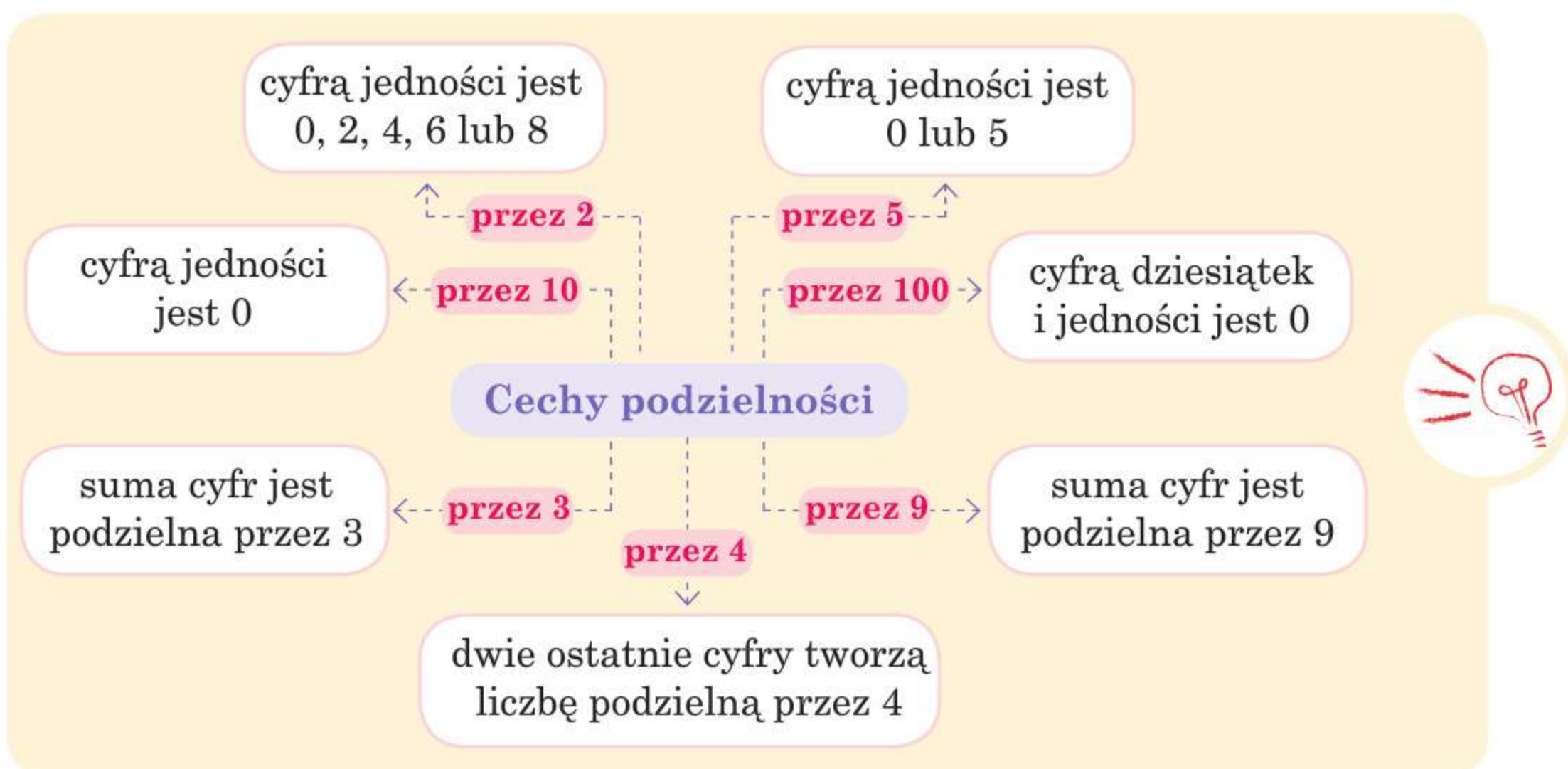
Liczba 18 jest podzielna przez 9, zatem liczba 3258 jest podzielna przez 9.

Cezary może przypisać po tyle samo punktów do każdej z dziewięciu wybranych aktywności.



Twoja kolej! Które z poniższych liczb są podzielne przez 3, a które przez 9? Czy któreś z liczb dzielą się zarówno przez 3, jak i przez 9?

648 • 3334 • 2205 • 1374



Poćwicz!

3319

173

465

945

1017

2268

9909

20 910

30 401

42 792

60 610

87 321

1. Spośród podanych liczb wybierz wszystkie liczby:

- a) podzielne przez 3,
- b) podzielne przez 9,
- c) podzielne przez 3, ale niepodzielne przez 9.

2. Czy 87 harcerzy może ustawić się dwójkami? A trójkami? A czwórkami?

3. Jaką cyfrą można zastąpić ♥, aby liczba była podzielna przez 3 i niepodzielna przez 9? Podaj wszystkie możliwości.

- a) 9♥3
- b) 157♥
- c) 84♥1
- d) 100 ♥00

4. Pewna firma produkuje piłeczki do tenisa stołowego i pakuje je do pudełek po 9 sztuk. W poniedziałek wyprodukowano w tej firmie więcej niż 655 piłeczek, ale mniej niż 665. Ile piłeczek wyprodukowano w poniedziałek, jeśli wszystkie pudełka zostały zapełnione?

5. Bruno ustawił czterocyfrową blokadę telefonu: 231★. Jaka cyfra kryje się pod znakiem ★, jeśli kod tworzy liczbę podzielną przez 3 i przez 4?

6. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Liczba 333 004 jest podzielna przez 3 i przez 4.	P	F
Są tylko dwie liczby dwucyfrowe, które są podzielne przez 5 i przez 9.	P	F



7. Podaj najmniejszą i największą liczbę pięciocyfrową złożoną z różnych cyfr i podzielną:

a) przez trzy i przez pięć,

b) przez dziewięć i przez cztery.



8. Liczba jest podzielna przez 6, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3. A kiedy liczba jest podzielna przez 18? Które spośród liczb w ramce są podzielne przez 6, a które przez 18?

200 070 • 615 • 8016 • 10 012 • 87 144 • 12 736 • 108 • 34 308 • 5559



A to ciekawe

72 424

Zobacz, jak sprawdzić, czy liczba 72 424 jest podzielna przez 11.

- Zsumuj cyfry na miejscach parzystych (licząc od prawej). $2 + 2 = 4$
- Zsumuj cyfry na miejscach nieparzystych. $4 + 4 + 7 = 15$
- Od większej sumy odejmij mniejszą. Jeśli różnica jest podzielna przez 11, to sprawdzana liczba jest podzielna przez 11. $15 - 4 = 11$

Liczba 11 jest podzielna przez 11, więc liczba 72 424 jest podzielna przez 11. Sprawdź, czy liczby 93 962 i 718 178 są podzielne przez 11.

Sprawdź, co umiesz!

1. Które spośród liczb w ramce są podzielne przez 3, a które przez 9?

5403 • 10 026 • 761 211 • 9901 • 87 057

2. Jaką cyfrą należy zastąpić ★, aby liczba 340★ była podzielna zarówno przez 3, jak i przez 5?

3. Wskaż liczbę, która jest podzielna przez 2, 5, 3 i 9.

A. 10 062

B. 40 635

C. 15 660

D. 73 920

3. Dzielniki

- ▶ Czym jest dzielnik liczby naturalnej?
- ▶ Jak wyznaczyć dzielniki danej liczby naturalnej?



Odkrywaj!

1. Chcę rozłożyć na półce 16 resoraków z mojej kolekcji w taki sposób, aby w każdym rzędzie znajdowało się tyle samo samochodów. Zauważyłem, że mogę ustawić je w 4 rzędach po 4 samochody i w 2 rzędach po 8 samochodów. Czy mogę ustawić je w jeszcze inny sposób, jeśli rzędy mają być równoliczne?



A gdyby kolekcja liczyła 100 resoraków? W jaki sposób wtedy można by porozstawiać samochody w równolicznych rzędach?

2. Połóżcie na stoliku 18 kredek, a następnie przeprowadźcie eksperyment. Pamiętajcie, że każda osoba ma brać po tyle samo kredek i że kredek nie można łamać.

- a) Ile kredek powinna wziąć jedna osoba, aby na stoliku nie została żadna kredka?
- b) Po ile kredek powinny wziąć dwie osoby, aby na stoliku nie została żadna kredka? A trzy osoby? Sześć osób? Dziewięć osób? Osiemnaście?
- c) Czy można rozdzielić po równo kredki między cztery osoby? A między pięć osób? A siedem? A osiem? Między ile osób można rozdzielić kredki, aby na stoliku nie została żadna kredka?
- d) Jakie działanie arytmetyczne powinno się wykonać, aby obliczyć liczbę przydzielonych kredek?





Analizuj!

12 tulipanów
w 1 wazonie
 $12 \cdot 1 = 12$



po 6 tulipanów
w 2 wazonach
 $6 \cdot 2 = 12$



po 4 tulipany
w 3 wazonach
 $4 \cdot 3 = 12$



W jaki sposób można umieścić w wazonach 12 tulipanów tak, aby w każdym wazonie znajdowało się tyle samo kwiatów? Po ile tulipanów znajdzie się w każdym wazonie?



po 3 tulipany
w 4 wazonach
 $3 \cdot 4 = 12$



po 2 tulipany
w 6 wazonach
 $2 \cdot 6 = 12$



po 1 tulipanie
w 12 wazonach
 $1 \cdot 12 = 12$

liczba tulipanów	12	6	4	3	2	1
liczba wazonów	1	2	3	4	6	12

Liczba 12 **jest podzielna** przez liczby 1, 2, 3, 4, 6 i 12.

Dzielnikami liczby 12 są liczby 1, 2, 3, 4, 6 i 12.



Jakie dzielniki ma liczba 30, a liczba 17? Nie da się wymienić wszystkich dzielników liczby 0. Dlaczego? Jak sądzisz?

Dzielnik danej liczby naturalnej to taka liczba naturalna różna od 0, przez którą dana liczba dzieli się bez reszty, np. dzielnikami liczby 10 są liczby 1, 2, 5 i 10. Liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby.



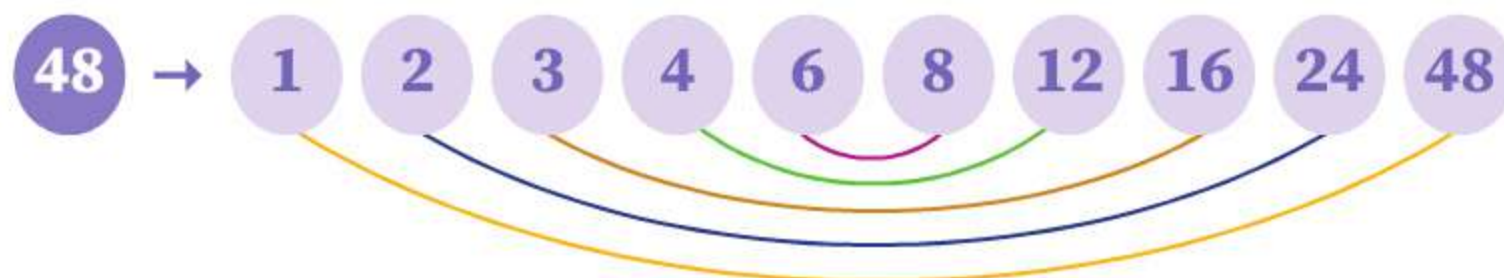
Poćwicz!

1. Wypisz wszystkie dzielniki podanej liczby.

- a) 6 b) 20 c) 28 d) 50 e) 71

Aby znaleźć wszystkie dzielniki liczby 48, trzeba sprawdzić, czy 48 dzieli się bez reszty przez kolejne liczby naturalne nie większe od tej liczby.

$$\begin{array}{llll} 48 : 1 = 48 \text{ r } 0 & 48 : 2 = 24 \text{ r } 0 & 48 : 3 = 16 \text{ r } 0 & 48 : 4 = 12 \text{ r } 0 \\ \cancel{48 : 5 = 9 \text{ r } 3} & 48 : 6 = 8 \text{ r } 0 & \cancel{48 : 7 = 6 \text{ r } 6} & \text{itd.} \end{array}$$



2. Wypisz wszystkie:

- a) parzyste dzielniki liczby 60, b) nieparzyste dzielniki liczby 81.

3. Wskaż wszystkie dzielniki podanej liczby wśród liczb zapisanych obok niej.

- a) 64 0, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 14, 15, 16, 22, 24, 32, 64, 128
b) 125 0, 1, 2, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 50, 65, 75, 125
c) 500 0, 1, 2, 4, 5, 8, 10, 15, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500

4. Wypisz wszystkie jednocyfrowe dzielniki liczby:

- a) 240, b) 380, c) 850, d) 1000.

5. Pola zabezpieczyła swój telefon czterocyfrowym kodem PIN. Ustal ten kod, jeśli wiadomo, że: pierwsza cyfra od lewej to liczba dzielników liczby 5, druga cyfra jest od niej o 3 większa, trzecia cyfra to liczba parzystych dzielników liczby 40, a czwarta cyfra to najmniejsza naturalna liczba nieparzysta.

6. Znajdź najmniejszy i największy dzielnik liczby 987 654 321.

7. Pan Adam zamierza pomalować mieszkanie. Obliczył, że będzie potrzebował 60 l białej farby. Farba sprzedawana jest w opakowaniach, których pojemność w litrach jest wyrażona liczbą naturalną. Ile opakowań farby powinien kupić pan Adam, jeśli zależy mu na tym, aby wszystkie opakowania miały tę samą pojemność? Podaj wszystkie możliwości.



8. Nie wykonując podanego działania, ustal jednocyfrowe dzielniki iloczynu.

a) $2 \cdot 17$

b) $10 \cdot 25$

c) $12 \cdot 18$

d) $16 \cdot 8 \cdot 15$



A to ciekawe

Liczba doskonała to taka liczba naturalna, która jest równa sumie wszystkich swoich dzielników właściwych (tj. mniejszych od niej samej).

Liczbą doskonałą jest 6, ponieważ jej dzielniki to: 1, 2, 3 i 6, a suma dzielników właściwych wynosi $1 + 2 + 3 = 6$.

Sprawdź, które z podanych liczb są doskonałe: 8, 28, 100, 496, 8128.

Sprawdź, co umiesz!

1. Wypisz wszystkie dzielniki podanej liczby.

a) 20

b) 38

c) 75

d) 200

e) 1

2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Liczba 48 ma dokładnie 4 dzielniki parzyste.	P	F
Najmniejszym dzielnikiem liczby 19 jest 0.	P	F
Suma wszystkich dzielników liczby 32 wynosi 63.	P	F

3. W szkole organizowany jest Dzień Zdrowego Śniadania. Cezary przyniósł 30 pomidorków koktajlowych potrzebnych do przyrządzenia sałatki. Ile porcji sałatki może przygotować Cezary, jeśli w każdej porcji ma się znaleźć taka sama liczba pomidorków? Podaj wszystkie możliwości.

4 • Liczby pierwsze i złożone

- ▶ Jakie liczby nazywamy pierwszymi, a jakie złożonymi?
- ▶ Czy 0 i 1 są liczbami pierwszymi lub złożonymi?
- ▶ Jak sprawdzić, czy liczba jest pierwsza, czy złożona?



Odkrywaj!

1. Zapisałem liczby od 2 do 100 w tabeli o rozmiarze 10 kolumn $\times$ 10 wierszy, tak jak na rysunku poniżej. Następnie zamalowałem komórki z liczbami według zasad podzielności tak, aby liczby w zamalowanych komórkach miały więcej niż dwa dzielniki. Gdy komórka była już raz zamalowana, nie robiłem tego kolejny raz.
- a) Jaka cecha podzielności kierowałem się, zamalowując komórki na żółto?
 - b) Przez jaką liczbę dzielą się wszystkie liczby w komórkach zamalowanych na zielono? A liczby w komórkach zamalowanych na czerwono?
 - c) Trzy komórki zamalowałem kolorem niebieskim. Jaki wspólny dzielnik mają liczby znajdujące się w tych komórkach?
 - d) Co możesz powiedzieć o liczbach w komórkach, które nie zostały zamalowane? Wymień ich dzielniki. Co zauważasz?

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Analizuj!

Cezary interesuje się informatyką. Ostatnio dowiedział się, że podczas szyfrowania danych szczególnie często wykorzystywane są liczby takie jak: 2, 3, 5, 7 czy 11. Co wspólnego mają ze sobą te liczby?

liczba	dzielniki
2	1, 2
3	1, 3
5	1, 5
7	1, 7
11	1, 11
...	

Są to liczby naturalne większe od 1, które mają dokładnie dwa różne dzielniki. Nazywamy je **liczbami pierwszymi**.

Liczby naturalne większe od 1, które mają więcej niż dwa dzielniki, nazywamy **liczbami złożonymi**.

liczba	dzielniki
4	1, 2, 4
6	1, 2, 3, 6
8	1, 2, 4, 8
9	1, 3, 9
12	1, 2, 3, 4, 6, 12
...	

Aby **ustalić, czy liczba jest pierwsza, czy złożona**, wystarczy sprawdzić, czy ma trzeci dzielnik. Liczba, która **dzieli się tylko przez 1 i siebie samą**, jest **pierwsza**. Liczba, która ma trzeci dzielnik, jest **złożona**.

Aby usprawnić szukanie dzielników, **warto skorzystać z cech podzielności**.

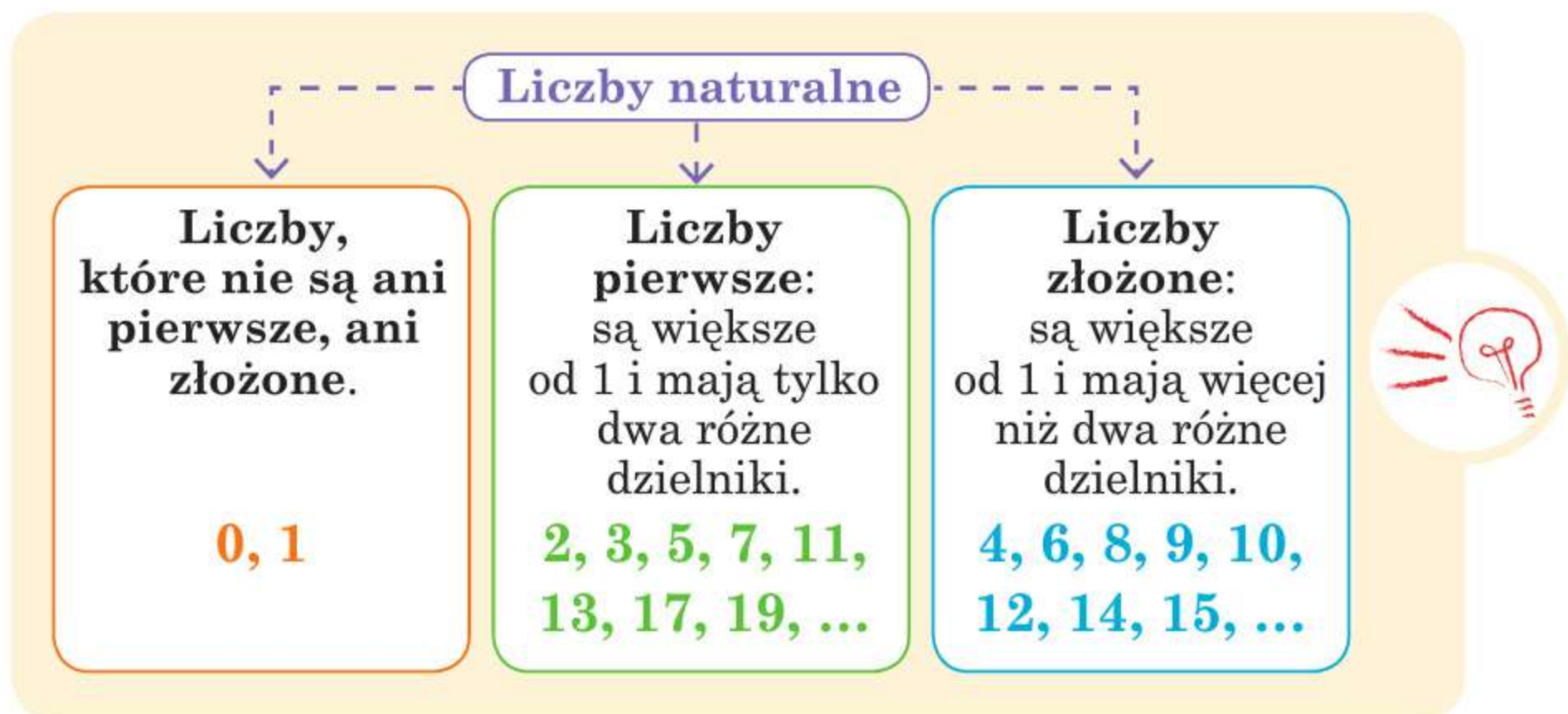
Czy liczba **243** jest liczbą pierwszą, czy złożoną?

Suma cyfr $2 + 4 + 3 = 9$ jest podzielna przez 3 i przez 9, a zatem **liczba 243 jest liczbą złożoną**.

Czy liczba **19** jest liczbą pierwszą, czy złożoną?

- Liczba 19 nie spełnia cech podzielności przez liczby 2, 3, 4, 5, 9 oraz 10.
- Nie dzieli się też bez reszty przez liczby 6, 7 i 8.
- Dzielnikami liczby 19 nie są również liczby 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 i 18.

Nie ma trzeciej liczby naturalnej, przez którą można podzielić bez reszty liczbę 19, a zatem **liczba 19 jest liczbą pierwszą**.



Poćwicz!

- 1.** Wybierz odpowiednie liczby spośród podanych i uporządkuj je rosnąco, a dowiesz się, którzy słynni matematycy byli zafascynowani liczbami pierwszymi.

a) liczby pierwsze

b) liczby złożone

0	51	52	3	19	9	28	7	13	1	4	16	35	31	42	37
W	E	S	F	M	U	L	E	R	O	E	K	I	A	D	T

- 2.** Który zestaw liczb składa się tylko z liczb złożonych?

A. 25, 27, 31

B. 0, 16, 30

C. 13, 17, 19

D. 42, 57, 110

- 3.** Podczas gdy Pola czekała na autobus linii 115, z zatoczki odjechały autobusy o numerach 12, 29, 46, 47 oraz 59. Które z podanych linii mają numer wyrażony liczbą pierwszą? Które z podanych linii mają numer wyrażony liczbą złożoną? Podaj wszystkie dzielniki tych liczb.

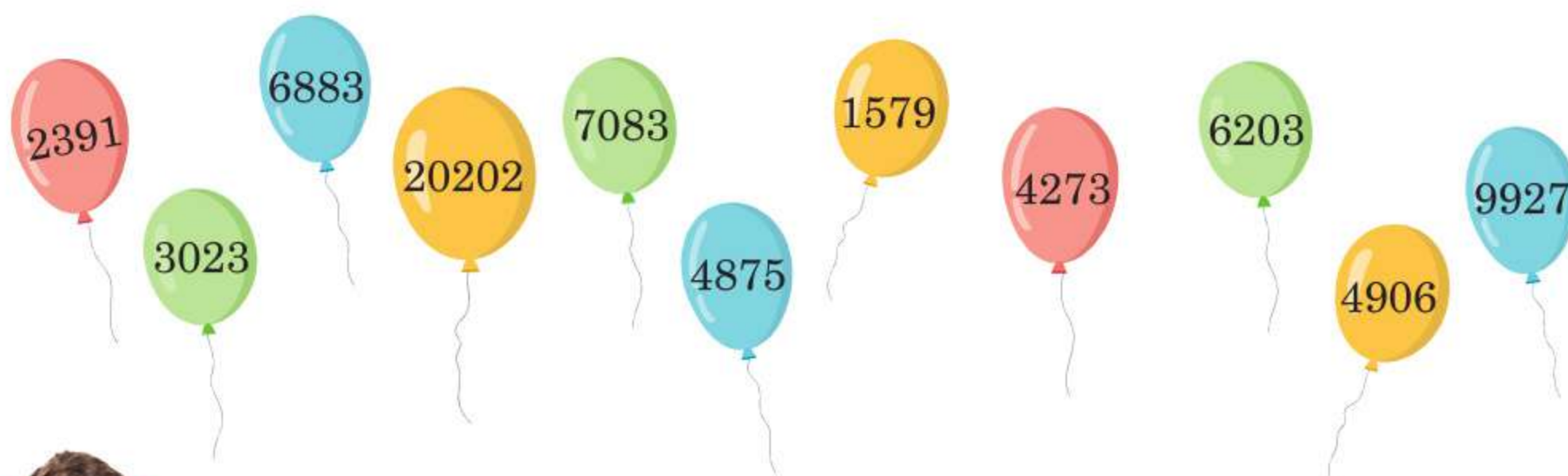
- 4.** Na podstawie cech podzielności oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Wszystkie liczby parzyste są złożone.	P	F
Każda liczba złożona dzieli się przez 2.	P	F
Najmniejszą liczbą pierwszą jest 0.	P	F
Są dokładnie cztery liczby pierwsze mniejsze od liczby 10.	P	F

5. Na podstawie cech podzielności uzasadnij, że liczby: 5678, 2307, 2001, 1265, 6363 są złożone.

6. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej cztery liczby pierwsze, które są większe od 100, ale mniejsze od 110.

7. Na dokładnie pięciu balonach widnieją liczby pierwsze. Wskaż je.



A to ciekawe

Liczby parzyste większe od 2 można przedstawić jako sumę dwóch liczb pierwszych. To teoria, którą szwajcarski matematyk Leonhard Euler (czytaj: ojler) wysnuł 250 lat temu na podstawie spostrzeżeń pruskiego matematyka Christiana Goldbacha. Do tej pory nie udało się udowodnić tej prawidłowości dla każdej liczby parzystej. Zapisz liczby 48 i 100 jako sumę dwóch liczb pierwszych.

$$\begin{aligned}4 &= 2 + 2 \\8 &= 5 + 3 \\28 &= 11 + 17\end{aligned}$$

Sprawdź, co umiesz!

1. Spośród liczb w ramce wypisz wszystkie liczby:

- a) pierwsze,
b) złożone.

1 • 14 • 13 • 28 • 39 • 43 • 95 148 • 71 • 351 • 1000

2. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej wszystkie liczby złożone mniejsze od 20.

3. Która z podanych liczb jest liczbą pierwszą?

A. 2358

B. 3727

C. 1191

D. 3075

5. Rozkład liczby na czynniki pierwsze

- ▶ Jak można zapisać liczbę w postaci iloczynu kilku liczb?
- ▶ Jak rozłożyć liczbę na czynniki pierwsze?
- ▶ W jaki sposób można przedstawić rozkład liczby na czynniki pierwsze?



Odkrywaj!

1. Znalazłem w internecie kalkulator, który zapisuje liczbę podaną przez użytkownika w postaci iloczynu kilku liczb.

Wpisz liczbę

24 = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Wpisz liczbę

150 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

- a) Co można powiedzieć o czynnikach, które wypisuje ten program? Jakie to liczby?
- b) Jaki wynik zostanie wypisany, jeśli zadaną liczbą będzie 42, a jaki – gdy zadaną liczbą będzie 160?

2. Zosia, Pola i Ela zapisały liczbę 54 w postaci iloczynu dwóch, trzech i czterech czynników. Która z nich przedstawiła liczbę 54 w postaci iloczynu liczb pierwszych?

$54 = 6 \cdot 9$	$54 = 6 \cdot 3 \cdot 3$	$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$



Analizuj!

Kalkulator, który znalazł Bruno, przedstawia **rozkład liczby na czynniki pierwsze**, czyli zapis tej liczby za pomocą iloczynu liczb pierwszych.



Sposób 1 Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę **96**.

Poszukaj najmniejszej liczby pierwszej, która jest dzielnikiem liczby **96**.

$$96 = 2 \cdot 48$$

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 24$$

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12$$

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6$$

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^5 \cdot 3$$

Kolejne czynniki będące liczbami złożonymi przedstawiaj w postaci iloczynu, w którym pierwszy czynnik jest najmniejszym dzielnikiem danej liczby złożonej będącym liczbą pierwszą.

Sposób 2 Jak rozłożyć na czynniki pierwsze liczbę **420**?

1 Z prawej strony liczby 420 narysuj pionową kreskę.

3 Podziel zapisane liczby, a wynik dzielenia zapisz z lewej strony.

5 Przedstaw liczbę 420 jako iloczyn liczb pierwszych zapisanych po prawej stronie pionowej kreski.

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

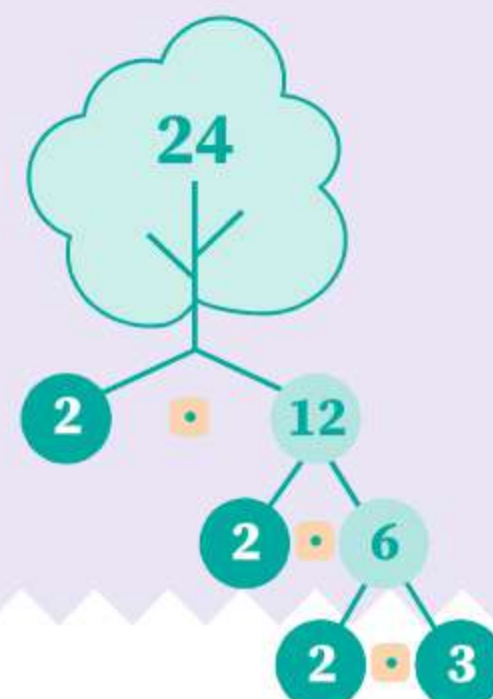
2 Najmniejszy dzielnik liczby 420 będący liczbą pierwszą zapisz z prawej strony kreski.

4 Kolejne dzielniki i wyniki dzielenia zapisuj odpowiednio z prawej i lewej strony, aż po lewej stronie uzyskasz liczbę 1.

$$420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$



Rozłóż na czynniki pierwsze liczby 75 i 755. Który sposób zastosujesz: pierwszy czy drugi? A może narysujesz drzewko jak to obok?



Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze polega na zapisaniu tej liczby w postaci **iloczynu liczb pierwszych**.

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

70	2
35	5
7	7
1	



Poćwicz!

1. Rozłóż podaną liczbę na czynniki pierwsze.

- a) 18 b) 36 c) 50 d) 84 e) 100

Liczbę złożoną można zapisać w postaci dowolnego iloczynu liczb naturalnych większych od 1, a następnie otrzymane czynniki zapisywać w postaci iloczynów, aż uzyskamy liczby pierwsze.

$$24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

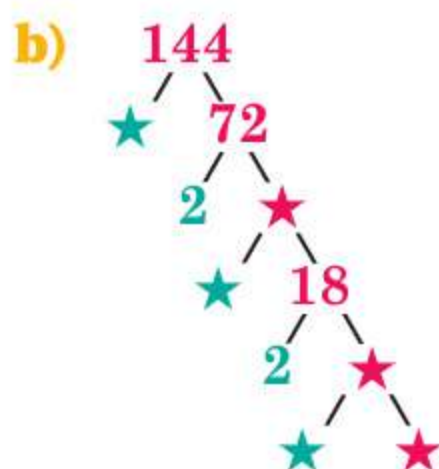
$$24 = 6 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$



2. Znajdź liczbę, która w rozkładzie na czynniki pierwsze ma wyłącznie wskazane poniżej czynniki.

- a) 2, 2, 2, 3, 5, 5 b) osiem dwójek, jedna trójka
c) 3, 3, 3, 3, 11 d) trzy dwójki, dwie trójki, piątka, siódemka

3. Przepisz przykład do zeszytu i uzupełnij rozkład liczby na czynniki pierwsze.



4. Uzupełnij rozkład podanej liczby na czynniki pierwsze.

- a) $120 = 2 \cdot \heartsuit \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$ b) $162 = 2 \cdot 3 \cdot \heartsuit \cdot 3 \cdot \heartsuit$ c) $250 = \heartsuit^3 \cdot 2$

5. Zapoznaj się ze wskazówką i rozłóż podane liczby na czynniki pierwsze.

$$5184 = 81 \cdot 64 = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3^4 \cdot 2^6$$

a) $6561 = 81 \cdot 81 = ?$

b) $576 = 64 \cdot 9 = ?$

c) $1200 = 25 \cdot 48 = ?$

d) $30\,000 = ?$



6. Czy podany rozkład liczby jest poprawnym rozkładem na czynniki pierwsze? Jeśli nie, zapisz właściwy rozkład w zeszycie.

a) $54 = 6 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4,5$	b) $60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$
c) $\begin{array}{r l} 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 294 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$	d) $\begin{array}{r l} 200 & 10 \\ 20 & 4 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 200 = 10 \cdot 4 \cdot 5$

7. Rozłóż podaną liczbę na czynniki pierwsze.

a) 550 b) 480 c) 164 d) 768 e) 1001 



8. Szyfr Cezara polega na przesunięciu liter w tekście o określoną liczbę miejsc w alfabecie. Jego nazwa nawiązuje do postaci rzymskiego władcy, Juliusza Cezara, który często używał tego systemu kodowania w prywatnej korespondencji. Oto szyfr Cezara z kluczem 3, tj. przesunięciem liter w alfabecie o 3 miejsca.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

- a) Używając szyfru Cezara z kluczem 3, odczytaj hasło: OLFCEDSLHUVCD.
b) Używając szyfru Cezara z kluczem 3, zaszyfruj zdanie: LICZBA DWA TO JEDYNA PARZYSTA LICZBA PIERWSZA.
c) Opracuj szyfr Cezara z kluczem będącym największą liczbą w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 330, a następnie zaszyfruj zdanie: LICZBA PIERWSZYCH JEST NIESKONCZENIE WIELE.

Sprawdź, co umiesz!

1. Rozłóż podaną liczbę na czynniki pierwsze.

a) 28 b) 45 c) 500 d) 824

2. Kod do sejfu składa się z 4 cyfr. Aby je znaleźć, trzeba zapisać rozkład liczby 210 na czynniki pierwsze w porządku malejącym. Podaj ten kod.



3. Wskaż największą liczbę w rozkładzie liczby 4320 na czynniki pierwsze.

A. 3 B. 5 C. 2 D. 9 E. 45

6. Największy wspólny dzielnik

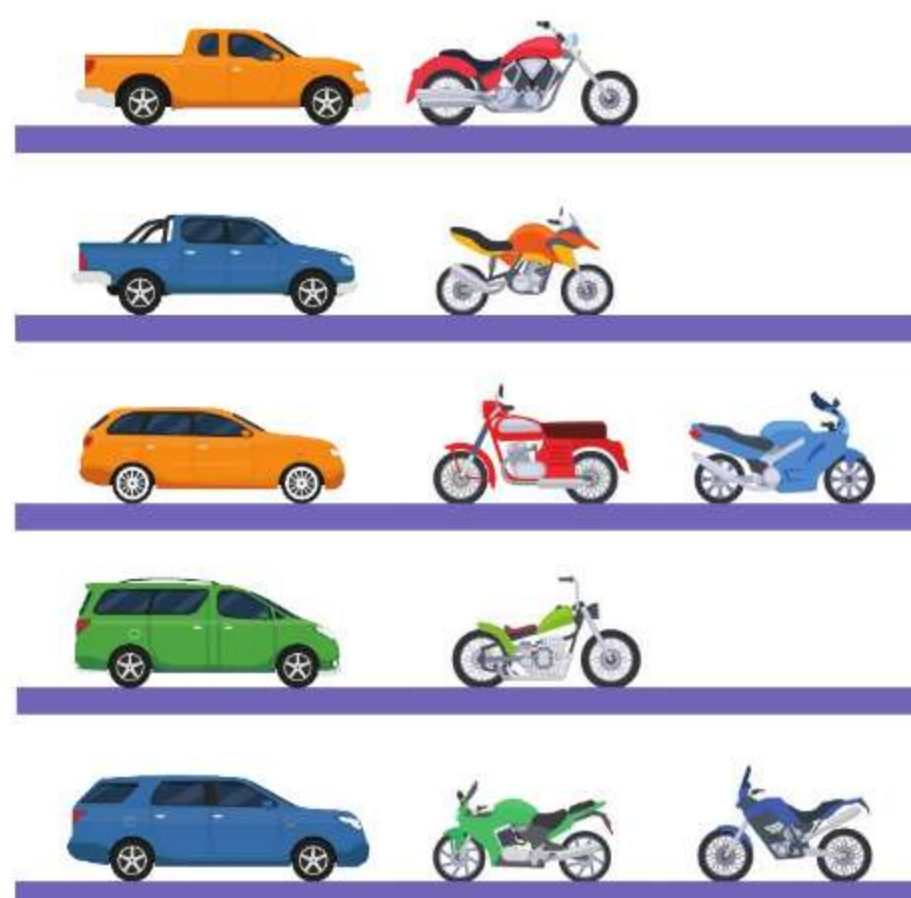
- ▶ Co to jest wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych?
- ▶ Jak wyznaczyć największy wspólny dzielnik dwóch liczb naturalnych?



Odkrywaj!

1. Dostałem od dziadka motocykle do mojej kolekcji resoraków. Chcę ułożyć je na regale w taki sposób, aby:
- na każdej półce stała jednakowa liczba samochodów i motocykli,
 - półek z pojazdami było jak najwięcej.

W jaki sposób można porozstawiać 16 samochodów i 12 motocykli na regale? Ile półek zostanie zapełnionych? Po ile samochodów i motocykli znajdzie się na każdej półce?



2. Zapytałem dziadka, czy zna szybki sposób, za pomocą którego można ustalić, po ile resoraków rozstawić na regale tak, jak tego chcę. Dziadek zapisał na kartce wszystkie dzielniki liczby 16 i wszystkie dzielniki liczby 12, a potem przyjrzał się otrzymanym liczbom i zaznaczył czwórkę. Wypisz wszystkie dzielniki liczb 16 i 12 i przyjrzyj się im. Jak myślisz, dlaczego dziadek wybrał liczbę 4?



Analizuj!

Pani Anna wykłada towar: 24 kubki w kolorze czerwonym i 32 kubki w kolorze niebieskim. Chce, aby na każdej półce stało po tyle samo kubków czerwonych i po tyle samo niebieskich. Na ilu maksymalnie półkach pani Anna może ustawić kubki według ustalonej zasady?

Przeanalizuj tabelę. Przyjrzyj się komórkom oznaczonym tymi samymi kolorami. Co je łączy? W której parze liczba półek jest największa? Ile wynosi?

Liczba półek		
1	$24 : 1 = 24$	$32 : 1 = 32$
2	$24 : 2 = 12$	$32 : 2 = 16$
3	$24 : 3 = 8$	—
4	$24 : 4 = 6$	$32 : 4 = 8$
5	—	—
6	$24 : 6 = 4$	—
7	—	—
8	$24 : 8 = 3$	$32 : 8 = 4$
9	—	—
12	$24 : 12 = 2$	—
16	—	$32 : 16 = 2$
24	$24 : 24 = 1$	—
32	—	$32 : 32 = 1$

Zauważ, że liczba kubków musi być całkowita. Na 3 półkach nie da się ustawić kubków niebieskich tak, żeby na każdej półce znalazło się tyle samo kubków, bo $32 : 3 = 10 \text{ r } 2$. Sytuacje, w których iloraz nie jest liczbą całkowitą, oznaczono symbolem —.

Pani Anna może ustawić po tyle samo kubków każdego rodzaju na maksymalnie 8 półkach.



W komórkach oznaczonych kolorami znajdują się dzielniki wspólne dla liczb reprezentujących liczbę  i . Aby zatem odpowiedzieć na postawione wyżej pytanie, wystarczy ustalić **największy wspólny dzielnik** podanych liczb.

Sposób 1

- 1 Wypisz dzielniki każdej z liczb.
- 2 Zaznacz dzielniki występujące w obu rozkładach.
- 3 Znajdź największy z zaznaczonych dzielników.

24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

32: 1, 2, 4, 8, 16, 32

Sposób 2

Skorzystaj z rozkładu na czynniki pierwsze.

24	2	32	2
12	2	16	2
6	2	8	2
3	3	4	2
1		2	2
		1	

Największy wspólny dzielnik (NWD) dwóch liczb naturalnych to iloczyn ich wspólnych czynników pierwszych.

$$\text{NWD}(24, 32) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

W pierogarni pani Krysi największą popularnością cieszą się pierogi ze szpinakiem oraz pierogi z borówkami. Pierogi zawsze wydawane są w porcjach po tyle samo sztuk. Ile maksymalnie pierogów mogła zawierać jedna porcja, jeśli wiadomo, że tego dnia wydano wszystkie 300 pierogów ze szpinakiem oraz wszystkie 324 pierogi z borówkami?

- 1 Rozłóż obie liczby na czynniki pierwsze, a następnie zaznacz wspólne czynniki pierwsze.



300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	



324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

- 2 Wyznacz $\text{NWD}(300, 324)$.
 $\text{NWD}(300, 324) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Każda porcja składała się z 12 pierogów.



Największy wspólny dzielnik (NWD) dwóch liczb naturalnych to możliwie największa liczba naturalna, która dzieli obie te liczby bez reszty. Jest równa iloczynowi wspólnych czynników pierwszych tych liczb.

$$\text{NWD}(20, 30) = 2 \cdot 5 = 10$$

20	2	30	2
10	2	15	5
5	5	3	3
1		1	

Poćwicz!

- Wypisz w zeszycie dzielniki podanych liczb, następnie podkreśl wspólne dzielniki obu liczb i zamaluj na czerwono największy wspólny dzielnik tych liczb.

a) 6 i 8	b) 12 i 20	c) 48 i 56	d) 50 i 75
e) 60 i 180	f) 150 i 400	g) 200 i 240	h) 440 i 330
- Wyznacz największy wspólny dzielnik podanych liczb.

a) NWD(10, 14)	b) NWD(18, 24)	c) NWD(17, 15)
d) NWD(100, 200)	e) NWD(1200, 80)	f) NWD(9, 10)
- Cezary musi przygotować jednakowe zestawy złożone z mandarynek i kiwi. Ile maksymalnie zestawów może stworzyć Cezary z 28 mandarynek i 35 kiwi? Ile mandarynek będzie w każdym zestawie, a ile kiwi, jeśli nie dzieli owoców?
- Trener w klubie dziecięcej piłki nożnej musi utworzyć mieszane drużyny. W każdej drużynie ma być po tyle samo dziewczynek i w każdej po tyle samo chłopców. Ile maksymalnie takich drużyn może utworzyć? Ile w każdej drużynie będzie dziewcząt, a ilu chłopców?

a) Dziewcząt jest 15, a chłopców 5.	b) Dziewcząt jest 15, a chłopców 6.	c) Dziewcząt jest 15, a chłopców 7.
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------
- Marek kolekcjonuje karty związane z motoryzacją. Zauważył, że ma 18 dubletów kart z samochodami oraz 24 dublety kart z motocyklami. Marek postanowił oddać je kolegom. Ile najwięcej osób może obdarować kartami, jeśli chciałby, aby każda z nich otrzymała po tyle samo kart z samochodami i po tyle samo kart z motocyklami?
- Ciasto na rogaliki ma kształt prostokąta o wymiarach $48 \text{ cm} \times 72 \text{ cm}$. Jakie wymiary będzie miało ciasto na jeden rogalik, jeśli pani Basia chce wyciąć z całego ciasta kwadratowe kawałki o jak najdłuższym boku?

7. Oblicz.

a) $\text{NWD}(124, 220)$

b) $\text{NWD}(1200, 450)$

c) $\text{NWD}(165, 231)$

d) $\text{NWD}(250, 300)$

e) $\text{NWD}(842, 421)$

f) $\text{NWD}(156, 234)$

8. Oblicz.

a) $\text{NWD}(6, 8, 12)$

b) $\text{NWD}(120, 250, 420)$

Wypisz dzielniki każdej z tych liczb i znajdź największy spośród wspólnych dzielników albo rozłóż każdą z liczb na czynniki pierwsze i wybierz te czynniki, które występują w rozkładzie każdej z liczb.



9. Pan Krzysztof jest logistyką i zajmuje się przygotowaniem ładunków. Planuje, ile i jakie produkty zapakować na samochód ciężarowy i w jaki sposób dostarczyć je do odpowiednich sklepów. Zawsze istotne jest, aby przesyłki przygotować zgodnie z wytycznymi. Tym razem pan Krzysztof otrzymał poniższą instrukcję.

Produkty: 60 pralek, 36 zmywarek, 18 lodówek, 12 ekspresów do kawy

Transport: do każdego sklepu z artykułami oddzielny transport

Uwagi: do każdego sklepu ma trafić po tyle samo urządzeń danego rodzaju



Do ilu maksymalnie sklepów będzie przygotowywana ta wysyłka? Po ile sztuk każdego ze sprzętów zostanie dostarczone do każdego z tych sklepów?

10. Oblicz $\frac{\text{NWD}(\spadesuit, \diamondsuit)}{\text{NWD}(\spadesuit + \diamondsuit, \spadesuit - \diamondsuit)}$, jeśli $\spadesuit = 3^2 \cdot 4^3$, $\diamondsuit = 3^3 \cdot 2^2$.



Sprawdź, co umiesz!

1. Ile wynosi największy wspólny dzielnik liczb 16 oraz 24?

A. 2

B. 4

C. 8

D. 12

2. Oblicz.

a) $\text{NWD}(40, 60)$

b) $\text{NWD}(360, 840)$

c) $\text{NWD}(132, 168)$

3. Pani Anita upiekła pizzę w kształcie prostokąta o wymiarach $60 \text{ cm} \times 45 \text{ cm}$. Zamierza pokroić ją na jak największe kwadratowe kawałki. Jaką długość będzie miał bok jednego takiego kawałka?

7 • Najmniejsza wspólna wielokrotność

- ▶ Co to jest wielokrotność liczby?
- ▶ Czy da się wymienić wszystkie wielokrotności liczby?
- ▶ Jak wyznaczyć najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb?



Odkrywaj!

1. W świetlicy szkolnej korzysta się z kredek świecowych, które są pakowane po 5 sztuk.



- a) Ile kredek znajduje się na pierwszym rysunku? A na drugim? A na trzecim, czwartym, piątym?
- b) Ile kredek będzie w 25 pełnych pudełkach? Jakie działanie arytmetyczne wykonasz, aby podać rozwiązanie?

2. Kuba i Zosia spotkali się w poniedziałek w szkole muzycznej Nutka. Kuba przychodzi na lekcje gry na gitarze co dwa dni, a Zosia na lekcje ukulele – co trzy dni. W jaki dzień tygodnia Kuba i Zosia spotkają się w Nutce ponownie?





Analizuj!

Pola chce kupić spinki do włosów, które sprzedawane są po 4 sztuki w opakowaniu. Ile spinek może kupić Pola?



Liczba opakowań	Liczba spinek
0	$4 \cdot 0 = 0$
1	$4 \cdot 1 = 4$
2	$4 \cdot 2 = 8$
3	$4 \cdot 3 = 12$
4	$4 \cdot 4 = 16$
...	...

Liczby 0, 4, 8, 12, 16, ... to **wielokrotności** liczby 4. Kolejne **wielokrotności liczby** otrzymuje się, **mnożąc daną liczbę przez kolejne liczby naturalne**.
0 jest wielokrotnością każdej liczby naturalnej.
Każda liczba naturalna jest wielokrotnością liczby 1.
Wielokrotności każdej liczby jest nieskończenie wiele.

Cezary i Bruno chodzą na kurs szybkiego czytania. Cezary ma zajęcia co 4 dni, a Bruno co 7 dni. Obaj mieli zajęcia 30 września. Kiedy znów będą mieli zajęcia tego samego dnia?

Cezary zaznacza w kalendarzu dni reprezentowane przez **liczby będące wielokrotnościami liczby 4**.



Bruno zaznacza w kalendarzu dni reprezentowane przez **liczby będące wielokrotnościami liczby 7**.

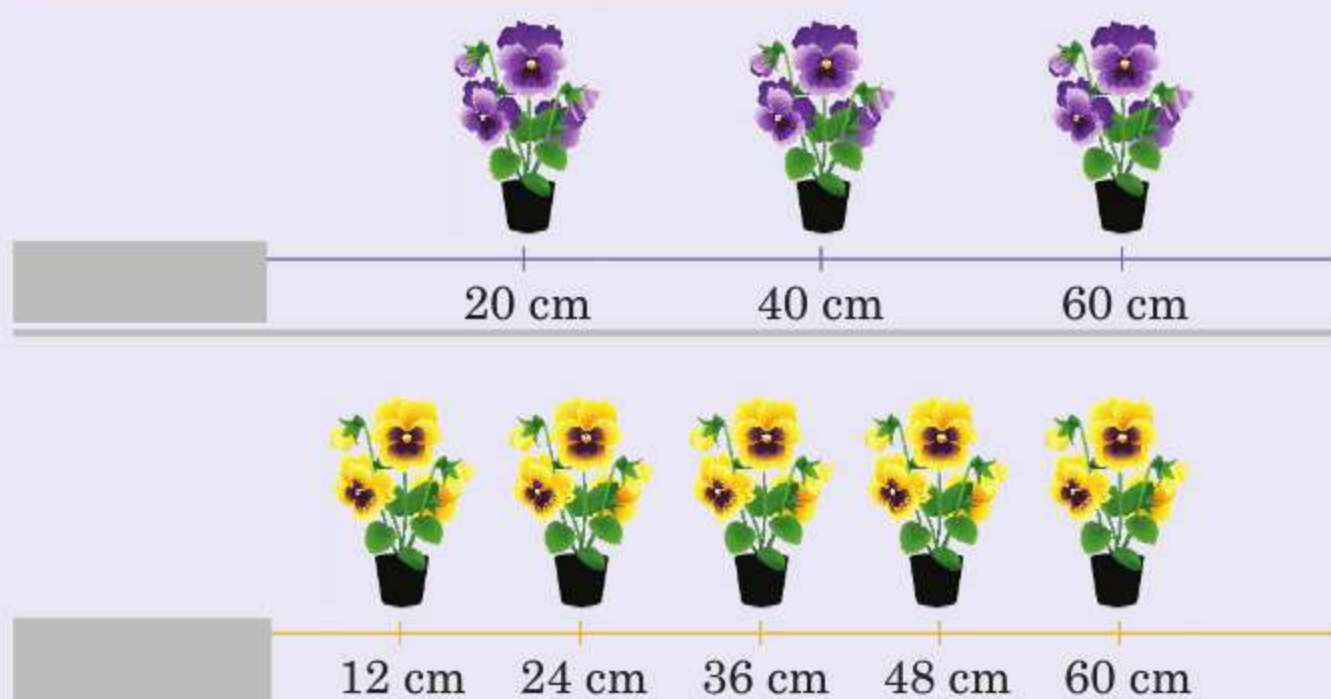


Cezary i Bruno spotkają się ponownie za 28 dni, czyli 28 października.

Liczba 28 to **najmniejsza wspólna wielokrotność** liczb 4 i 7. Za pomocą symboli matematycznych można to zapisać następująco: $NWW(4, 7) = 28$.

Kuba pomaga babci w sadzeniu bratków. Bratki będą rosły na dwóch grządkach. Na pierwszej grządce – fioletowe, oddalone od chodnika i od siebie o 20 cm, na drugiej grządce – żółte, oddalone od chodnika i od siebie o 12 cm. W jakiej odległości od chodnika bratek fioletowy będzie zasadzony dokładnie nad żółtym po raz pierwszy? Jak to obliczyć?

1 Wykonaj rysunek pomocniczy.



Zauważ, że **odległości są określone przez wielokrotności liczb 20 i 12**, a zatem fioletowy bratek będzie zasadzony nad żółtym po raz pierwszy **w odległości równej najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb 20 i 12**.

2 Wykonaj obliczenia.

Sposób 1 Wypisz kilka kolejnych wielokrotności obu liczb różnych od 0.

- Wielokrotności liczby 20: 20, 40, **60**, 80, 100, 120, 140, 160, ...
- Wielokrotności liczby 12: 12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, ...

$$\text{NWW}(20, 12) = 60$$

Sposób 2 Skorzystaj z rozkładu na czynniki pierwsze.

- Tym samym kolorem zaznacz czynniki pierwsze, które występują w rozkładach obu liczb.
- **Czynniki, które występują w obu rozkładach**, zapisz tylko raz, a następnie pomnóż je przez **pozostałe czynniki** w rozkładach.

20	2				12	2
10	2				6	2
5	5				3	3
1					1	

$$\text{NWW}(20, 12) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$$

Bratek fioletowy będzie zasadzony dokładnie nad żółtym po raz pierwszy w odległości 60 cm od chodnika.

Korzystając z rozkładu na czynniki pierwsze, oblicz $\text{NWW}(24, 28)$.



Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)

dwóch liczb naturalnych to najmniejsza liczba naturalna różna od zera, która jest jednocześnie wielokrotnością obu tych liczb. Jest równa iloczynowi czynników pierwszych, które występują jednocześnie w obu rozkładach, oraz pozostałych czynników tych rozkładów.

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ & 7 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ & 3 \\ & 5 \\ & 1 \end{array}$$



$$\text{NWW}(14, 30) = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 210$$

Poćwicz!

1. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej liczby naturalne od 0 do 20, a następnie:

- czerwonym kolorem podkreśl wielokrotności liczby 4,
- niebieskim kolorem podkreśl wielokrotności liczby 5,
- zielonym kolorem podkreśl wielokrotności liczby 6.
- podaj najmniejszą różną od 0 wspólną wielokrotność liczb 4 i 5,
- podaj najmniejszą różną od 0 wspólną wielokrotność liczb 4 i 6.

2. Ela wypisała wszystkie liczby naturalne mniejsze niż 110. Następnie skreśliła wszystkie wielokrotności liczby 8. Chciała skreślić jeszcze wielokrotności liczby 16, ale okazało się, że wszystkie są już skreślone. Z czego to wynika?

3. Zapoznaj się ze wskazówką, a następnie oblicz najmniejszą wspólną wielokrotność podanych liczb sposobem, który jest dla ciebie wygodniejszy.

a) $\text{NWW}(3, 5)$

b) $\text{NWW}(6, 7)$

c) $\text{NWW}(9, 36)$

d) $\text{NWW}(12, 30)$

e) $\text{NWW}(32, 48)$

f) $\text{NWW}(70, 84)$

g) $\text{NWW}(140, 350)$

h) $\text{NWW}(250, 280)$

i) $\text{NWW}(120, 450)$



Najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb można obliczyć, mnożąc jedną z tych liczb przez czynniki, które występują tylko w rozkładzie drugiej liczby.

$$\text{NWW}(14, 30) = 30 \cdot 7 = 14 \cdot 3 \cdot 5 = 210$$

4. W domu pani Haliny wiszą dwa zegary z kukułką, które się rozregulowały. W jednym zegarze kukułka kuka co 6 godzin, a w drugim – co 8 godzin. Kukułki z obu zegarów właśnie jednocześnie wykukały pełną godzinę. Za ile godzin kukułki ponownie jednocześnie zakukają?



5. Jaka najmniejsza długość powinna mieć drewniana deska, aby można ją było pociąć na kawałki o długości 60 cm lub 75 cm? Długość wyraż w metrach.

6. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Najmniejszą wielokrotnością każdej liczby naturalnej jest 0.	P	F
Każda wielokrotność liczby 5 jest wielokrotnością liczby 10.	P	F
Wszystkie wielokrotności liczby 3 są nieparzyste.	P	F

7. Ustal:

- a) ile razy najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 45 i 54 jest większa od ich największego wspólnego dzielnika;
b) o ile $\text{NWW}(180, 144)$ jest mniejsza od $\text{NWW}(140, 180)$.

8. Kod do alarmu pewnego sklepu złożony jest z 8 cyfr. Podaj ten kod, jeśli:

- trzy pierwsze cyfry tworzą liczbę, która jest $\text{NWW}(28, 40)$,
- dwie kolejne cyfry tworzą liczbę, która jest $\text{NWD}(60, 75)$,
- trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę, która jest $\text{NWW}[\text{NWW}(28, 40), \text{NWD}(60, 75)]$.



9. Pola, Ela i Zosia co kilka dni spotykają się na basenie. Pola chodzi na basen co trzy dni, Ela co cztery dni, a Zosia co piąty dzień. Ostatni raz we trzy spotkały się na basenie w środę 20 listopada. Wskaż dzień tygodnia i datę następnego spotkania dziewcząt na tym basenie.

Sprawdź, co umiesz!

1. Wypisz wszystkie wielokrotności liczby 6 większe od 30 i mniejsze od 60.

2. Kuba i Bruno trenują biegi do zawodów sportowych. Kuba pokonuje okrążenie w ciągu 3 minut, a Bruno w ciągu 4 minut. Chłopcy wyruszają z linii startu jednocześnie. Za ile minut spotkają się ponownie w tym miejscu?

3. Która liczba jest najmniejsza?

- A. $\text{NWW}(9, 12)$ B. $\text{NWD}(30, 60)$ C. $\text{NWW}(7, 21)$ D. $\text{NWD}(15, 21)$

PODSUMOWANIE DZIAŁU II

W świecie własności liczb naturalnych

Powtórz wiadomości

Cechy podzielności przez 2, 3, 4, 5, 9, 10 i 100

Za pomocą cech podzielności można rozpoznać, czy jedna liczba dzieli się przez drugą bez reszty.

suma cyfr liczby
jest liczbą
podzielną przez 3

3

dwie ostatnie cyfry
liczby są zerami
lub tworzą liczbę
podzielną przez 4

4

suma cyfr liczby
jest liczbą podzielną
przez 9

9

ostatnia cyfra
liczby to 0

10

ostatnia cyfra
liczby to 0, 2, 4,
6 lub 8

2

ostatnia cyfra
liczby to 0 lub 5

5

dwie ostatnie
cyfry
liczby są
zerami

100

Podział liczb naturalnych

Liczb naturalne:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

Liczb,
które nie są
ani pierwsze,
ani złożone.

0, 1

Liczb
pierwsze:
mają tylko dwa
różne dzielniki.
2, 3, 5, 7, 11, ...

Liczb złożone:
większe od 1, które
mają więcej niż dwa
różne dzielniki,
4, 6, 8, 9, 10, ...

Dzielniki i wielokrotności

Dzielniki

liczby 24 to:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

Wielokrotności

liczby 6 to:

0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...

Rozkład liczby na czynniki pierwsze

$$\begin{array}{r|l} 224 & 2 \\ 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^5 \cdot 7$$

Największy wspólny dzielnik (NWD) i najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{NWD}(126, 140) = 2 \cdot 7 = 14$$

$$\text{NWW}(126, 140) = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 1260$$

$$\text{NWW}(126, 140) = 140 \cdot 3 \cdot 3 = 126 \cdot 2 \cdot 5 = 1260$$

Poćwicz przed sprawdzianem

1. Wskaż wszystkie dzielniki liczby 30.

A. 0, 30, 60, 90

B. 1, 2, 3, 6, 9, 10, 15, 30

C. 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

D. 0, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

2. Wskaż liczbę, która nie jest liczbą pierwszą.

A. 7

B. 79

C. 87

D. 89

3. Wskaż liczbę, która jest liczbą pierwszą.

A. 2529

B. 2621

C. 6792

D. 9995

4. W rozkładzie na czynniki pierwsze liczby 168 występują:

A. dwie trójki, jedna dwójka i siódemka.

B. dwie dwójki, jedna trójka i siódemka.

C. jedna dwójka, jedna trójka i siódemka.

D. trzy dwójki, jedna trójka i siódemka.

5. Ile jest liczb złożonych większych od 30, ale mniejszych od 45?

A. 4

B. 11

C. 12

D. 10

6. Wskaż liczbę, która jest podzielna zarówno przez 3, jak i przez 4.

A. 760

B. 304

C. 576

D. 112

7. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Aby liczba $97 \star 5$ była podzielna przez 9, w miejsce $\star$ należy wpisać cyfrę 4.	P	F
NWW(24, 36) jest sześć razy większa od NWD tych liczb.	P	F
Każda wielokrotność liczby 9 jest wielokrotnością 6.	P	F

8. Spośród liczb: 2390, 6164, 1124, 9401, 2400, 3581, 11 045, 98 508, 123 957, 189 000 wskaż te, które są podzielne:

a) przez 2,

b) przez 3,

c) przez 4,

d) przez 5,

e) przez 9,

f) przez 100.

9. Ustal, jaką cyfrę wstawić w miejsce $\star$, aby liczba $134 5\star 0$ była podzielna:

a) przez 2,

b) przez 3,

c) przez 4,

d) przez 5,

e) przez 9,

f) przez 100.

Zapisz wszystkie możliwości.

10. Ustal, jaką cyfrę wstawić w miejsce ★, aby liczba 427★ była podzielna przez 6. Zapisz wszystkie możliwości.

11. Ustal:

- a) o ile największy wspólny dzielnik liczb 96 i 144 jest mniejszy od najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb 35 i 60,
- b) ile razy $NWW(27, 30)$ jest większa od $NWD(125, 80)$.

12. Cezary ustawiał figurki na półce. Gdy ustawił je w rzędach po 5, to zostały mu 4 figurki. Gdy chciał ustawić je w rzędach po 10 sztuk w każdym – zabrakło mu jednej. Postanowił ustawić je inaczej – po 7 w każdym rzędzie. Wtedy w każdym rzędzie stało ich tyle samo. Ile figurek Cezary ma w swojej kolekcji, jeśli wiadomo, że jest ich mniej niż 100?

13. W godzinach 10.00–12.00 z przystanku Piekarnicza odjeżdżają autobusy linii 227 oraz 121. Autobusy tych linii odjechały jednocześnie o godzinie 10.00.

- a) O której godzinie ponownie autobusy tych linii odjadą jednocześnie z przystanku Piekarnicza?
- b) Ile razy w godzinach 10.00–12.00 autobusy tych linii odjadą jednocześnie z przystanku Piekarnicza?

ul. Piekarnicza	
PIEKARNICZA	10.00
121	odjazd
227	odjazd
354	za 5 min
121	za 8 min
354	za 10 min
227	za 12 min

14. Pewna szkoła uzbierała 56 kg karmy dla kotów i 96 kg karmy dla psów. Aby pomóc większej liczbie przytulisk dla zwierząt, zebraną karmę podzielono na mniejsze paczki. Ile najwięcej można przygotować takich paczek, jeśli w każdej paczce musi znaleźć się tyle samo kilogramów karmy dla kotów i psów? Po ile kilogramów karmy każdego rodzaju będzie w każdej paczce?



15. Pan Marian postanowił, że od poniedziałku włącznie co trzeci dzień będzie odkurzać, co piąty dzień będzie robić pranie, a co siódmy dzień będzie prasować. W którym kolejnym dniu po raz pierwszy wykona wszystkie te czynności? Jaki to będzie dzień tygodnia?



Podejmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał Polaków, których dokonania w dziedzinie kryptologii zmieniły bieg historii. Powodzenia!



1 (1905–1980), Henryk Zygalski (1908–1978) i Jerzy Różycki (1909–1942) to polscy **2** i kryptolodzy nazywani „pogromcami Enigmy”. Enigma to przenośna maszyna szyfrująca, podobna do **3**, używana podczas II wojny światowej przez stronę niemiecką do przekazywania zakodowanych informacji. Ponieważ lingwiści, czyli **4**, którzy do tej pory odgrywali główną rolę w łamaniu szyfrów, nie byli w stanie ustalić zastosowanej metody szyfrowania, o pomoc poproszono matematyków. Dopiero dzięki wykorzystaniu wiedzy z zakresu kombinatoryki oraz metod matematycznych udało się dokonać dekryptażu **5**. Złamanie kodów Enigmy przez Polaków zdaniem historyków znacząco wpłynęło na losy II wojny światowej i skróciło ją nawet **6**.

1. Ile parzystych dzielników ma liczba 96?

9	12	10
Józef Warszawski	Jan Czochralski	Marian Rejewski

2. Przyjrzyj się liczbom zapisanym w ramce obok i oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

1304, 1624, 5001,
1290, 8217, 1315

Trzy liczby są podzielne przez 3.	P	F
Dwie liczby są podzielne zarówno przez 2, jak i przez 5.	P	F
Dwie liczby są podzielne przez 4, a jedna liczba jest podzielna przez 9.	P	F
P, F, P	P, F, F	F, P, F
matematycy	informatycy	fizycy

3. Spośród podanych liczb: 1821, 2396, 2399, 3025, 4288, 4391, 4491 dwie są liczbami pierwszymi. Znajdź je, korzystając z cech podzielności, a następnie oblicz ich sumę.

6800	6790	4798
laptopa	maszyny do pisania	komputera stacjonarnego

4. Do kwiaciarni Krokus, w której pracuje pani Ula, przywieziono 144 róże oraz 360 goździków. Ile maksymalnie bukietów może przygotować pani Ula, jeśli chce, aby w każdym z nich znalazło się po tyle samo róż i goździków?



36	72	144
najwybitniejsi informatycy	specjaliści od języka	wyspecjalizowani mechanicy

5. Pan Jan regularnie biega. Pewnego dnia postanowił zabrać swojego syna na 50-minutowy trening. Pan Jan pokonuje jedno okrążenie w ciągu 3 minut, a jego syn w ciągu 5 minut. Ile razy w ciągu całego biegu pan Jan spotkał się ze swoim synem ponownie na linii startu, jeśli wystartowali razem?



5 razy	10 razy	3 razy
zastosowanego szyfru wykorzystującego 0 i 1	zastosowanego kodu programistycznego	zastosowanych równań matematycznych

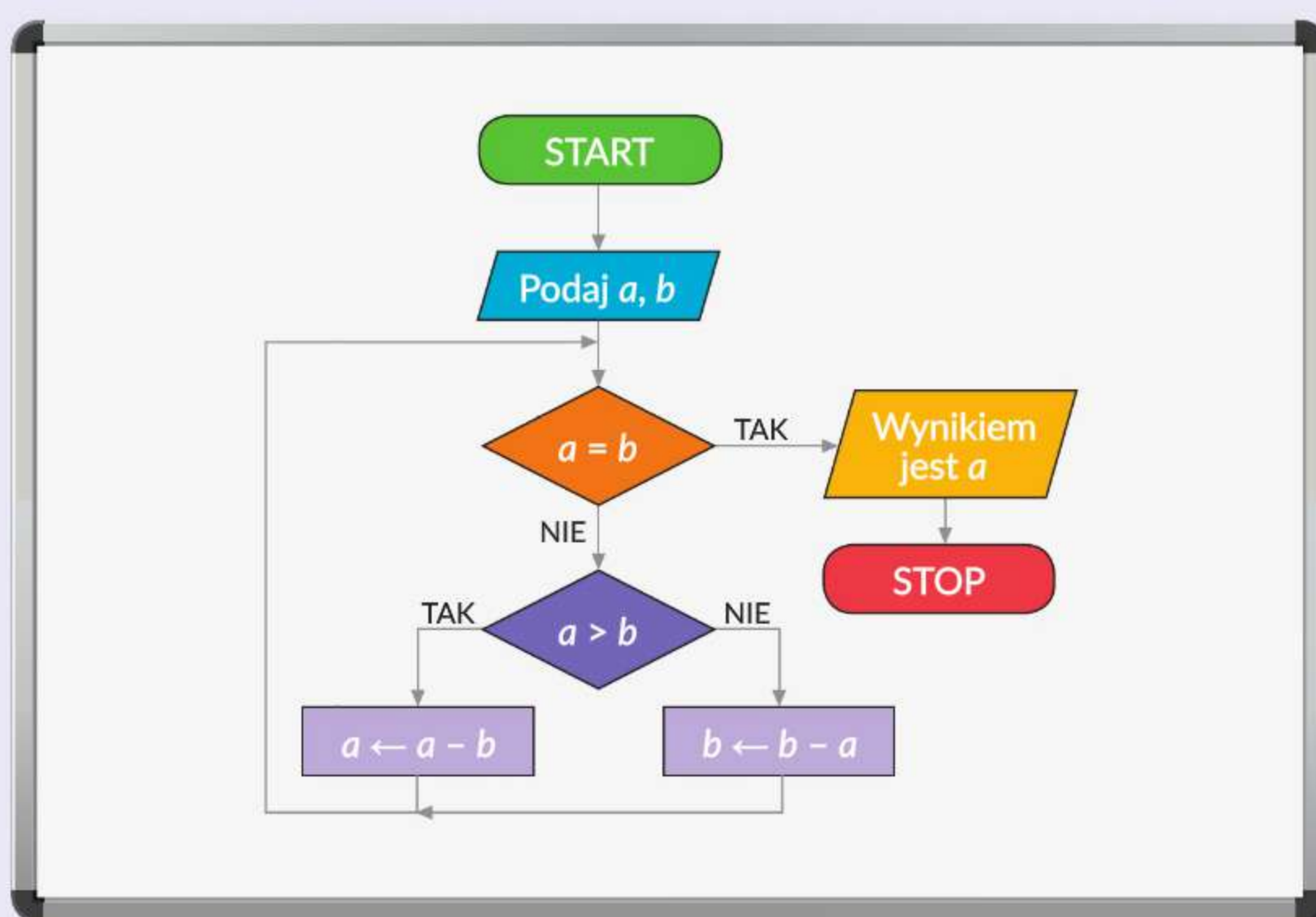
6. Pani Kasia i pani Basia pracują na dwie zmiany, poranną i popołudniową. Pani Kasia ma popołudniową zmianę co 4 dni, a pani Basia co 5 dni. Ostatni raz na popołudniowej zmianie spotkały się 17 października. Kiedy ponownie spotkają się w pracy na popołudniowej zmianie?

6 listopada	5 listopada	27 października
o 3 lata	o 5 miesięcy	o 12 miesięcy



Największy wspólny dzielnik ma wiele praktycznych zastosowań. Wykorzystywany jest m.in. w algorytmach szyfrowania, które pozwalają przesyłać, otrzymywać oraz przechowywać dane w sposób bezpieczny, to znaczy tak, aby nikt niepowołany nie mógł ich odczytać.

Wyznaczanie NWD dwóch liczb opisał już około 300 r. p.n.e. grecki matematyk Euklides w swoim dziele *Elementy*. Zaproponowany przez niego algorytm ma dwie wersje: może wykorzystywać odejmowanie lub resztę z dzielenia. Wersję z odejmowaniem przedstawiono poniżej w postaci schematu blokowego.



1. Przeanalizuj działanie tego algorytmu dla $a = 12$ i $b = 18$.

Czy $a = b$? NIE → Czy $a > b$? NIE → $b = 18 - 12 = 6$

Zaczynamy od początku dla $a = 12$ i $b = 6$

Czy $a = b$? NIE → Czy $a > b$? TAK → $a = 12 - 6 = 6$

Zaczynamy od początku dla $a = 6$ i $b = 6$

Czy $a = b$? TAK → NWD(12, 18) = 6

2. Oblicz za pomocą algorytmu Euklidesa.

a) NWD(144, 192)

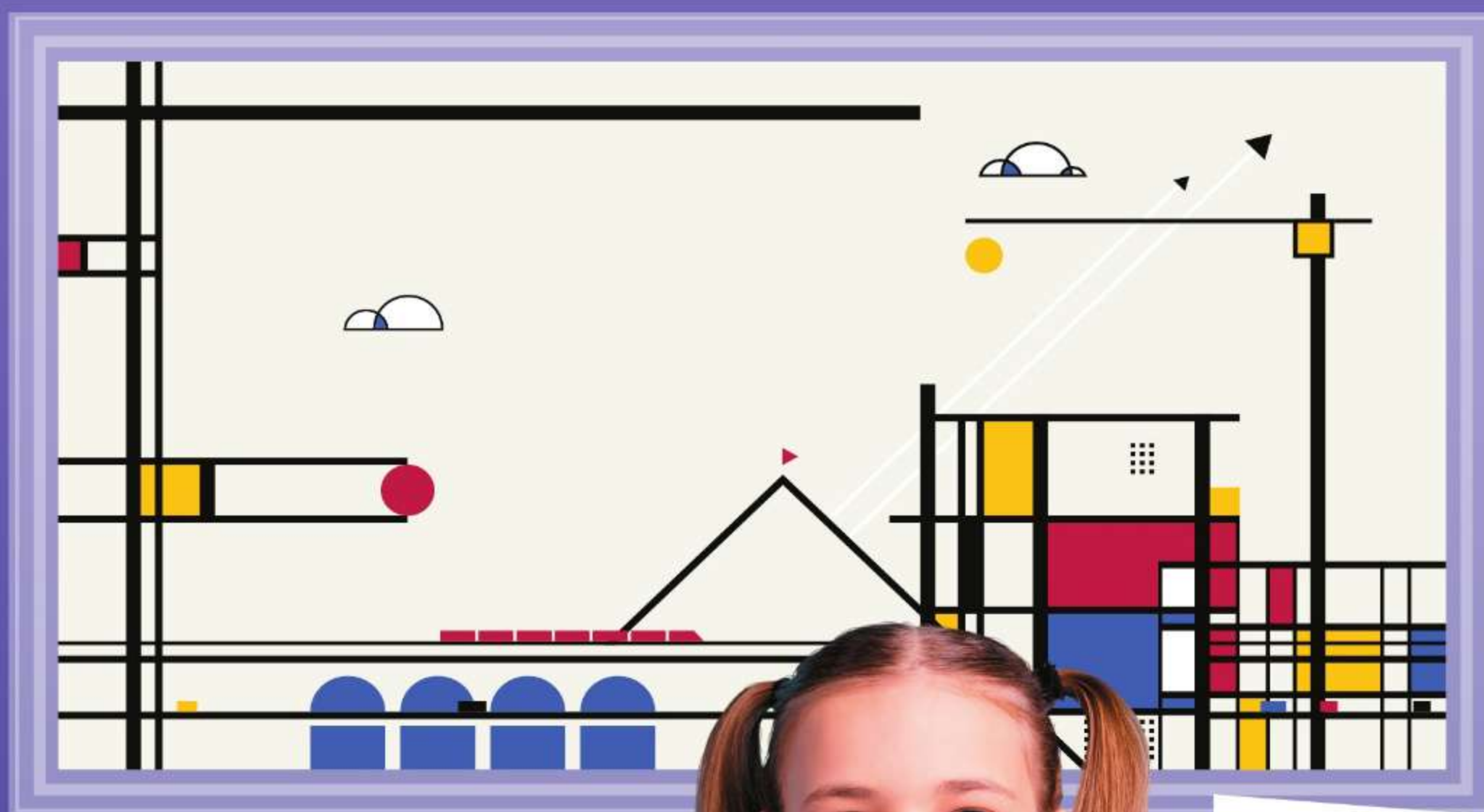
b) NWD(90, 84)

c) NWD(480, 320)

DZIAŁ



W ŚWIECIE FIGUR PŁASKICH



To obraz geometryczny,
który przedstawia miasto.

A teraz znajdź
po 2 kąty proste,
ostre, rozwarte
i półpełne.

Wskaż na tym
obrazie po
2 pary odcinków
równoległych
i prostokątnych.

Ten obraz
w rzeczywistości jest
10 razy większy niż
zdjęcie zamieszczone
w podręczniku. Jakie
są jego rzeczywiste
wymiary?

1. Wzajemne położenie prostych i odcinków

- ▶ Jak można opisać: punkt, odcinek, półprostą i prostą?
- ▶ Kiedy proste lub odcinki są równoległe, a kiedy prostopadłe?
- ▶ Jak rysować proste lub odcinki równoległe, a jak prostopadłe?

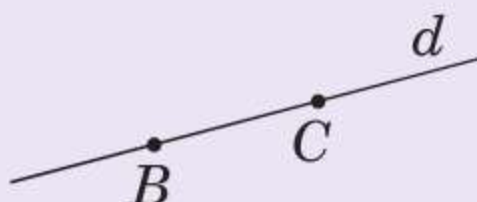


Analizuj!

Jak można opisać poniższe figury?

A

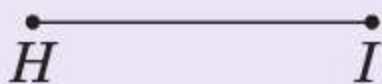
To jest punkt A .



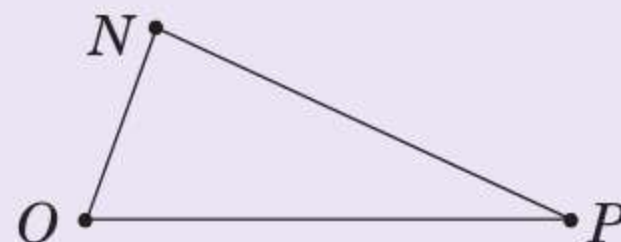
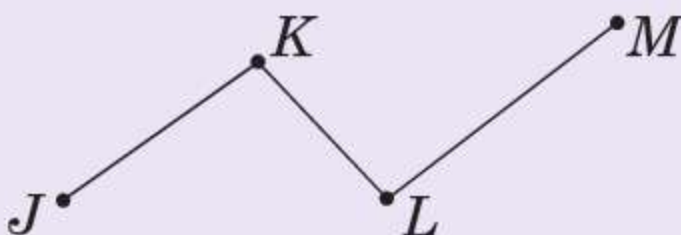
To jest prosta. Nie ma początku ani końca. Tę prostą można nazwać BC , CB lub d .



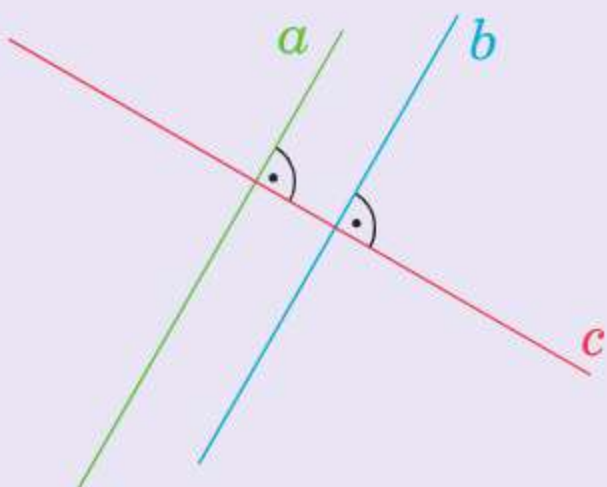
To jest półprosta. Ma początek, ale nie ma końca. Tę półprostą można nazwać EF lub g .



To jest odcinek, czyli część prostej ograniczona dwoma punktami wraz z tymi punktami. Ten odcinek można nazwać HI lub IH .



To są łamane: łamana otwarta $JKLM$ i łamana zamknięta NOP . Łamana to figura złożona z kilku odcinków, w której każde dwa kolejne odcinki mają wspólny koniec i żadne dwa kolejne odcinki nie leżą na jednej prostej.



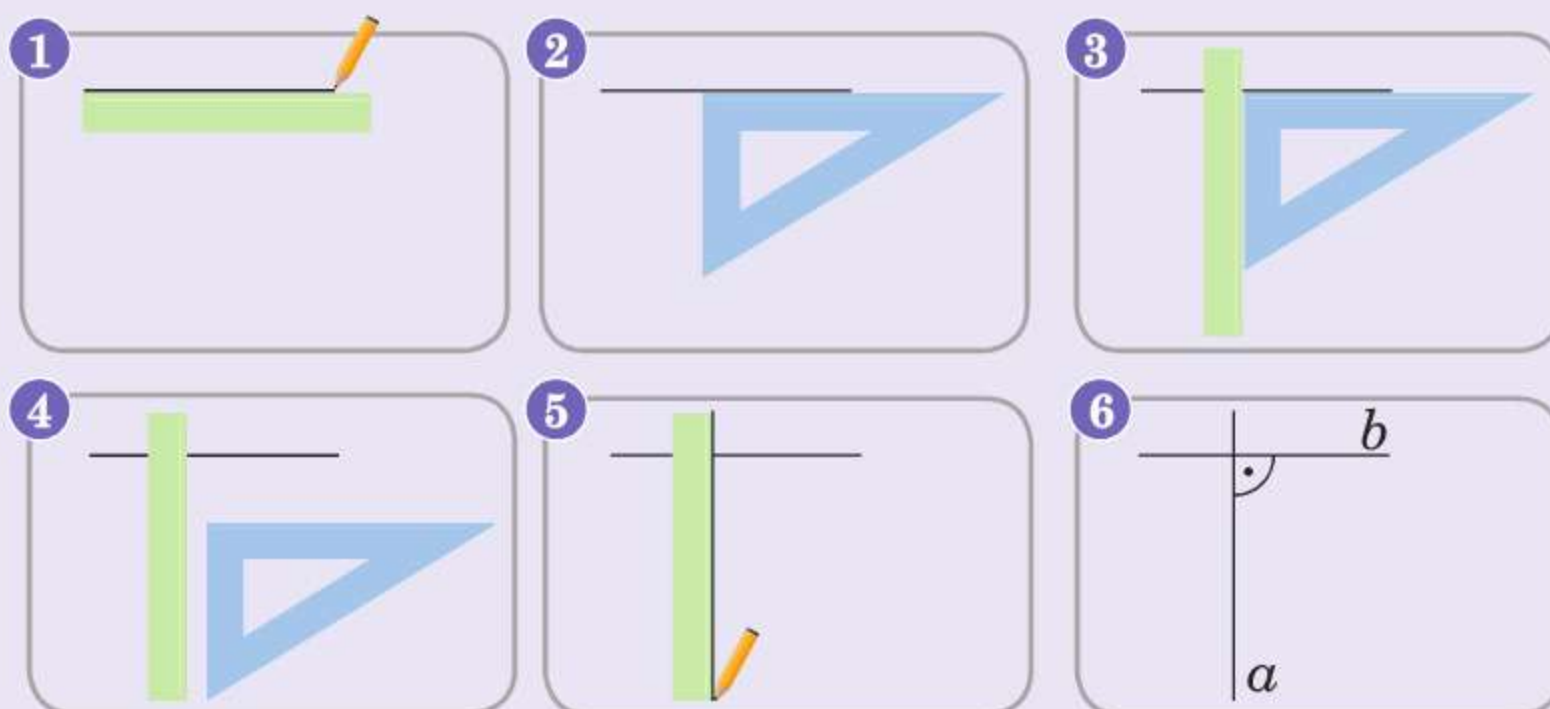
Kiedy dwie proste są prostopadłe, a kiedy równoległe?

Proste prostopadłe przecinają się pod kątem prostym: $a \perp c$, $b \perp c$.

Proste równoległe nie przecinają się lub pokrywają się: $a \parallel b$.

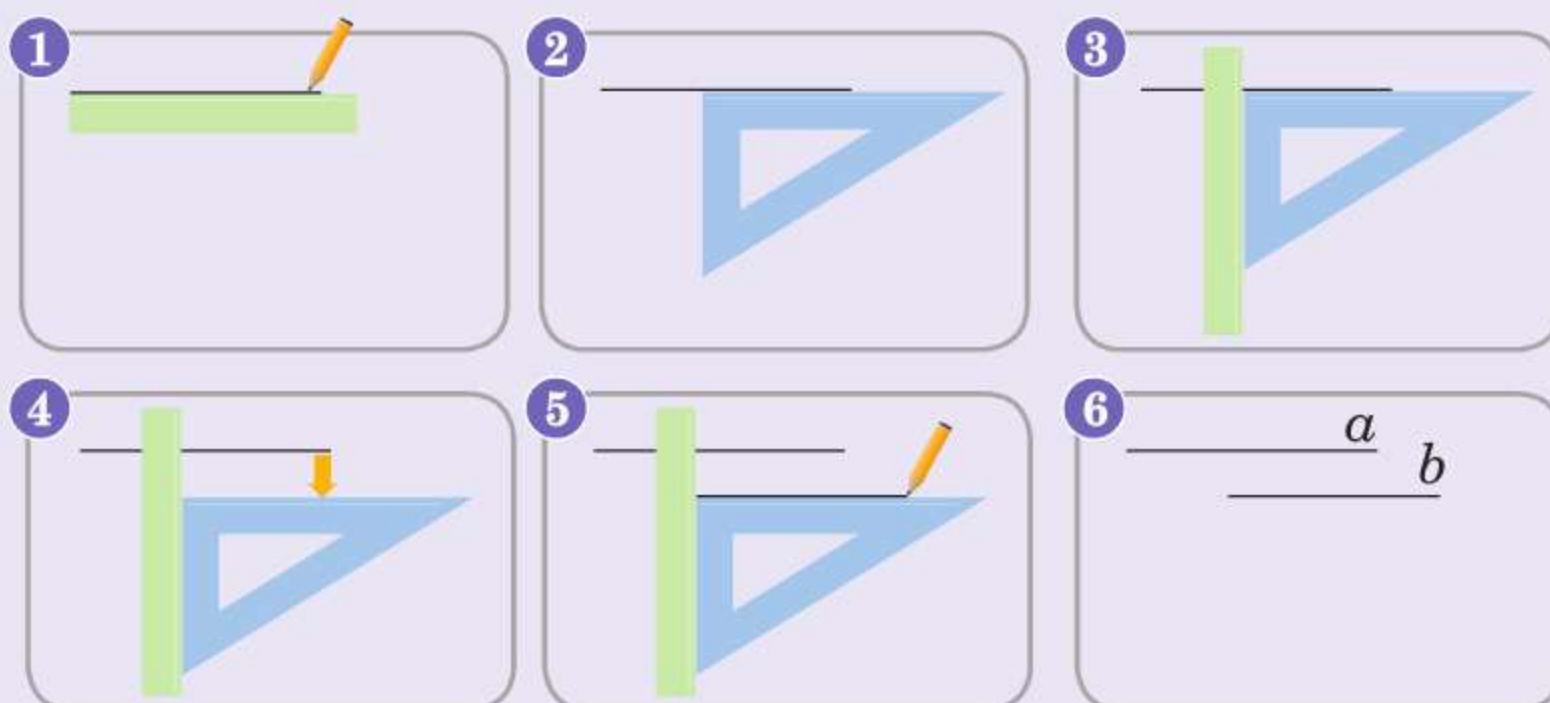
Jak narysować proste prostopadłe, a jak proste równoległe?

Proste prostopadłe



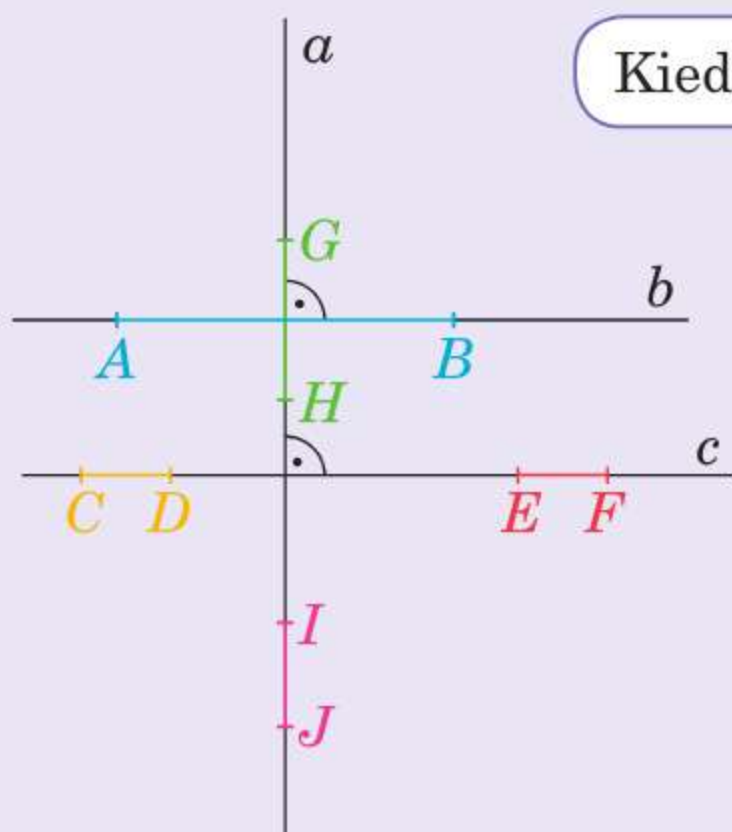
- 1 Narysuj prostą.
- 2 Przyłóż ekierkę do prostej.
- 3 Przyłóż linijkę do ekierki.
- 4 Odsuń ekierkę.
- 5 Narysuj prostą wzdłuż linijki.
- 6 Podpisz proste i zaznacz kąt prosty.

Proste równoległe



- 1 Narysuj prostą.
- 2 Przyłóż ekierkę do prostej.
- 3 Przyłóż linijkę do ekierki.
- 4 Przesuń ekierkę wzdłuż linijki.
- 5 Narysuj prostą wzdłuż ekierki.
- 6 Podpisz proste.

Kiedy odcinki są do siebie prostopadłe, a kiedy równoległe?



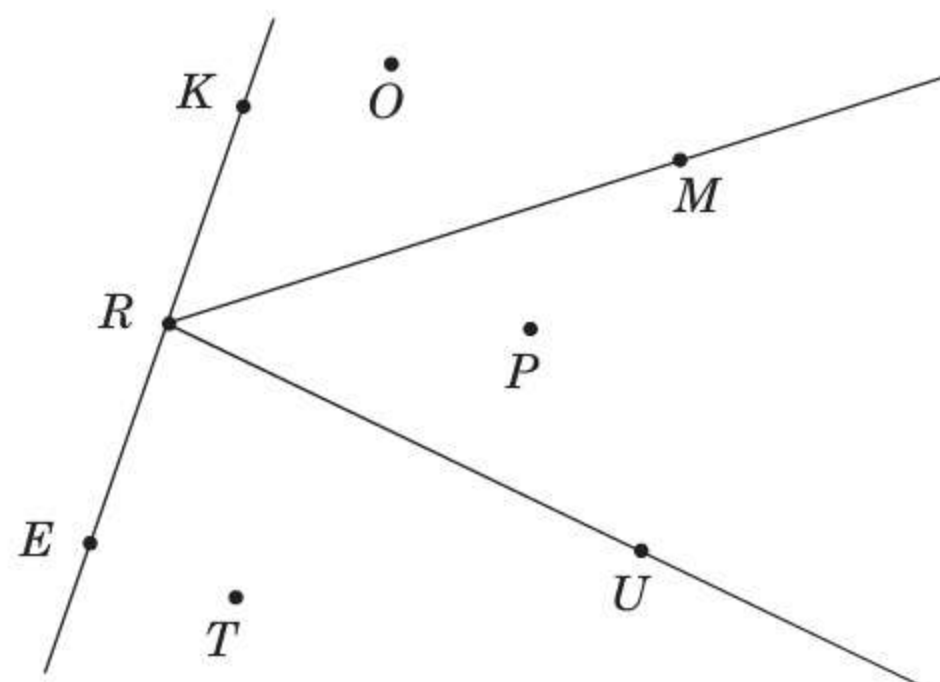
Odcinki są do siebie prostopadłe, gdy leżą na prostych prostopadłych, np. $AB \perp GH$, $CD \perp IJ$, $GH \perp CD$.

Odcinki są do siebie równoległe, gdy leżą na prostych równoległych albo na jednej prostej, np. $AB \parallel CD$, $AB \parallel EF$, $GH \parallel IJ$, $CD \parallel EF$.

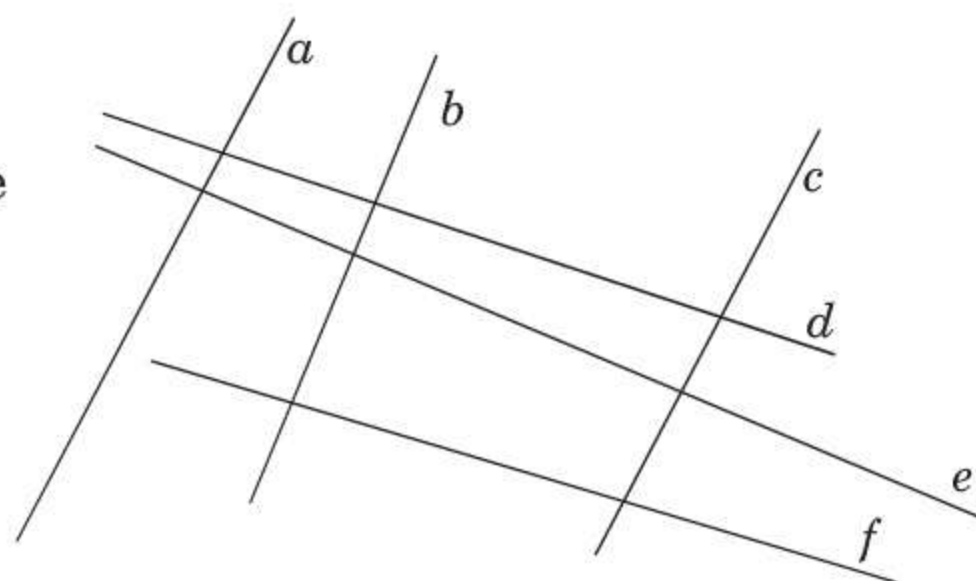
Poćwicz!

1. Wypisz zaznaczone na rysunku:

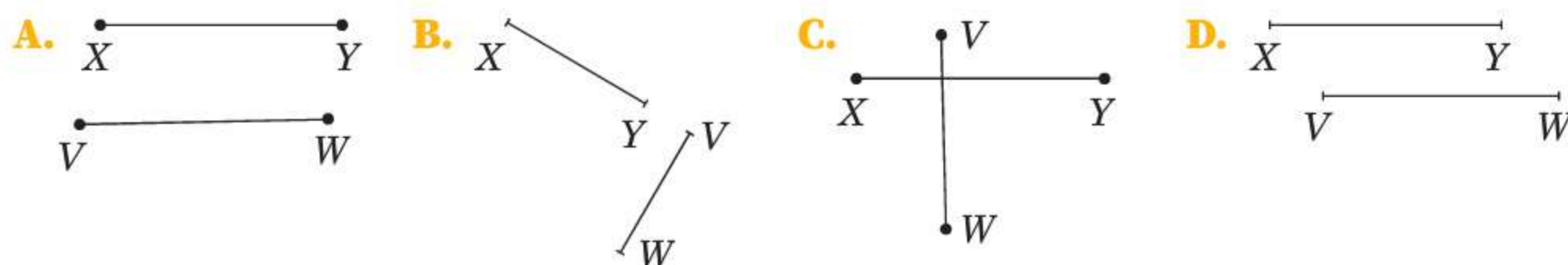
- a) punkty,
- b) proste,
- c) półproste,
- d) odcinki,
- e) punkty leżące na półprostej RM ,
- f) punkty nienależące do prostej KR .



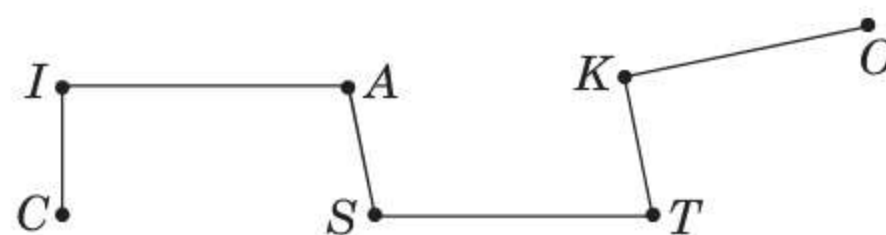
2. Sprawdź równoległość i prostokątłość prostych przy pomocy odpowiednich przyborów geometrycznych, a następnie wypisz wszystkie pary prostych prostokątnych oraz wszystkie pary prostych równoległych. Użyj znaków $\perp$ oraz $\parallel$.



3. Ustal przy pomocy odpowiednich przyborów geometrycznych, na którym rysunku znajdują się odcinki prostokątne, a na którym równoległe.

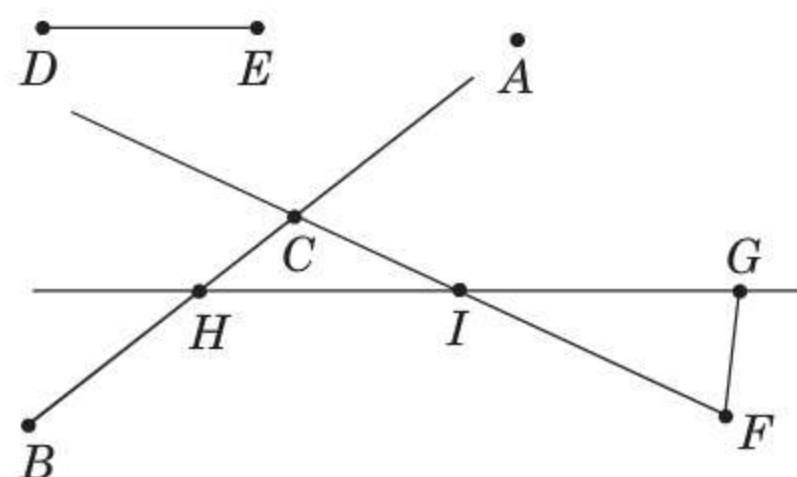


4. Oto łamana otwarta *CIASTKO*. Wypisz wszystkie pary odcinków prostokątnych oraz wszystkie pary odcinków równoległych.



5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Odcinki HI oraz DE są równoległe.	P	F
Odcinki DE oraz FG są prostokątne.	P	F
Punkt A leży na przedłużeniu półprostej BC .	P	F
Punkt C należy do półprostych BC oraz FI .	P	F
Półproste BC oraz FC są prostokątne.	P	F



6. Narysuj prostą e i prostopadłą do niej prostą f . Następnie narysuj prostą g równoległą do prostej e oraz prostą h prostopadłą do prostej g . Jak względem siebie położone są proste g i f , a jak proste f i h ?

7. Narysuj prostą a oraz punkty B i C , które nie należą do tej prostej. Następnie narysuj tak proste b i c , aby prosta b przechodziła przez punkt B i była równoległa do prostej a , natomiast prosta c była prostopadła do prostej b i przechodziła przez punkt C .

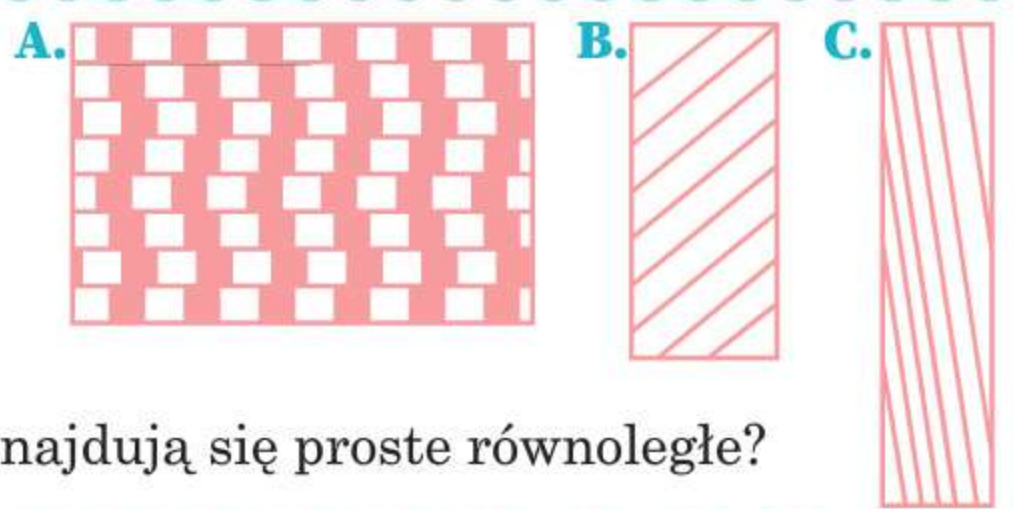
8. Dane są odcinek AB o długości 2 cm 4 mm, odcinek CD , który jest dwa razy dłuższy od odcinka AB , oraz odcinek EF , który jest o 1 cm 9 mm krótszy od odcinka CD . Narysuj te odcinki tak, żeby powstała z nich taka łamana otwarta, że $AB \perp CD$, $BC \parallel DE$ i $EF \parallel CD$.



A to ciekawe

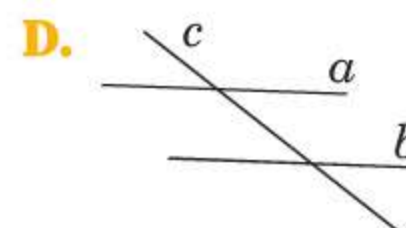
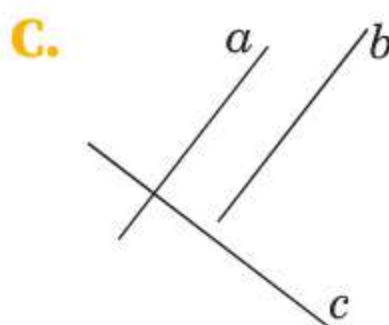
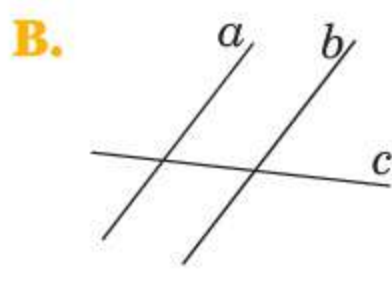
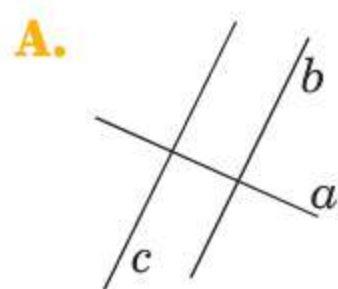
W dziele *Pseudaria* Euklides przedstawił rozmaite błędne rozumowania z zakresu geometrii, arytmetyki oraz algebry, m.in. złudzenia optyczne.

Czy na którymś z powyższych rysunków znajdują się proste równoległe?



Sprawdź, co umiesz!

1. Na którym rysunku proste są ułożone tak, że $a \parallel b$ i $b \perp c$?



2. Narysuj prostą t , nienależące do niej punkty O i P oraz:

- prostą u przechodzącą przez punkt O i równoległą do prostej t ,
- prostą w przechodzącą przez punkt P i prostopadłą do prostej u .

3. Narysuj odcinek AB oraz równoległy do niego odcinek CD i prostopadły do odcinka CD odcinek EF . Jak położony jest odcinek EF względem odcinka AB ?

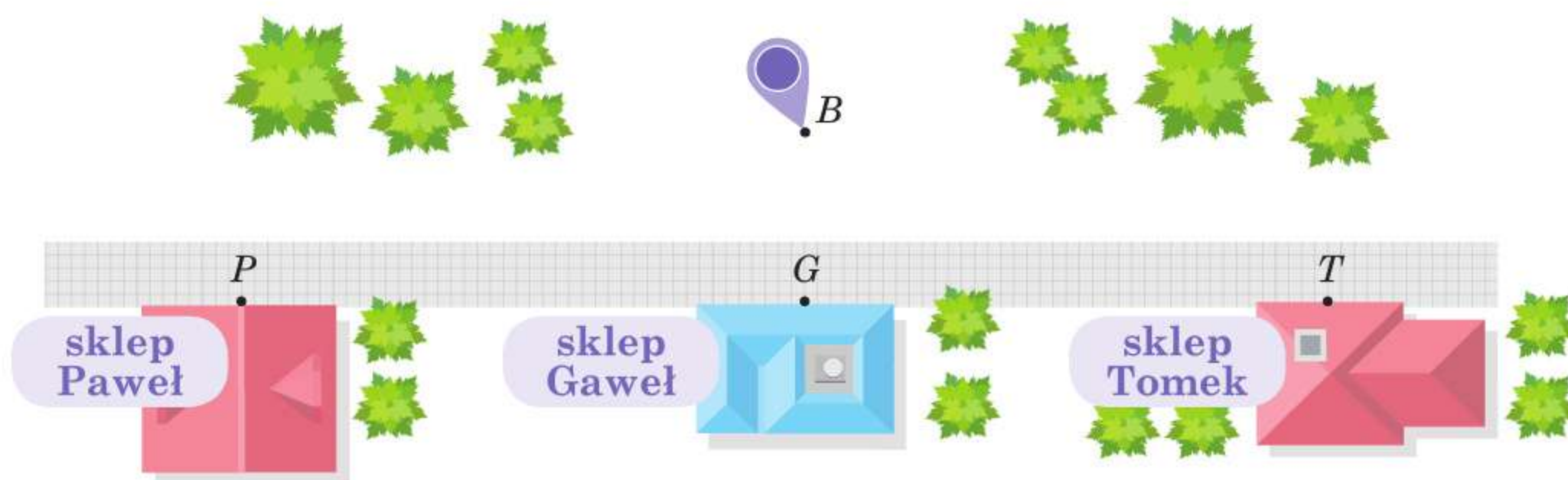
2. Odległość punktu od prostej

- ▶ Co nazywamy odległością punktu od prostej?
- ▶ Jak wyznaczyć odległość punktu od prostej?
- ▶ Jak wyznaczyć odległość między dwiema prostymi równoległymi?



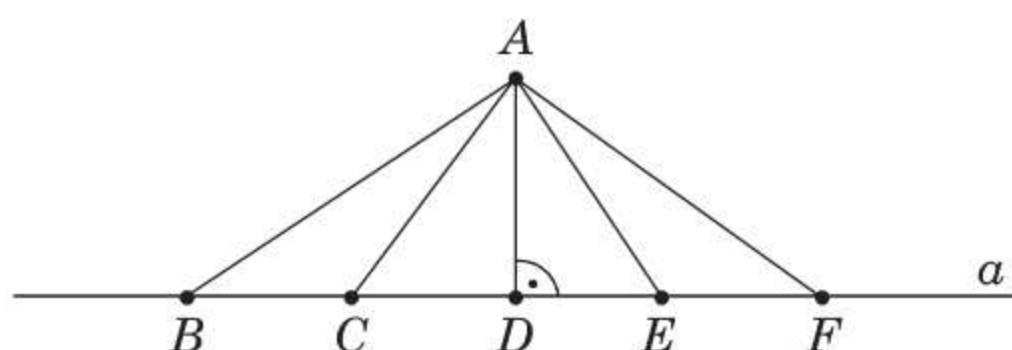
Odkrywaj!

1. Mama poprosiła mnie, abym poszedł do najbliższego sklepu po mąkę. Oto rozmieszczenie pobliskich sklepów oraz punkt B , w którym się znajduję.



- a) Jak sądzisz, który sklep znajduje się najbliżej mnie?
- b) Sprawdź swoje przewidywania – zmierz odległość w linii prostej między punktami P , G i T a punktem B . Która odległość jest najmniejsza?

2. Przyjrzyj się rysunkowi, a następnie odpowiedz na pytania.



- a) Który z odcinków łączących punkt A z prostą a jest najkrótszy?
- b) Który odcinek jest prostopadły do prostej a ?



Analizuj!

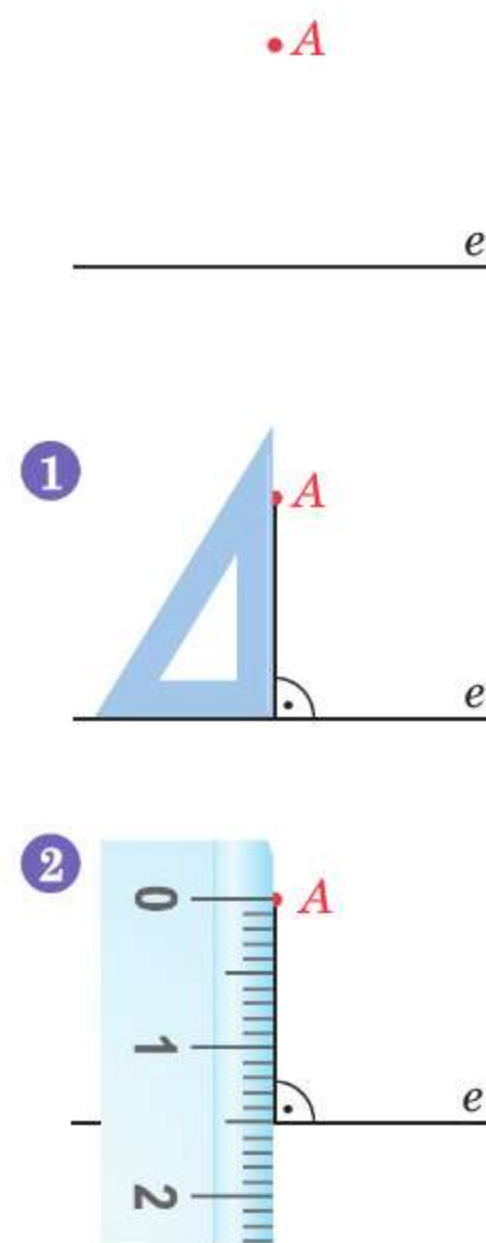
Ile wynosi odległość punktu A od prostej e ?

Odległość punktu A od prostej e jest równa długości najkrótszego odcinka łączącego punkt A z prostą e .

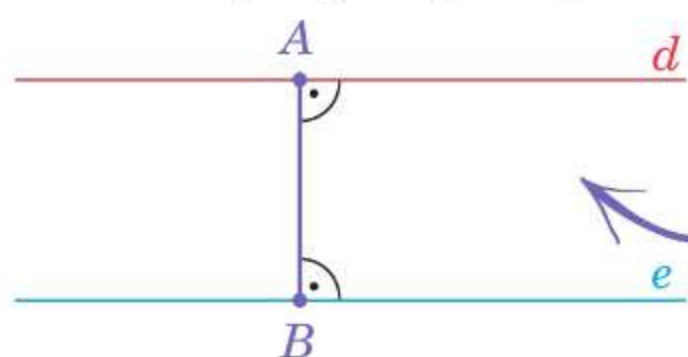
Najkrótszym odcinkiem łączącym dany punkt z prostą jest **odcinek prostopadły** do tej prostej.

Aby wyznaczyć odległość punktu A od prostej e :

- 1 narysuj odcinek prostopadły do prostej e , którego końce stanowią punkt A oraz punkt leżący na prostej;
- 2 zmierz długość narysowanego odcinka.



Odległość między dwiema prostymi równoległymi to długość najkrótszego odcinka łączącego te proste. Odcinek ten jest prostopadły do każdej z tych prostych.



$|AB| = 1 \text{ cm } 5 \text{ mm}$, więc odległość między prostymi d i e wynosi 1 cm 5 mm.

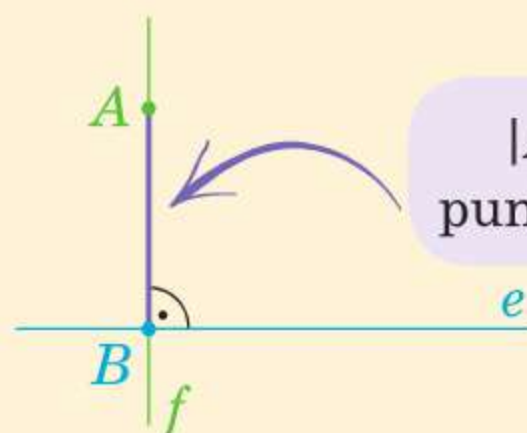


Kto znajduje się bliżej rzeki: **Cezary** czy **Kuba**?





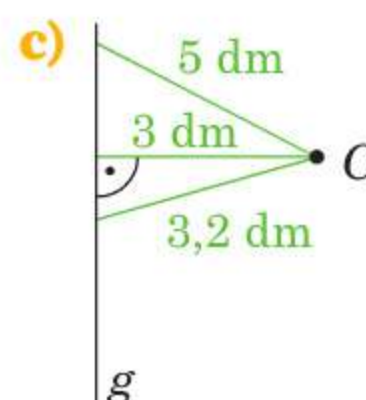
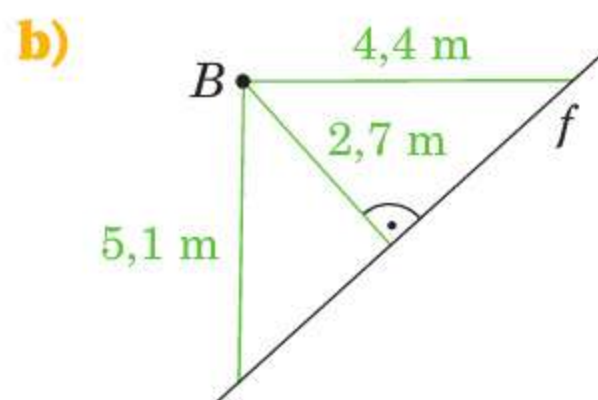
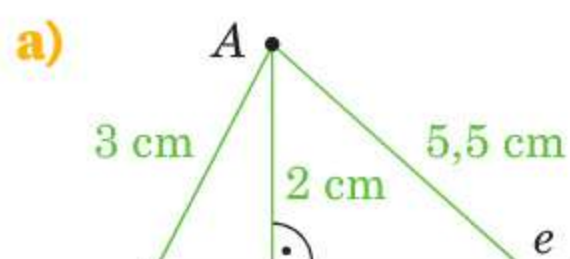
Odległość punktu od prostej jest równa długości najkrótszego odcinka łączącego ten punkt z prostą. Odcinek ten jest prostopadły do prostej.



$|AB|$ to odległość punktu A od prostej e.

Poćwicz!

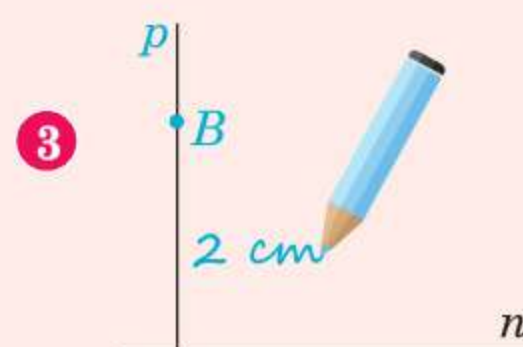
1. Odczytaj odległość punktu od prostej.



2. Narysuj prostą a oraz punkt B , który jest od niej oddalony o 2 cm 6 mm, oraz punkt C , którego odległość od prostej a wynosi 3,5 cm.

Jak narysować punkt B oddalony od prostej n o 2 cm?

- 1 Narysuj prostą n , a następnie przyłóż do niej ekierkę tak, aby jedno z prostopadłych ramion pokrywało się z prostą.
- 2 Wzdłuż drugiego ramienia ekierki narysuj półprostą p o początku w punkcie leżącym na prostej n .
- 3 Przyłóż linijkę do prostej p tak, aby kreseczka wyznaczająca punkt 0 na skali pokrywała się z prostą n , a następnie na półprostej p zaznacz odcinek o długości 2 cm.



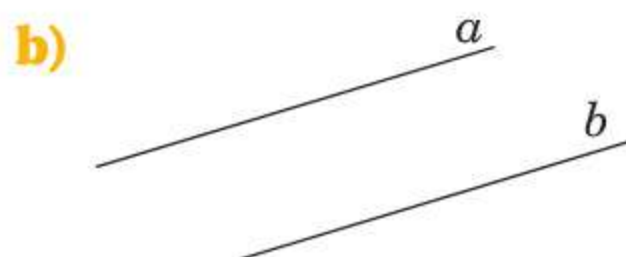
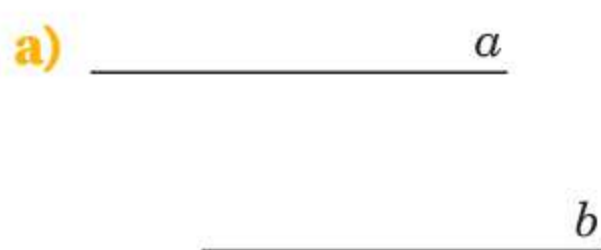
3. Narysuj prostą p oraz punkt A , który jest oddalony od tej prostej o 1 cm 8 mm, oraz punkt B , który leży 3 razy bliżej od prostej p niż punkt A . Następnie narysuj punkt C , który znajduje się o 1,3 cm dalej od prostej p niż punkt B .

4. Długość drogi dojazdowej z Ułankowa do przystanku autobusowego ma być jak najkrótsza. Czy przystanek, który na rysunku oznaczony został jako punkt A, jest odpowiednio umiejscowiony? Wybierz odpowiedź oraz jej uzasadnienie.

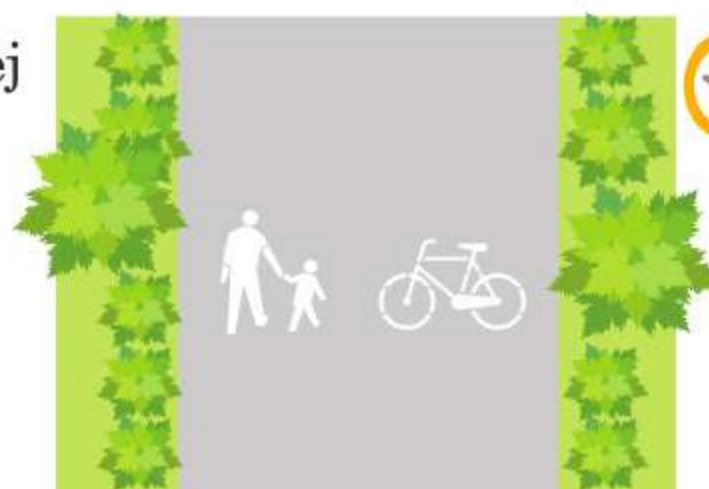


Tak,	ponieważ	odcinek łączący Ułankowo i przystanek jest prostopadły do drogi.
Nie,		odcinek łączący Ułankowo i przystanek nie ma punktów wspólnych z drogą.
		odcinek łączący Ułankowo i przystanek nie jest równoległy do drogi.

5. Wyznacz odległość między prostymi równoległymi a i b .

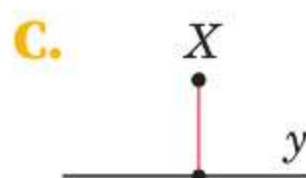
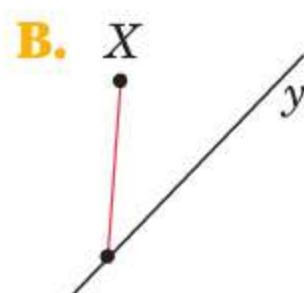
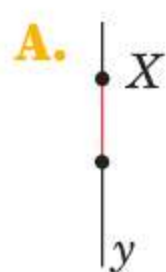


6. Jaka jest rzeczywista szerokość ścieżki przeznaczonej dla rowerzystów i pieszych, jeśli rysunek wykonano w skali 1 : 100?



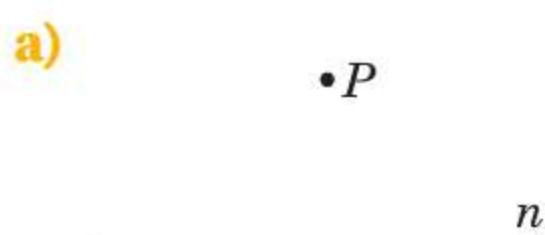
Sprawdź, co umiesz!

1. Na którym rysunku poprawnie zaznaczono kolorem czerwonym odcinek wyznaczający odległość punktu X od prostej y ?



- D. Na żadnym z rysunków.

2. W jakiej odległości od prostej n znajduje się punkt P ?



3. Narysuj równoległe proste a i b , oddale od siebie o 2 cm 2 mm.

3. Kąty

- ▶ Jak mierzyć kąty i zapisywać ich miary?
- ▶ Jak rysować i nazywać kąty?
- ▶ Jak rozróżniać kąty ze względu na ich miarę?



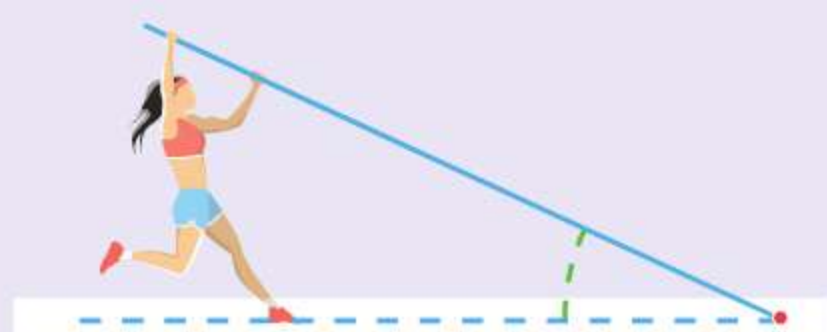
Analizuj!

Kuba oglądał zawody w skoku o tyczce.

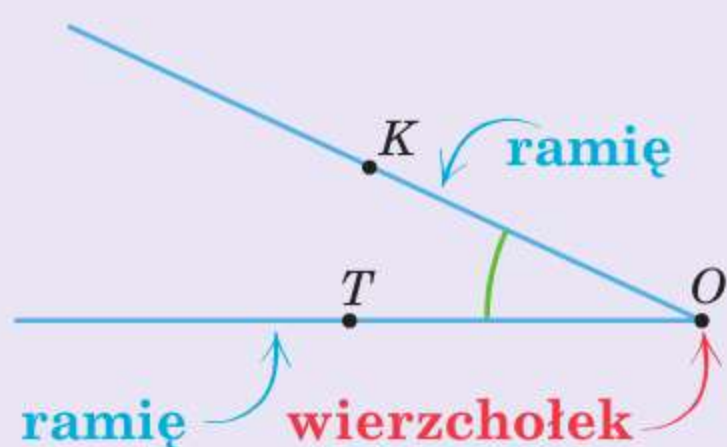
Zawodniczka biegnie w kierunku skrzynki wyznaczającej punkt zerowy rozbiegu.

Wkłada koniec tyczki do skrzynki, po czym odbija się, naginając jednocześnie tyczkę.

Prostująca się tyczka wznosi zawodniczkę. Gdy tyczka znajdzie się prostopadle do podłoża, zawodniczka puszcza tyczkę i kończy skok.

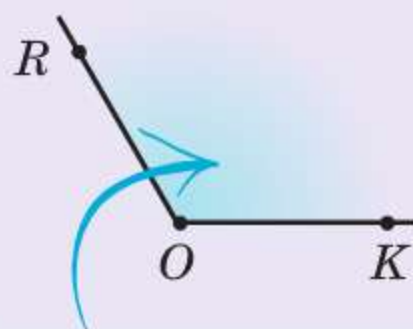


Tyczka tworzy z podłożem pewien **kąt**. Można powiedzieć, że **tyczka** i **bieżnia**, po której porusza się zawodniczka, to **ramiona** tego kąta, a **miejsce przyłożenia tyczki do podłoża** stanowi jego **wierzchołek**.

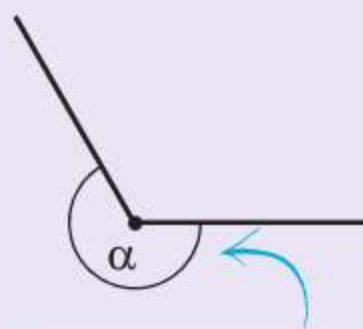


Zielonym łukiem zaznaczono **kąt KOT**. **Półproste OK i OT** to **ramiona kąta**. **Wspólny początek tych półprostych**, czyli punkt O, to **wierzchołek kąta**.

Kąty możemy zaznaczać cieniowaniem lub łukiem i nazywać, stosując wielkie litery alfabetu łacińskiego lub małe litery alfabetu greckiego.



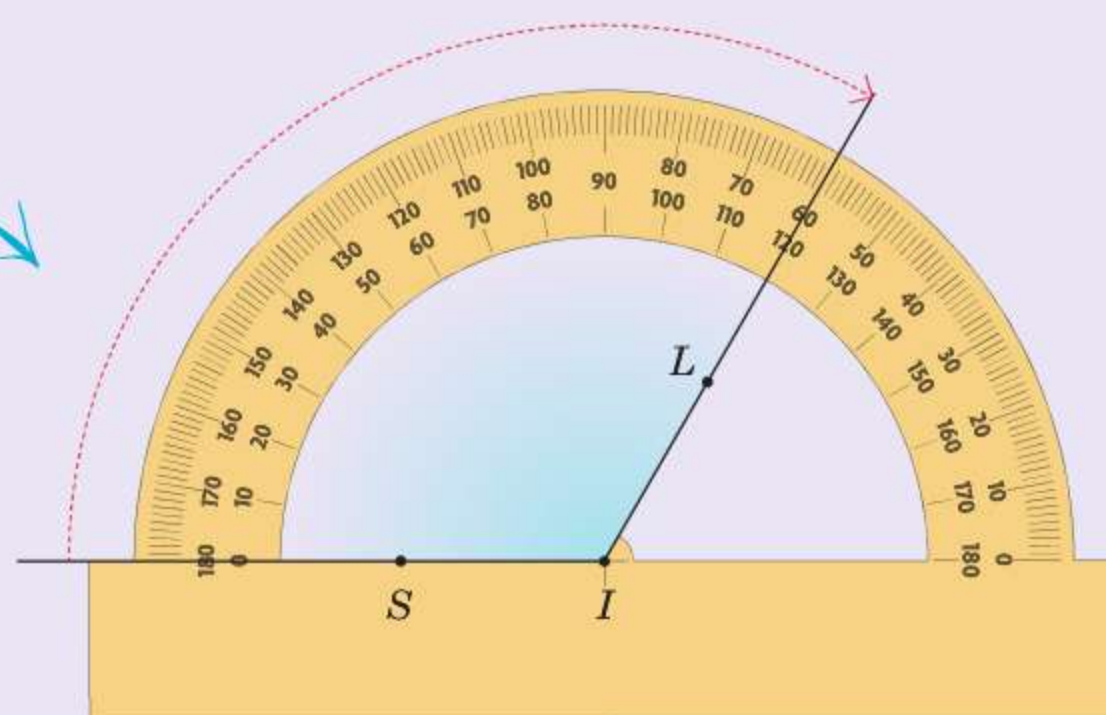
Ten kąt można nazwać ROK lub KOR .



To jest kąt α .

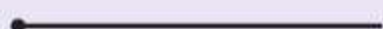
α – alfa
 β – beta
 γ – gamma
 δ – delta
 ε – epsilon
 ω – omega

To jest kąt LIS .
 Ten kąt ma miarę 120° ,
 co można zapisać symbolicznie:
 $|\sphericalangle LIS| = 120^\circ$.
 Gdyby kąt nazywał się β , należałoby napisać: $\beta = 120^\circ$.

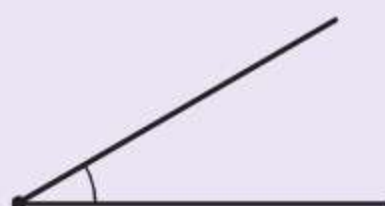


Rodzaje kątów ze względu na miarę

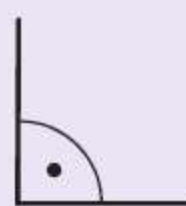
zerowy ($\alpha = 0^\circ$)



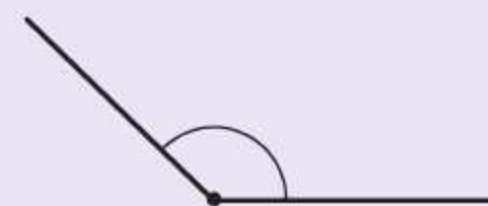
ostry ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)



prosty ($\alpha = 90^\circ$)



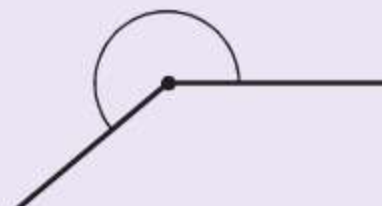
rozwarty ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)



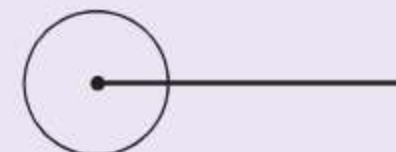
półpełny ($\alpha = 180^\circ$)



wklęsły ($180^\circ < \alpha < 360^\circ$)



pełny ($\alpha = 360^\circ$)

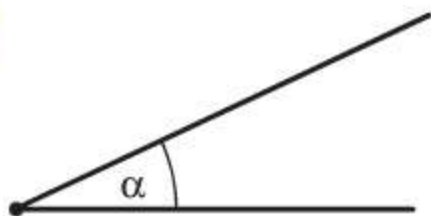


Narysuj kąty: $\beta = 88^\circ$, $|\sphericalangle TOM| = 92^\circ$ oraz $\alpha = 188^\circ$.
 Określ rodzaj każdego z tych kątów.

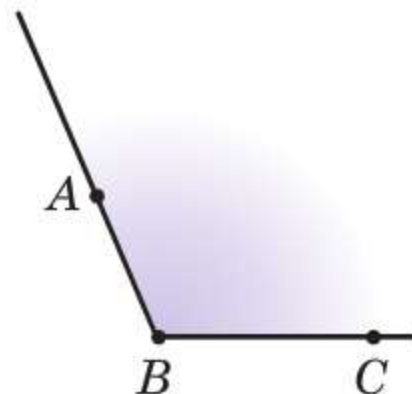
Poćwicz!

1. Zmierz zaznaczony kąt, a następnie zapisz jego miarę i określ jego rodzaj.

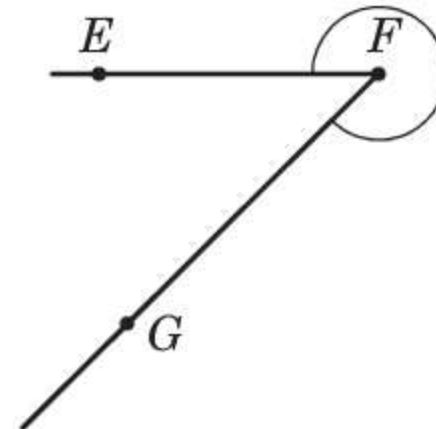
a)



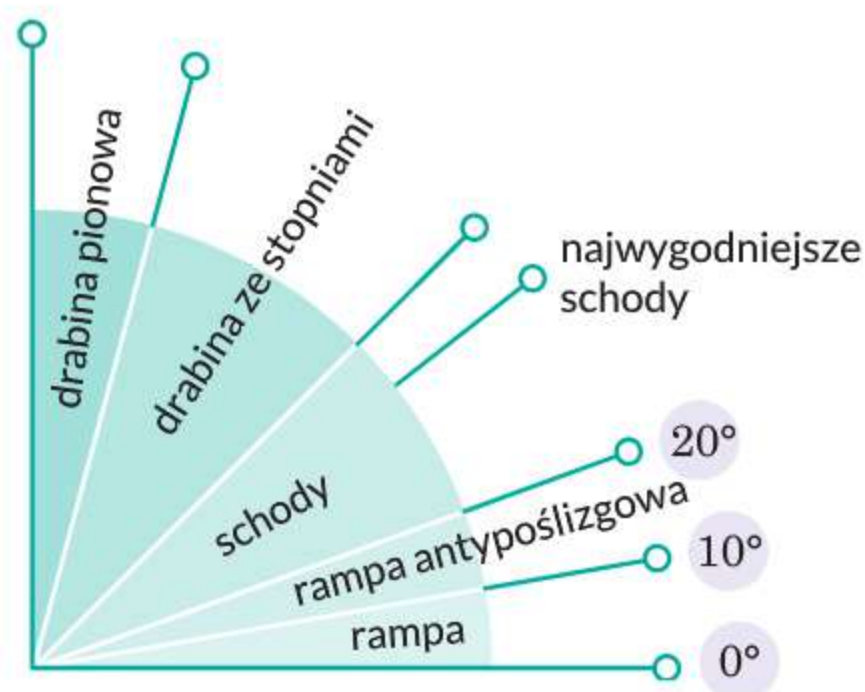
b)



c)



2. Poruszanie się między poziomami ułatwiają rampy, schody i drabiny. Rampę wykorzystuje się przy nachyleniach maksymalnie 10° , rampę antypoślizgową – przy nachyleniach maksymalnie 20° . Zmierz kolejne kąty na schemacie i ustal, dla jakich nachyleń stosuje się schody, drabiny ze stopniami i drabiny pionowe, oraz kąt nachylenia schodów, po których wejście jest najwygodniejsze.



3. Narysuj podany kąt.

a) $|\sphericalangle KOC| = 70^\circ$

b) $\beta = 15^\circ$

c) $|\sphericalangle LAS| = 132^\circ$

d) $\delta = 295^\circ$

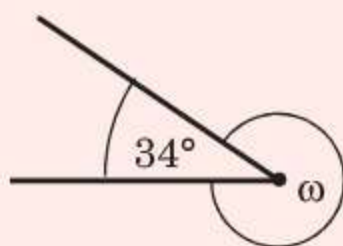
4. Narysuj:

a) kąt ABC , którego miara jest o 5° większa od miary kąta prostego;

b) kąt γ , którego miara jest dwa razy większa od miary kąta o mierze 88° ;

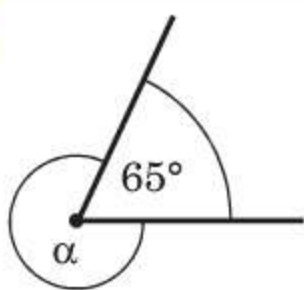
c) kąt DEF , który ma miarę o 140° mniejszą od miary kąta pełnego.

5. Zapoznaj się z poniższą wskazówką, a następnie oblicz miarę kąta. Sprawdź poprawność swoich obliczeń za pomocą kątomierza.

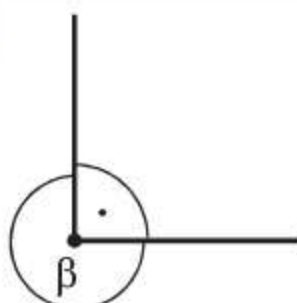


Kąty wklęsły i ostry o tym samym wierzchołku i wspólnych ramionach tworzą kąt pełny, o mierze 360° .
Zatem: $\omega = 360^\circ - 34^\circ = 326^\circ$.

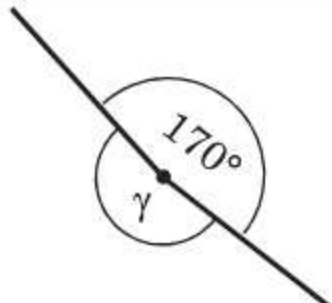
a)



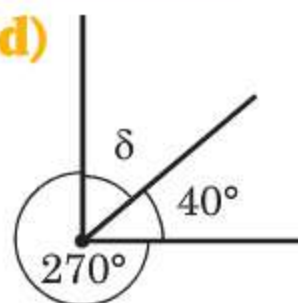
b)



c)



d)



6. Aby ułatwić mieszkańcom Gdańska przedostanie się z Głównego Miasta na wyspę Ołowiankę, zbudowano kładkę, która łączy te dwa miejsca. Co 30 minut kładka jest podnoszona dla jednostek pływających. Sprawdź za pomocą kątomierza, na jaką rozpiętość otwiera się przęsło zwodzone.



7. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

W ciągu godziny wskazówka minutowa obraca się o kąt pełny.	P	F
W ciągu 5 minut wskazówka minutowa obraca się o 60° .	P	F
W ciągu 15 minut wskazówka minutowa obraca się o 90° .	P	F
Wskazówka godzinowa w ciągu godziny obraca się o 30° .	P	F
Wskazówka godzinowa w ciągu 10 minut obraca się o 12° .	P	F



8. Podaj miarę i rodzaj kąta, który tworzą wskazówki zegara o wskazanej godzinie. Rozważ dwie możliwości.

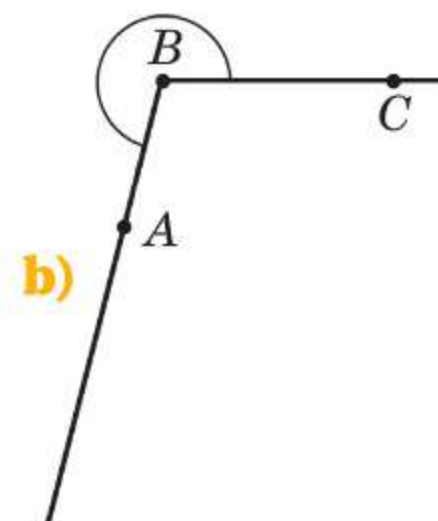
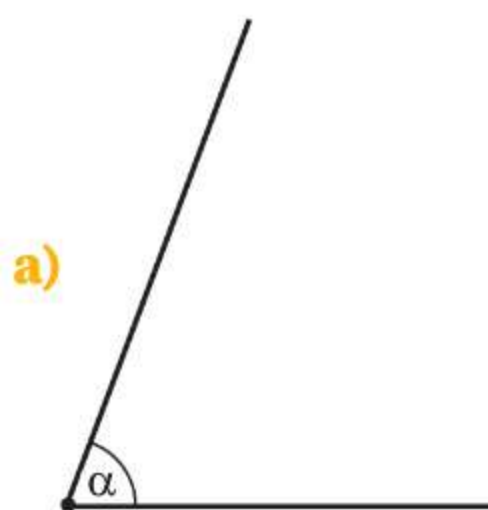
a) 17.00 b) 21.00 c) 13.30 d) 21.30

9. Trzy kąty o wspólnym wierzchołku tworzą kąt pełny. Jeden z kątów jest wklęsły i ma miarę 270° . Czy któryś z dwóch pozostałych kątów może być rozwarty?



Sprawdź, co umiesz!

1. Zmierz kąt, a następnie zapisz jego miarę i rodzaj.



2. Narysuj kąt o mierze 55° oraz kąt o trzy razy większej mierze.

3. O ile stopni obraca się wskazówka minutowa w ciągu 25 minut?

A. O 25° . B. O 30° . C. O 150° . D. O 330° .

4 • Kąty przyległe i wierzchołkowe

- ▶ Jakie kąty nazywamy przyległymi?
- ▶ Jakie kąty nazywamy wierzchołkowymi?



Odkrywaj!

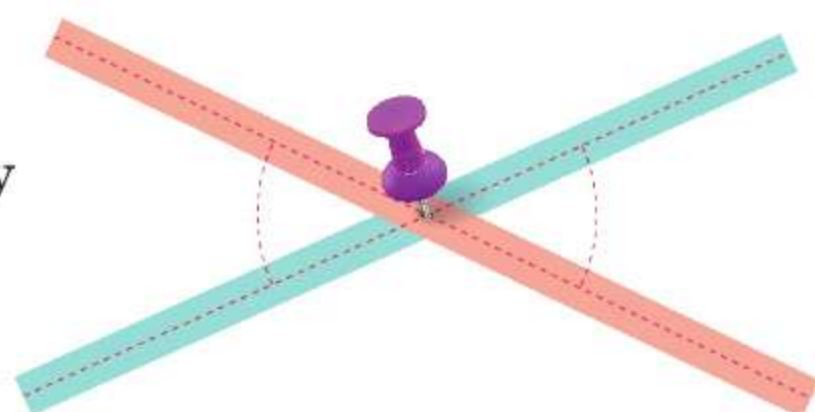
1. W trosce o bezpieczną jazdę niektórzy producenci samochodów osobowych zdecydowali się wyposażyć swoje samochody w specjalne ograniczniki prędkości, które nie pozwalają na przekroczenie prędkości 180 km/h (czytaj: kilometrów na godzinę).



- a) Przyjrzyj się wskazaniu prędkościomierza. Z jaką prędkością porusza się samochód?
- b) O ile kilometrów na godzinę trzeba zwiększyć prędkość, aby osiągnąć prędkość maksymalną?

2. Wytnij z kolorowego papieru dwa paski o szerokości 5 mm, a następnie ułóż je na kartce A4 tak, jak pokazano na ilustracji poniżej. W miejsce ich przecięcia wbij pineskę.

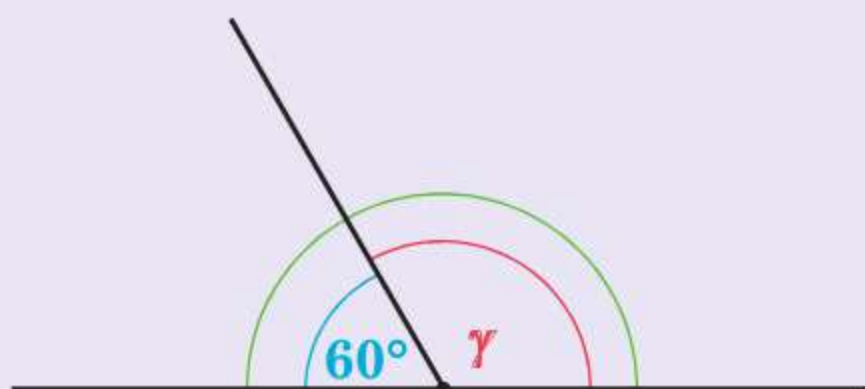
- a) Ile kątów ostrych i ile kątów rozwartych tworzą paski?
- b) Jak zmieniają się kąty rozwarte, jeśli powiększy się kąty ostre? A jeśli się je zmniejszy?
- c) Zmierz kąty ostre i kąty rozwarte w obu sytuacjach. Co zauważasz?





Analizuj!

Jak ustalić miarę kąta γ bez użycia kątomierza?

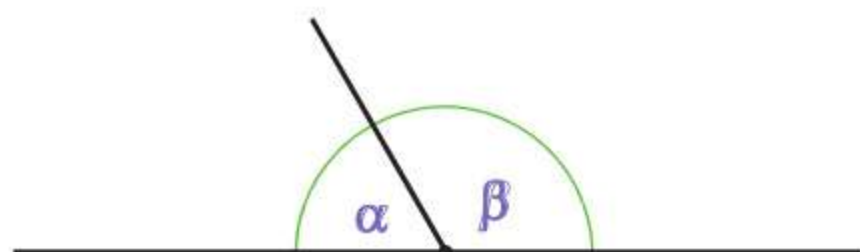


Kąt o mierze 60° i kąt γ mają wspólny wierzchołek i wspólne ramię, a ich pozostałe dwa ramiona leżą na tej samej prostej.

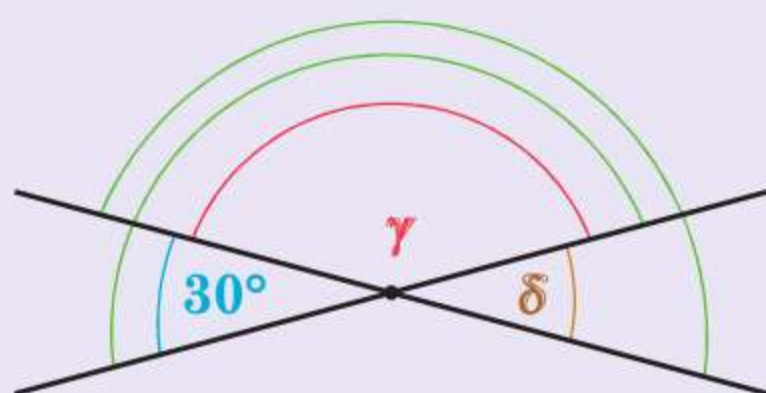
Kąt o mierze 60° i kąt γ tworzą razem kąt o mierze 180° .

A zatem $\gamma = 180^\circ - 60^\circ$, czyli $\gamma = 120^\circ$.

Dwa kąty, które mają wspólne ramię i wierzchołek, a ich dwa pozostałe ramiona leżą na tej samej prostej, nazywamy **kątami przyległymi**.



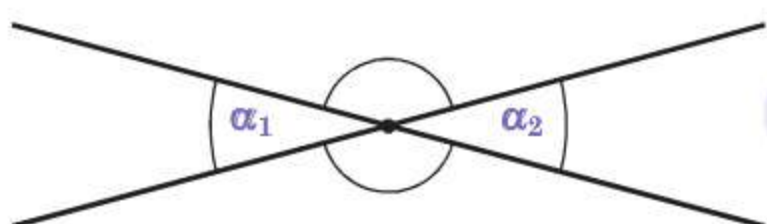
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



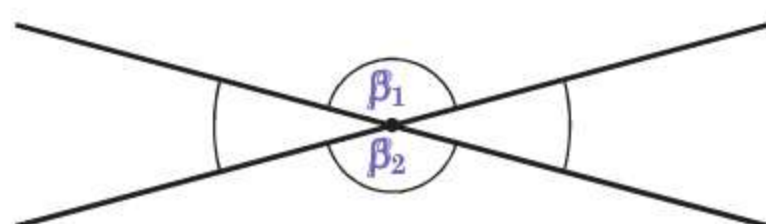
Kąt γ jest przyległy do kąta o mierze 30° i ma miarę $\gamma = 180^\circ - 30^\circ$, czyli $\gamma = 150^\circ$.

Kąt δ jest przyległy do kąta γ i ma miarę $\delta = 180^\circ - 150^\circ$, czyli $\delta = 30^\circ$.

Dwa kąty o wspólnym wierzchołku, położone naprzeciw siebie, których ramiona leżą na przecinających się prostych, nazywamy **kątami wierzchołkowymi**.



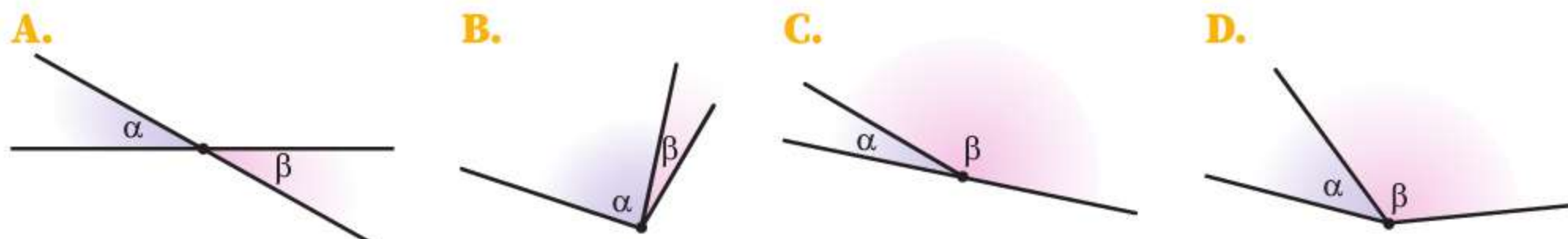
$$\alpha_1 = \alpha_2$$



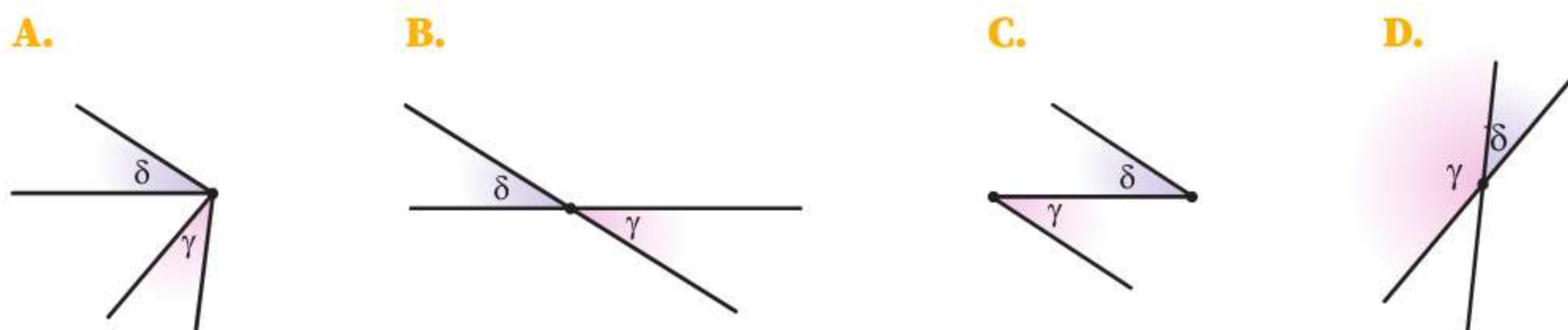
$$\beta_1 = \beta_2$$

Poćwicz!

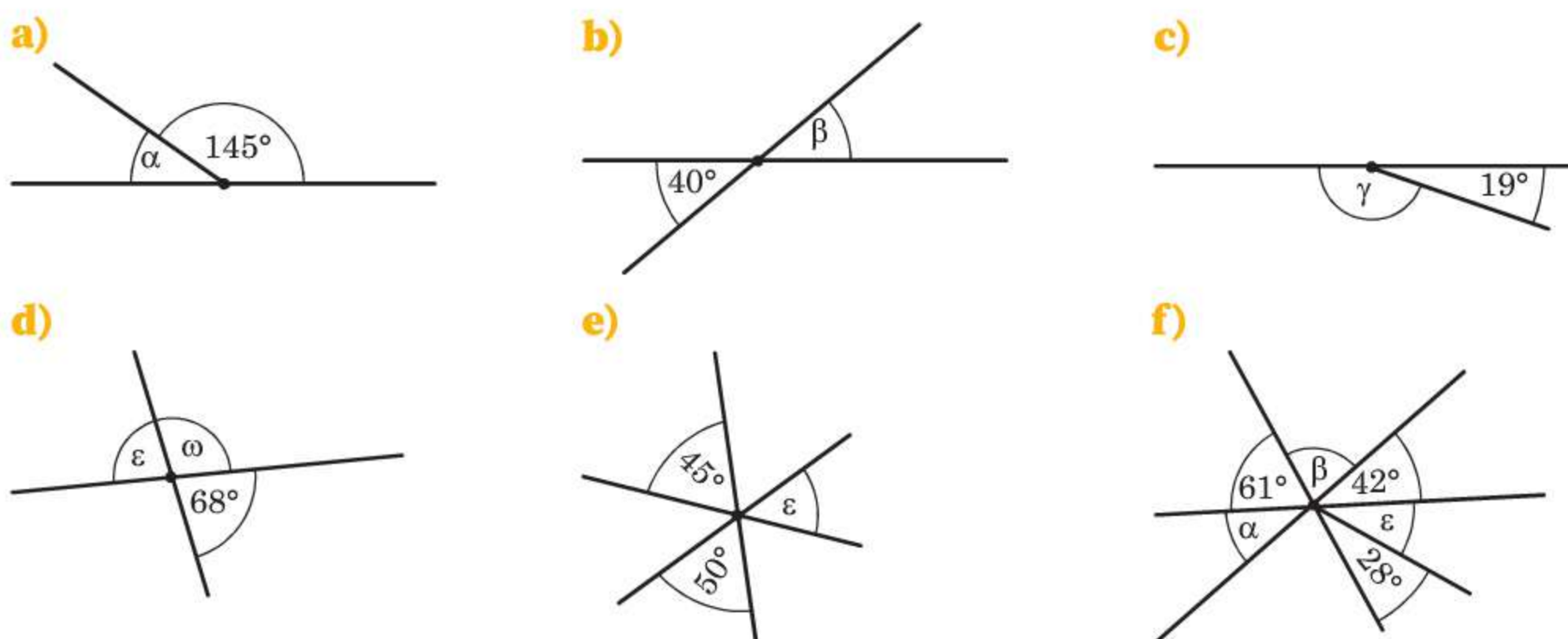
1. Na którym rysunku kąty α i β są przyległe? Uzasadnij swój wybór.



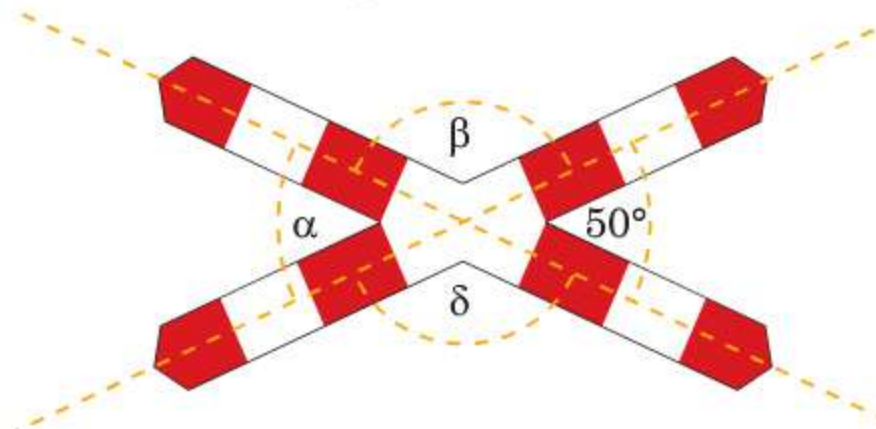
2. Na którym rysunku kąty γ i δ są wierzchołkowe? Uzasadnij swój wybór.



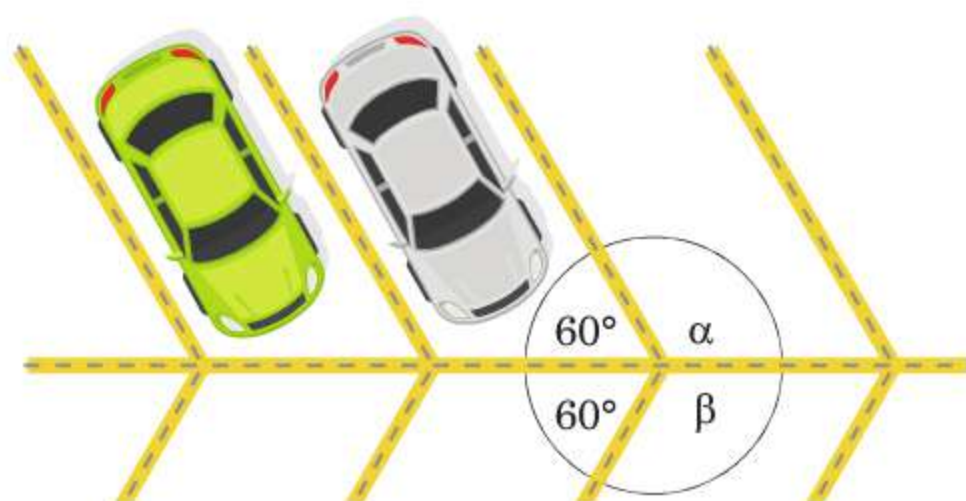
3. Wyznacz miary kątów oznaczonych literami greckimi.



4. Na ilustracji poniżej przedstawiono znak drogowy nazywany krzyżem Świętego Andrzeja. Wyznacza on miejsce zatrzymania się pojazdu w związku z ruchem pociągu na jednotorowym przejeździe kolejowym. Bez użycia kątomierza ustal miary kątów α , β , δ .



5. Na podstawie zamieszczonej obok ilustracji oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).



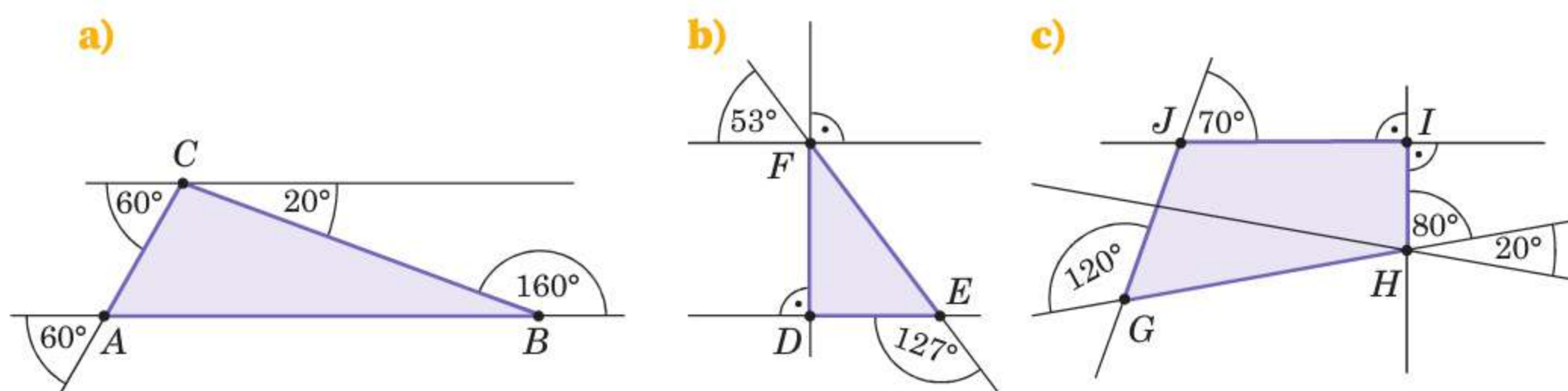
Miara kąta α jest o 60° większa od miary kąta do niego przyległego.	P	F
Kąt β jest kątem wierzchołkowym do kąta o mierze 60° .	P	F
Suma miar kątów α i β jest cztery razy większa niż suma miar kątów do nich przyległych.	P	F

6. Kąt ABC i kąt DBC są kątami przyległymi. Kąt ABC ma miarę 34° . O ile stopni różnią się miary kątów ABC i DBC ?

7. Odpowiedz na pytanie. Uzasadnij swoje zdanie.

- Jaką miarę mają kąty przyległe tej samej rozwartości?
- Czy kąt przyległy do kąta rozwartego może być rozwarty?
- Czy dwa kąty ostre mogą być przyległe?
- Czy dwa kąty proste mogą być przyległe?

8. Na podstawie własności kątów przyległych i wierzchołkowych ustal miary kątów wewnętrznych podanej figury.

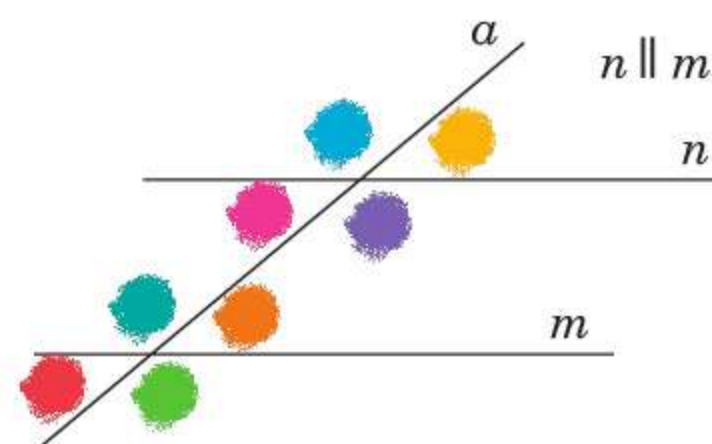


9. Wyznacz miary kątów przyległych, jeśli wiadomo, że:

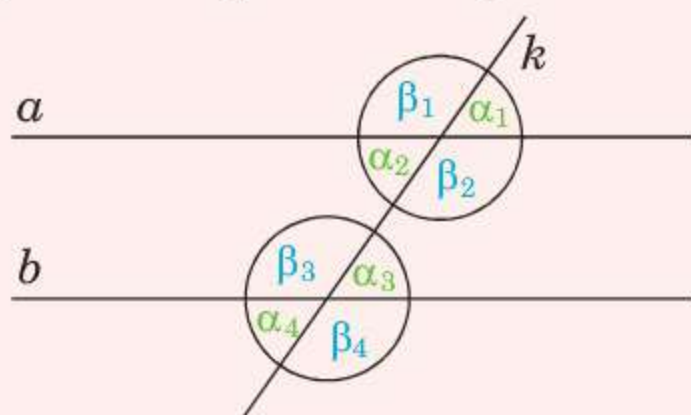
- miara jednego z kątów przyległych jest o 20° mniejsza od miary drugiego kąta,
- miara jednego z kątów przyległych jest trzy razy większa od miary drugiego kąta,
- różnica miar tych kątów wynosi 100° ,
- różnica miar tych kątów stanowi połowę miary kąta prostego.



- 10.** Zapoznaj się z informacjami w ramce, a następnie odszukaj na zamieszczonym obok rysunku po trzy pary kątów wierzchołkowych, przyległych, odpowiadających i naprzemianległych.



Prosta k przecina równoległe proste a i b , tworząc w ten sposób 8 kątów.



$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$$

Kąty wierzchołkowe to m.in. α_1 i α_2 oraz β_3 i β_4 .

Kąty przyległe to m.in. β_1 i α_1 oraz α_3 i β_4 .

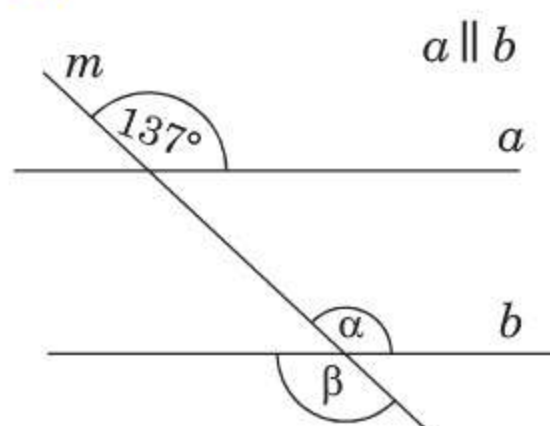
Kąty odpowiadające to m.in. α_1 i α_3 oraz β_2 i β_4 .

Kąty naprzemianległe to m.in. α_1 i α_4 oraz β_2 i β_3 .

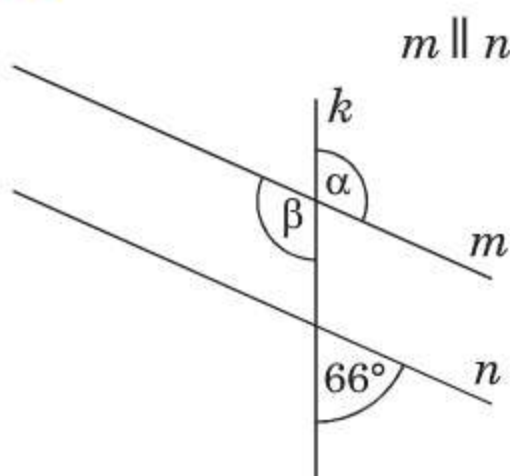


- 11.** Ustal miary kątów α i β .

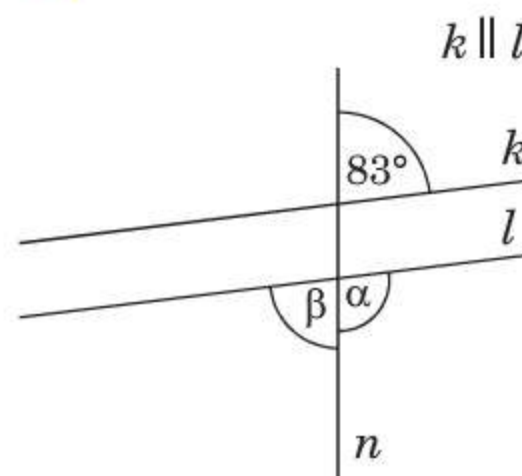
a)



b)



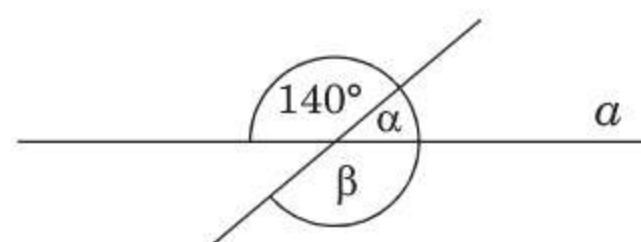
c)



Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Jaką miarę ma kąt przyległy do kąta o mierze 30° ?

- 2.** Który z kątów tworzy z kątem o mierze 140° parę kątów wierzchołkowych? Jaką ma miarę? Jaką miarę ma kąt przyległy do wskazanego kąta?



- 3.** Miara jednego z kątów przyległych wynosi 35° . Wskaż różnicę miar tych kątów przyległych.

A. 145°

B. 180°

C. 110°

D. 105°

5. Jednostki długości

- ▶ Jakie są zależności między jednostkami długości?
- ▶ Jak sprawnie zamieniać jednostki długości?



Analizuj!

Na początek quiz! Sprawdź, czy pamiętasz zależności między jednostkami długości. Poprawność swoich odpowiedzi zweryfikuj, korzystając ze schematu.

1 centymetr – ile to milimetrów?

10 decymetrów – ile to centymetrów?

1 km – ile to metrów?

10 km – ile to decymetrów?

10 decymetrów – ile to metrów?

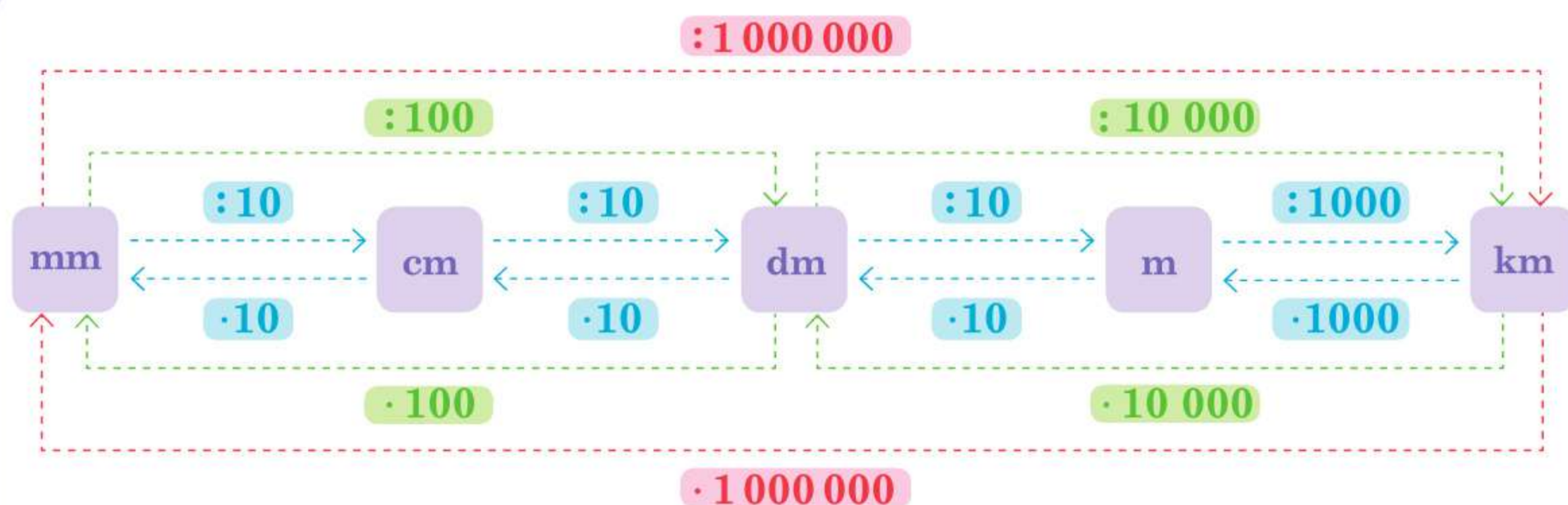
10 000 milimetrów – ile to metrów?

1000 dm – ile to metrów?

1000 cm – ile to metrów?

Co jest mniejsze: 1000 m czy 100 dm?

Co jest większe: 10 000 000 mm czy 1 km?



Szlak Trzech Pogórzy to najdłuższy znakowany szlak na terenie polskich pogórzy. Za poświadczone przejście trasy PTT przyznaje odznakę. Szlak przypomina łamaną, której długość to 132 800 000 mm. Ile to kilometrów i metrów?



Sposób 1

$$\begin{aligned} 132\,800\,000\text{ mm} &= 13\,280\,000 \cdot 10\text{ mm} = 13\,280\,000\text{ cm} \\ 13\,280\,000\text{ cm} &= 1\,328\,000 \cdot 10\text{ cm} = 1\,328\,000\text{ dm} \\ 1\,328\,000\text{ dm} &= 132\,800 \cdot 10\text{ dm} = 132\,800\text{ m} \\ 132\,800\text{ m} &= 132\,000\text{ m} + 800\text{ m} = 132\text{ km } 800\text{ m} \end{aligned}$$

Sposób 2

$$\begin{aligned} 132\,800\,000\text{ mm} &\xrightarrow{:10} 13\,280\,000\text{ cm} \xrightarrow{:100} 132\,800\text{ m} \\ 132\,800\text{ m} &= 132\text{ km } 800\text{ m} \end{aligned}$$

Szlak Trzech Pogórzy ma długość 132 km 800 m.

Najdłuższym szlakiem turystycznym w Polsce jest Główny Szlak Beskidzki. Jaką ma długość w kilometrach i metrach?



$$\begin{aligned} 166\text{ km } 700\text{ m} &+ 201\,500\text{ m} + 13\,430\,000\text{ cm} = \\ &= 166\text{ km } 700\text{ m} + 201\text{ km } 500\text{ m} + 134\,300\text{ m} = \\ &= 166\text{ km } 700\text{ m} + 201\text{ km } 500\text{ m} + 134\text{ km } 300\text{ m} = \\ &= 501\text{ km } 1500\text{ m} = 502\text{ km } 500\text{ m} \end{aligned}$$

Główny Szlak Beskidzki ma 502 km 500 m długości.

Który etap wędrówki Głównym Szlakiem Beskidzkim jest najdłuższy, a który najkrótszy? O ile metrów się różnią?



Poćwicz!

1. Wyraż podane wielkości we wskazanej jednostce.

- a) **mm** 8 cm • 14 cm • 2 dm • 15 dm • 18 m • 3 km
- b) **cm** 60 mm • 1300 mm • 90 dm • 73 m • 91 m • 8 km
- c) **dm** 700 mm • 2000 cm • 5 m • 89 m • 4 km • 10 km
- d) **m** 80 000 mm • 900 cm • 13 000 cm • 6 km • 45 km • 5000 km
- e) **km** 4 000 000 mm • 1 200 000 cm • 60 000 dm • 7000 m • 340 000 m

2. Wyraż podane wielkości we wskazanej jednostce.

- a) **mm** 3 cm 6 mm • 4 dm 5 mm b) **cm** 9 dm 9 cm • 15 m 2 cm
- c) **dm** 6 m 1 dm • 80 m 60 cm d) **m** 15 km 762 m • 2 km 70 dm

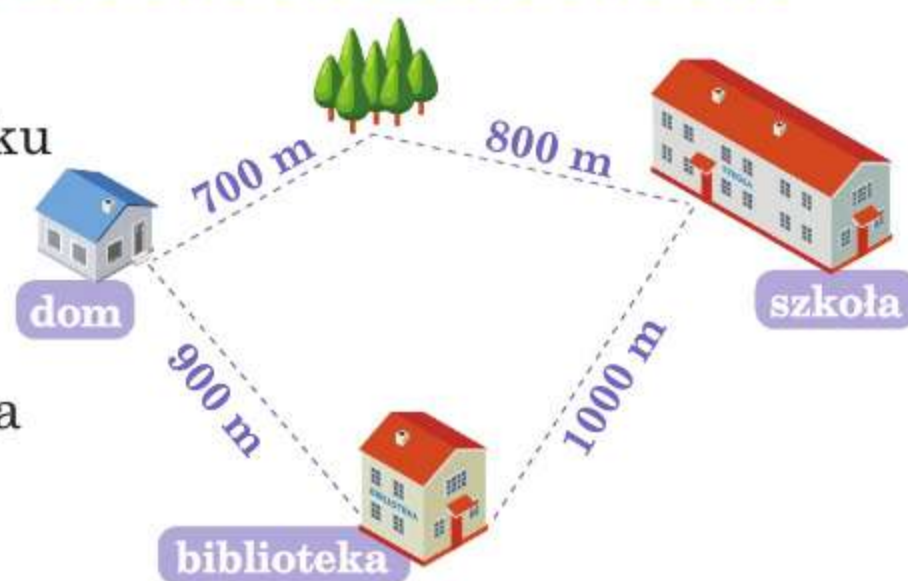
3. Wyraż podane wielkości w postaci wyrażenia dwumianowanego.

- a) 56 mm b) 206 mm c) 12 cm d) 107 cm
- e) 78 dm f) 159 dm g) 1456 m h) 4017 m

Wyrażenie, w którego zapisie pojawiają się dwie jednostki, nazywamy **dwumianowanym**, np. 1 cm 4 mm, 5 m 60 cm.



4. Z domu Kuby do szkoły można dotrzeć pieszo na dwa sposoby. W tym tygodniu od poniedziałku do czwartku Kuba pokonywał w obie strony krótszą trasę, za to w piątek wybrał rano krótszą trasę, ale wrócił dłuższą. Ile pełnych kilometrów w ciągu tego tygodnia pokonał Kuba w drodze do szkoły i z powrotem?



5. Pewna łamana otwarta składa się z czterech odcinków. Pierwszy z nich ma długość 9 cm 6 mm, drugi jest 10 razy dłuższy od pierwszego, trzeci ma długość 1 m 7 cm, a długość ostatniego jest równa różnicy długości trzeciego i drugiego odcinka. Jaka długość ma ta łamana?

6. Najwyższe drzewo na świecie to sekwoja wiecznie zielona Hyperion (czytaj: hajpirion), która ma 1158 dm 5 cm wysokości. Najwyższe drzewo w Polsce to daglezwia zielona Helena, która sięga 5940 cm. Porównaj wysokości obu drzew. Wynik wyraż w postaci wyrażenia dwumianowanego.

7. Pani Hania chce wymienić ogrodzenie działki, która ma kształt prostokąta. Szerokość jej działki wynosi 80 tiptopków, a długość – 120 tiptopków. Furtka ma szerokość 1 m. Jaka długość i szerokość ma działka pani Hani w metrach, jeśli długość jej stopy wynosi dokładnie 25 cm? Ile pani Hania zapłaci za ogrodzenie, jeśli 1 m ogrodzenia kosztuje 65 zł?



8. Na zamieszczonej obok mapie leśnego biegu na orientację zaznaczono trasę, punkty kontrolne oraz odległości między nimi. Jaka długość ma trasa tego biegu w metrach, a jaką w kilometrach?



9. Całkowita długość najdłuższego mostu na świecie – Hongkong-Zhuhai-Makau (czytaj: hongkong-zuhaj-makau) – wynosi 55 000 000 mm: 23 000 m zajmuje most główny, 6,7 km – podwodny tunel, pozostałą część stanowią drogi dojazdowe.

- Wyraź całkowitą długość mostu w kilometrach.
- Jaka długość mają drogi dojazdowe?
- Który z odcinków jest dłuższy – podwodny tunel czy drogi dojazdowe? O ile kilometrów dłuższy?



Sprawdź, co umiesz!

1. Uporządkuj podane wielkości w kolejności rosnącej. Użyj znaku <.

5 000 000 mm • 500 000 dm • 400 m • 40 000 dm • 5 km 5 m • 4 km 4000 mm

2. Mama Zosi trzy razy w tygodniu uprawia marszobiegi. W jedną stronę pokonuje 1400 m. Jaka długość ma trasa, którą mama Zosi pokonuje marszobiegami tygodniowo? Wynik wyraż w postaci wyrażenia dwumianowanego.

3. Która wielkość różni się od pozostałych?

- A. 8000 m B. 80 000 dm C. 8 km D. 8 000 000 cm

6. Skala

- ▶ Jak obliczać rzeczywiste wymiary obiektów przedstawionych na mapie lub planie?
- ▶ Jak obliczać wymiary obiektów na mapie lub planie na podstawie ich wymiarów rzeczywistych?
- ▶ Jak ustalić, w jakiej skali sporządzono plan lub mapę?



Analizuj!

Skala wskazuje, ile razy wymiary na rysunku są powiększone lub pomniejszone w stosunku do wymiarów rzeczywistych.

Skala pomniejszająca informuje, ile razy obiekt jest pomniejszony.

1 : 1

1 : 2

1 : 3

1 : 4

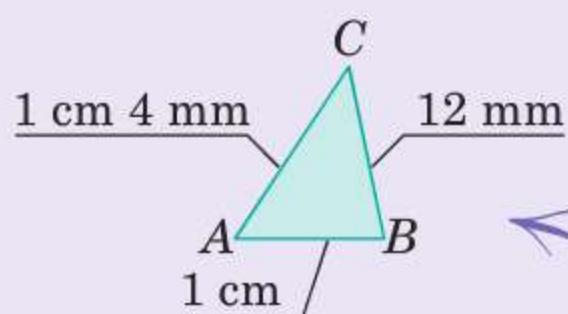
Skala powiększająca informuje, ile razy obiekt jest powiększony.

1 : 1

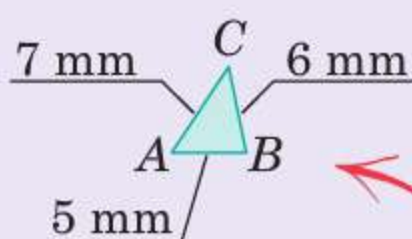
2 : 1

3 : 1

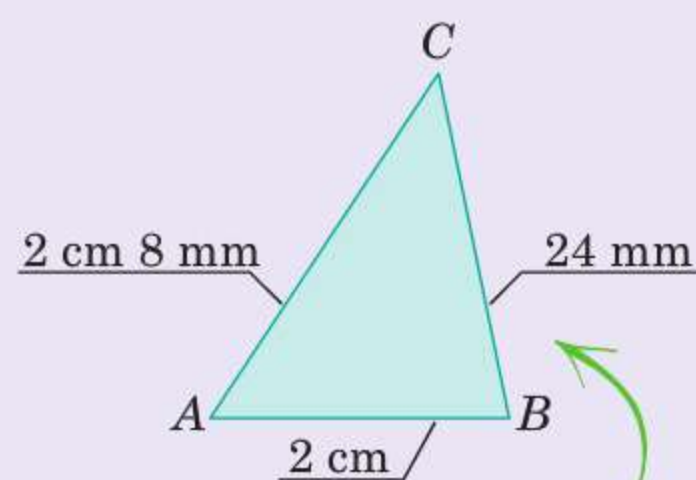
4 : 1



To jest trójkąt *ABC* narysowany w skali **1 : 1**, czyli w **rzeczywistych wymiarach**.



To jest trójkąt *ABC* narysowany w skali **1 : 2**.



To jest trójkąt *ABC* narysowany w skali **2 : 1**.

Jak zmieniają się długości boków trójkąta w zależności od tego, w jakiej skali został narysowany? A jak zmienia się jego obwód?



Odległość w linii prostej między Sulechowem a Świebodzinem na mapie wykonanej w skali 1 : 500 000 wynosi 4 cm 2 mm. Jaka jest rzeczywista odległość między tymi miastami?



Sulechów

?



Świebodzin

Skala 1 : 500 000 oznacza, że odległość w terenie jest **500 000 razy większa** niż na mapie.

$$\begin{aligned} 4 \text{ cm } 2 \text{ mm} \cdot 500\,000 &= 4 \text{ cm} \cdot 500\,000 + 2 \text{ mm} \cdot 500\,000 = \\ &= 2\,000\,000 \text{ cm} + 1\,000\,000 \text{ mm} = 2\,000\,000 \text{ cm} + 100\,000 \text{ cm} = \\ &= 2\,100\,000 \text{ cm} = 21\,000 \text{ m} = 21 \text{ km} \end{aligned}$$

Rzeczywista odległość między tymi miastami to 21 km.

Jaką długość na tej samej mapie powinien mieć odcinek łączący Piłę i Gniezno, jeśli w rzeczywistości odległość w linii prostej między tymi miastami wynosi 115 km?



Piła

?



Gniezno

Skala 1 : 500 000 oznacza, że odległość na mapie jest **500 000 razy mniejsza** niż w rzeczywistości.

$$115 \text{ km} : 500\,000 = 11\,500\,000 \text{ cm} : 500\,000 = 115 \text{ cm} : 5 = 23 \text{ cm}$$

Odcinek łączący Piłę i Gniezno powinien mieć na mapie 23 cm długości.

Na innej mapie odległość między Piłą a Gnieznem wyniosła 5 cm. W jakiej skali sporządzono tę mapę? Jak to obliczyć?

Sposób 1

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} :5 & \left(\begin{array}{l} 5 \text{ cm na mapie} \rightarrow 115 \text{ km w terenie} \\ 1 \text{ cm na mapie} \rightarrow 23 \text{ km w terenie} \end{array} \right) & :5 \end{matrix} \\ & 1 \text{ cm na mapie} \rightarrow 2\,300\,000 \text{ cm w terenie} \\ & 1 \text{ cm} \rightarrow 2\,300\,000 \text{ cm} \\ & 1 : 2\,300\,000 \end{aligned}$$

Sposób 2

$$\begin{aligned} 115 \text{ km} : 5 \text{ cm} &= \\ = 11\,500\,000 \text{ cm} : 5 \text{ cm} &= \\ = 2\,300\,000 \\ 1 : 2\,300\,000 \end{aligned}$$

Mapę sporządzono w skali 1 : 2 300 000.

Poćwicz!

1. Narysuj odcinek AB o długości 4 cm, a następnie narysuj ten odcinek w podanej skali. Zapisz długość odcinka narysowanego w skali.

a) 1 : 2

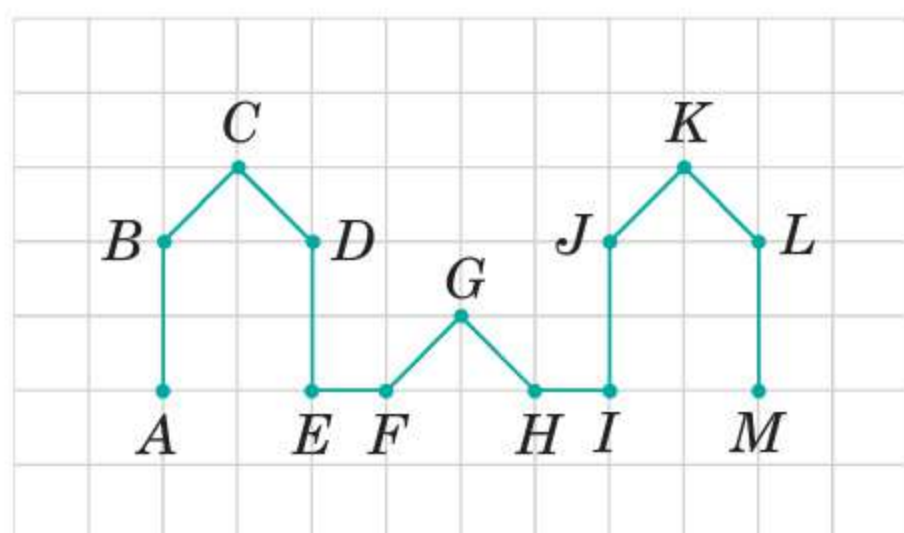
b) 1 : 4

c) 2 : 1

d) 3 : 1

2. Narysuj okrąg o promieniu 2 cm 4 mm w skali 1 : 1 oraz w skali 2 : 1. O ile centymetrów różnią się średnice tych okręgów? Ile razy promień większego okręgu jest większy od promienia mniejszego okręgu?

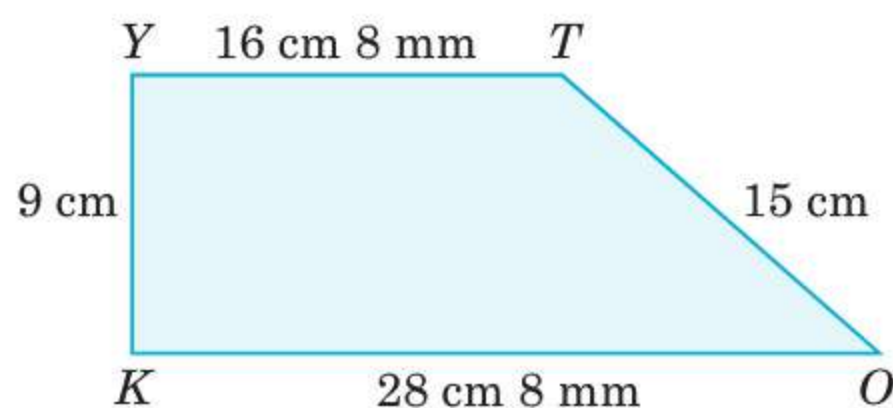
3. Zamieszczona poniżej łamana otwarta jest narysowana w skali 1 : 3. Narysuj ją w skali 1 : 1. Czy ta łamana ma oś symetrii? Jeśli tak, to ją zaznacz.



Czy pamiętasz? Ośią symetrii figury nazywamy prostą, która dzieli figurę na dwie części, będące swoim lustrzanym odbiciem.



4. Czworokąt $KOTY$ narysowany w skali 3 : 1 ma wymiary takie, jak pokazano na rysunku obok. Ile wyniesie obwód czworokąta $KOTY$ narysowanego w skali 1 : 2?



5. Najdłuższą deskę na świecie można podziwiać w Szymbarku. W skali 1 : 517 deska miałaby 90 mm długości. Ustal rzeczywistą długość rekordowej deski w metrach i centymetrach.

6. Dywan A ma 90 cm szerokości i 2 m długości. Dywan B ma wymiary 16 dm $\times$ 200 cm. Jakie wymiary miałyby te dywany na planie wykonanym w skali 1 : 50?

7. Na mapie wykonanej w skali 1 : 5 000 000 odległość w linii prostej między Szczecinem a Warszawą wynosi 9 cm 1 mm. Jaka jest rzeczywista odległość w linii prostej między tymi miastami?

8. Szlak ma 5 km. Na mapie tej odległości odpowiada odcinek o długości 4 cm. W jakiej skali została sporządzona ta mapa?

A. 1 : 125 000

B. 1 : 12 500

C. 1 : 1250

D. 1 : 125



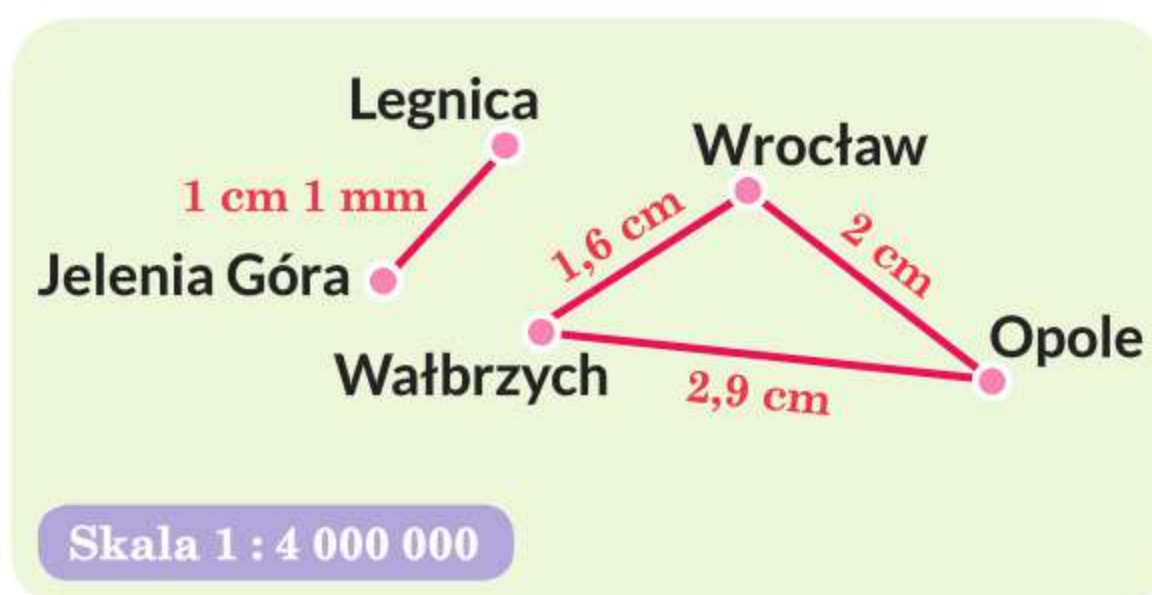
9. Na podstawie zamieszczonych poniżej informacji odpowiedz na pytania.

a) Jakiej odległości w terenie odpowiada 1 cm na mapie o podanej skali?

b) Jakiej odległości w terenie odpowiada 1 mm na tej mapie?

c) Jaka jest rzeczywista odległość w linii prostej między Wrocławiem a Opolem oraz Jelenią Górą a Legnicą?

d) Która rzeczywista odległość w linii prostej jest większa – między Wałbrzychem i Opolem czy między Wałbrzychem a Wrocławiem? O ile większa?



10. Odległość między Płockiem a Płońskiem w linii prostej wynosi 46,2 km. Na mapie jest to odcinek o długości 15,4 cm.

a) W jakiej skali została wykonana ta mapa?

b) Jakiej rzeczywistej odległości odpowiada odcinek, który na tej mapie ma 7,5 cm długości?

c) Jakiej odległości na tej mapie odpowiada odcinek o rzeczywistej długości równej 78 km?



Sprawdź, co umiesz!

1. Odcinek narysowany w skali 8 : 1 ma długość 72 cm. Jaką długość ma ten odcinek narysowany w skali 1 : 2?

A. 9 cm

B. 18 cm

C. 4 cm 5 mm

D. 288 cm

2. Na mapie wykonanej w skali 1 : 110 000 odległość w linii prostej między dwoma miastami wynosi 9 cm 5 mm. Jaka odległość dzieli te miasta w rzeczywistości?

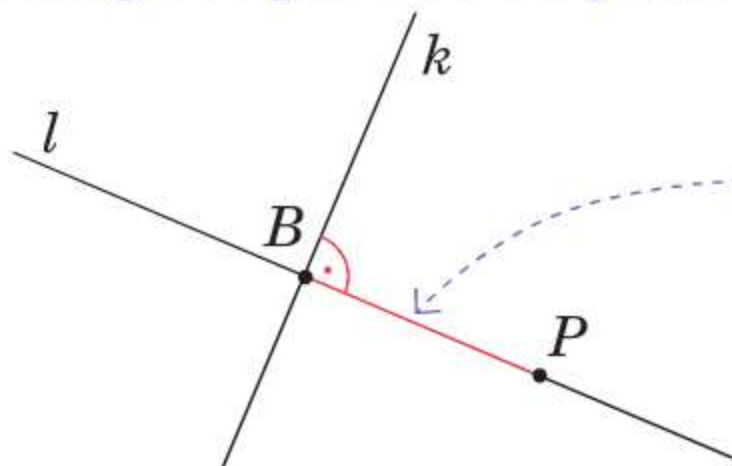
3. Całkowita długość Trójmiejskiego Parku Krajobrazowego wynosi 82 km. Na pewnej mapie odcinek Sopot–Skarszewo (początek i koniec parku) ma długość 10 cm. W jakiej skali została sporządzona ta mapa?

PODSUMOWANIE DZIAŁU III

W świecie figur płaskich

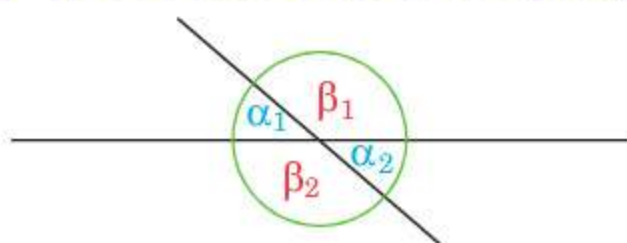
Powtórz wiadomości

Odległość punktu od prostej



Odległość punktu P od prostej k jest równa $|PB|$, tj. długości odcinka PB leżącego na prostej l prostopadłej do prostej k , którego końcami są punkt P i punkt B będący punktem przecięcia prostej l z prostą k .

Kąty wierzchołkowe i przyległe



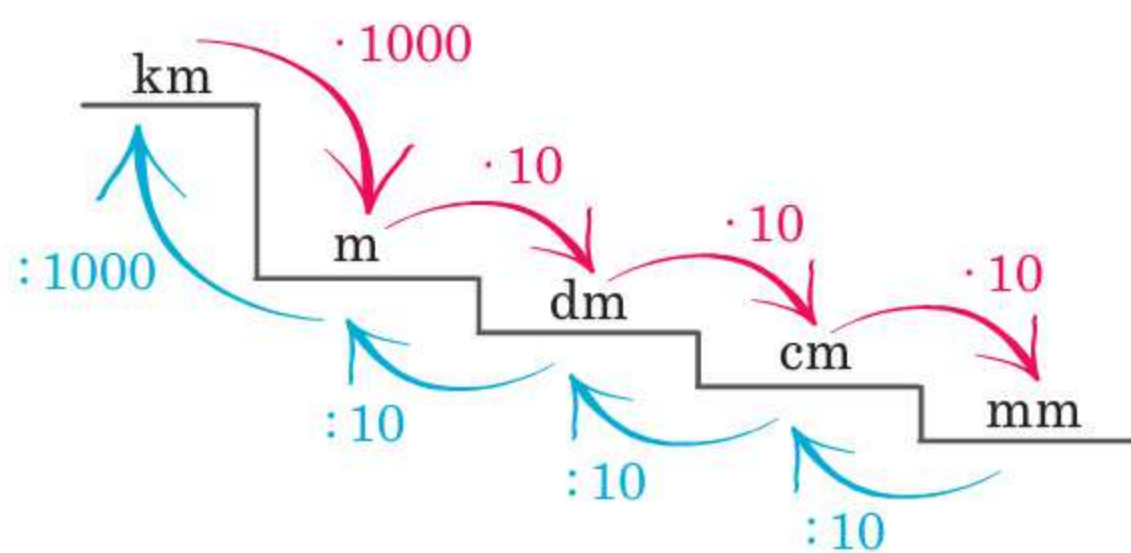
Kątami przyległymi są: α_1 i β_1 , α_2 i β_1 , α_1 i β_2 , α_2 i β_2 .

Suma miar kątów przyległych to 180° .

Kątami wierzchołkowymi są: α_1 i α_2 , β_1 i β_2 .

Miary kątów wierzchołkowych są równe.

Zależności między jednostkami długości



Obliczanie długości na mapie lub w terenie na podstawie skali

Skala 1 : 200 000

Długość na mapie

8 cm

· 200 000

Długość w terenie

1 600 000 cm = 16 km

: 200 000

Obliczanie skali

W jakiej skali wykonano mapę, jeśli odległość w rzeczywistości równa 280 km odpowiada na mapie długości 14 cm?

$$\begin{array}{l}
 :14 \quad \left(\begin{array}{l} 14 \text{ cm na mapie} \rightarrow 28\,000\,000 \text{ cm w rzeczywistości} \\ 1 \text{ cm na mapie} \rightarrow 2\,000\,000 \text{ cm w rzeczywistości} \end{array} \right. :14 \\
 \text{skala } 1 : 2\,000\,000
 \end{array}$$

1. Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe.

I. Półprostymi prostokątnymi są półproste

A. AB i DE .

B. FG i AH .

C. AB i FG .

D. FG i DE .

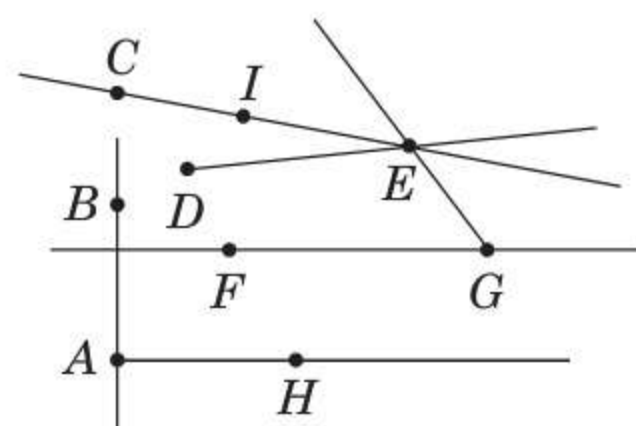
II. Punkt E nie należy do

A. półprostej DE .

B. półprostej GE .

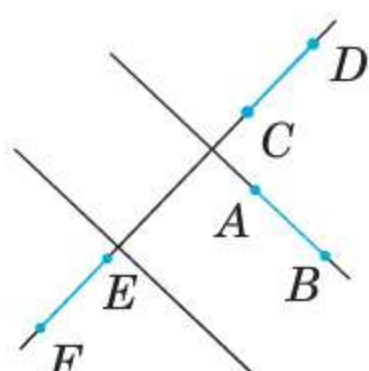
C. półprostej IC .

D. prostej CI .

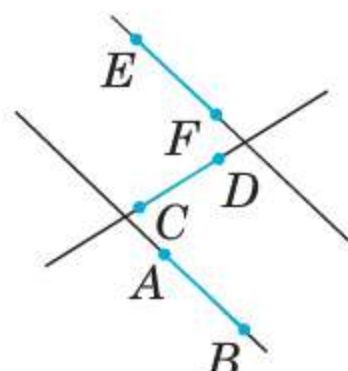


2. Na którym rysunku przedstawiono zależności $AB \parallel EF$ oraz $CD \perp EF$?

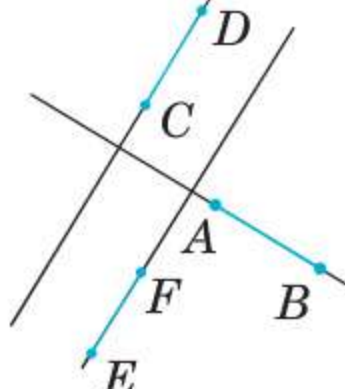
A.



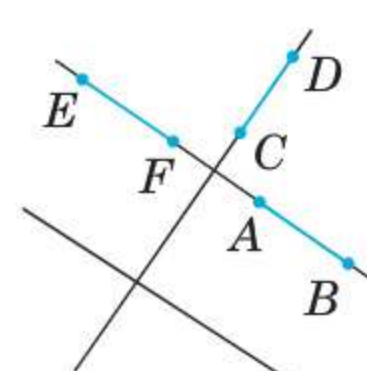
B.



C.



D.



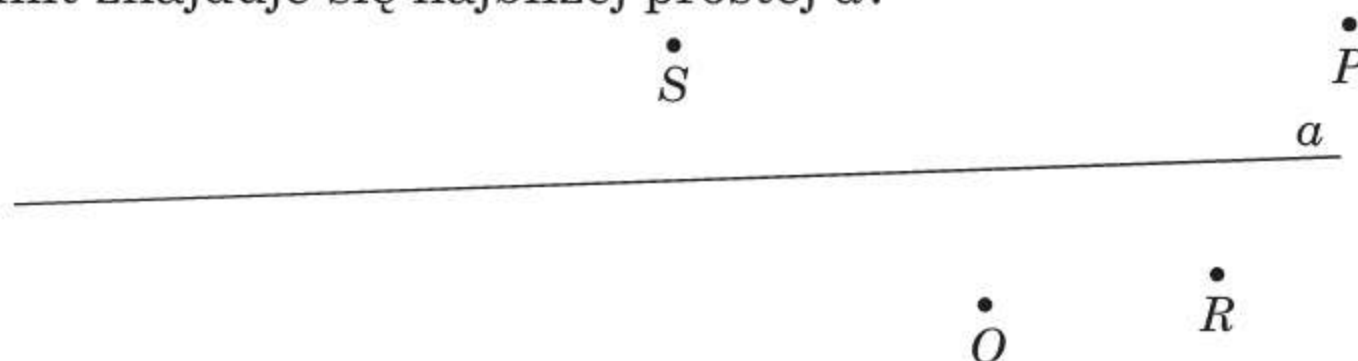
3. Który punkt znajduje się najbliżej prostej a ?

A. O

B. P

C. R

D. S



4. Jaką długość ma odcinek AH z zadania 1 narysowany w skalach 1 : 2 oraz 3 : 1?

A. 6 mm i 4 mm.

B. 2 cm 4 mm i 3 cm 6 mm.

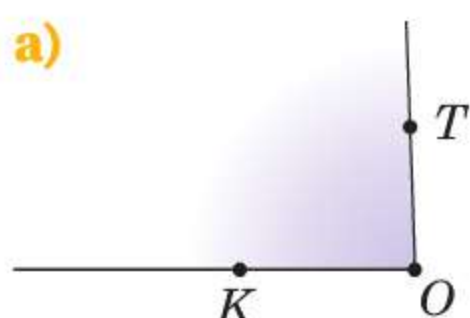
C. 6 mm i 3 cm 6 mm.

D. 1 cm 2 mm i 3 cm 6 mm.

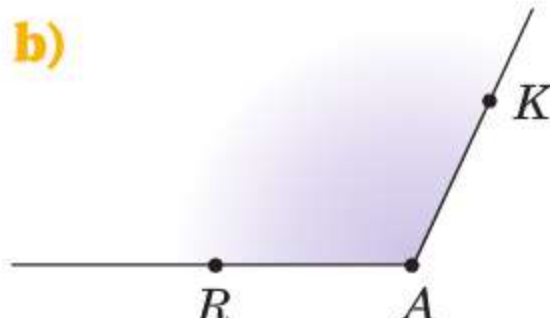
5. Narysuj prostą a oraz prostą b , która jest równoległa do prostej a i oddalona od niej o 3 cm 2 mm. Następnie zaznacz punkt A , który jest oddalony od prostej b o 2 cm.

6. Zmierz kąt zaznaczony na rysunku i określ jego rodzaj.

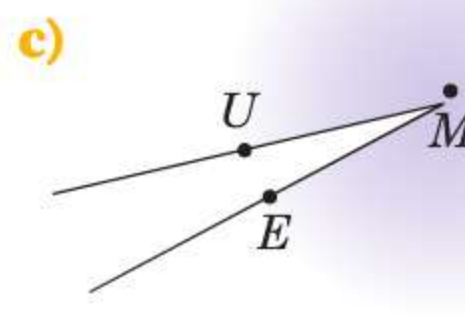
a)



b)

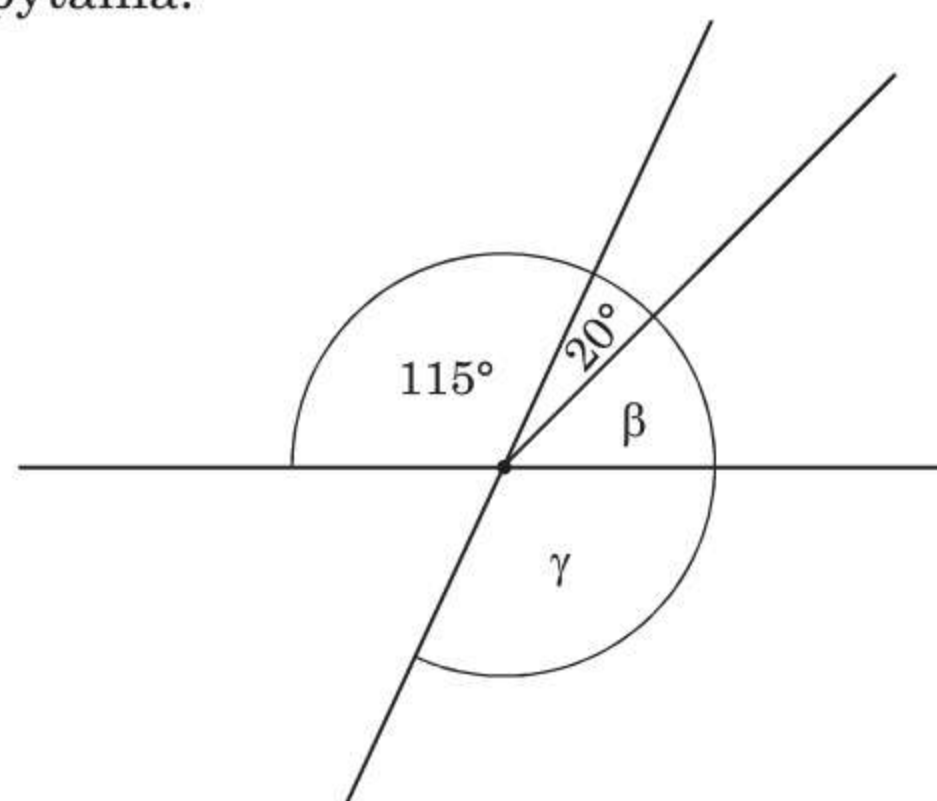
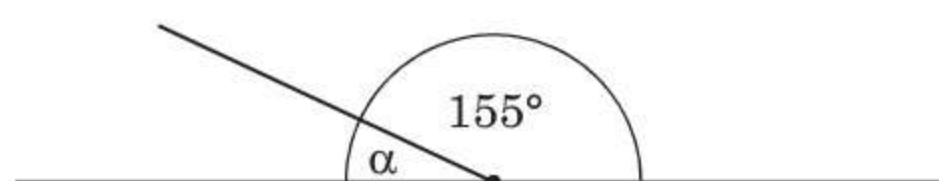


c)



7. Narysuj kąt ROK , którego miara jest o 47° mniejsza od miary kąta półpełnego, oraz kąt TAM , którego miara jest o 14° większa od podwojonej miary kąta ROK . Jakiego rodzaju są to kąty? O ile stopni różnią się ich miary?

8. Na podstawie rysunków odpowiedz na pytania.



- a) Jakie miary mają kąty α i β ?
 b) Który kąt jest większy i o ile stopni – kąt przyległy do kąta α czy kąt γ ?

9. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

W ciągu 40 minut wskazówka minutowa obraca się o kąt 90° .	P	F
W ciągu 2 godzin wskazówka godzinowa obraca się o kąt 60° .	P	F
Kąt przyległy do kąta rozwartego może być kątem prostym.	P	F

10. Wyraż podaną wielkość w postaci wyrażenia dwumianowanego.

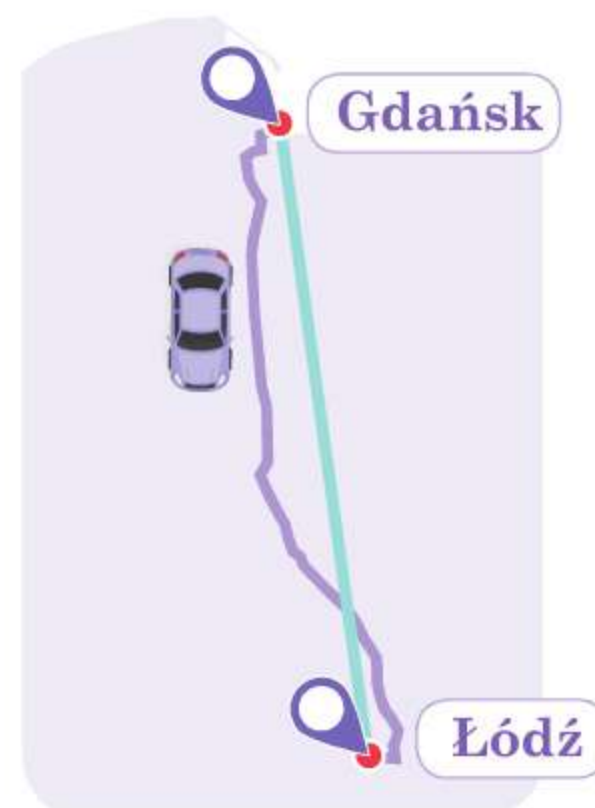
- a) 109 mm b) 278 cm c) 94 dm d) 8001 m e) 32 007 m

11. Wskaż największą długość.

- A. 6 km B. 60 000 000 mm C. 600 m D. 60 000 000 cm

12. Na mapie wykonanej w skali 1 : 2 000 000 odległość w linii prostej między Gdańskiem a Łodzią wynosi 15 cm.

- a) Ile wynosi rzeczywista odległość między Gdańskiem a Łodzią w linii prostej?
 b) Gdybyśmy podróżowali samochodem, z Gdańska do Łodzi pokonalibyśmy 347 km. O ile kilometrów dłuższa jest droga, którą pokonamy samochodem, od odległości w linii prostej?



13. Promenada Nadmorska w Sarbinowie ma długość 1 km 200 m. Na planie miejscowości promenada ta ma 6 cm długości. W jakiej skali został wykonany ten plan Sarbinowa?

Podejmij wyzwanie

?



Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał wybitną polską astronom, której nazwiskiem nazwano odkrytą w 2005 r. planetoidę 198820. Powodzenia!

1 była astrofizyczką. Urodziła się w 1905 r. w Wilnie, gdzie ukończyła **2** na Uniwersytecie Stefana Batorego. Już podczas studiów zainteresowała się astronomią. W 1926 r. rozpoczęła pracę w **3**, a w 1933 r. obroniła pracę doktorską z zakresu astronomii, w której wykorzystowała **4** w badaniu zmienności gwiazd. Współtworzyła **5** oraz obserwatorium astronomiczne w Piwnicach. W latach 1948–1949, opracowując wyniki badań prowadzonych w Stanach Zjednoczonych, ustaliła **6**. Brała również udział w badaniach na temat fotometrii fotograficznej, widm gwiazdowych oraz **7**. Dzięki jej inicjatywie w 1962 r. w toruńskim obserwatorium zainstalowano do dziś największy w Polsce **8**.

1. Jakimi kątami są kąty α i β ?

przyległymi	wierzchołkowymi	równymi
Wilhelmina Iwanowska	Maria Skłodowska-Curie	Emilia Plater

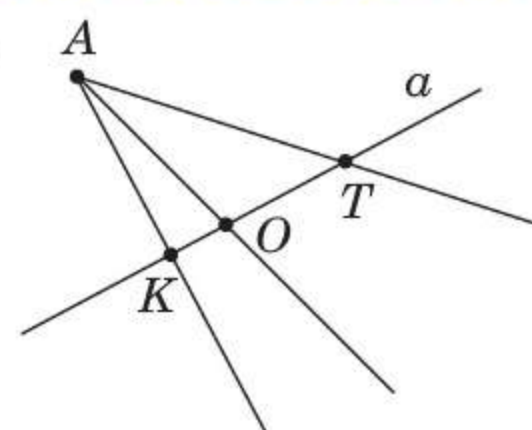
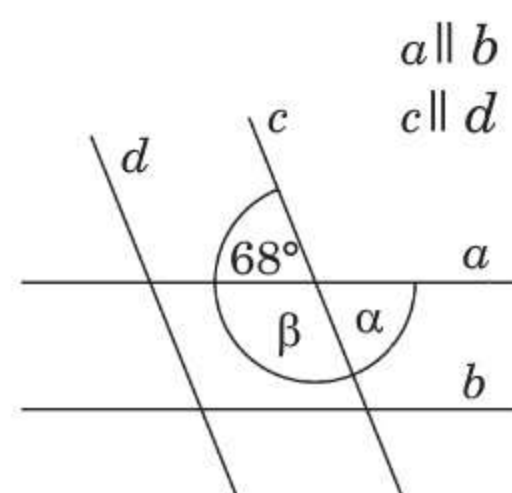
2. O ile stopni różnią się miary kątów α i β ?

48°	68°	44°
chemię	fizykę	matematykę

3. Który odcinek wyznacza odległość punktu A od prostej a ?

AT	AK	AO
prestizowej szkole	obserwatorium astronomicznym	laboratorium chemicznym

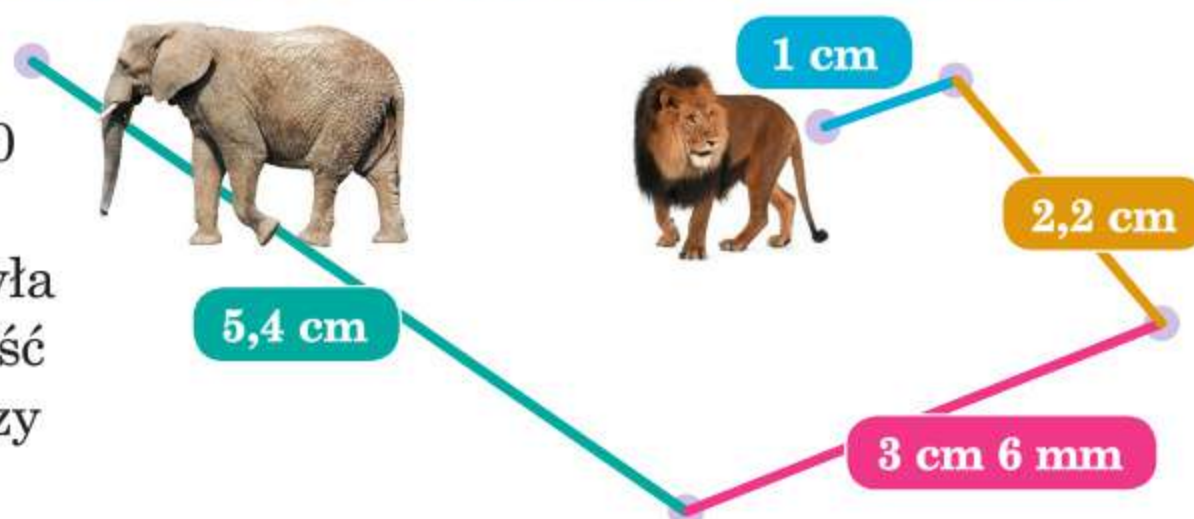
Rysunek do zadań 1. i 2.



4. Odcinek OK o długości 4,5 cm narysowano w skalach 1 : 5 oraz 5 : 1. Ile wynosi różnica długości tych dwóch odcinków?

21 cm 6 mm	22 cm 5 mm	9 mm
fotografię	radioodbiorniki	promieniowanie

5. Marysia wybrała się do zoo. Na planie wykonanym w skali 1 : 50 000 zaznaczyła odcinkami kolejne etapy trasy. Przy wybiegu dla lwów włączyła w telefonie aplikację mierzącą długość trasy. Jakie wskazanie odczytała przy wybiegu dla słoni?



61 km	6 km 100 m	610 m
Uniwersytet Warszawski	Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu	Uniwersytet Gdański

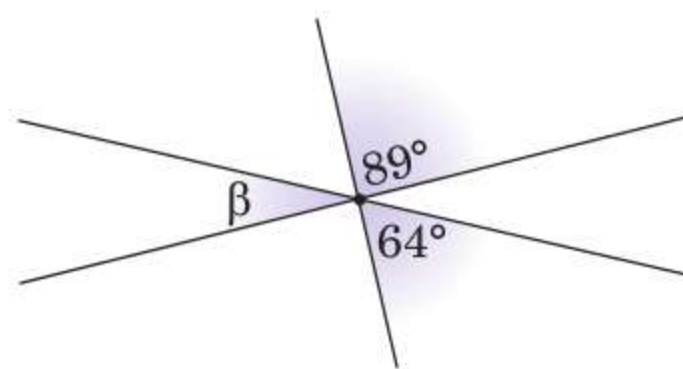
6. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Prosta a jest prostopadła do prostej b , a prosta b jest prostopadła do prostej c . Prosta a jest więc równoległa do prostej c .	P	F
Odcinek OK o długości 4,5 cm narysowany w skali 1 : 5 ma długość 4 cm.	P	F
Dwa kąty o wspólnym wierzchołku i ramieniu zawsze tworzą kąt półpełny.	P	F

F, P, F	P, F, P	P, F, F
położenie nowej planety w Układzie Słonecznym	zależność między kolorem gwiazdy a jej temperaturą	nową skalę odległości we wszechświecie

7. Ile wynosi miara kąta β ?

153°	64°	27°
niezidentyfikowanych obiektów latających	życia na Księżycu	ewolucji galaktyk



8. Na pewnym planie pokój ma wymiary 2 cm 5 mm $\times$ 1,5 cm, a w rzeczywistości 5 m $\times$ 3 m. W jakiej skali został opracowany ten plan?

1 : 200	200 : 1	1 : 2
teleskop optyczny	ekran projekcyjny	filtr mgławicowy

Wykorzystaj w praktyce

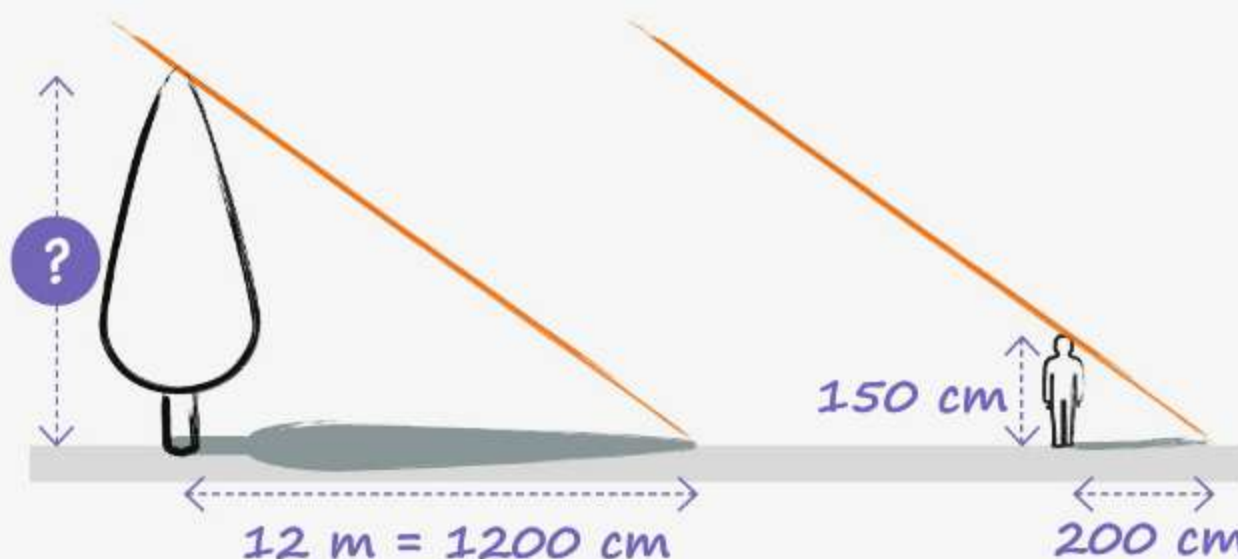
Wzory opisują zależności między różnymi wielkościami. Dzięki nim czasami nie musimy wiedzieć wszystkiego o danym zjawisku, żeby wykonać obliczenia i otrzymać potrzebną odpowiedź.

Przeanalizuj rozwiązanie zadania zamieszczone na poniższej tablicy. Wykorzystano w nim wzór, za pomocą którego na podstawie długości cienia danego obiektu można określić jego wysokość, przy założeniu, że promienie słoneczne są do siebie równoległe.



Promienie Słońca oświetlające Ziemię są niemal równoległe.

Janek ma 150 cm wzrostu. Jego cień ma 200 cm długości, a cień znajdującego się niedaleko drzewa ma 12 m długości. Jak wysokie jest to drzewo?



$$\text{wysokość drzewa} = \frac{\text{wzrost Janka}}{\text{długość cienia Janka}} \cdot \text{długość cienia drzewa}$$

W następnym kroku zastąp kreskę ułamkową znakiem dzielenia.

$$\text{wysokość drzewa} = \frac{150 \text{ cm}}{200 \text{ cm}} \cdot 1200 \text{ cm} =$$

$$= 150 \text{ cm} : 200 \text{ cm} \cdot 1200 \text{ cm} = 900 \text{ cm} = \underline{\underline{9 \text{ m}}}$$

Użyj kalkulatora.



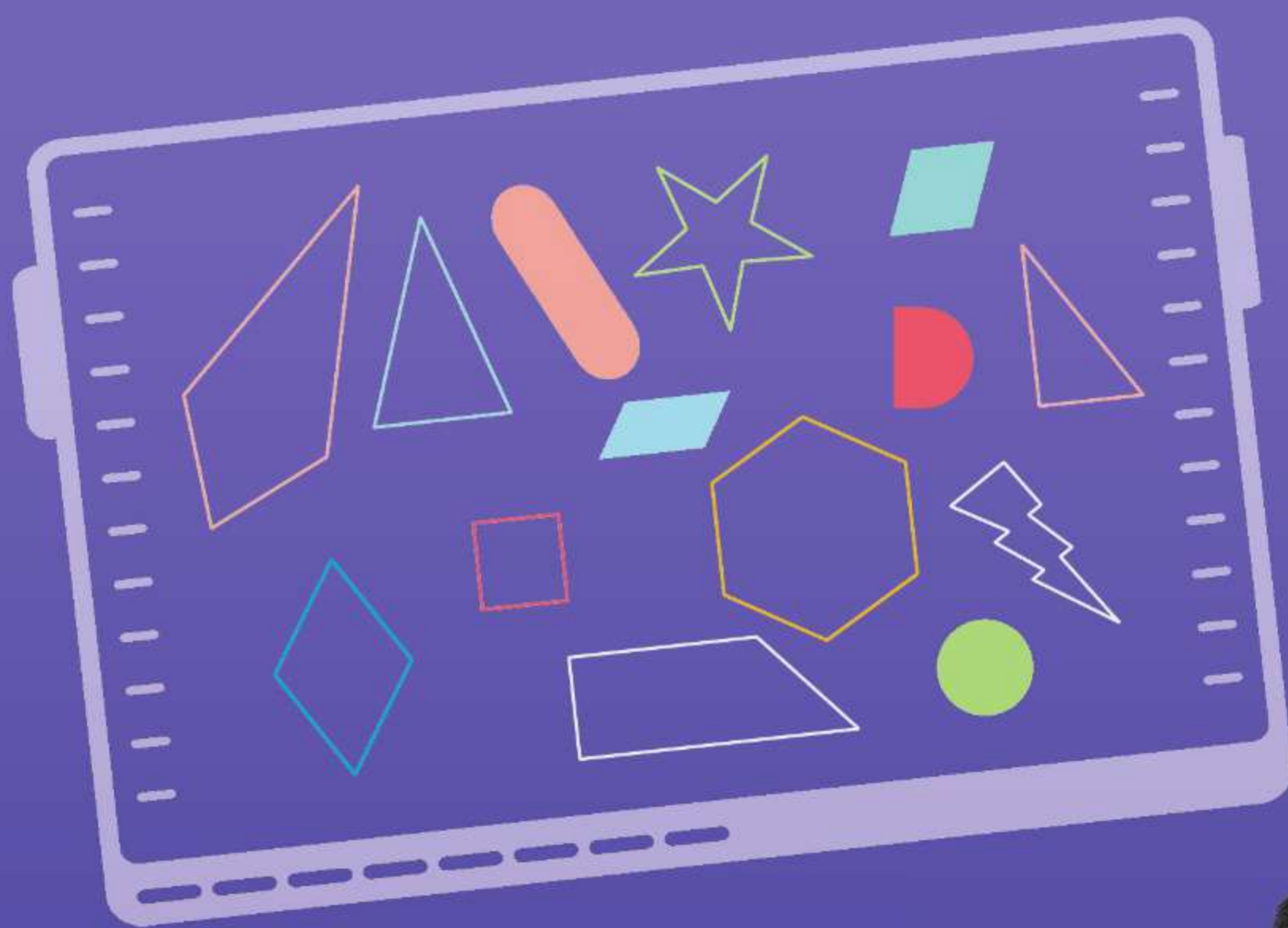
1. Ani ma 140 cm wzrostu. Jej cień ma 160 cm długości, a cień znajdującego się niedaleko słupka z koszem do koszykówki ma 280 cm długości. Jak wysoki jest ten słupek?



2. Maurycy, który ma 160 cm wzrostu, rzuca cień o długości 128 cm. W tym samym momencie drzewo rzuca cień o długości 320 cm. Jaka jest wysokość tego drzewa?

DZIAŁ IV

W ŚWIECIE WIELOKĄTÓW



**Które
z narysowanych
figur to
wielokąty?**

**Jak nazywają się te
wielokąty? Jakiej
mają własności?**

**Które z czworokątów
to prostokąty?**



1. Wielokąty

- ▶ Jaką figurę nazywamy wielokątem?
- ▶ Jak nazywać wielokąty na podstawie ich własności?
- ▶ Co to jest przekątna wielokąta?



Analizuj!

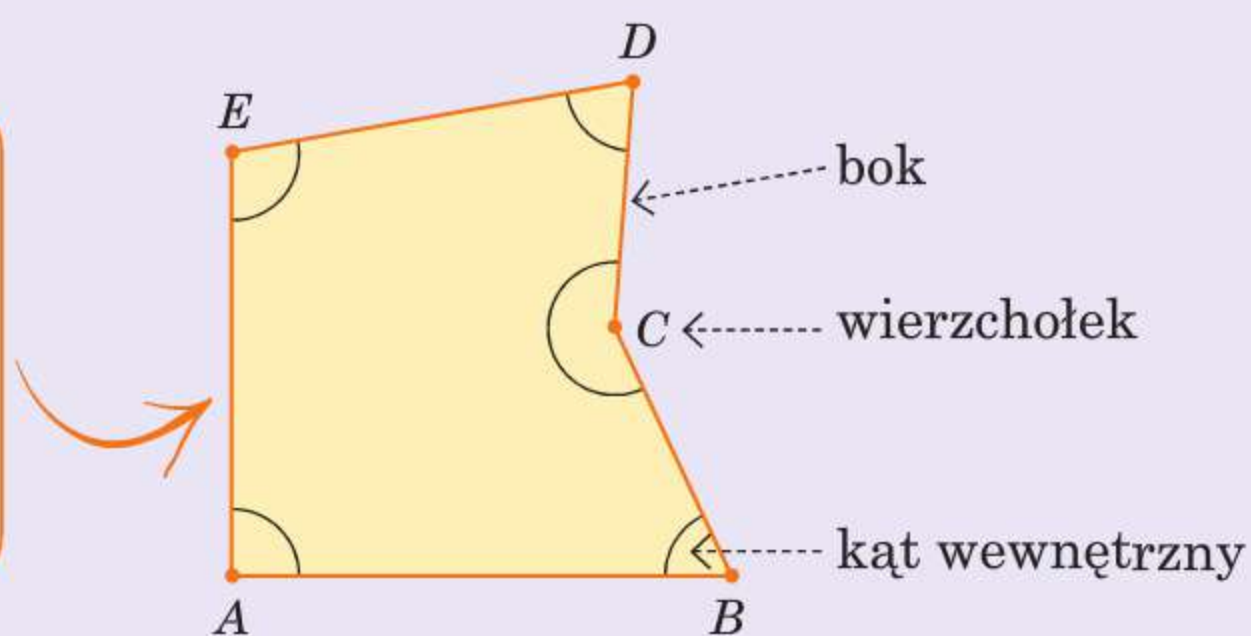
Wielokąt to obszar ograniczony łamaną, wraz z tą łamaną, przy czym odcinki tej łamanej są ze sobą połączone w taki sposób, że nie przecinają się, a wierzchołek będący początkiem pierwszego odcinka jest końcem ostatniego odcinka łamanej. Odcinki łamanej nazywamy bokami wielokąta, a końce odcinków łamanej – wierzchołkami.

To jest pięciokąt $ABCDE$.

Ma 5 boków: AB , BC , CD , DE , EA .

Ma 5 wierzchołków: A , B , C , D , E .

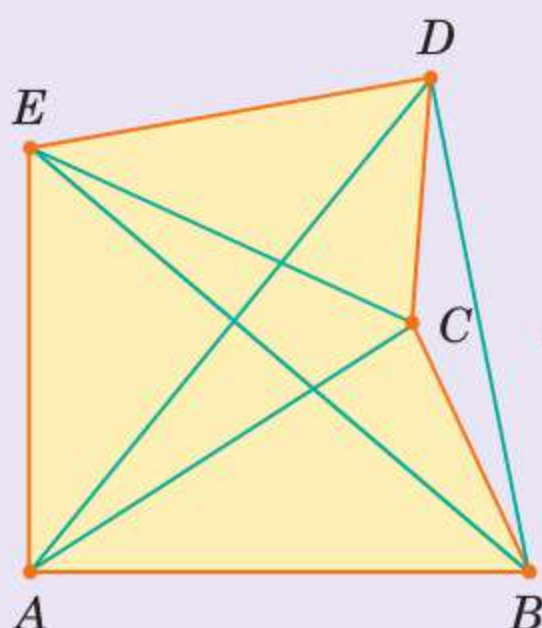
Ma 5 kątów wewnętrznych: ABC , BCD , CDE , DEA , EAB .



Zamieszczone obok zdjęcie przedstawia włoskie miasto Palmanova (czytaj: palmanowa) widziane z lotu ptaka. Otoczone jest dwoma rzędami fortyfikacji. Na planie jakiego wielokąta powstał centralny plac? Na planie jakiego wielokąta powstało całe miasto?

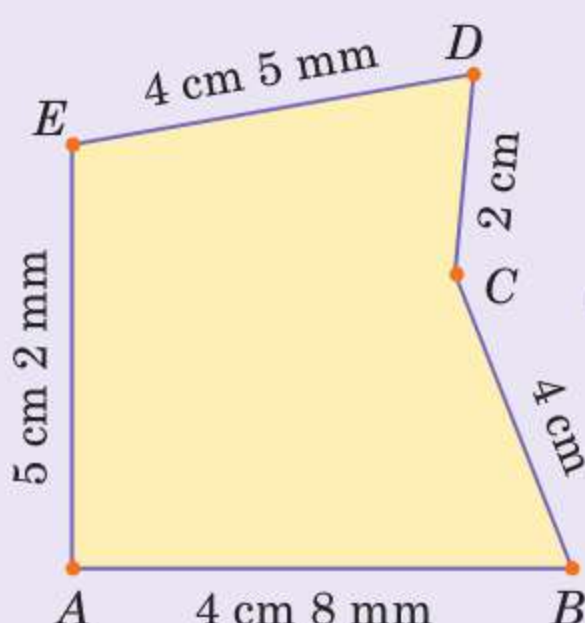


Przekątna wielokąta to odcinek, który łączy dwa wierzchołki tego wielokąta, ale nie jest jego bokiem. Może leżeć poza wielokątem.



Pięciokąt $ABCDE$ ma **pięć przekątnych**: AC, AD, BE, BD, CE .

Obwód wielokąta to suma długości wszystkich jego boków.



Aby obliczyć **obwód tego wielokąta**, wystarczy zsumować podane długości boków.

$$\text{Obw.} = 4 \text{ cm } 8 \text{ mm} + 4 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 4 \text{ cm } 5 \text{ mm} + 5 \text{ cm } 2 \text{ mm} = \underline{\underline{20 \text{ cm } 5 \text{ mm}}}$$

Aby obliczyć obwód tego wielokąta, **należy najpierw wyznaczyć wszystkie potrzebne długości.**

$$|AH| = 13 \text{ cm}$$

$$|BC| + |DE| + |FG| = |AH| = 13 \text{ cm}$$

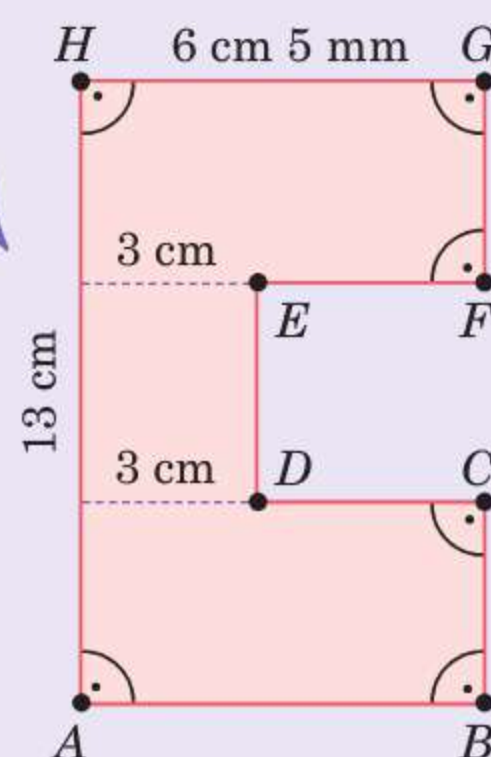
$$|HG| = 6 \text{ cm } 5 \text{ mm}$$

$$|AB| = |HG| = 6 \text{ cm } 5 \text{ mm}$$

$$|EF| = 6 \text{ cm } 5 \text{ mm} - 3 \text{ cm} = 3 \text{ cm } 5 \text{ mm}$$

$$|CD| = |EF| = 3 \text{ cm } 5 \text{ mm}$$

$$\text{Obw.} = 13 \text{ cm} + 13 \text{ cm} + 6 \text{ cm } 5 \text{ mm} + 6 \text{ cm } 5 \text{ mm} + 3 \text{ cm } 5 \text{ mm} + 3 \text{ cm } 5 \text{ mm} = \underline{\underline{46 \text{ cm}}}$$

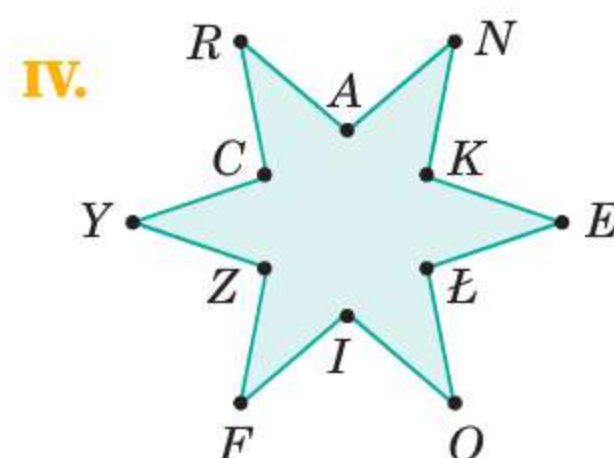
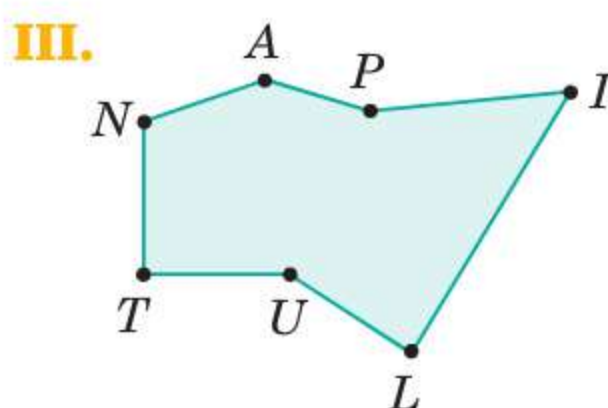
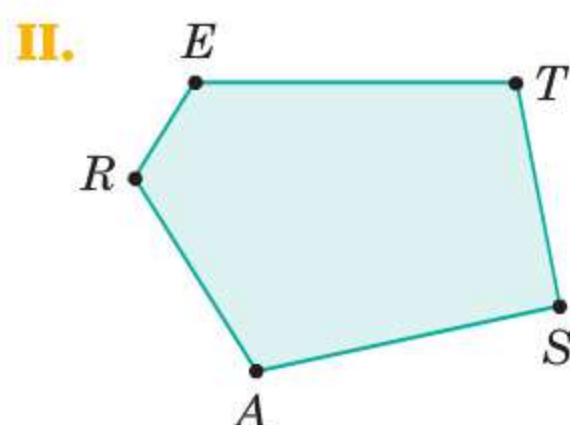
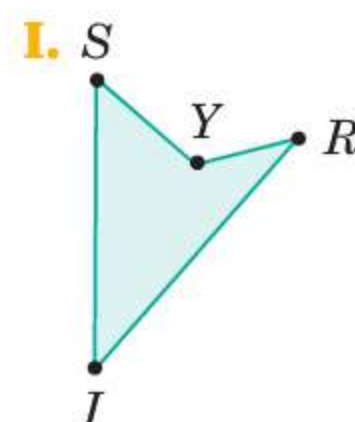


Ile boków, wierzchołków, kątów i przekątnych ma trójkąt? A czworokąt? A ośmiokąt? Co zauważasz?

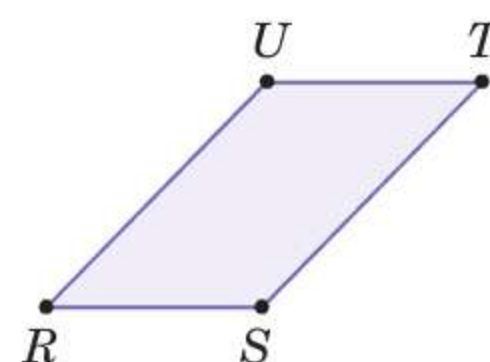
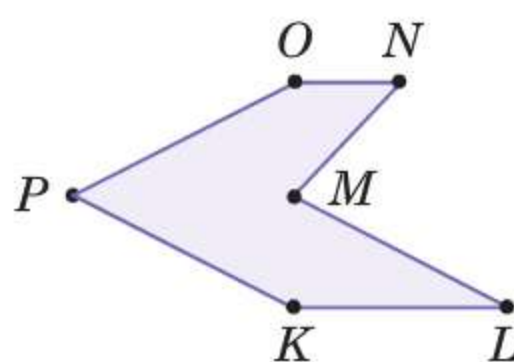
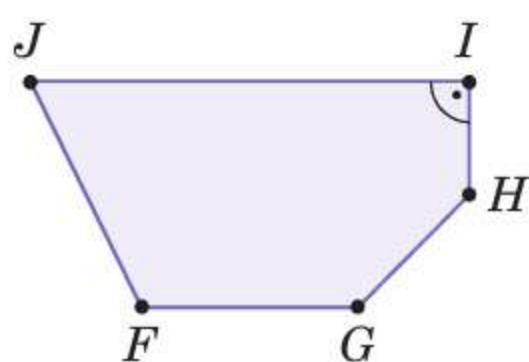
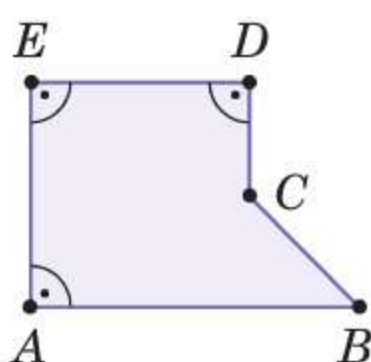
Poćwicz!

1. Przyjrzyj się poniższym wielokątom, a następnie:

- nazwij wszystkie wielokąty,
- podaj nazwy boków wielokąta II,
- podaj nazwy przekątnych wielokątów I i II,
- podaj nazwy kątów ostrych wielokąta I,
- podaj nazwy boków prostopadłych wielokąta III,
- podaj nazwy kątów wklęsłych wielokąta IV.



2. Dopasuj stwierdzenia I–V do poniższych wielokątów. Jeden z opisów nie pasuje do żadnej z figur. Narysuj figurę odpowiadającą temu opisowi.



- Ma dokładnie dwie pary boków równoległych.
- Ma dokładnie dwie przekątne, które przecinają się w połowie.
- Ma dokładnie trzy kąty ostre i dwa kąty wklęsłe.
- Ma co najmniej jeden kąt rozwarty i dokładnie jedną parę boków prostopadłych.
- To pięciokąt, który ma dwa boki tej samej długości.

3. Narysuj:

- czworokąt, który ma jeden kąt ostry;
- siedmiokąt, który ma trzy kąty rozwarte;
- sześciokąt, który ma dwie pary boków równoległych;
- czworokąt, który ma cztery pary boków prostopadłych;
- pięciokąt, który ma dwa kąty wklęsłe.

W każdym wielokącie zaznacz wszystkie przekątne.

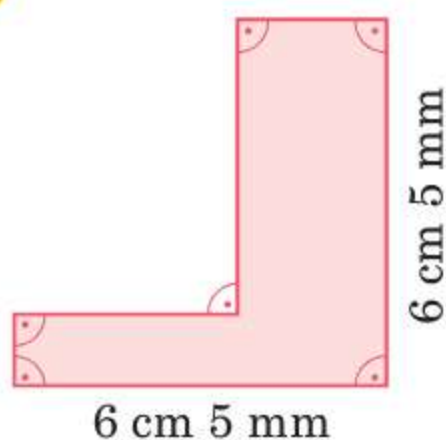
4. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Z wierzchołka dowolnego czworokąta wychodzą dwie przekątne.	P	F
Istnieje wielokąt, który nie ma przekątnych.	P	F
Istnieje wielokąt, który ma tylko jedną przekątną.	P	F

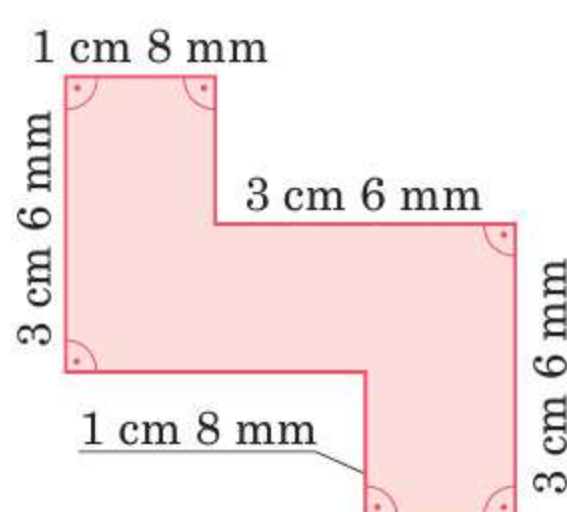
5. Jeden z boków prostokąta *BOKI* ma długość 12 cm 2 mm, a drugi jest od niego o 5 cm 6 mm dłuższy. Obwód tego prostokąta jest 5 razy większy niż obwód kwadratu *KĄTY*. Jaka długość ma bok kwadratu?

6. Oblicz obwód podanego wielokąta.

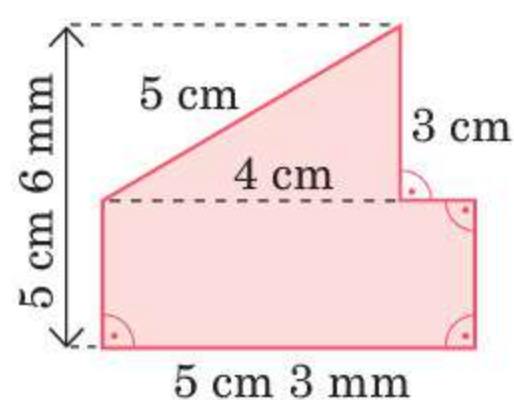
a)



b)



c)



7. Na dwóch prostopadłych bokach prostokąta zbudowano trójkąty tak, że powstał sześciokąt. Trójkąty są równoboczne, czyli mają wszystkie boki tej samej długości. Obwody tych trójkątów są równe 42 cm i 19 cm 5 mm. Oblicz obwód powstałego sześciokąta.



Sprawdź, co umiesz!

1. Narysuj dowolny sześciokąt *ABCDEF*, który ma dokładnie dwa kąty proste. Wypisz boki, wierzchołki i kąty tego sześciokąta. Zaznacz w nim przekątne oraz podaj ich nazwy.

2. Prostokąt *ABCD* o wymiarach 5 cm 7 mm $\times$ 3 cm 5 mm ma obwód dwa razy mniejszy niż kwadrat *EFHG*. Jaka długość ma bok kwadratu *EFHG*?

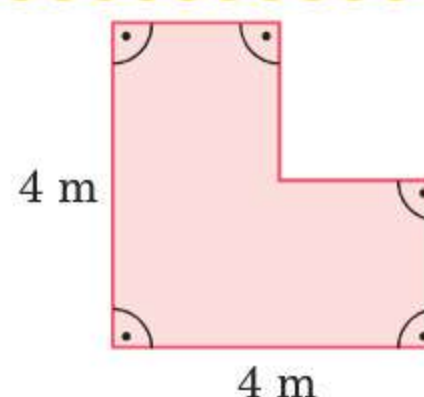
3. Ile wynosi obwód zamieszczonego obok wielokąta?

A. 12 m

B. 16 m

C. 8 m

D. 20 m



2. Trójkąty

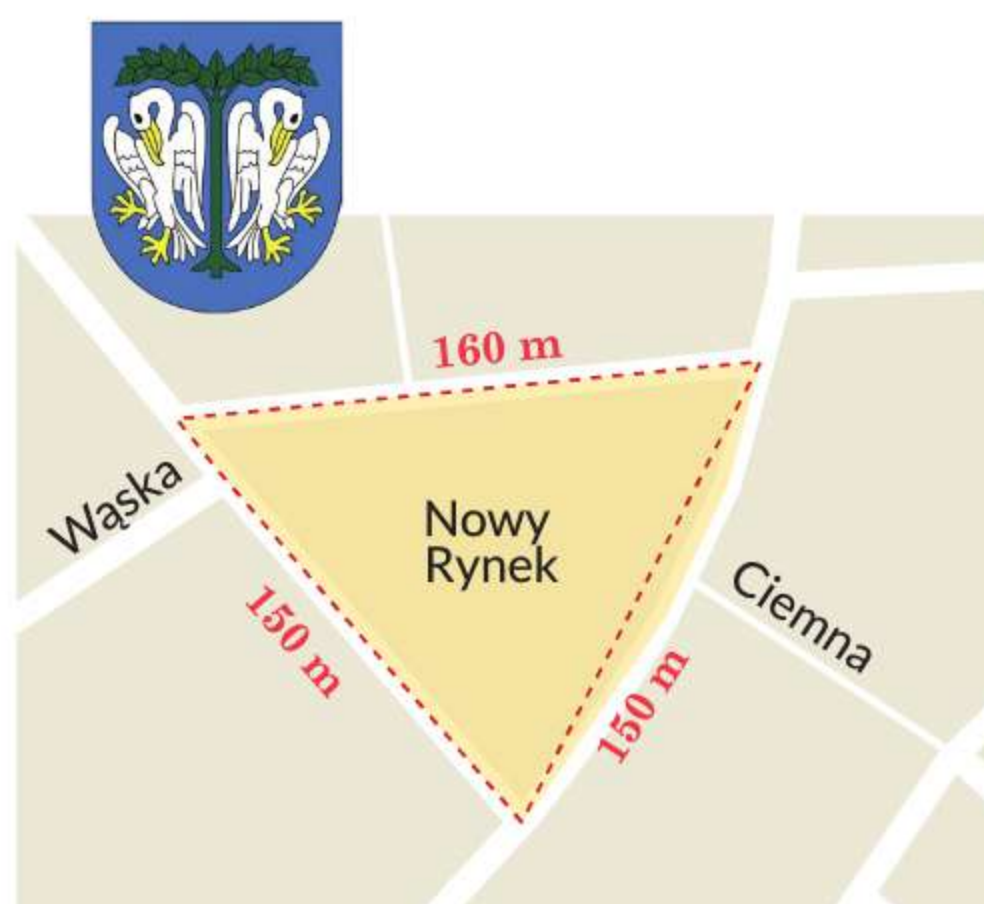
- ▶ Czy z każdych trzech odcinków można zbudować trójkąt?
- ▶ Jak podzielić trójkąty ze względu na długości boków?



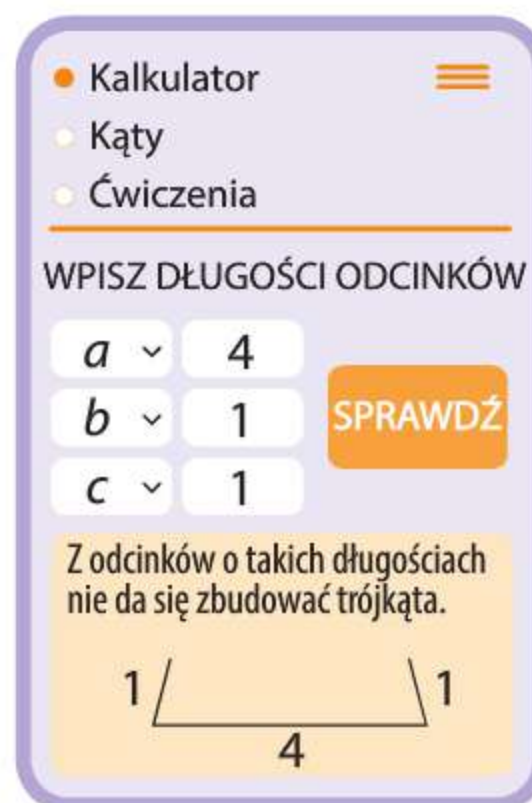
Odkrywaj!

1. Podczas klasowej wycieczki do Łowicza obeszliśmy Nowy Rynek, który ma kształt bardzo zbliżony do trójkąta. Na zamieszczonym planie miasta podano długości ulic otaczających rynek.

- a) Jaka odległość pokonaliśmy?
- b) Oblicz sumę długości dwóch boków trójkąta i porównaj ją z długością trzeciego boku. Co zauważasz?



2. Kalkulator trójkątów to aplikacja, która sprawdza, czy można narysować trójkąt o podanych długościach boków. Przyjrzyj się wprowadzonym danym i rezultatom. Co zauważasz?



Jak sądzisz, czy da się narysować trójkąty o podanych długościach boków?

a) 2, 3 i 6

b) 4, 4 i 8

c) 3, 5 i 6



Analizuj!

Trójkąt to wielokąt mający trzy boki, trzy wierzchołki i trzy kąty. Aby z trzech odcinków mógł powstać trójkąt, musi być spełniony następujący warunek: **suma długości każdego z tych odcinków musi być większa od długości trzeciego odcinka.**



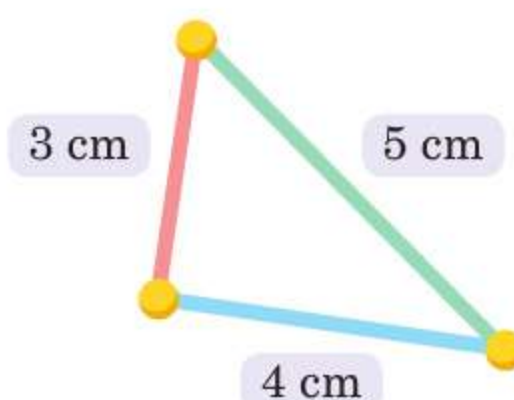
Czy Pola może zbudować trójkąt ze słupków magnetycznych o długościach 3 cm, 4 cm i 5 cm?

Tak! Jest to **trójkąt różnoboczny**.

$$3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} > 5 \text{ cm}$$

$$3 \text{ cm} + 5 \text{ cm} > 4 \text{ cm}$$

$$4 \text{ cm} + 5 \text{ cm} > 3 \text{ cm}$$

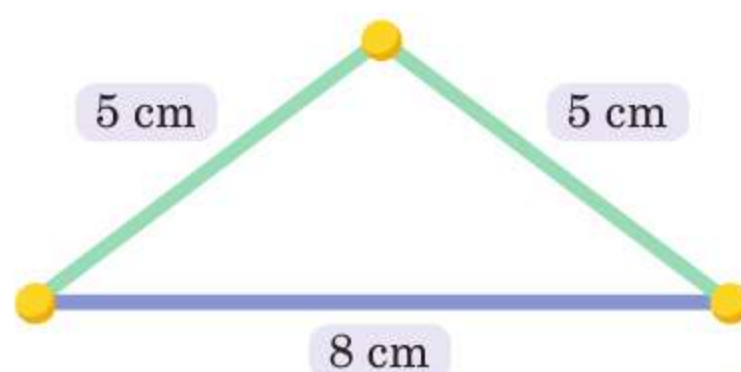


Czy Pola może zbudować trójkąt ze słupków magnetycznych o długościach 5 cm, 5 cm i 8 cm?

Tak! Jest to **trójkąt równoramienny**.

$$5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} > 8 \text{ cm}$$

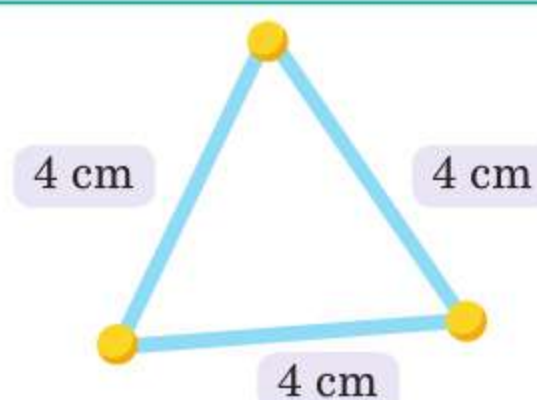
$$5 \text{ cm} + 8 \text{ cm} > 5 \text{ cm}$$



Czy Pola może zbudować trójkąt ze słupków magnetycznych o długościach 4 cm, 4 cm i 4 cm?

Tak! Jest to **trójkąt równoboczny**.

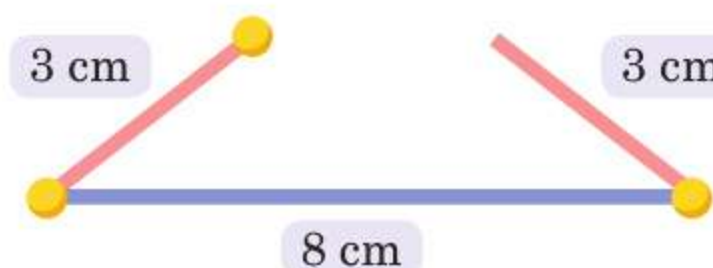
$$4 \text{ cm} + 4 \text{ cm} > 4 \text{ cm}$$



Czy Pola może zbudować trójkąt ze słupków magnetycznych o długościach 3 cm, 3 cm i 8 cm?

Nie!

$$3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} < 8 \text{ cm}$$



Zauważ, że wystarczy sprawdzić, czy suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

Cezary ma do dyspozycji 9 kulek magnetycznych oraz 2 słupki magnetyczne o długości 5 cm, 4 słupki o długości 10 cm oraz 3 słupki o długości 15 cm. Czy Cezary może zbudować z tego zestawu kulek i słupków trzy trójkąty – każdy innego rodzaju? Przeanalizuj poniższe rozważania. Poszukaj innych rozwiązań.

Z trzech słupków o długości 10 cm i trzech kulek **Cezary może zbudować trójkąt równoboczny**, bo $10\text{ cm} + 10\text{ cm} > 10\text{ cm}$.

Z dwóch słupków o długości 15 cm, słupka o długości 5 cm i trzech kulek **Cezary może zbudować trójkąt równoramienny**, bo $15\text{ cm} + 5\text{ cm} > 15\text{ cm}$.

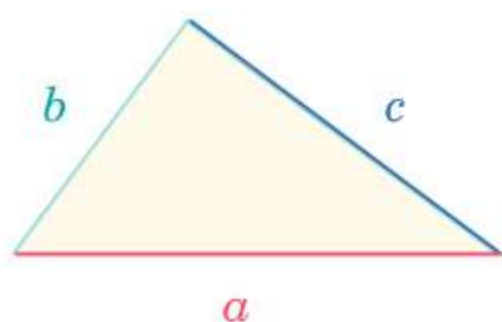
Z pozostałych trzech słupków oraz trzech kulek **Cezary nie może zbudować trójkąta różnobocznego**, bo $10\text{ cm} + 5\text{ cm} = 15\text{ cm}$.

Obwód trójkąta o bokach długości a , b , c można obliczyć jako sumę tych długości: $Obw. = a + b + c$. W przypadku trójkątów równoramiennych i równobocznych wzór ten można uprościć, tak jak to pokazano poniżej.

Podział trójkątów ze względu na długości boków

trójkąt różnoboczny

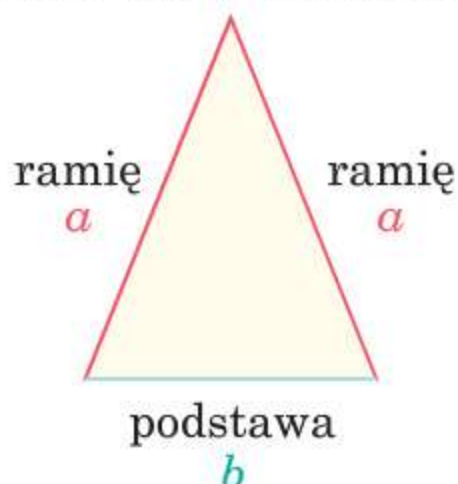
każdy bok jest innej długości



$$Obw. = a + b + c$$

trójkąt równoramienny

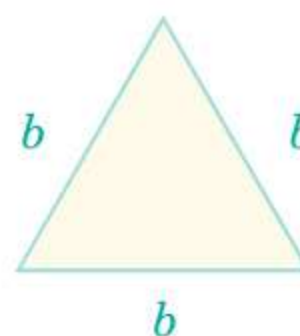
dwa boki (ramiona) są równej długości



$$Obw. = a + a + b = 2 \cdot a + b$$

trójkąt równoboczny

wszystkie boki są tej samej długości



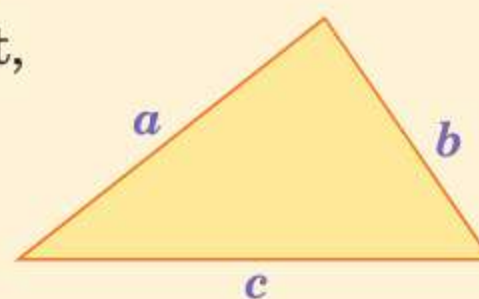
$$Obw. = b + b + b = 3 \cdot b$$



Zastanów się. Czy każdy trójkąt równoboczny jest trójkątem równoramiennym? Czy każdy trójkąt równoramienny jest trójkątem równobocznym? Uzasadnij swoją odpowiedź.

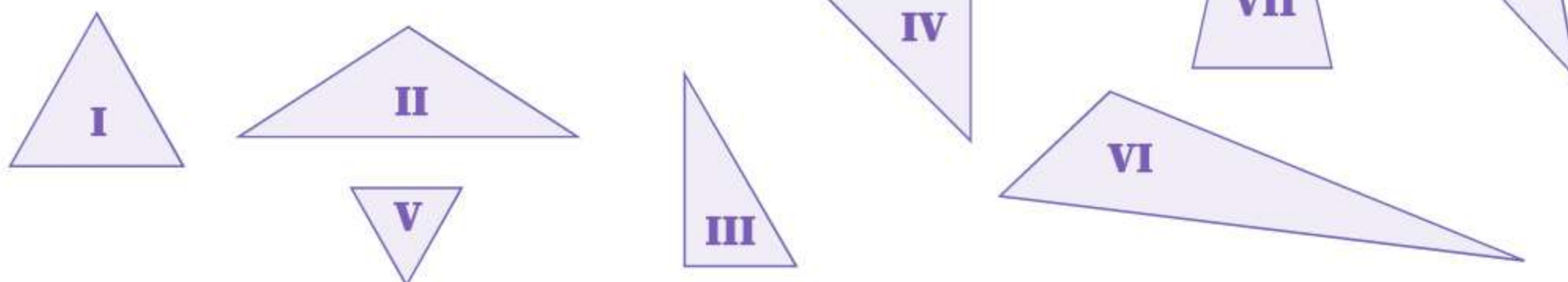
Zgodnie z zasadą nazywaną **warunkiem istnienia trójkąta** z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeśli suma długości dwóch krótszych odcinków jest większa od długości najdłuższego odcinka.

$$a + b > c$$



Poćwicz!

1. Wśród narysowanych trójkątów znajdują się dwa trójkąty równoboczne oraz pięć trójkątów równoramiennych. Wskaż je.

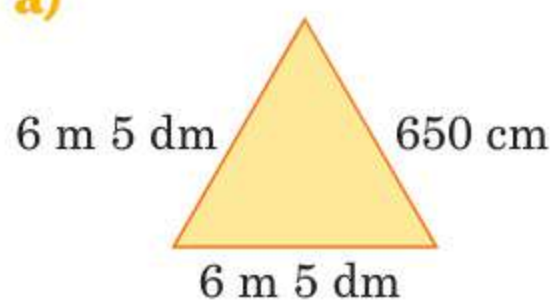


2. Czy z odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt? Pamiętaj o ujednoliceniu jednostek.

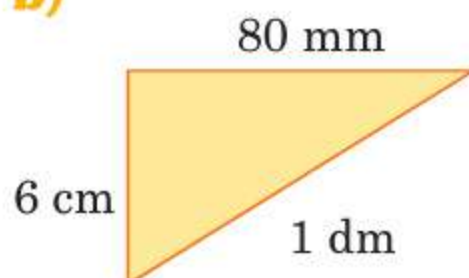
- a) 4 cm, 5 cm, 6 cm b) 13 cm, 12 cm, 21 cm c) 15 cm, 15 cm, 30 cm
d) 7 cm, 7 cm, 70 mm e) 2 m, 1 m, 4 dm f) 800 cm, 8 km, 8000 m

3. Określ rodzaj przedstawionego trójkąta, a następnie oblicz jego obwód.

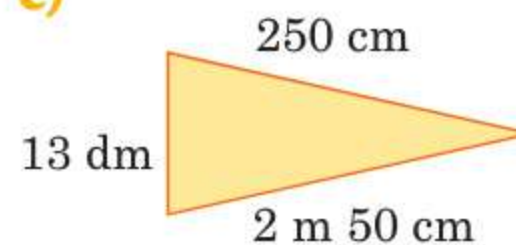
a)



b)



c)



4. Określ rodzaj trójkąta o podanych długościach boków, a następnie oblicz jego obwód.

- a) 5 cm 5 mm, 55 mm, 55 mm b) 15 mm, 2 cm 5 mm, 2 cm
c) 1 m, 10 dm, 1 cm d) 6 dm, 60 cm, 1 mm

5. Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 5 cm 5 mm, a podstawa jest od niego o 3 cm krótsza. Wyznacz obwód tego trójkąta.

6. Oblicz długość boku trójkąta równobocznego o obwodzie równym 4 dm 5 cm.

7. Trójkąt równoramienny o obwodzie 60 cm ma podstawę długości 1 dm. Jaka długość ma ramię tego trójkąta?

8. Przekątna pewnego prostokąta podzieliła ten czworokąt na dwa trójkąty prostokątne o obwodzie 40 cm każdy. Ile wynosi obwód prostokąta, jeśli przekątna ma 17 cm długości?

9. Narysuj trójkąt równoramienny, którego ramię ma 6 cm 5 mm długości.

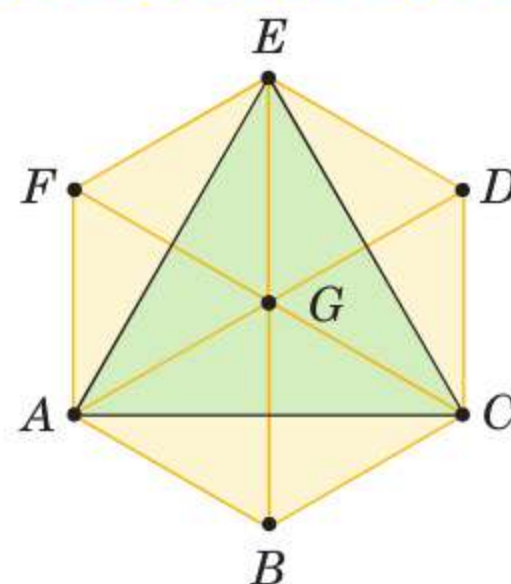
10. Narysuj trójkąt równoramienny o obwodzie 2 dm, którego podstawa ma długość 5 cm.



11. Jaka długość może mieć trzeci bok trójkąta, jeśli dwa boki mają długości 8 cm i 12 cm, a długość trzeciego boku jest liczbą naturalną? Podaj dwie możliwości.



12. Z sześciu trójkątów równobocznych zbudowano sześciokąt. Czy trójkąt ACE jest równoramienny? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Sprawdź, co umiesz!

1. Ile trójkątów można zbudować z trzech odcinków, których długości wymieniono w poniższej ramce? Podaj ich wymiary.

4 cm • 7 cm • 10 cm • 28 cm • 30 cm

2. Z których odcinków można zbudować trójkąt równoramienny?

A. 4 dm, 5 dm, 6 dm

B. 100 cm, 1 m, 1 cm

C. 2 cm, 2 dm, 21 cm

D. 6 dm, 6 cm, 1 dm 5 cm

3. Oblicz obwód trójkąta równoramiennego, którego podstawa ma długość 12 cm i jest trzykrotnie krótsza niż ramię tego trójkąta.

3. Miary kątów w trójkątach

- ▶ Jak podzielić trójkąty ze względu na miary ich kątów?
- ▶ Ile wynosi suma miar kątów w trójkącie?
- ▶ Jakie własności mają trójkąty równoramienne oraz równoboczne?

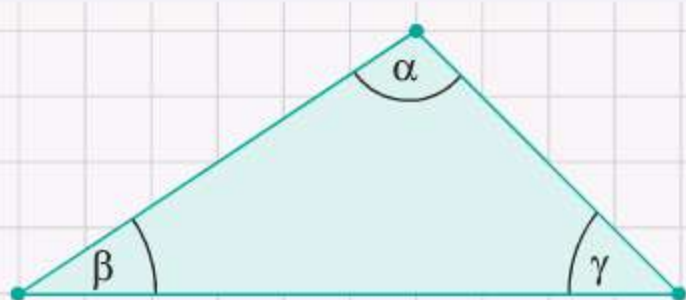


Odkrywaj!

1. Wykonaj kolejne polecenia, tak aby uzyskać efekt jak na ostatnim rysunku, a następnie odpowiedz na pytanie.

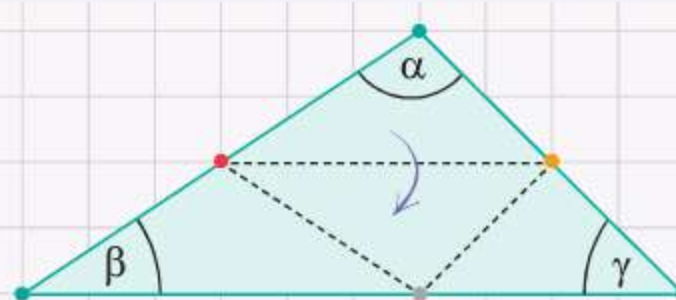
1

Narysuj na kartce w kratkę dowolny trójkąt i go wytnij. Kąty oznacz tak jak poniżej.



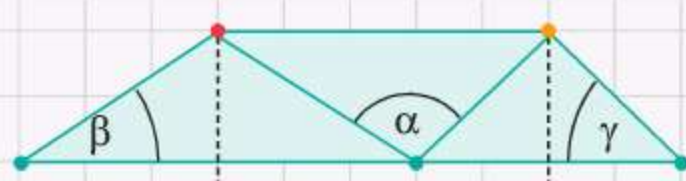
2

Zegnij trójkąt w taki sposób, aby linia zagięcia była równoległa do podstawy, a wierzchołek przy kącie α dotykał przeciwległego boku.



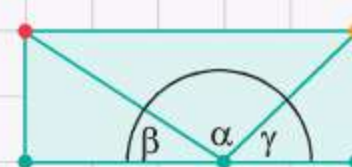
3

Zegnij trójkąt w taki sposób, aby kąty β oraz γ miały wspólny wierzchołek i ramię z kątem α .

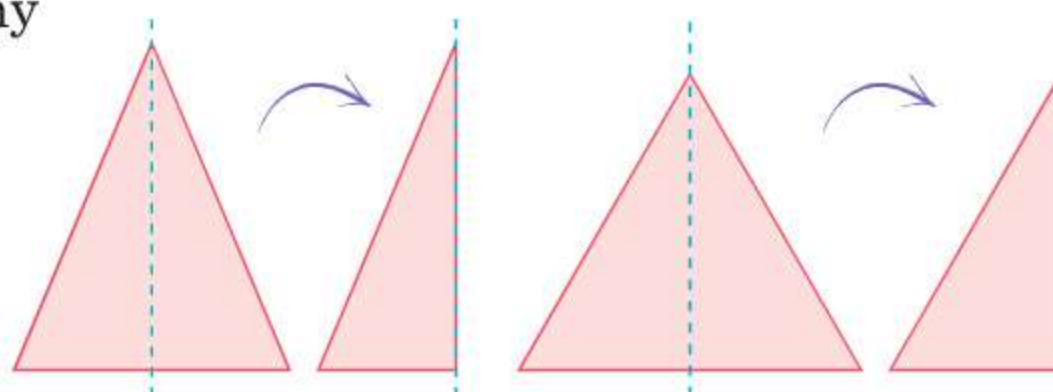


4

Co możesz powiedzieć o wzajemnym położeniu tych kątów? Co możesz powiedzieć o ich sumie?



2. Trójkąty równoramienne oraz równoboczny zagięto wzdłuż osi symetrii, tak jak na rysunku obok. Co możesz powiedzieć o miarach kątów trójkąta równobocznego, które są przy podstawie? A co o miarach tych kątów w trójkącie równobocznym?





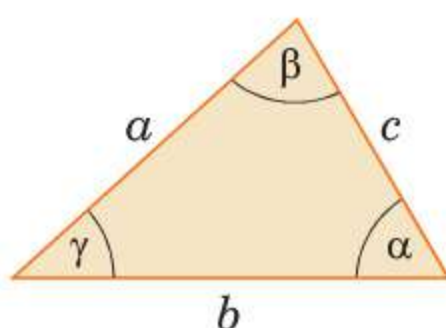
Analizuj!

Podział trójkątów ze względu na miary ich kątów

ostrokątny

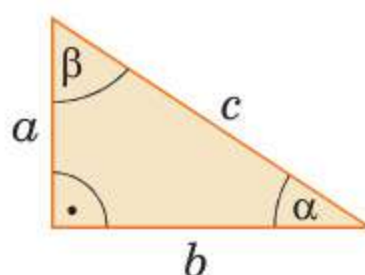
ma trzy kąty
ostre

trójkąt
różnoboczny



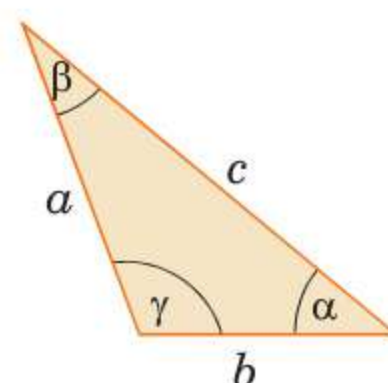
prostokątny

ma jeden kąt
prosty i dwa
kąty ostre

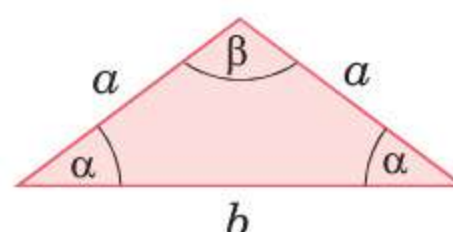
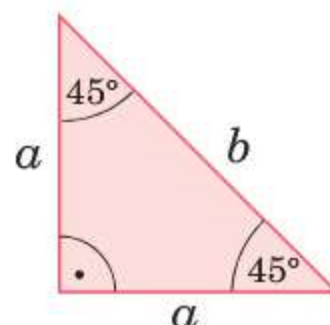
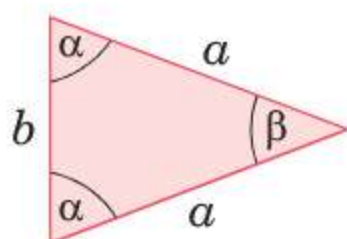


rozwartokątny

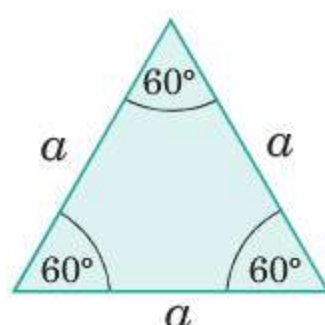
ma jeden kąt
rozwarty i dwa
kąty ostre



trójkąt
równoramienny



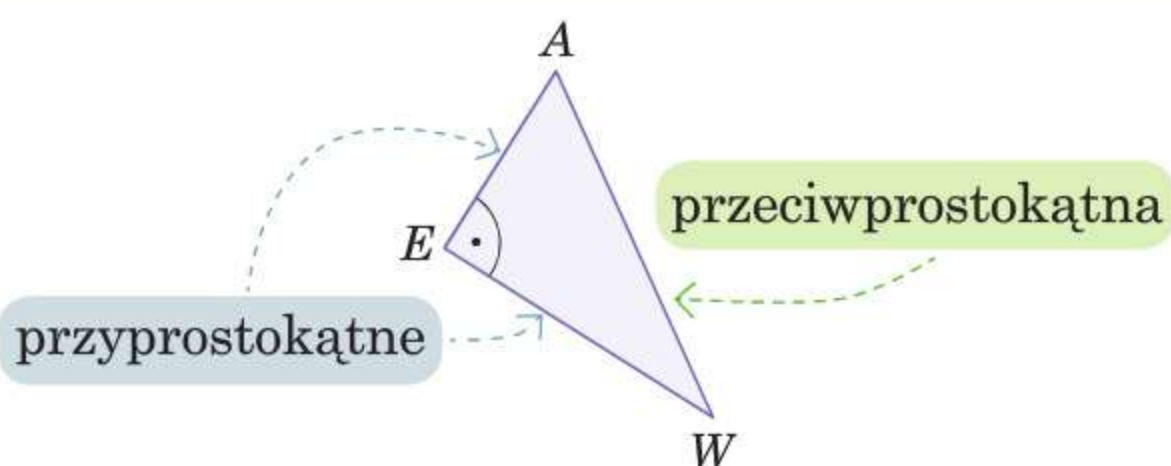
trójkąt
równoboczny



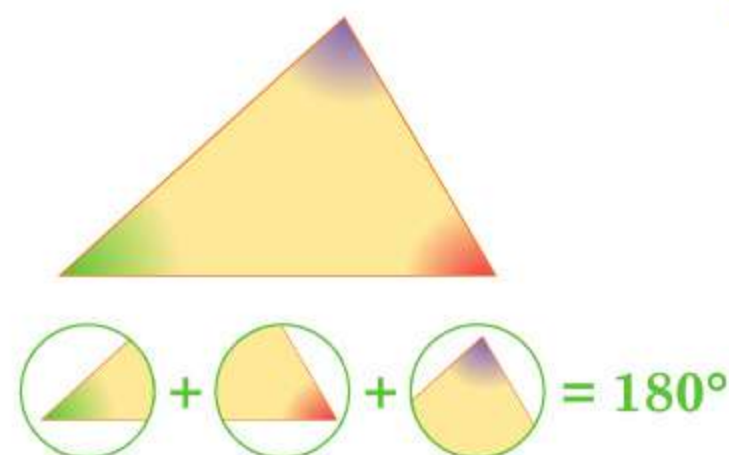
nie istnieje

nie istnieje

Boki leżące przy kącie prostym trójkąta prostokątnego to **przyprostokątne**. Bok leżący naprzeciw kąta prostego w takim trójkącie to **przeciwprostokątna**.

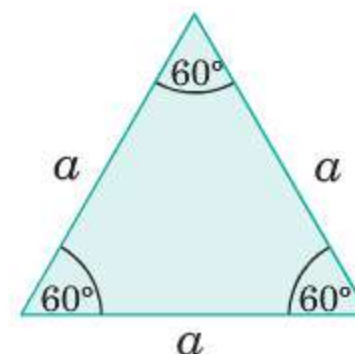


Pola wycięła różne trójkąty – m.in. prostokątne, rozwartokątne, różnoboczne i równoramienne – a następnie pozaginała je tak jak w zadaniu 1 w module *Odkrywaj!* Stwierdziła, że **suma miar kątów wewnętrznych we wszystkich trójkątach jest taka sama i zawsze wynosi 180° .**



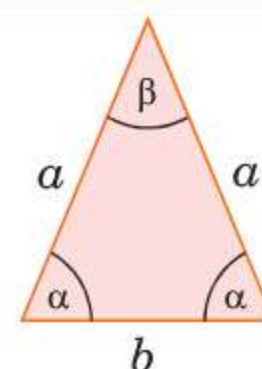
Trójkąt równoboczny ma wszystkie boki równej długości, więc musi mieć też jednakowe miary kątów wewnętrznych. Skoro suma miar kątów wewnętrznych wynosi 180° , to wszystkie kąty wewnętrzne w każdym trójkącie równobocznym mają miarę 60° .

$$180^\circ = 3 \cdot 60^\circ$$



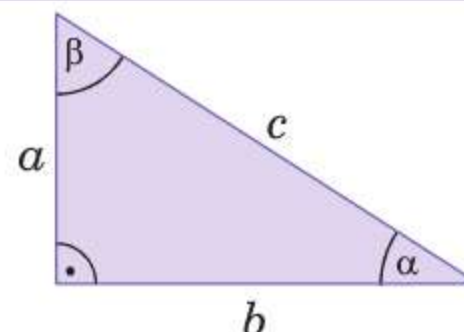
Trójkąt równoramienny ma dwa boki tej samej długości, więc musi mieć też dwa kąty o tej samej mierze przy podstawie.

$$180^\circ = 2 \cdot \alpha + \beta$$



Trójkąt prostokątny ma jeden kąt o mierze 90° , więc suma miar dwóch kątów ostrych w tym trójkącie wynosi $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

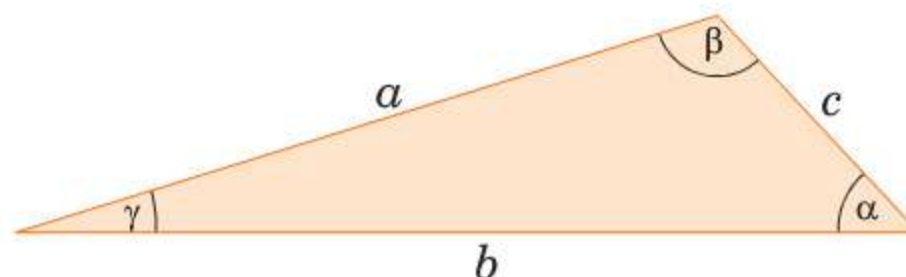


Znając miary dwóch kątów w trójkącie, można obliczyć miarę trzeciego kąta.

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

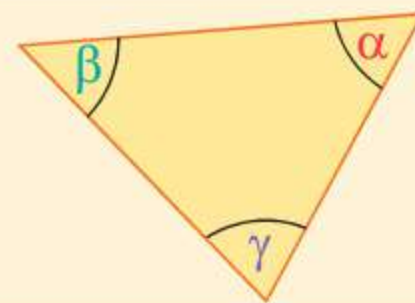


Jaką miarę mogą mieć pozostałe kąty trójkąta równoramiennego, jeśli jeden z nich ma 30° ? Rozważ dwa przypadki.



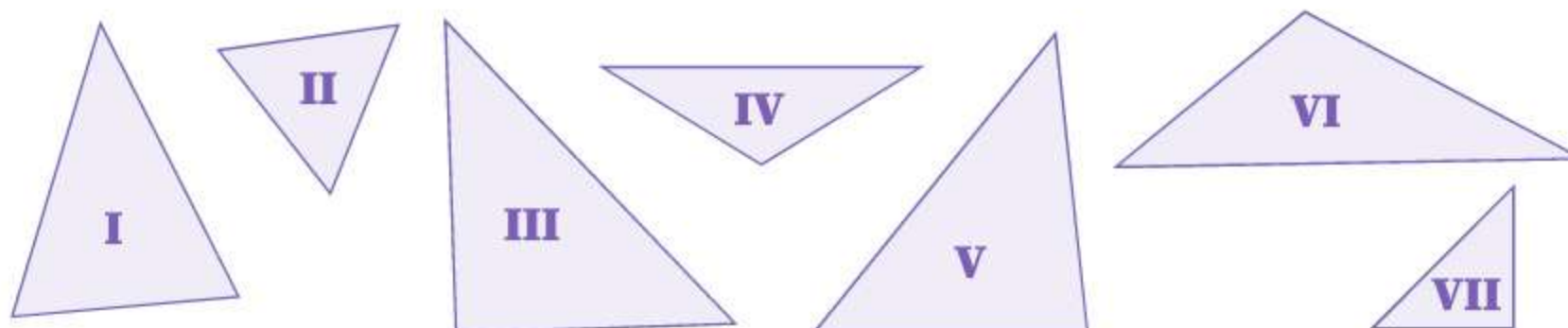
Suma miar kątów wewnętrznych w każdym trójkącie wynosi 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



Poćwicz!

1. Każdy z narysowanych trójkątów nazwij na dwa sposoby: raz zwracając uwagę na kąty w trójkącie, a drugi raz – na długości jego boków.

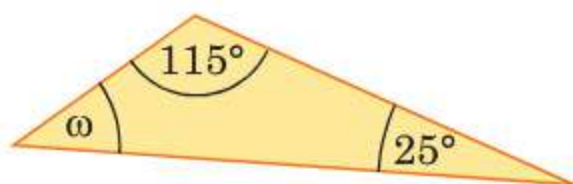


2. Narysuj trójkąt, którego:

- a) jeden z boków ma długość 3 cm, a kąt rozwarty ma miarę 110° ;
- b) każde ramie ma długość 4 cm, a kąt między ramionami ma miarę 30° ;
- c) dwa kąty mają miary 30° i 60° , a jeden z boków ma długość 5 cm.

3. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.

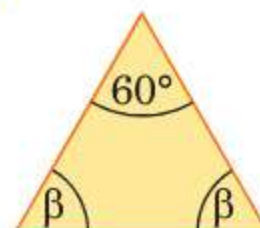
a)



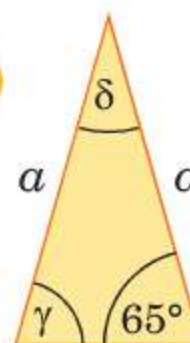
b)



c)



d)

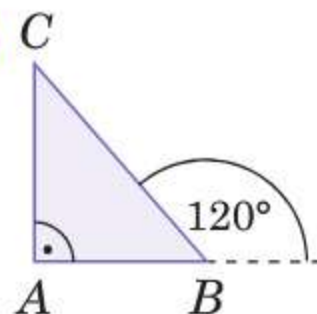


4. Dokończ zdania tak, aby były prawdziwe. Jeśli to możliwe, użyj kilku określeń do opisu danego trójkąta.

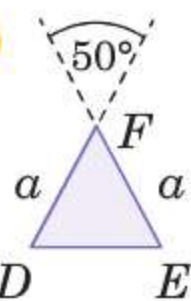
- a) Trójkąt, którego dwa kąty mają miary 70° i 40° , jest trójkątem .
- b) Trójkąt, którego dwa kąty mają miary 95° i 11° , jest trójkątem .
- c) Trójkąt, którego wszystkie kąty mają miarę 60° , jest trójkątem .

5. Oblicz miary kątów w podanym trójkącie.

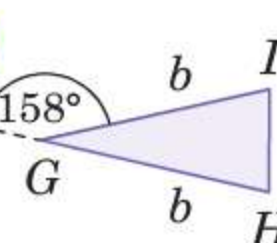
a)



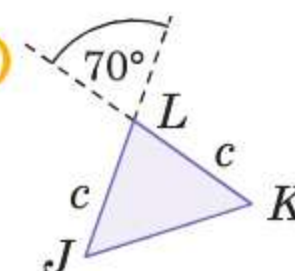
b)



c)

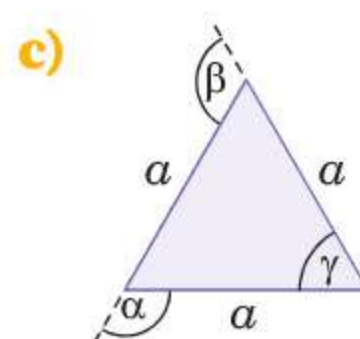
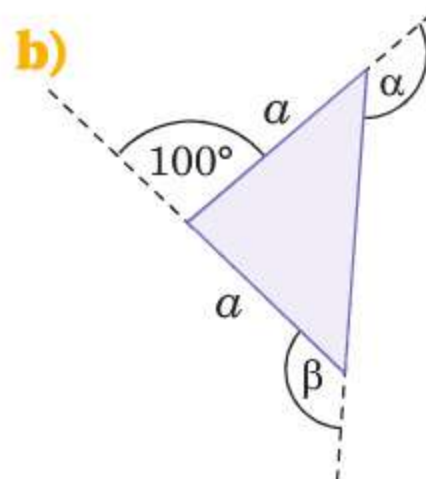
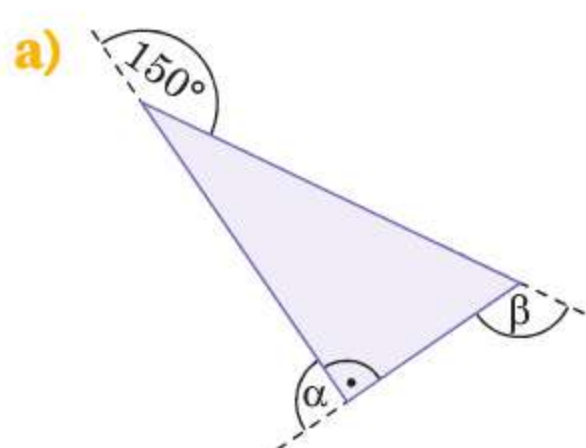


d)



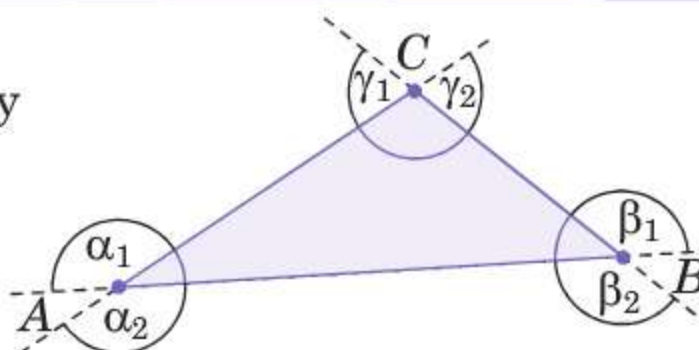
6. Narysuj trójkąt prostokątny, w którym jeden z kątów jest kątem przyległym do kąta ostrego i ma miarę 110° .

7. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi.



8. Ustal miary kątów zewnętrznych w trójkącie prostokątnym równoramiennym.

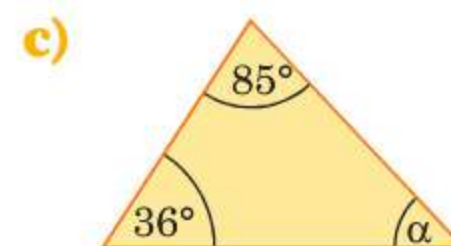
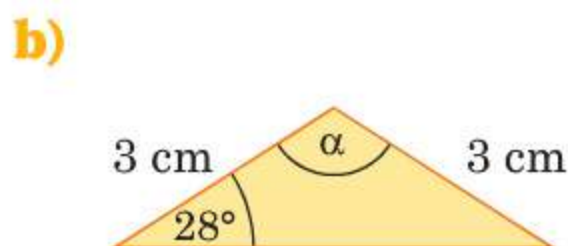
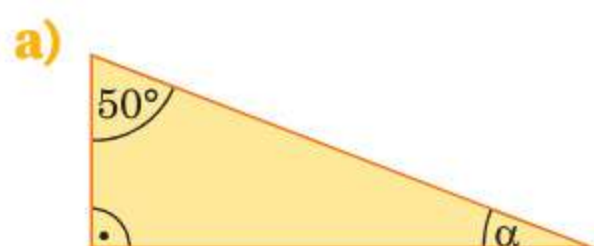
Kąt zewnętrzny trójkąta to kąt, który jest przyległy do kąta wewnętrznego. Kąty: α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , γ_1 i γ_2 są kątami zewnętrznymi trójkąta ABC .



Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż wszystkie określenia opisujące trójkąt, o którym wiadomo, że ma dwa kąty o miarach 30° i 45° .
- A. równoboczny B. równoramienny C. różnoboczny
D. prostokątny E. rozwartokątny F. ostrokątny

2. Oblicz miarę kąta α .



3. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Każdy trójkąt ostrokątny równoramienny ma wszystkie kąty tej samej miary.

P

F

Jeśli suma miar dwóch kątów w trójkącie wynosi 80° , to trójkąt jest rozwartokątny.

P

F

4. Prostokąty

- ▶ Jakie są własności prostokątów?
- ▶ Jakie są własności prostokątów będących kwadratami?
- ▶ Jak obliczać obwód prostokąta?



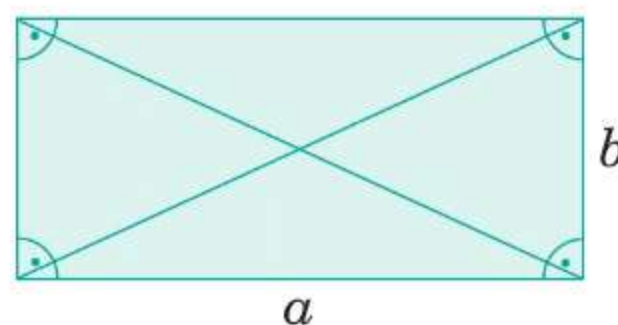
Analizuj!

SPRZEDAM DZIAŁKĘ!



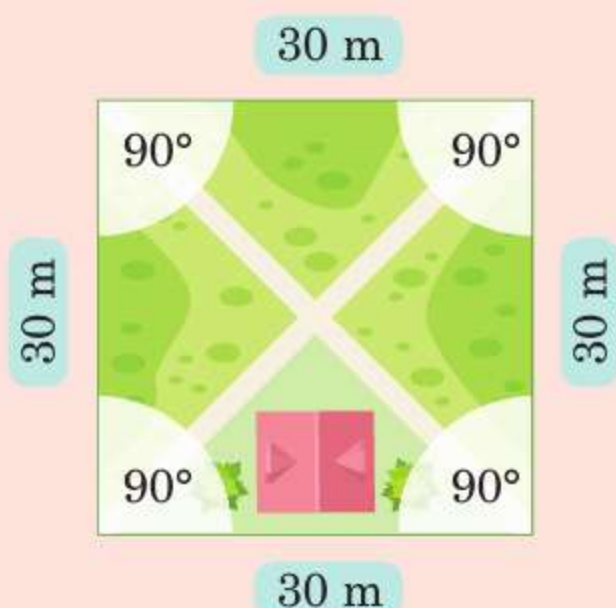
- Działka ma 4 punkty graniczne, 4 narożniki i 4 boki.
- Sąsiednie boki są do siebie prostopadłe.
- Przeciwległe boki są do siebie równoległe.
- Przeciwległe boki mają takie same długości.
- Ścieżki poprowadzone między punktami granicznymi po skosie mają tę samą długość i przecinają się w połowie.
- Łączna długość granic działki to:
 $50\text{ m} + 50\text{ m} + 30\text{ m} + 30\text{ m} = \mathbf{160\text{ m}}$.

- **Prostokąt** ma 4 wierzchołki, 4 kąty proste, 4 boki i 2 przekątne.
- Sąsiednie boki są do siebie prostopadłe, a przeciwległe równoległe.
- Boki równoległe są tej samej długości.
- Przekątne są równej długości i przecinają się w połowie.
- Suma miar kątów wewnętrznych wynosi 360° .
- $Obw. = a + a + b + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b)$.



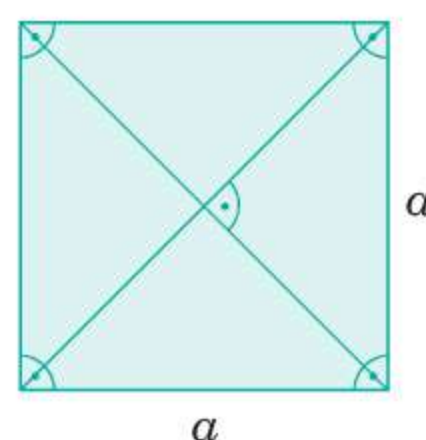
Jakie wymiary może mieć prostokąt $ABCD$, jeśli łamana zamknięta $ABCD$ ma 12 cm długości, a długości boków są wyrażone liczbami naturalnymi?

DZIAŁKA NA SPRZEDAŻ!



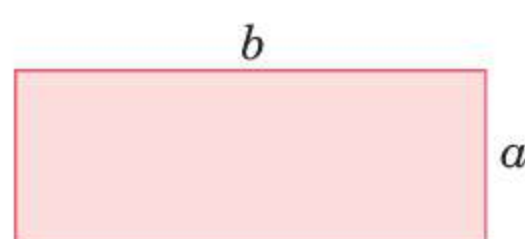
- Działka ma 4 punkty graniczne, 4 narożniki i 4 boki.
- Sąsiednie boki są do siebie prostopadłe.
- Przeciwległe boki są do siebie równoległe.
- Wszystkie boki mają takie same długości.
- Ścieżki poprowadzone między punktami granicznymi po skosie mają tę samą długość i przecinają się w połowie pod kątem prostym.
- Łączna długość granic działki to:
 $30\text{ m} + 30\text{ m} + 30\text{ m} + 30\text{ m} = \mathbf{120\text{ m}}$.

- **Kwadrat** ma 4 wierzchołki, 4 kąty proste, 4 boki i 2 przekątne.
- Wszystkie boki są tej samej długości.
- Sąsiednie boki są do siebie prostopadłe, a przeciwległe równoległe.
- Przekątne są równej długości i przecinają się w połowie pod kątem prostym.
- Suma miar kątów wewnętrznych wynosi 360° .
- $Obw. = a + a + a + a = 4 \cdot a$.

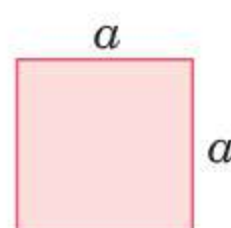


Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki równej długości.

Na podstawie rysunków wyznacz długość boku b prostokąta.



$$Obw. = 30\text{ cm}$$



$$Obw. = 24\text{ cm}$$

Skorzystaj z obwodu kwadratu, aby obliczyć długość boku a prostokąta.

$$a = 24\text{ cm} : 4 = 6\text{ cm}$$

Skorzystaj z obwodu prostokąta, aby oblicz długość boku b .

$$b = (30\text{ cm} - 2 \cdot a) : 2 = (30\text{ cm} - 12\text{ cm}) : 2 = 18\text{ cm} : 2 = \underline{\underline{9\text{ cm}}}$$



Kwadrat i prostokąt mają takie same obwody równe 16 m. Jaką długość ma bok kwadratu? Jakie długości mogą mieć boki prostokąta, jeśli w metrach są one wyrażone liczbami naturalnymi?

Poćwicz!

1. Narysuj kwadrat $ABCD$ o boku długości 4 cm 5 mm oraz prostokąt $EFGH$ o wymiarach 3 cm $\times$ 4 cm.

- a) Wykonaj poniższe polecenia dla każdego czworokąta.
- Wypisz boki, które są do siebie równoległe.
 - Zapisz długości boków prostopadłych (każdą parę innym kolorem).
 - Zapisz miary wszystkich kątów wewnętrznych.
 - Zamaluj tym samym kolorem jednakowe trójkąty utworzone przez przecinające się przekątne.
- b) Uzasadnij, że każdy kwadrat jest prostokątem.
- c) Uzasadnij, że nie każdy prostokąt jest kwadratem.

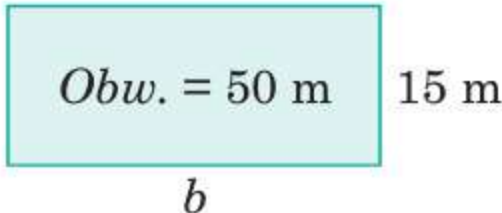
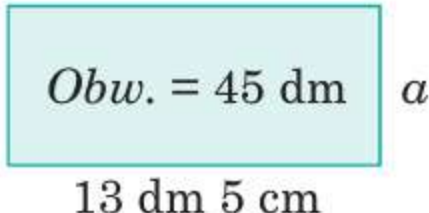
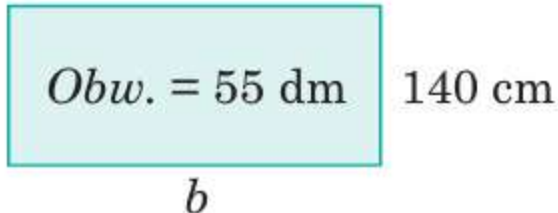
2. Oblicz obwód kwadratu o boku podanej długości.

- a) 7 cm b) 50 m c) 26 mm d) 3 cm 5 mm e) 8 dm 2 cm

3. Oblicz obwód prostokąta o podanych wymiarach.

- a) 8 cm $\times$ 9 cm b) 12 dm $\times$ 26 dm c) 40 cm $\times$ 9 dm
d) 15 m $\times$ 50 cm e) 105 mm $\times$ 2 cm 5 mm f) 2 km 500 m $\times$ 3200 m

4. Na podstawie informacji podanych na rysunku oblicz długość boku prostokąta.

- a)  b)  c) 

5. Oblicz długość boku kwadratu o podanym obwodzie.

- a) 20 m b) 84 m c) 68 cm d) 50 dm e) 5 km

6. Oblicz długość drugiego boku prostokąta, wiedząc, że:

- a) $Obw. = 46$ cm, $a = 12$ cm; b) $Obw. = 32$ cm 8 mm, $a = 10$ cm;
c) $Obw. = 1$ m, $a = 15$ cm; d) $Obw. = 3$ dm, $a = 12$ cm 5 mm.

7. Narysuj:

- a) kwadrat o obwodzie równym 22 cm,
b) prostokąt o obwodzie równym 2 dm i jednym boku długości 4 cm.

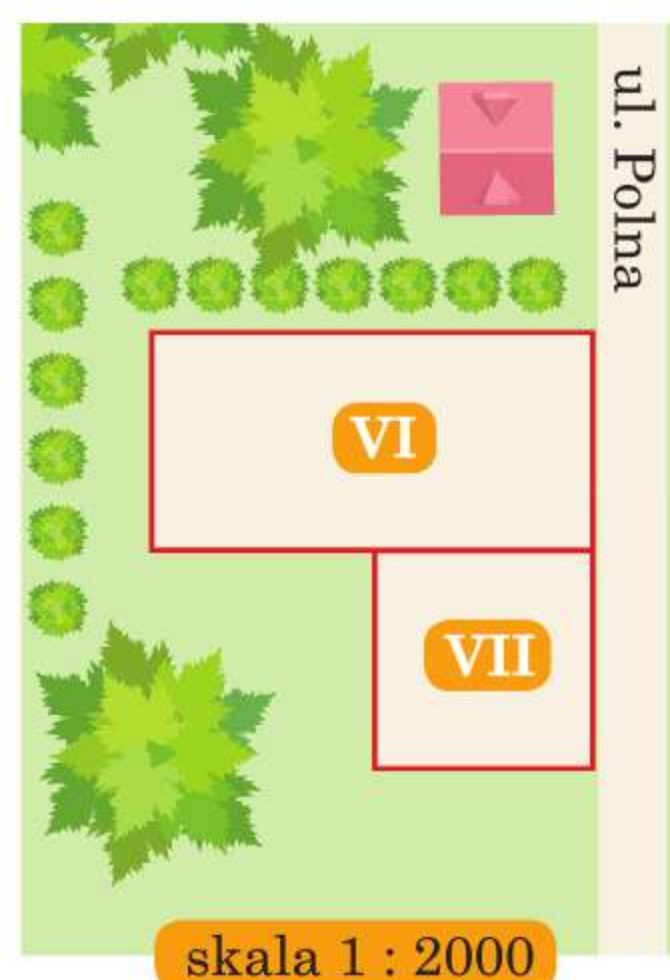
8. Obwód prostokąta jest równy 32 dm. Jeden z boków prostokąta ma długość 120 cm.

- a) Jaka długość ma drugi bok tego prostokąta?
b) Jakie wymiary miałyby ten prostokąt narysowany w skali 4 : 1? A w skali 1 : 4?

9. Obwód prostokąta wynosi 1 m, a jeden z jego boków jest 4 razy dłuższy niż drugi. Podaj wymiary tego prostokąta, a następnie wyznacz obwód tego prostokąta narysowanego w skali 1 : 4.

10. Przy ulicy Polnej na sprzedaż wystawiono dwie działki budowlane. Zmierz odpowiednie długości boków prostokątów przedstawionych na rysunku i odpowiedz na pytanie.

- a) Pan Roman kupił działkę numer VI. Chce ogrodzić ją płotem oraz wstawić bramę wjazdową szerokości 3 m. Za 10 m płotu trzeba zapłacić 45 zł. Brama kosztuje 769 zł. Ile pan Roman zapłaci za całe ogrodzenie?
b) Pani Iga kupiła działkę numer VII. Wzdłuż jednego z boków działki zamierza posadzić tuje. Jaki będzie maksymalny koszt zakupu sadzonek, jeśli jedna kosztuje 49 zł, pierwsza i ostatnia sadzonka będą oddalone od granicy działki o 50 cm i tyle samo wyniesie odległość między kolejnymi sadzonkami?



Sprawdź, co umiesz!

1. Wybieg dla królików ma kształt prostokąta o wymiarach 2 m 50 cm × 5 m, a wybieg dla świnek morskich – kwadratu o boku 4 m. Do ogrodzenia którego wybiegu potrzeba więcej siatki? O ile więcej?

2. Ile wynosi długość boku kwadratu o obwodzie 18 m?

- A. 4 m 5 cm B. 4 cm 5 mm C. 450 cm D. 9 m

3. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Każdy prostokąt ma dwie przekątne, które są do siebie prostopadłe.	P	F
Kwadrat o boku 10 mm narysowany w skali 100 : 1 ma obwód równy 4 dm.	P	F

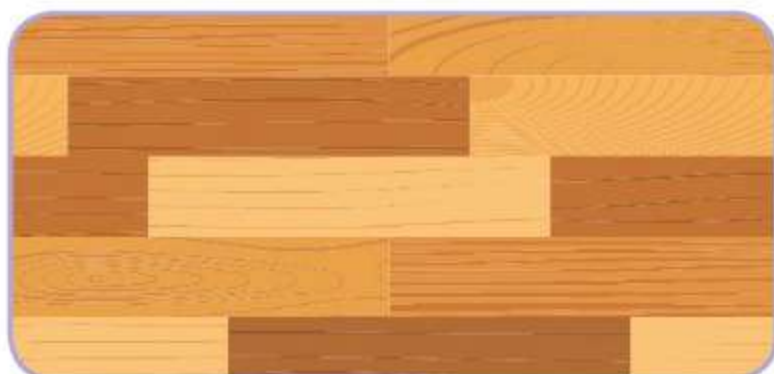
5. Równoległoboki

- ▶ Jakie są własności równoległoboków?
- ▶ Jakie własności mają przekątne równoległoboku, a jakie – przekątne rombu?
- ▶ W jaki sposób rysować równoległoboki i romby?



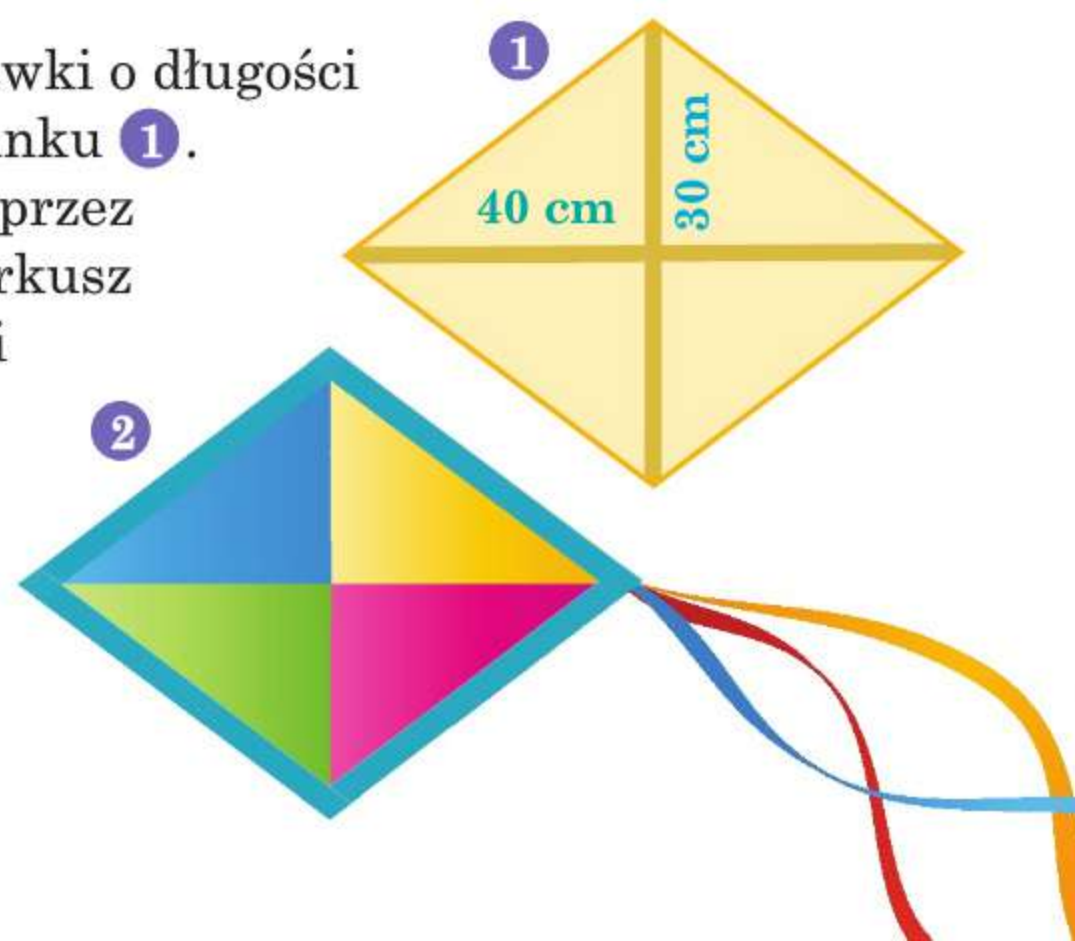
Odkrywaj!

1. Oto kilka propozycji aranżacji ozdobnych paneli podłogowych.



- a) Które z paneli mają kształt kwadratów, a które prostokątów?
- b) Jakie wspólne cechy mają kształty wszystkich paneli?

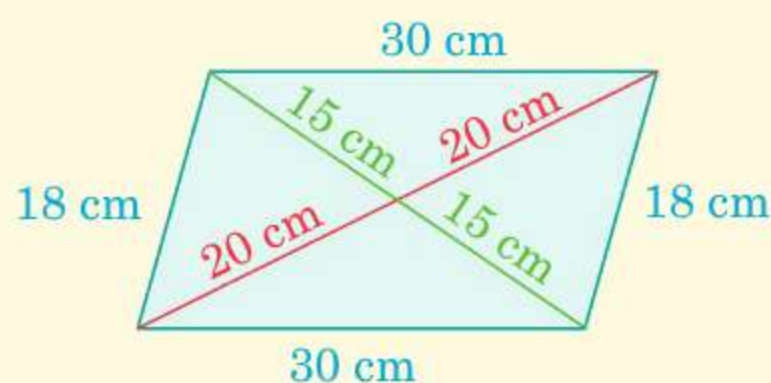
2. Kuba przygotował latawiec na zawody. Listewki o długości 60 cm oraz 80 cm zamocował tak jak na rysunku 1. Potem otoczył latawiec żyłką poprowadzoną przez wgłębienia na brzegach listewek i przyciął arkusz papieru z nadmiarem, tak żeby zagiąć brzegi wzdłuż żyłki i je skleić. Na koniec przykleił do brzegu latawca ozdobną tasiemkę i ogon 2. Ile co najmniej metrów tasiemki zużył Kuba, jeśli zmierzył długość jednego boku latawca i wynosiła ona 50 cm?





Analizuj!

Ten czworokąt to **równoległobok**.



Jakiej długości są jego przeciwległe boki?

A. ☐ Różnej. B. ☒ Równej.

Czy wszystkie boki są równej długości?

A. ☐ Tak B. ☒ Nie.

Jak położone są względem siebie jego przeciwległe boki?

A. ☐ Prostopadle. B. ☒ Równoległe.

Czy jego przekątne przecinają się w połowie?

A. ☒ Tak. B. ☐ Nie.

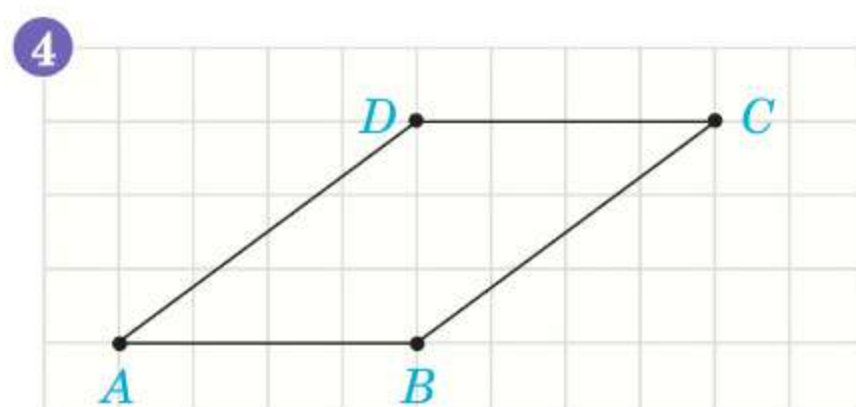
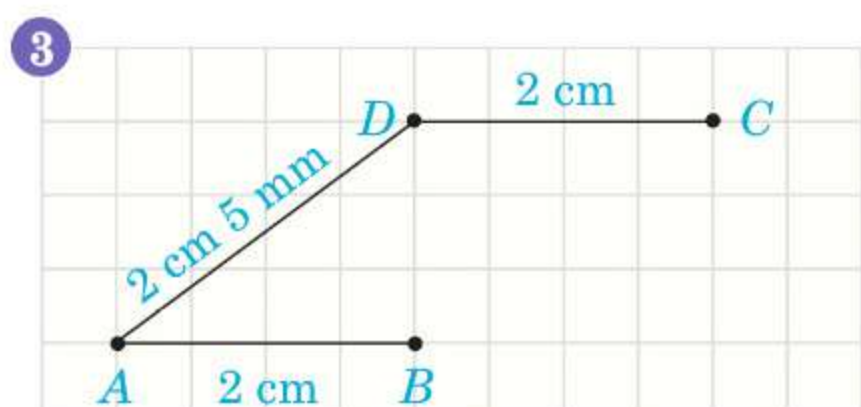
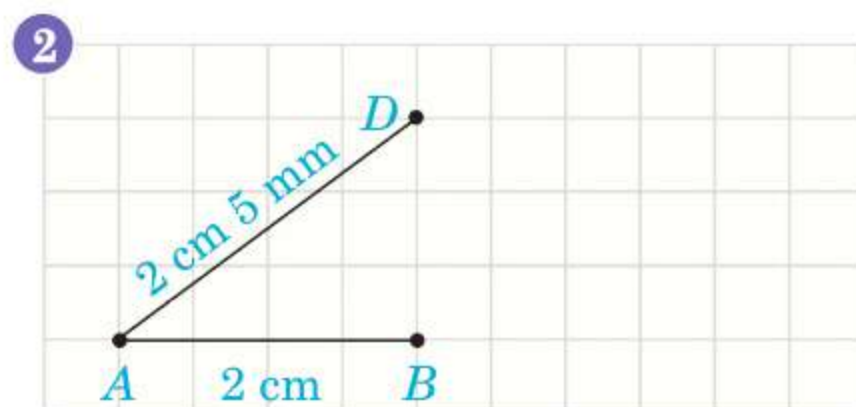
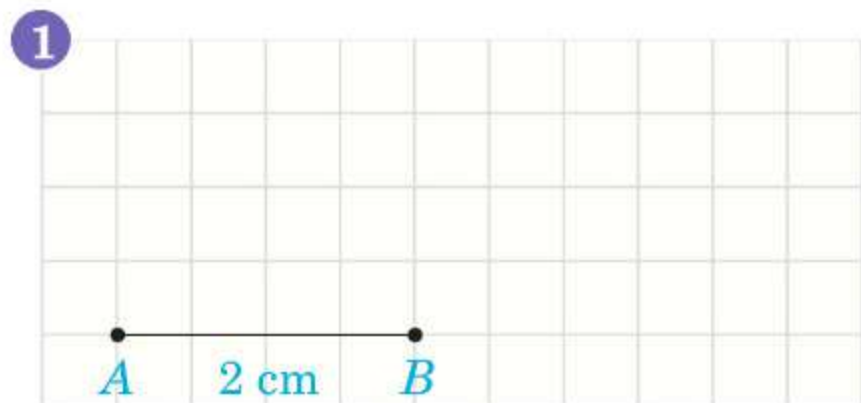
Czy jego przekątne przecinają się pod kątem prostym?

A. ☒ Nie. B. ☐ Tak.

Jak można zapisać wzór na jego obwód?

A. ☒ $a + a + b + b$ B. ☒ $2 \cdot (a + b)$

Jak narysować równoległobok $ABCD$ o wymiarach $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm } 5 \text{ mm}$?



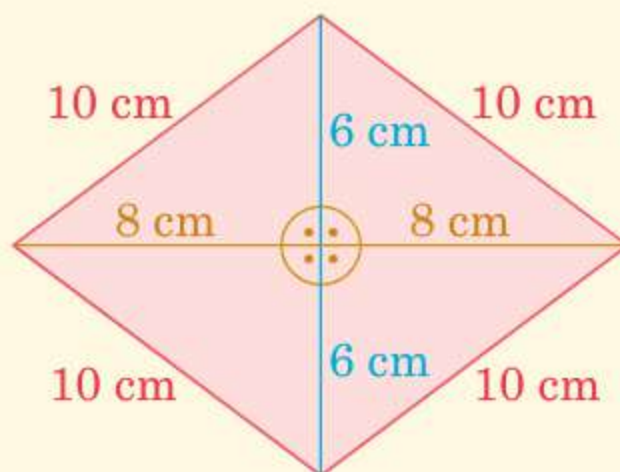
1 Narysuj odcinek AB o długości 2 cm.

2 Narysuj odcinek AD o długości 2 cm 5 mm.

3 Narysuj odcinek DC , taki że $DC \parallel AB$ i $|DC| = |AB|$.

4 Narysuj odcinek łączący punkty B i C .

Ten czworokąt to **romb**.



Jakiej długości są jego przeciwległe boki?

A. ☐ Różnej. B. ☒ Równej.

Czy wszystkie boki są równej długości?

A. ☒ Tak B. ☐ Nie.

Jak położone są względem siebie jego przeciwległe boki?

A. ☐ Prostopadle. B. ☒ Równoległe.

Czy jego przekątne przecinają się w połowie?

A. ☒ Tak. B. ☐ Nie.

Czy jego przekątne przecinają się pod kątem prostym?

A. ☐ Nie. B. ☒ Tak.

Jak można zapisać wzór na jego obwód?

A. ☒ $a + a + a + a$ B. ☒ $4 \cdot a$

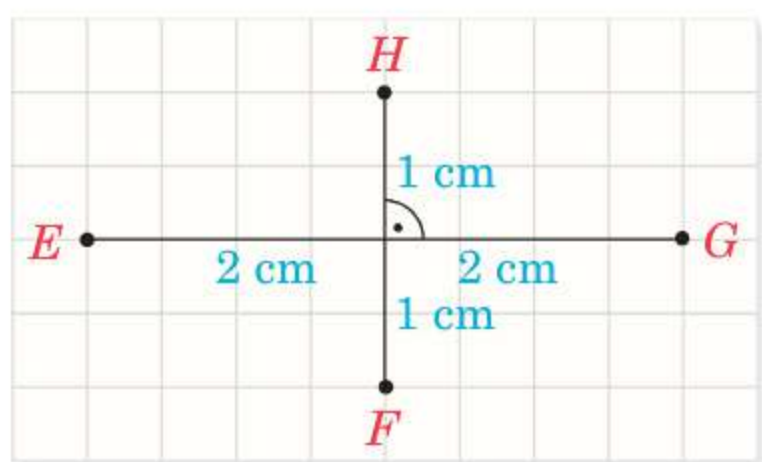
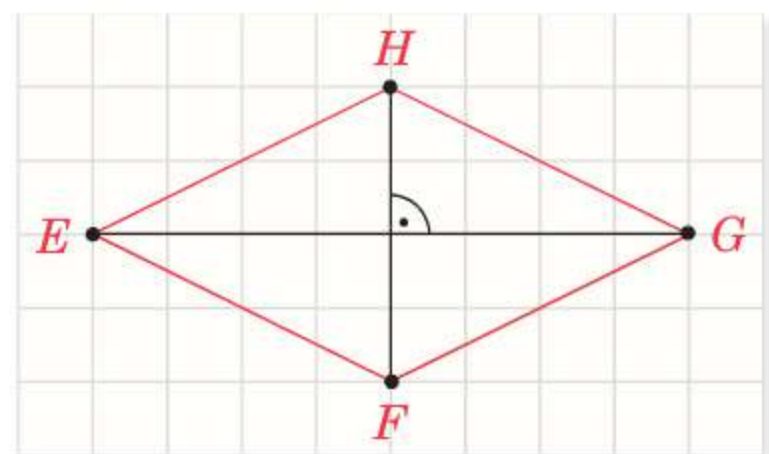
Romb o boku podanej długości rysuje się tak jak równoległobok $ABCD$ na s. 127. **A jak narysować romb $EFGH$, którego przekątne mają długości 4 cm i 2 cm?**

Narysuj dłuższą przekątną.



Narysuj krótszą przekątną tak, aby obie przekątne były do siebie prostopadłe i przecinały się w połowie swoich długości.

Narysuj odcinki łączące punkty E i F , F i G , G i H oraz H i E .



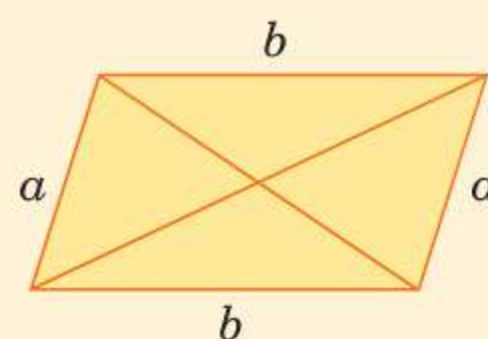
Czy romb jest równoległobokiem? Czy równoległobok jest rombem? Dlaczego? Jakie jeszcze czworokąty są równoległobokami? A rombami?

Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych. Jego dwie przekątne przecinają się w połowie.

Prostokąt to równoległobok, który ma wszystkie kąty proste.

Romb to równoległobok, który ma wszystkie boki równe.

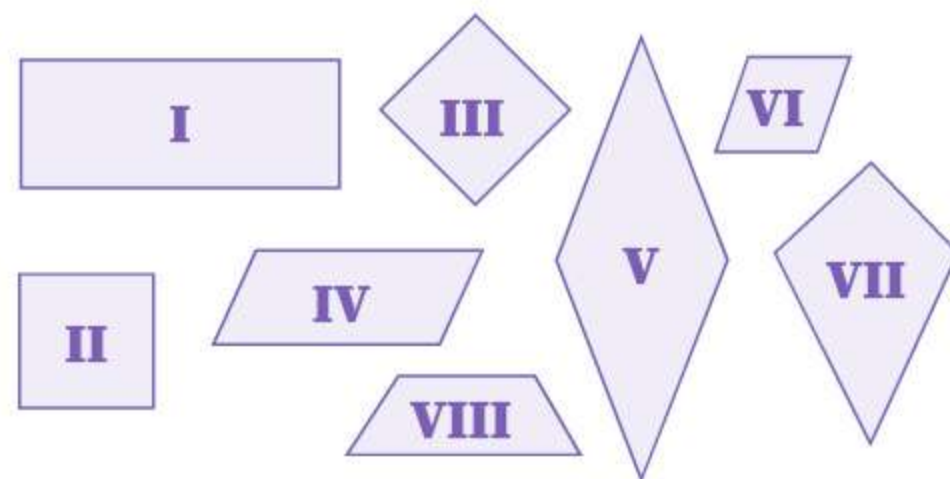
Kwadrat to romb, który ma wszystkie kąty proste.



Poćwicz!

1. Wskaż na rysunku wszystkie:

- a) kwadraty, b) prostokąty,
c) romby, d) równoległoboki.



2. Narysuj równoległobok o bokach podanej długości.

- a) 3 cm i 7 cm b) 4 cm i 5 cm 5 mm

3. Narysuj romb:

- a) o boku długości 4 cm, b) o przekątnych długości 60 mm i 8 cm.

4. Oblicz obwód równoległoboku o podanych wymiarach.

- a) 6 cm 5 mm $\times$ 70 mm b) 40 mm $\times$ 4 cm

5. Oblicz długość boku rombu o podanym obwodzie.

- a) 24 cm b) 16 m 80 cm c) 14 dm

6. Oblicz długość boku a równoległoboku o obwodzie równym 44 cm i boku b o długości:

- a) 15 cm, b) 4 cm 5 mm, c) 110 mm.

7. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

W rombie o obwodzie 40 cm 8 mm każdy bok ma długość 20 cm 4 mm.	P	F
Jeśli w równoległoboku o obwodzie 20 cm jeden bok ma długość 2 cm, to drugi bok jest dłuższy od pierwszego boku o 60 mm.	P	F

8. W równoległoboku jeden bok jest o 5 cm dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków tego równoległoboku, jeśli jego obwód wynosi 3 dm 8 cm.

9. Obwód równoległoboku wynosi 64 cm, a jeden jego bok jest 3 razy krótszy niż drugi. Podaj długości sąsiednich boków tego równoległoboku.

10. Dane są romb i równoległobok o jednakowym obwodzie. Romb ma bok o długości 60 cm. Długości boków równoległoboku różnią się o 20 cm. Ustal wymiary równoległoboku.

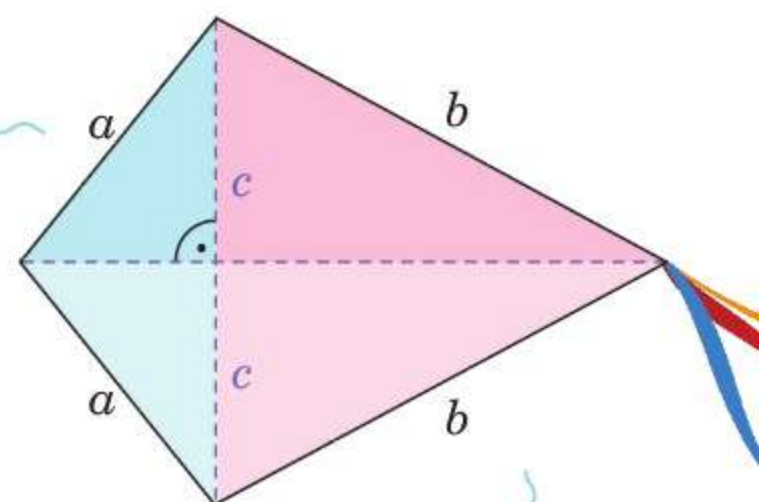


11. Równoległobok o obwodzie 36 cm został podzielony dłuższą przekątną na dwa trójkąty – każdy o obwodzie 30 cm. Jaka długość ma dłuższa przekątna tego równoległoboku?



A to ciekawe

Deltoid to czworokąt, który jest nazywany latawcem, tak jak unoszące się na wietrze zabawki. W starożytności cesarze chińscy wykorzystywali latawce do celów wojennych. Wieleelementowe kolorowe konstrukcje z bambusowych listewek i papieru ryżowego, przypominające kształtem smoki, siały postrach wśród wojsk przeciwnika. Czym deltoid różni się od rombu?



Sprawdź, co umiesz!

1. Obwód pewnego rombu jest taki sam jak obwód równoległoboku, którego dwa sąsiednie boki mają długości 8 cm i 3 cm. Jaka długość ma bok tego rombu?

2. Jeden z boków równoległoboku jest o 7 cm krótszy od drugiego. Jakie długości mają boki tego równoległoboku, jeśli wiadomo, że jego obwód wynosi 50 cm?

3. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Istnieje romb, którego przekątne przecinają się pod kątem prostym i są równej długości.	P	F
Każdy prostokąt jest równoległobokiem, a każdy kwadrat jest rombem.	P	F

6. Miary kątów w równoległobokach

- ▶ Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych w równoległoboku?
- ▶ Jakie własności mają kąty w równoległoboku?



Odkrywaj!

1. Podczas spaceru po porcie w Hamburgu moją uwagę przykuł budynek Dockland (czytaj: dokland). Aby wejść na dach tego budynku, musiałem pokonać aż 136 stopni schodów nachylonych pod kątem 24° do poziomu.



- a) Jaki kształt ma ściana budynku na zdjęciu?
- b) Jakie miary mają pozostałe kąty zaznaczone na tej ścianie?

2. Przyjrzyj się zamieszczonemu obok zdjęciu płytek chodnikowych.

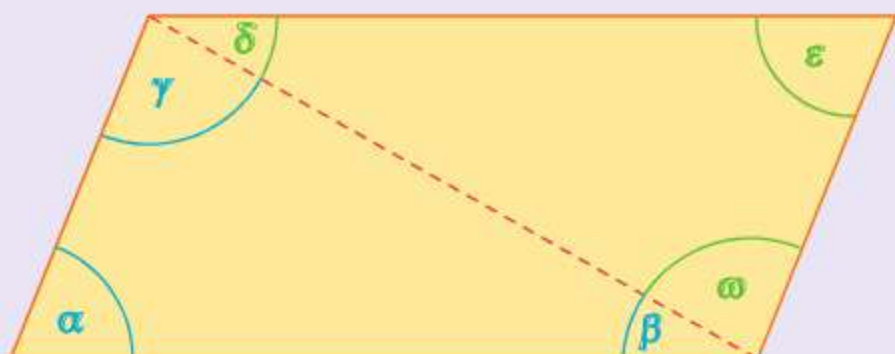
- a) Jaki kształt ma jedna płytki?
- b) Kąt zaznaczony na zdjęciu ma 45° . Jak myślisz, jakie miary mogą mieć pozostałe kąty tej płytki? Sprawdź poprawność swoich przewidywań za pomocą kątomierza.





Analizuj!

Aby dowiedzieć się, ile wynosi **suma miar kątów w równoległoboku**, możesz podzielić równoległobok wzdłuż dowolnej przekątnej na dwa trójkąty.



Ponieważ suma kątów w trójkącie wynosi 180° , to **suma kątów w równoległoboku wynosi 360°** .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\delta + \epsilon + \omega = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \omega = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

Aby dowiedzieć się, ile wynosi **suma miar kątów przy jednym boku w równoległoboku**, możesz „przesunąć” kąt ostry w taki sposób, aby miał wspólny wierzchołek z kątem rozwartym.



Kąty rozwarte w równoległoboku mają tę samą miarę: $\delta = \beta$.

Kąty ostre w równoległoboku mają tę samą miarę: $\gamma = \alpha$.

Kąty α i β są przyległe, zatem suma kątów przy jednym boku jest równa 180° .



Jeśli kąt ostry rombu ma miarę 30° , to jaką miarę mają jego pozostałe kąty? Jeśli jeden kąt równoległoboku ma miarę 90° , to jaką miarę mają jego pozostałe kąty?

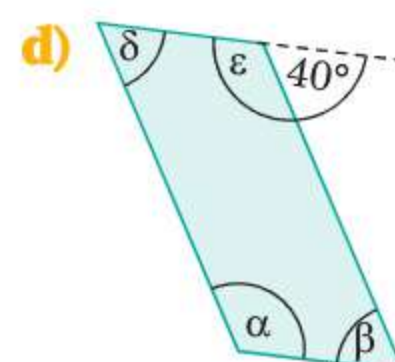
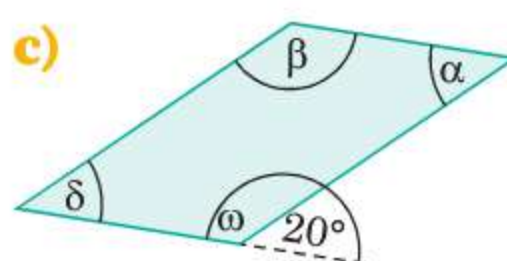
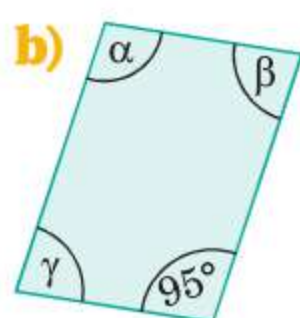
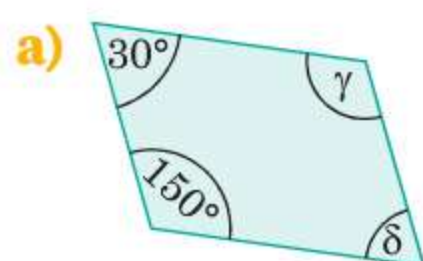
W każdym równoległoboku:

- kąty rozwarte mają taką samą miarę,
- kąty ostre mają taką samą miarę,
- suma miar kątów wewnętrznych jest równa 360° ,
- suma miar kątów przy jednym boku jest równa 180° .



Poćwicz!

1. Oblicz miary kątów w podanym równoległoboku.



2. Jeśli miara jednego z kątów równoległoboku $ABCD$ wynosi 60° , to jaką miarę mają pozostałe kąty tego równoległoboku?

3. Jeśli kąt rozwarty rombu $EFGH$ ma miarę 135° , to jaką miarę mają pozostałe kąty tego rombu?

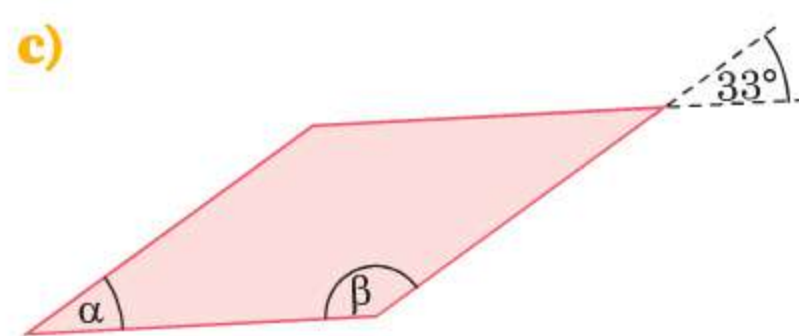
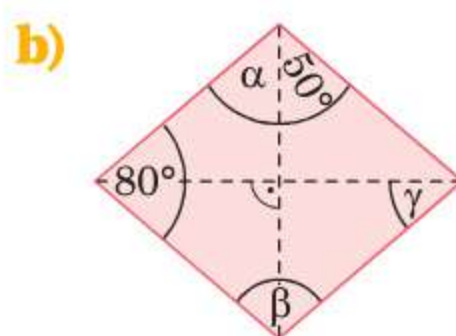
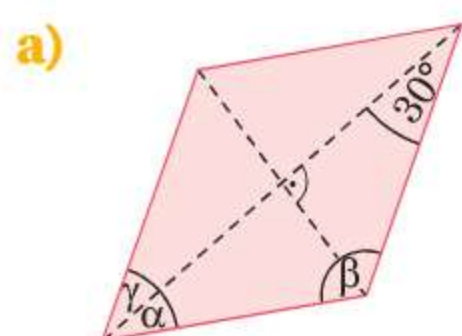
4. Czy figura o podanych miarach kolejnych kątów jest równoległobokiem? Uzasadnij swoją odpowiedź.

a) $80^\circ, 95^\circ, 80^\circ, 95^\circ$

b) $150^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 30^\circ$

c) $120^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 60^\circ$

5. Oblicz miary kątów oznaczonych w podanym równoległoboku literami greckimi.

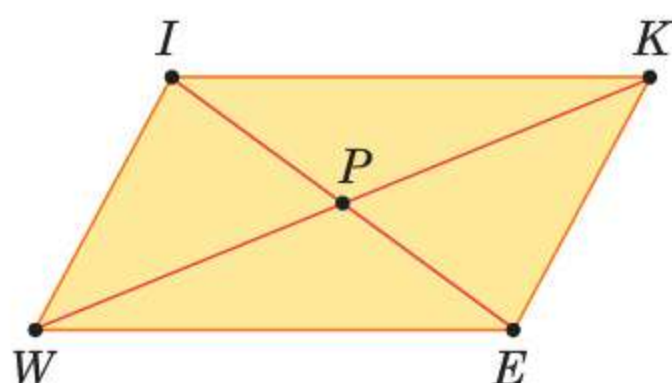


6. W rombie $IJKL$ kąt rozwarty ma miarę o 100° większą niż kąt ostry. Jakie miary mają kąty tego rombu?

7. W równoległoboku $MNOP$ kąt ostry ma miarę 3 razy mniejszą niż kąt rozwarty. Jakie miary mają kąty tego równoległoboku?

8. Dane są trójkąt równoramienny ABC i romb $DEFG$. Kąt α trójkąta ABC ma miarę 40° . Miara jednego z kątów rombu $DEFG$ jest równa mierze kąta β trójkąta ABC . Jakie miary mają kąty w tym rombie? Czy to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

9. Dany jest równoległobok $WEKI$. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

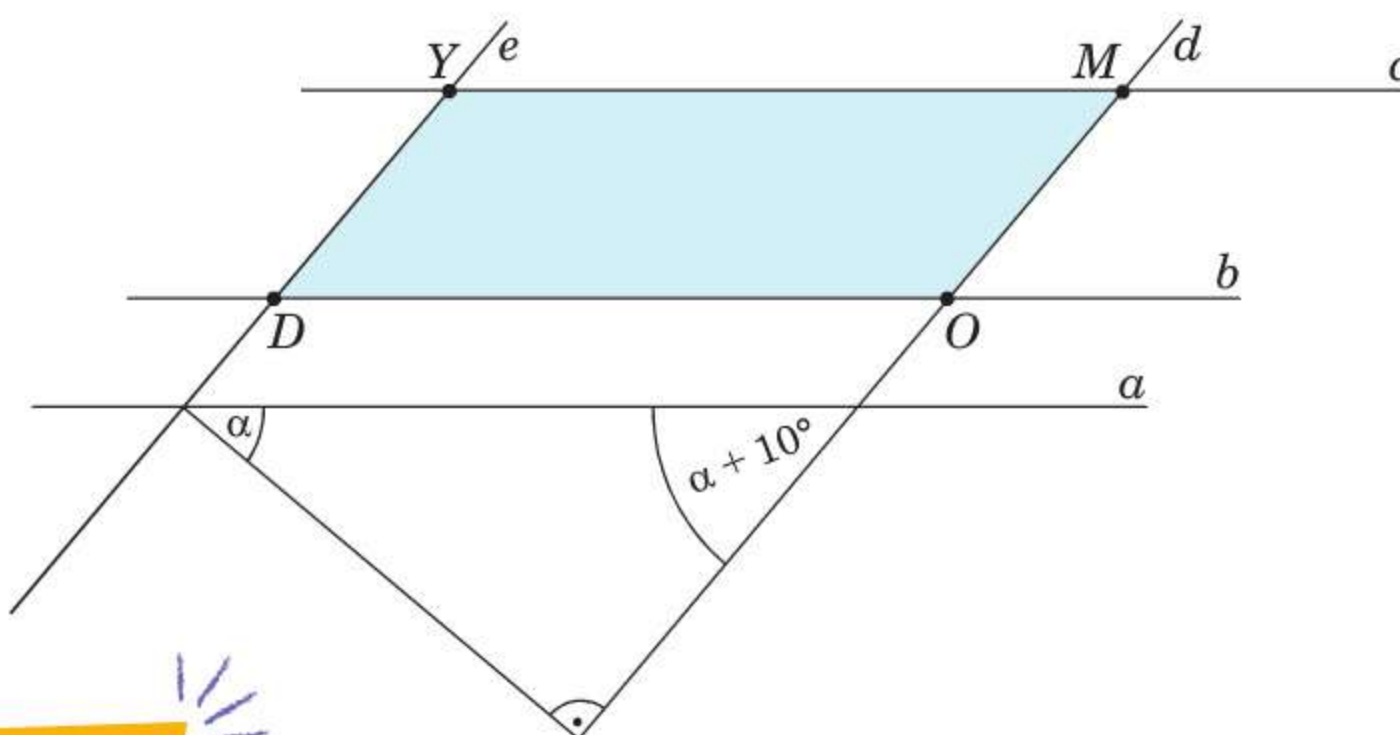


Jeśli kąt WEK ma miarę 145° , to kąt EWK ma miarę 35° .	P	F
Jeśli długość boku WE wynosi 10 cm, a bok WI ma 6 cm długości, to obwód równoległoboku jest równy 16 cm.	P	F
Jeśli odcinek PW ma 8 cm długości, a długość odcinka PI wynosi 4 cm, to suma długości przekątnych tego równoległoboku jest równa 24 cm.	P	F



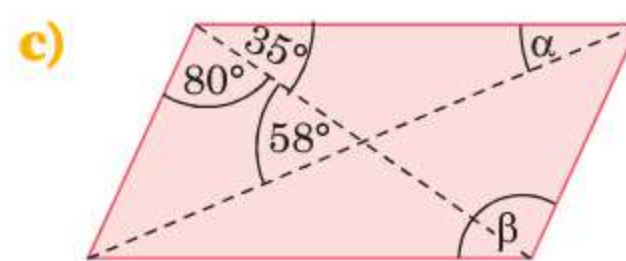
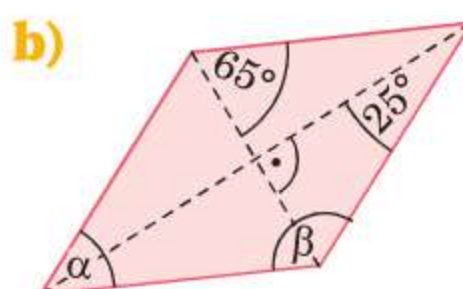
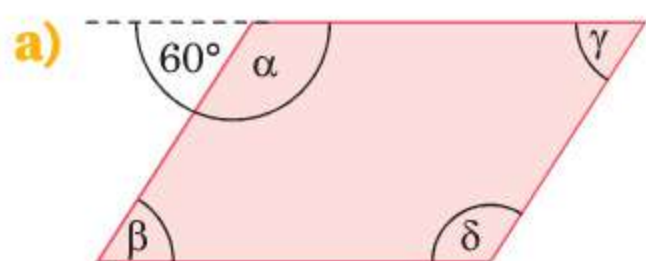
10. Wyznacz miary kątów w równoległoboku $DOMY$.

$a \parallel b$
 $b \parallel c$
 $d \parallel e$



Sprawdź, co umiesz!

1. Ustal miary kątów oznaczonych w równoległoboku literami greckimi.



2. Jeden z kątów wewnętrznych równoległoboku jest prosty. Jaka miarę mają pozostałe kąty tego czworokąta? Jak możesz inaczej nazwać ten czworokąt?

3. Kąt rozwarty w rombie ma miarę dwa razy większą niż kąt ostry. Podaj miary wszystkich kątów tego rombu.

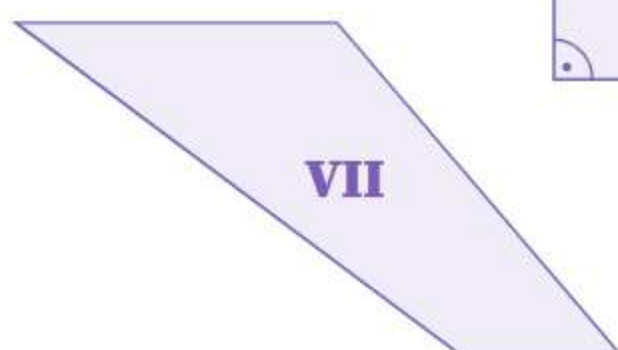
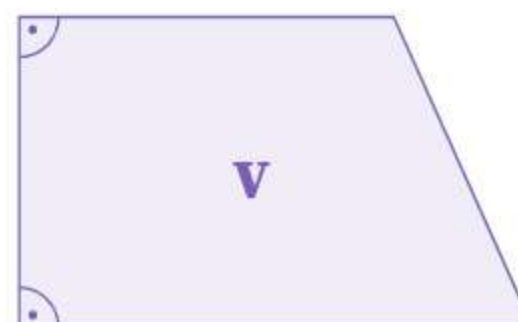
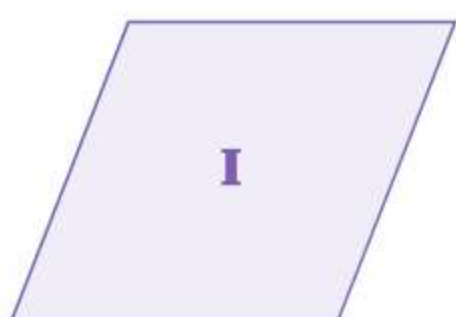
7. Trapezy

- ▶ Jakie są własności trapezów?
- ▶ Jakie są rodzaje trapezów?
- ▶ Jak obliczać obwód trapezu?
- ▶ Jak rysować trapezy?



Odkrywaj!

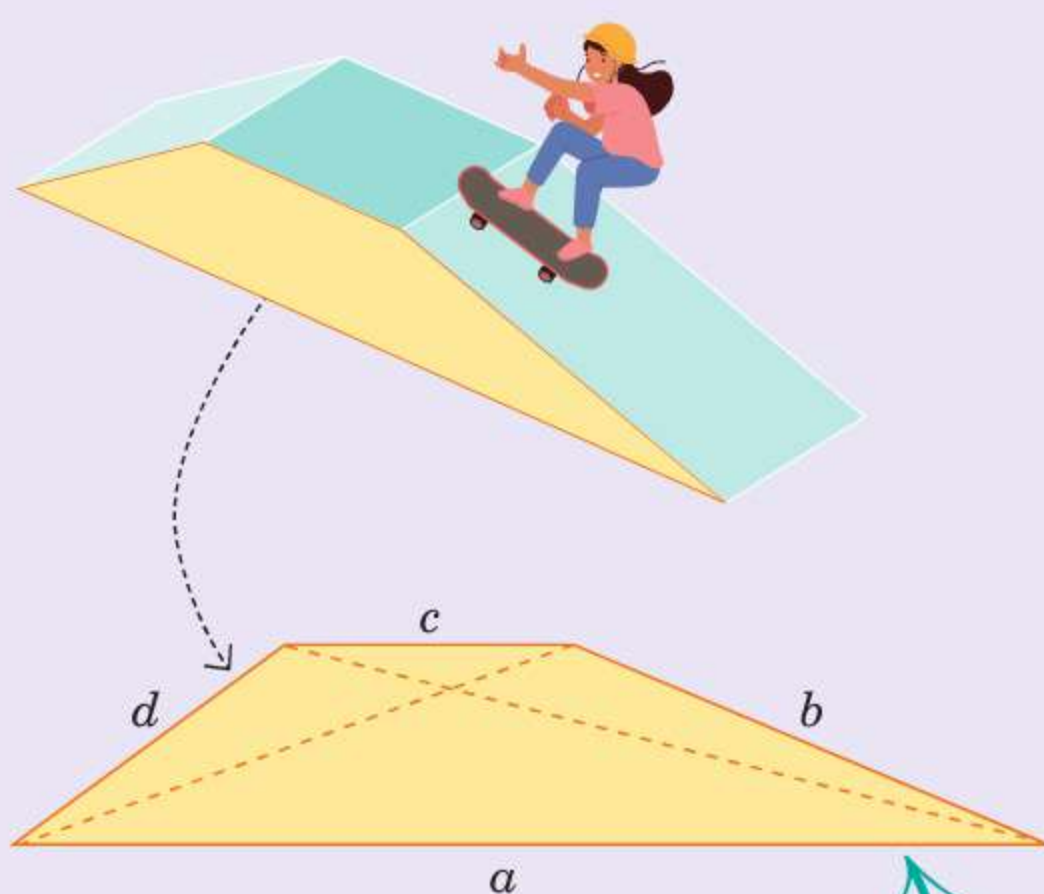
1. Znajdź na rysunku kolejno: 3 kwadraty, 1 prostokąt niebędący kwadratem, 2 równoległoboki niebędące rombami ani prostokątami oraz 1 romb niebędący kwadratem. Następnie przyjrzyj się pozostałym figurom i odpowiedz na pytania.
- a) Jakie długości mają ich boki? Co zauważasz?
 - b) Jakie miary mają ich kąty? Co zauważasz?
 - c) Czy któreś z boków są do siebie prostopadłe? A równoległe?





Analizuj!

Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych. Boki te nazywamy **podstawami**. Pozostałe dwa boki to **ramiona**. Przeanalizuj pytania i odpowiedzi dotyczące trapezów przedstawionych na kolejnych rysunkach.



To jest trapez **różnoboczny**.

Czy sąsiednie boki są prostopadłe?

NIE

Czy przeciwległe boki są równoległe?

TAK,
1 para

Czy boki są tej samej długości?

NIE

Czy przekątne są tej samej długości?

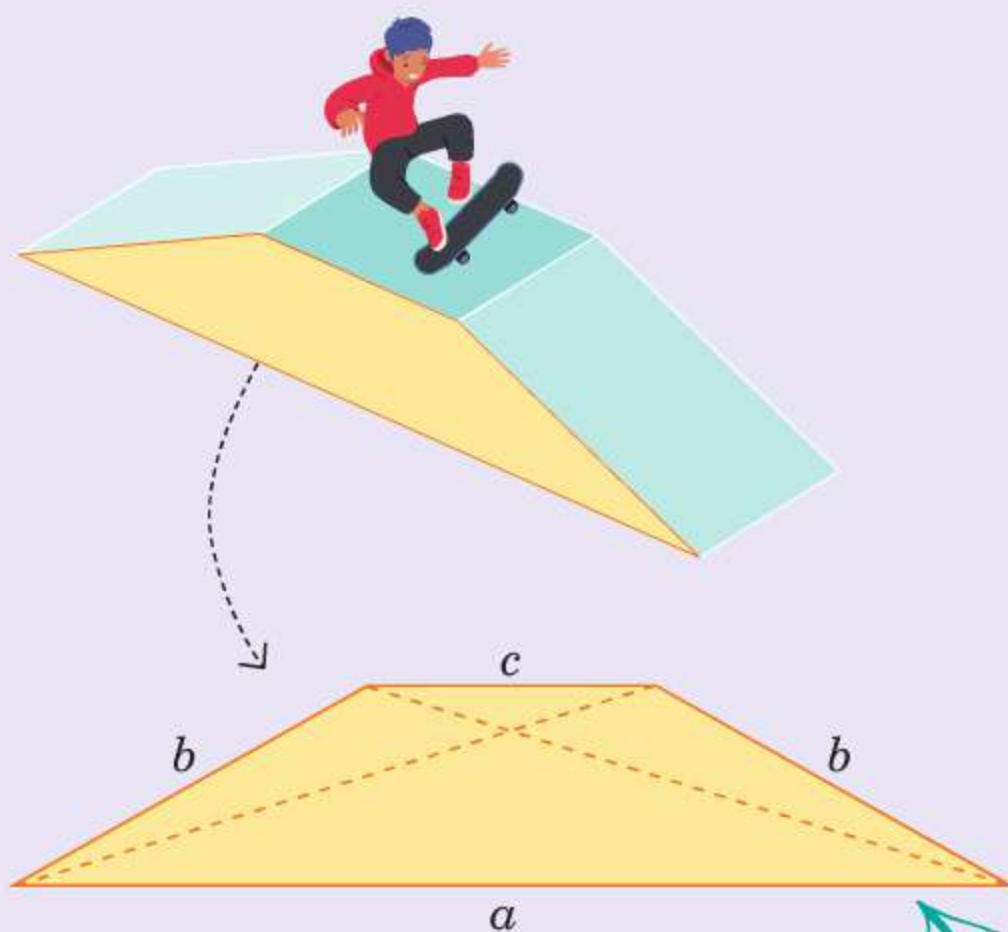
NIE

Czy przekątne przecinają się w połowie?

NIE

Czy ma oś symetrii?

NIE



To jest trapez **równoramienny**.

Czy sąsiednie boki są prostopadłe?

NIE

Czy przeciwległe boki są równoległe?

TAK,
1 para

Czy boki są tej samej długości?

TAK,
1 para

Czy przekątne są tej samej długości?

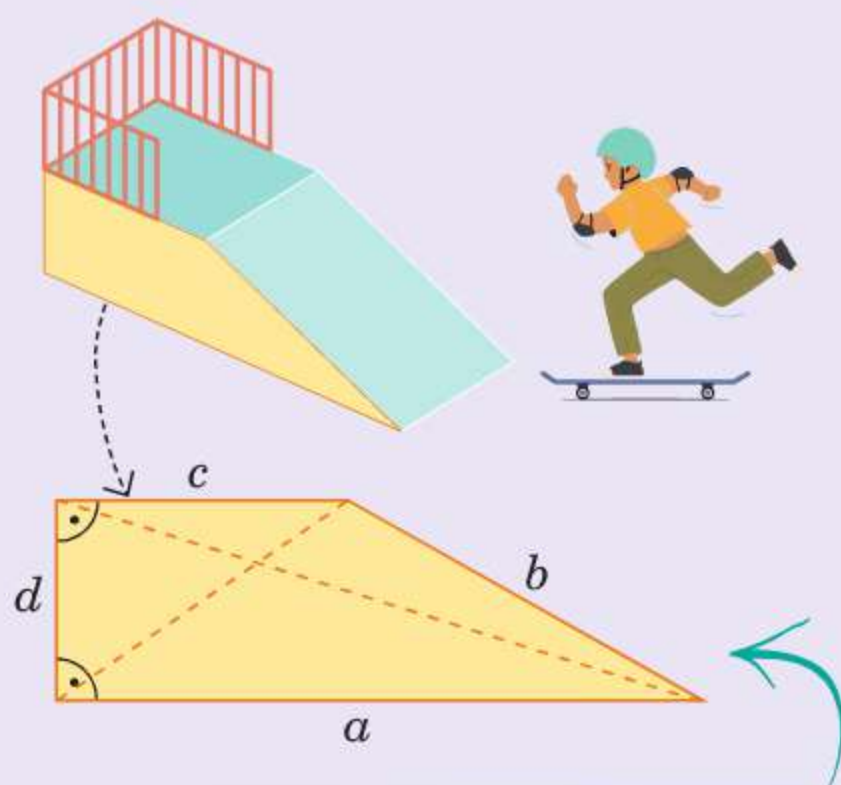
TAK

Czy przekątne przecinają się w połowie?

NIE

Czy ma oś symetrii?

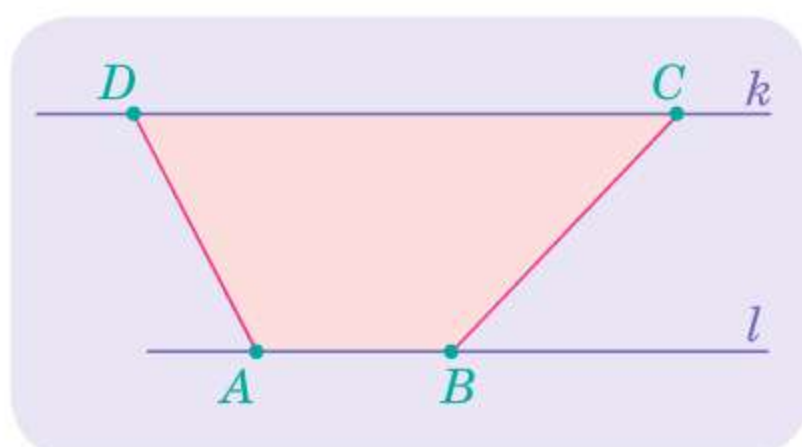
TAK, 1



To jest trapez **prostokątny**.

Czy sąsiednie boki są prostopadłe?	TAK, 2 pary
Czy przeciwległe boki są równoległe?	TAK, 1 para
Czy boki są tej samej długości?	NIE
Czy przekątne są tej samej długości?	NIE
Czy przekątne przecinają się w połowie?	NIE
Czy ma oś symetrii?	NIE

Jak narysować trapez?



- 1 Narysuj 2 proste równoległe.
- 2 Na każdej prostej zaznacz po 2 punkty, które wyznaczą podstawy trapezu.
- 3 Połącz punkty tak, aby powstały ramiona.

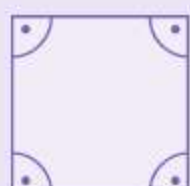
W przypadku trapezu prostokątnego kąty proste narysuj za pomocą ekierki. Podczas rysowania trapezu równoramiennego wykorzystaj fakt, że ma on oś symetrii.

Jak obliczyć obwód trapezu?

Tak jak innych wielokątów – jako sumę długości wszystkich jego boków.

Trapez równoramienny to trapez, którego ramiona i przekątne są równej długości. **Trapez prostokątny** to trapez, którego przynajmniej jedno ramię jest prostopadłe do podstaw.

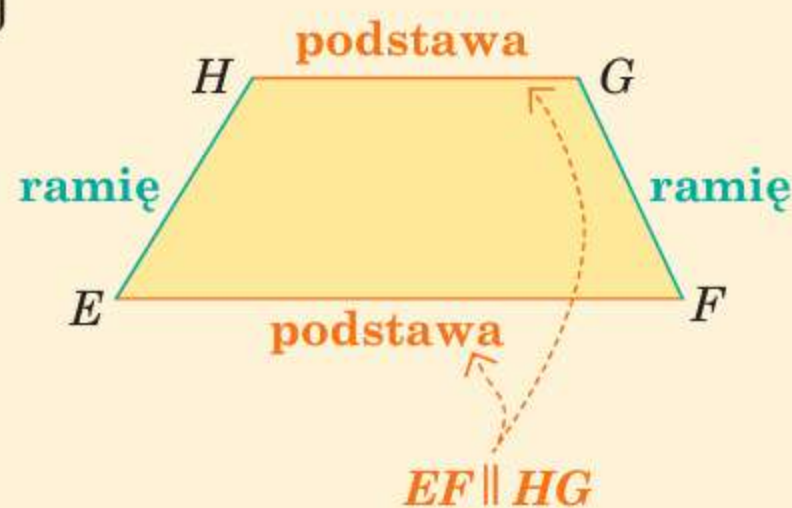
Czy poniższe figury to też trapezy? Czy któraś z tych figur jest trapezem prostokątnym? A trapezem równoramiennym? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Trapez to czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

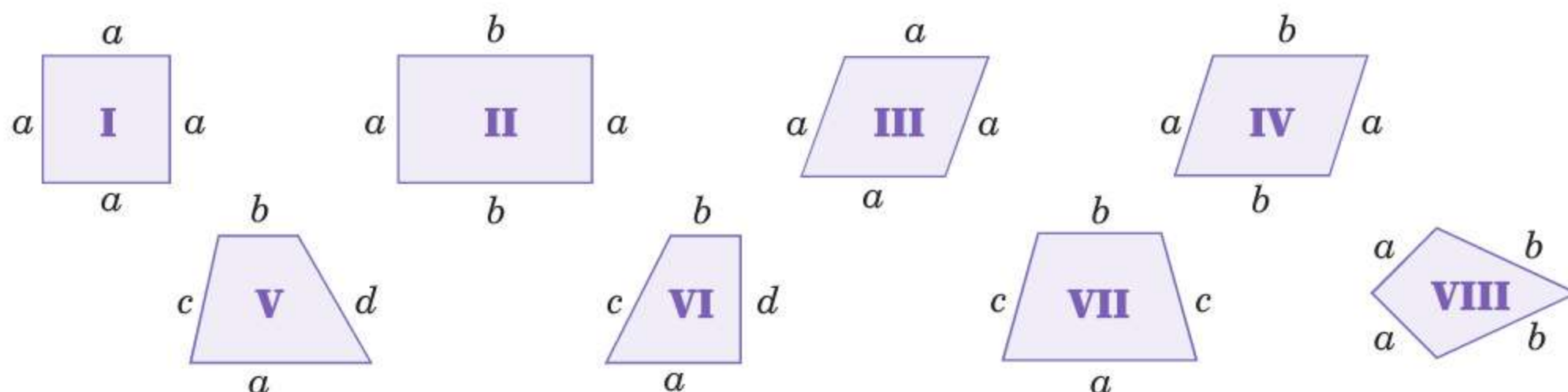
Trapez równoramienny to trapez, którego ramiona i przekątne są równej długości (czyli ma oś symetrii).

Trapez prostokątny to trapez, którego przynajmniej jedno ramię jest prostopadłe do podstaw.



Poćwicz!

1. Znajdź na rysunku wszystkie trapezy. Które trapezy są prostokątne, a które równoramienne? Uzasadnij swój wybór.

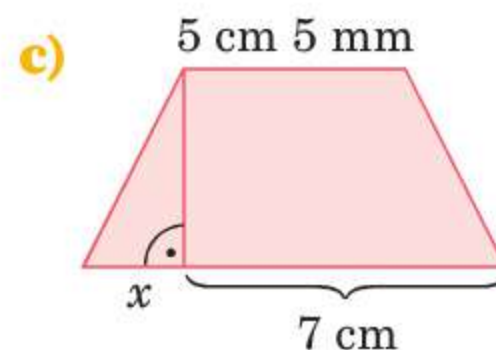
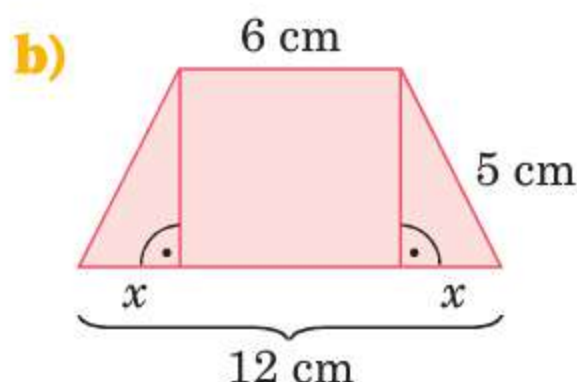
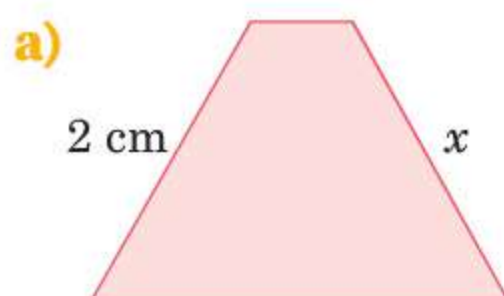


2. Narysuj trapez, którego podstawy mają długość 3 cm i 5 cm, a jedno z ramion ma długość 4 cm. Czy to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

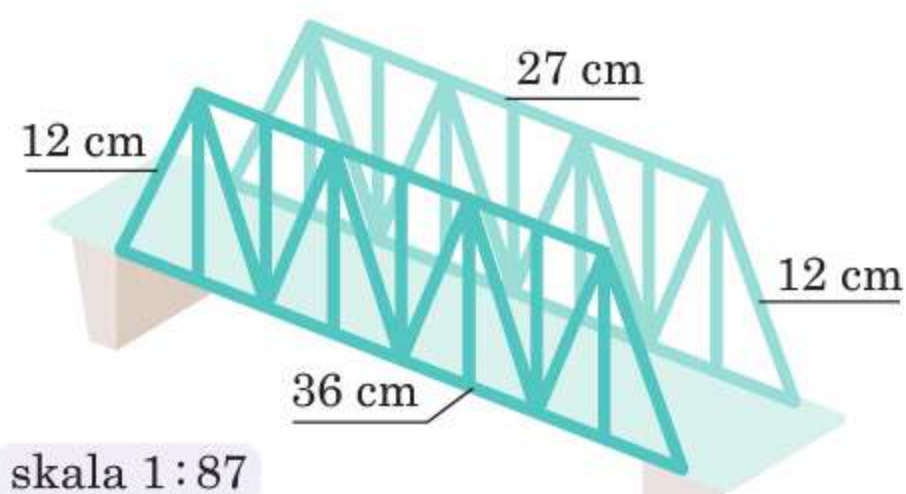
3. Narysuj trapez prostokątny, którego krótsze ramię oraz krótsza podstawa mają po 3 cm 5 mm długości, a dłuższa podstawa jest 2 razy dłuższa od krótszej. Czy to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

4. Narysuj trapez równoramienny, którego suma długości podstaw wynosi 12 cm. Czy to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

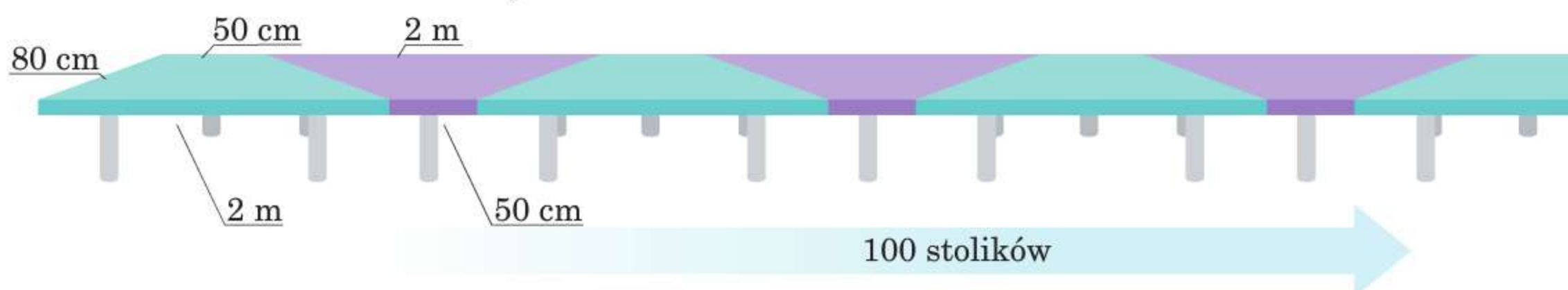
5. Wyznacz długość odcinka oznaczonego literą x , wiedząc, że narysowany trapez jest równoramienny.



6. Kuba pasjonuje się modelarstwem. Właśnie składa taki most kolejowy jak na ilustracji obok. Oblicz obwód kratownicy takiego mostu w postaci modelu i w rzeczywistości.

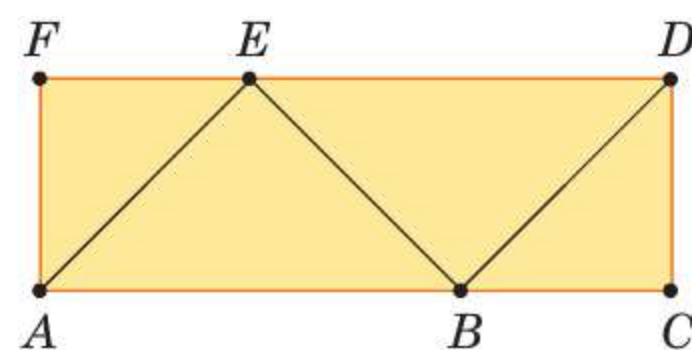


7. Oblicz obwód trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramię mają długość 6 cm każde, a dłuższa podstawa jest 2 razy dłuższa od krótszej.
8. Obwód trapezu równoramiennego jest równy 1 m. Suma długości jego podstaw wynosi 68 cm. Jaką długość ma ramię tego trapezu?
9. Obwód trapezu prostokątnego wynosi 36 cm. Krótsze ramię i krótsza podstawa są tej samej długości i mają łącznie 12 cm długości. Oblicz długość dłuższej podstawy, jeśli jest ona o 4 cm dłuższa od drugiego ramienia.
10. Po złączeniu 100 jednakowych stolików, których blaty mają kształt trapezu równoramiennego, powstanie równoległobok. Jakie wymiary będzie miała tak utworzona konstrukcja?

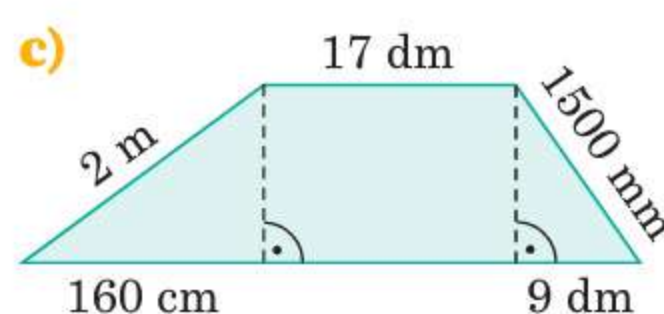
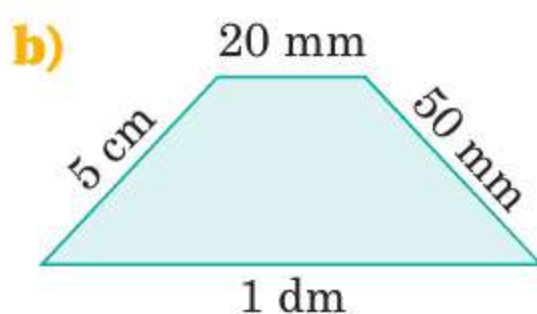
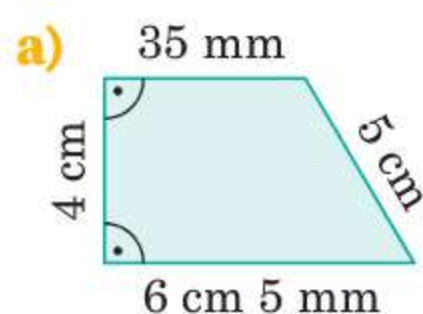


Sprawdź, co umiesz!

1. Wypisz nazwy wszystkich trapezów na rysunku.



2. Oblicz obwód trapezu.



3. Suma długości podstaw trapezu równoramiennego wynosi 18 cm. Oblicz długość ramienia tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego obwód jest równy 50 cm.

8. Miary kątów w trapezach

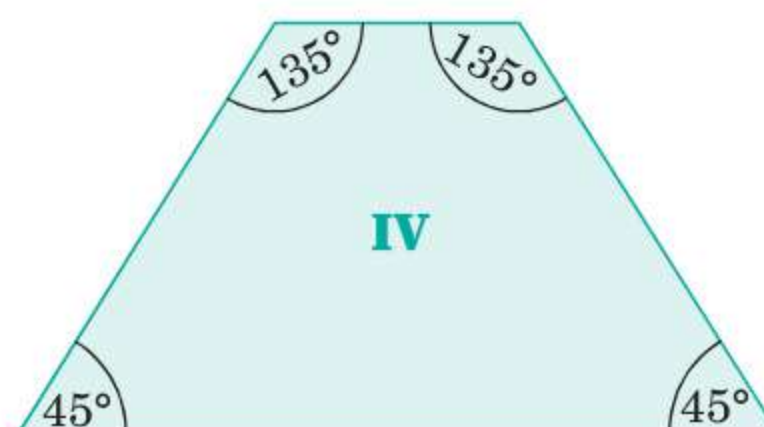
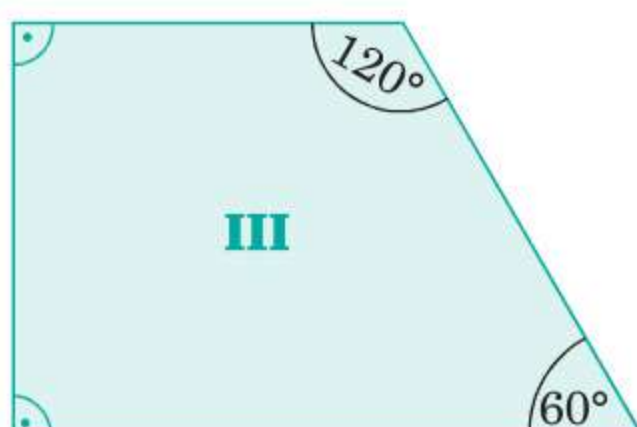
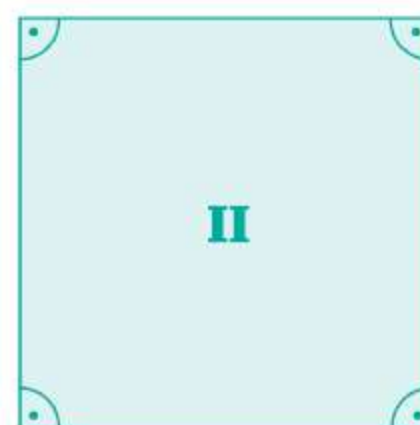
- ▶ Jakie własności mają kąty wewnętrzne w trapezach?
- ▶ Jak obliczać miary kątów w trapezie?



Odkrywaj!

1. Odpowiedz na pytania dotyczące poniższych trapezów.

- a) Ile wynosi suma miar kątów wewnętrznych każdego z trapezów?
- b) Ile wynosi suma miar kątów leżących przy jednym ramieniu?
- c) W których trapezach kąty przy podstawie są tej samej miary? Jak się nazywa taki rodzaj trapezu?



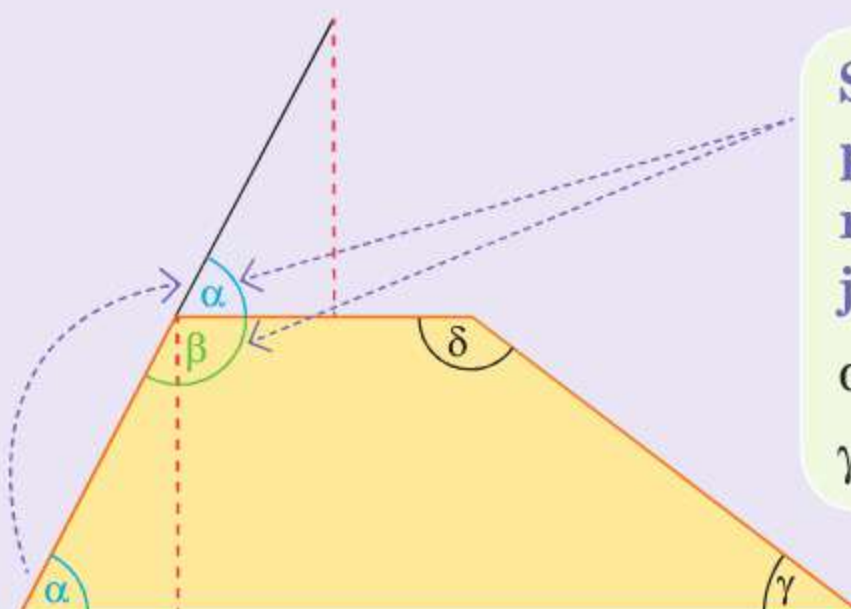


Analizuj!

Suma miar wszystkich kątów wewnętrznych w trapezie wynosi 360° .

Jakie własności mają kąty leżące przy tym samym ramieniu trapezu?

Jeśli „przeniesiemy” kąt ostry trapezu powyżej górnej podstawy, to otrzymamy dwa kąty przyległe: α i β . Tak samo możemy „przesunąć” kąt γ .



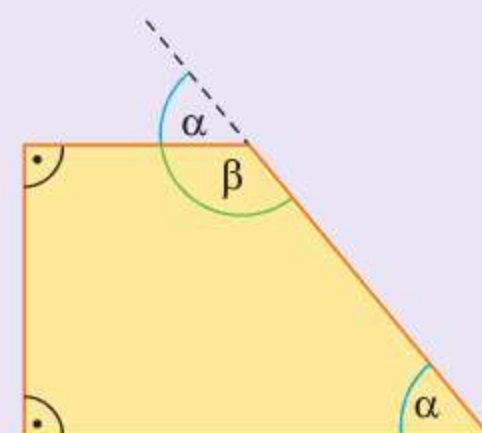
Suma miar kątów przy jednym ramieniu trapezu jest równa 180° .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\gamma + \delta = 180^\circ$$

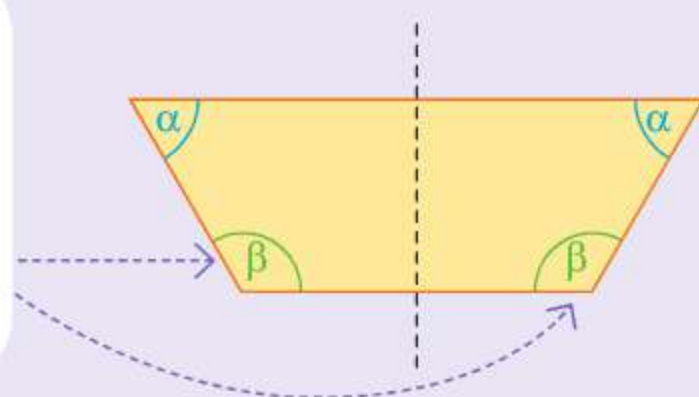


Czy jest to cecha wspólna dla wszystkich trapezów? Przyjrzyj się zamieszczonemu obok rysunkowi trapezu prostokątnego. Czy tak samo można „przesunąć” kąty w trapezie równoramiennym?



Jakie własności mają kąty przy podstawach w trapezie równoramiennym?

Jeśli trapez równoramienny złożymy wzdłuż jego osi symetrii, to kąty się pokryją.



W trapezie równoramiennym kąty przy podstawach mają jednakowe miary.



Kąt ostry w trapezie ma miarę 62° . Jakie miary mają pozostałe kąty, jeśli jest to trapez równoramienny? A jeśli byłby to trapez prostokątny?



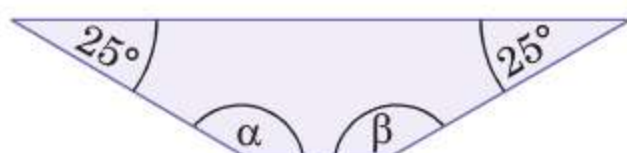
W każdym trapezie:

- suma miar kątów wewnętrznych jest równa 360° ,
- suma miar kątów leżących przy jednym ramieniu jest równa 180° .

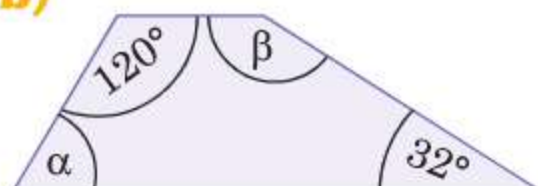
Poćwicz!

1. Wyznacz miary kątów oznaczonych w podanym trapezie literami greckimi.

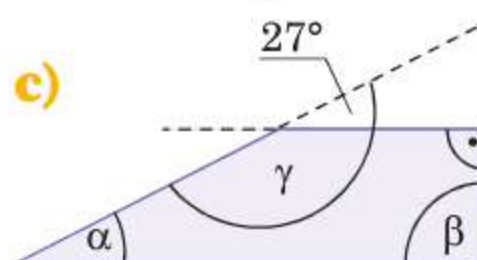
a)



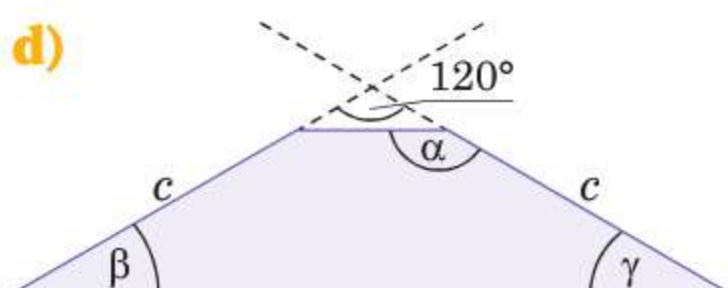
b)



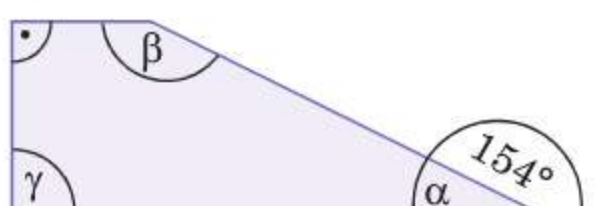
c)



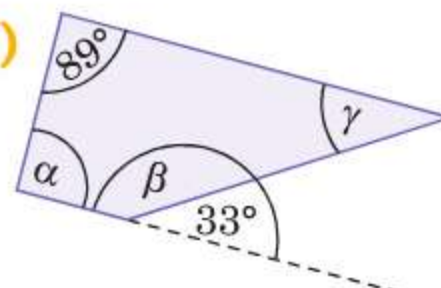
d)



e)



f)



2. Wybierz właściwe uzupełnienie zdań spośród A i B oraz C i D.

I. Trapez, który ma dwa kąty o miarach 80° i 90° , to

A. trapez równoramienny.

B. trapez prostokątny.

II. Trapez, którego dwa kąty mają po 120° , to

C. trapez równoramienny.

D. trapez prostokątny.

3. Kąt ostry w trapezie równoramiennym ma miarę 63° . Wyznacz miary pozostałych kątów tego trapezu.

4. Kąt rozwarty w trapezie prostokątnym ma miarę 125° . Jakie miary mają pozostałe kąty tego trapezu?

5. Miara kąta rozwartego trapezu równoramiennego jest dwukrotnie większa niż miara kąta ostrego. Jakie miary mają kąty tego trapezu?

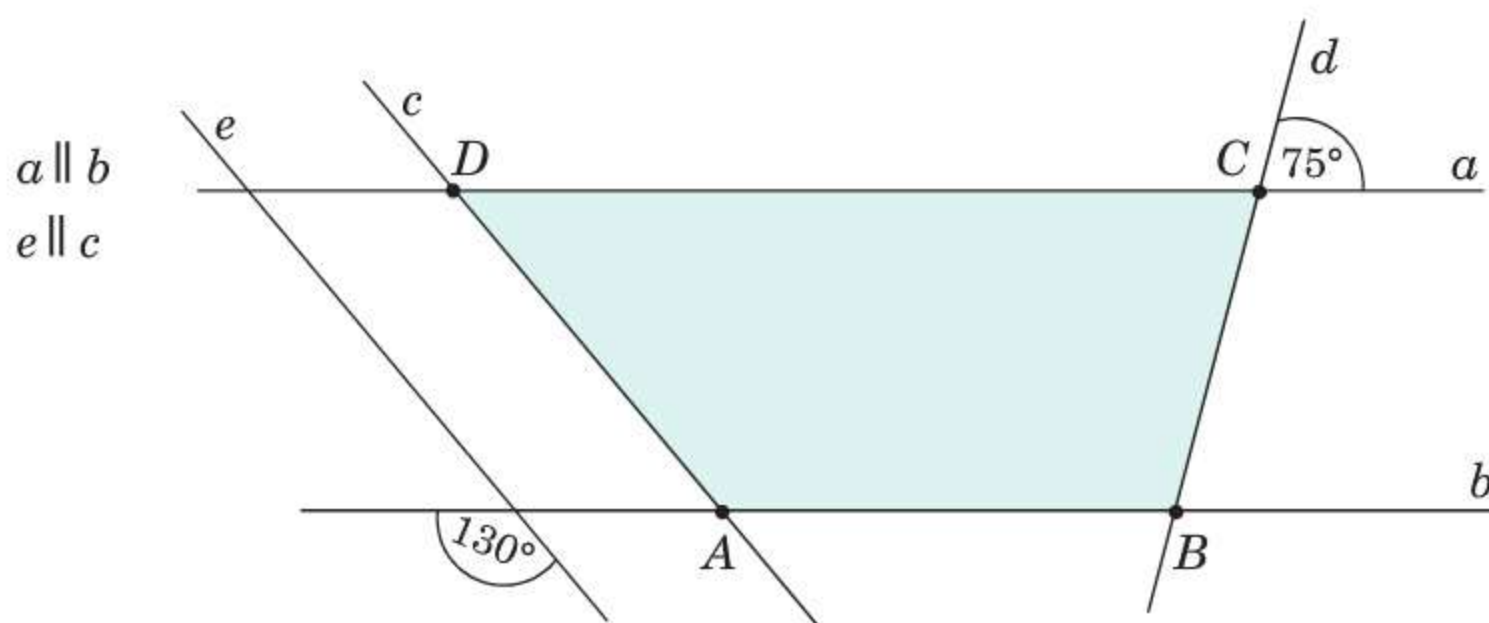
6. W trapezie równoramiennym *MORS*, w którym boki *MS* i *OR* są ramionami, suma kątów *ORS* oraz *RSM* jest równa 200° . Jaka miarę ma kąt *MOR*?

7. W trapezie prostokątnym *FOKA* przekątna *FK* jest prostopadła do boku *OK*. Wiedząc, że miara kąta *OFK* wynosi 50° , wyznacz miary wszystkich kątów wewnętrznych trapezu *FOKA* oraz trójkąta *FKA*.

8. Przedłużenia ramion trapezu $SZOP$ przecięły się w punkcie Y . Wiedząc, że trójkąt OPY jest równoramienny i kąt między ramionami ma miarę 20° , ustal miary kątów w trapezie $SZOP$. Czy to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

9. Miary kątów w pewnym trapezie ustawiono w kolejności rosnącej. Okazało się, że miara każdego kolejnego kąta zapisanego w takim porządku jest o 10° większa od miary poprzedniego kąta. Jakie miary mają kąty tego trapezu?

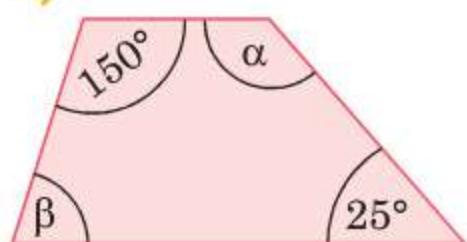
10. Ustal miary kątów wewnętrznych w trapezie $ABCD$.



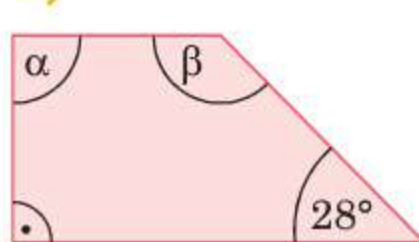
Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz miary kątów oznaczonych literami greckimi w podanym trapezie.

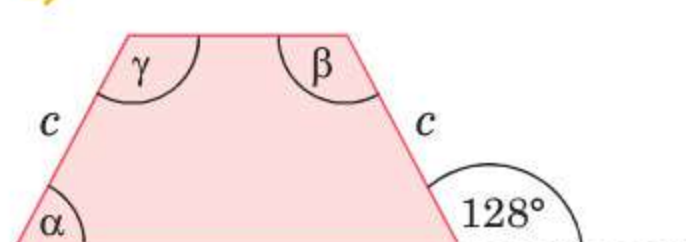
a)



b)



c)



2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

W każdym trapezie równoramiennym kąty przy podstawie są równe i mają w sumie 180° .	P	F
Trapez prostokątny ma tylko jeden kąt prosty.	P	F
Trzy wybrane kąty trapezu mogą mieć miary: 10° , 10° , 200° .	P	F

3. Ustal miary kątów w trapezie prostokątnym, w którym kąt ostry ma miarę 5 razy mniejszą niż kąt rozwarty.

9. Klasyfikacja czworokątów

- ▶ Jakie własności mają czworokąty?
- ▶ Jak rozpoznawać rodzaje czworokątów na podstawie ich cech?



Odkrywaj!

1. Na zajęciach Koła Młodego Architekta stworzyłem projekt frontu domu jednorodzinnego.



- a) Ela powiedziała: „Narysowałeś zielony dach w kształcie trapezu i czarne drzwi wejściowe w kształcie równoległoboku”. Czy Ela użyła poprawnych określeń do opisanie kształtu dachu i drzwi w tym domu?
- b) Jaki kształt mają okna? Jaki kształt ma balustrada na balkonie? Odpowiedz na te pytania, używając wszystkich możliwych określeń z poniższej ramki.

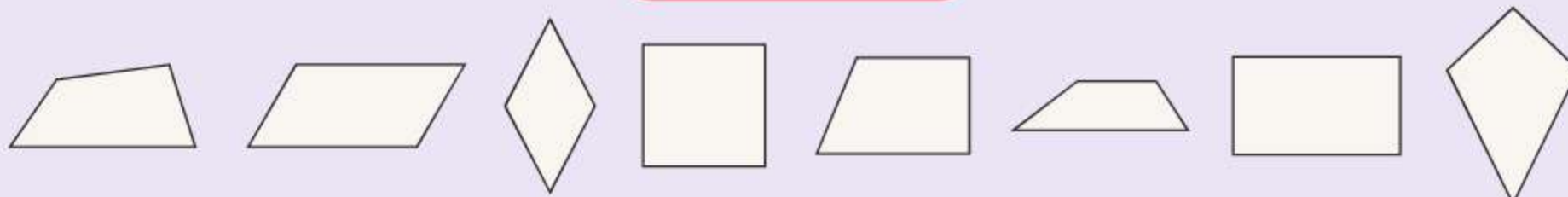
romb • trapez • równoległobok • prostokąt • kwadrat • czworokąt



Analizuj!

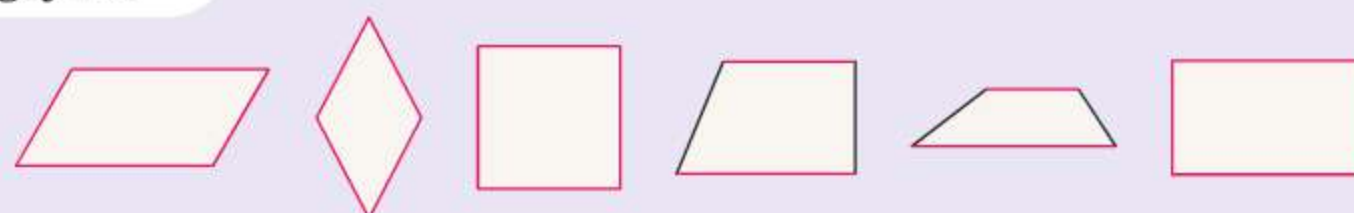
Czworokąty to takie wielokąty, które mają 4 boki, 4 wierzchołki i 4 kąty. Klasyfikuje się je ze względu na własności ich boków i kątów.

Czworokąty



co najmniej jedna para boków równoległych

Trapezy



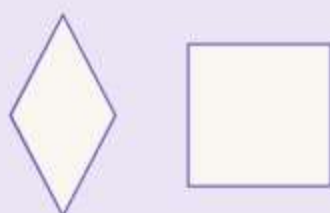
dwie pary boków równoległych

Równoległoboki



wszystkie boki jednakowej długości

Romby



Prostokąty



wszystkie kąty proste

wszystkie kąty proste

Kwadraty



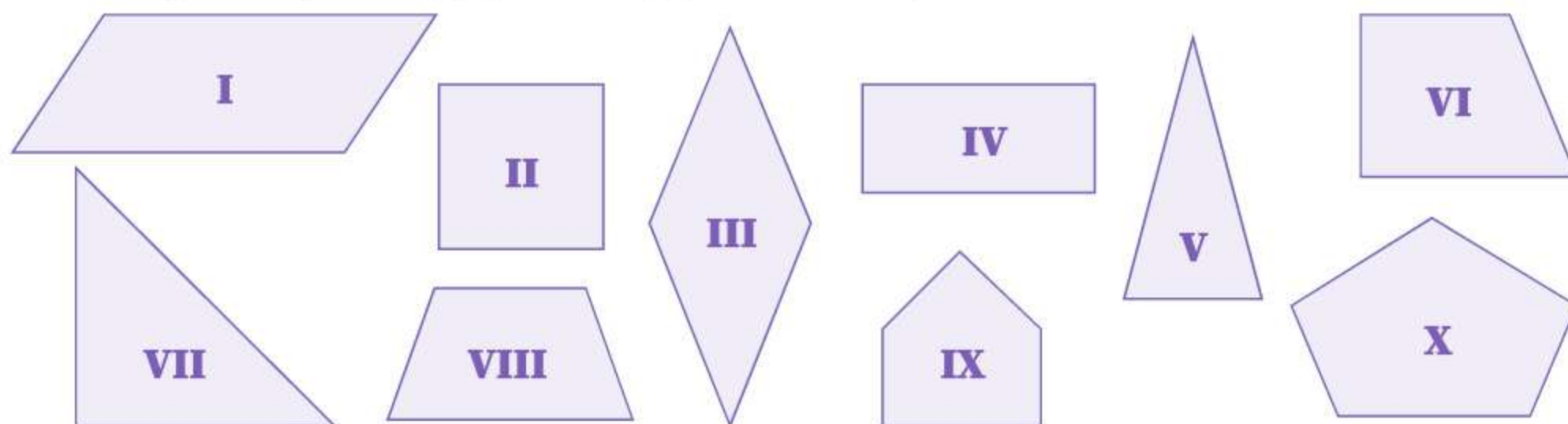
wszystkie boki jednakowej długości



Czy każdy prostokąt można nazwać trapezem? Jakie warunki musi spełniać trapez, aby był prostokątem?

Poćwicz!

1. Przyjrzyj się wielokątom, a następnie wskaż wszystkie czworokąty, trapezy, równoległoboki, romby, prostokąty i kwadraty.



2. Które z wielokątów wymienionych w ramce zawsze mają podane własności? Wskaż wszystkie możliwości.

romb • trapez • równoległobok • prostokąt • kwadrat

- a) Ma wszystkie kąty proste.
- b) Jego przekątne dzielą się na połowy.
- c) Ma wszystkie boki równej długości.
- d) Suma jego sąsiednich kątów tworzy kąt półpełny.
- e) Ma kąty o miarach 30° , 150° , 90° , 90° .
- f) Ma dwie pary boków równoległych.
- g) Ma dwie pary kątów równej miary.
- h) Jest równoległobokiem, ale nie rombem.
- i) Jest równoległobokiem, ale nie prostokątem.
- j) Ma cztery kąty ostre.

3. Narysuj i nazwij czworokąt, którego przekątne:

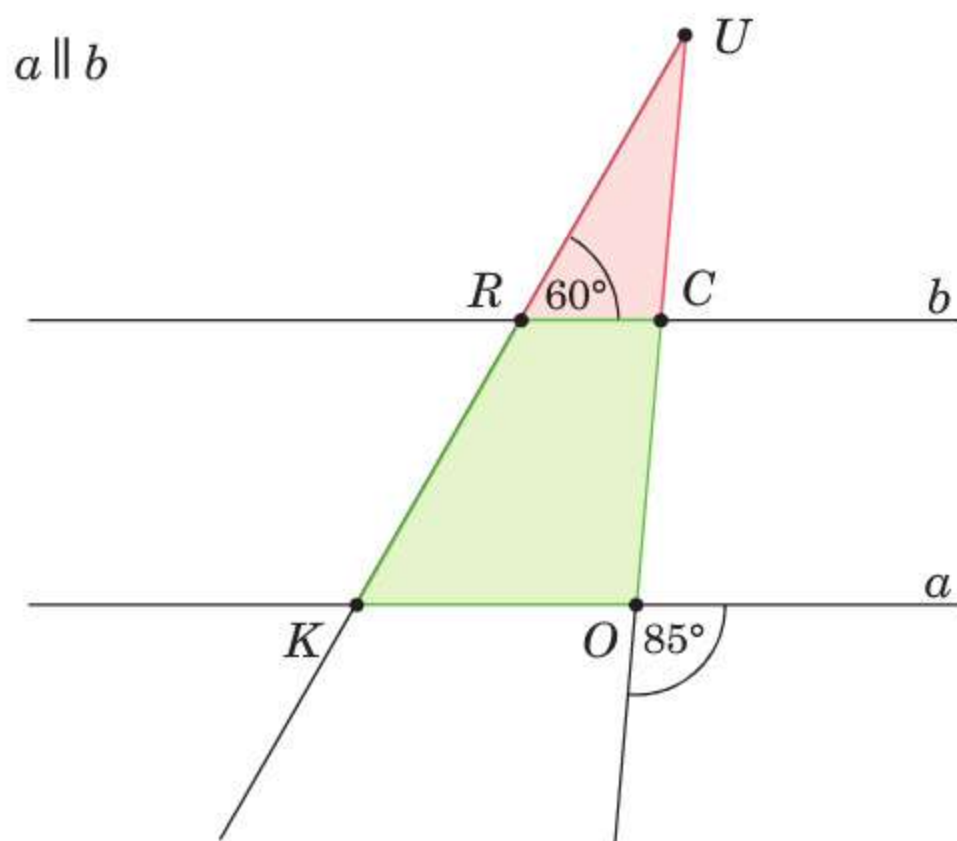
- a) są równej długości, b) dzielą się na połowy, c) są prostopadłe.

4. Nazwij figurę, która ma jedną parę boków równoległych, dwa boki tej samej długości oraz dwie przekątne równej długości, ale nie dzielące się na dwie równe części.

- A. trapez prostokątny B. kwadrat C. trapez równoramienny D. prostokąt

5. Narysuj trapez prostokątny *MARS* oraz jego odbicie symetryczne względem prostej *AR*, następnie pokoloruj obie figury i nazwij otrzymany wielokąt. Czy istnieje tylko jedno rozwiązanie tego zadania?

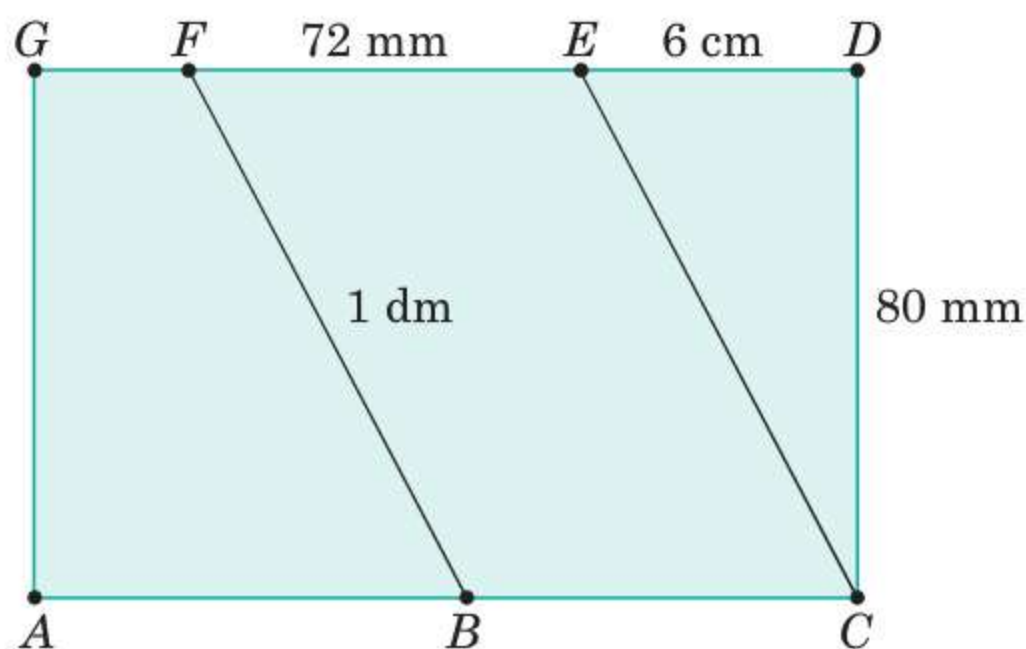
6. Ramiona kąta KUO przecięto prostymi równoległymi a i b , tak jak na rysunku poniżej. Wyznacz miary kątów wewnętrznych w trójkącie RCU oraz trapezie $KOCR$.



7. Przekątne trapezu prostokątnego są równej długości, a suma długości każdego dwóch sąsiednich boków jest równa 38 cm 9 mm. Ile wynosi obwód tego trapezu? Jak można inaczej nazwać ten czworokąt?

8. Prostokąt $ACDG$, którego obwód wynosi 46 cm, podzielono na trapez, równoległobok i trójkąt, tak jak na rysunku poniżej. Oblicz obwód:

- a) trójkąta CDE , b) równoległoboku $BCEF$, c) trapezu $ABFG$.



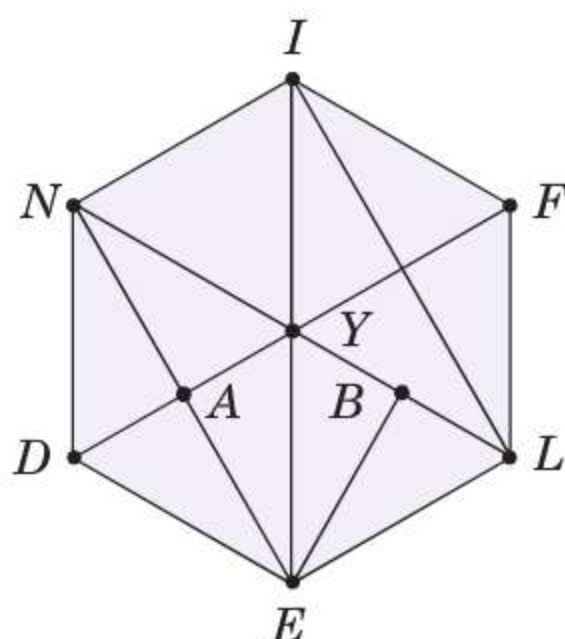
9. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw i ramię mają po 13 cm 5 mm długości, a druga podstawa jest o 60 mm dłuższa. Oblicz długość boku rombu, którego obwód jest równy obwodowi tego trapezu.

10. Suma długości przekątnych w rombie wynosi 36 cm. Jedna z przekątnych jest dwukrotnie dłuższa niż druga. Narysuj ten romb w skali 1 : 3.



- 11.** Sześciokąt *DELFIN* powstał z połączenia sześciu trójkątów równobocznych, tak jak to pokazano na rysunku poniżej. Odnajdź na rysunku opisany czworokąt, sklasyfikuj go i ustal miary jego kątów.

- a) *DELN*
- b) *NYFI*
- c) *ELIN*
- d) *AEBY*



- 12.** Długości dwóch kolejnych boków pewnego równoległoboku są wyrażone kolejnymi liczbami pierwszymi mniejszymi od 10. Jego obwód jest liczbą złożoną mniejszą niż 20. Jakie wymiary może mieć ten równoległobok? Rozważ wszystkie możliwości.

Sprawdź, co umiesz!

- 1.** Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Każdy równoległobok jest prostokątem.	P	F
Nie każdy kwadrat jest rombem.	P	F
Istnieje trapez prostokątny, który jest równoległobokiem.	P	F
Jeśli przekątne w czworokącie są prostopadłe, to musi to być romb.	P	F
Każdy trapez równoramienny jest równoległobokiem.	P	F

- 2.** W którym z czworokątów przekątne mogą przecinać się pod kątem 60° ?

- A. W kwadracie.
- B. W rombie.
- C. W prostokącie.
- D. W żadnym z wymienionych czworokątów.

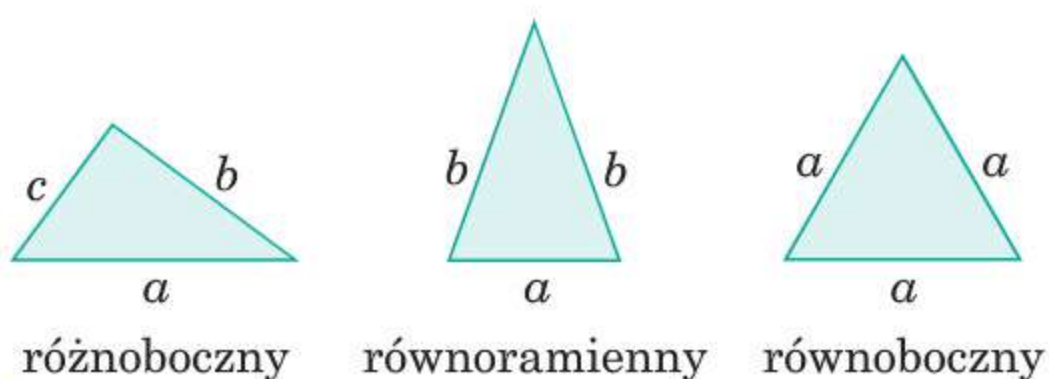
- 3.** Obwód trapezu prostokątnego, którego ramiona są tej samej długości, wynosi 120 cm. Oblicz długość ramienia, jeśli wiadomo, że jedna z podstaw ma 35 cm długości.

PODSUMOWANIE DZIAŁU IV

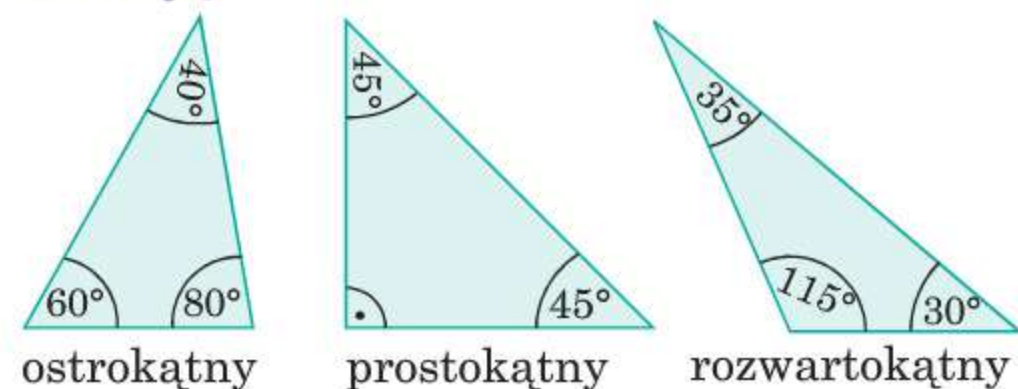
W świecie wielokątów

Powtórz wiadomości

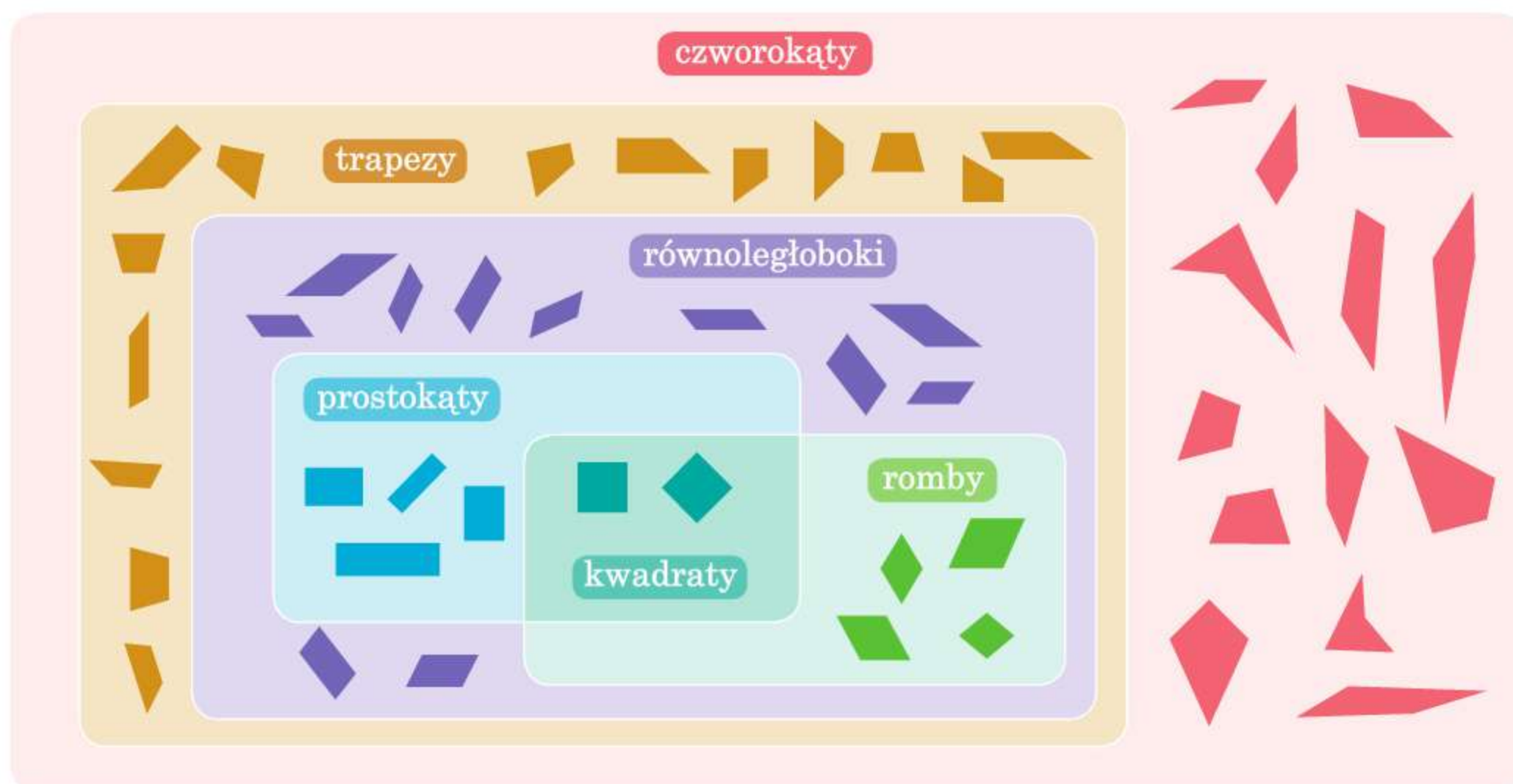
Klasyfikacja trójkątów ze względu na boki



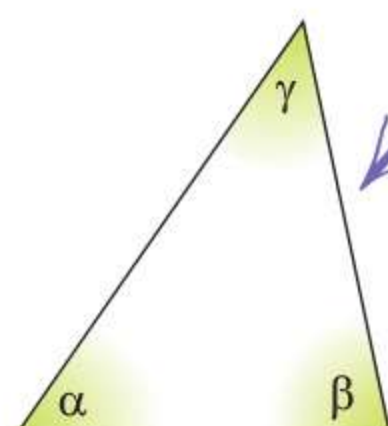
Klasyfikacja trójkątów ze względu na kąty



Klasyfikacja czworokątów

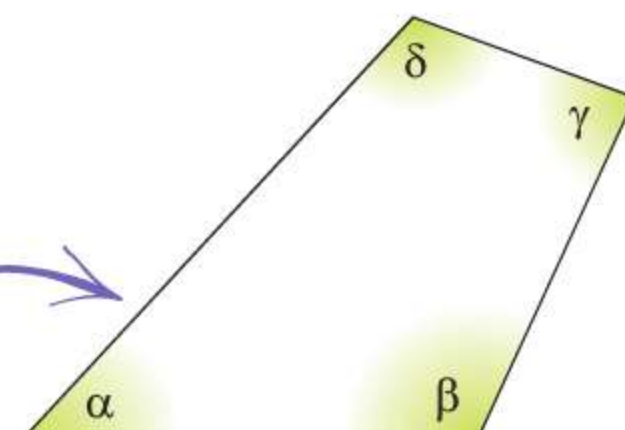


Suma miar kątów w trójkątach i czworokątach



Suma miar kątów w każdym trójkącie wynosi 180° .

Suma miar kątów w każdym czworokącie wynosi 360° .



Poćwicz przed sprawdzianem

1. Z których odcinków o podanych długościach można zbudować trójkąt?

A. 5 cm, 7 cm, 12 cm

B. 3 m 50 cm, 7 m, 1 m

C. 1 dm 5 cm, 1 dm 5 cm, 1 dm 4 cm

D. 20 mm, 25 mm, 45 mm

2. Ile wynosi obwód trójkąta równoramiennego, którego podstawa ma długość 4 cm 5 mm i którego ramię jest od niej o 35 mm dłuższe?

A. 39 cm 5 mm

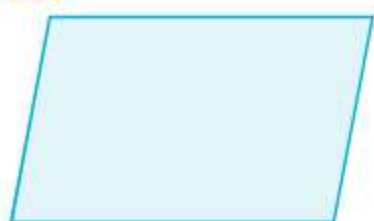
B. 8 cm

C. 20 cm 5 mm

D. 12 cm 5 mm

3. Na którym rysunku znajduje się romb?

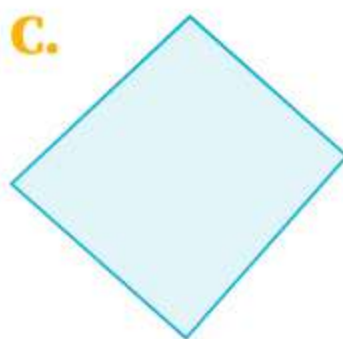
A.



B.



C.



D.



4. Wskaż wszystkie określenia dotyczące wielokąta *KLON*.

A. kwadrat

B. prostokąt

C. romb

D. trapez prostokątny

E. trapez równoramienny

F. równoległobok



5. Jedna z przekątnych rombu ma długość 18 cm, a druga jest 3 razy od niej krótsza. Ile wynosi suma długości przekątnych rombu narysowanego w skali 3 : 1?

A. 36 cm

B. 72 cm

C. 8 cm

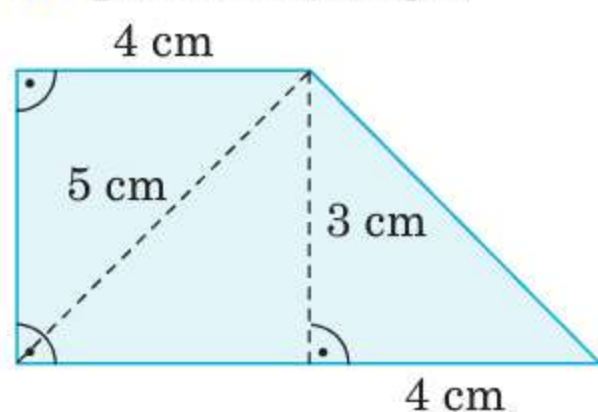
D. 24 cm

6. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). W razie potrzeby wykonaj rysunek pomocniczy.

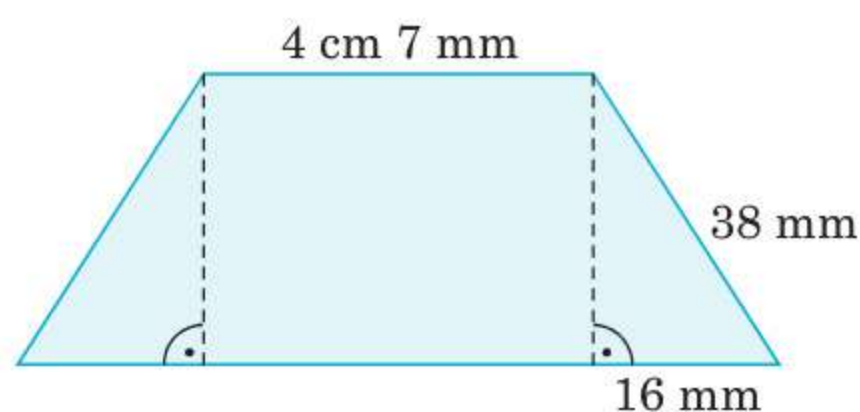
Istnieje czworokąt, który ma dwa kąty rozwarte.	P	F
W trapezie równoramiennym wszystkie kąty mogą być proste.	P	F
Sześciokąt ma dziewięć przekątnych.	P	F

7. Oblicz obwód trapezu:

a) prostokątnego,

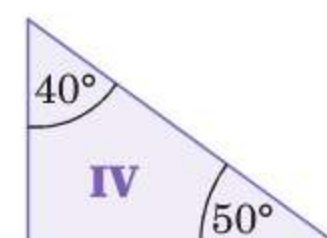
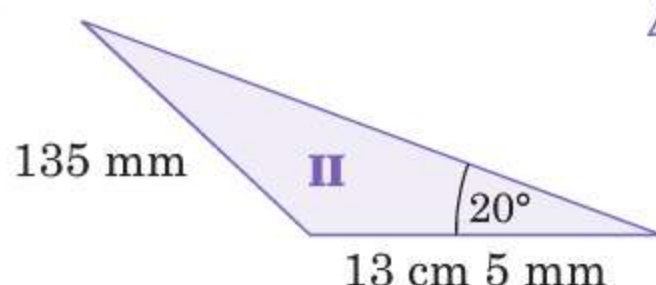
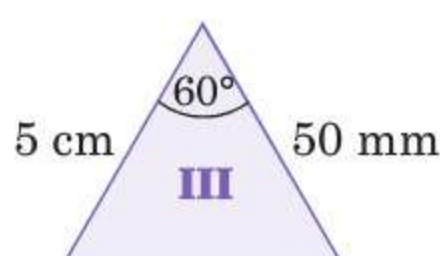
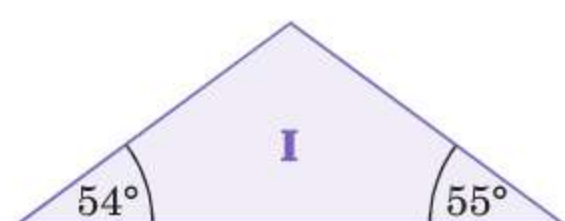


b) równoramiennego.



8. Dopasuj numery trójkątów do określeń z ramki.

równoboczny • równoramienny • różnoboczny • rozwartokątny
• prostokątny • ostrokątny

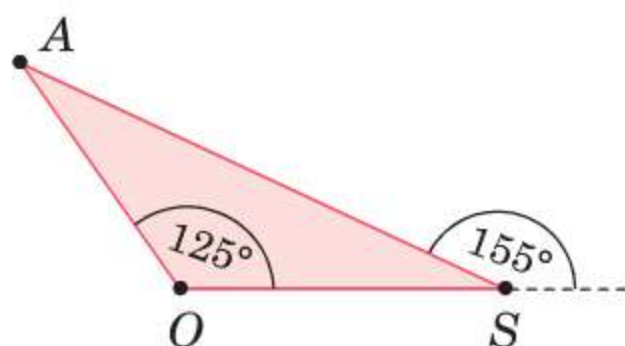


9. Krystian zbudował dwa latawce. Pierwszy miał kształt rombu o obwodzie 160 cm, drugi miał kształt równoległoboku o takim samym obwodzie jak romb. Jeden z boków tego równoległoboku był o 25 cm dłuższy od boku rombu. Wyznacz długość drugiego boku latawca w kształcie równoległoboku.

10. Podstawy trapezu prostokątnego, którego obwód wynosi 16 cm, mają długości 2 cm i 5 cm. Krótsze ramię tego trapezu jest o 2 cm dłuższe od krótszej podstawy. Jaka długość ma dłuższe ramię tego trapezu?

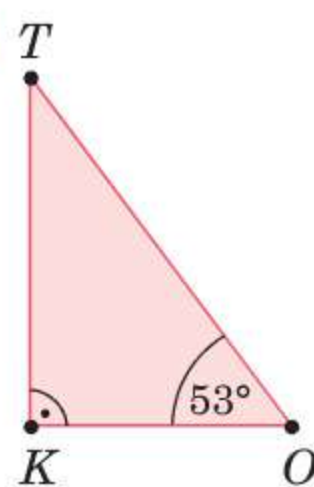
11. Podaj miary kątów wewnętrznych wielokąta.

a)



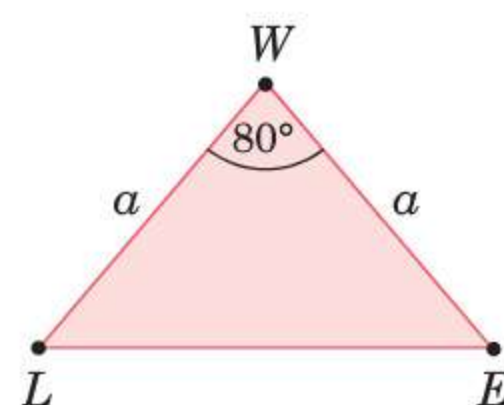
trójkąt OSA

b)



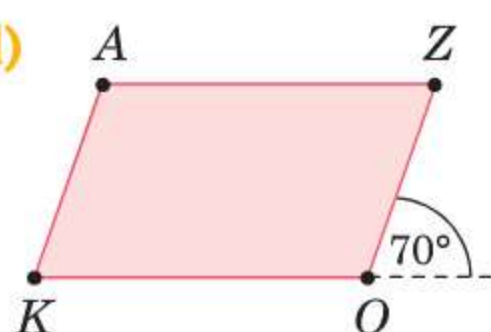
trójkąt KOT

c)



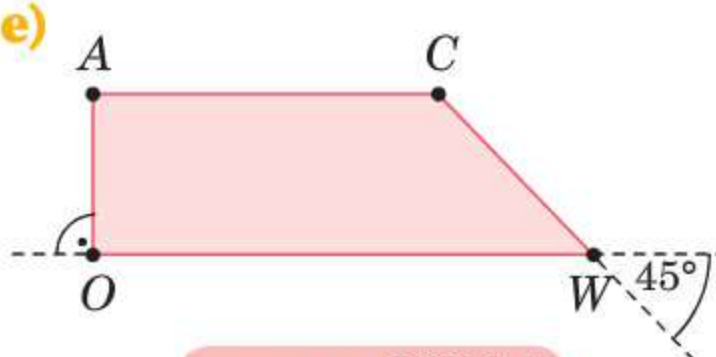
trójkąt LEW

d)



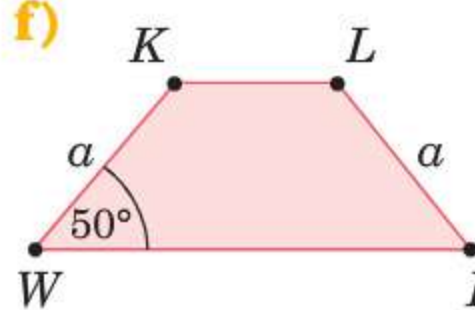
równoległobok KOZA

e)



trapez OWCA

f)



trapez WILK

12. Podłoga w salonie ma kształt kwadratu o boku długości 6,5 m. Do salonu prowadzą drzwi o szerokości 1,5 m. Pan Michał zamierza kupić listwy przypodłogowe. Jedna listwa ma długość 2,5 m i kosztuje 65 zł. Ile pan Michał zapłaci za listwy, jeśli można je ciąć podczas montażu, ale trzeba kupić tylko na sztuki?



Podejmij wyzwanie



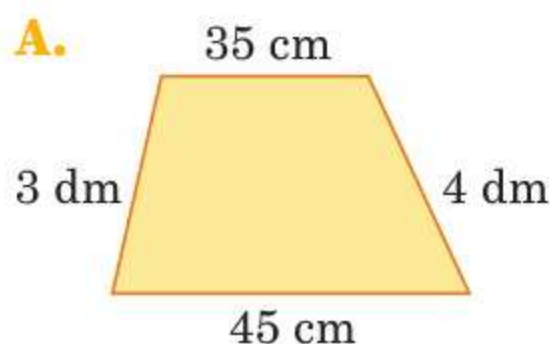
Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a poznasz sylwetkę polskiej matematyczki, która nazywana jest matką polskiej informatyki teoretycznej. Powodzenia!

1 (1917–1994) ukończyła liceum, studia muzyczne w klasie **2** oraz kurs **3**, a następnie w 1938 r. rozpoczęła studia matematyczne na Uniwersytecie Warszawskim. Po wybuchu II wojny światowej edukację kontynuowała **4**. Jej pierwsza praca magisterska spłonęła podczas powstania warszawskiego, drugą obroniła w 1945 r. W 1967 r. uzyskała tytuł naukowy **5**. W badaniach naukowych koncentrowała się na algebraicznych aspektach logiki, logice, algebrze, algorytmice, informatycznych aspektach matematyki oraz **6**. Jest autorką ponad **7** prac naukowych, książek i monografii.

- 1.** Architekt wewnątrz projektuje wystrój ściany w salonie. Mają na niej zawisnąć trzy obrazy w nietypowych kształtach: jeden w kształcie trapezu, drugi w kształcie równoległoboku i trzeci w kształcie rombu. Obrazy trzeba oprawić. Na którą ramę potrzeba najwięcej materiału?

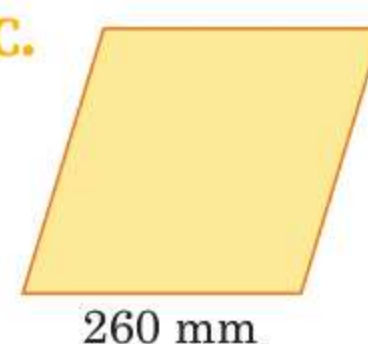
A.



B.



C.



A	B	C
Zofia Krygowska	Helena Rasiowa	Wanda Szmalew

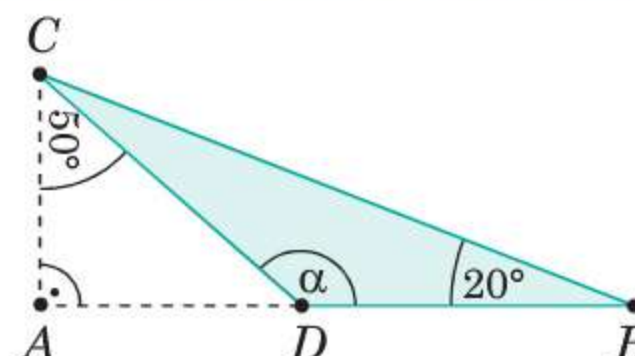
- 2.** Prostokąt i kwadrat o boku 13 dm 6 cm mają takie same obwody. Wyznacz długość dłuższego boku prostokąta, jeśli wiadomo, że krótszy bok ma 73 cm długości.

199 dm	39 dm 8 cm	19 dm 9 cm
fletu	skrzypiec	fortepianu

3. Ile różnych trójkątów można zbudować z odcinków o długościach: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm oraz 6 cm, jeśli każdy odcinek można wykorzystać tylko raz? Za każdym razem masz do dyspozycji wszystkie odcinki.

7	20	10
zarządzania i biznesu	programowania	stenografii

4. Przyjrzyj się zamieszczonemu obok rysunkowi trójkąta CDB , a następnie określ rodzaj tego trójkąta oraz miarę kąta α .



trójkąt prostokątny, 40°	trójkąt rozwartokątny, 120°	trójkąt rozwartokątny, 140°
w Instytucie Oświaty	na Uniwersytecie Latającym	na tajnych studiach

5. Na planie parku dinozaurów wykonanym w skali 1 : 500 znajduje się plac w kształcie trójkąta równobocznego przeznaczony dla tyranozaurów. Długość boku tego placu na mapie wynosi 6 cm. Ile wynosi rzeczywisty obwód tego placu?

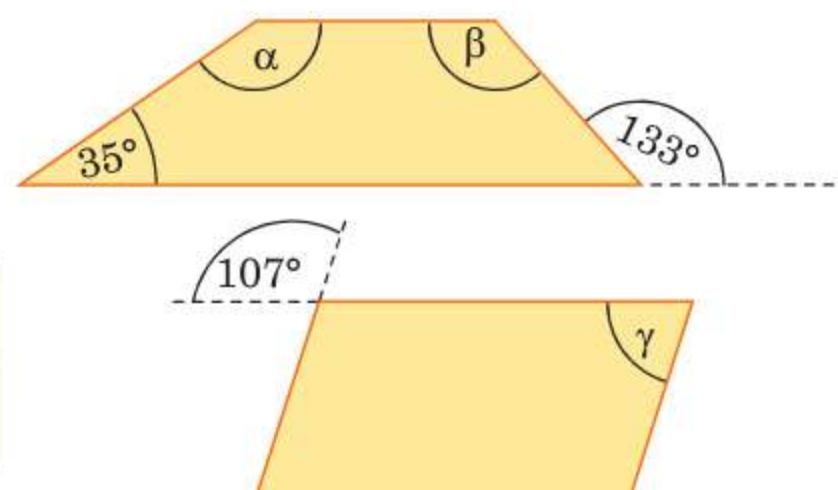
18 cm	90 m	30 m
doktor habilitowanej	profesor zwyczajnej	profesor nadzwyczajnej

6. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Przekątne w każdym rombie są tej samej długości.	P	F
Nie każdy prostokąt jest równoległobokiem.	P	F
Suma miar kątów przy jednym ramieniu trapezu jest równa 180° .	P	F
P, P, F	F, F, P	P, F, P
programowaniu	sztucznej inteligencji	robotyce

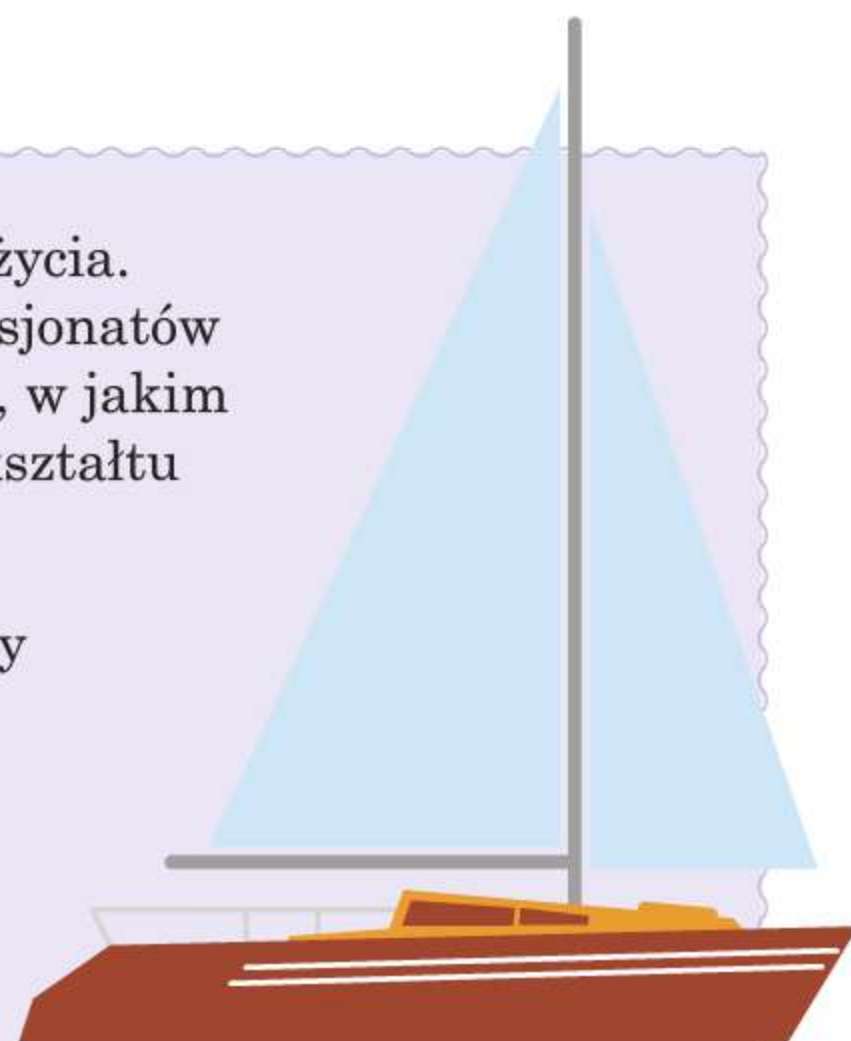
7. Na podstawie poniższych rysunków przedstawiających trapez i równoległobok oblicz wartość wyrażenia $\alpha + \beta - \gamma$.

205°	171°	9°
stu	dwustu	trzystu



Wielokąty towarzyszą nam w wielu dziedzinach życia. Trójkąty i czworokąty powinny zainteresować pasjonatów żeglarstwa, ponieważ prędkość jachtu i kierunek, w jakim płynie, zależą nie tylko od wiatru, lecz także od kształtu i powierzchni żagla.

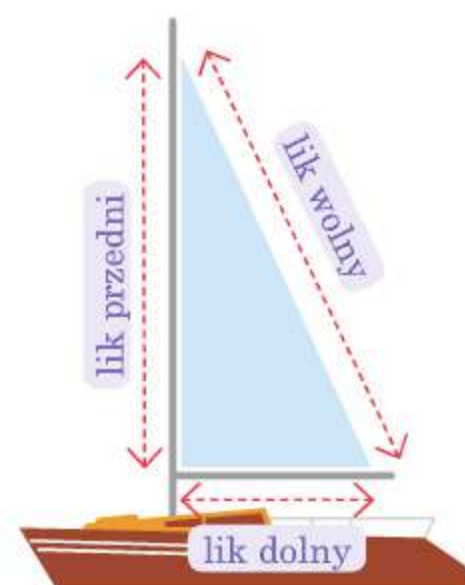
Żagiel to odpowiednio ukształtowany płat tkaniny lub innego tworzywa, rozpięty na omasztowaniu. Najczęściej ma kształt trójkąta lub zbliżony do trójkąta, ale na średnich i dużych statkach z ożaglowaniem rejowym wykorzystuje się często żagle prostokątne i trapezowe (rozpięte są pod poziomą belką zwaną reją). Spotyka się też nietypowe żagle, mające kształt nieregularnych czworokątów.



„RV Oceania” to żaglowiec badawczy Instytutu Oceanologii Polskiej Akademii Nauk, który jest obecnie największym polskim instytutem badającym zagadnienia z dziedziny fizyki, chemii, biologii i ekologii morza. Pierwotnie miał ożaglowanie rejowe parawanowe, w którym rozpięte na masztach pojedyncze żagle mają kształt zbliżony do prostokąta.



1. Podaj wymiary żagla w centymetrach, jeśli wiadomo, że: długość liku wolnego wynosi 8100 mm, lik dolny jest trzy razy krótszy od liku wolnego, a suma trzech wymiarów przedstawionych na rysunku obok wynosi 18,6 m.



2. W magazynie producenta żagli, firmy Velum, znajduje się 50 żagli w kształcie trójkąta o bokach długości 5,53 m, 4,85 m, 2,5 m oraz 75 żagli w kształcie trapezu prostokątnego o wymiarach 8587 mm $\times$ 3485 mm $\times$ 9000 mm $\times$ 870 mm. Ile metrów taśmy potrzeba na obszycie wszystkich żagli znajdujących się w magazynie?

DZIAŁ

V

W ŚWIECIE UŁAMKÓW ZWYKŁYCH



Na Ziemi żyje ponad 8 miliardów ludzi. Ponad połowa światowej populacji mieszka w Azji, a mniej niż jej dziesiąta część w Europie.

$\frac{1}{2}$ z 8 000 000 000 to 4 000 000 000.
Azję zamieszkuje ponad 4 miliardy ludzi. Ilu ludzi zamieszkuje Europę?

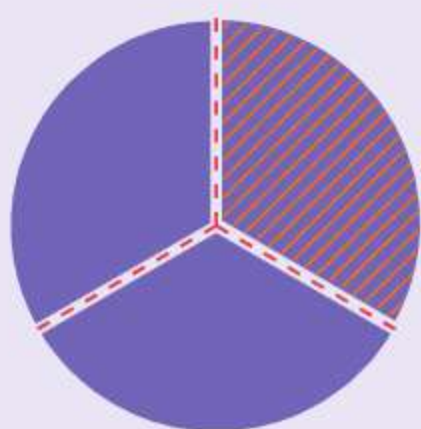


1. Ułamki zwykłe i liczby mieszane

- ▶ Jak zapisuje się ułamki zwykłe i liczby mieszane?
- ▶ Jakie ułamki nazywa się właściwymi, a jakie niewłaściwymi?
- ▶ Na czym polega włączanie i wyłączanie całości?



Analizuj!



To **koło** podzielono na **3 równe części**.

To jest **jedna część z trzech** równych części koła.

To jest **jedna trzecia** koła.

To jest $\frac{1}{3}$ koła.

Ułamek zwykły opisuje część całości podzielonej na równe części.

Na pomarańczowo zamalowano **1 część koła**.

Koło podzielono na **3 równe części**.

$$\frac{1}{3}$$

licznik

kreska ułamkowa

mianownik



licznik < **mianownik**
ułamek właściwy

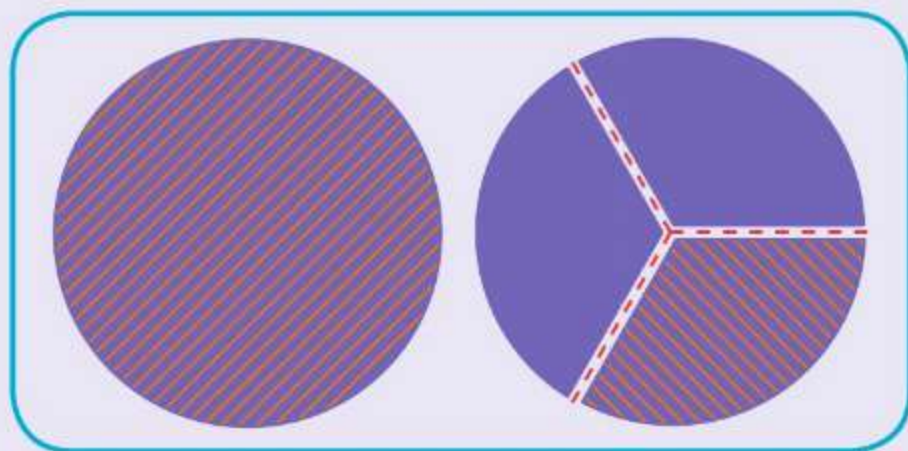


licznik > **mianownik**
ułamek niewłaściwy



licznik = **mianownik**
ułamek niewłaściwy

Liczba mieszana to liczba złożona z **części całkowitej** (całości) i **części ułamkowej** (ułamka zwykłego).



To jest **jedno całe koło** i **jedna z trzech części** takiego samego koła.
To jest **jedno koło** i **jedna trzecia koła**.
To jest $1\frac{1}{3}$ koła.

Zamiana liczby mieszanej na ułamek niewłaściwy to **włączanie całości**.

$$4\frac{1}{6} = \frac{25}{6}$$

Diagram illustrating the conversion of a mixed number to an improper fraction. A dashed arrow points from the whole number 4 to the denominator 6, and another dashed arrow points from the numerator 1 to the denominator 6. A yellow box contains the calculation $6 \cdot 4 + 1$, with an arrow pointing to the numerator 25 of the resulting fraction.

Zamiana ułamka niewłaściwego na liczbę mieszaną to **wyłączanie całości**.

$$\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$$

Diagram illustrating the conversion of an improper fraction to a mixed number. A dashed arrow points from the numerator 17 to the denominator 3, and another dashed arrow points from the denominator 3 to the denominator of the fractional part 3. A yellow box contains the calculation $17 : 3 = 5 \text{ r } 2$, with an arrow pointing to the whole number 5 and the remainder 2.

Ułamek zwykły można przedstawić **w postaci dzielenia**.

Aby podzielić **1 jabłko** między **4 dzieci**, tak aby każde dziecko dostało taką samą część jabłka, trzeba **1 jabłko podzielić na 4 równe części** i dać każdemu dziecku po $\frac{1}{4}$ jabłka.

$$1 : 4 = \frac{1}{4}$$



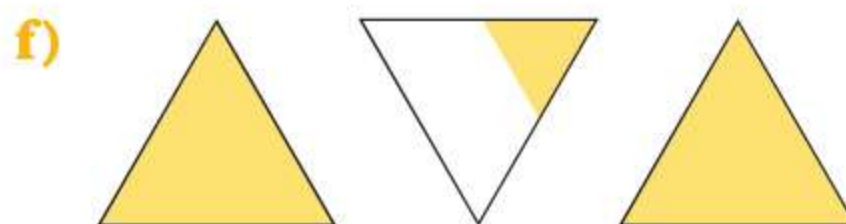
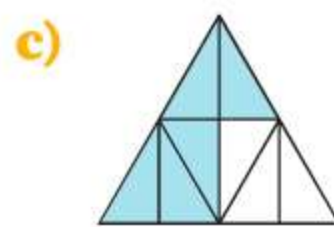
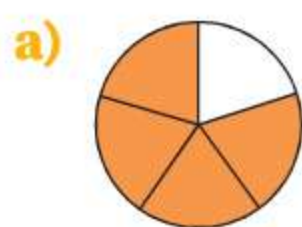
Oto składniki potrzebne do przygotowania placca z truskawkami. Czy wśród wymienionych liczb znajdują się liczby naturalne, ułamki zwykłe właściwe, ułamki zwykłe niewłaściwe, ułamki dziesiętne, liczby mieszane? Wskaż je.

- 6 jajek
- $\frac{3}{4}$ szklanki cukru
- $\frac{1}{2}$ łyżeczki aromatu waniliowego
- 2 łyżeczki proszku do pieczenia
- $\frac{3}{5}$ szklanki oleju
- $1\frac{1}{2}$ szklanki mąki
- 0,6 kg truskawek



Poćwicz!

1. Opisz rysunek za pomocą ułamka lub liczby mieszanej.



2. Na podstawie rysunku odpowiedz na pytania.

- a) Jaką część medali stanowią złote medale?
 b) Jaką część medali stanowią medale na niebieskiej wstążce, a jaką – medale na czerwonej wstążce?
 c) Jaką część medali na niebieskiej wstążce stanowią brązowe medale?
 d) Jaką część medali na czerwonej wstążce stanowią srebrne medale?



3. W opakowaniu znajduje się 15 jednakowych sztuk kredy. W jaki sposób podzielić tę kredę, aby każde z dziesięciorga dzieci otrzymało jej tyle samo? Jaką część kredy otrzyma każde dziecko? Uwaga: kredę można łamać.

4. Zamień liczby mieszane na ułamki niewłaściwe, a ułamki niewłaściwe na liczby mieszane.

a) $2\frac{4}{9}$

b) $7\frac{2}{5}$

c) $1\frac{8}{999}$

d) $\frac{15}{7}$

e) $\frac{67}{6}$

f) $\frac{23}{8}$

5. Na podstawie poniższych osi liczbowych zapisz we wskazanej kolejności litery odpowiadające podanym ułamkom oraz liczbom mieszanym, a następnie sprawdź znaczenie hasła w słowniku angielsko-polskim.

$2\frac{1}{5}$

$1\frac{4}{6}$

$4\frac{2}{7}$

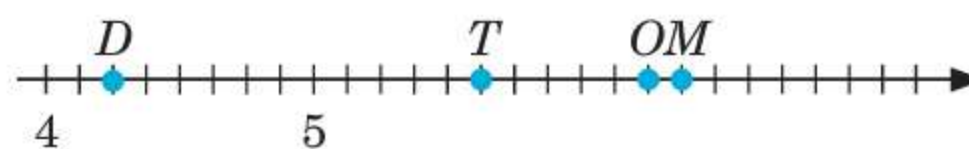
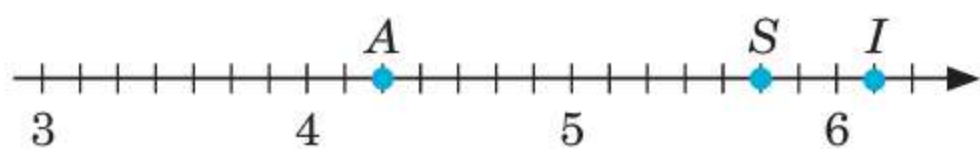
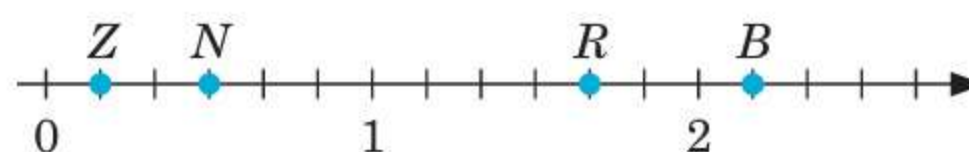
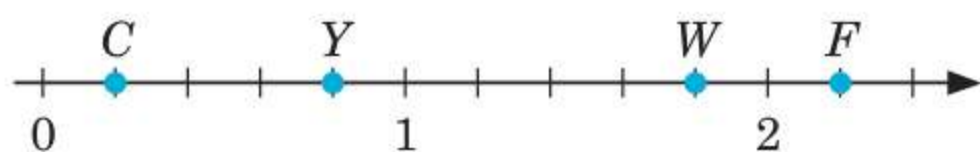
$\frac{1}{5}$

$5\frac{5}{8}$

$6\frac{1}{7}$

$6\frac{2}{8}$

$\frac{1}{2}$



6. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej wskazane liczby.

a) $\frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{10}{8}, 1\frac{3}{8}, \frac{15}{8}, 2\frac{1}{8}$

b) $\frac{5}{6}, \frac{9}{6}, 1\frac{5}{6}, \frac{18}{6}, \frac{20}{6}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}$

7. Odpowiedz na pytanie za pomocą ułamka zwykłego lub liczby mieszanej.

a) Jaka to część godziny?

20 min • 1 godz. 40 min • 2 godz. 12 min

b) Jaka to część kilograma?

30 dag • 8 kg 12 dag • 13 kg 15 g

c) Jaka to część kilometra?

100 m • 12 km 500 m • 46 km 750 m

8. Kuba i Bruno spotkali się o 15.50, aby przygotować prezentację na informatykę. Slajd tytułowy tworzyli przez $\frac{1}{6}$ godziny, pięć kolejnych slajdów – przez $1\frac{2}{5}$ godziny, a ostatni slajd – przez $\frac{1}{15}$ godziny. O której godzinie skończyli tworzyć prezentację?



9. Jaka część całego złota otrzymał Barnaba? Przedstaw odpowiedź na rysunku.



Ja wezmę $\frac{2}{3}$ całości,
Raptus $\frac{2}{3}$ tego,
co pozostało,
a Barnaba resztę.



Sprawdź, co umiesz!

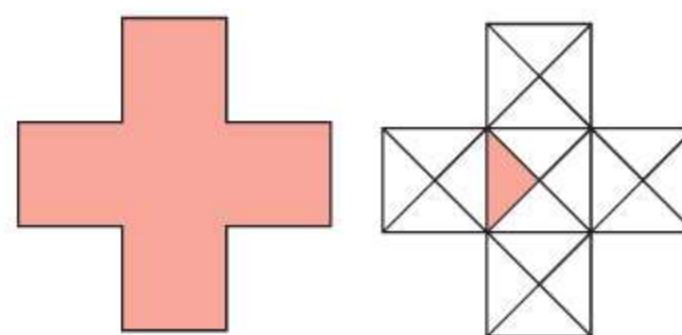
1. Wskaż liczbę, która poprawnie opisuje zamieszczony obok rysunek.

A. $1\frac{1}{19}$

B. $\frac{1}{20}$

C. $\frac{21}{20}$

D. $1\frac{1}{5}$



2. We wrześniu uczniowie klas piątych pojechali na zieloną szkołę. Wyjazd trwał od poniedziałku do piątku włącznie. Ustal, jaką część tygodnia, a jaką część września uczniowie spędzili na zielonej szkole.

3. Pani Ola o 16.05 wyszła z psem na spacer. Czy zdążyła wrócić do domu na czołówkę serwisu informacyjnego, jeśli spacer trwał $\frac{4}{5}$ godziny, a serwis zawsze rozpoczyna się o godzinie 16.50?

2. Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika

- ▶ Na czym polega rozszerzanie ułamków?
- ▶ Na czym polega skracanie ułamków?
- ▶ Jak sprowadzać ułamki do wspólnego mianownika?



Analizuj!

Pani Jagoda prowadzi wytwórnię ozdobnych mydeł. Do cięcia mydła na kostki używa specjalnej krajalnicy. Porównaj wielkości kostek mydła.

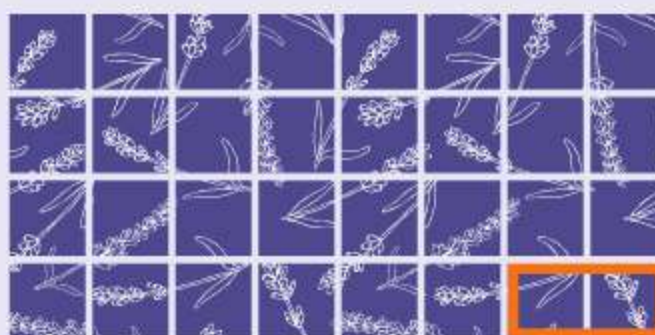
Ten blok mydła został pocięty na 16 równych kostek.

1 kostka to $\frac{1}{16}$ bloku mydła.



Taki sam blok mydła został pocięty na 32 równe kostki.

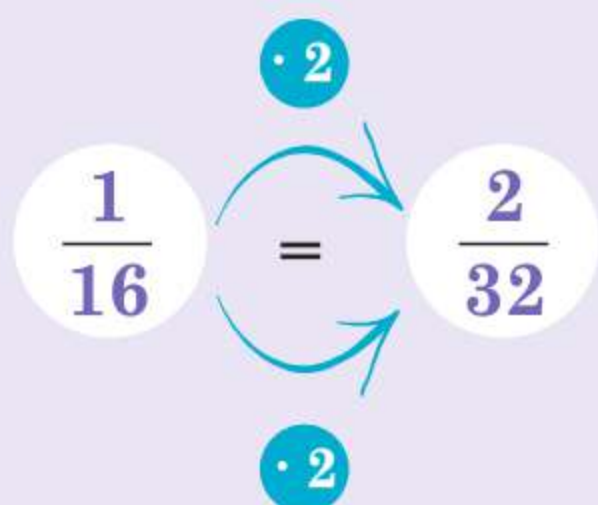
1 kostka to $\frac{1}{32}$ bloku mydła.



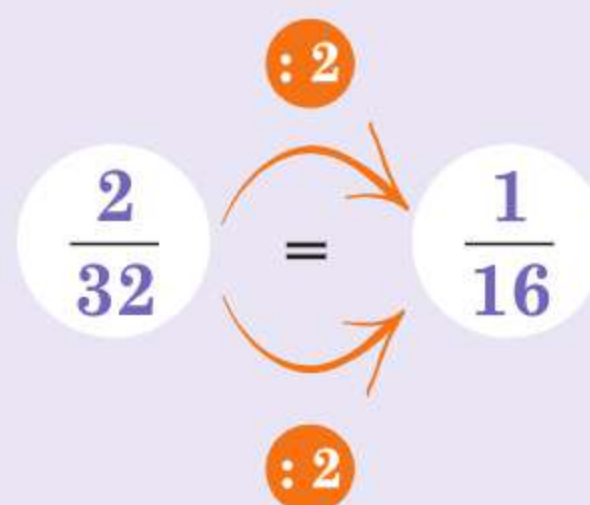
Ułamek $\frac{1}{16}$ można **rozszerzyć** do ułamka $\frac{2}{32}$, **mnożąc** licznik i mianownik przez liczbę 2.

$$\frac{1}{16} = \frac{2}{32}$$

Ułamek $\frac{2}{32}$ można **skrócić** do ułamka $\frac{1}{16}$, **dzieląc** licznik i mianownik przez liczbę 2.



Rozszerzanie i skracanie ułamka **nie zmienia** jego wartości.



Ułamki, które mają różne mianowniki, można przedstawić w postaci ułamków o tych samych mianownikach za pomocą rozszerzania lub skracania. Taką czynność nazywamy **sprowadzaniem ułamków do wspólnego mianownika**.

- 1 Wspólnym mianownikiem ułamków może być **wspólna wielokrotność ich mianowników**.

$$\frac{5}{18} \text{ i } \frac{1}{12}$$

Sposób 1 **Dowolna wielokrotność**, np. iloczyn mianowników

$$18 \cdot 12 = 216$$

$$\frac{5}{18} = \frac{5 \cdot 12}{18 \cdot 12} = \frac{60}{216}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 18}{12 \cdot 18} = \frac{18}{216}$$

Sposób 2 **Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)**

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{NWW}(18, 12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

$$18 \cdot 2 = 36$$

$$\frac{5}{18} = \frac{5 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{10}{36}$$

$$12 \cdot 3 = 36$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{3}{36}$$



Sposób 2 to lepsza metoda postępowania – **najmniejszy wspólny mianownik** pozwala operować mniejszymi liczbami.

- 2 W niektórych przypadkach wspólnym mianownikiem dwóch ułamków może być **wspólny dzielnik ich mianowników**.

$$\frac{2}{14} \text{ i } \frac{3}{21}$$

14 i 21 to wielokrotności liczby 7.

$$\frac{2 : 2}{14 : 2} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{6 : 3}{21 : 3} = \frac{2}{7}$$



Uwaga: sposób ze skracaniem można stosować tylko wtedy, gdy licznik i mianownik są podzielne przez tę samą liczbę!



Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika oznacza **rozszerzenie** lub **skrócenie** tych ułamków w taki sposób, aby otrzymać ułamki o jednakowych mianownikach.

Poćwicz!

1. O ile to możliwe, rozszerz podane ułamki:

a) do mianownika równego 60,

b) do licznika równego 36.

$$\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{6}{12}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{12}{15}$$

2. Ułamki nieskracalne to ułamki, których nie da się skrócić. Doprowadź ułamek do postaci nieskracalnej.

a) $\frac{8}{12}$

b) $\frac{9}{36}$

c) $\frac{30}{35}$

d) $\frac{36}{72}$

e) $\frac{18}{24}$

f) $\frac{21}{56}$

g) $\frac{80}{90}$

h) $\frac{200}{500}$

i) $\frac{100}{150}$

j) $\frac{230}{200}$

$$\frac{120}{420} = \frac{12^2}{42^2} = \frac{2}{7}$$



3. Jaka liczba kryje się pod znakiem ♣? Skróć lub rozszerz ułamek.

a) $\frac{16}{48} = \frac{1}{\clubsuit}$

b) $\frac{5}{9} = \frac{\clubsuit}{72}$

c) $\frac{21}{\clubsuit} = \frac{7}{20}$

d) $\frac{\clubsuit}{88} = \frac{4}{11}$

4. Przez które z liczb można skrócić podany ułamek? Skorzystaj z cech podzielności liczb naturalnych.

2 • 3 • 4 • 5 • 9 • 10

a) $\frac{105}{330}$

b) $\frac{1416}{3708}$

c) $\frac{2385}{6525}$

d) $\frac{111\ 112}{333\ 332}$

5. Morza zajmują 40 000 000 km² powierzchni Ziemi. Powierzchnia Morza Śródziemnego to 2 500 000 km², a Morza Bałtyckiego – 385 000 km². Jaka część powierzchni wszystkich mórz zajmuje Morze Śródziemne, a jaką Morze Bałtyckie? Wyraż ułamki w postaci nieskracalnej.

6. Pani Olga jest polarniczką. Na swoim koncie w serwisie fotograficznym zamieszcza zdjęcia z wypraw badawczych, w których uczestniczy. Pod ostatnimi czterema zdjęciami zgromadziła łącznie 576 polubień. Jaka część wszystkich polubień zdobyły poszczególne zdjęcia? Wyraż ułamki w postaci nieskracalnej.



★ 192



★ 162



★ 180



★ ?

7. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{1}{36}$ i $\frac{1}{18}$ może być 18.	P	F
Ułamki $\frac{4}{17}$ i $\frac{2}{78}$ są równe odpowiednio $\frac{8}{34}$ i $\frac{1}{36}$.	P	F
Ułamki $\frac{3}{15}$ i $\frac{1}{20}$ są równe odpowiednio $\frac{8}{40}$ i $\frac{2}{40}$.	P	F

8. Sprowadź podane ułamki do wspólnego mianownika.

a) $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{6}$ b) $\frac{8}{21}$ i $\frac{6}{7}$ c) $\frac{4}{11}$ i $\frac{7}{22}$ d) $\frac{13}{30}$ i $\frac{5}{6}$

9. Sprowadź podane ułamki do wspólnego mianownika.

a) $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{4}$ i $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$ d) $\frac{8}{9}, \frac{7}{18}$ i $\frac{19}{72}$

10. Sprowadź podane ułamki do wspólnego mianownika.

a) $\frac{2}{6}$ i $\frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{6}$ i $\frac{8}{9}$ c) $\frac{7}{8}$ i $\frac{11}{12}$ d) $\frac{10}{15}$ i $\frac{12}{20}$
e) $\frac{22}{25}$ i $\frac{7}{10}$ f) $\frac{1}{36}$ i $\frac{5}{8}$ g) $\frac{6}{14}$ i $\frac{3}{21}$ h) $\frac{9}{50}$ i $\frac{4}{75}$
i) $\frac{6}{10}, \frac{2}{5}$ i $\frac{8}{15}$ j) $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ i $\frac{3}{4}$ k) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ i $\frac{8}{15}$ l) $\frac{8}{40}, \frac{6}{30}$ i $\frac{4}{20}$

11. Zaznacz podane ułamki na osi liczbowej.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{3}, \frac{5}{6}$ b) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{12}$ c) $\frac{3}{6}, 1\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, 1\frac{4}{10}$ d) $13\frac{2}{3}, 12\frac{1}{2}, 13\frac{1}{9}, 12\frac{4}{6}$

Sprawdź, co umiesz!

1. Który z podanych ułamków jest nieskracalny?

A. $\frac{18}{45}$ B. $\frac{51}{90}$ C. $\frac{14}{27}$ D. $\frac{41}{82}$

2. Wskaż najmniejszy wspólny mianownik ułamków: $\frac{7}{9}, \frac{5}{6}$ i $\frac{11}{12}$.

A. 54 B. 72 C. 12 D. 36

3. Sprowadź do wspólnego mianownika ułamki $\frac{2}{7}$ i $\frac{3}{5}$ oraz $\frac{9}{21}$ i $\frac{4}{28}$.

3. Porównywanie ułamków

- ▶ Jak porównywać ułamki o takich samych mianownikach lub takich samych licznikach?
- ▶ Jak porównywać ułamki o różnych mianownikach i różnych licznikach?



Analizuj!

W szkolnym ogrodzie dydaktycznym uprawiane są m.in. zioła, warzywa, owoce, rośliny miododajne i chronione. Grządki mają jednakowe wymiary, ale są zagospodarowane w różny sposób.

5a



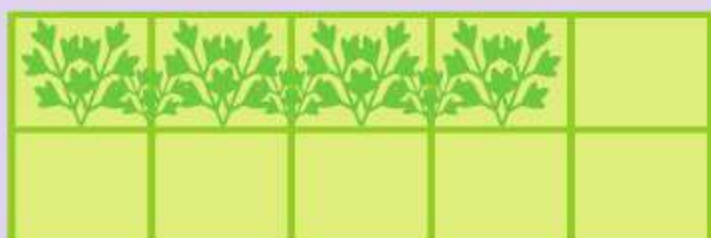
5b



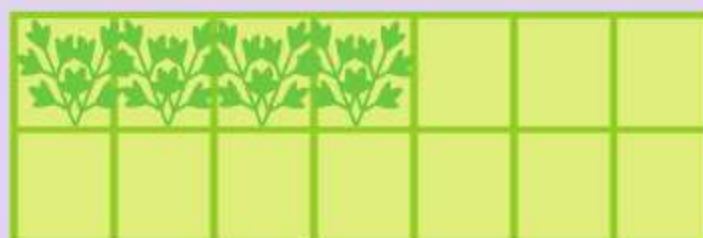
Większą część grządki zajmuje kapusta na grządce klasy 5b, ponieważ $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$.

Jeśli dwa ułamki mają **jednakowe mianowniki**, to **większy jest ten ułamek**, który ma **większy licznik**.

5c



5d

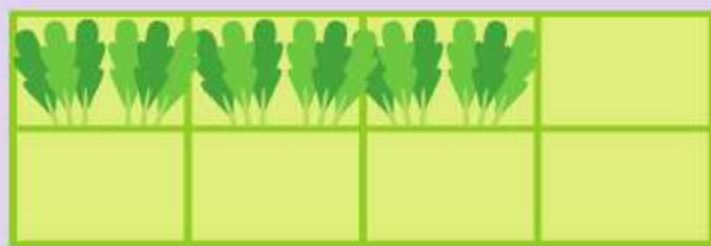


Większą część grządki zajmuje mięta na grządce klasy 5c, ponieważ $\frac{4}{10} > \frac{4}{14}$.

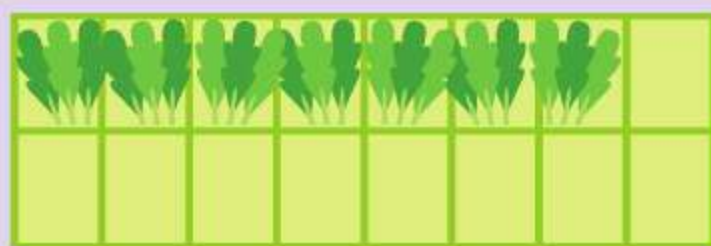
Jeśli dwa ułamki mają **jednakowe liczniki**, to **większy jest ten ułamek**, który ma **mniejszy mianownik**.

W ogrodzie dydaktycznym uprawiane są również zioła. Na której grządce zioła zajmują jej większą część?

7c



7d



$$\frac{3}{8} \quad ? \quad \frac{7}{16}$$

Sposób 1

Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika, a następnie je porównaj. Wspólny mianownik dla ułamków $\frac{3}{8}$ i $\frac{7}{16}$ to 16.

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$$

(multiplied by 2)

$$\frac{7}{16}$$

$$6 < 7, \text{ więc } \frac{6}{16} < \frac{7}{16}, \text{ czyli } \frac{3}{8} < \frac{7}{16}.$$

Sposób 2

Sprowadź ułamki do wspólnego licznika, a następnie je porównaj. Wspólny licznik dla ułamków $\frac{3}{8}$ i $\frac{7}{16}$ to 21.

$$\frac{3}{8} = \frac{21}{56}$$

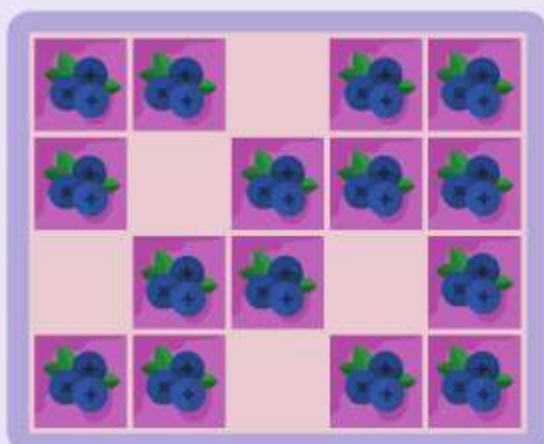
(multiplied by 7)

$$\frac{7}{16} = \frac{21}{48}$$

(multiplied by 3)

$$56 > 48, \text{ więc } \frac{21}{56} < \frac{21}{48}, \text{ czyli } \frac{3}{8} < \frac{7}{16}.$$

Na szkolnym kiermaszu wiosennym sprzedawano dwa ciasta: jagodowe i truskawkowe. Ciasta zostały upieczone na jednakowych blachach i podzielone na równe kawałki. Na rysunku poniżej pokazano, ile ciasta zostało po pierwszej godzinie kiermaszu. Którego ciasta sprzedano więcej?



Poćwicz!

1. Porównaj podane liczby. Użyj znaku $<$, $>$ lub $=$.

a) $1\frac{3}{5}$ i $\frac{4}{5}$

b) $3\frac{10}{17}$ i $6\frac{1}{17}$

c) $\frac{4}{15}$ i $\frac{11}{15}$

d) $\frac{7}{9}$ i $\frac{7}{13}$

e) $9\frac{5}{23}$ i $9\frac{3}{23}$

f) $2\frac{6}{7}$ i $2\frac{6}{13}$

g) $\frac{17}{10}$ i $1\frac{7}{10}$

h) $\frac{18}{5}$ i $\frac{9}{4}$



Czy pamiętasz? W przypadku liczb mieszanych najpierw porównujemy całości, a potem – jeśli całości są takie same – części ułamkowe.

2. Sprowadź części ułamkowe do wspólnego mianownika lub licznika, a następnie porównaj podane liczby. Użyj znaku $<$, $>$ lub $=$.

a) $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{8}$

b) $\frac{5}{6}$ i $\frac{6}{8}$

c) $\frac{4}{9}$ i $\frac{2}{6}$

d) $1\frac{6}{10}$ i $1\frac{4}{5}$

e) $6\frac{3}{5}$ i $6\frac{4}{7}$

f) $12\frac{10}{13}$ i $12\frac{20}{27}$

g) $2\frac{7}{8}$ i $2\frac{10}{12}$

h) $9\frac{8}{14}$ i $9\frac{25}{35}$

3. Bruno i Pola czytają książkę *Zwiadowcy. Ruiny Gorlanu*. Bruno przeczytał już $\frac{6}{7}$ całej książki, a Pola – $\frac{7}{9}$. Które z nich przeczytało więcej?

4. W szkółce leśnej, którą prowadzi pani Maria, rosną sosny, dęby i topole. Sosny stanowią $\frac{2}{5}$ wszystkich zasadzonych drzew, dęby – $\frac{9}{40}$, a topole – $\frac{3}{8}$. Których drzew w szkółce pani Marii rośnie najwięcej, a których najmniej?

5. Zapoznaj się ze wskazówką Poli, a następnie ustal, czy podane ułamki są większe, mniejsze czy równe $\frac{1}{2}$.

a) $\frac{5}{9}$

b) $\frac{12}{30}$

c) $\frac{18}{37}$

d) $\frac{21}{42}$

e) $\frac{11}{21}$

f) $\frac{35}{73}$

g) $\frac{34}{68}$



Jeśli licznik ułamka jest mniejszy niż połowa jego mianownika, to ten ułamek jest mniejszy od $\frac{1}{2}$. Jeśli licznik ułamka jest większy niż połowa jego mianownika, to ten ułamek jest większy od $\frac{1}{2}$.

6. Kasia i Hania przygotowują się do olimpiady z matematyki. Kasia rozwiązała 24 zadania z zestawu 49 zadań, a Hania – 27 zadań z zestawu 53 zadań. Jaką część swojego zestawu rozwiązała każda z dziewcząt? Która z dziewcząt rozwiązała większą część swojego zestawu zadań?

7. Białą kartkę podzielono na równe części i zamalowano różnymi kolorami. Na zielono zamalowano $\frac{1}{6}$ kartki, na niebiesko $-\frac{3}{14}$, a na czerwono $-\frac{5}{21}$. Która z części kartki jest największa, a która najmniejsza: biała, zielona, niebieska czy czerwona?

8. Zapoznaj się z informacją z ramki, a następnie porównaj ułamki.

Który z ułamków jest większy: $\frac{7}{9}$ czy $\frac{5}{7}$?

Do 1 brakuje $\frac{2}{9}$.

Do 1 brakuje $\frac{2}{7}$.

$\frac{2}{9} < \frac{2}{7}$, więc ułamek $\frac{7}{9}$ znajduje się bliżej 1, zatem $\frac{7}{9} > \frac{5}{7}$.

a) $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$

b) $\frac{6}{7}$ i $\frac{9}{10}$

c) $\frac{11}{12}$ i $\frac{4}{5}$

d) $\frac{8}{10}$ i $\frac{11}{13}$

e) $\frac{7}{10}$ i $\frac{8}{11}$

f) $\frac{24}{27}$ i $\frac{15}{18}$

g) $\frac{83}{90}$ i $\frac{60}{67}$

h) $\frac{199}{110}$ i $\frac{190}{201}$

9. W listopadzie pewien model roweru oferowano w sklepach Damka, Góral i Składak po tej samej cenie. W grudniu w sklepie Damka cenę tego roweru obniżono o $\frac{2}{3}$, w sklepie Góral $-\frac{5}{8}$, a w sklepie Składak $-\frac{5}{12}$. W którym sklepie cena roweru po obniżce była najniższa, a w którym najwyższa?

10. Podaj sześć ułamków większych od $\frac{3}{5}$, ale mniejszych od $\frac{4}{5}$.

Sprawdź, co umiesz!

1. Porównaj podane liczby.

a) $\frac{5}{31}$ i $\frac{5}{40}$

b) $\frac{9}{16}$ i $\frac{11}{16}$

c) $\frac{1}{2}$ i $\frac{14}{30}$

d) $1\frac{7}{8}$ i $1\frac{5}{9}$

e) $5\frac{4}{7}$ i $5\frac{5}{6}$

2. Uporządkuj ułamki w ramce rosnąco.

$\frac{5}{12}$ • $\frac{1}{2}$ • $3\frac{1}{7}$ • $\frac{1}{14}$ • $\frac{8}{11}$ • $\frac{5}{14}$

3. W ten weekend Cezary ćwiczył rowerowe triki w skateparku, grał online w ulubioną grę fabularną i przygotowywał się do sprawdzianu z matematyki. Na co poświęcił najwięcej czasu, a na co najmniej?

$\frac{2}{5}$ czasu 

$\frac{2}{9}$ czasu 

$\frac{2}{7}$ czasu 

4. Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach

- ▶ Jak dodawać i odejmować ułamki o jednakowych mianownikach?
- ▶ Jak dodawać i odejmować liczby naturalne oraz ułamki?
- ▶ Jak dodawać i odejmować liczby mieszane oraz ułamki o jednakowych mianownikach?



Analizuj!

Kuba i Cezary zamówili pizzę z salami i oliwkami. Kuba zjadł $\frac{3}{8}$ całej pizzy, a Cezary $-\frac{1}{8}$. Jaką część pizzy chłopcy zjedli łącznie?

- 1 Przepisz mianownik.
- 2 Dodaj liczniki.
- 3 Skróć ułamek.

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$



Chłopcy zamówili też $\frac{3}{4}$ l soku truskawkowego i $1\frac{3}{4}$ l soku pomarańczowego. Ile litrów soku zamówili łącznie?

- 1 Dodaj całości.
- 2 Przepisz mianownik.
- 3 Dodaj liczniki.
- 4 Wyłącz całości.
- 5 Skróć część ułamkową.

$$\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4} = 1\frac{6}{4} = 2\frac{2}{4} = 2\frac{1}{2}$$



Podczas kiermaszu sprzedawałam $4\frac{2}{3}$ kg ciastek owsianych i $3\frac{2}{3}$ kg ciastek bakaliowych. Ile kilogramów ciastek sprzedawałam łącznie?



Mama upiekła 3 jednakowe tarty ze szpinakiem. Każdą z nich pokroiła na 12 równych kawałków. Na obiad zjadłyśmy łącznie 5 kawałków tarty. Ile tarty zostało?



- 1 Zamień jedną całość na ułamek niewłaściwy.
- 2 Odejmij całości.
- 3 Przepisz mianownik.
- 4 Odejmij liczniki.

$$3 - \frac{5}{12} = 2\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = 2\frac{7}{12}$$

Zamień jedną całość na $\frac{12}{12}$.

Potem, na kolację, mama, tata i ja zjedliśmy po 2 kawałki tarty. Ile tarty zostało?

- 1 Odejmij całości.
- 2 Przepisz mianownik.
- 3 Odejmij liczniki.

$$2\frac{7}{12} - \frac{6}{12} = 2\frac{1}{12}$$

Później mama odłożyła dla dziadków $1\frac{7}{12}$ tarty. Ile tarty zostało?

- 1 Zamień jedną całość na ułamek niewłaściwy.
- 2 Odejmij całości.
- 3 Przepisz mianownik.
- 4 Odejmij liczniki.
- 5 Skróć część ułamkową.

$$2\frac{1}{12} - 1\frac{7}{12} = 1\frac{13}{12} - 1\frac{7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Zamień jedną całość na $\frac{12}{12}$.

Na szkolny kiermasz przygotowano $15\frac{1}{4}$ l lemoniady. Ile litrów lemoniady sprzedano, jeśli na koniec kiermaszu zostało jej tylko $3\frac{3}{4}$ l?



Poćwicz!

1. Oblicz. Jeśli to możliwe, w wyniku wyłącz całości i skróć część ułamkową.

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$

b) $\frac{1}{9} + \frac{5}{9}$

c) $\frac{13}{15} - \frac{8}{15}$

d) $1 - \frac{3}{19}$

e) $3\frac{1}{8} + 2\frac{3}{8}$

f) $5\frac{1}{5} + 1\frac{4}{5}$

g) $11 - 7\frac{7}{16}$

h) $10\frac{9}{10} - 5\frac{7}{10}$



2. Oblicz. Aby poznać hasło, przepisuj do zeszytu tylko te litery, do których nie pasuje żaden z uzyskanych wyników.

a) $\frac{8}{11} + \frac{6}{11}$

b) $3\frac{6}{7} + 8$

c) $\frac{4}{5} + 1\frac{1}{5}$

d) $4\frac{3}{8} + 2\frac{5}{8}$

e) $4 - \frac{1}{4}$

f) $10 - \frac{9}{30}$

g) $2\frac{3}{10} + 3\frac{9}{10}$

h) $1\frac{13}{20} + 5\frac{17}{20}$

i) $3\frac{1}{8} - \frac{5}{8}$

j) $8\frac{2}{15} - 4\frac{7}{15}$

k) $14\frac{1}{36} - 2\frac{7}{36}$

l) $1000\frac{7}{18} - 999\frac{11}{18}$

m) $75 - \left(5\frac{3}{7} + 14\frac{1}{7}\right)$

n) $13\frac{3}{4} - \left(4\frac{1}{4} - 1\frac{3}{4}\right)$

o) $3\frac{1}{100} - \left(1\frac{99}{100} + \frac{9}{100}\right)$

2	$6\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	$3\frac{3}{4}$	$\frac{13}{19}$	$4\frac{1}{2}$	$11\frac{6}{7}$	$3\frac{1}{3}$	$7\frac{1}{2}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{7}{9}$	$5\frac{1}{2}$
N	M	F	I	O	K	E	A	D	S	Ż	Z
$2\frac{1}{2}$	$\frac{11}{9}$	$55\frac{3}{7}$	$11\frac{5}{6}$	$1\frac{3}{11}$	$9\frac{7}{10}$	7	$1\frac{7}{100}$	$11\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{2}{3}$	$\frac{93}{100}$
A	A	W	Ł	P	I	Ż	R	A	A	D	E

3. Przerysuj kwadrat do zeszytu i uzupełnij go ułamkami nieskracalnymi lub liczbami naturalnymi tak, aby był on kwadratem magicznym.

a)

$\frac{4}{10}$	$\frac{9}{10}$	
	$\frac{5}{10}$	
$\frac{8}{10}$		$\frac{6}{10}$

b)

$\frac{7}{12}$		$\frac{5}{12}$
		$\frac{6}{12}$
		$\frac{1}{12}$

c)

$\frac{4}{15}$		
$\frac{3}{15}$	$\frac{5}{15}$	
$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	

4. Seans składa się z bloku reklam i zwiastunów filmowych oraz projekcji filmu.

Seans rozpoczął się o godzinie 18.35, trwał $2\frac{1}{5}$ godziny i poprzedził go blok reklam trwający $\frac{2}{5}$ godziny.

a) Jaka długość ma film?

b) O której godzinie rozpoczął się film?

$\frac{1}{5}$ godziny to 60 min : 5,
czyli 12 min.



5. Cezary postanowił zapisywać, ile godzin dziennie korzysta z telefonu.

 dzień tygodnia	pon.	wt.	śr.	czw.	pt.	sob.	niedz.
 liczba godzin	$1\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$1\frac{2}{5}$

- a) Ile godzin łącznie korzystał Cezary z telefonu w sobotę i niedzielę? Ile to minut?
- b) O ile godzin więcej Cezary korzystał z telefonu w dni nauki niż w weekend?

6. Zapoznaj się z listą zakupów pani Janiny i odpowiedz na pytania.

- a) Ile kilogramów ważyły zakupy pani Janiny? O ile kilogramów truskawki były cięższe od marchewek?
- b) Wytrzymałość torby wynosi $9\frac{1}{2}$ kg. Czy można zapakować do niej całe zakupy pani Janiny? Uzasadnij swoją odpowiedź.
- c) Ile ważyłyby zakupy pani Janiny, gdyby nie udało jej się kupić marchewki? Czy wówczas mogłaby je spakować do torby?



7. Zastąp ♥ znakami – lub +, tak aby równość była prawdziwa.

$$100 \heartsuit \left[10\frac{1}{9} \heartsuit \left(3\frac{7}{9} \heartsuit 4\frac{5}{9} \right) \right] = 49\frac{1}{9} \heartsuit 49\frac{1}{9}$$

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $7\frac{4}{7} + 2\frac{5}{7}$ b) $20\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}$ c) $6\frac{2}{9} - \left(1\frac{8}{9} + 2\frac{4}{9} \right)$

2. Samica kukanga waży $\frac{427}{1000}$ kg, samiec – $\frac{420}{1000}$ kg, a każde z ich czworga młodych jest o $\frac{20}{1000}$ kg lżejsze od samca. Ile waży ta rodzina kukangów?



3. We wtorki cukiernia Łasuch realizuje zamówienia na miodowe pierniczki.

W pojemniku znajduje się $10\frac{1}{5}$ kg miodu. Do przygotowania zamówienia nr 1 potrzeba $1\frac{3}{5}$ kg miodu, do przygotowania zamówienia nr 2 – $1\frac{4}{5}$ kg, a do przygotowania zamówienia nr 3 – tylko $\frac{4}{5}$ kg. Ile miodu zostanie w pojemniku po zrealizowaniu tych trzech zamówień?

5. Dodawanie i odejmowanie ułamków o różnych mianownikach

- ▶ Jak dodawać i odejmować ułamki o różnych mianownikach?
- ▶ Jak dodawać i odejmować liczby mieszane oraz ułamki o różnych mianownikach?
- ▶ Jak dodawać i odejmować liczby mieszane, których części ułamkowe mają różne mianowniki?



Analizuj!

Aby dodać lub odjąć ułamki **o różnych mianownikach**, trzeba sprowadzić ułamki do **wspólnego mianownika**. Potem należy postępować tak samo jak przy dodawaniu lub odejmowaniu ułamków o jednakowych mianownikach.

Podczas szkolnej wycieczki uczniowie spędzili 5 godzin w parku rozrywki. Pola jeździła na różnych karuzelach przez $\frac{3}{5}$ godziny, a potem jeszcze przez $\frac{7}{10}$ godziny. Ile godzin łącznie Pola korzystała z tych atrakcji? Jak to obliczyć?

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{10} = \frac{6}{10} + \frac{7}{10} = \frac{13}{10} = 1\frac{3}{10}$$

$$\text{NWW}(5, 10) = 2 \cdot 5 = 10$$

$$\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$

Pola korzystała z karuzeli $1\frac{3}{10}$ godziny.



Bruno jeździł dwoma kolejkami górskimi. Pierwsza przejażdżka trwała $6\frac{2}{3}$ minuty, a druga – $5\frac{1}{5}$ minuty. Ile minut Bruno korzystał z tych atrakcji?

$$6\frac{2}{3} + 5\frac{1}{5} = 6\frac{10}{15} + 5\frac{3}{15} = 11\frac{13}{15}$$

$$\text{NWW}(3, 5) = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{3}{15}$$

Bruno korzystał z kolejek górskich $11\frac{13}{15}$ minuty.



Zosia poszła do kina 6D. Obejrzała dwa filmy: pierwszy trwał $\frac{5}{6}$ godziny, a drugi $\frac{3}{4}$ godziny. Ile godzin Zosia spędziła na oglądaniu filmów w kinie 6D?

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12} + \frac{9}{12} = \frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$$

$$\frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$$

$$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

Zosia spędziła na oglądaniu filmów w kinie 6D $1\frac{7}{12}$ godziny.



Cezary spędził trochę czasu w hali wspinaczkowej. Na zielonej ścieżce pokonał $1\frac{1}{5}$ m, na niebieskiej – $1\frac{1}{2}$ m, na żółtej – $\frac{2}{3}$ m, a na najtrudniejszej czerwonej ścieżce – tylko $\frac{3}{10}$ m. Jaki łączny dystans pokonał Cezary?

$$1\frac{1}{5} + 1\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} = 1\frac{6}{30} + 1\frac{15}{30} + \frac{20}{30} + \frac{9}{30} = 2\frac{50}{30} = 3\frac{20}{30} = 3\frac{2}{3}$$

$$\frac{1 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{6}{30}$$

$$\frac{1 \cdot 15}{2 \cdot 15} = \frac{15}{30}$$

$$\frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30}$$

$$\frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{9}{30}$$

Cezary pokonał łącznie $3\frac{2}{3}$ m.

Oblicz. Jeśli to możliwe, w wyniku wyłącz całości i skróć część ułamkową.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = ? \quad \cdot \quad 1\frac{5}{6} + \frac{1}{2} = ? \quad \cdot \quad 2\frac{1}{12} + 4\frac{3}{8} = ?$$



Z okazji urodzin Kuba pojechał z rodzicami do parku wodnego. Rodzice kupili karnety uprawniające ich do korzystania z wszystkich atrakcji parku. Po zabawach w strefie basenowej Kuba miał do wykorzystania jeszcze $3\frac{1}{3}$ godziny. Na dzikiej rzece spędził $\frac{1}{6}$ godziny. Ile godzin zostało w karnecie?

$$3\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 3\frac{2}{6} - \frac{1}{6} = 3\frac{1}{6}$$

$$\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

Pozostało $3\frac{1}{6}$ godziny.



Zaraz potem, o godzinie 14.00, Kuba poszedł z rodzicami na obiad. W restauracji spędzili $\frac{3}{8}$ godziny. Ile godzin zostało w karnecie?

$$3\frac{1}{6} - \frac{3}{8} = 3\frac{4}{24} - \frac{9}{24} = 2\frac{28}{24} - \frac{9}{24} = 2\frac{19}{24}$$

$$\frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{4}{24}$$

$$\frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}$$

Pozostało $2\frac{19}{24}$ godziny.



Po obiedzie i odpoczynku, który trwał $\frac{11}{24}$ godziny, Kuba spędził $1\frac{1}{12}$ godziny w strefie tuneli i labiryntów. Ile godzin zostało w karnecie?

$$2\frac{19}{24} - \frac{11}{24} - 1\frac{1}{12} = 2\frac{8}{24} - 1\frac{1}{12} = 2\frac{4}{12} - 1\frac{1}{12} = 1\frac{3}{12} = 1\frac{1}{4}$$

Odejmij liczby, których części ułamkowe mają jednakowe mianowniki.

Srowadź ułamki do tych samych mianowników.

Pozostało $1\frac{1}{4}$ godziny.

Kuba chciałby spędzić jeszcze półtorej godziny w strefie zjeżdżalni. Czy wystarczy mu czasu na tę aktywność?



Poćwicz!

1. Oblicz. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{10} + \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$

c) $\frac{4}{15} - \frac{1}{5}$

d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$

e) $\frac{3}{5} + \frac{5}{7}$

f) $\frac{4}{9} + \frac{3}{4}$

g) $6\frac{7}{9} - \frac{1}{5}$

h) $1\frac{7}{8} - \frac{2}{3}$

i) $4\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$

j) $\frac{4}{25} + 7\frac{3}{10}$

k) $6\frac{15}{16} - 5\frac{5}{24}$

l) $3\frac{1}{12} - 1\frac{1}{8}$

m) $3\frac{5}{8} + 7\frac{1}{16}$

n) $1\frac{13}{20} + 2\frac{27}{50}$

o) $3\frac{1}{6} - 1\frac{2}{9}$

p) $6\frac{1}{4} - 3\frac{7}{10}$

Wynik jest przedstawiony w najprostszej postaci, jeśli całości są wyłączone, a części ułamkowej lub ułamka nie da się skrócić.



2. Agata zmieszała $1\frac{1}{4}$ kg cukierków czekoladowych oraz $1\frac{3}{5}$ kg cukierków owocowych. Ile kilogramów mieszanki uzyskała?

3. Ada i Iga uczą się jeździć konno. Lekcje Igi trwają $1\frac{1}{6}$ godziny. Lekcje Ady są o $\frac{1}{3}$ godziny krótsze. Ile godzin trwają lekcje Ady?

4. Do pełnego naładowania smartfona Kasi potrzeba $2\frac{5}{12}$ godziny, a do pełnego naładowania smartwatcha (czytaj: smartłocza) – $1\frac{5}{24}$ godziny.

a) Jak długo będą ładowały się te dwa urządzenia, jeśli Kasia dysponuje tylko jedną ładowarką i podłączy smartwatch tuż po naładowaniu smartfona?

b) O ile więcej potrzeba czasu, aby naładować smartfon niż smartwatch?

5. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{15}$

b) $\frac{6}{7} - \frac{1}{3} + \frac{2}{21}$

c) $1\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

d) $3\frac{1}{4} - \left(\frac{5}{6} + \frac{7}{8}\right)$

e) $5\frac{1}{3} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right)$

f) $5\frac{7}{10} - \frac{4}{5} + 1\frac{4}{20}$

g) $10\frac{3}{7} - \left(2\frac{1}{13} - \frac{4}{7}\right)$

h) $2 - \frac{5}{9} + 5\frac{7}{55} + 1\frac{5}{9}$

i) $9 - \left[1\frac{1}{3} - \left(3\frac{7}{8} - 3\frac{3}{4}\right)\right]$

6. Do hurtowni przywieziono 100 kg truskawek. Pierwszy klient kupił $5\frac{1}{2}$ kg truskawek, drugi – $13\frac{3}{4}$ kg, trzeci – $17\frac{1}{3}$ kg, a czwarty – aż $26\frac{7}{9}$ kg. Ile kilogramów truskawek sprzedano? Ile kilogramów truskawek pozostało?



7. Kuba pomyślał o pewnej liczbie. Następnie dodał do niej $2\frac{1}{2}$, od wyniku odjął $2\frac{1}{3}$, następnie dodał $4\frac{5}{6}$ i na końcu odjął 5. Okazało się, że w ten sposób otrzymał liczbę, o której pomyślał na początku. Wyjaśnij, na czym polegała sztuczka Kuby.



8. Suma trzech liczb wynosi $3\frac{7}{8}$. Wyznacz te liczby, jeśli wiadomo, że suma pierwszej i trzeciej liczby jest równa $2\frac{3}{8}$, a suma pierwszej i drugiej liczby to $2\frac{3}{4}$.

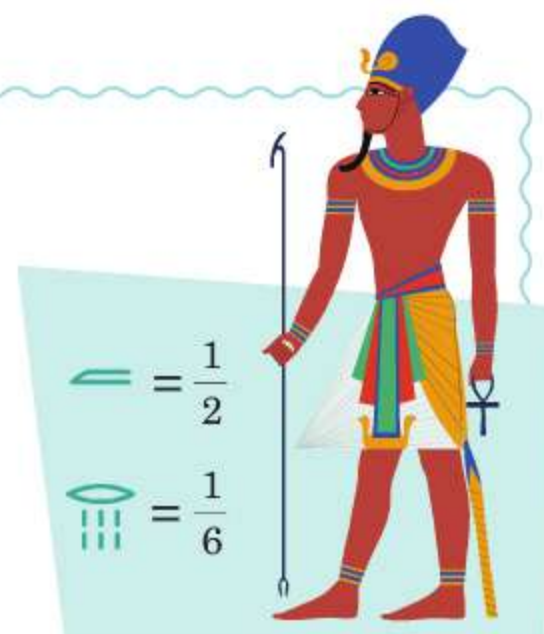


A to ciekawe

Do zapisywania ułamków typu $\frac{2}{3}$ starożytni Egipcjanie używali **ułamków prostych**, czyli ułamków zwykłych, których licznik jest równy 1.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \quad \frac{7}{10} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

Zapisz w postaci sumy ułamków prostych liczby: $\frac{9}{20}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ oraz 1.



Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $\frac{1}{32} + \frac{3}{8}$

b) $\frac{11}{14} - \frac{3}{4}$

c) $5\frac{3}{8} + 1\frac{9}{10}$

d) $15\frac{1}{15} - 10\frac{1}{10}$

2. W wybranych przez Basię liniach lotniczych masa bagażu rejestrowanego w cenie biletu wynosi 20 kg. Przed podróżą samolotem Basia zważyła swoje walizki. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Walizki Basi mieszczą się w limicie.	P	F
Jedna z walizek jest o $1\frac{1}{6}$ kg lżejsza od drugiej.	P	F



3. Pani Weronika trenuje chód sportowy. W ciągu kolejnych 5 dni przebyła łącznie 100 km. Ile kilometrów pokonała ostatniego dnia, jeśli w kolejne dni przeszła: $19\frac{1}{2}$ km, $20\frac{1}{3}$ km, $18\frac{5}{6}$ km i $20\frac{7}{9}$ km?

6. Mnożenie ułamków

- ▶ Jak mnożyć ułamek zwykły przez liczbę naturalną?
- ▶ Jak mnożyć dwa ułamki zwykłe?
- ▶ Jak mnożyć ułamek zwykły przez liczbę mieszaną?



Odkrywaj!

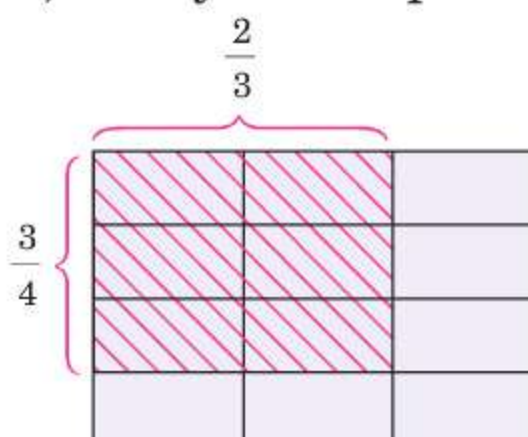
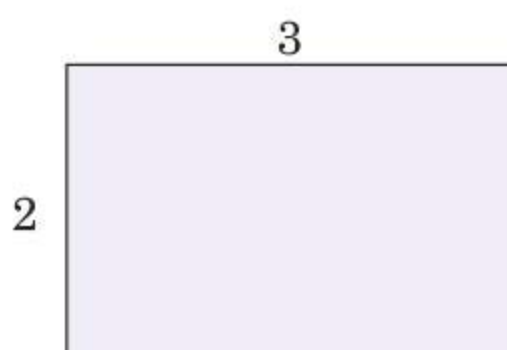
1. Na ladzie ustawiono kartoniki z napojami migdałowym i czekoladowym.



- Ile kartoników napoju migdałowego ustawiono na ladzie? Ile litrów napoju łącznie znajduje się w tych kartonikach?
- Ile kartoników napoju czekoladowego ustawiono na ladzie? Ile litrów napoju łącznie znajduje się w tych kartonikach?

2. Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości jego dwóch sąsiednich boków.

- Zapisz działanie pozwalające obliczyć pole szarego prostokąta. Ile wynosi to pole?
- Zapisz działanie pozwalające obliczyć pole zakreskowanej części szarego prostokąta. Na podstawie rysunku ustal, ile wynosi to pole.





Analizuj!



Pola codziennie zjada na drugie śniadanie $\frac{1}{8}$ kg owoców. Ile kilogramów owoców Pola zjada na drugie śniadanie w ciągu tygodnia? Jak to obliczyć?

Sposób 1 – za pomocą dodawania

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Sposób 2 – za pomocą mnożenia

$$\frac{1}{8} \cdot 7 = \frac{1 \cdot 7}{8} = \frac{7}{8}$$

W ciągu tygodnia Pola zjada na drugie śniadanie $\frac{7}{8}$ kg owoców.

Pola dba również o odpowiednie nawodnienie. Każdego dnia wypija $2\frac{1}{5}$ l wody. Ile litrów wody wypija Pola w ciągu tygodnia?



$$7 \cdot 2\frac{1}{5} = 7 \cdot \frac{11}{5} = \frac{7 \cdot 11}{5} = \frac{77}{5} = 15\frac{2}{5}$$

Pola wypija w ciągu tygodnia $15\frac{2}{5}$ l wody.

Mnożenie przez liczby naturalne

- ▶ Aby obliczyć iloczyn ułamka zwykłego i liczby naturalnej, licznik ułamka pomnóż przez tę liczbę, a mianownik przepisz.
- ▶ Aby obliczyć iloczyn liczby mieszanej i liczby naturalnej, zamień liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy, a potem wykonaj mnożenie.
- ▶ Pamiętaj, że mnożenie jest przemienne: $\frac{3}{4} \cdot 8 = 8 \cdot \frac{3}{4}$, a $5 \cdot 1\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4} \cdot 5$.
- ▶ Jeśli to możliwe, skracaj ułamki – będziesz mnożyć mniejsze liczby.

Sposób 1

$$\frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{3 \cdot \overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Sposób 2

$$\frac{3}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \overset{3}{\cancel{6}} = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Na krzewy owocowe przeznaczono $\frac{2}{3}$ powierzchni ogródka. Maliny zajmują $\frac{4}{5}$ tej części ogródka. Jaka część całej powierzchni ogródka zajmują maliny?

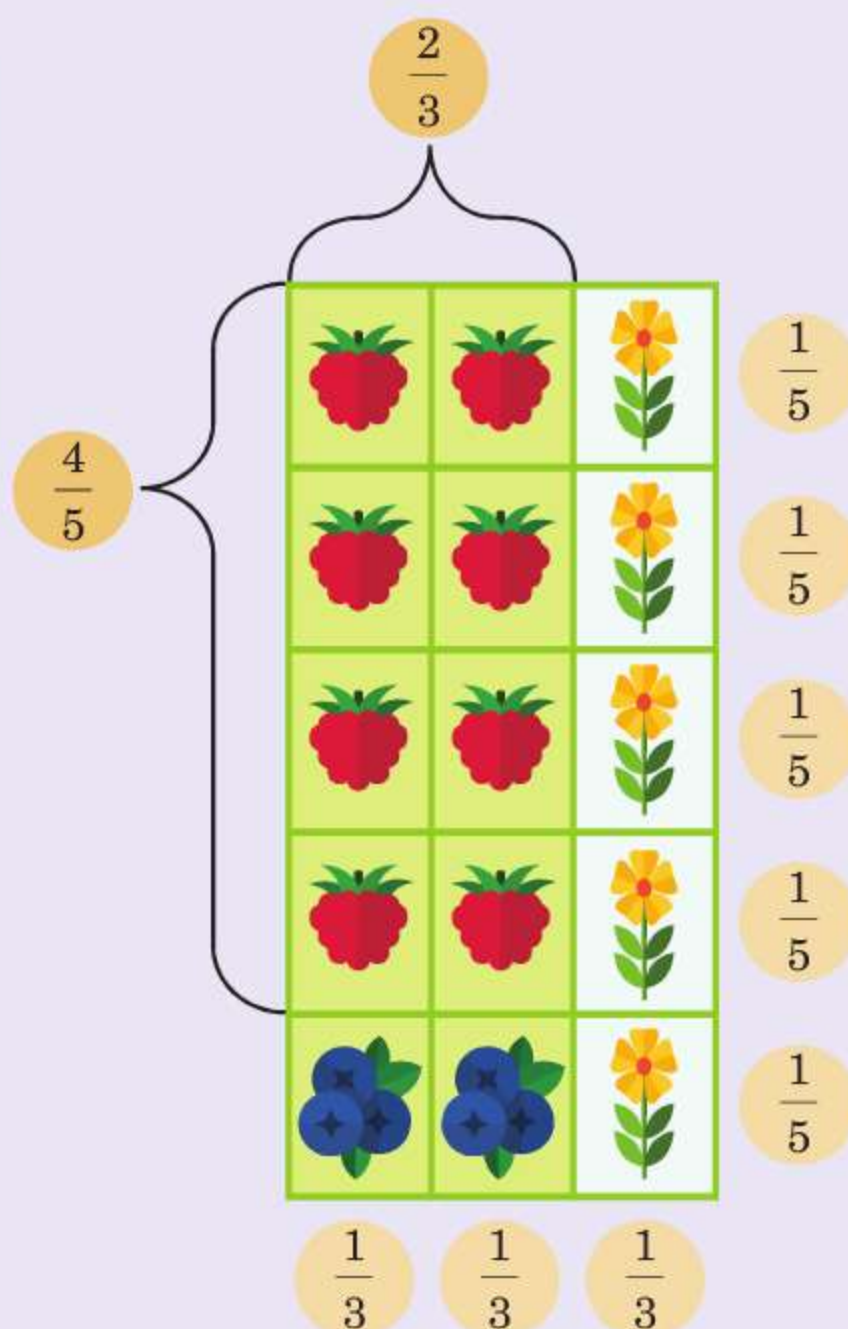
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$$

Maliny zajmują $\frac{8}{15}$ powierzchni ogródka.

Ile wynosi iloczyn liczb $2\frac{2}{3}$ i $1\frac{3}{7}$?

$$2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{3}{7} = \frac{8}{3} \cdot \frac{10}{7} = \frac{8 \cdot 10}{3 \cdot 7} = \frac{80}{21} = 3\frac{17}{21}$$

Iloczyn liczb $2\frac{2}{3}$ i $1\frac{3}{7}$ wynosi $3\frac{17}{21}$.



Mnożenie przez ułamki zwykłe i liczby mieszane

- Aby obliczyć iloczyn dwóch ułamków, licznik jednego ułamka pomnóż przez licznik drugiego ułamka, a mianownik przez mianownik.
- Aby obliczyć iloczyn liczby mieszanej i ułamka lub iloczyn dwóch liczb mieszanych, zamień liczby mieszane na ułamki niewłaściwe, a potem wykonaj mnożenie.
- Pamiętaj, że mnożenie jest przemienne.
- Jeśli licznik jednego ułamka i mianownik drugiego ułamka mają wspólny dzielnik, możesz je skrócić. Jest to tzw. **skracanie po przekątnej** lub **na skos**.

$$3\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{13} = \frac{13}{4} \cdot \frac{16}{13} = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 4$$



Oblicz. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

$$3 \cdot \frac{4}{11} = ?$$

$$5 \cdot 2\frac{3}{10} = ?$$

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{7} = ?$$

$$2\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3} = ?$$

Poćwicz!

1. Oblicz. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

a) $5 \cdot \frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{7} \cdot 4$

c) $8 \cdot \frac{5}{48}$

d) $\frac{11}{16} \cdot 24$

e) $8 \cdot 1\frac{2}{5}$

f) $5\frac{2}{3} \cdot 3$

g) $16 \cdot 1\frac{15}{32}$

h) $10 \cdot 3\frac{4}{9}$

2. Oblicz. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

a) $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{9}$

c) $1\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11}$

d) $\frac{25}{36} \cdot 1\frac{9}{25}$

e) $1\frac{3}{13} \cdot 1\frac{1}{3}$

f) $5\frac{5}{7} \cdot 6\frac{1}{8}$

g) $4\frac{4}{9} \cdot 1\frac{2}{3}$

h) $5\frac{4}{10} \cdot 8\frac{3}{9}$

3. Oblicz.

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{3}{4}$

b) $\frac{8}{15} \cdot 6\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{5}$

c) $2\frac{3}{5} \cdot 6\frac{4}{6} \cdot 1\frac{5}{13}$

d) $10 \cdot 8\frac{1}{3} \cdot 1\frac{7}{20}$

Pamiętaj, że podczas mnożenia ułamków można skracać ułamki również wtedy, gdy nie stoją obok siebie.

$$\frac{1}{\cancel{6}^2} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{11} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 1}{2 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{7}{110}$$



4. Jaka liczbą należy zastąpić ♣, aby równość była prawdziwa?

a) $\frac{3}{14} \cdot \clubsuit = 1$

b) $\clubsuit \cdot \frac{9}{17} = 1$

c) $3\frac{11}{13} \cdot \clubsuit = 1$

d) $\clubsuit \cdot 15\frac{7}{10} = 1$

5. Wyznacz:

a) kwadrat ułamka $\frac{6}{7}$,

b) sześcián ułamka $\frac{3}{5}$,

c) kwadrat liczby $1\frac{3}{6}$,

d) sześcián liczby $2\frac{20}{10}$.

Zwróć uwagę na poprawny zapis!

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{3^2}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$$



6. Oblicz obwód i pole:

a) kwadratu o boku długości $4\frac{3}{5}$ cm;

b) prostokąta, którego jeden bok ma długość $5\frac{5}{6}$ cm, a drugi jest o $5\frac{3}{4}$ cm krótszy.

7. Sprawdź zamieszczone poniżej rachunki. Zapisz w zeszycie poprawne obliczenia.

a) $5 \cdot \frac{6}{8} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$	b) $1\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = 1\frac{4}{6}$
c) $4\frac{2}{12} \cdot 2\frac{2}{5} = 8\frac{4}{60} = 8\frac{1}{15}$	d) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

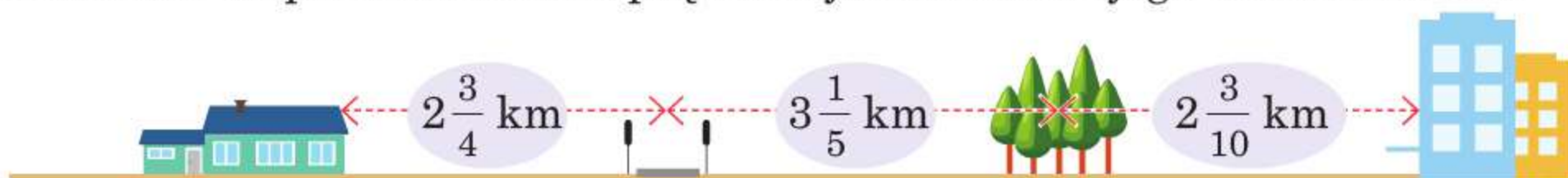
8. Bruno gra w grę przygodową. Jego postać – giermek – ma 12 punktów inteligencji, 30 punktów sprytu i 18 punktów umiejętności posługiwania się łukiem. Właśnie awansował na następny poziom. Obok znajduje się przelicznik punktów za awans. Ile łącznie punktów dostanie Bruno za awans?

 $12 \times 1\frac{3}{4}$

 $30 \times 2\frac{1}{3}$

 $18 \times 1\frac{5}{6}$

9. Pan Piotr od poniedziałku do piątku dojeżdża do swojego biura rowerem.



- a) W jakiej odległości od domu pana Piotra znajduje się jego biuro?
b) Ile kilometrów pokonuje pan Piotr na rowerze w ciągu tygodnia roboczego?

10. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $3\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$ b) $\left(8\frac{1}{7} - 5\frac{2}{3}\right) \cdot 3\frac{3}{6}$ c) $1\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{21}$ d) $\left(\frac{9}{25} \cdot 4\frac{1}{6}\right)^3$

11. Uzupełnij działanie tak, aby otrzymać podany wynik.

$\heartsuit \cdot \frac{5}{7} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

a) $18 \cdot \frac{5}{6}$ b) $\frac{10}{45} \cdot \frac{9}{15}$ c) $\frac{4}{14} \cdot 3\frac{4}{8}$ d) $1\frac{5}{21} \cdot 2\frac{1}{3}$

2. Oblicz obwód i pole kwadratu o boku długości $1\frac{2}{9}$ cm.

3. Jaką liczbą należy zastąpić $\clubsuit$, aby równość $2\frac{2}{5} \cdot \clubsuit = 1$ była prawdziwa?

A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{5}{12}$

7 • Dzielenie ułamków

- ▶ Jaką liczbę nazywamy odwrotną do danej liczby?
- ▶ Jak dzielić ułamki zwykłe i liczby mieszane?



Odkrywaj!

1. Jak zmienia się iloraz, gdy zmniejszamy dzielnik? Połącz działanie z odpowiadającym mu ilorazem.

$$10 : 10 = ?$$

$$10 : 5 = ?$$

$$10 : 2 = ?$$

$$10 : 1 = ?$$

$$10 : \frac{1}{2} = ?$$

5

10

1

20

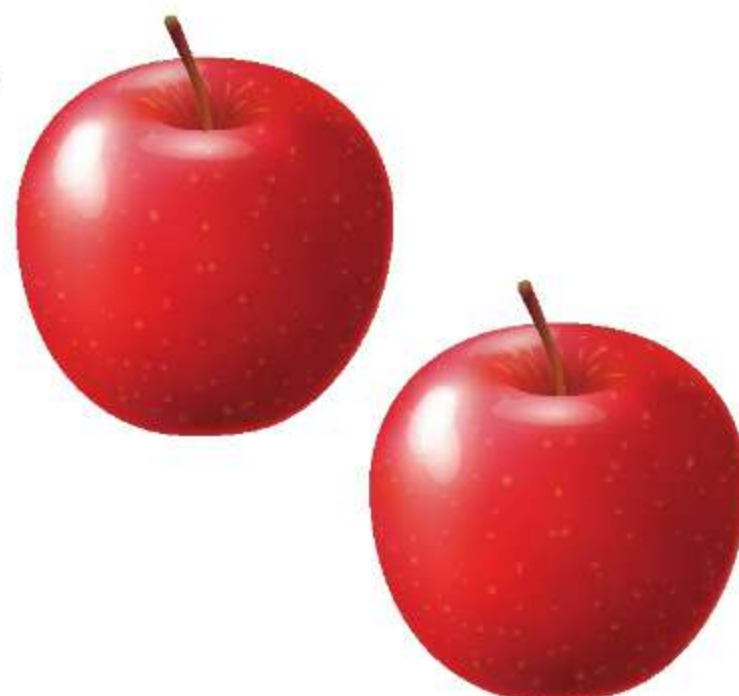
$\frac{1}{20}$

$\frac{1}{2}$

2

2. Odpowiedz na pytania.

- a) Ile ćwiartek można otrzymać z jednego jabłka?
- b) Ile ćwiartek można otrzymać z dwóch jabłek?
- c) $1 : \frac{1}{4}$ – ile to jest?
- d) $2 : \frac{1}{4}$ – ile to jest?
- e) Ile wynosi iloraz liczby 1 i ułamka $\frac{1}{4}$?
- f) Ile wynosi iloraz liczby 2 i ułamka $\frac{1}{4}$?





Analizuj!

Liczba odwrotna do danego ułamka (odwrotność ułamka) powstaje przez zamianę miejscami jego licznika i mianownika. **Iloczyn liczb odwrotnych** jest równy **1**.

Liczby naturalne i mieszane zamień najpierw na ułamki niewłaściwe.



Czy te liczby są odwrotne?

$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	TAK, bo $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$.
$15 = \frac{15}{1}$	$\frac{1}{15}$	TAK, bo $\frac{15}{1} \cdot \frac{1}{15} = 1$.
$1\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$	$\frac{5}{8}$	TAK, bo $\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{8} = 1$.
$\frac{9}{25}$	$2\frac{7}{9} = \frac{25}{9}$	TAK, bo $\frac{9}{25} \cdot \frac{25}{9} = 1$.
$1\frac{7}{8}$	$1\frac{8}{7}$	NIE, bo $\frac{15}{8} \cdot \frac{15}{7} = \frac{225}{56}$.

Dzielenie to mnożenie dzielnej przez odwrotność dzielnika.

Na stole leży $\frac{1}{6}$ pizzy. Zosia i Kuba chcą podzielić ten kawałek na dwie równe części. Jaką część całej pizzy dostanie każde z nich?

$$\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$



Zosia i Kuba dostaną po $\frac{1}{12}$ pizzy.

Na stole leży $1\frac{1}{8}$ pizzy. Kelner podzielił ją między 3 osoby tak, żeby każda zabrała na wynos taką samą część pizzy. Jaką część całej pizzy otrzyma każda z osób?

Jeśli dzielna jest **liczba mieszana**, zamień ją na **ułamek niewłaściwy**.

$$1\frac{1}{8} : 3 = \frac{9}{8} : 3 = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$$

Każda z osób otrzyma $\frac{3}{8}$ pizzy.

Na ile ćwiartek można podzielić 2 jabłka?



$$2 : \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{4}{1} = 2 \cdot 4 = 8$$

Odwrotność ułamka, który ma w liczniku liczbę 1, możesz od razu zapisać w postaci liczby naturalnej.

2 jabłka można podzielić na 8 ćwiartek.



Na ile jednakowych porcji o masie $\frac{1}{8}$ kg każda można podzielić $\frac{3}{4}$ kg orzechów?

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{1} = \frac{6}{1} = 6$$

Zanim zaczniesz mnożyć, sprawdź, czy nie da się **skrócić liczb na skos**.

$\frac{3}{4}$ kg orzechów można podzielić na 6 porcji o masie $\frac{1}{8}$ kg każda.



Na ile jednakowych porcji o masie $\frac{3}{8}$ kg każda można podzielić $3\frac{3}{4}$ kg jagód?

$$3\frac{3}{4} : \frac{3}{8} = \frac{15}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{10}{1} = 10$$

Zamień liczbę mieszaną na **ułamek niewłaściwy**.

Jeśli to możliwe, **skróć liczby na skos**.

$3\frac{3}{4}$ kg jagód można podzielić na 10 porcji o masie $\frac{3}{8}$ kg.

A jeśli dzielisz przez liczbę mieszaną?

Jeśli dzielisz liczbę naturalną przez liczbę mieszaną, ułamek zwykły przez liczbę mieszaną lub dwie liczby mieszane, **najpierw zamień każdą liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy**, a następnie wykonaj obliczenia zgodnie z zasadą, że dzielenie to mnożenie dzielnej przez odwrotność dzielnika.



W kociołku znajduje się $2\frac{4}{5}$ kg jagód. Ile woreczków należy przygotować, aby zamrozić jagody w równych porcjach po $\frac{2}{5}$ kg każda?

Liczba odwrotna do danego ułamka powstaje poprzez zamianę miejscami licznika i mianownika.

Liczba odwrotna do liczby 1 to 1.

Liczba odwrotna do liczby 0 nie istnieje.

Dzielenie to mnożenie przez odwrotność dzielnika.

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1$$
$$5 = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{5}$$
$$2\frac{3}{5} = \frac{13}{5} \cdot \frac{5}{13}$$



Poćwicz!

1. Podaj liczby odwrotne do liczb w ramce.

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{1}{13} \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1\frac{2}{3} \cdot 5\frac{8}{9}$$

2. Oblicz. Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{4} : 2$ b) $1\frac{5}{8} : 13$ c) $5 : \frac{10}{11}$ d) $\frac{1}{4} : 15$ e) $6\frac{3}{5} : 11$ f) $8 : \frac{4}{9}$

3. Oblicz:

- a) długość promienia okręgu o średnicy długości $9\frac{3}{5}$ m,
b) długość boku kwadratu o obwodzie równym $22\frac{2}{3}$ m,
c) długość boku trójkąta równobocznego o obwodzie równym $13\frac{1}{2}$ m.

4. Oblicz.

a) $5 : \frac{2}{3}$ b) $16 : \frac{4}{5}$ c) $10 : 1\frac{3}{8}$ d) $9 : 2\frac{2}{5}$
e) $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ f) $\frac{10}{12} : \frac{3}{4}$ g) $\frac{5}{9} : \frac{11}{18}$ h) $\frac{4}{15} : \frac{3}{16}$
i) $1\frac{5}{6} : \frac{5}{7}$ j) $6\frac{4}{5} : 4\frac{1}{4}$ k) $3\frac{4}{5} : 1\frac{9}{10}$ l) $4\frac{1}{6} : 3\frac{1}{3}$

5. Na talerzu leży $\frac{1}{8}$ tortu. Ela chce podzielić ten kawałek na pół: dla siebie i dla Poli. Jaką część całego tortu dostanie każda z dziewcząt?

6. Firma Bobas produkuje kosmetyki dla dzieci. Czy 70 jednakowych butelek o pojemności $\frac{3}{4}$ l pomieści $56\frac{1}{4}$ l płynu do kąpieli Bąbelek? Ile takich butelek będzie potrzebnych, aby zmieścić $12\frac{3}{4}$ l płynu Bąbelek, jeśli każda butelka ma być pełna?

7. Pani Ewelina trenuje przed półmaratonem w parku z tartanową pętlą dla biegaczy. Park jest oddalony od domu pani Eweliny o $1\frac{3}{4}$ km. Tym razem, gdy pani Ewelina przebiegła piąte okrażenie, sprawdziła na smartwatchu, że od wyjścia z domu pokonała dokładnie $8\frac{7}{20}$ km. Jaka długość ma tartanowa pętla?

8. Filament to materiał wykorzystywany do druku w technologii 3D. Aby wydrukować figurę szachową, potrzeba $\frac{23}{200}$ kg tego materiału. Ile całych figur może powstać z $2\frac{1}{5}$ kg filamentu? Ile godzin zajmie ich druk, jeśli jedną figurę drukuje się $\frac{7}{12}$ doby?

9. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $\frac{1}{20} + \left(3\frac{1}{3} - 2\frac{7}{10}\right) : \frac{2}{3}$ **b)** $\frac{12}{25} \cdot 1\frac{1}{14} : \left(3\frac{3}{7}\right)^2 + \frac{1}{10}$ **c)** $\left(\frac{6}{7} + 1\frac{11}{28}\right)^2 : 2\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$

10. Oblicz:

a) ile razy suma liczb $1\frac{1}{3}$ i $2\frac{1}{2}$ jest większa od różnicy liczb $7\frac{1}{5}$ i $6\frac{8}{15}$,

b) o ile iloraz liczb $2\frac{1}{6}$ i $1\frac{2}{3}$ jest większy od ilorazu $\frac{14}{15}$ i $4\frac{1}{5}$,

c) o ile iloraz liczb $\frac{2}{5}$ i $\frac{12}{30}$ jest mniejszy od iloczynu liczb $4\frac{3}{25}$ i $1\frac{9}{16}$.



11. Z dwóch trójkątów równobocznych, o obwodzie $16\frac{1}{5}$ cm każdy, utworzono równoległobok. Wykonaj rysunek pomocniczy i wyznacz obwód powstałego czworokąta.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $\frac{6}{7} : 18$ **b)** $9 : \frac{3}{8}$ **c)** $\frac{4}{21} : \frac{3}{8}$ **d)** $1\frac{1}{20} : \frac{7}{10}$ **e)** $3\frac{3}{16} : 4\frac{1}{4}$

2. W misce znajduje się $5\frac{3}{5}$ kg jabłek. Oblicz, ile porcji musu można przygotować z tych jabłek, jeśli na przygotowanie jednej porcji potrzeba $\frac{7}{10}$ kg jabłek.

3. O ile iloraz liczb $1\frac{3}{4}$ i $2\frac{5}{8}$ jest większy od ilorazu $\frac{1}{9} : \frac{5}{6}$?

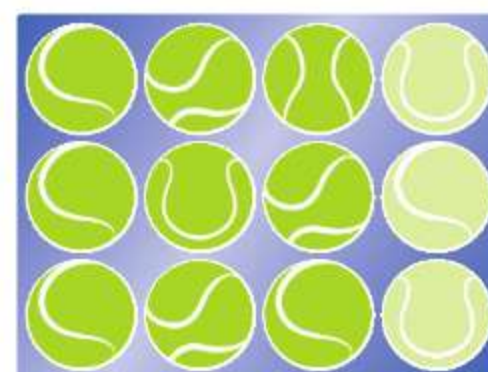
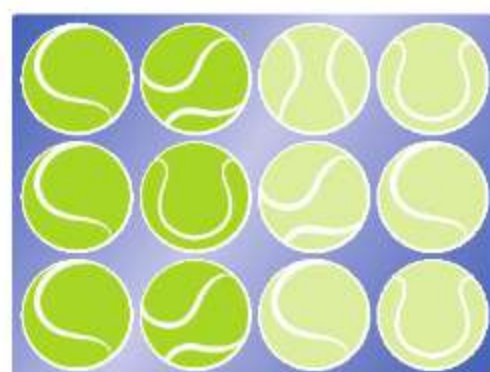
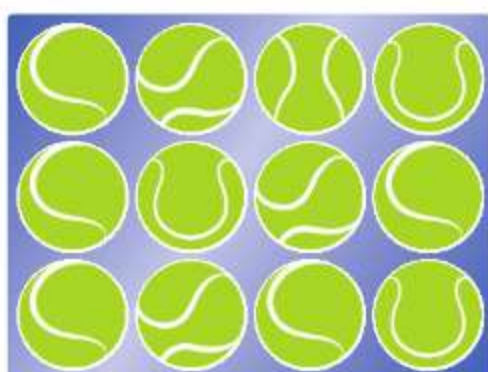
8. Ułamek liczby naturalnej

- ▶ Jak obliczyć, jakim ułamkiem jednej liczby naturalnej jest druga liczba naturalna?
- ▶ Jak obliczyć ułamek danej liczby naturalnej?



Odkrywaj!

1. Uczniowie klas sportowych pomagają przy organizacji turnieju tenisa ziemnego. Są odpowiedzialni za donoszenie piłek tenisowych na korty. W pełnym pudełku, które wzięła Zuzia, znajduje się 12 piłek.
- a) Ewa wzięła pudełko wypełnione piłkami do połowy. Ile było w nim piłek?
- b) Olek wziął pudełko wypełnione piłkami w trzech czwartych. Ile było w nim piłek?



2. Zosia porządkuje swoją biblioteczkę. Na półkach znajduje się łącznie 48 książek. Oblicz, ile książek każdego rodzaju ma Zosia, jeśli:

- $\frac{1}{3}$ księgozbioru to książki przyrodnicze,
- $\frac{1}{6}$ księgozbioru to książki podróżnicze,
- $\frac{1}{4}$ księgozbioru to książki fantasy,
- $\frac{1}{24}$ księgozbioru to książki historyczne,
- $\frac{5}{24}$ księgozbioru to książki detektywistyczne.



Jakie działanie wykonasz, aby obliczyć liczbę książek każdego rodzaju?



Analizuj!



Jaką część trójkątów, na które podzielono kwadrat, stanowią trójkąty zakreskowane?

3 zakreskowane trójkąty z **8** trójkątów to $\rightarrow \frac{3}{8}$

Jakim ułamkiem liczby **8** jest liczba **3**? $\rightarrow \frac{3}{8}$

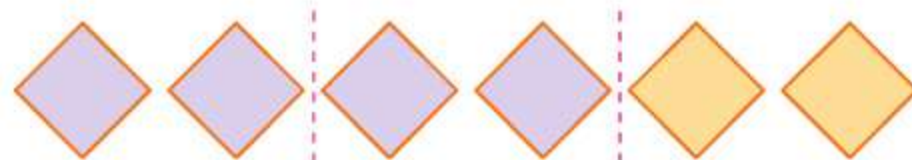
Jakim ułamkiem liczby **a** jest liczba **b**? $\rightarrow \frac{b}{a}$

Aby obliczyć, jakim ułamkiem liczby **a** jest liczba **b**, należy zapisać iloraz tych liczb w postaci ułamka zwykłego $\frac{b}{a}$.

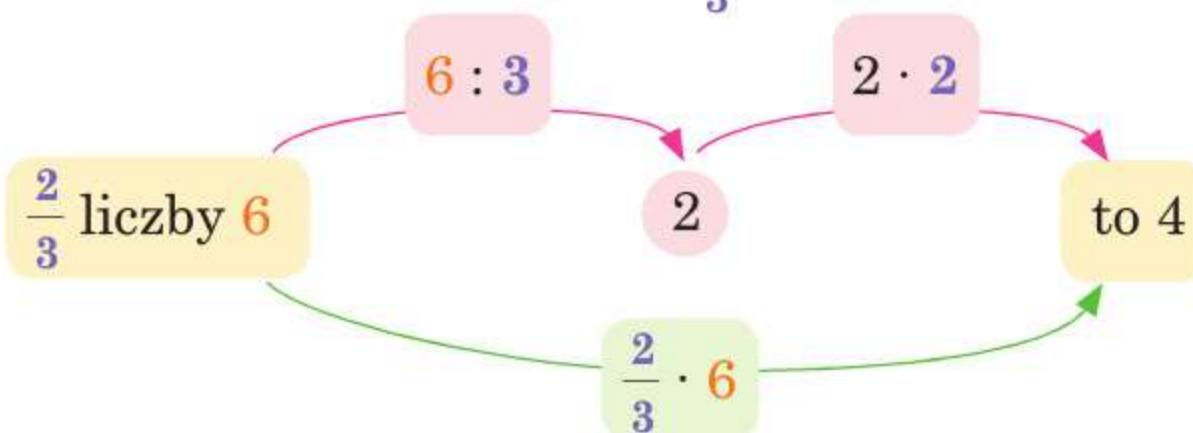


Jakim ułamkiem liczby 16 jest liczba 8? Jakim ułamkiem liczby 50 jest liczba 4? Jakim ułamkiem liczby 2 jest liczba 5?

$\frac{2}{3}$ z **6** kwadratów zamalowano na fioletowo. Ile to kwadratów?



Ile wynosi $\frac{2}{3}$ liczby **6**?



Aby obliczyć ułamek danej liczby, można:

- podzielić tę liczbę przez mianownik danego ułamka, a następnie pomnożyć wynik przez licznik tego ułamka
- lub
- pomnożyć ułamek przez tę liczbę.



Ile wynosi $\frac{3}{4}$ liczby 20? A $\frac{5}{7}$ liczby 35? A $\frac{4}{3}$ liczby 12?

Do szkoły uczęszcza 420 uczniów, w tym 240 dziewcząt. Jaka część wszystkich uczniów stanowią dziewczęta?

240 – liczba dziewcząt

420 – liczba wszystkich uczniów

$$\frac{240}{420} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

Dziewczęta stanowią $\frac{4}{7}$ wszystkich uczniów.

Spośród wszystkich dziewcząt uczęszczających do tej szkoły 60 ma niebieskie oczy. Jaki ułamek wszystkich dziewcząt ma niebieskie oczy?



60



240

$$\frac{60}{240} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4}$ wszystkich dziewcząt ma niebieskie oczy.



W konkursie recytatorskim wzięło udział 21 uczniów klasy 5c. Jaka część uczniów klasy 5c wzięła udział w konkursie, jeśli klasa ta liczy 28 uczniów?

Okulary nosi $\frac{1}{7}$ wszystkich uczniów. Ile to osób, jeśli wiadomo, że do szkoły uczęszcza 420 uczniów?

Sposób 1

$$420 : 7 = 60$$

Sposób 2

$$\frac{1}{7} \cdot 420 = 60$$

Okulary nosi 60 uczniów.

We wtorek sześć lekcji miało $\frac{2}{5}$ wszystkich uczniów tej szkoły. Ile to osób?

Sposób 1

$$420 : 5 = 84 \rightarrow 84 \cdot 2 = 168$$

Sposób 2

$$\frac{2}{5} \cdot 420 = 168$$

Sześć lekcji miało tego dnia 168 osób.



W siatkówkę lubi grać $\frac{5}{6}$ spośród 246 uczniów. Ile to osób?

Jak obliczyć...

...jakim ułamkiem liczby a jest liczba b ?

→ Wystarczy zapisać odpowiedni ułamek zwykły w postaci $\frac{b}{a}$.

Ustal, jakim ułamkiem liczby 12 jest liczba 6. → $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

...ułamek danej liczby?

→ Wystarczy pomnożyć ułamek przez tę liczbę.

Wyznacz $\frac{1}{3}$ liczby 6. → $\frac{1}{3} \cdot 6 = 2$



Poćwicz!

1. Oblicz, jaką część liczby x stanowi liczba y . Wynik podaj w postaci nieskracalnej.

- a) $x = 34, y = 17$ b) $x = 63, y = 21$ c) $x = 40, y = 16$ d) $y = 30, x = 70$

2. Oblicz:

- a) $\frac{2}{7}$ liczby 35, b) $\frac{8}{9}$ liczby 81, c) $\frac{5}{6}$ liczby 54, d) $\frac{4}{11}$ liczby 55.

3. Oblicz.

- a) 1 cm – jaka to część metra? b) 100 cm – jaka to część kilometra?
c) 2 g – jaka to część dekagrama? d) 30 kg – jaka to część tony?
e) 10 min – jaka to część godziny? f) 2 godz. – jaka to część doby?

4. Oblicz.

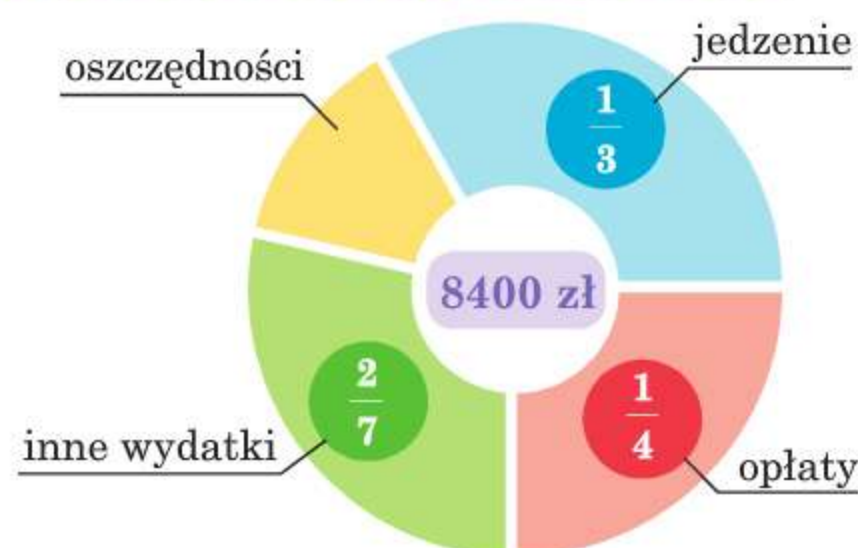
- a) $\frac{1}{5}$ centymetra – ile to milimetrów? b) $\frac{3}{25}$ kilometra – ile to metrów?
c) $\frac{2}{10}$ tony – ile to kilogramów? d) $\frac{78}{1000}$ kilograma – ile to gramów?
e) $\frac{1}{2}$ kwadransa – ile to sekund? f) $\frac{3}{10}$ doby – ile to godzin?

5. Smartfon Filipa działa bez ładowania przez 16 godzin. Filip zauważył, że zostało mu $\frac{3}{4}$ pojemności baterii. Przez ile godzin Filip może jeszcze korzystać ze smartfona bez ładowania?

6. W klasie 5b uczy się 30 osób. Na koniec roku żaden uczeń nie otrzymał oceny niedostatecznej, trzech uczniów dostało ocenę celującą. Ocenę dopuszczającą otrzymała $\frac{1}{15}$ uczniów, dostateczną – $\frac{1}{6}$ uczniów, dobrą – $\frac{1}{3}$ klasy. Pozostałe osoby otrzymały ocenę bardzo dobrą. Ile osób z klasy 5b otrzymało ocenę dopuszczającą, a ile – dostateczną, dobrą, bardzo dobrą?

7. Łączny miesięczny dochód państwa Nowaków wynosi 8400 zł.

- a) Na podstawie diagramu oblicz, ile pieniędzy przeznaczą na poszczególne cele.
b) Jaka część ich dochodu stanowi kwota przeznaczona na oszczędności?



8. W klasie 5a jest 28 uczniów, z czego $\frac{3}{7}$ stanowią chłopcy. W zawodach lekkoatletycznych wzięła udział $\frac{1}{4}$ wszystkich chłopców. Ilu chłopców z klasy 5a wzięło udział w tych zawodach?

9. Spodnie w hurtowni kosztowały 100 zł. Do tej ceny właściciel sklepu doliczył marżę w wysokości $\frac{1}{10}$ ceny hurtowej. Po dwóch miesiącach obniżył cenę spodni o $\frac{1}{10}$ ich ceny detalicznej. Jaka częścią ceny hurtowej spodni jest ich nowa cena sklepowa?

Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż liczbę, która stanowi $\frac{4}{5}$ liczby 45.
A. 16 B. 180 C. $\frac{4}{225}$ D. 36
2. Janek i Franek zamówili pizzę MEGA, która została podzielona na 24 jednakowe kawałki. Janek zjadł $\frac{1}{3}$ pizzy, a Franek – $\frac{3}{8}$ pizzy. Ile kawałków pizzy zjadł każdy z chłopców?
3. Pan Michał ma dwie działki: o powierzchni 600 m^2 i 200 m^2 . Pan Michał postanowił $\frac{2}{3}$ powierzchni większej działki obsiać trawą, natomiast 40 m^2 drugiej działki obsadzić różami. Jaka powierzchnię zajmie trawnik na pierwszej działce? Jaka część drugiej działki zajmą róże?

9. Zadania tekstowe

- Jak rozwiązywać zadania tekstowe dotyczące działań na ułamkach zwykłych?



Analizuj!



Bruno analizuje czas, jaki poświęcił w ubiegły wtorek na poszczególne czynności. Zebrane dane zamieścił w tabeli.

Aktywność	sen	szkoła*	czytanie	inne
Czas	$\frac{3}{8}$ doby	7 lekcji	$3\frac{1}{5}$ godz.	

* Czas trwania: lekcji – 45 min, przerwy zwykłej – 10 min, przerwy obiadowej – 30 min.

Ile godzin Bruno spał?

$$\frac{3}{8} \cdot 24 = 9$$

Bruno spał 9 godzin.

Ile godzin Bruno spędził w szkole, jeśli dotarł do szkoły punktualnie i wyszedł zaraz po zakończeniu siódmej lekcji?

Lekcje: $7 \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$

Przerwy: $\frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Czas spędzony w szkole: $5\frac{1}{4} + 1\frac{1}{3} = 5\frac{3}{12} + 1\frac{4}{12} = 6\frac{7}{12}$

$$6\frac{7}{12} \text{ godz.} = 6\frac{35}{60} \text{ godz.} = 6 \text{ godz. } 35 \text{ min}$$

Bruno spędził w szkole $6\frac{7}{12}$ godziny, czyli 6 godzin i 35 minut.

Ile godzin Bruno poświęcił na inne aktywności?

$$24 - \left(9 + 6\frac{7}{12} + 3\frac{1}{5}\right) = 24 - \left(9 + 6\frac{35}{60} + 3\frac{12}{60}\right) = 24 - 18\frac{47}{60} = 5\frac{13}{60}$$

Na inne aktywności Bruno poświęcił $5\frac{13}{60}$ godziny, czyli 5 godzin i 13 minut.

Poćwicz!

1. Cezary i Pola uwielbiają jeździć na hulajnodze elektrycznej. Cezary mierzył i notował odległość pokonaną podczas codziennej przejażdżki, natomiast Pola wszystkie wyniki zbierała w aplikacji zainstalowanej na smartfonie.

pon.	wt.	śr.	czw.	pt.
$3\frac{1}{3}$ km	$5\frac{1}{2}$ km	$2\frac{3}{4}$ km	$2\frac{7}{8}$ km	$\frac{5}{6}$ km

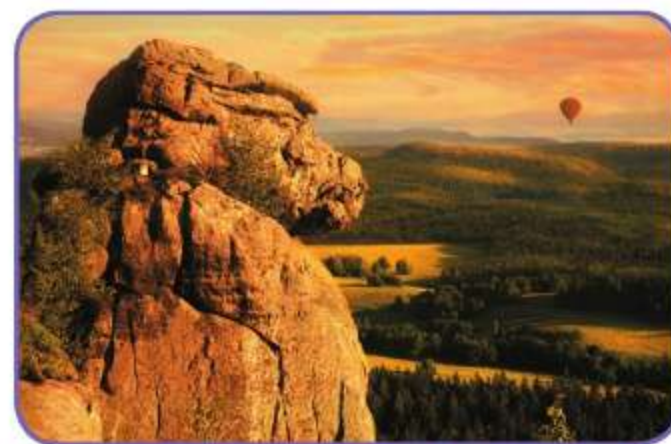


- a) Jaki dystans pokonał Cezary w ciągu tych pięciu dni?
b) Kto w ciągu tych pięciu dni pokonał dłuższą trasę? O ile kilometrów?

2. Największy bursztyn na świecie, wpisany do Księgi Rekordów Guinnessa w 2022 r., znajduje się w Muzeum Bursztynu w Gdańsku i waży $68\frac{1}{5}$ kg. Załóżmy, że do przygotowania naszyjnika potrzeba $\frac{1}{20}$ kg surowego bursztynu. Ile takich naszyjników można byłoby wykonać z rekordowego bursztynu?

3. Kurtka kosztowała 150 zł. Podczas akcji promocyjnej jej cena zmniejszyła się o $\frac{3}{10}$ ceny początkowej. Oblicz, o ile złotych obniżono cenę kurtki oraz jej aktualną cenę.

4. Zosia wiosną jedzie w Góry Stołowe. We wrześniu jej rodzice wpłacili 120 zł zaliczki. Jaką część całej kwoty stanowiła ta wpłata, jeśli całkowity koszt wycieczki to 420 zł?



5. Pudło, w którym znajduje się 25 identycznych opakowań farb, waży 10 kg. Ile waży jedno opakowanie farb, jeśli masa pustego pudła to $\frac{5}{8}$ kg?

6. Ela i Kuba zamówili pizzę podzieloną na 8 identycznych kawałków. Ela powiedziała, że zjadła $\frac{3}{8}$ pizzy, a Kuba dwa razy tyle co ona. Czy to możliwe?

7. Wycieczka do Albanii w pewnym biurze podróży kosztowała w marcu 2800 zł. Tuż przed rozpoczęciem wakacji jej cena spadła o $\frac{2}{5}$ tej kwoty. Tydzień przed wyjazdem pojawiła się dodatkowa promocja, w której obniżono cenę wycieczki o $\frac{1}{12}$ ceny po pierwszej obniżce. Oblicz cenę wycieczki po drugiej obniżce.



8. Dukat to złota lub srebrna moneta o masie ok. 3,5 g. Bity w Norymberdze lammdukat o masie $\frac{1}{10}$ g jest wart $\frac{1}{32}$ dukata.

a) Ile lammdukatów potrzeba, aby wypłacić równowartość 1 dukata? A $\frac{1}{10}$ dukata? Czy jest to możliwe?

b) Kwotę $1\frac{1}{2}$ dukata chcemy zapłacić w lammdukatach. Ile monet potrzeba? Ile będą ważyły te monety?

c) Kwotę $1\frac{1}{2}$ zł chcemy zapłacić w jednogroszówkach. Ile monet potrzeba? Ile będą ważyły te monety?

d) Co będzie cięższe: $1\frac{1}{2}$ dukata w lammdukatach czy $1\frac{1}{2}$ zł w jednogroszówkach? O ile cięższe?



dukat



lammdukat



masa: $1\frac{64}{100}$ g



9. Tomek pojechał na klasową wycieczkę do Krakowa. Po zwiedzaniu dzielnicy Kazimierz uczniowie mieli 2 godziny czasu wolnego. Tomek zanotował, że czwartą część godziny spędził na wybieraniu pamiątki dla siostry, $\frac{3}{7}$ pozostałego czasu poświęcił na fotografowanie zabytków, a połowę pozostałego czasu – na wysyłanie do znajomych najlepszych zdjęć. Czy mógł jeszcze spędzić 40 minut z kolegami w pizzerii?

Sprawdź, co umiesz!

1. W sklepie w dziale z przetworami znajdują się kompoty truskawkowe w słoikach o różnej pojemności: 13 słoików o pojemności $2\frac{1}{2}$ l, 15 słoików o pojemności $\frac{3}{4}$ l, 25 słoików o pojemności $\frac{7}{8}$ l i 20 słoików półtoralitrowych. Ile łącznie litrów kompotu truskawkowego znajduje się w tym dziale?

2. Woda w organizmie dorosłego człowieka stanowi $\frac{13}{20}$ masy jego ciała. Oblicz, ile kilogramów wody zawiera organizm trzydziestolatki ważącej 65 kg.

3. Suma dwóch liczb wynosi $1\frac{13}{30}$. Wiadomo, że jedna z tych liczb jest o $\frac{7}{30}$ większa od drugiej. Wyznacz iloczyn tych liczb.

PODSUMOWANIE DZIAŁU V

W świecie ułamków zwykłych

Powtórz wiadomości

Dodawanie i odejmowanie ułamków

- Gdy mianowniki są jednakowe, należy dodać/odjąć liczniki, a mianownik pozostawić bez zmian.
- Gdy mianowniki są różne, należy sprowadzić ułamki do wspólnego mianownika, następnie dodać/odjąć liczniki, a mianownik przepisać.
- Wynik należy przedstawiać w najprostszej postaci.

$$4\frac{11}{15} + 1\frac{3}{6} = 4\frac{22}{30} + 1\frac{15}{30} = 5\frac{37}{30} = 6\frac{7}{30}$$

$$5\frac{1}{9} - 1\frac{3}{5} = 5\frac{5}{45} - 1\frac{27}{45} = 4\frac{50}{45} - 1\frac{27}{45} = 3\frac{23}{45}$$

Liczby odwrotne

Liczby odwrotne to takie liczby, których iloczyn jest równy 1.

Liczbą odwrotną do 5 jest $\frac{1}{5}$, bo $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$.

Liczbą odwrotną do $\frac{3}{2}$ jest $\frac{2}{3}$, bo $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$.

Ułamek liczby naturalnej

Aby obliczyć ułamek danej liczby naturalnej, należy pomnożyć ułamek przez tę liczbę.

Oblicz $\frac{3}{4}$ liczby 24.

$$\frac{3}{4} \cdot 24 = 18$$

Mnożenie przez ułamek

$$1\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{1 \cdot 5}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

pomnóż licznik przez licznik oraz mianownik przez mianownik

liczbę całkowitą lub mieszaną zamień na ułamek niewłaściwy

Dzielenie przez ułamek

$$8\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{17}{2} : \frac{3}{4} = \frac{17}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{17 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$$

liczbę całkowitą lub mieszaną zamień na ułamek niewłaściwy

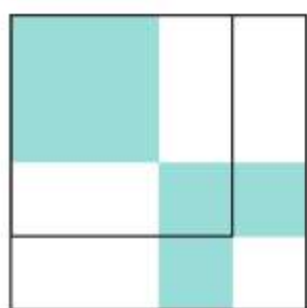
dzielenie przez ułamek zamień na mnożenie przez jego odwrotność

pomnóż licznik przez licznik oraz mianownik przez mianownik

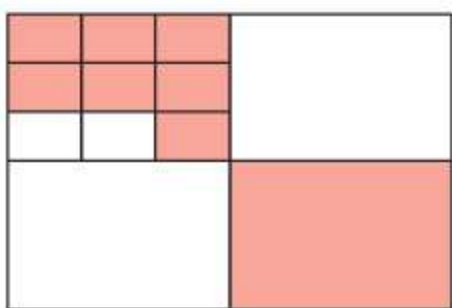
Poćwicz przed sprawdzianem

1. Na którym rysunku zamalowano $\frac{4}{9}$ figury?

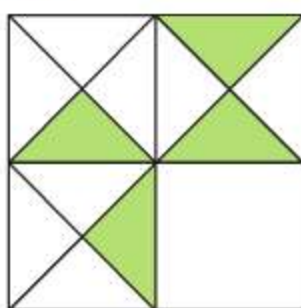
A.



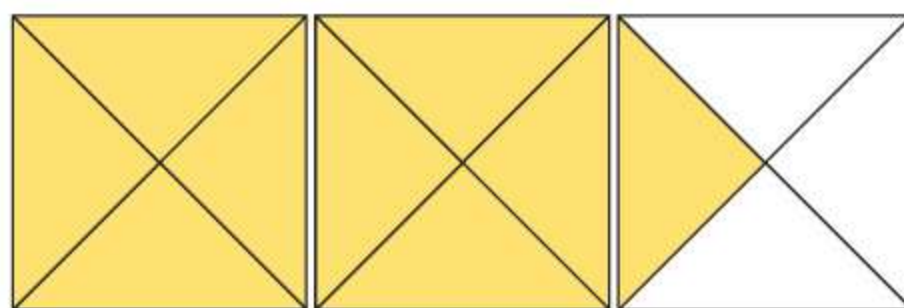
B.



C.



D.



2. Wskaż liczbę równą $5\frac{3}{7}$.

A. $\frac{53}{7}$

B. $\frac{26}{7}$

C. $\frac{11}{7}$

D. $\frac{38}{7}$

3. Wskaż liczbę równą $\frac{6}{10}$.

A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{24}{40}$

C. $\frac{6}{60}$

D. $1\frac{2}{5}$

4. Które ułamki porównano niepoprawnie?

A. $\frac{5}{7} > \frac{5}{8}$

B. $\frac{2}{13} < \frac{10}{13}$

C. $\frac{4}{6} > \frac{16}{18}$

D. $\frac{999}{1000} > \frac{99}{100}$

5. Wskaż wszystkie liczby spośród wymienionych, które mogą być wspólnym mianownikiem podanych ułamków, a następnie ustal najmniejszy wspólny mianownik.

a) $\frac{2}{7} + \frac{4}{9}$

7 • 9 • 16 • 63

b) $\frac{3}{20} + \frac{4}{30}$

10 • 30 • 60 • 600

c) $\frac{13}{25} - \frac{1}{50}$

5 • 25 • 50 • 100

d) $\frac{9}{12} - \frac{5}{14}$

2 • 14 • 28 • 56

6. Wybierz poprawną odpowiedź spośród A i B oraz C i D.

I. Które ułamki są równe $\frac{2}{3}$?

A. $\frac{10}{15}, \frac{40}{60}, \frac{108}{162}$

B. $\frac{4}{9}, \frac{10}{15}, \frac{146}{219}$

II. Przez jaką liczbę można skrócić ułamek $\frac{105}{144}$?

C. 3

D. 5

7. Wybierz najmniejszy wspólny mianownik podanych liczb, a następnie wykonaj obliczenia.

a) $5\frac{7}{15} + 2\frac{1}{10}$

b) $6\frac{1}{80} - 4\frac{3}{40}$

c) $8\frac{8}{9} - \frac{4}{5}$

5 • 15 • 30 • 150

40 • 80 • 120 • 320

5 • 9 • 45 • 90

8. Wskaż pary liczb odwrotnych.

$$\frac{3}{7} \cdot 1 \cdot 2\frac{1}{9} \cdot 4 \cdot \frac{9}{29} \cdot 1 \cdot \frac{2}{8} \cdot 2\frac{1}{3}$$

9. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

$\frac{2}{3}$ godziny to 20 min.	P	F
$\frac{2}{5}$ kilometra to 400 m.	P	F
$\frac{3}{4}$ kilograma to 34 dag.	P	F

15 godz. to $\frac{5}{8}$ doby.	P	F
9 mm to $\frac{9}{10}$ centymetra.	P	F
125 kg to $\frac{5}{8}$ tony.	P	F

10. W klasie 5c liczącej 28 osób jest 16 dziewcząt. Judo trenuje $\frac{3}{4}$ wszystkich chłopców klasy 5c. Ilu chłopców trenuje judo?



11. Oblicz wartość wyrażenia. Wynik podaj w najprostszej postaci.

$$[\heartsuit - (\spadesuit + \clubsuit) - \diamondsuit] : \text{musical note}$$

$$\heartsuit = 4\frac{3}{4} + 2\frac{1}{3} \quad \spadesuit = 8\frac{1}{9} - 5\frac{1}{2} \quad \clubsuit = \left(1\frac{2}{3}\right)^2 \quad \diamondsuit = \frac{3}{5} \cdot 1\frac{2}{3} \quad \text{musical note} = \frac{18}{7} : \frac{9}{14}$$

12. Pani Jagoda kupiła:

- warzywa – $1\frac{1}{5}$ kg marchwi, $\frac{9}{10}$ kg cebuli oraz 3 półkilogramowe worki ziemniaków,
- owoce – $2\frac{1}{6}$ kg jabłek, $\frac{5}{12}$ kg pomarańczy oraz ćwierć kilograma bananów.

Co łącznie ważyło więcej: owoce czy warzywa? O ile więcej?

13. Oblicz obwód trójkąta o bokach długości $\frac{1}{2}$ m, $\frac{2}{5}$ m oraz $\frac{3}{10}$ m.

14. Oblicz obwód i pole prostokąta o wymiarach $6\frac{6}{7}$ m $\times$ $8\frac{1}{3}$ m.

15. Pokój Kacpra ma kształt prostokąta, którego jeden bok ma długość $3\frac{3}{4}$ m, a drugi jest o $1\frac{1}{2}$ m dłuższy. Kacper zamierza przykleić ozdobną taśmę pod sufitem. Ile zapłaci za zakup taśmy, jeśli 1 m tej taśmy kosztuje 16 zł?

16. Dany jest siedmiokąt o bokach jednakowej długości. Wyznacz długość jednego boku, jeśli wiadomo, że obwód tego siedmiokąta wynosi $11\frac{1}{5}$ m.

17. Oblicz, ile szklanek o pojemności $\frac{1}{5}$ l można napełnić sokiem pomarańczowym z 20 butelek o pojemności $1\frac{3}{4}$ l każda.



18. Suma pięciu liczb wynosi 100. Ustal, jakie to liczby, jeśli wiadomo, że pierwsza wynosi $25\frac{1}{5}$, druga jest o $5\frac{1}{10}$ większa od pierwszej, trzecia stanowi trzecią część drugiej, czwarta jest o $\frac{1}{2}$ mniejsza niż trzecia.

Podejmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał sylwetkę światowej sławy polskiej uczoney. Powodzenia!



1 (1867–1934) urodziła się w **2**. Nauki pobierała w gimnazjum żeńskim, które ukończyła ze złotym medalem, i na nieformalnym, bo przeznaczonym dla kobiet, Uniwersytecie **3**. Niezwykle zdolna i obdarzona świetną pamięcią, władała czterema językami obcymi: angielskim, rosyjskim, niemieckim oraz **4**. W 1891 r. wyjechała do Paryża studiować **5** i fizykę na Sorbonie. To pierwsza kobieta, której przyznano Nagrodę **6** – co więcej, przyznano ją dwukrotnie: w **7** oraz 1911 r. w dwóch dziedzinach: z fizyki i **8**. Zasłużyła się rozwinięciem teorii promieniotwórczości oraz odkryciem dwóch pierwiastków: **9**. W uznaniu jej zasług w 1995 r. jej szczątki złożono w Panteonie w Paryżu, który stanowi miejsce wiecznego spoczynku wielu wybitnych Francuzów.

- 1.** W klasie 5a uczy się 26 osób, w tym 14 dziewcząt. Dziewięcioro uczniów nosi okulary, w tym pięciu chłopców. Jaka część chłopców z klasy 5a nie nosi okularów?

$\frac{5}{26}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$
Emilia Plater	Maria Skłodowska-Curie	Wisława Szymborska

- 2.** Która z liczb jest największa: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ czy $\frac{5}{6}$?

$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$
Warszawie	Krakowie	Olsztynie

- 3.** Która z liczb stanowi najmniejszy wspólny mianownik ułamków $\frac{1}{18}$ i $\frac{3}{10}$?

180	90	2
Medycznym	Latającym	Warszawskim

- 4.** Pan Iwo kupił trzy półtoralitrowe puszki farby. Zużył $3\frac{3}{4}$ l farby. Ile litrów farby mu zostało?

$1\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
hiszpańskim	francuskim	czeskim

5. W pewnym momencie gry Antek miał na koncie 240 punktów. Potem stracił $\frac{1}{4}$ punktów, a następnie $\frac{1}{3}$ pozostałych punktów. Ostatecznie udało mu się powiększyć stan punktów o $\frac{2}{3}$ liczby punktów, które miał na koncie po ostatniej stracie. Czy Antkowi udało się odrobić straty?

Nie można tego ustalić.	Tak.	Nie.
chemię	biologię	matematykę

6. Do lodziarni przywieziono termos lodów o pojemności $4\frac{1}{4}$ kg. Ile porcji można z niego wydać, jeśli jedna gałka waży $\frac{1}{20}$ kg?

85	17	340
Nobla	Fieldsa (czytaj: fildsa)	Newtona (czytaj: niutona)

7. Janek kupił na targu: $2\frac{1}{4}$ kg pomarańczy, $1\frac{2}{3}$ kg jabłek oraz $\frac{5}{6}$ kg bananów. Ile kilogramów łącznie ważyły owoce kupione przez Janka?

$3\frac{3}{4}$	$3\frac{8}{13}$	$4\frac{3}{4}$
1915	1907	1903

8. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Języka francuskiego uczy się $\frac{3}{4}$ ze 100 uczniów szkoły, czyli 75 osób.	P	F
Jeśli w akwarium znajduje się 40 skalarów, a samce stanowią $\frac{2}{5}$ tych rybek, to w akwarium jest 16 samców skalarów.	P	F
Pięć minut to $\frac{1}{20}$ kwadransa.	P	F

P, P, F	F, P, P	P, F, P
chemii	biologii	matematyki

9. Ile wynosi odwrotność liczby $\left(1\frac{2}{3}\right)^2$?

$1\frac{9}{4}$	$1\frac{4}{9}$	$\frac{9}{25}$
radu i jodu	polonu i niklu	radu i polonu



Ułamki zwykle wykorzystywane są na co dzień nie tylko podczas zakupów czy gotowania, lecz także podczas analizy rozmaitych danych, w tym wyników sportowych. Za ich pomocą można np. pokazać, jaką część wszystkich medali stanowią medale zdobyte przez dany kraj, ustalić, jaką część wszystkich medali w danej dyscyplinie stanowią złote, srebrne i brązowe medale, albo porównać wyniki z bieżącego roku i lat ubiegłych.



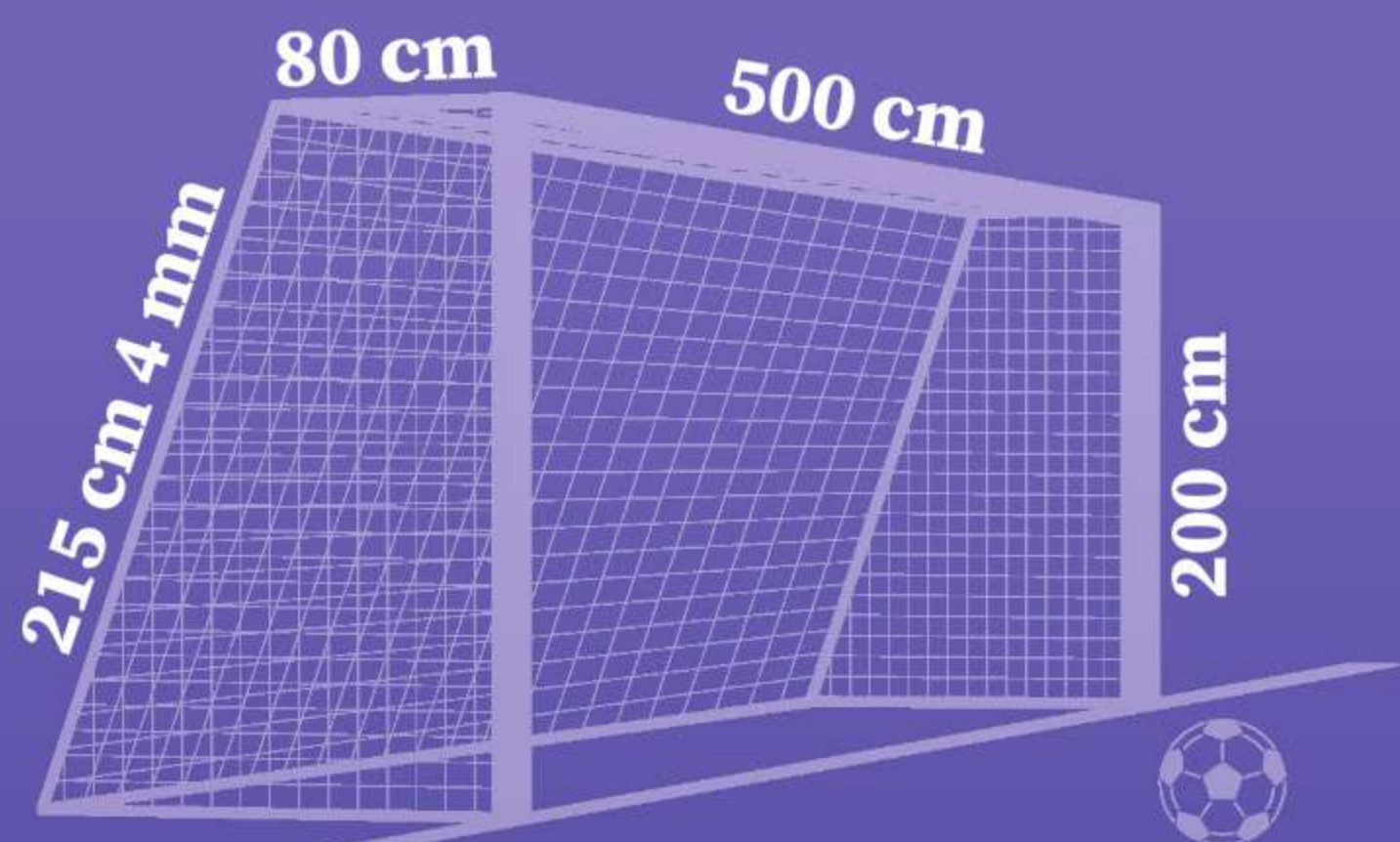
W 2022 r. polscy sportowcy podczas zawodów w randze mistrzostw Europy zdobyli łącznie 480 medali w 23 dyscyplinach sportowych.

1. Ile złotych, srebrnych i brązowych medali zdobyli łącznie polscy zapaśnicy, skoro medale zdobyte w zapasach stanowiły $\frac{3}{80}$ wszystkich polskich medali zdobytych w 2022 r. podczas zawodów w randze mistrzostw Europy?
2. Polscy szachiści zdobyli łącznie 21 medali. Ile zdobyli medali poszczególnych rodzajów, jeśli srebrne medale stanowiły $\frac{1}{96}$ wszystkich medali zdobytych w 2022 r. podczas zawodów w randze mistrzostw Europy, a brązowe trzecią część wszystkich medali zdobytych przez szachistów?
3. Polscy sportowcy w sumo zdobyli łącznie w tej dyscyplinie 74 medale. Srebrne medale stanowiły $\frac{1}{3}$ brązowych medali. Brązowe medale stanowiły $\frac{1}{10}$ wszystkich medali zdobytych podczas zawodów w randze mistrzostw Europy w 2022 r. Ile złotych medali zdobyli polscy sportowcy w sumo?
4. W kajakarstwie Polacy zdobyli 39 medali, w tym siedem brązowych i 16 złotych.
 - a) Jaką część wszystkich medali zdobytych przez polskich sportowców w 2022 r. podczas zawodów w randze mistrzostw Europy stanowiły srebrne medale kajakarzy?
 - b) W 2021 r. kajakarze zdobyli tyle samo brązowych medali co w roku 2022. Ile brązowych medali zdobyli polscy sportowcy ogółem podczas zawodów w randze mistrzostw w 2021 r., jeśli liczba brązowych medali zdobytych przez kajakarzy stanowiła $\frac{1}{28}$ wszystkich brązowych medali Polaków?

DZIAŁ

VI

W ŚWIECIE PÓŁ WIELOKĄTÓW



Boisko ma kształt prostokąta o wymiarach $105\text{ m} \times 68\text{ m}$. Ile wynosi jego powierzchnia? Czy to więcej niż 100 arów?

Bok bramki ma kształt trapezu prostokątnego o powierzchni $24\,000\text{ cm}^2$. Tył i górna część bramki to prostokąty. Na takiej aluminiowej ramie luźno rozpięta jest siatka. Ile co najmniej centymetrów kwadratowych siatki potrzeba na wykonanie takiej bramki?



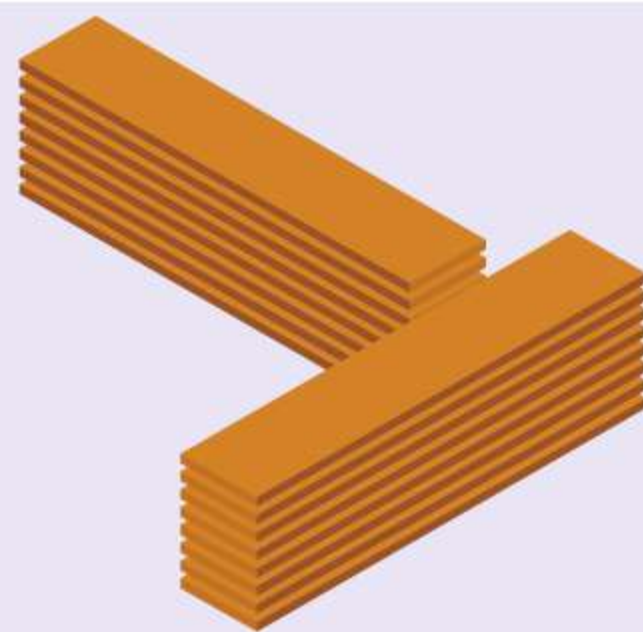
1 • Pole prostokąta

- ▶ Jak obliczać pole kwadratu, a jak pole prostokąta niebędącego kwadratem?
- ▶ Jak wyznaczać długość boku kwadratu o podanym polu?
- ▶ Jak wyznaczać długość jednego boku prostokąta na podstawie jego pola i długości drugiego boku lub obwodu?



Analizuj!

Pan Kazimierz pracuje w firmie, która zajmuje się sprzedażą i montażem parkietów. Jego klienci zamierzają odnowić podłogę w salonie o wymiarach $4\text{ m} \times 5\text{ m}$. Ile zapłacą za panele, jeśli za 1 m^2 paneli trzeba zapłacić 120 zł, a zapas wyniesie 3 m^2 paneli?



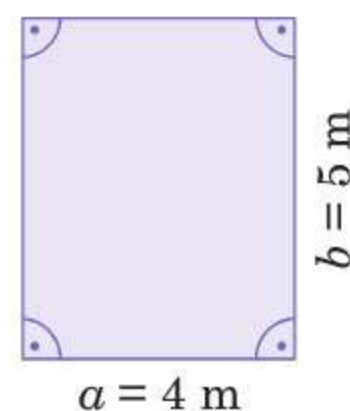
Pole prostokąta można obliczyć jako iloczyn długości jego dwóch sąsiednich boków: $P = a \cdot b$.

Powierzchnia podłogi: $P = 4\text{ m} \cdot 5\text{ m} = 20\text{ m}^2$

Całkowita powierzchnia paneli: $20\text{ m}^2 + 3\text{ m}^2 = 23\text{ m}^2$

Koszt zakupu paneli to:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \cdot 120 \\ \hline 46 \\ + 230 \\ \hline 2760 \end{array}$$



Klienci pana Kazimierza zapłacą za panele 2760 zł.



Jaką powierzchnię ma prostokątny dywan o wymiarach $2\text{ m} \times 300\text{ cm}$?

Pan Władysław jest architektem krajobrazu. Jego klienci chcą zaprojektować ogród w kształcie prostokąta o powierzchni 660 m^2 . Na podstawie pomiarów pan Władysław ustalił, że szerokość ogrodu to 20 m . Ile wynosi długość ogrodu?



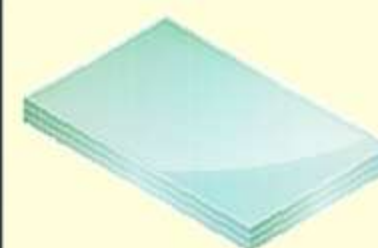
Pole prostokąta oblicza się ze wzoru: $P = a \cdot b$.

$$660 \text{ m}^2 = 20 \text{ m} \cdot b$$

Odwrotnością mnożenia jest dzielenie, więc $b = 660 \text{ m}^2 : 20 \text{ m}$, czyli $b = 33 \text{ m}$.

Długość ogrodu wynosi 33 m .

Pani Zuzanna prowadzi firmę, która zajmuje się sprzedażą i montażem paneli ze szkła laminowanego. Jej klienci zamierzają zamontować laminowany kwadratowy panel hartowany o boku długości 50 cm . Ile zapłacą za panel i jego montaż?



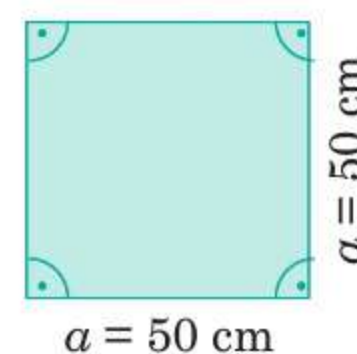
Panel laminowany hartowany: 500 zł/m^2
Montaż: 100 zł/m^2

Uwaga: zamówienia poniżej 1 m^2 ($10\,000 \text{ cm}^2$) liczone są jako 1 m^2 .

Pole kwadratu można obliczyć jako iloczyn długości jego dwóch sąsiednich boków lub inaczej kwadrat długości jego boku: $P = a \cdot a = a^2$.

$$\text{Powierzchnia panelu: } P = 50 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 2500 \text{ cm}^2$$

$2500 \text{ cm}^2 < 10\,000 \text{ cm}^2$, więc za panel i jego montaż trzeba zapłacić: $500 \text{ zł} + 100 \text{ zł} = 600 \text{ zł}$.



Klienci pani Zuzanny zapłacą za panel i jego montaż 600 zł .

Pani Małgorzata projektuje altany ogrodowe. Podłoga altany ma zajmować powierzchnię w kształcie kwadratu o polu 16 m^2 . Jakie wymiary powinna mieć ta podłoga?



Pole kwadratu jest równe drugiej potęgze długości jego boku, więc wystarczy ustalić liczbę, której kwadrat wynosi 16 .

$$(2 \text{ m})^2 = 4 \text{ m}^2 \quad \cdot \quad (3 \text{ m})^2 = 9 \text{ m}^2 \quad \cdot \quad (4 \text{ m})^2 = \underline{\underline{16 \text{ m}^2}}$$

Podłoga altany powinna mieć wymiary $4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$.

Jakie wymiary ma tablica korkowa w kształcie kwadratu o powierzchni 64 dm^2 ?



Poćwicz!

1. Oblicz pole prostokąta o podanych wymiarach.

a) 3 cm i 8 cm

b) 5 m i 18 m

c) $2\frac{1}{2}$ dm i 4 dm

d) $10 \text{ cm} \times 450 \text{ mm}$

e) $30 \text{ m} \times 14 \text{ mm}$

f) $800 \text{ cm} \times 30\frac{1}{4} \text{ dm}$

2. Oblicz pole kwadratu o boku podanej długości.

a) 12 cm

b) 1000 cm

c) $\frac{2}{3}$ dm

d) $3\frac{1}{2}$ m

3. Oblicz długość boku kwadratu o podanym polu.

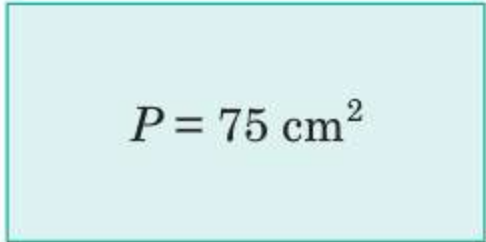
a) 81 m^2

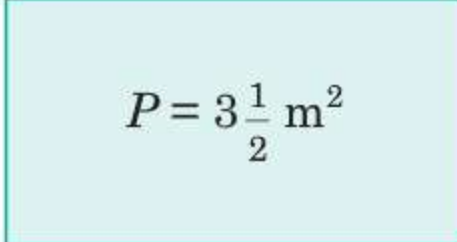
b) 100 mm^2

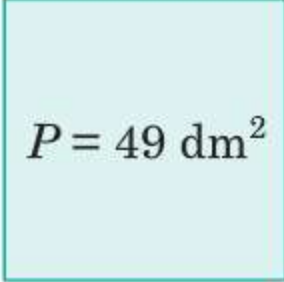
c) $\frac{1}{36} \text{ cm}^2$

d) $2\frac{1}{4} \text{ dm}^2$

4. Na podstawie rysunku oblicz długość boku a prostokąta.

a) 
 $P = 75 \text{ cm}^2$
 $b = 15 \text{ cm}$
 a

b) 
 $P = 3\frac{1}{2} \text{ m}^2$
 $b = 1\frac{1}{7} \text{ m}$
 a

c) 
 $P = 49 \text{ dm}^2$
 a

5. Oblicz pole prostokąta $ABCD$, jeśli wiadomo, że:

a) bok AB ma długość 13 cm, a bok BC jest od niego o 2 cm krótszy;

b) bok AB ma długość 11 m, a bok BC jest od niego pięciokrotnie dłuższy;

c) bok AB jest o 2 cm dłuższy od boku BC , a $Obw. = 100 \text{ cm}$;

d) bok AB jest pięciokrotnie dłuższy niż bok BC , a $Obw. = 360 \text{ dm}$.

6. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Blat stołu ma kształt kwadratu o obwodzie 240 cm. Powierzchnia tego blatu jest zatem równa 240 cm^2 .	P	F
Działka w kształcie kwadratu o boku długości 50 m oraz działka w kształcie prostokąta o wymiarach $40 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ mają jednakową powierzchnię.	P	F

7. Dział zaopatrzenia muzeum morskiego chce kupić chodnik dywanowy o szerokości 100 cm i długości 12 m. Ile zapłaci za zakup, jeśli 1 m^2 chodnika kosztuje 110 zł?

8. Droga startowa na terenie gdańskiego lotniska ma długość 2 km 800 m oraz szerokość 45 m. Wybierz właściwe uzupełnienie zdań spośród A i B oraz C i D.
- I. Obwód drogi startowej to A. 2845 m. B. 5 km 690 m.
- II. Powierzchnia drogi startowej to C. 126 000 km². D. 126 000 m².

9. Na planie sporządzonym w skali 1 : 200 działka budowlana ma kształt prostokąta o wymiarach 12 cm × 16 cm. Jaka jest rzeczywista powierzchnia tej działki? Wynik zapisz w metrach kwadratowych.

10. Oblicz długości boków prostokąta, jeśli wiadomo, że:

- a) jeden z boków jest o 7 m dłuższy od drugiego, a pole tego prostokąta jest równe 60 m²;
- b) jeden z boków jest trzykrotnie krótszy niż drugi, a pole tego prostokąta jest równe 300 dm².



A to ciekawe

2 maja 2023 r. na plaży w Międzyzdrojach rozwinięto najdłuższą w Polsce flagę narodową. Miała 2755 m 80 cm długości i 1 m 50 cm szerokości.

Jaką powierzchnię zajmowała ta flaga? Czy ma ona większą powierzchnię niż boisko do piłki nożnej o wymiarach 105 m × 68 m?



Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz pole prostokąta o podanych wymiarach.

- a) 12 m i 7 m b) 80 cm × 200 mm c) $4\frac{1}{2}$ cm i $\frac{1}{3}$ cm d) $2\frac{1}{2}$ m × 400 cm

2. Marek porównuje powierzchnie pracowni matematycznej i biologicznej. Pracownia matematyczna ma długość 8 m i szerokość 6 m, pracownia biologiczna jest kwadratem o powierzchni 64 m². Wybierz właściwe uzupełnienie zdań spośród A i B oraz C i D.

- I. Powierzchnia pracowni matematycznej to A. 28 m². B. 48 m².
- II. Długość pracowni biologicznej to C. 8 m. D. 16 m.

3. W pewnej gminie działki leśne sprzedawane są w cenie 5 zł za 1 m². Działka ma kształt prostokąta o wymiarach 260 m × 380 m. Ile trzeba za nią zapłacić?

2. Jednostki pola

- ▶ Jakie są jednostki pola powierzchni?
- ▶ Czym są ar i hektar?
- ▶ Jakie są zależności między jednostkami pola powierzchni?



Odkrywaj!

1. Moi rodzice przeglądali oferty sprzedaży działek rekreacyjnych nad morzem. Ich uwagę przykuły dwa ogłoszenia, które dotyczyły tej samej działki, lecz zawierały nieco inne informacje.

Poczuj bryzę morską

Numer oferty: 412-A7
Powierzchnia działki: 3 ary
Odległość od morza: 400 m
Woda: tak

Przy zacisznej plaży

Numer oferty: 3048
Powierzchnia działki: 300 m²
Media: woda, prąd
Zagospodarowanie: nie

Obie informacje dotyczące powierzchni działki są prawdziwe. Co to oznacza? Ilu metrom kwadratowym odpowiada 1 ar?

2. Inne ogłoszenie dotyczyło działki mającej kształt kwadratu o boku 100 m.
- Oblicz powierzchnię tej działki.
 - Przeczytaj informacje zawarte w ogłoszeniu dotyczącym tej działki, a następnie porównaj je ze swoimi obliczeniami. Ilu metrom kwadratowym odpowiada 1 hektar?

Działka położona blisko morza, piękne widoki, powierzchnia działki: 1 hektar.



Analizuj!

$$1 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 1 \text{ dm} \cdot 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 100 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ a} = 10 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \cdot 1 \text{ a} = 100 \text{ a}$$

$$1 \text{ km}^2 = 100 \cdot 1 \text{ ha} = 100 \text{ ha}$$

Pole owsa ma powierzchnię 14 a, pole rzepaku – 2 ha, a pole słoneczników – 25 000 000 cm². Które pole ma największą powierzchnię w metrach kwadratowych?



$$14 \text{ a} = 14 \cdot 1 \text{ a} = 14 \cdot 100 \text{ m}^2 = 1400 \text{ m}^2$$



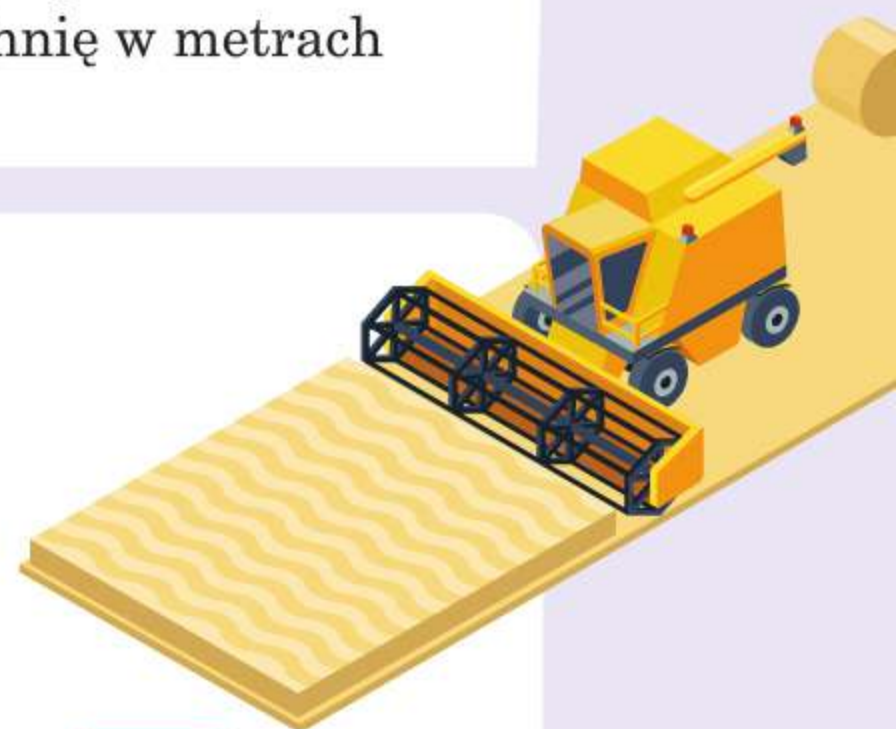
$$2 \text{ ha} = 2 \cdot 1 \text{ ha} = 2 \cdot 100 \text{ a} = 200 \cdot 1 \text{ a} = 200 \cdot 100 \text{ m}^2 = 20\,000 \text{ m}^2$$



$$25\,000\,000 \text{ cm}^2 = 250\,000 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 250\,000 \cdot 1 \text{ dm}^2 = 2500 \cdot 100 \text{ dm}^2 = 2500 \cdot 1 \text{ m}^2 = 2500 \text{ m}^2$$

$$20\,000 \text{ m}^2 > 2500 \text{ m}^2 > 1400 \text{ m}^2$$

Największą powierzchnię ma pole rzepaku.



Ile metrów kwadratowych to 5 ha? A 5 a? 7 hektarów – ile to arów? A centymetrów kwadratowych?

Zależności między jednostkami pola

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ dm}^2 = 1\,000\,000 \text{ cm}^2 = 100\,000\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ dm}^2 = 100\,000\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha} = 10\,000 \text{ a} = 1\,000\,000 \text{ m}^2 = 100\,000\,000 \text{ dm}^2$$



Poćwicz!

1. Wyraż podane wielkości we wskazanej jednostce.

a) mm^2 $8 \text{ cm}^2 \cdot 12 \text{ cm}^2 \cdot 4 \text{ dm}^2 \cdot 23 \text{ m}$

b) cm^2 $5 \text{ dm}^2 \cdot 34 \text{ dm}^2 \cdot 9 \text{ m}^2 \cdot 16 \text{ m}^2 \cdot 200 \text{ mm}^2$

c) dm^2 $3 \text{ m}^2 \cdot 27 \text{ m}^2 \cdot 400 \text{ cm}^2 \cdot 50\,000 \text{ cm}^2$

d) m^2 $7 \text{ km}^2 \cdot 58 \text{ km}^2 \cdot 60\,000 \text{ cm}^2 \cdot 500 \text{ dm}^2$

2. Wyraż podane wielkości we wskazanej jednostce.

a) m^2 $9 \text{ a} \cdot 28 \text{ a} \cdot 140 \text{ a} \cdot 5 \text{ ha} \cdot 60 \text{ ha} \cdot 239 \text{ ha}$

b) a $800 \text{ m}^2 \cdot 2200 \text{ m}^2 \cdot 74\,000 \text{ m}^2 \cdot 2 \text{ ha} \cdot 90 \text{ ha}$

c) ha $30\,000 \text{ m}^2 \cdot 140\,000 \text{ m}^2 \cdot 9\,990\,000 \text{ m}^2 \cdot 600 \text{ a} \cdot 5700 \text{ a}$

3. Według Międzynarodowej Federacji Piłki Nożnej boisko do piłki nożnej powinno mieć 105 m długości i 68 m szerokości. Jaką powierzchnię ma takie boisko?

A. Większą niż 1 ha.

B. Większą niż 80 a.

C. Większą niż 70 a.

D. Mniejszą niż 70 a.

4. Pani Ala remontuje salon fryzjerski. Podłogę o powierzchni 36 m^2 chce wyłożyć płytkami o wymiarach $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$. Czy 1000 zł wystarczy jej na zakup płytek, jeśli jedno opakowanie zawiera 8 płytek i kosztuje 79 zł?

5. Działka ma kształt prostokąta o wymiarach $20 \text{ m} \times 35 \text{ m}$. Na krzewy owocowe przeznaczono $\frac{3}{14}$ powierzchni tej działki, na warzywa $-\frac{1}{5}$ pozostałej powierzchni działki. Resztę działki obsiano trawą. Czy na warzywnik przeznaczono powierzchnię większą niż 1 a? Jaką powierzchnię obsiano trawą?

6. W holenderskim mieście Keukenhof (czytaj: kukenhof) znajduje się jeden z największych ogrodów świata. Na 32 ha posadzono 7 mln cebulek, m.in. tulipanów, narcyzów i hiacyntów. Ile średnio całych cebulek przypada na każdy 1 m^2 ogrodu?



7. Firma zajmująca się sprzedażą działek rekreacyjnych, budowlanych i rolnych zamieściła na swojej stronie internetowej poniższy cennik.

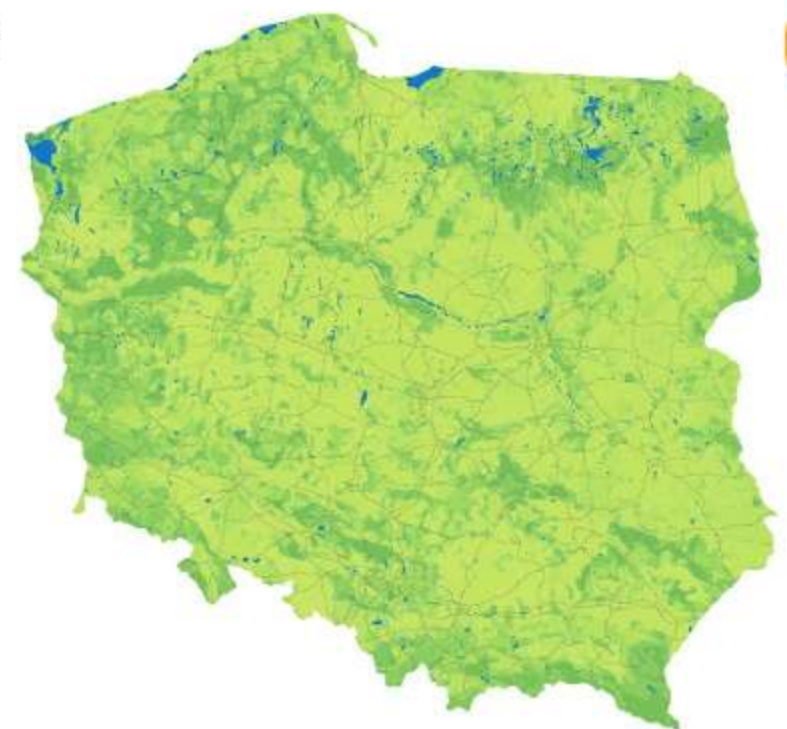


Powierzchnia działki	poniżej 9 a	od 9 a do 1 ha	powyżej 1 ha
Cena za 1 m^2	237 zł	223 zł	219 zł

Działka A-5 ma powierzchnię 1340 m^2 , działka B-5R – 108 a, zaś działka C-112 ma powierzchnię stanowiącą $\frac{3}{4}$ powierzchni działki A-5.

- a) Która działka jest największa, a która najmniejsza?
b) Ile kosztuje każda z tych działek?

8. Na terenie Polski znajduje się ponad 9000 jezior, które łącznie zajmują powierzchnię niemal 3169 km^2 . Wyraż tę powierzchnię w hektarach.



Sprawdź, co umiesz!

1. Wyraż podane wielkości we wskazanej jednostce.

- a) $14 \text{ cm}^2 = \square \text{ mm}^2$ b) $77 \text{ m}^2 = \square \text{ cm}^2$ c) $30\,000\,000 \text{ m}^2 = \square \text{ km}^2$
d) $35 \text{ ha} = \square \text{ a}$ e) $102 \text{ a} = \square \text{ m}^2$ f) $650\,000 \text{ m}^2 = \square \text{ ha}$

2. Pan Henryk chce obsiać trawą ogródek o powierzchni 3 a. Ile zapłaci za nasiona, jeśli 1 opakowanie kosztuje 4 zł i wystarcza na obsianie powierzchni równej 10 m^2 ?

3. Wskaż powierzchnię różną od pozostałych.

- A. $140\,000 \text{ m}^2$ B. 1400 a C. 14 ha D. 140 km^2

3. Pole równoległoboku

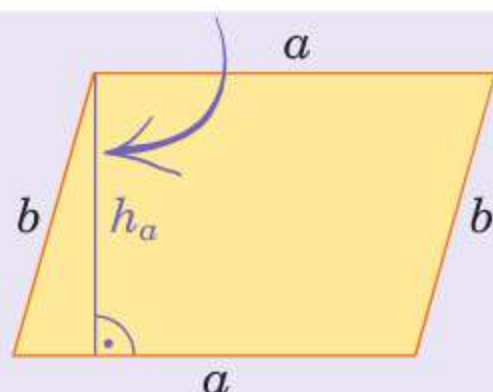
- ▶ Czym jest wysokość równoległoboku?
- ▶ Jak obliczać pole równoległoboku na podstawie długości boku i poprowadzonej do niego wysokości?
- ▶ Jak obliczać pole rombu na podstawie długości przekątnych?



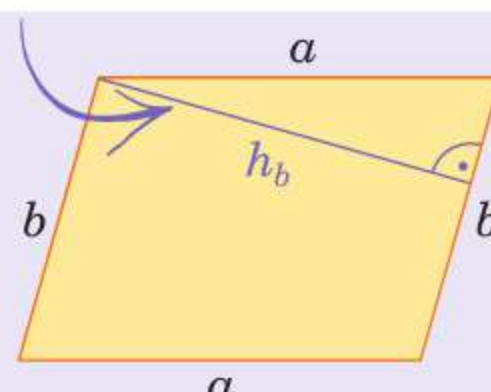
Analizuj!

Wysokość równoległoboku to odcinek łączący dwa równoległe boki i do nich prostopadły. Bok, do którego poprowadzona jest wysokość, nazywamy **podstawą**.

To **wysokość poprowadzona do boku a** równa h_a .

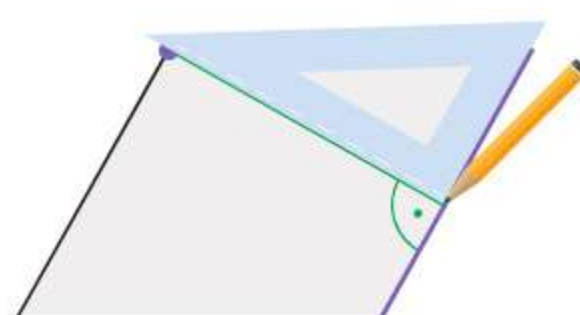
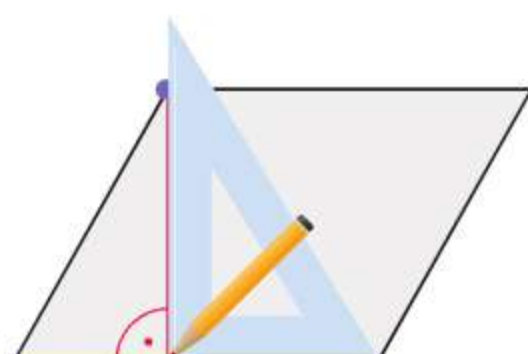


To **wysokość poprowadzona do boku b** równa h_b .

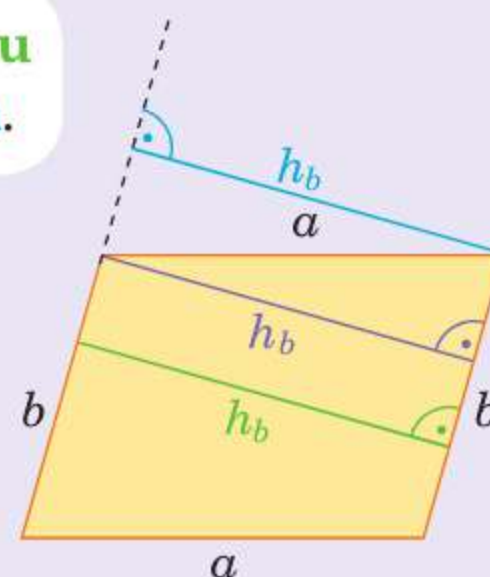
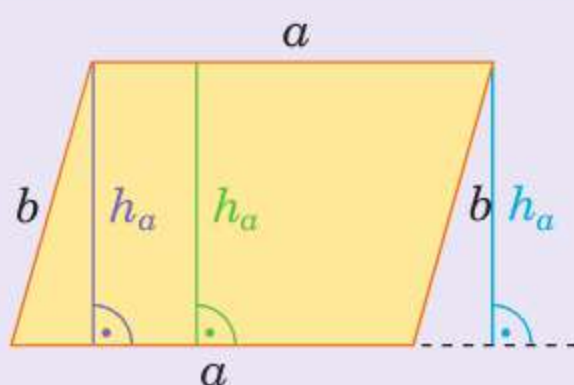


Jak narysować wysokość równoległoboku poprowadzoną z wierzchołka?

- 1 Wybierz wierzchołek, a następnie tak przyłóż ekierkę, aby jedno z jej ramion pokrywało się z przeciwległym bokiem, a drugie „przechodziło” przez wybrany wierzchołek.
- 2 Wzdłuż ekierki narysuj odcinek łączący wierzchołek z przeciwległym bokiem.

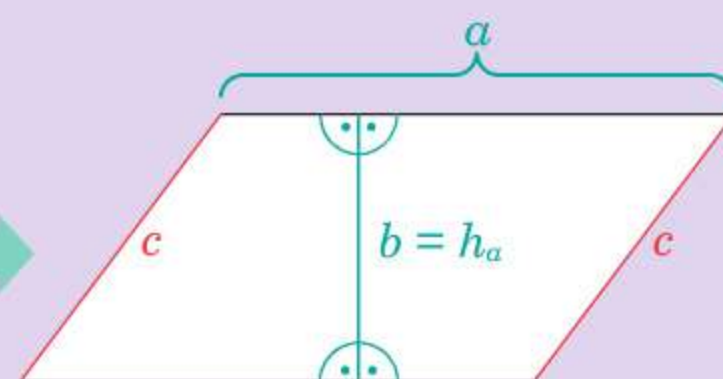
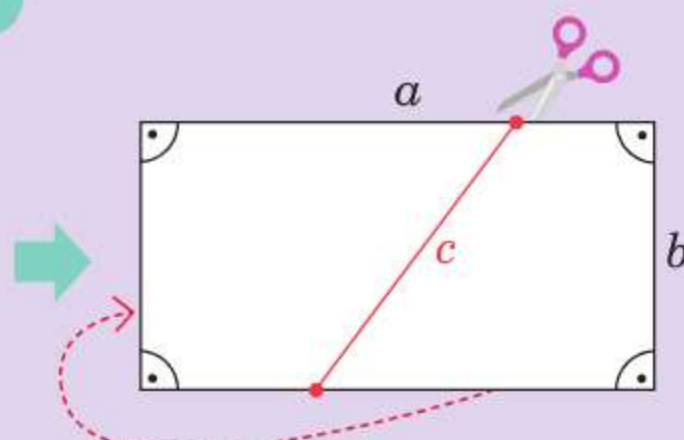
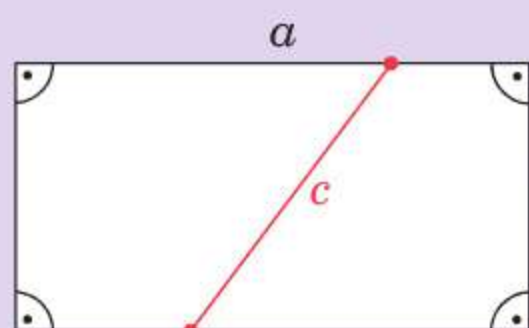


Wysokość można poprowadzić także **z innego punktu niż wierzchołek**, a także **poza równoległobokiem**.



Pole równoległoboku o bokach długości a i b jest równe iloczynowi długości podstawy oraz poprowadzonej do niej wysokości, czyli $P = a \cdot h_a$ lub $P = b \cdot h_b$.

Uzasadnienie wzoru



Narysuj i wytnij prostokąt, następnie na przeciwległych bokach zaznacz dwa punkty i połącz je odcinkiem.

Prostokąt rozetnij wzdłuż tego odcinka i odcięty trapez prostokątny przesun tak, aby boki b się pokryły.

Powstały czworokąt ma dwie pary boków równoległych, więc jest równoległobokiem.

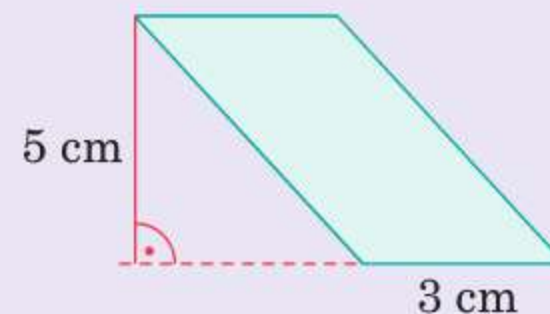
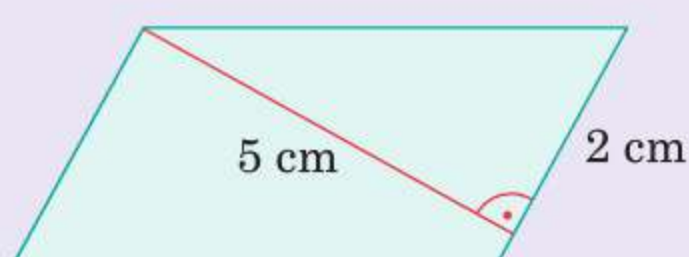
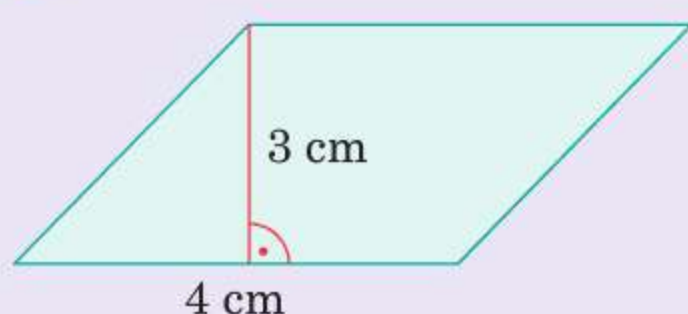
Pole prostokąta o bokach długości a i b wynosi $a \cdot b$.

Po przesunięciu **bok b prostokąta** stanowi **wysokość h_a poprowadzoną do boku a równoległoboku**, czyli $b = h_b$.

A zatem **pole równoległoboku** jest równe polu prostokąta, czyli $a \cdot h_a$.



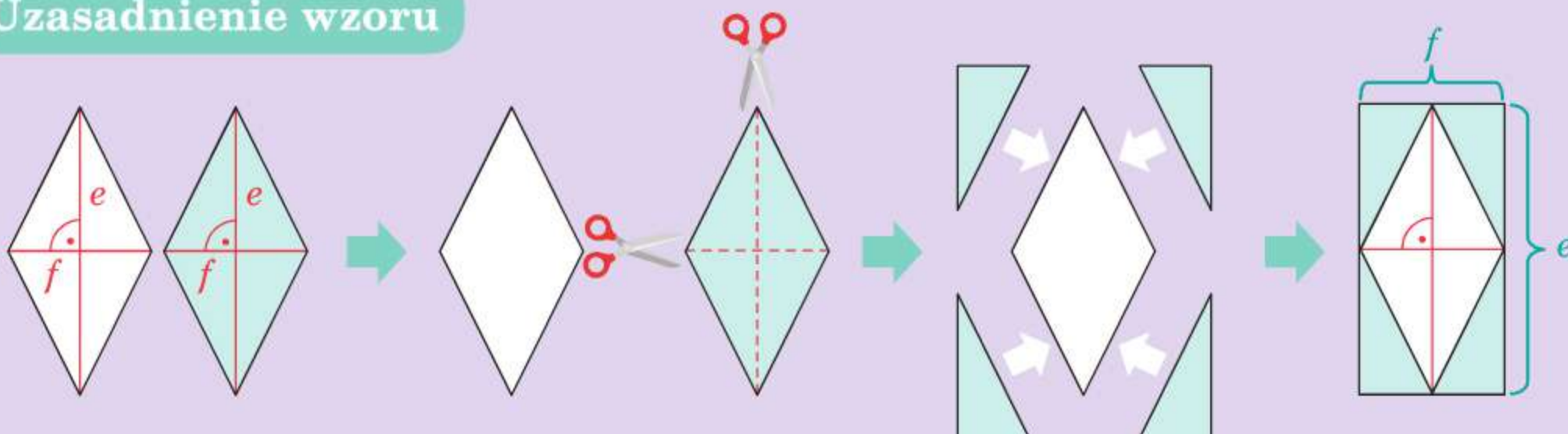
Oblicz pola poniższych równoległoboków.



Ponieważ romb jest równoległobokiem, **pole rombu o boku a i wysokości h** można obliczyć ze wzoru na pole równoległoboku $P = a \cdot h$.

Pole rombu o przekątnych długości e i f jest równe połowie iloczynu długości przekątnych tego rombu, czyli $P = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{e \cdot f}{2}$.

Uzasadnienie wzoru



Narysuj i wytnij dwa identyczne romby.

Jeden z rombów rozetnij na trójkąty prostokątne.

Z rombu i trójkątów ułóż czworokąt.

Powstały czworokąt ma cztery kąty proste, więc jest prostokątem.

Pole prostokąta o bokach długości e i f wynosi $e \cdot f$.

Prostokąt złożony jest z dwóch identycznych rombów.

A zatem **pole rombu** jest równe połowie pola prostokąta, czyli $P = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$.

Oblicz pole rombu o przekątnych długości 10 cm i 12 cm.



Równoległobok, którego dłuższy bok ma długość 12 cm, ma takie samo pole jak romb o przekątnych długości 6 cm oraz 8 cm. Oblicz wysokość równoległoboku poprowadzoną do jego dłuższego boku.

$$P_{\square} = 12 \text{ cm} \cdot h$$

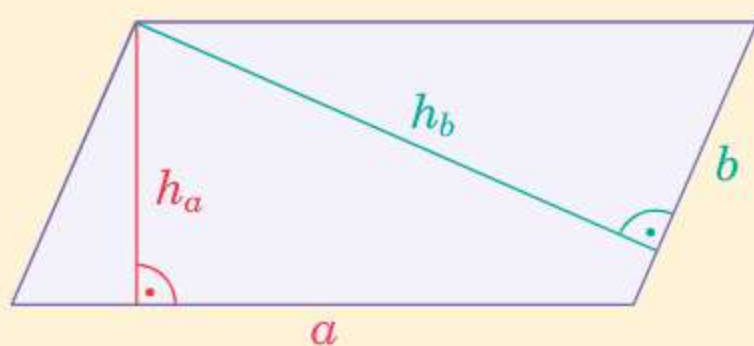
$$P_{\diamond} = \frac{6 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$P_{\square} = P_{\diamond}$$

$$12 \text{ cm} \cdot h = 24 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad h = 24 \text{ cm}^2 : 12 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$$



Oblicz wysokość rombu o boku długości 10 cm oraz przekątnych długości 12 cm i 16 cm.

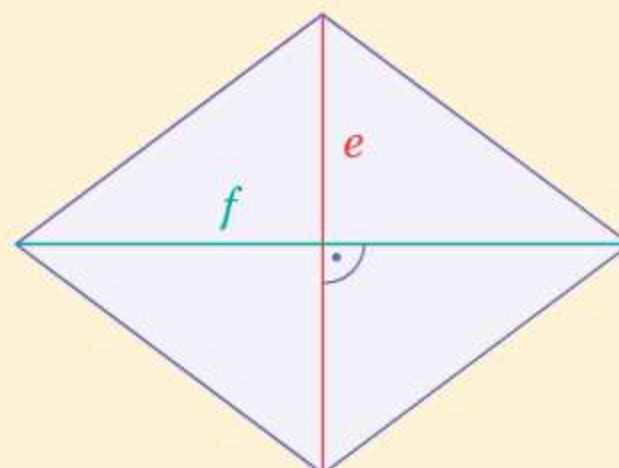


Pole dowolnego równoległoboku
o bokach długości a i b oraz poprowadzonych
do nich wysokościach, odpowiednio h_a i h_b ,
obliczamy ze wzoru:
 $P = a \cdot h_a$ lub $P = b \cdot h_b$.



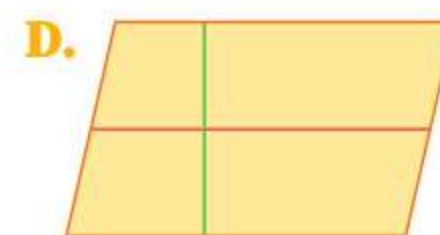
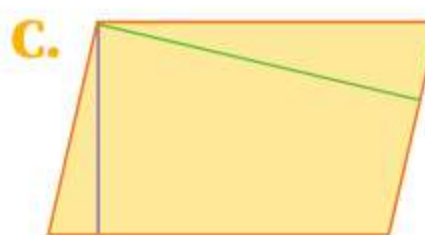
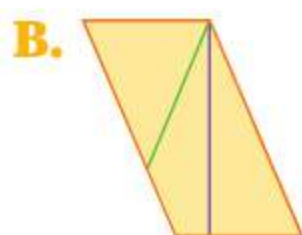
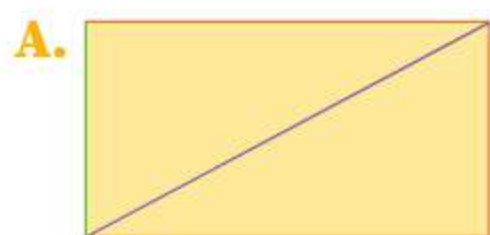
Pole rombu o przekątnych długości e i f
obliczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{e \cdot f}{2}.$$

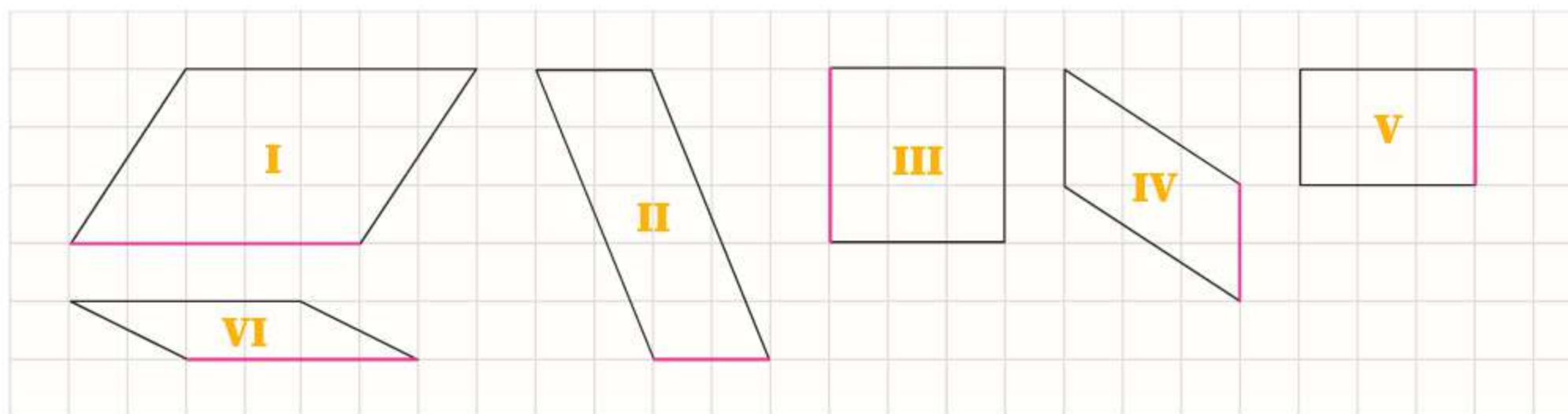


Poćwicz!

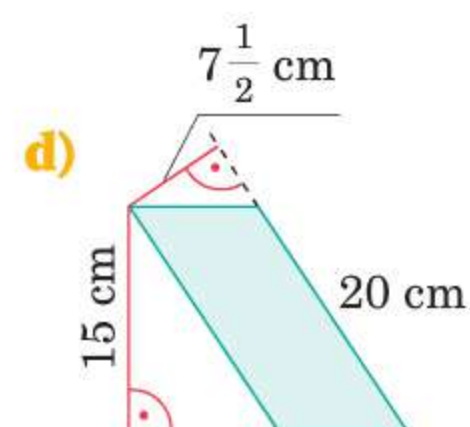
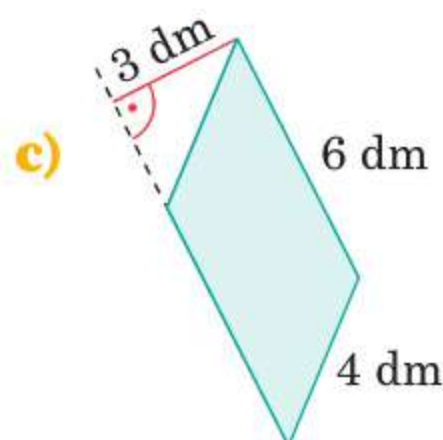
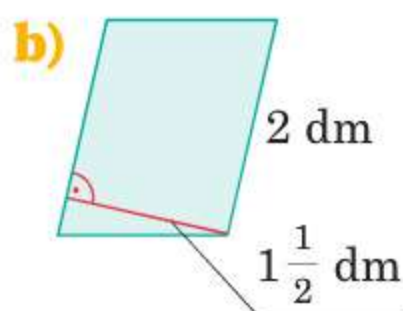
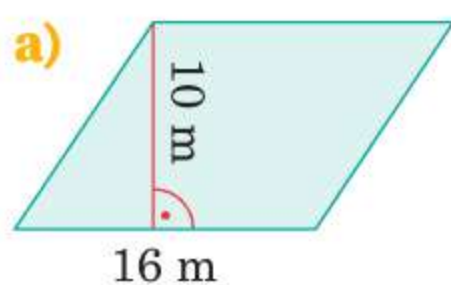
1. W którym równoległoboku poprawnie narysowano obie wysokości?



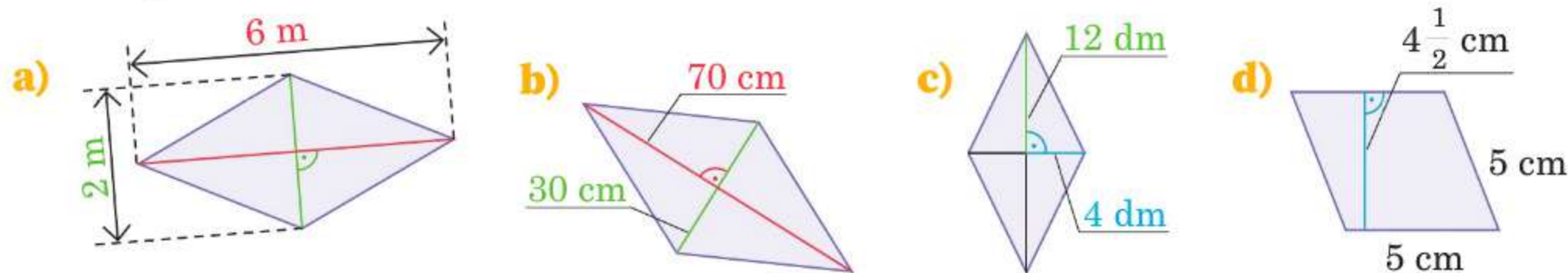
2. Odczytaj z rysunku długości wyróżnionego boku równoległoboku oraz poprowadzonej do niego wysokości. Przyjmij, że długość boku jednej kratki wynosi 1.



3. Oblicz pole równoległoboku.



4. Oblicz pole rombu.



5. Jeden bok równoległoboku ma 25 cm długości. Wysokość poprowadzona do tego boku ma 4 cm długości. Wyznacz pole tego równoległoboku oraz wysokość poprowadzoną do drugiego boku, którego długość wynosi 20 cm.

6. Ustal wysokości ceramicznego dekoru w kształcie równoległoboku o polu równym 98 cm^2 i bokach długości 7 cm oraz 14 cm.



7. Przekątna kwadratu ma długość 10 cm. Wyznacz pole tego kwadratu.

8. Jedna z przekątnych latawca w kształcie rombu o polu równym $10\,000 \text{ cm}^2$ ma 250 cm długości. Jaka długość ma druga przekątna?



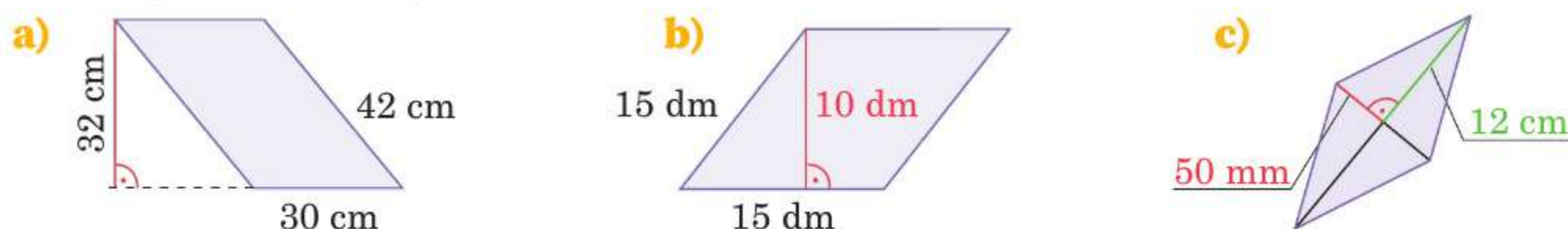
9. Jedna z przekątnych rombu ma 24 dm długości, a druga jest od niej o 140 cm krótsza. Wysokość tego rombu wynosi $9\frac{3}{13}$ dm. Oblicz obwód tego rombu.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Pole rombu, którego jedna z przekątnych ma długość 5 cm, a druga jest od niej o 5 cm dłuższa, wynosi 25 cm^2 .	P	F
Jeśli pole P równoległoboku jest równe 65 cm^2 , a bok b ma długość 5 cm, to wysokość h_b jest równa 13 cm.	P	F

2. Oblicz pole równoległoboku.



3. Romb o przekątnych długości 18 cm i 24 cm ma bok długości 15 cm. Oblicz pole tego rombu oraz jego wysokość.

4. Pole trójkąta

- ▶ Czym jest wysokość trójkąta?
- ▶ Jak obliczać pole trójkąta?



Odkrywaj!

1. Podczas lekcji matematyki każdy z uczniów miał narysować trójkąt ABC o bokach $|AB| = 7\text{ cm}$, $|BC| = 4\text{ cm}$ i $|AC| = 5\text{ cm}$, a następnie zmierzyć wysokość tego trójkąta. Cezary, Kuba i Pola otrzymali różne wyniki. Jak to możliwe?



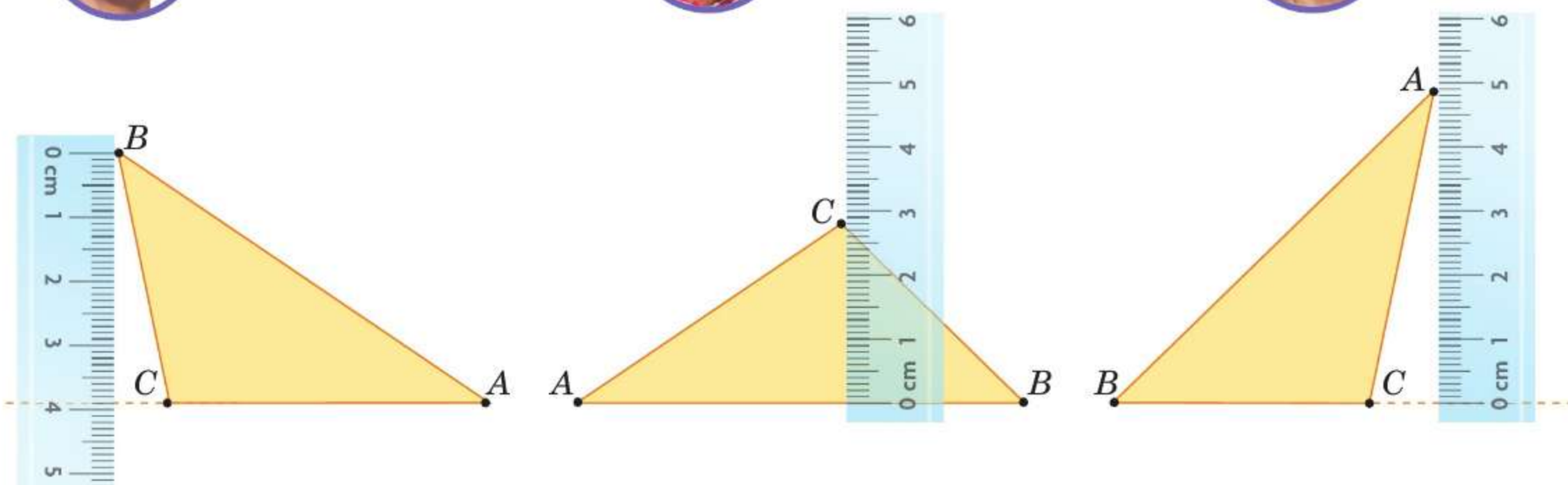
Cezary



Kuba



Pola



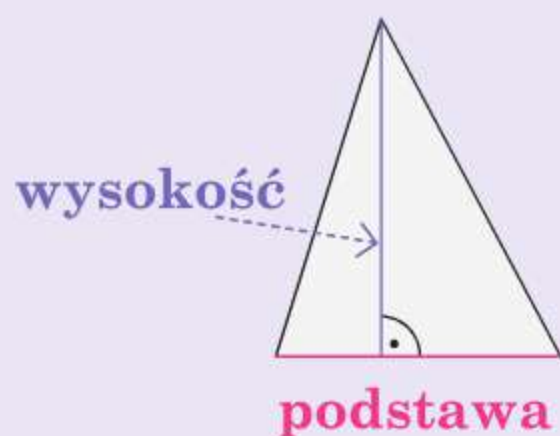
2. Narysuj prostokąt o wymiarach $4\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ oraz równoległobok niebędący prostokątem o boku długości 4 cm i poprowadzonej do niego wysokości równej 3 cm . Wytnij te czworokąty.
- a) Ile wynosi pole prostokąta? A ile pole równoległoboku?
 - b) Rozetnij prostokąt na dwa jednakowe trójkąty. Ile wynosi pole jednego trójkąta? Porównaj pola prostokąta i jednego trójkąta.
 - c) Rozetnij równoległobok na dwa jednakowe trójkąty. Ile wynosi pole jednego trójkąta? Porównaj pola równoległoboku i jednego trójkąta.

Co zauważasz?



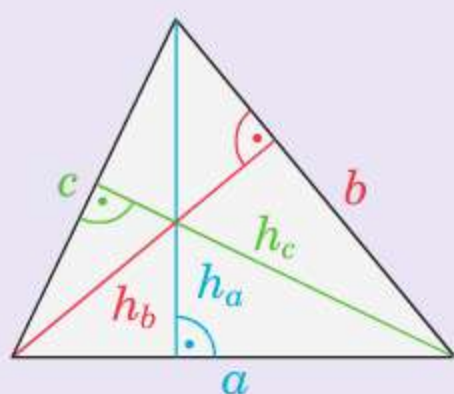
Analizuj!

Wysokość trójkąta to odcinek, który łączy wierzchołek trójkąta z przeciwległym do niego bokiem (lub jego przedłużeniem) i który jest prostopadły do tego boku. Bok, do którego poprowadzona jest wysokość, nazywamy **podstawą trójkąta**.

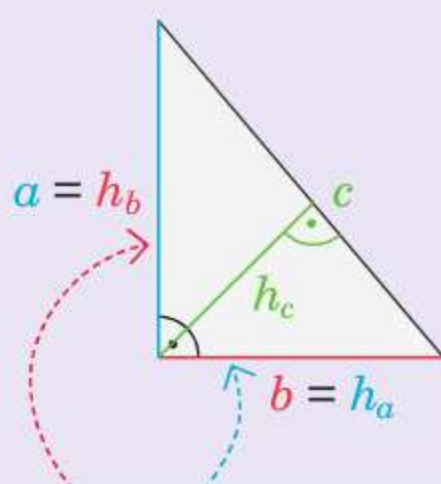


W każdym trójkącie o bokach a , b , c można poprowadzić dokładnie trzy wysokości: h_a , h_b , h_c .

Wysokości w trójkącie ostrokątnym.

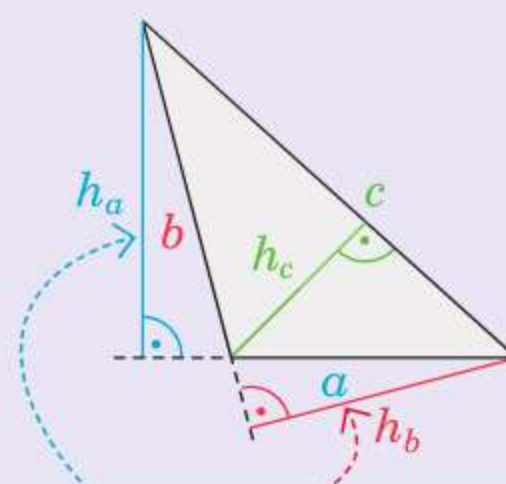


Wysokości w trójkącie prostokątnym.



Przyprostokątne są wysokościami.

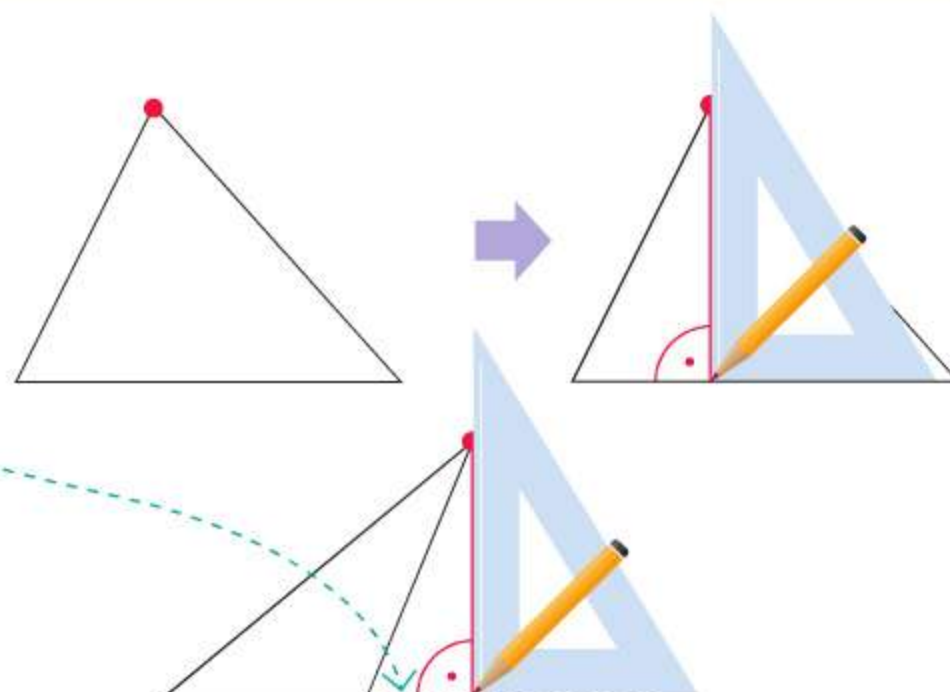
Wysokości w trójkącie rozwartokątnym.



Dwie wysokości są poprowadzone do przedłużenia boków.

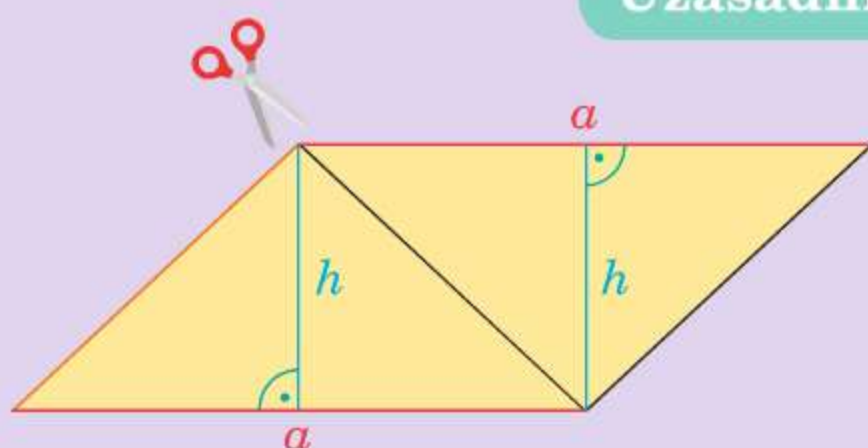
Jak narysować wysokość w trójkącie?

- 1 Wybierz wierzchołek.
- 2 Przyłóż ekierkę tak, aby jedno z prostopadłych ramion pokrywało się z przeciwległym bokiem. W razie potrzeby przedłuż przeciwległy bok.
- 3 Dosuń ekierkę do wierzchołka i narysuj wysokość.

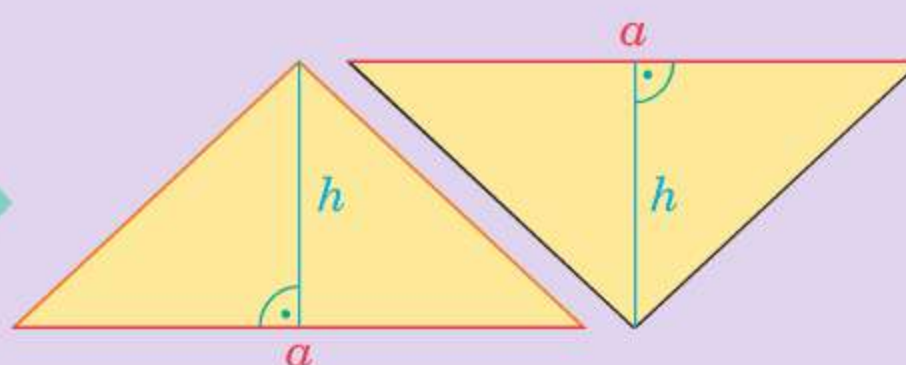


Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości podstawy a oraz poprowadzonej do niej wysokości h , czyli: $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{a \cdot h}{2}$.

Uzasadnienie wzoru



Równoległobok o wysokości h poprowadzonej do boku a przetnij wzłuż przekątnej na dwie równe części.



Powstały dwa identyczne trójkąty, każdy o podstawie a i poprowadzonej do niej wysokości h .

Pole równoległoboku jest równe $a \cdot h$.

Suma pól każdego z trójkątów jest równa polu równoległoboku.

Ponieważ trójkąty są jednakowe, **pole jednego trójkąta** jest równe połowie pola równoległoboku, czyli $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

Ile wynosi pole trójkąta o podstawie długości 5 cm i poprowadzonej do tej podstawy wysokości równej 6 dm?

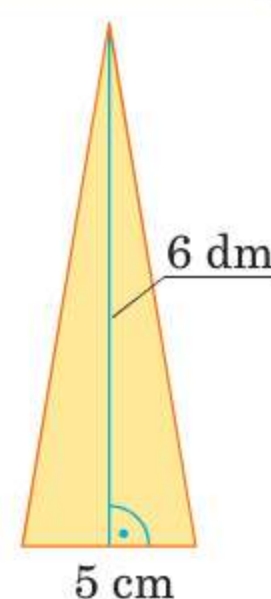
Długości podane są w różnych jednostkach, więc należy je ujednolicić.

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$h = 6 \text{ dm} = 60 \text{ cm}$$

Szukaną wielkością jest pole trójkąta, które obliczamy ze wzoru $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 60 \text{ cm} = 150 \text{ cm}^2$$



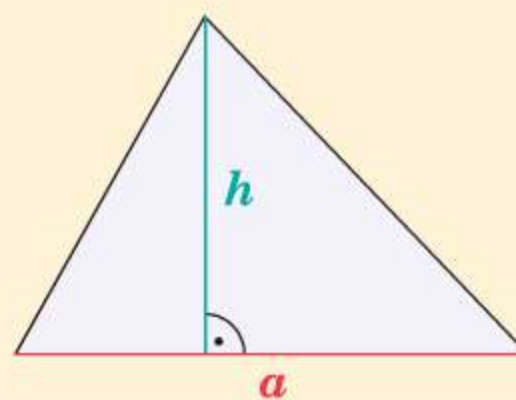
Oblicz pole trójkąta o podstawie długości 8 cm, jeśli wiadomo, że wysokość poprowadzona do tej podstawy jest równa 10 cm.





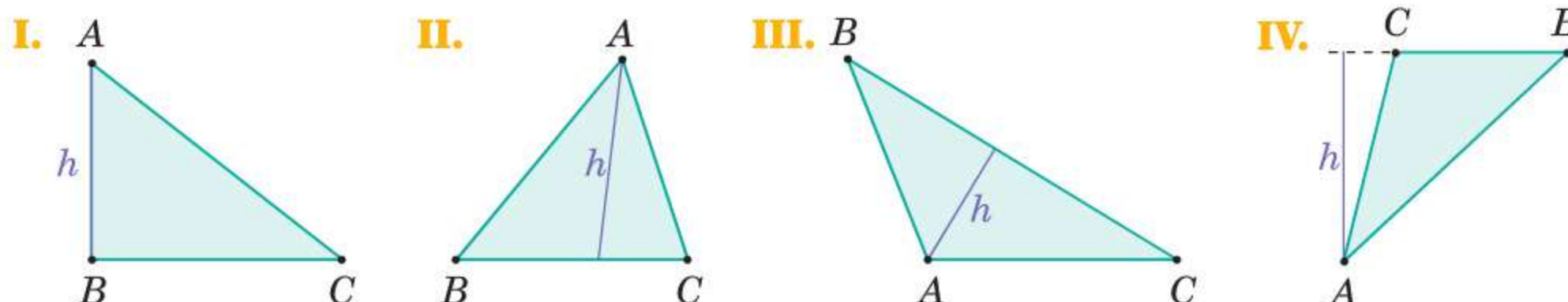
Pole trójkąta o danej podstawie i poprowadzonej do niej wysokości obliczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \quad \text{lub} \quad P = \frac{a \cdot h}{2}.$$

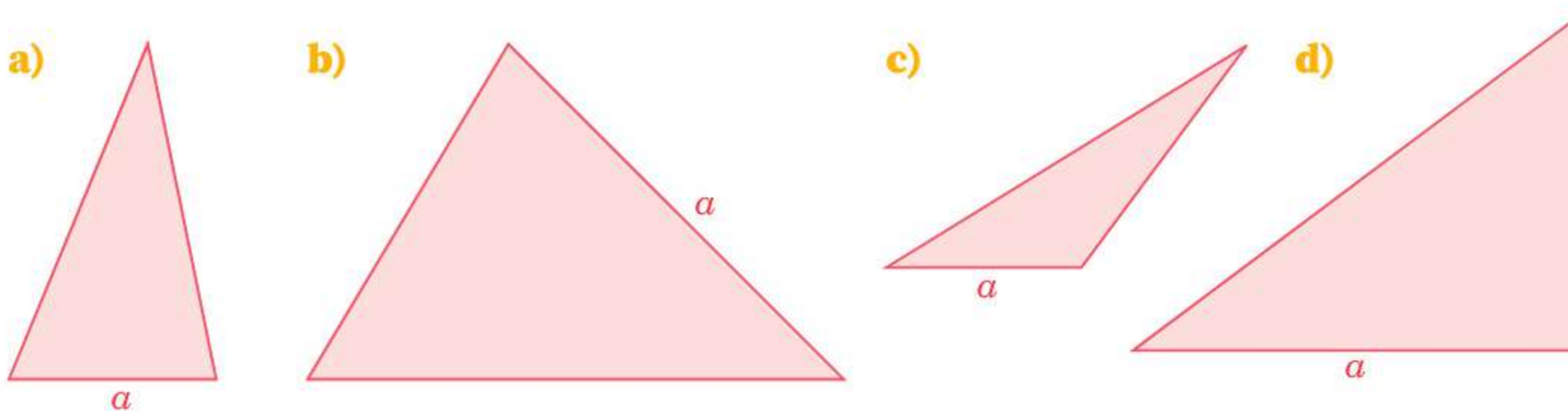


Poćwicz!

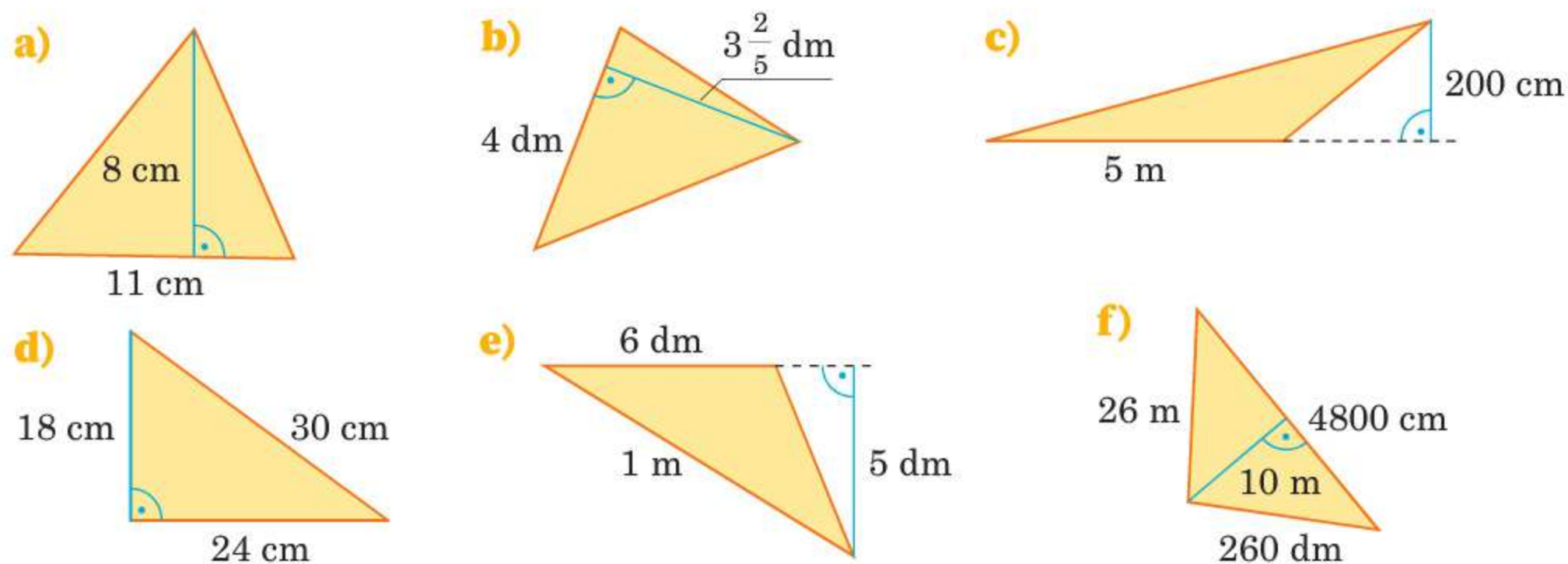
1. Korzystając z odpowiednich przyborów geometrycznych, ustal, na którym rysunku niepoprawnie zaznaczono wysokość h poprowadzoną z wierzchołka A do podstawy BC .



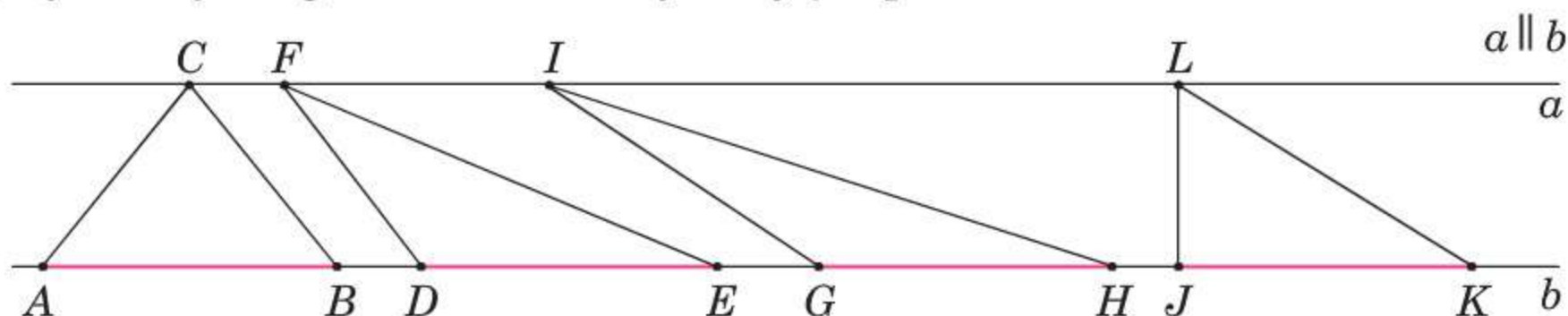
2. Zmierz wysokość poprowadzoną do boku a . Aby przedłużyć bok, ułóż odpowiednio linijkę i ekierkę.



3. Oblicz pole trójkąta.



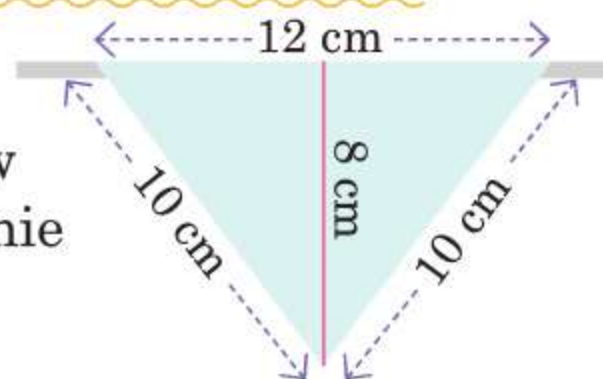
4. Który trójkąt ma największe pole, jeśli odcinki zaznaczone różowym kolorem są tej samej długości? Uzasadnij swoją odpowiedź.



5. Oblicz pole opisanego trójkąta.

- Trójkąt o podstawie długości 8 cm, którego wysokość poprowadzona do tej podstawy jest od niej o 3 cm krótsza.
- Trójkąt prostokątny równoramienny o ramieniu długości $3\frac{1}{3}$ dm.
- Trójkąt równoramienny o ramieniu długości 15 cm i podstawie $1\frac{3}{5}$ razy dłuższej od ramienia, którego wysokość poprowadzona do tej podstawy jest o 6 cm krótsza od ramienia.

6. Ela przygotowywała girlandę na swoje przyjęcie urodzinowe. Składała się ona z 15 jednakowych trójkątów. Ile centymetrów kwadratowych kolorowego papieru zużyła Ela na przygotowanie tej ozdoby? Czy zużyła więcej niż 1 m^2 papieru?



7. Dany jest trójkąt KOT , którego pole wynosi 100 cm^2 . Wysokość poprowadzona do podstawy OT ma długość 40 cm. Jaką długość ma ta podstawa?

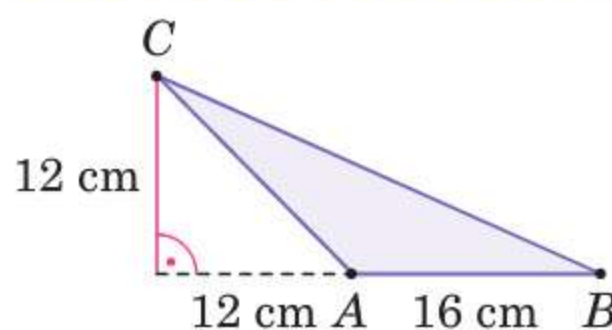
8. Trójkąt prostokątny ma boki o długościach 20 cm, 25 cm i 15 cm. Jaką długość ma wysokość poprowadzona do przeciwprostokątnej?

Sprawdź, co umiesz!

1. Narysuj dowolny trójkąt rozwartokątny i jego wszystkie wysokości.

2. Ile wynosi pole trójkąta ABC ?

- 168 cm^2
- 96 cm^2
- 24 cm^2
- 192 cm^2



3. W trójkącie prostokątnym o polu 63 cm^2 jedna z przyprostokątnych ma długość 9 cm. Jaką długość ma druga przyprostokątna tego trójkąta?

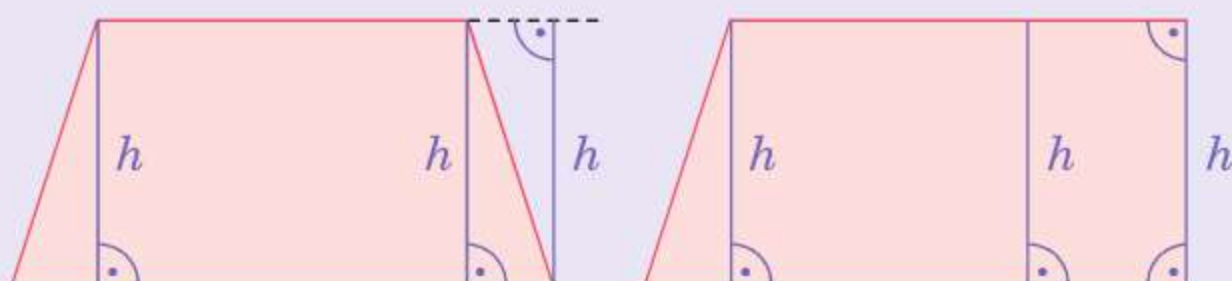
5. Pole trapezu

- ▶ Czym jest wysokość trapezu?
- ▶ Jak obliczać pole trapezu?



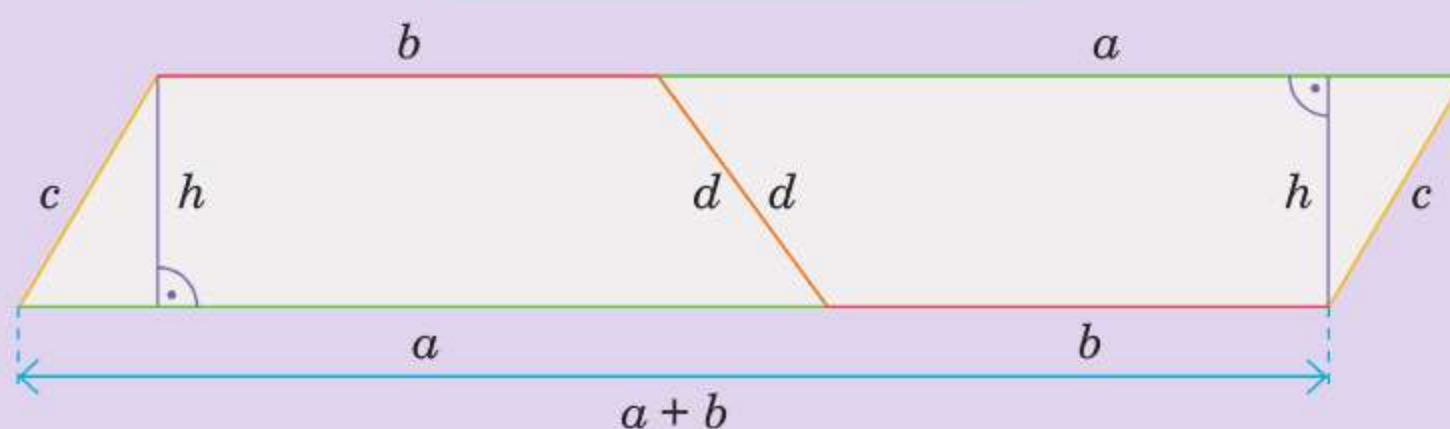
Analizuj!

Wysokość trapezu to odcinek, który łączy obie podstawy trapezu i jest do nich prostopadły.

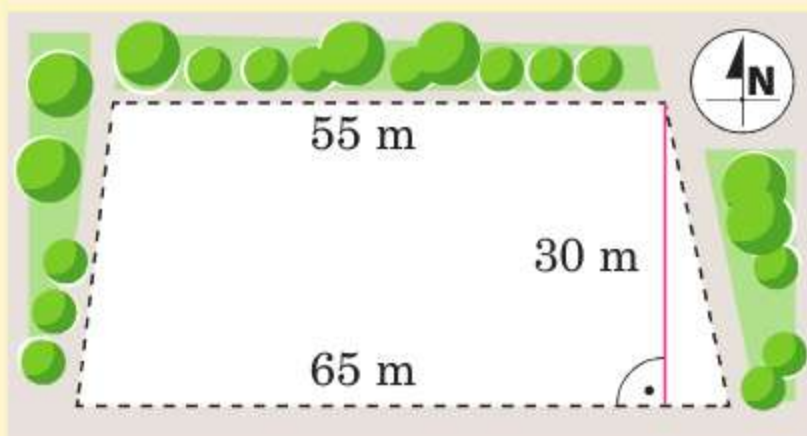


Pole trapezu stanowi połowę iloczynu sumy długości jego podstaw oraz wysokości, czyli: $P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$.

Uzasadnienie wzoru



- Złącz dwa jednakowe trapezy tak jak na rysunku powyżej.
- Powstały czworokąt ma dwie pary boków równoległych, więc jest równoległobokiem.
- **Pole równoległoboku** jest równe iloczynowi długości podstawy $a + b$ oraz poprowadzonej do niej wysokości h , czyli $(a + b) \cdot h$.
- **Suma pól obu trapezów** jest równa **polu równoległoboku**.
- Ponieważ trapezy są jednakowe, **pole jednego trapezu jest równe połowie pola równoległoboku**, czyli $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$.

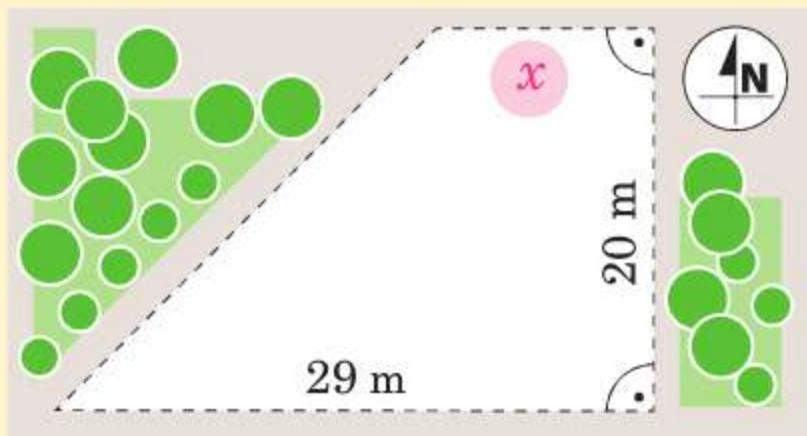


Państwo Nowakowie zamierzają kupić działkę budowlaną o powierzchni nie mniejszej niż 15 a. Czy działka, której plan zamieszczono obok, spełnia wymagania państwa Nowaków?

Działka ma kształt trapezu. Jej powierzchnia P wynosi zatem:

$$P = \frac{(55 \text{ m} + 65 \text{ m}) \cdot 30 \text{ m}}{2} = \frac{120 \text{ m} \cdot 30 \text{ m}}{2} = 1800 \text{ m}^2 = 18 \text{ a}.$$

$18 \text{ a} > 15 \text{ a}$, więc działka spełnia wymagania państwa Nowaków.



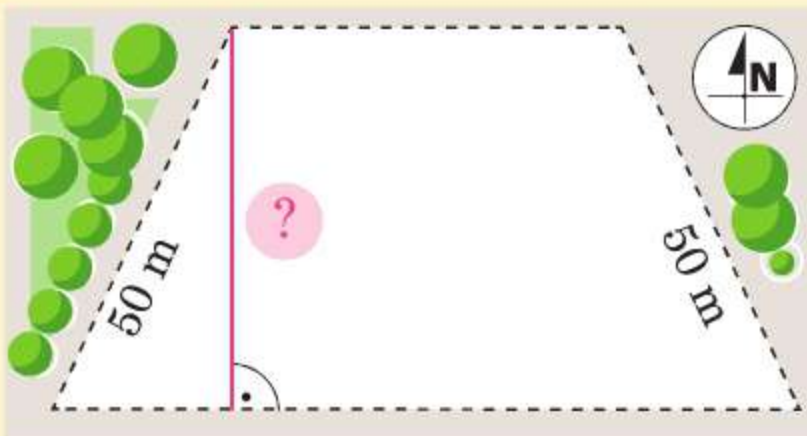
Powierzchnia działki w kształcie trapezu prostokątnego wynosi 400 m^2 . Jaka długość ma odcinek oznaczony na planie tej działki x ?

$$\text{Skoro } \frac{1}{2} \cdot (29 \text{ m} + x) \cdot 20 \text{ m} = 400 \text{ m}^2, \text{ to}$$

$$(29 \text{ m} + x) \cdot 10 \text{ m} = 400 \text{ m}^2$$

$$29 \text{ m} + x = 400 \text{ m}^2 : 10 \text{ m}$$

$$29 \text{ m} + x = 40 \text{ m}, \text{ więc } x = 40 \text{ m} - 29 \text{ m} = \underline{11 \text{ m}}.$$



Powierzchnia działki, której plan zamieszczono obok, wynosi 60 a. Do ogrodzenia tej działki wykorzystano 700 m siatki. Jaka długość ma odcinek oznaczony na planie tej działki $?$?

Działka ma kształt trapezu równoramienneego, zatem jej powierzchnię można obliczyć za pomocą wzoru: $P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$, gdzie:

- P oznacza powierzchnię działki,
- $a + b$ oznacza sumę długości dwóch równoległych boków (podstaw trapezu),
- h oznacza szukaną długość odcinka $?$.

$$P = 60 \text{ a} = 6000 \text{ m}^2$$

Skoro obwód działki to 700 m, to $a + b + 50 \text{ m} + 50 \text{ m} = 700 \text{ m}$, czyli $a + b + 100 \text{ m} = 700 \text{ m}$, zatem $a + b = 700 \text{ m} - 100 \text{ m}$, co oznacza, że $a + b = 600 \text{ m}$.

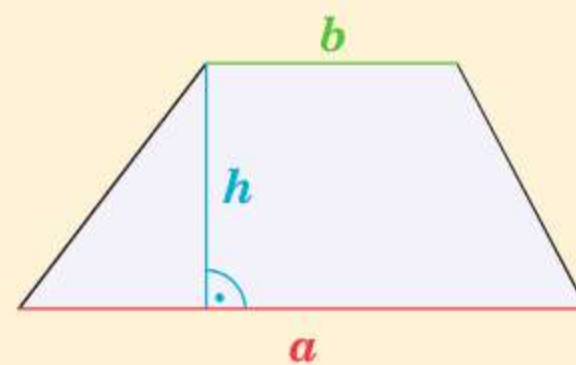
$$\text{Skoro } P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h, \text{ to } 6000 \text{ m}^2 = \frac{1}{2} \cdot 600 \text{ m} \cdot h, \text{ czyli } 6000 \text{ m}^2 = 300 \text{ m} \cdot h.$$

$$\text{Zatem } h = 6000 \text{ m}^2 : 300 \text{ m} = \underline{20 \text{ m}}.$$



Pole trapezu można obliczyć jako połowę iloczynu sumy długości jego podstaw a i b oraz wysokości h .

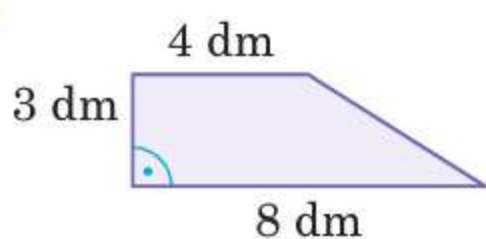
$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$



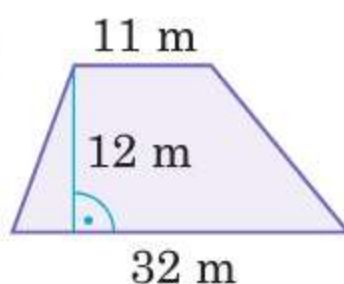
Poćwicz!

1. Oblicz pole trapezu.

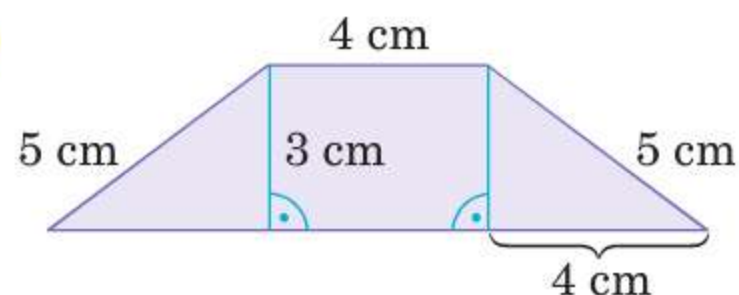
a)



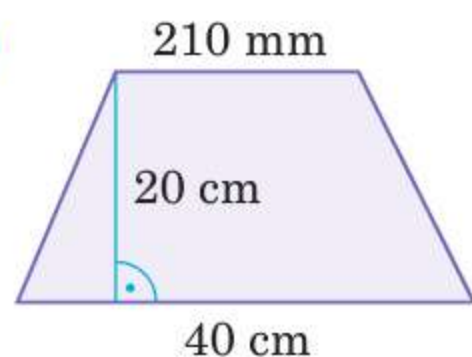
b)



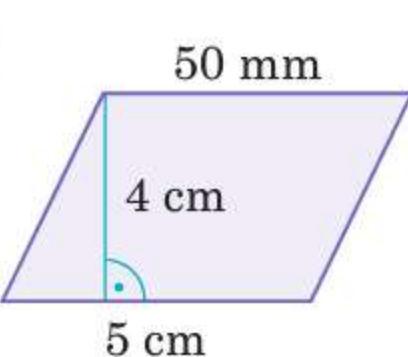
c)



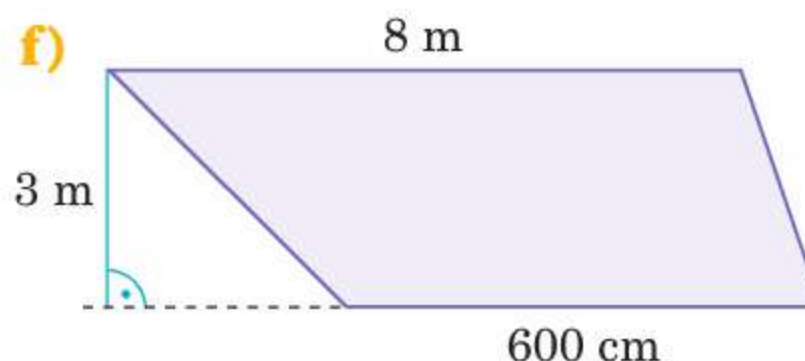
d)



e)



f)



2. Oblicz pole trapezu:

- a) prostokątnego, którego podstawy mają długości 14 cm i 19 cm, a ramiona – 12 cm i 13 cm;
- b) równoramiennego o podstawach długości 44 cm i 50 cm, którego wysokość jest równa 200 mm.

3. Krótsza podstawa trapezu ma 13 cm długości, dłuższa podstawa jest od niej o 3 cm dłuższa. Wyznacz pole tego trapezu, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest równa 2 dm.

4. Dany jest trapez prostokątny o ramionach długości 5 dm i 13 dm, którego pole jest równe 55 dm².

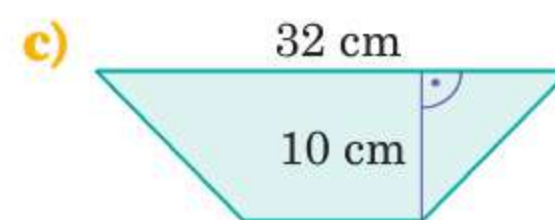
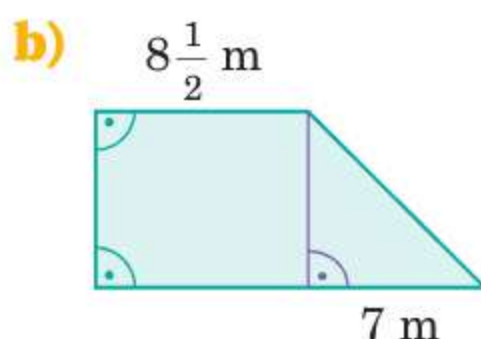
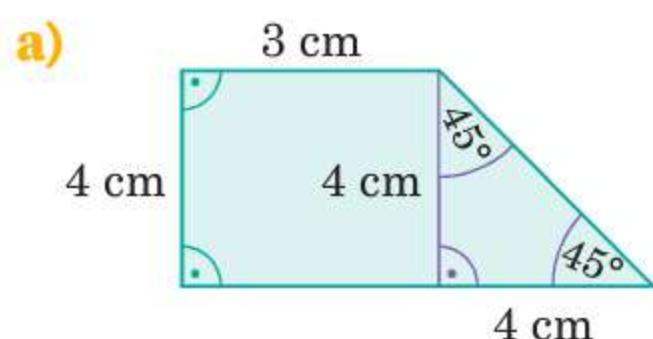
- a) Oblicz sumę długości podstaw tego trapezu.
- b) Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu, jeśli wiadomo, że krótsza podstawa ma taką samą długość jak wysokość trapezu.
- c) Ile wynosi obwód tego trapezu?

5. Obwód ostrza motyki, które ma kształt trapezu równoramienneego o ramieniu długości 5 cm wynosi 34 cm, a jego pole 48 cm^2 . Oblicz wysokość ostrza tej motyki.



6. Uczestnicy warsztatów muzealnych stworzyli makietę miejscowości z XVI w. Podstawa makiety ma kształt prostokąta o wymiarach $3 \text{ m} \times 4 \text{ m } 80 \text{ cm}$ i zajmuje 36 połączonych ze sobą jednakowych stolików. Błaty stolików mają kształt trapezu prostokątnego. Długość krótszego z równoległych boków każdego blatu jest równa długości prostopadłego do niego boku blatu i wynosi 50 cm. Wyznacz długość dłuższego z równoległych boków blatu.

7. Oblicz pole trapezu, którego każdy kąt ostry ma miarę 45° .



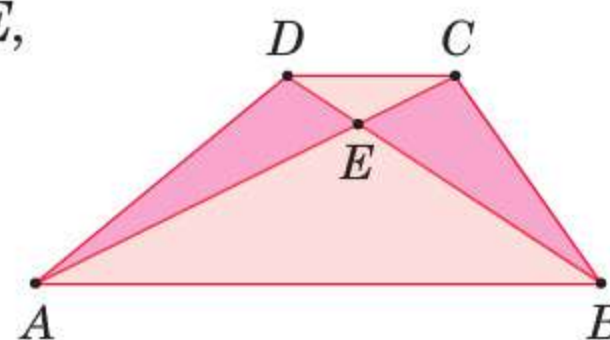
8. W trapezie $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie E , tak jak to pokazano na rysunku obok. Co możesz powiedzieć o polach wymienionych trójkątów?

a) ABD i ABC

b) AED , ABD i ABE

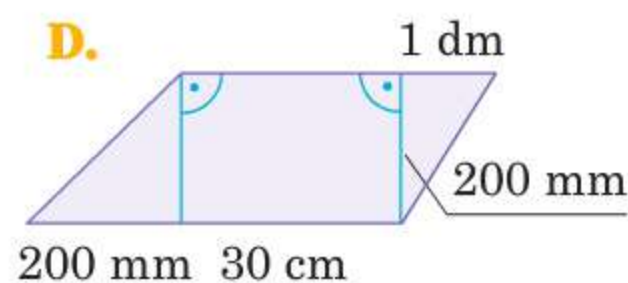
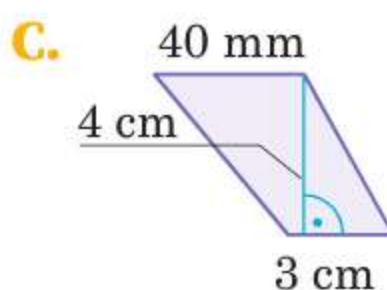
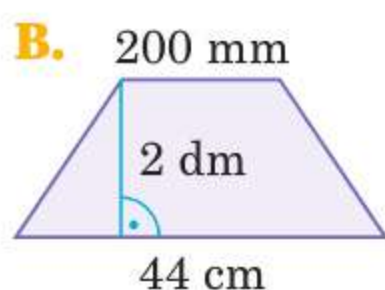
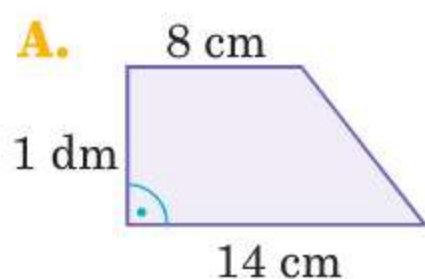
c) BEC , ABC i ABE

d) AED i BEC



Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż trapez, którego pole jest największe.



2. Suma długości podstaw trapezu o polu 140 cm^2 wynosi 40 cm. Oblicz wysokość tego trapezu.

3. Krótsza podstawa trapezu ma długość 15 cm, a druga jest od niej trzy razy dłuższa. Wysokość trapezu jest równa połowie sumy długości podstaw. Oblicz pole tego trapezu.

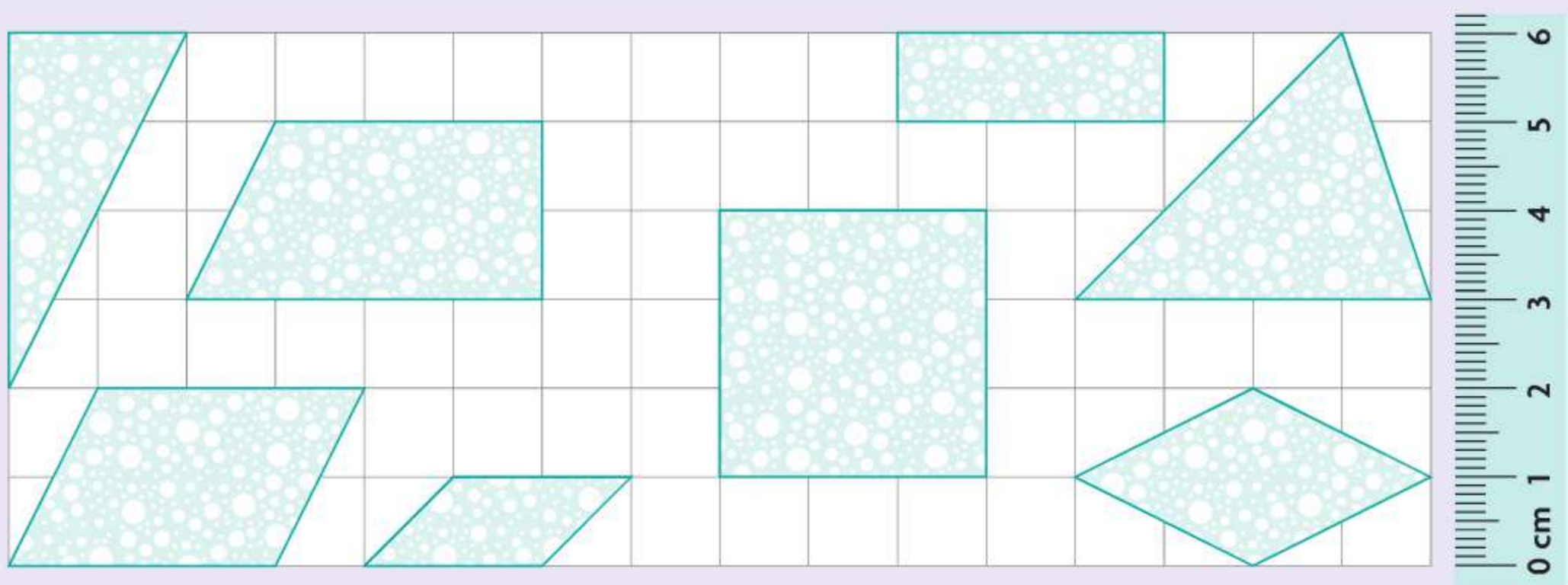
6. Pola wielokątów

- ▶ Jak obliczać pola wielokątów poprzez podział na mniejsze wielokąty?
- ▶ Jak obliczać pola wielokątów poprzez dopełnianie?

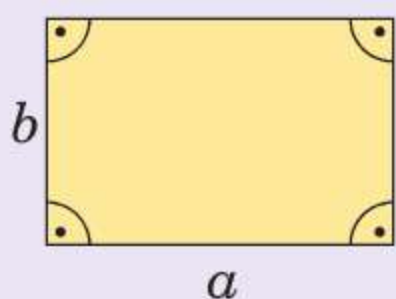


Analizuj!

Na początek szybka powtórka! Oblicz pola poniższych wielokątów. W razie potrzeby odpowiednich wzorów poszukaj w zestawieniu poniżej.

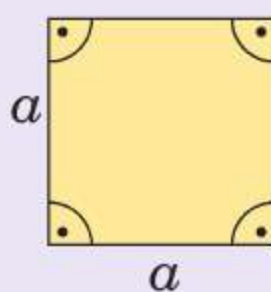


prostokąt



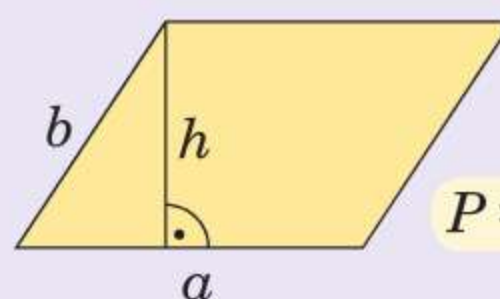
$$P = a \cdot b$$

kwadrat



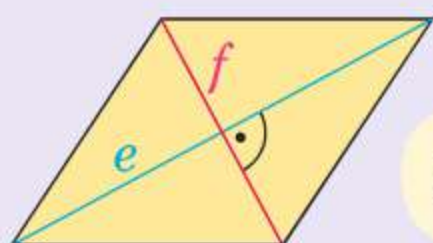
$$P = a^2$$

równoległobok



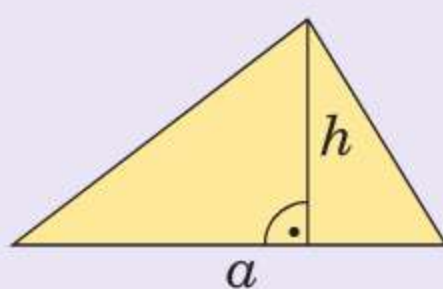
$$P = a \cdot h$$

romb



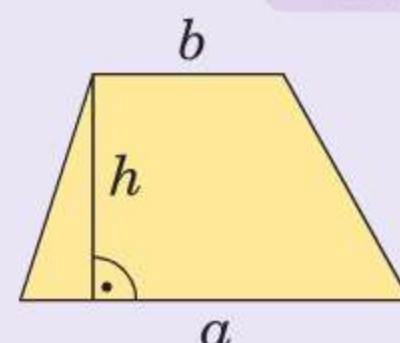
$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

trójkąt



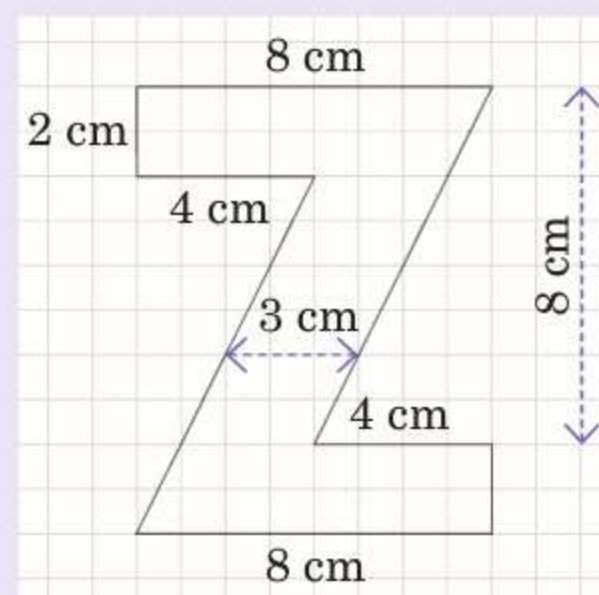
$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

trapez



$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

Zosia chce namalować swoje imię na białej koszulce. Potrzebny jest jej do tego szablon. Zaprojektowała pierwszą literę. Jaką powierzchnię zajmie litera Z? Jak to obliczyć?



Sposób 1 – przez podział

Podziel ośmiokąt na trzy wielokąty, a następnie oblicz ich pola i je zsumuj.

Figury F_1 i F_3 to jednakowe trapezy prostokątne.

$$a = 8 \text{ cm} \quad b = 4 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 7 \text{ cm} \quad h = 2 \text{ cm}$$

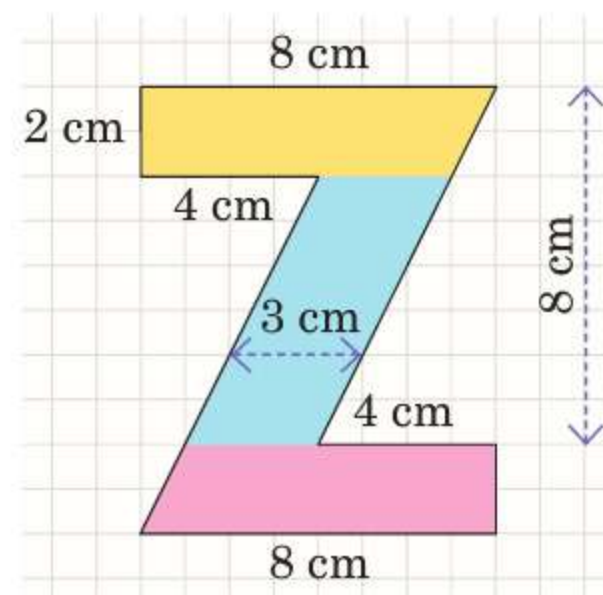
$$P_1 = \frac{(8 \text{ cm} + 7 \text{ cm}) \cdot 2 \text{ cm}}{2} = \frac{15 \text{ cm} \cdot \cancel{2}^1 \text{ cm}}{\cancel{1}^1 \cdot \cancel{2}^1} = 15 \text{ cm}^2$$

Figura F_2 to równoległobok.

$$a = 3 \text{ cm} \quad h = 8 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$P_2 = 3 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 15 \text{ cm}^2 + 18 \text{ cm}^2 + 15 \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2$$



Sposób 2 – przez dopełnienie

Dopełnij ośmiokąt trójkątami prostokątnymi, tak aby otrzymać prostokąt. Oblicz pole tego prostokąta i pola obu trójkątów, a następnie od pola prostokąta odejmij pola obu trójkątów.

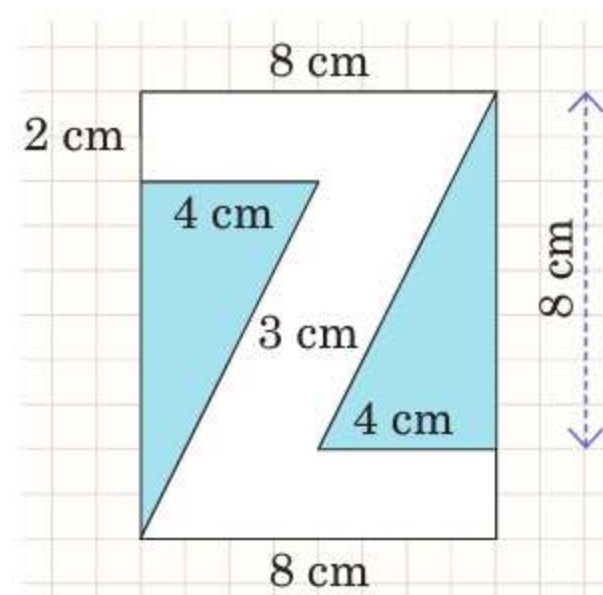
Z rysunku można odczytać, że boki prostokąta mają długości 8 cm oraz $8 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$.

$$P_{\square} = 8 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 80 \text{ cm}^2$$

Krótsze przyprostokątne obu trójkątów mają po 4 cm długości, a dłuższe – po 8 cm długości.

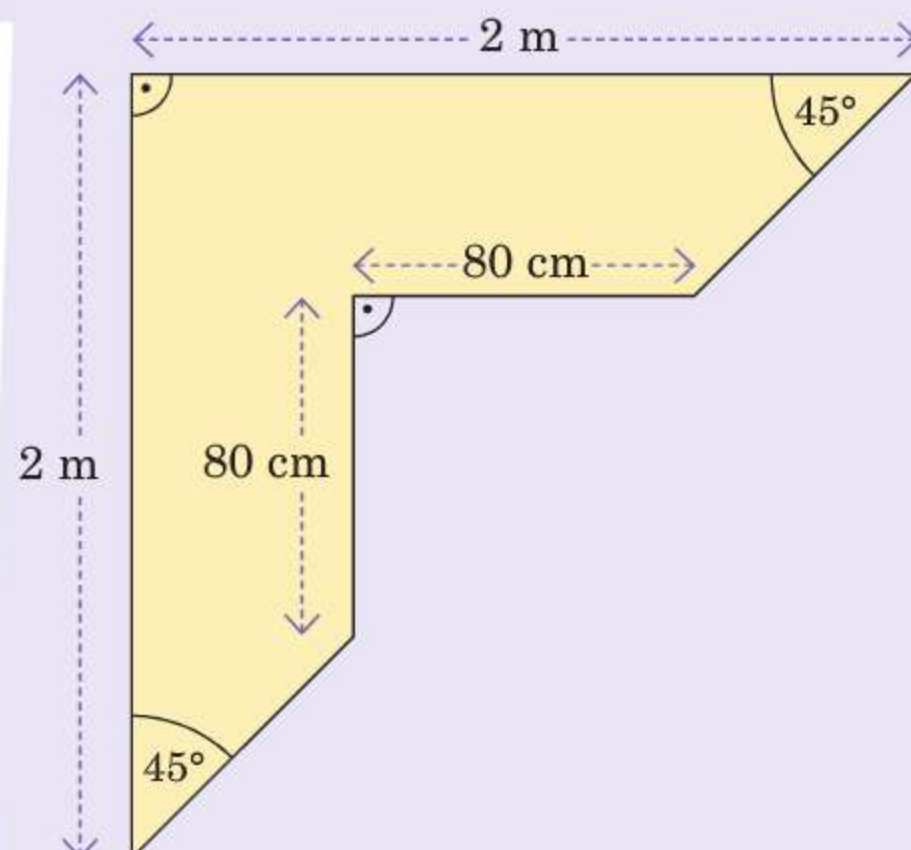
$$P_{\triangle} = \frac{\cancel{2}^2 \cdot \cancel{4}^1 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{\cancel{2}^1 \cdot \cancel{1}^1} = 2 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$$

$$P = P_{\square} - P_{\triangle} - P_{\triangle} = 80 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 - 16 \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2$$



Litera Z zajmie powierzchnię równą 48 cm^2 .

Cezary ma w swoim pokoju narożne biurko dla graczy, które pozwala na ustawienie nawet trzech monitorów i innych akcesoriów potrzebnych podczas gry. Chce dodatkowo zabezpieczyć blat biurka niebieską okleiną. Ile co najmniej musi jej kupić? Wynik podaj w centymetrach kwadratowych.

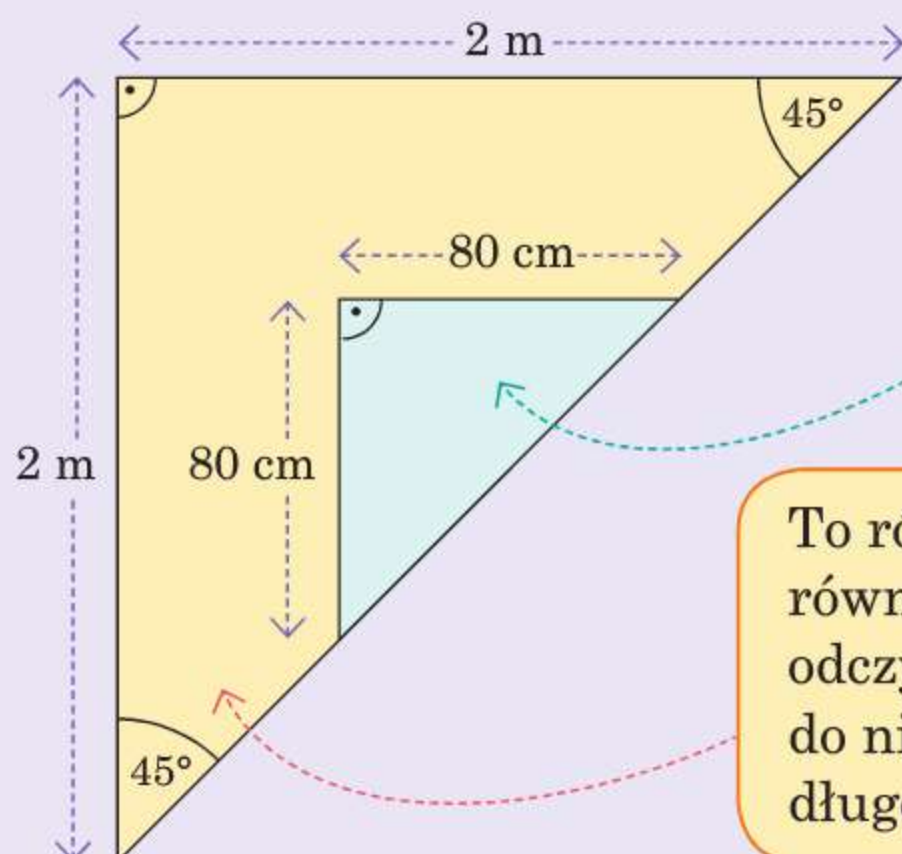


Sposób 1 – przez podział

W tym przypadku to nie jest odpowiedni sposób postępowania. Po podziale będziesz mieć za mało danych, aby wykonać obliczenia.

Sposób 2 – przez dopełnienie

Wystarczy dopełnić sześciokąt trójkątem prostokątnym, tak aby otrzymać większy trójkąt, a potem wyznaczyć różnicę pól dwóch trójkątów.



To trójkąt prostokątny równoramienny. Z rysunku można odczytać, że podstawa i poprowadzona do niej wysokość mają po 80 cm długości.

To również trójkąt prostokątny równoramienny. Z rysunku można odczytać, że podstawa i poprowadzona do niej wysokość mają po 2 m (200 cm) długości.

Przy obliczaniu różnicy należy pamiętać o jednakowych jednostkach!

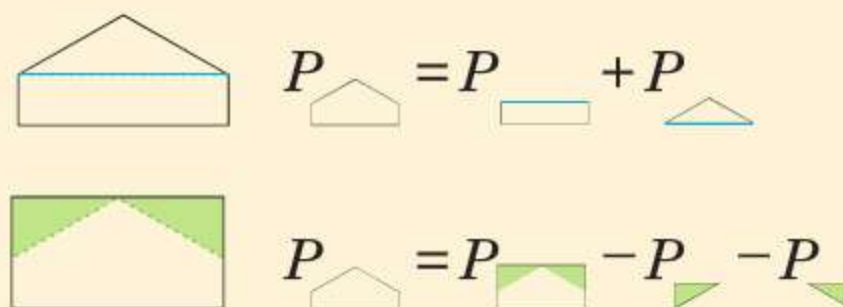
$$P_{\triangle} = \frac{200 \text{ cm} \cdot 200 \text{ cm}}{2} = 20\,000 \text{ cm}^2$$

$$P_{\triangle} = \frac{80 \text{ cm} \cdot 80 \text{ cm}}{2} = 3200 \text{ cm}^2$$

$$P = P_{\triangle} - P_{\triangle} = 20\,000 \text{ cm}^2 - 3200 \text{ cm}^2 = 16\,800 \text{ cm}^2$$

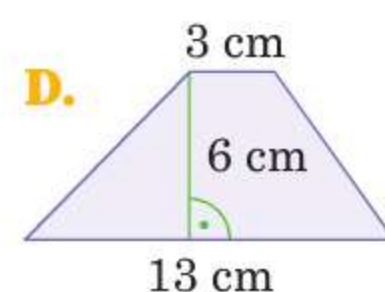
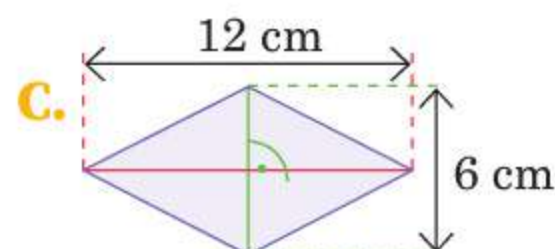
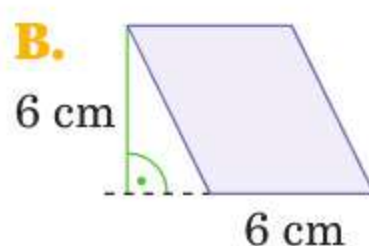
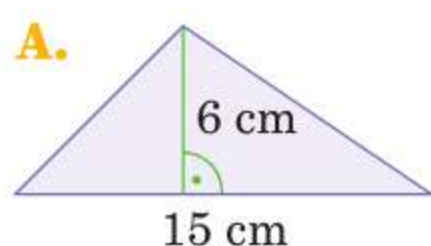
Cezary musi kupić co najmniej $16\,800 \text{ cm}^2$ okleiny.

Pole wielokąta można obliczyć **przez podział** albo **przez dopełnienie**.

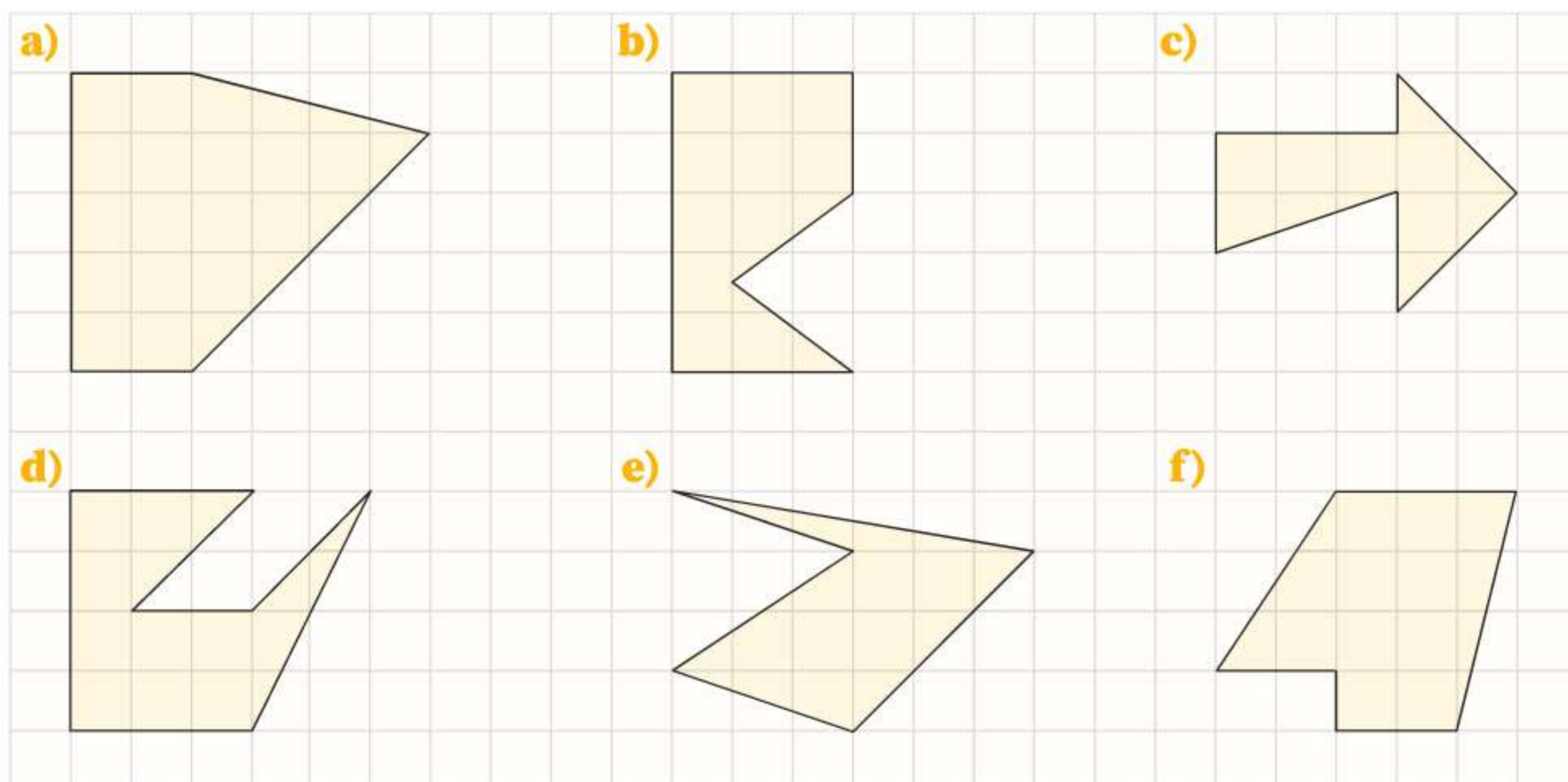


Poćwicz!

1. Który wielokąt ma największe pole?



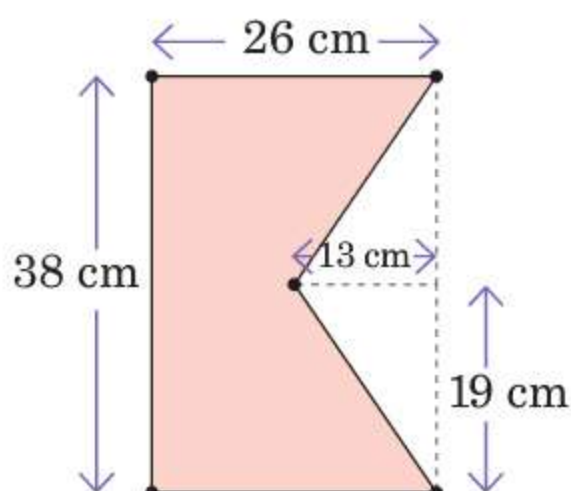
2. Odczytaj odpowiednie długości i oblicz pole figury. Przyjmij, że długość boku jednej kratki wynosi 1.



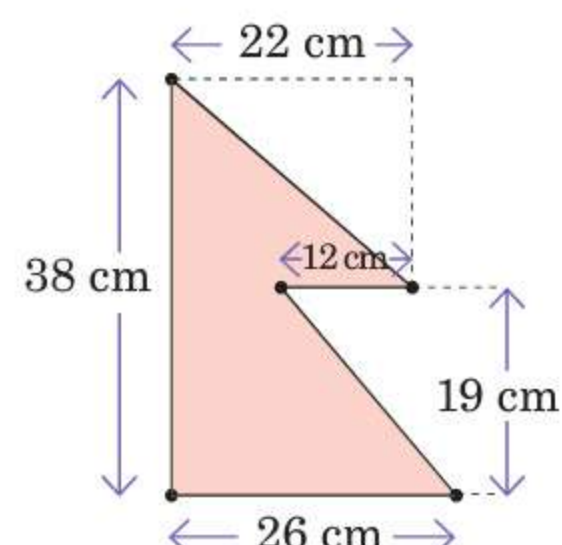
3. Zosia i Kuba należą do harcerstwa.

Aby zdobyć sprawność Szwacza, muszą uszyć po dwa proporczyki dla swojego zastępu. Przyjrzyj się projektom proporczyków. Ile centymetrów kwadratowych materiału potrzeba na uszycie proporczyków Zosi, a ile Kuby? Kto zużyje więcej materiału? O ile centymetrów kwadratowych więcej?

Zosia

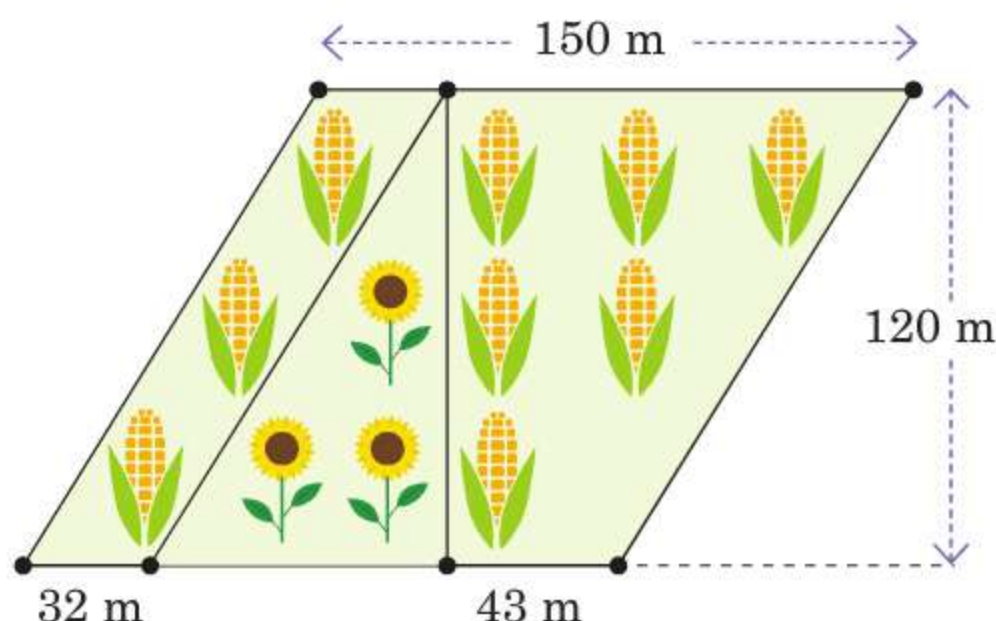


Kuba



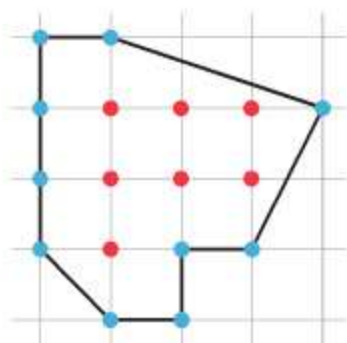
4. Pole uprawne pana Jana ma kształt równoległoboku, którego jeden bok ma długość 150 m, a poprowadzona do niego wysokość jest równa 120 m.

- a) Jaka powierzchnię ma pole pana Jana? Ile to arów?
- b) Na ilu arach uprawiana jest kukurydza?
- c) Jaka część powierzchni całego pola stanowi teren, na którym pan Jan uprawia słoneczniki?



A to ciekawe

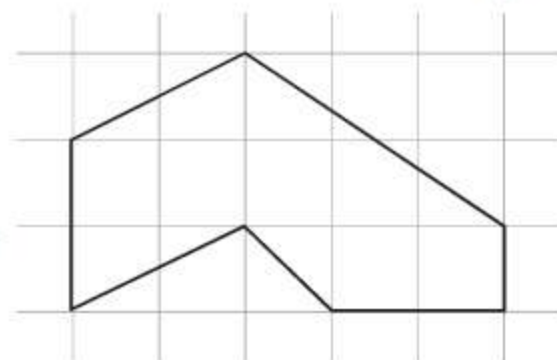
W 1889 r. austriacki matematyk Georg Pick zauważył, że pole wielokąta, którego wierzchołki leżą w punktach kratowych (tj. na przecięciu kratek), zależy od liczby punktów kratowych wewnątrz i na brzegu tego wielokąta.



Jeśli W to liczba punktów kratowych wewnątrz wielokąta, a B to liczba punktów kratowych na jego brzegu, to pole tego wielokąta wynosi: $P = W + \frac{B}{2} - 1$.

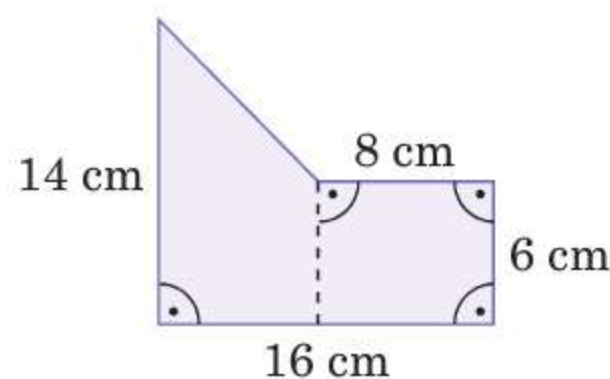
$$W = 7, B = 10, \text{ więc } P = 7 + \frac{10}{2} - 1 = 11.$$

Oblicz pole narysowanego obok wielokąta sposobem Picka.



Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz pole zamieszczonego obok wielokąta.



2. Do kwadratu o boku 6 cm dorysowano trójkąt prostokątny równoramienny w ten sposób, że ramię trójkąta pokrywa się z bokiem kwadratu. Ile wynosi pole powstałego wielokąta?

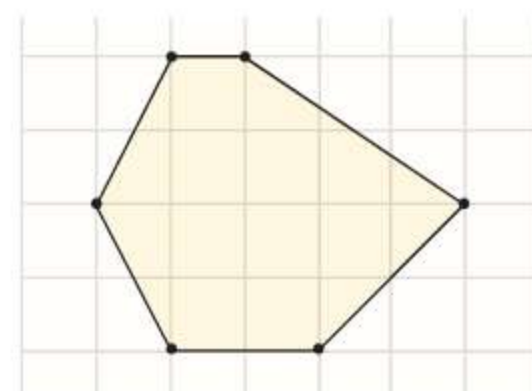
3. Ile wynosi pole zamieszczonego obok wielokąta, jeśli wiadomo, że długość boku jednej kratki to 1?

A. 12

B. 13

C. 14

D. 10



PODSUMOWANIE DZIAŁU VI

W świecie pól wielokątów

Powtórz wiadomości

Jednostki pola

$$1 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

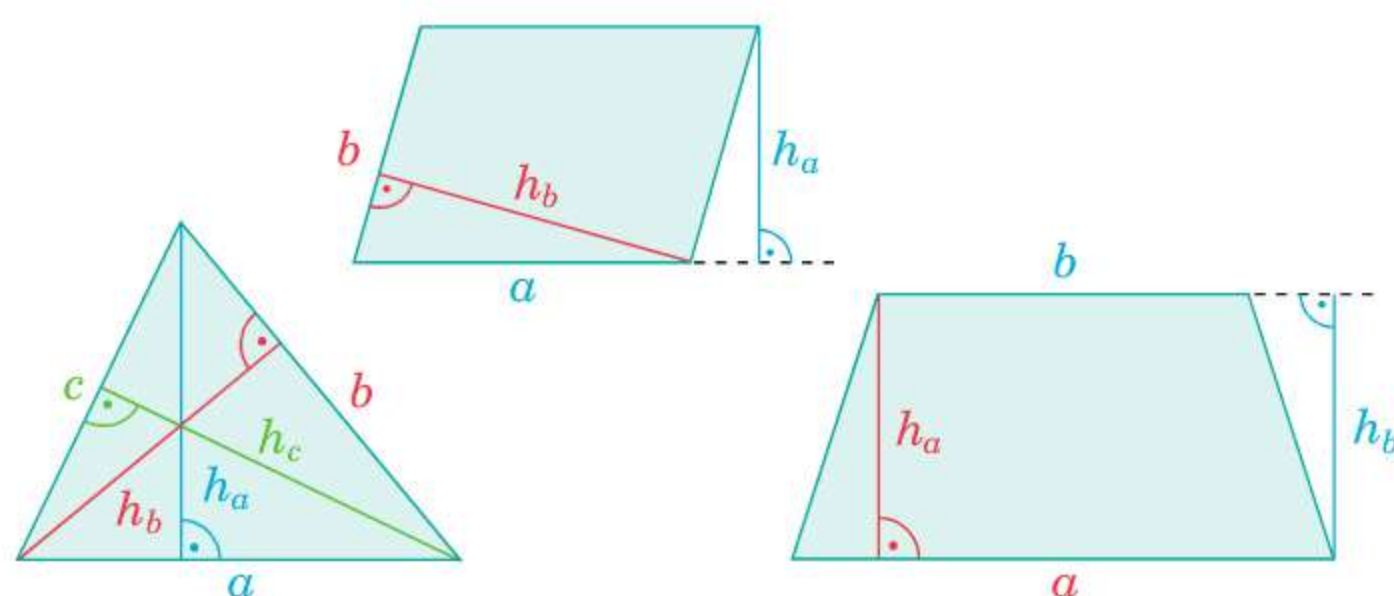
$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a}$$

$$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha}$$

Wysokości w figurach

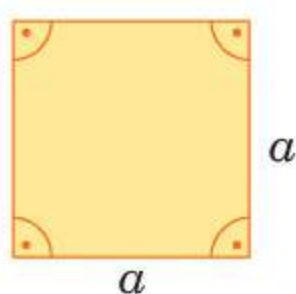
Wysokość h figury to odcinek, który:

- łączy wierzchołek i przeciwległy bok figury lub jego przedłużenie,
- jest prostopadły do tego boku lub jego przedłużenia.



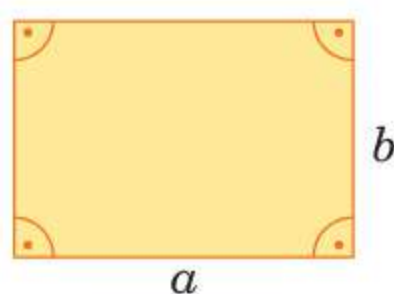
Pola wielokątów

kwadrat



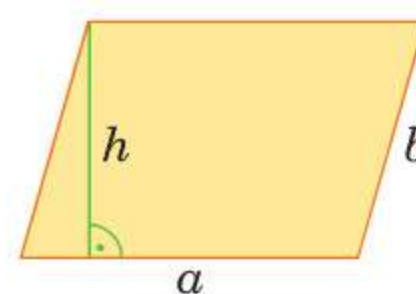
$$P = a \cdot a = a^2$$

prostokąt



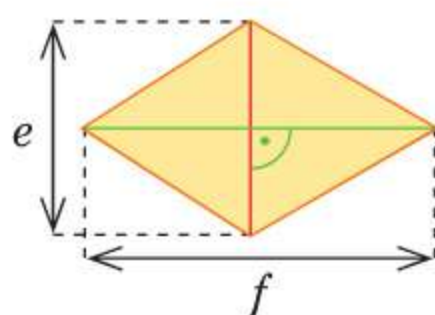
$$P = a \cdot b$$

równoległobok



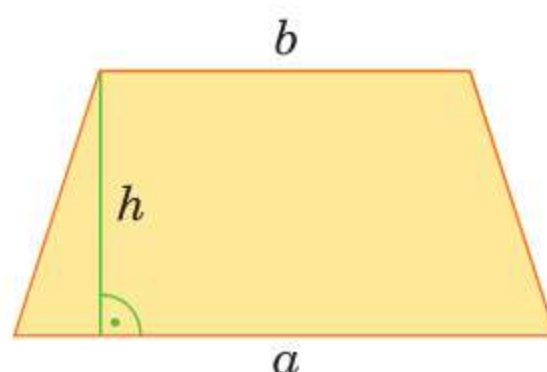
$$P = a \cdot h$$

romb



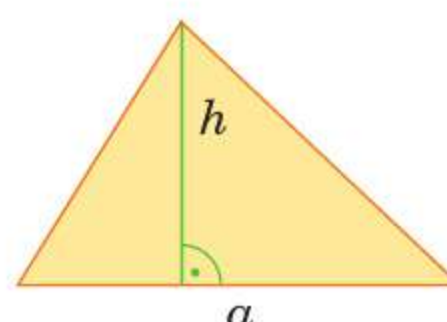
$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

trapez



$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

trójkąt



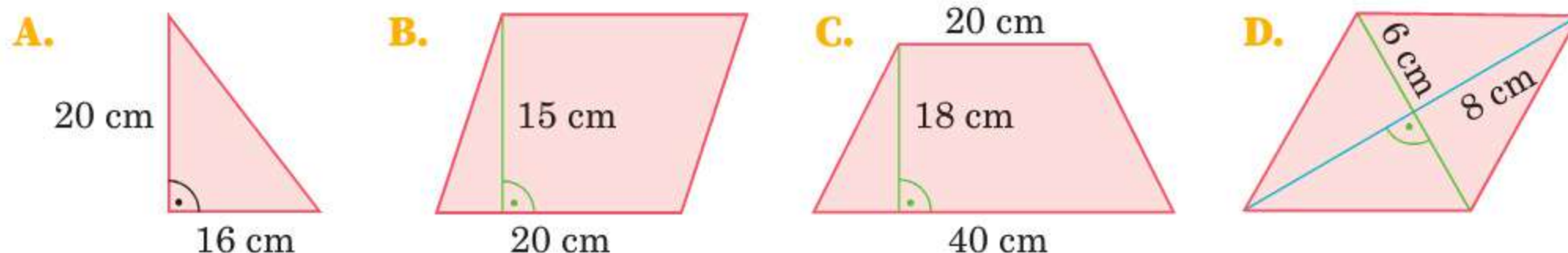
$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

Poćwicz przed sprawdzianem

1. Prostokąt o wymiarach $18\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ i kwadrat mają takie same pola. Ile wynosi obwód tego kwadratu?

A. 6 mm B. 6 cm C. 24 mm D. 24 cm

2. Który z poniższych wielokątów ma najmniejsze pole?



3. Oceń, czy podana równość jest prawdziwa (P), czy fałszywa (F).

$6\text{ m}^2 = 600\text{ cm}^2$	P	F
$540\,000\text{ m}^2 = 54\text{ ha}$	P	F
$49\,000\text{ a} = 49\text{ ha}$	P	F

$1300\text{ cm}^2 = 13\text{ m}^2$	P	F
$8500\text{ m}^2 = 85\text{ a}$	P	F
$20\text{ cm}^2 = 200\text{ mm}^2$	P	F

4. Działka budowlana ma powierzchnię 9 a, a działka rolna 6 ha. O ile metrów kwadratowych różnią się powierzchnie tych działek?

A. 3 m^2 B. 300 m^2 C. $59\,100\text{ m}^2$ D. 591 m^2

5. Wybierz poprawne uzupełnienia zdań spośród A i B oraz C i D.

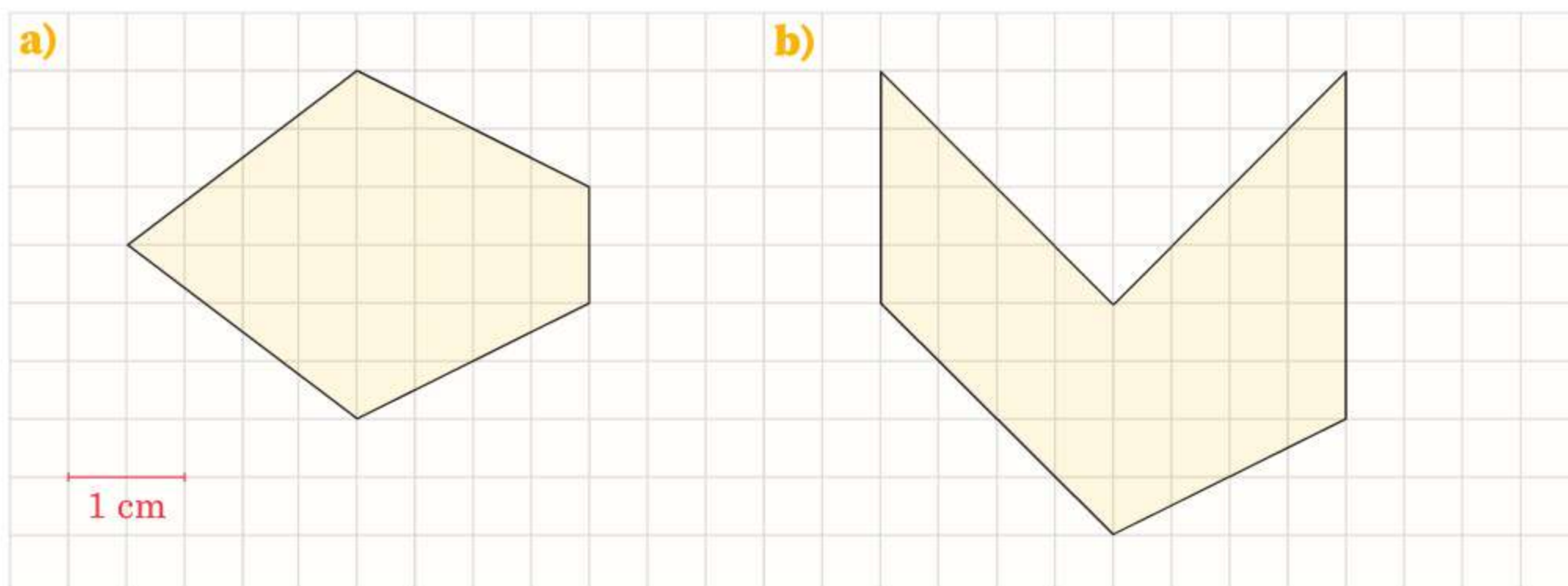
I. Pole rombu o przekątnych długości 3 m oraz 8 m wynosi

A. 12 m^2 . B. 24 m^2 .

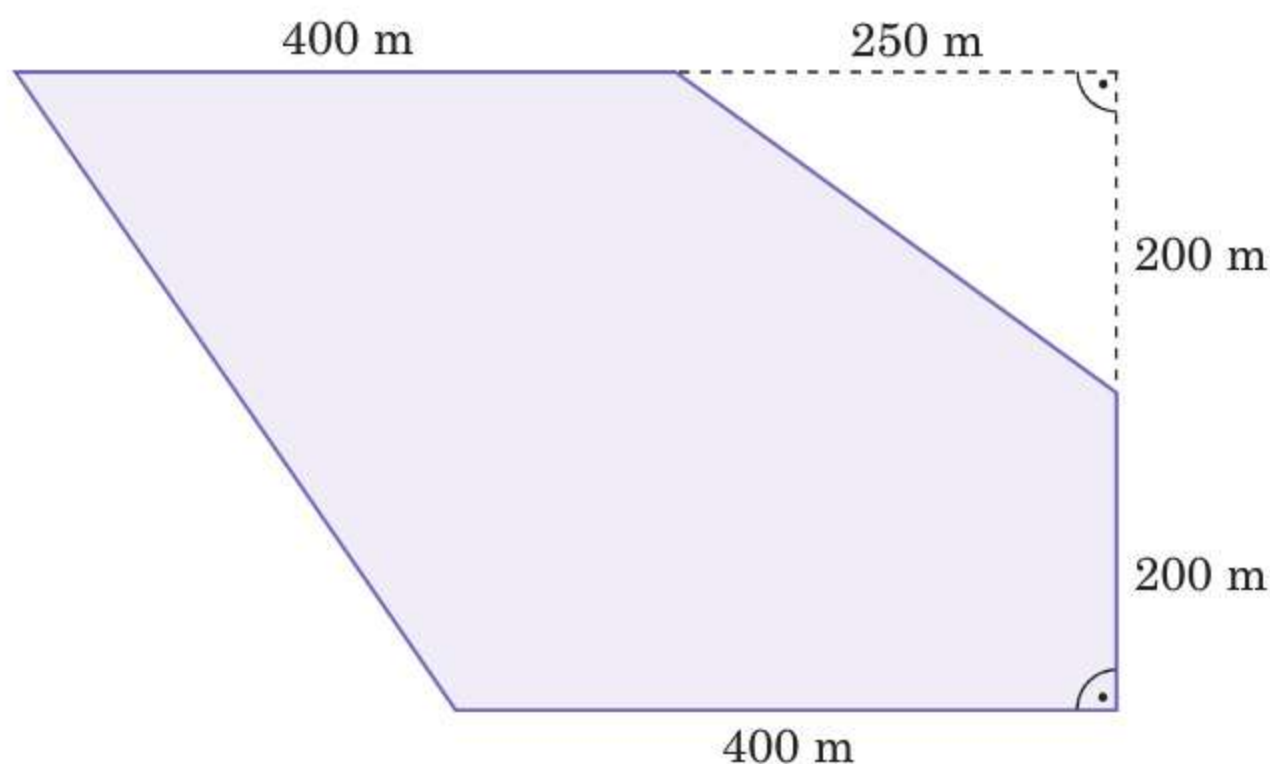
II. Pole trapezu, w którym suma długości obu podstaw to 20 cm, a wysokość wynosi 12 cm, jest równe

C. 240 cm^2 . D. 120 cm^2 .

6. Oblicz pole podanej figury.

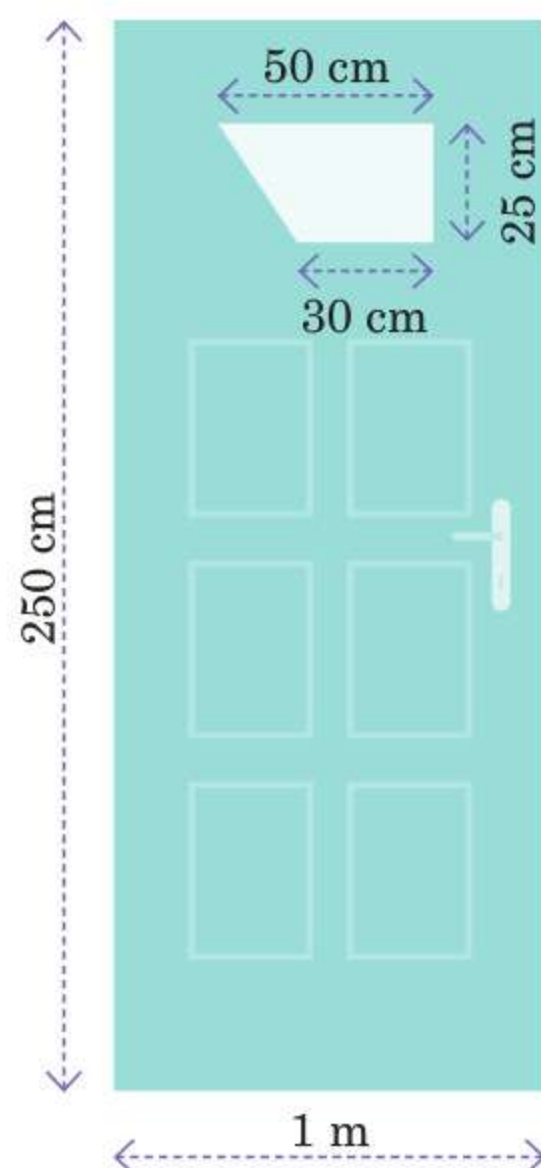


7. Trójkąt równoramienny o polu równym 60 cm^2 ma podstawę długości 10 cm . Jaka długość ma wysokość poprowadzona do tej podstawy?
8. W trapezie prostokątnym krótsze ramię i dłuższa podstawa mają taką samą długość równą 6 dm . Krótsza podstawa ma długość $\frac{1}{2} \text{ m}$. Oblicz pole tego trapezu.
9. Taras ma kształt prostokąta o wymiarach $10 \text{ m} \times 8 \text{ m}$. Pan Marek chce położyć na całym tarasie płytki w kształcie kwadratu, którego bok ma długość 50 cm .
- Ile co najmniej sztuk płytek powinien kupić pan Marek?
 - Ile zapłaci pan Marek za płytki, jeśli jedna sztuka kosztuje 12 zł ?
10. Dany jest romb o polu równym 216 cm^2 , boku długości 15 cm oraz jednej przekątnej długości 18 cm . Oblicz długość drugiej przekątnej oraz wysokość tego rombu.
11. Działka pani Joanny ma kształt taki, jak na rysunku poniżej. Oblicz jej powierzchnię. Wynik wyraż w hektarach.



12. Pani Agnieszka chce pomalować drzwi wejściowe o wymiarach $250 \text{ cm} \times 1 \text{ m}$. Wiadomo, że:
- szyba ma kształt trapezu prostokątnego o wymiarach takich jak na rysunku obok,
 - drzwi należy pomalować z obu stron dwukrotnie,
 - jedna puszka farby kosztuje 87 zł i wystarczy na pomalowanie $3\frac{1}{2} \text{ m}^2$ powierzchni drzwi.

Ile puszek farby musi kupić pani Agnieszka?
Ile za nie zapłaci? Przyjmij, że fragment drzwi, do którego będzie przytwierdzona klamka, również należy pomalować.



Podejmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

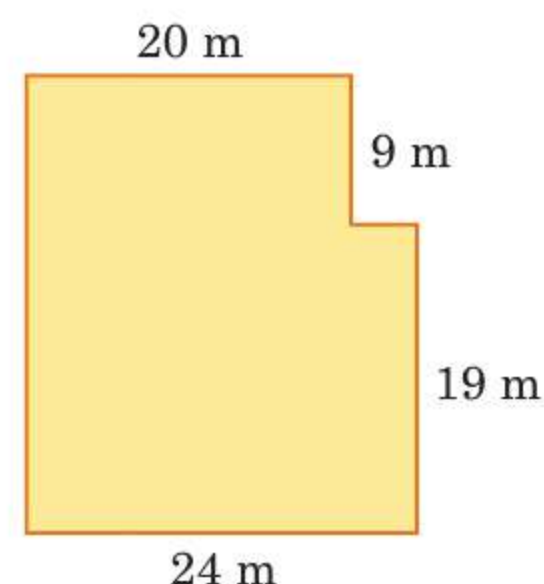
Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał jednego z najważniejszych polskich odkrywców XIX w. Powodzenia!



1 (1812–1866) to polski przyrodnik, podróżnik i **2**, który podczas ekspedycji naukowych na terenie Ameryki Środkowej i Ameryki Południowej zgromadził kilka tysięcy **3** i odkrył 300 nowych odmian **4**. Cenne zbiory botaniczne i zoologiczne (m.in. owadów, ptaków i płazów) trafiały do placówek uniwersyteckich i prywatnych w całej Europie. W 1852 r. wrócił do kraju i zamieszkał **5**. W 1854 r. został głównym inspektorem Ogrodu Botanicznego Uniwersytetu Jagiellońskiego. Dzięki przekazaniu na rzecz ogrodu swojej kolekcji oraz sprowadzaniu kolejnych okazów powiększył zbiory ogrodu o około **6** gatunków. Jego nazwiskiem nazwano wiele gatunków roślin, a także gatunek **7** – *Dives warszewiczii*, powszechnie znany jako czarnobłysł peruwiański.

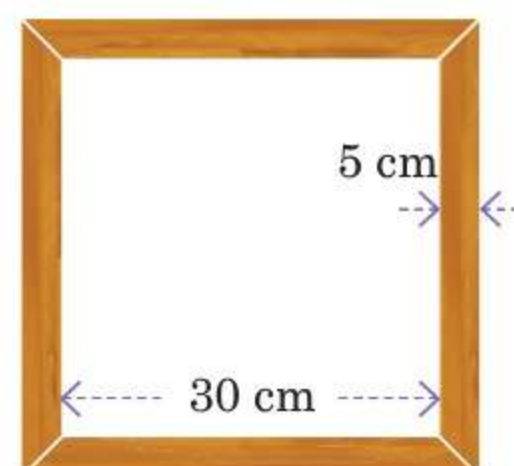
- 1.** Trawnik państwa Kowalskich ma kształt zamieszczonego obok wielokąta. Ile państwo Kowalscy zapłacą za koszenie trawnika, jeśli za każdy skoszony 1 m^2 trawnika trzeba zapłacić 3 zł?

828 zł	1908 zł	1368 zł
Władysław Grodecki	Józef Warszewicz	Marian Raciborski



- 2.** Drewniana ramka jest zbudowana z czterech jednakowych deseczek w kształcie trapezów równoramiennych. Długość krótszej podstawy takiego trapezu wynosi 30 cm, a jego wysokość 5 cm. Ile centymetrów kwadratowych takich deseczek potrzeba do zbudowania tej ramki?

175 cm^2	1400 cm^2	700 cm^2
fizyk	chemik	botanik

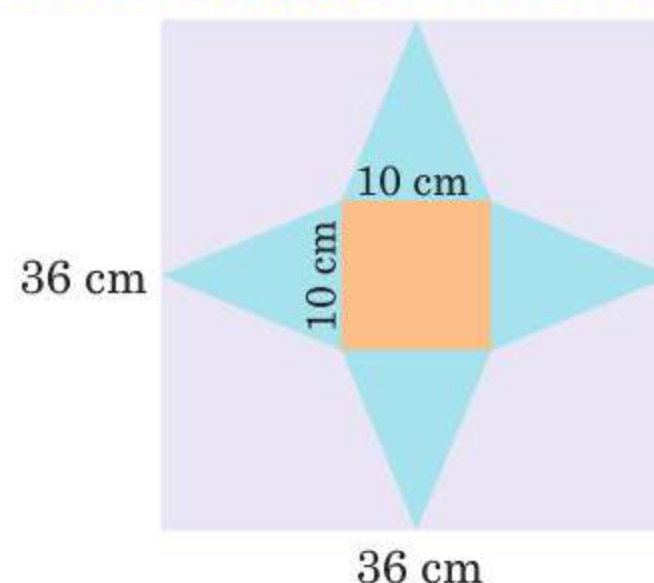


3. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Pole rombu o przekątnych długości 5 dm i 16 cm wynosi 40 dm^2 .	P	F
7 ha to tyle samo co $70\,000 \text{ m}^2$, a 4 ha to tyle samo co 40 a.	P	F
Działka o wymiarach $50 \text{ m} \times 70 \text{ m}$ ma powierzchnię równą 35 a.	P	F
F, F, P	P, F, F	F, P, F
roślin tropikalnych	odmian motyli	płazów tropikalnych

4. Przeanalizuj zamieszczony obok rysunek, a następnie wyznacz pole obszaru zamalowanego na niebiesko.

360 cm^2	260 cm^2	130 cm^2
paproci	orchidei	kaktusów

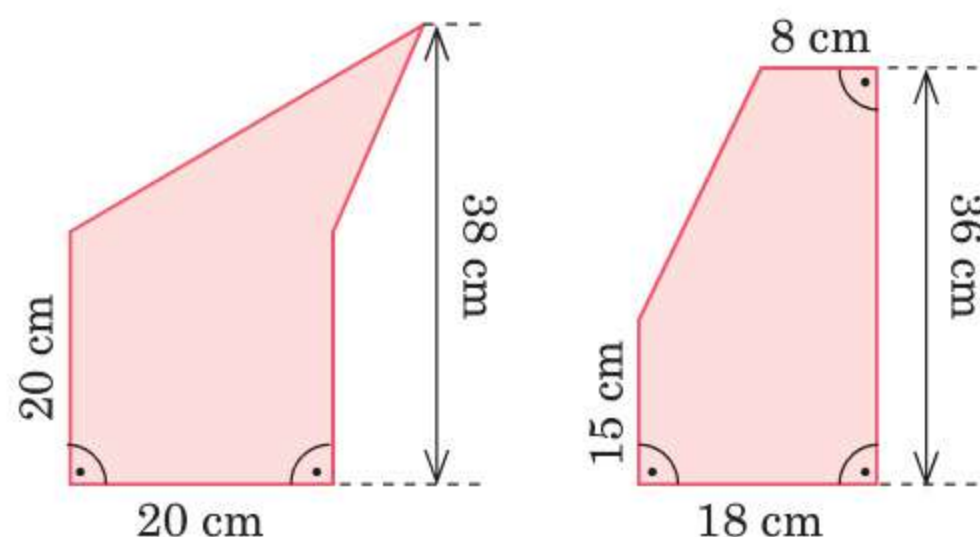


5. W trapezie prostokątnym jedna z podstaw ma 17 cm długości, a druga jest od niej 5 razy dłuższa. Wysokość tego trapezu jest o 5 dm 5 cm krótsza od dłuższej podstawy. Ile wynosi pole tego trapezu?

3060 cm^2	Taki trapez nie istnieje.	1530 cm^2
w Gdańsku	w Warszawie	w Krakowie

6. Ile wynosi różnica pól zamieszczonych obok wielokątów?

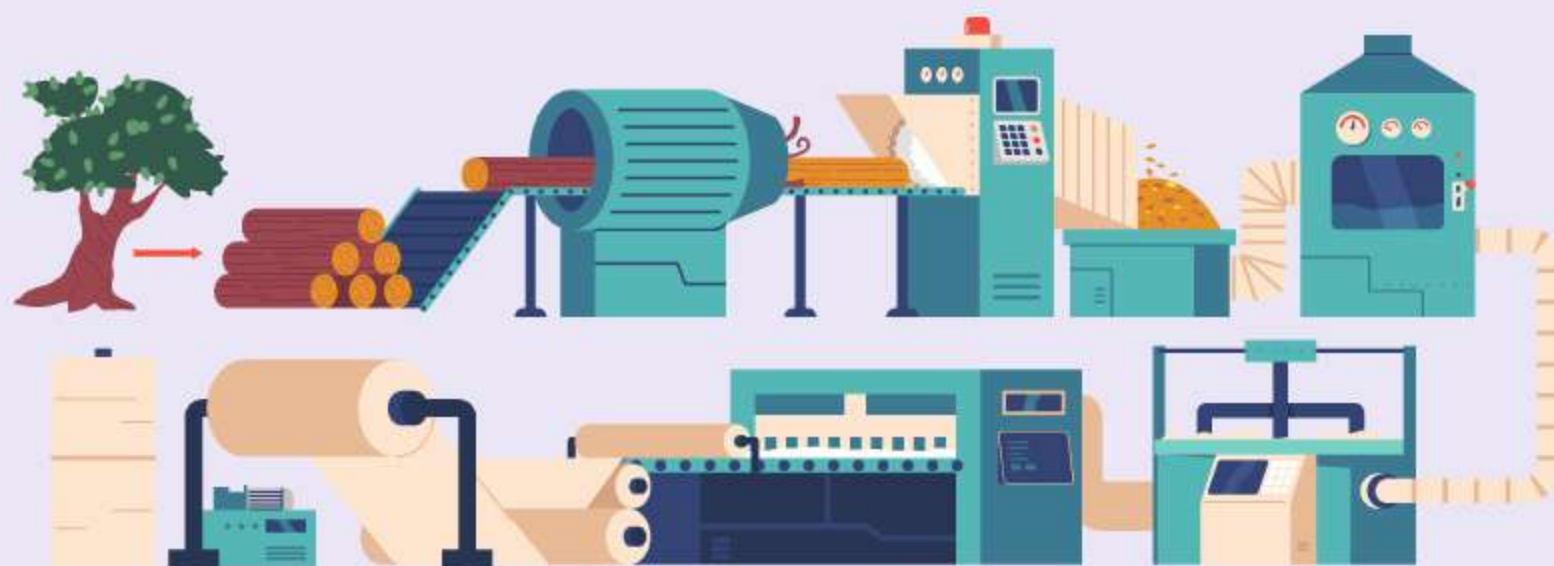
102 cm^2	37 cm^2	217 cm^2
1000	10 000	50 000



7. W pewnym równoległoboku jeden bok ma długość 10 cm, a drugi jest od niego o 4 cm krótszy. Wysokość poprowadzona do krótszego boku ma 2 cm długości. Jaka długość ma druga wysokość tego równoległoboku?

1 cm 2 mm	12 cm	6 mm
ptaka	węża	żaby

Polska jest jednym z najbardziej zalesionych krajów w Europie. Lasy zajmują niemal trzecią część powierzchni kraju. Tereny leśne, które są szczególnie chronione, to rezerваты i parki narodowe. Największym z nich jest Biebrzański Park Narodowy, który zajmuje powierzchnię 593 km^2 . Lasy są także źródłem wielu surowców, takich jak drewno, papier i celuloza. Przyjmuje się, że z jednego drzewa sosnowego o średnicy 40 cm i wysokości 25 m można wyprodukować około 4 m^2 drewnianej podłogi lub uzyskać około 8000 kartek formatu A4.

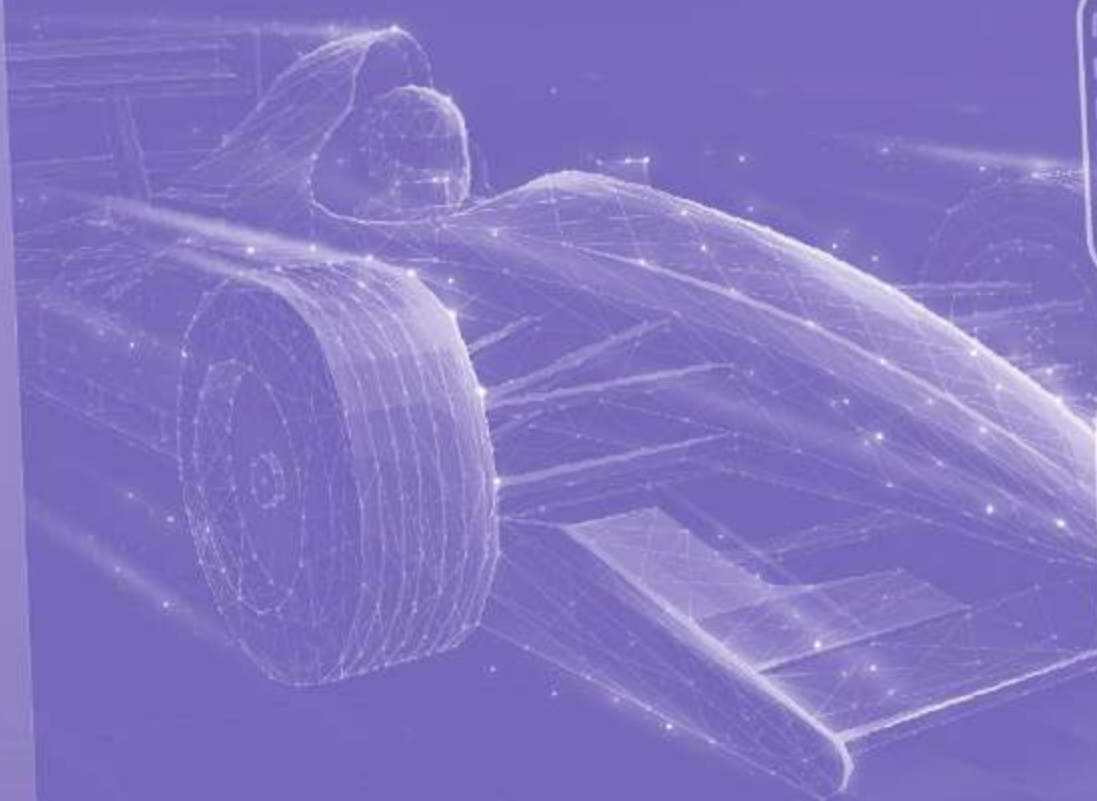


1. Jeśli powierzchnia lądowa Polski wynosi $311\,888 \text{ km}^2$, to ile kilometrów kwadratowych zajmują lasy?
2. Wyraż powierzchnię lądową Polski w metrach kwadratowych, arach oraz hektarach.
3. Ile zeszytów 60-kartkowych formatu A4 można wyprodukować z jednego drzewa sosnowego o średnicy 40 cm i wysokości 25 m?
4. Do zalesienia 1 ha lasu potrzeba 6000 sadzonek dębu. Ile sadzonek tego drzewa należałoby kupić, aby obsadzić nim powierzchnię równą powierzchni Biebrzańskiego Parku Narodowego?
5. Pani Janina jest właścicielką 6 ha lasu. Podczas nawałnicy trzy czwarte powierzchni lasu zostało całkowicie zniszczone. Pani Janina zamierza zalesić zniszczone tereny. Do zalesienia 1 ha lasu potrzeba 9000 sadzonek sosny albo 6000 sadzonek dębu lub 4000 sadzonek brzozy.
 - a) Ile sadzonek musi kupić pani Janina, jeśli jedną połowę zniszczonej powierzchni lasu chce obsadzić sosnami, a drugą połowę brzozami?
 - b) Jaki będzie koszt zakupu sadzonek, jeśli jedna sadzonka brzozy kosztuje 1,20 zł, a sosny 0,90 zł?

DZIAŁ

VII

W ŚWIECIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH



KARTA TORU

Długość okrążenia: 6,25 KM
Liczba okrążeń: 64

KARTA BOLIDU

Masa bolidu: 0,798 T
Zużycie paliwa: 40 L/100 KM

Jaki dystans pokona kierowca podczas tego wyścigu?

Ile litrów paliwa zużyje bolid?



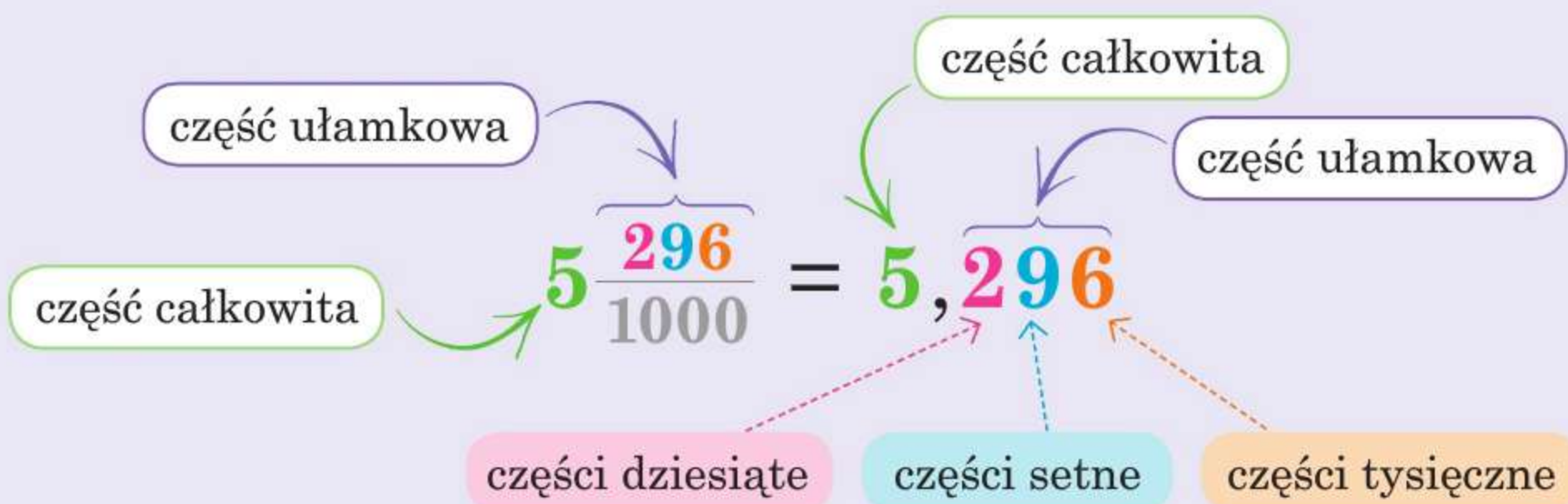
1. Ułamki zwykłe a dziesiętne

- ▶ Jakie ułamki nazywa się dziesiętnymi?
- ▶ Jak zamienić ułamek zwykły na ułamek zapisany w postaci dziesiętnej i odwrotnie?



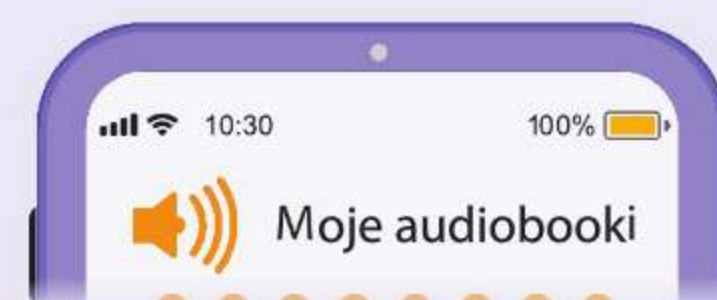
Analizuj!

Ułamek zwykły, który ma w mianowniku liczbę 10, 100, 1000 itd., nazywamy **ułamkiem dziesiętnym**. Możemy go zapisać z przecinkiem zamiast kreski ułamkowej, czyli **w postaci dziesiętnej**.



Cezary i Bruno sprawdzali zużycie baterii w smartfonach po godzinie, dwóch godzinach i trzech godzinach użytkowania aplikacji oferującej dostęp do audiobooków. Cezary zapisywał dane **w postaci ułamków zwykłych**, a Bruno – **w postaci dziesiętnej**. Co można powiedzieć o zużyciu baterii w obu smartfonach?

Zużycie baterii	Cezary	Bruno
 po 1 godz.	$\frac{1}{4}$	0,25
 po 2 godz.	$\frac{1}{2}$	0,5
 po 3 godz.	$\frac{3}{4}$	0,75



Zużycie baterii w obu smartfonach było takie samo.

Gdy zamieniasz ułamek zwykły dziesiętny na ułamek zapisany w postaci dziesiętnej, pamiętaj: **ile zer w mianowniku, tyle cyfr po przecinku**.

$$\frac{3}{10} = 0,3 \quad \cdot \quad \frac{141}{100} = 1\frac{41}{100} = 1,41 \quad \cdot \quad 1\frac{217}{1000} = 1,217 \quad \cdot \quad 2\frac{113}{10\,000} = 2,0113$$

W innych przypadkach skorzystaj z rozszerzania i skracania ułamków.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4 \quad \cdot \quad \frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 0,9 \quad \cdot \quad \frac{67}{20} = 3\frac{7}{20} = 3\frac{35}{100} = 3,35$$

Gdy zamieniasz ułamek zapisany w postaci dziesiętnej na ułamek zwykły, pamiętaj: **ile cyfr po przecinku, tyle zer w mianowniku**.

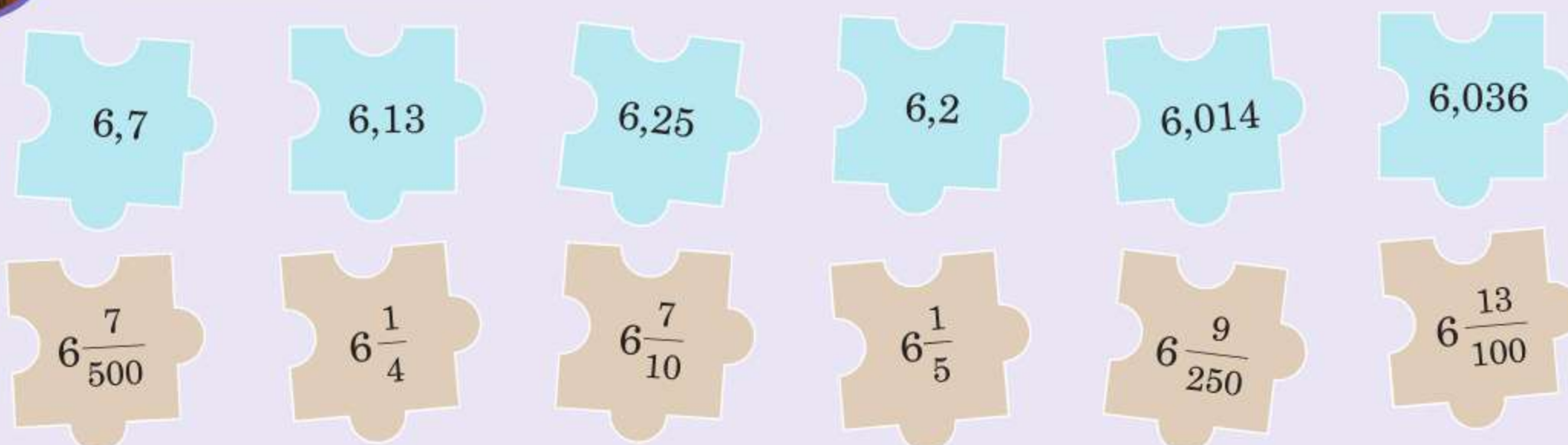
$$0,1 = \frac{1}{10} \quad \cdot \quad 0,17 = \frac{17}{100} \quad \cdot \quad 5,011 = 5\frac{11}{1000}$$

Jeśli to możliwe, po zamianie skróć części ułamkowe.

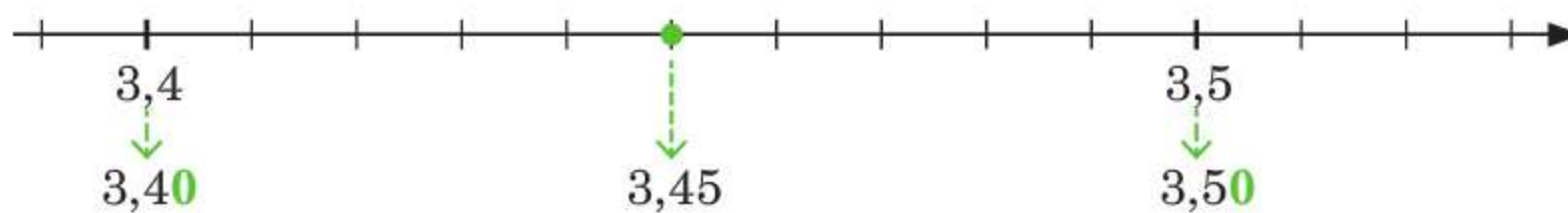
$$0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \cdot \quad 0,04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \quad \cdot \quad 12,035 = 12\frac{35}{1000} = 12\frac{7}{200}$$



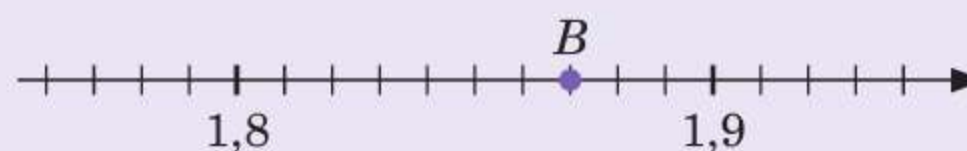
Wskaż pary liczb o tej samej wartości.



Każdy ułamek dziesiętny można rozszerzyć, dopisując po ostatniej cyfrze części ułamkowej dowolną liczbę zer. Nie zmienia to wartości tego ułamka.



Odczytaj współrzędne punktu *B*.



Poćwicz!

1. Zapisz podaną liczbę w postaci dziesiętnej.

- a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{65}{100}$ c) $5\frac{21}{100}$ d) $18\frac{184}{1000}$ e) $1\frac{7}{100}$ f) $6\frac{78}{1000}$
 g) $\frac{99}{10}$ h) $\frac{375}{100}$ i) $\frac{8064}{1000}$ j) $\frac{47}{10\,000}$ k) $\frac{12}{10\,000}$ l) $1\frac{25}{1\,000\,000}$

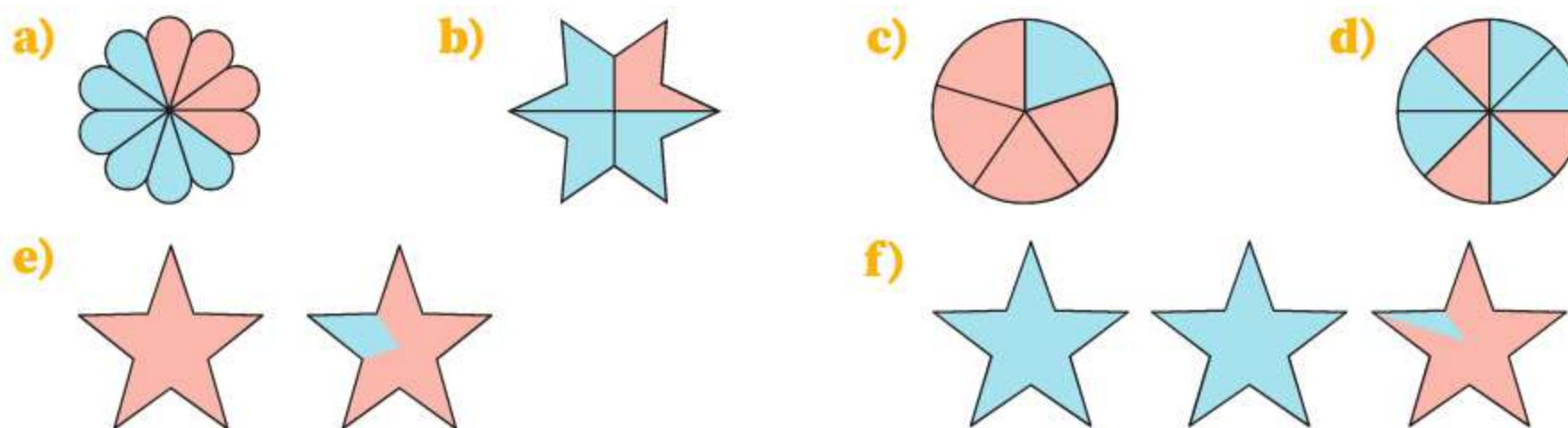
2. Zapisz podaną liczbę w postaci ułamka zwykłego lub liczby mieszanej. Doprowadź ułamek do najprostszej postaci.

- a) 0,4 b) 0,12 c) 17,2 d) 2,25 e) 15,15 f) 0,55
 g) 3,04 h) 0,008 i) 24,064 j) 9,075 k) 105,375 l) 83,675

3. Zapisz podaną liczbę w postaci dziesiętnej.

- a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{6}{20}$ c) $1\frac{7}{25}$ d) $\frac{17}{500}$ e) $8\frac{280}{400}$ f) $3\frac{24}{600}$ g) $18\frac{2}{125}$

4. Zapisz za pomocą ułamka dziesiętnego, jaka część figury jest zamalowana niebieskim kolorem, a jaka różowym.



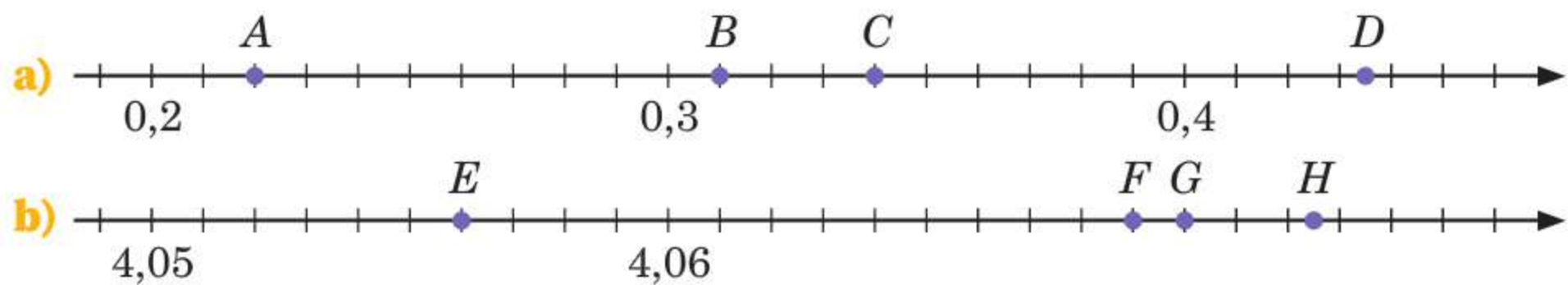
5. Przyporządkuj ułamki zwykłe i liczby mieszane do ich postaci dziesiętnych, a odczytasz nazwę widocznej poniżej niezwyklej rośliny tropikalnej. Nie ma ona liści, łodyg i korzeni, kwitnie co kilka lat przez nie więcej niż siedem dni, a jej kwiat ma masę około 10 kg.

$2\frac{15}{50}$ Z	$\frac{36}{60}$ R	$\frac{1}{8}$ E	$\frac{3}{4}$ A	$2\frac{49}{98}$ F			
$\frac{425}{850}$ L	$4\frac{14}{200}$ O	$4\frac{63}{90}$ N	$\frac{3}{75}$ D	$\frac{3}{12}$ J			
0,6	0,75	2,5	0,5	0,125	2,3	0,25	0,75
0,75	0,6	4,7	4,07	0,5	0,04	0,75	



6. W pewnej liczbie mieszanej zapisanej w postaci dziesiętnej cyfra części setnych jest równa 4, cyfra jedności jest od niej o 2 mniejsza, a cyfra części dziesiątych jest trzy razy większa od cyfry jedności. Zapisz tę liczbę mieszaną. Ułamek zwykły podaj w najprostszej postaci.

7. Odczytaj współrzędne zaznaczonych punktów.



8. Zapisz wyniki poniższych działań w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{3}{10} + \frac{5}{100}$

b) $\frac{7}{10} + \frac{9}{100} + \frac{1}{1000}$

c) $5 + \frac{8}{1000} + \frac{7}{100} + \frac{6}{10}$



A to ciekawe

Najmniejszym ptakiem na świecie jest koliberek hawański. Waży 1,5 g, czyli **piętnaście dziesięciotysięcznych** kilograma. Długość jego ciała wynosi 6 cm, z czego na tułów przypada tylko 1,25 cm, czyli **sto dwadzieścia pięć dziesięciomilionowych** kilometra. Zapisz wyróżnione liczby w postaci dziesiętnej.



Sprawdź, co umiesz!

1. Zapisz podane liczby w postaci dziesiętnej.

$\frac{19}{100}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{12}{25}$

$1\frac{6}{500}$

$8\frac{36}{90}$

2. Zapisz podane liczby w postaci ułamków zwykłych lub liczb mieszanych w najprostszej postaci.

a) 1,8

b) 0,16

c) 17,05

d) 0,066

e) 12,375

3. Wskaż ułamek, w którym cyfra części tysięcznych jest o 2 większa od cyfry części dziesiątych, a cyfra części setnych jest równa 3.

A. 0,432

B. 0,355

C. 0,638

D. 0,836

2. Ułamki dziesiętne i wyrażenia dwumianowane

- ▶ Jak porównywać ułamki dziesiętne?
- ▶ Jak zamienić wyrażenie dwumianowane na ułamek dziesiętny i odwrotnie?
- ▶ Jak porównać ułamek dziesiętny i wyrażenie dwumianowane?



Analizuj!

Do porównywarki dodano trzy hulajnogi elektryczne. Różnią się one ceną i zasięgiem, czyli liczbą kilometrów, które można przejechać po jednym naładowaniu akumulatora.

Model	Junior	M2	W7
Zasięg (km)	8,527	28,436	28,43
Cena (zł)	988,99	2198,90	2198,59

Która hulajnoga jest najtańsza, a która najdroższa? Porównaj ceny. Zaczynj od porównania całości, a jeśli są one równe – porównaj części ułamkowe.

$$\begin{array}{lcl}
 988,99 ? 2198,90 & \rightarrow & 988 < 2198, \text{ zatem } 988,99 < 2198,90 \\
 988,99 ? 2198,59 & \rightarrow & 988 < 2198, \text{ zatem } 988,99 < 2198,59 \\
 2198,90 ? 2198,59 & \rightarrow & 2198,9 > 2198,5, \text{ zatem } 2198,90 > 2198,59
 \end{array}$$

Najtańsza jest hulajnoga Junior, najdroższa – hulajnoga M2.

Która hulajnoga ma największy zasięg, a która najmniejszy? Sprawdź to. Jeśli w zapisie dziesiętnym którejś z liczb jest mniej cyfr po przecinku, dopisz po ostatniej cyfrze części ułamkowej odpowiednią liczbę zer.

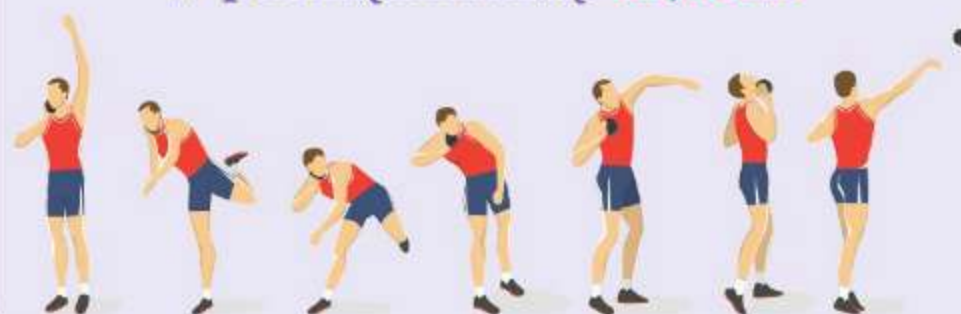
$$\begin{array}{lcl}
 8,527 ? 28,436 & \rightarrow & 8 < 28, \text{ zatem } 8,527 < 28,436 \\
 8,527 ? 28,43 & \rightarrow & 8 < 28, \text{ zatem } 8,527 < 28,43 \\
 28,436 ? 28,43 & \rightarrow & 28,436 > 28,430
 \end{array}$$

Największy zasięg ma hulajnoga M2, najmniejszy – hulajnoga Junior.

Pola i Kuba przygotowują razem infografikę o pchnięciu kulą. Porównaj notatki Poli i zapis Kuby. Czym różnią się te zapisy?

Masa kuli dla mężczyzn: 7 kg 26 dag
Rekord świata mężczyzn w pchnięciu kulą: 23 m 56 cm

Masa kuli dla mężczyzn: 7,26 kg
Rekord świata mężczyzn w pchnięciu kulą: 23,56 m



Pola zapisała wartości za pomocą **wyrażeń dwumianowanych**.

Kuba przedstawił te same wartości **w postaci dziesiętnej**.

W jaki sposób zamienić **wyrażenie dwumianowane** na **ułamek dziesiętny**?

5 cm 7 mm = **5,7 cm**, bo 1 cm = 10 mm, więc 7 mm = 0,7 cm

16 t 24 kg = **16,024 kg**, bo 1 t = 1000 kg, więc 24 kg = 0,024 t

4 zł 39 gr = **4,39 zł**, bo 1 zł = 100 gr, więc 39 gr = 0,39 zł

W jaki sposób zamienić **ułamek dziesiętny** na **wyrażenie dwumianowane**?

17,6 km = 17,600 km = **17 km 600 m**

5,8 kg = 5,80 kg = **5 kg 80 dag**

20,9 zł = 20,90 zł = **20 zł 90 gr**

Pomocne jest **dopisanie odpowiedniej liczby zer po ostatniej cyfrze części ułamkowej**.

Która z dziewcząt pchnęła kulą najdalej?

Iza	Ula	Pola
7 m 3 cm	7,3 m	71,4 dm

1 Zapisz dane w ten sam sposób i za pomocą tych samych jednostek.

wyrażenia dwumianowane

Iza: 7 m 3 cm

Ula: 7,3 m = 7,30 m = 7 m 30 cm

Pola: 71,4 dm = 71 dm 4 cm = 7 m 14 cm

postać dziesiętna

Iza: 7 m 3 cm = 7,03 m

Ula: 7,3 m = 7,30 m

Pola: 71,4 dm = 7,14 m

2 Porównaj wielkości.

7 m 3 cm < 7 m 14 cm < 7 m 30 cm

7,03 m < 7,14 m < 7,30 m

Najdalej kulą pchnęła Ula.



Bruno pchnął kulą na odległość 11,56 m, Adam 11 m 6 cm, a Kuba 11,6 m. Porównaj wyniki chłopców.

Poćwicz!

1. Porównaj podane liczby. Użyj znaków: $<$, $=$ lub $>$.

- a)** 4,7 i 4,4 **b)** 9,64 i 9,62 **c)** 12,072 i 12,702
d) 3,86 i 9,45 **e)** 5,96 i 5,960 **f)** 8,984 i 8,99
g) 56,0287 i 156,02870 **h)** 2,999 i 3,9 **i)** 634,542 i 634,64

2. Oto wysokości sześciu tatrzańskich szczytów zapisane za pomocą kilometrów.

Nazwa szczytu	Wysokość (km n.p.m.)	Nazwa szczytu	Wysokość (km n.p.m.)
Hińczowa Turnia	2,377	Niznie Rysy	2,43
Rysy	2,499	Cubryna	2,376
Wołowa Turnia	2,373	Mięguszowiecki Szczyt	2,438

- a)** Uporządkuj podane wielkości malejąco.
b) Które szczyty mają wysokość większą niż 2,37 km n.p.m. i mniejszą niż 2,377 km n.p.m.?
c) Które szczyty wznoszą się na wysokość większą niż 2430 m n.p.m.?

3. Uzupełnij podaną równość odpowiednią liczbą w postaci dziesiętnej.

- a)** 9 mm = cm **b)** 16 cm 3 mm = cm **c)** 2 cm = m
d) 10 m 8 cm = m **e)** 167 m = km **f)** 1 km 28 m = km
g) 4 km 5 m = km **h)** 56 mm = m **i)** 3 mm = km

4. Uzupełnij podaną równość odpowiednią liczbą w postaci dziesiętnej.

- a)** 8 g = dag **b)** 6 dag 1 g = dag **c)** 85 dag = kg
d) 1 kg 9 dag = kg **e)** 18 g = kg **f)** 44 kg 6 g = kg
g) 32 kg = t **h)** 271 t 2 kg = t **i)** 50 t 5000 g = t

5. Uzupełnij podaną równość odpowiednią liczbą w postaci dziesiętnej.

- a)** 83 gr = zł **b)** 85 zł 26 gr = zł **c)** 786 zł 9 gr = zł

6. Zapisz wielkości zamieszczone w ramce za pomocą wyrażeń dwumianowanych.

7,9 cm • 9,04 m • 5,2 m • 17,939 km • 3,105 km • 7,07 km • 100,9 km
 • 8,6 dag • 19,27 kg • 402,5 kg • 1,087 t • 26,02 t • 82,3 t • 16,5 zł

7. Zapisz wszystkie dane liczbowe za pomocą wyrażeń dwumianowanych.

Harpia wielka to drapieżny ptak z rodziny jastrzębiowatych, który zamieszkuje lasy tropikalne w Ameryce Południowej i Środkowej. Może mierzyć nawet 1,07 m i ważyć 4,8 kg. Jej skrzydła osiągają rozpiętość 2,24 m, a szpony mają aż 12,5 cm długości. Harpia potrafi dostrzec obiekt wielkości 0,02 m z odległości 0,2 km.



8. Uporządkuj podane wielkości rosnąco.

- a) 90,7 kg • 971 dag • 0,9 t • 9007 g • 0,97 t • 90,701 kg • 9,7 kg • 9,7 t
b) 5 km 20 m • 5,2 km • 5202 m • 5 km 200 cm • 5,22 km • 52 000 cm



A to ciekawe

Do określania wielkości bardzo małych mas, np. w farmacji i przemyśle kosmetycznym, stosuje się miligramy (mg).
W 1 g mieści się 1000 mg.

Zastąp  odpowiednią liczbą.

1 mg =  g 58 mg =  g 19 g 5 mg =  g 7,02 g = 7 g  mg



Sprawdź, co umiesz!

1. Liczby w ramce zapisz w kolejności malejącej.

0,844 • 0,9 • 0,809 • 0,488
• 8,01 • 0,848 • 0,8400 • 8,4

2. Zapisz ułamek dziesiętny za pomocą wyrażenia dwumianowanego, a wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego.

- a) 6,8 dag b) 1,62 kg c) 15,09 t d) 44,4 zł
e) 30 m 1 cm f) 153 zł 51 gr g) 1 kg 87 g h) 99 t 5 kg

3. Na podstawie tabeli oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Piłka/Sport	siatkówka	krykiet	hokej na trawie	piłka nożna
obwód	0,67 m	22,5 mm	230 mm	0,7 m
masa	28 dag	0,15 kg	0,160 kg	450 g

Największą masę ma piłka do siatkówki.

P F

Najmniejszy obwód ma piłka do hokeja na trawie.

P F

3. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych

- ▶ Jak sprawnie dodawać i odejmować ułamki dziesiętne w pamięci?
- ▶ Jak sprawnie dodawać i odejmować ułamki dziesiętne sposobem pisemnym?



Analizuj!

Przed wyjazdem na wakacje do Hiszpanii rodzice kupili dla Poli nowe walizki. Ile za nie zapłacili? Jak to obliczyć?

SPRZEDAŻ	
1. Walizka M PROMO	1 × 123,60 PLN Wartość 123,60 PLN
2. Walizka S PROMO	1 × 55,50 PLN Wartość 55,50 PLN
SUMA	179,10 PLN

Sposób 1 Licz w pamięci.

$$123,60 + 55,50 = 123 + 55 + 0,60 + 0,50 = 178 + 1,10 = 179,10$$

- 1 Najpierw dodaj całości.
- 2 Potem dodaj części ułamkowe.



Sposób 2 Licz pisemnie.

			1		
	1	2	3,6	0	
+		5	5,5	0	
	1	7	9,1	0	

- 1 Zapisz całości pod całościami, części ułamkowe pod częściami ułamkowymi, a przecinek pod przecinkiem.
- 2 Postępuj tak jak przy dodawaniu liczb naturalnych – dodawaj rzędami od prawej strony, przenoś dziesiątki do kolejnych rzędów.
- 3 W wyniku zapisz przecinek pod pozostałymi przecinkami.

Rodzice Poli zapłacili za walizki 179,10 zł.

Rodzice Poli zapłacili za walizki banknotem 200-złotowym. Ile reszty otrzymali? Jak to obliczyć?

Sposób 1 Licz w pamięci.

$$200 - 179,10 = 200 - 179 - 0,10 = 21 - 0,10 = 20,90$$

- 1 Najpierw odejmij całości.
- 2 Potem odejmij części ułamkowe.

Sposób 2 Licz pisemnie.

W puste miejsca po przecinku wstaw zera.

			9		
	1	9	10	10	
	2	0	0	0	0
-	1	7	9	1	0
		2	0	9	0

- 1 Zapisz całości pod całościami, części ułamkowe pod częściami ułamkowymi, a przecinek pod przecinkiem.
- 2 Postępuj tak jak przy odejmowaniu liczb naturalnych – odejmuj rzędami od prawej strony, pożyczaj dziesiątki z kolejnych rzędów.
- 3 W wyniku zapisz przecinek pod pozostałymi przecinkami.

Rodzice Poli otrzymali 20,90 zł reszty.

Rodzice Poli spakowali do swoich walizek zbyt dużo rzeczy. Mama Poli ma 200 dag nadbagażu, a tata – 3,55 kg. Każdy rozpoczęty kilogram nadbagażu kosztuje 100 zł. Ile rodzice Poli muszą zapłacić łącznie za cały nadbagaż?



Ustal wspólną jednostkę.

nadbagaż taty: 3,55 kg
nadbagaż mamy: 200 dag = 2 kg

Oblicz łączną masę nadbagażu.

	2	0	0	
+	3	5	5	
	5	5	5	

W puste miejsca po przecinku wstaw zera.

Oblicz koszt nadbagażu.

Masa nadbagażu wynosi 5,55 kg, a więc o 55 dag więcej niż 5 kg. To oznacza **rozpoczęty szósty kilogram**.
A zatem: $6 \cdot 100 \text{ zł} = 600 \text{ zł}$.



Rodzice Poli muszą zapłacić łącznie za cały nadbagaż 600 zł.

Poćwicz!

1. Oblicz w pamięci, a następnie uporządkuj w zeszycie wyniki w kolejności malejącej i odczytaj hasło. Sprawdź w słowniku angielsko-polskim znaczenie tego słowa.

$3,9 - 3,1$

N

$85,3 + 11,1$

F

$75,9 - 13,4$

C

$98,5 - 23,4$

R

$20,7 + 20,9$

T

$43,7 + 22,3$

A

$5,08 + 6,9$

I

$6,7 - 0,12$

O

Zadbaj o to, aby po przecinku była zawsze taka sama liczba cyfr. Puste miejsca zastąp zerami, np. $5,3 - 2,14 = 5,30 - 2,14 = 3,16$.



2. Oblicz sposobem pisemnym. Pamiętaj o właściwym zapisie.

a) $54,07 + 27,81$

b) $576,948 + 1738,13$

c) $553 + 274,84$

d) $987,46 - 522,15$

e) $58,319 - 4,21$

f) $100 - 39,875$

g) $38,7 + 25,84 + 9,576$

h) $97,6 + 78,78 - 15,78$

i) $87,003 - 54,76 + 85,997$

j) $1 - 0,98765 + 0,01235$

3. Podczas triathlonu zawodnik kolejno: płynie, jedzie na rowerze i biegnie. Na ilustracji przedstawiono, jakie dystanse musieli pokonać zawodnicy podczas kolejnych etapów pierwszego triathlonu, który odbył się 25 września 1974 r. w San Diego.


0,4572 km

8,047 km

9,656 km

- a)** Która część triathlonu była najdłuższa, a która najkrótsza?
b) O ile kilometrów krótszy był odcinek, który należało pokonać rowerem, od tego, który należało przebiec?
c) Jaka była łączna długość trasy tego triathlonu w kilometrach? A w metrach?

4. Pan Marek przygotowuje ogród na sezon letni. Oto fragment paragonu podsumowującego jego zakupy. Wybierz właściwe uzupełnienie zdań spośród **A i B** oraz **C i D**.

- I.** Za wszystkie zakupy pan Marek zapłacił

A. 889,79 zł.

B. 929,69 zł.

- II.** Jeśli pan Marek podał kasjerowi pięć banknotów o nominale 200 zł, to otrzymał

C. 70,31 zł reszty.

D. 110,21 zł reszty.

2024-04-19	008391
PARAGON FISKALNY	
Zestaw stół i krzesła	669,80
Zestaw lamp solarnych	59,90
Parasol ogrodowy	199,99
Rabat	-39,90

5. Oblicz.

a) $13,7 + 21,2 + 15,5 + 23,3 + 15,6 + 19,9 + 8,8 + 31,1 + 0,5$

b) $74,9 + 12,7 + 25,8 + 53,4 - 71,9 + 33,6 - 9,7 - 5,8$

6. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Liczba o 87,5 większa od różnicy liczb 121,7 i 25,09 jest równa 184,11.	P	F
Liczba o 87,5 mniejsza od sumy liczb 121,7 i 25,09 jest równa 59,74.	P	F

7. Cztery walizki ważyły odpowiednio: 7,155 kg, 12,9 kg, 545 dag oraz 15 890 g. Ile kilogramów najwięcej może ważyć piąta walizka, aby łączna masa wszystkich walizek nie przekroczyła 50 kg? Rozwiąż to zadanie, stosując metodę przedstawioną poniżej.

Pola pakuje bagaż podręczny. Bagaż waży w tej chwili 3,15 kg. Ile kilogramów mogą ważyć rzeczy, które Pola dołoży do walizki, aby nie przekroczyć limitu bezpłatnego bagażu podręcznego?

$$8 \text{ kg} - 3,15 \text{ kg} = 800 \text{ dag} - 315 \text{ dag} = 485 \text{ dag} = 4,85 \text{ kg}$$

Rzeczy, które Pola dołoży do walizki, mogą ważyć 4,85 kg.



8. Zastąp znak $\blacklozenge$ znakiem $+$ lub $-$ tak, aby równość była prawdziwa.

$$5,814 \blacklozenge (2,15 \blacklozenge 3,16) \blacklozenge 0,496 = 1$$

Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż działanie, którego wynik jest najmniejszy.

A. $315,07 - 313,73$ B. $1,12 + 0,009$ C. $58,001 - 56,65$ D. $0,9859 + 0,732$

2. Podaj liczbę, która jest:

a) o 2,5 większa od sumy liczb 13,4 i 7,6;

b) o 2,5 mniejsza od różnicy liczb 20 i 4,4.

3. Aby dotrzeć do szkoły, Michał musi najpierw pokonać 950 m pieszo, potem 2,15 km tramwajem i kolejne 395 m pieszo. Jak długa jest droga Michała do szkoły? Odpowiedź wyraż w metrach oraz w kilometrach.

4. Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000...

► Jak mnożyć i dzielić ułamki dziesiętne przez potęgi liczby 10?



Odkrywaj!



1. Kantor to firma specjalizująca się w wymianie walut.

- a) W kantorze Pekunia 1 euro można kupić za 4,42 zł. Ile złotych trzeba zapłacić w tym kantorze za 10 euro, a ile za 100 euro? Wykonaj mnożenie na kalkulatorze. Jak jest położenie przecinka w czynniku i iloczynie? Co zauważasz?
- b) W kantorze Chrimata za 100 dolarów trzeba zapłacić 416 zł. Ile złotych kosztuje w tym kantorze 10 dolarów, a ile 1 dolar? Wykonaj dzielenie na kalkulatorze. Jak jest położenie przecinka w dzielnej i ilorazie? Co zauważasz?



2. Oto fragment tabeli kursu wymiany walut w pewnym kantorze internetowym.

Waluta	Nazwa	Kupno	Sprzedaż
 USD / PLN	dolar amerykański	4,13 zł	4,16 zł
 EUR / PLN	euro	4,19 zł	4,42 zł

Jeśli chcesz **kupić** obcą walutę, patrz na **ceny sprzedaży**.

Jeśli chcesz **sprzedać** obcą walutę, patrz na **ceny kupna**.

- a) Pani Ola chce kupić 100 dolarów. Ile złotych za nie zapłaci? Jakie działanie arytmetyczne wykonasz, aby odpowiedzieć na to pytanie? Co możesz powiedzieć o położeniu przecinka w liczbach, które występują w tym działaniu?
- b) Pan Tomek chce sprzedać 100 euro. Ile złotych za nie otrzyma? Jakie działanie arytmetyczne wykonasz, aby odpowiedzieć na to pytanie? Co możesz powiedzieć o położeniu przecinka w liczbach, które występują w tym działaniu?



Analizuj!



Kuba zgłosił się do wolontariatu w akcji charytatywnej *Zbieram piątką dla psiaka*. Zachęcał do wrzucania do skarbonki monet o nominałach 5 gr, 50 gr i 5 zł oraz banknotów 50 zł.

Ile groszy zebrał Kuba? Ile to złotych? Zapoznaj się z kolejnymi obliczeniami. Zwróć uwagę, ile zer ma czynnik będący potęgą liczby 10, o ile miejsc i w którą stronę przesunięto przecinek w rozwiązaniu sposobem 2.

Do godziny 11 Kuba zebrał 10 monet o nominale 5 gr.

Sposób 1 $\frac{5}{100} \text{ zł} \cdot 10^1 = \frac{5}{10} \text{ zł} = 0,5 \text{ zł}$

Sposób 2 $0,05 \text{ zł} \cdot 10 = 0,5 \text{ zł}$

Kuba zebrał 0,50 zł.

0,05



Do godziny 12 Kuba zebrał 100 monet o nominale 5 gr.

Sposób 1 $\frac{5}{100} \text{ zł} \cdot 100^1 = 5 \text{ zł}$

Sposób 2 $0,05 \text{ zł} \cdot 100 = 5 \text{ zł}$

Kuba zebrał 5 zł.

0,05



Do godziny 13 Kuba zebrał 1000 monet o nominale 50 gr.

Sposób 1 $\frac{50}{100} \text{ zł} \cdot 1000^{10} = 500 \text{ zł}$

Sposób 2 $0,50 \text{ zł} \cdot 1000 = 500 \text{ zł}$

Kuba zebrał 500 zł.

0,500



Ostatecznie Kuba zebrał 10 000 monet o nominale 5 gr.

Sposób 1 $\frac{5}{100} \text{ zł} \cdot 10000^{100} = 500 \text{ zł}$

Sposób 2 $0,05 \text{ zł} \cdot 10000 = 500 \text{ zł}$

Kuba zebrał 500 zł.

0,0500



Oblicz. W którą stronę przesuniesz przecinek? O ile miejsc?

$5,854 \cdot 10$ ■ $1,42 \cdot 100$ ■ $0,357 \cdot 1000$ ■ $12,731 \cdot 10000$

Jaką masę w kilogramach ma jedna kartka?
Zapoznaj się z kolejnymi obliczeniami. Zwróć uwagę, ile zer ma dzielnik będący potęgą liczby 10, o ile miejsc przesunięto przecinek i w którą stronę przesunięto przecinek w rozwiązaniu sposobem 2.



10 kartek papieru do druku wizytówek ma masę 0,212 kg.

Sposób 1 $\frac{212}{1000} \text{ kg} : 10 = \frac{212}{1000} \text{ kg} \cdot \frac{1}{10} = \frac{212}{10\,000} \text{ kg} = 0,0212 \text{ kg}$

Sposób 2 $0,212 \text{ kg} : 10 = 0,0212 \text{ kg}$

0,0,212

Jedna kartka papieru do druku wizytówek ma masę 0,0212 kg.

100 kartek papieru gazetowego ma masę 0,37 kg.

Sposób 1 $\frac{37}{100} \text{ kg} : 100 = \frac{37}{100} \text{ kg} \cdot \frac{1}{100} = \frac{37}{10\,000} \text{ kg} = 0,0037 \text{ kg}$

Sposób 2 $0,37 \text{ kg} : 100 = 0,0037 \text{ kg}$

0,00,37

Jedna kartka papieru gazetowego ma masę 0,0037 kg.

1000 kartek papieru fotograficznego ma masę 12,5 kg.

Sposób 1 $12\frac{5}{10} \text{ kg} : 1000 = \frac{125}{10} \text{ kg} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{125}{10\,000} \text{ kg} = 0,0125 \text{ kg}$

Sposób 2 $12,5 \text{ kg} : 1000 = 0,0125 \text{ kg}$

0,012,5

Jedna kartka papieru fotograficznego ma masę 0,0125 kg.

10 000 kartek papieru kserograficznego ma masę 50 kg.

Sposób 1 $50 \text{ kg} : 10\,000 = 50 \text{ kg} \cdot \frac{1}{10\,000} = \frac{50}{10\,000} \text{ kg} = 0,005 \text{ kg}$

Sposób 2 $50,0 \text{ kg} : 10\,000 = 0,005 \text{ kg}$

0,0050,0

Jedna kartka papieru kserograficznego ma masę 0,005 kg.



Oblicz. W którą stronę przesuniesz przecinek? O ile miejsc?

135,12 : 10 ■ 604,18 : 100 ■ 143,5 : 1000 ■ 3,12 : 10 000

Aby **pomnożyć ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000 itd.**, wystarczy przesunąć przecinek w prawo o tyle miejsc, ile zer ma czynnik będący potęgą liczby 10. Zera na początku należy pominąć, a puste miejsca na końcu uzupełnić zerami.

$$0,327 \cdot 100 = 32,7$$



Aby **podzielić ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000 itd.**, wystarczy przesunąć przecinek w lewo o tyle miejsc, ile zer ma dzielnik będący potęgą liczby 10. Zera na końcu należy pominąć, a puste miejsca na początku należy uzupełnić zerami.

$$43,2 : 100 = 0,432$$

Poćwicz!

1. Zastąp znak $\blacklozenge$ znakiem $\cdot$ lub $:$ tak, aby równość była prawdziwa.

- a) $34,56 \blacklozenge 10 = 345,6$ b) $513,7 \blacklozenge 100 = 5,137$ c) $4,444 \blacklozenge 100 = 444,4$
d) $12,4 \blacklozenge 1000 = 12\ 400$ e) $3,33 \blacklozenge 100 = 0,0333$ f) $0,15 \blacklozenge 1000 = 0,00015$

2. Wyznacz liczbę 1000 razy:

- a) większą niż 0,3567; b) większą niż 8,5; c) mniejszą niż 0,7.

3. Dla każdej z liczb w ramce podaj liczbę:

- a) 10 razy większą, b) 10 razy mniejszą,
c) 1000 razy mniejszą, d) milion razy większą.

54,18 $\cdot$ 1 $\cdot$ 3,27 $\cdot$ 0,01
 $\cdot$ 4,44 $\cdot$ 1,316 $\cdot$ 13

4. Przez jaką liczbę należy podzielić liczbę 10,5, aby otrzymać liczbę 0,00105?

- A. 10 B. 100 C. 1000 D. 10 000

5. Jedna piłka do gry w piłkę nożną ma masę 0,45 kg, zaś masa 1000 piłek do tenisa stołowego wynosi 2700 g.

- a) Ile kilogramów waży 10 piłek do gry w piłkę nożną? A 100 takich piłek?
b) Ile gramów waży jedna piłka do tenisa stołowego? A 10 takich piłek?

6. Pan Aleksander prowadzi warzywniak. Zamówił w hurtowni 10 kg papryki, 10 kg pomidorów oraz 100 kg truskawek. Ile zapłaci łącznie za to zamówienie?

Produkt	papryka	pomidory	truskawki
Cena za 1 kg	6,90 zł	16,65 zł	14,50 zł

7. Cezary wykonał w sobotę 10 000 kroków i pokonał dystans równy 5,6 km. Załóżmy, że Cezary wykonuje kroki jednakowej długości. Jaka długość w centymetrach ma jego jeden krok?



8. Oto cennik przesyłek listowych firmy kurierskiej Pędziwiatr.

Rozmiar przesyłki	Rodzaj przesyłki	
	ekonomiczna	priorytetowa
S (do 500 g)	3,90 zł	4,80 zł
M (ponad 500 g do 1 kg)	4,60 zł	5,40 zł
L (ponad 1 kg do 2 kg)	7,20 zł	8,00 zł



- a) Pani Agnieszka zamierza wysłać listem ekonomicznym 10 zaproszeń o masie 25 g każde na przyjęcie z okazji 40. urodzin. Ile zapłaci za przesyłkę?
- b) Organizatorzy ogólnopolskiego konkursu matematycznego przygotowują wysyłkę nagród dla uczestników. Ile zapłacą łącznie za przesyłki priorytetowe do 100 osób, jeśli masa każdej nagrody wynosi 1300 g?
- c) O ile droższa jest wysyłka priorytetowa od wysyłki ekonomicznej 1000 paczek o masie 54 dag każda?



9. W tabeli zamieszczono informację na temat masy trzech monet. Jaka masę w gramach, kilogramach i tonach ma wygrana w wysokości 1 000 000 zł wypłacona w monetach jednego rodzaju?

Nominał	1 gr	10 gr	1 zł
Masa	1,64 g	2,51 g	5 g



Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz. Wyniki uporządkuj w kolejności rosnącej.

$$3,17 : 100$$

$$4,04 \cdot 100$$

$$0,0456 \cdot 100$$

$$0,023 : 10$$

$$5,18 \cdot 1000$$

2. Przez jaką liczbę należy podzielić liczbę 18,04, aby otrzymać liczbę 0,01804?

A. 10

B. 100

C. 1000

D. 10 000

3. W hurtowni 1 kg jabłek kosztuje 2,94 zł, a 1 kg ziemniaków – 0,79 zł. Ile trzeba zapłacić łącznie za 100 kg jabłek oraz tonę ziemniaków?



5. Mnożenie ułamków dziesiętnych

- ▶ Jak mnożyć ułamki dziesiętne przez liczby naturalne w pamięci i sposobem pisemnym?
- ▶ Jak mnożyć ułamki dziesiętne przez ułamki dziesiętne sposobem pisemnym?



Odkrywaj!



6,80 zł/szt.



12,50 zł/kg



42,50 zł/kg

1. Chcę kupić pół chleba, 2 kg pomidorów i 0,1 kg sera.

a) Które z działań w ramce powinienem wykonać, aby obliczyć koszt poszczególnych produktów?

$10 \cdot 42,50$ $2 \cdot 12,50$ $0,5 \cdot 6,80$ $0,1 \cdot 42,50$ $5 \cdot 6,80$ $0,2 \cdot 12,50$

b) Wykonaj poniższe obliczenia za pomocą kalkulatora. Działania wraz z wynikiem zapisz w zeszycie. Co zauważasz?

$$2 \cdot 1250$$

$$5 \cdot 680$$

$$1 \cdot 4250$$

$$2 \cdot 12,50$$

$$0,5 \cdot 6,80$$

$$0,1 \cdot 42,50$$

c) Przyjrzyj się obliczeniom z drugiego wiersza. Ile cyfr po przecinku znajduje się w czynnikach? Ile cyfr po przecinku znajduje się w wyniku?

2. Zosia, Pola i Ela chcą zrobić kwiaty z kreatywnych drucików. Jedno opakowanie drucików kosztuje 2,50 zł. Ile zapłacą za 3 opakowania drucików?

Sposób 1 $2,50 \text{ zł} + 2,50 \text{ zł} + 2,50 \text{ zł} = 6 \text{ zł} + 1,50 \text{ zł} = 7,50 \text{ zł}$

Sposób 2 $2 \frac{50}{100} \text{ zł} \cdot 3 = 2 \frac{1}{2} \text{ zł} \cdot 3 = \frac{5}{2} \text{ zł} \cdot 3 = \frac{15}{2} \text{ zł} = 7 \frac{1}{2} \text{ zł} = 7,50 \text{ zł}$

Sposób 3 $3 \cdot 250 = 750$, więc $3 \cdot 2,50 \text{ zł} = 7,50 \text{ zł}$

Sposób 4

	1		
	2,5	0	
.			3
	7,5	0	



Na czym polegają przedstawione sposoby obliczeń? Oblicz każdym z tych sposobów iloczyn liczb 13,7 i 5.



Analizuj!

Cezary przygotowuje pucharki z galaretką na szkolny piknik. Ile litrów galaretki potrzebuje, aby napełnić 12 pucharków?



0,15 l

Sposób 1 $0,15 \text{ l} \cdot 12 = \frac{15}{100} \text{ l} \cdot \frac{12}{1} = \frac{9}{5} \text{ l} = 1 \frac{4}{5} \text{ l} = 1 \frac{8}{10} \text{ l} = 1,8 \text{ l}$

Sposób 2 $15 \cdot 12 = 15 \cdot 10 + 15 \cdot 2 = 150 + 30 = 180$, więc $0,15 \text{ l} \cdot 12 = 1,80 \text{ l}$

Sposób 3

		1	
	0	1	5
.		1	2
		3	0
+	1	5	
	1	8	0

Liczby podpisz tak, aby ostatnie cyfry znalazły się jedna pod drugą.

Postępuj tak jak przy mnożeniu liczb naturalnych. Jeśli część całkowita jest równa 0, możesz pominąć to mnożenie i nie zapisywać zer.

Ustal miejsce przecinka w wyniku – **cyfr po przecinku powinno być tyle, ile jest ich łącznie w obu czynnikach.**

Cezary potrzebuje 1,8 l galaretki.

Ile litrów galaretki musiałby przygotować Cezary, aby napełnić 17 000 pucharków?



Sposób 1 $0,15 \text{ l} \cdot 17\,000 = 0,15 \text{ l} \cdot 17 \cdot 1000 = 0,15 \text{ l} \cdot 1000 \cdot 17 = 150 \text{ l} \cdot 17 = 2550 \text{ l}$

Sposób 2

		3				
	0	1	5			
.		1	7	0	0	0
	1	0	5			
+	1	5				
	2	5	5	0	0	0

Jeśli w czynniku znajdują się **zera**, możesz je **oddzielić** i uwzględnić dopiero **w wyniku.**

Cezary musiałby przygotować 2550 l galaretki.



Ile litrów galaretki należy przygotować do wypełnienia 75 takich pucharków? A do wypełnienia 300 pucharków?

Zosia pomaga przygotować tor przeszkód. Cała trasa ma 1,4 km długości i jest podzielona na odcinki, które należy pokonać określonym sposobem:

- 0,5 trasy – rowerem,
- 0,25 trasy – biegiem,
- 0,15 trasy – na wrotkach,
- 0,1 trasy – na deskorolce.

Jaką długość mają poszczególne odcinki sportowego toru przeszkód?
Jak obliczyć ułamek liczby sposobem pisemnym?

Ile cyfr po przecinku?



	2	
	1, 4	
·	0, 5	
0, 7	0	

1 cyfra po przecinku
1 cyfra po przecinku
2 cyfry po przecinku



	2	
	1, 4	
·	0, 2 5	
	1 7 0	
+	2 8 0	
0, 3	5 0	

1 cyfra po przecinku
2 cyfry po przecinku

3 cyfry po przecinku



	2	
	0, 1 5	
·	1, 4	
	1 6 0	
+	1 5 0	
0, 2	1 0	

2 cyfry po przecinku
1 cyfra po przecinku

3 cyfry po przecinku



	1, 4	
·	0, 1	
0, 1	4	

1 cyfra po przecinku
1 cyfra po przecinku
2 cyfry po przecinku



Kolejne odcinki toru przeszkód mają następujące długości:
0,7 km, 0,35 km, 0,21 km i 0,14 km.

A gdyby 0,125 trasy należało pokonać, robiąc pajacyki?
Ile kilometrów trzeba byłoby pokonać w ten sposób?





W iloczynie należy przecinkiem oddzielić tyle cyfr końcowych, ile było ich w sumie po przecinku w obu czynnikach.

$$0,1 \cdot 15 = 1,5$$

$$2,1 \cdot 1,53 = 3,213$$

Poćwicz!

1. Oblicz w pamięci.

a) $0,3 \cdot 3$

b) $1,2 \cdot 4$

c) $5,1 \cdot 6$

d) $1,4 \cdot 8$

e) $0,8 \cdot 0,2$

f) $0,5 \cdot 0,3$

g) $1,1 \cdot 0,3$

h) $2,4 \cdot 0,5$

i) $0,9 \cdot 0,04$

j) $5,5 \cdot 0,0001$

k) $0,6 \cdot 0,007$

l) $1,7 \cdot 0,003$

2. Pola kupiła 4 bułki po 0,50 zł, 0,5 kg batatów w cenie 6,20 zł za 1 kg oraz 0,7 kg borówek w cenie 20 zł za 1 kg. Ile zapłaciła za swoje zakupy?

3. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $3,14 \cdot 18$

b) $2,2 \cdot 5,48$

c) $2500 \cdot 5,22$

d) $0,16 \cdot 75\,600$

e) $20,8 \cdot 0,123$

f) $300,07 \cdot 7,05$

g) $41,5 \cdot 0,150$

h) $9,901 \cdot 100,5$

4. Oto cennik owoców w pewnym sklepie. Wybierz właściwe uzupełnienie zdań spośród **A i B** oraz **C i D**.

I. Za 1,5 kg jabłek należy zapłacić

A. 7,30 zł.

B. 8,70 zł.

II. Za 2 kg pomarańczy oraz 0,25 kg bananów należy zapłacić

C. 15,25 zł.

D. 32,80 zł.

Owoce	Cena (1 kg)
jabłka	5,80 zł
pomarańcze	6,65 zł
banany	7,80 zł

5. Na podstawie tabeli z kursem wymiany walut w kantorze Grosik oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Waluta	Kupno (zł)	Sprzedaż (zł)
euro	4,40	4,47
dolar amerykański	4,10	4,14
frank szwajcarski	4,50	4,60
funt brytyjski	5,20	5,24

Za 20 dolarów trzeba zapłacić 82,80 zł.

P

F

Za 60 funtów brytyjskich otrzyma się 314,40 zł.

P

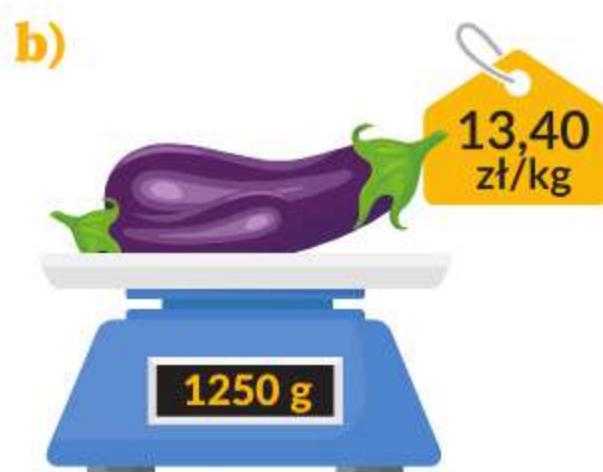
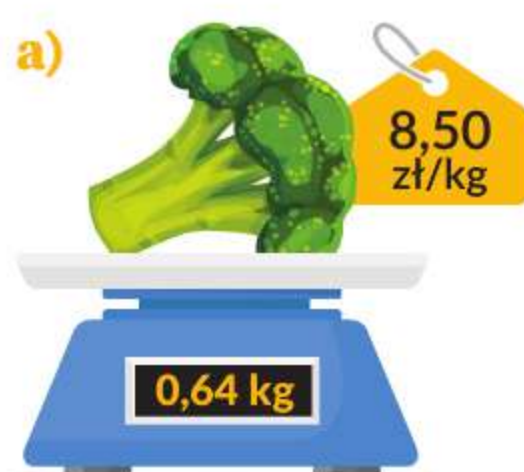
F

6. Bruno spędził wakacje w Paryżu, natomiast Ela pojechała do Genewy. Przyjrzyj się paragonom z kawiarni, które odwiedzili podczas swoich podróży. Oblicz, ile łącznie kosztowały porcja lodów (*glace du jour*) i ciastko (*pâtisserie du jour*) w złotych w każdej z kawiarni, jeśli kurs wymiany EUR/PLN wynosił 4,40 zł, a CHF/PLN 4,60 zł.

		Filomena Café, Genève	
		Glace du jour	CHF 3,14
		Pâtisserie du jour	CHF 2,06
			

		Café Charlot, Paris	
		Glace du jour	EUR 3,15
		Pâtisserie du jour	EUR 2,10
			

7. Ile trzeba zapłacić za zważony produkt?



8. Przepisz działanie do zeszytu i uzupełnij brakujące cyfry.

a)

					2
	.				1,2
		6	2	4	4
+	3	1	2		
	3	7	4	6	4

b)

			1		
	.				2 4
		4		0	0
+		2	5	0	

c)

					7
	.				0,7
		7	2	9	

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

a) $13 \cdot 0,4$ b) $0,34 \cdot 0,25$ c) $1200 \cdot 0,214$ d) $25,6 \cdot 0,15$

2. Wiedząc, że $3458 \cdot 235 = 812\ 630$, wskaż wynik działania $3,458 \cdot 23,5$.

A. 8,1263 B. 81,263 C. 812,63 D. 8126,30

3. Zosia kupiła pół bochenka chleba w cenie 6,70 zł/szt., 8 bułek po 0,85 zł oraz 80 dag sernika w cenie 42,60 zł/kg. Ile otrzymała reszty, jeśli za zakupy zapłaciła banknotem 100-złotowym?

6. Dzielenie ułamków dziesiętnych

- ▶ Jak dzielić ułamki dziesiętne przez liczby naturalne i ułamki dziesiętne w pamięci?
- ▶ Jak dzielić ułamki dziesiętne przez liczby naturalne i ułamki dziesiętne sposobem pisemnym?



Odkrywaj!

1. Kuba, Pola i Cezary wybrali się do kina.

- a) Kuba kupił bilety dla siebie i dla Poli. Zapłacił 24,60 zł. Ile to groszy? Ile groszy kosztował jeden bilet? Ile to złotych?
- b) Przed seansem Cezary kupił dla siebie, Kuby i Poli orzeszki. Za trzy takie same opakowania orzeszków zapłacił 15,75 zł. Ile to groszy? Ile groszy kosztowało jedno takie opakowanie? Ile to złotych?



2. Wykonaj polecenia i odpowiedz na pytania.

- a) Narysuj odcinek o długości 0,8 dm i podziel go na 4 równe części. Jaką długość w decymetrach ma każda z tych części? Zapisz odpowiednie działanie.
- b) Narysuj odcinek o długości 1,2 dm i podziel go na 3 równe części. Jaką długość w decymetrach ma każda z tych części? Zapisz odpowiednie działanie.
- c) Narysuj odcinek o długości 0,6 dm. Na ile odcinków o długości 0,3 dm można go podzielić? Zapisz odpowiednie działanie.



Analizuj!



Pola tworzy bransoletki przyjaźni. Na pięć jednakowych bransoletek zużyła 1,35 m ozdobnego sznurka i koraliki, za które zapłaciła 35,45 zł.

Ile metrów sznurka Pola zużyła na jedną bransoletkę?

Sposób 1 $1,35 \text{ m} : 5 = 135 \text{ cm} : 5 = 27 \text{ cm} = 0,27 \text{ m}$

Sposób 2 $1,35 \text{ m} : 5 = 1 \text{ m} : 5 + 0,35 \text{ m} : 5 = 0,20 \text{ m} + 0,07 \text{ m} = 0,27 \text{ m}$

$$1 \text{ m} : 5 = 100 \text{ cm} : 5 = 20 \text{ cm} = 0,20 \text{ m}$$

$$0,35 \text{ m} : 5 = 35 \text{ cm} : 5 = 7 \text{ cm} = 0,07 \text{ m}$$

Sposób 3 Postępuj tak jak przy dzieleniu pisemnym liczb naturalnych.

Ustal miejsce przecinka w wyniku – przecinek postaw nad przecinkiem dzielnej.

	0	2	7		
	1	3	5	:	5
–	1	0			
		3	5		
		–	3	5	
			0		

Pola zużyła na jedną bransoletkę 0,27 m sznurka.

Ile kosztowały koraliki potrzebne do wykonania jednej bransoletki?

Sposób 1 $35,45 \text{ zł} : 5 = 35 \text{ zł} : 5 + 45 \text{ gr} : 5 = 7 \text{ zł} + 9 \text{ gr} = 7 \text{ zł } 9 \text{ gr} = 7,09 \text{ zł}$

Sposób 2

		7	0	9		
	3	5	4	5	:	5
–	3	5				
			4			
			–	0		
			4	5		
			–	4	5	
				0		



Koraliki potrzebne do wykonania jednej bransoletki kosztowały 7,09 zł.

Pola postanowiła zrobić także naszyjniki z koralików z kamieni naturalnych. Na jeden naszyjnik potrzebuje 0,6 m sznurka i 0,15 kg koralików.



Ile naszyjników może wykonać Pola ze sznurka o długości 8,4 m?

Sposób 1 $8,4 \text{ m} : 0,6 \text{ m} = 840 \text{ cm} : 60 \text{ cm} = 84 \text{ cm} : 6 \text{ cm} = 14$

Sposób 2 $8,4 \text{ m} : 0,6 \text{ m} = 84 \text{ m} : 6 \text{ m} = 14$

Sposób 3 $8,4 \text{ m} : 0,6 \text{ m} = ?$

	1	4		
	8	4	:	6
-	6			
	2	4		
-	2	4		
		0		

Jeśli dzielnik jest ułamkiem dziesiętnym, przesunąć przecinek w dzielnej i dzielniku o tyle miejsc w prawo, żeby dzielnik stał się liczbą naturalną.

Pomnóż dzielnik i dzielną przez potęgę liczby 10. Iloraz nie zmienia się, gdy dzielnik i dzielną zwiększy się tyle samo razy.

Ze sznurka o długości 8,4 m Pola może wykonać 14 naszyjników.

Ile kompletnych naszyjników mogłaby przygotować Pola z zestawu koralików o masie 11,136 kg?

$11,136 \text{ kg} : 0,15 \text{ kg} = ?$

			7	4, 2	4			
	1	1	1	3, 6	0	:	1	5
-	1	0	5					
			6	3				
		-	6	0				
				3	6			
			-	3	0			
					6	0		
				-	6	0		
						0		

Każdy ułamek dziesiętny można rozszerzyć, dopisując po ostatniej cyfrze części ułamkowej dowolną liczbę zer, więc jeśli w dzielnej nie ma już cyfr, które można spisać, dopisz do niej zero i kontynuuj dzielenie.

Pola mogłaby wykonać 74 kompletne naszyjniki.

Jeśli dzielnik jest ułamkiem dziesiętnym, pomnóż dzielną i dzielnik przez potęgę liczby 10 tak, aby dzielnik miał postać liczby naturalnej.

W ilorazie należy oddzielić przecinkiem tyle cyfr końcowych, ile było ich po przecinku w dzielnej.

$$3,213 : 2,1 = \\ = 32,13 : 21 = 1,53$$



Poćwicz!

1. Nie wykonując dzielenia, wskaż te ilorazy, których wyniki są równe.

- a) $108 : 8$ b) $10,8 : 0,8$ c) $1,08 : 0,08$ d) $1,08 : 0,8$
e) $720 : 450$ f) $7,2 : 4,5$ g) $72 : 45$ h) $72 : 4,5$

2. Oblicz w pamięci.

- a) $0,28 : 2$ b) $0,93 : 3$ c) $0,48 : 6$ d) $0,448 : 4$ e) $0,255 : 5$
f) $0,4 : 8$ g) $0,3 : 5$ h) $0,5 : 25$ i) $3,6 : 3$ j) $7,2 : 9$

Pamiętaj: $0,8 : 5 = 0,80 : 5 = 0,16$.



3. Zamień podane dzielenie na dzielenie przez liczbę naturalną i oblicz.

- a) $1,4 : 0,7$ b) $1,5 : 0,3$ c) $0,18 : 0,06$ d) $1,25 : 0,05$
e) $3,6 : 0,12$ f) $48 : 0,008$ g) $6,39 : 0,003$ h) $0,088 : 0,0044$

4. Oblicz sposobem pisemnym.

- a) $9,56 : 4$ b) $60,55 : 7$ c) $4,86 : 9$ d) $1,752 : 3$
e) $4,38 : 0,6$ f) $3,508 : 0,08$ g) $0,02024 : 0,11$ h) $0,3311 : 0,014$
i) $11,583 : 0,13$ j) $4,884 : 0,15$ k) $1,489 : 0,08$ l) $5 : 0,4$

5. Na każdym opakowaniu kawy widnieje informacja, na ile filiżanek kawy wystarczy opakowanie.

- a) Oblicz koszt jednej filiżanki każdej z kaw.
b) Uporządkuj nazwy kaw w zależności od ceny jednej filiżanki tych kaw, od najtańszej do najdroższej.



7,65 zł

15,26 zł

19,75 zł

6. Pani Adrianna przygotowała 13,5 l soku z czarnego bzu. Oblicz, ile co najmniej słoików musi naszykować, jeśli pojemność każdego słoika wynosi:

- a) 0,3 l, b) 0,5 l, c) 0,9 l, d) 0,25 l.



7. Trasę pewnego rajdu harcerskiego o długości 76,2 km podzielono na 12 równych etapów. Ile kilometrów ma jeden etap? Ile to metrów?

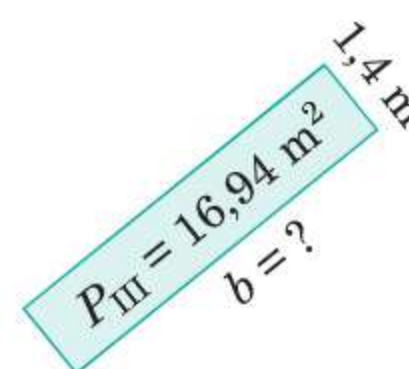
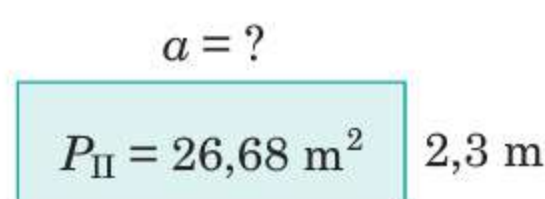
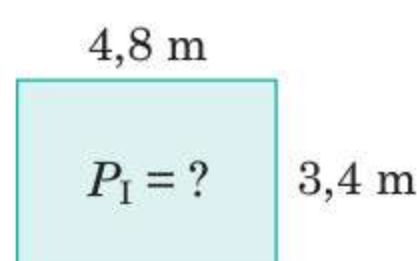
8. Za 2,5 kg cytryn trzeba zapłacić 16,75 zł, a za arbuza o masie 9,1 kg – 21,84 zł. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

1 kg cytryn kosztuje 6,70 zł, a 1 kg arbuza 2,40 zł.	P	F
Z arbuza można przygotować 25 porcji po 0,35 kg każda.	P	F
Za 1,3 kg cytryn trzeba zapłacić 8,71 zł.	P	F

9. Auto pana Wojtka spala 7,5 l paliwa na każde 100 km jazdy. Czy po zatankowaniu auta za 201,50 zł pan Wojtek przejedzie więcej niż 400 km? Uzasadnij swoją odpowiedź.



10. Który z prostokątów ma największy obwód, a który – największe pole?



11. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $(167,18 - 98,98) : 0,4 + 0,9 : 0,03$

b) $150 + 46,25 : 0,025 - 25 \cdot 2,32$

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz w pamięci.

a) $0,35 : 7$

b) $6,3 : 0,9$

c) $2,04 : 0,002$

d) $8,1 : 9$

2. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $44,28 : 9$

b) $6,682 : 13$

c) $2,193 : 0,3$

d) $0,0205 : 0,04$

3. Na przygotowanie porcji sałatki owocowej potrzeba 0,15 kg jabłek. Ile porcji sałatki można przygotować z 2,4 kg jabłek?

7 • Zadania tekstowe

- ▶ Jak rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do wykonywania działań na ułamkach dziesiętnych?
- ▶ Jak rozwiązywać zadania tekstowe z niedoborem danych?



Analizuj!

Zdarza się, że w treści zadań tekstowych nie ma wszystkich informacji potrzebnych do ich rozwiązania. Często informacje te można znaleźć w tabeli lub na ilustracji, które umieszczone są obok tekstu, ale czasem informacji trzeba poszukać gdzie indziej, np. w internecie, podręczniku do biologii, atlasie geograficznym czy w pobliskim sklepie.



Podczas obozu harcerskiego zastęp musiał samodzielnie zaplanować oraz przygotować niektóre posiłki. Przeanalizuj zamieszczony poniżej plan kolacji dla 25 osób, a następnie oblicz jej koszt.

Plan kolacji dla 25 osób

1 opakowanie herbaty
2 chleby
25 bułek
3 kostki masła
25 plasterków sera żółtego (0,7 kg)
25 plasterków szynki (0,45 kg)
25 małych pomidorów
2 słoiki dżemu

Aby obliczyć koszt kolacji, trzeba ustalić ceny produktów. Można wybrać się w tym celu do pobliskiego sklepu lub sprawdzić ceny w jednym ze sklepów internetowych.

Koszt kolacji

herbata	11,90 zł
chleby	11,00 zł
bułki	16,25 zł
masło	16,20 zł
ser żółty	19,90 zł
szynka	20,70 zł
pomidory	27,00 zł
dżemy	13,00 zł
RAZEM:	135,95 zł

Koszt kolacji wyniesie 135,95 zł.

Poćwicz!

1. Janek i Małgosia codziennie biegają przez pół godziny. Janek w tym czasie pokonuje 2,4 km, a Małgosia dystans o 450 m krótszy. Ile kilometrów w ciągu tygodnia przebiega Janek, a ile Małgosia?

2. Dominika pomaga przy projektowaniu swojego pokoju. Wzdłuż ściany, która ma 358 cm długości, zamierza umieścić: biurko, komodę, stolik na kwiaty oraz szafę, tak jak to pokazano na rysunku obok. Czy jest to możliwe? Uzasadnij swoją odpowiedź.



3. Amatorska grupa teatralna Mała Scena przygotowała spektakl, na który sprzedano 213 biletów w promocyjnej cenie 39,55 zł za sztukę oraz 72 bilety, które były o 13,10 zł droższe od biletów promocyjnych. Z kwoty uzyskanej ze sprzedaży biletów pokryto wydatki w wysokości 3742,99 zł na wypożyczenie kostiumów i wynajem sali. Pozostałą kwotę przeznaczono po równo na cztery zbiórki charytatywne. Jaka kwotę wpłacono na każdą ze zbiórek?

4. Akwedukt w Borach Tucholskich to najdłuższa tego typu budowla w Polsce. Najstarszy akwedukt to Aqua Appia (czytaj: akła apia). Powstał on w Rzymie w 312 r. p.n.e. Jego podziemna część miała długość 16,470 km. Odszukaj w internecie, jaką długość ma akwedukt w Borach Tucholskich, i odpowiedz na pytania.

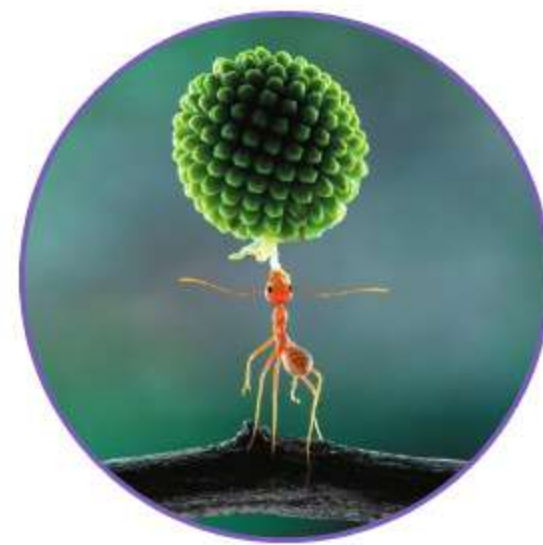


- a) O ile kilometrów dłuższy jest akwedukt w Rzymie od akweduktu w Borach Tucholskich?
- b) Ile razy krótszy jest akwedukt w Borach Tucholskich od Aqua Appia?



Akwedukt to stworzony przez człowieka kanał wodociagowy, podziemny lub nadziemny. Może być umieszczony na arkadach (podporach połączonych łukiem) prowadzonych nad rzekami lub nierównościami terenu.

5. Przeciętna mrówka może podnieść obiekt o masie pięć razy większej niż jej masa ciała. Ile wynosi masa w gramach i miligramach jednej mrówki, jeśli wiadomo, że 50 mrówek może podnieść 1,25 g? W razie potrzeby zależności między miligramami i gramami odszukaj w tym podręczniku.



6. Kuba spędził weekend w Berlinie. W tym czasie zwiedził zoo oraz Muzeum Historii Naturalnej. Bilet ulgowy do zoo kosztował 12 euro, a do muzeum – 5 euro. Odszukaj w internecie aktualną cenę euro i ustal, ile w przeliczeniu na złotówki kosztowałyby dziś te dwa bilety.

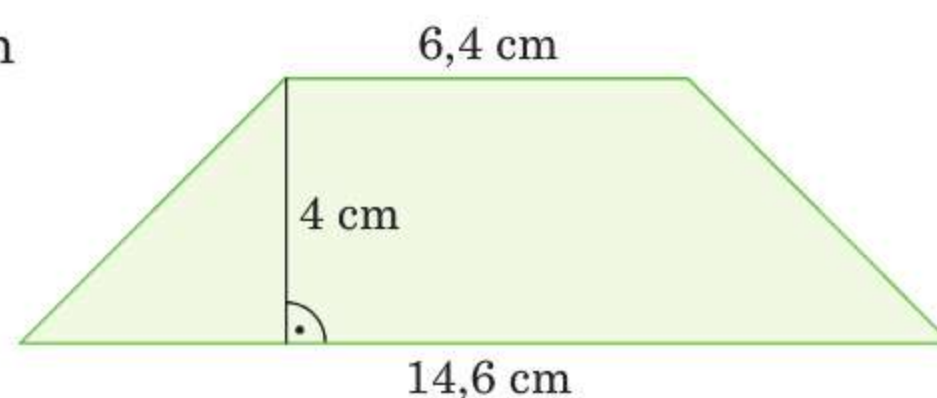
7. Michalina bardzo lubi jeść na śniadanie płatki owsiane z jabłkiem. Oto wartości odżywcze zawarte w 1 kg płatków oraz 1 dag jabłka.

	Płatki	Jabłko
Wartość energetyczna (kcal)	3730	5,2
Węglowodany (g)	595,1	1,4
Białko (g)	132,2	0,03
Tłuszcz (g)	66	0,02
Błonnik (g)	96,6	0,24

- a) Jaką wartość energetyczną ma 1 kg jabłek? A jaką 100 g płatków?
- b) Michalina ugotowała 100 g płatków owsianych na wodzie i dodała do nich 100 g jabłka. Jaką wartość energetyczną ma to danie? Ile gramów poszczególnych składników odżywczych znajduje się w tym daniu?
- c) Dienne zapotrzebowanie człowieka na błonnik wynosi 1 g na 1 kg masy ciała. Michalina waży 40 kg. Ile co najmniej porcji owsianki z jabłkiem musiałaby zjeść, aby dostarczyć organizmowi właściwą ilość błonnika? Przyjmij, że jedna porcja składa się ze 100 g płatków oraz 100 g jabłka.

8. Marek ma kupić 1 chleb z ziarnami, kostkę masła, 20 dag sera żółtego, czerwoną paprykę i litr mleka. Czy 30 zł wystarczy mu na zakupy? Poszukaj brakujących danych w sklepie stacjonarnym albo internetowym.

9. Pole trapezu o podanych obok wymiarach jest o $4,2 \text{ cm}^2$ mniejsze od pola trójkąta, którego podstawa ma $8,4 \text{ cm}$ długości. Jaką długość ma wysokość tego trójkąta?



10. Co to za liczby?

- a) Suma tych dwóch liczb wynosi 150, a jedna z liczb jest o 8,2 większa od drugiej.
- b) Suma pierwszej i drugiej liczby wynosi 87,4, suma pierwszej i trzeciej liczby wynosi 52,1, a suma drugiej i trzeciej – 73,9.



11. Wyobraź sobie, że wybierasz się w podróż samochodem z Gdańska do Krakowa. Skorzystaj z atlasu geograficznego lub mapy, aby ustalić odległość między Gdańskiem a Krakowem. Zaplanuj trasę, wybierz model samochodu, którym będziesz podróżować. Sprawdź, ile paliwa należy kupić i jaka jest cena za 1 l tego paliwa.

- a) Ile będzie kosztowało paliwo potrzebne na pokonanie trasy Gdańsk–Kraków–Gdańsk?
- b) W podróż z Gdańska do Krakowa i z powrotem wybierasz się z 3 dorosłymi osobami. Sprawdź ceny biletów kolejowych i ustal, co jest bardziej opłacalne: podróż autem czy przejazd pociągiem w wagonach klasy 2.



Sprawdź, co umiesz!

1. Ile reszty otrzymasz, jeśli zapłacisz banknotem 200-złotowym za 30 dag sera, 100 g szynki oraz 10 bułek?



38,50 zł/kg



44,20 zł/kg



1,15 zł/szt.

2. Motocykl zużywa 5 l benzyny na 100 km. Litra benzyny kosztuje 6,40 zł. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Koszt zatankowania do pełna pustego 15-litrowego baku motocykla wynosi więcej niż 100 zł.	P	F
Aby przejechać motocyklem 150 km, należy zatankować za co najmniej 48 zł.	P	F

3. Pani Gosia kupiła 65 kg piasku kinetycznego, który zamierza sprzedawać w porcjach o masie 2,5 kg. Ustaliła, że cena jednostkowa oferowanego przez nią piasku wyniesie 16,80 zł/kg.

- a) Ile pojemników powinna przygotować, aby rozsypać cały piasek?
- b) Ile będzie kosztował pojemnik piasku?

PODSUMOWANIE DZIAŁU VII

W świecie ułamków dziesiętnych

Powtórz wiadomości

Ułamki zwykłe a postać dziesiętna

$$\frac{1}{10} = 0,1 \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,2 \quad 2\frac{1}{2} = 2\frac{5}{10} = 2,5 \quad \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75 \quad \frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0,375$$

Zamiana jednostek

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

$$1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$$

$$1 \text{ dag} = 10 \text{ g}$$

$$1 \text{ g} = 0,1 \text{ dag}$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$$

$$1 \text{ kg} = 100 \text{ dag}$$

$$1 \text{ dag} = 0,01 \text{ kg}$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$$

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg} = 0,001 \text{ t}$$

$$1 \text{ zł} = 100 \text{ gr}$$

$$1 \text{ gr} = 0,01 \text{ zł}$$

Dodawanie

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 3 \ 6,2 \ 4 \ 6 \\ + \quad 8,1 \ 7 \ 0 \\ \hline 4 \ 4,4 \ 1 \ 6 \end{array}$$

Dopisz zero.
Przecinek stawiaj pod przecinkiem.

Odejmowanie

$$\begin{array}{r} 6 \ 9 \ 14 \ 10 \\ 3 \ 7,0 \ 5 \ 0 \\ - \quad 4,3 \ 7 \ 1 \\ \hline 3 \ 2,6 \ 7 \ 9 \end{array}$$

Dopisz zero.
Przecinek stawiaj pod przecinkiem.

Mnożenie i dzielenie przez 10, 100, 1000, ...

$$43,513 \cdot 100 = 4351,3$$

Przesuwaj **przecinek w prawo** o odpowiednią liczbę zer.

$$0,52 : 10 = 0,052$$

Przesuwaj **przecinek w lewo** o odpowiednią liczbę zer.

Mnożenie pisemne

$$\begin{array}{r} 1 \ 2,4 \ 5 \\ \cdot \quad 3,2 \\ \hline 2 \ 4 \ 9 \ 0 \\ + \ 3 \ 7 \ 3 \ 5 \ 0 \\ \hline 3 \ 9,8 \ 4 \ 0 \end{array}$$

2 cyfry po przecinku
1 cyfra po przecinku
3 cyfry po przecinku

W wyniku oddziel przecinkiem tyle cyfr, ile jest ich łącznie w obu czynnikach.

Dzielenie pisemne

$$45,75 : 1,5 = 457,5 : 15 = ?$$

$$\begin{array}{r} 3 \ 0,5 \\ 4 \ 5 \ 7,5 : 15 \\ - \ 4 \ 5 \quad \quad \quad \\ \hline 7 \quad \quad \quad \\ - \ 0 \quad \quad \quad \\ \hline 7 \ 5 \quad \quad \quad \\ - \ 7 \ 5 \quad \quad \quad \\ \hline 0 \end{array}$$

Pomnóż dzielną i dzielnik przez potęgę liczby 10, tak aby dzielnik miał postać liczby naturalnej.

W wyniku przecinek postaw nad przecinkiem w dzielnej.

Poćwicz przed sprawdzianem

- Wskaż postać dziesiętną liczby $7\frac{15}{1000}$.
A. 7,3 **B.** 7,15 **C.** 7,015 **D.** 0,715
- Które liczby porównano poprawnie?
I. $18,9 < 18,89$ **II.** $407,99 > 47,11$ **III.** $97,08 < 97,9$ **IV.** $57,13 < 57,129$
A. I i II **B.** II i III **C.** II i IV **D.** I i III
- Wskaż działanie, którego wynik jest równy 0,18.
A. $0,12 + 0,6$ **B.** $0,9 + 0,9$ **C.** $0,2 - 0,02$ **D.** $2 - 0,2$
- Które obliczenia wykonano poprawnie?

A. $\begin{array}{r} 531,12 \\ 340,00 \\ + 13,08 \\ \hline 884,20 \end{array}$	B. $\begin{array}{r} 531,12 \\ 340 \\ + 13,08 \\ \hline 547,60 \end{array}$	C. $\begin{array}{r} 531,12 \\ 340,00 \\ + 13,08 \\ \hline 884,10 \end{array}$	D. $\begin{array}{r} 531,12 \\ 13,080 \\ + 34000 \\ \hline 1001,92 \end{array}$
--	---	--	---
- Które obliczenia wykonano błędnie?

A. $\begin{array}{r} 28,013 \\ - 19,535 \\ \hline 8,478 \end{array}$	B. $\begin{array}{r} 40,023 \\ - 5,817 \\ \hline 34,206 \end{array}$	C. $\begin{array}{r} 54,002 \\ - 38,798 \\ \hline 16,314 \end{array}$	D. $\begin{array}{r} 321,02 \\ - 51,73 \\ \hline 269,29 \end{array}$
--	--	---	--
- Wiedząc, że $325 \cdot 126 = 40\,950$, wskaż wynik działania $3,25 \cdot 1,26$.
A. 0,4095 **B.** 4,095 **C.** 4,950 **D.** 0,40950
- Zosia zamierza wykonać dzielenie $5,875 : 0,25$. Które działanie będzie miało taki sam wynik jak to wykonywane przez Zosię?
A. $587,5 : 25$ **B.** $5875 : 25$ **C.** $587,5 : 0,025$ **D.** $5,875 : 25$
- Maurycy ma 1,6 m wzrostu. Jego tata jest od niego o 22 cm wyższy. Ile wzrostu ma tata Maurycego?
A. 1,62 m **B.** 1,82 m **C.** 1,42 m **D.** 1,38 m
- Marek kupił laptop za 2703 zł i jego spłatę rozłożył na 6 równych rat. Wskaż wysokość jednej raty.
A. 4505 zł **B.** 455 zł **C.** 450,50 zł **D.** 450,55 zł



10. Oblicz.

- a)** $54 + 14,713$ **b)** $23 - 2,93$ **c)** $3,018 \cdot 73$ **d)** $8,687 : 14$
e) $38,125 + 0,39$ **f)** $5,0012 - 0,99$ **g)** $21,34 \cdot 3,2$ **h)** $31,206 : 0,15$

11. Oceń, czy podana równość jest prawdziwa (P), czy fałszywa (F).

$54 \text{ km } 35 \text{ m} = 54,35 \text{ km}$	P	F
$8,07 \text{ kg} = 8 \text{ kg } 70 \text{ g}$	P	F

$3,17 + 3,3 = 6,47$	P	F
$8,2 - 2,02 = 6$	P	F

12. Wybierz właściwe uzupełnienie zdań spośród **A** i **B** oraz **C** i **D**.

- I.** Michalina pokonała na rowerze 17,35 km, a na hulajnodze – 12 km 470 m. Łącznie pokonała
A. 29,82 km. **B.** 29,505 km.
- II.** Maraton to bieg na dystansie 42,195 km. Tomek przebiegł już 18 km 55 m, więc do ukończenia biegu pozostało mu
C. 23,645 km. **D.** 24,14 km.



13. Uporządkuj rosnąco: 13,05 g, 1,35 kg, 13,05 dag, 0,135 kg, 130,5 dag.

- 14.** Do sekretariatu zakupiono 1000 kopert A5, 100 kopert A3, 100 ołówków i 10 długopisów. Wystawiono fakturę na 1334,50 zł. Czy kwota do zapłaty została naliczona poprawnie?



Produkt	Cena
koperta A5 (10 szt.)	10,30 zł
koperta A3 (10 szt.)	18,50 zł
ołówek (10 szt.)	9,50 zł
długopis (10 szt.)	24,50 zł

- 15.** Podłoga w pokoju ma kształt prostokąta, którego jeden z boków ma długość 4,15 m, a drugi jest od niego o 0,7 m dłuższy. Jaka powierzchnię ma ten pokój?

- 16.** Dany jest prostokąt o polu równym $14,03 \text{ m}^2$. Jeden z boków tego prostokąta ma długość 3,05 m. Oblicz długość drugiego boku.

- 17.** Podczas trzydniowej wyprawy harcerze pokonali łącznie 60 km. Pierwszego dnia przeszli 15 000 m, a drugiego dnia 0,7 pozostałej trasy. Ile kilometrów harcerze pokonali trzeciego dnia?

- 18.** Krysia zrobiła zakupy w sklepie ze zdrową żywnością.

- a)** Ile zapłaciła łącznie za opakowanie płatków orkiszowych, 0,3 kg tofu, 20 dag szynki długodojrzewającej, 300 g pomidorków koktajlowych oraz 3 jogurty naturalne?
- b)** Ile reszty otrzymała, jeśli zapłaciła banknotem 200-złotowym?



66,90 zł/kg



12,20 zł/szt.



2,29 zł

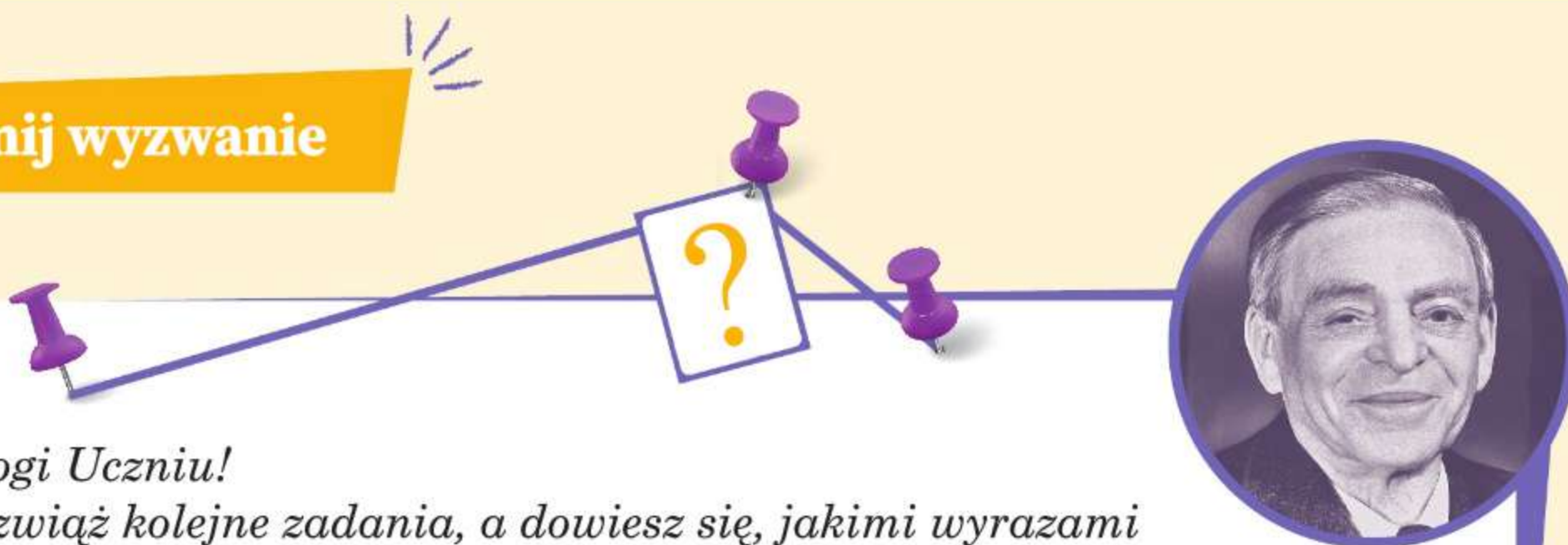


33,70 zł/kg



12,50 zł/kg

Podejmij wyzwanie



Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał sylwetkę światowej sławy polskiego biochemika. Powodzenia!

1 (1884–1967) przeszedł do historii jako twórca nauki o **2**. Po ukończeniu gimnazjum w Warszawie wyjechał do Szwajcarii, gdzie studiował biologię i chemię. Prace badawcze prowadził w Europie, m.in. w Paryżu, Berlinie i **3**, oraz w USA. W 1911 r., podczas badań nad przyczynami **4**, odkrył pierwszą witaminę. Śmiertelna choroba, powszechna na terenie Azji, szerzyła się głównie tam, gdzie podstawą diety był **5**. Naukowiec wyodrębnił z **6** substancję, która hamowała objawy choroby. Nazwał ją witaminą **7**. Badania polskiego biochemika odegrały kluczową rolę w rozwoju wielu gałęzi medycyny, w tym dietetyki, diabetologii i **8**.

1. Zosia zapisała w zeszycie ułamek dziesiętny, który jest mniejszy niż jeden i ma dokładnie trzy cyfry po przecinku. Cyfra części setnych jest najmniejszą liczbą pierwszą, cyfra części dziesiątych jest od niej trzy razy większa, a cyfra części tysięcznych jest o jeden mniejsza od cyfry części dziesiątych. Pola zapisała liczbę pięć razy mniejszą niż Zosia. Jaki ułamek zapisała Pola?

0,312	0,625	0,125
Henryk Arctowski	Bronisław Malinowski	Kazimierz Funk

2. Rzut dyskiem to jedna z konkurencji lekkoatletycznych polegająca na wyrzuceniu dysku na jak największą odległość. Wskaż największą odległość, która stanowi jednocześnie rekord świata w rzucie dyskiem mężczyzn, ustanowiony w 1986 r.

74,08 m	0,07 km	79,9 cm
witaminach	cukrach	białkach



3. Do samochodu dostawczego o masie 1,5 t załadowano 768,7 kg ziemniaków i o 198,5 kg więcej kapusty. Czy ten samochód może przejechać drogą, na której znajduje się znak zakazu wjazdu pojazdów o masie całkowitej powyżej 3,5 t?

Tak, do 3,5 t brakuje 1032,8 kg.	Tak, do 3,5 t brakuje 264,1 kg.	Nie, masa całkowita pojazdu wynosi więcej niż 3,5 t.
Pradze	Londynie	Oslo

4. Masa zwykłej koperty A4 wynosi 0,008 kg. Masa koperty A4 zabezpieczonej bąbelkami wynosi 2,1 dag. Co ma większą masę: 1000 kopert zwykłych czy 500 kopert z bąbelkami? O ile?

Koperty z bąbelkami, o 0,025 t.	Koperty z bąbelkami, o 0,0025 t.	Zwykłe koperty, o 2,5 kg.
piri-piri	beri-beri	amimii

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Za 1,3 kg sera, który kosztuje 29,8 zł/kg, trzeba zapłacić 38,74 zł.	P	F
Za 14,6 kg jabłek zapłacono 17,52 zł, więc 1 kg tych jabłek kosztuje 1,25 zł.	P	F
P, F	P, P	F, F
łuskany ryż	niełuskany ryż	słodzony ryż

6. Trójkąt równoramienny ma obwód równy 24,6 m. Długość podstawy stanowi 0,4 całego obwodu. Jaka długość ma ramię tego trójkąta?

9,84 m	12,1 m	7,38 m
bielma ryżu	liści ryżu	otrąb ryżowych

7. Oblicz jedną trzecią wartości wyrażenia $25,60 : 2 + 0,6 \cdot 16,90 + 0,22 \cdot 34$.

11,38 zł	10,14 zł	10,38 zł
A	B₁	D₃

8. Ile wynosi różnica ilorazów liczb 0,05616 i 0,013 oraz 0,0926 i 0,04?

2,005	20,05	40,885
onkologii	podologii	dermatologii

Superkoktajl

Składniki na 2 porcje:

- 0,4 kg bananów (240 g po obraniu ze skórki)
- 16 dag czarnych porzeczek
- 150 g jogurtu naturalnego
- 0,042 kg miodu (2 łyżki)



Przygotowanie:

Banany obierz ze skórki, pokrój na kilka części i połóż na wadze elektronicznej. Odważ porcję o odpowiedniej masie. Odważ odpowiednią porcję porzeczek, a następnie umyj je pod bieżącą wodą i oczyść z łodyg oraz listków. Porzeczkę i części banana włóż do wysokiego naczynia. Dodaj jogurt naturalny oraz miód. Zblenduj całość na gładką masę. Gotowy koktajl przelej do szklanek. Podawaj schłodzony.

1. Oblicz masę otrzymanego koktajlu w kilogramach.



7,00 zł/kg



1,89 zł/szt.

2. Oblicz łączny koszt składników potrzebnych do przygotowania tego koktajlu oraz koszt jednej porcji. Skorzystaj z informacji podanych obok.



14,00 zł/kg



4,83 zł/szt.



3. Referencyjne wartości spożycia (RWS) to ustalone dzienne zapotrzebowanie na minerały i witaminy. Wartości mogą różnić się w zależności od wieku, stanu zdrowia lub aktywności fizycznej. Na podstawie zamieszczonych poniżej danych ustal, ile witamin i minerałów dostarcza superkoktajl. Czy pokrywa w całości zapotrzebowanie na którąś witaminę bądź któryś minerał?

Przeciętne dzienne zapotrzebowanie dziecka w wieku 9–13 lat na wybrane witaminy i minerały

Witamina C	Witamina E	Potas	Wapń
45 mg	11 mg	2500 mg	1300 mg

Tabela witamin i składników mineralnych w wybranych produktach

W 100 g	Witamina C	Witamina E	Potas	Wapń
Banan bez skórki	9 mg	0,27 mg	395 mg	6 mg
Czarne porzeczki	183 mg	1 mg	336 mg	39 mg
Jogurt naturalny	0,9 mg	0 mg	200 mg	170 mg
Miód	0,5 mg	0 mg	52 mg	6 mg

DZIAŁ

VIII

W ŚWIECIE LICZB CAŁKOWITYCH

No proszę,
a u nas jest 7°C .
To aż o 10°C
więcej.

K



Dotarłem pod Śnieżkę,
najwyższy szczyt Karkonoszy.
Ma 1603 m n.p.m. Jest chłodno,
a na szczycie temperatura
wynosi -3°C .



A w nocy temperatura
spadła do -6°C . O ile
stopni było chłodniej
niż na szczycie Śnieżki?



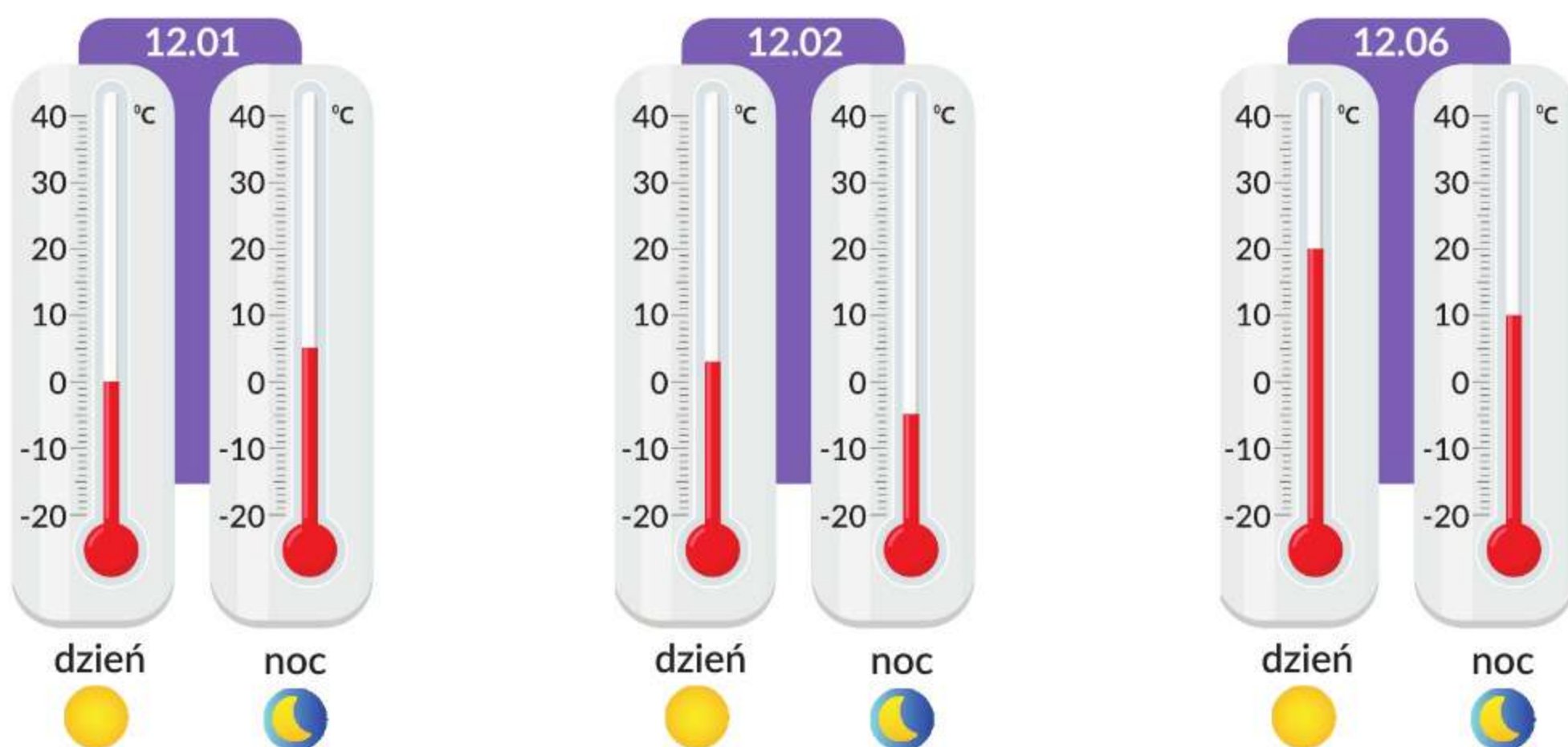
1. Liczby całkowite

- ▶ Jakie liczby nazywa się całkowitymi?
- ▶ Jakie liczby nazywa się przeciwnymi?



Odkrywaj!

1. Na geografii realizujemy międzyszkolny projekt na temat zmienności typów pogody w naszej miejscowości. W ramach projektu systematycznie mierzymy temperaturę powietrza o stałych godzinach w dzień i w nocy.



- a) Jakie temperatury zostały zanotowane w dzień, a jakie w nocy?
- b) W którym dniu temperatura w nocy była najwyższa, a w którym najniższa?
- c) W którym dniu temperatura w dzień lub w nocy spadła poniżej zera?

2. W tabeli przedstawiono średnie nocne temperatury powietrza w Ułamkowie w poszczególnych miesiącach. Uporządkuj miesiące pod względem wysokości temperatury – od najniższej do najwyższej.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
-9	-7	-4	1	5	8	10	9	6	2	-2	-8



Analizuj!

W zręcznościowej grze online *Wszystkie skarby Makemake* przyznawane są punkty dodatnie za każdy zebrany drogi kamień oraz punkty ujemne – jeśli gracz nie zdoła uciec przed tornado, ruchomymi piaskami lub gradem.

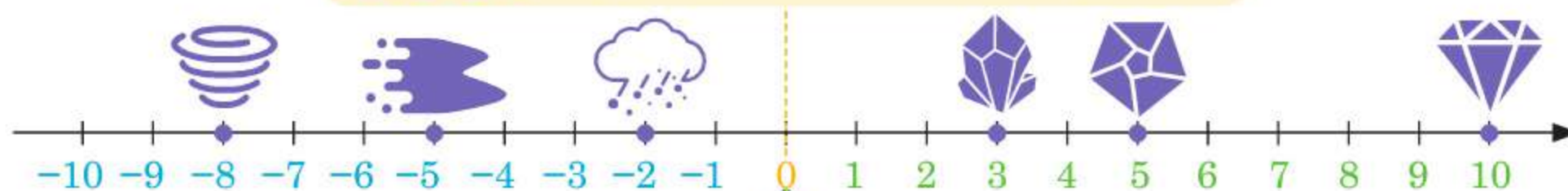
					
-8	-5	-2	+3	+5	+10

To są **punkty ujemne**.

To są **punkty dodatnie**.

Punkty o współrzędnych ujemnych znajdują się po lewej stronie zera na osi liczbowej, a punkty o współrzędnych dodatnich po jego prawej stronie.

Liczba 0 nie jest ani dodatnia, ani ujemna.



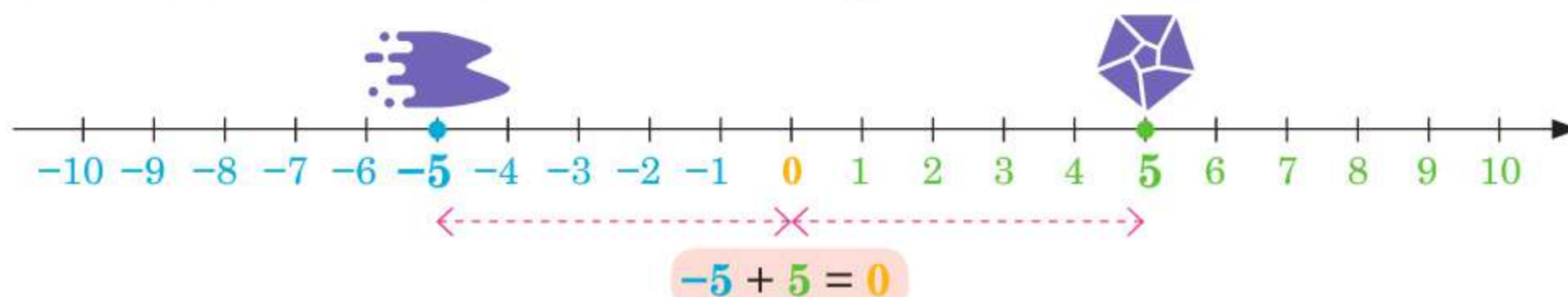
Liczby ujemne są mniejsze od 0 i znajdują się po jego lewej stronie.

Liczby dodatnie są większe od 0 i znajdują się po jego prawej stronie.



Im dalej **na lewo** od zera znajduje się liczba, tym jest ona **mniejsza**. Im dalej **na prawo** od zera, tym jest ona **większa**. Która liczba jest większa: -3 czy 5, -4 czy -5, -15 czy -10?

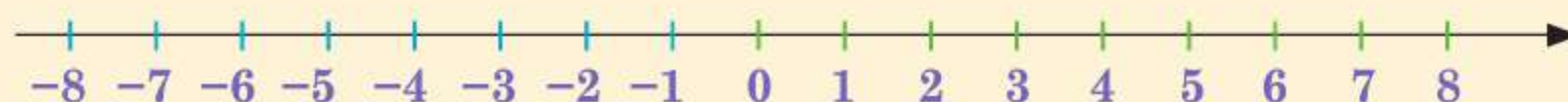
Liczby, które na osi liczbowej leżą w tej samej odległości od zera, to **liczby przeciwne**. Ich suma wynosi zero. Liczbą przeciwną do 0 jest 0.



Podaj liczbę przeciwną do liczby 15 oraz liczbę przeciwną do liczby -9.



Liczby naturalne oraz **liczby do nich przeciwne** tworzą zbiór liczb całkowitych.



Poćwicz!

16 • 23 • 0,7

1. Wskaż ramki, w których zapisano:

-6 • -9 • $-\frac{1}{2}$

$1\frac{3}{4}$ • 1,5 • 0

a) liczby naturalne,

b) liczby całkowite.

-5 • 0 • 4

11 • -11 • -19

0 • 8 • 41

2. Porównaj podane liczby. Użyj znaku < lub >.

a) -4 i 5

b) 0 i -7

c) -10 i -9

d) -144 i -145

e) -150 i -230

3. Spośród podanych poniżej liczb wskaż te, które są:

a) mniejsze niż 6;

b) większe niż -8;

c) większe niż -5, ale mniejsze od 10.

-10

0

20

-9

15

24

4

-6

-1

6

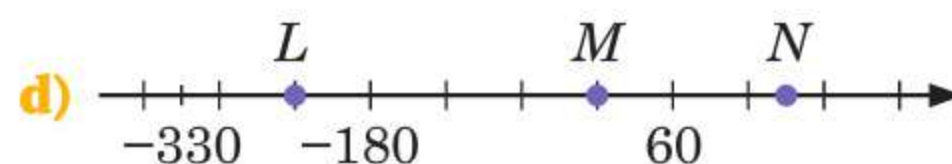
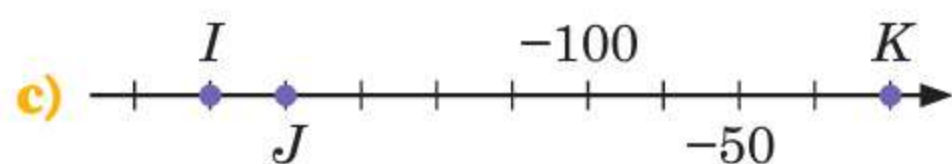
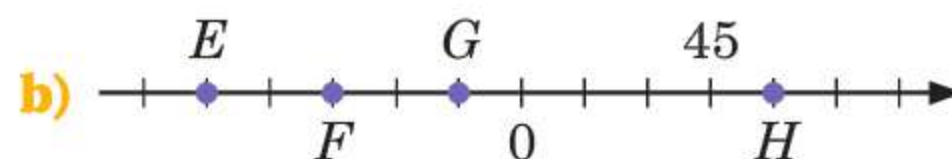
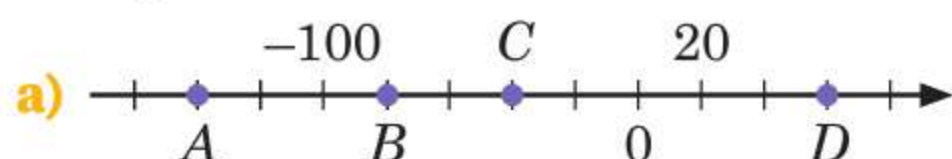
-7

8

-2

-8

4. Podaj liczby odpowiadające punktom zaznaczonym na osi liczbowej i liczby do nich przeciwne.



5. Narysuj oś liczbową, a następnie zaznacz na niej podane liczby i liczby do nich przeciwne.

a) 5, 3, -1, 0, -3, 7, -4

b) -150, 100, 0, -50, 200, -100

6. Wymień wszystkie liczby:

a) naturalne mniejsze od 6;

b) całkowite większe niż -3, ale mniejsze od 4;

c) całkowite ujemne większe od -7.

7. Przeanalizuj zamieszczoną obok mapę z prognozowaną temperaturą powietrza.

- W których miastach temperatura w dzień była niższa niż -4°C ?
- W których miastach temperatura w nocy była wyższa niż -4°C ?
- W którym mieście temperatura w nocy najbardziej różniła się od temperatury w dzień: w Opolu czy w Katowicach? O ile stopni?



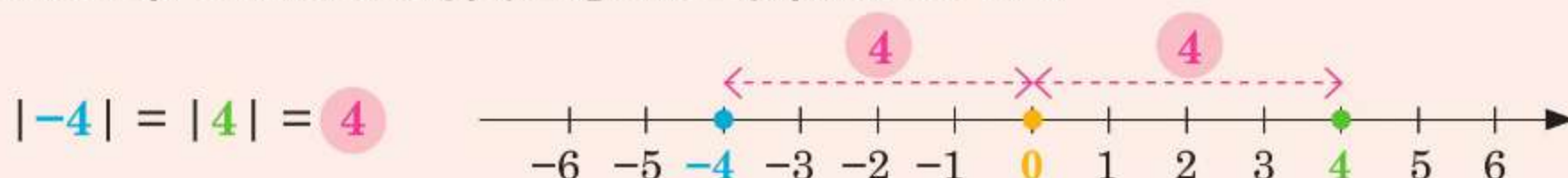
8. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Liczbą przeciwną do liczby 12 jest liczba 21.	P	F
Liczbą odwrotną do liczby -12 jest liczba $\frac{1}{12}$.	P	F
Jest dokładnie 5 liczb całkowitych, które są większe od -3 i mniejsze od 3.	P	F
Miedzy liczbami -8 i 8 znajduje się dokładnie 7 liczb naturalnych.	P	F

9. Zapoznaj się z informacją w ramce, a następnie podaj liczby, które można wstawić w miejsce ♣, aby równość była prawdziwa.

- $|\clubsuit| = 8$
- $|10| = \clubsuit$
- $|-14| = \clubsuit$
- $|\clubsuit| = 0$
- $-|5| = \clubsuit$

Wartość bezwzględna liczby a to odległość tej liczby od 0 na osi liczbowej. Oznacza się ją za pomocą symbolu $|a|$.



Sprawdź, co umiesz!

1. Uporządkuj podane liczby w kolejności rosnącej.

$-23 \cdot -32 \cdot 20 \cdot 23$
 $12 \cdot -21 \cdot -12$

2. Wskaż liczbę przeciwną do liczby -4 .

A. $-\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{4}$

C. 4

D. 16

3. Zapisz wszystkie liczby całkowite, które są większe od -7 , ale mniejsze od 5, a następnie podkreśl różnymi kolorami liczby: dodatnie, ujemne, naturalne.

2. Dodawanie liczb całkowitych

- ▶ Jak dodawać liczby całkowite o jednakowych znakach?
- ▶ Jak dodawać liczby całkowite o różnych znakach?



Odkrywaj!

1. Galeria handlowa ma 12 poziomów. Na parterze **0** i sześciu piętrach powyżej znajdują się sklepy, pięć pięter podziemnych zajmuje parking. Wykorzystaj do obliczeń rysunek.

- a) Pan Piotr zaparkował na piętrze **-4**, następnie wsiadł do windy i pojechał cztery poziomy w górę. Na którym piętrze wysiadł?
- b) Pan Łukasz zaparkował na piętrze **-5**, wsiadł do windy i pojechał sześć poziomów w górę. Na którym piętrze wysiadł pan Łukasz?
- c) Pani Urszula zaparkowała samochód na poziomie **-3**. Ile poziomów w górę musi pojechać, aby znaleźć się na parterze?
- d) Po zaparkowaniu samochodu pani Maria wsiadła do windy, pojechała siedem poziomów w górę i wysiadła na piętrze **5**. Na którym piętrze zaparkowała pani Maria?



2. W pewnej grze **-** oznacza odjęcie 1 punktu, a **+** oznacza dodanie 1 punktu. Ile punktów znajduje się na koncie gracza?

a) $+ -$

c) $+ + + - -$

e) $- - + + + +$

g) $- - - + +$

b) $+ + - -$

d) $+ + - - - -$

f) $- - - + + +$

h) $- - - - +$



Analizuj!



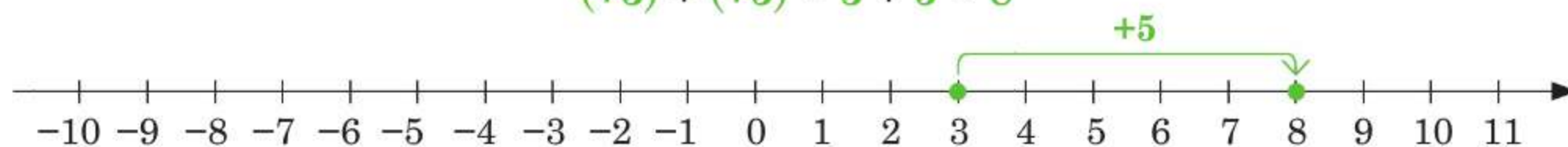
Jaką liczbę punktów będzie miał na koncie gracz, który rozpoczął grę *Wszystkie skarby Makemake* z podanym stanem konta?

PUNKTACJA POZIOM 1

					
-8	-5	-2	+3	+5	+10

Stan konta gracza A: . Gracz zebrał: .

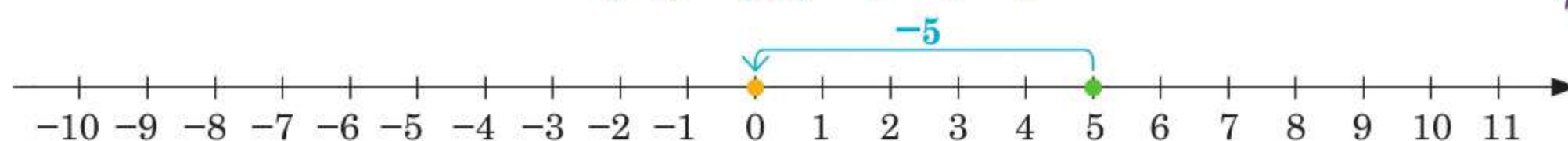
$$(+3) + (+5) = 3 + 5 = 8$$



Gracz A będzie miał na koncie 8 punktów.

Stan konta gracza B: . Gracz nie uciekł przed .

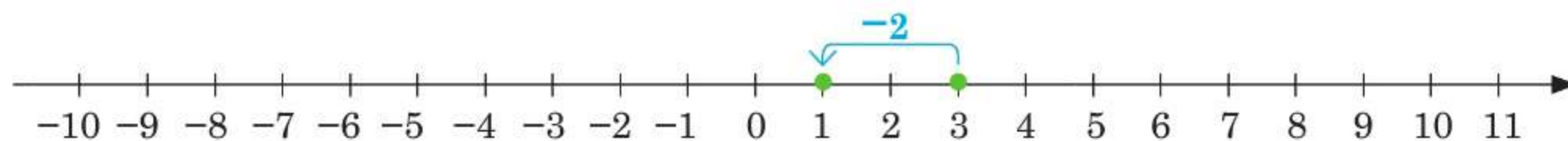
$$(+5) + (-5) = 5 - 5 = 0$$



Gracz B będzie miał na koncie 0 punktów.

Stan konta gracza C: . Gracz nie uciekł przed .

$$(+3) + (-2) = 3 - 2 = 1$$



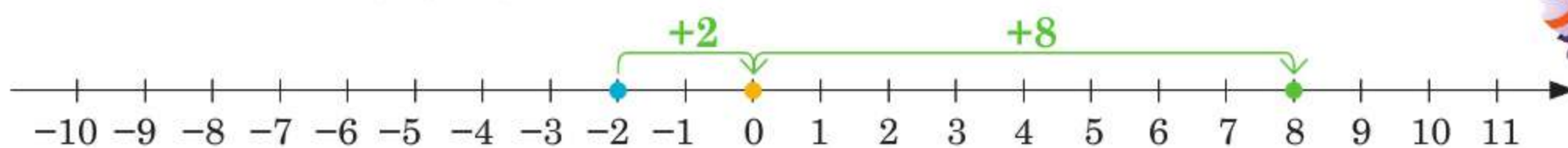
Gracz C będzie miał na koncie 1 punkt.





Stan konta gracza D: ☁️. Gracz zebrał 💎.

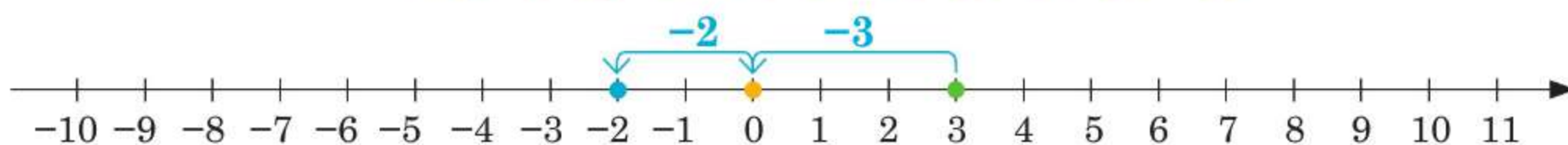
$$(-2) + (+10) = -2 + 10 = -2 + 2 + 8 = 0 + 8 = 8$$



Gracz D będzie miał na koncie 8 punktów.

Stan konta gracza E: 🎮. Gracz nie uciekł przed 🐙.

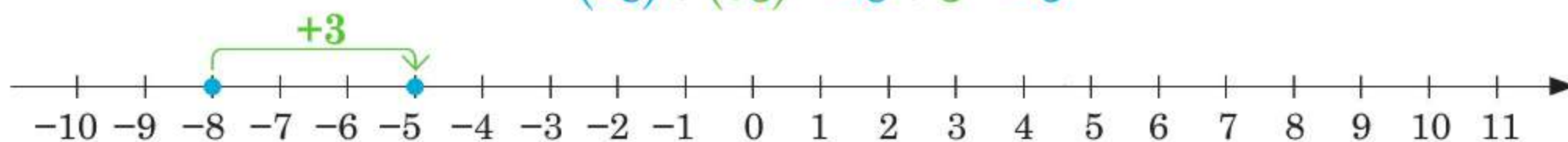
$$(+3) + (-5) = 3 - 5 = 3 - 3 - 2 = 0 - 2 = -2$$



Gracz E będzie miał na koncie -2 punkty.

Stan konta gracza F: 🌀. Gracz zebrał 🎮.

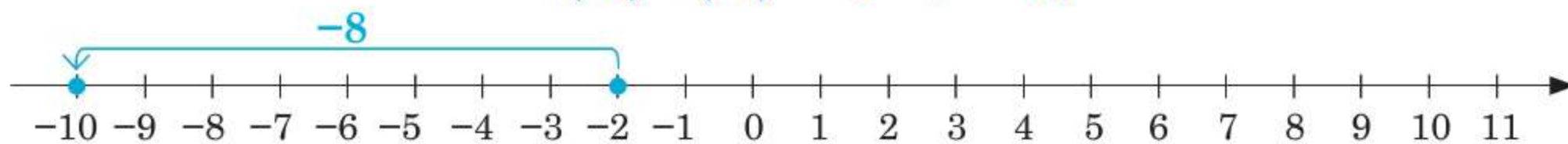
$$(-8) + (+3) = -8 + 3 = -5$$



Gracz F będzie miał na koncie -5 punktów.

Stan konta gracza G: ☁️. Gracz nie uciekł przed 🌀.

$$(-2) + (-8) = -2 - 8 = -10$$



Gracz G będzie miał na koncie -10 punktów.



Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który zbierze 🎮 i nie ucieknie przed 🌀? A gracz, który dwa razy nie ucieknie przed 🌀?



Jaki może być znak sumy liczb całkowitych?

$$+ + + = + \quad \text{-----} \rightarrow (+7) + (+3) = +10$$

$$- + - = - \quad \text{-----} \rightarrow (-7) + (-3) = -10$$

$$+ + - = 0 \quad \text{-----} \rightarrow (+7) + (-7) = 0$$

$$+ + - = + \quad \text{-----} \rightarrow (+7) + (-3) = +4$$

$$+ + - = - \quad \text{-----} \rightarrow (+3) + (-7) = -4$$



Poćwicz!

1. Ustal znak podanej sumy.

a) $(-7) + 8$

b) $(-9) + (-2)$

c) $81 + (-9)$

d) $0 + (-52)$

e) $-678 + 677$

f) $-1000 + 1001$

2. Ustal znak podanej sumy, a następnie oblicz.

a) $(+4) + (+1)$

$(+8) + (+5)$

$6 + 2$

$13 + 9$

b) $(-4) + (-1)$

$(-8) + (-5)$

$-6 + (-2)$

$-13 + (-9)$

c) $(+4) + (-1)$

$(+8) + (-5)$

$6 + (-2)$

$13 + (-9)$

d) $(+1) + (-4)$

$(+5) + (-8)$

$2 + (-6)$

$9 + (-13)$

3. Ustal znak wyniku, a następnie oblicz.

a) $(-3) + 5$

b) $16 + (-10)$

c) $-13 + 23$

d) $(-15) + 15$

e) $(-7) + (-23)$

f) $(-15) + (-12)$

g) $(-30) + 16$

h) $25 + (-40)$

i) $-70 + 70$

j) $23 + (-18)$

k) $-24 + 15$

l) $-100 + 26$

4. Ela i Bruno grali w grę planszową *Wyścig*, w której gracz startuje z punktu 0 i przesuwa się o tyle pól, ile wynosi suma liczb wyrzuconych na dwóch kostkach. Za pomocą poniższych obliczeń można wyznaczyć pola, na których znajdują się pionki Brunona i Eli po IV rundzie. Na czym polega każda z zaprezentowanych metod? Dokończ obliczenia w zeszycie.



Runda	Bruno	Ela
I	2 -3	2 -3
II	4 -6	5 -1
III	2 -5	4 -5
IV	1 -6	2 -4

Bruno $2 + (-3) + 4 + (-6) + 2 + (-5) + 1 + (-6) =$

Ela $2 + (-3) + 5 + (-1) + 4 + (-5) + 2 + (-4) =$

5. Oblicz.

a) $(-15) + 7 + (-5) + 3$

b) $34 + (-32) + (-18) + 16$

c) $-13 + (-47) + 19 + (-19)$

d) $22 + (-7) + 14 + (-32) + 7$

e) $(-7) + 4 + (-3) + 13 + (-10)$

f) $-16 + 9 + (-7) + 16 + 5 + (-2)$

6. Bruno i Kuba wzięli udział w matematycznym turnieju rzutek. Oto wyniki I rundy.

a) Ile punktów zdobyli w konkursie drużynowym?

b) W drugiej rundzie Bruno zdobył -2 punkty. W które pola mógł trafić?



7. Pola zapisała w zeszycie wszystkie liczby całkowite mniejsze od 4, ale większe od -4 , i je dodała. Ela zapisała wszystkie liczby całkowite większe od -25 , ale mniejsze od 25, i również je dodała. Która z dziewcząt otrzymała większą sumę?

8. Pani Ula ma konto debetowe, a więc takie, które może być obciążone ponad stan dostępnych środków.

a) Czy stan konta po wszystkich operacjach jest mniejszy, czy większy niż 1000 zł? O ile?

b) Pani Ula chce kupić pralkę za 1500 zł. Oblicz stan konta po dokonaniu tego zakupu.

Stan konta	200
Wynagrodzenie za maj	+3500
Czynsz	-800
Premia	+150
Zakupy	-800
Opłaty	-700
Hotel	-600



9. Jaka największą liczbę całkowitą należy wpisać w miejsce ♣, aby nierówność była prawdziwa?

a) $(-4) + 3 > 6 + (-5) + \clubsuit$

b) $(-8) + 5 + (-14) > (-6) + 28 + \clubsuit + (-8)$

Sprawdź, co umiesz!

1. Ustal znak wyniku, a następnie oblicz.

a) $-4 + 7$

b) $19 + (-39)$

c) $(-14) + (-16)$

d) $50 + (-33)$

e) $(-18) + 13$

2. Rano termometr wskazywał -9°C . Po południu temperatura wzrosła o 12°C , natomiast w nocy spadła o 5°C . Jaka temperaturę wskazywał ten termometr po południu i w nocy?

3. Podaj sumę ośmiu kolejnych liczb całkowitych, z których najmniejszą jest -5 .

3. Odejmowanie liczb całkowitych

- ▶ Jak odejmować dwie liczby całkowite dodatnie?
- ▶ Jak odejmować dwie liczby całkowite ujemne?
- ▶ Jak odejmować dwie liczby całkowite o różnych znakach?



Odkrywaj!

1. Przygotuj guziki lub żetony w dwóch kolorach i przeprowadź eksperyment.

to (+1) punkt to (-1) punkt

Masz do dyspozycji dowolną liczbę zestawów pomocniczych .

Twój zestaw guzików:

- a) Jaka jest wartość przedstawionego zestawu?
- b) Jaka będzie wartość zestawu guzików, jeśli zabierzesz 2 guziki fioletowe?
-
- c) Jaka będzie wartość zestawu guzików, jeśli zabierzesz 2 guziki niebieskie?
-
- d) Jaka będzie wartość zestawu guzików, jeśli zabierzesz 5 guzików fioletowych?
-
- e) Jaka będzie wartość zestawu guzików, jeśli zabierzesz 7 guzików fioletowych?
-
- f) Jaka będzie wartość zestawu guzików, jeśli zabierzesz 5 guzików niebieskich?
-
- g) Jaka będzie wartość zestawu guzików, jeśli zabierzesz 7 guzików niebieskich?



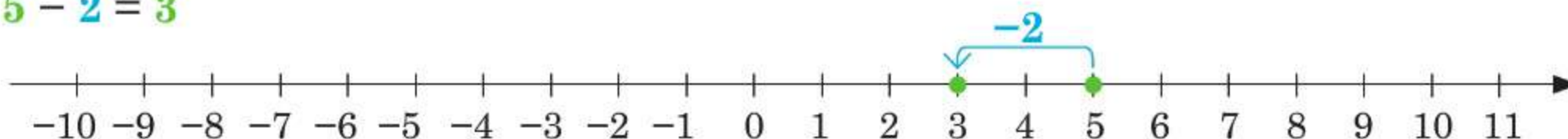
Analizuj!

Na piątym poziomie gry *Wszystkie skarby Makemake* gracz musi pokonać niektóre przeszkody w ustalonym czasie. Jeśli przekroczy limit czasu, traci 2 punkty. Może też natknąć się na ufoludka. Ufoludek zabiera graczowi -2 punkty, jeśli ten ma na koncie ujemną liczbę punktów.



Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który ma aktualnie 5 punktów i przekroczy limit czasu przyznany na przeskoczenie muru?

$$5 - 2 = 3$$

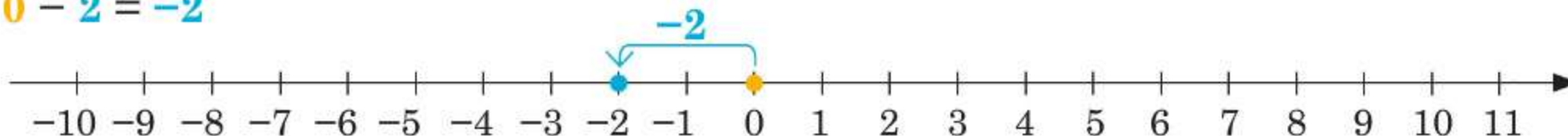


Gracz będzie miał na koncie 3 punkty.



Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który ma aktualnie 0 punktów i przekroczy limit czasu przyznany na pokonanie rzeki lawy?

$$0 - 2 = -2$$

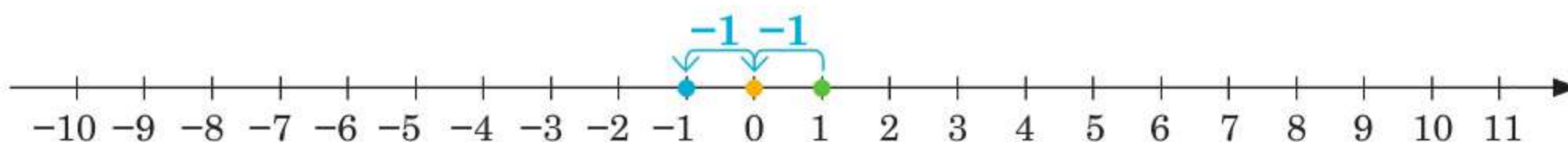


Gracz będzie miał na koncie -2 punkty.



Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który ma aktualnie 1 punkt i przekroczy limit czasu przyznany na przeskoczenie przepaści?

$$1 - 2 = 1 - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$$

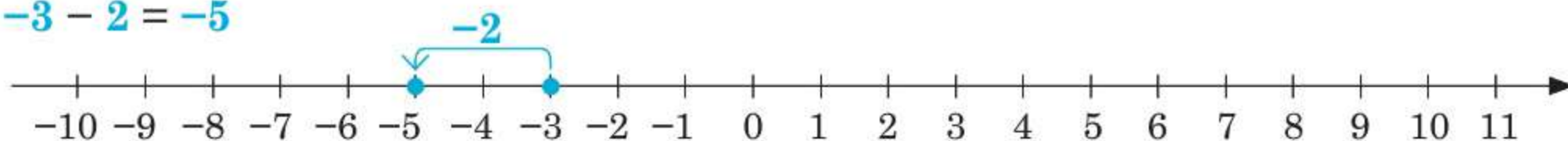


Gracz będzie miał na koncie -1 punkt.



Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który ma aktualnie -3 punkty i przekroczy limit czasu przyznany na pokonanie gąszczu kaktusów?

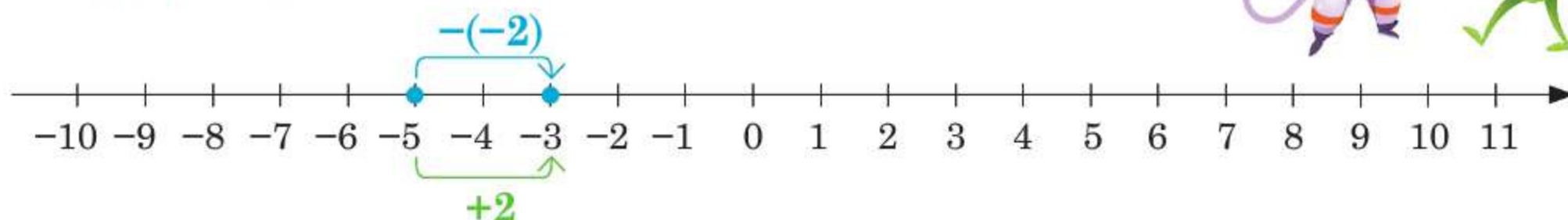
$$-3 - 2 = -5$$



Gracz będzie miał na koncie -5 punktów.

Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który ma aktualnie -5 punktów i spotka ufoludka?

$$-5 - (-2) = -5 + 2 = -3$$



Gracz będzie miał na koncie -3 punkty.



Odejmowanie liczby można zastąpić **dodawaniem liczby do niej przeciwnej**.

$$3 - 5 = 3 + (-5) = -2$$

$$3 - (-5) = 3 + 5 = 8$$

$$-3 - 5 = -3 + (-5) = -8$$

$$-3 - (-5) = -3 + 5 = 2$$

Jak obliczyć wartość wyrażenia $-2 + 3 - 8$?

Sposób 1

$$-2 + 3 - 8 = 1 - 8 = -7$$

$$-2 + 2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$1 - 1 - 7 = 0 - 7 = -7$$

Sposób 2

$$-2 + 3 - 8 = 1 + (-8) = -7$$

$$-2 + 2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$1 + (-1) + (-7) = 0 + (-7) = -7$$



Oblicz wartość wyrażenia $-7 - 7 - (-7)$.



Jaki może być znak różnicy liczb całkowitych?



$$\begin{array}{lcl}
 + - - = + & \longrightarrow & (+7) - (-3) = +10 \\
 - - + = - & \longrightarrow & (-7) - (+3) = -10 \\
 + - + = + & \longrightarrow & (+7) - (+3) = +4 \\
 + - + = - & \longrightarrow & (+3) - (+7) = -4 \\
 - - - = + & \longrightarrow & (-3) - (-7) = +4 \\
 - - - = - & \longrightarrow & (-7) - (-3) = -4
 \end{array}$$

Poćwicz!

1. Ustal znak wyniku, a następnie oblicz.

a) $(+5) - (-1)$

$(-5) - (+1)$

$(+5) - (+1)$

$(+1) - (+5)$

$(-1) - (-5)$

$(-5) - (-1)$

b) $(+3) - (-8)$

$(-3) - (+8)$

$(+8) - (+3)$

$(+3) - (+8)$

$(-3) - (-8)$

$(-8) - (-3)$

c) $6 - (-2)$

$-6 - 2$

$6 - 2$

$2 - 6$

$-2 - (-6)$

$-6 - (-2)$

d) $13 - (-4)$

$-13 - 4$

$13 - 4$

$4 - 13$

$-4 - (-13)$

$-13 - (-4)$

2. Wskaż działanie, którego wynik jest największy.

A. $15 - 20$

B. $(-15) - 20$

C. $15 - (-20)$

D. $-15 - (-20)$

3. Oblicz.

a) $8 - 9$

b) $9 - 17$

c) $15 - 21$

d) $(-20) - 9$

e) $(-30) - 50$

f) $(-56) - 14$

g) $0 - (-54)$

h) $5 - (-15)$

i) $2 - (-41)$

j) $-2 - (-12)$

k) $-19 - (-7)$

l) $-55 - (-22)$

4. Zapisz za pomocą jednego wyrażenia i oblicz.

a) Pewna liczba jest o 12 mniejsza od liczby 8. Co to za liczba?

b) Pewna liczba jest o 20 mniejsza od liczby -30 . Co to za liczba?

c) Pani Joanna ma na koncie debetowym 50 zł. Zrobiła zakupy za 65 zł. Jaki jest teraz stan konta pani Joanny?

d) Pan Tomasz ma na koncie 100 zł debetu. Jaki będzie stan konta pana Tomasza, jeśli wykona z niego przelew na kwotę 85 zł?

5. Oblicz.

- a) $13 - 18 - (-6)$ b) $5 + (-4) - 3 + 7$
c) $(-7) - (-3) + (-1) + 4$ d) $(-13) - 12 + 5 - (-2)$
e) $9 - (-4) - 5 + 20$ f) $43 + (-12) - (-13)$
g) $-27 - (-25) + (-14)$ h) $(-83) - 14 - (-14) + 83$
i) $47 - 53 - (-24) + (-12)$ j) $53 + (-14) + (-27) + 100$

6. Dla każdej liczby z ramki podaj liczbę o 25 od niej mniejszą.

50 • 25 • 15 • 5 • 0 • (-5) • -15 • -25 • -50

7. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Suma liczb -13 i -18 jest o 26 mniejsza od ich różnicy.	P	F
Wyrażenia $24 + (-18) - (-14)$ oraz $24 - 18 + 14$ mają taką samą wartość.	P	F

8. Jaka liczbę należy wstawić w miejsce ♦, żeby równość była prawdziwa?

- a) $18 - ♦ = -30$ b) $-15 - ♦ = -50$ c) $♦ - 14 = -8$ d) $♦ - (-46) = 50$

9. Zapisz liczbę 1000 oraz liczbę będącą rokiem twojego urodzenia w postaci:

- a) sumy liczb o przeciwnych znakach, b) różnicy liczb ujemnych,
c) różnicy liczb o przeciwnych znakach, d) sumy liczb ujemnych.

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

- a) $(-4) - 15$ b) $7 - (-14)$ c) $-20 - (-17)$
d) $100 - 300$ e) $0 - (-19) + (-19)$ f) $14 + (-12) - (-25)$

2. Pani Jagoda miała na koncie debetowym 150 zł. Kupiła łyżwy za 200 zł. Jaki jest teraz stan konta pani Jagody?

3. Michał odczytywał wskazania termometru o godzinie 7.00 przez pięć kolejnych dni lutego. W poniedziałek temperatura wyniosła -8°C , we wtorek była o 4°C niższa, w środę o 2°C wyższa niż we wtorek, w czwartek o 8°C wyższa niż w poniedziałek, a w piątek o 7°C niższa niż w czwartek. Jaka temperaturę wskazywał termometr w poszczególne dni tygodnia?

4. Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych

- ▶ Jak mnożyć i dzielić liczby całkowite o takich samych znakach?
- ▶ Jak mnożyć i dzielić liczby całkowite o różnych znakach?



Analizuj!

Na końcu przedostatniego poziomu gry *Wszystkie skarby Makemake* gracz wybiera jeden z czterech portali do ostatniego poziomu. Zgromadzone przez niego punkty są wtedy mnożone przez 2 lub -2 albo dzielone przez 2 lub -2 .

					
	$\cdot 2$	$\cdot (-2)$	$: 2$	$: (-2)$	

Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który na przedostatnim poziomie zgromadził 10 punktów i wybierze ?

$$10 \cdot 2 = 10 + 10 = 20$$

Gracz będzie miał na koncie 20 punktów.

Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który na przedostatnim poziomie zgromadził 5 punktów i wybierze ?

$$5 \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -10$$

Gracz będzie miał na koncie -10 punktów.

Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który na przedostatnim poziomie zgromadził -12 punktów i wybierze ?

$$-12 \cdot 2 = (-12) + (-12) = -24$$

Gracz będzie miał na koncie -24 punkty.



Zobacz!

$(-9) \cdot (+1) = -9$	$(+9) \cdot (-1) = -9$	$(-9) \cdot (-1) = 9$
$(-9) \cdot (+2) = -18$	$(+9) \cdot (-2) = -18$	$(-9) \cdot (-2) = 18$

Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który na przedostatnim poziomie zgromadził -11 punktów i wybierze ?

$$(-11) \cdot (-2) = 22$$

Gracz będzie miał na koncie 22 punkty.

Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który na przedostatnim poziomie zgromadził 20 punktów i wybierze ?

$$20 : 2 = 10$$

Gracz będzie miał na koncie 10 punktów.

Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który na przedostatnim poziomie zgromadził 30 punktów i wybierze ?

$$30 : (-2) = -15$$

Gracz będzie miał na koncie -15 punktów.

Bo $(-15) \cdot (-2) = 30$.



Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który na przedostatnim poziomie zgromadził -14 punktów i wybierze ?

$$-14 : 2 = -7$$

Gracz będzie miał na koncie -7 punktów.

Bo $(-7) \cdot 2 = -14$.



Ile punktów będzie miał na koncie gracz, który na przedostatnim poziomie zgromadził -52 punkty i wybierze ?

$$-52 : (-2) = 26$$

Gracz będzie miał na koncie 26 punktów.

Bo $26 \cdot (-2) = -52$.



Jeśli będę mieć na koncie -100 punktów i wybiorę , to ile będę mieć na koniec rozgrywki? A jeśli wybiorę ?

Gdy mnożysz albo dzielisz liczby całkowite, najpierw ustal znak wyniku, a potem pomnóż lub podziel liczby tak, jakby były to liczby naturalne.



Znak liczby a	Znak liczby b	Znak iloczynu $a \cdot b$	Znak ilorazu $a : b$
+	+	+	+
+	-	-	-
-	+	-	-
-	-	+	+

Poćwicz!

1. Nie wykonując obliczeń, ustal, czy wynik działania jest liczbą dodatnią, ujemną, czy równą 0.

a) $(-6) \cdot (-23) \cdot (-3) \cdot (-2)$

b) $(-12) : (-3) \cdot (-13) \cdot 8$

c) $(-7) \cdot (-3) : 21 \cdot (-12) \cdot (-4)$

d) $(-3) : (-3) \cdot (-1) \cdot 100 \cdot (-2) \cdot 0$

Jeśli liczba znaków $-$ w iloczynie jest parzysta, to wynik będzie dodatni, jeśli jest nieparzysta, to wynik będzie ujemny.

$$\underbrace{(-1) \cdot (-2)}_{+} \cdot \underbrace{(-3) \cdot (-4)}_{+} > 0$$

$$\underbrace{(-1) \cdot (-2)}_{+} \cdot (-3) < 0$$

Jeśli liczba znaków $-$ w ilorazie jest parzysta, to wynik będzie dodatni, jeśli jest nieparzysta, to wynik będzie ujemny.

$$\underbrace{(-24) : (-2)}_{+} : \underbrace{(-2)}_{-} : \underbrace{(-2)}_{-} > 0$$

$$\underbrace{(-24) : (-2)}_{+} : \underbrace{(-2)}_{-} < 0$$

2. Ustal znak wyniku działań, a następnie oblicz w pamięci.

a) $5 \cdot (-7)$

b) $(-8) \cdot (-6)$

c) $(-4) \cdot 9$

d) $(-10) \cdot (-6)$

e) $12 \cdot (-4)$

f) $(-3) \cdot (-16)$

g) $36 : (-9)$

h) $(-56) : 7$

i) $(-87) : (-3)$

j) $(-72) : (-3)$

k) $(-72) : 6$

l) $0 : (-4)$

3. Zastąp znak $\spadesuit$ odpowiednią liczbą całkowitą.

a) $8 \cdot \spadesuit = -56$

b) $\spadesuit \cdot (-6) = 48$

c) $(-50) \cdot \spadesuit = -100$

d) $\spadesuit : (-9) = -9$

e) $(\spadesuit)^3 = -8$

f) $(-49) : (-1) \cdot \spadesuit = -49$

g) $(-50)^2 \cdot (-1) = \spadesuit$

h) $(-49) : (-1)^7 + (-3)^3 : (-1) = \spadesuit$

4. W konkursie matematycznym składającym się z 20 zadań za każde poprawnie rozwiązane zadanie uczeń otrzymuje +2 punkty, za brak rozwiązania -1 punkt, a za rozwiązanie błędne -3 punkty.

- a) Michał rozwiązał sześć zadań błędnie, trzy opuścił, a pozostałe rozwiązał poprawnie. Ile zdobył punktów?
- b) Kasia rozwiązała osiem zadań, z czego sześć poprawnie. Ile zdobyła punktów?

5. Porównaj:

- a)** iloraz liczb (-100) i (-2) oraz iloczyn liczb 5 i 10 ,
b) iloczyn liczb (-2) i 7 oraz iloraz liczb 21 i -3 .

6. Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

- a)** $(-20) : (-4) \cdot (-2)$
b) $(-7) \cdot (-2) + 16 : (-2)$
c) $[(-24) : (-6) + (-2) \cdot (-2)] \cdot (-5)$
d) $72 : (-8) - (-3)^3 \cdot (-2)$
e) $(-5)^2 - (-7) \cdot (-2) + 16 : (-2)$
f) $(-10)^2 - [15 \cdot (-3) + (-13) \cdot 3] \cdot 0$

7. Sprawdź, czy podany kwadrat jest magiczny. Jeśli tak, to podaj jego sumę magiczną lub iloczyn magiczny.

- a)

-1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	-1

b)

2	-5	0
-3	-1	1
-2	3	-4

c)

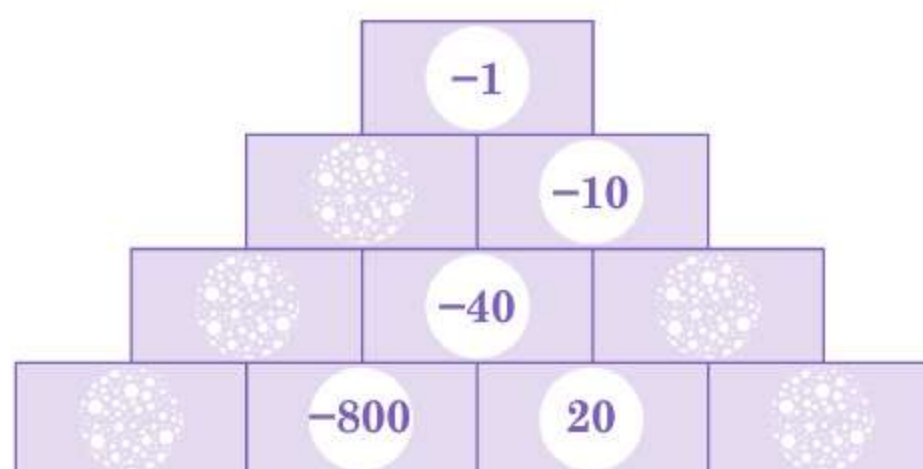
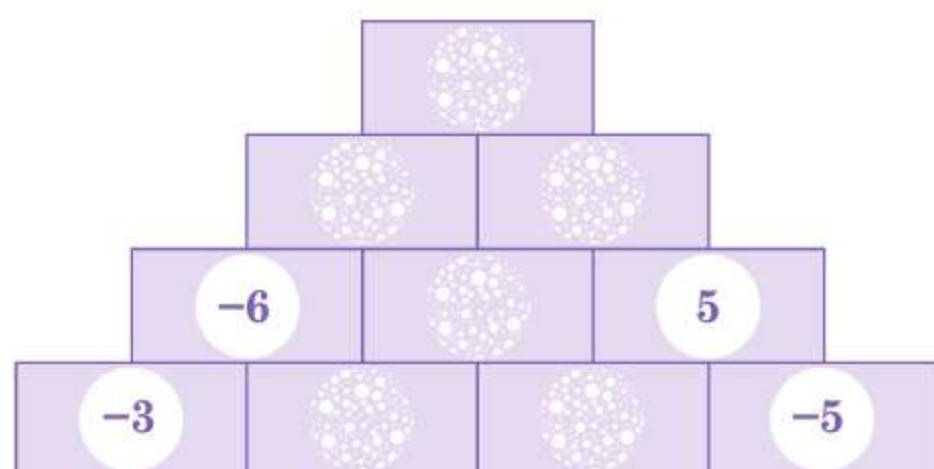
-18	-1	12
-4	6	-9
3	-36	-2

Kwadrat ma sumę magiczną, gdy sumy liczb w wierszach, kolumnach i na przekątnych są identyczne. Kwadrat ma iloczyn magiczny, gdy identyczne są iloczyny liczb w wierszach, kolumnach i na przekątnych.



8. Przerysuj piramidę do zeszytu i uzupełnij liczby zgodnie z podaną zasadą.

- a) Każda z liczb jest iloczynem liczb znajdujących się bezpośrednio pod nią.





9. Zosia przez siedem kolejnych dni mierzyła temperaturę powietrza o stałej porze. Wyniki przedstawiła w tabeli.

pon.	wt.	śr.	czw.	pt.	sob.	niedz.
$-8\text{ }^{\circ}\text{C}$	$-2\text{ }^{\circ}\text{C}$	$2\text{ }^{\circ}\text{C}$	$-5\text{ }^{\circ}\text{C}$	$-4\text{ }^{\circ}\text{C}$	$0\text{ }^{\circ}\text{C}$	$-4\text{ }^{\circ}\text{C}$

- a) W których dniach zanotowana przez nią temperatura była wyższa niż $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$?
 b) Ile wynosi różnica między najwyższym i najniższym z otrzymanych pomiarów?
 c) Oblicz średnią temperatur odnotowanych przez Zosię.

Aby obliczyć średnią temperatur z podanych dni, należy dodać temperatury z tych dni, a następnie podzielić otrzymaną sumę przez liczbę dni. Aby obliczyć średnią temperatur z dwóch pierwszych dni tygodnia, trzeba wykonać następujące obliczenia:
 $[(-8) + (-2)] : 2 = (-10) : 2 = -5$. Średnia temperatur z dwóch pierwszych dni tygodnia to $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$.



10. Iloczyn dwóch liczb całkowitych, z których jedna jest o 13 większa od drugiej, jest równy -36 . Co to za liczby?

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz.

- a) $9 \cdot (-7)$ b) $(-60) : (-6)$ c) $(-8) \cdot 4$ d) $(-5) \cdot (-8) : (-10)$

2. Ustal znak wyniku, a następnie oblicz.

- a) $15 \cdot (-3) : (-5) \cdot (-1)$ b) $(-48) : (-8) \cdot (-2) : (-4)$ c) $(-8)^2 \cdot (-1)^3$

3. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

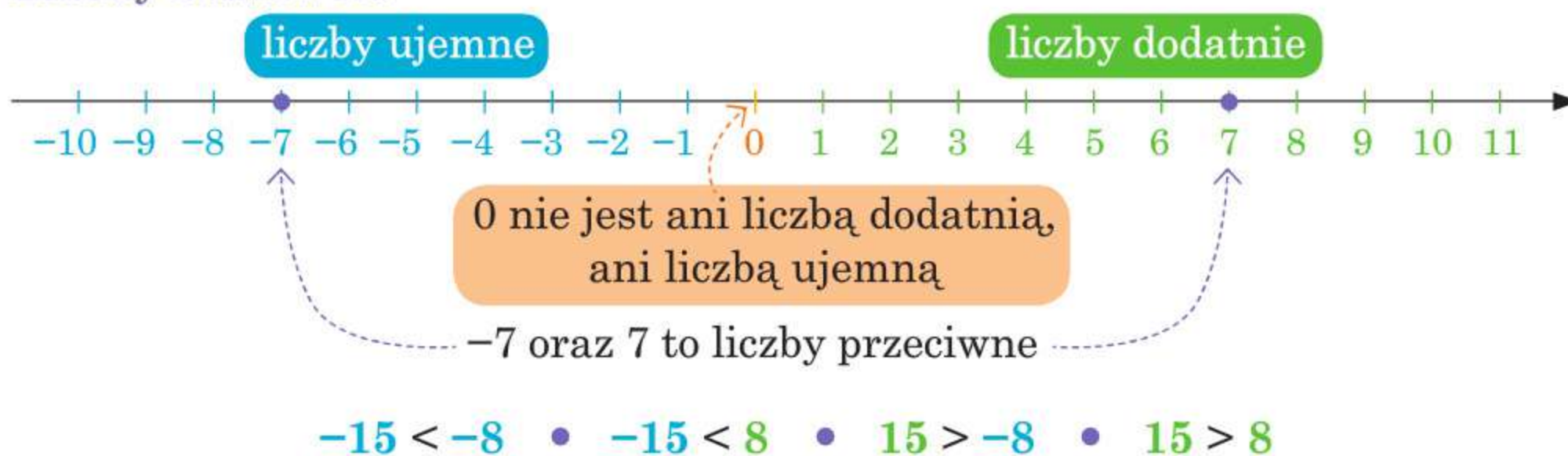
Iloczyn liczby (-500) i liczby do niej przeciwnej jest równy 0.	P	F
Iloraz szesnastu liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.	P	F
Iloraz liczb (-8) i (-7) jest mniejszy niż iloraz liczb 8 i 7.	P	F
Iloczyn sześciastu liczby ujemnej oraz kwadratu liczby dodatniej jest dodatni.	P	F

PODSUMOWANIE DZIAŁU VIII

W świecie liczb całkowitych

Powtórz wiadomości

Liczby całkowite



Dodawanie

$$3 + (-3) = 0$$



Suma liczb przeciwnych wynosi 0.

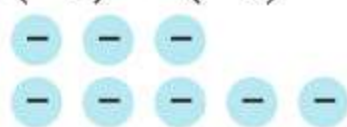
$$3 + (-5) = -2$$



$$(-3) + 5 = 2$$



$$(-3) + (-5) = -8$$



Odejmowanie

$$2 - 6 = ?$$

Sposób 1: $2 - 6 = 2 - 2 - 4 = -4$

Sposób 2: $2 - 6 = 2 + (-6) = 2 + (-2) + (-4) = -4$

$$2 - (-4) = ?$$

$$2 - (-4) = 2 + 4 = 6$$

$$(-2) - 4 = ?$$

Sposób 1: $(-2) - 4 = -6$

Sposób 2: $(-2) - 4 = (-2) + (-4) = -6$

$$(-2) - (-4) = ?$$

$$(-2) - (-4) = (-2) + 4 = 2$$

Mnożenie i dzielenie



$$(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-6) > 0 \leftarrow \text{Parzysta liczba znaków } -, \text{ więc wynik jest } \textbf{dodatni}.$$

$$(-720) : (-6) : (-5) : (-4) : (-3) : (-2) : (-1) < 0 \leftarrow \text{Nieparzysta liczba znaków } -, \text{ więc wynik jest } \textbf{ujemny}.$$

Poćwicz przed sprawdzianem

1. Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

$$6 \cdot -3 \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{4} \cdot -\frac{2}{5} \cdot 0 \cdot 12 \cdot -0,8 \cdot -10 \cdot 1\frac{3}{7}$$

- A. W ramce nie ma liczb naturalnych.
 B. W ramce są dokładnie trzy liczby całkowite.
 C. W ramce są cztery liczby całkowite ujemne.
 D. W ramce jest dokładnie pięć liczb dodatnich.

2. Które pary liczb porównano poprawnie?

- I. $-7 < -21$ II. $-300 > 150$ III. $-158 < 127$ IV. $-33 > -34$
 A. I i IV B. II i III C. III i IV D. I i III

3. Oblicz.

- a) $-13 + 15$ b) $-24 + (-8)$ c) $15 + (-14)$ d) $8 - (-9)$
 e) $12 - 15$ f) $(-40) - 50$ g) $(-35) - (-15)$ h) $12 \cdot (-4)$
 i) $(-9) \cdot (-3)$ j) $25 \cdot (-2)$ k) $(-36) : (-9)$ l) $48 : (-2)$

4. Uporządkuj wartości wyrażeń z ramki rosnąco.

$$(-3) - 12 \cdot (-12) : (-3) \cdot 3 - (-12) \cdot 3 \cdot (-12) \cdot 3 - 12$$

5. Dopasuj liczbę z ramki do opisu.

$$-200 \cdot -102 \cdot -98 \cdot -50$$

- I. Liczba o 2 mniejsza niż -100 . II. Liczba o 2 większa niż -100 .
 III. Liczba 2 razy mniejsza niż -100 . IV. Liczba 2 razy większa niż -100 .

6. Znajdź pary liczb zgodne z opisami.

- I. liczby przeciwne
 II. liczby odwrotne
 III. liczby przeciwne do liczby odwrotnej

$$\begin{matrix} 17 & 1 & -8 & \frac{1}{8} & 2\frac{2}{3} & -1 \\ & & & \frac{3}{8} & -2\frac{2}{3} & 8 & -17 \end{matrix}$$

7. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Suma każdej liczby dodatniej i każdej liczby ujemnej jest zawsze ujemna.	P	F
Iloczyn szesnastu liczb ujemnych i sześciu liczb dodatnich jest dodatni.	P	F
Różnica liczb przeciwnych jest równa 0.	P	F
Iloraz kwadratu liczby ujemnej i sześcianu liczby dodatniej jest liczbą ujemną.	P	F

8. W pewnej grze komputerowej zdobywa się punkty za zbieranie monet oraz traci się punkty za zetknięcie z kamieniem. Zdobycie jednej monety daje 4 punkty, a zetknięcie z kamieniem powoduje utratę 7 punktów. Zosia podczas 5 minut gry zebrała 30 monet oraz 20 razy zetknęła się z kamieniem. Ile punktów ma na swoim koncie?

- A. 260 B. 50 C. 20 D. -20

9. Wybierz właściwe uzupełnienie zdań spośród A i B oraz C i D.

I. Pani Jadwiga ma na koncie debetowym 15 000 zł. Za urządzenie kuchni musi zapłacić 18 000 zł, więc po tej transakcji stan jej konta wyniesie

- A. 3000 zł. B. -3000 zł.

II. Stan konta pana Grzegorza wynosi -15 000 zł. Gdy na jego konto wpłynie roczna premia w wysokości 18 000 zł, stan konta pana Grzegorza wyniesie

- C. 3000 zł. D. -3000 zł.

10. Pani Aniela zaparkowała na jednym z poziomów parkingu podziemnego galerii handlowej, a następnie wjechała windą siedem poziomów, do kina. Po filmie zjechała 3 poziomy na zajęcia z akrobatyki. Następnie wjechała 2 poziomy na obiad, po którym zjechała 6 poziomów do samochodu. Na którym poziomie zaparkowała pani Aniela, jeśli zajęcia z akrobatyki odbywały się na poziomie +1?

11. Oblicz wartość wyrażenia. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

- a) $(-21) : (-7) - 5 + (-8)$ b) $(-5) \cdot (-10) : (3 - 8) + 4 - 6$
c) $(-7)^2 \cdot (-1)^3 - [-3 - (-8)]$ d) $100 - [(-9) \cdot 4 + (-6) + (-2)^3]$

12. Najwyższą górą Gruzji jest Szchara. Jej wierzchołek znajduje się na wysokości 5193 m n.p.m. Najgłębszą jaskinią na świecie jest gruzińska Jaskinia Wronia. Jej najniższy punkt znajduje się na poziomie 2191 m p.p.m. Ile wynosi różnica wysokości między tymi dwoma punktami?

13. Morze Martwe jest najbardziej zasolonym jeziorem na świecie. Lustro wody znajduje się na poziomie 438 m p.p.m. Najgłębsze miejsce jeziora znajduje się na poziomie 817 m p.p.m. Ile wynosi głębokość tego jeziora?

14. W tabeli przedstawiono średnią temperatur powietrza odnotowaną w Ułamkowie w dzień i w nocy w kolejnych miesiącach w 2025 roku.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	1	2	6	13	19	21	24	22	18	11	5	2
	-4	-4	-1	5	10	13	14	13	10	5	2	-3

- a) Oblicz średnie podanych średnich temperatur miesięcznych w dzień oraz w nocy.
b) O ile stopni Celsjusza różni się średnia średnich temperatur miesięcznych w dzień od tej mierzonej w nocy?

Podejmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał sylwetkę mężczyzny, którego wizerunek znajduje się na srebrnej monecie dziesięci złotowej, wybitej tylko w 10 000 egzemplarzy. Powodzenia!



1 (1899–1970) to wybitny polski **2**. W artykułach, które publikował, często skupiał się na wyjaśnianiu **3**. Dzięki stypendium Fundacji Rockefellera (czytaj: rokefelera) w 1936 r. wyjechał do **4**. W kolejnych latach pracował na uczelniach w **5** oraz w Departamencie Ekonomicznym Sekretariatu ONZ. Jako ekspert współpracował m.in. z rządami Meksyku, Indii i Kuby. W Polsce prowadził działalność ekspercką i naukowo-badawczą. W latach **6** był wiceprzewodniczącym Rady Ekonomicznej przy Radzie Ministrów. W 1970 r. został kandydatem do **7** w dziedzinie ekonomii, zmarł jednak przed podjęciem decyzji przez Szwedzką Królewską Akademię Nauk.

1. Korzystając z danych umieszczonych na mapie, oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Różnica między najwyższą a najniższą temperaturą zaznaczoną na mapie wynosi 19 °C.	P	F
Chłodniej niż we Francji było tylko w trzech krajach.	P	F
Kraje zapisane w kolejności malejącej pod względem temperatury to: Litwa, Czechy, Niemcy.	P	F



P, F, P	P, P, F	F, P, F
Władysław Zawadzki	Michał Kalecki	Władysław Grabski

2. Oblicz.

$$\begin{aligned} -15 + 9 &= a \\ (-7) \cdot (-5) &= d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -40 - (-36) &= b \\ 56 : (-7) &= e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -13 - 17 &= c \\ (-80) : 4 &= f \end{aligned}$$

$$d - c = \spadesuit$$

$$a \cdot b = \heartsuit$$

$$e + f = \clubsuit$$

$\spadesuit = -5, \heartsuit = -24, \clubsuit = -28$	$\spadesuit = 65, \heartsuit = 24, \clubsuit = 16$	$\spadesuit = 65, \heartsuit = 24, \clubsuit = -28$
finansista	informatyk	ekonomista

3. W poniedziałek rano stan konta debetowego pana Adama wynosił -24 zł. Po południu tego samego dnia na konto wpłynęła kwota w wysokości 87 zł. We wtorek pan Adam kupił dwie doniczki, które kosztowały 16 zł za sztukę. Jaki był stan konta pana Adama po zakupie doniczek?

31	47	-143
przyczyn kryzysu finansowego	zagadnień związanych z ekonometrią	zagadnień związanych z inwestowaniem

4. Cezary zapisał na kartce liczby: -8 , -4 , 5 , -10 , 9 , 3 , 0 , -6 . Korzystając z nich, ułożył czterocyfrowy kod do sejf w swojej grze. Jaki kod ustalił Cezary?

- Tyle liczb dodatnich znajduje się na kartce.
- Liczba o 11 większa od najmniejszej zapisanej na kartce liczby.
- Iloraz liczby przeciwnej do największej liczby zapisanej na kartce i liczby (-3) .
- Suma wszystkich liczb zapisanych na kartce powiększona o 20.

4 3 9 3	3 1 3 9	3 2 2 1
Londynu	Sztokholmu	Berlina

5. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Suma liczby 7 i liczby do niej przeciwnej jest większa niż suma liczby 6 i liczby do niej przeciwnej.	P	F
Różnica dwóch liczb ujemnych może być liczbą dodatnią.	P	F

P, F	F, P	F, F
Japonii	Wielkiej Brytanii	USA

6. Ustal bez wykonywania obliczeń, ile poniższych wyrażeń jest ujemnych.

$$(-60)^2 \cdot 80 \quad 7500 : (-50) : (-10) \quad (-63 - 27) : (-30 + 40) \quad (-45) \cdot 6 \cdot 0$$

Trzy wyrażenia.	Dwa wyrażenia.	Jedno wyrażenie.
1963–1970	1955–1957	1957–1963

7. Uporządkuj wartości poniższych wyrażeń w kolejności malejącej.

$$a = (-81) : (-16 - 11) \cdot (-2)^3$$

$$b = [(-5) + 19 - (-42)] : (-7)$$

$$c = -64 : (14 - 22)^2 - 9$$

$$d = [(-96) : (-8) + (-11) \cdot 2] \cdot (-1)$$

$d > b > c > a$	$c > b > d > a$	$a > d > b > c$
Nagrody Nobla	Nagrody Rockefellera	Nagrody Forum Ekonomicznego



Z liczbami dodatnimi i ujemnymi można spotkać się na co dzień, sprawdzając temperaturę albo analizując listę operacji na rachunku bankowym. Spotkamy je też, oglądając wiadomości gospodarcze, np. na temat kursów walut czy cen akcji, albo zjeżdżając windą do parkingu podziemnego. Z kolei w naukach geograficznych, inżynierii, planowaniu urbanistycznym czy geologii za pomocą liczb dodatnich i ujemnych określa się wysokość terenu.

1. Pustynia Gobi to największa pustynia Azji. Latem temperatury powietrza sięgają nawet 40°C , a zimą spadają do -40°C . Amplituda temperatur to różnica między najwyższą i najniższą wartością temperatury w danym okresie. Ile stopni Celsjusza wynosi roczna amplituda temperatur na pustyni Gobi?

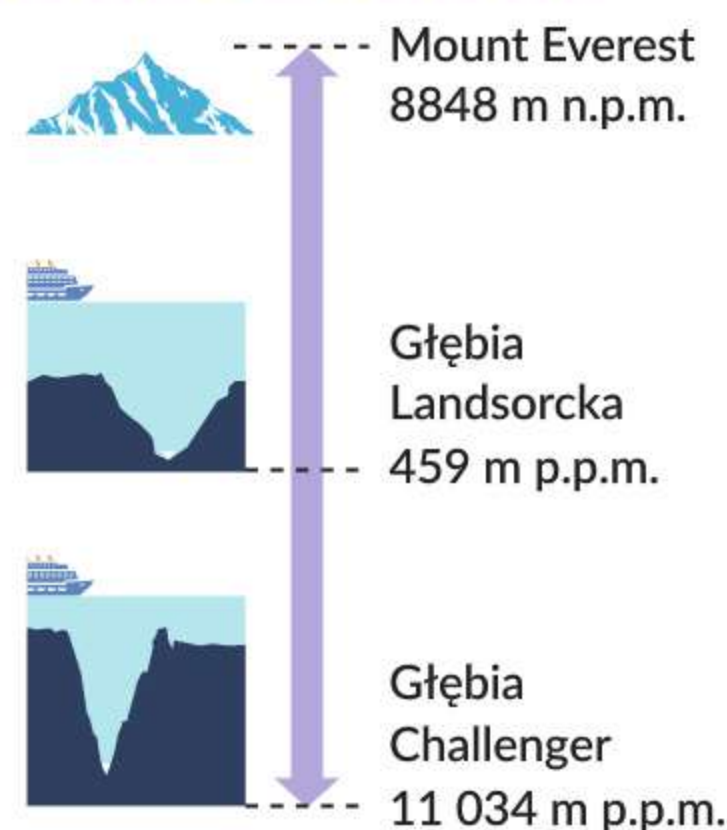
2. W tabeli podano przybliżone minimalne i maksymalne temperatury powierzchni wybranych planet Układu Słonecznego oraz średnią temperaturę powierzchni danej planety.

	Mars	Merkury	Ziemia	Wenus
Najniższa temperatura	-140°C	-173°C	-88°C	-220°C
Najwyższa temperatura	-20°C	427°C	58°C	420°C
Średnia temperatura	-63°C	169°C	15°C	464°C

- a) O ile stopni Celsjusza różni się średnia temperatura powierzchni Marsa i Ziemi?
- b) Ile stopni Celsjusza wynosi różnica między najwyższą i najniższą temperaturą powierzchni każdej z planet? Która różnica jest największa, a która najmniejsza?

3. Na rysunku zaznaczono wysokości trzech punktów na Ziemi. Głębia Challenger (czytaj: czelendź) na dnie Rowu Mariańskiego w zachodniej części Oceanu Spokojnego to najniżej położone zbadane miejsce na kuli ziemskiej. Głębia Landsorcka to najgłębsze miejsce na Morzu Bałtyckim. Mount Everest (czytaj: małnt ewerest) to najwyższy szczyt Ziemi, znajduje się na granicy Nepalu i Chin.

- a) Ile metrów wynosi różnica wysokości między najwyższym i najniższym punktem na Ziemi?
- b) Ile metrów wynosi różnica wysokości między głębią Landsorcką a głębią Challenger?



DZIAŁ

IX

W ŚWIECIE FIGUR PRZESTRZENNYCH



W te wakacje
pojadę z rodzicami
do Paryża. Ale
wolałabym pojechać
do Egiptu i zobaczyć
piramidę Cheopsa.

Wchodząc do Luwru,
będziesz się czuć
prawie jak w Egipcie.
Wejście do tego
muzeum i piramida
Cheopsa
przypominają
kształtem ostrosłup
czworokątny.

Potrafisz wskazać
wszystkie krawędzie,
wierzchołki i ściany
w takiej bryle?



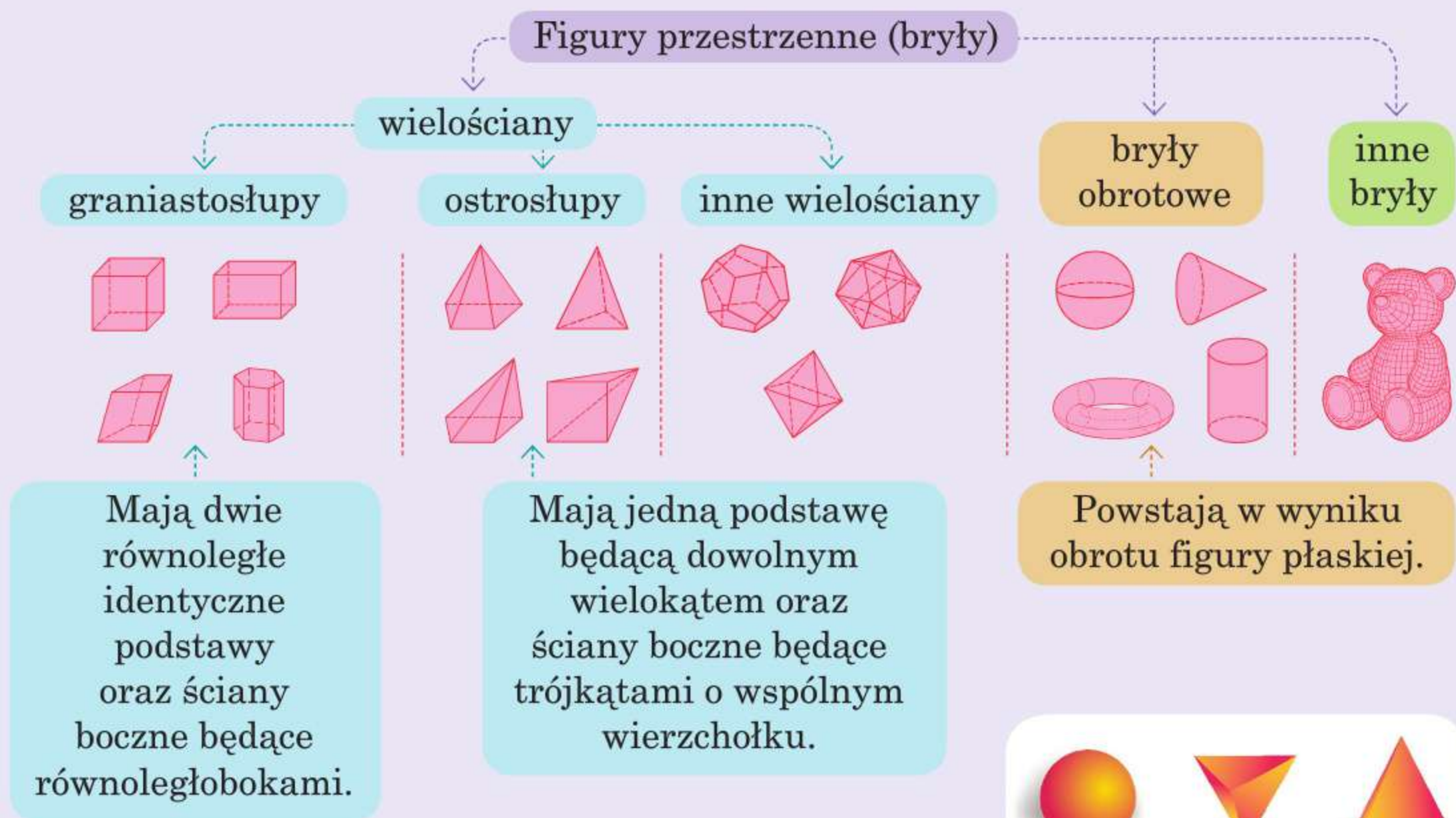
1. Figury przestrzenne

- ▶ Jakie figury nazywa się bryłami albo inaczej figurami przestrzennymi?
- ▶ Jak można pogrupować bryły?
- ▶ Ile wierzchołków, ścian, krawędzi ma dana bryła?

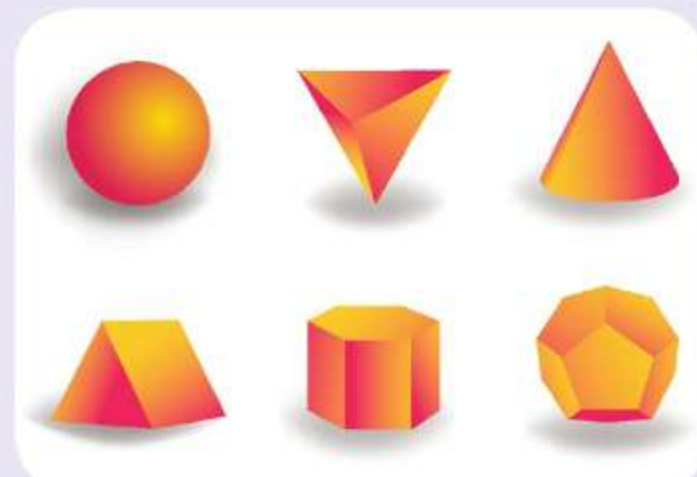


Analizuj!

Na co dzień spotykamy wiele **brył**, czyli **figur przestrzennych**, które oprócz długości i szerokości mają również trzeci wymiar – wysokość.



Oto obiekty 3D z biblioteki kształtów pewnego programu graficznego. Określ możliwie dokładnie, co to za bryły.



Podczas jednej z lekcji matematyki uczniowie opisywali bryły, kierując się tylko zmysłem dotyku. Na koniec wykonali poniższe zestawienie.

Zasłoń prawą część strony, a następnie opisz kolejne modele brył. Ile mają wierzchołków? Ile ścian? Ile krawędzi? Co to za bryły? Odsłoń prawą część strony, aby sprawdzić poprawność swoich odpowiedzi.



Ta bryła ma:

- 8 wierzchołków,
- 6 ścian (2 podstawy i 4 ściany boczne),
- 12 krawędzi.

Ta bryła to wielościan będący **graniastosem**.



Ta bryła ma:

- 5 wierzchołków,
- 5 ścian (1 podstawę i 4 ściany boczne),
- 8 krawędzi.

Ta bryła to wielościan będący **ostrosłosem**.



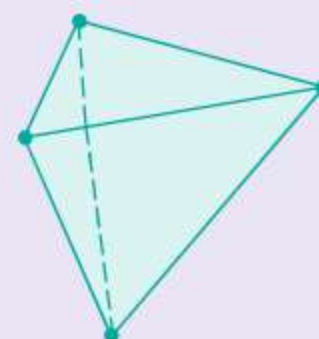
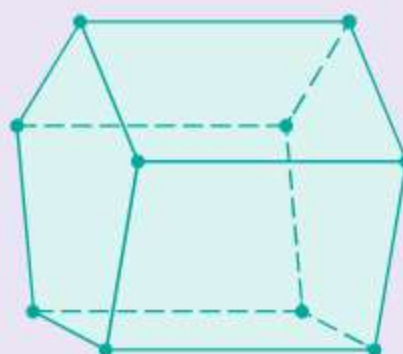
Ta bryła ma:

- 6 wierzchołków,
- 5 ścian (2 podstawy i 3 ściany boczne),
- 9 krawędzi.

Ta bryła to wielościan będący **graniastosem**.



Opisz możliwie dokładnie zamieszczone obok bryły.

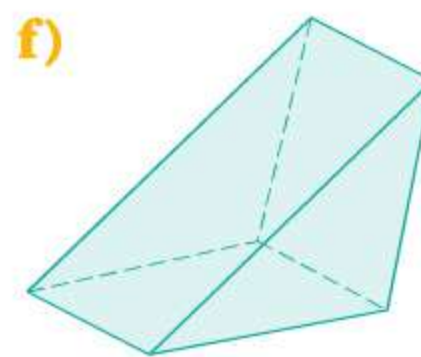
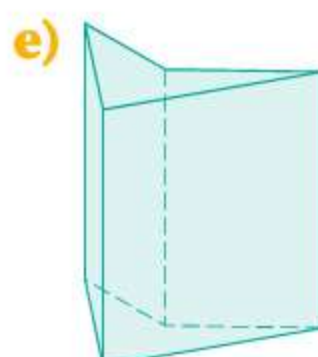
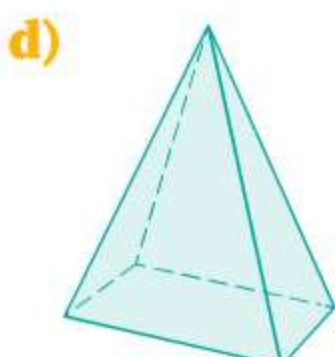
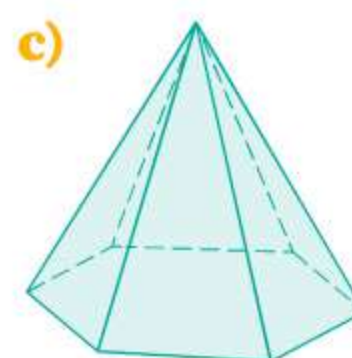
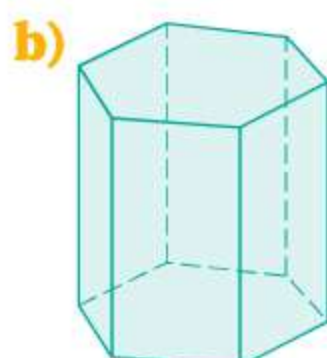
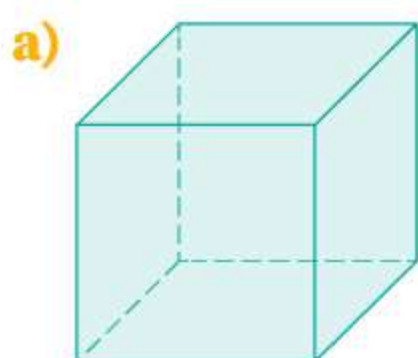


Poćwicz!

1. Spośród zamieszczonych poniżej obiektów wybierz te, które mają kształt wielościanu, oraz te, które mają kształt bryły obrotowej. Na jakie cechy trzeba zwrócić uwagę, żeby to stwierdzić?

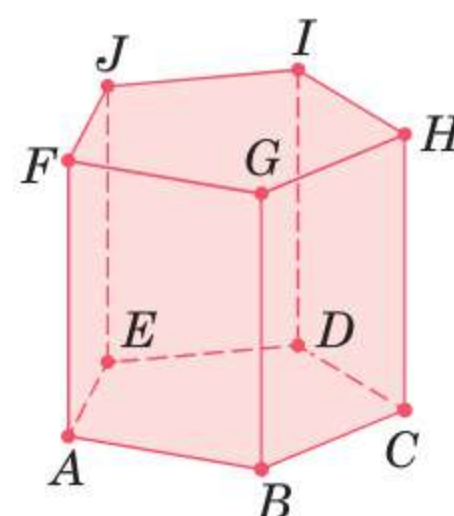


2. Ustal, ile ścian, krawędzi oraz wierzchołków ma podana bryła. Czy jest ona graniastosłupem, czy ostrosłupem?

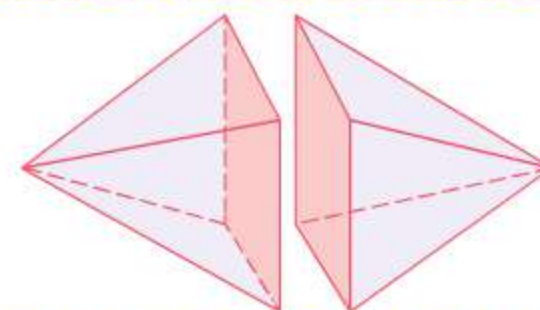


3. Graniastosłup $ABCDEFGH IJ$ ma dwie podstawy w kształcie pięciokąta oraz ściany boczne będące prostokątami. Wypisz nazwy jego wszystkich:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| a) wierzchołków, | b) krawędzi podstawy, |
| c) krawędzi bocznych, | d) podstaw, |
| e) ścian bocznych, | f) ścian równoległych. |



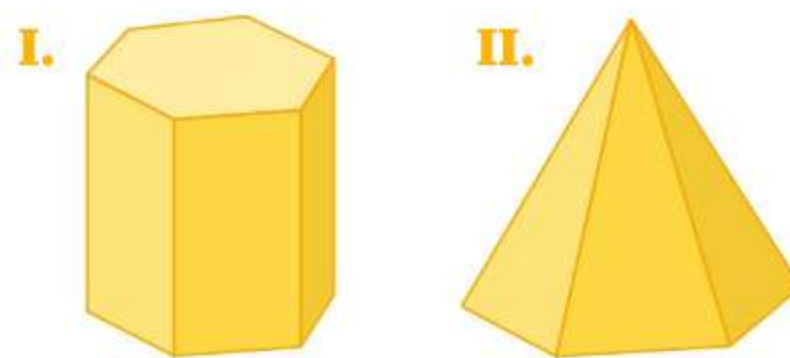
4. Bruno skleił podstawy dwóch identycznych modeli ostrosłupów o podstawie kwadratu. Ile ścian, krawędzi i wierzchołków ma powstały model bryły?



5. Podaj liczbę wykałaczek i kulek plasteliny potrzebnych do zbudowania:

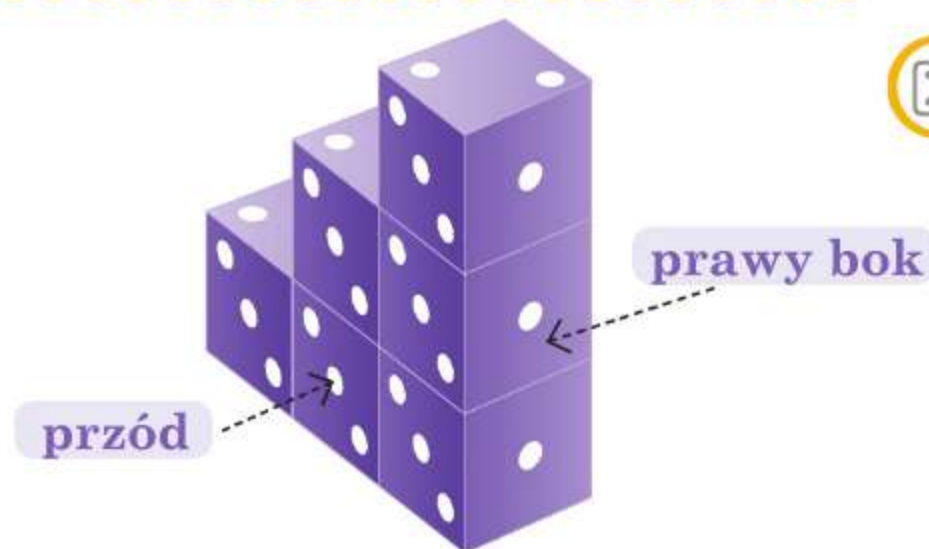
- szkieletu graniastosłupa o podstawie sześciokąta,
- szkieletu ostrosłupa o podstawie pięciokąta.

6. Bryła I ma w podstawie sześciokąt, a jej ściany boczne są prostokątami. Podstawą bryły II jest pięciokąt, a jej ściany boczne są trójkątami. Ustal liczbę niewidocznych ścian, krawędzi i wierzchołków każdej z brył.



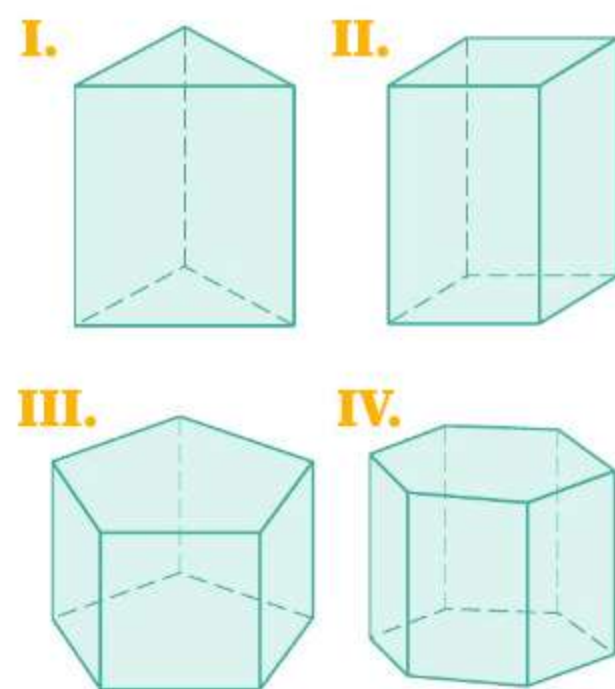
7. Wiedząc, że suma oczek na przeciwległych ściankach każdej kostki wynosi 7, narysuj widok przedstawionej obok bryły:

- a) z przodu, b) z prawego boku,
c) z góry, d) z tyłu,
e) z lewego boku, f) z dołu.



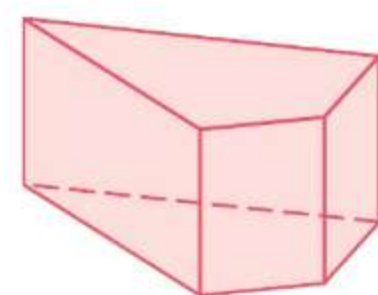
8. Przyjrzyj się zamieszczonym obok rysunkom graniastosłupów.

- a) Ile krawędzi ma każda z podstaw każdego z graniastosłupów? Ile wierzchołków, krawędzi i ścian ma każdy z graniastosłupów?
b) Ile wierzchołków, krawędzi i ścian będzie miał graniastosłup o podstawie ośmiokąta? A ile – graniastosłup o podstawie stukąta?



Sprawdź, co umiesz!

1. Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków zamieszczonej obok bryły. Czy jest to graniastosłup, czy ostrosłup?



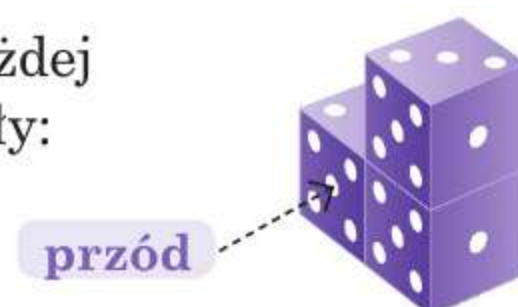
2. Zamieszczony obok graniastosłup ma dwie podstawy w kształcie pięciokąta oraz ściany boczne będące prostokątami. Ile krawędzi tej bryły jest niewidocznych?

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5



3. Wiedząc, że suma oczek na przeciwległych ściankach każdej kostki wynosi 7, narysuj widok przedstawionej obok bryły:

- a) z prawego boku, b) z góry,
c) z tyłu, d) z lewego boku.



2. Prostopadłościany i ich siatki

- ▶ Jakie własności ma prostopadłościan?
- ▶ Jak narysować siatkę prostopadłościanu?
- ▶ Jak ustalić długość krawędzi prostopadłościanu?



Analizuj!

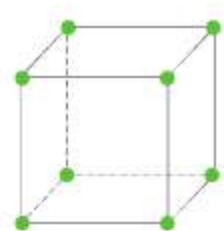
Siatka figury przestrzennej

Siatka figury przestrzennej powstaje przez takie „rozcięcie” niektórych krawędzi tej figury, żeby ściany można było „rozłożyć” płasko.

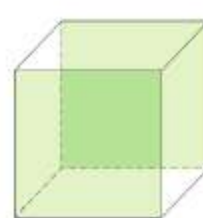
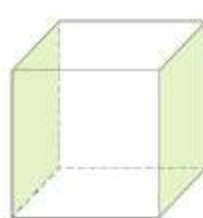
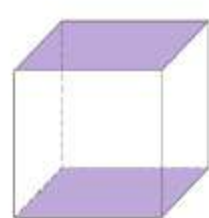
Rysując siatkę prostopadłościanu, możesz:

- korzystać z własności sześciątów i prostopadłościanów, które nie są sześcianami.
- wyobrazić sobie, że rozkładasz pudełko, którego jednakowe ściany mają ten sam kolor.

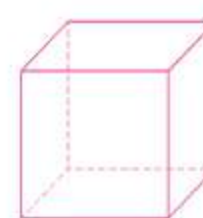
Własności sześcianu



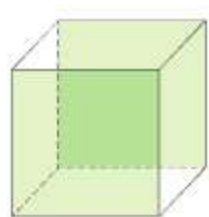
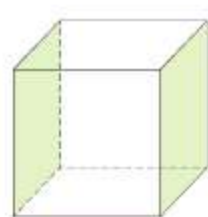
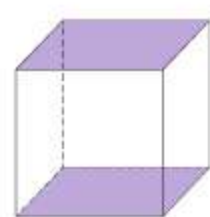
8 wierzchołków



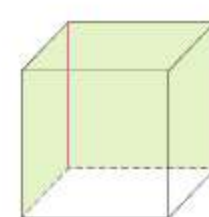
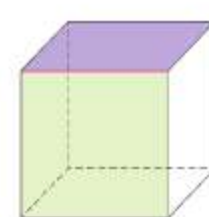
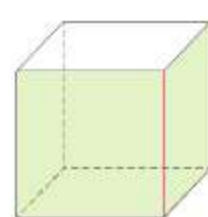
6 jednakowych ścian
będących kwadratami



12 równych
krawędzi

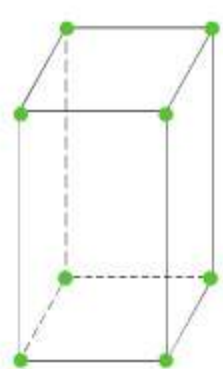


ściany leżące naprzeciw
sobie są równoległe

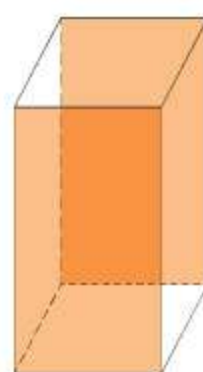
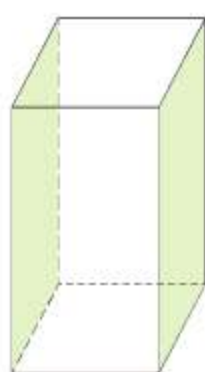
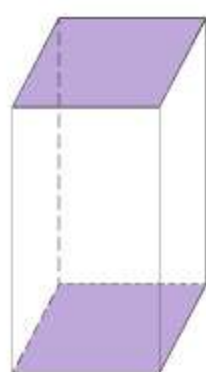


ściany mające wspólną
krawędź są prostopadłe

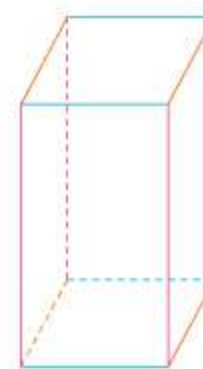
Własności prostopadłościanu



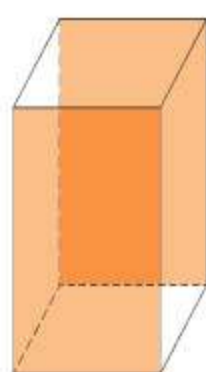
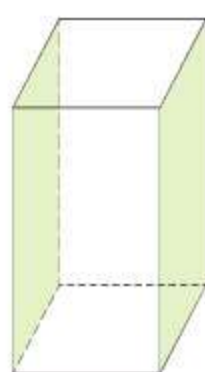
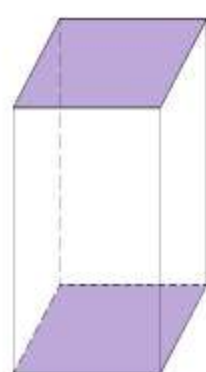
8 wierzchołków



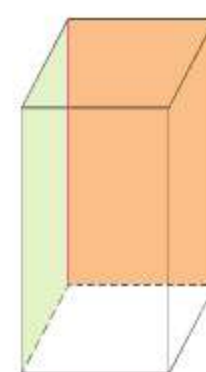
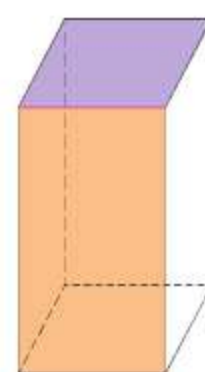
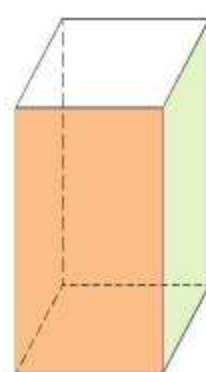
6 ścian będących prostokątami,
ściany leżące naprzeciw siebie
są identyczne



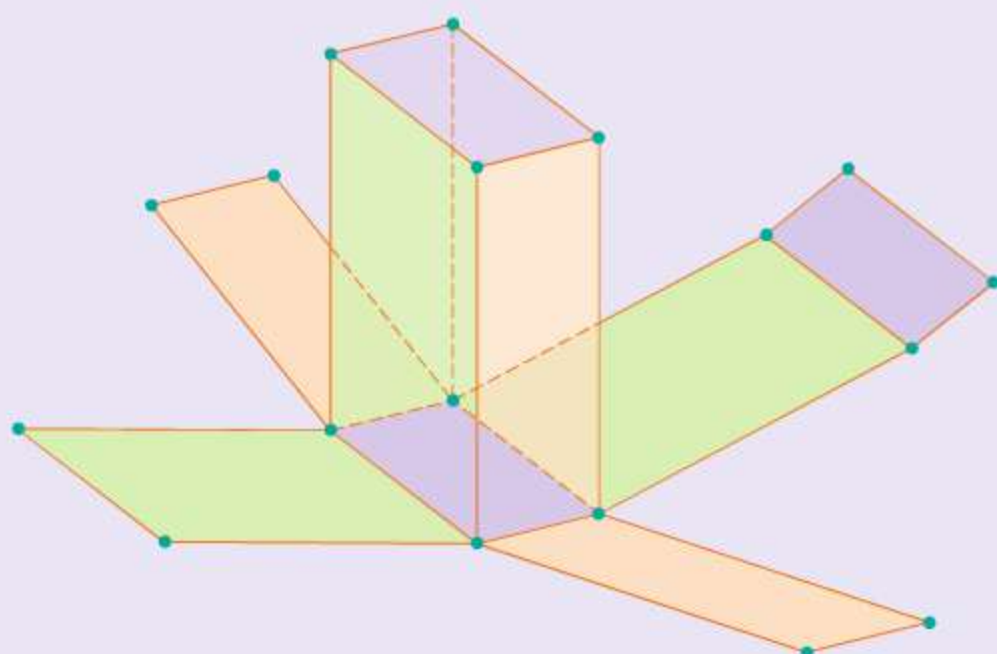
12 krawędzi, po
4 krawędzie tej
samej długości



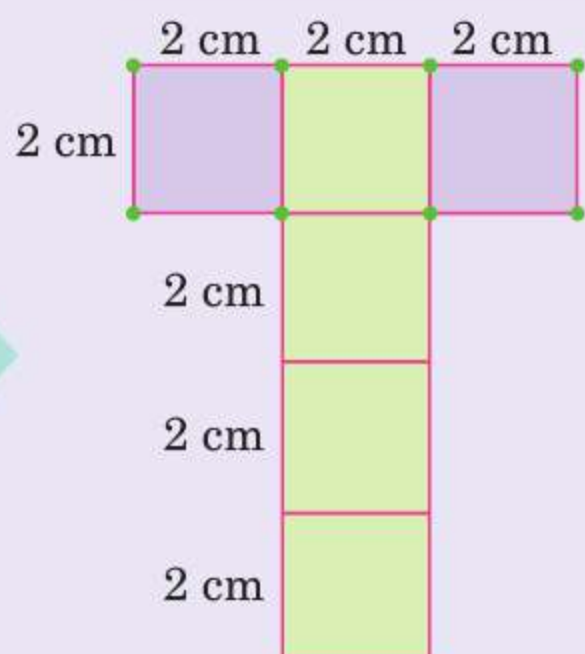
ściany leżące naprzeciw siebie
są równoległe



ściany mające wspólną
krawędź są prostopadłe



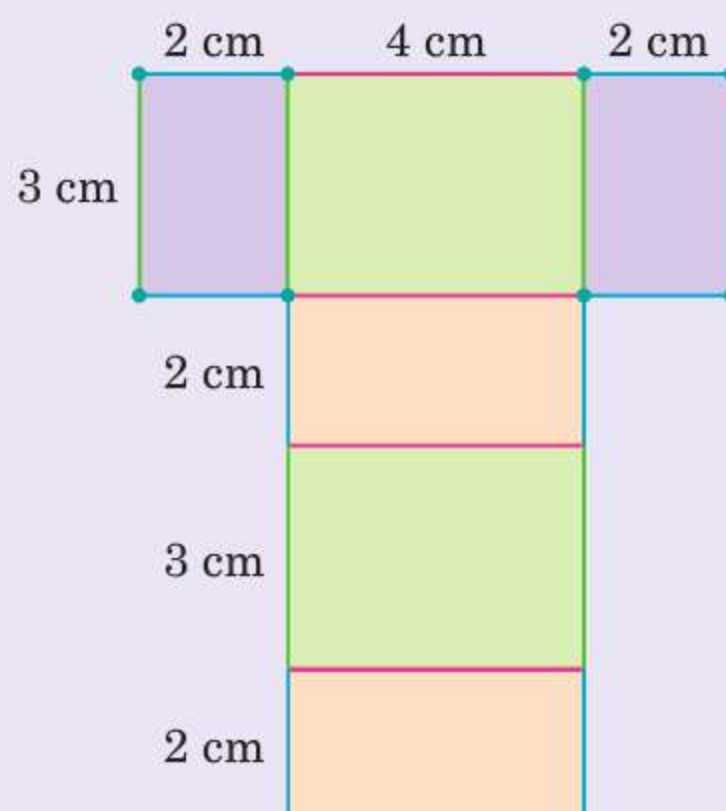
Przykładowa siatka sześcianu
o krawędzi długości 2 cm



Najpierw narysuj
ściany boczne.

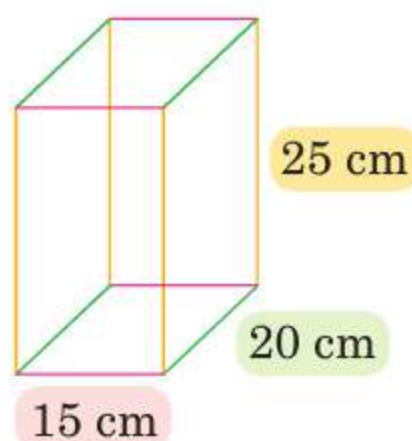
Potem dorysuj
podstawy.

Przykładowa siatka
prostopadłościanu
o wymiarach
 $2\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 4\text{ cm}$

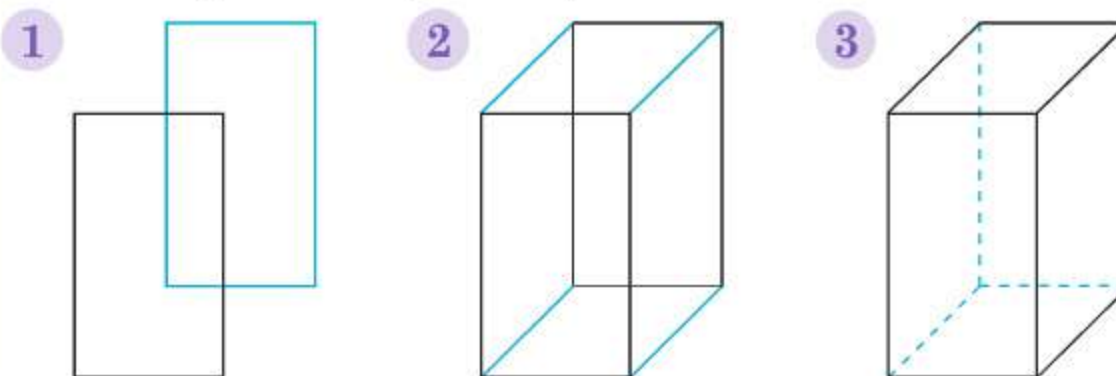


Bruno przygotował na lekcję druczany szkielet prostopadłościanu o wymiarach $15\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 25\text{ cm}$. Ile co najmniej metrów drutu zużył Bruno?

- 1 Wykonaj rysunek pomocniczy.



Jak narysować prostopadłościan?



- 2 Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu.

Sposób 1

$$\begin{aligned}
 &15\text{ cm} \cdot 4 + 20\text{ cm} \cdot 4 + 25\text{ cm} \cdot 4 = \\
 &= 60\text{ cm} + 80\text{ cm} + 100\text{ cm} = \\
 &= 240\text{ cm} = 2,4\text{ m}
 \end{aligned}$$

Sposób 2

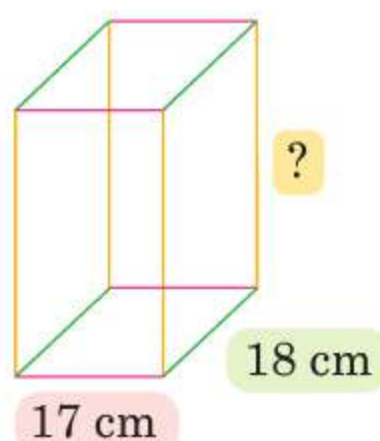
$$\begin{aligned}
 &(15\text{ cm} + 20\text{ cm} + 25\text{ cm}) \cdot 4 = \\
 &= 60\text{ cm} \cdot 4 = \\
 &= 240\text{ cm} = 2,4\text{ m}
 \end{aligned}$$

Na wykonanie szkieletu sześcianu Bruno zużył co najmniej 2,4 m drutu.



Na wykonanie szkieletu swojego prostopadłościanu Zosia potrzebowała 232 cm drutu. Jaką wysokość ma szkielet tego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że wymiary podstawy to $17\text{ cm} \times 18\text{ cm}$?

- 1 Wykonaj rysunek pomocniczy.



- 2 Oblicz wysokość prostopadłościanu, czyli długość trzeciej krawędzi.

$$\begin{aligned}
 &? \cdot 4 = 232\text{ cm} - 17\text{ cm} \cdot 4 - 18\text{ cm} \cdot 4 \\
 &? \cdot 4 = 232\text{ cm} - 68\text{ cm} - 72\text{ cm} \\
 &? \cdot 4 = 92\text{ cm} \\
 &? = 92\text{ cm} : 4 \\
 &? = 23\text{ cm}
 \end{aligned}$$

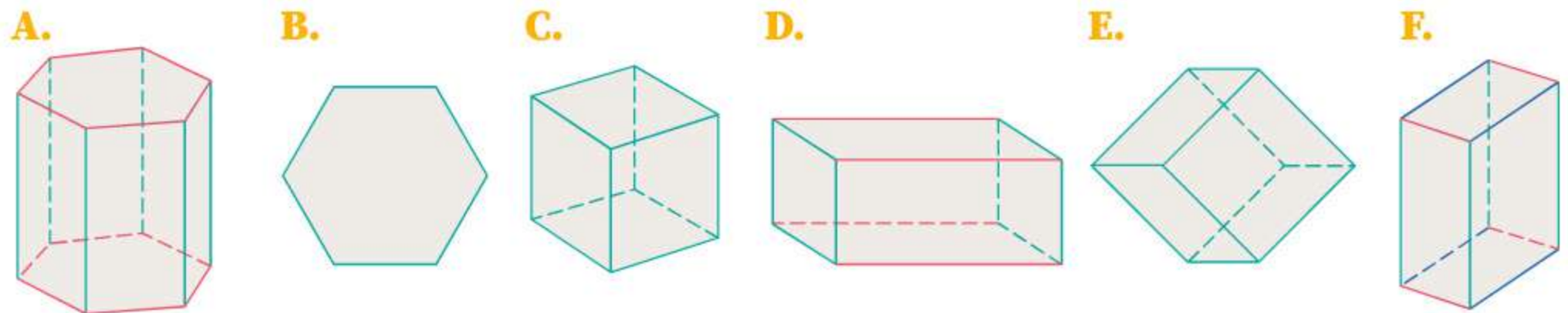
Szkielet tego prostopadłościanu ma 23 cm wysokości.

Jaką długość ma krawędź sześcianu, którego suma długości krawędzi wynosi 180 cm?

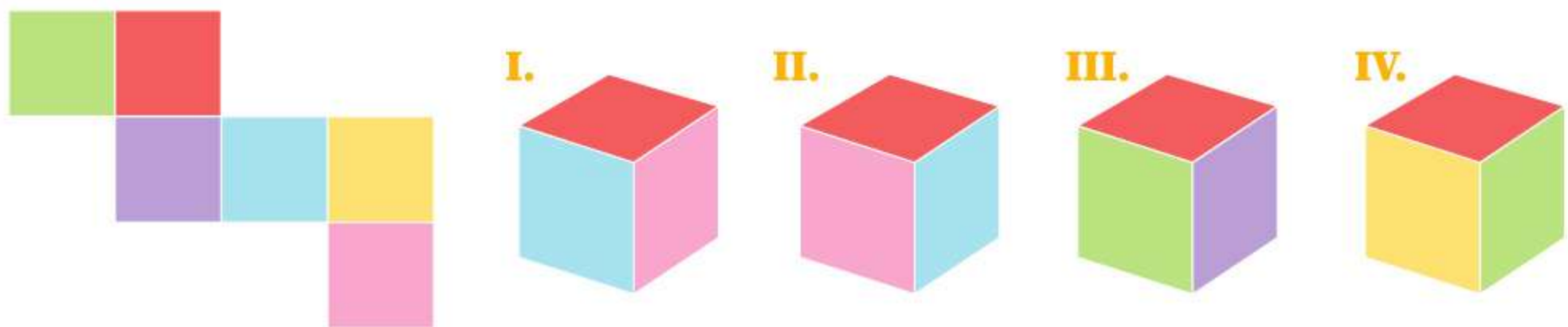


Poćwicz!

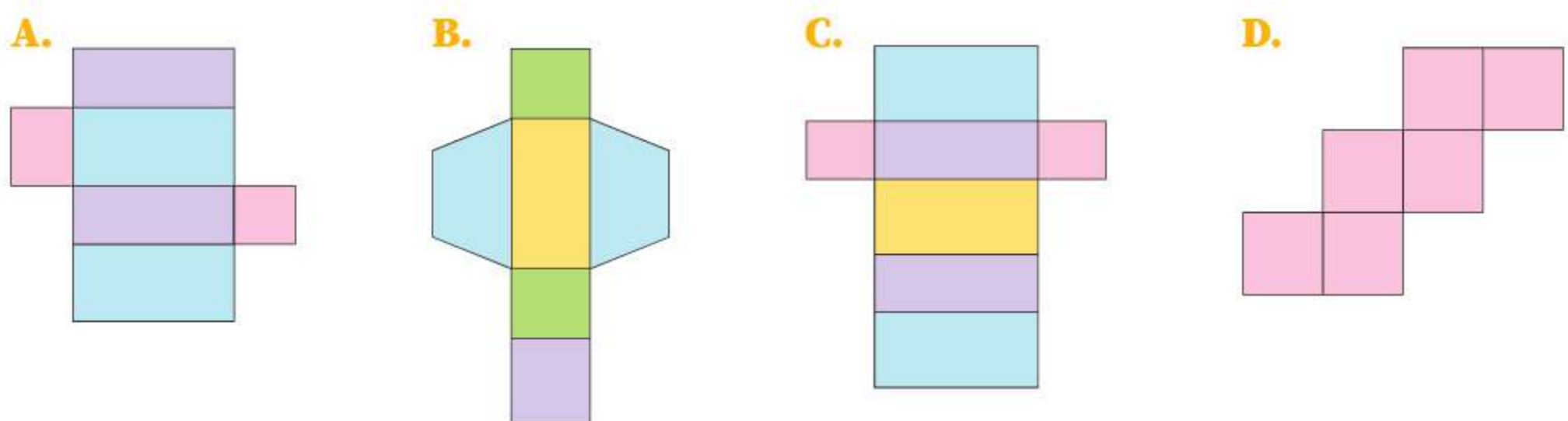
1. Wskaż wszystkie sześciany, wszystkie prostopadłościany oraz wszystkie graniastosłupy. Sformułuj wniosek na temat klasyfikacji sześcianów, prostopadłościanów oraz graniastosłupów.



2. Jak sądzisz, które z przedstawionych sześcianów mogą mieć taką siatkę jak ta zamieszczona poniżej?

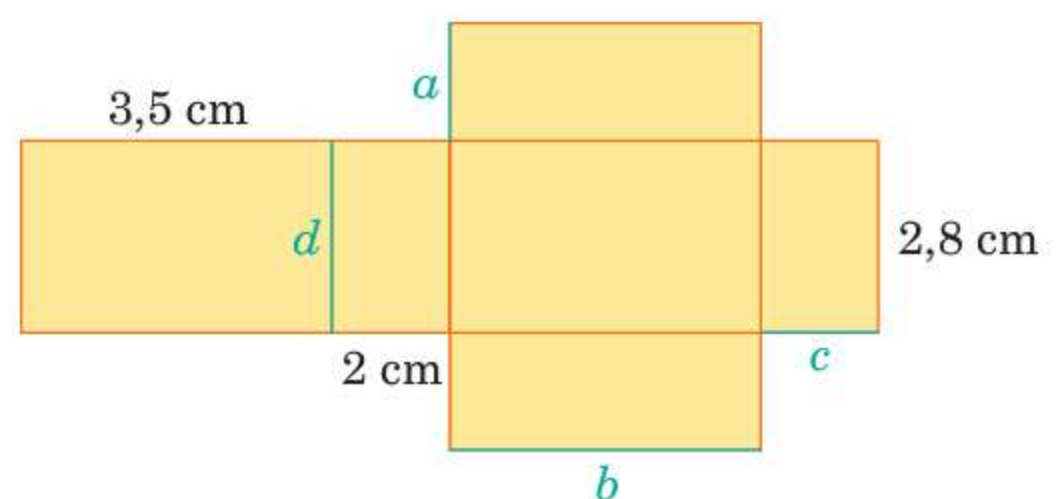


3. Wskaż rysunki, które nie przedstawiają siatki prostopadłościanu. Uzasadnij swój wybór.



4. Na podstawie zamieszczonej obok siatki prostopadłościanu ustal:

- długość krawędzi a , b , c i d tego prostopadłościanu,
- sumę długości krawędzi tego prostopadłościanu.



5. Oblicz sumę długości krawędzi prostopadłościanu o podanych wymiarach.

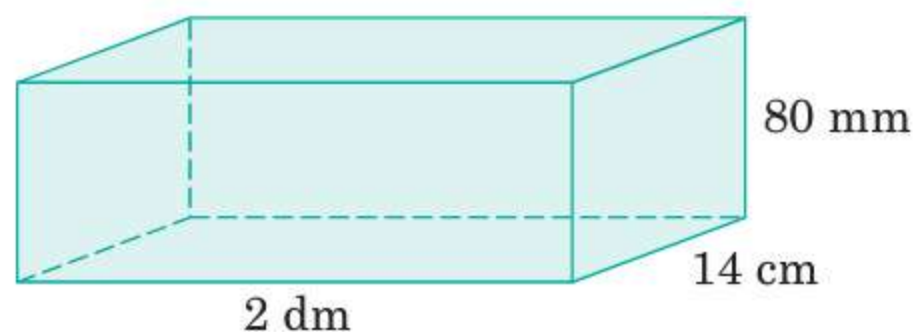
a) $7\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 5\text{ cm}$

b) $13,6\text{ cm} \times 14\text{ cm} \times 9,4\text{ cm}$

c) $8,5\text{ cm} \times 8,5\text{ cm} \times 8,5\text{ cm}$

d) $1,65\text{ m} \times 20\text{ dm} \times 170\text{ cm}$

6. Na wykonanie szkieletu sześcianu wykorzystano tyle samo drutu, co na wykonanie szkieletu prostopadłościanu o wymiarach takich jak na rysunku obok. Jaka długość ma krawędź szkieletu tego sześcianu?



7. Z drutu o długości 1,92 m można wykonać szkielet prostopadłościanu, którego dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka mają odpowiednio 18 cm i 15 cm długości.

a) Jaka długość miałyby trzecia krawędź prostopadłościanu?

b) Jaka długość miałyby krawędź szkieletu sześcianu wykonanego z drutu tej samej długości, co drut, z którego wykonano szkielet prostopadłościanu?

8. Wyznacz długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że:

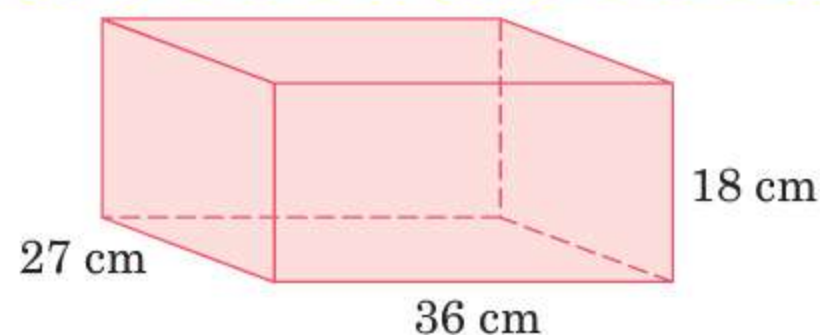
a) suma długości wszystkich krawędzi wynosi 60 m, jedna krawędź wychodząca z wierzchołka A jest trzykrotnie dłuższa od drugiej krawędzi wychodzącej z tego wierzchołka, a trzecia krawędź wychodząca z wierzchołka A ma długość 900 cm;

b) suma długości krawędzi obu podstaw, które są kwadratami, wynosi 40 cm, a suma długości krawędzi bocznych jest dwa razy mniejsza.

9. Suma długości wszystkich krawędzi pewnego prostopadłościanu wynosi 42 cm. Narysuj siatkę tego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jedna ze ścian ma wymiary $2\text{ cm} \times 3,5\text{ cm}$.

10. Suma długości krawędzi sześcianu narysowanego w skali 3 : 1 wynosi 252 cm. Jaka długość miałyby krawędź tego sześcianu, gdyby narysować go w skali 1 : 2?

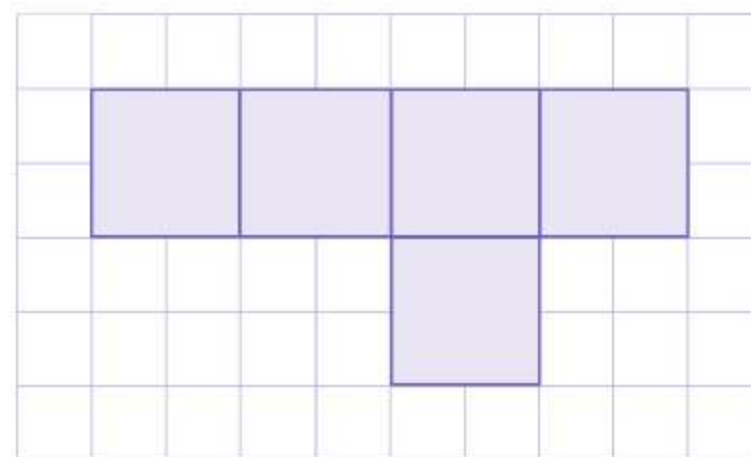
11. Narysuj w skali 1 : 9 dwie różne siatki prostopadłościanu o wymiarach takich jak na rysunku obok.



12. Na rysunku znajduje się fragment siatki sześcianu.

- a)** Przerysuj ten fragment siatki do zeszytu i dokończ. Czy wszyscy w klasie narysowali siatkę tak samo? Co zdecydowało o wybranym sposobie postępowania?

- b)** Siatkę każdego sześcianu można narysować na 11 sposobów. Rozważ wszystkie przypadki.



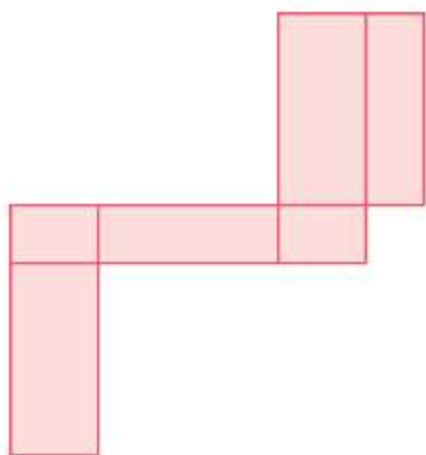
13. Obwód ściany prostopadłościanu, o której wiadomo, że ma jedną krawędź dwa razy dłuższą od drugiej, wynosi 120 cm. Obwód sąsiadującej z nią ściany jest równy 200 cm. Obwód trzeciej ściany ma 160 cm długości.

- a)** Wyznacz wymiary tego prostopadłościanu.
b) Narysuj siatkę tego prostopadłościanu w skali 1 : 10.

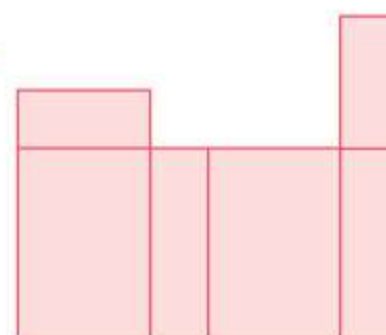
Sprawdź, co umiesz!

1. Wskaż rysunek, na którym nie przedstawiono siatki prostopadłościanu.

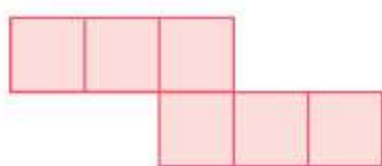
A.



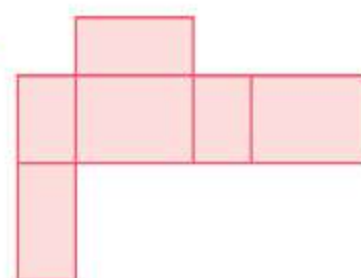
B.



C.

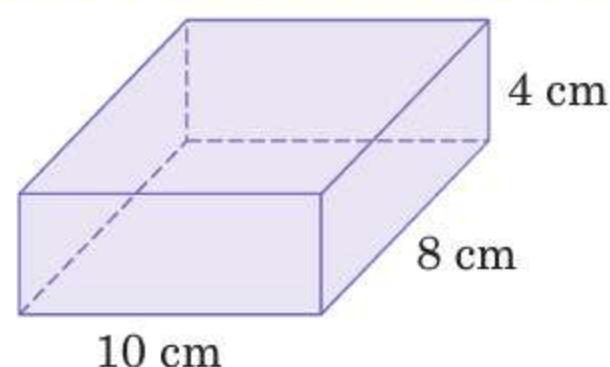


D.



2. Pewien sześcian ma taką samą sumę długości krawędzi jak prostopadłościan o wymiarach 15 cm $\times$ 25 cm $\times$ 35 cm. Jaka długość ma krawędź tego sześcianu?

3. Narysuj w skali 1 : 2 siatkę prostopadłościanu o wymiarach takich jak na rysunku obok.



3. Pole powierzchni prostopadłościanu

- ▶ Jak obliczać pole powierzchni dowolnego prostopadłościanu?
- ▶ Jak wyznaczać długości wybranych krawędzi prostopadłościanu, mając dane jego pole powierzchni?

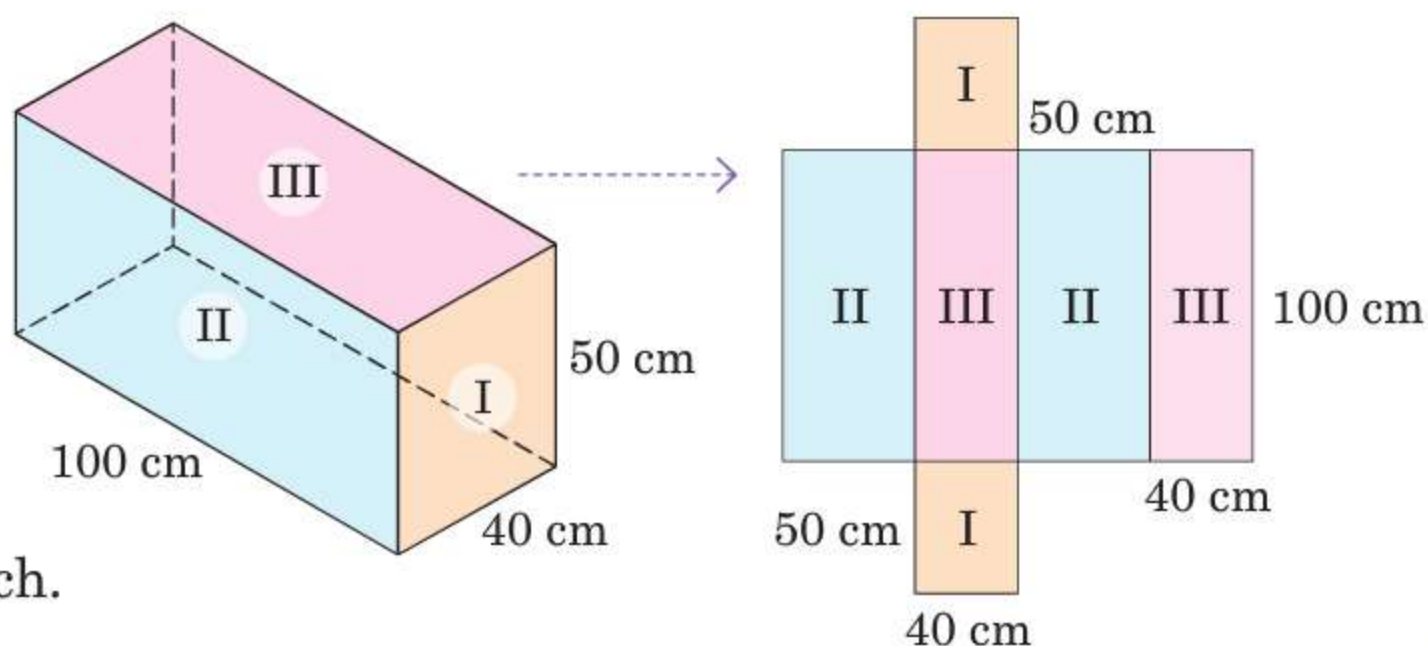


Analizuj!



Dziadek Brunona chce zaimpregnować skrzynię ogrodową na narzędzia. Jedna puszka oleju wystarcza do zaimpregnowania powierzchni równej 2 m^2 . Czy jedna puszka oleju wystarczy dziadkowi Brunona, jeżeli skrzynia ma kształt prostopadłościanu o wymiarach $100 \text{ cm} \times 40 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$?

- 1 Wykonaj rysunki pomocnicze – narysuj prostopadłościan i jego siatkę. Podpisz długości krawędzi. Możesz też pokolorować i ponumerować ściany o tych samych wymiarach.

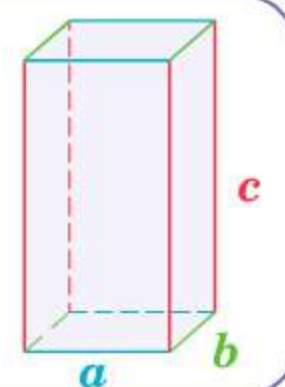


- 2 Zapisz wzór, za pomocą którego obliczysz pole powierzchni prostopadłościanu.

Pole powierzchni prostopadłościanu to suma pól wszystkich ścian tego prostopadłościanu.

$$P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

$$\text{lub } P = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$



Sposób 1 $P = 2 \cdot P_I + 2 \cdot P_{II} + 2 \cdot P_{III}$

Sposób 2 $P = 2 \cdot (P_I + P_{II} + P_{III})$

- 3 Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu.

$$P_I = 40 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 2000 \text{ cm}^2$$

$$P_{II} = 50 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 5000 \text{ cm}^2$$

$$P_{III} = 40 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 4000 \text{ cm}^2$$

Sposób 1
$$P = 2 \cdot 2000 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 5000 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 4000 \text{ cm}^2 =$$

$$= 4000 \text{ cm}^2 + 10\,000 \text{ cm}^2 + 8000 \text{ cm}^2 = 22\,000 \text{ cm}^2$$

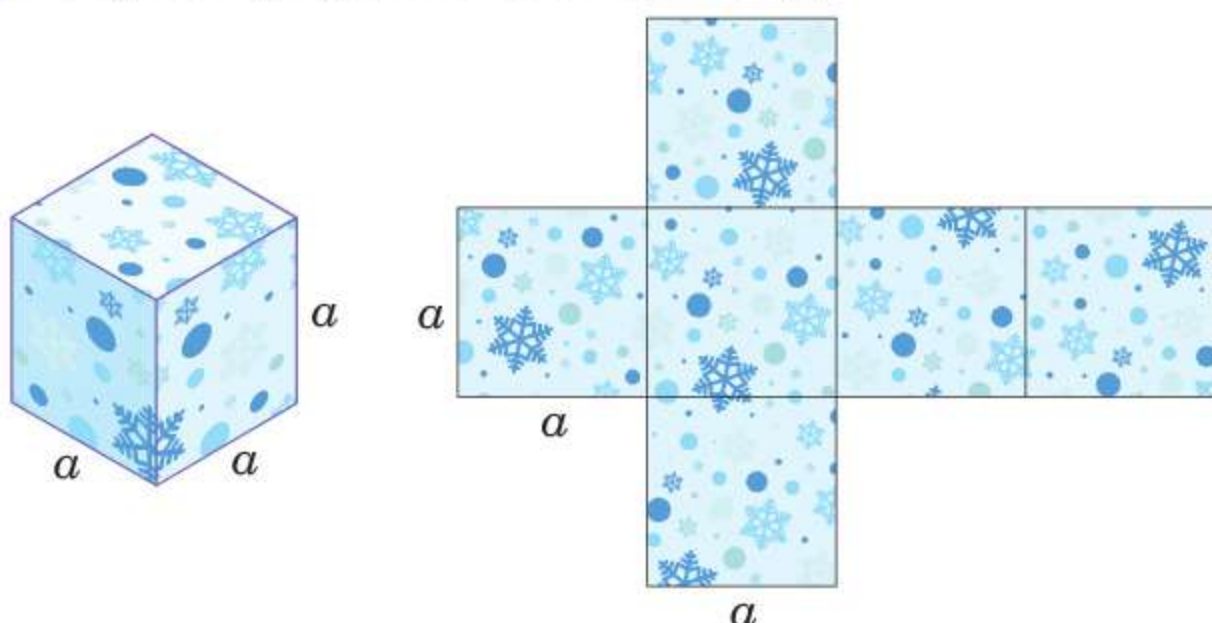
Sposób 2
$$P = 2 \cdot (2000 \text{ cm}^2 + 5000 \text{ cm}^2 + 4000 \text{ cm}^2) =$$

$$= 2 \cdot 11\,000 \text{ cm}^2 = 22\,000 \text{ cm}^2$$

Jedna puszka oleju wystarcza do zaimpregnowania powierzchni równej $2 \text{ m}^2 = 20\,000 \text{ cm}^2$, a zatem nie wystarczy do zaimpregnowania skrzyni.

Na oklejenie pudełka w kształcie sześciangu potrzeba było $0,54 \text{ m}^2$ ozdobnego papieru. Jaką długość w centymetrach miała krawędź tego pudełka?

- 1 Wykonaj rysunek pomocniczy.

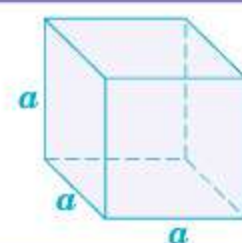


Pudełko ma kształt sześciangu, więc wszystkie jego ściany są kwadratami o boku tej samej długości.

- 2 Zapisz wzór, za pomocą którego obliczysz długość krawędzi sześciangu na podstawie danego pola powierzchni.

Pole powierzchni sześciangu stanowi sumę pól wszystkich ścian tego sześciangu.

$$P = 6 \cdot a \cdot a \text{ lub } P = 6 \cdot a^2$$



Skoro $6 \cdot a^2 = P$, to $a^2 = P : 6$.

- 3 Oblicz długość krawędzi sześciangu w centymetrach.

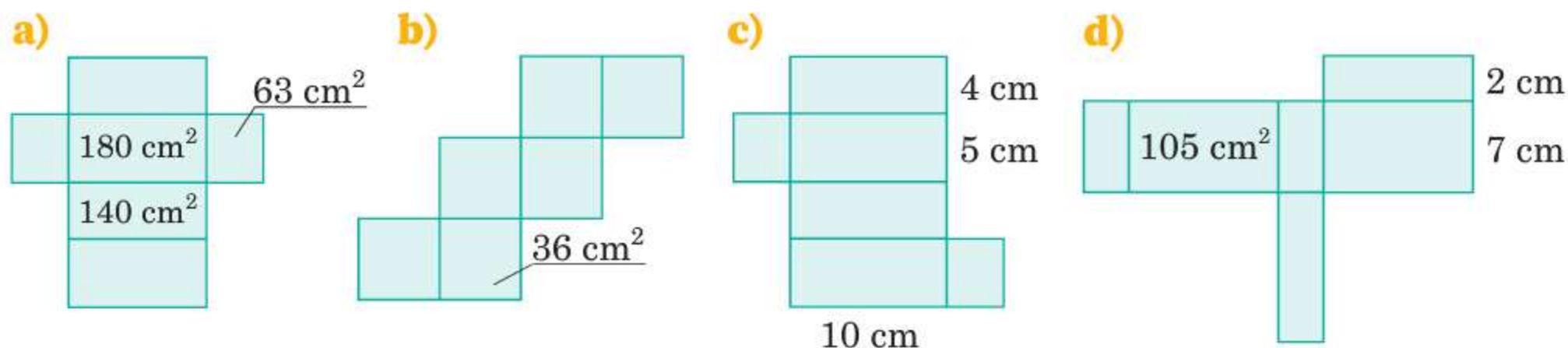
Zamień jednostki. $0,54 \text{ m}^2 = 5400 \text{ cm}^2$

Podstaw dane do wzoru. $a^2 = 5400 \text{ cm}^2 : 6$ $a^2 = 900 \text{ cm}^2$ $a = 30 \text{ cm}$

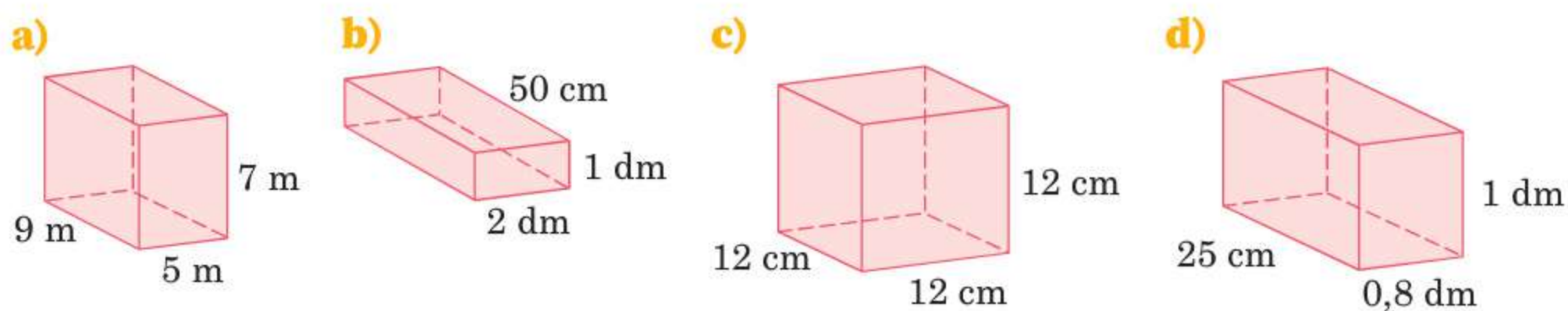
Krawędź pudełka miała 30 cm długości.

Poćwicz!

1. Na podstawie podanej siatki oblicz pole powierzchni prostopadłościanu.



2. Oblicz pole powierzchni podanego prostopadłościanu.



3. Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu o podanych wymiarach.

- a) $4 \text{ mm} \times 4 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$ b) $12 \text{ cm} \times 15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$
- c) $3\frac{1}{2} \text{ dm} \times 5\frac{1}{4} \text{ dm} \times 2 \text{ dm}$ d) $0,7 \text{ dm} \times 0,07 \text{ m} \times 70 \text{ mm}$

4. Jedna krawędź prostopadłościanu ma $6,5 \text{ cm}$ długości, druga jest od niej o $2,5 \text{ cm}$ dłuższa, a trzecia – 3 razy krótsza od drugiej. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu oraz jego pole powierzchni.

5. Stolarz ma wykonać z płyty meblowej szafkę w kształcie prostopadłościanu. W skali $1 : 10$ wymiary szafki to $8 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$. Jaką co najmniej powierzchnię powinna mieć płyta, z której stolarz wytnie elementy szafki?

6. Oblicz pole powierzchni sześcianu, jeśli wiadomo, że:

- a) pole jego ściany bocznej jest równe 49 m^2 ,
- b) obwód jego jednej ściany wynosi 12 dm ,
- c) suma długości wszystkich jego krawędzi wynosi 102 cm .

7. Pole powierzchni sześcianu I jest równe 294 cm^2 , a suma długości wszystkich krawędzi sześcianu II wynosi 288 cm . Czy dłuższa jest krawędź sześcianu I, czy sześcianu II? O ile dłuższa?

8. W szkolnej auli o wymiarach $9\text{ m} \times 17\text{ m} \times 4,5\text{ m}$ mają zostać odmalowane wszystkie ściany i sufit. Jaka kwotę należy przeznaczyć na farbę, jeśli okna i drzwi zajmują łącznie powierzchnię równą 12 m^2 , a farbę należy położyć dwukrotnie?



9. Prostopadłościan $ABCDEFGH$ o wymiarach $2,7\text{ dm} \times 15\text{ cm} \times 0,09\text{ m}$ ma o 216 cm^2 większe pole powierzchni niż sześcian $IJKLMNOP$. Ile wynosi suma długości krawędzi tego sześcianu?

10. Pani Halina chce wytapetować ściany w salonie. Podłoga salonu ma kształt prostokąta o wymiarach $6\text{ m} \times 5,5\text{ m}$. Wysokość pomieszczenia wynosi $2,5\text{ m}$. Każde z dwóch okien ma powierzchnię $3,25\text{ m}^2$. Łączna powierzchnia dwojga drzwi to 4 m^2 .

- a) Jaka kwotę musi przeznaczyć pani Halina na wynajęcie firmy Tapetix, której cennik przedstawiono obok?
- b) Ile pani Halina zapłaci za zakup tapety sprzedawanej w rolkach $0,47\text{ m} \times 10\text{ m}$, jeśli jedna rolka kosztuje $57,50\text{ zł}$?

Powierzchnia	Cena
do 30 m^2	$37,60\text{ zł/m}^2$
od 30 m^2 do 50 m^2	$35,40\text{ zł/m}^2$
od 50 m^2	$33,20\text{ zł/m}^2$

11. Do oklejenia pudełka, którego podstawa ma kształt prostokąta o wymiarach $10\text{ cm} \times 12\text{ cm}$, potrzeba 1120 cm^2 ozdobnego papieru. Jaka wysokość ma to pudełko?



12. Jedna ściana prostopadłościanu jest kwadratem o boku długości 5 cm . Najdłuższa krawędź tego prostopadłościanu jest $2,5$ razy dłuższa od najkrótszej krawędzi. Ile wynosi pole powierzchni tego prostopadłościanu?

Sprawdź, co umiesz!

1. Oblicz pole powierzchni prostopadłościanu o krawędziach podanej długości.
a) 7 cm , 8 cm , 10 cm b) $0,9\text{ dm} \times 12\text{ cm} \times 3\text{ cm}$ c) 13 m d) $0,5\text{ dm}$
2. Dwa prostopadłościenne kartoniki o wymiarach $4\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 6\text{ cm}$ sklejono ścianami o największym polu. Wyznacz powierzchnię powstałego obiektu.
3. Sześcian I ma pole powierzchni równe 384 cm^2 . Pole powierzchni sześcianu II wynosi 486 cm^2 . Ile wynosi różnica długości krawędzi tych sześcianów?

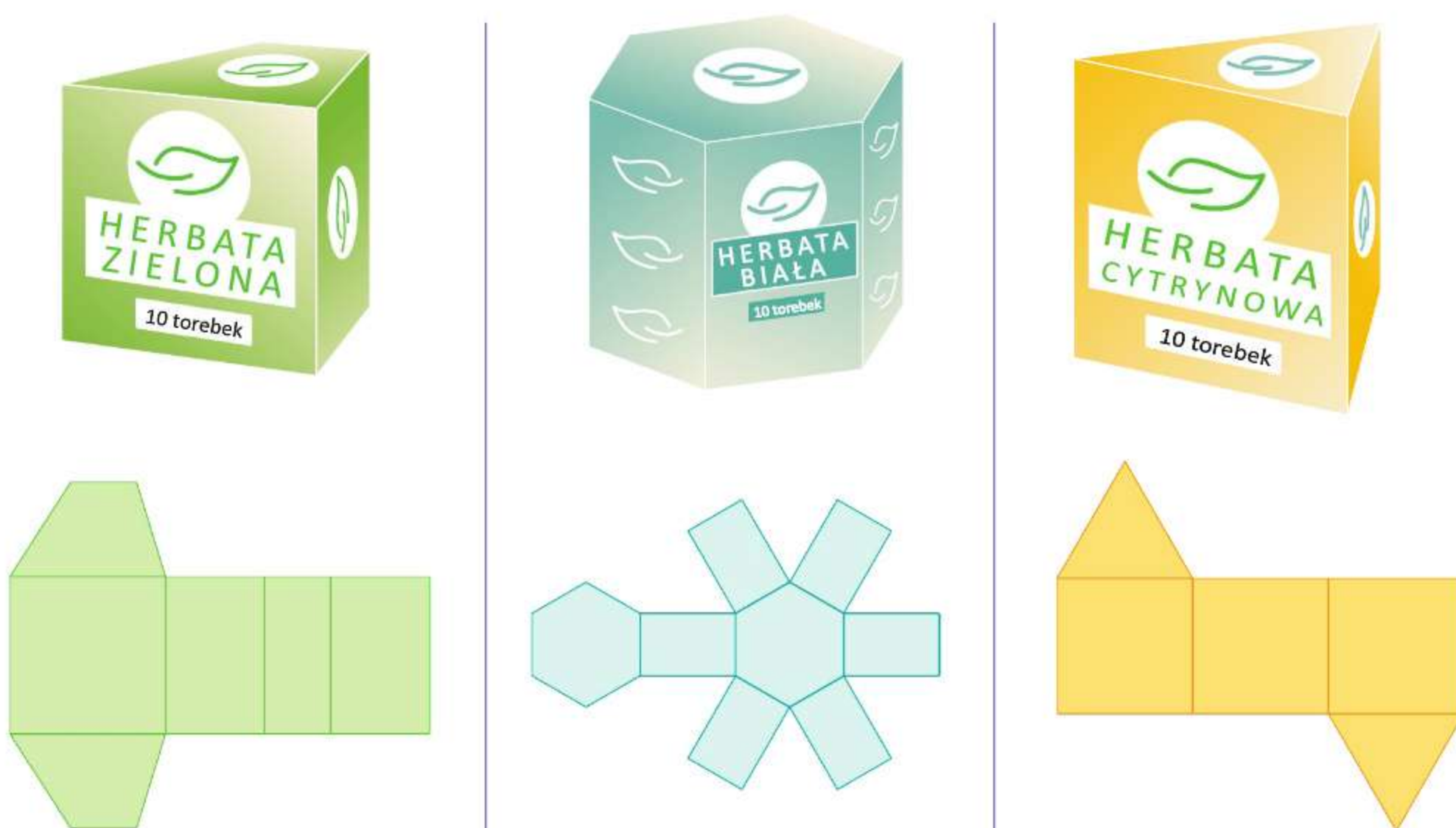
4. Graniastosłupy proste i ich siatki

- ▶ Jakie własności mają graniastosłupy proste?
- ▶ Jak narysować graniastosłup prosty o podstawach o zadanym kształcie?
- ▶ Jak narysować siatkę graniastosłupa prostego?



Odkrywaj!

1. Przyjrzyj się zaprezentowanym poniżej rysunkom pudełek po herbacie oraz odpowiadającym im kształtom siatek.



- a) Ile ścian ma każde z pudełek? Jaki mają kształt?
- b) Ile wierzchołków i krawędzi ma każde z pudełek? Czy któreś z krawędzi są jednakowej długości?
- c) Jak położone są względem siebie ściany, które nie są prostokątami? A jak względem reszty ścian?



Analizuj!

Podczas lekcji techniki uczniowie tworzyli kartonowy model miasta. Konstruowane przez nich budowle miały kształt różnych graniastosłupów.



Model wieży zegarowej miał kształt graniastosłupa trójkątnego.

6 wierzchołków

9 krawędzi



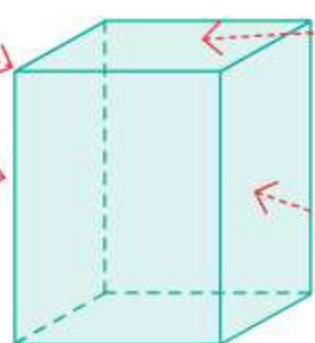
podstawy równoległe względem siebie i prostopadłe do ścian bocznych

5 ścian: 2 identyczne podstawy w kształcie trójkąta oraz 3 ściany boczne w kształcie prostokąta

Model szkoły miał kształt graniastosłupa czworokątnego.

8 wierzchołków

12 krawędzi



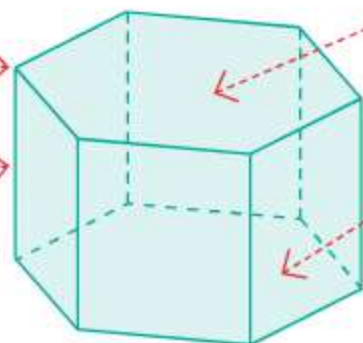
podstawy równoległe względem siebie i prostopadłe do ścian bocznych

6 ścian: 2 identyczne podstawy w kształcie czworokąta oraz 4 ściany boczne w kształcie prostokąta

Model centrum sportowego miał kształt graniastosłupa sześciokątnego.

12 wierzchołków

18 krawędzi



podstawy równoległe względem siebie i prostopadłe do ścian bocznych

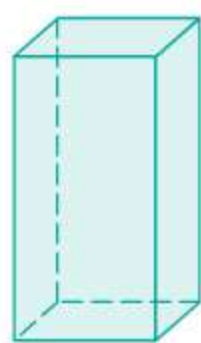
8 ścian: 2 identyczne podstawy w kształcie sześciokąta oraz 6 ścian bocznych w kształcie prostokąta



Ile ścian, krawędzi oraz wierzchołków ma prostopadłościan?
A sześcian? A graniastosłup o podstawie trapezu?
A dowolny graniastosłup czworokątny?

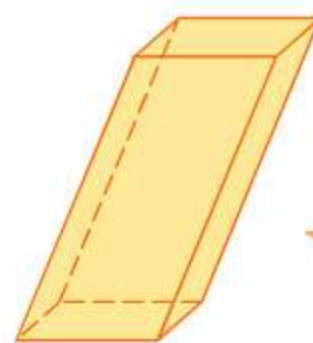
Graniastosłup ma dwie równoległe i identyczne podstawy będące wielokątami oraz ściany boczne będące równoległobokami.

Nazwy graniastosłupów odwołują się do liczby kątów wielokąta w podstawie, np. graniastosłup **czworokątny**, **pięciokątny**.



graniastosłup
czworokątny
prosty

Graniastosłup, którego ściany boczne mają kształt prostokąta i są prostopadłe do podstaw, to **graniastosłup prosty**.



graniastosłup
czworokątny
pochyły

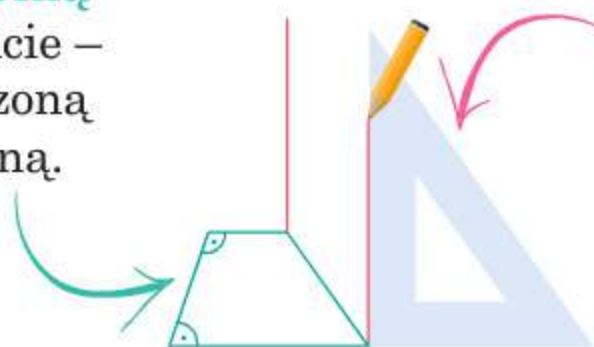
Graniastosłup, który nie spełnia tych warunków, to **graniastosłup pochyły**.

W klasie 5 **będziemy zajmować się tylko graniastosłupami prostymi**, dlatego w kolejnych lekcjach będziemy pomijać określenie „prosty”.

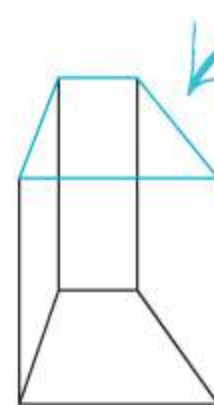
Jak narysować graniastosłup, np. o podstawie trapezu prostokątnego?

Podstawę dolną

narysuj w rzucie – lekko spłaszczoną i przekrzywioną.

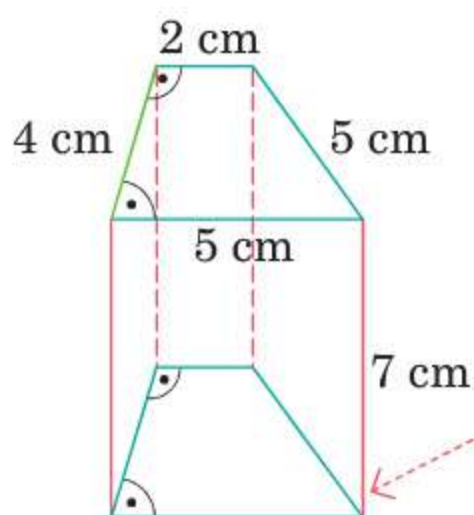


Zadbaj o to, żeby **krawędzie boczne** były do siebie równoległe.

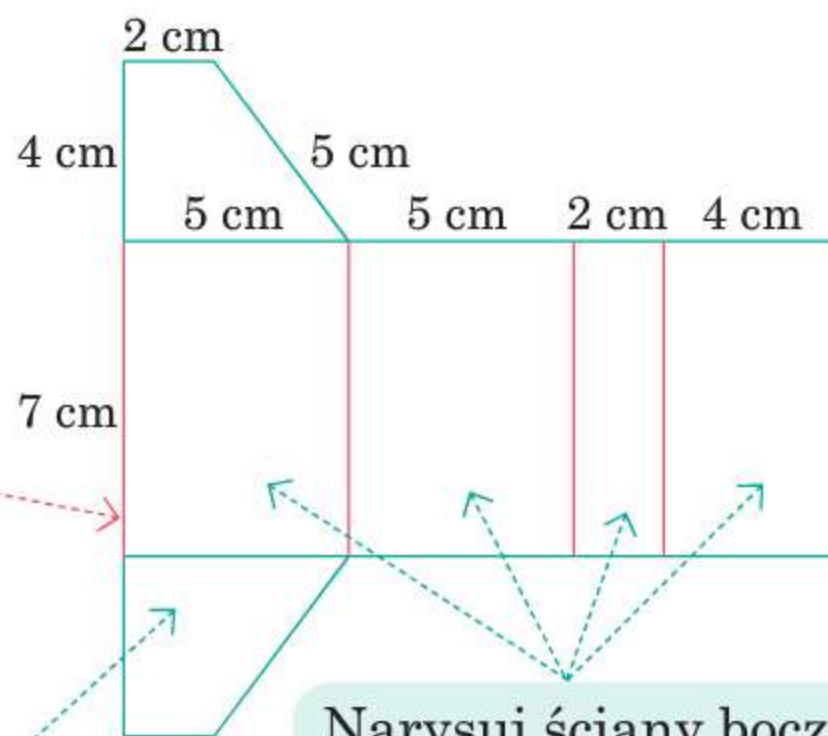


Aby narysować **podstawę górną**, narysuj odcinki łączące końce krawędzi bocznych.

Jak narysować siatkę graniastosłupa o podanej podstawie i wysokości?



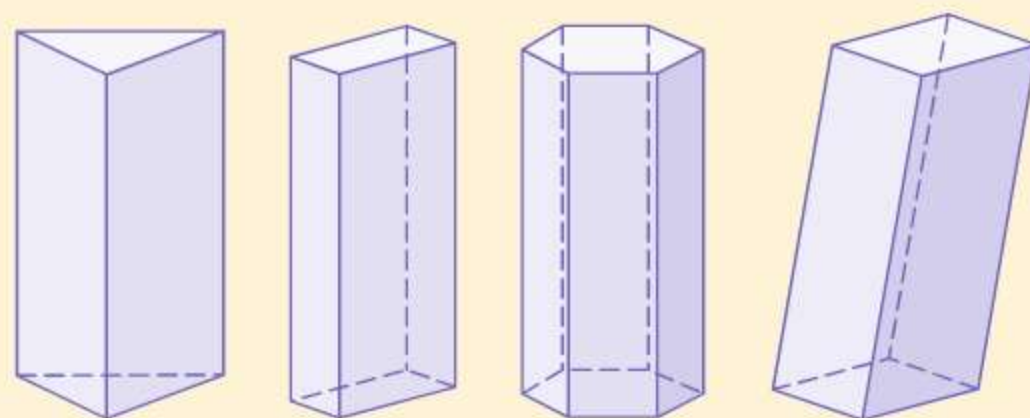
Sąsiednie ściany boczne mają wspólną krawędź. Jest to **wysokość** graniastosłupa.



Dorysuj podstawy.

Narysuj ściany boczne.

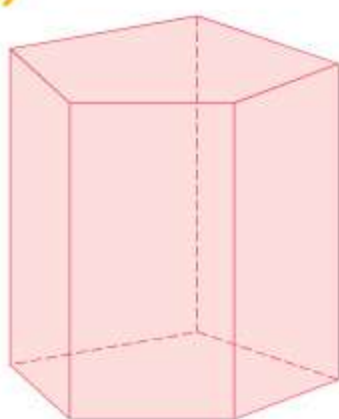
Graniastosłup to figura przestrzenna, która ma dwie równoległe podstawy w kształcie jednakowych wielokątów oraz ściany boczne będące równoległobokami.



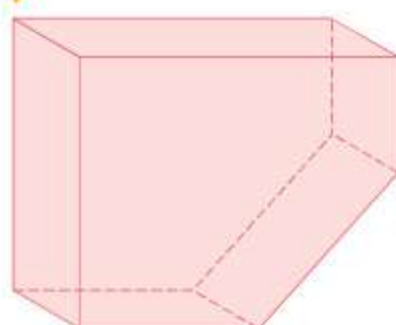
Poćwicz!

1. Nazwij graniastosłup. Podaj, ile ma ścian, krawędzi i wierzchołków.

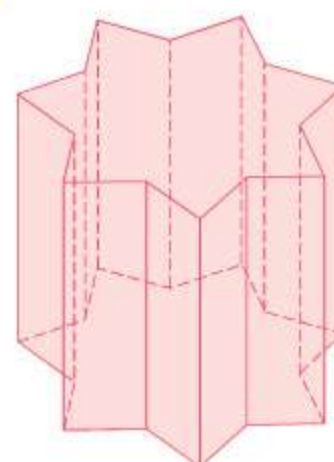
a)



b)

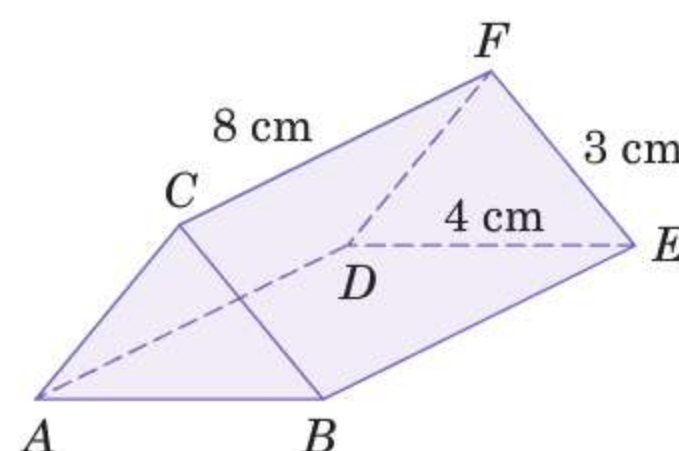


c)



2. Przyjrzyj się graniastosłupowi przedstawionemu na rysunku obok, a następnie:

- nazwij ten graniastosłup;
- wypisz nazwy wszystkich jego krawędzi podstaw, krawędzi bocznych, ścian bocznych i podstaw;
- podaj długości krawędzi BC , BE i AB .



3. Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków w graniastosłupie:

- sześciokątnym,
- ośmiokątnym,
- dwudziestokątnym,
- osiemdziesięciokątnym.

Jeżeli ♥ to liczba boków wielokąta, który jest podstawą, to graniastosłup ma:

- $(♥ + 2)$ ścian,
- $(3 \cdot ♥)$ krawędzi,
- $(2 \cdot ♥)$ wierzchołków.



4. Ustal, czy istnieje graniastosłup, który ma:

a) 9 ścian,

b) 14 wierzchołków,

c) 19 krawędzi,

d) 101 ścian,

e) 35 wierzchołków,

f) 99 krawędzi.

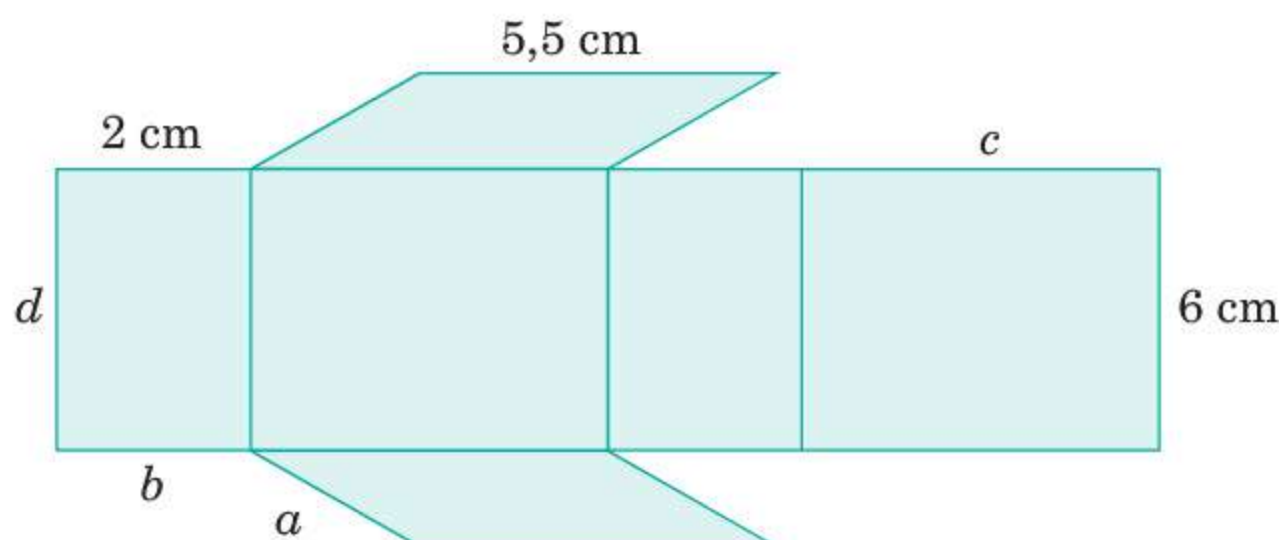
Jeśli dany graniastosłup istnieje, podaj jego nazwę.



Aby sprawdzić, czy istnieje graniastosłup, który ma 7 krawędzi, wykorzystaj zależności ze wskazówki w poprzednim zadaniu.

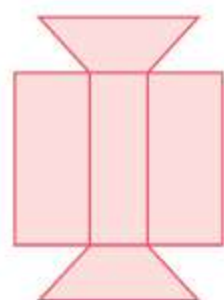
Jeśli $3 \cdot \heartsuit = 7$ krawędzi, to $\heartsuit = 7 : 3$. Liczba boków wielokąta, który jest podstawą graniastosłupa, musi być liczbą naturalną większą od 2, zatem graniastosłup, który ma 7 krawędzi, nie istnieje.

5. Ustal długości krawędzi oznaczonych na siatce graniastosłupa literami a , b , c oraz d .

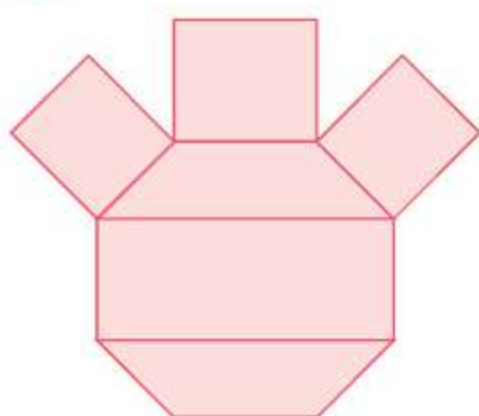


6. Które rysunki nie przedstawiają siatek graniastosłupa? Dlaczego?

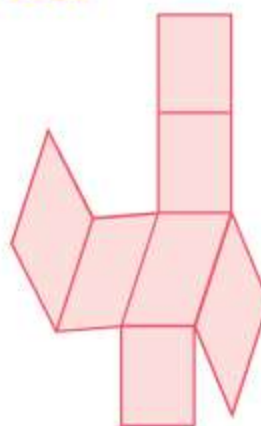
I.



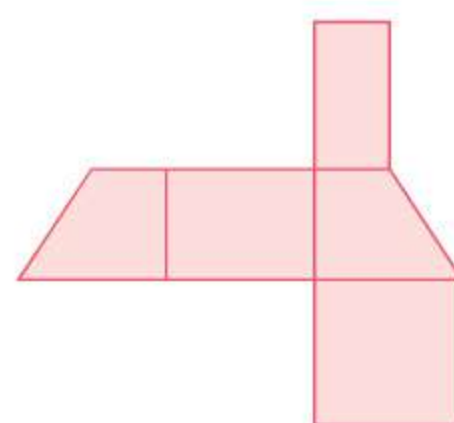
II.



III.

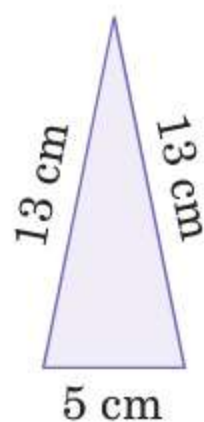


IV.

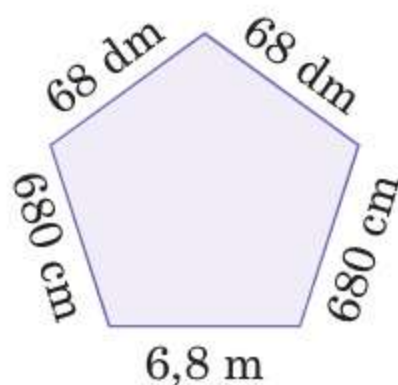


7. Na rysunku przedstawiono figurę, która znajduje się w podstawie pewnego graniastosłupa, oraz zapisano długość H jego krawędzi bocznej. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa.

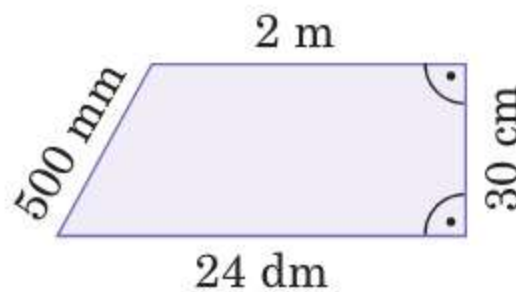
a) $H = 20$ cm



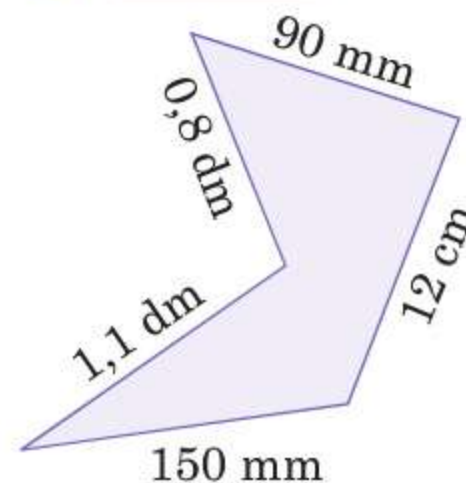
b) $H = 15$ m



c) $H = 5$ m



d) $H = 3$ cm



8. Narysuj:

- a) siatkę graniastosłupa, który ma krawędź boczną o długości 5 cm, a w podstawie trójkąt prostokątny o bokach długości 3 cm, 4 cm, 5 cm;
- b) graniastosłup, który ma w podstawie romb o boku długości 35 mm i którego krawędź boczna jest 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy.

9. Kuba zbudował z dwóch drutów jednakowej długości szkielety dwóch graniastosłupów. Z pierwszego drutu zbudował graniastosłup o krawędzi bocznej równej 15 cm i podstawie w kształcie równoległoboku o bokach długości 5 cm i 10 cm. Z drugiego drutu zbudował graniastosłup, który w podstawie miał trójkąt równoboczny o boku długości 10 cm. Wyznacz długość krawędzi bocznej graniastosłupa trójkątnego.

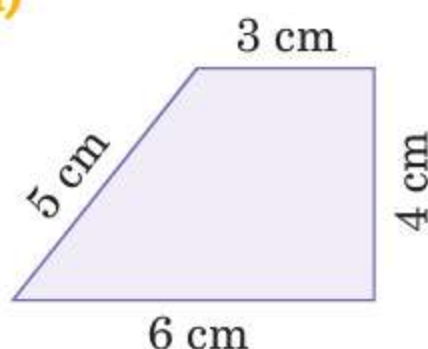
10. Wiadomo, że suma długości krawędzi pewnego graniastosłupa wynosi 1 m, krawędź boczna tego graniastosłupa ma długość 10 cm, a wszystkie krawędzie podstawy są tej samej długości, która wyrażona w centymetrach jest liczbą naturalną. Ustal nazwę tego graniastosłupa.



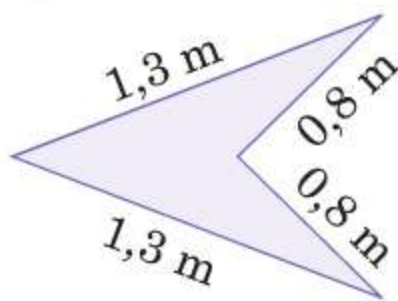
Sprawdź, co umiesz!

1. Krawędź boczna graniastosłupa ma długość 12 cm. Podaj sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że w jego podstawie znajduje się narysowana poniżej figura.

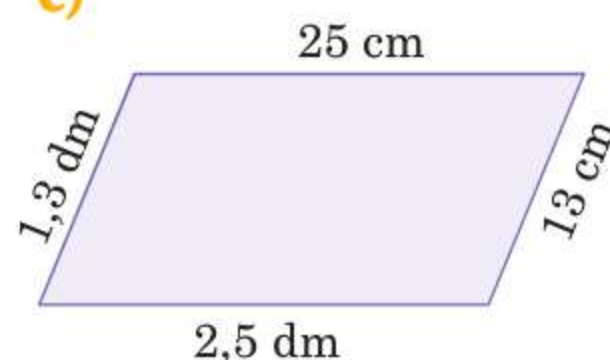
a)



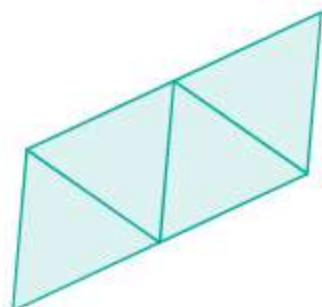
b)



c)



2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).



Rysunek obok przedstawia siatkę graniastosłupa trójkątnego.

P

F

Graniastosłup piętnastokątny ma dokładnie 30 wierzchołków.

P

F

Graniastosłup trójkątny ma trzy ściany w kształcie trójkąta.

P

F

3. Sebastian przygotował z drutu o długości 48 cm szkielet graniastosłupa czworokątnego. Długość każdej z krawędzi bocznych tej bryły wynosiła 6 cm. Jaka była długość krawędzi podstawy, jeśli wszystkie krawędzie podstawy miały jednakową długość? Narysuj siatkę tego graniastosłupa.

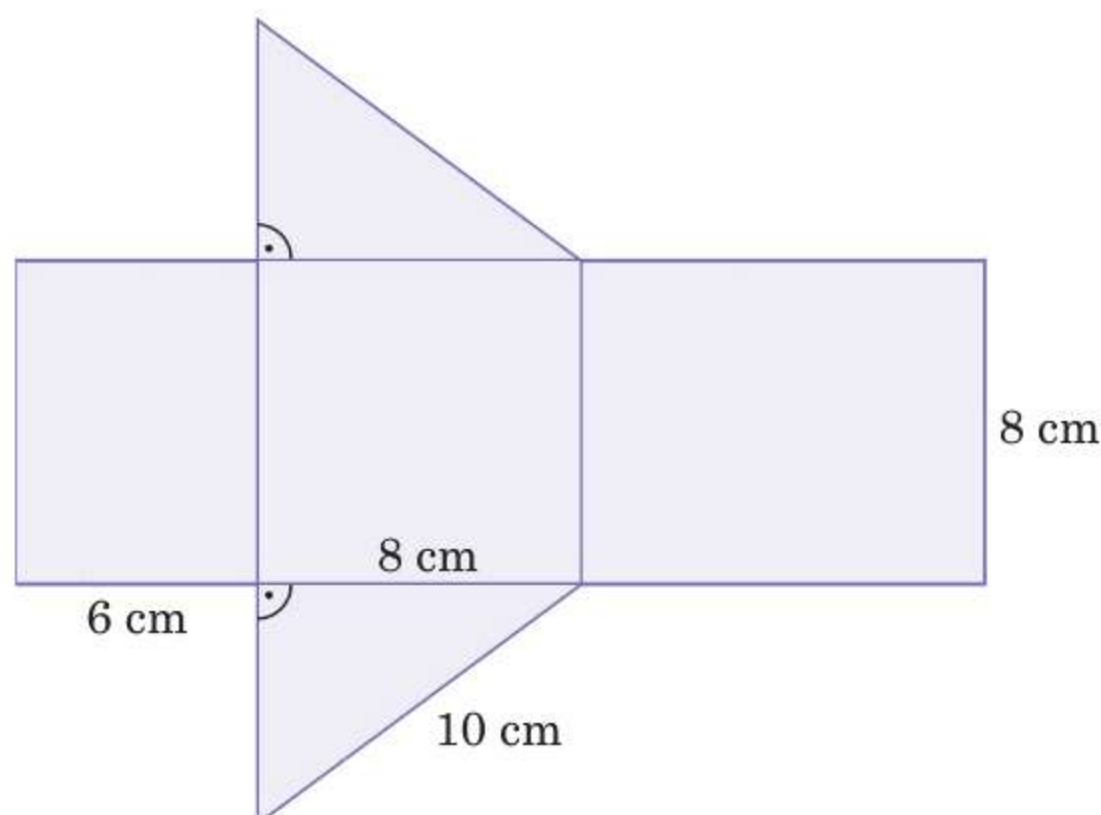
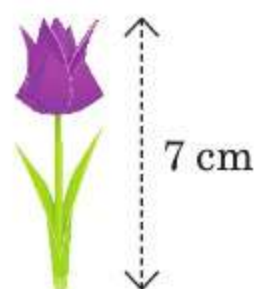
5. Pole powierzchni graniastosłupa

- ▶ Jak obliczać pole powierzchni graniastosłupa?
- ▶ Jak wyznaczać długości wybranych krawędzi graniastosłupa na podstawie jego pola powierzchni?



Odkrywaj!

1. To mój tulipan dla mamy. Teraz chciałbym zapakować go do własnoręcznie wykonanego pudełka w kształcie graniastosłupa trójkątnego. Przyjrzyj się siatce zaprojektowanego przeze mnie pudełka. Ile co najmniej centymetrów kwadratowych papieru potrzeba do przygotowania takiego pudełka?

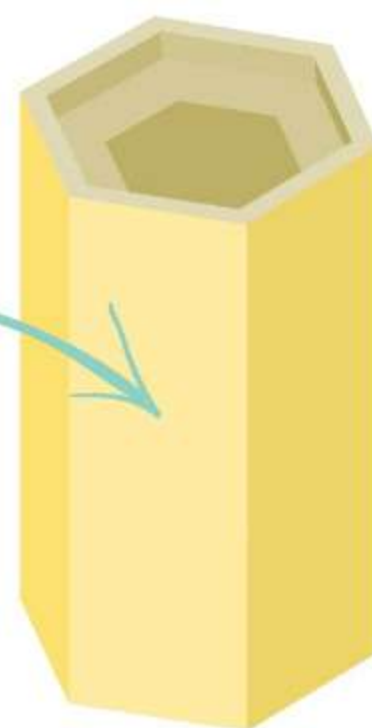


2. Wieża widokowa ma kształt graniastosłupa o podstawie sześciokąta o wszystkich bokach długości 4 m. Powierzchnia wszystkich ścian bocznych tej wieży wynosi 840 m^2 .

- a) Jaka wysokość ma ta wieża?
- b) Ile co najmniej opakowań farby potrzeba na dwukrotne pomalowanie wskazanej ściany bocznej tej wieży?



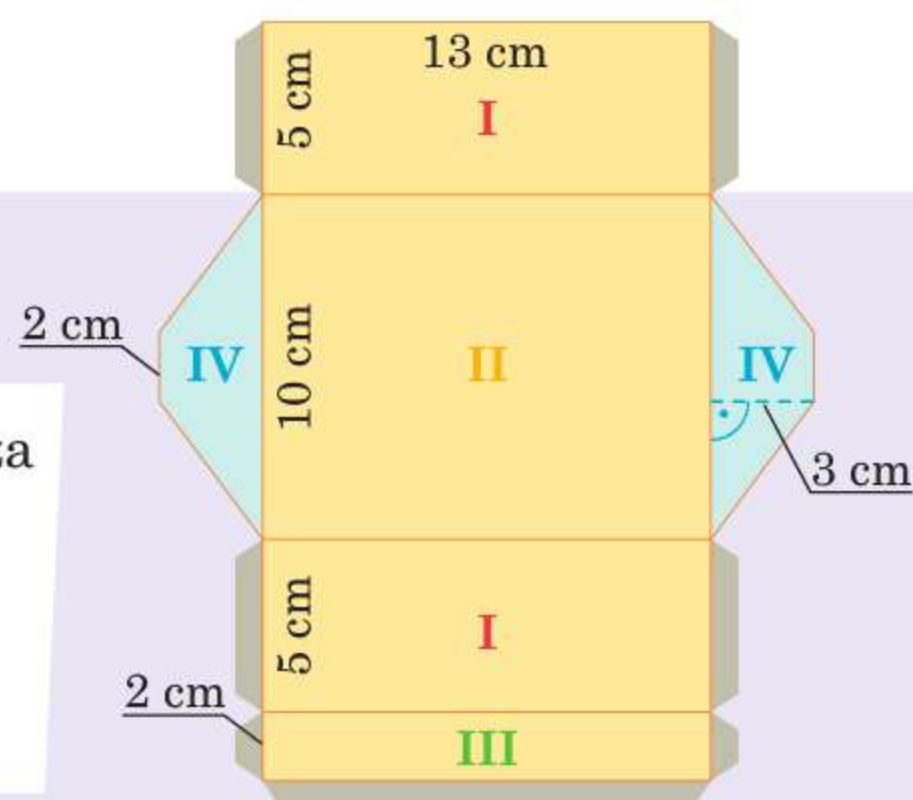
10 l/90 m^2





Analizuj!

Cezary uzupełnił kartonowe miasto o model ratusza w kształcie graniastosłupa o podstawie trapezu. Na podstawie zamieszczonej obok siatki wyznacz powierzchnię modelu ratusza. Podczas obliczeń pominiń zakładki potrzebne do sklejenia modelu.



Sposób 1

Oblicz pole powierzchni graniastosłupa jako sumę pól wszystkich jego ścian.

$$P = 2 \cdot P_I + P_{II} + P_{III} + 2 \cdot P_{IV}$$

$$P_I = 5 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} = 65 \text{ cm}^2$$

$$P_{II} = 10 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} = 130 \text{ cm}^2$$

$$P_{III} = 2 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} = 26 \text{ cm}^2$$

$$P_{IV} = \frac{(2 \text{ cm} + 10 \text{ cm}) \cdot 3 \text{ cm}}{2} = \frac{36 \text{ cm}^2}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

$$P = 2 \cdot 65 \text{ cm}^2 + 130 \text{ cm}^2 + 26 \text{ cm}^2 + 2 \cdot 18 \text{ cm}^2 = 322 \text{ cm}^2$$

Sposób 2

Oblicz pole powierzchni graniastosłupa jako **pole powierzchni całkowitej** P_c równe sumie podwojonego pola podstawy P_p tego graniastosłupa oraz jego pola powierzchni bocznej P_b .

Powierzchnia boczna graniastosłupa ma zawsze kształt prostokąta, którego jeden bok ma długość równą sumie długości krawędzi podstawy, a drugi bok ma długość wysokości (krawędzi bocznej) graniastosłupa.

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$$

$$P_p = \frac{(2 \text{ cm} + 10 \text{ cm}) \cdot 3 \text{ cm}}{2} = \frac{36 \text{ cm}^2}{2} = 18 \text{ cm}^2$$

$$P_b = (5 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 2 \text{ cm}) \cdot 13 \text{ cm} = 22 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} = 286 \text{ cm}^2$$

suma długości krawędzi
podstawy (obwód podstawy)

wysokość (długość
krawędzi bocznej)

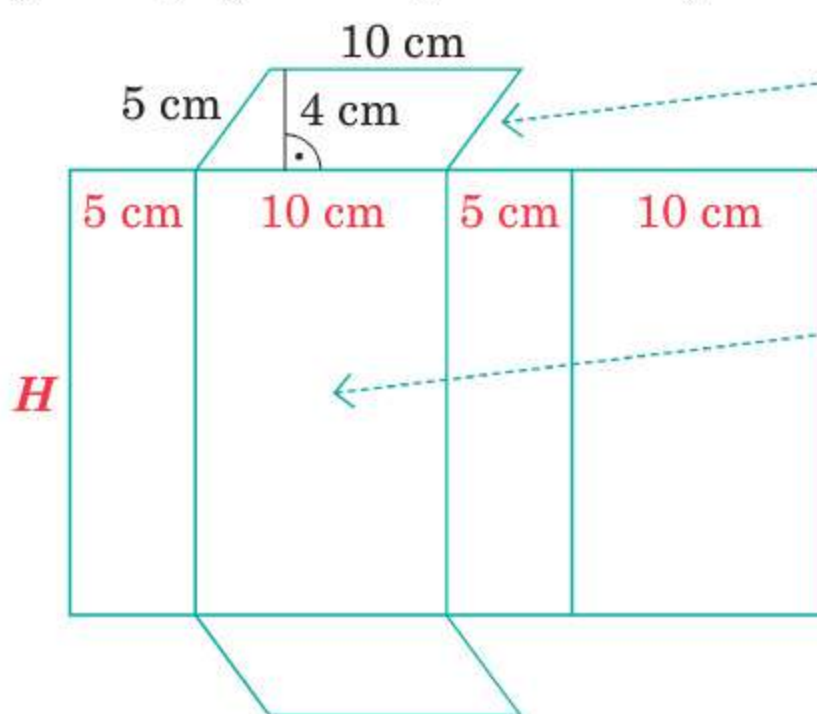
$$P_c = 2 \cdot 18 \text{ cm}^2 + 286 \text{ cm}^2 = 322 \text{ cm}^2$$

Powierzchnia modelu ratusza jest równa 322 cm^2 .

Kuba skonstruował model ośrodka zdrowia w kształcie graniastosłupa o powierzchni równej 530 cm^2 . Podstawę modelu stanowi równoległobok o bokach długości 5 cm i 10 cm oraz wysokości 4 cm . Wyznacz długość krawędzi bocznej tego modelu.



- 1 Wykonaj rysunek pomocniczy siatki tego graniastosłupa.



Podstawa ma kształt równoległoboku.

Powierzchnia boczna ma kształt prostokąta. Długość jednego boku jest równa długości krawędzi bocznej równej H , a długość drugiego boku stanowi sumę długości krawędzi podstawy, czyli $5 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 10 \text{ cm}$.

- 2 Zastanów się, jakie obliczenia wykonać, żeby wyznaczyć szukaną długość.

Wiesz, że powierzchnia boczna ma kształt prostokąta. Skorzystaj ze wzoru na pole prostokąta.

$$P_b = H \cdot (5 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 10 \text{ cm})$$

$$P_b = H \cdot 30 \text{ cm}$$

$$H = P_b : 30 \text{ cm}$$

Masz dane pole powierzchni całkowitej i długości krawędzi podstawy. Oblicz P_b ze wzoru na pole powierzchni całkowitej.

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b, \text{ więc } P_b = P_c - 2 \cdot P_p$$

$$P_c = 530 \text{ cm}^2$$

$$P_p = 10 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 40 \text{ cm}^2$$

$$P_b = 530 \text{ cm}^2 - 2 \cdot 40 \text{ cm}^2 = 450 \text{ cm}^2$$

Podstaw wyznaczoną wartość P_b do wzoru i oblicz szukaną długość.

$$H = P_b : 30 \text{ cm}$$

$$H = 450 \text{ cm}^2 : 30 \text{ cm}$$

$$H = 15 \text{ cm}$$

Krawędź boczna modelu ośrodka zdrowia ma 15 cm długości.

Pole powierzchni całkowitej dowolnego graniastoslupa stanowi sumę pól wszystkich jego ścian (dwóch **podstaw** oraz **wszystkich ścian bocznych**).

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$$

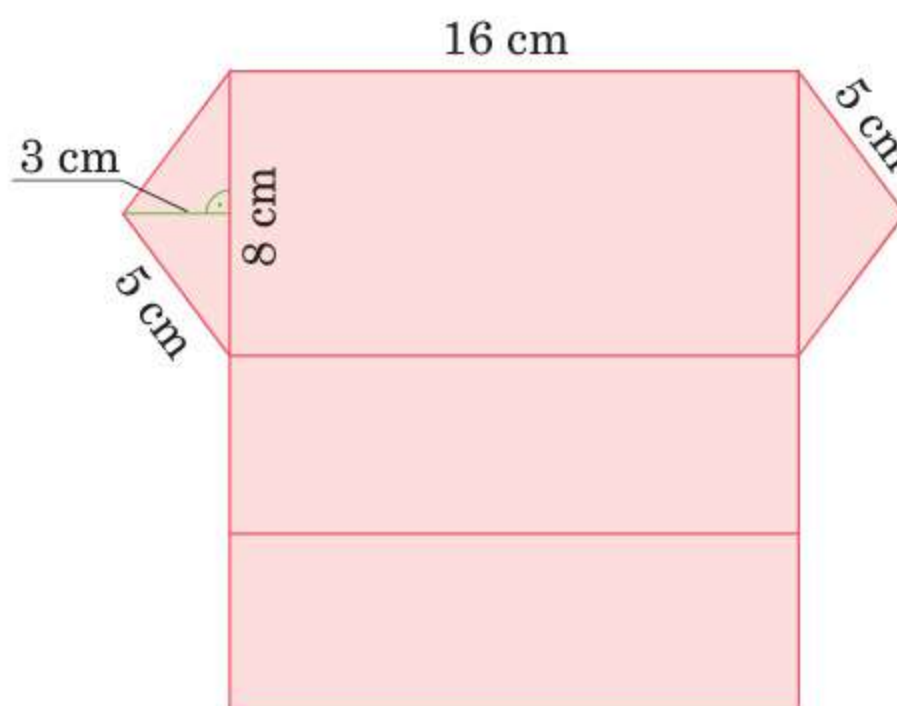
P_c – pole powierzchni całkowitej
 P_p – pole jednej podstawy
 P_b – pole powierzchni bocznej



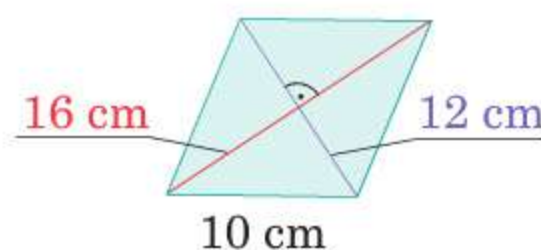
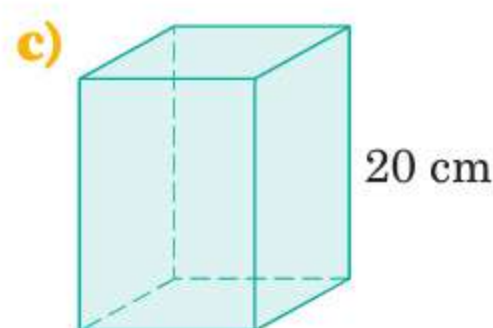
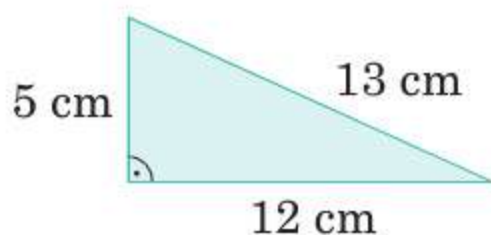
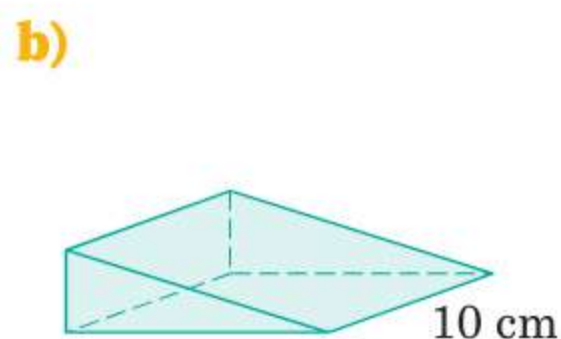
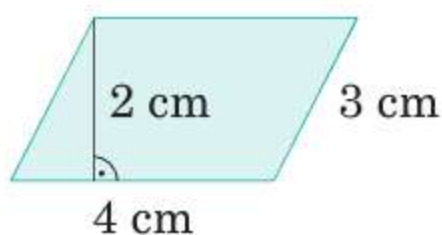
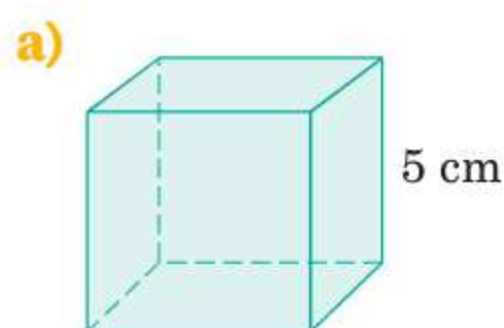
Poćwicz!

1. Na podstawie zamieszczonej obok siatki graniastoslupa trójkątnego oblicz:

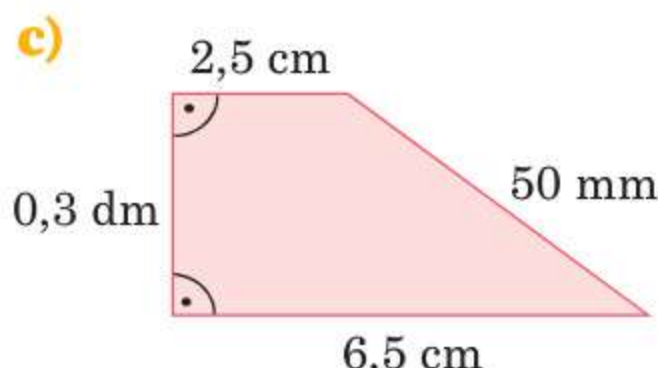
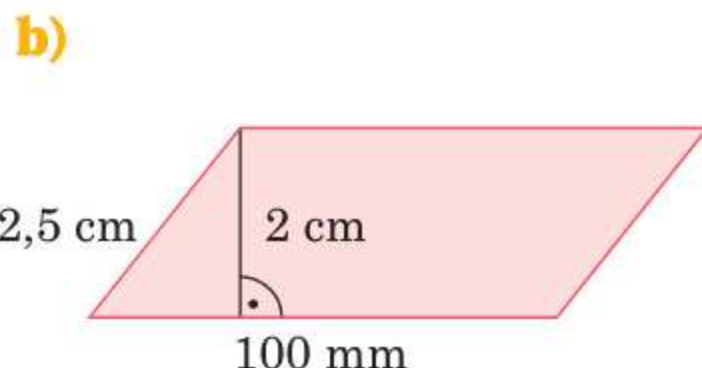
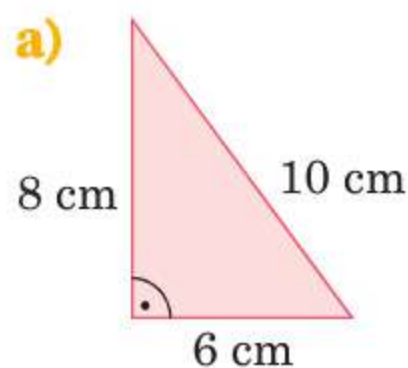
- pole podstawy,
- pole powierzchni bocznej,
- pole powierzchni całkowitej.



2. Oblicz pole podstawy, pole powierzchni bocznej oraz pole powierzchni całkowitej graniastoslupa o podanej podstawie.



3. Oblicz pole podstawy, pole powierzchni bocznej oraz pole powierzchni całkowitej graniastoslupa o podstawie przedstawionej na rysunku oraz wysokości równej 13 cm.



4. Pole powierzchni całkowitej pewnego graniastoslupa wynosi 80 m^2 , a pole powierzchni bocznej 24 m^2 . Ile wynosi pole podstawy tego graniastoslupa?

5. Pole powierzchni graniastoslupa

5. Pole powierzchni bocznej graniastosłupa dziewięciokątnego jest dziewięć razy większe niż pole jego podstawy, które wynosi 13 dm^2 . Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

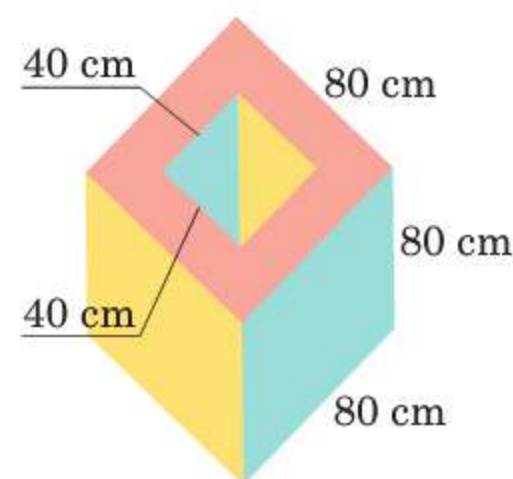
6. Akwarium ma kształt graniastosłupa, którego podstawę stanowi prostokąt o wymiarach $120 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$. Wysokość akwarium to 3 dm . Ile metrów kwadratowych szkła należy przygotować, aby zbudować takie akwarium? Pamiętaj, że górna podstawa nie jest szklana.

7. Pewien graniastosłup sześciokąty oraz sześcian mają jednakowe pola powierzchni całkowitej równe 216 cm^2 . Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Krawędź tego sześcianu ma długość 36 cm .	P	F
Jeśli długość krawędzi bocznej tego graniastosłupa jest równa 6 cm , to krawędź jego podstawy również ma długość 6 cm .	P	F

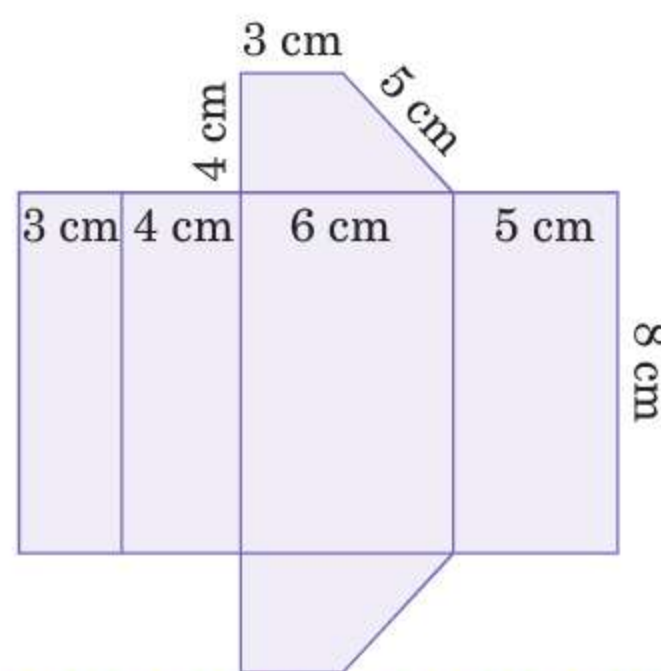


8. Na podstawie zamieszczonego obok rysunku oblicz pole powierzchni całkowitej bryły o takim kształcie.



Sprawdź, co umiesz!

1. Na podstawie rysunku wybierz właściwe uzupełnienie zdań spośród **A** i **B** oraz **C** i **D**.
- I. Pole podstawy tego graniastosłupa wynosi
A. 144 cm^2 . **B.** 18 cm^2 .
- II. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa wynosi
C. 162 cm^2 . **D.** 180 cm^2 .



2. Jaka powierzchnię całkowitą ma skrzynia w kształcie graniastosłupa, który w podstawie ma trójkąt prostokątny o bokach długości 5 dm , 12 dm i 13 dm ? Krawędź boczna tego graniastosłupa jest równa $2,5 \text{ m}$.
3. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa, który w podstawie ma romb o przekątnych długości 6 cm i 8 cm . Krawędź boczna tego graniastosłupa ma długość 10 cm , a suma długości wszystkich krawędzi to 80 cm .

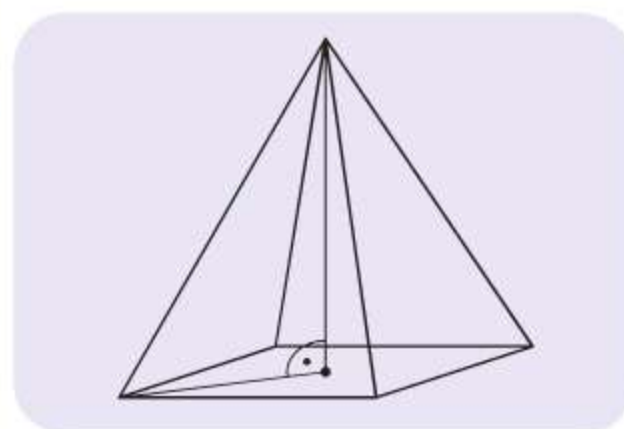
6. Ostrosłupy proste i ich siatki

- ▶ Jakie własności mają ostrosłupy proste?
- ▶ Jak narysować ostrosłup prosty o podstawie o zadany kształcie?
- ▶ Jak narysować siatkę ostrosłupa prostego?



Odkrywaj!

1. Typowa piramida egipska ma kształt ostrosłupa o podstawie kwadratu. Na świecie można znaleźć wiele budowli zainspirowanych tym kształtem. Oto niektóre z nich.



- a) Ile ścian ma każda z budowli? Ile krawędzi? Ile wierzchołków?
- b) Jakiego kształtu są ściany tych budowli?
- c) Wskaż w swoim otoczeniu obiekty przypominające kształtem ostrosłupy o podstawie kwadratu lub innego wielokąta.

2. Przygotuj 6 patyczków identycznej długości oraz 4 kulki plasteliny, a następnie skonstruuj szkielet bryły, której ściany są wyłącznie trójkątami.



Analizuj!

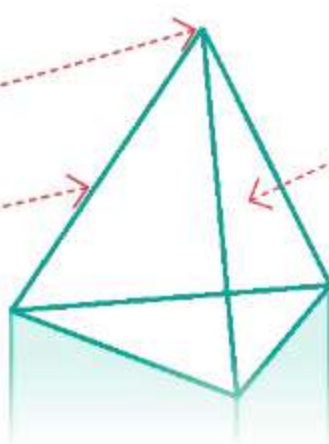
Do niektórych budynków tworzących kartonowe miasto zostały doklejone dachy. Bruno zaprojektował dachy w kształcie graniastosłupów, a Zosia przygotowała dachy w kształcie ostrosłupów.



Model dachu wieży zegarowej ma kształt ostrosłupa trójkątnego.

4 wierzchołki

6 krawędzi

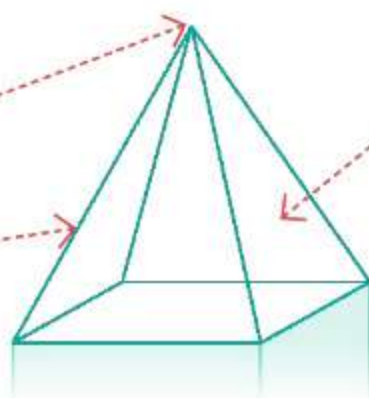


4 ściany w kształcie trójkąta:
1 podstawa i 3 ściany boczne
o wspólnym wierzchołku

Model dachu szkoły ma kształt ostrosłupa czworokątnego.

5 wierzchołków

8 krawędzi

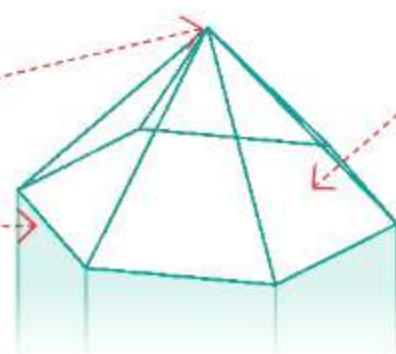


5 ścian: 1 podstawa w kształcie
równoległoboku oraz 4 ściany
boczne w kształcie trójkąta
i wspólnym wierzchołku

Model dachu centrum sportowego ma kształt ostrosłupa sześciokątnego.

7 wierzchołków

12 krawędzi



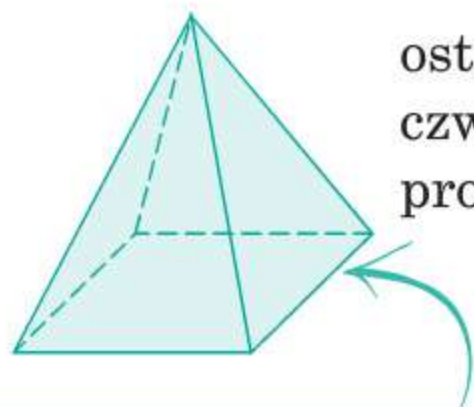
7 ścian: 1 podstawa w kształcie
sześciokąta oraz 6 ścian bocznych
w kształcie trójkąta i wspólnym
wierzchołku



Ile ścian, krawędzi oraz wierzchołków ma ostrosłup o podstawie kwadratu? A ostrosłup o podstawie prostokąta? A ostrosłup o podstawie trapezu? A dowolny ostrosłup czworokątny?

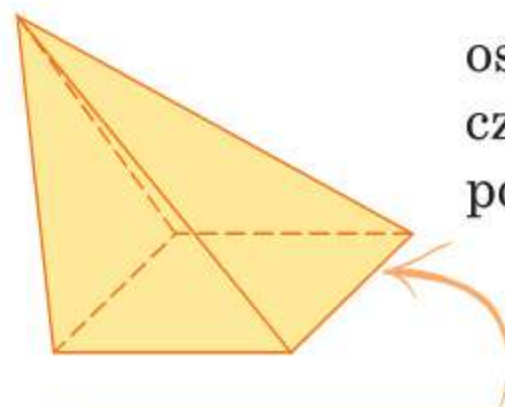
Ostrosłup ma jedną podstawę będącą dowolnym wielokątem oraz ściany boczne będące trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Nazwy ostrosłupów odwołują się do liczby kątów wielokąta w podstawie, np. ostrosłup **pięciokątny**, **sześciokątny**, **stukątny**.



ostrosłup
czworokątny
prosty

Ostrosłup, którego krawędzie boczne mają taką samą długość, to **ostrosłup prosty**.



ostrosłup
czworokątny
pochyły

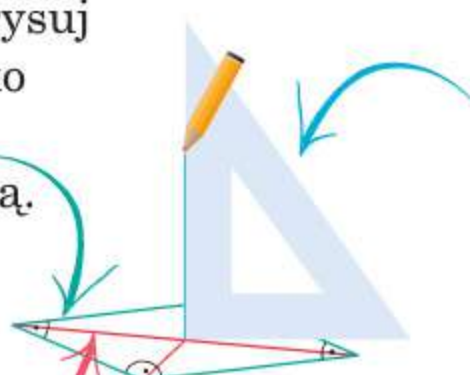
Ostrosłup, który nie spełnia tego warunku, to **ostrosłup pochyły**.

W klasie 5 **będziemy zajmować się tylko ostrosłupami prostymi**, dlatego w kolejnych lekcjach będziemy pomijać określenie „prosty”.

Jak narysować ostrosłup prosty, np. o podstawie kwadratu?

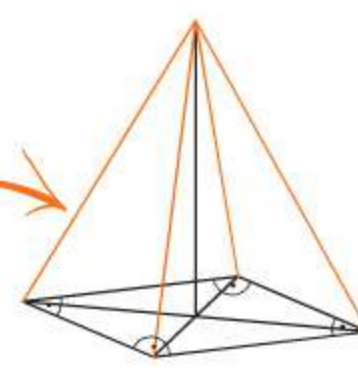
Podstawę narysuj w rzucie – lekko spłaszczoną i przekrzywioną.

Narysuj **przekątne podstawy**.

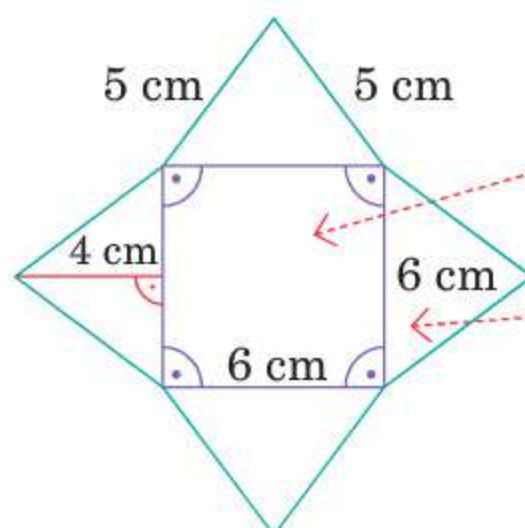
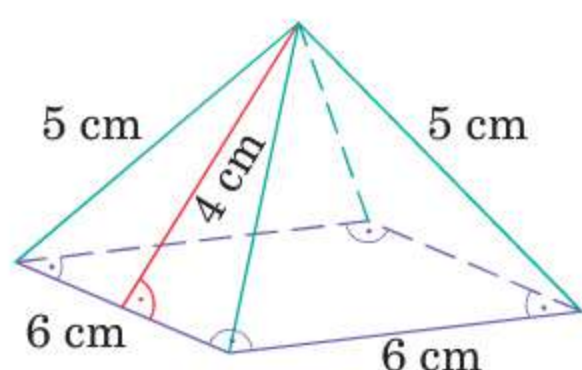


Z punktu przecięcia przekątnych poprowadź **wysokość** ostrosłupa.

Narysuj **krawędzie boczne** łączące wierzchołki podstawy z końcem wysokości.



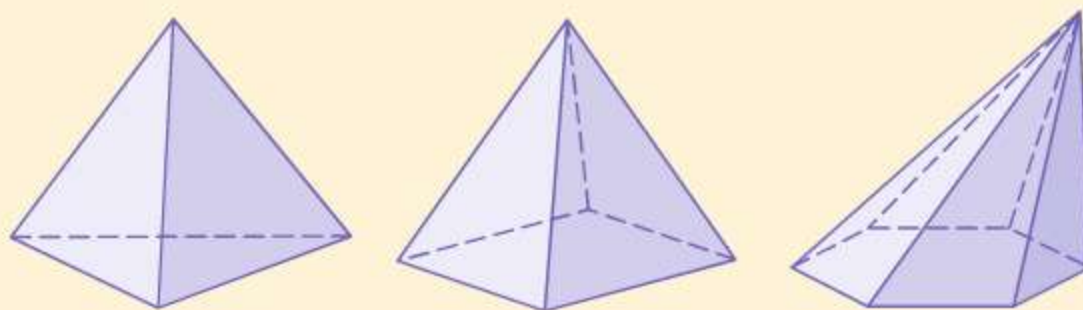
Jak narysować siatkę ostrosłupa o podanych wymiarach?



Zacznij od narysowania **podstawy**.

Dorysuj **ściany boczne**.

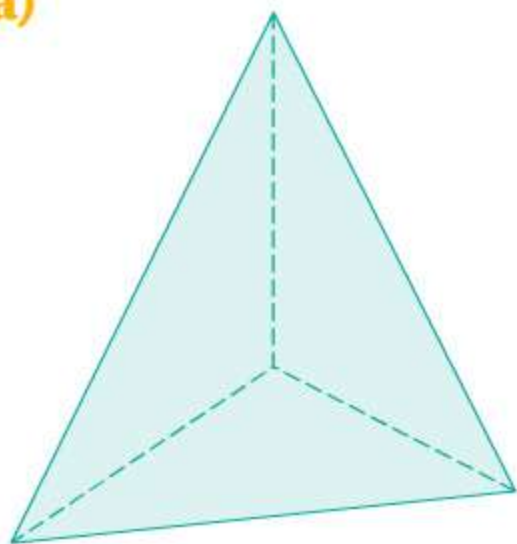
Ostrosłup to figura przestrzenna mająca podstawę będącą dowolnym wielokątem oraz ściany boczne będące trójkątami, które mają wspólny wierzchołek.



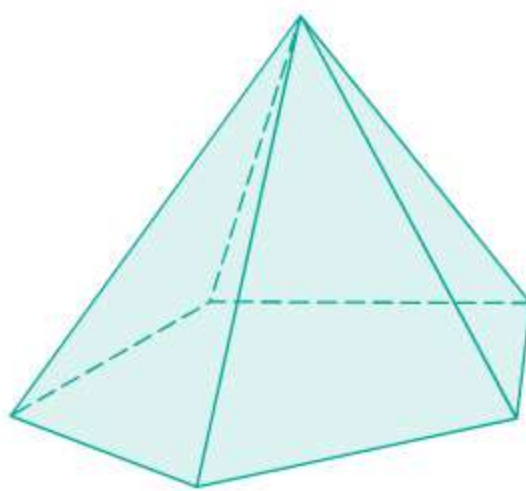
Poćwicz!

1. Nazwij ostrosłup. Podaj, ile ma ścian, krawędzi i wierzchołków.

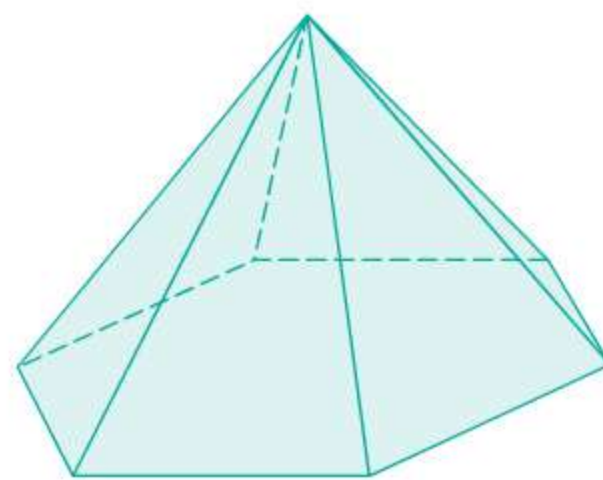
a)



b)

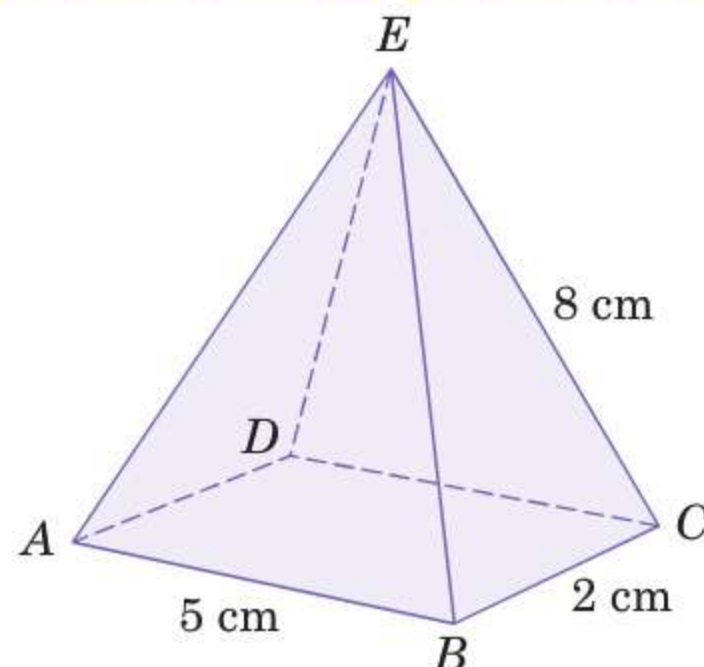


c)



2. Przyjrzyj się ostrosłupowi przedstawionemu na rysunku obok, a następnie:

- nazwij ten ostrosłup;
- wypisz nazwy wszystkich jego krawędzi podstawy, krawędzi bocznych, ścian bocznych oraz jego podstawy;
- podaj długości krawędzi DC , DE i AD .



3. Wyznacz liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków ostrosłupa:

- ośmiokątnego,
- trzynastokątnego,
- dwudziestokątnego,
- dwustukątnego.

Jeżeli ♥ to liczba boków wielokąta, który jest podstawą, to ostrosłup ma:

- $(♥ + 1)$ ścian,
- $(2 \cdot ♥)$ krawędzi,
- $(♥ + 1)$ wierzchołków.



4. Ustal, czy istnieje ostrosłup, który ma:

- a) 8 ścian,
- b) 13 wierzchołków,
- c) 18 krawędzi,
- d) 100 ścian,
- e) 30 wierzchołków,
- f) 101 krawędzi.

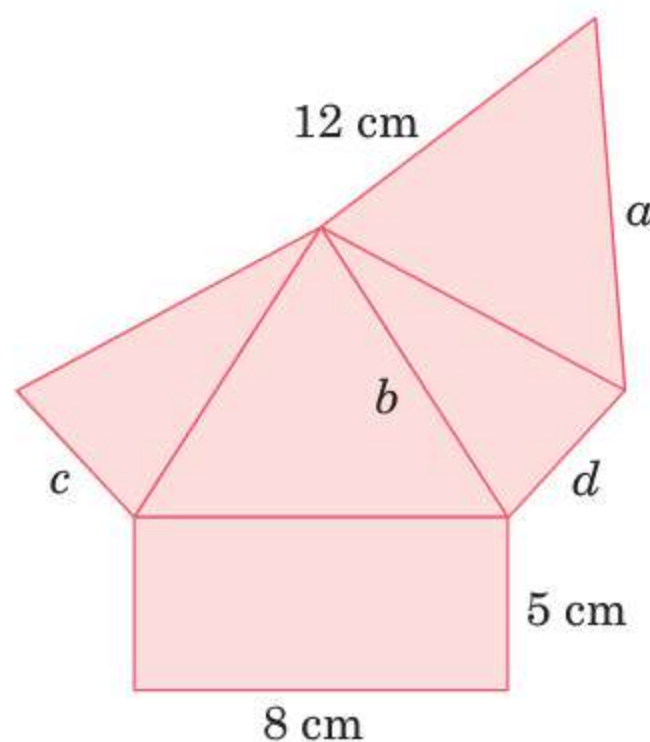
Jeśli dany ostrosłup istnieje, podaj jego nazwę.

Aby sprawdzić, czy istnieje ostrosłup, który ma 7 krawędzi, wykorzystaj zależności ze wskazówki w poprzednim zadaniu.

Jeśli $2 \cdot \heartsuit = 7$ krawędzi, to $\heartsuit = 7 : 2$. Liczba boków wielokąta, który jest podstawą ostrosłupa, musi być liczbą naturalną większą od 2, zatem ostrosłup, który ma 7 krawędzi, nie istnieje.

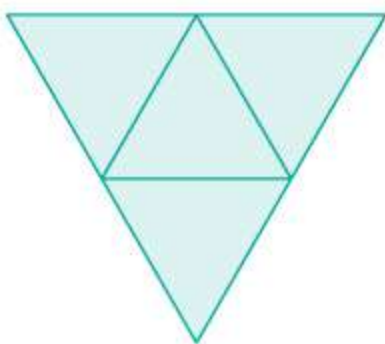


5. Ustal długości boków oznaczonych na siatce ostrosłupa literami a , b , c oraz d .

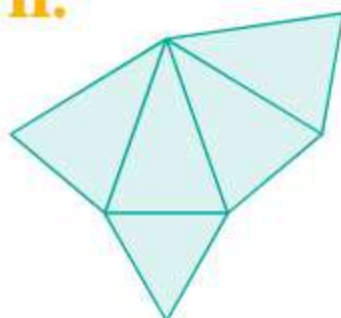


6. Które rysunki nie przedstawiają siatki ostrosłupa? Dlaczego?

I.



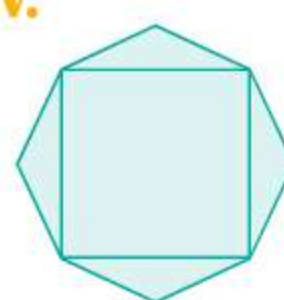
II.



III.



IV.



7. Narysuj:

- a) siatkę ostrosłupa, którego podstawę stanowi kwadrat o boku długości 6 cm, a ściany boczne mają kształt trójkąta o wysokości 4 cm;
- b) ostrosłup czworokątny, który w podstawie ma trapez równoramienny.

8. Ściany boczne ostrosłupa sześciokątnego są trójkątami równoramiennymi o ramieniu długości 13 cm. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosi 138 cm. Jaka długość ma krawędź podstawy, jeśli sześciokąt w podstawie ma wszystkie boki tej samej długości?

9. Dwa modele ostrosłupów trójkątnych, które mają wszystkie krawędzie tej samej długości równej 3 cm, sklejo ze sobą podstawami. Ile wynosi suma długości wszystkich krawędzi tak powstałej bryły?



10. Cezary wykonał szkielec ostrosłupa ośmiokątnego, którego wszystkie krawędzie podstawy miały jednakową długość. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa wynosiła 1,6 m. Każda z krawędzi bocznych tej bryły była trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy. Jaka długość miały krawędzie tego ostrosłupa?



A to ciekawe

Kostki do gier fabularnych często mają kształt **czworościanu foremnego**, czyli bryły, która ma 4 ściany w kształcie trójkąta równobocznego.

Przygotuj i sklej siatkę czworościanu foremnego o krawędzi długości 5 cm.



Sprawdź, co umiesz!

1. Ozdobny pojemnik na herbatę ma kształt ostrosłupa trójkątnego o krawędzi bocznej długości 10 cm. Każda krawędź podstawy ma długość 8 cm. Podaj:
- liczbę ścian tego pojemnika,
 - liczbę wierzchołków tego pojemnika,
 - liczbę krawędzi tego pojemnika,
 - sumę długości wszystkich krawędzi tego pojemnika.

2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Ostrosłup sześciokątny ma 7 ścian bocznych.	P	F
Ostrosłup, który ma 10 krawędzi, ma dokładnie 5 wierzchołków.	P	F
W ostrosłupie 15-kątnym suma liczby krawędzi i wierzchołków wynosi 46.	P	F

3. Pewien ostrosłup ma cztery ściany oraz wszystkie krawędzie tej samej długości. Oblicz długość krawędzi tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że suma długości wszystkich jego krawędzi wynosi 300 cm.

PODSUMOWANIE DZIAŁU IX

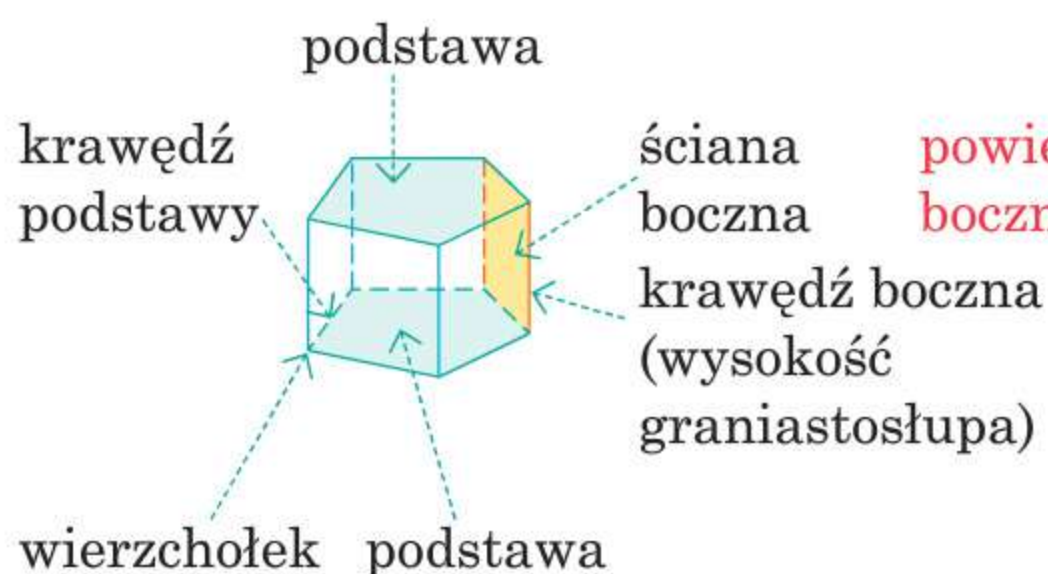
W świecie figur przestrzennych

Powtórz wiadomości

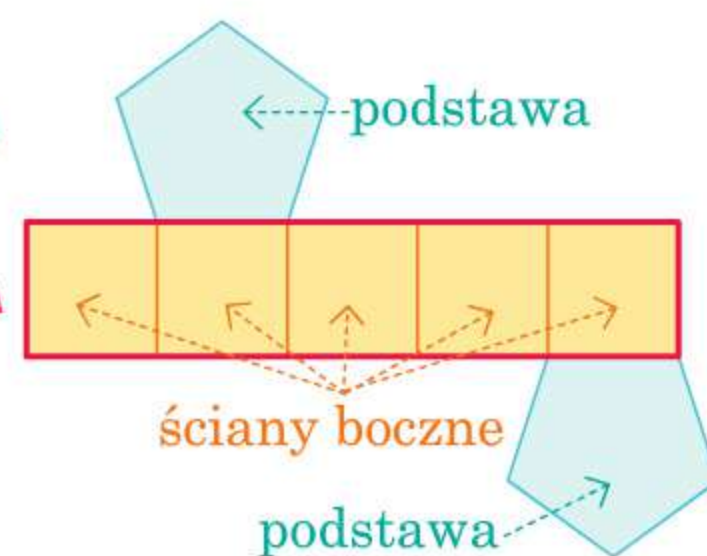
Graniastosłupy

Graniastosłup to figura przestrzenna, która ma dwie równoległe i identyczne podstawy będące wielokątami oraz ściany boczne będące równoległobokami.

graniastosłup pięciokątny



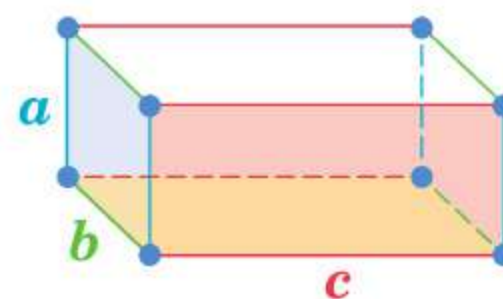
siatka graniastosłupa pięciokątnego



Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa P_c to suma pól wszystkich jego ścian, czyli pól dwóch podstaw P_p i pola powierzchni bocznej P_b .

$$P_c = 2 \cdot P_p + P_b$$

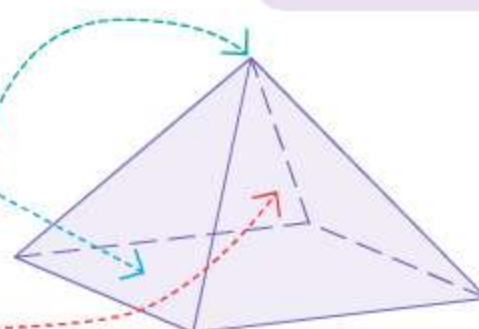
Prostopadłościan to graniastosłup czworokątny, który w podstawie ma prostokąt. Wszystkie jego ściany są prostokątami prostopadłymi do podstawy.



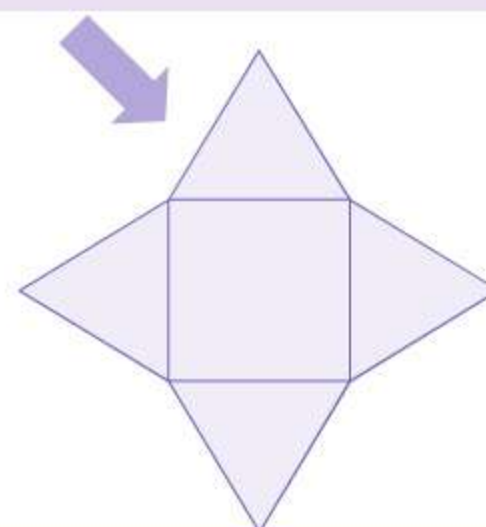
Ostrosłupy

Ostrosłup to figura przestrzenna, która **ma jedną podstawę będącą dowolnym wielokątem** oraz **ściany boczne będące trójkątami o wspólnym wierzchołku**.

siatka ostrosłupa czworokątnego



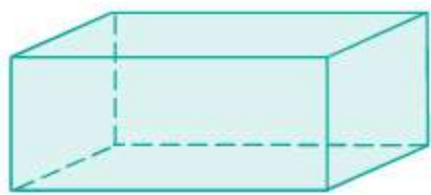
ostrosłup czworokątny



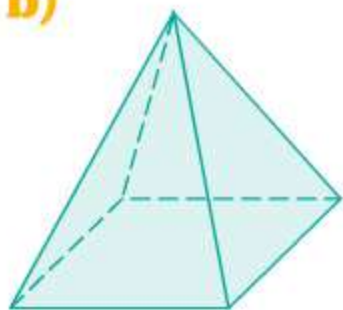
Poćwicz przed sprawdzianem

1. Nazwij podaną bryłę. Ustal liczbę jej ścian, krawędzi i wierzchołków.

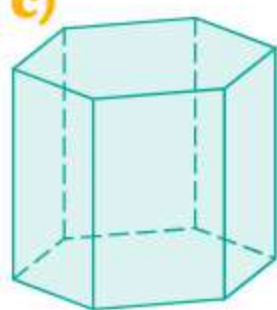
a)



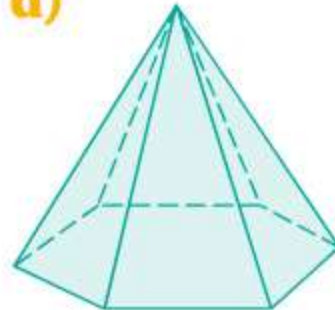
b)



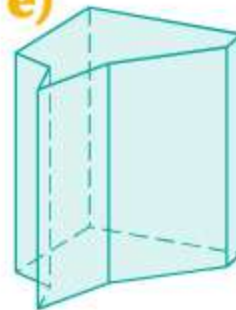
c)



d)

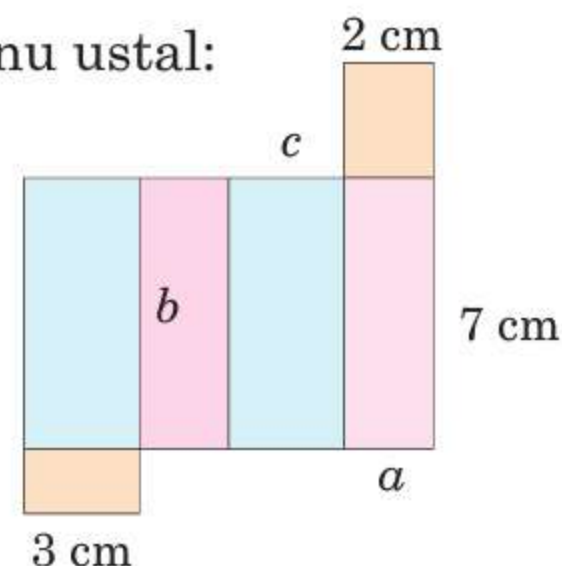


e)



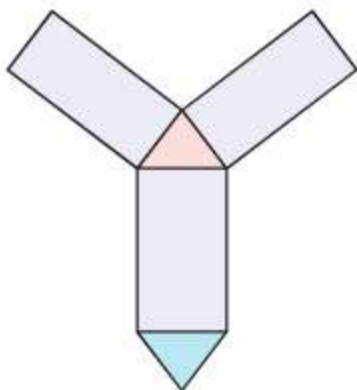
2. Na podstawie zamieszczonej obok siatki prostopadłościanu ustal:

- długości odcinków oznaczonych literami a , b , c ;
- sumę długości krawędzi tego prostopadłościanu;
- pole powierzchni tego prostopadłościanu.

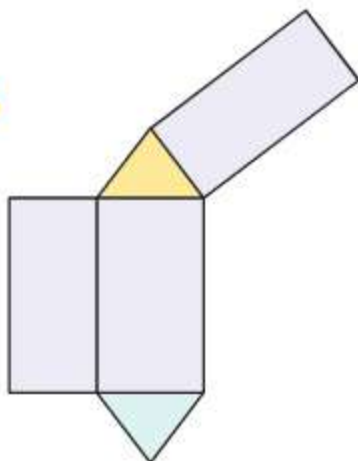


3. Który rysunek nie przedstawia siatki graniastosłupa trójkątnego?

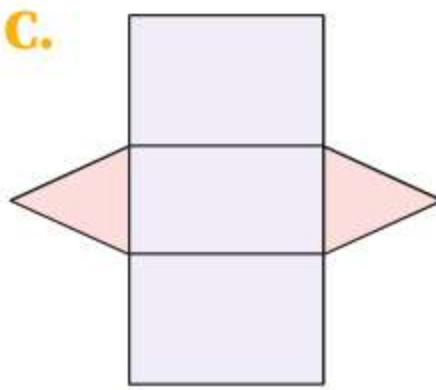
A.



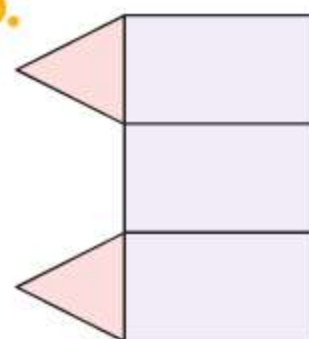
B.



C.

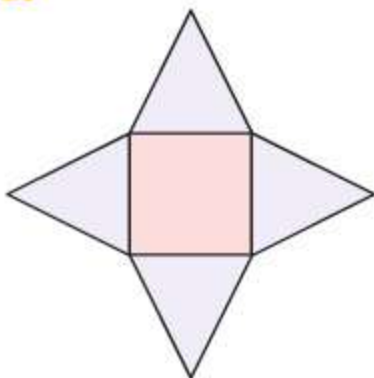


D.

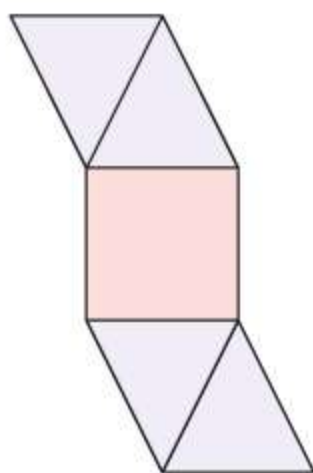


4. Który rysunek przedstawia siatkę ostrosłupa trójkątnego?

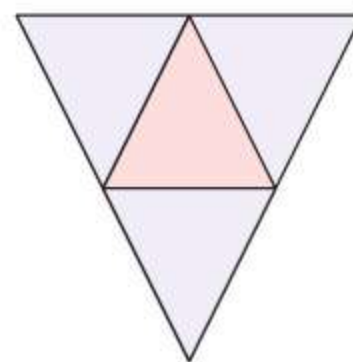
A.



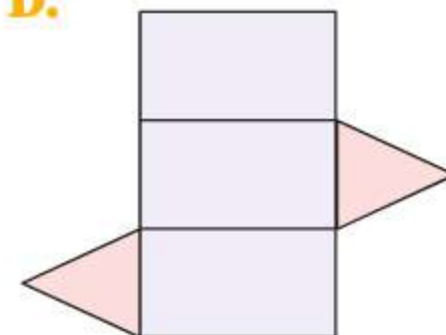
B.



C.



D.

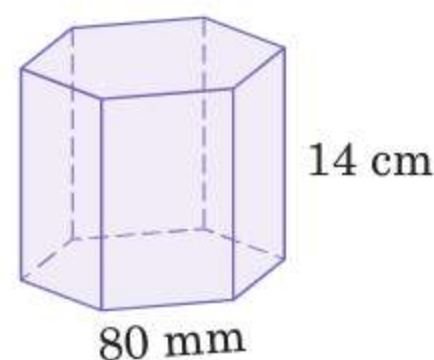


5. Narysuj siatkę:

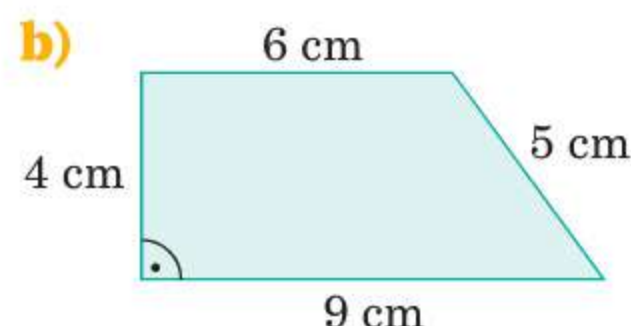
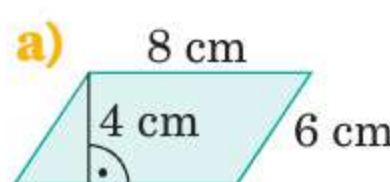
- prostopadłościanu o wymiarach $3,5 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$;
- graniastosłupa o podstawie trójkąta prostokątnego o wymiarach $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ oraz krawędzi bocznej, która jest o $1 \text{ cm } 5 \text{ mm}$ krótsza od najdłuższej krawędzi podstawy;
- ostrosłupa, który w podstawie ma kwadrat o boku długości 6 cm i wszystkie krawędzie boczne o długości 5 cm .

6. Przedstawiony obok graniastosłup ma w podstawie wielokąt o bokach jednakowej długości. Wszystkie krawędzie boczne tego graniastosłupa również mają taką samą długość. Oblicz:

- a) sumę długości krawędzi tego graniastosłupa,
b) pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

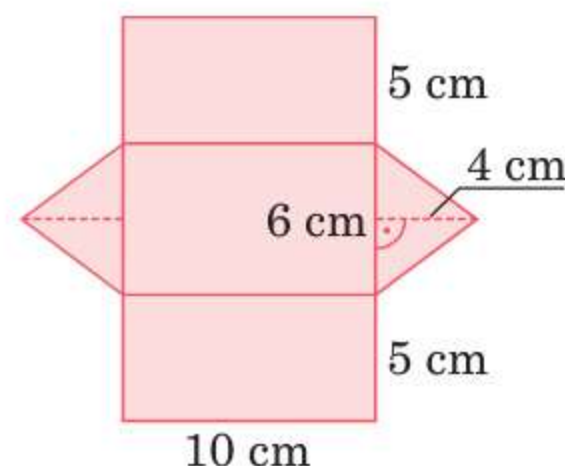


7. Oblicz pole powierzchni graniastosłupa, którego krawędź boczna ma długość 18 cm, a podstawa ma kształt i wymiary takie jako na rysunku obok.



8. Na podstawie zamieszczonej obok siatki oblicz:

- a) sumę długości krawędzi w tym graniastosłupie,
b) pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa,
c) pole powierzchni całkowitej.

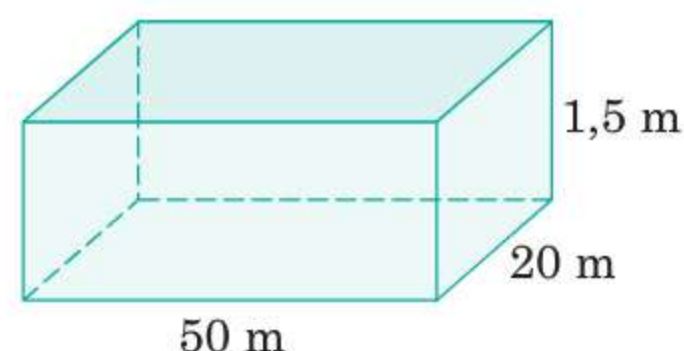
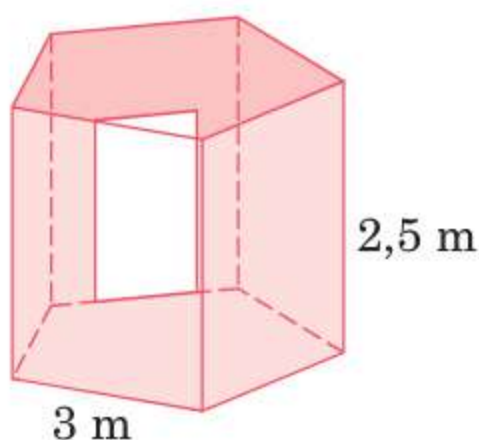


9. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Graniastosłup, który ma 8 wierzchołków, ma 12 krawędzi.	P	F
Ostrosłup, który ma 10 krawędzi bocznych, ma 10 wierzchołków.	P	F
Nie istnieje ostrosłup, który ma 21 krawędzi.	P	F
Graniastosłup, który ma 21 krawędzi, ma 9 ścian.	P	F

10. Właściciel hotelu chce wyłożyć kafelkami dno i ściany odkrytego basenu oraz pomalować zewnętrzne ściany znajdującej się w pobliżu basenu przebieralni. Basen ma kształt prostopadłościanu. Przebieralnia ma kształt graniastosłupa pięciokątnego, w którym krawędzie podstawy są jednakowej długości.

- a) Ile trzeba zapłacić za farbę przeznaczoną do pomalowania ścian przebieralni, jeśli farba sprzedawana jest w pojemnikach jednolitrowych w cenie 28,95 zł/szt. i jeden taki pojemnik wystarcza na pomalowanie powierzchni równej 15 m^2 , trzeba położyć dwie warstwy farby, a powierzchnia drzwi wynosi 2 m^2 ?
- b) Ile trzeba zapłacić za kafelki, jeśli jedno ich opakowanie kosztuje 167,59 zł i wystarcza na pokrycie powierzchni równej 5 m^2 ?



Podejmij wyzwanie

Drogi Uczniu!

Rozwiąż kolejne zadania, a dowiesz się, jakimi wyrazami uzupełnić poniższy tekst, żeby opisywał sylwetkę wybitnej badaczki dinozaurów i pradaunych krokodyli. Powodzenia!



1 (1930–2008) to wybitna polska **2**. Pierwsze badania prowadziła w **3**. Brała udział w polsko-mongolskich wyprawach na pustynię **4**, gdzie w słońcu może być nawet **5** °C! Efektem tych badań było opisanie kilkunastu nowych gatunków dinozaurów oraz ssaków pierwotnych. W Mongolii odkryła szczątki dinozaura, którego nazwała **6**, czyli „strasznoręki”. Miał on potężne kończyny długości 2,5 m. Jej najsłynniejsze odkrycie to *Gallimimus*, czyli „udający kurę”. Dinozaur przypominał strusia, ale był od niego dwa razy większy. Szacuje się, że mógł biegać z prędkością nawet 70 km/h. Monografia *The Dinosauria*, której jest współautorką, stanowi jedną z najczęściej cytowanych prac z tej dziedziny.

1. O ile więcej patyczków zużyje się do skonstruowania szkieletu graniastosłupa sześciokątnego niż do skonstruowania szkieletu ostrosłupa dziewięciokątnego?

O 6 więcej.	O 3 więcej.	0.
Maria Konopnicka	Zofia Kielan-Jaworowska	Halszka Osmólska

2. Oceń, czy podane zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

Istnieje graniastosłup, który ma 13 ścian bocznych.	P	F
Ostrosłup sześciokątny ma dokładnie 6 wierzchołków.	P	F
Graniastosłup czworokątny ma o 4 krawędzie więcej niż ostrosłup czworokątny.	P	F
Jeśli ostrosłup ma w podstawie siedmiokąt, to suma liczby ścian, wierzchołków i krawędzi jest parzysta.	P	F

P, F, P, P	F, F, P, P	P, F, F, P
paleontolożka	zoolożka	antropolożka

3. Firma Matratzen produkuje piankowe materace gimnastyczne. Ile centymetrów kwadratowych materiału potrzeba na uszycie pokrowca składanego materaca takiego jak na rysunku poniżej, jeśli wiadomo, że na zakładki i zszycia potrzeba 3000 cm^2 materiału?



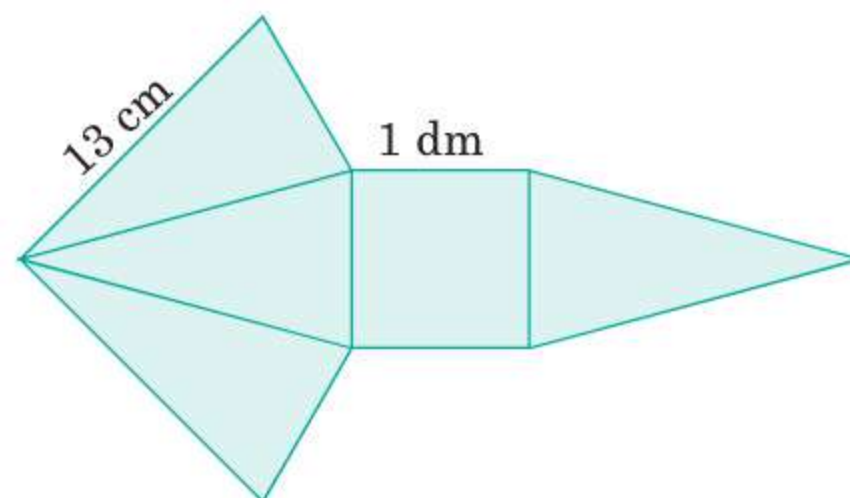
15 000 cm^2	24 000 cm^2	27 000 cm^2
Bieszczadach	Górach Stołowych	Górach Świętokrzyskich

4. Pudełko ma kształt sześcianu o polu powierzchni równym $29\,400 \text{ cm}^2$. Czy można je ustawić na półce o wymiarach $60 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$?

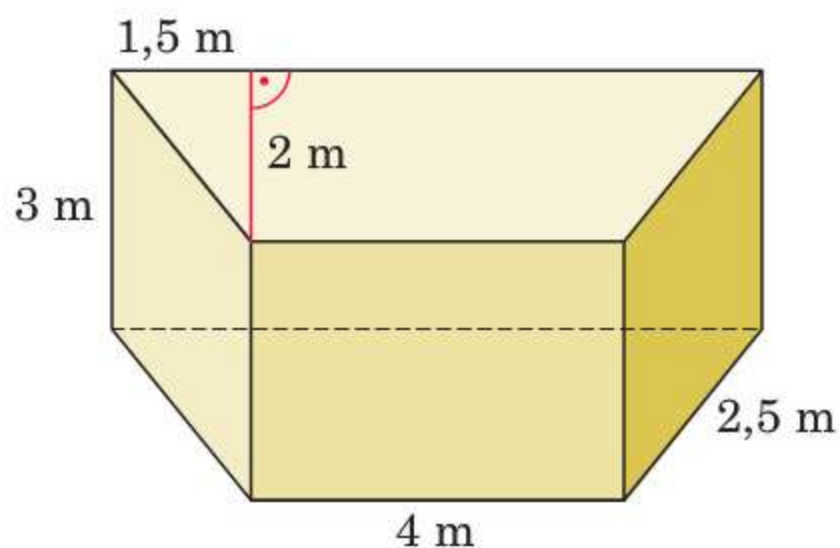
Tak.	Nie.	Nie da się tego ustalić.
Saharę	Gobi	Kara-kum

5. Na podstawie zamieszczonej obok siatki ostrosłupa o podstawie kwadratu wyznacz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

92 cm	118 cm	84 cm
45	80	100



6. Na potrzeby wyprawy archeologicznej zaprojektowano zamykane skrzynie służące do przechowywania znalezisk. Jedna ze skrzyń jest w kształcie graniastosłupa, który w podstawie ma trapez równoramienny. Na podstawie zamieszczonego poniżej projektu skrzyni oblicz, ile co najmniej metrów kwadratowych drewna potrzeba na przygotowanie tej skrzyni.



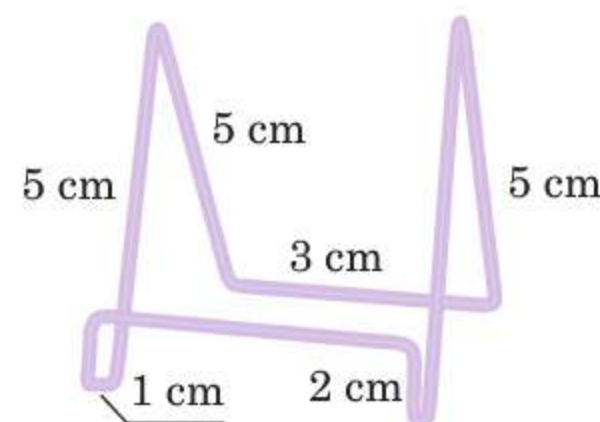
70 m^2	59 m^2	11 m^2
<i>Deinococheirus mirificus</i>	<i>Ceratosaurus</i>	<i>Gorgosaurus</i>



Okulary, jedzenie, a nawet ludzkie tkanki – każdą z tych rzeczy można wydrukować w technologii 3D. Trójwymiarowe obiekty powstają na podstawie modelu komputerowego dzięki specjalnym drukarkom, które nakładają na siebie kolejne warstwy filamentu, zwykle mającego postać cienkiej żyłki nawiniętej na szpulę. Niewielkie trójwymiarowe figury można tworzyć również za pomocą pisaków 3D. Plastikowy filament, który pełni funkcję wkładu, jest rozgrzewany tak mocno, aż zaczyna się topić. W postaci płynnej przedostaje się przez głowicę wyposażoną w dyszę drukującą i zastyga w powietrzu.



1. Bruno zamierza stworzyć za pomocą pisaka 3D stojak na telefon. Przygotował projekt, na którym zaznaczył długości poszczególnych elementów stojaka. Przyjrzyj się zamieszczonemu obok rysunkowi i oblicz, ile co najmniej centymetrów filamentu będzie potrzebował do wydrukowania swojego projektu.



2. Podczas zajęć na uniwersytecie dziecięcym Kuba uczy się obsługiwać drukarkę 3D. Ma do dyspozycji jeden filament, który pozwala na wykonanie wydruku długości 2,5 m. Kuba zdażył już zaprojektować i wydrukować szkielety dwóch graniastosłupów:

- czworokątnego, który w podstawie miał równoległobok o bokach długości 4 cm oraz 6 cm, a jego krawędź boczna miała długość 5 cm;
- ośmiokątnego, którego każda krawędź miała 5 cm długości.

Czy wystarczy mu filamentu na wydrukowanie szkieletu jeszcze jednej bryły – sześcianu o krawędzi długości 10 cm?

3. Pola stworzyła za pomocą długopisu 3D szkielet ostrosłupa sześciokątnego. Wszystkie krawędzie podstawy miały jednakową długość, a suma długości wszystkich krawędzi wyniosła 36 cm. Jaką długość miała krawędź podstawy tego ostrosłupa, jeśli długość krawędzi bocznej to 4 cm?

Odpowiedzi

Dział I. W świecie działań na liczbach

1. Działania pamięciowe Poćwicz! 1. a) 88 b) 90 c) 22 d) 70 e) 81 f) 105 g) 64 h) 43 i) 790 j) 1070 k) 230 l) 350 **2. SUMA I RÓŻNICA** 3. a) 186 b) 222 c) 378 d) 79 e) 284 f) 477 g) 1539 h) 349 i) 2994 **4.** a) 369 b) 880 c) 30 d) 95 e) 36 900 f) 60 000 g) 9000 h) 2000 **5.** a) 64 b) 81 c) 64 d) 216 e) 243 f) 1 g) 0 h) 1 **6.** a) 3 b) 7 c) 3 d) 5 e) 3 f) 2 **7.** a) 960 b) o 640 więcej c) 5 razy mniej **8.** a) $999 - 3^3 = 999 - 27 = 972$ b) $600 \cdot (600 : 30) = 600 \cdot 20 = 12\,000$ c) $94 - 59 + 145 : 5 = 35 + 29 = 64$ **9.** składają się ze 1425 stron

Sprawdź, co umiesz! 1. A, C, D, F 2. F, P 3. a) 612 zł b) tak

2. Kolejność wykonywania działań Poćwicz! 1. a) 57 b) 37 c) 10 d) 75 e) 12 f) 11 g) 28 h) 8 i) 6 **2. ORDER OF OPERATIONS** 3. a) 11 b) 34 c) 1800 d) 20 e) 2399 f) 360 **4.** a) $2 \cdot (43 - 17) = 52$ b) $56 - 14 + 45 : 9 = 47$ c) $(3 + 2)^2 - 8 = 17$ **5.** $6 \cdot 10 \text{ zł} - (4 \cdot 6 \text{ zł} + 2 \cdot 7 \text{ zł} + 3 \cdot 4 \text{ zł} + 5 \text{ zł}) = 5 \text{ zł}$ **6.** $(108 \text{ zł} + 108 \text{ zł} : 3) : 6 = 24 \text{ zł}$ **7.** a) $- b) \cdot c) : d) + 8 = 16$

Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. a) 103 b) 21 c) 39 d) 16 **3.** $[(18 \text{ cm} - 3 \cdot 2 \text{ cm}) + 8 \text{ cm}] : 5 = 4 \text{ cm}$

3. Dodawanie i odejmowanie pisemne Poćwicz! 1. a) 999 b) 2770 c) 20 050 d) 331 865 e) 11 442 f) 8 048 641 **2.** a) 171 b) 171 c) 7615 d) 1329 e) 9418 f) 306 009 **3.** a) Zosia – 1251, Kuba – 986 b) Zosia, o 265 punktów więcej **4.** a) 76 lat b) 10 366 km **5.** a) o 159 zł więcej b) 195 zł c) 560 zł (np.: $2 \cdot 200 \text{ zł} + 100 \text{ zł} + 50 \text{ zł} + 10 \text{ zł}$, $5 \cdot 100 \text{ zł} + 6 \cdot 10 \text{ zł}$, $11 \cdot 50 \text{ zł} + 10 \text{ zł}$) **6.** a) z filmu *Kraina Lodu II* b) o 589 504 846 dolarów więcej **7.** a) o 6 609 812 publikacji b) 170 282 **8.** O = 2, K = 6, N = 5, S = 4 albo O = 4, K = 7, N = 9, S = 8

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 595 b) 131 c) 18 261 d) 2357 e) 290 789 f) 2 791 572 **2.** B

3. Jezioro Górne – o 82 297 km², Morze Kaspijskie – 371 687 km²

4. Mnożenie pisemne Poćwicz! 1. a) 2592 b) 16 933 c) 28 584 d) 308 e) 4316 f) 26 572 **2.** a) 285 b) 4048 c) 27 612 d) 345 792 e) 38 000 f) 1 877 254 **3.** a) 95 200 b) 456 000 c) 14 706 000 d) 482 820 000 e) 17 576 000 f) 8 723 560 000 **4.** a) 602 km b) 2700 l **5.** na regale Alfa, o 24 płyty więcej **6.** a) Cezary – 23 040 MB, Bruno – 7560 MB b) Cezary **7.** 15 039 zł **8.** a) 75 600 b) 919 800 w roku zwykłym, 922 320 w roku przestępnym **9.** a) 5802 zł b) tak, zostanie 289 zł c) nie, zabraknie 369 zł **10.** a) dwa miliony pięćset czterdzieści dziewięć tysięcy sześćset osiemdziesiąt jeden b) osiemset dziewięć tysięcy osiemdziesiąt jeden c) trzynaście milionów sto czterdzieści cztery tysiące dwieście pięćdziesiąt sześć

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 6045 b) 40 158 c) 4 368 000 d) 197 440 000 **2.** D **3.** 4347 zł

5. Dzielenie pisemne Poćwicz! 1. a) 15 400 b) 832 000 c) 57 600 d) 126 e) 854 f) 1206 **2.** a) 732 r 1 b) 2991 r 12 c) 2392 r 8 d) 2111 r 9 e) 3508 f) 24 006 g) 1943 r 10 h) 41 r 900 i) 70 r 320 **3.** B **4.** F, F **5.** a) Bruno – 5085, Kuba – 5846; wygrał Kuba b) Bruno – 38 motorówek, 45 szybowców, 102 łódki; Kuba – 99 motorówek, 21 szybowców, 112 samochodów **6.** 27 **7.** tak, 520 mm × 640 mm **8.** 942 000 **9.** 3 cm

Sprawdź, co umiesz! 1. C **2.** 4625 zł **3.** a) 39 b) 8660 zł

6. Zadania tekstowe Poćwicz! 1. a) 560 kryształów mocy, 117 kryształów zręczności b) Kuba, o 3682 dukaty więcej **2.** a) 972 zł b) 476 zł **3.** a) nie, zostanie 65 500 zł b) 774 zł **4.** dęby – 700, topole – 2100, zbędne dane na temat buków **5.** 2210 zł, zbędne dane na temat liczby palet i liczby opakowań na każdej palecie **6.** Cezary ma rację (wskazówka: oblicz, ile dni i godzin mieści się w 1000 godzin, a następnie wyznacz dokładną godzinę, która będzie za 1000 godzin)

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 832 g b) 52 g **2.** 5325 zł **3.** a) 487 500 zł b) 5500 zł

Podsumowanie działu I

Poćwicz przed sprawdzianem 1. B 2. C 3. A 4. F, P, F 5. a) 612 000 b) 2072
c) 2253 r 90 6. 1068 kg 7. 1395 min, 23 godz. 8. 53 269 l 9. 445 zł **Podjmij wyzwanie**
1. 400 2. 52 zł 3. 158 km 4. 57 zł 5. 1 839 500 zł 6. 117 zł **Wykorzystaj w praktyce**
1. a) 2000 zł b) po 70 miesiącach 2. a) o 3200 zł mniej b) po 8 latach

Dział II. W świecie własności liczb naturalnych

1. Cechy podzielności przez 2, 5, 10, 100 i 4 Poćwicz! 1. a) 0, 10, 184, 5416, 9800, 19 358, 987 654, 1 000 000 b) 0, 10, 9800, 29 005, 7965, 1 000 000 c) 0, 10, 9800, 1 000 000 d) 0, 9800, 1 000 000 e) 0, 10, 9800, 1 000 000 f) 7965, 29 005 2. tak: a), c), d), e); nie: b) 3. liczby te są podzielne przez 10 4. a) 0, 4, 8 b) 2, 6 c) 1, 3, 5, 7, 9 d) 0, 2, 4, 6, 8 5. Niemożliwe, bo liczba 121 nie jest podzielna przez 5. 6. 51 7. a) tak, bo $15 \cdot 8 \cdot 30 = 5 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 6 = 25 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 6$ b) tak, bo $18 \cdot 25 \cdot 7 = 9 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 7 = 50 \cdot 9 \cdot 7$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 82, 210, 576, 1000, 5806, 37 212, 39 450, 85 644 b) 576, 1000, 37 212, 85 644 c) 245, 88 555 2. A, B, C, D 3. a) tak, za pomocą samych dwuzłotówek b) tak

2. Cechy podzielności przez 3 i 9 Poćwicz! 1. a) 465, 945, 1017, 2268, 9909, 20 910, 42 792, 87 321 b) 945, 1017, 2268, 9909 c) 465, 20 910, 42 792, 87 321 2. dwójkami lub czwórkami – nie, trójkami – tak 3. a) 0, 3, 9 b) 2, 8 c) 2, 8 d) 2, 5 4. 657 5. 6 6. F, P 7. a) najmniejsza: 10 245, największa: 98 760 b) najmniejsza: 10 296, największa: 98 712 8. liczba jest podzielna przez 18, gdy jest podzielna przez 2 i przez 9; liczby podzielne przez 6: 200 070, 8016, 87 144, 108, 34 308; liczby podzielne przez 18: 200 070, 108, 34 308 **Sprawdź, co umiesz!** 1. przez 3: 5403, 10 026, 761 211, 87 057; przez 9: 10 026, 761 211, 87 057 2. 5 3. C

3. Dzielniki Poćwicz! 1. a) 1, 2, 3, 6 b) 1, 2, 4, 5, 10, 20 c) 1, 2, 4, 7, 14, 28 d) 1, 2, 5, 10, 25, 50 e) 1, 71 2. a) 2, 4, 6, 10, 12, 20, 30, 60 b) 1, 3, 9, 27, 81 3. a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 b) 1, 5, 25, 125 c) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500 4. a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 b) 1, 2, 4, 5 c) 1, 2, 5 d) 1, 2, 4, 5, 8 5. 2561 6. 1 i 987 654 321 7. 1 opakowanie 60-litrowe, 2 opakowania po 30 l, 3 opakowania po 20 l, 4 opakowania po 15 l, 5 opakowań po 12 l, 6 opakowań po 10 l, 12 opakowań po 5 l, 15 opakowań po 4 l, 20 opakowań po 3 l, 30 opakowań po 2 l, 60 opakowań po 1 l 8. a) 1, 2 b) 1, 2, 5 c) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 1, 2, 4, 5, 10, 20 b) 1, 2, 19, 38 c) 1, 3, 5, 15, 25, 75 d) 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200 e) 1 2. F, F, P 3. 1 porcję z 30 pomidorkami, 2 porcje z 15 pomidorkami w każdej porcji, 3 porcje z 10 pomidorkami w każdej porcji, 5 porcji z 6 pomidorkami w każdej porcji, 6 porcji z 5 pomidorkami w każdej porcji, 10 porcji z 3 pomidorkami w każdej porcji, 15 porcji z 2 pomidorkami w każdej porcji, 30 porcji z 1 pomidorkiem w każdej porcji

4. Liczby pierwsze i złożone Poćwicz! 1. a) FERMAT b) EUKLIDES 2. D 3. liczby pierwsze: 29, 47, 59; liczby złożone: 12 (dzielniki: 1, 2, 3, 4, 6, 12), 46 (dzielniki: 1, 2, 23, 46), 115 (dzielniki: 1, 5, 23, 115) 4. F, F, F, P 5. 5678 – jest podzielna przez 2; liczby 2307 i 2001 – są podzielne przez 3; liczba 1265 – jest podzielna przez 5; liczba 636 – jest podzielna przez 3 i przez 9 6. na osi liczbowej należy zaznaczyć liczby 101, 103, 107 i 109 7. 1579, 3023, 4273, 6203, 6883

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 13, 43, 71 b) 14, 28, 39, 95 148, 351, 1000 2. na osi liczbowej należy zaznaczyć liczby: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 3. B

5. Rozkład liczby na czynniki pierwsze Poćwicz! 1. a) $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$ b) $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$ c) $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$ d) $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ e) $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$ 2. a) 600 b) 768 c) 891 d) 2520 3. wierszami, a) 34, 2 b) 2, 36, 2, 9, 3, 3 c) 2, 45, 3, 1 d) 300, 2, 2, 3, 25, 5 4. a) 2 b) 3, 3 c) 5 5. a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8$ b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^6 \cdot 3^2$ c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$ 6. poprawne rozkłady: b), c); błędne rozkłady: a) $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ d) $200 = 2 \cdot 100 = 2 \cdot 2 \cdot 50 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 25 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$
 7. a) $550 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11$ b) $480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$
 c) $164 = 2 \cdot 2 \cdot 41 = 2^2 \cdot 41$ d) $768 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^8 \cdot 3$ e) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
 8. a) LICZBA PIERWSZA b) OLFCEG ZD WR MHGBQD SDUCBVWD OLFCEG SLHUZVCD c) klucz: 11, WTNKM ATPCHDKJNS UPDE YTPDVZYNKPYTP HTPWP
Sprawdź, co umiesz! 1. $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7$ b) $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$
 c) $500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^3$ d) $824 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 103 = 2^3 \cdot 103$ 2. 7532 3. B

6. Największy wspólny dzielnik Poćwicz! 1. a) dzielniki liczby 6: 1, 2, 3, 6; dzielniki liczby 8: 1, 2, 4, 8 b) dzielniki liczby 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12; dzielniki liczby 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20 c) dzielniki liczby 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48; dzielniki liczby 56: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56 d) dzielniki liczby 50: 1, 2, 5, 10, 25, 50; dzielniki liczby 75: 1, 3, 5, 15, 25, 75 e) dzielniki liczby 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60; dzielniki liczby 180: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180 f) dzielniki liczby 150: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150; dzielniki liczby 400: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 200, 400 g) dzielniki liczby 200: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200; dzielniki liczby 240: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240 h) dzielniki liczby 440: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 20, 22, 40, 44, 55, 88, 110, 220, 440; dzielniki liczby 330: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 22, 30, 33, 55, 66, 110, 165, 330 2. a) 2 b) 6 c) 1 d) 100 e) 80 f) 1 3. 7 zestawów, po 4 mandarynki i 5 kiwi w każdym 4. a) 5 drużyn, każda złożona z 3 dziewcząt i 1 chłopca b) 3 drużyny, każda złożona z 5 dziewcząt i 2 chłopców c) 1 drużynę, złożoną z 15 dziewcząt i 7 chłopców 5. 6 osób 6. 24 cm $\times$ 24 cm 7. a) 4 b) 150 c) 33 d) 50 e) 421 f) 78 8. a) 2 b) 10 9. do sześciu sklepów, po 10 pralek, 6 zmywarek, 3 lodówki i 2 ekspresy 10. 1
Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. a) 20 b) 120 c) 12 3. 15 cm

7. Najmniejsza wspólna wielokrotność Poćwicz! 1. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20; 20; 12 2. $16 = 8 \cdot 2$, a zatem wielokrotności liczby 8 równe 16 lub większe od 16 są jednocześnie wielokrotnościami liczby 16 i są podzielne przez 16
 3. a) 15 b) 42 c) 36 d) 60 e) 96 f) 420 g) 700 h) 7000 i) 1800 4. za 24 godziny 5. 3 m
 6. P, F, F 7. a) 30 razy b) o 540 8. 28015840 9. niedziela 19 stycznia
Sprawdź, co umiesz! 1. 36, 42, 48, 54 2. za 12 minut 3. D

Podsumowanie działu II

Poćwicz przed sprawdzianem 1. C 2. C 3. B 4. D 5. D 6. C 7. F, P, F 8. a) 1124, 2390, 2400, 6164, 18 900, 98 508 b) 2400, 98 508, 123 957, 189 000 c) 6164, 1124, 2400, 98 508, 189 000 d) 2390, 2400, 11 045, 189 000 e) 123 957, 189 000 f) 2400, 189 000 9. a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 b) 2, 5, 8 c) 0, 2, 4, 6, 8 d) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e) 5 f) 0 10. 2 lub 8
 11. a) o 372 b) 54 12. 49 13. a) o 10.24 b) 6 razy (o 10.00, 10.24, 10.48, 11.12, 11.36, 12.00) 14. 8 paczek; po 7 kg karmy dla kotów i 12 kg karmy dla psów 15. w 105. dniu, poniedziałek **Podjmij wyzwanie** 1. 10 2. P, F, P 3. 6790 4. 72 5. 3 razy 6. 6 listopada
Wykorzystaj w praktyce 2. a) 48 b) 6 c) 160

Dział III. W świecie figur płaskich

1. Wzajemne położenie prostych i odcinków Poćwicz! 1. a) K, O, M, P, U, T, E, R b) EK (lub ER, RK, KE, KR, RE) c) RU, RM, RK, KR, RE, ER, KE, EK d) ER (lub RE), EK (lub KE), RK (lub KR), RM (lub MR), RU (lub UR) e) R, M f) O, M, P, U, T 2. $b \perp e$, $a \parallel c$, $d \parallel f$ 3. odcinki prostopadłe: B; odcinki równoległe: D 4. odcinki prostopadłe: CI i IA, TK i KO; odcinki równoległe: IA i ST, SA i TK 5. P, F, P, P, F 6. $g \perp f$, $f \parallel h$

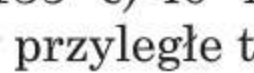
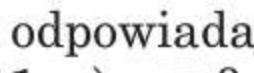
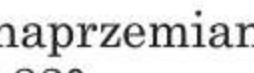
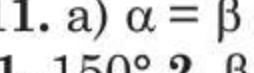
Sprawdź, co umiesz! 1. C 3. $EF \perp AB$

2. Odległość punktu od prostej Poćwicz! 1. a) 2 cm b) 2,7 cm c) 3 dm 4. Tak, ponieważ odcinek łączący Ułankowo i przystanek jest prostopadły do drogi. 5. a) 1 cm 2 mm b) 9 mm c) 2 cm 5 mm (odpowiedzi mogą się różnić w zależności od precyzji pomiaru) 6. 250 cm = 2 m 50 cm = 2,5 m (odpowiedź może się różnić w zależności od precyzji pomiaru)

Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. a) 1 cm b) 1 cm 5 mm (odpowiedzi mogą się różnić w zależności od precyzji pomiaru)

3. Kąty Poćwicz! 1. a) $\alpha = 25^\circ$, kąt ostry b) $|\sphericalangle ABC| = 115^\circ$ lub $|\sphericalangle CBA| = 115^\circ$, kąt rozwarty c) $|\sphericalangle EFG| = 315^\circ$ lub $|\sphericalangle GFE| = 315^\circ$, kąt wklęsły 2. schody – od 20° do 45° , drabiny ze stopniami – od 45° do 75° , drabiny pionowe – od 75° do 90° ; najwygodniejsze schody – 38° 5. a) $\alpha = 295^\circ$ b) $\beta = 270^\circ$ c) $\gamma = 190^\circ$ d) $\delta = 50^\circ$ 6. 65° 7. P, F, P, P, F 8. a) 150° (kąt rozwarty) lub 210° (kąt wklęsły) b) 90° (kąt prosty) lub 270° (kąt wklęsły) c) 135° (kąt rozwarty) lub 225° (kąt wklęsły) d) 105° (kąt rozwarty) lub 255° (kąt wklęsły) 9. Nie, ponieważ $360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$.

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $\alpha = 70^\circ$, kąt ostry b) $|\sphericalangle ABC| = 255^\circ$ lub $|\sphericalangle CBA| = 255^\circ$, kąt wklęsły 3. C

4. Kąty przyległe i wierzchołkowe Poćwicz! 1. C (kąty mają wspólne ramię i wierzchołek, a ich dwa pozostałe ramiona tworzą prostą) 2. B (kąty są położone naprzeciw siebie, mają wspólny wierzchołek, a ich ramiona leżą na przecinających się prostych) 3. a) $\alpha = 35^\circ$ b) $\beta = 40^\circ$ c) $\gamma = 161^\circ$ d) $\varepsilon = 68^\circ$, $\omega = 112^\circ$ e) $\varepsilon = 85^\circ$ f) $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 77^\circ$, $\varepsilon = 33^\circ$ 4. $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 130^\circ$, $\delta = 130^\circ$ 5. P, F, F 6. o 112° 7. a) 90° (bo $180^\circ : 2 = 90^\circ$) b) nie (jeśli przyjmiemy, że kąt rozwarty ma miarę α , to miara kąta do niego przyległego wynosi $180^\circ - \alpha$ i jest mniejsza od 90°) c) nie (suma miar dwóch kątów ostrych jest mniejsza niż 180°) d) tak (bo $90^\circ \cdot 2 = 180^\circ$) 8. a) $|\sphericalangle CAB| = 60^\circ$, $|\sphericalangle BCA| = 100^\circ$, $|\sphericalangle ABC| = 20^\circ$ b) $|\sphericalangle FDE| = 90^\circ$, $|\sphericalangle FED| = 37^\circ$, $|\sphericalangle DEF| = 53^\circ$ c) $|\sphericalangle JGH| = 60^\circ$, $|\sphericalangle IJG| = 110^\circ$, $|\sphericalangle HIJ| = 90^\circ$, $|\sphericalangle GHI| = 100^\circ$ 9. a) 100° i 80° b) 45° i 135° c) 40° i 140° d) $67,5^\circ$ i $112,5^\circ$ 10. kąty wierzchołkowe to np.: , , ; kąty przyległe to np.: , , ; kąty odpowiadające to np.: , , ; kąty naprzemianległe to np.: , ,  11. a) $\alpha = \beta = 137^\circ$ b) $\alpha = \beta = 114^\circ$ c) $\alpha = 97^\circ$, $\beta = 83^\circ$

Sprawdź, co umiesz! 1. 150° 2. β , $\beta = 140^\circ$, $\alpha = 40^\circ$ 3. C

5. Jednostki długości Poćwicz! 1. a) 80 mm, 140 mm, 200 mm, 1500 mm, 18 000 mm, 3 000 000 mm b) 6 cm, 130 cm, 900 cm, 7300 cm, 9100 cm, 800 000 cm c) 7 dm, 200 dm, 50 dm, 890 dm, 40 000 dm, 100 000 dm d) 80 m, 9 m, 130 m, 6000 m, 45 000 m, 5 000 000 m e) 4 km, 12 km, 6 km, 7 km, 340 km 2. a) 36 mm, 405 mm b) 99 cm, 1502 cm c) 61 dm, 806 dm d) 15 762 m, 2700 m 3. a) 5 cm 6 mm b) 20 cm 6 mm c) 1 dm 2 cm d) 1 m 7 cm e) 7 m 8 dm f) 15 m 90 cm g) 1 km 456 m h) 4 km 17 m 4. 15 km 5. $223\text{ cm } 6\text{ mm} = 2\text{ m } 23\text{ cm } 6\text{ mm}$ 6. Wysokość sekwoi Hyperion to 115 m 85 cm. Wysokość daglezji Helena to 59 m 40 cm. Sekwoja jest wyższa od daglezji o 56 m 45 cm. 7. szerokość działki – 20 m, długość działki – 30 m; 6435 zł 8. $4530\text{ m} = 4\text{ km } 530\text{ m} = 4,53\text{ km}$ 9. a) 55 km b) $25\,300\text{ m} = 25\text{ km } 300\text{ m} = 25,3\text{ km}$ c) dłuższe są drogi dojazdowe, o $18\,600\text{ m} = 18\text{ km } 600\text{ m} = 18,6\text{ km}$

Sprawdź, co umiesz! 1. $400\text{ m} < 40\,000\text{ dm} < 4\text{ km}$ $4000\text{ mm} < 5\,000\,000\text{ mm} < 5\text{ km}$ $5\text{ m} < 500\,000\text{ dm}$ 2. 8 km 400 m 3. D

6. Skala Poćwicz! 1. a) 2 cm b) 1 cm c) 8 cm d) 12 cm 2. o 4 cm 8 mm; 2 razy 4. 11 cm 6 mm 5. 46 m 53 cm 6. dywan A: 1 cm 8 mm $\times$ 4 cm; dywan B: 3 cm 2 mm $\times$ 4 cm 7. 455 km 8. A 9. a) 40 km b) 4 km c) Wrocław–Opole 80 km, Jelenia Góra–Legnica 44 km d) między Wałbrzychem a Opolem, o 52 km 10. a) 1 : 300 000 b) 22 km 500 m c) 26 cm

Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. 10 km 450 m 3. 1 : 820 000

Podsumowanie działu III

Poćwicz przed sprawdzianem 1. I. C, II. C 2. D 3. C 4. C 6. a) 88° , kąt ostry b) 115° , kąt rozwarty c) 345° , kąt wklęsły 7. $\sphericalangle ROK$ – rozwarty, $\sphericalangle TAM$ – wklęsły; o 147° 8. a) $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 45^\circ$ b) kąt przyległy do kąta α , o 40° 9. F, P, F 10. 10 cm 9 mm b) 2 m 78 cm c) 9 m 40 cm d) 8 km 1 m e) 32 km 7 m 11. D 12. a) 300 km b) o 47 km 13. 1 : 20 000 **Podejmij wyzwanie** 1. przyległymi 2. 44° 3. AK 4. 21 cm 6 mm 5. 6 km 100 m 6. P, F, F 7. 27° 8. 1 : 200 **Wykorzystaj w praktyce** 1. 2 m 45 cm 2. 4 m

Dział IV. W świecie wielokątów

1. Wielokąty Poćwicz! 1. a) I. czworokąt *IRYS*, II. pięciokąt *ASTER*, III. siedmiokąt *TULIPAN*, IV. dwunastokąt *FIOŁEKNARCYZ* b) *AS*, *ST*, *TE*, *ER*, *RA* c) I: *IY*, *SR*; II: *AE*, *AT*, *SR*, *SE*, *TR* d) *YSI*, *SIR*, *IRY* e) *NT*, *TU*, *LU*, *LI* f) *OŁE*, *EKN*, *NAR*, *RCY*, *YZF*, *FIO*
2. I – pięciokąt *ABCDE*, sześciokąt *KLMNOP*, czworokąt *RSTU*; II – czworokąt *RSTU*; III – opis nie pasuje do żadnej z figur; IV – pięciokąt *FGHIJ*; V – pięciokąt *ABCDE*
4. F, P, F 5. 3 cm 6. a) 26 cm b) 21 cm 6 mm c) 19 cm 8 mm 7. 61 cm 5 mm

Sprawdź, co umiesz! 2. 9 cm 2 mm 3. B

2. Trójkąty Poćwicz! 1. trójkąty równoboczne: I i V; trójkąty równoramienne: I, II, IV, V, VII 2. a) tak b) tak c) nie d) tak e) nie f) tak 3. a) równoboczny, 19,5 m b) różnoboczny, 24 cm c) równoramienny, 63 dm 4. a) równoboczny, 16 cm 5 mm b) różnoboczny, 6 cm c) równoramienny, 201 cm d) równoramienny, 120 cm 1 mm 5. 13 cm 5 mm 6. 1 dm 5 cm 7. 25 cm 8. 46 cm 11. np. 19 cm lub 16 cm 12. Tak, ponieważ jest równoboczny.

Sprawdź, co umiesz! 1. cztery (4 cm × 7 cm × 10 cm, 4 cm × 28 cm × 30 cm, 7 cm × 28 cm × 30 cm, 10 cm × 28 cm × 30 cm) 2. B 3. 84 cm

3. Miary kątów w trójkątach Poćwicz! 1. I. równoramienny, ostrokątny; II. równoboczny, ostrokątny; III. różnoboczny, prostokątny; IV. równoramienny, rozwartokątny; V. różnoboczny, ostrokątny; VI. różnoboczny, rozwartokątny; VII. równoramienny, prostokątny 3. a) $\omega = 40^\circ$ b) $\alpha = 20^\circ$ c) $\beta = 60^\circ$ d) $\gamma = 65^\circ$, $\delta = 50^\circ$
4. a) równoramiennym ostrokątnym b) różnobocznym rozwartokątnym c) równobocznym ostrokątnym 5. a) 90° , 60° , 30° b) 50° , 65° , 65° c) 22° , 79° , 79° d) 70° , 55° , 55° 7. a) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 120^\circ$ b) $\alpha = 130^\circ$, $\beta = 130^\circ$ c) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ 8. 90° , 90° , 135° , 135° , 135° , 135°

Sprawdź, co umiesz! 1. C i E 2. a) 40° b) 124° c) 59° 3. F, P

4. Prostokąty Poćwicz! 2. a) 28 cm b) 200 m c) 104 mm d) 14 cm e) 32 dm 8 cm
3. a) 34 cm b) 76 dm c) 260 cm = 26 dm d) 3100 cm = 31 m e) 260 mm = 26 cm
f) 11 400 m = 11 km 400 m 4. a) $b = 10$ m b) $a = 9$ dm c) $b = 135$ cm 5. a) 5 m b) 21 m
c) 17 cm d) 12 dm 5 cm e) 1 km 250 m 6. a) 11 cm b) 6 cm 4 mm c) 35 cm d) 2 cm 5 mm
8. a) 40 cm = 4 dm b) wymiary w skali 4 : 1 – 480 cm × 160 cm (48 dm × 16 dm); wymiary w skali 1 : 4 – 30 cm × 10 cm (3 dm × 1 dm) 9. 10 cm × 40 cm; 25 cm 10. a) 1565,50 zł
b) 2891 zł (odpowiedzi mogą się różnić w zależności od precyzji pomiaru; obliczenia wykonane dla wymiarów 3 cm × 1,5 cm oraz 1,5 cm × 1,5 cm)

Sprawdź, co umiesz! 1. do ogrodzenia wybiegu dla świnek morskich, o 1 m 2. C 3. F, F

5. Równoległoboki Poćwicz! 1. a) II, III b) I, II, III c) II, III, V, VI d) I, II, III, IV, V, VI 4. a) 27 cm b) 16 cm 5. a) 6 cm b) 4 m 20 cm c) 3 dm 5 cm 6. a) 7 cm b) 17 cm 5 mm
c) 11 cm 7. F, P 8. 12 cm i 7 cm 9. 8 cm i 24 cm 10. 70 cm i 50 cm 11. 12 cm

Sprawdź, co umiesz! 1. 5 cm 5 mm 2. 9 cm i 16 cm 3. P, P

6. Miary kątów w równoległobokach Poćwicz! 1. a) $\gamma = 150^\circ$, $\delta = 30^\circ$ b) $\alpha = 95^\circ$, $\beta = 85^\circ$, $\gamma = 85^\circ$ c) $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 160^\circ$, $\delta = 20^\circ$, $\omega = 160^\circ$ d) $\varepsilon = 140^\circ$, $\delta = 40^\circ$, $\alpha = 140^\circ$, $\beta = 40^\circ$ 2. 60° , 120° , 120° 3. 135° , 45° , 45° 4. a) nie, suma miar kątów przy jednym boku jest mniejsza niż 180° b) tak, suma miar kątów przy jednym boku jest zawsze równa 180° i kąty leżące naprzeciw siebie mają tę samą miarę c) nie, suma miar kątów przy jednym boku nie zawsze jest równa 180° i kąty leżące naprzeciw siebie mają różną miarę
5. a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 40^\circ$ c) $\alpha = 33^\circ$, $\beta = 147^\circ$ 6. 40° , 140° , 40° , 140° 7. 45° , 135° , 45° , 135° 8. 70° , 110° , 70° , 110° lub 80° , 100° , 80° , 100° 9. F, F, P
10. $|\sphericalangle YDO| = |\sphericalangle OMY| = 50^\circ$, $|\sphericalangle MYD| = |\sphericalangle DOM| = 130^\circ$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\delta = 120^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ b) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 130^\circ$
c) $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 115^\circ$ 2. 90° , 90° , 90° ; prostokąt 3. 60° , 120° , 60° , 120°

7. Trapezy Poćwicz! 1. trapezy: I–VII; trapezy prostokątne: I, II, VI; trapezy równoramienne: I, II, VII 5. a) 2 cm b) 3 cm c) 1 cm 5 mm 6. 87 cm i 75 m 69 cm 7. 30 cm
8. 16 cm 9. 14 cm 10. 80 cm × 12 500 cm

Sprawdź, co umiesz! 1. $ACDF, ACDE, ABDF, ABEF, BCDE, ABDE$ 2. a) 19 cm b) 22 cm c) 940 cm 3. 16 cm

8. Miary kątów w trapezach Poćwicz! 1. a) $\alpha = 155^\circ, \beta = 155^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ, \beta = 148^\circ$ c) $\alpha = 27^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 153^\circ$ d) $\alpha = 150^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 30^\circ$ e) $\alpha = 26^\circ, \beta = 154^\circ, \gamma = 90^\circ$ f) $\alpha = 91^\circ, \beta = 147^\circ, \gamma = 33^\circ$ 2. I. B, II. C 3. $63^\circ, 117^\circ, 117^\circ$ 4. $90^\circ, 90^\circ, 55^\circ$ 5. $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$ 6. 80° 7. trapez $FOKA$: $90^\circ, 40^\circ, 140^\circ, 90^\circ$; trójkąt FKA : $90^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ 8. $80^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 100^\circ$ lub $20^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 160^\circ$ (wskazówka: zastanów się, które odcinki mogą być ramionami trójkąta OPY) 9. $75^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 105^\circ$ 10. $|\sphericalangle DAB| = 130^\circ, |\sphericalangle ABC| = 105^\circ, |\sphericalangle CDA| = 50^\circ, |\sphericalangle BCD| = 75^\circ$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $\alpha = 155^\circ, \beta = 30^\circ$ b) $\alpha = 90^\circ, \beta = 152^\circ$ c) $\alpha = 52^\circ, \beta = 128^\circ, \gamma = 128^\circ$ 2. F, F, F 3. $90^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 90^\circ$

9. Klasyfikacja czworokątów Poćwicz! 1. czworokąty: I, II, III, IV, VI, VIII; trapezy: I, II, III, IV, VI, VIII; równoległoboki: I, II, III, IV; romby: II, III; prostokąty: II, IV; kwadraty: II 2. a) prostokąt, kwadrat b) romb, równoległobok, prostokąt, kwadrat c) romb, kwadrat d) romb, równoległobok, prostokąt, kwadrat e) trapez f) romb, równoległobok, prostokąt, kwadrat g) romb, równoległobok, prostokąt, kwadrat h) równoległobok, prostokąt i) równoległobok, romb j) żaden z wymienionych wielokątów nie ma tej własności 3. a) kwadrat, romb, prostokąt, trapez równoramienny b) romb, równoległobok, prostokąt, kwadrat c) kwadrat, romb, deltoid 4. C 6. trójkąt RCU : $60^\circ, 85^\circ, 35^\circ$; trapez $KOCR$: $60^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 120^\circ$ 7. 77 cm 8 mm; kwadrat 8. a) 24 cm b) 34 cm 4 mm c) 27 cm 6 mm 9. 15 cm 11. a) trapez równoramienny, $|\sphericalangle DEL| = |\sphericalangle NDE| = 120^\circ, |\sphericalangle LND| = |\sphericalangle ELN| = 60^\circ$ b) romb, $|\sphericalangle NYF| = |\sphericalangle FIN| = 120^\circ, |\sphericalangle YFI| = |\sphericalangle INY| = 60^\circ$ c) prostokąt, $|\sphericalangle ELI| = |\sphericalangle LIN| = |\sphericalangle INE| = |\sphericalangle NEL| = 90^\circ$ d) deltoid, $|\sphericalangle AEB| = 60^\circ, |\sphericalangle EBY| = |\sphericalangle YAE| = 90^\circ, |\sphericalangle BYA| = 120^\circ$ 12. 2×3 lub 3×5

Sprawdź, co umiesz! 1. F, F, P, F, F 2. C 3. 25 cm

Podsumowanie działu IV

Poćwicz przed sprawdzianem 1. C 2. C 3. B 4. B, D, E, F 5. B 6. P, P, P 7. a) 20 cm b) 20 cm 2 mm 8. I – ostrokątny, różnoboczny; II – rozwartokątny, równoramienny; III – równoboczny, równoramienny, ostrokątny; IV – różnoboczny, prostokątny 9. 15 cm 10. 5 cm 11. a) $25^\circ, 30^\circ, 125^\circ$ b) $90^\circ, 53^\circ, 37^\circ$ c) $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$ d) $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$ e) $90^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 90^\circ$ f) $50^\circ, 50^\circ, 130^\circ, 130^\circ$ 12. 650 zł **Podjmij wyzwanie** 1. B 2. 19 dm 9 cm 3. 7 4. trójkąt rozwartokątny, 140° 5. 90 m 6. F, F, P 7. 205° **Wykorzystaj w praktyce** 1. $810 \text{ cm} \times 270 \text{ cm} \times 780 \text{ cm}$ 2. 2289,65 m

Dział V. W świecie ułamków zwykłych

1. Ułamki zwykłe i liczby mieszane Poćwicz! 1. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{4}{10}$ c) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $2\frac{1}{10}$ f) $2\frac{1}{4}$ 2. a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{7}{12}, \frac{5}{12}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{2}{5}$ 3. $1\frac{1}{2}$ 4. a) $\frac{22}{9}$ b) $\frac{37}{5}$ c) $\frac{1007}{999}$ d) $2\frac{1}{7}$ e) $11\frac{1}{6}$ f) $2\frac{7}{8}$ 5. $C = \frac{1}{5}, Y = \frac{4}{5}, W = 1\frac{4}{5}, F = 2\frac{1}{5}, Z = \frac{1}{6}, N = \frac{3}{6}, R = 1\frac{4}{6}, B = 2\frac{1}{6}, A = 4\frac{2}{7}, S = 5\frac{5}{7}, I = 6\frac{1}{7}, D = 4\frac{2}{8}, T = 5\frac{5}{8}, O = 6\frac{2}{8}, M = 6\frac{3}{8}$, hasło: FRACTION 7. a) $\frac{20}{60}, 1\frac{40}{60}, 2\frac{12}{60}$ b) $\frac{30}{100}, 8\frac{12}{100}, 13\frac{15}{1000}$ c) $\frac{100}{1000}, 12\frac{500}{1000}, 46\frac{750}{1000}$ 8. 17.28 9. $\frac{1}{9}$

Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. $\frac{5}{7}, \frac{5}{30}$ 3. nie

2. Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika Poćwicz! 1. a) $\frac{1}{6} = \frac{10}{60}, \frac{4}{5} = \frac{48}{60}, \frac{6}{12} = \frac{30}{60}, \frac{3}{4} = \frac{45}{60}, \frac{12}{15} = \frac{48}{60}$ b) $\frac{1}{6} = \frac{36}{216}, \frac{4}{5} = \frac{36}{45}, \frac{6}{12} = \frac{36}{72}, \frac{3}{4} = \frac{36}{48}, \frac{12}{15} = \frac{36}{45}$ 2. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{6}{7}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{3}{8}$ g) $\frac{8}{9}$ h) $\frac{2}{5}$ i) $\frac{2}{3}$ j) $\frac{23}{20}$ 3. a) 3 b) 40 c) 60 d) 32 4. a) 3, 5 b) 2, 3, 4 c) 3, 5, 9 d) 2, 4

5. Morze Śródziemne $\frac{1}{16}$, Morze Bałtyckie $\frac{77}{8000}$ 6. $\frac{1}{3}, \frac{9}{32}, \frac{5}{16}, \frac{7}{96}$ 7. F, F, P 8. a) $\frac{4}{6}$ i $\frac{1}{6}$ b) $\frac{8}{21}$ i $\frac{18}{21}$ c) $\frac{8}{22}$ i $\frac{7}{22}$ d) $\frac{13}{30}$ i $\frac{25}{30}$ 9. a) $\frac{5}{15}$ i $\frac{6}{15}$ b) $\frac{15}{20}$ i $\frac{8}{20}$ c) $\frac{45}{60}, \frac{40}{60}$ i $\frac{48}{60}$ d) $\frac{64}{72}, \frac{28}{72}$ i $\frac{19}{72}$ 10. a) $\frac{8}{24}$ i $\frac{15}{24}$ b) $\frac{15}{18}$ i $\frac{16}{18}$ c) $\frac{21}{24}$ i $\frac{22}{24}$ d) $\frac{40}{60}$ i $\frac{36}{60}$ e) $\frac{44}{50}$ i $\frac{35}{50}$ f) $\frac{2}{72}$ i $\frac{45}{72}$ g) $\frac{3}{7}$ i $\frac{1}{7}$ h) $\frac{27}{150}$ i $\frac{8}{150}$ i) $\frac{18}{30}, \frac{12}{30}$ i $\frac{16}{30}$ j) $\frac{20}{24}, \frac{21}{24}$ i $\frac{18}{24}$ k) $\frac{15}{30}, \frac{25}{30}$ i $\frac{16}{30}$ l) $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}$ i $\frac{1}{5}$
Sprawdź, co umiesz! 1. C 2. D 3. $\frac{10}{35}$ i $\frac{21}{35}$ oraz $\frac{3}{7}$ i $\frac{1}{7}$

3. Porównywanie ułamków Poćwicz! 1. a) $1\frac{3}{5} > \frac{4}{5}$ b) $3\frac{10}{17} < 6\frac{1}{17}$ c) $\frac{4}{15} < \frac{11}{15}$ d) $\frac{7}{9} > \frac{7}{13}$ e) $9\frac{5}{23} > 9\frac{3}{23}$ f) $2\frac{6}{7} > 2\frac{6}{13}$ g) $\frac{17}{10} = 1\frac{7}{10}$ h) $\frac{18}{5} > \frac{9}{4}$ 2. a) $\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$ b) $\frac{20}{24} > \frac{18}{24}$ c) $\frac{4}{9} > \frac{4}{12}$ d) $1\frac{6}{10} < 1\frac{8}{10}$ e) $6\frac{12}{20} > 6\frac{12}{21}$ f) $12\frac{20}{26} > 12\frac{20}{27}$ g) $2\frac{21}{24} > 2\frac{20}{24}$ h) $9\frac{4}{7} < 9\frac{5}{7}$ 3. Bruno 4. najwięcej – sosen, najmniej – dębów 5. a) $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$ b) $\frac{12}{30} < \frac{1}{2}$ c) $\frac{18}{37} < \frac{1}{2}$ d) $\frac{21}{42} = \frac{1}{2}$ e) $\frac{11}{21} > \frac{1}{2}$ f) $\frac{35}{73} < \frac{1}{2}$ g) $\frac{34}{68} = \frac{1}{2}$ 6. Kasia $\frac{24}{49}$, Hania $\frac{27}{53}$, Hania 7. największa – biała, najmniejsza – zielona 8. a) $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ b) $\frac{6}{7} < \frac{9}{10}$ c) $\frac{11}{12} > \frac{4}{5}$ d) $\frac{8}{10} < \frac{11}{13}$ e) $\frac{7}{10} < \frac{8}{11}$ f) $\frac{24}{27} > \frac{15}{18}$ g) $\frac{83}{90} > \frac{60}{67}$ h) $\frac{199}{110} > \frac{190}{201}$ 9. najniższa w Damce, najwyższa w Składaku 10. np. $\frac{7}{10}, \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \frac{11}{15}, \frac{13}{20}, \frac{16}{25}, \frac{17}{25}$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $\frac{5}{31} > \frac{5}{40}$ b) $\frac{9}{16} < \frac{11}{16}$ c) $\frac{1}{2} > \frac{14}{30}$ d) $1\frac{7}{8} > 1\frac{5}{9}$ e) $5\frac{4}{7} < 5\frac{5}{6}$ 2. $\frac{1}{14} < \frac{5}{14} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2} < \frac{8}{11} < 3\frac{1}{7}$ 3. najwięcej – na triki rowerowe, najmniej – na granie online

4. Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach

Poćwicz! 1. a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{16}{19}$ e) $5\frac{1}{2}$ f) 7 g) $3\frac{9}{16}$ h) $5\frac{1}{5}$ 2. FOKA SZARA 3. a) $\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{1}{10}$ b) 0, $\frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{8}{12}$ c) $\frac{9}{15}, \frac{2}{15}, \frac{7}{15}, \frac{6}{15}$ 4. a) 1 godz. 48 min b) 18.59 5. a) $2\frac{1}{5}$ godz. = 132 min b) o 1 godz. więcej 6. a) $9\frac{7}{10}$ kg, o $\frac{7}{10}$ kg cięższe b) nie, bo $9\frac{1}{2}$ kg < $9\frac{7}{10}$ kg c) $7\frac{8}{10}$ kg, tak 7. kolejno: –, –, +, +

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $10\frac{2}{7}$ b) $17\frac{2}{3}$ c) $1\frac{8}{9}$ 2. $2\frac{447}{1000}$ kg 3. 6 kg

5. Dodawanie i odejmowanie ułamków o różnych mianownikach Poćwicz! 1. a) $\frac{1}{2}$ b) $1\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{15}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $1\frac{11}{35}$ f) $1\frac{7}{36}$ g) $6\frac{26}{45}$ h) $1\frac{5}{24}$ i) $5\frac{5}{24}$ j) $7\frac{23}{50}$ k) $1\frac{35}{48}$ l) $1\frac{23}{24}$ m) $10\frac{11}{16}$ n) $4\frac{19}{100}$ o) $1\frac{17}{18}$ p) $2\frac{11}{20}$ 2. $2\frac{17}{20}$ kg 3. $\frac{5}{6}$ godz. 4. a) $3\frac{5}{8}$ godz. b) o $1\frac{5}{24}$ godz. więcej 5. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{13}{21}$ c) 1 d) $1\frac{13}{24}$ e) $4\frac{2}{3}$ f) $6\frac{1}{10}$ g) $8\frac{12}{13}$ h) $8\frac{7}{55}$ i) $7\frac{19}{24}$ 6. pozostało – $36\frac{23}{36}$ kg, kupiono – $63\frac{13}{36}$ kg 7. po sprowadzeniu ułamków do wspólnego mianownika i wykonaniu działań otrzymujemy 0 8. $1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}$ oraz $1\frac{1}{8}$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $\frac{13}{32}$ b) $\frac{1}{28}$ c) $7\frac{11}{40}$ d) $4\frac{29}{30}$ 2. P, F 3. $20\frac{5}{9}$ km

6. Mnożenie ułamków Poćwicz! 1. a) $3\frac{3}{4}$ b) $2\frac{6}{7}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $16\frac{1}{2}$ e) $11\frac{1}{5}$ f) 17 g) $23\frac{1}{2}$ h) $34\frac{4}{9}$ 2. a) $\frac{15}{32}$ b) $\frac{5}{18}$ c) $\frac{8}{77}$ d) $\frac{17}{18}$ e) $1\frac{25}{39}$ f) 35 g) $7\frac{11}{27}$ h) 45 3. a) $\frac{1}{4}$ b) 4 c) 24 d) $112\frac{1}{2}$

4. a) $\frac{14}{3}$ b) $\frac{17}{9}$ c) $\frac{13}{50}$ d) $\frac{10}{157}$ 5. a) $\frac{36}{49}$ b) $\frac{27}{125}$ c) $2\frac{1}{4}$ d) 64 6. a) $Obw. = 18\frac{2}{5}$ cm, $P = 21\frac{4}{25}$ cm²
 b) $Obw. = 11\frac{5}{6}$ cm, $P = \frac{35}{72}$ cm² 7. a) $3\frac{3}{4}$ b) $1\frac{1}{2}$ c) 10 d) $\frac{9}{16}$ 8. 124 pkt. 9. a) $8\frac{1}{4}$ km
 b) $82\frac{1}{2}$ km 10 a) $4\frac{2}{15}$ b) $8\frac{2}{3}$ c) $3\frac{1}{7}$ d) $3\frac{3}{8}$ 11. $\frac{7}{10}$

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 15 b) $\frac{2}{15}$ c) 1 d) $2\frac{8}{9}$ 2. $Obw. = 4\frac{8}{9}$ cm, $P = 1\frac{40}{81}$ cm² 3. D

7. Dzielenie ułamków Poćwicz! 1. $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, $\frac{15}{11} = 1\frac{4}{11}$, $\frac{13}{1} = 13$, $\frac{1}{7}$, 1, $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{53}$ 2. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{8}$
 c) $5\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{60}$ e) $\frac{3}{5}$ f) 18 3. a) $4\frac{4}{5}$ m b) $5\frac{2}{3}$ m c) $4\frac{1}{2}$ m 4. a) $7\frac{1}{2}$ b) 20 c) $7\frac{3}{11}$ d) $3\frac{3}{4}$ e) $1\frac{1}{3}$
 f) $1\frac{1}{9}$ g) $\frac{10}{11}$ h) $1\frac{19}{45}$ i) $2\frac{17}{30}$ j) $1\frac{3}{5}$ k) 2 l) $1\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{16}$ 6. nie, potrzeba 17 butelek 7. $1\frac{8}{25}$ km
 8. 19 figurek, 266 godz. 9. a) 1 b) $\frac{23}{160}$ c) $1\frac{13}{32}$ 10 a) 5 i $\frac{3}{4}$ raza b) o $1\frac{7}{90}$ c) o $5\frac{7}{16}$ 11. $21\frac{3}{5}$ cm

Sprawdź, co umiesz! 1. a) $\frac{1}{21}$ b) 24 c) $\frac{32}{63}$ d) $1\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}$ 2. 8 3. $\frac{8}{15}$

8. Ułamek liczby naturalnej Poćwicz! 1. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{7}$ 2. a) 10 b) 72 c) 45 d) 20

3. a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{1}{1000}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{100}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{12}$ 4. a) 2 mm b) 120 m c) 200 kg d) 78 g e) 450 s
 f) $7\frac{1}{5}$ godz. 5. 12 godzin 6. ocenę dopuszczającą 2, dostateczną 5, dobrą 10, bardzo dobrą 10
 7. a) jedzenie – 2800 zł, opłaty – 2100 zł, inne wydatki – 2400 zł, oszczędności – 1100 zł b) $\frac{11}{84}$
 dochodu 8. 3 9. $\frac{99}{100}$

Sprawdź, co umiesz! 1. D 2. Janek 8, Franek 9 3. 400 m², $\frac{1}{5}$

9. Zadania tekstowe Poćwicz! 1. a) $15\frac{7}{24}$ km b) Cezary, o $\frac{23}{120}$ km 2. 1364 3. o 45 zł, 105 zł 4. $\frac{2}{7}$ 5. $\frac{3}{8}$ kg 6. nie, bo musieliby zjeść więcej niż jedną pizzę 7. 1540 zł 8. a) 32, wypłacenie równowartości $\frac{1}{10}$ dukata w lammdukatach nie jest możliwe, bo liczba $3\frac{1}{5}$ nie jest liczbą naturalną b) 48 monet, $4\frac{4}{5}$ g c) 150 monet, 246 g d) $1\frac{1}{2}$ zł w jednogroszówkach, o $241\frac{1}{5}$ g 9. Nie

Sprawdź, co umiesz! 1. $95\frac{5}{8}$ l 2. $42\frac{1}{4}$ kg 3. $\frac{1}{2}$

Podsumowanie działu V

Poćwicz przed sprawdzianem 1. B 2. D 3. B 4. C 5. a) 63; najmniejszy wspólny mianownik: 63 b) 60, 600; najmniejszy wspólny mianownik: 60 c) 50, 100; najmniejszy wspólny mianownik: 50 d) 28, 56; najmniejszy wspólny mianownik: 28 6. I. A, II. C

7. a) 30; $7\frac{17}{30}$ b) 80; $1\frac{15}{16}$ c) 45; $8\frac{4}{45}$ 8. $\frac{3}{7}$ i $2\frac{1}{3}$, 1 i 1, 4 i $\frac{2}{8}$ 9. tabela 1: F, P, F; tabela 2: P, P, F 10. 9 11. $\frac{25}{144}$ 12. warzywa, o $\frac{23}{30}$ kg 13. $1\frac{1}{5}$ m 14. $Obw. = 30\frac{8}{21}$ m, $P = 57\frac{1}{7}$ m² 15. 288 zł

16. $1\frac{3}{5}$ m 17. 175 18. druga liczba – $30\frac{3}{10}$, trzecia liczba – $10\frac{1}{10}$, czwarta liczba – $9\frac{3}{5}$,

piąta liczba – $24\frac{4}{5}$ **Podejmij wyzwanie** 1. $\frac{7}{12}$ 2. $\frac{5}{6}$ 3. 90 4. $\frac{3}{4}$ 5. Nie. 6. 85 7. $4\frac{3}{4}$ 8. P, P, F

9. $\frac{9}{25}$ **Wykorzystaj w praktyce** 1. 18 2. 7 brązowych, 5 srebrnych i 9 złotych 3. 10

4. a) $\frac{1}{30}$ b) 196

Dział VI. W świecie pól wielokątów

1. Pole prostokąta Poćwicz! 1. a) 24 cm^2 b) 90 m^2 c) 10 dm^2 d) $450 \text{ cm}^2 = 45\,000 \text{ mm}^2$
e) $420\,000 \text{ mm}^2$ f) $2420 \text{ dm}^2 = 242\,000 \text{ cm}^2$ 2. a) 144 cm^2 b) $1\,000\,000 \text{ cm}^2$ c) $\frac{4}{9} \text{ dm}^2$
d) $12\frac{1}{4} \text{ m}^2$ 3. a) 9 m b) 10 mm c) $\frac{1}{6} \text{ cm}$ d) $1\frac{1}{2} \text{ dm}$ 4. a) 5 cm b) $3\frac{1}{16} \text{ m}$ c) 7 dm 5. a) 143 cm^2
b) 605 m^2 c) 624 cm^2 d) 4500 dm^2 6. F, F 7. 1320 zł 8. I. B, II. D 9. 768 m^2 10. a) 5 m i 12 m
b) 30 dm i 10 dm

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 84 m^2 b) $160\,000 \text{ mm}^2 = 1600 \text{ cm}^2$ c) $1\frac{1}{2} \text{ cm}^2$
d) $10 \text{ m}^2 = 100\,000 \text{ cm}^2$ 2. I. B, II. C 3. 494 000 zł

2. Jednostki pola Poćwicz! 1. a) 800 mm^2 , 1200 mm^2 , $40\,000 \text{ mm}^2$, $23\,000\,000 \text{ mm}^2$
b) 500 cm^2 , 3400 cm^2 , $90\,000 \text{ cm}^2$, $160\,000 \text{ cm}^2$, 2 cm^2 c) 300 dm^2 , 2700 dm^2 , 4 dm^2 ,
 500 dm^2 d) $7\,000\,000 \text{ m}^2$, $58\,000\,000 \text{ m}^2$, 6 m^2 , 5 m^2 2. a) 900 m^2 , 2800 m^2 , $50\,000 \text{ m}^2$,
 $600\,000 \text{ m}^2$, $2\,390\,000 \text{ m}^2$ b) 8 a , 22 a , 740 a , 200 a , 9000 a c) 3 ha , 14 ha , 999 ha ,
 6 ha , 57 ha 3. C 4. nie 5. tak, trawa zajmuje 440 m^2 6. 21 7. a) największa B-5R,
najmniejsza C-112 b) koszt działki A-5: 298 820 zł; koszt działki B-5R: 2 365 200 zł; koszt
działki C-112: 224 115 zł 8. 316 900 ha

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 1400 mm^2 b) $770\,000 \text{ cm}^2$ c) 30 km^2 d) 3500 a e) $10\,200 \text{ m}^2$
f) 65 ha 2. 120 zł 3. D

3. Pole równoległoboku Poćwicz! 1. C 2. I – długość boku 5, wysokość 3; II – długość
boku 2, wysokość 5; III – długość boku 3, wysokość 3; IV – długość boku 2, wysokość 3;
V – długość boku 2, wysokość 3; VI – długość boku 4, wysokość 1 3. a) 160 m^2 b) 3 dm^2
c) 18 dm^2 d) 150 cm^2 4. a) 6 m^2 b) 1050 cm^2 c) 96 dm^2 d) $22\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ 5. $P = 100 \text{ cm}^2$, $h = 5 \text{ cm}$
6. $h_1 = 14 \text{ cm}$, $h_2 = 7 \text{ cm}$ 7. 50 cm^2 8. 80 cm 9. 52 dm

Sprawdź, co umiesz! 1. P, P 2. a) 960 cm^2 b) 150 dm^2 c) 120 cm^2 3. $P = 216 \text{ cm}^2$,
 $h = 14\frac{2}{5} \text{ cm} = 14 \text{ cm } 4 \text{ mm}$

4. Pole trójkąta Poćwicz! 1. II 2. odpowiedź zależy od precyzji pomiaru a) 3 cm
b) $3 \text{ cm } 4 \text{ mm}$ c) 2 cm d) 3 cm 3. a) 44 cm^2 b) $6\frac{4}{5} \text{ dm}^2$ c) $5 \text{ m}^2 = 50\,000 \text{ cm}^2$ d) 216 cm^2
e) 15 dm^2 f) $240 \text{ m}^2 = 2\,400\,000 \text{ cm}^2$ 4. Wszystkie pola są jednakowe (ponieważ $a \parallel b$, to
wszystkie wysokości mają tę samą długość). 5. a) 20 cm^2 b) $11\frac{1}{9} \text{ dm}^2$ c) 108 cm^2 6. 720 cm^2 ;
nie 7. 5 cm 8. 12 cm

Sprawdź, co umiesz! 2. B 3. 14 cm

5. Pole trapezu Poćwicz! 1. a) 18 dm^2 b) 258 m^2 c) 24 cm^2 d) 610 cm^2 e) 20 cm^2
f) 21 m^2 2. a) 198 cm^2 b) 940 cm^2 3. 290 cm^2 4. a) 22 dm b) 17 dm c) 40 dm 5. 4 cm
6. 110 cm 7. a) 20 cm^2 b) 84 m^2 c) 220 cm^2 8. a) pola tych trójkątów są sobie równe b) pole
trójkąta AED stanowi różnicę pól trójkątów ABD i ABE c) pole trójkąta BEC stanowi
różnicę pól trójkątów ABC i ABE d) pola tych trójkątów są sobie równe

Sprawdź, co umiesz! 1. D 2. 7 cm 3. 900 cm^2

6. Pola wielokątów Poćwicz! 1. D 2. a) 20 b) 12 c) $8\frac{1}{2}$ d) 12 e) $10\frac{1}{2}$ f) 13
3. Zosia 741 cm^2 , Kuba 551 cm^2 ; Zosia, o 190 cm^2 4. a) $18\,000 \text{ m}^2 = 180 \text{ a}$ b) 135 a c) $\frac{1}{4}$

Sprawdź, co umiesz! 1. 128 cm^2 2. 54 cm^2 3. B

Podsumowanie działu VI

Poćwicz przed sprawdzianem 1. D 2. D 3. tabela 1: F, P, F; tabela 2: F, P, F 4. C 5. I. A,
II. D 6. a) 7 cm^2 b) 9 cm^2 7. 12 cm 8. 33 dm^2 9. a) 320 b) 3840 zł 10. przekątna 24 cm ,

wysokość $14\frac{2}{5}$ cm **11.** $18\frac{1}{2}$ ha **12.** 3 puszki, 261 zł **Podjmij wyzwanie** **1.** 1908 zł **2.** 700 cm^2
3. F, F, P **4.** 260 cm^2 **5.** 1530 cm^2 **6.** 37 cm^2 **7.** 1 cm 2 mm **Wykorzystaj w praktyce**
1. niemal $103\,963\text{ km}^2$ **2.** $311\,888\,000\,000\text{ m}^2 = 3\,118\,880\,000\text{ a} = 31\,188\,800\text{ ha}$ **3.** 133
4. 355 800 000 **5.** a) 20 250 sadzonek sosny i 9000 sadzonek brzozy b) 29 025 zł

Dział VII. W świecie ułamków dziesiętnych

1. Ułamki zwykłe a dziesiętne Poćwicz! **1.** a) 0,7 b) 0,65 c) 5,21 d) 18,184 e) 1,07
 f) 6,078 g) 9,9 h) 3,75 i) 8,064 j) 0,0047 k) 0,0012 l) 1,000025 **2.** a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{25}$ c) $17\frac{1}{5}$ d) $2\frac{1}{4}$
 e) $15\frac{3}{20}$ f) $\frac{11}{20}$ g) $3\frac{1}{25}$ h) $\frac{1}{125}$ i) $24\frac{8}{125}$ j) $9\frac{3}{40}$ k) $105\frac{3}{8}$ l) $83\frac{27}{40}$ **3.** a) 0,4 b) 0,3 c) 1,28 d) 0,034
 e) 8,7 f) 3,04 g) 18,016 **4.** a) niebieskim – 0,6, różowym – 0,4 b) niebieskim – 0,75,
 różowym – 0,25 c) niebieskim – 0,2, różowym – 0,8 d) niebieskim – 0,625, różowym – 0,375
 e) niebieskim – 0,2, różowym – 1,8 f) niebieskim – 2,1, różowym – 0,9 **5.** RAFLEZJA
 ARNOLDA **6.** $2\frac{16}{25}$ **7.** a) $A = 0,22$, $B = 0,31$, $C = 0,34$, $D = 0,435$ b) $E = 4,056$, $F = 4,069$,
 $G = 4,07$, $H = 4,0725$ **8.** a) 0,35 b) 0,791 c) 5,678

Sprawdź, co umiesz! **1.** 0,19; 0,25; 0,48; 1,012; 8,4 **2.** a) $1\frac{4}{5}$ b) $\frac{4}{25}$ c) $17\frac{1}{20}$ d) $\frac{33}{500}$ e) $12\frac{3}{8}$ **3.** C

2. Ułamki dziesiętne i wyrażenia dwumianowane Poćwicz! **1.** a) $>$ b) $>$ c) $<$
 d) $<$ e) $=$ f) $<$ g) $<$ h) $<$ i) $<$ **2.** a) $2,499 > 2,438 > 2,43 > 2,377 > 2,376 > 2,373$ b) Wołowa
 Turnia, Cubryna c) Rysy, Mięguszowiecki Szczyt **3.** a) 0,9 cm b) 16,3 cm c) 0,02 m
 d) 10,08 m e) 0,167 km f) 1,028 km g) 4,005 km h) 0,056 m i) 0,000003 km **4.** a) 0,8 dag
 b) 6,1 dag c) 0,85 kg d) 1,09 kg e) 0,018 kg f) 44,006 kg g) 0,032 t h) 271,002 t i) 50,005 t
5. a) 0,83 zł b) 85,26 zł c) 786,09 zł **6.** 7 cm 9 mm; 9 m 4 cm; 5 m 200 cm; 17 km 939 m;
 3 km 105 m; 7 km 70 m; 100 km 900 m; 8 dag 6 g; 19 kg 27 dag; 402 kg 50 dag; 1 t 87 kg;
 26 t 20 kg; 82 t 300 kg; 16 zł 50 gr **7.** 1 m 7 cm; 4 kg 80 dag; 2 m 24 cm; 12 cm 5 mm;
 2 cm; 200 m **8.** a) $9007\text{ g} < 9,7\text{ kg} < 971\text{ dag} < 90,7\text{ kg} < 90,701\text{ kg} < 0,9\text{ t} < 0,97\text{ t} < 9,7\text{ t}$
 b) $52\,000\text{ cm} < 5\text{ km} < 200\text{ cm} < 5\text{ km} < 20\text{ m} < 5,2\text{ km} < 5202\text{ m} < 5,22\text{ km}$

Sprawdź, co umiesz! **1.** $8,4 > 8,01 > 0,9 > 0,848 > 0,844 > 0,8400 > 0,809 > 0,488$
2. a) 6 dag 8 g b) 1 kg 62 dag c) 15 t 90 kg d) 44 zł 40 gr e) 30,01 m f) 153,51 zł g) 1,087 kg
 h) 99,005 t **3.** F, F

3. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych Poćwicz! **1.** FRACTION
2. a) 81,88 b) 2315,078 c) 827,84 d) 465,31 e) 54,109 f) 60,125 g) 74,116 h) 160,6
 i) 118,24 j) 0,0247 **3.** a) najdłuższa – bieg, najkrótsza – pływanie b) o 1,609 km
 c) $18,1602\text{ km} = 18160,2\text{ m}$ **4.** I. A, II. D **5.** a) 149,6 b) 113 **6.** P, F **7.** łączna masa –
 41,395 kg; piąta walizka może ważyć maksymalnie 8,605 kg **8.** –, +, +

Sprawdź, co umiesz! **1.** B **2.** a) 23,5 b) 13,1 **3.** $3495\text{ m} = 3,495\text{ km}$

4. Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000... Poćwicz!
1. mnożenie: a), c), d); dzielenie: b), e), f) **2.** a) 365,7 b) 8500 c) 0,0007 **3.** a) 541,8; 10;
 32,7; 0,1; 44,4; 13,16; 130 b) 5,418; 0,1; 0,327; 0,001; 0,444; 0,1316; 1,3 c) 0,05418; 0,001;
 0,00327; 0,00001; 0,00444; 0,001316; 0,013 d) 54 180 000; 1 000 000; 3 270 000; 10 000;
 4 440 000; 1 316 000; 13 000 000 **4.** D **5.** a) 4,5 kg; 45 kg b) 2,7 g; 27 g **6.** 1685,50 zł
7. 56 cm **8.** a) 39 zł b) 800 zł c) o 800 zł **9.** $164\,000\,000\text{ g} = 164\,000\text{ kg} = 164\text{ t}$;
 $25\,100\,000\text{ g} = 25\,100\text{ kg} = 25,1\text{ t}$, $5\,000\,000\text{ g} = 5000\text{ kg} = 5\text{ t}$

Sprawdź, co umiesz! **1.** $0,0023 < 0,0317 < 4,56 < 404 < 5180$ **2.** C **3.** 1084 zł

5. Mnożenie ułamków dziesiętnych Poćwicz! **1.** a) 0,9 b) 4,8 c) 30,6 d) 11,2 e) 0,16
 f) 0,15 g) 0,33 h) 1,2 i) 0,036 j) 0,00055 k) 0,0042 l) 0,0051 **2.** 19,10 zł **3.** a) 56,52
 b) 12,056 c) 13 050 d) 12 096 e) 2,5584 f) 2115,4935 g) 6,225 h) 995,0505 **4.** I. B, II. C
5. P, F **6.** w Genewie – 23,92 zł; w Paryżu – 23,10 zł **7.** a) 5,44 zł b) 16,75 zł c) 7,35 zł
8. a) wierszami: 3, 1, 2, 2 b) wierszami: 1, 2, 5, 5, 2, 2, 7, 0, 0, 0 c) wierszami: 2, 4, 1

Sprawdź, co umiesz! **1.** a) 5,2 b) 0,085 c) 256,8 d) 3,84 **2.** B **3.** 55,77 zł

6. Dzielenie ułamków dziesiętnych Poćwicz! 1. a) $108 : 8 = 10,8 : 0,8 = 1,08 : 0,08$
 b) $720 : 450 = 7,2 : 4,5 = 72 : 45$ 2. a) 0,14 b) 0,31 c) 0,08 d) 0,112 e) 0,051 f) 0,05 g) 0,06
 h) 0,02 i) 1,2 j) 0,8 3. a) 2 b) 5 c) 3 d) 25 e) 30 f) 6000 g) 2130 h) 20 4. a) 2,39 b) 8,65 c) 0,54
 d) 0,584 e) 7,3 f) 43,85 g) 0,184 h) 23,65 i) 89,1 j) 32,56 18,6125 l) 12,5 5. a) kawa ciemna
 0,85 zł; kawa mleczna 1,09 zł; kawa mocna 0,79 zł b) kawa mocna, kawa ciemna, kawa
 mleczna 6. a) 45 b) 27 c) 15 d) 54 7. $6,35 \text{ km} = 6350 \text{ m}$ 8. P, F, P 9. tak (pan Wojtek
 kupił 31 l paliwa; aby przejechać dokładnie 400 km, musi kupić dokładnie 30 l paliwa)
 10. największy obwód – II, największe pole – II 11. a) 200,5 b) 1942

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 0,05 b) 7 c) 1020 d) 0,9 2. a) 4,92 b) 0,514 c) 7,31 d) 0,5125 3. 16

7. Zadania tekstowe Poćwicz! 1. Janek – 16,8 km; Małgosia – 13,65 km 2. niemożliwe,
 ponieważ długość ściany to 358 cm, a suma długości mebli wynosi 385 cm 3. 2117,99 zł

4. a) o 16,395 km b) 219,6 razy 5. $0,005 \text{ g} = 5 \text{ mg}$ 7. a) 1 kg jabłek – 520 kcal;
 100 g płatków – 373 kcal b) 425 kcal, węglowodany – 73,51 g, białko – 13,52 g,
 tłuszcz – 6,8 g, błonnik – 12,06 g c) 4 9. 11 cm 10. a) 70,9 i 79,1 b) 32,8, 54,6 i 19,3

Sprawdź, co umiesz! 1. 172,53 zł 2. F, P 3. a) 26 b) 42 zł

Podsumowanie działu VII

Poćwicz przed sprawdzianem 1. C 2. B 3. C 4. A 5. C 6. B 7. A 8. B 9. C 10. a) 68,713
 b) 20,07 c) 220,314 d) 0,6205 e) 38,515 f) 4,0112 g) 68,288 h) 208,04 11. tabela 1: F, F;
 tabela 2: P, F 12. I. A, II. D 13. $13,05 \text{ g} < 13,05 \text{ dag} < 0,135 \text{ kg} < 130,5 \text{ dag} < 1,35 \text{ kg}$
 14. tak 15. $20,1275 \text{ m}^2$ 16. 4,6 m 17. 13,5 km 18. a) 46,31 zł b) 153,69 zł **Podjmij**

wyzwanie 1. 0,625 2. 74,08 m 3. Tak, do 3,5 t brakuje 264,1 kg. 4. Koperty z bąbelkami,
 o 0,0025 t. 5. P, F 6. 7,38 m 7. 10,14 zł 8. 2,005 **Wykorzystaj w praktyce** 1. 0,592 kg
 2. łączny koszt – 11,76 zł; koszt jednej porcji – 5,88 zł 3. zapotrzebowanie na witaminę C:
 315,96 mg; zapotrzebowanie na witaminę E: 2,248 mg; zapotrzebowanie potas:
 1807,44 mg; zapotrzebowanie na wapń: 334,32 mg; superkoktajl w całości pokrywa
 zapotrzebowanie na witaminę C

Dział VIII. W świecie liczb całkowitych

1. Liczby całkowite Poćwicz! 1. a) ramka fioletowa b) ramki żółta, pomarańczowa
 i fioletowa 2. a) $-4 < 5$ b) $0 > -7$ c) $-10 < -9$ d) $144 > -145$ e) $-150 > -230$ 3. -10, 0, -9, 4, -6,
 -1, -7, -2, -8 b) 0, 20, 15, 24, 4, -6, -1, 6, -7, 8, -2 c) 0, 4, -1, 6, 8, -2 4. a) $A = -140$, liczba
 przeciwna: 140; $B = -80$, liczba przeciwna: 80; $C = -40$, liczba przeciwna: 40; $D = 60$, liczba
 przeciwna: -60 b) $E = -75$, liczba przeciwna: 75; $F = -45$, liczba przeciwna: 45; $G = -15$, liczba
 przeciwna: 15; $H = 60$, liczba przeciwna: -60 c) $I = -225$, liczba przeciwna: 225; $J = -200$,
 liczba przeciwna: 200; $K = 0$, liczba przeciwna: 0 d) $L = -240$, liczba przeciwna: 240; $M = 0$,
 liczba przeciwna: 0; $N = 150$, liczba przeciwna: -150 5. a) na osi należy zaznaczyć następujące
 liczby przeciwne do danych: -5, -3, 1, 0, 3, -7, 4 b) na osi należy zaznaczyć następujące liczby
 przeciwne do danych: 150, -100, 0, 50, -200, 100 6. a) 0, 1, 2, 3, 4, 5 b) -2, -1, 0, 1, 2, 3 c) -6,
 -5, -4, -3, -2, -1 7. a) w Katowicach, Kielcach, Łodzi i Suwałkach b) w Gdańsku c) w Opolu;
 o 11°C 8. F, F, P, F 9. a) -8 lub 8 b) 10 c) 14 d) 0 e) -5

Sprawdź, co umiesz! 1. -32, -23, -21, -12, 12, 20, 23 2. C 3. -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,
 4; liczby dodatnie: 1, 2, 3, 4; liczby ujemne: -6, -5, -4, -3, -2, -1; liczby naturalne: 0, 1, 2, 3, 4

2. Dodawanie liczb całkowitych Poćwicz! 1. a) $+ b) - c) + d) - e) - f) +$ 2. a) 5, 13, 8,
 22 b) -5, -13, -8, -22 c) 3, 3, 4, 4 d) -3, -3, -4, -4 3. a) 2 b) 6 c) 10 d) 0 e) -30 f) -27 g) -14
 h) -15 i) 0 j) 5 k) -9 l) -74 4. metoda 1: dodajesz osobno wszystkie liczby dodatnie i osobno
 wszystkie liczby ujemne, a następnie sumujesz otrzymane wyniki, $9 + (-20) = -11$; metoda
 2: w pierwszej kolejności szukasz liczb przeciwnych, bo ich suma wynosi 0, a następnie
 sumujesz pozostałe liczby, $2 + (-3) + (-1) + 2 = 0$ 5. a) -10 b) 0 c) -60 d) 4 e) -3 f) 5
 6. a) -8 punktów b) 15, -10 i -7 lub 8, -10 i jeden rzut nie trafiony 7. żadna, obie
 otrzymały liczbę 0 8. a) jest mniejszy, o 50 zł b) -550 zł 9. a) -3 b) -32

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 3 b) -20 c) -30 d) 17 e) -5 2. po południu: $+3^\circ\text{C}$; w nocy: -2°C
 3. -12

3. Odejmowanie liczb całkowitych Poćwicz! 1. a) 6, -6, 4, -4, 4, -4 b) 11, -11, 5, -5, 5, -5 c) 8, -8, 4, -4, 4, -4 d) 17, -17, 9, -9, 9, -9 2. C 3. a) -1 b) -8 c) -6 d) -29 e) -80 f) -70 g) 54 h) 20 i) 43 j) 10 k) -12 l) -33 4. a) $8 - 12 = -4$ b) $-30 - 20 = -50$ c) $50 - 65 = -15$ d) $-100 - 85 = -185$ 5. a) 1 b) 5 c) -1 d) -18 e) 28 f) 44 g) -16 h) 0 i) 6 j) 112 6. 25, 0, -10, -20, -25, -30, -40, -50, -75 7. F, P 8. a) -48 b) 35 c) 6 d) 4 9. a) np. $1000 = -1 + 1001$ b) np. $1000 = -1 - (-1001)$ c) np. $1000 = -1 - 999$ d) nie jest to możliwe

Sprawdź, co umiesz! 1. a) -19 b) 21 c) -3 d) -200 e) 0 f) 27 2. -50 zł 3. pon. -8°C , wt. -12°C , śr. -10°C , czw. 0°C , pt. -7°C

4. Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych Poćwicz! 1. a) liczba dodatnia b) liczba ujemna c) liczba dodatnia d) 0 2. a) -35 b) 48 c) -36 d) 60 e) -48 f) 48 g) -4 h) -8 i) 29 j) 24 k) -12 l) 0 3. a) -7 b) -8 c) 2 d) 81 e) -2 f) -1 g) -2500 h) 76 4. a) 1 punkt b) -6 punktów 5. a) $(-100) : (-2) = 5 \cdot 10$ b) $(-2) \cdot 7 < 21 : (-3)$ 6. a) -10 b) 6 c) -40 d) -63 e) 3 f) 100 7. a) nie b) tak, suma magiczna -3 c) tak, iloczyn magiczny 216 8. a) od dołu: 2, -1, -2, 12, -10, -120 b) od dołu: 320 000, 5, -400, 4, 10 9. a) w środę i w sobotę b) 10°C c) -3°C 10. -9 i 4 oraz -4 i 9 **Sprawdź, co umiesz!** 1. a) -63 b) 10 c) -32 d) -4 2. a) -9 b) 3 c) -64 3. F, P, F, F

Podsumowanie działu VIII

Poćwicz przed sprawdzianem 1. D 2. C 3. a) 2 b) -32 c) 1 d) 17 e) -3 f) -90 g) -20 h) -48 i) 27 j) -50 k) 4 l) -24 4. $-36 < -15 < -9 < 4 < 15$ 5. I. -102 II. -98 III. -200 IV. -50 6. I. 17 i -17, 1 i -1, -8 i 8, $2\frac{2}{3}$ i $-2\frac{2}{3}$ II. $\frac{1}{8}$ i 8, $2\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{8}$ III. -8 i $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ i $-2\frac{2}{3}$ 7. F, P, F, F 8. D 9. I. B, II. C 10. -3 11. a) -10 b) -12 c) -54 d) 78 12. 7384 m 13. 379 m 14. a) w dzień: 12°C ; w nocy: 5°C b) o 7°C **Podejmij wyzwanie** 1. P, P, F 2. $\spadesuit = 65$, $\heartsuit = 24$, $\clubsuit = -28$ 3. 31 zł 4. 3 1 3 9 5. F, P 6. Jedno wyrażenie. 7. $d > b > c > a$ **Wykorzystaj w praktyce** 1. 80°C 2. a) o 78°C b) Mars 120°C ; Merkury 600°C ; Ziemia 146°C ; Wenus 640°C ; największa różnica na Wenus, najmniejsza na Marsie 3. a) 19 882 m b) 10 575 m

Dział IX. W świecie figur przestrzennych

1. Figury przestrzenne Poćwicz! 1. kształt wielościanu: prezent, pudełko, torebka herbaty; kształt bryły obrotowej: piłka, wafelek, świeca 2. a) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków; graniastosłup b) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków; graniastosłup c) 7 ścian, 12 krawędzi, 7 wierzchołków; ostrosłup d) 5 ścian, 8 krawędzi, 5 wierzchołków; ostrosłup e) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków; graniastosłup f) 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków; graniastosłup 3. a) A, B, C, D, E, F, G, H, I, J b) AB, BC, CD, DE, EA, FG, GH, HI, IJ, JF c) AF, BG, CH, DI, EJ d) ABCDE, FGHIJ e) ABGF, BCHG, CDIH, DEJI, EAFJ f) ABCDE i FGHIJ 4. 8 ścian, 12 krawędzi, 6 wierzchołków 5. a) 18 wykałaczek, 12 kulek b) 10 wykałaczek, 6 kulek 6. I 4 ściany, 5 krawędzi, 2 wierzchołki; II 3 ściany, 3 krawędzi, 1 wierzchołek 8. a) liczba krawędzi podstaw: I - 3, II - 4, III - 5, IV - 6; liczba wierzchołków: I - 6, II - 8, III - 10, IV - 12; liczba krawędzi: I - 9, II - 12, III - 15, IV - 18; liczba ścian: I - 5, II - 6, III - 7, IV - 8 b) graniastosłup o podstawie ośmiokąta: 16 wierzchołków, 24 krawędzie, 10 ścian; graniastosłup o podstawie stukąta: 200 wierzchołków, 300 krawędzi, 102 ściany

Sprawdź, co umiesz! 1. 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków; graniastosłup 2. D

2. Prostopadłościany i ich siatki Poćwicz! 1. sześciiany: C, E; prostopadłościany: C, D, E, F; graniastosłupy: A, C, D, E, F 2. III i IV 3. A (podstawa po prawej stronie jest kwadratem), B (dwie ściany nie są prostokątami), C (jest 5 ścian bocznych, wymiary podstaw nie pasują do wymiaru ściany) 4. a) $a = 2\text{ cm}$, $b = 3,5\text{ cm}$, $c = 2\text{ cm}$, $d = 2,8\text{ cm}$ b) 33,2 cm 5. a) 64 cm b) 148 cm c) 102 cm d) 21,4 m 6. 14 cm 7. a) 15 cm b) 16 cm 8. a) 1,5 m, 4,5 m, 9 m b) 5 cm, 5 cm, 5 cm 9. należy narysować siatkę prostopadłościanu o wymiarach $2\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 3,5\text{ cm}$ 10. 3,5 cm 11. należy narysować siatkę prostopadłościanu o wymiarach $3\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ 13. a) $20\text{ cm} \times 40\text{ cm} \times 60\text{ cm}$ b) należy narysować siatkę prostopadłościanu o wymiarach $2\text{ cm} \times 4\text{ cm} \times 6\text{ cm}$

Sprawdź, co umiesz! 1. B 2. 25 cm 3. należy narysować siatkę prostopadłościanu o wymiarach $4\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 2\text{ cm}$

3. Pole powierzchni prostopadłościanu Poćwicz! 1. a) 766 cm^2 b) 216 cm^2 c) 220 cm^2 d) 298 cm^2 2. a) 286 cm^2 b) 34 dm^2 c) 864 cm^2 d) $1060\text{ cm}^2 = 10,6\text{ dm}^2$ 3. a) 96 mm^2 b) 1440 cm^2 c) $71,75\text{ dm}^2$ d) 294 cm^2 4. a) 74 cm b) 210 cm^2 5. $15\,200\text{ cm}^2$ 6. a) 294 cm^2 b) 54 dm^2 c) $433,5\text{ cm}^2$ 7. dłuższa jest krawędź sześciianu II, o 17 cm 8. 1447,50 zł 9. 180 cm 10. a) 1663,80 zł b) 575 zł 11. 20 cm 12. 300 cm^2 lub 90 cm^2

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 412 cm^2 b) 342 cm^2 c) 1014 m^2 c) $1,5\text{ dm}^2$ 2. 236 cm^2 3. 1 cm

4. Graniastosłupy proste i ich siatki Poćwicz! 1. a) graniastosłup pięciokątny; 7 ścian, 15 krawędzi, 10 wierzchołków b) graniastosłup pięciokątny; 7 ścian, 15 krawędzi, 10 wierzchołków c) graniastosłup czternastokątny; 16 ścian, 42 krawędzie, 28 wierzchołków 2. a) graniastosłup trójkątny $ABCDEF$ b) krawędzie podstaw: AB, BC, CA, DE, EF, FD ; krawędzie boczne: BE, CF, AD ; ściany boczne: $ABED, CBEF, ADFC$; podstawy: ABC, DEF c) $|BC| = 3\text{ cm}, |BE| = 8\text{ cm}, |AB| = 4\text{ cm}$ 3. a) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków b) 10 ścian, 24 krawędzie, 16 wierzchołków c) 22 ściany, 60 krawędzi, 40 wierzchołków d) 82 ściany, 240 krawędzi, 160 wierzchołków 4. a) tak, siedmiokątny b) tak, siedmiokątny c) nie d) tak, dziewięćdziesięciodziewięciokątny e) nie f) tak, trzydziestotrzykątny 5. $a = 2\text{ cm}, b = 2\text{ cm}, c = 5,5\text{ cm}, d = 6\text{ cm}$ 6. I, III i IV; mają za mało (I, IV) lub za dużo ścian (III) 7. a) 122 cm b) 143 m c) $3040\text{ cm} = 304\text{ dm}$ d) 125 cm 9. 20 cm 10. graniastosłup pięciokątny

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 84 cm b) 8,88 m c) 20 dm 2. F, P, F 3. wskazówka: należy narysować siatkę graniastosłupa, w którym krawędź podstawy ma długość 3 cm

5. Pole powierzchni graniastosłupa Poćwicz! 1. a) 12 cm^2 b) 288 cm^2 c) 312 cm^2 2. a) $P_p = 8\text{ cm}^2, P_b = 70\text{ cm}^2, P_c = 86\text{ cm}^2$ b) $P_p = 30\text{ cm}^2, P_b = 300\text{ cm}^2, P_c = 360\text{ cm}^2$ c) $P_p = 96\text{ cm}^2, P_b = 800\text{ cm}^2, P_c = 992\text{ cm}^2$ 3. a) $P_p = 24\text{ cm}^2, P_b = 312\text{ cm}^2, P_c = 360\text{ cm}^2$ b) $P_p = 20\text{ cm}^2, P_b = 325\text{ cm}^2, P_c = 365\text{ cm}^2$ c) $P_p = 1,35\text{ cm}^2, P_b = 185,9\text{ cm}^2, P_c = 188,6\text{ cm}^2$ 4. 28 m^2 5. 143 dm^2 6. $1,62\text{ m}^2$ 7. F, F 8. $48\,000\text{ cm}^2$

Sprawdź, co umiesz! 1. I. B, II. D 2. 810 dm^2 3. 248 cm^2

6. Ostrosłupy proste i ich siatki Poćwicz! 1. a) ostrosłup trójkątny; 4 ściany, 6 krawędzi, 4 wierzchołki b) ostrosłup pięciokątny; 6 ścian, 10 krawędzi, 6 wierzchołków c) ostrosłup sześciokątny; 7 ścian, 12 krawędzi, 7 wierzchołków 2. a) ostrosłup czworokątny $ABCDE$ b) krawędzie podstawy: AB, BC, CD, DA ; krawędzie boczne: AE, BE, CE, DE ; ściany boczne: ABE, BCE, CDE, DAE ; podstawa: $ABCD$ 3. a) liczba ścian: 9; liczba krawędzi: 16; liczba wierzchołków: 9 b) liczba ścian: 14; liczba krawędzi: 26; liczba wierzchołków: 14 c) liczba ścian: 21; liczba krawędzi: 40; liczba wierzchołków: 21 d) liczba ścian: 201; liczba krawędzi: 400; liczba wierzchołków: 201 4. a) tak, siedmiokątny b) tak, dwunastokątny c) tak, dziewięciokątny d) tak, dziewięćdziesięciodziewięciokątny e) tak, dwudziestodziewięciokątny f) nie 5. $a = 8\text{ cm}, b = 12\text{ cm}, c = 5\text{ cm}, d = 5\text{ cm}$ 6. II (podstawą jest trójkąt, a ściany boczne są 4), III (brak podstawy), IV (wysokość ściany bocznej jest za mała, aby ściany boczne złączyły się w jednym wierzchołku) 8. 10 cm 9. 27 cm 10. 5 cm i 15 cm

Sprawdź, co umiesz! 1. a) 4 b) 4 c) 6 d) 54 cm 2. F, F, P 3. 50 cm

Podsumowanie działu IX

Poćwicz przed sprawdzianem 1. a) prostopadłościan lub graniastosłup czworokątny; 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków b) ostrosłup czworokątny; 5 ścian, 8 krawędzi, 5 wierzchołków c) graniastosłup sześciokątny; 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków d) ostrosłup sześciokątny; 7 ścian, 12 krawędzi, 7 wierzchołków e) graniastosłup siedmiokątny; 9 ścian, 21 krawędzi, 14 wierzchołków 2. a) $a = 2\text{ cm}, b = 7\text{ cm}, c = 3\text{ cm}$ b) 48 cm c) 82 cm 3. D 4. C 6. a) 180 cm b) 672 cm^2 7. a) 568 cm^2 b) 492 cm^2 8. a) 62 cm b) 160 cm^2 c) 184 cm^2 9. P, F, P, P 10. a) 144,75 zł b) 40 556,78 zł

Podejmij wyzwanie 1. 0 2. P, F, P, P 3. $27\,000\text{ cm}^2$ 4. Nie. 5. 92 cm 6. 70 m^2

Wykorzystaj w praktyce 1. 32 cm 2. nie 3. 2 cm

Źródła fotografii i ilustracji

Okladka: (Kuba) Alexander_Safonov/Shutterstock.com

Postacie: (Bruno) carballo/Shutterstock.com, (Cezary) VaLiza/Shutterstock.com, (Ela) Roman Samborskyi/Shutterstock.com, (Kuba) Alexander_Safonov/Shutterstock.com, (Pola) ViDI Studio/Shutterstock.com, (Zosia) Jacek Chabraszewski/Shutterstock.com

Tekst główny: s. 7 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com; s. 8 (folder) 4zevar/Shutterstock.com, (pliki) Kraska/Shutterstock.com, (kosz) Marta Sher/Shutterstock.com; s. 9 (foki) Teguh Mujiono/Shutterstock.com; s. 11 (japońska książeczka dla turystów) Aleksandar Todorovic/Shutterstock.com; s. 14 (kwiaty) lanitta/Shutterstock.com, Sunnydream/Shutterstock.com, Gizele/Shutterstock.com, (wstażki) jannoon028/Shutterstock.com; s. 15 (książki) Tatahnka/Shutterstock.com, (roboty) Macrovector/Shutterstock.com; s. 16 (roboty) Macrovector/Shutterstock.com; s. 17 (kamerka) VikiVector/Shutterstock.com, (pianka, maska i pletwy) Iconic Bestiary/Shutterstock.com, (telefony) alexdndz/Shutterstock.com; s. 19 (kosmiczna gra na okładce) klyaksun/Shutterstock.com, (pudełko ze wstażką) Peter Hermes Furian/Shutterstock.com; s. 20 (teleskop i planeta) klyaksun/Shutterstock.com; s. 21 (los na loterię) Frogella/Shutterstock.com; s. 22 (wielbłąd) bergamotych/Shutterstock.com, (wiaderko) Anatolir/Shutterstock.com; s. 23 (pensjonat) Tunsale Ismaylova/Shutterstock.com, (zdjęcia pokoju) klyaksun/Shutterstock.com, (leżak na plaży) curiosity/Shutterstock.com; s. 25 (kostka) Natalia Chaykovskaya/Shutterstock.com, (pionki) r.kathesi/Shutterstock.com, (budynki z autami) Peter Varga/Shutterstock.com, (plany mieszkań) Simeonn/Shutterstock.com, paparoma/Shutterstock.com; s. 27 (motorówka) Yorrico/Shutterstock.com, (szybowiec) vectorOK/Shutterstock.com, (samochód) Art Kovalenco/Shutterstock.com; s. 28 (kura) ONYXprj/Shutterstock.com, (strus) robuart/Shutterstock.com, (jajka) Macrovector/Shutterstock.com; s. 29 (folder) 4zevar/Shutterstock.com; s. 30 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com, (Jaskinia Niedźwiedzia) Michal Buksak/Shutterstock.com; s. 31 (sadzonka dębu) jurgal/Shutterstock.com; s. 33 (deskorolka) AnutaBerg/Shutterstock.com, (rolki) bus109/Shutterstock.com, (hulajnoga) Azat Valeev/Shutterstock.com; s. 34 (Jan Szczepanik) Krzysztof Chojnacki/East News, (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com, (banknot 500 zł) Kinek00/Shutterstock.com; s. 35 (mapa zoo) Ogród Zoologiczny we Wrocławiu; s. 36 (ekologiczny budynek) Faber14/Shutterstock.com; s. 37 (laptop) Pavlo Plakhotia/Shutterstock.com; s. 39 (kolorowe cyfry) Cath Vectorielle/Shutterstock.com; s. 40 (kolorowe cyfry) Cath Vectorielle/Shutterstock.com, (Archipelag Arytmetyki) Shpadaruk Aleksei/Shutterstock.com; s. 42 (banknot 10 zł) reprodukcja, (monety 2 zł, 5 zł) Małgorzata Koziół/WSiP; s. 44 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com, (motyl) suns07butterfly/Shutterstock.com, (gest w języku migowym) jaya diudara80/Shutterstock.com; s. 46 (balon) Ihor/Shutterstock.com; s. 47 (resoraki) Mark_Rimsky/Shutterstock.com; s. 48 (wazon z kwiatami) Nataliia Reshetova/Shutterstock.com; s. 54 (balony) Ihor/Shutterstock.com; s. 55 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com, (tablica) Hilch/Shutterstock.com; s. 56 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com, (drzewo) VikiVector/Shutterstock.com; s. 59 (motocykle) Robcartorres/Shutterstock.com, Granate Art/Shutterstock.com, Net Vector/Shutterstock.com, (resoraki) Mark_Rimsky/Shutterstock.com; s. 60 (kubek) Lightkite/Shutterstock.com; s. 61 (szpinak) Everilda/Shutterstock.com, (pieróg) Sim_Ira/Shutterstock.com, (borówki) Good Job/Shutterstock.com; s. 63 (logistyk) Arttasty/Shutterstock.com; s. 64 (kredki) Monkik/Shutterstock.com, (gitara) mejorana/Shutterstock.com, (ukulele) Granate Art/Shutterstock.com; s. 65 (spinka z biedronką) Jiripravda/Shutterstock.com; s. 66 (bratki) Jut/Shutterstock.com; s. 67 (zegar z kukułką) Aleutiel/Shutterstock.com; s. 71 (tablica informacyjna) Pepermpron/Shutterstock.com, (sprzątający mężczyzna) SunshineVector/Shutterstock.com; s. 72 (Marian Rejewski) Instytut Pamięci Narodowej, (Henryk Zygałski, Jerzy Różycki) domena publiczna, (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 73 (kwaciarnia) denayunebgt/Shutterstock.com, (biegacze) NotionPic/Shutterstock.com, (bieżnia) GraphicsRF.com/Shutterstock.com; s. 74 (tablica) Hilch/Shutterstock.com, (kółka zębate) Titov Nikolai/Shutterstock.com; s. 75 (geometryczne miasto) Snooowball/Shutterstock.com; s. 80 (domy i krzaczki) Shpadaruk Aleksei/Shutterstock.com; s. 83 (krzaczki) Shpadaruk Aleksei/Shutterstock.com; s. 84 (skoczek) inspiring.team/Shutterstock.com; s. 87 (Gdańsk) roman_slavik/iStock/Getty Images Plus; s. 88 (prędkościomierz) RedlineVector/Shutterstock.com, (pinezka) Alphavector/Shutterstock.com; s. 91 (samochody) Flat vectors/Shutterstock.com; s. 94 (Polskie Towarzystwo Tatrzańskie – logo) reprodukcja; s. 95 (budynki i drzewa) Alexzel/Shutterstock.com, MSSA/Shutterstock.com; s. 96 (stopy) Aksanaku/Shutterstock.com, (trasa biegu) MSSA/Shutterstock.com, (most Hongkong-Zhuhai-Makau) tmlau/Shutterstock.com; s. 98 (godła) domena publiczna; s. 103 (samochód) Flat vectors/Shutterstock.com; s. 104 (Wilhelmina Iwanowska) Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu; s. 105 (słoń) Jakub Krechowicz/Shutterstock.com, (lew) Eric Isselee/Shutterstock.com; s. 106 (tablica) Hilch/Shutterstock.com, (Słońce, Ziemia) Tashal/Shutterstock.com; s. 108 (Palmanova, Włochy) Maykova Galina/Shutterstock.com; s. 112 (godło) domena publiczna; s. 122 (domek i krzaczki) Shpadaruk Aleksei/Shutterstock.com, (uprawy i kwiatki) GraphicsRF.com/Shutterstock.com; s. 123 i 125 (domek i krzaczki) Shpadaruk Aleksei/Shutterstock.com; s. 126 (paneje) primopiano/Shutterstock.com, Nancy Pauwels/Shutterstock.com, Pikovit/Shutterstock.com, Radhe Creation 99/Shutterstock.com, (latawiec) file404/Shutterstock.com, (wstażka) Anastasia Samorodova/Shutterstock.com; s. 127 i 130 (wstażka) Anastasia Samorodova/Shutterstock.com; s. 131 (wstażka) Anastasia Samorodova/Shutterstock.com, (Dockland, Hamburg) foto-select/Shutterstock.com; s. 136 i 137 (deskorolkarze) lemono/Shutterstock.com; s. 152 (Helena

Rasiowa) zdjęcie dzięki uprzejmości Prof. Zbigniewa Rasia, (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 154 (RV Oceania) Jerzy Dąbrowski/Instytut Oceanologii Polskiej Akademii Nauk; s. 155 (globus) Red monkey/Shutterstock.com; s. 156 (koty) DiubuaAnastasiia/Shutterstock.com, Zaie/Shutterstock.com, (piłka) Sensvector/Shutterstock.com; s. 157 (częstki jabłka) Svetlana_A/Shutterstock.com, (truskawka) SofiaV/Shutterstock.com; s. 158 (medale) Max Morphine/Shutterstock.com; s. 159 (monitor) Heleno4ka/Shutterstock.com, (wyświetlacz monitora) Macrovector/Shutterstock.com, (skarby i piraci) Teguh Mujiono/Shutterstock.com; s. 160 (lawenda na mydle) melonee/Shutterstock.com; s. 162 (zdjęcia z Antarktydy) happy.designer/Shutterstock.com; s. 164 (kapusta i mięta) Daiquiri/Shutterstock.com; s. 165 (zioła) Daiquiri/Shutterstock.com, (borówki i truskawki) Mountain Brothers/Shutterstock.com; s. 167 (notatki) Toxa2x2/Shutterstock.com, (rowerzysta) suyoto suyoto/Shutterstock.com, (pad) HasebaIcon/Shutterstock.com; s. 168 (pizza) Danyliuk Konstantine/Shutterstock.com, (salami na pizzy) GreyLilac/Shutterstock.com, (soki) Marraal/Shutterstock.com; s. 169 (tarta) Victoria Sergeeva/Shutterstock.com, (szpinak) Morphart Creation/Shutterstock.com, (kobieta z naczyniem) tynyuk/Shutterstock.com; s. 171 (telefon) masmas/Shutterstock.com, (kukang) Arief Budi Kusuma/Shutterstock.com; s. 172 (karuzela) Vectorpocket/Shutterstock.com; s. 173 (dzieci na ścianie wspinaczkowej) MVshop/Shutterstock.com; s. 174 (park wodny) nasim.shikdar/Shutterstock.com, (restauracja, palmy, zjeżdżalnia) klyaksun/Shutterstock.com, (hamburger na tablicy) DStarky/Shutterstock.com, (frytki na tablicy) LUTFIGANI/Shutterstock.com; s. 175 (truskawka) Mountain Brothers/Shutterstock.com; s. 176 (Egipcjanin) Liron Peer/Shutterstock.com, (walizki) Elena Istomina/Shutterstock.com; s. 177 (napoje w kartonach) Victoria Sergeeva/Shutterstock.com; s. 178 (jabłka) Victoria Sergeeva/Shutterstock.com, (pomarańcza, kiwi, banan, truskawka) Spreadthesign/Shutterstock.com, (butelki wody) Mr. Kaizer/Shutterstock.com; s. 179 (kwiatek) Vextok/Shutterstock.com, (maliny i borówki) Mountain Brothers/Shutterstock.com; s. 181 (ikona głowa) DUYGU YALCIN/Shutterstock.com, (ikona żarówka) Pranch/Shutterstock.com, (ikona łucznik) saefudin78/Shutterstock.com, (drzewa) MSSA/Shutterstock.com, (biurowiec) Aleksandr_Lysenko/Shutterstock.com; s. 182 (tablica) Hilch/Shutterstock.com, (jabłka) Olkita/Shutterstock.com; s. 183 (chłopiec stojący na rękach) johavel/Shutterstock.com, (pizza) Danyliuk Konstantine/Shutterstock.com; s. 184 (jabłko) Olkita/Shutterstock.com, (nóż) johavel/Shutterstock.com, (borówki) Shanvood/Shutterstock.com, (orzechy) Debahuti Bhattacharya/Shutterstock.com; s. 187 (pilki do tenisa) johavel/Shutterstock.com, (książki) HstrongART/Shutterstock.com; s. 189 (oko) ClassicVector/Shutterstock.com, (dziewczynka) Olga1818/Shutterstock.com, (chłopak z książką) Andrew Rybalko/Shutterstock.com; s. 192 (zegar) Panimoni/Shutterstock.com; s. 193 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com, (ludzik na hulajnodze) The Studio/Shutterstock.com, (Szczeliniak Wielki) Katarzyna Mazurowska/Shutterstock.com; s. 194 (moneta 1 gr) kavalenkava/Shutterstock.com; s. 198 (Maria Skłodowska-Curie) domena publiczna, (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 197 (judocy) hanurunah.id/Shutterstock.com (szklanki z sokiem) matsabe/Shutterstock.com; s. 198 (Maria Skłodowska-Curie) domena publiczna, (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 200 (kajakarz) NEGOVURA/Shutterstock.com, (szachy) vi73/Shutterstock.com, (zawodnik sumo) Leremy/Shutterstock.com, (medale) Max Morphine/Shutterstock.com; s. 203 (ogródek) GraphicsRF.com/Shutterstock.com, (telefon) alexdndz/Shutterstock.com, (panel hartowany) NiRain/Shutterstock.com, (altana) Nsit/Shutterstock.com; s. 205 (najdłuższa flaga w Polsce, Międzyzdroje) PAP/Marcin Bielecki; s. 206 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com, (mapa) Shpadaruk Aleksei/Shutterstock.com, (ikonki z drzewami) Pensiri/Shutterstock.com, (laptop) Pavlo Plakhotia/Shutterstock.com; s. 207 (owies) Viktorija Reuta/Shutterstock.com, (rzepak) Anatolir/Shutterstock.com, (słonecznik) Maksym Drozd/Shutterstock.com, (kombajn) MSSA/Shutterstock.com; s. 209 (Keukenhof, Holandia) Nick N A/Shutterstock.com, (mapa Polski) Aleksandr Filinkov/iStock/Getty Images Plus; s. 212 i 217 (nożyczki) Giuseppe_R/Shutterstock.com; s. 223 (trawa, motyka) Vextok/Shutterstock.com; s. 228 (słonecznik) Maksym Drozd/Shutterstock.com, (kukurydza) Agnieszka Karpinska/Shutterstock.com; s. 232 (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com, (Józef Warszawicz) domena publiczna, (ramka) codesyn/Shutterstock.com; s. 234 (produkcja papieru) ivector/Shutterstock.com; s. 235 (bolid) CoreDESIGN/Shutterstock.com; s. 236 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com, (bateria) NazArt/Shutterstock.com; s. 238 (raflezja) Mazur Travel/Shutterstock.com; s. 239 (koliber) Piotr Poznan/Shutterstock.com; s. 240 (telefon) alexdndz/Shutterstock.com, (hulajnogi) ArtHub02/Shutterstock.com, vectorlab2D/Shutterstock.com, Azat Valeev/Shutterstock.com; s. 241 (kulomiot) inspiring.team/Shutterstock.com; s. 243 (harpia wielka) FGraphix/Shutterstock.com; s. 244 (walizki) Red monkey/Shutterstock.com, (ludzie z walizkami) tynyuk/Shutterstock.com, (waga bagażowa) WinWin artlab/Shutterstock.com; s. 246 (biegacz) BesticonPark/Shutterstock.com, (pływak) Serhiy Smirnov/Shutterstock.com, (rowerzysta) Marc Brown/Shutterstock.com; s. 247 (walizka) Elena Istomina/Shutterstock.com; s. 249 (monety) kavalenkava/Shutterstock.com, (mężczyzna karmiący psy) robuart/Shutterstock.com; s. 250 (ryzy papieru) 32 pixels/Shutterstock.com; s. 252 (ikona biegnący ludzik) naum/Shutterstock.com, (waga) Businessvector/Shutterstock.com, (monety) kavalenkava/Shutterstock.com, (jabłko) Olkita/Shutterstock.com, (ziemniak) Victoria Sergeeva/Shutterstock.com; s. 253 (chleb) Voinau Pavel/Shutterstock.com, (pomidory, ser) Victoria Sergeeva/Shutterstock.com, (kwiatki) Jacqui Martin/Shutterstock.com; s. 254 (galaretka) Poreka/Shutterstock.com; s. 255 (ikony sportowców) Marc Brown/Shutterstock.com, (flagi) MicroOne/Shutterstock.com; s. 257 (Genewa) JosepPerianes/Shutterstock.com, (wieża Eiffla) lyeyee/Shutterstock.com, (waga) eakkasit90/Shutterstock.com, (brokuł, bakłażan, cukinia) Victoria Sergeeva/Shutterstock.com; s. 258 (ludzie w kinie) NotionPic/Shutterstock.com, (orzeszki) Tartila/Shutterstock.com; s. 259 (bransoletki)

GreenSkyStudio/Shutterstock.com; s. 260 (naszyjnik) mxqvel/Shutterstock.com, (koraliki) BlueRingMedia/Shutterstock.com, (bransoletka) oxygen_8/Shutterstock.com; s. 261 (kawa) Vectorbum/Shutterstock.com; s. 262 (góry) MicroOne/Shutterstock.com, (drzewa) MSSA/Shutterstock.com, (pistolet do paliwa) iz maulana/Shutterstock.com; s. 263 (sprzęt na obóz) vik.stock/Shutterstock.com; s. 264 (biurko) Vectorfair/Shutterstock.com, (kwiatek) User/Shutterstock.com, (szafa) VectorPlotnikoff/Shutterstock.com, (półka z książkami) Lukman Haryanto/Shutterstock.com, (Aqua Appia) LUIS PADILLA-Fotografia/Shutterstock.com; s. 265 (mrówka) Eko Budi Utomo/Shutterstock.com; s. 266 (samochód i pociąg) nelelena/Shutterstock.com, (chleb i szynka) Voinau Pavel/Shutterstock.com, (ser) Victoria Sergeeva/Shutterstock.com; s. 268 (laptop) Marta Sher/Shutterstock.com; s. 269 (dziewczynka) Helga Khorimarko/Shutterstock.com, (chłopiec) StockSmartStart/Shutterstock.com, (koperta) Topuria Design/Shutterstock.com, (długopis) Simply Amazing/Shutterstock.com, (jogurt) Nadya_Art/Shutterstock.com, (szynka) LOVE YOU/Shutterstock.com, (tofu) GoodStudio/Shutterstock.com, (pomidorki) uiliaaaa/Shutterstock.com, (paczka płatków orkiszowych) Vectorbum/Shutterstock.com; s. 270 (Kazimierz Funk) ASSOCIATED PRESS/FOTOLINK/East News, (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com, (dyskobol) Steinar/Shutterstock.com; s. 272 (koktajl) Grafvish/Shutterstock.com, (banan) Amanita Silvicora/Shutterstock.com, (jogurt) Nadya_Art/Shutterstock.com, (porzeczką) VKA/Shutterstock.com, (miód) tzunghaor svg2eps/Shutterstock.com; s. 273 (Śnieżka) LIDERO/Shutterstock.com; s. 274 (termometr) MaryDesy/Shutterstock.com, (ikony pogody) kalen/Shutterstock.com; s. 275 (tornado) Yesaulov Vadym/Shutterstock.com, (grad) myupoo/Shutterstock.com, (ruchomy piasek) Puchong art/Shutterstock.com, (diamenty) Drk_Smith/Shutterstock.com, file404/Shutterstock.com, (kryształ) suesse/Shutterstock.com; s. 277 (ikony na mapie) kalen/Shutterstock.com; s. 278 (ludzie z zakupami) tynyuk/Shutterstock.com, (winda) Profitable Portfolio/Shutterstock.com; s. 279 (tornado) Yesaulov Vadym/Shutterstock.com, (grad) myupoo/Shutterstock.com, (ruchomy piasek) Puchong art/Shutterstock.com, (diamenty) Drk_Smith/Shutterstock.com, file404/Shutterstock.com, (kryształ) suesse/Shutterstock.com, (astronauta, rakieta, planeta, teleskop) klyaksun/Shutterstock.com; s. 280 (tornado) Yesaulov Vadym/Shutterstock.com, (grad) myupoo/Shutterstock.com, (ruchomy piasek) Puchong art/Shutterstock.com, (diamenty) Drk_Smith/Shutterstock.com, file404/Shutterstock.com, (kryształ) suesse/Shutterstock.com, (rakieta) urlight/Shutterstock.com, (astronauta, statek kosmiczny i meteoryt) klyaksun/Shutterstock.com; s. 282 (tarcza z rzutkami) Golden Vector/Shutterstock.com; s. 283 (dłoń) Sergey Mastepanov/Shutterstock.com; s. 284 (astronauta) klyaksun/Shutterstock.com; s. 285 (astronauta) klyaksun/Shutterstock.com, (kosmita) HappyPictures/Shutterstock.com; s. 288 (portale) klyaksun/Shutterstock.com, vesta2k/Shutterstock.com; s. 289 (portale) vesta2k/Shutterstock.com; s. 294 (termometr) MaryDesy/Shutterstock.com, (ikony pogody) kalen/Shutterstock.com; s. 295 (ikony pogody) kalen/Shutterstock.com; s. 296 (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com, (Michał Kalecki) PAP/Edmund Uchymiak; s. 298 (Mount Everest) Extezy/Shutterstock.com, (statystyki i słupki) Day Of Victory Studio/Shutterstock.com, (statek) bioraven/Shutterstock.com; s. 299 (piramidy, palma, Luwr) Kukuh Amaliawan/Shutterstock.com, UA Creative Microstocks/Shutterstock.com, OMIA silhouettes/Shutterstock.com; s. 300 (bryły) MarySan/Shutterstock.com, kovalto1/Shutterstock.com, Macrovector/Shutterstock.com, (miś) Martyshova Maria/Shutterstock.com; s. 301 (ręce z pudełkiem) TaLaNoVa/Shutterstock.com, (chłopiec) NotionPic/Shutterstock.com, (zielone bryły) matma/Shutterstock.com; s. 302 (prezent) Warxar/Shutterstock.com, (piłka) VikiVector/Shutterstock.com, (pudełko tekturowe) studioworkstock/Shutterstock.com, (wafel) Duda Vasilii/Shutterstock.com, (świeca) mentalmind/Shutterstock.com, (torebka herbaty) AIWD/Shutterstock.com; s. 310 (farba, skrzynia) bannosuke/Shutterstock.com; s. 313 (puszka farby) Dan Gerber/Shutterstock.com; s. 315 (scenka z kartonu) Kolpakova Daria/Shutterstock.com; s. 320 (tulipan) Aleksangel/Shutterstock.com, (farba) bannosuke/Shutterstock.com; s. 325 (hotel Luxor, Las Vegas, USA; biurowiec w kształcie piramidy w Castries, St. Lucia, Karaiby; wieżowiec Transamerica Pyramid, San Francisco, USA; piramidy egipskie) Songquan Deng/Shutterstock.com, a-plus image bank/Alamy Stock Photo/BE&W, Hannu Mononen/Alamy Stock Photo/BE&W, WitR/Shutterstock.com; s. 330 (kostka) Joyce Mar/Shutterstock.com; s. 334 (Halszka Osmólska) Instytut Paleobiologii im. R. Kozłowskiego Polskiej Akademii Nauk, (pinezki) Alphavector/Shutterstock.com; s. 335 (skrzynia) tinta/Shutterstock.com; s. 336 (dzieci z pisakiem 3D) BNP Design Studio/Shutterstock.com, (tworzenie kostki pisakiem 3D) M.Nyusha/Shutterstock.com

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że podjęły starania, mające na celu dotarcie do właścicieli i dysponentów praw autorskich wszystkich zamieszczonych utworów. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, przytaczając w celach dydaktycznych utwory lub fragmenty, postępują zgodnie z art. 27¹ ustawy o prawie autorskim. Jednocześnie Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oświadczają, że są jedynym podmiotem właściwym do kontaktu autorów tych utworów lub innych podmiotów uprawnionych w wypadkach, w których twórcy przysługuje prawo do wynagrodzenia.



**WYDAWNICTWA
SZKOLNE
i PEDAGOGICZNE**

wsip.pl

sklep.wsip.pl

infolinia: 801 220 555