

Egzamin ósmoklasisty

ZGODNE
Z WYTYCZNYMI
CKE

Teoria do egzaminu do powtórek zamiast z podręczników



NIEZBĘDNIK Matematyka

TAK, ZDAM!

Egzamin ósmoklasisty

Matematyka

Niezbędnik z teorią

wzory • definicje • przykłady

Kinga Gałązka

Konsultacja merytoryczna: Anna Kluk-Śliwa, Natalia Aleksandrowicz
Projekt okładki: Paweł Kwacz
Redaktor prowadzący: Sebastian Przybyszewski
Redakcja językowa: Marlena Dobrowolska
Redakcja graficzna i skład: Maciej Laska
Korekta: Magdalena Sikora-Gruca

Zdjęcia: Shutterstock

Rysunki: Jan Kortas

© Copyright by OPERON Sp. z o.o. & Kinga Gałązka
Gdynia 2018

Wszelkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie w całości lub we fragmentach bez zgody
wydawcy zabronione.
N7864

Wydawca:
OPERON Sp. z o.o.
81-212 Gdynia, ul. Hutnicza 3
tel. centrali 58 679 00 00
e-mail: info@operon.pl
www.operon.pl

ISBN 978-83-8197-284-0

SPIS TREŚCI

Egzamin ósmoklasisty

Twój pierwszy oficjalny egzamin na zakończenie szkoły podstawowej	8
Matematyka na egzaminie	10
Sprawdzone sposoby na skuteczną naukę	11

1. Liczby naturalne

1.1. Liczby naturalne	12
1.2. Podzielność liczb naturalnych	13
1.3. Cechy podzielności liczb naturalnych	14
1.4. Rozkład liczb złożonych na czynniki pierwsze	16
1.5. Przybliżenia i zaokrąglanie liczb	16
1.6. Porównywanie liczb naturalnych	17
1.7. Działania w zbiorze liczb naturalnych	17

2. Liczby całkowite

2.1. Zbiór liczb całkowitych	18
2.2. Liczby na osi liczbowej	18
2.3. Liczby przeciwne	19
2.4. Wartość bezwzględna	20
2.5. Porównywanie liczb całkowitych	21
2.6. Działania w zbiorze liczb całkowitych	22

3. Ułamki

3.1. Ułamki zwykłe	23
3.2. Działania na ułamkach zwykłych dodatnich	24
3.3. Ułamki dziesiętne	25
3.4. Porównywanie ułamków dziesiętnych dodatnich	25
3.5. Działania na ułamkach dziesiętnych	26
3.6. Zaokrąglanie rozwinięcia dziesiętnego liczb do danego miejsca po przecinku	27
3.7. Zamiana ułamków	27
3.8. Liczby wymierne	27
3.9. Własności działań	28
3.10. Działania na liczbach wymiernych	29
3.11. Liczby wymierne na osi liczbowej	29

4. Potęgi

4.1. Potęga o wykładniku naturalnym	30
4.2. Kwadraty niektórych liczb	31
4.3. Sześciany niektórych liczb	31
4.4. Niektóre potęgi liczby 2	31
4.5. Niektóre potęgi liczby 10	31
4.6. Potęga o wykładniku całkowitym	32
4.7. Prawa działań na potęgach	32
4.8. Notacja wykładnicza	33
4.9. Zapis liczby w dziesiętkowym systemie pozycyjnym	33
4.10. Niektóre przedrostki jednostek miar układu SI	33
4.11. Przydatne wielkości i ich wartości przybliżone	34
4.12. Jednostki informacji stosowane w informatyce	34

5. Pierwiastki

5.1. Definicja pierwiastka kwadratowego	35
5.2. Wartości dokładne niektórych pierwiastków kwadratowych	35
5.3. Ślimak Teodorosa	36
5.4. Przybliżone wartości niektórych pierwiastków kwadratowych	36
5.5. Złoty podział i złota liczba	36
5.6. Definicja pierwiastka sześciennego	37
5.7. Wartości dokładne niektórych pierwiastków sześciennych	37
5.8. Przybliżone wartości niektórych pierwiastków sześciennych	37
5.9. Prawa działań na pierwiastkach	38
5.10. Usuwanie pierwiastka z mianownika ułamka	39
5.11. Kolejność wykonywania działań	39

6. Wyrażenia algebraiczne

6.1. Podstawowe pojęcia	40
6.2. Przykłady informacji zapisanych za pomocą wyrażeń algebraicznych	41
6.3. Jednomian	41
6.4. Suma algebraiczna	42
6.5. Nazwy wyrażeń algebraicznych	43
6.6. Działania na wyrażeniach algebraicznych	44

7. Procenty

7.1. Pojęcie procentu	46
7.2. Zapisywanie procentu w postaci ułamka	46
7.3. Zapisywanie liczby w postaci procentu	46
7.4. Obliczenia procentowe	47
7.5. Zastosowanie reguły trzech	48
7.6. Punkty procentowe	48
7.7. Oprocentowanie oszczędności – terminologia	48
7.8. Procent prosty, procent składany	49
7.9. Promile	50
7.10. Próby złota	50
7.11. Próby srebra	51

8. Równania

8.1. Podstawowe pojęcia	52
8.2. Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	53
8.3. Rozwiązanie równania $ax + b = 0$	53
8.4. Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych	54
8.5. Stosunek dwóch wielkości	54
8.6. Proporcja	54
8.7. Równania w postaci proporcji	55
8.8. Proporcjonalność prosta	56
8.9. Zależność między drogą, prędkością a czasem	56

9. Obliczenia praktyczne

9.1. Jednostki czasu	57
9.2. Jednostki długości	58
9.3. Jednostki prędkości	59
9.4. Jednostki pola powierzchni	59
9.5. Jednostki objętości	60
9.6. Jednostki masy	60
9.7. Dawne jednostki ilości	61
9.8. Jednostki temperatury	61
9.9. Skala	62
9.10. Plan	63

10. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie

10.1. Pojęcia wstępne	64
10.2. Proste na płaszczyźnie	65
10.3. Odcinek na płaszczyźnie	67
10.4. Kąty	68
10.5. Rodzaje kątów	69
10.6. Konstrukcje niektórych kątów	70
10.7. Kąty utworzone przez proste	71
10.8. Koła i okręgi	72
10.9. Symetria osiowa	76
10.10. Symetria środkowa	78

11. Wielokąty

11.1. Wielokąt	79
11.2. Trójkąty	82
11.3. Czworokąty	88

12. Układ współrzędnych

12.1. Zbiory liczbowe na osi liczbowej	94
12.2. Odległość punktów na osi liczbowej	95
12.3. Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie	96
12.4. Punkty w układzie współrzędnych	96
12.5. Odległość w układzie współrzędnych	98
12.6. Odcinek w układzie współrzędnych	99
12.7. Figury w układzie współrzędnych	100
12.8. Symetria w układzie współrzędnych	101

13. Graniastosłupy

13.1. Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni	102
13.2. Wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni	102
13.3. Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni	102
13.4. Kąty w przestrzeni	103
13.5. Wielościan	103
13.6. Definicja graniastosłupa	104
13.7. Elementy graniastosłupa	104
13.8. Rodzaje graniastosłupów	105
13.9. Przekątna graniastosłupa	105
13.10. Pole powierzchni graniastosłupa	106
13.11. Objętość graniastosłupa	106
13.12. Wybrane graniastosłupy i ich własności	106

14. Ostrosłupy. Bryły obrotowe

14.1. Definicja ostrosłupa	109
14.2. Elementy ostrosłupa	109
14.3. Rodzaje ostrosłupów	110
14.4. Pole powierzchni ostrosłupa	111
14.5. Objętość ostrosłupa	111
14.6. Własności wybranych ostrosłupów	112
14.7. Bryły obrotowe	113
14.8. Definicja i budowa walca	114
14.9. Przekroje walca	115
14.10. Kąty w walcu	115
14.11. Siatka walca	115
14.12. Definicja i budowa stożka	116
14.13. Przekroje stożka	116
14.14. Siatka stożka	116
14.15. Kąty w stożku	117
14.16. Definicja i budowa kuli	117
14.17. Przekroje kuli	117

15. Statystyka

15.1. Podstawowe pojęcia statystyczne	118
15.2. Tabelaryczna prezentacja danych	119
15.3. Przykłady graficznego przedstawiania danych	119
15.4. Porządkowanie danych	123
15.5. Średnia arytmetyczna	123
15.6. Mediana	123

16. Rachunek prawdopodobieństwa i kombinatoryka

16.1. Rachunek prawdopodobieństwa	124
16.2. Kombinatoryka	125
16.3. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa	126

Treści na szarym tle można pominąć podczas przygotowań do egzaminu ósmoklasisty w roku 2023.

1. LICZBY NATURALNE

1.1. LICZBY NATURALNE

Liczby **naturalne** oznaczamy symbolem N .

przykład: $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Liczby **naturalne dodatnie** oznaczamy symbolem N_+ .

przykład: $N_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ – liczby naturalne większe od zera

Liczba 0 nie jest ani liczbą dodatnią, ani ujemną.

Zbiór liczb naturalnych N jest zbiorem nieskończonym.

Najmniejszą liczbą w zbiorze liczb naturalnych jest liczba zero.

Liczby zapisujemy za pomocą dziesięciu **cyfr**: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, na przykład:

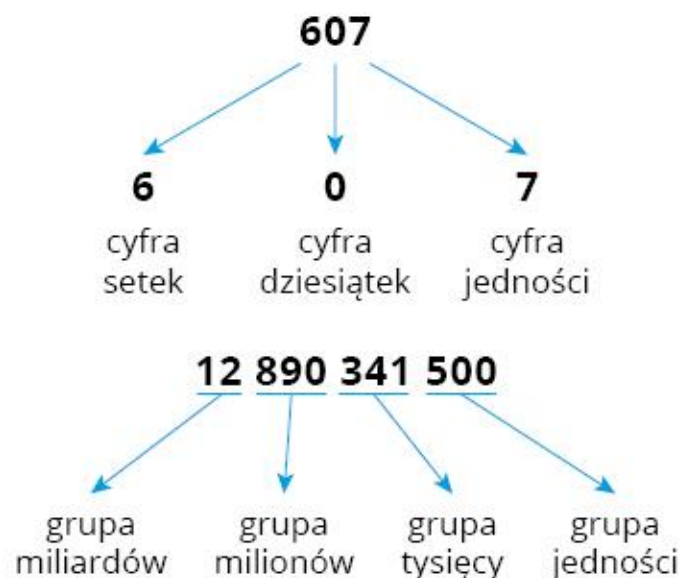
przykład: 202 – liczba trzycyfrowa, zapisana za pomocą dwóch cyfr: 0 i 2

8 – liczba jednocyfrowa

23455 – liczba pięciocyfrowa zapisana za pomocą cyfr 2,3,4,5

Dziesiątkowy układ pozycyjny – 10 jednostek niższego rzędu stanowi jedną jednostkę wyższego rzędu; znaczenie cyfry zależy od miejsca (pozycji), które zajmuje w zapisie liczby.

przykład: 10 jedności to 1 dziesiątka



przykład: 12 890 341 500 – dwanaście miliardów osiemset dziewięćdziesiąt milionów trzysta czterdzieści jeden tysięcy pięćset

$12\,890\,341\,500 = 1 \cdot 10\,000\,000\,000 + 2 \cdot 1\,000\,000\,000 + 8 \cdot 100\,000\,000 +$

$+ 9 \cdot 10\,000\,000 + 0 \cdot 1\,000\,000 + 3 \cdot 100\,000 + 4 \cdot 10\,000 + 1 \cdot 1\,000 + 5 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 1$

Skróty stosowane w zapisie liczb:

tys. – tysiąc

mln – milion

mld – miliard

przykład: 3 mld 600 mln 4 tys. – trzy miliardy sześćset milionów cztery tysiące

1.2. PODZIELNOŚĆ LICZB NATURALNYCH

Liczba naturalna a jest **podzielna** przez liczbę naturalną b różną od zera, gdy istnieje taka liczba naturalna c , że $a = b \cdot c$.

Liczbę b nazywamy **dzielnikiem** liczby a .

Liczba a jest **wielokrotnością** liczby b .

Liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej.

Liczba 1 ma tylko jeden dzielnik.

Liczba 0 ma nieskończenie wiele dzielników (dzieli się przez każdą liczbę naturalną dodatnią).

Zero jest wielokrotnością każdej liczby.

Każda liczba naturalna większa od zera ma nieskończenie wiele różnych wielokrotności.

Dzielnik liczby

przykład: dzielniki liczby 24 to: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

dzielniki liczby 13 to: 1, 13

dzielniki liczby 15 to: 1, 3, 5, 15

Dzielnik właściwy liczby naturalnej dodatniej – dzielnik naturalny danej liczby mniejszy od tej liczby.

Dzielniki właściwe liczby 6: 1, 2, 3.

Dzielnik właściwy liczby 13: 1.

Wspólny dzielnik liczb naturalnych a, b różnych od zera – liczba naturalna, która jest dzielnikiem każdej z liczb a i b .

przykład: Wspólny dzielnik liczb 12 i 16 to liczba 1, 4.

Wspólny dzielnik liczb 15, 30, 55 to 1, 5.

Wspólne dzielniki liczb 30 i 40 to: 1, 2, 5, 10.

Wspólny dzielnik liczb 17 i 25 to: 1.

Największy wspólny dzielnik liczb naturalnych a, b , z których co najmniej jedna jest różna od zera – największa z liczb naturalnych, która jest dzielnikiem każdej z liczb a i b .

przykład: $NWD(60, 24) = 12$

$NWD(4, 8) = 4$

$NWD(12, 19) = 1$

Wielokrotność liczby

przykład: 0, 5, 10, 15, 20, 25, ... – wielokrotności liczby 5

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb naturalnych a, b różnych od zera – najmniejsza z liczb naturalnych większych od zera, która jest podzielna przez a i przez b .

przykład: $NWW(60, 42) = 420$

$NWD(3, 6) = 6$

$NWD(7, 13) = 91$

Liczby naturalne a, b , z których co najmniej jedna jest różna od zera, nazywamy **liczbami względnie pierwszymi**, gdy ich największy wspólny dzielnik jest równy 1: $NWD(a, b) = 1$.

przykład: Liczby względnie pierwsze to 4 i 7, bo $NWD(4, 7) = 1$.

Dla dowolnych liczb naturalnych a, b większych od zera prawdziwa jest równość:

$$NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = a \cdot b$$

przykład: $NWD(6, 15) = 3$; $NWW(6, 15) = 30$

$$NWD(6, 15) \cdot NWW(6, 15) = 3 \cdot 30 = 90 = 6 \cdot 15$$

Liczba pierwsza – liczba naturalna większa od 1, która ma tylko dwa dzielniki naturalne.

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Tylko jedna z tych liczb jest parzysta.

przykład: 13 – liczba pierwsza (jej dzielnikami są tylko liczby 1 i 13).

Liczby pierwsze: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..., 61, ..., 89, ...

Liczba złożona – liczba naturalna większa od 1, która nie jest liczbą pierwszą.

Liczba złożona ma więcej niż dwa dzielniki naturalne.

przykład: 46 – liczba złożona (jej dzielniki to 1, 2, 23, 46).

Liczby złożone: 4, 6, 8, 9, 10, 12, ...

Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.

Liczby parzyste – liczby, które dzielą się przez 2.

przykład: 8, 102, 70 – liczby parzyste

Liczby nieparzyste – liczby, które nie dzielą się przez 2.

przykład: 7, 999, 507 – liczby nieparzyste

1.3. CECHY PODZIELNOŚCI LICZB NATURALNYCH

Liczba naturalna jest podzielna przez:

2

gdy jej cyfrą jedności jest 0, 2, 4, 6 lub 8

przykład: 718 – liczba podzielna przez 2 (cyfrą jedności jest 8)

461 – liczba niepodzielna przez 2 (cyfrą jedności jest 1)

3

gdy suma jej cyfr dzieli się przez 3

przykład: 5082 – liczba podzielna przez 3 (suma cyfr jest równa $5 + 0 + 8 + 2 = 15$, a liczba 15 jest podzielna przez 3)

361 – liczba niepodzielna przez 3 (suma cyfr jest równa $3 + 6 + 1 = 10$, a liczba 10 jest niepodzielna przez 3)

4

gdy jej dwie ostatnie cyfry są zerami lub tworzą liczbę podzieloną przez 4

przykład: 724 – liczba podzielna przez 4 (dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 24, która jest podzielna przez 4)

12 307 – liczba niepodzielna przez 4 (dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 7 niepodzielną przez 4)

5

gdy jej cyfrą jedności jest 0 lub 5

przykład: 6 879 350 – liczba podzielna przez 5 (cyfrą jedności jest 0)

809 – liczba niepodzielna przez 5 (cyfra jedności jest różna od 0 i 5)

6

gdy dzieli się przez 2 i przez 3

przykład: 4368 – liczba podzielna przez 6 (dzieli się przez 2, bo cyfrą jedności jest 2, oraz dzieli się przez 3, bo jej suma cyfr jest równa 21)

436 – liczba nie dzieli się przez 6 (dzieli się przez 2, ale nie dzieli się przez 3)

9

gdy suma jej cyfr dzieli się przez 9

przykład: 5463 – liczba podzielna przez 9 (suma cyfr jest równa $5 + 4 + 6 + 3 = 18$, a liczba 18 jest podzielna przez 9)

546 – liczba niepodzielna przez 9 (suma cyfr jest równa $5 + 4 + 6 = 15$, a to liczba niepodzielna przez 9)

10

gdy jej cyfrą jedności jest 0

przykład: 1 758 990 – liczba podzielna przez 10 (cyfrą jedności jest 0)

1 567 – liczba niepodzielna przez 10 (cyfra jedności jest różna od 0)

25

gdy dwie ostatnie jej cyfry są zerami lub tworzą liczbę podzielną przez 25

przykład: 9750 – liczba podzielna przez 25 (dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 50 podzielną przez 25)

132 – liczba niepodzielna przez 25 (dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 32 niepodzielną przez 25)

100

gdy dwie jej ostatnie cyfry są zerami

przykład: 60 800 – liczba podzielna przez 100 (dwie ostatnie cyfry są zerami)

5930 – liczba niepodzielna przez 100 (cyfra dziesiątek nie jest zerem)

przykład: 2 781 900 – niektóre dzielniki liczby to: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 25, 100.

1.4. ROZKŁAD LICZB ZŁOŻONYCH NA CZYNNIKI PIERWSZE

Każda liczba naturalna różna od 0 i od 1 jest liczbą pierwszą albo liczbą złożoną.

Liczbę złożoną można zapisać w postaci iloczynu liczb pierwszych, czyli **rozłożyć ją na czynniki pierwsze**.

Rozkład danej liczby na czynniki pierwsze jest jednoznaczny. Oznacza to, że rozkłady tej samej liczby na czynniki pierwsze mogą różnić się tylko kolejnością występowania liczb pierwszych.

przykład: Rozkład liczb 60 i 42 na czynniki pierwsze.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$
$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$
$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

przykład: Wyznaczanie największego wspólnego dzielnika liczb 60 i 42.

$$\begin{array}{r|l} 60 & \textcircled{2} \\ 30 & 2 \\ 15 & \textcircled{3} \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & \textcircled{2} \\ 21 & \textcircled{3} \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Należy wybrać wspólne czynniki pierwsze obu liczb i je pomnożyć.

$$NWD(60, 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

przykład: Wyznaczanie najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb 60 i 42.

$$\begin{array}{r|l} 60 & \textcircled{2} \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & \cancel{2} \\ 21 & \cancel{3} \\ 7 & \textcircled{7} \\ 1 & \end{array}$$

Należy wypisać wszystkie czynniki pierwsze liczby 60 oraz wszystkie te czynniki pierwsze liczby 42, których nie ma w rozkładzie liczby 60 (lub których jest więcej) i pomnożyć wypisane liczby.

$$NWW(60, 42) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$$

1.5. PRZYBLIŻENIA I ZAOKRĄGLANIE LICZB

Przybliżenie z nadmiarem – przybliżenie większe od liczby.

przykład: Zamiast: *W teatrze było 456 widzów*, możemy powiedzieć: *W teatrze było około 500 widzów*.

Przybliżenie z niedomiarem – przybliżenie mniejsze od liczby.

przykład: Zamiast: *W teatrze było 608 widzów*, możemy powiedzieć: *W teatrze było około 600 widzów*.

Zaokrąglenie liczby – zastąpienie zerami (odrzućenie) pewnej liczby jej cyfr końcowych, zgodnie z regułą zaokrąglania.

przykład: Reguła zaokrąglania liczb

Jeśli pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmian.

przykład: $5694 \approx 5690$ $0,73 \approx 0,7$ $0,2 \approx 0$

Jeśli pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 5, 6, 7, 8, 9, ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o jeden.

przykład: $3,508 \approx 3,51$ $0,99 \approx 1$ $105 \approx 110$

1.6. PORÓWNYWANIE LICZB NATURALNYCH

RELACJE MIĘDZY LICZBAMI NATURALNYMI ZAPISUJEMY ZA POMOCĄ SYMBOLI:

=	jest równe	$5 = 5$
$\neq$	jest nierówne	$4 \neq 2$
<	jest mniejsze	$60 < 200$
>	jest większe	$7 > 0$
$\leq$	jest mniejsze bądź równe (jest nie większe)	$9 \leq 9$
$\geq$	jest większe bądź równe (jest nie mniejsze)	$4 \geq 1$

1.7. DZIAŁANIA W ZBIORZE LICZB NATURALNYCH

Do zbioru liczb naturalnych zawsze należy wynik dodawania i mnożenia dwóch liczb naturalnych. Mówimy, że **dodawanie i mnożenie to działania wykonalne w zbiorze liczb naturalnych**.

W zbiorze liczb naturalnych można wykonać dzielenie z resztą.

Liczbę naturalną $r < b$ nazywamy **resztą** z dzielenia liczby naturalnej a przez liczbę naturalną b , różną od zera, gdy istnieje taka liczba naturalna c , że $a = c \cdot b + r$.

Reszta jest zawsze mniejsza od dzielnika.

Liczba r może więc być równa 0, 1, 2, ..., $b - 1$.

przykład: $25 : 4 = 6 \text{ r } 1$, czyli $25 = 4 \cdot 6 + 1$

Liczba 1 to reszta z dzielenia liczby 25 przez 4.

2. LICZBY CAŁKOWITE

2.1. ZBIÓR LICZB CAŁKOWITYCH

Liczby całkowite C

przykład: $C = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Liczby całkowite dodatnie C_+

przykład: $C_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = N_+$

Liczby całkowite ujemne C_-

przykład: $C_- = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1\}$

Liczby całkowite nieujemne

przykład: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} = N$

Liczby całkowite niedodatnie

przykład: $\{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

Zbiór liczb całkowitych jest **zbiorem nieskończonym**, nie ma w nim ani liczby najmniejszej, ani liczby największej.

W skład zbioru liczb całkowitych wchodzi liczby naturalne.

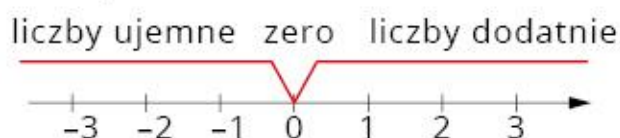
2.2. LICZBY NA OSI LICZBOWEJ

Oś liczbowa to prosta, na której ustalono zwrot dodatni, punkt zerowy i odcinek jednostkowy.

Na osi liczbowej:

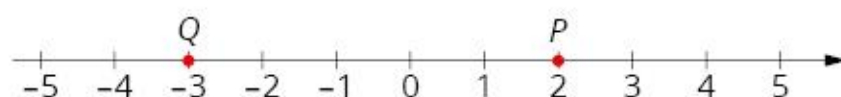
- liczby leżące na lewo od 0 to liczby ujemne,
- liczby leżące na prawo od 0 to liczby dodatnie.

Liczba 0 nie jest ani dodatnia, ani ujemna.



Każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada tylko jedna liczba (niekoniecznie całkowita). Nazywamy ją **współrzedną** tego punktu.

przykład:

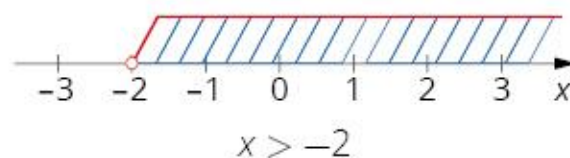


Współrzedna punktu P jest równa 2, a współrzedna punktu Q jest równa -3 . Zapisujemy: $P = (2)$, $Q = (-3)$.

Jeśli na osi liczbowej jest zaznaczony punkt $P = (a)$, to zapis: $x > a$ opisuje zbiór punktów leżących na osi liczbowej na prawo od punktu P ; współrzędne tych punktów są większe od a .

$$x > a$$

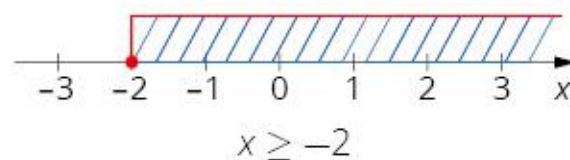
przykład:



$x \geq a$ opisuje zbiór punktów, których współrzędne są większe bądź równe a .

$$x \geq a$$

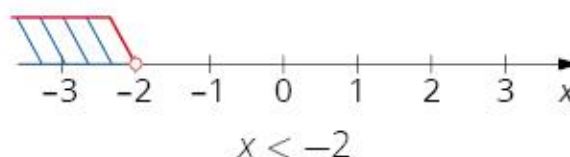
przykład:



$x < a$ opisuje zbiór punktów leżących na osi liczbowej na lewo od punktu P ; współrzędne tych punktów są mniejsze od a .

$$x < a$$

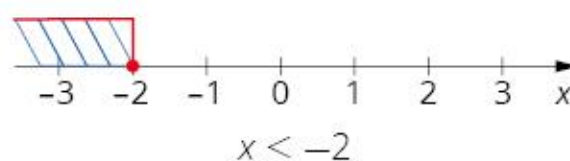
przykład:



$x \leq a$ opisuje zbiór punktów, których współrzędne są mniejsze bądź równe a .

$$x \leq a$$

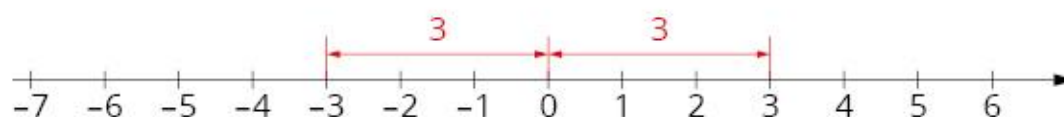
przykład:



2.3. LICZBY PRZECIWNE

Liczby **przeciwne** to liczby leżące na osi liczbowej w równej odległości od 0, lecz po jego przeciwnych stronach.

przykład:



Liczba 3 leży na osi liczbowej w odległości 3 od 0.

Liczba -3 leży na osi liczbowej w odległości 3 od 0.

Liczby 3 i -3 to liczby przeciwne.

Suma liczb przeciwnych jest równa 0.

$$a + (-a) = 0$$

2.4. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

Wartość bezwzględna liczby a to odległość tej liczby od 0 na osi liczbowej. Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy: $|a|$.

Wartością bezwzględną liczby a jest:

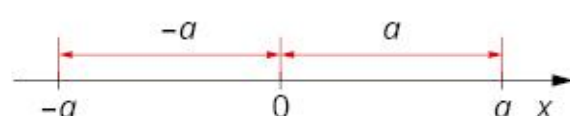
- ta sama liczba a , jeśli a jest liczbą nieujemną,
- liczba przeciwna do a , jeśli a jest liczbą ujemną.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a, & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

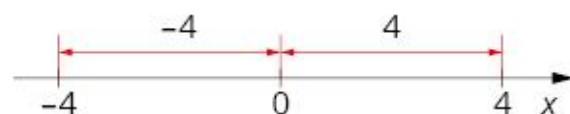
Wartość bezwzględna jest zawsze liczbą nieujemną.

przykład: $|9| = 9$ $|-105| = 105$
 $|-6| = 6$ $|99| = 99$
 $|0| = 0$ $|-99| = 99$

Liczby przeciwne mają tę samą wartość bezwzględną: $|a| = |-a|$.

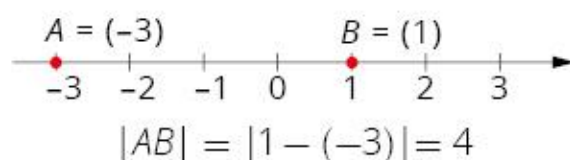


przykład:



Odległość na osi liczbowej między dwoma punktami $A = (a)$, $B = (b)$ jest równa $|a - b|$.

przykład:



Własności wartości bezwzględnej

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

przykład: $|-3 \cdot 4| = |-3| \cdot |4| = 3 \cdot 4 = 12$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \text{ jeśli } b \neq 0$$

przykład: $\left| \frac{-6}{-3} \right| = \frac{|-6|}{|-3|} = \frac{6}{3} = 2$

$$|a - b| = |b - a|$$

przykład: $|3 - 4| = |4 - 3| = 1$

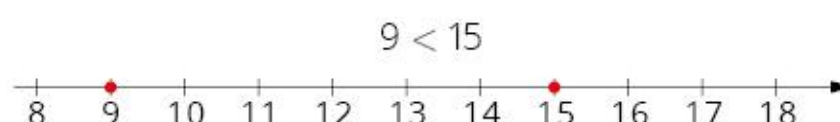
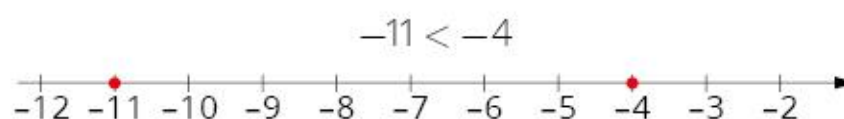
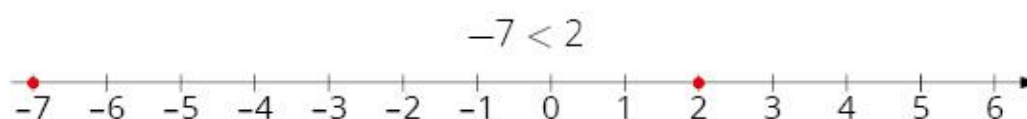
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

przykład: $|-5 + 2| \leq |-5| + |2|$

2.5. PORÓWNYWANIE LICZB CAŁKOWITYCH

Liczba większa leży na osi liczbowej na prawo od liczby mniejszej.

przykład:



Z dwóch liczb ujemnych większa jest ta, której wartość bezwzględna jest mniejsza.

przykład:

$$-9 < -3, \text{ bo } |-9| > |-3|$$

Liczba 0 jest mniejsza od każdej liczby dodatniej.

Liczba 0 jest większa od każdej liczby ujemnej.

Jeśli $a < b$ i a, b, c są liczbami całkowitymi, to:

$$a + c < b + c$$

przykład: $-6 + 2 < -1 + 2$

$$a - c < b - c$$

przykład: $-8 - 1 < -5 - 1$

$$a \cdot c < b \cdot c, \text{ gdy } c > 0$$

przykład: $-3 \cdot 2 < 3 \cdot 2$

$$a \cdot c > b \cdot c, \text{ gdy } c < 0$$

przykład: $-4 \cdot (-1) > (-2) \cdot (-1)$

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}, \text{ gdy } c > 0$$

przykład: $\frac{2}{3} < \frac{7}{3}$

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \text{ gdy } c < 0$$

przykład: $\frac{2}{-2} > \frac{6}{-2}$

2.6. DZIAŁANIA W ZBIORZE LICZB CAŁKOWITYCH

Działania wykonalne w zbiorze liczb całkowitych to **dodawanie, odejmowanie i mnożenie**.

Suma dowolnej liczby i 0 jest równa tej liczbie.

przykład: $-10 + 0 = -10$

Suma liczb przeciwnych jest równa 0.

przykład: $-10 + 10 = 0$

Aby dodać dwie liczby ujemne, dodajemy ich wartości bezwzględne, a przed wynikiem piszemy znak $-$.

przykład: $-3 + (-6) = -(3 + 6) = -9$

Aby dodać dwie liczby o różnych znakach, odejmujemy od większej wartości bezwzględnej mniejszą wartość bezwzględną, a przed wynikiem piszemy taki znak, jaki ma liczba o większej wartości bezwzględnej.

przykład: $9 + (-2) = 7$

Iloczyn dowolnej liczby całkowitej przez 0 jest równy 0.

przykład: $-4 \cdot 0 = 0$

Iloczyn dwóch liczb o różnych znakach jest ujemny.

przykład: $-7 \cdot 2 = -14$
 $3 \cdot (-6) = -18$

Iloczyn dwóch liczb o jednakowych znakach jest dodatni.

przykład: $(-2) \cdot (-3) = 6$
 $5 \cdot 3 = 15$

Jeżeli dzielna jest równa 0, to iloraz jest równy 0.

przykład: $0 : (-1) = 0$
 $0 : 4 = 0$

Iloraz dwóch liczb o różnych znakach jest ujemny.

przykład: $4 : (-2) = -2$
 $-16 : 4 = -4$

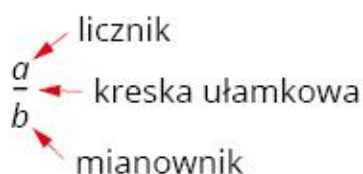
Iloraz dwóch liczb o jednakowych znakach jest dodatni.

przykład: $-4 : (-2) = 2$
 $-16 : (-4) = 4$

3. UŁAMKI

3.1. UŁAMKI ZWYKŁE

Ułamek



Ułamek właściwy – licznik jest mniejszy od mianownika (ułamek mniejszy od 1).

przykład: $\frac{1}{9}, \frac{89}{340}$ – ułamki właściwe

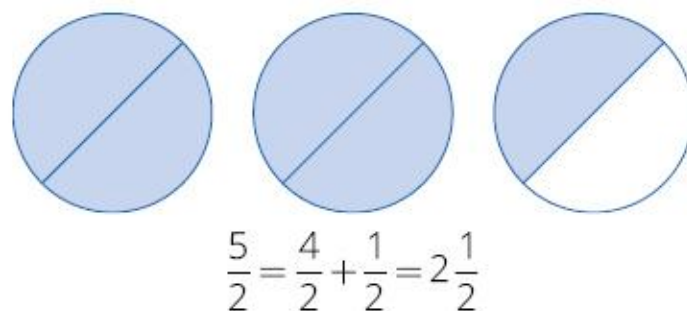
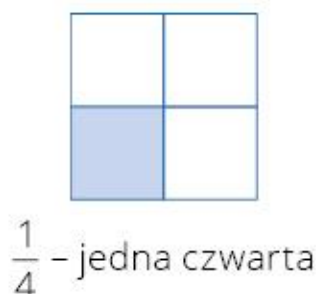
Ułamek niewłaściwy – licznik jest większy od mianownika lub równy mianownikowi.

przykład: $\frac{7}{7}, \frac{8}{3}$ – ułamki niewłaściwe

Liczba mieszana – liczba zapisana za pomocą ułamka i liczby naturalnej.

przykład: $78\frac{9}{10}, 1\frac{5}{9}$ – liczby mieszane

Ułamek jako część całości



Ułamek jako iloraz

Ułamek zwykły można zapisać w postaci ilorazu dwóch liczb. Licznik jest dzielną, a mianownik – dzielnikiem. Kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia.

$$\frac{a}{b} = a : b, b \neq 0$$

przykład: $\frac{3}{7} = 3 : 7$

$$\frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$$

$$4\frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{14}{3} = 14 : 3$$

3.2. DZIAŁANIA NA UŁAMKACH ZWYKŁYCH DODATNICH

Skracanie ułamków

Skracanie ułamków to dzielenie licznika i mianownika przez tę samą liczbę naturalną różną od 0.

przykład: $\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}$

$$\frac{\cancel{12}^3}{\cancel{4}^1} = \frac{3}{1} = 3$$

Sprowadzenie ułamka do najprostszej postaci oznacza zapisanie go w postaci ułamka nieskracalnego.

przykład: $\frac{24}{40} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ – ułamek nieskracalny

Rozszerzanie ułamków

Rozszerzanie ułamków to mnożenie licznika i mianownika przez tę samą liczbę naturalną różną od 0.

przykład: $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$

Odwrotność liczby

Odwrotnością liczby naturalnej a różnej od 0 jest liczba $\frac{1}{a}$. Odwrotnością ułamka $\frac{a}{b}$ jest liczba $\frac{b}{a}$.

przykład: $\frac{1}{5}$ to odwrotność liczby 5

5 to odwrotność liczby $\frac{1}{5}$

$\frac{6}{11}$ to odwrotność liczby $\frac{11}{6}$

odwrotnością liczby $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$ jest $\frac{5}{17}$

Porównywanie ułamków

Z dwóch ułamków o wspólnych mianownikach większy jest ten, którego licznik jest większy.

przykład: $\frac{7}{9} < \frac{13}{9}$, bo $7 < 13$

Aby porównać dwa ułamki o różnych mianownikach, należy sprowadzić je do wspólnego mianownika i porównać liczniki.

przykład: $\frac{1}{2} > \frac{2}{11}$, bo $\frac{1}{2} = \frac{11}{22}$, $\frac{2}{11} = \frac{4}{22}$ i $\frac{11}{22} > \frac{4}{22}$

Z dwóch ułamków o wspólnych licznikach ten jest większy, którego mianownik jest mniejszy.

przykład: $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, bo $2 < 3$

$$\frac{7}{9} > \frac{7}{46}, \text{ bo } 9 < 46$$

Dodawanie i odejmowanie

Aby dodać lub odjąć ułamki, należy sprowadzić je do wspólnego mianownika. Następnie trzeba dodać lub odjąć liczniki, a mianownik pozostawić bez zmian.

przykład: $\frac{3}{4} + \frac{2}{6} - \frac{1}{2} = \frac{9}{12} + \frac{4}{12} - \frac{6}{12} = \frac{7}{12}$

$$\frac{2}{5} + 1\frac{3}{10} = \frac{4}{10} + 1\frac{3}{10} = 1\frac{7}{10}$$
$$\frac{11}{3} - \frac{5}{7} = \frac{77}{21} - \frac{15}{21} = \frac{62}{21} = 2\frac{20}{21}$$

Mnożenie

Aby wykonać mnożenie ułamków, należy pomnożyć licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik.

przykład: $\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{9} = \frac{2}{9}$

$$6 \cdot \frac{1}{13} = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{13} = \frac{6}{13}$$

Dzielenie

Aby wykonać dzielenie ułamków, należy pomnożyć dzielną przez odwrotność dzielnika.

przykład: $2\frac{3}{5} : 7 = \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{13}{35}$

$$\frac{6}{9} : \frac{2}{3} = \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{18} = 1$$
$$10 : \frac{5}{8} = \frac{10}{1} \cdot \frac{8}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

3.3. UŁAMKI DZIESIĘTNE

Ułamek dziesiętny – ułamek o mianowniku 10, 100, 1000, ... Zapisuje się go w postaci dziesiętnej z wykorzystaniem przecinka.



234,546 – dwieście trzydzieści cztery całe i pięćset czterdzieści sześć tysięcznych

3.4. PORÓWNYWANIE UŁAMKÓW DZIESIĘTNYCH DODATNICH

Aby porównać ułamki dziesiętne dodatnie, należy najpierw porównać części całkowite. Ten ułamek jest większy, którego część całkowita jest większa.

przykład: $124,5 > 78,999$, bo $124 > 78$

Jeśli części całkowite są równe, to należy porównać kolejno różne części ułamkowe: dziesiąte, setne itd.

przykład: $4,28 < 4,6$, bo $2 < 6$
 $0,389 > 0,385$, bo $9 > 5$

3.5. DZIAŁANIA NA UŁAMKACH DZIESIĘTNYCH

Dodawanie i odejmowanie

Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych wykonuje się podobnie jak dodawanie i odejmowanie pisemne liczb naturalnych. Liczby należy zapisać tak, aby przecinki znalazły się jeden pod drugim. W wyniku przecinek zapisujemy pod przecinkami.

$$\begin{array}{r} 89,103 \\ + 105,24 \\ \hline 194,343 \end{array}$$

Jeśli w dodawanych lub odejmowanych ułamkach liczba cyfr po przecinku nie jest jednakowa, to dopisujemy odpowiednią liczbę zer.

$$\begin{array}{r} 4,500 \\ - 0,125 \\ \hline 4,375 \end{array}$$

Mnożenie

Ułamki dziesiętne mnożymy tak jak liczby naturalne. W wyniku oddzielamy przecinkiem tyle końcowych cyfr, ile cyfr było łącznie po przecinku w obu czynnikach.

$$\begin{array}{r} 0,14 \quad 3,69 \\ \cdot \quad 0,8 \quad \cdot \quad 4 \\ \hline 0,112 \quad 14,76 \end{array}$$

W razie potrzeby dopisujemy brakujące zera.

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \cdot \quad 0,007 \\ \hline 0,0175 \end{array}$$

Dzielenie

Dzielną i dzielnik mnożymy odpowiednio przez 10, 100, 1000, ... tak, aby w dzielniku otrzymać liczbę naturalną.

$$4,8 : 0,04 = 480 : 4 = 120$$

Ułamki dziesiętne dzielimy tak jak liczby naturalne. W wyniku dopisujemy przecinek nad przecinkiem dzielnej.

$$\begin{array}{r} 8,4525 \\ \hline 16,905 : 2 \\ - 16 \quad \quad \quad \\ \hline 9 \quad \quad \quad \\ - 8 \quad \quad \quad \\ \hline 10 \quad \quad \quad \\ - 10 \quad \quad \quad \\ \hline 5 \quad \quad \quad \\ - 4 \quad \quad \quad \\ \hline 10 \quad \quad \quad \\ - 10 \quad \quad \quad \\ \hline 0 \end{array}$$

3.6. ZAOKRĄGLANIE ROZWINIĘCIA DZIESIĘTNEGO LICZB DO DANEGO MIEJSCA PO PRZECINKU

Aby zaokrąglić rozwinięcie dziesiętne do danego miejsca po przecinku, należy pominąć cyfry zapisane w niższych rzędach ułamka. Jeśli pierwszą pominiętą cyfrą jest 0, 1, 2, 3 lub 4, to pozostałe cyfry zapisujemy bez zmian.

przykład: $0,749 \approx 0,7$ – zaokrąglenie do pierwszego miejsca po przecinku (do części dziesiątych, do 0,1)

Jeśli pierwszą pominiętą cyfrą jest 5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnią cyfrę zwiększamy o 1.

przykład: $12,086 \approx 12,09$ – zaokrąglenie do drugiego miejsca po przecinku (do części setnych, do 0,01)

3.7. ZAMIANA UŁAMKÓW

Zamiana ułamków dziesiętnych na zwykłe

Liczbę zapisaną w postaci dziesiętnej można przedstawić w postaci liczby mieszanej lub ułamka zwykłego o mianowniku 10, 100, 1000, ...

przykład: $6,7 = 6\frac{7}{10}$

Liczba zer w mianowniku jest równa liczbie miejsc po przecinku.

przykład: $0,102 = \frac{102}{1000}$

Zamiana ułamków zwykłych na dziesiętne

Należy sprowadzić ułamek (jeśli to możliwe) do mianownika 10, 100, 1000, ...

przykład: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0,75$

Należy podzielić licznik przez mianownik. Otrzymujemy wtedy ułamek dziesiętny skończony lub nieskończony okresowy.

przykład: $\frac{5}{8} = 5:8 = 0,625$

$$\frac{2}{11} = 2:11 = 0,181818... = 0,1(8)$$

$$1\frac{1}{6} = 1,1666... = 1,1(6)$$

3.8. LICZBY WYMIERNE

Liczba wymierna to liczba, którą można przedstawić w postaci ułamka $\frac{a}{b}$, gdzie a oraz b to liczby całkowite i liczba b jest różna od 0.

przykład: 9, 12345, $\frac{1}{7}$, $5\frac{6}{8}$

$$3,6, 0,34, 8,(6)$$

$$-5, 0,(987), -12,(5), \frac{7}{8}, -\frac{5}{9}, -1\frac{12}{17}$$

3.9. WŁASNOŚCI DZIAŁAŃ

Dodawanie

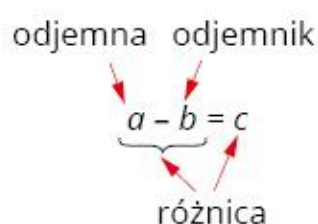


$$a + 0 = a$$

$$a + b = b + a - \text{przemienność dodawania}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) - \text{łączność dodawania}$$

Odejmowanie



$$a - 0 = a$$

$$a - b = a + (-b)$$

$$a + (-a) = 0$$

Mnożenie



$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot b = b \cdot a - \text{przemienność mnożenia}$$

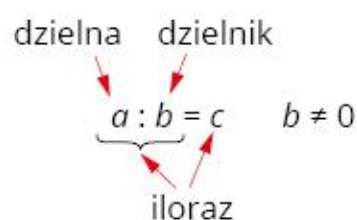
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) - \text{łączność mnożenia}$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c - \text{rozdzielność mnożenia względem dodawania}$$

$$a \cdot b = 0, \text{ wtedy gdy } a = 0 \text{ lub } b = 0$$

Iloczyn dwóch liczb jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z nich jest równa 0.

Dzielenie



$$a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$$

$$a : 1 = a$$

3.10. DZIAŁANIA NA LICZBACH WYMIERNYCH

Dodawanie

Aby dodać dwie liczby ujemne, dodajemy je jak liczby dodatnie, a przed wynikiem stawiamy znak „minus”.

przykład: $-4 + \left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(4 + \frac{1}{3}\right) = -4\frac{1}{3}$

Aby dodać dwie liczby o różnych znakach, odejmujemy od większej wartości bezwzględnej mniejszą wartość bezwzględną i przed wynikiem piszemy znak liczby o większej wartości bezwzględnej.

przykład: $-6 + 8 = 2$, bo $|-6| < |8|$

$$10 + (-16) = -6, \text{ bo } |10| < |-16|$$

Odejmowanie

Odejmowanie zastępujemy dodawaniem liczb przeciwnych.

$$a - b = a + (-b)$$

przykład: $6 - 10 = 6 + (-10) = -4$

$$-3 - 2 = -3 + (-2) = -5$$

$$-\frac{2}{5} - 1 = -\frac{2}{5} + (-1) = -1\frac{2}{5}$$

Mnożenie i dzielenie

Liczby ujemne mnożymy i dzielimy tak jak liczby wymierne dodatnie, a przed wynikiem stawiamy znak „plus”, jeżeli w iloczynie (ilorazie) występuje parzysta liczba liczb ujemnych, lub „minus”, jeżeli w iloczynie (ilorazie) występuje nieparzysta liczba liczb ujemnych.

przykład: $-6 : (-3) \cdot \frac{1}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$$5 \cdot (-2,5) : 4 = -50$$

3.11. LICZBY WYMIERNE NA OSI LICZBOWEJ

Chcemy zaznaczyć ułamki o mianowniku 4. Odcinek jednostkowy na osi liczbowej dzielimy na cztery jednakowe części.



Chcemy zaznaczyć ułamki dziesiętne. Odcinek jednostkowy na osi liczbowej dzielimy na dziesięć jednakowych części.



Chcemy zaznaczyć na tej samej osi liczbowej ułamki o mianowniku 2 i ułamki dziesiętne, których pierwszą cyfrą po przecinku jest 5. Odcinek jednostkowy na osi liczbowej dzielimy na dwie jednakowe części.



4. POTĘGI

4.1. POTĘGA O WYKŁADNIKU NATURALNYM

Dla liczby naturalnej $n > 1$ potęgą a^n liczby wymiernej a nazywamy iloczyn n czynników równych liczbie a .

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

Ponadto przyjmujemy, że

$$a^0 = 1, \text{ gdy } a \neq 0$$

$$a^1 = a$$

0^0 to wyrażenie nieokreślone



a – podstawa potęgi

n – wykładnik potęgi

przykład: $5^0 = 1$

$$(-9,78)^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

przykład: $3^1 = 3$

$$\left(6\frac{1}{5}\right)^1 = 6\frac{1}{5}$$

a^2 – kwadrat liczby a

przykład: $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$

$$\left(-\frac{2}{7}\right)^2 = \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{49}$$

a^3 – sześcian liczby a

przykład: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

a^4 – czwarta potęga liczby a

przykład: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$$(0,1)^4 = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,0001$$

4.2. KWADRATY NIEKTÓRYCH LICZB

LICZBA	KWADRAT LICZBY
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

LICZBA	KWADRAT LICZBY
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400

LICZBA	KWADRAT LICZBY
21	441
22	484
23	529
24	576
25	625
26	676
27	729
28	784
29	841
30	900

4.3. SZEŚCIANY NIEKTÓRYCH LICZB

LICZBA	SZEŚCIAN LICZBY
1	1
2	8
3	27
4	64

LICZBA	SZEŚCIAN LICZBY
5	125
6	216
7	343
8	512

LICZBA	SZEŚCIAN LICZBY
9	729
10	1000
20	8000
25	15625

4.4. NIEKTÓRE POTĘGI LICZBY 2

$$\begin{array}{ccccc} 2^1 = 2 & 2^2 = 4 & 2^3 = 8 & 2^4 = 16 & 2^5 = 32 \\ 2^6 = 64 & 2^7 = 128 & 2^8 = 256 & 2^9 = 512 & 2^{10} = 1024 \end{array}$$

4.5. NIEKTÓRE POTĘGI LICZBY 10

$1\,000 = 10^3$ – tysiąc
 $1\,000\,000 = 10^6$ – milion
 $1\,000\,000\,000 = 10^9$ – miliard
 $1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$ – bilion
 $1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$ – biliard
 $1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$ – trylion

4.6. POTĘGA O WYKŁADNIKU CAŁKOWITYM

Dla liczby naturalnej n większej od 0 i liczby wymiernej a różnej od 0 przyjmujemy, że: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

przykład: $9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$ $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

Liczba $a^{-1} = \frac{1}{a}$ to odwrotność liczby a .

przykład: $(0,7)^{-1} = \left(\frac{7}{10}\right)^{-1} = \frac{10}{7}$ $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$

Dla $a \neq 0$ i $b \neq 0$ i liczby naturalnej n większej od 0 przyjmujemy, że: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

przykład: $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 = -\frac{64}{27}$ $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

4.7. PRAWA DZIAŁAŃ NA POTĘGACH

Dla $a \neq 0, b \neq 0, m \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{C}$:

iloczyn potęg o tych samych podstawach

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

przykład: $6^6 \cdot 6^{-3} = 6^{6+(-3)} = 6^3 = 216$

iloraz potęg o tych samych podstawach

$$a^n : a^m = a^{n-m}, \text{ założenie } n \geq m$$

przykład: $9^8 : 9^8 = 9^{8-8} = 9^0 = 1$ $7^8 : 7^5 = 7^3 = 343$

potęga potęgi

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

przykład: $\left[(-2)^2\right]^{-1} = (-2)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

potęga iloczynu

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

przykład: $\left(5 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = 5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 25 \cdot \frac{1}{9} = \frac{25}{9}$

potęga ilorazu

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

przykład: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

4.8. NOTACJA WYKŁADNICZA

Zapis liczby w notacji wykładniczej to zapis w postaci iloczynu, którego pierwszym czynnikiem jest liczba nie mniejsza od 1 i mniejsza od 10, a drugim – potęga liczby 10 o wykładniku całkowitym.

przykład: $14\,000 = 1,4 \cdot 10^4$

$$0,00345 = 3,45 \cdot 10^{-3}$$

$$3 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2 \cdot 10^3 = (3 \cdot 1,2) \cdot (10^{-2} \cdot 10^3) = 3,6 \cdot 10^{-2+3} = 3,6 \cdot 10$$

$$6340000 = 6,34 \cdot 10^6$$

$$0,095 = 9,5 \cdot 10^{-2}$$

4.9. ZAPIS LICZBY W DZIESIĄTKOWYM SYSTEMIE POZYCYJNYM

przykład: $237 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

$$800760 = 8 \cdot 100000 + 7 \cdot 100 + 6 \cdot 10 = 8 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1$$

$$97,24 = 9 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,01 = 9 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$$

4.10. NIEKTÓRE PRZEDROSTKI JEDNOSTEK MIAR UKŁADU SI

NAZWA	SYMBOL	MNOŻNIK	NAZWA MNOŻNIKA	PRZYKŁAD
decy	d	$0,1 = 10^{-1}$	jedna dziesiąta	dm – decymetr
centy	c	$0,01 = 10^{-2}$	jedna setna	cm – centymetr
mili	m	$0,001 = 10^{-3}$	jedna tysięczna	mm – milimetr
mikro	μ	$0,000\,001 = 10^{-6}$	jedna milionowa	μm – mikrometr
nano	n	$0,000\,000\,001 = 10^{-9}$	jedna miliardowa	nF – nanofarad
piko	p	$0,000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	jedna bilionowa	pF – pikofarad

4.11. PRZYDATNE WIELKOŚCI I ICH WARTOŚCI PRZYBLIŻONE

liczba googol

10^{100}

masa Ziemi

$6 \cdot 10^{24}$ kg

stała Avogadra

$6,02 \cdot 10^{23}$ 1/mol

odległość Ziemi od Słońca

$1,5 \cdot 10^{11}$ m

prędkość światła w próżni

$3 \cdot 10^8$ m/s

pole powierzchni Ziemi

$5,1 \cdot 10^8$ km²

masa protonu

$1,672621 \cdot 10^{-27}$ kg

masa elektronu

$9 \cdot 10^{-31}$ kg

4.12. JEDNOSTKI INFORMACJI STOSOWANE W INFORMATYCE

NAZWA	SYMBOL	WARTOŚĆ
bit	b	bit przyjmuje jedną z dwóch wartości, które zwykle określa się jako 0 (zero) i 1 (jeden)
bajt	B	8 bitów = 2^3 bity
kilobajt	kB	1000 bajtów = 10^3 bajtów
megabajt	MB	1 000 000 bajtów = 10^6 bajtów
gigabajt	GB	1 000 000 000 bajtów = 10^9 bajtów
terabajt	TB	1 000 000 000 000 bajtów = 10^{12} bajtów

5. PIERWIASTKI

5.1. DEFINICJA PIERWIASTKA KWADRATOWEGO

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , której kwadrat jest równy a .

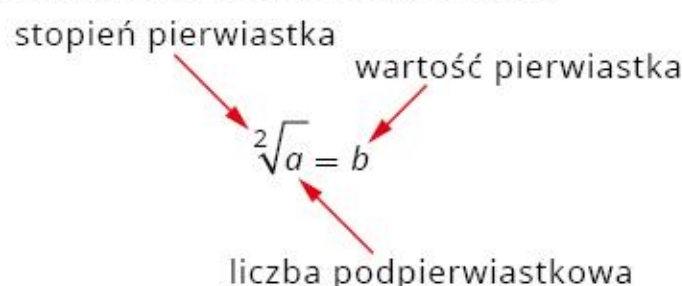
$$\sqrt{a} = b, \text{ gdy } b^2 = a \text{ i } b \geq 0$$

Uwaga:

Pierwiastek kwadratowy nazywamy też **pierwiastkiem drugiego stopnia**.

Zamiast $\sqrt{a}$ możemy zapisać $\sqrt[2]{a}$.

Pierwiastki kwadratowe obliczamy tylko z liczb nieujemnych.



przykład: $\sqrt{16} = 4$, bo $4^2 = 16$

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}, \text{ bo } \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\sqrt{0,09} = 0,3, \text{ bo } (0,3)^2 = 0,09$$

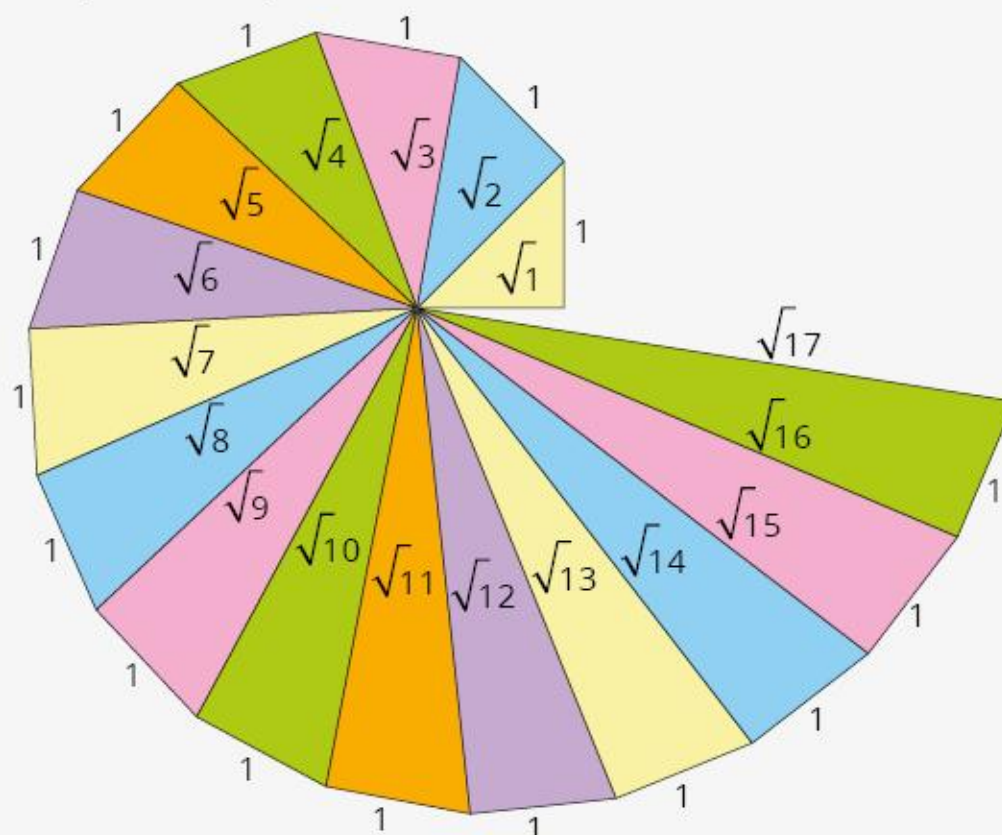
$$\sqrt{3,61} = 1,9, \text{ bo } (1,9)^2 = 3,61$$

5.2. WARTOŚCI DOKŁADNE NIEKTÓRYCH PIERWIASTKÓW KWADRATOWYCH

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt{256} = 16$
$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{400} = 20$

5.3. ŚLIMAK TEODOROSA

Ślimak Teodorosa to sposób konstruowania odcinków o długości równej pierwiastkowi kwadratowemu z liczby naturalnej.



Opis konstrukcji

1. Konstruujemy trójkąt prostokątny, w którym każda przyprostokątna ma długość 1. Przeciwprostokątna ma zatem długość $\sqrt{2}$.
2. Konstruujemy kolejny trójkąt prostokątny, w którym jedna z przyprostokątnych ma długość $\sqrt{2}$, a druga ma długość 1. Przeciwprostokątna powstałego trójkąta ma długość $\sqrt{3}$.
3. W podobny sposób konstruujemy następne trójkąty.

5.4. PRZYBLIŻONE WARTOŚCI NIEKTÓRYCH PIERWIASTKÓW KWADRATOWYCH

$$\sqrt{2} \approx 1,4$$

$$\sqrt{3} \approx 1,7$$

$$\sqrt{5} \approx 2,2$$

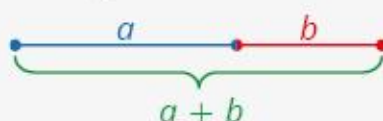
$$\sqrt{7} \approx 2,6$$

$$\sqrt{10} \approx 3,2$$

$$\sqrt{20} \approx 4,5$$

5.5. ZŁOTY PODZIAŁ I ZŁOTA LICZBA

Złoty podział to podział odcinka na dwie części tak, aby stosunek długości dłuższej z tych części do krótszej był taki sam, jak stosunek całego odcinka do dłuższej części.



Stosunek wynikający ze złotego podziału nazywamy **złotą liczbą** i oznaczamy grecką literą φ (fi).

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803...$$

5.6. DEFINICJA PIERWIASTKA SZEŚCIENNEGO

Pierwiastkiem sześciennym z liczby a nazywamy taką liczbę b , której sześcián jest równy a .

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ gdy } b^3 = a$$

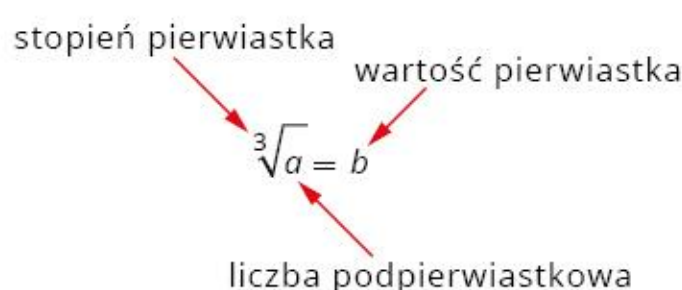
Uwaga:

Pierwiastek sześcienny nazywamy też **pierwiastkiem trzeciego stopnia**.

Pierwiastki sześcienne możemy również obliczać z liczb ujemnych.

Pierwiastek sześcienny z liczby:

- dodatniej jest liczbą dodatnią
- ujemnej jest liczbą ujemną
- 0 jest równy 0



przykład: $\sqrt[3]{64} = 4$, bo $4^3 = 64$

$$\sqrt[3]{0,027} = 0,3, \text{ bo } (0,3)^3 = 0,027$$

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}, \text{ bo } \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = -\frac{3}{2}, \text{ bo } \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}$$

5.7. WARTOŚCI DOKŁADNE NIEKTÓRYCH PIERWIASTKÓW SZEŚCIENNYCH

$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$\sqrt[3]{125} = 5$	$\sqrt[3]{216} = 6$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{512} = 8$
$\sqrt[3]{729} = 9$	$\sqrt[3]{1000} = 10$	$\sqrt[3]{8000} = 20$	$\sqrt[3]{15625} = 25$

5.8. PRZYBLIŻONE WARTOŚCI NIEKTÓRYCH PIERWIASTKÓW SZEŚCIENNYCH

$\sqrt[3]{2} \approx 1,26$	$\sqrt[3]{3} \approx 1,44$	$\sqrt[3]{4} \approx 1,59$	$\sqrt[3]{5} \approx 1,71$
$\sqrt[3]{6} \approx 1,82$	$\sqrt[3]{7} \approx 1,91$	$\sqrt[3]{9} \approx 2,08$	$\sqrt[3]{10} \approx 2,15$

5.9. PRAWA DZIAŁAŃ NA PIERWIASTKACH

Pierwiastek z iloczynu

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$$

przykład: $\sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$$

Pierwiastek z ilorazu

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, a \geq 0, b > 0$$

przykład: $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, b \neq 0$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{27}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{3}$$

Pierwiastek z potęgi

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

przykład: $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

przykład: $\sqrt[3]{-64} = -4$

Włączanie czynnika pod znak pierwiastka

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, a \geq 0, b \geq 0$$

przykład: $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$

$$a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$$

przykład: $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}, a \geq 0, b \geq 0$$

przykład: $\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$$\sqrt[3]{a^3 \cdot b} = a\sqrt[3]{b}$$

przykład: $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

5.10. USUWANIE PIERWIASTKA Z MIANOWNIKA UŁAMKA

$$\frac{a}{\sqrt{b}}, \text{ gdy } b > 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

przykład: $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}}, \text{ gdy } b \neq 0$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$$

przykład: $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{2} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9^2}}{\sqrt[3]{9^2}} = \frac{3\sqrt[3]{81}}{9} = \frac{3\sqrt[3]{81}}{9} = \frac{\sqrt[3]{81}}{3} = \sqrt[3]{3}$$

5.11. KOLEJNOŚĆ WYKONYWANIA DZIAŁAŃ

Jeżeli w wyrażeniu występują nawiasy okrągłe i kwadratowe, to najpierw wykonujemy działania w nawiasach, w których nie ma innych nawiasów.

przykład: $(-4)^3 + [10^2 - (16 - \sqrt{4}) : 7] =$
 $= -64 + [100 - (16 - 2) : 7] =$
 $= -64 + (100 - 14 : 7) =$
 $= -64 + (100 - 2) =$
 $= -64 + 98 = 34$

Jeśli w wyrażeniu nie ma nawiasów, to najpierw wykonujemy potęgowanie i pierwiastkowanie (w kolejności występowania), następnie mnożenie i dzielenie (w kolejności występowania), a na końcu dodawanie i odejmowanie (w kolejności występowania).

przykład: $3\sqrt{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} - (0,5)^2 - \sqrt{18} =$
 $= \sqrt{18} + \frac{1}{4} + \sqrt{100} - 0,25 - \sqrt{18} =$
 $= \sqrt{18} + \frac{1}{4} + 10 - \frac{1}{4} - \sqrt{18} = 10$

6. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

6.1. PODSTAWOWE POJĘCIA

Wyrażenie algebraiczne

Wyrażenie algebraiczne to liczba i litera lub liczby i litery, które mogą być połączone znakami działań, nawiasami.

przykład: $6, x^5, 3(x^2 - 2)$

Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego

To liczby, które wstawiamy w miejsce liter.

przykład: Dla $x = -1$ wartość wyrażenia $-x^3 + x$ jest równa $-(-1)^3 + (-1) = 0$.

Zmienna (niewiadoma)

Zmienna to litera występująca w wyrażeniu algebraicznym.

przykład: $5x^3 - 2$

x – zmienna

Stała

Stała jest liczbą występującą w wyrażeniu algebraicznym.

przykład: $10 + 4xy$

$10, 4$ – stałe

Wyrażenie algebraiczne jednej zmiennej

Jeśli w wyrażeniu algebraicznym występuje tylko jedna zmienna, to nazywa się je wyrażeniem algebraicznym jednej zmiennej.

przykład: $2a + 6a - 1$

a – zmienna

Wyrażenie algebraiczne wielu zmiennych

Jeżeli w wyrażeniu algebraicznym wstępują co najmniej dwie zmienne, to nazywa się je wyrażeniem algebraicznym wielu zmiennych.

przykład: $3(x - y) + z(5 - z)$

x, y, z – zmienne

6.2. PRZYKŁADY INFORMACJI ZAPISANYCH ZA POMOCĄ WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

$-a$ liczba przeciwna do liczby a

$\frac{1}{a}$ liczba odwrotna do liczby $a \neq 0$

$2n$, gdzie n – liczba naturalna liczba parzysta

$2n + 1$, gdzie n – liczba naturalna liczba nieparzysta

$5t + 3$, gdzie t – liczba całkowita
liczba, która w dzieleniu przez 5 daje resztę 3

$100a + 10b + c$, gdzie $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
liczba trzycyfrowa, której cyfrą jedności jest c , cyfrą dziesiątek jest b , a cyfrą setek jest a

a – liczba wymierna dodatnia

$a + 5$ liczba o 5 większa od a

$a - 5$ liczba o 5 mniejsza od a

$5 \cdot a$ liczba 5 razy większa od a

$a : 5$ liczba 5 razy mniejsza od a

6.3. JEDNOMIAN

Jednomian

Jednomian to liczba, litera lub ich iloczyn.

przykład: 4, $2xy$

Współczynnik jednomianu

Współczynnikiem jednomianu jest iloczyn liczb występujących w jednomianie.

Współczynnik jednomianu $\sqrt{7}ac^3$ jest równy $\sqrt{7}$, a współczynnik jednomianu $2x^3z$ jest równy 6.

Jednomiany podobne

Jednomiany różniące się co najwyżej współczynnikami nazywamy jednomianami podobnymi.

przykład: $-9ab^6$ i ab^6

Jednomian uporządkowany

Jednomian uporządkowany to jednomian, którego pierwszym czynnikiem jest liczba, a następnymi czynnikami są litery występujące w porządku alfabetycznym.

przykład: $2\sqrt{3}xyz^2$

Jednomian jednej zmiennej stopnia n

Wyrażenie postaci ax^n , w którym liczba a jest różna od 0 i n jest liczbą naturalną, nazywamy jednomianem jednej zmiennej stopnia n .

przykład: $7x^5$ – jednomian zmiennej x piątego stopnia

Stopień jednomianu wielu zmiennych

Stopień jednomianu wielu zmiennych to suma wykładników wszystkich zmiennych występujących w jednomianie (jeśli współczynnik liczbowy jednomianu jest różny od 0).

przykład: $0,2xy^2z$ – jednomian stopnia czwartego

Uwagi:

Wykładniki potęg w jednomianach są liczbami naturalnymi.

przykład: $-6x^{-1}$ – wyrażenie nie jest jednomianem, bo wykładnik -1 zmiennej x nie jest liczbą naturalną

Jednomianem jest

- iloczyn jednomianów

przykład: $5x^2 \cdot (-3x) = -15x^3$

- potęga jednomianu o wykładniku naturalnym

przykład: $(-4ab^3)^2 = 16a^2b^6$

- iloraz jednomianu przez liczbę

przykład: $10xy : 5 = 2xy$

6.4. SUMA ALGEBRAICZNA**Suma algebraiczna (wielomian)**

Suma algebraiczna (wielomian) to skończona suma jednomianów.

przykład: $-9ab^6$ i ab^6

Wyrazy sumy algebraicznej

Wyrazami sumy algebraicznej są składniki sumy.

przykład: $4 + 5x - 3xy^2$

przykład: $4, 5x, (-3xy^2)$ – wyrazy sumy

Suma algebraiczna wielu zmiennych

O sumie algebraicznej wielu zmiennych mówimy w przypadku sumy zawierającej co najmniej dwie zmienne.

przykład: $a + b + c$ – suma trzech zmiennych: a, b, c

Suma algebraiczna jednej zmiennej

Suma algebraiczna jednej zmiennej to suma zawierająca tylko jedną zmienną.

przykład: $-1,4x + x^3$ – suma algebraiczna jednej zmiennej x

Dwumian

Suma algebraiczna składająca się z dwóch wyrazów to dwumian.

przykład: $90 - x$

Trójmian

Suma algebraiczna składająca się z trzech wyrazów to trójmian.

przykład: $ax^2 + 2x + 7$

Redukcja wyrazów podobnych

Dodawanie jednomianów podobnych w sumie algebraicznej nazywamy redukcją wyrazów podobnych.

przykład: $x^3 - 2x + 3x^3 - 2x^3 + x = 2x^3 - x$

Suma uporządkowana rosnąco

Jeśli wyrazy sumy zapisane są według rosnących wykładników potęg danej zmiennej, to suma jest uporządkowana rosnąco.

przykład: $xy^2 - x^3y + 2x^4y$ – suma uporządkowana rosnąco ze względu na zmienną x

Suma uporządkowana malejąco

Jeśli wyrazy sumy zapisane są według malejących wykładników potęg danej zmiennej, to suma jest uporządkowana malejąco.

przykład: $10a^7 + 20a^4 - 6a^3$

Stopień sumy algebraicznej jednej zmiennej

Stopień sumy algebraicznej jednej zmiennej to najwyższy z wykładników potęgi zmiennej.

przykład: $x - 8x^2 + 0,98x^5$ – suma algebraiczna stopnia piątego

6.5. NAZWY WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH

Nazwę wyrażenia algebraicznego określa to działanie, które należy wykonać jako ostatnie.

Suma

$2m + x^2$ – suma podwojonej liczby m oraz kwadratu liczby x

Różnica

$a - b$ – różnica liczb a i b

Iloczyn

$b^3 \cdot 4$ – iloczyn sześcianu liczby b i liczby 4

Iloraz

$\frac{x+y}{x-y}$ – iloraz sumy liczb x i y przez różnicę tych liczb

Kwadrat

$\left(\frac{1}{0,5a}\right)^2$ – kwadrat odwrotności połowy liczby a

6.6. DZIAŁANIA NA WYRAŻENIACH ALGEBRAICZNYCH

Dodawanie sum algebraicznych

Aby dodać sumy algebraiczne, należy opuścić nawiasy i wykonać redukcję wyrazów podobnych.

przykład: $(4x + 2 - y) + (y - 4x) = 4x + 2 - y + y - 4x = 2$

Odejmowanie sum algebraicznych

Aby wykonać odejmowanie sum algebraicznych należy opuścić nawiasy, zmienić na przeciwne znaki wyrazów sumy, przed którą stał znak „minus”, a następnie wykonać redukcję wyrazów podobnych.

przykład: $(6x - 2) - (-4 - x + 2x) = 6x - 2 + 4 + x - 2x = 5x + 2$

Mnożenie jednomianów

Przy mnożeniu jednomianów należy pomnożyć liczby i odpowiednie zmienne.

przykład: $2x \cdot 3xy = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y = 6 \cdot x^2 \cdot y = 6x^2y$

Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Aby wykonać mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian, należy każdy wyraz sumy algebraicznej pomnożyć przez jednomian, korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania, i wykonać redukcję wyrazów podobnych.

przykład: $3x(x + y - 4) = 3x^2 + 3xy - 12x$

Mnożenie sum algebraicznych

Aby wykonać mnożenie sum algebraicznych, należy każdy wyraz pierwszej sumy pomnożyć przez każdy wyraz drugiej sumy i wykonać redukcję wyrazów podobnych.

przykład: $(a + b - 2)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 - 2a + 2b = a^2 - b^2 - 2a + 2b$

Wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias

Przy wyłączaniu wspólnego czynnika poza nawias korzystamy z rozdzielności mnożenia względem dodawania.

przykład: $15x - 5 = 5(3x - 1)$
 $24x^2 - 8x + 4 = 4(6x^2 - 2x + 1)$

Reguły działań na wyrażeniach algebraicznych

Najpierw wykonujemy działania w nawiasach niezawierających innych nawiasów. Następnie wykonujemy potęgowanie i pierwiastkowanie. Potem wykonujemy mnożenie i dzielenie (w kolejności występowania). Na końcu wykonujemy dodawanie i odejmowanie (w kolejności występowania).

Przekształcanie wzorów geometrycznych

Pole kwadratu o boku a

$$P = a^2 \qquad a = \sqrt{P}$$

Pole prostokąta o bokach a, b

$$P = ab \qquad a = \frac{P}{b} \qquad b = \frac{P}{a}$$

Pole trójkąta o podstawie a i wysokości h

$$P = \frac{1}{2}ah \qquad a = \frac{2P}{h} \qquad h = \frac{2P}{a}$$

Pole trapezu o podstawach a, b i wysokości h

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h \qquad h = \frac{2P}{a+b} \qquad a = \frac{2P}{h} - b \qquad b = \frac{2P}{h} - a$$

Pole koła o promieniu r

$$P = \pi r^2 \qquad r = \sqrt{\frac{P}{\pi}}$$

Obwód okręgu o promieniu r

$$L = 2\pi r \qquad r = \frac{L}{2\pi}$$

Objętość prostopadłościanu o krawędziach a, b, c

$$V = abc \qquad a = \frac{V}{bc} \qquad b = \frac{V}{ac} \qquad c = \frac{V}{ab}$$

Objętość sześcianu o krawędzi a

$$V = a^3 \qquad a = \sqrt[3]{V}$$

Objętość graniastosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H

$$V = P_p \cdot H \qquad P_p = \frac{V}{H} \qquad H = \frac{V}{P_p}$$

7. PROCENTY

7.1. POJĘCIE PROCENTU

Procent to setna część pewnej wielkości a .

$$1\%a = \frac{1}{100}a$$

$$p\%a = \frac{p}{100}a$$

$$1 = 100\%$$

7.2. ZAPISYWANIE PROCENTU W POSTACI UŁAMKA

Aby procent zapisać w postaci ułamka, należy liczbę procentów podzielić przez 100.

przykład: $12\% = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$

$$0,5\% = \frac{0,5}{100} = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$$

$$33\frac{1}{3}\% = \frac{100}{3}\% = \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{3}$$

$$0,1\% = 0,001$$

$$4\% = 0,40$$

$$123\% = 1,23$$

$$500\% = 5,0$$

$$100\% = 1$$

$$50\% = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$25\% = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$75\% = \frac{3}{4} = 0,75$$

7.3. ZAPISYWANIE LICZBY W POSTACI PROCENTU

Aby liczbę zapisać w postaci procentu, należy tę liczbę pomnożyć przez 100%.

przykład: $4 = 4 \cdot 100\% = 400\%$

$$1,5 = 1,5 \cdot 100\% = 150\%$$

$$2\frac{1}{5} = \frac{11}{5} \cdot 100\% = 220\%$$

$$1 = 100\%$$

$$0,5 = 50\%$$

$$0,25 = 25\%$$

$$0,75 = 75\%$$

7.4. OBLICZENIA PROCENTOWE

Obliczenie $p\%$ liczby a :

$$p\% \cdot a = \frac{p}{100}a$$

przykład: Obliczenie 5% liczby 6:

$$5\% \cdot 6 = \frac{5}{100} \cdot 6 = 0,30$$

Zwiększenie liczby a o $p\%$:

$$a + p\%a = a + \frac{p}{100}a$$

przykład: Zwiększenie liczby 4 o 5%:

$$4 + 5\% \cdot 4 = 4 + 0,05 \cdot 4 = 4,2$$

Zmniejszenie liczby a o $p\%$, a następnie zwiększenie otrzymanej liczby o $m\%$:

$$(a - p\%a) + m\%(a - p\%a)$$

przykład: Zmniejszenie liczby 10 o 1%, a następnie zwiększenie wyniku o 10%:

$$(10 - 1\% \cdot 10) + 10\%(10 - 1\% \cdot 10) = (10 - 0,01 \cdot 10) + 0,1 \cdot (10 - 0,01 \cdot 10) = 10,89$$

Znalezienie liczby x , której $p\%$ wynosi w :

$$p\% \cdot x = w$$

$$\frac{p}{100}x = w$$

$$x = \frac{100w}{p}$$

przykład: Znalezienie liczby, której 30% jest równe 2.

$$30\% \cdot x = 2$$

$$\frac{30}{100}x = 2$$

$$x = \frac{200}{30} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Obliczenie, jakim procentem liczby a jest liczba b :

$$p\% \cdot a = b$$

$$p\% = \frac{b}{a} \cdot 100\%$$

przykład: Obliczenie, jakim procentem liczby 20 jest liczba 1:

$$p\% \cdot 20 = 1$$

$$p\% = \frac{1}{20} \cdot 100\% = 5\%$$

7.5. ZASTOSOWANIE REGUŁY TRZECH

Reguła trzech to sposób wyznaczania z proporcji czwartej wielkości, gdy dane są trzy pozostałe.

przykład: Należy znaleźć liczbę, której 20% jest równe 4.

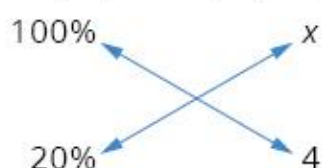
1. Zapisujemy dane w dwóch kolumnach, tak aby procenty występowały w jednej kolumnie, a odpowiadające im liczby były w drugiej.

x – szukana wielkość

100% x

20% 4

2. Wielkości łączymy strzałkami po przekątnych (mnożymy „na krzyż”).



3. Liczby znajdujące się na końcu tej samej strzałki mnożymy.

$$20\% \cdot x = 100\% \cdot 4$$

$$0,2x = 1 \cdot 4$$

$$0,2x = 4$$

4. Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$x = \frac{4}{0,2}$$

$$x = 20$$

7.6. PUNKTY PROCENTOWE

Punkt procentowy to różnica między dwiema wartościami tej samej wielkości podanymi w procentach.

przykład: Oprocentowanie w banku zmalało z 3% o 1 punkt procentowy, zatem wynosi teraz 2%.

7.7. OPROCENTOWANIE OSZCZĘDNOŚCI – TERMINOLOGIA

Kapitał – kwota, którą klient wpłaca do banku.

Lokata (wkład) – kapitał wpłacony do banku na określony procent, w celu uzyskania dochodu.

Lokata terminowa – umowa, na podstawie której klient powierza swoje środki pieniężne bankowi na ustalony czas w zamian za określony zysk (odsetki), wynikający z oprocentowania lokaty. Po upływie terminu umownego bank wypłaca klientowi wpłacone przez niego środki wraz z odsetkami.

Depozyt bankowy – środki finansowe złożone w banku na czas określony lub nieokreślony. Dzielimy je na terminowe (np. lokaty) oraz płatne na żądanie (*a vista*). Wysokość depozytów, zwana oprocentowaniem jest zależna od stóp procentowych, wysokości wkładu i czasu trwania umowy.

Oprocentowanie brutto – oprocentowanie produktów bankowych, do których należą depozyty przed odliczeniem podatku od dochodów kapitałowych wynoszącego 19%.

Oprocentowanie netto – oprocentowanie produktów bankowych, które uwzględnia podatek dochodowy w wysokości 19% od zgromadzonych odsetek.

Kapitalizacja odsetek – wyliczenie sumy zgromadzonych odsetek w stosunku do kapitału. Najczęściej ma ona miejsce po zakończeniu umowy lokaty. W przypadku kont oszczędnościowych kapitalizacja odsetek ma miejsce regularnie, w okresach umownych.

Saldo – stan konta bankowego.

7.8. PROCENT PROSTY, PROCENT SKŁADANY

Kapitał złożony w banku na lokacie może być oprocentowany przy wykorzystaniu procentu prostego lub złożonego.

Oprocentowanie wkładu pieniężnego w **sposób prosty**:

- dochód w postaci odsetek od wkładu początkowego jest wyznaczany proporcjonalnie do długości okresu oprocentowania
- odsetki nie są doliczane do wkładu, czyli nie podlegają kapitalizacji.

p – liczba procent rocznej stopy procentowej, odsetki od kapitału początkowego K za jeden rok:

$$K \cdot \frac{p}{100}$$

$$n \text{ lat: } K \cdot \frac{p}{100} \cdot n$$

$$m \text{ miesięcy: } K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12}$$

Oprocentowanie wkładu pieniężnego w **sposób składany**:

- odsetki za dany okres oprocentowania są doliczane do wkładu (podlegają kapitalizacji) i w ten sposób zwiększają kapitał;
- w następnym okresie oprocentowaniu podlega zwiększony kapitał.

Oznaczenia:

K – kapitał początkowy

k – kapitał końcowy

m – liczba kapitalizacji w roku

przykład: $m = 2$ – kapitalizacja co pół roku, $m = 4$ – kapitalizacja co kwartał

n – liczba lat oszczędzania

r – oprocentowanie roczne zapisane w postaci ułamka dziesiętnego

przykład: przy oprocentowaniu rocznym 2% należy wpisać 0,02

Kapitalizacja następuje tylko raz w roku:

$$k = K \cdot (1 + r)^n$$

Kapitalizacja następuje częściej niż raz w roku:

$$k = K \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

7.9. PROMILE

Promil (‰) to tysięczna część pewnej wielkości a .

$$1‰ a = \frac{1}{1000} a$$

$$1‰ = 0,01\%$$

Zapisywanie promila w postaci ułamka

Aby promil zapisać w postaci ułamka, należy liczbę promili podzielić przez 1000.

przykład: $0,40 = \frac{0,4}{1000} = 0,0004$

$$7‰ = \frac{7}{1000} = 0,007$$

$$245‰ = \frac{245}{1000} = 0,245$$

$$5‰ = 0,005$$

$$20‰ = 0,020$$

$$1000‰ = 1$$

$$500‰ = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$250‰ = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$750‰ = \frac{3}{4} = 0,75$$

Zapisywanie liczby w postaci promila

Aby liczbę zapisać w postaci promila, należy tę liczbę pomnożyć przez 1000‰.

przykład: $4 = 4 \cdot 1000‰ = 4000‰$

$$1,5 = 1,5 \cdot 1000‰ = 1500‰$$

$$2\frac{1}{5} = \frac{11}{5} \cdot 1000‰ = 2200‰$$

$$1 = 1000‰$$

$$0,5 = 500‰$$

$$0,25 = 250‰$$

$$0,75 = 750‰$$

Zamiana promili na procenty

Aby zamienić promil na procent, należy liczbę promili podzielić przez 10.

przykład: $2‰$ to $0,2\%$

$$10‰ \text{ to } 1\%$$

$$40‰ \text{ to } 4\%$$

Zamiana procentów na promile

Aby zamienić procent na promil, należy liczbę procentów pomnożyć przez 10.

przykład: 2% to $20‰$

$$0,5\% \text{ to } 5‰$$

$$34\% \text{ to } 340‰$$

7.10. PRÓBY ZŁOTA

Próba stopu – stosunek masy czystego metalu do masy całego stopu.

$$\text{próba} = \frac{\text{masa czystego metalu}}{\text{masa całego stopu}}$$

Próba (cecha probiercza) złota określa zawartość złota w stopie wyrażoną w promilach.

przykład: Stop próby 300 zawiera 300 promili czystego złota, czyli 30% czystego złota.

NR PRÓBY	OZNACZENIE PRÓBY	ZAWARTOŚĆ CZYSTEGO ZŁOTA
0	999	99,9%
1	960	96%
2	750	75%
3	585	58,5%
4	500	50,9%
5	375	37,5%
6	333	33,3%

Zawartość złota w stopie można określać też w karatach.

1 karat to $\frac{1}{24}$ zawartości wagowej złota w stopie.

Zawartość złota w stopie wyrażonej w karatach przedstawia tabela.

LICZBA KARATÓW	PRÓBA
24	1000
23	958
22	916
18	750
14	585
12	500
10	417
9	375
8	333

7.11. PRÓBY SREBRA

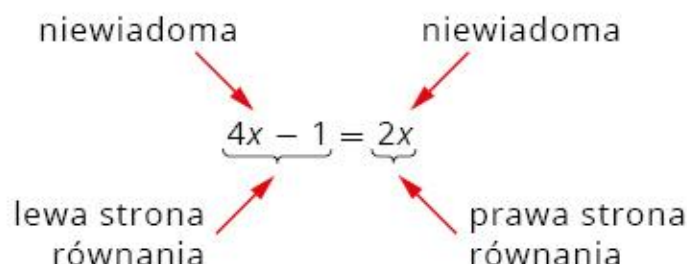
Próba srebra określa zawartość srebra w stopie wyrażoną w promilach.

NR PRÓBY	OZNACZENIE PRÓBY	ZAWARTOŚĆ CZYSTEGO SREBRA
1	925	92,5%
2	875	87,5%
3	830	83,0%
4	800	80,0%

8. RÓWNANIA

8.1. PODSTAWOWE POJĘCIA

Równanie składa się z dwóch wyrażeń algebraicznych połączonych znakiem równości. Przynajmniej jedno z tych wyrażeń powinno zawierać zmienną.



Niewiadoma – zmienna w wyrażeniu oznaczona zwykle symbolem literowym.

przykład: $4x - 2y = 0$

x, y – niewiadome

Dziedzina równania – zbiór wszystkich liczb, które można podstawić w miejsce niewiadomej.

przykład: $\frac{2}{x-3} = 0$ – do tego równania nie można podstawić w miejsce x liczby 3, liczba ta nie należy do dziedziny równania

Równanie z jedną niewiadomą – równanie, w którym występuje tylko jedna niewiadoma.

przykład: $-4a + 7 = 0$ – równanie z jedną niewiadomą a

Równanie z kilkoma niewiadomymi – równanie, w którym występują co najmniej dwie niewiadome.

przykład: $x - 7y = 9$ – równanie z dwiema niewiadomymi x, y

Liczba **spełnia** równanie, jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej prawa strona równania jest równa lewej. Wszystkie takie liczby to **rozwiązania równania**.

przykład: Liczba 4 spełnia równanie $3x - 6 = x + 2$.

Sprawdzenie:

$$L = 3 \cdot 4 - 6 = 12 - 6 = 6$$

$$P = 4 + 2 = 6$$

$$L = P$$

Rozwiązać równanie to znaleźć wszystkie liczby, które spełniają równanie, lub uzasadnić, że takie liczby nie istnieją.

przykład: Równanie $|x| = -1$ nie ma rozwiązania, bo wartość bezwzględna każdej liczby jest nieujemna.

Zbiór rozwiązań równania to zbiór wszystkich liczb spełniających to równanie.

przykład: $x(x - 1)(x + 2) = 0$ – równanie to ma trzy rozwiązania: $-2, 0, 1$

Równanie oznaczone – równanie, które ma tylko jedno rozwiązanie.

przykład: $x - 6 = 0$

6 – liczba będąca rozwiązaniem równania

Równanie sprzeczne – równanie, które nie ma rozwiązań.

przykład: $y - 4 = y + 4$

Równanie tożsamościowe (tożsamość) – równanie, które dla dowolnych wartości podstawionych w miejsce niewiadomej, ma rozwiązanie.

przykład: $x - 6 = x - 6$

Równanie nieoznaczone – równanie, które ma nieskończenie wiele rozwiązań.

przykład: $x - y = 1$ – równanie to spełnia nieskończenie wiele par liczb, np. $(4, 3)$; $(-1, -2)$

Równania równoważne – równania mające te same dziedziny i ten sam zbiór rozwiązań.

przykład: $x + 1 = 2$ i $x - 1 = 0$

Metoda równań równoważnych – przekształcanie danego równania w taki sposób, aby na każdym etapie otrzymywać równanie prostsze, lecz równoważne danemu.

Równania równoważne:

przykład: $2(x + 4) - 1 = 0$ i $2x + 8 = 1$ i $x = -3,5$

8.2. RÓWNANIA PIERWSZEGO STOPNIA Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą x to równanie postaci:

$$ax + b = 0,$$

gdzie a, b – ustalone liczby i $a \neq 0$

a – współczynnik przy niewiadomej

b – wyraz wolny

Uwaga: Równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą, nazywa się też **równaniem liniowym z jedną niewiadomą**.

8.3. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA $ax + b = 0$

Pierwiastki równania (rozwiązania równania) – wartości niewiadomej, które spełniają równanie.

przykład: $3x - 6 = 0$

$x = 2$ – rozwiązanie równania (pierwiastek równania)

RÓWNANIE	WARUNEK	POSTAĆ RÓWNANIA	ROZWIĄZANIE, LICZBA
oznaczone	$a \neq 0$	$ax + b = 0$	jedno rozwiązanie $x = -\frac{b}{a}$
nieoznaczone	$a = 0$ i $b = 0$	$0 \cdot x + 0 = 0$	nieskończenie wiele rozwiązań – każda liczba rzeczywista
sprzeczne	$a = 0$ i $b \neq 0$	$0 \cdot x + b = 0$	nie ma rozwiązania

8.4. ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ METODĄ RÓWNAŃ RÓWNOWAŻNYCH

Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych polega na takim przekształcaniu danego równania, aby w kolejnych krokach otrzymywać równania równoważne.

Rozwiążemy równanie.

$$\frac{5x}{2} + 4x - 3 = 2 + 4x$$

Do obu stron równania można dodać to samo wyrażenie.

$$\frac{5x}{2} + 4x - 3 + 3 = 2 + 3 + 4x$$

$$\frac{5x}{2} + 4x = 5 + 4x \quad | -4x$$

Od obu stron równania można odjąć to samo wyrażenie.

$$\frac{5x}{2} + 4x - 4x = 5 + 4x - 4x$$

$$\frac{5x}{2} = 5$$

Obie strony równania można pomnożyć przez tę samą liczbę różną od 0.

$$\frac{5x}{2} = 5 \quad | \cdot 2$$

$$5x = 10$$

Obie strony równania można podzielić przez tę samą liczbę różną od 0.

$$5x = 10 \quad | :5$$

$$x = 2$$

8.5. STOSUNEK DWÓCH WIELKOŚCI

Stosunek dwóch wielkości – iloraz odpowiadających sobie wartości tych wielkości. Zapisywany jest zwykle w postaci ilorazu liczb naturalnych przy użyciu kreski ułamkowej lub znaku dzielenia.

przykład: W stopie jest 5 g srebra i 6 g złota. Stosunek masy srebra do masy złota jest równy 5:6.

Stosunek masy złota do masy srebra jest równy 6:5.

Uwaga: Jednostki miar wielkości, których stosunek należy wyrazić, muszą być takie same.

8.6. PROPORCJA

Proporcja – równość dwóch stosunków.

$$\begin{array}{c} \text{wyrazy skrajne} \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ a : b = c : d \\ \uparrow \qquad \uparrow \\ \text{wyrazy środkowe} \end{array}$$

Proporcja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ dla } b \neq 0, d \neq 0$$

Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$$

Jeśli w proporcji $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dane są trzy wyrazy, to czwarty można obliczyć następująco:

$$ad = bc \mid :d \\ a = \frac{bc}{d}$$

$$bc = ad \mid :c \\ b = \frac{ad}{c}$$

$$bc = ad \mid :b \\ c = \frac{ad}{b}$$

$$ad = bc \mid :a \\ d = \frac{bc}{a}$$

8.7. RÓWNANIA W POSTACI PROPORCJI

RÓWNANIE	ROZWIĄZANIE
$\frac{2}{x} = \frac{1}{3}$ dla $x \neq 0$	$\frac{2}{x} \neq \frac{1}{3}$ $1 \cdot x = 2 \cdot 3$ $x = 6$
$\frac{2}{5} = \frac{x}{x-1}$ dla $x \neq 1$	$\frac{2}{5} \neq \frac{x}{x-1}$ $5 \cdot x = 2(x-1)$ $5x = 2x - 2$ $5x - 2x = -2$ $3x = -2 \mid :3$ $x = \frac{-2}{3}$
$\frac{4}{2a+3} = \frac{-1}{a-2}$ dla $a \neq -\frac{3}{2}$ i $a \neq 2$	$\frac{4}{2a+3} \neq \frac{-1}{a-2}$ $4(a-2) = -1(2a+3)$ $4a - 8 = -2a - 3$ $4a + 2a = -3 + 8$ $6a = 5 \mid :6$ $a = \frac{5}{6}$
$\frac{2y-1}{2y+1} = \frac{y-1}{y+1}$ dla $y \neq -\frac{1}{2}$ i $y \neq -1$	$\frac{2y-1}{2y+1} \neq \frac{y-1}{y+1}$ $(2y-1)(y+1) = (2y+1)(y-1)$ $2y^2 + 2y - y - 1 = 2y^2 - 2y + y - 1$ $2y^2 - 2y^2 + 2y + 2y - y - y = -1 + 1$ $2y = 0 \mid :2$ $y = 0$

8.8. PROPORCJONALNOŚĆ PROSTA

Dwie wielkości są **wprost proporcjonalne**, jeśli wraz ze wzrostem jednej, druga rośnie tyle samo (lub gdy jedna maleje, druga maleje tyle samo).

przykład: Kwota, jaką trzeba zapłacić za dany towar wzrośnie dwukrotnie, jeżeli kupimy dwukrotnie więcej towaru.

Proporcjonalność prosta – zależność między dwiema wielkościami (np. x, y), w której iloraz tych dwóch wielkości jest stały.

Zapisujemy:

$$\frac{y}{x} = a \text{ lub } y = ax$$

a – ustalona liczba nierówna 0, zwana **współczynnikiem proporcjonalności**

Wielkości x, y są **wprost proporcjonalne**.

przykład: Wartość towaru kupionego na wagę (przy ustalonej cenie za kilogram) jest wprost proporcjonalna do wagi. Np. kupując x kilogramów pietruszki w cenie 4 zł za kilogram, należy zapłacić y zł, gdzie $y = 4x$.

8.9. ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY DROGĄ, PRĘDKOŚCIĄ A CZASEM

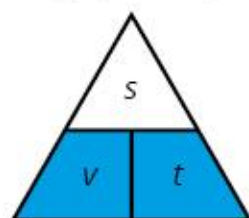
Oznaczmy:

s km – długość drogi przebytej przez ciało

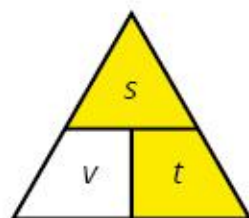
t h – czas, w jakim poruszało się ciało

v km/h – prędkość, z jaką poruszało się ciało

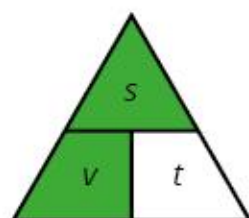
W ruchu ze stałą prędkością v przebyta droga jest wprost proporcjonalna do czasu jazdy.



$$s = v \cdot t$$



$$v = \frac{s}{t}$$



$$t = \frac{s}{v}$$

9. OBLICZENIA PRAKTYCZNE

9.1. JEDNOSTKI CZASU

PODSTAWOWE JEDNOSTKI CZASU		
JEDNOSTKA	SKRÓT	ZAMIANA JEDNOSTEK
sekunda	s	
minuta	min	1 min = 60 s
godzina	h	1 h = 60 min = 3600 s
kwadrans		To czwarta część godziny, czyli 15 minut.
dość		Doba astronomiczna to 24 godziny, czyli 1440 minut = 86 400 sekund. Doba księżycowa to okres pomiędzy dwoma kolejnymi górowaniami Księżyca, równy 24 h 50 min 28 s = 89428 s.

JEDNOSTKI KALENDARZOWE				
JEDNOSTKA	OPIS			
tydzień	To 7 dni, czyli 168 godzin = 10 080 minut = 604 800 sekund (z wyjątkiem tygodni, w których następuje zmiana czasu, np. z zimowego na letni).			
miesiąc	Nazwa miesiąca	Długość w dniach	Nazwa miesiąca	Długość w dniach
	styczeń	31	lipiec	31
	luty	28 lub 29 w roku przestępnym	sierpień	31
	marzec	31	wrzesień	30
	kwiecień	30	październik	31
	maj	31	listopad	30
	czerwiec	30	grudzień	31
kwartał	To czwarta część roku kalendarzowego, czyli 3 miesiące. Rok ma 4 kwartały.			
	I kwartał	II kwartał	III kwartał	IV kwartał
	styczeń, luty, marzec	kwiecień, maj, czerwiec	lipiec, sierpień, wrzesień	październik, listopad, grudzień
rok kalendarzowy	Rok kalendarzowy to 4 kwartały 12 miesięcy 53 tygodnie 365 dni rok zwykły lub 366 dni rok przestępny 8760 godzin rok zwykły lub 8784 godzin rok przestępny			

JEDNOSTKI KALENDARZOWE

JEDNOSTKA	OPIS			
	Rok przestępny – rok dłuższy o 1 dzień od roku zwykłego. Lata przestępne to te, których numeracja jest podzielna przez 4 i niepodzielna przez 100 lub jest podzielna przez 400. Najbliższe lata przestępne: 2020, 2024, 2028, 2032, 2036, 2040, 2044, 2048			
	Wielokrotności roku			
	Dekada – dziesięciolecie, 10 lat.	Wiek – stulecie, 100 lat.	Millenium – tysiąclecie, 1000 lat.	
	Kalendarz słoneczny – wyróżnia się w nim cztery pory roku.			
	Pory roku			
	wiosna	lato	jesień	zima

9.2. JEDNOSTKI DŁUGOŚCI

PODSTAWOWE JEDNOSTKI DŁUGOŚCI

JEDNOSTKA	SKRÓT	ZAMIANA JEDNOSTEK
milimetr	mm	
centymetr	cm	1 cm = 10 mm
decymetr	dm	1 dm = 10 cm = 100 mm
metr	m	1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
kilometr	km	1 km = 1000 m = 10 000 dm = 100 000 cm = 1 000 000 mm

JEDNOSTKI DŁUGOŚCI STOSOWANE W ASTRONOMII

JEDNOSTKA	WARTOŚĆ PRZYBLIŻONA
parsek	$3 \cdot 10^{16}$ m
rok świetlny	$9 \cdot 10^{15}$ m
jednostka astronomiczna	$15 \cdot 10^{10}$ m

JEDNOSTKI DŁUGOŚCI STOSOWANE W NAWIGACJI

JEDNOSTKA	WARTOŚĆ PRZYBLIŻONA
mila morska	1 852 m
kabel	185,2 m

DAWNE JEDNOSTKI DŁUGOŚCI UŻYWANE W KRAJACH ANGLOSASKICH	
JEDNOSTKA	WARTOŚĆ PRZYBLIŻONA
mila	1,6 km
yard	91 cm
stopa (foot)	30,5 cm
cal (inch)	2,54 cm

9.3. JEDNOSTKI PRĘDKOŚCI

PODSTAWOWE JEDNOSTKI PRĘDKOŚCI	
JEDNOSTKA	ZAMIANA JEDNOSTEK
km/h	$1 \text{ km/h} = \frac{1000}{60} \text{ m/min} = \frac{1000}{3600} \text{ m/s} \approx 0,27 \text{ m/s}$
m/s	$1 \text{ m/s} = \frac{1}{\frac{1}{3600}} \text{ km/h} = 3,6 \text{ km/h}$
węzeł	$1 \text{ mila morska/h} = 1,852 \text{ km/h} \approx 0,5 \text{ m/s}$

9.4. JEDNOSTKI POŁA POWIERZCHNI

PODSTAWOWE JEDNOSTKI POŁA		
JEDNOSTKA	SKRÓT	ZAMIANA JEDNOSTEK
milimetr kwadratowy	mm ²	$1 \text{ mm}^2 = 0,01 \text{ cm}^2$
centymetr kwadratowy	cm ²	$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$ $1 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ dm}^2$ $1 \text{ cm}^2 = 0,0001 \text{ m}^2$
decymetr kwadratowy	dm ²	$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$ $1 \text{ dm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$
metr kwadratowy	m ²	$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$ $1 \text{ m}^2 = 0,000000 \text{ km}^2$
kilometr kwadratowy	km ²	$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2 = 100\,000\,000 \text{ dm}^2 =$ $= 10\,000\,000\,000 \text{ cm}^2 = 1\,000\,000\,000\,000 \text{ mm}^2$

JEDNOSTKI POŁA POWIERZCHNI GRUNTÓW		
JEDNOSTKA	SKRÓT	ZAMIANA JEDNOSTEK
ar	a	$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$
hektar	ha	$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$
kilometr kwadratowy	km^2	$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$

9.5. JEDNOSTKI OBJĘTOŚCI

JEDNOSTKI OBJĘTOŚCI		
JEDNOSTKA	SKRÓT	ZAMIANA JEDNOSTEK
milimetr sześcienny	mm^3	
centymetr sześcienny	cm^3	$1 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$ $1 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3$
decymetr sześcienny	dm^3	$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 1\,000\,000 \text{ mm}^3$ $1 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ m}^3$
metr sześcienny	m^3	$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$ $1 \text{ m}^3 = 0,000000001 \text{ km}^3$
kilometr sześcienny	km^3	$1 \text{ km}^3 = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3$

JEDNOSTKI POJEMNOŚCI		
JEDNOSTKA	SKRÓT	ZAMIANA JEDNOSTEK
mililitr	ml	$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$ $1 \text{ ml} = 0,001 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ l}$
litr	l	$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$ $1 \text{ l} = 0,01 \text{ hl}$
hektolitr	hl	$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$

9.6. JEDNOSTKI MASY

JEDNOSTKI MASY		
JEDNOSTKA	SKRÓT	ZAMIANA JEDNOSTEK
miligram	mg	
gram	g	$1 \text{ g} = 1000 \text{ mg}$
dekagram	dag	$1 \text{ dag} = 10 \text{ g} = 10\,000 \text{ mg}$
kilogram	kg	$1 \text{ kg} = 100 \text{ dag} = 1000 \text{ g} = 1\,000\,000 \text{ mg}$
tona	t	$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg} = 100\,000 \text{ dag}$

9.7. DAWNE JEDNOSTKI ILOŚCI

NAZWA	LICZBA SZTUK
tuzin	12
kopa	60
gros	144

9.8. JEDNOSTKI TEMPERATURY

Podstawową jednostką temperatury w układzie SI jest kelwin (K). W Polsce używa się skali Celsjusza ($^{\circ}\text{C}$). W USA używa się skali Fahrenheita ($^{\circ}\text{F}$).

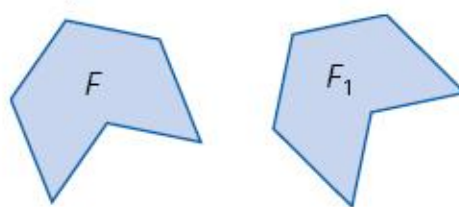
WZÓR	OPIS
$T = t + 273,15 \text{ K}$	zamiana temperatury w stopniach Celsjusza (t) na temperaturę w kelwinach (T)
$t_F = \left(\frac{9}{5} \cdot t + 32 \right)^{\circ}\text{F}$	zamiana temperatury w stopniach Celsjusza (t) na temperaturę w stopniach Fahrenheita (t_F)
$t = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32)^{\circ}\text{C}$	zamiana temperatury w stopniach Fahrenheita (t_F) na temperaturę w stopniach Celsjusza (t)

WAŻNE TEMPERATURY	
ZJAWISKO	TEMPERATURA W STOPNIACH CELSJUSZA
zero bezwzględne	$-273,15$
zamarzanie wody	0
wrzenie wody	100
średnia temperatura ciała człowieka	36,6

9.9. SKALA

Skala określa, ile razy obraz figury jest od tej figury mniejszy lub większy. Skala zapisywana jest za pomocą ilorazu dwóch liczb.

Skala 1 : 1 Figura i jej obraz są tej samej wielkości.



Skala 1 : 2 Długości boków figury F_1 są dwa razy krótsze od długości boków figury F .



Skala 2 : 1 Długości boków figury F_1 są dwa razy dłuższe od długości boków figury F .



Rodzaje zapisu skal na mapach

Skala liczbowa – skala zapisana za pomocą ilorazu, który może mieć też postać ułamka. Skala jest tym większa, im mniejszy jest dzielnik (mianownik ułamka). Określa, ile razy odległość w rzeczywistości jest większa od odległości na mapie.

przykład: Skala: 1 : 100 000 Skala: $\frac{1}{100000}$

Skala 1 : 20 000 oznacza, że 1 cm na mapie odpowiada 20 000 cm (czyli 200 m) w rzeczywistości.

Skala mianowana – zapisywana jest jako porównanie dwóch odległości. Pierwsza to długość odcinka na mapie, druga to długość odpowiadającego odcinka w terenie (podana w m lub km).

przykład: 1 cm – 100 km 1 cm → 100 km
1 cm na mapie – 100 km w terenie

Skala polowa – zapisywana jako porównanie dwóch pól powierzchni. Pola na mapie i odpowiadającego pola w terenie.

przykład: 1 mm² – 1000 000 m² 1 mm² → 1.000.000 m²

Podziałka liniowa

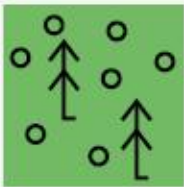
Jest graficznym obrazem skali w postaci linii prostej odpowiednio podzielonej i opisanej. Przedstawia stosunek odległości na mapie i w terenie.



9.10. PLAN

Plan jest obrazem niewielkiego obszaru powierzchni Ziemi przedstawionego w dużej skali. Pokryty jest siatką kwadratów. Kolumny pionowe oznaczone są literami, a poziome wiersze cyframi.

Legenda – opis dołączony do planu lub mapy, zawiera informacje potrzebne do właściwego odczytania planu lub mapy. Zawiera m.in. objaśnienia symboli występujących na planie. Przykładowe znaki topograficzne stosowane na planach

SYMBOL	ZNACZENIE
	rzeka
	wysokopienny las iglasty
	bagno
	budynek
	droga polna lub leśna
	linia kolejowa, stacja
	leśniczówka
	stacja benzynowa

10. WŁASNOŚCI FIGUR GEOMETRYCZNYCH NA PŁASZCZYŹNIE

10.1. POJĘCIA WSTĘPNE

Punkt

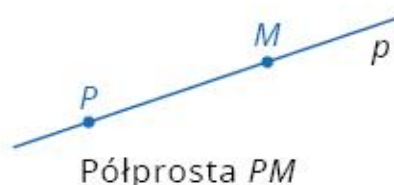


Prosta

Figura geometryczna płaska – zbiór punktów płaszczyzny.



Półprosta o początku w punkcie P leżącym na prostej p – każda z dwóch części, na które punkt P dzieli prostą p wraz z tym punktem.



Odcinek AB – figura utworzona z punktów A i B oraz ze wszystkich punktów prostej AB leżących pomiędzy punktami A i B . Punkty A i B nazywane są końcami tego odcinka.



Długość odcinka to odległość między jego końcami.

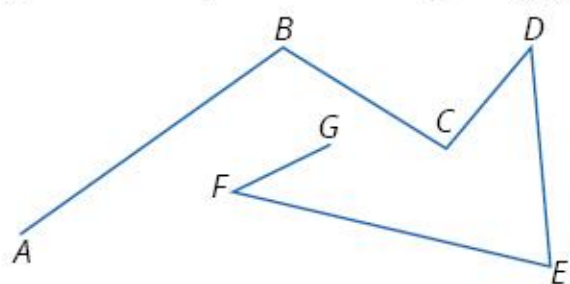
Odcinki mające tę samą długość nazywamy **przystającymi** lub **równymi**.

Łamana – figura składająca się ze skończonej liczby odcinków takich, że:

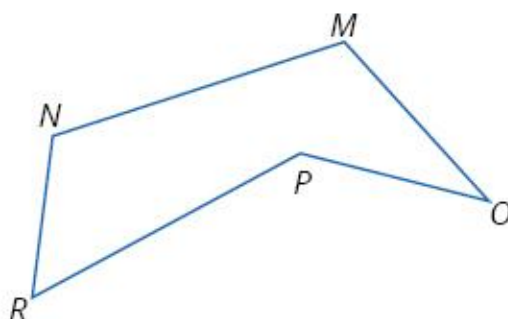
- dowolne dwa odcinki mają co najwyżej jeden punkt wspólny,
- koniec każdego odcinka (z wyjątkiem ostatniego) jest początkiem następnego odcinka.

Odcinki, z których składa się łamana, to boki łamanej. Końce boków łamanej, to jej wierzchołki.

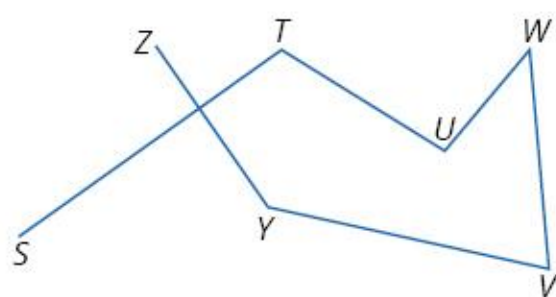
Długość łamanej to suma długości jej boków.



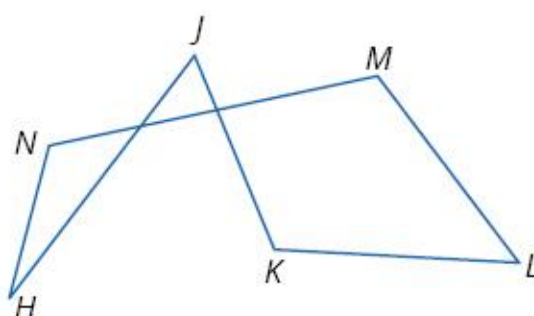
Łamana zwyczajna otwarta $ABCDEFG$



Łamana zwyczajna zamknięta $MOPRNM$



Łamana wiązana otwarta $STUVWYZ$



Łamana wiązana zamknięta $HJKLMNH$

Figura wypukła – dla dwóch dowolnych punktów należących do figury, odcinek o końcach w tych punktach zawiera się w tej figurze.

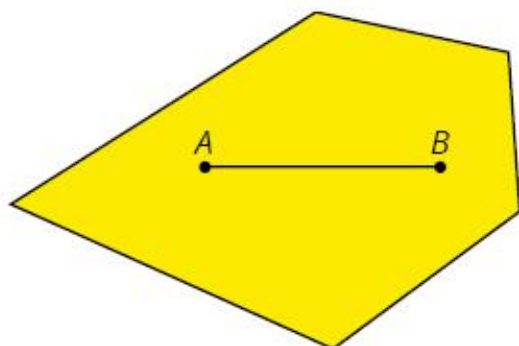
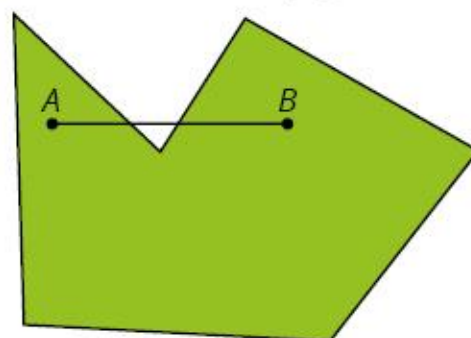


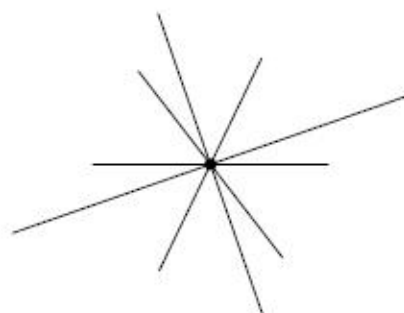
Figura wklęsła – figura, która nie jest wypukła. Istnieją takie dwa punkty należące do figury, że odcinek o końcach w tych punktach nie zawiera się w całości w tej figurze.



10.2. PROSTE NA PŁASZCZYŹNIE

Proste i punkty

Przez jeden punkt można poprowadzić nieskończenie wiele prostych.



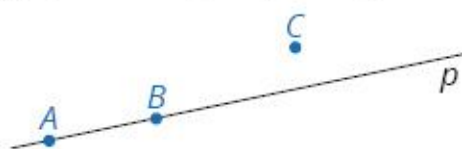
Przez każde dwa różne punkty można poprowadzić tylko jedną prostą.



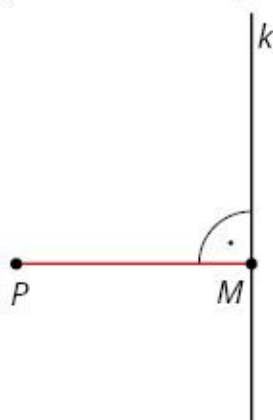
Punkty A, B, C są współliniowe, gdy leżą na jednej prostej.



Punkty A, B, C są niewspółliniowe, gdy nie leżą na jednej prostej.

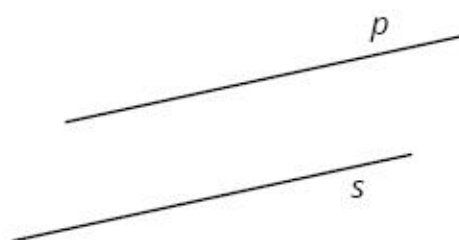


Odległość punktu P od prostej k (punkt P nie leży na tej prostej) – długość odcinka PM prostopadłego do prostej k , takiego, że punkt M należy do prostej k .

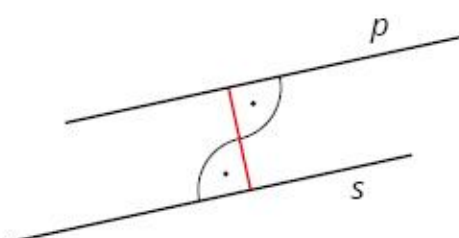


• Wzajemne położenie prostych

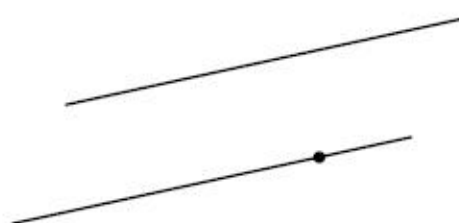
Proste równoległe – proste niemające punktów wspólnych lub proste pokrywające się.



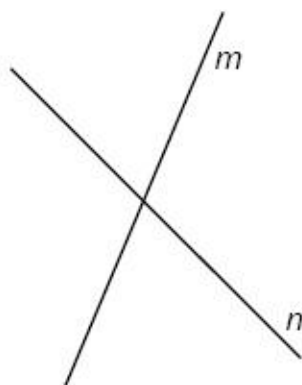
Odległość różnych prostych równoległych – długość odcinka prostopadłego do tych prostych, o końcach należących do tych prostych.



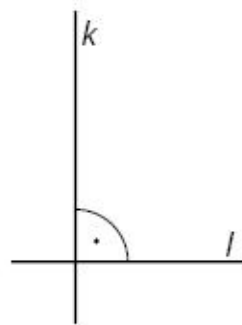
Przez punkt nieleżący na danej prostej można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do tej prostej.



Proste przecinające się – proste mające dokładnie jeden punkt wspólny (punkt przecięcia).

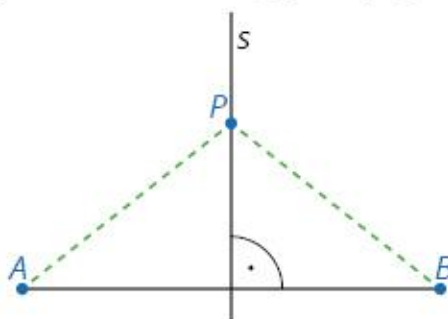


Proste prostopadłe – proste przecinające się pod kątem prostym.



10.3. ODCINEK NA PŁASZCZYŹNIE

Symetralna odcinka – prosta prostopadła do odcinka dzieląca go na dwie równe części. Każdy punkt symetralnej odcinka jest równo odległy od jego końców.



s – symetralna odcinka AB

$$|AP| = |PB|$$

Środek odcinka – punkt odcinka dzielący go na połowy.



S – środek odcinka AB

$$|AS| = |SB| \text{ i } |AS| + |SB| = |AB|$$

Stosunek podziału odcinka AB punktem P należącym do tego odcinka i różnym od punktu B –

$$\text{liczba } k = \frac{|AP|}{|PB|}.$$

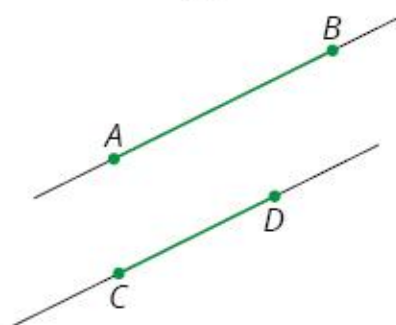


przykład: $k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

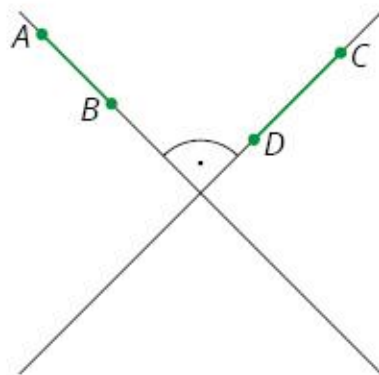
Można też zapisać: $k = 2 : 4$ lub $k = 1 : 2$

Wzajemne położenie dwóch odcinków na płaszczyźnie

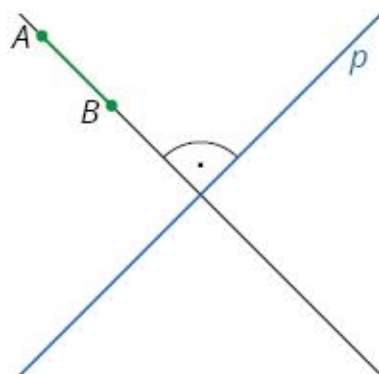
Dwa odcinki są równoległe, gdy proste zawierające te odcinki są równoległe.



Dwa odcinki są prostopadłe, gdy proste wyznaczone przez te odcinki są prostopadłe.



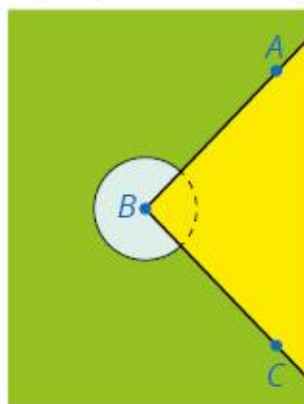
Odcinek jest prostopadły do prostej, gdy zawiera się w prostej prostopadłej do tej prostej.



10.4. KĄTY

Kąt – każda z części płaszczyzny wyznaczonych przez dwie półproste o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi.

Półproste te to ramiona kąta, ich wspólnym początkiem jest wierzchołek kąta.



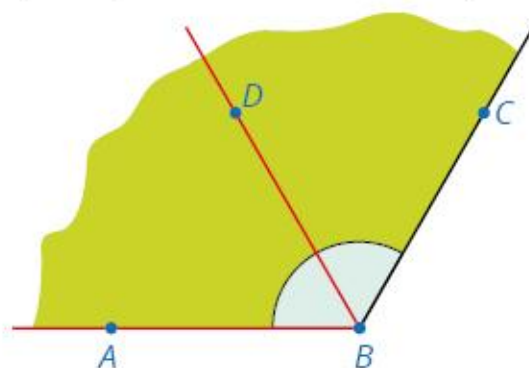
Kąt ABC

Punkt B – wierzchołek kąta

Półproste BA , BC – ramiona kąta

Kąty przystające – kąty o równych miarach.

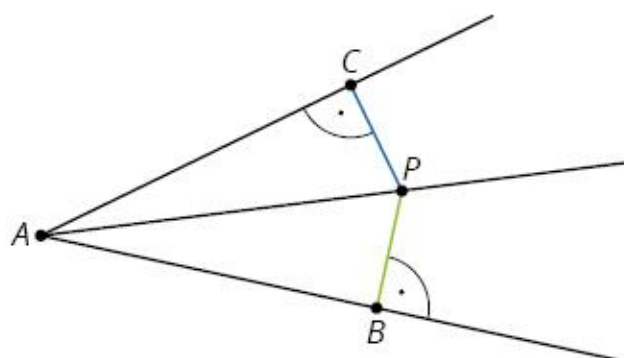
Dwusieczna kąta – półprosta o początku w wierzchołku kąta dzieląca ten kąt na połowy.



$$|\angle ABD| = |\angle DBC|$$

Półprosta BD jest dwusieczną kąta ABC .

Punkt leżący na dwusiecznej kąta jest równoodległy od ramion tego kąta.

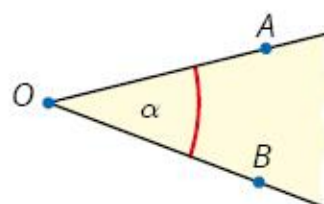


Prosta AP – dwusieczna kąta BAC .

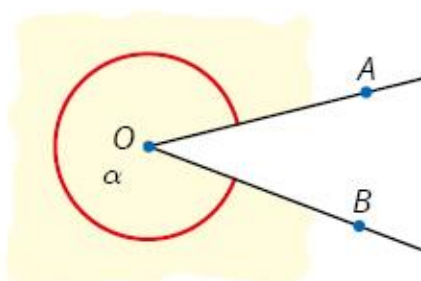
$$|PC| = |PB|$$

10.5. RODZAJE KĄTÓW

Kąt wypukły: $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ lub $\alpha = 360^\circ$



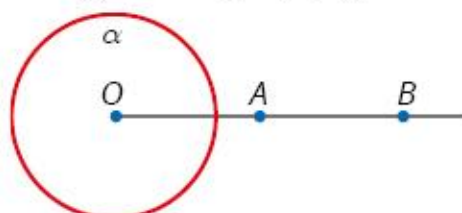
Kąt wklęsły: $180^\circ < \alpha < 360^\circ$



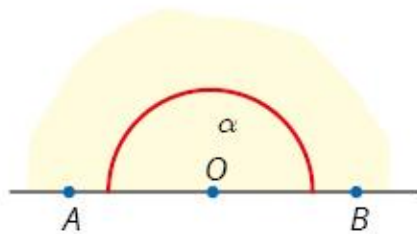
Kąt zerowy: $\alpha = 0^\circ$ – jego ramiona się pokrywają.



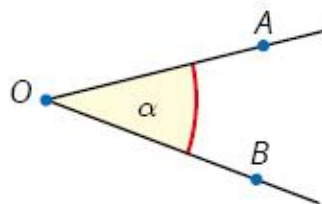
Kąt pełny: $\alpha = 360^\circ$ – składa się z całej płaszczyzny, jego ramiona się pokrywają.



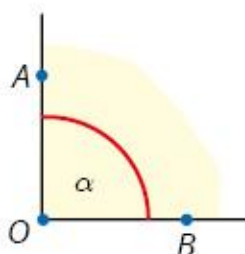
Kąt półpełny: $\alpha = 180^\circ$ – jego ramiona tworzą prostą.



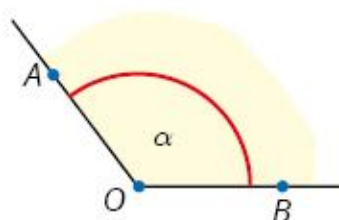
Kąt ostry: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



Kąt prosty: $\alpha = 90^\circ$



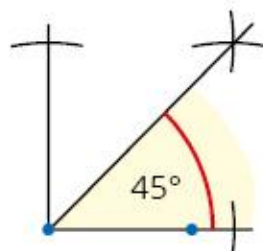
Kąt rozwarty: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



10.6. KONSTRUKCJE NIEKTÓRYCH KĄTÓW

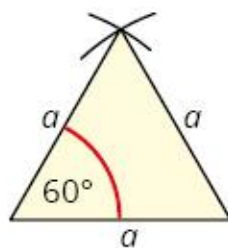
45°

Kąt ten jest połową kąta prostego. Można go skonstruować np. poprzez poprowadzenie dwusiecznej kąta prostego.



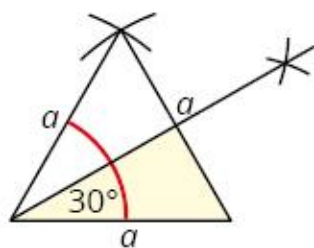
60°

Kąt ten jest kątem w trójkącie równobocznym. Aby go utworzyć, wystarczy skonstruować trójkąt równoboczny.



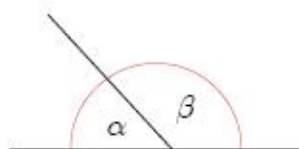
30°

Kąt ten jest połową kąta o mierze 60°. Aby uzyskać kąt o mierze 30°, wystarczy skonstruować trójkąt równoboczny i poprowadzić dwusieczną jednego z jego kątów.

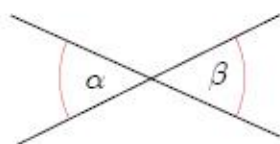


10.7. KĄTY UTWORZONE PRZEZ PROSTE

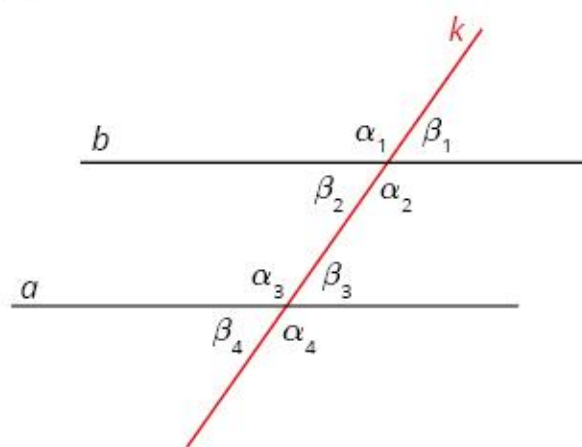
Kąty przyległe: $\alpha + \beta = 180^\circ$



Kąty wierzchołkowe: $\alpha = \beta$



Kąty przy prostych równoległych



α_1 i α_2 , α_3 i α_4 , β_1 i β_2 , β_3 i β_4 – kąty wierzchołkowe

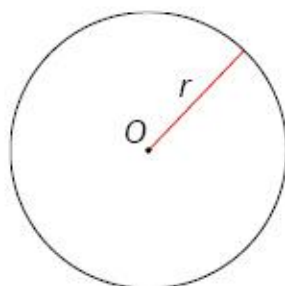
α_1 i α_3 , α_2 i α_4 , β_1 i β_3 , β_2 i β_4 – kąty odpowiadające

α_2 i α_3 , β_2 i β_3 – kąty naprzemianległe

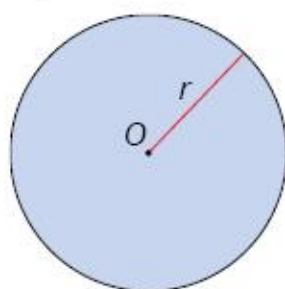
Kąty naprzemianległe i odpowiadające to kąty utworzone przez dwie proste równoległe, przecięte trzecią prostą. Kąty odpowiadające są równe. Kąty naprzemianległe są równe.

10.8. KOŁA I OKRĘGI

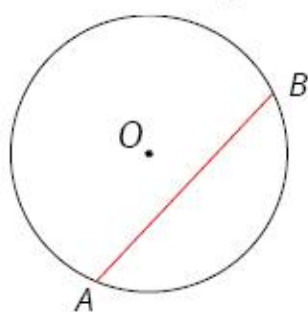
Okrąg o środku O i promieniu r – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r ($r > 0$).



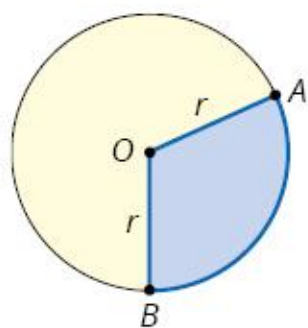
Koło o środku O i promieniu r – zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r ($r > 0$).



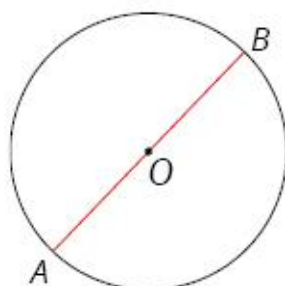
Cięciwa okręgu (koła) – odcinek o końcach należących do okręgu.



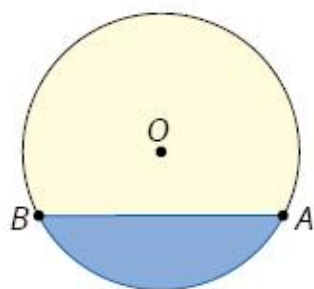
Wycinek koła – każda z dwóch części, na które koło zostało podzielone przez dwa różne promienie.



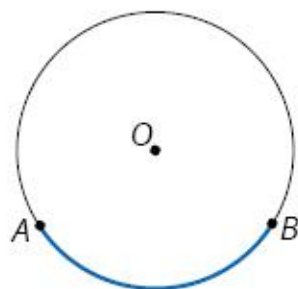
Średnica okręgu (koła) – cięciwa przechodząca przez środek okręgu (koła).



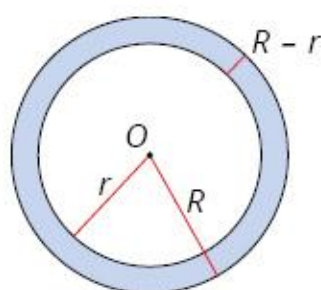
Odcinek koła – każda z dwóch części, na które koło zostało podzielone przez cięciwę.



Łuk – część okręgu.



Pierścień kołowy – powierzchnia zawarta między dwoma okręgami współśrodkowymi o różnych promieniach.

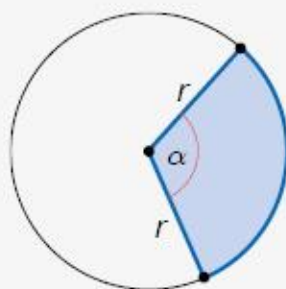


• Pole koła, długość okręgu

Pole koła o promieniu r : $P = \pi r^2$

Pole wycinka koła o promieniu r , wyznaczonego przez kąt o mierze α :

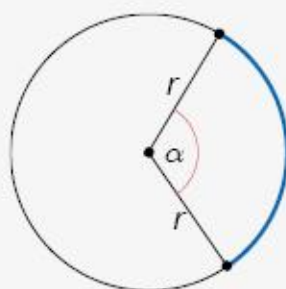
$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



Długość okręgu o promieniu r : $L = 2\pi r$

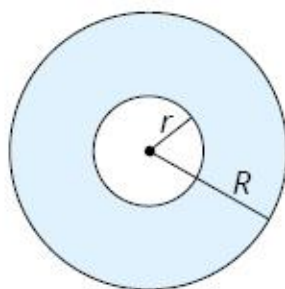
Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt o mierze α :

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$



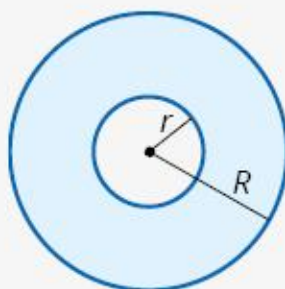
Pole pierścienia kołowego

$$P = \pi(R^2 - r^2)$$



Obwód pierścienia kołowego

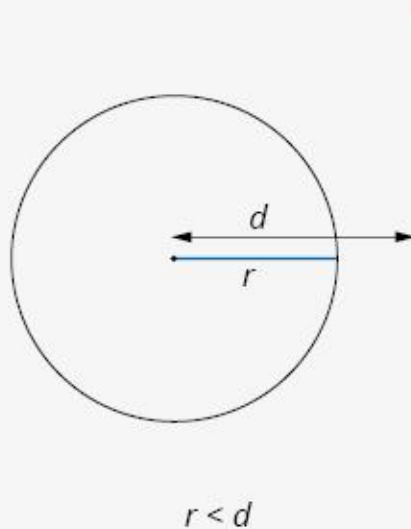
$$L = 2\pi(R + r)$$



• Wzajemne położenie prostej i okręgu

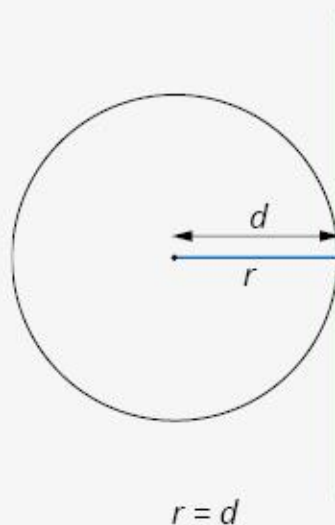
Prosta zewnętrzna względem okręgu

Prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych. Odległość środka okręgu od prostej jest większa od długości promienia.



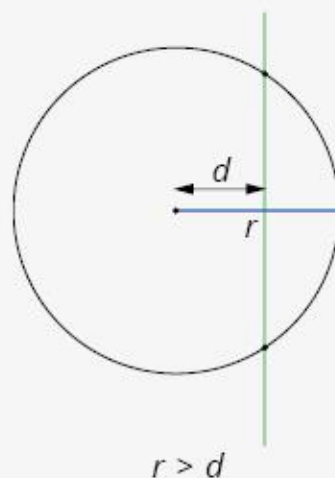
Prosta styczna do okręgu

Prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny. Prostą nazywamy styczną do okręgu. Odległość środka okręgu od prostej jest równa długości promienia. Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do stycznej.



Prosta przecinająca okrąg (sieczna)

Prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne. Prostą nazywamy sieczną okręgu. Odległość środka okręgu od prostej jest mniejsza od długości promienia.



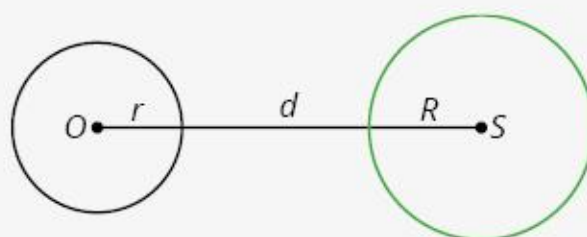
• Wzajemne położenie dwóch okręgów

Okręgi nie mają punktów wspólnych

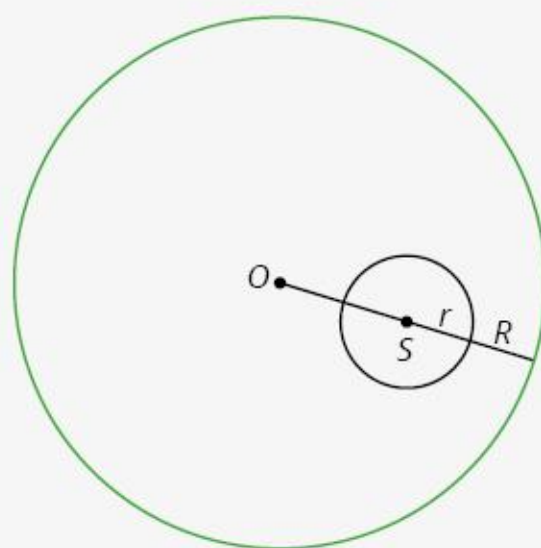
punkty O, S – środki okręgów

$$d = |OS|$$

$$d > r + R$$



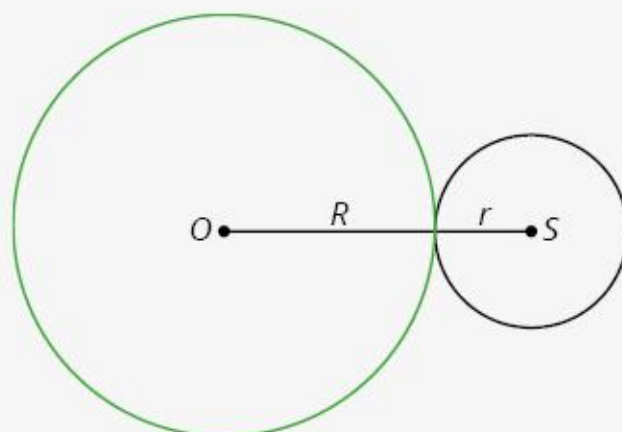
$$d < R - r$$



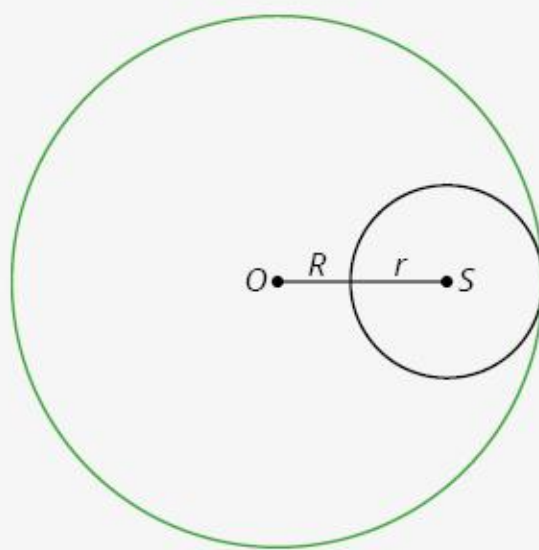
Okręgi mają jeden punkt wspólny

Okręgi styczne zewnętrznie

$$d = |OS| = R + r$$

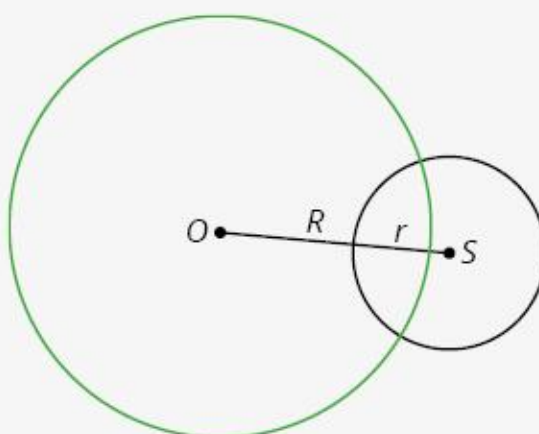


Okręgi styczne wewnętrznie
 $d = |OS| = R - r$



Okręgi mają dwa punkty wspólne

$$R - r < d < R + r$$



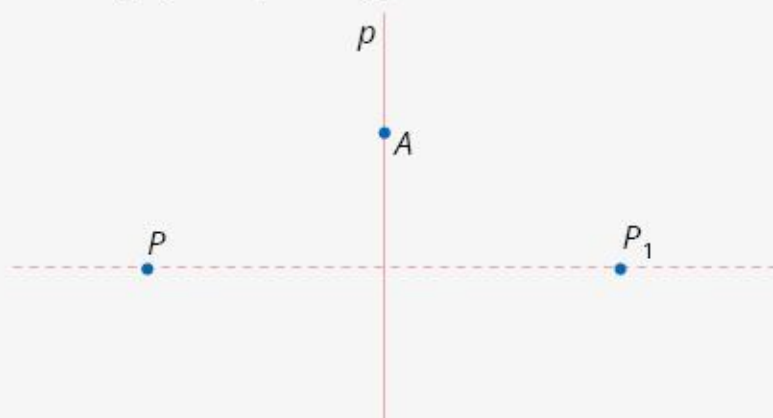
10.9. SYMETRIA OSIOWA

Określenie symetrii osiowej

Symetria osiowa względem prostej p to przekształcenie płaszczyzny, w którym:

- obrazem punktu leżącego na tej prostej jest ten sam punkt,
- obrazem punktu P nieleżącego na tej prostej jest punkt P_1 taki, że odcinek $|PP_1|$ jest prostopadły do prostej p i środek tego odcinka leży na tej prostej.

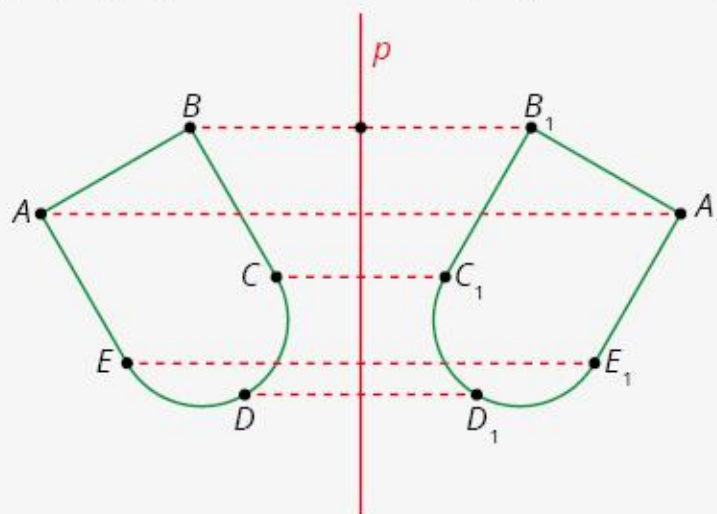
Punkty P i P_1 są symetryczne względem prostej p .



Prosta p zwana jest osią symetrii.

Obraz figury w symetrii osiowej

Aby znaleźć obraz wielokąta w symetrii osiowej, najpierw znajdujemy obrazy wierzchołków, a następnie odpowiednio je łączymy. Obrazem wielokąta jest wielokąt do niego przystający.



W symetrii osiowej figura i jej obraz są figurami przystającymi.

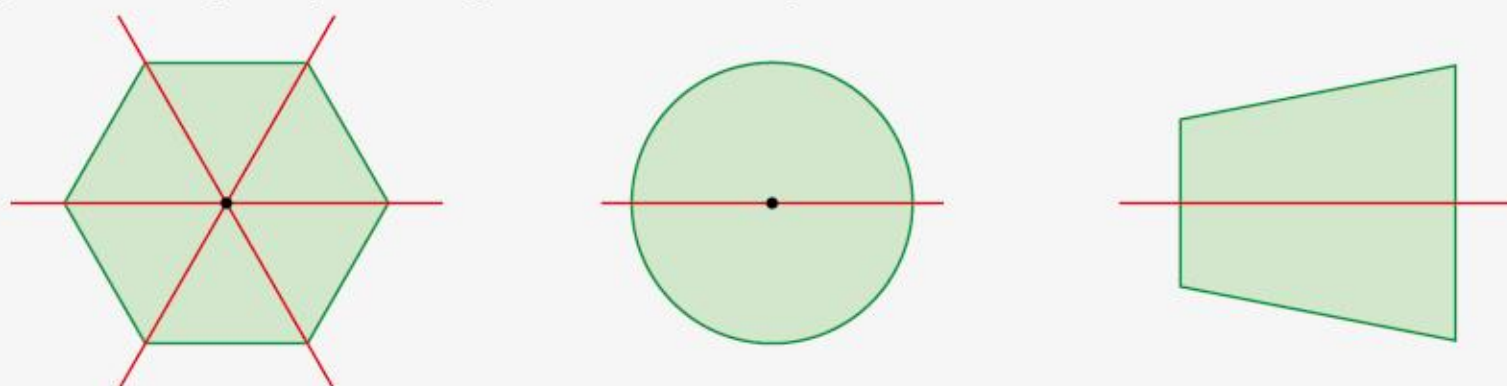
Obrazem:

- odcinka jest odcinek takiej samej długości,
- okręgu jest okrąg o takim samym promieniu,
- kwadratu jest kwadrat o boku takiej samej długości.

Oś symetrii figury

Oś symetrii figury F – prosta taka, że obrazem figury F w symetrii osiowej względem tej prostej jest ta sama figura.

Figura osiowosymetryczna – figura, która ma oś symetrii.



Odcinek AB ma dwie osie symetrii:

- symetralną,
- prostą AB .

Kąt ma jedną oś symetrii – jest to prosta, na której leży dwusieczna tego kąta.

Okrąg ma nieskończenie wiele osi symetrii – jest to każda prosta przechodząca przez jego środek.

Kwadrat ma cztery osie symetrii:

- symetralne boków,
- proste, na których leżą przekątne.

Prosta p ma nieskończenie wiele osi symetrii:

- każda prosta prostopadła do danej prostej,
- prosta p .

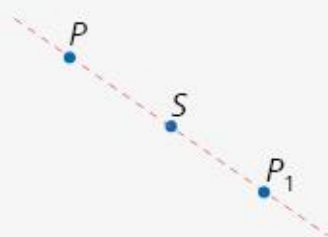
Nie każda figura ma oś symetrii.

Osi symetrii nie mają np. trapez prostokątny, trójkąt różnoboczny.

10.10. SYMETRIA ŚRODKOWA

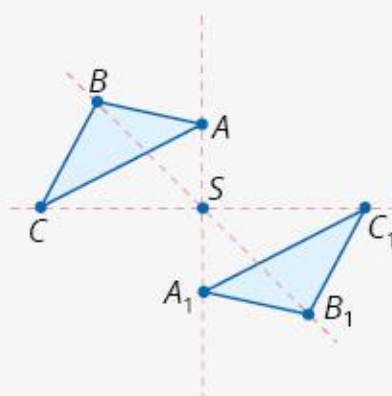
Symetrią środkową względem punktu S nazywamy przekształcenie płaszczyzny, w którym obrazem punktu P , różnego od S , jest punkt P_1 taki, że S jest środkiem odcinka $|PP_1|$. Obrazem punktu S jest ten sam punkt.

Punkt S nazywamy **środkiem symetrii**.



Obraz figury w symetrii środkowej

Aby znaleźć obraz wielokąta w symetrii środkowej, znajdujemy obrazy wierzchołków i znalezione punkty odpowiednio łączymy.



W symetrii środkowej figura i jej obraz są figurami przystającymi.

Obrazem:

- odcinka jest odcinek takiej samej długości,
- okręgu jest okrąg o takim samym promieniu,
- kwadratu jest kwadrat o boku takiej samej długości.

Środek symetrii figury – taki punkt, że obrazem figury w symetrii względem tego punktu jest ta sama figura.

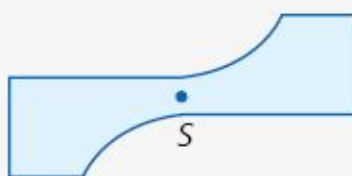


Figura środkowosymetryczna – figura, która ma środek symetrii.

Środkiem symetrii:

- odcinka jest jego środek,
- prostej jest dowolny punkt leżący na tej prostej,
- okręgu jest środek okręgu,
- prostokąta jest punkt przecięcia przekątnych.

Nie każda figura ma środek symetrii. Środka symetrii nie mają np. trójkąt, pięciokąt.

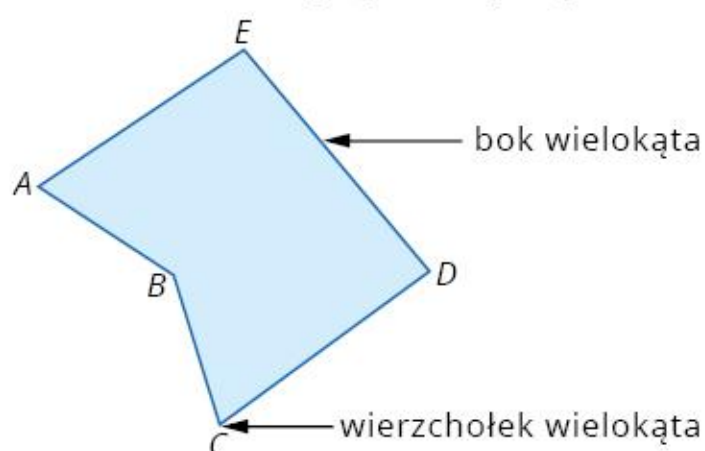
11. WIELOKĄTY

11.1. WIELOKĄT

Wielokąt – część płaszczyzny ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą, wraz z tą łamaną.

Boki wielokąta – boki łamanej wyznaczającej wielokąt.

Wierzchołki wielokąta – wierzchołki łamanej wyznaczającej wielokąt.



Wielokąt $ABCDE$ ma:

- pięć wierzchołków: A, B, C, D, E
- pięć boków: AB, BC, CD, DE, EA

Wielokąt mający n boków (n – liczba naturalna większa od 2) nazywamy n -bokiem lub n -kątem. Wielokąt o n bokach ma n wierzchołków. Nazwa wielokąta zależy od liczby jego boków (kątów).



Czworokąt



Dziesięciokąt



Trójkąt

Wielokąt wypukły – wielokąt, który jest figurą wypukłą.

Wielokąt wklęsły – wielokąt, który nie jest figurą wypukłą.

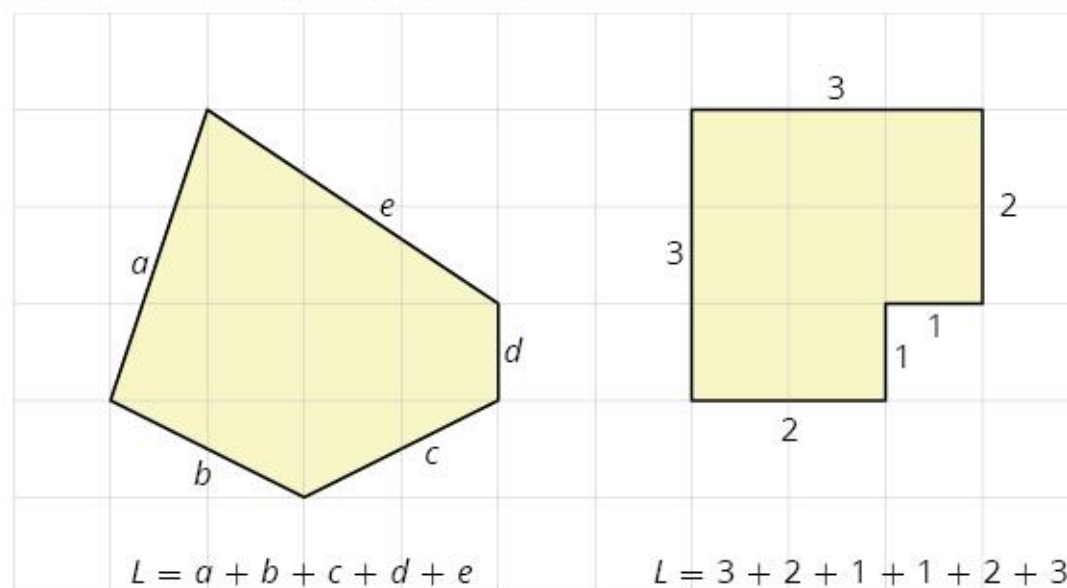


Wielokąt wypukły

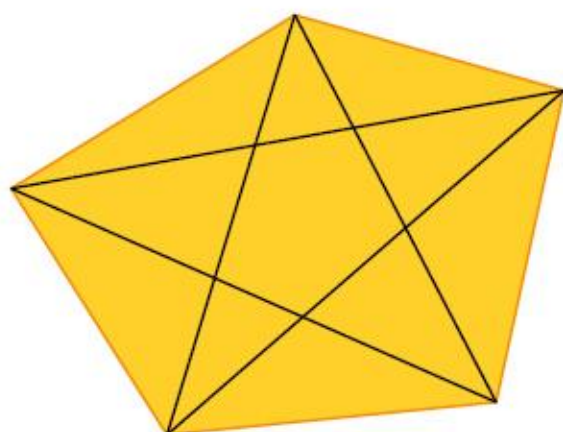


Wielokąt wklęsły

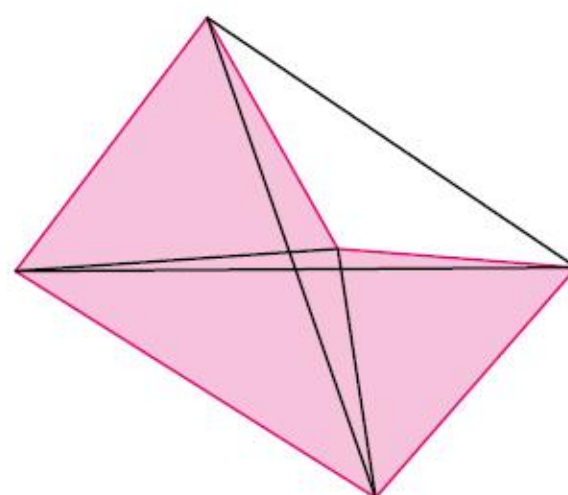
Obwód L wielokąta – suma długości jego wszystkich boków.



Przekątna wielokąta – odcinek łączący dwa wierzchołki i niebędący bokiem.



W wielokącie wypukłym wszystkie przekątne zawierają się w tym wielokącie.



W wielokącie wklęsłym nie wszystkie przekątne są zawarte w tym wielokącie.

Liczba przekątnych w n -kącie (n – liczba naturalna większa od 2) wyraża się wzorem:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

przykład: liczba przekątnych w trójkącie: $\frac{3 \cdot (3-3)}{2} = \frac{0}{2} = 0$

liczba przekątnych w pięciokącie: $\frac{5 \cdot (5-3)}{2} = \frac{10}{2} = 5$

liczba przekątnych w dziesięciokącie: $\frac{10 \cdot (10-3)}{2} = \frac{70}{2} = 35$

Kąt wewnętrzny wielokąta wypukłego:

- Wierzchołkiem kąta wewnętrznego jest wierzchołek wielokąta.
- Ramiona kąta wewnętrznego są zawarte w dwóch sąsiednich bokach wielokąta.
- W danym kącie wewnętrznym jest zawarty wielokąt.

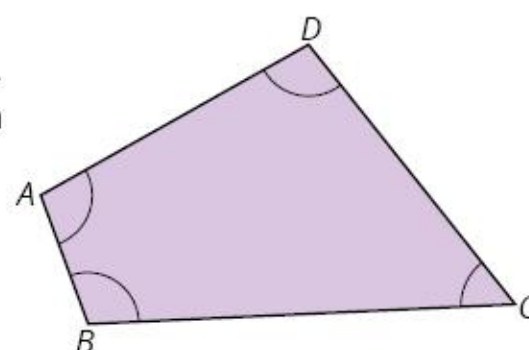
Kąty czworokąta $ABCD$: $\sphericalangle ABC, \sphericalangle BCD, \sphericalangle CDA, \sphericalangle DAB$

Wielokąt ma tyle kątów, ile ma boków.

przykład: Trójkąt ma 3 kąty.

Siedmiokąt ma 7 kątów.

Stukąt ma 100 kątów.



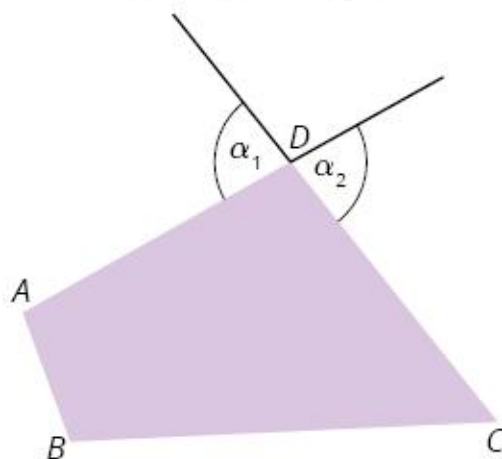
Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego o n bokach (n – liczba naturalna większa od 2) wyraża się wzorem:

$$180^\circ \cdot (n - 2)$$

przykład: Suma miar kątów dwunastokąta: $n = 12$ i $180^\circ \cdot (12 - 2) = 180^\circ \cdot 10 = 1800^\circ$.

Kąt zewnętrzny wielokąta wypukłego – kąt przyległy do kąta wewnętrznego wielokąta:

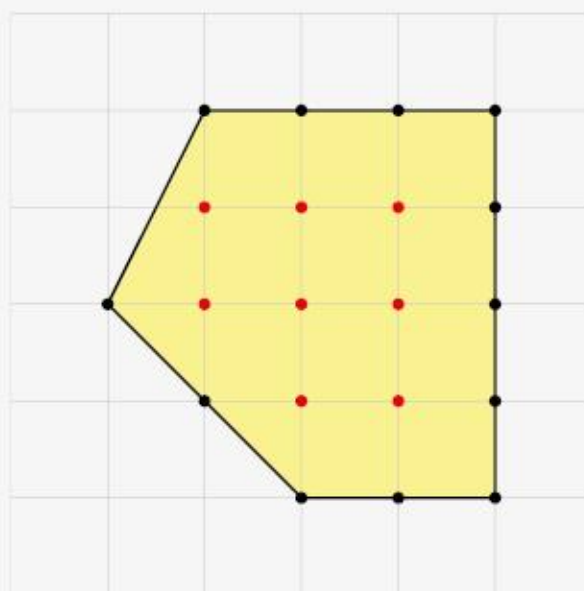
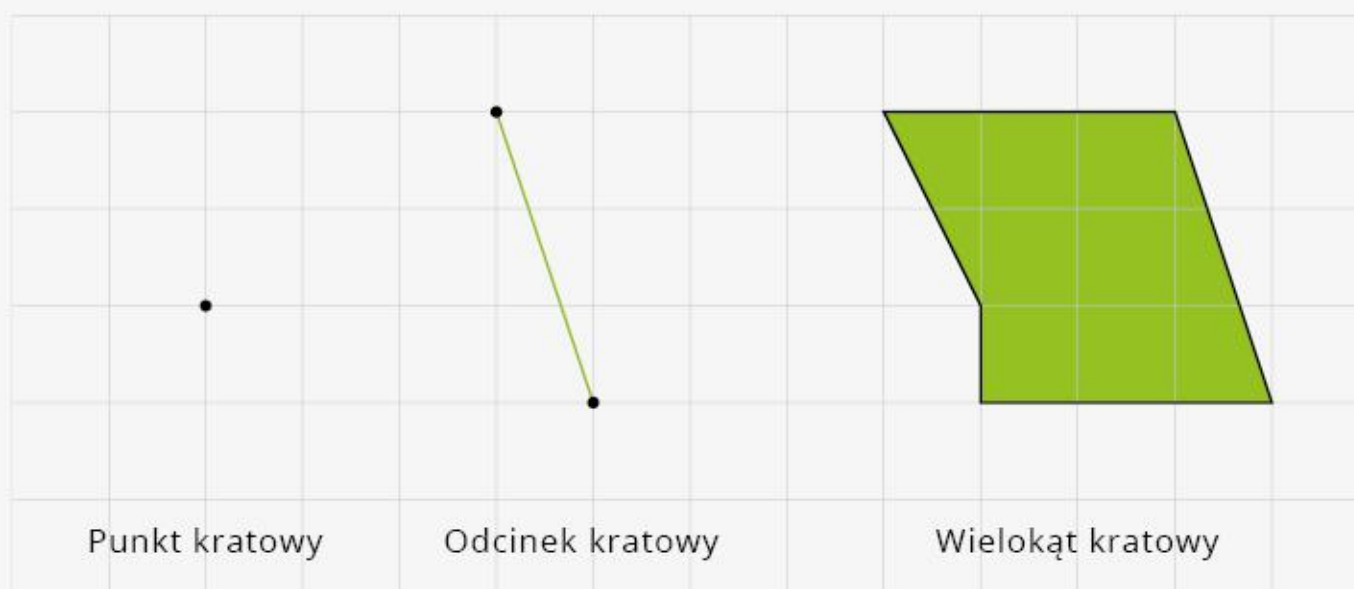
- Każdy kąt wewnętrzny wielokąta ma dwa kąty zewnętrzne.
- Suma miar kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego jest równa 720° .



Kąty α_1, α_2 – kąty zewnętrzne do kąta ADC

Wzór Picka

Podstawowe pojęcia



Liczba brzegowych punktów kratowych $B = 12$

Liczba wewnętrznych punktów kratowych $W = 8$

Wielokąt kratowy prosty – boki wielokąta tworzą zamkniętą łamaną, a dwa jego boki mają punkt wspólny, tylko gdy są bokami kolejnymi.

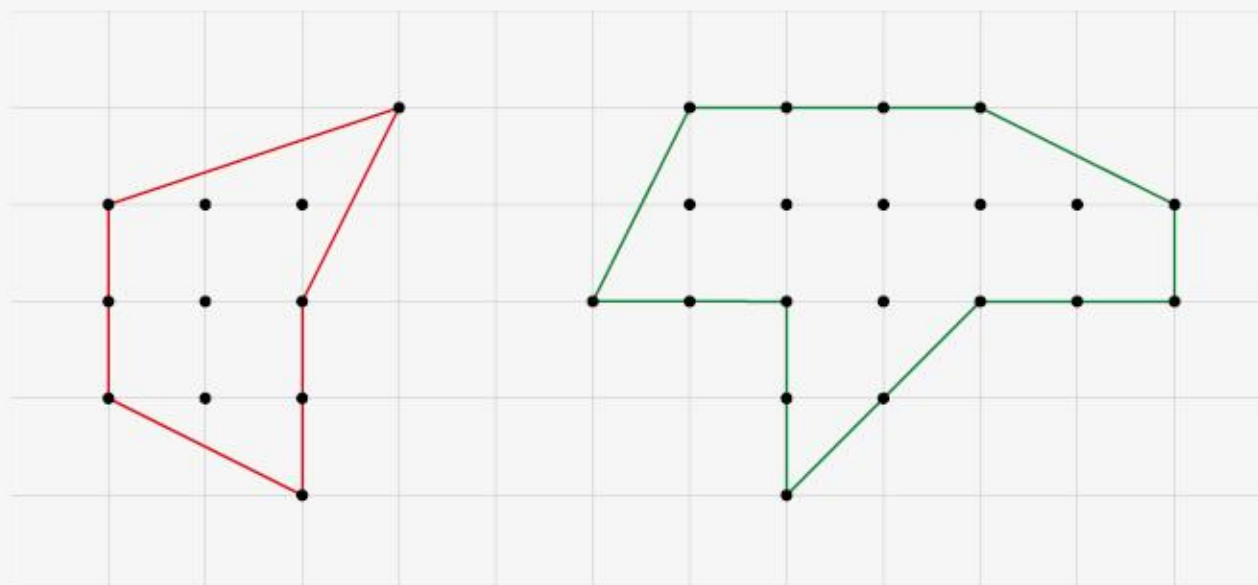
Twierdzenie Picka

Pole wielokąta prostego, którego wierzchołki są punktami kratowymi wyraża się wzorem:

$$P = W + \frac{1}{2}B - 1,$$

gdzie W – liczba punktów kratowych leżących wewnątrz wielokąta, B – liczba punktów kratowych leżących na brzegu wielokąta.

przykład:



$$P = 4 + \frac{1}{2} \cdot 7 - 1$$

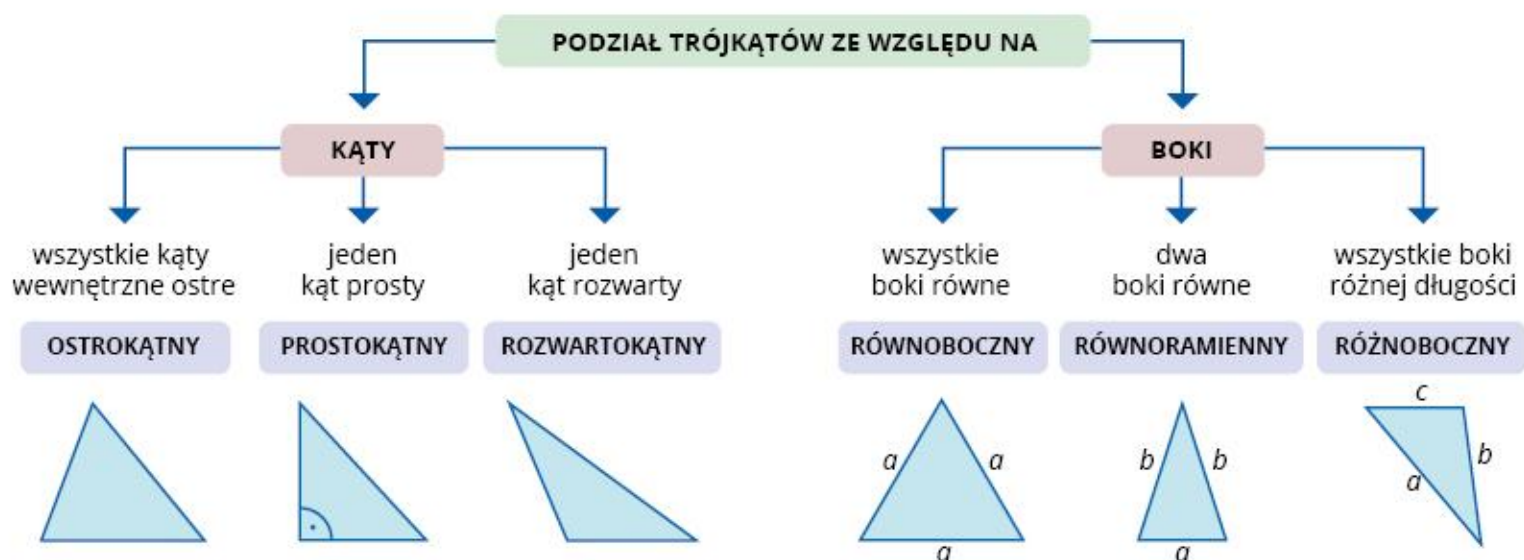
$$P = 3 + 3,5 = 6,5$$

$$P = 6 + \frac{1}{2} \cdot 14 - 1$$

$$P = 5 + 7 = 12$$

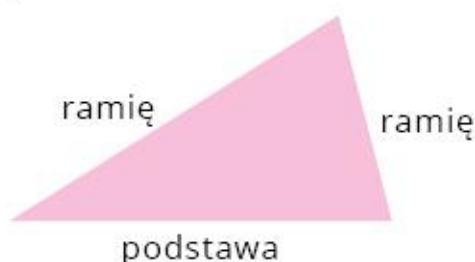
11.2. TRÓJKĄTY

Trójkąt – wielokąt o trzech bokach.



Boki trójkąta

W trójkącie jeden dowolny bok to podstawa. Pozostałe dwa boki to ramiona.



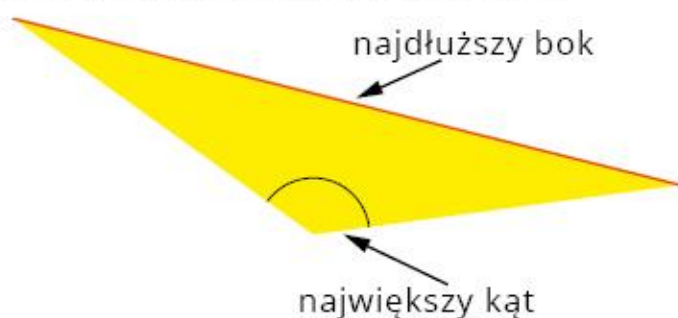
W trójkącie równoramiennym dwa boki mające tę samą długość to ramiona. Trzeci bok to podstawa.



W trójkącie prostokątnym boki przy kącie prostym to przyprostokątne. Bok leżący naprzeciw kąta prostego to przeciwprostokątna. Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem trójkąta prostokątnego.



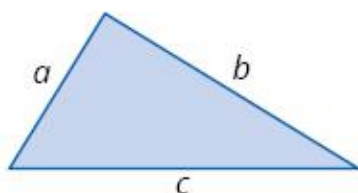
W trójkącie naprzeciw największego kąta leży najdłuższy bok.



Nierówność trójkąta

Suma długości dowolnych dwóch boków trójkąta jest większa niż długość trzeciego boku.

$$\begin{aligned}a + b &> c \\a + c &> b \\b + c &> a\end{aligned}$$



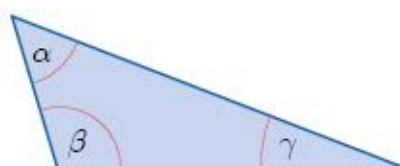
Rozpoznawanie rodzaju trójkąta

a, b, c – długości boków trójkąta i $a < b < c$

Gdy $a^2 + b^2 > c^2$, to trójkąt jest ostrokątny.

Gdy $a^2 + b^2 < c^2$, to trójkąt jest rozwartokątny.

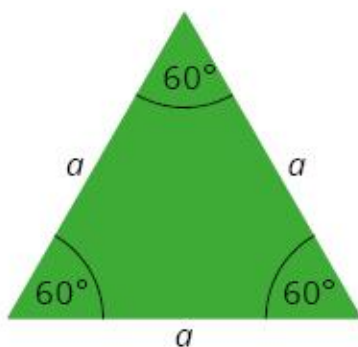
Kąty trójkąta



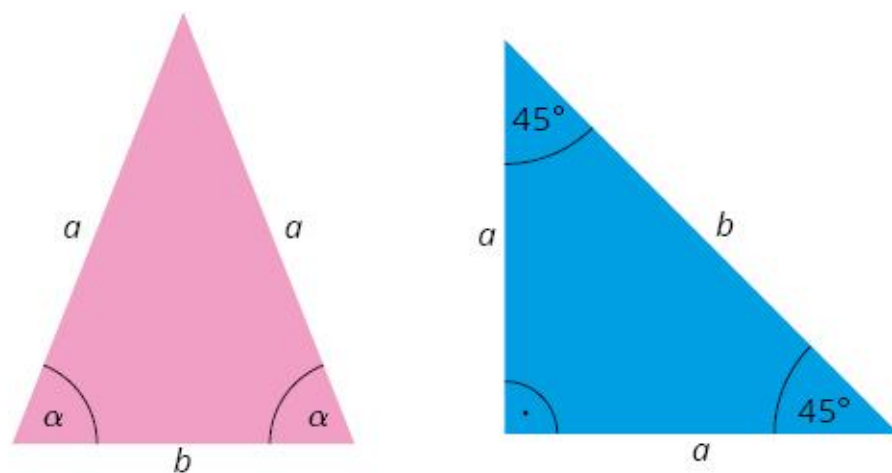
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Suma miar kątów jest równa 180° .

W trójkącie równobocznym każdy kąt ma miarę 60° .



W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.



Przystawanie trójkątów

Trójkąty przystające – boki i kąty jednego trójkąta są równe bokom i kątom drugiego trójkąta.

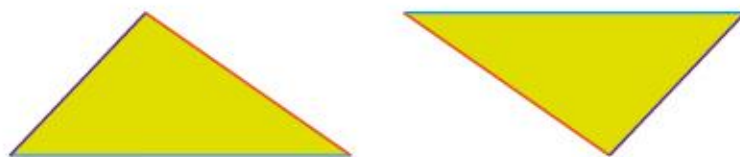


Trójkąty przystające

• Cechy przystawania trójkątów

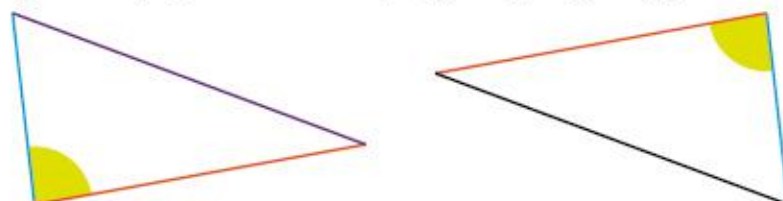
bbb (bok-bok-bok)

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające.



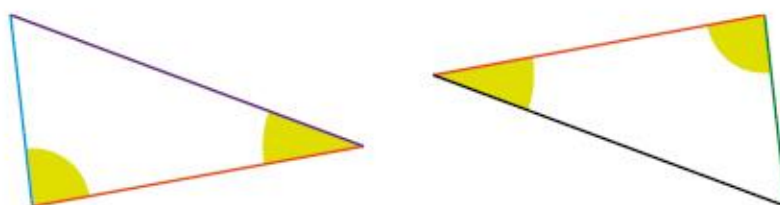
bkb (bok-kąt-bok)

Jeżeli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są równe odpowiednim bokom i kącie między nimi w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.



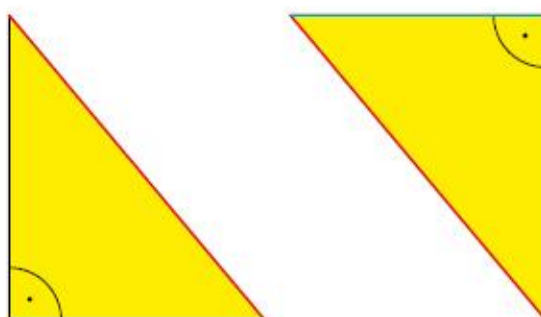
kbk (ką-bok-kąt)

Jeżeli bok i dwa leżące przy nim kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm leżącym przy nim kątom w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.



Cecha przystawania trójkątów prostokątnych

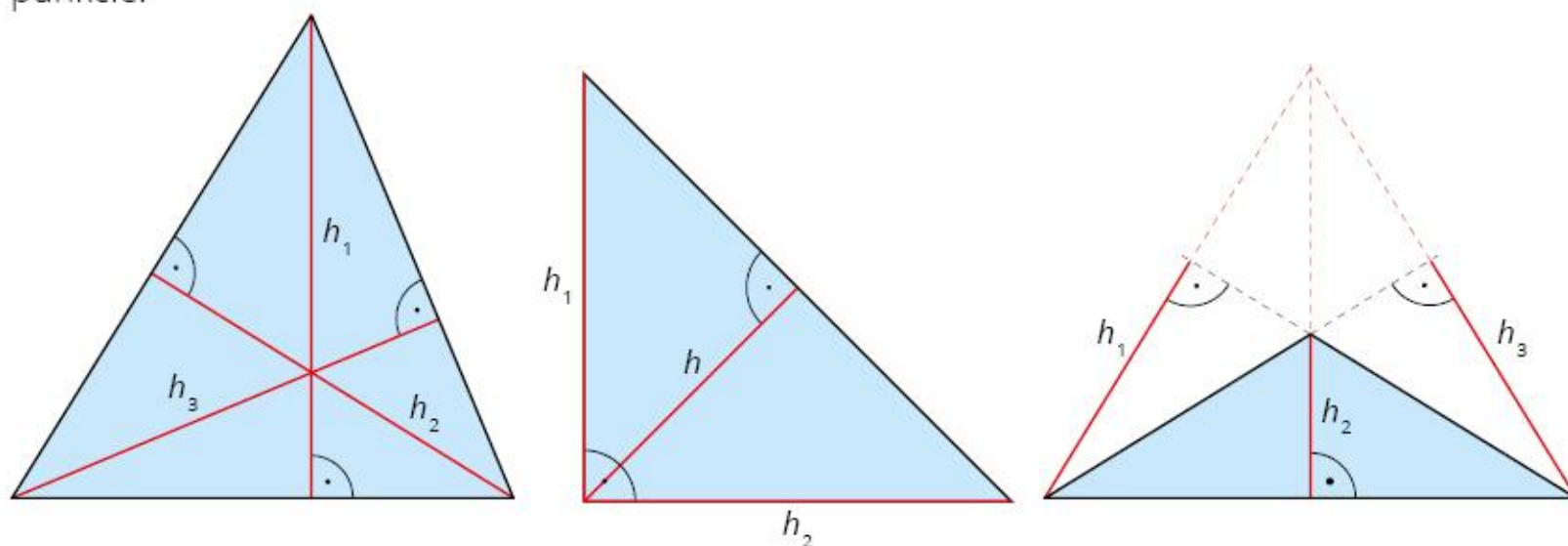
Jeśli przeciwprostokątna i przyprostokątna jednego z trójkątów prostokątnych są równe odpowiednio przeciwprostokątnej i przyprostokątnej drugiego trójkąta prostokątnego, to te trójkąty są przystające.



• Proste i odcinki w trójkącie

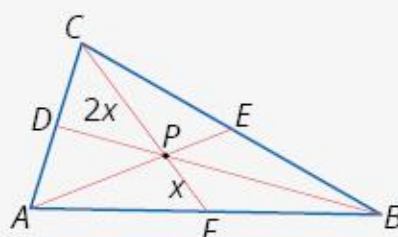
Wysokość trójkąta – odcinek poprowadzony z wierzchołka, prostopadły do przeciwległego boku lub jego przedłużenia.

Trójkąt ma trzy wysokości. Proste, w których zawierają się wysokości, przecinają się w jednym punkcie.

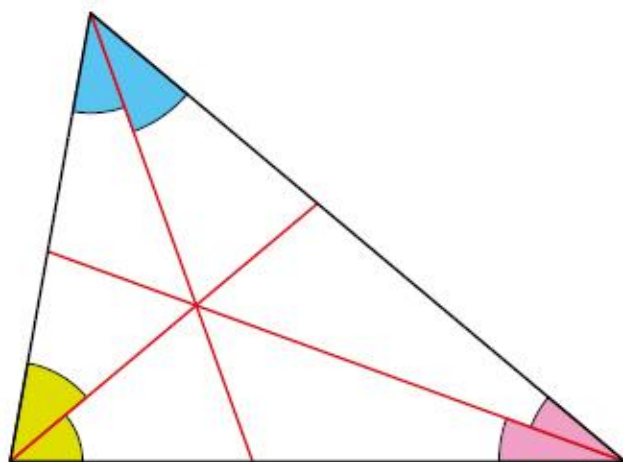


Punkt przecięcia wysokości jest nazwany **ortocentrum** trójkąta.

Środkowa trójkąta – odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku. Środkowe przecinają się w punkcie zwanym środkiem ciężkości trójkąta (na rysunku punkt P). Punkt ten dzieli każdą ze środkowych na dwie części, z których odcinek łączący wierzchołek z punktem P jest dwa razy dłuższy od pozostałej części.

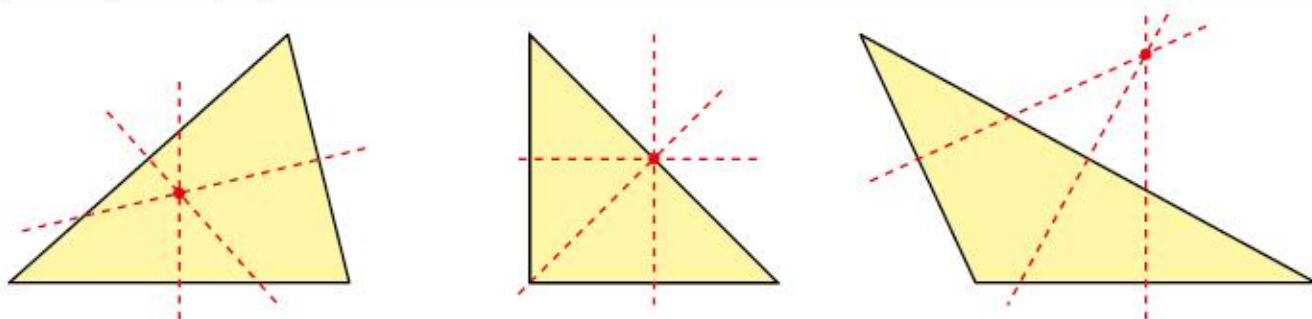


Dwusieczna kąta w trójkącie – półprosta, która dzieli kąt na dwa kąty o równych miarach. Dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.



Symetralna boku trójkąta – prosta prostopadła do boku, przechodząca przez jego środek.

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.



W trójkącie ostrokątnym środki przecinają się w punkcie leżącym w tym trójkącie.

W trójkącie prostokątnym punkt przecięcia jest środkiem przeciwprostokątnej.

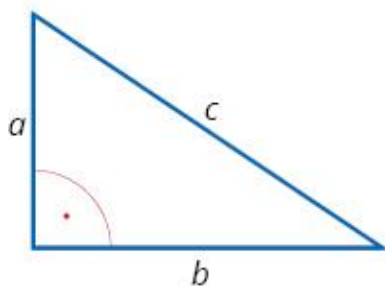
W trójkącie rozwartokątnym środki przecinają się poza trójkątem.

• Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Trójki pitagorejskie – liczby naturalne a, b, c , wyrażające długości boków trójkąta prostokątnego.

przykład: $a = 3, b = 4, c = 5$

$a = 5, b = 12, c = 13$

$a = 7, b = 24, c = 25$

Wszystkie trójki pitagorejskie można otrzymać, korzystając ze wzorów:

$$a = x^2 - y^2, b = 2xy, c = x^2 + y^2,$$

gdzie x, y to liczby naturalne i $x > y$.

przykład: dla $x = 12, y = 1$

$$a = 12^2 - 1^2 = 144 - 1 = 143$$

$$b = 2 \cdot 12 \cdot 1 = 24$$

$$c = 12^2 + 1^2 = 144 + 1 = 145$$

prawdzenie:

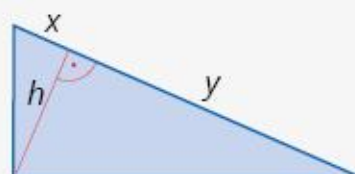
$$143^2 + 24^2 = 20449 + 576 = 21025$$

$$145^2 = 21025$$

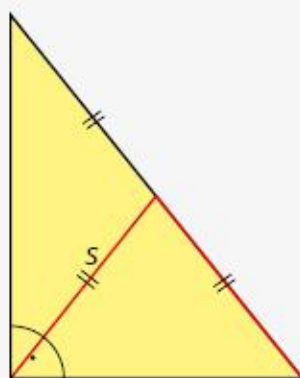
$$143^2 + 24^2 = 145^2$$

W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa pierwiastkowi z iloczynu długości odcinków, na które dzieli ona przeciwprostokątną.

$$h = \sqrt{x \cdot y}$$



W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość równą połowie przeciwprostokątnej.



- Związki miarowe w dowolnym trójkącie o bokach a, b, c

$$\text{Obwód: } L = a + b + c$$

$$\text{Pole: } P = \frac{1}{2}ah$$

Wzór Herona:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{gdzie } p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Związki miarowe w trójkącie równobocznym o boku a

$$\text{Obwód: } L = 3a$$

$$\text{Pole: } P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

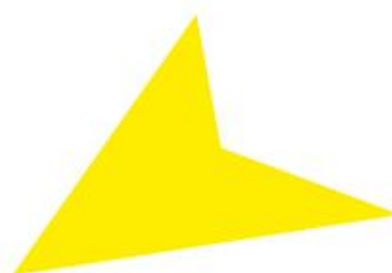
$$\text{Wysokość: } h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

11.3. CZWOROKĄTY

Czworokąt to wielokąt, który ma cztery boki.
Czworokąt ma dwie przekątne.
Suma miar kątów czworokąta jest równa 360° .
Czworokąty dzielą się na wypukłe i wklęsłe.

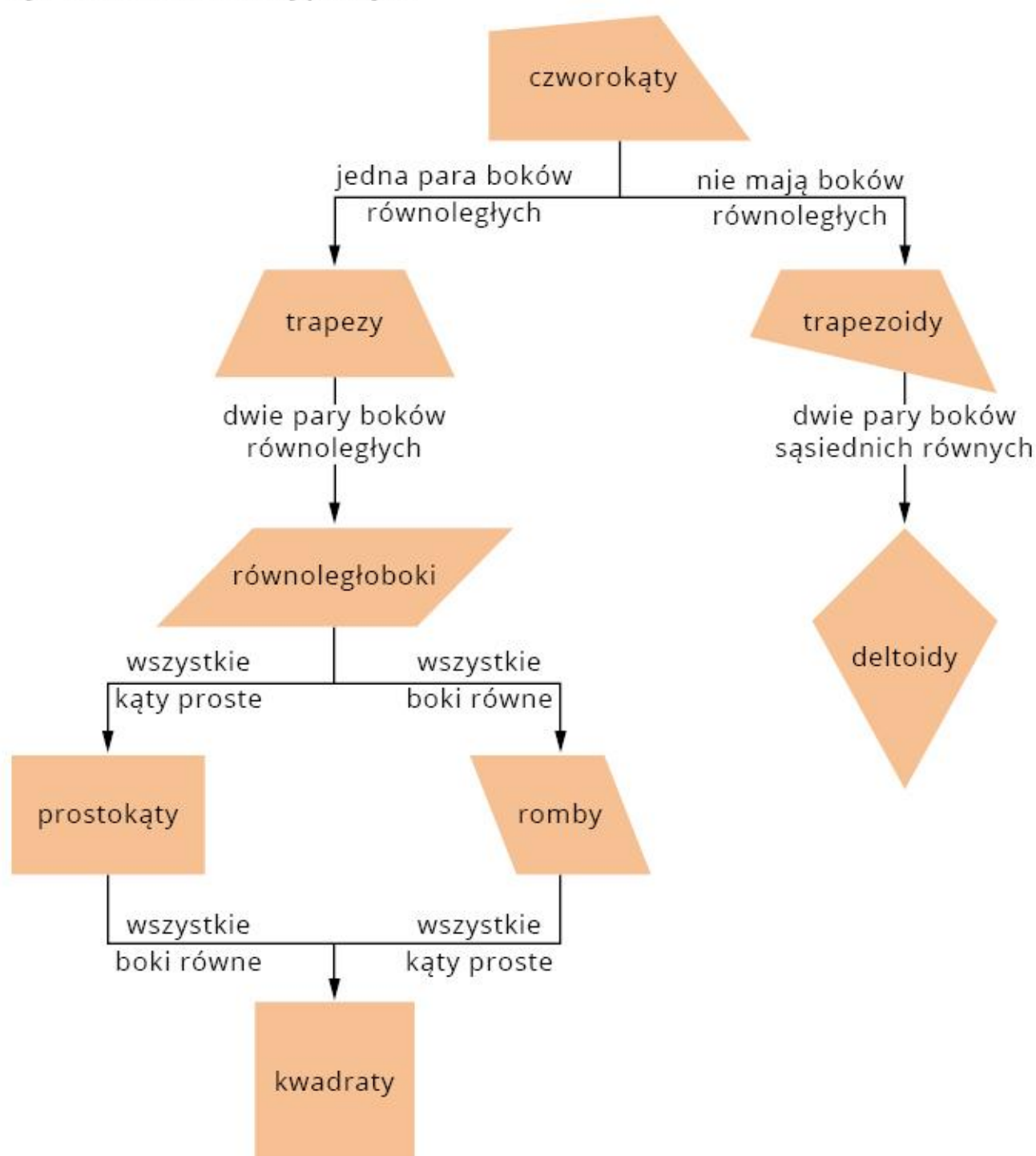


Czworokąt wypukły

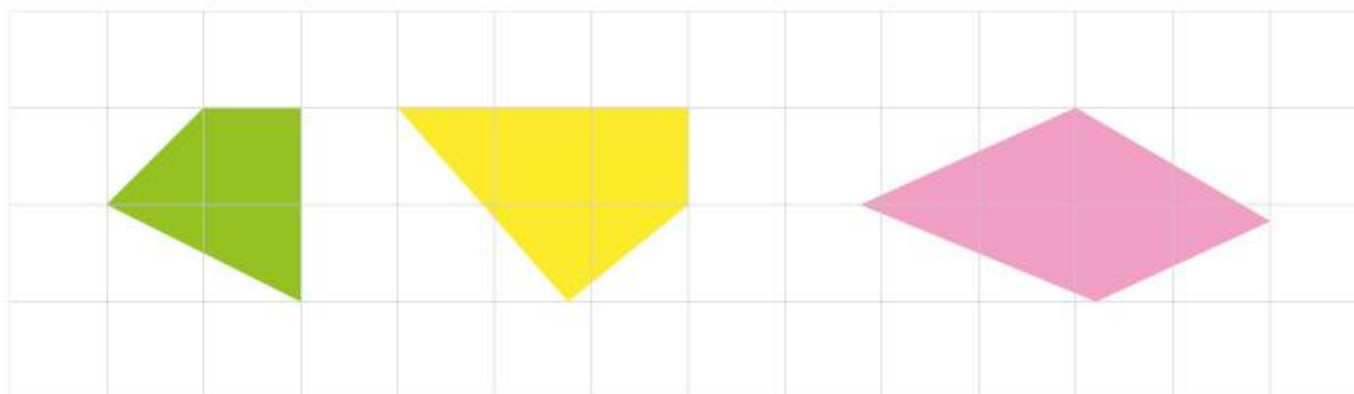


Czworokąt wklęsły

Klasyfikacja czworokątów wypukłych



Trapezoid

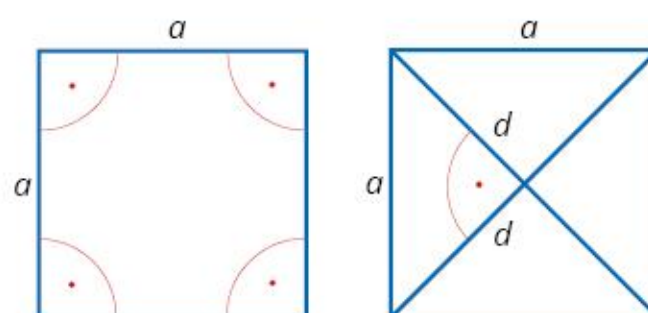


Trapezoid – czworokąt, w którym żadna para boków nie jest równoległa.
Nie jest trapezem.

• Własności wybranych czworokątów

Kwadrat

$$\begin{aligned}L &= 4a \\ P &= a^2 \\ P &= \frac{1}{2}d^2\end{aligned}$$



Wszystkie boki mają tę samą długość.

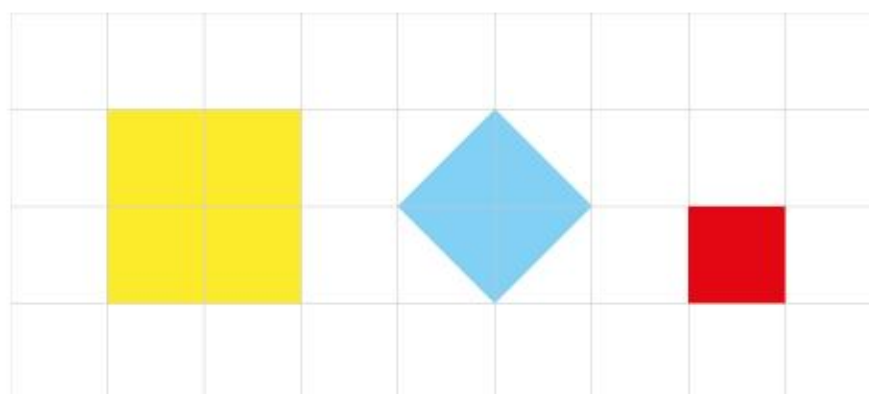
Wszystkie kąty są proste.

Przekątne są równe i prostopadłe, punkt przecięcia dzieli je na połowy.

Ma cztery osie symetrii. Środek symetrii leży w punkcie przecięcia przekątnych.

Kwadrat to wielokąt foremny. Jest:

- trapezem
- równoległobokiem
- prostokątem



Prostokąt

$$\begin{aligned}L &= 2a + 2b \\ P &= ab\end{aligned}$$

Przeciwnie boki są równoległe i równe.

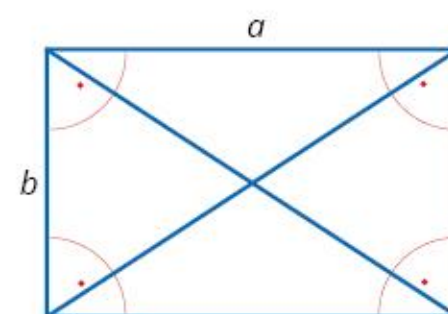
Kąty są proste.

Przekątne są równe, punkt przecięcia dzieli je na połowy.

Ma dwie osie symetrii, które są symetralnymi jego boków.

Prostokąt, który ma równe boki to kwadrat.

Prostokąt jest równoległobokiem i trapezem.





Romb

$$L = 4a$$

$$P = ah$$

$$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$$

Wszystkie boki są równe.

Jego przeciwległe boki są równoległe.

Jego przeciwległe kąty są równe.

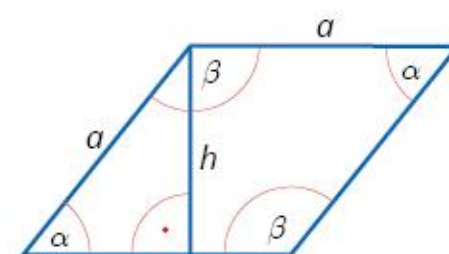
Przekątne rombu są prostopadłe, a ich punkt przecięcia dzieli je na połowy.

Suma miar kątów przy jednym boku jest równa 180° .

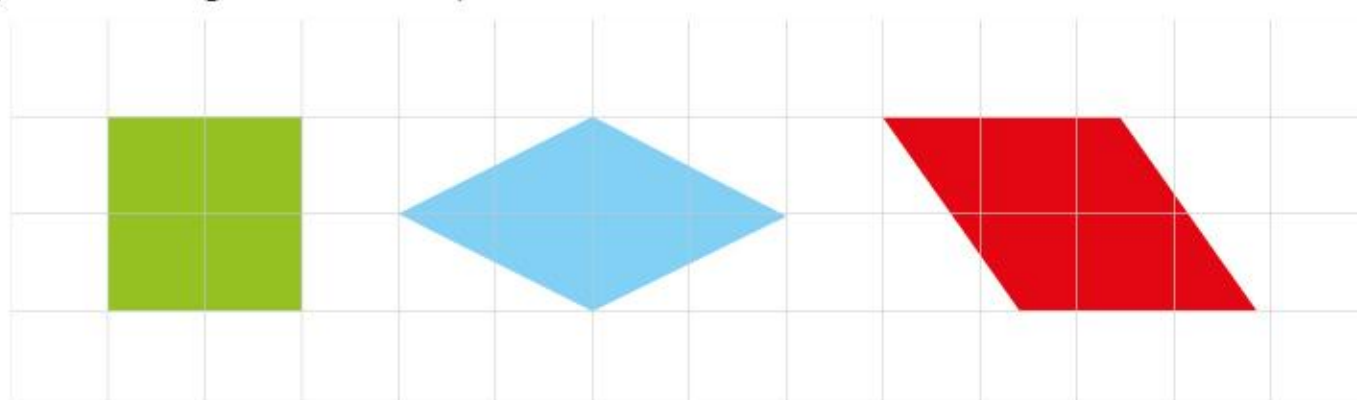
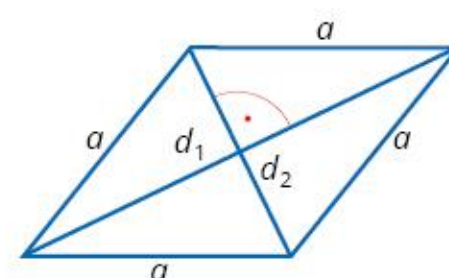
Istnieją dwie osie symetrii, które zawierają się w przekątnych.

Romb, który ma wszystkie kąty proste, to kwadrat.

Romb jest równoległobokiem i trapezem.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



Równoległobok

$$L = 2a + 2b$$

$$P = ah$$

Przeciwległe boki równoległoboku są równoległe i równe.

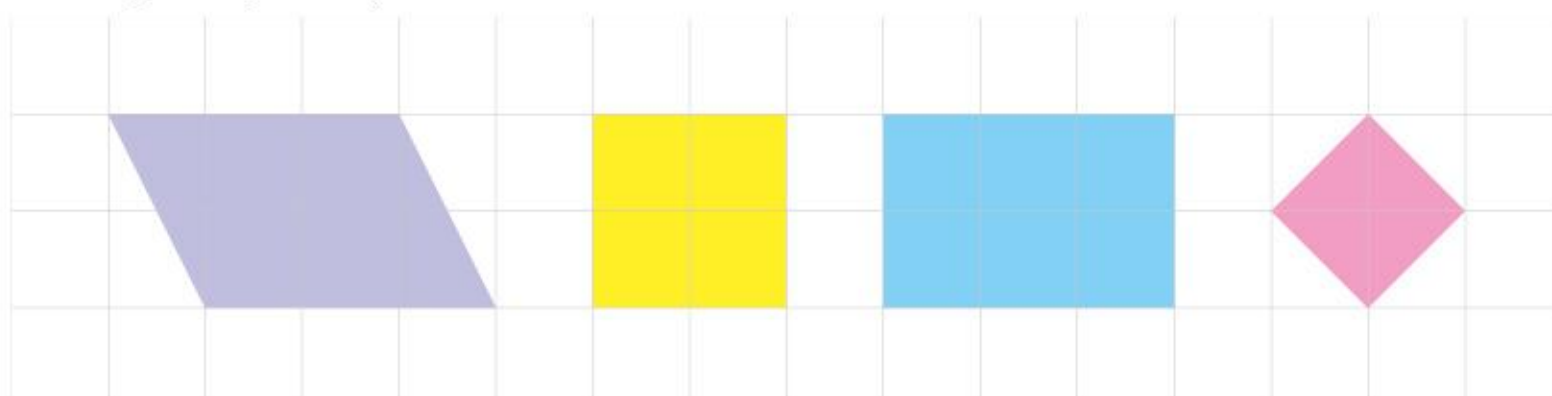
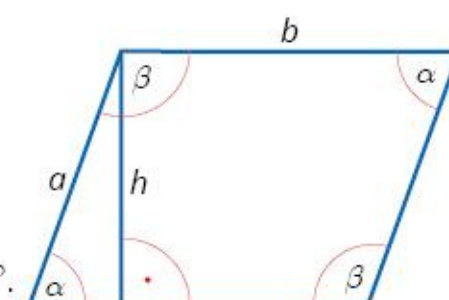
Jego przeciwległe kąty są równe.

Suma miar kątów przy jednym boku tego czworokąta jest równa 180° .

Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy.

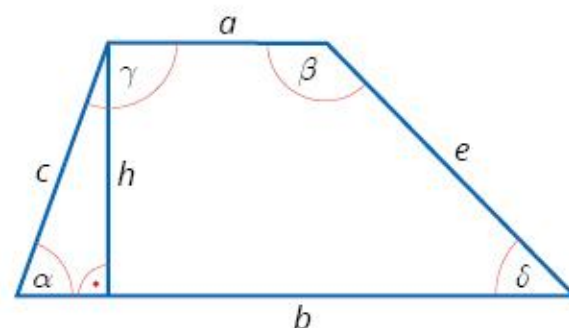
Punkt przecięcia przekątnych równoległoboku jest środkiem symetrii.

Równoległobok jest trapezem.



Trapez

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= 180^\circ \\ \beta + \delta &= 180^\circ \\ L &= a + b + c + e \\ P &= \frac{1}{2}(a + b) \cdot h\end{aligned}$$

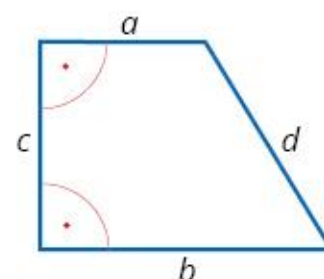
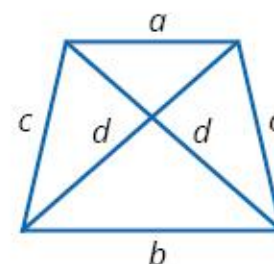


Ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
Suma kątów przy każdym z ramion trapezu jest równa 180° .

Trapez równoramienny

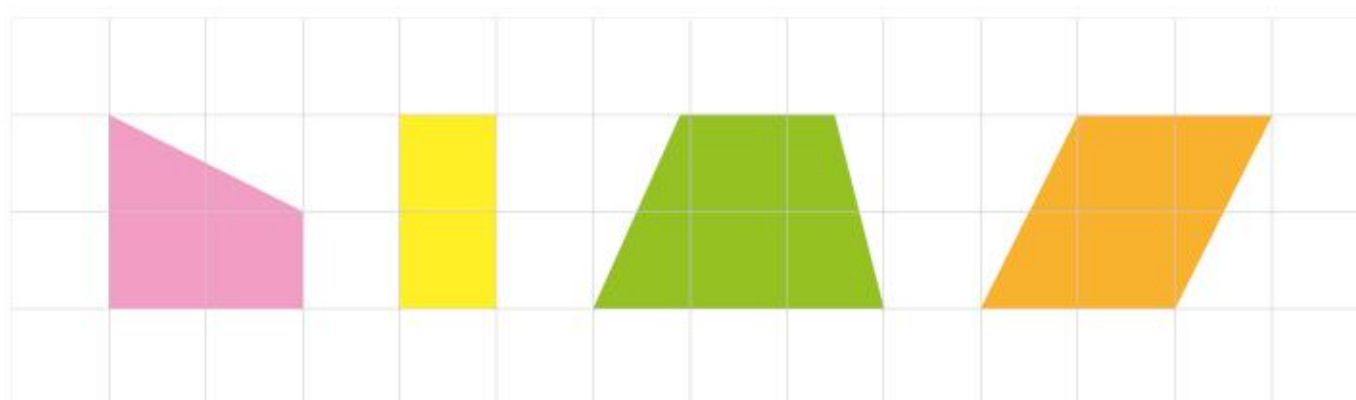
W trapezie równoramiennym:

- dwa boki są równe,
- przekątne są równe,
- punkt przecięcia dzieli przekątne w tym samym stosunku.



Trapez prostokątny

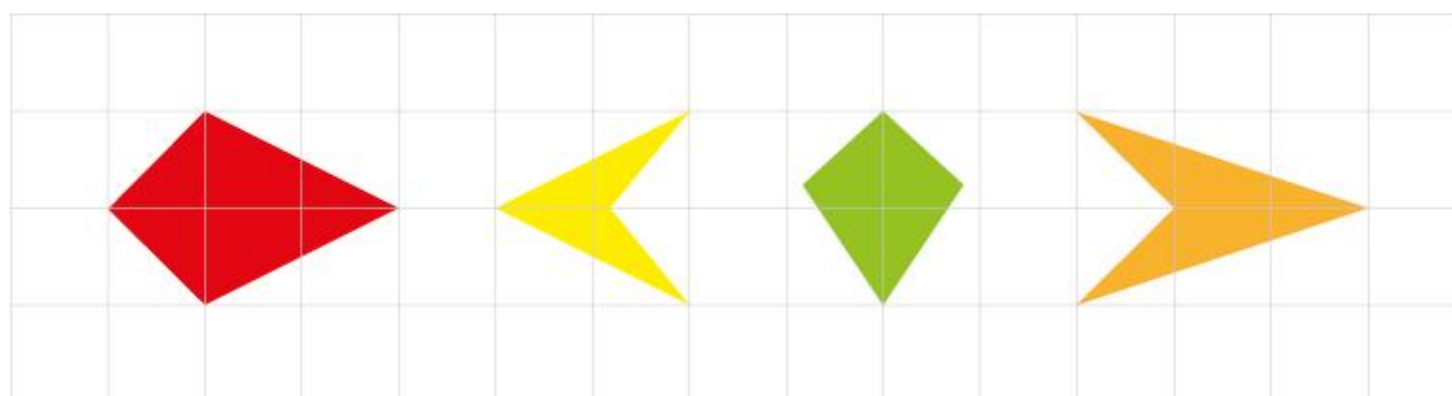
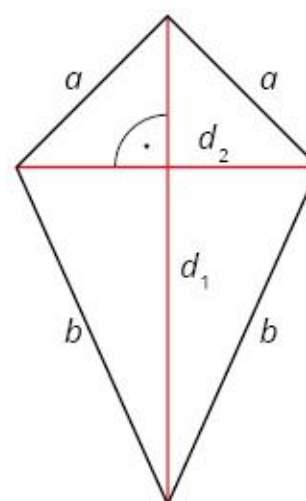
W trapezie prostokątnym dwa kąty są proste.



Deltoid

$$\begin{aligned}L &= 2a + 2b \\ P &= \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2\end{aligned}$$

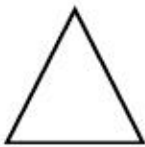
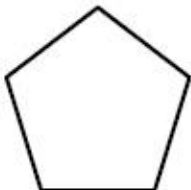
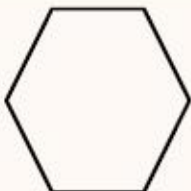
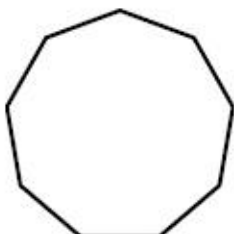
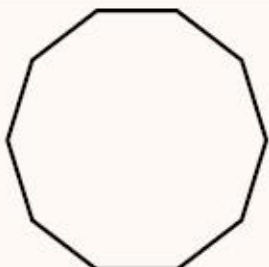
Ma dwie pary boków sąsiednich równych.
Żadne dwa jego boki nie są wzajemnie równoległe.
Przekątne przecinają się pod kątem prostym.
Oś symetrii zawiera jedną z przekątnych.



11.4. WIELOKĄTY FOREMNE

Wielokąt foremny – wielokąt, który ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe.
Każda symetralna boku wielokąta foremnego jest osią symetrii tego wielokąta.
Każda dwusieczna kąta wielokąta foremnego zawiera się w osi symetrii tego wielokąta.
Miara kąta wielokąta foremnego o n bokach jest równa $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$, gdzie $n > 2$.

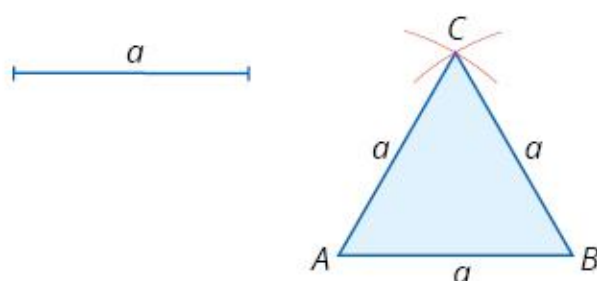
Niektóre wielokąty foremne

RYSUNEK	NAZWA	LICZBA BOKÓW	MIARA KĄTA	SUMA MIAR KĄTÓW
	Trójkąt równoboczny	3	60°	180°
	Kwadrat	4	90°	360°
	Pięciokąt foremny	5	108°	540°
	Sześciokąt foremny	6	120°	720°
	Siedmiokąt foremny	7	$128\frac{4}{7}^\circ$	900°
	Ośmiokąt foremny	8	135°	1080°
	Dziewięciokąt foremny	9	140°	1260°
	Dziesięciokąt foremny	10	144°	1440°

• Konstrukcje niektórych wielokątów foremnych

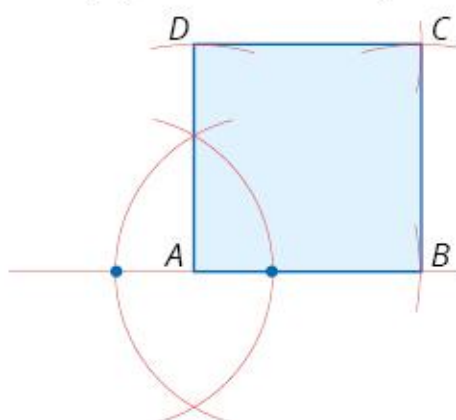
Trójkąt równoboczny

Konstruujemy za pomocą cyrkla trójkąt o równych bokach.



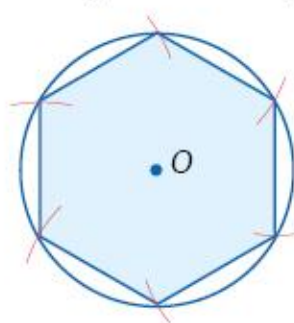
Kwadrat

Konstruujemy prostopadłe i za pomocą cyrkla odkładamy równe odcinki.



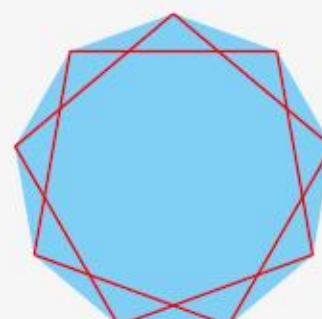
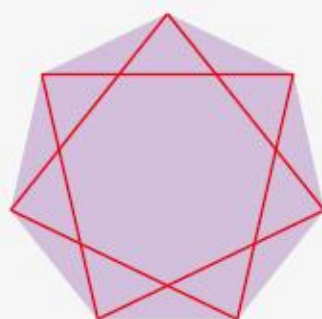
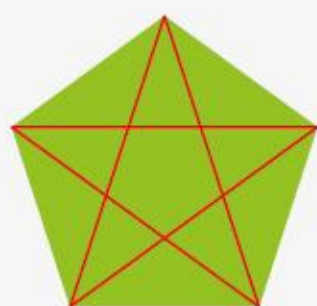
Sześciokąt foremny

Dzielimy okrąg cyrklem, którego rozwartość jest równa promieniowi okręgu.



Wielokąt gwiaździsty foremny – łamana zamknięta utworzona ze wszystkich przekątnych wielokąta foremnego mających tę samą długość.

Przykłady wielokątów gwiaździstych foremnych



• Pola niektórych wielokątów foremnych

a – długość boku wielokąta

Trójkąt równoboczny: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Pięciokąt foremny: $\frac{a^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$

Ośmiokąt foremny: $2a^2(1+\sqrt{2})$

Dwunastokąt foremny: $3a^2(2+\sqrt{3})$

Kwadrat: a^2

Sześciokąt foremny: $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

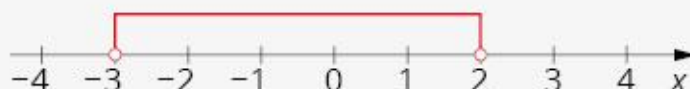
Dziesięciokąt foremny: $\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

12. UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

12.1. ZBIORY LICZBOWE NA OSI LICZBOWEJ

$$a < x < b$$

przykład: $-3 < x < 2$



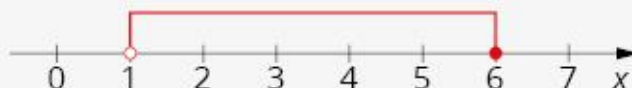
$$a \leq x \leq b$$

przykład: $-2 \leq x \leq 3$



$$a < x \leq b$$

przykład: $1 < x \leq 6$



$$a \leq x < b$$

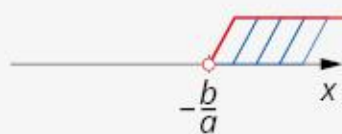
przykład: $-1 \leq x < 4$



$ax + b > 0$ dla:

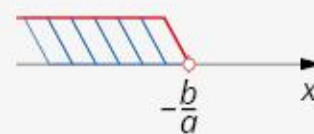
$$a > 0$$

$$x > -\frac{b}{a}$$



$$a < 0$$

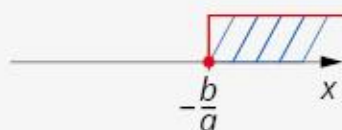
$$x < -\frac{b}{a}$$



$ax + b \geq 0$ dla:

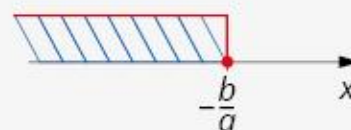
$$a > 0$$

$$x \geq -\frac{b}{a}$$



$$a < 0$$

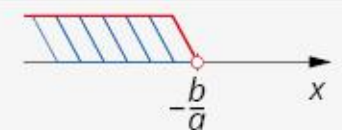
$$x \leq -\frac{b}{a}$$



$ax + b < 0$ dla:

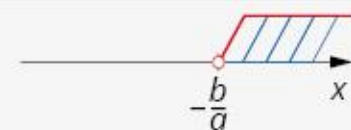
$$a > 0$$

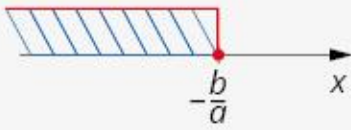
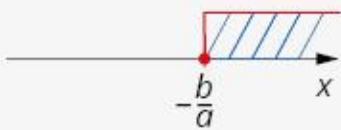
$$x < -\frac{b}{a}$$



$$a < 0$$

$$x > -\frac{b}{a}$$



$ax + b \leq 0$ dla:	
$a > 0$	$a < 0$
$x \leq -\frac{b}{a}$	$x \geq -\frac{b}{a}$
	

12.2. ODLEGŁOŚĆ PUNKTÓW NA OSI LICZBOWEJ

Wzór na odległość dwóch punktów na osi liczbowej:

$$|AB| = |b - a| = |a - b| = |BA|$$

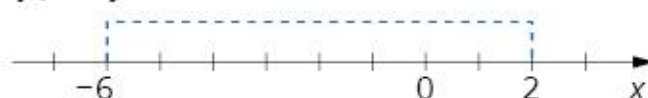
gdzie:

a – współrzędna punktu A

b – współrzędna punktu B



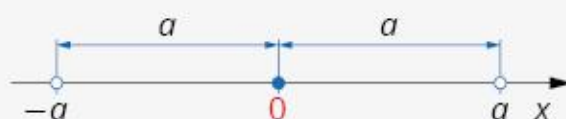
Odległość między dwiema dowolnymi liczbami na osi liczbowej jest równa długości odcinka łączącego punkty odpowiadające tym liczbom.



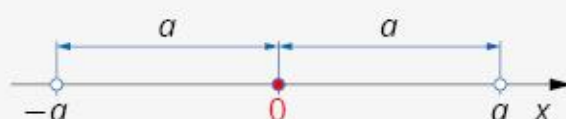
Odległość liczby na osi liczbowej od zera to wartość bezwzględna tej liczby.

Niech $a > 0$, wtedy:

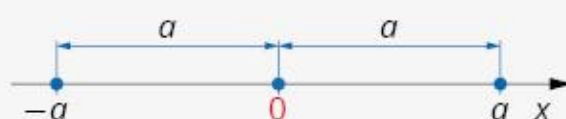
$|x| < a$ – warunek spełniają współrzędne punktów, których odległość na osi liczbowej od punktu $P = (0)$ jest mniejsza od a



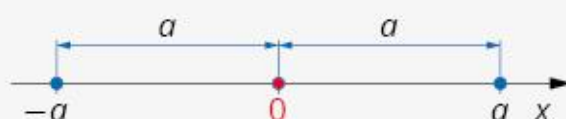
$|x| > a$ – warunek spełniają współrzędne punktów, których odległość na osi liczbowej od punktu $P = (0)$ jest większa od a



$|x| \leq a$ – warunek spełniają współrzędne punktów, których odległość na osi liczbowej od punktu $P = (0)$ jest mniejsza lub równa a

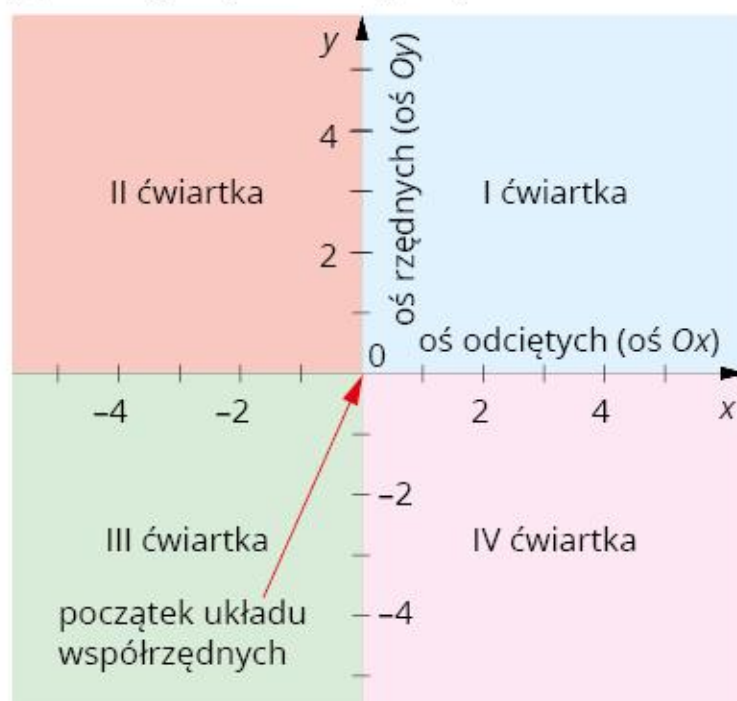


$|x| \geq a$ – warunek spełniają współrzędne punktów, których odległość na osi liczbowej od punktu $P = (0)$ jest większa lub równa a



12.3. PROSTOKĄTNY UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH NA PŁASZCZYŹNIE

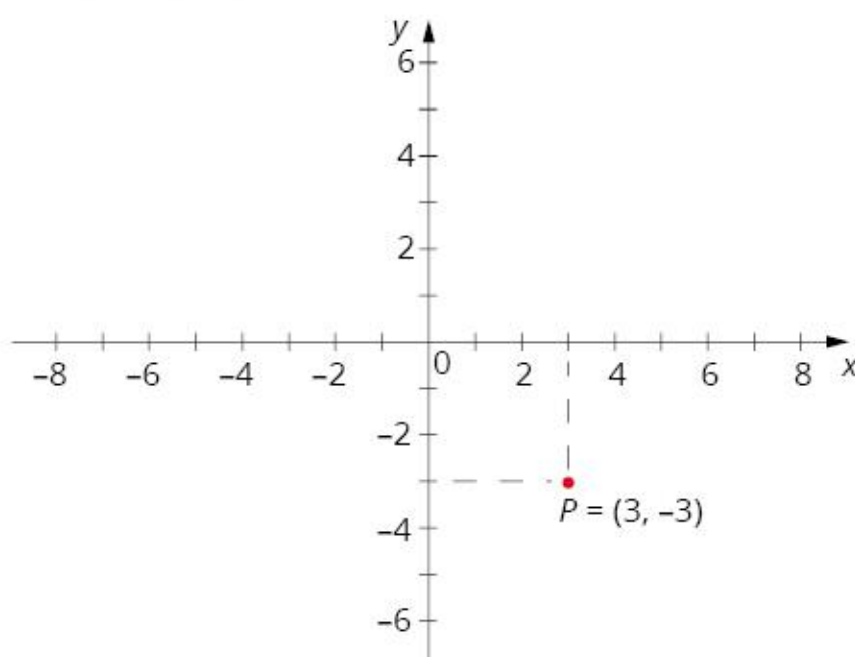
Prostokątny układ współrzędnych tworzą dwie prostopadłe osie liczbowe, które nazywamy osiami układu współrzędnych. Oś pozioma Ox to oś odciętych, a pionowa Oy to oś rzędnych. Punkt przecięcia osi liczbowych nazywamy początkiem układu współrzędnych i oznaczamy O . Osie współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery części, zwane ćwiartkami: I, II, III, IV.



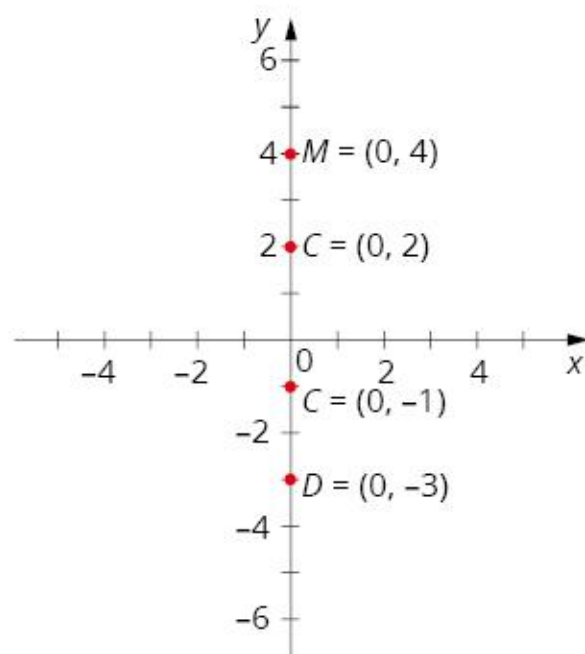
12.4. PUNKTY W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Każdemu punktowi P na płaszczyźnie z układem współrzędnych można przyporządkować parę liczb (x, y) zwanych jego współrzędnymi. Zapisujemy to w następujący sposób: $P = (x, y)$.

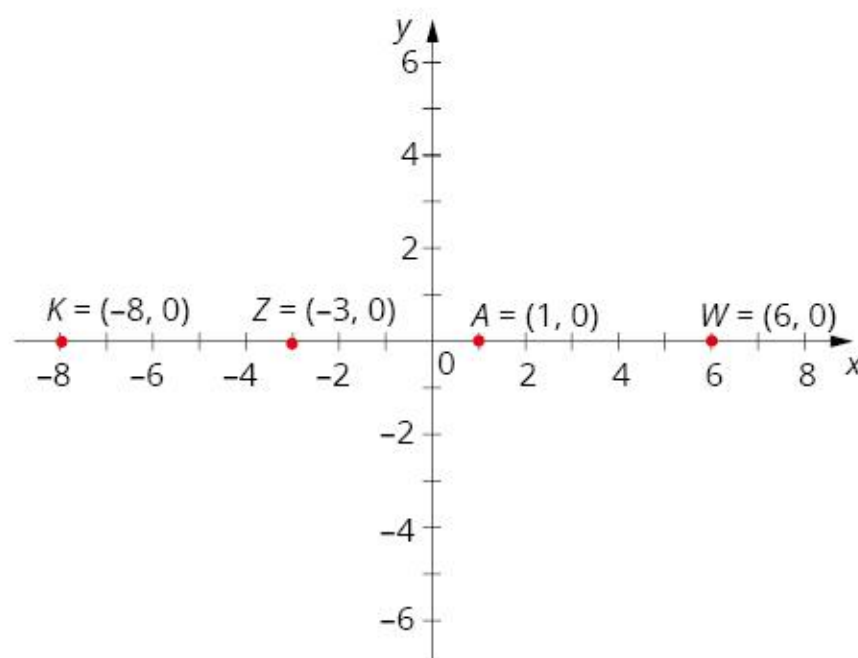
Pierwszą liczbę x odczytujemy w miejscu przecięcia osi Ox z prostą prostopadłą do tej osi, przechodzącą przez punkt P . Drugą liczbę y odczytujemy w miejscu przecięcia osi Oy z prostą prostopadłą do tej osi, przechodzącą przez punkt P . Każdej parze liczb odpowiada punkt na płaszczyźnie z układem współrzędnych.



przykład: Punkty, których pierwsza współrzędna jest równa 0, leżą na osi Oy.



Punkty, których druga współrzędna jest równa 0, leżą na osi Ox.



Znaki współrzędnych punktów w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych:

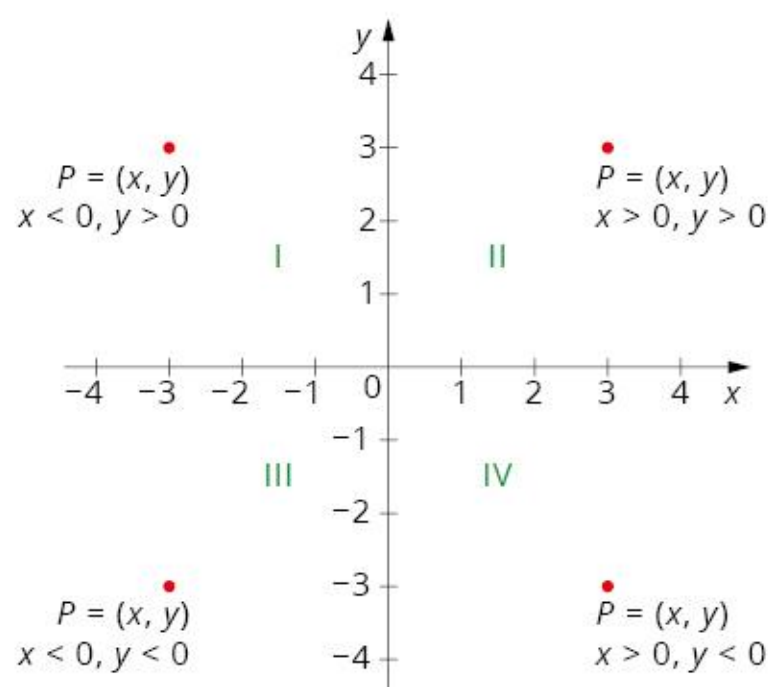
Jeżeli punkt $P = (x, y)$ należy do:

I ćwiartki układu współrzędnych, to obie jego współrzędne są liczbami dodatnimi,

II ćwiartki układu współrzędnych, to jego pierwsza współrzędna jest liczbą ujemną, a druga – dodatnią,

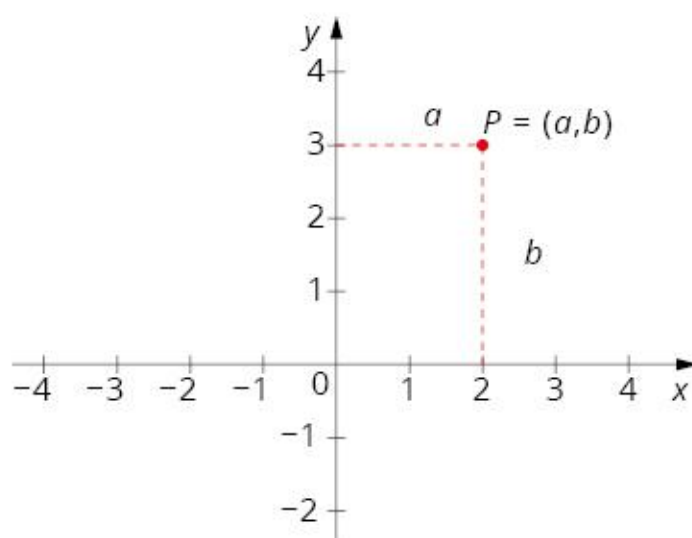
III ćwiartki układu współrzędnych, to obie jego współrzędne są liczbami ujemnymi,

IV ćwiartki układu współrzędnych, to jego pierwsza współrzędna jest liczbą dodatnią, a druga – ujemną.



12.5. ODLEGŁOŚĆ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Odległość punktu $P = (a, b)$ od osi układu współrzędnych:

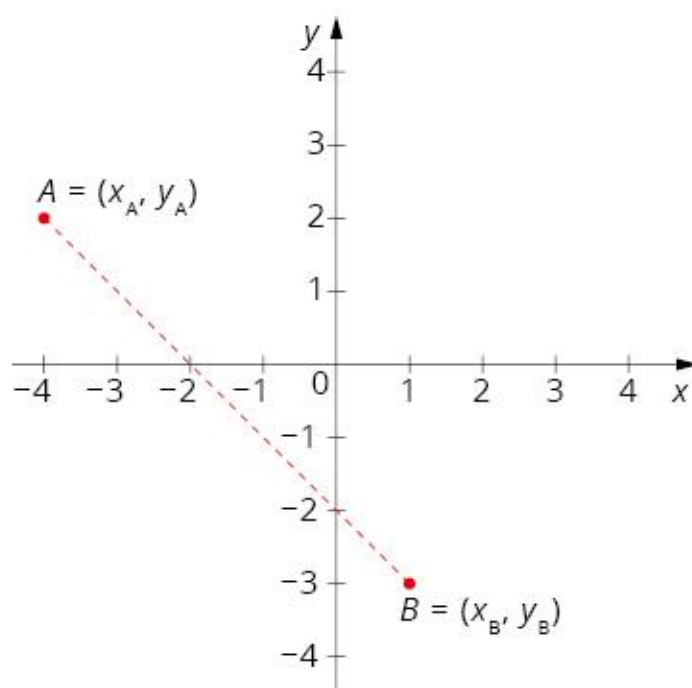


$|a|$ – odległość punktu P od osi Ox

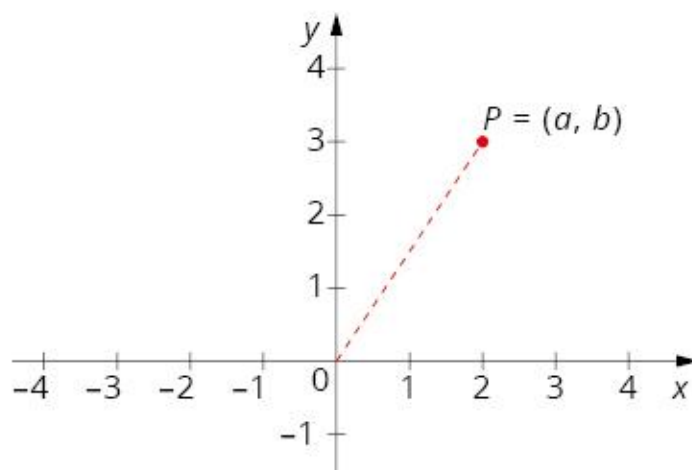
$|b|$ – odległość punktu P od osi Oy

Odległość punktów $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ w układzie współrzędnych wyraża się wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Odległość punktu $P = (a, b)$ od początku układu współrzędnych

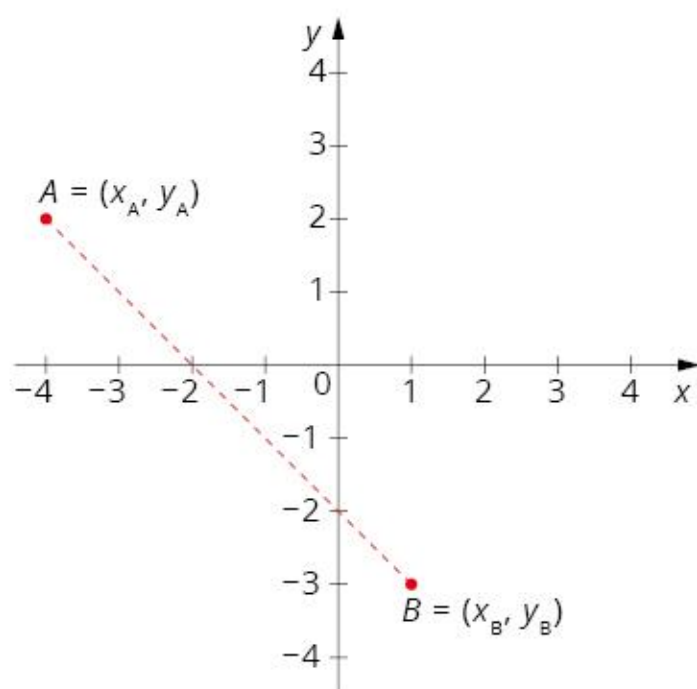


$|OP| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – odległość punktu P od początku układu współrzędnych

12.6. ODCINEK W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

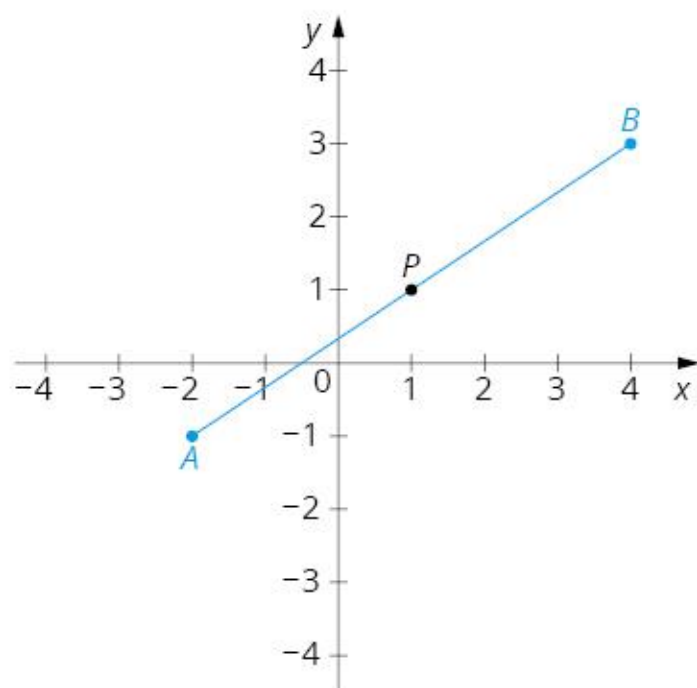
Długość odcinka AB , gdzie $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Jeśli punkt P jest środkiem odcinka AB , gdzie $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to:

$$P = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



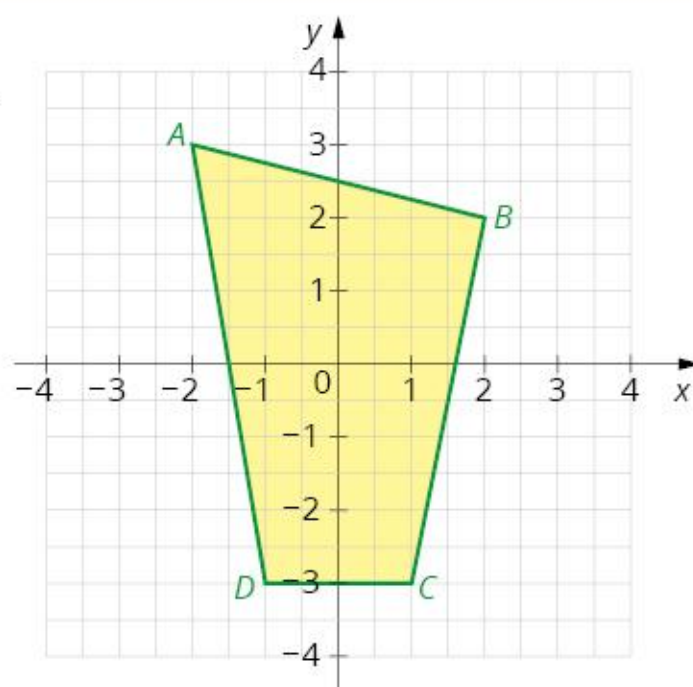
$$A = (-2, -1), B = (4, 3)$$

Środek odcinka AB :

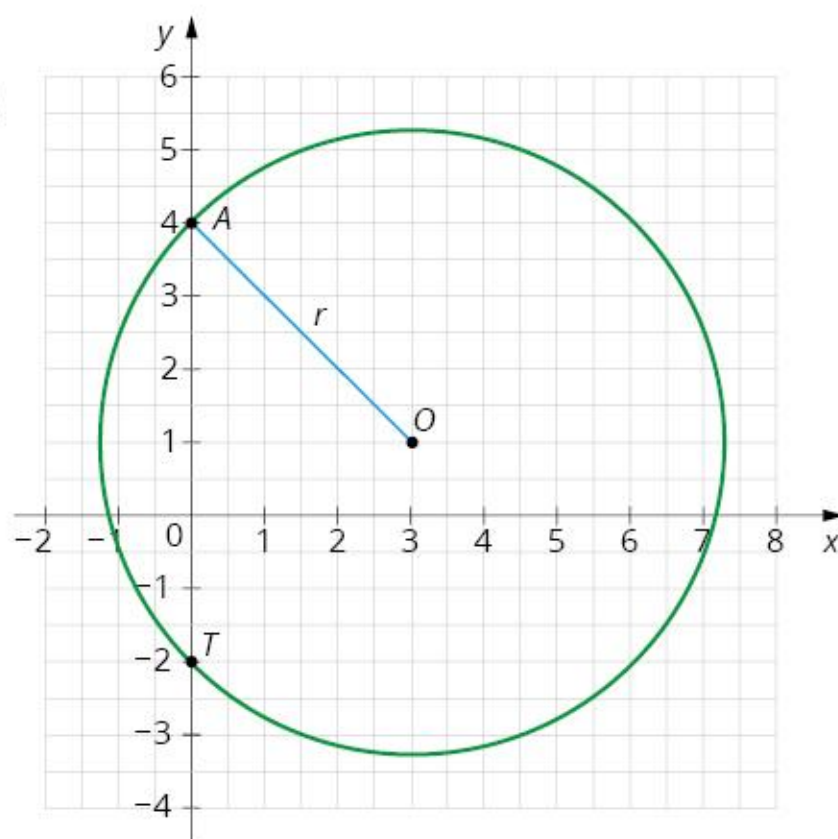
$$P = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{-1 + 3}{2} \right) = (1, 1)$$

12.7. FIGURY W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

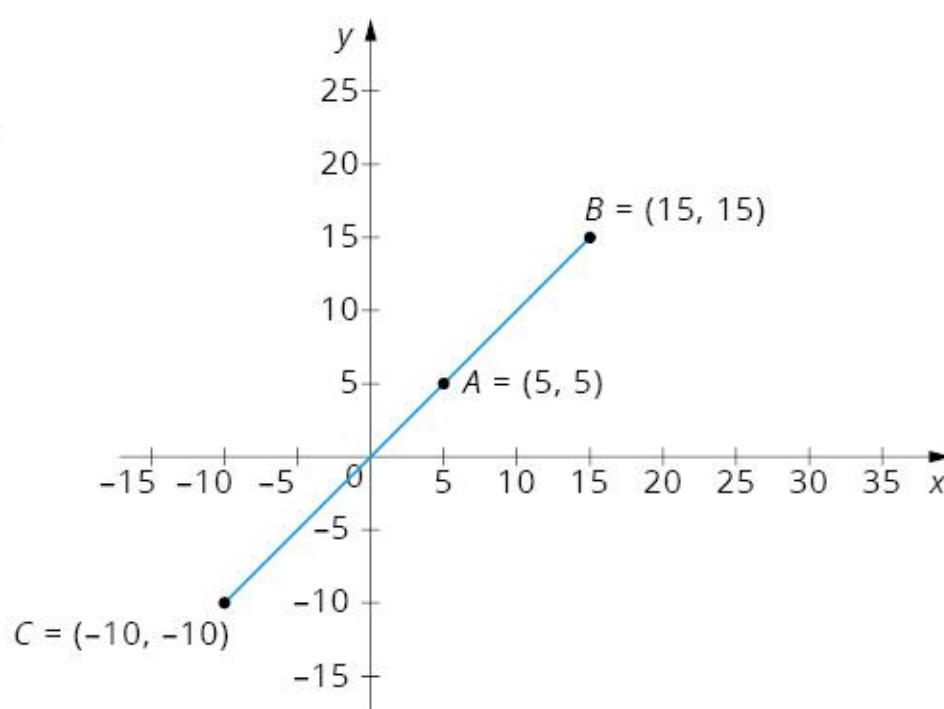
Czworokąt $ABCD$, gdzie $A = (-2, 3)$, $B = (2, 2)$,
 $C = (1, -3)$, $D = (-1, -3)$



przykład: Okrąg o środku w punkcie $O = (3, 1)$
i promieniu $r = |OA| = 3\sqrt{2}$



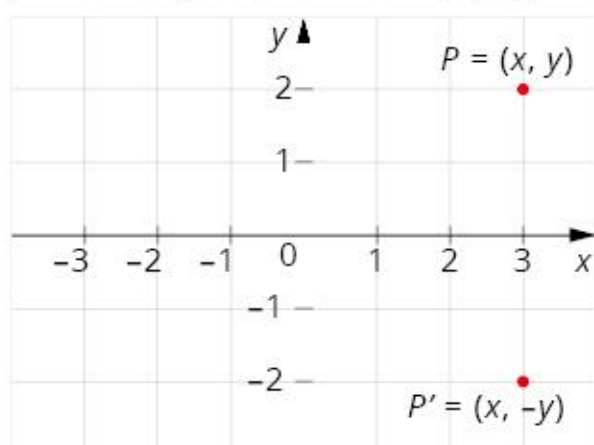
przykład: Punkty, których obie
współrzędne są sobie równe,
leżą na tej samej prostej.



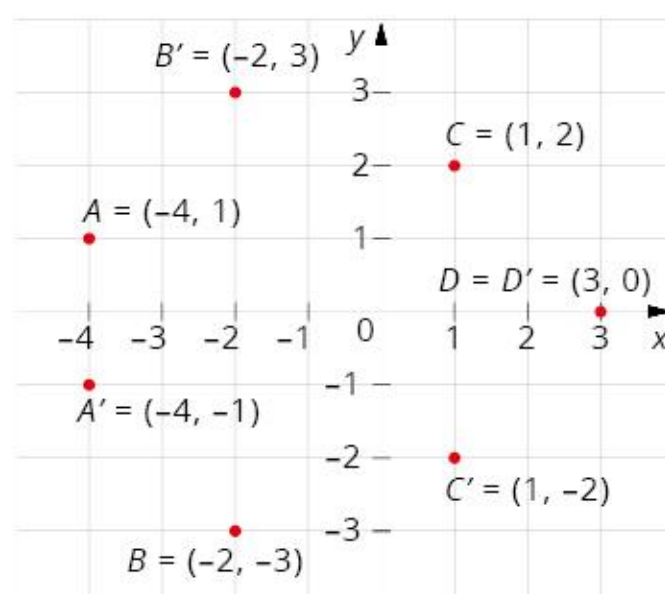
12.8. SYMETRIA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

SYMETRIA OSIOWA

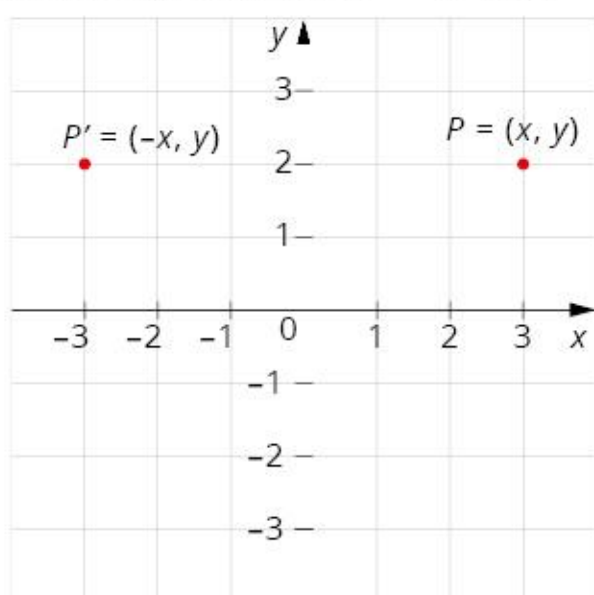
Obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem osi x jest punkt $P' = (x, -y)$.



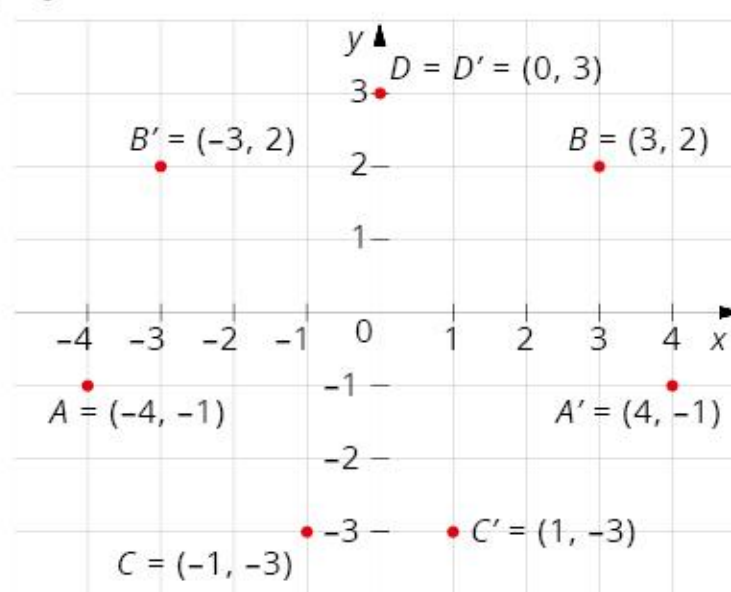
przykład:



Obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem osi y jest punkt $P' = (-x, y)$.

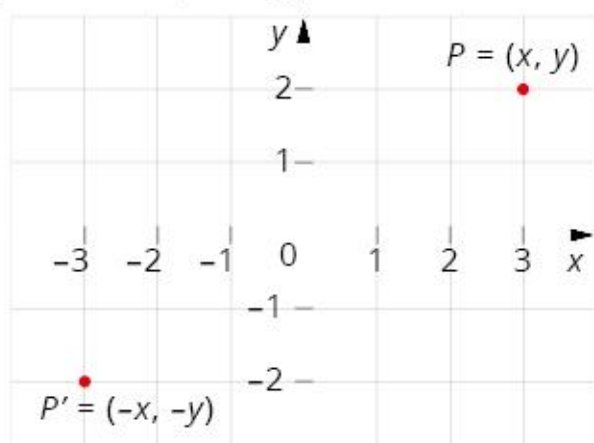


przykład:

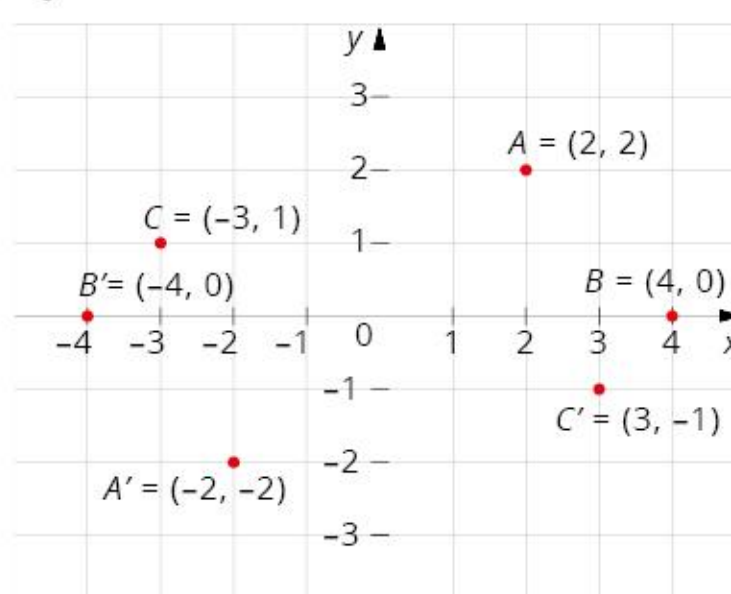


SYMETRIA ŚRODKOWA

Obrazem punktu $P = (x, y)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt $P' = (-x, -y)$.

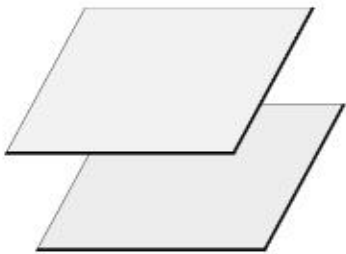
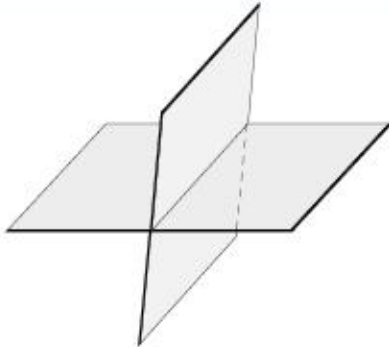


przykład:

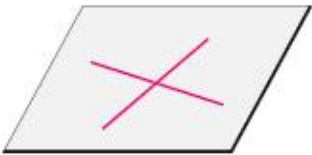
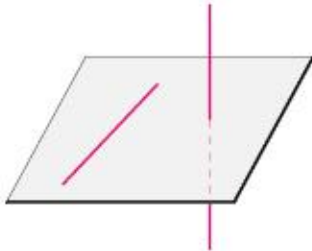


13. GRANIASTOSŁUPY

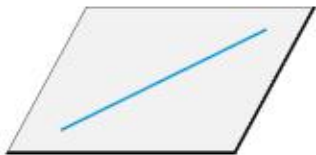
13.1. WZAJEMNE POŁOŻENIE DWÓCH PŁASZCZYZN W PRZESTRZENI

PŁASZCZYZNY RÓWNOLEGŁE	PŁASZCZYZNY PRZECINAJĄCE SIĘ
	
Płaszczyzny równoległe nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.	Częścią wspólną płaszczyzn przecinających się jest prosta.

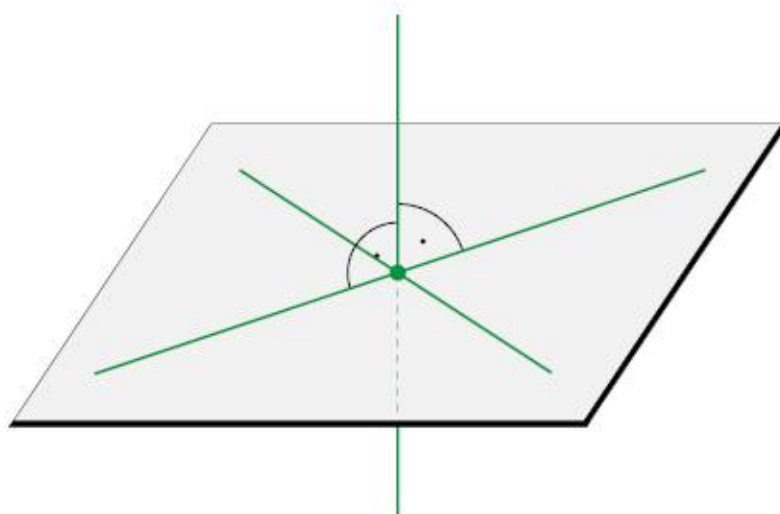
13.2. WZAJEMNE POŁOŻENIE DWÓCH PROSTYCH W PRZESTRZENI

PROSTE RÓWNOLEGŁE	PROSTE PRZECINAJĄCE SIĘ	PROSTE SKOŚNE
		
Leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.	Leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny.	Nie leżą w jednej płaszczyźnie – nie mają punktów wspólnych.

13.3. WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTEJ I PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI

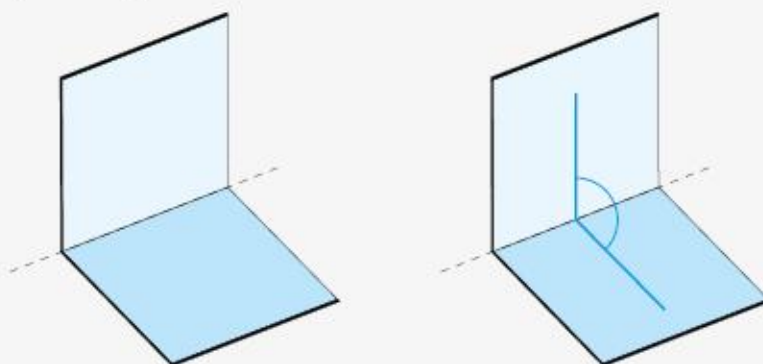
PROSTA RÓWNOLEGŁA DO PŁASZCZYZNY	PROSTA PRZECINA PŁASZCZYZNĘ
	
Prosta nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną lub jest zawarta w tej płaszczyźnie.	Prosta ma z płaszczyzną dokładnie jeden punkt wspólny.

Prosta jest **prostopadła** do płaszczyzny, jeżeli jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie.



13.4. KĄTY W PRZESTRZENI

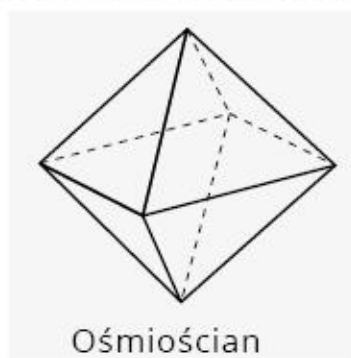
Kąt dwuścienny to każdy z kątów zawartych między dwiema półpłaszczyznami o wspólnej krawędzi, wraz z tymi półpłaszczyznami.



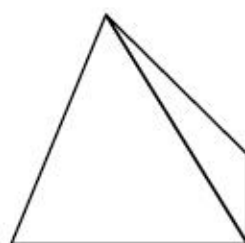
13.5. WIELOŚCIAN

Wielościan to bryła geometryczna, ograniczona powierzchnią utworzoną z wielokątów o rozłącznych wnętrzach i każdym boku wspólnym dla dwóch wielokątów.

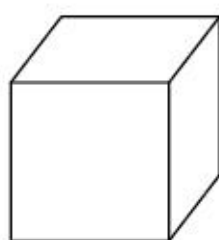
przykład:



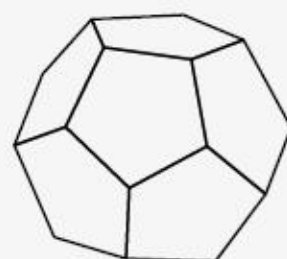
Ośmiościan



Czworościan



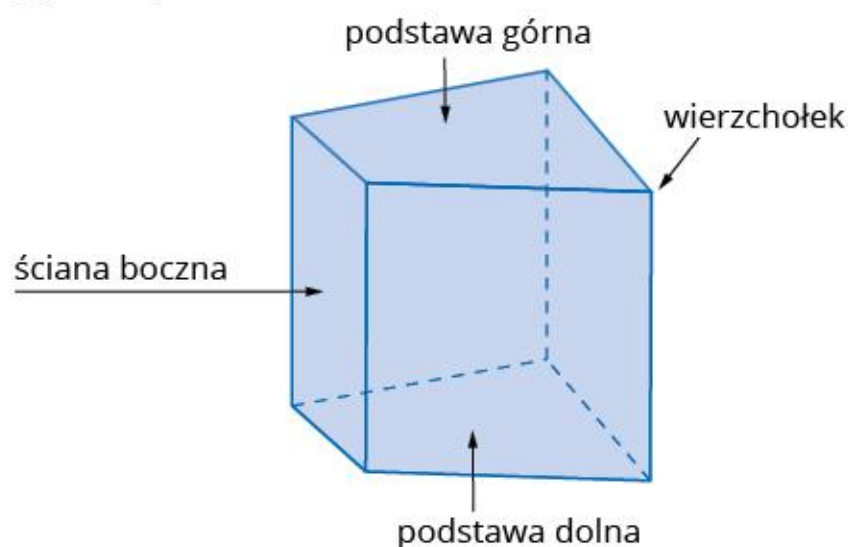
Sześciościan



Dwunastościan

13.6. DEFINICJA GRANIASTOSŁUPA

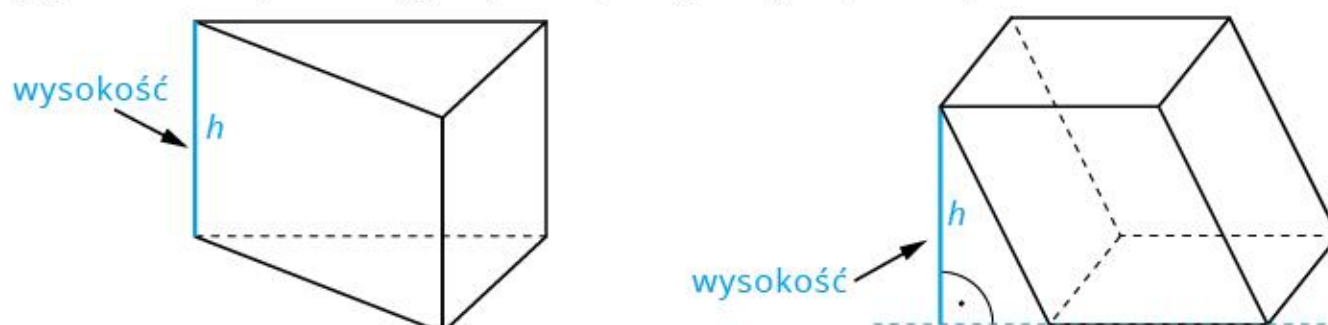
Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane podstawami, są przystającymi wielokątami leżącymi w równoległych płaszczyznach. Ściany boczne są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.



Graniastosłup o podstawie n – kąta nazywamy n – kątnym.

13.7. ELEMENTY GRANIASTOSŁUPA

Wysokość graniastosłupa – dowolny odcinek, którego końce należą do płaszczyzn zawierających podstawy graniastosłupa i który jest prostopadły do tych płaszczyzn.



Graniastosłup $ABCDEFGH$

A, B, C, D, E, F, G, H – wierzchołki

AB, BC, CD, DA – krawędzie podstawy dolnej

EF, FG, GH, HE – krawędzie podstawy górnej

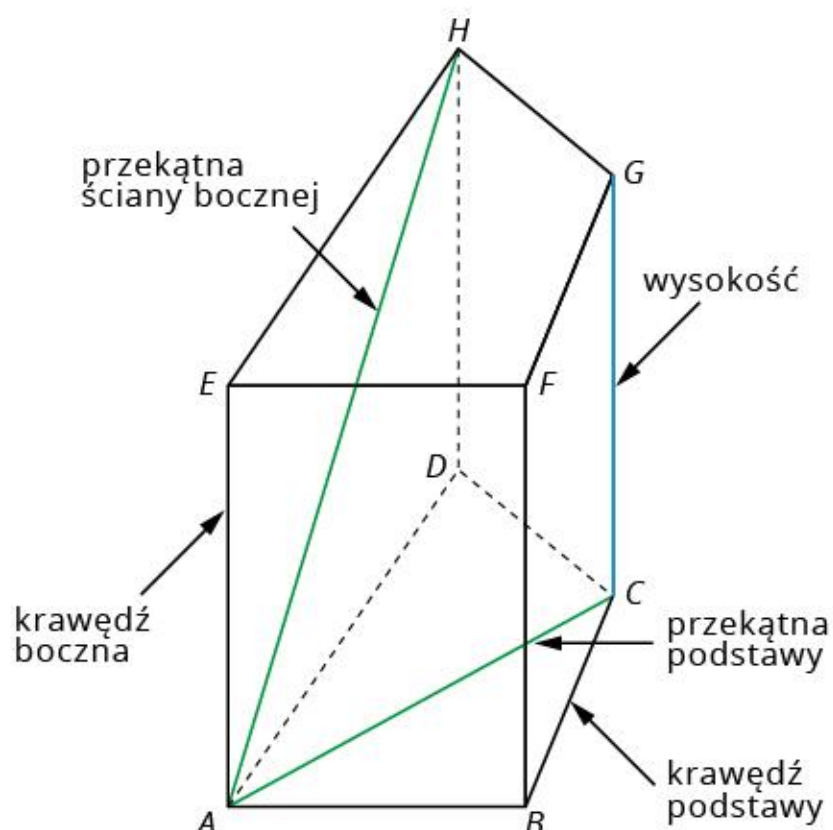
AE, BF, CG, DH – krawędzie boczne

czworokąt $ABCD$ – podstawa dolna

czworokąt $EFGH$ – podstawa górna

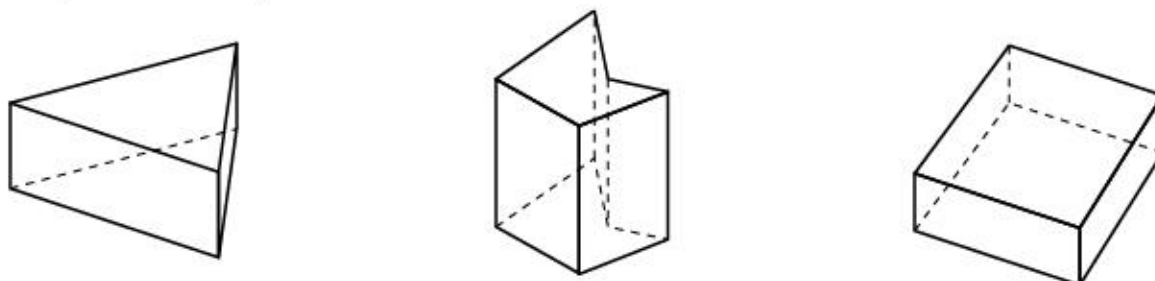
równoległoboki: $ABFE, BCGF, CDHG,$

$ADHE$ – ściany boczne



13.8. RODZAJE GRANIASTOSŁUPÓW

Graniastosłup prosty – krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzn zawierających podstawy. Ściany boczne są prostokątami.



Graniastosłupy proste

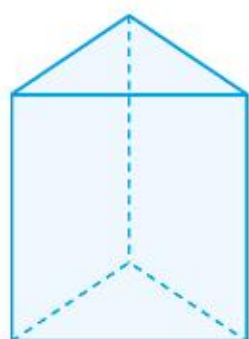
Graniastosłup pochyły – graniastosłup, który nie jest prosty.



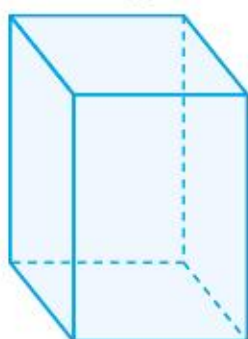
Graniastosłupy pochyłe

Graniastosłup prawidłowy – graniastosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym.

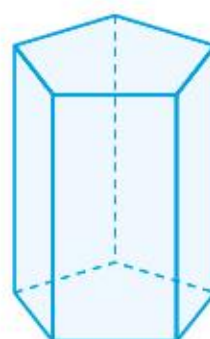
- Ściany boczne są przystającymi prostokątami.
- Krawędź boczna jest wysokością graniastosłupa.



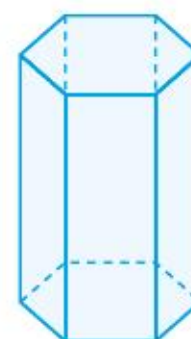
trójkątny



czworokątny



pięciokątny

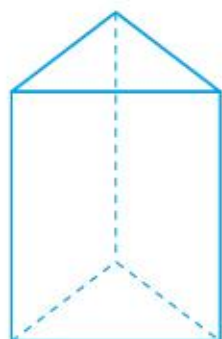


sześciokątny

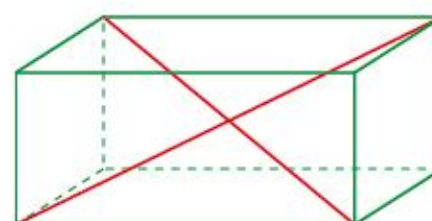
Graniastosłupy prawidłowe

13.9. PRZEKĄTNA GRANIASTOSŁUPA

Przekątna graniastosłupa – odcinek łączący dwa wierzchołki graniastosłupa i niezawierający się w żadnej jego ścianie.



Graniastosłup trójkątny
nie ma przekątnych.



Graniastosłup czworokątny
ma dwie przekątne.

13.10. POLE POWIERZCHNI GRANIASTOSŁUPA

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie dwóch pól podstaw i pola powierzchni bocznej.

$$P = 2P_p + P_b,$$

gdzie:

P – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

13.11. OBJĘTOŚĆ GRANIASTOSŁUPA

Objętość graniastosłupa jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości graniastosłupa.

$$V = P_p \cdot h,$$

gdzie:

V – objętość graniastosłupa

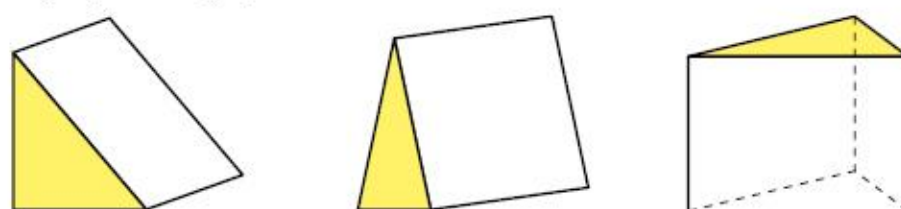
P_p – pole podstawy

h – wysokość graniastosłupa

13.12. WYBRANE GRANIASTOSŁUPY I ICH WŁASNOŚCI

Graniastosłup prosty trójkątny

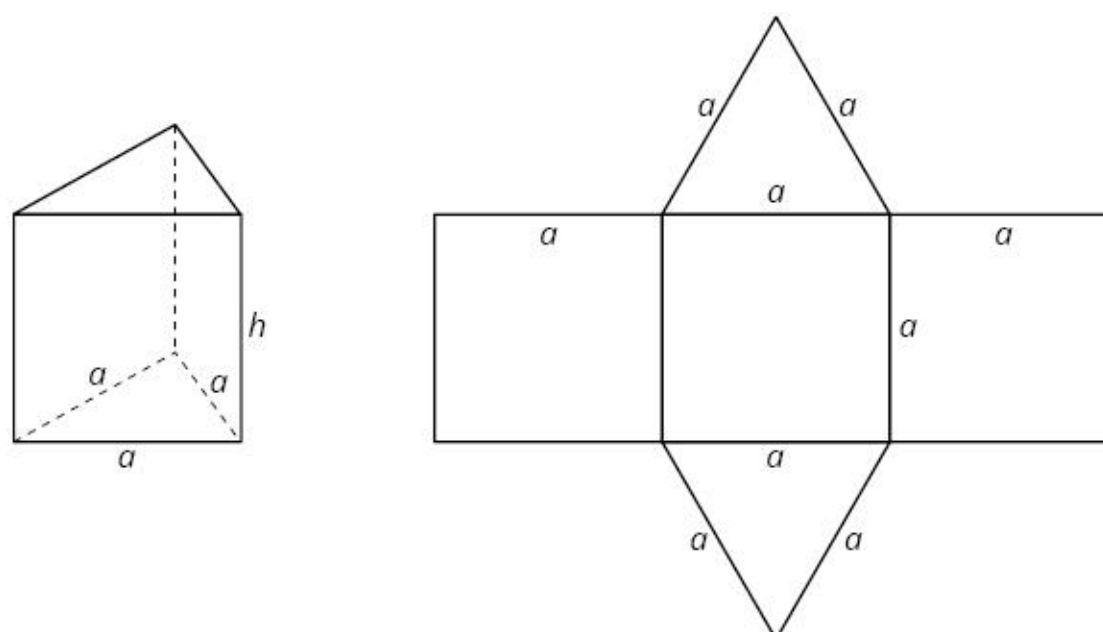
Podstawą graniastosłupa jest trójkąt.



Graniastosłup prawidłowy trójkątny

Podstawy w kształcie przystających trójkątów równobocznych.

Ściany boczne w kształcie przystających prostokątów – jeden z boków każdego prostokąta jest równy krawędzi podstawy, drugi jest równy wysokości graniastosłupa.



W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy a i wysokości h :

$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \text{pole podstawy}$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot h - \text{objętość}$$

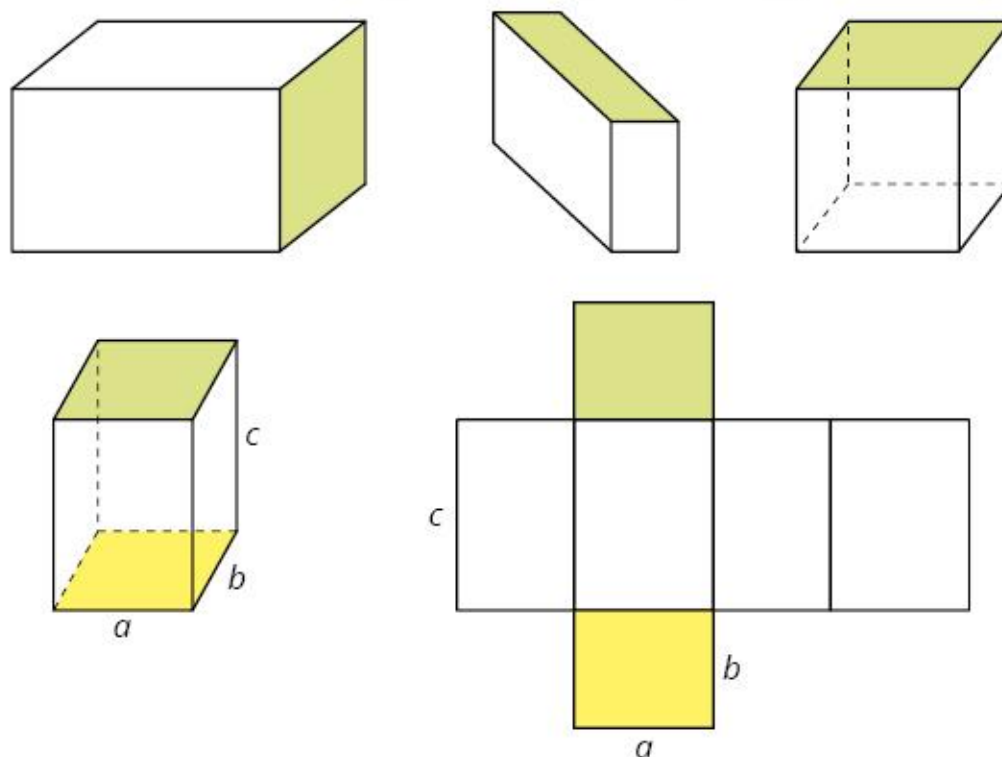
$$P_b = 3 \cdot ah - \text{pole powierzchni bocznej}$$

$$P_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + 3ah - \text{pole powierzchni całkowitej}$$

Graniastosłup prosty czworokątny (prostopadłościan)

Wszystkie ściany są prostokątami.

Jeśli podstawą są kwadraty, to graniastosłup nazywamy **prawidłowym czworokątnym**.



W graniastosłupie czworokątnym o krawędziach podstawy a i b oraz wysokości c :

$$P_p = ab - \text{pole podstawy}$$

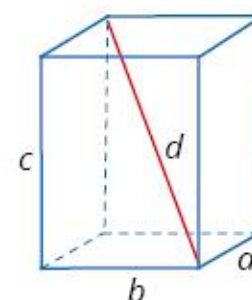
$$V = abc - \text{objętość}$$

$$P_b = 2ac + 2bc - \text{pole powierzchni bocznej}$$

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc - \text{pole powierzchni całkowitej}$$

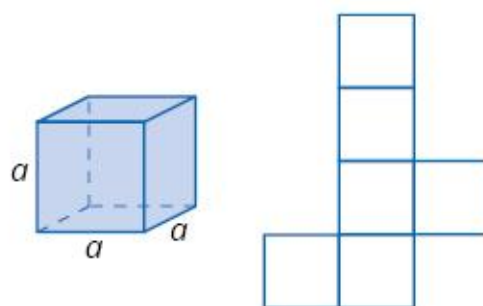
Długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach a , b , c :

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

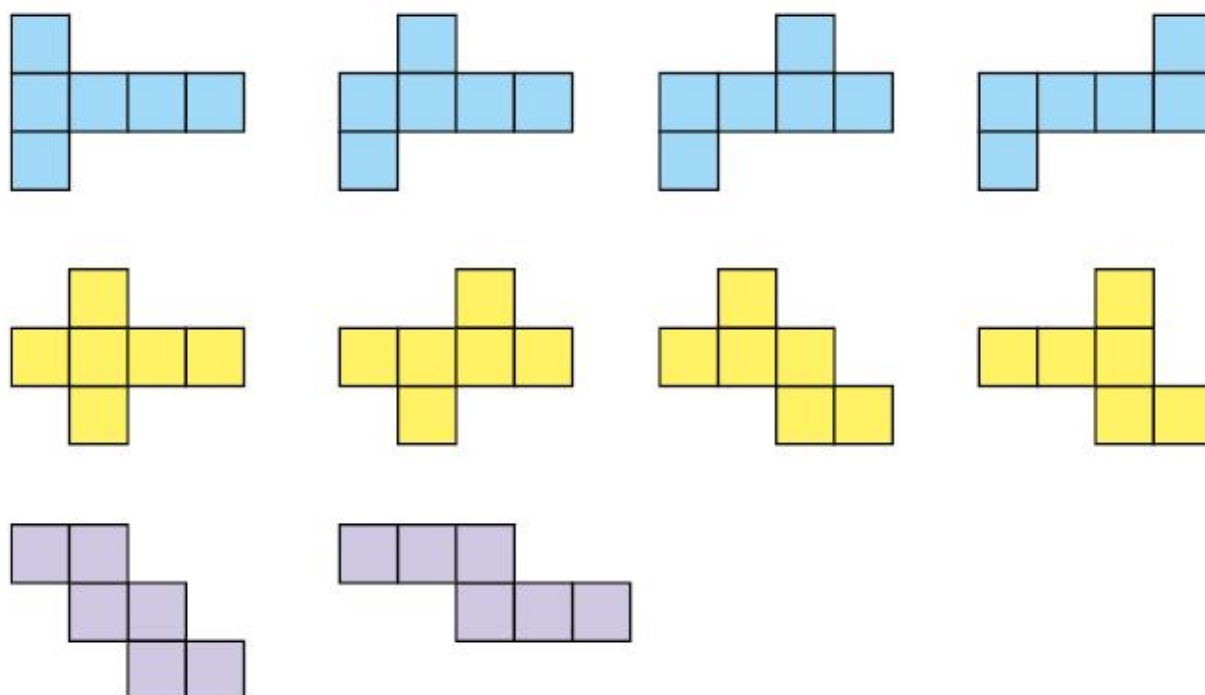


Sześcian

Prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są równe.



Przykłady siatek sześcianu



W sześcianie o krawędzi długości a :

$P_p = a^2$ – pole podstawy

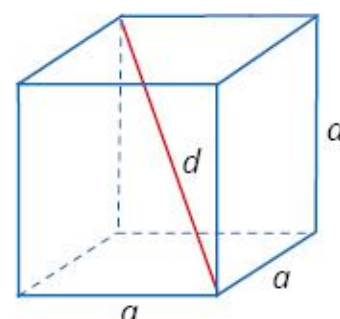
$V = a^3$ – objętość

$P_b = 4a^2$ – pole powierzchni bocznej

$P_c = 6a^2$ – pole powierzchni całkowitej

Długość przekątnej sześcianu o krawędzi a :

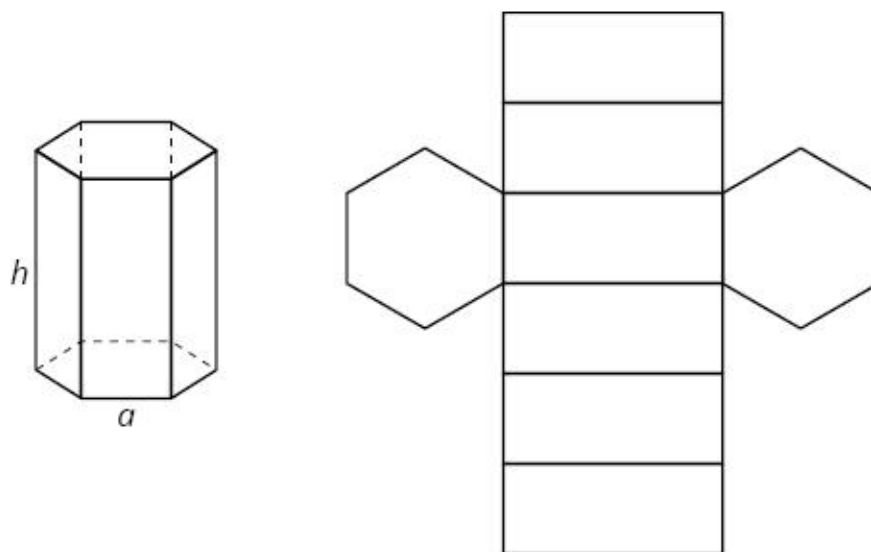
$d = a\sqrt{3}$



Graniastosłup prawidłowy sześciokątny

Jego podstawa ma kształt sześciokąta foremnego.

Ściany boczne mają kształt przystających prostokątów.



W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy a i wysokości h :

$P_p = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ – pole podstawy

$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot h$ – objętość

$P_b = 6 \cdot ah$ – pole powierzchni bocznej

$P_c = 3\sqrt{3}a^2 + 6ah$ – pole powierzchni całkowitej

14. OSTROSŁUPY. BRYŁY OBROTOWE

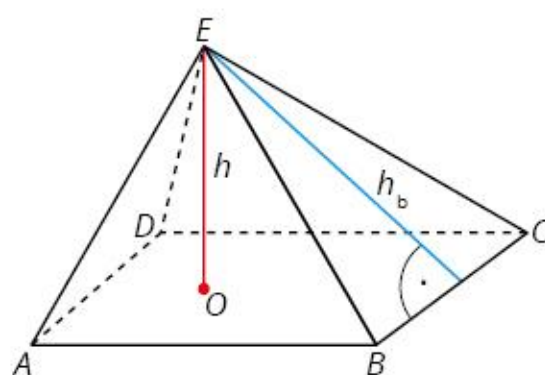
14.1. DEFINICJA OSTROSŁUPA

Ostrosłup to wielościan, którego jedna ze ścian, zwana podstawą, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym wierzchołkiem ostrosłupa.



Ostrosłup o podstawie n - kąta nazywa się n - kątnym.

14.2. ELEMENTY OSTROSŁUPA



Ostrosłup czworokątny $ABCDE$

A, B, C, D – wierzchołki podstawy

E – wierzchołek ostrosłupa

AE, BE, CE, DE – krawędzie boczne

czworokąt $ABCD$ – podstawa

trójkąty: ABE, BCE, CDE, DAE – ściany boczne

h – wysokość ostrosłupa

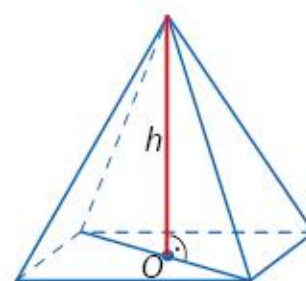
h_b – wysokość ściany bocznej

Wysokość ostrosłupa – odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z podstawą, prostopadły do podstawy.

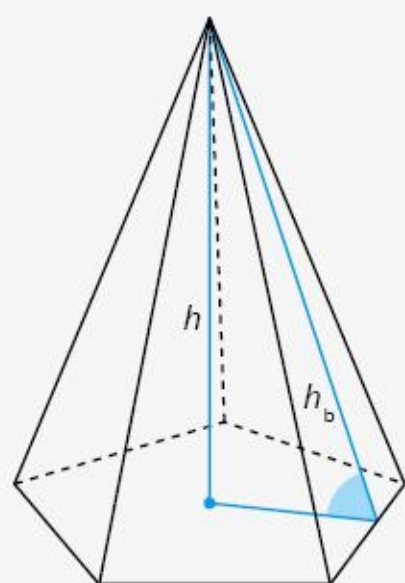
Koniec wysokości należący do podstawy to spodek wysokości.

h – wysokość ostrosłupa

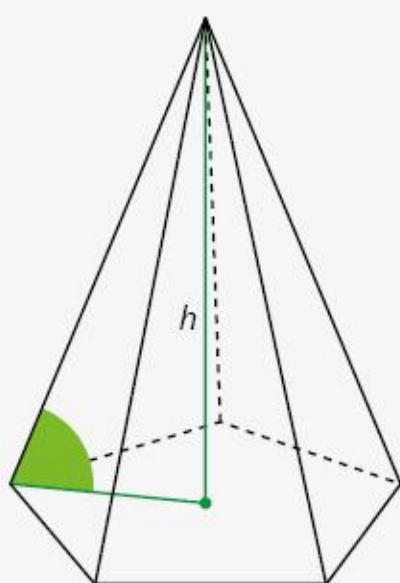
O – spodek wysokości



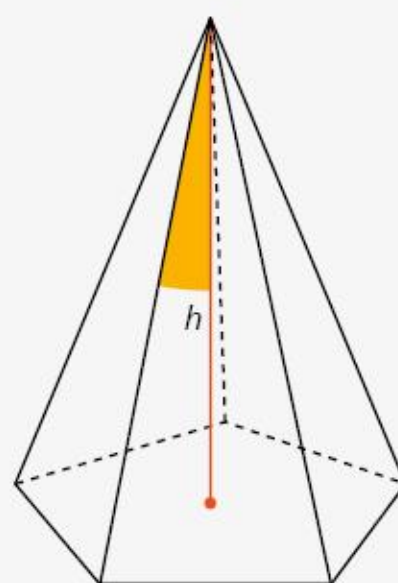
KĄTY W OSTROŚŁUPIE



Kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do podstawy



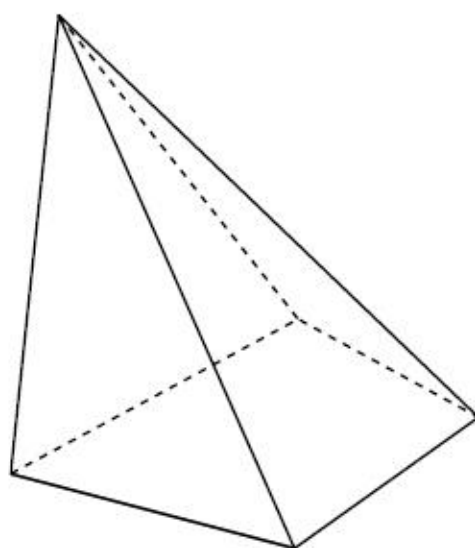
Kąt nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do podstawy



Kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną

14.3. RODZAJE OSTROŚŁUPÓW

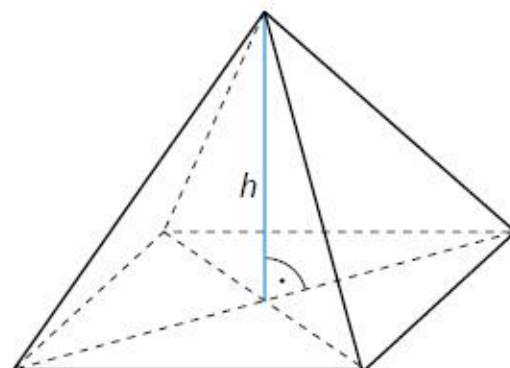
Ostrosłup pochyły – krawędzie boczne mają różne długości.



Ostrosłup czworokątny pochyły

Ostrosłup prosty – wszystkie krawędzie boczne mają tę samą długość.

- Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa prostego tworzą z podstawą takie same kąty.
- Jego wszystkie ściany boczne tworzą z podstawą takie same kąty.

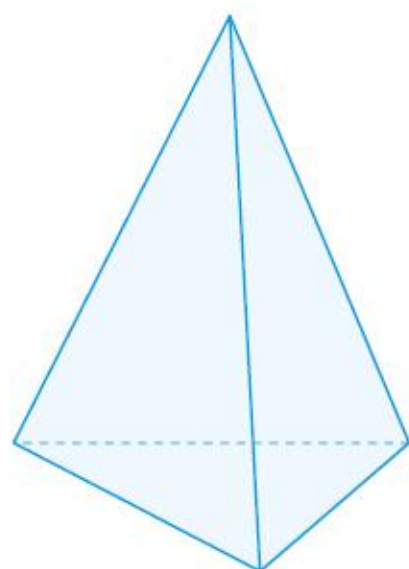


Ostrosłup czworokątny prosty

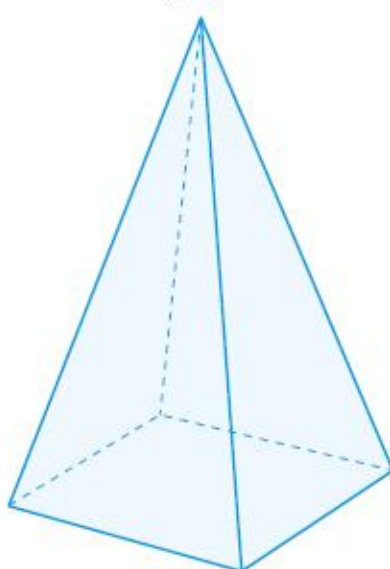
Ostrosłup prawidłowy – ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

- Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego są przystającymi trójkątami równoramiennymi.
- Jego wszystkie krawędzie boczne tworzą z podstawą takie same kąty.
- Jego wszystkie ściany boczne tworzą z podstawą takie same kąty.

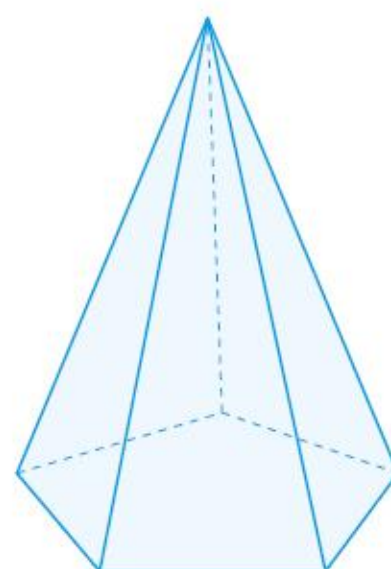
Ostrosłupy prawidłowe:



trójkątny



czworokątny



pięciokątny

14.4. POLE POWIERZCHNI OSTROSŁUPA

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P = P_p + P_b,$$

gdzie:

P – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

14.5. OBJĘTOŚĆ OSTROSŁUPA

Objętość ostrosłupa jest równa trzeciej części iloczynu pola podstawy i wysokości ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h,$$

gdzie:

V – objętość ostrosłupa

P_p – pole podstawy

h – wysokość ostrosłupa

14.6. WŁASNOŚCI WYBRANYCH OSTROŚLUPÓW

Ostrosłup prawidłowy trójkątny (czworościan)



Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkąt równoboczny. Spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w punkcie przecięcia wysokości trójkąta będącego podstawą.

Pole powierzchni całkowitej:

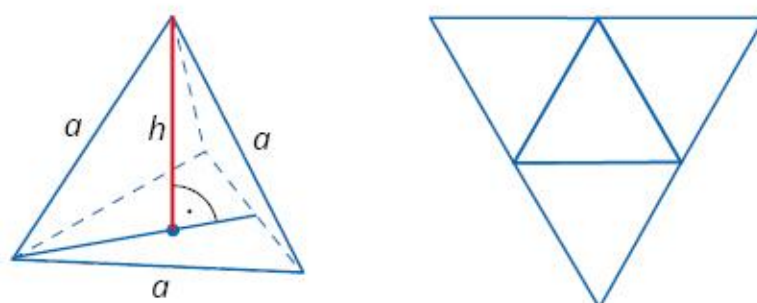
$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}ah_b,$$

gdzie: h_b – wysokość ściany bocznej

Objętość:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 \cdot h$$

Czworościan foremny



Wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.

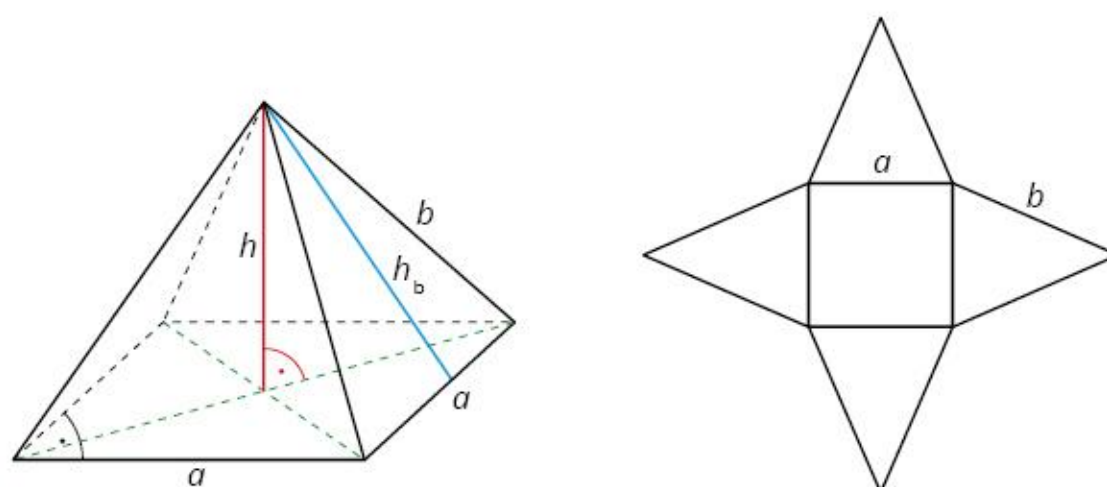
Pole powierzchni całkowitej:

$$P = \sqrt{3} \cdot a^2$$

Objętość:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

Ostrosłup prawidłowy czworokątny



Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat.

Pole powierzchni całkowitej:

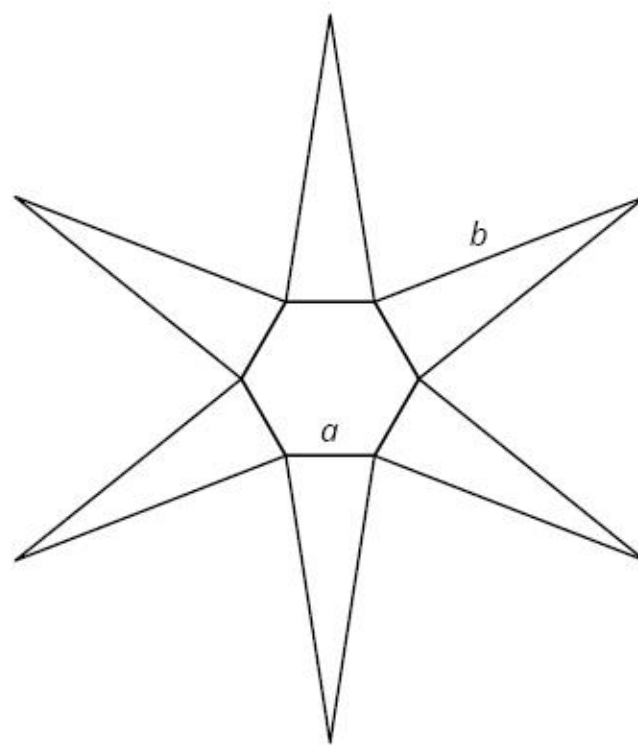
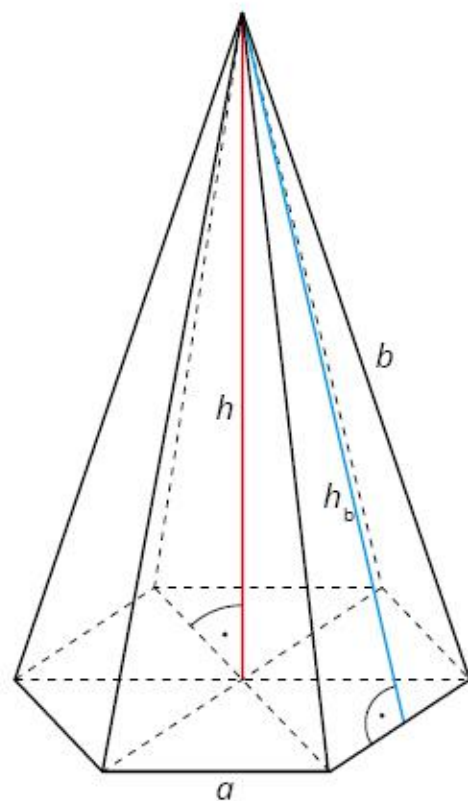
$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} a h_b,$$

gdzie: h_b – wysokość ściany bocznej

Objętość:

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$

Ostrosłup prawidłowy sześciokątny



Podstawą ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest sześciokąt foremny.

Spodek wysokości znajduje się w punkcie przecięcia przekątnych podstawy.

Pole powierzchni całkowitej:

$$P = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 6 \cdot \frac{1}{2} a h_b,$$

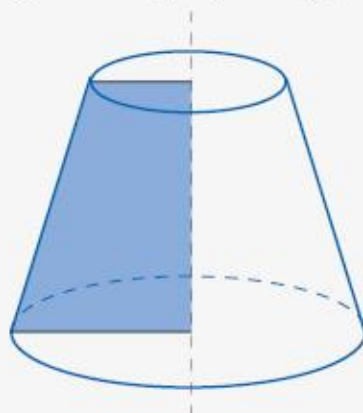
gdzie: h_b – wysokość ściany bocznej

Objętość:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot h$$

14.7. BRYŁY OBROTOWE

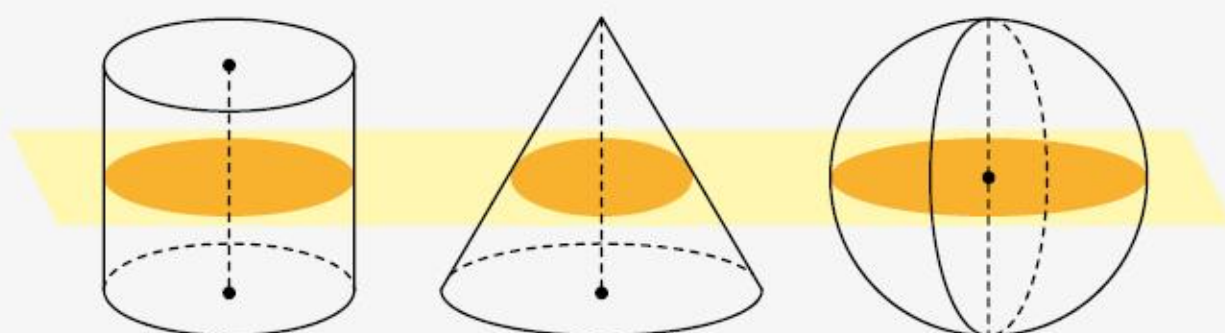
Bryła obrotowa to figura przestrzenna powstała przez obrót pewnej figury płaskiej dookoła prostej, zwanej osią obrotu. Prosta i figura leżą w jednej płaszczyźnie.



Przekrój osiowy bryły obrotowej – część wspólna bryły z płaszczyzną zawierającą oś obrotu.

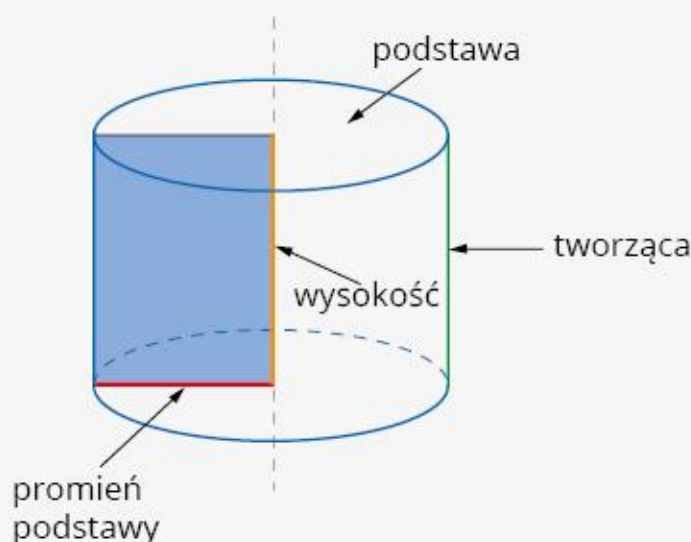


Przekrój poprzeczny – część wspólna bryły z płaszczyzną prostopadłą do osi obrotu.



14.8. DEFINICJA I BUDOWA WALCA

Walec to bryła obrotowa powstała przez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z jego boków.



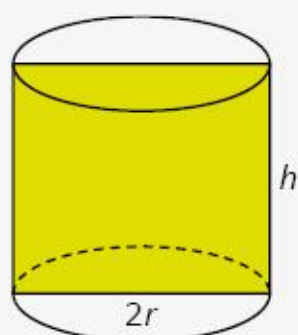
Podstawy walca – koła powstałe przez obrót prostokątów do osi obrotu boków prostokąta.

Tworząca walca – bok prostokąta równoległy do osi obrotu i niemający z nią punktów wspólnych. Wszystkie tworzące dają **powierzchnię boczną** walca.

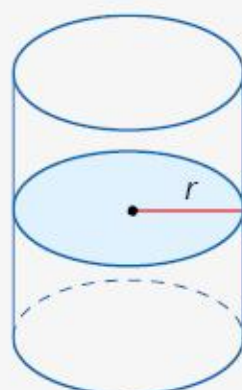
Wysokość walca – bok prostokąta zawarty w osi obrotu (jest to również każdy odcinek łączący podstawy i prostopadły do nich). Drugi bok prostokąta to **promień podstawy** walca.

14.9. PRZEKROJE WALCA

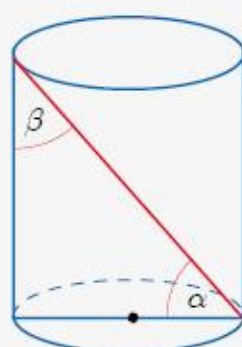
Przekrój osiowy walca to prostokąt o bokach $2r$ i h .



Przekrój poprzeczny walca to koło o promieniu r .

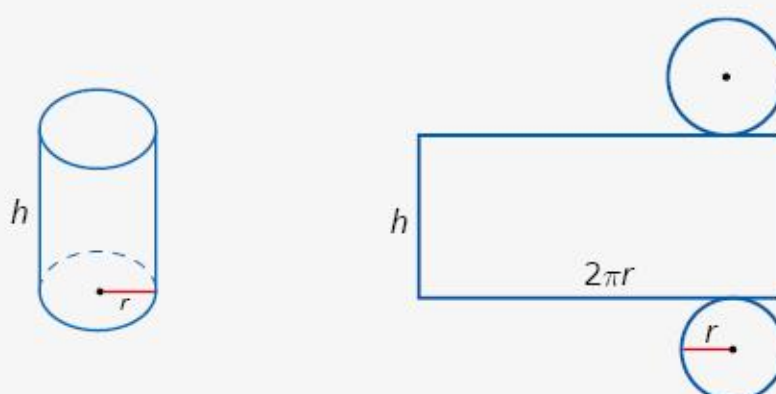


14.10. KĄTY W WALCU



α – kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny podstawy
 β – kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego do tworzącej (wysokości)

14.11. SIATKA WALCA



14.12. DEFINICJA I BUDOWA STOŻKA

Stożek to bryła obrotowa powstała przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.

Podstawa stożka – koło powstałe w wyniku obrotu drugiej przyprostokątnej.

Wierzchołek stożka – wierzchołek obracanego trójkąta, który nie należy do podstawy.

Powierzchnia boczna stożka – powierzchnia otrzymana w wyniku obrotu przeciwprostokątnej.

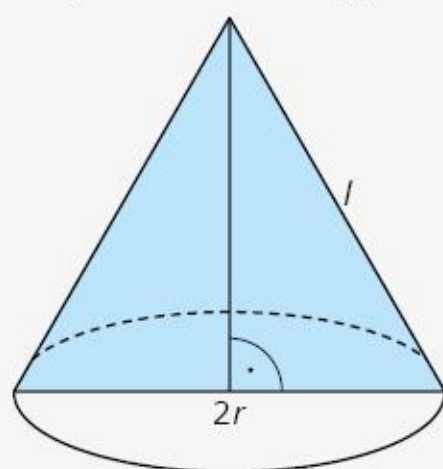
Tworząca stożka – każdy odcinek łączący wierzchołek stożka z podstawą, zawarty w powierzchni bocznej.

Wysokość stożka – odcinek łączący wierzchołek ze środkiem podstawy (prostopadły do podstawy).

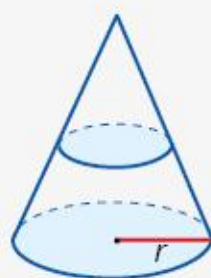


14.13. PRZEKROJE STOŻKA

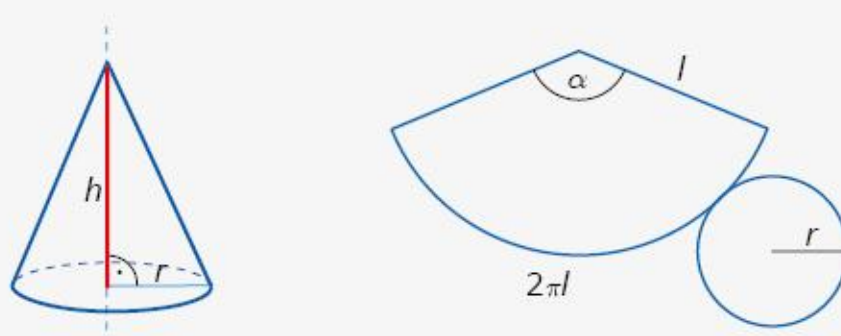
Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoramienny. Długość ramienia trójkąta jest równa długości tworzącej, a długość podstawy równa średnicy podstawy stożka.



Przekrojem poprzecznym stożka jest koło.

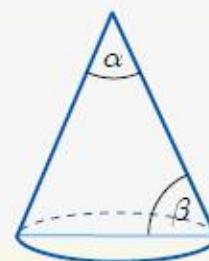


14.14. SIATKA STOŻKA



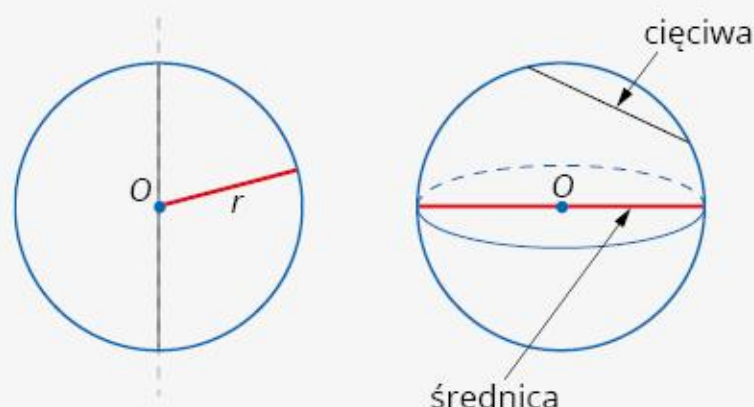
14.15. KĄTY W STOŻKU

α – kąt rozwarcia stożka
 β – kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy



14.16. DEFINICJA I BUDOWA KULI

Kula to bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu półkola dookoła prostej zawierającej jego średnicę.



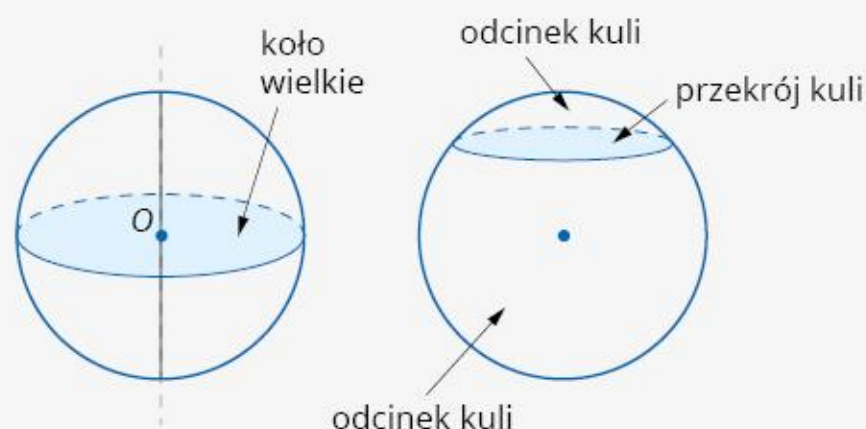
Kula o środku w punkcie O i promieniu r to zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza bądź równa r .

Sfera o środku w punkcie O i promieniu r to zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r . Sfera jest brzegiem kuli.

Cięciwa kuli – każdy odcinek łączący dwa punkty sfery.

Średnica kuli – cięciwa przechodząca przez środek kuli.

14.17. PRZEKROJE KULI



Każdy przekrój kuli płaszczyzną, która ma więcej niż jeden punkt wspólny z kulą, jest kołem. Jeśli płaszczyzna przechodzi przez środek kuli, to przekrój ten nazywamy **kołem wielkim**. Promień koła wielkiego jest równy promieniowi kuli.

Każdą z dwóch części kuli, na które dzieli ją koło będące przekrojem, nazywamy **odcinkiem kuli**.

15. STATYSTYKA

15.1. PODSTAWOWE POJĘCIA STATYSTYCZNE

Statystyka – nauka, której przedmiotem zainteresowania są metody zbierania, analizy, interpretacji oraz prezentacji danych. Metody statystyczne ułatwiają klasyfikację, zrozumienie oraz ocenę zjawisk i procesów. Umożliwiają przewidywanie przyszłych podobnych zdarzeń. Wspierają proces planowania i podejmowania decyzji.

W statystyce wyróżnia się działy: statystykę opisową i statystykę matematyczną.

Statystyka opisowa zajmuje się gromadzeniem, prezentacją i interpretacją danych.

Badanie statystyczne – zbieranie, gromadzenie i opracowywanie danych statystycznych oraz ogłaszanie i udostępnianie wyników dokonanych obliczeń, opracowań i analiz.

Zbiorowość statystyczna (populacja) – zbiór wszystkich elementów (np. ludzi, zjawisk, zdarzeń) podlegający danym badaniom statystycznym.

Próba statystyczna – elementy zbiorowości statystycznej (najczęściej wylosowane), podlegające badaniu ze względu na daną cechę (np. ze względu na wzrost, sposób spędzania wolnego czasu).

Liczebność próby – liczba elementów zbiorowości wybranych do próby.

Statystyka matematyczna zajmuje się metodami wnioskowania statystycznego. Na podstawie wyników uzyskanych z próby są formułowane wnioski dla całej zbiorowości.

Częstość względna występowania wyniku – iloraz liczby uzyskanych wyników przez łączną liczbę przeprowadzonych doświadczeń.

Etapy badań statystycznych:

- przygotowanie badania – ustalenie celu, przedmiotu badań, zakresu,
- obserwacja statystyczna – gromadzenie danych,
- kontrola kompletności danych i ich poprawności merytorycznej,
- grupowanie statystyczne – podział na grupy, ustalenie kolejności itp.,
- prezentacja danych,
- analiza – ustalanie prawidłowości i związków między danymi,
- interpretacja wyników.

Dane statystyczne najczęściej są prezentowane w sposób:

- opisowy,
- tabelaryczny,
- graficzny.

Metoda opisowa prezentacji danych – metoda najczęściej stosowana przy małej ilości danych. Przy większej ilości danych opis może być nieczytelny.

15.2. TABELARYCZNA PREZENTACJA DANYCH

Tabelaryczna prezentacja danych jest wykorzystywana do podawania informacji statystycznych uporządkowanych najczęściej według jednego kryterium.

W pierwszym wierszu tabeli zapisuje się rodzaj oczekiwanego wyniku, a w drugim – liczbę oznaczającą, ile razy wynik pojawił się w próbie.

przykład: Chłopców z klasy IIIC zapytano: *Jaki kolor najbardziej lubisz?*

Wyniki badań przedstawiono graficznie.

KOLOR	CZERWONY	ZIELONY	NIEBIESKI	CZARNY
liczba osób	1	4	3	2

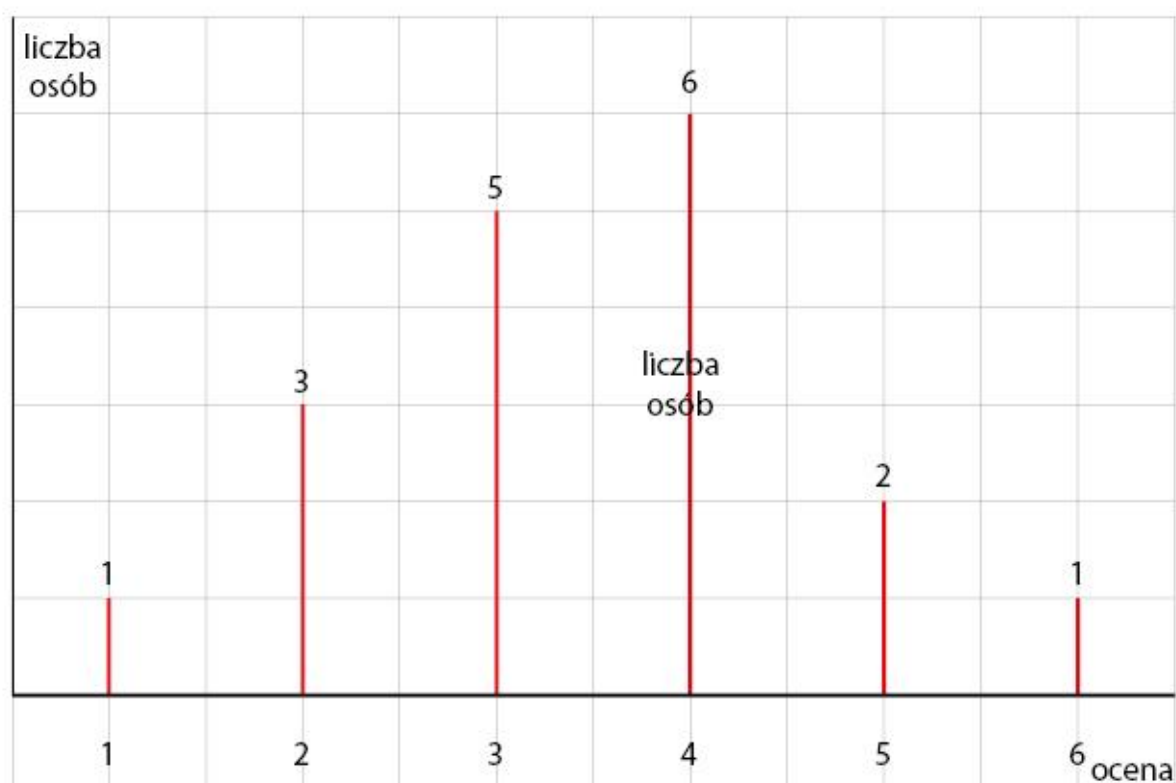
15.3. PRZYKŁADY GRAFICZNEGO PRZEDSTAWIANIA DANYCH

Metoda graficzna prezentacji danych pozwala na szybkie odszukanie i porównanie zebranych informacji. Dane są przedstawiane za pomocą wykresów.

Metoda liniowa

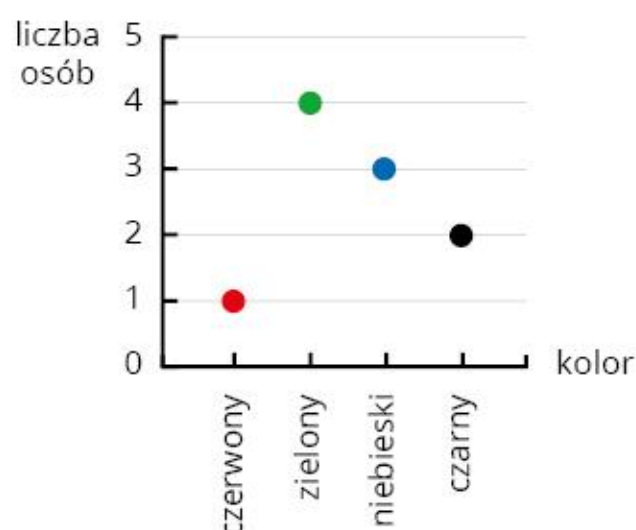
Na wykresie są zaznaczane odcinki, których długości są proporcjonalne do przedstawianego zjawiska. Odcinki mogą być położone poziomo lub pionowo.

przykład: Wyniki sprawdzianu z matematyki uczniów klasy VIII



Najczęściej na osi poziomej odczytujemy rodzaj oczekiwanego wyniku, a na osi pionowej – ile razy uzyskano dany wynik.

przykład:



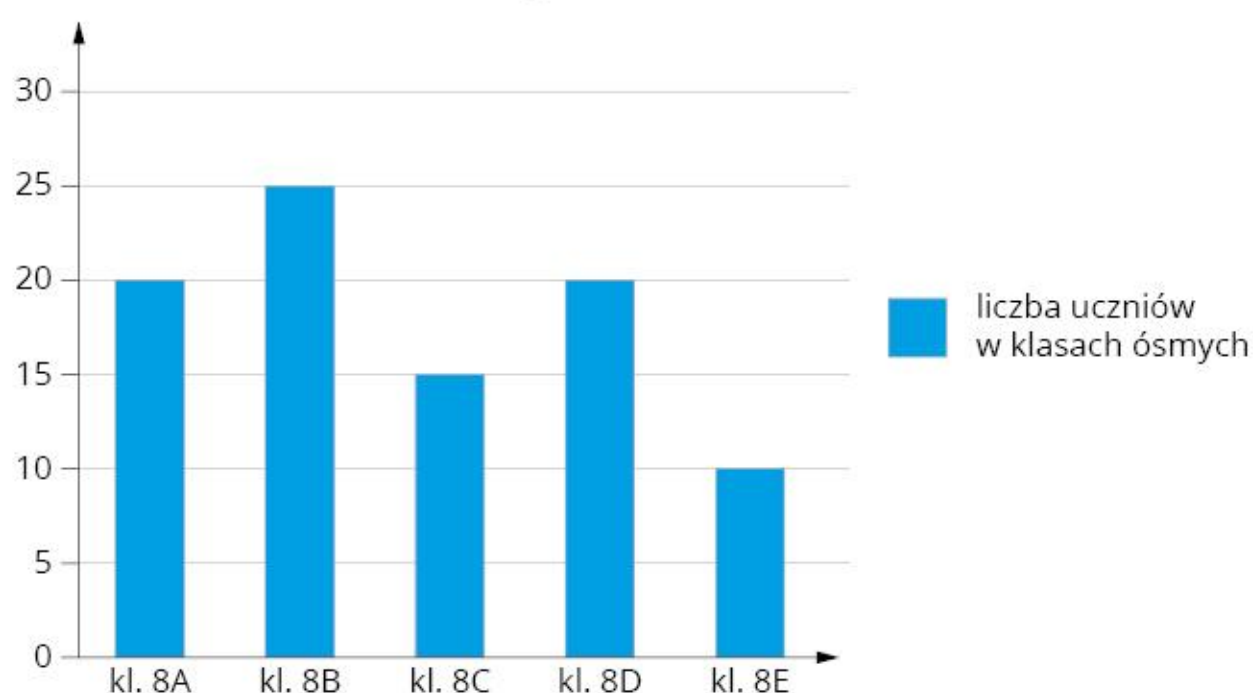
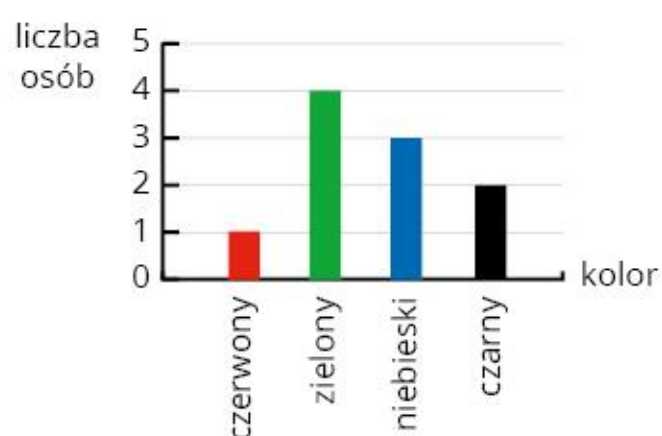
Metoda powierzchniowa

Zobrazowanie informacji za pomocą figur geometrycznych lub symboli dostosowanych rozmiarami do wielkości zjawiska, które ilustrują. Najczęściej wykorzystuje się prostokąty (słupki) w układzie pionowym lub poziomym.

Wykres słupkowy (diagram słupkowy)

Wysokość słupka wskazuje, ile razy wynik pojawił się w próbie.

przykład:



Liczba krutek prostokąta określa liczebność badanej próby, a jego wyróżnione części określają, ile razy wynik pojawił się w próbie.

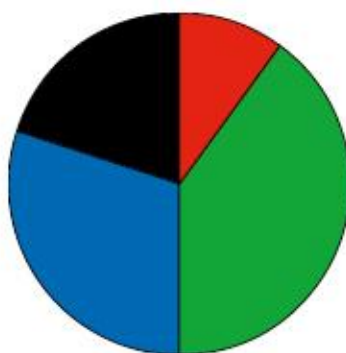
przykład:



Wykres kołowy (diagram kołowy)

Wycinki koła obrazują częstość występowania wyniku przedstawioną w procentach, przy czym 1% odpowiada $3,6^\circ$.

przykład:



czerwony: $\frac{1}{10} = 10\%$

zielony: $\frac{4}{10} = 40\%$

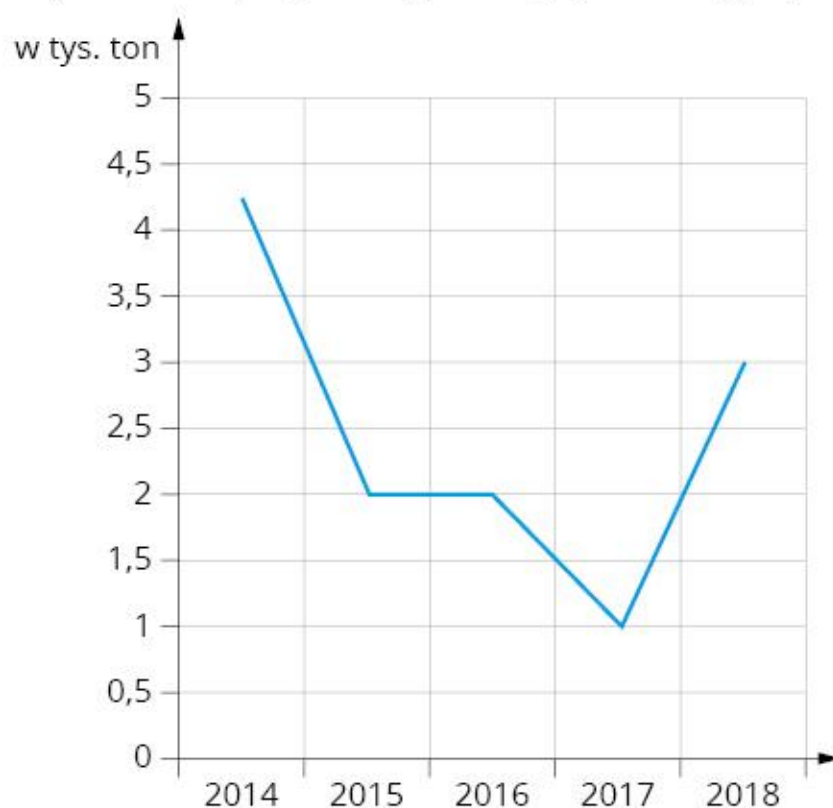
niebieski: $\frac{3}{10} = 30\%$

czarny: $\frac{2}{10} = 20\%$

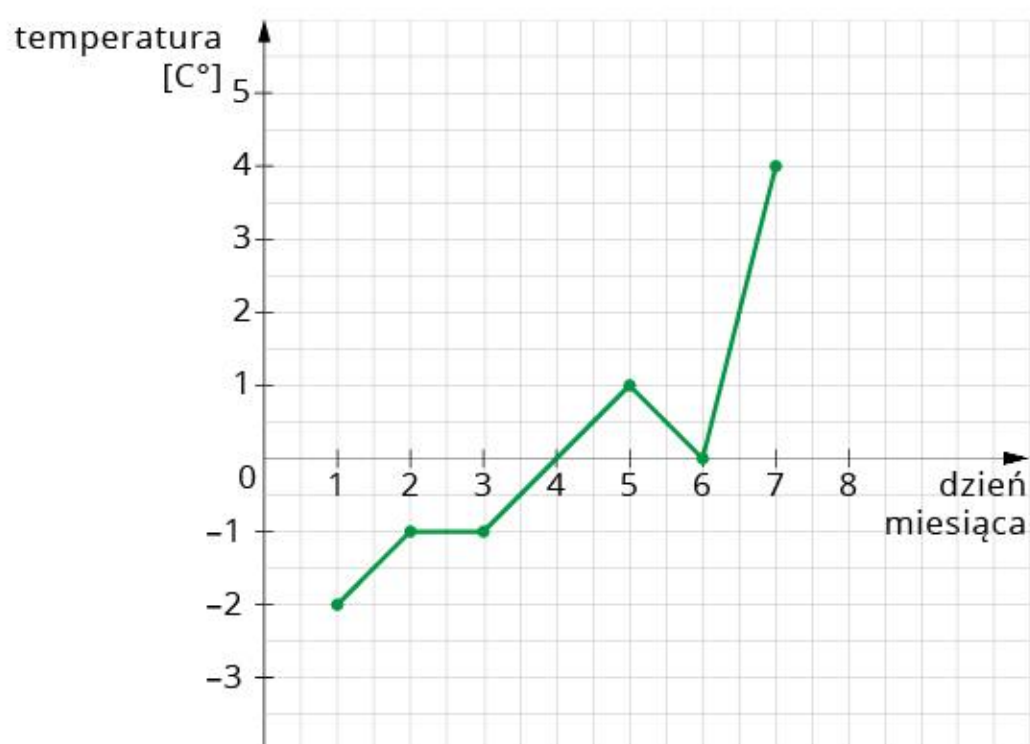
Prezentacja w układzie współrzędnych

Z reguły wykorzystuje się tylko I ćwiartkę układu współrzędnych.

przykład: Wyniki sprzedaży towarów (w tys. ton) pewnej spółki akcyjnej w ciągu kilku ostatnich lat



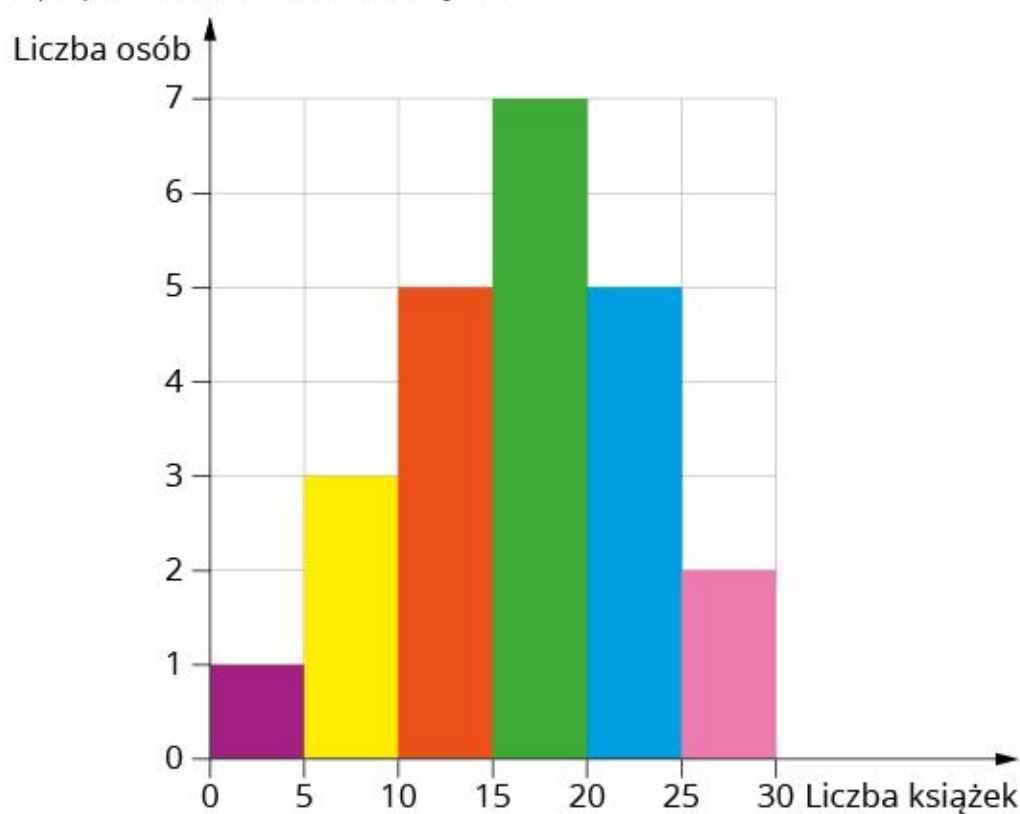
przykład: Wykres temperatury powietrza w miejscowości Grotniki w pierwszych siedmiu dniach marca 2018 r.



Histogram

Graficzny sposób przedstawienia wartości, dla których otrzymano większość wyników.

przykład: Wyniki ankiety, w której zapytano grupę uczniów klas ósmych o liczbę przeczytanych książek w poprzednim roku szkolnym.



Metoda obrazkowa

Dane liczbowe są przedstawione za pomocą znaków lub obrazków (symboli) odpowiadających swoim wyglądem rodzajowi zbiorowości, którą reprezentują.

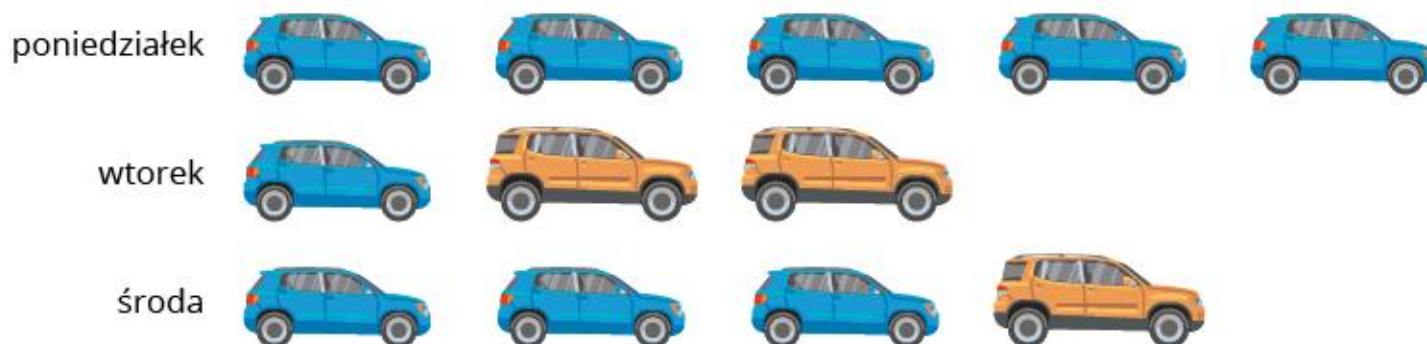
przykład: Dane dotyczące sprzedaży śliwek w ciągu trzech dni w pewnym sklepie.



Metoda ilościowa

Prezentowane wielkości są przedstawiane za pomocą łatwych do narysowania i podzielenia znaków graficznych, przy czym pojedynczy znak graficzny wyraża określoną liczbę jednostek.

przykład: Wyniki sprzedaży samochodów w pewnym salonie samochodowym w ciągu trzech dni.



15.4. PORZĄDKOWANIE DANYCH

Szereg uporządkowany – uporządkowanie (pogrupowanie) wyników badań statystycznych według niemalejących lub nierosnących poziomów cech.

przykład: Zebrane dane: 1, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 4, 4, 5, 1, 4

Szereg uporządkowany powyższych danych: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

15.5. ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ to $x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

przykład: średnia arytmetyczna liczb $-1, 0, 1, 4, 6$ to $x = \frac{-1+0+1+4+6}{5} = 2$

15.6. MEDIANA

Mediana (wartość środkowa) – n liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ uporządkowanych niemalejąco to:

- liczba $x_{\frac{n}{2}+1}$, jeśli n jest nieparzyste;
- średnia arytmetyczna liczb $x_{\frac{n}{2}}$ i $x_{\frac{n}{2}+1}$, jeśli n jest parzyste.

Mediana dzieli zestaw liczb na dwie części o równej liczebności.

przykład: $-2, -1, 2, 4, 8, 10, 11$

Mediana jest równa 4.

$-2, -1, 0, 3, 7, 8, 10, 12$

$$\frac{3+7}{2} = 5$$

Mediana jest równa 5.

16. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I KOMBINATORYKA

16.1. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

Doświadczenie losowe – doświadczenie, które może być powtarzane wielokrotnie w jednakowych (lub zbliżonych) warunkach i którego wyniku nie można przewidzieć.

przykład: rzut monetą

rzut kostką

losowanie kuli zielonej z pojemnika zawierającego kule czarne i zielone

Zdarzenie elementarne – każdy możliwy wynik doświadczenia losowego.

przykład: w rzucie kostką jest 6 zdarzeń elementarnych; może выпаść: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6

Zbiór zdarzeń elementarnych – zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia losowego. Zbiór ten oznaczamy Ω i nazywamy inaczej przestrzenią zdarzeń elementarnych.

przykład: w rzucie kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

w rzucie dwoma monetami: $\Omega = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\}$

Zdarzenie losowe – dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych. Zdarzenie losowe nazywamy też po prostu zdarzeniem.

Zdarzenia losowe oznaczamy dużymi literami alfabetu: $A, B, C, \dots$

przykład: w rzucie kostką: wypadła liczba oczek podzielna przez 3

Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A – elementy zdarzenia A .

przykład: zdarzenie A sprzyjające zdarzeniu: w rzucie kostką wypadła parzysta liczba oczek:

$A = \{2, 4, 6\}$

Zdarzenie pewne – zdarzenie losowe, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne tworzące zbiór zdarzeń elementarnych.

przykład: w rzucie kostką, np.: wypadła liczba oczek mniejsza od 7, ale większa od 0

Zdarzenie niemożliwe – zdarzenie losowe, któremu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne.

przykład: w rzucie kostką, np.: wypadła ósemka

Zdarzenie przeciwne – zdarzenie przeciwne do zdarzenia A – wszystkie zdarzenia elementarne danej przestrzeni zdarzeń elementarnych, które nie sprzyjają zdarzeniu A . Oznaczamy je jako A' .

przykład: w rzucie kostką:

A – wypadła parzysta liczba oczek

A' – wypadła nieparzysta liczba oczek

Losowanie ze zwracaniem (losowanie z powtórzeniami) – wielokrotne losowanie, w którym losowanie pojedyncze jest dokonywane z tego samego zbioru możliwych wyników. Kolejne losowania nie są od siebie zależne.

przykład: wielokrotny rzut kostką

w przypadku losowania np. kuli z urny, wylosowana kula trafia z powrotem do urny i może być wylosowana wielokrotnie

Losowanie bez zwracania (losowanie bez powtórzeń) – wielokrotne losowanie, w którym element wylosowany nie trafia z powrotem do danego zbioru.

przykład: losowanie po kolei kilku kul z pudła; kul nie wrzucamy z powrotem do pudła, więc nie można już ich ponownie wylosować

16.2. KOMBINATORYKA

Metody kombinatoryczne pozwalają na obliczenie wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych. Są też przydatne w wyznaczaniu liczby zdarzeń losowych w danej przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Zbiór

$\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ – zbiór o k elementach. Elementy w zbiorze nie powtarzają się, ich kolejność nie ma znaczenia.

Ciąg

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – ciąg o n wyrazach. Ważna jest kolejność ustawienia wyrazów. Wyrazy mogą się powtarzać.

Moc zbioru – liczba elementów danego zbioru.

Podstawowe zasady:

- Jeżeli podejmujemy kilka niezależnych decyzji częściowych, które dotyczą jednego całościowego wyboru, to liczby decyzji mnożymy.
- Jeśli dokonujemy wykluczających się wyborów, to liczby wyborów dodajemy.

Reguła iloczynu

Dane są dwa zbiory A, B takie, że:

- zbiór A ma m elementów,
- zbiór B ma n elementów,
- zbiory nie mają wspólnych elementów.

Liczba wszystkich par takich, że pierwszy element pary należy do zbioru A i drugi element należy do zbioru B , jest równa $m \cdot n$.

Jeśli:

- pewnego wyboru można dokonać etapami, podejmując wielokrotnie decyzje co do wyboru poszczególnych elementów,
- pierwszą decyzję podejmujemy na n_1 sposobów, drugą – na n_2 sposoby itd., a ostatnią decyzję podejmujemy na n_k sposobów,
- decyzje są podejmowane niezależnie od siebie, wtedy całkowita liczba możliwych wyborów jest iloczynem liczb podejmowanych decyzji, czyli wynosi $n_1 \cdot n_2 \cdot n_k$.

przykład: Ile różnych wyników można otrzymać, rzucając jednocześnie kostką i monetą?

W rzucie kostką mamy 6 możliwości: 1, 2, 3, 5, 6.

W rzucie monetą mamy 2 możliwości: orzeł, reszka.

Liczba wszystkich możliwości: $6 \cdot 2 = 12$

przykład: Na ile sposobów można się ubrać, mając do dyspozycji 3 bluzki, 2 pary spodni i 4 pary butów?

Podejmujemy 3 decyzje:

- decyzja pierwsza – bluzki wybieramy na 3 sposoby,
- decyzja druga – spodnie wybieramy na 2 sposoby,
- decyzja trzecia – buty wybieramy na 4 sposoby.

Zatem możemy się ubrać na $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ sposoby.

Reguła dodawania

Dane są dwa zbiory A, B takie, że:

- zbiór A ma m elementów,
- zbiór B ma n elementów,
- zbiory nie mają wspólnych elementów.

Jeżeli należy wybrać jeden element z tych zbiorów, to wyboru można dokonać na $m + n$ sposobów.

przykład: Mamy 2 sukienki niebieskie i 3 zielone oraz 4 kapelusze niebieskie i 2 zielone. Na ile sposobów możemy się ubrać, jeżeli sukienka i kapelusz mają być w tym samym kolorze?

- Na niebiesko możemy się ubrać na $2 \cdot 4 = 8$ sposobów.
- Na zielono możemy się ubrać na $3 \cdot 2 = 6$ sposobów.

Zatem wszystkich możliwości jest: $8 + 6 = 14$.

Zasada włączeń i wyłączeń

przykład: Należy obliczyć, ile jest wszystkich liczb naturalnych dodatnich mniejszych od 20 podzielnych przez 2 lub przez 3.

$20 : 2 = 10$ – jest 10 liczb podzielnych przez 2

$20 : 3 = 6 \text{ r } 2$ – jest 6 liczb podzielnych przez 3

$20 : 6 = 3 \text{ r } 2$ – są 3 liczby podzielne przez 2 i przez 3

Obliczamy, ile jest liczb podzielnych przez 2 lub przez 3:

$$10 + 6 - 3 = 13$$

16.3. KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIENSTWA

Zakładamy, że:

- przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona,
- wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywamy iloraz liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.

$$P(A) = \frac{\text{liczba zdarzeń sprzyjających}}{\text{liczba zdarzeń elementarnych}}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A spełnia warunek: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1.

Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0.

Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A : $P(A') = 1 - P(A)$.

przykład: Obliczamy prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek większej od 4 w rzucie kostką.

A – wyrzucono liczbę oczek większą od 4

Zbiór zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Liczba zdarzeń elementarnych: 6

Zbiór zdarzeń sprzyjających: $\{5, 6\}$

Liczba zdarzeń sprzyjających: 2

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

przykład: Obliczamy prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w rzucie monetą.

B – wyrzucono orła

Zbiór zdarzeń elementarnych:

$$\{O, R\}$$

$$\Omega = \{O, R\}$$

Liczba zdarzeń elementarnych: 2

Zbiór zdarzeń sprzyjających: $\{O\}$

Liczba zdarzeń sprzyjających: 1

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

przykład: Obliczamy prawdopodobieństwo wyrzucenia 1 i reszki w rzucie dwiema monetami.

C – wyrzucono 1 i reszkę

Zbiór zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{(O, R), (R, O), (O, R), (R, R)\}$$

Liczba zdarzeń elementarnych: 4

W rzucie monetą nie można wyrzucić jedynki.

Liczba zdarzeń sprzyjających: 0.

$$P(C) = \frac{0}{4} = 0$$

EGZAMIN ÓSMOKLASISTY

TWÓJ PIERWSZY OFICJALNY EGZAMIN NA ZAKOŃCZENIE SZKOŁY PODSTAWOWEJ

- obowiązuje wszystkich uczniów
- ma formę pisemną
- nie ma wpływu na ukończenie szkoły
- wynik to punkty zdobyte z danego przedmiotu przeliczone na procenty
- wynik ma znaczenie przy wyborze szkoły średniej

■ TERMIN EGZAMINU I ZDAWANE PRZEDMIOTY



zwykle II połowa kwietnia



Dokładna data jest podawana
1 września na **www.cke.gov.pl**



język polski



matematyka



język obcy



dotychczas 120 minut



długopis



legitymacja szkolna



dotychczas 100 minut



długopis



linijka



legitymacja szkolna



dotychczas 90 minut



długopis



legitymacja szkolna

PRZEDMIOT DODATKOWY (PLANOWANY W PRZYSZŁOŚCI)



biologia



chemia



fizyka



geografia



historia

Czas na sprawdzenie

- na każdym przedmiocie masz dodatkowe 5 minut na sprawdzenie poprawności przeniesienia odpowiedzi na kartę odpowiedzi



Zakaz wnoszenia na egzamin

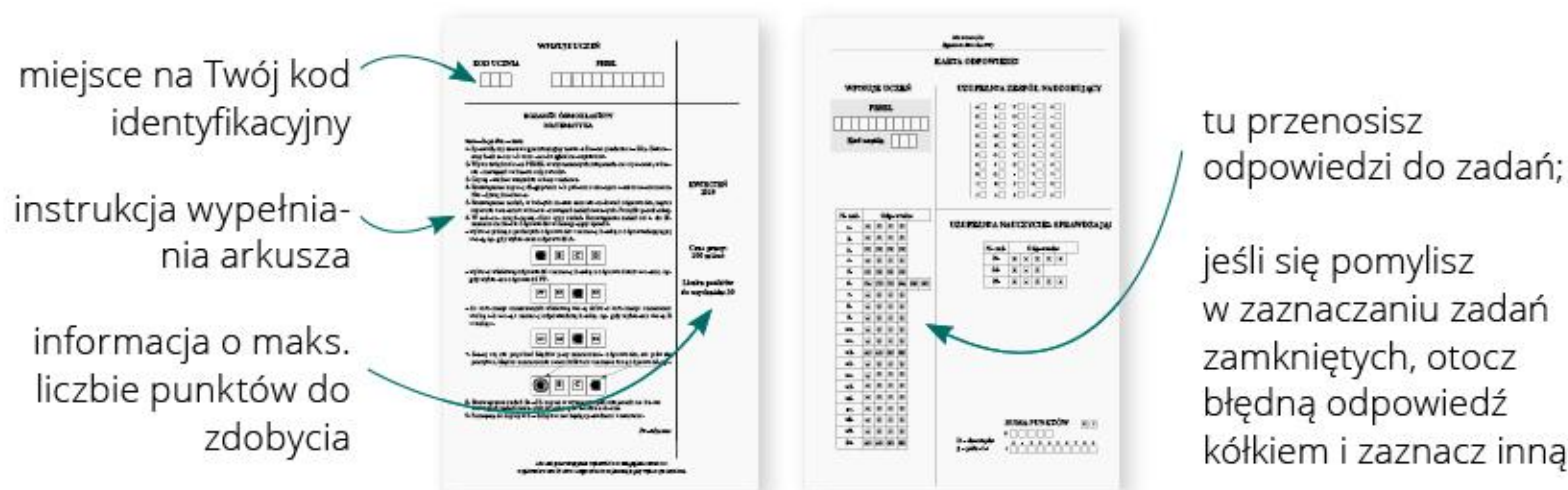
- kalkulatora
- słownika
- odtwarzacza mp3
- smartwatcha
- telefonu



ARKUSZ EGZAMINACYJNY – W NIM ROZWIĄZUJESZ ZADANIA

Na egzaminie z każdego przedmiotu otrzymasz do rozwiązania arkusz egzaminacyjny, a także kartę odpowiedzi. Na niej umieszczasz odpowiedzi do zadań. Arkusz:

- ma wielkość broszury w formacie A4
- może zawierać nawet 20 stron, w tym brudnopis
- jest czarno-biały



■ RODZAJE ZADAŃ W ARKUSZU

Arkusze z każdego przedmiotu będzie zawierać różnorodne zadania. Łączna liczba wszystkich zadań do rozwiązania zależy od przedmiotu.

JĘZYK POLSKI 17-20 zadań	MATEMATYKA 19-23 zadania	JĘZYK OBCY 45-55 zadań
--	--	--

Zadania zamknięte – wybierasz jedną odpowiedź z kilku podanych.

- wielokrotnego wyboru
- typu prawda-fałsz
- na dobieranie

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 2 cm C. 5 cm
B. 4 cm D. 8 cm

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

W utworze przedstawiona jest refleksja na temat natury ludzkiej.	P	F
Z utworu wynika, że ludzie nie mają wpływu na decyzje innych.	P	F

Wybierz odpowiedź T lub N i jej uzasadnienie spośród A lub B.

T	Tak,	ponieważ	A.	Każdy z wykładników jest liczbą nieparzystą.
N	Nie,		B.	Wykładnik potęgi 2^a nie jest podzielny przez 8.
			C.	Wartość tego wyrażenia można zapisać w postaci $8 \cdot 23$.

Zadania otwarte – musisz samodzielnie sformułować wypowiedź, nie masz odpowiedzi do wyboru.

- z luką

Podaj autora i tytuł utworu, z którego pochodzi powyższy fragment.

Autor:.....

Tytuł:

- krótkiej lub rozszerzonej odpowiedzi

Jakie pole ma część paska wskazana na rysunku? Zapisz obliczenia.

[illegible]

Arkusz nie jest podzielony na części. Może mieć maksymalnie 23 zadania. Jako pierwsze zamieszczone są zadania zamknięte (14–16 zadań). Po nich umieszczone są zadania otwarte (5–7 zadań).

Zadania zamknięte

- każde dobrze rozwiązane **zadanie zamknięte to 1 pkt**
- jeśli dobrze rozwiążesz wszystkie zadania zamknięte, masz już ok. 50% punktów z egzaminu z matematyki

Zadania otwarte

- są punktowane wyżej od zamkniętych
- w zależności od zadania możesz dostać od 2 do 4 pkt za poprawną odpowiedź
- jeśli dobrze rozwiążesz wszystkie zadania otwarte, masz kolejne 50% punktów z egzaminu z matematyki

Nawet jeśli pomylisz się w obliczeniach, **masz szansę na otrzymanie części punktów za zadanie**. Wystarczy, że Twoje obliczenia pokazują, że droga do uzyskania wyniku była prawidłowa.

■ EGZAMIN Z MATEMATYKI – DOBRZE ZAPLANUJ 100 MINUT

Przygotowanie

- Pamiętaj, że wiesz i umiesz dużo – masz za sobą powtórki i wiele rozwiązanych zadań.
- Spokojnie przeczytaj pierwszą stronę arkusza egzaminacyjnego i instrukcje.

Najpierw zadania zamknięte

- Rozwiązuj je po kolei. Jeśli nie umiesz rozwiązać danego zadania, przejdź do następnego. Do nierozwiązanego wróć na koniec.
- Dokładnie przeczytaj polecenie i wszystkie warunki, jakie musi spełnić odpowiedź.
- Jeśli nie znasz odpowiedzi na zadanie zamknięte – zaznacz najbardziej prawdopodobną.

Rozwiąż zadania otwarte

- Przy konkretnym zadaniu przypomnij sobie podobne, rozwiązywane podczas powtórek. Wykonaj zadanie z arkusza według tamtego schematu.
- Jeśli uważasz, że do wykonania zadania potrzeba niestandardowej metody – zastosuj ją.
- Jeśli ułatwi Ci to pracę – wykonuj rysunki pomocnicze.
- Pamiętaj, że etapy rozwiązywania zadania są także punktowane.
- Jeśli jedna metoda rozwiązywania się nie sprawdzi i masz jeszcze czas – spróbuj drugiej.
- Pisz czytelnie, dobrze zaplanuj miejsce na odpowiedź.

Ostatnie minuty

- Jeszcze raz przeczytaj wszystkie polecenia i sprawdź, czy Twoje obliczenia uwzględniają wszystkie dane z zadania.
- Sprawdź, czy na karcie odpowiedzi rozwiązania są dobrze zaznaczone.

SPRAWDZONE SPOSOBY NA SKUTECZNĄ NAUKĘ



OBSERWUJ

- analizuj zadania rozwiązywane krok po kroku



SŁUCHAJ

- słuchaj wyjaśnień nauczyciela



MÓW

- powtarzaj wzory na głos
- wyjaśniaj zadania komuś lub sobie



NOTUJ

- rozwiązuje zadania na kartce
- rób notatki i rysunki pomocnicze
- zapisuj wzory

TAK, ZDAM! TWÓJ PLAN NAUKI DO EGZAMINU

Powtór niezbędne wiadomości.

1

Poćwicz na przykładach i rozwiąż zadania

2

Zdaj egzamin ósmoklasisty

3

wrzesień

październik

listopad

grudzień

styczeń

luty

marzec

kwiecień

Powtarzaj działy po kolei. Przeczytaj niezbędne reguły. Przeanalizuj zadania krok po kroku, rozwiąż podobne. Rozwiąż serię zadań do działu. Od ferii rozwiązuj arkusze. Staraj się zmieścić w 100 min.

Zacznij od działów, które są dla Ciebie najtrudniejsze – powtórz wzory i rozwiąż zadania krok po kroku do tych działów. Potem rozwiąż test podsumowujący dział. Od lutego rozwiązuj arkusze.

Rozpocznij od zadań na koniec każdego działu i arkuszy egzaminacyjnych. Sprawdź, które działy i zadania wyszły najłatwiej. Powtórz wzory i reguły z tego działu. Przeanalizuj zadania krok po kroku. Wróć do arkuszy.

W WOLNEJ CHWILI

ĆWICZ KONCENTRACJĘ I TRENUJ PAMIĘĆ

○ „Zobacz to”, czyli wizualizacja

Usiądź wygodnie. Zamknij oczy. Oddychaj głęboko. Wyobraź sobie siebie na plaży. Zastanów się, jak ona wygląda, jaka jest pogoda i jakie słyszysz dźwięki. Możesz nawet dotknąć piasku! Pozostań z tym obrazem przez chwilę. Powoli otwórz oczy.

○ Policz w myślach od 100 do 1.

Jeśli przyszło Ci to z łatwością, spróbuj policzyć od 100 do 1, ale co 3 liczby: 100, 97, 94 itp.

○ Skojarzenia

Wypisz 5 numerów telefonów swoich znajomych i spróbuj je zapamiętać metodą skojarzeń. Podziel je na części i połącz w myśli z konkretnymi przedmiotami lub faktami, np. tel. 663715007: 66 – wiek dziadka, 37 – wiek mamy; 15 – numer domu, 007 – James Bond.