

matura

ZGODNE
Z WYTYCZNYMI
CKE

Teoria do matury do powtórek zamiast z podręczników

matematyka

zakres rozszerzony

VADEMECUM



WOPRON
Tłumaczenia i podręczniki

MATURA

VADEMECUM

matematyka

zakres rozszerzony

Adam Konstantynowicz

Anna Konstantynowicz

Małgorzata Pająk

 **OPERON**
Edukacja jest podróżą

2022

Projekt okładki: **Paweł Kwacz**
Redaktor prowadzący: **Michalina Stolińska**
Redakcja językowa: **Monika Turała**
Redakcja graficzna i skład: **Maciej Laska**
Korekta: **Marlena Dobrowolska**
Zdjęcia: **Shutterstock**
Rysunki: **Jan Kortas**

© Copyright by OPERON Sp. z o.o. & Adam Konstantynowicz, Anna Konstantynowicz, Małgorzata Pająk
Gdynia 2022

Wszelkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie w całości lub we fragmentach bez zgody wydawcy zabronione.
N7741

Wydawca:
OPERON Sp. z o.o.
81-212 Gdynia, ul. Hutnicza 3
tel. centrali 58 679 00 00
e-mail: info@operon.pl
www.operon.pl

ISBN 978-83-8197-200-0

Spis treści

1. LICZBY RZECZYWISTE

1.1. Liczby naturalne	12
1.2. Liczby całkowite i liczby wymierne	14
1.3. Rozwinięcie dziesiętne, liczby rzeczywiste	15
1.4. Potęga	18
1.5. Przedziały liczbowe	21
1.6. Wartość bezwzględna	23
1.7. Procenty w obliczeniach	23
1.8. Logarytm i jego własności	26
1.9. Utrwalamy wiedzę	27

2. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

2.1. Wzory skróconego mnożenia	30
2.2. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów	33
2.3. Rozkład wielomianu na czynniki	37
2.4. Pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych	39
2.5. Dzielenie wielomianów	40
2.6. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych	41
2.7. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych	43
2.8. Utrwalamy wiedzę	44

3. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

3.1. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą	46
3.2. Równania i nierówności kwadratowe	50
3.3. Równania i nierówności wielomianowe	54
3.4. Równania i nierówności wymierne	57
3.5. Zastosowanie wzorów Viète'a	60
3.6. Równania i nierówności z wartością bezwzględną	62

3.7. Równania i nierówności z parametrem	65
3.8. Utrwalamy wiedzę	68

4. UKŁADY RÓWNAŃ

4.1. Rozwiązywanie układów równań	70
4.2. Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań tekstowych	75
4.3. Utrwalamy wiedzę	78

5. FUNKCJE

5.1. Funkcja i jej własności	80
5.2. Odczytywanie własności funkcji z wykresu	82
5.3. Funkcja liniowa	85
5.4. Funkcja kwadratowa	87
5.5. Funkcja a zagadnienia geometryczne i fizyczne, kontekst praktyczny	90
5.6. Szkicowanie wykresów funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(x) $	91
5.7. Proporcjonalność odwrotna	93
5.8. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna	94
5.9. Utrwalamy wiedzę	96

6. CIĄGI

6.1. Pojęcie ciągu. Wzór ogólny ciągu	98
6.2. Wzór rekurencyjny ciągu	102
6.3. Monotoniczność ciągów	103
6.4. Ciąg arytmetyczny	105
6.5. Ciąg geometryczny	107
6.6. Procent składany	110
6.7. Granica ciągu	110
6.8. Szeregi geometryczne	112
6.9. Utrwalamy wiedzę	114

7. TRYGONOMETRIA

7.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	116
7.2. Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	117
7.3. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	119
7.4. Związki między funkcjami trygonometrycznymi	120
7.5. Twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta	122
7.6. Rozwiązywanie trójkątów	126
7.7. Miara łukowa kąta	128
7.8. Wykresy funkcji trygonometrycznych	129
7.9. Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych	131
7.10. Wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych	134
7.11. Sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów oraz funkcje trygonometryczne kątów podwojonych	136
7.12. Równania i nierówności trygonometryczne	138
7.13. Utrwalamy wiedzę	144

8. PLANIMETRIA

8.1. Trójkąty	146
8.2. Czworokąty	149
8.3. Okrąg i koło	152
8.4. Kąty w okręgu	157
8.5. Twierdzenie Talesa	158
8.6. Cechy przystawania i podobieństwa trójkątów	159
8.7. Obwody i pola figur podobnych ..	160
8.8. Punkty szczególne w trójkącie ..	161
8.9. Wielokąty foremne	164
8.10. Utrwalamy wiedzę	165

9. GEOMETRIA ANALITYCZNA

9.1. Równanie prostej na płaszczyźnie	168
9.2. Równanie prostej o zadanych własnościach	173
9.3. Odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych	176
9.4. Równanie okręgu	177
9.5. Odległość punktu od prostej	180
9.6. Punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli ..	181
9.7. Symetria osiowa i symetria środkowa	186
9.8. Wektory w układzie współrzędnych	188
9.9. Utrwalamy wiedzę	190

10. STEREOMETRIA

10.1. Wzajemne położenie prostych w przestrzeni	192
10.2. Kąt między prostą a płaszczyzną, kąt dwuścienny	193
10.3. Kąty w graniastopach i ostrosłupach	194
10.4. Kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami i płaszczyznami w walcach i stożkach	196
10.5. Przekrój prostopadłościanu daną płaszczyzną	198
10.6. Objętości i pola powierzchni graniastopów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli	199
10.7. Zależność między polami powierzchni i objętościami brył podobnych	204
10.8. Utrwalamy wiedzę	205

11. KOMBINATORYKA

11.1. Doświadczenia losowe	208
11.2. Reguły mnożenia i dodawania ..	210
11.3. Permutacje, wariacje i kombinacje	213
11.4. Utrwalamy wiedzę	214

12. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA I STATYSTYKA

12.1. Prawdopodobieństwo klasyczne	216
12.2. Własności prawdopodobieństwa	217
12.3. Prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite	218
12.4. Skala centylowa	221
12.5. Wartości średnie, mediana i dominanta	223
12.6. Odchylenie standardowe	225
12.7. Utrwalamy wiedzę	226

13. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

13.1. Obliczanie granic funkcji	228
13.2. Zastosowanie własności Darboux	230
13.3. Zastosowanie definicji pochodnej funkcji	231
13.4. Obliczanie pochodnej funkcji ..	232
13.5. Zastosowanie pochodnej do badania monotoniczności funkcji	234
13.6. Rozwiązywanie zadań optymalizacyjnych z zastosowaniem pochodnej ..	235
13.7. Utrwalamy wiedzę	237
Wybrane wzory matematyczne	238
Indeks	270

Rok maturzysty



Zdasz, tylko pamiętaj o...



optymalizacji nauki pod kątem wybranej dla siebie drogi rozwoju; ucz się tych przedmiotów, które będą Ci potrzebne podczas rekrutacji na studia



systematyczności w nauce; zacznij od planu na początku roku szkolnego i go realizuj

stopniowym **zwiększaniu intensywności nauki**;
nie tylko Ty przyśpieszasz po studniówce 😊



higienie czasu; wysypiaj się

higienie psychiki; nie rezygnuj ze wszystkich swoich przyjemności i zajęć dodatkowych



Wybierz przedmioty na maturę, a zacznij od...

1

WYTYPOWANIA

tych kierunków studiów, które są dla Ciebie wymarzonymi

2

SPRAWDZENIA

na poszczególnych uczelniach, jakie są kryteria przyjęć na te kierunki

3

UPEWNIENIA SIĘ,

że dobrze rozumiesz zawód, który Cię interesuje; porozmawiaj z kimś, kto go wykonuje

4

DOWIEDZENIA SIĘ,

jako kto i gdzie możesz pracować po rozpatrywanym kierunku studiów

5

WYTYPOWANIA

alternatywnych kierunków studiów

6

ROZWAŻENIA

stacjonarnego i niestacjonarnego trybu nauki oraz możliwych po nim tytułów zawodowych

7

ZAPOZNANIA SIĘ

z listami uczelni publicznych i niepublicznych

W nauce pomoże Ci...



stosowanie tych technik pamięciowych, które masz już sprawdzone



wyłączenie aplikacji z mediami społecznościowymi



wypróbowanie słuchania webinarów/wykładów oraz videolekcji i podcastów podczas innych czynności, np. sprzątania czy uprawiania sportu

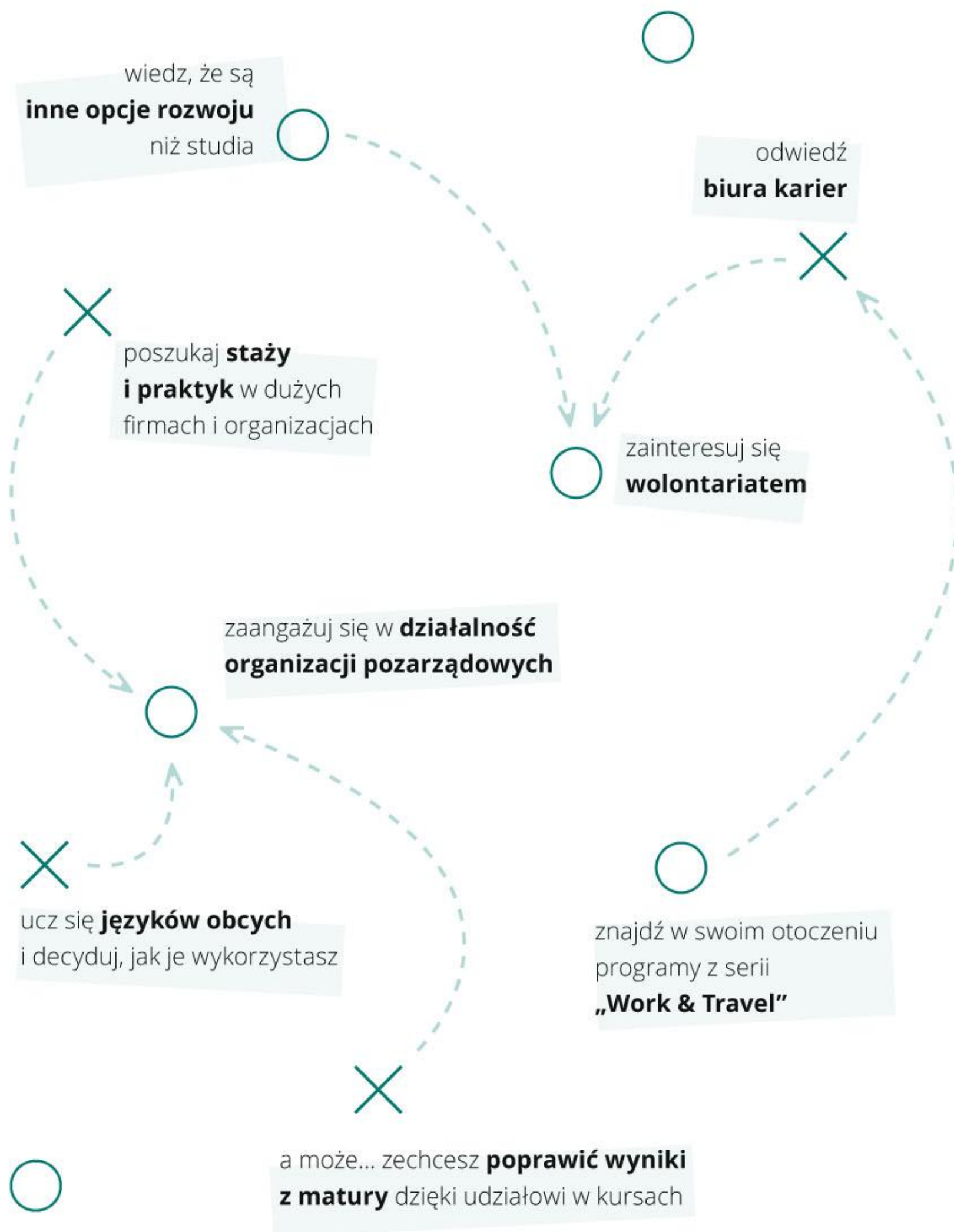


autogratyfikacja, wręczanie sobie małych i większych nagród za przebycie kolejnych etapów nauki



znalezienie dla siebie **najlepszej pory dnia** lub nocy na naukę

Miej plan B na przyszłość, czyli...



1

Liczby rzeczywiste

1.1. Liczby naturalne

Liczby naturalne

Zbiorem liczb naturalnych nazywamy zbiór liczb $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ i oznaczamy przez $\mathbb{N}$.

Liczb naturalnych jest nieskończenie wiele, a każda następna liczba naturalna jest o jeden większa od poprzedniej. Pomiędzy dwie kolejne liczby naturalne nie da się wpisać innej liczby naturalnej. Zbiór liczb naturalnych ma element najmniejszy, a nie ma elementu największego.

Działanie jest wykonalne w zbiorze wtedy, gdy elementami działania są liczby tego zbioru oraz otrzymany wynik jest liczbą tego zbioru. W zbiorze liczb naturalnych wykonalne są działania: dodawanie oraz mnożenie.

Liczby pierwsze i złożone

Zbiór liczb pierwszych jest jednym z podzbiorów zbioru liczb naturalnych.

Liczbami pierwszymi są, np.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... itd. Liczby pierwsze mają dokładnie dwa dzielniki, jedynkę i samą siebie. Liczby mające więcej niż dwa dzielniki nazywamy **liczbami złożonymi**.

Liczby 0 i 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.

Podzielność w zbiorze liczb naturalnych

Liczba naturalna n różna od zera dzieli liczbę naturalną m , jeśli istnieje liczba naturalna k , dla której zachodzi równość $m = n \cdot k$.

Wtedy mówimy, że n jest dzielnikiem liczby m lub że liczba m jest podzielna przez liczbę n .

Zapis symboliczny: $n|m$ – liczba naturalna n dzieli liczbę naturalną m . Liczbę m nazywamy **wielokrotnością** liczby n .

Przykład

Wykaż, że:

- a) jeżeli $3|162$ oraz $3|414$, to $3|(162 + 414)$;
- b) jeżeli $a|b$ i $a|c$, to $a|(b + c)$, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi i $a \neq 0$.

Rozwiązanie:

- a) Zapisujemy liczby 162 i 414 jako iloczyny o jednym z czynników równym 3:

$$162 = 3 \cdot 54 \qquad 414 = 3 \cdot 138$$

Sumujemy liczby 162 i 414 i zapisujemy jako iloczyn o jednym z czynników równym 3:

$$162 + 414 = 3 \cdot 54 + 3 \cdot 138 = 3 \cdot (54 + 138) = 3 \cdot 192$$

Liczba $3 \cdot 192$ jest podzielna przez 3.

- b) Niech k, l i m będą liczbami naturalnymi, wtedy:

Zapisujemy liczby b i c jako iloczyny o jednym z czynników równym a :

$$b = a \cdot k, c = a \cdot l$$

Sumujemy liczby b i c i zapisujemy jako iloczyn o jednym z czynników równym a :

$$b + c = a \cdot k + a \cdot l = a \cdot (k + l) = a \cdot m$$

Liczba $a \cdot m$ jest podzielna przez a .

Dzielenie z resztą

Dzielenie nie jest wykonalne w zbiorze liczb naturalnych, zatem przy dzieleniu będziemy otrzymywać reszty. Reszta z dzielenia jest mniejsza od dzielnika.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej a i dowolnej liczby naturalnej b istnieje tylko jedna para liczb naturalnych k i r taka, że $a = k \cdot b + r$, gdzie $0 \leq r < b$.

Z twierdzenia tego wnioskujemy, że przy danej liczbie b każdą liczbę naturalną a można zapisać w postaci $a = k \cdot b + r$, gdzie r jest liczbą naturalną mniejszą od b . Mówimy wówczas, że liczba a daje resztę r przy dzieleniu przez b . W szczególności, jeśli $r = 0$, to mówimy, że liczba a jest podzielna przez b .





Przykład

Wyznacz resztę z dzielenia przez 15 kwadratu liczby a , jeśli reszta z dzielenia liczby a przez 15 jest równa:

- a) 11 b) 12 c) 13

Rozwiązanie:

a) Niech $n \in \mathbb{N}$, wtedy liczbę dającą przy dzieleniu przez 15 resztę 11 zapisujemy jako $15n + 11$.

Podnosimy ją do kwadratu i otrzymujemy:

$$(15n + 11)^2 = 225n^2 + 330n + 121 = 15(15n^2 + 22n + 8) + 1 = 15k + 1, k \in \mathbb{N}, \text{ reszta } 1$$

b) Niech $n \in \mathbb{N}$, wtedy liczbę dającą przy dzieleniu przez 15 resztę 12 zapisujemy jako $15n + 12$.

Podnosimy ją do kwadratu i otrzymujemy:

$$(15n + 12)^2 = 225n^2 + 360n + 144 = 15(15n^2 + 24n + 9) + 9 = 15k + 9, k \in \mathbb{N}, \text{ reszta } 9$$

c) Niech $n \in \mathbb{N}$, wtedy liczbę dającą przy dzieleniu przez 15 resztę 13 zapisujemy jako $15n + 13$.

Podnosimy ją do kwadratu i otrzymujemy:

$$(15n + 13)^2 = 225n^2 + 390n + 169 = 15(15n^2 + 26n + 11) + 4 = 15k + 4, k \in \mathbb{N}, \text{ reszta } 4$$

Przykład

Reszta z dzielenia liczby naturalnej a przez 44 wynosi 33, a reszta z dzielenia liczby naturalnej b przez 44 wynosi 22.

Wykaż, że reszta z dzielenia sumy liczb $a + b$ przez 44 wynosi 11.

Rozwiązanie:

Niech $n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy liczbę a dającą przy dzieleniu przez 44 resztę 33 zapisujemy jako $a = 44n + 33$,

a liczbę b dającą przy dzieleniu przez 44 resztę 22 zapisujemy jako $b = 44m + 22$.

Zatem suma liczb:

$$a + b = 44n + 33 + 44m + 22 = 44n + 44m + 44 + 11 = 44(n + m + 1) + 11 = 44k + 11, k \in \mathbb{N}$$

Przykład

Wykaż, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie:

Niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $n, n + 1, n + 2$ będą trzema kolejnymi liczbami naturalnymi.

Sumę sześciątów tych liczb możemy zapisać jako:

$$\begin{aligned} n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = \\ &= 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) = 3k, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Zatem jest ona podzielna przez 3.

Przykład

Ile jest wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 1986 podzielnych przez 53?

Rozwiązanie:

Dzielimy 1986 przez 53 i otrzymujemy 37 i resztę 25.

Liczb tych jest 37.

Dowodzenie podzielności liczb

Twierdzenie jest to zdanie wyrażające fakty, czyli zdanie, które można udowodnić.

Dowód jest to rozumowanie uzasadniające, dlaczego dane zdanie jest prawdziwe.

Dowód nie polega na sprawdzeniu, czy dane zdanie jest prawdziwe w jednym lub kilku konkretnych przypadkach, nie prowadzimy więc dowodu, przyjmując konkretne liczby. Musimy udowodnić, że zdanie jest prawdziwe zawsze (we wszystkich nieskończenie wielu przypadkach).

Przykład

Wykaż, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb nieparzystych przy dzieleniu przez 6 daje resztę 3.

Rozwiązanie:

Niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy liczbę nieparzystą zapisujemy jako $2n + 1$.

Trzy kolejne liczby nieparzyste, to $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5$.

Suma sześciątów tych liczb jest równa:

$$\begin{aligned} 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 + 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 + 8n^3 + 60n^2 + 150n + 125 &= 24n^3 + 108n^2 + 210n + 153 = \\ &= 6(4n^3 + 18n^2 + 35n + 25) + 3 = 6 \cdot k + 3, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Suma sześciątów trzech kolejnych liczb nieparzystych przy dzieleniu przez 6 daje resztę 3.

1.2. Liczby całkowite i liczby wymierne

Liczby całkowite

Zbiorem liczb całkowitych nazywamy zbiór liczb $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ i oznaczamy jako $\mathbb{Z}$.

Liczb całkowitych jest nieskończenie wiele. Zbiór liczb całkowitych nie ma elementu najmniejszego i nie ma elementu największego. Każda następna liczba całkowita jest o jeden większa od poprzedniej. Pomiedzy dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi nie ma innej liczby całkowitej. W zbiorze liczb całkowitych wykonalne są działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie. Wykonując dzielenie w zbiorze liczb całkowitych nie zawsze otrzymamy liczbę całkowitą, np. $13 \cdot 5 \notin \mathbb{Z}$. Zbiór liczb całkowitych zawiera zbiór liczb naturalnych.

Liczby wymierne

Liczby wymierne to liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi.

Zbiór liczb wymiernych zapisujemy: $\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{m}{n}, n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$.

Liczb wymiernych jest nieskończenie wiele. Zbiór liczb wymiernych nie ma elementu najmniejszego i nie ma elementu największego. Pomiedzy dwiema kolejnymi liczbami wymiernymi nie ma innej liczby wymiernej. W zbiorze liczb wymiernych wykonalne są działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Mnożąc lub dzieląc dwie liczby o jednakowych znakach, w wyniku otrzymujemy liczbę dodatnią.

Mnożąc lub dzieląc dwie liczby o różnych znakach, w wyniku otrzymujemy liczbę ujemną.

Prawa działań

Prawa działań na liczbach:

1. Prawo przemienności dodawania	$a + b = b + a$
2. Prawo przemienności mnożenia	$a \cdot b = b \cdot a$
3. Prawo łączności dodawania	$a + (b + c) = (a + b) + c$
4. Prawo łączności mnożenia	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
5. Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
6. Prawo rozdzielności mnożenia względem odejmowania	$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
Elementem neutralnym dodawania jest 0.	$a + 0 = a$
Elementem neutralnym mnożenia jest 1.	$a \cdot 1 = a$

Działania na ułamkach zwykłych

Przykład

Wykonaj wskazane działania.

a) $7\frac{12}{13} + 8\frac{11}{91}$

b) $15\frac{7}{12} - 3\frac{8}{9}$

c) $9\frac{12}{17} \cdot 3\frac{2}{5}$

d) $15\frac{3}{4} : 8\frac{7}{13}$

Rozwiązanie:

a) Dodając ułamki zwykłe, musimy sprowadzić je do wspólnego mianownika, a następnie dodać liczniki, mianownik pozostawiając bez zmian:

$$7\frac{12}{13} + 8\frac{11}{91} = 7\frac{84}{91} + 8\frac{11}{91} = 15\frac{95}{91} = 16\frac{4}{91}$$

b) Odejmując ułamki zwykłe, musimy sprowadzić je do wspólnego mianownika, a następnie odjąć liczniki, mianownik pozostawiając bez zmian:

$$15\frac{7}{12} - 3\frac{8}{9} = 15\frac{21}{36} - 3\frac{32}{36} = 14\frac{57}{36} - 3\frac{32}{36} = 11\frac{25}{36}$$

c) Mnożąc ułamki zwykłe, mnożymy licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik, skracając, jeżeli to możliwe:

$$9\frac{12}{17} \cdot 3\frac{2}{5} = \frac{\cancel{165}^{33}}{\cancel{17}_1} \cdot \frac{\cancel{17}^1}{5} = 33$$

d) Dzielenie ułamków zwykłych zastępujemy mnożeniem pierwszego ułamka przez odwrotność drugiego ułamka:

$$15\frac{3}{4} : 8\frac{7}{13} = \frac{63}{4} : \frac{111}{13} = \frac{\cancel{63}^{21}}{4} \cdot \frac{13}{\cancel{111}_{37}} = \frac{273}{148} = 1\frac{125}{148}$$

Dzielenie z resztą

Przykład

Oblicz resztę z dzielenia liczby $\frac{-5+15-(-3)-(3-33)+52-(-5)}{-8-(-8)-9-(-13)}$ przez $\frac{7\frac{5}{7}+8\frac{10}{21}+19\frac{51}{63}}{12\frac{5}{11}-3\frac{8}{33}-6\frac{21}{99}}$.

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość wyrażenia: $\frac{-5+15-(-3)-(3-33)+52-(-5)}{-8-(-8)-9-(-13)} = \frac{100}{4} = 25$

Obliczamy wartość wyrażenia: $\frac{7\frac{5}{7}+8\frac{10}{21}+19\frac{51}{63}}{12\frac{5}{11}-3\frac{8}{33}-6\frac{21}{99}} = \frac{7\frac{45}{63}+8\frac{30}{63}+19\frac{51}{63}}{12\frac{45}{99}-3\frac{24}{99}-6\frac{21}{99}} = \frac{36}{3} = 12$

Wykonujemy dzielenie: $25 : 12 = 2$, reszta 1

1.3. Rozwinięcie dziesiętne, liczby rzeczywiste

Rozwinięcie dziesiętne

Rozwinięciem dziesiętnym nazywamy zapis ułamka zwykłego w postaci dziesiętnej.

Każdy ułamek zwykły można przedstawić w postaci dziesiętnej. Można to zrobić, rozszerzając ułamek zwykły (jeżeli się da) do mianownika 10, 100, 1000, ... itp. lub też wykonać dzielenie licznika przez mianownik.

Ułamki dziesiętne skończone otrzymujemy przy rozszerzaniu lub skracaniu ułamków zwykłych do ułamków o mianownikach 10, 100, 1000, ... itd.

Przykład

Znajdź rozwinięcia dziesiętne podanych ułamków.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $3\frac{17}{2000}$

Rozwiązanie:

a) Rozszerzamy ułamek do mianownika 100:

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25$$

b) Rozszerzamy ułamek do mianownika 1 000:

$$\frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = 0,625$$

c) Rozszerzamy ułamek do mianownika 10 000:

$$3\frac{17}{2000} = 3\frac{85}{10000} = 3,0085$$

Przykład

Znajdź rozwinięcia dziesiętne podanych ułamków.

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $5\frac{9}{11}$

Rozwiązanie:

Dzielimy licznik przez mianownik, np. na kalkulatorze.

a) $\frac{1}{6} = 0,1(6)$ b) $\frac{5}{9} = 0,(5)$ c) $5\frac{9}{11} = 5,(81)$

Przy dzieleniu licznika przez mianownik możemy otrzymać rozwinięcia dziesiętne skończone oraz **rozwinięcia dziesiętne nieskończone**. Cyfrę lub grupę cyfr w rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym liczby wymiernej nazywamy **okresem** i zapisujemy w nawiasie.

Zamieniając ułamek dziesiętny skończony na ułamek zwykły, zapisujemy go jako ułamek o mianowniku 10, 100, 1000, ... i odpowiednio skracamy.

Przykład

Zamień ułamki dziesiętne na zwykłe i doprowadź je do postaci nieskracalnej.

- a) 0,375 b) 0,452 c) 5,1125

Rozwiązanie:

$$\text{a) } 0,375 = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8} \quad \text{b) } 0,452 = \frac{452}{1000} = \frac{113}{250} \quad \text{c) } 5,1125 = 5\frac{1125}{10000} = 5\frac{9}{80}$$

Przykład

Zamień ułamki dziesiętne na zwykłe i doprowadź je do postaci nieskracalnej.

- a) 0,(3) b) 0,(36) c) 0,1(251)

Rozwiązanie:

- a) Niech $x = 0,333\dots$, wtedy $10x = 3,333\dots$

$$\text{zatem } 10x - x = 3,333\dots - 0,333\dots$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

- b) Niech $x = 0,3636\dots$, wtedy $100x = 36,3636\dots$

$$\text{zatem } 100x - x = 36,3636\dots - 0,3636\dots$$

$$99x = 36$$

$$x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

- c) Niech $x = 0,1251251\dots$, wtedy $10x = 1,251251\dots$ oraz $10000x = 1251,251251\dots$

$$\text{zatem } 10000x - 10x = 1251,251251\dots - 1,251251\dots$$

$$9990x = 1250$$

$$x = \frac{125}{9990} = \frac{125}{999}$$

Przykład

Zamień ułamki dziesiętne na zwykłe.

- a) 5,7(3) b) 11,21(18)

Rozwiązanie:

- a) Niech $x = 5,733\dots$, wtedy $10x = 57,333\dots$ oraz $100x = 573,333\dots$

$$\text{zatem } 100x - 10x = 573,333\dots - 57,333\dots$$

$$90x = 516$$

$$x = \frac{516}{90} = 5\frac{66}{90} = 5\frac{11}{15}$$

- b) Niech $x = 11,211818\dots$, wtedy $100x = 1121,1818\dots$ oraz $10000x = 112118,1818\dots$

$$\text{zatem } 10000x - 100x = 112118,1818\dots - 1121,1818\dots$$

$$9900x = 110997$$

$$x = \frac{110997}{9900} = 11\frac{2097}{9900} = 11\frac{233}{1100}$$

Jeżeli w obliczeniach występują ułamki zwykłe i dziesiętne, to ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwykłe lub (w miarę możliwości) zamieniamy ułamki zwykłe na dziesiętne i wykonujemy działania.

Liczby niewymierne

Liczby niewymiernymi nazywamy liczby mające rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe.

Zbiór wszystkich liczb niewymiernych oznaczamy przez $\mathbb{I}\mathbb{Q}$

Usuwanie niewymierności z mianownika

W działaniach matematycznych przyjęto, że w mianowniku ułamka nie powinno być liczby niewymiernej. Należy więc usunąć tę niewymierność z mianownika, czyli na usunąć pierwiastki z mianownika takiego ułamka.

Przykład

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{8}{\sqrt{14}}$ b) $\frac{9}{\sqrt[3]{9}}$ c) $\frac{12}{\sqrt[4]{2}}$

Rozwiązanie:

a) Mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt{14}$:

$$\frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{14} = \frac{4\sqrt{14}}{7}$$

b) Mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9}$:

$$\frac{9}{\sqrt[3]{9}} = \frac{9}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9}} = \frac{9\sqrt[3]{81}}{9} = \sqrt[3]{81}$$

c) Mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$:

$$\frac{12}{\sqrt[4]{2}} = \frac{12}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{12\sqrt[4]{8}}{2} = 6\sqrt[4]{8}$$

Liczby rzeczywiste

Zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych i oznaczamy literą $\mathbb{R}$.

W zbiorze liczb rzeczywistych wykonalne są cztery podstawowe działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie (oprócz dzielenia przez zero) oraz pierwiastkowanie stopnia nieparzystego.

Przykład

Wykonaj działania.

a) $17 - \sqrt{3} - 5 + 2\sqrt{3} - 1$ b) $\sqrt{5}(8 - 2\sqrt{5}) - 5(\sqrt{5} - 2)$ c) $(\sqrt{6} - \sqrt{7})(\sqrt{7} + \sqrt{6})$

Rozwiązanie:

a) $17 - \sqrt{3} - 5 + 2\sqrt{3} - 1 = 11 + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{5}(8 - 2\sqrt{5}) - 5(\sqrt{5} - 2) = 8\sqrt{5} - 10 - 5\sqrt{5} + 10 = 3\sqrt{5}$

c) $(\sqrt{6} - \sqrt{7})(\sqrt{7} + \sqrt{6}) = \sqrt{42} + 6 - 7 - \sqrt{42} = -1$

Przykład

Wykonaj działania.

a) $\left[\left(-\frac{1}{3} \right)^2 : \sqrt[3]{27} - (-1)^2 \right] : \frac{1}{\sqrt{81}}$ b) $\frac{\sqrt{5\frac{4}{9}} - \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} : 4,5}{\left(8 - 3 \cdot 2\frac{1}{3} \right) \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^{-1}}$

Rozwiązanie:

a) Obliczając potęgi i pierwiastki, otrzymujemy:

$$\left[\left(-\frac{1}{3} \right)^2 : \sqrt[3]{27} - (-1)^2 \right] : \frac{1}{\sqrt{81}} = \left[\frac{1}{9} : 3 - 1 \right] : \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} - 1 \right) \cdot 9 = \left(\frac{1}{27} - 1 \right) \cdot 9 = -\frac{26}{27} \cdot 9 = -\frac{26}{3} = -8\frac{2}{3}$$

b) Obliczając potęgi i pierwiastki, otrzymujemy:

$$\frac{\sqrt{5\frac{4}{9}} - \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} : 4,5}{\left(8 - 3 \cdot 2\frac{1}{3} \right) \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^{-1}} = \frac{\sqrt{\frac{49}{9}} - 9 : 4,5}{\left(8 - 3 \cdot \frac{7}{3} \right) \cdot (-3)} = \frac{\frac{7}{3} - 2}{(8 - 7) \cdot (-3)} = \frac{\frac{1}{3}}{-3} = -\frac{1}{9}$$

1.4. Potęga

Potęga o wykładniku całkowitym

1. Każda liczba rzeczywista, różna od zera, podniesiona do potęgi 0 jest równa 1.

$$a^0 = 1, \text{ dla } a \neq 0$$

2. Każda liczba rzeczywista podniesiona do potęgi 1 jest tą samą liczbą.

$$a^1 = a$$

3. Potęga liczby rzeczywistej a o wykładniku naturalnym $n \geq 2$ jest iloczynem n czynników, z których każdy równy jest liczbie a .

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n, \text{ dla } n \geq 2$$

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i dla liczby $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ przyjmujemy, że $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Przykład

Oblicz.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (18,382)^0 & \text{b)} \left(6\frac{7}{11}\right)^1 & \text{c)} \left(-13\frac{1}{3}\right)^2 \\ \text{d)} (-1)^9 & \text{e)} \left(-\frac{3}{4}\right)^{-4} & \text{f)} \left(5\frac{2}{7}\right)^{-3} \end{array}$$

Rozwiązanie:

$$\text{a)} (18,382)^0 = 1 \text{ z definicji}$$

$$\text{b)} \left(6\frac{7}{11}\right)^1 = 6\frac{7}{11} \text{ z definicji}$$

$$\text{c)} \left(-13\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{40}{3}\right) \cdot \left(-\frac{40}{3}\right) = \frac{1600}{9} = 177\frac{7}{9}$$

$$\text{d)} (-1)^9 = -1$$

$$\text{e)} \left(-\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(-\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81}$$

$$\text{f)} \left(5\frac{2}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{37}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{37}\right)^3 = \frac{343}{50653}$$

Prawa działań na potęgach

Działania na potęgach

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } n, m \in \mathbb{Z}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } n, m \in \mathbb{Z} \text{ i } n \geq m$$

$$(a^n)^m = a^{nm}, \text{ gdzie } a \neq 0 \text{ i } n, m \in \mathbb{Z}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0, n \in \mathbb{Z}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a \neq 0 \text{ i } b \neq 0$$

Przykład

Zapisz w postaci jednej potęgi.

$$\text{a)} 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-2} \quad \text{b)} \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^l : \left(\frac{2}{3}\right)^m$$

$$\text{c)} 6^6 : 6^4 \cdot 6^{11}$$

$$\text{d)} (17^3)^{-2}$$

$$\text{e)} \left[\left(-\frac{29}{113}\right)^{-7}\right]^{-5}$$

$$\text{f)} (-27)^2 \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^2 \cdot 9^2$$

$$\text{g)} \left(-\frac{16}{123}\right)^2 \cdot \left(-\frac{8}{41}\right)^{-2}$$

Rozwiązanie:

$$\text{a)} 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-2} = 2^{3+4-2} = 2^5$$

$$\text{b)} \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^l : \left(\frac{2}{3}\right)^m = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+l-m}$$

$$\text{c)} 6^6 : 6^4 \cdot 6^{11} = 6^{6-4+11} = 6^{13}$$

$$\text{d)} (17^3)^{-2} = 17^{3(-2)} = 17^{-6}$$

$$\text{e)} \left[\left(-\frac{29}{113}\right)^{-7}\right]^{-5} = \left(-\frac{29}{113}\right)^{(-7)(-5)} = \left(-\frac{29}{113}\right)^{35}$$

$$\text{f)} (-27)^2 \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^2 \cdot 9^2 = \left(-27 \cdot \frac{1}{81} \cdot 9\right)^2 = (-3)^2$$

$$\text{g)} \left(-\frac{16}{123}\right)^2 \cdot \left(-\frac{8}{41}\right)^{-2} = \left(-\frac{16}{123}\right)^2 \cdot \left(-\frac{41}{8}\right)^2 = \left[\left(-\frac{16}{123}\right) \cdot \left(-\frac{41}{8}\right)\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Własności monotoniczności potęg

Dla dowolnej liczby rzeczywistej a i dowolnych liczb rzeczywistych x i y mamy:

1. jeżeli $a > 1$ oraz $x < y$, to $a^x < a^y$,
2. jeżeli $a > 1$ oraz $x > y$, to $a^x > a^y$,
3. jeżeli $0 < a < 1$ oraz $x < y$, to $a^x > a^y$,
4. jeżeli $0 < a < 1$ oraz $x > y$, to $a^x < a^y$.

Przykład

Porównaj potęgi o tych samych podstawach.

a) 3^5 i 3^7 b) 17^{12} i 17^8 c) $\left(\frac{4}{15}\right)^6$ i $\left(\frac{4}{15}\right)^9$ d) $\left(\frac{7}{19}\right)^{41}$ i $\left(\frac{7}{19}\right)^{16}$

Rozwiązanie:

a) $3^5 < 3^7$, bo $5 < 7$ i $3 > 1$

b) $17^{12} > 17^8$, bo $12 > 8$ i $17 > 1$

c) $\left(\frac{4}{15}\right)^6 > \left(\frac{4}{15}\right)^9$, bo $6 < 9$ i $0 < \frac{4}{15} < 1$

d) $\left(\frac{7}{19}\right)^{41} < \left(\frac{7}{19}\right)^{16}$, bo $41 > 16$ i $0 < \frac{7}{19} < 1$

Notacja wykładnicza

Notacja wykładnicza jest to zapis liczby w postaci $a \cdot 10^n$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$ oraz $1 \leq a < 10$ i $a \in \mathbb{R}$.

Przykład

Zapisz liczby w notacji wykładniczej.

a) 27 000 000 c) 0,000013
b) 5 000 000 000 000 d) 0,000000000000003

Rozwiązanie:

a) $27\,000\,000 = 2,7 \cdot 10^7$

c) $0,000013 = 1,3 \cdot 10^{-5}$

b) $5\,000\,000\,000 = 5 \cdot 10^9$

d) $0,000000000000003 = 3 \cdot 10^{-14}$

Potęga o wykładniku wymiernym

Dla $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ prawdziwy jest wzór $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Ułamki o liczniku równym 1 w wykładniku potęgi oznaczają, że tę potęgę możemy zapisać jako pierwiastek stopnia takiego, jaka liczba występuje w mianowniku wykładnika.

Przykład

Oblicz potęgi.

a) $144^{\frac{1}{2}}$ b) $(-64)^{\frac{1}{3}}$ c) $81^{\frac{1}{4}}$
d) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$ e) $\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{6}}$ f) $2048^{\frac{1}{11}}$

Rozwiązanie:

a) $144^{\frac{1}{2}} = \sqrt{144} = 12$

b) $(-64)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-64} = -4$

c) $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

d) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

e) $\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{1}{729}} = \frac{1}{3}$

f) $2048^{\frac{1}{11}} = \sqrt[11]{2048} = 2$

Dla $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $m \in \mathbb{Z}$ i $a \geq 0$ prawdziwy jest wzór $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Przykład

Zapisz w postaci pierwiastka.

a) $5^{\frac{3}{2}}$ b) $11^{\frac{5}{3}}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ d) $13^{\frac{13}{5}}$

Rozwiązanie:

a) $5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3}$ b) $11^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{11^5}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^3}$ d) $13^{\frac{13}{5}} = \sqrt[5]{13^{13}}$

Z połączenia dwóch wzorów:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0, n \in \mathbb{N} \text{ oraz } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{Z} \text{ i } a \geq 0$$

otrzymujemy wzór:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \text{ i } a > 0$$

Przykład

Zapisz w postaci pierwiastka.

a) $9^{-\frac{3}{2}}$ b) $125^{-\frac{5}{3}}$ c) $216^{-\frac{3}{4}}$ d) $19^{-\frac{11}{5}}$

Rozwiązanie:

a) $9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9^3}}$ b) $125^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125^5}}$ c) $216^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{216^3}}$ d) $19^{-\frac{11}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{19^{11}}}$

Ponieważ działania na potęgach są wygodniejsze niż działania na pierwiastkach, powyższe wzory możemy zapisać jako:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 1, \text{ dla } n \text{ parzystych } a \in \mathbb{R} \text{ i } a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \text{ i } a \geq 0$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \text{ i } a > 0$$

Przykład

Wykonaj działania.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{125}$ c) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{49} : \sqrt[5]{343}$

Rozwiązanie:

Zamieniamy pierwiastki na potęgi i wykonujemy działania na potęgach:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = 2^{\frac{31}{30}}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[4]{125} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{3}} \cdot 125^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = 5^{\frac{23}{12}}$

c) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{49} : \sqrt[5]{343} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{4}} : 343^{\frac{1}{5}} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} : 7^{\frac{3}{5}} = 7^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5}} = 7^{\frac{7}{30}}$

Przykład

Zapisz w postaci potęgi.

a) $\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5}}$ d) $\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt[5]{7}}$

Rozwiązanie:

Zamieniamy pierwiastki na potęgi i wykonujemy działania na potęgach:

a) $\sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{2^{\frac{5}{6}}} = \left(2^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{12}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{5}{6}}} = \sqrt[3]{\left(3^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{5}{12}}} = \left(3^{\frac{5}{12}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{36}}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5}} = \left[5 \cdot \left(5 \cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{5}} = \left[5 \cdot \left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{5}} = \left[5 \cdot 5^{\frac{4}{9}}\right]^{\frac{1}{5}} = \left[5^{\frac{13}{9}}\right]^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{13}{45}}$

d) $\sqrt[4]{7 \cdot \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt[5]{7}} = \left\{7 \cdot \left[7 \cdot \left(7 \cdot 7^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}\right\} = \left\{7 \cdot \left[7 \cdot \left(7^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}\right\} = \left\{7 \cdot \left[7 \cdot 7^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{4}}\right\} = \left\{7 \cdot \left[7^{\frac{7}{4}}\right]^{\frac{1}{4}}\right\} =$
 $= \left\{7 \cdot 7^{\frac{7}{16}}\right\}^{\frac{1}{4}} = \left\{7^{\frac{19}{16}}\right\}^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{19}{64}}$

1.5. Przedziały liczbowe

Przedziały liczbowe

W zbiorze liczb rzeczywistych wyróżniamy podzbiory zwane **przedziałami liczbowymi**. Przedziały liczbowe dzielimy na **przedziały ograniczone** i **nieograniczone** (nieskończone).

Przedziały ograniczone

Wyróżniamy kilka rodzajów przedziałów ograniczonych.

Przedziałem otwartym o końcach a, b ($a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są większe od a i jednocześnie mniejsze od b . Przedział otwarty o końcach a, b zapisujemy (a, b) . Liczba x należy do przedziału (a, b) wtedy, gdy spełnia podwójną nierówność $a < x < b$.

Przedział otwarty (a, b) często oznacza się na osi liczbowej następująco:



Przedziałem domkniętym o końcach a, b ($a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są niemniejsze od a (mogą być równe) i jednocześnie nie większe od b (mogą być równe). Przedział domknięty o końcach a, b zapisujemy $\langle a, b \rangle$. Liczba x należy do przedziału $\langle a, b \rangle$ wtedy, gdy spełnia podwójną nierówność $a \leq x \leq b$.

Przedział domknięty $\langle a, b \rangle$ możemy oznaczyć na osi liczbowej następująco:



Przedział lewostronnie domknięty $\langle a, b \rangle$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a \leq x < b$. Przedział lewostronnie domknięty $\langle a, b \rangle$ możemy oznaczyć na osi liczbowej następująco:



Przedział prawostronnie domknięty $(a, b]$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a < x \leq b$. Przedział lewostronnie domknięty $\langle a, b \rangle$ możemy oznaczyć na osi liczbowej w taki oto sposób:



Przykład

Zaznacz na osi liczbowej przedziały.

a) $(-1, 6)$



b) $(-2, 4)$



c) $\langle 2, 5 \rangle$



d) $(-1,5, 3,5]$



Przedziały nieograniczone

Wyróżniamy kilka rodzajów przedziałów nieograniczonych.

Przedział otwarty nieograniczony $(-\infty, a)$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x < a$.

Ilustracja graficzna:





Przedział prawostronnie domknięty nieograniczony $(-\infty, a]$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x \leq a$.

Ilustracja graficzna:



Przedział otwarty nieograniczony (a, ∞) to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x > a$.

Ilustracja graficzna:



Przedział lewostronnie domknięty nieograniczony $[a, \infty)$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x \geq a$.

Ilustracja graficzna:



Przykład

Zaznacz na osi liczbowej przedziały.

a) $(-3, \infty)$



b) $(-\infty, \sqrt{2})$



Suma, iloczyn i różnica zbiorów

Sumą dwóch zbiorów liczb A i B (przedziałów A i B) nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

Iloczynem zbiorów liczb A i B (przedziałów A i B) nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B . Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

Różnicą zbiorów A i B (przedziałów A i B) nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B oznaczamy: $A \setminus B$.

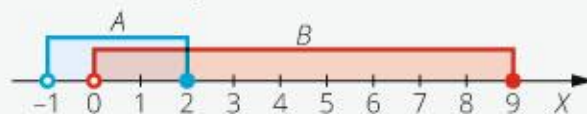
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

Przykład

Wyznacz sumę, iloczyn oraz różnicę przedziałów $A = (-1, 2)$ i $B = (0, 9)$.

Rozwiązanie:

Zaznaczamy przedziały A i B na osi liczbowej.



Wyznaczamy sumę przedziałów A i B : $A \cup B = (-1, 2) \cup (0, 9) = (-1, 9)$

Wyznaczamy iloczyn przedziałów A i B : $A \cap B = (-1, 2) \cap (0, 9) = (0, 2)$

Wyznaczamy różnicę przedziałów A i B : $A \setminus B = (-1, 0)$

Odpowiedź: Sumą jest przedział $(-1, 9)$, iloczynem – przedział $(0, 2)$, a różnicą – przedział $(-1, 0)$.

Iloczyn przedziałów może nie zawierać ani jednej liczby. Mówimy wówczas o zbiorze pustym i oznaczamy $\emptyset$, np. $(-2, 0) \cap (0, 1) = \emptyset$. Iloczyn przedziałów może też być zbiorem jednoelementowym, np. $\{0, 3\} \cap \{3, \infty\} = \{3\}$.

1.6. Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna

Jednym z ważniejszych terminów dotyczących liczb rzeczywistych jest pojęcie **wartości bezwzględnej**.

Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę $|a|$ określoną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{gdy } a \geq 0 \\ -a & \text{gdy } a < 0 \end{cases}.$$

Przykład

$$|1,5| = 1,5$$

$$|-6| = -(-6) = 6$$

$$|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1, \text{ ponieważ } \sqrt{2} - 1 > 0$$

$$|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}, \text{ ponieważ } \sqrt{3} - 2 < 0$$

Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Wartość bezwzględną interpretujemy jako odległość punktu odpowiadającego danej liczbie na osi liczbowej od punktu odpowiadającego liczbie 0.

Wiemy, że wartością bezwzględną liczby nieujemnej jest ta sama liczba, a wartością bezwzględną liczby ujemnej jest przeciwna do niej liczba dodatnia. Wynika stąd więc, że $|a| = |-a|$.

Przykład

Wyznacz liczby spełniające równanie $|x| = 5$.

Rozwiązanie:

Zaznaczamy na osi liczbowej wszystkie liczby, których odległość od 0 jest równa 5.



Odpowiedź: Jedynymi liczbami spełniającymi równanie $|x| = 5$ są liczby 5 i -5.

Przykład

Rozwiąż nierówność.

a) $|x| < 2$.

Rozwiązanie:

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest mniejsza od 2.

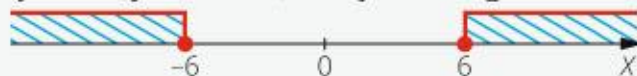


Odpowiedź: Nierówność $|x| < 2$ jest spełniona dla $-2 < x < 2$, zatem $x \in (-2, 2)$.

b) $|x| \geq 6$

Rozwiązanie:

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest większa bądź równa od 6.



Odpowiedź: Nierówność $|x| \geq 6$ jest spełniona dla $x \leq -6$ lub $x \geq 6$, zatem $x \in (-\infty, -6] \cup [6, \infty)$.

1.7. Procenty w obliczeniach

Pojęcie procenta

Umiejętność operowania procentami jest bardzo potrzebna przede wszystkim w codziennym życiu.

Procenty zawsze odnoszą się do jakiejś całości (wielkości ustalonej), np. $1\%k = \frac{1}{100}k = 0,01k$, $25\%k = \frac{25}{100}k = 0,25k$.

Obliczanie procentu danej liczby

Obliczanie procentu danej liczby wiąże się z obliczaniem ułamka tej liczby. Należy pamiętać, do jakiej wielkości odnosi się podany procent, ponieważ taka sama liczba procentów różnych wielkości będzie oznaczała różną wartość.

Przykład

Cenę butów w wysokości 260 zł obniżono o 30%. Ile wynosi cena butów po obniżce?

Rozwiązanie:

Cena butów po obniżce stanowi $100\% - 30\%$, czyli 70% początkowej ceny butów.

Obliczamy cenę butów po obniżce: $\frac{70}{100} \cdot 260 = 182$ (zł).

Odpowiedź: Cena butów po obniżce wynosi 182 zł.

Przykład

Cenę roweru w wysokości 3240 zł obniżono o 10%, a po miesiącu o kolejne 15%.

a) Oblicz końcową cenę roweru.

Rozwiązanie:

Cena roweru po pierwszej obniżce stanowi $100\% - 10\%$, czyli 90% pierwotnej ceny.

Cena roweru po drugiej obniżce stanowi $100\% - 15\%$, czyli 85% ceny po pierwszej obniżce.

Obliczamy cenę roweru po obu obniżkach: $\frac{85}{100} \cdot \left(\frac{90}{100} \cdot 3240 \right) = 2478,6$ (zł).

Odpowiedź: Cena roweru po obniżkach wynosi 2478,60 zł.

b) Ile kosztowałby ten rower, gdyby jego cenę od razu obniżono o 25%.

Rozwiązanie:

Cena roweru po obniżce stanowi $100\% - 25\%$, czyli 75% pierwotnej ceny.

Obliczamy cenę roweru po obniżce: $\frac{75}{100} \cdot 3240 = 2430$ (zł).

Odpowiedź: Cena roweru wynosi 2430 zł.

Wielokrotnej zmiany wartości o pewien procent nie można zastąpić jednorazową zmianą o sumę procentów każdej ze zmian.

Jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

W zadaniach dotyczących obliczeń procentowych pojawia się też pytanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba.

Przykład

Pracownik w styczniu otrzymał 5460 zł brutto, a w lutym po podwyżce dostał 6279 zł. Oblicz, o ile procent wzrosła pensja pracownika.

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość podwyżki pensji pracownika: $6279 \text{ zł} - 5460 \text{ zł} = 819 \text{ zł}$.

Obliczamy, jakim procentem liczby 5460 jest liczba 819: $\frac{819}{5460} \cdot 100\% = 15\%$.

Odpowiedź: Pensja pracownika wzrosła o 15%.

Przykład

Cenę pewnego towaru podwyższono o 10%, a następnie nową cenę obniżono o 20%. Jakim procentem ceny początkowej była cena końcowa?

Rozwiązanie:

Niech x oznacza pierwotną cenę towaru. Wtedy cena towaru po podwyżce wyniesie $x + 0,1x$, czyli $1,1x$. Zatem cenę towaru po obniżce opisuje wyrażenie $1,1x - 0,2 \cdot (1,1x)$, czyli $0,88x$. Stąd $0,88x = 88\%x$.

Odpowiedź: Cena końcowa towaru stanowiła 88% początkowej ceny towaru.

Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Chcąc znaleźć liczbę, gdy znany był jej procent, możemy wykorzystać jeden z trzech sposobów:

- obliczyć 1% szukanej liczby, a następnie znaleźć jej 100%,
- zamienić procent na ułamek i obliczyć całość,
- przyjąć za niewiadomą szukaną liczbę i rozwiązać odpowiednie równanie.





W praktyce, znajdując liczbę na podstawie danego jej procentu, najczęściej rozwiązujemy odpowiednie równanie.

Przykład

Cenę towaru podniesiono o 132 zł, co stanowi 25% ceny początkowej. Jaka była cena towaru przed podwyżką?

Rozwiązanie:

Niech x oznacza pierwotną cenę towaru. Podwyżka stanowi 25% ceny towaru, czyli $\frac{25}{100}x = 132$.
Stąd $x = 528$.

Odpowiedź: Cena towaru wynosiła 528 zł.

Przykład

Cena telewizora z 18% rabatem wynosi 3985,20 zł. Jaka była cena telewizora bez rabatu?

Rozwiązanie:

Niech x pierwotną cenę telewizora. Obecna cena stanowi 100% – 18%, czyli 82% pierwotnej ceny. Zatem $\frac{82}{100}x = 3985,2$. Stąd $x = 4860$.

Odpowiedź: Cena telewizora wynosiła 4860 zł.

Punkty procentowe

Różnicę między dwiema podanymi w procentach wartościami jednej wielkości określamy za pomocą punktów procentowych.

Przykład

Bank podniósł oprocentowanie kredytu z 6% na 7,5%.

a) O ile punktów procentowych wzrosło oprocentowanie kredytu?

Odpowiedź: Zmiana oprocentowania z 6% na 7,5% oznacza wzrost o $7,5 - 6$, czyli 1,5 punktu procentowego.

b) O ile procent wzrosło oprocentowanie kredytu?

Oprocentowanie wzrosło o 1,5 punktu procentowego.

Zatem procentowy wzrost oprocentowania wynosi $\frac{1,5}{6} \cdot 100\% = 25\%$.

Odpowiedź: Oprocentowanie kredytu wzrosło o 25%.

Kredyty i lokaty bankowe

Coraz częściej korzystamy z usług banków, które udzielają kredytów lub przyjmują pieniądze na lokaty pieniężne.

Lokata bankowa to umowa zawarta między klientem a bankiem, na mocy której klient powierza bankowi określoną kwotę na ustalony termin. W zamian za to, po upływie tego terminu, bank wypłaca klientowi wpłaconą kwotę powiększoną o odsetki, które zostały naliczone zgodnie z warunkami zapisanymi w umowie.

Kredyt to umowa z bankiem na pożyczanie określonej kwoty pieniędzy na określonych warunkach. Za udzielenie kredytu banki pobierają opłaty zwane oprocentowaniem kredytu.

Przykład

Pan Tomasz zaciągnął w banku kredyt na rok. Odsetki od kredytu wynosiły 9,6% w skali roku. Po roku pan Tomasz wpłacił do banku 13 152 zł. Na jaką kwotę pan Tomasz zaciągnął pożyczkę?

Rozwiązanie:

Kwota 13 152 zł jest sumą zaciągniętej pożyczki i odsetek, stanowi więc ona $100\% + 9,6\% = 109,6\%$ kredytu.

Układamy i rozwiązujemy odpowiednie równanie.

Oznaczamy jako x wartość szukanej kwoty w złotych.

$$1,096x = 13\,152$$

$$x = 12\,000 \text{ (zł)}$$

Odpowiedź: Pan Tomasz zaciągnął kredyt w wysokości 12 000 zł.

Przykład

Kapitał w wysokości 7500 zł został złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym 3,2%. Oblicz wielkość kapitału po roku.

Rozwiązanie:

Kapitał w wysokości k złożony na rok przy oprocentowaniu rocznym w wysokości $p\%$ wynosi po roku $k\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Skoro $k = 7500$ zł oraz $p = 3,2$, czyli wielkość kapitału po roku wyniesie $7500 \cdot \left(1 + \frac{3,2}{100}\right) = 7740$ (zł).

Odpowiedź: Po roku wielkość kapitału wyniesie 7740 zł.

1.8. Logarytm i jego własności

Pojęcie logarytmu

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a , dodatniej i różnej od jednośc, nazywamy liczbę x , do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę b .

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Liczba a nazywa się podstawą logarytmu, a liczba b – liczbą logarytmowaną.

Przykład

$$\log_2 8 = 3, \text{ ponieważ } 2^3 = 8$$

$$\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}, \text{ ponieważ } 3^{\frac{3}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = 27^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2, \text{ ponieważ } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$$

Ważną rolę w matematyce i naukach matematyczno-przyrodniczych odgrywa m.in. logarytm o podstawie 10.

Logarytmem o podstawie 10 (logarytmem dziesiętnym) z liczby b nazywamy liczbę x taką, że $10^x = b$. Logarytm dziesiętny liczby b oznaczamy $\log b$.

Przykład

$$\log 100 = 2, \text{ ponieważ } 10^2 = 100$$

$$\log 0,0001 = -4, \text{ ponieważ } 10^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0,0001$$

$$\log \sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}, \text{ ponieważ } 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$$

Dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1, $\log_a 1 = 0$ oraz $\log_a a = 1$.

Przykład

$$\log_3 1 = b, \text{ stąd } 3^b = 1, \text{ czyli } 3^b = 3^0, \text{ zatem } b = 0$$

$$\log_5 5 = b, \text{ stąd } 5^b = 5, \text{ czyli } 5^b = 5^1, \text{ zatem } b = 1$$

Własności logarytmów

W obliczeniach często wykorzystywane są **własności logarytmów**.

Twierdzenie

Jeżeli liczba a jest dodatnia i różna od 1, to dla dowolnych dodatnich liczb b i c prawdziwe są następujące własności:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^p = p \log_a b, p \in \mathbb{R}$$

Dowód

Powyższe wzory wynikają bezpośrednio z własności działań na potęgach.

Niech $x = \log_a b$ i $y = \log_a c$. Wtedy korzystając z definicji logarytmu, mamy: $a^x = b$ oraz $a^y = c$.



Zatem $\log_a(bc) = \log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a b + \log_a c$.

Podobnie $\log_a \frac{b}{c} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a b - \log_a c$

oraz $\log_a b^p = \log_a (a^x)^p = \log_a a^{p \cdot x} = p \cdot x = p \log_a b$.

Przykład

$$\log_2(32 \cdot 512) = \log_2 32 + \log_2 512 = 5 + 9 = 14$$

$$\log_2 \frac{16}{0,25} = \log_2 16 - \log_2 \frac{1}{4} = 4 - (-2) = 6$$

$$\log_3 (\sqrt{27})^8 = 8 \log_3 \sqrt{27} = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

We wszystkich powyższych przykładach w wyniku logarytmowania otrzymaliśmy liczby wymierne. Istnieją jednak logarytmy, które są liczbami niewymiernymi.

Przykład

Uzasadnij, że liczba $\log_3 4$ jest niewymierna.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost.

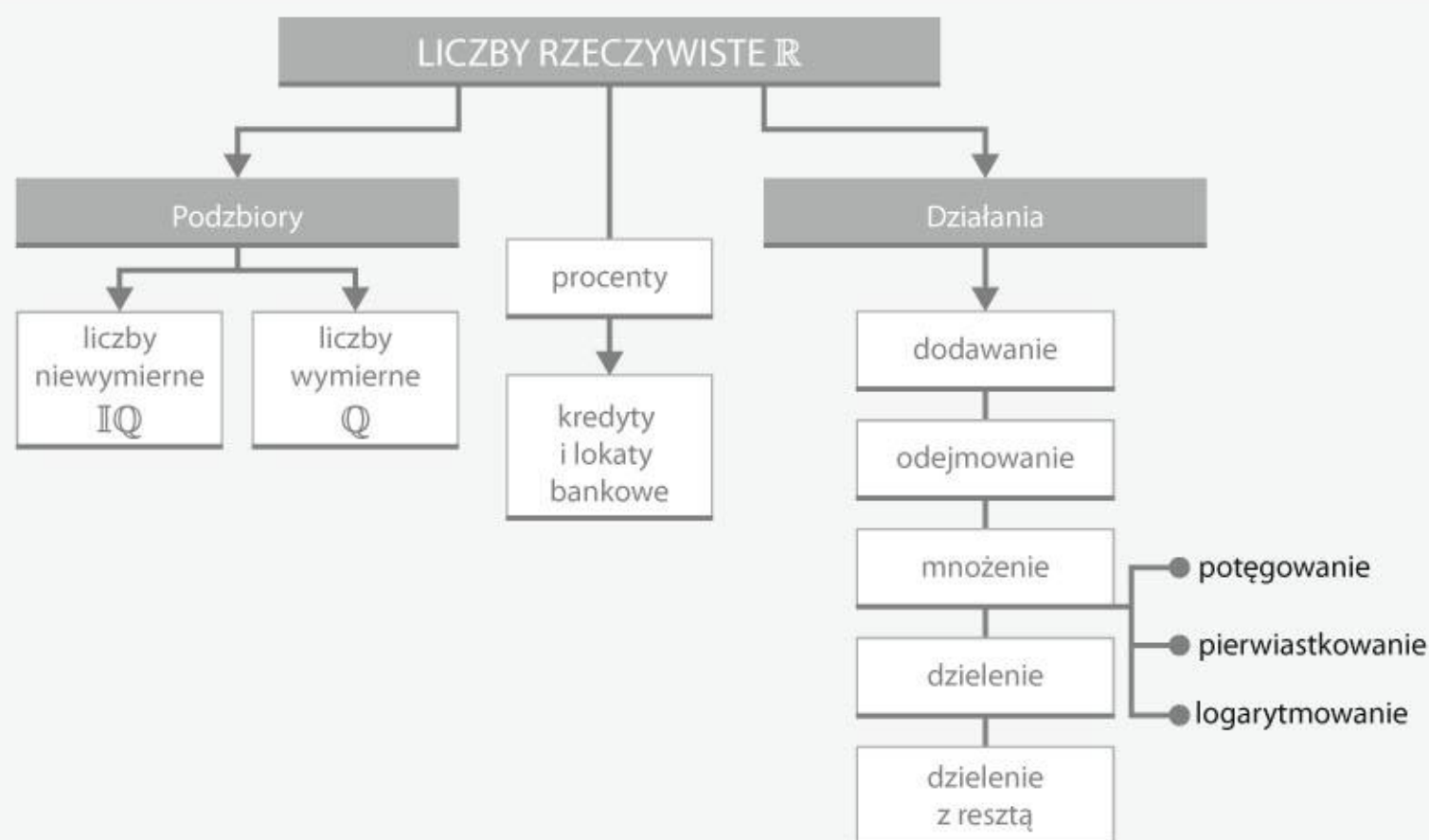
Zakładamy, że liczba $\log_3 4$ jest liczbą wymierną, czyli można ją zapisać w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są dowolnymi liczbami całkowitymi, przy czym $n \neq 0$. Zauważamy ponadto, że $\log_3 4 > \log_3 3 = 1$. Zatem $\log_3 4$ jest liczbą dodatnią, możemy więc przyjąć założenie, że m i n są dowolnymi liczbami naturalnymi dodatnimi.

Skoro $\log_3 4 = \frac{m}{n}$, to z definicji logarytmu otrzymujemy $3^{\frac{m}{n}} = 4$, czyli $3^m = 4^n$. Lewa strona jest iloczynem samych trójek, więc liczbą nieparzystą, a prawa strona – iloczynem samych czwórek, czyli liczbą parzystą. Stąd $3^m \neq 4^n$.

Założenie, że liczba $\log_3 4$ jest liczbą wymierną, doprowadziło do sprzeczności, zatem $\log_3 4$ nie może być liczbą wymierną, czyli $\log_3 4$ jest liczbą niewymierną.

Wniosek: Liczba $\log_3 4$ jest liczbą niewymierną.

1.9. Utrwalamy wiedzę



2

Wyrażenia algebraiczne

2.1. Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Dowód: } (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Przykład

Oblicz wartości podanych wyrażeń.

$$\text{a) } (15 + 3\sqrt{2})^2 \quad \text{b) } (\sqrt{13} + \sqrt{17})^2$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$\text{a) } (15 + 3\sqrt{2})^2 = 15^2 + 2 \cdot 15 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 = 225 + 90\sqrt{2} + 18 = 243 + 90\sqrt{2}$$

$$\text{b) } (\sqrt{13} + \sqrt{17})^2 = (\sqrt{13})^2 + 2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} + (\sqrt{17})^2 = 13 + 2\sqrt{221} + 17 = 30 + 2\sqrt{221}$$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{Dowód: } (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Przykład

Oblicz wartości podanych wyrażeń.

$$(5\sqrt{11} - 7\sqrt{15})^2$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$(5\sqrt{11} - 7\sqrt{15})^2 = (5\sqrt{11})^2 - 2 \cdot 5\sqrt{11} \cdot 7\sqrt{15} + (7\sqrt{15})^2 = 275 - 70\sqrt{165} + 735 = 1010 - 70\sqrt{165}$$

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\text{Dowód: } (a-b)(a+b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

Przykład

Zapisz w postaci iloczynowej.

$$\text{a) } 144 - 25m^2 \quad \text{b) } 13x^2 - 35y^2$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$\text{a) } 144 - 25m^2 = (12 - 5m)(12 + 5m)$$

$$\text{b) } 13x^2 - 35y^2 = (\sqrt{13}x - \sqrt{35}y)(\sqrt{13}x + \sqrt{35}y)$$

Sześcian sumy dwóch wyrażeń

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Dowód:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

Przykład

Oblicz wartości podanych wyrażeń.

$$\text{a) } (19 + \sqrt{21})^3 \quad \text{b) } (7\sqrt{2} + 9\sqrt{3})^3$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned} \text{a) } (19 + \sqrt{21})^3 &= 19^3 + 3 \cdot 19^2 \cdot \sqrt{21} + 3 \cdot 19 \cdot \sqrt{21}^2 + \sqrt{21}^3 = \\ &= 6859 + 1083\sqrt{21} + 1197 + 21\sqrt{21} = 8056 + 1104\sqrt{21} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b)} (7\sqrt{2} + 9\sqrt{3})^3 &= (7\sqrt{2})^3 + 3 \cdot (7\sqrt{2})^2 \cdot 9\sqrt{3} + 3 \cdot 7\sqrt{2} \cdot (9\sqrt{3})^2 + (9\sqrt{3})^3 = \\ &= 686\sqrt{2} + 2646\sqrt{3} + 5103\sqrt{2} + 2187\sqrt{3} = 5789\sqrt{2} + 4733\sqrt{3} \end{aligned}$$

Sześcian różnicy dwóch wyrażeń

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dowód:

$$\begin{aligned} (a-b)^3 &= (a-b)^2 \cdot (a-b) = (a^2 - 2ab + b^2) \cdot (a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Przykład

Oblicz wartości podanych wyrażeń.

$$\text{a)} (\sqrt{2} - 3)^3 \qquad \text{b)} (2\sqrt{3} - \sqrt{6})^3$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned} \text{a)} (\sqrt{2} - 3)^3 &= \sqrt{2}^3 - 3 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 3 + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 3^2 - 3^3 = \\ &= 2\sqrt{2} - 18 + 27\sqrt{2} - 27 = 29\sqrt{2} - 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} (2\sqrt{3} - \sqrt{6})^3 &= (2\sqrt{3})^3 - 3 \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{6} + 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^3 = \\ &= 24\sqrt{3} - 36\sqrt{6} + 36\sqrt{3} - 6\sqrt{6} = 60\sqrt{3} - 42\sqrt{6} \end{aligned}$$

Różnica sześcianów dwóch wyrażeń

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Dowód: } (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3$$

Przykład

Zapisz w postaci iloczynowej.

$$\text{a)} a^3 - 9 \qquad \text{b)} 343x^3 - 125y^3$$

Rozwiązanie:

$$\text{a)} a^3 - 9 = a^3 - \sqrt[3]{9} = (a - \sqrt[3]{9})(a^2 + \sqrt[3]{9}a + \sqrt[3]{81})$$

$$\text{b)} 343x^3 - 125y^3 = (7x)^3 - (5y)^3 = (7x - 5y)(49x^2 + 35xy + 25y^2)$$

Suma sześcianów dwóch wyrażeń

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{Dowód: } (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3$$

Przykład

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

$$\text{a)} (a+2)(a-2b+4) \qquad \text{b)} (x^2-5x+25)(x+5)$$

Zapisując te wyrażenia w postaci iloczynu, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$\text{a)} (a+2)(a-2b+4) = a^3 + 2^3 = a^3 + 8$$

$$\text{b)} (x^2-5x+25)(x+5) = x^3 + 5^3 = x^3 + 125$$

Różnica n -tych potęg dwóch wyrażeń

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

Dowód indukcyjny pomijamy.

Przykład

Zapisz w postaci iloczynowej.

a) $a^5 - 243$

b) $128x^7 - 2187y^7$

Rozwiązanie:

a) $a^5 - 243 = a^5 - 3^5 = (a - 3)(a^4 + 3a^3 + 9a^2 + 27a + 81)$

b) $128x^7 - 2187y^7 = (2x)^7 - (3y)^7 =$

$$= (2x - 3y)(64x^6 + 96x^5y + 144x^4y^2 + 216x^3y^3 + 324x^2y^4 + 486xy^5 + 729y^6)$$

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia**Przykład**

Zastosuj odpowiednie wzory skróconego mnożenia.

a) $\left(\frac{1}{3} + \sqrt{3}\right)^2$

b) $\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)^2$

c) $(4x - \sqrt{11})(4x + \sqrt{11})$

d) $a^2 - \frac{2}{5}a + \frac{1}{25}$

Rozwiązanie:

a) Stosujemy wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń:

$$\left(\frac{1}{3} + \sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} + 3 = 3\frac{1}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Stosujemy wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń:

$$\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{(5 - \sqrt{5})^2}{(\sqrt{10})^2} = \frac{25 - 10\sqrt{5} + 5}{10} = \frac{30 - 10\sqrt{5}}{10} = \frac{10(3 - \sqrt{5})}{10} = 3 - \sqrt{5}$$

c) Stosujemy wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$(4x - \sqrt{11})(4x + \sqrt{11}) = 16x^2 - (\sqrt{11})^2 = 16x^2 - 11$$

d) Stosujemy wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń:

$$a^2 - \frac{2}{5}a + \frac{1}{25} = a^2 - 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot a + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(a - \frac{1}{5}\right)^2$$

Symbol NewtonaWspółczynniki przy wyrazach obliczamy z symbolu Newtona: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$

Można też korzystać z trójkąta Pascala:

n										
0										1
1									1	1
2								1	2	1
3							1	3	3	1
4						1	4	6	4	1
5					1	5	10	10	5	1
6				1	6	15	20	15	6	1
7			1	7	21	35	35	21	7	1
8		1	8	28	56	70	56	28	8	1
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
:										

N-ta potęga sumy dwóch wyrażeń

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

PrzykładZapisz wyrażenie $(a + 3)^5$ w postaci sumy algebraicznej.**Rozwiązanie:**

$$(a + 3)^5 = a^5 + 5a^4 \cdot 3 + 10a^3 \cdot 3^2 + 10a^2 \cdot 3^3 + 5a \cdot 3^4 + 3^5 = a^5 + 15a^4 + 90a^3 + 270a^2 + 405a + 243$$

N-ta potęga różnicy dwóch wyrażeń

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots - \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \text{ dla } n \text{ parzystego}$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} - \binom{n}{n}b^n \text{ dla } n \text{ nieparzystego}$$

Przykład

Zapisz wyrażenie w postaci iloczynowej.

$$(2x-1)^9$$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}(2x-1)^9 &= (2x)^9 - 9 \cdot (2x)^8 \cdot 1 + 36 \cdot (2x)^7 \cdot 1^2 - 84 \cdot (2x)^6 \cdot 1^3 + 126 \cdot (2x)^5 \cdot 1^4 - 126 \cdot (2x)^4 \cdot 1^5 + 84 \cdot (2x)^3 \cdot 1^6 - \\ & 36 \cdot (2x)^2 \cdot 1^7 + 9 \cdot 2x \cdot 1^8 - 1^9 = \\ &= 512x^9 - 2304x^8 + 4608x^7 - 5376x^6 + 4032x^5 - 2016x^4 + 672x^3 - 144x^2 + 18x - 1\end{aligned}$$

2.2. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów

Stopień i współczynniki wielomianu

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od zera oraz n jest naturalną liczbą dodatnią.

Funkcje $W(x) = 3x - 1$, $W(x) = \sqrt{2}x$, $W(x) = 5x^2$, $W(x) = \pi$, $W(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}x^6$ są przykładami jednomianów jednej zmiennej.

Funkcja stała $W(x) = a$, gdzie $a \neq 0$ jest jednomianem stopnia 0, a funkcja $W(x) = 0$ jest jednomianem zerowym, którego stopnia nie określamy.

Wielomianem stopnia n zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, n jest naturalną liczbą dodatnią oraz a_n jest różne od zera.

Wyrazami nazywamy jednomiany występujące w wielomianie: $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_2 x, a_1, a_0$.

Współczynnikami wielomianu nazywamy liczby: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$.

Wyrazem wolnym nazywamy współczynnik a_0 .

Wielomianem zerowym nazywamy jednomian o wartości równej 0.

Wielomiany najczęściej zapisujemy w uporządkowanej postaci tak, by występujące w nim jednomiany były zapisane w kolejności od stopnia najwyższego do najniższego. Stopień wielomianu W oznaczamy przez $\text{st}(W)$.

Wielomian uporządkowany składający się z dwóch wyrazów, np. $W(x) = x^6 - 8$, nazywamy dwumianem, a wielomian uporządkowany składający się z trzech wyrazów, np. $W(x) = x^4 - 5x^3 - 3$ nazywamy trójmianem.

Przykład

Uporządkuj wielomian w i określ jego stopień.

$$\text{a) } W(x) = -\sqrt{3}x^6 + x + \sqrt{5}x^3 - x^8 - \sqrt{7}x^2$$

$$W(x) = -x^8 - \sqrt{3}x^6 + \sqrt{5}x^3 - \sqrt{7}x^2 + x, \text{ st}(W) = 8$$

$$\text{b) } W(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^4 + 0,1x - x^5 - \frac{\sqrt{2}}{3} + 2x^3 + x^7$$

$$W(x) = x^7 - x^5 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^4 + 2x^3 + 0,1x - \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ st}(W) = 7$$

PrzykładWypisz współczynniki wielomianu W .

a) $W(x) = \sqrt{6}x^6 - (1 - \sqrt{3})x^4 - 2x^2 + \sqrt{5} + 3$

$$a_6 = \sqrt{6}, a_5 = a_3 = a_1 = 0, a_4 = \sqrt{3} - 1, a_2 = -2, a_0 = \sqrt{5} + 3$$

b) $W(x) = \frac{(9 - 3\sqrt{3})x^4 - 6x^5 - (-\sqrt{6} + 1)x}{3}$

Porządkujemy wielomian W : $W(x) = -2x^5 + (3 - \sqrt{3})x^4 + \frac{\sqrt{6} - 1}{3}x$

$$a_5 = -2, a_4 = 3 - \sqrt{3}, a_3 = a_2 = a_0 = 0, a_1 = \frac{\sqrt{6} - 1}{3}$$

Równość wielomianów**Dwa wielomiany zmiennej x są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy oba są zerowe lub gdy oba mają ten sam stopień i takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x .**Przykład**Wyznacz takie wartości a oraz b , aby wielomiany:

$$U(x) = (2a + b)x^3 - 2x^2 - 3x + 4 \text{ oraz } W(x) = 5x^3 - 2x^2 + (3a - 2b)x + 4$$

były równe.

Rozwiązanie:Wielomiany są tego samego stopnia, zatem powinny mieć te same współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x . Zatem otrzymujemy warunek:

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 3a - 2b = -3 \end{cases}$$

Po pomnożeniu pierwszego równania przez 2 i dodaniu równań stronami otrzymujemy:

$$7a = 7, \text{ stąd } a = 1$$

Skoro $a = 1$, to $b = 3$.**Odpowiedź:** Dla $a = 1$ oraz $b = 3$ wielomiany u oraz w są równe.**Obliczanie wartości wielomianu**

Obliczanie wartości wielomianu polega na podstawieniu danej liczby w miejsce zmiennej wielomianu i wykonaniu wskazanych działań.

PrzykładOblicz wartość wielomianu $W(x) = 2x^5 - 3x^3 - x - 5$ dla $x = -\sqrt[3]{5}$.**Rozwiązanie:**

$$W(-\sqrt[3]{5}) = 2 \cdot (-\sqrt[3]{5})^5 - 3 \cdot (-\sqrt[3]{5})^3 - (-\sqrt[3]{5}) - 5 = -10\sqrt[3]{25} + 15 + \sqrt[3]{5} - 5 = -10\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 10$$

Odpowiedź: Wartość wielomianu wynosi $-10\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 10$.**Suma i różnica wielomianów jednej zmiennej**

Wielomiany można dodawać i odejmować.

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, należy dodać wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest też wielomianem.

Stopień sumy wielomianów jest nie większy od najwyższego ze stopni składników tej sumy.

PrzykładDla jakich wartości a, b, c suma wielomianów:

$$U(x) = (a + 1)x^3 + (b - 2a)x^2 - a + 2b - 3c \text{ oraz } W(x) = (a - 3)x^3 + (a - 2b)x^2 + 3a - b + 2c$$

jest równa wielomianowi zerowemu?

Rozwiązanie:Wyznaczamy sumę wielomianów u oraz w .

$$\begin{aligned}
 U(x) + W(x) &= [(a+1)x^3 + (b-2a)x^2 - a + 2b - 3c] + [(a-3)x^3 + (a-2b)x^2 + 3a - b + 2c] = \\
 &= (2a-2)x^3 + (-b-a)x^2 + 2a + b - c
 \end{aligned}$$

Suma wielomianów jest wielomianem zerowym, więc:

$$\begin{cases} 2a-2=0 \\ -b-a=0 \\ 2a+b-c=0 \end{cases} \quad \text{stąd} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

Odpowiedź: Suma wielomianów u oraz w jest równa wielomianowi zerowemu dla $a=1$, $b=-1$ i $c=1$.

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, od wyrazów pierwszego wielomianu należy odjąć odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest też wielomianem. Różnica wielomianów jest też wielomianem.

Stopień różnicy wielomianów jest nie większy od najwyższego ze stopni składników tej różnicy.

Przykład

Dla jakich wartości a oraz b wielomian $W(x) = (4a-2b+c+6)x^3 + x^2 - (3b-a+8)x + 3$ jest różnicą wielomianów:

$$G(x) = (a-c)x^4 + (a-2c)x^3 + 2x^2 + (b-a)x - 2 \text{ oraz } H(x) = (a+b)x^4 + (b-c)x^3 + x^2 + (2c-a)x - 5?$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy różnicę wielomianów g oraz h .

$$\begin{aligned}
 W(x) &= G(x) - H(x) = \\
 &= [(a-c)x^4 + (a-2c)x^3 + 2x^2 + (b-a)x - 2] - [(a+b)x^4 + (b-c)x^3 + x^2 + (2c-a)x - 5] = \\
 &= (-c-b)x^4 + (a-b-c)x^3 + x^2 + (b-2c)x + 3
 \end{aligned}$$

Wyznaczamy wartości a oraz b .

$$\begin{cases} -c-b=0 \\ a-b-c=4a-2b+c+6, \text{ stąd} \\ b-2c=-3b+a-8 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-4 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

Odpowiedź: Wielomian W jest różnicą wielomianów G oraz H dla $a=-4$, $b=-2$ i $c=2$.

Mnożenie wielomianów jednej zmiennej

Mnożenie wielomianu przez jednomian polega na pomnożeniu każdego wyrazu wielomianu przez ten jednomian. Aby wyznaczyć iloczyn wielomianów, należy pomnożyć każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m+n$.

Przykład

Wielomian w jest iloczynem wielomianów g oraz h , gdzie $G(x) = 2x^4 - x + 5$ i $H(x) = (x^2 + 1)(x - 2)$.

- Określ stopień wielomianu W .
- Oblicz wyraz wolny wielomianu W .
- Oblicz sumę współczynników wielomianu W .

Rozwiązanie:

- Określamy stopień wielomianu G oraz H : $\text{st}(G) = 4$, $\text{st}(H) = 2 + 1 = 3$.

Określamy stopień wielomianu w : $\text{st}(W) = 4 + 3 = 7$

- Obliczamy wyraz wolny wielomianu w , czyli wartość wielomianu dla $x=0$: $5 \cdot 1 \cdot (-2) = -10$

- Wyznaczamy wielomian w : $W(x) = (2x^4 - x + 5)(x^2 + 1)(x - 2)$

Suma współczynników wielomianu w zmiennej x jest równa wartości wielomianu dla $x=1$:

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0 = W(1)$$

Oblicz sumę współczynników wielomianu w .

$$W(1) = (2 \cdot 1^4 - 1 + 5)(1^2 + 1)(1 - 2) = 6 \cdot 2 \cdot (-1) = -12$$

Przykład

Dane są wielomiany $G(x) = x(\sqrt{5}x - 1)(\sqrt{5}x + 1)$ oraz $H(x) = x^3 - 3x$.

Wyznacz wielomian $W(x) = G(x) - 2H(x)$.

Rozwiązanie:

$$W(x) = G(x) - 2H(x) = x(\sqrt{5}x - 1)(\sqrt{5}x + 1) - 2(x^3 - 3x) = 5x^3 - x - 2x^3 + 6x = 3x^3 + 5x$$

Odpowiedź: Wielomian w ma postać: $W(x) = 3x^3 + 5x$.

Przykład

Dane są wielomiany:

$$F(x) = 2x - 3, G(x) = ax^2 + bx + c, H(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 3$$

Wyznacz wartości a , b i c tak, aby iloczyn wielomianów F oraz G był równy wielomianowi H .

Rozwiązanie:

Wyznaczamy iloczyn wielomianów F oraz G .

$$H(x) = F(x) \cdot G(x) = (2x - 3)(ax^2 + bx + c) = 2ax^3 + (2b - 3a)x^2 + (2c - 3b)x - 3c$$

Wyznaczamy wartości a , b oraz c .

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 3a = 1 \\ 2c - 3b = -8 \\ -3c = 3 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Odpowiedź: Iloczyn wielomianów F oraz G jest równy wielomianowi H dla $a = 1$, $b = 2$ i $c = -1$.

Za pomocą wielomianu możemy opisywać np. objętość graniastosłupa. Należy wówczas pamiętać o określeniu dziedziny tego wielomianu.

Przykład

Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości h wynosi 40. Wyznacz wielomian zmiennej a opisujący objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie:

Z warunków zadania mamy:

$$8a + 4h = 40, \text{ stąd } h = 10 - 2a$$

Długości krawędzi graniastosłupa są liczbami dodatnimi, czyli $a > 0$ i $10 - 2a > 0$. Zatem $a \in (0, 5)$.

Korzystając ze wzoru na objętość $V = P_0 \cdot h$, otrzymujemy:

$$V(x) = a^2(10 - 2a) = -2a^3 + 10a^2, \text{ gdzie } a \in (0, 5)$$

Odpowiedź: Objętość graniastosłupa opisuje wielomian $V(x) = -2a^3 + 10a^2$ dla $a \in (0, 5)$.

Wielomiany wielu zmiennych

Wielomiany mogą być wielomianami jednej zmiennej, jak również wielomianami wielu zmiennych, np.:

$$W(x, y) = xy^2 - 2x^2y^2 + x^2y - 1, W(x, y, z) = 2x^2y^3z + 4x^2z - 3y^2z^2 + xyz.$$

Stopień jednomianu wielu zmiennych jest sumą wykładników zmiennych w nim występujących. Na przykład jednomian x^4y^2 ma stopień 6, a jednomian x^3yz^5 ma stopień równy 9.

Stopień wielomianu wielu zmiennych jest równy największemu spośród stopni występujących w nim jednomianów.

Przykład

Podaj stopień wielomianu $W(x, y, z) = 2x^3z^4y - 3x^2z^3y^2 + 2x^3y^4z^3 - 3yz$.

Rozwiązanie:

Jednomian $2x^3z^4y$ ma stopień równy 8, jednomian $-3x^2z^3y^2$ ma stopień równy 7, jednomian $2x^3y^4z^3$ ma stopień równy 10, jednomian $-3yz$ ma stopień równy 2.

Odpowiedź: Wielomian w ma stopień równy 10.

Działania na wielomianach wielu zmiennych

Aby wyznaczyć sumę (różnicę) wielomianów wielu zmiennych, należy dodać (odjąć) wyrazy podobne tych wielomianów.

Mnożenie wielomianów wielu zmiennych wykonujemy podobnie jak mnożenie jednej zmiennej.

Przykład

Wyznacz wielomian zmiennych x, y, z opisujący różnicę objętości prostopadłościanu o krawędziach: $x + 2, y + 4, z + 6$ i objętości prostopadłościanu o krawędziach: $x + 1, y + 2, z + 3$.

**Rozwiązanie:**

Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi. Zatem:

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ y+4 > 0 \\ z+6 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+1 > 0 \\ y+2 > 0 \\ z+3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ y > -2 \\ z > -3 \end{cases}$$

Korzystamy ze wzoru na objętość prostopadłościanu $V = abc$.

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= (x+2)(y+4)(z+6) - (x+1)(y+2)(z+3) = \\ &= (xyz + 6xy + 4xz + 24x + 2yz + 12y + 8z + 48) - (xyz + 3xy + 2xz + 6x + yz + 3y + 2z + 6) = \\ &= 3xy + 2xz + 18x + yz + 9y + 6z + 42 \end{aligned}$$

dla $x \in (-1, \infty)$, $y \in (-2, \infty)$ oraz $z \in (-3, \infty)$

Odpowiedź: Różnicę objętości prostopadłościanów opisuje wielomian

$$V(x, y, z) = 3xy + 2xz + 18x + yz + 9y + 6z + 42 \text{ dla } x \in (-1, \infty), y \in (-2, \infty) \text{ oraz } z \in (-3, \infty).$$

2.3. Rozkład wielomianu na czynniki

Sposoby rozkład wielomianu na czynniki

Rozkładem wielomianu na czynniki nazywamy przedstawienie go w postaci iloczynu wielomianów niższych stopni.

Jedną z metod rozkładu wielomianu na czynniki jest **wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias**.

Przykład

Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\text{a) } W(x) = \sqrt{6}x^4 - \sqrt{3}x^3 \quad \text{b) } W(x) = (x-3)^2 - 4(x-3)$$

Rozwiązanie:

a) Wyłączamy wspólny czynnik $\sqrt{3}x^3$ przed nawias.

$$W(x) = \sqrt{6}x^4 - \sqrt{3}x^3 = \sqrt{3}x^3(\sqrt{2}x - 1)$$

b) Wyłączamy wspólny czynnik $(x-3)$ przed nawias.

$$W(x) = (x-3)^2 - 4(x-3) = (x-3)[(x-3) - 4] = (x-3)(x-7)$$

Wielomiany można przedstawiać w postaci iloczynu, stosując wzory skróconego mnożenia.

Przykład

Rozłóż wielomian w na czynniki.

$$\text{a) } W(x) = (4x^2 + 4x)^2 + 2(4x^2 + 4x) + 1 \quad \text{b) } W(x) = (x^2 + 16)^2 - 64x^2$$

Rozwiązanie:

a) Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, gdzie $a = 4x^2 + 4x$ i $b = 1$, a następnie rozkładamy trójmian $4x^2 + 4x + 1$ na czynniki liniowe.

$$\begin{aligned} W(x) &= (4x^2 + 4x)^2 + 2(4x^2 + 4x) + 1 = [(4x^2 + 4x) + 1]^2 = (4x^2 + 4x + 1)^2 = \\ &= [(2x + 1)^2]^2 = (2x + 1)^4 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wielomian W przyjmie postać: $W(x) = (2x + 1)^4$.

b) Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, gdzie $a = x^2 + 16$ i $b = 8x$, a następnie rozkładamy trójmian $x^2 - 8x + 16$ na czynniki liniowe.

$$W(x) = (x^2 + 16)^2 - 64x^2 = (x^2 + 16 - 8x)(x^2 + 16 + 8x) = (x^2 - 8x + 16)(x^2 + 8x + 16) = (x - 4)^2 \cdot (x + 4)^2$$

Odpowiedź: Wielomian W przyjmie postać: $W(x) = (x - 4)^2 \cdot (x + 4)^2$.

$$\text{c) } W(x) = x^6 - 1$$

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, a przy rozkładzie dwumianów na czynniki ze wzorów: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

$$W(x) = x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Wielomianów $x^2 + x + 1$, $x^2 - x + 1$ nie możemy przedstawić w postaci iloczynowej.

Odpowiedź: Wielomian W przyjmie postać: $W(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

W przypadku rozkładu na czynniki wielomianu stopnia drugiego możemy zastosować postać iloczynową trójkianu kwadratowego (o ile istnieje).

Przykład

Rozłóż wielomian W na czynniki.

a) $W(x) = 8x^6 + x^3$

Rozwiązanie:

Wyłączamy wspólny czynnik x^3 przed nawias, następnie rozkładamy wielomian $8x^3 + 1$ na czynniki, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

$$W(x) = 8x^6 + x^3 = x^3(8x^3 + 1) = x^3(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$$

Wielomianu stopnia drugiego $4x^2 - 2x + 1$ nie możemy przedstawić w postaci iloczynowej, ponieważ $\Delta < 0$.

Odpowiedź: $W(x) = x^3(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

b) $W(x) = x^4 + 4$

Przekształcamy wielomian, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ oraz $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$W(x) = x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = [(x^2 + 2) - 2x][(x^2 + 2) + 2x] = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

Wielomianów $x^2 - 2x + 2$ oraz $x^2 + 2x + 2$ nie możemy przedstawić w postaci iloczynowej.

Odpowiedź: Wielomian W przyjmie postać: $W(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

c) $W(x) = x^5 - x^4 - 30x^3$

Wyłączamy wspólny czynnik x^3 przed nawias, a następnie przedstawiamy trójkian kwadratowy $x^2 - x - 30$ w postaci iloczynowej.

$$W(x) = x^5 - x^4 - 30x^3 = x^3(x^2 - x - 30) = x^3(x + 5)(x - 6)$$

Odpowiedź: Wielomian W przyjmie postać: $W(x) = x^3(x + 5)(x - 6)$.

Każdy niezerowy wielomian można rozłożyć na czynniki co najwyżej drugiego stopnia.

Niekiedy wielomian możemy rozłożyć na czynniki, grupując jego wyrazy.

Przykład

Rozłóż wielomian W na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $W(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 + 4x - 12$

Rozwiązanie:

Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik x^4 z dwóch pierwszych wyrazów, a następnie wspólny czynnik $-3x^2$ z trzeciego i czwartego wyrazu oraz czynnik 4 z piątego i szóstego wyrazu. We wszystkich nawiasach otrzymujemy wspólny czynnik $x - 3$, więc możemy wyłączyć go przed nawias.

$$\begin{aligned} W(x) &= x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 9x^2 + 4x - 12 = (x^5 - 3x^4) + (-3x^3 + 9x^2) + (4x - 12) = \\ &= x^4(x - 3) - 3x^2(x - 3) + 4(x - 3) = (x - 3)(x^4 - 3x^2 + 4) \end{aligned}$$

Wielomianu $(x^4 - 3x^2 + 4)$ nie da się przedstawić w postaci iloczynowej.

Odpowiedź: Wielomian przyjmie postać: $W(x) = (x - 3)(x^4 - 3x^2 + 4)$.

b) $W(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 1$

Rozwiązanie:

Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik x^3 z dwóch pierwszych wyrazów, a następnie wspólny czynnik -1 z trzeciego i czwartego wyrazu. W obu nawiasach otrzymujemy ten sam wielomian $x^2 - 1$, zatem możemy wyłączyć go przed nawias. Wielomiany $x^2 - 1$ oraz $x^3 - 1$ rozkładamy, korzystając odpowiednio ze wzorów skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

$$\begin{aligned} W(x) &= x^5 - x^4 - x^3 + 1 = (x^5 - x^4) + (-x^3 + 1) = x^4(x - 1) - 1(x^3 - 1) = (x^2 - 1)(x^3 - 1) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wielomian przyjmie postać: $W(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1)$.



Przykład

Rozłóż wielomian $W(x) = x^3 - 3x - 2$.

Rozwiązanie:

Wyraz $-3x$ zapisujemy w postaci $-x - 2x$, wyłączamy przed nawias wspólny czynnik x z dwóch pierwszych wyrazów oraz wspólny czynnik -2 , następnie rozkładamy dwumian $x^2 - 1$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

$$\begin{aligned}
 W(x) &= x^3 - 3x - 2 = x^3 - x - 2x - 2 = (x^3 - x) - (2x + 2) = x(x^2 - 1) - 2(x + 1) = x(x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = \\
 &= (x + 1)[x(x - 1) - 2] = (x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)(x + 1)(x - 2) = (x + 1)^2(x - 2)
 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wielomian przyjmie postać: $W(x) = (x + 1)^2(x - 2)$.

2.4. Pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych

Pierwiastkiem całkowitym wielomianu jest każda liczba całkowita, dla której wartość tego wielomianu wynosi zero.

Szukając pierwiastków całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych, korzystamy z twierdzenia:

I Jeżeli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_0 \neq 0$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Przykład

Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu $W(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dzielniki wyrazu wolnego, czyli 3.

$$D_3 = \{-1, 1, -3, 3\}$$

Obliczamy wartość wielomianu dla każdego z dzielników

$W(-1) = -4 - 12 + 1 + 3 \neq 0$	nie jest pierwiastkiem
----------------------------------	------------------------

$W(1) = 4 - 12 - 1 + 3 \neq 0$	nie jest pierwiastkiem
--------------------------------	------------------------

$W(-3) = -108 - 108 + 3 + 3 \neq 0$	nie jest pierwiastkiem
-------------------------------------	------------------------

$W(3) = 108 - 108 - 3 + 3 = 0$	jest pierwiastkiem
--------------------------------	--------------------

Przykład

Wypisz wszystkie dzielniki wyrazu wolnego i sprawdź, które z nich są jego pierwiastkami.

a) $W(x) = -5x^3 + x^2 + 5x - 1$	b) $W(x) = 3x^5 + 2x^3 - x^2 + 6$
----------------------------------	-----------------------------------

Rozwiązanie:

a) Wypisujemy dzielniki wyrazu wolnego, czyli 1.

$$D_1 = \{-1, 1\}$$

Obliczamy wartość wielomianu dla każdego z dzielników

$W(-1) = 5 + 1 - 5 - 1 = 0$	jest pierwiastkiem
-----------------------------	--------------------

$W(1) = -5 + 1 + 5 - 1 = 0$	jest pierwiastkiem
-----------------------------	--------------------

b) Wypisujemy dzielniki wyrazu wolnego, czyli 6.

$$D_6 = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$$

Obliczamy wartość wielomianu dla każdego z dzielników

$W(-1) = -3 - 2 - 1 + 6 = 0$	jest pierwiastkiem
------------------------------	--------------------

$W(1) = 3 + 2 - 1 + 6 \neq 0$	nie jest pierwiastkiem
-------------------------------	------------------------

$W(-2) = -96 - 16 - 4 + 6 \neq 0$	nie jest pierwiastkiem
-----------------------------------	------------------------

$W(2) = 96 + 16 - 4 + 6 \neq 0$	nie jest pierwiastkiem
---------------------------------	------------------------

$W(-3) = -729 - 54 - 9 + 6 \neq 0$	nie jest pierwiastkiem
------------------------------------	------------------------

$W(3) = 729 + 54 - 9 + 6 \neq 0$	nie jest pierwiastkiem
----------------------------------	------------------------

$W(-6) = -23328 - 432 - 36 + 6 \neq 0$	nie jest pierwiastkiem
--	------------------------

$W(6) = 23328 + 432 - 36 + 6 \neq 0$	nie jest pierwiastkiem
--------------------------------------	------------------------

2.5. Dzielenie wielomianów

Dzielenie wielomianów sposobem pisemnym

Wiemy, że liczba całkowita a jest podzielna przez liczbę całkowitą b , przy czym $b \neq 0$, jeśli istnieje liczba całkowita k taka, że $a = k \cdot b$.

Podobnie mówimy, że wielomian w jest podzielny przez wielomian niezerowy q , jeśli istnieje wielomian p taki, że $w = p \cdot q$.

Na przykład $(x^3 + 4x^2 + 2x - 1) : (x + 1) = x^2 + 3x - 1$, ponieważ $x^3 + 4x^2 + 2x - 1 = (x + 1) \cdot (x^2 + 3x - 1)$.

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych.

Przykład

Wykonaj dzielenie wielomianu $U(x) = 6x^2 - x - 2$ przez wielomian $W(x) = 2x + 1$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$(6x^2 - x - 2) : (2x + 1) = 3x$$

$$\underline{-6x^2 - 3x}$$

$$-4x$$

Dzielimy $6x^2$ przez pierwszy wyraz dzielnika $2x$. Otrzymany iloraz $3x$ mnożymy przez dzielnik $2x + 1$. Tak otrzymany iloczyn ze zmienionym znakiem wpisujemy pod wyrazami tego samego stopnia w dzielnej. Dodajemy.

$$(6x^2 - x - 2) : (2x + 1) = 3x - 2$$

$$\underline{-6x^2 - 3x}$$

$$\underline{-4x - 2}$$

$$4x + 2$$

$$0$$

Dzielimy $-4x$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Otrzymany iloraz -2 mnożymy przez dzielnik $2x + 1$. Tak otrzymany iloczyn ze zmienionym znakiem wpisujemy pod wyrazami tego samego stopnia w dzielnej. Dodajemy.

Otrzymaliśmy resztę zero.

$$\text{Sprawdzenie: } (3x - 2)(2x + 1) = 6x^2 + 3x - 4x - 2 = 6x^2 - x - 2$$

Dzielenie wielomianów sposobem pisemnym z resztą

Iloraz liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną. Również w wyniku dzielenia wielomianów możemy otrzymać resztę.

Przykład

$$(8x^2 - 18x + 2) : (-2x + 5) = -4x - 1$$

$$\underline{8x^2 + 20x}$$

$$2x + 2$$

$$\underline{-2x + 5}$$

$$7$$

Wykonaj dzielenie wielomianu $U(x) = 8x^2 - 18x + 2$ przez dwumian $-2x + 5$. Sprawdź otrzymany wynik.

W wyniku dzielenia otrzymujemy iloraz równy $-4x - 1$ i resztę 7.

$$\text{Zatem } 8x^2 - 18x + 2 = (-4x - 1)(-2x + 5) + 7.$$

$$\text{Sprawdzenie: } (-4x - 1)(-2x + 5) + 7 = 8x^2 - 20x + 2x - 5 + 7 = 8x^2 - 18x + 2$$

Dzielenie wielomianów – schemat Hornera

Wygodnym sposobem na dzielenie wielomianu $U(x)$ przez dwumian $W(x) = x - a$ jest schemat Hornera, powiązany z nazwiskiem Hornera, brytyjskiego matematyka żyjącego na przełomie XVIII i XIX w.

Przykład

Zastosuj schemat Hornera i przedstaw wielomian $U(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7x + 4$

w postaci $U(x) = (x - 2) \cdot W(x) + R(x)$.



Rozwiązanie:

W pierwszym wierszu wpisujemy współczynniki dzielnej, czyli wielomianu U . Współczynnik przy najwyższej potędze przepisujemy w ostatnim wierszu.



Drugi współczynnik wiersza ostatniego otrzymujemy, mnożąc poprzedni współczynnik tego wiersza, tzn. 1, przez $a=2$ i dodając do drugiego współczynnika wiersza pierwszego, tzn. do -2 , zatem $1 \cdot 2 - 2 = 0$.

Trzeci współczynnik wiersza ostatniego otrzymujemy, mnożąc poprzedni współczynnik tego wiersza, tzn. 0, przez $a=2$ i dodając do trzeciego współczynnika wiersza pierwszego, tzn. do -3 , zatem $0 \cdot 2 - 3 = -3$.

Czwarty współczynnik wiersza ostatniego otrzymujemy, mnożąc poprzedni współczynnik tego wiersza, tzn. -3 , przez $a=2$ i dodając do czwartego współczynnika wiersza pierwszego, tzn. do 7, zatem $-3 \cdot 2 + 7 = 1$.

Kolejną liczbę wiersza ostatniego, czyli 6, otrzymujemy w podobny sposób.

Wynikiem dzielenia jest wielomian o stopień niższy niż wielomian U , czyli stopnia 3.

W ostatnim wierszu otrzymujemy jego współczynniki: 1, 0, -3 , 1 i resztę 6.

Stąd $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $R(x) = 6$.

Zatem $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7x + 4 = (x^3 - 3x + 1)(x - 2) + 6$.

2.6. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Wyznaczanie dziedziny wyrażeń wymiernych

Wyrażeniem wymiernym nazywamy ułamek, który w liczniku i mianowniku ma wielomian, przy czym stopień wielomianu w mianowniku musi wynosić co najmniej 1.

Przykłady: $\frac{2x-3}{x+4}$, $\frac{x^3+5x^2-9x+12}{x^2-17}$.

Dla dowolnego wyrażenia wymiernego należy zrobić założenie, które eliminuje liczby zerujące mianownik. Taka czynność nazywana jest określaniem **dziedziny** wyrażenia wymiernego.

Przykład

Określ dziedzinę podanego wyrażenia.

a) $\frac{x+4}{x^2-4}$ b) $\frac{x^4-2x^2+5}{x^3+3x^2+3x+1}$

Rozwiązanie:

a) $\frac{x+4}{x^2-4}$; przyrównujemy mianownik do zera:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$x = 2$ lub $x = -2$, zatem piszemy $x \neq 2$ oraz $x \neq -2$ lub $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

b) $\frac{x^4-2x^2+5}{x^3+3x^2+3x+1}$; przyrównujemy mianownik do zera

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$(x+1)^3 = 0$$

$x = -1$, zatem piszemy $x \neq -1$ lub $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Mnożenie wyrażeń wymiernych

Ponieważ wyrażenia wymierne są w postaci ułamków, zatem obowiązują je takie same własności działań jak na ułamkach.

Wyrażenia wymierne możemy skracać, dzieląc licznik i mianownik przez to samo wyrażenie różne od zera.

Przykład

Skróć podane wyrażenia wymierne.

$$\text{a) } \frac{4x^2 - 25}{2x - 5} \qquad \text{b) } \frac{2x^2 + 2x - 4}{3x^2 + 9x + 6}$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } \frac{4x^2 - 25}{2x - 5}; \text{ określamy dziedzinę } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

$$\frac{4x^2 - 25}{2x - 5} = \frac{\cancel{(2x - 5)}^1 (2x + 5)}{\cancel{2x - 5}_1} = 2x + 5$$

$$\text{b) } \frac{2x^2 + 2x - 4}{3x^2 + 9x + 6}; \text{ określamy dziedzinę } D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

$$\frac{2x^2 + 2x - 4}{3x^2 + 9x + 6} = \frac{\cancel{2(x + 2)}^1 (x - 1)}{\cancel{3(x + 2)}_1 (x + 1)} = \frac{2x - 2}{3x + 3}$$

Mnożąc dwa wyrażenia wymierne, mnożymy licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik. Pamiętajmy o określeniu dziedziny każdego z wyrażeń.

Przykład

Wykonaj mnożenie podanych wyrażeń wymiernych.

$$\text{a) } \frac{9x^2 - 16}{2x + 7} \cdot \frac{4x^2 - 49}{3x + 4} \qquad \text{b) } \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 + 6x - 55} \cdot \frac{x^2 + 9x - 22}{x^2 - 3x}$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) Określamy dziedzinę: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{7}{2}, -\frac{4}{3} \right\}$$

$$\frac{9x^2 - 16}{2x + 7} \cdot \frac{4x^2 - 49}{3x + 4} = \frac{(3x - 4)\cancel{(3x + 4)}^1}{\cancel{2x + 7}_1} \cdot \frac{(2x - 7)\cancel{(2x + 7)}^1}{\cancel{3x + 4}_1} = 6x^2 - 29x + 28$$

$$\text{b) Określamy dziedzinę:}$$

przyrównujemy mianowniki do zera:

$$x^2 + 6x - 55 = 0$$

$$\Delta = 36 + 220 = 256$$

$$\sqrt{\Delta} = 16$$

$$x_1 = \frac{-6 - 16}{2} = -11$$

$$x_2 = \frac{-6 + 16}{2} = 5$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 3$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-11, 0, 3, 5\}$$

Korzystając z powyższych obliczeń, zapisujemy oba mianowniki w postaci iloczynowej:

$$\frac{\cancel{x}^1 (x^2 - 2x - 3)}{(x + 11)(x - 5)} \cdot \frac{x^2 + 9x - 22}{\cancel{x}_1 (x - 3)}$$

Ponieważ w obu licznikach mamy trójmiany kwadratowe, to przyrównujemy liczniki do zera:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$$x^2 + 9x - 22 = 0$$

$$\Delta = 81 + 88 = 169$$

$$\sqrt{\Delta} = 13$$

$$x_1 = \frac{-9 - 13}{2} = -11$$

$$x_2 = \frac{-9+13}{2} = 2$$

Zapisujemy liczniki w postaci iloczynowej i skracamy:

$$\frac{(x+1)\cancel{(x-3)}^1 \cdot \cancel{(x+11)}^1 (x-2)}{\cancel{(x+11)}^1 (x-5) \cdot \cancel{x-3}_1} = \frac{x^2 - x - 2}{x-5}$$

Dzielenie wyrażeń wymiernych

Dzielenie wyrażeń wymiernych, tak jak ułamków, zastępujemy mnożeniem pierwszego wyrażenia przez odwrotność drugiego wyrażenia. W związku z tym należy uzupełnić dziedzinę o miejsca zerowe drugiego licznika.

Przykład

Wykonaj dzielenie podanych wyrażeń wymiernych.

$$\text{a) } \frac{125-8x^3}{x^2-3x-108} : \frac{4x^2+10x+25}{x-12} \qquad \text{b) } \frac{x^2-18x+81}{3x-15} : \frac{x^2-9x}{45x-9x^2}$$

Rozwiązanie:

a) Określamy dziedzinę: $D = \mathbb{R} \setminus \{-9, 12\}$, przekształcamy pierwszy mianownik i licznik, stosując wzory skróconego mnożenia (drugi licznik jest nierozkładalny):

$$\frac{125-8x^3}{x^2-3x-108} : \frac{4x^2+10x+25}{x-12} = \frac{(5-2x)\cancel{(25+10x+4x^2)}^1}{(x+9)\cancel{(x-12)}_1} \cdot \frac{\cancel{x-12}^1}{\cancel{4x^2+10x+25}_1} = \frac{5-2x}{x+9}$$

$$\text{b) Zapisujemy wyrażenie bez głównej kreski ułamkowej: } \frac{x^2-18x+81}{3x-15} = \frac{x^2-18x+81}{3x-15} : \frac{x^2-9x}{45x-9x^2}$$

Określamy dziedzinę: $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 5, 9\}$, przekształcamy wyrażenie, stosując wzory skróconego mnożenia:

$$\frac{(x-9)^2}{3(x-5)} : \frac{x(x-9)}{9x(5-x)} = \frac{(x-9)\cancel{(x-9)}^1}{\cancel{3}_1 \cancel{(x-5)}_1} \cdot \frac{\cancel{9}^3 \cancel{x}^1 \cancel{(5-x)}^{-1}}{\cancel{x}_1 \cancel{(x-9)}_1} = 27-3x$$

2.7. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Dodawanie wyrażeń wymiernych

Dodając i odejmując ułamki zwykłe, sprowadzamy je do wspólnego mianownika. Tak samo postępujemy przy dodawaniu i odejmowaniu wyrażeń wymiernych, pamiętając o określeniu dziedziny wszystkich wyrażeń biorących udział w działaniach.

Przykład

Wykonaj dodawanie podanych wyrażeń wymiernych.

$$\text{a) } \frac{5}{3x+7} + \frac{2x+3}{3x-7} \qquad \text{b) } \frac{2x-9}{x-11} + \frac{3x+5}{x^2-121}$$

Rozwiązanie:

a) Określamy dziedzinę: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right\}$

$$\frac{5}{3x+7} + \frac{2x+3}{3x-7} = \frac{5(3x-7) + (3x+7)(2x+3)}{(3x+7)(3x-7)} = \frac{6x^2+38x-14}{9x^2-49}$$

b) Określamy dziedzinę: $D = \mathbb{R} \setminus \{-11, 11\}$

$$\frac{2x-9}{x-11} + \frac{3x+5}{x^2-121} = \frac{(2x-9)(x+11) + 3x+5}{x^2-121} = \frac{2x^2+16x-94}{x^2-121}$$

Odejmowanie wyrażeń wymiernych

Przykład

Wykonaj odejmowanie podanych wyrażeń wymiernych.

a) $\frac{3x}{2x+1} - 5$

b) $\frac{7x}{x-5} - \frac{5x}{x^2-25} - \frac{3x}{x+5}$

Rozwiązanie:

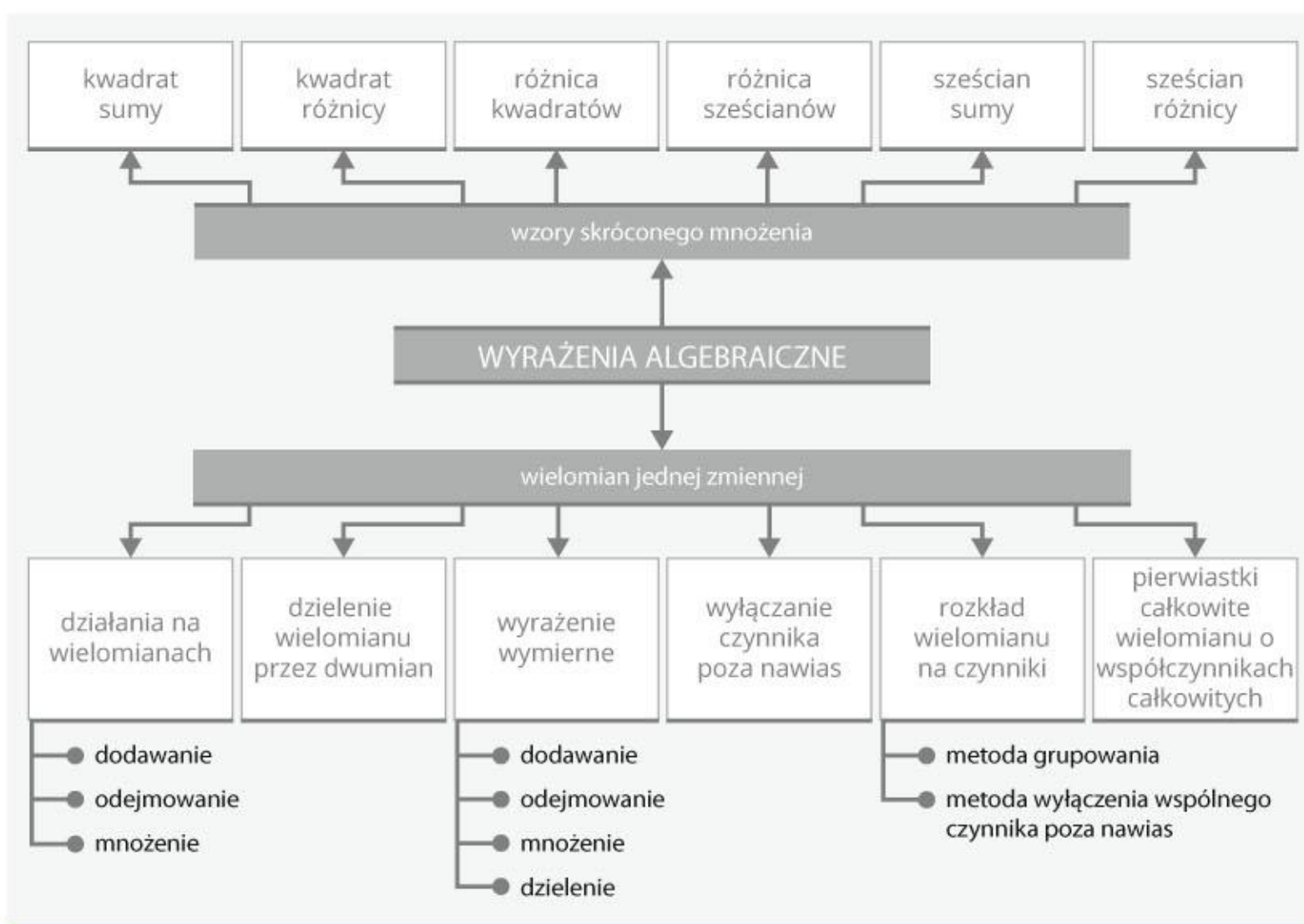
a) Określamy dziedzinę: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$\frac{3x}{2x+1} - 5 = \frac{3x - 10x - 5}{2x+1} = \frac{-7x-5}{2x+1}$$

b) Określamy dziedzinę:

$$\frac{7x}{x-5} - \frac{5x}{x^2-25} - \frac{3x}{x+5} = \frac{7x(x+5) - 5x - 3x(x-5)}{x^2-25} = \frac{4x^2+45}{x^2-25}$$

2.8. Utrwalamy wiedzę



3

Równania i nierówności

3.1. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą

Równania z jedną niewiadomą

Równaniem z jedną niewiadomą nazywamy równość dwóch wyrażeń algebraicznych, w których występuje dokładnie jedna niewiadoma.

Przykłady równań z jedną niewiadomą: $7x + 8 = 4(x - 5)$, $\frac{x-3}{4} - \frac{2(1-x)}{5} = \frac{1}{20}$, $\frac{x-1}{4+x} = \frac{2+x}{x-1}$.

Rozwiązaniem równania lub pierwiastkiem równania nazywamy liczbę, która po podstawieniu w miejsce niewiadomej i wykonaniu działań po obu stronach równania, da prawdziwą równość arytmetyczną.

Na przykład pierwiastkiem równania $2x - 3 = 5$ jest liczba 4, bo P – czyli prawa strona równania jest równa lewej – L , $L = 2 \cdot 4 - 3 = 5$, $L = P$.

Dziedziną równania z jedną niewiadomą nazywamy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wyrażenia tworzące równanie mają sens liczbowy.

Na przykład dziedziną równania $x - 7 = 3x + 5$ jest zbiór $\mathbb{R}$, a dziedziną równania $\frac{2x}{x-7} = 3$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Równania z tymi samymi niewiadomymi są **równoważne** wówczas, gdy mają taką samą dziedzinę i taki sam zbiór rozwiązań.

Na przykład równanie $x^2 = x(x+2) - 4$ jest równoważne równaniu $x^2 = x^2 + 2x - 4$ oraz równaniu $2x - 4 = 0$.

Rozwiązać równanie z jedną niewiadomą oznacza znaleźć wszystkie liczby, które spełniają to równanie, lub wykazać, że równanie to nie ma rozwiązania.

Aby rozwiązać równanie, zapisujemy równania równoważne danemu, pamiętając o tym, że:

- do obu stron równania możemy dodać lub od obu stron równania odjąć tę samą liczbę lub wyrażenie,
- obie strony równania możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Przykład

Rozwiąż równania metodą równań równoważnych.

a) $9^5 \cdot x = 3^6 \cdot 27^2 + 27^3 \cdot x$

Rozwiązanie:

Występujące w równaniu liczby zapisujemy jako potęgi liczby 3. Otrzymujemy:

$$(3^2)^5 \cdot x = 3^6 \cdot (3^3)^2 + (3^3)^3 \cdot x$$

$$3^{10} \cdot x = 3^{12} + 3^9 \cdot x$$

Obie strony tego równania dzielimy przez 3^9 . Stąd: $3x = 3^3 + x$, czyli $2x = 27$.

Otrzymujemy: $x = 13,5$

b) $\frac{x+3}{x+\sqrt{2}} = \frac{x+\sqrt{2}}{x-3}$

Rozwiązanie:

Ustalamy dziedzinę równania: $x + \sqrt{2} \neq 0$ i $x - 3 \neq 0$

Stąd $x \neq -\sqrt{2}$ i $x \neq 3$.

Otrzymujemy: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, 3\}$

Korzystamy z własności proporcji. Otrzymujemy $(x+3)(x-3) = (x+\sqrt{2})^2$

$$x^2 - 9 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$$

$$2\sqrt{2}x = -11$$

$$x = -\frac{11\sqrt{2}}{4}$$

Równanie sprzeczne i tożsamościowe

Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą może:

- nie mieć rozwiązania,
- mieć dokładnie jedno rozwiązanie,
- mieć nieskończenie wiele rozwiązań.



Równaniem sprzecznym nazywamy równanie, które nie ma rozwiązania.

Równaniem tożsamościowym nazywamy równanie, które jest spełnione przez każdą liczbę należącą do dziedziny równania..

Przykład

Rozwiąż podane równania. Wskaż równanie spreczne i równanie tożsamościowe.

a) $(\sqrt{6}x - \sqrt{3})^2 = 6x(x - \sqrt{2})$

Rozwiązanie:

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia i opuszczeniu nawiasu otrzymujemy:

$$6x^2 - 6\sqrt{2}x + 3 = 6x^2 - 6\sqrt{2}x$$

$$3 = 0$$

Odpowiedź: Jest to równanie spreczne, $x \in \emptyset$.

b) $(1 - 2x)^2 + 4x = 1 + 4x^2$

Rozwiązanie:

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy: $1 - 4x + 4x^2 + 4x = 1 + 4x^2$

$$0 = 0$$

Odpowiedź: Jest to równanie tożsamościowe, $x \in \mathbb{R}$.

Przykład

Za 8 lat wiek syna będzie stanowił 52% wieku ojca. Ile lat ma teraz każdy z nich, jeśli 10 lat temu ojciec był 4 razy starszy od syna?

Rozwiązanie:

Oznaczamy niewiadomą:

x – wiek syna 10 lat temu

Informacje zawarte w zadaniu przedstawimy w tabeli.

	10 lat temu	Obecnie	Za 8 lat
Ojciec	$4x$	$4x + 10$	$4x + 18$
Syn	x	$x + 10$	$x + 18$

Układamy równanie, wykorzystując informację, że za 8 lat wiek syna będzie stanowił 52% wieku ojca.

$$x + 18 = 2,08x + 9,36$$

$$\text{Rozwiązujemy równanie: } -1,0x = -8,64 \quad | :(-1,08)$$

$$8,75x = 8,75$$

$$x = 8 \text{ – wiek syna 10 lat wcześniej}$$

$$4 \cdot 8 = 32 \text{ – wiek ojca 10 lat wcześniej}$$

$$8 + 10 = 18 \text{ – obecny wiek syna}$$

$$32 + 10 = 42 \text{ – obecny wiek ojca}$$

Sprawdzenie:

$$18 + 8 = 26 \text{ – wiek syna za 8 lat}$$

$$42 + 8 = 50 \text{ – wiek ojca za 8 lat}$$

$$0,52 \cdot 50 = 26$$

Odpowiedź: Ojciec ma obecnie 42 lat, a syn ma 18 lat.

Nierówności z jedną niewiadomą

Nierównością liniową nazywamy nierówność, którą można zastąpić nierównością równoważną mającą postać: $ax + b < 0$ albo $ax + b > 0$, albo $ax + b \leq 0$, albo $ax + b \geq 0$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, a x jest niewiadomą.

Liczba spełnia daną nierówność z jedną niewiadomą, jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej i wykonaniu działań po obu stronach nierówności otrzymamy prawdziwą nierówność arytmetyczną.

Dziedziną nierówności z jedną niewiadomą nazywamy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wyrażenia tworzące nierówność mają sens liczbowy. Na przykład dziedziną nierówności $2(x - 1) \leq \sqrt{3}x - 2$ jest zbiór $\mathbb{R}$, a dziedziną nierówności $\frac{x}{x - \sqrt{2}} \leq 5$ zbiór $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$.

➤ **Nierówności** z tymi samymi niewiadomymi nazywamy **równoważnymi**, gdy mają taką samą dziedzinę i taki sam zbiór rozwiązań.

➤ **Rozwiązać nierówność** z jedną niewiadomą oznacza wyznaczyć zbiór wszystkich liczb, które spełniają tę nierówność, lub wykazać, że nie istnieją liczby spełniające tę nierówność.

Aby rozwiązać nierówność, zapisujemy nierówności równoważne danej, pamiętając o tym, że:

- do obu stron nierówności możemy dodać lub odjąć tę samą liczbę lub wyrażenie algebraiczne,
- obie strony nierówności możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę dodatnią, pozostawiając zwrot nierówności bez zmiany,
- obie strony nierówności możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając jednocześnie zwrot nierówności na przeciwny.

Przykład

Rozwiąż nierówności podane poniżej. Zbiór rozwiązań zapisz w postaci przedziału liczbowego.

a) $(x + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) > -1 + \sqrt{3}$

Rozwiązanie:

Po opuszczeniu nawiasów otrzymujemy: $(2 - \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} - 3 > -1 + \sqrt{3}$

$$(2 - \sqrt{3})x > 2 - \sqrt{3}$$

Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę: $2 - \sqrt{3}$ (dodatnią). Otrzymujemy:

$$x > 1$$

Odpowiedź: $x \in (1, \infty)$

b) $\frac{(x-3)^2}{2} - \frac{(4-x)(4+x)}{3} \leq \frac{5(x^2-1)}{6}$

Rozwiązanie:

Po pomnożeniu obu stron nierówności przez liczbę 6 otrzymujemy:

$$3(x-3)^2 - 2(4-x)(4+x) \leq 5x^2 - 5$$

Opuszczamy nawiasy i redukujemy wyrazy podobne. Otrzymujemy:

$$3(x^2 - 6x + 9) - 2(16 - x^2) \leq 5x^2 - 5$$

$$3x^2 - 18x + 27 - 32 + 2x^2 \leq 5x^2 - 5$$

$$3x^2 - 18x + 2x^2 - 5x^2 \leq -5 - 27 + 32$$

$$-18x \leq 0, \text{ skąd: } x \geq 0$$

Odpowiedź: $x \in [0, \infty)$

Nierówności tożsamościowe i sprzeczne

➤ **Nierównością tożsamościową** nazywamy nierówność, która jest spełniona przez każdą liczbę należącą do dziedziny tej nierówności.

➤ **Nierównością sprzeczną** nazywamy nierówność, której nie spełnia żadna liczba należąca do dziedziny tej nierówności.

Przykład

Rozwiąż podane nierówności. Wskaż nierówność sprzeczną i tożsamościową.

a) $\frac{3x(x-2)}{2} - x(4x-3) > \frac{5(1-x)(1+x)}{2}$

Rozwiązanie:

Po pomnożeniu obu stron nierówności przez 2 i opuszczeniu nawiasów otrzymujemy:

$$3x(x-2) - 2x(4x-3) > 5(1-x)(1+x)$$

$$3x^2 - 6x - 8x^2 + 6x > 5(1-x^2)$$

$$3x^2 - 6x - 8x^2 + 6x > 5 - 5x^2$$

$$0 > 5$$

Odpowiedź: Jest to nierówność spreczna, $x \in \emptyset$.

b) $\sqrt{5}x + 5\sqrt{5} \geq \sqrt{5}(x + \sqrt{5})$

Rozwiązanie:

Opuszczamy nawiasy i przenosimy niewiadome na lewą stronę nierówności, a wiadome – na prawą stronę nierówności. Otrzymujemy: $\sqrt{5}x - \sqrt{5}x \geq 5 - 5\sqrt{5}$



$$0 \geq 5(1 - \sqrt{5})$$

Zauważamy, że liczba $1 - \sqrt{5}$ jest liczbą ujemną, wobec tego nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

Odpowiedź: Jest to nierówność tożsamościowa, $x \in \mathbb{R}$.

Przykład

Rozwiąż nierówność $\frac{x}{3^4} - \frac{1}{(-3)^5} \leq -\left(-\frac{1}{9}\right)^2$. Zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

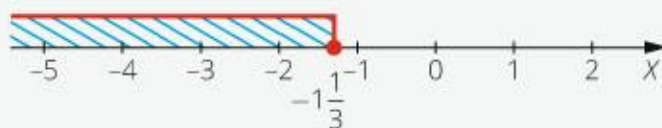
Czy liczba $-\sqrt{3}$ należy do zbioru rozwiązań tej nierówności?

Rozwiązanie:

$$\frac{x}{81} + \frac{1}{243} \leq -\frac{1}{81} \cdot 243$$

$$3x + 1 \leq -3$$

$$x \leq -1\frac{1}{3}$$



Ponieważ $\sqrt{3} \approx 1,73$, możemy zapisać zależność: $-\sqrt{3} < -1\frac{1}{3}$. A więc liczba $-\sqrt{3} \in \left(-\infty, -1\frac{1}{3}\right]$.

Odpowiedź: Liczba $-\sqrt{3}$ należy do zbioru rozwiązań tej nierówności.

Nierówności podwójna

Nierówność podwójna z jedną niewiadomą to nierówność, którą można zapisać za pomocą układu dwóch nierówności. Na przykład $-7 \leq 3x + 5 \leq 2$, $\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ 2x - 1 < 4 \end{cases}$.

Przykład

Rozwiąż nierówność podwójną $-2 < \frac{1-3x}{2} - (x-1) < 2$.

Rozwiązanie:

Mnożymy każdą stronę nierówności przez 2. Otrzymujemy: $-4 < 1 - 3x - 2(x - 1) < 4$

Stąd: $-4 < 3 - 5x < 4$

Odejmujemy od każdej strony nierówności liczbę 3. Otrzymujemy: $-7 < -5x < 1$

Dzielimy każdą stronę nierówności przez -5 . Otrzymujemy: $\frac{7}{5} > x > -\frac{1}{5}$

Stąd: $-\frac{1}{5} < x < \frac{7}{5}$

Odpowiedź: Zbiór liczb spełniających tę nierówność podwójną to $\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

Przykład

Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 11, a liczba otrzymana po przestawieniu cyfr danej liczby dwucyfrowej jest mniejsza od trzeciej części liczby początkowej. Znajdź liczbę początkową.

Rozwiązanie:

Oznaczamy niewiadomą:

x – cyfra dziesiątek

$11 - x$ – cyfra jedności

Ustalamy dziedzinę wynikającą z oznaczenia niewiadomych.

Ponieważ x jest cyfrą dziesiątek w liczbie dwucyfrowej, wobec tego $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Zauważamy, że dla cyfry dziesiątek $x = 1$ otrzymujemy z zależności $11 - x$ cyfrę jedności równą: $11 - 1 = 10$. Liczba 10 nie może być cyfrą jedności, dlatego wykluczaliśmy 1 ze zbioru, do którego należy x .

$10x + (11 - x)$ – liczba początkowa

$10 \cdot (11 - x) + x$ – liczba po przestawieniu cyfr

Zapisujemy i rozwiązujemy nierówność wynikającą z warunków zadania: $10 \cdot (11 - x) + x < \frac{10x + (11 - x)}{3}$

$$110 - 10x + x < \frac{10x + (11 - x)}{3} \cdot 3$$

$$330 - 27x < 9x + 11$$

$$\text{Stąd: } x > 8\frac{31}{36}$$

W tabelce wypisujemy liczbę spełniającą warunki zadania:

Cyfra jedności	2
Cyfra dziesiątek	9
Liczba	92

Odpowiedź: Tą liczbą jest 92.

3.2. Równania i nierówności kwadratowe

Równanie kwadratowe

Równanie kwadratowe z niewiadomą x jest to równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$. Postać $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a \neq 0$, nazywamy postacią ogólną równania kwadratowego.

W rozwiązywaniu niektórych równań kwadratowych korzystamy z takich sposobów rozkładu sumy algebraicznej na czynniki, jak wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias oraz stosowanie wzorów skróconego mnożenia. Następnie stosujemy twierdzenie:

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$: $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Przykład

Rozwiąż równania.

a) $\sqrt{2}x^2 + x = 0$

Rozwiązanie:

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias. Otrzymujemy: $x \cdot (\sqrt{2}x + 1) = 0$

Stąd: $x = 0$ lub $\sqrt{2}x + 1 = 0$

Czyli: $x = 0$ lub $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $3x^2 - 5 = 0$

Rozwiązanie:

Stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Otrzymujemy: $(\sqrt{3}x - \sqrt{5})(\sqrt{3}x + \sqrt{5}) = 0$

Stąd: $\sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0$ lub $\sqrt{3}x + \sqrt{5} = 0$

Czyli: $x = \frac{\sqrt{15}}{3}$ lub $x = -\frac{\sqrt{15}}{3}$

c) $x^2 - 2\sqrt{7}x + 7 = 0$

Rozwiązanie:

Stosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Otrzymujemy: $(x - \sqrt{7})^2 = 0$

Stąd: $x - \sqrt{7} = 0$

Czyli: $x = \sqrt{7}$



Twierdzenie o liczbie pierwiastków równania kwadratowego

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty nazywany podwójnym: $x_0 = \frac{-b}{2a}$
3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Przykład

Rozwiąż równania.

a) $x^2 + 8x + 6 = 0$

Rozwiązanie:

Obliczamy: $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 40$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{10}$

$\Delta > 0$, równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste:

$$x_1 = \frac{-8 - 2\sqrt{10}}{2} = -4 - \sqrt{10}, x_2 = \frac{-8 + 2\sqrt{10}}{2} = -4 + \sqrt{10}$$

b) $2(x-1) = x^2$

Rozwiązanie:

Przenosimy wyrazy na jedną stronę i porządkujemy od najwyższej potęgi niewiadomej:

Otrzymujemy: $x^2 - 2x + 2 = 0$

Obliczamy: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

$\Delta < 0$, równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych.

c) $-\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{3} + 2x\right) = 1$

Rozwiązanie:

Przenosimy wyrazy na jedną stronę i opuszczamy nawias.

Otrzymujemy: $\frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}x + 1 = 0$

Obliczamy: $\Delta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot 1 = 0$

$\Delta = 0$, równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty: $x_0 = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{9}} = -3$

d) $(2x+5)^2 - 4(2x+5) = 0$

Rozwiązanie:

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

Otrzymujemy: $(2x+5)((2x+5)-4) = 0$, czyli: $(2x+5)(2x+1) = 0$

Stąd: $2x+5 = 0$ lub $2x+1 = 0$

Czyli: $x = -2\frac{1}{2}$ lub $x = -\frac{1}{2}$

Przykład

Oblicz, ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba boków jest równa liczbie przekątnych.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome:

x - liczba boków wielokąta wypukłego, $x \in \mathbb{N}$ i $x \geq 4$

$x-3$ - liczba przekątnych wychodzących z jednego wierzchołka

$\frac{x(x-3)}{2}$ - liczba wszystkich przekątnych (przekątną pomiędzy dwoma wierzchołkami liczymy tylko raz)

$$\frac{x(x-3)}{2} = x$$

Przekształcamy równanie do postaci: $x^2 - 5x = 0$

Otrzymujemy: $x(x-5) = 0$

Stąd: $x = 0 \notin D$ lub $x = 5$

Odpowiedź: Jest to pięciokąt.

Nierówności kwadratowe

Nierównością kwadratową z niewiadomą x nazywamy każdą nierówność postaci $ax^2 + bx + c > 0$ lub $ax^2 + bx + c \geq 0$, lub $ax^2 + bx + c < 0$, lub $ax^2 + bx + c \leq 0$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.

W rozwiązywaniu nierówności kwadratowych wykorzystujemy umiejętność rozwiązywania równań kwadratowych, umiejętność rysowania wykresu funkcji kwadratowej i odczytywania własności tej funkcji z wykresu.

Położenie paraboli względem osi X , w zależności od współczynnika a i Δ

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Przykład

Rozwiąż nierówność.

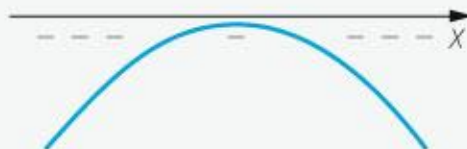
a) $-x^2 + 5x - 7 > 0$

Rozwiązanie:

Znajdujemy pierwiastki równania: $-x^2 + 5x - 7 = 0$

Obliczamy: $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = -3$

$\Delta < 0$, równanie nie ma pierwiastków, a ramiona paraboli są skierowane do dołu, ponieważ współczynnik a jest ujemny.



Nierówność jest sprzeczna. Zapisujemy $x \in \emptyset$.

b) $(x-1)^2 \leq 4$

Rozwiązanie:

Przenosimy wyrazy na jedną stronę i stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Otrzymujemy: $((x-1)-2)((x-1)+2) \leq 0$, czyli $(x-3)(x+1) \leq 0$

Znajdujemy pierwiastki równania: $(x-3)(x+1) = 0$

Są to: $x = 3$ lub $x = -1$





Na osi liczbowej zaznaczamy pierwiastki równania oraz szkicujemy parabolę $f(x) = (x-3)(x+1)$.
Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in \langle -1, 3 \rangle$.

c) $x^2 + x + \frac{1}{4} \leq 0$

Rozwiązanie:

Znajdujemy pierwiastki równania: $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

Obliczamy: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$

$\Delta = 0$, równanie ma jeden pierwiastek: $x = -\frac{1}{2}$

Szkicujemy parabolę $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$. Pamiętajmy, że ramiona paraboli są skierowane do góry, ponieważ współczynnik a jest dodatni, a parabola ma jeden punkt wspólny z osią X .



Nierówność spełnia tylko jedna liczba: $x = -\frac{1}{2}$.

Przykład

Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{6 + x^2}$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy założenia: $x^2 - 2 \geq 0$ i $6 + x^2 \geq 0$

1. Rozwiązujemy równanie: $x^2 - 2 = 0$

Otrzymujemy: $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

Zapisujemy pierwiastki tego równania: $x = \sqrt{2}$ lub $x = -\sqrt{2}$

Szkicujemy parabolę.



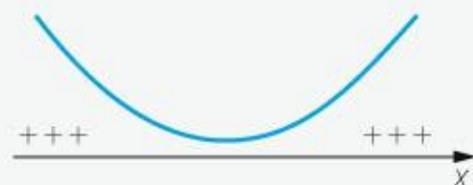
Odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

2. Rozwiązujemy równanie: $6 + x^2 = 0$

Obliczamy: $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -24$

$\Delta < 0$, równanie nie ma pierwiastków.

Szkicujemy parabolę.



Odczytujemy rozwiązanie: $x \in R$.

3. Szukamy iloczynu zbiorów: $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ i $x \in R$. Jest nim zbiór $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

Odpowiedź: Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{6 + x^2}$ jest zbiór $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

3.3. Równania i nierówności wielomianowe

Metody rozwiązywania równań wielomianowych

Równania wielomianowe drugiego stopnia (czyli tzw. równania kwadratowe) rozwiązujemy metodami opisanymi w poprzednich tematach.

Metoda rozwiązywania bardziej skomplikowanych równań wielomianowych (stopnia trzeciego i wyższych) jest następująca:

- przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę równania, tak aby po prawej stronie zostało zero,
- rozkładamy lewą stronę na iloczyn czynników,
- przyrównujemy każdy czynnik do zera,
- rozwiązujemy kilka prostych równań i otrzymujemy w rezultacie rozwiązania początkowego równania wielomianowego.

Przykład

Rozwiąż równanie $x^3 + 7x^2 = 3x + 21$.

Rozwiązanie:

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę równania:

$$x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$$

Rozkładamy lewą stronę na iloczyn czynników (np. metodą grupowania wyrazów):

$$x^2(x + 7) - 3(x + 7) = 0$$

$$(x + 7)(x^2 - 3) = 0$$

$$(x + 7)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

Przyrównujemy każdy nawias do zera:

$$x + 7 = 0 \text{ lub } x - \sqrt{3} = 0, \text{ lub } x + \sqrt{3} = 0$$

$$x = -7 \text{ lub } x = \sqrt{3}, \text{ lub } x = -\sqrt{3}$$

Odpowiedź: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = -7$

Przykład

Rozwiąż równanie $2x^3 + 3x = 5x^2$.

Rozwiązanie:

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę równania:

$$2x^3 + 3x - 5x^2 = 0$$

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = 0$$

Wylączamy x przed nawias:

$$x(2x^2 - 5x + 3) = 0$$

Zapisujemy jako dwa równania:

$$x = 0 \text{ lub } 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Równanie kwadratowe rozwiązujemy, obliczając wyróżnik trójmianu:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie to ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-(-5) - 1}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad x_2 = \frac{-(-5) + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania $2x^3 + 3x = 5x^2$ są liczby 0, 1, $1\frac{1}{2}$.

Przykład

Rozwiąż równanie $x^4 = 16$.

Rozwiązanie:

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę równania:

$$x^4 - 16 = 0$$

Stosujemy wzór na różnicę kwadratów:

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$$

Przyrównujemy każdy nawias do zera:

$$x - 2 = 0 \text{ lub } x + 2 = 0, \text{ lub } x^2 + 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ lub } x = -2 \text{ oraz wyrażenie } x^2 + 4 \neq 0$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania $x^4 - 16 = 0$ są liczby -2 i 2 .





Przykład

Rozwiąż równanie dwukwadratowe $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $x^2 = t, t \geq 0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe: $t^2 - 3t + 2 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie to ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = \frac{-(-3) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad t_2 = \frac{-(-3) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Wracamy do podstawienia i otrzymujemy dwa równania kwadratowe:

$x^2 = 1$ oraz $x^2 = 2$, które rozwiązujemy, stosując wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$x^2 - 1 = 0 \quad (x - 1)(x + 1) = 0 \quad x = 1 \text{ lub } x = -1$$

$$x^2 - 2 = 0 \quad (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \quad x = \sqrt{2} \text{ lub } x = -\sqrt{2}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ są liczby $-\sqrt{2}, 1, -1$ i $\sqrt{2}$.

Przykład

Rozwiąż równanie dwukwadratowe $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $x^2 = t, t \geq 0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe $t^2 - t - 6 = 0$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie to ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = \frac{-(-1) - 5}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad t_2 = \frac{-(-1) + 5}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Wracamy do podstawienia i otrzymujemy dwa równania kwadratowe:

$x^2 = -2$ oraz $x^2 = 3$, pierwsze z nich jest sprzeczne, a drugie rozwiązujemy, stosując wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$x^2 - 3 = 0 \quad (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \quad x = \sqrt{3} \text{ lub } x = -\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania $x^4 - x^2 - 6 = 0$ są liczby $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$.

Metody rozwiązywania nierówności wielomianowych

Nierówności wielomianowe rozwiązujemy bardzo podobnie do równań wielomianowych. Jedyna różnica polega na tym, że na końcu trzeba naszkicować wykres wielomianu i odczytać z niego rozwiązanie.

Metoda rozwiązywania nierówności wielomianowych (stopnia trzeciego i wyższych) jest następująca:

- przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę nierówności, tak aby po prawej stronie zostało 0,
- od tego momentu lewą stronę nierówności uważamy za wielomian, którego wykres chcemy naszkicować,
- wyznaczamy miejsca zerowe tego wielomianu,
- szkicujemy wykres wielomianu,
- odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności.

Przykład

Rozwiąż nierówność $x^3 - 25x > 175 - 7x^2$.

Rozwiązanie:

Przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę nierówności:

$$x^3 + 7x^2 - 25x - 175 > 0$$

Zapisujemy wielomian:

$$W(x) = x^3 + 7x^2 - 25x - 175$$

Wyznaczamy miejsca zerowe tego wielomianu, rozkładając go na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$x^3 + 7x^2 - 25x - 175 = 0$$

$$x^2(x + 7) - 25(x + 7) = 0$$

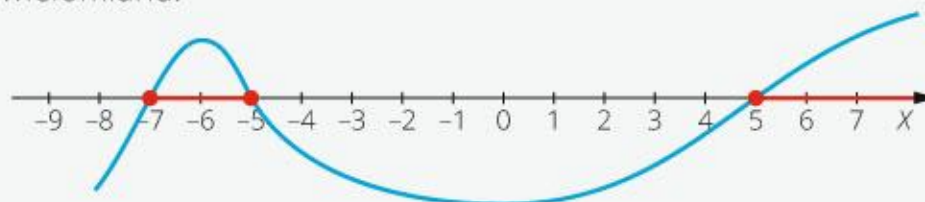
$$(x + 7)(x^2 - 25) = 0$$

$$(x+7)(x+5)(x-5)=0$$

$$x_1 = -7 \quad x_2 = -5 \quad x_3 = 5$$

Wstawiając w miejsce x liczbę mniejszą niż minus 7, otrzymujemy w każdym z nawiasów liczbę ujemną, zatem mnożąc przez siebie trzy minusy otrzymujemy minus, czyli zaczynamy szkicowanie wykresu od lewej strony od dołu.

Szkicujemy wykres wielomianu:



Odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności: $x \in (-7, -5) \cup (5, \infty)$

Odpowiedź: $x \in (-7, -5) \cup (5, \infty)$

Przykład

Rozwiąż nierówność $x^4 - x^2 + 24 \geq 12(x^2 - 1)$.

Rozwiązanie:

Przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę nierówności:

$$x^4 - x^2 + 24 \geq 12x^2 - 12 \quad x^4 - 13x^2 + 36 \geq 0$$

Zapisujemy wielomian:

$$W(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

Wyznaczamy miejsca zerowe tego wielomianu, rozwiązując równanie dwukwadratowe:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, $t > 0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe: $t^2 - 13t + 36 = 0$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 169 - 144 = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = \frac{-(-13) - 5}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4 \quad t_2 = \frac{-(-13) + 5}{2 \cdot 1} = \frac{18}{2} = 9$$

Wracamy do podstawienia i otrzymujemy dwa równania kwadratowe

$x^2 = 4, x^2 = 9$, które rozwiązujemy, stosując wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażen:

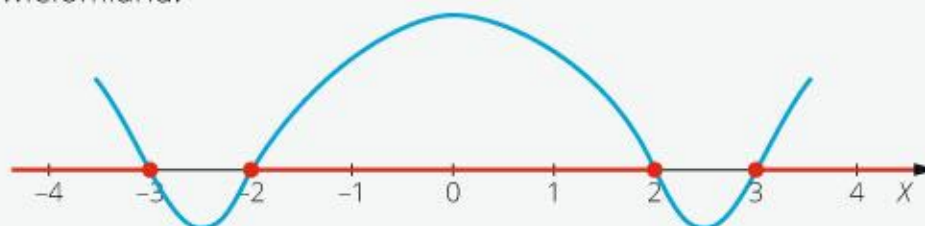
$$x^2 - 4 = 0 \quad (x-2)(x+2) = 0 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

$$x^2 - 9 = 0 \quad (x-3)(x+3) = 0 \quad x_3 = 3 \quad x_4 = -3$$

Zapisujemy wielomian w postaci iloczynowej:

$$W(x) = (x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$$

Szkicujemy wykres wielomianu:



Odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2) \cup (3, \infty)$

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2) \cup (3, \infty)$

Przykład

Rozwiąż nierówność $-x^4 + x^3 + 6x^2 \leq 0$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wielomian:

$$W(x) = -x^4 + x^3 + 6x^2$$

Wyznaczamy miejsca zerowe tego wielomianu:

$$-x^4 + x^3 + 6x^2 = 0$$

$$-x^2(x^2 - x - 6) = 0$$

$$-x^2(x-3)(x+2) = 0$$

$$-x^2 = 0$$

$$x-3=0$$

$$x+2=0$$



$x = 0$ pierwiastek podwójny

$x = 3 \quad x = -2$

Zapisujemy wielomian w postaci iloczynowej:

$$W(x) = -x^2(x+3)(x-2)$$

Szkicujemy wykres wielomianu:



Odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności $x \in (-\infty, -2) \cup \{0\} \cup (3, \infty)$

Odpowiedź: $x \in (-\infty, -2) \cup \{0\} \cup (3, \infty)$

3.4. Równania i nierówności wymierne

Rozwiązywanie równań wymiernych

Przystępując do rozwiązywania równań oraz nierówności wymiernych, w pierwszej kolejności musimy określić dziedzinę wyrażeń wymiernych występujących w tym równaniu lub w tej nierówności, czyli wykluczyć liczby, dla których mianowniki wyrażeń się zerują.

Metoda rozwiązywania równań wymiernych jest wytłumaczona w przykładach.

Przykład

Rozwiąż równanie $\frac{3x-5}{2x+4} = 7$.

Rozwiązanie:

Określamy dziedzinę wyrażenia $\frac{3x-5}{2x+4}$, przyrównując mianownik do zera:

$$2x+4=0 \qquad 2x=-4 \qquad x=-2$$

Dla liczby $x = -2$ wyrażenie wymierne (ułamek) nie ma sensu, więc usuwamy ją z dziedziny, zapisując $D: \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ lub $x \neq -2$.

Następnie pozbywamy się mianownika, mnożąc obie strony równania przez $2x+4$.

Otrzymujemy równanie $3x-5 = 7(2x+4)$, które rozwiązujemy:

$$3x-5 = 14x+28 \qquad 3x-14x = 28+5 \qquad -11x = 33 \qquad x = -3$$

Sprawdzamy, czy nasze rozwiązanie należy do dziedziny, i dajemy odpowiedź.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba $x = -3$.

Przykład

Rozwiąż równanie $\frac{x-3}{x+3} = \frac{x-2}{x+2}$.

Rozwiązanie:

Określamy dziedzinę obu wyrażeń: $\frac{x-3}{x+3}$ oraz $\frac{x-2}{x+2}$.

Mianowniki tych wyrażeń zerują się dla $x = -3$ oraz $x = -2$, zatem $D: \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.

Równanie ma postać proporcji, więc mnożymy „na krzyż”:

$$(x-3)(x+2) = (x-2)(x+3)$$

$$x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6$$

$$-2x = 0 \qquad x = 0$$

Sprawdzamy, czy nasze rozwiązanie należy do dziedziny, i dajemy odpowiedź.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba $x = 0$.

Przykład

Rozwiąż równanie $\frac{x}{2x+2} - \frac{x-1}{x+1} = 0$.

Rozwiązanie:

Określamy dziedzinę obu wyrażeń: $\frac{x}{2x+2}$ oraz $\frac{x-1}{x+1}$

Mianowniki tych wyrażeń zerują się dla $x = -1$, zatem $D: \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Przenosimy drugie wyrażenie na prawą stronę równania i otrzymujemy: $\frac{x}{2x+2} = \frac{x-1}{x+1}$.

Równanie ma postać proporcji, więc mnożymy „na krzyż”:

$$x(x+1) = (x-1)(2x+2)$$

$$x^2 + x = 2x^2 + 2x - 2x - 2$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2 \cdot (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

Sprawdzamy, czy nasze rozwiązanie należy do dziedziny, i dajemy odpowiedź.

$x_2 = -1$ nie należy do dziedziny, zatem równanie ma tylko jedno rozwiązanie.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba $x = 2$.

Przykład

Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{x^2+6x+9} + \frac{x-1}{9-x^2} = 0$.

Rozwiązanie:

Określamy dziedzinę obu wyrażeń: $\frac{2x+1}{x^2+6x+9}$ oraz $\frac{x-1}{9-x^2}$.

Pierwszy mianownik da się zwinąć według wzoru skróconego mnożenia do postaci $(x+3)^2$, zatem zeruje się dla $x = -3$, a drugi zapisujemy, stosując wzór skróconego mnożenia w postaci $(3-x)(3+x)$, czyli zeruje się dla $x = -3$ i $x = 3$. Dziedziną równania jest $D: \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Przenosimy drugie wyrażenie na prawą stronę równania i otrzymujemy: $\frac{2x+1}{x^2+6x+9} = \frac{x-1}{x^2-9}$.

Równanie ma postać proporcji więc mnożymy „na krzyż”:

$$(2x+1)(x^2-9) = (x-1)(x^2+6x+9)$$

$$2x^3 - 18x + x^2 - 9 = x^3 + 6x^2 + 9x - x^2 - 6x - 9$$

$$x^3 - 4x^2 - 21x = 0$$

$$x(x^2 - 4x - 21) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21) = 16 + 84 = 100$$

$$\sqrt{\Delta} = 10$$

$$x_1 = \frac{4-10}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{4+10}{2 \cdot 1} = \frac{14}{2} = 7$$

Sprawdzamy, czy nasze rozwiązanie należy do dziedziny, i dajemy odpowiedź.

$x_1 = -3$ nie należy do dziedziny, zatem równanie ma tylko dwa rozwiązania.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są liczby $x = 0$ oraz $x = 7$.

Rozwiązywanie nierówności wymiernych

Przy rozwiązywaniu nierówności wymiernych korzystamy z własności:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \neq 0$ i $b \neq 0$ znak ilorazu $\frac{a}{b}$ jest taki sam, jak znak iloczynu $a \cdot b$.

Metoda rozwiązywania nierówności wymiernych jest wytłumaczona w przykładach.

Przykład

Rozwiąż nierówność $\frac{2x-5}{x-3} \leq 3$.

Rozwiązanie:

Określamy dziedzinę wyrażenia: $\frac{2x-5}{x-3}$.

Mianownik tego wyrażenia zeruje się dla $x = 3$, zatem $D: \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Przenosimy liczbę 3 na lewą stronę i sprowadzając do wspólnego mianownika, otrzymujemy:

$$\frac{2x-5}{x-3} - 3 \leq 0$$



$$\frac{2x-5}{x-3} - \frac{3(x-3)}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{2x-5-3x+9}{x-3} \leq 0$$

$$\frac{-x+4}{x-3} \leq 0$$

Korzystając z powyższej własności, zapisujemy:

$$(-x+4)(x-3) \leq 0$$

$-(x-4)(x-3) \leq 0$, mnożąc obie strony przez -1 , otrzymujemy:

$$(x-4)(x-3) \geq 0$$



Otrzymaliśmy nierówność kwadratową w postaci iloczynowej, zatem miejscami zerowymi są liczby 3 i 4.

Szkicujemy wykres paraboli i odczytujemy rozwiązanie:

$$x \in (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$$

Ponieważ liczba 3 nie należy do dziedziny zatem $x \in (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności są liczby $x \in (-\infty, 3) \cup (4, \infty)$.

Przykład

Rozwiąż nierówność $\frac{x+3}{x^2-16} \geq \frac{2x}{x^2-4x}$.

Rozwiązanie:

Określamy dziedzinę obu wyrażeń: $\frac{x+3}{x^2-16}$ oraz $\frac{2x}{x^2-4x}$.

Pierwszy mianownik zapisujemy, stosując wzór skróconego mnożenia w postaci $(x-4)(x+4)$, czyli zeruje się dla $x = -4$ i $x = 4$, a drugi rozkładamy do postaci $x(x-4)$, czyli zeruje się dla $x = -4$ i $x = 0$.

Dziedziną równania jest $D: \mathbb{R} \setminus \{-4, 0, 4\}$.

Przenosimy wyrażenie z prawej strony na lewą stronę, sprowadzamy do wspólnego mianownika i otrzymujemy:

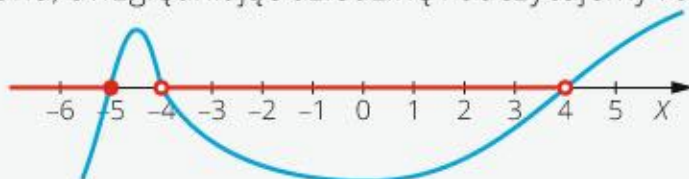
$$\frac{x+3}{(x-4)(x+4)} - \frac{2x}{x(x-4)} \geq 0 \quad \frac{x(x+3)-2x(x+4)}{x(x-4)(x+4)} \geq 0 \quad \frac{x^2+3x-2x^2-8x}{x(x-4)(x+4)} \geq 0$$

$$\frac{-x^2-5x}{x(x-4)(x+4)} \geq 0 \quad \frac{x^2+5x}{x(x-4)(x+4)} \leq 0 \quad \frac{x(x+5)}{x(x-4)(x+4)} \leq 0 \quad \frac{(x+5)}{(x-4)(x+4)} \leq 0$$

Zamieniamy iloraz na iloczyn:

$$(x+5)(x+4)(x-4) \leq 0$$

Szkicujemy wykres wielomianu, uwzględniając dziedzinę i odczytujemy rozwiązanie:



$$x \in (-\infty, -5) \cup (-4, 0) \cup (0, 4)$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem nierówności są liczby $x \in (-\infty, -5) \cup (-4, 0) \cup (0, 4)$.

3.5. Zastosowanie wzorów Viète'a

Wzory Viète'a

Wyznaczając sumę i iloczyn pierwiastków x_1 i x_2 równania kwadratowego, otrzymujemy wzory:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

zwane wzorami Viète'a, które możemy stosować tylko wtedy, gdy $\Delta \geq 0$.

Dzięki tym wzorom możemy, bez wyznaczania rozwiązań równania, obliczyć:

a) kwadrat różnicy pierwiastków x_1 i x_2 : $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2$, który po podstawieniu za sumę i iloczyn przyjmuje postać $\frac{\Delta}{a^2}$,

b) sumę kwadratów pierwiastków x_1 i x_2 : $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$, który po podstawieniu za sumę i iloczyn przyjmuje postać $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$,

c) sumę odwrotności pierwiastków $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$, który po podstawieniu za sumę i iloczyn przyjmuje postać $-\frac{b}{c}$.

Możemy też określić znaki pierwiastków równania kwadratowego:

jeżeli $\Delta \geq 0$, to:

x_1 i x_2 są dodatnie, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$

x_1 i x_2 są ujemne, gdy $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$

x_1 i x_2 mają różne znaki, gdy $x_1 \cdot x_2 < 0$

Przykład

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, wiedząc, że x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $\sqrt{5}x^2 - 7x + 2\sqrt{5} = 0$.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wiemy, że x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego, więc nie ma potrzeby obliczania wyróżnika.

Przekształcamy wyrażenie do postaci pozwalającej wykorzystać wzory Viète'a:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2}{(x_1 \cdot x_2)^2} = \frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

Podstawiamy wartości współczynników z równania i obliczamy:

$$\frac{\left(\frac{-(-7)}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}{\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{\frac{49}{5} - 4}{4} = \frac{29}{20} = 1\frac{9}{20}$$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia jest równa $1\frac{9}{20}$.

Przykład

Napisz równanie kwadratowe, w którym współczynnik $a = 1$, suma pierwiastków wynosi 2, a iloczyn pierwiastków jest równy -3 .

Rozwiązanie:

Z treści zadania wiemy, że x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego, więc nie ma potrzeby obliczania wyróżnika.

Zapisujemy układ równań i obliczamy wartości pierwiastków równania:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 - x_1 \\ x_1 \cdot x_2 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 - x_1 \\ x_1 \cdot (2 - x_1) = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 - x_1 \\ -x_1^2 + 2x_1 + 3 = 0 \end{cases}$$



> Zajmijmy się drugim równaniem. Mnożąc go przez -1 , otrzymujemy:

$$x_1^2 - 2x_1 - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Wstawiając te wartości do równania pierwszego, otrzymujemy:

$$x_{2_1} = 2 - (-1) = 3$$

$$x_{2_2} = 2 - 3 = -1$$

Zapisujemy równanie kwadratowe w postaci iloczynowej:

$$(x+1)(x-3) = 0$$

a następnie w postaci ogólnej:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Odpowiedź: Równanie ma postać $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Przykład

Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie $x^2 - (m+2)x + m+4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne.

Rozwiązanie:

Muszą być jednocześnie spełnione warunki:

1) $a = 1 \neq 0$

2) równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, jeżeli $\Delta > 0$:

$$(-(m+2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+4) > 0$$

$$m^2 + 4m + 4 - 4m - 16 > 0$$

$$m^2 - 12 > 0$$

$$(m - 2\sqrt{3})(m + 2\sqrt{3}) > 0$$



$$m \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$$

3) pierwiastki są tego samego znaku, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$:

$$\frac{m+4}{1} > 0$$

$$m+4 > 0$$

$$m > -4$$

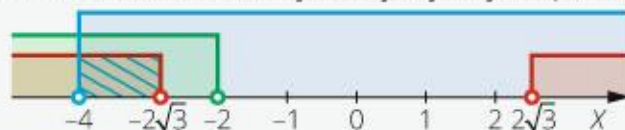
4) pierwiastki są ujemne, gdy $x_1 + x_2 < 0$:

$$\frac{m+2}{1} < 0$$

$$m+2 < 0$$

$$m < -2$$

Zaznaczamy wszystkie warunki na osi liczbowej i znajdujemy część wspólną:



Odpowiedź: Wartości parametru należą do przedziału $(-4, -2\sqrt{3})$.

Przykład

Wyznacz wartości parametru m , dla których równanie $(m+1)x^2 + mx - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie.

Rozwiązanie:

Muszą być jednocześnie spełnione warunki:

1) $m+1 \neq 0$ $m \neq -1$

2) równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki, jeżeli $\Delta > 0$:

$$m^2 - 4 \cdot (m+1) \cdot (-1) > 0 \quad m^2 + 4m + 4 > 0$$

$$(m+2)^2 > 0$$

$$m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

3) pierwiastki są tego samego znaku, gdy $x_1 \cdot x_2 > 0$:

$$\frac{1}{m+1} > 0$$

$$m+1 > 0$$

$$m > -1$$

4) pierwiastki są dodatnie, gdy $x_1 + x_2 > 0$:

$$\frac{-m}{m+1} > 0$$

$$-m(m+1) > 0$$

$$m(m+1) < 0$$



$$m \in (-1, 0)$$

Zaznaczamy wszystkie warunki na osi liczbowej i znajdujemy część wspólną:



Odpowiedź: Wartości parametru należą do przedziału $(-1, 0)$.

3.6. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Równania z wartością bezwzględną

Rozwiązując równania i nierówności liniowe z wartością bezwzględną, korzystamy z definicji wartości bezwzględnej. Następnie upraszczamy otrzymane równania i nierówności, przekształcając w równania i nierówności równoważne.

I Dla dowolnej liczby rzeczywistej a : $|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$

Przykład

Rozwiąż równania.

a) $|2x - 5| + 4 = 7$

Rozwiązanie:

Przekształcamy równanie do postaci $|2x - 5| = 3$.

Stosujemy definicję wartości bezwzględnej i rozwiązujemy każde z otrzymanych równań.

$$2x - 5 = 3 \text{ lub } 2x - 5 = -3$$

$$\text{Stąd: } x = 4 \text{ lub } x = 1$$

b) $3 - 4|7 - x| = 5$

Rozwiązanie:

Przekształcamy równanie do postaci $|7 - x| = -\frac{1}{2}$.

Otrzymaliśmy równanie sprzeczne, bo wartość bezwzględna z liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

c) $||x| - 3| = 4$

Rozwiązanie:

Stosujemy definicję wartości bezwzględnej i rozwiązujemy każde z otrzymanych równań.

$$|x| - 3 = 4 \text{ lub } |x| - 3 = -4$$

$$|x| = 7 \text{ lub } |x| = -1 \text{ - równanie sprzeczne}$$

$$x = 7 \text{ lub } x = -7$$

Nierówności z wartością bezwzględną

Przykład

Rozwiąż nierówności.

a) $2|3x + 1| - 1 < 6$

Rozwiązanie:

Przekształcamy nierówność do postaci $|3x + 1| < 3,5$ i stosujemy definicję wartości bezwzględnej.

Otrzymujemy: $-3,5 < 3x + 1 < 3,5$

Rozwiązujemy nierówność podwójną. Stąd $-1,5 < x < \frac{5}{6}$.

b) $|2 - x| \geq -1$

Rozwiązanie:

Nierówność $|2 - x| \geq -1$ jest nierównością tożsamościową ($x \in \mathbb{R}$), gdyż wartość bezwzględna dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną (a więc na pewno jest większa od liczby -1).



$$c) \sqrt{(6x-3)^2} > 2$$

Rozwiązanie:

Po skorzystaniu z twierdzenia $\sqrt{a^2} = |a|$ otrzymujemy nierówność $|6x-3| > 2$.

Stosujemy definicję wartości bezwzględnej i zapisujemy układ nierówności: $6x-3 > 2$ lub $6x-3 < -2$.

Po rozwiązaniu każdej z tych nierówności otrzymujemy $x > \frac{5}{6}$ lub $x < \frac{1}{6}$. Zbiór rozwiązań tej nierówności możemy zapisać w postaci sumy przedziałów: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}, +\infty\right)$.

Równania z kilkoma wartościami bezwzględnymi

Przykład

Rozwiąż równanie: $3|x+3| + 2|x-1| = 11$.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, zapisujemy:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{dla } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{dla } x < -3 \end{cases} \text{ oraz } |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{dla } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

Przedstawiamy, w jaki sposób zmieniają się znaki wartości bezwzględnej w wyznaczonych powyżej przedziałach.



Rozwiązujemy równanie $3|x+3| + 2|x-1| = 11$ w podanych przedziałach.

1. $x \in (-\infty, -3)$

Otrzymujemy równanie: $3 \cdot (-x-3) + 2 \cdot (-x+1) = 11$

Opuszczamy nawiasy, redukujemy wyrazy podobne i wyznaczamy niewiadomą x :

$$-3x - 9 - 2x + 2 = 11$$

$$-5x = 11 + 9 - 2$$

$$-5x = 18 \quad | :(-5)$$

$$x = -3\frac{3}{5}$$

Sprawdzamy, czy liczba $x = -3\frac{3}{5}$ należy do zapisanego powyżej przedziału:

$-3\frac{3}{5} \in (-\infty, -3)$. Wobec tego jest rozwiązaniem równania.

2. $x \in (-3, 1)$

Otrzymujemy równanie: $3 \cdot (x+3) + 2 \cdot (-x+1) = 11$

Opuszczamy nawiasy, redukujemy wyrazy podobne i wyznaczamy niewiadomą x :

$$3x + 9 - 2x + 2 = 11$$

$$3x - 2x = 11 - 9 - 2$$

$$x = 0$$

Zapisujemy $0 \in (-3, 1)$. Wobec tego liczba 0 jest rozwiązaniem równania.

3. $x \in (1, +\infty)$

Otrzymujemy równanie: $3 \cdot (x+3) + 2 \cdot (x-1) = 11$

Opuszczamy nawiasy, redukujemy wyrazy podobne i wyznaczamy niewiadomą x :

$$3x + 9 + 2x - 2 = 11$$

$$3x + 2x = 11 - 9 + 2$$

$$5x = 4 \quad | :5$$

$$x = \frac{4}{5}$$

Zapisujemy $\frac{4}{5} \notin (1, +\infty)$. Wobec tego liczba $\frac{4}{5}$ nie jest rozwiązaniem równania.

Odpowiedź: Rozwiązaniami tego równania są liczby $-3\frac{3}{5}$ i 0.

Nierówności z kilkoma wartościami bezwzględnymi

Przykład

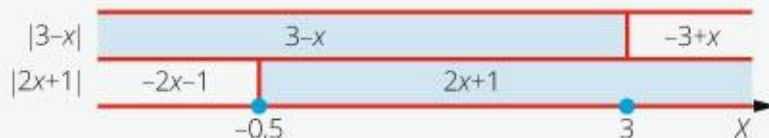
Rozwiąż nierówność: $|2x+1|+3|3-x| \geq 13$.

Rozwiązanie:

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej, zapisujemy:

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & \text{dla } x < -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ oraz } |3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{dla } x \leq 3 \\ -3+x & \text{dla } x > 3 \end{cases}$$

Przedstawiamy, w jaki sposób zmieniają się znaki wartości bezwzględnej w wyznaczonych powyżej przedziałach.

Rozwiązujemy nierówność $|2x+1|+3|3-x| \geq 13$ w podanych przedziałach.

1. $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

Otrzymujemy nierówność: $-2x-1+3(3-x) \geq 13$ Opuszczamy nawiasy, redukujemy wyrazy podobne i wyznaczamy niewiadomą x :

$$-2x-1+9-3x \geq 13$$

$$-2x-3x \geq 13+1-9$$

$$-5x \geq 5 \quad | :(-5)$$

$$x \leq -1, \text{ czyli } x \in (-\infty, -1)$$

Iloczynem zbiorów $(-\infty, -1)$ i $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ jest zbiór $(-\infty, -1)$. Wobec tego otrzymujemy rozwiązanie $x \in (-\infty, -1)$.

2. $x \in \left[-\frac{1}{2}, 3\right)$

Otrzymujemy nierówność: $2x+1+3(3-x) \geq 13$ Opuszczamy nawiasy, redukujemy wyrazy podobne i wyznaczamy niewiadomą x :

$$2x+1+9-3x \geq 13$$

$$2x-3x \geq 13-1-9$$

$$-x \geq 3 \quad | :(-1)$$

$$x \leq -3, \text{ czyli } x \in (-\infty, -3)$$

Przedziały $(-\infty, -3)$ i $\left[-\frac{1}{2}, 3\right)$ nie mają części wspólnej. Wobec tego $x \in \emptyset$.

3. $x \in (3, +\infty)$

Otrzymujemy nierówność: $2x+1+3(-3+x) \geq 13$ Opuszczamy nawiasy, redukujemy wyrazy podobne i wyznaczamy niewiadomą x :

$$2x+1-9+3x \geq 13$$

$$2x+3x \geq 13-1+9$$

$$5x \geq 21$$

$$x \geq 4\frac{1}{5}, \text{ czyli } x \in \left[4\frac{1}{5}, +\infty\right)$$

Wyznaczamy część wspólną zbiorów $\left[4\frac{1}{5}, +\infty\right)$ i $(3, +\infty)$. Jest nią zbiór $\left[4\frac{1}{5}, +\infty\right)$.Rozwiązaniem tej nierówności jest suma rozwiązań z poszczególnych przedziałów. Wobec tego zapisujemy $x \in (-\infty, -1) \cup \left[4\frac{1}{5}, +\infty\right)$.**Odpowiedź:** Rozwiązaniem tej nierówności jest $x \in (-\infty, -1) \cup \left[4\frac{1}{5}, +\infty\right)$.

3.7. Równania i nierówności z parametrem

Równania z parametrem

Czasem w równaniu lub nierówności stosuje się dodatkowe oznaczenia literowe zwane parametrem. Na przykład: $2x + 5a = 4(x - a + 1)$, $(m - 6)x^2 + 5x - 2m \leq 0$.

Zbadanie liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem polega na podaniu takich wartości parametru, dla których równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, dla których jest sprzeczne, kiedy ma nieskończenie wiele rozwiązań lub gdy spełnia jakiś inny zadany warunek.

Przykład

Wyznacz wartość a , dla której rozwiązaniem równania $a(2 + 7x) - 2 = 3a - 7(ax - 2)$ jest liczba $-\frac{1}{7}$.

Rozwiązanie:

Do równania $a(2 + 7x) - 2 = 3a - 7(ax - 2)$ podstawiamy w miejsce x liczbę $-\frac{1}{7}$.

$$a\left(2 + 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)\right) - 2 = 3a - 7\left(a \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) - 2\right)$$

Rozwiązujemy równanie z niewiadomą a :

$$a - 2 = 3a + a + 14$$

$$a = -5\frac{1}{3}$$

Odpowiedź: Dla $a = -5\frac{1}{3}$ rozwiązaniem równania $a(2 + 7x) - 2 = 3a - 7(ax - 2)$ jest $-\frac{1}{7}$.

Przykład

Określ liczbę rozwiązań równania $a(ax - 3) + 5 = a(5x - 2)$ w zależności od parametru a . Dla tych wartości parametru a , dla których istnieją rozwiązania, podaj je.

Rozwiązanie:

W równaniu $a(ax - 3) + 5 = a(5x - 2)$ opuszczamy nawiasy, przenosimy niewiadome na lewą stronę i redukujemy wyrazy podobne:

$$a^2x - 3a + 5 = 5ax - 2a$$

$$a^2x - 5ax = -2a + 3a - 5$$

$$x(a^2 - 5a) = a - 5$$

$$xa(a - 5) = a - 5$$

Analizujemy liczbę rozwiązań równania $xa(a - 5) = a - 5$ w zależności od parametru a .

1. Dla $a = 5$ otrzymujemy $0 = 0$, równanie tożsamościowe - ma nieskończenie wiele rozwiązań.
2. Dla $a = 0$ otrzymujemy $0 = -2$, równanie sprzeczne - nie ma rozwiązania.
3. Dla $a \neq 5$ i $a \neq 0$ otrzymujemy $x = \frac{a - 5}{a(a - 5)}$, a po skróceniu $x = \frac{1}{a}$ - równanie z jednym rozwiązaniem.

Przykład

Ustal liczbę rozwiązań równania $3 - |2x - 5| = \sqrt{2}a - 5$ w zależności od parametru a .

Rozwiązanie:

Przekształcamy równanie do postaci: $|2x - 5| = 8 - \sqrt{2}a$ i badamy liczbę rozwiązań równania.

1. Jeśli $8 - \sqrt{2}a < 0$, czyli $a > 4\sqrt{2}$, to równanie $|2x - 5| = 8 - \sqrt{2}a$ jest sprzeczne.
2. Jeśli $8 - \sqrt{2}a > 0$, czyli $a < 4\sqrt{2}$, to równanie $|2x - 5| = 8 - \sqrt{2}a$ ma dwa rozwiązania.

Wówczas $2x - 5 = 8 - \sqrt{2}a$ lub $2x - 5 = -8 + \sqrt{2}a$. Stąd po wyznaczeniu niewiadomej x otrzymujemy:

$$x = \frac{13 - \sqrt{2}a}{2} \text{ lub } x = \frac{-3 + \sqrt{2}a}{2}.$$

3. Jeśli $8 - \sqrt{2}a = 0$, czyli $a = 4\sqrt{2}$, to równanie $|2x - 5| = 0$ ma jedno rozwiązanie. Wówczas $x = \frac{5}{2}$.

Nierówności z parametrem

Zbadanie liczby rozwiązań nierówności liniowej z parametrem polega na podaniu takich wartości parametru, dla których rozwiązaniem nierówności jest określony przedział liczbowy, dla których nierówność nie ma rozwiązania (jest sprzeczna) i dla których ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest tożsamościowa).

Przykład

Określ liczbę rozwiązań nierówności $ax + 3 < b + x$ w zależności od parametrów a i b .

Rozwiązanie:

Przekształcamy nierówność do postaci: $x \cdot (a - 1) < b - 3$ i badamy liczbę rozwiązań nierówności.

1. Dla $a - 1 > 0$ otrzymujemy $x < \frac{b-3}{a-1}$.

Oznacza to, że dla $a > 1$ rozwiązaniem nierówności są liczby należące do przedziału $\left(-\infty, \frac{b-3}{a-1}\right)$.

2. Dla $a - 1 < 0$ otrzymujemy $x > \frac{b-3}{a-1}$.

Oznacza to, że dla $a < 1$ rozwiązaniem nierówności są liczby należące do przedziału $\left(\frac{b-3}{a-1}, \infty\right)$.

3. Dla $a - 1 = 0$, to znaczy $a = 1$, otrzymujemy $0 < b - 3$.

Jeśli $b - 3 > 0$, czyli $b > 3$, to nierówność jest tożsamościowa.

Jeśli $b - 3 \leq 0$, czyli $b \leq 3$, to nierówność jest sprzeczna.

Równania kwadratowe z parametrem

Podobnie jak w przypadku równań i nierówności liniowych z parametrem, postępujemy przy rozwiązywaniu równań kwadratowych lub nierówności kwadratowych z parametrem.

Przykład

Określ liczbę rozwiązań równania $ax^2 + x + a = 0$ w zależności od parametru a . Dla tych wartości parametru a , dla których istnieją rozwiązania, podaj je.

Rozwiązanie:

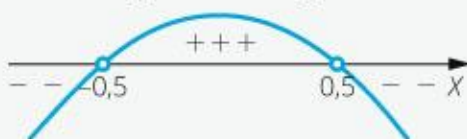
1. Dla $a = 0$ równanie kwadratowe $ax^2 + x + a = 0$ przyjmuje postać $x = 0$. Równanie ma więc jedno rozwiązanie.

2. Dla $a \neq 0$ obliczamy wyróżnik równania $ax^2 + x + a = 0$.

Otrzymujemy: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot a \cdot a = 1 - 4a^2$.

Teraz badamy znak wyróżnika trójmianu kwadratowego. W tym celu rozwiązujemy równanie $1 - 4a^2 = 0$, a następnie szkicujemy wykres paraboli $f(a) = 1 - 4a^2$.

Otrzymujemy $(1 - 2a)(1 + 2a) = 0$, czyli $a = \frac{1}{2}$ lub $a = -\frac{1}{2}$.



Wykres przedstawiający znak trójmianu kwadratowego.

- 2.1. Dla $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$, $\Delta > 0$, to znaczy, że równanie $ax^2 + x + a = 0$ ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a^2}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4a^2}}{2a}$$

- 2.2. Dla $a \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $\Delta = 0$, to znaczy, że równanie $ax^2 + x + a = 0$ ma jedno rozwiązanie:

$$x_0 = \frac{-1}{2a}$$

- 2.3. Dla $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, $\Delta < 0$, to znaczy, że równanie $ax^2 + x + a = 0$ nie ma rozwiązań.

Przykład

Dla jakich wartości parametru a dziedziną funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2 + (a-3)x - \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}}$ jest zbiór liczb rzeczywistych?

Rozwiązanie:

Aby dziedziną funkcji $f(x)$ był zbiór liczb rzeczywistych, mianownik ułamka $\frac{1}{x^2 + (a-3)x - \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}}$ musi być różny od zera.

Zapisujemy: $x^2 + (a-3)x - \frac{1}{4}a + \frac{3}{4} \neq 0$

Równanie kwadratowe $x^2 + (a-3)x - \frac{1}{4}a + \frac{3}{4} = 0$ nie ma miejsc zerowych, gdy $\Delta < 0$.

> Obliczamy: $\Delta = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}\right) = a^2 - 6a + 9 + a - 3 = a^2 - 5a + 6$

Zapisujemy: $a^2 - 5a + 6 < 0$

Obliczamy: $\Delta_a = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$\Delta_a > 0$, równanie $a^2 - 5a + 6 = 0$ ma dwa pierwiastki $a_1 = \frac{5-1}{2} = 2$, $a_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

Szkicujemy parabolę $f(a) = a^2 - 5a + 6$.



Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności $a^2 - 5a + 6 < 0$. Jest to $a \in (2, 3)$.

Odpowiedź: Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2 + (a-3)x - \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}}$ jest zbiór liczb rzeczywistych, gdy $a \in (2, 3)$.

Przykład

Wyznacz te wartości parametru k , aby suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 - (k-5)x + k^2 - 6k + 5 = 0$ była równa 7.

Rozwiązanie:

1. Równanie $x^2 - (k-5)x + k^2 - 6k + 5 = 0$ ma pierwiastki wówczas, gdy spełniony jest warunek: $\Delta \geq 0$.

2. $x_1^2 + x_2^2 = 7$

Ad. 1. $\Delta = [-(k-5)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k^2 - 6k + 5) = -3k^2 + 14k + 5$

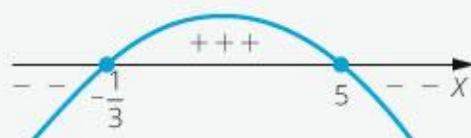
$-3k^2 + 14k + 5 \geq 0$

Rozwiązujemy równanie: $-3k^2 + 14k + 5 = 0$

$\Delta = 14^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 256$, $\sqrt{\Delta} = 16$

$k_1 = \frac{-14-16}{-6} = 5$, $k_2 = \frac{-14+16}{-6} = -\frac{1}{3}$

Szkicujemy parabolę $f(k) = -3k^2 + 14k + 5$ i wyznaczamy zbiór rozwiązań nierówności $-3k^2 + 14k + 5 \geq 0$.



$k \in \left(-\frac{1}{3}, 5\right]$

Ad. 2. Korzystając z wzoru skróconego mnożenia $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2$ wyznaczamy:

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$

Teraz korzystamy z wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Otrzymujemy: $x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}$. Po podstawieniu do równania $x_1^2 + x_2^2 = 7$ otrzymujemy:

$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = 7$, stąd $\left(-\frac{-(k-5)}{1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{(k^2 - 6k + 5)}{1} = 7$

Po uproszczeniu otrzymujemy: $-k^2 + 2k + 8 = 0$

$\Delta_k = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8 = 36$, $\sqrt{\Delta_k} = 6$

$k_1 = \frac{-2-6}{-2} = 4$, $k_2 = \frac{-2+6}{-2} = -2$

Drugi warunek jest spełniony dla $k \in \{-2, 4\}$.

Zauważamy, że $-2 \notin \left(-\frac{1}{3}, 5\right]$, a $4 \in \left(-\frac{1}{3}, 5\right]$. Stąd wynika, że tylko $k = 4$ spełnia warunki zadania.

Nierówności kwadratowe z parametrem

Przykład

Dla jakich wartości parametru m nierówność kwadratowa $x^2 + (m-2)x + m^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$?

Rozwiązanie:

Ponieważ $a > 0$, więc ramiona paraboli $f(x) = x^2 + (m-2)x + m^2$ są skierowane do góry.

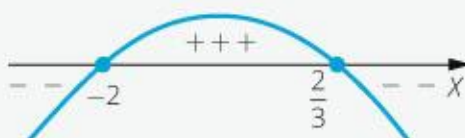
Wobec tego funkcja ta będzie przyjmowała wartości nieujemne dla każdego $x \in \mathbb{R}$, gdy $\Delta \leq 0$.

Obliczamy: $\Delta = (m-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m^2 = -3m^2 - 4m + 4$, stąd $-3m^2 - 4m + 4 \leq 0$

Obliczamy: $\Delta_m = (-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 64$, $\sqrt{\Delta_m} = 8$

$$m_1 = \frac{4-8}{-6} = \frac{2}{3}, m_2 = \frac{4+8}{-6} = -2$$

Szkicujemy parabolę $f(m) = -3m^2 - 4m + 4$ i wyznaczamy zbiór rozwiązań nierówności $-3m^2 - 4m + 4 \leq 0$.



$$m \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

Odpowiedź: Dla $m \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ nierówność kwadratowa $x^2 + (m-2)x + m^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Przykład

Dla jakich wartości parametru k rozwiązanie nierówności $(k+3)x^2 + x + 9 > 0$ jest niepustym przedziałem ograniczonym?

Rozwiązanie:

1. Dla $k = -3$ otrzymujemy nierówność $x + 9 > 0$, której rozwiązaniem jest zbiór $x \in (-9, +\infty)$. Nie jest to zbiór ograniczony, zatem $k = -3$ nie spełnia warunków zadania.

2. Dla $k \neq -3$ otrzymujemy nierówność kwadratową. Aby rozwiązaniem był zbiór ograniczony, muszą być spełnione warunki: $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

2.1. $a < 0$, wówczas $k+3 < 0$, zatem $k \in (-\infty, -3)$

2.2. $\Delta > 0$, wówczas $1 - 4 \cdot (k+3) \cdot 9 > 0$, zatem $k \in \left(-\infty, -2\frac{35}{36}\right)$

Częścią wspólną zbiorów $k \in (-\infty, -3)$ i $k \in \left(-\infty, -2\frac{35}{36}\right)$ jest $k \in (-\infty, -3)$.

Odpowiedź: Dla $k \in (-\infty, -3)$ rozwiązanie nierówności $(k+3)x^2 + x + 9 > 0$ jest niepustym przedziałem ograniczonym.

3.8. Utrwalamy wiedzę



4

Układy równań

4.1. Rozwiązywanie układów równań

Pojęcie układu równań

Układ równań liniowych to dwa równania z dwiema niewiadomymi, dla których poszukujemy wspólnych rozwiązań, czyli pary liczb, która spełnia obydwa równania.

Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Metoda podstawiania polega na wyznaczeniu z któregoś równania jednej niewiadomej i podstawieniu jej do drugiego równania.

Przykład

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 29 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy z pierwszego równania niewiadomą y , a drugie przepisujemy bez zmian:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x + 2y = 29 \end{cases}$$

Wstawiamy do drugiego równania w miejsce y wyznaczone wyrażenie:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x + 2(2x - 3) = 29 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie z jedną niewiadomą x , a pierwsze przepisujemy bez zmian:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x + 4x - 6 = 29 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 7x = 35 \quad |:7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

Wstawiamy obliczoną wartość x do pierwszego równania i obliczamy y :

$$\begin{cases} y = 2 \cdot 5 - 3 \\ x = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 10 - 3 \\ x = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 7 \\ x = 5 \end{cases}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 29 \end{cases}$ jest para liczb $(5; 7)$.

Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Metoda przeciwnych współczynników polega na dodawaniu równań stronami w sytuacji, gdy przy tej samej niewiadomej w dwóch równaniach mamy przeciwne współczynniki.

Przykład

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że przed niewiadomą y mamy współczynniki o przeciwnych znakach. Trzeba pomnożyć oba równania przez takie liczby, aby otrzymać przeciwne współczynniki:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \quad |:2 \\ 3x + 2y = 19 \quad |:3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 9x + 6y = 57 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami i otrzymujemy:

$$\begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 9x + 6y = 57 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 13x &= 65 \quad |:13 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Wstawiamy wartość x do jednego z równań i obliczamy y :

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 + 2y &= 19 & 2y &= 4 \quad |:2 & y &= 2 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$ jest para liczb $(5; 2)$.

Rozwiązywanie układów równań metodą graficzną

Metoda graficzna polega na narysowaniu prostych w układzie współrzędnych i odczytaniu współrzędnych punktu przecięcia prostych, które są rozwiązaniem układu równań.

Rysunek prostych w układzie współrzędnych nazywamy **interpretacją geometryczną** układu równań.

Liczba rozwiązań układów równań

Proste na płaszczyźnie mogą się przecinać w jednym punkcie, mogą być równoległe (niemające punktów wspólnych) i mogą się pokrywać, mając nieskończenie wiele punktów wspólnych.

Układ równań liniowych może mieć:

jedno rozwiązanie (para liczb) – **układ oznaczony**

nieskończenie wiele rozwiązań – **układ nieoznaczony**

żadnego rozwiązania – **układ sprzeczny**

Przykład

Rozwiąż układy równań i wskaż, który z nich jest oznaczony, nieoznaczony i sprzeczny. Przedstaw interpretację geometryczną każdego z nich.

$$a) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Rozwiążemy układy równań metodą przeciwnych współczynników:

$$a) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \quad | :(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

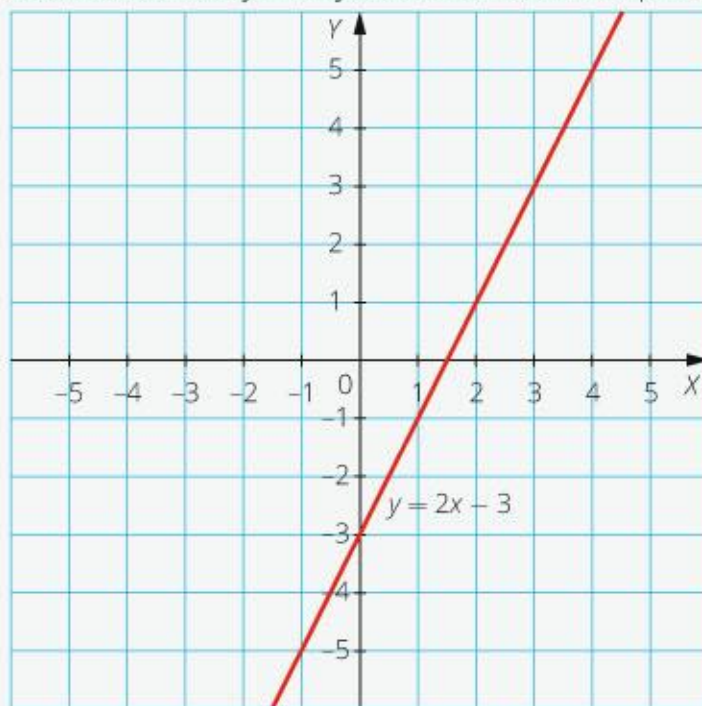
$$0 = 0$$

Układ nieoznaczony

Wyznaczamy y z pierwszego równania i zaznaczamy w układzie współrzędnych prostą o równaniu:

$$y = 2x - 3$$

Wyznaczając y z drugiego równania, otrzymamy to samo równanie prostej.



$$b) \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x - y = 6 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$7x = 14 \quad | :2$$

$$x = 2$$

$$3 \cdot 2 + 2y = 2$$

$$6 + 2y = 2$$

$$2y = -4 \quad | :2$$

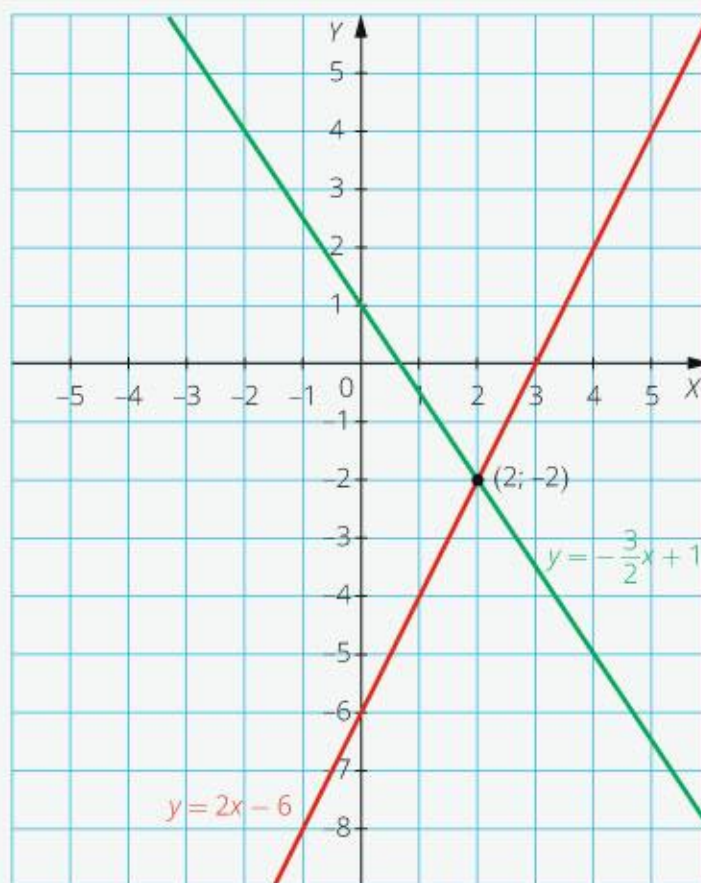
$$y = -2$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Układ oznaczony

Wyznaczamy y z obu równań i zaznaczamy w układzie współrzędnych proste o równaniach:

$$y = 2x - 6 \text{ oraz } y = -\frac{3}{2}x + 1$$



$$c) \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \quad | \cdot (-2) \end{cases}$$

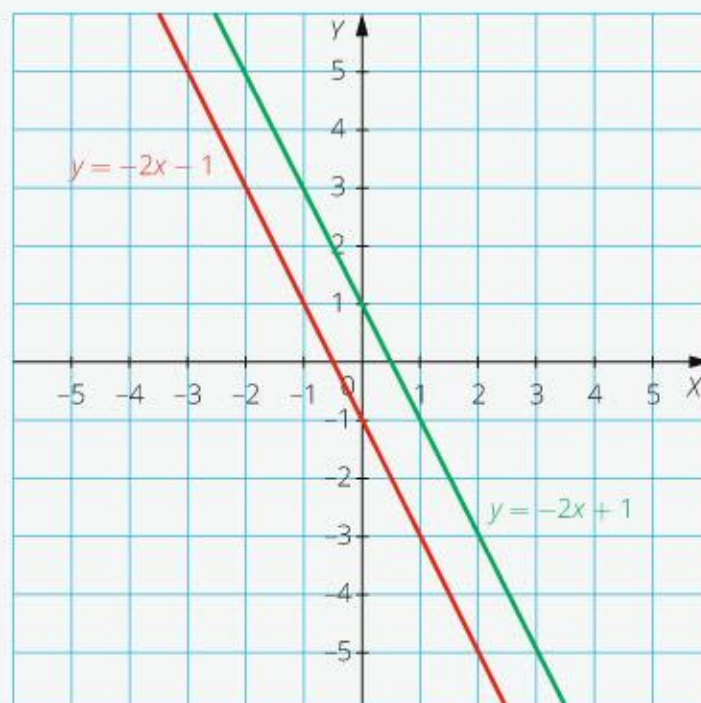
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -2x - y = -2 \end{cases}$$

$$0 = -3$$

Układ nieoznaczony

Wyznaczamy y z obu równań i zaznaczamy w układzie współrzędnych proste o równaniach:

$$y = -2x - 1 \text{ oraz } y = -2x + 1$$



Rozwiązywanie układów równań, z których jedno równanie jest liniowe, a drugie kwadratowe

Układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, będziemy rozwiązywali metodą podstawiania.

Przykład

Rozwiąż układ równań.

$$a) \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 - 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy y z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ x^2 - 3x + 3(-x + 3) = 0 \end{cases}$$

Drugie równanie jest równaniem kwadratowym z niewiadomą x . Rozwiązujemy je.

$$x^2 - 6x + 9 = 0, \text{ stąd } (x - 3)^2 = 0, \text{ czyli } x = 3$$

$$\text{Zapisujemy: } \begin{cases} y = -x + 3 \\ x = 3 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x^2 - 3x + y + 8 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy y z drugiego równania i podstawiamy do pierwszego. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + y + 8 = 0 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 2x - 2 + 8 = 0 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 6 = 0 \\ y = -2x + 9 \end{cases}$$

Pierwsze równanie jest równaniem kwadratowym z niewiadomą x . Rozwiązujemy je.

$$2x^2 - 5x + 6 = 0$$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = -23$. Ponieważ $\Delta < 0$, to równanie $2x^2 - 5x + 6 = 0$ nie ma rozwiązania. Wobec

tego układ równań $\begin{cases} 2x^2 - 3x + y + 8 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$ jest sprzeczny.

Rozwiązywanie układów równań drugiego stopnia

Układami równań drugiego stopnia nazywamy układy równań, w których przynajmniej jedno równanie jest drugiego stopnia.

Przykład

Układ równań $\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y = 2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$ jest układem, którego oba równania opisują parabole. Dwie parabole na

płaszczyźnie mogą mieć dwa punkty wspólne, być styczne, być rozłączne lub mogą się pokrywać. Rozwiązując ten układ algebraicznie metodą podstawiania, otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ \frac{1}{2}x^2 + x^2 - 4 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ \frac{3}{2}x^2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x^2 = 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ (x - 2)(x + 2) = 0 \end{cases}$$

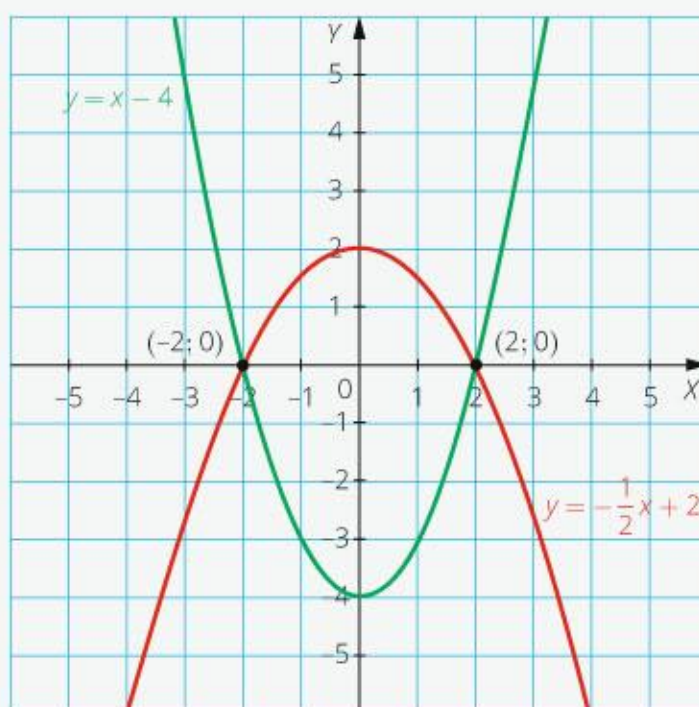
$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x_1 = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu są dwie pary liczb: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$.

Interpretacja geometryczna tego układu równań:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \end{cases}$$



Przykład

Układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$ jest układem, którego oba równania opisują okręgi.

Rozwiązujemy ten układ algebraicznie następująco:

Odejmujemy równania stronami i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$-8y - 16 = 0 \quad | :(-8)$$

$$y = -2$$

Wstawiamy do równania, np. pierwszego w układzie, i rozwiązujemy je, obliczając x :

$$x^2 + (-2)^2 - 4x - 4(-2) - 17 = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \quad (x-5)(x+1) = 0 \quad x_1 = 5 \quad x_2 = -1$$

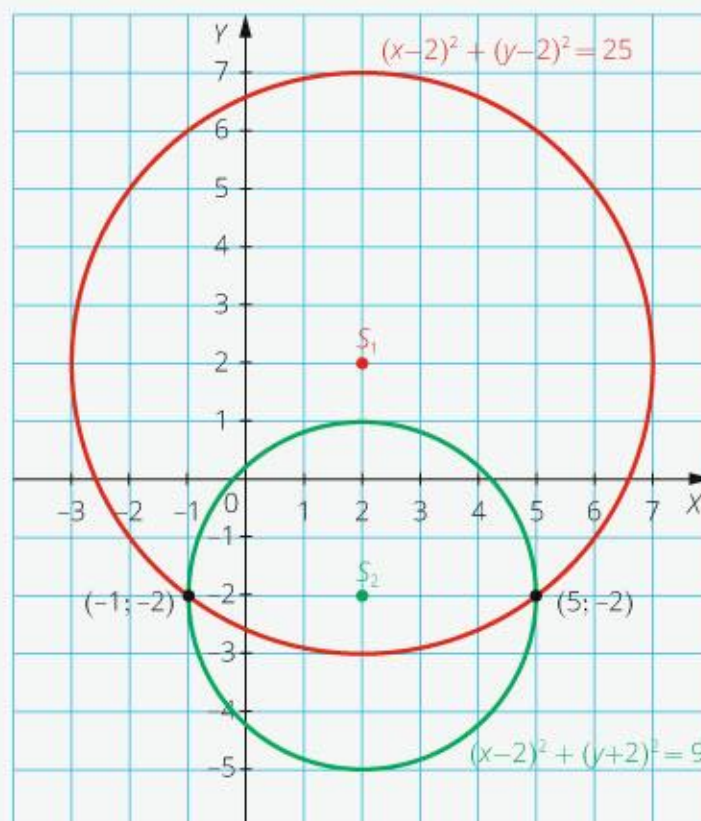
Okręgi przecinają się w punktach $A(5; -2)$ i $B(-1; -2)$.

Interpretacja geometryczna tego układu równań

Przekształcamy oba równania do postaci, z której odczytujemy współrzędne środka i promień:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$$



Przykład

Układ równań $\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$ jest układem, którego jedno równanie opisuje okrąg, a drugie parabolę.

Rozwiązujemy ten układ algebraicznie następująco:

Zapisujemy układ w postaci: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \\ x^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$

Drugie równanie odejmujemy od pierwszego i otrzymujemy równanie: $y^2 + y - 20 = 0$, z którego wyliczamy y :

$$\Delta = 1 + 80 = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = 9$$

$$y_1 = \frac{-1-9}{2} = -5$$

$$y_2 = \frac{-1+9}{2} = 4$$

Podstawiając do drugiego równania $y_1 = -5$, otrzymujemy:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = 16 + 20 = 36$$

$$\sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{4-6}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{4+6}{2} = 5$$

Podstawiając do drugiego równania $y_2 = 4$, otrzymujemy:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

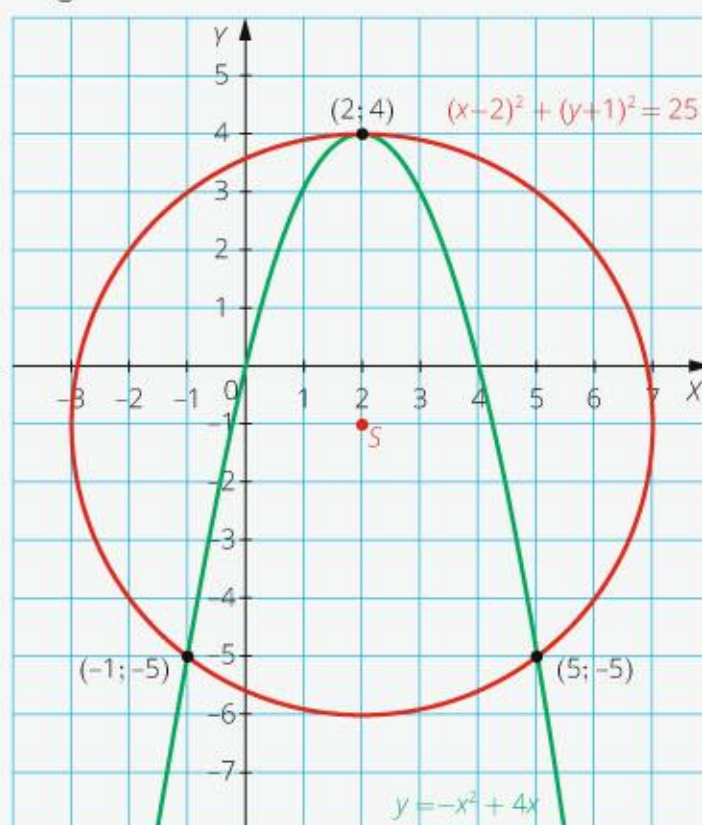
$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

Otrzymaliśmy rozwiązania: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases}, \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases}$

Interpretacja geometryczna tego układu równań:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$$



4.2. Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań tekstowych

Układy równań w zadaniach tekstowych w praktyce

Zadania tekstowe z wykorzystaniem układów równań będziemy rozwiązywać w następujących etapach:

- analiza zadania,
- zapisanie układu równań i jego rozwiązanie,
- sprawdzenie rozwiązania układu równań z warunkami zadania,
- zapisanie odpowiedzi.

Przykład

Michał ma w dwóch kieszeniach 175 złotych. Jeśli z prawej kieszeni przełoży do lewej tyle pieniędzy, ile było ich w lewej kieszeni, to w prawej kieszeni będzie miał o 15 złotych więcej niż w lewej. Ile pieniędzy miał Michał na początku w prawej, a ile w lewej kieszeni?

Rozwiązanie:

Dane zawarte w zadaniu zapisujemy w tabeli.

	Ilość pieniędzy w lewej kieszeni	Ilość pieniędzy w prawej kieszeni	Zależność
Na początku	x	y	$x + y = 175$
Później	$2x$	$y - x$	$y - x = 2x + 15$

Zapisujemy układ równań przedstawiający zależności występujące w zadaniu:

$$\begin{cases} x + y = 175 \\ y - x = 2x + 15 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 175 \\ y = 3x + 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3x + 15 = 175 \\ y = 3x + 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 40 \\ y = 3 \cdot 40 + 15 \end{cases}$$

Stąd: $\begin{cases} x = 40 \\ y = 135 \end{cases}$

Sprawdzenie:

	Ilość pieniędzy w lewej kieszeni	Ilość pieniędzy w prawej kieszeni	Zależność
Na początku	$x = 40 \text{ zł}$	$y = 135 \text{ zł}$	$40 + 135 = 175$
Później	$2x = 80 \text{ zł}$	$y - x = 95 \text{ zł}$	$95 = 80 + 15$

Odpowiedź: Michał miał w lewej kieszeni o 40 zł, a w prawej 135 zł.

Przykład

Stopiono dwa stopy cyny z miedzią i otrzymano 50 kilogramów stopu zawierającego 62% cyny. Ile wzięto pierwszego stopu, a ile drugiego, jeśli w pierwszym stopie stosunek cyny do miedzi wynosi 3 : 2, a w drugim to 2 : 1?

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome:

x – waga w kilogramach pierwszego stopu o zawartości cyny $\frac{3}{5}$

y – waga w kilogramach drugiego stopu o zawartości cyny $\frac{2}{3}$

50 – waga w kilogramach otrzymanego stopu o zawartości cyny 62%

Zapisujemy układ równań i wyznaczamy niewiadome:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ \frac{3}{5}x + \frac{2}{3}y = 0,62 \cdot 50 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 50 \\ 9x + 10y = 465 \end{cases} \quad \begin{cases} -9x - 9y = -450 \\ 9x + 10y = 465 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 50 \\ y = 15 \end{cases}$$

Stąd: $\begin{cases} x = 35 \\ y = 15 \end{cases}$

Sprawdzenie: $35 + 15 = 50$, $\frac{3}{5} \cdot 35 + \frac{2}{3} \cdot 15 = 31$

Odpowiedź: Należy stopić 35 kg pierwszego stopu i 15 kg drugiego stopu.

Przykład

Tomek powiedział do Kasi: „Gdy ja byłem w twoim wieku, byłeś ode mnie dwa razy młodsza, a gdy ty będziesz w moim wieku, ja będę miał 24 lata”. Oblicz, ile lat mają obecnie Kasia i Tomek.

Rozwiązanie:

Informacje podane w zdaniu przedstawiamy w tabeli.

	Wcześniej	Obecny wiek	Później
Tomek	x	y	24
Kasia	$\frac{1}{2}x$	x	y
Różnica lat Tomka i Kasi	$\frac{1}{2}x$	$y - x$	$24 - x$

Zapisujemy układ równań. Korzystamy z faktu, że różnica lat Tomka i Kasi jest wielkością stałą.

$$\begin{cases} 24 - y = y - x \\ y - x = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Wyznaczamy niewiadomą y z drugiego równania i podstawiamy do pierwszego.

$$\begin{cases} 24 = 2y - x \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases} \quad \begin{cases} 24 = 3x - x \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = \frac{3}{2} \cdot 12 \end{cases}$$

Stąd: $\begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases}$

Sprawdzenie:

	Wcześniej	Obecny wiek	Później
Tomek	$x = 12$	$y = 18$	24
Kasia	$\frac{1}{2}x = 6$	$x = 12$	$y = 18$
Różnica lat Tomka i Kasi	$\frac{1}{2}x = 6$	$y - x = 6$	$24 - x = 6$

Odpowiedź: Tomek ma 18 lat, a Kasia ma 12.

Przykład

Między miastami A i B kursuje autobus. Droga między tymi miastami prowadzi przez wzgórze. Autobus, jadąc pod górę, rozwija prędkość $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a jadąc z góry – $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ponadto wiadomo, że podróż z miasta A do B trwa 2 godziny, natomiast z miasta B do A trwa 2 godziny 10 minut. Oblicz, ile wynosi odległość pomiędzy tymi miejscowościami.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań.

Podróż z A do B

x – długość drogi „pod górę” w kilometrach, gdy autobus ma prędkość $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

y – długość drogi „z góry” w kilometrach, gdy autobus ma prędkość $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$t = \frac{s}{v}$ – wzór pokazujący zależność drogi, prędkości i czasu

$\frac{x}{50} + \frac{y}{75} = 2$ – zależność dotycząca czasu, gdy autobus jedzie z A do B

Podróż z B do A

x – długość drogi „z góry” w kilometrach, gdy autobus ma prędkość $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

y – długość drogi „pod górę” w kilometrach, gdy autobus ma prędkość $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

2 godz. 10 min = $2 \frac{10}{60} \text{h} = 2 \frac{1}{6} \text{h}$

$\frac{x}{75} + \frac{y}{50} = 2 \frac{1}{6}$ – zależność dotycząca czasu, gdy autobus jedzie z B do A

$$\begin{cases} \frac{x}{50} + \frac{y}{75} = 2 \\ \frac{x}{75} + \frac{y}{50} = \frac{13}{6} \end{cases}$$

Pozbywamy się ułamków, mnożąc obie strony równań przez 150.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 300 \\ 2x + 3y = 325 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez -2 , a drugiego przez 3 . Następnie dodajemy stronami.

$$\begin{cases} -6x - 4y = -600 \\ 6x + 9y = 975 \end{cases} \quad \begin{cases} 5y = 375 \\ 2x + 3y = 325 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 75 \\ 2x + 3 \cdot 75 = 325 \end{cases}$$

Stąd: $\begin{cases} x = 50 \\ y = 75 \end{cases}$

Sprawdzenie: $\begin{cases} \frac{50}{50} + \frac{75}{75} = 2 \\ \frac{50}{75} + \frac{75}{50} = \frac{13}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} 1+1=2 \\ \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6} \end{cases}$

Obliczmy odległość między A i B: $50 \text{ km} + 75 \text{ km} = 125 \text{ km}$

Odpowiedź: Odległość pomiędzy A i B wynosi 125 kilometrów.

Przykład

Pracownik w fabryce miał w ustalonym terminie wykonać 1350 jednakowych części, przy czym codziennie wykonywał taką samą ich liczbę. Gdyby wykonywał codziennie o 5 sztuk mniej, to skończyłby pracę o 3 dni później. Oblicz, w jakim terminie pracownik miał zakończyć tę pracę oraz ile części dziennie miał wykonywać.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań.

x – planowana dzienna liczba części, $x > 0$ i $x \in \mathbb{N}$

y – planowana liczba dni pracy, $y > 0$ i $y \in \mathbb{N}$

$x - 5$ – dzienna liczba części przy mniej wydajnej pracy

$y + 3$ – liczba dni pracy przy mniej wydajnej pracy

$$\begin{cases} xy = 1350 \\ (x - 5)(y + 3) = 1350 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań. Wyznaczamy y z drugiego równania i podstawiamy do pierwszego:

$$\begin{cases} xy = 1350 \\ xy + 3x - 5y - 15 = 1350 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 1350 \\ y = \frac{3}{5}x - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{3}{5}x - 3\right)x = 1350 \\ y = \frac{3}{5}x - 3 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie: $\frac{3}{5}x^2 - 3x - 1350 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot (-1350) = 3249, \sqrt{\Delta} = 57$$

$$x_1 = \frac{3 - 57}{2 \cdot \frac{3}{5}} = -45 \notin D, x_2 = \frac{3 + 57}{2 \cdot \frac{3}{5}} = 50$$

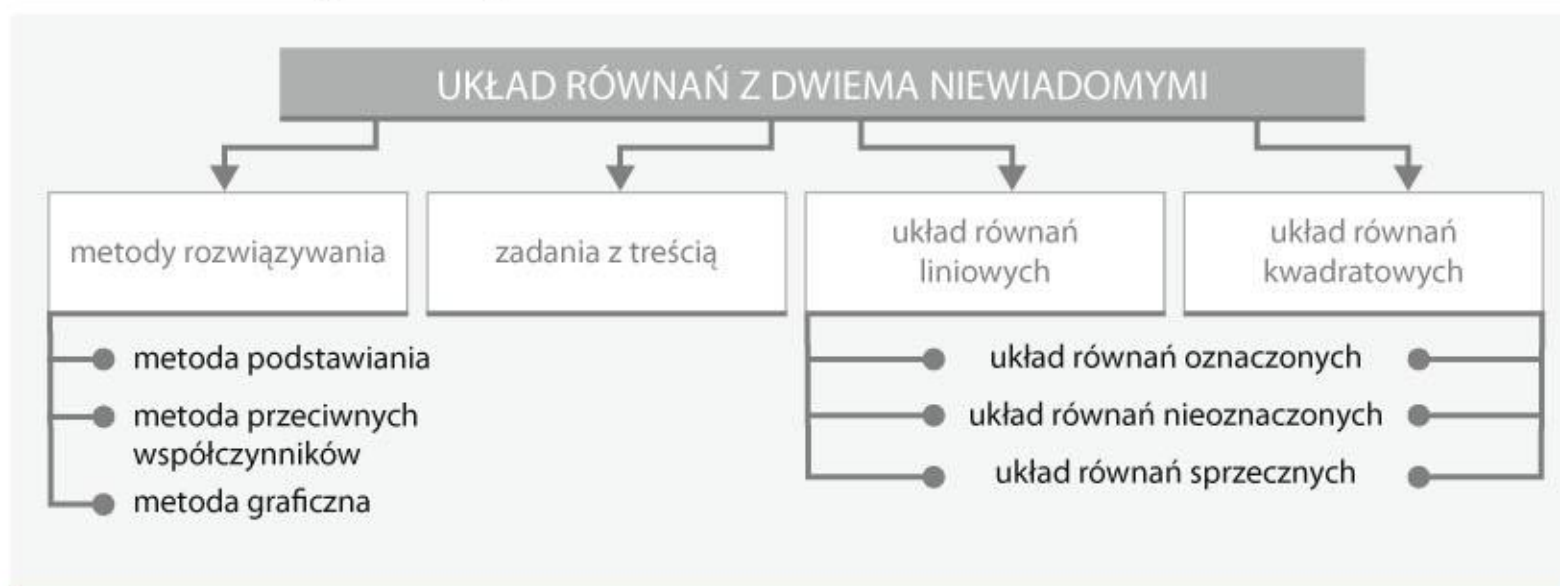
Zapisujemy układ równań i wyznaczamy niewiadomą y :

$$\begin{cases} x = 50 \\ y = \frac{3}{5} \cdot 50 - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 50 \\ y = 27 \end{cases}$$

Sprawdzenie: $50 \cdot 27 = 1350$

Odpowiedź: Pracownik miał zakończyć tę pracę w ciągu 27 dni i wykonywać dziennie po 50 elementów.

4.3. Utrwalamy wiedzę



5

Funkcje

5.1. Funkcja i jej własności

Pojęcie funkcji

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y .

Zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji**, a każdy element x zbioru X nazywamy **argumentem funkcji**.

Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**. Każdy element y zbioru Y , który został przyporządkowany określonemu argumentowi x , nazywamy **wartością funkcji f** dla argumentu x i zapisujemy $y = f(x)$.

Zbiór ZW tych elementów y nazywamy **zbiorem wartości funkcji**.

Przykład

Oblicz:

a) wartość funkcji $f(x) = x^3 - 11x$ dla argumentu $\sqrt{3} - \sqrt{2}$,

b) argument, dla którego wartość funkcji $f(x) = \sqrt{9x^2 - 12x + 4} - 4$ wynosi $\sqrt{5}$.

Rozwiązanie:

$$a) f(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 - 11(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 11\sqrt{3} + 11\sqrt{2} = -2\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Wartość tej funkcji dla argumentu $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ wynosi $-2\sqrt{3}$.

b) Ponieważ $f(x) = \sqrt{5}$, otrzymujemy $\sqrt{9x^2 - 12x + 4} - 4 = \sqrt{5}$.

Zapisujemy wyrażenie pod pierwiastkiem jako $(3x - 2)^2$, a następnie korzystamy z twierdzenia

$\sqrt{a^2} = |a|$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy $|3x - 2| - 4 = \sqrt{5}$. Stąd $|3x - 2| = 4 + \sqrt{5}$.

Po zastosowaniu definicji wartości bezwzględnej otrzymujemy dwa równania:

$$3x - 2 = 4 + \sqrt{5} \qquad 3x - 2 = -4 - \sqrt{5}$$

$$3x = 4 + \sqrt{5} + 2 \qquad 3x = -4 - \sqrt{5} + 2$$

$$3x = 6 + \sqrt{5} \quad | :3 \qquad 3x = -2 - \sqrt{5} \quad | :3$$

$$\text{Więc } x = \frac{6 + \sqrt{5}}{3} \text{ oraz } x = \frac{-2 - \sqrt{5}}{3}$$

Odpowiedź: Funkcja f przyjmuje wartość $\sqrt{5}$ dla $x = \frac{6 + \sqrt{5}}{3}$ oraz $x = \frac{-2 - \sqrt{5}}{3}$.

Sposoby określania funkcji

Funkcje określamy za pomocą opisu słownego, tabelki, grafu, a także wzoru lub wykresu.

Przykład

Funkcję przedstawiono w postaci tabeli.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	2	3	4	5	6

Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji. Przetwórz tę funkcję za pomocą:

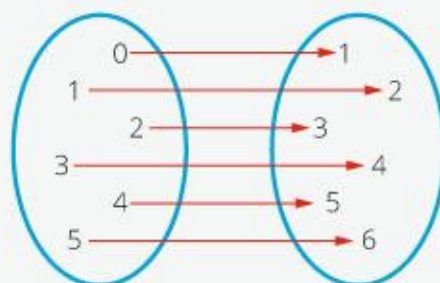
a) opisu słownego, b) grafu, c) wzoru, d) wykresu.

Rozwiązanie:

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, ZW = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

a) Każdej liczbie ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ przyporządkowano liczbę o jeden większą.

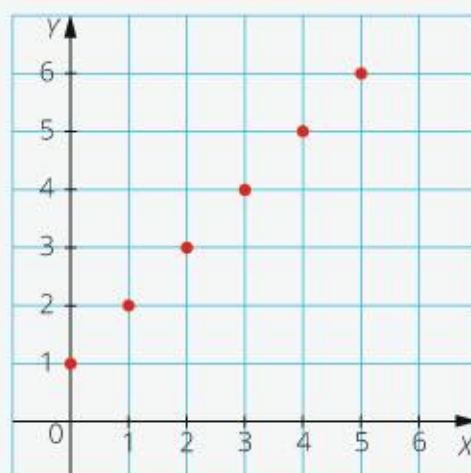
b)





c) $f(x) = x + 1$ dla $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

d)



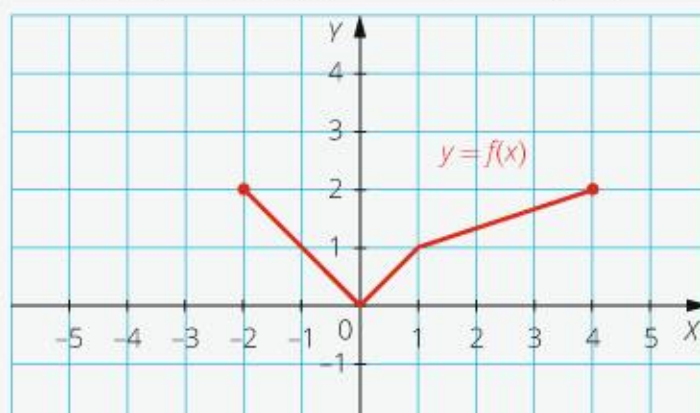
Wykres funkcji $f: X \rightarrow Y$ to zbiór wszystkich punktów (x, y) takich, że $x \in X$ i $y = f(x)$.

Przykład

Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in (-2, 1) \\ \sqrt{x}, & x \in (1, 4) \end{cases}$.

Rozwiązanie:

Rysujemy wykresy dwóch funkcji $f_1(x) = |x|$ i $f_2(x) = \sqrt{x}$ w podanych przedziałach.



Określanie dziedziny funkcji

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja jest określona.

Przykład

Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5} + \sqrt{4 - x}$.

Rozwiązanie:

Wartości wyrażenia $\frac{1}{x^2 - 5}$ nie są określone, gdy mianownik jest równy 0. Wobec tego zapisujemy założenie $x^2 - 5 \neq 0$. Stąd $x \neq \sqrt{5}$ i $x \neq -\sqrt{5}$.

Wartości wyrażenia $\sqrt{4 - x}$ są określone, gdy liczba podpierwiastkowa $4 - x$ jest nieujemna. Wobec tego $4 - x \geq 0$, więc $x \leq 4$.

Zapisujemy dziedzinę: $x \in (-\infty, 4) \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

Miejsce zerowe funkcji

Miejszem zerowym funkcji to każdy argument, dla którego wartość funkcji liczbowej jest równa 0. Funkcja może mieć wiele miejsc zerowych, ale może również nie mieć ich wcale.

Przykład

Wyznacz takie wartości parametru m , dla których funkcja określona wzorem $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{dla } |x| < 2 \\ x^2 - m, & \text{dla } |x| \geq 2 \end{cases}$

ma trzy różne miejsca zerowe.

Rozwiązanie:

Funkcja $f_1(x) = |x|$ ma jedno miejsce zerowe $x = 0$ w zbiorze $-2 < x < 2$.

Wobec tego funkcja $f_2(x) = x^2 - m$ musi mieć dwa miejsca zerowe: jedno znajdujące się w przedziale $(-\infty, -2)$, a drugie w przedziale $(2, \infty)$, bo wykres tej funkcji jest symetryczny względem osi Y . Ponieważ $f_2(-2) = f_2(2) = 4 - m$, zatem $4 - m \leq 0$, więc $m \geq 4$.

Odpowiedź: Funkcja $f(x)$ ma trzy miejsca zerowe dla $m \geq 4$.

5.2. Odczytywanie własności funkcji z wykresu

Dziedzina, zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji

Dziedzinę, zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji można odczytać z wykresu.

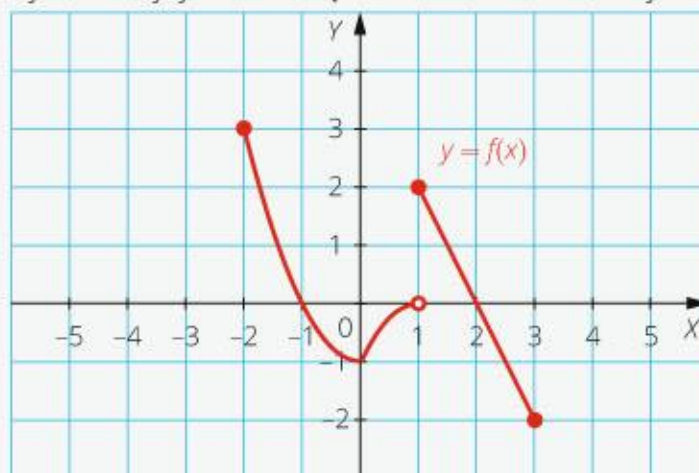
Dziedzina to zbiór wszystkich wartości x , którym można przyporządkować punkt na wykresie funkcji (odczytujemy na osi X).

Zbiór wartości (odczytujemy na osi Y) to te wszystkie wartości y , którym możemy przyporządkować punkt na wykresie funkcji.

Miejsce zerowe jest równe współrzędnej x punktu przecięcia wykresu funkcji z osią X .

Przykład

Na podstawie wykresu funkcji określ jej dziedzinę, zbiór wartości i miejsce zerowe.



Odpowiedź: $D_f = (-6, 3]$, $ZW = [-2, 3]$, miejsca zerowe $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Monotoniczność funkcji

Funkcję nazywamy rosnącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcję nazywamy malejącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcję nazywamy stałą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ spełniona jest równość $f(x_1) = f(x_2)$.

Funkcję nazywamy niemalejącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkcję nazywamy nierosnącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) \geq f(x_2)$.



Funkcjami monotonicznymi nazywamy funkcje, które są rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe.

Przykład

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -3)$.

Rozwiązanie:

Niech $x_1, x_2 \in (-\infty, -3)$ i $x_1 < x_2$. Wówczas $f(x_1) = \frac{x_1-2}{x_1+3}$ i $f(x_2) = \frac{x_2-2}{x_2+3}$.

Badam znak różnicy $f(x_1) - f(x_2)$.

$$\text{Otrzymujemy: } f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1-2}{x_1+3} - \frac{x_2-2}{x_2+3} = \frac{(x_1-2)(x_2+3) - (x_2-2)(x_1+3)}{(x_1+3)(x_2+3)}$$

Po opuszczeniu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1x_2 + 3x_1 - 2x_2 - 6 - x_1x_2 + 3x_2 + 2x_1 + 6}{(x_1+3)(x_2+3)}$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{5x_1 - 5x_2}{(x_1+3)(x_2+3)}$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{5(x_1 - x_2)}{(x_1+3)(x_2+3)}$$

Ponieważ $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 + 3 < 0$ oraz $x_2 + 3 < 0$, to $f(x_1) - f(x_2) = \frac{5(x_1 - x_2)}{(x_1+3)(x_2+3)} < 0$.

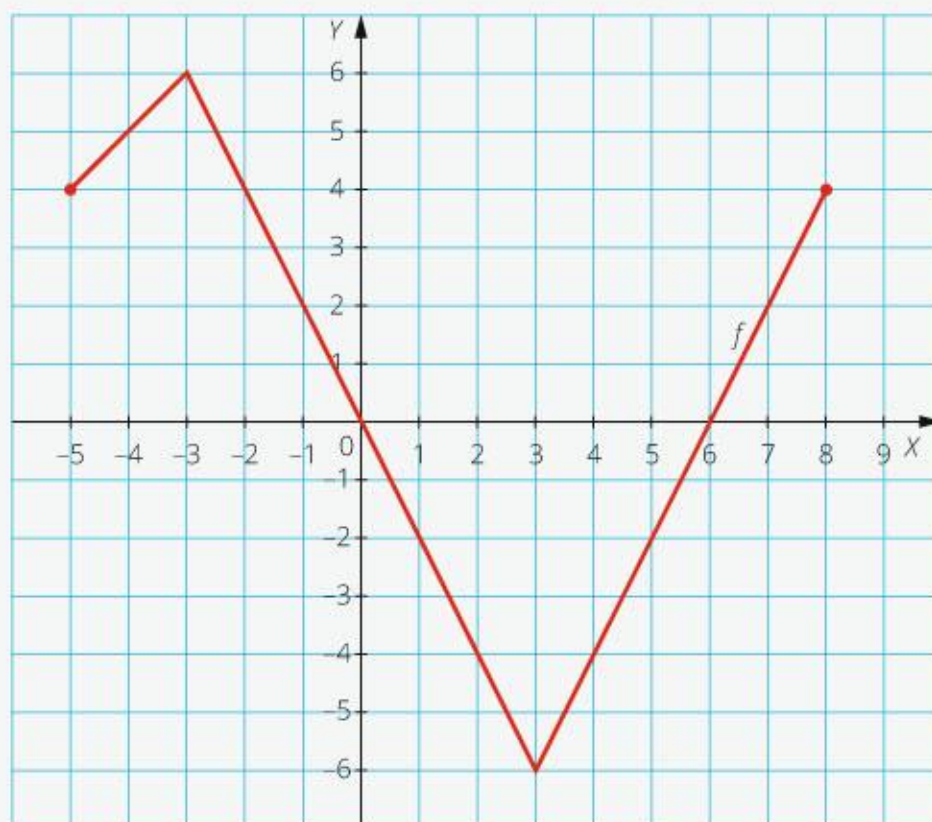
Wobec tego funkcja jest rosnąca w tym przedziale.

Największa i najmniejsza wartość funkcji

Na podstawie wykresu możemy również odczytać argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość, na przykład wartość największą lub najmniejszą, wartości dodatnie czy ujemne, a także wartości z określonego przedziału liczbowego.

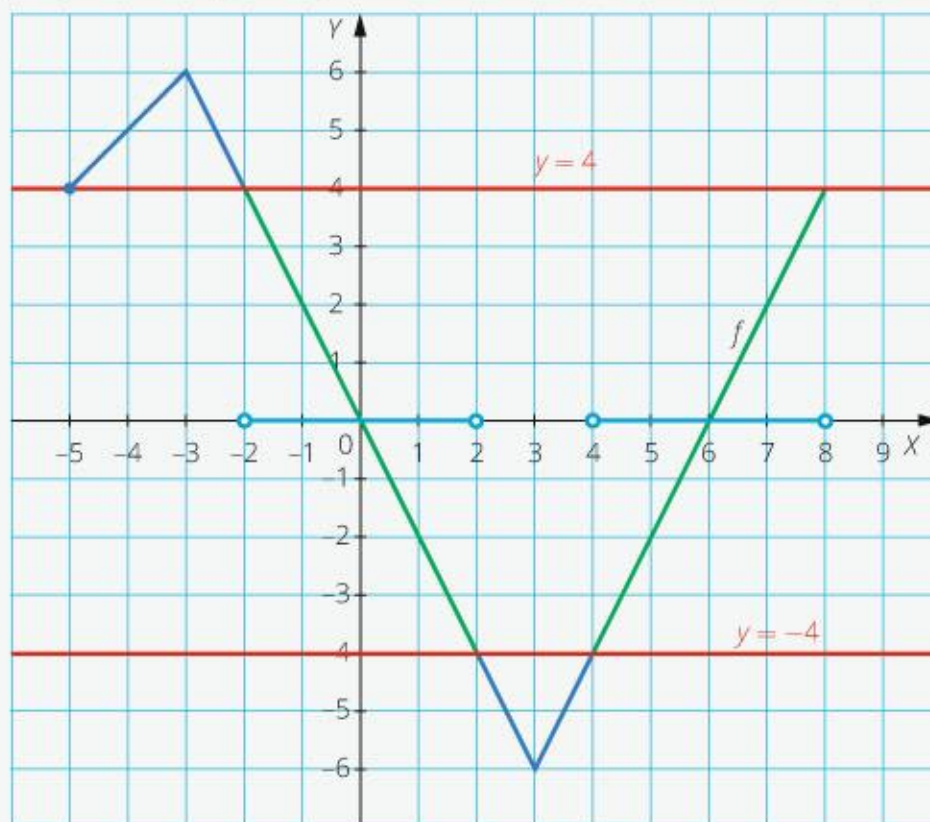
Przykład

Określ, dla jakich argumentów wartości funkcji przedstawionej na wykresie są większe od -4 i mniejsze od 4 .



Rozwiązanie:

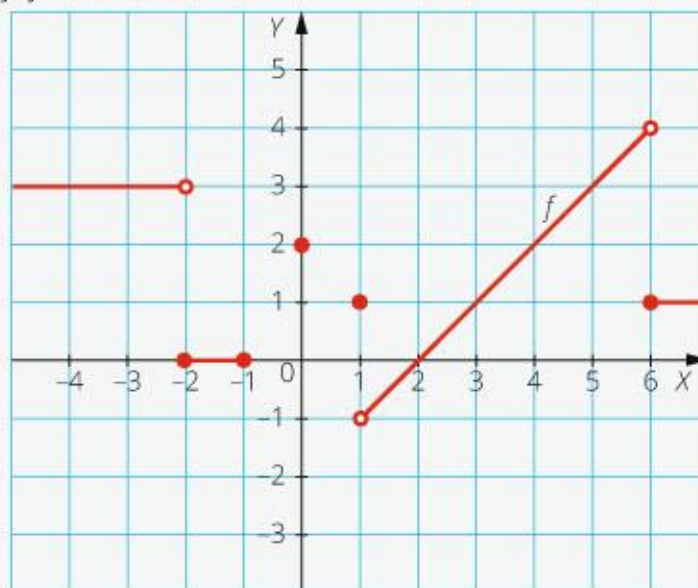
Rysujemy w układzie współrzędnych proste $y = -4$ i $y = 4$. Odczytujemy argumenty, dla których wartości funkcji należą do przedziału $(-4, 4)$.



Odpowiedź: Wartości funkcji spełniają warunek $-4 < f(x) < 4$ dla $x \in (-2, 2) \cup (4, 8)$.

Własności funkcji**Przykład**

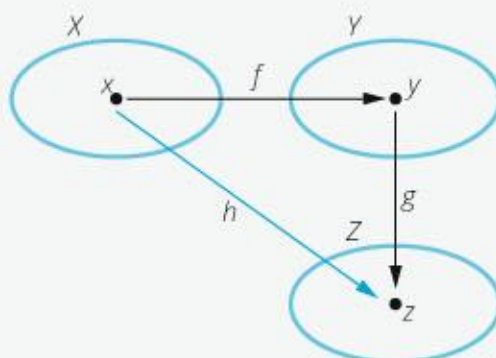
Z wykresu funkcji odczytaj jej własności.

**Rozwiązanie:**

- Dziedzina funkcji: $D_f = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$.
- Zbiór wartości funkcji: $ZW = (-1, 4)$.
- Miejsca zerowe funkcji: $x \in (-2, -1)$ oraz $x = 2$.
- Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: $x \in (-\infty, -2) \cup \{0, 1\} \cup (2, \infty)$.
- Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne: $x \in (1, 2)$.
- Maksymalne przedziały monotoniczności funkcji:
 - funkcja rosnąca dla: $x \in (1, 6)$,
 - funkcja malejąca dla: $x \in \{0, 1\}$,
 - funkcja stała dla: $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup \{0\} \cup (6, \infty)$.
- Największa wartość funkcji: nie przyjmuje tej wartości.
- Najmniejsza wartość funkcji: nie przyjmuje tej wartości.

Złożenie funkcji

Jeżeli dane są dwie funkcje $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$, to możemy określić trzecią funkcję $h: X \rightarrow Z$ taką, że $h(x) = g(f(x))$. Funkcję h nazywamy superpozycją lub złożeniem funkcji f i g oraz oznaczamy $h = g \circ f$. Funkcję f nazywa się funkcją wewnętrzną, a funkcję g – funkcją zewnętrzną. Złożenia $g \circ f$ i $f \circ g$ są na ogół różnymi funkcjami.



Przykład

Dane są funkcje $f(x) = 2x + 1$ i $g(x) = x^2 - 2$. Wyznacz wzór funkcji $h = g \circ f$ oraz $m = f \circ g$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy złożenie funkcji: $h = g \circ f$

$$h(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

Wyznaczamy złożenie funkcji: $m = f \circ g$

$$m(x) = f(g(x)) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$$

Odpowiedź: Wzorem funkcji $h = g \circ f$ jest $h(x) = 4x^2 + 4x - 1$, a funkcji $m = f \circ g$ jest $m(x) = 2x^2 - 3$.

Przykład

Funkcja h określona jest wzorem $h(x) = \log(5 - 3x)$. Funkcja ta jest złożeniem funkcji $g \circ f$. Określ funkcje f i g . Podaj dziedzinę każdej z następujących funkcji: f , g i h .

Rozwiązanie:

Skoro $h(x) = g(f(x))$ i $h(x) = \log(5 - 3x)$, to funkcją zewnętrzną jest $g(y) = \log y$, a funkcją wewnętrzną jest $y = f(x) = 5 - 3x$.

Dziedziną funkcji f jest $x \in \mathbb{R}$. Dziedziną funkcji g jest: $y > 0$.

Wyznaczamy dziedzinę funkcji h . Jest ona częścią wspólną zbiorów $x \in \mathbb{R}$ i $y > 0$.

Warunek $y > 0$ zapisujemy jako $5 - 3x > 0$, stąd $x < 1\frac{2}{3}$ (ponieważ funkcja h jest funkcją zmiennej x).

Dziedziną funkcji $h(x)$ jest zbiór $x \in \left(-\infty, 1\frac{2}{3}\right)$.

5.3. Funkcja liniowa

Pojęcie funkcji liniowej

Funkcją liniową nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym funkcji.

Na przykład: $f(x) = 7x - 3$, $f(x) = 3$, $f(x) = 9 - x$

Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$ dla $a \neq 0$.

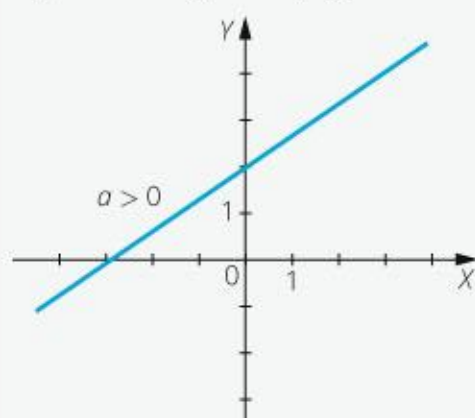
Dla $a = 0$, zbiorem wartości funkcji liniowej jest.

Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta, która przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, b)$.

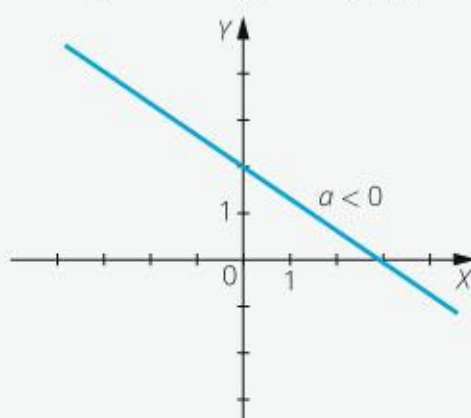
Monotoniczność funkcji liniowej

Monotoniczność funkcji liniowej:

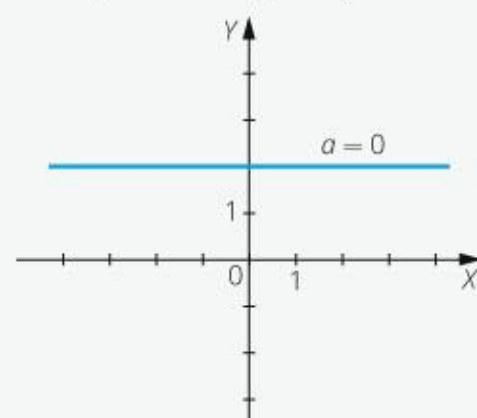
1. Jeżeli $a > 0$, to funkcja liniowa jest funkcją rosnącą.



2. Jeżeli $a < 0$, to funkcja liniowa jest funkcją malejącą.



3. Jeżeli $a = 0$, to funkcja liniowa jest funkcją stałą.



Przykład

Dla jakich wartości parametru m funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{2-m}{m}x + 2$ jest rosnącą.

Rozwiązanie:

Współczynnik kierunkowy $\frac{2-m}{m}$ musi być liczbą dodatnią, aby funkcja była rosnącą.

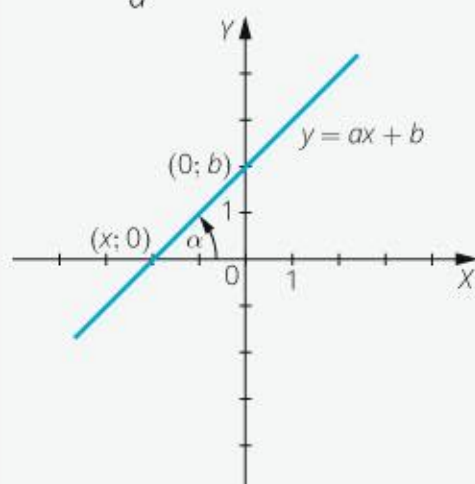
Zapisujemy $\frac{2-m}{m} > 0$, więc $(2-m)m > 0$. Nierówność ta jest spełniona dla $m \in (0, 2)$.

Miejsca zerowe funkcji liniowej

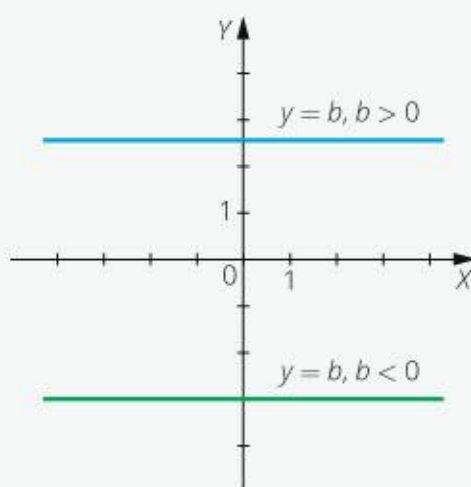
Aby wyznaczyć miejsca zerowe funkcji $f(x) = ax + b$, przyrównujemy jej wartość do liczby 0: $ax + b = 0$, skąd $ax = -b$.

1. Dla $a \neq 0$, funkcja liniowa ma jedno miejsce zerowe:

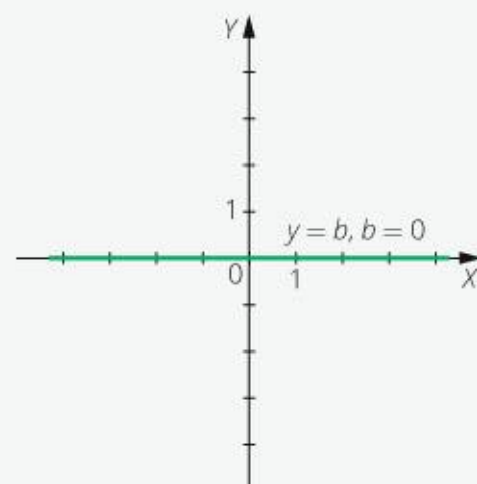
$$x = -\frac{b}{a}.$$



2. Dla $a = 0$, $b \neq 0$, funkcja liniowa nie ma miejsc zerowych.



3. Dla $a = 0$, $b = 0$, funkcja liniowa ma nieskończenie wiele miejsc zerowych (każda liczba rzeczywista jest jej miejscem zerowym).



Przykład

Miejszem zerowym funkcji jest liczba $\sqrt{2}$, a wykres przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, -\sqrt{3})$. Napisz wzór tej funkcji.

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy informacje o tym, że do wykresu należą punkty $(0, -\sqrt{3})$ i $(\sqrt{2}, 0)$. Zapisujemy układ

$$\text{równań } \begin{cases} -\sqrt{3} = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot \sqrt{2} + b \end{cases}. \text{ Otrzymujemy } \begin{cases} b = -\sqrt{3} \\ a = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

Zapisujemy wzór funkcji: $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x - \sqrt{3}$

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia funkcja o wzorze $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x - \sqrt{3}$.

Proste równoległe

Wykresy funkcji liniowych o wzorach $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$ są **prostymi równoległymi** wtedy, gdy funkcje mają jednakowe współczynniki kierunkowe ($a_1 = a_2$).

Przykład

Podaj wzór funkcji liniowej, do której wykresu należy punkt $A = (3, -3\sqrt{2})$, a prosta będąca jej wykresem jest równoległa do prostej będącej wykresem funkcji $y = (\sqrt{6} - \sqrt{2})x - 3$.

Rozwiązanie:

Określamy wartość współczynnika kierunkowego funkcji: $a_2 = a_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

Zapisujemy wzór funkcji: $y = (\sqrt{6} - \sqrt{2})x + b$

Wyznaczamy wartość współczynnika b , korzystając z faktu, że do wykresu funkcji należy punkt A o współrzędnych $x = 3$ i $y = -3\sqrt{2}$. Otrzymujemy $-3\sqrt{2} = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot 3 + b$, skąd $b = -3\sqrt{6}$.

Odpowiedź: Prosta będąca wykresem funkcji $y = (\sqrt{6} - \sqrt{2})x - 3\sqrt{6}$ spełnia warunki zadania.

Proste prostopadłe

Wykresy funkcji liniowych o wzorach $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$ są **prostymi prostopadłymi** wówczas, gdy współczynniki kierunkowe spełniają warunek: $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Przykład

Napisz wzór funkcji liniowej, do której wykresu należy punkt $A = (\sqrt{5}, -1)$. Ponadto wiadomo, że prosta będąca wykresem jest prostopadła do prostej będącej wykresem funkcji $y = -\sqrt{5}x + 6$.

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość współczynnika funkcji, której wykres jest prostą prostopadłą.

$$a_1 = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Zapisujemy wzór funkcji: $y = \frac{\sqrt{5}}{5}x + b$

Wyznaczamy wartość współczynnika b , wykorzystując informację, że punkt A o współrzędnych $x = \sqrt{5}$ i $y = -1$ należy do wykresu. Otrzymujemy $-1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{5} + b$, więc $b = -2$.

Odpowiedź: Wykres funkcji $y = \frac{\sqrt{5}}{5}x - 2$ spełnia warunki zadania.

5.4. Funkcja kwadratowa

Pojęcie funkcji kwadratowej

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**.

Jeżeli $a > 0$, to parabola ma ramiona skierowane do góry, a jeżeli $a < 0$, to parabola ma ramiona skierowane do dołu. Współczynnik c wyznacza punkt przecięcia wykresu funkcji z osią Y .

Wyróżnik trójmianu kwadratowego: $\Delta = b^2 - 4ac$

Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Wzory funkcji kwadratowej

Funkcję kwadratową możemy zapisać w postaci:

a) ogólnej

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \\ a \neq 0$$

b) kanonicznej

$$f(x) = a(x-p)^2 + q, \quad a \neq 0 \\ p = \frac{-b}{2a}, \quad q = \frac{-\Delta}{4a}$$

c) iloczynowej

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2), \quad a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(x) = a(x-x_0)^2, \quad a \neq 0, \Delta = 0$$

Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowej

Przykład

Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3, x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy funkcja ma miejsca zerowe.

$$\text{Obliczamy wyróżnik: } \Delta = \left(\frac{9}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot (-3) = \frac{225}{16} \quad \sqrt{\Delta} = \frac{15}{4}$$

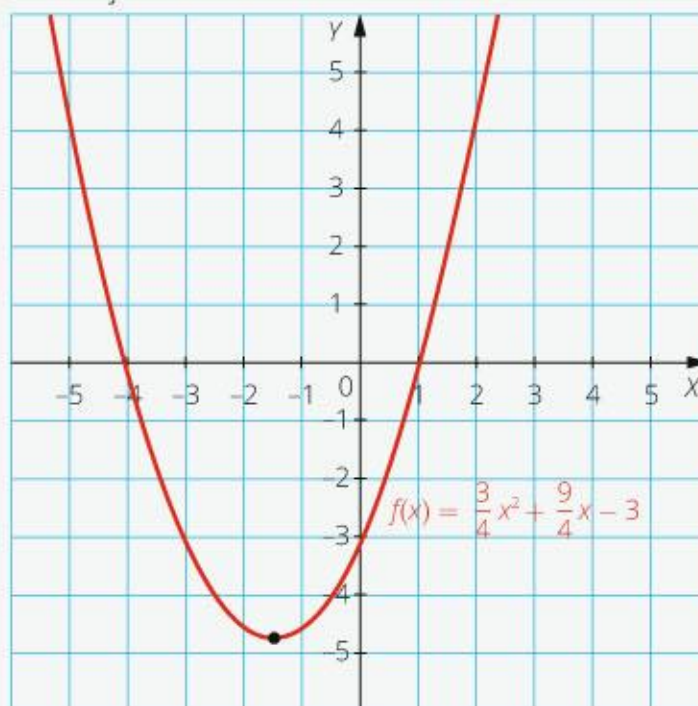
Ponieważ $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-\frac{9}{4} - \frac{15}{4}}{2 \cdot \frac{3}{4}} = -4, \quad x_2 = \frac{-\frac{9}{4} + \frac{15}{4}}{2 \cdot \frac{3}{4}} = 1$$

Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$p = \frac{-\frac{9}{4}}{2 \cdot \frac{3}{4}} = -\frac{3}{2}, \quad q = \frac{-\frac{225}{16}}{4 \cdot \frac{3}{4}} = -4\frac{11}{16}$$

Zaznaczamy w układzie współrzędnych miejsca zerowe funkcji oraz punkt, który jest wierzchołkiem paraboli. Szkicujemy wykres funkcji:



Przykład

Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2$.

Rozwiązanie:

Odczytujemy ze wzoru współrzędne wierzchołka paraboli: $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$

Przekształcamy wzór do postaci ogólnej: $f(x) = -2x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

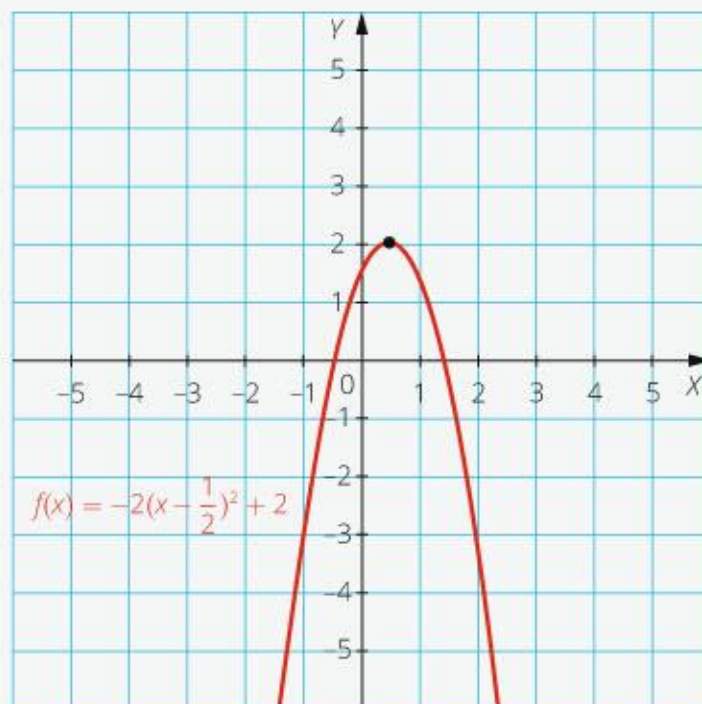
Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot \frac{3}{2} = 4 + 12 = 16$

Obliczamy miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-2-4}{2 \cdot (-2)} = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{-2+4}{2 \cdot (-2)} = \frac{3}{2}$





Szkicujemy wykres funkcji:



Najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale

Przykład

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -5x^2 + 7x - \frac{1}{3}$ w przedziale:

- a) $\langle -1; 2 \rangle$ b) $\langle 1; 4 \rangle$

Rozwiązanie:

a) Sprawdzamy, czy wierzchołek należy do przedziału:

$$p = \frac{-7}{2 \cdot (-5)} = \frac{7}{10} \in \langle -1; 2 \rangle$$

Ponieważ $a < 0$, funkcja przyjmuje wartość największą w wierzchołku:

$$f\left(\frac{7}{10}\right) = -5 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{10} - \frac{1}{3} = 2\frac{7}{60}$$

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału:

$$f(-1) = -5 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) - \frac{1}{3} = -12\frac{1}{3} \quad f(2) = -5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - \frac{1}{3} = -6\frac{1}{3}$$

Wartość największa w przedziale wynosi $2\frac{7}{60}$, a najmniejsza to $-12\frac{1}{3}$.

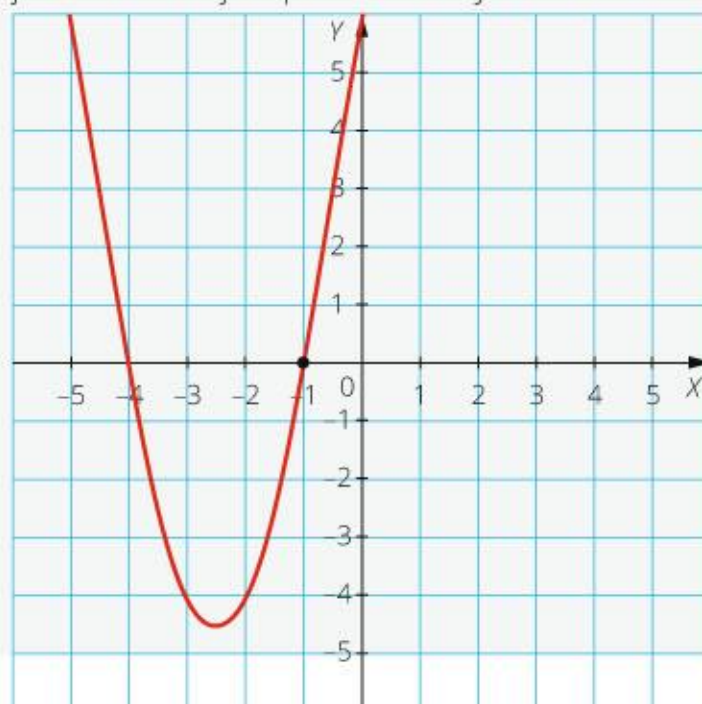
b) Wierzchołek nie należy do przedziału, zatem obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału:

$$f(1) = -5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3} \quad f(4) = -5 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 - \frac{1}{3} = -52\frac{1}{3}$$

Wartość największa w przedziale wynosi $1\frac{2}{3}$, a najmniejsza $-52\frac{1}{3}$.

Przykład

Wyznacz wzór ogólny funkcji kwadratowej na podstawie wykresu.



Rozwiązanie:

Z wykresu odczytujemy miejsca zerowe $x_1 = -4$, $x_2 = -1$ i zapisujemy wzór funkcji w postaci iloczynowej $f(x) = a(x+4)(x+1)$.

Wstawiamy do wzoru współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią $Y(0;6)$ i obliczamy wartość a :

$$a(0+4)(0+1) = 6 \quad a = \frac{3}{2}$$

$$\text{Wzór funkcji: } f(x) = \frac{3}{2} \cdot (x+4)(x+1) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + 6$$

5.5. Funkcja a zagadnienia geometryczne i fizyczne, kontekst praktyczny

Funkcje w zadaniach z kontekstem praktycznym

Funkcje liniowe i kwadratowe stosujemy do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych oraz umieszczonych w kontekście praktycznym.

Przykład

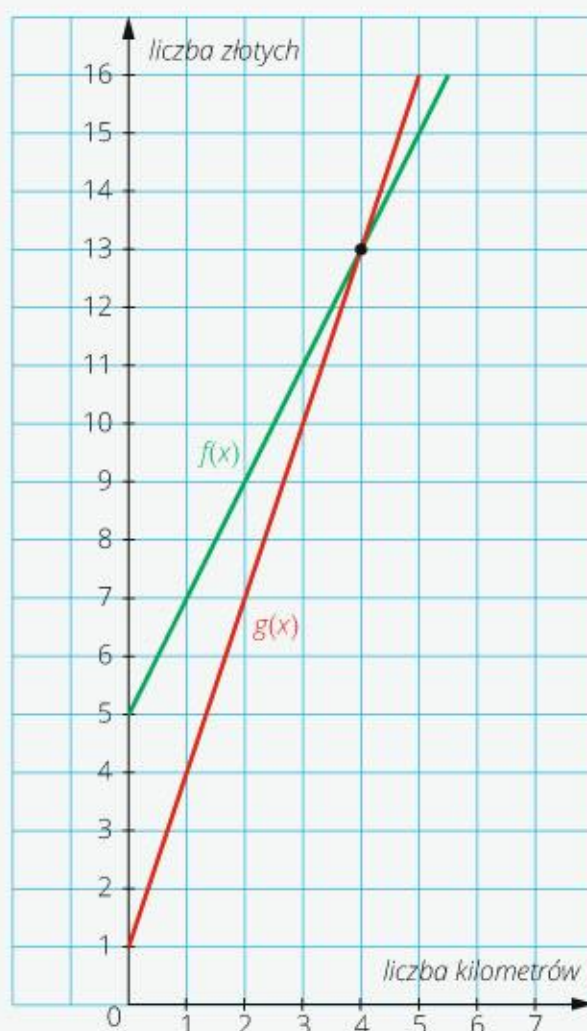
Funkcja $f(x) = 2x + 5$ przedstawia koszt przejechania x kilometrów w korporacji taksówkowej F, a funkcja $g(x) = 3x + 1$ – w korporacji G.

Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykres tych funkcji i odpowiedz na pytania.

a) Po przejechaniu jakiej liczby kilometrów koszt w obu korporacjach będzie taki sam?

b) Ile kilometrów można przejechać w każdej z korporacji za 50 zł?

Rozwiązanie:



a) Po przejechaniu 4 kilometrów.

b) Korporacja F: $2x + 5 = 50$

$$2x = 45$$

$$x = 22,5 \text{ km}$$

Korporacja G: $3x + 1 = 50$

$$3x = 49$$

$$x = 16\frac{1}{3} \text{ km}$$

Przykład

Firma produkcyjna sprzedaje swoje wyroby po 200 zł za sztukę. Na całkowity koszt produkcji w miesiącu składają się koszty stałe w wysokości 10 tysięcy zł i koszty wyprodukowania jednego wyrobu 50 zł.

a) Jaki jest wzór funkcji opisującej koszt całkowity?

b) Ile trzeba sprzedać wyrobów w miesiącu, aby firma przyniosła zysk?

c) Ile wyrobów musi sprzedać firma, aby zysk był równy przynajmniej 2 tysiące zł?

Rozwiązanie:

a) Wzór funkcji: $K(x) = 10000 + 50x$, x – liczba wyrobów

b) $200x > 10000 + 50x$

$$150x > 10000$$

$$x > 66\frac{2}{3}$$

Należy sprzedać 67 wyrobów.

c) $200x - 50x > 10000 + 2000$

$$150x > 12000$$

$$x > 80$$

Należy sprzedać ponad 80 wyrobów.

Przykład

Dana jest funkcja $h(t) = -5t^2 + 50t$, gdzie t oznacza czas w sekundach, a h opisuje wysokość w metrach, jaką osiągnie ciało wyrzucone pionowo w górę.

Oblicz:

a) po jakim czasie ciało osiągnęło maksymalną wysokość i ile ona wynosi,

b) po jakim czasie od chwili wyrzucenia ciało spadnie na ziemię.

Rozwiązanie:

a) Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$t_w = \frac{-50}{2 \cdot (-5)} = 5 \text{ (s)} \quad h(5) = -5 \cdot 5^2 + 50 \cdot 5 = 125 \text{ (m)}$$

Po upływie 5 sekund ciało osiągnie wysokość 125 metrów.

b) Obliczamy miejsca zerowe funkcji:

$$-5t^2 + 50t = 0 \quad t^2 - 10t = 0 \quad t = 0 \text{ lub } t = 10$$

Po 10 sekundach od momentu wyrzucenia ciało spadnie na ziemię.

Przykład

Jakie wymiary ma prostokątna działka, którą możemy ogrodzić siatką o długości 100 m, zostawiając 4 m na bramę, tak aby miała jak największe pole powierzchni? Ile wynosi to pole?

Rozwiązanie:

Oznaczamy boki działki przez a i b , wtedy:

$$2(a + b) = 100 + 4$$

$$a + b = 52$$

$$b = 52 - a$$

Opisujemy pole działki $P = a \cdot b$ jako funkcję boku a :

$$P(a) = a(52 - a)$$

$$P(a) = -a^2 + 52a$$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$a_w = \frac{-52}{-2} = 26 \text{ (m)}$$

$$P(26) = -26^2 + 52 \cdot 26 = 676 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$b = 52 - 26 = 26 \text{ (m)}$$

Działka jest kwadratowa o boku długości 26 m i polu równym 676 m².

5.6. Szkicowanie wykresów funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$

Szkicowanie wykresów funkcji

Mając dany wyjściowy wykres funkcji $f(x)$, możemy naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = f(x) + b$, przesuwając wykres funkcji $f(x)$ wzdłuż osi OY o b jednostek

b) $y = f(x - a)$, przesuwając wykres funkcji $f(x)$ wzdłuż osi OX o a jednostek

c) $y = -f(x)$, odbijając symetrycznie wykres funkcji $f(x)$ względem osi OX

d) $y = f(-x)$, odbijając symetrycznie wykres funkcji $f(x)$ względem osi OY

e) $y = |f(x)|$, odbijając symetrycznie część wykresu funkcji $f(x)$ leżącej poniżej osi X względem osi OX

Przykład

Dany jest wykres funkcji $f(x) = x^2 + x - 6$. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = -f(x)$ oraz $y = f(-x)$.

Rozwiązanie:

Zaznaczamy w układzie współrzędnych wykres funkcji $f(x) = x^2 + x - 6$.

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

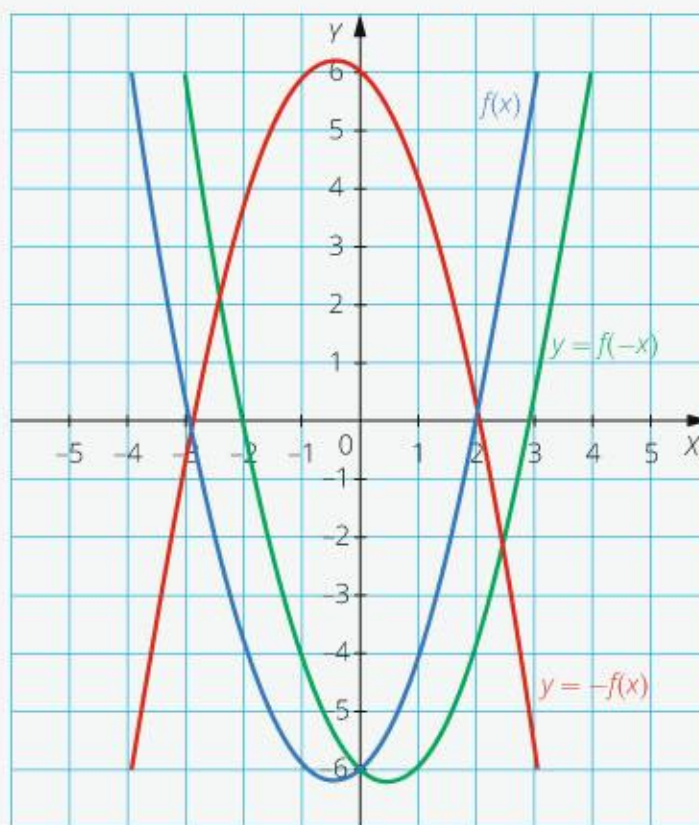
$$x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$p = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$q = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -6\frac{1}{4}$$

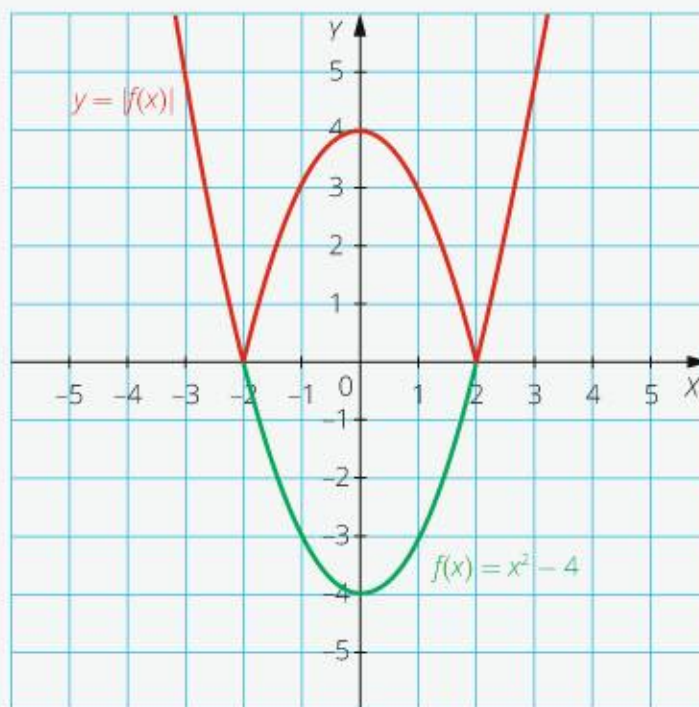
Szkicujemy wykresy funkcji $y = -f(x)$ oraz $y = f(-x)$.

**Przykład**

Dany jest wykres funkcji $f(x) = x^2 - 4$. Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji $y = |f(x)|$.

Rozwiązanie:

Zaznaczamy w układzie współrzędnych wykres funkcji $f(x) = x^2 - 4$ i szkicujemy wykres funkcji $y = |f(x)|$.



5.7. Proporcjonalność odwrotna

Proporcjonalność odwrotna i wielkości odwrotnie proporcjonalne

Proporcjonalnością odwrotną nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, $x > 0$, $a > 0$.

Wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi nazywamy wielkości x i y , gdy spełniona jest zależność $x \cdot y = a$, $a > 0$.

Stała a jest **współczynnikiem proporcjonalności**.

Wykresem proporcjonalności odwrotnej jest jedna gałąź hiperboli.

Przykład

Siedmiu pracowników wykonuje pewną pracę w ciągu pięciu ośmiogodzinnych dni roboczych. W jakim czasie tę samą pracę wykonałoby trzech pracowników, pracując z tą samą wydajnością?

Rozwiązanie:

Obliczamy iloczyn: $7 \cdot 5 = 35$

Zapisujemy wzór funkcji: $f(x) = \frac{35}{x}$

Obliczamy wartość dla argumentu 3: $f(3) = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$ dniówki

Obliczamy wartość $\frac{2}{3}$ dniówki: $\frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ h = 5 h 20 min

Trzech pracowników pracowałoby 11 dni 5 godzin i 20 minut.

Przykład

Dane są wszystkie prostokąty o polu powierzchni równym 20 i bokach x i y .

a) Wyznacz wzór i narysuj wykres funkcji opisującej długość boku y w zależności od długości boku x .

b) Wypisz wszystkie pary (x, y) liczb naturalnych, dla których pole prostokąta jest równe 20.

Rozwiązanie:

a) Wyznaczamy proporcjonalność odwrotną opisującą zależność pomiędzy bokami prostokąta:

$$x \cdot y = 20$$

$$y = \frac{20}{x}, \quad x, y > 0$$

Szkicujemy wykres:



b) Pary liczb $\{(1, 20), (2, 10), (4, 5), (5, 4), (10, 2), (20, 1)\}$

5.8. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zadaniach

Funkcja wykładnicza opisana jest wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest krzywa, która zawsze przecina oś OY w punkcie 1.

Przykład

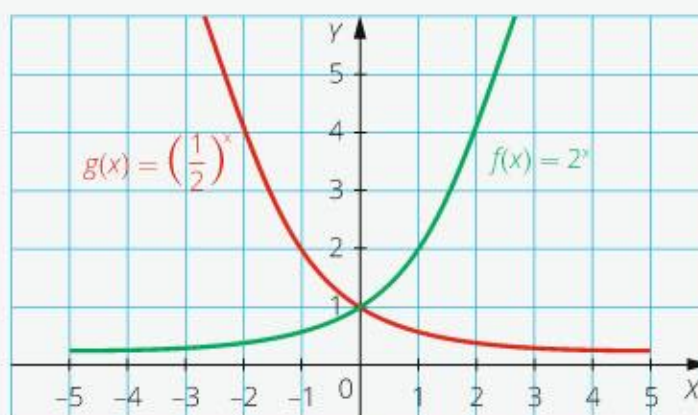
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2^x$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Rozwiązanie:

Rysujemy tabelkę dla obu funkcji:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$g(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Szkicujemy wykresy:



Przykład

Stwierdzono, że liczba bakterii w pewnym doświadczeniu podwaja się w ciągu godziny. Wiedząc, że na początku było 200 bakterii:

- napisz wzór funkcji opisującej liczbę bakterii po upływie czasu t ,
- oblicz liczbę bakterii po upływie 4 godzin od początku doświadczenia,
- oblicz, po jakim czasie liczba bakterii wyniesie 204 800.

Rozwiązanie:

a) Wzór funkcji: $f(t) = 200 \cdot 2^t$

b) Obliczamy wartość funkcji dla argumentu 4: $f(4) = 200 \cdot 2^4 = 200 \cdot 16 = 3200$

c) Obliczamy argument dla wartości funkcji 204 800:

$$204800 = 200 \cdot 2^t \quad 2^t = 1024 \quad 2^t = 2^{10} \quad t = 10$$

Funkcja logarytmiczna opisana jest wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Wykresem tej funkcji jest krzywa, która zawsze przecina oś OX dla argumentu $x = 1$.

Przykład

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$ oraz $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

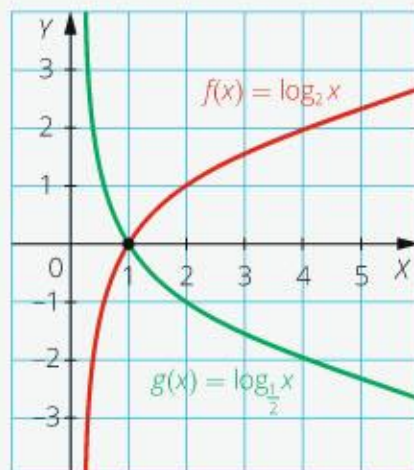
Rozwiązanie:

Rysujemy tabelkę dla obu funkcji:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	-1	0	1	2
$g(x)$	1	0	-1	-2



Szkicujemy wykresy:



Przykład

Oblicz wiek znaleziska, w którym zawartość izotopu ^{14}C jest równa 60%.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie m_0 – początkowa masa próbki, m – końcowa masa próbki,

t – wiek znaleziska.

$T = 5700$ lat

$60\% = 0,6$ zatem $m = 0,6m_0$

Otrzymujemy równanie $0,6m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$, które po skróceniu przez m_0 rozwiązujemy, logarytmując obustronnie:

$$\log 0,6 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,6 = \frac{t}{5700} \cdot \log 0,5$$

$$\frac{t}{5700} = \frac{\log 0,6}{\log 0,5}$$

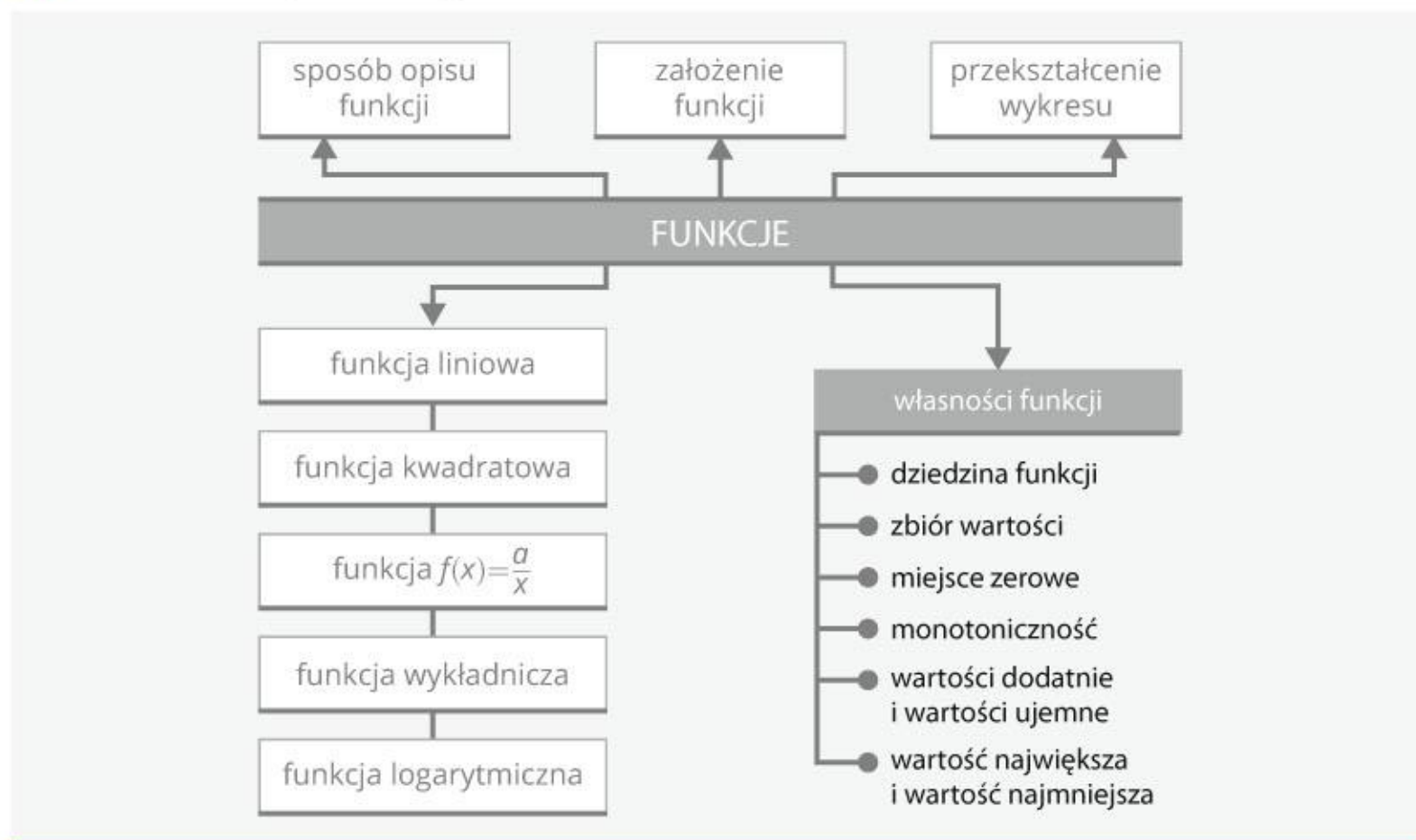
$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,6}{\log 0,5}$$

Wartości $\log 0,6$ oraz $\log 0,5$ obliczamy, korzystając z kalkulatora logarytmów:

$$t \approx 5700 \cdot 0,73 \approx 4161$$

Znalezisko ma ok. 4161 lat.

5.9. Utrwalamy wiedzę



6

Ciągi

6.1. Pojęcie ciągu. Wzór ogólny ciągu

Pojęcie ciągu

Ciągiem nazywamy funkcję określoną w zbiorze liczb całkowitych dodatnich. Wartości tej funkcji dla kolejnych liczb całkowitych dodatnich nazywamy wyrazami ciągu.

Na przykład:

Ciąg liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1: 1, 5, 9, 13, 17, 21, ...

Ciąg sześcianów liczb całkowitych dodatnich: 1, 8, 27, 64, 125, ...

Ciąg kolejnych potęg liczby $\frac{1}{2}$ o wykładniku naturalnym: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

Ciąg skończony

Jeśli dziedziną ciągu jest zbiór $\{1, 2, 3, \dots, k\}$, to ciąg jest **ciągami skończonym** k -wyrazowym. Ciąg oznaczamy wówczas następująco: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$; $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_k)$; (a_n) , gdzie $n \in \{1, 2, \dots, k\}$; (b_n) , gdzie $n \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Ciąg nieskończony

Jeśli dziedziną ciągu jest zbiór liczb naturalnych dodatnich, to ciąg jest **ciągami nieskończonym**. Ciąg oznaczamy wówczas następująco: $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, $(b_1, b_2, b_3, \dots)$, (a_n) , (b_n) .

Trzy kolejne wyrazy ciągu (a_n) możemy zapisać: a_n, a_{n+1}, a_{n+2} , gdzie $n \in \mathbb{N}_+$ lub a_{n-1}, a_n, a_{n+1} gdzie $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$.

Ciąg liczbowy

Ciągiem liczbowym nazywamy ciąg, którego wszystkie wyrazy są liczbami rzeczywistymi.

Sposoby określania ciągu

Ciąg możemy określić w następujący sposób:

1. za pomocą opisu słownego,
2. za pomocą wykresu,
3. poprzez wypisanie jego wszystkich wyrazów (dla ciągu skończonego) lub kilku początkowych wyrazów ciągu pozwalających zauważyć prawidłowość właściwą dla tego ciągu,
4. za pomocą wzoru ogólnego ciągu,
5. za pomocą wzoru rekurencyjnego ciągu.

Przykład

Ciąg liczb naturalnych mniejszych od 12, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2, określ następująco:

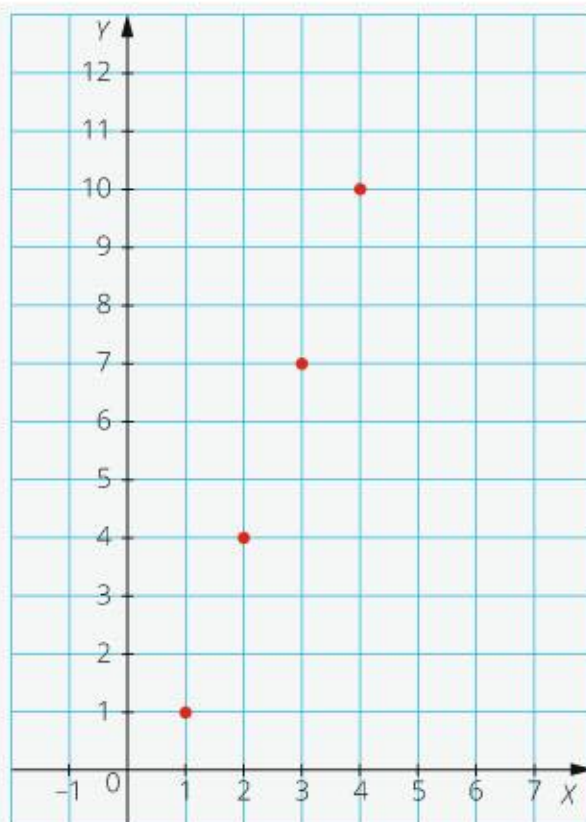
a) poprzez wypisanie jego wszystkich wyrazów,

b) za pomocą wykresu.

Rozwiązanie:

a) Szukamy liczb mniejszych od 12, które są o 2 większe od wielokrotności liczby 3. Są to liczby: 2, 5, 8, 11. Ciąg jest ciągami skończonym i ma cztery wyrazy: $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 8, a_4 = 11$.

b) Rysujemy wykres ciągu w układzie współrzędnych. Pamiętajmy, że pierwszy wyraz ciągu jest równy 2. Stąd współrzędne pierwszego punktu to $(1, 2)$. Drugi wyraz jest równy 5. Stąd współrzędne punktu są równe $(2, 5)$. Trzeci wyraz to 8, a więc współrzędne punktu wynoszą $(3, 8)$. Czwarty wyraz to 11. Zaznaczamy więc punkt o współrzędnych $(4, 11)$.



Wzór ogólny ciągu

Wzorem ogólnym ciągu nazywamy wzór pozwalający obliczyć każdy wyraz ciągu i mający tę własność, że każdy wyraz tego ciągu jest uzależniony od numeru tego wyrazu.

Na przykład dla ciągu liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1, wyrazem ogólnym jest: $a_n = 3n - 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład

Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu nieskończonego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = (\sqrt{2})^{n-1}$.

Rozwiązanie:

Obliczamy: $a_1 = (\sqrt{2})^{1-1} = 1$, $a_2 = (\sqrt{2})^{2-1} = \sqrt{2}$, $a_3 = (\sqrt{2})^{3-1} = 2$, $a_4 = (\sqrt{2})^{4-1} = 2\sqrt{2}$, $a_5 = (\sqrt{2})^{5-1} = 4$

Odpowiedź: Pięć początkowych wyrazów tego ciągu to: 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4.

Przykład

Dany jest ciąg nieskończony (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{3n+2}{10-3n}$. Wypisz wszystkie wyrazy dodatnie tego ciągu.

Rozwiązanie:

Każdy wyraz tego ciągu to ułamek $\frac{3n+2}{10-3n}$, w którym licznik $3n+2$ jest dodatni dla $n \geq 1$.

Aby cały ułamek był dodatni, musi być dodatni mianownik tego ułamka.

Wobec tego nierówność: $10-3n > 0$ jest spełniona dla $n < 3\frac{1}{3}$.

Stąd wynika, że dodatnie są tylko trzy początkowe wyrazy ciągu, tzn. wyraz pierwszy, drugi i trzeci.

$$a_1 = \frac{3 \cdot 1 + 2}{10 - 3 \cdot 1} = \frac{5}{7}, a_2 = \frac{3 \cdot 2 + 2}{10 - 3 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2 \text{ i } a_3 = \frac{3 \cdot 3 + 2}{10 - 3 \cdot 3} = \frac{11}{1} = 11$$

Odpowiedź: W ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{3n+2}{10-3n}$ wyrazami dodatnimi są: $a_1 = \frac{5}{7}$, $a_2 = 2$ i $a_3 = 11$.

Przykład

Uzasadnij, że żaden wyraz ciągu $a_n = (5n-8)(n+3)$ nie jest równy 0.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że któryś z wyrazów jest równy 0. Zatem: $a_n = 0$, czyli $(5n-8)(n+3) = 0$

Otrzymujemy równania: $5n-8 = 0$ lub $n+3 = 0$

Stąd: $n = 1\frac{8}{5}$ lub $n = -3$

Żadna z tych równości nie jest prawdziwa, ponieważ $n \in \mathbb{N}_+$ (jest numerem wyrazu ciągu). Wobec tego w ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = (5n-8)(n+3)$ nie ma wyrazów równych zero.

Przykład

Ile wyrazów ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 7n - 5$ jest mniejszych od 25?

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, które wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od 25, czyli $a_n < 25$.

Otrzymujemy nierówność: $n^2 - 7n - 5 < 25$

Rozwiązujemy nierówność kwadratową: $n^2 - 7n - 30 < 0$ i obliczamy $\Delta = 169$

Wyznaczamy pierwiastki: $n_1 = \frac{7-13}{2} = -3$ i $n_2 = \frac{7+13}{2} = 10$

Rysujemy parabolę:



Otrzymujemy rozwiązanie nierówności: $n \in (-3, 10)$. Ponadto $n \in \mathbb{N}_+$, bo n jest numerem wyrazu ciągu.

Wobec tego otrzymujemy: $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Wyrazy ciągu o tych numerach są mniejsze od 25. Jest ich 9.

Odpowiedź: Jest 9 wyrazów ciągu (a_n) mniejszych od 25.

Przykład

Oblicz sumę trzech pierwszych wyrazów ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n \cdot (n-1)$.

Rozwiązanie:

Obliczamy pierwszy, drugi i trzeci wyraz ciągu:

$$a_1 = (-1)^1 \cdot (1-1) = 0, a_2 = (-1)^2 \cdot (2-1) = 1, a_3 = (-1)^3 \cdot (3-1) = -2$$

Obliczamy sumę trzech pierwszych wyrazów ciągu:

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_3 = 0 + 1 + (-2) = -1$$

Odpowiedź: Suma trzech pierwszych wyrazów tego ciągu jest równa -1 .

Przykład

Wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu liczbowego $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots\right)$ wskazują na prawidłowość,

która cechuje cztery jego początkowe wyrazy. Podaj wzór ogólny tego ciągu.

Rozwiązanie:

$$\text{Zauważamy, że } \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}, \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}, \text{ a } \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}.$$

$$\text{Stąd wnioskujemy, że } a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$\text{Odpowiedź: Wzór ogólny tego ciągu to: } a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

Przykład

Oblicz różnicę $a_{n+1} - a_n$ ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 + \frac{1}{2}n$.

Rozwiązanie:

$$\text{Wyznaczamy wyraz } a_{n+1}. \text{ Otrzymujemy: } a_{n+1} = (n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)$$

$$\text{Zapisujemy go w najprostszej postaci: } a_{n+1} = n^2 + 2\frac{1}{2}n + 1\frac{1}{2}$$

$$\text{Obliczamy różnicę } a_{n+1} - a_n. \text{ Otrzymujemy: } a_{n+1} - a_n = n^2 + 2\frac{1}{2}n + 1\frac{1}{2} - \left(n^2 + \frac{1}{2}n\right)$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1\frac{1}{2}$$

$$\text{Odpowiedź: Różnica } a_{n+1} - a_n \text{ jest równa } 2n + 1\frac{1}{2}.$$

Przykład

Wyznacz wzór ogólny nieskończonego ciągu (a_n) , wiedząc, że dla $n \geq 1$ spełnia on warunki:

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 6n + 7 \text{ i } a_{n+2} - a_{n+1} = 3$$



Rozwiązanie:

Zapisujemy układ równań:
$$\begin{cases} a_{n+2} + a_{n+1} = 6n + 7 \\ a_{n+2} - a_{n+1} = 3 \end{cases}$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy: $2a_{n+2} = 6n + 10$, stąd: $a_{n+2} = 3n + 5$. Wobec tego z drugiego równania otrzymujemy: $a_{n+1} = a_{n+2} - 3$. Czyli: $a_{n+1} = 3n + 2$. Korzystając z drugiego warunku, zapisujemy: $a_n = a_{n+1} - 3$ i obliczamy $a_n = 3n - 1$.

Odpowiedź: Wzorem ogólnym tego ciągu jest $a_n = 3n - 1$.

Ciąg sum częściowych

Jeśli (a_n) jest nieskończonym ciągiem liczbowym, wówczas ciąg (S_n) o kolejnych wyrazach:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

nazywamy **ciągami sum częściowych** ciągu (a_n) .

Przykład

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = \frac{n(5n+1)}{4}$.

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Napisz wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie:

a) Korzystamy z tego, że suma S_1 jest równa a_1 . Obliczamy: $a_1 = \frac{1(5 \cdot 1 + 1)}{4}$

$$\text{Stąd: } a_1 = \frac{3}{2}$$

Odpowiedź: Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $\frac{3}{2}$.

b) Korzystamy ze wzoru: $a_n = S_n - S_{n-1}$ dla $n \geq 2$

$$\text{Wyznaczamy } S_{n-1}. \text{ Otrzymujemy: } S_{n-1} = \frac{(n-1)[5(n-1)+1]}{4}$$

$$\text{Zapisujemy } S_{n-1} \text{ w prostszej postaci: } S_{n-1} = \frac{(n-1)(5n-4)}{4}$$

$$\text{Wyznaczamy } a_n. \text{ Otrzymujemy: } a_n = \frac{n(5n+1)}{4} - \frac{(n-1)(5n-4)}{4}$$

$$\text{Zapisujemy w prostszej postaci: } a_n = \frac{5n^2 + n - (5n^2 - 9n - 4)}{4}$$

$$\text{Otrzymujemy: } a_n = \frac{10n+4}{4}, \text{ stąd: } a_n = \frac{5n+2}{2}$$

Odpowiedź: Wzór na n -ty wyraz tego ciągu to $a_n = \frac{5n+2}{2}$.

Przykład

Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = 2n$ dla $n \geq 1$. Wyprowadź wzór na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie:

Obliczamy kilka początkowych wyrazów tego ciągu:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 10, \dots$$

Obliczamy kilka kolejnych sum tego ciągu:

$$S_1 = 2, S_2 = 2 + 4 = 6, S_3 = 2 + 4 + 6 = 12, S_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20, S_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30, \dots$$

Zauważamy, że:

$$S_1 = 1 \cdot 2, S_2 = 2 \cdot 3, S_3 = 3 \cdot 4, S_4 = 4 \cdot 5, S_5 = 5 \cdot 6, \text{ stąd wnioskujemy: } S_n = n(n+1)$$

Odpowiedź: Wzór $S_n = n(n+1)$ jest wzorem na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

6.2. Wzór rekurencyjny ciągu

Pojęcie wzoru rekurencyjnego ciągu

Określenie rekurencyjne ciągu (a_n) zawiera pierwszy wyraz tego ciągu oraz wzór, jak obliczyć $n+1$ wyraz ciągu na podstawie wyrazu n -tego.

Przykład ciągów określonych wzorem rekurencyjnym:
$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1, n \geq 1 \end{cases}, \begin{cases} a_1 = 0,1 \\ a_2 = 0,1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \geq 1 \end{cases}.$$

Przykład

Ciąg (a_n) określony jest następująco
$$\begin{cases} a_1 = -0,3 \\ a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n \end{cases}.$$
 Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie:

Pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -0,3$

Obliczamy drugi wyraz ciągu: $a_2 = (-1) \cdot (-0,3) = 0,3$

Obliczamy trzeci wyraz ciągu: $a_3 = 1 \cdot 0,3 = 0,3$

Obliczamy czwarty wyraz ciągu: $a_4 = (-1) \cdot 0,3 = -0,3$

Odpowiedź: Czwarty wyraz tego ciągu jest równy $-0,3$.

Przykład

Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{2}{3} \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1}, n \geq 1 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy kolejne pięć wyrazów ciągu: $a_1 = 1, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, a_5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

Obliczamy sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu: $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Otrzymujemy: $S_5 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 = 2\frac{1}{3}$

Odpowiedź: Suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $2\frac{1}{3}$.

Przykład

Podaj wzór rekurencyjny ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -\frac{1}{2}n^2$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy wyrazy a_1 oraz a_{n+1} ciągu (a_n) . Otrzymujemy:

$$a_1 = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}(n+1)^2$$

Ciąg (a_n) możemy określić rekurencyjnie na podstawie różnicy $a_{n+1} - a_n$ lub na podstawie ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

I sposób – określenie na podstawie różnicy

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2}(n+1)^2 - \left(-\frac{1}{2}n^2\right) = -\frac{1}{2}n^2 - n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n^2 = -n - \frac{1}{2}, \text{ stąd } a_{n+1} = a_n - n - \frac{1}{2}$$

II sposób – określenie na podstawie ilorazu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\frac{1}{2}(n+1)^2}{-\frac{1}{2}n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2}, \text{ zatem } a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

Odpowiedź: Ciąg (a_n) możemy określić rekurencyjnie jako:

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n - n - \frac{1}{2}, n \geq 1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}, n \geq 1 \end{cases}$$



Przykład

Podaj wzór ogólny ciągu (a_n) o wyrazie rekurencyjnym
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{-a_n + 3}{2}, n \geq 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy kilka początkowych wyrazów tego ciągu: $a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{5}{4}, a_4 = \frac{7}{8}, a_5 = \frac{17}{16}, a_6 = \frac{31}{32}$.

Zauważamy, że mianowniki są równe dla kolejnych wyrazów ciągu: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Możemy mianownik zapisać wzorem jako: 2^{n-1}

Zauważamy, że licznik jest o 1 większy dla wyrazów ciągu o numerach nieparzystych albo o 1 mniejszy od mianownika dla wyrazów ciągu o numerach parzystych.

Możemy licznik zapisać wzorem: $2^{n-1} - (-1)^n$

Otrzymujemy wzór ogólny: $a_n = \frac{2^{n-1} - (-1)^n}{2^{n-1}}$

Odpowiedź: Ciąg (a_n) określony rekurencyjnie
$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{-a_n + 3}{2}, n \geq 1 \end{cases}$$
 ma wzór ogólny $a_n = \frac{2^{n-1} - (-1)^n}{2^{n-1}}$.

6.3. Monotoniczność ciągów

Pojęcie monotoniczności ciągu

Ciąg jest monotoniczny, jeżeli jest rosnący, malejący, nierosnący, niemalejący lub stały. O innych ciągach mówimy, że nie są monotoniczne.

Ciąg nazywamy rosnącym, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Na przykład ciąg: $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ jest ciągiem rosnącym.

Ciąg nazywamy malejącym, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Na przykład ciąg: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ jest ciągiem malejącym.

Ciąg nazywamy stałym, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są sobie równe, a więc jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi równość $a_{n+1} = a_n$.

Na przykład ciąg: $(3, 3, 3, 3, \dots)$ jest ciągiem stałym.

Ciąg nazywamy niemalejącym, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} \geq a_n$.

Na przykład ciąg: $(2, 2, 2, 4, 6, 8, \dots)$ jest ciągiem niemalejącym.

Ciąg nazywamy nierosnącym, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} \leq a_n$.

Na przykład ciąg: $\left(1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ jest ciągiem nierosnącym.

Przykład ciągu niemonotonicznego: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$.

Przykład

Wykaż, że ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n+2}{n+4}$ jest ciągiem rosnącym.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wzór na $n+1$ wyraz ciągu: $a_{n+1} = \frac{n+3}{n+5}$

Badamy znak różnicy: $a_{n+1} - a_n$

Otrzymujemy: $a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{n+5} - \frac{n+2}{n+4} = \frac{(n+3)(n+4) - (n+2)(n+5)}{(n+4)(n+5)} = \frac{2}{(n+4)(n+5)}$

Iloraz $\frac{2}{(n+4)(n+5)}$ jest dodatni, ponieważ licznik jest dodatni i mianownik jest dodatni (liczby $n+4$ i $n+5$ są dodatnie). Stąd $a_{n+1} - a_n > 0$, czyli $a_{n+1} > a_n$.

Wniosek: Ciąg jest rosnący.

Przykład

Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = (-2)^n$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wzór na $n+1$ wyraz ciągu: $a_{n+1} = (-2)^{n+1}$

Badamy znak różnicy: $a_{n+1} - a_n$. Otrzymujemy: $a_{n+1} - a_n = (-2)^{n+1} - (-2)^n = -3 \cdot (-2)^n$

Iloczyn $-3 \cdot (-2)^n$ jest dodatni, gdy n jest nieparzyste. Ponadto iloczyn ten jest ujemny, gdy n jest parzyste.

Wobec tego różnica $a_{n+1} - a_n$ może być liczbą dodatnią oraz może być liczbą ujemną.

Wniosek: Ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

Przykład

Zbadaj monotoniczność nieskończonego ciągu (a_n) określonego wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + n + 7 \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Aby określić monotoniczność ciągu (a_n) , badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$. Po przekształceniu wzoru: $a_{n+1} = a_n + n + 7$, otrzymujemy: $a_{n+1} - a_n = n + 7$. Suma $n + 7$ jest dodatnia dla $n \geq 1$. Stąd wynika, że różnica $a_{n+1} - a_n$ jest dodatnia.

Wniosek: Ciąg (a_n) jest rosnący.

Przykład

Nieskończony ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = (3p-1)^n$. Dobierz tak parametr p , aby ciąg (a_n) był stały.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wzór na $n+1$ wyraz ciągu: $a_{n+1} = (3p-1)^{n+1}$

Zapisujemy różnicę $a_{n+1} - a_n$. Otrzymujemy: $a_{n+1} - a_n = (3p-1)^{n+1} - (3p-1)^n$

Aby ciąg (a_n) był stały, różnica $a_{n+1} - a_n$ musi być równa zero. Wobec tego otrzymujemy: $(3p-1)^{n+1} - (3p-1)^n = 0$

Przekształcamy równanie do postaci iloczynowej: $(3p-1)^n (3p-2) = 0$

Otrzymujemy: $3p-1=0$ lub $3p-2=0$

Stąd: $p = \frac{1}{3}$ lub $p = \frac{2}{3}$

Odpowiedź: Ciąg (a_n) jest stały dla $p = \frac{1}{3}$ lub $p = \frac{2}{3}$.

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to **ciąg jest rosnący**, gdy dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, to **ciąg jest malejący**, gdy dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}_+$ spełniona jest nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.



Przykład

Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wzór na $n+1$ wyraz ciągu: $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie. Badamy, czy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest większy od 1 czy mniejszy od 1.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

Warunek $\frac{2}{n+1} > 1$ jest spełniony dla $n < 1$. Otrzymaliśmy sprzeczność, ponieważ n jest numerem wyrazu ciągu (jest liczbą naturalną dodatnią). Stąd wnioskujemy, że ciąg (a_n) nie jest rosnący.

Warunek $\frac{2}{n+1} < 1$ jest spełniony dla $n > 1$. Skoro dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ spełniona jest nierówność $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, to ciąg jest malejący.

6.4. Ciąg arytmetyczny

Pojęcie ciągu arytmetycznego

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg **liczbowy** (a_n) , jeżeli istnieje taka liczba r , że każdy wyraz (oprócz pierwszego) powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego:

$$a_{n+1} = a_n + r, \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_+.$$

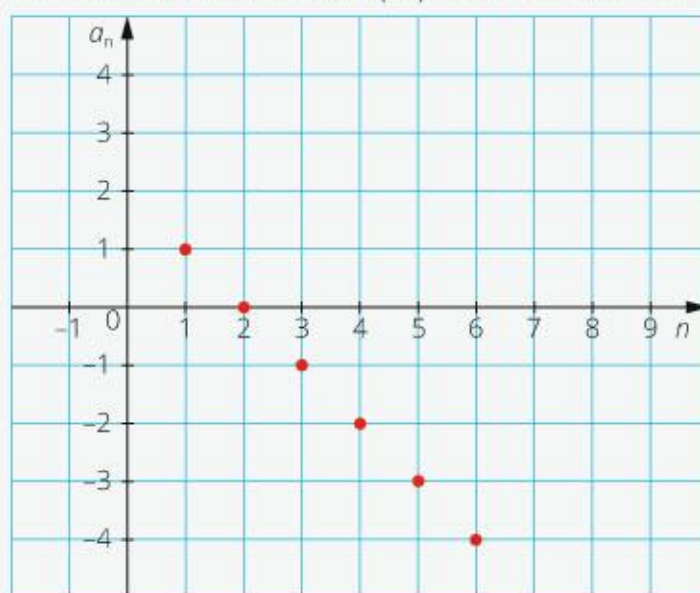
Różnicą ciągu (a_n) nazywamy liczbę r .

Przykład

Podaj różnicę ciągu arytmetycznego: 5, 1, -3, -7, ...

$$r = 1 - 5 = -4$$

Rysunek przedstawia wykres ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem $a_n = -n + 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.



Wykres ciągu arytmetycznego zawsze składa się z punktów leżących na prostej.

Przykład

Uzasadnij, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{-2n+1}{4}$ jest arytmetyczny.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy różnica kolejnych wyrazów nie zależy od n , czyli jest liczbą naturalną.

$$a_{n+1} - a_n = \left[\frac{-2(n+1)+1}{4} \right] - \left[\frac{-2n+1}{4} \right] = \frac{-2n-1}{4} - \frac{-2n+1}{4} = \frac{-2n-1+2n-1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, ponieważ różnica kolejnych wyrazów wynosi $-\frac{1}{2}$.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$ o pierwszym wyrazie ciągu a_1 i różnicy r wyraża się wzorem: $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, to korzystając ze wzoru ogólnego tego ciągu, możemy obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład

Wyznacz drugi, szósty oraz trzydziesty wyraz ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = \frac{\sqrt{3}n-1}{3}$.

$$a_2 = \frac{2\sqrt{3}-1}{3}$$

$$a_6 = \frac{6\sqrt{3}-1}{3}$$

$$a_{30} = \frac{30\sqrt{3}-1}{3}$$

Przykład

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, jeśli jego trzeci wyraz jest równy 14, a jedenasty 34.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $a_3 = 14$ oraz $a_{11} = 34$.

Ze wzoru na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego mamy:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + (3-1)r \\ a_{11} = a_1 + (11-1)r \end{cases}$$

$$\text{Czyli: } \begin{cases} 14 = a_1 + 2r \\ 34 = a_1 + 10r \end{cases}, \text{ stąd: } \begin{cases} a_1 = 9 \\ r = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Zatem wzór ogólny ma postać: $a_n = 9 + (n-1) \cdot \frac{5}{2} = 9 + \frac{5}{2}n - \frac{5}{2} = \frac{5n+13}{2}$.

Odpowiedź: Ciąg arytmetyczny opisuje wzór $a_n = \frac{5n+13}{2}$.

Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Ciąg arytmetyczny jest zawsze ciągiem monotonicznym. Jest **rosnący**, gdy różnica ciągu jest dodatnia ($r > 0$), **malejący**, gdy różnica jest ujemna ($r < 0$), lub **stały**, gdy różnica równa jest zero ($r = 0$).

Przykład

Określ monotoniczność ciągu arytmetycznego.

a) $a_n = 5 - 3n$

b) $b_n = -\frac{1}{2}$

c) $c_n = \frac{\sqrt{3}n-2}{3}$

Rozwiązanie:

a) Wyznaczamy różnicę ciągu (a_n).

$$r = a_{n+1} - a_n = [5 - 3(n+1)] - (5 - 3n) = 5 - 3n - 3 - 5 + 3n = -3$$

$r < 0$, więc ciąg (a_n) jest malejący.

b) Wyznaczamy różnicę ciągu (b_n).

$$r = b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$r = 0$, więc ciąg (b_n) jest stały.

c) Wyznaczamy różnicę ciągu (c_n).

$$r = c_{n+1} - c_n = \frac{\sqrt{3}(n+1)-2}{3} - \frac{\sqrt{3}n-2}{3} = \frac{\sqrt{3}n + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}n + 2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$r > 0$, więc ciąg (c_n) jest rosnący.

Zależność między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego

W ciągu arytmetycznym (a_n) każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

Przykład

Dla jakiej wartości parametru m liczby $a = 4 + m$, $b = 6 + 2m$, $c = 14$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

Rozwiązanie:

Wyznaczamy średnią arytmetyczną liczb: $4 + m$ i 14 :

$$6 + 2m = \frac{4 + m + 14}{2}, \text{ skąd } m = 2$$

Odpowiedź: Dla $m = 2$ liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$ jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Przykład

Oblicz sumę, której składniki są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego: $2, -3, -8, \dots, -118, -123$.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $a_1 = 2, a_n = -123, r = -3 - 2 = -5$

Obliczamy liczbę wyrazów ciągu ze wzoru na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego:

$$-123 = 2 + (n-1) \cdot (-5)$$

Zatem: $n = 26$

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy:

$$S_{26} = \frac{2 - 123}{2} \cdot 26 = -1573$$

Odpowiedź: Suma wynosi -1573 .

Do obliczania **sumy n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego** (a_n) określonego dla $n \geq 1$ o różnicy r możemy korzystać również ze wzoru $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$.

Przykład

Oblicz sumę osiemnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli pierwszy wyraz tego ciągu wynosi $-\frac{1}{3}$, a różnica jest równa $\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $a_1 = -\frac{1}{3}, r = \frac{2}{3}, n = 18$

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy:

$$S_{18} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (18-1) \cdot \frac{2}{3}}{2} \cdot 18 = 96$$

Odpowiedź: Suma wynosi 96 .

6.5. Ciąg geometryczny

Pojęcie ciągu geometrycznego

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg **liczbowy** (a_n) , jeżeli istnieje taka liczba q , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_+$$



Ilorazem ciągu (a_n) nazywamy liczbę q .

Przykład

Podaj iloraz ciągu geometrycznego: $a_1 = \sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \dots$

$$q = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla dowolnego $n \geq 1$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Przykład

Uzasadnij, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \sqrt[3]{5} \cdot 3^{n+1}$ jest geometryczny.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy iloraz kolejnych wyrazów nie zależy od n .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[3]{5} \cdot 3^{n+2}}{\sqrt[3]{5} \cdot 3^{n+1}} = 3$$

Odpowiedź: Ciąg (a_n) jest geometryczny, ponieważ iloraz kolejnych wyrazów wynosi 3.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$ o pierwszym wyrazie ciągu a_1 i ilorazie q wyraża się wzorem postaci: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu geometrycznego i jego iloraz, to korzystając ze wzoru ogólnego tego ciągu, możemy obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład

Wyznacz trzeci, szósty oraz dziesiąty wyraz ciągu geometrycznego określonego wzorem $a_n = \frac{(-2)^{n-1}}{10}$.

Rozwiązanie:

$$a_3 = \frac{(-2)^2}{10} = \frac{2}{5}$$

$$a_6 = \frac{(-2)^5}{10} = -\frac{16}{5}$$

$$a_{10} = \frac{(-2)^9}{10} = -\frac{256}{5}$$

Przykład

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego, jeśli wiadomo, że jego drugi wyraz wynosi $\frac{3}{4}$, a piąty $\frac{3}{32}$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $a_2 = \frac{3}{4}$ oraz $a_5 = \frac{3}{32}$.

Ze wzoru na wyraz ogólny ciągu geometrycznego mamy:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} = a_1 \cdot q \\ \frac{3}{32} = a_1 \cdot q^4 \end{cases}$$

Dzielimy stronami drugie równanie przez pierwsze:

$$\frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{27}$$

Stąd $q^3 = \frac{8}{27}$, czyli $q = \frac{2}{3}$.

Dla $q = \frac{2}{3}$ mamy $a_1 = \frac{9}{8}$, zatem wzór ogólny ciągu wyraża się wzorem $a_n = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Odpowiedź: Ciąg opisuje wzór $a_n = \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg geometryczny jest monotoniczny tylko wówczas, gdy iloraz jest liczbą nieujemną $q \geq 0$. Jest **rosnący**, gdy $q > 1$ i $a_1 > 0$ lub $0 < q < 1$ i $a_1 < 0$, **malejący**, gdy $q > 1$ i $a_1 < 0$ lub $0 < q < 1$ i $a_1 > 0$, bądź **stały**, gdy $q = 1$ lub $a_1 = 0$.

Przykład

Określ monotoniczność ciągu.

a) $a_n = 4 \cdot 5^{-n}$ b) $b_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n$ c) $c_n = -0,1$

Rozwiązanie:

a) Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu oraz iloraz.

$$a_1 = 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}, q = \frac{4 \cdot 5^{-(n+1)}}{4 \cdot 5^{-n}} = \frac{1}{5}$$

Skoro $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$, więc ciąg jest malejący.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) jest malejący.

b) Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu oraz iloraz.

$$b_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}, q = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3^{n+1}}{\frac{1}{2} \cdot 3^n} = 3$$

Skoro $b_1 > 0$ i $q > 1$, więc ciąg jest rosnący.

Odpowiedź: Ciąg (b_n) jest rosnący.

c) Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu oraz iloraz.

$$c_1 = -0,1, q = \frac{-0,1}{-0,1} = 1$$

Skoro $q = 1$, więc ciąg jest stały.

Odpowiedź: Ciąg (c_n) jest stały.

Zależność między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat każdego wyrazu ciągu, oprócz pierwszego (i ewentualnie ostatniego), jest równy iloczynowi wyrazu poprzedniego i następnego:
 $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

Przykład

Liczby $2, x, -4x - 6$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz wartość x .

Rozwiązanie:

Ze wzoru $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ mamy:

$$x^2 = 2 \cdot (-4x - 6)$$

Zatem $x^2 + 8x + 12 = 0$, stąd $x = -6$ lub $x = -2$.

Odpowiedź: Dla $x = -6$ lub $x = -2$ liczby $2, x, -4x - 6$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$ o ilorazie $q \neq 1$

wyraża się wzorem: $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

Przykład

Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego: $3, -6, 12, \dots$

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $a_1 = 3, q = \frac{-6}{3} = -2$.

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego mamy:

$$S_5 = 3 \cdot \frac{1-(-2)^5}{1-(-2)} = 3 \cdot \frac{1+32}{3} = 33$$

Odpowiedź: Suma wynosi 33.

6.6. Procent składany

Pojęcie procentu składanego

Jeśli w banku złożymy kapitał w wysokości k na rok przy oprocentowaniu rocznym r , to po roku wzrośnie on do kwoty $k(1+r)$.

Przykład

Pan Jan wpłacił do banku 5000 zł na lokatę oprocentowaną 4% w skali roku. Jaką kwotę pan Jan będzie mógł wypłacić z banku po 3 latach?

Rozwiązanie:

Wyznaczamy kwotę po roku: $5000(1+0,04) = 5200$ (zł)

Wyznaczamy kwotę po 2 latach: $5200(1+0,04) = 5408$ (zł)

Wyznaczamy kwotę po 3 latach: $5408(1+0,04) = 5624,32$ (zł)

Odpowiedź: Po 3 latach pan Jan będzie mógł wypłacić z banku 5624,32 zł.

Procent składany to sposób oprocentowania lokat pieniężnych polegający na doliczaniu odsetek od złożonego kapitału (kapitalizacja odsetek) i oprocentowanie go w następnym okresie. Zastosowanie reguły procentu składanego daje szybszy wzrost wartości kapitału niż zastosowanie procentu prostego. Im częstsza kapitalizacja, tym szybciej wzrasta kapitał.

Procent składany służy głównie do obliczania kapitału, jaki będziemy mieć na lokacie po określonym czasie.

Procent składany na n lat

Jeśli w banku złożymy kapitał k na n lat na **procent składany** przy oprocentowaniu rocznym r , to po n latach wzrośnie on do kwoty $k(1+r)^n$.

Przykład

Kapitał w wysokości 1000 zł został złożony w banku na 5 lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu, jeżeli kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie wynosiło 3%.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $k = 1000$ zł, $r = 3\%$, $n = 5$

Wyznaczamy kwotę po 5 latach: $1000(1+0,03)^5 \approx 1159,27$ (zł)

Odpowiedź: Wielkość kapitału wyniesie 1159,27 zł.

6.7. Granica ciągu

Definicja granicy ciągu

Ciąg (a_n) ma **granice** równą g , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna k taka, że dla wszystkich $n > k$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.

Jeśli ciąg (a_n) ma granicę równą g , to mówimy, że jest **zbieżny** do g . Liczbę g nazywamy **granicą właściwą** i zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$.

Na przykład $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Granicą ciągu stałego $(a, a, a, \dots)$ jest liczba a .

Przykład

Wykaż, że liczba 3 jest granicą ciągu $a_n = \frac{3n^2+1}{n^2}$.

Rozwiązanie:

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Należy zbadać, czy dla każdego ε wszystkie wyrazy ciągu (a_n) , począwszy od pewnego numeru, różnią się od liczby 3 o mniej niż ε .

Zapisujemy: $|a_n - 3| < \varepsilon$

Otrzymujemy: $\left| \frac{3n^2+1}{n^2} - 3 \right| < \varepsilon$ i $n \in \mathbb{N}_+$



$$\left| \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon, \text{ skąd } n^2 > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ czyli } n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$$

Oznacza to, że w ciągu (a_n) każdy wyraz o numerze większym niż $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ różni się od liczby 3 o mniej niż ε .

Na przykład gdy $\varepsilon = 0,001$, to $n > \sqrt{1000}$. Ponieważ $\sqrt{1000} \approx 31,6$, to wszystkie wyrazy ciągu (a_n) , począwszy od wyrazu 32, różnią się o mniej niż 0,001 od liczby 3.

Granice ciągów

Granice ciągów:

Jeśli $k > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

Jeśli $q \in (-1, 1)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Jeśli $a \in (0, \infty)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Jeśli $n \in \mathbb{N}_+$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Przykład

Podaj granicę ciągów:

a) $a_n = \frac{1}{5^n}$

b) $b_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

c) $c_n = \sqrt[n]{\frac{2}{3}}$

Rozwiązanie:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} = 0$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}} = 1$

Twierdzenie o granicy ciągu

Twierdzenie o granicy ciągu $(c \cdot a_n)$

Jeżeli ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, to ciąg $(c \cdot a_n)$ jest zbieżny, a $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$.

Twierdzenie o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych

Twierdzenia o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) , określone dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, są zbieżne i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ są zbieżne, a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $b \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

Przykład

Oblicz granicę:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n + 1}{n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 + 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 1$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^n + 4^n - 3}{6 \cdot 5^n - 3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \cdot \left(2 + \frac{4^n}{5^n} - \frac{3}{5^n}\right)}{5^n \cdot \left(6 - \frac{3^n}{5^n} + \frac{2^n}{5^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{3}{5^n}}{6 - \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{2 + 0 - 0}{6 - 0 + 0} = \frac{1}{3}$$



$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+3}}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{4+\frac{3}{n^2}}}{n \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{4+0}}{\sqrt[3]{1+0}} = 2 \\ \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3 \cdot 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^n} = 1 \cdot 2 = 2 \\ \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n \cdot 5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{5^n} = 1 \cdot 5 = 5 \end{aligned}$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeżeli wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) i (c_n) , określonych dla $n \geq 1$, spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla $n \geq 1$, a ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do wspólnej granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to ciąg (b_n) jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = g$.

Przykład

Oblicz:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^n + 3^n} \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{3^n + 2^{2n}}}$$

Rozwiązanie:

a) Rozważmy ciągi $a_n = \sqrt[3]{3^n}$ oraz $c_n = \sqrt[3]{2 \cdot 3^n}$ określone dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zauważamy, że $3^n \leq 2^n + 3^n \leq 2 \cdot 3^n$ każdego $n \in \mathbb{N}$, więc $\sqrt[3]{3^n} \leq \sqrt[3]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[3]{2 \cdot 3^n}$.

Ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3^n} = 3$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2 \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3^n} = 1 \cdot 3 = 3$.

Na podstawie twierdzenia o trzech ciągach zapiszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2^n + 3^n} = 3$.

b) Ogólny wyraz ciągu (b_n) zapiszmy w postaci $b_n = \frac{3}{\sqrt[3]{3^n + 4^n}}$.

Rozważmy ciągi $a_n = \frac{3}{\sqrt[3]{2 \cdot 4^n}}$ oraz $c_n = \frac{3}{\sqrt[3]{4^n}}$ określone dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zauważamy, że każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\frac{3}{\sqrt[3]{2 \cdot 4^n}} \leq \frac{3}{\sqrt[3]{3^n + 4^n}} \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4^n}}$.

Ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{2 \cdot 4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{2} \cdot 4} = \frac{3}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{4^n}} = \frac{3}{4}$.

Na podstawie twierdzenia o trzech ciągach zapiszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{3^n + 2^{2n}}} = \frac{3}{4}$.

6.8. Szeregi geometryczne

Pojęcie szeregu geometrycznego

Szeregiem geometrycznym nazywamy wyrażenie $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots$ o wyrazach $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$ i ilorazie q .

Sumę $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}$ nazywamy **n -tą sumą częściową** tego szeregu. Tak więc:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_1q, S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2, \dots$$

Jeśli istnieje granica właściwa $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ to granicę tę nazywamy **sumą szeregu**, a szereg nazywamy **zbieżnym** ($S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots$). W przeciwnym przypadku szereg nazywamy **rozbieżnym**.

Przykład

Wyznacz n -tą sumę częściową szeregu geometrycznego $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$, a następnie oblicz sumę tego szeregu.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$





Wyznaczamy wzór na n -tą sumę częściową, korzystając ze wzoru $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Obliczamy sumę szeregu:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 1$$

Ciąg geometryczny zbieżny i rozbieżny

Szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 \neq 0$ i ilorazie q jest:

- zbieżny, gdy $|q| < 1$,
- rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$.

Jeśli $a_1 = 0$, to szereg ma postać $0 + 0 + 0 + \dots$. Jego suma jest równa 0.

| Suma szeregu geometrycznego zbieżnego wyraża się wzorem $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Przykład

Wyznacz wartości x , dla których szereg geometryczny $16 + 8x + 4x^2 + 2x^3 + \dots$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy iloraz q : $q = \frac{1}{2}x$

Wyznaczamy wartość x , korzystając z warunku zbieżności szeregu geometrycznego:

$$\left| \frac{1}{2}x \right| < 1, \text{ stąd } -2 < x < 2.$$

Zatem: $x \in (-2, 2)$.

Przykład

Rozwiąż równanie $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 4x$.

Rozwiązanie:

Lewa strona równania jest szeregiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = x$. Szereg ten jest zbieżny, gdy $|x| < 1$, czyli dla $x \in (-1, 1)$.

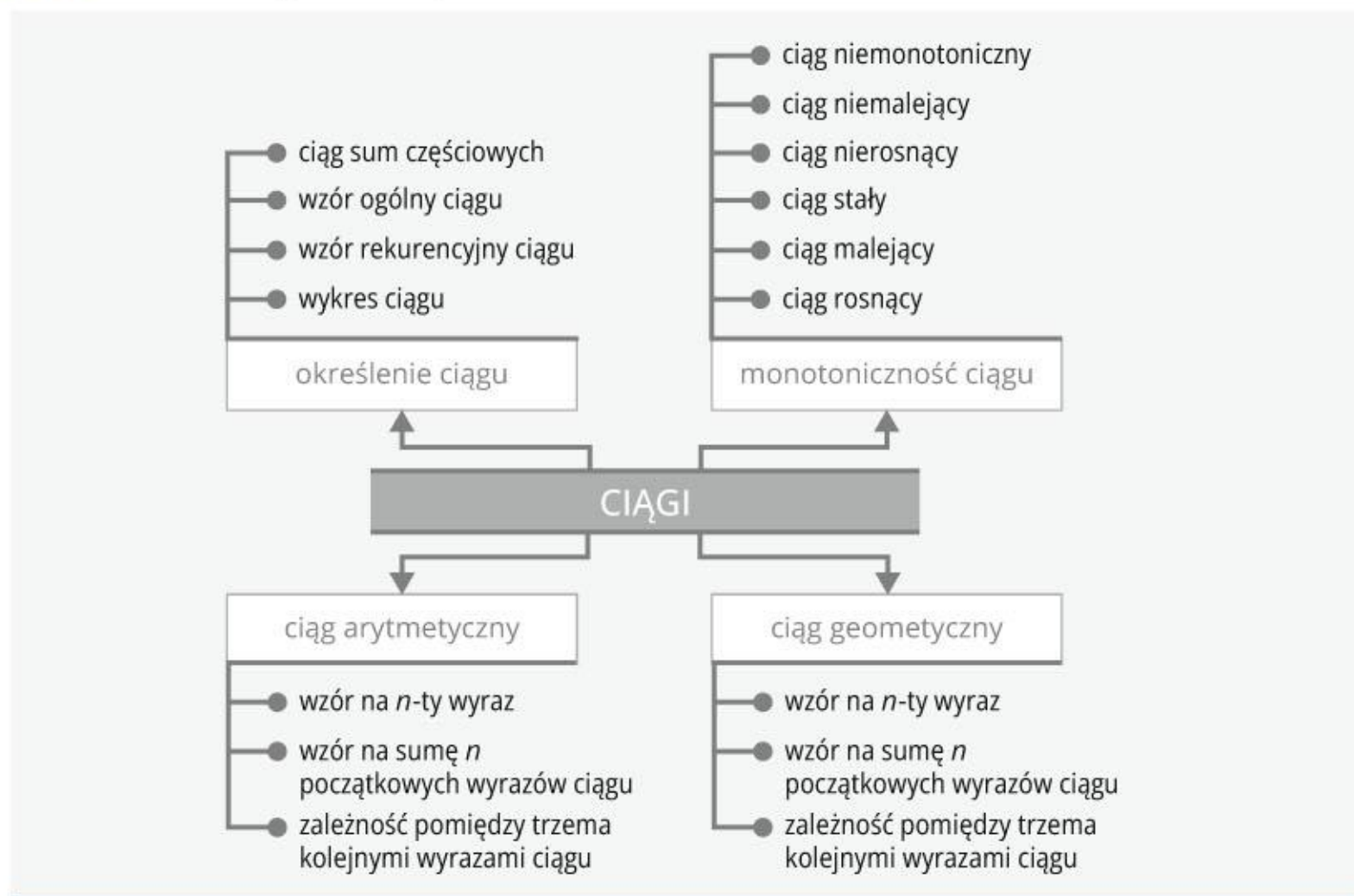
Rozwiązujemy równanie, korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{1-x} = 4x / (1-x)$$

$$1 = 4x - 4x^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0, \text{ stąd } x = \frac{1}{2}$$

6.9. Utrwalamy wiedzę



7

Trygonometria

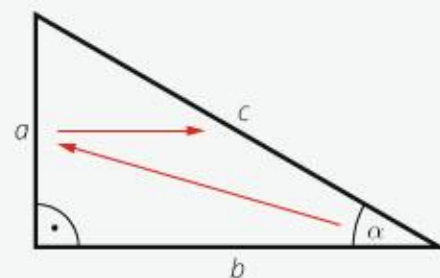
7.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego wyrażają stosunki długości odpowiednich boków trójkąta prostokątnego, którego jednym z kątów jest kąt α .

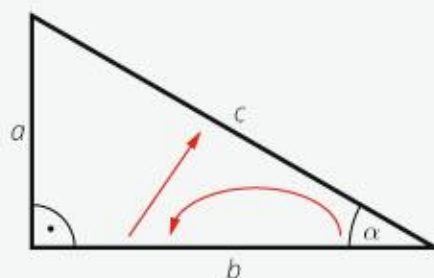
Sinusem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$



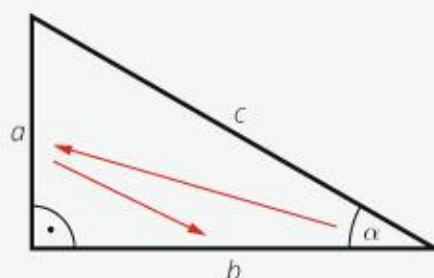
Cosinusem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$



Tangensem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



Przykład

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna AC ma długość 8 cm, a przeciwprostokątna BC ma długość 12 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ABC .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Miarę kąta ABC oznaczamy jako α , długość boku AB – jako b .

Wyznaczamy długość boku b z twierdzenia Pitagorasa:

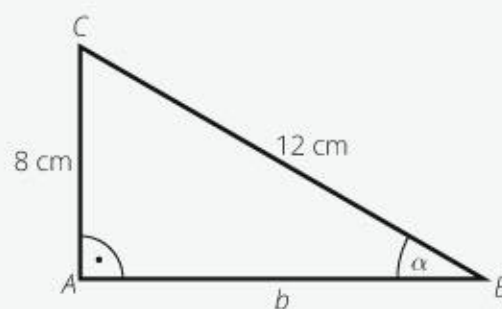
$$8^2 + b^2 = 12^2, \text{ stąd } b = 4\sqrt{5}$$

Wyznaczamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta ABC :

$$\sin \alpha = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



Zastosowanie funkcji trygonometrycznych kąta ostrego

Funkcje trygonometryczne możemy wykorzystywać do obliczania długości boków trójkątów prostokątnych.

Przykład

Długość przeciwprostokątnej w pewnym trójkącie prostokątnym jest równa 12 cm. Oblicz długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta, którego sinus jest równy $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

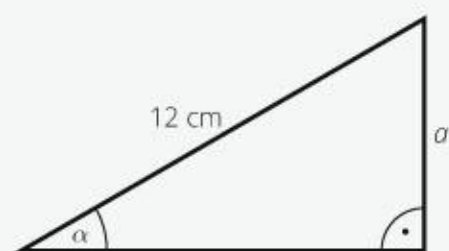
Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Długości szukanej przyprostokątnej oznaczamy jako a , miarę kąta – jako α .

Wyznaczamy długość przyprostokątnej z definicji funkcji sinus:

$$\sin \alpha = \frac{a}{12}$$





Ponieważ $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{9}$, zatem $\frac{a}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$, stąd $a = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm.

Zależności między funkcjami trygonometrycznymi

Z definicji funkcji trygonometrycznych zauważamy, że w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α i β :

$$\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta \text{ oraz } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

Ponieważ w trójkącie prostokątnym suma miar kątów ostrych wynosi 90° , zatem $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Wynika stąd, że:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}$$

Przykład

Wiedząc, że $\cos 21^\circ = 0,9336$, oblicz wartość $\sin 69^\circ$.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że $21^\circ + 69^\circ = 90^\circ$.

Obliczamy wartość sinusa ze związku $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ i otrzymujemy:

$$\cos 21^\circ = \sin(90^\circ - 21^\circ) = \sin 69^\circ = 0,9336$$

7.2. Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

Odczytywanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego

Wartości $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ zależą wyłącznie od miary kąta α , a nie zależą od wielkości trójkąta. Jeśli znamy miarę kąta, to wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta możemy obliczyć za pomocą kalkulatora lub odczytać z tablic trygonometrycznych. I na odwrót – jeśli znamy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej danego kąta, możemy znaleźć jego miarę.

Z fragmentu tablic zamieszczonych poniżej możemy odczytać przybliżone wartości funkcji sinus, cosinus, tangens.

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
45	0,7071	1,0000	45
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20

$$\sin 33^\circ = 0,5446, \cos 9^\circ = 0,9877, \operatorname{tg} 65^\circ = 2,1445$$

Przykład

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz $\sin 41^\circ + \cos 23^\circ - \operatorname{tg} 55^\circ$.

Rozwiązanie:

Odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych w tablicach:

$$\sin 41^\circ = 0,6561, \cos 23^\circ = 0,9205, \operatorname{tg} 55^\circ = 1,4281$$

Obliczamy wartość wyrażenia:

$$\sin 41^\circ + \cos 23^\circ - \operatorname{tg} 55^\circ = 0,6561 + 0,9205 - 1,4281 = 0,1485$$

Za pomocą tablic możemy również znaleźć miarę kąta, jeśli znamy przybliżoną wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.

Przykład

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, podaj przybliżoną miarę kąta α z dokładnością do 0,0001, dla którego:

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{b) } \cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{10} \quad \text{c) } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{10}$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) Znajdujemy rozwinięcie dziesiętne ułamka } \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ z dokładnością do } 0,001: \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,4714$$

$$\text{Zatem: } \sin \alpha \approx 0,4714$$

$$\text{Odczytujemy w tablicach miarę kąta: } \alpha \approx 28^\circ$$

$$\text{b) Znajdujemy rozwinięcie dziesiętne ułamka } \frac{3\sqrt{5}}{10} \text{ z dokładnością do } 0,0001: \frac{3\sqrt{5}}{10} \approx 0,6708$$

$$\text{Zatem } \cos \alpha \approx 0,6708$$

$$\text{Odczytujemy w tablicach miarę kąta: } \alpha \approx 48^\circ$$

$$\text{c) Znajdujemy rozwinięcie dziesiętne liczby } \sqrt{10} \text{ z dokładnością do } 0,0001: \sqrt{10} \approx 3,1623$$

$$\text{Zatem: } \operatorname{tg} \alpha \approx 3,1623$$

$$\text{Odczytujemy w tablicach miarę kąta: } \alpha \approx 72^\circ$$

Zastosowanie funkcji trygonometrycznych w zadaniach z kontekstem praktycznym

Funkcje trygonometryczne możemy wykorzystywać również do obliczania wielu rzeczywistych wielkości, które są trudne do zmierzenia w inny, bezpośredni sposób.

Przykład

Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość 22 m, wiedząc, że kąt padania promieni słonecznych wynosi 37° . Wynik podaj z dokładnością do 0,01 m.

Rozwiązanie:

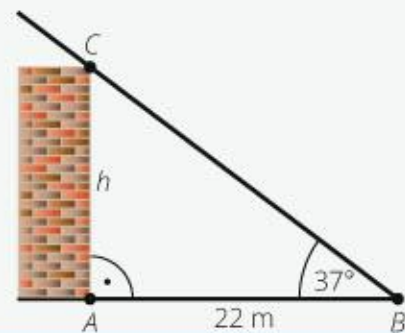
Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Wysokość budynku oznaczamy jako h .

Wyznaczamy wysokość z funkcji tangens:

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{h}{22}, h = 22 \cdot \operatorname{tg} 37^\circ$$

$$\text{Zatem: } h \approx 16,58 \text{ (m)}$$

**Wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° , 60°**

Dla większości kątów wartości funkcji trygonometrycznych, które można odczytać z tablic trygonometrycznych, podane są w przybliżeniu. Dla niektórych kątów, np. 30° , 45° , 60° , można podać dokładne wartości funkcji trygonometrycznych. Wartości te zapisane są w poniższej tabeli:

Funkcja	Kąt $\alpha = 30^\circ$	Kąt $\alpha = 45^\circ$	Kąt $\alpha = 60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Przykład

Oblicz, korzystając z danych w tabeli.

$$\text{a) } 2 \sin 60^\circ + \cos^2 30^\circ \quad \text{b) } \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{4 \sin^2 45^\circ} \quad \text{c) } \frac{\sin 45^\circ - \cos 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ}$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } 2 \sin 60^\circ + \cos^2 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \sqrt{3} + \frac{3}{4} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{4}$$

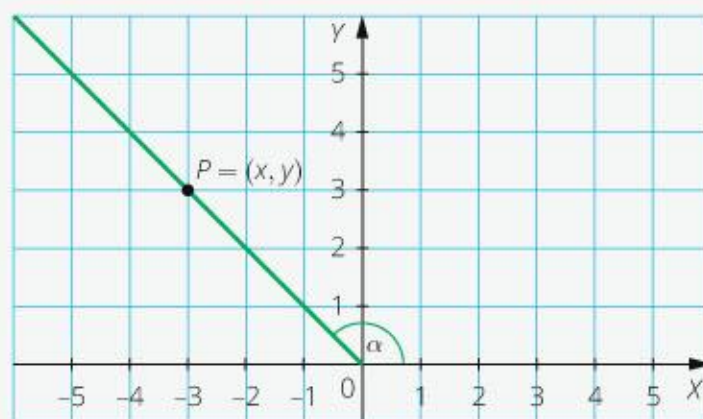
$$\text{b) } \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{4 \sin^2 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{c) } \frac{\sin 45^\circ - \cos 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}$$

7.3. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Jeżeli kąt $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ umieścimy w układzie współrzędnych (tak jak na rysunku obok) i na ramieniu końcowym tego kąta oberzemy punkt $P = (x, y)$, różny od $(0, 0)$, to możemy zapisać funkcje trygonometryczne kąta α za pomocą współrzędnych punktu P (tzn. liczb x i y) oraz długości r odcinka OP .



Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \text{ gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej punktu P do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \text{ gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odciętej tego punktu.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdzie } x \neq 0$$

Przykład

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli do ramienia końcowego tego kąta należy punkt:

$$\text{a) } P = (15, -20) \quad \text{b) } P = (-6, -8)$$

Rozwiązanie:

a) Wypisujemy dane:

$$x = 15, y = -20$$

Obliczamy odległość r punktu P od początku układu współrzędnych:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$$

Wyznaczamy wartości funkcji trygonometrycznych:

Skoro:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \text{ zatem } \sin \alpha = -\frac{20}{25} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \text{ zatem } \cos \alpha = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ zatem } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{20}{15} = -\frac{4}{3}$$

b) Wypisujemy dane:

$$x = -6, y = -8$$

Obliczamy odległość r punktu P od początku układu współrzędnych:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$$

Wyznaczamy wartości funkcji trygonometrycznych:

Skoro:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \text{ zatem } \sin \alpha = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \text{ zatem } \cos \alpha = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ zatem } \operatorname{tg} \alpha = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$$

Dla $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0, \operatorname{tg} \alpha > 0$

Dla $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0, \operatorname{tg} \alpha < 0$

Dla $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0, \operatorname{tg} \alpha > 0$

Dla $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0, \operatorname{tg} \alpha < 0$

Wzory redukcyjne

Aby łatwo wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnego kąta, przez sprowadzanie do przypadku kąta ostrego, możemy korzystać ze wzorów redukcyjnych.

Wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta α możemy wyrazić za pomocą odpowiedniej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego, korzystając np. z poniższych wzorów.

Dla $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ zachodzą następujące zależności:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \text{ gdzie } \alpha \neq 0 \text{ i } \alpha \neq 180^\circ$$

Przykład

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120° .

Rozwiązanie:

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120° za pomocą odpowiedniej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego:

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

7.4. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

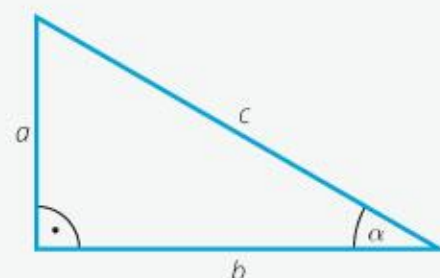
Tożsamości trygonometryczne

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość prawdziwą dla wszystkich wartości kąta, dla których ta równość jest określona.

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$





Przykład

Uzasadnij prawdziwość powyższych równości.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia w trójkącie prostokątnym jak na rysunku.

I zależność:

Zapisujemy twierdzenie Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$ oraz zależności na sinus i cosinus kąta α : $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

Zapisujemy lewą stronę pierwszej równości i podstawiamy ilorazy za sinus i cosinus kąta:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

Przekształcamy prawą stronę równości. Otrzymujemy: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$

Podstawiamy zależność wynikającą z twierdzenia Pitagorasa. Otrzymujemy: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

II zależność:

$$\text{Zapiszmy iloraz: } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$$

Po uproszczeniu prawej strony otrzymujemy: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$.

Przykład

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{4 \sin \alpha - \cos \alpha}{4 \cos \alpha + \sin \alpha}$, jeśli kąt α jest ostry, a $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

I sposób

Korzystając ze związku $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, zapisujemy $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{2}$, stąd $\sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha$.

Podstawiamy tę zależność do wyrażenia, którego wartość mamy obliczyć. Otrzymujemy:

$$\frac{4 \sin \alpha - \cos \alpha}{4 \cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cos \alpha - \cos \alpha}{4 \cos \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha (4\sqrt{2} - 1)}{\cos \alpha (4 + \sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2} - 1}{4 + \sqrt{2}} = \frac{(4\sqrt{2} - 1)(4 - \sqrt{2})}{(4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})} = \frac{17\sqrt{2} - 12}{12}$$

II sposób

Licznik i mianownik wyrażenia dzielimy przez $\cos \alpha$, a następnie przekształcamy wyrażenie, korzystając

ze związku $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

$$\frac{4 \sin \alpha - \cos \alpha}{4 \cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{\frac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{4 \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 1}{4 + \operatorname{tg} \alpha}$$

Obliczamy wartość otrzymanego wyrażenia: $\frac{4 \cdot \sqrt{2} - 1}{4 + \sqrt{2}} = \frac{(4\sqrt{2} - 1)(4 - \sqrt{2})}{(4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})} = \frac{17\sqrt{2} - 12}{12}$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia $\frac{4 \sin \alpha - \cos \alpha}{4 \cos \alpha + \sin \alpha}$ dla $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ wynosi $\frac{17\sqrt{2} - 12}{12}$.

Przykład

Doprowadź wyrażenie $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ do najprostszej postaci, wiedząc, że kąt α jest kątem ostrym.

Rozwiązanie:

Przekształcamy wyrażenie, korzystając ze związków między funkcjami trygonometrycznymi.

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \cos \alpha$$

Odpowiedź: Wyrażenie $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ zapisane w najprostszej postaci to $\cos \alpha$.

Przykład

Wiedząc, że dla kąta ostrego α iloczyn $\sin \alpha \cos \alpha$ wynosi $\frac{1}{2}$, oblicz sumę $\sin \alpha + \cos \alpha$.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze związku $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Skoro $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$, otrzymujemy: $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 \text{ stąd } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$$

Rozwiązanie $\sin \alpha + \cos \alpha = -\sqrt{2}$ odrzucamy, ponieważ α jest kątem ostrym, a sinus i cosinus kąta ostrego jest liczbą dodatnią.

Odpowiedź: Dla $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$ suma $\sin \alpha + \cos \alpha$ wynosi $\sqrt{2}$.

Przykład

Wykaż, że dla kąta ostrego α równość $\frac{1-2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha$ jest tożsamością.

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę tej równości, korzystając z jedynki trygonometrycznej, a następnie – ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów, L – lewa strona równości jest równa:

$$L = \frac{1-2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha$$

P – prawa strona równości jest równa: $P = \cos \alpha - \sin \alpha$

$L = P$, co należało udowodnić.

7.5. Twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta

Twierdzenie sinusów

Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie na płaszczyźnie stosunek długości boku do sinusa przeciwległego kąta jest wielkością stałą i równą średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Przykład

W trójkącie ABC boki a, b i c leżą odpowiednio naprzeciwko kątów α, β, γ . Oblicz długości boków b i c oraz długość średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie ABC , w którym $a = 4$, $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 45^\circ$. Nie korzystaj w obliczeniach z tablic funkcji trygonometrycznych.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że mamy daną długość boku a i miarę przeciwległego do niego kąta.

Zapisujemy z twierdzenia sinusów zależność $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ i wyznaczamy średnicę okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\text{Otrzymujemy: } 2R = \frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

Zauważamy, że mamy miarę kąta β . Zapisujemy z twierdzenia sinusów zależność $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$ i wyznaczamy długość boku b tego trójkąta.

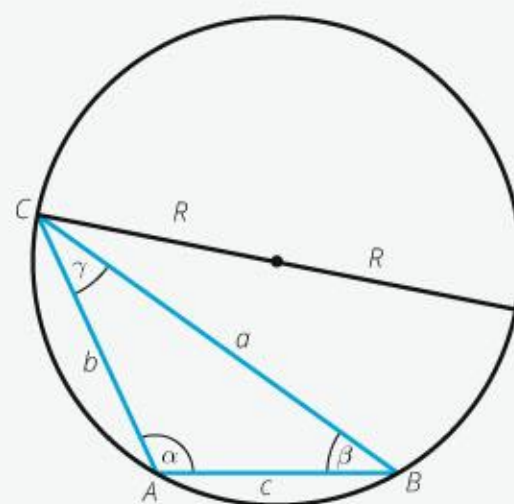
$$\text{Otrzymujemy: } \frac{b}{\sin 45^\circ} = 8$$

$$\text{Stąd: } b = 4\sqrt{2}$$

Wyznaczamy miarę kąta γ : $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ czyli $\gamma = 105^\circ$

Obliczamy wartość sinusa kąta γ : $\sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ$

Korzystamy ze wzoru na sinus sumy kątów: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$



Otrzymujemy: $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

Zapisujemy z twierdzenia sinusów zależność $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ i wyznaczamy długość boku c tego trójkąta.

Otrzymujemy: $\frac{c}{\sin 75^\circ} = 8$

Stąd: $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \cdot 8$, czyli $c = 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$

Odpowiedź: Długości boków b i c tego trójkąta są odpowiednio równe $4\sqrt{2}$ i $2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$, a długość średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 8.

Twierdzenie cosinusów

Twierdzenie cosinusów (Carnota)

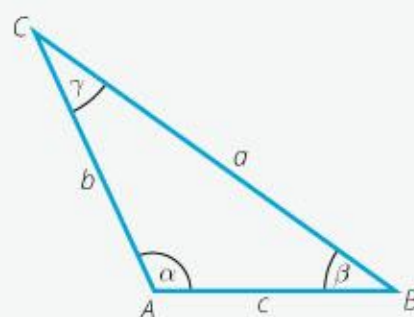
W dowolnym trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków tego trójkąta pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między tymi bokami.

Dla oznaczeń jak na rysunku można tezę twierdzenia cosinusów zapisać:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Przykład

Uzasadnij prawdziwość twierdzenia cosinusów dla pierwszej z tych równości: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Rozwiązanie:

Rozpatrzmy trzy przypadki, gdy kąt α jest kątem ostrym, gdy jest kątem prostym i gdy jest kątem rozwartym.

1. Przypadek – kąt α jest kątem ostrym.

Gdy kąt α jest kątem ostrym, to jeszcze co najmniej jeden kąt jest kątem ostrym. Niech kątem ostrym będzie kąt γ . Prowadzimy wysokość z wierzchołka B (patrz rysunek) na bok AC .

Dla oznaczeń jak na rysunku zapiszemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów ABD i BCD .

$$c^2 = h^2 + x^2 \text{ oraz } a^2 = (b-x)^2 + h^2$$

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia w drugiej równości otrzymamy:

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2$$

Podstawiamy z pierwszej równości za $h^2 + x^2$ liczbę c^2 i otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 - 2bx + c^2$$

Dla trójkąta ABD zapisujemy zależność: $\frac{x}{c} = \cos \alpha$.

Wyznaczamy z niej: $x = c \cos \alpha$ i podstawiamy do: $a^2 = b^2 - 2bx + c^2$

Otrzymujemy: $a^2 = b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2$

Po uporządkowaniu prawej strony otrzymujemy: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

Co kończy dowód.

2. Przypadek – kąt α jest kątem prostym.

Zapisujemy dla trójkąta ABC twierdzenie Pitagorasa: $a^2 = b^2 + c^2$.

Twierdzenie to możemy również zapisać w postaci:

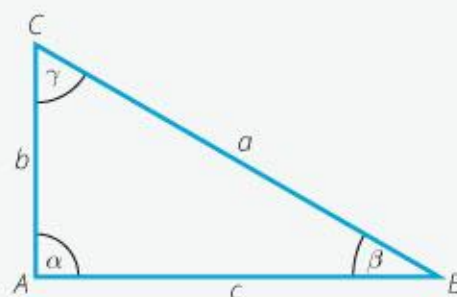
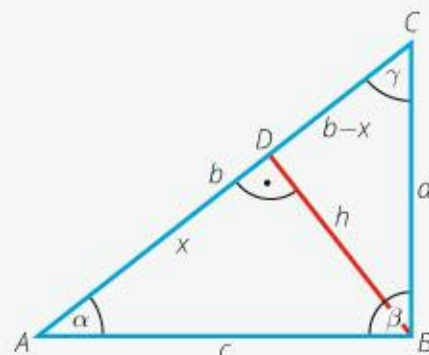
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0$$

Ponieważ kąt α jest kątem prostym, a więc $\cos \alpha = 0$.

Wobec tego twierdzenie Pitagorasa możemy zapisać:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Co kończy dowód.



3. Przypadek – kąt α jest kątem rozwartym

Prowadzimy wysokość z wierzchołka B (patrz rysunek) na przedłużenie boku AC .

Dla oznaczeń jak na rysunku zapiszemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów ABD i BCD .

$$c^2 = h^2 + x^2 \text{ oraz } a^2 = (b+x)^2 + h^2$$

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia w drugiej równości otrzymamy:

$$a^2 = b^2 + 2bx + x^2 + h^2$$

Podstawiamy z pierwszej równości w miejsce $h^2 + x^2$ liczbę c^2 i otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + 2bx + c^2$$

Dla trójkąta ABD zapisujemy zależność: $\frac{x}{c} = \cos(180^\circ - \alpha)$

Wyznaczamy z niej: $x = c \cos(180^\circ - \alpha)$

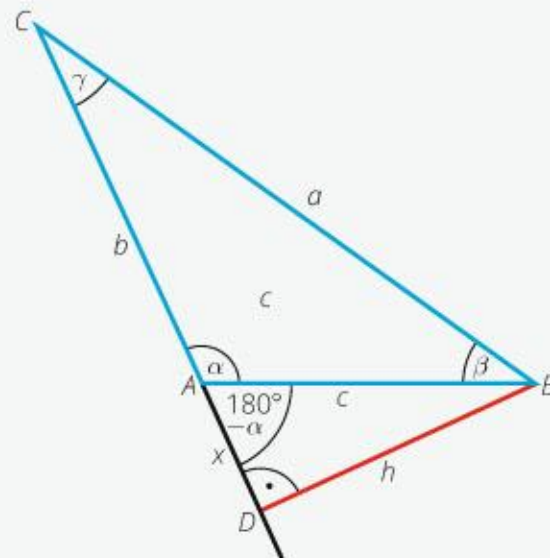
Po zastosowaniu wzoru redukcyjnego $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ otrzymujemy: $x = -c \cos \alpha$

Wyznaczoną wielkość podstawiamy do: $a^2 = b^2 - 2bx + c^2$

Otrzymujemy: $a^2 = b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2$

Po uporządkowaniu prawej strony otrzymujemy: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

Co kończy dowód.

**Przykład**

Dwa boki trójkąta mają długości 4 i 5, a kąt między nimi zawarty ma miarę 45° . Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia: $a = 4$, $b = 5$, $\gamma = 45^\circ$, $c = ?$

Sporządzamy rysunek pomocniczy.

Zapisujemy twierdzenie cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

Obliczamy:

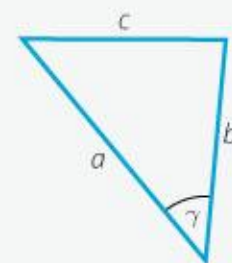
$$c^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ$$

$$c^2 = 41 - 40 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c^2 = 41 - 20\sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{41 - 20\sqrt{2}}$$

Odpowiedź: Długość trzeciego boku tego trójkąta wynosi $c = \sqrt{41 - 20\sqrt{2}}$.

**Przykład**

Długości boków trójkąta są równe 5, 6 i 7. Oblicz miarę najmniejszego kąta tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia: $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$.

Kąt o najmniejszej mierze leży naprzeciw najkrótszego boku. Wobec tego: $\alpha = ?$

Zapisujemy twierdzenie cosinusów: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

Otrzymujemy: $5^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cos \alpha$

Po przekształceniu otrzymujemy:

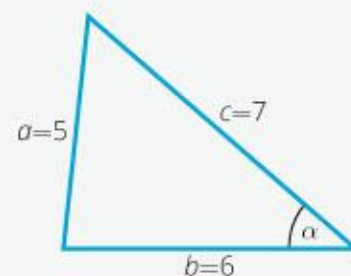
$$84 \cos \alpha = 60 \quad | :84$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{7}$$

$$\cos \alpha \approx 0,7143$$

Odczytujemy miarę kąta z tablic: $\alpha \approx 44^\circ$

Odpowiedź: Najmniejszy kąt tego trójkąta ma 44° .



Przykład

W trójkącie ABC dane są $|AB| = 8$, $|AC| = 3$ i $\angle BAC = 60^\circ$. Oblicz długość środkowej poprowadzonej do boku AB .

Rozwiązanie:

Sporządzamy rysunek pomocniczy.

Środkową poprowadzoną do boku AB oznaczamy przez CD .

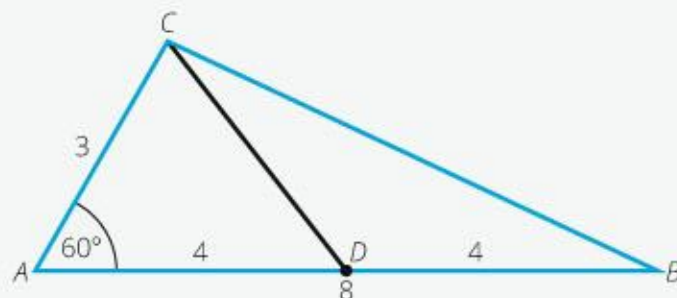
Zapisujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ADC :

$$|CD|^2 = |AD|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |AC| \cos 60^\circ$$

$$|CD|^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|CD| = \sqrt{13}$$

Odpowiedź: Długość tej środkowej wynosi $\sqrt{13}$.



Pole trójkąta

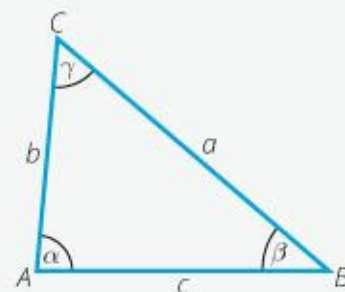
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch boków tego trójkąta i sinusa kąta zawartego między tymi bokami.

Dla oznaczeń wprowadzonych na rysunku zapiszemy:

$$P = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \beta$$

$$P = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$$



Przykład

Uzasadnij prawdziwość wzoru $P = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$ dla trójkąta ostrokątnego.

Rozwiązanie:

W trójkącie ABC prowadzimy wysokość na bok c . Zapisujemy wzór na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2} c \cdot h$

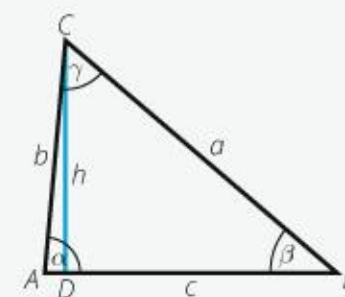
Dla trójkąta ADC zapisujemy zależność: $\frac{h}{b} = \sin \alpha$

Wyznaczamy z niej wysokość h i podstawiamy do wzoru na pole trójkąta:

$$h = b \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Co kończy dowód.



Przykład

W trójkącie ABC dane są długości boków $|BC| = 10$, $|AC| = 6$. Kąt ACB ma miarę 120° . W trójkącie tym narysowano dwusieczną kąta ACB , która wyznaczyła na boku AB punkt D . Oblicz długość odcinka CD .

Rozwiązanie:

Sporządzamy rysunek pomocniczy.

Obliczamy pole trójkąta ADC korzystając ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} |AC| \cdot |CB| \cdot \sin 120^\circ$$

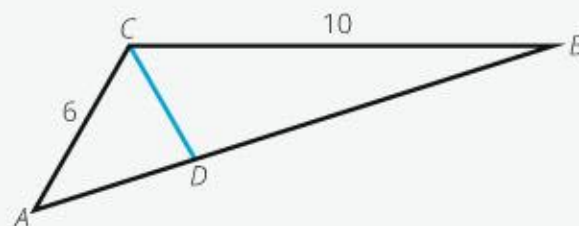
$$\text{Otrzymujemy: } P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin(180^\circ - 60^\circ)$$

$$P = 30 \cdot \sin 60^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów ACD i CDB . Zapisujemy sumę pól tych trójkątów:

$$P = \frac{1}{2} |AC| \cdot |CD| \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} |CB| \cdot |CD| \cdot \sin 60^\circ$$

$$\text{Otrzymujemy: } P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |CD| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot |CD| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot |CD| + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot |CD|$$



Po uproszczeniu otrzymujemy: $P = 4\sqrt{3} \cdot |CD|$

Porównujemy pola tych trójkątów i wyznaczamy długość odcinka CD :

$$4\sqrt{3} \cdot |CD| = 15\sqrt{3}$$

$$|CD| = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Odpowiedź: Długość odcinka CD wynosi $3\frac{3}{4}$.

7.6. Rozwiązywanie trójkątów

Rozwiązywanie trójkątów – zadania

Przykład

W trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α i β krótsza przyprostokątna leży naprzeciwko kąta α . Oblicz sinus kąta α , jeżeli długości boków tego trójkąta są kolejnymi wielokrotnościami liczby 5.

Rozwiązanie:

Oznaczamy przez $5n$, $5n + 5$, $5n + 10$ długości kolejnych boków trójkąta, gdzie $n \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczamy długości boków trójkąta prostokątnego, korzystając z twierdzenia Pitagorasa. Układamy równanie i je rozwiązujemy.

$$(5n)^2 + (5n + 5)^2 = (5n + 10)^2$$

$$25n^2 + 25n^2 + 50n - 25 = 25n^2 + 100n + 100$$

$$25n^2 - 50n - 75 = 0 \quad | :25$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$\Delta = 16$$

$$n_1 = -1 < 0 \text{ – nie spełnia warunków zadania, } n_2 = 3$$

Obliczamy długości kolejnych boków trójkąta: $5 \cdot 3 = 15$, $5 \cdot 3 + 5 = 20$, $5 \cdot 3 + 10 = 25$. Naprzeciwko kąta α leży przyprostokątna o długości 15 (krótsza przyprostokątna).

$$\text{Obliczamy: } \sin \alpha = \frac{15}{25}, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

Odpowiedź: Sinus kąta α jest równy $\frac{3}{5}$.

Przykład

Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ma długość $3\sqrt{6}$ cm, a miara kąta leżącego przy tej przyprostokątnej wynosi 60° . Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Oznaczamy przez a długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta o mierze 60° , a przez c długość przeciwprostokątnej. Długości pozostałych boków tego trójkąta obliczymy, korzystając z funkcji trygonometrycznych.

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{3\sqrt{6}}, \text{ czyli } \sqrt{3} = \frac{a}{3\sqrt{6}}, \text{ stąd } a = 9\sqrt{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{6}}{c}, \text{ czyli } \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{c}, \text{ stąd } c = 6\sqrt{6}$$

Odpowiedź: Pozostałe boki tego trójkąta mają długości $9\sqrt{2}$ cm i $6\sqrt{6}$ cm.

Przykład

Najdłuższy bok trójkąta ma długość 12, a dwa kąty tego trójkąta mają miary 15° i 45° . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenie: $\alpha = 15^\circ$ i $\beta = 45^\circ$

Obliczamy miarę trzeciego kąta tego trójkąta: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$$\text{Stąd: } \gamma = 180^\circ - (15^\circ + 45^\circ) = 120^\circ$$

Bok o długości 12 jest najdłuższym bokiem, więc leży naprzeciwko kąta o największej mierze. Oznaczmy $c = 12$. Obliczamy promień okręgu opisanego na trójkącie, korzystając z twierdzenia sinusów:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$



Otrzymujemy: $\frac{12}{\sin 120^\circ} = 2R$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Stąd: $\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$, czyli $R = 4\sqrt{3}$

Odpowiedź: Promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi $R = 4\sqrt{3}$.

Przykład

W trójkącie ABC długości boków pozostają w stosunku 6:5:4. Oblicz cosinus największego kąta tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia: x – wspólna miara, $a = 6x$, $b = 5x$, $c = 4x$ oraz α – kąt leżący naprzeciwko boku c .

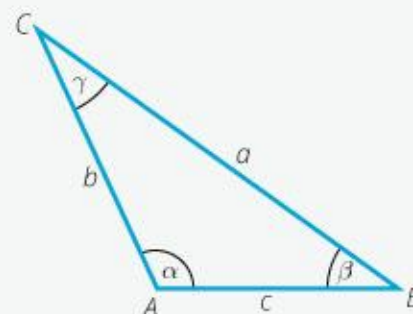
Z twierdzenia cosinusów zapisujemy: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

Otrzymujemy: $(6x)^2 = (5x)^2 + (4x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 4x \cos \alpha$

$$40x^2 \cos \alpha = 5x^2$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}$$

Odpowiedź: Cosinus tego kąta wynosi $\frac{1}{8}$.



Przykład

Pole trójkąta równoramiennego wynosi $20\sqrt{2}$, a miara kąta między ramionami tego trójkąta jest równa 45° . Oblicz obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia: a – podstawa trójkąta, b – ramiona trójkąta, α – kąt między ramionami trójkąta. Sporządzamy rysunek pomocniczy.

Ze wzoru na pole trójkąta zapiszemy: $P = \frac{1}{2} b \cdot b \cdot \sin 45^\circ$

Otrzymujemy: $20\sqrt{2} = \frac{1}{2} b^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ Stąd: $b^2 = 80$, czyli $b = 4\sqrt{5}$

Z twierdzenia cosinusów zapiszemy: $a^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cos 45^\circ$

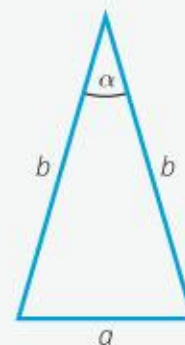
Otrzymujemy: $a^2 = (4\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Stąd: $a^2 = 160 - 80\sqrt{2}$, czyli $a = 4\sqrt{10 - 5\sqrt{2}}$

Obliczamy obwód trójkąta: $L = a + 2b$

Otrzymujemy: $L = 4\sqrt{10 - 5\sqrt{2}} + 8\sqrt{5}$

Odpowiedź: Obwód tego trójkąta wynosi $L = 4\sqrt{10 - 5\sqrt{2}} + 8\sqrt{5}$.



Przykład

Długości dwóch sąsiednich boków równoległoboku są równe 4 i $8\sqrt{3}$, a miara kąta między tymi bokami jest równa 30° . Oblicz długości przekątnych równoległoboku.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy oznaczenia: $a = 4$, $b = 8\sqrt{3}$ i $\alpha = 30^\circ$ oraz $|BD| = d_2$

i $|AC| = d_1$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD zapisujemy:

$$d_2^2 = (8\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 \cos 30^\circ$$

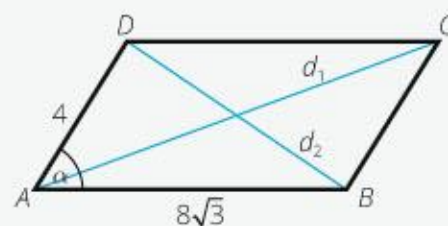
Otrzymujemy: $d_2^2 = 112$, czyli $d_2 = 4\sqrt{7}$

Kąt przy wierzchołku B równoległoboku ma miarę 150° , a $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC zapisujemy: $d_1^2 = (8\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 \cos 150^\circ$

Otrzymujemy: $d_1^2 = 304$, czyli $d_1 = 4\sqrt{19}$

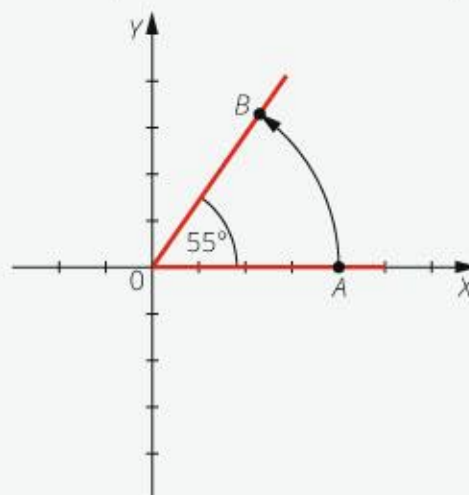
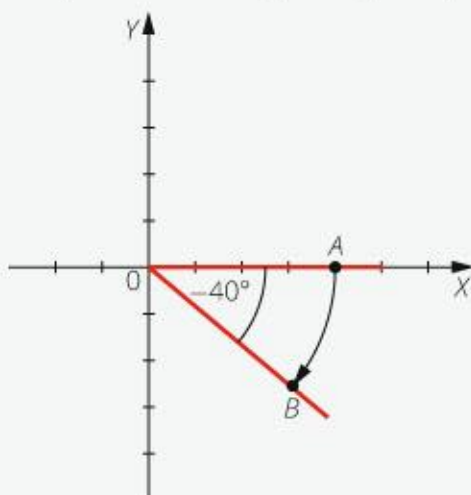
Odpowiedź: Przekątne tego równoległoboku są równe $4\sqrt{19}$ i $4\sqrt{7}$.



7.7. Miara łukowa kąta

Kąt obrotu

W życiu codziennym często spotykamy przykłady obrotów, np. obrót wskazówek zegara.



Jeśli w układzie współrzędnych półprosta OA pokryje się z dodatnią półosią układu, to kątem obrotu AOB nazywamy kąt, o jaki należy obrócić półprostą OA wokół punktu O , aby pokryła się ona z półprostą OB . Przyjmujemy, że **miara tego kąta jest dodatnia**, jeśli półprosta obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Gdy półprosta obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, to zakreślony kąt ma miarę ujemną.

Definicje funkcji trygonometrycznych można uogólnić na dowolny kąt $\alpha + k \cdot 360^\circ$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ oraz $k \in \mathbb{Z}$.

Dla każdego kąta α takiego, że $\alpha \in \langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ i liczby całkowitej k prawdziwe są związki:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

$$\text{Ponadto, jeżeli } \alpha \neq 90^\circ \text{ i } \alpha \neq 270^\circ, \text{ to } \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Przykład

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 390° .

Rozwiązanie:

Zauważamy, że $390^\circ = 30^\circ + 360^\circ$.

Wyznaczamy wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin 360^\circ = \sin(30^\circ + 360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 360^\circ = \cos(30^\circ + 360^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 360^\circ = \operatorname{tg}(30^\circ + 360^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Przykład

Oblicz.

$$\text{a) } \sin 1500^\circ \quad \text{b) } \cos(-1035^\circ) \quad \text{c) } \operatorname{tg}(-300^\circ)$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) Zauważamy, że: } 1500^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 60^\circ$$

$$\text{Zatem: } \sin 1500^\circ = \sin(60^\circ + 4 \cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) Zauważamy, że: } -1035^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 45^\circ$$

$$\text{Zatem: } \cos(-1035^\circ) = \cos(-3 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) Zauważamy, że: } -300^\circ = -360^\circ + 60^\circ$$

$$\text{Zatem: } \operatorname{tg}(-300^\circ) = \operatorname{tg}(-360^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Miara łukowa kąta

Często w zastosowaniach matematyki oprócz miary stopniowej używa się miary łukowej.

Miara łukowa kąta α nazywamy stosunek długości łuku l , wyznaczonego na okręgu przez ten kąt, do promienia r tego okręgu.

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

Jednostką miary łukowej jest **radian** (w skrócie: **rad**).

Miary łukowe kąta pełnego, półpełnego i prostego są równe:

- kąt pełny: $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ (rad)

- kąt półpełny: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r}{r} = \pi$ (rad)

- kąt prosty: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi r}{r} = \frac{\pi}{2}$ (rad)

Kąt pełny ma miarę łukową 2π radianów, zatem

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,3^\circ \text{ (rad)}, \text{ natomiast } 1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$$

Przykład

Podaj miarę łukową kąta.

a) 30°

b) 765°

Rozwiązanie:

a) $30^\circ = 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$

b) $765^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 45^\circ = 2 \cdot 2\pi + 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{17}{4}\pi$

Przykład

Podaj miarę kąta w stopniach.

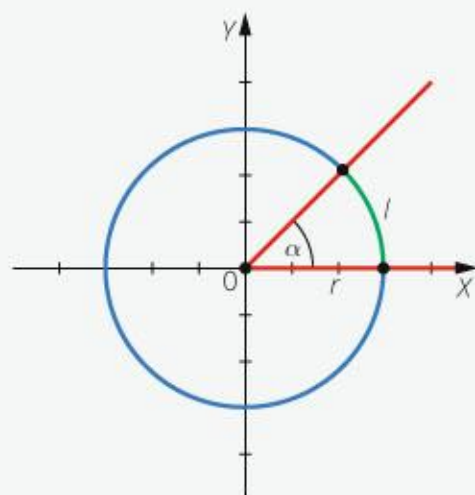
a) $\frac{5}{6}\pi$

b) $\frac{21}{10}\pi$

Rozwiązanie:

a) $\frac{5}{6}\pi = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$

b) $\frac{21}{10}\pi = \frac{21\pi}{10} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 378^\circ$

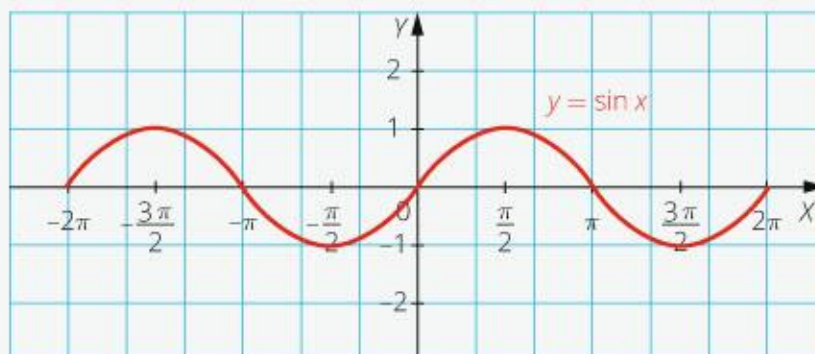


7.8. Wykresy funkcji trygonometrycznych

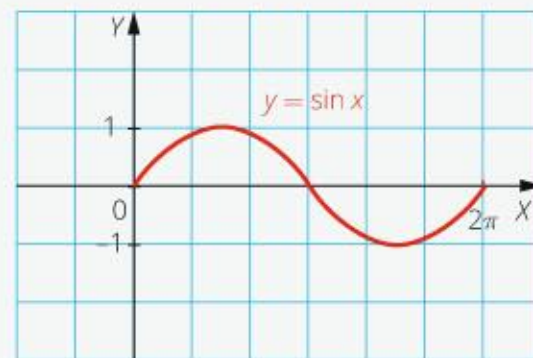
Funkcja sinus

Funkcję sinus określa wzór $f(x) = \sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Sinusoidą nazywamy wykres funkcji sinus.



Funkcja sinus jest funkcją okresową o okresie 2π . Rysunek obok pokazuje jeden pełny okres funkcji sinus w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.



Przykład

Podaj własności funkcji sinus $f(x) = \sin x$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$.

Funkcja f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = 2\pi$.

Miejscami zerowymi funkcji f są argumenty: $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wartość największą równą 1 funkcja f przyjmuje dla $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wartość najmniejszą równą -1 funkcja f przyjmuje dla $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

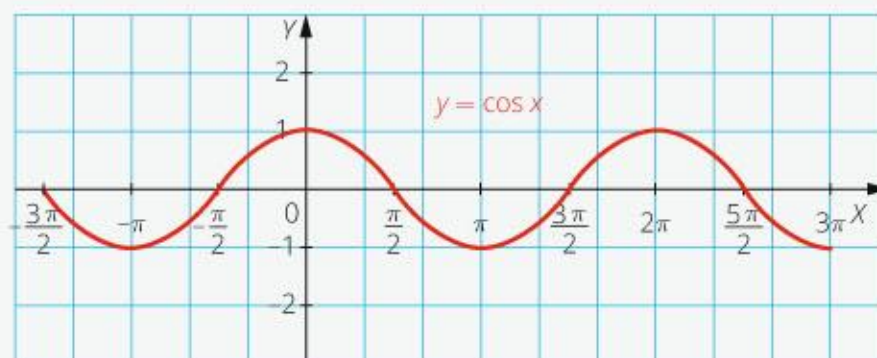
Funkcja f jest rosnąca w przedziałach $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcja f jest malejąca w przedziałach $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcja cosinus

Funkcję cosinus określa wzór $f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Cosinusoidą nazywamy wykres funkcji cosinus.



Funkcja cosinus jest funkcją okresową o okresie 2π .

Przykład

Podaj własności funkcji cosinus $f(x) = \cos x$.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$.

Funkcja f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = 2\pi$.

Miejscami zerowymi funkcji f są argumenty: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Wartość największą równą 1 funkcja f przyjmuje dla $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

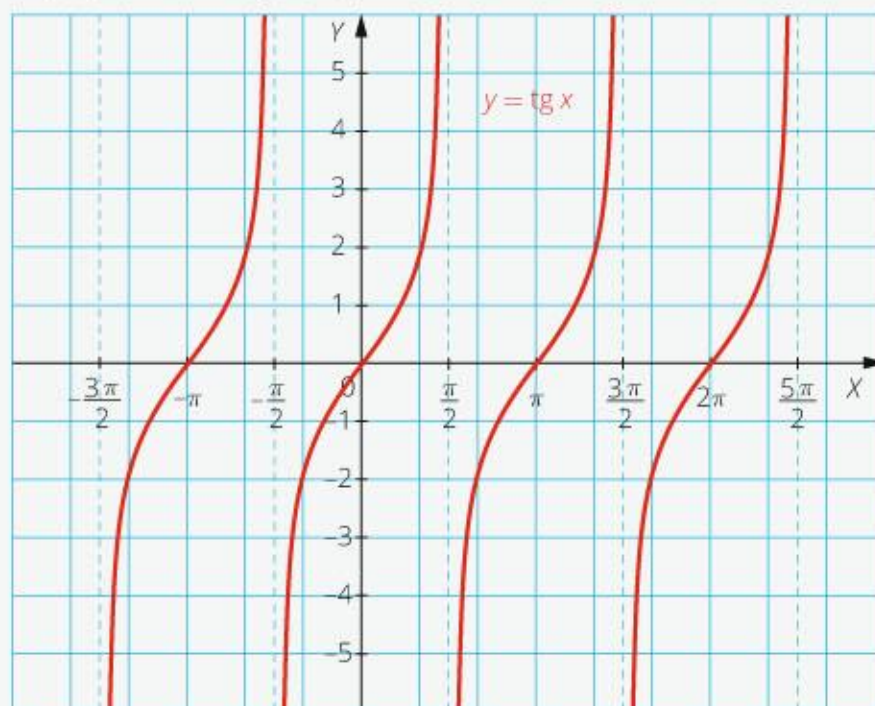
Wartość najmniejszą równą -1 funkcja f przyjmuje dla $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcja f jest rosnąca w przedziałach $\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcja f jest malejąca w przedziałach $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcja tangens

- Funkcję tangens** określa wzór $f(x) = \operatorname{tg} x$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tangensoidą** nazywamy wykres funkcji tangens.



Funkcja tangens jest funkcją okresową o okresie π .

Przykład

Podaj własności funkcji tangens $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych.

Funkcja f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = \pi$.

Miejscami zerowymi funkcji f są argumenty: $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Miejscami zerowymi funkcji f są argumenty: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcja f jest rosnąca w każdym z przedziałów $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Proste o równaniach $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, są asymptotami pionowymi, czyli prostymi, które ograniczają przebieg wykresu funkcji f .

7.9. Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych

Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych

Wykresy funkcji trygonometrycznych możemy przekształcać przez przesunięcie o wektor, odbicie symetryczne względem osi OX , odbicie symetryczne względem osi OY , „ściśnięcie” lub „rozciągnięcie” wzdłuż osi OY , „ściśnięcie” lub „rozciągnięcie” wzdłuż osi OX , nałożenie wartości bezwzględnej.

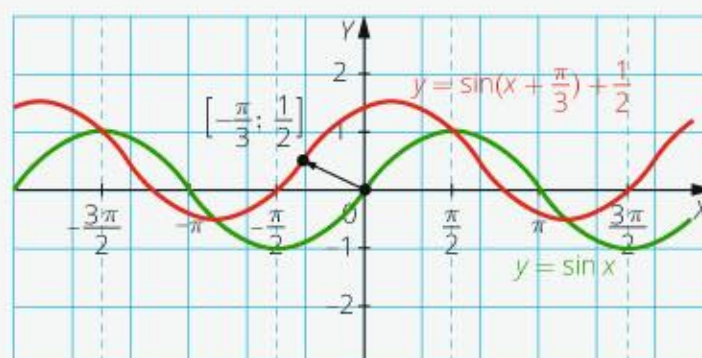
Przykład

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$. Podaj jej zbiór wartości.

Rozwiązanie:

Wykres funkcji f otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \sin x$ o wektor $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2} \right]$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$.

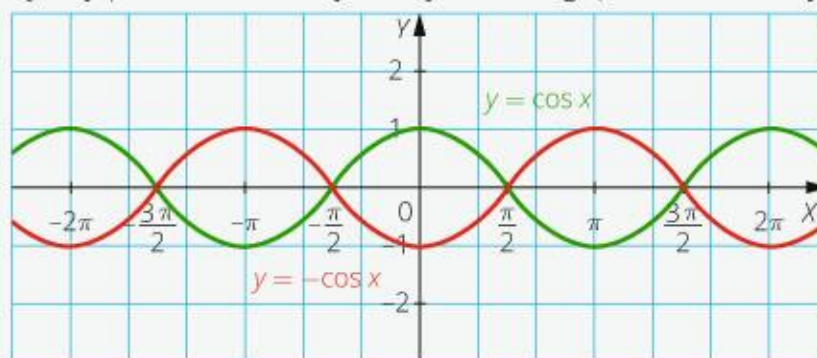


Przykład

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\cos x$ i podaj jej miejsca zerowe.

Rozwiązanie:

Wykres funkcji f otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi OX wykresu funkcji $y = \cos x$.



Miejscami zerowymi funkcji f są argumenty: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

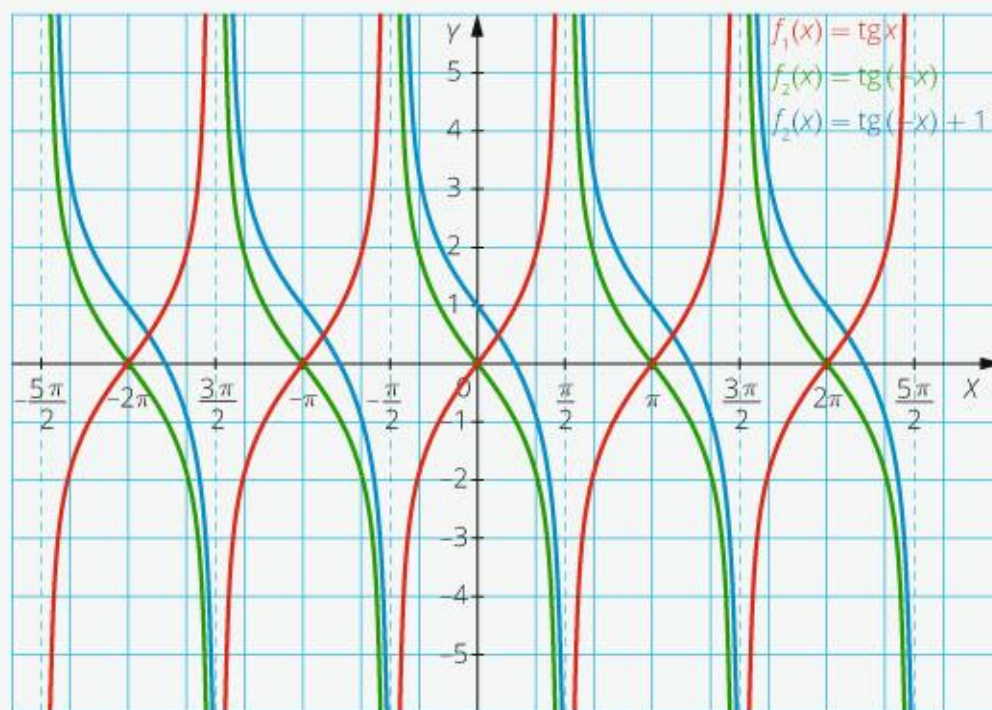
Przykład

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(-x) + 1$. Określ monotoniczność funkcji f .

Rozwiązanie:

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji: $f_1(x) = \operatorname{tg} x$, $f_2(x) = \operatorname{tg}(-x)$, $f(x) = \operatorname{tg}(-x) + 1$.

Wykres funkcji $f_2(x) = \operatorname{tg}(-x)$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne względem osi OY wykresu funkcji $f_1(x) = \operatorname{tg} x$, a wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg}(-x) + 1$ – przez przesunięcie wykresu funkcji $f_2(x) = \operatorname{tg}(-x)$ o wektor $[0, 1]$.



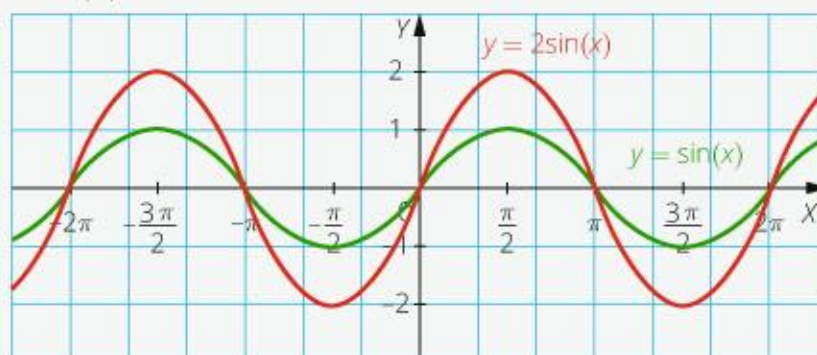
Funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2 \sin x$. Podaj jej zbiór wartości.

Rozwiązanie:

Szkicujemy wykres funkcji $f_1(x) = \sin x$. „Rozciągamy” dwukrotnie wykres funkcji f_1 względem osi OY .



Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -2, 2 \rangle$.

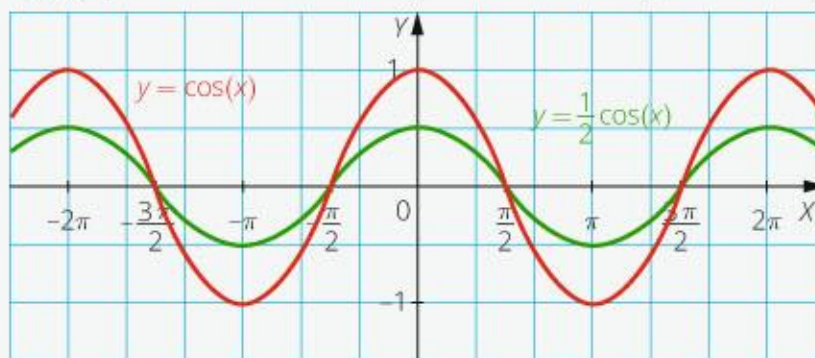


Przykład

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$. Podaj jej zbiór wartości.

Rozwiązanie:

Szkicujemy wykres funkcji $f_1(x) = \cos x$. „Ścieśniamy” dwukrotnie wykres funkcji f_1 względem osi OY .



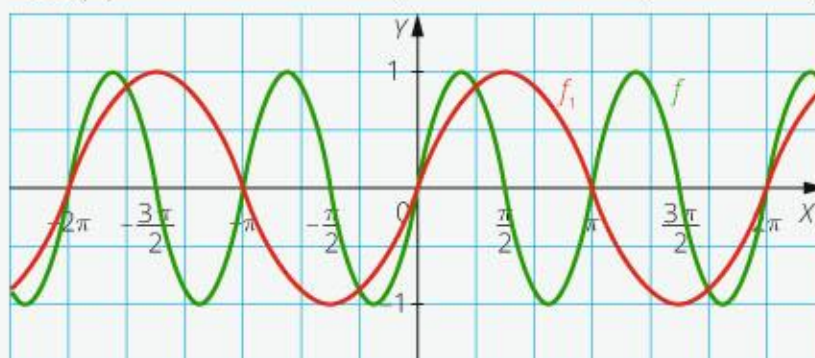
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Przykład

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sin 2x$. Podaj okres podstawowy tej funkcji oraz jej miejsca zerowe.

Rozwiązanie:

Szkicujemy wykres funkcji $f_1(x) = \sin x$. „Ścieśniamy” dwukrotnie wykres funkcji f_1 względem osi OX .



Okres podstawowy funkcji $f(x) = \sin 2x$ jest równy π .

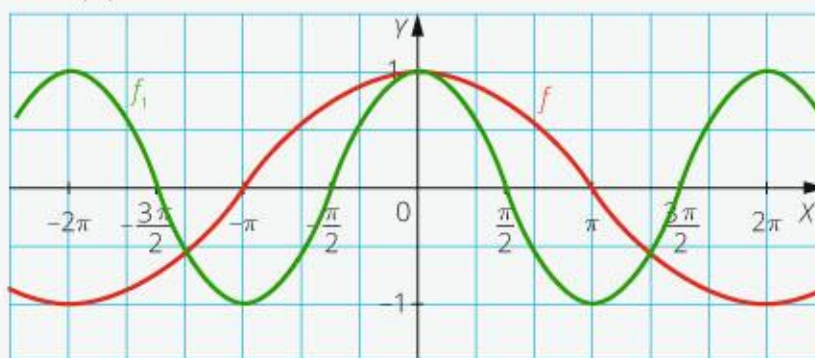
Miejscami zerowymi funkcji f są argumenty: $x = \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \cos \frac{1}{2}x$. Podaj okres podstawowy tej funkcji oraz jej miejsca zerowe.

Rozwiązanie:

Szkicujemy wykres funkcji $f_1(x) = \cos x$. „Rozciągamy” dwukrotnie wykres funkcji f_1 względem osi OX .



Okres podstawowy funkcji $f(x) = \cos \frac{1}{2}x$ jest równy 4π .

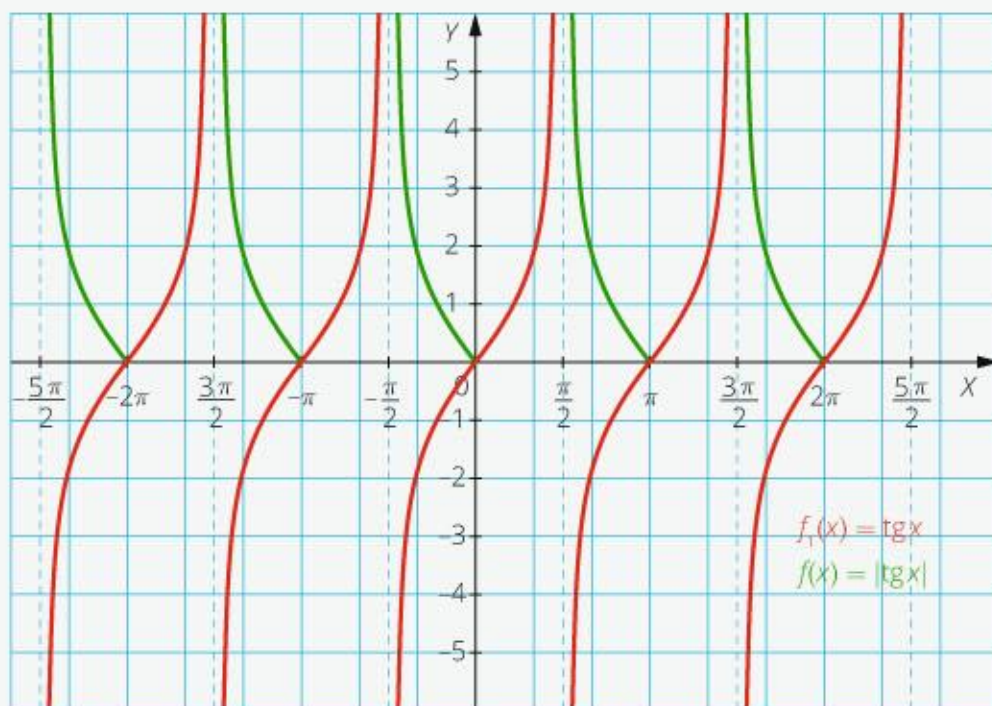
Miejscami zerowymi funkcji f są argumenty: $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |\operatorname{tg} x|$. Podaj jej zbiór wartości.

Rozwiązanie:

Szkicujemy wykres funkcji $f_1(x) = \operatorname{tg} x$. Odbijamy symetrycznie względem osi OX tę część wykresu funkcji f_1 , która znajduje się pod osią OX .



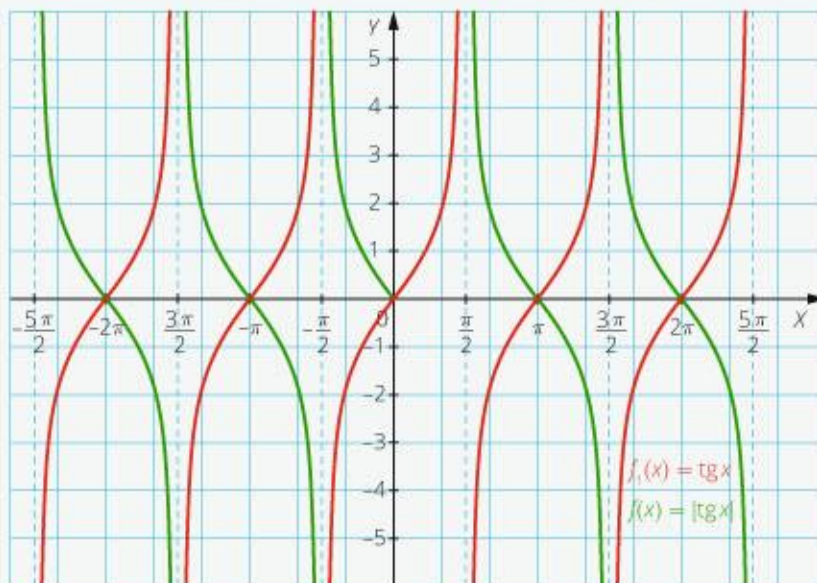
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle 0, \infty \rangle$.

Przykład

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \operatorname{tg}|x|$. Czy funkcja f jest okresowa?

Rozwiązanie:

Szkicujemy wykres funkcji $f_1(x) = \operatorname{tg} x$. Odbijamy symetrycznie względem osi OY tę część wykresu funkcji f_1 , która określona jest dla $x \geq 0$.



Funkcja $f(x) = \operatorname{tg}|x|$ nie jest okresowa.

7.10. Wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych

Wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne pozwalają wyrazić wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta należącego do przedziału $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Dla kątów wyrażonych w mierze łukowej mamy:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$



$$\begin{array}{llll}
\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha \\
\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} & \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} & \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}
\end{array}$$

Przykład

Oblicz.

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ b) $\cos \frac{7\pi}{4}$ c) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$

Rozwiązanie:

a) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

Zasada tworzenia wzorów redukcyjnych

Zasada tworzenia wzorów redukcyjnych dla kątów, których miarę można przedstawić w postaci $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

1. przed funkcją zapisujemy znak plus lub minus w zależności od tego, czy wartość funkcji wyjściowej dla danego kąta $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ jest dodatnia czy ujemna (patrz tabela znaków);
2. jeśli k jest liczbą parzystą, to funkcja trygonometryczna pozostaje bez zmiany;
3. jeśli k jest liczbą nieparzystą, to funkcja zmienia się na cofunkcję, to znaczy funkcja sinus zmienia się na funkcję cosinus, funkcja cosinus zmienia się na funkcję sinus, a funkcja tangens zmienia się na funkcję $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ (funkcję cotangens).

Tabela znaków funkcji trygonometrycznych:

	I ćwiartka $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	II ćwiartka $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ $\beta = \pi - \alpha$	III ćwiartka $\beta = \pi + \alpha$ $\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$	IV ćwiartka $\beta = -\alpha$ $\beta = \frac{3\pi}{2} + \alpha$ $\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin \beta$	+	+	−	−
$\cos \beta$	+	−	−	+
$\operatorname{tg} \beta$	+	−	+	−

Wzory redukcyjne dla kątów, których miara wyrażona jest w stopniach.

$$\begin{array}{llll}
\sin(-\alpha) = -\sin \alpha & \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha & \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha \\
\cos(-\alpha) = \cos \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha & \cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha \\
\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \\
\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha & \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha & \sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha & \sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha \\
\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha & \cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha \\
\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} & \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} & \operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} & \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}
\end{array}$$

Przykład

Oblicz.

a) $\sin 240^\circ$ b) $\cos 405^\circ$ c) $\operatorname{tg} 135^\circ$

Rozwiązanie:

a) $\sin 240^\circ = \sin(270^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 45^\circ) = -\frac{1}{\operatorname{tg} 45^\circ} = -\frac{1}{1} = -1$

7.11. Sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów oraz funkcje trygonometryczne kątów podwojonych**Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów**Dla każdego $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \text{ dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (\alpha + \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \text{ dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (\alpha - \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ i } k \in \mathbb{Z}$$

Przykład

Oblicz.

a) $\sin 105^\circ$ b) $\cos \frac{7\pi}{12}$

Rozwiązanie:

a) $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

b) $\cos \frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

Przykład

Oblicz $\cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$.

Rozwiązanie:

$$\cos \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta**Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta**Dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \text{ dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ i } k \in \mathbb{Z}$$

PrzykładWykaż, że dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ prawdziwy jest wzór $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę równości, stosując wzór na cosinus podwojonego kąta, a następnie korzystamy z jedynki trygonometrycznej.

$$L = \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 = P$$

Otrzymujemy $L = P$, to jest $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.



Przykład

Oblicz.

a) $\sin 15^\circ$ b) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$

Rozwiązanie:

a) Zapisujemy układ równań, z których pierwsze wynika z wzoru na cosinus kąta podwojonego, a drugie – z jedynki trygonometrycznej:

$$\begin{cases} \cos 30^\circ = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ \\ \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1 \end{cases}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$\begin{cases} -\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1 \end{cases}$$

$$\text{Stąd: } \sin^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Czyli: } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \text{ (pierwiastek ujemny odrzucamy, ponieważ obliczamy sinus kąta ostrego).}$$

b) Korzystając z tangensa kąta podwojonego, zapisujemy $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$.

Ponieważ: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, otrzymujemy $1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} = 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą $t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$. Otrzymujemy równanie kwadratowe: $t^2 + 2t - 1 = 0$

Rozwiązujemy to równanie i otrzymujemy pierwiastki:

$$\Delta = 8, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}, \text{ skąd: } t_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}, t_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$$

Odrzucamy ujemny pierwiastek równania, ponieważ wyznaczamy tangens kąta ostrego.

$$\text{Otrzymujemy: } \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

Przykład

Oblicz $\sin 2\alpha$, gdy $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ i $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rozwiązanie:

Korzystając z jedynki trygonometrycznej, wyznaczamy $\cos \alpha$, pamiętając, że dla kąta $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ cosinus

przyjmuje wartość dodatnią: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$\text{Obliczamy } \sin 2\alpha: \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

Przykład

W trójkącie ABC miara kąta β jest dwukrotnie większa od miary kąta α , a $\sin \alpha = p$, gdzie $p \in (-1, 1)$. Wyznacz sinus kąta γ .

Rozwiązanie:

Wyznaczamy miarę kąta γ : $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Ponieważ $\beta = 2\alpha$, to $\gamma = 180^\circ - 3\alpha$. Korzystając z wzoru redukcyjnego, obliczamy: $\sin(180^\circ - 3\alpha) = \sin 3\alpha$

Korzystając z wzoru na sinus sumy kątów, otrzymujemy: $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha$

Korzystamy z wzorów: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ i $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ i otrzymujemy:

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha \cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha) + \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Stąd: $\sin 3\alpha = \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha$. Z jedynki trygonometrycznej podstawiamy $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$$\text{Otrzymujemy: } \sin 3\alpha = \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)$$

Po doprowadzeniu do najprostszej postaci otrzymujemy: $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$.

$$\text{Stąd: } \sin 3\alpha = 3p - 4p^3.$$

7.12. Równania i nierówności trygonometryczne

Równania trygonometryczne

Równanie trygonometryczne jest to równanie, w którym niewiadome występują pod znakami funkcji trygonometrycznych, np. $\sin x = 0,5$, $4\cos 2x \cdot \cos 5x = 2\cos 7x + 1$.

Rozwiązując równanie trygonometryczne, staramy się doprowadzić je do równań elementarnych postaci: $\sin x = a$, $\cos x = a$ i $\operatorname{tg} x = a$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Następnie wyznaczamy zbiór miar wszystkich kątów spełniających dane równanie.

Ponieważ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ wartości funkcji sinus i cosinus zawierają się w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$, więc równania $\sin x = a$ i $\cos x = a$ mają rozwiązania tylko wtedy, gdy $a \in \langle -1, 1 \rangle$.

Rozwiązania elementarnych równań trygonometrycznych:

Równanie	Dziedzina równania	Rozwiązanie równania	Przedział podstawowy
$\sin x = a, a \in \langle -1, 1 \rangle$	$x \in \mathbb{R}$	$x_1 = x_0 + 2k\pi$ $x_2 = \pi - x_0 + 2k\pi$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$	$x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$
$\cos x = a, a \in \langle -1, 1 \rangle$	$x \in \mathbb{R}$	$x_1 = x_0 + 2k\pi$ $x_2 = -x_0 + 2k\pi$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$	$x_0 \in \langle 0, \pi \rangle$
$\operatorname{tg} x = a, a \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x = x_0 + k\pi$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$	$x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Przykład

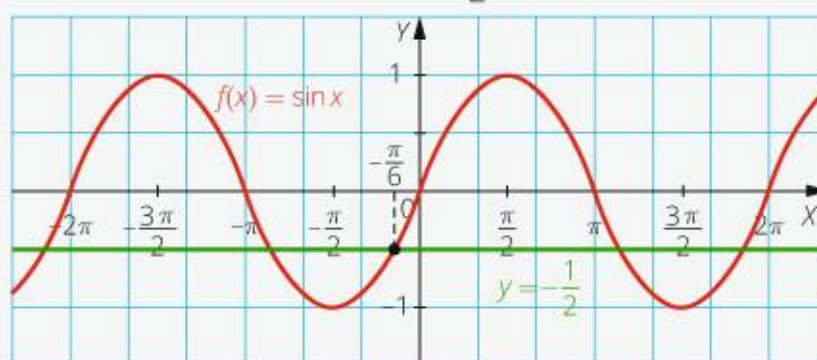
Rozwiąż równanie trygonometryczne.

a) $\sin x = -\frac{1}{2}$ i $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$ b) $\sin 3x = 1$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ d) $3\operatorname{tg}^2 \frac{x}{4} = 1$

Rozwiązanie:

a) Rysujemy wykres funkcji $y = \sin x$ oraz prostą $y = -\frac{1}{2}$:



Zauważamy na wykresie, że $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, stąd $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

(Pierwiastka x_0 szukamy w przedziale podstawowym $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$).

Wobec tego równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$ ma następujące rozwiązania w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ i } x_2 = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Czyli: } x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ i } x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}$$

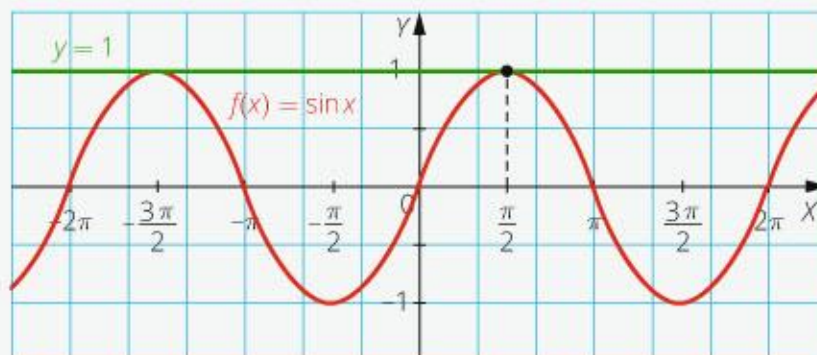




Wyznaczamy te pierwiastki równania, które należą do zbioru $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$, podstawiając za k liczbę -1 , otrzymujemy następujące pierwiastki równania: $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$. Podstawiając za k liczbę 1 , otrzymujemy pierwiastki: $\frac{7\pi}{6}$ i $\frac{11\pi}{6}$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ i $\frac{11\pi}{6}$.

b) Rysujemy wykres funkcji $y = \sin x$ oraz prostą $y = 1$:



Wiemy, że $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, stąd $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

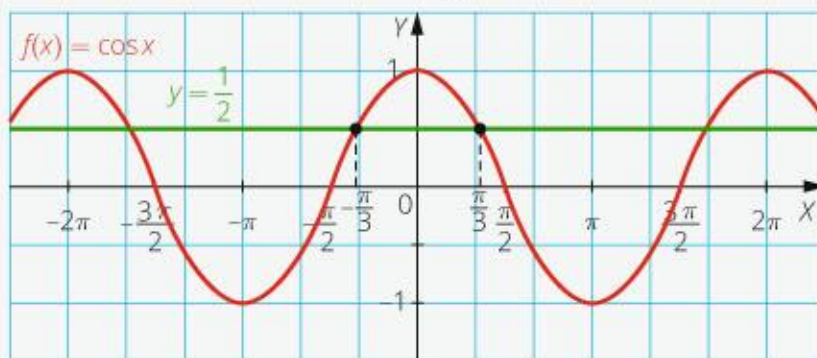
Wobec tego dla równania: $\sin 3x = 1$ zapiszemy: $3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid :3$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Po wyznaczeniu x otrzymujemy: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Rysujemy wykres funkcji $y = \cos x$ oraz prostą $y = \frac{1}{2}$:



Z wykresu odczytujemy, że $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdy $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Stąd: } 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid :2 \text{ lub } 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid :2$$

$$\text{Otrzymujemy: } x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

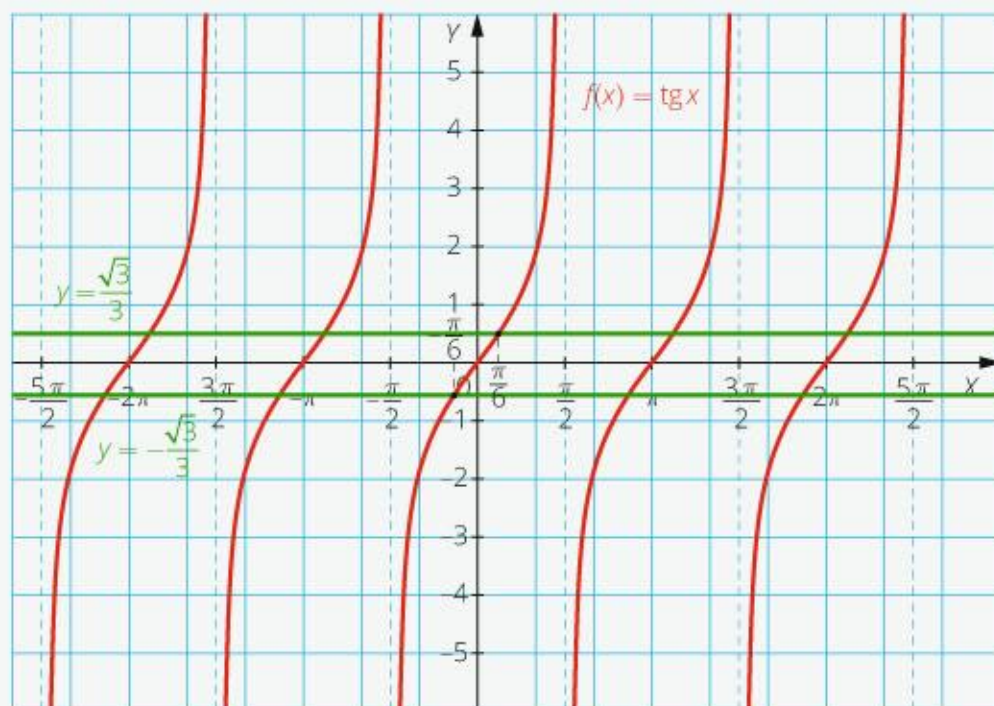
Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

d) Wyznaczamy dziedzinę równania: $\frac{x}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Czyli: $x \neq 2\pi + 4k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Skoro } 3\text{tg}^2 \frac{x}{4} = 1, \text{ to } \text{tg}^2 \frac{x}{4} = \frac{1}{3}, \text{ więc } \text{tg} \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ lub } \text{tg} \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rysujemy wykres funkcji $y = \text{tg} x$ oraz proste $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Otrzymujemy: $\frac{x}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Big| : \frac{1}{4}$ lub $\frac{x}{4} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Big| : \frac{1}{4}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$$x = \frac{4\pi}{6} + 4k\pi \text{ lub } x = -\frac{4\pi}{6} + 4k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Stąd } x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \text{ lub } x = -\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania są $x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$, $x = -\frac{2\pi}{3} + 4k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład

Rozwiąż równanie.

a) $|3\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

b) $2\cos^2 x + \cos x = 1$

c) $2\sin x \cos x - \sqrt{2}\cos x + 2\sin x - \sqrt{2} = 0$

d) $\cos 2x - \cos^2 x = -1$

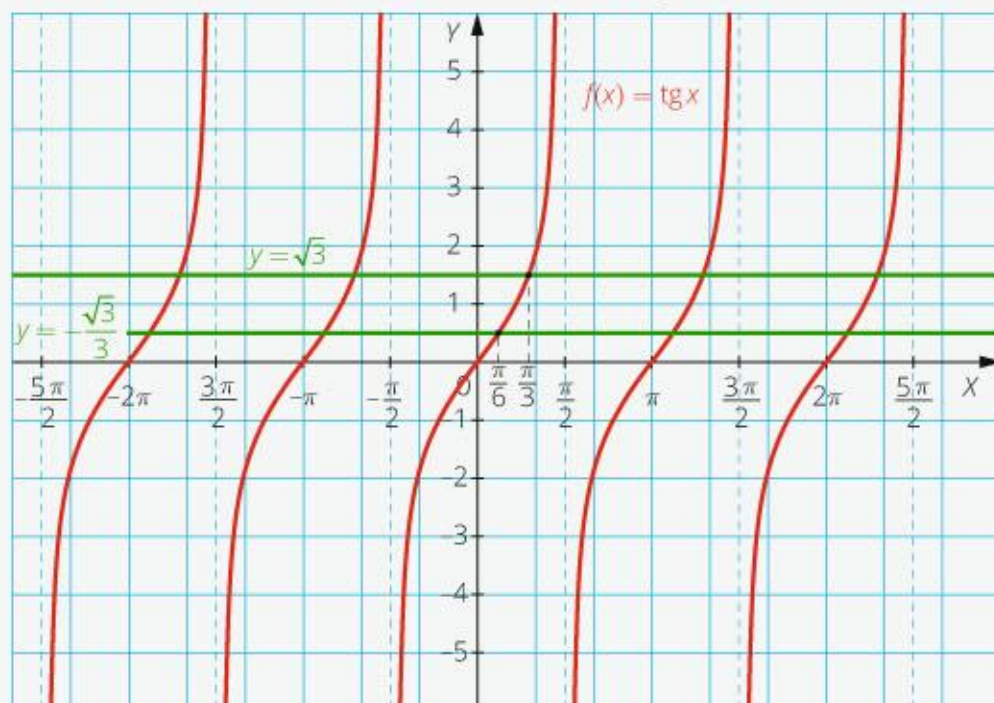
Rozwiązanie:

a) Wyznaczamy dziedzinę równania: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Z definicji wartości bezwzględnej otrzymujemy: $3\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ lub $3\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

Z każdego równania wyznaczamy $\operatorname{tg} x$: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ lub $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Rysujemy wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz proste $y = \sqrt{3}$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Odczytujemy z wykresu, że $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $|3\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ są: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



b) Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą: $t = \cos x$, gdzie $t \in (-1, 1)$

Otrzymujemy równanie kwadratowe: $2t^2 + t - 1 = 0$

Wyznaczamy pierwiastki tego równania: $\Delta = 9$, $t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$, $t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

Otrzymujemy równania trygonometryczne: $\cos x = -1$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$

Rysujemy wykres funkcji $y = \cos x$ oraz proste $y = -1$ i $y = \frac{1}{2}$.

Odcytujemy z wykresu funkcji rozwiązanie pierwszego z tych równań jest $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, oraz rozwiązanie drugiego równania $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $2\cos^2 x + \cos x = 1$ są: $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

c) Z równania $2\sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x + 2\sin x - \sqrt{2} = 0$ wyłączamy wspólny czynnik i otrzymujemy:

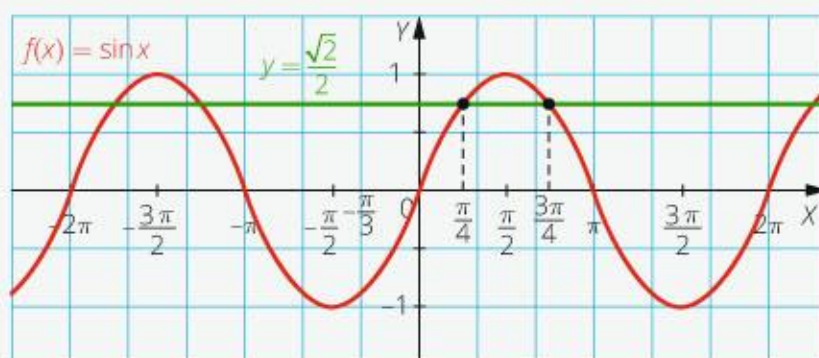
$$\cos x (2\sin x - \sqrt{2}) + 2\sin x - \sqrt{2} = 0$$

Następnie zapisujemy w postaci iloczynowej: $(2\sin x - \sqrt{2})(\cos x + 1) = 0$

Stąd: $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ lub $\cos x + 1 = 0$

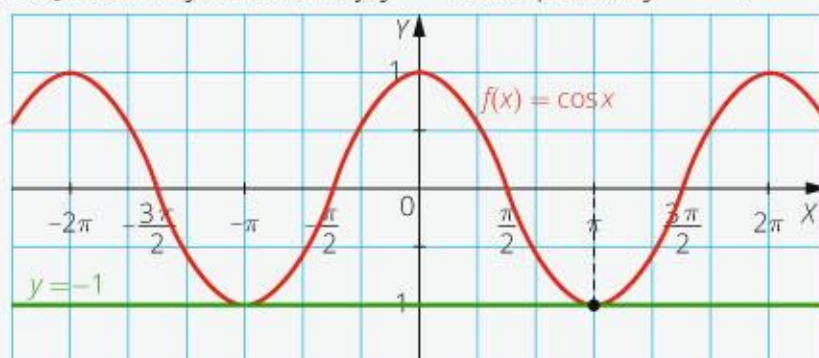
Otrzymujemy równania: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\cos x = -1$

Rysujemy wykresy funkcji trygonometrycznych. Pierwszy z nich to wykres funkcji $y = \sin x$ i prosta $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Odcytujemy z wykresu rozwiązanie pierwszego równania: $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rysujemy drugi wykres. Jest to wykres funkcji $y = \cos x$ i prosta $y = -1$.



Odcytujemy z wykresu rozwiązanie drugiego równania: $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

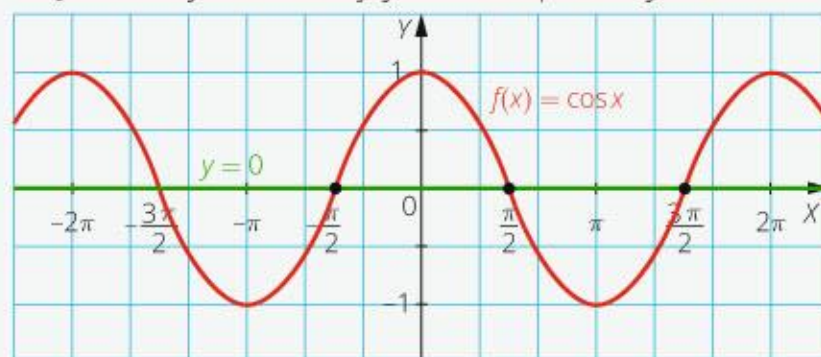
Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $2\sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x + 2\sin x - \sqrt{2} = 0$ są: $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

d) Korzystamy z wzoru na cosinus kąta podwojonego: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

Otrzymujemy: $2\cos^2 x - 1 - \cos^2 x = -1$

Po doprowadzeniu do prostszej postaci otrzymujemy: $\cos^2 x = 0$, czyli $\cos x = 0$

Rysujemy drugi wykres. Jest to wykres funkcji $y = \cos x$ i prosta $y = 0$.



Odczytujemy rozwiązanie tego równania jest. Jest nim: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $\cos 2x - \cos^2 x = -1$ jest $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Nierówności trygonometryczne

Przy rozwiązywaniu nierówności trygonometrycznych korzystamy z umiejętności rozwiązywania równań trygonometrycznych. Rysujemy również wykres odpowiedniej funkcji trygonometrycznej.

Przykład

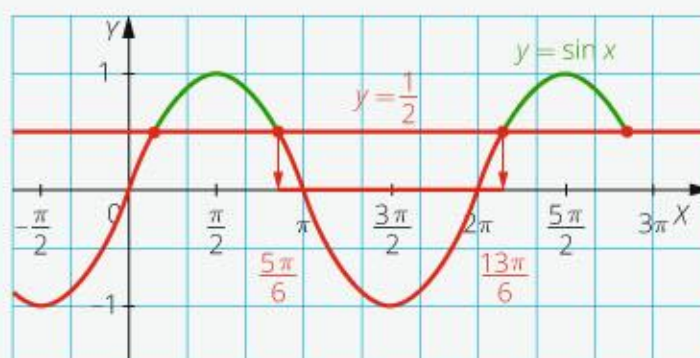
Rozwiąż nierówność.

a) $2\sin x < 1$ b) $\sqrt{3}\cos x \geq \frac{3}{2}$ c) $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$

Rozwiązanie:

a) Przekształcamy nierówność do postaci: $\sin x < \frac{1}{2}$

Rozwiązujemy równanie trygonometryczne $\sin x = \frac{1}{2}$. W tym celu rysujemy wykres funkcji $y = \sin x$ oraz prostą $y = \frac{1}{2}$.



Odczytujemy, dla jakich argumentów x wartości funkcji $y = \sin x$ są równe $\frac{1}{2}$. Są to $x_1 = \frac{5\pi}{6}$ i $x_2 = \frac{13\pi}{12}$.

Zapisujemy przedział argumentów, dla których wykres funkcji $y = \sin x$ leży poniżej wykresu funkcji

$$y = \frac{1}{2}:$$

$$x \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{12} \right)$$

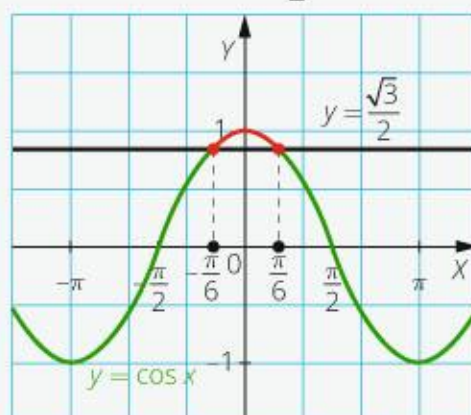
Uwzględniając okresowość funkcji sinus, zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności $2\sin x < 1$:

$$x \in \left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Przekształcamy nierówność do postaci: $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązujemy równanie trygonometryczne $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Otrzymujemy rozwiązania: $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ oraz $x_2 = \frac{\pi}{6}$

Rysujemy wykres funkcji $y = \cos x$ oraz prostą $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

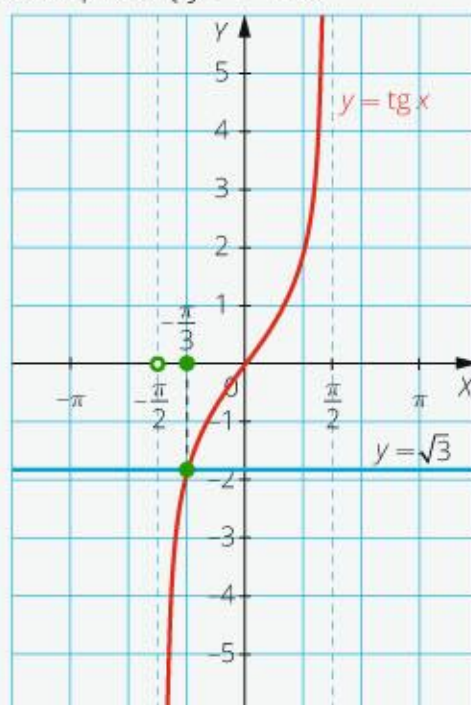


Zapisujemy przedział argumentów, dla których wykres funkcji $y = \cos x$ leży powyżej wykresu funkcji $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

Uwzględniając okresowość funkcji cosinus, zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności $\sqrt{3} \cos x < \frac{3}{2}$: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

c) Rozwiązujemy równanie trygonometryczne $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Otrzymujemy rozwiązanie: $x = -\frac{\pi}{3}$

Rysujemy wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz prostą $y = -\sqrt{3}$.



Zapisujemy przedział argumentów, dla których wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$ leży poniżej wykresu funkcji $y = -\sqrt{3}$: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$

Uwzględniając okresowość funkcji tangens, zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

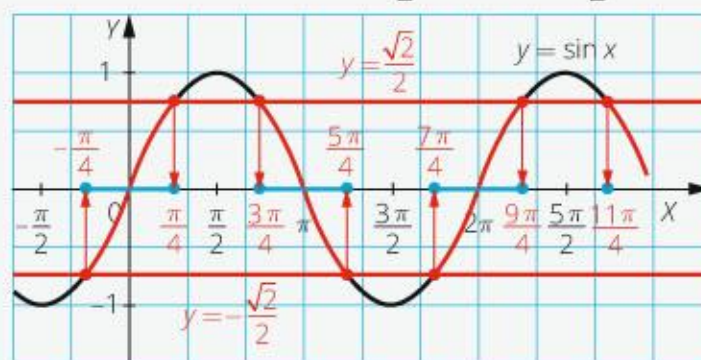
Przykład

Rozwiąż nierówność $|\sin x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy nierówność do postaci: $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Rysujemy wykres funkcji $y = \sin x$ oraz proste: $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Na osi X zapisujemy te argumenty, dla których $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ są to: $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

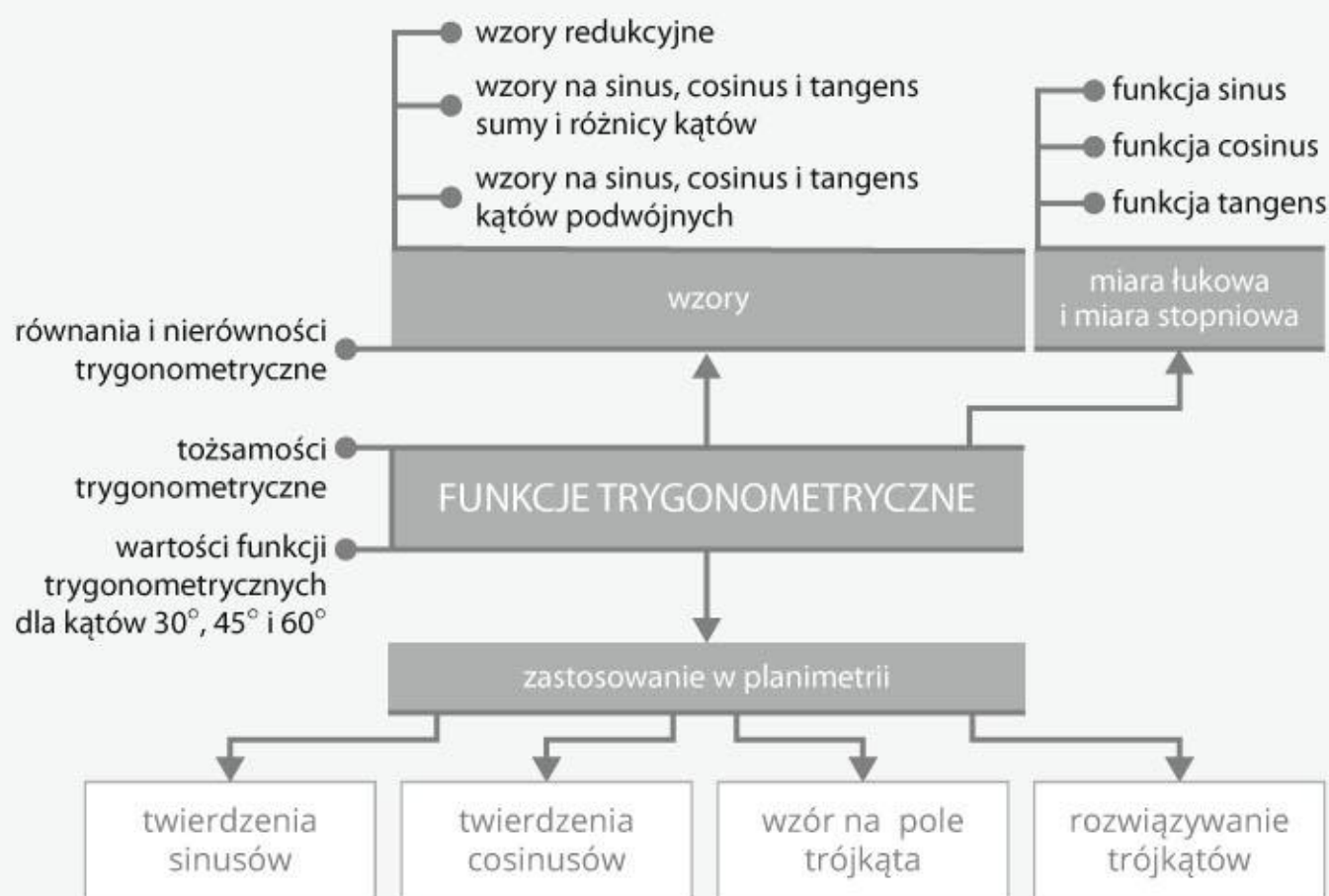
Zapisujemy przedział argumentów, dla których wykres funkcji $y = \sin x$ leży powyżej prostej $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

i jednocześnie poniżej prostej $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

Uwzględniając okresowość funkcji sinus, zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności $|\sin x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$

7.13. Utrwalamy wiedzę





8

Planimetria

8.1. Trójkąty

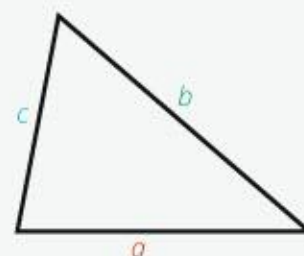
Nierówności trójkąta

Trójkąt to figura wyznaczona przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z tych punktów jest wierzchołkiem trójkąta, a odcinki łączące wierzchołki nazywamy bokami.

Z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeśli suma długości każdych dwóch odcinków jest większa od długości trzeciego odcinka

$$a + b > c \text{ i } a + c > b, \text{ i } b + c > a$$

Przedstawione powyżej zależności nazywamy **nierównościami trójkąta**.



Przykład

Sprawdź, czy odcinki o podanych długościach $a = 4 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $c = 8 \text{ cm}$ mogą być bokami pewnego trójkąta.

Rozwiązanie:

W praktyce sprawdzamy tylko jedną nierówność, tzn czy suma długości dwóch krótszych boków jest większa od długości boku najdłuższego.

Obliczamy sumę $a + b$: $4 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$

Porównujemy $a + b$ z c : $10 \text{ cm} > 8 \text{ cm}$

Odpowiedź: Odcinki o długościach 4 cm, 6 cm i 8 cm mogą być bokami trójkąta.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta

Twierdzenie

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

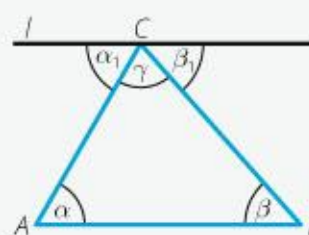
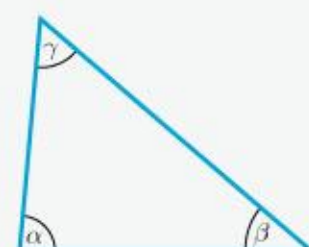
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Dowód

Na rysunku prosta l przechodząca przez wierzchołek C i równoległa do boku AB wyznacza kąty α_1 i β_1 naprzemianległe wewnątrz do odpowiednich kątów wewnętrznych α i β trójkąta ABC .

Ponieważ $\alpha_1 = \alpha$ i $\beta_1 = \beta$ oraz $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 180^\circ$, zatem $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że suma miar kątów wewnętrznym w dowolnym trójkącie jest równa 180° .



Przykład

W trójkącie ABC miara kąta CAB wynosi $\frac{\pi}{4}$, a miara kąta zewnętrznego BCD jest równa $\frac{2\pi}{3}$. Wyznacz miary pozostałych kątów trójkąta ABC .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Oznaczamy jako β miarę kąta ABC , a jako γ miarę kąta ACB .

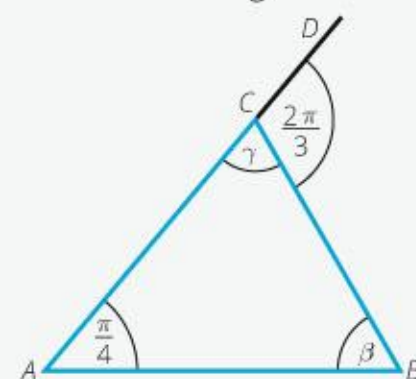
Wyznaczamy miary kątów ABC oraz ACB .

Kąty o miarach $\frac{2\pi}{3}$ i γ są kątami przyległymi.

$$\text{Zatem: } \gamma = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

Kąty o miarach $\frac{\pi}{4}$, β , γ są kątami wewnętrznymi trójkąta.

$$\text{Zatem: } \beta = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5\pi}{12}$$



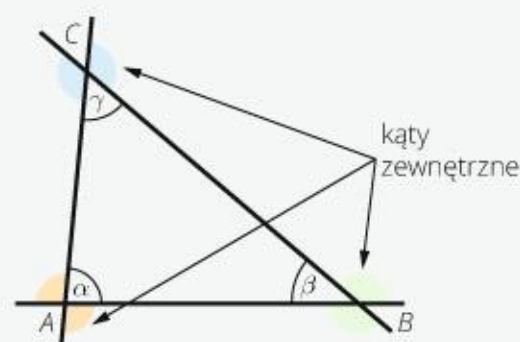
Kątem zewnętrznym trójkąta nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta.

A, B, C – wierzchołki trójkąta ABC

AB, BC, CA – boki trójkąta ABC

kąty ABC, CAB i ACB – kąty wewnętrzne

Miara kąta zewnętrznego trójkąta jest równa sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta nieprzyległych do danego.

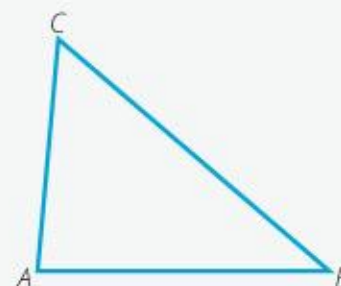


Rodzaje trójkątów

Ze względu na długości boków trójkąty możemy podzielić na **różnoboczne** i **nieróżnoboczne** (równoramienne i równoboczne).

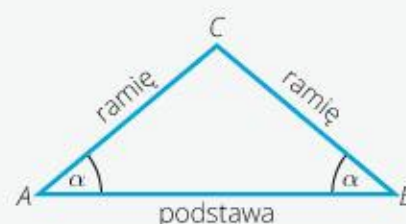
Trójkątem różnobocznym nazywamy trójkąt, który ma wszystkie boki innej długości.

$$\begin{aligned}|AB| &\neq |BC| \\ |BC| &\neq |AC| \\ |AB| &\neq |AC|\end{aligned}$$



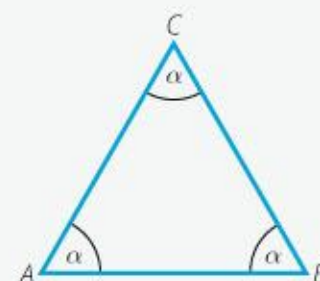
Trójkątem równoramiennym jest trójkąt, którego co najmniej dwa boki mają tę samą długość. W trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie mają równe miary.

$$|AC| = |BC|, |\angle BAC| = |\angle ABC|$$



Trójkątem równobocznym nazywamy trójkąt, którego wszystkie boki mają tę samą długość. W trójkącie równobocznym miary kątów są równe.

$$|AB| = |BC| = |AC|, |\angle BAC| = |\angle ABC| = |\angle BCA| = 60^\circ$$

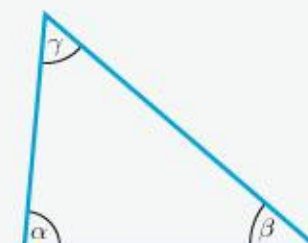


Trójkąty można klasyfikować również ze względu na ich kąty.

Trójkąt ostrokątny ma wszystkie kąty ostre.

$$\alpha < 90^\circ \text{ i } \beta < 90^\circ, \text{ i } \gamma < 90^\circ$$

Kąt ostry to kąt o mierze większej od 0° i mniejszej od 90° .



Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty.

$$\gamma = 90^\circ \text{ i } \alpha < 90^\circ, \text{ i } \beta < 90^\circ$$

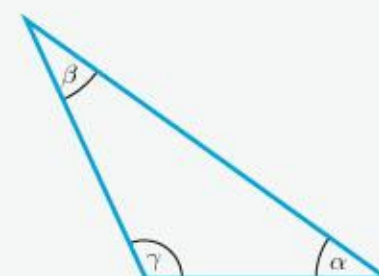
Kąt prosty to kąt o mierze równej 90° .



Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty.

$$\gamma > 90^\circ \text{ i } \alpha < 90^\circ, \text{ i } \beta < 90^\circ$$

Kąt rozwarty to kąt o mierze większej od 90° i mniejszej od 180° .



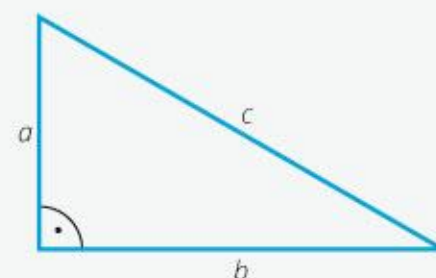
Twierdzenie Pitagorasa

Do obliczenia długości trzeciego boku trójkąta prostokątnego, gdy znamy długości dwóch pozostałych boków, możemy korzystać z twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Przykład

Oblicz długość przyprostokątnej, jeżeli dana jest długość przeciwprostokątnej $c = \sqrt{15}$ oraz długość drugiej przyprostokątnej $b = \sqrt{10}$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy długość przyprostokątnej z twierdzenia Pitagorasa:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(\sqrt{15})^2 = a^2 + (\sqrt{10})^2$$

$$15 = a^2 + 10$$

$$a^2 = 5$$

$$a = \sqrt{5}$$

Odpowiedź: Długość przyprostokątnej wynosi $\sqrt{5}$.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Znając długości boków trójkąta, możemy sprawdzić, czy dany trójkąt jest prostokątny.

Korzystamy wówczas z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenia odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma kwadratów długości dwóch krótszych boków trójkąta jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Przykład

Sprawdź, czy trójkąt o bokach długości $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ jest trójkątem prostokątnym.

Rozwiązanie:

Oznaczamy jako a, b, c długości boków trójkąta.

Obliczając sumę kwadratów, bierzemy pod uwagę długości boków krótszych.

Wypisujemy dane:

$$a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{3}$$

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{1}{16} = \frac{41}{400} \text{ i } c^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{Zatem: } a^2 + b^2 \neq c^2$$

Trójkąt o bokach długości $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ nie jest trójkątem prostokątnym.

Znając długości boków trójkąta, możemy ustalić, czy dany trójkąt jest prostokątny, jak również, czy jest ostrokątny lub rozwartokątny.

Jeżeli długości boków trójkąta oznaczamy literami a, b, c w taki sposób, że $a \leq b \leq c$ oraz $a^2 + b^2 < c^2$, to trójkąt jest rozwartokątny, jeśli natomiast $a^2 + b^2 > c^2$, to trójkąt jest ostrokątny.

Przykład

Sprawdź, czy trójkąt o bokach długości 6 cm, 4 cm, 3 cm jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

Rozwiązanie:

Oznaczamy długości dwóch krótszych boków jako a i b , a długość najdłuższego boku jako c .

Wypisujemy dane: $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 6$ cm

Obliczamy sumę kwadratów długości boków krótszych oraz kwadrat długości boku najdłuższego:

$$a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$c^2 = 6^2 = 36$$

$$\text{Zatem: } a^2 + b^2 < c^2$$

Odpowiedź: Trójkąt jest rozwartokątny.

Należy pamiętać, że w trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok.

Przykład

Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego dwa krótsze boki mają długości 3 cm i $3\sqrt{3}$ cm, a jeden z kątów ma miarę 150° .

Rozwiązanie:

Oznaczamy długości dwóch krótszych boków jako a i b , długość najdłuższego boku jako c , kąt o mierze 150° jako α .



Wypisujemy dane: $a = 3 \text{ cm}$, $b = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

W danym trójkącie α jest największym kątem, zatem z twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$c^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} \cos 150^\circ$$

$$c^2 = 9 + 27 - 18\sqrt{3} \cos(180^\circ - 30^\circ)$$

$$c^2 = 36 + 18\sqrt{3} \cos 30^\circ$$

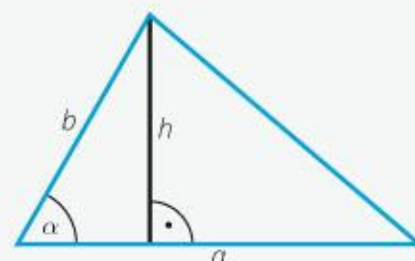
$$c^2 = 36 + 18\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c^2 = 63 \text{ stąd } c = 3\sqrt{7} \text{ (cm)}$$

Wzory na pole trójkąta

Pole trójkąta wyznaczamy ze wzoru $P = \frac{1}{2}ah$.

Pole trójkąta możemy obliczyć również ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha$.



Przykład

Dany jest trójkąt równoramienny o ramionach długości 5 cm i kącie między tymi ramionami o mierze 120° . Oblicz pole powierzchni tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: długości ramion $a = 5 \text{ cm}$, kąt między ramionami $\alpha = 120^\circ$

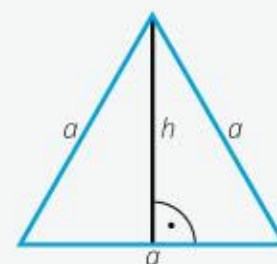
Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{25}{2} \cdot \sin(180^\circ - 60^\circ) = \frac{25}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Trójkąt równoboczny

Wysokość trójkąta równobocznego możemy obliczyć, jeśli znamy długość boku trójkąta, ze wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Pole trójkąta równobocznego możemy obliczyć ze wzoru $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Przykład

Oblicz pole trójkąta równobocznego o obwodzie $9\sqrt{6} \text{ cm}$.

Rozwiązanie:

Obliczamy długość boku trójkąta:

$$a = \frac{9\sqrt{6}}{3} = 3\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(3\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

8.2. Czworokąty

Własności czworokątów

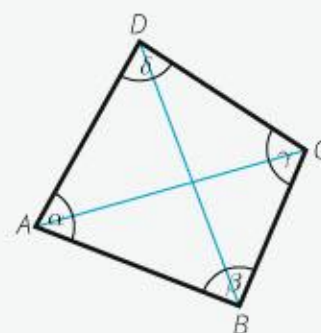
Czworokątami nazywamy wielokąty o czterech bokach.

Punkty A, B, C, D są wierzchołkami czworokąta $ABCD$, a odcinki AB, BC, CD, AD – jego bokami.

Boki czworokąta, które nie mają wspólnego wierzchołka, czyli boki AB i CD oraz boki BC i AD , nazywamy bokami przeciwnymi.

Odcinki AC i BD to przekątne tego czworokąta.

Każdy czworokąt ma dwie przekątne.



Suma miar kątów czworokąta

Suma miar kątów czworokąta wynosi 360° .

Dowód: Dzielimy czworokąt przekątną na dwa trójkąty, w których suma miar kątów wynosi 180° , zatem $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

Przykład

Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku.

Rozwiązanie:

Obliczamy miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$:

Kąty o miarach β i 132° są przyległe.

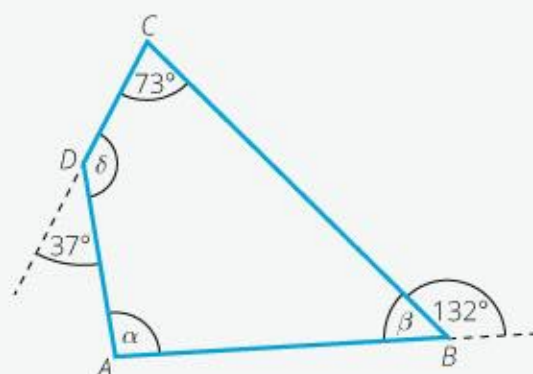
Zatem $\beta = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$

Kąty o miarach δ i 37° są również przyległe.

Zatem $\delta = 180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360° .

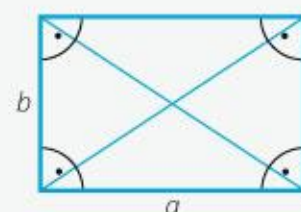
Zatem $\alpha = 360^\circ - (48^\circ + 143^\circ + 73^\circ) = 96^\circ$



Prostokąt i kwadrat

Prostokątem nazywamy czworokąt, w którym wszystkie kąty są proste.

W prostokącie przeciwległe boki są równe i równoległe, a przekątne mają taką samą długość i dzielą się na połowy.



Pole prostokąta obliczamy ze wzoru $P = a \cdot b$.

Przykład

Dany jest prostokąt o bokach długości a i b oraz prostokąt o bokach długości c i d . Bok o długości c stanowi $m\%$, $m \in \mathbb{N}$ boku o długości a , a bok o długości d stanowi $n\%$, $n \in \mathbb{N}$ boku o długości b . Oblicz, ile procent pola prostokąta o bokach długościach a i b stanowi pole prostokąta o bokach długościach c i d .

Rozwiązanie:

Wyznaczamy pole prostokąta o bokach długościach a i b : $P_1 = a \cdot b$

Wyznaczamy pole prostokąta o bokach długościach c i d : $P_2 = c \cdot d$

Ponieważ $c = m\%a = \frac{ma}{100}$ oraz $d = n\%b = \frac{nb}{100}$.

Zatem: $P_2 = ma \cdot nd = mn \cdot ab$

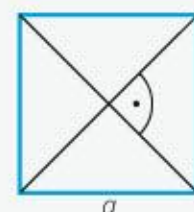
Obliczamy, ile procent pola prostokąta o bokach długościach a i b stanowi pole prostokąta o bokach długościach c i d :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{mn \cdot ab}{ab} \cdot 100\% = mn \cdot 100\%$$

Szczególnym przypadkiem prostokąta jest kwadrat.

Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki równej długości.

W kwadracie przekątne są równej długości, przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.



Pole kwadratu obliczamy ze wzoru $P = a^2$.

Przykład

Pole kwadratu, którego bok ma długość $3a - 2$, jest równe $6a + 4$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą większą od $\frac{2}{3}$. Wyznacz wartość liczby a .

Rozwiązanie:

$3a - 2 > 0$ i $6a + 4 > 0$, stąd: $a > \frac{2}{3}$ i $a > -\frac{2}{3}$

Zatem: $a \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

Wyznaczamy pole kwadratu ze wzoru na pole kwadratu:

$$P = (3a - 2)^2 = 9a^2 - 12a + 4$$



Zatem:

$$9a^2 - 12a + 4 = 6a + 4$$

$$9a^2 - 18a = 0$$

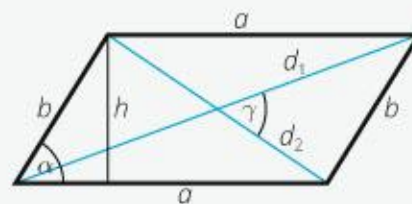
$$a(a - 2) = 0, \text{ stąd: } a = 0 \text{ lub } a = 2$$

Ponieważ $a \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$, więc wartość liczby a wynosi 2.

Równoległobok

Równoległobokiem nazywamy czworokąt mający dwie pary boków równoległych.

W równoległoboku boki równoległe są równej długości, a przekątne przecinają się w połowie.



Pole równoległoboku obliczamy ze wzoru $P = ah$.

Pole równoległoboku możemy obliczyć również ze wzoru $P = ab \sin \alpha$ lub ze wzoru $P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma$.

Przykład

Oblicz pole równoległoboku o długościach kolejnych boków $2\sqrt{10}$ i $3\sqrt{15}$ oraz kącie rozwartym 135° .

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $a = 2\sqrt{10}$, $b = 3\sqrt{15}$, $\alpha = 135^\circ$

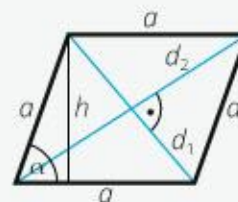
Obliczamy pole równoległoboku:

$$P = ab \sin \alpha = 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{15} \cdot \sin 135^\circ = 6\sqrt{150} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{12} = 30\sqrt{3}$$

Romb

Rombem nazywamy czworokąt, w którym wszystkie boki są równe.

W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.



Pole rombu obliczamy ze wzoru $P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

Pole rombu możemy również obliczać, stosując wzór na pole równoległoboku:

$$P = ah \text{ lub } P = a^2 \sin \alpha$$

Przykład

Stosunek długości przekątnych rombu o boku 10 cm jest równy 4 : 3. Oblicz pole tego rombu.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $a = 10 \text{ cm}$, $\frac{d_1}{d_2} = \frac{4}{3}$

W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.

Zapisujemy warunki zadania:

$$\begin{cases} \frac{d_1}{d_2} = \frac{4}{3} \\ \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = 10^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = 10^2$$

Z pierwszego równania wyznaczamy d_1 :

$d_1 = \frac{4}{3}d_2$, następnie podstawiamy do równania drugiego.

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}d_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = 100$$

$$\left(\frac{2}{3}d_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = 100$$

$$\frac{4}{9}d_2^2 + \frac{1}{4}d_2^2 = 100$$

$$\frac{25}{36}d_2^2 = 100, \text{ stąd } d_2 = 12 \text{ lub } d_2 = -12$$

Ponieważ d_2 jest długością przekątnej, czyli liczbą dodatnią, zatem $d_2 = 12$ (cm).

Wyznaczamy długość drugiej przekątnej:

$$d_1 = \frac{4}{3} \cdot 12 = 16 \text{ (cm)}$$

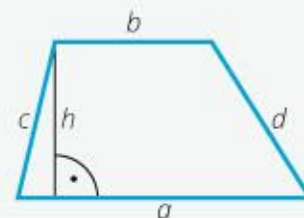
Obliczamy pole rombu:

$$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96$$

Trapez

Trapezem nazywamy czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych.

Pole trapezu obliczamy ze wzoru $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$.



Przykład

Oblicz pole trapezu równoramiennego, którego wysokość ma długość $4\sqrt{3}$ cm, krótsza podstawa – 6 cm, a ramię – $8\sqrt{2}$ cm.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$$h = 4\sqrt{3} \text{ cm}, b = 6 \text{ cm}, c = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

Trójkąt AED jest prostokątny.

Wyznaczamy długość odcinka AE z twierdzenia Pitagorasa (długość odcinka jest liczbą dodatnią):

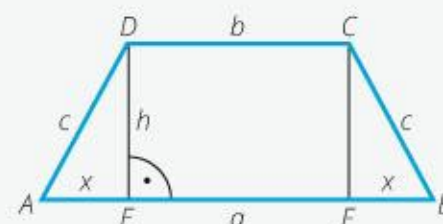
$$x^2 + (4\sqrt{3})^2 = (8\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + 48 = 128, \text{ stąd } x = 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

Obliczamy długość boku AB:

$$|AB| = 2x + b \quad |AB| = 2 \cdot 4\sqrt{5} + 6 = (8\sqrt{5} + 6) \text{ (cm)}$$

$$P = \frac{(8\sqrt{5} + 6 + 6) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8(2\sqrt{15} + 3\sqrt{3}) \text{ (cm)}^2$$



8.3. Okrąg i koło

Okrąg

Okręgiem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r .

Cięciwą nazywamy każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu. **Średnicą** nazywamy najdłuższą cięciwę przechodzącą przez środek okręgu (długość średnicy jest dwa razy większa od długości promienia).

Łukiem nazywamy część okręgu zawartą między dwoma różnymi punktami okręgu wraz z tymi punktami.

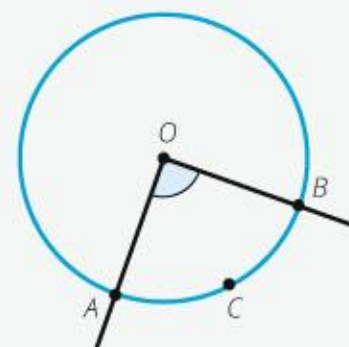
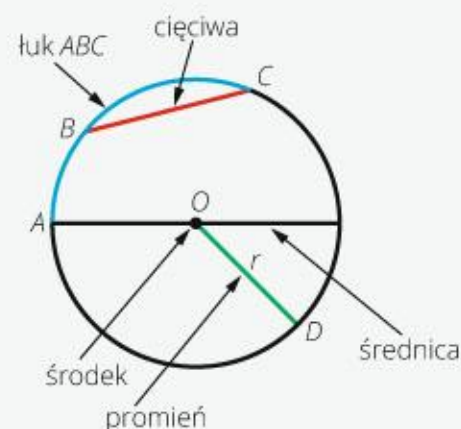
Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem: $l = 2\pi r$.

Kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu, a ramiona zawierają promienie, nazywamy **kątem środkowym** (na rysunku kąt środkowy AOB wyznacza łuk ACB).

Miara kąta środkowego stanowi taką część miary kąta pełnego, jaką częścią długości okręgu jest łuk, na którym ten kąt jest oparty.

Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$





Przykład

Oblicz długość łuku wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze $\frac{3\pi}{4}$ i promieniu długości 8 cm.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $r = 8$ cm, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Obliczamy długość łuku:

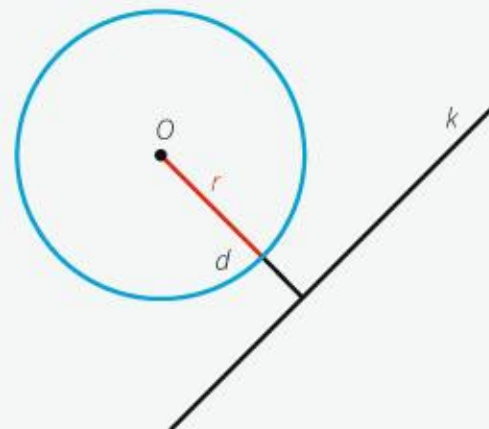
$$L = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi r = \frac{3\pi}{4} \cdot 8 = 6\pi \text{ (cm)}$$

Wzajemne położenie prostej i okręgu

Jeśli prosta i okrąg położone są na tej samej płaszczyźnie, to te figury mogą nie mieć punktów wspólnych, mogą mieć jeden punkt wspólny albo mogą mieć dwa punkty wspólne.

Prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych

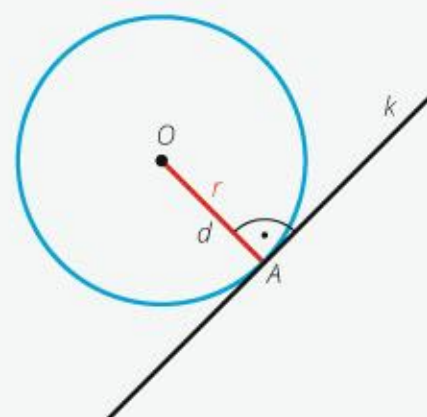
Odległość środka okręgu od prostej jest większa od promienia tego okręgu: $d > r$.



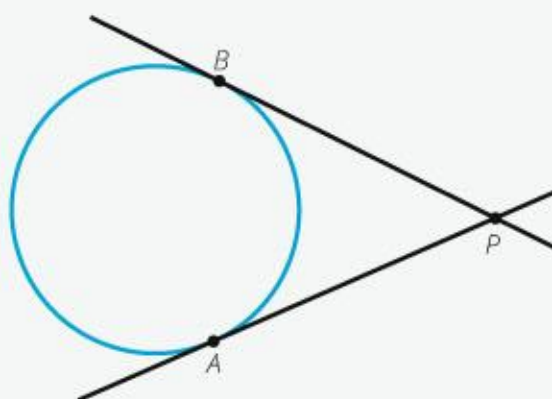
Prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny.

Odległość środka okręgu od prostej jest równa promieniowi tego okręgu: $d = r$. Prostą k nazywamy wtedy **styczną** okręgu.

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia o końcu w punkcie styczności.



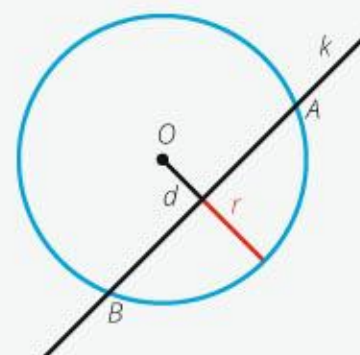
Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to $|PA| = |PB|$.



Prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne.

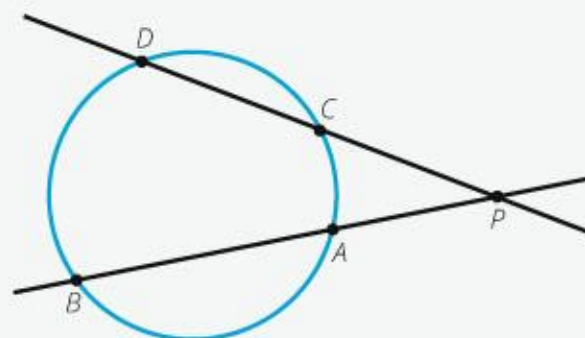
Odległość środka okręgu od prostej jest mniejsza od promienia tego okręgu: $d < r$.

Prostą k nazywamy wtedy **sieczną** okręgu.



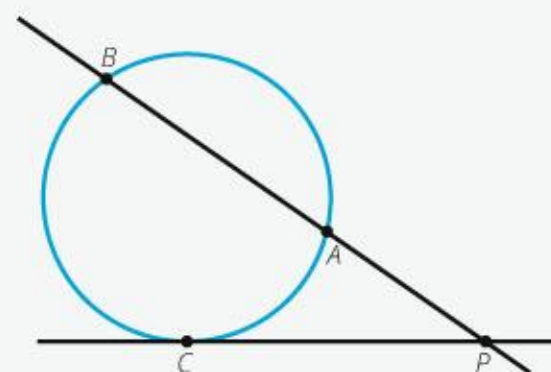
Jeżeli dwie sieczne poprowadzone z punktu P leżącego na zewnątrz okręgu przecinają okrąg odpowiednio w punktach A i B oraz C i D , to:

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$



Jeżeli przez punkt P przechodzi styczna do okręgu w punkcie C oraz sieczna przecinająca okrąg w punktach A i B , to:

$$|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|$$



Przykład

Z punktu S poprowadzono styczną i sieczną do okręgu o środku O . Wiadomo, że $|SC| = 6$ oraz $|SA| = |AB|$ (patrz rysunek).

Wyznacz długość cięciwy AB .

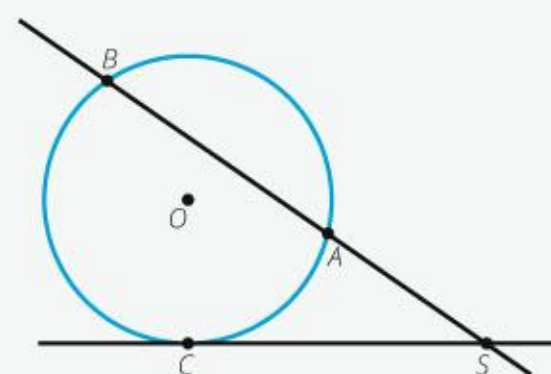
Rozwiązanie:

$$|SC|^2 = |SA| \cdot 2|SA| = 2|SA|^2$$

$$6^2 = 2|SA|^2$$

$$|SA| = 3\sqrt{2}$$

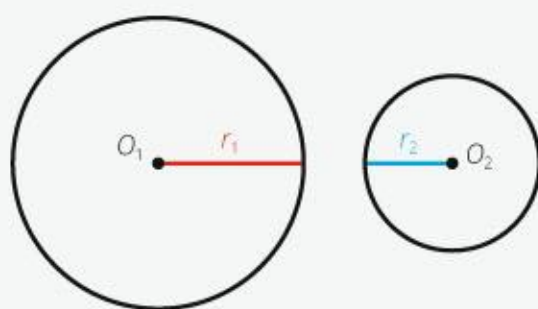
$$\text{Zatem: } |AB| = 3\sqrt{2}$$



Wzajemne położenie dwóch okręgów

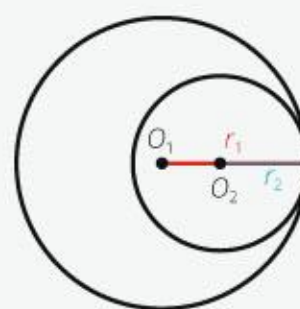
Dwa okręgi także mogą być względem siebie położone w różny sposób.

Okręgi mogą być rozłączne. Nie mają wtedy punktów wspólnych.



$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

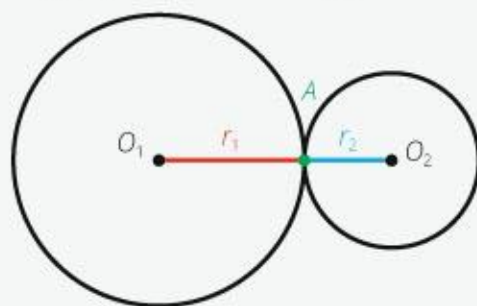
okręgi rozłączne zewnętrznie



$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$

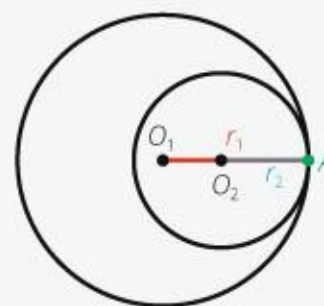
okręgi rozłączne wewnętrznie

Okręgi mogą być **styczne**. Mają wówczas jeden punkt wspólny.



$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

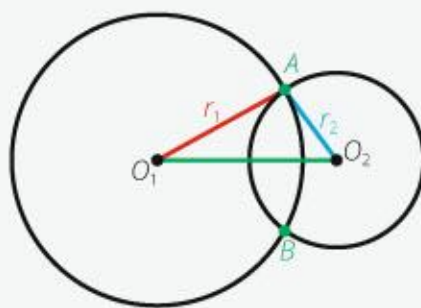
okręgi styczne zewnętrznie



$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$$

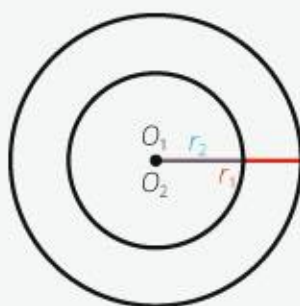
okręgi styczne wewnętrznie

➤ Okręgi mogą być **przecinające się**. Mają wtedy dwa punkty wspólne.



$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$

Okręgi, które mają wspólny środek, nazywamy **współśrodkowymi**.



$$|O_1O_2| = 0$$

Koło

Kołem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła.

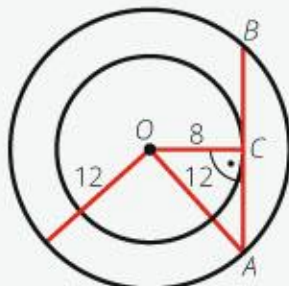
Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem: $P = \pi r^2$.

Przykład

Dane są współśrodkowe okręgi (patrz rysunek). Cięciwa AB okręgu o promieniu 12 jest styczna do okręgu o promieniu 8. Oblicz pole koła o średnicy AB .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



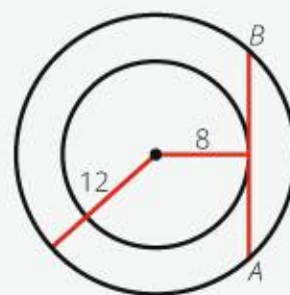
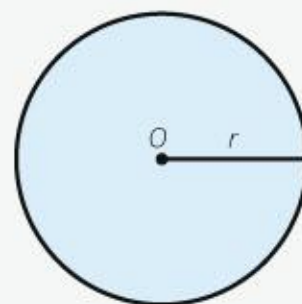
Wyznaczamy długość odcinka AC z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ACO :

$$|AC|^2 = 12^2 - 8^2 = 80, \text{ stąd: } |AC| = 4\sqrt{5}$$

Odcinek AC jest promieniem okręgu o średnicy AB .

Wyznaczamy pole koła:

$$P = \pi |AC|^2 = 80\pi$$

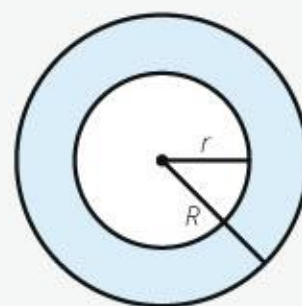


Pierścień kołowy

Pierścieniem kołowym nazywamy część płaszczyzny ograniczoną przez dwa współśrodkowe okręgi (wraz z tymi okręgami).

Opisując pierścień kołowy, podajemy jego promień zewnętrzny i promień wewnętrzny. Różnicę tych promieni nazywamy szerokością pierścienia.

Pole pierścienia kołowego wyraża się wzorem: $P = \pi(R^2 - r^2)$.



Przykład

Oblicz pole pierścienia kołowego o promieniu zewnętrznym równym $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ i promieniu wewnętrznym równym $\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

Promień zewnętrzny pierścienia R wynosi $\frac{3\sqrt{5}}{2}$, a promień wewnętrzny r jest równy $\sqrt{3}$.

Obliczamy pole pierścienia kołowego:

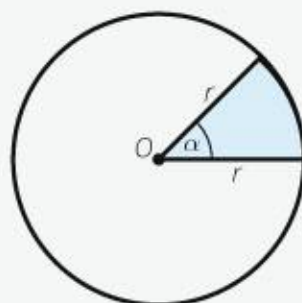
$$P = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left(\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 - (\sqrt{3})^2\right) = \frac{33}{4}\pi$$

Wycinek koła

Wycinkiem koła lub **wycinkiem kołowym** nazywamy część koła zawartą między dwoma promieniami.

Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy α wyraża się wzorem:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

**Przykład**

Oblicz obwód koła, z którego wycięto wycinek kołowy o kącie $\frac{\pi}{6}$ i polu $6\pi\text{cm}^2$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy promień r koła ze wzoru na pole wycinka koła:

$$6\pi = \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} \cdot \pi r^2$$

$$r^2 = 72$$

r jest długością promienia koła, więc $r > 0$

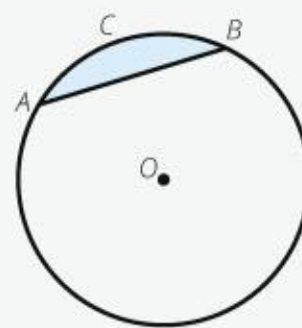
Zatem: $r = 6\sqrt{2}$ (cm)

Obliczamy obwód koła:

$$l = 2\pi r = 2\pi \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\pi \text{ (cm)}$$

Odcinek koła

Odcinkiem koła lub **odcinkiem kołowym** nazywamy część koła (wraz z jej brze- giem) ograniczoną łukiem ABC i cięciwą AB .

**Przykład**

Uzasadnij, że pole odcinka kołowego o promieniu 12 i kącie środkowym o mierze 60° wynosi $24\pi - 36\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

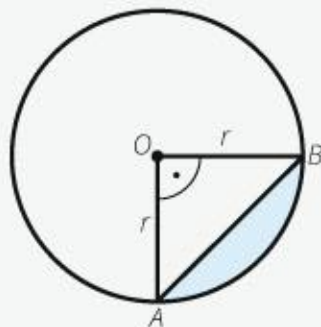
Pole odcinka koła obliczymy jako różnicę pól wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α oraz równoramiennego trójkąta o ramionach długości r i kącie między tymi ramionami o mierze α .

Obliczamy pole odcinka kołowego:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 60^\circ$$

$$P = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 - \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 60^\circ = 24\pi - 72 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\pi - 36\sqrt{3}$$

Zatem pole odcinka kołowego o promieniu 12 i kącie środkowym o mierze 60° wynosi $24\pi - 36\sqrt{3}$.



8.4. Kąty w okręgu

Kąt wpisany i środkowy

Kątem wpisanym nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi cięciwy tego okręgu.

Miara kąta środkowego w okręgu jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Przykład

Oblicz miarę kąta środkowego opartego na tym samym łuku, co kąt wpisany o mierze 48° .

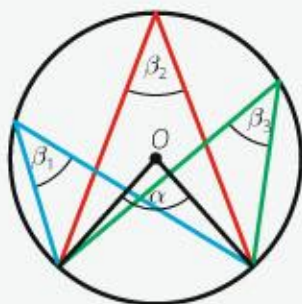
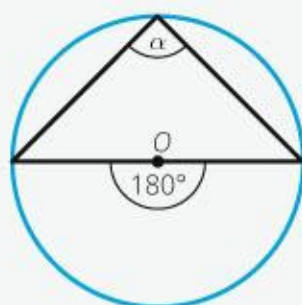
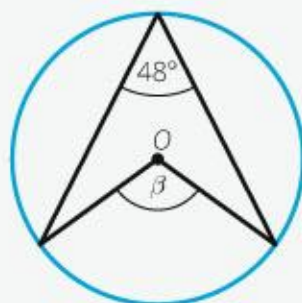
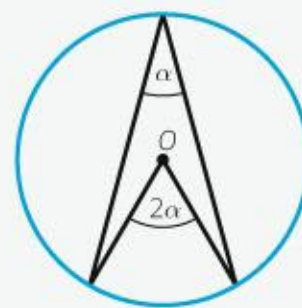
Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Oznaczamy miarę kąta środkowego jako β .

Wyznaczamy miarę kąta środkowego:

$$\beta = 2 \cdot 48^\circ = 96^\circ$$



Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.

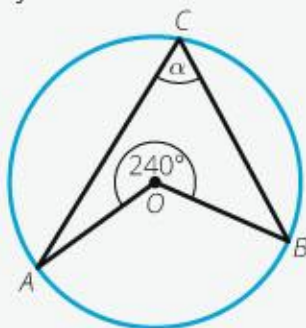
Na danym łuku można oprzeć nieskończenie wiele kątów wpisanych.

Kąty wpisane w okrąg, oparte na tym samym łuku, mają równe miary.

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$$

Przykład

Wyznacz miarę kąta α zaznaczonego na rysunku.



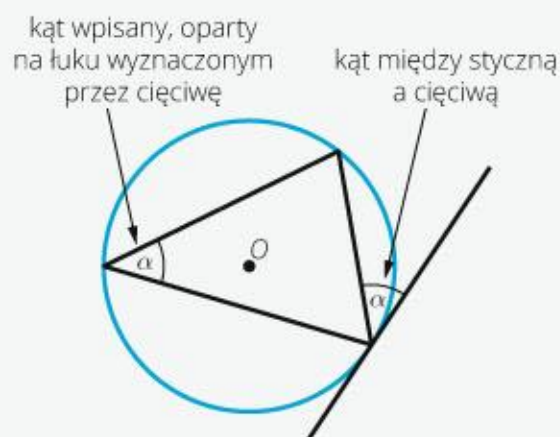
Rozwiązanie:

Kąt ACB opiera się na tym samym łuku, co kąt środkowy AOB o mierze $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$.

$$\text{Zatem: } \alpha = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu

Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności (kąt dopisany do okręgu) ma miarę równą mierze kąta wpisanego opartego na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy.



Przykład

Wyznacz miary kątów trójkąta ABC zaznaczonego na rysunku, wiedząc, że prosta l jest styczna do okręgu w punkcie B .

Rozwiązanie:

Trójkąt ABC jest trójkątem wpisanym w okrąg, a jego bok AC jest jednocześnie średnicą okręgu, więc trójkąt ten jest prostokątny.

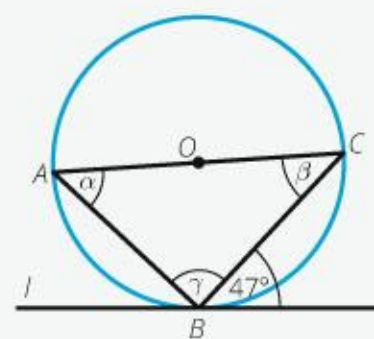
Zatem $\beta = 90^\circ$.

Kąt o mierze 47° jest kątem między styczną l a cięciwą AC , zatem miara kąta wpisanego α opartego na łuku wyznaczonym przez cięciwę AC również ma miarę 47° .

Zatem $\alpha = 47^\circ$.

Wyznaczamy miarę kąta ABC :

$$\gamma = 180^\circ - (90^\circ + 47^\circ) = 43^\circ$$



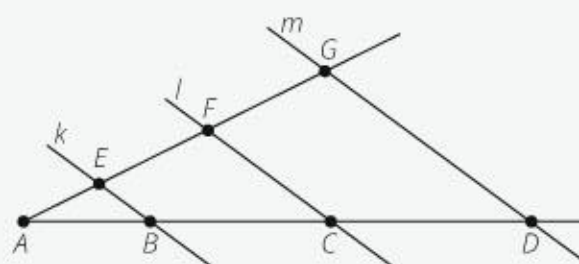
8.5. Twierdzenie Talesa

Twierdzenie Talesa

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy kilkoma prostymi równoległymi, to stosunek długości otrzymanych odcinków na jednym ramieniu kąta jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta.

$$k \parallel l \parallel m \quad \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EF|} \quad \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AG|}{|EG|}$$



Przykład

Korzystając z danych na rysunku, oblicz długość odcinka x .

$BE \parallel CF \parallel DG$

Rozwiązanie:

Oznaczamy długość odcinka CD jako y i zgodnie z twierdzeniem Talesa układamy proporcję $\frac{4}{5} = \frac{5}{y}$, z której obliczamy y :

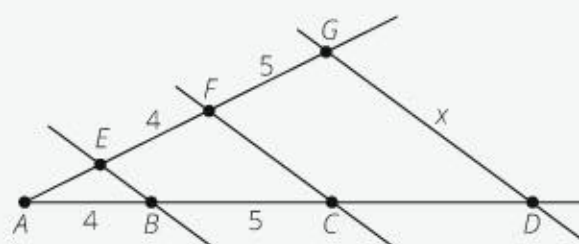
$$4y = 25 \quad y = 6\frac{1}{4}$$

Obliczamy długość odcinka AD :

$$|AD| = 4 + 5 + 6\frac{1}{4} = 15\frac{1}{4}$$

Zgodnie z twierdzeniem Talesa układamy proporcję $\frac{x}{15\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}$, z której obliczamy x :

$$4x = 3 \cdot 15\frac{1}{4} \quad 4x = 45\frac{3}{4} \quad x = 11\frac{7}{16}$$



Przykład

Komin fabryczny rzuca cień o długości 25 m. W tym samym czasie człowiek o wysokości 180 cm rzuca cień o długości 3,6 m. Oblicz wysokość komina.

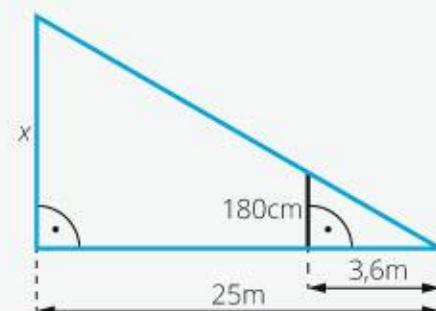
Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Zgodnie z twierdzeniem Talesa:

$$\frac{x}{1,8} = \frac{25}{3,6} \quad 3,6x = 25 \cdot 1,8 \quad x = 12,5$$

Komin ma 12,5 m wysokości.



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.



Przykład

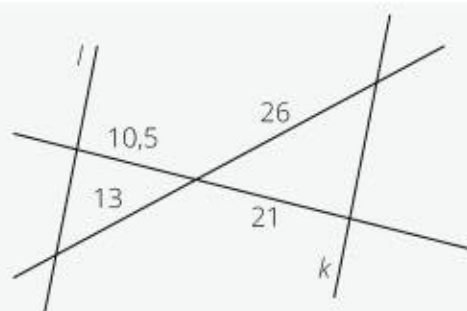
Sprawdź, czy proste k i l na rysunku są równoległe.

Rozwiązanie:

Układamy proporcję $\frac{26}{13} = \frac{21}{10\frac{1}{2}}$ i sprawdzamy, czy jest prawdziwa:

$$26 \cdot 10\frac{1}{2} = 21 \cdot 13 \quad 273 = 273$$

Zgodnie z twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Talesa proste k i l są równoległe.

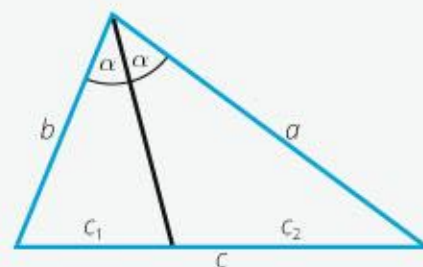


Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego

I Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego

Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do długości pozostałych boków.

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{a}{b}$$



Przykład

Oblicz długość odcinka AD zawartego w dwusiecznej kąta ostrego trójkąta prostokątnego ABC , w którym przyprostokątne AC i BC mają długości odpowiednio 12 i 5.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długość przeciwprostokątnej:

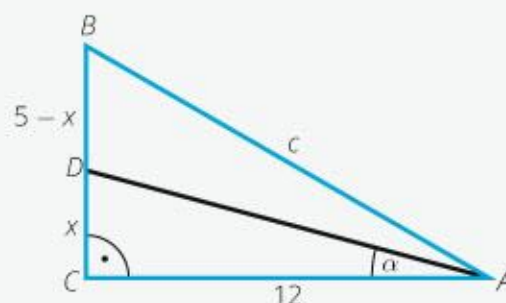
$$c^2 = 12^2 + 5^2 \quad c^2 = 144 + 25 \quad c^2 = 169 \quad c = 13$$

Obliczamy, korzystając z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego, długość odcinka x :

$$\frac{x}{5-x} = \frac{12}{13} \quad 13x = 60 - 12x \quad 25x = 60 \quad x = \frac{12}{5}$$

Obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długość odcinka AD :

$$|AD|^2 = 12^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 \quad |AD|^2 = 144 + \frac{144}{25} \quad |AD|^2 = \frac{26 \cdot 144}{25} \quad |AD| = \frac{12}{5} \sqrt{26}$$



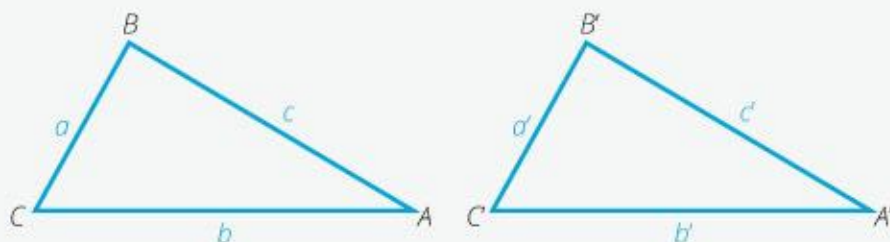
8.6. Cechy przystawania i podobieństwa trójkątów

Cechy przystawania trójkątów

Cechy przystawania trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były przystające, czyli takie same. Przystawanie figur geometrycznych oznaczamy symbolem $\equiv$.

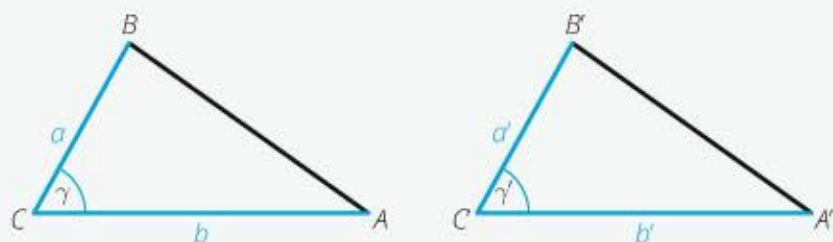
I cecha przystawania trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



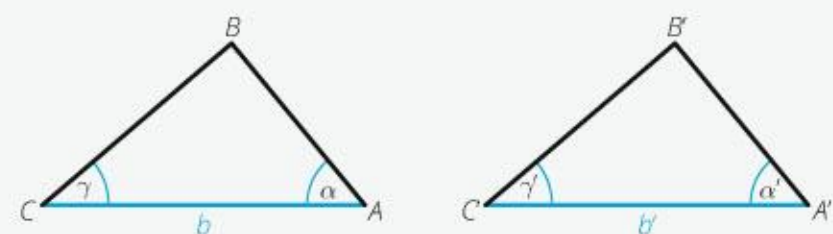
II cecha przystawania trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



III cecha przystawania trójkątów (kbk)

Jeżeli długość boku i dwa kąty do niego przyległe jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i dwóm kątom do niego przyległym drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

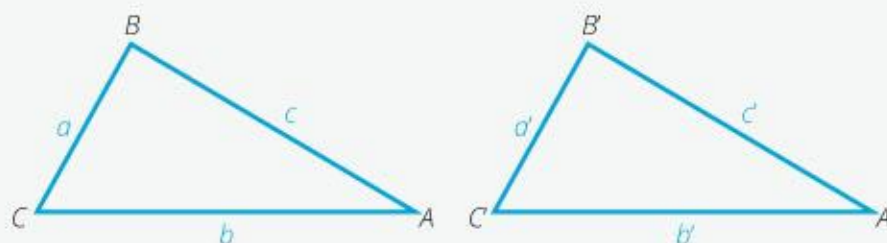


Cechy podobieństwa trójkątów

Cechy podobieństwa trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne. Podobieństwo trójkątów oznaczamy symbolem $\sim$.

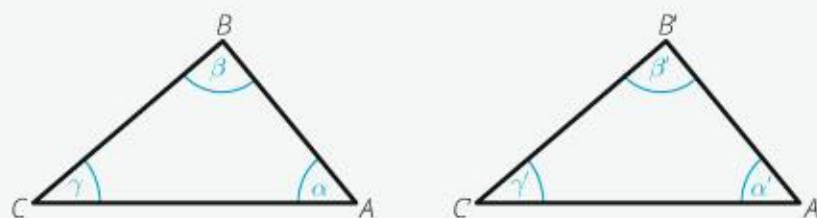
I cecha podobieństwa trójkątów (*bbb*)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



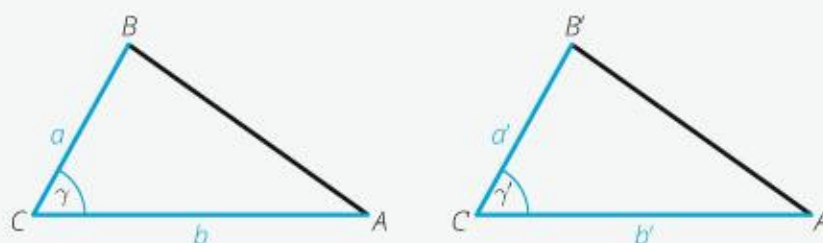
II cecha podobieństwa trójkątów (*kkk*)

Jeżeli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



III cecha podobieństwa trójkątów (*bkb*)

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.



Jeżeli trójkąty są podobne, to **skala podobieństwa** jest równa stosunkowi ich obwodów, stosunkowi ich odpowiednich boków, wysokości, środkowych.

Trójkąty przystające są podobne w skali 1.

Trójkąty przystające i podobne – zadania

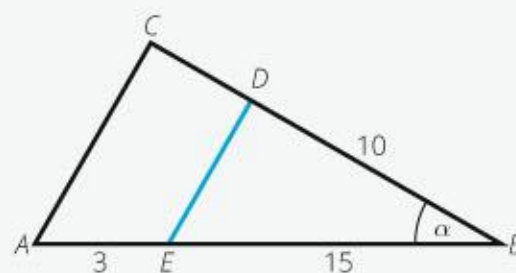
Przykład

W trójkącie ABC na boku AB obrano punkt E , a na boku BC – punkt D tak, że odcinek DE jest równoległy do boku AC (patrz rysunek). Czy trójkąty ABC i BDE są podobne? Jeżeli tak, to w jakiej skali?

Rozwiązanie:

Ponieważ $DE \parallel AC$, to $|\angle BED| = |\angle BAC|$ oraz kąt α jest wspólny dla obu trójkątów, zatem na mocy cechy *kkk* $\triangle BDE \sim \triangle ABC$.

Obliczymy skalę podobieństwa $k = \frac{15}{15+3} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$.



8.7. Obwody i pola figur podobnych

Skala podobieństwa figur podobnych

Stosunek obwodów figur podobnych jest równy **skali podobieństwa**.

Stosunek pól figur podobnych jest równy **kwadratowi skali podobieństwa**.

Przykład

Obwód trójkąta równoramiennego ABC wynosi 24. Trójkąt $A'B'C'$ do niego podobny ma podstawę o długości 12, a wysokość 8. Oblicz długości boków trójkąta ABC .

Rozwiązanie:

Ponieważ trójkąt $A'B'C'$ jest równoramienny, to korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość ramienia oraz obwód trójkąta.

$$c^2 = 6^2 + 8^2$$

$$c^2 = 100$$

$$c = 10$$

$$\text{Obw}_{A'B'C'} = 12 + 10 + 10 = 32$$

Obliczamy skalę podobieństwa: $k = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$



Obliczamy długości boków trójkąta ABC :

$$12 : \frac{4}{3} = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9$$

$$10 : \frac{4}{3} = 10 \cdot \frac{3}{4} = 7,5$$

Przykład

Krótsza przekątna rombu $ABCD$ dzieli go na dwa trójkąty równoboczne. Długość drugiej przekątnej rombu jest równa 12. Romb $EFGH$ o polu powierzchni równym $294\sqrt{3}$ jest podobny do rombu $ABCD$. Oblicz długość boku rombu $EFGH$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy długość boku rombu $ABCD$ przez a . Wtedy połowa dłuższej przekątnej jest równa wysokości trójkąta równobocznego.

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 6, \text{ czyli } a = 4\sqrt{3}$$

Na pole rombu składają się dwa pola trójkątów równobocznych o boku a .

$$P = 2 \cdot \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc

$$k^2 = \frac{294\sqrt{3}}{24\sqrt{3}} = \frac{49}{4}, \text{ czyli } k = \frac{7}{2}.$$

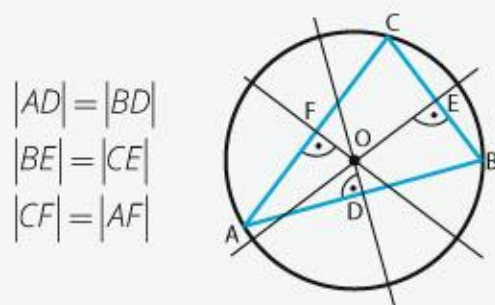
Długość boku rombu $EFGH$ wynosi $a' = 4\sqrt{3} \cdot \frac{7}{2} = 14\sqrt{3}$.

8.8. Punkty szczególne w trójkącie

Punkty w trójkącie

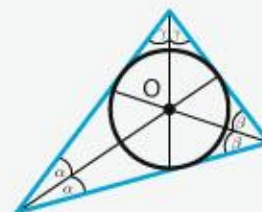
Wyróżniamy cztery punkty szczególne w trójkącie:

1. **środek okręgu opisanego** – punkt przecięcia symetralnych boków

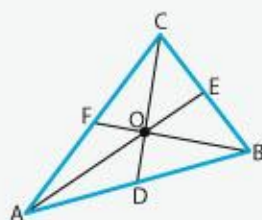


2. **środek okręgu wpisanego** – punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych

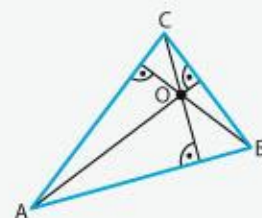
$$\begin{aligned} |AD| &= |BD| \\ |BE| &= |CE| \\ |CF| &= |AF| \end{aligned}$$



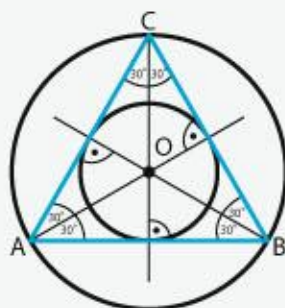
3. **środek ciężkości** – punkt przecięcia środkowych



4. **ortocentrum** – punkt przecięcia wysokości



W każdym trójkącie równobocznym wszystkie cztery punkty się pokrywają.



Przykład

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o kącie przy podstawie równym $67,5^\circ$ i podstawie długości $4\sqrt{2}$.

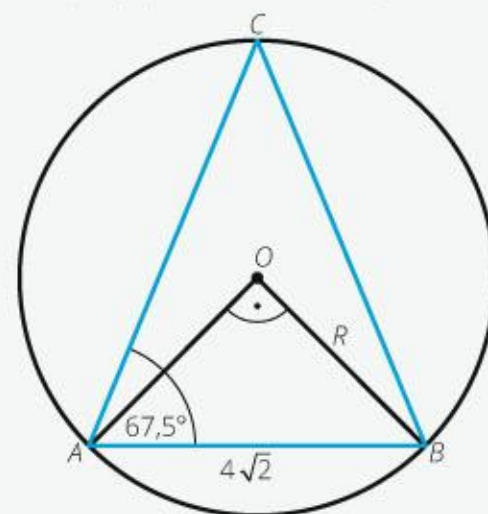
Rozwiązanie:

Kąt między ramionami trójkąta wynosi $180^\circ - 2 \cdot 67,5^\circ = 45^\circ$.

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Kąt AOB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany ACB , więc ma miarę $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

Trójkąt AOB jest trójkątem prostokątnym, zatem $2R^2 = (4\sqrt{2})^2$, czyli $R = 4$.

**Przykład**

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 7 i 24.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

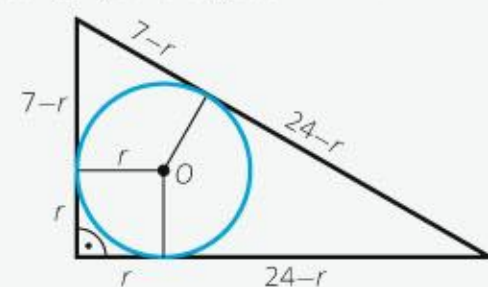
Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c^2 = 7^2 + 24^2 \quad c^2 = 49 + 576 \quad c^2 = 625 \quad c = 25$$

Obliczamy długość promienia:

$$24 - r + 7 - r = 25$$

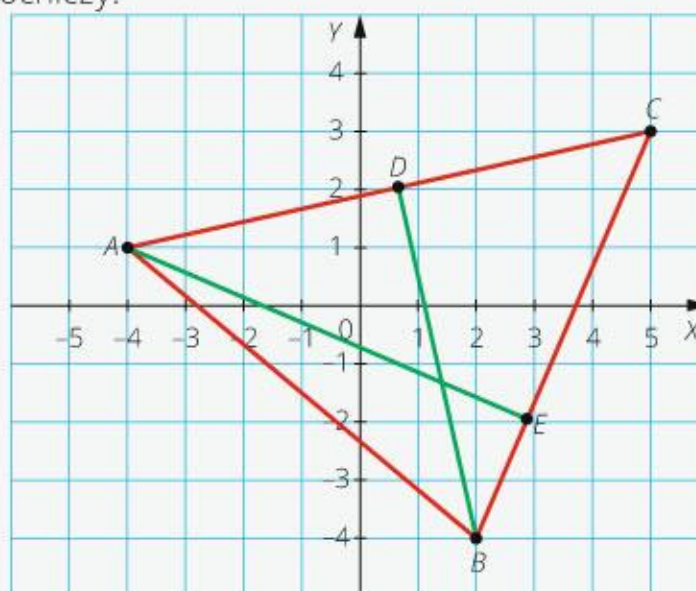
$$r = 3$$

**Przykład**

Znaleźć środek ciężkości w trójkącie o wierzchołkach $A = (-4, 1)$, $B = (2, -4)$, $C = (5, 3)$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Obliczamy współrzędne środków boków AC i BC :

$$D = \left(\frac{5-4}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 2 \right) \quad E = \left(\frac{5+2}{2}, \frac{3-4}{2} \right) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

Wyznaczamy równanie prostej AE :

$$\begin{cases} 1 = -4a + b \\ -\frac{1}{2} = \frac{7}{2}a + b \end{cases} \quad a = -\frac{1}{5} \quad 1 = \frac{4}{5} + b \quad b = \frac{1}{5} \quad y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$$

Wyznaczamy równanie prostej BD :

$$\begin{cases} -4 = 2a + b \\ 2 = \frac{1}{2}a + b \end{cases} \quad a = -4 \quad 2 = -2 + b \quad b = 4 \quad y = -4x + 4$$



Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia środkowych:

$$\begin{cases} y = -4x + 4 \\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \end{cases} \quad -4x + 4 = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \quad -4x + \frac{1}{5}x = \frac{1}{5} - 4 \quad -3\frac{4}{5}x = -3\frac{4}{5} \quad x = 1$$

$$y = -4 \cdot 1 + 4 \quad y = 0$$

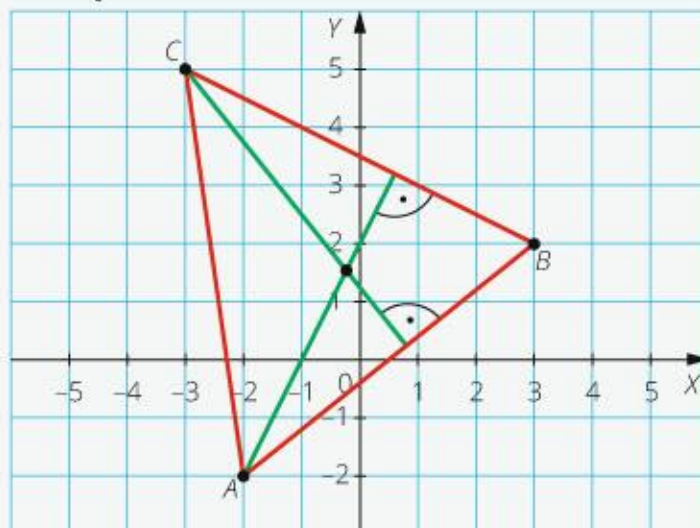
Środek ciężkości ma współrzędne $S = (1, 0)$.

Przykład

Znaleźć ortocentrum trójkąta o wierzchołkach $A = (-2, -2)$, $B = (3, 2)$, $C = (-3, 5)$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej BC :

$$\begin{cases} 5 = -3a + b \\ 2 = 3a + b \end{cases} \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$3 = -6a$$

Wyznaczamy równanie wysokości opuszczonej z wierzchołka A :

$$y = 2x + b \quad -2 = 2 \cdot (-2) + b \quad b = 2 \quad y = 2x + 2$$

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej AB :

$$\begin{cases} -2 = -2a + b \\ 2 = 3a + b \end{cases} \quad a = \frac{4}{5}$$

$$-4 = -5a$$

Wyznaczamy równanie wysokości opuszczonej z wierzchołka C :

$$y = -\frac{5}{4}x + b \quad 5 = -\frac{5}{4} \cdot (-3) + b \quad b = \frac{5}{4} \quad y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$$

Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia wysokości:

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{4} \end{cases} \quad 2x + 2 = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{4} \quad \frac{13}{4}x = -\frac{3}{4} \quad x = -\frac{3}{13}$$

$$y = 2 \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) + 2 \quad y = \frac{20}{13}$$

Ortocentrum ma współrzędne $S = \left(-\frac{3}{13}, \frac{20}{13}\right)$.

8.9. Wielokąty foremne

Wielokąty foremne

Wielokątami foremnymi nazywamy wielokąty, które mają wszystkie boki tej samej długości i wszystkie kąty wewnętrzne jednakowej miary.

Poniższe rysunki przedstawiają przykłady wielokątów foremnych.



trójkąt foremny
(trójkąt równoboczny)



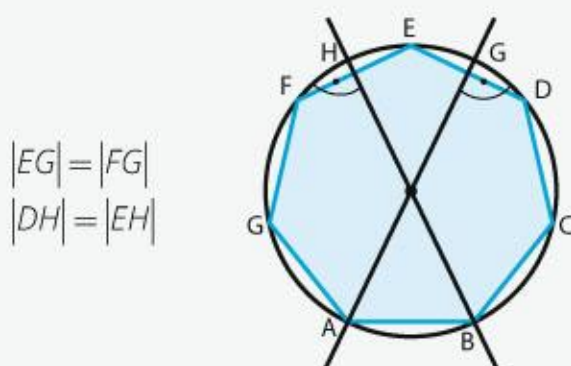
czworokąt foremny
(kwadrat)



pięciokąt foremny



sześciokąt foremny



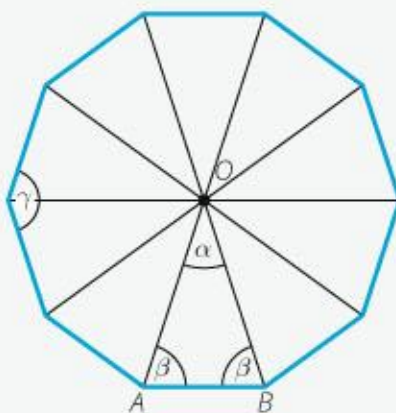
Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia symetralnych boków wielokąta.

Przykład

Oblicz miarę kąta wewnętrznego n -kąta foremnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Każdy wielokąt foremny zbudowany jest z trójkątów równoramiennych. Dwa kąty przy podstawie jednego z tych trójkątów, trójkąta ABC , oznaczane jako β , tworzą jeden kąt wewnętrzny γ wielokąta.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° , więc $\alpha + 2\beta = 180^\circ$, stąd $\alpha = 180^\circ - 2\beta$.

Zauważamy, że $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$.

Wyznaczamy miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego:

$$\frac{360^\circ}{n} = 180^\circ - 2\beta$$

$$2\beta = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n} = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

Zatem miara kąta wewnętrznego wyraża się wzorem: $\gamma = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

W dowolny wielokąt foremny można wpisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wielokąta.

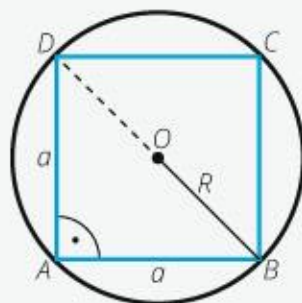


Przykład

Oblicz promień okręgu opisanego na kwadracie o polu $8\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Długość boku kwadratu $ABCD$ oznaczamy jako a , promień okręgu opisanego na kwadracie – jako R . Obliczamy pole kwadratu:

$$P = a^2$$

$$a^2 = 8\sqrt{2}$$

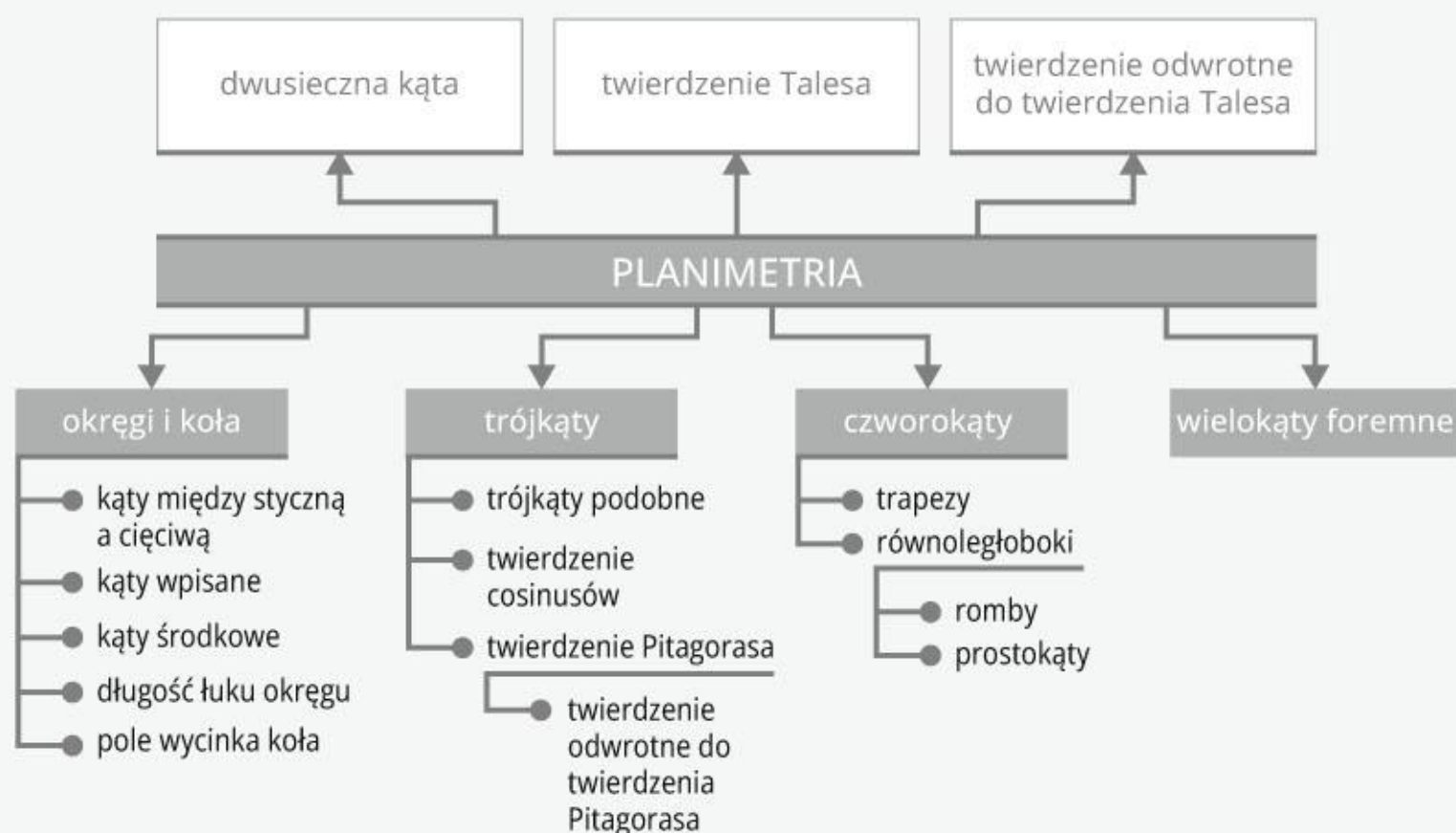
Obliczamy długość przekątnej AC z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC|^2 = a^2 + a^2$$

$$|AC|^2 = 16\sqrt{2}, \text{ stąd } |AC| = 4\sqrt[4]{2} \text{ (cm) (długość przekątnej kwadratu jest liczbą dodatnią)}$$

Promień okręgu opisanego na kwadracie jest dwa razy mniejszy od przekątnej, zatem $R = \frac{1}{2} \cdot |AC| = 2\sqrt[4]{2} \text{ (cm)}$.

8.10. Utrwalamy wiedzę



9

Geometria analityczna

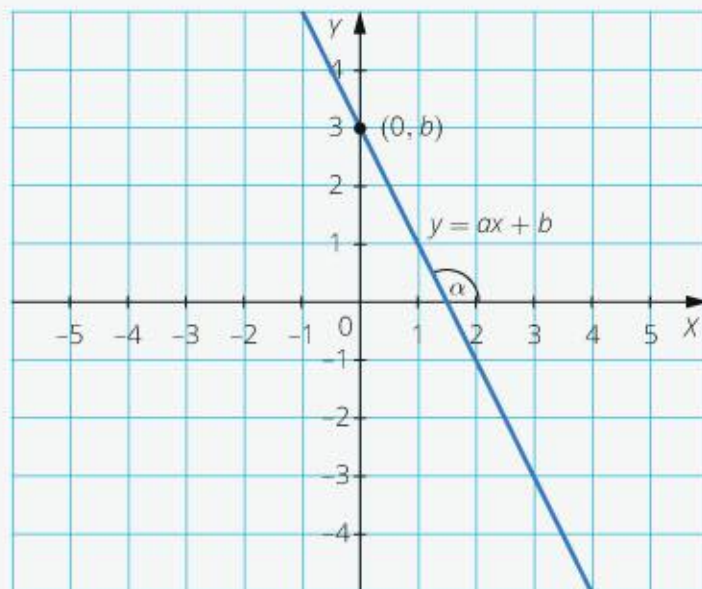
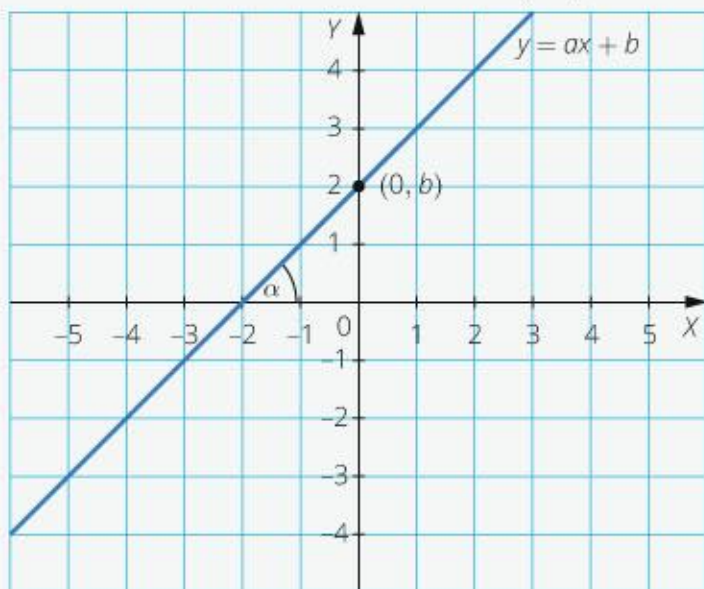
9.1. Równanie prostej na płaszczyźnie

Wykresem funkcji liniowej jest prosta określona równaniem: $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Równanie to nazywane jest **równaniem kierunkowym prostej**, a liczba a nazywana jest **współczynnikiem kierunkowym**.

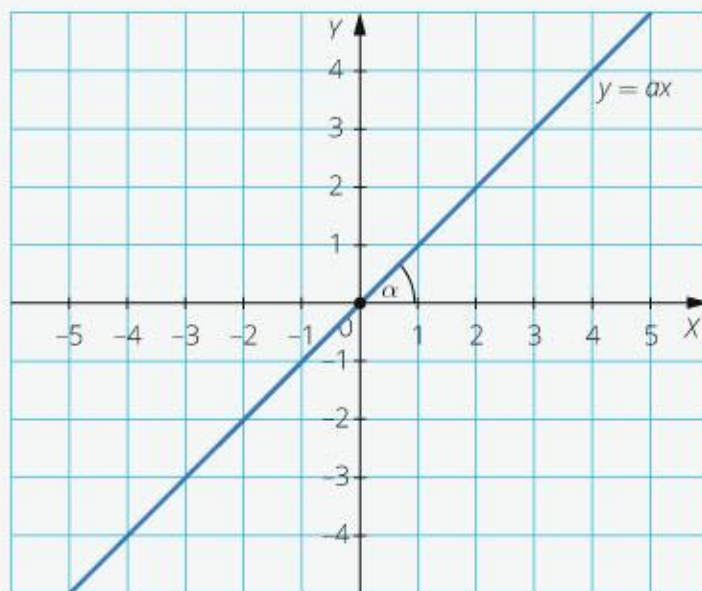
Równaniem kierunkowym można opisać każdą prostą, która nie jest równoległa do osi y

1. Dla $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$ prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ nachylona jest do dodatniej półosi osi OX pod kątem α takim, że $a = \operatorname{tg} \alpha$.

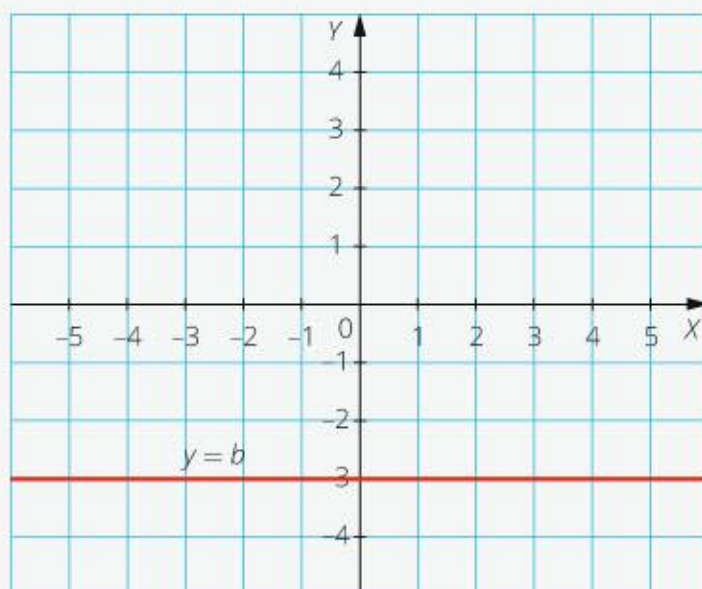
Prosta ta przecina oś y w punkcie $(0, b)$.



W szczególnym przypadku, gdy $a \neq 0$ i $b = 0$, równanie kierunkowe prostej $y = ax + b$ przyjmuje postać $y = ax$. Prosta o tym równaniu przechodzi przez początek układu współrzędnych.

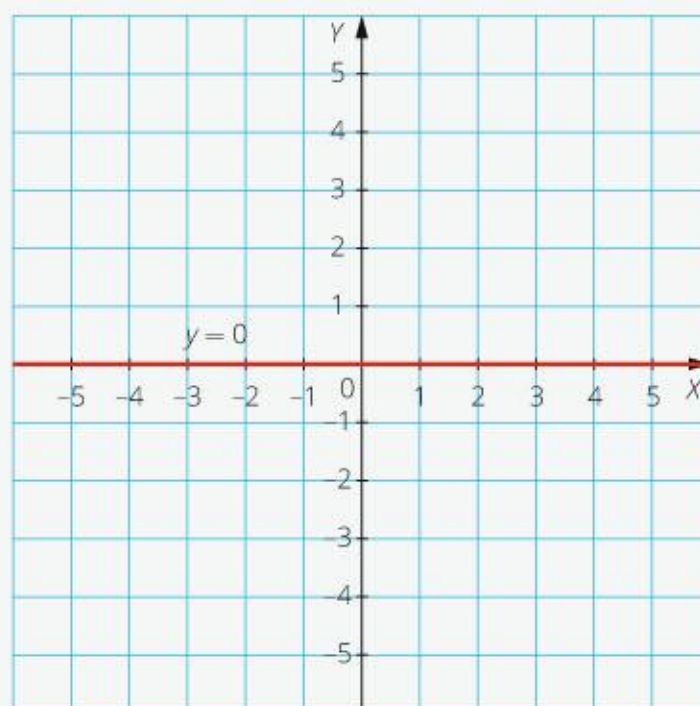


2. Dla $a = 0$ i $b \neq 0$ równanie kierunkowe prostej $y = ax + b$ przyjmuje postać $y = b$, a prosta opisana tym równaniem jest równoległa do osi x .

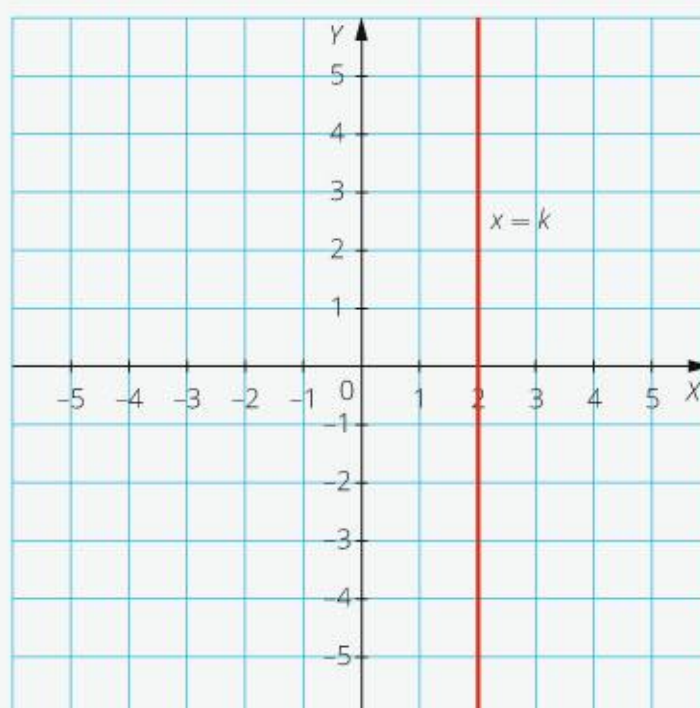




Dla $a=0$ i $b=0$ równanie kierunkowe prostej $y=ax+b$ przyjmuje postać $y=0$, a prosta opisana tym równaniem pokrywa się z osią x .



3. Prosta prostopadła do osi OX nie jest wykresem funkcji liniowej, a więc nie można jej opisać równaniem kierunkowym. Tę prostą możemy opisać na przykład równaniem $x=k$ dla $k \in \mathbb{R}$.



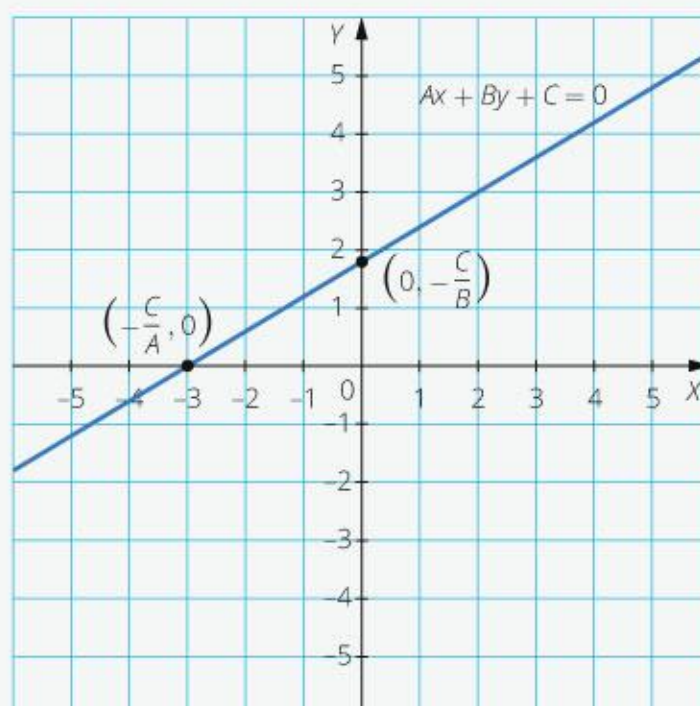
Równanie ogólne prostej

Aby opisać każdą prostą narysowaną w kartezjańskim układzie współrzędnych, używa się **równania ogólnego prostej**.

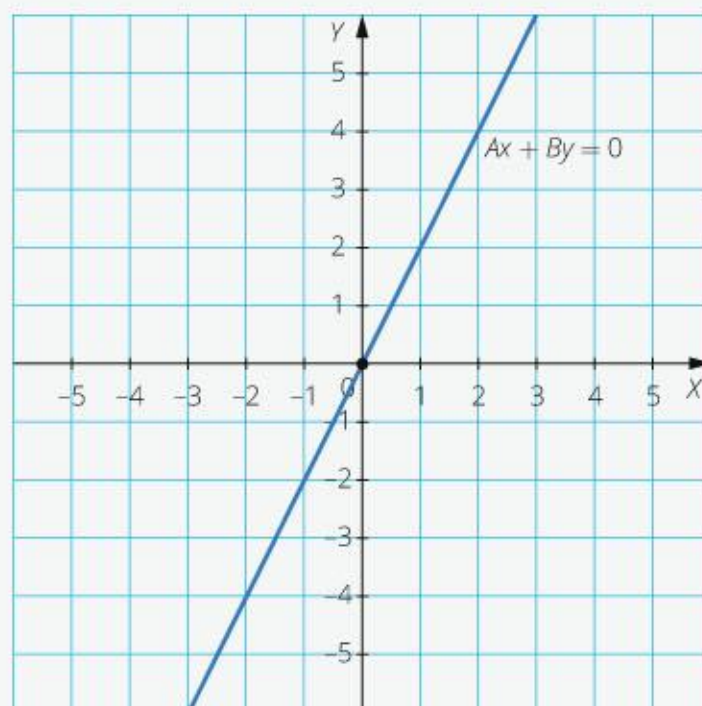
Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz współczynniki A i B nie są jednocześnie równe 0, nazywane jest **równaniem ogólnym prostej**.

Warunek, że współczynniki A i B nie są jednocześnie równe 0, można zapisać następująco: $A^2 + B^2 > 0$ lub $A^2 + B^2 \neq 0$.

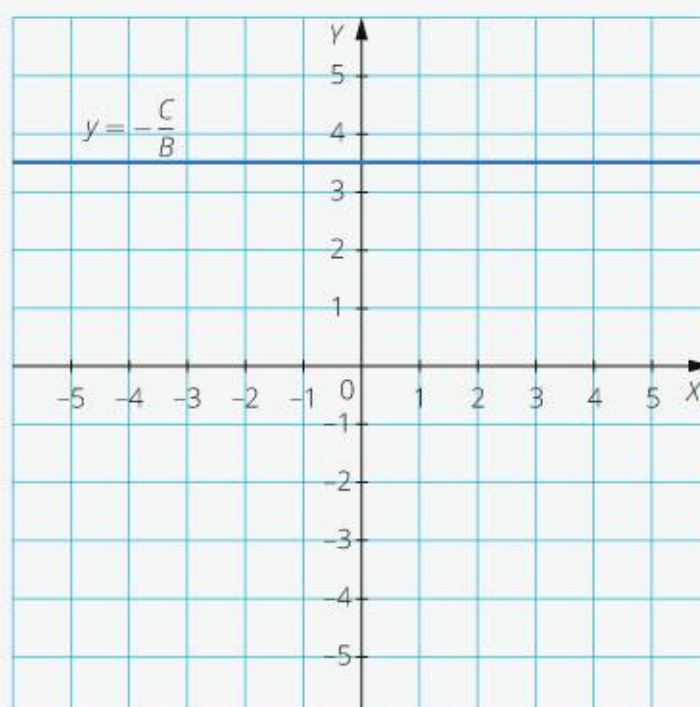
1. Dla $A \neq 0$ i $B \neq 0$ równanie $Ax + By + C = 0$ opisuje prostą przecinającą obie osie układu w punktach o współrzędnych: $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ i $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.



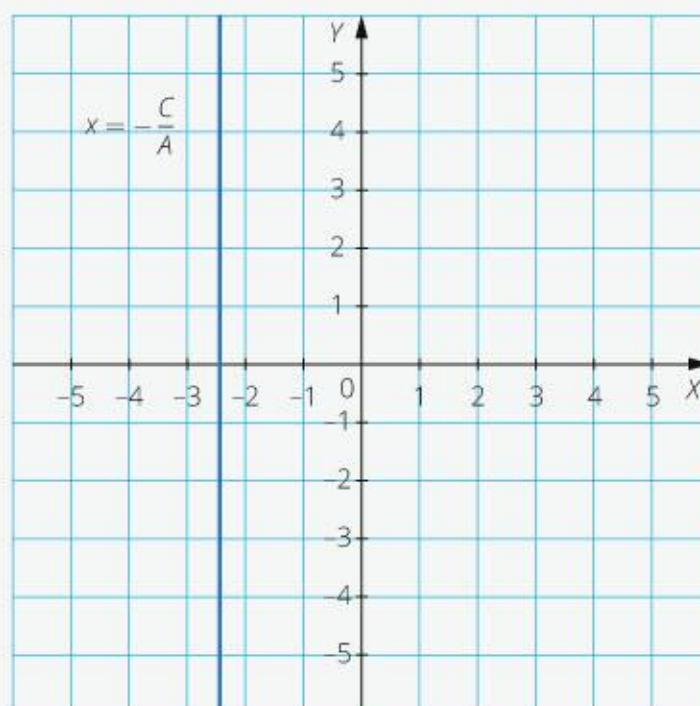
Dla $A \neq 0$ i $B \neq 0$ i $C = 0$ równanie $Ax + By + C = 0$ przyjmuje postać $Ax + By = 0$ i opisuje prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych.



2. Dla $A = 0$ i $B \neq 0$ równanie $Ax + By + C = 0$ przyjmuje postać $By + C = 0$ i opisuje prostą równoległą do osi OX . Inne równanie tej prostej to $y = -\frac{C}{B}$.



3. Dla $A \neq 0$ i $B = 0$ równanie $Ax + By + C = 0$ przyjmuje postać $Ax + C = 0$ i opisuje prostą równoległą do osi OY . Inne równanie tej prostej to $x = -\frac{C}{A}$.



Przekształcanie równania kierunkowego do ogólnego

Przekształcenie równania kierunkowego do ogólnego polega na przeniesieniu wszystkich składników równania na jedną stronę równania i uporządkowaniu ich tak, aby najpierw był składnik ze zmienną x , później – składnik ze zmienną y , a na końcu – wyraz wolny.



Jeśli prosta nie jest równoległa do osi OY , to znaczy w równaniu $Ax + By + C = 0$ współczynnik B jest różny od 0, to równanie ogólne prostej można przekształcić do kierunkowego poprzez wyznaczenie zmiennej y w zależności od zmiennej x .

Należy pamiętać, że dla danej prostej (która nie jest równoległa do osi OY) można zapisać tylko jedno równanie kierunkowe, ale wiele równań ogólnych.

Przykład

Przekształć:

a) równanie kierunkowe prostej $y = -5x - 3$ do postaci ogólnej,

b) równanie ogólne prostej $6x - 7y - 8 = 0$ do postaci kierunkowej.

Rozwiązanie:

a) Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę. Otrzymujemy: $5x + y + 3 = 0$ lub $-5x - y - 3 = 0$

b) Wyznaczamy y z równania: $-7y = -6x + 8$, stąd $y = \frac{6}{7}x - \frac{8}{7}$

Położenie prostych kartezjańskim układzie współrzędnych

Proste opisane są równaniami kierunkowymi $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ i żadna z nich nie jest równoległa do osi OY . Wzajemne położenie tych prostych możemy określić, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

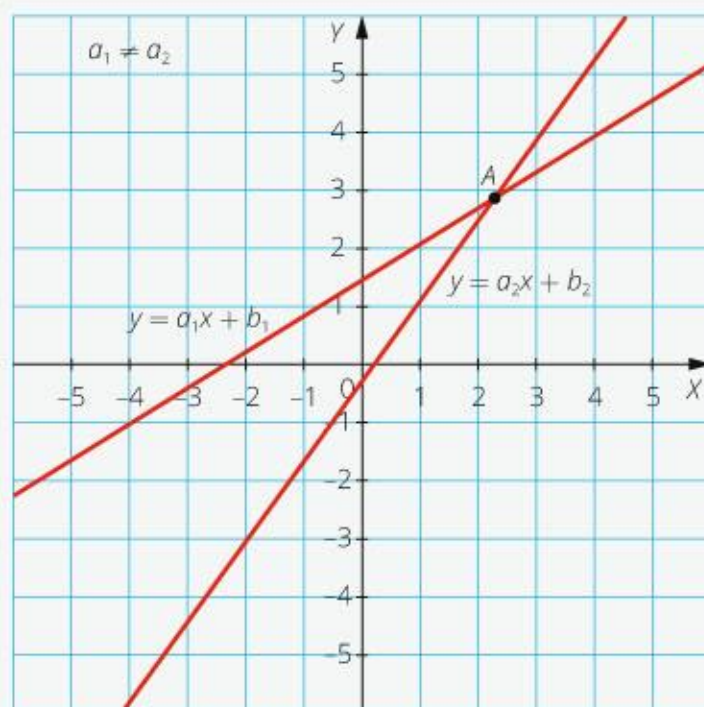
Otrzymujemy wówczas równanie: $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$

Stąd: $x(a_1 - a_2) = b_2 - b_1$

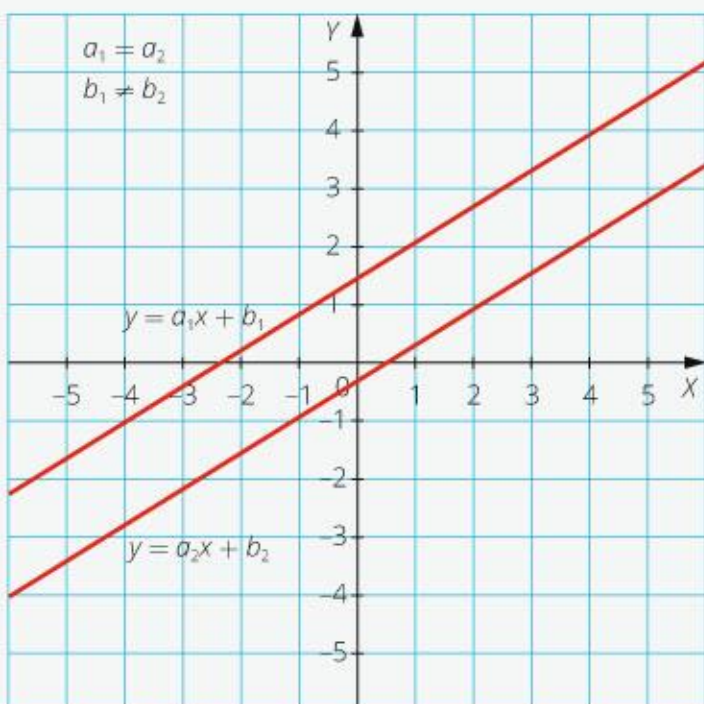
1. Gdy $a_1 - a_2 \neq 0$, to proste mają dokładnie jeden punkt wspólny (proste przecinają się w punkcie).

Współrzędne punktu A przecięcia tych prostych:

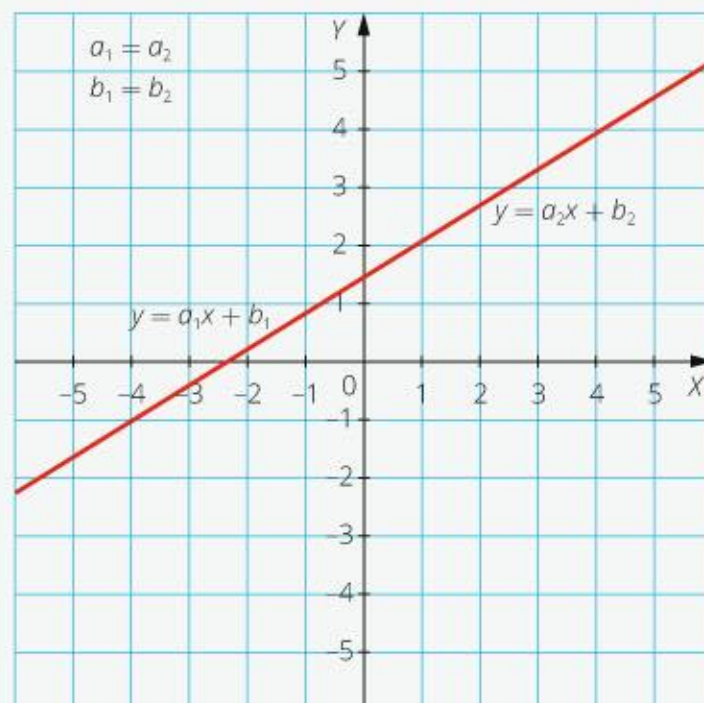
$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}, y = \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{a_1 - a_2}$$



2. Gdy $a_1 - a_2 = 0$ i $b_2 - b_1 \neq 0$, to proste nie mają punktów wspólnych (proste są równoległe).



3. Gdy $a_1 - a_2 = 0$ i $b_2 - b_1 = 0$, to proste mają nieskończenie wiele punktów wspólnych (proste się pokrywają).



Przykład

Określ, ile punktów wspólnych mają proste o równaniach $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ i $y = -\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x}{2}$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Zapiszemy równanie prostej $y = -\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x}{2}$ w postaci $y = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x$. Zauważamy, że proste mają jednakowy współczynnik kierunkowy $a = -\sqrt{3}$ i różne współczynniki b . Proste te są więc równoległe i nie mają punktów wspólnych.

Sposób II

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x \\ -\sqrt{3}x + \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x \\ y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ 0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ równanie sprzeczne} \\ y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \end{cases}$$

Odpowiedź: Te proste nie mają punktu wspólnego.

Przykład

Spośród prostych $k: -3x + 6y + 3 = 0$, $l: y = \frac{1}{2}x$ oraz $n: y = \frac{x-1}{2}$ wybierz te, które mają nieskończenie wiele punktów wspólnych.

Rozwiązanie:

Prostą k o równaniu ogólnym $-3x + 6y + 3 = 0$ zapisujemy w postaci kierunkowej $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Prostą n o równaniu $y = \frac{x-1}{2}$ zapisujemy w postaci $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Zauważamy, że postać kierunkowa prostej k jest taka sama, jak prostej n . Stąd wnioskujemy, że proste k i n pokrywają się, a więc mają nieskończenie wiele punktów wspólnych. Prosta l jest równoległa do prostych k i n .

Przykład

Określ wzajemne położenie prostych: $2\sqrt{5}x - 3\sqrt{5}y - 4\sqrt{5} = 0$ i $-4x + 6y + 8 = 0$.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że jeżeli podzielimy równanie pierwszej prostej przez $\sqrt{5}$, to otrzymamy równanie $2x - 3y - 4 = 0$. Ponadto jeśli równanie drugiej prostej podzielimy przez -2 , to również otrzymamy równanie $2x - 3y - 4 = 0$. Stąd wynika, że proste pokrywają się.

9.2. Równanie prostej o zadanych własnościach

Równanie kierunkowe prostej, gdy dany jest współczynnik kierunkowy

Równaniem kierunkowym prostej o danym współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$, jest: $y = a(x - x_0) + y_0$.

Przykład

Napisz równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym $a = 2\sqrt{5}$ i przechodzącej przez punkt $A = (-\sqrt{5}, -4)$.

Rozwiązanie:

Sposób I

$y = 2\sqrt{5}x + b$ podstawiamy do równania prostej $y = ax + b$ liczbę $a = 2\sqrt{5}$
 $-4 = 2\sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5}) + b$ podstawiamy współrzędne punktu $A = (-\sqrt{5}, -4)$ do równania prostej
 $b = 6$ wyznaczamy współczynnik b
 $y = 2\sqrt{5}x + 6$ zapisujemy równanie prostej

Sposób II

Korzystamy ze wzoru na równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$: $y = a(x - x_0) + y_0$.

Otrzymujemy: $y = 2\sqrt{5}(x + \sqrt{5}) - 4$

Przekształcamy do najprostszej postaci: $y = 2\sqrt{5}x + 6$

Odpowiedź: Prosta o równaniu $y = 2\sqrt{5}x + 6$ ma współczynnik kierunkowy równy $2\sqrt{5}$ i przechodzi przez punkt A o współrzędnych $(-\sqrt{5}, -4)$.

Równanie kierunkowe i ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty

Równaniem kierunkowym prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$, jest: $y - y_A = a(x - x_A)$, gdzie $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, gdy $x_B \neq x_A$.

Równaniem ogólnym prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$, jest: $(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$.

Przykład

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (-2, -2)$ i $B = (2, -4)$.

Rozwiązanie:

Sposób I

$-2 = a \cdot (-2) + b$ - podstawiamy współrzędne punktu $A = (-2, -2)$ do równania prostej $y = ax + b$

$-4 = a \cdot 2 + b$ - podstawiamy współrzędne punktu $B = (2, -4)$ do równania prostej $y = ax + b$

$\begin{cases} -2 = -2a + b \\ -4 = 2a + b \end{cases}$ - rozwiązujemy układ równań z niewiadomymi a i b

$\begin{cases} b = -3 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$y = -\frac{1}{2}x - 3$ - zapisujemy równanie prostej

Sposób II

Korzystamy ze wzoru na równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$: $y - y_A = a(x - x_A)$, gdzie $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, gdy $x_B \neq x_A$ dla $A = (-2, -2)$ i $B = (2, -4)$.

Otrzymujemy: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - (-2)}{2 - (-2)} = -\frac{1}{2}$ i $y + 2 = -\frac{1}{2}(x + 2)$

Stąd: $y = -\frac{1}{2}x - 3$

Sposób III

Korzystamy ze wzoru na równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$: $(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$ dla $A = (-2, -2)$ i $B = (2, -4)$.

Otrzymujemy: $(y + 2)(2 + 2) - (-4 + 2)(x + 2) = 0$

$$4(y + 2) + 2(x + 2) = 0$$

Stąd równanie prostej w postaci ogólnej: $2x + 4y + 12 = 0$

Równanie prostej w postaci kierunkowej: $y = -\frac{1}{2}x - 3$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B to $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

Proste równoległe

Proste równoległe:

1. Dwie proste o równaniach kierunkowych: $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wówczas, gdy mają jednakowe współczynniki kierunkowe ($a_1 = a_2$).
2. Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$.

Przykład

Napisz równanie prostej równoległej do prostej opisanej równaniem $y = -\frac{2}{3}x + 1$ i przechodzącej przez punkt $A = (6, -1)$.

Rozwiązanie:

$a_2 = a_1 = -\frac{2}{3}$ – określamy wartość współczynnika kierunkowego prostej

$y = -\frac{2}{3}x + b$ – określamy równanie prostej równoległej do prostej

$-1 = -\frac{2}{3} \cdot 6 + b$ – wstawiamy do równania prostej współrzędne punktu A : $x = 6$ i $y = -1$

$b = 3$ – obliczamy wartość współczynnika b

Odpowiedź: Prosta o równaniu $y = -\frac{2}{3}x + 3$ jest równoległa do prostej o równaniu $y = -\frac{2}{3}x + 1$ i przechodzi przez punkt $A = (6, -1)$.

Przykład

Napisz równanie ogólne prostej równoległej do prostej opisanej równaniem: $2x - 3y + 7 = 0$ i przecinającej oś OY w punkcie o rzędnej -5 .

Rozwiązanie:

Korzystamy z warunku: Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$

Skoro: $2B_2 + 3A_2 = 0$, gdzie $A_1 = 2$ i $B_1 = -3$, to najlepiej dobrać: $A_2 = A_1 = 2$ i $B_2 = B_1 = -3$

Stąd równanie prostej równoległej do danej ma postać: $2x - 3y + C_2 = 0$

Punkt $A = (0, -5)$ należy do prostej, więc jego współrzędne spełniają równanie prostej. Otrzymujemy: $2 \cdot 0 - 3 \cdot (-5) + C_2 = 0$

Stąd: $C_2 = -15$

Równanie prostej równoległej do danej: $2x - 3y - 15 = 0$

Odpowiedź: Prosta równoległa do $2x - 3y + 7 = 0$ i przecinająca oś OY w punkcie o rzędnej -5 opisana jest równaniem $2x - 3y - 15 = 0$.

Proste prostopadłe

Proste prostopadłe:

1. Dwie proste o równaniach kierunkowych: $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wówczas, gdy współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a_1 \cdot a_2 = -1$.
2. Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

Przykład

Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej opisanej równaniem: $y = -\frac{4}{3}x + 2$ i przechodzącej przez punkt $A = (-4, -1)$.

Rozwiązanie:

$$a_1 = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \text{ - obliczamy wartość współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej do prostej } y = -\frac{4}{3}x + 2$$

$$y = \frac{3}{4}x + b \text{ - określamy równanie prostej prostopadłej do danej prostej}$$

$$-1 = \frac{3}{4} \cdot (-4) + b \text{ - wstawiamy współrzędne punktu A: } x = -4 \text{ i } y = -1$$

$$b = 2 \text{ - obliczamy wartość współczynnika } b$$

Odpowiedź: Prosta o równaniu: $y = \frac{3}{4}x + 2$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{4}{3}x + 2$ i przechodzi przez punkt $A = (-4, -1)$.

Przykład

Napisz równanie ogólne prostej prostopadłej do prostej opisanej równaniem: $3x - 4y + 6 = 0$ i przecinającej oś OX w punkcie o odciętej -2 .

Rozwiązanie:

Korzystamy z warunku: Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$

$$\text{Skoro: } 3A_2 - 4B_2 = 0, \text{ to najlepiej dobrać: } A_2 = -B_1 = 4 \text{ i } B_2 = A_1 = 3$$

$$\text{Stąd równanie prostej prostopadłej do danej ma postać: } 4x + 3y + C_2 = 0$$

Punkt $A = (-2, 0)$ należy do prostej, więc jego współrzędne spełniają równanie prostej. Otrzymujemy:

$$4 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\text{Stąd: } C_2 = 8$$

$$\text{Równanie prostej prostopadłej do danej: } 4x + 3y + 8 = 0$$

Odpowiedź: Prosta prostopadła do $3x - 4y + 6 = 0$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej -2 opisana jest równaniem $4x + 3y + 8 = 0$.

Przykład

Określ wzajemne położenie prostych: $y = (m^2 - 3)x + 2$ i $y = x + m$ w zależności od parametru m .

Rozwiązanie:

Proste określone są równaniami kierunkowymi. Rozważmy następujące położenie prostych:

I. Proste równoległe

Proste są równoległe, gdy mają jednakowe współczynniki kierunkowe.

$$\text{Otrzymujemy: } m^2 - 3 = 1$$

$$\text{Stąd: } m^2 - 4 = 0$$

$$\text{Czyli: } m = 2 \text{ lub } m = -2$$

1. Dla $m = 2$ otrzymujemy równania prostych: $y = x + 2$ i $y = x + 2$. Zatem proste się pokrywają.

2. Dla $m = -2$ otrzymujemy równania prostych: $y = x + 2$ i $y = x - 2$. Zatem proste są równoległe, ale się nie pokrywają.

II. Proste prostopadłe

Proste są prostopadłe, gdy współczynniki kierunkowe tych prostych spełniają warunek $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Otrzymujemy: $(m^2 - 3) \cdot 1 = -1$

Stąd: $m^2 - 2 = 0$

Czyli: $m = \sqrt{2}$ lub $m = -\sqrt{2}$

1. Dla $m = \sqrt{2}$ otrzymujemy równania prostych: $y = -x + 2$ i $y = x + \sqrt{2}$. Proste są prostopadłe.

2. Dla $m = -\sqrt{2}$ otrzymujemy równania prostych: $y = -x + 2$ i $y = x - \sqrt{2}$. Proste są prostopadłe.

III. Proste nie są równoległe ani nie są prostopadłe

Dla $m \in \mathbb{R} - \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$ otrzymujemy równania prostych, które się przecinają pod innym kątem niż kąt prosty.

9.3. Odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych

Długość odcinka

Odległość między punktami A i B jest równa długości odcinka AB .

Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Przykład

Do okręgu o środku $S = (1, -2)$ należy punkt $A = (4, 1)$. Oblicz pole trójkąta równobocznego opisanego na tym okręgu.

Rozwiązanie:

Promień okręgu jest odcinkiem SA . Obliczamy długość promienia:

$$r = |SA| = \sqrt{(4-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Skoro okrąg o promieniu r jest wpisany w trójkąt równoboczny o boku a , to zachodzi zależność $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$\text{Zapisujemy: } 3\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Stąd: } a = 6\sqrt{6}$$

$$\text{Zapisujemy wzór na pole trójkąta równobocznego: } P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Otrzymujemy: } P = \frac{(6\sqrt{6})^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$P = 54\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Pole tego trójkąta jest równe $54\sqrt{3}$.

Przykład

Punkty $K = (1, 4)$, $L = (-5, 1)$, $M = (7, -3)$ i $N = (7, 2)$ są wierzchołkami trapezu $KLMN$. Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.

Rozwiązanie:

Musimy ustalić, które z odcinków: KL , LM , MN czy NK są podstawami. Ponieważ podstawy trapezu są równoległe, sprawdzamy, które z prostych zawierających boki trapezu są równoległe.

Wyznaczamy współczynniki kierunkowe prostych zawierających boki trapezu. Korzystamy ze wzoru

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \text{ gdy } x_A \neq x_B \text{ oraz dwa punkty } A \text{ i } B \text{ mają współrzędne } A = (x_A, y_A) \text{ i } B = (x_B, y_B).$$

Prosta przechodząca przez punkty $K = (1, 4)$, $L = (-5, 1)$:

$$\text{Otrzymujemy: } a = \frac{1-4}{-5-1} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

Prosta przechodząca przez punkty $L = (-5, 1)$, $M = (7, -3)$:

$$\text{Otrzymujemy: } a = \frac{-3-1}{7+5} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Prosta przechodząca przez punkty $M = (7, -3)$, $N = (7, 2)$:



Zauważamy, że punkty te mają takie same współrzędne x . wobec tego równanie prostej MN w postaci ogólnej to: $x - 7 = 0$. Prosta nie ma równania w postaci kierunkowej.

Prosta przechodząca przez punkty $N = (7, 2)$, $K = (1, 4)$:

$$\text{Otrzymujemy: } a = \frac{4-2}{1-7} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Proste NK i LM są równoległe, gdyż mają taki sam współczynnik kierunkowy równy $-\frac{1}{3}$. Wobec tego podstawami trapezu są odcinki NK i LM .

Obliczamy współrzędne punktu $A = (x_A, y_A)$, który jest środkiem odcinka NK : $A = \left(\frac{x_N + x_K}{2}, \frac{y_N + y_K}{2} \right)$

$$\text{Otrzymujemy: } A = \left(\frac{7+1}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = (4, 3)$$

Obliczamy współrzędne punktu $B = (x_B, y_B)$, który jest środkiem odcinka LM : $A = \left(\frac{x_L + x_M}{2}, \frac{y_L + y_M}{2} \right)$

$$\text{Otrzymujemy: } B = \left(\frac{-5+7}{2}, \frac{1-3}{2} \right) = (1, -1)$$

Obliczamy długość odcinka AB : $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$$\text{Otrzymujemy: } |AB| = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

Odpowiedź: Długość odcinka łączącego środki podstaw tego trapezu jest równa 5.

Przykład

Na prostej o równaniu $y = 2x + 1$ wyznacz punkt B , który leży najbliżej punktu $A = (3, 1)$.

Rozwiązanie:

Skoro punkt B leży na prostej o równaniu $y = 2x + 1$, to jego współrzędne możemy zapisać tak: $B = (x_B, 2x_B + 1)$

Obliczamy długość odcinka AB : $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$$\text{Otrzymujemy: } |AB| = \sqrt{(x_B - 3)^2 + (2x_B + 1 - 1)^2}$$

$$\text{Stąd: } |AB| = \sqrt{5x_B^2 - 6x_B + 9}$$

Odległość pomiędzy punktami A i B będzie najmniejsza wówczas, gdy wartość funkcji $f(x) = 5x_B^2 - 6x_B + 9$ będzie najmniejsza. Funkcja kwadratowa o współczynniku $a > 0$ przyjmuje wartość najmniejszą w wierzchołku paraboli.

Wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu B jako pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Wyznaczamy drugą współrzędną punktu B : $y_B = 2 \cdot 0,6 + 1 = 2,2$

Odpowiedź: Współrzędne szukanego punktu to $B = (0,6, 2,2)$.

9.4. Równanie okręgu

Okręgiem o środku S i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r .

Równaniem okręgu jest równanie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w **postaci kanonicznej**.

Równaniem okręgu jest równanie $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w **postaci ogólnej**. Promień tego okręgu jest równy $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Przykład

Zapisz równanie okręgu o środku w punkcie $(-1, 2)$ przechodzącego przez punkt $A = (2, -3)$.

Rozwiązanie:

Do równania okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ podstawiamy $a = -1$ i $b = 2$. Otrzymujemy:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = r^2$$

Punkt $A = (2, -3)$ należy do okręgu, a więc jego współrzędne spełniają równanie tego okręgu. Otrzymujemy: $(2+1)^2 + (-3-2)^2 = r^2$

$$\text{Wyznaczamy promień okręgu: } r^2 = 3^2 + (-5)^2$$

$$\text{Stąd: } r^2 = 34$$

$$\text{Zapisujemy równanie okręgu: } (x+1)^2 + (y-2)^2 = 34$$

Odpowiedź: Okrąg spełniający warunki zadania ma równanie: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 34$.

Przykład

Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB o końcach $A = (-1, 3)$ i $B = (-5, 7)$.

Rozwiązanie:

Skoro odcinek AB jest średnicą okręgu, to środek tego odcinka jest środkiem S okręgu.

$$\text{Wyznaczamy współrzędne środka } S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) \text{ i odcinka } AB: S = \left(\frac{-1-5}{2}, \frac{3+7}{2} \right).$$

$$\text{Otrzymujemy: } S = (-3, 5)$$

Promień okręgu jest równy połowie średnicy AB .

$$\text{Obliczamy długość odcinka } AB: |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\text{Otrzymujemy: } |AB| = \sqrt{(-5+1)^2 + (7-3)^2}$$

$$\text{Stąd: } |AB| = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Obliczamy promień okręgu: } r = \frac{|AB|}{2}$$

$$\text{Stąd: } r = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Zapisujemy równanie okręgu o środku } S = (-3, 5) \text{ i promieniu } r = 2\sqrt{2}: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\text{Otrzymujemy: } (x+3)^2 + (y-5)^2 = 8$$

Odpowiedź: Okrąg opisany jest równaniem $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 8$.

Przykład

Wyznacz środek i promień okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 5 = 0$.

Rozwiązanie:

Korzystając z wzoru na postać ogólną okręgu, zapisujemy $-2a = -6$, $-2b = 4$ i $c = -5$.

Otrzymujemy $a = 3$, $b = -2$. Zapisujemy współrzędne środka okręgu $S = (3, -2)$.

$$\text{Obliczamy promień: } r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}. \text{ Stąd } r = \sqrt{3^2 + (-2)^2 - (-5)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Odpowiedź: Środek okręgu jest w punkcie $S = (3, -2)$, a promień jest równy $r = 3\sqrt{2}$.

Przykład

Określ, dla jakich parametrów m równanie $x^2 + y^2 - m^2 + 5m - 6 = 0$ przedstawia okrąg.

Rozwiązanie:

Korzystając z wzoru na postać ogólną okręgu, zapisujemy $-2a = 0$, $-2b = 0$ i $c = -m^2 + 5m - 6$.

Otrzymujemy $a = 0$, $b = 0$. Zapisujemy współrzędne środka okręgu $S = (0, 0)$.

$$\text{Obliczamy promień: } r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}. \text{ Stąd: } r = \sqrt{-(-m^2 + 5m - 6)} = \sqrt{m^2 - 5m + 6}$$

Aby równanie było równaniem okręgu, musi być spełniony warunek $r > 0$.

$$\text{Zapisujemy } \sqrt{m^2 - 5m + 6} > 0, \text{ czyli: } m^2 - 5m + 6 > 0$$

$$\text{Obliczamy: } \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1, \text{ stąd: } m_1 = \frac{5-1}{2} = 2, m_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Rozwiązaniem nierówności jest zbiór: $m \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

Odpowiedź: Równanie to jest równaniem okręgu dla $m \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.



Przykład

Napisz równanie okręgu zawierającego punkty $A = (-5, -3)$ i $B = (0, 2)$, którego środek należy do prostej o równaniu $y = -2x - 2$.

Rozwiązanie:

Skoro środek S okręgu należy do prostej o równaniu $y = -2x - 2$, to jego współrzędne zapiszemy $S = (a, -2a - 2)$.

Zapiszemy równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, -2a - 2)$: $(x - a)^2 + (y + 2a + 2)^2 = r^2$

Ponieważ punkty $A = (-5, -3)$ i $B = (0, 2)$ należą do okręgu, wobec tego współrzędne tych punktów spełniają równanie okręgu zapisane powyżej.

Otrzymujemy układ równań:
$$\begin{cases} (-5 - a)^2 + (-3 + 2a + 2)^2 = r^2 \\ (0 - a)^2 + (2 + 2a + 2)^2 = r^2 \end{cases}$$

Zapisujemy układ w prostszej postaci:
$$\begin{cases} (-5 - a)^2 + (-1 + 2a)^2 = r^2 \\ (-a)^2 + (4 + 2a)^2 = r^2 \end{cases}$$

Porównujemy lewe strony układu równań: $25 + 10a + a^2 + 1 - 4a + 4a^2 = a^2 + 16 + 16a + 4a^2$.

Obliczamy a . Otrzymujemy:

$$25 + 10a + 1 - 4a = 16 + 16a$$

$$-10a = -10 \quad | :(-10)$$

$$a = 1$$

Obliczamy r^2 : $(-1)^2 + (4 + 2)^2 = r^2$

$$r^2 = 37$$

Zapisujemy równanie okręgu $(x - a)^2 + (y + 2a + 2)^2 = r^2$, podstawiając $a = 1$ i $r^2 = 37$:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 37$$

Odpowiedź: Okrąg spełniający warunki zadania opisuje równanie: $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 37$.

Przykład

Określ liczbę punktów wspólnych okręgów o równaniach $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ i $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Rozwiązanie:

Okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ ma środek w punkcie $S_1 = (-1, -2)$ i promień $r_1 = 2$.

Okrąg o równaniu $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ ma środek w punkcie $S_2 = (2, -1)$ i promień $r_2 = 3$.

Obliczamy odległość środków tych okręgów.

$$|S_1 S_2| = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - (-2))^2} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{10}$$

Wyznaczamy sumę i różnicę długości promieni.

$$r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5$$

$$|r_1 - r_2| = |2 - 3| = 1$$

Zapisujemy $1 < \sqrt{10} < 5$, czyli $|r_1 - r_2| < |S_1 S_2| < r_1 + r_2$. Wobec tego okręgi mają dwa punkty wspólne.

Odpowiedź: Okręgi mają dwa punkty wspólne.

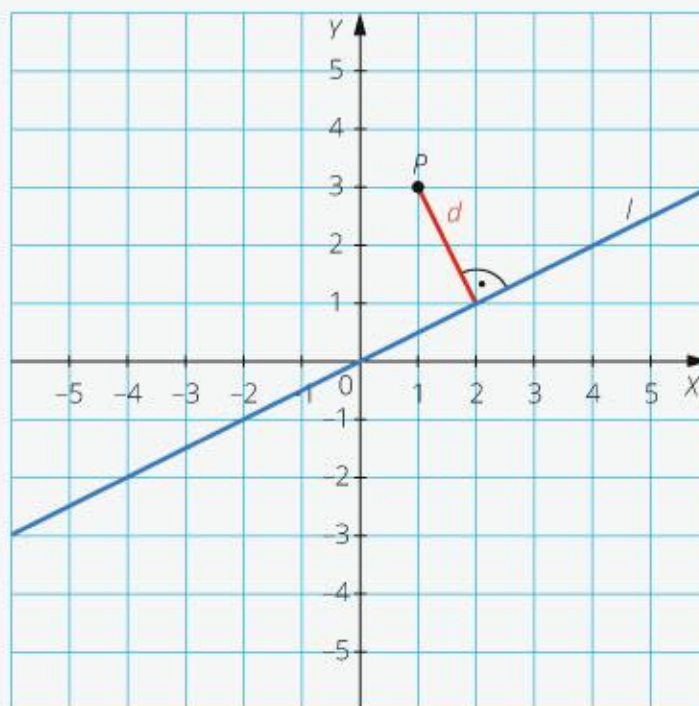
9.5. Odległość punktu od prostej

Odległość punktu od prostej

Odległością punktu P od prostej l nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l , to jego odległość od tej prostej jest równa 0.

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej l o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Przykład

Oblicz odległość punktu $P(-\sqrt{3}, 1)$ od prostej $k: 4x - 3y + 2 = 0$.

Rozwiązanie:

Odczytujemy z równania prostej wartości współczynników: $A = 4, B = -3, C = 2$

Odczytujemy współrzędne punktu P : $x_0 = -\sqrt{3}, y_0 = 1$

Obliczamy odległość punktu P od prostej k :

$$d = \frac{|4 \cdot (-\sqrt{3}) + (-3) \cdot 1 + 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-4\sqrt{3} - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{4\sqrt{3} + 1}{5}$$

Aby obliczyć odległość punktu od prostej opisanej równaniem kierunkowym, korzystając ze wzoru na odległość punktu od prostej, należy zapisać równanie prostej w postaci ogólnej.

Przykład

Oblicz odległość punktu $M(-2, 4)$ od prostej $k: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy równanie prostej k w postaci ogólnej:

$$k: y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

$$3x + 6y - 2 = 0$$

Odczytujemy z równania prostej wartości współczynników: $A = 3, B = 6, C = -2$

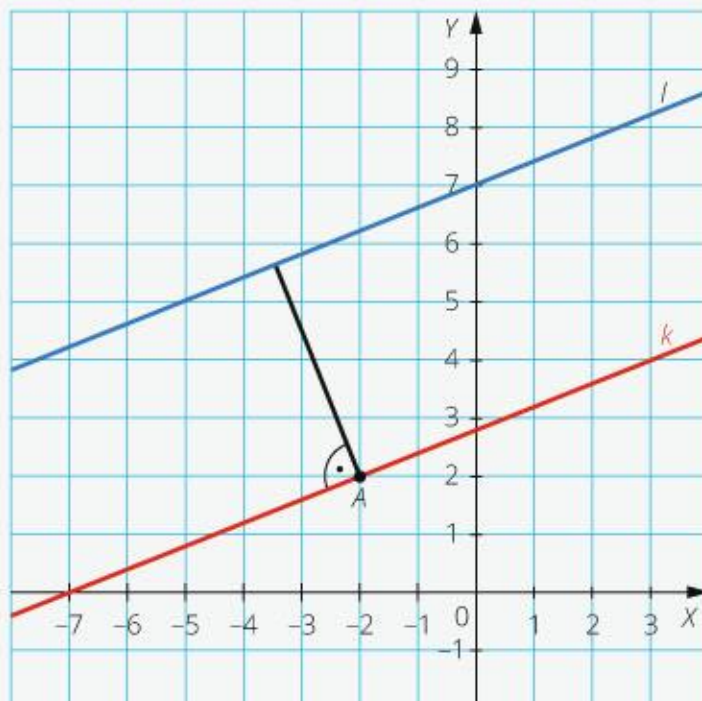
Odczytujemy współrzędne punktu M : $x_0 = -2, y_0 = 4$

Obliczamy odległość punktu M od prostej k :

$$d = \frac{|3 \cdot (-2) + 6 \cdot 4 - 2|}{\sqrt{3^2 + 6^2}} = \frac{|-6 + 24 - 2|}{\sqrt{45}} = \frac{16}{3\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{15}$$

Odległość między dwiema prostymi równoległymi

Odległość między dwiema prostymi równoległymi jest równa odległości dowolnego punktu jednej z tych prostych od drugiej prostej.



Najkrótszy odcinek łączący dwa punkty prostych równoległych musi być prostopadły do tych prostych.

Przykład

Oblicz odległość między prostymi równoległymi $l: 3x + y - 4 = 0$ i $k: 3x + y + 2 = 0$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy dowolny punkt, który należy do jednej z prostych, np. do prostej l .

Do równania prostej l podstawiamy $x = 0$ i otrzymujemy $y = 4$, zatem punkt $P(0, 4)$ należy do prostej l .

Odczytujemy z równania prostej k wartości współczynników: $A = 3, B = 1, C = 2$

Odczytujemy współrzędne punktu P : $x_0 = 0, y_0 = 4$

Obliczamy odległość punktu P od prostej k :

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

9.6. Punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli

Punkty wspólne prostej i okręgu

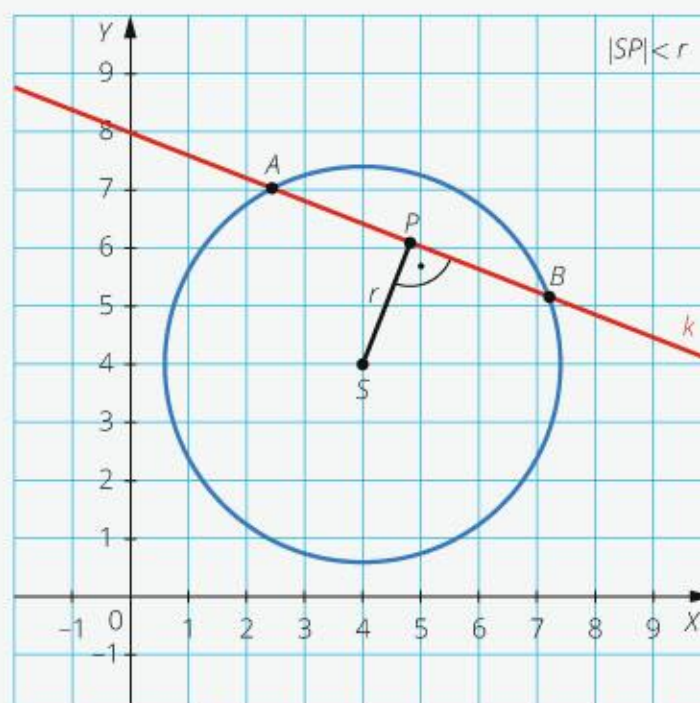
Liczba punktów wspólnych prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej zależy od odległości prostej od środka okręgu.

Oznaczmy odległość środka okręgu od prostej jako $|SP|$.

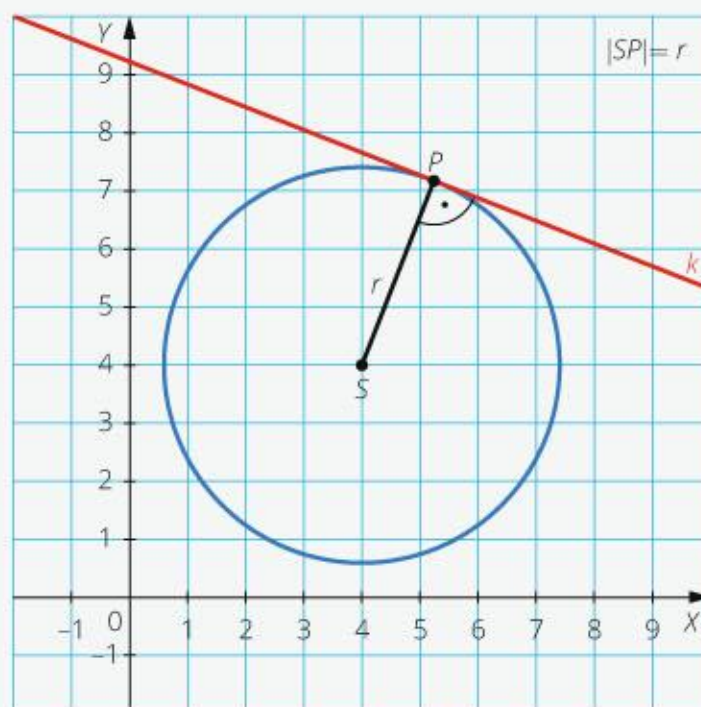
Sieczną okręgu nazywamy prostą, która może mieć dwa punkty wspólne z okręgiem.

$$|SP| < r$$

Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.



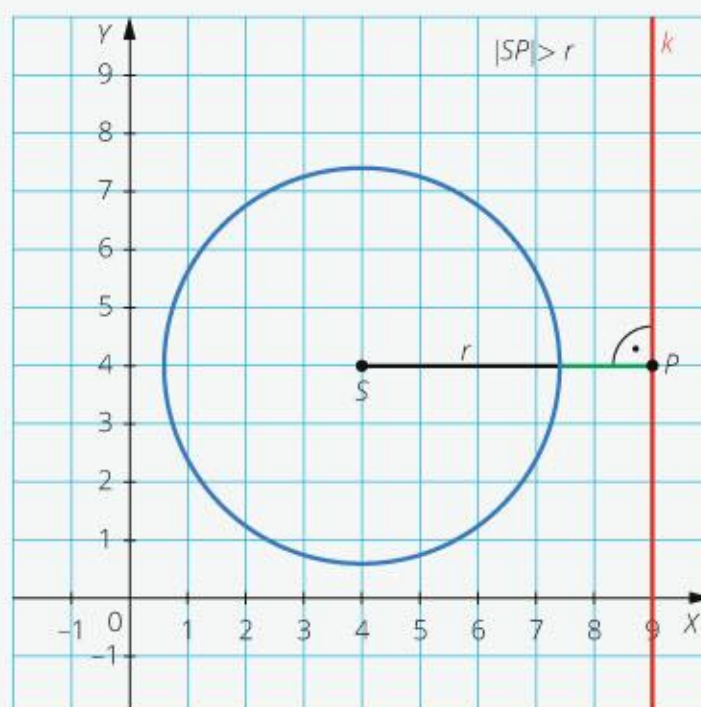
> | Styczną do okręgu nazywamy prostą, która może mieć jeden punkt wspólny z okręgiem.



$$|SP| = r$$

Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

Prosta może nie mieć punktów wspólnych z okręgiem (są rozłączne).



$$|SP| > r$$

Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Przykład

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 3 ma prosta l ?

a) $S(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $l: 4x - 3y + 8 = 0$

b) $S(-2, -11)$, $l: x - 4y + 3 = 0$

c) $S(-2, -3)$, $l: 3x - 4y - 21 = 0$

Rozwiązanie:

a) Wyznaczamy odległość punktu S od prostej l :

$$d = \frac{|4 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 3\sqrt{2} + 8|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-5\sqrt{2} + 8|}{\sqrt{25}} = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{5} < 3$$

Odległość środka okręgu jest mniejsza od promienia okręgu, więc okrąg i prosta mają dwa punkty wspólne.



b) Wyznaczamy odległość punktu S od prostej l :

$$d = \frac{|1 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-11) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|45|}{\sqrt{17}} = \frac{45\sqrt{17}}{17} > 3$$

Odległość środka okręgu jest większa od promienia okręgu, więc okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych.

c) Wyznaczamy odległość punktu S od prostej l :

$$d = \frac{|3 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-3) - 21|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = 3$$

Odległość środka okręgu jest równa promieniowi okręgu, więc okrąg i prosta mają jeden punkt wspólny.

Liczba punktów wspólnych prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej możemy również określać, rozwiązując odpowiednie układy równań.

Przykład

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\text{a) } \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (x+3)^2 + (y-1)^2 = 16 \\ 2x + y - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ y = 7 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

a) Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

Z drugiego równania wyznaczamy $y = x + 1$ i podstawiamy do pierwszego równania:

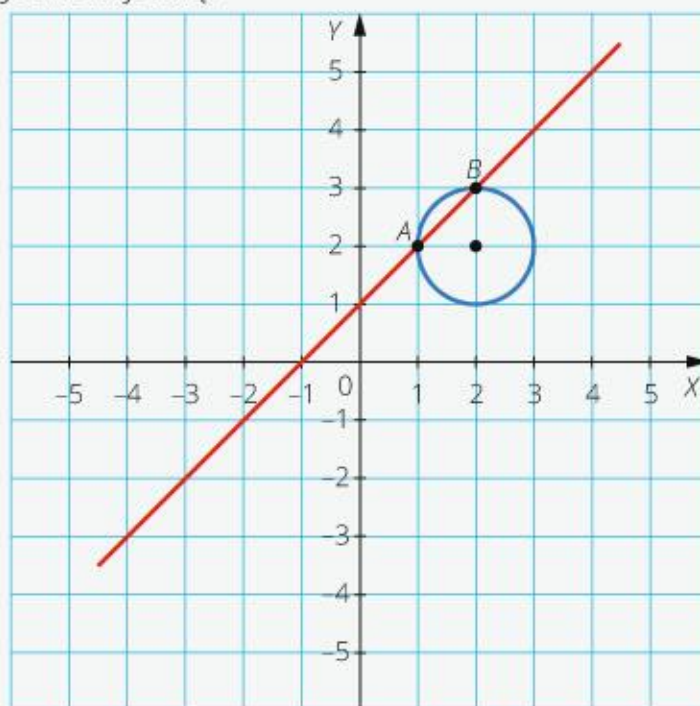
$$(x-2)^2 + (x-1)^2 = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \text{ stąd: } x = 1 \text{ lub } x = 2$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Podajemy interpretację geometryczną:



Okrąg $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ i prosta $x - y + 1 = 0$ mają dwa punkty wspólne: $A(1, 2)$ i $B(2, 3)$.

b) Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

Z drugiego równania wyznaczamy $y = -2x + 6$ i podstawiamy do pierwszego równania:

$$(x+3)^2 + (-2x+5)^2 = 16$$

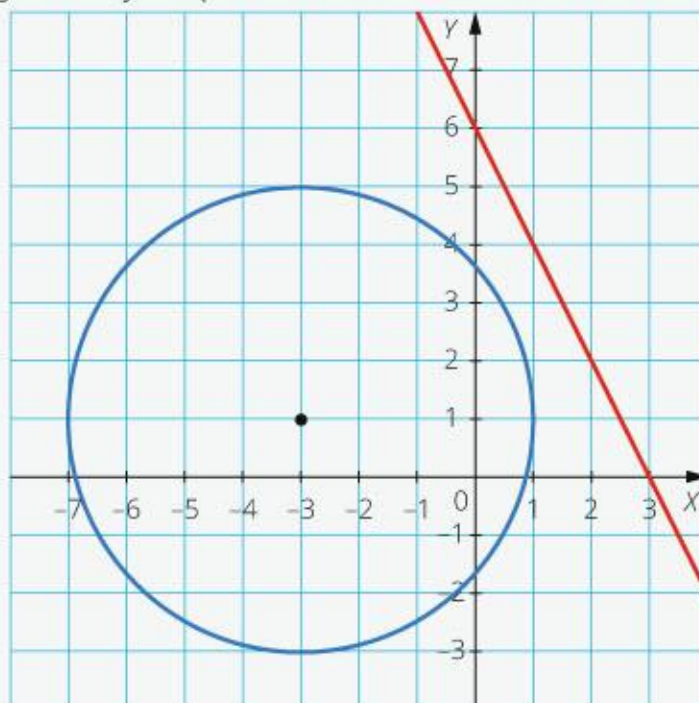
$$5x^2 - 14x + 18 = 0$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 18 = -164 < 0$$

Układ równań jest sprzeczny, zatem prosta $2x + y - 6 = 0$ nie ma punktów wspólnych z okręgiem

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16.$$

Podajemy interpretację geometryczną:



Okrąg $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$ i prosta $2x + y - 6 = 0$ nie mają punktów wspólnych.

c) Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

Z drugiego równania $y = 7$ podstawiamy do pierwszego równania:

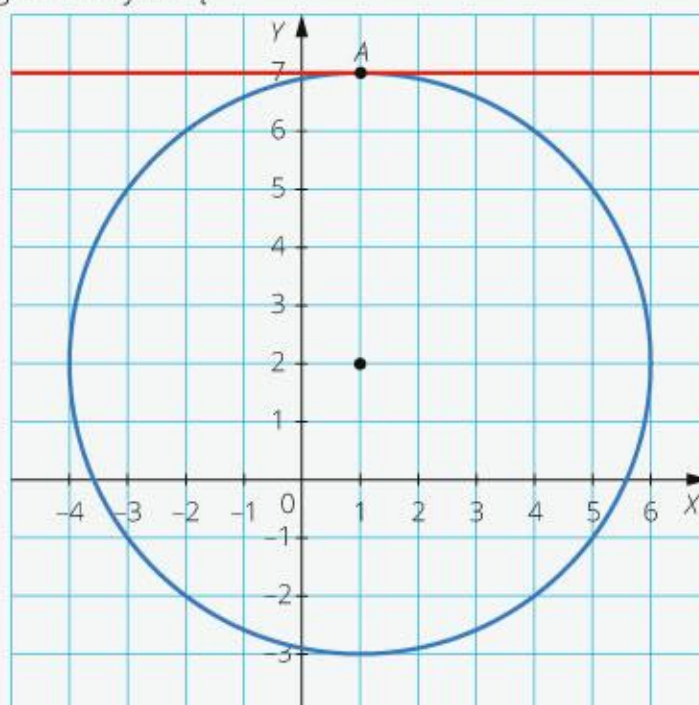
$$(x-1)^2 + 5^2 = 25$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ stąd } x = 1$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$$

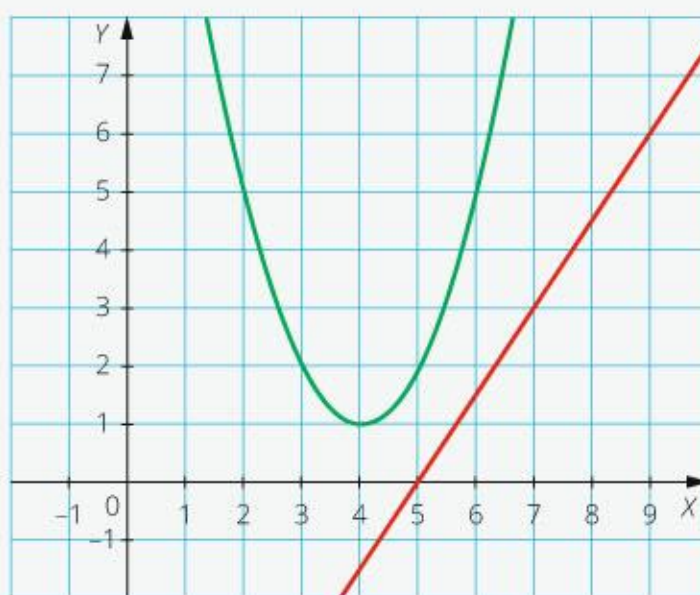
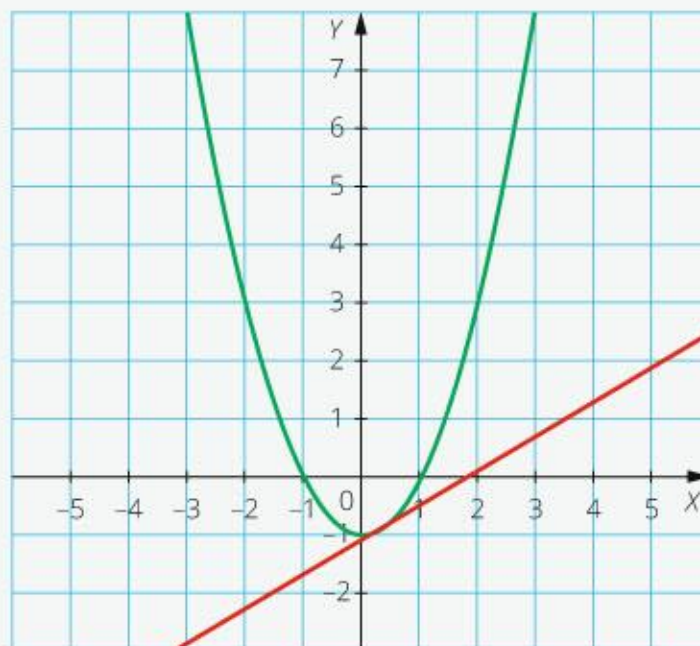
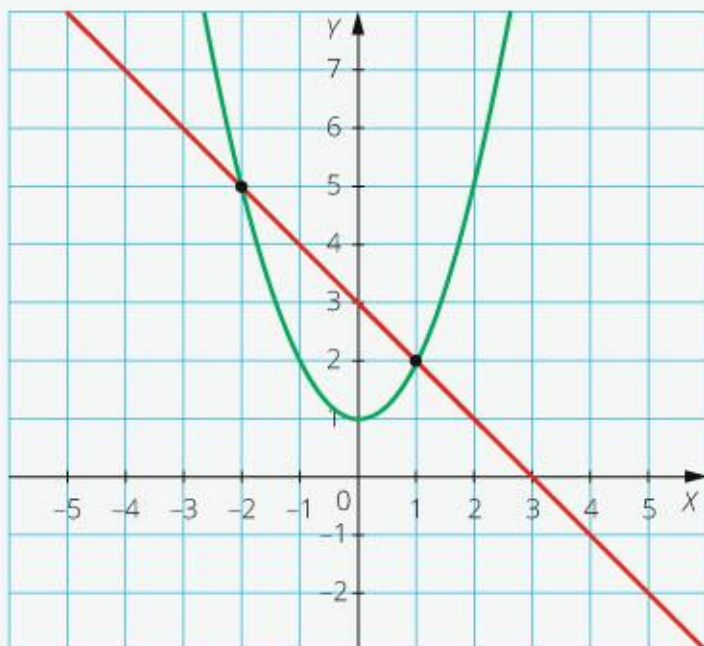
Podajemy interpretację geometryczną:



Okrąg $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ i prosta $y = 7$ mają jeden punkt wspólny $A(1, 7)$.

Punkty wspólne prostej i paraboli

Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.



Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy **sieczną** paraboli. Prostą, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do paraboli.

Przykład

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\text{a) } \begin{cases} y = -x^2 \\ y = -2x + 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 2x - y - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} y = -x^2 - 2x + 3 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Porównujemy prawe strony równań:

$$-x^2 = -2x + 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

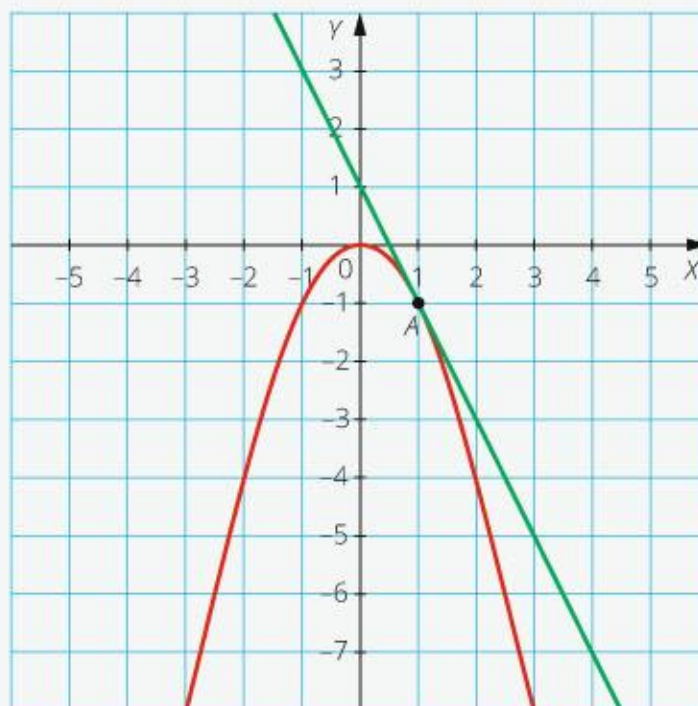
$$(x - 1)^2 = 0, \text{ stąd: } x = 1$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Podajemy interpretację geometryczną.

Parabola $y = -x^2$ i prosta $y = -2x + 1$ mają jeden punkt wspólny: $A(1, -1)$.



b) Z drugiego równania wyznaczamy $y = 2x - 8$ i porównujemy prawe strony równań:

$$x^2 - 2x - 8 = 2x - 8$$

$$x^2 - 4x = 0$$

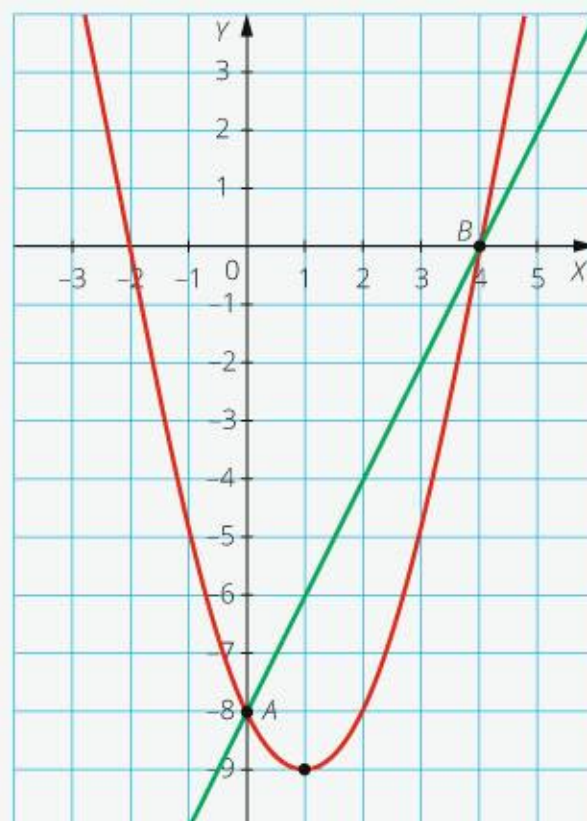
$$x(x - 4) = 0, \text{ stąd: } x = 0 \text{ lub } x = 4$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -8 \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Podajemy interpretację geometryczną:

Parabola $y = x^2 - 2x - 8$ i prosta $2x - y - 8 = 0$ mają dwa punkty wspólne $A(0, -8)$ i $B(4, 0)$.



c) Porównujemy prawe strony równań:

$$-x^2 - 2x + 3 = -x + 4$$

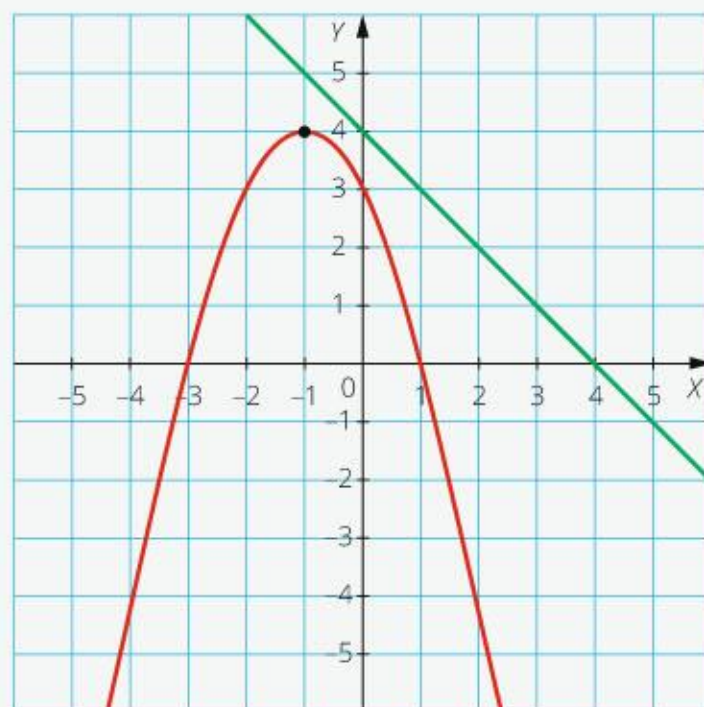
$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

Układ równań jest sprzeczny, zatem prosta $y = -x + 4$ nie ma punktów wspólnych z parabolą $y = -x^2 - 2x + 3$.

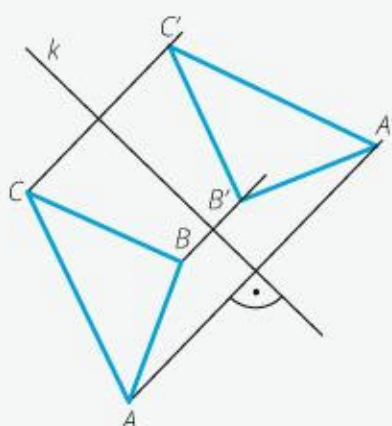
Podajemy interpretację geometryczną:

Parabola $y = -x^2 - 2x + 3$ i prosta $y = -x + 4$ nie mają punktów wspólnych.



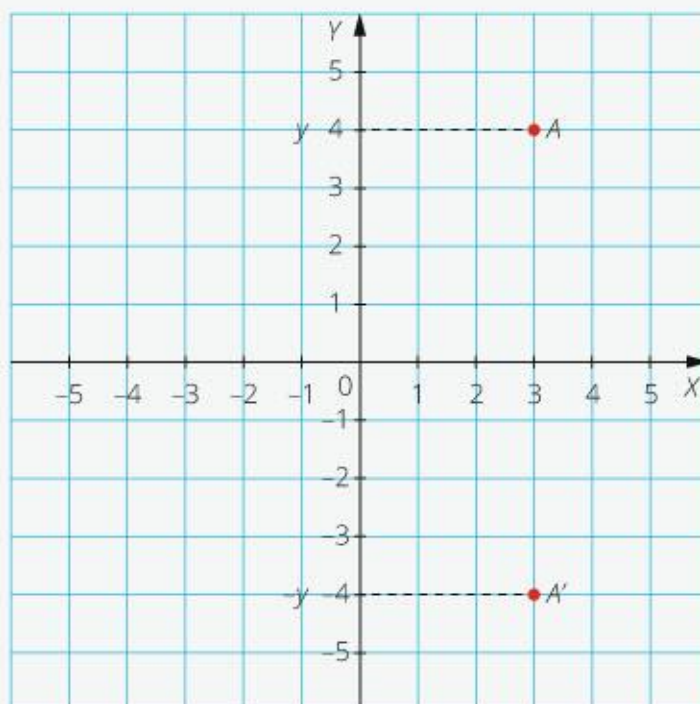
9.7. Symetria osiowa i symetria środkowa

Symetrią osiową względem prostej k nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej. Prostą l nazywamy **osią symetrii**.





Punktem symetrycznym do punktu $A(x, y)$ względem osi OX układu współrzędnych jest punkt $A'(x, -y)$.



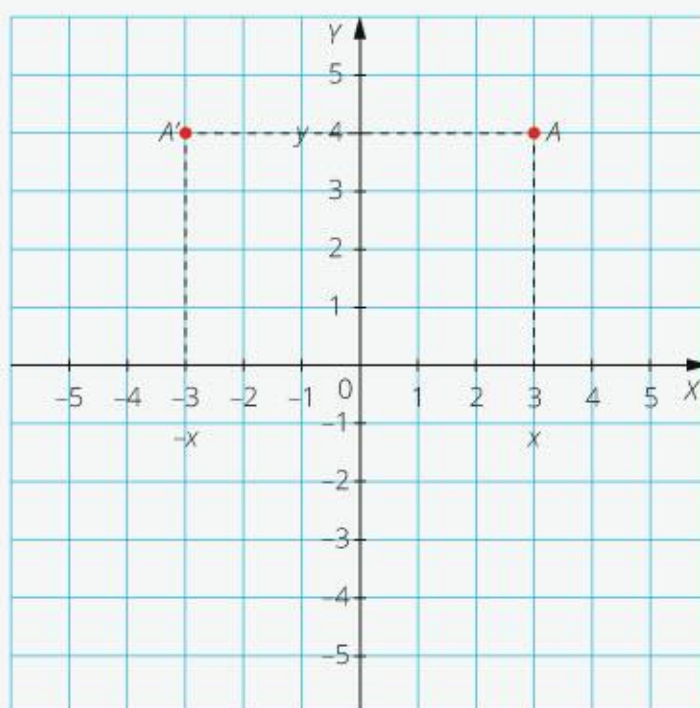
Przykład

Dane są punkty $A(-5, -3)$, $B(2, -1)$, $C(-1, 2)$. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta będącego obrazem trójkąta ABC w symetrii względem osi OX .

Rozwiązanie:

Obrazem punktu A w symetrii względem osi OX jest punkt $A'(-5, 3)$, punktu B jest punkt $B'(2, 1)$, punktu C jest punkt $C'(-1, -2)$.

Punktem symetrycznym do punktu $A(x, y)$ względem osi OY układu współrzędnych jest punkt $A'(-x, y)$.



Przykład

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem osi OY do okręgu o równaniu:

$$K: (x+5)^2 + (y-3)^2 = 36$$

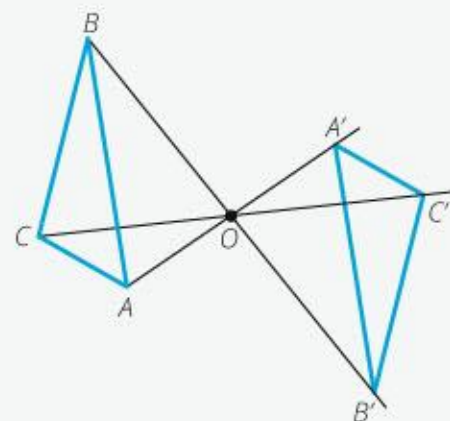
Rozwiązanie:

Środkiem okręgu K jest punkt $S(-5, 3)$, a jego promień $r = 6$. Zatem środkiem okręgu K' jest punkt symetryczny do S względem osi OY , czyli $S'(5, 3)$, a jego promień $r' = 6$.

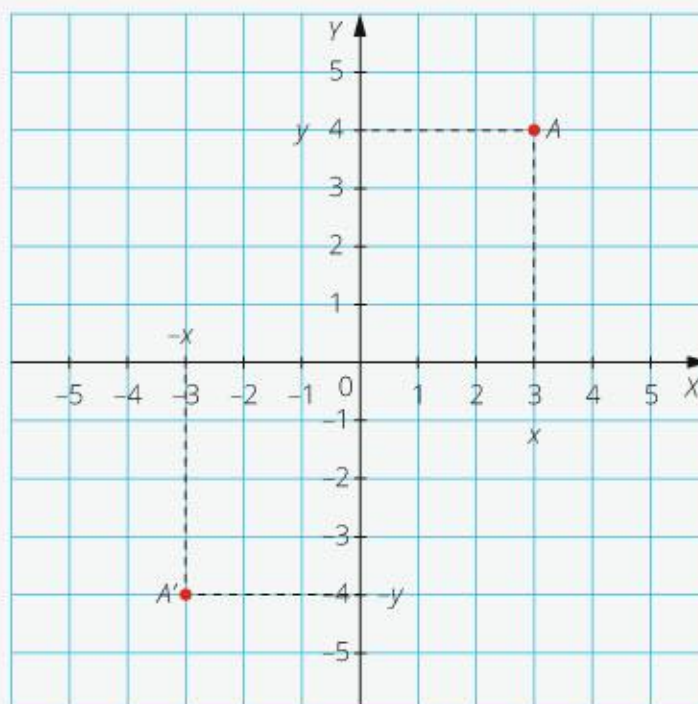
Równanie okręgu K' ma postać $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 36$.

Symetria środkowa

Symetrią środkową względem punktu O nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O . Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**.



Punktem symetrycznym do punktu $A(x, y)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt $A'(-x, -y)$.



Przykład

Znajdź współrzędne wierzchołków wielokąta symetrycznego do czworokąta $ABCD$ względem początku układu współrzędnych, jeśli $A(-5\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$, $C(6\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $D(\sqrt{3}, \sqrt{2})$.

Rozwiązanie:

Wielokątem symetrycznym do czworokąta $ABCD$ jest czworokąt o wierzchołkach w punktach $A'(5\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B'(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, $C'(-6\sqrt{2}, -\sqrt{3})$, $D'(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$.

9.8. Wektory w układzie współrzędnych

Wektory w układzie współrzędnych

Wektory przedstawia się na dwa sposoby. Pierwszy to ujęcie **graficzne**, gdzie wektor przedstawiamy przez narysowanie strzałki na płaszczyźnie. Drugi sposób to ujęcie **analityczne**, wówczas wektor to układ dwóch liczb – współrzędnych na płaszczyźnie.

Wektor o początku A i końcu B oznaczamy: $\overrightarrow{AB}$ lub małymi literami: $\vec{u}$.



Wektor $\overrightarrow{AB}$ możemy określić, podając współrzędne początku A i współrzędne końca B .

Punkt A będący początkiem wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy też punktem zaczepienia wektora, a o wektorze $\overrightarrow{AB}$ mówimy, że jest zaczepiony w punkcie A .



Przykład

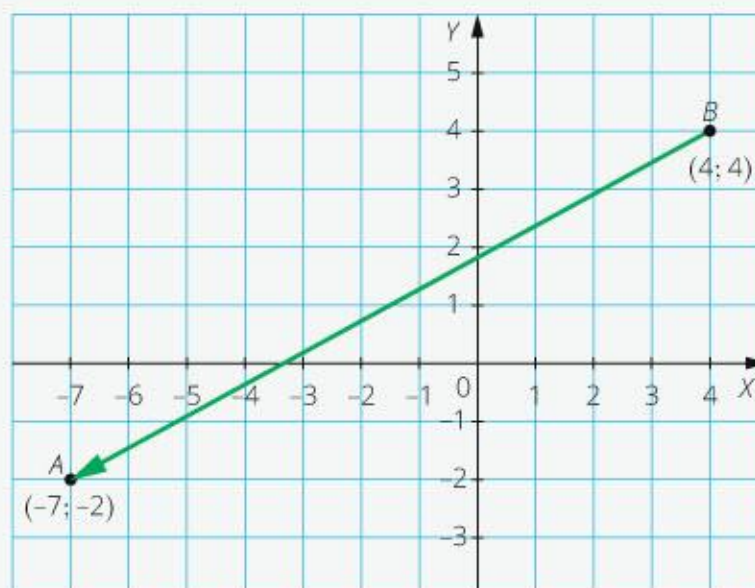
Narysuj wektor $\overrightarrow{AB}$, jeśli $A(4, 4)$ i $B(-7, -2)$.

Rozwiązanie:

Jeśli punkt $A(x_A, y_A)$ jest początkiem wektora i punkt $B(x_B, y_B)$ jest końcem tego wektora, to

współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ są równe:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$



Przykład

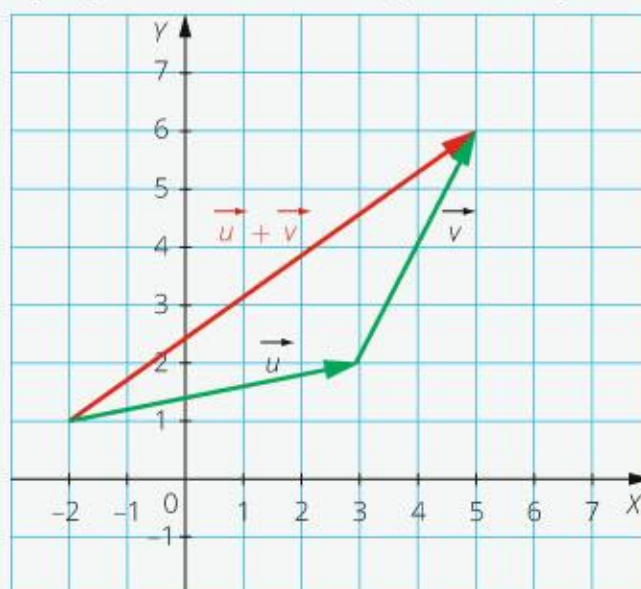
Podaj współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli $A(-3, 5)$ i $B(4, -6)$.

Rozwiązanie:

$$\overrightarrow{AB} = [4 - (-3), -6 - 5] = [7, -11]$$

Aby określić wektor zaczepiony, podajemy współrzędne jego początku i końca. Rozważamy również wektor swobodny, dla którego podajemy wyłącznie jego współrzędne $[a, b]$.

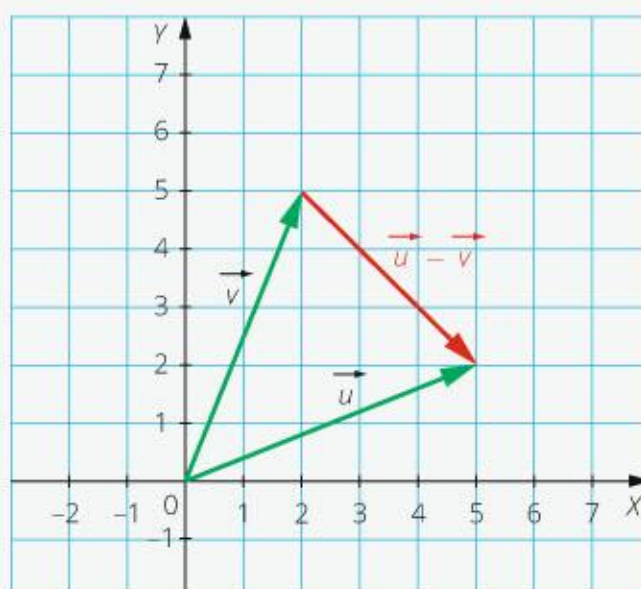
Sumą wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$ jest wektor: $\vec{u} + \vec{v} = [a + c, b + d]$.



Wektor zerowy ma symbol $\vec{0}$ i oznaczamy go: $\vec{0} = [0, 0]$.

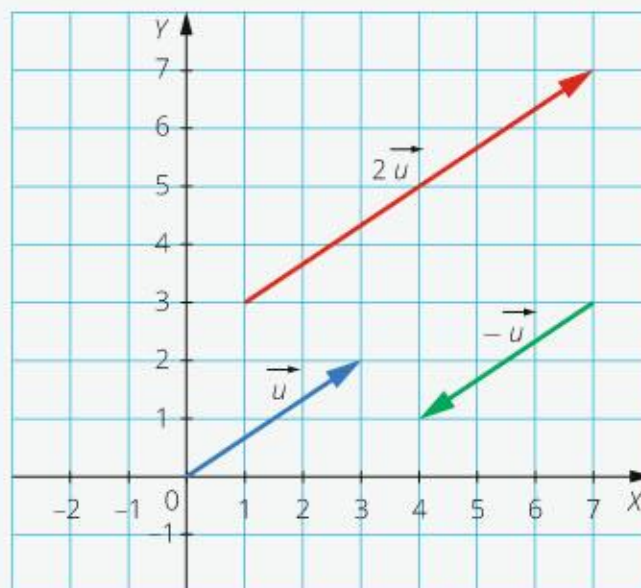
Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są **przeciwnie** wtedy, gdy ich suma jest wektorem zerowym. Wektor przeciwny do wektora $\vec{u}$ oznaczamy $-\vec{u}$.

Różnicą wektorów $\vec{u} = [a, b]$ i $\vec{v} = [c, d]$ jest wektor: $\vec{u} - \vec{v} = [a - c, b - d]$.





Iloczynem wektora $\vec{u} = [a, b]$ przez liczbę $k \in \mathbb{R}$ nazywamy wektor: $k\vec{u} = [ka, kb]$.



Wektor zerowy jest równoległy do dowolnego wektora. Jeśli niezerowe wektory są równoległe, to mają ten sam kierunek.

Przykład

Dane są wektory $\vec{u} = [2, -5]$ i $\vec{v} = [-3, 4]$. Oblicz:

- a) sumę wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, b) różnicę wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, c) wektor $-\frac{1}{3}\vec{u}$.

Rozwiązanie:

$$\text{a) } \vec{u} + \vec{v} = [2 + (-3), -5 + 4] = [-1, -1]$$

$$\text{b) } \vec{u} - \vec{v} = [2 - (-3), -5 - 4] = [5, -9]$$

$$\text{c) } -\frac{1}{3}\vec{u} = \left[-\frac{1}{3} \cdot 2, -\frac{1}{3} \cdot (-5)\right] = \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$$

I Długość wektora $\vec{u} = [u_1, u_2]$ obliczamy ze wzoru: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

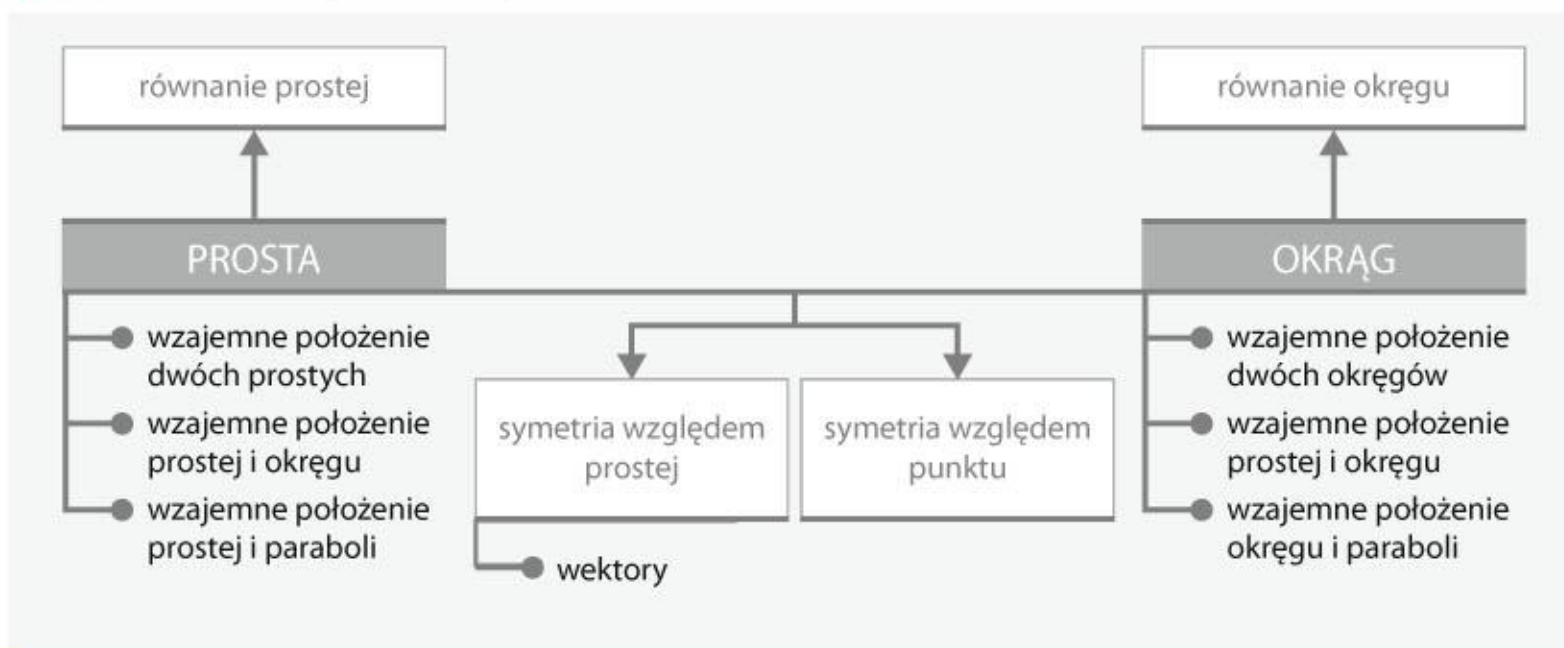
Przykład

Oblicz długość wektora $\vec{u} = [6, -4]$

Rozwiązanie:

$$|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

9.9. Utrwalamy wiedzę



10

Stereometria

10.1. Wzajemne położenie prostych w przestrzeni

Położenie prostych w przestrzeni

W przestrzeni proste mają następujące położenia:

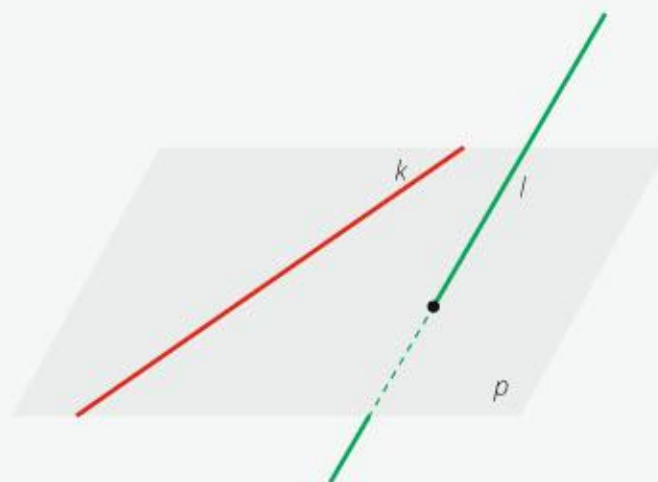
1. Proste równoległe – leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



2. Proste przecinające się – leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny.



3. Proste skośne – nie leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych.



Przykład

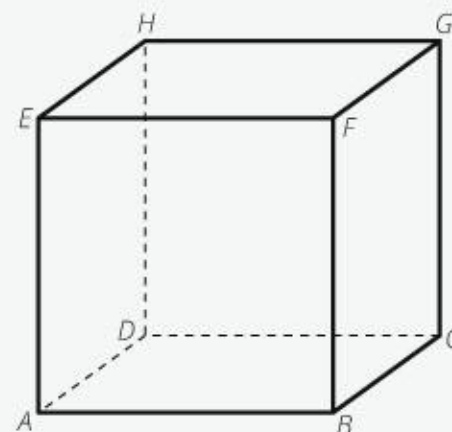
Wskaż na rysunku sześcianu krawędzie zawarte w prostych równoległych, przecinających się, skośnych.

Rozwiązanie:

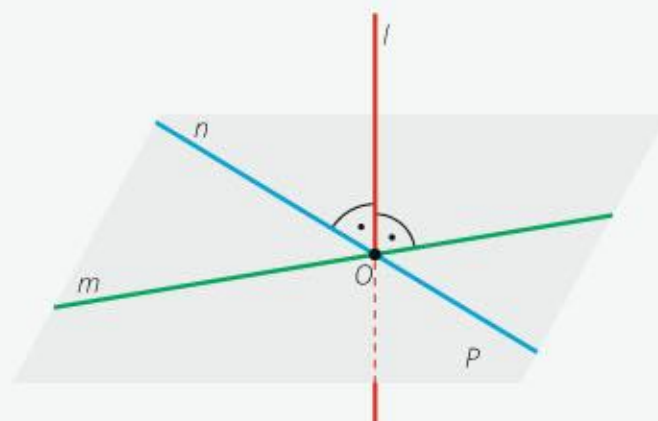
Krawędzie zawarte w prostych równoległych: AB, CD, EF, GH lub BC, AD, FG, EH lub EA, FB, GC, HD .

Krawędzie zawarte w prostych przecinających się: $AB, BC; AB, AD; AB, AE; AB, BF$ itd.

Krawędzie zawarte w prostych skośnych: $AB, HD; AB, GC; AE, GH; AE, CD$ itd.



Jeżeli prosta l jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych m i n zawartych w płaszczyźnie P , to jest ona prostopadła do płaszczyzny P .



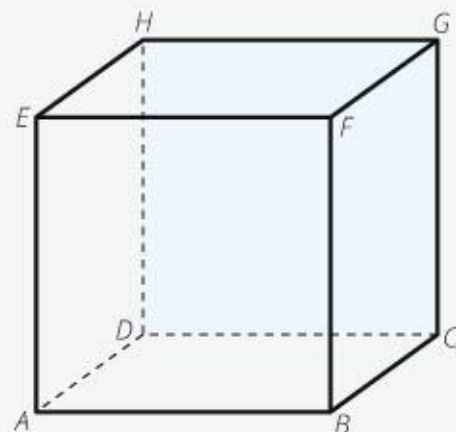


Przykład

Wskaż na rysunku sześcianu krawędzie zawarte w prostych prostopadłych do płaszczyzny zawierającej ścianę $CDHG$.

Rozwiązanie:

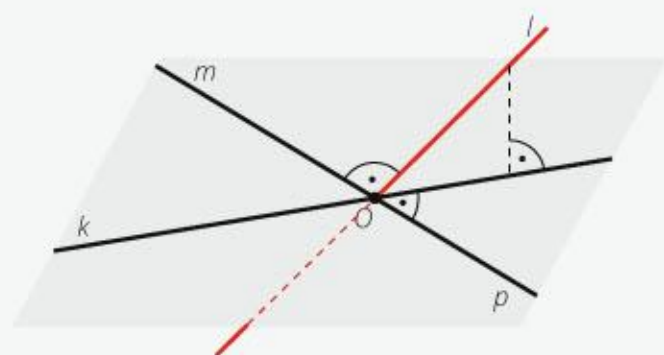
Krawędzie prostopadłe do ściany $CDHG$ to AD , BC , FG , EH .



10.2. Kąt między prostą a płaszczyzną, kąt dwuścienny

Kąt między prostą a płaszczyzną

Kąt między prostą a płaszczyzną to kąt ostry, jaki ta prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę.

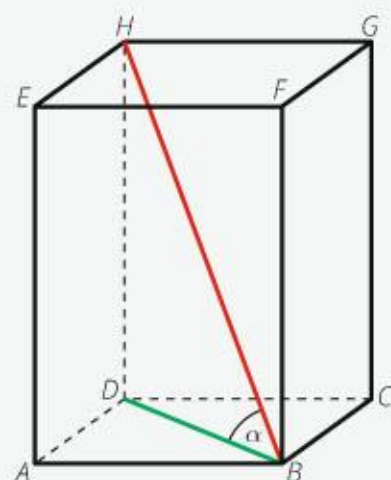


Przykład

Wyznacz kąt między przekątną prostopadłościanu a jego podstawą.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy i zaznaczamy szukany kąt.



Przykład

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $EFGH$ będącego górną podstawą sześcianu. Rozpatrzmy ostrosłup o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S . Oblicz wartość sinusa kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

a) jego krawędź boczna,

b) wysokość jego ściany bocznej.

Rozwiązanie:

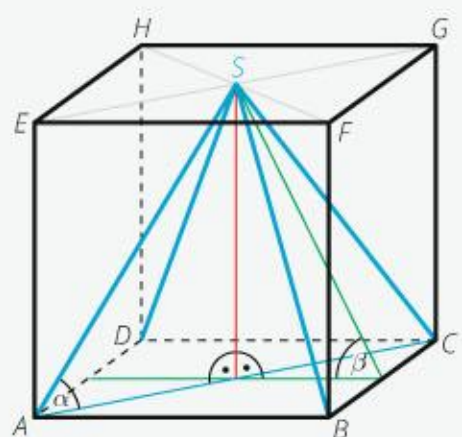
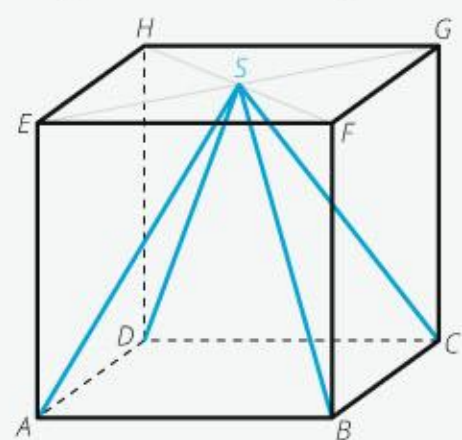
Zaznaczamy na modelu oba szukane kąty. Oznaczamy długość krawędzi sześcianu jako a , a długość przekątnej kwadratu $ABCD$ jako $a\sqrt{2}$.

$$a) |AS|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 \quad |AS|^2 = \frac{3}{2}a^2 \quad |AS| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

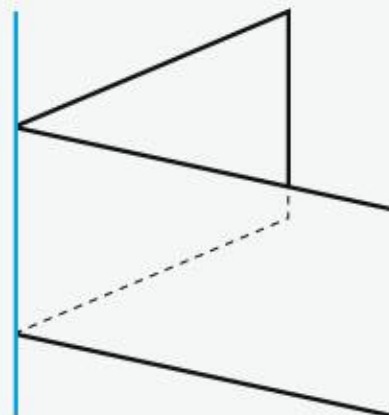
$$b) h^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 \quad h^2 = \frac{5}{4}a^2 \quad h = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\sin \beta = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

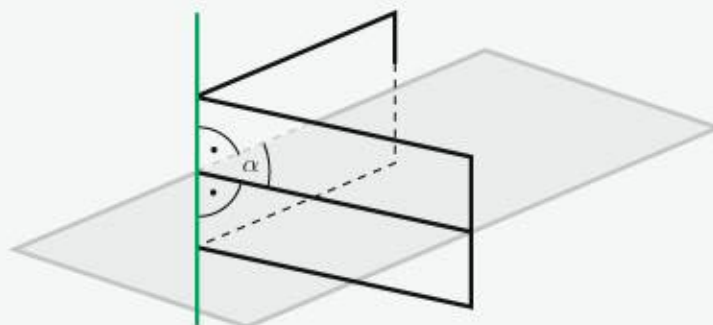


Kąt dwuścienny

Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielącej przestrzeń na dwie części. Każdą z tych części, łącznie z półpłaszczyznami, nazywamy **kątem dwuściennym**, a półpłaszczyzny – **ścianami kąta dwuściennego**.



Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego otrzymanego jako przekrój kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi.

**Przykład**

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o bokach o długości 3, 4, 5. Jakie miary kątów tworzą ze sobą ściany tego graniastosłupa?

Rozwiązanie:

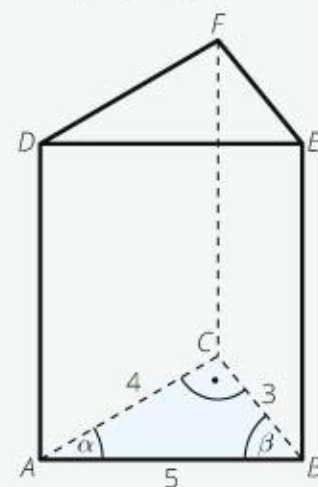
Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Ściany **ACFD** oraz **BCFE** tworzą kąt prosty.

Ściany **ABED** oraz **ACFD** tworzą kąt α .

Ściany **ABED** oraz **BCFE** tworzą kąt β .

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \text{ czyli } \alpha \approx 37^\circ, \text{ zatem } \beta = 90^\circ - 37^\circ \approx 53^\circ$$

**10.3. Kąty w graniastosłupach i ostrosłupach****Kąty w graniastosłupach**

W graniastosłupach możemy wyznaczać i obliczać kąty między odcinkami i między ścianami.

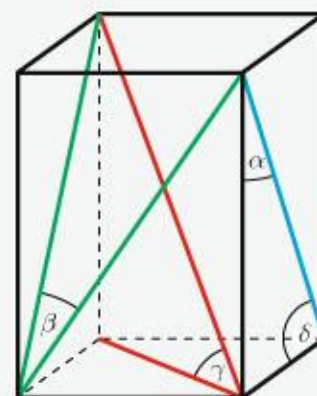
Na rysunku widzimy:

α – kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną,

β – kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych,

γ – kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną podstawy,

δ – kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy, kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy.

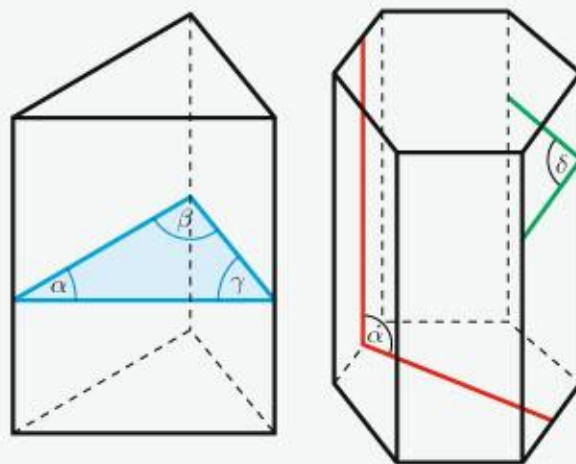




Kąty między ścianami bocznymi

α – kąt między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy

δ – kąt między ścianami bocznymi



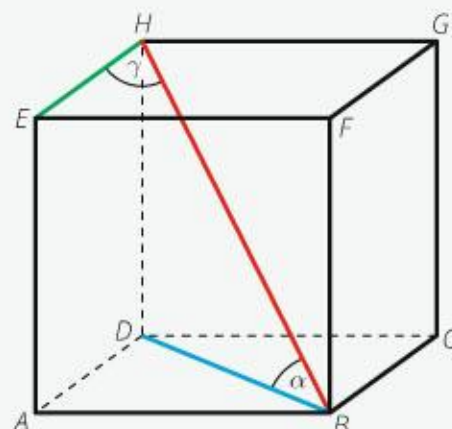
Przykład

Oblicz miary kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy oraz kąta między przekątną sześcianu a jego krawędzią.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Oznaczamy długość krawędzi sześcianu przez a , wtedy długość przekątnej kwadratu wynosi $a\sqrt{2}$, a długość przekątnej sześcianu $a\sqrt{3}$.



Wyodrębniamy dwa trójkąty:

– pierwszy z kątem α

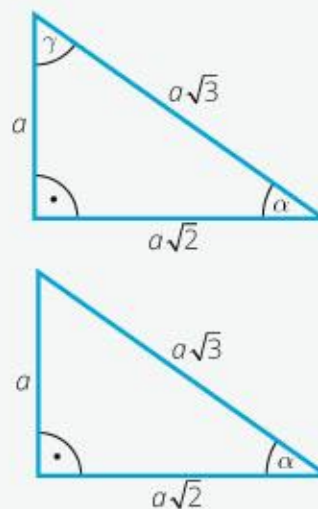
$$\sin \alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774$$

Odczytujemy z tablic: $\alpha = 35^\circ$

– drugi z kątem γ

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \approx 1,4142$$

Odczytujemy z tablic: $\gamma = 55^\circ$



Kąty w ostrosłupach

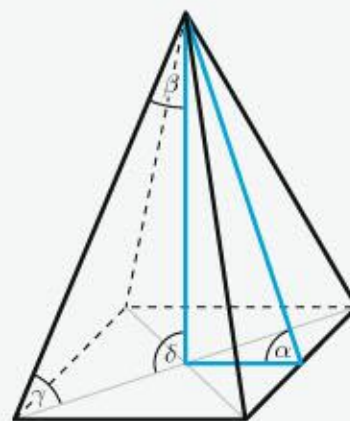
Na rysunku widzimy:

α – kąt między wysokością ściany bocznej a płaszczyzną podstawy,

β – kąt między wysokością a krawędzią boczną,

γ – kąt między krawędzią boczną a przekątną podstawy, kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,

δ – kąt między wysokością a płaszczyzną podstawy.



Przykład

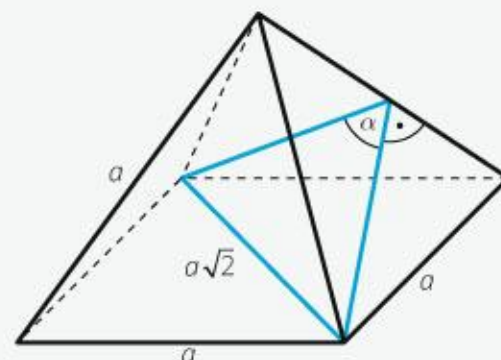
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wszystkich krawędziach długości a .

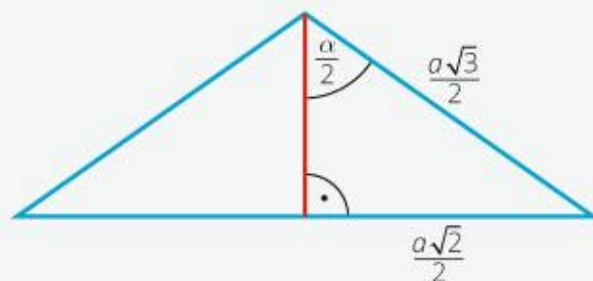
Oblicz miarę kąta, jaki tworzą dwie sąsiednie ściany boczne.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Ramiona kąta α są wysokościami trójkąta równobocznego, zatem wykonujemy drugi rysunek pomocniczy.





Obliczamy wysokość h :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,8165$$

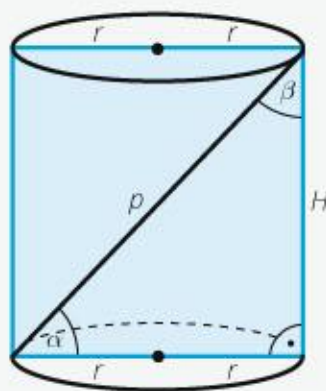
Odczytujemy z tablic:

$$\frac{\alpha}{2} \approx 55^\circ, \text{ zatem } \alpha \approx 110^\circ$$

10.4. Kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami i płaszczyznami w walcach i stożkach

Kąty w walcu

Na rysunku przedstawiono walec z narysowanym przekrojem osiowym. Zaznaczony na rysunku kąt α jest kątem pomiędzy przekątną p przekroju osiowego a średnicą podstawy (kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego do podstawy walca), a kąt β jest kątem pomiędzy przekątną p przekroju osiowego a tworzącą walca.



Przykład

Przekrój osiowy walca jest prostokątem o przekątnej o długości 16 cm, która tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 30° . Oblicz promień podstawy i wysokość tego walca. Podaj miarę kąta, jaki tworzy ta przekątna z tworzącą walca.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Obliczamy wysokość walca, korzystając z definicji sinusa kąta ostrego:

$$\text{Otrzymujemy: } \sin 30^\circ = \frac{H}{16}$$

$$\text{Stąd: } \frac{1}{2} = \frac{H}{16}, \text{ więc: } H = 8 \text{ cm}$$

Obliczamy promień podstawy walca, korzystając z definicji cosinusa kąta ostrego:

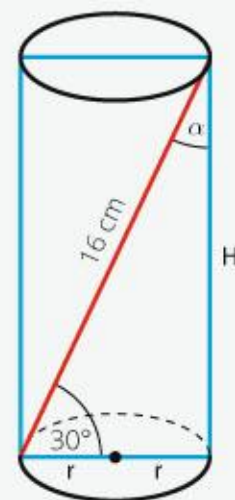
$$\text{Otrzymujemy: } \cos 30^\circ = \frac{2r}{16}$$

$$\text{Stąd: } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2r}{16}, \text{ więc: } r = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Obliczamy miarę kąta, jaki tworzy ta przekątna z tworzącą walca:

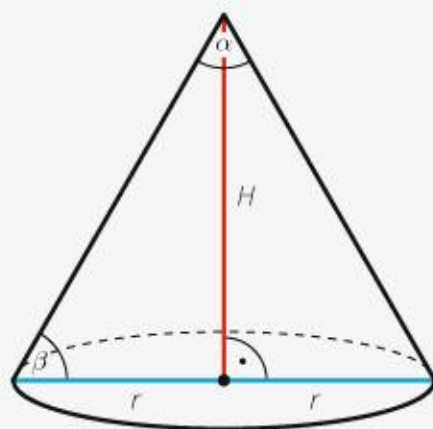
$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

Odpowiedź: Wysokość walca jest równa 8 cm, promień podstawy ma $4\sqrt{3}$ cm długości, a miara kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego do tworzącej walca wynosi 60° .



Kąty w stożku

Na rysunku przedstawiono stożek z narysowanym przekrojem osiowym. Zaznaczony na rysunku kąt α jest kątem rozwarcia stożka, a kąt β jest kątem nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.



Przykład

Oblicz promień podstawy i wysokość stożka, którego tworząca ma długość 8 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze 60° .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Obliczamy wysokość stożka, korzystając z definicji sinusa kąta ostrego.

$$\text{Otrzymujemy: } \sin 60^\circ = \frac{H}{8}$$

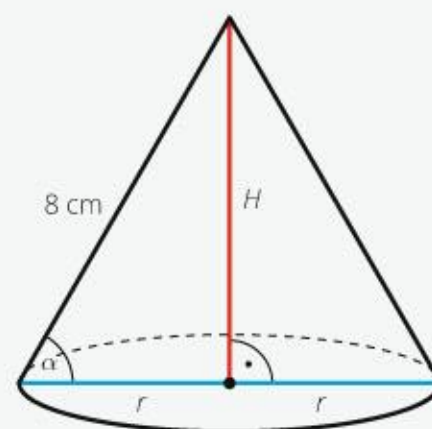
$$\text{Stąd: } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{8}, \text{ więc: } H = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Obliczamy promień podstawy stożka, korzystając z definicji cosinusa kąta ostrego.

$$\text{Otrzymujemy: } \cos 60^\circ = \frac{r}{8}$$

$$\text{Stąd: } \frac{1}{2} = \frac{r}{8}, \text{ więc: } r = 4 \text{ cm}$$

Odpowiedź: Wysokość stożka jest równa $4\sqrt{3}$ cm, a promień podstawy ma 4 cm długości.

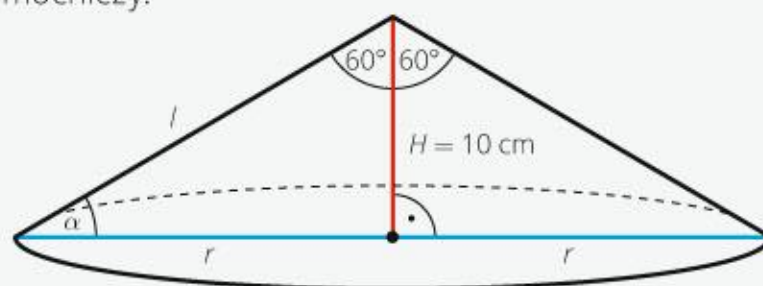


Przykład

Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° , a wysokość stożka jest równa 10 cm. Oblicz długość tworzącej stożka oraz miarę kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Obliczamy tworzącą stożka, korzystając z definicji cosinusa kąta ostrego.

$$\text{Otrzymujemy: } \cos 60^\circ = \frac{10}{l}$$

$$\text{Stąd: } \frac{1}{2} = \frac{10}{l}, \text{ więc: } l = 20 \text{ cm}$$

Obliczamy miarę kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy:

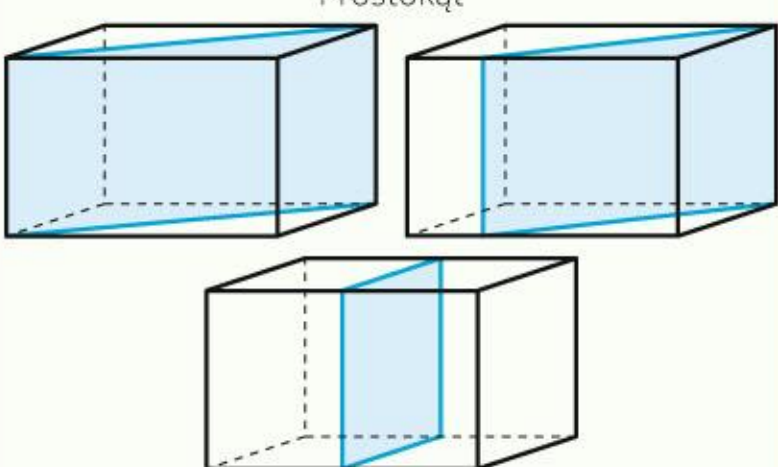
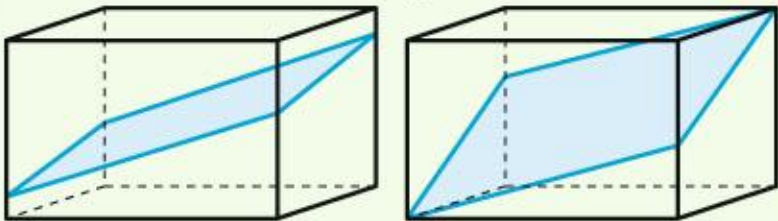
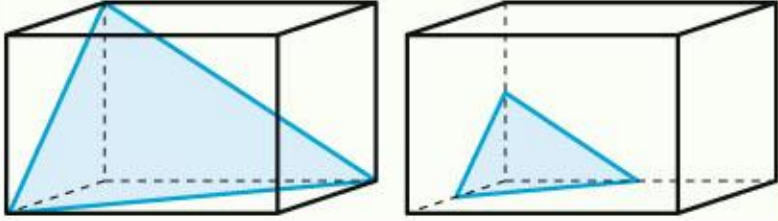
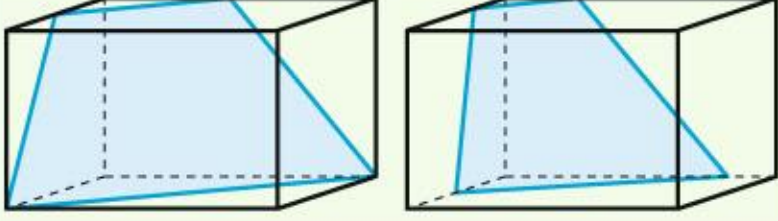
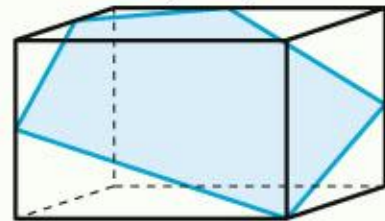
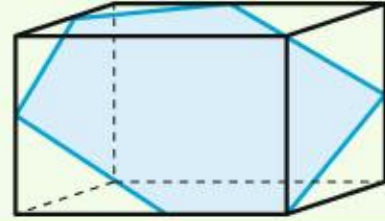
$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$$

Odpowiedź: Tworząca stożka ma długość 20 cm, a miara kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy ma 30° .

10.5. Przekrój prostopadłościanu daną płaszczyzną

Przekrój prostopadłościanu daną płaszczyzną

Przekrojem prostopadłościanu daną płaszczyzną nazywamy część wspólną prostopadłościanu i tej płaszczyzny. Przekrój prostopadłościanu płaszczyzną mającą punkty wspólne z tym prostopadłościanem jest wielokątem.

Opis sposobu poprowadzenia płaszczyzny przekroju prostopadłościanu	Rysunek i nazwa figury, która jest przekrojem
Przekrój płaszczyzną prostopadłą do dowolnej ze ścian prostopadłościanu.	Prostokąt 
Przekrój prostopadłościanu płaszczyzną przecinającą cztery równoległe krawędzie.	Równoległobok 
Przekrój płaszczyzną przechodzącą przez trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka.	Trójkąt 
Przekrój płaszczyzną przecinającą dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka oraz dwie krawędzie równoległe do nich.	Trapez 
Przekrój płaszczyzną przecinającą dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, dwie krawędzie prostopadłe do nich oraz wierzchołek przeciwny danemu.	Pięciokąt 
Przekrój płaszczyzną przecinającą dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, dwie krawędzie prostopadłe do nich oraz dwie krawędzie równoległe do krawędzi wychodzących ze wspólnego wierzchołka.	Sześciokąt 

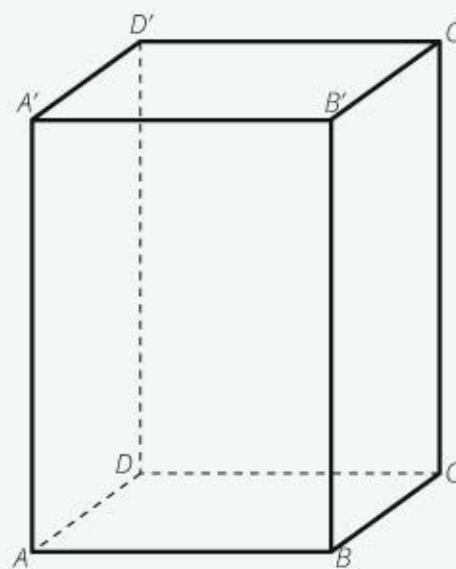
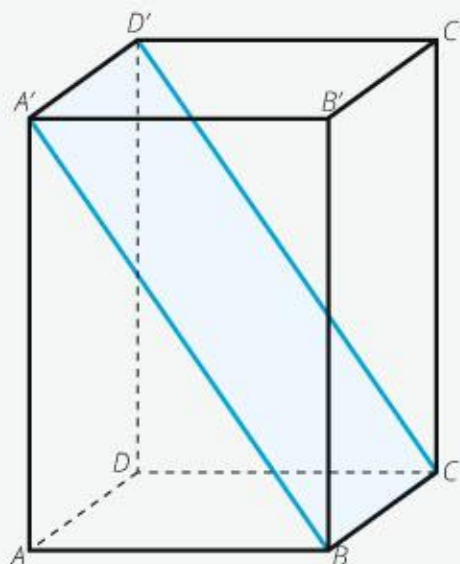


Przykład

Prostopadłościan $ABCDEFGH$ przecięto płaszczyzną prostopadłą do ściany $ABFE$ i zawierającą krawędzie BC i EH . Jaką figurą jest ten przekrój? Narysuj prostopadłościan wraz z przekrojem.

Rozwiązanie:

Przekrojem jest prostokąt $BCHE$.



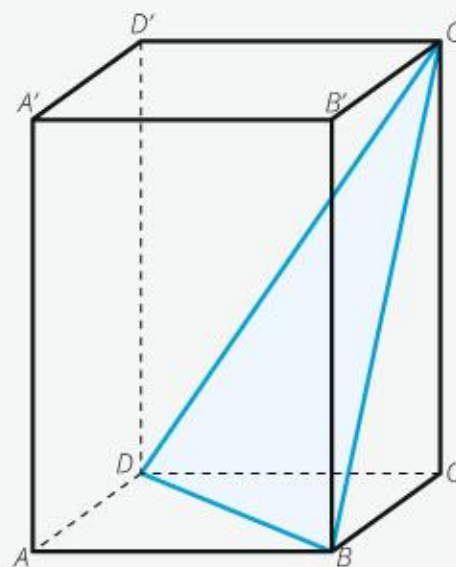
Przykład

Prostopadłościan $ABCDEFGH$ przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną BD podstawy $ABCD$ oraz wierzchołek G . Określ, jaką figurą jest ten przekrój.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

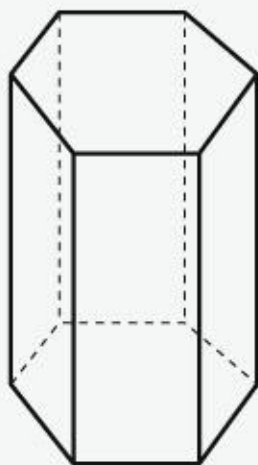
Przekrojem jest trójkąt BDG .



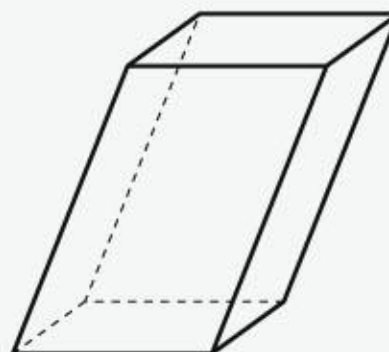
10.6. Objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli

Objętość i pole powierzchni graniastosłupów

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany (zwane ścianami bocznymi) są równoległobokami.



Graniastosłup prosty



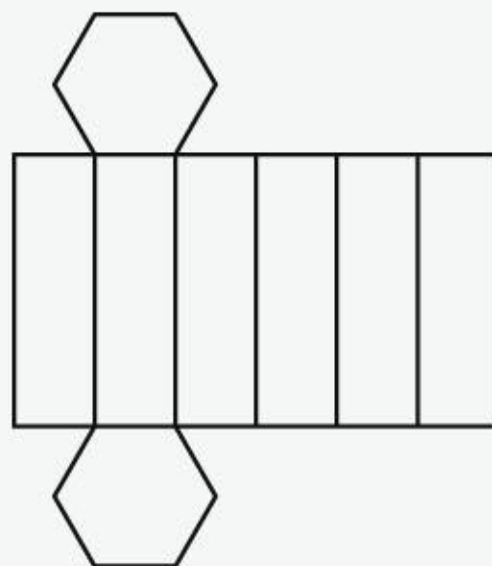
Graniastosłup pochylony

Graniastosłupem prawidłowym nazywamy graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi. W graniastosłupie prawidłowym ściany boczne są figurami przystającymi.

Po rozcięciu graniastosłupa i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa o polu podstawy P_p i polu powierzchni bocznej P_b jest równe $P_c = 2P_p + P_b$.

Objętość graniastosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H jest równa $V = P_p \cdot H$.



Przykład

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym, którego wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, pole powierzchni bocznej jest równe 36cm^2 . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Otrzymujemy $36 = 3 \cdot a \cdot 2a$, czyli $36 = 6a^2$, stąd $a = \sqrt{6}\text{ cm}$.

Obliczamy pole podstawy graniastosłupa: $P_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

Otrzymujemy: $P_p = \frac{(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$

Obliczamy wysokość graniastosłupa: $H = 2\sqrt{6}\text{ cm}$

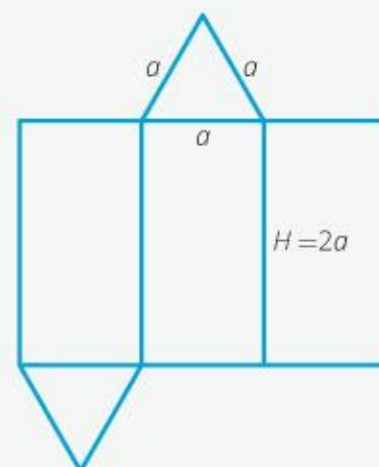
Obliczamy objętość graniastosłupa, korzystając ze wzoru: $V = P_p \cdot H$

Otrzymujemy: $V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{6} = 3\sqrt{18} = 3\sqrt{9 \cdot 2} = 9\sqrt{2}\text{ cm}^3$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, korzystając ze wzoru: $P_c = 2P_p + P_b$

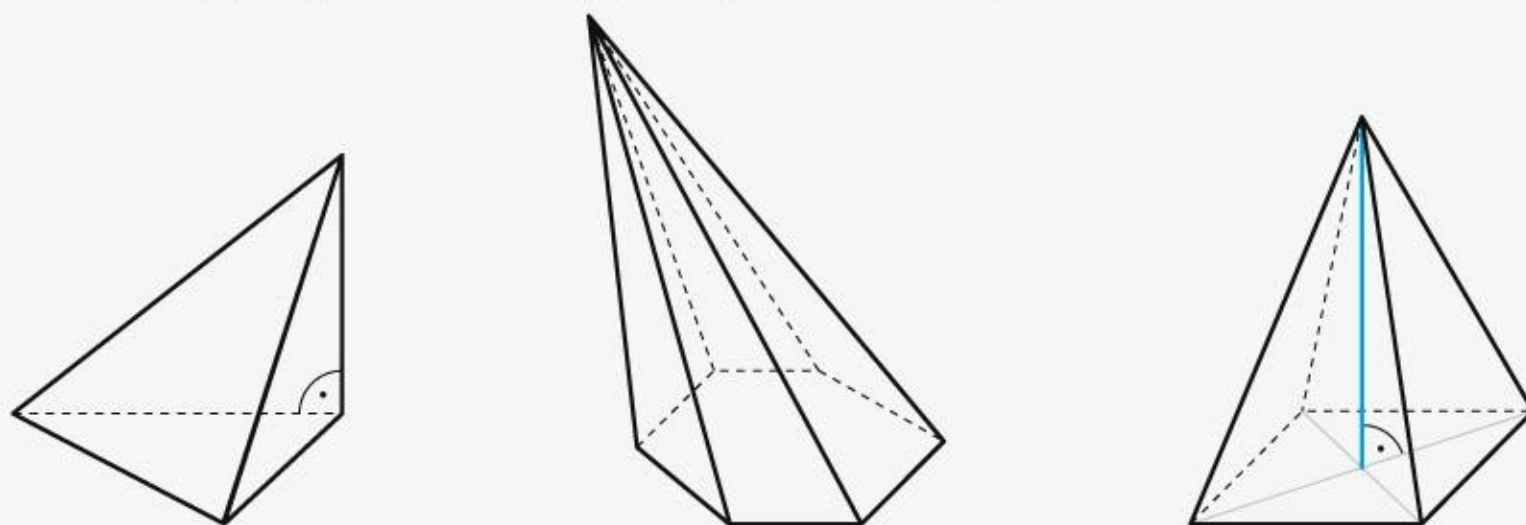
Otrzymujemy: $P_c = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + 36 = (3\sqrt{3} + 36)\text{ cm}^2$

Odpowiedź: Objętość tego graniastosłupa jest równa $9\sqrt{2}\text{ cm}^3$, a pole powierzchni całkowitej jest równe $(3\sqrt{3} + 36)\text{ cm}^2$.



Objętość i pole powierzchni ostrosłupów

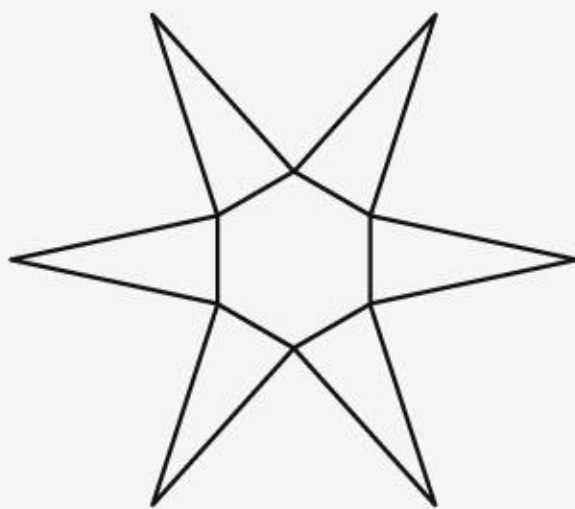
Ostrosłup to wielościan, którego jedna ściana (podstawa ostrosłupa) jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany (ściany boczne ostrosłupa) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.



Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup, gdy jego podstawą jest wielokąt foremny i spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Jeżeli ostrosłup jest prawidłowy, to wszystkie jego krawędzie boczne są równe, wszystkie kąty nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy mają równe miary i wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

> Po rozcięciu ostrosłupa i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



Siatka ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa o polu podstawy P_p i polu powierzchni bocznej P_b jest równe

$$P_c = P_p + P_b.$$

Objętość ostrosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$.

Czworościan foremny to ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.

H – wysokość czworościanu foremnego

a – krawędź czworościanu foremnego

Pole powierzchni całkowitej czworościanu: $P_c = a^2 \sqrt{3}$

Objętość czworościanu foremnego: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

Przykład

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12 cm, a miara kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi 60° . Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Sporządzamy rysunek pomocniczy.

Obliczamy wysokość podstawy, korzystając ze wzoru: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Otrzymujemy: $h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm

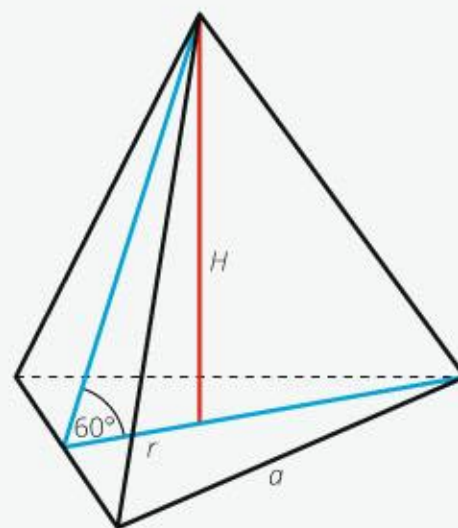
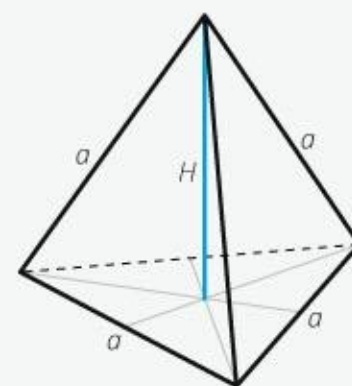
Obliczamy długość odcinka r , korzystając ze wzoru $r = \frac{1}{3}h$.

Otrzymujemy: $r = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm

Obliczamy wysokość ostrosłupa, korzystając z funkcji tangens. Otrzymujemy: $\text{tg} 60^\circ = \frac{H}{r}$

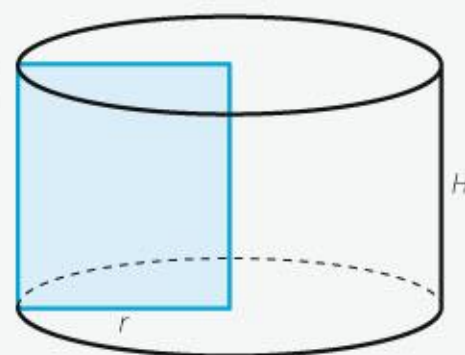
Stąd: $\sqrt{3} = \frac{H}{2\sqrt{3}}$, więc: $H = 6$ cm

Odpowiedź: Wysokość tego ostrosłupa wynosi 6 cm.



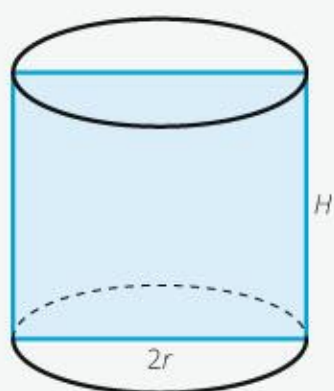
Objętość i pole powierzchni walca

Walec to bryła powstała wskutek obrotu prostokąta wokół prostej zawierającej jego jeden bok (oś walca).

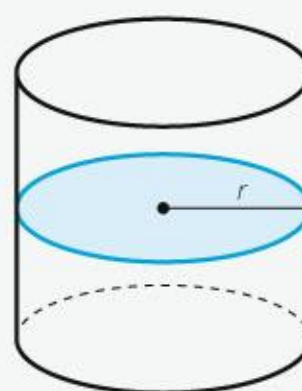


> | **Przekrój osiowy walca** to część wspólna walca i płaszczyzny zawierającej oś walca. Przekrój ten jest prostokątem o bokach $2r$ i H .

| **Przekrój poprzeczny walca** to przekrój walca płaszczyzną równoległą do podstawy.

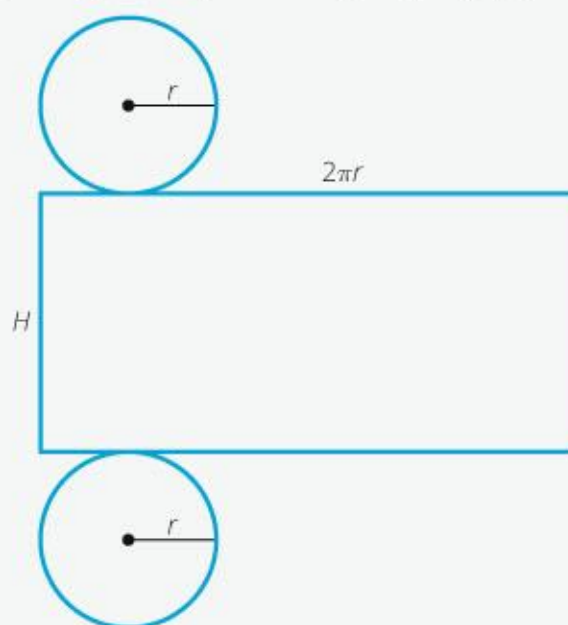


Przekrój osiowy walca



Przekrój poprzeczny walca

Po rozcięciu walca i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



Jeżeli promień podstawy walca wynosi r , wysokość H , to:

pole powierzchni bocznej walca: $P_b = 2\pi rH$

pole powierzchni całkowitej walca: $P_c = 2\pi r(r + H)$

objętość walca: $V = \pi r^2 H$

Przykład

Przekrój osiowy walca jest kwadratem, a objętość walca jest równa $54\pi \text{ cm}^3$. Oblicz pole przekroju osiowego walca.

Rozwiązanie:

Z informacji, że przekrój osiowy jest kwadratem, wynika zależność: $H = 2r$

Korzystając ze wzoru na objętość walca, wyznaczamy promień podstawy walca.

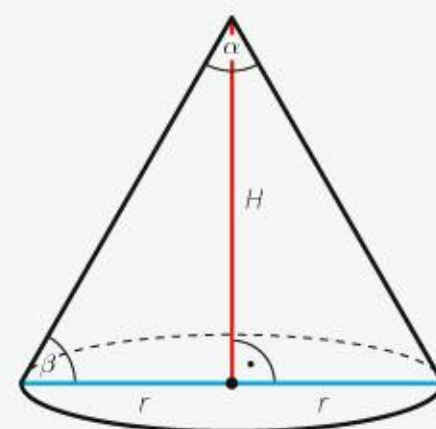
$V = \pi r^2 H$, stąd: $54\pi = \pi r^2 \cdot 2r$, więc: $r = 3 \text{ cm}$

Obliczamy pole przekroju osiowego walca: $P = (2r)^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$

Odpowiedź: Pole przekroju osiowego walca jest równe 36 cm^2 .

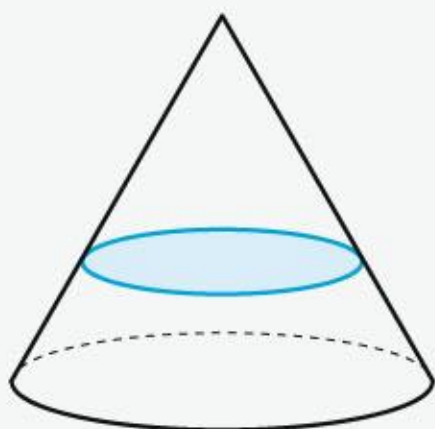
Objętość i pole powierzchni stożka

| **Stożek** to bryła utworzona przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta (oś stożka).

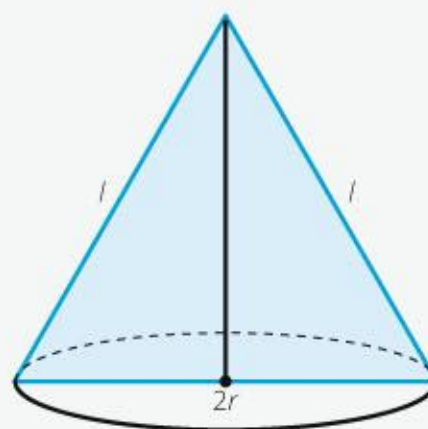


> | **Przekrój osiowy stożka** to część wspólna stożka i płaszczyzny zawierającej oś stożka. Przekrój ten jest trójkątem równoramiennym, którego podstawą jest odcinek o długości $2r$, a ramię ma długość l .

| **Przekrój poprzeczny stożka** to przekrój stożka płaszczyzną równoległą do podstawy.

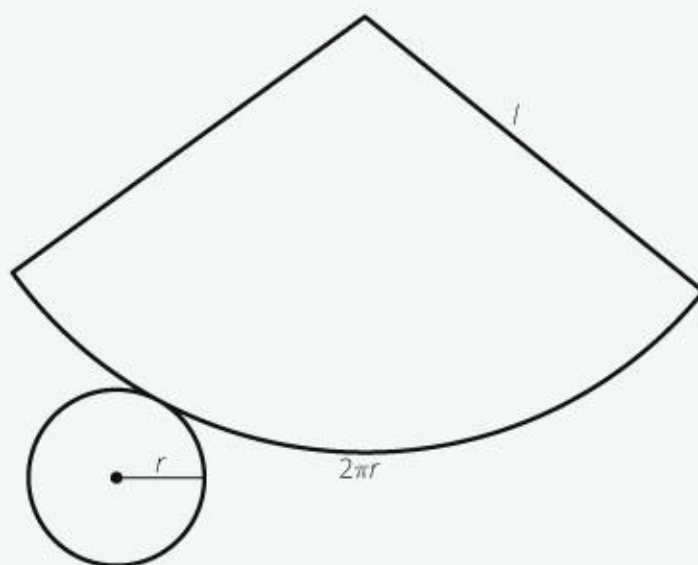


Przekrój poprzeczny stożka



Przekrój osiowy stożka

Po rozcięciu stożka i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



Jeżeli promień podstawy walca wynosi r , wysokość H , tworząca l , to:

pole powierzchni bocznej stożka: $P_b = \pi r l$

pole powierzchni całkowitej stożka: $P_c = \pi r (r + l)$

objętość stożka: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$

Przykład

Oblicz objętość stożka i jego pole powierzchni całkowitej, jeżeli wiadomo, że tworząca ma długość 5 cm, a wysokość jest równa 4 cm.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:

Obliczamy promień podstawy z twierdzenia Pitagorasa.

Otrzymujemy: $r = \sqrt{25 - 16} = 3$ cm

Obliczamy pole powierzchni całkowitej stożka, korzystając ze wzoru:

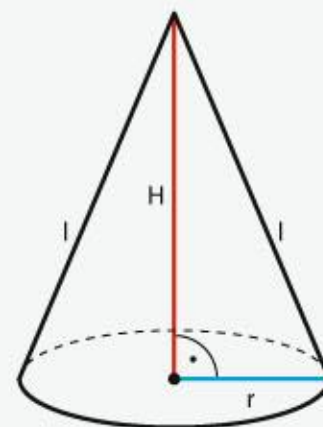
$$P_c = \pi r (r + l)$$

$$\text{Otrzymujemy: } P_c = \pi \cdot 3(3 + 5) = 24\pi \text{ cm}^2$$

Obliczamy objętość stożka, korzystając ze wzoru: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$

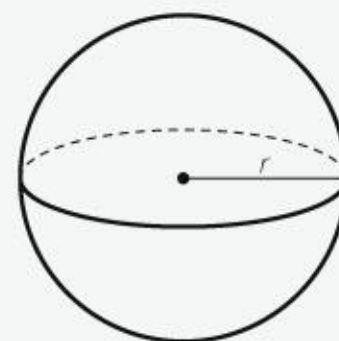
$$\text{Otrzymujemy: } V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi \text{ cm}^3$$

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe $24\pi \text{ cm}^2$, a objętość stożka wynosi $12\pi \text{ cm}^3$.



Objętość i pole powierzchni kuli

Kula to bryła powstała przez obrót koła wokół osi zawartej w płaszczyźnie tego koła, przechodzącej przez jego środek.

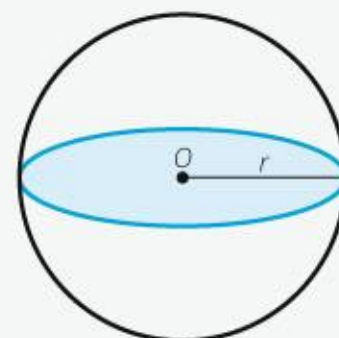


Przekrój kuli to część wspólna płaszczyzny i kuli. Przekrój kuli, do którego należy środek kuli, nazywamy **kołem wielkim**.

Jeżeli promień kuli wynosi R , to:

pole powierzchni kuli (sfery): $P = 4\pi R^2$

objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

**Przykład**

W odległości 12 cm od płaszczyzny koła wielkiego poprowadzono przekrój, którego pole jest równe $256\pi \text{ cm}^2$. Oblicz pole powierzchni tej kuli.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Korzystając ze wzoru $P = \pi r^2$, obliczamy promień koła, które jest przekrojem kuli.

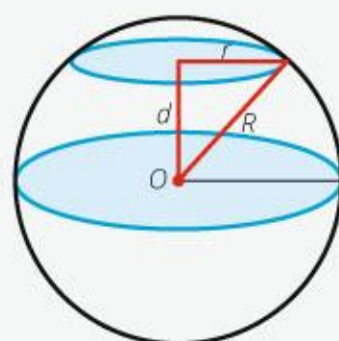
Otrzymujemy: $256\pi = \pi r^2$, stąd: $r = 16 \text{ cm}$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy promień kuli.

Zapisujemy $12^2 + 16^2 = R^2$, stąd: $R = 20 \text{ cm}$

Obliczamy pole powierzchni kuli: $P = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 20^2 = 1600\pi \text{ cm}^2$

Odpowiedź: Pole powierzchni tej kuli jest równe $1600\pi \text{ cm}^2$.

**10.7. Zależność między polami powierzchni i objętościami brył podobnych****Skala podobieństwa**

Dwie bryły są podobne, jeśli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiednimi punktami drugiej bryły.

Stosunek odległości między odpowiednimi punktami brył podobnych nazywamy **skala podobieństwa**.

Stosunek pól powierzchni brył podobnych**Stosunek pól powierzchni brył podobnych**

Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa k , to stosunek pól powierzchni tych brył jest równy k^2 .

Przykład

Dane są dwie kule. Pole powierzchni pierwszej kuli wynosi $25\pi \text{ cm}^2$. Druga kula ma promień dwa razy dłuższy niż pierwsza kula. Oblicz pole powierzchni drugiej kuli.

Rozwiązanie:

Skoro promień drugiej kuli jest dwa razy większy od promienia pierwszej kuli, to znaczy, że skala podobieństwa tych brył wynosi $k = 2$. Zatem stosunek ich pól powierzchni wynosi $k^2 = 4$.

Pole powierzchni drugiej kuli wynosi: $P_2 = k^2 \cdot P_1$. Zatem $P_2 = 4 \cdot 25\pi = 100\pi \text{ cm}^2$.

Odpowiedź: Pole powierzchni drugiej kuli wynosi $100\pi \text{ cm}^2$.

Stosunek objętości brył podobnych

Stosunek objętości brył podobnych

Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa k , to stosunek objętości tych brył jest równy k^3 .

Przykład

Dane są dwa prostopadłościany podobne. Objętość pierwszego prostopadłościanu wynosi $V_1 = 33,75\text{cm}^3$, a objętość drugiego $V_2 = 10\text{cm}^3$. Oblicz stosunek pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów.

Rozwiązanie:

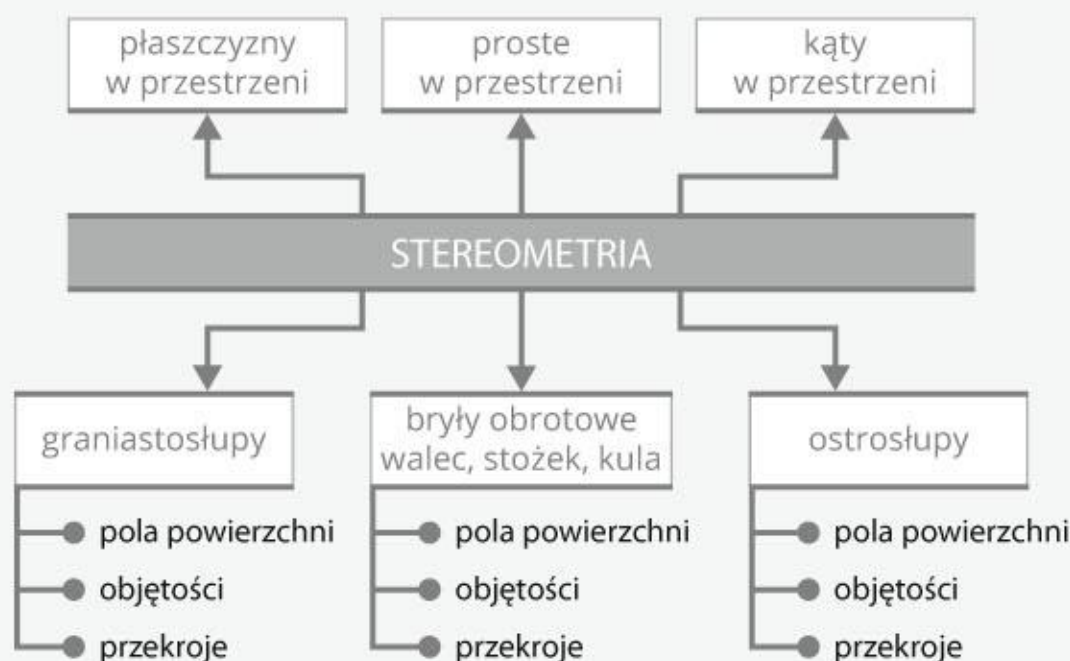
Stosunek objętości tych prostopadłościanów jest równy: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{33,75}{10} = 3,375 = 3\frac{3}{8}$

Ponieważ $\frac{V_1}{V_2} = k^3$, stąd $k^3 = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$, czyli $k = \frac{3}{2}$.

Wiemy, że $\frac{P_1}{P_2} = k^2$, więc $\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

Odpowiedź: Stosunek pól powierzchni jest równy $\frac{9}{4}$.

10.8. Utrwalamy wiedzę



11

Kombinatoryka

11.1. Doświadczenia losowe

Doświadczenia losowe

Doświadczeniem losowym (eksperymentem, zjawiskiem losowym) nazywamy takie działanie, które można powtarzać wiele razy w takich samych warunkach, ale jego kolejnych wyników nie potrafimy przewidzieć, np. rzut monetą, rzut kostką do gry czy wyciągnięcie karty z talii.

W doświadczeniu losowym możemy określić zbiór wszystkich możliwych wyników. Na przykład przy jednokrotnym rzucie monetą może выпаść orzeł lub reszka.

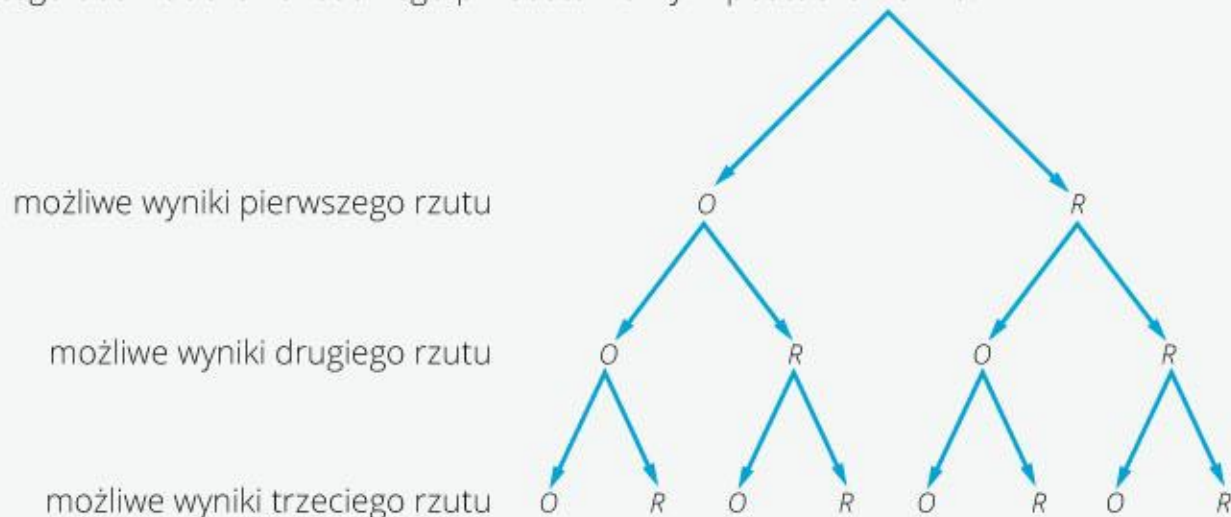
Przykład

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że wypadły co najmniej dwa orły.

Rozwiązanie:

Wyrzucenie orła oznaczamy jako O , a wyrzucenie reszki – jako R .

Przebieg tego doświadczenia losowego przedstawiamy w postaci drzewka:



Odpowiedź: Wszystkie możliwe wyniki zdarzenia sprzyjające zdarzeniu, że wypadły co najmniej dwa orły, tworzą zbiór $\{(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O), (R,O,O)\}$.

Zdarzenie elementarne

Zdarzeniem elementarnym nazywamy każdy możliwy wynik doświadczenia losowego, a ich zbiór – **przestrzenią zdarzeń elementarnych**. Przestrzeń zdarzeń elementarnych oznaczamy literą Ω , a pojedyncze zdarzenia elementarne – literą ω .

Przykład

Z pudełka zawierającego trzy koperty ponumerowane: 7, 8, 9 – losujemy jedną kopertę, a następnie drugą. Zapisane w kolejności losowania numery kopert tworzą liczbę dwucyfrową.

Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli:

- wylosowanej koperty nie zwracamy do pudełka,
- wylosowaną kopertę zwracamy do pudełka.

Rozwiązanie:

a) Zapisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli wylosowanej koperty nie zwracamy do pudełka:

$$\Omega = \{78, 79, 87, 89, 97, 98\}$$

b) Zapisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli wylosowaną kopertę zwracamy do pudełka:

$$\Omega = \{77, 78, 79, 87, 88, 89, 97, 98, 99\}$$

Zdarzenie losowe

Zdarzeniem losowym nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω . Zdarzenia losowe, zwane krótko zdarzeniami, oznaczamy wielkimi literami: A, B, C itd.

Liczbę elementów zbioru A oznaczamy $|A|$ (lub $\#A$).

Zbiór Ω nazywamy zdarzeniem **pewnym**, natomiast zbiór pusty nazywamy zdarzeniem **niemożliwym**. Elementy zdarzenia A nazywamy **wynikami sprzyjającymi** zdarzeniu A .



Przykład

Rzucamy sześcienną kostką do gry. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – wypadła parzysta liczba oczek

B – wypadła liczba oczek co najmniej równa 1

C – wypadła liczba oczek, która jest liczbą pierwszą większą od 5

Które ze zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, a które niemożliwym?

Rozwiązanie:

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Zdarzeniu A sprzyjają wyniki: 2, 4, 6, zatem $A = \{2, 4, 6\}$.

Zdarzenie B jest zdarzeniem pewnym, zatem $B = \Omega$.

Zdarzenie C jest zdarzeniem niemożliwym, zatem $C = \emptyset$.

Przykład

Ile różnych czteroznakowych haseł można utworzyć ze znaków z cyfr 0 i 1 oraz liter a i b , jeśli:

a) pierwszy i ostatni znak to różne cyfry, a dwa środkowe znaki to różne litery,

b) pierwszy i ostatni znak to litery, a dwa środkowe znaki to cyfry.

Rozwiązanie:

a) Oznaczamy jako A zbiór sprzyjający zdarzeniu, że pierwszy i ostatni znak to różne cyfry, a dwa środkowe znaki to różne litery, zatem $A = \{(0ab1), (1ab0), (0ba1), (1ba0)\}$.

Określamy liczbę możliwych wyników: $\overline{A} = 4$.

b) Oznaczamy jako B zbiór sprzyjający zdarzeniu, że pierwszy i ostatni znak to litery, a dwa środkowe znaki to cyfry, zatem:

$B = \{(0ab0), (0ab1), (1ab0), (1ab1), (0ba0), (0ba1), (1ba0), (1ba1),$

$(0aa0), (0aa1), (1aa0), (1aa1), (0bb0), (0bb1), (1bb0), (1bb1)\}$

Określamy liczbę możliwych wyników: $\overline{B} = 16$.

Zdarzenie przeciwne

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A nazywamy wszystkie zdarzenia elementarne, które nie sprzyjają zdarzeniu A , a sprzyjają zdarzeniu A' .

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup A' = \Omega$$

Przykład

Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – co najwyżej raz wypadł orzeł

B – reszka wypadła dokładnie dwa razy

C – wypadły same orły

D – wypadły co najmniej dwa orły

Wskaż parę zdarzeń przeciwnych.

Rozwiązanie:

Wyrzucenie orła oznaczamy jako O , a wyrzucenie reszki – jako R .

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór:

$$\Omega = \{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (O, R, R), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R)\}.$$

Zdarzeniu A sprzyjają wyniki: $(O, R, R), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R)$, zatem

$$A = \{(O, R, R), (R, O, R), (R, R, O), (R, R, R)\}.$$

Zdarzeniu B sprzyjają wyniki: $(R, R, O), (R, O, R), (O, R, R)$, zatem $B = \{(R, R, O), (R, O, R), (O, R, R)\}$.

Zdarzeniu C sprzyjają wyniki: (O, O, O) , zatem $C = \{(O, O, O)\}$.

Zdarzeniu D sprzyjają wyniki: $(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (O, O, O)$, zatem

$$D = \{(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O), (O, O, O)\}.$$

Zdarzeniami przeciwnymi są zdarzenia A i D .

11.2. Reguły mnożenia i dodawania

Reguła mnożenia

Obliczając liczbę możliwych wyników doświadczenia losowego, często rysujemy tabelę doświadczenia losowego lub drzewo doświadczenia losowego, a następnie zliczamy liczbę możliwych wyników. Gdy jednak liczba ta jest duża, sporządzenie tabeli lub drzewa jest kłopotliwe. Przydatna jest wówczas znajomość **reguły mnożenia**.

Reguła mnożenia dla dwóch czynności

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei dwóch czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k sposobów, druga – na jeden z n sposobów, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$, jest równa kn .

Przykład

W urnie znajduje się 15 kul ponumerowanych od 1 do 15. Z urny losujemy dwie kule ze zwracaniem, zapisując numery kul w kolejności ich wylosowania. Oblicz liczbę możliwych wyników doświadczenia.

Rozwiązanie:

Liczbę możliwych wyników tego doświadczenia obliczymy: $15 \cdot 15 = 225$.

Odpowiedź: Jest 225 wyników tego doświadczenia.

Reguła mnożenia dla trzech czynności

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei trzech czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k sposobów, druga – na jeden z m sposobów, a trzecia – na jeden z n sposobów, gdzie $k, n, m \in \mathbb{N}$, jest równa kmn .

Przykład

Doświadczenie polega na wylosowaniu trzech osób w kolejności: przewodniczący klasy, zastępca oraz skarbnik z klasy liczącej 30 uczniów. Na ile sposobów można dokonać tego wyboru?

Rozwiązanie:

Przewodniczącego klasy możemy wybrać na 30 sposobów, zastępcę – na 29 sposobów, a skarbnika na 28 sposobów.

Wobec tego trzyosobowy samorząd klasy wybierzemy na $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$ sposobów.

Odpowiedź: Wyboru można dokonać na 24 360 sposobów.

Reguła mnożenia

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei k czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z n_1 sposobów, druga – na jeden z n_2 sposobów, trzecia – na jeden z n_3 sposobów i tak dalej do k -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z n_k sposobów, gdzie $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, jest równa $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$.

Przykład

Oblicz, ile jest możliwości ustawienia 9 osób w kolejce.

Rozwiązanie:

Doświadczenie polega na dziewięciokrotnym powtórzeniu czynności wyboru miejsca w kolejce, przy czym pierwsza osoba ma do wyboru 9 miejsc, druga osoba – 8 miejsc, trzecia osoba – 7 miejsc itd. Korzystając z reguły mnożenia, otrzymujemy: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$.

Odpowiedź: Jest 362 880 możliwości.

Reguła dodawania

Jeśli doświadczenie losowe polega na podjęciu jednej z dwóch decyzji wyboru, pochodzących z dwóch różnych zbiorów, które nie mają wspólnych elementów, przy czym pierwszą decyzję wyboru możemy podjąć na n sposobów, a drugą na k sposobów, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$, to całą czynność możemy podjąć na $n + k$ sposobów.

Taki sposób zliczania elementów o określonych własnościach nazywamy **regułą dodawania**.

Przykład

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, których cyfra setek jest równa 4 lub większa od 6?

Rozwiązanie:

Liczb trzycyfrowe z cyfrą setek równą 4 to: 400, 401, 402, ..., 499.

Liczb trzycyfrowych z cyfrą setek równą 4 jest 100.

Liczb trzycyfrowe z cyfrą setek większą od 6 to: 700, 701, ..., 799, 800, 801, 102, ..., 899, 900, 901, ..., 999.

Liczb trzycyfrowych z cyfrą setek większą od 6 jest 300.

Liczb trzycyfrowych z cyfrą setek równą 4 lub większą od 6 jest: $100 + 300 = 400$.

Odpowiedź: Jest 400 takich liczb.

Łączenie reguły mnożenia i dodawania

Często w zadaniach stosujemy regułę mnożenia i regułę dodawania łącznie.

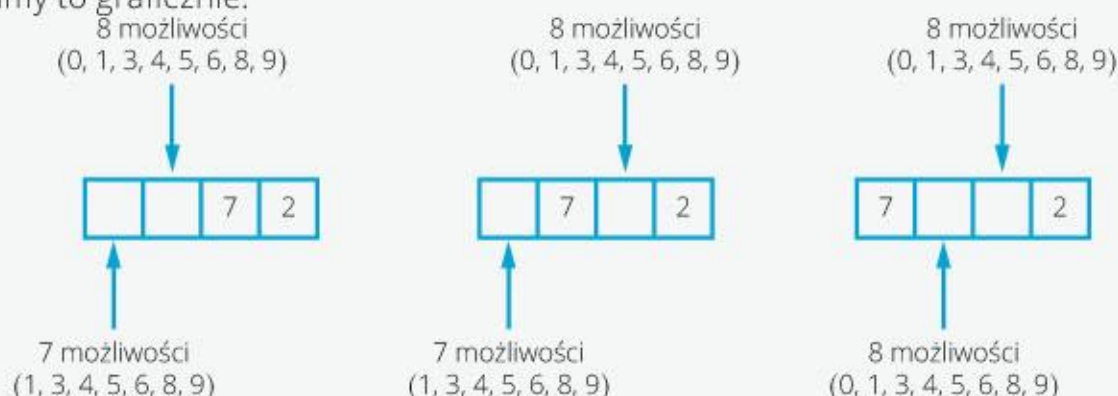
Przykład

Ile jest możliwości zapisania liczby czterocyfrowej za pomocą cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, jeśli wiadomo, że jest to liczba parzysta, a w jej zapisie wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 7?

Rozwiązanie:

1. Obliczamy, ile jest liczb czterocyfrowych parzystych, które mają cyfrę 2 jako cyfrę jedności oraz cyfrę 7 na pozycji dziesiątek lub na pozycji setek, lub na pozycji jedności tysięcy.

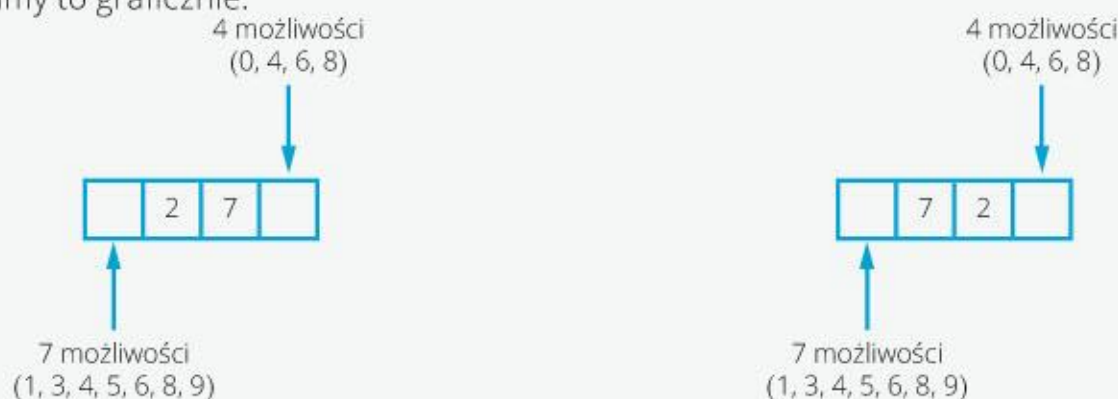
Przedstawimy to graficznie:



Obliczamy, ile jest tych liczb: $7 \cdot 8 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 8 = 176$

2. Obliczamy, ile jest liczb czterocyfrowych parzystych, które na pozycji jedności mają cyfrę parzystą inną od cyfry 2, a cyfry 2 i 7 znajdują się na pozycji dziesiątek i setek.

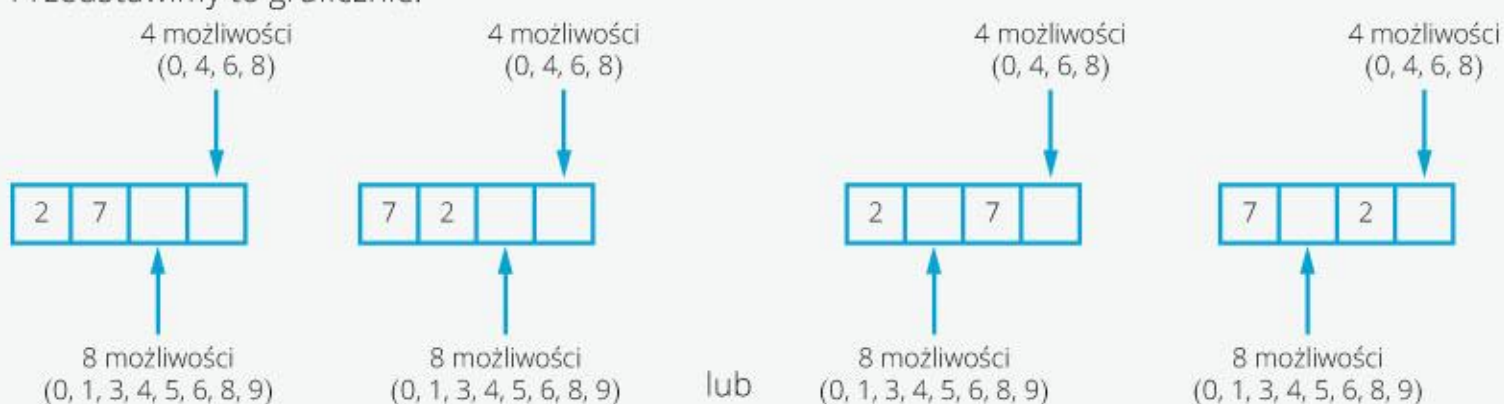
Przedstawimy to graficznie:



Obliczamy, ile jest tych liczb: $7 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 56$

3. Obliczamy, ile jest liczb czterocyfrowych parzystych, które na pozycji jedności mają cyfrę parzystą inną od cyfry 2, a jedna z cyfr 2 lub 7 znajduje się na pozycji jedności tysięcy.

Przedstawimy to graficznie:



Obliczamy, ile jest tych liczb: $8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 128$

4. Obliczamy, ile jest liczb spełniających warunki zadania: $176 + 56 + 128 = 360$

Odpowiedź: Jest 360 liczb spełniających warunki zadania.

Silnia

Niech $n \in \mathbb{N}$. Symbol $n!$ (n silnia) określamy następująco
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Przykład

Obliczmy $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Współczynnik dwumianowy Newtona

Niech $n, k \in \mathbb{N}$ i $n \geq k$. **Symbolem Newtona** nazywamy wyrażenie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Symbol $\binom{n}{k}$ czytamy „ n nad k ”.

Przykład

Obliczmy $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$.

Własności symbolu Newtona

Własności symbolu Newtona

$$1. \binom{n}{0} = 1$$

$$2. \binom{n}{n} = 1$$

$$3. \binom{n}{1} = n$$

$$4. \binom{n}{n-1} = n$$

$$5. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ gdzie } n, k \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq k$$

$$6. \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ gdzie } n, k \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq k+1$$

$$7. \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \cdot \binom{n}{k}, \text{ gdzie } n, k \in \mathbb{N} \text{ i } n \geq k$$

Przykład

Uzasadnij własności zapisane w podpunktach 1, 2, 3, 4.

$$a) \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

$$b) \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$$

$$c) \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{1 \cdot (n-1)!} = n$$

$$d) \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)! \cdot 1!} = n$$

Wzór dwumianowy Newtona

Każdą naturalną potęgę dwumianu $a + b$ można wyrazić za pomocą **wzoru dwumianowego Newtona**:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

Przykład

Na podstawie wzoru Newtona zapisz $(a+b)^4$.

Rozwiązanie:

$$1. (a+b)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 \cdot b + \binom{4}{2} \cdot a^2 \cdot b^2 + \binom{4}{3} \cdot a \cdot b^3 + \binom{4}{4} \cdot b^4$$

2. Z własności symbolu Newtona wiemy, że:

$$\binom{4}{0} = 1$$

$$\binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{4}{1} = 4$$

$$\binom{4}{3} = 4$$

$$3. \text{ Obliczamy } \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6.$$

Po podstawieniu do wzoru zapisanego w punkcie 1 otrzymujemy:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

11.3. Permutacje, wariacje i kombinacje

Permutacja

Permutacją n -elementowego zbioru A nazywamy każdy n -wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

O permutacji mówimy wówczas, gdy porządkujemy elementy danego zbioru. Permutacja to każde ustawienie wszystkich elementów zbioru w dowolnej kolejności.

Liczbę permutacji zbioru n -elementowego możemy obliczyć ze wzoru: $P_n = n!$

Przykład

Na ile sposobów może ustawić pięciu klientów w kolejce do kasy?

Rozwiązanie:

Każda z możliwości zajęcia kolejnych miejsc przez klientów jest permutacją zbioru pięcioelementowego. Permutacji takich jest: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Odpowiedź: Klienci w kolejce mogą ustawić się na 120 sposobów.

Wariacja bez powtórzeń

Wariacją bez powtórzeń zbioru A nazywamy każdy k -wyrazowy ciąg utworzony z różnych elementów n -elementowego zbioru A , gdzie $k \leq n$.

Z k -wyrazowymi wariacjami bez powtórzeń zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy k razy wybieramy bez zwracania po jednym elemencie z danego zbioru.

Każda n -elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru n -elementowego jest permutacją.

Liczba k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego wyraża się wzorem:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ dla } k \leq n$$

Przykład

Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 2, 3, 5, 6, 9 oraz żadna cyfra się nie powtarza?

Rozwiązanie:

Istotna jest kolejność losowania. Mamy do czynienia z wariacją bez powtórzeń.

Zatem $V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Odpowiedź: Istnieje 60 takich liczb.

Wariacja z powtórzeniami

Wariacją z powtórzeniami zbioru A nazywamy każdy k -wyrazowy ciąg utworzony z elementów zbioru A .

Z k -wyrazowymi wariacjami z powtórzeniami zbioru n -elementowego mamy do czynienia wówczas, gdy k razy wybieramy po jednym elemencie ze zwracaniem z danego zbioru.

Liczba k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego wyraża się wzorem: $W_n^k = n^k$.

Przykład

Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 2, 4, 5, 7, 8, 9? Cyfry mogą się powtarzać.

Rozwiązanie:

Cyfry w liczbie mogą się powtarzać. Mamy do czynienia z wariacją z powtórzeniami.

Zatem $W_6^3 = 6^3 = 216$.

Odpowiedź: Istnieje 216 takich liczb.

Kombinacja

Każdy k -elementowy podzbiór zbioru n -elementowego A , gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy k -elementową **kombinacją** zbioru A .

Przy podawaniu elementów kombinacji nie jest ważna kolejność, w jakiej są wymieniane.

Liczba k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego wyraża się wzorem:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ dla } k \leq n.$$

Przykład

Na ile sposobów możemy wybrać 3-osobową delegację grupy 8 osób?

Rozwiązanie:

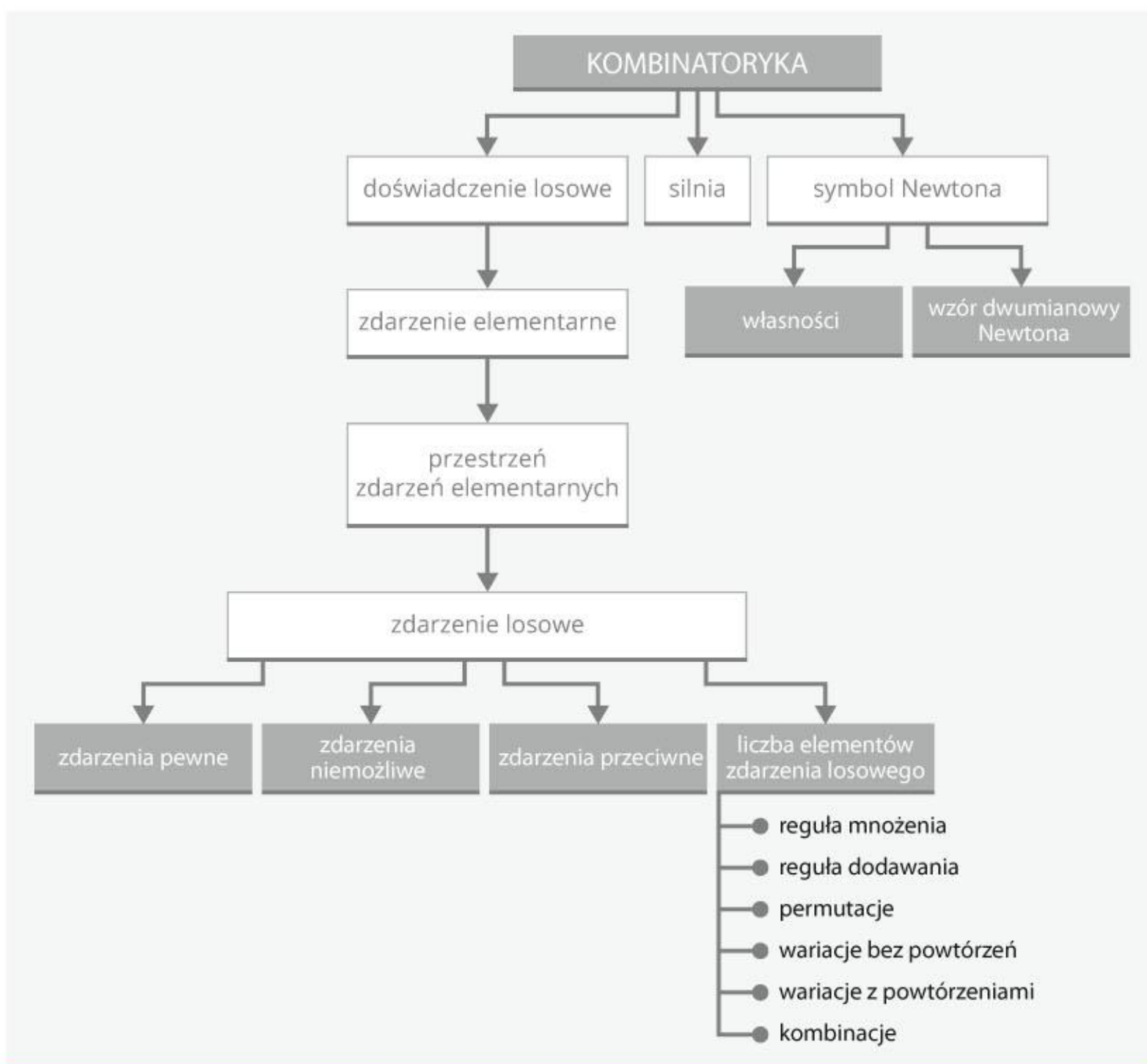
Wybierając delegację, tworzymy podzbiór, czyli nie jest ważne, w jakiej kolejności wybierzemy poszczególne osoby do delegacji.

Zatem tworzymy 3-elementową kombinację zbioru $n = 8$ elementów.

$$C_8^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3! \cdot 5!} = \frac{336}{6} = 56$$

Odpowiedź: Taką delegację możemy wybrać na 56 sposobów.

11.4. Utrwalamy wiedzę





12

**Rachunek prawdopodobieństwa
i statystyka**

12.1. Prawdopodobieństwo klasyczne

Prawdopodobieństwo klasyczne

Po przeprowadzeniu doświadczenia losowego możemy obliczyć częstość występowania poszczególnych wyników. Jeżeli wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne (zdarzają się równie często), możemy, że mamy do czynienia z **prawdopodobieństwem klasycznym**.

Jeśli Ω jest zbiorem skończonym i niepustym, to **prawdopodobieństwem** zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę: $P(A) = \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|}$.

Z klasycznej definicji prawdopodobieństwa wynika więc, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe ilorazowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych należących do zbioru Ω .

Przykład

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania nieparzystej liczby oczek przy jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

Rozwiązanie:

Określamy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego polegającego na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6$

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , że wypadła nieparzysta liczba oczek: $A = \{1, 3, 5\}$

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $|\bar{A}| = 3$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Przykład

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy liczbę, która jest podzielna przez 15 i nie jest podzielna przez 10.

Rozwiązanie:

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 99 - 9 = 90$

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , że otrzymamy liczbę, która jest podzielna przez 15 i nie jest podzielna przez 10:

$A = \{15, 45, 75\}$

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $|\bar{A}| = 3$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$

Przykład

W bębnie maszyny losującej są kule białe i o 5 więcej kul czarnych. Oblicz, ile jest kul białych, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania jej wynosi 0,4.

Rozwiązanie:

Oznaczamy, przez x liczbę kul białych, a przez $2x + 5$ – liczbę wszystkich kul w bębnie maszyny losującej.

Wyznaczamy liczbę kul białych:

$$\frac{x}{2x+5} = 0,4, \text{ stąd } x = 10$$

Odpowiedź: W tym bębnie jest 10 kul białych.

12.2. Własności prawdopodobieństwa

Własności prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo możemy również definiować, gdy zdarzenia nie są jednakowo prawdopodobne.

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję P określoną na skończonym zbiorze zdarzeń elementarnych Ω o wartościach rzeczywistych spełniających warunki:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ dla dowolnego $A \subset \Omega$,
2. $P(\emptyset) = 0$ i $P(\Omega) = 1$,
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla dowolnych zdarzeń rozłącznych $A, B \subset \Omega$.

Liczbę $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A .

Z powyżej definicji wynikają **własności prawdopodobieństwa**.

Jeżeli Ω jest zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego, a P prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach losowych zawartych w Ω , to:

1. jeżeli $A, B \subset \Omega$ oraz $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$,
2. jeżeli $A \subset \Omega$, to $P(A') = 1 - P(A)$,
3. jeżeli $A, B \subset \Omega$, to jeżeli $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$,
4. jeżeli $A, B \subset \Omega$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Przykład

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 lub przez 4.

Rozwiązanie:

Określamy liczbę zdarzeń elementarnych: $\overline{\Omega} = 99 - 9 = 90$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A - wypadła liczba podzielna przez 3 lub przez 4.

Zdarzenie A jest sumą zdarzeń A_1 i A_2 , gdzie A_1 oznacza, że została wylosowana liczba podzielna przez 3, A_2 - została wylosowana liczba podzielna przez 4.

Wtedy:

$$A_1 = \{12, 15, 18, \dots, 99\}, \overline{A_1} = 30, P(A_1) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \{12, 16, 20, \dots, 96\}, \overline{A_2} = 22, P(A_2) = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$$

$$\text{Wyznaczamy } A_1 \cap A_2: A_1 \cap A_2 = \{12, 24, 36, \dots, 96\}, \text{ stąd } \overline{A_1 \cap A_2} = 8, P(A_1 \cap A_2) = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$$

Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 lub przez 4:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{3} + \frac{11}{45} - \frac{4}{45} = \frac{15}{45} + \frac{11}{45} - \frac{4}{45} = \frac{22}{45}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 3 lub przez 4 jest równe $\frac{22}{45}$.

Przykład

Rzucamy czterokrotnie monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie orzeł.

Rozwiązanie:

Określamy liczbę zdarzeń elementarnych: $\overline{\Omega} = 2^4 = 16$

Oznaczamy jako A zdarzenie polegające na otrzymaniu przynajmniej jednego orła w czterech rzutach. Zdarzenie A' przeciwne do zdarzenia A polega na wyrzuceniu samych reszek, czyli $A' = \{(r, r, r, r)\}$. Za-

tem $\overline{A'} = 1$, czyli $P(A') = \frac{1}{16}$.

Obliczamy prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz wypadnie orzeł:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

12.3. Prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite

Prawdopodobieństwo warunkowe

Bardzo często zajście jednego ze zdarzeń losowych związanych z pewnym doświadczeniem ma wpływ na prawdopodobieństwo zajścia innego zdarzenia.

Jeżeli Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego oraz $A, B \subset \Omega$, przy czym $P(B) > 0$, to **prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B**

nazywamy liczbę: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Przykład

W urnie jest 7 kul: 3 białe i 4 czarne. Oblicz prawdopodobieństwo, że druga wylosowana kula będzie biała, jeżeli pierwsza wylosowana będzie czarna.

Rozwiązanie:

Oznaczamy A – wylosowanie białej kuli, B – wylosowanie czarnej kuli, $A \cap B$ – wylosowanie najpierw czarnej kuli, a potem białej.

Wyznaczamy prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej: $P(B) = \frac{4}{7}$

Jeśli za pierwszym razem wyciągnęliśmy kulę czarną, to w urnie pozostały 3 kule białe i 3 kule czarne, zatem prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej wynosi: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania najpierw czarnej kuli, a potem białej: $P(A \cap B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$

Obliczamy prawdopodobieństwo, że druga wylosowana kula będzie biała, jeżeli pierwsza wylosowana będzie czarna kula:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Zdarzenia niezależne i zależne

Zdarzenia $A, B \subset \Omega$ nazywamy **niezależnymi** (takimi, które nie mają na siebie wpływu), jeśli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Zdarzenia, które nie są niezależne, są zdarzeniami **zależnymi**.

Przykład

Losujemy z talii 52 kart jedną kartę. Czy zdarzenia A – wylosowana karta to pik, B – wylosowana karta to dama są niezależne?

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy zachodzi równość: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$\Omega = 52$$

$$A = 13$$

$$B = 4$$

$$A \cap B = 1$$

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{52} = P(A \cap B)$$

Odpowiedź: Zdarzenia A i B są niezależne.

Prawdopodobieństwo całkowite

W obliczaniu prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych wieloetapowych pomocny jest wzór na **prawdopodobieństwo całkowite**.

Jeżeli Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego oraz zdarzenia $B_1, B_2, \dots, B_n$ spełniają następujące warunki:

zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich ($B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$),

prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie,

zdarzenia parami się wykluczają,

to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ opisuje wzór:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

Przykład

Producent samochodów zlecił wyprodukowanie 70% żarówek do lamp przednich podwykonawcy I, a pozostałe 30% – podwykonawcy II. Wady ma 0,2% żarówek od podwykonawcy I i 0,5% żarówek od podwykonawcy II. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana żarówka jest wadliwa.

Rozwiązanie:

Oznaczamy przez A zdarzenie, że wybrana żarówka jest wadliwa, przez B_1 , że pochodzi od podwykonawcy I, a przez B_2 , że pochodzi od podwykonawcy II.

$$\text{Wówczas: } A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

Zdarzenia $(A \cap B_1)$ i $(A \cap B_2)$ wykluczają się, więc: $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$

$$\text{Stąd: } P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

Ponieważ $P(B_1) = 0,7$, $P(A|B_1) = 0,002$, $P(B_2) = 0,3$, $P(A|B_2) = 0,005$,

$$\text{więc: } P(A) = 0,7 \cdot 0,002 + 0,3 \cdot 0,005 = 0,0029$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania wadliwej żarówki wynosi 0,0029.

Doświadczenie losowe kilkietapowe

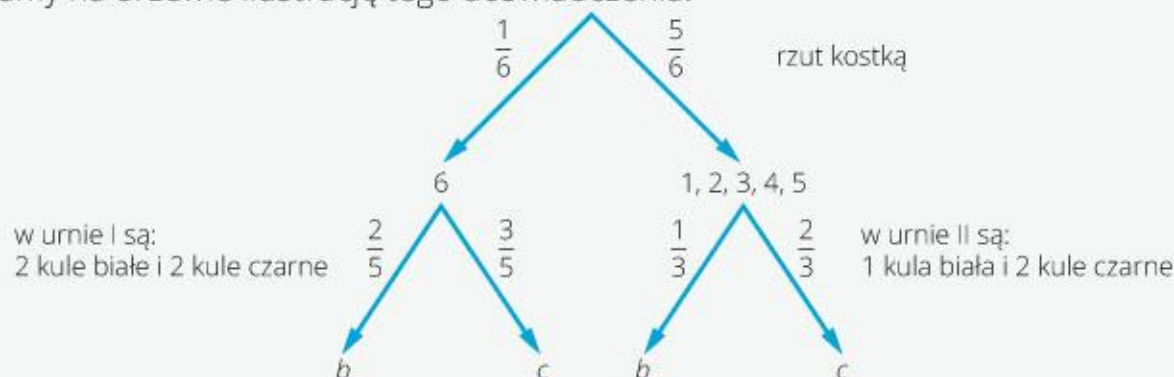
Doświadczenie losowe kilkietapowe wygodnie jest zilustrować za pomocą **drzewa doświadczenia losowego** (drzewa stochastycznego). Możemy w ten sposób graficznie przedstawić przebieg i wyniki doświadczenia.

Przykład

W urnie I są 2 kule białe i 3 czarne. W urnie II jest 1 kula biała i 2 czarne. Rzucamy sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie szóstka, losujemy jedną kulę z urny I, w przeciwnym razie losujemy kulę z urny II. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

Rozwiązanie:

Przedstawiamy na drzewie ilustrację tego doświadczenia.



Zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu kuli białej sprzyja wyrzucenie 6 oczek i wylosowaniu kuli białej z urny I oraz wyrzucenie liczby oczek mniejszej od 6 i wylosowanie kuli białej z urny II.

$$\text{Zatem: } P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{90}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{31}{90}$.

Wzór Bayesa

Często spotykamy się z zagadnieniami, w których znamy wynik doświadczenia i pytamy o jego przebieg. Możemy wówczas stosować **wzór Bayesa**.

- Jeżeli Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia losowego, a B_1 i B_2 zdarzeniami o dodatnich prawdopodobieństwach takimi, że $B_1 \cup B_2 = \Omega$ oraz $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ o dodatnim prawdopodobieństwie prawdziwy jest wzór:

$$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A | B_1)}{P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2)}$$

Przykład

W rozgrywkach sportowych startują reprezentanci tylko dwóch szkół. Zawodnicy z liceum stanowią 40% wszystkich uczestników rozgrywek, a pozostali zawodnicy są z technikum. Wśród zawodników z liceum jest połowa dziewcząt, a wśród zawodników z technikum tylko 10% to dziewczęta. W sposób losowy ze wszystkich zawodników wybrano jedną osobę. Okazało się, że jest to dziewczyna. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest ona reprezentantką liceum.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez A , że wybrana osoba to dziewczyna, przez B_1 , że wybrana osoba jest z liceum, a przez B_2 , że wybrana osoba jest z technikum.

Na podstawie treści zadania mamy:

$$P(B_1) = 0,4, P(B_2) = 1 - 0,4 = 0,6, P(A | B_1) = 0,5, P(A | B_2) = 0,1$$

$$\text{Ze wzoru Bayesa mamy: } P(B_1 | A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A | B_1)}{P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2)}$$

$$\text{Zatem: } P(B_1 | A) = \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,1} = \frac{0,2}{0,26} \approx 0,77$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że wylosowana dziewczyna jest reprezentantką liceum, wynosi ok. 0,77.

Wartość oczekiwana

- Jeśli rozważymy grę, w której możliwe jest n wyników liczbowych: $x_1, x_2, \dots, x_n$ i prawdopodobieństwo otrzymania wyniku x_i jest równe p_i dla $i = 1, \dots, n$, to **wartością oczekiwaną** gry nazywamy liczbę:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.

Przykład

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jeżeli suma oczek jest równa 5, otrzymujemy 8 zł, jeśli większa od 9, otrzymujemy 6 zł, jeśli równa 3 lub 7, otrzymujemy 1 zł. W pozostałych przypadkach tracimy 5 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej. Czy ta gra jest sprawiedliwa?

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 5 w rzucie dwiema sześciennymi kostkami wynosi $\frac{4}{36}$, sumy oczek większej od 9 – $\frac{6}{36}$, sumy oczek równej 3 lub 7 – $\frac{9}{36}$, pozostałych sum oczek – $\frac{17}{36}$.

Obliczamy wartość oczekiwaną wygranej:

$$8 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{9}{36} - 5 \cdot \frac{17}{36} = -\frac{8}{36} = -\frac{2}{9}$$

Odpowiedź: Ta gra nie jest sprawiedliwa.

Schemat Bernoulliego

Wśród doświadczeń wieloetapowych na szczególną uwagę zasługują te, które polegają na wielokrotnym powtórzeniu tego samego doświadczenia losowego mającego dwa możliwe wyniki o dodatnich prawdopodobieństwach.

- Każde powtórzenie doświadczenia nazywamy **próbą Bernoulliego**, jeden z wyników nazywamy **sukcesem**, a drugi – **porażką**.

Na przykład, jeśli próba polega kupnie losu na loterii, za sukces możemy przyjąć kupno losu wygranego, a za porażkę – kupno losu przegranego.

Wielokrotne powtórzenie próby nazwiemy **niezależnymi**, jeśli pojawienie się dowolnych wyników w jednej próbie nie zmienia prawdopodobieństwa pojawienia się wyników przy pozostałych próbach.

Jeżeli przeprowadzimy n niezależnych i identycznych doświadczeń, w których są tylko dwa możliwe wyniki, to taki ciąg powtórzeń tego samego doświadczenia nazywamy **schematem Bernoulliego**.

W schemacie n prób Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów wyraża się wzorem:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n$$

gdzie p oznacza prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie, a q – prawdopodobieństwo porażki ($q = 1 - p$).

Przykład

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania trzech orłów w pięciokrotnym rzucie monetą.

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru Bernoulliego. Prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie (wyrzucenie orła) $p = \frac{1}{2}$, a prawdopodobieństwo porażki $q = \frac{1}{2}$. Zatem prawdopodobieństwo otrzymania trzech orłów w pięciokrotnym rzucie monetą jest równe:

$$P(S_5 = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16} = 0,3125$$

12.4. Skala centylowa

Skala centylowa

Skala centylowa to skala pozycyjna wyników uporządkowanych rosnąco. Zawiera 99 centyli.

Centyl to jedna ze 100 równych części, na które można podzielić zakres wartości zestawu danych, aby pokazać rozkład tych wartości.

Wyniki, jakie uczeń uzyskuje z każdego przedmiotu podczas egzaminu ósmoklasisty oraz egzaminu maturalnego, są wyrażone w procentach oraz za pomocą **skali centylowej**. Skala ta pokazuje miejsce każdego ucznia na tle innych osób, które napisały egzamin z danego przedmiotu nie tylko w danym roku, lecz także na przestrzeni lat. Skala centylowa pozwala więc porównać poziom wiedzy i umiejętności uczniów prezentowany podczas egzaminów. I tak na przykład wynik ucznia podany w skali centylowej, który wynosi na przykład 57, oznacza, że 57% wszystkich uczniów piszących dany egzamin uzyskało wynik taki sam jak on lub niższy (a 43% uczniów uzyskało wynik lepszy niż dany uczeń).

Skalę centylową tworzy się dla wyników wszystkich uczniów w kraju, osobno dla każdego zakresu egzaminu. **Skala ta** jest skalą pozycyjną wyników uporządkowanych rosnąco i zawiera 99 centyli. Aby ustalić wartości poszczególnych centyli, wyniki egzaminu wszystkich uczniów piszących egzamin z danego przedmiotu należy uporządkować niemalejąco i podzielić ich zbiór na 100 równych części. Następnie trzeba określić położenie granic między tymi częściami na skali wyników.

Przykład

Karol uzyskał następujące wyniki egzaminu maturalnego na poziomie rozszerzonym:

język polski – 85% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 73% zdających;

język angielski – 90% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 81% zdających;

matematyka – 78% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 90% zdających.

a) Podaj, jaki procent maturzystów piszących egzamin z matematyki ma wynik taki sam lub niższy niż Karol.

b) Podaj, jaki procent maturzystów piszących egzamin z języka angielskiego ma wynik lepszy niż Karol.

c) Z ilu egzaminów Karol uzyskał wynik poniżej 50 centyla?

Rozwiązanie:

a) Odczytujemy, jaki procent uczniów ma taki sam lub niższy wynik z egzaminu z matematyki: 73%

Odpowiedź: Wynik taki sam lub niższy niż Karol z egzaminu z matematyki uzyskało 73% maturzystów.

b) Odczytujemy, jaki procent uczniów ma taki sam lub niższy wynik z egzaminu z języka angielskiego: 81%

Obliczamy, jaki procent uczniów piszących egzamin z języka angielskiego ma wynik lepszy niż Karol:
 $100\% - 81\% = 19\%$

Odpowiedź: 19% maturzystów uzyskało wynik lepszy niż Karol z egzaminu z języka angielskiego.

- c) Odczytujemy wyniki Karola z kolejnych egzaminów wyrażone w skali centylowej: 73%, 81% i 90%.
Odpowiedź: Ze wszystkich egzaminów Karol uzyskał wynik powyżej 50 centyla.

Przykład

W tabeli przedstawiono skalę centylową z matematyki dla egzaminu maturalnego przeprowadzonego w 2016 r. (cke.gov.pl).

Matematyka – poziom rozszerzony

Wynik procentowy	Wartość centyla
0	2
2	7
4	13
6	19
8	24
10	29
12	33
14	37
16	41
18	44
20	47
22	50
24	53
26	55
28	57
30	60
32	62

Wynik procentowy	Wartość centyla
34	64
36	66
38	68
40	70
42	71
44	73
46	75
48	76
50	78
52	80
54	81
56	83
58	84
60	85
62	87
64	88
66	89

Wynik procentowy	Wartość centyla
68	90
70	91
72	93
74	94
76	95
78	95
80	96
82	97
84	98
86	98
88	99
90	99
92	100
94	100
96	100
98	100
100	100

Odpowiedz na pytania.

- a) Ile procent uczniów napisało egzamin lepiej niż Dominika, który uzyskała z egzaminu 64% punktów?
 b) Ile procent punktów mógł uzyskać Bartosz, jeśli jego wynik to 75 centyl?

Rozwiązanie:

- a) Odszukujemy w tabeli wynik 64% i odczytujemy odpowiadającą mu wartość centyla: 88. Oznacza to, że 88% uczniów uzyskało wynik taki sam lub niższy niż Dominika, a 12% uczniów uzyskało lepszy wynik.

Odpowiedź: Wynik lepszy niż Dominika z egzaminu maturalnego z matematyki uzyskało 12% uczniów.

- b) Odszukujemy w tabeli wynik 75 centyl i odczytujemy odpowiadający mu wynik procentowy: 46%.

Odpowiedź: Bartosz mógł uzyskać 46% punktów z egzaminu maturalnego z matematyki.

Siatka centylowa

Innym miejscem wykorzystania skali centylowej są tak zwane siatki centylowe, którymi posługują się lekarze, a także rodzice. Siatki centylowe są jedną z metod obiektywnej oceny rozwoju fizycznego dzieci w wieku od 1. do 18. roku życia. Siatki te pozwalają sprawdzić, czy waga lub wzrost dziecka znajdują się w normie dla danej populacji. Norma jest dość szeroka, bo znajduje się między 3 a 97 centylem.

Na siatce centylowej zaznaczone są dwie osie. Na poziomej osi oznaczony jest wiek dziecka (w miesiącach lub w latach), a na drugiej – wzrost lub waga. Ponadto narysowanych jest też kilka linii oznaczonych liczbami 3, 10, 25, 50, 75, 90, 97. Te liczby na siatkach centylowych to właśnie centyle. Z naniesionych na siatkę centylową danych wzrostu i wagi dziecka w kolejnych miesiącach jego życia możemy się dowiedzieć, czy dziecko rozwija się proporcjonalnie do wieku.

Siatka centylowa (wagi lub wzrostu dziewcząt lub chłopców) jest rodzajem skali centylowej, która pozwala na ocenę przebiegu wzrostu i przyboru masy ciała konkretnego dziecka na tle mieszkańców danego kraju.

Przykład

Na siatce centylowej zaznaczono wyniki pomiaru wagi Martyny w pierwszych 7 miesiącach życia.



- a) Podaj wagę Martyny w pierwszym miesiącu życia.
- b) W którym miesiącu waga Martyny była o 3250 g większa od jej wagi w pierwszym miesiącu życia?
- c) W jakim centylu znajdowała się waga Martyny w siódmym miesiącu życia?

Rozwiązanie:

- a) Odczytujemy wagę Martyny odpowiadającą dla pierwszego miesiąca: 3,75 kg

Odpowiedź: W pierwszym miesiącu życia Martyna ważyła 3,75 kg.

- b) W pierwszym miesiącu Martyna ważyła 3,75 kg. Odczytujemy ze skali, w którym miesiącu waga Martyny była o większa o 3250 g = 3,25 kg, tzn. wynosiła 7 kg. Było to w szóstym miesiącu.

Odpowiedź: W szóstym miesiącu życia waga Martyny była wyższa o 3250 g od jej wagi w pierwszym miesiącu.

- c) Waga Martyny w siódmym miesiącu życia to ok. 7,25 kg. Punkt ten znajduje się pomiędzy liniami odpowiadającymi 10 i 25 centylowi.

Odpowiedź: W siódmym miesiącu życia waga Martyny znajdowała się pomiędzy 10 a 25 centylem.

12.5. Wartości średnie, mediana i dominanta

Średnia arytmetyczna

Statystyka zajmuje się metodami pozyskiwania i prezentacji, a przede wszystkim analizy danych opisujących różne zjawiska. Dla każdego zbioru danych statystycznych można określić pewne liczby charakteryzujące ten zbiór. Są nimi średnia arytmetyczna i średnia ważona.

Średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Przykład

Jaką średnią ocen uzyskała na świadectwie Amelia, jeśli na świadectwie miała cztery oceny celujące, trzy bardzo dobre, pięć dobrych i trzy dostateczne?

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią arytmetyczną wszystkich ocen na świadectwie Amelii:

$$\frac{4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{15} \approx 4,53$$

Odpowiedź: Średnia ocen Amelii wynosiła 4,53.

Średnia ważona

Gdy obliczamy średnią arytmetyczną liczb, wszystkie te liczby traktujemy jednakowo. Czasami jednak do niektórych danych przywiązujemy większą wagę i chcemy to uwzględnić przy obliczaniu średniej wartości.

Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z odpowiednimi wagami $a_1, a_2, \dots, a_n$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem: $\bar{x}_w = \frac{x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$.

Gdy wszystkie wagi są równe, średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej.

Przykład

Do pierwszej klasy profilowanego technikum geodezyjnego przyjmuje się kandydatów na podstawie średniej ważonej oceny na świadectwie ukończenia szkoły podstawowej z następujących przedmiotów: język polski, język angielski, matematyka, informatyka. Oceny będą przeliczane na punkty według zasady: celujący – 4 punkty, bardzo dobry – 3 punkty, dobry – 2 punkty, dostateczny – 1 punkt, dopuszczający – 0 punktów.

Jakie rezultaty osiągnęli kandydaci, których oceny podano w tabeli? Kto uzyskał najwyższą średnią ważoną?

Kandydat	Język polski	Język angielski	Matematyka	Informatyka	Średnia ważona
Leon Drabik	3	5	6	4	
Paulina Kowalik	5	4	4	3	
Michał Wrona	4	3	5	5	

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią ważoną Leona Drabika:

$$\frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 2}{1 + 3 + 4 + 2} = 5$$

Obliczamy średnią ważoną Pauliny Kowalik:

$$\frac{5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{3 + 2 + 2 + 1} = 4,25$$

Obliczamy średnią ważoną Michała Wrony:

$$\frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3}{2 + 1 + 3 + 3} \approx 4,56$$

Odpowiedź: Najwyższą średnią ważoną ocen uzyskał Leon Drabik.

Mediana

Innymi wielkościami charakteryzującymi zbiór danych są mediana i dominanta.

Mediana to środkowy wynik w danym zbiorze uporządkowanym niemalejąco.

Aby wyznaczyć medianę danego zbioru liczb, należy najpierw uporządkować te liczby niemalejąco, a następnie wśród tak uporządkowanych liczb odczytać wynik środkowy.

Jeśli liczba elementów zbioru danych jest równa n i jest to liczba nieparzysta, to medianą jest liczba o numerze $\frac{n+1}{2}$.

Jeżeli liczba elementów w zbiorze jest równa n i jest to liczba parzysta, to mediana jest równa średniej arytmetycznej dwóch środkowych liczb (liczbami środkowymi są liczby o numerach $\frac{n}{2}$ i $\frac{n}{2} + 1$).

Przykład

Wyznacz medianę danych:

a) 16, 28, 14, 15, 14

b) 21, 73, 81, 22, 21, 77, 40, 21

Rozwiązanie:

a) Porządkujemy zbiór danych w kolejności niemalejącej: 14, 14, 15, 16, 28

Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą nieparzystą i wynosi $n = 5$.

Medianą jest liczba o numerze trzecim $\left(\frac{5+1}{2} = 3\right)$, czyli liczba 15.

Odpowiedź: Mediana tego zestawu danych jest równa 15.

b) Porządkujemy zbiór danych w kolejności niemalejącej: 21, 21, 21, 22, 40, 73, 77, 81.

Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą parzystą i wynosi $n = 8$. Zatem znajdujemy dwie środkowe liczby. Są to liczby o numerze czwartym $\left(\frac{n}{2} = \frac{8}{2}\right)$ i o numerze piątym $\left(\frac{n}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1\right)$, czyli dane: 22 i 40.

Mediana jest średnią arytmetyczną tych dwóch danych, czyli: liczba $\frac{22+40}{2} = 31$

Odpowiedź: Mediana tego zestawu danych jest równa 31.

Dominanta

Dominanta to liczba, która w zbiorze danych występuje najczęściej.

Jeśli w zbiorze danych jest kilka wartości, które występują z taką samą liczebnością i większą niż pozostałe wartości, to każda z tych wartości jest dominantą. Jeśli natomiast w zbiorze danych wszystkie wartości występują z taką samą liczebnością, to mówimy, że w tym zbiorze danych nie ma dominanty.

Przykład

Określ dominantę wśród ocen uczniów ze sprawdzianu z fizyki: 4, 5, 1, 2, 3, 4, 1, 3, 6, 3, 1, 3, 4.

Rozwiązanie:

Odczytujemy ocenę, która w tym zestawie danych występuje najczęściej. Jest to ocena dostateczna (ocena powtórzyła się 4 razy).

Odpowiedź: Dominantą tego zestawu danych jest ocena dostateczna.

12.6. Odchylenie standardowe

Odchylenie standardowe

Średnia arytmetyczna danych liczbowych nie zawsze w pełni charakteryzuje te dane. Może się zdarzyć, że dwa zestawy danych mają taką samą lub zbliżoną średnią, ale ich układy są różne. Jako miarę rozproszenia danych wokół ich średniej przyjmuje się **odchylenie standardowe**.

Odchyleniem standardowym liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Wariancja

Wariancją liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę: $\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$, gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Przykład

Oblicz wariancję liczb: 16, -10, 6.

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią arytmetyczną liczb 16, -10 i 6: $\frac{16 + (-10) + 6}{3} = 4$

Obliczamy wariancję zestawu danych:

$$\frac{(16 - 4)^2 + (-10 - 4)^2 + (6 - 4)^2}{3} = \frac{144 + 196 + 4}{3} \approx 144,7$$

Odpowiedź: Wariancja zestawu danych wynosi ok. 144,7.

Przykład

W tabeli przedstawiono dane dotyczące wagi (z dokładnością do 2 kg) dwóch grup uczniów. Oblicz odchylenie standardowe wagi w każdej z grup. Oceń, w której grupie zróżnicowanie wagi jest mniejsze.

Waga (w kg)	58	60	62	64
Grupa A Liczba osób	6	8	4	2
Grupa B Liczba osób	4	10	1	5

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią wagę w grupie A:

$$\frac{6 \cdot 58 + 8 \cdot 60 + 4 \cdot 62 + 2 \cdot 64}{6 + 8 + 4 + 2} = \frac{1204}{20} = 60,2$$

Obliczamy wariancję w grupie A, wykorzystujemy pogrupowanie danych:

$$\frac{6 \cdot (58 - 60,2)^2 + 8 \cdot (60 - 60,2)^2 + 4 \cdot (62 - 60,2)^2 + 2 \cdot (64 - 60,2)^2}{20} = \frac{29,04 + 0,32 + 12,96 + 28,88}{20} = 3,56$$



Obliczamy odchylenie standardowe: $\sigma_A = \sqrt{3,56} \approx 1,9$

Obliczamy średnią wagę w grupie B:

$$\frac{4 \cdot 58 + 10 \cdot 60 + 1 \cdot 62 + 5 \cdot 64}{4 + 10 + 1 + 5} = \frac{1214}{20} = 60,7$$

Obliczamy wariancję w grupie B, wykorzystujemy pogrupowanie danych:

$$\frac{4 \cdot (58 - 60,7)^2 + 10 \cdot (60 - 60,7)^2 + 1 \cdot (62 - 60,7)^2 + 5 \cdot (64 - 60,7)^2}{20} = \frac{29,16 + 4,9 + 1,69 + 54,45}{20} = 4,51$$

Obliczamy odchylenie standardowe: $\sigma_B = \sqrt{4,51} \approx 2,12$

Odpowiedź: Mniejsze zróżnicowanie wagi jest w grupie A.

12.7. Utrwalamy wiedzę

PRAWDOPODOBIEŃSTWO

- prawdopodobieństwo klasyczne
- wartość oczekiwana
- wzór Bayesa
- schemat Bernoulliego
- prawdopodobieństwo warunkowe
- prawdopodobieństwo całkowite
- własności prawdopodobieństwa

STATYSTYKA

- mediana
- dominanta
- odchylenie standardowe
- skala centylowa
- średnia arytmetyczna
- średnia ważona

13

Rachunek różniczkowy

13.1. Obliczanie granic funkcji

Granice funkcji

Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$), jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 , o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Przykład

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3$. Uzasadnij, że $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$.

Rozwiązanie:

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem o wyrazach różnych od 3 i takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 - 3) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot x_n - 3) = 3 \cdot 3 - 3 = 6$.

Zgodnie z definicją $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$.

Granice funkcji - twierdzenia

Przyjmujemy bez dowodu następujące twierdzenie:

Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (cf(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot a$, $c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a + b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a - b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \cdot b$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$

Przykład

Oblicz granice.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 2x^2 + 5x - 7)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} ((x^2 - 2)(x + 5))$ c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x}{x^3 + 7}$

Rozwiązanie:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^3 - 2x^2 + 5x - 7) = \lim_{x \rightarrow 4} x^3 - \lim_{x \rightarrow 4} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 4} 5x - \lim_{x \rightarrow 4} 7 = 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 - 7 = 64 - 32 - 7 = 25$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} ((x^2 - 2)(x + 5)) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} (x + 5) = ((-1)^2 - 2) \cdot (-1 + 5) = -4$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x}{x^3 + 7} = \frac{\lim_{x \rightarrow -3} (x^2 - x)}{\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 + 7)} = \frac{(-3)^2 - (-3)}{(-3)^3 + 7} = \frac{12}{-20} = -\frac{3}{5}$

Przykład

Oblicz granice.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

Rozwiązanie:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x^2 + x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x) \cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{1-1}{1+1} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x^2 - 1)}(x^2 + 1)}{\cancel{x^2 - 1}} = (-1)^2 + 1 = 2$

Przykład

Oblicz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$

Rozwiązanie:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{2x}-2}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})(\sqrt{2x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt{2x}+2} = \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2$$

Granice prawostronne i lewostronne funkcji

1. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(x_0; b)$.

Liczba g jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0 $\left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = g \right)$, jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 , gdzie $x_n \in (x_0; b)$, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

2. Niech f będzie funkcją określoną w przedziale $(a; x_0)$.

Liczba g jest granicą lewostronną funkcji f w punkcie x_0 $\left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = g \right)$, jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 , gdzie $x_n \in (a; x_0)$, ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g .

Przykład

Oblicz granice.

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x^2+1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{\sqrt{3-x}+1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$$

Rozwiązanie:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+1}+1}{x^2+1} = \frac{\sqrt{-1+1}+1}{(-1)^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-x}{\sqrt{x}} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2-x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(x-1) \cdot \sqrt{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x-1) \cdot \sqrt{x}) = (0-1) \cdot \sqrt{0} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{\sqrt{3-x}+1} = \frac{1}{\sqrt{3-3}+1} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(\frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}} \right) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(\cancel{x+3}) \cdot \sqrt{x^2-9}}{(\cancel{x-3})(\cancel{x+3})} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} = \frac{\sqrt{(-3)^2-9}}{-3-3} = 0$$

Granice niewłaściwe

Niech f będzie funkcją określoną w sąsiedztwie punktu x_0 . Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** ∞ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \right)$, jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do x_0 , o wyrazach należących do dziedziny funkcji f i różnych od x_0 , ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞ .

Przykład

Oblicz granice.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4}{|x+2|}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x-7}{2x-x^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right)$$

Rozwiązanie:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-4}{|x+2|} = \frac{-4}{0} = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x-7}{2x-x^2} = \frac{4+2-7}{2 \cdot 2-2^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-2(x-1)}{x^2-1} = \frac{1-2(-1-1)}{(-1)^2-1} = \frac{5}{0} = \infty$$

13.2. Zastosowanie własności Darboux

Twierdzenie Darboux

Twierdzenie Darboux:

Jeśli funkcja $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz jeżeli $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.

Przykład

Sprawdź, czy funkcja $f(x) = x^6 - x^4 - 10x^2 - 8$ ma miejsca zerowe należące do przedziału $\langle -4, 4 \rangle$.

Rozwiązanie:

Funkcja jest wielomianem, zatem jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału.

$$f(-4) = (-4)^6 - (-4)^4 - 10 \cdot (-4)^2 - 8 = 4096 - 256 - 160 - 8 = 3672$$

$$f(4) = 4^6 - 4^4 - 10 \cdot 4^2 - 8 = 4096 - 256 - 160 - 8 = 3672$$

$f(a) \cdot f(b) > 0$, zatem nie możemy zastosować twierdzenia Darboux, lecz obliczając $f(0)$, otrzymujemy $f(0) = -8$

Zatem $f(-4) \cdot f(0) < 0$, czyli w przedziale $\langle -4, 0 \rangle$, funkcja ma miejsce zerowe.

Również $f(0) \cdot f(4) < 0$, czyli w przedziale $\langle 0, 4 \rangle$, funkcja ma miejsce zerowe.

Funkcja $f(x) = x^6 - x^4 - 10x^2 - 8$ ma w przedziale $\langle -4, 4 \rangle$ przynajmniej dwa miejsca zerowe.

Przykład

Sprawdź, czy funkcja $f(x) = 8^x - x^4$ ma miejsca zerowe należące do przedziału $\langle -2, 2 \rangle$.

Rozwiązanie:

Funkcja jest różnicą funkcji wykładniczej i wielomianu, zatem jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału.

$$f(-2) = 8^{-2} - (-2)^4 = \frac{1}{64} - 16 = -15\frac{63}{64}$$

$$f(2) = 8^2 - 2^4 = 64 - 16 = 48$$

$f(-2) \cdot f(2) < 0$, zatem na mocy twierdzenia Darboux funkcja ma w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$ miejsce zerowe.

Przykład

Wykaż, że równanie $x^4 = x + 1$ w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$ ma dokładnie jeden pierwiastek. Wyznacz przybliżoną wartość tego pierwiastka.

Rozwiązanie:

Przekształcamy równanie do postaci $x^4 - x - 1 = 0$ i określamy funkcję $f(x) = x^4 - x - 1$ na przedziale $\langle 1, 2 \rangle$.

Funkcja jako wielomian jest ciągła, więc obliczamy wartości na końcach przedziału:

$$f(1) = 1^4 - 1 - 1 = -1$$

$$f(2) = 2^4 - 2 - 1 = 13$$

$f(1) \cdot f(2) < 0$, zatem na mocy twierdzenia Darboux funkcja w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$ ma miejsce zerowe.

Aby wykazać, że jest to jedyne miejsce zerowe, należy wykazać, że funkcja jest w tym przedziale rosnąca.

Obieramy dowolne x_1 i x_2 z przedziału $\langle 1, 2 \rangle$ takie, że $x_1 < x_2$, i wykazujemy, że $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

W szczególności możemy przyjąć $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, wtedy $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 13$, zatem

$$f(x_2) - f(x_1) = 13 - (-1) = 14 > 0, \text{ czyli funkcja jest rosnąca.}$$

Wykazaliśmy, że w przedziale $\langle 1, 2 \rangle$ funkcja $f(x) = x^4 - x - 1$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

Wyznaczając przybliżoną wartość tego miejsca zerowego, posługujemy się metodą równego podziału (bisekcja).

Sprawdzamy, czy $x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ jest miejscem zerowym:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{81}{16} - \frac{24}{16} - \frac{16}{16} = \frac{41}{16} > 0$$

Sprawdzamy, czy $x_2 = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$ jest miejscem zerowym:

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^4 - \frac{5}{4} - 1 = \frac{625}{256} - \frac{320}{256} - \frac{256}{256} = \frac{49}{256} > 0$$

Sprawdzamy, czy $x_3 = \frac{1+\frac{5}{4}}{2} = \frac{9}{8}$ jest miejscem zerowym:

$$f\left(\frac{9}{8}\right) = \left(\frac{9}{8}\right)^4 - \frac{9}{8} - 1 = \frac{6561}{4096} - \frac{8704}{4096} = -\frac{2143}{4096} < 0$$

Sprawdzamy, czy $x_4 = \frac{\frac{5}{4} + \frac{9}{8}}{2} = \frac{19}{16}$ jest miejscem zerowym.

$$f\left(\frac{19}{16}\right) = -\frac{13039}{65536} < 0$$

Można w ten sposób obliczać dalej, ale my już zakończymy.

Przybliżoną wartością miejsca zerowego jest $x_0 = \frac{\frac{5}{4} + \frac{19}{16}}{2} = \frac{39}{32} = 1\frac{7}{32}$.

13.3. Zastosowanie definicji pochodnej funkcji

Pochodna funkcji

Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ i oznaczamy $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Przykład

Oblicz pochodną funkcji:

a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$

w punkcie $x_0 = 5$.

Rozwiązanie:

Korzystamy z definicji pochodnej:

$$a) f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 3 \cdot 5}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x - 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} 3 = 3$$

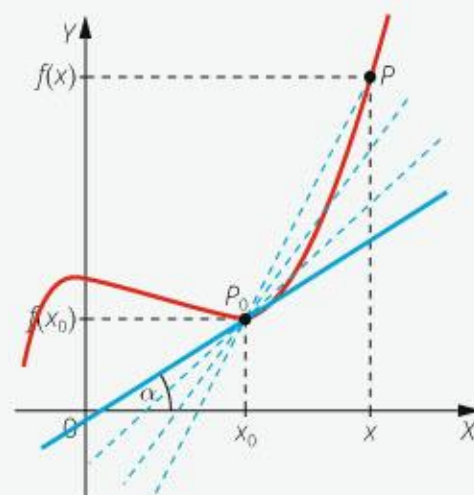
$$b) f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5^2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10$$

$$c) f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 5^3}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x^2 + 5x + 25)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 5x + 25) = 5^2 + 5 \cdot 5 + 25 = 75$$

Interpretacja geometryczna pochodnej

Pochodna $f'(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta, jaki styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P_0(x_0; f(x_0))$ tworzy z osią OX .

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$



Przykład

Oblicz miarę kąta, jaki styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $(1, 1)$ tworzy z osią OX .

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną funkcji w punkcie 1:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1^3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 3 \quad \alpha \approx 72^\circ$$

Przykład

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ w punkcie $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną funkcji w punkcie 2:

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{2x(x-2)} = -\frac{1}{4}$$

$$a = f'(2) = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4}$$

Interpretacja fizyczna pochodnej

Wyobraźmy sobie punkt materialny poruszający się wzdłuż linii prostej ze zmienną prędkością.



Jeśli funkcja s opisuje jego położenie w chwili t , to średnia prędkość w przedziale $\langle t_0, t \rangle$ będzie równa:

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Na tej podstawie prędkość w chwili t_0 wyrażamy jako granicę ilorazu różnicowego przy t dążącym do t_0 .

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}, \text{ co jest pochodną drogi względem czasu, czyli } v(t_0) = s'(t_0).$$

Przykład

Drogę przebytą przez spadające swobodnie ciało opisuje funkcja $s(t) = 4,9t^2$, gdzie droga mierzona jest w metrach, a czas – w sekundach. Oblicz prędkość ciała w czasie $t_1 = 2$ oraz $t_2 = 4$.

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną funkcji $s(t)$ w drugiej i czwartej sekundzie:

$$s'(2) = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4,9t^2 - 4,9 \cdot 2^2}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4,9(t^2 - 4)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{4,9(t-2)(t+2)}{t-2} = \lim_{t \rightarrow 2} 4,9(t+2) = 4,9(2+2) = 4,9 \cdot 4 = 19,6$$

$$s'(4) = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4,9t^2 - 4,9 \cdot 4^2}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4,9(t^2 - 16)}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4,9(t-4)(t+4)}{t-4} = \lim_{t \rightarrow 4} 4,9(t+4) = 4,9(4+4) = 4,9 \cdot 8 = 39,2$$

13.4. Obliczanie pochodnej funkcji**Pochodna funkcji potęgowej**

Pochodna stałej jest równa zero $(c)' = 0$.

I Dla dowolnej liczby całkowitej n prawdziwy jest wzór $(x^n)' = nx^{n-1}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Przykład

Wyznacz pochodne funkcji $f(x) = x^n$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $n \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

**Rozwiązanie:**

Obliczamy pochodne, stosując wzór $(x^n)' = nx^{n-1}$:

$$(x^1)' = 1x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2 \cdot x^1 = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3 \cdot x^2 = 3x^2$$

$$(x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Pochodna funkcji potęgowej $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x > 0$ wyraża się wzorem $f'(x) = ax^{a-1}$.

Przykład

Wyznacz pochodną funkcji: a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Rozwiązanie:

a) Przekształcamy funkcję do postaci potęgowej:

$$f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$$

Obliczamy pochodną, stosując wzór $f'(x) = ax^{a-1}$:

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5 \cdot x^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

b) Przekształcamy funkcję do postaci potęgowej:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

Obliczamy pochodną, stosując wzór $f'(x) = ax^{a-1}$:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Obliczanie pochodnych funkcji

Jeśli funkcje f i g mają pochodną w punkcie x , c jest dowolną stałą, to prawdziwe są wzory:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \text{ - wyłączanie stałej przed pochodną}$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \text{ - pochodna sumy funkcji}$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) \text{ - pochodna różnicy funkcji}$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \text{ - pochodna iloczynu funkcji}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0 \text{ - pochodna ilorazu funkcji}$$

Przykład

Wyznacz pochodną podanych funkcji.

$$\text{a) } f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 8x + 7 \quad \text{b) } f(x) = (1 - 4x^2)(x^3 - 2x) \quad \text{c) } f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1)$$

Rozwiązanie:

a) Stosujemy wzory na pochodną sumy i różnicy funkcji:

$$f'(x) = (5x^4)' + (3x^2)' - (8x)' + (7)' = 20x^3 + 6x - 8$$

b) Stosujemy wzór na pochodną iloczynu funkcji:

$$f'(x) = (1 - 4x^2)' \cdot (x^3 - 2x) + (1 - 4x^2) \cdot (x^3 - 2x)' = (-8x) \cdot (x^3 - 2x) + (1 - 4x^2) \cdot (3x^2 - 2) =$$

$$= -8x^4 + 16x^2 + 3x^2 - 2 - 12x^4 + 8x^2 = -20x^4 + 27x^2 - 2$$

c) Stosujemy wzór na pochodną iloczynu funkcji:

$$f'(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)' \cdot (x^2 - x - 1) + (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x - 1)' = (3x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 - x - 1) +$$

$$+ (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (2x - 1) = 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 - x - 1 + 2x^4 - x^3 + 2x^3 - x^2 +$$

$$+ 2x^2 - x + 2x - 1 = 5x^4 - 3x^2 - 2$$

Przykład

Wyznacz pochodną podanych funkcji.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 3} \quad \text{b) } f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$$

Rozwiązanie:

a) Stosujemy wzór na pochodną ilorazu funkcji:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)' \cdot (2x - 3) - (x^2 + 1) \cdot (2x - 3)'}{(2x - 3)^2} = \frac{2x \cdot (2x - 3) - (x^2 + 1) \cdot 2}{(2x - 3)^2} = \frac{4x^2 - 6x - 2x^2 - 2}{(2x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 2}{(2x - 3)^2}$$

b) Stosujemy wzór na pochodną ilorazu funkcji:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^2 - x + 1)' \cdot (x^2 - 1) - (2x^2 - x + 1) \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(4x - 1) \cdot (x^2 - 1) - (2x^2 - x + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{4x^3 - 4x - x^2 + 1 - 4x^3 + 2x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 6x + 1}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

Pochodne funkcji trygonometrycznych

Każda z funkcji trygonometrycznych ma pochodną we wszystkich punktach swojej dziedziny.

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Przykład

Wyznacz pochodną podanych funkcji.

$$\text{a) } f(x) = \sin x \cdot \cos x \quad \text{b) } f(x) = x \cdot \operatorname{tg} x$$

Rozwiązanie:

a) Stosujemy wzór na pochodną iloczynu:

$$f'(x) = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

b) Stosujemy wzór na pochodną iloczynu:

$$f'(x) = x' \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 1 \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 x} \right) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cdot \cos x - x}{\cos^2 x}$$

Pochodna funkcji złożonej

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 , a funkcja g ma pochodną w punkcie $f(x_0)$, to funkcja $h = g \circ f$ ma pochodną w punkcie x_0 oraz $h'(x_0) = (g(f(x_0)))' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Przykład

Wyznacz pochodną podanych funkcji.

$$\text{a) } h(x) = (2x^3 + 1)^2 \quad \text{b) } h(x) = \sqrt{4 + \sqrt{x}}$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } h'(x) = ((2x^3 + 1)^2)' \cdot (2x^3 + 1)' = 2(2x^3 + 1) \cdot 6x^2 = 24x^5 + 12x^2$$

$$\text{b) } h'(x) = (\sqrt{4 + \sqrt{x}})' \cdot (4 + \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{4 + \sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{4x + \sqrt{x}^3}}$$

13.5. Zastosowanie pochodnej do badania monotoniczności funkcji**Znak pochodnej a monotoniczność funkcji**

Jeżeli pochodna funkcji f jest dodatnia (ujemna) w przedziale (a, b) , z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których przyjmuje ona wartość 0, to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca (malejąca).



Przykład

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 + 2 \cdot x - 3 = x^2 + 2x - 3$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe $x^2 + 2x - 3 = 0$:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Szkicujemy wykres pochodnej i odczytujemy przedziały monotoniczności funkcji:



$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ dla $x \in (-3, 1)$, zatem funkcja $f(x)$ jest rosnąca dla $x \in (-\infty, -3)$, malejąca dla $x \in (-3, 1)$ oraz rosnąca dla $x \in (1, +\infty)$.

Przykład

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{2x^2}{(x+3)^2}$, $x \neq -3$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = \frac{(2x^2)' \cdot (x+3)^2 - 2x^2 \cdot ((x+3)^2)'}{(x+3)^2} = \frac{4x \cdot (x+3)^2 - 2x^2 \cdot 2 \cdot (x+3) \cdot 1}{(x+3)^4} = \frac{4x(x+3)(x+3-x)}{(x+3)^4} = \frac{12x(x+3)}{(x+3)^4}$$

Ponieważ mianownik jest zawsze dodatni, znak pochodnej zależy od licznika.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$12x(x+3) = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 0$$

Szkicujemy wykres licznika pochodnej i odczytujemy przedziały monotoniczności funkcji:



$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) < 0$ dla $x \in (-3, 0)$, zatem $f(x)$ jest rosnąca dla $x \in (-\infty, -3)$, malejąca dla $x \in (-3, 0)$ oraz rosnąca dla $x \in (0, +\infty)$.

13.6. Rozwiązywanie zadań optymalizacyjnych z zastosowaniem pochodnej

Zadania optymalizacyjne

Przykład

Wyznacz długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego suma krawędzi wynosi 24, tak aby miał on największą objętość. Oblicz tę objętość.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Piszemy wzór na objętość graniastosłupa:

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h$$

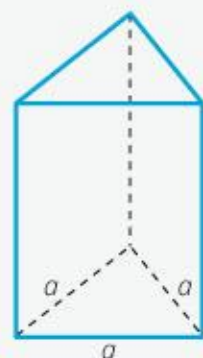
Przyjmujemy założenia $a > 0$, $h > 0$

Z sumy długości krawędzi wyznaczamy h :

$$6a + 3h = 24$$

$$2a + h = 8$$

$$h = 8 - 2a$$



Uzupełniamy założenia $8 - 2a > 0, a < 4$

Wstawiamy do wzoru na objętość, przyjmując objętość jako funkcję zmiennej a :

$$V(a) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot (8 - 2a) = 2a^2 \sqrt{3} - \frac{a^3 \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$$

Obliczamy pochodną tej funkcji:

$$V'(a) = (2\sqrt{3}a^2)' - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a^3\right)' = 4\sqrt{3}a - \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \sqrt{3}a\left(4 - \frac{3}{2}a\right)$$

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ lub } a = \frac{8}{3}$$

Szkicujemy wykres pochodnej:



Największą objętość będzie miał graniastosłup dla $a = \frac{8}{3}$.

$$\text{Obliczamy wysokość graniastosłupa: } h = 8 - 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{24}{3} - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

Obliczamy objętość graniastosłupa:

$$V_{\max} = \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{64}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{128\sqrt{3}}{27}$$

Przykład

Wyznacz promień podstawy, wysokość i tworzącą stożka, którego przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 12, tak aby objętość stożka była największa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Zapisujemy warunki zadania:

$$2r + 2l = 12$$

$$r + l = 6$$

$$l = 6 - r$$

Przyjmujemy założenia:

$$r > 0$$

$$l > 0$$

$$l > r$$

$$6 - r > 0$$

$$6 - r > r$$

$$r < 6$$

$$r < 3$$

Zatem $r \in (0; 3)$.

Wyznaczamy wysokość w zależności od promienia:

$$h^2 + r^2 = l^2$$

$$h^2 + r^2 = (6 - r)^2$$

$$h^2 = 36 - 12r$$

$$h = \sqrt{36 - 12r}$$

Objętość stożka obliczamy ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Zapisujemy objętość jako funkcję promienia:

$$V(r) = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \sqrt{36 - 12r} = \frac{1}{3} \pi \cdot \sqrt{36r^4 - 12r^5}$$

Tworzymy nową funkcję z wyrażenia pod pierwiastkiem:

$$f(r) = 36r^4 - 12r^5$$

Wyznaczamy pochodną funkcji f :

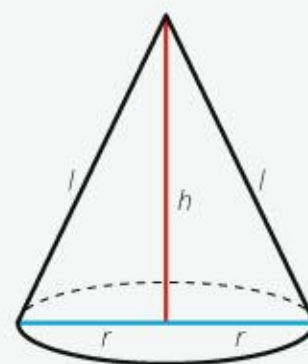
$$f'(r) = (36r^4)' - (12r^5)' = 144r^3 - 60r^4 = 12r^3(12 - 5r)$$

Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej:

$$12r^3 = 0$$

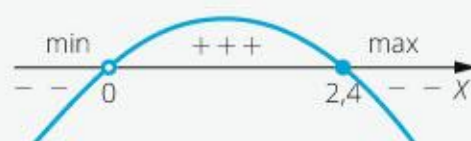
$$r^3 = 0$$

$$r = 0 - \text{nie należy do dziedziny funkcji}$$



> $12 - 5r = 0$ $5r = 12$ $r = 2,4$ – należy do dziedziny funkcji

Szkicujemy wykres pochodnej:



Funkcja $f(r)$ przyjmuje wartość największą w punkcie 2,4, zatem funkcja $V(r)$ też przyjmuje wartość największą w tym punkcie.

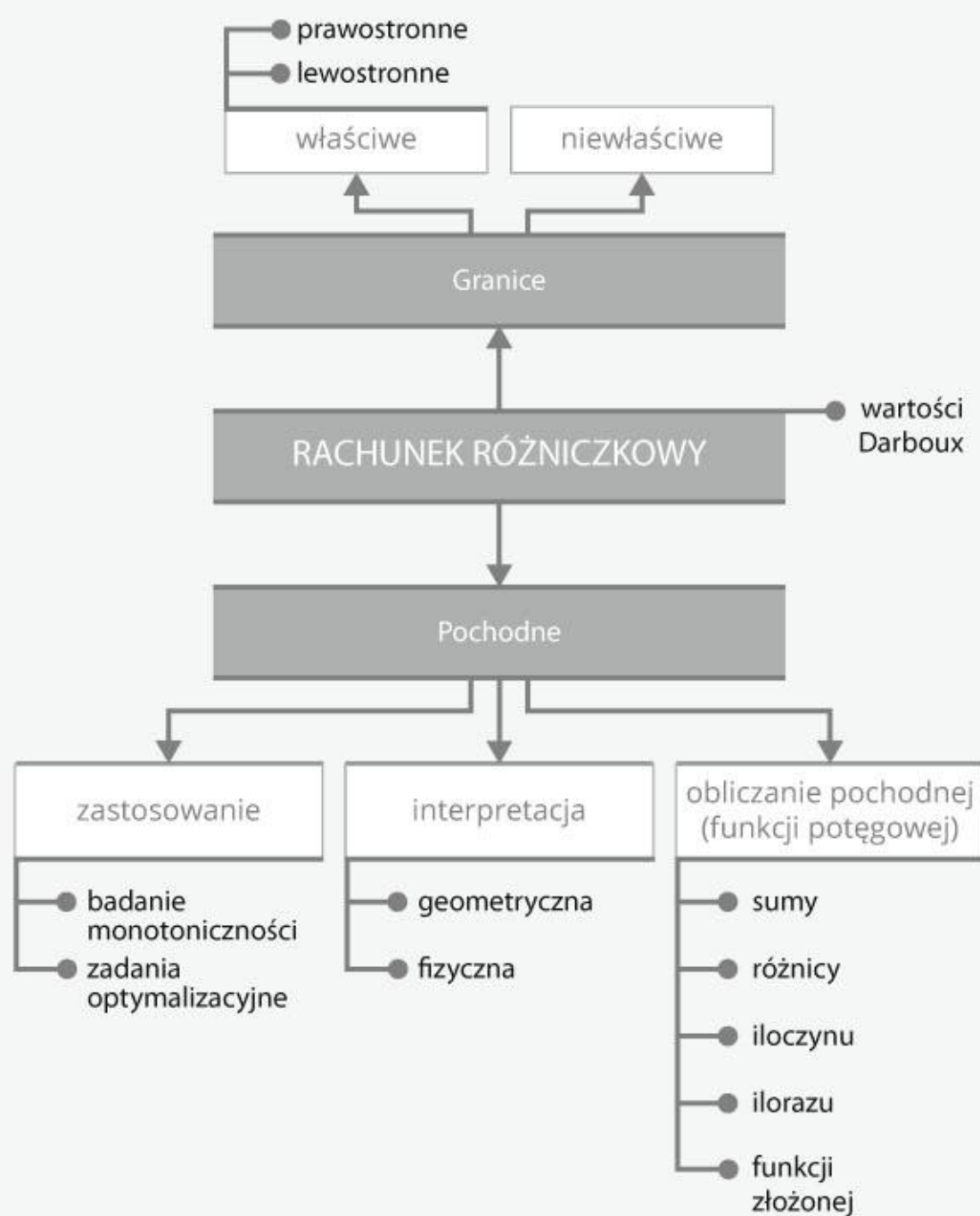
Podsumowanie:

$$r = 2,4$$

$$l = 6 - 2,4 = 3,6$$

$$h = \sqrt{36 - 12 \cdot \frac{12}{5}} = \sqrt{\frac{180}{5} - \frac{144}{5}} = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

13.7. Utrwalamy wiedzę



WYBRANE WZORY MATEMATYCZNE NA EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.

- Dla dowolnej liczby x mamy:

$$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \quad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |x - y| \leq |x| + |y| \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

$$\begin{aligned} |x - a| \leq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a - r \leq x \leq a + r \\ |x - a| \geq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r \end{aligned}$$

2. POTĘGI I PIERWIASTKI

- Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a definiujemy jej n -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

- Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

– dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$

– dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

– dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

- Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & (a^r)^s &= a^{r \cdot s} & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r & \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

- Niech x, y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli $a \in (0, 1)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x > y$.

Jeżeli $a \in (1, +\infty)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x < y$.

3. LOGARYTMY

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b :

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0, y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

4. SILNIA. WSPÓŁCZYNNIK DWUMIANOWY

- Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ prawdziwa jest równość:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

- Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Prawdziwe są równości:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ \binom{n}{0} &= 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{n} = 1 \\ \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

5. WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b :

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

6. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) & a^2 - 1 &= (a - 1)(a + 1) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) & a^3 - 1 &= (a - 1)(a^2 + a + 1) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) & a^3 + 1 &= (a + 1)(a^2 - a + 1) \\ a^n - 1 &= (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) \end{aligned}$$

7. FUNKCJA KWADRATOWA

- Wyróżnikiem Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$) zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę

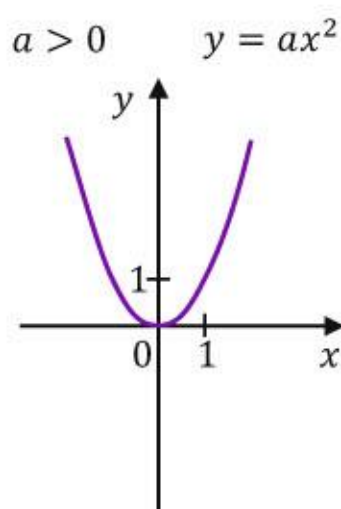
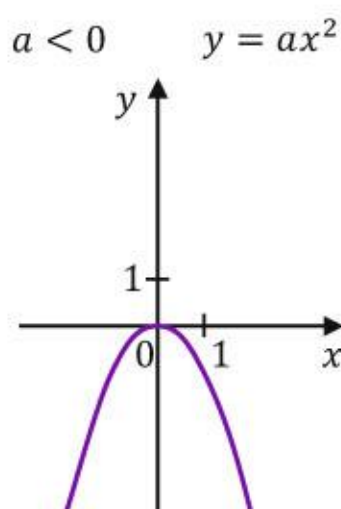
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie

$$W = (p, q) \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gdy $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi. Gdy $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze.



- Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$

(liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika Δ :

- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

- Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można przestawić w postaci iloczynowej

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Wzory Viète'a

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

8. CIĄGI

- Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla } q \neq 1 \quad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla } q = 1$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \text{ dla } n \geq 2$$

- Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$, o ilorazie q . Niech (S_n) oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n) , to znaczy ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ dla $n \geq 1$.

Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg (S_n) ma granicę równą

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Granicę tę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu (a_n) .

- Twierdzenie o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) , określone dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, są zbieżne i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ są zbieżne, a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $b \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

- Twierdzenie o trzech ciągach

Jeżeli wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) i (c_n) , określonych dla $n \geq 1$, spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla $n \geq 1$, a ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do wspólnej granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to ciąg (b_n) jest zbieżny, a ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

- Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy K_0 złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n jest określony wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- Wybrane granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla każdego } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{dla każdego } q \in (-1, 1)$$

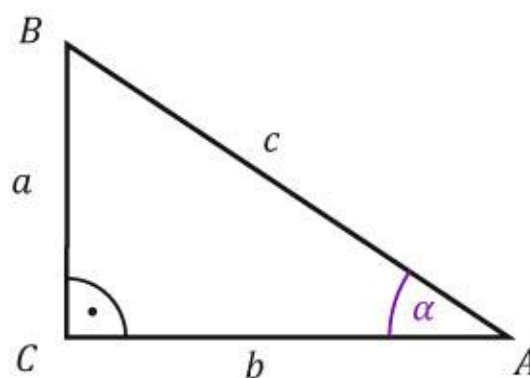
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{dla każdego } k > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty \quad \text{dla każdego } k > 0$$

9. TRYGNOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

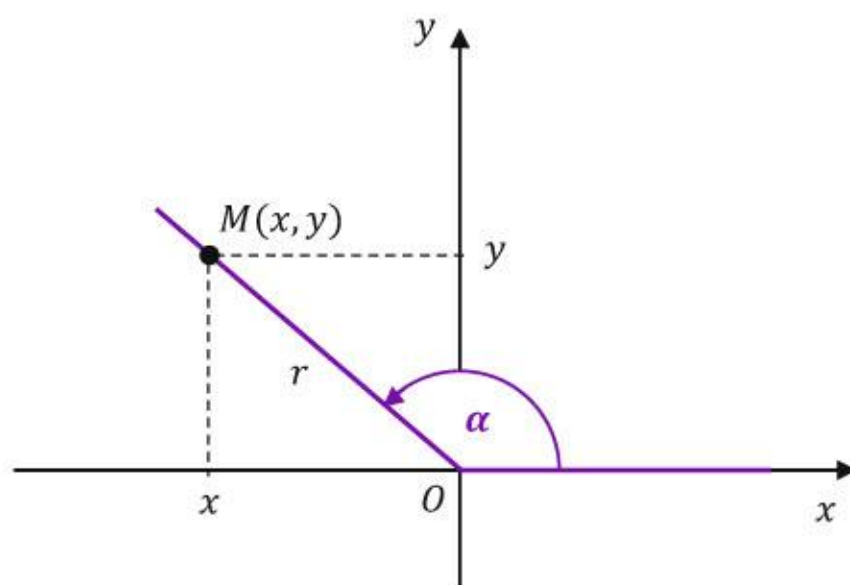


- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

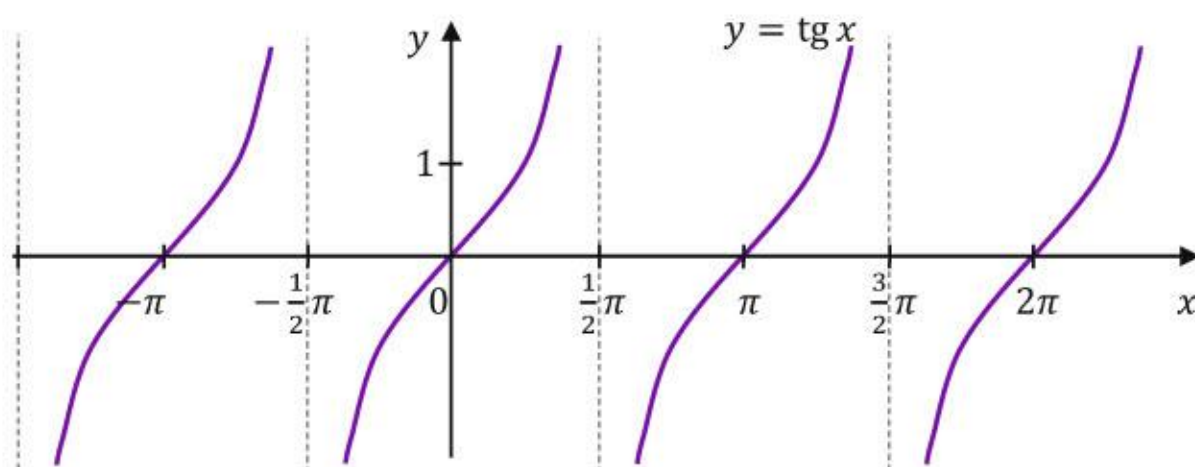
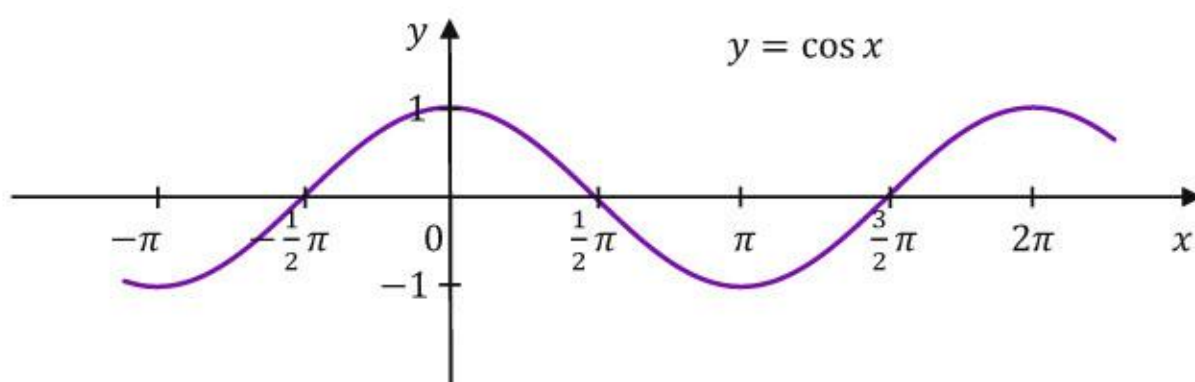
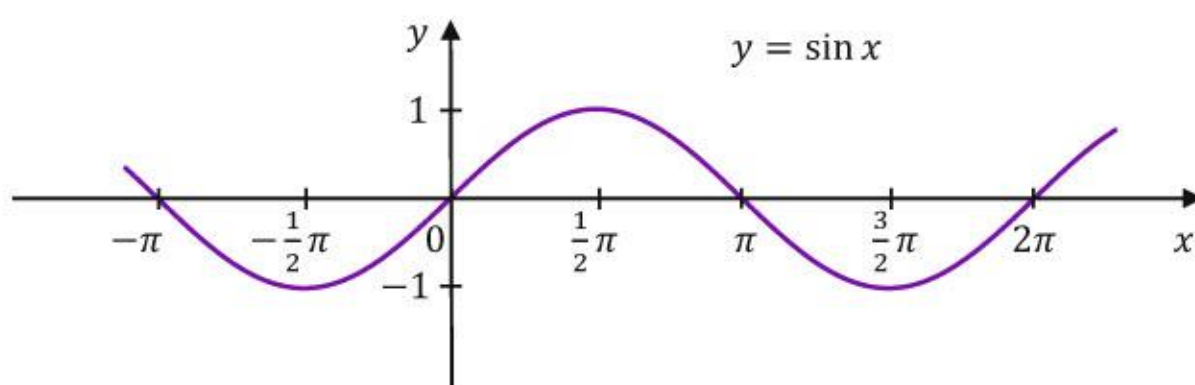
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x}, \quad \text{o ile } x \neq 0 \end{aligned}$$

gdzie

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



- Wykresy funkcji trygonometrycznych



- Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów α oraz β prawdziwe są równości:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Ponadto

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \text{gdy } \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \text{gdy } \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{o ile } \operatorname{tg} \alpha \text{ istnieje i } \operatorname{tg}^2 \alpha \neq 1$$

- Wybrane wzory redukcyjne

$$\begin{array}{lll}
 \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha & \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \\
 \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha & \\
 \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \\
 \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha
 \end{array}$$

- Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\begin{array}{ll}
 \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \\
 \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] & \\
 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] & \\
 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] &
 \end{array}$$

- Okresowość funkcji trygonometrycznych

Dla każdego kąta α i liczby całkowitej k prawdziwe są związki:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \qquad \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

Ponadto jeżeli $\alpha \neq 90^\circ + m \cdot 180^\circ$ (gdzie $m \in \mathbb{Z}$), to:

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$$

10. PLANIMETRIA

Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC :

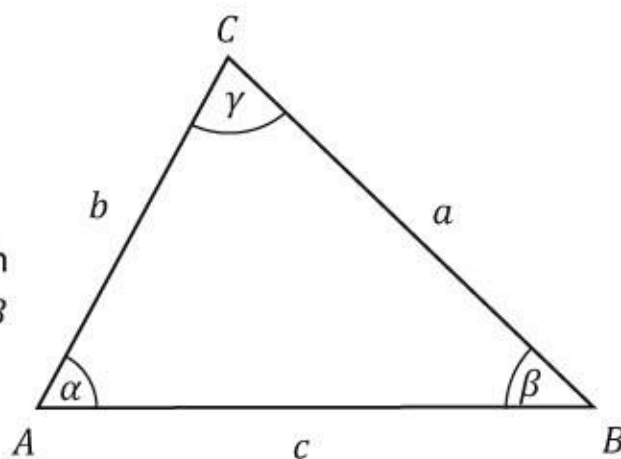
a, b, c – długości boków w trójkącie ABC

α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących – odpowiednio – przy wierzchołkach A, B oraz C

R, r – długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC

h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta opuszczone – odpowiednio – z wierzchołków A, B i C .

p – połowa obwodu trójkąta ABC , tj.

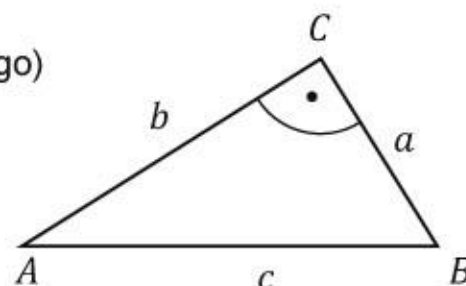


$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

- Wzory na pole trójkąta ABC :

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \cdot \sin \beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \quad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}b^2 \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2}c^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

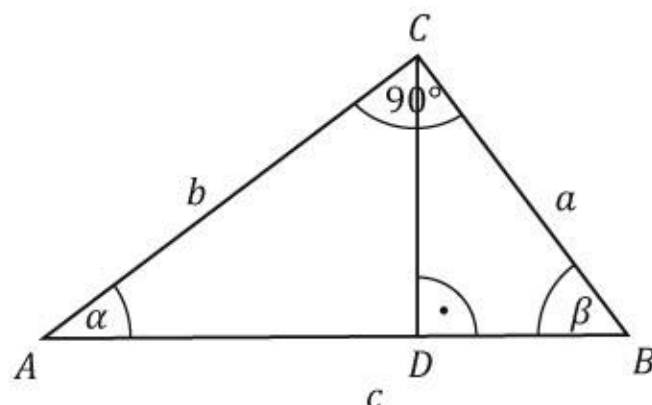
- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \quad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad R = \frac{1}{2}c$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$



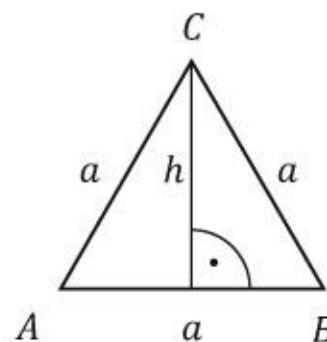
- Związki miarowe w trójkącie równobocznym

a – długość boku trójkąta równobocznego

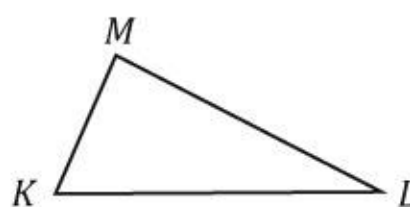
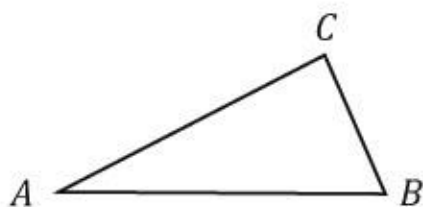
h – wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3}h \quad R = \frac{2}{3}h$$



- Cechy przystawania trójkątów



a) cecha przystawania „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom boków trójkąta KLM , np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$, $|CA| = |ML|$.

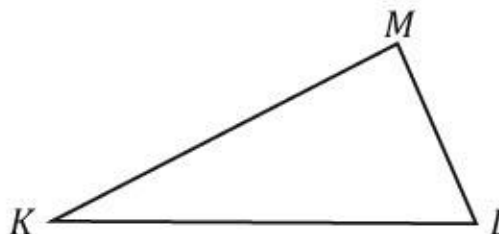
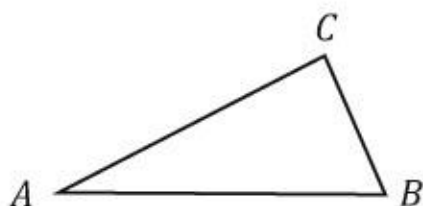
b) cecha przystawania „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości dwóch boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$.

c) cecha przystawania „**kąt–bok–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM :

długość jednego boku trójkąta ABC jest równa długości jednego boku trójkąta KLM i kąty przyległe do tego boku trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta KLM , np.: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$ i $|AB| = |KL|$.

- Cechy podobieństwa trójkątów



a) cecha podobieństwa „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta KLM , np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$.

b) cecha podobieństwa „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|}$ i $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$.

c) cecha podobieństwa „**kąt–kąt–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM :

kąty trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów trójkąta KLM , np.: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|$.

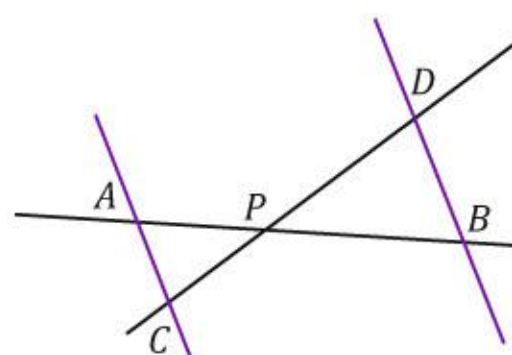
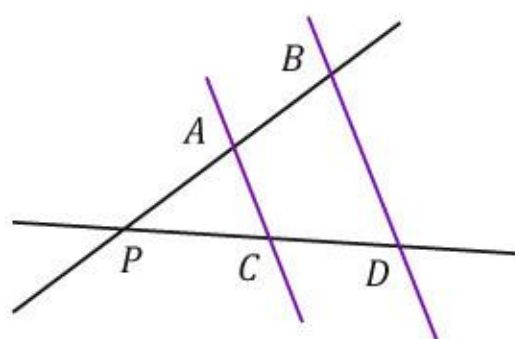
- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Różne proste AB i CD przecinają się w punkcie P , przy czym spełniony jest jeden z warunków:

- punkt A leży wewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży wewnątrz odcinka PD
LUB
- punkt A leży na zewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży na zewnątrz odcinka PD .

Jeżeli $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$, to proste AC i BD są równoległe.

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$.



- Twierdzenie o dwusiecznej kąta

Jeżeli dwusieczna kąta wewnętrznego (zewnątrznego) trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą zawierającą odcinek AB w punkcie D , to

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

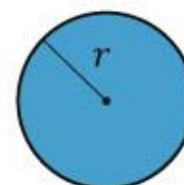
- Koło

Pole P koła o promieniu r jest równe:

$$P = \pi r^2$$

Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L = 2\pi r$$



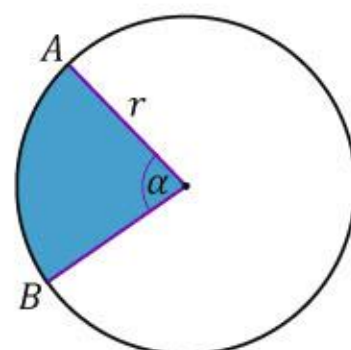
- Wycinek koła

Pole P wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równe:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Długość L łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równa:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

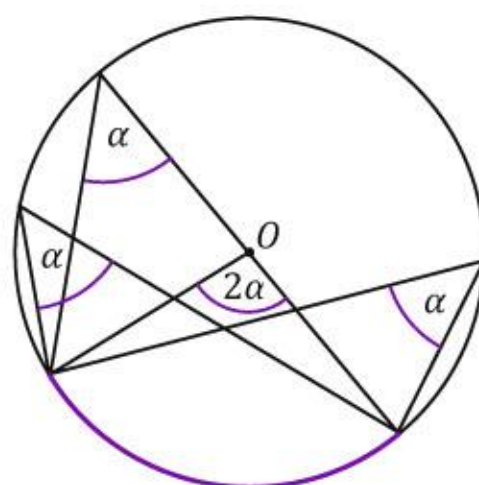


- Kąty w okręgu

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O , opartych na tym samym łuku, są równe.

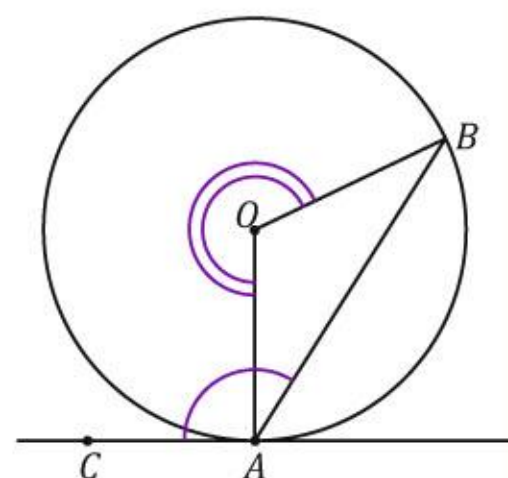
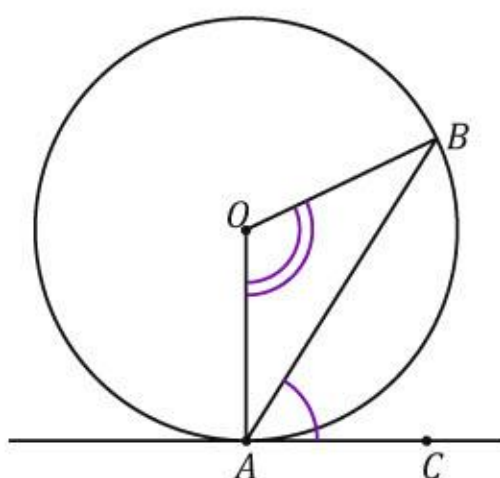
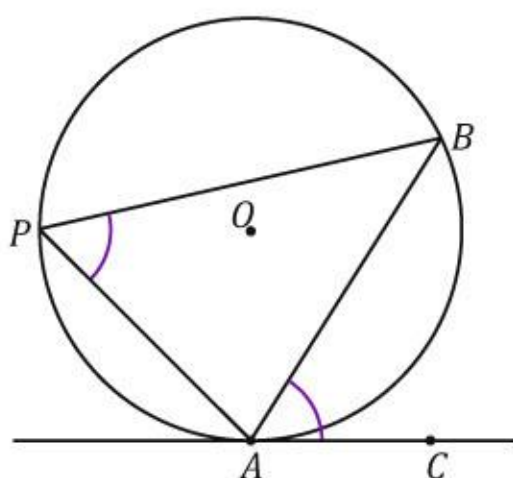


- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i cięciwa AB tego okręgu. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A , natomiast punkt P leży na tym okręgu i nie należy do kąta CAB . Wtedy

$$|\angle APB| = |\angle CAB| \quad \text{ i } \quad |\angle AOB| = 2 \cdot |\angle CAB|$$

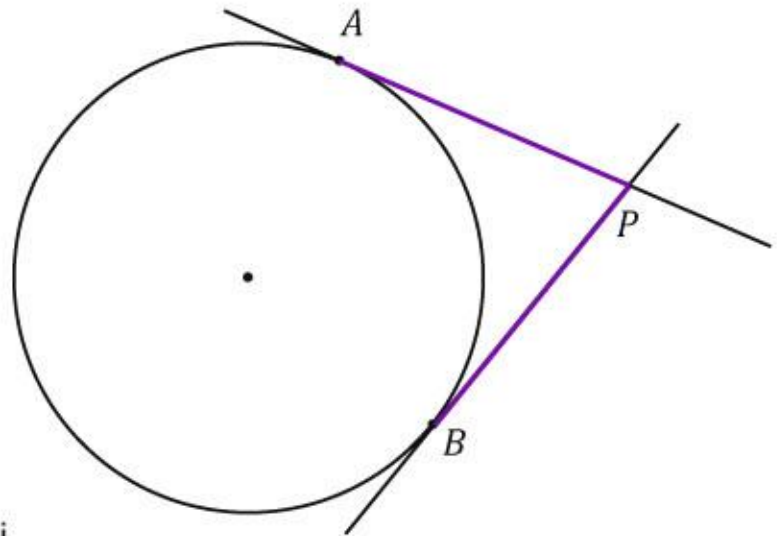
przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB .



- Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to

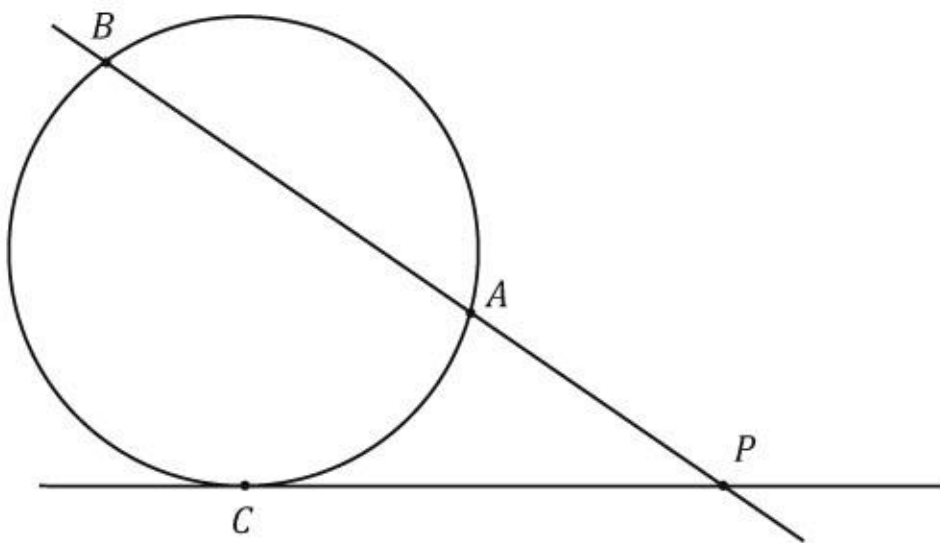
$$|PA| = |PB|$$



- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P , to

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$

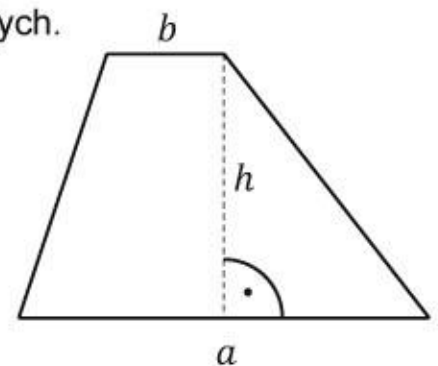


- Czworokąty

Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole P trapezu:

$$P = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

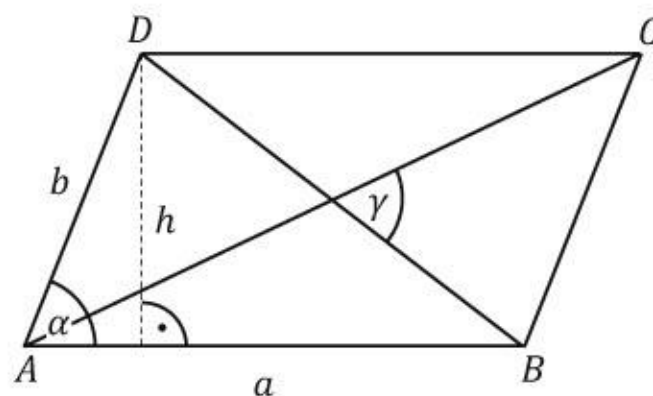


Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole P równoległoboku:

$$P = ah \quad P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \gamma$$

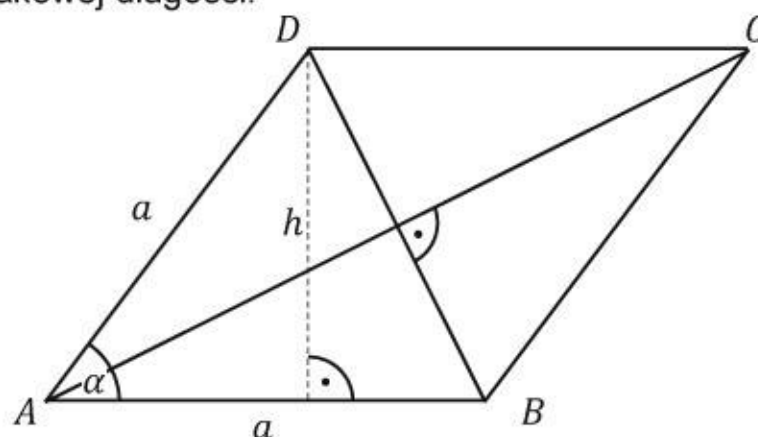


Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole P rombu:

$$P = ah \quad P = a^2 \cdot \sin \alpha$$

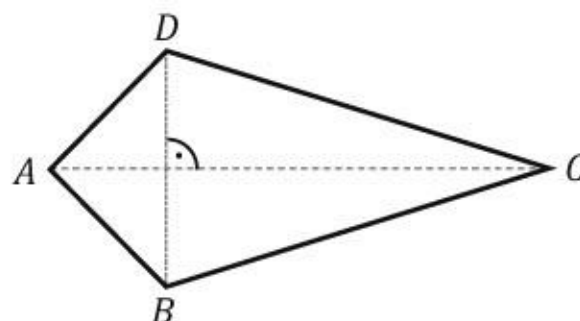
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid – czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole P deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

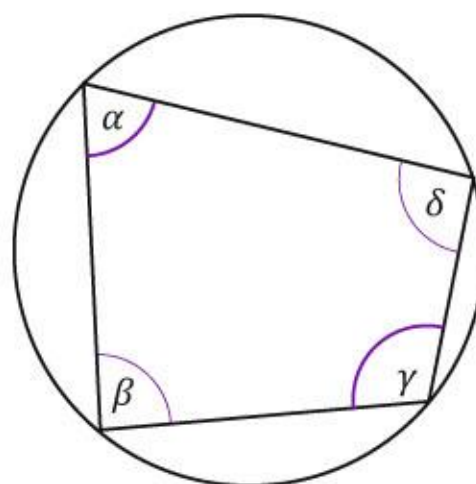


- Okąg opisany na czworokącie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180° .

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

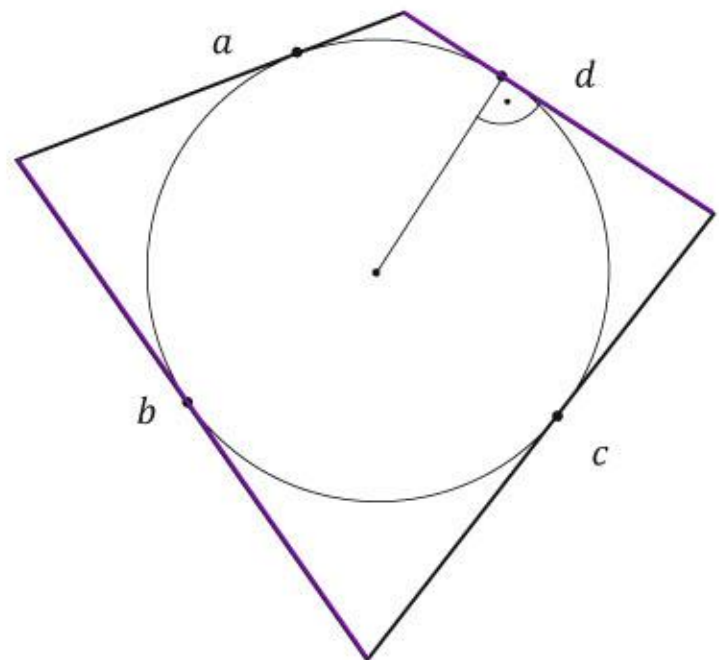
$$\alpha + \gamma = 180^\circ \quad \beta + \delta = 180^\circ$$



- Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$



- Pola figur podobnych

Jeżeli figura $\mathcal{B}$ o polu $P_{\mathcal{B}}$ jest podobna do figury $\mathcal{A}$ o polu $P_{\mathcal{A}}$ (różnym od zera) w skali k , to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$$

11. GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

- Długość odcinka

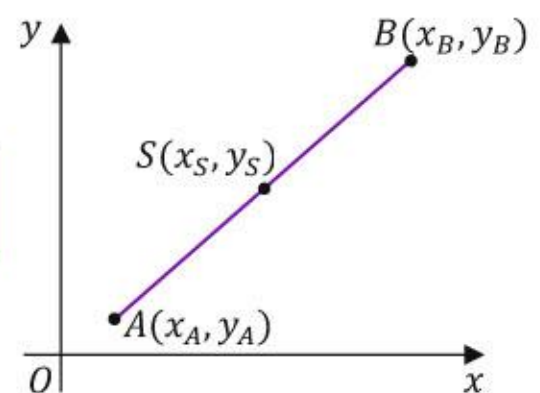
Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Współrzędne środka odcinka

Współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$



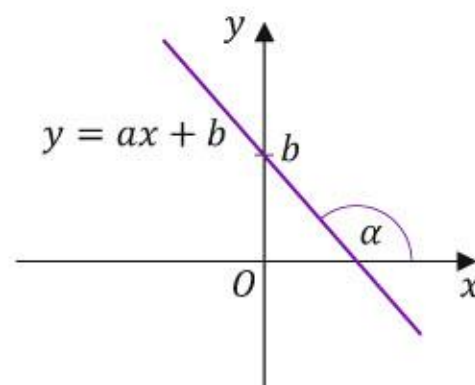
- Równanie kierunkowe prostej

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy , to można opisać ją równaniem kierunkowym:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej.

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$



Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$.

- Równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

- Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$\begin{array}{l} \text{gdzie} \\ y - y_A = a(x - x_A) \\ a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{gd}y \quad x_B \neq x_A \end{array}$$

- Równanie ogólne prostej

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{gdzie} \quad A, B, C \in \mathbb{R} \text{ i } A^2 + B^2 \neq 0$$

Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox ; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy ; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

- Równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

- Proste równoległe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

- Proste prostopadłe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

- Odległość punktu od prostej

Odległość d punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ jest równa:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Równanie okręgu

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci ogólnej:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

gdzie $c = a^2 + b^2 - r^2$.

- Współrzędne wektora, długość wektora, działania na wektorach

Dane są punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ w kartezjańskim układzie współrzędnych zaczepionego w punkcie A :

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$ oraz $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami oraz $a \in \mathbb{R}$, to:

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \quad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

Długością $|\vec{u}|$ wektora $\vec{u} = [u_1, u_2]$ nazywamy liczbę

$$|\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$$

- Przekształcenia geometryczne

Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x + a, y + b)$.

Symetria osiowa S_{Ox} względem osi Ox przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x, -y)$.

Symetria osiowa S_{Oy} względem osi Oy przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, y)$.

Symetria środkowa S_K względem punktu $K = (a, b)$ przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (2a - x, 2b - y)$.

W szczególności symetria środkowa względem początku układu współrzędnych przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, -y)$.

- Pole trójkąta

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$ jest równe:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

- Współrzędne środka masy trójkąta

Współrzędne środka masy $S = (x_S, y_S)$ trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$, czyli punktu przecięcia jego środkowych:

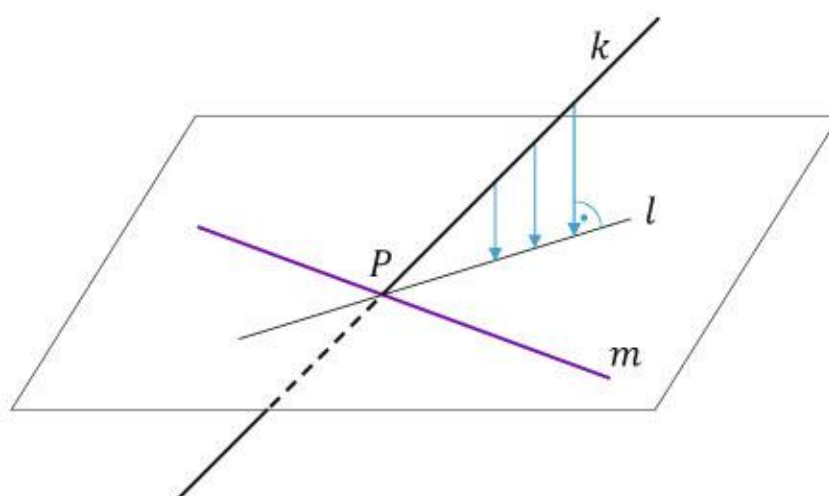
$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

12. STEREOMETRIA

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P pod kątem ostrym. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P .

Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy m jest prostopadła do prostej l .



Przyjmujemy oznaczenia:

P_c – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

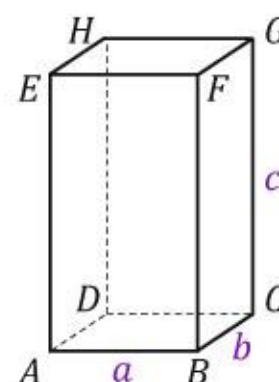
V – objętość

- Prostopadłościan

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = abc$$

gdzie a , b , c są długościami krawędzi prostopadłościanu

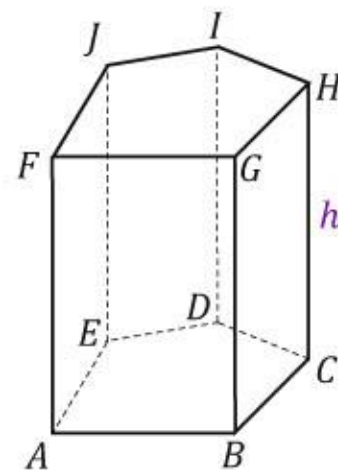


- Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

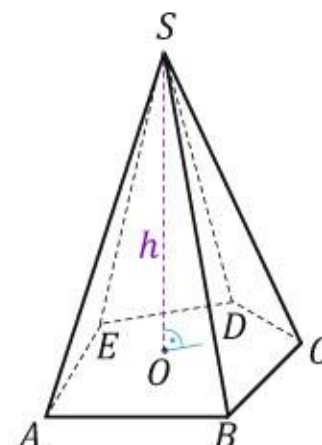
gdzie Ob jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast h – wysokością graniastosłupa.



- Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



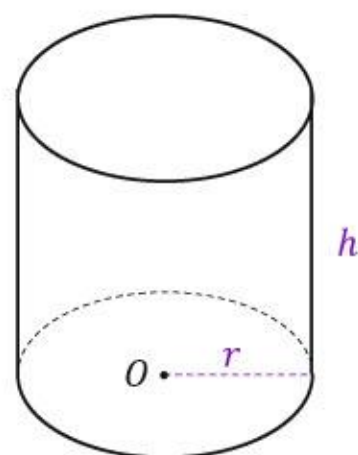
- Walec

$$P_b = 2\pi r h$$

$$P_c = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie h jest wysokością walca, O – środkiem symetrii podstawy walca, r – promieniem podstawy walca.



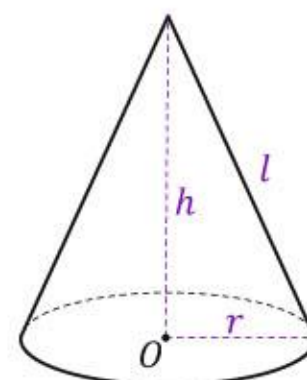
- Stożek

$$P_b = \pi r l$$

$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

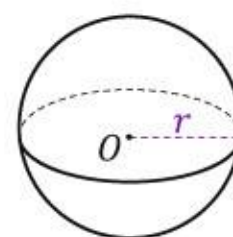
gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, natomiast l – tworzącą stożka. Punkt O jest środkiem symetrii podstawy stożka.



- Kula

$$P_c = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



gdzie r jest promieniem kuli, natomiast O – środkiem symetrii kuli.

13. KOMBINATORYKA

- Permutacje

Liczba wszystkich sposobów, na które n różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

- Kombinacje

Liczba wszystkich sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k elementów ($0 \leq k \leq n$), jest równa $\binom{n}{k}$.

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k (niekoniecznie różnych) wyrazów, jest równa n^k .

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k różnych wyrazów ($1 \leq k \leq n$), jest równa

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{dla każdego zdarzeń } A \text{ oraz } B \text{ takich, że } A \subset B \subset \Omega$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{gdzie } A' \text{ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad \text{dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

- Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A , natomiast $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω .

- Schemat Bernoullego

Próba Bernoullego nazywamy doświadczenie losowe, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Jeden z nich nazywamy sukcesem, a drugi – porażką. Jeżeli prawdopodobieństwo sukcesu jest równe p , to prawdopodobieństwo porażki jest równe $q = 1 - p$.

Schematem Bernoullego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń prób Bernoullego. W schemacie Bernoullego prawdopodobieństwo $P_n(k)$ uzyskania w n próbach dokładnie k sukcesów ($0 \leq k \leq n$) jest równe

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

- Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω , przy czym $P(B) > 0$.

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zdarzenia A pod warunkiem zaistnienia zdarzenia B nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \dots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \dots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$

to dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ prawdziwa jest równość

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

- Twierdzenie Bayesa

Jeżeli zdarzenia losowe $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \dots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$
4. $P(A) > 0$

to dla każdego k ($1 \leq k \leq n$) prawdziwa jest równość

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

- Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Niech X będzie zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, określoną na zbiorze Ω , przy czym $P(\{\omega: \omega \in \Omega \text{ oraz } X(\omega) = x_i\}) = p_i$ dla $1 \leq i \leq n$. Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna $\bar{a}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna $\bar{g}$ z liczb nieujemnych $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa:

$$\bar{g} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- Średnia kwadratowa

Średnia kwadratowa $\bar{k}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n}}$$

- Nierówności między średnimi liczbowymi

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą liczbami nieujemnymi. Wtedy (przy powyższych oznaczeniach) prawdziwe są nierówności:

$$\bar{k} \geq \bar{a} \geq \bar{g}$$

Ponadto równość pomiędzy tymi średnimi liczbowymi zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

- Średnia ważona

Średnia ważona $\bar{s}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio: $w_1, w_2, \dots, w_n$, jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest:

- dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)
- dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja σ^2 danych liczbowych $a_1, a_2, \dots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ jest równa:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}$$

Prawdziwa jest też równość:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}}$$

16. POCHODNA FUNKCJI

- Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Pochodna funkcji złożonej

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{gdy } g(x) \neq 0$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

- Pochodne wybranych funkcji

Niech a, b, c, r będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

gdzie e jest liczbą Eulera; $e \approx 2,72$

- Równanie stycznej

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 , to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dane jest wzorem

$$y = a(x - x_0) + f(x_0)$$

gdzie

$$a = f'(x_0)$$

17. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

α [°]	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0	0,0000	1,0000	0,0000
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0872	0,9962	0,0875
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	0,1736	0,9848	0,1763
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493
15	0,2588	0,9659	0,2679
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	0,3420	0,9397	0,3640
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	0,6428	0,7660	0,8391
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	0,7071	0,7071	1,0000

α [°]	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
45	0,7071	0,7071	1,0000
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504
50	0,7660	0,6428	1,1918
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	0,8192	0,5736	1,4281
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	0,8660	0,5000	1,7321
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	0,9063	0,4226	2,1445
66	0,9135	0,4067	2,2460
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	0,9397	0,3420	2,7475
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	0,9659	0,2588	3,7321
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	0,1908	5,1446
80	0,9848	0,1736	5,6713
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	0,9962	0,0872	11,4301
86	0,9976	0,0698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900
90	1,0000	0,0000	-

Źródło: Centralna Komisja Edukacyjna, *Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki*, cke.gov.pl, czerwiec 2022 r.

WYBRANE OZNACZENIA I SYMBOLE MATEMATYCZNE

W zadaniach z matematyki na poziomie podstawowym mogą być stosowane następujące oznaczenia i symbole matematyczne:

- $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych
 - $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych
 - $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych
 - $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych
 - $A \cup B$ – suma zbiorów A oraz B
 - $A \cap B$ – iloczyn zbiorów A i B (część wspólna zbiorów A i B)
 - $A \setminus B$ – różnica zbioru A i zbioru B .
 - $A \subset B$ – zbiór A jest podzbiorem zbioru B
 - $x \in A$ – element x należy do zbioru A
 - $[a, b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x \leq b$
 $[a, b)$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x < b$
 $(a, b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x \leq b$
 (a, b) – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x < b$
- Krańce przedziałów domkniętych zdający może oznaczać także – odpowiednio:
 $\langle a, b \rangle$, $\langle a, b \rangle$, $\langle a, b \rangle$.

Źródło: Centralna Komisja Edukacyjna, *Informator o egzaminie maturalnym z matematyki*, cke.gov.pl, czerwiec 2022 r.

Indeks

A

argument funkcji 80

C

cechy podobieństwa trójkątów 160

cechy przystawania trójkątów 159

ciąg 98

arytmetyczny 105

geometryczny 107

liczbowy 98

nieskończony 98

skończony 98

ciąg sum częściowych 101

cięciwa 152

czworokąty 149

D

długość łuku okręgu 152

długość odcinka 176

długość okręgu 152

dominanta 225

doświadczenia losowe 208

dowodzenie podzielności liczb 13

dziedzina funkcji 80

dziedzina równania 46

dzielenie wielomianów 40

F

funkcja 80

funkcja kwadratowa 87

funkcja liniowa 85

funkcja wykładnicza 94

funkcje trygonometryczne 116

funkcje trygonometryczne podwojonego kąta 136

G

graniastosłup 199

granica ciągu 110

granice funkcji 228

granice niewłaściwe 229

I

iloraz ciągu 108

J

jednomian 33

K

kąt dwuścienny 194

kąt środkowy 157

kąt wpisany 157

koło 155

kombinacja 214

kredyt 25

kula 204

L

liczby

całkowite 14

naturalne 12

niewymierne 16

pierwsze 12

rzeczywiste 17

wymierne 14

złożone 12

logarytm 26

lokata bankowa 25

Ł

łuk 152

M

mediana 224

metoda

graficzna 71

podstawiania 70

przeciwnych współczynników 70

miara łukowa kąta 128

miejsce zerowe funkcji 82

monotoniczność ciągu 103

monotoniczność funkcji 82

N

nierówności kwadratowe 52

nierówności kwadratowe z parametrem 68

nierówności trygonometryczne 142

nierówności wielomianowe 55

nierówności z parametrem 65

nierówności z wartością bezwzględną 62

nierówność liniowa 47

nierówność sprzeczna 48, 49

nierówność tożsamościowa 48

notacja wykładnicza 19

O

odchylenie standardowe 225

odcinek koła 156

odległość punktu od prostej 180

okrąg 152

ostrosłup 200

P

permutacja 213

pierścień kołowy 155

pierwiastki całkowite wielomianu 39

pochodna funkcji 231

potęga 18

prawa działań na potęgach 18

prawdopodobieństwo

całkowite 219

klasyczne 216

warunkowe 218

procent składany 110

procenty 23

proporcjonalność odwrotna 93
proste prostopadłe 87
proste równoległe 87
przedziały liczbowe 21
przedziały nieograniczone 21
przedziały ograniczone 21
punkty procentowe 25
punkty w trójkącie 161

R

reguła dodawania 210
reguła mnożenia 210
rozwiniecie dziesiętne 15
równania kwadratowe z parametrem 66
równania równoważne 46
równania trygonometryczne 138
równania wielomianowe 54
równania wymierne 57
równania z jedną niewiadomą 46
równania z parametrem 65
równania z wartością bezwzględną 62
równanie kierunkowe prostej 168
równanie kwadratowe 50
równanie ogólne prostej 169
równanie okręgu 177
równanie sprzeczne 47
równość wielomianów 34
różnica ciągu 105

S

schemat Bernoulliego 220
siatka centylowa 222
silnia 211
skala centylowa 221
skala podobieństwa 204
skala podobieństwa figur podobnych 160
stożek 202
symbol Newtona 32
symetria osiowa 186
symetria środkowa 188
szeregi geometryczne 112

Ś

średnia arytmetyczna 223
średnia ważona 223
średnica 152

T

tożsamości trygonometryczne 120
trójkąty 146
twierdzenie cosinusów 123
twierdzenie Darboux 230
twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego 159
twierdzenie o liczbie pierwiastków równania kwadratowego 51
twierdzenie o trzech ciągach 112
twierdzenie Pitagorasa 147
twierdzenie sinusów 122
twierdzenie Talesa 158

U

układ równań 70
ułamki dziesiętne skończone 15

W

walec 201
wariacja bez powtórzeń 213
wariacja z powtórzeniami 213
wariancja 225
wartość bezwzględna 23
wartość funkcji 80
wartość oczekiwana 220
wektor 188
wielokąty foremne 164
wielomian 33
wielomiany wielu zmiennych 36
wielomian zerowy 33
własności funkcji 82
własności symbolu Newtona 212
współczynnik dwumianowy Newtona 212
współczynniki wielomianu 33
współczynnik kierunkowy 168
wycinek koła 156
wykres funkcji 85
wzory redukcyjne 134
wzory skróconego mnożenia 30
wzory Viète'a 60
wzór Bayesa 220
wzór dwumianowy Newtona 212
wzór ogólny ciągu 99
wzów rekurencyjny ciągu 102

Z

zadania optymalizacyjne 235
zbiór wartości funkcji 80
zdarzenia niezależne 218
zdarzenia zależne 218
zdarzenie
elementarne 208
przeciwnie 209

