

matura

ZGODNE
Z WYTYCZNYMI
CKE

Teoria do matury do powtórek zamiast z podręczników

matematyka

zakres podstawowy

VADEMECUM



WOPRON
Tęka kupa jest prościej

MATURA

VADEMECUM

matematyka

zakres podstawowy

Adam Konstantynowicz

Anna Konstantynowicz

Małgorzata Pająk

 **OPERON**
Edukacja jest podróżą

2022

Projekt okładki: **Paweł Kwacz**
Redaktor prowadzący: **Michalina Stolińska**
Redakcja językowa: **Monika Turała**
Redakcja graficzna i skład: **Maciej Laska**
Korekta: **Marlena Dobrowolska**
Zdjęcia: **Shutterstock**
Rysunki: **Jan Kortas**

© Copyright by Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON Sp. z o.o. & Adam Konstantynowicz, Anna Konstantynowicz,
Małgorzata Pająk
Gdynia 2022

Wszelkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie w całości lub we fragmentach bez zgody wydawcy zabronione.
N7740

Wydawca:
Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON Sp. z o.o.
81-212 Gdynia, ul. Hutnicza 3
tel. centrali 58 679 00 00
e-mail: info@operon.pl
www.operon.pl

ISBN 978-83-8197-199-7

Spis treści

1. LICZBY RZECZYWISTE

1.1. Liczby naturalne	12
1.2. Liczby całkowite i liczby wymierne	14
1.3. Rozwinięcie dziesiętne i liczby rzeczywiste	16
1.4. Potęga	17
1.5. Przedziały liczbowe	20
1.6. Wartość bezwzględna	22
1.7. Procenty w obliczeniach	23
1.8. Logarytm i jego własności	26
1.9. Utrwalamy wiedzę	27

2. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

2.1. Wzory skróconego mnożenia	30
2.2. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów	32
2.3. Rozkład wielomianu na czynniki	35
2.4. Pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych	37
2.5. Dzielenie wielomianów	37
2.6. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych	39
2.7. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych	42
2.8. Utrwalamy wiedzę	44

3. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

3.1. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą	46
3.2. Równania i nierówności kwadratowe	50
3.3. Równania wielomianowe. Równania wymierne	53
3.4. Utrwalamy wiedzę	56

4. UKŁADY RÓWNAŃ

4.1. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi	58
4.2. Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań tekstowych	61
4.3. Rozwiązywanie metodą podstawiania układów równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe	64
4.4. Utrwalamy wiedzę	67

5. FUNKCJE

5.1. Funkcja i jej własności	70
5.2. Odczytywanie własności funkcji z wykresu	73
5.3. Funkcja liniowa	76
5.4. Funkcja kwadratowa	78
5.5. Funkcja a zagadnienia geometryczne, fizyczne, kontekst praktyczny	81
5.6. Szkicowanie wykresów funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$	83
5.7. Proporcjonalność odwrotna	84
5.8. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna	85
5.9. Utrwalamy wiedzę	86

6. CIĄGI

6.1. Pojęcie ciągu. Wzór ogólny ciągu	88
6.2. Wzór rekurencyjny ciągu	91
6.3. Monotoniczność ciągów	93
6.4. Ciąg arytmetyczny	94
6.5. Ciąg geometryczny	97
6.6. Procent składany	99
6.7. Utrwalamy wiedzę	100

7. TRYGNOMETRIA

7.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	102
7.2. Tablice wartości funkcji trygonometrycznych	104
7.3. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego	106
7.4. Związki między funkcjami trygonometrycznymi	108
7.5. Twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta	109
7.6. Rozwiązywanie trójkątów	113
7.7. Utrwalamy wiedzę	114

8. PLANIMETRIA

8.1. Trójkąty	116
8.2. Czworokąty	120
8.3. Okrąg i koło	122
8.4. Kąty w okręgu	126
8.5. Twierdzenie Talesa	127
8.6. Cechy przystawania i podobieństwa trójkątów	129
8.7. Obwody i pola figur podobnych	131
8.8. Punkty szczególne w trójkącie	131
8.9. Wielokąty foremne	135
8.10. Utrwalamy wiedzę	136

9. GEOMETRIA ANALITYCZNA

9.1. Równanie prostej na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej. Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie	138
9.2. Równanie prostej o zadanych własnościach	142
9.3. Odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych	145
9.4. Równanie okręgu	146
9.5. Odległość punktu od prostej	147
9.6. Punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli	149
9.7. Symetria osiowa i symetria środkowa	153
9.8. Utrwalamy wiedzę	155

10. STEREOMETRIA

10.1. Wzajemne położenie prostych w przestrzeni	158
10.2. Kąt między prostą a płaszczyzną, kąt dwuścienny	159
10.3. Kąty w graniastosłupach i ostrosłupach	161
10.4. Kąt między odcinkami i kąt między odcinkami i płaszczyznami w walcach i stożkach	162
10.5. Przekrój prostopadłościanu daną płaszczyzną	164
10.6. Objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli	165
10.7. Zależność między polami powierzchni i objętościami brył podobnych	171
10.8. Utrwalamy wiedzę	172

11. KOMBINATORYKA

11.1. Doświadczenia losowe	174
11.2. Reguły mnożenia i dodawania	176
11.3. Utrwalamy wiedzę	178

12. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I STATYSTYKA

12.1. Prawdopodobieństwo klasyczne	180
12.2. Skala centylowa	181
12.3. Wartości średnie, mediana i dominanta	183
12.4. Odchylenie standardowe	185
12.5. Utrwalamy wiedzę	186

Wybrane wzory matematyczne	187
Indeks	202

Rok maturzysty



Zdasz, tylko pamiętaj o...

optymalizacji nauki pod kątem wybranej dla siebie drogi rozwoju; ucz się tych przedmiotów, które będą Ci potrzebne podczas rekrutacji na studia



systematyczności w nauce; zacznij od planu na początku roku szkolnego i go realizuj

stopniowym **zwiększaniu intensywności nauki**;
nie tylko Ty przyśpieszasz po studniówce 😊



higienie czasu; wysypiaj się

higienie psychiki; nie rezygnuj ze wszystkich swoich przyjemności i zajęć dodatkowych



Wybierz przedmioty na maturę, a zacznij od...

1

WYTYPOWANIA

tych kierunki studiów, które są dla Ciebie wymarzonymi

2

SPRAWDZENIA

na poszczególnych uczelniach, jakie są kryteria przyjęć na te kierunki

3

UPEWNIENIA SIĘ,

że dobrze rozumiesz zawód, który Cię interesuje; porozmawiaj z kimś, kto go wykonuje

4

DOWIEDZENIA SIĘ,

jako kto i gdzie możesz pracować po rozpatrywanym kierunku studiów

5

WYTYPOWANIA

alternatywnych kierunków studiów

6

ROZWAŻENIA

stacjonarnego i niestacjonarnego trybu nauki oraz możliwych po nim tytułów zawodowych

7

ZAPOZNANIA SIĘ

z listami uczelni publicznych i niepublicznych

W nauce pomoże Ci...



stosowanie tych technik pamięciowych, które masz już sprawdzone



wyłączenie aplikacji z mediami społecznościowymi



wypróbowanie słuchania webinarów/wykładów oraz videolekcji i podcastów podczas innych czynności, np. sprzątania czy uprawiania sportu

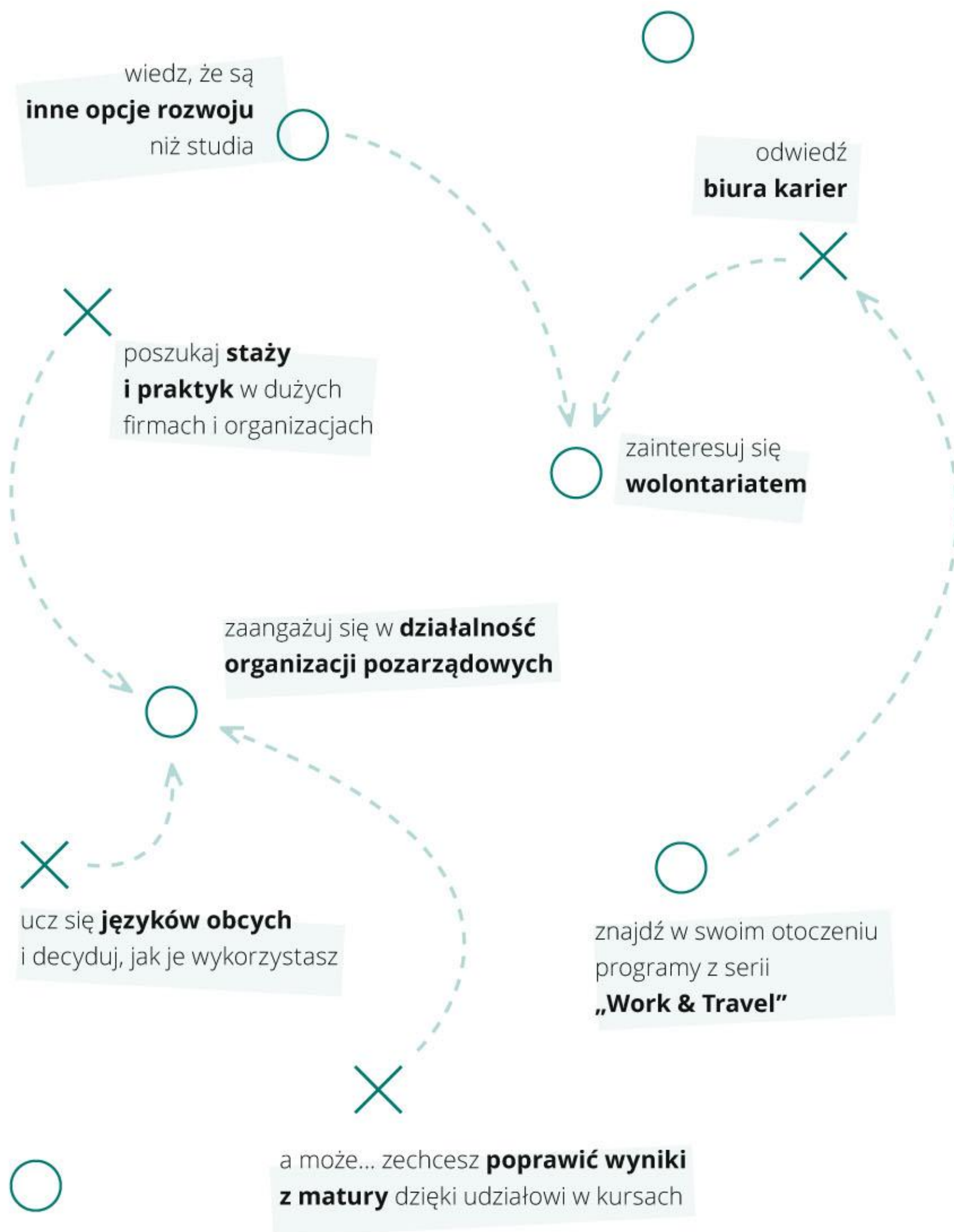


autogratyfikacja, wręczanie sobie małych i większych nagród za przebycie kolejnych etapów nauki



znalezienie dla siebie **najlepszej pory dnia** lub nocy na naukę

Miej plan B na przyszłość, czyli...



1

Liczby rzeczywiste

1.1. Liczby naturalne

Liczby naturalne

Zbiorem liczb naturalnych nazywamy zbiór liczb $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ i oznaczamy przez $\mathbb{N}$.

Liczb naturalnych jest nieskończenie wiele. Każda następna liczba naturalna jest o jeden większa od poprzedniej. Pomiędzy dwoma kolejnymi liczbami naturalnymi nie ma innej liczby naturalnej. Zbiór liczb naturalnych ma element najmniejszy równy 0, ale nie ma elementu największego.

Działanie jest wykonalne w zbiorze wtedy, gdy elementami działania są liczby tego zbioru oraz otrzymany wynik jest liczbą tego zbioru. W zbiorze liczb naturalnych wykonalne są działania: dodawanie oraz mnożenie.

Liczby pierwsze i złożone

Zbiór liczb pierwszych jest jednym z podzbiorów zbioru liczb naturalnych.

Liczbami pierwszymi są np.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... itd. Liczby pierwsze mają dokładnie dwa dzielniki: jedynkę i samą siebie. Liczby mające więcej niż dwa dzielniki nazywamy **liczbami złożonymi**.

Liczby 0 i 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.

Liczba naturalna n różna od zera **dzieli liczbę naturalną** m , jeśli istnieje liczba naturalna k , dla której zachodzi równość $m = n \cdot k$.

Wtedy mówimy, że n jest **dzielnikiem** liczby m lub że liczba m jest podzielna przez liczbę n .

Zapis symboliczny: $n|m$ – liczba naturalna n dzieli liczbę naturalną m . Liczbę m nazywamy **wielokrotnością** liczby n .

Przykład

Sprawdź, czy prawdziwe są zapisy $3|18$, $5|200$, $7|50$.

Rozwiązanie:

Zapis $3|18$ jest prawdziwy, ponieważ $18 = 3 \cdot 6$.

Zapis $5|200$ jest prawdziwy, ponieważ $200 = 5 \cdot 40$.

Zapis $7|50$ nie jest prawdziwy, ponieważ $50 = 7 \cdot 7 + 1$.

Przykład

Wykaż, że:

a) jeżeli $4|16$ oraz $4|44$, to $4|(16 + 44)$

Rozwiązanie:

a) Zapisujemy liczby 16 i 44 jako iloczyny o jednym z czynników równym 4:

$$16 = 4 \cdot 4$$

$$44 = 4 \cdot 11$$

Dodajemy liczby 16 i 44 i wynik zapisujemy jako iloczyn o jednym z czynników równym 4:

$$16 + 44 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 11 = 4 \cdot (4 + 11) = 4 \cdot 15$$

Wniosek: Liczba $4 \cdot 15$ jest podzielna przez 4.

b) jeżeli $a|b$ i $a|c$, to $a|(b + c)$, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi oraz $a \neq 0$

Rozwiązanie:

Niech k, l i m będą liczbami naturalnymi, wtedy zapisujemy liczby b i c jako iloczyny o jednym z czynników równym a :

$$b = a \cdot k,$$

$$c = a \cdot l,$$

Dodajemy liczby b i c i zapisujemy wynik jako iloczyn o jednym z czynników równym a :

$$b + c = a \cdot k + a \cdot l = a \cdot (k + l) = a \cdot m$$

Wniosek: Liczba $a \cdot m$ jest podzielna przez a .

Dzielenie z resztą

Dzielenie nie zawsze jest wykonalne w zbiorze liczb naturalnych, zatem wykonując dzielenie, możemy otrzymywać resztę. Reszta z dzielenia jest zawsze mniejsza od dzielnika.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej a i dowolnej liczby naturalnej b istnieje tylko jedna para liczb naturalnych k i r taka, że $a = k \cdot b + r$, gdzie $0 \leq r < b$.

Z twierdzenia tego wnioskujemy, że przy danej liczbie b każdą liczbę naturalną a można zapisać w postaci $a = k \cdot b + r$, gdzie r jest liczbą naturalną mniejszą od b . Mówimy wówczas, że liczba a daje resztę r przy dzieleniu przez b . W szczególności, jeśli $r = 0$, to mówimy, że liczba a jest podzielna przez b .

Przykład

Wyznacz resztę z dzielenia przez 5 kwadratu liczby naturalnej a , jeśli reszta z dzielenia liczby a przez 5 jest równa: a) 1, b) 2, c) 3.

Rozwiązanie:

a) Niech $n \in \mathbb{N}$, wtedy liczbę a dającą przy dzieleniu przez 5 resztę 1 zapisujemy jako $a = 5n + 1$.

Wyznaczamy kwadrat liczby a .

$$a^2 = (5n + 1)^2 = 25n^2 + 10n + 1 = 5(5n^2 + 2n) + 1 = 5k + 1, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N} \text{ reszta } 1$$

Odpowiedź: Reszta wynosi 1.

b) Niech $n \in \mathbb{N}$, wtedy liczbę a dającą przy dzieleniu przez 5 resztę 2 zapisujemy jako $a = 5n + 2$.

Wyznaczamy kwadrat liczby a .

$$a^2 = (5n + 2)^2 = 25n^2 + 20n + 4 = 5(5n^2 + 4n) + 4 = 5k + 4, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N} \text{ reszta } 4$$

Odpowiedź: Reszta wynosi 4.

c) Niech $n \in \mathbb{N}$, wtedy liczbę a dającą przy dzieleniu przez 5 resztę 3 zapisujemy jako $5n + 3$.

Wyznaczamy kwadrat liczby a .

$$a^2 = (5n + 3)^2 = 25n^2 + 30n + 9 = 5(5n^2 + 6n + 1) + 4 = 5k + 4, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N} \text{ reszta } 4$$

Odpowiedź: Reszta wynosi 4.

Przykład

Reszta z dzielenia liczby naturalnej a przez 4 wynosi 3, a reszta z dzielenia liczby naturalnej b przez 4 wynosi 2.

Wykaż, że reszta z dzielenia liczby $a + b$ przez 4 wynosi 1.

Rozwiązanie:

Niech $n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy liczbę a dającą przy dzieleniu przez 4 resztę 3 zapisujemy jako $a = 4n + 3$, a liczbę b dającą przy dzieleniu przez 4 resztę 2 zapisujemy jako $b = 4m + 2$.

$$\text{Zatem suma } a + b = 4n + 3 + 4m + 2 = 4n + 4m + 4 + 1 = 4(n + m + 1) + 1 = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$$

Wniosek: Reszta z dzielenia liczby $a + b$ przez 4 wynosi 1.

Przykład

Ile jest wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 86 podzielnych przez 3?

Rozwiązanie:

Dzielimy 86 przez 3 i otrzymujemy 28 i resztę 2.

Odpowiedź: Tych liczb jest 28.

Dowodzenie podzielności liczb

Twierdzenie jest to zdanie wyrażające fakty, czyli zdanie, które można udowodnić.

Dowód jest to rozumowanie uzasadniające, dlaczego dane zdanie jest prawdziwe. Dowód nie polega na sprawdzeniu, czy dane zdanie jest prawdziwe w jednym lub kilku konkretnych przypadkach, nie prowadzimy więc dowodu, przyjmując konkretne liczby. Musimy udowodnić, że zdanie jest prawdziwe zawsze (we wszystkich nieskończenie wielu przypadkach).

Przykład

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie:

Niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $n, n + 1, n + 2$ są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi. Sumę tych liczb możemy zapisać jako $n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1) = 3k, k \in \mathbb{N}$. Zatem jest ona podzielna przez 3.

Wniosek: Suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Przykład

Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6.

Rozwiązanie:

Niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $n, n+1, n+2$ są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi.

Iloczyn $n(n+1)(n+2)$ jest podzielny przez 2, ponieważ przynajmniej jedna z tych liczb jest parzysta.

Iloczyn ten jest jednocześnie podzielny przez 3, ponieważ wśród trzech kolejnych liczb naturalnych jedna jest podzielna przez 3. Zatem iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez $2 \cdot 3 = 6$.

Wniosek: Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6.

Przykład

Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych przy dzieleniu przez 12 daje resztę 8.

Rozwiązanie:

Niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy liczbę parzystą zapisujemy jako $2n$.

Trzy kolejne liczby parzyste to $2n, 2n+2, 2n+4$.

Wyznaczamy kwadraty tych liczb: $(2n)^2 = 4n^2$, $(2n+2)^2 = 4n^2 + 8n + 4$, $(2n+4)^2 = 4n^2 + 16n + 16$

Obliczamy sumę kwadratów:

$$4n^2 + 4n^2 + 8n + 4 + 4n^2 + 16n + 16 = 12n^2 + 24n + 20$$

Wyłączając liczbę 12 przed nawias, otrzymujemy: $12(n^2 + 2n + 1) + 8 = 12k + 8$, $k \in \mathbb{N}$, zatem suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych przy dzieleniu przez 12 daje resztę 8.

Wniosek: Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych przy dzieleniu przez 12 daje resztę 8.

1.2. Liczby całkowite i liczby wymierne

Liczby całkowite

Zbiorem liczb całkowitych nazywamy zbiór liczb $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ i oznaczamy jako $\mathbb{Z}$.

Liczb całkowitych jest nieskończenie wiele. Zbiór liczb całkowitych nie ma elementu najmniejszego i nie ma elementu największego. Każda następna liczba całkowita jest o jeden większa od poprzedniej. Pomiedzy dwoma kolejnymi liczbami całkowitymi nie ma innej liczby całkowitej. W zbiorze liczb całkowitych wykonalne są działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie. Wykonując dzielenie w zbiorze liczb całkowitych, nie zawsze otrzymamy liczbę całkowitą, np. $10 : 3 \notin \mathbb{Z}$. Zbiór liczb całkowitych zawiera zbiór liczb naturalnych.

Liczby wymierne

Liczby wymierne to liczby, które można zapisać jako iloraz $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi.

Zbiór liczb wymiernych możemy zapisać w postaci $\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{m}{n}, n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$.

Liczb wymiernych jest nieskończenie wiele. Zbiór liczb wymiernych nie ma elementu najmniejszego i nie ma elementu największego. Pomiedzy dwiema kolejnymi liczbami wymiernymi nie ma innej liczby wymiernej. W zbiorze liczb wymiernych wykonalne są działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Mnożąc lub dzieląc dwie liczby o jednakowych znakach, w wyniku otrzymujemy liczbę dodatnią.

Mnożąc lub dzieląc dwie liczby o różnych znakach, w wyniku otrzymujemy liczbę ujemną.

Prawo działań

Przy wykonywaniu obliczeń warto korzystać z **prawa działań**:

- przemienności dodawania: $a + b = b + a$,
- przemienności mnożenia: $a \cdot b = b \cdot a$,
- łączności dodawania: $a + (b + c) = (a + b) + c$,
- łączności mnożenia: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
- rozdzielności mnożenia względem dodawania: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
- rozdzielności mnożenia względem odejmowania: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.



Liczba 0 jest elementem neutralnym dodawania: $a + 0 = a$.

Liczba 1 jest elementem neutralnym mnożenia: $a \cdot 1 = a$.

Przykład

Wykonaj działania na liczbach całkowitych.

$$a) -21 - 11 + 23 - (-5) = 28 - 32 = -4$$

$$b) -25 + 45 \cdot (-2) + 99 = 99 - 115 = -16$$

$$c) 15 - (-60) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 3 = 15 - 15 = 0$$

Przykład

Wykonaj działania na ułamkach zwykłych.

a) Dodając ułamki zwykłe, musimy sprowadzić je do wspólnego mianownika, a następnie dodać liczniki, mianownik pozostawiając bez zmian:

$$4\frac{11}{15} + 2\frac{8}{25} = 4\frac{55}{75} + 2\frac{24}{75} = 7\frac{4}{75}$$

b) Odejmując ułamki zwykłe, musimy sprowadzić je do wspólnego mianownika, a następnie odjąć liczniki, mianownik pozostawiając bez zmian:

$$2 - 1\frac{2}{11} = 1\frac{11}{11} - 1\frac{2}{11} = \frac{9}{11}$$

c) Mnożąc ułamki zwykłe, mnożymy licznik przez licznik i mianownik przez mianownik, a także skracamy, jeżeli to możliwe:

$$\frac{4}{17} \cdot \frac{1}{16} = \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{17}_1} \cdot \frac{\cancel{1}^1}{\cancel{16}_4} = \frac{1}{4}$$

$$3\frac{1}{2} \cdot \left(-5\frac{1}{7}\right) = \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{2}_1} \cdot \left(-\frac{\cancel{35}^{18}}{\cancel{7}_1}\right) = -18$$

d) Dzielenie ułamków zwykłych zastępujemy mnożeniem pierwszego ułamka przez odwrotność drugiego ułamka:

$$\left(-5\frac{1}{2}\right) : 8\frac{5}{9} = \left(-\frac{11}{2}\right) : \frac{77}{9} = \left(-\frac{\cancel{11}^1}{2}\right) \cdot \frac{9}{\cancel{77}_7} = -\frac{9}{14}$$

Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych

Jeżeli w obliczeniach występują ułamki zwykłe i dziesiętne, to ułamki dziesiętne zamieniamy na ułamki zwykłe lub (w miarę możliwości) zamieniamy ułamki zwykłe na dziesiętne i wykonujemy działania.

Przykład

Oblicz wartości wyrażeń.

$$a) 5,7 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{8} \cdot 3,2 = \frac{\cancel{57}^{19}}{\cancel{10}_5} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}_1} - \frac{1}{\cancel{8}_1} \cdot \frac{\cancel{32}^2}{\cancel{10}_5} = \frac{19}{5} - \frac{2}{5} = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$$

$$b) 2,73 : \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \cdot 0,5 = 2,73 : 0,375 + 0,4 \cdot 0,5 = 7,28 + 0,2 = 7,48$$

Przykład

Do iloczynu liczb 4,25 i $(-2,7)$ dodaj iloraz liczb 33,176 i 6,38.

Rozwiązanie:

$$4,25 \cdot (-2,7) + 33,176 : 6,38 = -11,475 + 5,2 = -6,275$$

Działania z resztą

Przykład

Wyznacz resztę z dzielenia liczby $a = \frac{22 - 3 - (-91) + (-5)}{-3 - (-5) + 7 - 6}$ przez liczbę $b = \frac{3\frac{3}{7} + 2\frac{2}{7}}{\frac{1}{14} + \frac{2}{7}}$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy obliczenia.

$$a = \frac{22 - 3 - (-91) + (-5)}{-3 - (-5) + 7 - 6} = \frac{22 - 3 + 91 - 5}{-3 + 5 + 7 - 6} = \frac{105}{3} = 35$$

$$b = \frac{3\frac{3}{7} + 2\frac{2}{7}}{\frac{1}{14} + \frac{2}{7}} = \frac{5\frac{5}{7}}{\frac{1}{14} + \frac{4}{14}} = \frac{\frac{40}{7}}{\frac{5}{14}} = \frac{40 \cdot 14}{7 \cdot 5} = 16$$

Wykonujemy dzielenie $35 : 16 = 2$ reszty 3.

Odpowiedź: Reszta z dzielenia liczby a przez liczbę b wynosi 3.

1.3. Rozwinięcie dziesiętne i liczby rzeczywiste

Rozwinięcie dziesiętne

Rozwinięciem dziesiętnym nazywamy zapis ułamka zwykłego w postaci dziesiętnej.

Każdy ułamek zwykły można przedstawić w postaci dziesiętnej. Można to zrobić, rozszerzając ułamek zwykły (jeżeli jest to możliwe) do mianownika 10, 100, 1000, ... itp. lub też wykonując dzielenie licznika przez mianownik.

Ułamki dziesiętne skończone otrzymujemy przy rozszerzaniu ułamków zwykłych do ułamków o mianownikach 10, 100, 1000, ... itd.

Przykład

Znajdź rozwinięcia dziesiętne podanych ułamków.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $3\frac{11}{25}$

Rozwiązanie:

a) Rozszerzamy ułamek do mianownika 100:

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$$

b) Rozszerzamy ułamek do mianownika 1000:

$$\frac{7}{8} = \frac{875}{1000} = 0,875$$

c) Rozszerzamy ułamek do mianownika 100:

$$3\frac{11}{25} = 3\frac{44}{100} = 3,44$$

Przy dzieleniu licznika przez mianownik możemy otrzymać rozwinięcie dziesiętne skończone lub rozwinięcie dziesiętne nieskończone liczby wymiernej. Cyfrę lub grupę cyfr w **rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym** nazywamy **okresem** i zapisujemy w nawiasie.

Przykład

Znajdź rozwinięcia dziesiętne podanych ułamków.

a) $\frac{9}{50}$ b) $\frac{7}{12}$ c) $5\frac{15}{21}$

Rozwiązanie:

Wykonujemy dzielenie licznika przez mianownik.

a) $\frac{9}{50} = 0,18$ b) $\frac{7}{12} = 0,58(3)$ c) $5\frac{15}{21} = 5\frac{5}{7} = 5,(714285)$

Zamieniając ułamek dziesiętny skończony na ułamek zwykły, zapisujemy go jako ułamek o mianowniku 10, 100, 1000, ... i odpowiednio skracamy.

Przykład

Zamień ułamki dziesiętne na zwykłe i doprowadź je do postaci nieskracalnej.

a) $0,35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$

b) $0,346 = \frac{346}{1000} = \frac{173}{500}$

c) $3,125 = 3\frac{125}{1000} = 3\frac{1}{8}$

Ułamek okresowy ma nieskończone rozwinięcie, ale można go również przedstawić w postaci ułamka zwykłego.

Przykład

Zamień ułamki dziesiętne na zwykłe.

- a) $0,(3)$ b) $0,(36)$ c) $11,21(18)$

Rozwiązanie:

- a) Niech $x = 0,333\dots$

$$\text{wtedy } 10x = 3,333\dots$$

$$\text{zatem } 10x - x = 3,333\dots - 0,333\dots$$

$$9x = 3$$

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

- b) Niech $x = 0,3636\dots$

$$\text{wtedy } 100x = 36,3636\dots$$

$$\text{zatem } 100x - x = 36,3636\dots - 0,3636\dots$$

$$99x = 36$$

$$x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

- c) Niech $x = 11,211818\dots$

$$\text{wtedy } 100x = 1121,1818\dots \text{ oraz } 10000x = 112118,1818\dots$$

$$\text{zatem } 10000x - 100x = 112118,1818\dots - 1121,1818\dots$$

$$9900x = 110997$$

$$x = \frac{110997}{9900} = 11\frac{2097}{9900} = 11\frac{233}{1100}$$

Liczby niewymierne

Liczbami niewymiernymi nazywamy liczby mające rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe.

Zbiór wszystkich liczb niewymiernych oznaczamy przez $\mathbb{I}\mathbb{Q}$.

Liczbami niewymiernymi są np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, π .

Zbiory liczb wymiernych i niewymiernych są rozłączne.

Liczby rzeczywiste

Zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych oraz oznaczamy literą $\mathbb{R}$.

Zbiór liczb rzeczywistych zawiera zbiór liczb naturalnych, zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb niewymiernych.

W zbiorze liczb rzeczywistych również możemy wykonywać działania na liczbach.

Przykład

Wykonaj działania.

$$\text{a) } 17 - \sqrt{3} - 5 + 2\sqrt{3} - 1 = 11 + \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt{5}(8 - 2\sqrt{5}) - 5(\sqrt{5} - 2) = 8\sqrt{5} - 10 - 5\sqrt{5} + 10 = 3\sqrt{5}$$

$$\text{c) } (\sqrt{6} - \sqrt{7})(\sqrt{7} + \sqrt{6}) = \sqrt{42} + 6 - 7 - \sqrt{42} = -1$$

1.4. Potęga

Potęga o wykładniku całkowitym

Każda liczba rzeczywista, różna od zera, podniesiona do potęgi 0 jest równa 1.

$$a^0 = 1, \text{ dla } a \neq 0$$

Każda liczba rzeczywista podniesiona do potęgi 1 jest tą samą liczbą.

$$a^1 = a$$



Potęgą liczby rzeczywistej a o wykładniku naturalnym $n \geq 2$ jest iloczynem n czynników, z których każdy równy jest liczbie a .

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n, \text{ dla } n \geq 2$$

n czynników

Liczbę a nazywamy **podstawą potęgi**, a liczbę b – wykładnikiem potęgi.

Przykład

$$\text{a) } (8,64)^0 = 1 \qquad \text{b) } \left(3\frac{2}{3}\right)^1 = 3\frac{2}{3}$$

$$\text{c) } \left(-11\frac{3}{7}\right)^2 = \left(-\frac{80}{7}\right) \cdot \left(-\frac{80}{7}\right) = \frac{6400}{49} = 130\frac{30}{49} \qquad \text{d) } 1^3 = 1$$

Dla liczby naturalnej $n \geq 1$ i dla liczby $a \neq 0$ przyjmujemy, że $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Przykład

$$\text{a) } \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16 \qquad \text{b) } 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243} \qquad \text{c) } \left(1\frac{1}{2}\right)^{-6} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$$

Prawa działań na potęgach

Przy obliczeniach wartości wyrażeń, w których występują potęgi, możemy wykorzystywać **prawa działań na potęgach**.

Dla m, n całkowitych i $a, b \neq 0$ mamy:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Przykład

Zapisz w postaci jednej potęgi.

$$\text{a) } 2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

$$\text{b) } \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^l = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+l}$$

$$\text{c) } 5^6 : 5^4 = 5^{6-4} = 5^2$$

$$\text{d) } \frac{y^7}{y^4} = y^{7-4} = y^3$$

$$\text{e) } (7^3)^{-2} = 4^{3(-2)} = 4^{-6}$$

$$\text{f) } \left[\left(-\frac{9}{13}\right)^{-5}\right]^{-3} = \left(-\frac{9}{13}\right)^{(-5)(-3)} = \left(-\frac{9}{13}\right)^{15}$$

$$\text{g) } 18^{-6} : 9^{-6} = (18:9)^{-6} = 2^{-6}$$

$$\text{h) } \frac{21^3}{7^3} = \left(\frac{21}{7}\right)^3 = 3^3$$

$$\text{i) } (-16)^2 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)^2 \cdot 4^2 = \left(-16 \cdot \frac{1}{32} \cdot 4\right)^2 = (-2)^2$$

$$\text{j) } \left(-\frac{6}{13}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{26}\right)^{-2} = \left(-\frac{6}{13}\right)^2 \cdot \left(-\frac{26}{3}\right)^2 = \left[\left(-\frac{6}{13}\right) \cdot \left(-\frac{26}{3}\right)\right]^2 = 4^2$$



Przykład

Porównaj potęgi o tych samych podstawach.

$$\text{a) } 3^5 \text{ i } 3^7 \quad \text{b) } 17^{12} \text{ i } 17^8 \quad \text{c) } \left(\frac{4}{15}\right)^6 \text{ i } \left(\frac{4}{15}\right)^9 \quad \text{d) } \left(\frac{7}{19}\right)^{41} \text{ i } \left(\frac{7}{19}\right)^{16}$$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } 3^5 < 3^7 \quad \text{b) } 17^{12} > 17^8 \quad \text{c) } \left(\frac{4}{15}\right)^6 > \left(\frac{4}{15}\right)^9 \quad \text{d) } \left(\frac{7}{19}\right)^{41} < \left(\frac{7}{19}\right)^{16}$$

Notacja wykładnicza

Notacją wykładniczą nazywamy zapis liczby w postaci $a \cdot 10^n$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$ oraz $1 \leq a < 10$ i $a \in \mathbb{R}$.

Przykład

Zapisz liczby w notacji wykładniczej.

$$\begin{aligned} \text{a) } 7\,000\,000\,000 &= 7 \cdot 10^9 \\ \text{b) } 15\,000\,000\,000 &= 1,5 \cdot 10^{10} \\ \text{c) } 0,0000563 &= 5,63 \cdot 10^{-5} \\ \text{d) } 0,00000000000000312 &= 3,12 \cdot 10^{-14} \end{aligned}$$

Potęga o wykładniku wymiernym

Dla $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ prawdziwy jest wzór $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Jeżeli n jest parzyste, to $a \geq 0$.

Przykład

Oblicz.

$$\begin{aligned} \text{a) } 4^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{4} = 2 & \text{b) } (-27)^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{-27} = -3 & \text{c) } 16^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{16} = 2 \\ \text{d) } 243^{\frac{1}{5}} &= \sqrt[5]{243} = 3 & \text{e) } 64^{\frac{1}{6}} &= \sqrt[6]{64} = 2 & \text{f) } 1024^{\frac{1}{10}} &= \sqrt[10]{1024} = 2 \end{aligned}$$

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m mamy: $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

Przykład

Zapisz w postaci pierwiastka.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2^{\frac{3}{2}} &= \sqrt{2^3} & \text{b) } 7^{\frac{5}{3}} &= \sqrt[3]{7^5} & \text{c) } 6^{\frac{3}{4}} &= \sqrt[4]{6^3} & \text{d) } 43^{\frac{11}{5}} &= \sqrt[5]{43^{11}} \end{aligned}$$

Przykład

Zapisz w postaci ułamka zwykłego.

$$\begin{aligned} \text{a) } 7^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{7^3}} & \text{b) } 15^{-\frac{5}{3}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{15^5}} & \text{c) } 26^{-\frac{3}{4}} &= \frac{1}{\sqrt[4]{26^3}} & \text{d) } 4^{-\frac{11}{5}} &= \frac{1}{\sqrt[5]{4^{11}}} \end{aligned}$$

Prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym są analogiczne do praw działań na potęgach o wykładniku całkowitym.

Przy wykonywaniu działań na pierwiastkach możemy zamienić pierwiastki na potęgi i stosować działania na potęgach.

Przykład

Wykonaj działania. Wynik zapisz w postaci potęgi o całkowitej podstawie.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} \\ \text{b) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} &= 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{7}{6}} \\ \text{c) } \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{25} : \sqrt[5]{125} &= 5^{\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} : 125^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} : 5^{\frac{3}{5}} = 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5}} = 5^{\frac{7}{30}} \\ \text{d) } 4^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{16} : \sqrt[4]{64} &= 4^{-\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} : 64^{\frac{1}{4}} = 4^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} : 4^{\frac{3}{4}} = 4^{-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}} = 4^{\frac{13}{12}} \end{aligned}$$

Przykład

Oblicz.

$$\text{a) } \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 : \sqrt[3]{27} - (-1)^2 \right] : \frac{1}{\sqrt{81}} = \left[\left(\frac{1}{9} : 3 - 1\right) : \frac{1}{9} \right] : \left(\frac{1}{9} : \frac{1}{3} - 1 \right) \cdot 9 = \left(\frac{1}{27} - 1 \right) \cdot 9 = -\frac{26}{27} \cdot 9 = -\frac{26}{3} = -8\frac{2}{3}$$

$$b) \frac{\sqrt{5\frac{4}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} : 4,5}{\left(8 - 3 \cdot 2\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}} = \frac{\sqrt{\frac{49}{9} - 9} : 4,5}{\left(8 - 3 \cdot \frac{7}{3}\right) \cdot (-3)} = \frac{\frac{7}{3} - 2}{(8-7) \cdot (-3)} = \frac{\frac{1}{3}}{-3} = -\frac{1}{9}$$

Usuwanie niewymierności z mianownika

W mianowniku ułamka może być pierwiastek będący liczbą niewymierną. **Usuwanie niewymierności z mianownika** polega na usunięciu pierwiastków z mianownika takiego ułamka.

Przykład

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ c) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$

Rozwiązanie:

a) Mnożymy licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Mnożymy licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{6}$.

$$\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

c) Mnożymy licznik i mianownik przez $(\sqrt[3]{3})^2$.

$$\frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{3})^2} = \frac{3\sqrt[3]{9}}{3} = \sqrt[3]{9}$$

1.5. Przedziały liczbowe

Przedziały liczbowe

W zbiorze liczb rzeczywistych wyróżniamy podzbiory zwane **przedziałami liczbowymi**. Przedziały liczbowe dzielimy na **przedziały ograniczone** i **nieograniczone** (nieskończone).

Przedziały ograniczone

Przedziałem otwartym o końcach $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są większe od a i jednocześnie mniejsze od b . Przedział otwarty o końcach a, b zapisujemy (a, b) . Liczba x należy do przedziału (a, b) wtedy, gdy spełnia podwójną nierówność $a < x < b$.

Przedział otwarty (a, b) często oznacza się na osi liczbowej następująco:



Przedziałem domkniętym o końcach $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które są nie mniejsze od a (mogą być równe) i jednocześnie nie większe od b (mogą być równe). Przedział domknięty o końcach a, b zapisujemy $\langle a, b \rangle$. Liczba x należy do przedziału $\langle a, b \rangle$ wtedy, gdy spełnia podwójną nierówność $a \leq x \leq b$.

Przedział domknięty $\langle a, b \rangle$ możemy oznaczyć na osi liczbowej następująco:





Przedział lewostronnie domknięty $\langle a, b \rangle$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a \leq x < b$. Przedział lewostronnie domknięty $\langle a, b \rangle$ możemy oznaczyć na osi liczbowej następująco:



Przedział prawostronnie domknięty $(a, b]$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a < x \leq b$. Przedział prawostronnie domknięty $(a, b]$ możemy oznaczyć na osi liczbowej w taki oto sposób:



Przykład

Zaznacz na osi liczbowej przedziały.

a) $\langle -1, 6 \rangle$



b) $\langle -2, 4 \rangle$



c) $\langle 2, 5 \rangle$



d) $\langle -1,5; 3,5 \rangle$



Przedziały nieograniczone

Przedział otwarty nieograniczony $(-\infty, a)$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x < a$.

Ilustracja graficzna:



Przedział prawostronnie domknięty nieograniczony $(-\infty, a]$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x \leq a$.

Ilustracja graficzna:



Przedział otwarty nieograniczony (a, ∞) to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x > a$.

Ilustracja graficzna:



Przedział lewostronnie domknięty nieograniczony $\langle a, \infty \rangle$ to zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x \geq a$.

Ilustracja graficzna:



Przykład

Zaznacz na osi liczbowej przedziały.

a) $\langle -3, \infty \rangle$



b) $(-\infty, \sqrt{2})$



Suma, iloczyn i różnica zbiorów

Sumą zbiorów A i B (przedziałów A i B) nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B . Sumę zbiorów A i B oznaczamy $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ lub } x \in B\}$$

Iloczynem zbiorów A i B (przedziałów A i B) nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B . Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$$

Różnicą zbiorów A i B (przedziałów A i B) nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B . Różnicę zbiorów A i B oznaczamy: $A \setminus B$.

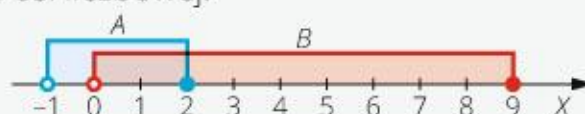
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

Przykład

Wyznacz sumę, iloczyn oraz różnicę przedziałów $A = (-1, 2)$ i $B = (0, 9)$.

Rozwiązanie:

Zaznaczamy przedziały A i B na osi liczbowej.



Wyznaczamy sumę przedziałów A i B : $A \cup B = (-1, 2) \cup (0, 9) = (-1, 9)$

Wyznaczamy iloczyn przedziałów A i B : $A \cap B = (-1, 2) \cap (0, 9) = (0, 2)$

Wyznaczamy różnicę przedziałów A i B : $A \setminus B = (-1, 0)$

Odpowiedź: Sumą jest przedział $(-1, 9)$, iloczynem – przedział $(0, 2)$, a różnicą – przedział $(-1, 0)$.

Iloczyn przedziałów może nie zawierać ani jednej liczby. Mówimy wówczas o zbiorze pustym i oznaczamy $\emptyset$, na przykład $(-2, 0) \cap (0, 1) = \emptyset$.

Iloczyn przedziałów może też być zbiorem jednoelementowym, na przykład $\langle 0, 3 \rangle \cap \langle 3, \infty \rangle = \{3\}$.

1.6. Wartość bezwzględna

Wartość bezwzględna

Jednym z ważniejszych terminów dotyczących liczb rzeczywistych jest pojęcie **wartości bezwzględnej**.

Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej a nazywamy liczbę $|a|$ określoną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{gdy } a \geq 0 \\ -a & \text{gdy } a < 0 \end{cases}$$

Liczba $|a|$ jest zawsze liczbą nieujemną: $|a| \geq 0$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

Przykład

$$|1,5| = 1,5$$

$$|-6| = -(-6) = 6$$

$$|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1, \text{ ponieważ } \sqrt{2} - 1 > 0$$

$$|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}, \text{ ponieważ } \sqrt{3} - 2 < 0$$

Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Wartość bezwzględną interpretujemy jako odległość punktu odpowiadającego danej liczbie na osi liczbowej od punktu odpowiadającego liczbie zero.





Wiemy, że wartością bezwzględną liczby nieujemnej jest ta sama liczba, a wartością bezwzględną liczby ujemnej jest przeciwna do niej liczba dodatnia. Wynika stąd więc, że $|a| = |-a|$.

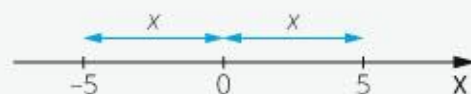
Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre równania i nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład

Wyznacz liczby spełniające równanie $|x| = 5$.

Rozwiązanie

Zaznaczamy na osi liczbowej wszystkie liczby, których odległość od 0 jest równa 5.



Odpowiedź: Jedynymi liczbami spełniającymi równanie $|x| = 5$ są liczby 5 i -5 .

Przykład

Rozwiąż nierówność:

a) $|x| < 2$

Rozwiązanie

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest mniejsza od 2.

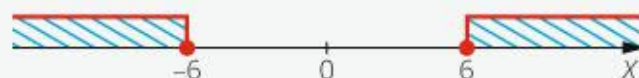


Odpowiedź: Nierówność $|x| < 2$ jest spełniona dla $-2 < x < 2$, zatem $x \in (-2, 2)$.

b) $|x| \geq 6$

Rozwiązanie

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x , których odległość od 0 jest większa od 6 bądź równa 6.



Odpowiedź: Nierówność $|x| \geq 6$ jest spełniona dla $x \leq -6$ lub $x \geq 6$, zatem $x \in (-\infty, -6] \cup [6, \infty)$.

1.7. Procenty w obliczeniach

Pojęcie procenta

Umiejętność operowania procentami jest bardzo potrzebna przede wszystkim w codziennym życiu.

Procenty zawsze odnoszą się do jakiejś całości (wielkości ustalonej, np. $k \in \mathbb{R}$),

np. $1\%k = \frac{1}{100}k = 0,01k$, $25\%k = \frac{25}{100}k = 0,25k$.

Obliczanie procentu danej liczby

Obliczanie procentu danej liczby wiąże się z obliczaniem ułamka tej liczby. Należy pamiętać, do jakiej wielkości odnosi się podany procent, ponieważ taka sama liczba procentów różnych wielkości będzie oznaczała różną wartość.

Przykład

Cenę butów wynoszącą 260 zł obniżono o 30%. Ile wynosi cena butów po obniżce?

Rozwiązanie:

Cena butów po obniżce stanowi $100\% - 30\%$, czyli 70% początkowej ceny butów.

Obliczamy cenę butów po obniżce: $0,7 \cdot 260 = 182$ (zł).

Odpowiedź: Cena butów po obniżce wynosi 182 zł.

Przykład

Cenę roweru w wysokości 3240 zł obniżono o 10%, a po miesiącu o kolejne 15%.

a) Oblicz końcową cenę roweru.

Rozwiązanie:

Cena roweru po pierwszej obniżce stanowi $100\% - 10\%$, czyli 90% pierwotnej ceny.

Cena roweru po drugiej obniżce stanowi $100\% - 15\%$, czyli 85% ceny po pierwszej obniżce.



Obliczamy cenę roweru po obu obniżkach: $0,85 \cdot (0,9 \cdot 3240) = 2478,6$ (zł).

Odpowiedź: Cena roweru po obniżkach wynosi 2478,60 zł.

b) Ile kosztowałby ten rower, gdyby jego cenę od razu obniżono o 25%?

Rozwiązanie:

Cena roweru po obniżce stanowi $100\% - 25\%$, czyli 75% pierwotnej ceny.

Obliczamy cenę roweru po obniżce: $0,75 \cdot 3240 = 2430$ (zł).

Odpowiedź: Cena roweru wynosi 2430 zł.

Wielokrotnej zmiany wartości o pewien procent nie można zastąpić jednorazową zmianą o sumę procentów każdej ze zmian.

Jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Obliczenie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, zaczynamy od ustalenia, jakim ułamkiem jednej liczby jest druga, a następnie zamieniamy ten ułamek na procent.

Przykład

Pracownik w styczniu otrzymał 5460 zł brutto, a w lutym po podwyżce dostał 6279 zł. Oblicz, o ile procent wzrosła pensja pracownika.

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość podwyżki pensji pracownika: $6279 \text{ zł} - 5460 \text{ zł} = 819 \text{ zł}$.

Obliczamy, jakim procentem liczby 5460 jest liczba 819: $\frac{819}{5460} \cdot 100\% = 15\%$.

Odpowiedź: Pensja pracownika wzrosła o 15%.

Przykład

Cenę pewnego towaru podwyższono o 10%, a następnie nową cenę obniżono o 20%. Jakim procentem ceny początkowej była cena końcowa?

Rozwiązanie:

Niech x oznacza pierwotną cenę towaru. Wtedy cena towaru po podwyżce wyniesie $x + 0,1x$, czyli $1,1x$.
Zatem cenę towaru po obniżce opisuje wyrażenie $1,1x - 0,2 \cdot (1,1x)$, czyli $0,88x$. Stąd $0,88x = 88\%x$.

Odpowiedź: Cena końcowa towaru stanowiła 88% ceny początkowej towaru.

Wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent

Aby znaleźć liczbę, gdy znany był jej procent, możemy wykorzystać jeden z trzech sposobów:

- obliczyć 1% szukanej liczby, a następnie znaleźć jej 100%,
- zamienić procent na ułamek i obliczyć całość,
- przyjąć za niewiadomą szukaną liczbę i rozwiązać odpowiednie równanie.

W praktyce najczęściej znajdujemy liczbę na podstawie danego jej procentu, wykorzystując proporcje.

Przykład

Cenę towaru podniesiono o 132 zł, co stanowi 25% ceny początkowej. Jaka była cena towaru przed podwyżką?

Rozwiązanie:

Niech x oznacza pierwotną cenę towaru. Podwyżka stanowi 25% ceny towaru, czyli $0,25x = 132$.

Stąd $x = 528$.

Odpowiedź: Cena towaru wynosiła 528 zł.

Przykład

Cena telewizora z 18-procentowym rabatem wynosi 3985,20 zł. Jaka jest cena telewizora bez rabatu?

Rozwiązanie:

Niech x oznacza pierwotną cenę telewizora. Obecna cena stanowi $100\% - 18\%$, czyli 82% pierwotnej ceny. Zatem $0,82x = 3985,2$. Stąd $x = 4860$.

Odpowiedź: Cena telewizora wynosi 4860 zł.

Punkty procentowe

Różnicę między dwiema podanymi w procentach wartościami jednej wielkości określamy za pomocą punktów procentowych.

Przykład

Bank podniósł oprocentowanie kredytu z 6% na 7,5%.

a) O ile punktów procentowych wzrosło oprocentowanie kredytu?

Odpowiedź: Zmiana oprocentowania z 6% na 7,5% oznacza wzrost o $7,5 - 6$, czyli 1,5 punktu procentowego.

b) O ile procent wzrosło oprocentowanie kredytu?

Oprocentowanie wzrosło o 1,5 punktu procentowego.

Zatem procentowy wzrost oprocentowania wynosi $\frac{1,5}{6} \cdot 100\% = 25\%$.

Odpowiedź: Oprocentowanie kredytu wzrosło o 25%.

Kredyty i lokaty bankowe

Coraz częściej korzystamy z usług banków, które udzielają kredytów lub przyjmują pieniądze na lokaty pieniężne.

Lokata bankowa to umowa zawarta między klientem a bankiem, na mocy której klient powierza bankowi określoną kwotę na ustalony termin. W zamian za to, po upływie tego terminu, bank wypłaca klientowi wpłaconą kwotę powiększoną o odsetki, które zostały naliczone zgodnie z warunkami zapisanymi w umowie.

Kredyt to umowa z bankiem na pozyczenie pewnej kwoty pieniędzy na określonych warunkach. Za udzielenie kredytu banki pobierają opłaty zwane oprocentowaniem kredytu.

Przykład

Pan Tomasz zaciągnął w banku kredyt na rok. Odsetki od kredytu wynosiły 9,6% w skali roku. Po roku pan Tomasz wpłacił do banku 13 152 zł. Na jaką kwotę pan Tomasz zaciągnął pożyczkę?

Rozwiązanie:

Kwota 13 152 zł jest sumą zaciągniętej pożyczki i odsetek, stanowi więc ona $100\% + 9,6\% = 109,6\%$ kredytu.

Układamy i rozwiązujemy odpowiednie równanie.

Oznaczamy jako x wartość szukanej kwoty w złotych.

$$1,096x = 13\,152$$

$$x = 12\,000 \text{ (zł)}$$

Odpowiedź: Pan Tomasz zaciągnął kredyt w wysokości 12 000 zł.

Przykład

Kapitał w wysokości 7500 zł został złożony w banku na rok przy oprocentowaniu 3,2% w stosunku rocznym. Oblicz wielkość kapitału po roku.

Rozwiązanie:

Kapitał w wysokości k złożony na rok przy oprocentowaniu rocznym w wysokości $p\%$ wynosi po roku

$$k \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

Skoro $k = 7500$ zł oraz $p = 3,2$, czyli wielkość kapitału po roku wyniesie $7500 \cdot \left(1 + \frac{3,2}{100} \right) = 7740$ (zł).

Odpowiedź: Po roku wielkość kapitału wyniesie 7740 zł.

1.8. Logarytm i jego własności

Pojęcie logarytmu

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a , dodatniej i różnej od jednośc, nazywamy liczbę x , do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę b .

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Liczba a nazywa się podstawą logarytmu, a liczba b – liczbą logarytmowaną.

Przykład

$$\log_2 8 = 3, \text{ ponieważ } 2^3 = 8$$

$$\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}, \text{ ponieważ } 3^{\frac{3}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} = 27^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2, \text{ ponieważ } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 4^2 = 16$$

Ważną rolę w matematyce i naukach matematyczno-przyrodniczych odgrywa m.in. logarytm o podstawie 10.

Logarytmem o podstawie 10 (logarytmem dziesiętnym) z liczby b nazywamy liczbę x taką, że $10^x = b$. Logarytm dziesiętny liczby b oznaczamy $\log b$.

Przykład

$$\log 100 = 2, \text{ ponieważ } 10^2 = 100$$

$$\log 0,0001 = -4, \text{ ponieważ } 10^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0,0001$$

$$\log \sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}, \text{ ponieważ } 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$$

Dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1, $\log_a 1 = 0$ oraz $\log_a a = 1$.

Przykład

$$\log_3 1 = b, \text{ stąd } 3^b = 1, \text{ czyli } 3^b = 3^0, \text{ zatem } b = 0$$

$$\log_5 5 = b, \text{ stąd } 5^b = 5, \text{ czyli } 5^b = 5^1, \text{ zatem } b = 1$$

W obliczeniach często wykorzystywane są **własności logarytmów**.

Własności logarytmów

Twierdzenie

Jeżeli liczba a jest dodatnia i różna od 1, to dla dowolnych dodatnich liczb b i c oraz p prawdziwe są następujące własności:

$$\text{logarytm iloczynu: } \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\text{logarytm ilorazu: } \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\text{logarytm potęgi: } \log_a b^p = p \log_a b$$

Dowód

Powyższe wzory wynikają bezpośrednio z własności działań na potęgach.

Niech $x = \log_a b$ i $y = \log_a c$. Wtedy korzystając z definicji logarytmu, mamy: $a^x = b$ oraz $a^y = c$.

$$\text{Zatem } \log_a (bc) = \log_a (a^x \cdot a^y) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a b + \log_a c.$$

$$\text{Podobnie } \log_a \frac{b}{c} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a b - \log_a c$$

$$\text{oraz } \log_a b^p = \log_a (a^x)^p = \log_a a^{p \cdot x} = p \cdot x = p \log_a b.$$



Przykład

$$\log_2(32 \cdot 512) = \log_2 32 + \log_2 512 = 5 + 9 = 14$$

$$\log_2 \frac{16}{0,25} = \log_2 16 - \log_2 \frac{1}{4} = 4 - (-2) = 6$$

$$\log_3 (\sqrt{27})^8 = 8 \log_3 \sqrt{27} = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12$$

We wszystkich powyższych przykładach w wyniku logarytmowania otrzymaliśmy liczby wymierne. Istnieją jednak logarytmy, które są liczbami niewymiernymi.

Przykład

Uzasadnij, że liczba $\log_3 4$ jest niewymierna.

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost.

Zakładamy, że liczba $\log_3 4$ jest liczbą wymierną, czyli można ją zapisać w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są dowolnymi liczbami całkowitymi, przy czym $n \neq 0$.

Zatem $\log_3 4 = \frac{m}{n}$, stąd mamy $3^{\frac{m}{n}} = 4$.

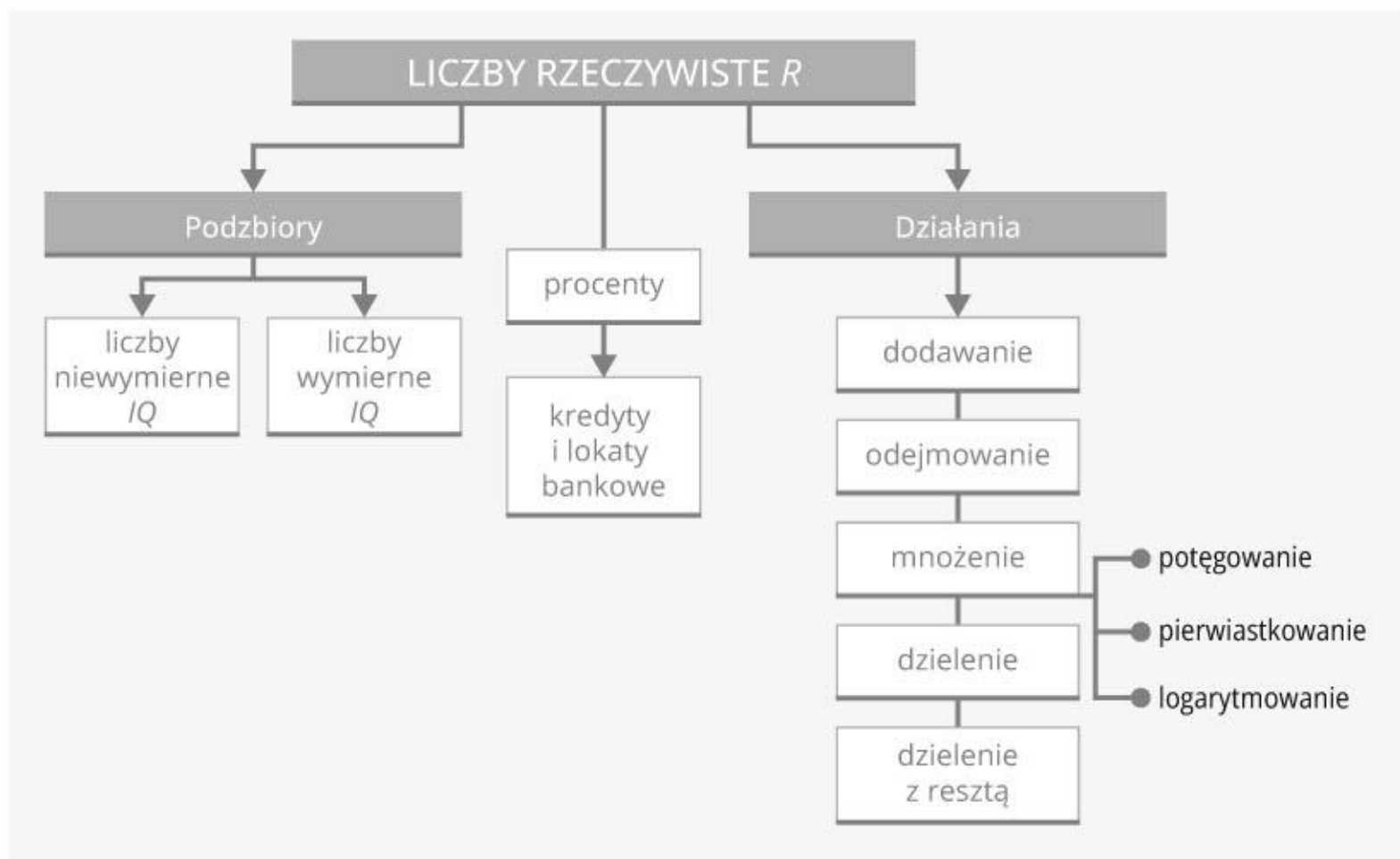
Podnosząc obie strony równości $3^{\frac{m}{n}} = 4$ do potęgi n , otrzymujemy $3^m = 4^n$.

Lewa strona jest iloczynem trójek, więc liczbą nieparzystą, a prawa strona – iloczynem czwórek, czyli liczbą parzystą. Stąd $3^m \neq 4^n$.

Założenie, że liczba $\log_3 4$ jest liczbą wymierną, doprowadziło do sprzeczności, zatem $\log_3 4$ nie może być liczbą wymierną, czyli $\log_3 4$ jest liczbą niewymierną.

Wniosek: Liczba $\log_3 4$ jest liczbą niewymierną.

1.9. Utrwalamy wiedzę



2

Wyrażenia algebraiczne

2.1. Wzory skróconego mnożenia

W działaniach na wyrażeniach algebraicznych stosujemy wzory skróconego mnożenia.

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Dowód: } (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Przykład

Oblicz wartości wyrażeń.

$$\text{a) } (5+\sqrt{2})^2 \quad \text{b) } (\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$\text{a) } (5+\sqrt{2})^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 25 + 10\sqrt{2} + 2 = 27 + 10\sqrt{2}$$

$$\text{b) } (\sqrt{3}+\sqrt{7})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{Dowód: } (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Przykład

Oblicz wartości wyrażeń.

$$\text{a) } (\sqrt{3}-8)^2 \quad \text{b) } (2\sqrt{6}-3\sqrt{5})^2$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$\text{a) } (\sqrt{3}-8)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 8 + 8^2 = 3 - 16\sqrt{3} + 64 = 67 - 16\sqrt{3}$$

$$\text{b) } (2\sqrt{6}-3\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{5} + (3\sqrt{5})^2 = 24 - 12\sqrt{30} + 45 = 69 - 12\sqrt{30}$$

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\text{Dowód: } (a-b)(a+b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

Przykład

Zapisz wyrażenie w postaci iloczynowej.

$$\text{a) } x^2 - 16 \quad \text{b) } a^2 - 5 \quad \text{c) } 121 - 4m^2 \quad \text{d) } 3x^2 - 5y^2$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$\text{a) } x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$$

$$\text{b) } a^2 - 5 = a^2 - \sqrt{5}^2 = (a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})$$

$$\text{c) } 121 - 4m^2 = 11^2 - (2m)^2 = (11-2m)(11+2m)$$

$$\text{d) } 3x^2 - 5y^2 = (\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{5}y)^2 = (\sqrt{3}x - \sqrt{5}y)(\sqrt{3}x + \sqrt{5}y)$$

Sześcian sumy dwóch wyrażeń

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Dowód:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$





Przykład

Oblicz wartości wyrażeń.

$$a) (1+\sqrt{2})^3 \quad b) (\sqrt{3}+2)^3 \quad c) (2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^3$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$a) (1+\sqrt{2})^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}$$

$$b) (\sqrt{3}+2)^3 = \sqrt{3}^3 + 3 \cdot \sqrt{3}^2 \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 2^2 + 2^3 = 3\sqrt{3} + 18 + 12\sqrt{3} + 8 = 26 + 15\sqrt{3}$$

$$c) (2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^3 = (2\sqrt{2})^3 + 3 \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 3\sqrt{3} + 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^3 = \\ = 16\sqrt{2} + 72\sqrt{3} + 162\sqrt{2} + 81\sqrt{3} = 178\sqrt{2} + 153\sqrt{3}$$

Sześcian różnicy dwóch wyrażeń

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dowód:

$$(a-b)^3 = (a-b)^2 \cdot (a-b) = (a^2 - 2ab + b^2) \cdot (a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = \\ = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Przykład

Oblicz wartości wyrażeń.

$$a) (1-\sqrt{2})^3 \quad b) (\sqrt{3}-2)^3 \quad c) (2\sqrt{2}-3\sqrt{3})^3$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$a) (1-\sqrt{2})^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^3 = 1 - 3\sqrt{2} + 6 - 2\sqrt{2} = 7 - 5\sqrt{2}$$

$$b) (\sqrt{3}-2)^3 = \sqrt{3}^3 - 3 \cdot \sqrt{3}^2 \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 2^2 - 2^3 = 3\sqrt{3} - 18 + 12\sqrt{3} - 8 = 15\sqrt{3} - 26$$

$$c) (2\sqrt{2}-3\sqrt{3})^3 = (2\sqrt{2})^3 - 3 \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 3\sqrt{3} + 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3})^3 = \\ = 16\sqrt{2} - 72\sqrt{3} + 162\sqrt{2} - 81\sqrt{3} = 178\sqrt{2} - 153\sqrt{3}$$

Różnica sześcianów dwóch wyrażeń

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Dowód: } (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3$$

Przykład

Zapisz wyrażenie w postaci iloczynowej.

$$a) x^3 - 8 \quad b) a^3 - 9 \quad c) 64 - 27m^3 \quad d) 343x^3 - 125y^3$$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

$$a) x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$b) a^3 - 9 = a^3 - \sqrt[3]{9}^3 = (a - \sqrt[3]{9})(a^2 + \sqrt[3]{9}a + \sqrt[3]{81})$$

$$c) 64 - 27m^3 = 4^3 - (3m)^3 = (4-3m)(16+12m+9m^2)$$

$$d) 343x^3 - 125y^3 = (7x)^3 - (5y)^3 = (7x-5y)(49x^2 + 35xy + 25y^2)$$

Różnica n -tych potęg dwóch wyrażeń

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

Dowód indukcyjny pomijamy.

Przykład

Zapisz wyrażenie w postaci iloczynowej.

a) $x^4 - 256$ b) $a^5 - 243$ c) $64 - m^6$ d) $128x^7 - 2187y^7$

Obliczając wartości tych wyrażeń, stosujemy powyższy wzór skróconego mnożenia:

a) $x^4 - 256 = x^4 - 4^4 = (x - 4)(x^3 + 4x^2 + 16x + 64)$

b) $a^5 - 243 = a^5 - 3^5 = (a - 3)(a^4 + 3a^3 + 9a^2 + 27a + 81)$

c) $64 - m^6 = 2^6 - m^6 = (2 - m)(32 + 16m + 8m^2 + 4m^3 + 2m^4 + m^5)$

d) $128x^7 - 2187y^7 = (2x)^7 - (3y)^7 =$
 $= (2x - 3y)(64x^6 + 96x^5y + 144x^4y^2 + 216x^3y^3 + 324x^2y^4 + 486xy^5 + 729y^6)$

Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia**Przykład**

Zastosuj odpowiednie wzory skróconego mnożenia i doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.

a) $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)^2$ b) $\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ c) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ d) $a^2 - a + \frac{1}{4}$

Rozwiązanie:

a) Stosujemy wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń:

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \sqrt{2} + 2 = 2\frac{1}{4} + \sqrt{2}$$

b) Stosujemy wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń:

$$\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{\sqrt{3}^2} = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{3} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{3}$$

c) Stosujemy wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = x^2 - \sqrt{3}^2 = x^2 - 3$$

d) Stosujemy wzór na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń:

$$a^2 - a + \frac{1}{4} = a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$$

2.2. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów**Stopień i współczynniki wielomianu****Jednomianem stopnia n** nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od zera oraz n jest naturalną liczbą dodatnią.Wielomiany $W(x) = 3x$, $W(x) = -5x^2$, $W(x) = 10$, $W(x) = \frac{1}{2}x^4$ są przykładami jednomianów jednej zmiennej.Wielomian stały $y = a$, gdzie $a \neq 0$ jest jednomianem stopnia 0, a wielomian $W(x) = 0$ jest jednomianem zerowym, którego stopnia nie określamy.**Wielomianem stopnia n zmiennej rzeczywistej x** nazywamy funkcję postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, n jest naturalną liczbą dodatnią oraz a_n jest różne od zera.**Wyrazami** nazywamy jednomiany występujące w wielomianie.**Współczynnikami wielomianu** nazywamy liczby: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$.**Wyrazem wolnym** nazywamy współczynnik a_0 .**Wielomianem zerowym** nazywamy jednomian o wartości równej 0.



Wielomiany najczęściej zapisujemy w uporządkowanej postaci tak, by występujące w nim jednomiany były zapisane w kolejności od stopnia najwyższego do najniższego. Stopień wielomianu W oznaczamy przez $\text{st}(W)$.

Wielomian uporządkowany składający się z dwóch wyrazów, np. $W(x) = x^4 - 1$, nazywamy **dwumianem**, a wielomian uporządkowany składający się z trzech wyrazów, $W(x) = -2x^2 + 3x - 1$, nazywamy **trójmianem**.

Przykład

Uporządkuj wielomian w i określ jego stopień.

a) $W(x) = -3x^2 + 1 + x^4 - 5x + x^5 - 4x^3$

b) $W(x) = \frac{1}{3}x^5 + x^2 - 0,2x^6 - \frac{2}{5} + 2x^4 - x^7 + 0,1x$

Rozwiązanie:

a) $W(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 5x + 1$, $\text{st}(W) = 5$

b) $W(x) = -x^7 - 0,2x^6 + \frac{1}{3}x^5 + 2x^4 + x^2 + 0,1x - \frac{2}{5}$, $\text{st}(W) = 7$

Przykład

Wypisz współczynniki wielomianu w .

a) $W(x) = 6x^5 - 3x^4 - x^3 + 2x + 1$

b) $W(x) = 5x^2 - 4x + x^6$

Rozwiązanie:

a) $a_5 = 6, a_4 = -3, a_3 = -1, a_2 = 0, a_1 = 2, a_0 = 1$

b) porządkujemy wielomian w : $W(x) = x^6 + 5x^2 - 4x$

$a_6 = 1, a_5 = a_4 = a_3 = a_0 = 0, a_2 = 5, a_1 = -4$

Obliczanie wartości wielomianu

Obliczanie wartości wielomianu polega na podstawieniu danej liczby w miejsce zmiennej wielomianu i wykonaniu wskazanych działań.

Przykład

Oblicz wartość wielomianu $W(x) = 2x^5 - 3x^3 - x + 5$ dla $x = -2$.

Rozwiązanie:

$$W(-2) = 2 \cdot (-2)^5 - 3 \cdot (-2)^3 - (-2) + 5 = -33$$

Odpowiedź: Wartość wielomianu wynosi -33 .

Suma i różnica wielomianów

Wielomiany można dodawać i odejmować.

Aby wyznaczyć sumę wielomianów, należy dodać wyrazy podobne występujące w tych wielomianach. Suma wielomianów jest też wielomianem.

Przykład

Wyznacz sumę wielomianów u i w . Podaj stopień wielomianu w , wielomianu u oraz stopień ich sumy.

a) $U(x) = 3x^3 + x^2 - 5x + 1, W(x) = x^5 - x^3 + 5x + 3$

b) $U(x) = \frac{2}{3}x^6 - x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 6x, W(x) = \frac{1}{3}x^5 - 3x^4 - \frac{1}{6}x^2 + 2x - 5$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{a) } U(x) + W(x) &= (3x^3 + x^2 - 5x + 1) + (x^5 - x^3 + 5x + 3) = \underline{3x^3} + x^2 \cancel{-5x} \underline{-1} + x^5 \underline{-x^3} \cancel{+5x} \underline{+3} = \\ &= x^5 + 2x^3 + x^2 + 2 \\ \text{st}(U + W) &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } U(x) + W(x) &= \left(\frac{2}{3}x^6 - x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 6x \right) + \left(\frac{1}{3}x^5 - 3x^4 - \frac{1}{6}x^2 + 2x - 5 \right) = \\ &= \underline{\frac{2}{3}x^6} \underline{-x^4} + \underline{\frac{1}{2}x^2} \underline{-6x} + \underline{\frac{1}{3}x^5} \underline{-3x^4} \underline{-\frac{1}{6}x^2} \underline{+2x} \underline{-5} = \underline{\frac{2}{3}x^6} + \underline{\frac{1}{3}x^5} \underline{-4x^4} \underline{-\frac{1}{3}x^2} \underline{-4x} \underline{-5} \\ \text{st}(U + W) &= 6 \end{aligned}$$



Stopień sumy wielomianów jest nie większy od najwyższego ze stopni składników tej sumy.

Aby wyznaczyć różnicę wielomianów, od wyrazów pierwszego wielomianu należy odjąć odpowiednie wyrazy podobne drugiego wielomianu. Różnica wielomianów jest też wielomianem.

Przykład

Wyznacz różnicę wielomianów U i W .

$$a) U(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3, W(x) = 2x^5 + 5x^3 - x^2 + 1$$

$$b) U(x) = \frac{1}{5}x^6 - 2x^3 + \frac{1}{4}x - 2,5, W(x) = 0,2x^6 - x^4 - x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie:

$$a) U(x) - W(x) = (2x^4 + 5x^3 - 3) - (2x^5 + 5x^3 - x^2 + 1) = 2x^4 \cancel{+ 5x^3} - 3 - 2x^5 \cancel{- 5x^3} + x^2 - 1 =$$

$$= -2x^5 + 2x^4 + x^2 - 4$$

$$b) U(x) - W(x) = \left(\frac{1}{5}x^6 - 2x^3 + \frac{1}{4}x - 2,5\right) - \left(0,2x^6 - x^4 - x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\cancel{x^6} - 2x^3 + \frac{1}{4}\cancel{x} - 2,5 - 0,2\cancel{x^6} + x^4 + x^2 + \frac{3}{4}\cancel{x} - \frac{1}{2} = x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 3$$

Stopień różnicy wielomianów jest nie większy od najwyższego ze stopni składników tej różnicy.

Mnożenie wielomianów

Mnożenie wielomianu przez jednomian polega na pomnożeniu każdego wyrazu wielomianu przez ten jednomian.

Przykład

$$a) 5\left(x^3 - 2x + \frac{1}{5}\right) = 5x^3 - 10x + 1$$

$$b) x^2(-x^4 + 2x^2 - 3) = -x^6 + 2x^4 - 3x^2$$

$$c) -\frac{1}{3}x(6x^3 - 3x^2 - 12x + 9) = -2x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x$$

Przykład

Dane są wielomiany $U(x) = -x^5 + 4x^4 - 2x^2 + x$ i $W(x) = x^6 + x^4 - 4x^2$. Wyznacz wielomian $H(x) = 2W(x) - 3U(x)$.

Rozwiązanie:

$$H(x) = 2W(x) - 3U(x) = 2(x^6 + x^4 - 4x^2) - 3(-x^5 + 4x^4 - 2x^2 + x) = 2x^6 \cancel{+ 2x^4} - 8x^2 + 3x^5 \cancel{- 12x^4} \cancel{+ 6x^2} - 3x =$$

$$= -2x^6 + 3x^5 - 10x^4 - 2x^2 - 3x$$

Aby wyznaczyć **iloczyn wielomianów**, należy pomnożyć każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu. Iloczyn wielomianów jest wielomianem.

Przykład

Wyznacz iloczyn wielomianów W i U . Podaj stopień otrzymanego wielomianu.

$$a) U(x) = x^2 - 1 \text{ i } W(x) = x + 2$$

$$b) U(x) = x^2 + 2x - 1 \text{ i } W(x) = -x^3 + x$$

Rozwiązanie:

$$a) U(x) \cdot W(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 2) = x^2 \cdot x + x^2 \cdot 2 - 1 \cdot x - 1 \cdot 2 = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\text{st } (U(x) \cdot W(x)) = 3$$

$$b) U(x) \cdot W(x) = (x^2 + 2x - 1) \cdot (-x^3 + x) = x^2 \cdot (-x^3) + x^2 \cdot x + 2x \cdot (-x^3) + 2x \cdot x - 1 \cdot (-x^3) - 1 \cdot x =$$

$$= -x^5 \cancel{+ x^3} - 2x^4 + 2x^2 \cancel{+ x^3} - x = -x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x$$

$$\text{st } (U(x) \cdot W(x)) = 5$$

Iloczyn wielomianów stopnia m i stopnia n jest wielomianem stopnia $m + n$.

Za pomocą wielomianu możemy opisywać na przykład objętość prostopadłościanu. Należy wówczas pamiętać o określeniu dziedziny tego wielomianu.





Przykład

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach $a = x - 3$, $b = 2x + 4$, $c = 10 - x$.

Rozwiązanie:

Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi, czyli $x - 3 > 0$ i $2x + 4 > 0$ i $10 - x > 0$. Stąd $3 < x < 10$, czyli $x \in (3, 10)$.

Korzystając ze wzoru na objętość $V = abc$, otrzymujemy:

$$V(x) = (x - 3)(2x + 4)(10 - x) = (2x^2 + 4x - 6x - 12)(10 - x) = (2x^2 - 2x - 12)(10 - x) =$$

$$= 20x^2 - 2x^3 - 20x + 2x^2 - 120 + 120x = -2x^3 + 22x^2 + 100x - 120$$

Odpowiedź: Objętość prostopadłościanu opisuje wielomian $V(x) = -2x^3 + 22x^2 + 100x - 120$ dla $x \in (3, 10)$.

Działania na wielomianach wielu zmiennych

Wyrażenia algebraiczne mogą być wyrażeniami algebraicznymi jednej zmiennej, jak również wyrażeniami algebraicznymi wielu zmiennych, np.:

$$W(x, y) = xy^2 - 2x^2y^2 + x^2y - 1, W(x, y, z) = 2x^2y^3z + 4x^2z - 3y^2z^2 + xyz$$

Aby wyznaczyć sumę (różnicę) wyrażen algebraicznych wielu zmiennych, należy dodać (odjąć) wyrazy podobne tych wielomianów.

Przykład

Wyznacz sumę i różnicę wielomianów u i w , gdy:

$$a) U(x, y) = x^2y - xy^2 + 2xy, W(x, y) = 3x^2y - xy^2 - 3xy + 1$$

$$b) U(x, y, z) = 2x^3y^2z + 3xy^2z^3 + xy - xz, W(x, y, z) = -x^3y^2z - 2xy^2z^3 + xy - 2xz$$

Rozwiązanie:

$$a) U(x, y) + W(x, y) = (x^2y - xy^2 + 2xy) + (3x^2y - xy^2 - 3xy + 1) = \underline{x^2y - xy^2 + 2xy} + \underline{3x^2y - xy^2 - 3xy + 1} =$$

$$= 4x^2y - 2xy^2 - xy + 1$$

$$U(x, y) - W(x, y) = (x^2y - xy^2 + 2xy) - (3x^2y - xy^2 - 3xy + 1) =$$

$$= \underline{x^2y - xy^2} + \underline{2xy - 3x^2y} + \underline{xy^2 + 3xy} - 1 = -2x^2y + 5xy - 1$$

$$b) U(x, y, z) + W(x, y, z) = (2x^3y^2z + 3xy^2z^3 + xy - xz) + (-x^3y^2z - 2xy^2z^3 + xy - 2xz) =$$

$$= \underline{2x^3y^2z + 3xy^2z^3} + \underline{xy - xz} + \underline{-x^3y^2z - 2xy^2z^3} + \underline{xy - 2xz} = x^3y^2z + xy^2z^3 + 2xy - 3xz$$

$$U(x, y, z) - W(x, y, z) = (2x^3y^2z + 3xy^2z^3 + xy - xz) - (-x^3y^2z - 2xy^2z^3 + xy - 2xz) =$$

$$= \underline{2x^3y^2z + 3xy^2z^3} + \underline{xy - xz} + \underline{x^3y^2z + 2xy^2z^3} + \underline{-xy + 2xz} = 3x^3y^2z + 5xy^2z^3 + xz$$

Mnożenie wielomianów wielu zmiennych wykonujemy podobnie jak mnożenie jednej zmiennej.

Przykład

Wyznacz iloczyn wielomianów $U(x, y) = x^2 + 2y^2$ i $W(x, y) = y^2 - 2x^2 - 3$.

Rozwiązanie:

$$U(x, y) \cdot W(x, y) = (x^2 + 2y^2)(y^2 - 2x^2 - 3) =$$

$$= x^2 \cdot y^2 + x^2 \cdot (-2x^2) + x^2 \cdot (-3) + 2y^2 \cdot y^2 + 2y^2 \cdot (-2x^2) + 2y^2 \cdot (-3) =$$

$$= \underline{x^2y^2} - 2x^4 - 3x^2 + \underline{2y^4} - 4x^2y^2 - 6y^2 = -3x^2y^2 - 2x^4 + 2y^4 - 3x^2 - 6y^2$$

2.3. Rozkład wielomianu na czynniki

Sposoby rozkład wielomianu na czynniki

Rozkładem wielomianu na czynniki nazywamy przedstawienie go w postaci iloczynu wielomianów najniższych stopni.

Jedną z metod rozkładu wielomianu na czynniki jest **wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias**.

PrzykładRozłóż wielomian w na czynniki.

a) $W(x) = 6x^4 - 5x^3$

b) $W(x) = -2x^3 - 8x^2$

Rozwiązanie:a) Wyłączamy wspólny czynnik x^3 przed nawias:

$$W(x) = 6x^4 - 5x^3 = 6x \cdot x^3 - 5 \cdot x^3 = x^3(6x - 5)$$

b) Wyłączamy wspólny czynnik $-2x^2$ przed nawias:

$$W(x) = -2x^3 - 8x^2 = -2x^2(x + 4)$$

Wielomiany można przedstawiać w postaci iloczynu, stosując wzory skróconego mnożenia.

PrzykładRozłóż wielomian W na czynniki.

a) $W(x) = 16x^7 - x^5$

b) $W(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$

Rozwiązanie:a) Wyłączamy wspólny czynnik x^5 przed nawias, a następnie rozkładamy dwumian kwadratowy $16x^2 - 1$ na czynniki, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$W(x) = 16x^7 - x^5 = 16 \cdot x^5 \cdot x^2 - x^5 \cdot 1 = x^5(16x^2 - 1) = x^5(4x - 1)(4x + 1)$$

b) Wyłączamy wspólny czynnik $2x$ przed nawias, a następnie rozkładamy trójmian kwadratowy $x^2 - 6x + 9$ na czynniki, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

$$W(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x = 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 6x + 2x \cdot 9 = 2x(x^2 - 6x + 9) = 2x(x - 3)^2$$

W przypadku rozkładu na czynniki wielomianu drugiego stopnia możemy zastosować postać iloczynową trójmianu kwadratowego (o ile istnieje).

PrzykładRozłóż wielomian w na czynniki.

a) $W(x) = 25x^7 - x^3$

b) $W(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2$

Rozwiązanie:a) Wyłączamy wspólny czynnik x^3 przed nawias, rozkładamy wielomian $25x^4 - 1$ na czynniki, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, następnie rozkładamy wielomian $5x^2 - 1$ na czynniki liniowe, ponownie korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

$$W(x) = 25x^7 - x^3 = x^3(25x^4 - 1) = x^3(5x^2 - 1)(5x^2 + 1) = x^3(\sqrt{5}x - 1)(\sqrt{5}x + 1)(5x^2 + 1)$$

Wielomianu stopnia drugiego $5x^2 + 1$ nie możemy przedstawić w postaci iloczynowej, ponieważ $\Delta = 0 - 20 = -20 < 0$.b) Wyłączamy wspólny czynnik x^2 przed nawias, a następnie przedstawiamy trójmian kwadratowy $2x^2 + 5x - 3$ w postaci iloczynowej.

$$W(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 = x^2(2x^2 + 5x - 3) = x^2(x + 3)(2x - 1)$$

Każdy niezerowy wielomian można rozłożyć na czynniki co najwyżej drugiego stopnia.

Niekiedy wielomian możemy rozłożyć na czynniki, **grupując jego wyrazy**.**Przykład**Rozłóż wielomian w na czynniki, grupując jego wyrazy.

a) $W(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 2$

b) $W(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Rozwiązanie:a) Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik x^2 z dwóch pierwszych wyrazów, a następnie wspólny czynnik 2 z trzeciego i czwartego wyrazu. W obu nawiasach otrzymujemy ten sam wielomian $2x - 1$, więc możemy wyłączyć go przed nawias. Dwumianu $x^2 + 2$ nie możemy przedstawić w postaci iloczynowej.

$$W(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 2 = x^2(2x - 1) + 2(2x - 1) = (2x - 1)(x^2 + 2)$$

b) Wyłączamy przed nawias wspólny czynnik x^2 z dwóch pierwszych wyrazów, a następnie wspólny czynnik -4 z trzeciego i czwartego wyrazu. W obu nawiasach otrzymujemy ten sam wielomian $x + 3$, zatem możemy wyłączyć go przed nawias. Dwumian $x^2 - 4$ możemy przedstawić w postaci iloczynowej $(x - 2)(x + 2)$.

$$W(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = x^2(x + 3) - 4(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 4) = (x + 3)(x - 2)(x + 2)$$

2.4. Pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych

Sposób znajdowania pierwiastków całkowitych wielomianu o współczynniku całkowitym

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy liczbę rzeczywistą x , dla której wielomian ten przyjmuje wartość 0.

Szukając pierwiastków całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych, korzystamy z twierdzenia:

Jeżeli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_0 \neq 0$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Przykład

Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu $W(x) = 2x^3 + 3x^2 - 18x + 8$.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dzielniki wyrazu wolnego, czyli 8.

$$D_8 = \{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}$$

Obliczamy wartość wielomianu dla każdego z dzielników:

$$W(-1) = -2 + 3 + 18 + 8 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

$$W(1) = 2 + 3 - 18 + 8 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

$$W(-2) = -16 + 12 + 36 + 8 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

$$W(2) = 16 + 12 - 36 + 8 = 0 \quad \text{jest pierwiastkiem}$$

$$W(-4) = -128 + 48 + 72 + 8 = 0 \quad \text{jest pierwiastkiem}$$

$$W(4) = 128 + 48 - 72 + 8 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

$$W(-8) = -1024 + 192 + 144 + 8 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

$$W(8) = 1024 + 192 - 144 + 8 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

Przykład

Wypisz wszystkie dzielniki wyrazu wolnego i sprawdź, które z nich są pierwiastkami wielomianu.

$$a) W(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$b) W(x) = x^7 - x^5 + x^3 - 2$$

Rozwiązanie:

a) Wypisujemy dzielniki wyrazu wolnego, czyli 1.

$$D_1 = \{-1, 1\}$$

Obliczamy wartość wielomianu dla każdego z dzielników:

$$W(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \quad \text{jest pierwiastkiem}$$

$$W(1) = 1 + 1 = 1 + 1 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

b) Wypisujemy dzielniki wyrazu wolnego, czyli 2.

$$D_2 = \{-1, 1, -2, 2\}$$

Obliczamy wartość wielomianu dla każdego z dzielników:

$$W(-1) = -1 + 1 - 1 - 2 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

$$W(1) = 1 - 1 + 1 - 2 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

$$W(-2) = -128 + 32 - 8 - 2 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

$$W(2) = 128 - 32 + 8 - 2 \neq 0 \quad \text{nie jest pierwiastkiem}$$

2.5. Dzielenie wielomianów

Dzielenie wielomianów sposobem pisemnym

Wiemy, że liczba całkowita a jest podzielna przez liczbę całkowitą b , przy czym $b \neq 0$, jeśli istnieje liczba całkowita k taka, że $a = k \cdot b$.

Podobnie mówimy, że wielomian W jest podzielny przez wielomian niezerowy Q , jeśli istnieje wielomian P taki, że $W = P \cdot Q$.

Na przykład $(x^3 + 4x^2 + 2x - 1) : (x + 1) = x^2 + 3x - 1$, ponieważ $x^3 + 4x^2 + 2x - 1 = (x + 1) \cdot (x^2 + 3x - 1)$.

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobne jak dzielenie liczb naturalnych.

Przykład

Wykonaj dzielenie wielomianu $U(x) = 2x^2 + x - 3$ przez wielomian $W(x) = x - 1$. Sprawdź otrzymany wynik.

Rozwiązanie:

$$(2x^2 + x - 3) : (x - 1) = 2x$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 2x \\ \hline 3x - 3 \end{array}$$

Dzielimy $2x^3$ przez pierwszy wyraz dzielnika x . Otrzymany iloraz $2x$ mnożymy przez dzielnik $x - 1$. Tak otrzymany iloczyn ze zmienionym znakiem wpisujemy pod wyrazami tego samego stopnia w dzielnej. Dodajemy.

$$(2x^2 + x - 3) : (x - 1) = 2x + 3$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 2x \\ \hline 3x - 3 \\ -3x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dzielimy $3x$ przez pierwszy wyraz dzielnika. Otrzymany iloraz 3 mnożymy przez dzielnik $x - 1$. Tak otrzymany iloczyn ze zmienionym znakiem wpisujemy pod wyrazami tego samego stopnia w dzielnej. Dodajemy.

Otrzymaliśmy resztę zero.

$$\text{Sprawdzenie: } (2x + 3)(x - 1) = 2x^2 - 2x + 3x - 3 = 2x^2 + x - 3$$

Iloraz liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną. Również w wyniku dzielenia wielomianów możemy otrzymać resztę.

Przykład

Wykonaj dzielenie wielomianu $U(x) = -3x^2 - x + 5$ przez dwumian $x + 1$. Sprawdź otrzymany wynik.

Rozwiązanie:

$$(-3x^2 - x + 5) : (x + 1) = -3x + 2$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3x \\ \hline 2x + 5 \\ -2x - 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

W wyniku dzielenia otrzymujemy iloraz równy $-3x + 2$ i resztę 3 .

$$\text{Zatem } 3x^2 - x + 5 = (x + 1)(-3x + 2) + 3.$$

$$\text{Sprawdzenie: } (x + 1)(-3x + 2) + 3 = -3x^2 + 2x - 3x + 2 + 3 = -3x^2 - x + 5$$

Dzielenie wielomianów – schemat Hornera

Wygodnym sposobem na dzielenie wielomianu $U(x)$ przez dwumian $W(x) = x - a$ jest **schemat Hornera**, powiązany z nazwiskiem brytyjskiego matematyka żyjącego na przełomie XVIII i XIX wieku.

Przykład

Zastosuj schemat Hornera i przedstaw wielomian $U(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7x + 4$ w postaci $U(x) = (x - 2) \cdot W(x) + R(x)$, gdzie $(R(x)) < 1$.

Rozwiązanie:

W pierwszym wierszu wpisujemy współczynniki dzielnej, czyli wielomianu u . Współczynnik przy najwyższej potędze przepisujemy w ostatnim wierszu.



Drugi współczynnik wiersza ostatniego otrzymujemy, mnożąc poprzedni współczynnik tego wiersza, tzn. 1, przez $a = 2$ i dodając do drugiego współczynnika wiersza pierwszego, tzn. do -2 , zatem $1 \cdot 2 - 2 = 0$.



Trzeci współczynnik wiersza ostatniego otrzymujemy, mnożąc poprzedni współczynnik tego wiersza, tzn. 0, przez $a = 2$ i dodając do trzeciego współczynnika wiersza pierwszego, tzn. do -3 , zatem $0 \cdot 2 - 3 = -3$.

Czwarty współczynnik wiersza ostatniego otrzymujemy, mnożąc poprzedni współczynnik tego wiersza, tzn. -3 , przez $a = 2$ i dodając do czwartego współczynnika wiersza pierwszego, tzn. do 7 , zatem $-3 \cdot 2 + 7 = 1$.

Kolejną liczbę wiersza ostatniego, czyli 6 , otrzymujemy w podobny sposób.

Wynikiem dzielenia jest wielomian o stopień niższy niż wielomian U , czyli stopnia 3 .

W ostatnim wierszu otrzymujemy jego współczynniki: $1, 0, -3, 1$ i resztę 6 .

Stąd $W(x) = x^3 - 3x + 1$ oraz $R(x) = 6$.

Zatem $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 7x + 4 = (x^3 - 3x + 1)(x - 2) + 6$

2.6. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Wyznaczanie dziedziny wyrażeń wymiernych

Wyrażeniem wymiernym nazywamy ułamek, który w liczniku i mianowniku ma wielomian, przy czym stopień wielomianu w mianowniku musi wynosić co najmniej 1 .

Przykłady: $\frac{7}{x}, \frac{2x-3}{x+4}, \frac{x^3+5x^2-9x+12}{x^2-17}$.

Dla dowolnego wyrażenia wymiernego należy zrobić założenie, które eliminuje liczby zerujące mianownik. Taka czynność nazywana jest określaniem **dziedziny** wyrażenia wymiernego.

Przykład

Określ dziedzinę wyrażenia.

a) $\frac{12}{x}$

b) $\frac{x^2+1}{x-1}$

c) $\frac{x+1}{x^2-1}$

d) $\frac{x^3-2x+5}{x^2+2x-3}$

Rozwiązanie:

a) przyrównujemy mianownik do zera
 $x \neq 0$, czyli $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) przyrównujemy mianownik do zera
 $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$, czyli $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

c) przyrównujemy mianownik do zera
 $x^2 - 1 \neq 0$
 $(x-1)(x+1) \neq 0$
 $x \neq 1$ lub $x \neq -1$
czyli $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

d) rozwiązujemy równanie kwadratowe z mianownika

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$$

i zapisujemy $x \neq -3$ lub $x \neq 1$, czyli $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

e) mianownik nie przyjmuje wartości zero, w liczniku jest wyrażenie pod pierwiastkiem, zatem $2x - 6 \geq 0$
 $x \geq 3$, czyli $D = [3, \infty)$

f) przyrównujemy mianownik do zera, w mianowniku jest wyrażenie pod pierwiastkiem, zatem $x + 5 > 0$
 $x > -5$, czyli $D = (-5, \infty)$

g) przyrównujemy mianownik do zera, w mianowniku jest wyrażenie pod pierwiastkiem, zatem
 $x + 1 > 0$
 $x > -1$

i w liczniku jest wyrażenie pod pierwiastkiem, zatem $1 - x \geq 0$, czyli $D = (-1, 1]$

Mnożenie wyrażeń wymiernych

Ponieważ wyrażenia wymierne są w postaci ułamków, zatem obowiązują je takie same własności działań, jak na ułamkach.

Wyrażenia wymierne możemy skracać, dzieląc licznik i mianownik przez to samo wyrażenie różne od zera.

Przykład

Skróć wyrażenia wymierne.

$$a) \frac{25}{5x}$$

$$b) \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$c) \frac{x + 11}{x^2 - 121}$$

$$d) \frac{x^3 - 4x - 21}{x^2 + 2x - 3}$$

Rozwiązanie:

a) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{\cancel{25}^5}{\cancel{5}_1 x} = \frac{5}{x}$$

b) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(\cancel{x-2})^1 (x+2)}{\cancel{x-2}_1} = x + 2$$

c) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-11; 11\}$

$$\frac{x + 11}{x^2 - 121} = \frac{\cancel{x+11}^1}{(\cancel{x-11})_1 (\cancel{x+11})_1} = \frac{1}{x - 11}$$

d) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

$$\frac{x^3 - 4x - 21}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(\cancel{x+3})^1 (x-7)}{(\cancel{x+3})_1 (x-1)} = \frac{x-7}{x-1}$$

Mnożąc dwa wyrażenia wymierne, mnożymy licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik.

Pamiętajmy o określeniu dziedziny każdego z wyrażeń.

Przykład

Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

$$a) \frac{2}{5x} \cdot \frac{15x^2}{24}$$

$$b) \frac{x^2 - 4}{x + 5} \cdot \frac{x^2 - 25}{x + 2}$$

$$c) \frac{3x + 12}{x^2 - 144} \cdot \frac{x - 12}{x + 4}$$

$$d) \frac{x^3 - 5x^2 + 12x}{x^2 - 7x + 10} \cdot \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 3x}$$

Rozwiązanie:

a) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{\cancel{2}_1}{\cancel{5}_1 x} \cdot \frac{\cancel{15}^3 x^2}{\cancel{24}_{12}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{3x \cdot \cancel{x}^1}{11} = \frac{3x}{11}$$

b) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; -2\}$

$$\frac{x^2 - 4}{x + 5} \cdot \frac{x^2 - 25}{x + 2} = \frac{(\cancel{x-2})^1 (\cancel{x+2})^1}{\cancel{x+5}_1} \cdot \frac{(\cancel{x-5})^1 (\cancel{x+5})^1}{\cancel{x+2}_1} = (x-2)(x-5) = x^2 - 7x + 10$$

c) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-12; -4; 12\}$

$$\frac{3x + 12}{x^2 - 144} \cdot \frac{x - 12}{x + 4} = \frac{3(\cancel{x+4})^1}{(\cancel{x-12})_1 (x+12)} \cdot \frac{\cancel{x-12}^1}{\cancel{x+4}_1} = \frac{3}{x+12}$$

d) określamy dziedzinę

Przyrównujemy mianowniki do zera:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{-(-7) - 3}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-7) + 3}{2} = 5$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2; 5\}$$

Korzystając z powyższych obliczeń, zapisujemy oba mianowniki w postaci iloczynowej:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 12x}{x^2 - 7x + 10} \cdot \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 3x} = \frac{\cancel{x}^1 (x^2 - 5x + 12)}{(x-2)(x-5)} \cdot \frac{x^2 + 5x - 14}{\cancel{x}_1 (x-3)}$$

Sprawdzamy, czy trójmiany kwadratowe można zapisać w postaci iloczynowej.

$$x^2 - 5x + 12 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = -23 < 0$$

nie da się zapisać w postaci iloczynowej

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = 9$$

$$x_1 = \frac{-5-9}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-5+9}{2} = 2$$

Zapisujemy drugi licznik w postaci iloczynowej i skracamy:

$$\frac{x^2 - 5x + 12}{(\cancel{x-2})_1 (x-5)} \cdot \frac{(x+7) \cancel{(x-2)}^1}{x-3} = \frac{(x^2 - 5x + 12)(x+7)}{(x-5)(x-3)} = \frac{x^3 + 2x^2 - 23x + 84}{x^2 - 8x + 15}$$

$$\text{czyli } \frac{x^3 - 5x^2 + 12x}{x^2 - 7x + 10} \cdot \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 3x} = \frac{x^3 + 2x^2 - 23x + 84}{x^2 - 8x + 15}$$

Dzielenie wyrażeń wymiernych

Dzielenie wyrażeń wymiernych, tak jak ułamków, zastępujemy mnożeniem pierwszego wyrażenia przez odwrotność drugiego wyrażenia. W związku z tym należy uzupełnić dziedzinę o miejsca zerowe drugiego licznika.

Przykład

Wykonaj dzielenie wyrażeń wymiernych.

$$\text{a) } \frac{9}{x-4} : \frac{3}{2x-8} \quad \text{b) } \frac{3x-15}{x^2} : \frac{x-5}{2x} \quad \text{c) } \frac{27-x^3}{x^2-2x+1} : \frac{x-3}{x-1} \quad \text{d) } \frac{x^2+8x+16}{6x-9} : \frac{x^3-16x}{6x-4x^2}$$

Rozwiązanie:

a) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$$\frac{9}{x-4} : \frac{3}{2x-8} = \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{x-4}_1} \cdot \frac{2 \cancel{(x-4)}^1}{\cancel{3}_1} = 6$$

b) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$

$$\frac{3x-15}{x^2} : \frac{x-5}{2x} = \frac{3 \cancel{(x-5)}^1}{x \cdot \cancel{x}_1} \cdot \frac{2 \cancel{x}_1}{\cancel{x-5}_1} = \frac{6}{x}$$

c) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$

przekształcamy pierwszy mianownik i licznik, stosując wzory skróconego mnożenia:

$$\frac{27-x^3}{x^2-2x+1} : \frac{x-3}{x-1} = \frac{(3-x)(9+3x+x^2)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x-3} = \frac{\cancel{(3-x)}^1 (9+3x+x^2)}{(x-1) \cancel{(x-1)}_1} \cdot \frac{\cancel{x-1}^1}{-1 \cancel{(3-x)}_1} = \frac{x^2+3x+9}{1-x}$$

$$\text{d) zapisujemy wyrażenie bez kreski ułamkowej } \frac{x^2+8x+16}{6x-9} : \frac{x^3-16x}{6x-4x^2} = \frac{x^2+8x+16}{6x-9} \cdot \frac{x^3-16x}{6x-4x^2}$$

określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-4; 0; \frac{3}{2}; 4\right\}$ przekształcamy wyrażenie, stosując wzory skróconego mnożenia:

$$\frac{x^2 + 8x + 16}{6x - 9} : \frac{x^3 - 16x}{6x - 4x^2} = \frac{(x+4)\cancel{(x+4)}^1}{3\cancel{(2x-3)}_1} \cdot \frac{-2\cancel{x}^1\cancel{(2x-3)}^1}{\cancel{x}_1(x-4)\cancel{(x+4)}_1} = -\frac{2x+8}{3x-12}$$

Mnożenie i dzielenie na wyrażeniach wymiernych

Przykład

Wykonaj działania.

$$\text{a) } \frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 12x + 36} \cdot \frac{36 - x^2}{x^2 - 25} \qquad \text{b) } \frac{x+1}{(x+2)^2} : \frac{x^2-1}{x^2-4}$$

Rozwiązanie:

a) Stosujemy wzory skróconego mnożenia do przekształcenia wyrażenia:

$$\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 12x + 36} \cdot \frac{36 - x^2}{x^2 - 25} = \frac{(x+5)^2}{(x-6)^2} \cdot \frac{(6-x)(6+x)}{(x-5)(x+5)}$$

określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5; 6\}$ i wykonujemy mnożenie:

$$\frac{(x+5)^2}{(x-6)^2} \cdot \frac{(6-x)(6+x)}{(x-5)(x+5)} = \frac{(x+5)\cancel{(x+5)}^1}{(x-6)\cancel{(x-6)}_1} \cdot \frac{\cancel{(6-x)}^{-1}(6+x)}{(x-5)\cancel{(x+5)}_1} = -\frac{(x+5)(6+x)}{(x-6)(x-5)} = -\frac{x^2 + 11x + 30}{x^2 - 11x + 30}$$

b) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 1; 2\}$

Stosujemy wzory skróconego mnożenia do przekształcenia wyrażenia:

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+2)} : \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{\cancel{x+1}^1}{(x+2)\cancel{(x+2)}_1} \cdot \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}^1}{(x-1)\cancel{(x+1)}_1} = \frac{x-2}{x^2 + x - 2}$$

2.7. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Dodawanie wyrażeń wymiernych

Dodając i odejmując ułamki zwykłe, sprowadzamy je do wspólnego mianownika. Tak samo postępujemy przy dodawaniu i odejmowaniu wyrażeń wymiernych, pamiętając o określeniu dziedziny wszystkich wyrażeń biorących udział w działaniach.

Przykład

Wykonaj dodawanie wyrażeń wymiernych.

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \qquad \text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \qquad \text{c) } \frac{2}{x+2} + \frac{3-2x}{x-2} \qquad \text{d) } \frac{x-2}{x+3} + \frac{x+5}{x^2-9}$$

Rozwiązanie:

a) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$$

b) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

c) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$$\frac{2}{x+2} + \frac{3-2x}{x-2} = \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{(3-2x)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-4+3x+6-2x^2-4x}{x^2-4} = \frac{-2x^2+x+2}{x^2-4}$$

d) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

$$\frac{x-2}{x+3} + \frac{x+5}{x^2-9} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{x+5}{(x+3)(x-3)} = \frac{x^2-3x-2x+6+x+5}{x^2-9} = \frac{x^2-4x+11}{x^2-9}$$

Dodawanie wyrażeń wymiernych

Przykład

Wykonaj odejmowanie wyrażeń wymiernych.

$$\text{a) } \frac{3}{x} - \frac{3}{x-3} \quad \text{b) } \frac{x}{x-1} - 3 \quad \text{c) } \frac{x+1}{x+4} - \frac{x+4}{x+1} \quad \text{d) } \frac{2x}{x^2-16} - \frac{3x}{x-4} - \frac{4x}{x+4}$$

Rozwiązanie:

a) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

$$\frac{3}{x} - \frac{3}{x-3} = \frac{3(x-3)}{x(x-3)} - \frac{3x}{x(x-3)} = \frac{3x-9-3x}{x^2-3x} = -\frac{9}{x^2-3x}$$

b) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\frac{x}{x-1} - 3 = \frac{x}{x-1} - \frac{3(x-1)}{x-1} = \frac{x-3x+3}{x-1} = \frac{-2x+3}{x-1}$$

c) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; -1\}$

$$\frac{x+1}{x+4} - \frac{x+4}{x+1} = \frac{(x+1)(x+1)}{(x+4)(x+1)} - \frac{(x+4)(x+4)}{(x+4)(x+1)} = \frac{x^2+2x+1-x^2-8x-16}{x^2+5x+4} = \frac{-6x-15}{x^2+5x+4} = -\frac{6x+15}{x^2+5x+4}$$

d) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2-16} - \frac{3x}{x-4} - \frac{4x}{x+4} &= \frac{2x}{(x-4)(x+4)} - \frac{3x(x+4)}{(x-4)(x+4)} - \frac{4x(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{2x-3x^2-12x-4x^2+16x}{x^2-16} = \\ &= \frac{-7x^2+6x}{x^2-16} \end{aligned}$$

Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Przykład

Wykonaj działania.

$$\text{a) } \frac{4}{x-5} + \frac{x-3}{x+5} - \frac{x^2+25}{x^2-25} \quad \text{b) } \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1}$$

Rozwiązanie:

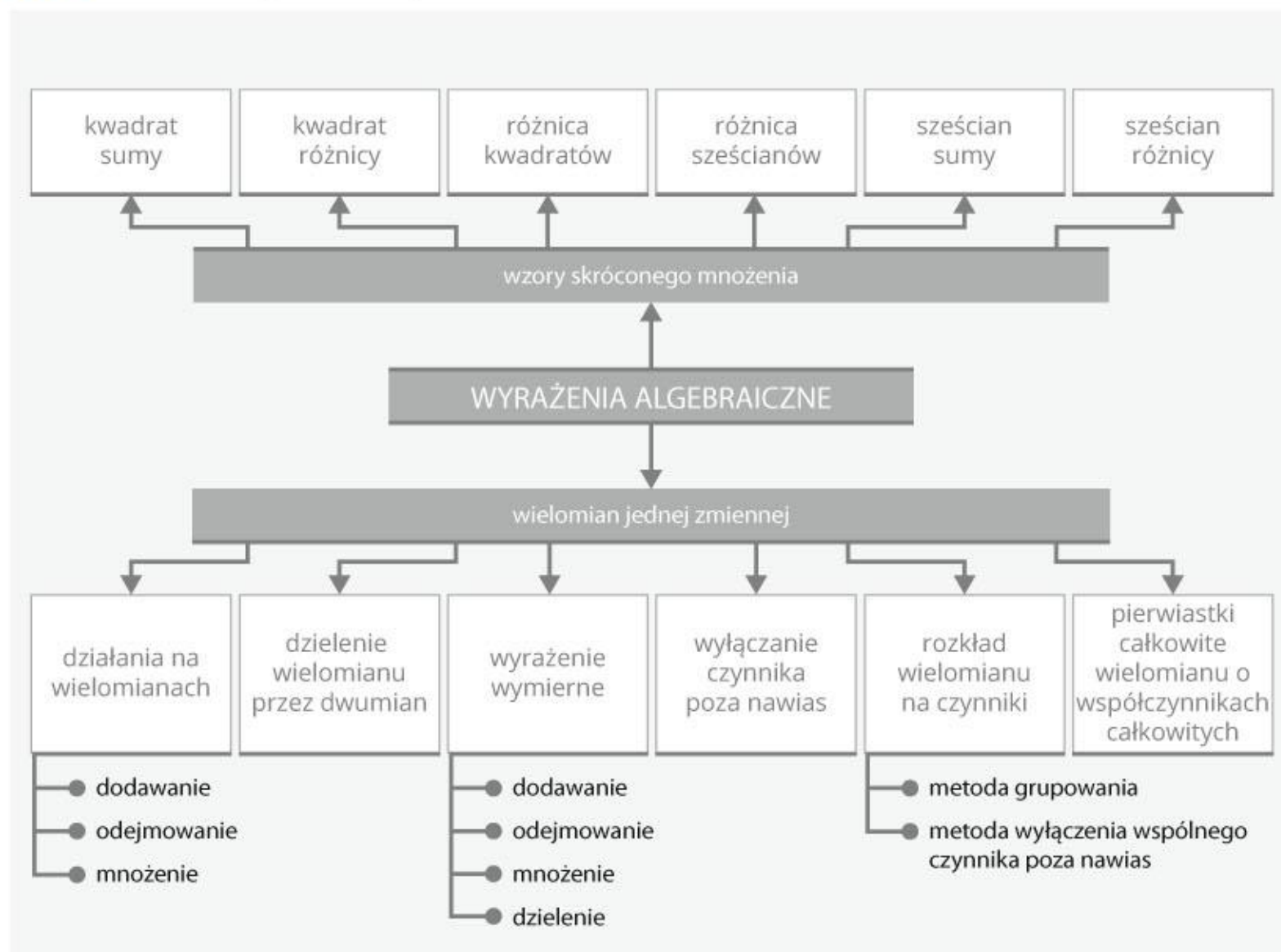
a) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$

$$\begin{aligned} \frac{4}{x-5} + \frac{x-3}{x+5} - \frac{x^2+25}{x^2-25} &= \frac{4(x+5)}{(x-5)(x+5)} + \frac{(x-3)(x-5)}{(x-5)(x+5)} - \frac{x^2+25}{x^2-25} = \frac{4x+20+x^2-8x+15-x^2-25}{x^2-25} = \\ &= \frac{-4x+10}{x^2-25} \end{aligned}$$

b) określamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1-x-1-2x^2-2x}{x^2-1} = -\frac{2(x^2+x+2)}{x^2-1}$$

2.8. Utrwalamy wiedzę



3

Równania i nierówności

3.1. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą

Równania z jedną niewiadomą

Równaniem z jedną niewiadomą nazywamy równość dwóch wyrażeń algebraicznych, w których występuje dokładnie jedna niewiadoma.

Rozwiązaniem równania lub pierwiastkiem równania nazywamy liczbę spełniającą dane równanie, jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej i wykonaniu działań po obu stronach równania, otrzymamy prawdziwą równość arytmetyczną.

Na przykład pierwiastkiem równania $2x - 3 = 5$ jest liczba 4, bo L – lewa strona równania jest równa: $L = 2 \cdot 4 - 3 = 5$, lewa strona równania jest równa P – prawej stronie równania: $L = P$.

Dziedziną równania z jedną niewiadomą nazywamy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wyrażenia tworzące równanie mają sens liczbowy.

Na przykład dziedziną równania $x - 7 = 3x + 5$ jest zbiór $\mathbb{R}$, a dziedziną równania $\frac{2x}{x-7} = 3$ jest zbiór $\mathbb{R} - \{7\}$.

Równania z tymi samymi niewiadomymi są **równoważne** wówczas, gdy mają taką samą dziedzinę i taki sam zbiór rozwiązań.

Na przykład równanie $x^2 = x(x+2) - 4$ jest równoważne równaniu $x^2 = x^2 + 2x - 4$ oraz równaniu $2x - 4 = 0$.

Rozwiązać równanie z jedną niewiadomą oznacza znaleźć wszystkie liczby, które spełniają to równanie, lub wykazać, że równanie to nie ma rozwiązania.

Aby rozwiązać równanie, zapisujemy równania równoważnie danemu, pamiętając o tym, że:

- do obu stron równania możemy dodać lub od obu stron równania odjąć tę samą liczbę lub wyrażenie,
- obie strony równania możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Przykład

Rozwiąż równania metodą równań równoważnych.

$$a) \frac{4x-3}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{1}{6}$$

Rozwiązanie:

Po pomnożeniu obu stron równania przez liczbę będącą wspólnym mianownikiem otrzymujemy:

$$2(4x-3) - 3(x+1) = 1$$

$$8x - 6 - 3x - 3 = 1$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

$$b) \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2}{x-3}$$

Rozwiązanie:

Ustalamy dziedzinę równania: $x+2 \neq 0$ i $x-3 \neq 0$

Stąd $x \neq -2$ i $x \neq 3$

Otrzymujemy: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

Korzystamy z własności proporcji. Otrzymujemy $(x+1)(x-3) = (x+2)^2$

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 + 2x + 4$$

$$-4x = 7$$

$$x = -1\frac{3}{4}$$

Równanie sprzeczne i tożsamościowe

Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą może:

- nie mieć rozwiązania,
- mieć dokładnie jedno rozwiązanie,
- mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

Równaniem sprzecznym nazywamy równanie, które nie ma rozwiązania.

Równaniem tożsamościowym nazywamy równanie, które jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą.





Przykład

Rozwiąż poniższe równania. Wskaż równanie sprzeczne i równanie tożsamościowe.

a) $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = x^2 - x\sqrt{2}$

Rozwiązanie:

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy:

$$x^2 - x\sqrt{2} + \frac{1}{2} = x^2 - x\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} = 0$$

$$L \neq P$$

Odpowiedź: Jest to równanie sprzeczne, $x \in \emptyset$.

b) $(1+x)^2 - 2x = 1+x^2$

Rozwiązanie:

Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy: $1+2x+x^2-2x=1+x^2$

$$0 = 0$$

$$L = P$$

Odpowiedź: Jest to równanie tożsamościowe, $x \in \mathbb{R}$.

Przykład

Za 16 lat ojciec będzie dwa razy starszy od syna. Ile lat ma teraz każdy z nich, jeśli 4 lata temu ojciec był 6 razy starszy od syna?

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadomą x - wiek syna 4 lata temu.

Informacje zawarte w zadaniu przedstawimy w tabeli.

	4 lata temu	Obecnie	Za 16 lat
Ojciec	$6x$	$6x + 4$	$6x + 20$
Syn	x	$x + 4$	$x + 20$

Układamy równanie, wykorzystując informację, że za 16 lat ojciec będzie dwa razy starszy od syna: $6x + 20 = 2(x + 20)$

Rozwiązujemy równanie: $6x + 20 = 2x + 40$

$$4x = 20$$

$$x = 5 \text{ - wiek syna przed 4 laty}$$

$$6 \cdot 5 = 30 \text{ - wiek ojca przed 4 laty}$$

$$5 + 4 = 9 \text{ - obecny wiek syna}$$

$$30 + 4 = 34 \text{ - obecny wiek ojca}$$

Sprawdzenie:

$$9 + 16 = 25 \text{ - wiek syna za 16 lat}$$

$$34 + 16 = 50 \text{ - wiek ojca za 16 lat}$$

$$50 = 2 \cdot 25$$

Odpowiedź: Ojciec ma obecnie 34 lata, a syn 9 lat.

Nierówności z jedną niewiadomą

Nierównością liniową nazywamy nierówność, którą można zastąpić nierównością równoważną mającą postać: $ax + b < 0$ albo $ax + b > 0$, albo $ax + b \leq 0$, albo $ax + b \geq 0$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, a x jest niewiadomą.

Liczba spełnia daną nierówność z jedną niewiadomą, jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej i wykonaniu działań po obu stronach nierówności otrzymamy prawdziwą nierówność arytmetyczną.

Dziedziną nierówności z jedną niewiadomą nazywamy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wyrażenia tworzące nierówność mają sens liczbowy. Na przykład dziedziną nierówności $5(x-1) \leq 2x+3$ jest zbiór $\mathbb{R}$, a dziedziną nierówności $\frac{2}{3x-1} \leq 3$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

➤ **Nierówności** z tymi samymi niewiadomymi nazywamy **równoważnymi**, gdy mają taką samą dziedzinę i taki sam zbiór rozwiązań.

➤ **Rozwiązać nierówność** z jedną niewiadomą oznacza wyznaczyć zbiór wszystkich liczb, które spełniają tę nierówność, lub wykazać, że nie istnieją liczby spełniające tę nierówność.

Aby rozwiązać nierówność, zapisujemy nierówności równoważne danej, pamiętając o tym, że:

- do obu stron nierówności możemy dodać lub odjąć tę samą liczbę lub wyrażenie algebraiczne,
- obie strony nierówności możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę dodatnią, pozostawiając zwrot nierówności bez zmiany,
- obie strony nierówności możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając jednocześnie zwrot nierówności na przeciwny.

Przykład

Rozwiąż nierówności podane poniżej. Zbiór rozwiązań zapisz w postaci przedziału liczbowego.

a) $12(2x+1)+1 > -2(1+3x)$

Rozwiązanie:

Po opuszczeniu nawiasów otrzymujemy: $24x + 12 + 1 > -2 - 6x$

$$24x + 6x > -2 - 1 - 12$$

$$30x > -15 \quad | :30$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: $x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

b) $\frac{4x+3}{2} - x \leq 2x - 1$

Rozwiązanie:

Po pomnożeniu obu stron nierówności przez liczbę 2:

$$\frac{4x+3}{2} - x \leq 2x - 1 \quad | \cdot 2$$

$$\text{otrzymujemy: } 4x + 3 - 2x \leq 4x - 2$$

$$-2x \leq -5 \quad | :(-2)$$

$$x \geq 2\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: $x \in \left[2\frac{1}{2}, \infty\right)$

Nierówności spreczne i tożsamościowe

➤ **Nierównością sprzeczną** nazywamy nierówność, której nie spełnia żadna liczba należąca do dziedziny tej nierówności.

➤ **Nierównością tożsamościową** nazywamy nierówność, która jest spełniona przez każdą liczbę należącą do dziedziny tej nierówności.

Przykład

Rozwiąż podane nierówności. Wskaż nierówność sprzeczną i tożsamościową.

a) $3x(x-2) - 2x(4x-3) > 5(1-x)(1+x)$

Rozwiązanie:

Po opuszczeniu nawiasów otrzymujemy: $3x^2 - 6x - 8x^2 + 6x > 5 - 5x^2$

$$0 > 5$$

Odpowiedź: Jest to nierówność spreczna $x \in \emptyset$.

b) $\frac{3x-1}{2} - 1 < 1,5x - 0,5$

Rozwiązanie:

$$\text{Obie strony nierówności mnożymy przez liczbę 2: } \frac{3x-1}{2} - 1 < 1,5x - 0,5 \quad | \cdot 2$$

$$\text{otrzymujemy: } 3x - 1 - 2 < 3x - 1$$

$$-2 < 0$$

Odpowiedź: Jest to nierówność tożsamościowa $x \in \mathbb{R}$.



Przykład

Rozwiąż nierówność $\frac{x}{2^4} - \frac{1}{(-2)^5} \leq -\left(-\frac{1}{4}\right)^2$. Zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej. Czy liczba $-\sqrt{2}$ należy do zbioru rozwiązań tej nierówności?

Rozwiązanie:



$$\begin{aligned}\frac{x}{16} + \frac{1}{32} &\leq -\frac{1}{16} \quad | \cdot 32 \\ 2x + 1 &\leq -2 \\ x &\leq -1\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ponieważ $\sqrt{2} \approx 1,41$ możemy zapisać zależność: $-1\frac{1}{2} < -\sqrt{2}$. A więc liczba $-\sqrt{2} \notin \left(-\infty, -1\frac{1}{2}\right]$.

Odpowiedź: Liczba $-\sqrt{2}$ nie należy do zbioru rozwiązań tej nierówności.

Nierówności podwójna

Nierówność podwójna z jedną niewiadomą to nierówność, którą można zapisać za pomocą układu dwóch nierówności. Na przykład $-7 \leq 3x + 5 \leq 2$, $\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ 2x - 1 < 4 \end{cases}$.

Przykład

Wymień wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność: $-7 \leq 2x + 1 < 3$.

Rozwiązanie:

Odejmujemy liczbę 1 od każdej strony nierówności. Otrzymujemy: $-8 \leq 2x < 2$.

Po podzieleniu każdej strony nierówności przez liczbę 2 otrzymujemy: $-4 \leq x < 1$.

Zaznaczamy zbiór rozwiązań nierówności i odczytujemy liczby całkowite należące do tego zbioru.



Odpowiedź: Zbiór liczb całkowitych spełniających tę nierówność podwójną to $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$.

Przykład

W liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek jest dwa razy większa od cyfry jedności. Ponadto wiadomo o tej liczbie, że suma jej cyfr jest większa od 7. Ile jest liczb spełniających warunki zadania?

Rozwiązanie:

Oznaczamy niewiadomą:

x – cyfra jedności

$2x$ – cyfra dziesiątek

Ustalamy dziedzinę wynikającą z oznaczenia niewiadomych.

Ponieważ x jest cyfrą, wobec tego $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Ponieważ $2x$ jest cyfrą dziesiątek, a w liczbie dwucyfrowej cyfra dziesiątek nie może być zerem, zapiszemy, że: $1 \leq 2x \leq 9$. Czyli $0,5 \leq x \leq 4,5$.

Otrzymujemy dziedzinę: $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

Zapisujemy nierówność wynikającą z warunków zadania: $x + 2x > 7$

Stąd: $x > 2\frac{1}{3}$

W tabelce wypisujemy liczby spełniające warunki zadania (cyfry tych liczb należą do dziedziny i spełniają nierówność):

Cyfra jedności	3	4
Cyfra dziesiątek	6	8
Liczba	63	84

Odpowiedź: Są dwie takie liczby.

3.2. Równania i nierówności kwadratowe

Równanie kwadratowe

Równanie kwadratowe z niewiadomą x jest to równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$. Postać $ax^2 + bx + c = 0$, gdy $a \neq 0$, nazywamy postacią ogólną równania kwadratowego.

W rozwiązywaniu niektórych równań kwadratowych korzystamy z takich sposobów rozkładu sumy algebraicznej na czynniki, jak wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias oraz stosowanie wzorów skróconego mnożenia. Następnie stosujemy twierdzenie:

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$: $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

Przykład

Rozwiąż równania.

a) $-2x^2 + 7x = 0$

Rozwiązanie:

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias. Otrzymujemy: $x \cdot (-2x + 7) = 0$

Stąd: $x = 0$ lub $-2x + 7 = 0$

Czyli $x = 0$ lub $x = 3,5$.

b) $x^2 - 7 = 0$

Rozwiązanie:

Stosujemy wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Otrzymujemy: $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$

Stąd: $x - \sqrt{7} = 0$ lub $x + \sqrt{7} = 0$

Czyli $x = \sqrt{7}$ lub $x = -\sqrt{7}$.

c) $x^2 - 12x + 36 = 0$

Rozwiązanie:

Stosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Otrzymujemy: $(x - 6)^2 = 0$

Stąd: $x - 6 = 0$

Czyli $x = 6$.

Twierdzenie o liczbie pierwiastków równania kwadratowego

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ oraz Δ to wyróżnik trójmianu kwadratowego określony wzorem $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty nazywany podwójnym: $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Przykład

Rozwiąż równania.

a) $3x^2 + 13x - 10 = 0$

Rozwiązanie:

Obliczamy: $\Delta = 13^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 289$,

$\Delta > 0$, równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste: $x_1 = \frac{-13 - 17}{6} = -5$, $x_2 = \frac{-13 + 17}{6} = \frac{2}{3}$

b) $2x^2 + 1 = -x$

Rozwiązanie:

Przenosimy wyrazy na jedną stronę i porządkujemy od najwyższej potęgi niewiadomej:

Otrzymujemy: $2x^2 + x + 1 = 0$

Obliczamy: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7$,

$\Delta < 0$, równanie nie ma pierwiastków.



$$c) x^2 = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{12}\right)$$

Rozwiązanie:

Przenosimy wyrazy na jedną stronę i opuszczamy nawias.

$$\text{Otrzymujemy: } x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = 0$$

$$\text{Obliczamy: } \Delta = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} = 0,$$

$$\Delta = 0, \text{ równanie ma jeden pierwiastek: } x_0 = \frac{-\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$d) (3x+2)^2 - 7(3x+2) = 0$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy równanie do prostszej postaci.

$$\text{Otrzymujemy: } 9x^2 + 12x + 4 - 21x - 14 = 0$$

$$\text{Stąd: } 9x^2 - 9x - 10 = 0$$

$$\text{Obliczamy: } \Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-10) = 441,$$

$$\Delta > 0, \text{ równanie ma dwa różne pierwiastki: } x_1 = \frac{9-21}{18} = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{9+21}{18} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Przykład

Każdy uczestnik pewnego spotkania przywitał się z każdym z pozostałych i w ten sposób wymieniono 45 uścisków dłoni. Oblicz, ile osób uczestniczyło w tym spotkaniu.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome:

x – liczba osób uczestniczących w spotkaniu, $x \in \mathbb{N}$

$x-1$ – liczba uścisków dłoni, jakie wykonał każdy jeden uczestnik

45 – liczba wszystkich uścisków dłoni

$\frac{x(x-1)}{2}$ – liczba wszystkich uścisków dłoni (uścisk osoby A i osoby B liczymy tylko raz)

$$\frac{x(x-1)}{2} = 45$$

Przekształcamy równanie do postaci: $x^2 - x - 90 = 0$

Rozwiązujemy równanie:

$$\text{Obliczamy: } \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361,$$

$$\Delta > 0, \text{ równanie ma dwa różne pierwiastki: } x_1 = \frac{1-19}{2} = -9 \notin D, x_2 = \frac{1+19}{2} = 10$$

Odpowiedź: W spotkaniu brało udział 10 osób.

Nierówności kwadratowe

Nierównością kwadratową z niewiadomą x nazywamy każdą nierówność postaci $ax^2 + bx + c > 0$ lub $ax^2 + bx + c \geq 0$, lub $ax^2 + bx + c < 0$, lub $ax^2 + bx + c \leq 0$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.

W rozwiązywaniu nierówności kwadratowych wykorzystujemy umiejętność rozwiązywania równań kwadratowych, umiejętność rysowania wykresu funkcji kwadratowej i odczytywania własności tej funkcji z wykresu.

Położenie paraboli względem osi X , w zależności od współczynnika a i Δ

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Przykład

Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 3x - 10 > 0$

Rozwiązanie:

Znajdujemy pierwiastki równania: $x^2 - 3x - 10 = 0$

Obliczamy: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$,

$\Delta > 0$, równanie ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{3-7}{2} = -2$, $x_2 = \frac{3+7}{2} = 5$

Na osi liczbowej zaznaczamy pierwiastki równania oraz szkicujemy parabolę $f(x) = x^2 - 3x - 10$. Pamiętajmy, że ramiona paraboli są skierowane do góry, ponieważ współczynnik a jest dodatni.



Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty)$.

b) $-x^2 - 2x - 1 < 0$

Rozwiązanie:

Znajdujemy pierwiastki równania: $-x^2 - 2x - 1 = 0$

Stosujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Otrzymujemy: $-(x+1)^2 = 0$, stąd $x = -1$

Na osi liczbowej zaznaczamy pierwiastek równania oraz szkicujemy parabolę $f(x) = -x^2 - 2x - 1$. Pamiętajmy, że ramiona paraboli są skierowane do dołu, ponieważ współczynnik a jest ujemny.



Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.



c) $3x^2 + 4x + 4 \leq 0$

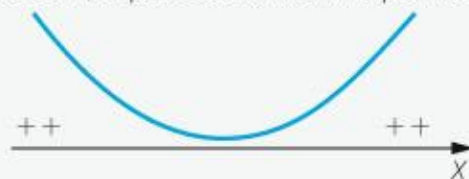
Rozwiązanie:

Znajdujemy pierwiastki równania: $3x^2 + 4x + 4 = 0$

Obliczamy: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -32$,

$\Delta < 0$, równanie nie ma pierwiastków.

Szkicujemy parabolę $f(x) = 3x^2 + 4x + 4$. Pamiętajmy, że ramiona paraboli są skierowane do góry, ponieważ współczynnik a jest dodatni, a parabola nie ma punktów wspólnych z osią X .



Nierówność jest sprzeczna. Zapisujemy $x \in \emptyset$.

Przykład

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{5 - x^2}$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy założenia: $x^2 - 1 \geq 0$ i $5 - x^2 \geq 0$

1. Rozwiązujemy równanie: $x^2 - 1 = 0$

Otrzymujemy: $(x - 1)(x + 1) = 0$

Zapisujemy pierwiastki tego równania: $x = 1$ lub $x = -1$

Szkicujemy parabolę.



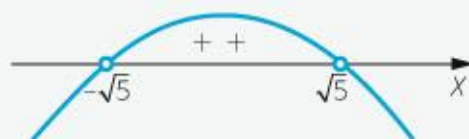
Odczytujemy rozwiązanie: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

2. Rozwiązujemy równanie: $5 - x^2 = 0$

Otrzymujemy: $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) = 0$

Zapisujemy pierwiastki tego równania: $x = \sqrt{5}$ lub $x = -\sqrt{5}$

Szkicujemy parabolę.



Odczytujemy rozwiązanie: $x \in \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle$.

Zaznaczamy na osi liczbowej otrzymane przedziały liczbowe: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ i $x \in \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle$.



Znajdujemy część wspólną przedziałów liczbowych: $x \in \langle -\sqrt{5}, -1 \rangle \cup \langle -1, \sqrt{5} \rangle$.

Odpowiedź: Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{5 - x^2}$ jest zbiór $\langle -\sqrt{5}, -1 \rangle \cup \langle -1, \sqrt{5} \rangle$.

3.3. Równania wielomianowe. Równania wymierne

Metody rozwiązywania równań wielomianowych

Równania wielomianowe drugiego stopnia (czyli tzw. równania kwadratowe) rozwiązujemy metodami opisanymi w poprzednich tematach.

Metoda rozwiązywania bardziej skomplikowanych równań wielomianowych (stopnia trzeciego i wyższych) jest następująca:

- przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę równania, tak aby po prawej stronie zostało zero,
- rozkładamy lewą stronę na iloczyn czynników,
- przyrównujemy każdy czynnik do zera,
- rozwiązujemy kilka prostych równań, otrzymując w rezultacie rozwiązania początkowego równania wielomianowego.

Przykład

Rozwiąż równanie: $x^3 + 7x^2 = 3x + 21$.

Rozwiązanie:

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę równania:

$$x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$$

Rozkładamy lewą stronę na iloczyn czynników (np. metodą grupowania wyrazów):

$$x^2(x+7) - 3(x+7) = 0$$

$$(x+7)(x^2-3) = 0$$

$$(x+7)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$

Przyrównujemy każdy nawias do zera:

$$x+7=0 \text{ lub } x-\sqrt{3}=0 \text{ lub } x+\sqrt{3}=0$$

$$x=-7 \text{ lub } x=\sqrt{3} \text{ lub } x=-\sqrt{3}$$

Odpowiedź: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = -7$

Przykład

Rozwiąż równanie: $2x^3 + 3x = 5x^2$.

Rozwiązanie:

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę równania:

$$2x^3 + 3x - 5x^2 = 0$$

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = 0$$

Wylączamy x przed nawias:

$$x(2x^2 - 5x + 3) = 0$$

Zapisujemy jako dwa równania:

$$x = 0 \text{ lub } 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Równanie kwadratowe rozwiązujemy, obliczając wyróżnik trójmianu:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie to ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-(-5) - 1}{2 \cdot 2} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + 1}{2 \cdot 2} = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania $2x^3 + 3x = 5x^2$ są liczby 0, 1, $1\frac{1}{2}$.

Przykład

Rozwiąż równanie: $x^4 = 16$.

Rozwiązanie:

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę równania:

$$x^4 - 16 = 0$$

Stosujemy wzór na różnicę kwadratów:

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x-2)(x+2)(x^2+4) = 0$$

Przyrównujemy każdy nawias do zera:

$$x-2=0 \text{ lub } x+2=0 \text{ lub } x^2+4=0$$

$$x=2 \text{ lub } x=-2 \text{ wyrażenie } x^2+4 \neq 0$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania $x^4 = 16$ są liczby 2, -2.

Przykład

Rozwiąż równanie dwukwadratowe: $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, $t \geq 0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe: $t^2 - 3t + 2 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie to ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = \frac{-(-3) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{-(-3) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$



Wracamy do podstawienia i otrzymujemy dwa równania kwadratowe:

$x^2 = 1$ oraz $x^2 = 2$, które rozwiązujemy, stosując wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1 \text{ lub } x = -1$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$$

$$x = \sqrt{2} \text{ lub } x = -\sqrt{2}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ są liczby $-\sqrt{2}, -1, 1$ i $\sqrt{2}$.

Przykład

Rozwiąż równanie dwukwadratowe: $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $x^2 = t, t \geq 0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe $t^2 - t - 6 = 0$:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie to ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = \frac{-(-1) - 5}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$t_2 = \frac{-(-1) + 5}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Wracamy do podstawienia i otrzymujemy dwa równania kwadratowe:

$x^2 = -2$ oraz $x^2 = 3$, pierwsze z nich jest sprzeczne, a drugie rozwiązujemy, stosując wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$

$$x = \sqrt{3} \text{ lub } x = -\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania $x^4 - x^2 - 6 = 0$ są liczby $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$.

Przykład

Rozwiąż równanie: $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x - 10} = 0$.

Rozwiązanie:

Przyrównujemy mianownik do zera, ustalając dziedzinę wyrażenia wymiernego:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Równanie kwadratowe rozwiązujemy, obliczając wyróżnik trójmianu:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$$

$$\sqrt{\Delta} = 7$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-(-3) - 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 7}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Zatem $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 5\}$, a mianownik zapisujemy w postaci iloczynowej: $(x+2)(x-5)$.

Przyrównujemy licznik do zera:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Równanie kwadratowe rozwiązujemy, obliczając wyróżnik trójmianu:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$\sqrt{\Delta} = 5$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie to ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-(-1) - 5}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-(-1) + 5}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Zatem licznik zapisujemy w postaci iloczynowej: $(x+2)(x-3)$



Równanie ma postać: $\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x-5)} = 0$

Po skróceniu otrzymujemy: $\frac{x-3}{x-5} = 0$

Ułamek jest równy zero tylko wtedy, kiedy licznik jest równy zero, zatem:

$$x-3=0$$

$$x=3$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania $\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-10} = 0$ jest liczba 3.

Przykład

Rozwiąż równanie: $\frac{x^4-1}{x^2-1} = 0$.

Rozwiązanie:

Przyrównujemy mianownik do zera, ustalając dziedzinę wyrażenia wymiernego:

$$x^2-1=0$$

Stosujemy wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$(x-1)(x+1)=0$$

$$x=1 \text{ lub } x=-1$$

$$\text{Zatem } D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

Rozkładamy licznik na iloczyn wyrażeń i otrzymujemy:

$$\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)} = 0$$

Po skróceniu otrzymujemy: $x^2+1=0$

Jest to równanie sprzeczne.

Odpowiedź: Równanie $\frac{x^4-1}{x^2-1} = 0$ nie ma rozwiązania.

3.4. Utrwalamy wiedzę



4

Układy równań

4.1. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Pojęcie układu równań

Układem równań liniowych nazywamy dwa równania z dwiema niewiadomymi, dla których poszukujemy wspólnych rozwiązań.

Rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy parę liczb, która spełnia obydwa równania.

Do metod rozwiązywania układów równań należą m.in.:

- metoda podstawiania,
- metoda przeciwnych współczynników,
- metoda graficzna.

Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania

Metoda podstawiania polega na wyznaczeniu z któregoś równania jednej niewiadomej i podstawieniu jej do drugiego równania.

Przykład

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 29 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy z pierwszego równania niewiadomą y , drugie przepisując bez zmian:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x + 2y = 29 \end{cases}$$

Wstawiamy do drugiego równania w miejsce y wyznaczone wyrażenie:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x + 2(2x - 3) = 29 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie z jedną niewiadomą x , pierwsze przepisując bez zmian:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x + 4x - 6 = 29 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 7x = 35 \quad |:7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

Wstawiamy obliczoną wartość x do pierwszego równania i obliczamy y :

$$\begin{cases} y = 2 \cdot 5 - 3 \\ x = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 10 - 3 \\ x = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 7 \\ x = 5 \end{cases}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 29 \end{cases}$ jest para liczb $(5; 7)$.

Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników

Metoda przeciwnych współczynników polega na dodawaniu równań stronami w sytuacji, gdy przy tej samej niewiadomej w dwóch równaniach mamy przeciwne współczynniki.

Przykład

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zauważamy, że przed niewiadomą y mamy współczynniki o przeciwnych znakach. Trzeba pomnożyć oba równania przez takie liczby, aby otrzymać przeciwne współczynniki.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \quad |:2 \\ 3x + 2y = 19 \quad |:3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 9x + 6y = 57 \end{cases}$$



Dodajemy równania stronami i otrzymujemy:

$$\begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 9x + 6y = 57 \end{cases}$$

$$13x = 65 \quad |:13$$

$$x = 5$$

Wstawiamy wartość x do jednego z równań i obliczamy y :

$$3 \cdot 5 + 2y = 19$$

$$2y = 4 \quad |:2$$

$$y = 2$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$ jest para liczb $(5; 2)$.

Rozwiązywanie układów równań metodą graficzną

Metoda graficzna polega na narysowaniu prostych w układzie współrzędnych i odczytaniu współrzędnych punktu przecięcia prostych, które są rozwiązaniem układu równań.

Rysunek prostych w układzie współrzędnych nazywamy **interpretacją geometryczną** układu równań.

Proste na płaszczyźnie mogą się przecinać w jednym punkcie, mogą być równoległymi niemającymi punktów wspólnych i mogą się pokrywać, mając nieskończenie wiele punktów wspólnych.

Zatem układ równań liniowych może:

mieć jedno rozwiązanie (para liczb) – **układ oznaczony**

mieć nieskończenie wiele rozwiązań – **układ nieoznaczony**

nie mieć żadnego rozwiązania – **układ sprzeczny**

Przykład

Rozwiąż układy równań i wskaż, który z nich jest oznaczony, nieoznaczony i sprzeczny. Przedstaw interpretację geometryczną każdego z nich.

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$

Rozwiązanie:

Rozwiążemy układy równań metodą przeciwnych współczynników:

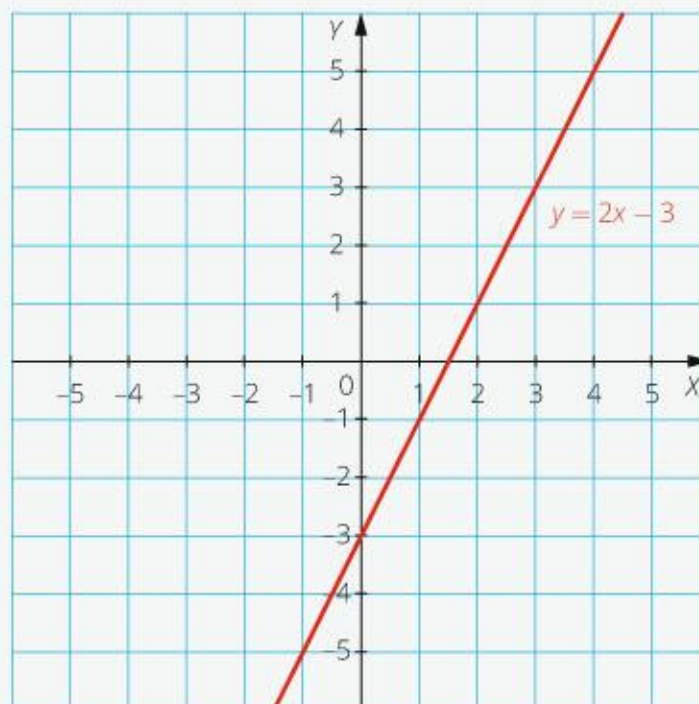
a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \quad | :(-2)$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

Układ nieoznaczony

Wyznaczamy y z pierwszego równania i zaznaczamy w układzie współrzędnych prostą o równaniu $y = 2x - 3$ przechodzącą przez punkty $(0, -3)$ i $(1, 5; 0)$. Z przekształcenia drugiego równania otrzymamy prostą o tym samym równaniu.



$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \cdot 2$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$7x = 14 \quad | :2$$

$$x = 2$$

$$3 \cdot 2 + 2y = 2$$

$$6 + 2y = 2$$

$$2y = -4 \quad | :2$$

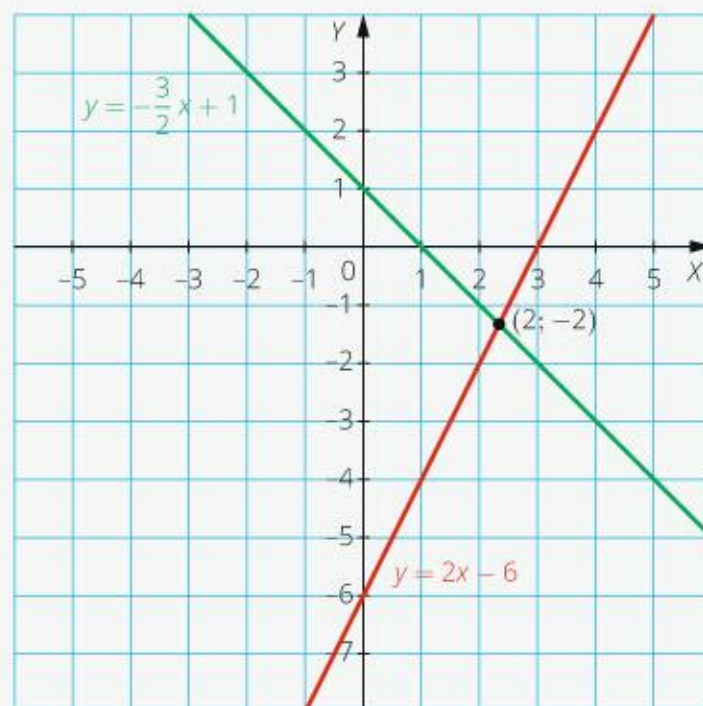
$$y = -2$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Układ oznaczony

Wyznaczamy y z obu równań i zaznaczamy w układzie współrzędnych proste o równaniach

$$y = 2x - 6 \text{ oraz } y = -\frac{3}{2}x + 1.$$



$$\text{c) } \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases} \cdot (-2)$$

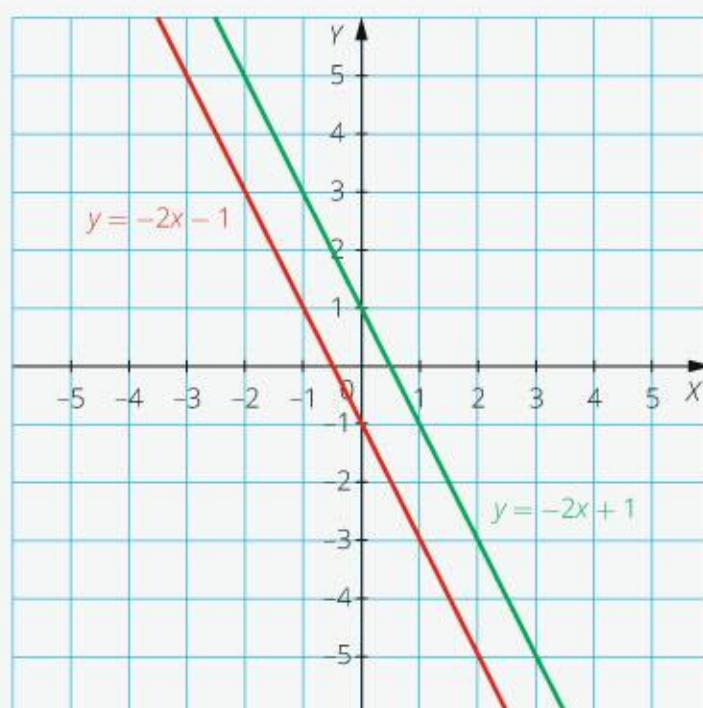
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -2x - y = -2 \end{cases}$$

$$0 = -3$$

Układ nieoznaczony

Wyznaczamy y z obu równań i zaznaczamy w układzie współrzędnych proste o równaniach

$$y = -2x - 1 \text{ oraz } y = -2x + 1.$$



Rozwiązywanie układów równań wybranymi metodami

Przykład

Rozwiąż układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} 3(x - y) - 2(y - x) = 15 \\ 4(x + y) + 7 = 5(y + x) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x+5}{2} + \frac{y}{2} = \frac{y+8}{4} \\ -3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 0,2(x + 2y) - 0,3(2x - y) = 3,5 \\ 2(x + y) - (x - 2) = 2y + 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Rozwiążemy układy równań dowolną metodą.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 3y - 2y + 2x = 15 \\ 4x + 4y + 7 = 5y + 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 5y = 15 \quad |:5 \\ -x - y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ -x - y = -7 \end{cases}$$

$$\hline -2y = -4$$

$$y = 2$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{x+5}{2} + \frac{y}{2} = \frac{y+8}{4} \quad |:4 \\ -3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+5) + 2y = y+8 \\ -3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 10 + 2y = y + 8 \\ -3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ -3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\hline -x = 3$$

$$x = -3$$

$$2 \cdot (-3) + y = -2$$

$$-6 + y = -2$$

$$y = 4$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x - 1 \quad |:4 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}y + 3 \quad |:4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = x - 4 \\ -x + y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -4 \\ -x + y = 12 \end{cases}$$

$$\hline 2y = 8 \quad |:2$$

$$y = 4$$

$$x + 4 = -4$$

$$x = -8$$

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 0,2(x+2y) - 0,3(2x-y) = 3,5 \quad |:10 \\ 2(x+y) - (x-2) = 2y+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+2y) - 3(2x-y) = 35 \\ 2(x+y) - (x-2) = 2y+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x+2y) - 3(2x-y) = 35 \\ 2(x+y) - (x-2) = 2y+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6x + 3y = 35 \\ 2x + 2y - x + 2 = 2y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6x + 3y = 35 \\ 2x + 2y - x + 2 = 2y + 2 \end{cases}$$

$$\hline -4x + 7y = 35$$

$$x = 0$$

$$\begin{cases} 7y = 35 \quad |:7 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

4.2. Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań tekstowych

Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań tekstowych w praktyce

Zadania tekstowe z wykorzystaniem układów równań będziemy rozwiązywać w następujących etapach:

- analiza zadania,
- zapisanie układu równań i jego rozwiązanie,
- sprawdzenie rozwiązania układu równań z warunkami zadania,
- zapisanie odpowiedzi.

Przykład

Suma dwóch liczb wynosi 120. Jeśli pierwszą liczbę zwiększymy o 20%, a drugą zmniejszymy o 60%, to ich różnica wzrośnie dwukrotnie. Wyznacz te liczby.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań odzwierciedlający zależności przedstawione w zadaniu.

x – pierwsza liczba

y – druga liczba

$$\begin{cases} x + y = 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,2x - 0,4y = 2(x - y) \end{cases}$$

Przekształcamy układ do prostszej postaci i wyznaczamy niewiadome.

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ -0,8x + 1,6y = 0 \end{cases}$$

Stąd $\begin{cases} x = 80 \\ y = 40 \end{cases}$

Sprawdzenie: $80 + 40 = 120$, $80 - 40 = 40$, $1,2 \cdot 80 - 0,4 \cdot 40 = 80 = 2 \cdot 40$

Odpowiedź: Szukane liczby to 80 i 40.

Przykład

Stosunek dwóch liczb wynosi 2 : 7. Jeśli mniejszą z tych liczb zwiększymy 1,6 razy, a większą zmniejszymy o 22, to stosunek tych liczb wyniesie 2 : 3. Oblicz te liczby.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań opisujący zależności przedstawione w zadaniu.

x – mniejsza liczba

y – większa liczba

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{7} \\ \frac{1,6x}{y-22} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Przekształcamy układ do postaci $\begin{cases} 7x = 2y \\ 4,8x = 2y - 44 \end{cases}$, a następnie wyznaczamy niewiadome.

Stąd $\begin{cases} x = 20 \\ y = 70 \end{cases}$

Sprawdzenie: $\frac{20}{70} = \frac{2}{7}$, $\frac{1,6 \cdot 20}{70 - 22} = \frac{32}{48} = \frac{2}{3}$

Odpowiedź: Szukane liczby to 20 i 70.

Przykład

W dwóch pudełkach znajduje się 138 sztuk jednakowych cukierków. Jeżeli z jednego pudełka przełożymy 4 cukierki do drugiego, to w obu pudełkach będzie tyle samo cukierków.

Ile cukierków znajduje się w każdym z pudełek?

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań przedstawiający zależności występujące w zadaniu.

x – liczba cukierków w pierwszym pudełku

y – liczba cukierków w drugim pudełku

$$\begin{cases} x + y = 138 \\ x - 4 = y + 4 \end{cases}$$

Przekształcamy układ do prostszej postaci i wyznaczamy niewiadome.

$$\begin{cases} x + y = 138 \\ x - y = 8 \end{cases}$$

Stąd $\begin{cases} x = 73 \\ y = 65 \end{cases}$

Sprawdzenie: $73 + 65 = 138$, $73 - 4 = 65 + 4$

Odpowiedź: W pierwszym pudełku były 73 cukierki, a w drugim było 65 cukierków.

Przykład

Ile kilogramów roztworów solnych o stężeniach odpowiednio 10% i 15% należy zmieszać, aby otrzymać 10 kg roztworu solnego o stężeniu 12%?

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome:

x – waga w kilogramach roztworu o stężeniu 10%

y – waga w kilogramach roztworu o stężeniu 15%

Zapisujemy układ równań i wyznaczamy niewiadome.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 0,1x + 0,15y = 0,12 \cdot 10 \end{cases}$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

Sprawdzenie: $x + y = 10$, $0,1 \cdot 6 + 0,15 \cdot 4 = 1,2$

Odpowiedź: Należy zmieszać 6 kg roztworu o stężeniu 10% i 4 kg roztworu o stężeniu 15%.

Przykład

Ojciec i syn mają razem 56 lat. Za 5 lat ojciec będzie 2 razy starszy od syna. Ile lat ma obecnie każdy z nich?

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań.

x – obecny wiek ojca

y – obecny wiek syna

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ x + 5 = 2(y + 5) \end{cases}$$

Przekształcamy układ do prostszej postaci i wyznaczamy niewiadome.

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} x = 39 \\ y = 17 \end{cases}$$

Sprawdzenie: $39 + 17 = 56$, $39 + 5 = 2 \cdot (17 + 5)$

Odpowiedź: Ojciec ma 39 lat, a syn ma 17.

Przykład

Z miast A i B oddalonych od siebie o 70 km wyruszają jednocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi i spotykają się po 20 minutach. Gdyby pociąg, który wyjechał z miasta A, jechał z prędkością o 50% większą, a pociąg, który wyruszył z miasta B, jechał z prędkością o 45 km/h mniejszą, to pociągi również spotkałyby się po 20 minutach. Oblicz, z jakimi prędkościami średnimi poruszały się pociągi.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań.

x – prędkość pociągu jadącego z miasta A w km/h

y – prędkość pociągu jadącego z miasta B w km/h

$$20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot (x + y) = 70 \\ \frac{1}{3} \cdot (1,5x + y - 45) = 70 \end{cases}$$

Zapisujemy układ równań w prostszej postaci i wyznaczamy niewiadome.

$$\begin{cases} x + y = 210 \\ 1,5x + y = 255 \end{cases}$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} x = 90 \\ y = 120 \end{cases}$$

Sprawdzenie: $\frac{1}{3} \cdot (90 + 120) = 70$, $\frac{1}{3} \cdot (1,5 \cdot 90 + 120 - 45) = 70$

Odpowiedź: Pociąg z miasta A jechał z prędkością 90 km/h, a z miasta B z prędkością 120 km/h.

Przykład

Gdy długości boków prostokąta zwiększymy o 2 cm i 5 cm, to jego pole zwiększy się o 65 cm². Natomiast, gdy długości boków odpowiednio zmniejszymy o 5 cm i 2 cm, to jego pole zmniejszy się o 54 cm². Oblicz długości boków tego prostokąta.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań przedstawiający zależności określone w treści zadania.

x – długość pierwszego boku prostokąta w centymetrach

y – długość drugiego boku prostokąta w centymetrach

$$\begin{cases} (x + 2) \cdot (y + 5) = xy + 65 \\ (x - 5) \cdot (y - 2) = xy - 54 \end{cases}$$

Przekształcamy układ do prostszej postaci.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 55 \\ 2x + 5y = 64 \end{cases}$$

Stąd $\begin{cases} x = 7 \\ y = 10 \end{cases}$

Sprawdzenie: $7 \cdot 10 = 70$, $(7+2) \cdot (10+5) = 9 \cdot 15 = 135$, $70 + 65 = 135$

$$(7-5) \cdot (10-2) = 2 \cdot 8 = 16, 70 - 54 = 16$$

Odpowiedź: Długości boków prostokąta wynoszą 7 cm i 10 cm.

4.3. Rozwiązywanie metodą podstawiania układów równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe

Rozwiązywanie układów równań drugiego stopnia

Układem drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest drugiego stopnia. W szczególności układem równań drugiego stopnia jest układ składający się z równania liniowego oraz kwadratowego.

Na przykład $\begin{cases} 4x + y + 2 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$, $\begin{cases} 4x^2 + x + y^2 - y + 2 = 0 \\ -2x + y - 5 = 0 \end{cases}$

Takie układy będziemy rozwiązywali metodą podstawiania.

Przykład

Rozwiąż układ równań.

a) $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases}$

Wyznaczamy y z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 - 2x + 2(-x + 2) = 0 \end{cases}$$

Drugie równanie jest równaniem kwadratowym z niewiadomą x . Rozwiązujemy je.

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ stąd } (x-2)^2 = 0, \text{ czyli } x = 2$$

Zapisujemy: $\begin{cases} y = -x + 2 \\ x = 2 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 2x^2 - 4x + y - 2 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases}$

Wyznaczamy y z drugiego równania i podstawiamy do pierwszego. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x + y - 2 = 0 \\ y = -2x + 9 \\ 2x^2 - 4x - 2x + 9 - 2 = 0 \\ y = -2x + 9 \\ 2x^2 - 6x + 7 = 0 \\ y = -2x + 9 \end{cases}$$

Pierwsze równanie jest równaniem kwadratowym z niewiadomą x . Rozwiązujemy je.

$$2x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -20$$

Ponieważ $\Delta < 0$, to równanie $2x^2 - 6x + 7 = 0$ nie ma rozwiązania. Wobec tego układ równań

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x + y - 2 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases} \text{ jest sprzeczny.}$$

$$c) \begin{cases} -x + 2y - 4 = 0 \\ x^2 + 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy y z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = \frac{x+4}{2} \\ x^2 + 4 \cdot \frac{x+4}{2} - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+4}{2} \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie, które jest równaniem kwadratowym z niewiadomą x .

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36, \sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4, x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$$

Otrzymujemy dwa układy równań:

$$\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = \frac{-4+4}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = \frac{2+4}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

Układy równań drugiego stopnia w zadaniach z treścią

Umiejętność rozwiązywania układów równań wykorzystujemy w rozwiązywaniu zadań z treścią.

Przykład

Liczbę 25 przedstaw w postaci sumy dwóch składników, tak aby suma ich kwadratów była równa 313.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań przedstawiający zależności określone w zadaniu.

x – pierwszy składnik

y – drugi składnik

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x^2 + y^2 = 313 \end{cases}$$

Wyznaczamy y z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego. Otrzymujemy:

$$\begin{cases} y = 25 - x \\ x^2 + (25 - x)^2 = 313 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 25 - x \\ 2x^2 - 50x + 312 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 25 - x \\ x^2 - 25x + 156 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\Delta = (-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 156 = 1, \sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{25-1}{2} = 12, x_2 = \frac{25+1}{2} = 13$$

Zapisujemy dwa układy równań i wyznaczamy niewiadomą y .

$$\begin{cases} y_1 = 25 - x_1 \\ x_1 = 12 \end{cases}, \begin{cases} y_2 = 25 - x_2 \\ x_2 = 13 \end{cases}$$

$$\text{Stąd } \begin{cases} y = 13 \\ x = 12 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y = 12 \\ x = 13 \end{cases}$$

Pomimo że rozwiązaniem układu są dwie pary liczb, to rozwiązaniem zadania jest tylko para liczb. Liczbę 25 przedstawimy w postaci sumy liczb 12 i 13 (ze względu na przemienność dodawania).

Sprawdzenie: $12^2 + 13^2 = 313$

Odpowiedź: Szukane składniki liczby 25 to 12 i 13.

Przykład

Oblicz obwód trójkąta równoramiennego o polu równym 54, którego podstawa jest trzy razy dłuższa od wysokości.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań przedstawiający zależności określone w zadaniu.

x – długość podstawy trójkąta

y – wysokość trójkąta

$$\begin{cases} x = 3y \\ \frac{x \cdot y}{2} = 54 \end{cases}$$

Otrzymujemy: $\begin{cases} x = 3y \\ 3y^2 = 108 \end{cases}$ stąd $\begin{cases} x = 3y \\ y^2 = 36 \end{cases}$

Zapisujemy dwa układy równań, ponieważ rozwiązaniem drugiego równania są liczby 6 i -6.

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ x_1 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = -6 \\ x_2 = -18 \end{cases}$$

Spośród tych dwóch rozwiązań układu równań odrzucamy drugie rozwiązanie, ponieważ x i y są długościami odcinków, więc muszą być liczbami dodatnimi.

Sprawdzenie: $\frac{6 \cdot 18}{2} = 54$

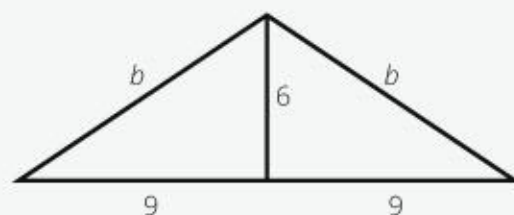
Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy ramię tego trójkąta równoramiennego.

$$b^2 = 9^2 + 6^2, \text{ stąd } b = 3\sqrt{13}$$

Obliczamy obwód trójkąta:

$$L = 18 + 2 \cdot 3\sqrt{13} = 18 + 6\sqrt{13}$$

Odpowiedź: Obwód tego trójkąta wynosi $18 + 6\sqrt{13}$.

**Przykład**

Pewne wydawnictwo miało wysłać do sklepu 2800 książek do kolorowania. Książki planowano wysłać w jednakowych paczkach, przy czym w każdej paczce miała być taka sama liczba książek. Okazało się jednak, że gdyby do każdej paczki włożono po 5 książek więcej, wówczas liczba paczek zmniejszyłaby się o 10. Oblicz, ile paczek planowano wysłać i ile książek było w jednej takiej paczce.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań przedstawiający zależności określone w zadaniu.

x – planowana liczba paczek, $x > 0$ i $x \in \mathbb{N}$

y – planowana liczba książek, $y > 0$ i $y \in \mathbb{N}$

$x - 10$ – liczba paczek, gdyby włożono więcej książek do paczki

$y + 5$ – zwiększona liczba książek w paczce

$$\begin{cases} xy = 2800 \\ (x - 10)(y + 5) = 2800 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} xy = 2800 \\ xy + 5x - 10y - 50 = 2800 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 2800 \\ 2800 + 5x - 10y - 50 = 2800 \end{cases}$$

Wyznaczamy x z drugiego równania i podstawiamy do pierwszego.

$$\begin{cases} xy = 2800 \\ x = 2y + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2y + 10)y = 2800 \\ x = 2y + 10 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie $2y^2 + 10y - 2800 = 0$, które zapisujemy w prostszej postaci $y^2 + 5y - 1400 = 0$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1400) = 5625, \sqrt{\Delta} = 75$$

$$y_1 = \frac{-5 - 75}{2} = -40 \notin D, y_2 = \frac{-5 + 75}{2} = 35$$



Zapisujemy układ równań i wyznaczamy niewiadomą x :

$$\begin{cases} y = 35 \\ x = 2 \cdot 35 + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 35 \\ x = 80 \end{cases}$$

Sprawdzenie: $80 \cdot 35 = 2800$

Odpowiedź: Planowano wysłać 80 paczek i w każdej miało być po 35 książek.

4.4. Utrwalamy wiedzę



5

Funkcje

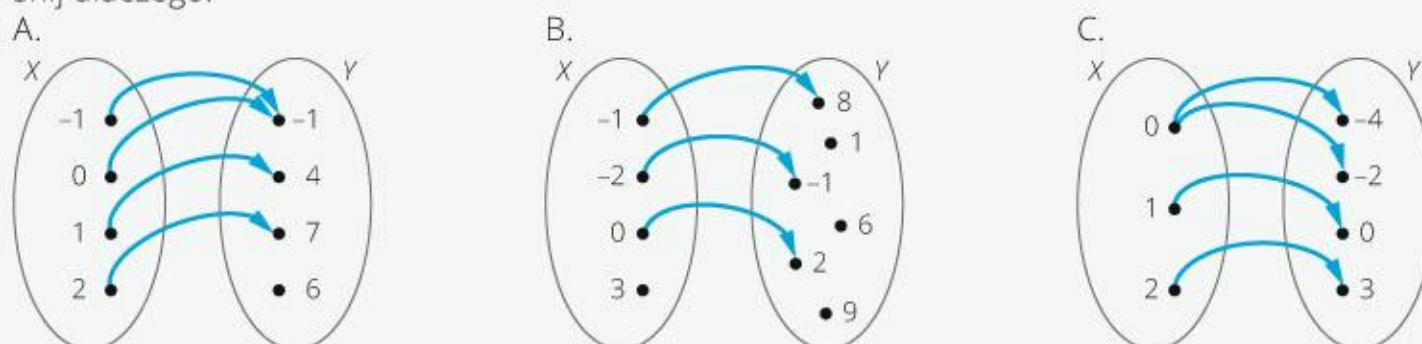
5.1. Funkcja i jej własności

Pojęcie funkcji

- Funkcją** f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y .
- Zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji**, a każdy element x zbioru X nazywamy **argumentem funkcji**.
- Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**. Każdy element y zbioru Y , który został przyporządkowany określonym argumentowi x , nazywamy **wartością funkcji** f dla argumentu x i zapisujemy $y = f(x)$. Zbiór ZW tych elementów y nazywamy **zbiorem wartości funkcji**.

Przykład

Pewne przyporządkowania przedstawiono w postaci grafu. Określ, które z nich nie jest funkcją i wyjaśnij dlaczego.



Odpowiedź: Przyporządkowanie B nie jest funkcją, ponieważ nie każdemu elementowi zbioru X został przyporządkowany jeden element zbioru Y (liczbie 3 nie przyporządkowano żadnej liczby). Przyporządkowanie C nie jest funkcją, ponieważ jednemu elementowi zbioru X (liczbie 0) zostały przyporządkowane dwa elementy zbioru Y (liczby -4 i -2).

Przykład

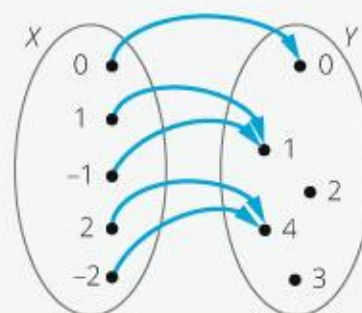
Dane są dwa zbiory $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Funkcja f ze zbioru X przyporządkowuje każdej liczbie jej kwadrat w zbiór Y . Przedstaw za pomocą grafu funkcję f . Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji. Podaj wartość funkcji dla argumentu -2 . Określ argumenty, dla których wartość funkcji jest równa 1.

Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji jest $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, a zbiorem wartości funkcji jest $ZW = \{0, 1, 4\}$.

Wartość funkcji dla argumentu -2 jest równa 4, co zapiszemy symbolicznie $f(-2) = 4$.

Wartość funkcji jest równa 1 dla argumentów 1 i -1 . Zapiszemy to $1 = f(1)$ i $1 = f(-1)$.



Sposoby określania funkcji

Funkcje określamy za pomocą opisu słownego, tabelki, grafu, a także wzoru lub wykresu.

- Wykres funkcji** $f: X \rightarrow Y$ to zbiór wszystkich punktów (x, y) takich, że $x \in X$ i $y = f(x)$. Zapis $f: X \rightarrow Y$ czytamy: funkcja f ze zbioru X w zbiór Y .

Przykład

Funkcję przedstawiono w postaci tabeli.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	2	3	4	5	6

Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji. Przetwórz tę funkcję za pomocą:

- a) opisu słownego, b) grafu, c) wzoru, d) wykresu.

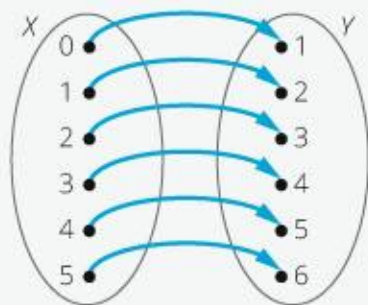
Rozwiązanie:

$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $ZW = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

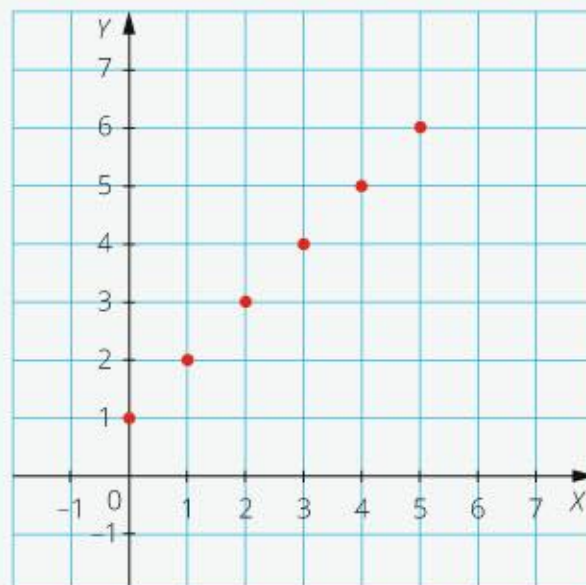
- a) Każdej liczbie ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ przyporządkowano liczbę o jeden większą.



b)



d)



c) $f(x) = x + 1$ dla $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Przykład

Oblicz:

a) wartość funkcji $f(x) = 3x^2 - 5x$ dla argumentów -1 i $\frac{1}{2}$

Rozwiązanie:

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) = 3 + 5 = 8$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$$

b) argument, dla którego wartość funkcji $f(x) = \frac{x+6}{2}$ wynosi $\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f(x) = \frac{2}{3}$, otrzymujemy $\frac{x+6}{2} = \frac{2}{3}$.

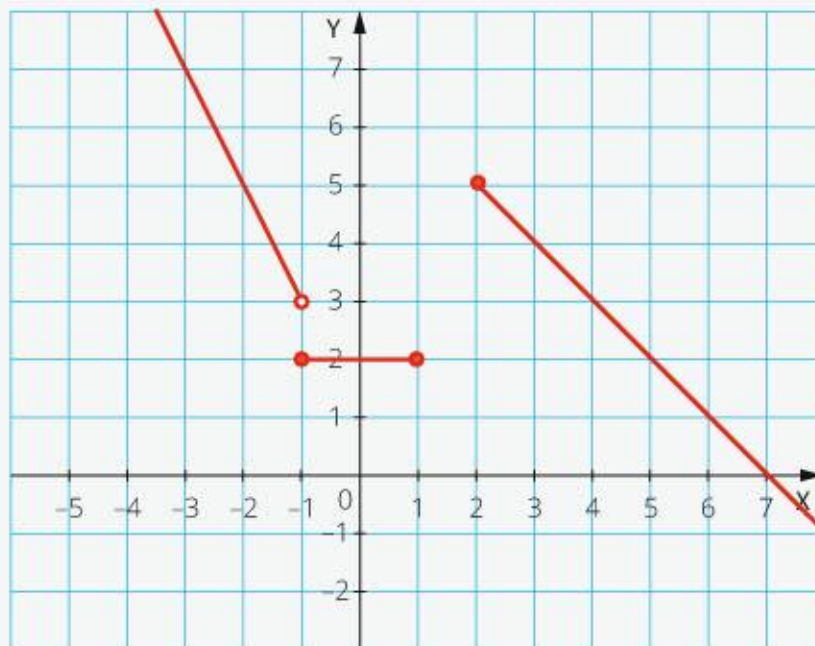
Stąd: $x = -4\frac{2}{3}$

Przykład

Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x \in (-\infty, -1) \\ 2, & x \in [-1, 1] \\ -x+7, & x \in (1, \infty) \end{cases}$

Rozwiązanie:

Rysujemy wykresy trzech funkcji: $f(x) = -2x+1$, $f(x) = 2$ i $f(x) = -x+7$ w podanych przedziałach.



Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich argumentów x , dla których funkcja jest określona.

Określanie dziedziny funkcji

Przykład

Określ dziedzinę funkcji.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

Rozwiązanie:

$$x \in \mathbb{R}$$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

Rozwiązanie:

Wartości funkcji nie są określone, gdy mianownik jest równy 0. Wobec tego zapisujemy założenie $x^2 - 1 \neq 0$. Stąd $x \neq 1$ i $x \neq -1$.

Zapisujemy dziedzinę: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Rozwiązanie:

Wartości funkcji są określone, gdy liczba podpierwiastkowa jest nieujemna. Wobec tego zapisujemy założenie: $x - 1 \geq 0$. Stąd $x \geq 1$.

Zapisujemy dziedzinę: $x \in [1, \infty)$.

Miejsce zerowe funkcji

Miejszem zerowym funkcji nazywamy każdy argument, dla którego wartość funkcji liczbowej jest równa 0. Funkcja może mieć wiele miejsc zerowych, ale może również nie mieć ich wcale.

Przykład

Oblicz miejsce zerowe funkcji danej wzorem.

a) $f(x) = \sqrt{2x+7}$, dla $x \in \left(-3\frac{1}{2}, \infty\right)$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy argument, dla którego wartość funkcji f jest równa 0.

$$f(x) = 0, \text{ czyli } \sqrt{2x+7} = 0, \text{ więc } 2x+7 = 0$$

$$\text{Otrzymujemy } x = -3\frac{1}{2}.$$

Sprawdzamy, czy obliczony argument x należy do dziedziny funkcji:

$$-3\frac{1}{2} \in \left(-3\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji $f(x) = \sqrt{2x+7}$ jest argument $x = -3\frac{1}{2}$.

b) $f(x) = \begin{cases} 3x-5, & x \leq -2 \\ -4x+7, & x > -2 \end{cases}$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy argument, dla którego wartość funkcji f jest równa 0. Ponieważ funkcja jest określona dwoma wzorami w dwóch różnych przedziałach, więc zapisujemy dwa równania.

1. Otrzymujemy: $3x - 5 = 0$

$$x = 1\frac{2}{3}, \text{ ale } 1\frac{2}{3} \notin (-\infty, -2], \text{ dlatego liczba } 1\frac{2}{3} \text{ nie jest miejscem zerowym funkcji } f.$$

2. Otrzymujemy: $-4x + 7 = 0$

$$x = 1\frac{3}{4}, 1\frac{3}{4} \in (-2, \infty)$$

Odpowiedź: Miejscem zerowym funkcji $f(x) = \begin{cases} 3x-5, & x \leq -2 \\ -4x+7, & x > -2 \end{cases}$ jest liczba $1\frac{3}{4}$.

5.2. Odczytywanie własności funkcji z wykresu

Dziedzina, zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji

Dziedzinę, zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji można odczytać z wykresu.

Dziedzina to zbiór wszystkich wartości x , którym można przyporządkować punkt na wykresie funkcji (odczytujemy na osi X).

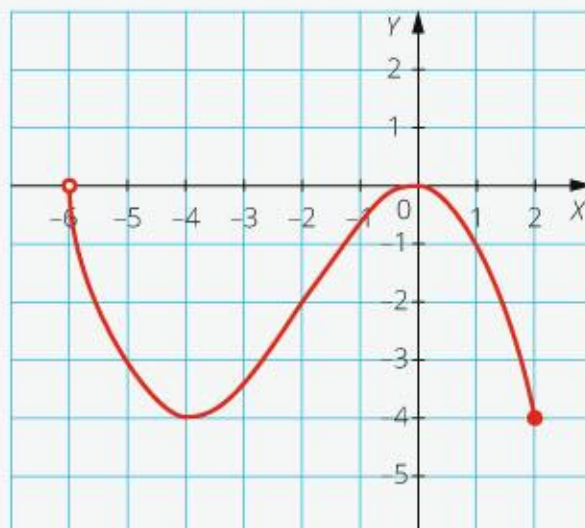
Zbiór wartości (odczytujemy na osi Y) są to te wszystkie wartości y , którym możemy przyporządkować punkt na wykresie funkcji.

Miejsce zerowe jest równe współrzędnej x punktu przecięcia wykresu funkcji z osią X .

Przykład

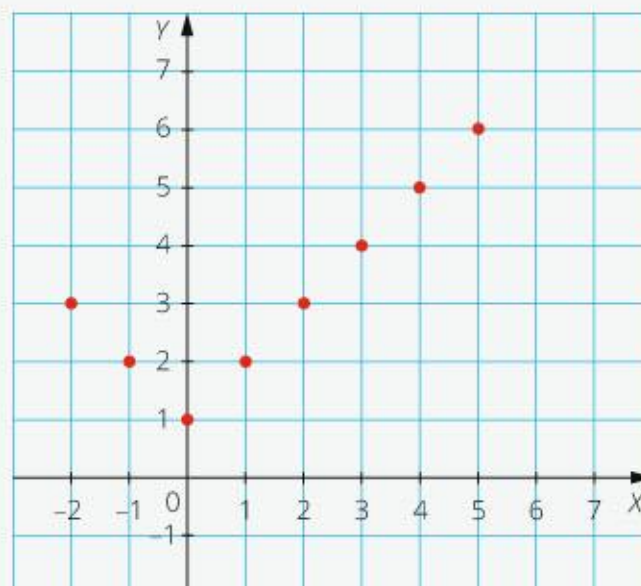
Na podstawie wykresu funkcji określ jej dziedzinę, zbiór wartości i miejsce zerowe.

a)



Odpowiedź: $D_f = \langle -6, 2 \rangle$, $ZW = \langle -4, 0 \rangle$, miejsce zerowe $x = 0$.

b)



Odpowiedź: $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $ZW = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, funkcja nie ma miejsc zerowych.

Monotoniczność funkcji

Funkcję nazywamy rosnącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, takich że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcję nazywamy malejącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, takich że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcję nazywamy stałą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ spełniona jest równość $f(x_1) = f(x_2)$.

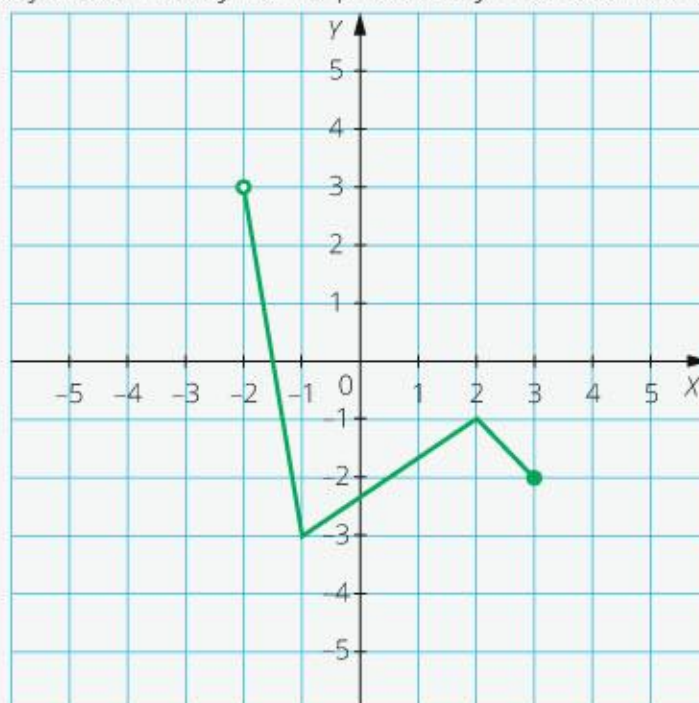
Funkcję nazywamy niemalejącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, takich że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) \leq f(x_2)$.

> | **Funkcję nazywamy nierosnącą**, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, takich że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) \geq f(x_2)$.

| **Funkcjami monotonicznymi** nazywamy funkcje, które są rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe.

Przykład

Na podstawie wykresu funkcji ustal maksymalne przedziały monotoniczności tej funkcji.



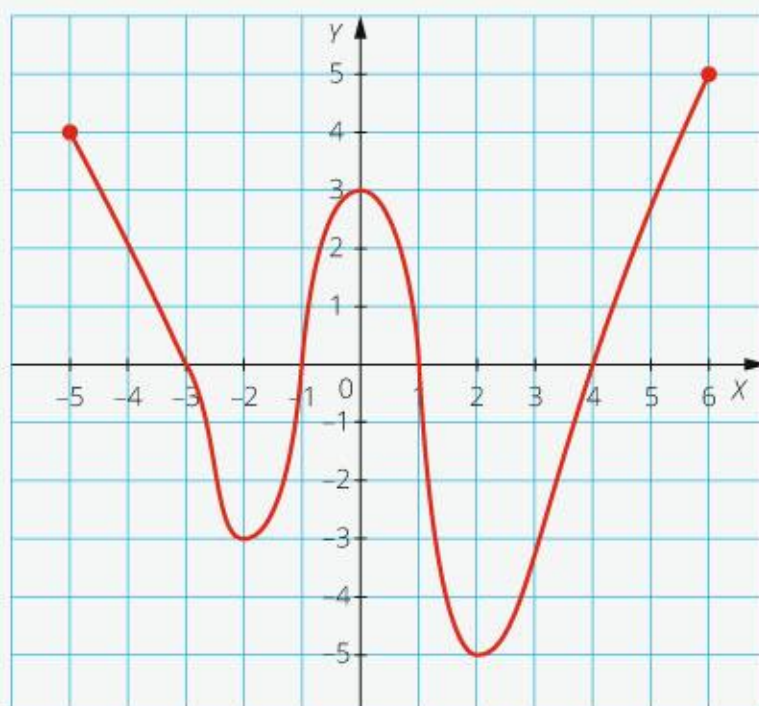
Odpowiedź: Funkcja jest malejąca w przedziale $(-3, -1]$, rosnąca w przedziale $(-1, 2]$ i malejąca w przedziale $(2, 3]$.

Największa i najmniejsza wartość funkcji

Na podstawie wykresu możemy również odczytać argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość, na przykład wartość największą lub najmniejszą, a także wartości dodatnie i ujemne.

Przykład

Odczytaj z wykresu największą i najmniejszą wartość funkcji oraz argumenty, dla których te wartości są przyjmowane. Określ, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich – ujemne.



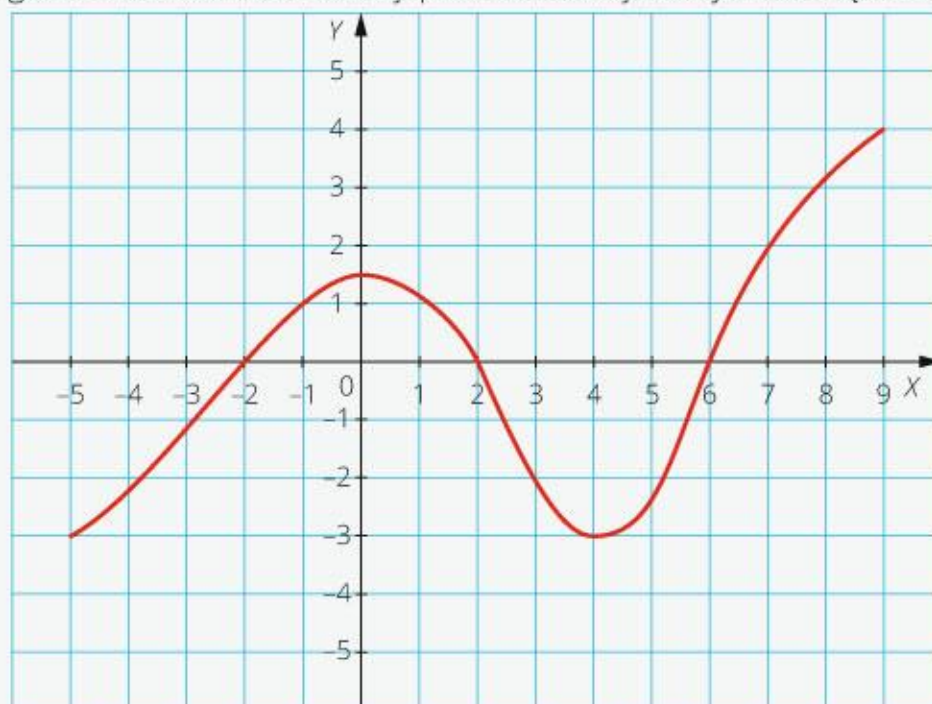
Odpowiedź: Największą wartością funkcji jest $y_{\max} = 5$ dla $x = 2$. Najmniejszą wartością jest $y_{\min} = -5$ dla $x = 2$.

Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in (-5, -3) \cup (-1, 1) \cup (4, 6)$. Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (-3, -1) \cup (1, 4)$.



Przykład

Określ, dla jakich argumentów wartości funkcji przedstawionej na wykresie są co najwyżej równe -2 .



Rozwiązanie:

Rysujemy w układzie współrzędnych prostą $y = -2$ i odczytujemy argumenty, dla których wartości funkcji są mniejsze bądź równe -2 .

Odpowiedź: $f(x) \leq -2$ dla $x \in (-\infty, -4) \cup (3, 5)$.

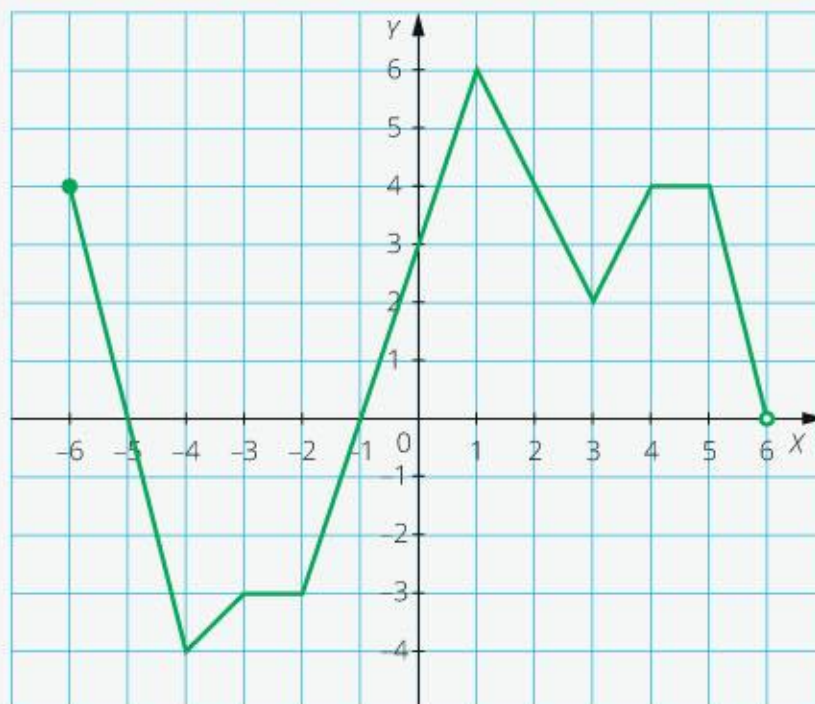
Własności funkcji

Przykład

Z wykresu funkcji odczytaj jej własności.

Rozwiązanie:

- a) Dziedzina funkcji $D_f = \langle -6, 6 \rangle$.
- b) Zbiór wartości funkcji $ZW = \langle -4, 6 \rangle$.
- c) Miejsca zerowe funkcji: $x = -5$ i $x = -1$.
- d) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: $x \in \langle -6, -5 \rangle \cup (-1, 6)$.
- e) Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne: $x \in (-5, -1)$.
- f) Maksymalne przedziały monotoniczności funkcji:
 - funkcja rosnąca dla: $x \in \langle -4, -3 \rangle$,
 $x \in \langle -2, 1 \rangle$ i $x \in \langle 3, 4 \rangle$,
 - funkcja malejąca dla: $x \in \langle -6, -4 \rangle$,
 $x \in \langle 1, 3 \rangle$ i $x \in \langle 5, 6 \rangle$,
 - funkcja stała dla: $x \in \langle -3, -2 \rangle$ i $x \in \langle 4, 5 \rangle$.
- g) Największa wartość funkcji: $y = 6$ dla $x = 1$.
- h) Najmniejsza wartość funkcji: $y = -4$ dla $x = -4$.



5.3. Funkcja liniowa

Pojęcie funkcji liniowej

Funkcją liniową nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** funkcji.

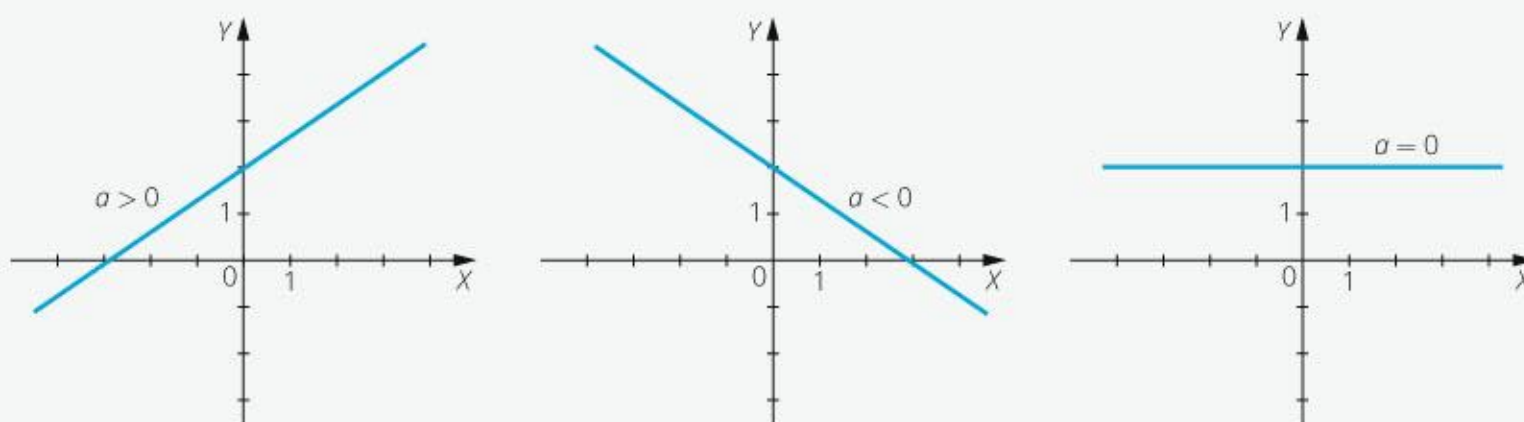
Na przykład: $f(x) = 7x - 3$, $f(x) = 3$, $f(x) = 9 - x$

Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$ dla $a \neq 0$.

Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta, która przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, b)$.

Monotoniczność funkcji liniowej

1. Jeżeli $a > 0$, to funkcja liniowa jest rosnąca.
2. Jeżeli $a < 0$, to funkcja liniowa jest malejąca.
3. Jeżeli $a = 0$, to funkcja liniowa jest stała.



Przykład

Określ monotoniczność funkcji $f(x) = (1 - \sqrt{2})x - 3$.

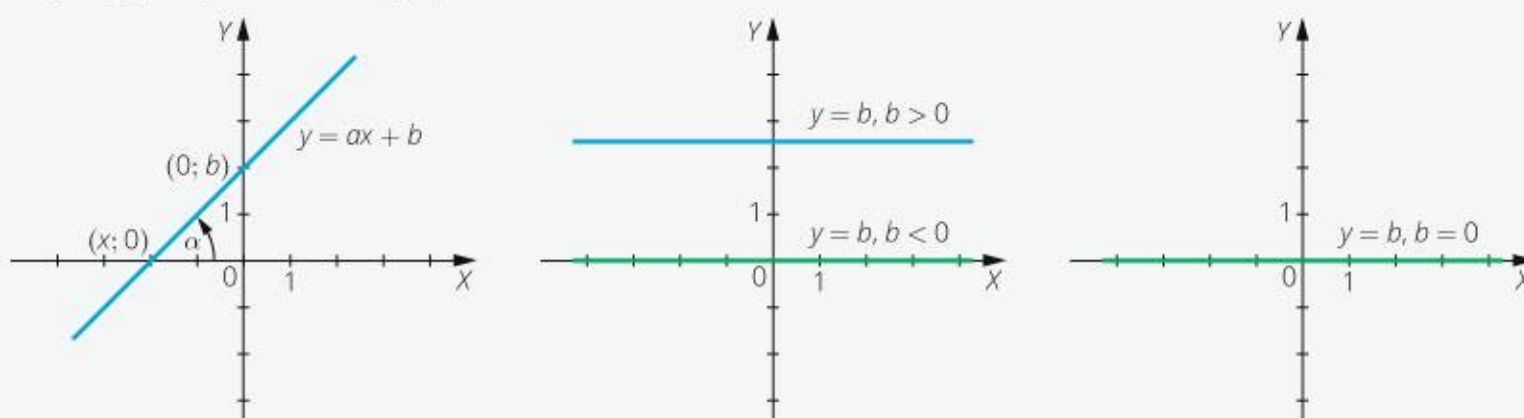
Rozwiązanie:

Współczynnik kierunkowy $a = 1 - \sqrt{2}$ jest liczbą ujemną, więc funkcja jest malejąca.

Miejsca zerowe funkcji liniowej

Aby wyznaczyć **miejsce zerowe** funkcji $f(x) = ax + b$, przyrównujemy jej wartość do liczby 0: $ax + b = 0$, stąd $ax = -b$.

1. Dla $a \neq 0$ funkcja liniowa ma jedno miejsce zerowe równe: $x = -\frac{b}{a}$.
2. Dla $a = 0$, $b \neq 0$ funkcja liniowa nie ma miejsc zerowych.
3. Dla $a = 0$, $b = 0$ funkcja liniowa ma nieskończenie wiele miejsc zerowych (każda liczba rzeczywista jest jej miejscem zerowym).





Przykład

Miejszem zerowym funkcji jest liczba 3, a wykres przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, -2)$.

Napisz wzór tej funkcji.

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy informacje o tym, że do wykresu należą punkty $(0, -2)$ i $(3, 0)$. Zapisujemy układ

$$\text{równań } \begin{cases} -2 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot 3 + b \end{cases}. \text{ Otrzymujemy } \begin{cases} b = -2 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Zapisujemy wzór funkcji: $y = \frac{2}{3}x - 2$

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia funkcja o wzorze $y = \frac{2}{3}x - 2$.

Proste równoległe

Wykresy funkcji liniowych o wzorach $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$ są **prostymi równoległymi** wtedy, gdy funkcje mają jednakowe współczynniki kierunkowe ($a_1 = a_2$).

Przykład

Podaj wzór funkcji liniowej, do której wykresu należy punkt $A = (3, -3)$, a prosta będąca jej wykresem jest równoległa do prostej będącej wykresem funkcji $y = -\frac{2}{3}x - 3$.

Rozwiązanie:

Określamy wartość współczynnika kierunkowego funkcji $a_2 = a_1 = -\frac{2}{3}$.

Zapisujemy wzór funkcji: $y = -\frac{2}{3}x + b$

Wyznaczamy wartość współczynnika b , korzystając z faktu, że do wykresu funkcji należy punkt A o współrzędnych $x = 3$ i $y = -3$. Otrzymujemy $-3 = -\frac{2}{3} \cdot 3 + b$, stąd $b = -1$.

Odpowiedź: Prosta będąca wykresem funkcji $y = -\frac{2}{3}x - 1$ spełnia warunki zadania.

Proste prostopadłe

Wykresy funkcji liniowych o wzorach $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$ są **prostymi prostopadłymi** wówczas, gdy współczynniki kierunkowe spełniają warunek: $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Przykład

Napisz wzór funkcji liniowej, do której wykresu należy punkt $A = (2, 3)$. Ponadto wiadomo, że prosta będąca jej wykresem jest prostopadła do prostej będącej wykresem funkcji $y = -\frac{2}{5}x + 6$.

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość współczynnika funkcji, której wykres jest prostą prostopadłą.

$$a_1 = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$$

Wyznaczamy wartość współczynnika b , wykorzystując informację, że punkt A o współrzędnych $x = 2$ i $y = 3$ należy do wykresu. Otrzymujemy $3 = \frac{5}{2} \cdot 2 + b$, więc $b = -2$.

Odpowiedź: Wykres funkcji $y = \frac{5}{2}x - 2$ spełnia warunki zadania.

5.4. Funkcja kwadratowa

Postać ogólna funkcji kwadratowej

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wzór ten nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**. Kierunek ramion paraboli określa współczynnik a . Jeżeli $a > 0$, to parabola ma ramiona skierowane do góry, a jeżeli $a < 0$, to parabola ma ramiona skierowane do dołu. Współczynnik c wyznacza współrzędne punktu przecięcia wykresu funkcji z osią OY .

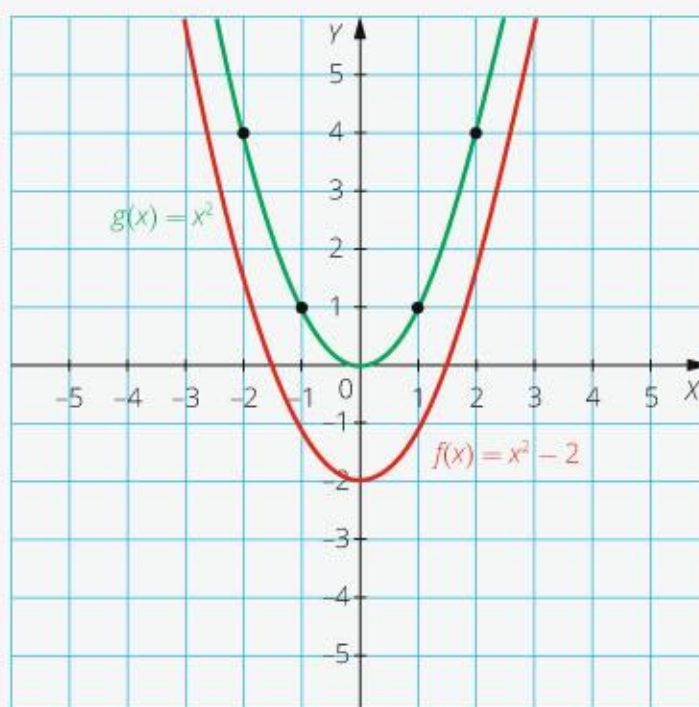
Przykład

Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

Szkicujemy wykres funkcji $g(x) = x^2$ i przesuwamy go w dół o 2.

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	4	1	0	1	4



Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego nazywamy zapis $\Delta = b^2 - 4ac$, gdzie a, b, c są współczynnikami postaci ogólnej funkcji kwadratowej. Od wyróżnika zależy liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej.

Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Współrzędne wierzchołka paraboli obliczamy ze wzorów: $x_w = \frac{-b}{2a}$, $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$.

Przykład

Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy funkcja ma miejsca zerowe. Możemy wypisać współczynniki $a = 1$, $b = 1$, $c = -6$. Obliczamy wyróżnik $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$.

Ponieważ $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-1-5}{2 \cdot 1} = -3, \quad x_2 = \frac{-1+5}{2 \cdot 1} = 2$$

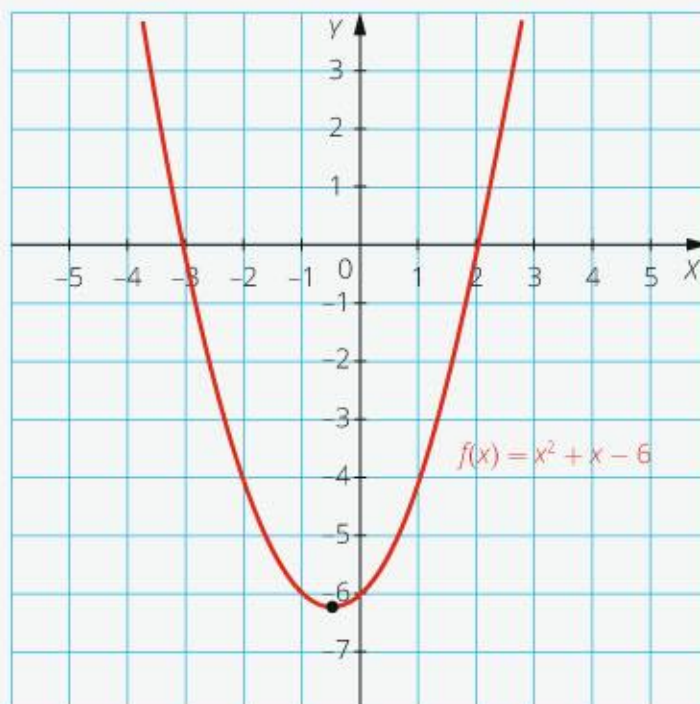




Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$x_w = \frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}, y_w = \frac{-25}{4 \cdot 1} = -6\frac{1}{4}$$

Szkicujemy wykres funkcji:



Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej opisana jest wzorem $f(x) = a(x-p)^2 + q$, $a \neq 0$, gdzie p i q są współrzędnymi wierzchołka paraboli.

Przykład

Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej $f(x) = (x+1)^2 - 4$.

Rozwiązanie:

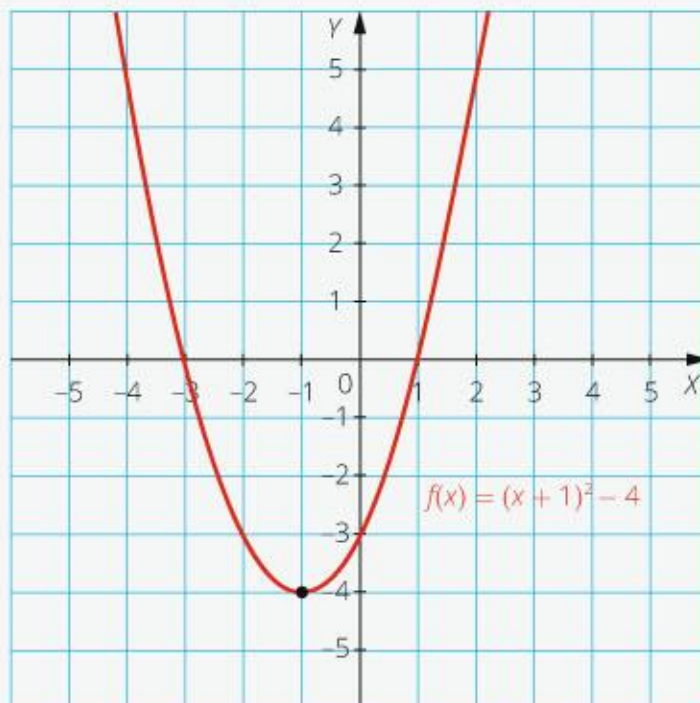
Odczytujemy ze wzoru współrzędne wierzchołka paraboli: $(-1, -4)$.

Przekształcamy wzór do postaci ogólnej: $f(x) = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x - 3$

Obliczamy wyróżnik $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

Obliczamy miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-2-4}{2 \cdot 1} = -3$, $x_2 = \frac{-2+4}{2 \cdot 1} = 1$

Szkicujemy wykres funkcji:



Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej istnieje tylko wtedy, gdy $\Delta \geq 0$.

Jeżeli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$.

Przykład

Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej $f(x) = -2(x+1)(x-2)$.

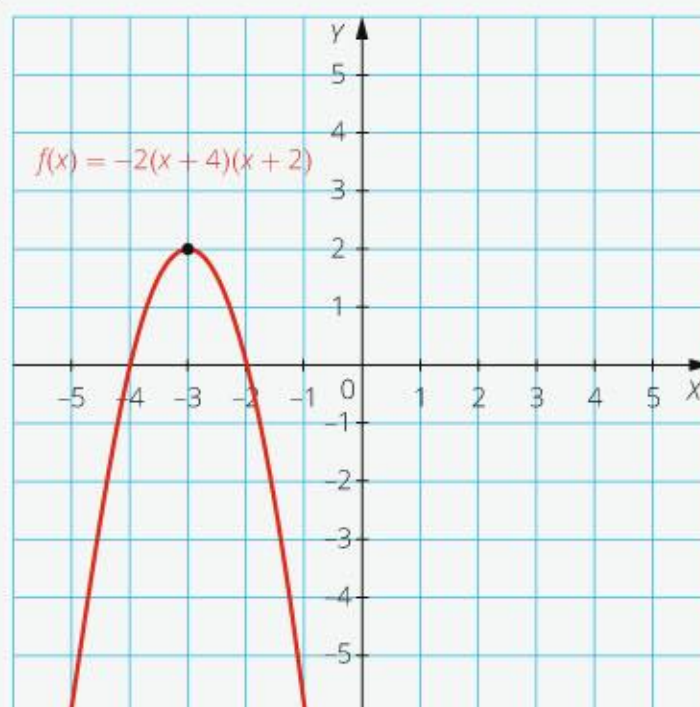
Rozwiązanie:

Odczytujemy ze wzoru miejsca zerowe: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Przekształcamy wzór do postaci ogólnej: $f(x) = -2(x+1)(x-2) = -2x^2 - 12x - 16$

Obliczamy współrzędne wierzchołka: $p = \frac{12}{2 \cdot (-2)} = -3$, $q = f(-3) = -2 \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) - 16 = 2$

Szkicujemy wykres funkcji:

**Najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale****Przykład**

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 3$ w przedziale:

- a) $\langle 0; 4 \rangle$ b) $\langle -2; 0 \rangle$

Rozwiązanie:

a) Sprawdzamy, czy wierzchołek należy do przedziału:

$$p = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1 \in \langle 0; 4 \rangle$$

Ponieważ $a > 0$, funkcja przyjmuje wartość najmniejszą w wierzchołku:

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$$

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału:

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 5$$

Wartość największa w przedziale wynosi 5, a najmniejsza wynosi -4.

b) Sprawdzamy, czy wierzchołek należy do przedziału:

$$p = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1 \notin \langle -2; 0 \rangle$$

Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału:

$$f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 5$$

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

Wartość największa w przedziale wynosi 5, a najmniejsza wynosi -3.

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej

Przykład

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej na podstawie wykresu.

Rozwiązanie:

Sposób I

Z wykresu odczytujemy miejsca zerowe $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ i zapisujemy wzór funkcji w postaci iloczynowej $f(x) = a(x+3)(x-1)$.

Wstawiamy do wzoru współrzędne wierzchołka $(-1, 4)$ i obliczamy wartość a :

$$a(-1+3)(-1-1) = 4$$

$$a = -1$$

Wzór funkcji: $f(x) = -1 \cdot (x+3)(x-1) = -x^2 - 2x + 3$

Sposób II

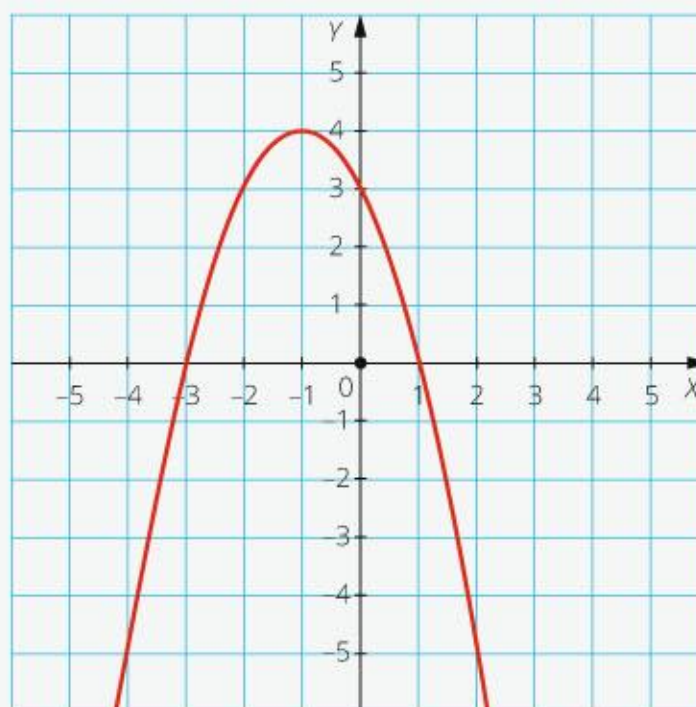
Z wykresu odczytujemy współrzędne wierzchołka $(-1, 4)$ i zapisujemy wzór funkcji w postaci kanonicznej $f(x) = a(x+1)^2 + 4$.

Wstawiamy do wzoru współrzędne jednego z miejsc zerowych $(1, 0)$ i obliczamy wartość a :

$$a(1+1)^2 + 4 = 0$$

$$a = -1$$

Wzór funkcji: $f(x) = -1 \cdot (x+1)^2 + 4 = -x^2 - 2x + 3$



5.5. Funkcja a zagadnienia geometryczne, fizyczne, kontekst praktyczny

Funkcje w zadaniach z kontekstem praktycznym

Funkcje liniowe i kwadratowe stosujemy do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych oraz umieszczonych w kontekście praktycznym.

Przykład

Funkcja $f(x) = 2x + 5$ przedstawia koszt przejechania x kilometrów w korporacji taksówkowej F, a funkcja $g(x) = 3x + 1$ – w korporacji G.

Sporządź w jednym układzie współrzędnych wykres tych funkcji i odpowiedz na pytania:

- Po przejechaniu jakiej liczby kilometrów koszt w obu korporacjach będzie taki sam?
- Ile kilometrów można przejechać w każdej z korporacji za 50 zł?

Rozwiązanie:

a) Po przejechaniu 4 kilometrów.

b) Korporacja F: $2x + 5 = 50$

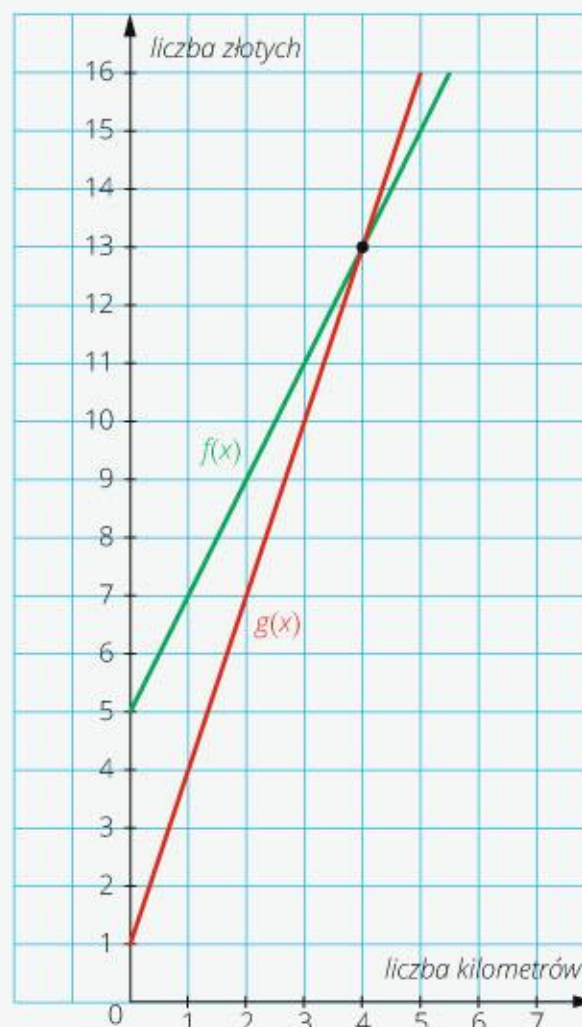
$$2x = 45$$

$$x = 22,5$$

Korporacja G: $3x + 1 = 50$

$$3x = 49$$

$$x = 16\frac{1}{3}$$



Przykład

Firma produkcyjna sprzedaje swoje wyroby po 200 zł za sztukę. Na całkowity koszt produkcji w miesiącu składają się koszty stałe w wysokości 10 tysięcy zł i koszty wyprodukowania jednego wyrobu – 50 zł.

- Jaki jest wzór funkcji opisującej koszt całkowity?
- Ile trzeba sprzedać wyrobów w miesiącu, aby firma przyniosła zysk?
- Ile wyrobów musi sprzedać firma, aby zysk był równy przynajmniej 2 tysiące złotych?

Rozwiązanie:

a) Wzór funkcji: $K(x) = 10000 + 50x$, x – liczba wyrobów

b) $200x > 10000 + 50x$

$$150x > 10000$$

$$x > 66\frac{2}{3}$$

c) $200x - 50x > 10000 + 2000$

$$150x > 12000$$

$$x > 80$$

Przykład

Dana jest funkcja $h(t) = -5t^2 + 50t$, gdzie t oznacza czas w sekundach, opisująca wysokość w metrach, jaką osiągnie ciało wyrzucone pionowo w górę.

Oblicz:

- po jakim czasie ciało osiągnęło maksymalną wysokość i ile ona wynosi,
- po jakim czasie od chwili wyrzucenia ciało spadnie na ziemię.

Rozwiązanie:

a) Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$t_w = \frac{-50}{2 \cdot (-5)} = 5 \text{ (s)}$$

$$h(5) = -5 \cdot 5^2 + 50 \cdot 5 = 125 \text{ (m)}$$

Po upływie 5 s ciało osiągnie wysokość 125 m.

b) Obliczamy miejsca zerowe funkcji:

$$-5t^2 + 50t = 0$$

$$t^2 - 10t = 0$$

$$t = 0 \text{ lub } t = 10$$

Ciało spadnie na ziemię po 10 s od momentu wyrzutu.

Przykład

Jakie wymiary ma prostokątna działka, którą możemy ogrodzić siatką o długości 100 m, zostawiając 4 m na bramę, tak aby miała jak największe pole powierzchni? Ile wynosi to pole?

Rozwiązanie:

Oznaczamy boki działki przez a i b , wtedy:

$$2(a + b) = 100 + 4$$

$$a + b = 52$$

$$b = 52 - a$$

Opisujemy pole działki $P = a \cdot b$ jako funkcję boku a :

$$P(a) = a(52 - a)$$

$$P(a) = -a^2 + 52a$$

Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$a_w = \frac{-52}{-2} = 26 \text{ (m)}$$

$$P(26) = -26^2 + 52 \cdot 26 = 676 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$b = 52 - 26 = 26 \text{ (m)}$$

Działka jest kwadratowa o boku długości 26 m i polu równym 676 m².

5.6. Szkicowanie wykresów funkcji $y = f(x - a)$, $y = f(x) + b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$

Szkicowanie wykresów funkcji

Mając dany wyjściowy wykres funkcji $f(x)$, możemy naszkicować wykresy funkcji:

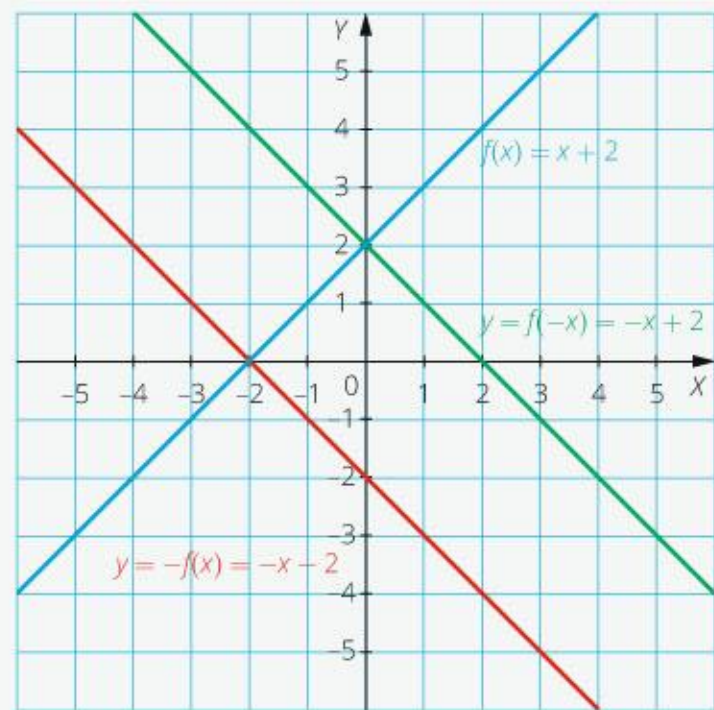
- a) $y = f(x) + b$, przesuwając wykres funkcji $f(x)$ wzdłuż osi OY o b jednostek,
- b) $y = f(x - a)$, przesuwając wykres funkcji $f(x)$ wzdłuż osi OX o a jednostek,
- c) $y = -f(x)$, odbijając symetrycznie wykres funkcji $f(x)$ względem osi OX ,
- d) $y = f(-x)$, odbijając symetrycznie wykres funkcji $f(x)$ względem osi OY .

Przykład

Dany jest wykres funkcji $f(x) = x + 2$. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = -f(x)$ oraz $y = f(-x)$.

Rozwiązanie:

Zaznaczamy w układzie współrzędnych wykres funkcji $f(x) = x + 2$ i szkicujemy wykresy funkcji $y = -f(x)$ oraz $y = f(-x)$:

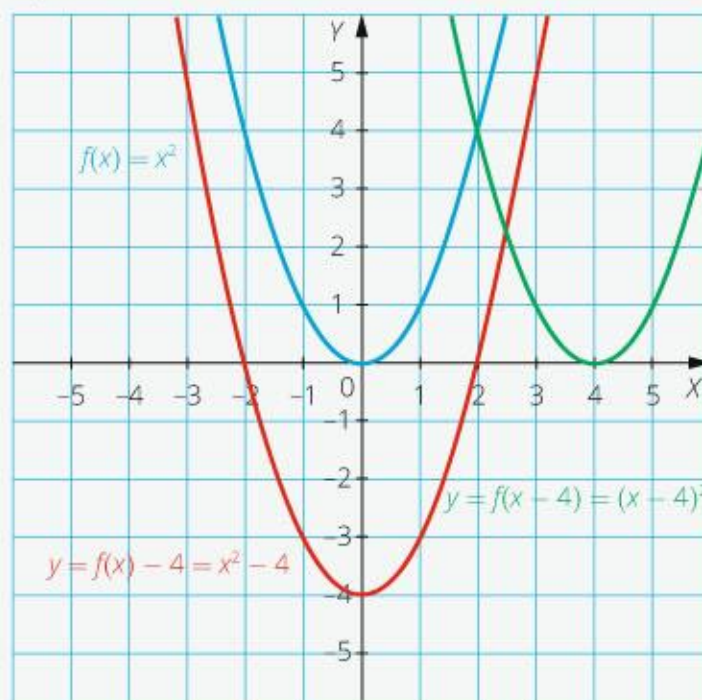


Przykład

Dany jest wykres funkcji $f(x) = x^2$. Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = f(x) - 4$ oraz $y = f(x - 4)$.

Rozwiązanie:

Zaznaczamy w układzie współrzędnych wykres funkcji $f(x) = x^2$ i szkicujemy wykresy funkcji $y = f(x) - 4$ oraz $y = f(x - 4)$:



5.7. Proporcjonalność odwrotna

Proporcjonalność odwrotna i wielkości odwrotnie proporcjonalne

Proporcjonalnością odwrotną nazywamy funkcję postaci $f(x) = \frac{a}{x}$, $x > 0$, $a > 0$.

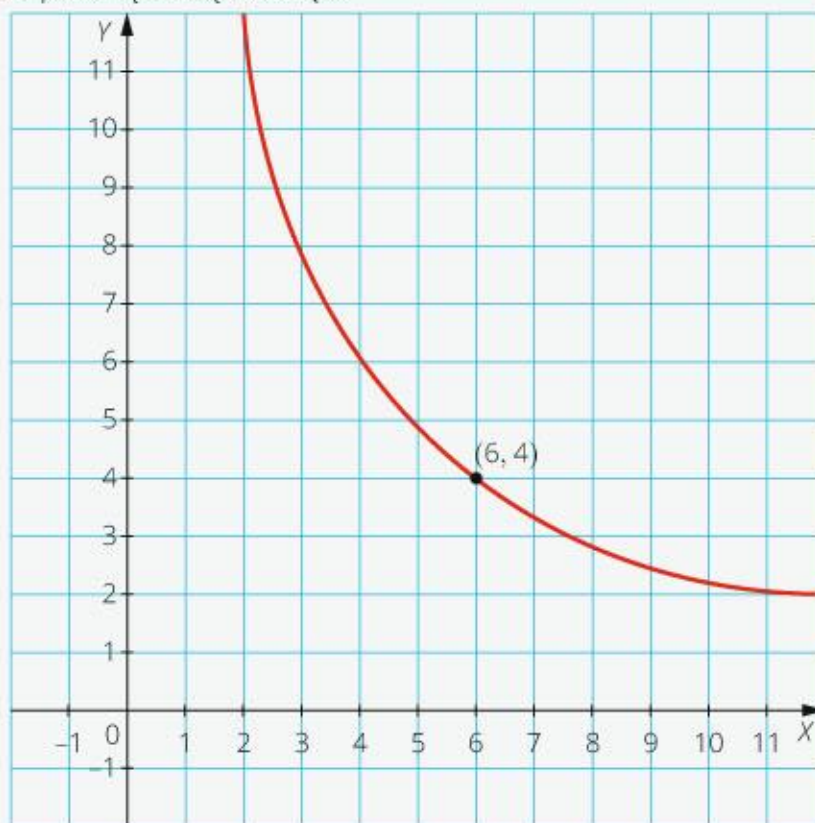
Wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi nazywamy wielkości x i y , gdy spełniona jest zależność $x \cdot y = a$.

Stała a jest **współczynnikiem proporcjonalności**.

Wykresem proporcjonalności odwrotnej jest jedna gałąź hiperboli.

Przykład

Wykres przedstawia zależność między ceną x złotych za kilogram pewnego towaru a liczbą kilogramów y , które możemy kupić za pewną stałą kwotę k .



a) Oblicz wartość k .

b) Ile kg tego towaru można kupić za kwotę k , jeżeli 1 kg będzie kosztował 3 zł?

Rozwiązanie:

a) Obliczamy iloczyn $6 \cdot 4 = 24$. Kwota $k = 24$ zł.

b) Zapisujemy wzór funkcji $f(x) = \frac{24}{x}$.

Obliczamy wartość dla argumentu 3: $f(3) = \frac{24}{3} = 8$

Można kupić 8 kg tego towaru.

Przykład

Dwóch pracowników wykonuje pewną pracę w ciągu czterech ośmiogodzinnych dni roboczych. W jakim czasie tę samą pracę wykonałoby trzech pracowników, pracując z tą samą wydajnością?

Rozwiązanie:

Obliczamy iloczyn: $2 \cdot 4 = 8$

Zapisujemy wzór funkcji: $f(x) = \frac{8}{x}$

Obliczamy wartość dla argumentu 3: $f(3) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ dniówki

Obliczamy wartość $2\frac{2}{3}$ dniówki: $\frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ h = 5 h 20 min

Trzech pracowników pracowałoby 2 dni 5 godzin i 20 minut.

5.8. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

Funkcja wykładnicza

Funkcja wykładnicza opisana jest wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest krzywa, która zawsze przecina oś OY w punkcie 1.

Przykład

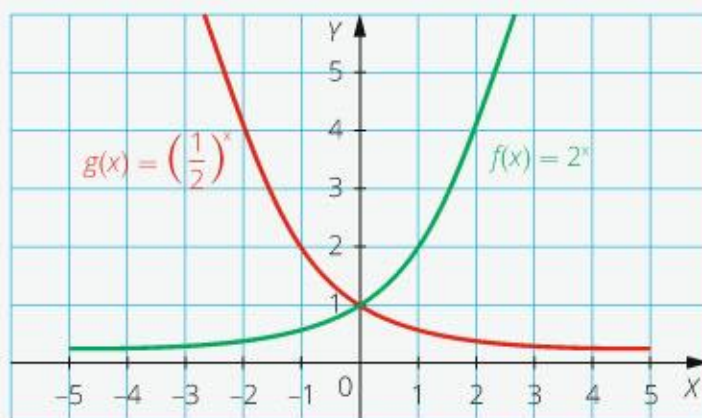
Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = 2^x$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Rozwiązanie:

Rysujemy tabelkę dla obu funkcji:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$g(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Szkicujemy wykresy:



Przykład

Stwierdzono, że liczba bakterii w pewnym doświadczeniu podwaja się w ciągu godziny.

Wiedząc, że na początku było 200 bakterii:

- napisz wzór funkcji opisującej liczbę bakterii po upływie czasu t ,
- oblicz liczbę bakterii po upływie 4 godzin od początku doświadczenia,
- oblicz, po jakim czasie liczba bakterii osiągnie 204 800.

Rozwiązanie:

a) Wzór funkcji: $f(t) = 200 \cdot 2^t$

b) Obliczamy wartość funkcji dla argumentu 4: $f(4) = 200 \cdot 2^4 = 200 \cdot 16 = 3200$

c) Obliczamy argument dla wartości funkcji 204 800:

$$204800 = 200 \cdot 2^t$$

$$2^t = 1024$$

$$2^t = 2^{10}$$

$$t = 10$$

Funkcja logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna opisana jest wzorem $f(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Wykresem tej funkcji jest krzywa, która zawsze przecina oś OX dla argumentu $x = 1$.

Przykład

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \log_2 x$ oraz $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

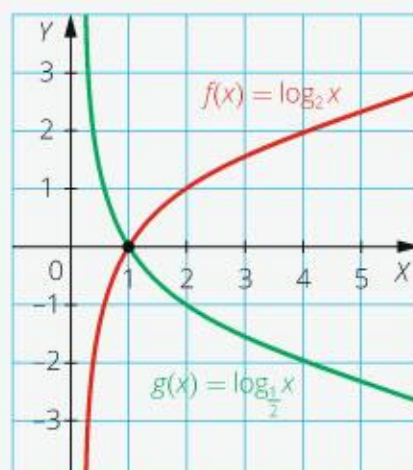
Rozwiązanie:

Rysujemy tabelkę dla obu funkcji:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	-1	0	1	2
$g(x)$	1	0	-1	-2



Szkicujemy wykresy:



Przykład

Oblicz wiek znaleziska, w którym zawartość izotopu ^{14}C jest równa 60%.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy oznaczenia: m_0 – początkowa masa próbki, m – końcowa masa próbki, t – wiek znaleziska.

Korzystamy ze wzoru $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie $T = 5700$ lat.

60% = 0,6 zatem $m = 0,6m_0$

Otrzymujemy równanie $0,6m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$, które po skróceniu przez m_0 rozwiązujemy, logarytmując obustronnie:

$$\log 0,6 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\log 0,6 = \frac{t}{5700} \cdot \log 0,5$$

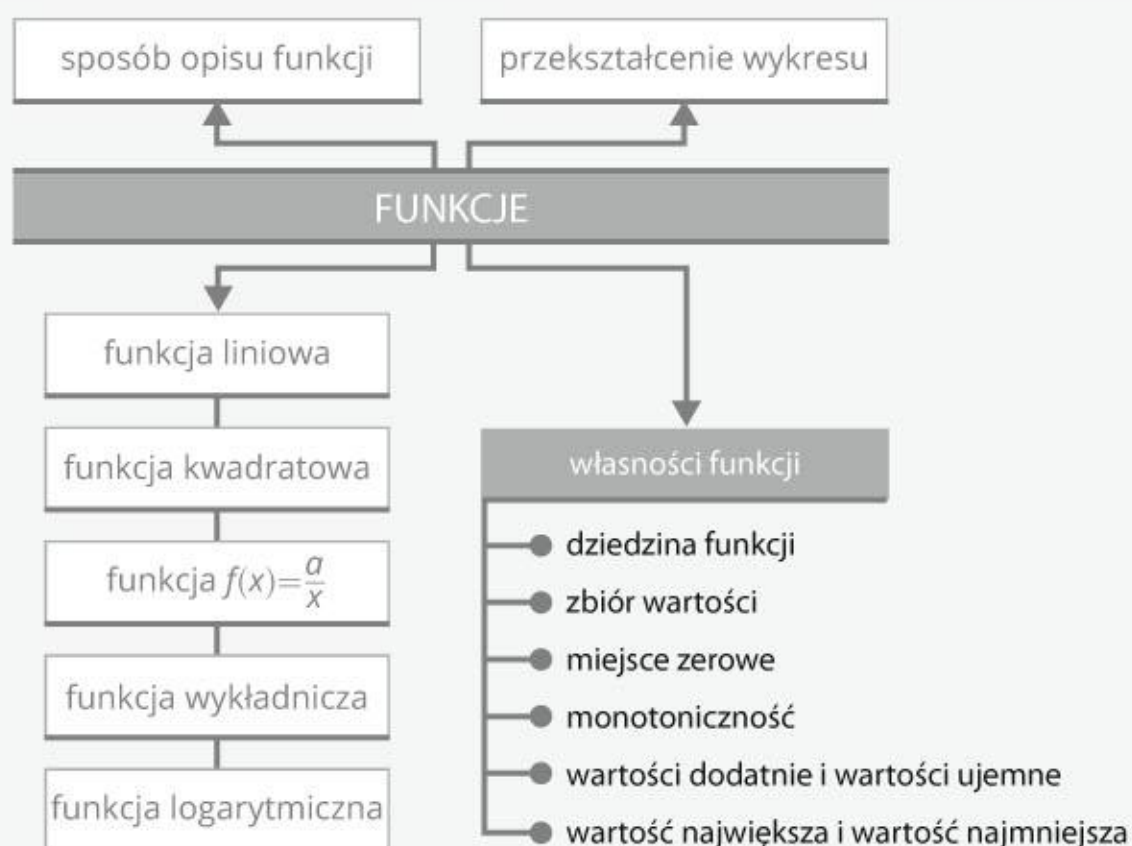
$$\frac{t}{5700} = \frac{\log 0,6}{\log 0,5}$$

$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,6}{\log 0,5}$$

$$t \approx 5700 \cdot 0,73 \approx 4161$$

Znalezisko ma około 4161 lat.

5.9. Utrwalamy wiedzę



6

Ciągi

6.1. Pojęcie ciągu. Wzór ogólny ciągu

Pojęcie ciągu

Ciągiem nazywamy funkcję określoną w zbiorze liczb całkowitych dodatnich. Wartości tej funkcji dla kolejnych liczb całkowitych dodatnich nazywamy wyrazami ciągu.

Na przykład:

Ciąg kwadratów liczb całkowitych dodatnich: 1, 4, 9, 16, 25, ...

Ciąg skończony

Jeśli dziedziną ciągu jest zbiór $\{1, 2, 3, \dots, k\}$, to ciąg jest **ciągami skończonym** k -wyrazowym. Ciąg oznaczamy wówczas następująco: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$; $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_k)$; (a_n) , gdzie $n \in \{1, 2, \dots, k\}$; (b_n) , gdzie $n \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Ciąg nieskończony

Jeśli dziedziną ciągu jest zbiór liczb naturalnych dodatnich, to ciąg jest **ciągami nieskończonym**. Ciąg oznaczamy wówczas następująco: $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, $(b_1, b_2, b_3, \dots)$, (a_n) , (b_n) .

O nieskończonym ciągu liczb naturalnych parzystych: 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... możemy powiedzieć, że:

pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 0, tzn. $a_1 = 0$, drugi wyraz tego ciągu jest równy 2, tzn. $a_2 = 2$, piąty wyraz tego ciągu jest równy 8, tzn. $a_5 = 8$.

Zapis a_n czytamy: n -ty wyraz ciągu (a_n) . Trzy kolejne wyrazy ciągu (a_n) możemy zapisać: a_n, a_{n+1}, a_{n+2} , gdzie $n \in \mathbb{N}_+$ lub a_{n-1}, a_n, a_{n+1} gdzie $n \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$.

Ciąg liczbowy

Ciągiem liczbowym nazywamy ciąg, którego wszystkie wyrazy są liczbami rzeczywistymi.

Sposoby określania ciągu

Ciąg możemy określić w następujący sposób:

1. za pomocą opisu słownego,
2. za pomocą wykresu,
3. poprzez wypisanie jego wszystkich wyrazów (dla ciągu skończonego) lub kilku początkowych wyrazów ciągu pozwalających zauważyć prawidłowość właściwą dla tego ciągu,
4. za pomocą wzoru ogólnego ciągu,
5. za pomocą wzoru rekurencyjnego ciągu.

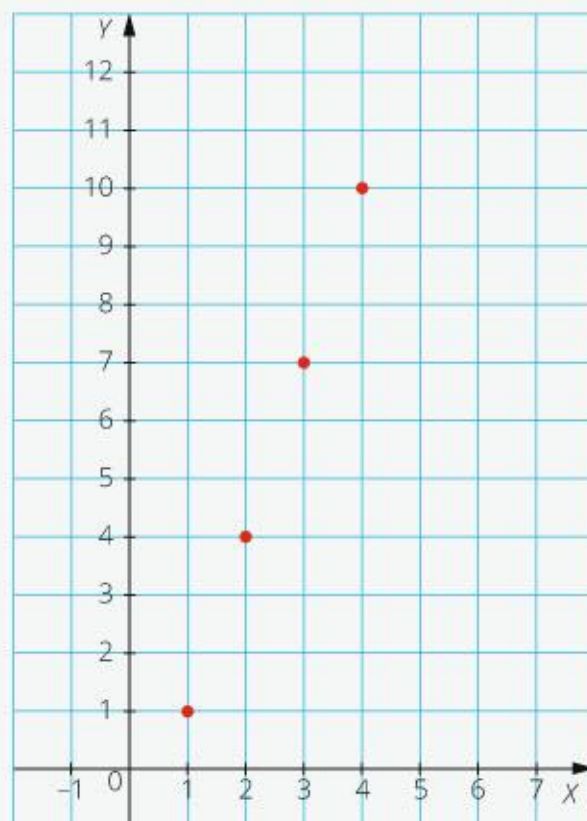
Przykład

Ciąg liczb naturalnych mniejszych od 12, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1, określ następująco:

- a) poprzez wypisanie jego wszystkich wyrazów,
- b) za pomocą wykresu.

Rozwiązanie:

- a) Szukamy liczb mniejszych od 12, które są o 1 większe od wielokrotności liczby 3. Są to liczby: 1, 4, 7, 10. Ciąg jest ciągiem skończonym i ma cztery wyrazy: $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10$.
- b) Rysujemy wykres ciągu w układzie współrzędnych. Pamiętajmy, że pierwszy wyraz ciągu jest równy 1. Stąd współrzędne pierwszego punktu to (1, 1). Drugi wyraz jest równy 4. Stąd współrzędne punktu są równe (2, 4). Trzeci wyraz to 7, a więc współrzędne punktu wynoszą (3, 7). Czwarty wyraz to 10. Zaznaczamy więc punkt o współrzędnych (4, 10).



Wzór ogólny ciągu

Wzorem ogólnym ciągu nazywamy wzór pozwalający obliczyć każdy wyraz ciągu i mający tę własność, że każdy wyraz tego ciągu jest uzależniony od numeru tego wyrazu.

Na przykład dla ciągu liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1, wyrazem ogólnym jest: $a_n = 3n - 2$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.

Przykład

Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu nieskończonego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 2^{n-1}$.

Rozwiązanie:

Obliczamy: $a_1 = 2^{1-1} = 1$, $a_2 = 2^{2-1} = 2$, $a_3 = 2^{3-1} = 4$, $a_4 = 2^{4-1} = 8$, $a_5 = 2^{5-1} = 16$

Odpowiedź: Pięć początkowych wyrazów tego ciągu to: 1, 2, 4, 8, 16.

Przykład

Dany jest ciąg nieskończony (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n+1}{8-3n}$. Wypisz wszystkie wyrazy dodatnie tego ciągu.

Rozwiązanie:

Każdy wyraz tego ciągu to ułamek $\frac{2n+1}{8-3n}$, w którym licznik $2n+1$ jest dodatni dla $n \geq 1$. Aby cały ułamek był dodatni, musi być dodatni mianownik tego ułamka. Wobec tego nierówność: $8-3n > 0$ jest spełniona dla $n < 2\frac{2}{3}$.

Stąd wynika, że dodatnie są tylko dwa początkowe wyrazy ciągu, tzn. wyraz pierwszy i wyraz drugi.

$$a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{8 - 3 \cdot 1} = \frac{3}{5} \text{ i } a_2 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{8 - 3 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

Odpowiedź: W ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n+1}{8-3n}$ wyrazami dodatnimi są: $a_1 = \frac{3}{5}$ i $a_2 = \frac{5}{2}$.

Przykład

Ciąg nieskończony (a_n) określony jest wzorem $a_n = (3n-2)^2$. Oblicz: a_5 i a_{10} .

Rozwiązanie:

$$\text{Obliczamy: } a_5 = (3 \cdot 5 - 2)^2 = 169, \quad a_{10} = (3 \cdot 10 - 2)^2 = 784$$

Odpowiedź: W ciągu określonym wzorem $a_n = (3n-2)^2$ mamy: $a_5 = 169$ i $a_{10} = 784$.

Przykład

Uzasadnij, że żaden wyraz ciągu $a_n = (2n-7)(n+6)$ nie jest równy 0.

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że któryś z wyrazów jest równy 0. Zatem: $a_n = 0$, czyli $(2n-7)(n+6) = 0$.

Otrzymujemy równania: $2n-7=0$ lub $n+6=0$

Stąd: $n=3,5$ lub $n=-6$

Żadna z tych równości nie jest prawdziwa, bo $n \in N_+$ (jest numerem wyrazu ciągu). Wobec tego w ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = (2n-7)(n+6)$ nie ma wyrazów równych zero.

Przykład

Ile wyrazów ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 7n - 10$ jest mniejszych od 20?

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, które wyrazy ciągu (a_n) są mniejsze od 20, czyli $a_n < 20$

Otrzymujemy nierówność: $n^2 - 7n - 10 < 20$

Rozwiązujemy nierówność kwadratową: $n^2 - 7n - 30 < 0$ $\Delta = 169$

Wyznaczamy pierwiastki: $n_1 = \frac{7-13}{2} = -3$ i $n_2 = \frac{7+13}{2} = 10$

Rysujemy parabolę:



Otrzymujemy rozwiązanie nierówności: $n \in (-3, 10)$. Ponadto $n \in N_+$, ponieważ n jest numerem wyrazu ciągu. Wobec tego otrzymujemy: $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Wyrazy ciągu o tych numerach są mniejsze od 20. Jest ich 9.

Odpowiedź: Jest 9 wyrazów ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 7n - 10$ mniejszych od 20.

Przykład

Oblicz sumę trzech pierwszych wyrazów ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n \cdot (n-2)$.

Rozwiązanie:

Obliczamy pierwszy, drugi i trzeci wyraz ciągu:

$$a_1 = (-1)^1 \cdot (1-2) = 1, a_2 = (-1)^2 \cdot (2-2) = 0, a_3 = (-1)^3 \cdot (3-2) = -1$$

Obliczamy sumę trzech pierwszych wyrazów ciągu:

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_3 = 1 + 0 + (-1) = 0$$

Odpowiedź: Suma trzech pierwszych wyrazów tego ciągu jest równa zero.

Przykład

Wszystkie wyrazy nieskończonego ciągu liczbowego $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$ wskazują na prawidłowość, która cechuje cztery jego początkowe wyrazy. Podaj wzór ogólny tego ciągu.

Rozwiązanie:

$$\text{Zauważamy, że } \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{3}, \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}, \text{ a } \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

$$\text{Stąd wnioskujemy, że } a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\text{Odpowiedź: Wzór ogólny tego ciągu to: } a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Przykład

Oblicz różnicę $a_{n+1} - a_n$ ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 + 2$.

Rozwiązanie:

$$\text{Wyznaczamy } a_{n+1} \text{ wyraz: } a_{n+1} = (n+1)^2 + 2$$

$$\text{Zapisujemy go w najprostszej postaci: } a_{n+1} = n^2 + 2n + 3$$

$$\text{Obliczamy różnicę } a_{n+1} - a_n. \text{ Otrzymujemy: } a_{n+1} - a_n = n^2 + 2n + 3 - (n^2 + 2)$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1$$

Odpowiedź: Różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa $2n + 1$.

Ciąg sum częściowych

Jeśli (a_n) jest nieskończonym ciągiem liczbowym, wówczas ciąg (S_n) o kolejnych wyrazach:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

nazywamy **ciąg sum częściowych** ciągu (a_n) .

Przykład

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = \frac{n(3n+2)}{2}$.

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Napisz wzór na n -ty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie:

a) Korzystamy z tego, że suma S_1 jest równa a_1 . Obliczamy: $a_1 = \frac{1(3 \cdot 1 + 2)}{2}$

$$\text{Stąd: } a_1 = \frac{5}{2}$$

Odpowiedź: Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $\frac{5}{2}$.

b) Korzystamy z zależności: $a_n = S_n - S_{n-1}$ dla $n \geq 2$

$$\text{Wyznaczamy } S_{n-1}: S_{n-1} = \frac{(n-1)[3(n-1)+2]}{2}$$

$$\text{Zapisujemy } S_{n-1} \text{ w prostszej postaci: } S_{n-1} = \frac{(n-1)(3n-1)}{2}$$

$$\text{Wyznaczamy } a_n: a_n = \frac{n(3n+2)}{2} - \frac{(n-1)(3n-1)}{2}$$

$$\text{Zapisujemy w prostszej postaci: } a_n = \frac{3n^2 + 2n - (3n^2 - 4n + 1)}{2}$$

$$\text{Otrzymujemy: } a_n = \frac{6n-1}{2}$$

Odpowiedź: Wzór na n -ty wyraz tego ciągu to $a_n = \frac{6n-1}{2}$.

6.2. Wzór rekurencyjny ciągu

Pojęcie wzoru rekurencyjnego ciągu

Określenie rekurencyjne ciągu (a_n) zawiera pierwszy wyraz tego ciągu oraz wzór, jak obliczyć $n+1$ -wszy wyraz ciągu na podstawie wyrazu n -tego.

Przykład ciągów określonych wzorem rekurencyjnym: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - 1, n \geq 1 \end{cases}, \begin{cases} a_1 = 0,1 \\ a_2 = 0,1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \geq 1 \end{cases}$.

Przykład

Ciąg (a_n) określony jest następująco $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie:

Pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -3$

Obliczamy drugi wyraz ciągu: $a_{1+1} = (-1)^1 \cdot a_1$

Otrzymujemy: $a_2 = (-1) \cdot (-3) = 3$

Obliczamy trzeci wyraz ciągu: $a_{2+1} = (-1)^2 \cdot a_2$

Otrzymujemy: $a_3 = 1 \cdot 3 = 3$

Obliczamy czwarty wyraz ciągu: $a_{3+1} = (-1)^3 \cdot a_3$

Otrzymujemy: $a_4 = (-1) \cdot 3 = -3$

Odpowiedź: Czwarty wyraz tego ciągu jest równy -3 .

Przykład

Oblicz sumę trzech początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego wzorem rekurencyjnym.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{1}{2} \\ a_{n+2} = a_n - a_{n+1}, n \geq 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = 1$

Drugi wyraz ciągu: $a_2 = \frac{1}{2}$

Obliczamy trzeci wyraz ciągu: $a_{1+2} = a_1 - a_{1+1}$

Otrzymujemy: $a_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Obliczamy sumę trzech początkowych wyrazów ciągu: $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

Otrzymujemy: $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$

Odpowiedź: Suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 2.

Przykład

Podaj wzór rekurencyjny ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = -2n^2$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy wyrazy a_1 oraz a_{n+1} ciągu (a_n) . Otrzymujemy $a_1 = -2 \cdot 1^2 = -2$, stąd $a_{n+1} = -2(n+1)^2$, czyli $a_{n+1} = a_n - 4n - 2$.

Ciąg (a_n) możemy określić rekurencyjnie na podstawie różnicy $a_{n+1} - a_n$ lub na podstawie ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$a_{n+1} - a_n = -2(n+1)^2 - (-2n^2) = -2n^2 - 4n - 2 + 2n^2 = -4n - 2$, stąd $a_{n+1} = a_n - 4n - 2$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2(n+1)^2}{-2n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$, zatem $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}$

Odpowiedź: Ciąg (a_n) możemy określić rekurencyjnie jako: $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n - 4n - 2, n \geq 1 \end{cases}$ oraz

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2}, n \geq 1 \end{cases}$$

Przykład

Podaj wzór ogólny ciągu (a_n) o wyrazie rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{-a_n + 3}{2}, n \geq 1 \end{cases}$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy kilka początkowych wyrazów tego ciągu: $a_1 = 2, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{5}{4}, a_4 = \frac{7}{8}, a_5 = \frac{17}{16}, a_6 = \frac{31}{32}$.

Zauważamy, że mianowniki są równe dla kolejnych wyrazów ciągu: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Możemy mianownik zapisać wzorem jako: 2^{n-1}

Zauważamy, że licznik jest o 1 większy dla wyrazów ciągu o numerach nieparzystych albo o 1 mniejszy od mianownika dla wyrazów ciągu o numerach parzystych.

Możemy licznik zapisać wzorem: $2^{n-1} - (-1)^n$

Otrzymujemy wzór ogólny: $a_n = \frac{2^{n-1} - (-1)^n}{2^{n-1}}$

Odpowiedź: Ciąg (a_n) określony rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{-a_n + 3}{2}, n \geq 1 \end{cases}$ ma wzór ogólny $a_n = \frac{2^{n-1} - (-1)^n}{2^{n-1}}$.

6.3. Monotoniczność ciągów

Pojęcie monotoniczności ciągu

Ciąg jest monotoniczny, jeżeli ciąg jest rosnący, malejący, nierosnący, niemalejący lub stały. O innych ciągach mówimy, że nie są monotoniczne.

Ciąg nazywamy rosnącym, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla $n \in N_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} > a_n$.

Na przykład ciąg: $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ jest ciągiem rosnącym.

Ciąg nazywamy malejącym, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla $n \in N_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} < a_n$.

Na przykład ciąg: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ jest ciągiem malejącym.

Ciąg nazywamy stałym, jeżeli wszystkie wyrazy tego ciągu są sobie równe, a więc jeżeli dla $n \in N_+$ zachodzi równość $a_{n+1} = a_n$.

Na przykład ciąg: $(3, 3, 3, 3, \dots)$ jest ciągiem stałym.

Ciąg nazywamy niemalejącym, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla $n \in N_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} \geq a_n$.

Na przykład ciąg: $(2, 2, 2, 4, 6, 8, \dots)$ jest ciągiem niemalejącym.

Ciąg nazywamy nierosnącym, jeżeli jego każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego, a więc jeżeli dla $n \in N_+$ zachodzi nierówność $a_{n+1} \leq a_n$.

Na przykład ciąg: $\left(1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ jest ciągiem nierosnącym.

Przykład ciągu niemonotonicznego: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right)$.

Przykład

Wykaż, że ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 2 - \frac{3}{n}$ jest ciągiem rosnącym.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wzór na $n+1$ -wszy wyraz ciągu: $a_{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$

Badamy znak różnicy: $a_{n+1} - a_n$. Otrzymujemy:

$$a_{n+1} - a_n = 2 - \frac{3}{n+1} - \left(2 - \frac{3}{n}\right) = \frac{3}{n} - \frac{3}{n+1} = \frac{3(n+1) - 3n}{n(n+1)} = \frac{3}{n(n+1)}$$

Iloraz $\frac{3}{n(n+1)}$ jest dodatni, ponieważ licznik jest dodatni i mianownik jest dodatni (liczby n i $n+1$ są dodatnie).

Stąd: $a_{n+1} - a_n > 0$, czyli: $a_{n+1} > a_n$

Wniosek: Ciąg jest rosnący.

Przykład

Wykaż, że ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n+3}{n+2}$ jest ciągiem malejącym.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wzór na $n+1$ -wszy wyraz ciągu: $a_{n+1} = \frac{(n+1)+3}{(n+1)+2}$

Otrzymujemy: $a_{n+1} = \frac{n+4}{n+3}$

Badamy znak różnicy: $a_{n+1} - a_n$. Otrzymujemy:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+4}{n+3} - \frac{n+3}{n+2} = \frac{(n+4)(n+2) - (n+3)^2}{(n+3)(n+2)} = \frac{n^2 + 6n + 8 - n^2 - 6n - 9}{(n+3)(n+2)} = \frac{-1}{(n+3)(n+2)}$$



Iloraz $\frac{-1}{(n+3)(n+2)}$ jest ujemny, ponieważ licznik jest ujemny, a mianownik jest dodatni.

Stąd: $a_{n+1} - a_n < 0$, czyli: $a_{n+1} < a_n$

Wniosek: Ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n+3}{n+2}$ jest malejący.

Przykład

Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = n^2 - 6n$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wzór na $n+1$ -wszy wyraz ciągu: $a_{n+1} = (n+1)^2 - 6(n+1)$

Po doprowadzeniu go do najprostszej postaci otrzymujemy: $a_{n+1} = n^2 - 4n - 5$

Badamy znak różnicy: $a_{n+1} - a_n$. Otrzymujemy: $a_{n+1} - a_n = n^2 - 4n - 5 - (n^2 - 6n) = 2n - 5$

Różnica $2n - 5$ jest dodatnia dla $n > 2,5$. Ponadto różnica $2n - 5$ jest ujemna dla $n < 2,5$.

Różnica $a_{n+1} - a_n$ może być dla pewnych wyrazów ciągu dodatnia oraz dla pewnych wyrazów ciągu ujemna.

Wniosek: Ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

Przykład

Wykaż, że ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ jest ciągiem stałym.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wzór na $n+1$ -wszy wyraz ciągu: $a_{n+1} = (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2}$

Badamy znak różnicy: $a_{n+1} - a_n$. Otrzymujemy: $a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} - [(-1)^n + (-1)^{n+1}] = (-1)^{n+2} - (-1)^n$

Dla n będącego liczbą parzystą otrzymujemy: $1 - 1 = 0$

Dla n będącego liczbą nieparzystą otrzymujemy: $-1 + 1 = 0$

Stąd wynika, że różnica $a_{n+1} - a_n$ zawsze równa jest zero. Oznacza to, że $a_{n+1} = a_n$.

Wniosek: Ciąg (a_n) jest ciągiem stałym.

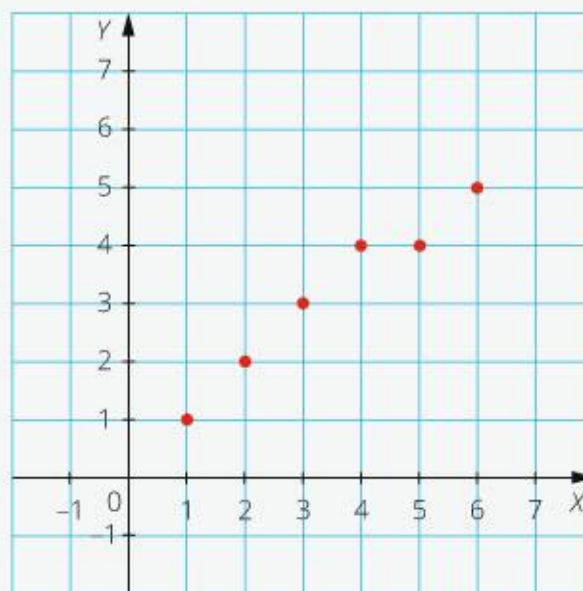
Przykład

Na rysunku przedstawiono wykres pewnego ciągu skończonego. Na podstawie wykresu określ monotoniczność ciągu, a następnie odczytaj wszystkie wyrazy ciągu.

Rozwiązanie:

Ciąg jest ciągiem niemalejącym, ponieważ każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest nie mniejszy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego.

Wyrazy ciągu: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 4, a_6 = 5$.



6.4. Ciąg arytmetyczny

Pojęcie ciągu arytmetycznego

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy (a_n) , jeżeli istnieje taka liczba r , że każdy wyraz (oprócz pierwszego) powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego:

$$a_{n+1} = a_n + r, \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}_+$$

Różnicą ciągu (a_n) nazywamy liczbę r .



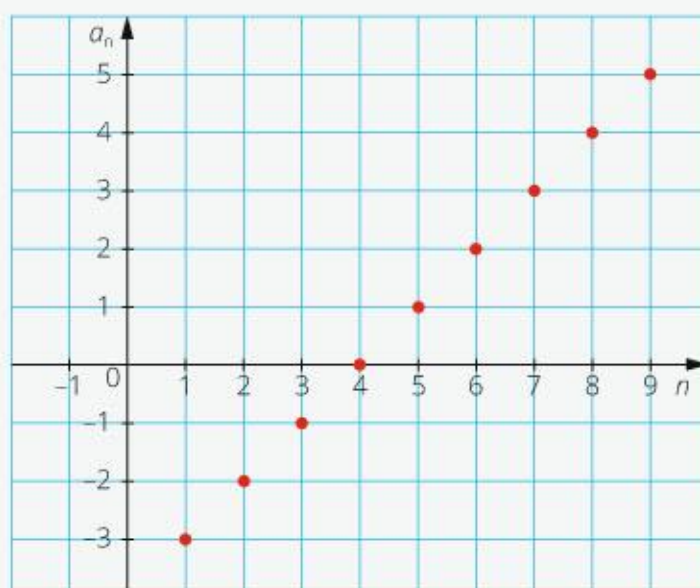


Przykład

Podaj różnicę ciągu arytmetycznego: 2, 6, 10, 14, ...

$$r = 6 - 2 = 4$$

Rysunek przedstawia wykres ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem $a_n = n - 4$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.



Wykres ciągu arytmetycznego zawsze składa się z punktów leżących na prostej.

Przykład

Uzasadnij, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 2n + 3$ jest arytmetyczny.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy różnica kolejnych wyrazów jest liczbą rzeczywistą.

$$a_{n+1} - a_n = [2(n+1) + 3] - (2n + 3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$$

Odpowiedź: Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, ponieważ różnica kolejnych wyrazów wynosi 2.

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$, pierwszym wyrazie ciągu a_1 i różnicy r wyraża się wzorem: $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę, to korzystając ze wzoru ogólnego tego ciągu, możemy obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład

Wyznacz trzeci, piąty oraz dwudziesty wyraz ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = -3n + 10$.

Rozwiązanie:

$$a_3 = -3 \cdot 3 + 10 = 1$$

$$a_5 = -3 \cdot 5 + 10 = -5$$

$$a_{20} = -3 \cdot 20 + 10 = -50$$

Przykład

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, jeśli jego szósty wyraz wynosi 4, a dziewiętnasty to 30.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $a_6 = 4$ oraz $a_{19} = 30$.

Ze wzoru na wyraz ogólnego ciągu arytmetycznego mamy:

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + (6-1)r \\ a_{19} = a_1 + (19-1)r \end{cases}$$

$$\text{czyli } \begin{cases} 4 = a_1 + 5r \\ 30 = a_1 + 18r \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} a_1 = -6 \\ r = 2 \end{cases}$$

Zatem wzór ogólny ma postać: $a_n = -6 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 8$.

Odpowiedź: Ciąg arytmetyczny opisuje wzór $a_n = 2n - 8$.

Monotoniczność ciągu arytmetycznego

Ciąg arytmetyczny jest zawsze ciągiem monotonicznym. Jest **rosnący**, gdy różnica ciągu jest dodatnia ($r > 0$), **malejący**, gdy różnica jest ujemna ($r < 0$), lub **stały**, gdy różnica równa jest zero ($r = 0$).

Przykład

Określ monotoniczność ciągu arytmetycznego.

a) $a_n = 1 - n$

b) $b_n = 2$

c) $c_n = 5n - 1$

Rozwiązanie:

a) Wyznaczamy różnicę ciągu (a_n) .

$$r = a_{n+1} - a_n = [1 - (n+1)] - (1 - n) = 1 - n - 1 - 1 + n = -1$$

$r < 0$, więc ciąg (a_n) jest malejący.

b) Wyznaczamy różnicę ciągu (b_n) .

$$r = b_{n+1} - b_n = 2 - 2 = 0$$

$r = 0$, więc ciąg (b_n) jest stały.

c) Wyznaczamy różnicę ciągu (c_n) .

$$r = c_{n+1} - c_n = [5(n+1) - 1] - (5n - 1) = 5n + 5 - 1 - 5n + 1 = 5$$

$r > 0$, więc ciąg (c_n) jest rosnący.

Zależność między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego

W ciągu arytmetycznym (a_n) każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

Przykład

Wyznacz wartość x , jeśli liczby: $-2, x, 14$ tworzą ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy średnią arytmetyczną liczb: $-2, 14$.

$$x = \frac{-2 + 14}{2} = 6$$

Odpowiedź: Liczba x jest równa 6.

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$ jest równa średniej arytmetycznej wyrazów pierwszego i ostatniego pomnożonej przez liczbę wyrazów:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Przykład

Oblicz sumę, której składniki są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego: $2, 5, 8, \dots, 47, 50$.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $a_1 = 2, a_n = 50, r = 5 - 2 = 3$

Obliczamy liczbę wyrazów ciągu ze wzoru na wyraz ogólnego ciągu arytmetycznego.

$$50 = 2 + (n-1) \cdot 3$$

zatem $n = 17$

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy:

$$S_{17} = \frac{2 + 50}{2} \cdot 17 = 442$$

Odpowiedź: Suma wynosi 442.





Do obliczania **sumy n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego** (a_n) określonego dla $n \geq 1$,

o różnicy r możemy wykorzystać również wzór $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$.

Przykład

Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) , jeśli pierwszy wyraz tego ciągu wynosi -6 , a różnica jest równa 4 .

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $a_1 = -6$, $r = 4$, $n = 20$

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy:

$$S_{20} = \frac{2 \cdot (-6) + (20-1) \cdot 4}{2} \cdot 20 = 640$$

Odpowiedź: Suma wynosi 640.

6.5. Ciąg geometryczny

Pojęcie ciągu geometrycznego

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg **liczbowy** (a_n) , jeżeli istnieje taka liczba q , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Ilorazem ciągu (a_n) nazywamy liczbę q .

Przykład

Podaj iloraz ciągu geometrycznego: $2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots$

$$q = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla dowolnego $n \geq 1$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Przykład

Uzasadnij, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 2 \cdot 5^n$ jest geometryczny.

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy iloraz kolejnych wyrazów nie zależy od n .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 5^{n+1}}{2 \cdot 5^n} = 5$$

Odpowiedź: Ciąg (a_n) jest geometryczny, ponieważ iloraz kolejnych wyrazów wynosi 5.

Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie ciągu a_1 i ilorazie q wyraża się wzorem postaci: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu geometrycznego arytmetycznego i jego iloraz, to korzystając ze wzoru ogólnego tego ciągu, możemy obliczyć jego dowolny wyraz.

Przykład

Wyznacz drugi, czwarty oraz dziewiąty wyraz ciągu geometrycznego określonego wzorem $a_n = 3 \cdot (-2)^n$.

Rozwiązanie:

$$a_2 = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = 12$$

$$a_4 = 3 \cdot (-2)^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

$$a_9 = 3 \cdot (-2)^9 = 3 \cdot (-512) = -1536$$

Przykład

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego, jeśli wiadomo, że jego drugi wyraz wynosi -4 , a piąty to -32 .

Rozwiązanie:

Wiemy, że $a_2 = -4$ oraz $a_5 = -32$.

Ze wzoru na wyraz ogólnego ciągu geometrycznego mamy:

$$\begin{cases} -4 = a_1 \cdot q \\ -32 = a_1 \cdot q^4 \end{cases}$$

Dzielimy stronami drugie równanie przez pierwsze:

$$\frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q} = \frac{-32}{-4} = 8$$

Stąd: $q^3 = 8$, czyli: $q = 2$

Dla $q = 2$ mamy $a_1 = -2$, zatem wzór ogólny ciągu wyraża się wzorem $a_n = -2 \cdot 2^{n-1} = -2^n$.

Odpowiedź: Ciąg jest opisany wzorem $a_n = -2^n$.

Monotoniczność ciągu geometrycznego

Ciąg geometryczny jest monotoniczny tylko wówczas, gdy iloraz jest liczbą nieujemną $q \geq 0$. Jest **rosnący**, gdy $q > 1$ i $a_1 > 0$ lub $0 < q < 1$ i $a_1 < 0$, **malejący**, gdy $q > 1$ i $a_1 < 0$ lub $0 < q < 1$ i $a_1 > 0$, bądź **stały**, gdy $q = 1$ lub $a_1 = 0$.

Przykład

Określ monotoniczność ciągu.

a) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $b_n = 5^n$ c) $c_n = -2$

Rozwiązanie:

Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu oraz iloraz.

$$\text{a) } a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$$

Skoro $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$, ciąg jest malejący.

Odpowiedź: Ciąg (a_n) jest malejący.

b) Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu oraz iloraz.

$$b_1 = 5, q = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5$$

Skoro $b_1 > 0$ i $q > 1$, ciąg jest rosnący.

Odpowiedź: Ciąg (b_n) jest rosnący.

c) Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu oraz iloraz.

$$c_1 = -2, q = \frac{-2}{-2} = 1$$

Skoro $q = 1$, ciąg jest stały.

Odpowiedź: Ciąg (c_n) jest stały.

Zależność między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego

Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat każdego wyrazu ciągu, oprócz pierwszego (i ewentualnie ostatniego), jest równy iloczynowi wyrazu poprzedniego i następnego: $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

Przykład

Liczby: x , $3x$, 27 są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Wyznacz wartość x .

Rozwiązanie:

Ze wzoru $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ mamy:

$$(3x)^2 = 27x$$



Zatem $9x^2 - 27x = 0$, zatem $9x(x - 3) = 0$, stąd $x = 0$ lub $x = 3$. Skoro ciąg jest rosnący, to $x = 3$.

Odpowiedź: Dla $x = 3$ liczby x , $3x$, 27 są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$, o ilorazie $q \neq 1$

wyraża się wzorem: $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Przykład

Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego: 4, 8, 16, ...

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $a_1 = 4$, $q = \frac{8}{4} = 2$.

Ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego mamy:

$$S_8 = 4 \cdot \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 4 \cdot \frac{1 - 256}{-1} = 1020$$

Odpowiedź: Suma wynosi 1020.

6.6. Procent składany

Pojęcie procentu składanego

Jeśli w banku złożymy kapitał w wysokości k na rok przy oprocentowaniu rocznym r , to wzrośnie on po roku do kwoty $k(1 + r)$.

Przykład

Pani Maria wpłaciła do banku 10 000 zł na lokatę oprocentowaną 3,5% w skali roku. Jaką kwotę będzie mogła wypłacić z banku po 4 latach?

Rozwiązanie:

Wyznaczamy kwotę po roku: $10\,000(1 + 0,035) = 10\,350$ (zł)

Wyznaczamy kwotę po 2 latach: $10\,350(1 + 0,035) = 10\,712,25$ (zł)

Wyznaczamy kwotę po 3 latach: $10\,712,25(1 + 0,035) \approx 11\,087,18$ (zł)

Wyznaczamy kwotę po 4 latach: $11\,087,18(1 + 0,035) \approx 11\,475,23$ (zł)

Odpowiedź: Pani Maria będzie mogła wypłacić 11 475,23 zł

Procent składany to sposób oprocentowania lokat pieniężnych polegający na doliczaniu odsetek od złożonego kapitału (kapitalizacja odsetek) i oprocentowanie go w następnym okresie. Zastosowanie reguły procentu składanego daje szybszy wzrost wartości kapitału niż zastosowanie procentu prostego. Im częstsza kapitalizacja, tym szybciej wzrasta kapitał.

Procent składany służy głównie do obliczania kapitału, jaki będziemy mieć na lokacie po określonym czasie.

Procent składany na n lat

Jeśli w banku złożymy kapitał k na n lat na **procent składany** przy oprocentowaniu rocznym r , to po n latach wzrośnie on do kwoty $k(1 + r)^n$.

Przykład

Kapitał w wysokości 5000 zł został złożony w banku na 5 lat. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu, jeżeli kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie wynosiło 4%.

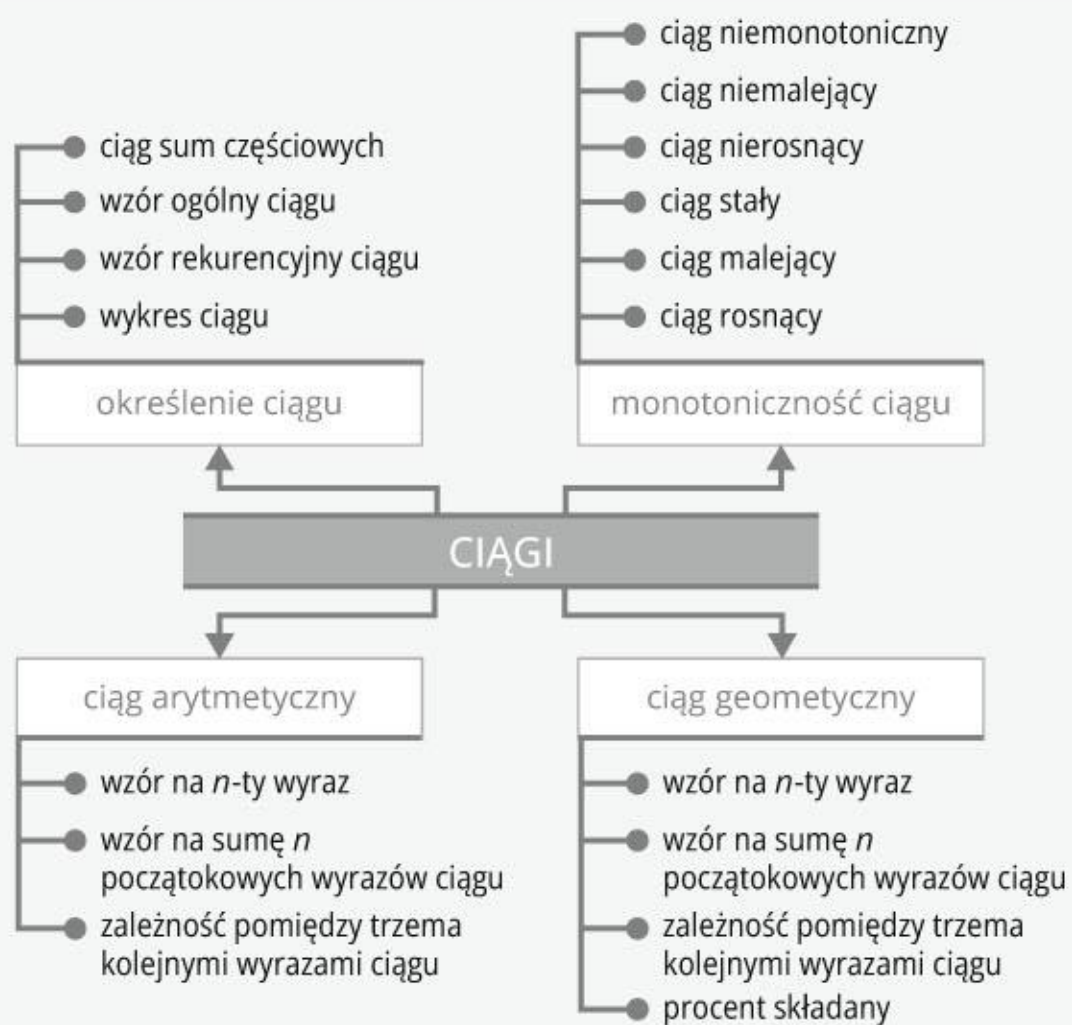
Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $k = 5000$ zł, $r = 4\%$, $n = 5$

Wyznaczamy kwotę po 5 latach: $5000(1 + 0,04)^5 \approx 6083,26$ (zł)

Odpowiedź: Wielkość kapitału wyniesie 6083,26 zł.

6.7. Utrwalamy wiedzę



7

Trygonometria

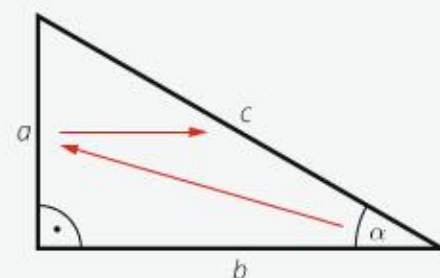
7.1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego wyrażają stosunki długości odpowiednich boków trójkąta prostokątnego, którego jednym z kątów jest kąt α .

Sinusem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

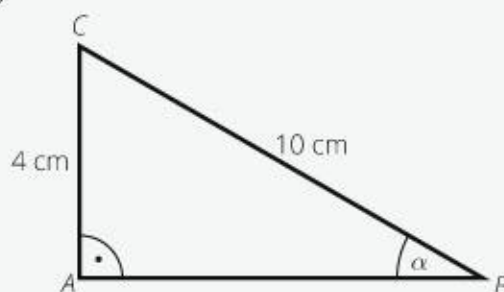


Przykład

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna AC ma długość 4 cm, a przeciwprostokątna $BC = 10$ cm. Oblicz sinus kąta ABC .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



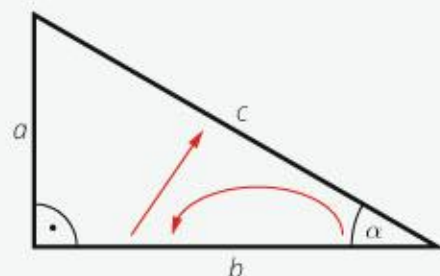
Miarę kąta ABC oznaczamy jako α .

Wyznaczamy sinus kąta ABC :

$$\sin \alpha = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Cosinusem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

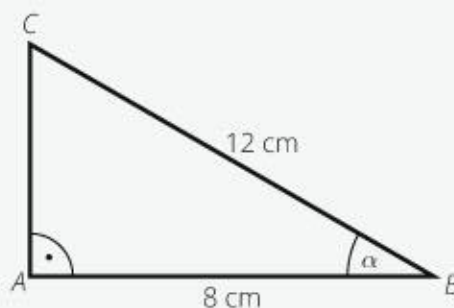


Przykład

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna AB ma długość 8 cm, a przeciwprostokątna $BC = 12$ cm. Oblicz cosinus kąta ABC .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



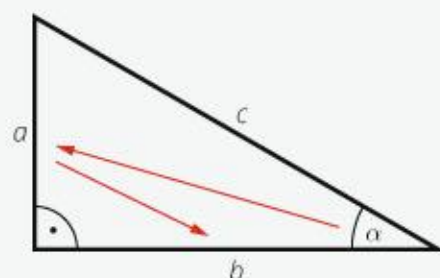
Miarę kąta ABC oznaczamy jako α .

Wyznaczamy cosinus kąta ABC :

$$\cos \alpha = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Tangensem kąta ostrego nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



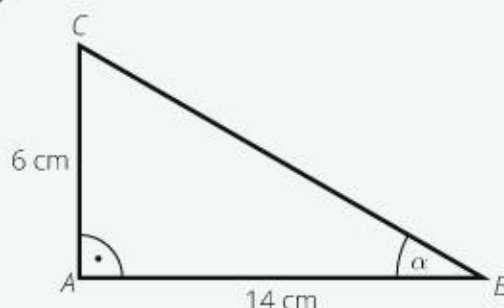


Przykład

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna AC ma długość 6 cm, a przyprostokątna $AB = 14$ cm. Oblicz tangens kąta ABC .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Miarę kąta ABC oznaczamy jako α .

Wyznaczamy tangens kąta ABC :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

Zastosowanie funkcji trygonometrycznych kąta ostrego

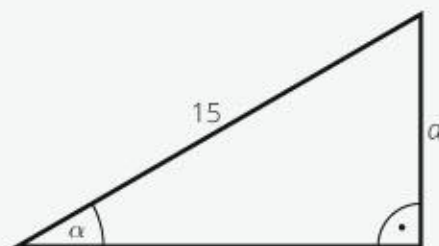
Funkcje trygonometryczne możemy wykorzystywać do obliczania długości boków trójkątów prostokątnych.

Przykład

Długość przeciwprostokątnej w pewnym trójkącie prostokątnym jest równa 15 cm. Oblicz długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta, którego sinus jest równy $\frac{3}{5}$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Długości szukanej przyprostokątnej oznaczamy jako a , miarę kąta jako α .

Wyznaczamy długość przyprostokątnej z definicji funkcji sinus:

$$\sin \alpha = \frac{a}{15}$$

Ponieważ $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, zatem:

$$\frac{a}{15} = \frac{3}{5}, \text{ stąd } a = 9 \text{ cm}$$

Zależności między funkcjami trygonometrycznymi

Z definicji funkcji trygonometrycznych z łatwością zauważamy, że w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α i β :

$$\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta \text{ oraz } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Ponieważ w trójkącie prostokątnym suma miar kątów ostrych wynosi 90° , zatem $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Wynika stąd, że:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}$$

Przykład

Wiedząc, że $\cos 64^\circ = 0,4384$, oblicz wartość $\sin 26^\circ$.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że $64^\circ + 26^\circ = 90^\circ$.

Obliczamy wartość sinusa ze związku $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ i otrzymujemy:

$$\cos 64^\circ = \sin(90^\circ - 64^\circ) = \sin 26^\circ = 0,4384$$

7.2. Tablice wartości funkcji trygonometrycznych

Odczytywanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego

Wartości $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ zależą wyłącznie od miary kąta α , a nie zależą od wielkości trójkąta. Jeśli znamy miarę kąta, to wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta możemy obliczyć za pomocą kalkulatora lub odczytać z tablic trygonometrycznych. I na odwrót – jeśli znamy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej danego kąta, możemy znaleźć jego miarę.

Z fragmentu tablic zamieszczonych tutaj możemy odczytać przybliżone wartości funkcji sinus, cosinus i tangens.

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
0	0,0000	0,0000	90
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	0,1736	0,1763	80
30	0,5000	0,5774	60
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45
60	0,8660	1,7321	30
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	0,9397	2,7475	20

$$\sin 33^\circ = 0,5446, \cos 9^\circ = 0,9877, \operatorname{tg} 65^\circ = 2,1445$$

Przykład

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, oblicz $\sin 5^\circ + \cos 67^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ$.

Rozwiązanie:

Odczytujemy wartości funkcji trygonometrycznych w tablicach:

$$\sin 5^\circ = 0,0872$$

$$\cos 67^\circ = 0,3907$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = 0,7002$$

Obliczamy wartość wyrażenia:

$$\sin 5^\circ + \cos 67^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 0,0872 + 0,3907 - 0,7002 = -0,2223$$

Za pomocą tablic możemy również znaleźć miarę kąta, gdy znamy przybliżoną wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.



Przykład

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, podaj przybliżoną miarę kąta α z dokładnością do 0,0001, dla którego:

a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$

b) $\cos \alpha = \frac{4}{7}$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 2$

Rozwiązanie:

a) Znajdujemy rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{2}{3}$ z dokładnością do 0,0001. To w przybliżeniu 0,6667.
Zatem: $\sin \alpha \approx 0,6667$

Odczytujemy w tablicach miarę kąta: $\alpha \approx 42^\circ$

b) Znajdujemy rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{4}{7}$ z dokładnością do 0,0001: $\frac{4}{7} \approx 0,5714$
Zatem: $\cos \alpha \approx 0,5714$

Odczytujemy w tablicach miarę kąta: $\alpha \approx 55^\circ$

c) Odczytujemy w tablicach miarę kąta: $\alpha \approx 63^\circ$

Zastosowanie funkcji trygonometrycznych w zadaniach z kontekstem praktycznym

Funkcje trygonometryczne możemy wykorzystywać również do obliczania wielu rzeczywistych wielkości, które są trudne do zmierzenia w inny, bezpośredni sposób.

Przykład

Drzewo mające 18 m wysokości rzuca cień o długości 26 m. Wyznacz kąt padania promieni słonecznych.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

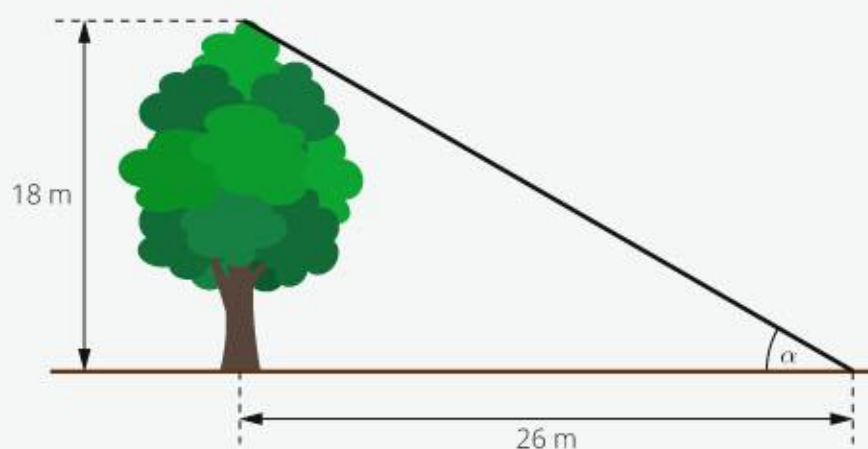
Wyznaczamy kąt padania α z funkcji tangens:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{18}{26}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx 0,6923$$

Zatem:

$$\alpha \approx 35^\circ$$

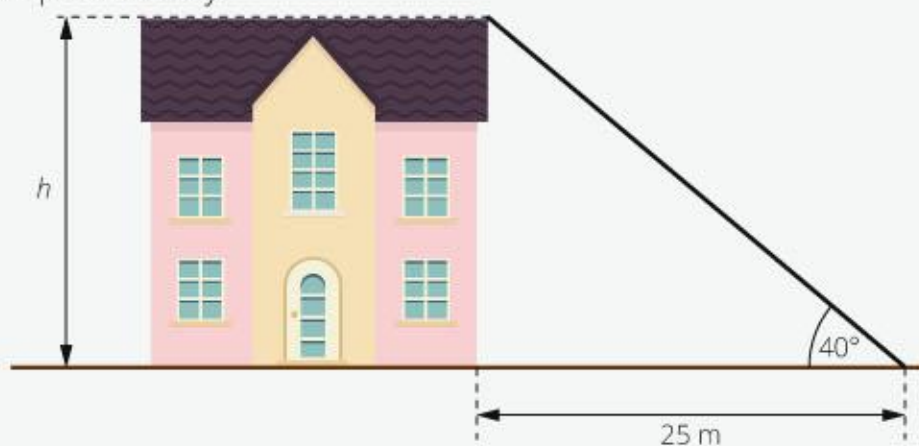


Przykład

Oblicz wysokość budynku, którego cień ma długość 25 m, wiedząc, że kąt padania promieni słonecznych wynosi 40° . Wynik podaj z dokładnością do 0,01 m.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Wyznaczamy wysokość budynku h z funkcji tangens:

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{h}{25}$$

$$0,8391 = \frac{h}{25}$$

$$h \approx 20,98 \text{ m}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° , 60°

Dla większości kątów wartości funkcji trygonometrycznych, które można odczytać z tablic trygonometrycznych, podane są w przybliżeniu. Dla niektórych kątów, np. 30° , 45° , 60° , można podać dokładne wartości funkcji trygonometrycznych. Wartości te zapisane są w poniższej tabeli:

Funkcja	Kąt α		
	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Przykład

Oblicz, korzystając z danych w tabeli.

a) $\operatorname{tg} 30^\circ + \sin 30^\circ$

b) $\cos 30^\circ : \operatorname{tg} 60^\circ$

c) $\sin^2 45^\circ - \cos^2 30^\circ$

Rozwiązanie:

$$\text{a) } \operatorname{tg} 30^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{6}$$

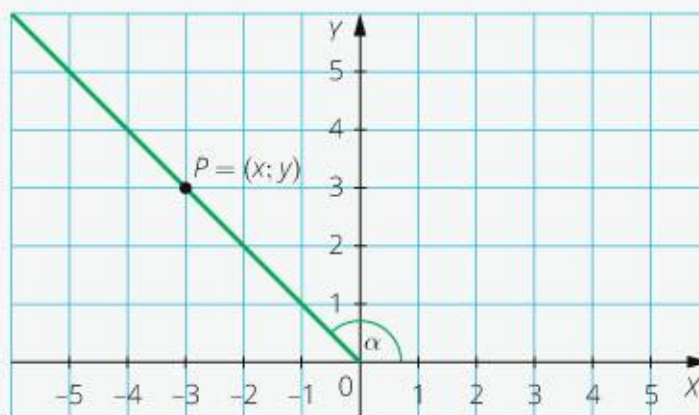
$$\text{b) } \cos 30^\circ : \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \sin^2 45^\circ - \cos^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

7.3. Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Funkcje trygonometryczne kąta wypukłego

Jeżeli kąt $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ umieścimy w układzie współrzędnych (tak jak na rysunku) i na ramieniu końcowym tego kąta obierzemy punkt $P = (x, y)$, różny od $(0, 0)$, to możemy zapisać funkcje trygonometryczne kąta α za pomocą współrzędnych punktu P (tzn. liczb x i y) oraz długości r odcinka OP .



Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \text{ gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej punktu P do odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \text{ gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej punktu P do odciętej tego punktu.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdzie } x \neq 0$$



Przykład

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli do ramienia końcowego tego kąta należy punkt:

a) $P = (3, 4)$ b) $P = (-5, 12)$

Rozwiązanie:

a) Wypisujemy dane:

$$x = 3, y = 4$$

Obliczamy odległość r punktu P od początku układu współrzędnych:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Wyznaczamy wartości funkcji trygonometrycznych:

Skoro:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \text{ zatem } \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \text{ zatem } \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ zatem } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

b) Wypisujemy dane:

$$x = -5, y = 12$$

Obliczamy odległość r punktu P od początku układu współrzędnych:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Wyznaczamy wartości funkcji trygonometrycznych:

Skoro:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \text{ zatem } \sin \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \text{ zatem } \cos \alpha = -\frac{5}{13}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ zatem } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$$

Dla $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

Dla $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ zachodzą nierówności: $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Wzory redukcyjne

Aby łatwo wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych dla dowolnego kąta możemy korzystać ze wzorów redukcyjnych.

Wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta α możemy wyrazić za pomocą odpowiedniej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego, korzystając np. z poniższych wzorów.

Dla $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ zachodzą następujące zależności:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \text{ gdzie } \alpha \neq 0 \text{ i } \alpha \neq 180^\circ$$

Przykład

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150° .

Rozwiązanie:

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150° za pomocą odpowiedniej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

7.4. Związki między funkcjami trygonometrycznymi

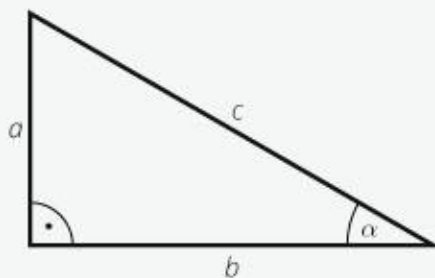
Tożsamości trygonometryczne

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość prawdziwą dla wszystkich wartości kąta, dla których ta równość jest określona.

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



Przykład

Uzasadnij prawdziwość powyższych równości.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia w trójkącie prostokątnym jak na rysunku.

I zależność (jedynka trygonometryczna):

Zapisujemy twierdzenie Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$ oraz zależności na sinus i cosinus kąta α : $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

$$\text{ i } \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Zapisujemy lewą stronę pierwszej równości i podstawiamy ilorazy za sinus i cosinus kąta:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

Przekształcamy prawą stronę równości. Otrzymujemy: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$

Podstawiamy zależność wynikającą z twierdzenia Pitagorasa. Otrzymujemy: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

II zależność:

$$\text{Zapisujemy iloraz: } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$$

Po uproszczeniu prawej strony otrzymujemy: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$.

Przykład

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{4 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{4 \cos \alpha + 3 \sin \alpha}$, jeśli kąt α jest ostry, a $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Skoro $\operatorname{tg} \alpha = 2$ to znaczy, że $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2$, a więc: $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$

Podstawiamy tę zależność w wyrażeniu.

$$\text{Otrzymujemy } \frac{4 \cdot 2 \cos \alpha - 3 \cos \alpha}{4 \cos \alpha + 3 \cdot 2 \cos \alpha} = \frac{5 \cos \alpha}{10 \cos \alpha} = \frac{1}{2}.$$

Sposób II

Licznik i mianownik wyrażenia dzielimy przez $\cos \alpha$, a następnie przekształcamy wyrażenie, korzystając

ze związku $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

$$\frac{4 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{4 \cos \alpha + 3 \sin \alpha} = \frac{\frac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{3 \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{4 \cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{3 \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 3}{4 + 3 \operatorname{tg} \alpha}$$

Obliczamy wartość otrzymanego wyrażenia: $\frac{4 \cdot 2 - 3}{4 + 3 \cdot 2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Odpowiedź: Wartość wyrażenia $\frac{4 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{4 \cos \alpha + 3 \sin \alpha}$ dla $\operatorname{tg} \alpha = 2$ wynosi $\frac{1}{2}$.



Przykład

Doprowadź wyrażenie $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ do najprostszej postaci, wiedząc, że kąt α jest ostry.

Rozwiązanie:

Przekształcamy wyrażenie, korzystając ze związków między funkcjami trygonometrycznymi.

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Odpowiedź: Wyrażenie $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ zapisane w najprostszej postaci to $\frac{1}{\sin \alpha}$.

Przykład

Wiedząc, że dla kąta ostrego α iloczyn $\sin \alpha \cos \alpha$ wynosi $\frac{5}{8}$, oblicz sumę $\sin \alpha + \cos \alpha$.

Rozwiązanie:

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{Skoro } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{8}, \text{ otrzymujemy: } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \cdot \frac{5}{8}$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{9}{4} \text{ stąd } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3}{2}$$

Rozwiązanie $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3}{2}$ odrzucamy, ponieważ α jest kątem ostrym, a sinus i cosinus kąta ostrego jest liczbą dodatnią.

Odpowiedź: Dla $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{8}$ suma $\sin \alpha + \cos \alpha$ wynosi $\frac{3}{2}$.

Przykład

Wykaż, że dla kąta ostrego α równość $\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha$ jest tożsamością.

Rozwiązanie:

Prawa strona tej równości jest równa $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

Przekształcamy lewą stronę tej równości, korzystając z jedynki trygonometrycznej, a następnie ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$L = \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha - \cos \alpha$$

$L = P$, co należało udowodnić.

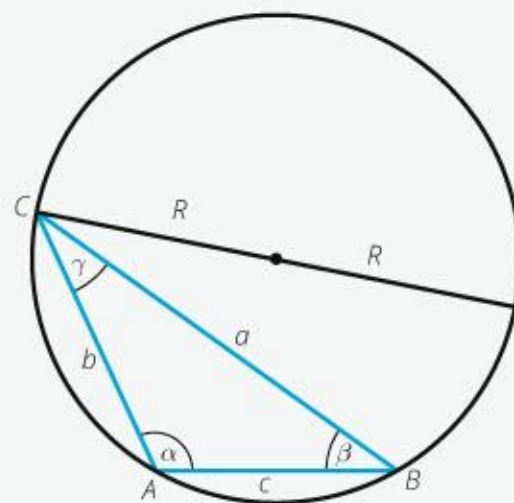
7.5. Twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów oraz wzór na pole trójkąta

Twierdzenie sinusów

| Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie na płaszczyźnie stosunek długości boku do sinusia przeciwległego kąta jest wielkością stałą i równą średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$



Przykład

W trójkącie ABC boki a , b i c leżą odpowiednio naprzeciwko kątów α , β i γ . Oblicz długość boków b i c w trójkącie ABC , w którym $a = 8$, $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 45^\circ$.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że mamy daną długość boku a i miarę przeciwległego do niego kąta.

Zapisujemy z twierdzenia sinusów zależność $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ i wyznaczamy średnicę okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\text{Otrzymujemy: } 2R = \frac{8}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$$

Mamy miarę kąta β i średnicę okręgu opisanego na tym trójkącie. Zapisujemy z twierdzenia sinusów zależność $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$ i wyznaczamy długość boku b tego trójkąta.

$$\text{Otrzymujemy: } \frac{b}{\sin 45^\circ} = 16$$

$$\text{Stąd: } b = 8\sqrt{2}$$

Wyznaczamy miarę kąta γ . Otrzymujemy: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, czyli $\gamma = 105^\circ$

Obliczamy przybliżoną wartość sinusa kąta γ (odczytujemy z tablicy wartości sinusów):

$$\sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ = 0,97$$

Zapisujemy z twierdzenia sinusów zależność $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ i wyznaczamy długość boku c tego trójkąta.

$$\text{Otrzymujemy: } \frac{c}{\sin 75^\circ} = 16$$

$$\text{Stąd: } c \approx 0,97 \cdot 16, \text{ czyli: } c \approx 15,5$$

Odpowiedź: Długości boków b i c tego trójkąta są odpowiednio równe $b = 8\sqrt{2}$ i $15,5$.

Przykład

W trójkącie ABC , w którym boki a , b i c leżą odpowiednio naprzeciwko kątów α , β i γ , dane są $a = 8$, $b = 5$ oraz kąt $\alpha = 30^\circ$. Oblicz długość boku c oraz miary kątów β i γ .

Rozwiązanie:

Wyznaczamy miarę kąta β . Zapisujemy z twierdzenia sinusów zależność: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$.

$$\text{Otrzymujemy: } \frac{8}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{5 \sin 30^\circ}{8} = \frac{5}{16} = 0,3125$$

Odczytujemy z tablic miarę kąta β : $\beta_1 \approx 18^\circ$ oraz $\beta_2 \approx 180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$. Jednak kąt β_2 nie spełnia warunków zadania, gdyż $162^\circ + 30^\circ > 180^\circ$

Obliczamy miarę trzeciego kąta trójkąta ABC : $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$$\text{Stąd: } \gamma \approx 180^\circ - (30^\circ + 18^\circ) = 132^\circ$$

Zapisujemy z twierdzenia sinusów zależność $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$ i wyznaczamy długość boku c tego trójkąta.

$$\text{Otrzymujemy: } \frac{8}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 132^\circ}, \text{ przy czym } \sin 132^\circ = \sin(180^\circ - 48^\circ) = \sin 48^\circ$$

$$\text{Stąd: } c = \frac{8 \sin 132^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 11,9$$

Odpowiedź: Długość trzeciego boku wynosi $11,9$, a miary kątów to $\beta \approx 18^\circ$ i $\gamma \approx 132^\circ$.

Twierdzenie cosinusów

Twierdzenie cosinusów (Carnota)

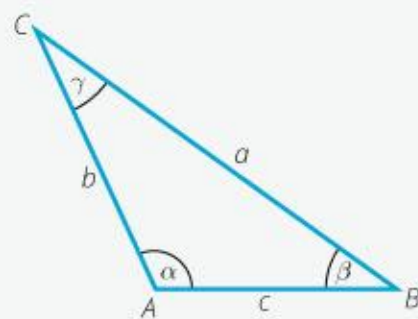
W dowolnym trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków tego trójkąta pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między tymi bokami.

Dla oznaczeń jak na rysunku można tezę twierdzenia cosinusów zapisać:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Przykład

Uzasadnij prawdziwość twierdzenia cosinusów dla pierwszej z tych równości: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, gdy kąt α jest kątem prostym.

Rozwiązanie:

Zapisujemy dla trójkąta ABC twierdzenie Pitagorasa: $a^2 = b^2 + c^2$.

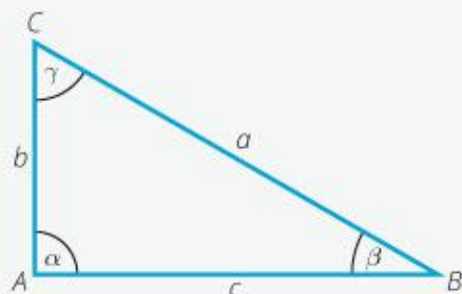
Twierdzenie to możemy również zapisać w postaci: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0$.

Ponieważ kąt α jest kątem prostym, a więc $\cos \alpha = 0$.

Wobec tego twierdzenie Pitagorasa możemy zapisać:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Co kończy dowód.



Przykład

Dwa boki trójkąta mają długości 4 i 5, a kąt między nimi zawarty ma miarę 45° . Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy oznaczenia: $a = 4$, $b = 5$, $\gamma = 45^\circ$, $c = ?$

Zapisujemy twierdzenie cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Obliczamy: $c^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ$

$$c^2 = 41 - 20\sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{41 - 20\sqrt{2}}$$

Odpowiedź: Długość trzeciego boku tego trójkąta wynosi $c = \sqrt{41 - 20\sqrt{2}}$.

Przykład

Długości boków trójkąta są równe 5, 6 i 7. Oblicz miarę najmniejszego kąta tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy oznaczenia: $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$

Kąt o najmniejszej mierze leży naprzeciw najkrótszego boku. Wobec tego:

$\alpha = ?$

Zapisujemy twierdzenie cosinusów: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

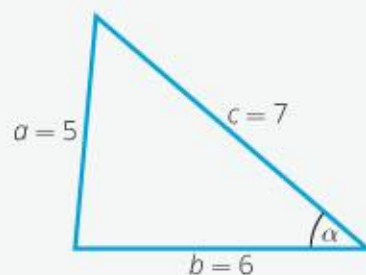
Otrzymujemy: $5^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cos \alpha$

Po przekształceniu otrzymujemy: $84 \cos \alpha = 60$; 84

$$\cos \alpha = \frac{5}{7} \approx 0,7143$$

Odczytujemy miarę kąta z tablic: $\alpha \approx 44^\circ$

Odpowiedź: Najmniejszy kąt tego trójkąta ma 44° .



Przykład

W trójkącie ABC dane są $|AB| = 8$, $|AC| = 3$ i $|\angle BAC| = 60^\circ$. Oblicz długość środkowej poprowadzonej do boku AB.

Rozwiązanie:

Sporządzamy rysunek pomocniczy.

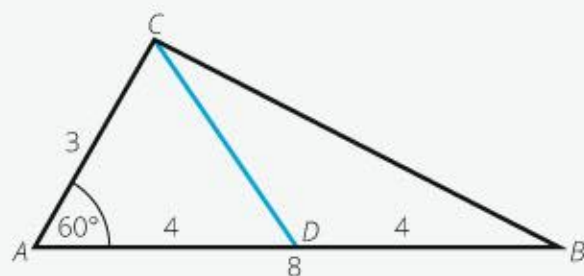
Środkową poprowadzoną do boku AB oznaczamy przez CD.

Zapisujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ADC.

Otrzymujemy: $|CD|^2 = |AD|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |AC| \cos 60^\circ$

$$\text{Stąd: } |CD| = \sqrt{13}$$

Odpowiedź: Długość tej środkowej wynosi $\sqrt{13}$.



Pole trójkąta

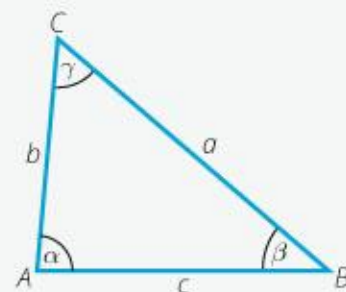
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch boków tego trójkąta i sinusa kąta zawartego między tymi bokami.

Dla oznaczeń wprowadzonych na rysunku zapiszemy:

$$P = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \beta$$

$$P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma$$



Przykład

Uzasadnij prawdziwość wzoru $P = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$ dla trójkąta ostrokątnego.

Rozwiązanie:

W trójkącie ABC prowadzimy wysokość na bok c .

Zapisujemy wzór na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}c \cdot h$.

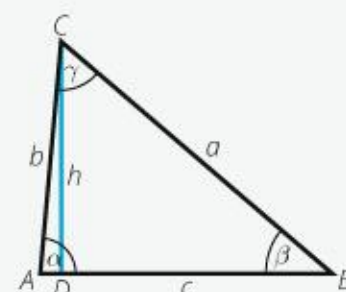
Dla trójkąta ADC zapisujemy zależność: $\frac{h}{b} = \sin \alpha$.

Wyznaczamy z niej wysokość h i podstawiamy do wzoru na pole trójkąta:

$$h = b \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Co kończy dowód.

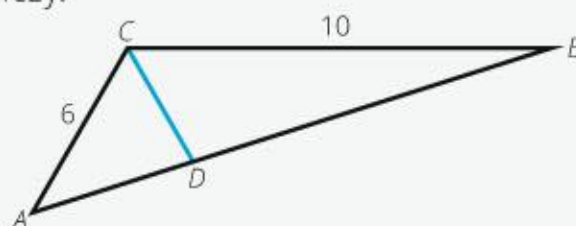


Przykład

W trójkącie ABC dane są długości boków $|BC| = 10$, $|AC| = 6$. Kąt ACB ma miarę 120° . W trójkącie tym narysowano dwusieczną kąta ACB , która na boku AB wyznaczyła punkt D . Oblicz długość odcinka CD .

Rozwiązanie:

Sporządzamy rysunek pomocniczy.



Obliczamy pole trójkąta ABC , korzystając ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CB| \cdot \sin 120^\circ.$$

$$\text{Otrzymujemy: } P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin(180^\circ - 60^\circ)$$

$$P = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów ACD i CDB . Zapisujemy sumę pól tych trójkątów:

$$P = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD| \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}|CB| \cdot |CD| \cdot \sin 60^\circ$$

$$\text{Otrzymujemy: } P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |CD| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot |CD| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot |CD| + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot |CD|$$

$$\text{Po uproszczeniu otrzymujemy: } P = 4\sqrt{3} \cdot |CD|$$

$$\text{Porównujemy pola tych trójkątów i wyznaczamy długość odcinka } CD: 4\sqrt{3} \cdot |CD| = 15\sqrt{3}$$

$$|CD| = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Odpowiedź: Długość odcinka CD wynosi $3\frac{3}{4}$.

7.6. Rozwiązywanie trójkątów

Rozwiązywanie trójkątów – zadania

Przykład

W trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α i β krótsza przyprostokątna leży naprzeciwko kąta α . Oblicz sinus kąta α , jeżeli długości boków tego trójkąta są kolejnymi wielokrotnościami liczby 5.

Rozwiązanie:

Oznaczamy przez $5n$, $5n + 5$, $5n + 10$ długości kolejnych boków trójkąta, gdzie $n \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczymy długości boków trójkąta prostokątnego, korzystając z twierdzenia Pitagorasa. Układamy równanie i je rozwiązujemy.

$$(5n)^2 + (5n + 5)^2 = (5n + 10)^2$$

$$25n^2 - 50n - 75 = 0$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$\Delta = 16$$

$$n_1 = -1 < 0 \text{ – nie spełnia warunków zadania, } n_2 = 3$$

Kolejne boki trójkąta mają długości: 15, 20, 25. Naprzeciwko kąta α leży przyprostokątna o długości 15 (krótsza przyprostokątna).

$$\text{Obliczamy: } \sin \alpha = \frac{15}{25}, \text{ czyli } \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

Odpowiedź: Sinus kąta α jest równy $\frac{3}{5}$.

Przykład

Najdłuższy bok trójkąta ma długość 12, a dwa kąty tego trójkąta mają miary 15° i 45° . Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy oznaczenie: $\alpha = 15^\circ$ i $\beta = 45^\circ$

Obliczamy miarę trzeciego kąta tego trójkąta: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

$$\text{Stąd: } \gamma = 180^\circ - (15^\circ + 45^\circ) = 120^\circ$$

Bok o długości 12 jest najdłuższym bokiem, więc leży naprzeciw kąta o największej mierze. Oznaczmy $c = 12$. Obliczamy promień okręgu opisanego na trójkącie, korzystając z twierdzenia sinusów: $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

$$\text{Otrzymujemy: } \frac{12}{\sin 120^\circ} = 2R, \text{ gdzie } \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Stąd: } \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R, \text{ czyli: } R = 4\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi $R = 4\sqrt{3}$.

Przykład

W trójkącie ABC długości boków pozostają w stosunku 6:5:4. Oblicz cosinus największego kąta tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy oznaczenia: x – wspólna miara, $a = 6x$, $b = 5x$, $c = 4x$ oraz α – kąt leżący naprzeciw boku c . Z twierdzenia cosinusów zapisujemy: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$$\text{Otrzymujemy: } (6x)^2 = (5x)^2 + (4x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 4x \cos \alpha$$

$$40x^2 \cos \alpha = 5x^2$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}$$

Odpowiedź: Cosinus tego kąta wynosi $\frac{1}{8}$.

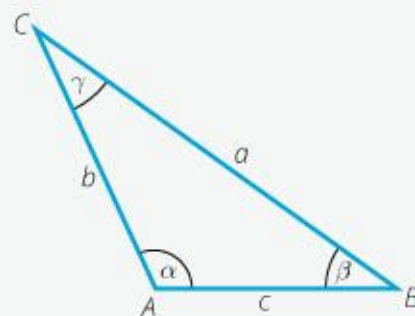
Przykład

Pole trójkąta równoramiennego wynosi $20\sqrt{2}$, a miara kąta między ramionami tego trójkąta jest równa 45° . Oblicz obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy oznaczenia: a – podstawa trójkąta, b – ramiona trójkąta, α – kąt między ramionami trójkąta.

$$\text{Ze wzoru na pole trójkąta zapiszemy: } P = \frac{1}{2} b \cdot b \cdot \sin 45^\circ$$



Otrzymujemy: $20\sqrt{2} = \frac{1}{2}b^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ Stąd: $b^2 = 80$, czyli: $b = 4\sqrt{5}$

Z twierdzenia cosinusów zapisujemy: $a^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cos 45^\circ$

Otrzymujemy: $a^2 = (4\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Stąd: $a^2 = 160 - 80\sqrt{2}$, czyli: $a = 4\sqrt{10 - 5\sqrt{2}}$

Obliczamy obwód trójkąta: $L = a + 2b$

Otrzymujemy: $L = 4\sqrt{10 - 5\sqrt{2}} + 8\sqrt{5}$

Odpowiedź: Obwód tego trójkąta wynosi $L = 4\sqrt{10 - 5\sqrt{2}} + 8\sqrt{5}$.

Przykład

Długości dwóch sąsiednich boków równoległoboku są równe 4 i $8\sqrt{3}$, a miara kąta między tymi bokami jest równa 30° . Oblicz długości przekątnych równoległoboku.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy oznaczenia: $a = 4$, $b = 8\sqrt{3}$ i $\alpha = 30^\circ$

oraz $|BD| = d_2$ i $|AC| = d_1$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD zapisujemy:

$$d_2^2 = (8\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 \cos 30^\circ$$

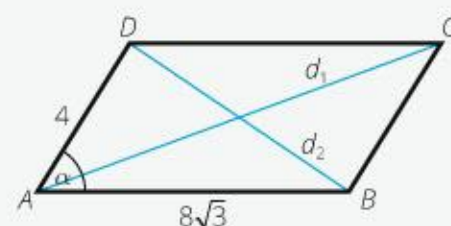
Otrzymujemy: $d_2^2 = 112$, czyli: $d_2 = 4\sqrt{7}$

Kąt przy wierzchołku B równoległoboku ma miarę 150° , a $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC zapisujemy: $d_1^2 = (8\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 \cos 150^\circ$

Otrzymujemy: $d_1^2 = 304$, czyli: $d_1 = 4\sqrt{19}$

Odpowiedź: Przekątne tego równoległoboku są równe $4\sqrt{19}$ i $4\sqrt{7}$.



7.7. Utrwalamy wiedzę





8

Planimetria

8.1. Trójkąty

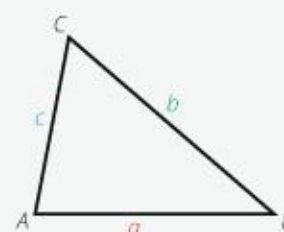
Nierówności trójkąta

Trójkąt to figura wyznaczona przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej. Każdy z tych punktów jest wierzchołkiem trójkąta, a odcinki łączące wierzchołki nazywamy bokami.

Z trzech odcinków można zbudować trójkąt, jeśli suma długości każdych dwóch odcinków jest większa od długości trzeciego odcinka.

$$a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$$

Przedstawione powyżej zależności nazywamy **nierównościami trójkąta**.



Przykład

Sprawdź, czy odcinki o podanych długościach $a = 4$ cm, $b = 6$ cm, $c = 8$ cm mogą być bokami pewnego trójkąta.

Rozwiązanie:

Obliczamy sumę $a + b$: $4 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$

Porównujemy $a + b$ z c : $10 \text{ cm} > 8 \text{ cm}$

Obliczamy sumę $a + c$: $4 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$

Porównujemy $a + c$ z b : $12 \text{ cm} > 6 \text{ cm}$

Obliczamy sumę $b + c$: $6 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$

Porównujemy $b + c$ z a : $14 \text{ cm} > 4 \text{ cm}$

Odpowiedź: Odcinki o długościach 4 cm, 6 cm i 8 cm mogą być bokami trójkąta.

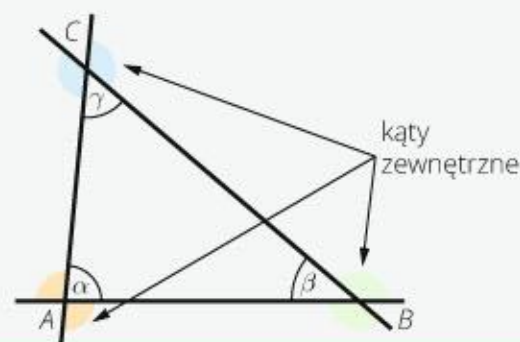
Kąt zewnętrzny trójkąta

Kątem zewnętrznym trójkąta nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta.

A, B, C – wierzchołki trójkąta ABC

AB, BC, CA – boki trójkąta ABC

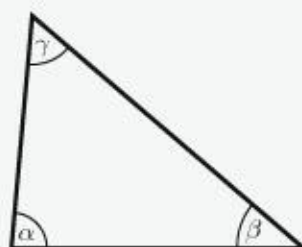
kąty ABC, CAB i ACB – kąty wewnętrzne



Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta

Twierdzenie

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .



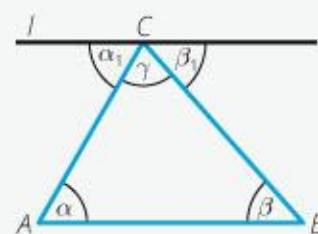
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Dowód

Na rysunku prosta l przechodząca przez wierzchołek C i równoległa do boku AB wyznacza kąty α_1 i β_1 naprzemianległe wewnątrz do odpowiednich kątów wewnętrznych α i β trójkąta ABC .

Ponieważ $\alpha_1 = \alpha$ i $\beta_1 = \beta$ oraz $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 180^\circ$, zatem $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że suma miar kątów wewnętrznym w dowolnym trójkącie jest równa 180° .

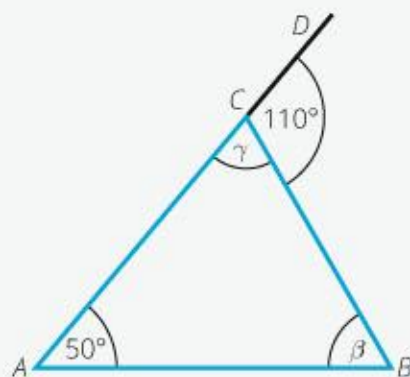


Przykład

W trójkącie ABC miara kąta CAB wynosi 50° , a miara kąta zewnętrznego BCD jest równa 110° . Wyznacz miary pozostałych kątów trójkąta ABC .



Rozwiązanie:
Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Oznaczamy jako β miarę kąta ACB , a jako γ miarę kąta ACB .

Wyznaczamy miary kątów ACB oraz ACB .

Kąty o miarach 110° i γ są kątami przyległymi.

Zatem $\gamma = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

Kąty o miarach 50° , β , γ są kątami wewnętrznymi trójkąta.

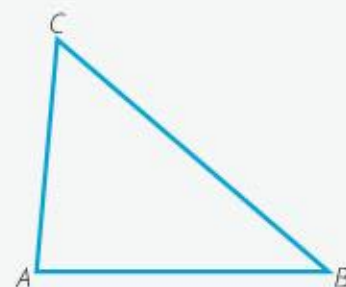
Zatem $\beta = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$

Rodzaje trójkątów

Ze względu na długości boków trójkąty możemy podzielić na **różnoboczne** i **nieróżnoboczne** (równoramienne i równoboczne).

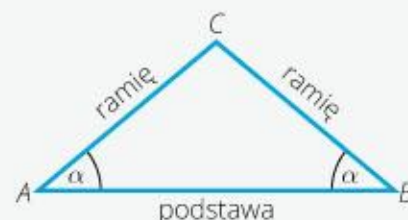
Trójkątem różnobocznym nazywamy trójkąt, który ma wszystkie boki innej długości.

$$|AB| \neq |BC|, |BC| \neq |AC|, |AB| \neq |AC|$$



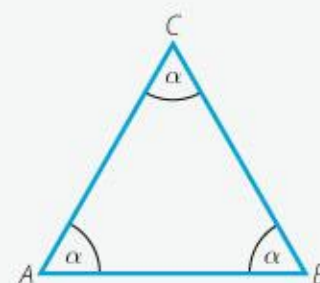
Trójkątem równoramiennym jest trójkąt, którego co najmniej dwa boki mają tę samą długość. W trójkącie **równoramiennym** kąty przy podstawie mają **równe miary**.

$$|AC| = |BC|, |\angle BAC| = |\angle ABC|$$



Trójkątem równobocznym nazywamy trójkąt, którego wszystkie boki mają tę samą długość. W trójkącie równobocznym miary kątów są równe.

$$|AB| = |BC| = |AC|, |\angle BAC| = |\angle ABC| = |\angle BCA| = 60^\circ$$

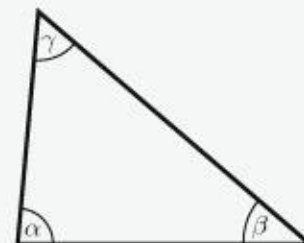


Trójkąty można klasyfikować również ze względu na ich kąty.

Trójkąt ostrokątny ma wszystkie kąty ostre.

$$\alpha < 90^\circ \text{ i } \beta < 90^\circ \text{ i } \gamma < 90^\circ$$

Kąt ostry to kąt o mierze większej od 0° i mniejszej od 90° .



Trójkąt prostokątny ma jeden kąt prosty.

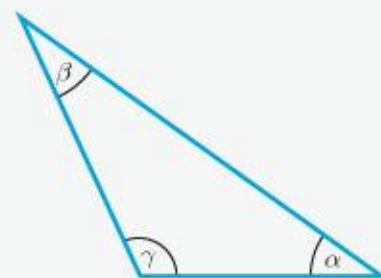
$$\gamma = 90^\circ \text{ i } \alpha < 90^\circ \text{ i } \beta < 90^\circ$$

Kąt prosty to kąt o mierze równej 90° .



Trójkąt rozwartokątny ma jeden kąt rozwarty.
 $\gamma > 90^\circ$ i $\alpha < 90^\circ$ i $\beta < 90^\circ$

Kąt rozwarty to kąt o mierze większej od 90° i mniejszej od 180° .



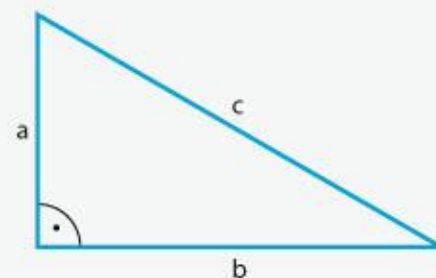
Twierdzenie Pitagorasa

Do obliczenia długości trzeciego boku trójkąta prostokątnego, gdy znamy długości dwóch pozostałych boków, możemy korzystać z twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Przykład

Oblicz długość przyprostokątnej, jeżeli dana jest długość przeciwprostokątnej $c = 20$ cm oraz długość drugiej przyprostokątnej $b = 4\sqrt{5}$ cm.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy długość przyprostokątnej z twierdzenia Pitagorasa:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

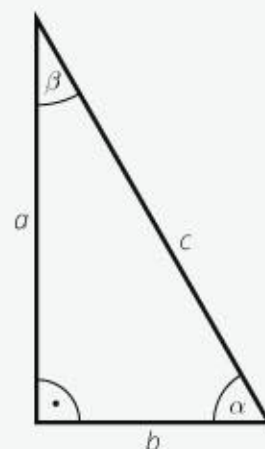
$$20^2 = a^2 + (4\sqrt{5})^2$$

$$a^2 = 400 - 80$$

$$a^2 = 320$$

$$a = 8\sqrt{5}$$

Odpowiedź: Długość przyprostokątnej wynosi $8\sqrt{5}$ cm.



Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Znając długości boków trójkąta, możemy sprawdzić, czy dany trójkąt jest prostokątny.

Korzystamy wówczas z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenia odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

Jeżeli suma długości dwóch krótszych boków trójkąta jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku, to trójkąt ten jest prostokątny.

Przykład

Sprawdź, czy trójkąt o bokach o długości 1,5 cm, 1,2 cm, 0,9 cm jest trójkątem prostokątnym.

Rozwiązanie:

Oznaczamy jako a, b, c długości boków trójkąta.

Obliczamy sumę kwadratów, bierzemy pod uwagę długości boków krótszych.

Wypisujemy dane:

$$a = 0,9 \text{ cm}, b = 1,2 \text{ cm}, c = 1,5 \text{ cm}$$

$$a^2 + b^2 = (0,9)^2 + (1,2)^2 = 0,81 + 1,44 = 2,25 \text{ i } c^2 = (1,5)^2 = 2,25$$

$$\text{Zatem } a^2 + b^2 = c^2$$

Trójkąt o bokach o długości 1,5 cm, 1,2 cm, 0,9 cm jest trójkątem prostokątnym.

Znając długości boków trójkąta, możemy ustalić, czy dany trójkąt jest prostokątny, a także, czy jest ostrokątny lub rozwartokątny.

Jeżeli długości boków trójkąta oznaczamy literami a, b, c w taki sposób, że $a \leq b \leq c$ oraz $a^2 + b^2 < c^2$, to trójkąt jest rozwartokątny, jeżeli $a \leq b \leq c$ oraz $a^2 + b^2 > c^2$, to trójkąt jest ostrokątny.



Przykład

Sprawdź, czy trójkąt o bokach o długości 8 cm, 4 cm, 7 cm jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

Rozwiązanie:

Oznaczamy długości dwóch krótszych boków jako a i b , długość najdłuższego boku jako c .

Wypisujemy dane: $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $c = 8$ cm

Obliczając sumę kwadratów długości boków krótszych oraz kwadrat długości boku najdłuższego:

$$a^2 + b^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$$

$$c^2 = 8^2 = 64$$

$$\text{Zatem } a^2 + b^2 > c^2$$

Odpowiedź: Trójkąt jest ostrokątny.

Należy pamiętać, że w trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok.

Przykład

Oblicz długość trzeciego boku trójkąta, którego dwa boki mają długości 2 cm i 4 cm, a kąt między nimi zawarty ma miarę 60° .

Rozwiązanie:

Oznaczamy długości dwóch boków jako a i b , długość trzeciego boku jako c , kąt o mierze 60° jako α .

Wypisujemy dane: $a = 2$ cm, $b = 4$ cm

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$c^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos 60^\circ$$

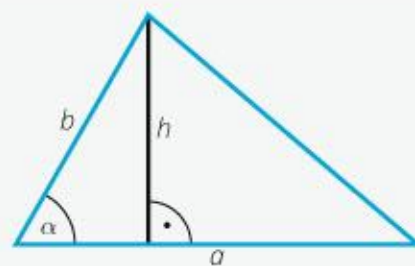
$$c^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \frac{1}{2}$$

$$c^2 = 12, \text{ stąd } c = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Wzory na pole trójkąta

Pole trójkąta wyznaczamy ze wzoru $P = \frac{1}{2}ah$.

Pole trójkąta możemy obliczyć również ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha$.



Przykład

Dany jest trójkąt równoramienny o ramionach o długości 4 cm i kącie między tymi ramionami o mierze 30° . Oblicz pole powierzchni tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: długości ramion $a = 4$ cm, kąt między ramionami $\alpha = 30^\circ$

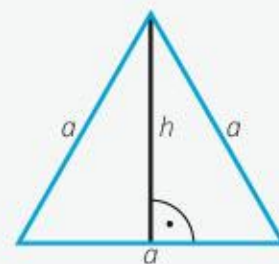
Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Trójkąt równoboczny

Wysokość trójkąta równobocznego możemy obliczyć, znając długość boku trójkąta, ze wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Pole trójkąta równobocznego możemy obliczyć ze wzoru $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Przykład

Oblicz pole trójkąta równobocznego o obwodzie $12\sqrt{3}$ cm.

Rozwiązanie:

Obliczamy długość boku trójkąta:

$$a = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

8.2. Czworokąty

Boki w czworokącie

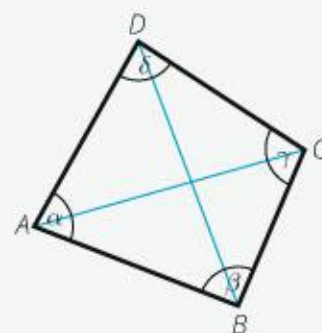
Czworokątami nazywamy wielokąty o czterech bokach.

Punkty A, B, C, D są wierzchołkami czworokąta $ABCD$, a odcinki AB, BC, CD, AD – jego bokami.

Boki czworokąta, które nie mają wspólnego wierzchołka, czyli boki AB i CD oraz boki BC i AD , nazywamy bokami przeciwnymi.

Odcinki AC i BD to przekątne tego czworokąta.

Każdy czworokąt ma dwie przekątne.



Suma miar kątów czworokąta

Suma miar kątów czworokąta wynosi 360° .

Dowód: Czworokąt dzielimy przekątną na dwa trójkąty, zatem $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

Przykład

Oblicz miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku.

Rozwiązanie:

Obliczamy miary kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$:

Kąty o miarach β i 132° są przyległe.

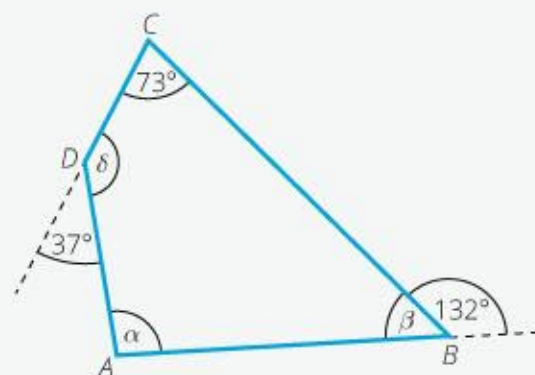
Zatem $\beta = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$

Kąty o miarach δ i 37° są również przyległe.

Zatem $\delta = 180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wynosi 360° .

Zatem $\alpha = 360^\circ - (48^\circ + 143^\circ + 73^\circ) = 96^\circ$

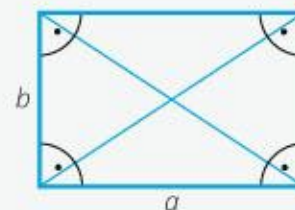


Prostokąt i kwadrat

Prostokątem nazywamy czworokąt, w którym wszystkie kąty są proste.

W prostokącie przeciwległe boki są równe i równoległe, a przekątne mają taką samą długość i dzielą się na połowy.

Pole prostokąta obliczamy ze wzoru $P = a \cdot b$.



Przykład

Dany jest prostokąt o bokach długościach a i b oraz prostokąt o bokach o długościach c i d . Bok o długości c stanowi 80% boku o długości a , a bok o długości d stanowi 120% boku o długości b . Oblicz, ile procent pola prostokąta o bokach o długościach a i b stanowi pole prostokąta o bokach o długościach c i d .

Rozwiązanie:

Wyznaczamy pole prostokąta o bokach o długościach a i b : $P_1 = a \cdot b$

Wyznaczamy pole prostokąta o bokach o długościach c i d : $P_2 = c \cdot d$

Ponieważ $c = 80\%a = 0,8a$ oraz $d = 120\%b = 1,2b$. Zatem $P_2 = 0,8a \cdot 1,2b = 0,96ab$

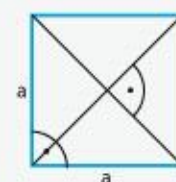
Obliczamy, ile procent pola prostokąta o bokach o długościach a i b stanowi pole prostokąta o bokach o długościach c i d :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{0,96a \cdot b}{ab} \cdot 100\% = 96\%$$

Szczególnym przypadkiem prostokąta jest kwadrat.

Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki równej długości.

W kwadracie przekątne są równej długości, przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.



Pole kwadratu obliczamy ze wzoru $P = a^2$.



Przykład

Pole kwadratu jest równe 18 cm^2 . Oblicz obwód tego kwadratu.

Rozwiązanie:

Długość boku kwadratu oznaczamy jako a .

Wyznaczamy długość boku kwadratu ze wzoru na pole kwadratu:

$$a^2 = 18 \text{ stąd } a = 3\sqrt{2} \text{ lub } a = -3\sqrt{2}$$

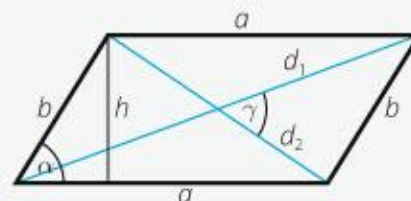
Wartości ujemne pomijamy, ponieważ długość boku jest liczbą dodatnią.

Obliczamy obwód kwadratu: $4 \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ (cm)}$

Równoległobok

Równoległobokiem nazywamy czworokąt mający dwie pary boków równoległych.

W równoległoboku boki równoległe są równej długości, a przekątne przecinają się w połowie.



Pole równoległoboku obliczamy ze wzoru $P = ah$.

Pole równoległoboku możemy obliczyć również ze wzoru $P = ab \sin \alpha$

lub ze wzoru $P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma$.

Przykład

Oblicz pole równoległoboku o długościach kolejnych boków $3\sqrt{6}$ i $8\sqrt{3}$ oraz kącie ostrym 45° .

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $a = 3\sqrt{6}$, $b = 8\sqrt{3}$, $\alpha = 45^\circ$

Obliczamy pole równoległoboku:

$$P = ab \sin \alpha = 3\sqrt{6} \cdot 8\sqrt{3} \cdot \sin 45^\circ = 24\sqrt{18} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 72$$

Romb

Rombem nazywamy czworokąt, w którym wszystkie boki są równe.

W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.

Pole rombu obliczamy ze wzoru $P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

Pole rombu możemy również obliczać, stosując wzór na pole równoległoboku:

$$P = ah \text{ lub } P = a^2 \sin \alpha$$

Przykład

Pole rombu jest równe 42 cm^2 , a jedna z jego przekątnych ma długość 14 cm . Oblicz długość drugiej przekątnej.

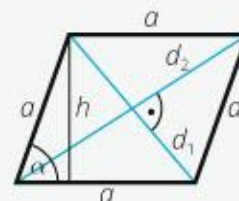
Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $P = 42 \text{ cm}^2$, $d_1 = 14 \text{ cm}$.

Długość drugiej przeciwprostokątnej oznaczamy jako d_2 .

Wyznaczamy długość drugiej przekątnej ze wzoru na pole rombu:

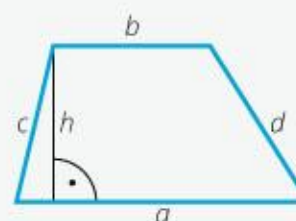
$$42 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot d_2, \text{ stąd } d_2 = 6 \text{ cm}$$



Trapez

Trapezem nazywamy czworokąt mający co najmniej jedną parę boków równoległych.

Pole trapezu obliczamy ze wzoru $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$.





Przykład

W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i wysokość mają długość 8 cm, a długość przekątnej jest równa 17 cm. Oblicz obwód i pole tego trapezu.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Trójkąt DEB jest prostokątny.

Wyznaczamy długość odcinka EB z twierdzenia Pitagorasa (długość odcinka jest liczbą dodatnią):

$$|DE|^2 + |EB|^2 = |BD|^2$$

$$8^2 + |EB|^2 = 17^2, \text{ stąd } |EB| = 15 \text{ (cm)}$$

Obliczamy długość odcinka FB :

$$|FB| = |EB| - |EF| = 15 - 8 = 7 \text{ (cm)}$$

Obliczamy długość podstawy AB :

$$|AB| = |EB| + |FB| = 15 + 7 = 22 \text{ (cm)}$$

Trójkąt AED jest prostokątny.

Obliczamy długość ramienia AD z twierdzenia Pitagorasa (długość odcinka jest liczbą dodatnią):

$$|AD|^2 = |AE|^2 + |ED|^2$$

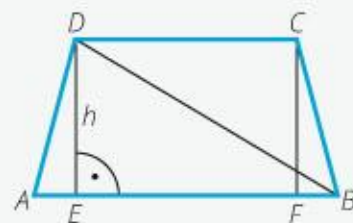
$$|AD|^2 = 7^2 + 8^2, \text{ stąd } |AD| = \sqrt{113}$$

Obliczamy obwód trapezu $ABCD$:

$$S = (22 + 8 + 2 \cdot \sqrt{113}) \text{ cm} = (30 + 2\sqrt{113}) \text{ cm}$$

Obliczamy pole trapezu $ABCD$:

$$P = \frac{22 + 8}{2} \cdot 8 = 120 \text{ (cm)}^2$$



8.3. Okrąg i koło

Okrąg

Okręgiem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r .

Cięciwą nazywamy każdy odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu.

Średnicą nazywamy najdłuższą cięciwę przechodzącą przez środek okręgu (długość średnicy jest dwa razy większa od długości promienia).

Łukiem nazywamy część okręgu zawartą między dwoma różnymi punktami okręgu wraz z tymi punktami.

Długość okręgu o promieniu r wyraża się wzorem: $l = 2\pi r$.

Kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu, a ramiona zawierają promienie, nazywamy **kątem środkowym** (na rysunku kąt środkowy AOB wyznacza łuk ACB).

Miara kąta środkowego stanowi taką część miary kąta pełnego, jaką częścią długości okręgu jest łuk, na którym kąt ten jest oparty.

Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

Przykład

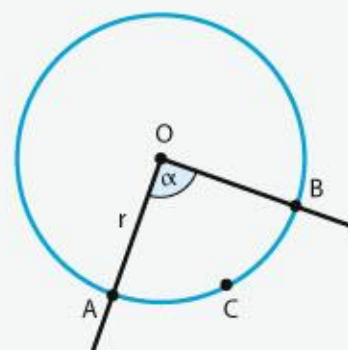
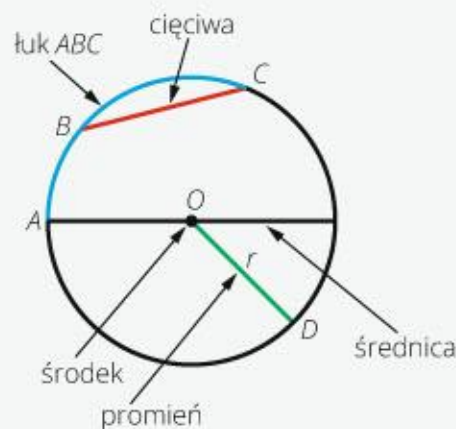
Oblicz długość łuku wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 120° i promieniu o długości 9 cm.

Rozwiązanie:

Wypisujemy dane: $r = 9 \text{ cm}$, $\alpha = 120^\circ$

Obliczamy długość łuku:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 9 = 6\pi \text{ (cm)}$$

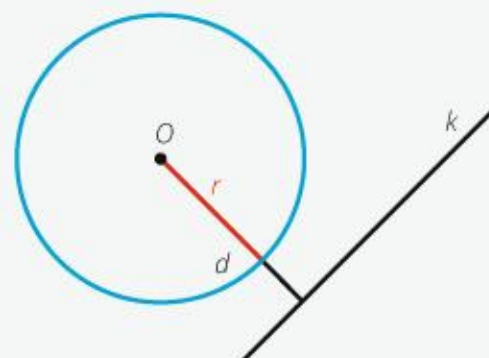


Wzajemne położenie prostej i okręgu

Jeśli prosta i okrąg położone są na tej samej płaszczyźnie, to te figury mogą nie mieć punktów wspólnych, mogą mieć jeden punkt wspólny albo mogą mieć dwa punkty wspólne.

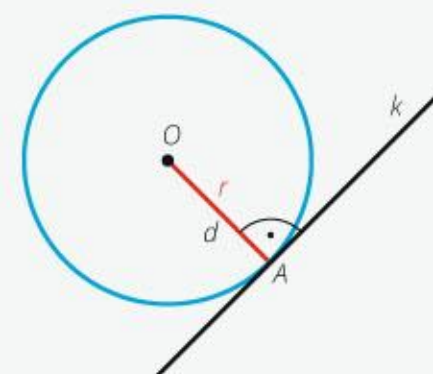
Prosta i okrąg mogą nie mieć punktów wspólnych

Odległość d środka okręgu od prostej k jest większa od promienia tego okręgu: $d > r$.



Prosta i okrąg mogą mieć jeden punkt wspólny

Odległość d środka okręgu od prostej k jest równa promieniowi tego okręgu: $d = r$. Prosta k nazywamy wtedy **styczną** okręgu.

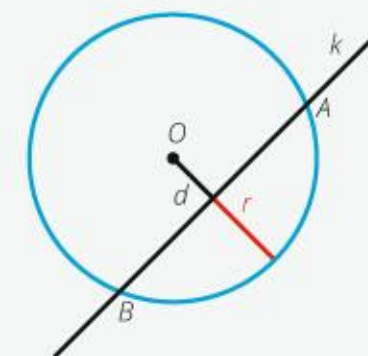


Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia o końcu w punkcie styczności.

Prosta i okrąg mogą mieć dwa punkty wspólne

Odległość d środka okręgu od prostej k jest mniejsza od promienia tego okręgu: $d < r$.

Prostą k nazywamy wtedy **sieczną** okręgu.



Przykład

Na okręgu o środku O leżą punkty A i B . Przez punkt C , leżący poza okręgiem, poprowadzono styczne do okręgu: jedną w punkcie A i drugą w punkcie B . Wyznacz miarę kąta ABC , wiedząc, że kąt AOB ma miarę 130° .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Proste AC i BC są styczne do okręgu, zatem $|\angle OAC| = |\angle OBC| = 90^\circ$.

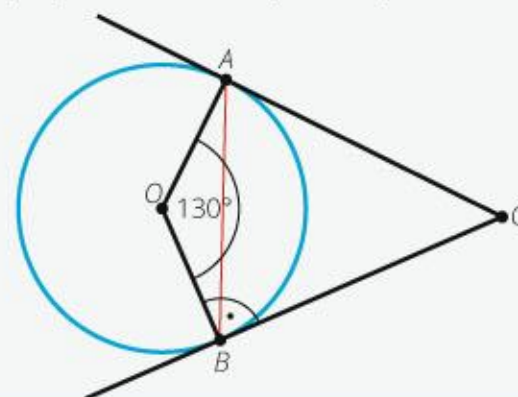
Wyznaczamy miarę kąta ACB :

$$|\angle ACB| = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 130^\circ) = 50^\circ$$

Trójkąt ABC jest równoramienny.

Wyznaczamy miarę kąta ABC :

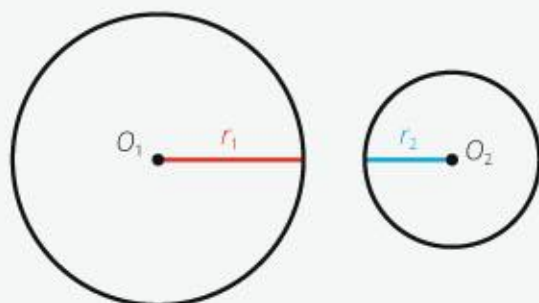
$$|\angle ABC| = (180^\circ - 50^\circ) : 2 = 65^\circ$$



Wzajemne położenie dwóch okręgów

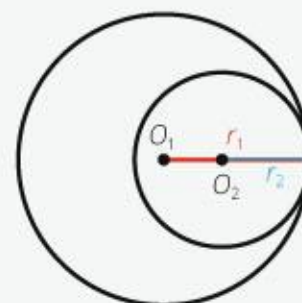
Dwa okręgi także mogą być względem siebie położone w różny sposób.

Okręgi mogą być rozłączne. Nie mają wtedy punktów wspólnych.



$$|O_1O_2| > r_1 + r_2$$

okręgi rozłączne zewnątrz

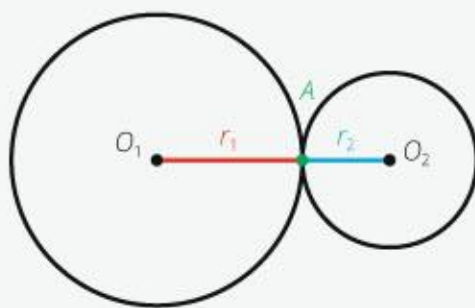


$$|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$$

okręgi rozłączne wewnątrz

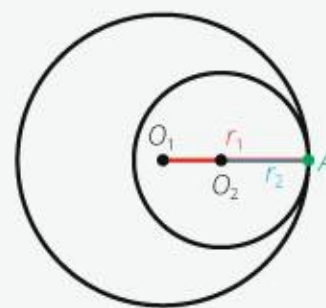


Okręgi mogą być **styczne**. Mają wówczas jeden punkt wspólny.



$$|O_1O_2| = r_1 + r_2$$

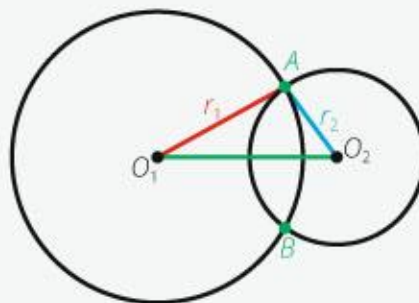
okręgi styczne zewnętrznie



$$|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$$

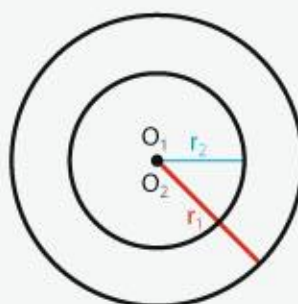
okręgi styczne wewnętrznie

Okręgi mogą być **przecinające się**. Mają wtedy dwa punkty wspólne.



$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$$

Okręgi, które mają wspólny środek, nazywamy **współśrodkowymi**.



$$|O_1O_2| = 0$$

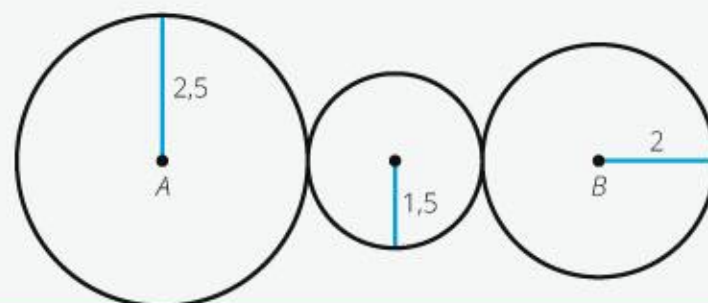
Przykład

Wiedząc, że okręgi przedstawione na rysunku są parami styczne zewnętrznie, oblicz długość odcinka AB.

Rozwiązanie:

Obliczamy długość odcinka AB:

$$|AB| = 2,5 + 2 \cdot 1,5 + 2 = 7,5$$



Koło

Kołem o środku O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r .

Punkty należące do okręgu ograniczającego koło należą do tego koła.

Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem: $P = \pi r^2$.

Przykład

Oblicz obwód i pole koła o średnicy 6 cm. Wyniki podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

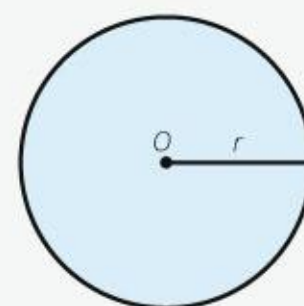
Rozwiązanie:

Wyznaczamy promień r :

$$r = 6 : 2 = 3 \text{ (cm)}$$

Obliczamy obwód koła:

$$l = 2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi \approx 18,8 \text{ (cm)}$$





Obliczamy pole koła:

$$P = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28,3 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Pierścieniem kołowym nazywamy część płaszczyzny ograniczoną przez dwa współśrodkowe okręgi (wraz z tymi okręgami).

Opisując pierścień kołowy, podajemy jego promień zewnętrzny i promień wewnętrzny. Różnicę tych promieni nazywamy szerokością pierścienia.

Pole pierścienia kołowego wyraża się wzorem: $P = \pi(R^2 - r^2)$

Przykład

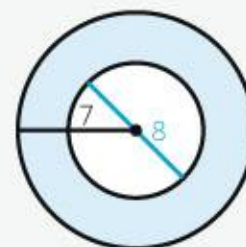
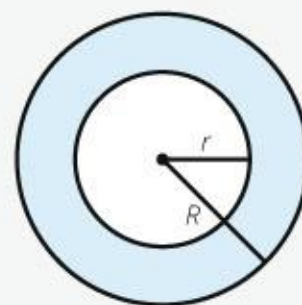
Oblicz pole pierścienia kołowego przedstawionego na rysunku.

Rozwiązanie:

Promień zewnętrzny pierścienia R wynosi 7, a promień wewnętrzny r jest równy 4.

Obliczamy pole pierścienia kołowego:

$$P = \pi(R^2 - r^2) = \pi(7^2 - 4^2) = 33\pi$$



Wycinkiem koła lub **wycinkiem kołowym** nazywamy część koła zawartą między dwoma promieniami.

Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy α wyraża się wzorem:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2.$$

Przykład

Oblicz obwód koła, z którego wycięto wycinek kołowy o kącie 60° i polu $36\pi \text{ cm}^2$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy promień r koła:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$36\pi = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$r^2 = 216$$

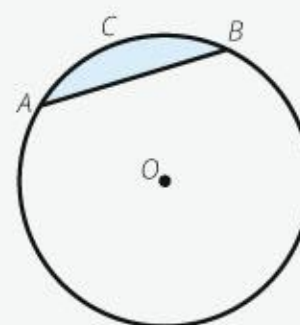
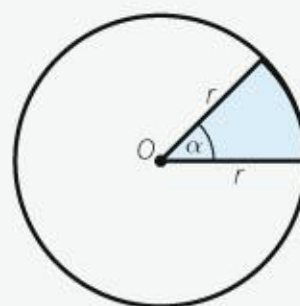
r jest długością promienia koła, więc $r > 0$

$$\text{zatem } r = 6\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

Obliczamy obwód koła:

$$l = 2\pi r = 2\pi \cdot 6\sqrt{6} = 12\sqrt{6}\pi \text{ (cm)}$$

Odcinkiem koła lub **odcinkiem kołowym** nazywamy część koła (wraz z jej brzegiem) ograniczoną łukiem ABC i cięciwą AB .



Przykład

Oblicz pole odcinka kołowego o promieniu 4 cm i kącie środkowym o mierze 90° .

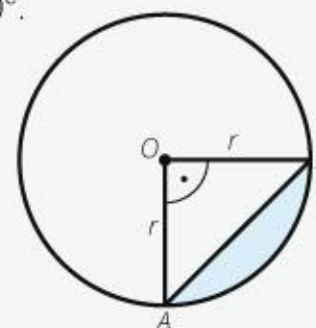
Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Pole odcinka koła obliczymy jako różnicę pól wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 90° oraz trójkąta równoramiennego prostokątnego o ramionach o długości 4 cm.

Obliczamy pole odcinka kołowego:

$$P = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 4\pi - 8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

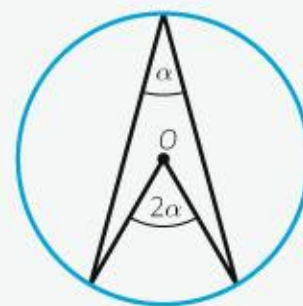


8.4. Kąty w okręgu

Kąt wpisany

Kątem wpisanym α nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi cięciwy tego okręgu.

Miara kąta środkowego w okręgu jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.



Przykład

Oblicz miarę kąta środkowego opartego na tym samym łuku, co kąt wpisany o mierze 54° .

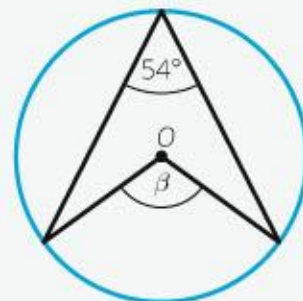
Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

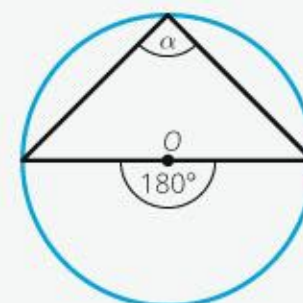
Oznaczamy miarę kąta środkowego jako β .

Wyznaczamy miarę kąta środkowego:

$$\beta = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$$



Kąt wpisany w okrąg oparty na półokręgu (na średnicy) jest kątem prostym.



Na danym łuku można oprzeć nieskończenie wiele kątów wpisanych.

Kąty wpisane w okrąg, oparte na tym samym łuku, mają równe miary.

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$$



Przykład

Wyznacz miary kątów α i β zaznaczonych na rysunku.

Rozwiązanie:

Trójkąt OBC jest równoboczny, zatem $|\angle OCB| = 60^\circ$.

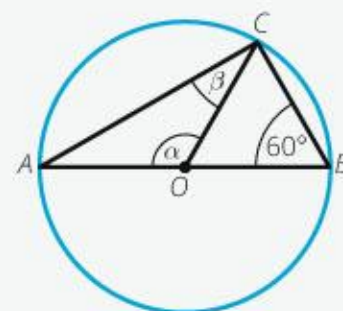
Ponieważ kąt ACB wyznacza półokrąg, więc trójkąt ABC jest prostokątny.

Wyznaczamy miarę kąta β :

$$90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

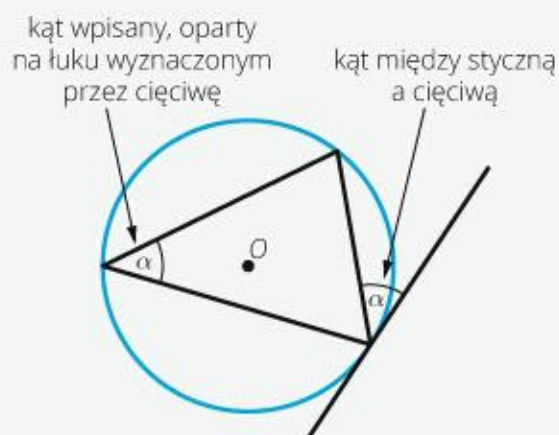
Kąt AOC opiera się na tym samym łuku, co kąt wpisany ABC , zatem:

$$\alpha = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$



Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu

Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności (kąt dopisany do okręgu) ma miarę równą mierze kąta wpisanego opartego na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy.

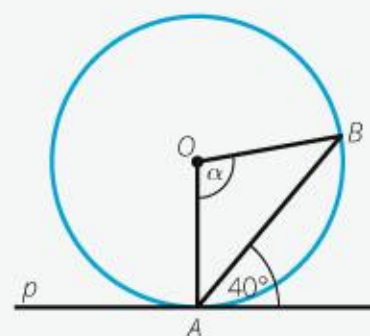


Przykład

Wyznacz miarę kąta środkowego α zaznaczonego na rysunku, wiedząc, że prosta p jest styczna do okręgu w punkcie A .

Rozwiązanie:

Kąt o mierze 40° jest kątem między styczną a cięciwą, zatem miara kąta wpisanego opartego na łuku wyznaczonym przez cięciwę AB również ma miarę 40° . Kąt środkowy AOB jest też oparty na łuku wyznaczonym przez cięciwę AB , zatem $\alpha = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$.

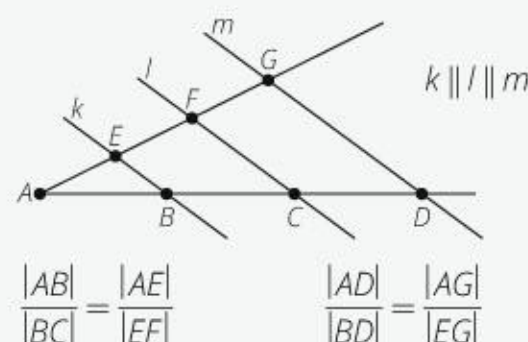


8.5. Twierdzenie Talesa

Twierdzenia Talesa

Twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przetniemy kilkoma prostymi równoległymi, to stosunek długości otrzymanych odcinków na jednym ramieniu kąta jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta.



Przykład

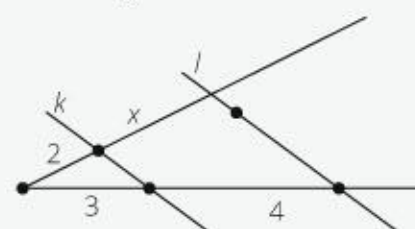
Ramiona kąta przecięto dwiema prostymi równoległymi k i l (rysunek). Oblicz długość odcinka x .

Rozwiązanie:

Zgodnie z twierdzeniem Talesa układamy proporcję $\frac{3}{4} = \frac{2}{x}$ i obliczamy x :

$$3x = 4 \cdot 2$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$



Przykład

Ramiona kątów wierzchołkowych przecięto dwiema prostymi równoległymi k i l (rysunek).

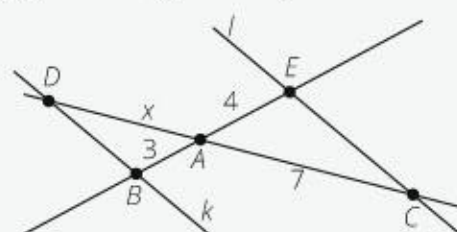
Oblicz długość odcinka x .

Rozwiązanie:

Zgodnie z twierdzeniem Talesa układamy proporcję $\frac{4}{3} = \frac{7}{x}$ i obliczamy x :

$$4x = 7 \cdot 3$$

$$x = 5,25$$



Przykład

Drzewo rzuca cień o długości 15 m. W tym samym czasie pionowo wbity palik o wysokości 1,5 m rzuca cień długości 2,25 m. Jaką wysokość ma drzewo?

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:

Zgodnie z twierdzeniem Talesa:

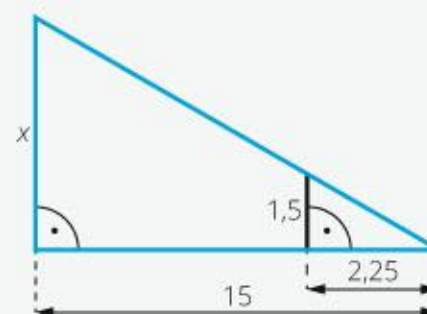
$$\frac{x}{1,5} = \frac{15}{2,25}$$

$$2,25x = 15 \cdot 1,5$$

$$2,25x = 22,5$$

$$x = 10$$

Drzewo ma 10 m wysokości.



Twierdzenia odwrotne do twierdzenia Talesa

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.

Przykład

Sprawdź, czy proste k i l na rysunku są równoległe.

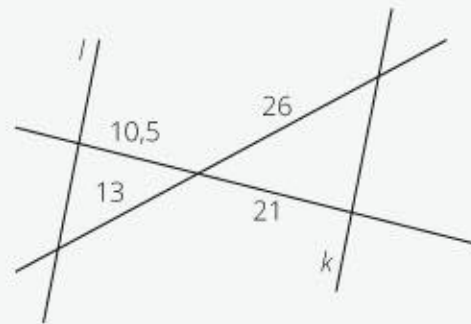
Rozwiązanie

Układamy proporcję $\frac{26}{13} = \frac{21}{10\frac{1}{2}}$ i sprawdzamy, czy jest prawdziwa:

$$26 \cdot 10\frac{1}{2} = 21 \cdot 13$$

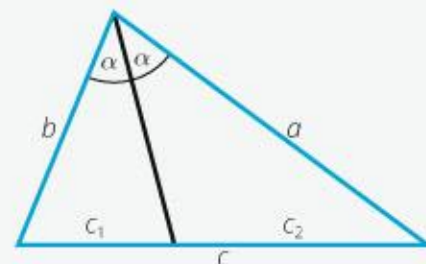
$$273 = 273$$

Zgodnie z twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Talesa proste k i l są równoległe.

**Twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego****Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego**

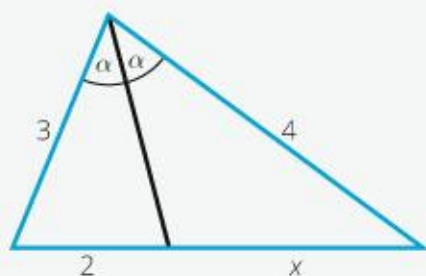
Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do długości pozostałych boków.

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{a}{b}$$

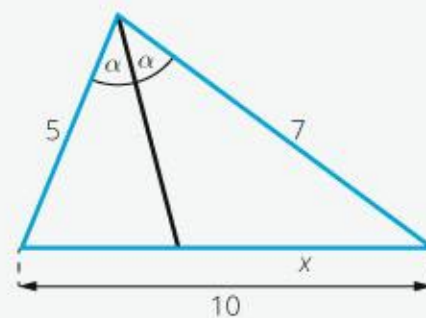
**Przykład**

Oblicz długość odcinka x , korzystając z danych na rysunkach.

a)



b)

**Rozwiązanie**

a) Układamy proporcję $\frac{2}{x} = \frac{3}{4}$ i obliczamy $x = 2\frac{2}{3}$.

b) Układamy proporcję $\frac{10-x}{x} = \frac{5}{7}$ i obliczamy $5x = 70 - 7x$.

$$12x = 70$$

$$x = 5\frac{5}{6}$$

Przykład

Oblicz długość odcinka BD zawartego w dwusiecznej kąta ostrego trójkąta prostokątnego ABC , w którym przyprostokątne AC i BC mają długości odpowiednio 4 i 3.

Rozwiązanie

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długość przeciwprostokątnej:

$$c^2 = 3^2 + 4^2$$

$$c^2 = 9 + 16$$

$$c^2 = 25$$

$$c = 5$$

Obliczamy, korzystając z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego, długość odcinka x :

$$\frac{x}{4-x} = \frac{3}{5}$$

$$5x = 12 - 3x$$

$$8x = 12$$

$$x = \frac{3}{2}$$

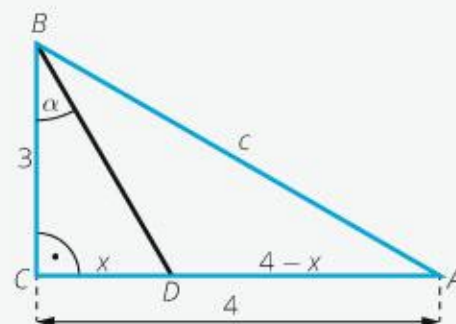
Obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długość odcinka BD :

$$|BD|^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$|BD|^2 = 9 + \frac{9}{4}$$

$$|BD|^2 = \frac{45}{4}$$

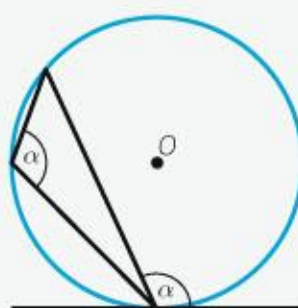
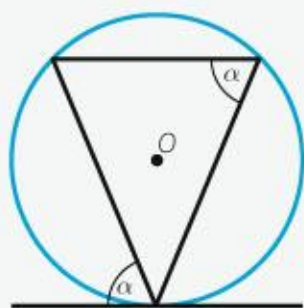
$$|BD| = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$



Twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą

Twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą

Kąt między styczną do okręgu a jego cięciwą wychodzącą z punktu styczności równy jest kątowi wpisanemu w ten okrąg, opartemu na łuku, który ta cięciwa wyznacza.



Przykład

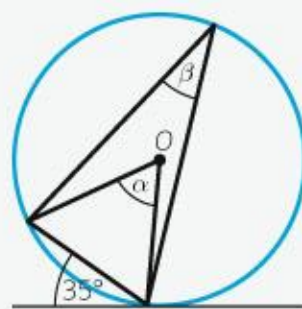
Kąt między styczną a cięciwą ma miarę 35° . Wyznacz miarę kąta środkowego opartego na łuku wyznaczonym przez tę cięciwę.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Zgodnie z twierdzeniem o kącie między styczną a cięciwą, kąt β ma taką samą miarę jak kąt 35° .

Kąt α jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany β , zatem ma miarę dwa razy większą, czyli $\alpha = 70^\circ$.



Przykład

W okręgu o promieniu $r = 9$ cm poprowadzono cięciwę AB , która wyznaczyła na okręgu łuk o długości 2π cm.

Wyznacz miarę kąta rozwartego δ między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie B .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Obliczamy miarę kąta środkowego β opartego na łuku długości 2π cm:

$$\frac{2\pi}{2\pi \cdot 9} = \frac{1}{9}$$

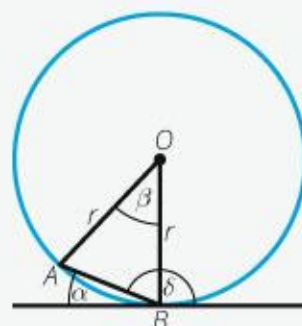
$$360^\circ : 9 = 40^\circ$$

$$\beta = 40^\circ$$

Zgodnie z twierdzeniem o kącie między styczną a cięciwą kąt $\beta = 2\alpha$, zatem

$$\alpha = 20^\circ.$$

Kąt rozwarty δ ma miarę $\delta = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$.



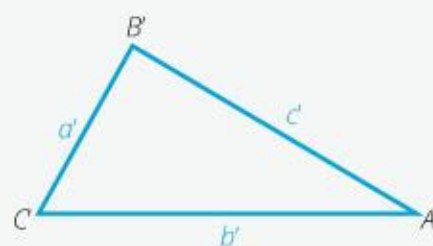
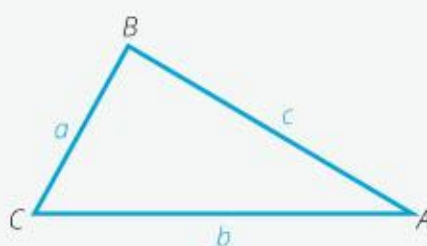
8.6. Cechy przystawania i podobieństwa trójkątów

Cechy przystawania trójkątów

Cechy przystawania trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były przystające, czyli takie same. Przystawanie figur geometrycznych oznaczamy symbolem $\equiv$.

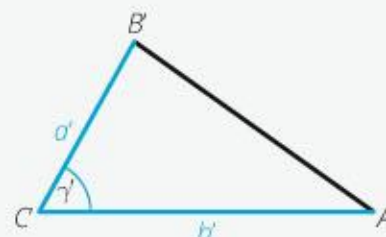
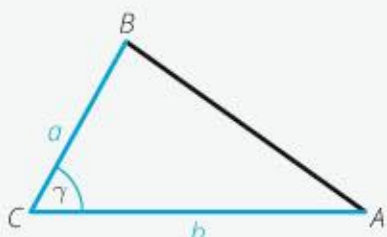
I cecha przystawania trójkątów (bbb)

Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



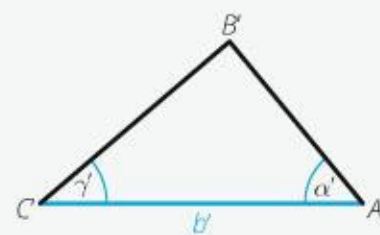
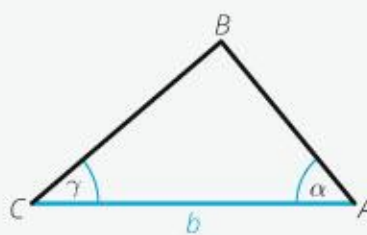
II cecha przystawania trójkątów (bkb)

Jeżeli dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.



III cecha przystawiania trójkątów (*k b k*)

Jeżeli długość boku i dwa kąty do niego przyległe jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i dwóm kątom do niego przyległym drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

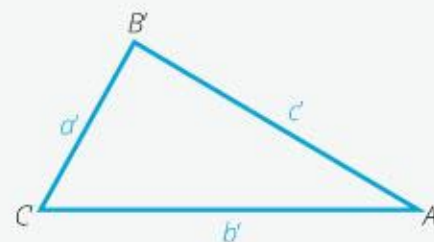
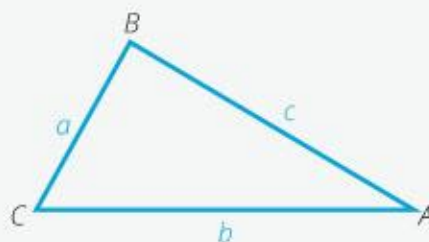


Cechy podobieństwa trójkątów

Cechy podobieństwa trójkątów to warunki konieczne i wystarczające na to, aby dwa trójkąty były podobne. Podobieństwo trójkątów oznaczamy symbolem $\sim$.

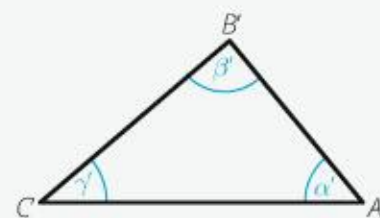
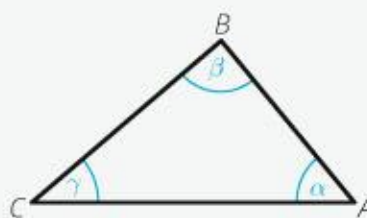
I cecha podobieństwa trójkątów (*b b b*)

Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



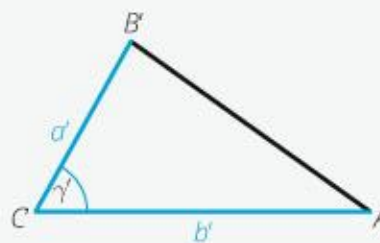
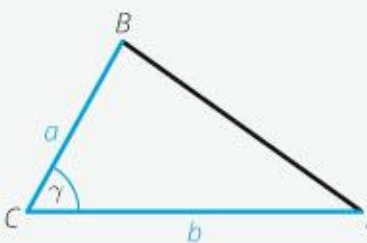
II cecha podobieństwa trójkątów (*k k k*)

Jeżeli miary dwóch kątów jednego trójkąta są równe miarom odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta, to trójkąty są podobne.



III cecha podobieństwa trójkątów (*k b k*)

Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty między nimi zawarte są przystające, to trójkąty są podobne.



Jeżeli trójkąty są podobne, to **skala podobieństwa** jest równa stosunkowi ich obwodów, stosunkowi ich odpowiednich boków, wysokości, środków.

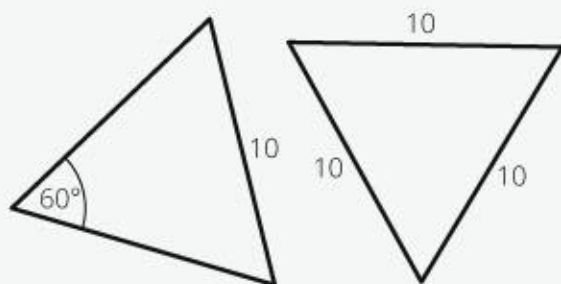
Trójkąty przystające są podobne w skali 1.

Trójkąty przystające i podobne – zadania

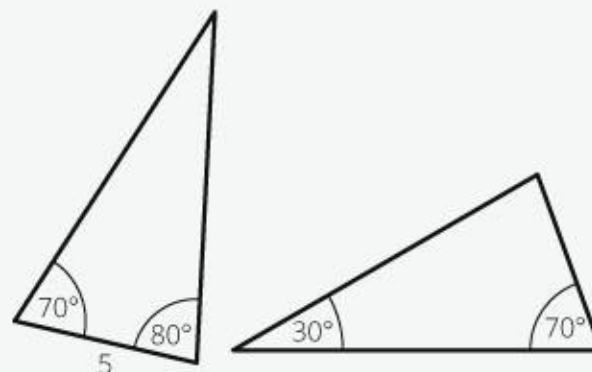
Przykład

Czy trójkąty na rysunkach są przystające? Jeżeli tak, to na podstawie której cechy przystawiania?

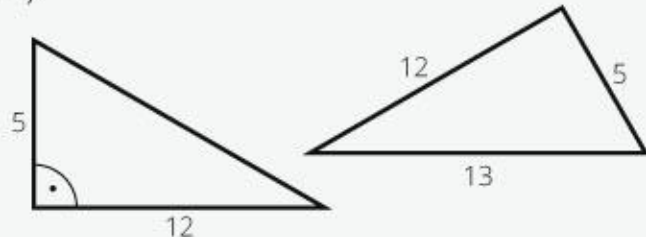
a)



b)



c)



**Rozwiązanie:**

- a) są przystające na podstawie cechy *bkb*
- b) po obliczeniu trzeciego kąta są przystające na podstawie cechy *kbb*
- c) po obliczeniu długości przeciwprostokątnej są przystające na podstawie cechy *bbb*

Przykład

W trójkącie ABC na boku AB obrano punkt D , a na boku AC punkt E tak, że odcinek DE jest równoległy do boku BC (patrz rysunek). Czy trójkąty ABC i ADE są podobne? Jeżeli tak, to w jakiej skali?

Rozwiązanie:

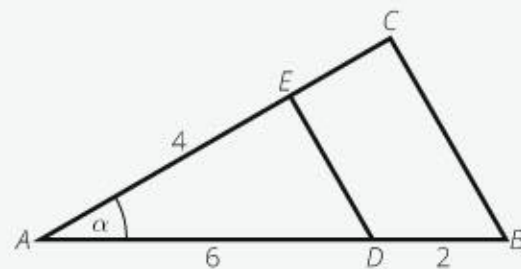
Ponieważ $DE \parallel BC$, to $|\angle ADE| = |\angle ABC|$ oraz kąt α jest wspólny dla

obu trójkątów, zatem na mocy cechy *kkk*

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Obliczymy skalę podobieństwa:

$$k = \frac{6}{6+2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$



8.7. Obwody i pola figur podobnych

Skala podobieństwa figur podobnych

Stosunek obwodów figur podobnych jest równy skali podobieństwa.

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Przykład

W trójkącie prostokątnym ABC długości przyprostokątnych wynoszą 3 i 4. Trójkąt $A'B'C'$ do niego podobny ma obwód długości 60. Oblicz długości boków trójkąta $A'B'C'$.

Rozwiązanie:

Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, to korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przeciwprostokątnej oraz obwód trójkąta.

$$c^2 = 3^2 + 4^2 \qquad c^2 = 25 \qquad c = 5$$

$$\text{Obw}_{ABC} = 3 + 4 + 5 = 12$$

$$\text{Obliczamy skalę podobieństwa: } k = \frac{60}{12} = 5$$

Obliczamy długości boków trójkąta $A'B'C'$:

$$3 \cdot 5 = 15 \qquad 4 \cdot 5 = 20 \qquad 5 \cdot 5 = 25$$

Przykład

Przekątna prostokąta $ABCD$ ma długość 13. Obwód każdego z trójkątów, na jakie prostokąt podzieliła ta przekątna, jest równy 30. Prostokąt $EFGH$ o polu powierzchni równym 960 jest podobny do prostokąta $ABCD$.

Oblicz długości boków prostokąta $EFGH$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy długości boków prostokąta $ABCD$ przez a i b . Wtedy $a + b + 13 = 30$, czyli $a + b = 17$.

Wyznaczamy $a = 17 - b$ i wstawiamy do równania $a^2 + b^2 = 13^2$.

$$(17 - b)^2 + b^2 = 169$$

$$289 - 34b + b^2 + b^2 = 169$$

$$2b^2 - 34b + 120 = 0$$

$$b^2 - 17b + 60 = 0$$

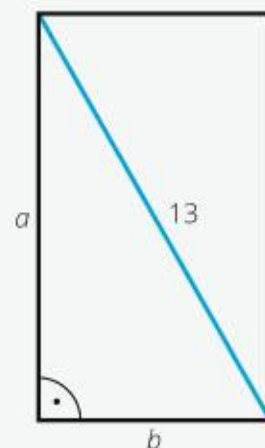
$$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 49$$

$$b_1 = \frac{17 - 7}{2} = 5$$

$$b_2 = \frac{17 + 7}{2} = 12$$

$$a_1 = 17 - 5 = 12$$

$$a_2 = 17 - 12 = 5$$



Boki prostokąta $ABCD$ mają długości 12 i 5, zatem: $P = 12 \cdot 5 = 60$

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc $k^2 = \frac{960}{60} = 16$, czyli $k = 4$.

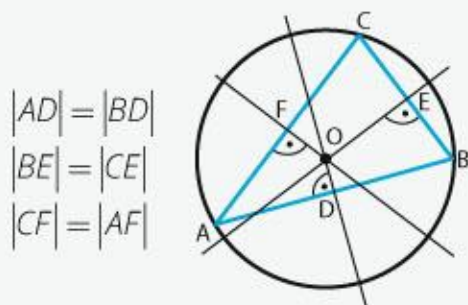
Długości boków prostokąta $EFGH$ wynoszą $a' = 12 \cdot 4 = 48$ i $b' = 5 \cdot 4 = 20$.

8.8. Punkty szczególne w trójkącie

Punkty w trójkącie

Wyróżniamy cztery punkty szczególne w trójkącie:

1. **środek okręgu opisanego** – punkt przecięcia symetralnych boków

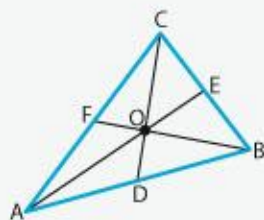


2. **środek okręgu wpisanego** – punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych

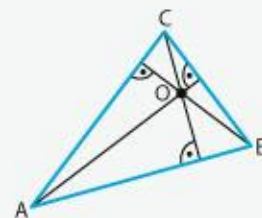
$$\begin{aligned} |AD| &= |BD| \\ |BE| &= |CE| \\ |CF| &= |AF| \end{aligned}$$



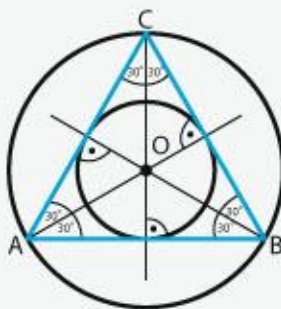
3. **środek ciężkości** – punkt przecięcia środkowych



4. **ortocentrum** – punkt przecięcia wysokości



W każdym trójkącie równobocznym wszystkie cztery punkty się pokrywają.



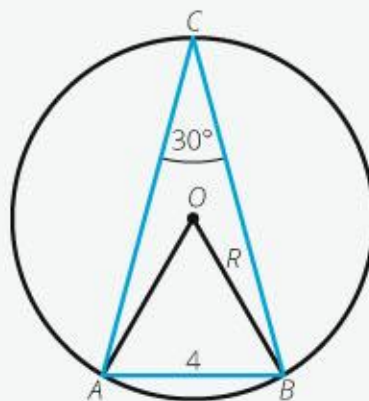
Przykład

Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym o kącie przy podstawie równym 75° i podstawie długości 4.

Rozwiązanie:

Kąt między ramionami trójkąta wynosi: $180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Kąt AOB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany ACB , więc ma miarę $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$.

Trójkąt AOB jest trójkątem równobocznym, zatem: $R = |AO| = |BO| = 4$

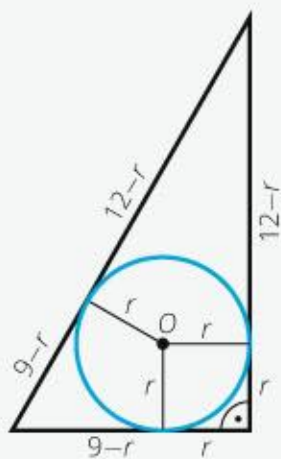


Przykład

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 9 i 12.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Obliczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c^2 = 9^2 + 12^2$$

$$c^2 = 81 + 144$$

$$c^2 = 225$$

$$c = 15$$

Obliczamy długość promienia:

$$12 - r + 9 - r = 15$$

$$-2r = -6$$

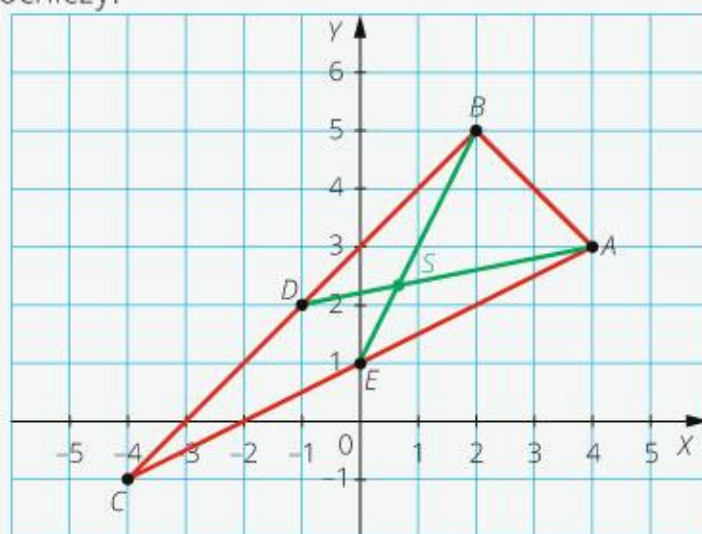
$$r = 3$$

Przykład

Znajdź środek ciężkości w trójkącie o wierzchołkach $A = (4, 3)$, $B = (2, 5)$, $C = (-4, -1)$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Obliczamy współrzędne środków boków AC i BC:

$$D = \left(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{5 + (-1)}{2} \right) = (-1, 2)$$

$$E = \left(\frac{4 + (-4)}{2}, \frac{3 + (-1)}{2} \right) = (0, 1)$$

Wyznaczamy równanie prostej AD:

$$\begin{cases} 3 = 4a + b \\ 2 = -a + b \end{cases}$$

$$1 = 5a$$

$$a = \frac{1}{5}$$

$$2 = -\frac{1}{5} + b$$

$$b = 2\frac{1}{5}$$

$$y = \frac{1}{5}x + 2\frac{1}{5}$$

Wyznaczamy równanie prostej BE :

$$\begin{cases} 5 = 2a + b \\ 1 = b \end{cases}$$

$$b = 1$$

$$5 = 2a + 1$$

$$a = 2$$

$$y = 2x + 1$$

Wyznaczamy współrzędne punktu przecięcia środkowych:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = \frac{1}{5}x + 2\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$2x + 1 = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$$

$$2x - \frac{1}{5}x = \frac{11}{5} - 1$$

$$\frac{9}{5}x = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$y = 2 \cdot \frac{2}{3} + 1$$

$$y = \frac{7}{3}$$

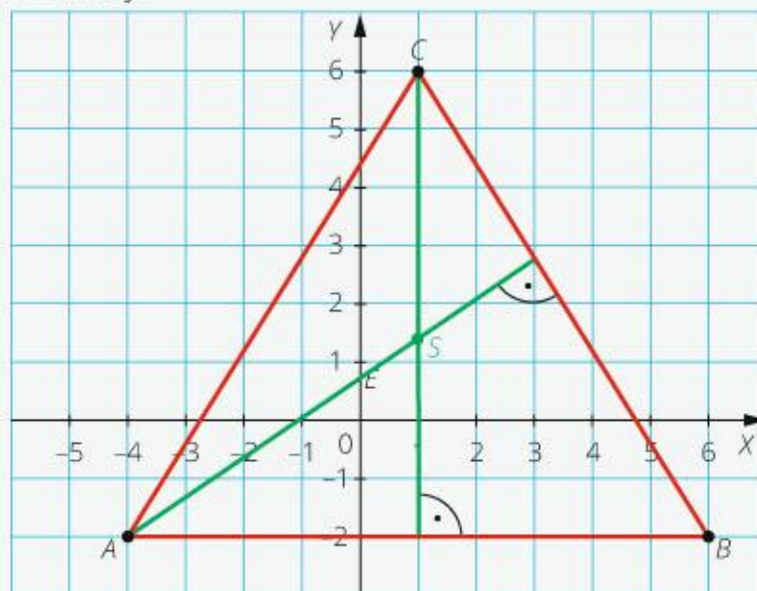
Środek ciężkości ma współrzędne $S = \left(\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}\right)$

Przykład

Znajdź ortocentrum trójkąta o wierzchołkach $A = (-4, -2)$, $B = (6, -2)$, $C = (1, 6)$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej BC :

$$\begin{cases} 6 = a + b \\ -2 = 6a + b \end{cases}$$

$$8 = -5a$$

$$a = -\frac{8}{5}$$

Wyznaczamy równanie wysokości opuszczonej z wierzchołka A :

$$y = \frac{5}{8}x + b$$

$$-2 = \frac{5}{8} \cdot (-4) + b$$

$$b = -2 + \frac{5}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}$$



$$y = \frac{5}{8}x + \frac{1}{2}$$

Równanie wysokości opuszczonej z wierzchołka C to $x = 1$

Wstawiamy do równania $y = \frac{5}{8}x + \frac{1}{2}$ i otrzymujemy $y = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$

Ortocentrum ma współrzędne $S = \left(1, 1\frac{1}{8}\right)$.

8.9. Wielokąty foremne

Wielokąty foremne

Wielokątami foremnymi nazywamy wielokąty, które mają wszystkie boki tej samej długości i wszystkie kąty wewnętrzne jednakowej miary.

Poniższe rysunki przedstawiają przykłady wielokątów foremnych.



trójkąt foremny
(trójkąt równoboczny)



czworokąt foremny
(kwadrat)

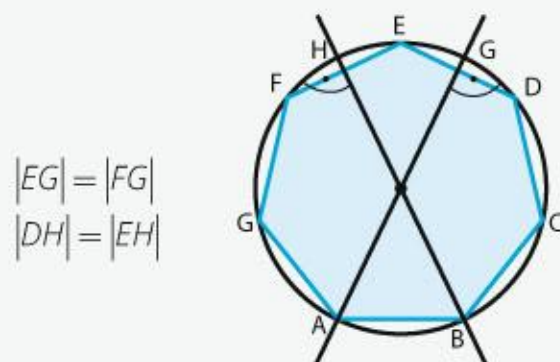


pięciokąt foremny



sześciokąt foremny

Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia symetralnych boków wielokąta.

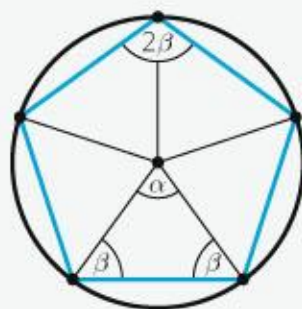


Przykład

Oblicz miarę kąta wewnętrznego pięciokąta foremnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Wyznaczamy miarę kąta środkowego α :

$$\alpha = 360^\circ : 5 = 72^\circ$$

Wyznaczamy miarę kąta β :

$$\beta = (180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ$$

Zatem miara kąta wewnętrznego trójkąta foremnego wynosi $2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$.

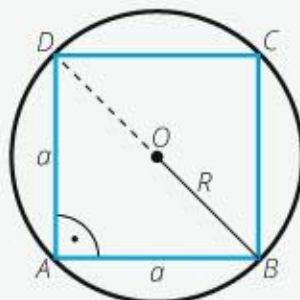
W dowolny wielokąt foremny można wpisać okrąg. Jego środek jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wielokąta.

Przykład

Oblicz promień okręgu opisanego na kwadracie o polu 64 cm^2 .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Długość boku kwadratu $ABCD$ oznaczamy jako a , promień okręgu opisanego na kwadracie – jako R . Wyznaczamy długość boku kwadratu ze wzoru na pole kwadratu:

$$P = a^2$$

$a^2 = 64$, stąd $a = 8 \text{ (cm)}$ (długość boku kwadratu jest liczbą dodatnią)

Obliczamy długość przekątnej AC z twierdzenia Pitagorasa:

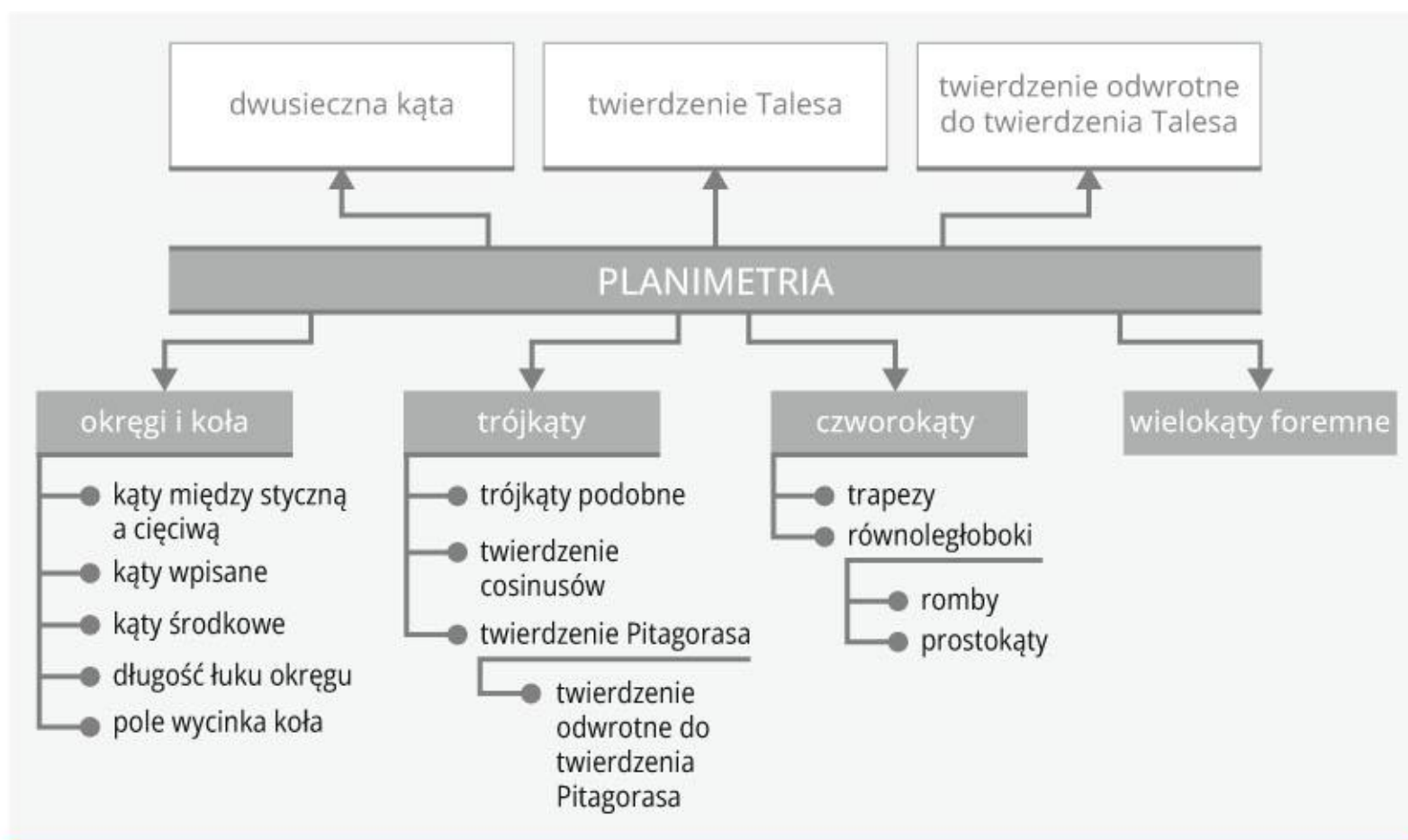
$$|AC|^2 = a^2 + a^2$$

$|AC|^2 = 128$, stąd $|AC| = 8\sqrt{2} \text{ (cm)}$ (długość przekątnej kwadratu jest liczbą dodatnią)

Promień okręgu opisanego na kwadracie jest dwa razy mniejszy od przekątnej, zatem:

$$R = \frac{1}{2} \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

8.10. Utrwalamy wiedzę



9

Geometria analityczna

9.1. Równanie prostej na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej. Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie

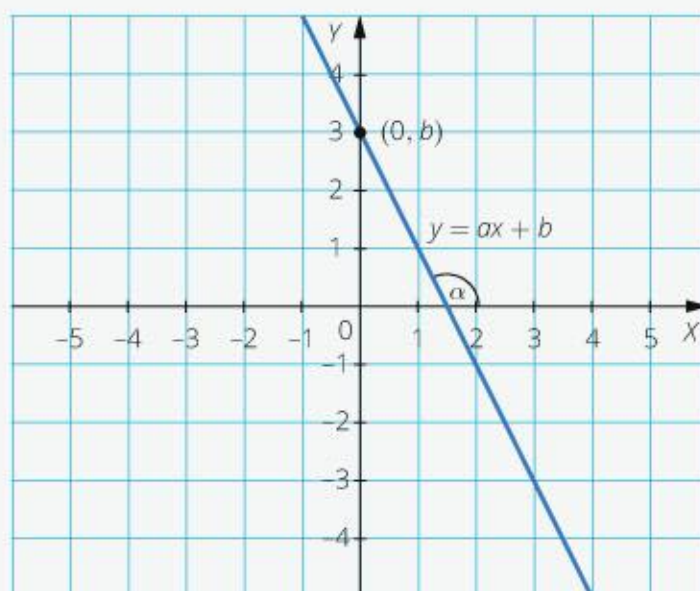
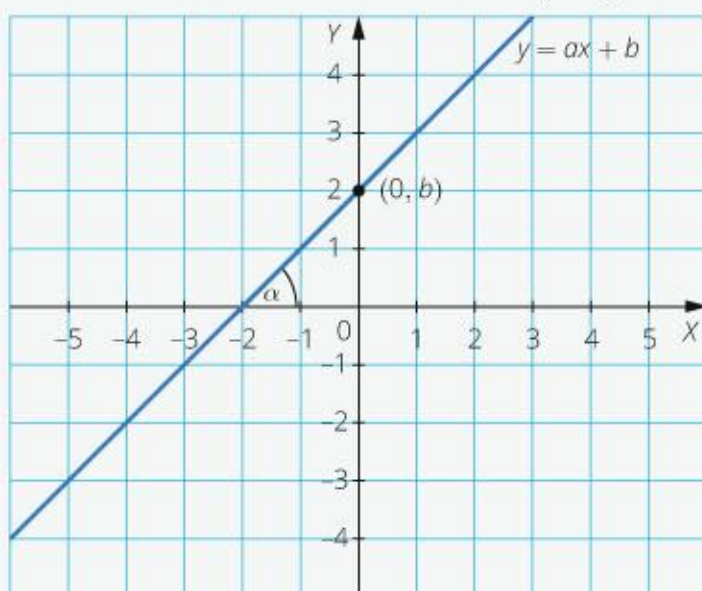
Równanie kierunkowe prostej

Wykresem funkcji liniowej jest prosta określona równaniem: $y = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Równanie to jest nazywane **równaniem kierunkowym prostej**, a liczba a – **współczynnikiem kierunkowym**.

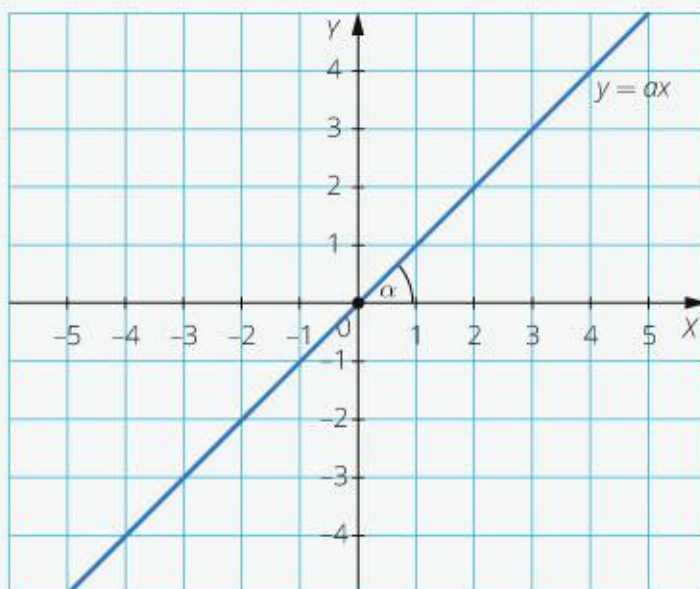
Równaniem kierunkowym można opisać każdą prostą, która nie jest równoległa do osi OY .

1. Dla $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$ prosta o równaniu kierunkowym $y = ax + b$ jest nachylona do dodatniej półosi osi OX pod kątem α , takim że $a = \operatorname{tg} \alpha$.

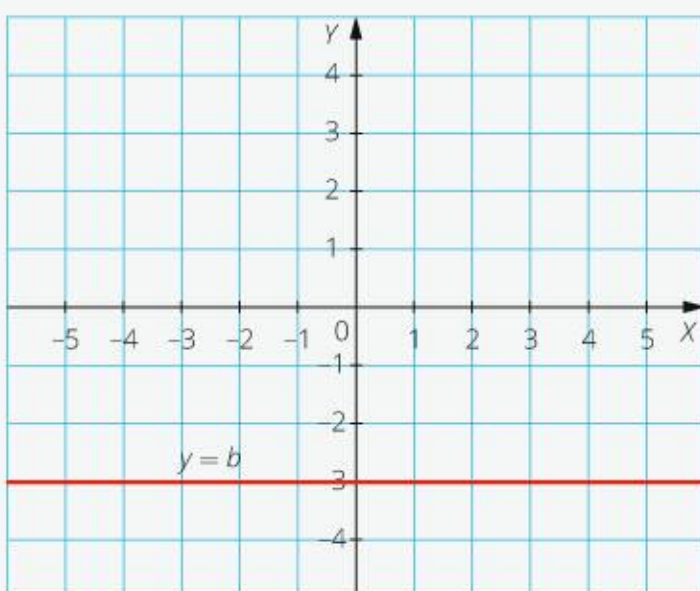
Prosta ta przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.



W szczególnym przypadku, gdy $a \neq 0$ i $b = 0$, równanie kierunkowe prostej $y = ax + b$ przyjmuje postać $y = ax$. Prosta o tym równaniu przechodzi przez początek układu współrzędnych.

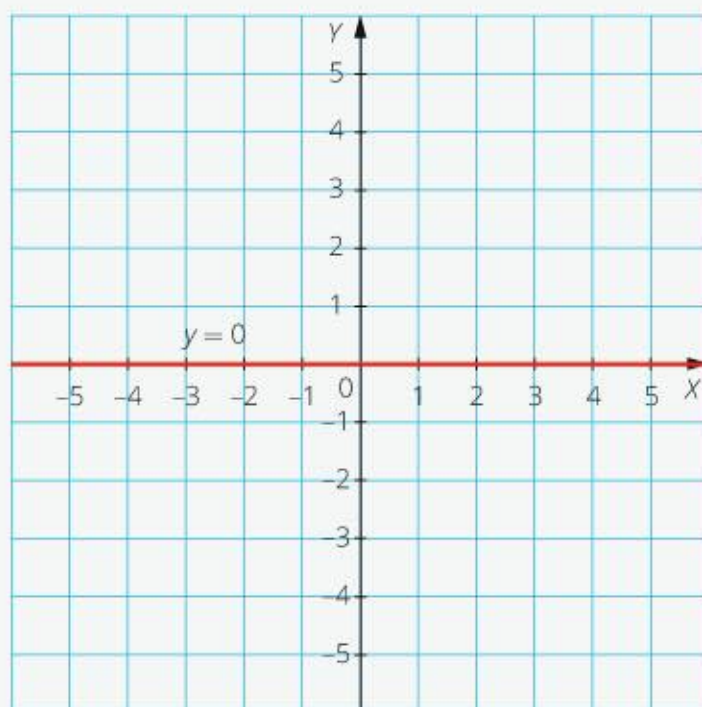


2. Dla $a = 0$ i $b \neq 0$ równanie kierunkowe prostej $y = ax + b$ przyjmuje postać $y = b$, a prosta opisana tym równaniem jest równoległa do osi OX .

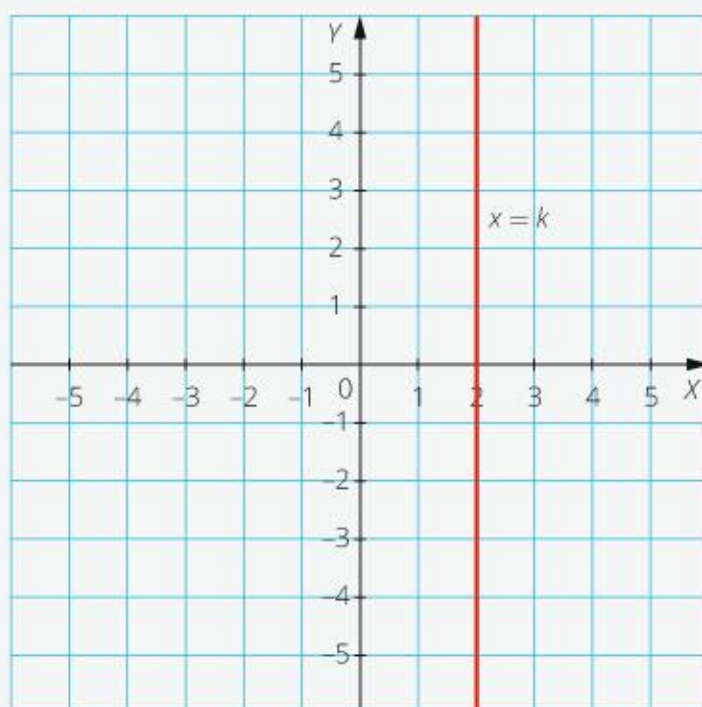




Dla $a=0$ i $b=0$ równanie kierunkowe prostej $y=ax+b$ przyjmuje postać $y=0$, a prosta opisana tym równaniem pokrywa się z osią OX .



3. Prosta prostopadła do osi OX nie jest wykresem funkcji liniowej, a więc nie można jej opisać równaniem kierunkowym. Tę prostą możemy opisać na przykład równaniem $x=k$, dla $k \in \mathbb{R}$.



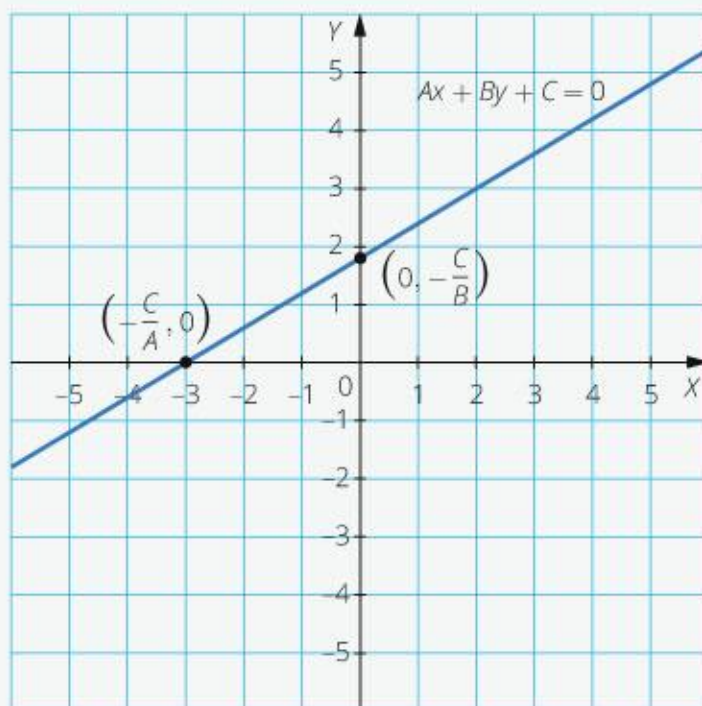
Równanie ogólne prostej

Aby opisać każdą prostą narysowaną w kartezjańskim układzie współrzędnych, używa się **równania ogólnego prostej**.

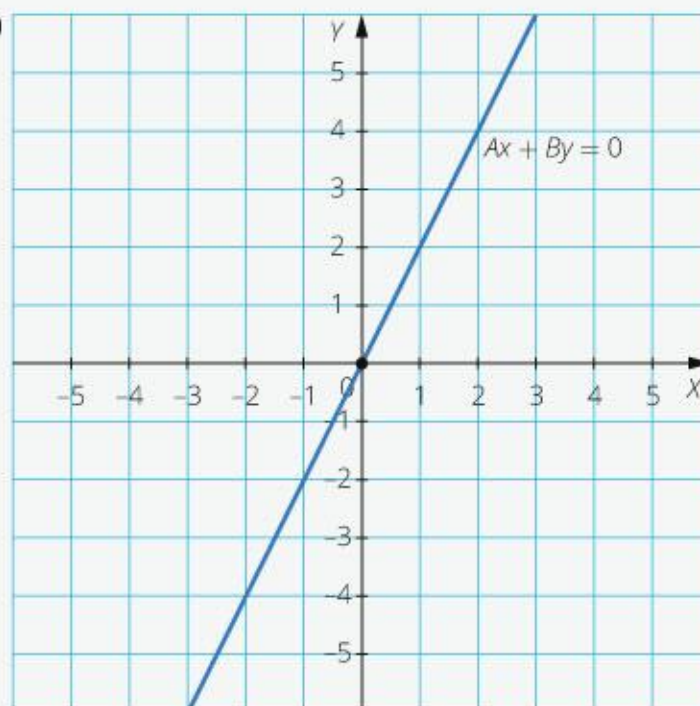
Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A, B, C \in \mathbb{R}$ oraz współczynniki A i B nie są jednocześnie równe 0, jest nazywane **równaniem ogólnym prostej**.

Warunek, że współczynniki A i B nie są jednocześnie równe 0, zapisujemy następująco $A^2 + B^2 > 0$ lub $A^2 + B^2 \neq 0$.

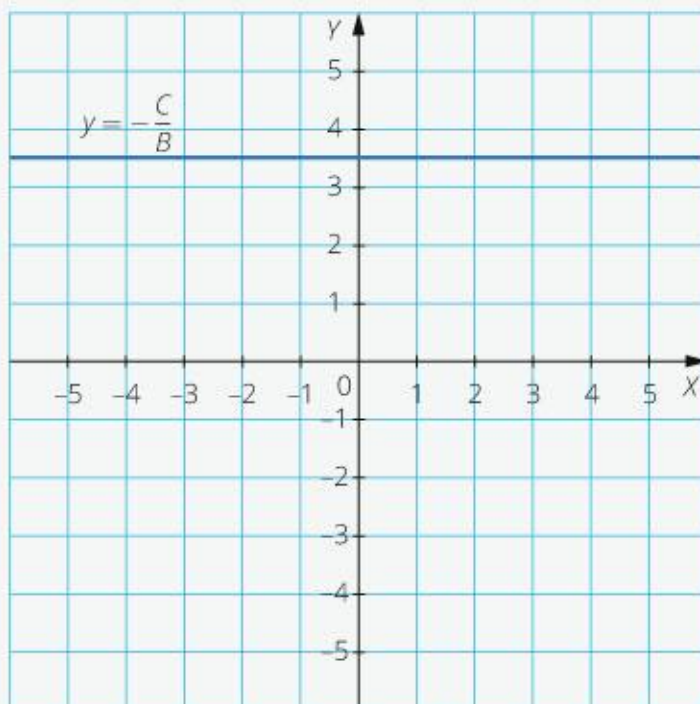
1. Dla $A \neq 0$ i $B \neq 0$ równanie $Ax + By + C = 0$ opisuje prostą przecinającą obie osie układu w punktach o współrzędnych: $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ i $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.



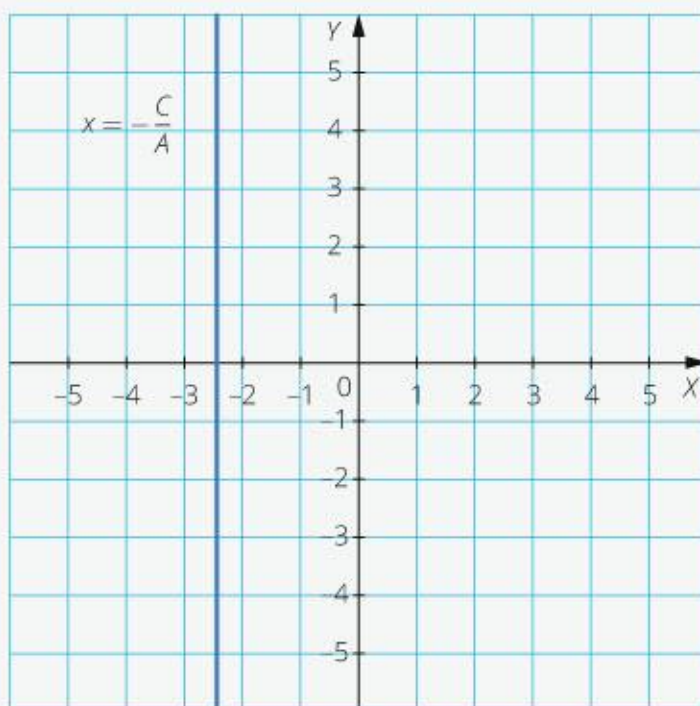
Dla $A \neq 0$ i $B \neq 0$ i $C = 0$ równanie $Ax + By + C = 0$ przyjmuje postać $Ax + By = 0$ i opisuje prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych.



2. Dla $A = 0$ i $B \neq 0$ równanie $Ax + By + C = 0$ przyjmuje postać $By + C = 0$ i opisuje prostą równoległą do osi OX . Inne równanie tej prostej to $y = -\frac{C}{B}$.



3. Dla $A \neq 0$ i $B = 0$ równanie $Ax + By + C = 0$ przyjmuje postać $Ax + C = 0$ i opisuje prostą równoległą do osi OY . Inne równanie tej prostej to $x = -\frac{C}{A}$.



Przekształcanie równania kierunkowego do ogólnego

Przekształcanie równania kierunkowego do ogólnego polega na przeniesieniu wszystkich składników równania na jedną stronę równania i uporządkowaniu ich tak, aby najpierw był składnik ze zmienną x , później – składnik ze zmienną y , a na końcu – wyraz wolny.



Jeśli prosta nie jest równoległa do osi OY , to znaczy w równaniu $Ax + By + C = 0$ współczynnik B jest różny od 0, to równanie ogólne prostej można przekształcić do kierunkowego poprzez wyznaczenie zmiennej y w zależności od zmiennej x .

Należy pamiętać, że dla danej prostej (która nie jest równoległa do osi OY) można zapisać tylko jedno równanie kierunkowe, ale wiele równań ogólnych.

Przykład

Przekształć:

a) równanie kierunkowe prostej $y = -2x + 1$ do postaci ogólnej,

b) równanie ogólne prostej $3x + 4y - 5 = 0$ do postaci kierunkowej.

Rozwiązanie:

a) Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę. Otrzymujemy: $-2x - y + 1 = 0$ lub $2x + y - 1 = 0$

b) Wyznaczamy y z równania.

$$4y = -3x + 5 \quad | :4, \text{ stąd: } y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

Położenie prostych kartezjańskim układzie współrzędnych

Proste opisane są równaniami kierunkowymi $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ i żadna z nich nie jest równoległa do osi OY . Wzajemne położenie tych prostych możemy określić, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$$

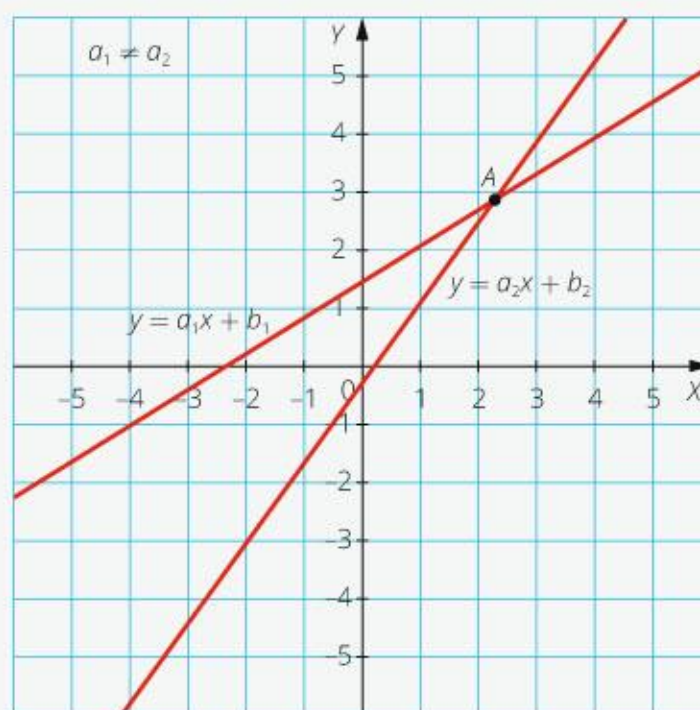
Otrzymujemy wówczas równanie: $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$

$$\text{Stąd: } x(a_1 - a_2) = b_2 - b_1$$

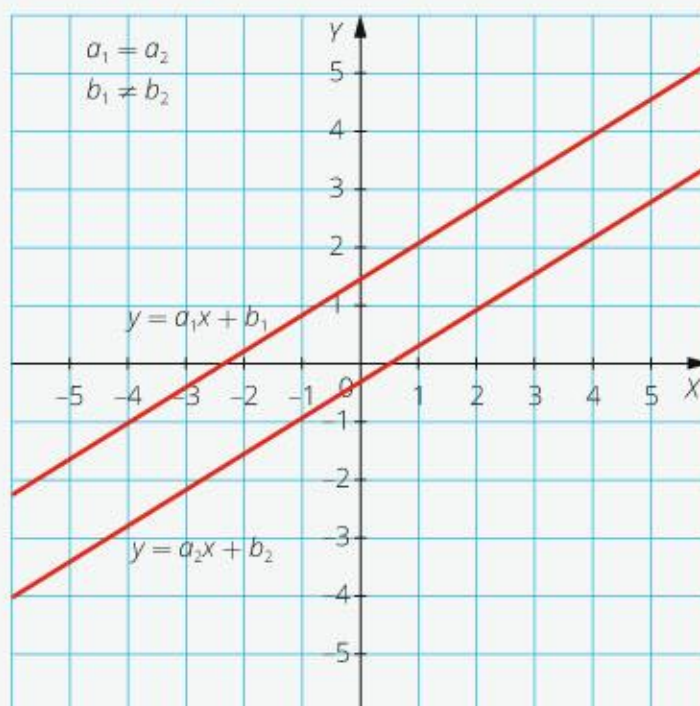
1. Gdy $a_1 - a_2 \neq 0$, to proste mają dokładnie jeden punkt wspólny (proste przecinają się w punkcie).

Współrzędne punktu A przecięcia tych prostych:

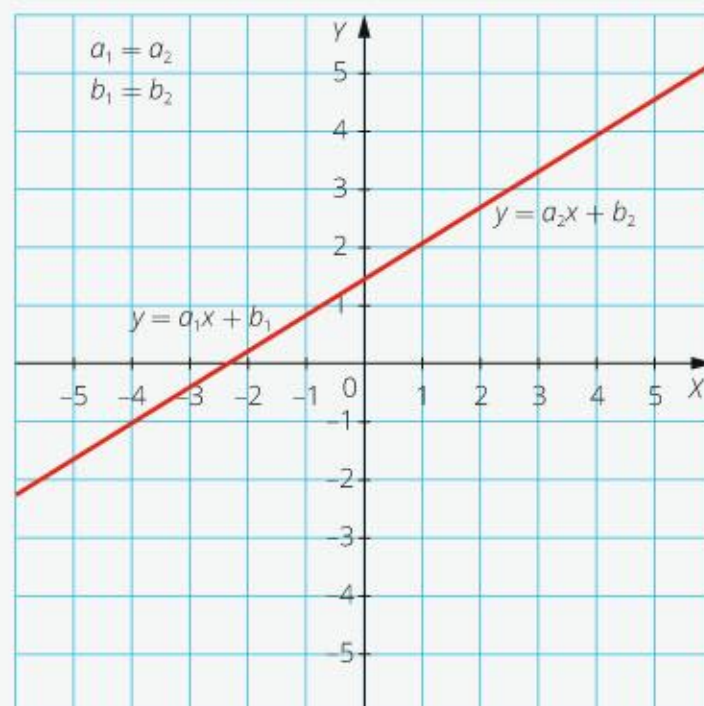
$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}, y = \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{a_1 - a_2}$$



2. Gdy $a_1 - a_2 = 0$ i $b_2 - b_1 \neq 0$, to proste nie mają punktów wspólnych (proste są równoległe).



3. Gdy $a_1 - a_2 = 0$ i $b_2 - b_1 = 0$, to proste mają nieskończenie wiele punktów wspólnych (proste się pokrywają).



Przykład

Określ, ile punktów wspólnych mają proste o równaniach $y = -x + 3$ i $x + y + 3 = 0$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Przekształcamy równanie ogólne prostej $x + y + 3 = 0$ do postaci kierunkowej $y = -x - 3$. Zauważamy, że proste mają jednakowy współczynnik kierunkowy $a = -1$ i różne współczynniki b . Proste te są więc równoległe i nie mają punktów wspólnych.

Sposób II

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ x + (-x + 3) + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ 6 = 0 \text{ równanie sprzeczne} \end{cases}$$

Odpowiedź: Te proste nie mają punktu wspólnego.

Przykład

Określ wzajemne położenie prostych: $2x - 3y - 4 = 0$ i $-4x + 6y + 8 = 0$.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że jeżeli pomnożymy równanie pierwszej prostej przez -2 , to otrzymamy równanie drugiej prostej. Stąd wynika, że proste się pokrywają.

9.2. Równanie prostej o zadanych własnościach

Równanie kierunkowe prostej, gdy dany jest współczynnik kierunkowy

- Równaniem kierunkowym prostej o danym współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$, jest: $y = a(x - x_0) + y_0$.

Przykład

Napisz równanie prostej o danym współczynniku kierunkowym $a = 3$ i przechodzącej przez punkt $A = (1, 2)$.

Rozwiązanie:

Sposób I

$$y = 3x + b$$

$$2 = 3 \cdot 1 + b$$

$$b = -1$$

$$y = 3x - 1$$

podstawiamy do równania prostej $y = ax + b$ liczbę $a = 3$

podstawiamy współrzędne punktu $A = (1, 2)$ do równania prostej

wyznaczamy współczynnik b

zapisujemy równanie prostej



Sposób II

Korzystamy ze wzoru na równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$: $y = a(x - x_0) + y_0$. Podstawiamy liczbę $a = 3$ i współrzędne punktu $A = (1, 2)$.

Otrzymujemy: $y = 3(x - 1) + 2$

Przekształcamy do najprostszej postaci: $y = 3x - 1$

Odpowiedź: Prosta o równaniu $y = 3x - 1$ ma współczynnik kierunkowy równy 3 i przechodzi przez punkt A o współrzędnych $(1, 2)$.

Równanie kierunkowe i ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty

Równaniem kierunkowym prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$, jest: $y - y_A = a(x - x_A)$, gdzie $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, gdy $x_B \neq x_A$.

Równaniem ogólnym prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$, jest: $(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$.

Przykład

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (-1, 2)$ i $B = (2, -4)$.

Rozwiązanie:

Sposób I

$2 = a \cdot (-1) + b$ podstawiamy współrzędne punktu $A = (-1, 2)$ do równania prostej $y = ax + b$

$-4 = a \cdot 2 + b$ podstawiamy współrzędne punktu $B = (2, -4)$ do równania prostej $y = ax + b$

$\begin{cases} 2 = -a + b \\ -4 = 2a + b \end{cases}$ rozwiązujemy układ równań z niewiadomymi a i b

$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$

$y = -2x$

zapisujemy równanie prostej

Sposób II

Korzystamy ze wzoru na równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$: $y - y_A = a(x - x_A)$, gdzie $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, gdy $x_B \neq x_A$ dla $A = (-1, 2)$ i $B = (2, -4)$

Otrzymujemy: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - 2}{2 - (-1)} = -2$ i $y - 2 = -2(x + 1)$

Stąd: $y = -2x$

Sposób III

Korzystamy ze wzoru na równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$: $(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$ dla $A = (-1, 2)$ i $B = (2, -4)$

Otrzymujemy: $(y - 2)(2 + 1) - (-4 - 2)(x + 1) = 0$

$3(y - 2) + 6(x + 1) = 0$

Stąd: $y = -2x$

Odpowiedź: Równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B to $y = -2x$.

Proste równoległe

Proste równoległe:

- Dwie proste o równaniach kierunkowych: $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wówczas, gdy mają jednakowe współczynniki kierunkowe ($a_1 = a_2$).
- Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$.

Przykład

Napisz równanie prostej równoległej do prostej opisanej równaniem: $y = -\frac{1}{4}x + 4$ i przechodzącej przez punkt $A = (2, -6)$.

Rozwiązanie:

Określamy wartość współczynnika kierunkowego prostej i zapisujemy równanie prostej równoległej do danej prostej. $a_2 = a_1 = -\frac{1}{4}$, stąd: $y = -\frac{1}{4}x + b$

Wstawiamy do równania prostej współrzędne punktu A : $x = 2$ i $y = -6$ i obliczamy wartość współczynnika b . Otrzymujemy: $-6 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + b$, stąd: $b = -5\frac{1}{2}$

Odpowiedź: Prosta o równaniu $y = -\frac{1}{4}x - 5\frac{1}{2}$ jest równoległa do prostej o równaniu $y = -\frac{1}{4}x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (2, -6)$.

Przykład

Napisz równanie ogólne prostej równoległej do prostej opisanej równaniem: $4x - 3y + 6 = 0$ i przecinającej oś OY w punkcie o rzędnej 1.

Rozwiązanie:

Korzystamy z warunku: Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$

Skoro: $4B_2 + 3A_2 = 0$, to najlepiej dobrać: $A_2 = A_1 = 4$ i $B_2 = B_1 = -3$

Stąd równanie prostej równoległej do danej ma postać: $4x - 3y + C_2 = 0$

Punkt $A = (0, 1)$ należy do prostej, więc jego współrzędne spełniają równanie prostej. Otrzymujemy: $4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + C_2 = 0$

Stąd: $C_2 = 3$

Równanie prostej równoległej do danej: $4x - 3y + 3 = 0$

Odpowiedź: Prosta równoległa do $4x - 3y + 6 = 0$ i przecinająca oś OY w punkcie o rzędnej 1 opisana jest równaniem $4x - 3y + 3 = 0$.

Proste prostopadłe**Proste prostopadłe:**

1. Dwie proste o równaniach kierunkowych: $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wówczas, gdy współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a_1 \cdot a_2 = -1$.
2. Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

Przykład

Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej opisanej równaniem: $y = -\frac{2}{3}x + 4$ i przechodzącej przez punkt $A = (4, 1)$.

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej do prostej $y = -\frac{2}{3}x + 4$ i zapisujemy równanie prostej prostopadłej do danej prostej. Otrzymujemy: $a_1 = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$, stąd

$y = \frac{3}{2}x + b$. Wstawiamy współrzędne punktu A : $x = 4$ i $y = 1$, a następnie obliczamy wartość współczynnika b . Otrzymujemy: $1 = \frac{3}{2} \cdot 4 + b$, stąd: $b = -5$.

Odpowiedź: Prosta o równaniu: $y = \frac{3}{2}x - 5$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -\frac{2}{3}x + 4$ i przechodzi przez punkt $A = (4, 1)$.



Przykład

Napisz równanie ogólne prostej prostopadłej do prostej opisanej równaniem: $2x - 3y + 1 = 0$ i przecinającej oś OX w punkcie o odciętej 2.

Rozwiązanie:

Korzystamy z warunku: Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$

Skoro: $2A_2 - 3B_2 = 0$, to najlepiej dobrać: $A_2 = -B_1 = 3$ i $B_2 = A_1 = 2$

Stąd równanie prostej prostopadłej do danej ma postać: $3x + 2y + C_2 = 0$

Punkt $A = (2, 0)$ należy do prostej, więc jego współrzędne spełniają równanie prostej. Otrzymujemy:

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + C_2 = 0$$

Stąd: $C_2 = -6$

Równanie prostej prostopadłej do danej: $3x + 2y - 6 = 0$

Odpowiedź: Prosta prostopadła do $2x - 3y + 1 = 0$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej 2 opisana jest równaniem $3x + 2y - 6 = 0$.

9.3. Odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych

Długość odcinka

Odległość między punktami A i B jest równa długości odcinka AB .

Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Przykład

Oblicz obwód trójkąta ABC o wierzchołkach w punktach $A = (-3, -2)$, $B = (5, -2)$, $C = (4, 5)$.

Rozwiązanie:

Obliczamy długość odcinka AB :

$$|AB| = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-2 - (-2))^2} = \sqrt{64 + 0} = 8$$

Obliczamy długość odcinka BC :

$$|BC| = \sqrt{(4 - 5)^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Obliczamy długość odcinka AC :

$$|AC| = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (5 - (-2))^2} = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

Obliczamy obwód trójkąta ABC : $8 + 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 8 + 12\sqrt{2}$

Odpowiedź: Obwód trójkąta ABC wynosi $8 + 12\sqrt{2}$.

Przykład

Oblicz odległość punktu A , który jest punktem przecięcia prostych $k: y = x + 5$ i $m: y = -2x + 2$ od początku układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy współrzędne punktu A , który jest punktem przecięcia prostych $k: y = x + 5$ i $m: y = -2x + 2$.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = x + 5 \\ y = -2x + 2 \\ x + 5 = -2x + 2 \\ y = x + 5 \\ x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Współrzędne punktu A : $(-1, 4)$

Obliczamy odległość punktu A od początku układu współrzędnych: $|OA| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

Odpowiedź: Odległość punktu A , który jest punktem przecięcia prostych $k: y = x + 5$ i $m: y = -2x + 2$, od początku układu współrzędnych wynosi $\sqrt{17}$.

Przykład

Na prostej o równaniu $y = x - 3$ wyznacz punkt B , który leży najbliżej punktu $A = (-1, 2)$.

Rozwiązanie:

Skoro punkt B leży na prostej o równaniu $y = x - 3$, to jego współrzędne możemy zapisać $B = (x_B, x_B - 3)$.

Obliczamy długość odcinka AB : $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Otrzymujemy: $|AB| = \sqrt{(x_B + 1)^2 + (x_B - 3 - 2)^2}$

Stąd: $|AB| = \sqrt{2x_B^2 - 8x_B + 26}$

Odległość pomiędzy punktami A i B będzie najmniejsza wówczas, gdy wartość funkcji $f(x) = 2x_B^2 - 8x_B + 26$ będzie najmniejsza. Funkcja kwadratowa o współczynniku $a > 0$ przyjmuje wartość najmniejszą w wierzchołku paraboli.

Wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu B jako pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli:

$$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$$

Wyznaczamy drugą współrzędną punktu B : $y_B = 2 - 3 = -1$

Odpowiedź: Współrzędne szukanego punktu to: $B = (2, -1)$.

9.4. Równanie okręgu

Równanie okręgu

Okręgiem o środku S i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r .

Równaniem okręgu jest równanie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci kanonicznej.

Przykład

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , dany jest okrąg określony równaniem:

$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$. Podaj współrzędne środka okręgu oraz długość promienia.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy współrzędne środka okręgu: $x - a = x + 3$ i $y - b = y - 2$

Stąd: $a = -3$ i $b = 2$

Zapisujemy: $S = (-3, 2)$

Wyznaczamy długość promienia okręgu: $r^2 = 20$

Stąd: $r = 2\sqrt{5}$

Odpowiedź: Środkiem tego okręgu jest punkt S o współrzędnych $(-3, 2)$, a promień jest równy $2\sqrt{5}$.

Przykład

Zapisz równanie okręgu o środku w punkcie $(2, -1)$ przechodzącego przez punkt $A = (5, 3)$.

Rozwiązanie:

Do równania okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ podstawiamy $a = 2$ i $b = -1$. Otrzymujemy:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$$

Punkt $A = (5, 3)$ należy do okręgu, a więc jego współrzędne spełniają równanie tego okręgu. Otrzymujemy:

$$(5 - 2)^2 + (3 + 1)^2 = r^2$$

Wyznaczamy promień okręgu: $r^2 = 3^2 + 4^2$

Stąd: $r^2 = 25$

Zapisujemy równanie okręgu: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$

Odpowiedź: Okrąg spełniający warunki zadania ma równanie: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.



Przykład

Oblicz współrzędne y punktów przecięcia okręgu $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ z osią OY .

Rozwiązanie:

Zapisujemy układ dwóch równań, w którym jedno jest równaniem danego okręgu, a drugie równaniem osi OY . Każdy punkt należący do osi Oy ma współrzędne $(0, y)$, zatem $x = 0$ jest równaniem tej osi.

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 16 \\ x = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ, wyznaczając współrzędną y :

$$(0+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

$$(y-1)^2 = 12$$

$$|y-1| = 2\sqrt{3}$$

$$y = 2\sqrt{3} + 1 \text{ lub } y = 1 - 2\sqrt{3}$$

Odpowiedź: Współrzędne y punktów przecięcia okręgu $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$ z osią OY są równe $2\sqrt{3} + 1$ i $1 - 2\sqrt{3}$.

Przykład

Napisz równanie okręgu zawierającego punkty $A = (-5, -12)$ i $B = (7, 4)$, którego środek należy do prostej o równaniu $y = x - 5$.

Rozwiązanie:

Skoro środek S okręgu należy do prostej o równaniu $y = x - 5$, to jego współrzędne zapiszemy $S = (a, a - 5)$.

Zapiszemy równanie okręgu o środku w punkcie $S = (a, a - 5)$: $(x - a)^2 + (y - a + 5)^2 = r^2$

Ponieważ punkty $A = (-5, -12)$ i $B = (7, 4)$ należą do okręgu, wobec tego współrzędne tych punktów spełniają równanie okręgu zapisane powyżej.

$$\text{Otrzymujemy układ równań: } \begin{cases} (-5 - a)^2 + (-12 - a + 5)^2 = r^2 \\ (7 - a)^2 + (4 - a + 5)^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\text{Zapisujemy układ w prostszej postaci: } \begin{cases} (-5 - a)^2 + (-7 - a)^2 = r^2 \\ (7 - a)^2 + (9 - a)^2 = r^2 \end{cases}$$

Porównujemy lewe strony układu równań:

$$25 + 10a + a^2 + 49 + 14a + a^2 = 49 - 14a + a^2 + 81 - 18a + a^2$$

Obliczamy a : $56a = 56$

$$a = 1$$

$$\text{Obliczamy } r^2: (-5 - 1)^2 + (-12 - 1 + 5)^2 = r^2$$

$$r^2 = 100$$

Zapisujemy równanie okręgu $(x - a)^2 + (y - a + 5)^2 = r^2$, podstawiając $a = 1$ i $r^2 = 100$:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$$

Odpowiedź: Okrąg spełniający warunki zadania jest opisany równaniem: $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 100$.

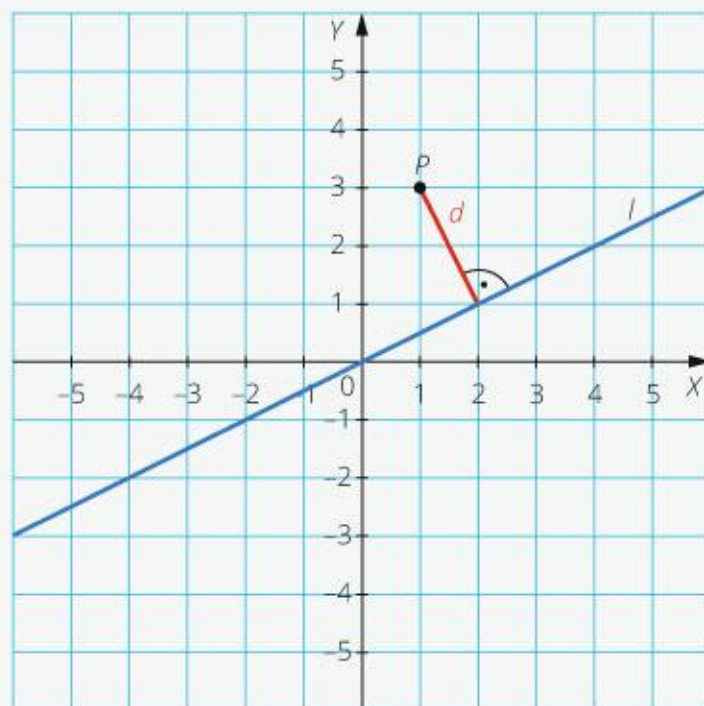
9.5. Odległość punktu od prostej

Odległość punktu od prostej

Odległością punktu P od prostej l nazywamy długość najkrótszego odcinka łączącego punkt P z punktem na prostej l (odcinek ten jest prostopadły do prostej l). Jeśli punkt P leży na prostej l , to jego odległość od tej prostej jest równa zero.

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej l o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ wyraża się za pomocą wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Przykład

Oblicz odległość punktu $P(-2, 1)$ od prostej $k: 5x - 12y + 3 = 0$.

Rozwiązanie:

Odczytujemy z równania prostej wartości współczynników: $A = 5$, $B = -12$, $C = 3$

Odczytujemy współrzędne punktu P : $x_0 = -2$, $y_0 = 1$

Obliczamy odległość punktu P od prostej k :

$$d = \frac{|5 \cdot (-2) + (-12) \cdot 1 + 3|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{|-10 - 12 + 3|}{\sqrt{169}} = \frac{19}{13}$$

Aby obliczyć odległość punktu od prostej opisanej równaniem kierunkowym, korzystając ze wzoru na odległość punktu od prostej, należy zapisać równanie prostej w postaci ogólnej.

Przykład

Oblicz odległość punktu $M(3, -4)$ od prostej $k: y = -2x + 1$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy równanie prostej k w postaci ogólnej:

$$y = -2x + 1$$

$$2x + y - 1 = 0$$

Odczytujemy z równania prostej wartości współczynników: $A = 2$, $B = 1$, $C = -1$

Odczytujemy współrzędne punktu M : $x_0 = 3$, $y_0 = -4$

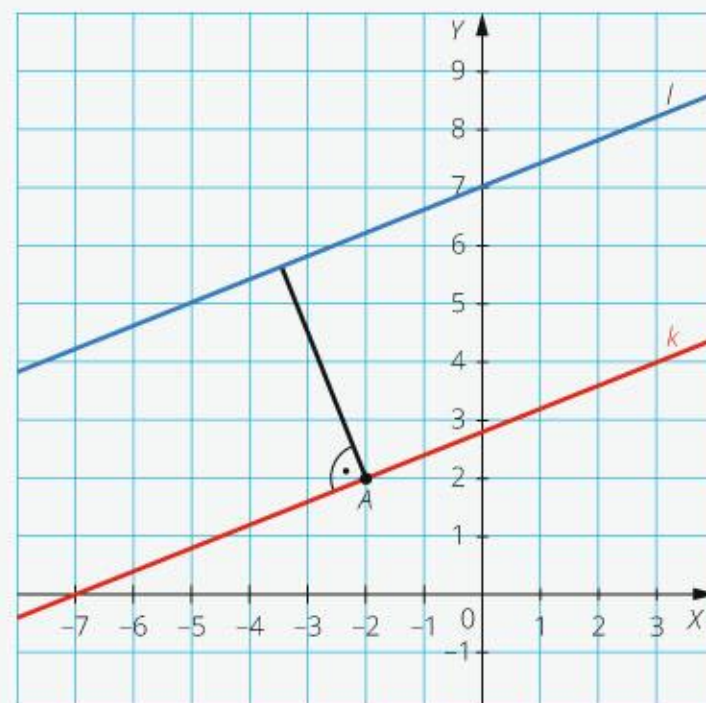
Obliczamy odległość punktu M od prostej k :

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|6 - 4 - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Odległość między dwiema prostymi równoległymi

Odległość między dwiema prostymi równoległymi jest równa odległości dowolnego punktu jednej z tych prostych od drugiej prostej.

Najkrótszy odcinek łączący dwa punkty prostych równoległych musi być prostopadły do tych prostych.



Przykład

Oblicz odległość między prostymi równoległymi $l: 3x - y - 2 = 0$ i $k: 3x - y + 4 = 0$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy dowolny punkt, który należy do jednej z prostych, np. do prostej l :

Do równania prostej l podstawiamy $x = 0$ i otrzymujemy $y = -2$, zatem punkt $P(0, -2)$ należy do prostej l .

Odczytujemy z równania prostej k wartości współczynników: $A = 3, B = -1, C = 4$

Odczytujemy współrzędne punktu P : $x_0 = 0, y_0 = -2$

Obliczamy odległość punktu P od prostej k :

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) + 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

9.6. Punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli

Punkty wspólne prostej i okręgu

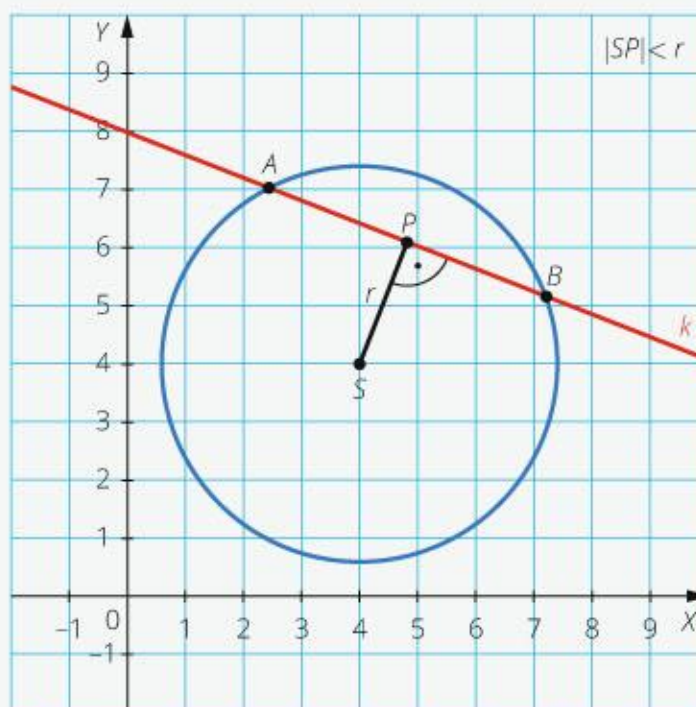
Liczba punktów wspólnych prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej zależy od odległości prostej od środka okręgu.

Oznaczmy odległość środka okręgu od prostej jako $|SP|$.

Sieczną okręgu nazywamy prostą, która może mieć dwa punkty wspólne z okręgiem.

$$|SP| < r$$

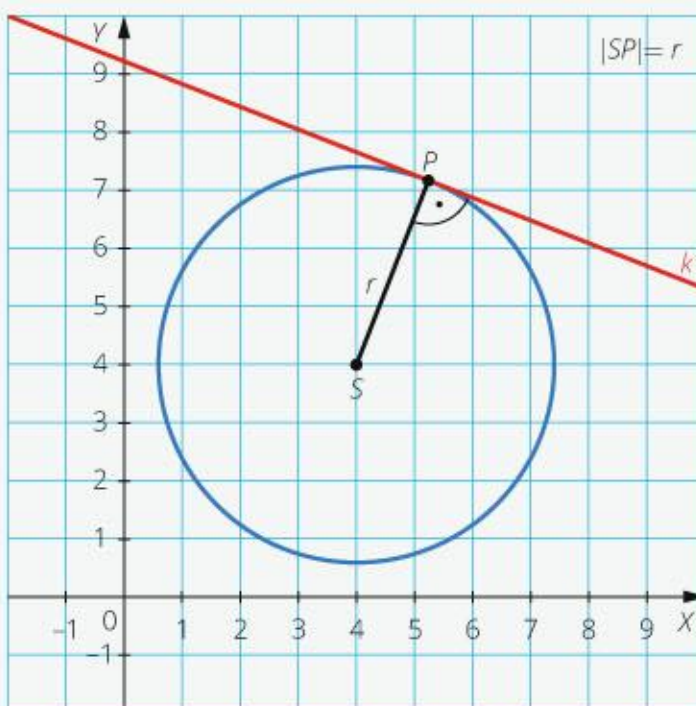
Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.



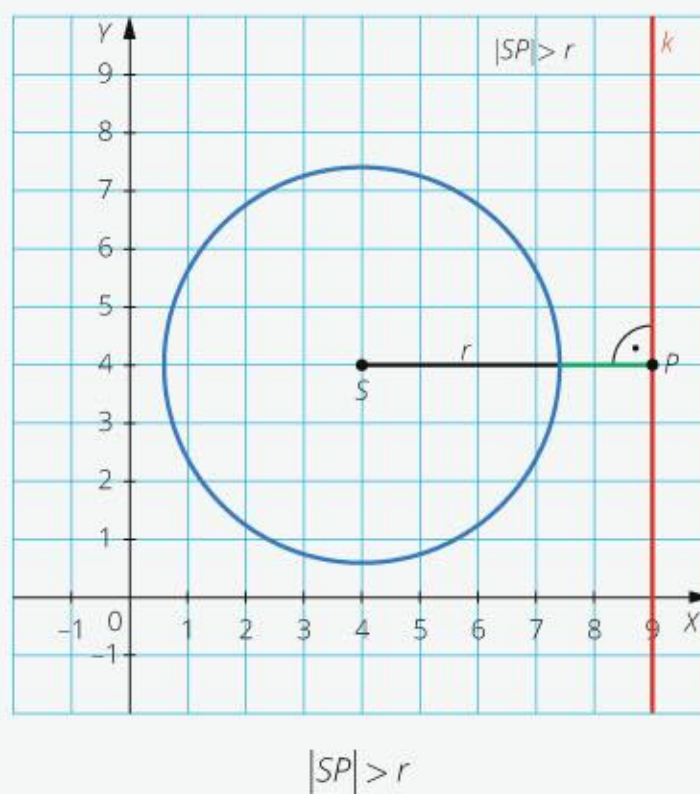
Styczną do okręgu nazywamy prostą, która może mieć jeden punkt wspólny z okręgiem.

$$|SP| = r$$

Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.



Prosta może nie mieć punktów wspólnych z okręgiem (są rozłączne).



Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Przykład

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 3 ma prosta l?

a) $S(2, -5)$, $l: 3x - 4y - 6 = 0$

b) $S(-3, 1)$, $l: x + 2y + 6 = 0$

c) $S(1, -4)$, $l: 12x - 5y + 7 = 0$

Rozwiązanie:

a) Wyznaczamy odległość punktu S od prostej l:

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + (-4) \cdot (-5) - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4 > 3$$

Odległość środka okręgu jest większa od promienia okręgu, więc okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych.

b) Wyznaczamy odległość punktu S od prostej l:

$$d = \frac{|1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5} < 3$$

Odległość środka okręgu jest mniejsza od promienia okręgu, więc okrąg i prosta mają dwa punkty wspólne.

c) Wyznaczamy odległość punktu S od prostej l:

$$d = \frac{|12 \cdot 1 + (-5) \cdot (-4) + 7|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|39|}{\sqrt{169}} = \frac{39}{13} = 3$$

Odległość środka okręgu jest równa promieniowi okręgu, więc okrąg i prosta mają jeden punkt wspólny.

Liczbę punktów wspólnych prostej i okręgu na płaszczyźnie kartezjańskiej możemy również określać, rozwiązując odpowiednie układy równań.

Przykład

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y - x = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = -5 \end{cases}$

Rozwiązanie:

a) Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

Z drugiego równania wyznaczamy $y = x$ i podstawiamy do pierwszego równania:

$$x^2 + x^2 = 8$$

$$2x^2 = 8$$

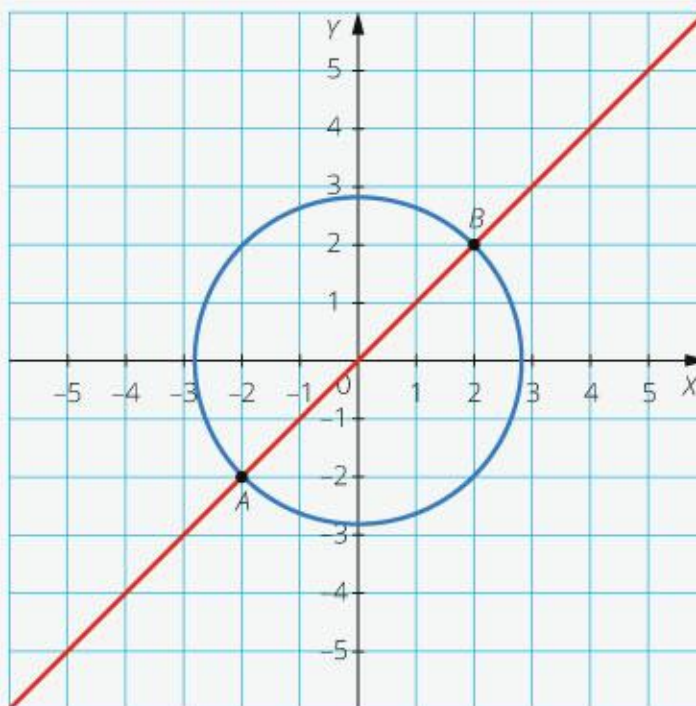
$$x^2 = 4, \text{ stąd } x = -2 \text{ lub } x = 2$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Podajemy interpretację geometryczną.

Okrąg $x^2 + y^2 = 8$ i prosta $y = x$ mają dwa punkty wspólne $A(-2, -2)$ i $B(2, 2)$.



b) Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

Z drugiego równania wyznaczamy $y = x + 4$ i podstawiamy do pierwszego równania:

$$(x-2)^2 + (x+3)^2 = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = 9$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

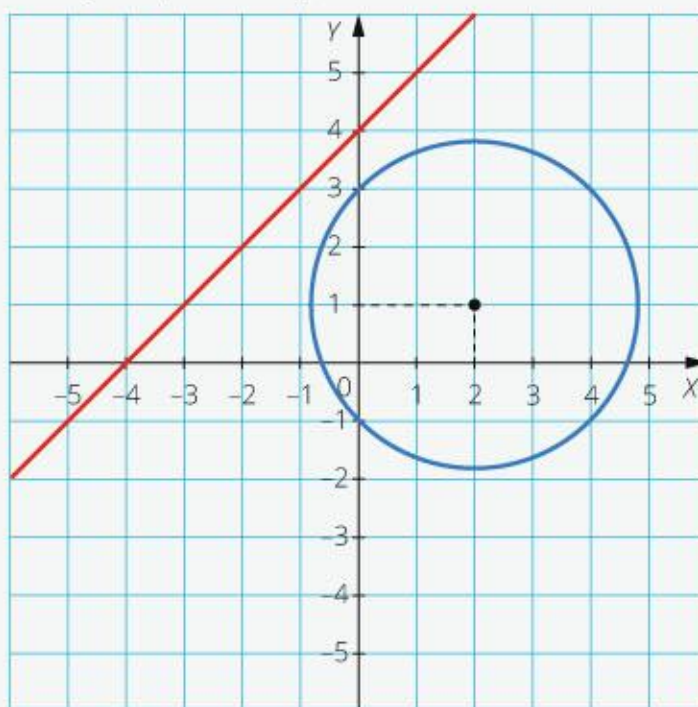
$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$$

Układ równań jest sprzeczny, zatem prosta $y = x + 4$ nie ma punktów wspólnych z okręgiem

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

Podajemy interpretację geometryczną:

Okrąg $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ i prosta $x - y + 4 = 0$ nie mają punktów wspólnych.



c) Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

Z drugiego równania $y = -5$ podstawiamy do pierwszego równania:

$$x^2 + (-5)^2 = 25$$

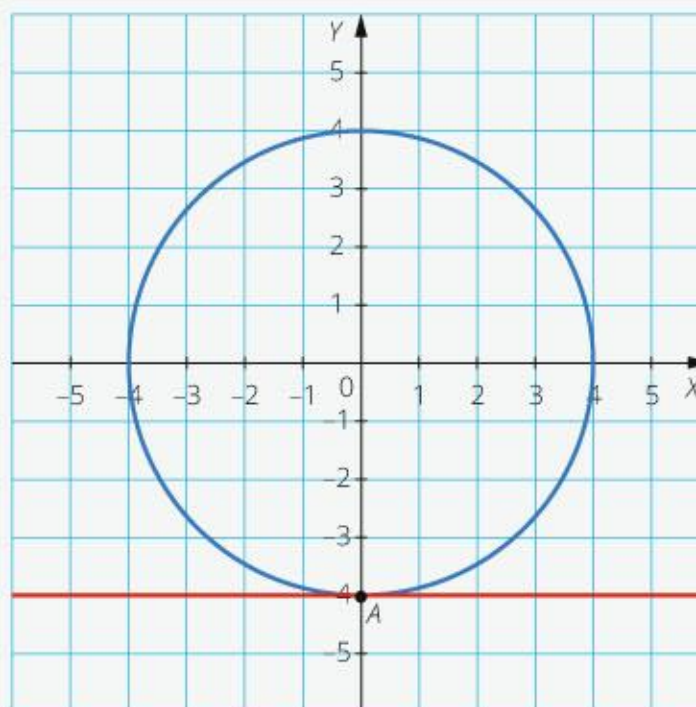
$$x^2 = 0, \text{ stąd } x = 0$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -5 \end{cases}$$

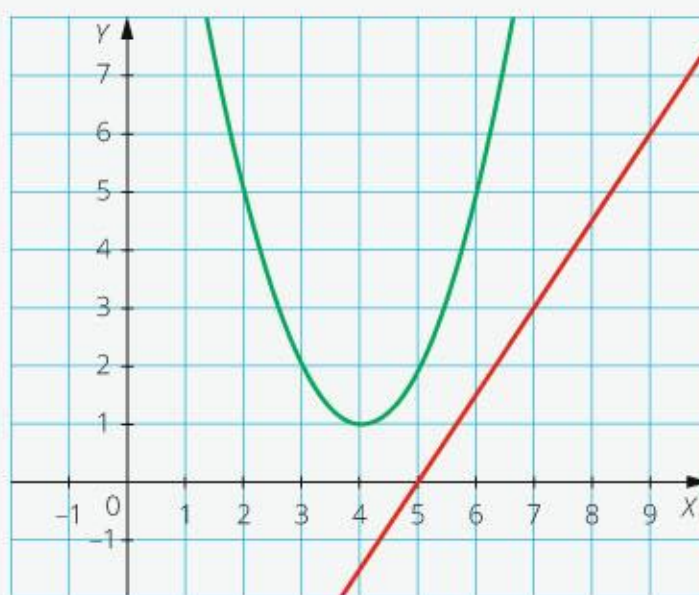
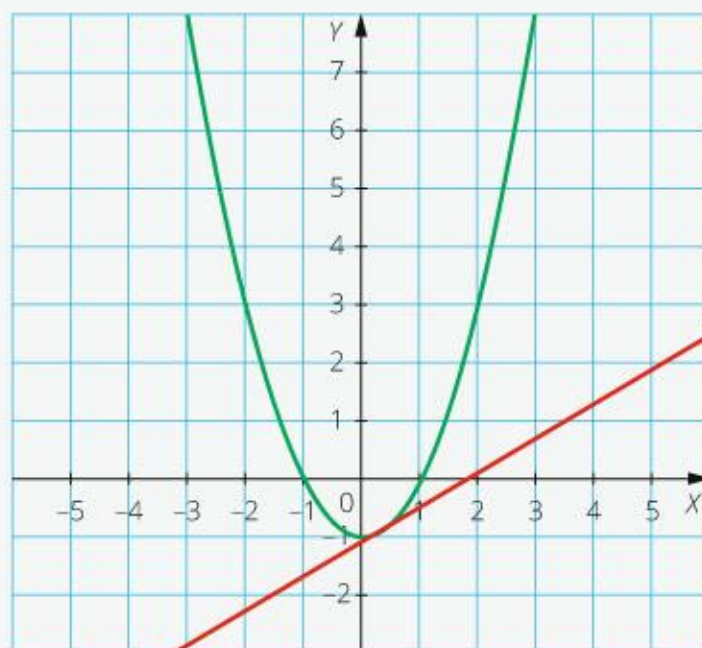
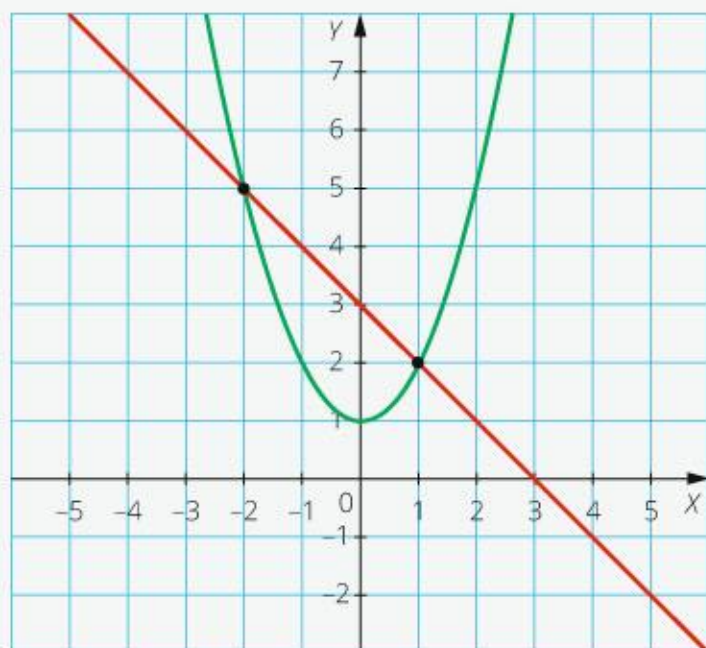
Podajemy interpretację geometryczną:

Okrąg $x^2 + y^2 = 25$ i prosta $y = -5$ mają jeden punkt wspólny $A(0, -5)$.



Punkty wspólne prostej i paraboli

Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden wspólny lub żadnych punktów wspólnych.



Sieczną paraboli nazywamy prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach.

Styczną do paraboli nazywamy prostą, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny.

Przykład

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

a)
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = -x^2 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

a) Porównujemy prawe strony równań:

$$x^2 = 2x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

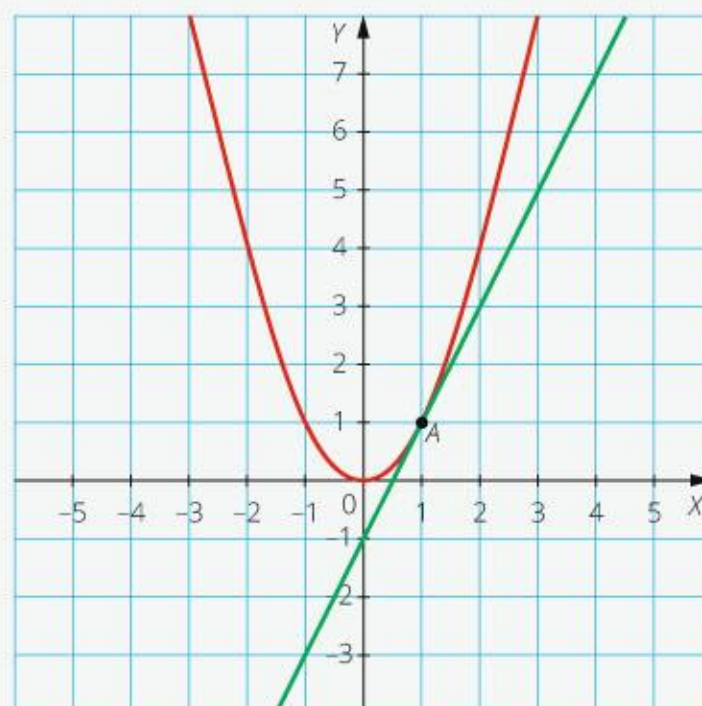
$$(x - 1)^2 = 0, \text{ stąd } x = 1$$

Zatem rozwiązaniem układu jest para liczb:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Podajemy interpretację geometryczną.

Parabola $y = x^2$ i prosta $y = 2x - 1$ mają jeden punkt wspólny $A(1, 1)$.



b) Porównujemy prawe strony równań:

$$-x^2 = x - 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

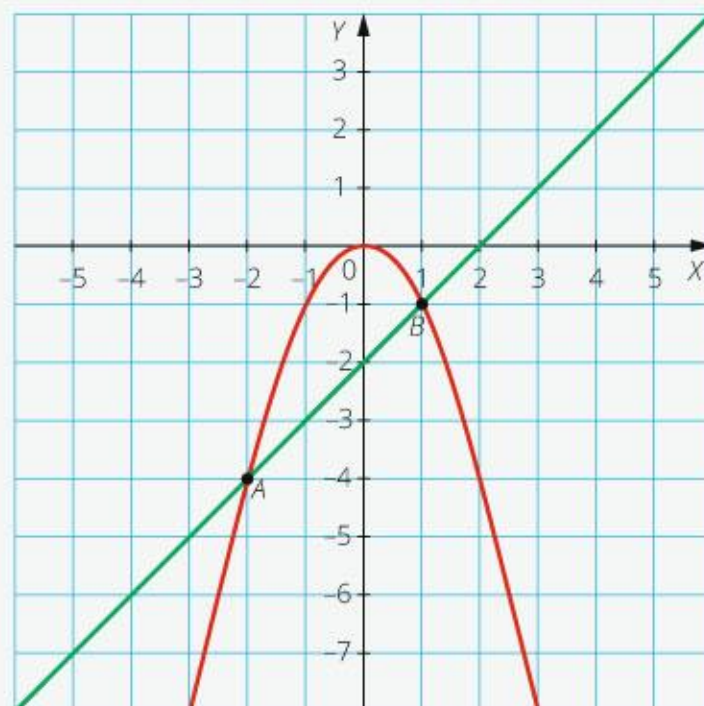
$$(x-1)(x+2) = 0, \text{ stąd } x = -2 \text{ lub } x = 1$$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Podajemy interpretację geometryczną.

Parabola $y = -x^2$ i prosta $y = x - 2$ mają dwa punkty wspólne $A(-2, -4)$ i $B(1, -1)$.



c) Porównujemy prawe strony równań:

$$x^2 = -x - 1$$

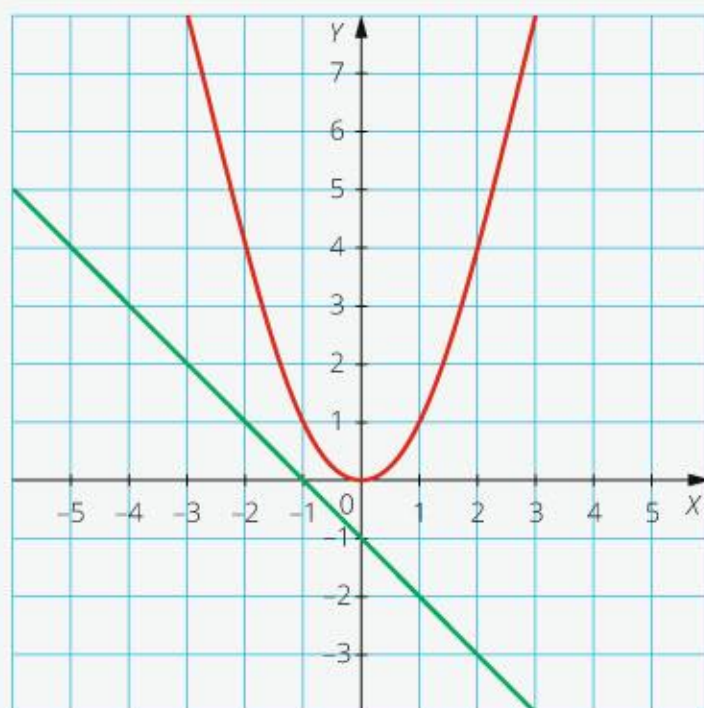
$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

Układ równań jest sprzeczny, zatem prosta $y = -x - 1$ nie ma punktów wspólnych z parabolą $y = x^2$.

Podajemy interpretację geometryczną.

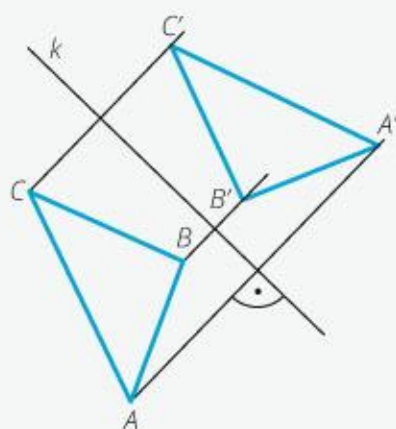
Parabola $y = x^2$ i prosta $y = -x - 1$ nie mają punktów wspólnych.



9.7. Symetria osiowa i symetria środkowa

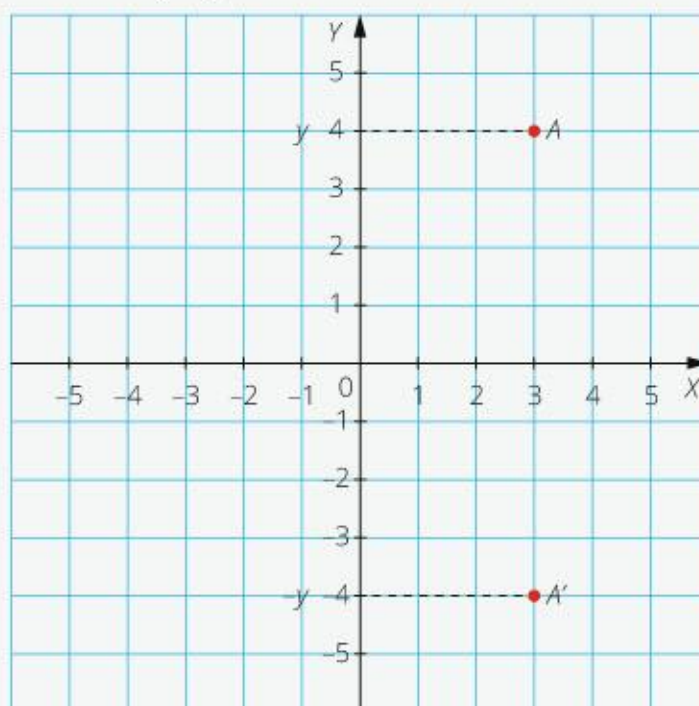
Symetria osiowa

Symetrią osiową względem prostej k nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej. Prostą k nazywamy **osią symetrii**.





Punktem symetrycznym do punktu $A(x, y)$ względem osi OX układu współrzędnych jest punkt $A'(x, -y)$.



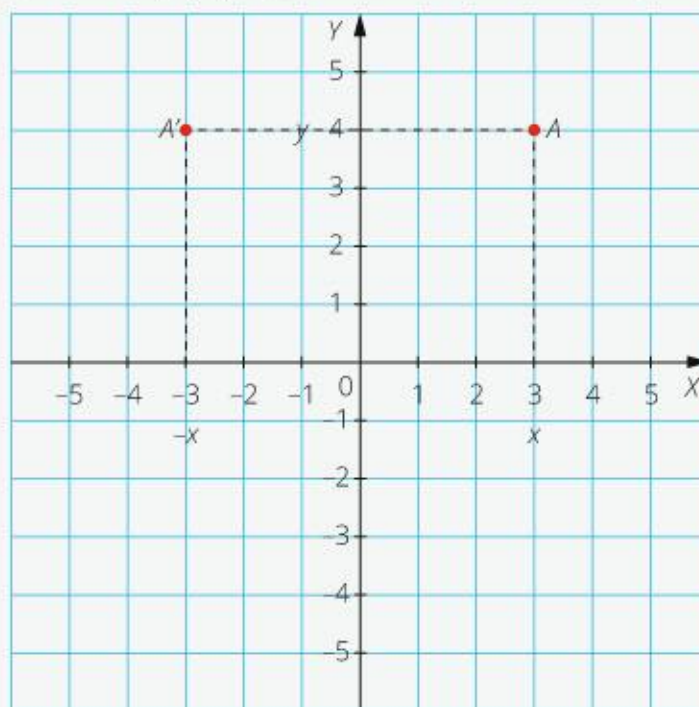
Przykład

Dane są punkty $A(-3, -1)$, $B(4, 2)$, $C(-1, 6)$. Podaj współrzędne wierzchołków trójkąta będącego obrazem trójkąta ABC w symetrii względem osi OX .

Rozwiązanie:

Obrazem punktu A w symetrii względem osi OX jest punkt $A'(-3, 1)$, punktu B jest punkt $B'(4, -2)$, punktu C jest punkt $C'(-1, -6)$.

Punktem symetrycznym do punktu $A(x, y)$ względem osi OY układu współrzędnych jest punkt $A'(-x, y)$.



Przykład

Wyznacz równanie okręgu K' symetrycznego względem osi OY do okręgu o równaniu $K: (x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$.

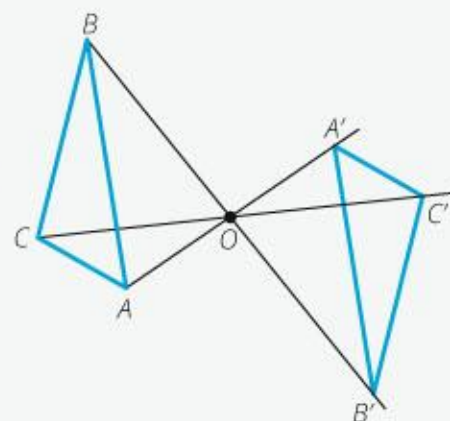
Rozwiązanie:

Środkiem okręgu K jest punkt $S(4, -2)$, a jego promień $r = 3$. Zatem środkiem okręgu K' jest punkt symetryczny do S względem osi OY , czyli $S'(-4, -2)$, a jego promień to $r' = 3$.

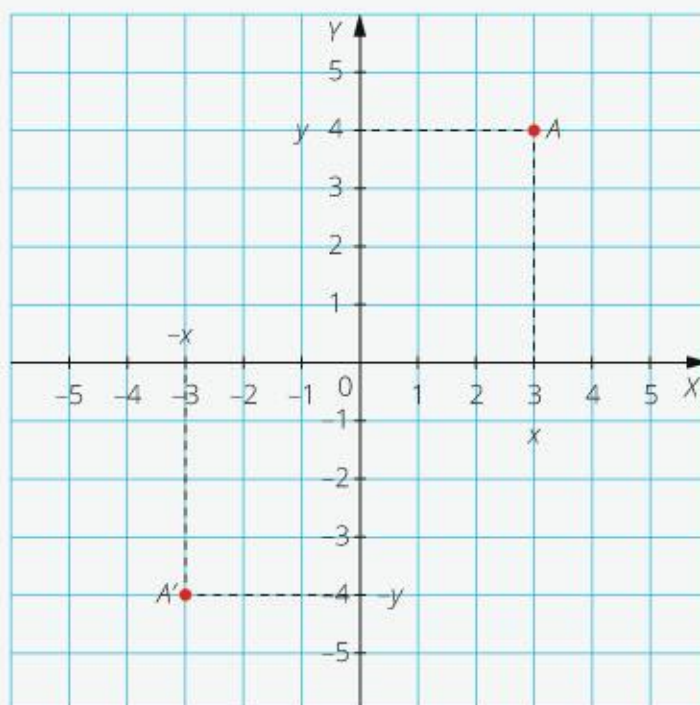
Równanie okręgu K' ma postać $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 9$.

Symetria środkowa

Symetrią środkową względem punktu O nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O . Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**.



Punktem symetrycznym do punktu $A(x, y)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt $A'(-x, -y)$.



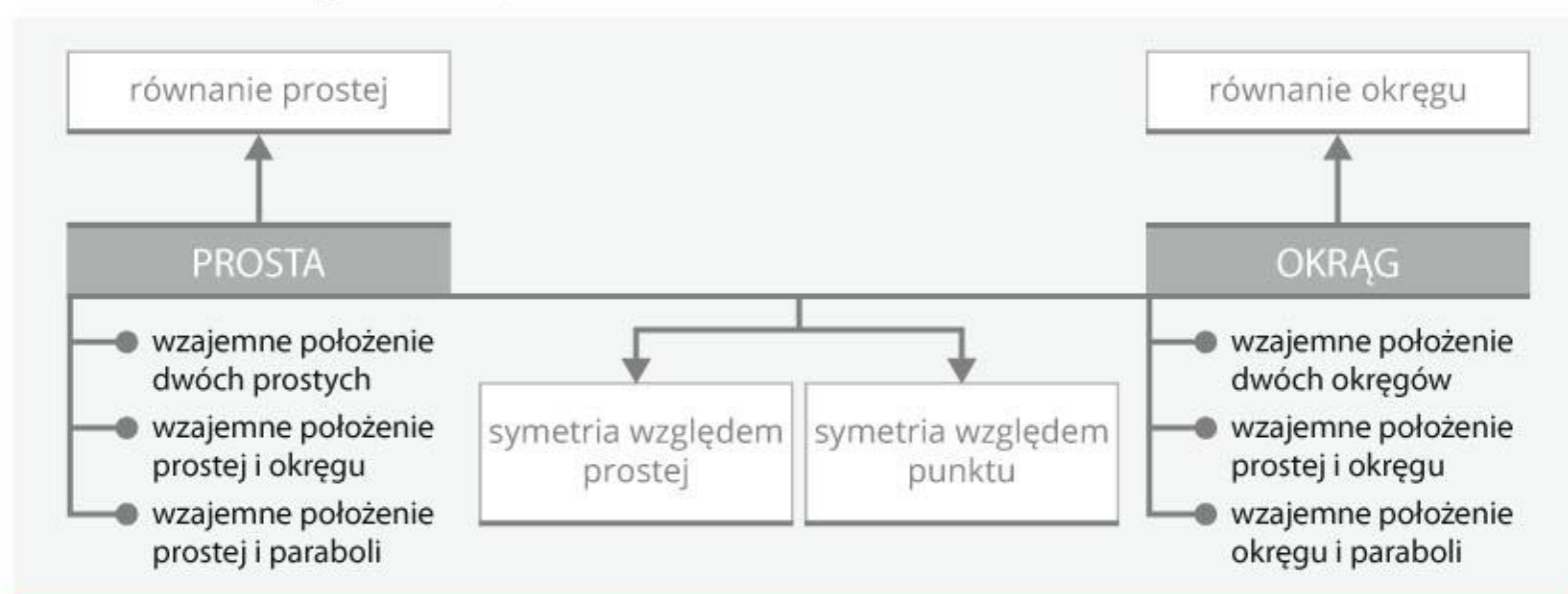
Przykład

Znajdź współrzędne wierzchołków wielokąta symetrycznego do czworokąta $ABCD$ względem początku układu współrzędnych, jeśli $A(-4, 0)$, $B(-1, -6)$, $C(8, 2)$, $D(3, 7)$.

Rozwiązanie:

Wielokątem symetrycznym do czworokąta $ABCD$ jest czworokąt o wierzchołkach w punktach $A'(4, 0)$, $B'(1, 6)$, $C'(-8, -2)$, $D'(-3, -7)$.

9.8. Utrwalamy wiedzę



10

Stereometria

10.1. Wzajemne położenie prostych w przestrzeni

Położenie prostych w przestrzeni

W przestrzeni proste mają następujące położenia:

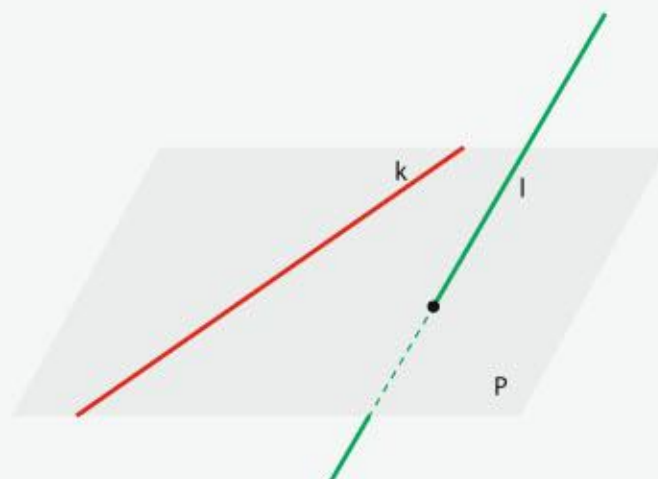
1. Proste równoległe – leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub pokrywają się.



2. Proste przecinające się – leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny.



3. Proste skośne – nie leżą w jednej płaszczyźnie i nie posiadają punktów wspólnych.



Przykład

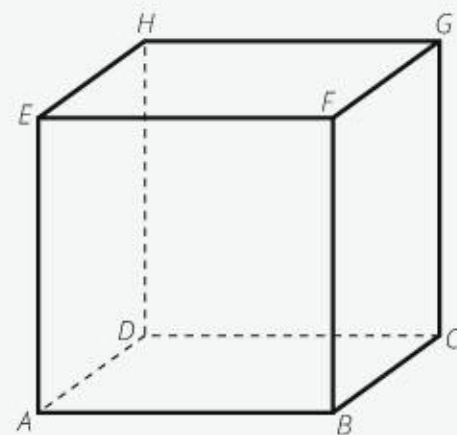
Wskaż na rysunku sześcianu krawędzie zawarte w prostych równoległych, przecinających się, skośnych.

Rozwiązanie:

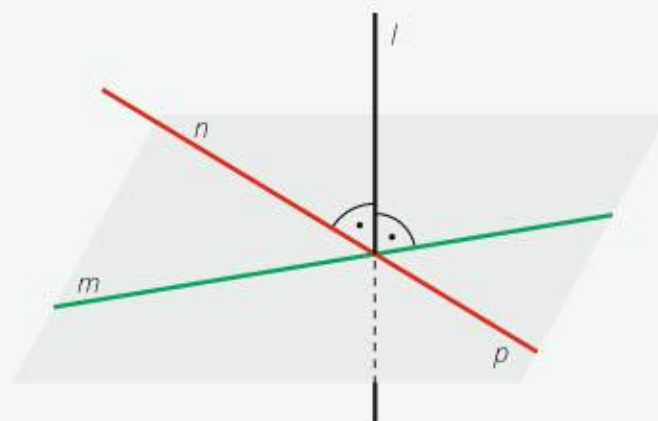
Krawędzie zawarte w prostych równoległych: AB, CD, EF, GH lub BC, AD, FG, EH lub AE, BF, CG, DH .

Krawędzie zawarte w prostych przecinających się: AB, BC ; AB, AD ; AB, AE ; AB, BF itd.

Krawędzie zawarte w prostych skośnych: AB, DH ; AB, CG ; AE, GH ; AE, CD itd.



Jeżeli prosta l jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych m i n zawartych w płaszczyźnie P , to jest ona prostopadła do płaszczyzny P .



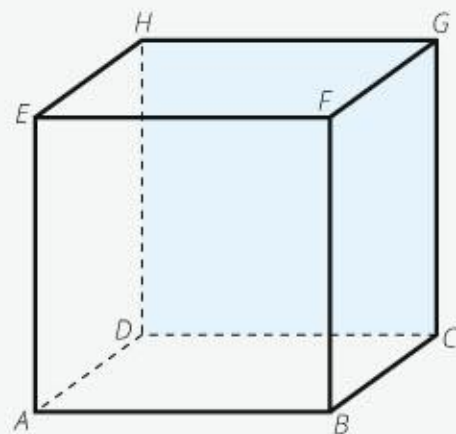


Przykład

Wskaż na rysunku sześcianu krawędzie zawarte w prostych prostopadłych do płaszczyzny zawierającej ścianę $CDHG$.

Rozwiązanie:

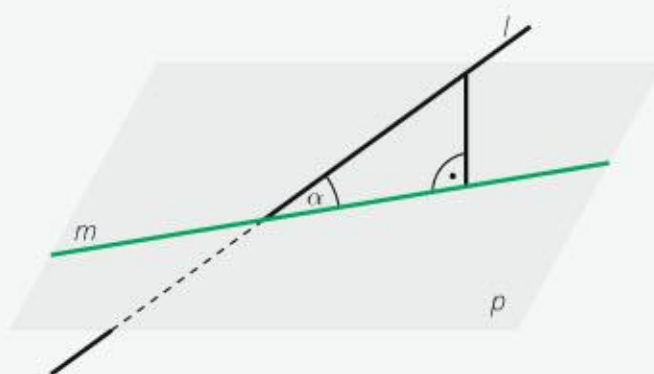
Krawędzie prostopadłe do ściany $CDHG$ to AD , BC , FG , EH .



10.2. Kąt między prostą a płaszczyzną, kąt dwuścienny

Kąt między prostą a płaszczyzną

Kąt między prostą a płaszczyzną to kąt ostry, jaki ta prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę.

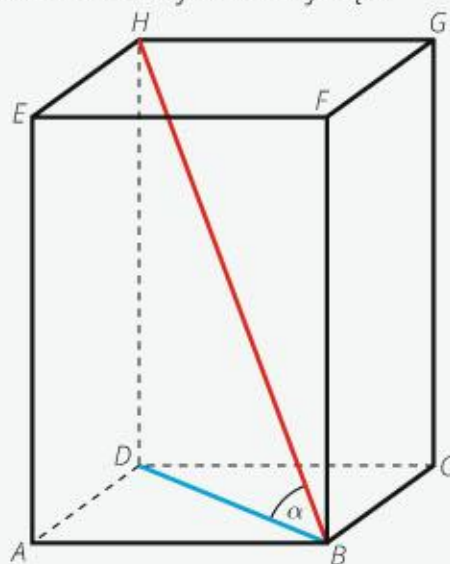


Przykład

Wyznacz kąt między przekątną prostopadłościanu a jego podstawą.

Rozwiązanie:

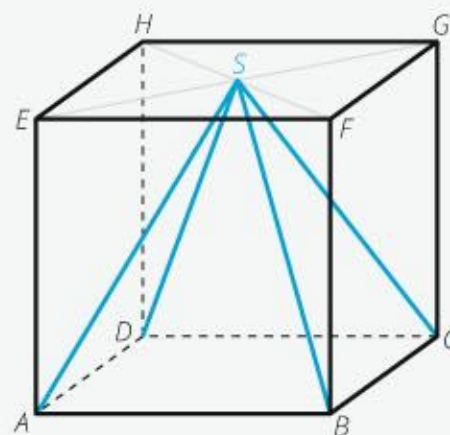
Wykonujemy rysunek pomocniczy i zaznaczamy szukany kąt.



Przykład

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $EFGH$ będącego górną podstawą sześcianu. Rozpatrzmy ostrosłup o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S . Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

- jego krawędź boczna,
- wysokość jego ściany bocznej.



Rozwiązanie:

Zaznaczamy na modelu oba szukane kąty. Oznaczamy długość krawędzi sześcianu jako a , a długość przekątnej kwadratu $ABCD$ jako $a\sqrt{2}$.

$$a) |AS|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2$$

$$|AS|^2 = \frac{3}{2}a^2 \quad |AS| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

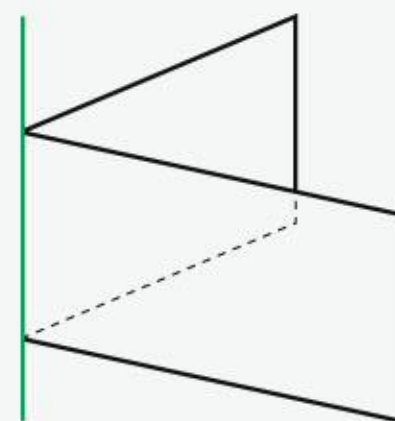
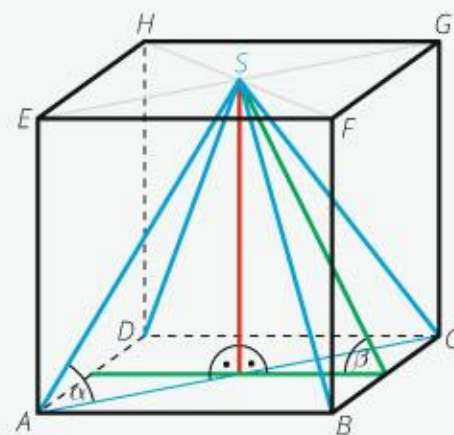
$$b) h^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$h^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$\sin \beta = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z tych części, łącznie z półpłaszczyznami, nazywamy kątem dwusiecznym, a półpłaszczyzny – ścianami kąta dwusiecznego.

**Kąt dwusieczny**

Miarą kąta dwusiecznego nazywamy miarę kąta płaskiego otrzymanego jako przekrój kąta dwusiecznego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi.

Przykład

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o bokach o długości 3, 4, 5. Jakie miary kątów tworzą ze sobą ściany tego graniastosłupa?

Rozwiązanie:

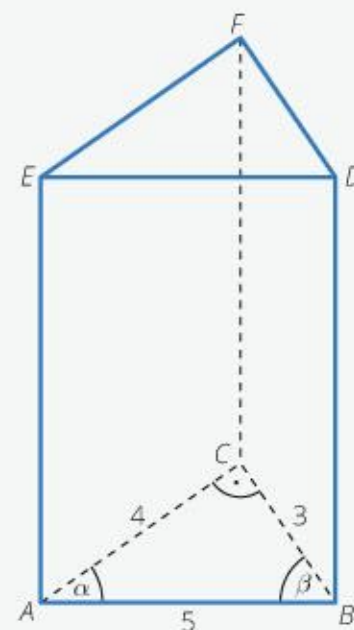
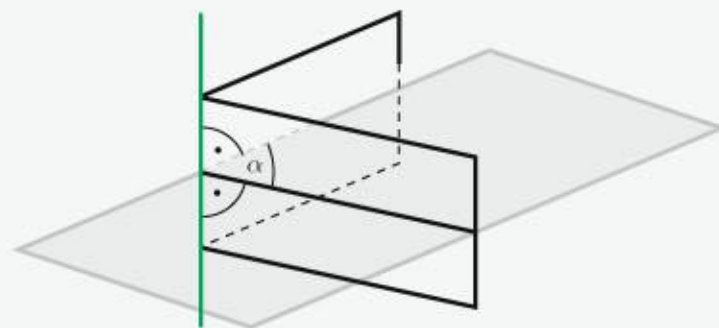
Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Ściany $ACFD$ oraz $BCFE$ tworzą kąt prosty.

Ściany $ABED$ oraz $ACFD$ tworzą kąt α .

Ściany $ABED$ oraz $BCFE$ tworzą kąt β .

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \text{ czyli } \alpha \approx 37^\circ, \text{ zatem } \beta = 90^\circ - 37^\circ \approx 53^\circ$$



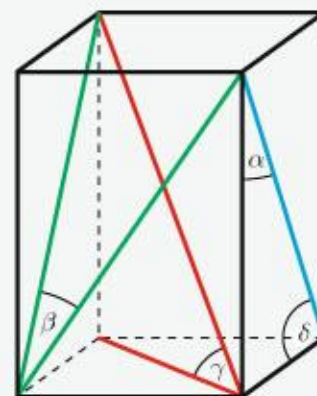
10.3. Kąty w graniastosłupach i ostrosłupach

Kąty w graniastosłupach

W graniastosłupach możemy wyznaczać i obliczać kąty między odcinkami i między ścianami.

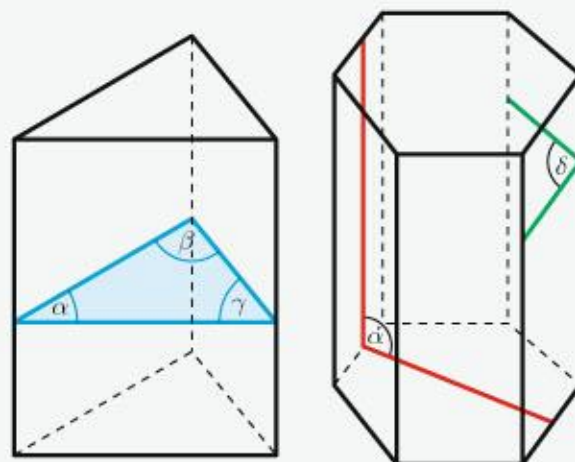
Na rysunku widzimy:

- α – kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną,
- β – kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych,
- γ – kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną podstawy,
kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy,
- δ – kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy.



Kąty między ścianami bocznymi

- α – kąt między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy
- δ – kąt między ścianami bocznymi



Przykład

Oblicz miary kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy oraz kąta między przekątną sześcianu a jego krawędzią.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Oznaczamy długość krawędzi sześcianu przez a , wtedy długość przekątnej kwadratu wynosi $a\sqrt{2}$, a długość przekątnej sześcianu $a\sqrt{3}$.

Wyodrębniamy dwa trójkąty:

Pierwszy z kątem α

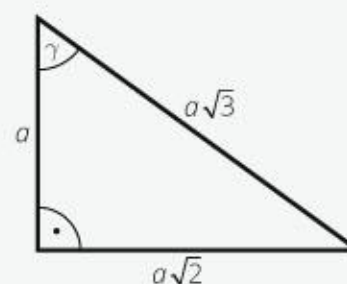
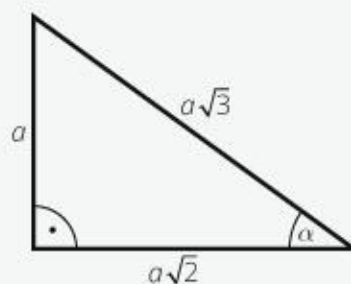
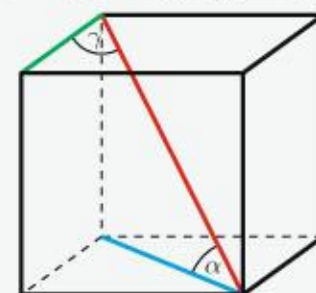
$$\sin \alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774$$

Odczytujemy z tablic $\alpha = 35^\circ$

Drugi z kątem γ

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \approx 1,4142$$

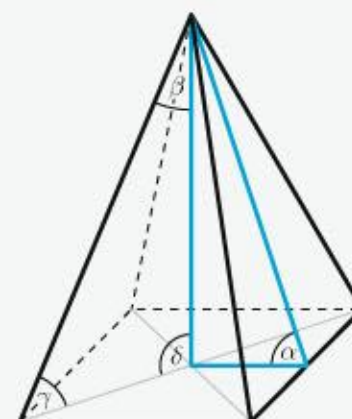
Odczytujemy z tablic $\gamma = 55^\circ$



Kąty w ostrosłupach

Na rysunku widzimy:

- α – kąt między wysokością ściany bocznej a płaszczyzną podstawy,
- β – kąt między wysokością a krawędzią boczną,
- γ – kąt między krawędzią boczną a przekątną podstawy,
kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy,
- δ – kąt między wysokością a płaszczyzną podstawy.



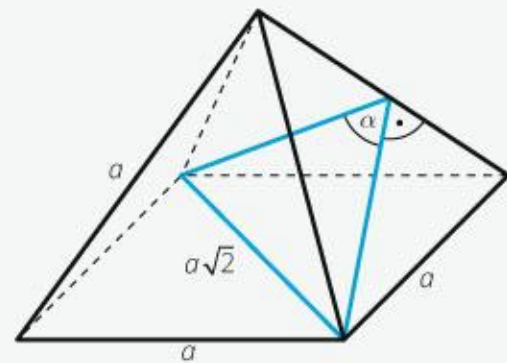
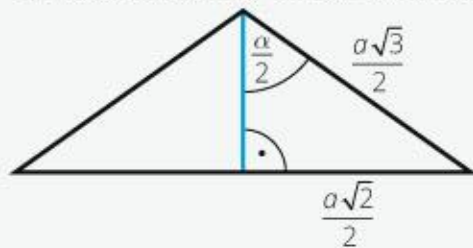
Przykład

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wszystkich krawędziach długości a . Oblicz miarę kąta, jaki tworzą dwie sąsiednie ściany boczne.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Ramiona kąta α są wysokościami trójkąta równobocznego, zatem wykonujemy drugi rysunek pomocniczy:



Obliczamy:

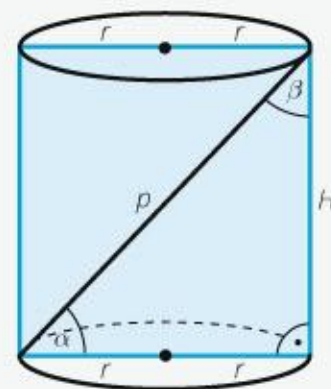
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,8165$$

Odczytujemy z tablic: $\frac{\alpha}{2} = 55^\circ$, zatem $\alpha = 110^\circ$.

10.4. Kąt między odcinkami i kąt między odcinkami i płaszczyznami w walcach i stożkach

Kąty w walcu

Na rysunku przedstawiono walec z narysowanym przekrojem osiowym. Zaznaczony na rysunku kąt α jest kątem pomiędzy przekątną p przekroju osiowego a średnicą podstawy (kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego do podstawy walca), a kąt β jest kątem pomiędzy przekątną p przekroju osiowego a tworzącą walca.

**Przykład**

Przekrój osiowy walca jest prostokątem o przekątnej o długości 16 cm, która tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 30° . Oblicz promień podstawy i wysokość tego walca. Podaj miarę kąta, jaki tworzy ta przekątna z tworzącą walca.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Obliczamy wysokość walca, korzystając z definicji sinusa kąta ostrego.

$$\text{Otrzymujemy: } \sin 30^\circ = \frac{H}{16}$$

$$\text{Stąd: } \frac{1}{2} = \frac{H}{16}, \text{ więc: } H = 8 \text{ cm}$$

Obliczamy promień podstawy walca, korzystając z definicji cosinusa kąta ostrego.

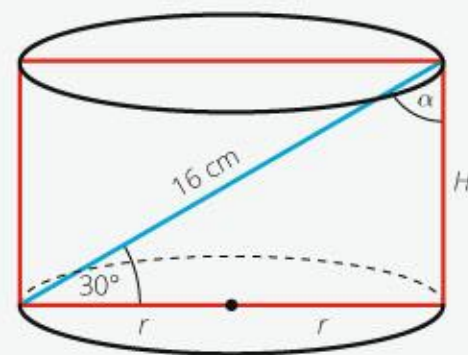
$$\text{Otrzymujemy: } \cos 30^\circ = \frac{2r}{16}$$

$$\text{Stąd: } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2r}{16}, \text{ więc: } r = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Obliczamy miarę kąta, jaki tworzy ta przekątna z tworzącą walca.

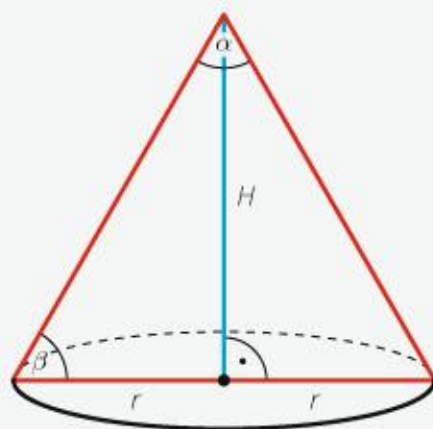
$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

Odpowiedź: Wysokość walca jest równa 8 cm, promień podstawy ma $4\sqrt{3}$ cm długości, a miara kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego do tworzącej walca wynosi 60° .



Kąty w stożku

Na rysunku przedstawiono stożek z narysowanym przekrojem osiowym. Zaznaczony na rysunku kąt α jest kątem rozwarcia stożka, a kąt β jest kątem nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.



Przykład

Oblicz promień podstawy i wysokość stożka, którego tworząca ma długość 8 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze 60° .

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Obliczamy wysokość stożka, korzystając z definicji sinusa kąta ostrego.

$$\text{Otrzymujemy: } \sin 60^\circ = \frac{H}{8}$$

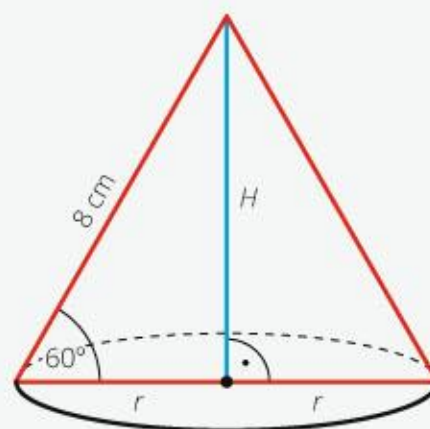
$$\text{Stąd: } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{8}, \text{ więc: } H = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Obliczamy promień podstawy stożka, korzystając z definicji cosinusa kąta ostrego.

$$\text{Otrzymujemy: } \cos 60^\circ = \frac{r}{8}$$

$$\text{Stąd: } \frac{1}{2} = \frac{r}{8}, \text{ więc: } r = 4 \text{ cm}$$

Odpowiedź: Wysokość stożka jest równa $4\sqrt{3}$ cm, promień podstawy ma 4 cm długości.

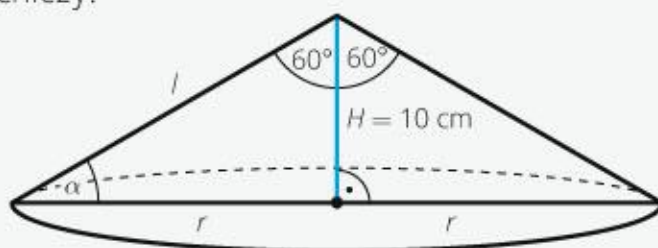


Przykład

Kąt rozwarcia stożka ma miarę 120° , a wysokość stożka jest równa 10 cm. Oblicz długość tworzącej stożka oraz miarę kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Obliczamy tworzącą stożka, korzystając z definicji cosinusa kąta ostrego.

$$\text{Otrzymujemy: } \cos 60^\circ = \frac{10}{l}$$

$$\text{Stąd } \frac{1}{2} = \frac{10}{l}, \text{ więc } l = 20 \text{ cm}$$

Obliczamy miarę kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

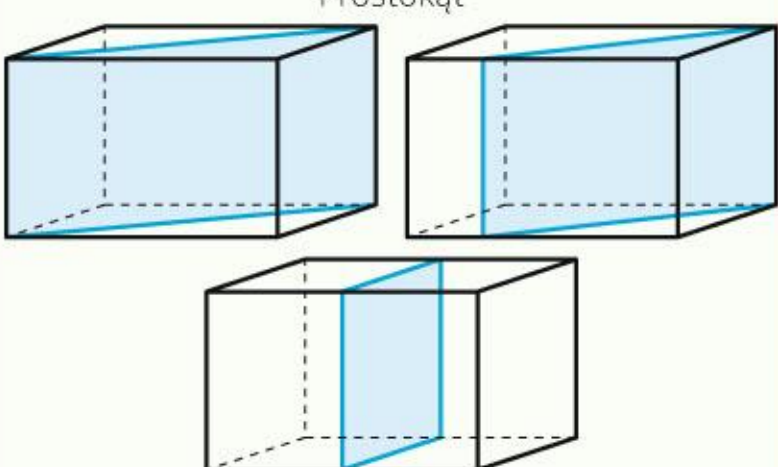
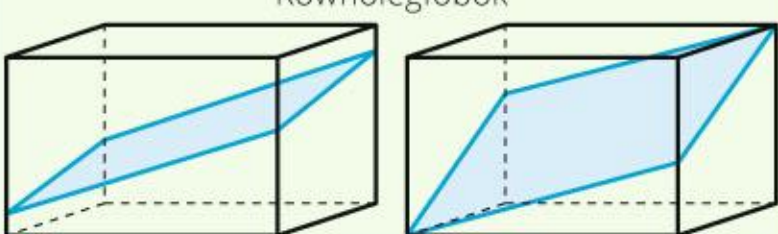
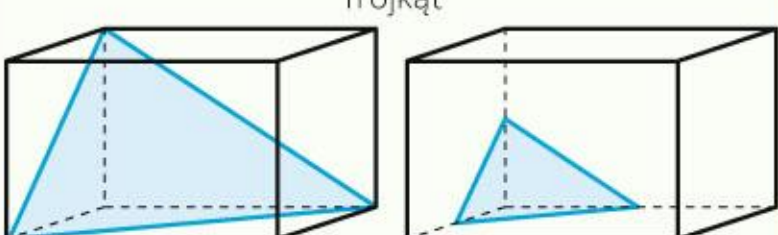
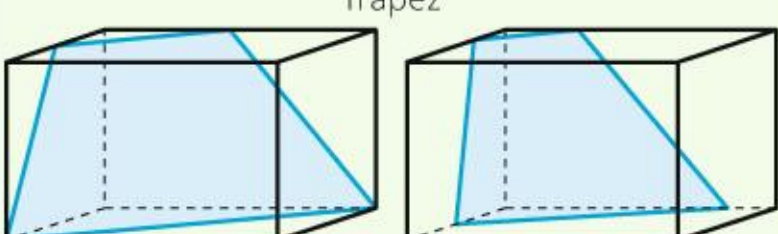
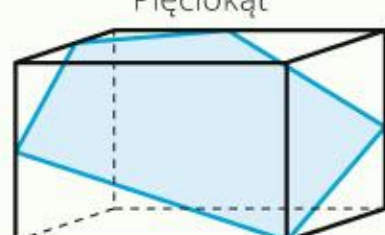
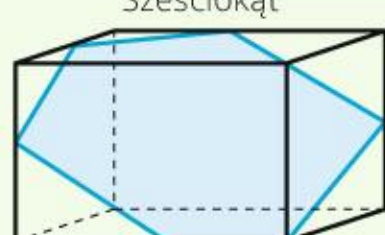
$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$$

Odpowiedź: Tworząca stożka ma długość 20 cm, a miara kąta nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy 30° .

10.5. Przekrój prostopadłościanu daną płaszczyzną

Przekrój prostopadłościanu daną płaszczyzną

Przekrojem prostopadłościanu daną płaszczyzną nazywamy część wspólną prostopadłościanu i tej płaszczyzny. Przekrój prostopadłościanu płaszczyzną mającą punkty wspólne z tym prostopadłościanem jest wielokątem.

Opis sposobu poprowadzenia płaszczyzny przekroju prostopadłościanu	Rysunek i nazwa figury, która jest przekrojem
Przekrój płaszczyzną prostopadłą do dowolnej ze ścian prostopadłościanu.	Prostokąt 
Przekrój prostopadłościanu płaszczyzną przecinającą cztery równoległe krawędzie.	Równoległobok 
Przekrój płaszczyzną przechodzącą przez trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka.	Trójkąt 
Przekrój płaszczyzną przecinającą dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka oraz dwie krawędzie równoległe do nich.	Trapez 
Przekrój płaszczyzną przecinającą dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, dwie krawędzie prostopadłe do nich oraz wierzchołek przeciwny danemu.	Pięciokąt 
Przekrój płaszczyzną przecinającą dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, dwie krawędzie prostopadłe do nich oraz dwie krawędzie równoległe do krawędzi wychodzących ze wspólnego wierzchołka.	Sześciokąt 

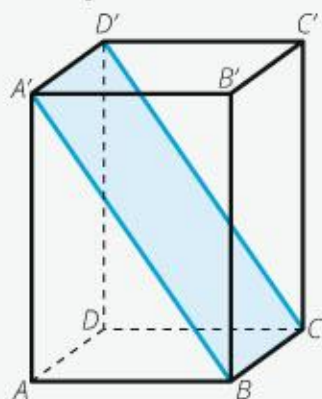


Przykład

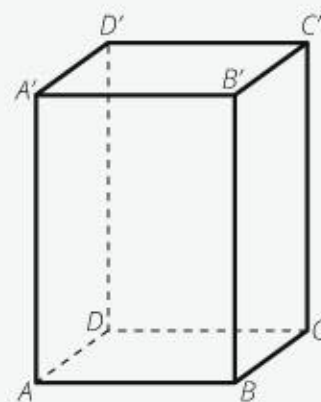
Prostopadłościan $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ przecięto płaszczyzną prostopadłą do ściany $ABB_1 A_1$ i zawierającą krawędzie BC i $A_1 D_1$. Jaką figurą jest ten przekrój? Narysuj prostopadłościan wraz z przekrojem.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Przekrojem jest prostokąt $BCD_1 A_1$.

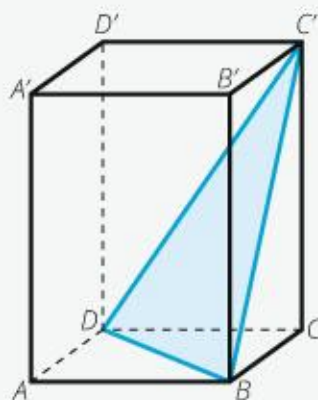


Przykład

Prostopadłościan $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ przecięto płaszczyzną zawierającą przekątną BD podstawy $ABCD$ oraz wierzchołek C_1 . Określ, jaką figurą jest ten przekrój.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:

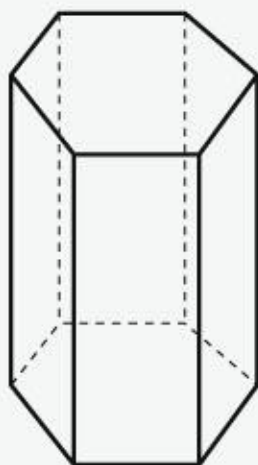


Przekrojem jest trójkąt $BC_1 D$.

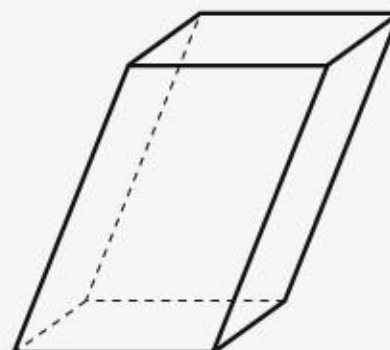
10.6. Objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli

Objętość i pole powierzchni graniastosłupów

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany (zwane ścianami bocznymi) są równoległobokami.



Graniastosłup prosty

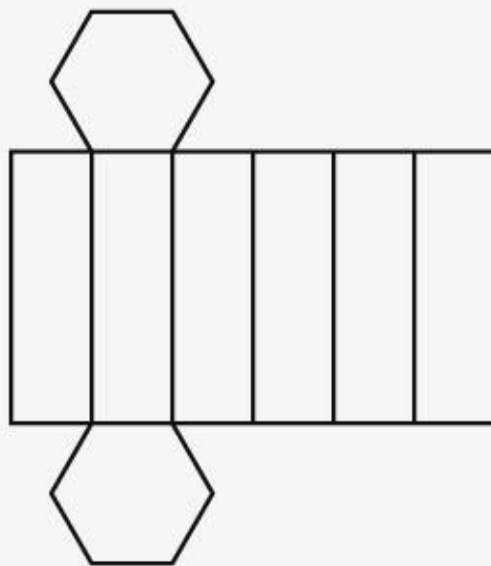


Graniastosłup pochyły

Graniastosłupem prawidłowym nazywamy graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi. W graniastosłupie prawidłowym ściany boczne są figurami przystającymi.



Po rozcięciu graniastosłupa i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa o polu podstawy P_p i polu powierzchni bocznej P_b jest równe:

$$P_c = 2P_p + P_b$$

Objętość graniastosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H jest równa:

$$V = P_p \cdot H$$

Przykład

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym, którego wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy, pole powierzchni bocznej jest równe 36 cm^2 . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Korzystając z wzoru $P_b = 3aH$ na pole powierzchni bocznej graniastosłupa, wyznaczamy długość krawędzi podstawy graniastosłupa.

Otrzymujemy: $36 = 3 \cdot a \cdot 2a$, stąd $a = \sqrt{6} \text{ cm}$

Obliczamy pole podstawy graniastosłupa, korzystając ze wzoru:

$$P_p = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Otrzymujemy: $P_p = \frac{(\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

Obliczamy wysokość graniastosłupa: $H = 2\sqrt{6} \text{ cm}$

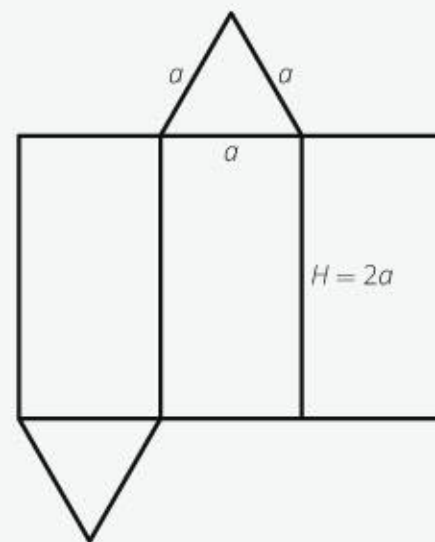
Obliczamy objętość graniastosłupa korzystając ze wzoru: $V = P_p \cdot H$

Otrzymujemy: $X = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{6} = 3\sqrt{18} = 3\sqrt{9 \cdot 2} = 9\sqrt{2} \text{ cm}^3$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa, korzystając ze wzoru: $P_c = 2P_p + P_b$

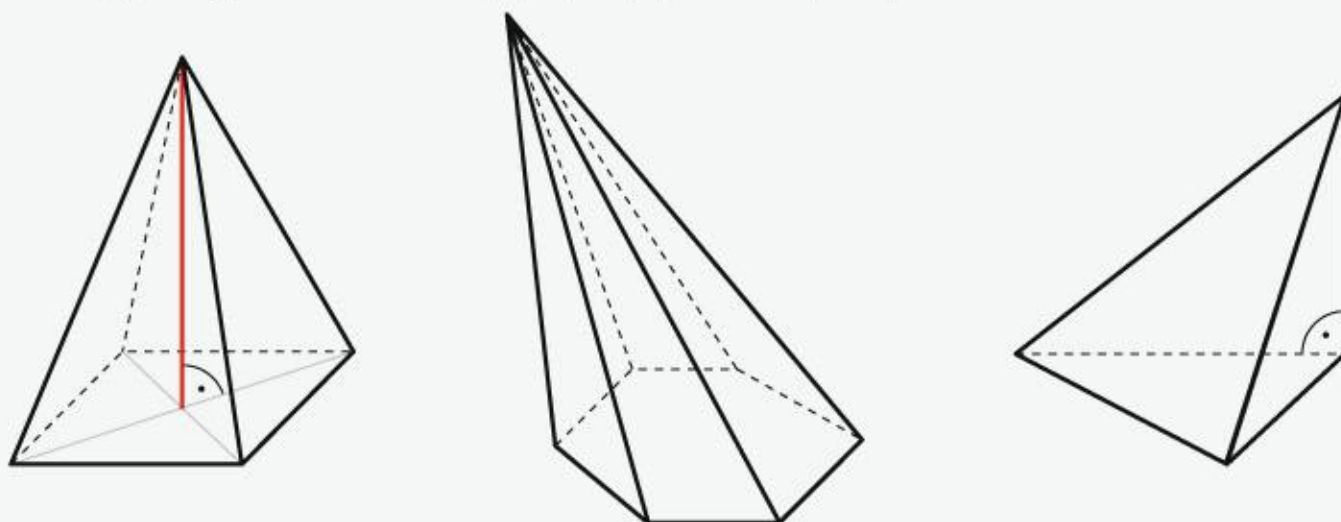
Otrzymujemy: $P_c = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + 36 = (3\sqrt{3} + 36) \text{ cm}^2$

Odpowiedź: Objętość tego graniastosłupa wynosi $9\sqrt{2} \text{ cm}^3$, a pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $(3\sqrt{3} + 36) \text{ cm}^2$.



Objętość i pole powierzchni ostrosłupów

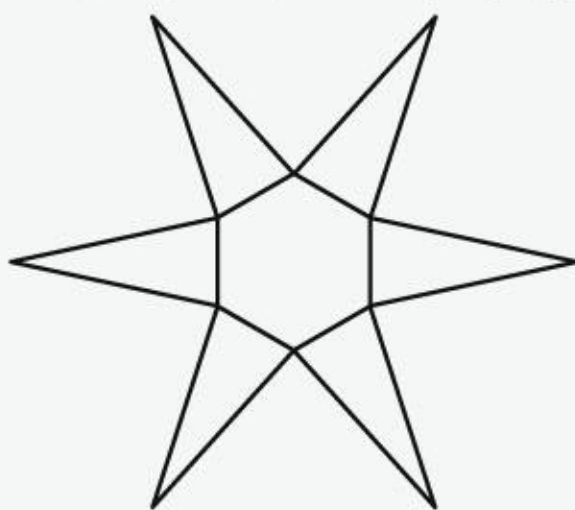
Ostrosłup to wielościan, którego jedna ściana (podstawa ostrosłupa) jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany (ściany boczne ostrosłupa) są trójkątami o wspólnym wierzchołku.



Ostrosłupem prawidłowym nazywamy ostrosłup, gdy jego podstawą jest wielokąt foremny i spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Jeżeli ostrosłup jest prawidłowy, to wszystkie jego krawędzie boczne są równe, wszystkie kąty nachylenia krawędzi bocznych do płaszczyzny podstawy mają równe miary i wszystkie ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Po rozcięciu ostrosłupa i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



Siatka ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa o polu podstawy P_p i polu powierzchni bocznej P_b jest równe $P_c = P_p + P_b$

Objętość ostrosłupa o polu podstawy P_p i wysokości H jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$.

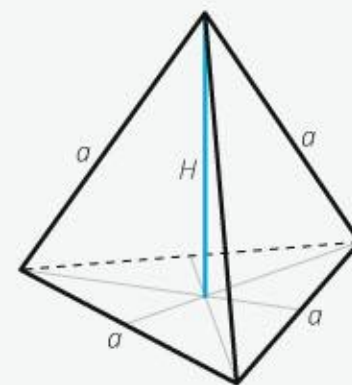
Czworościan foremny to ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.

H – wysokość czworościanu foremnego

a – krawędź czworościanu foremnego

Pole powierzchni całkowitej czworościanu: $P_c = a^2 \sqrt{3}$

Objętość czworościanu foremnego: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$



Przykład

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12 cm, a miara kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi 60° . Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Obliczamy wysokość podstawy, korzystając ze wzoru: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Otrzymujemy: $h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm

Obliczamy długość odcinka r , korzystając ze wzoru: $r = \frac{1}{3}h$

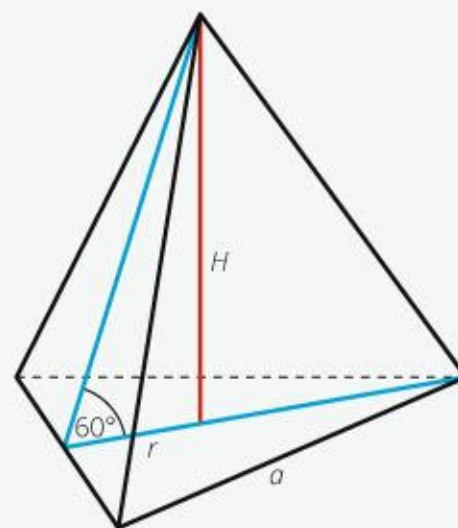
Otrzymujemy: $r = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm

Obliczamy wysokość ostrosłupa, korzystając z funkcji tangens.

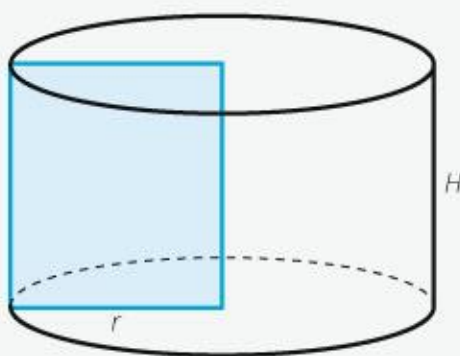
Otrzymujemy: $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{r}$

Stąd: $\sqrt{3} = \frac{H}{2\sqrt{3}}$, więc: $H = 6$ cm

Odpowiedź: Wysokość tego ostrosłupa jest równa 6 cm.

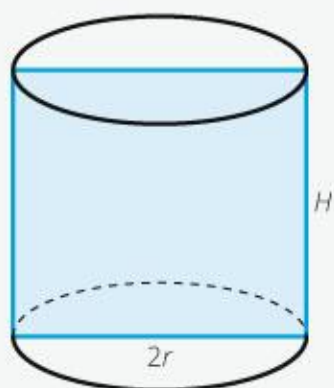
**Objętość i pole powierzchni walca**

Walec to bryła powstała wskutek obrotu prostokąta wokół prostej zawierającej jego jeden bok (oś walca).

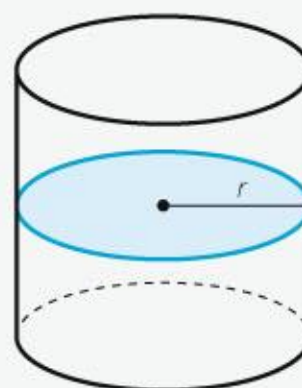


Przekrój osiowy walca to część wspólna walca i płaszczyzny zawierającej oś walca. Przekrój ten jest prostokątem o bokach $2r$ i H .

Przekrój poprzeczny walca to przekrój walca płaszczyzną równoległą do podstawy.

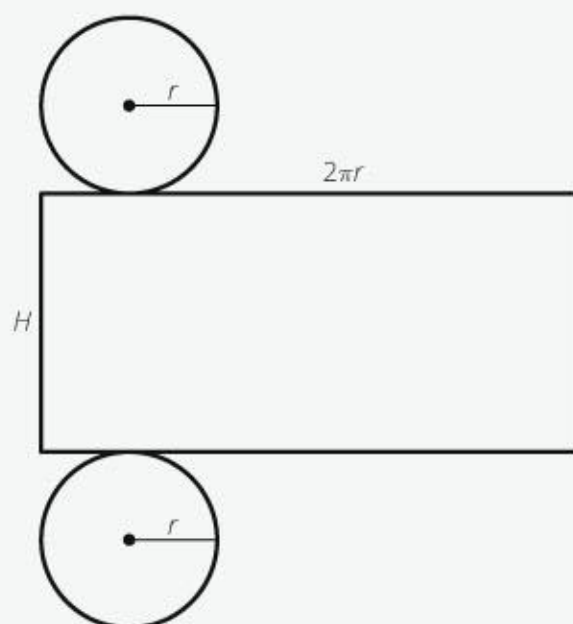


Przekrój osiowy walca



Przekrój poprzeczny walca

> Po rozcięciu walca i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



Jeżeli promień podstawy walca wynosi r , wysokość H , to:

pole powierzchni bocznej walca: $P_b = 2\pi rH$

pole powierzchni całkowitej walca: $P_c = 2\pi r(r + H)$

objętość walca: $V = \pi r^2 H$

Przykład

Przekrój osiowy walca jest kwadratem, a objętość walca jest równa $54\pi \text{ cm}^3$. Oblicz pole przekroju osiowego walca.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

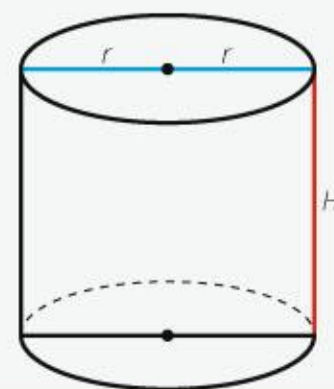
Z informacji, że przekrój osiowy jest kwadratem, wynika zależność: $H = 2r$

Korzystając ze wzoru na objętość walca, wyznaczamy promień podstawy walca.

$V = \pi r^2 H$, stąd $54\pi = \pi r^2 \cdot 2r$, więc $r = 3 \text{ cm}$

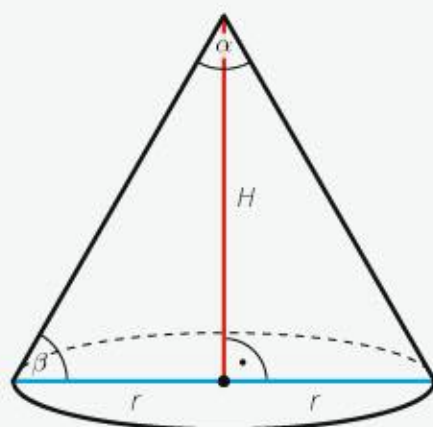
Obliczamy pole przekroju osiowego walca: $P = (2r)^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$

Odpowiedź: Pole przekroju osiowego walca jest równe 36 cm^2 .



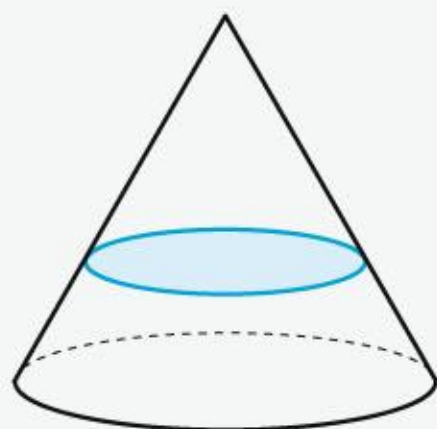
Objętość i pole powierzchni stożka

Stożek to bryła utworzona przez obrót trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną tego trójkąta (oś stożka).

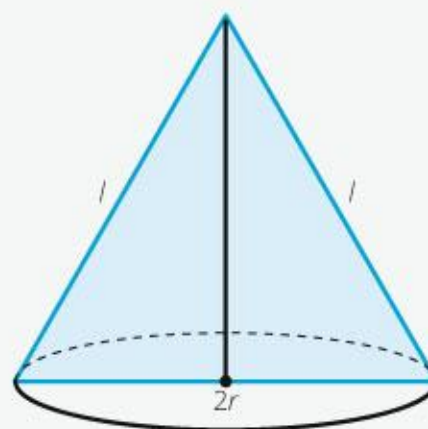


> | **Przekrój osiowy stożka** to część wspólna stożka i płaszczyzny zawierającej oś stożka. Przekrój ten jest trójkątem równoramiennym, którego podstawą jest odcinek o długości $2r$, a ramię ma długość l .

| **Przekrój poprzeczny stożka** to przekrój stożka płaszczyzną równoległą do podstawy.

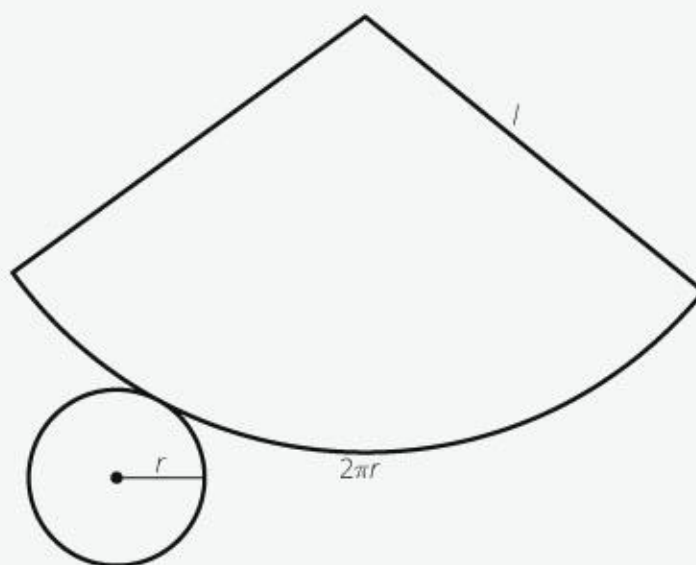


Przekrój poprzeczny stożka



Przekrój osiowy stożka

Po rozcięciu stożka i rozłożeniu go na płaszczyźnie otrzymujemy jego siatkę.



Jeżeli promień podstawy walca wynosi r , wysokość H , tworząca l , to:

- pole powierzchni bocznej stożka: $P_b = \pi r l$,
- pole powierzchni całkowitej stożka: $P_c = \pi r (r + l)$,
- objętość stożka: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$.

Przykład

Oblicz objętość stożka i jego pole powierzchni całkowitej, jeżeli wiadomo, że tworząca ma długość 5 cm, a wysokość jest równa 4 cm.

Rozwiązanie:

Obliczamy promień podstawy z twierdzenia Pitagorasa.

Otrzymujemy: $r = \sqrt{25 - 16} = 3$ cm

Obliczamy pole powierzchni całkowitej stożka, korzystając ze wzoru: $P_c = \pi r (r + l)$

Otrzymujemy: $P_c = \pi \cdot 3(3 + 5) = 24\pi$ cm²

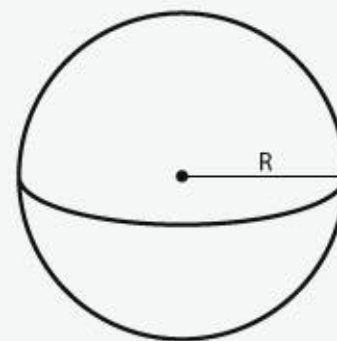
Obliczamy objętość stożka, korzystając ze wzoru: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$

Otrzymujemy: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ cm³

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe 24π cm², a objętość stożka ma 12π cm³.

Objętość i pole powierzchni kuli

Kula to bryła powstała przez obrót koła wokół osi zawartej w płaszczyźnie tego koła, przechodzącej przez jego środek.

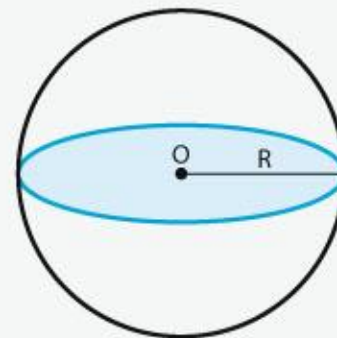


Przekrój kuli to część wspólna płaszczyzny i kuli. Przekrój kuli, do którego należy środek kuli, nazywamy **kołem wielkim**.

Jeżeli promień kuli wynosi R , to:

pole powierzchni kuli (sfery): $P = 4\pi R^2$

objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



Przykład

W odległości 12 cm od płaszczyzny koła wielkiego poprowadzono przekrój, którego pole jest równe $256\pi \text{ cm}^2$. Oblicz pole powierzchni tej kuli.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy.

Korzystając ze wzoru $P = \pi r^2$, obliczamy promień koła, które jest przekrojem kuli.

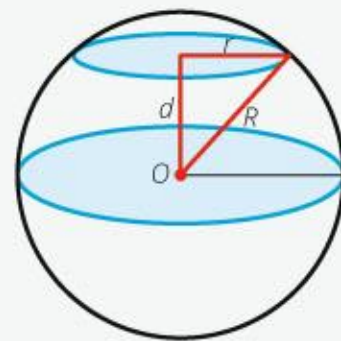
Otrzymujemy: $256\pi = \pi r^2$, stąd: $r = 16 \text{ cm}$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy promień kuli.

Zapisujemy $12^2 + 16^2 = R^2$, stąd: $R = 20 \text{ cm}$

Obliczamy pole powierzchni kuli: $P = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 20^2 = 1600\pi \text{ cm}^2$

Odpowiedź: Pole powierzchni tej kuli jest równe $1600\pi \text{ cm}^2$.



10.7. Zależność między polami powierzchni i objętościami brył podobnych

Skala podobieństwa

Dwie bryły są podobne, jeśli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiednimi punktami drugiej bryły.

Stosunek odległości między odpowiednimi punktami brył podobnych nazywamy **skalą podobieństwa**.

Stosunek pól powierzchni brył podobnych

Stosunek pól powierzchni brył podobnych

Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa k , to stosunek pól powierzchni tych brył jest równy k^2 .

Przykład

Dane są dwie kule. Pole powierzchni pierwszej kuli wynosi $P_1 = 25\pi \text{ cm}^2$. Druga kula ma promień dwa razy dłuższy niż pierwsza kula. Oblicz pole powierzchni drugiej kuli.

Rozwiązanie:

Skoro promień drugiej kuli jest dwa razy większy od promienia pierwszej kuli, tzn. że skala podobieństwa tych brył wynosi $k = 2$. Zatem stosunek ich pól powierzchni wynosi $k^2 = 4$.

Pole powierzchni drugiej kuli wynosi: $P_2 = k^2 \cdot P_1$, więc $P_2 = 4 \cdot 25\pi = 100\pi \text{ cm}^2$.

Odpowiedź: Pole powierzchni drugiej kuli wynosi $100\pi \text{ cm}^2$.

Stosunek objętości brył podobnych

Stosunek objętości brył podobnych

Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa k , to stosunek objętości tych brył jest równy k^3 .

Przykład

Dane są dwa prostopadłościany podobne. Objętość pierwszego prostopadłościanu wynosi $V_1 = 33,75 \text{ cm}^3$, a objętość drugiego to $V_2 = 10 \text{ cm}^3$. Oblicz stosunek pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów.

Rozwiązanie:

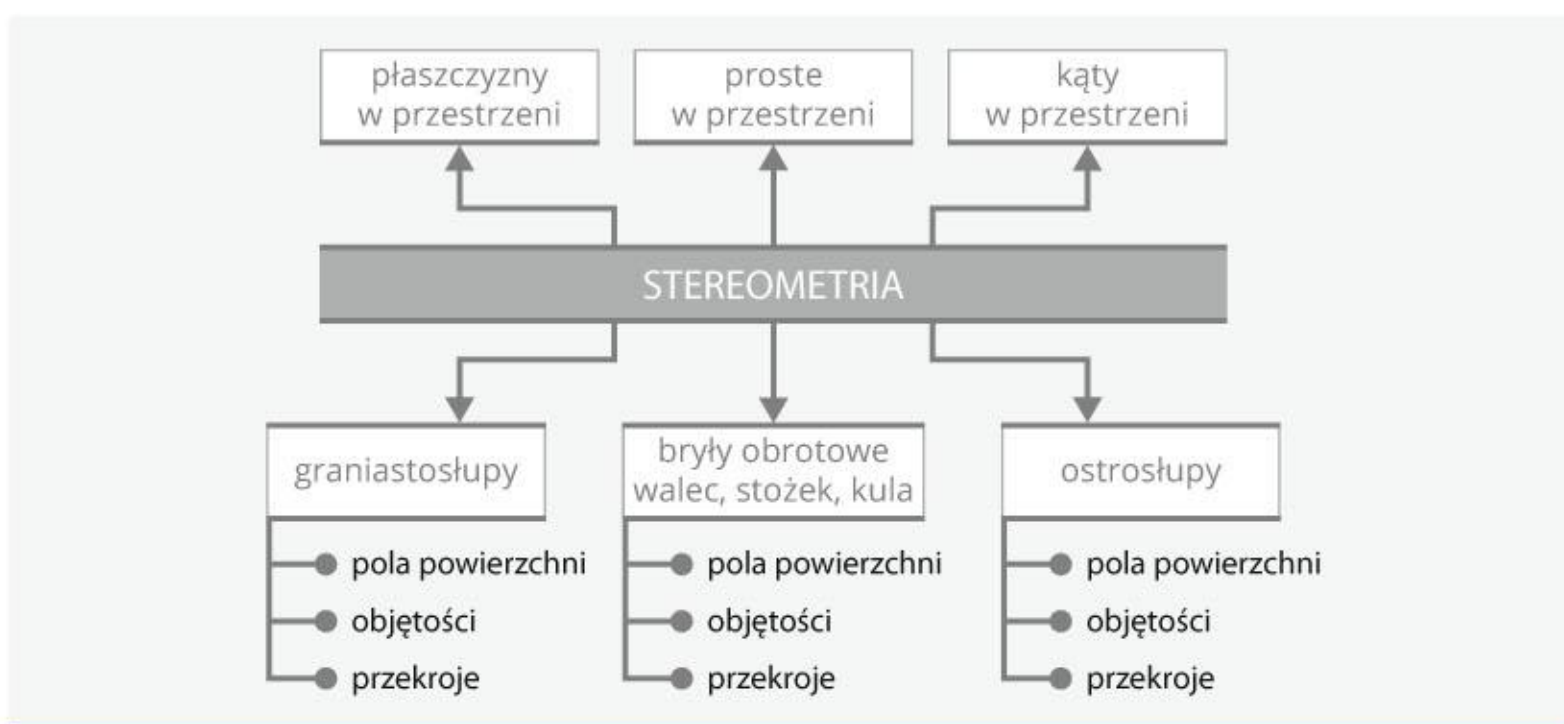
Stosunek objętości tych prostopadłościanów jest równy: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{33,75}{10} = 3,375 = 3\frac{3}{8}$

Ponieważ $\frac{V_1}{V_2} = k^3$, stąd: $k^3 = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$, czyli: $k = \frac{3}{2}$

Wiemy, że: $\frac{P_1}{P_2} = k^2$, więc: $\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Odpowiedź: Stosunek pól powierzchni całkowitych tych prostopadłościanów jest równy $\frac{9}{4}$.

10.8. Utrwalamy wiedzę



11

Kombinatoryka

11.1. Doświadczenia losowe

Doświadczenia losowego

Doświadczeniem losowym (eksperymentem, zjawiskiem losowym) nazywamy takie działanie, które można powtarzać wiele razy w takich samych warunkach, ale jego kolejnych wyników nie potrafimy przewidzieć, np. rzut monetą, rzut kostką do gry czy wyciągnięcie karty z talii.

W doświadczeniu losowym możemy określić zbiór wszystkich możliwych wyników. Na przykład przy jednokrotnym rzucie monetą może выпаść orzeł lub reszka.

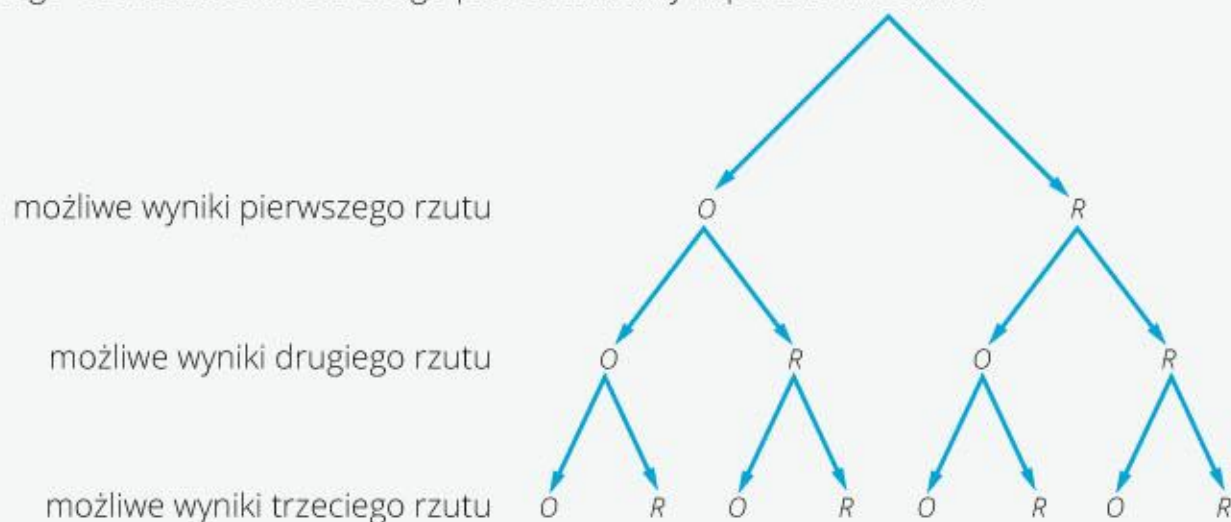
Przykład

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu, że wypadły co najmniej dwa orły.

Rozwiązanie:

Wyrzucenie orła oznaczamy jako O , a wyrzucenie reszki jako R .

Przebieg tego doświadczenia losowego przedstawiamy w postaci drzewka:



Odpowiedź: Wszystkie możliwe wyniki zdarzenia, że wypadły co najmniej dwa orły, tworzą zbiór $\{(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O), (R,O,O)\}$.

Zdarzenie elementarne

Zdarzeniem elementarnym nazywamy każdy możliwy wynik doświadczenia losowego, a ich zbiór – **przestrzenią zdarzeń elementarnych**. Przestrzeń zdarzeń elementarnych oznaczamy literą Ω , a pojedyncze zdarzenia elementarne – literą ω .

Przykład

Z urny zawierającej trzy kule ponumerowane: 1, 2, 3 losujemy jedną kulę, a następnie drugą. Zapisane w kolejności losowania numery kul tworzą liczbę dwucyfrową. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli:

- wylosowanej kuli nie zwracamy do urny,
- wylosowaną kulę zwracamy do urny.

Rozwiązanie:

a) Zapisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli wylosowanej kuli nie zwracamy do urny:

$$\Omega = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$$

b) Zapisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli wylosowaną kulę zwracamy do urny:

$$\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$$

Zdarzenie losowe

Zdarzeniem losowym nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω . Zdarzenia losowe, zwane krótko zdarzeniami, oznaczamy wielkimi literami: A, B, C itd.

Liczbę elementów zbioru A oznaczamy $\bar{A}$ (lub $|A|$).

Zbiór Ω nazywamy zdarzeniem **pewnym**, natomiast zbiór pusty nazywamy zdarzeniem **niemożliwym**. Elementy zdarzenia A nazywamy **wynikami sprzyjającymi** zdarzeniu A .



Przykład

Rzucamy sześcienną kostką do gry. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – wypadły co najmniej cztery oczka,

B – wypadła liczba oczek co najwyżej równa 6,

C – wypadła liczba oczek większa niż 6.

Które ze zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, a które niemożliwym?

Rozwiązanie:

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Zdarzeniu A sprzyjają wyniki: 4, 5, 6, zatem $A = \{4, 5, 6\}$.

Zdarzenie B jest zdarzeniem pewnym, zatem $B = \Omega$.

Zdarzenie C jest zdarzeniem niemożliwym, zatem $C = \emptyset$.

Przykład

Ile różnych czteroznakowych kodów można utworzyć z liter K i L oraz cyfr 0 i 1, jeśli:

a) pierwsze dwa znaki to różne litery, a kolejne dwa znaki to różne cyfry,

b) pierwsze dwa znaki to litery, a kolejne dwa znaki to cyfry.

Rozwiązanie:

a) Oznaczamy jako A zbiór sprzyjający zdarzeniu, że pierwsze dwa znaki to różne litery, a kolejne dwa znaki to różne cyfry, zatem $A = \{(KL01), (KL10), (LK01), (LK10)\}$.

Określamy liczbę możliwych wyników: $\bar{A} = 4$.

b) Oznaczamy jako B zbiór sprzyjający zdarzeniu, że pierwsze dwa znaki to litery, a kolejne dwa znaki to cyfry, zatem:

$B = \{(KL00), (KL01), (KL10), (KL11), (LK00), (LK01), (LK10), (LK11),$
 $(KK00), (KK01), (KK10), (KK11), (LL00), (LL01), (LL10), (LL11)\}$.

Określamy liczbę możliwych wyników: $\bar{B} = 16$.

Zdarzenie przeciwne

Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A nazywamy wszystkie zdarzenia elementarne, które nie sprzyjają zdarzeniu A , a sprzyjają zdarzeniu A' .

$$A \cap A' = \emptyset, A \cup A' = \Omega$$

Przykład

Rzucamy kostką dwa razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – co najmniej raz wypadł orzeł,

B – orzeł wypadł dokładnie raz,

C – wypadły same reszki,

D – wypadło więcej orłów niż reszek.

Wskaż parę zdarzeń przeciwnych.

Rozwiązanie:

Wyrzucenie orła oznaczamy jako O , a wyrzucenie reszki – jako R .

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór: $\Omega = \{(O, O), (O, R), (R, O), (R, R)\}$.

Zdarzeniu A sprzyjają wyniki: $(O, R), (R, O), (O, O)$, zatem $A = \{(O, R), (R, O), (O, O)\}$.

Zdarzeniu B sprzyjają wyniki: $(O, R), (R, O)$, zatem $B = \{(O, R), (R, O)\}$.

Zdarzeniu C sprzyjają wyniki: (R, R) , zatem $C = \{(R, R)\}$.

Zdarzeniu D sprzyjają wyniki: (O, O) , zatem $D = \{(O, O)\}$.

Zdarzeniami przeciwnymi są zdarzenia A i C .

11.2. Reguły mnożenia i dodawania

Reguła mnożenia

Obliczając liczbę możliwych wyników doświadczenia losowego, często rysujemy tabelę doświadczenia losowego lub drzewo doświadczenia losowego, a następnie zliczamy wszystkie możliwe wyniki. Gdy jednak liczba ta jest duża, sporządzenie tabeli lub drzewa jest kłopotliwe. Przydatna jest wówczas znajomość reguły mnożenia.

Reguła mnożenia dla dwóch czynności

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei dwóch czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k sposobów, druga – na jeden z n sposobów, jest równa kn .

Przykład

W urnie znajduje się 7 kul ponumerowanych od 1 do 7. Z urny losujemy dwie kule ze zwracaniem, zapisując numery kul w kolejności ich wylosowania. Sporządź tabelę tego doświadczenia losowego i określ liczbę wyników. Zastanów się, ile byłoby wyników doświadczenia, gdyby w urnie było 19 ponumerowanych kul, a ile – w przypadku 85 ponumerowanych kul. Oblicz liczbę możliwych wyników doświadczenia bez sporządzania tabeli doświadczenia losowego.

Rozwiązanie:

I losowanie	II losowanie						
	1	2	3	4	5	6	7
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)
6	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)	(6; 7)
7	(7; 1)	(7; 2)	(7; 3)	(7; 4)	(7; 5)	(7; 6)	(7; 7)

Obliczymy liczbę możliwych wyników tego doświadczenia: $7 \cdot 7 = 49$.

Podobnie obliczymy liczbę wyników, gdy w urnie będzie 19 kul. Otrzymamy $19 \cdot 19 = 361$ wyników. Jeśli w urnie znajduje się 85 kul, to otrzymamy $85 \cdot 85 = 7225$ wyników.

Odpowiedź: Przy losowaniu kul, gdy jest ich w urnie 7, mamy 49 możliwych wyników, gdy jest 19 kul, mamy 361 wyników, a gdy jest 85 kul, mamy 7225 wyników.

Reguła mnożenia dla trzech czynności

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei trzech czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k sposobów, druga – na jeden z m sposobów, a trzecia – na jeden z n sposobów, jest równa kmn .

Przykład

Doświadczenie polega na wylosowaniu trzech osób w kolejności: przewodniczący klasy, zastępca oraz skarbnik z klasy liczącej 28 uczniów. Na ile sposobów można dokonać tego wyboru?

Rozwiązanie:

Przewodniczącego klasy możemy wybrać na 28 sposobów, zastępcę – na 27 sposobów, a skarbnika na 26 sposobów.

Stosując regułę mnożenia do obliczenia, na ile sposobów możemy wybrać przewodniczącego klasy i zastępcę, otrzymujemy: $28 \cdot 27 = 756$ sposobów.

Skoro przewodniczącego i jego zastępcę wybierzemy na 756 sposobów, a skarbnika na 26 sposobów, to trzyosobowy samorząd klasy wybierzemy na $756 \cdot 26 = 19\,656$ sposobów.

Wobec tego przy losowaniu kolejno trzech osób z klasy liczącej 28 uczniów mamy $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$ sposobów.

Odpowiedź: Wyboru można dokonać na 19 656 sposobów.

Reguła mnożenia

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei k czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z n_1 sposobów, druga – na jeden z n_2 sposobów, trzecia – na jeden z n_3 sposobów i tak dalej do k -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z n_k sposobów, jest równa $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$.

Reguła dodawania

Jeśli doświadczenie losowe polega na podjęciu jednej z dwóch decyzji wyboru, pochodzących z dwóch różnych zbiorów, które nie mają wspólnych elementów, przy czym pierwszą decyzję wyboru możemy podjąć na n sposobów, a drugą na k sposobów, to całą czynność możemy podjąć na $n + k$ sposobów.

Taki sposób zliczania elementów o określonych własnościach nazywamy **regułą dodawania**.

Przykład

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, których cyfra setek jest równa 1 lub większa od 7.

Rozwiązanie:

Liczb trzycyfrowe z cyfrą setek równą 1 to: 100, 101, 102, ..., 199.

Liczb trzycyfrowych z cyfrą setek równą 1 jest 100.

Liczb trzycyfrowe z cyfrą setek większą od 7 to: 800, 801, 802, ..., 899, 900, 901, ..., 999

Liczb trzycyfrowych z cyfrą setek większą od 7 jest 200.

Liczb trzycyfrowych z cyfrą setek równą 1 lub większą od 7 jest: $100 + 200 = 300$.

Odpowiedź: Jest 300 takich liczb.

Często w zadaniach stosujemy regułę mnożenia i regułę dodawania łącznie.

Przykład

W ofercie pewnego sklepu znajdują się następujące różne stoły ogrodowe: 4 drewniane, 2 rattanowe oraz 3 plastikowe. Ponadto w tym sklepie są 4 modele krzeseł drewnianych, 3 modele krzeseł rattanowych i 6 modeli krzeseł plastikowych. Na ile sposobów można zakupić komplet mebli ogrodowych (stół i krzesło), tak aby był on wykonany z tego samego materiału?

Rozwiązanie:

Wybór mebli drewnianych: 4 różne stoły i 4 różne modele krzeseł

Obliczamy liczbę zestawów, jakie możemy utworzyć przy wyborze mebli drewnianych (reguła mnożenia): $4 \cdot 4 = 16$

Wybór mebli rattanowych: 2 różne stoły i 3 różne modele krzeseł

Obliczamy liczbę zestawów, jakie możemy utworzyć przy wyborze mebli rattanowych (reguła mnożenia): $2 \cdot 3 = 6$

Wybór mebli plastikowych: 3 różne stoły i 6 różnych modeli krzeseł

Obliczamy liczbę zestawów, jakie możemy utworzyć przy wyborze mebli plastikowych (reguła mnożenia): $3 \cdot 6 = 18$

Obliczamy liczbę sposobów zakupu zestawu mebli wykonanego z tego samego materiału (reguła dodawania): $16 + 6 + 18 = 40$

Odpowiedź: Jest 40 sposobów zakupu zestawów mebli ogrodowych.

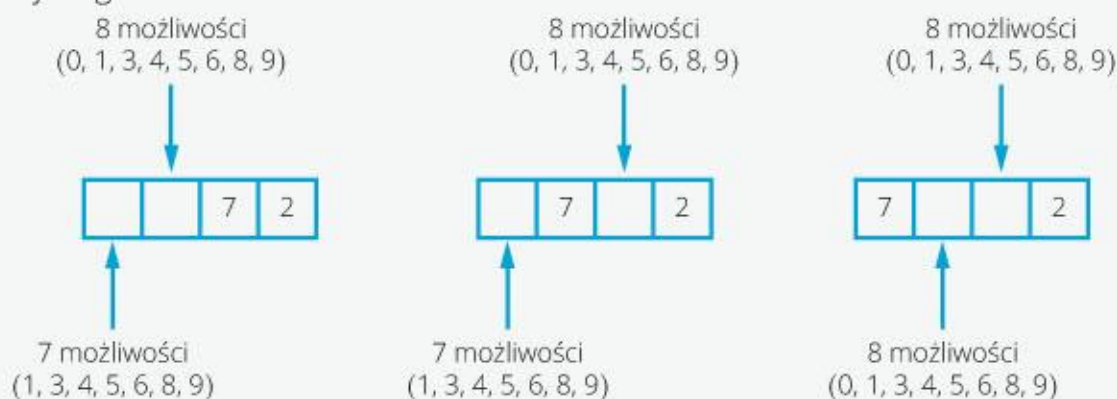
Przykład

Ile jest możliwości zapisania liczby czterocyfrowej za pomocą cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, jeśli wiadomo, że jest to liczba parzysta, a w jej zapisie wystąpią dokładnie jedna cyfra 2 i dokładnie jedna cyfra 7?

Rozwiązanie:

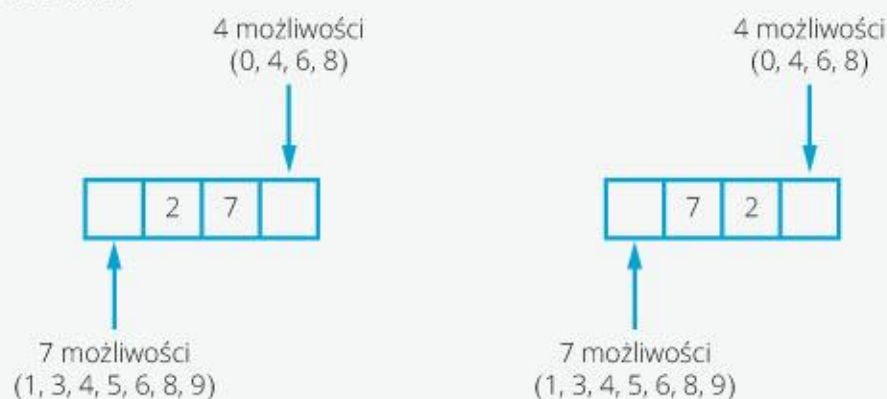
1. Obliczamy, ile jest liczb czterocyfrowych parzystych, które mają cyfrę 2 jako cyfrę jedności oraz cyfrę 7 na pozycji dziesiątek lub na pozycji setek, lub na pozycji jedności tysięcy.

Przedstawimy to graficznie:



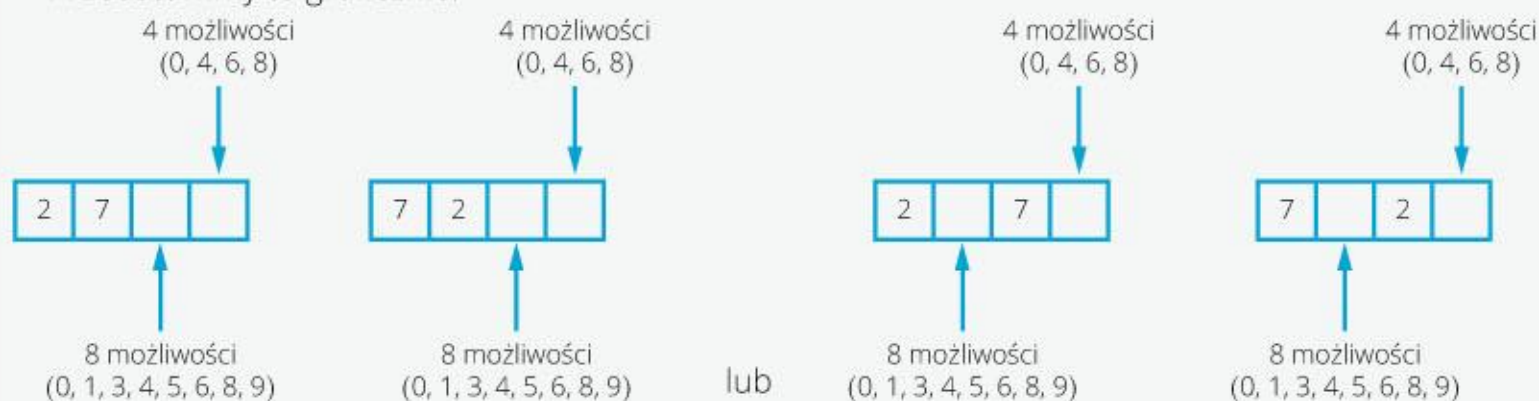
Obliczamy, ile jest tych liczb: $7 \cdot 8 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 8 = 176$

2. Obliczamy, ile jest liczb czterocyfrowych parzystych, które na pozycji jedności mają cyfrę parzystą inną od cyfry 2, a cyfry 2 i 7 znajdują się na pozycji dziesiątek i setek. Przedstawimy to graficznie:



Obliczamy, ile jest tych liczb: $7 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 56$

3. Obliczamy, ile jest liczb czterocyfrowych parzystych, które na pozycji jedności mają cyfrę parzystą inną od cyfry 2, a jedna z cyfr 2 lub 7 znajduje się na pozycji jedności tysięcy. Przedstawimy to graficznie:

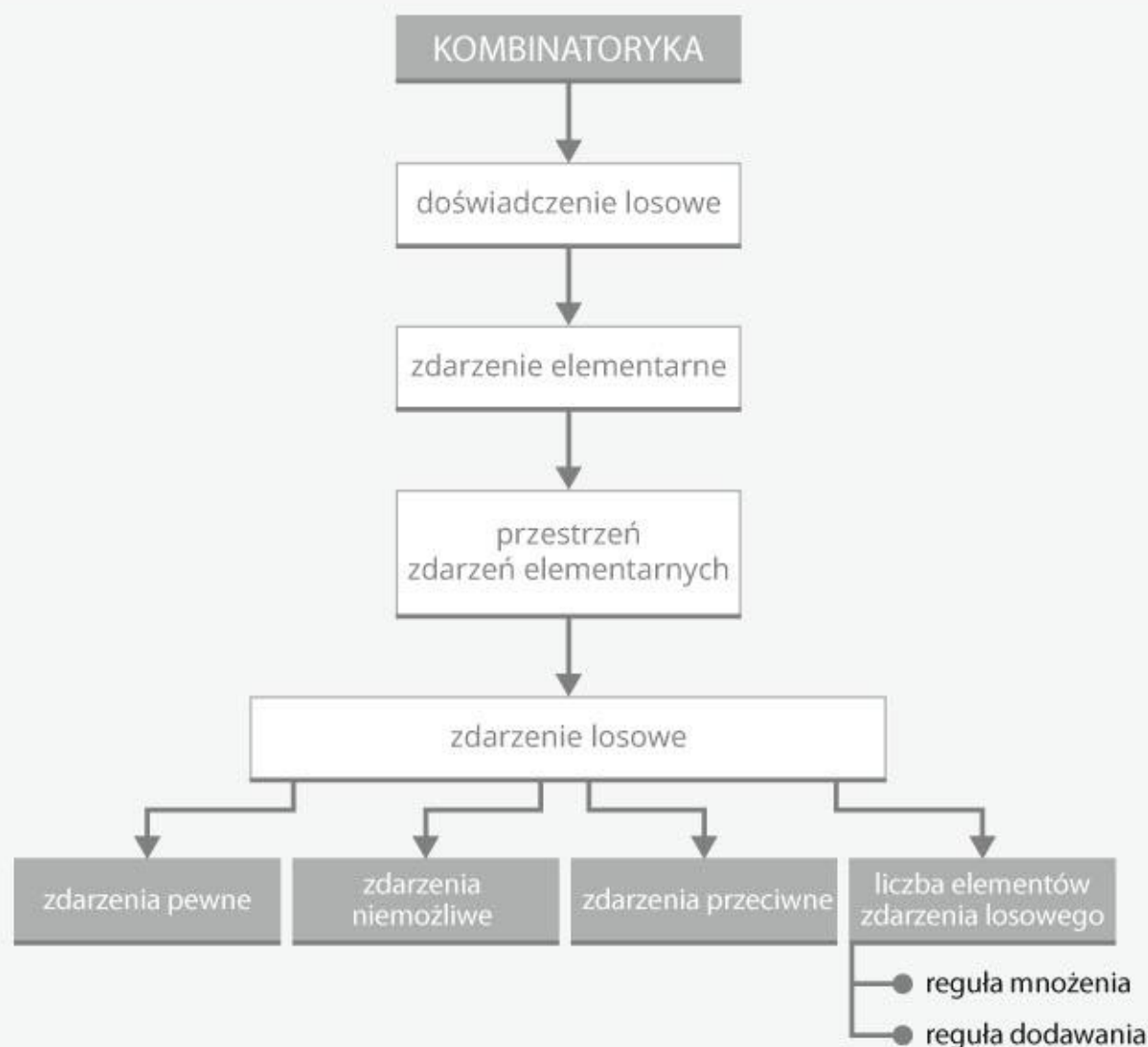


Obliczamy, ile jest tych liczb: $8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 128$

4. Obliczamy, ile jest liczb spełniających warunki zadania: $176 + 56 + 128 = 360$

Odpowiedź: Jest 360 liczb spełniających warunki zadania.

11.3. Utrwalamy wiedzę





12

**Rachunek prawdopodobieństwa
i statystyka**

12.1. Prawdopodobieństwo klasyczne

Prawdopodobieństwo klasyczne

Po przeprowadzeniu doświadczenia losowego możemy obliczyć częstość występowania poszczególnych wyników. Jeżeli wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne (zdarzają się równie często), mówimy, że mamy do czynienia z **prawdopodobieństwem klasycznym**.

Jeśli Ω jest zbiorem skończonym i niepustym, to **prawdopodobieństwem** zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę: $P(A) = \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|}$.

Z klasycznej definicji prawdopodobieństwa wynika więc, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ jest równe ilorazowi liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych należących do zbioru Ω .

Przykład

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby oczek przy jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

Rozwiązanie:

Określamy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego polegającego na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6$

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , że wypadła parzysta liczba oczek: $A = \{2, 4, 6\}$

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $|\bar{A}| = 3$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Przykład

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy liczbę, która jest wielokrotnością liczby 9 i nie jest wielokrotnością liczby 10.

Rozwiązanie:

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 99 - 9 = 90$

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A , że otrzymamy liczbę, która jest wielokrotnością liczby 9 i nie jest wielokrotnością liczby 10:

$A = \{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 99\}$

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $|\bar{A}| = 9$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

Przykład

W bębnie maszyny losującej są kule białe i 12 kul czarnych. Oblicz, ile jest kul białych, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania jej wynosi 0,6.

Rozwiązanie:

Oznaczamy, przez x liczbę kul białych, a przez $x + 12$ – liczbę wszystkich kul w bębnie maszyny losującej. Wyznaczamy liczbę kul białych:

$$\frac{x}{x+12} = 0,6, \text{ stąd } x = 18$$

Odpowiedź: W tym bębnie jest 18 kul białych.

Pojęcie wartości oczekiwanej

Jeśli rozważymy grę, w której możliwe jest n wyników liczbowych: $x_1, x_2, \dots, x_n$ i prawdopodobieństwo otrzymania wyniku x_i jest równe p_i dla $i = 1, \dots, n$, to **wartością oczekiwaną** gry nazywamy liczbę:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.



Przykład

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jeżeli suma oczek jest równa 2, otrzymujemy 36 zł, jeśli większa od 10, otrzymujemy 10 zł, a jeśli równa 7, otrzymujemy 2 zł. W pozostałych przypadkach tracimy 3 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej. Czy ta gra jest sprawiedliwa?

Rozwiązanie:

Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 2 w rzucie dwiema sześciennymi kostkami wynosi $\frac{1}{36}$, sumy oczek większej od 10 wynosi $\frac{3}{36}$, sumy oczek równej 7 wynosi $\frac{6}{36}$, pozostałych sum oczek wynosi $\frac{26}{36}$.

Obliczamy wartość oczekiwaną wygranej:

$$36 \cdot \frac{1}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 2 \cdot \frac{6}{36} - 3 \cdot \frac{26}{36} = 0$$

Odpowiedź: Ta gra jest sprawiedliwa.

12.2. Skala centylowa

Skala centylowa

Skala centylowa to skala pozycyjna wyników uporządkowanych rosnąco i zawiera 99 centyli.

Centyl to jedna ze 100 równych części, na które można podzielić zakres wartości zestawu danych, aby pokazać rozkład tych wartości.

Wyniki, jakie uczeń uzyskuje z każdego przedmiotu podczas egzaminu ósmoklasisty oraz egzaminu maturalnego, są wyrażone w procentach oraz za pomocą skali centylowej. Skala ta pokazuje miejsce każdego ucznia na tle innych osób, które napisały egzamin z danego przedmiotu nie tylko w danym roku, lecz także na przestrzeni lat. Skala centylowa pozwala więc porównać poziom wiedzy i umiejętności uczniów prezentowany podczas egzaminów. Na przykład wynik ucznia podany w skali centylowej, który wynosi 57, oznacza, że 57% wszystkich uczniów piszących dany egzamin uzyskało wynik taki sam jak on lub niższy (a 43% uczniów uzyskało wynik lepszy niż dany uczeń).

Skalę centylową tworzy się dla wyników wszystkich uczniów w kraju, osobno dla każdego zakresu egzaminu. Skala ta jest skalą pozycyjną wyników uporządkowanych rosnąco i zawiera 99 centyli. Aby ustalić wartości poszczególnych centyli, wyniki egzaminu wszystkich uczniów piszących egzamin z danego przedmiotu należy uporządkować niemalejąco i podzielić ich zbiór na 100 równych części. Następnie trzeba określić położenie granic między tymi częściami na skali wyników.

Przykład

Paweł uzyskał następujące wyniki egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym:

język polski – 72% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 58% zdających;

język angielski – 95% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 87% zdających;

matematyka – 49% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 47% zdających.

a) Podaj, jaki procent maturzystów piszących egzamin z matematyki ma wynik taki sam lub niższy niż Paweł.

b) Podaj, jaki procent maturzystów piszących egzamin z języka angielskiego ma wynik lepszy niż Paweł.

c) Z ilu egzaminów Paweł uzyskał wynik poniżej 50 centyla?

Rozwiązanie:

a) Odczytujemy, jaki procent uczniów ma taki sam lub niższy wynik z egzaminu z matematyki: 47%

Odpowiedź: Wynik taki sam lub niższy niż Paweł z egzaminu z matematyki uzyskało 47% maturzystów.

b) Odczytujemy, jaki procent uczniów ma taki sam lub niższy wynik z egzaminu z języka angielskiego: 87%

Obliczamy, jaki procent uczniów piszących egzamin z języka angielskiego ma wynik lepszy niż Paweł:
 $100\% - 87\% = 13\%$

Odpowiedź: 13% maturzystów uzyskało wynik lepszy niż Paweł z egzaminu z języka angielskiego.

c) Odczytujemy wyniki Pawła z kolejnych egzaminów wyrażone w skali centylowej: 58%, 87% i 47%.

Odpowiedź: Z jednego egzaminu Paweł uzyskał wynik poniżej 50%.

Centyl

Centyl to jedna ze 100 równych części, na które można podzielić zakres wartości zestawu danych, aby pokazać rozkład tych wartości.

Centyl danej wartości jest określony przez procent wartości, które są nie większe (mniejsze lub równe) niż ta wartość. Na przykład wynik testu, który jest mniejszy lub równy 68% innych wyników tego testu, znajduje się w 68 centylu.

Skala centylowa zestawu danych (np. wyników testu) to rozkład wartości tego zestawu danych podzielony na 100 centyli.

Przykład

W tabeli przedstawiono skalę centylową z matematyki dla egzaminu maturalnego przeprowadzonego w 2016 roku (cke.gov.pl).

Matematyka – poziom podstawowy

Wynik procentowy	Wartość centyla
0	1
2	1
4	1
6	1
8	1
10	2
12	3
14	5
16	6
18	8
20	10
22	12
24	14
26	16
28	18
30	20
32	23

Wynik procentowy	Wartość centyla
34	25
36	28
38	30
40	33
42	35
44	38
46	40
48	43
50	45
52	48
54	50
56	53
58	55
60	58
62	60
64	62
66	65

Wynik procentowy	Wartość centyla
68	67
70	69
72	71
74	73
76	75
78	77
80	79
82	81
84	83
86	85
88	87
90	89
92	92
94	94
96	96
98	98
100	100

Odpowiedz na pytania.

- Ile procent uczniów napisało egzamin lepiej niż Mateusz, który uzyskał z egzaminu 76% punktów?
- Ile procent punktów mogła uzyskać Natalia, jeśli jej wynik to 58 centyl?

Rozwiązanie:

- Odszukujemy w tabeli wynik 76% i odczytujemy odpowiadającą mu wartość centyla: 75. Oznacza to, że 75% uczniów uzyskało wynik taki sam lub niższy niż Mateusz, a 25% uczniów uzyskało lepszy wynik.

Odpowiedź: Wynik lepszy niż Mateusz z egzaminu maturalnego z matematyki uzyskało 25% uczniów.

- Odszukujemy w tabeli wynik 58 centyl i odczytujemy odpowiadający mu wynik procentowy: 60%.

Odpowiedź: Natalia mogła uzyskać 60% punktów z egzaminu maturalnego z matematyki.

Innym miejscem wykorzystania skali centylowej są tzw. siatki centylowe, którymi posługują się lekarze, ale także rodzice. Siatki centylowe są jedną z metod obiektywnej oceny rozwoju fizycznego dzieci w wieku od 1. do 18. roku życia. Siatki te pozwalają sprawdzić, czy waga lub wzrost dziecka znajdują się w normie dla danej populacji. Norma jest dość szeroka, bo znajduje się między 3 a 97 centylem.

Na siatce centylowej zaznaczone są dwie osie. Na poziomej osi oznaczony jest wiek dziecka (w miesiącach lub w latach), a na drugiej – wzrost lub waga. Ponadto narysowanych jest też kilka linii oznaczonych liczbami 3, 10, 25, 50, 75, 90, 97. Te liczby na siatkach centylowych to właśnie centyle. Z naniesionych na siatkę centylową danych wzrostu i wagi dziecka w kolejnych miesiącach jego życia możemy się dowiedzieć, czy dziecko rozwija się proporcjonalnie do wieku.

Siatka centylowa

Siatka centylowa (wagi lub wzrostu dziewcząt lub chłopców) jest rodzajem skali centylowej, która pozwala na ocenę przebiegu wzrostu i przyboru masy ciała konkretnego dziecka na tle mieszkańców danego kraju.

Przykład

Na siatce centylowej zaznaczono wyniki pomiaru wagi Klary w pierwszych 7 miesiącach życia.



- Podaj wagę Klary w pierwszym miesiącu życia.
- W którym miesiącu waga Klary była o 3250 g większa od jej wagi w pierwszym miesiącu życia?
- W jakim centylu znajdowała się waga Klary w siódmym miesiącu życia?

Rozwiązanie:

- Odczytujemy wagę Klary odpowiadającą dla pierwszego miesiąca: 3,75 kg

Odpowiedź: W pierwszym miesiącu życia Klara ważyła 3,75 kg.

- W pierwszym miesiącu Klara ważyła 3,75 kg. Odczytujemy ze skali, w którym miesiącu waga Klary była o większa o 3250 g = 3,25 kg, tzn. wynosiła 7 kg. Było to w szóstym miesiącu.

Odpowiedź: W szóstym miesiącu życia waga Klary była wyższa o 3250 g od jej wagi w pierwszym miesiącu.

- Waga Klary w siódmym miesiącu życia to około 7,25 kg. Punkt ten znajduje się pomiędzy liniami odpowiadającymi 10 i 25 centylowi.

Odpowiedź: W siódmym miesiącu życia waga Klary znajdowała się pomiędzy 10 a 25 centylem.

12.3. Wartości średnie, mediana i dominanta

Średnia arytmetyczna

Statystyka zajmuje się metodami pozyskiwania i prezentacji, a przede wszystkim analizy danych opisujących różne zjawiska. Dla każdego zbioru danych statystycznych można określić pewne liczby charakteryzujące ten zbiór. Są nimi średnia arytmetyczna i średnia ważona.

Średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Przykład

Jaką średnią ocen uzyskał na świadectwie Leon, jeśli na świadectwie miał trzy oceny celujące, pięć bardzo dobrych, trzy dobre i cztery dostateczne?

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią arytmetyczną wszystkich ocen na świadectwie Leona:

$$\frac{3 \cdot 6 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{15} \approx 4,47$$

Odpowiedź: Średnia ocen Leona wynosiła 4,47.

Średnia ważona

Gdy obliczamy średnią arytmetyczną liczb, wszystkie te liczby traktujemy jednakowo. Czasami jednak do niektórych danych przywiązujemy większą wagę i chcemy to uwzględnić przy obliczaniu średniej wartości.

Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z odpowiednimi wagami $n_1, n_2, \dots, n_n$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem: $\bar{x}_w = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_n \cdot n_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$.

Gdy wszystkie wagi są równe, średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej.

Przykład

Do pierwszej klasy profilowanego technikum geodezyjnego przyjmuje się kandydatów na podstawie średniej ważonej oceny na świadectwie ukończenia szkoły podstawowej z następujących przedmiotów: język polski, język angielski, matematyka, informatyka. Oceny będą przeliczane na punkty według zasady: celujący – 4 punkty, bardzo dobry – 3 punkty, dobry – 2 punkty, dostateczny – 1 punkt, dopuszczający – 0 punktów.

Jakie rezultaty osiągnęli kandydaci, których oceny podano w tabeli? Kto uzyskał najwyższą średnią ważoną?

kandydat	Język polski	Język angielski	Matematyka	Informatyka	Średnia ważona
Amelia Dąbek	4	6	5	4	
Paweł Kowalski	5	5	6	3	
Kuba Wolny	5	3	4	6	

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią ważoną Amelii Dąbek:

$$\frac{4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{2 + 4 + 3 + 2} = 5$$

Obliczamy średnią ważoną Pawła Kowalskiego:

$$\frac{5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 1}{3 + 3 + 4 + 1} \approx 5,18$$

Obliczamy średnią ważoną Kuby Wolnego:

$$\frac{5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4}{3 + 1 + 2 + 4} = 5$$

Odpowiedź: Najwyższą średnią ważoną ocen uzyskał Paweł Kowalski.

Innymi wielkościami charakteryzującymi zbiór danych są mediana i dominanta.

Mediana

Mediana to środkowy wynik w danym zbiorze uporządkowanym niemalejąco.

Aby wyznaczyć medianę danego zbioru liczb, należy najpierw uporządkować te liczby niemalejąco, a następnie wśród tak uporządkowanych liczb odczytać wynik środkowy.

Jeśli liczba elementów zbioru danych jest równa n i jest to liczba nieparzysta, to medianą jest liczba o numerze $\frac{n+1}{2}$.

Jeżeli liczba elementów w zbiorze jest równa n i jest to liczba parzysta, to mediana jest równa średniej arytmetycznej dwóch środkowych liczb (liczbami środkowymi są liczby o numerach $\frac{n}{2}$ i $\frac{n}{2} + 1$).

Przykład

Wyznacz medianę danych:

a) 6, 2, 5, 2, 4

b) 1, 7, 8, 2, 1, 7, 4, 1

Rozwiązanie:

a) Porządkujemy zbiór danych w kolejności niemalejącej: 2, 2, 4, 5, 6

Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą nieparzystą i wynosi $n = 5$.

Medianą jest liczba o numerze trzecim $\left(\frac{5+1}{2} = 3\right)$, czyli liczba 4.

Odpowiedź: Mediana tego zestawu danych jest równa 4.

b) Porządkujemy zbiór danych w kolejności niemalejącej: 1, 1, 1, 2, 4, 7, 7, 8

Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą parzystą i wynosi $n = 8$. Zatem znajdujemy dwie środkowe liczby. Są to liczby o numerze czwartym $\left(\frac{n}{2} = \frac{8}{2}\right)$ i o numerze piątym $\left(\frac{n}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1\right)$, czyli dane: 2 i 4.

Medianą jest średnia arytmetyczna tych dwóch danych, czyli liczba $\frac{2+4}{2} = 3$

Odpowiedź: Mediana tego zestawu danych jest równa 3.

Dominanta

Dominanta to liczba, która w zbiorze danych występuje najczęściej.

Jeśli w zbiorze danych jest kilka wartości, które występują z taką samą liczebnością i większą niż pozostałe wartości, to każda z tych wartości jest dominantą. Jeśli natomiast w zbiorze danych wszystkie wartości występują z taką samą liczebnością, to mówimy, że w tym zbiorze danych nie ma dominanty.

Przykład

Określ dominantę wśród ocen uczniów ze sprawdzianu z chemii: 3, 5, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 6, 2, 1, 2, 2.

Rozwiązanie:

Odczytujemy ocenę, która w tym zestawie danych występuje najczęściej. Jest to ocena 2 (ocena pojawiła się 5 razy).

Odpowiedź: Dominantą tego zestawu danych jest ocena 2.

12.4. Odchylenie standardowe

Odchylenie standardowe

Średnia arytmetyczna danych liczbowych nie zawsze w pełni charakteryzuje te dane. Może się zdarzyć, że dwa zestawy danych mają taką samą lub zbliżoną średnią, ale ich układy są różne. Jako miarę rozproszenia danych wokół ich średniej przyjmuje się **odchylenie standardowe**.

Wariancja

Wariancją liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę: $\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$, gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Przykład

Oblicz wariancję liczb: 2, -4, 8.

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią arytmetyczną liczb 2, -4 i 8: $\frac{2 + (-4) + 8}{3} = 2$

Obliczamy wariancję zestawu danych:

$$\frac{(2-2)^2 + (-4-2)^2 + (8-2)^2}{3} = \frac{36 + 36}{3} = 24$$

Odpowiedź: Wariancja zestawu danych wynosi 24.

Odchyleniem standardowym liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Przykład

W tabeli przedstawiono dane dotyczące wzrostu (z dokładnością do 5 cm) dwóch grup uczniów. Oblicz odchylenie standardowe wzrostu w każdej z grup. Oceń, w której grupie zróżnicowanie wzrostu jest mniejsze.

Wzrost (w cm)	160	165	170	175
Grupa A Liczba osób	3	4	1	2
Grupa B Liczba osób	1	2	3	4

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią wzrostu w grupie A:

$$\frac{3 \cdot 160 + 4 \cdot 165 + 1 \cdot 170 + 2 \cdot 175}{3 + 4 + 1 + 2} = \frac{1660}{10} = 166$$

Obliczamy wariancję w grupie A, wykorzystujemy pogrupowanie danych:

$$\frac{3 \cdot (160 - 166)^2 + 4 \cdot (165 - 166)^2 + (170 - 166)^2 + 2 \cdot (175 - 166)^2}{10} = \frac{3 \cdot 36 + 4 \cdot 1 + 16 + 2 \cdot 81}{10} = 29$$

Obliczamy odchylenie standardowe: $\sigma_A = \sqrt{29} \approx 5,4$

Obliczamy średnią wzrostu w grupie B:

$$\frac{1 \cdot 160 + 2 \cdot 165 + 3 \cdot 170 + 4 \cdot 175}{1 + 2 + 3 + 4} = \frac{1700}{10} = 170$$

Obliczamy wariancję w grupie B, wykorzystujemy pogrupowanie danych:

$$\frac{(160 - 170)^2 + 2 \cdot (165 - 170)^2 + 3 \cdot (170 - 170)^2 + 4 \cdot (175 - 170)^2}{10} = \frac{100 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 25}{10} = 25$$

Obliczamy odchylenie standardowe: $\sigma_B = \sqrt{25} = 5$

Odpowiedź: Mniejsze zróżnicowanie wzrostu jest w grupie B.

12.5. Utrwalamy wiedzę

WYBRANE WZORY MATEMATYCZNE NA EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.

- Dla dowolnej liczby x mamy:

$$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \quad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |x - y| \leq |x| + |y| \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

$$\begin{aligned} |x - a| \leq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a - r \leq x \leq a + r \\ |x - a| \geq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r \end{aligned}$$

2. POTĘGI I PIERWIASTKI

- Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a definiujemy jej n -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

- Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

– dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$

– dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

– dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

- Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & (a^r)^s &= a^{r \cdot s} & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r & \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

- Niech x, y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli $a \in (0, 1)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x > y$.

Jeżeli $a \in (1, +\infty)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x < y$.

3. LOGARYTMY

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a , aby otrzymać b :

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0, y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

4. SILNIA. WSPÓŁCZYNNIK DWUMIANOWY

- Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ prawdziwa jest równość:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

- Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Prawdziwe są równości:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ \binom{n}{0} &= 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n-1} = n \quad \binom{n}{n} = 1 \\ \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

5. WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b :

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

6. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) & a^2 - 1 &= (a - 1)(a + 1) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) & a^3 - 1 &= (a - 1)(a^2 + a + 1) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) & a^3 + 1 &= (a + 1)(a^2 - a + 1) \\ a^n - 1 &= (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) \end{aligned}$$

7. FUNKCJA KWADRATOWA

- Wyróżnikiem Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$) zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę

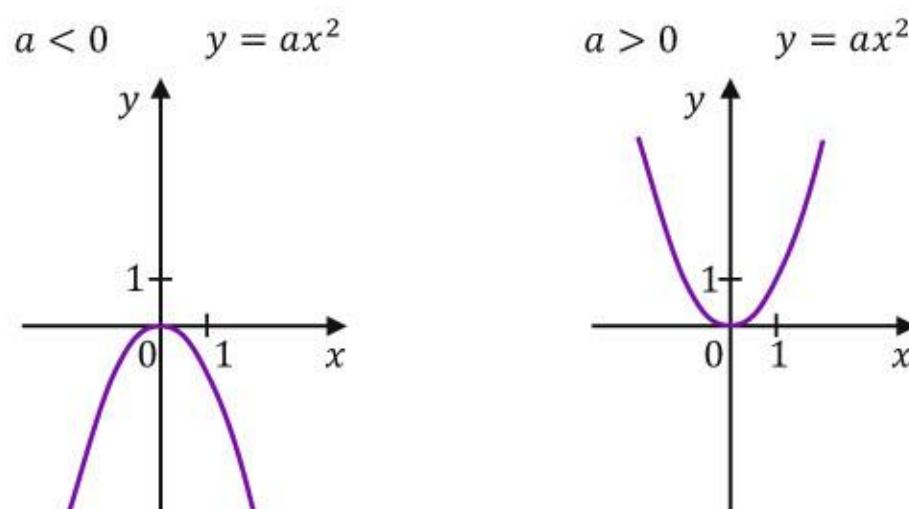
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie

$$W = (p, q) \quad \text{gdzie} \quad p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gdy $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi. Gdy $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze.



- Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$

(liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika Δ :

- jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

- jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

- Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można przestawić w postaci iloczynowej

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Wzory Viète'a

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

8. CIĄGI

- Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r :

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla } q \neq 1 \quad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla } q = 1$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \text{ dla } n \geq 2$$

- Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , określony dla $n \geq 1$, o ilorazie q .

Niech (S_n) oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n) , to znaczy ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ dla $n \geq 1$.

Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg (S_n) ma granicę równą

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Granicę tę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu (a_n) .

- Twierdzenie o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) , określone dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, są zbieżne i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ są zbieżne, a ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $b \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

- Twierdzenie o trzech ciągach

Jeżeli wyrazy ciągów (a_n) , (b_n) i (c_n) , określonych dla $n \geq 1$, spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla $n \geq 1$, a ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do wspólnej granicy

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to ciąg (b_n) jest zbieżny, a ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

- Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy K_0 złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n jest określony wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- Wybrane granice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla każdego } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \text{dla każdego } q \in (-1, 1)$$

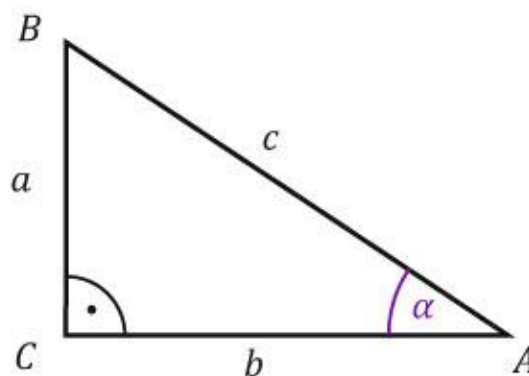
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \text{dla każdego } k > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty \quad \text{dla każdego } k > 0$$

9. TRYGNOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

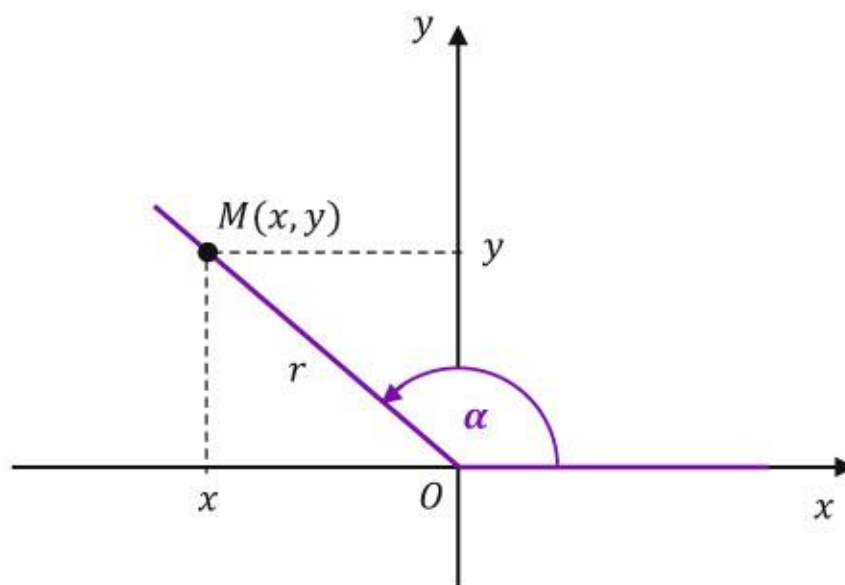


- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

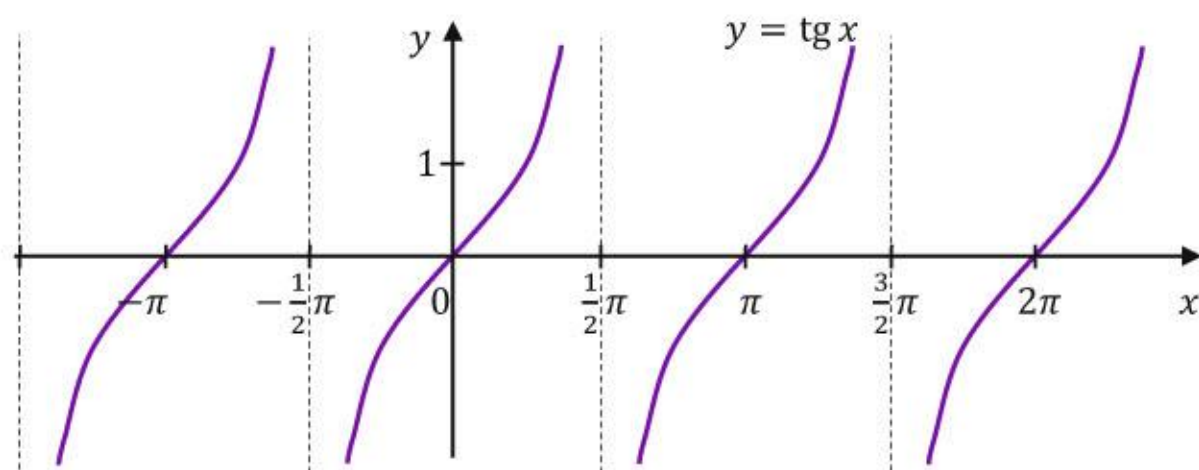
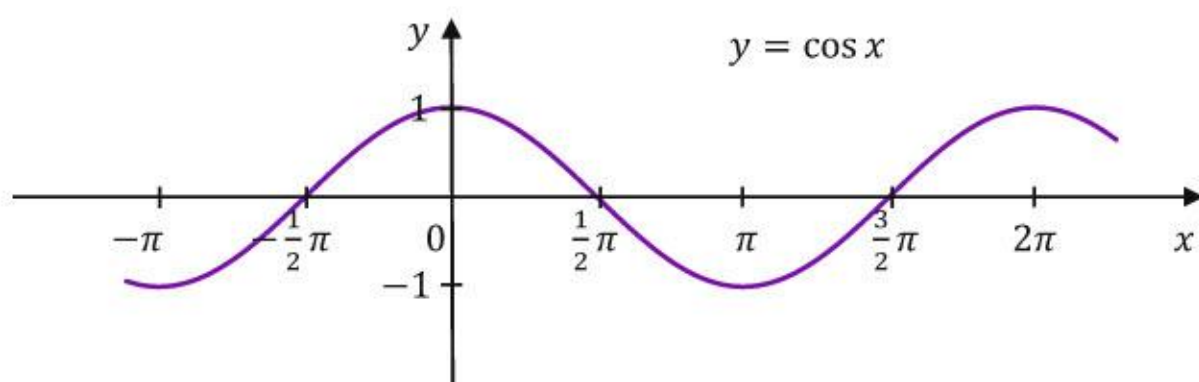
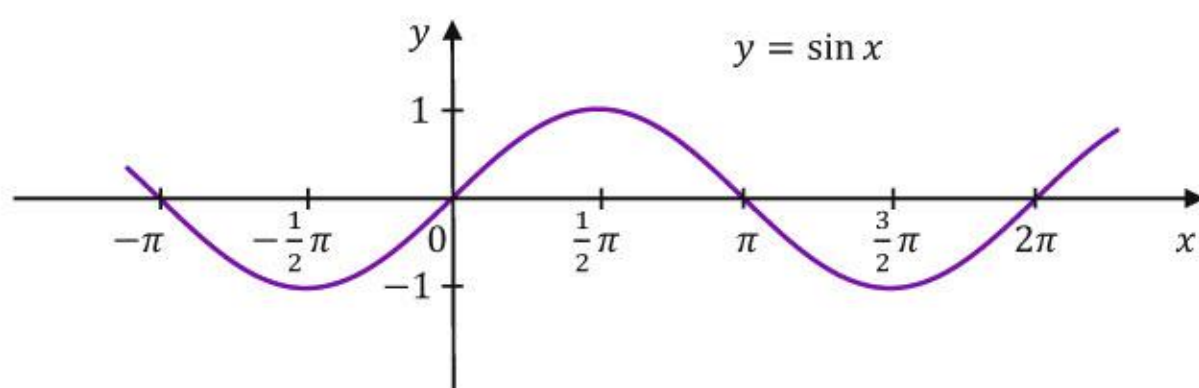
$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y}{x}, \quad \text{o ile } x \neq 0 \end{aligned}$$

gdzie

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



- Wykresy funkcji trygonometrycznych



- Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla } \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów α oraz β prawdziwe są równości:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Ponadto

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \text{gdym } \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \text{gdym } \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \text{o ile } \operatorname{tg} \alpha \text{ istnieje i } \operatorname{tg}^2 \alpha \neq 1$$

- Wybrane wzory redukcyjne

$$\begin{array}{lll}
 \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha & \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \\
 \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha & \\
 \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \\
 \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha
 \end{array}$$

- Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\begin{array}{ll}
 \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] \\
 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\
 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]
 \end{array}$$

- Okresowość funkcji trygonometrycznych

Dla każdego kąta α i liczby całkowitej k prawdziwe są związki:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \qquad \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

Ponadto jeżeli $\alpha \neq 90^\circ + m \cdot 180^\circ$ (gdzie $m \in \mathbb{Z}$), to:

$$\operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$$

10. PLANIMETRIA

Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC :

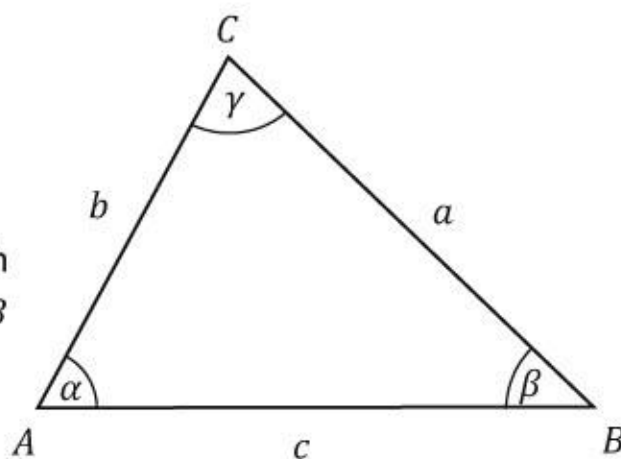
a, b, c – długości boków w trójkącie ABC

α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących – odpowiednio – przy wierzchołkach A, B oraz C

R, r – długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC

h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta opuszczone – odpowiednio – z wierzchołków A, B i C .

p – połowa obwodu trójkąta ABC , tj.

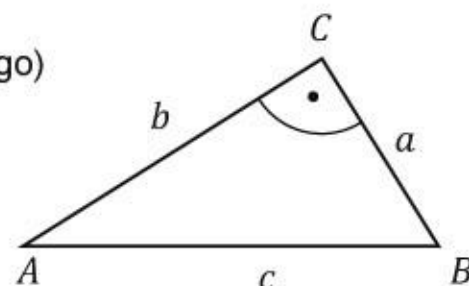


$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{b}{\sin \beta} = 2R \quad \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

- Wzory na pole trójkąta ABC :

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \cdot \sin \beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \quad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}b^2 \cdot \frac{\sin \gamma \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{2}c^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

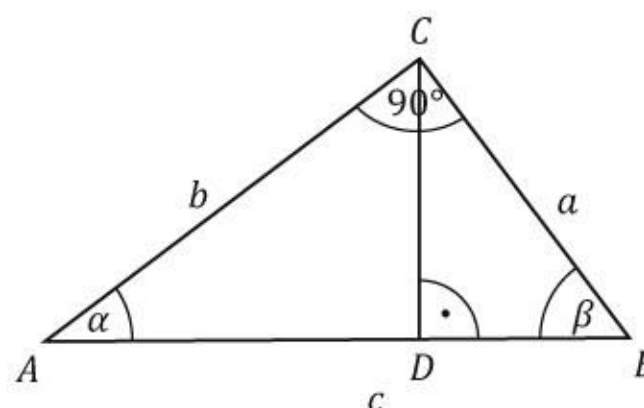
- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \quad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad R = \frac{1}{2}c$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$



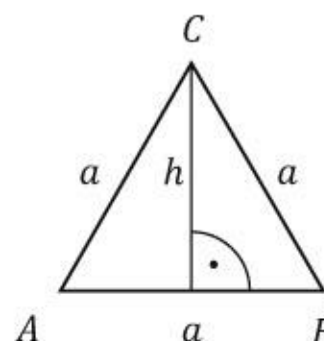
- Związki miarowe w trójkącie równobocznym

a – długość boku trójkąta równobocznego

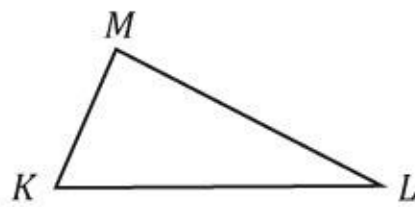
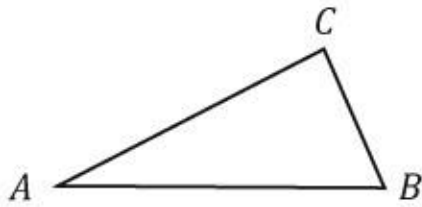
h – wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3}h \quad R = \frac{2}{3}h$$



- Cechy przystawania trójkątów



a) cecha przystawania „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom boków trójkąta KLM , np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$, $|CA| = |ML|$.

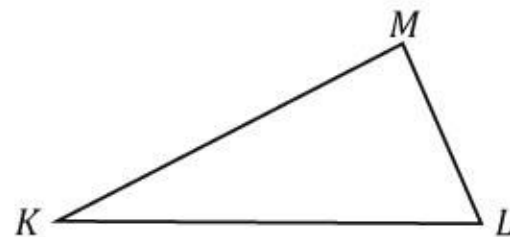
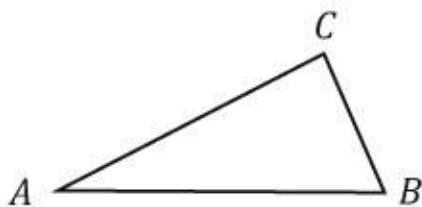
b) cecha przystawania „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości dwóch boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$.

c) cecha przystawania „**kąt–bok–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM :

długość jednego boku trójkąta ABC jest równa długości jednego boku trójkąta KLM i kąty przyległe do tego boku trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta KLM , np.: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$ i $|AB| = |KL|$.

- Cechy podobieństwa trójkątów



a) cecha podobieństwa „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta KLM , np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$.

b) cecha podobieństwa „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM :

długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|}$ i $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$.

c) cecha podobieństwa „**kąt–kąt–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM :

kąty trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów trójkąta KLM , np.: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|$.

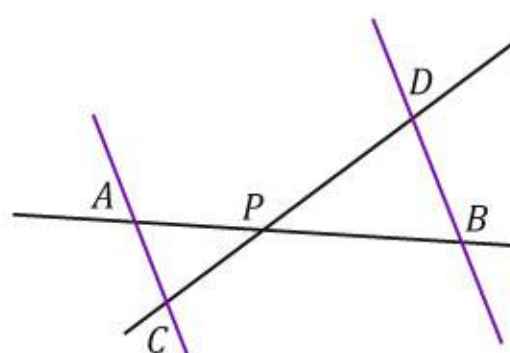
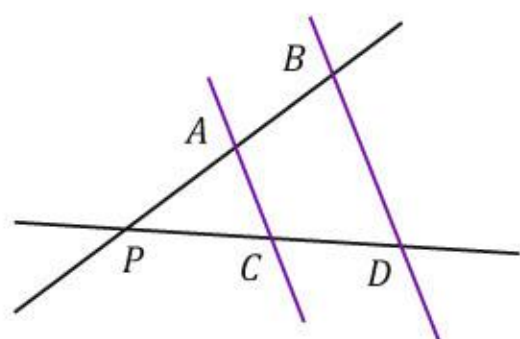
- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Różne proste AB i CD przecinają się w punkcie P , przy czym spełniony jest jeden z warunków:

- punkt A leży wewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży wewnątrz odcinka PD
LUB
- punkt A leży na zewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży na zewnątrz odcinka PD .

Jeżeli $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$, to proste AC i BD są równoległe.

Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$.



- Twierdzenie o dwusiecznej kąta

Jeżeli dwusieczna kąta wewnętrznego (zewnątrznego) trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą zawierającą odcinek AB w punkcie D , to

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

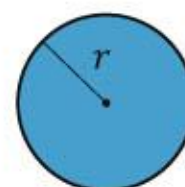
- Koło

Pole P koła o promieniu r jest równe:

$$P = \pi r^2$$

Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L = 2\pi r$$



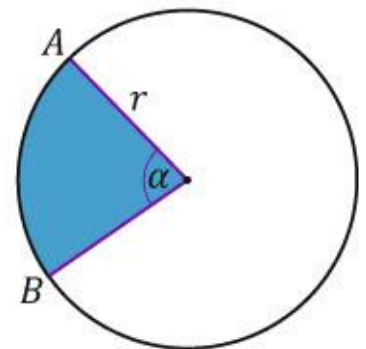
- Wycinek koła

Pole P wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równe:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Długość L łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równa:

$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

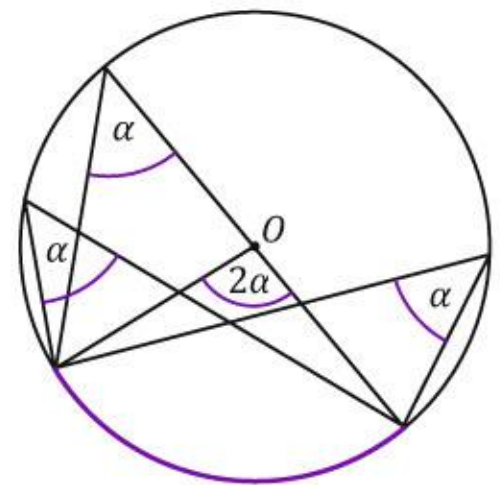


- Kąty w okręgu

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O , opartych na tym samym łuku, są równe.

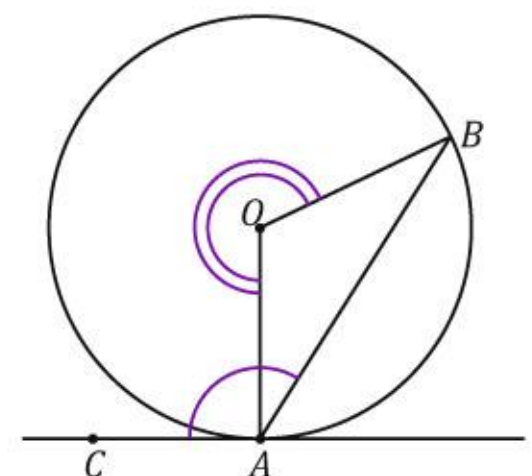
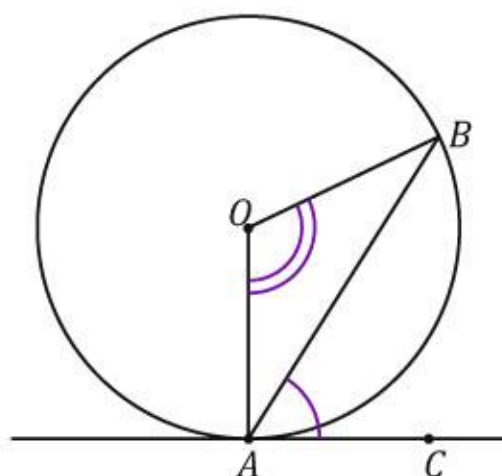
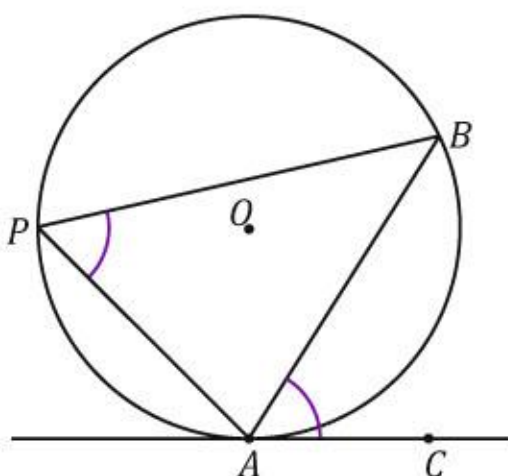


- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i cięciwa AB tego okręgu. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A , natomiast punkt P leży na tym okręgu i nie należy do kąta CAB . Wtedy

$$|\angle APB| = |\angle CAB| \quad \text{ i } \quad |\angle AOB| = 2 \cdot |\angle CAB|$$

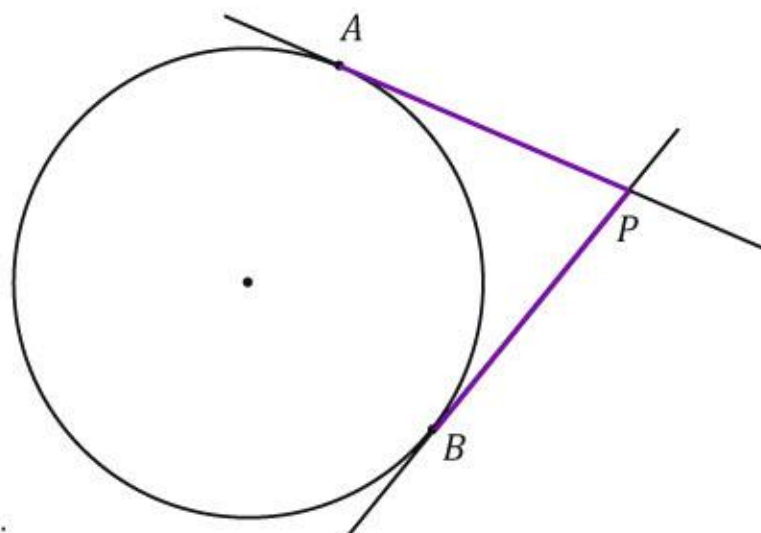
przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB .



- Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P , to

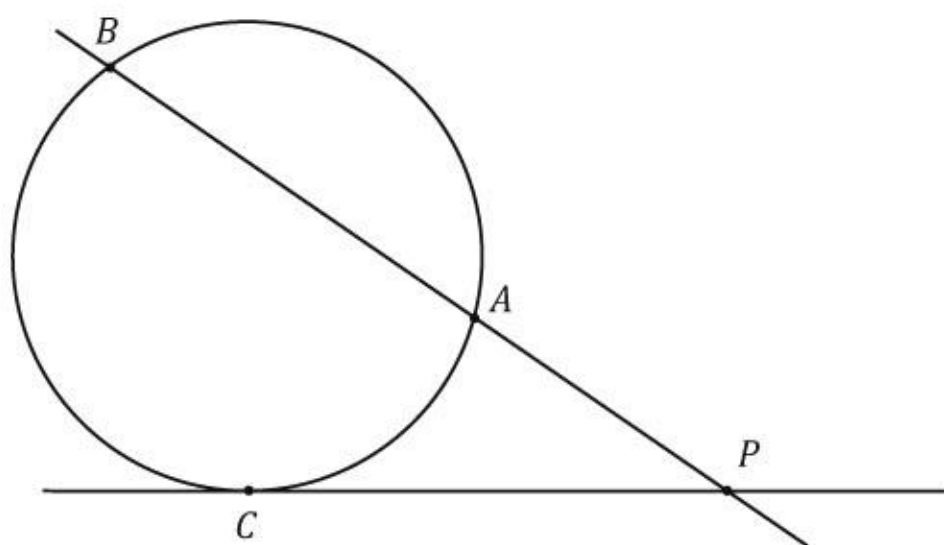
$$|PA| = |PB|$$



- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P , to

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$

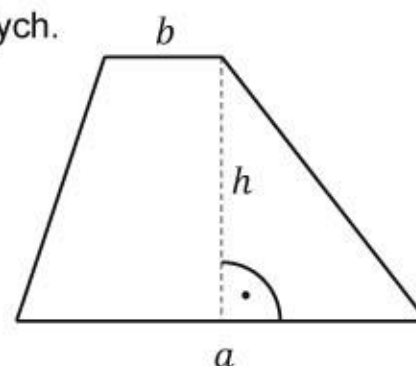


- Czworokąty

Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole P trapezu:

$$P = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

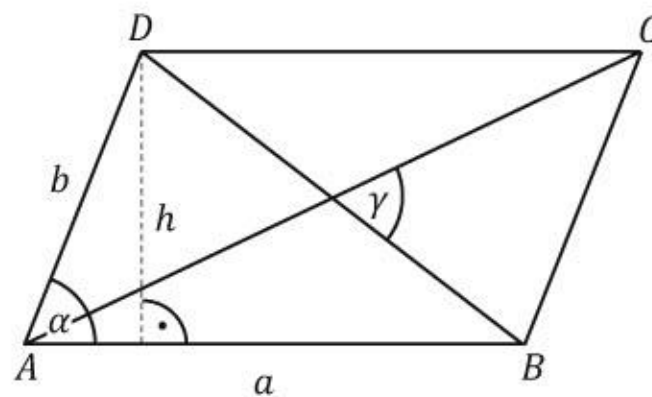


Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole P równoległoboku:

$$P = ah \quad P = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \gamma$$

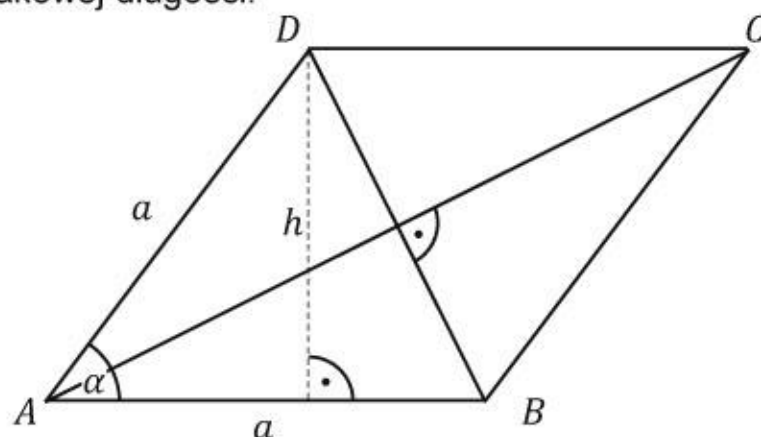


Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole P rombu:

$$P = ah \quad P = a^2 \cdot \sin \alpha$$

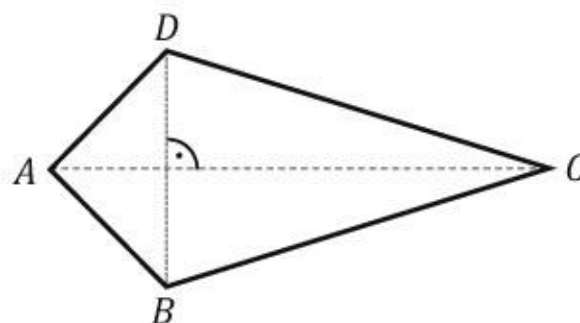
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid – czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole P deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

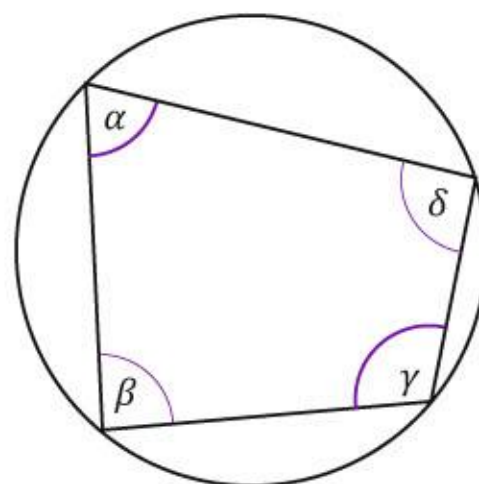


- Okrag opisany na czworokacie

Na czworokacie można opisać okrag wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwnych kątów wewnetrznych są równe 180° .

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

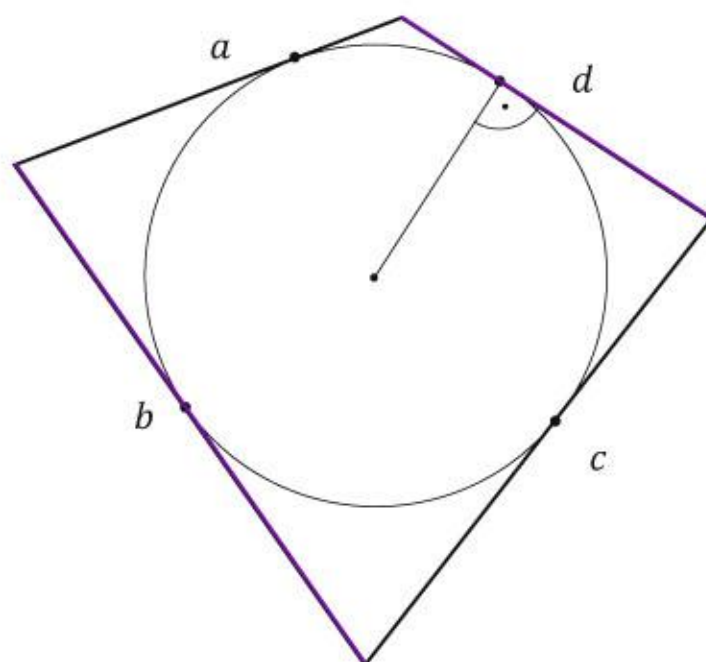
$$\alpha + \gamma = 180^\circ \quad \beta + \delta = 180^\circ$$



- Okrag wpisany w czworokat

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$



- Pola figur podobnych

Jeżeli figura B o polu P_B jest podobna do figury A o polu P_A (różnym od zera) w skali k , to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$\frac{P_B}{P_A} = k^2$$

11. GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

- Długość odcinka

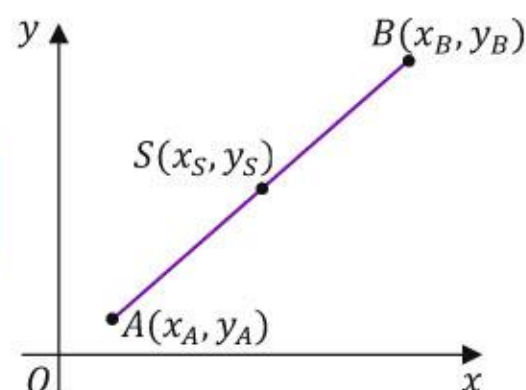
Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Współrzędne środka odcinka

Współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$



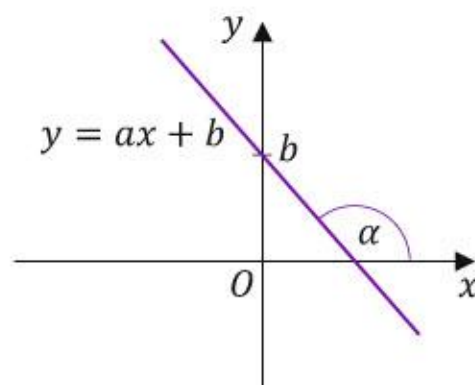
- Równanie kierunkowe prostej

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy , to można opisać ją równaniem kierunkowym:

$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej.

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$



Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$.

- Równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym a , która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

- Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$\begin{array}{l} \text{gdzie} \\ y - y_A = a(x - x_A) \\ a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{gdy } x_B \neq x_A \end{array}$$

- Równanie ogólne prostej

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{gdzie } A, B, C \in \mathbb{R} \text{ i } A^2 + B^2 \neq 0$$

Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox ; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy ; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

- Równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

- Proste równoległe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

- Proste prostopadłe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

- Odległość punktu od prostej

Odległość d punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ jest równa:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Równanie okręgu

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci ogólnej:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

gdzie $c = a^2 + b^2 - r^2$.

- Współrzędne wektora, długość wektora, działania na wektorach

Dane są punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ w kartezjańskim układzie współrzędnych zaczepionego w punkcie A :

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$ oraz $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami oraz $a \in \mathbb{R}$, to:

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \quad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

Długością $|\vec{u}|$ wektora $\vec{u} = [u_1, u_2]$ nazywamy liczbę

$$|\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$$

- Przekształcenia geometryczne

Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x + a, y + b)$.

Symetria osiowa S_{Ox} względem osi Ox przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x, -y)$.

Symetria osiowa S_{Oy} względem osi Oy przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, y)$.

Symetria środkowa S_K względem punktu $K = (a, b)$ przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (2a - x, 2b - y)$.

W szczególności symetria środkowa względem początku układu współrzędnych przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, -y)$.

- Pole trójkąta

Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$ jest równe:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

- Współrzędne środka masy trójkąta

Współrzędne środka masy $S = (x_S, y_S)$ trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$, czyli punktu przecięcia jego środkowych:

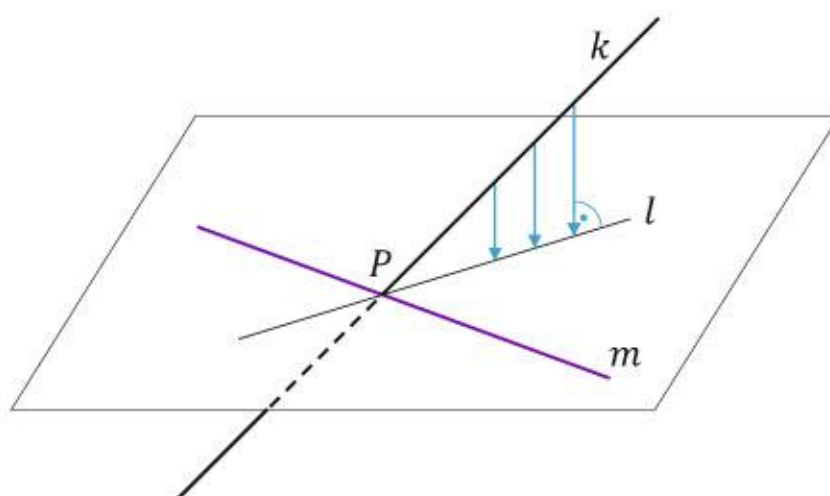
$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

12. STEREOMETRIA

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P pod kątem ostrym. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P .

Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy m jest prostopadła do prostej l .



Przyjmujemy oznaczenia:

P_c – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

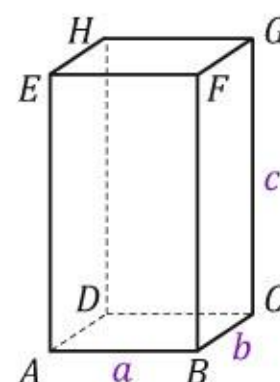
V – objętość

- Prostopadłościan

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = abc$$

gdzie a , b , c są długościami krawędzi prostopadłościanu

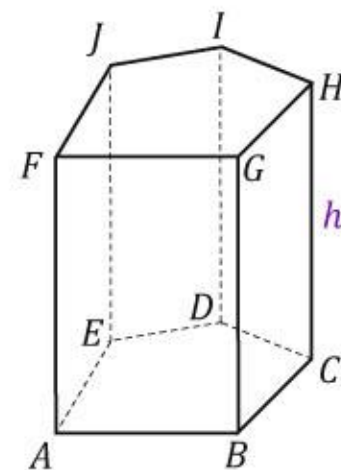


- Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

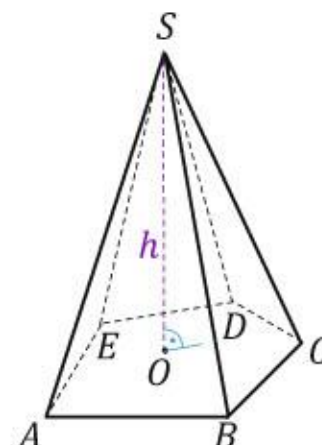
gdzie Ob jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast h – wysokością graniastosłupa.



- Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



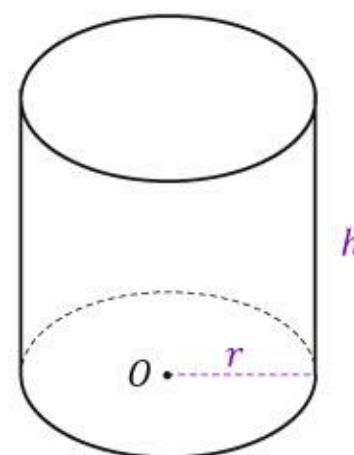
- Walec

$$P_b = 2\pi r h$$

$$P_c = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie h jest wysokością walca, O – środkiem symetrii podstawy walca, r – promieniem podstawy walca.



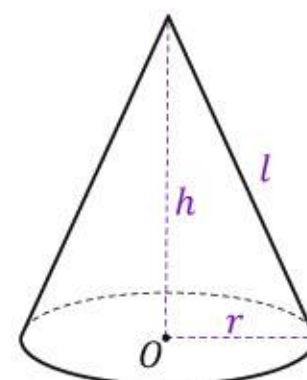
- Stożek

$$P_b = \pi r l$$

$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

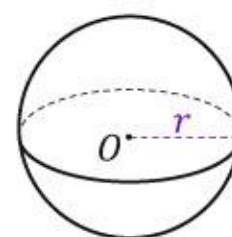
gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, natomiast l – tworzącą stożka. Punkt O jest środkiem symetrii podstawy stożka.



- Kula

$$P_c = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



gdzie r jest promieniem kuli, natomiast O – środkiem symetrii kuli.

13. KOMBINATORYKA

- Permutacje

Liczba wszystkich sposobów, na które n różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

- Kombinacje

Liczba wszystkich sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k elementów ($0 \leq k \leq n$), jest równa $\binom{n}{k}$.

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k (niekoniecznie różnych) wyrazów, jest równa n^k .

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k różnych wyrazów ($1 \leq k \leq n$), jest równa

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) \leq P(B) \quad \text{dla każdego zdarzeń } A \text{ oraz } B \text{ takich, że } A \subset B \subset \Omega$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{gdzie } A' \text{ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \quad \text{dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

- Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A , natomiast $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω .

- Schemat Bernoullego

Próba Bernoullego nazywamy doświadczenie losowe, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Jeden z nich nazywamy sukcesem, a drugi – porażką. Jeżeli prawdopodobieństwo sukcesu jest równe p , to prawdopodobieństwo porażki jest równe $q = 1 - p$.

Schematem Bernoullego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń prób Bernoullego. W schemacie Bernoullego prawdopodobieństwo $P_n(k)$ uzyskania w n próbach dokładnie k sukcesów ($0 \leq k \leq n$) jest równe

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

- Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω , przy czym $P(B) > 0$.

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zdarzenia A pod warunkiem zaistnienia zdarzenia B nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \dots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \dots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$

to dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ prawdziwa jest równość

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

- Twierdzenie Bayesa

Jeżeli zdarzenia losowe $A, B_1, B_2, \dots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \dots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$
4. $P(A) > 0$

to dla każdego k ($1 \leq k \leq n$) prawdziwa jest równość

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

- Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Niech X będzie zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, określoną na zbiorze Ω , przy czym $P(\{\omega: \omega \in \Omega \text{ oraz } X(\omega) = x_i\}) = p_i$ dla $1 \leq i \leq n$. Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$$

15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna $\bar{a}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna $\bar{g}$ z liczb nieujemnych $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa:

$$\bar{g} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- Średnia kwadratowa

Średnia kwadratowa $\bar{k}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n}}$$

- Nierówności między średnimi liczbowymi

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą liczbami nieujemnymi. Wtedy (przy powyższych oznaczeniach) prawdziwe są nierówności:

$$\bar{k} \geq \bar{a} \geq \bar{g}$$

Ponadto równość pomiędzy tymi średnimi liczbowymi zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

- Średnia ważona

Średnia ważona $\bar{s}$ z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio: $w_1, w_2, \dots, w_n$, jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest:

– dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

– dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$ (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja σ^2 danych liczbowych $a_1, a_2, \dots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ jest równa:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}$$

Prawdziwa jest też równość:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n}}$$

16. POCHODNA FUNKCJI

- Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Pochodna funkcji złożonej

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{gdy } g(x) \neq 0$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

- Pochodne wybranych funkcji

Niech a, b, c, r będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

gdzie e jest liczbą Eulera; $e \approx 2,72$

- Równanie stycznej

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 , to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dane jest wzorem

$$y = a(x - x_0) + f(x_0)$$

gdzie

$$a = f'(x_0)$$

17. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0	0,0000	1,0000	0,0000
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	0,0872	0,9962	0,0875
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	0,1736	0,9848	0,1763
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493
15	0,2588	0,9659	0,2679
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	0,3420	0,9397	0,3640
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	0,6428	0,7660	0,8391
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	0,7071	0,7071	1,0000

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
45	0,7071	0,7071	1,0000
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504
50	0,7660	0,6428	1,1918
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	0,8192	0,5736	1,4281
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	0,8660	0,5000	1,7321
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	0,9063	0,4226	2,1445
66	0,9135	0,4067	2,2460
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	0,9397	0,3420	2,7475
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	0,9659	0,2588	3,7321
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	0,1908	5,1446
80	0,9848	0,1736	5,6713
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	0,9962	0,0872	11,4301
86	0,9976	0,0698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900
90	1,0000	0,0000	-

Źródło: Centralna Komisja Edukacyjna, *Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki*, cke.gov.pl, czerwiec 2022 r.

WYBRANE OZNACZENIA I SYMBOLE MATEMATYCZNE

W zadaniach z matematyki na poziomie podstawowym mogą być stosowane następujące oznaczenia i symbole matematyczne:

- $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych
 - $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych
 - $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych
 - $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych
 - $A \cup B$ – suma zbiorów A oraz B
 - $A \cap B$ – iloczyn zbiorów A i B (część wspólna zbiorów A i B)
 - $A \setminus B$ – różnica zbioru A i zbioru B .
 - $A \subset B$ – zbiór A jest podzbiorem zbioru B
 - $x \in A$ – element x należy do zbioru A
 - $[a, b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x \leq b$
 - $[a, b)$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x < b$
 - $(a, b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x \leq b$
 - (a, b) – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x < b$
- Krańce przedziałów domkniętych zdający może oznaczać także – odpowiednio:
 $\langle a, b \rangle$, $\langle a, b \rangle$, $\langle a, b \rangle$.

Źródło: Centralna Komisja Edukacyjna, *Informator o egzaminie maturalnym z matematyki*, cke.gov.pl, czerwiec 2022 r.

Indeks

C

centyl 182
ciąg 88
ciąg arytmetyczny 94
ciąg geometryczny 97

D

dominanta 185
doświadczenie losowe 174
dowód 13
dziedzina 46

F

funkcja 70
funkcja kwadratowa 78
funkcje trygonometryczne 102

G

graniastosłup 165

I

iloczyn zbiorów 22

J

jednomian 32

K

kąt wpisany 126
kąt zewnętrzny 116
kredyty i lokaty bankowe 25
kula 171

L

liczby niewymierne 17
liczby wymierne 14
logarytm 26

M

miejsce zerowe 73
monotoniczność ciągu 92
monotoniczność funkcji 73

N

nierówność 47
nierówność kwadratowa 51
notacja wykładnicza 19

O

odchylenie standardowe 185
ostrosłup 167

P

pierścień kołowy 125
pierwiastki wielomianu 37

podobieństwo trójkątów 130
postać kanoniczna 79
prawdopodobieństwo klasyczne 180
procent 23
procent składany 99
proporcjonalność odwrotna 84
przedziały liczbowe 20
przekrój 164
przystawanie trójkątów 129
punkty procentowe 25

R

reguła dodawania 177
reguła mnożenia 176
rozkład wielomianu na czynniki 35
rozwiniecie dziesiętne 16
równania wielomianowe 53
równania wymierne 53
równanie 46
równanie kierunkowe 138
równanie kwadratowe 50
różnica zbiorów 22

S

schemat Hornera 38
siatka centylowa 183
skala centylowa 181
skala podobieństwa 171
stożek 169
suma zbiorów 22
symetria osiowa 153
symetria środkowa 155

Ś

średnia
 arytmetyczna 183
 ważona 184

T

tożsamości trygonometryczne 108
twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego 128
twierdzenia Talesa 127
twierdzenie 13
twierdzenie cosinusów 111
twierdzenie Pitagorasa 118
twierdzenie sinusów 109

U

układ równań 58
ułamki dziesiętne skończone 16

W

walec 168
wariacja 185
wartość bezwzględna 22
wielokąty foremne 134
wielomian 32
wielomian zerowy 32
wycinek koła 125

wykres funkcji 70
wyrażenie wymierne 39
wyróżnik trójkąta kwadratowego 78
wzory skróconego mnożenia 30
wzór rekurencyjny ciągu 91

Z

zbiór liczb
 całkowitych 14
 naturalnych 12
 pierwszych 12
 rzeczywistych 17
zbiór wartości 73
zdarzenie
 elementarne 174
 losowe 174
 przeciwnie 175

