matura

ZGODNE Z WYTYCZNYMI CKE

Zadania maturalne z odpowiedziami

matematyka zakres podstawowy

- **Teoria** w skrócie
- Rozwiązania **krok po kroku** #PlatformaOperon
- Wzorcowo rozwiązany **arkusz**

REPETYTORIUM



OPERON

REPETYTORIUM

matura

matematyka

zakres podstawowy

Adam Konstantynowicz
Anna Konstantynowicz
Małgorzata Pająk

OPERON
Edukacja jest podróżą
2022

Projekt okładki: **Paweł Kwacz**
Redaktor prowadzący: **Michalina Stolińska**
Redakcja językowa: **Marlena Dobrowolska**
Redakcja graficzna i skład: **Maciej Laska**
Korekta: **Marlena Dobrowolska**

Rysunki: Jan Kortas

© Copyright by OPERON Sp. z o.o. & Adam Konstantynowicz, Anna Konstantynowicz, Małgorzata Pająk
Gdynia 2022

Wszelkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie w całości lub we fragmentach bez zgody wydawcy zabronione.
N7777

Wydawca:
OPERON Sp. z o.o.
81-212 Gdynia, ul. Hutnicza 3
tel. centrali 58 679 00 00
e-mail: info@operon.pl
www.operon.pl

ISBN 978-83-8197-275-8

Spis treści

1. Liczby rzeczywiste

Teoria z przykładami . . . 12
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 17

2. Wielomiany

Teoria z przykładami . . . 28
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 31

3. Równania i nierówności

Teoria z przykładami . . . 40
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 43

4. Układy równań

Teoria z przykładami . . . 56
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 59

5. Funkcje

Teoria z przykładami . . . 76
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 79

6. Ciągi

Teoria z przykładami . . . 92
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 96

7. Trygonometria

Teoria z przykładami . . . 108
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 112

8. Planimetria

Teoria z przykładami . . . 124
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 127

9. Geometria analityczna

Teoria z przykładami . . . 134
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 138

10. Stereometria

Teoria z przykładami . . . 150
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 155

11. Kombinatoryka

Teoria z przykładami . . . 168
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 170

12. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Teoria z przykładami . . . 180
Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania . . . 183

Wzorcowo rozwiązany arkusz maturalny . . . 194

Odpowiedzi do zadań . . . 213

Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki . . . 226

Garść formalności

– co warto wiedzieć o maturze od 2023 roku

W roku 2023 po czteroletnim liceum i w roku 2024 po pięcioletnim technikum zdajesz maturę na podstawie wymagań egzaminacyjnych opracowanych na czas pandemii COVID-19. Znajdziesz je tu: **gov.pl**



Informatory i aneksy do *Informatorów* do każdego z przedmiotów opublikowano na stronie CKE tu: **cke.gov.pl**



Egzaminy zdawane **obowiązkowo pisemnie** to:

Język polski
Poziom podstawowy
Próg zdania **30%**
240 min

Matematyka
Poziom podstawowy
Próg zdania **30%**
180 min

Język obcy nowożytny
Poziom podstawowy
Próg zdania **30%**
120 min

Wybrany przedmiot dodatkowy
Poziom rozszerzony
Próg zdania – w 2023 r. bez progu; od 2025 r. 30%
od 180 do 210 min
(w zależności od wybranego przedmiotu)

Egzaminy zdawane **obowiązkowo ustnie** to:

Język polski
Bez określania poziomu Próg zdania **30%** **30 min**

Język obcy nowożytny
Bez określania poziomu Próg zdania **30%** **15 min**

Egzaminy zdawane **dodatkowo** to:

Wybrane przez ucznia przedmioty dodatkowe od 1 do 5 wytypowane do rekrutacji na studia
Poziom rozszerzony

Egzamin z języka obcego na poziomie dwujęzycznym (jako przedmiot dodatkowy) zdawany obowiązkowo przez ucznia szkół/ oddziałów dwujęzycznych

Dyplom zawodowy lub dyplom potwierdzający kwalifikacje zawodowe przez ucznia technikum uprawniający go do zwolnienia z obowiązkowego przedmiotu dodatkowego na poziomie rozszerzonym

Ważne terminy dotyczące wyboru przedmiotów zdawanych na maturze:

30 **września** wstępna deklaracja

7 **lutego** ostateczna deklaracja

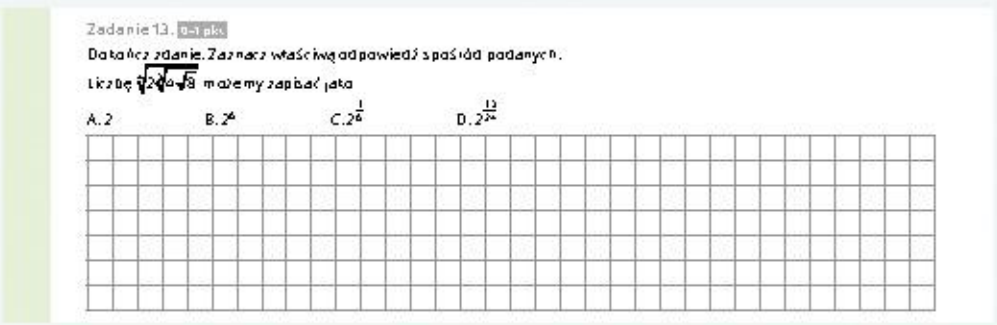
Matematycznie o matematyce

– struktura i przebieg egzaminu z matematyki

W roku szkolnym 2022/2023 oraz 2023/2024:

- uczeń otrzyma za zadania zamknięte **29** punktów, za zadania otwarte **17** punktów; łączna liczba punktów za poprawne rozwiązanie całego arkusza to **46** punktów;
- w arkuszu egzaminacyjnym będzie od **7** do **13** zadań otwartych; w wymaganiach egzaminacyjnych ustalono, że uczeń ma do rozwiązania jedno zadanie na dowodzenie; usunięto zadania na dowód geometryczny oraz wzory skróconego mnożenia dla potęg trzecich, ograniczono wymagania dotyczące wielomianów, a także wymagania ze stereometrii, m.in. całkowicie usunięto zagadnienia dotyczące brył.

Zadania i treści teoretyczne dotyczące zagadnień pominiętych w roku szkolnym 2022/2023 oraz 2023/2024 w tej publikacji oznaczono wyszarzeniem. Możesz wykonać te zadania, ale nie musisz:


Zadanie 13. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczbę $\sqrt{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}$ możemy zapisać jako

A. 2 B. $2^{\frac{4}{3}}$ C. $2^{\frac{1}{4}}$ D. $2^{\frac{13}{24}}$

W roku szkolnym 2024/2025:

- za zadania zamknięte uczeń otrzymuje **25** punktów, za zadania otwarte kolejne **25** punktów; łączna liczba punktów za poprawne rozwiązanie całego arkusza to **50** punktów;
- arkusz egzaminacyjny zawiera od **29** do **40** zadań (od **20** do **25** zamkniętych i od **9** do **15** otwartych) z całej podstawy programowej.

Rodzaje zadań:

3 **typy zadań zamkniętych:**

- zadania wyboru wielokrotnego
- zadania typu prawda-fałsz
- zadania na dobieranie

3 **typy zadań otwartych:**

- zadania z luką, wymagające uzupełnienia zdania albo zapisania odpowiedzi jednym wyrazem lub kilkoma wyrazami, symbolami lub wyrażeniami matematycznymi określającymi własności obiektów matematycznych, w tym wykonania lub uzupełnienia wykresu, zależności, diagramu, tabeli
- zadania krótkiej odpowiedzi, wymagające wykonania prostego obliczenia lub bezpośredniego zapisania rozwiązania albo zapisania przeprowadzonego rozumowania lub obliczenia zwykle w dwóch lub trzech etapach
- zadania rozszerzonej odpowiedzi, wymagające utworzenia strategii rozwiązania problemu matematycznego i przedstawienia jej realizacji

Wiązka zadań – może wystąpić w arkuszu jedna lub kilka, a składa się z zestawu od 2 do 4 zadań występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać niezależnie od rozwiązania innych zadań w danej wiązce. Wiązka zadań może się składać zarówno z zadań zamkniętych, jak i z zadań otwartych.

Karta odpowiedzi – 1 sztuka, na niej zaznaczasz odpowiedzi do zadań zamkniętych.

Materiały i przybory pomocnicze – możesz korzystać z 4 rzeczy:


· linijki


· cyrkla


· kalkulatora prostego


· Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki (znajdziesz je na końcu tej publikacji)

Niezbędne i ważne na egzaminie z matematyki

Pamiętaj o **korzystaniu z „Wybranych wzorów matematycznych"**; ich nowy wzór znajdziesz na stronie CKE oraz na końcu tej publikacji.

Pozwól sobie na **rozwiązywanie zadań swoim sposobem**; egzaminator ma obowiązek uwzględnienia różnych metod doprowadzenia do poprawnego wyniku.

Pamiętaj o jednostkach i miarach przy obliczeniach.

Zwracaj uwagę na kolorowe rysunki i ich oznaczenia.

Uwzględniaj punktację za całe zadanie i jego podpunkty; **doprowadzaj rozwiązanie tak daleko, jak się uda** – tok rozumowania i pokonanie istotnych etapów rozwiązania zadania także są punktowane.

Przenieś rozwiązania zadań zamkniętych na kartę odpowiedzi – upewnij się, że udało Ci się to zrobić.

Zaplanuj strategię rozwiązania arkusza – warto zacząć od zadań zamkniętych.

Repetytorium OPERONU

Uczę się tego, **czego naprawdę potrzebuję.**
Jak chcę, **gdzie** chcę i **kiedy** chcę.

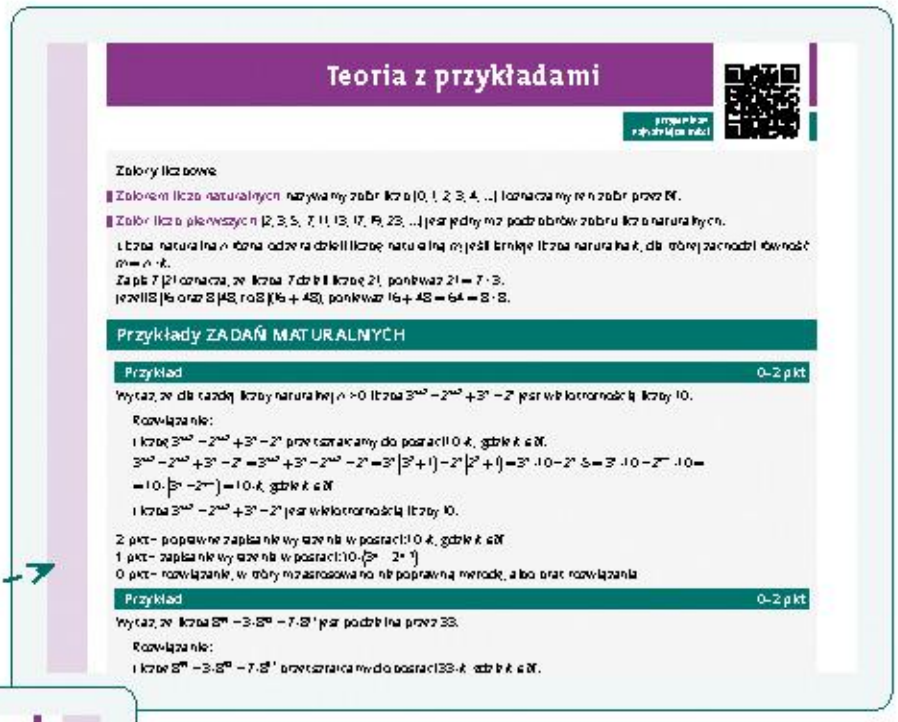
Czego potrzebujesz?

Przypomnieć sobie najpierw teorię w pigułce z danego działu?

Zobaczyć najważniejsze informacje w zestawieniu, na grafie, w tabeli, na wykresie?

A może wolisz zacząć od konkretnych przykładów rozwiązanych zadań maturalnych?

Znajdziesz to na początku każdego działu w module Teoria z przykładami.



Teoria z przykładami

Zbiory liczbowe

Zbiór liczb naturalnych nazywamy zbiór liczb $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ i oznaczamy go zbiór przez $\mathbb{N}$.

Zbiór liczb pierwszych $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$ jest jednym z podzbiorów zbioru liczb naturalnych.

Liczba naturalna n różna od zera dzieli liczbę naturalną m, jeśli istnieje liczba naturalna k, dla której zachodzi równość $m = n \cdot k$.

Zapis $7 \mid 21$ oznacza, że liczba 7 dzieli liczbę 21, ponieważ $21 = 7 \cdot 3$.

Ponadto $8 \mid 16$ oraz $8 \mid 48$, zatem $8 \mid (16 + 48)$, ponieważ $16 + 48 = 64 = 8 \cdot 8$.

Przykłady ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład 0–2 pkt

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ liczba $3^{n+3} - 2^{n+3} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Rozwiązanie:

Liczbę $3^{n+3} - 2^{n+3} + 3^n - 2^n$ przekształcamy do postaci $10 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

$3^{n+3} - 2^{n+3} + 3^n - 2^n = 3^{n+3} + 3^n - 2^{n+3} - 2^n = 3^n(3^3 + 1) - 2^n(2^3 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 9 = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 10 =$

$= 10 \cdot (3^n - 2^n) = 10 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$

Liczba $3^{n+3} - 2^{n+3} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

2 pkt – poprawne zapisanie wyrażenia w postaci $10 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$

1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci $10 \cdot (3^n - 2^n)$

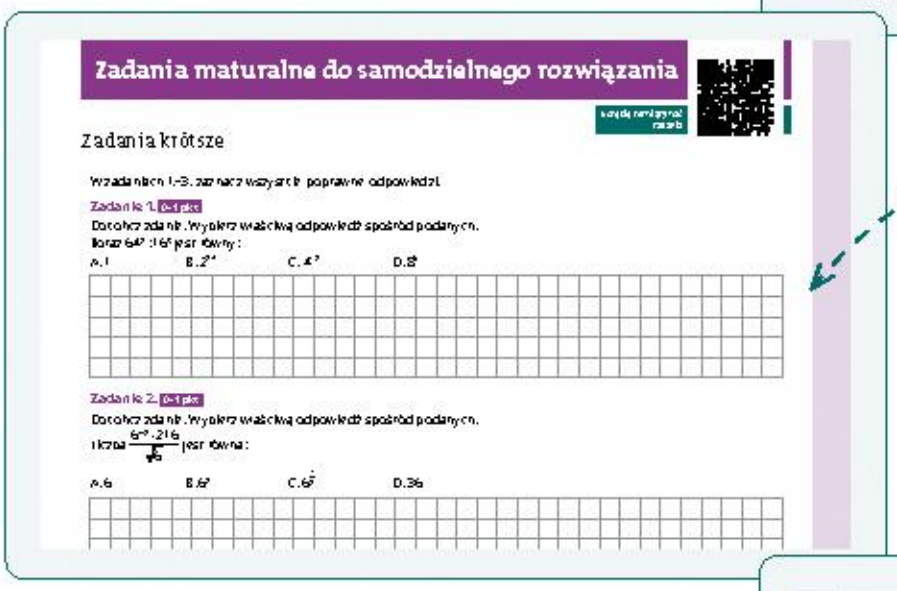
0 pkt – rozwiązanie, w którym niezastosowano ani poprawnej metody, albo brak rozwiązania

Przykład 0–2 pkt

Wykaż, że liczba $8^n - 3 \cdot 8^n - 7 \cdot 8^n$ jest podzielna przez 33.

Rozwiązanie:

Liczbę $8^n - 3 \cdot 8^n - 7 \cdot 8^n$ przekształcamy do postaci $33 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.



Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania

Zadania krótsze

Do zadań 1–3. zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Zadanie 1. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $64^2 : 16^2$ jest równa:

A. 1 B. 2^4 C. 4^2 D. 8^2

Zadanie 2. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{6^{10} \cdot 216}{\sqrt{6}}$ jest równa:

A. 6 B. 6^7 C. $6^{\frac{1}{2}}$ D. 36

Najważniejsze treści pamiętasz, a uczysz się przez rozwiązywanie zadań?

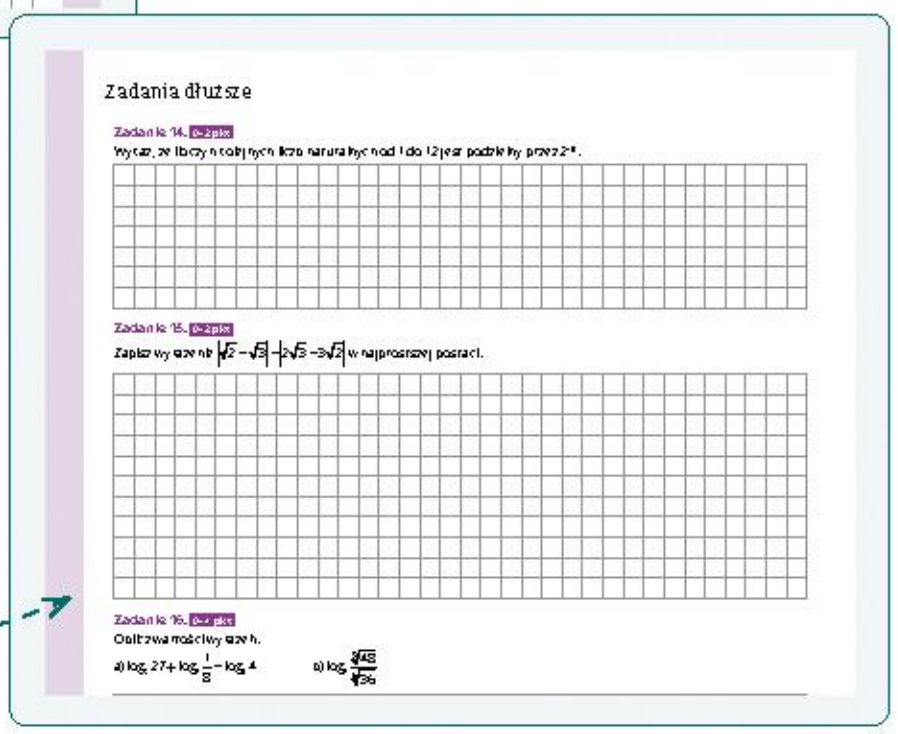
Wolisz zacząć od zrobienia zadań krótszych i prostszych?

Masz je wyróżnione w każdym dziale.

Czujesz się pewniej po rozwiązaniu zadań krótszych?

Zapewnij sobie dogodne warunki i przejdź do ostatniego etapu przygotowań do matury.

Zadnia dłuższe także są w każdym dziale.



Zadania dłuższe

Zadanie 14. 0–2 pkt

Wykaż, że liczb y naturalnych dodatnich mniejszych od 1 000 jest podzielnych przez 2^4.

Zadanie 15. 0–2 pkt

Zapisz wyrażenie $\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| + \left|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right|$ w najprostszej postaci.

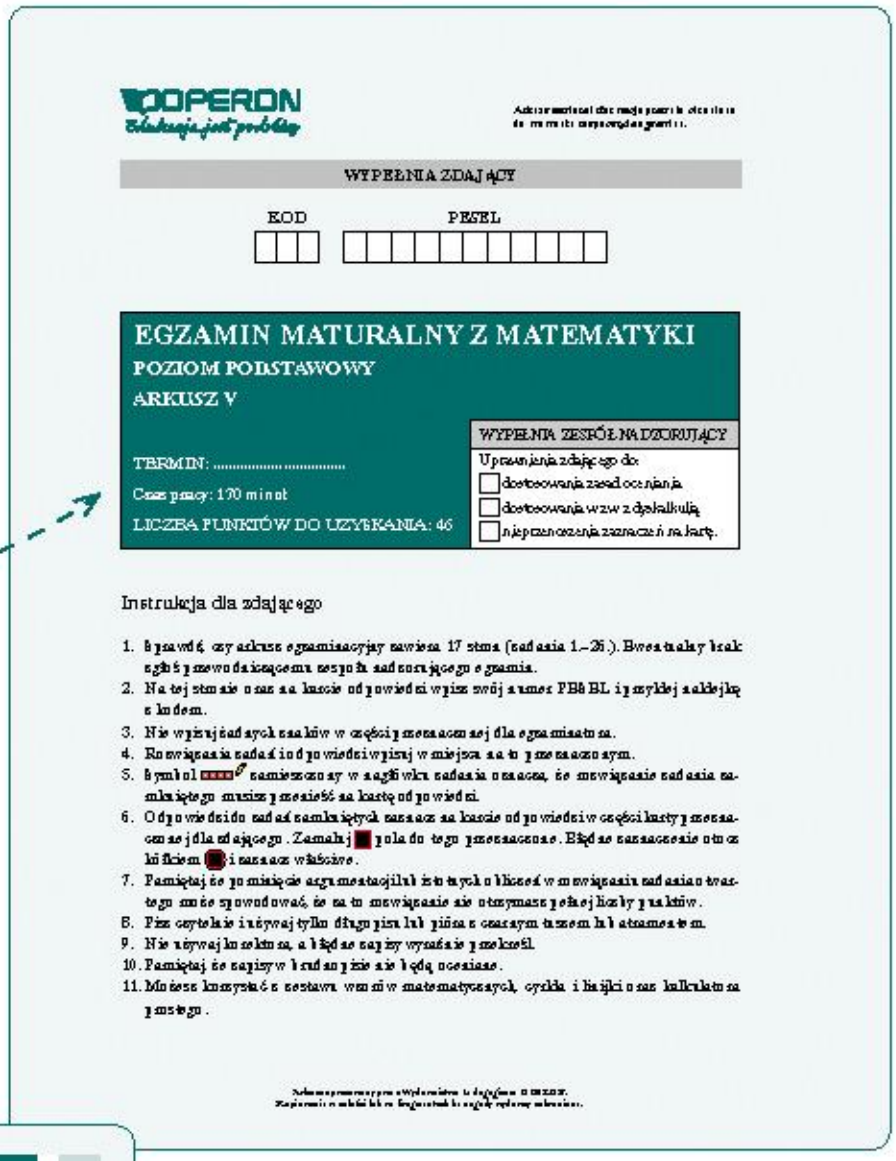
Zadanie 16. 0–4 pkt

Oblicz wartość wyrażenia.

a) $\log_3 27 + \log_{\frac{1}{9}} - \log_3 4$ b) $\log_{\sqrt{36}}$

Chcesz się przekonać, że arkusz da się rozwiązać?

Poznaj zasady i dobre praktyki. Rozwiązany arkusz znajdziesz na końcu publikacji.



OPERON

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD PESEL

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
POZIOM PODSTAWOWY
ARKUSZ V

TERMIN: .....
Czas pracy: 170 minut
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 46

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY
Uprawnienia zdającego do:
- dostosowania zasad oceniania
- dostosowania warunków i dodatkowych narzędzi
- nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 17 stron (zadania 1.–26.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzaminu.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wypełniaj żadnych zaznaczeń w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscach na to przeznaczonych.
5. Symbol ■■■■ zamieszczony w zagłówku zadania oznacza, że rozwiązanie zadania zamkniętego musisz przenieść na kartę odpowiedzi.
6. Odpowiedzi do zadań zamkniętych zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otoczonej kwadratem ■ i zaznacz właściwe.
7. Pamiętaj, że pomięcie argumentacji lub istotnych błędów w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
8. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
9. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Zadanie przygotowane przez Wydawnictwo Operon dla portalu CKE.2025.
Kopiowanie i udostępnianie w Internecie niniejszego arkusza zabronione.



Odpowiedzi do zadań

1. Liczby rzeczywiste

Zadania krótsze

Zadanie 1. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 2. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 3. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 4. 0–2 pkt
Odpowiedź: 1

Zadanie 5. 0–2 pkt

Zadanie 23. 0–2 pkt
Odpowiedź: $33\frac{1}{3}\%$

Zadanie 24. 0–2 pkt
Odpowiedź: 360000 zł

Zadanie 25. 0–2 pkt
Odpowiedź: 2

Zadanie 26. 0–2 pkt
Odpowiedź: $-1 \leq a$

Zadanie 27. 0–2 pkt
Odpowiedź: $2x - 8$

Zadanie 28. 0–1 pkt
Odpowiedź: 96%

Szybkie sprawdzenie wyniku – tu zweryfikujesz, czy udało Ci się dobrze rozwiązać zadanie. Zestawienie krótkich odpowiedzi jest na końcu książki. Wyróżniono je w każdym dziale.

Jeśli napotkasz trudność w rozwiązaniu zadania, a wynik się nie zgadza, możesz w serwisie skorzystać z **zasad oceniania do każdego zadania** oraz **odpowiedzi krok po kroku do każdego zadania**. Nadal masz trudność? Zamiast godzinami szukać rozwiązania w internecie, zobacz w kilka sekund, jak rozwiązać KAŻDE zadanie, które okaże się trudne – film lub opis, zależnie od tego, co skuteczniejsze.

Jak chcesz się uczyć?



z książki



z serwisu

Wolisz wersję drukowaną, z własnymi notatkami? – Masz ją przed sobą.
Preferujesz formę elektroniczną? – Ucz się z serwisu.
Wybierz tę formę nauki, która Ci odpowiada.

Kiedy i gdzie chcesz się uczyć?



na korytarzu szkolnym,
na przerwie, na okienku lekcyjnym



w autobusie lub pociągu,
w drodze do szkoły



w bibliotece



w swoim pokoju

Nie stresuj się w nieoczekiwanych sytuacjach – gdy zapomnisz książki, spóźni się autobus, wypadnie Ci okienko lub po prostu masz trudniejszy dzień. Telefon masz pod ręką.
Kontynuuj naukę zgodnie ze swoim rytmem. Ucz się tak, jak lubisz i możesz – nie tracąc czasu i dopasowując to do okoliczności.

1

Liczby rzeczywiste

Teoria z przykładami

przypominam najważniejsze treści

Zbiory liczbowe

Zbiorem liczb naturalnych nazywamy zbiór liczb $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ i oznaczamy ten zbiór przez $\mathbb{N}$.

Zbiór liczb pierwszych $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...\}$ jest jednym z podzbiorów zbioru liczb naturalnych.

Liczba naturalna n różna od zera **dzieli liczbę naturalną** m, jeśli istnieje liczba naturalna k, dla której zachodzi równość $m = n \cdot k$.
Zapis $7|21$ oznacza, że liczba 7 dzieli liczbę 21, ponieważ $21 = 7 \cdot 3$.
Jeżeli $8|16$ oraz $8|48$, to $8|(16 + 48)$, ponieważ $16 + 48 = 64 = 8 \cdot 8$.

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład **0–2 pkt**

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Rozwiązanie:

Liczbę $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ przekształcamy do postaci $10 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^{n+2} + 3^n - 2^{n+2} - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 =$

$= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) = 10 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$

Liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

2 pkt – poprawne zapisanie wyrażenia w postaci: $10 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$
1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci: $10 \cdot (3^n \quad 2^{n-1})$
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykład **0–2 pkt**

Wykaż, że liczba $8^{99} - 3 \cdot 8^{98} - 7 \cdot 8^{97}$ jest podzielna przez 33.

Rozwiązanie:

Liczbę $8^{99} - 3 \cdot 8^{98} - 7 \cdot 8^{97}$ przekształcamy do postaci $33 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

$8^{99} - 3 \cdot 8^{98} - 7 \cdot 8^{97} = 8^{97} \cdot (8^2 - 3 \cdot 8 - 7 \cdot 1) = 8^{97} \cdot (64 - 24 - 7) = 33 \cdot 8^{97} = 33 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$

Liczba $8^{99} - 3 \cdot 8^{98} - 7 \cdot 8^{97}$ jest podzielna przez 33.

2 pkt – poprawne zapisanie wyrażenia w postaci: $33 \cdot k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$
1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci: $33 \cdot 8^{97}$
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Dla dowolnej liczby naturalnej a i dowolnej liczby naturalnej b istnieje tylko jedna para liczb naturalnych k i r taka, że $a = k \cdot b + r$, gdzie $0 \le r < b$.
Reszta z dzielenia liczby a przez 5 wynosi 4, a reszta z dzielenia liczby b przez 5 wynosi 2, zatem reszta z dzielenia liczby $a + b$ przez 5 wynosi 1. Zapisujemy:
$a = 5n + 4$ i $b = 5m + 2$, więc $a + b = 5n + 4 + 5m + 2 = 5n + 5m + 5 + 1 = 5(n + m + 1) + 1 = 5k + 1$, $m, n, k \in \mathbb{N}$

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład **0–2 pkt**

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $20n^2 + 30n + 7$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

Rozwiązanie:

Liczbę $20n^2 + 30n + 7$ przekształcimy do postaci $5 \cdot k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$20n^2 + 30n + 7 = 5 \cdot 4n^2 + 5 \cdot 6n + 5 + 2 = 5(4n^2 + 6n + 1) + 2$

Wykażemy, że $4n^2 + 6n + 1$ jest liczbą całkowitą.

Ponieważ $n \in \mathbb{N}$, to $4n^2 \in \mathbb{Z}$ oraz $6n \in \mathbb{Z}$ i $1 \in \mathbb{Z}$, więc suma $4n^2 + 6n + 1 = k \in \mathbb{Z}$, zatem liczba $20n^2 + 30n + 7$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

2 pkt – poprawne zapisanie wyrażenia w postaci: $5 \cdot k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci: $5(4n^2 + 6n + 1) + 2$
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Zbiorem liczb całkowitych nazywamy zbiór liczb $\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ i oznaczamy go jako $\mathbb{Z}$.

Zbiór liczb wymiernych możemy zapisać w postaci $\mathbb{Q}=\left\{x: x=\frac{m}{n}, n, m \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$.

Przykłady obliczeń na liczbach wymiernych:

$-125+43\cdot(-2)+199=199-211=-12$

$7\frac{11}{12}+3\frac{5}{24}=7\frac{22}{24}+3\frac{5}{24}=11\frac{3}{24}=11\frac{1}{8}$

$\left(-2\frac{4}{9}\right):3\frac{1}{18}=\left(-\frac{22}{9}\right):\frac{55}{18}=\left(-\frac{22^{2}}{9_{1}}\right)\cdot\frac{18^{2}}{55_{5}}=-\frac{4}{5}$

Rozwinięciem dziesiętnym nazywamy zapis ułamka zwykłego w postaci dziesiętnej.

Zamień ułamek zwykły na ułamek dziesiętny:

$\frac{5}{8}=\frac{625}{1000}=0{,}625$ – rozwinięcie dziesiętne skończone

$5\frac{3}{7}=5,(428571)$ – rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe o okresie sześciocyfrowym

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład **0–2 pkt**

Leon zainwestował 40 000 zł w akcje firm X i Y. Po roku wartość akcji firmy X spadła o 10%, a wartość akcji firmy Y wzrosła o 15%. Inwestycja Leona po tych zmianach była warta 44 000 zł. Ile pieniędzy ulokował Leon w akcjach firmy Y?

Rozwiązanie:

Kwotę ulokowaną w akcjach firmy Y oznaczamy jako y.

Zatem kwota ulokowana w firmie X wyniesie $40\,000-y$.

Wyznaczamy wartość akcji firmy X po roku: $0{,}9(40\,000-y)\ (100\%-10\%=90\%)$

Wyznaczamy wartość akcji firmy Y po roku: $1{,}15y\ (100\%+15\%=115\%)$

Wykonujemy obliczenia:

$0{,}9(40\,000-y)+1{,}15y=44\,000$

$36\,000-0{,}9y+1{,}15y=44\,000$

$0{,}25y=8000$, stąd $y=32\,000$ (zł)

Odpowiedź: Leon w akcjach firmy Y ulokował 32 000 zł.

2 pkt – poprawna metoda i poprawne obliczenie wartości ulokowanych pieniędzy: 32000 zł

1 pkt – poprawne wyznaczenie wyrażenia: $0{,}9(40\,000-y)+1{,}15y=44\,000$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Liczbami niewymiernymi nazywamy liczby mające rozwinięcie dziesiętne nieskończone nieokresowe i oznaczamy przez $\mathbb{IQ}$. Liczbami niewymiernymi są np. $\sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt[3]{35}, \pi$.

Zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiór wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych oraz oznaczamy literą $\mathbb{R}$.

Potęgi

Potęga liczby a o wykładniku naturalnym $n \geq 2$ jest iloczynem n czynników, z których każdy równy jest liczbie a.

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{n \text{ czynników}}=a^{n}, \text{ dla } n \geq 2$$

$$a^{0}=1, \text{ dla } a \neq 0$$

$$a^{1}=a$$

Liczbę a nazywamy **podstawą potęgi**, a liczbę b – **wykładnikiem potęgi**.

Przykłady

Oblicz.

$\left(3\frac{2}{3}\right)^{2}=3\frac{2}{3}\cdot 3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}=\frac{121}{9}=13\frac{4}{9}$

$\left(-1\frac{3}{7}\right)^{3}=\left(-\frac{10}{7}\right)\cdot\left(-\frac{10}{7}\right)\cdot\left(-\frac{10}{7}\right)=-\frac{1000}{343}=-2\frac{314}{343}$

Prawa działań na potęgach

Dla m, n całkowitych i $a, b \neq 0$ mamy:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad a^n : a^m = a^{n-m}$ $\quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ $\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Przykłady

Oblicz.

$5^3 \cdot 5^4 = 5^7$ $\quad 7^6 : 7^4 = 7^{6-4} = 7^2$ $\quad \left(3^3\right)^{-2} = 3^{3(-2)} = 3^{-6}$ $\quad 2^{-6} \cdot 7^{-6} = (2 \cdot 7)^{-6} = 14^{-6}$

$\frac{45^3}{9^3} = \left(\frac{45}{9}\right)^3 = 5^3$ $\quad 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ $\quad 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$ $\quad 9^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{9^5}$

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Połową liczby 2^{2022} jest liczba:

A. 2^{1011} B. 1^{2022} C. 2^{2021} D. 1^{2021}

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość wyrażenia $2^{2022} : 2 = 2^{2022-1} = 2^{2021}$

Odpowiedź: C

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi

Przykład 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba $(0{,}001)^{-2} : 1000^2$ jest równa:

A. 1 B. 1000 C. 0,001 D. -1

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość wyrażenia $(0{,}001)^{-2} : 1000^2 = \left(\frac{1}{1000}\right)^{-2} : 1000^2 = 1000^2 : 1000^2 = 1$

Odpowiedź: A

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi

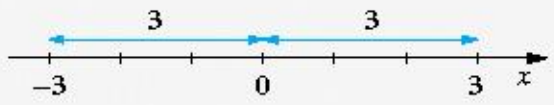
Wartość bezwzględna liczby

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej a definiujemy wzorem:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ gdy } a \geq 0 \\ -a, \text{ gdy } a < 0 \end{cases}$$

Liczba $|a|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu a od punktu 0.

Na przykład:



$|3| = 3, |-3| = 3, |0| = 0$

Dla dowolnej liczby a mamy:

$|a| \geq 0 \quad |-a| = |a| \quad |a| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $b \geq 0$ mamy:

$|x - a| \leq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - b \leq x \leq a + b$

$|x - a| \geq b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq a - b$ lub $x \geq a + b$

Przykłady

Rozwiąż nierówności.

$|x-4| \leq 10$, zatem $4-10 \leq x \leq 4+10$, czyli $-6 \leq x \leq 14$, stąd $x \in \langle -6,14 \rangle$

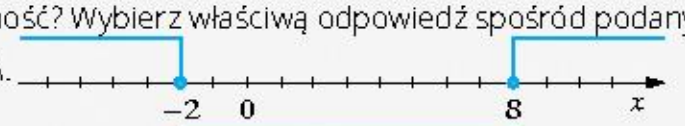
$|x-5| \geq 9$, zatem $x \leq 5-9$ lub $x \geq 9+5$, czyli $x \leq -4$ lub $x \geq 14$, stąd $x \in (-\infty,-4\rangle \cup \langle 14,\infty)$

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład 0–1 pkt

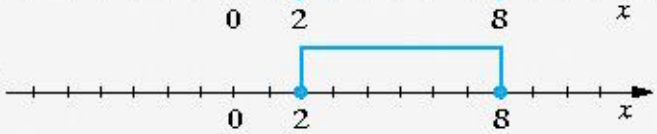
Dana jest nierówność $|x-3| \geq 5$.

Na którym rysunku prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających powyższą nierówność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A.


B.


C.


D.


Rozwiązanie:

Rozwiązujemy nierówność.

$|x-3| \geq 5$

$x \leq 3-5$ lub $x \geq 3+5$, czyli $x \leq -2$ lub $x \geq 8$

Zatem: $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 8,\infty)$

Odpowiedź: A

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi

Logarytmy

Logarytmem liczby dodatniej *b* przy podstawie *a*, dodatniej i różnej od jedności, nazywamy liczbę x, do której należy podnieść podstawę a, aby otrzymać liczbę b.

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Przykłady

Oblicz.

$\log_2 16 = 4$ $\quad \log_5 \sqrt{125} = \frac{3}{2}$ $\quad \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

Dla dowolnej liczby dodatniej a różnej od 1 $\log_a 1 = 0$ oraz $\log_a a = 1$.

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych b i c oraz p prawdziwe są równości:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^p = p \cdot \log_a b$$

Przykłady

Oblicz.

$\log_2 (16 \cdot 256) = \log_2 16 + \log_2 256 = 4 + 8 = 12$

$\log_4 \frac{64}{0{,}5} = \log_4 64 - \log_4 0{,}5 = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = 3{,}5$

$\log_5 \left(\sqrt[3]{25}\right)^5 = 5 \log_5 \sqrt[3]{25} = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład **0–2 pkt**

Uzasadnij równość $\log_3 18-\log_3 2=3\log_3\sqrt[3]{2}+\log_3 4{,}5$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę równości, następnie wykonujemy obliczenia:

$$\log_3 18-\log_3 2=\log_3\frac{18}{2}=\log_3 9=2$$

Przekształcamy prawą stronę równości, następnie wykonujemy obliczenia:

$$3\log_3\sqrt[3]{2}+\log_3 4{,}5=\log_3\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+\log_3 4{,}5=\log_3\left(2\cdot 4{,}5\right)=\log_3 9=2$$

Odpowiedź: Z uzasadnienia wynika, że równość $\log_3 18-\log_3 2=3\log_3\sqrt[3]{2}+\log_3 4{,}5$ jest prawdziwa.

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu z uzasadnieniem, że równość jest prawdziwa

1 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci: $\log_3\frac{18}{2}=\log_3\left(2\cdot 4{,}5\right)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykład **0–2 pkt**

Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $|x+3|-|x-5|$ dla $x\in(3,5)$.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że:

$|x+3|=x+3$ dla $x\in(3,5)$

$|x-5|=-(x-5)$ dla $x\in(3,5)$

Wykonujemy obliczenia:

$$|x+3|-|x-5|=x+3-\left[-(x-5)\right]=x+3+x-5=2x-2$$

Odpowiedź: $|x+3|-|x-5|=2x-2$ dla $x\in(3,5)$.

2 pkt – poprawne doprowadzenie wyrażenia do najprostszej postaci: $2x-2$

1 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci: $x+3-\left[-(x-5)\right]$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania

uczę się rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

W zadaniach 1.–3. zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

Zadanie 1. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Iloraz $64^2 : 16^3$ jest równy:

A. 1 B. 2^{24} C. 4^{12} D. 8^6

Zadanie 2. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba $\frac{6^{-2} \cdot 216}{\sqrt{6}}$ jest równa:

A. 6 B. 6^2 C. $6^{\frac{1}{2}}$ D. 36

Zadanie 3. 0–1 pkt

Cenę towaru obniżono o 20%, a po miesiącu nową cenę obniżono o dalsze 25%.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
W wyniku obu obniżek cena towaru zmniejszyła się w stosunku do pierwotnej o:

A. 40% B. 45% C. 50% D. 60%

Zadanie 4. 0–2 pkt

Niech $x = -3$ oraz $y = 3$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x^7 - y^7}{x^5 - y^5}$.

Zadanie 5. 0–2 pkt

Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 252 zł. Oblicz cenę spodni przed obniżką.

Zadanie 6. 0–2 pkt

Poparcie dla partii X w kwietniu było równe 15%, a w maju wzrosło o 3 punkty procentowe.
Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

6.1. Poparcie dla partii X w maju wynosiło:

A. 15% B. 20% C. 18% D. 12%

6.2. Poparcie dla partii X w maju wzrosło:

E. o 18% F. o 30% G. o 12% H. o 20%

Zadanie 7. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczbę $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}$ możemy zapisać jako:

A. 2 B. 2^8 C. $2^{\frac{1}{24}}$ D. $2^{\frac{1}{8}}$

Zadanie 8. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Jeżeli liczba $\log_2 3 = m$, to liczba $\log_2 81$ jest równa:

A. $m+4$ B. $m+6$ C. $2m$ D. $4m$

Zadanie 9. 0–1 pkt

Dane są liczby $x = 9{,}8 \cdot 10^{-7}$ oraz $y = 1{,}4 \cdot 10^{-2}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy:

A. $7 \cdot 10^{-9}$ B. $7 \cdot 10^{9}$ C. $7 \cdot 10^{5}$ D. $7 \cdot 10^{-5}$

Zadanie 10. 0–2 pkt

Wykaż, że liczba $7^{31} + 7^{30} - 7^{29}$ jest podzielna przez 11.

Zadanie 11. 0–2 pkt

Pierwsza rata, która stanowi 12% ceny roweru, jest równa 282 zł. Oblicz cenę roweru.

Zadanie 12. 0–2 pkt

Niech $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$. Wykaż, że $\log_5 108 = 2a + 3b$.

Zadanie 13. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczbę $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{4\sqrt{8}}}$ możemy zapisać jako:

A. 2 B. 2^6 C. $2^{\frac{1}{6}}$ D. $2^{\frac{13}{24}}$

Zadania dłuższe

Zadanie 14. 0–2 pkt

Wykaż, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do 12 jest podzielny przez 2^{10}.

Zadanie 15. 0–2 pkt

Zapisz wyrażenie $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|-\left|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right|$ w najprostszej postaci.

Zadanie 16. 0–4 pkt

Oblicz wartości wyrażeń.

a) $\log_3 27+\log_2 \frac{1}{8}-\log_8 4$ b) $\log_2 \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[6]{36}}$

Zadanie 17. 0–1 pkt

Wskaż liczbę, która spełnia równanie $\left|12-3x\right|=x$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $x=-4$ B. $x=4$ C. $x=6$ D. $x=-6$

Zadanie 18. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Jeżeli $x^{1,315} = 5$, to liczbę $x^{3,945}$ możemy zapisać jako:

A. 1 B. 5^2 C. $5^{\frac{1}{2}}$ D. 5^3

Zadanie 19. 0–2 pkt

Dane są dwie liczby, z których pierwsza przy dzieleniu przez 7 daje resztę 5, a druga przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3. Wyznacz resztę z dzielenia przez 6 sumy tych dwóch liczb.

Zadanie 20. 0–2 pkt

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3^{-3} \cdot 27^2 \cdot \frac{1}{9}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}$. Wynik zapisz za pomocą pierwiastka.

Zadanie 21. 0–2 pkt

Zapisz sumę $25^{49} + 25^{49} + 25^{49} + 25^{49} + 25^{49}$ w postaci potęgi.

Zadanie 22. 0–3 pkt

40% liczby x jest równe tyle samo, co 5% wartości wyrażenia $\dfrac{3\frac{3}{4}:2{,}5-6\frac{2}{3}:\left(-1\frac{1}{3}\right)}{4\frac{2}{3}\cdot\frac{3^2}{8}+3{,}75\cdot 3^{-1}}$. Oblicz wartość liczby x.

Zadanie 23. 0–2 pkt

Liczba dodatnia b jest większa od liczby a o 50%. O ile procent liczba a jest mniejsza od liczby b? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 24. 0–3 pkt

Cenę samochodu podniesiono o 35%, a po pewnym czasie cenę ponownie podwyższono o 25%. Obecna cena wynosi 607 500 zł. Wyznacz cenę tego samochodu po pierwszej podwyżce.

Zadanie 25. 0–2 pkt

Oblicz wartość wyrażenia $\left(\log_2 1{,}5+\log_2 24\right)-\left(\log_2 2+\log_2 4{,}5\right)$.

Zadanie 26. 0–2 pkt

Uzasadnij, że liczba $\log_8\left(\log_{16} 4\right)+\log_8\left(\log_{16} 2\right)$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 27. 0–2 pkt

Zapisz wyrażenie $|4-x|+|x-2|-2|x-5|$ w najprostszej postaci, wiedząc, że $x \in (2,4)$.

Zadanie 28. 0–4 pkt

Dany jest prostokąt o bokach a i b oraz prostokąt o bokach c i d. Długość boku c to 80% długości boku a. Długość boku d to 120% długości boku b. Oblicz, ile procent pola prostokąta o bokach a i b stanowi pole prostokąta o bokach c i d.

Zadanie 29. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{11^{-3}\cdot\frac{1}{81}\cdot 2^{-2}}{66^{-4}}$ jest równa:

A. 66 B. 44 C. 22 D. 11

Zadanie 30. 0–1 pkt

Liczba dziewcząt stanowi 20% liczby uczniów całej klasy.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Dziewczęta stanowią 25% liczby chłopców.	P	F
2.	Chłopcy stanowią 40% liczby dziewcząt.	P	F

Zadanie 31. 0–1 pkt

Dane są liczby: $a=\log_4 64$, $b=\log_4 4$, $c=\log_4 \frac{1}{16}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczby te spełniają warunek:

A. $a<b<c$ B. $c<b<a$ C. $b<a<c$ D. $a<c<b$

Zadanie 32. 0–2 pkt

Wykaż, że liczba $13^{1315} - 13^{1314} - 13^{1313}$ jest podzielna przez 31.

Zadanie 33. 0–3 pkt

Jaką resztę z dzielenia przez 5 daje kwadrat liczby niepodzielnej przez 5?

Zadanie 34. 0–2 pkt

Wyznacz iloczyn liczb a, b, c, wiedząc że $\log_5 a = -1$, $\log_{\sqrt{3}} b = 4$, $\log_{0,1} c = -2$.

Zadanie 35. 0–2 pkt

Uzasadnij, że liczba $2\left|3-2\sqrt{3}\right|-4\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 36. 0–4 pkt

Pan Jan wpłacił na swoje konto w banku 12 000 zł. Oprocentowanie w stosunku rocznym wynosiło 3,5%. Oblicz:

a) Jaką kwotę będzie miał pan Jan na swoim koncie po roku?

b) Jaki będzie stan konta pana Jan po dwóch latach, jeżeli w drugim roku oprocentowanie oszczędności zmalało o 0,5 punkta procentowego?

2

Wielomiany

Teoria z przykładami

przypominam najważniejsze treści

Wzory skróconego mnożenia

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Sześcian sumy dwóch wyrażeń: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Sześcian różnicy dwóch wyrażeń: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Różnica sześcianów dwóch wyrażeń: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Różnica n-tych potęg dwóch wyrażeń: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

Przykłady

Przekształć wyrażenia, stosując odpowiednie wzory.

a) $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

b) $x^2 - 9y^2 = (x-3y)(x+3y)$

c) $(x-3y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 3y + 3 \cdot x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$

d) $8x^3 - y^3 = (2x)^3 - y^3 = (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

e) $a^4 - 16 = (a^2 - 4)(a^2 + 4) = (a-2)(a+2)(a^2+4)$

Jednomiany

Jednomianem stopnia n nazywamy funkcję $y = ax^n$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od zera oraz n jest naturalną liczbą dodatnią.

Przykłady

$y = -2x$, $y = 0{,}3x^3$, $y = 5$, $y = \sqrt{3}x^5$

Wielomiany

Wielomianem stopnia n zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję postaci:

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, n jest naturalną liczbą dodatnią oraz a_n jest różne od zera.

Wyrazami nazywamy jednomiany występujące w wielomianie.

Współczynnikami wielomianu nazywamy liczby: a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0.

Wyrazem wolnym nazywamy współczynnik a_0.

Wielomianem zerowym nazywamy jednomian o wartości równiej 0.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład 0–1 pkt

Wypisz współczynniki wielomianu $w(x) = 2x^2 - x^3 + 3x^5 - 1$.

Porządkujemy wielomian w: $w(x) = 3x^5 - x^3 + 2x^2 - 1$

Wypisujemy współczynniki: $a_5 = 3$, $a_4 = a_1 = 0$, $a_3 = -1$, $a_2 = 2$, $a_0 = -1$

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich współczynników
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi

Dwa wielomiany zmiennej x są równe wtedy i tylko wtedy, gdy oba są zerowe lub gdy oba mają ten sam stopień i takie same współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x.

Działania na wielomianach

Przykłady

Dodawanie: $(2x^4-5x^3+x^2-3)+(-x^4+7x^3-2x+4)=x^4+2x^3+x^2-2x+1$

Odejmowanie: $(-3x^3+2x^2-x)-(-x^3-x^2+4x+2)=-2x^3+3x^2-5x-2$

Mnożenie: $(x-2)(x^2+1)=x^3-2x^2+x-2$

Dzielenie: $(2x^2+x-3):(x-1)=2x+3$

Rozkładem wielomianu na czynniki nazywamy przedstawienie go w postaci iloczynu wielomianów niższych stopni.

Przykłady

$w(x)=-4x^2+2x=-2x(2x-1)$

$w(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$

$w(x)=x^3+x^2-6x=x(x^2+x-6)=x(x-2)(x+3)$

$w(x)=x^3-2x^2+3x-6=x^2(x-2)+3(x-2)=(x-2)(x^2+3)$

Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Przy dodawaniu i odejmowaniu wyrażeń wymiernych sprowadzamy je do wspólnego mianownika, pamiętając o określeniu dziedziny wszystkich wyrażeń biorących udział w działaniach.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład 0–1 pkt

Uprość wyrażenie $\frac{2}{x+5}+\frac{3}{x-5}$.

$\frac{2}{x+5}+\frac{3}{x-5}=\frac{2(x-5)+3(x+5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{2x-10+3x+15}{x^2-25}=\frac{5x+5}{x^2-25}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$

1 pkt – poprawne wyznaczenie najprostszej postaci danego wyrażenia: $\frac{5x+5}{x^2-25}$, i podanie założenia: $D=\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykład 0–1 pkt

Uprość wyrażenie: $\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}-\frac{3x}{x^2-1}$.

$\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}-\frac{3x}{x^2-1}=\frac{x(x+1)-2x(x-1)-3x}{x^2-1}=\frac{x^2+x-2x^2+2x-3x}{x^2-1}=\frac{-x^2}{x^2-1}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

1 pkt – poprawne wyznaczenie najprostszej postaci danego wyrażenia: $\frac{-x^2}{x^2-1}$, podanie założenia: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Aby pomnożyć dwa wyrażenia wymierne, mnożymy licznik przez licznik, a mianownik przez mianownik.

Wyrażenia wymierne możemy skracać, dzieląc licznik i mianownik przez to samo wyrażenie różne od zera.

Pamiętajmy o określeniu dziedziny każdego z wyrażeń.

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład 0–1 pkt

Uprość wyrażenie $\frac{x^2-4}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{x-2}$.

$\frac{x^2-4}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}^{1}(x+2)}{(x-3)\cancel{(x+3)}_{1}}\cdot\frac{\cancel{x+3}^{1}}{\cancel{x-2}_{1}}=\frac{x+2}{x-3}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-3,2,3\}$

1 pkt – poprawne wyznaczenie najprostszej postaci danego wyrażenia: $\frac{x+2}{x-3}$, i podanie założenia: $D=\mathbb{R}\setminus\{-3,2,3\}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykład **0–1 pkt**

Uprość wyrażenie $\frac{16-x^2}{x^2+4x+4}:\frac{4-x}{x+2}$.

$$\frac{16-x^2}{x^2+4x+4}:\frac{4-x}{x+2}=\frac{(4-x)^{1}(4+x)}{(x+2)(x+2)_{1}}\cdot\frac{x+2^{1}}{4-x_{1}}=\frac{x+4}{x+2},\ D=\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$$

1 pkt – poprawne wyznaczenie najprostszej postaci danego wyrażenia: $\frac{x+4}{x+2}$, i podanie założenia: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,4\}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania

uczęs lę rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 37. 0–1 pkt

Wielomian w jest różnicą wielomianów $g(x)=x^4+3x^3-4x-1$ i $h(x)=x^4+2x^3+x^2-4$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wielomian w jest wielomianem stopnia trzeciego.	P	F
2.	Suma wszystkich współczynników wielomianu w wynosi 0.	P	F

Zadanie 38. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wielomianu $w(x)=-2x^5-3x^4+x+2$ dla $x=-2$ jest równa:

A. -16 B. -2 C. 16 D. 36

Zadanie 39. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po przekształceniu wyrażenia $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ otrzymamy:

A. $x^2-2x+\frac{1}{4}$ B. $x^2-x+\frac{1}{4}$ C. $x^2-x-\frac{1}{4}$ D. $x^2-2x-\frac{1}{4}$

Zadanie 40. 0–1 pkt

Dane są wyrażenia wymierne $\frac{x-3}{x+3}$ i $\frac{x+3}{x-3}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Suma tych wyrażeń jest równa $\frac{x^2+9}{x^2-9}$.	P	F
2.	Różnica tych wyrażeń jest równa $\frac{12x}{9-x^2}$.	P	F

Zadanie 41. 0–1 pkt

Który z wielomianów należy dodać do wielomianu $g(x)=-2x^3+3x^2-4$, aby otrzymać wielomian $h(x)=2x^4+5x^3-x+1$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $2x^4+7x^3-x+5$ B. $2x^4+7x^3-3x^2-x+5$ C. $2x^4-3x^2-x+5$ D. $2x^4+7x^3-3x^2+5$

Zadanie 42. 0–2 pkt

Oblicz wartość parametru m, dla której punkt $P(-1, 4)$ należy do wykresu wielomianu $w(x)=-3x^5+x^4+(1-2m)x^3-x^2+3$.

Zadanie 43. 0–1 pkt

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\frac{(\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}-5)}{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)}$ jest równa:

A. $2\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $5\frac{1}{2}$ D. $-5\frac{1}{2}$

Zadanie 44. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po przekształceniu wyrażenia $(a+b)^2-(a-b)^2$ otrzymamy:

A. a^2-b^2 B. a^2+b^2 C. $4ab$ D. a^2b^2

Zadanie 45. 0–2 pkt

Oblicz wartość wyrażenia $\left(3\sqrt{7}-7\sqrt{3}\right)^2+42\sqrt{21}$.

Zadanie 46. 0–2 pkt

Oblicz $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$.

Zadanie 47. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wielomian $w(x)=-x\left(x^3-2mx\right)+x^2\left(x^2+4\right)$ przyjmuje wartość stale równą 0 dla m równego:

A. 2 B. 0 C. –1 D. –2

Zadanie 48. 0–1 pkt

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Który z wielomianów należy dodać do wielomianu $u(x)=3x^5-2x^4+5x-1$, aby otrzymać wielomian $w(x)=x^4+2x^2-x$?

A. $-3x^5+3x^3+2x^2-6x+1$ B. $-3x^5+3x^4+2x^2-6x+1$
C. $-3x^4+3x^3+2x^2-6x+1$ D. $3x^5-3x^4-2x^2+6x-1$

Zadanie 49. 0–2 pkt

Oblicz $\left(3\sqrt{5}-7\right)^2\cdot\left(3\sqrt{5}+7\right)^2$.

Zadania dłuższe

Zadanie 50. 0–2 pkt

Wielomian q jest wynikiem dzielenia wielomianu $w(x)=x^3+2x^2-5x-6$ przez dwumian $x+1$. Wyznacz wielomian q.

Zadanie 51. 0–2 pkt

Od sześcianu dowolnej liczby nieparzystej odejmij sześcian poprzedniej liczby nieparzystej. Czy otrzymana liczba dzieli się przez 2?

Zadanie 52. 0–2 pkt

Dane są liczby $a=2+\sqrt{10}$ i $b=2-\sqrt{10}$.

Oblicz wartość wyrażenia $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2$ dla podanych a i b.

Zadanie 53. 0–2 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dokładnie trzy czynniki stopnia pierwszego występują w rozkładzie wielomianu:

A. $f(x)=x^3+x^2-6x$ B. $g(x)=x^4-1$ C. $h(x)=x^3-2x^2+2x-4$ D. $w(x)=x^3-2x^2+6x$

Zadanie 54. 0–2 pkt

Wielomiany $g(x)=ax^2(x+b)^2$ i $h(x)=x^4+6x^3+9x^2$ są równe. Wyznacz wartość a oraz b.

Zadanie 55. 0–2 pkt

Dany jest wielomian $w(x)=ax^3+x^2-bx-4$. Wartość wielomianu w dla $x=2$ wynosi 0, a dla $x=-3$ jest równa 2. Oblicz współczynniki a i b wielomianu w.

Zadanie 56. 0–2 pkt

Dla jakich wartości parametru m suma współczynników wielomianu $w(x)=4x^3+(x-2)^2+m$ jest liczbą dodatnią?

Zadanie 57. 0–2 pkt

Wielomian $w(x)=g(x)-2h(x)$, gdzie $g(x)=x^3-2x$ oraz $h(x)=x^2+2x-1$. Oblicz wartość wielomianu w dla $x=-\frac{1}{2}$.

Zadanie 58. 0–2 pkt

Dane są wielomiany $g(x)=-2x^3+x^2+3x-2$, $h(x)=ax+b$, $w(x)=-2x^3+x^2+x-3$. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu h, dla których wielomiany $g(x)+h(x)$ oraz $w(x)$ są równe.

Zadanie 59. 0–2 pkt

Wyznacz wielomian h, dla którego spełniona jest równość $h(x)\cdot(x+3)=x^3+5x^2+5x-3$.

Zadanie 60. 0–2 pkt

Udowodnij, że różnica czwartych potęg dwóch kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 16.

Zadanie 61. 0–2 pkt

Długość jednego z boków prostokąta jest równa $\frac{5}{x-3}$, gdzie $x>3$, a pole powierzchni wyraża się wzorem $P=\frac{10}{x^2-9}$. Wyznacz długość drugiego boku tego prostokąta.

Zadanie 62. 0–2 pkt

Zapisz w postaci iloczynu x^3-x.

Zadanie 63. 0–2 pkt

Zapisz w postaci iloczynu x^3+3.

Zadanie 64. 0–2 pkt

Uprość wyrażenie $a^3-(a-2)^3$.

Zadanie 65. 0–3 pkt

Dane są wielomiany $f(x)=x^3-2x^2-4x+8$ i $g(x)=x^3-2x^2+2x-4$.

a) Sprawdź, czy $f(2)=0$.

b) Wielomian w jest sumą wielomianów f i g. Rozłóż wielomian w na czynniki.

Zadanie 66. 0–3 pkt

Dane są wielomiany: $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2+ax+b$, $h(x)=3x^3+x^2+4x-4$. Wyznacz wartości parametrów a i b tak, by $f(x)\cdot g(x)=h(x)$.

Zadanie 67. 0–3 pkt

Po podzieleniu wielomianu $w(x)=3x^4-x^3+2x+2$ przez dwumian $q(x)=x+1$ otrzymano wielomian $p(x)$ i resztę 4. Wyznacz wielomian p.

Zadanie 68. 0–3 pkt

Wyznacz wyrażenie algebraiczne $w = 4h - 3u$. Oblicz wartość wyrażenia w dla $x = -1$, $y = -2$, $z = -1$, jeśli $h = 3x^2 - 2y^2 + z^2$ i $u = 2x^2 - y^2 + 2z^2$.

Zadanie 69. 0–3 pkt

Wyznacz wielomian zmiennej x w postaci ogólnej opisujący objętość prostopadłościanu o krawędziach $a = x - 3$, $b = 2x + 4$, $c = 10 - x$.

Zadanie 70. 0–4 pkt

Uzasadnij, że dla każdej liczby całkowitej n wartość wielomianu $w(n) = n^6 - n^2$ jest liczbą podzielną przez 6.

Zadanie 71. 0–6 pkt

Wyznacz wielomian zmiennej x opisujący pole:
a) kwadratu o boku $a = 3x - 1$,
b) trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $a = 8 - x$, $b = x - 6$,
c) trapezu o podstawach $a = x - 6$, $b = x + 2$ oraz wysokości $h = x - 2$.

3

Równania i nierówności

Teoria z przykładami

przypominam najważniejsze treści

Równania z jedną niewiadomą

Równaniem z jedną niewiadomą nazywamy równość dwóch wyrażeń algebraicznych, w których występuje dokładnie jedna niewiadoma.

Rozwiązaniem równania lub pierwiastkiem równania nazywamy liczbę spełniającą dane równanie, jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej i wykonaniu działań po obu stronach równania, otrzymamy prawdziwą równość arytmetyczną.

Dziedziną równania z jedną niewiadomą nazywamy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wyrażenia tworzące równanie mają sens liczbowy.

Przykład

Dziedziną równania $x-7=3x+5$ jest zbiór $\mathbb{R}$, dziedziną równania $\frac{2x}{x-7}=3$ jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\{7\}$.

Równania z tymi samymi niewiadomymi są **równoważne** wówczas, gdy mają taką samą dziedzinę i taki sam zbiór rozwiązań.

Przykład

Równanie $x^2=x(x+2)-4$ jest równoważne równaniu $2x-4=0$.

Rozwiązać równanie z jedną niewiadomą to znaczy znaleźć wszystkie liczby, które spełniają to równanie, lub wykazać, że równanie to nie ma rozwiązania.

Aby rozwiązać równanie, zapisujemy równania równoważnie danemu, pamiętając o tym, że:
- do obu stron równania możemy dodać lub od obu stron równania odjąć tę samą liczbę lub wyrażenie,
- obie strony równania możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą może:
- nie mieć rozwiązania,
- mieć dokładnie jedno rozwiązanie,
- mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

Równaniem sprzecznym nazywamy równanie, które nie ma rozwiązania.

Równaniem tożsamościowym nazywamy równanie, które jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą.

Nierówności liniowe

Nierównością liniową nazywamy nierówność, którą można zastąpić nierównością równoważną mającą postać: $ax+b<0$ albo $ax+b>0$, albo $ax+b\leq 0$, albo $ax+b\geq 0$, gdzie a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, a x jest niewiadomą.

Liczba spełnia daną nierówność z jedną niewiadomą, jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej i wykonaniu działań po obu stronach nierówności otrzymamy prawdziwą nierówność arytmetyczną.

Dziedziną nierówności z jedną niewiadomą nazywamy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wyrażenia tworzące nierówność mają sens liczbowy.

Przykład

Dziedziną nierówności $\frac{2}{3x-1}\leq 3$ jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Nierówności z tymi samymi niewiadomymi nazywamy **równoważnymi**, gdy mają tę samą dziedzinę i taki sam zbiór rozwiązań.

Rozwiązać nierówność z jedną niewiadomą to wyznaczyć zbiór wszystkich liczb, które spełniają tę nierówność, lub wykazać, że nie istnieją liczby spełniające tę nierówność.

Aby rozwiązać nierówność, zapisujemy nierówności równoważne danej, pamiętając o tym, że:
- do obu stron nierówności możemy dodać lub odjąć tę samą liczbę lub wyrażenie algebraiczne,
- obie strony nierówności możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę dodatnią, pozostawiając zwrot nierówności bez zmiany,
- obie strony nierówności możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając jednocześnie zwrot nierówności na przeciwny.

Nierównością tożsamościową nazywamy nierówność, która jest spełniona przez każdą liczbę należącą do dziedziny tej nierówności.

Nierównością sprzeczną nazywamy nierówność, której nie spełnia żadna liczba należącą do dziedziny tej nierówności.

Nierówność podwójna z jedną niewiadomą to nierówność, którą można zapisać za pomocą układu dwóch nierówności.

Przykłady

$-7 \le 3x+5 \le 2$, $\begin{cases} 2x-1>3 \\ 2x-1<4 \end{cases}$

Równanie kwadratowe

Równanie kwadratowe z niewiadomą x jest to równanie postaci $ax^2+bx+c=0$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$. Postać $ax^2+bx+c=0$, gdy $a \neq 0$ nazywamy postacią ogólną równania kwadratowego.

Twierdzenie o liczbie pierwiastków równania kwadratowego.

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a \neq 0$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek nazywany podwójnym: $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

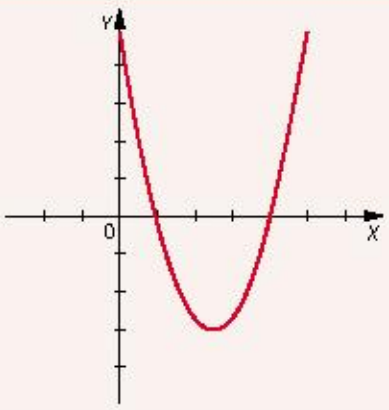
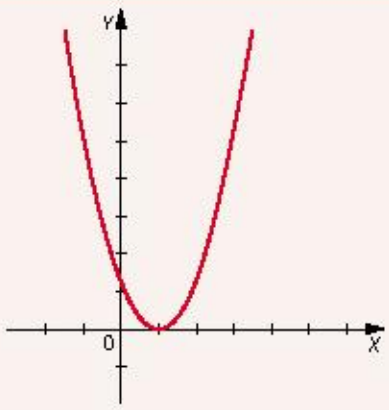
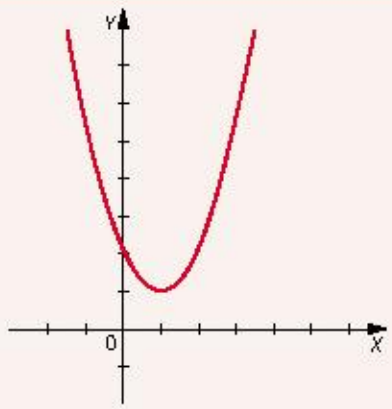
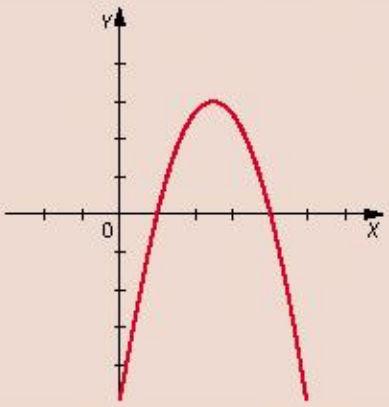
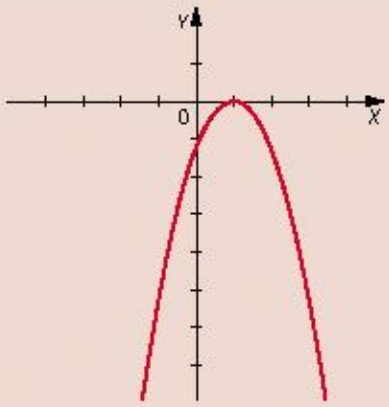
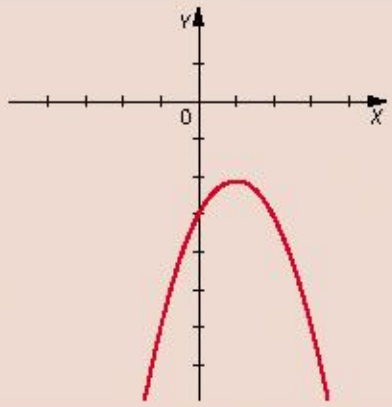
Pamiętaj, że Δ to wyróżnik trójmianu kwadratowego określony wzorem $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nierówności kwadratowe

Nierównością kwadratową z niewiadomą x nazywamy każdą nierówność postaci $ax^2+bx+c>0$ lub $ax^2+bx+c \ge 0$, lub $ax^2+bx+c<0$, lub $ax^2+bx+c \le 0$, gdzie a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.

W rozwiązywaniu nierówności kwadratowych wykorzystujemy umiejętność rozwiązywania równań kwadratowych, umiejętność rysowania wykresu funkcji kwadratowej i odczytywania własności tej funkcji z wykresu.

Położenie paraboli względem osi X, w zależności od współczynnika a i Δ

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Równanie wielomianowe

Metoda rozwiązywania bardziej skomplikowanych **równań wielomianowych** (stopnia trzeciego i wyższych) jest następująca:

a) przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę równania, tak aby po prawej stronie zostało zero,

b) rozkładamy lewą stronę na iloczyn czynników,

c) przyrównujemy każdy nawias do zera,

d) rozwiązujemy kilka prostych równań, a w rezultacie otrzymujemy rozwiązania początkowego równania wielomianowego.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Rozwiąż równanie $x^3-5x^2=7x-35$.

Rozwiązanie:

Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę równania:

$x^3-5x^2-7x+35=0$

Rozkładamy lewą stronę na iloczyn czynników (np. metodą grupowania wyrazów):

$x^2(x-5)-7(x-5)=0$

$(x-5)(x^2-7)=0$

$(x-5)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=0$

Przyrównujemy każdy nawias do zera:

$x-5=0$ lub $x-\sqrt{7}=0$, lub $x+\sqrt{7}=0$

$x_1=5$ lub $x_2=\sqrt{7}$, lub $x_3=-\sqrt{7}$

2 pkt – poprawne obliczenie wartości pierwiastków wielomianu
1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci: $(x-5)(x^2-7)=0$
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Równania dwukwadratowe rozwiązujemy, podstawiając w miejsce zmiennej w kwadracie inną zmienną i rozwiązując równanie kwadratowe.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–3 pkt**

Rozwiąż równanie dwukwadratowe $x^4-x^2-30=0$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $x^2=t$, $t>0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe $t^2-t-30=0$:

$\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-30)=1+120=121$

Ponieważ $\Delta>0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$t_1=\frac{-(-1)-11}{2\cdot1}=-5$

$t_2=\frac{-(-1)+11}{2\cdot1}=6$

Wracamy do podstawienia i otrzymujemy dwa równania kwadratowe:

$x^2=-5$ – równanie sprzeczne

oraz $x^2=6$, które rozwiązujemy, stosując wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$x^2-6=0$

$(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})=0$

$x=\sqrt{6}$ lub $x=-\sqrt{6}$

3 pkt – poprawne rozwiązanie równania $t^2-t-30=0$ i podanie rozwiązań
2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $t^2-t-30=0$
1 pkt – poprawne wykonanie podstawienia i określenie dziedziny
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

uczęsię rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 72. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Równaniem sprzecznym jest równanie:

A. $x\sqrt{7}-7=\sqrt{7}\left(x-\sqrt{7}\right)$ B. $2x-\frac{5-2x}{2}=3x-5$ C. $(x-5)(x+7)=x^2-35$ D. $\frac{4x+1}{3}=\frac{x-2}{2}$

Zadanie 73. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Nierównością, której rozwiązaniem jest każda liczba rzeczywista, jest nierówność:

A. $x^2+2x<x(x+2)$ B. $x^2+25<(x-5)^2$ C. $x\leq 2x^2$ D. $\pi x^2+3>\pi\left(x^2-1\right)$

Zadanie 74. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Rozwiązaniem równania $x\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)\left(x^2+4\right)=0$ nie jest:

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 0 D. $\sqrt{4}$

Zadanie 75. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Rozwiązaniem równania $x\left(x^2+2\right)\left(x^2+3\right)\left(x^2+4\right)=0$ jest:

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 0 D. $\sqrt{4}$

Zadanie 76. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedziną równania $\frac{4}{3-x}=\frac{3}{x}$ jest zbiór:

A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ C. $\mathbb{R}\setminus\{0,\ 3\}$ D. $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Zadanie 77. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Rozwiązaniem równania $x(x-2)(x-3)(x+4)=0$ nie jest:

A. 2 B. 3 C. 1 D. -4

Zadanie 78. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Rozwiązaniem równania $x\left(x-2\right)\left(x^2+3\right)\left(x^3+4\right)=0$ jest:

A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. $\sqrt[3]{4}$

Zadanie 79. 0–1 pkt

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-3)(2-x) \geq 0$ należą dwie liczby pierwsze.	P	F
2.	Zbiór rozwiązań nierówności $-x^2+2\sqrt{11}x-11<0$ jest zbiorem pustym.	P	F

Zadanie 80. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $x^2+16=(x-4)^2+8x$:

A. nie ma rozwiązań
B. ma dokładnie dwa rozwiązania
C. ma dokładnie jedno rozwiązanie
D. spełnia każda liczba rzeczywista

Zadanie 81.

Dane są nierówności $\frac{x-1}{4}-\frac{x-3}{2} \leq \frac{1}{8}$ oraz $x\left(1+\sqrt{3}\right)<x\sqrt{3}+4\sqrt{2}$.

Zadanie 81.1. 0–1 pkt

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Rozwiązaniem nierówności $\frac{x-1}{4}-\frac{x-3}{2} \leq \frac{1}{8}$ jest zbiór $\langle 4{,}5, \infty)$.	P	F
2.	Rozwiązaniem nierówności $x\left(1+\sqrt{3}\right)<x\sqrt{3}+4\sqrt{2}$ jest zbiór $\left(4\sqrt{2}, \infty\right)$.	P	F

Zadanie 81.2. 0–1 pkt

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej w postaci przedziału liczbowego zbiór wszystkich liczb spełniających jednocześnie obie nierówności.

.....

Zadanie 82. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rozwiązaniem równania $\frac{x^2-1}{x-1}=0$ jest:

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

Zadanie 83. 0–2 pkt

Rozwiąż równanie $2x^3-x^2-\frac{8}{9}x+\frac{4}{9}=0$.

Zadanie 84. 0–2 pkt

Rozwiąż równanie $4x^4-4x^2+1=0$.

Zadanie 85. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2, albo 3.

O równaniach $2\left(x-\frac{1}{2}\right)(3x+5)=0$ oraz $\frac{2x-1}{3x+5}=0$ powiemy, że:

A.	nie mają wspólnych pierwiastków,	ponieważ	1.	liczba $\frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem tylko jednego równania.
B.	mają jeden wspólny pierwiastek,		2.	liczby $\frac{1}{2}$ i $-\frac{5}{3}$ są rozwiązaniem obu równań.
C.	mają dwa wspólne pierwiastki		3.	liczba $\frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem obu równań.

Zadanie 86. 0–2 pkt

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\sqrt{-x^2+3x+4}$.

Zadanie 87. 0–2 pkt

Dane są funkcje liniowe f i g określone wzorami $f(x)=2x+3$ i $g(x)=-\frac{1}{2}x-2$. Znajdź wszystkie liczby naturalne należące do zbioru rozwiązań nierówności $-3<f(x)+g(x)<3$.

Zadanie 88. 0–2 pkt

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x)=-(x-1)^2+4$. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości co najmniej równe 1.

Zadanie 89. 0–2 pkt

Rozwiąż równanie $6x^3-19x^2+19x-6=0$.

Zadanie 90. 0–2 pkt

Rozwiąż równanie $\frac{6x^2+11x-10}{6x^2+19x+10}=0$.

Zadanie 91. 0–2 pkt

Rozwiąż równanie $2x^4-7x^2+5=0$.

Zadanie 92. 0–2 pkt

Wyznacz wartość a, dla której rozwiązaniem równania $a(2x+1)-2a=3+2(ax-1)$ jest liczba -3.

Zadania dłuższe

Zadanie 93. 0–2 pkt

Rozwiąż równanie $3x^3-\frac{1}{3}x^2-1\frac{1}{3}x+\frac{4}{27}=0$.

Zadanie 94. 0–2 pkt

Rozwiąż równanie $x^4-2x^2-3=0$.

Zadanie 95. 0–2 pkt

Rozwiąż równanie $\frac{2x^2+x-21}{3x^2-4x-15}=0$.

Zadanie 96. 0–2 pkt

Dana jest nierówność $\frac{1}{6}+\frac{x}{4}<\frac{x}{3}$.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi tak, aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.
Liczba 3 jest:
A. najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań danej nierówności.
B. największą liczbą całkowitą, która nie spełnia danej nierówności.
C. najmniejszą liczbą całkowitą, która nie spełnia danej nierówności.
D. największą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań danej nierówności.
E. liczebnością zbioru tych liczb naturalnych, które spełniają daną nierówność.
F. liczebnością zbioru tych liczb naturalnych, które nie spełniają danej nierówności.

Zadanie 97. 0–2 pkt

Rozwiąż równanie $(2x-1)(7-x)=(x+1)(4x-3)$.

Zadanie 98.

Niech A będzie zbiorem rozwiązań nierówności $(x-2)(x-1)>20$, a B zbiorem rozwiązań nierówności $(x-7)^2\leq 25$.

Zadanie 98.1. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Zbiorem A jest zbiór:
A. $\langle 1, 2\rangle$ B. $(-\infty, -3)\cup(6, \infty)$ C. $(-3, 6)$ D. $(-\infty, 1)\cup(2, \infty)$

Zadanie 98.2. 0–1 pkt

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór B w postaci przedziału liczbowego.

.....

Zadanie 98.3. 0–2 pkt

Narysuj na jednej osi zbiory A i B, a następnie zapisz w postaci przedziałów liczbowych zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.

Zadanie 99. 0–3 pkt

Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 9. Ponadto ta liczba ma taką własność, że liczba dwucyfrowa powstała po przestawieniu jej cyfr jest mniejsza od połowy liczby początkowej. Ile jest takich liczb?

Zadanie 100. 0–2 pkt

Rozwiąż równanie $\frac{3x^2+3x-6}{x^2-1}=0$.

Zadanie 101. 0–2 pkt

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

101.1. Nierówność kwadratowa, której zbiorem rozwiązań jest zbiór $\left\langle -\sqrt{5},\ \sqrt{5}\right\rangle$, to:

A. $x^2+5\geq 0$ B. $x^2-\sqrt{5}x\leq 0$ C. $x^2-2\sqrt{5}x+5<0$ D. $5-x^2\geq 0$

101.2. Wśród nierówności wymienionych w podpunktach A–D:

E. nie ma nierówności sprzecznej

F. jest jedna nierówność sprzeczna i jedna nierówność tożsamościowa

G. nie ma nierówności tożsamościowej

H. jest nierówność tożsamościowa, ale nie ma nierówności sprzecznej

Zadanie 102.

Dane są liczby $a=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot 4^3}{\left(2^5\right)^2}$ i $b=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$.

Zadanie 102.1. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

O liczbach a i b powiemy, że:

A. $a=b$ B. $a+b=0$ C. $a<b$ D. $a>b$

Zadanie 102.2. 0–2 pkt

Sprawdź, która z liczb – a czy b – należy do zbioru rozwiązań nierówności $x^2-x\sqrt{3}\geq 0$.

Zadanie 103. 0–3 pkt

Rozwiąż równanie $x^4-4x^2-45=0$.

Zadanie 104. 0–3 pkt

Suma dwóch liczb wynosi 34, a ich iloczyn to 273. Wyznacz te liczby.

Zadanie 105. 0–3 pkt

Suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych jest równa 149. Wyznacz te liczby.

Zadanie 106. 0–3 pkt

Dane są dwa wielomiany $W(x)=x^3-2x^2-4x+8$ oraz $U(x)=x^3-2x^2+2x-4$. Dla jakich x iloraz $\frac{W(x)}{U(x)}=0$?

Zadanie 107. 0–4 pkt

Rozwiąż równanie $x^8-15x^4-16=0$.

Zadanie 108.

Dana jest nierówność $-5 \leq 7 - 3x < 13$.

Zadanie 108.1. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest zbiór:

A. $\langle -2, 4 \rangle$ B. $(-2, 4)$ C. $\langle -2, 4 \rangle$ D. $(-2, 4)$

Zadanie 108.2. 0–1 pkt

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej wszystkie liczby całkowite spełniające tę nierówność.

.....

Zadanie 109. 0–4 pkt

Jeden z boków prostokąta jest o 4 dłuższy od drugiego boku, a pole tego prostokąta jest większe od 4 i jednocześnie co najwyżej równe 12. Wyznacz przedział liczbowy, w jakim znajdują się możliwe długości krótszego boku tego prostokąta.

4

Układy równań

Teoria z przykładami

przypominam najważniejsze treści

Pojęcie układu równań

Układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi to dwa równania z dwiema niewiadomymi, dla których poszukujemy wspólnych rozwiązań. Rozwiązaniem takiego układu równań nazywamy parę liczb, która spełnia obydwa równania.

Metody rozwiązywania układów równań

Metoda podstawiania polega na wyznaczeniu z któregoś równania jednej niewiadomej i podstawieniu jej do drugiego równania.

Metoda przeciwnych współczynników polega na dodawaniu równań stronami, w sytuacji gdy przy tej samej niewiadomej w dwóch równaniach mamy przeciwne współczynniki.

Metoda graficzna polega na narysowaniu prostych w układzie współrzędnych i odczytaniu współrzędnych punktu przecięcia prostych, które są rozwiązaniem układu równań.

Liczba rozwiązań układów równań

Proste na płaszczyźnie mogą się przecinać w jednym punkcie, mogą być równoległe niemające punktów wspólnych i mogą się pokrywać, mając nieskończenie wiele punktów wspólnych.

Zatem układ równań liniowych może mieć:
- jedno rozwiązanie (para liczb) – **układ oznaczony,**
- nieskończenie wiele rozwiązań – **układ nieoznaczony,**
- żadnego rozwiązania – **układ sprzeczny.**

Przykłady

Rozwiążemy układy równań różnymi metodami i przedstawimy interpretacje geometryczne poszczególnych układów.

a) metoda podstawiania

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy niewiadomą x, drugie przepisujemy bez zmian:

$$\begin{cases} x=8-2y \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

Do drugiego równania podstawiamy za x wyrażenie z pierwszego równania i wyliczamy y:

$$\begin{cases} x=8-2y \\ 2(8-2y)-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=8-2y \\ 16-4y-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=8-2y \\ -5y=-15 \ \big| :(-5) \end{cases}$$

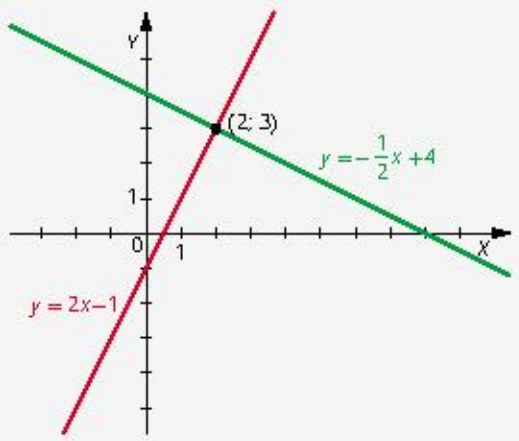
$$\begin{cases} x=8-2y \\ y=3 \end{cases}$$

Obliczoną wartość y podstawiamy do pierwszego równania i wyliczamy x:

$$\begin{cases} x=8-2\cdot 3 \\ y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$ – układ oznaczony

Interpretacja geometryczna (na rysunku obok):



b) metoda przeciwnych współczynników

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 6x+4y=14 \end{cases}$$

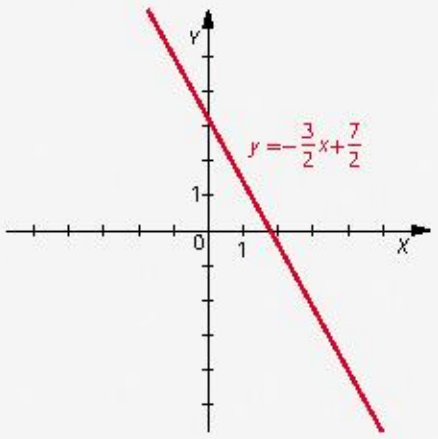
Aby uzyskać przeciwne współczynniki, mnożymy obie strony pierwszego równania przez -2 i dodajemy stronami:

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \ \big| \cdot(-2) \\ 6x+4y=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x-4y=-14 \\ 6x+4y=14 \end{cases}$$ – układ nieoznaczony

$0=0$

Interpretacja geometryczna (na rysunku obok):



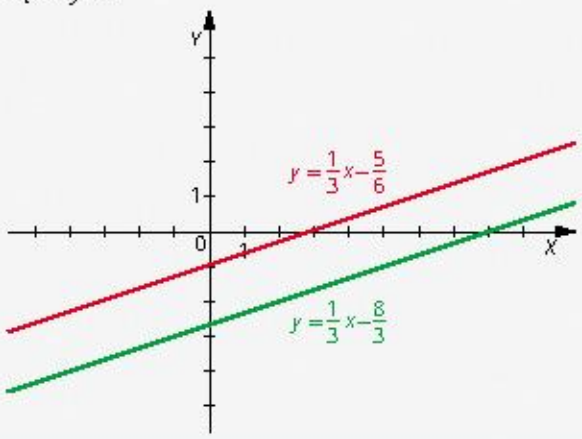
c) metoda graficzna

$$\begin{cases} x-3y=8 \\ 2x-6y=5 \end{cases}$$

Wyznaczamy z obu równań y, aby doprowadzić do równania prostej w postaci kierunkowej:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x-2\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{6} \end{cases}$$

Rysujemy te proste w układzie współrzędnych:



Układ sprzeczny

Zadania tekstowe z wykorzystaniem układów równań będziemy rozwiązywać w następujących etapach:
- analiza zadania,
- zapisanie układu równań i jego rozwiązanie,
- sprawdzenie rozwiązania układu równań z warunkami zadania,
- zapisanie odpowiedzi.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Antykwariusz kupił dwa przedmioty za łączną kwotę 2000 zł, a następnie odsprzedał je z 24% zyskiem. Oblicz, za jaką kwotę kupił antykwariusz każdy z tych przedmiotów, jeśli wiadomo, że pierwszy przyniósł mu 36% zysku, a drugi – stratę wynoszącą 14%.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy niewiadome:

x – cena kupna pierwszego przedmiotu w złotych

y – cena kupna drugiego przedmiotu w złotych

Zapisujemy układ równań i wyznaczamy niewiadome.

$$\begin{cases} x+y=2000 \\ 0,36x-0,14y=0,24\cdot 2000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,14x+0,14y=280 \\ 0,36x-0,14y=480 \end{cases}$$

$\begin{cases} x+y=2000 \\ 0{,}5x=760 \end{cases}$

Stąd: $\begin{cases} x=1520 \\ y=480 \end{cases}$

Sprawdzenie: $1520+480=2000$, $0{,}36\cdot 1520-0{,}14\cdot 480=480$

Odpowiedź: Pierwszy przedmiot antykwariusz kupił za 1520 zł, a drugi – za 480 zł.

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań
1 pkt – poprawne obliczenie jednej niewiadomej x lub y
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego, nazywamy układem drugiego stopnia. W szczególności układem równań drugiego stopnia jest układ składający się z równania liniowego oraz kwadratowego.

Na przykład: $\begin{cases} 4x+y+2=0 \\ y=x^2 \end{cases}$, $\begin{cases} 4x^2+x+y^2-y+2=0 \\ -2x+y-5=0 \end{cases}$

Takie układy będziemy rozwiązywali metodą podstawiania.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x^2-2x+3y+1=0 \end{cases}$.

Wyznaczamy y z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego. Otrzymujemy:

$\begin{cases} y=-2x+5 \\ x^2-2x+3(-2x+5)+1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=-2x+5 \\ x^2-8x+16=0 \end{cases}$

Drugie równanie jest równaniem kwadratowym z niewiadomą x. Rozwiązujemy je:

$x^2-8x+16=0$, stąd $(x-4)^2=0$, czyli $x=4$

Zapisujemy: $\begin{cases} y=-2\cdot 4+5 \\ x=4 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} y=-3 \\ x=4 \end{cases}$

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań
1 pkt – poprawne obliczenie jednej niewiadomej x lub y
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

uczęsię rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 110. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Punkt $A=(-2;3)$ jest rozwiązaniem układu równań:

A. $\begin{cases}2x+3y=5\\3x-2y=12\end{cases}$ B. $\begin{cases}2x+3y=6\\3x-2y=-12\end{cases}$ C. $\begin{cases}2x+3y=5\\3x-2y=-12\end{cases}$ D. $\begin{cases}2x+3y=-6\\3x-2y=12\end{cases}$

Zadanie 111. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Układ równań $\begin{cases}2(x+y)-3(x-y)=5\\3(x+y)-2(x-y)=5\end{cases}$ jest:

A. oznaczony B. nieoznaczony C. sprzeczny D. tożsamościowy

Zadanie 112. 0–1 pkt

Na obozie harcerskim było x dziewcząt i y chłopców, razem 176 osób. Stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy 4:7.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układem równań pozwalającym wyznaczyć liczbę dziewcząt i liczbę chłopców jest:

A. $\begin{cases} x-y=176 \\ \frac{x}{y}=\frac{4}{7} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y=176 \\ \frac{x}{y}=\frac{7}{4} \end{cases}$ C. $\begin{cases} x+y=176 \\ 7x=4y \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+y=176 \\ 4x=7y \end{cases}$

Zadanie 113. 0–1 pkt

Dany jest układ równań $\begin{cases} 3x^2-y+1=0 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układem równoważnym danemu jest:

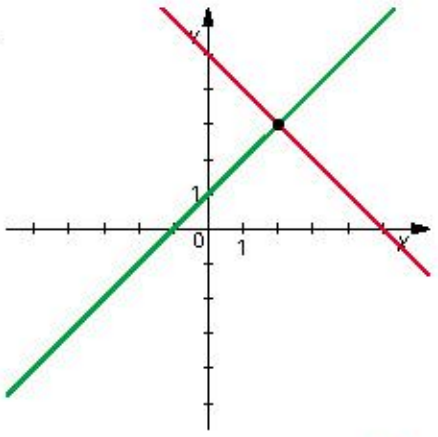
A. $\begin{cases} y=3x^2+1 \\ 2x+3x^2+1=5 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y=3x^2+1 \\ 2x+3\left(x^2+1\right)=5 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y=3x^2+1 \\ 2x+9x^2+3=5 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y=3x^2+1 \\ 2x+9x^2+1=5 \end{cases}$

Zadanie 114. 0–1 pkt

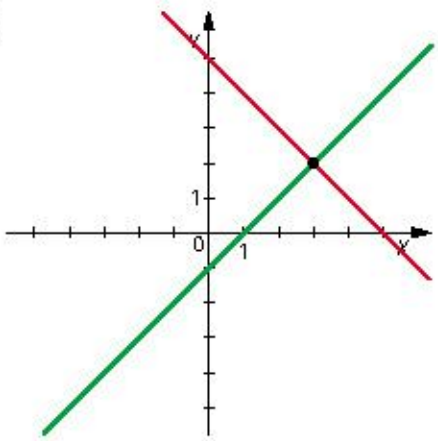
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Interpretacją geometryczną układu równań $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ jest:

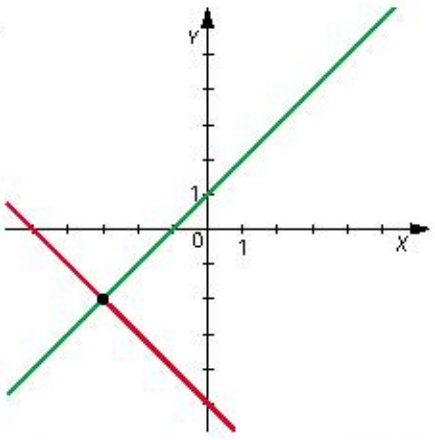
A.



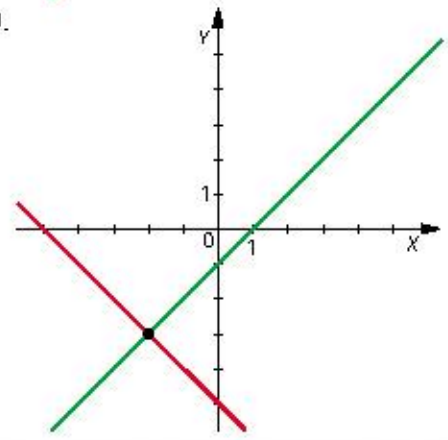
B.



C.



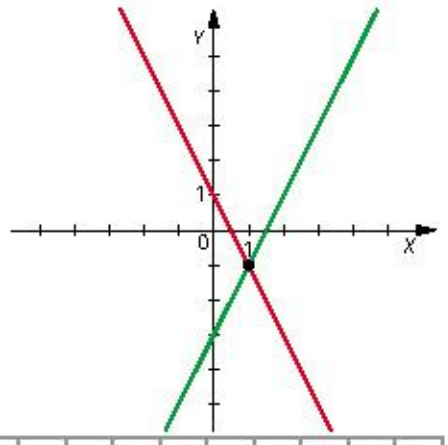
D.



Zadanie 115. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną układu równań:



A. $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$

Zadanie 116. 0–1 pkt

Dany jest układ równań $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ -2x+5y=3 \end{cases}$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Układem równań równoważnym do danego jest układ:

A. $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 3x+6y=18 \\ 6x-3y=6 \end{cases}$ C. $\begin{cases} \frac{x+2}{3}+\frac{y+3}{2}=4 \\ \frac{x-2}{2}-\frac{y-1}{3}=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} (x+2)^2-(y-3)^2=5-(y^2-x^2) \\ (x-3)^2+(y+2)^2=11+(x^2+y^2) \end{cases}$

Zadanie 117. 0–1 pkt

Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 12. Jeśli od tej liczby odejmiemy liczbę otrzymaną przez przestawienie cyfr danej liczby dwucyfrowej, to otrzymamy liczbę 36.
Aby rozwiązać to zadanie, przyjęto oznaczenia: x – cyfra dziesiątek, y – cyfra jedności.
Odpowiedz na pytanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Które równanie należy dopisać do równania $x+y=12$, aby układ równań opisywał sytuację przedstawioną w zadaniu?

A. $xy=36$ B. $10x+y=36$ C. $10x+y-10y+x=36$ D. $x-y=4$

Zadanie 118. 0–1 pkt

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x^2-5x+y+3=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$ jest:

A. para liczb dodatnich
B. para liczb ujemnych
C. para liczb przeciwnych
D. para liczb odwrotnych

Zadanie 119. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układ równań $\begin{cases} 3{,}5x-7{,}5y=5 \\ -14x+30y=21 \end{cases}$ jest:

A. oznaczony B. nieoznaczony C. sprzeczny D. tożsamościowy

Zadanie 120. 0–1 pkt

Dany jest układ równań $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2-(x^2+y^2)=-5 \\ \frac{x+1}{2}+\frac{y+2}{4}=2 \end{cases}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układem równań równoważnym do danego jest układ:

A. $\begin{cases} 3x+5y=13 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} -3x+5y=7 \\ 5x+3y=10 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -3x-5y=-12 \\ -5x+3y=1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} -3x-5y=-11 \\ -5x-3y=3 \end{cases}$

Zadanie 121. 0–1 pkt

Kawałek stopu miedzi z cyną waży x kg i zawiera 30% cyny. Ten kawałek stopiono z czystą cyną o wadze y kg i otrzymano stop o wadze 21 kg i 60% zawartości cyny.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Sytuację przedstawioną w zadaniu mozna opisać ukadem równań $\begin{cases} x+y=21 \\ 0{,}3x+y=12{,}6 \end{cases}$	P	F
2.	Dodany kawałek czystej cyny waży 12 kg.	P	F

Zadanie 122. 0–1 pkt

Dany jest układ $\begin{cases} x-y-2=0 \\ y=x^2-2x+3 \end{cases}$

Odpowiedz na pytanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Ile rozwiązań ma ten układ równań?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Zadanie 123. 0–2 pkt

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} 4x+3y=3 \\ 5x-y=\frac{7}{12} \end{cases}$$

Zadanie 124. 0–2 pkt

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x+2y=2 \end{cases}$$

Zadania dłuższe

Zadanie 125. 0–3 pkt

Rozwiąż układ równań dowolną metodą i przedstaw jego ilustrację geometryczną.

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - y = 3 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases}$$

Zadanie 126. 0–1 pkt

Odległość między przystaniami A i B jest równa 36 km. Kurs statku z A do B odbywa się pod prąd rzeki i trwa 3 godz., a kurs z B do A trwa 2 godz. Niech x oznacza prędkość statku, a y – prędkość prądu rzeki.
Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Prędkość statku i prędkość rzeki są odpowiednio równe:

A.	$\begin{cases} x = 15\frac{\text{km}}{\text{h}} \\ y = 3\frac{\text{km}}{\text{h}} \end{cases}$,	ponieważ zadanie jest opisane układem równań	1.	$\begin{cases} 3(x-y) = 36 \\ 2(x+y) = 36 \end{cases}$.
B.	$\begin{cases} x = 3\frac{\text{km}}{\text{h}} \\ y = 15\frac{\text{km}}{\text{h}} \end{cases}$,		2.	$\begin{cases} x+y = 12 \\ x-y = 18 \end{cases}$.
C.	$\begin{cases} x = 10\frac{\text{km}}{\text{h}} \\ y = 8\frac{\text{km}}{\text{h}} \end{cases}$,		3.	$\begin{cases} 2(x+y) = 36 \\ x-y = 18 \end{cases}$.

Zadanie 127. 0–2 pkt

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} \frac{7}{8}x+\frac{8}{9}y=6\frac{1}{6} \\ x-\frac{2}{3}y=2 \end{cases}$$

Zadanie 128. 0–2 pkt

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5 \\ \sqrt{3}x-\sqrt{2}y=0 \end{cases}$$

Zadanie 129. 0–2 pkt

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} 2(x+y)+20=3(x-y) \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{6}y=2 \end{cases}$$

Zadanie 130. 0–2 pkt

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 12x-7y=8 \\ -6x+3{,}5y=-4 \end{cases}$$

Zadanie 131. 0–1 pkt

Właściciele schroniska wysokogórskiego mają zapas prowiantu dla x turystów na y dni. Jeśli w schronisku byłoby o 6 turystów więcej, to ten zapas prowiantu skończyłby się 2 dni wcześniej. Jeśli natomiast w schronisku byłoby o 4 turystów mniej, to ten zapas prowiantu wystarczyłby na 2 dni dłużej.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Układem równań opisującym sytuację jest $\begin{cases}(x+6)(y-2)=xy\\(x-4)(y+2)=xy\end{cases}$.	P	F
2.	Zapas prowiantu w tym schronisku wystarczy dla 24 turystów na 10 dni.	P	F

Zadanie 132. 0–2 pkt

Rozwiąż układ równań $\begin{cases}x^2+x+y+1=0\\x-y=0\end{cases}$.

Zadanie 133. 0–2 pkt

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.
$\begin{cases}11x-9y=7\\9x+y=-11\end{cases}$

Zadanie 134. 0–2 pkt

Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} 5x-4y=21{,}6 \\ 4x+3y=-0{,}7 \end{cases}$$

Zadanie 135. 0–3 pkt

Suma dwóch liczb naturalnych różnych od zera wynosi 355. Jeśli większą liczbę podzielimy przez mniejszą, to otrzymamy wynik 7 i resztę 11. Wyznacz te liczby.

$$\begin{cases} 312+43=355 \\ 312=7\cdot 43+11 \end{cases}$$

Zadanie 136. 0–3 pkt

Rozwiąż układ równań dowolną metodą i oblicz liczbę będącą sumą jego rozwiązań.

$$\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 3x+2y=2\frac{1}{6} \end{cases}$$

Zadanie 137. 0–3 pkt

Rozwiąż układ równań dowolną metodą i oblicz wartość wyrażenia $\frac{x}{y}+1$.

$$\begin{cases} 6x-7y=-8 \\ 9x+35y=14 \end{cases}$$

Zadanie 138. 0–3 pkt

Przed 10 laty matka była 11 razy starsza od syna. Oblicz, ile lat ma obecnie matka, a ile ma syn, jeśli za 10 lat matka i syn będą mieli w razem 64 lata.

Zadanie 139. 0–3 pkt

Ile kilogramów soli należy dosypać do x kilogramów roztworu soli kuchennej o stężeniu 25%, aby otrzymać 2,5 kg roztworu o stężeniu 40%?

Zadanie 140. 0–3 pkt

Uzasadnij, że parabola opisana równaniem $y = 3x^2 + 3x - 6$ oraz prosta o równaniu $y = 3x - 9$ nie mają punktów wspólnych.

Zadanie 141. 0–3 pkt

Znajdź długości przekątnych rombu, wiedząc, że jedna z nich jest o 8 dłuższa od drugiej, a bok rombu ma długość 20.

Zadanie 142. 0–3 pkt

Rozwiąż układ równań dowolną metodą i przedstaw jego ilustrację geometryczną.

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 6x + 2y = -4 \end{cases}$$

Zadanie 143. 0–3 pkt

Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 8. Jeśli między cyfry tej liczby wpiszemy cyfrę 7, to otrzymamy liczbę o 340 większą od początkowej. Wyznacz tę liczbę dwucyfrową.

Zadanie 144. 0–3 pkt

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} y=(x+4)^2-8 \\ x-y=4 \end{cases}$.

Zadanie 145. 0–3 pkt

Hania brała udział w konkursie językowym, w którym każdy z uczestników odpowiadał na 40 pytań. Za poprawną odpowiedź uczestnik otrzymywał 10 punktów, a za błędną odpowiedź tracił 5 punktów. Hania odpowiedziała na wszystkie pytania i uzyskała 310 punktów. Na ile pytań Hania odpowiedziała poprawnie?

Zadanie 146. 0–4 pkt

Różnica dwóch liczb jest równa 30, a suma kwadratów tych liczb wynosi 500. Znajdź te liczby.

Zadanie 147. 0–4 pkt

Obwód prostokąta o bokach x i y jest równy 20 cm. Pole tego prostokąta jest takie samo jak pole prostokąta, którego jeden bok jest o 2 cm dłuższy od boku x, a drugi – o 4 cm krótszy od boku y. Wyznacz długości boków x i y.

Zadanie 148. 0–4 pkt

Karol na treningu przebiegł 78 m. Gdyby biegł z prędkością o $2\frac{m}{s}$ większą przez 2 s dłużej, to przebiegłby 120 m. Oblicz prędkość, z jaką poruszał się Karol $\left(w\ \frac{m}{s}\right)$, oraz czas pokonania trasy treningu (w sekundach). W obliczeniach uwzględnij, że maksymalna chwilowa prędkość, z jaką poruszał się Usain Bolt podczas swojego rekordowego biegu na 100 m, wynosiła $44,2\frac{km}{h}$.

Zadanie 149. 0–4 pkt

Harcerze podczas rajdu przeszli 90 km, przy czym każdego dnia pokonywali taką samą liczbę kilometrów. Gdyby codziennie pokonywali o 5 km mniej, wówczas byliby w drodze o 3 dni dłużej. Ile kilometrów dziennie pokonywali harcerze i jak długo trwał rajd?

Zadanie 150. 0–3 pkt

Rozwiąż układ równań dowolną metodą i przedstaw jego ilustrację geometryczną.

$$\begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=-5 \\ 2(x+y)+3(x-y)=1 \end{cases}$$



Funkcje

Teoria z przykładami

przypominam najważniejsze treści

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y.

Zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji**, a każdy element x zbioru X nazywamy **argumentem funkcji.** Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**. Każdy element y zbioru Y, który został przyporządkowany określonemu argumentowi x, nazywamy **wartością funkcji** f dla argumentu x i zapisujemy $y = f(x)$. Zbiór ZW tych elementów y nazywamy **zbiorem wartości funkcji.**

Funkcje określamy za pomocą opisu słownego, tabelki, grafu, a także wzoru lub wykresu.

Wykres funkcji $f: X \to Y$ to zbiór wszystkich punktów (x, y) takich, że $x \in X$ i $y = f(x)$.

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich argumentów x, dla których funkcja jest określona.

Każdy argument, dla którego wartość funkcji liczbowej jest równa 0, nazywamy **miejscem zerowym funkcji.** Funkcja może mieć wiele miejsc zerowych, ale może również nie mieć ich wcale.

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład 0–1 pkt

Oblicz miejsca zerowe funkcji danej wzorem $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \le -2 \\ -4x+9, & x > -2 \end{cases}$.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy argument, dla którego wartość funkcji f jest równa 0. Ponieważ funkcja jest określona dwoma wzorami w dwóch różnych przedziałach, zapisujemy dwa równania.

1. Otrzymujemy $3x-1=0$, stąd $x = \frac{1}{3}$, ale $\frac{1}{3} \notin (-\infty, -2)$, liczba $\frac{1}{3}$ nie jest miejscem zerowym funkcji.

2. Otrzymujemy $-4x+9=0$, stąd $x = 2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{4} \in (-2, \infty)$, liczba $2\frac{1}{4}$ jest miejscem zerowym funkcji.

1 pkt – poprawne obliczenie wszystkich miejsc zerowych funkcji
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Funkcję nazywamy rosnącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, takich, że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcję nazywamy malejącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, takich, że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcję nazywamy stałą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ spełniona jest równość $f(x_1) = f(x_2)$.

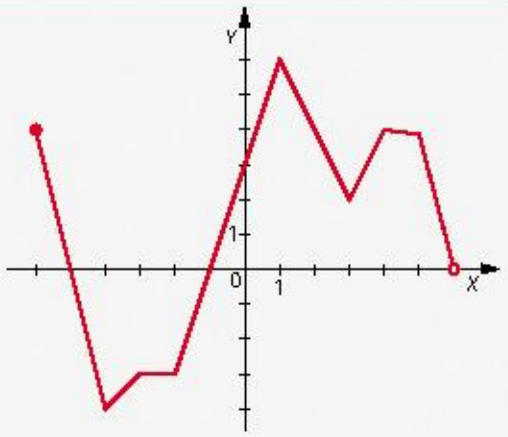
Funkcję nazywamy niemalejącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, takich, że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) \le f(x_2)$.

Funkcję nazywamy nierosnącą, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, takich, że $x_1 < x_2$, spełniony jest warunek $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Funkcje, które są rosnące, malejące, nierosnące, niemalejące i stałe nazywamy **funkcjami monotonicznymi**.

Przykład

Dla funkcji przedstawionej na wykresie zapiszemy własności:



1. Dziedzina funkcji $D_f = \langle -6, 6)$.
2. Zbiór wartości funkcji $ZW = \langle -4, 6\rangle$.
3. Miejsca zerowe funkcji: $x = -5$ i $x = -1$.
4. Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: $x \in \langle -6, -5) \cup (-1, 6)$.
5. Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne: $x \in (-5, -1)$.
6. Przedziały monotoniczności funkcji:
   – funkcja rosnąca dla: $x \in \langle -4, -3\rangle$, $x \in \langle -2, 1\rangle$ i $x \in \langle 3, 4\rangle$,
   – funkcja malejąca dla: $x \in \langle -6, -4\rangle$, $x \in \langle 1, 3\rangle$ i $x \in \langle 5, 6)$,
   – funkcja stała dla: $x \in \langle -3, -2\rangle$ i $x \in \langle 4, 5\rangle$.
7. Największa wartość funkcji: $y = 6$ dla $x = 1$, najmniejsza wartość funkcji: $y = -4$ dla $x = -4$.

Funkcją liniową nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym funkcji. Na przykład: $f(x) = 7x - 3$, $f(x) = 3$.

Dziedziną funkcji liniowej jest zbiór $\mathbb{R}$, a zbiorem wartości tej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$ dla $a \neq 0$.

Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta, która przecina oś Y w punkcie o współrzędnych $(0, b)$.

Monotoniczność funkcji liniowej:

1. Jeżeli $a > 0$, to funkcja liniowa jest funkcją rosnącą.

2. Jeżeli $a < 0$, to funkcja liniowa jest funkcją malejącą.

3. Jeżeli $a = 0$, to funkcja liniowa jest funkcją stałą.

Wyznaczamy **miejsce zerowe** funkcji $f(x) = ax + b$, przyrównując jej wartość do liczby 0. Otrzymujemy: $ax + b = 0$, stąd $ax = -b$.

1. Dla $a \neq 0$, funkcja liniowa ma jedno miejsce zerowe równe: $x = -\frac{b}{a}$.

2. Dla $a = 0$, $b \neq 0$, funkcja liniowa nie ma miejsc zerowych.

3. Dla $a = 0$, $b = 0$, funkcja liniowa ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Wykresy funkcji liniowych o wzorach $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$ są **prostymi równoległymi** wtedy, gdy funkcje mają jednakowe współczynniki kierunkowe $(a_1 = a_2)$.

Wykresy funkcji liniowych o wzorach $f(x) = a_1x + b_1$ oraz $g(x) = a_2x + b_2$) są **prostymi prostopadłymi** wówczas, gdy współczynniki kierunkowe spełniają warunek: $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Funkcją kwadratową nazywamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ten wzór nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.

Wykresem funkcji kwadratowej jest **parabola**. Kierunek ramion paraboli określa współczynnik a. Jeżeli $a > 0$, to parabola ma ramiona skierowane do góry, a jeżeli $a < 0$, to parabola ma ramiona skierowane do dołu. Współczynnik c wyznacza współrzędną y punktu przecięcia wykresu funkcji z osią OY.

Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego nazywamy zapis $\Delta = b^2 - 4ac$, gdzie a, b, c są współczynnikami postaci ogólnej funkcji kwadratowej. Od wyróżnika zależy liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej.

Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.

Współrzędne wierzchołka paraboli obliczamy ze wzorów: $x_w = \frac{-b}{2a}$, $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$.

Postać kanoniczna funkcji kwadratowej opisana jest wzorem $f(x) = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$, gdzie p i q to współrzędne wierzchołka paraboli.

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej istnieje tylko wtedy, gdy $\Delta \geq 0$.

Jeżeli $\Delta > 0$, to $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Jeżeli $\Delta = 0$, to $f(x) = a(x - x_0)^2$.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Funkcję kwadratową w postaci ogólnej $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$ zapisz w postaci kanonicznej oraz iloczynowej.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 4 + 96 = 100 > 0$, zatem funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{2 - 10}{2 \cdot 2} = -2$, $x_2 = \frac{2 + 10}{2 \cdot 2} = 3$

Zapisujemy wzór funkcji w postaci iloczynowej: $f(x) = 2(x + 2)(x - 3)$

Obliczamy współrzędne wierzchołka: $p = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, $q = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 12 = -12\frac{1}{2}$

Zapisujemy wzór funkcji w postaci kanonicznej: $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 12\frac{1}{2}$

2 pkt – poprawne zapisanie funkcji w postaci iloczynowej i kanonicznej
1 pkt – poprawne zapisanie funkcji w postaci iloczynowej lub kanonicznej
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Mając dany wyjściowy wykres funkcji $f(x)$, możemy naszkicować wykresy funkcji:

a) $y=f(x)+b$, przesuwając wykres funkcji $f(x)$ wzdłuż osi OY o b jednostek,

b) $y=f(x-a)$, przesuwając wykres funkcji $f(x)$ wzdłuż osi OX o a jednostek,

c) $y=-f(x)$, odbijając symetrycznie wykres funkcji $f(x)$ względem osi OX,

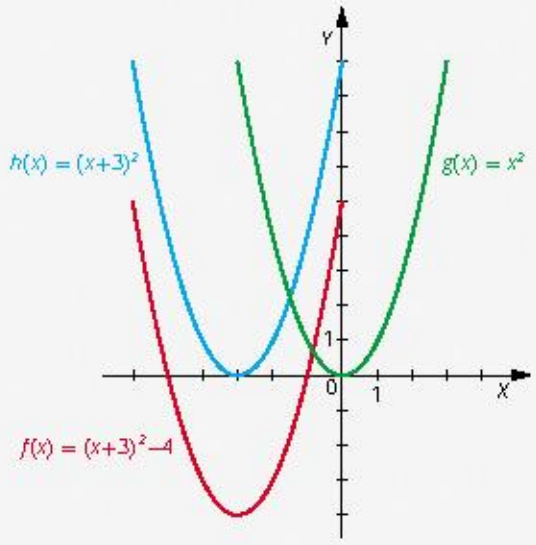
d) $y=f(-x)$, odbijając symetrycznie wykres funkcji $f(x)$ względem osi OY.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

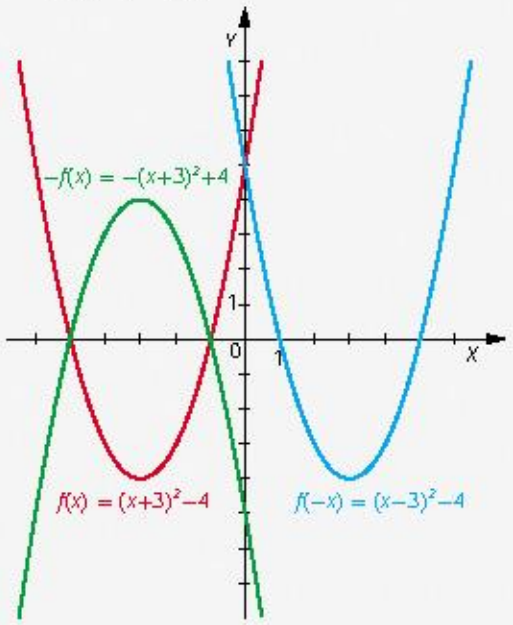
Przykład **0–3 pkt**

Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=(x+3)^2-4$, przesuwając wykres funkcji $g(x)=x^2$ wzdłuż osi układu współrzędnych. Następnie, na osobnym układzie współrzędnych, naszkicuj wykres $f(-x)$ oraz $-f(x)$.

Ze wzoru funkcji odczytujemy, że wykres $g(x)=x^2$ należy przesunąć o 3 jednostki w lewo i o 4 jednostki w dół.



Szkicując wykres funkcji $f(-x)$, odbijamy symetrycznie wykres funkcji $f(x)$ względem osi OY, a szkicując wykres funkcji $-f(x)$, odbijamy symetrycznie wykres funkcji $f(x)$ względem osi OX.



3 pkt – poprawne przesunięcie wykresu funkcji $g(x)=x^2$ oraz poprawne naszkicowanie wykresów funkcji $f(-x)$ oraz $-f(x)$

2 pkt – poprawne przesunięcie wykresu funkcji $g(x)=x^2$ oraz poprawne naszkicowanie wykresu funkcji $f(-x)$ lub $-f(x)$ albo niepoprawne przesunięcie wykresu funkcji $g(x)=x^2$ i poprawne naszkicowanie wykresów funkcji $f(-x)$ oraz $-f(x)$

1 pkt – poprawne przesunięcie wykresu funkcji $g(x)=x^2$ lub poprawne naszkicowanie wykresów funkcji $f(-x)$ lub $-f(x)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

- Funkcję postaci $f(x)=\frac{a}{x}$, $x>0$, $a>0$ nazywamy **proporcjonalnością odwrotną**.
- Wielkości x i y nazywamy **wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi** $x\cdot y=a$.
- Stała a jest **współczynnikiem proporcjonalności**.

Wykresem proporcjonalności odwrotnej jest jedna gałąź hiperboli.

- **Funkcja wykładnicza** opisana jest wzorem $f(x)=a^x$, gdzie $a>0$.

Wykresem funkcji wykładniczej jest krzywa, która zawsze przecina oś OY w punkcie 1.

- **Funkcja logarytmiczna** opisana jest wzorem $f(x)=\log_a x$, gdzie $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$.

Wykresem tej funkcji jest krzywa, która zawsze przecina oś OX dla argumentu $x=1$.

Zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania

uczęsię rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 151. 0–1 pkt

Pewne przyporządkowania przedstawiono w postaci tabeli.

I

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	3	4

II

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	2	2

III

x	2	1	2	3
$f(x)$	1	2	3	4

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Funkcją nie jest przyporządkowanie przedstawione w:

A. I B. II C. III D. II i III

Zadanie 152. 0–1 pkt

Funkcja, której dziedziną jest zbiór $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$, jest określona wzorem $g(x)=-x^2-2x+3$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Funkcja ma dwa miejsca zerowe.	P	F
2.	Zbiorem wartości jest zbiór $\{-5,0,3,4\}$.	P	F

Zadanie 153. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Dla funkcji f określonej wzorem $f(x)=|x-1|+2$ prawdziwy jest zapis:

A. $f(-1)=0$ B. $f(1)=4$ C. $f(0)=3$ D. $f(-2)=-1$

Zadanie 154. 0–2 pkt

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej dwucyfrowej mniejszej od 20 resztę z dzielenia tej liczby przez 3.
Sporządź tabelkę i graf dla tej funkcji oraz określ jej zbiór wartości.

Zadanie 155. 0–2 pkt

Oblicz, dla jakiej wartości parametru m wykresy funkcji liniowych $f(x)=-mx+3$ i $g(x)=(3-2m)x-1$ są prostymi prostopadłymi.

Zadanie 156. 0–2 pkt

Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej $f(x)=-x^2-8x-12$, $x\in\mathbb{R}$.

Zadanie 157. 0–1 pkt

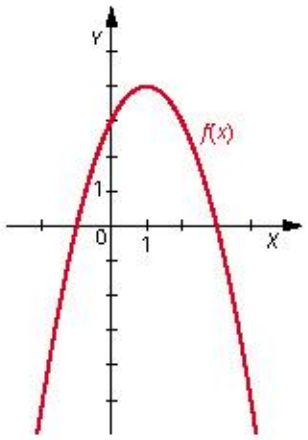
Dana jest funkcja kwadratowa $y=f(x)$, której fragment wykresu przedstawiono w układzie współrzędnych na rysunku obok.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych, jeżeli wiadomo, że jeden ze wzorów podanych w odpowiedziach A–D to wzór funkcji f.

Funkcja kwadratowa $y=f(x)$ jest określona wzorem:

A. $y=(x-1)^2-4$ B. $y=(x-1)^2+4$

C. $y=-(x-1)^2-4$ D. $y=-(x-1)^2+4$



Zadanie 158. 0–2 pkt

Funkcja kwadratowa dana jest wzorem $f(x)=2(x+2)^2+3$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Funkcja f w przedziale $\langle -3, 3\rangle$ osiąga wartość największą równą 53.	P	F
2.	Funkcja f w przedziale $\langle -3, 3\rangle$ osiąga wartość najmniejszą równą 5.	P	F

Zadanie 159. 0–1 pkt

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{2x-1}{(x+5)(x^2-4)}$ jest:

A. $\mathbb{R}\setminus\{-5,-2,2\}$ B. $\mathbb{R}\setminus\{-5,4\}$ C. $\mathbb{R}\setminus\{-5,\ 2\}$ D. $\mathbb{R}\setminus\{-5,\ -2\}$

Zadanie 160. 0–1 pkt

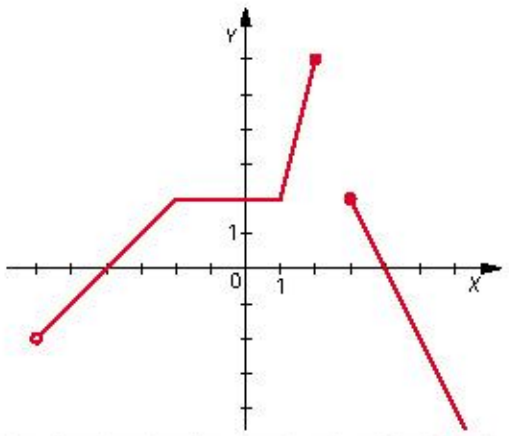
Na rysunku przedstawiono wykres funkcji.
Wskaż zdanie fałszywe. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. Dziedziną funkcji jest zbiór $(-6,\ 2)\cup(3,\ \infty)$.

B. Funkcja jest malejąca w przedziale $(3,\ \infty)$.

C. Funkcja przyjmuje wartość największą dla argumentu 2.

D. Miejscem zerowym funkcji jest tylko liczba 4.



Zadanie 161. 0–1 pkt

Wskaż zdanie prawdziwe spośród podanych. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem miejsc zerowych funkcji $h(x)=\frac{x^2-25}{x+5}$ jest:

A. $\{5\}$ B. $\{-5,\ 5\}$ C. $\{-5\}$ D. $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$

Zadanie 162. 0–1 pkt

Funkcja jest określona wzorem $g(x)=\left(2+\sqrt{2m}\right)x-3$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Funkcja jest malejąca dla $m > 2$.	P	F
2.	Dla $m = 0$ wykres funkcji jest prostą równoległą do prostej będącej wykresem funkcji $f(x) = -0{,}5x + 5$.	P	F

Zadanie 163. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja jest opisana wzorem $f(x)=\begin{cases}-2 \text{ dla } x<0\\0 \text{ dla } x=0\\2 \text{ dla } x>0\end{cases}$. Zbiorem wartości tej funkcji jest:

A. $\mathbb{R}$ B. $\{-2, 0, 2\}$ C. $\{-2, 2\}$ D. $\mathbb{Z}$

Zadanie 164. 0–2 pkt

Wyznacz miejsca zerowe funkcji opisanej wzorem $f(x)=\begin{cases}|x|-1, & x\in(-\infty, 2)\\x^2-4, & x\in\langle 2, 5\rangle\end{cases}$.

Zadanie 165. 0–2 pkt

Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)(x-5)$, $x\in\mathbb{R}$.

Zadanie 166. 0–2 pkt

Wiedząc, że wykres funkcji kwadratowej ma wierzchołek w punkcie $(11, 9)$ i przechodzi przez punkt $A=(5, 261)$, wyznacz wzór tej funkcji.

Zadanie 167. 0–1 pkt

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x)=-6x^2+bx+1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Współczynnik b jest liczbą rzeczywistą większą od zera.
Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Funkcja f:

A.	ma dwa rzeczywiste miejsca zerowe,	ponieważ	1.	$\Delta=b^2+24>0$.
B.	ma jedno rzeczywiste miejsce zerowe,		2.	$\Delta=b^2+24=0$.
C.	nie ma rzeczywistych miejsc zerowych,		3.	$\Delta=b^2+24<0$.

Zadanie 168. 0–2 pkt

Wiedząc, że funkcja kwadratowa jest opisana wzorem $f(x)=-(x-5)(x+3)$, możemy z łatwością obliczyć w przedziale $\langle -2, 2\rangle$ wartość najmniejszą oraz wartość największą. Zapisz te wartości w wyznaczonym miejscu.

Wartość najmniejsza: ..... Wartość największa: .....

Zadania dłuższe

Zadanie 169. 0–2 pkt

Na podstawie wykresu funkcji $f(x)=|x|$ naszkicuj wykres funkcji $y=f(x+3)-2$.

Zadanie 170. 0–2 pkt

Na podstawie wykresu funkcji $f(x)=-x^2+2x+3$ naszkicuj wykres funkcji $y=f(-x)$.

Zadanie 171. 0–2 pkt

Na podstawie wykresu funkcji $f(x)=x^2-4$ naszkicuj wykres funkcji $y=-f(x)$.

Zadanie 172. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Funkcje $f(x)=2x+3$ i $g(x)=-3x+1$ przyjmują tę samą wartość dla argumentu:

A.	0,4,	ponieważ ten argument jest pierwiastkiem równania	1.	$f(x)+g(x)=0$.
B.	−0,4,		2.	$f(x)-g(x)=0$.
C.	−4,		3.	$f(x)\cdot g(x)=0$.

Zadanie 173. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+m}}$ jest przedział $(-3, \infty)$. Wobec tego m jest równe:

A. 9 B. −9 C. 3 D. −3

Zadanie 174. 0–2 pkt

Wykres funkcji $f(x)=\frac{1}{2}x-2b$ przecina oś Y w punkcie, którego rzędna jest równa 6. Wyznacz rzędną punktu przecięcia wykresu funkcji $g(x)=-3x+\frac{1}{3}b$ z osią Y.

Zadanie 175. 0–2 pkt

Wyznacz wzór funkcji liniowej $f(x)=ax+b$, o której wiadomo, że jej miejscem zerowym jest liczba $\frac{2}{3}$ oraz że punkt $A=(0, 3)$ należy do jej wykresu.

Zadanie 176. 0–2 pkt

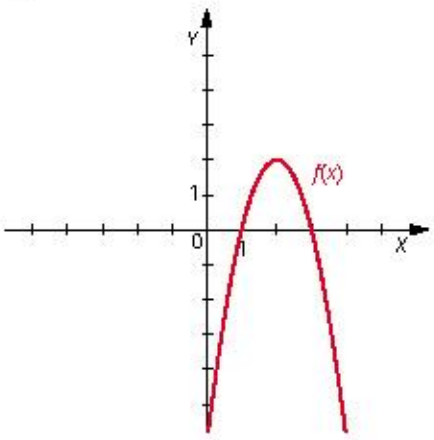
Dane są funkcje określone wzorami $f(x)=2x+1$ i $g(x)=-2x^2+5$. Podaj przedziały argumentów, dla których spełniona jest nierówność $f(x)\leq g(x)$.

Zadanie 177. 0–1 pkt

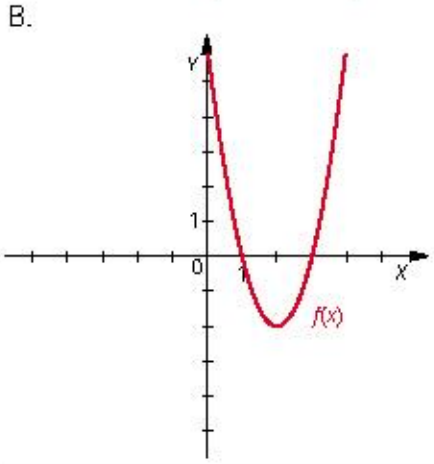
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres funkcji $f(x)=2(x+2)^2-2$ jest naszkicowany na rysunku:

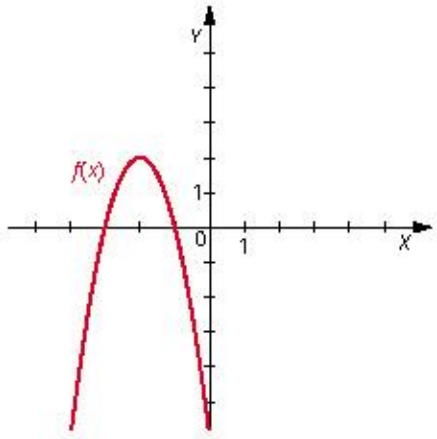
A.



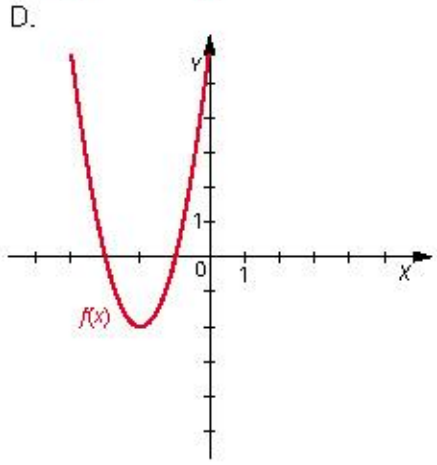
B.



C.



D.



Zadanie 178. 0–2 pkt

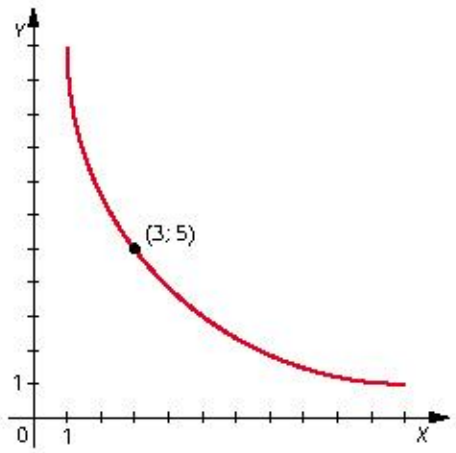
Oblicz wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x)=2x^2-12x+23$ w przedziale $\langle -6, 6\rangle$.

Zadanie 179. 0–2 pkt

Wykres przedstawia zależność między ceną x złotych za kilogram pewnego towaru, a liczbą kilogramów y, które możemy kupić za pewną stałą kwotę k.

a) Oblicz wartość k.

b) Ile kilogramów tego towaru można kupić za kwotę k, jeżeli 1 kg kosztuje 3 zł?



Zadanie 180. 0–2 pkt

Wiedząc, że okres połowicznego rozpadu izotopu węgla ^{14}C wynosi $T = 5700$ lat, oblicz wiek znaleziska, w którym zawartość izotopu ^{14}C jest równa 40%.

Zadanie 181. 0–2 pkt

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \log_3 x$ oraz $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Zadanie 182. 0–3 pkt

Ogrodzenie typu elektryczny pastuch ma długość 120 m. Gospodarz chce ogrodzić w ten sposób prostokątny kawałek łąki o jak największym polu powierzchni. Jakie wymiary będzie miał ten prostokąt? Ile wyniesie pole powierzchni tego prostokąta?

Zadanie 183. 0–3 pkt

Dwóch pracowników, pracując 8 godzin dziennie, wykonuje pewną pracę w 5 dni. Zapisz wzór odpowiedniej funkcji i oblicz, w jakim czasie tę samą pracę wykonałoby trzech pracowników, a w jakim – sześciu. Wynik podaj z dokładnością do minuty.

Zadanie 184. 0–3 pkt

Narysuj wykresy funkcji $f(x) = -|x|$ i $h(x) = -3$. Określ maksymalne przedziały monotoniczności tych funkcji oraz odczytaj współrzędne punktów wspólnych tych wykresów.

Zadanie 185. 0–3 pkt

Punkt $A=(-2,-6)$ należy do wykresu funkcji liniowej określonej wzorem $f(x)=(m-1)x+2$. Wyznacz wartość m. Określ monotoniczność tej funkcji oraz podaj, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

Zadanie 186. 0–2 pkt

Oblicz, dla jakiej wartości parametru m wykresy funkcji liniowych $f(x)=(2m-1)x+8$ i $g(x)=\frac{1}{3}x-2$ są prostymi prostopadłymi. Wyznacz współrzędne punktu wspólnego tych prostych prostopadłych.

Zadanie 187. 0–3 pkt

Funkcja liniowa f przyjmuje wartości ujemne wyłącznie dla argumentów większych od 2. Do wykresu tej funkcji należy punkt $(-2,\ 4)$. Podaj wzór funkcji f i określ jej monotoniczność.

Zadanie 188. 0–2 pkt

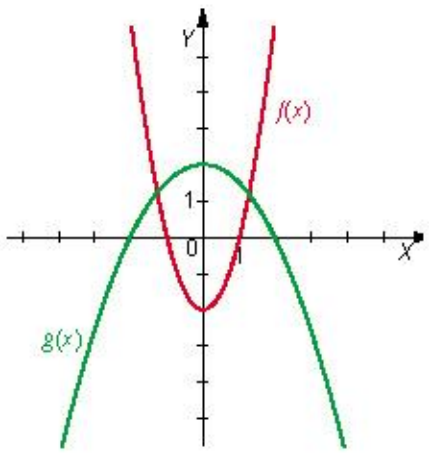
Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej $f(x)=2x^2+12x+16$, $x\in\mathbb{R}$.

Zadanie 189. 0–3 pkt

Stwierdzono, że liczba bakterii w pewnym doświadczeniu potraja się w ciągu godziny.
Wiedząc, że na początku było 100 bakterii:
a) napisz wzór funkcji opisującej liczbę bakterii po upływie czasu t,
b) oblicz liczbę bakterii po upływie 3 godzin od początku doświadczenia,
c) oblicz, po jakim czasie liczba bakterii osiągnie 1 968 300.

Zadanie 190. 0–2 pkt

Na wykresie przedstawiono funkcje f i g.



Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Funkcja f opisana jest wzorem $f(x)=2x^2-2$.	P	F
2.	Funkcja g opisana jest wzorem $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$.	P	F

6

Ciągi

Teoria z przykładami

przypominam najważniejsze treści

Ciągiem nazywamy funkcję określoną w zbiorze liczb całkowitych dodatnich. Wartości tej funkcji dla kolejnych liczb całkowitych dodatnich nazywamy wyrazami ciągu.

Przykład

Ciąg sześcianów liczb całkowitych dodatnich: 1, 8, 27, 64, 125, ...

Jeśli dziedziną ciągu jest zbiór $\{1, 2, 3, ..., k\}$, to ciąg jest **ciągiem skończonym** k-wyrazowym.

Jeśli dziedziną ciągu jest zbiór liczb całkowitych dodatnich, to ciąg jest **ciągiem nieskończonym**.

Przykład

Ciąg kwadratów liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 5 jest ciągiem skończonym czterowyrazowym: $(1, 4, 9, 16)$, a ciąg kolejnych potęg liczby 2 o wykładniku naturalnym dodatnim jest ciągiem nieskończonym. Zapiszemy go następująco: $(2, 4, 8, 16, 32, ...)$.

Wyrazem ogólnym ciągu nazywamy wzór pozwalający obliczyć każdy wyraz ciągu i mający tę własność, że każdy wyraz tego ciągu jest uzależniony od numeru tego wyrazu.

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład **0–2 pkt**

Ciąg nieskończony (a_n) określony jest wzorem $a_n = \left(n-\frac{1}{2}\right)^2$. Oblicz sumę a_5 i a_{10}.

Rozwiązanie:

$$a_5 = \left(5-\frac{1}{2}\right)^2 = 20\frac{1}{4},\ a_{10} = \left(10-\frac{1}{2}\right)^2 = 90\frac{1}{4},\ a_5 + a_{10} = 20\frac{1}{4} + 90\frac{1}{4} = 110\frac{1}{2}$$

2 pkt – poprawna metoda i poprawne obliczenie sumy a_5 i a_{10}

1 pkt – poprawne obliczenie wartości a_5 i a_{10}

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Jeśli (a_n) jest nieskończonym ciągiem liczbowym, wówczas ciąg (S_n) o kolejnych wyrazach: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$, nazywamy **ciągiem sum częściowych** ciągu (a_n).

Przykład **0–2 pkt**

Napisz wzór na n-ty wyraz nieskończonego ciągu (a_n), dla którego $S_n = \frac{n(2n+3)}{3}$.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru: $a_n = S_n - S_{n-1}$ dla $n \geq 2$

Wyznaczamy $S_{n-1} = \frac{(n-1)\left[2(n-1)+3\right]}{3} = \frac{(n-1)(2n+1)}{3}$, stąd $a_n = \frac{n(2n+3)}{3} - \frac{(n-1)(2n+1)}{3} = \frac{4n+1}{3}$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wzoru.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Określenie rekurencyjne ciągu (a_n) zawiera pierwszy wyraz tego ciągu oraz wzór, jak obliczyć $n+1$-wszy wyraz ciągu na podstawie wyrazu n-tego.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Ciąg (a_n) określony jest następująco $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n,\ n \geq 1 \end{cases}$. Oblicz czwarty wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie:

Obliczamy wyrazy ciągu: $a_1 = -2$, $a_2 = (-1)^1 \cdot (-2) = 2$, $a_3 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$, $a_4 = (-1)^3 \cdot 2 = -2$

1 pkt – poprawne obliczenie wartości czwartego wyrazu ciągu

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Monotoniczność ciągu

Jeśli dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+$:

- $a_{n+1} > a_n$, to ciąg (a_n) jest **rosnący**,
- $a_{n+1} < a_n$, to ciąg (a_n) jest **malejący**,
- $a_{n+1} = a_n$, to ciąg (a_n) jest **stały**,
- $a_{n+1} \geq a_n$, to ciąg (a_n) jest **niemalejący**,
- $a_{n+1} \leq a_n$, to ciąg (a_n) jest **nierosnący**.

Jeżeli ciąg jest rosnący, malejący, nierosnący, niemalejący lub stały, to mówimy, że ten **ciąg jest monotoniczny**. O innych ciągach mówimy, że nie są monotoniczne. Przykład ciągu niemonotonicznego: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$.

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład **0–2 pkt**

Wykaż, że ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n+2}{n}$ jest ciągiem malejącym.

Rozwiązanie:

Zapisujemy wzór na $n+1$-wszy wyraz ciągu: $a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}$

Otrzymujemy: $a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{n+1} - \frac{n+2}{n} = \frac{n(n+3) - (n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)}$

Iloraz $\frac{-2}{n(n+1)}$ jest ujemny, ponieważ licznik jest ujemny, a mianownik jest dodatni. Stąd $a_{n+1} - a_n < 0$.

Wniosek: Ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{n+2}{n}$ jest malejący.

2 pkt – poprawne uzasadnienie, że ciąg jest malejący
1 pkt – poprawne zapisanie wzoru na $n+1$-wszy wyraz ciągu
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Ciąg **liczbowy** (a_n) nazywamy **ciągiem arytmetycznym**, jeżeli istnieje taka liczba r, że każdy wyraz (oprócz pierwszego) powstaje przez dodanie tej liczby do wyrazu poprzedniego: $a_{n+1} = a_n + r$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$.

Liczbę r nazywamy **różnicą** ciągu (a_n).

Przykład

$a_n = -3n + 1$, $a_n = \frac{n-5}{2}$

Wzór ogólny ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n \geq 1$ o pierwszym wyrazie ciąg a_1 i różnicy r wyraża się wzorem $a_n = a_1 + (n-1)r$.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Wyznacz siódmy i dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 10 - n$.

Rozwiązanie:

$a_7 = 10 - 7 = 3$, $a_{12} = 10 - 12 = -2$

2 pkt – poprawne wyznaczenie wartości siódmego i dwunastego wyrazu ciągu
1 pkt – poprawne wyznaczenie wartości siódmego lub dwunastego wyrazu ciągu
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

W ciągu arytmetycznym (a_n) każdy wyraz, oprócz pierwszego, jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ dla $n \geq 2$

Przykład **0–2 pkt**

Wyznacz wartość x, jeśli liczby: 8, x, 2, tworzą ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie:

$$x=\frac{8+2}{2}=5$$

1 pkt – poprawne wyznaczenie wartości x
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) określonego dla $n\geq 1$, jest równa:

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n$$

Przykład ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), jeśli pierwszy wyraz tego ciągu wynosi 5, a różnica jest równa 8.

Rozwiązanie:

$$S_{10}=\frac{2\cdot 5+(10-1)\cdot 8}{2}\cdot 10=410$$

1 pkt – poprawne obliczenie sumy dziesięciu początkowych wyrazów ciągu
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Ciąg **liczbowy** (a_n) nazywamy **ciągiem geometrycznym**, jeżeli istnieje taka liczba q, że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę: $a_{n+1}=a_n\cdot q$ dla każdego $n\in\mathbb{N}_+$. Liczbę q nazywamy **ilorazem** ciągu (a_n).

Przykłady

$a_n=\frac{(-4)^n}{2}$, $a_n=-3^{n+1}$

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n\geq 1$, o pierwszym wyrazie ciąg a_1 i ilorazie q, wyraża się wzorem: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$.

Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) prawdziwa jest równość: $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ dla $n\geq 2$.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Liczby: 2, x, 32, są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Wyznacz wartość x.

Rozwiązanie:

$x^2=2\cdot 32=64$, $x=8$ lub $x=-8$

1 pkt – poprawne wyznaczenie wartości x
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) określonego dla $n\geq 1$, o ilorazie $q\neq 1$, wyraża się wzorem:

$$S_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

Przykład

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1=-3$ i ilorazie $q=2$.

Rozwiązanie:

$$S_6=-3\cdot\frac{1-2^6}{1-2}=-3\cdot\frac{1-64}{-1}=-189$$

1 pkt – poprawne obliczenie sumy sześciu początkowych wyrazów ciągu
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy k złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi r w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K jest określony wzorem:

$$K = k(1+r)^n$$

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład 0–1 pkt

Kapitał w wysokości 2000 zł został złożony w banku na cztery lata. Oblicz wielkość kapitału po upływie tego okresu, jeżeli kapitalizacja była roczna, a oprocentowanie wynosiło 5%.

Rozwiązanie:

$K = 2000(1+0{,}05)^4 \approx 2431{,}01$ zł

1 pkt – poprawna metoda i poprawne obliczenie wielkości kapitału
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

uczę się rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 191. 0–1 pkt

Ciąg (a_n) jest określony wzorem ogólnym $a_n = n - n^3$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Piątym wyrazem tego ciągu jest liczba:

A. 130 B. 20 C. –10 D. –120

Zadanie 192. 0–1 pkt

Dany jest ciąg (a_n) określony rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} - 2 \text{ dla każdego } n \geq 1. \end{cases}$

Oceń prawdziwość podanych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wsród pięciu początkowych wyrazów tego ciągu nie ma liczb parzystych.	P	F
2.	Różnica $a_5 - a_4$ jest równa zero.	P	F

Zadanie 193. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = (1+n)(1-n)$ jest ciągiem:

A. rosnącym B. malejącym C. stałym D. niemonotonicznym

Zadanie 194. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem ogólnym $a_n = \frac{4-3n}{2}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest równa:

A. 5 B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. -5

Zadanie 195. 0–1 pkt

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie 3 są różne od zera.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Jeśli podzielimy dwudziesty wyraz ciągu (a_n) przez dziesiąty, otrzymamy:

A. 3^2 B. 3^6 C. 3^{10} D. 3^{15}

Zadanie 196. 0–1 pkt

Odpowiedz na pytanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Który wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = \frac{3n+8}{2n-1}$ jest równy 2?

A. drugi B. dziesiąty C. piąty D. jedenasty

Zadanie 197. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Czwartym wyrazem ciągu (a_n) określonego wzorem $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = 5 - a_n, \ n \geq 1 \end{cases}$ jest liczba:

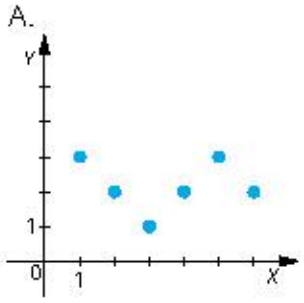
A. -5 B. 0 C. 5 D. 10

Zadanie 198. **0–1 pkt**

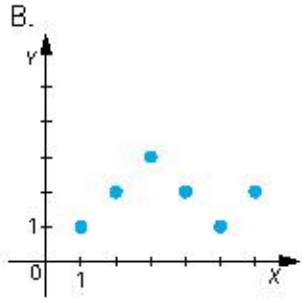
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wykres skończonego ciągu (a_n), gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, określonego wzorem $a_n = (-1)^{n-1} + 2$ przedstawiono na rysunku:

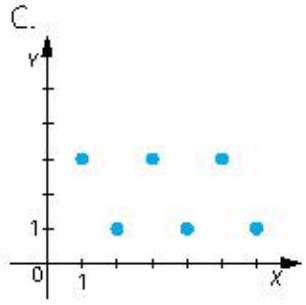
A.



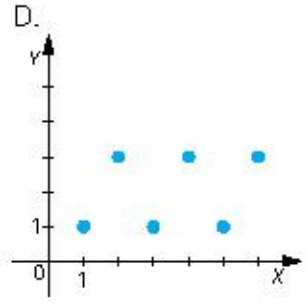
B.



C.



D.



Zadanie 199. **0–2 pkt**

Kredyt w wysokości 50 000 zł wraz z odsetkami należy spłacić jednorazowo po 5 latach. Co roku bank dolicza odsetki w wysokości 8%. Jaką kwotę należy spłacić?

Zadanie 200. **0–1 pkt**

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 3n^2 + 1$.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) jest określony wzorem ogólnym a_n:

A.	$3n^2 + 1$,	ponieważ aby wyznaczyć wyraz a_n, obliczamy	1.	różnicę $S_n - S_{n-1}$.
B.	$6n - 3$,		2.	sumę $S_{n+1} + S_n$.
C.	$6n + 3$,		3.	różnicę $S_{n+1} - S_n$.

Zadanie 201. 0–1 pkt

Dany jest ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = -2 \cdot 3^n$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Ten ciąg określony rekurencyjnie ma postać:

A. $\begin{cases} a_1 = -6 \\ a_{n+1} = 6 \cdot a_n \end{cases}, n \geq 1$

B. $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n \end{cases}, n \geq 1$

C. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = -2 \cdot a_n \end{cases}, n \geq 1$

D. $\begin{cases} a_1 = -6 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n \end{cases}, n \geq 1$

Zadanie 202. 0–2 pkt

Czy ciąg (a_n) podany wyrazem ogólnym $a_n = 2 \cdot (-1)^{2n}$ jest stały? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 203. 0–2 pkt

Ciąg (a_n) dany jest wzorem $a_n = \frac{5n+1}{3}$. Które wyrazy tego ciągu należą do przedziału $\langle 16,\ 27 \rangle$?

Zadanie 204. 0–1 pkt

Miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 24$ są pierwszym i trzecim wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Drugi wyraz ciągu (a_n) jest równy:

A. 2 B. -2 C. -1 D. 1

Zadanie 205. 0–2 pkt

Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu nieskończonego (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 2 + (-2)^n$.

Zadanie 206. 0–2 pkt

Dany jest ciąg nieskończony (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = 6n^2 - 17n - 14$. Wypisz wszystkie wyrazy ujemne tego ciągu.

Zadanie 207. 0–2 pkt

Naszkicuj wykres ciągu określonego wzorem $\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2 \text{ dla każdego } n \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{cases}$.

Zadanie 208. 0–2 pkt

Piąty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy -5, a suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa -20.

Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

Zadania dłuższe

Zadanie 209. 0–2 pkt

Uzasadnij, że żaden wyraz ciągu $a_n = (n+5)(3n-10)$ nie jest równy zero.

Zadanie 210. 0–2 pkt

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n^2 - n - 7$. Znajdź taki wyraz tego ciągu, który jest większy od poprzedniego o 30.

Zadanie 211. 0–2 pkt

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy równej -4 jest równy 3.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

211.1. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ ciąg (a_n) opisuje wzór ogólny:

A. $a_n = 4n+1$ B. $a_n = 1-4n$ C. $a_n = 7-4n$ D. $a_n = 4n+7$

211.2. Dziesiątym wyrazem ciągu (a_n) jest liczba:

E. -33 F. 41 G. 47 H. -39

Zadanie 212. 0–2 pkt

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 213. 0–2 pkt

Uzasadnij, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 7 - 3n$ jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 214. 0–1 pkt

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{2}{n+1}$.

Wskaż zdanie fałszywe spośród podanych.

A. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie.

B. Ciąg (a_n) jest malejący.

C. Suma wyrazów a_2, a_5 i a_9 należy do przedziału $(1, 2)$.

D. Dziesiąty wyraz ciągu (a_n) jest 10 razy większy niż wyraz setny.

Zadanie 215. 0–4 pkt

Podaj rekurencyjne określenie ciągu (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = 3+2n$, korzystając:

a) z różnicy $a_{n+1} - a_n$,

b) z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Zadanie 216. 0–2 pkt

Piąty wyraz niemonotonicznego ciągu geometrycznego (a_n) wynosi $-\frac{32}{243}$, a drugi wyraz to $\frac{4}{9}$.

Wyznacz ogólny wzór ciągu (a_n).

Zadanie 217. 0–2 pkt

Podaj wzór ogólny ciągu (a_n) o wyrazie rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^3, \ n \geq 1 \end{cases}$.

Zadanie 218. 0–1 pkt

Iloraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 2, a suma odwrotności wyrazu pierwszego i drugiego wynosi 6.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Pierwszy wyraz ciagu (a_n) wynosi 3.	P	F
2.	Ciąg (a_n) opisuje wzór ogólny $(a_n)=2^{n+1}$.	P	F

Zadanie 219. 0–2 pkt

Liczby 5, m, $m+30$ są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego (a_n).

Wyznacz wartość m.

Zadanie 220. 0–2 pkt

Trzeci wyraz rosnącego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy 48, a szósty wyraz to 384. Wyznacz iloraz q tego ciągu.

Zadanie 221. 0–3 pkt

Suma trzech liczb a, b, c tworzących ciąg geometryczny (a_n) jest równa 14, a ich iloczyn jest równy 64. Wyznacz wartości liczb a, b, c.

Zadanie 222. 0–3 pkt

Liczby 5, a, 11 tworzą ciąg arytmetyczny (a_n), a liczby a, 24, b, c – ciąg geometryczny (b_n). Wyznacz wartości liczb a, b, c.

Zadanie 223. 0–5 pkt

Długości trzech krawędzi prostopadłościanu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 4. Oblicz objętość tego prostopadłościanu, wiedząc, że jego pole powierzchni całkowitej wynosi 184.

Zadanie 224. 0–2 pkt

Sprawdź, czy ciąg (a_n) o wzorze ogólnym $a_n = \frac{2}{3^n}$ jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 225. 0–3 pkt

Suma ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = 3n^2 - 2n$ dla $n \geq 1$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Zadanie 226. 0–4 pkt

Uzasadnij, że ciąg określony wzorem $a_n = \log_2\left(3 \cdot 2^n\right)$ jest ciągiem arytmetycznym. Wyznacz jego pierwszy wyraz i różnicę.

7

Trygonometria

Teoria z przykładami

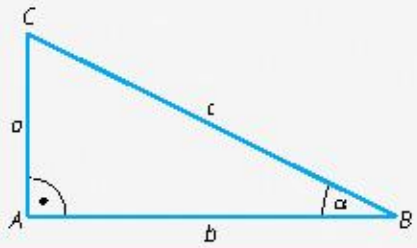
przypominam najważniejsze treści

Definicja funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o bokach długości 6 cm, 8 cm, 10 cm.
$a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm.

Rozwiązanie:

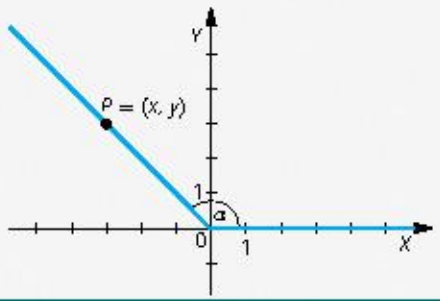
$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

1 pkt – poprawne obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Definicja funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, o ile $x \neq 0$

gdzie $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli do ramienia końcowego tego kąta należy punkt $P = (-3, 4)$.

Rozwiązanie:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$

$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

1 pkt – poprawne obliczenie wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów ostrych

Funkcja	Kąt α 30°	Kąt α 45°	Kąt α 60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \mathrm{tg}^2 30^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\sin^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \mathrm{tg}^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{9} = \frac{5}{4} - \frac{1}{3} = \frac{11}{12}$$

1 pkt – poprawne obliczenie wartości wyrażenia
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Wybrane wzory redukcyjne

$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\qquad$ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ $\qquad$ $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq 180^\circ$

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład **0–1 pkt**

Wiedząc, że $\sin 23^\circ = 0{,}3907$, oblicz wartość $\cos 67^\circ$.

Rozwiązanie:

$\cos 67^\circ = \cos(90^\circ - 23^\circ) = \sin 23^\circ = 0{,}3907$

1 pkt – poprawne obliczenie wartości cosinusa
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykład **0–1 pkt**

Oblicz wartości cosinusa kąta 135°.

Rozwiązanie:

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1 pkt – poprawne obliczenie wartości cosinusa
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość prawdziwą dla wszystkich wartości kąta, dla których ta równość jest określona.

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Wykaż, że dla kąta ostrego α równość $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ jest tożsamością.

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę tej równości, korzystając z jedynki trygonometrycznej, a następnie ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Otrzymujemy:

$$L = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha - \cos\alpha}.$$

$L = P$, co należało udowodnić.

2 pkt – poprawne i pełne uzasadnienie tożsamości
1 pkt – poprawne metoda uzasadnienia tożsamości
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

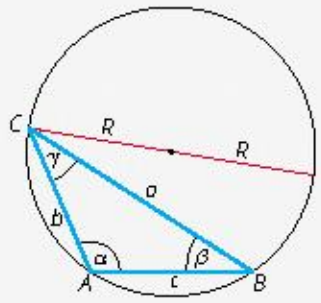
Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie na płaszczyźnie stosunek długości boku do sinusa przeciwległego kąta jest wielkością stałą i równą średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R$$

$$\frac{b}{\sin\beta}=2R$$

$$\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Oblicz długość boków b i c w trójkącie ABC, w którym $a=6$, $\alpha=30°$ i $\beta=45°$.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia sinusów wyznaczamy długość boku b tego trójkąta: $\frac{b}{\sin45°}=\frac{6}{\sin30°}$. Stąd: $b=6\sqrt{2}$

Wyznaczamy miarę kąta γ. Otrzymujemy: $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$, czyli $\gamma=105°$, i odczytujemy z tablicy wartości sinusów: $\sin105°=\sin(180°-75°)=\sin75°\approx0{,}97$

Wyznaczamy długość boku c tego trójkąta: $\frac{c}{\sin75°}=\frac{6}{\sin30°}$

Stąd: $c\approx11{,}6$

2 pkt – poprawne obliczenie długości boków b i c
1 pkt – poprawne obliczenie długości boku b lub c
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Twierdzenie cosinusów (Carnota)

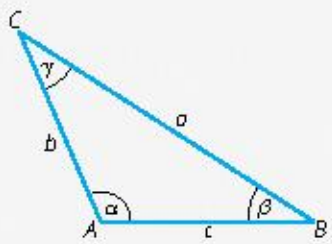
W dowolnym trójkącie kwadrat długości boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków tego trójkąta pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między tymi bokami.

Dla oznaczeń jak na rysunku można tezę twierdzenia cosinusów zapisać:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Dwa boki trójkąta mają długości 3 i 5, a kąt między nimi zawarty ma miarę 60°. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy oznaczenia: $a=3$, $b=5$, $\gamma=60°$, $c=?$

Zapisujemy twierdzenie cosinusów: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

Obliczamy: $c^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos60°$, stąd $c^2=19$, czyli $c=\sqrt{19}$

1 pkt – poprawne obliczenie długości trzeciego boku
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Pole trójkąta

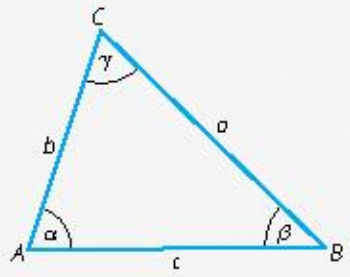
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch boków tego trójkąta i sinusa kąta zawartego między tymi bokami.

Dla oznaczeń wprowadzonych na rysunku zapiszemy:

$$P=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha$$

$$P=\frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta$$

$$P=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$$



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Pole trójkąta równoramiennego wynosi 24, a miara kąta między ramionami tego trójkąta jest równa 30°. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Przyjmujemy oznaczenia: a – podstawa trójkąta, b – ramiona trójkąta, α – miara kąta między ramionami trójkąta.

Ze wzoru na pole trójkąta: $P=\frac{1}{2}b\cdot b\cdot\sin 30°$, otrzymujemy: $24=\frac{1}{2}b^2\cdot\frac{1}{2}$. Stąd $b^2=96$, czyli $b=4\sqrt{6}$.

Z twierdzenia cosinusów: $a^2=b^2+b^2-2b\cdot b\cos 30°$, otrzymujemy: $a^2=\left(4\sqrt{6}\right)^2+\left(4\sqrt{6}\right)^2-2\cdot 4\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Stąd: $a^2=192-96\sqrt{3}$, czyli $a=4\sqrt{12-6\sqrt{3}}$.

1 pkt – poprawne obliczenie długości podstawy trójkąta
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

uczę się rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 227. 0–1 pkt

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 cm i 8 cm.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Sinus najmniejszego kąta tego trójkąta jest równy:

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{4}$

Zadanie 228. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Jeśli przeciwprostokątna BC trójkąta prostokątnego ma długość 18 cm, a cosinus kąta ABC jest równy 0,35, to bok AB tego trójkąta ma długość:

A. 4,8 cm B. 7,2 cm C. 5,8 cm D. 6,3 cm

Zadanie 229. 0–3 pkt

Oblicz wysokość drzewa, którego cień ma długość 3,8 m, gdy promienie słoneczne tworzą z powierzchnią ziemi kąt o mierze 68°. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 m.

Zadanie 230. 0–2 pkt

Wiedząc, że $\sin 27° = 0{,}4540$, oblicz wartość $\cos 63°$.

Zadanie 231. 0–1 pkt

Wiadomo, że kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wynika z tego, że $\cos\alpha$ jest równy:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{2}$

Zadanie 232. 0–1 pkt

Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|AB| = 10$, $|AC| = 2\sqrt{3}$ i $|\sphericalangle CAB| = 60°$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole trójkąta jest równe:

A. 15 B. $10\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{6}$ D. $5\sqrt{3}$

Zadanie 233. 0–1 pkt

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 9, a długość przyprostokątnej leżącej przy kącie α jest równa $3\sqrt{5}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt α ma miarę:

A. mniejszą od 30° B. należącą przedziału $(30°, 40°)$

C. należącą przedziału $(40°, 60°)$ D. większą od 60°

Zadanie 234. 0–1 pkt

Na ramieniu końcowym kąta α obrano punkt $P = (x, y)$.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. Jeśli $P = (1, 3)$, to $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

B. Jeśli $P = (4, 2)$, to $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

C. Jeśli $P = (-5, 5)$, to $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$.

D. Jeśli $P = (-6, 3)$, to $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 235. 0–2 pkt

Uzasadnij, że wartość wyrażenia $4\cdot(\sin 30^\circ+\cos 30^\circ)^2-2\operatorname{tg}60^\circ$ jest liczbą całkowitą.

Zadanie 236. 0–2 pkt

Drabinę o długości 4,5 m oparto o mur tak, że podstawa znajduje się w odległości 2,5 m od muru. Oblicz miarę kąta, jaki tworzy drabina z poziomem ziemi.

Zadanie 237. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wartość wyrażenia $\sin^2 40^\circ+\sin^2 50^\circ$ jest równa:

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 238. 0–1 pkt

Pole trójkąta ABC wynosi 27, długość boku AB jest równa 8, a miara kąta CAB wynosi 60°.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Długość boku AC jest równa:

A. 4,5 B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. 13,5 D. $\frac{27\sqrt{2}}{8}$

Zadanie 239. 0–1 pkt

Równoległobok o bokach długości 5 i 3 ma kąt ostry α o takiej mierze, że wartość wyrażenia $\cos\alpha$ jest równa $\frac{2}{5}$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole tego równoległobokujest równe:

A. 6 B. $3\sqrt{21}$ C. 12 D. $6\sqrt{21}$

Zadanie 240. 0–1 pkt

W rombie o polu $\frac{25\sqrt{2}}{2}$ miara kąta ostrego rombu wynosi 45°.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Obwód tego rombu wynosi:

A. 5 B. $10\sqrt{2}$ C. 20 D. $20\sqrt{2}$

Zadanie 241. 0–1 pkt

Cosinus jednego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego wynosi $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Sinus drugiego kąta ostrego tego trójkąta jest równy:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

Zadanie 242. 0–1 pkt

Do końcowego ramienia kąta α należy punkt $P=(-2,3)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Suma sinusa i cosinusa kąta α jest równa $\frac{\sqrt{13}}{13}$.	P	F
2.	Odwrotność cosinusa kąta α wynosi $-\frac{2}{3}$.	P	F

Zadanie 243. 0–2 pkt

Uzasadnij, że wartość wyrażenia $\sin 60° + \cos 30° - \operatorname{tg} 60°$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 244. 0–1 pkt

Wiadomo, że kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Wartość wyrażenia $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ jest równa:

A.	$\frac{1}{4}$,	ponieważ dla każdego kąta α prawdziwa jest zależność	1.	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
B.	$-\frac{1}{4}$,		2.	$1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}$.
C.	1,		3.	$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

Zadanie 245. 0–1 pkt

Boki trójkąta ABC mają długości $|AB|=5$, $|BC|=6$ i $|AC|=8$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Cosinus najmniejszego kąta tego trójkąta jest równy:

A. $\frac{53}{80}$ B. $\frac{25}{32}$ C. $\frac{1}{20}$ D. $-\frac{1}{20}$

Zadania dłuższe

Zadanie 246. 0–2 pkt

Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta α, jeżeli do jego końcowego ramienia należy punkt $P=(-4, 6)$.

Zadanie 247. 0–2 pkt

Posługując się wzorem $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, oblicz $\cos 15°$.

Zadanie 248. 0–2 pkt

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 15 cm i 20 cm.

Zadanie 249. 0–2 pkt

Oblicz wartość wyrażenia $\sin 31° + \operatorname{tg} 54°$, wiedząc, że $\cos 59° = 0{,}5150$, a $\operatorname{tg} 36° = 0{,}7265$. Wynik podaj z dokładnością do 0,1.

Zadanie 250. 0–1 pkt

W trójkącie równobocznym ABC o obwodzie 12 wybrano na boku BC taki punkt D, że $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{1}{3}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Długość odcinka AD jest równa $\|AD\| = \sqrt{13}$.	P	F
2.	Promień okręgu opisanego na trójkącie ABD jest równy $\frac{2\sqrt{39}}{3}$.	P	F

Zadanie 251. 0–2 pkt

Wiadomo, że kąt α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{1}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

Zadanie 252. 0–2 pkt

W rozwartokątnym trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 5, a miara kąta przy podstawie wynosi 40°. Oblicz (w zaokrągleniu do części dziesiątych) średnicę okręgu opisanego na tym trójkącie. W obliczeniach wykorzystaj informację, że $\sin 80° = 0{,}98$.

Zadanie 253. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $\frac{\left(-2\cos 135° - \mathrm{tg}^2 120°\right)'}{\sin 150° - \cos 120°}$ należy do przedziału:

A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(-2, -1)$ D. $(2, 3)$

Zadanie 254. 0–2 pkt

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 4 cm i 8 cm. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych większego z kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 255. 0–3 pkt

Oblicz miary kątów β i γ trójkąta ABC, wiedząc, że dwa boki to $a = 6$, $c = 3$ i kąt naprzeciwko boku a wynosi $\alpha = 135°$.

Zadanie 256. 0–3 pkt

Oblicz obwód trójkąta, w którym boki to $a = 6$, $b = 4\sqrt{3}$, a kąt między nimi $\gamma = 30°$.

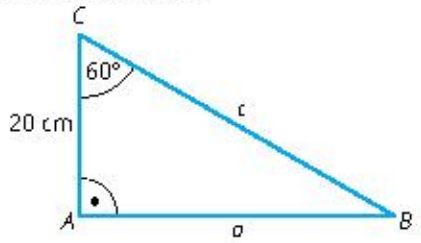
Zadanie 257. 0–3 pkt

Wyznacz przybliżoną miarę kąta ostrego α, jeśli:

a) $7\sin\alpha = 3$ b) $\frac{1}{3}\cos\alpha = \frac{2}{9}$ c) $2\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{10}$

Zadanie 258. 0–3 pkt

Na podstawie danych z rysunku oblicz obwód trójkąta ABC.



Zadanie 259. 0–3 pkt

Punkt $A = (-5, 10)$ należy do końcowego ramienia kąta α, a punkt $B = (2, 4)$ należy do końcowego ramienia kąta β. Oblicz wartość wyrażenia $2\cos\alpha + 3\sin\beta$.

Zadanie 260. 0–3 pkt

Oblicz wartość wyrażenia $(\cos 120° - \sin 150°) \cdot \operatorname{tg} 135°$.

Zadanie 261. 0–3 pkt

W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 10, a miara kąta, jaki tworzą ramiona AC i BC, wynosi 120°. Oblicz długość środkowej AD.

Zadanie 262. 0–3 pkt

Oblicz długości boków równoległoboku, którego przekątne o długości 6 i 8 tworzą kąt o mierze 60°.

Zadanie 263. 0–3 pkt

W trójkącie ABC dane są $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ oraz $|AC| = 8$. Wyznacz długość odcinka BC oraz promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 264. 0–3 pkt

Pole trójkąta równoramiennego jest równe 16, a kąt między ramionami ma miarę 30°. Oblicz obwód tego trójkąta.

Zadanie 265. 0–4 pkt

W równoramiennym trójkącie ABC podstawa AB jest równa 6, a wysokość CD poprowadzona na podstawę ma długość 4. W trójkącie tym poprowadzono środkową AE. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie ABE.

Zadanie 266. 0–5 pkt

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest siedem razy dłuższa od jednej z przyprostokątnych, a długość drugiej przyprostokątnej wynosi $8\sqrt{3}$. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w tym trójkącie. Podaj przybliżone miary tych kątów.

Zadanie 267. 0–4 pkt

W trójkącie rozwartokątnym ABC o bokach długości $|AB|=6\sqrt{2}$ i $|BC|=6\left(\sqrt{3}+1\right)$ poprowadzono z wierzchołka B kąta rozwartego wysokość BD, która podzieliła ten trójkąt na dwa trójkąty tak, że trójkąt ABD jest równoramienny. Oblicz różnicę długości promieni okręgu opisanego na trójkącie ABC i okręgu opisanego na trójkącie ABD.



Planimetria

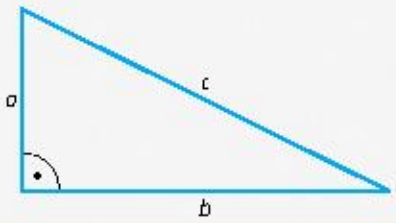
Teoria z przykładami

przypominam najważniejsze treści

Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2+b^2=c^2$$



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Oblicz długość przyprostokątnej, jeżeli dana jest długość przeciwprostokątnej $c=2\sqrt{5}$ cm oraz długość drugiej przyprostokątnej $b=2\sqrt{3}$ cm.

Rozwiązanie:

$\left(2\sqrt{5}\right)^2=a^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2$

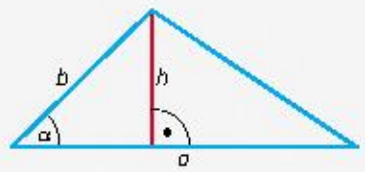
$a^2=20-12=8$, stąd $a=2\sqrt{2}$ (cm)

1 pkt – poprawne obliczenie długości przyprostokątnej
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Wzory na pole trójkąta

$P=\frac{1}{2}ah$

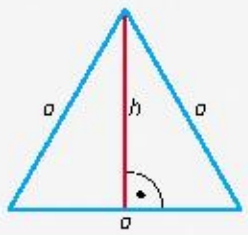
$P=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha$



Trójkąt równoboczny

Wysokość trójkąta równobocznego: $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Pole trójkąta równobocznego: $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Oblicz pole trójkąta równobocznego o boku długości $6\sqrt{2}$ cm.

Rozwiązanie:

$P=\frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=18\sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right)$

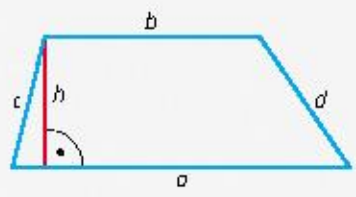
1 pkt – poprawne obliczenie pola trójkąta
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Czworokąty

Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole trapezu:

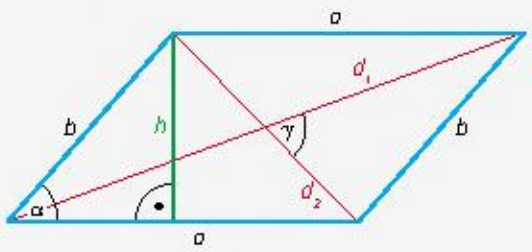
$P=\frac{a+b}{2}\cdot h$



Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole równoległoboku:

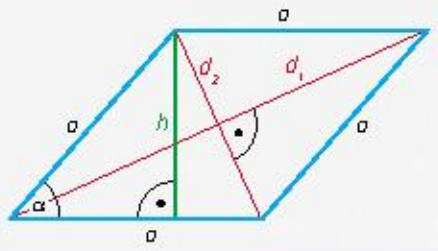
$P = ah$ $\qquad P = ab\sin\alpha$ $\qquad P = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma$



Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$ $\qquad P = ah$ $\qquad P = a^2 \sin\alpha$



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Oblicz pole rombu o boku długości $6\sqrt{2}$ cm oraz o kącie ostrym 60°.

Rozwiązanie:

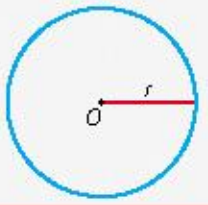
$$P = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \sin 60° = 72 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}\ (\text{cm}^2)$$

1 pkt – poprawne obliczenie pola rombu
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Koło

Pole koła o promieniu r wyraża się wzorem: $P = \pi r^2$.

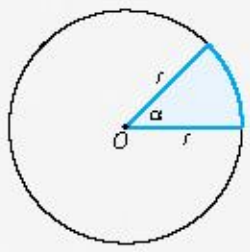
Obwód koła o promieniu r wyraża się wzorem: $l = 2\pi r$.



Wycinek koła

Długość łuku okręgu o promieniu r wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze α wyraża się wzorem: $L = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$.

Pole wycinka koła wyznaczonego przez kąt środkowy α wyraża się wzorem: $P = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$.



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Oblicz pole koła i długość łuku okręgu o promieniu 9 cm wyznaczonych przez kąt środkowy o mierze 120°.

Rozwiązanie:

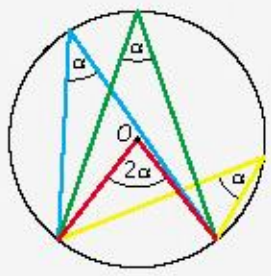
$P = \frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot 9^2 = 27\pi$ $\qquad L = \frac{120°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 9 = 6\pi$

2 pkt – poprawne obliczenie pola koła i długości łuku
1 pkt – poprawne obliczenie pola koła lub długości łuku
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Kąty w okręgu

Miara kąta środkowego w okręgu jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

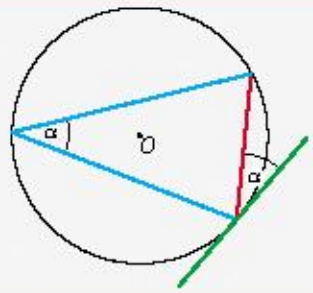
Kąt środkowy ma miarę 50°. Wyznacz miarę kąta wpisanego α opartego na tym samym łuku.

Rozwiązanie:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 50° = 25°$$

1 pkt – poprawne obliczenie miary kąta wpisanego α
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności (kąt dopisany do okręgu) ma miarę równą mierze kąta wpisanego opartego na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy.



PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Kąt wpisany okręgu oparty na łuku cięciwy wyznaczonym przez końce tej cięciwy ma miarę 35°. Jaką miarę ma kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności?

Rozwiązanie:

Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności ma miarę 35°.

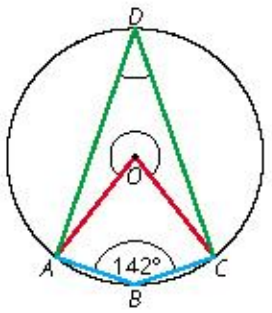
1 pkt – podanie poprawnej wartości miary kąta
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

uczęsię rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 268. 0–2 pkt

Punkty *A*, *B*, *C*, *D* należą do okręgu o środku *O*. Kąt wpisany *ABC* ma miarę 142° (patrz rysunek). Wyznacz miarę kąta *AOC* oraz miarę kąta *ADC*.



Zadanie 269. 0–1 pkt

Długość podstawy trójkąta równoramiennego wynosi $6\sqrt{3}$ cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest równa 6 cm. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wysokość opuszczona na ramię trójkąta jest równa:

A. $\frac{12\sqrt{21}}{7}$ cm B. $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ cm C. $\frac{12\sqrt{7}}{7}$ cm D. $\frac{12\sqrt{5}}{7}$ cm

Zadanie 270. 0–1 pkt

Punkty *A*, *B*, *C* należą do okręgu o środku *O*. Miara kąta między styczną do okręgu w punkcie *A* a cięciwą *AB* wynosi 26°. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Miarę kąta wpisanego *ACB* wynosi:

A. 13° B. 26° C. 39° D. 52°

Zadanie 271. 0–2 pkt

W trójkącie równoramiennym ramię jest dwa razy dłuższe od wysokości opuszczonej na podstawę. Oblicz pole tego trójkąta, wiedząc, że podstawa ma długość 6 cm.

Zadanie 272. 0–2 pkt

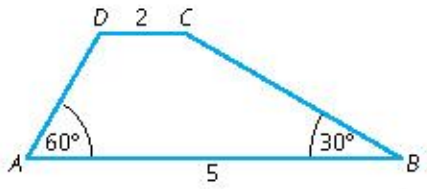
Pole trójkąta równoramiennego rozwartokątnego wynosi $50\sqrt{3}$ cm^2. Wyznacz miarę kąta rozwartego tego trójkąta, jeżeli jego ramię ma długość $10\sqrt{2}$ cm.

Zadanie 273. 0–2 pkt

Przekątne równoległoboku mają długości 10 cm i 12 cm, a miara kąta między nimi wynosi 30°. Oblicz pole tego równoległoboku.

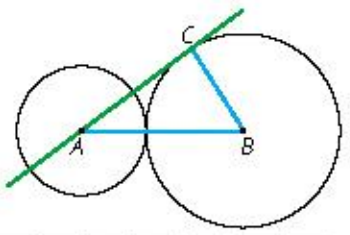
Zadanie 274. 0–5 pkt

Podstawy trapezu *ABCD* mają długości 5 cm i 2 cm, a miary kątów ostrych wynoszą odpowiednio 30° i 60° (patrz rysunek). Oblicz wysokość trapezu *ABCD*.



Zadanie 275. 0–2 pkt

Okrąg o środku w punkcie *A* i promieniu 2 cm oraz okrąg o środku w punkcie *B* i promieniu 3 cm są styczne zewnętrznie. Prosta styczna do okręgu o promieniu 3 cm w punkcie *C* przechodzi przez środek okręgu o promieniu 2 cm (patrz rysunek). Oblicz obwód trójkąta *ABC*.



Zadanie 276. 0–2 pkt

Oblicz pole pierścienia kołowego, którego obwód wewnętrzny wynosi 16π cm, a obwód zewnętrzny ma 40π cm.

Zadania dłuższe

Zadanie 277. 0–3 pkt

Oblicz pole sześciokąta foremnego, jeżeli średnica okręgu opisanego na tym sześciokącie ma długość 8 cm.

Zadanie 278. 0–1 pkt

Pole rombu jest równe 24 cm^2, a cosinus kąta ostrego wynosi $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

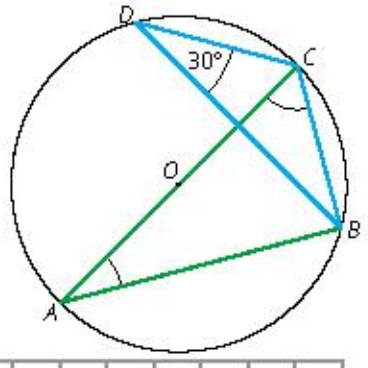
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Obwód tego rombu jest równy:

A. 12 cm B. 24 cm C. $12\sqrt{2}$ cm D. $24\sqrt{2}$ cm

Zadanie 279. 0–1 pkt

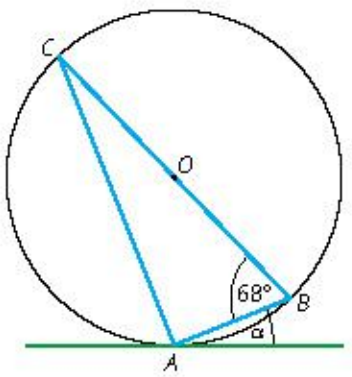
Punkty *A*, *B*, *C*, *D* należą do okręgu o środku *O*. Kąt wpisany *BCD* ma miarę 30° (patrz rysunek).
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Miara kąta *CAB* wynosi 60°.	P	F
2.	Kąt *ACB* ma miarę 30°.	P	F



Zadanie 280. 0–2 pkt

Punkty A, B, C należą do okręgu o środku O. Miara kąta wpisanego ABC wynosi 68°. Wyznacz miarę kąta α między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie A.



Zadanie 281. 0–1 pkt

Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ABC jest dwa razy dłuższa od drugiej, a wysokość opuszczona na przeciwprostokątną wynosi $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Dłuższa przyprostokątna trójkąta ABC ma długość $4\sqrt{5}$.	P	F
2.	Pole trójkąta ABC jest równe 16.	P	F

Zadanie 282. 0–1 pkt

Przekątna kwadratu *ABCD* jest o $\sqrt{2}$ dłuższa od jego boku.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Długość boku kwadratu *ABCD* wynosi:

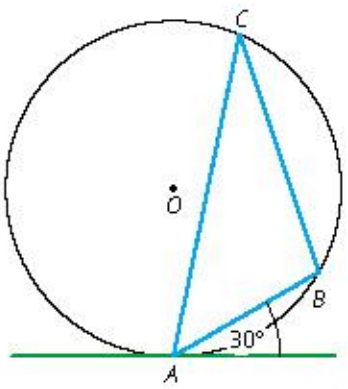
A. $\sqrt{2}$ B. $2-\sqrt{2}$ C. $2+\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

Zadanie 283. 0–4 pkt

Pole rombu wynosi 24 cm², a jedna z przekątnych ma długość 8 cm. Wyznacz sinus kąta ostrego tego rombu.

Zadanie 284. 0–3 pkt

W okręgu o promieniu 9 cm poprowadzono cięciwę *AB*. Kąt między tą cięciwą a styczną do okręgu w punkcie *A* wynosi 30°. Oblicz długość łuku wyznaczonego przez cięciwę *AB*.



Zadanie 285. 0–3 pkt

Oblicz pole sześciokąta foremnego, którego krótsza przekątna ma długość $6\sqrt{3}$ cm.

9

Geometria analityczna

Teoria z przykładami

przypominam najważniejsze treści

Równanie $y=ax+b$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$, to **równanie kierunkowe prostej**. Liczba a jest nazywana **współczynnikiem kierunkowym**.

Równaniem kierunkowym można opisać każdą prostą, która nie jest równoległa do osi y.

1. Dla $a\neq 0$ i $b\in\mathbb{R}$ prosta o równaniu kierunkowym $y=ax+b$ jest nachylona do dodatniej półosi osi x pod kątem α, takim, że $a=\operatorname{tg}\alpha$. Prosta ta przecina oś Y w punkcie $(0,\ b)$.
2. Dla $a=0$ i $b\neq 0$ równanie kierunkowe prostej $y=ax+b$ przyjmuje postać: $y=b$, a prosta opisana tym równaniem jest równoległa do osi X.
3. Prosta prostopadła do osi X nie jest wykresem funkcji liniowej, a więc nie można jej opisać równaniem kierunkowym. Tę prostą możemy opisać np. równaniem $x=k$, dla $k\in\mathbb{R}$.

Równanie $Ax+By+C=0$, gdzie $A,B,C\in\mathbb{R}$ oraz współczynniki A i B nie są jednocześnie równe 0, jest nazywane **równaniem ogólnym prostej**.

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład **0–1 pkt**

Przekształć równanie kierunkowe prostej $y=-3x+2$ do postaci ogólnej.

Rozwiązanie:

Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę. Otrzymujemy: $-3x-y+2=0$ lub $3x+y-2=0$

1 pkt – poprawne przekształcenie równania do postaci ogólnej
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykład **0–1 pkt**

Przekształć równanie ogólne prostej $3x+2y-6=0$ do postaci kierunkowej.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy y z równania. $2y=-3x+6$. Stąd: $y=-\frac{3}{2}x+3$

1 pkt – poprawne przekształcenie równania do postaci kierunkowej
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Równaniem kierunkowym prostej o danym współczynniku kierunkowym a, która przechodzi przez punkt $P=(x_0,\ y_0)$, jest: $y=a(x-x_0)+y_0$.

Równaniem kierunkowym prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A=(x_A,\ y_A)$ oraz $B=(x_B,\ y_B)$, jest:

$$y-y_A=a(x-x_A),\ \text{gdzie}\ a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A},\ \text{gdy}\ x_B\neq x_A$$

Równaniem ogólnym prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A=(x_A,\ y_A)$ oraz $B=(x_B,\ y_B)$, jest:

$$(y-y_A)(x_B-x_A)-(y_B-y_A)(x-x_A)=0$$

Proste równoległe:

1. Dwie proste o równaniach kierunkowych: $y=a_1x+b_1$ oraz $y=a_2x+b_2$, są równoległe wówczas, gdy mają jednakowe współczynniki kierunkowe ($a_1=a_2$).
2. Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x+B_1y+C_1=0$ oraz $A_2x+B_2y+C_2=0$, są równoległe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1=0$.

Proste prostopadłe:

1. Dwie proste o równaniach kierunkowych: $y=a_1x+b_1$ oraz $y=a_2x+b_2$, są prostopadłe wówczas, gdy współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a_1\cdot a_2=-1$.
2. Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x+B_1y+C_1=0$ oraz $A_2x+B_2y+C_2=0$, są prostopadłe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$.

Odległość między punktami A i B jest równa długości odcinka AB. **Długość odcinka AB** o końcach w punktach $A=(x_A,\ y_A)$ i $B=(x_B,\ y_B)$ jest równa: $|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Przykład

Jeśli dane są punkty $A=(4,\ 3)$ i $B=(1,\ -1)$, to $|AB|=\sqrt{(1-4)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$.

Okręgiem o środku S i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów P płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r. Równanie $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ jest **równaniem okręgu** o środku $S=(a,\ b)$ i promieniu $r>0$ w postaci kanonicznej.

Przykład

Równanie $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ jest równaniem okręgu o środku $S=(2,-1)$ i promieniu $r=5$.

Odległość punktu od prostej

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej l o równaniu ogólnym $Ax+By+C=0$ wyraża się za pomocą wzoru:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Oblicz odległość punktu $P(-1, 2)$ od prostej $k: 5x-12y+3=0$.

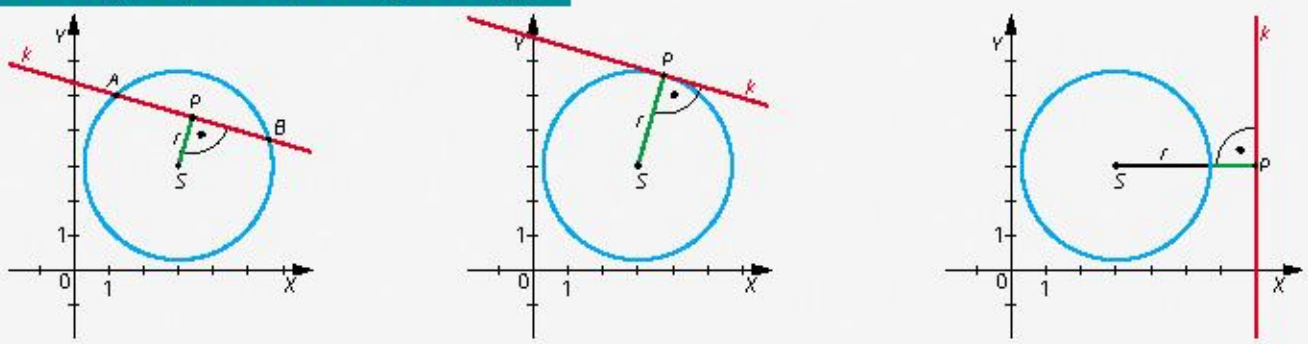
Rozwiązanie:

Obliczamy odległość punktu P od prostej k:

$$d=\frac{|5\cdot(-1)+(-12)\cdot 2+3|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|-5-24+3|}{\sqrt{169}}=\frac{26}{13}=2$$

1 pkt – poprawne obliczenie odległości punktu od prostej
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Punkty wspólne prostej i okręgu



$|SP|<r$ $|SP|=r$ $|SP|>r$

Prosta może mieć **dwa punkty wspólne** z okręgiem, czyli być **sieczną** okręgu. Odległość siecznej od środka okręgu jest mniejsza od jego promienia.

Prosta może mieć **jeden punkt wspólny** z okręgiem, czyli być **styczną** do okręgu. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa jego promieniowi.

Prosta może **nie mieć punktów wspólnych** z okręgiem (są rozłączne). Odległość prostej od środka okręgu jest większa od jego promienia.

Przykład

Ile punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie S i promieniu 5 ma prosta l?
a) $S=(1,-3)$, $l: 6x+8y-1=0$ b) $S=(-5,\ 1)$, $l: x-3y-12=0$ c) $S=(1,\ 4)$ $l: 3x+4y+6=0$

Rozwiązanie:

a) Wyznaczamy odległość punktu S od prostej l:

$$d=\frac{|6\cdot 1+8\cdot(-3)-1|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{|-19|}{\sqrt{100}}=\frac{19}{10}=1{,}9<5$$

Odległość środka okręgu jest mniejsza od promienia okręgu, więc okrąg i prosta mają dwa punkty wspólne.

b) Wyznaczamy odległość punktu S od prostej l:

$$d=\frac{|1\cdot(-5)+(-3)\cdot 1-12|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|-20|}{\sqrt{10}}=\frac{20\sqrt{10}}{10}=2\sqrt{10}>5$$

Odległość środka okręgu jest większa od promienia okręgu, więc okrąg i prosta nie mają punktów wspólnych.

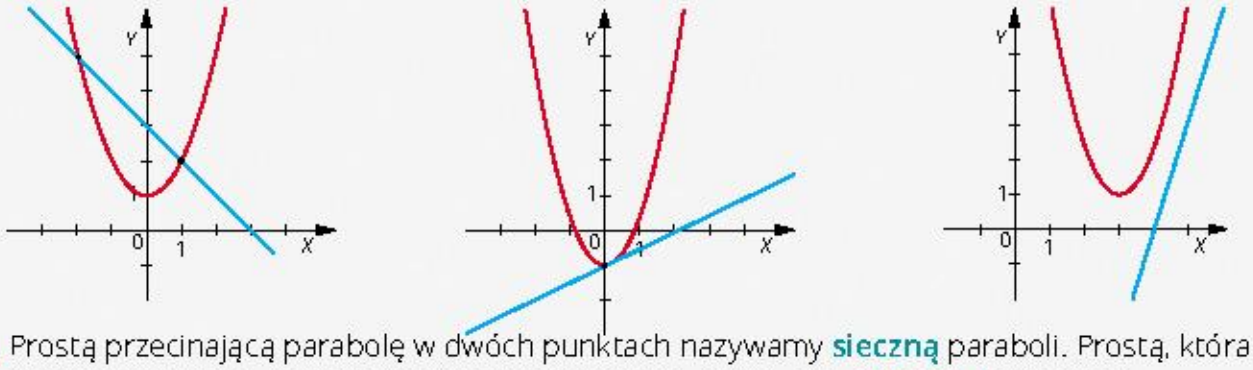
c) Wyznaczamy odległość punktu S od prostej l:

$$d=\frac{|3\cdot 1+4\cdot 4+6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|25|}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5$$

Odległość środka okręgu jest równa promieniowi okręgu, więc okrąg i prosta mają jeden punkt wspólny.

Punkty wspólne paraboli i okręgu

Prosta i parabola mogą mieć dwa punkty wspólne, jeden wspólny lub nie mieć punktów wspólnych.



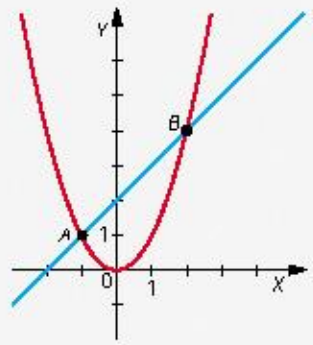
Prostą przecinającą parabolę w dwóch punktach nazywamy **sieczną** paraboli. Prostą, która nie jest równoległa do osi OY i ma z parabolą dokładnie jeden punkt wspólny, nazywamy **styczną** do paraboli.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Rozwiąż układ równań i podaj jego interpretację geometryczną.

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases}$$



Rozwiązanie:

Porównujemy prawe strony równań:

$x^2=x+2$

$x^2-x-2=0$, stąd $x=-1$ lub $x=2$

Zatem rozwiązaniem układu są dwie pary liczb:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

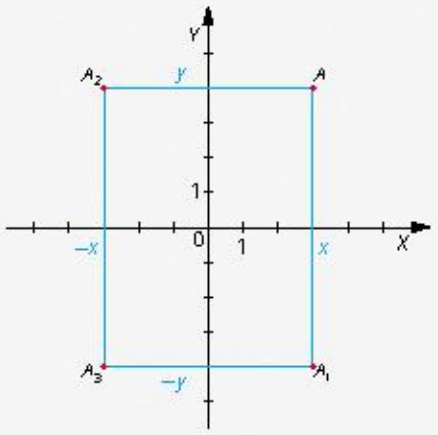
Parabola $y=x^2$ i prosta $y=x+2$ mają dwa punkty wspólne $A=(-1,1)$ i $B=(2,4)$.

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań i podanie jego interpretacji geometrycznej
1 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań lub podanie jego interpretacji geometrycznej
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Symetria osiowa i środkowa

Symetrią osiową względem prostej l nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem prostej. Prostą l nazywamy **osią symetrii**.

Symetrią środkową względem punktu O nazywamy przekształcenie, które każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkowuje punkt do niego symetryczny względem punktu O. Punkt O nazywamy **środkiem symetrii**.



Punktem symetrycznym do punktu $A=(x, y)$ względem osi OX układu współrzędnych jest punkt $A_1=(x, -y)$.

Punktem symetrycznym do punktu $A=(x, y)$ względem osi OY układu współrzędnych jest punkt $A_2=(-x, y)$.

Punktem symetrycznym do punktu $A=(x, y)$ względem początku układu współrzędnych jest punkt $A_3=(-x, -y)$.

Przykład

Podaj współrzędne punktu symetrycznego do punktu $P=(-2, 5)$:

a) względem osi OX b) względem osi OY c) względem początku układu współrzędnych

Rozwiązanie:

a) Obrazem punktu $P=(-2, 5)$ w symetrii względem osi OX jest punkt $P_1=(-2, -5)$.

b) Obrazem punktu $P=(-2, 5)$ w symetrii względem osi OY jest punkt $P_2=(2, 5)$.

c) Obrazem punktu $P=(-2, 5)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt $P_3=(2, -5)$.

uczę się rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 286. 0–1 pkt

Punkt $O=(3,2)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $B=(5,5)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Punkt A ma współrzędne:

A. $(1,-1)$ B. $(-1,1)$ C. $(7,8)$ D. $(8,7)$

Zadanie 287. 0–1 pkt

Dany jest punkt $A=(-4,2)$ i prosta l: $3x-4y+10=0$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Odległość punktu A od prostej l jest równa:

A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 4

Zadanie 288. 0–1 pkt

Dany jest okrąg K o równaniu $(x-1)^2+(y-3)^2=5$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Okrąg K i oś OX:

A. mają jeden punkt wspólny
B. mają dwa punkty wspólne
C. nie mają punktów wspólnych
D. mają nieskończenie wiele punktów wspólnych

Zadanie 289. 0–1 pkt

Prosta k: $y=ax+b$ jest nachylona do dodatniej półosi OX pod kątem $60°$ i przecina oś OY w punkcie o współrzędnych $(0,2)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Równaniem kierunkowym tej prostej jest:

A. $y=\sqrt{3}x+2$ B. $y=2x+\sqrt{3}$ C. $y=-\sqrt{3}x-2$ D. $y=-2x-\sqrt{3}$

Zadanie 290. 0–1 pkt

Dane są proste k: $x+y-2=0$, l: $y=-x$ oraz n: $y=-x+2$.

Wskaż zdanie prawdziwe. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. Proste k i l są prostopadłe.
B. Proste l i n pokrywają się.
C. Proste k i n mają nieskończenie wiele punktów wspólnych.
D. Proste k, l i n mają dokładnie jeden punkt wspólny.

Zadanie 291. 0–1 pkt

Dany jest okrąg K o równaniu $(x+6)^2+(y-8)^2=25$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Odległość środka okręgu K od osi OY jest równa:

A. 8 B. 5 C. 6 D. 7

Zadanie 292. 0–2 pkt

Napisz równanie prostej $y = ax + b$ o danym współczynniku $b = -5$ i przechodzącej przez punkt $A = (2, -3)$.

Zadanie 293. 0–2 pkt

Oblicz odległość punktu $M = (6, -1)$ od prostej $l: y = \frac{1}{7}x - 4$.

Zadanie 294. 0–2 pkt

Oblicz odległość prostych równoległych o równaniach $5x + 12y - 10 = 0$ i $10x + 24y + 19 = 0$.

Zadanie 295. 0–2 pkt

Oblicz odległość cięciwy wyznaczonej przez punkty wspólne prostej l o równaniu $15x-20y-17=0$ i okręgu K o równaniu $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ od środka tego okręgu.

Zadanie 296. 0–1 pkt

Wiadomo, że prosta o równaniu $(m^2+2m-3)x+(m-1)y+2=0$ jest równoległa do osi OX.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Wartość parametru m jest równa:

A.	1	ponieważ m jest rozwiązaniem warunków zapisanych w układzie równań	1.	$\begin{cases} m^2+2m-3=0 \\ m-1=0 \end{cases}$
B.	-3		2.	$\begin{cases} m^2+2m-3\neq 0 \\ m-1=0 \end{cases}$
C.	1 lub -3		3.	$\begin{cases} m^2+2m-3=0 \\ m-1\neq 0 \end{cases}$

Zadanie 297. 0–1 pkt

Dane są punkty $A=(-8, 3)$ i $B=(5, 7)$. Punkt M jest środkiem odcinka AB.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Obrazem punktu M w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt:

A. $M'=\left(-\frac{3}{2}, -5\right)$ B. $M'=\left(\frac{3}{2}, -5\right)$ C. $M'=\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$ D. $M'=\left(\frac{3}{2}, 5\right)$

Zadanie 298. 0–2 pkt

Określ liczbę punktów wspólnych okręgu o środku w punkcie $S=(2,1)$ i promieniu 5 z prostą l o równaniu $3x-4y+5=0$.

Zadanie 299. 0–1 pkt

Prosta jest określona równaniem ogólnym $2x-y+2=0$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wobec tego prostą prostopadłą do danej prostej jest prosta:

A. $2x-y=0$ B. $x-2y+5=0$ C. $x+2y+7=0$ D. $2x+y-1=0$

Zadanie 300. 0–1 pkt

Dane są proste o równaniach kierunkowych $y=x-4$ i $y=-x+6$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wspólny punkt tych prostych ma współrzędne $(5,1)$.	P	F
2.	Te proste przecinają się pod innym kątem niż $90°$.	P	F

Zadanie 301. 0–3 pkt

Napisz równanie okręgu o promieniu 3 i stycznego do obu osi układu współrzędnych. Ile jest takich okręgów?

Zadanie 302. 0–2 pkt

Dany jest punkt $A=(2, 34)$. Punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi OX, a punkt C jest symetryczny do punktu B względem osi OY. Wyznacz współrzędne punktu C. Czy punkt C jest symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych?

Zadanie 303. 0–1 pkt

Dane są punkty $A=(-1, -2)$ i $B=(1, 6)$.

Dokończ zdania. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Równaniem ogólnym prostej przechodzącej przez te punkty jest:

A. $-4x+y-2=0$ B. $x-1=0$ C. $-2x+y-4=0$ D. $2x-y=0$

Zadania dłuższe

Zadanie 304. 0–1 pkt

Okrąg o środku S i promieniu r jest styczny do osi OX, a punkt S należy do osi OY.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Środkiem okręgu spełniającego warunki zadania może być punkt o współrzędnych $(0, 0)$.	P	F
2.	Jeśli promień okręgu jest równy 4, to warunki zadania spełniają okręgi o równaniach $x^2+(y-4)^2=16$ i $x^2+(y+4)^2=16$.	P	F

Zadanie 305. 0–1 pkt

Dany jest okrąg określony równaniem $(x+1)^2+(y-2)^2=36$ oraz punkt $P=(4,-3)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Równaniem okręgu współśrodkowego z danym okręgiem i przechodzącego przez punkt P jest:

A. $(x+1)^2+(y-2)^2=26$ B. $(x+1)^2+(y-2)^2=34$

C. $(x+1)^2+(y-2)^2=50$ D. $(x+1)^2+(y-2)^2=17$

Zadanie 306. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odległość początku układu współrzędnych od prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}x+2$ jest równa:

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

Zadanie 307. 0–2 pkt

Punkty $A=(1, 3)$, $B=(5, 5)$ i $C=(m, 0)$ są współliniowe. Wyznacz wartość m.

Zadanie 308. 0–2 pkt

Punkt $M=(3,-5)$ jest wierzchołkiem równoległoboku $KLMN$, którego bok KL zawiera się w prostej l o równaniu $y=2x+4$.

Oblicz długość wysokości opuszczonej z punktu M na prostą l.

Zadanie 309. 0–2 pkt

Określ liczbę punktów wspólnych okręgu o równaniu $(x+4)^2+(y-3)^2=16$ z osiami układu współrzędnych.

Zadanie 310. 0–1 pkt

Przekątne w kwadracie $ABCD$ przecinają się w punkcie $O=(-3,0)$, a wierzchołek A ma współrzędne $A=(1,2)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Równaniami prostych zawierających przekątne tego kwadratu są:

A. $y=\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}$ i $y=2x-6$

B. $y=\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$ i $y=2x+6$

C. $y=\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$ i $y=-2x-6$

D. $y=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$ i $y=-2x+6$

Zadanie 311. 0–1 pkt

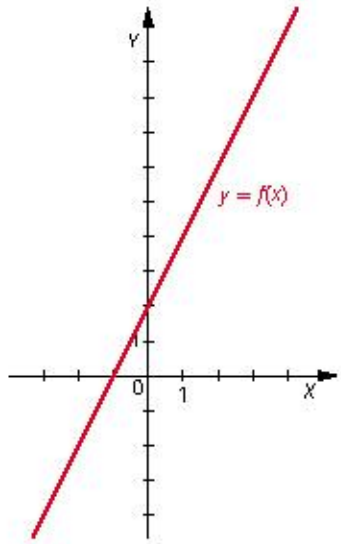
Dany jest okrąg K o równaniu $(x-1)^2+(y+5)^2=18$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Okrąg K i oś OX:
A. mają jeden punkt wspólny
B. mają dwa punkty wspólne
C. nie mają punktów wspólnych
D. mają nieskończenie wiele punktów wspólnych

Zadanie 312. 0–2 pkt

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y=f(x)$, której miejscem zerowym jest liczba -1 oraz $f(0)=2$.

Wyznacz wzór funkcji h, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem osi OY.



Zadanie 313. 0–3 pkt

Trójkąt jest ograniczony osiami układu współrzędnych i prostą o równaniu $2x+5y-10=0$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 314. 0–3 pkt

Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB o końcach $A=(-7, 4)$ i $B=(1, -2)$.

Zadanie 315. 0–3 pkt

Trzema wierzchołkami równoległoboku $ABCD$ są punkty $A=(1,3)$, $C=(7,5)$ i $D=(4,11)$. Wyznacz długości przekątnych tego równoległoboku.

Zadanie 316. 0–3 pkt

Dane są punkty $A=(1,5)$ i $B=(-2,8)$. Wyznacz równanie prostej będącej obrazem prostej AB w symetrii względem początku układu współrzędnych.

Zadanie 317. 0–3 pkt

Wyznacz wzór funkcji liniowej h, której wykres jest symetryczny do wykresu funkcji $f(x)=5-x$ względem osi OX. Rozwiąż nierówność $h(x)\geq -2$.

Zadanie 318. 0–3 pkt

Prosta o równaniu $x-y+2=0$ przecina okrąg, którego środkiem jest początek układu współrzędnych w punktach A i B. Oblicz długość cięciwy AB, jeśli promień okręgu jest równy $2\sqrt{5}$.

Zadanie 319. 0–3 pkt

Na prostej o równaniu $x+y-2=0$ wyznacz punkt B, który leży najbliżej punktu $A=(1,-2)$.

Zadanie 320. 0–3 pkt

Wyznacz równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x+3)^2+(y-2)^2=9$ przechodzącej przez punkt $P=(-6,0)$.

Zadanie 321. 0–4 pkt

Kolejnymi trzema wierzchołkami rombu $ABCD$ są punkty $A=(-1,0)$, $B=(3,6)$ i $C=(7,0)$. Wyznacz pole tego rombu.

Zadanie 322. 0–5 pkt

Punkty $A=(5,1)$ i $B=(-2,2)$ są dwoma wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C należy do osi OX, a pole trójkąta ABC jest równe 10. Wyznacz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta.

Zadanie 323. 0–5 pkt

Punkty $A=(-4,-1)$, $B=(4,5)$ i $C=(1,9)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wyznacz wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C oraz oblicz jego pole.

10

Stereometria

Teoria z przykładami

przypominam najważniejsze treści

W przestrzeni proste mają następujące położenia:

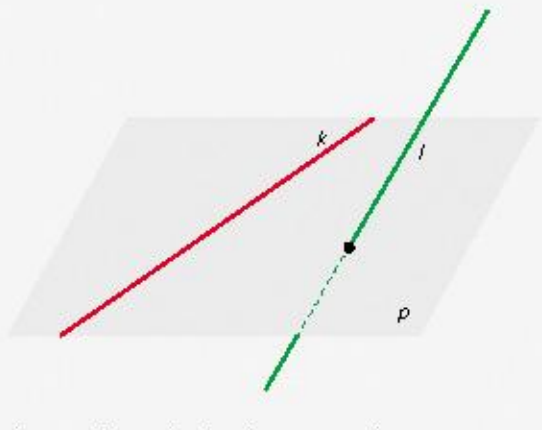
1. **proste równoległe** – leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub pokrywają się:



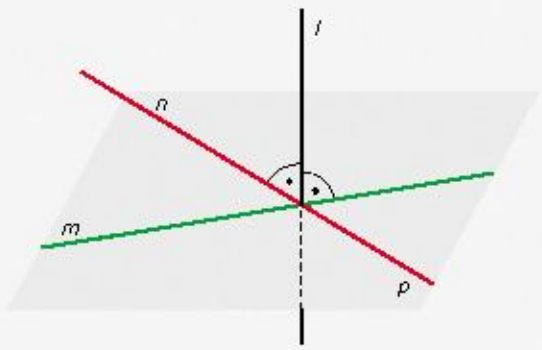
2. **proste przecinające się** – leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny:



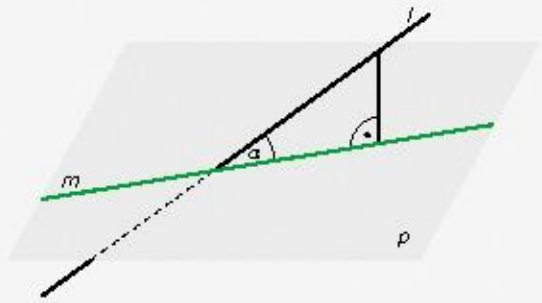
3. **proste skośne** – nie leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych:



Jeżeli prosta l jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych m i n zawartych w płaszczyźnie P, to jest ona prostopadła do płaszczyzny P.

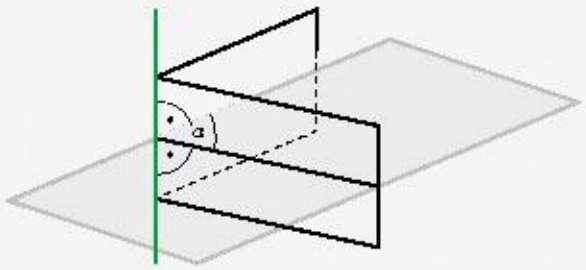


Kąt między prostą a płaszczyzną, to kąt ostry, jaki ta prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę.



Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z tych części, łącznie z półpłaszczyznami, nazywamy **kątem dwuściennym**, a półpłaszczyzny – ścianami kąta dwuściennego.

Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego otrzymanego jako przekrój kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi.



W graniastosłupach możemy wyznaczać i obliczać kąty między odcinkami i między ścianami.

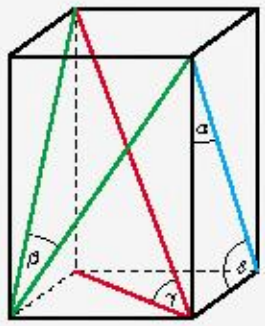
Na rysunku widzimy:

α – kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną,

β – kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych,

γ – kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną podstawy,
kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy,

δ – kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy.

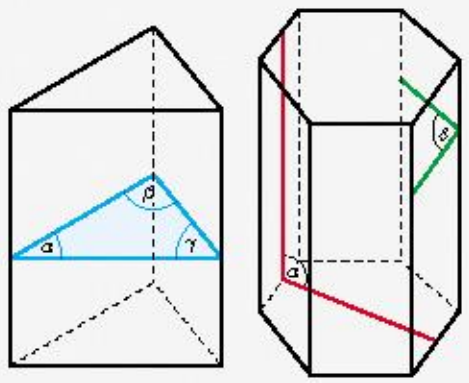


Kąty między ścianami bocznymi

Na rysunku widzimy:

α – kąt między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy,

δ – kąt między ścianami bocznymi.

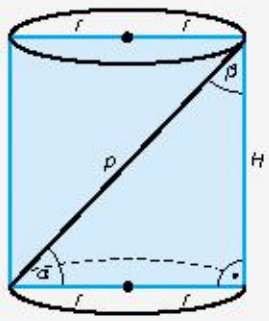


Kąt między odcinkami i kąt między odcinkami a płaszczyznami w walcach i stożkach

Na rysunkach przedstawiono walec i stożek z narysowanymi przekrojami osiowymi.

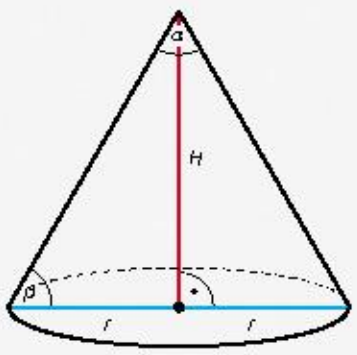
α – kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego do podstawy walca

β – kąt między przekątną p przekroju osiowego a tworzącą walca

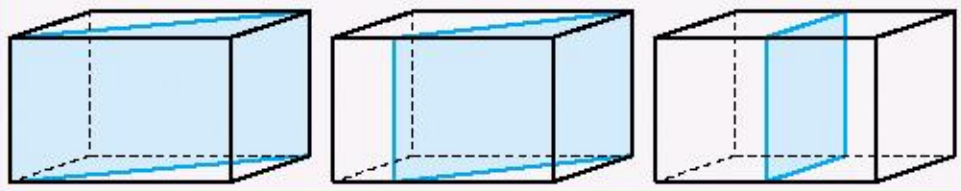
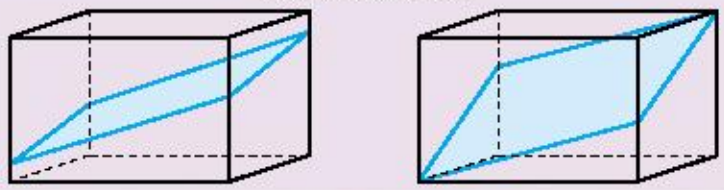
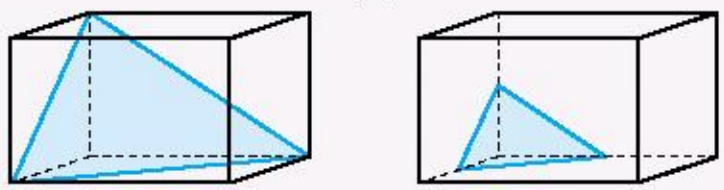
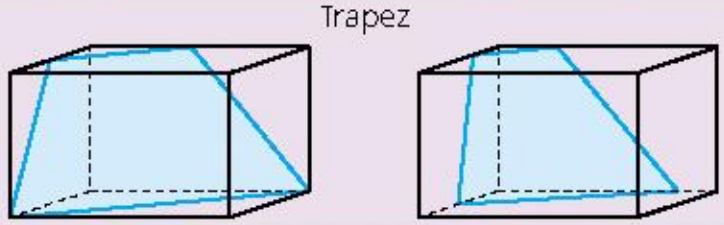
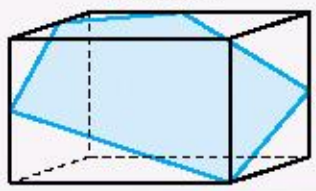
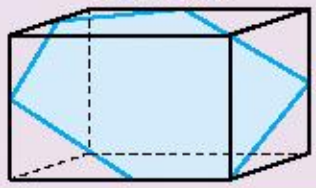


α – kąt rozwarcia stożka

β – kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy



Przekrojem prostopadłościanu daną płaszczyzną nazywamy część wspólną prostopadłościanu i tej płaszczyzny. Przekrój prostopadłościanu płaszczyzną mającą punkty wspólne z tym prostopadłościanem jest wielokątem.

Opis sposobu poprowadzenia płaszczyzny przekroju prostopadłościanu	Rysunek i nazwa figury, która jest przekrojem
Przekrój płaszczyzną prostopadłą do dowolnej ze ścian prostopadłościanu.	Prostokąt 
Przekrój prostopadłościanu płaszczyzną przecinającą cztery równoległe krawędzie.	Równoległobok 
Przekrój płaszczyzną przechodzącą przez trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka.	Trójkąt 
Przekrój płaszczyzną przecinającą dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka oraz dwie krawędzie równoległe do nich.	Trapez 
Przekrój płaszczyzną przecinającą dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, dwie krawędzie prostopadłe do nich oraz wierzchołek przeciwległy danemu.	Pięciokąt 
Przekrój płaszczyzną przecinającą dwie krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, dwie krawędzie prostopadłe do nich oraz dwie krawędzie równoległe do krawędzi wychodzących ze wspólnego wierzchołka.	Sześciokąt 

Objętości i pola powierzchni brył geometrycznych

Graniastosłup

Jeśli P_p jest polem podstawy, P_b – polem powierzchni bocznej i H – wysokością graniastosłupa, to:

- pole powierzchni całkowitej graniastosłupa: $P_c = 2P_p + P_b$,
- objętość graniastosłupa: $V = P_p \cdot H$.

Ostrosłup

Jeśli P_p jest polem podstawy, P_b – polem powierzchni bocznej i H – wysokością ostrosłupa, to:

- pole powierzchni całkowitej ostrosłupa: $P_c = P_p + P_b$,
- objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$.

Walec

Jeżeli promień podstawy walca wynosi r, wysokość – H, to:

- pole powierzchni bocznej walca: $P_b = 2\pi rH$,
- pole powierzchni całkowitej walca: $P_c = 2\pi r(r + H)$,
- objętość walca: $V = \pi r^2 H$.

Stożek

Jeżeli promień podstawy walca wynosi r, wysokość – H, tworząca – l to:
· pole powierzchni bocznej stożka: $P_b = \pi r l$,
· pole powierzchni całkowitej stożka: $P_c = \pi r(r + l)$,
· objętość stożka: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

Kula

Jeżeli promień kuli wynosi R, to:
· pole powierzchni kuli (sfery): $P = 4\pi R^2$,
· objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład **0–1 pkt**

Dane są dwa prostopadłościany podobne: B_1 oraz B_2. Objętość prostopadłościanu B_1 jest równa V, a objętość prostopadłościanu B_2 jest równa $27V$. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu B_1 jest równe P.
Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu B_2 jest równe

A.	$27P$,	ponieważ stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy	1.	stosunkowi objętości tych prostopadłościanów.
B.	$9P$,		2.	pierwiastkowi kwadratowemu ze stosunku objętości tych prostopadłościanów.
C.	$3\sqrt{3}P$,		3.	kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.

Rozwiązanie:

Obliczamy skalę podobieństwa tych prostopadłościanów, korzystając z ilorazu ich objętości. Otrzymujemy: $k^3 = \frac{27V}{V} = 27$, więc $k = 3$.

Stosunek pól powierzchni całkowitych prostopadłościanów podobnych jest równy kwadratowi stosunku długości odcinków odpowiadających w obu prostopadłościanach.

Otrzymujemy $\frac{P_{B_2}}{P} = k^2 = 9$, więc $P_{B_2} = 9P$.

Odpowiedź: B3

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Przykład **0–1 pkt**

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego przekrój płaszczyzną przechodzącą przez wysokości przeciwległych ścian bocznych jest trójkątem równobocznym o polu $25\sqrt{3}$ cm^2.

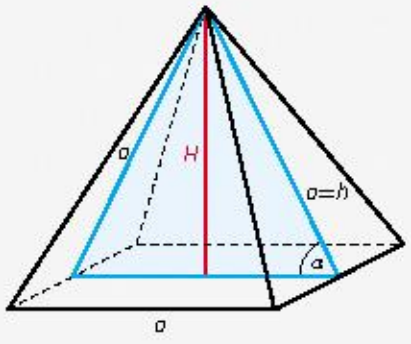
Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–G.
1. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:
A. $10\sqrt{3}$ cm
B. $5\sqrt{3}$ cm
C. 5 cm
D. 10 cm
2. Miara kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi:
E. 30°
F. 45°
G. 60°

Rozwiązanie:

Sporządzamy rysunek pomocniczy. Stosujemy oznaczenia jak na rysunku.

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta równobocznego, wyznaczamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa (jednocześnie wysokości ściany bocznej ostrosłupa).

Otrzymujemy: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$, stąd $a = 10$ cm.



Obliczamy wysokość ostrosłupa, korzystając z wzoru na wysokość trójkąta równobocznego. Otrzymujemy:
$H = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm – odpowiedź B

Kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest kątem trójkąta będącego przekrojem (trójkąta równobocznego), a więc ma miarę 60°. – odpowiedź G

Odpowiedź: BG

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Dwie bryły są podobne, jeśli odległości między punktami jednej bryły są proporcjonalne do odległości między odpowiednimi punktami drugiej bryły.

Stosunek odległości między odpowiednimi punktami brył podobnych nazywamy **skalą podobieństwa**.

Stosunek pól powierzchni brył podobnych
Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa k, to stosunek pól powierzchni tych brył jest równy k^2.

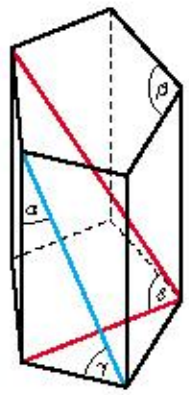
Stosunek objętości brył podobnych
Jeśli skala podobieństwa brył podobnych jest równa k, to stosunek objętości tych brył jest równy k^3.

uczęsię rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 324. 0–1 pkt

Na rysunku jest przedstawiony graniastosłup prawidłowy pięciokątny z zaznaczonymi kątami.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



1.	Kąt między przekątną ściany bocznej a płaszczyzną podstawy to kąt γ.	P	F
2.	Kąt między przekątną graniastosłupa a ścianą boczną to kąt δ.	P	F

Zadanie 325. 0–1 pkt

Przekrojem osiowym walca jest kwadrat o boku 4 cm.
Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–G.
325.1. Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe:
A. 16 cm^2 B. 4π cm^2 C. 16π cm^2 D. 8π cm^2
325.2. Miara kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego do płaszczyzny podstawy wynosi:
E. 30° F. 45° G. 60°

Zadanie 326.

Dane są dwie kule K_1 i K_2 o polach powierzchni całkowitych odpowiednio równych P_1 i P_2 oraz objętościach odpowiednio równych V_1 i V_2. Stosunek promieni tych kul jest równy 3 : 1, a suma ich objętości wynosi $\frac{896\pi}{3}$ cm^3.

Zadanie 326.1. 0–1 pkt

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej stosunek pól powierzchni P_1 i P_2.

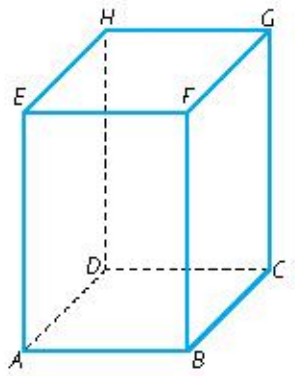
.....

Zadanie 326.2. 0–3 pkt

Oblicz objętość każdej kuli.

Zadanie 327. 0–1 pkt

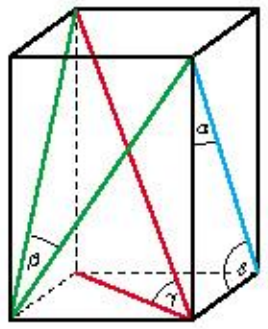
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
W graniastosłupie na rysunku krawędzie *EF* i *DH* są:
A. równoległe B. prostopadłe C. skośne D. przecinające się



Zadanie 328. 0–1 pkt

Na rysunku jest przedstawiony graniastosłup czworokątny z zaznaczonymi kątami.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Kąt między przekątnymi sąsiednich ścian to kąt α.	P	F
2.	Kąt między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną podstawy to kąt γ.	P	F



Zadanie 329. 0–1 pkt

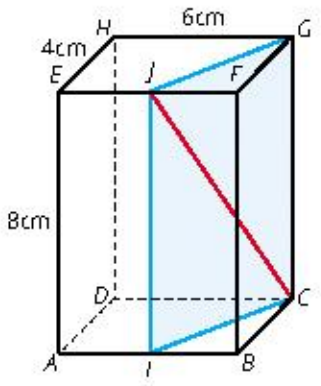
Obwód koła wielkiego kuli jest równy 8π cm.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole powierzchni tej kuli jest równe:
A. 64π cm^2 B. 16π cm^2 C. 4π cm^2 D. 20π cm^2

Zadanie 330. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi tak, aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.
Skala podobieństwa dwóch kul jest równa 2, gdy stosunek:
A. długości promieni tych kul jest równy 4.
B. pól powierzchni tych kul jest równy 4.
C. objętości tych kul jest równy 8.
D. pola koła wielkiego pierwszej kuli do pola koła wielkiego drugiej kuli jest równy 2.
E. obwodu koła wielkiego pierwszej kuli do obwodu koła wielkiego drugiej kuli jest równy 4.
F. średnicy koła wielkiego pierwszej kuli do średnicy koła wielkiego drugiej kuli jest równy 8.

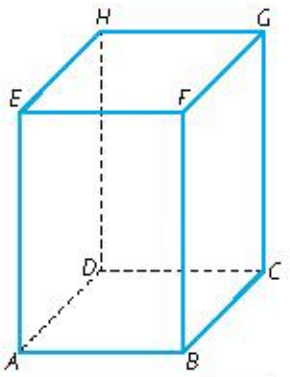
Zadanie 331. 0–2 pkt

Prostopadłościan $ABCDEFGH$ przecięto płaszczyzną prostopadłą do podstawy $ABCD$ przechodzącą przez wierzchołki C i G oraz punkty I, J, które dzielą każdą z krawędzi AB i EF na połowy (patrz rysunek). Oblicz długość przekątnej JC tego przekroju, wiedząc, że długości krawędzi prostopadłościanu są równe: $|AB| = 6$ cm, $|AD| = 4$ cm i $|AE| = 8$ cm.



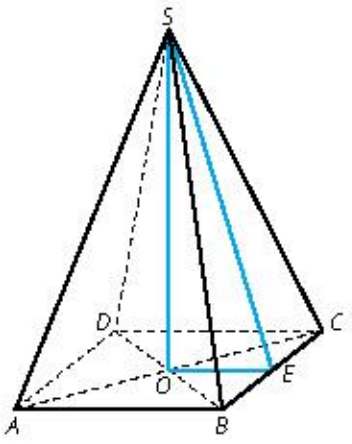
Zadanie 332. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
W graniastosłupie na rysunku krawędzie EF i DC są:
A. równoległe B. prostopadłe C. skośne D. przecinające się



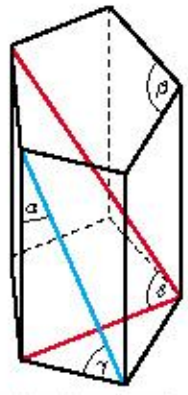
Zadanie 333. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
W ostrosłupie na rysunku krawędzie AB i CS są:
A. równoległe
B. prostopadłe
C. skośne
D. przecinające się



Zadanie 334. 0–1 pkt

Na rysunku jest przedstawiony graniastosłup prawidłowy pięciokątny z zaznaczonymi kątami.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.



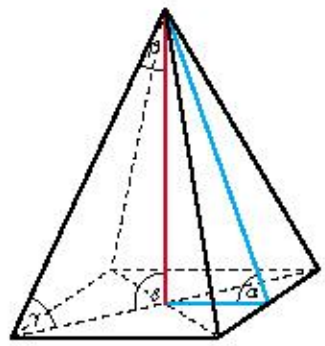
1.	Kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną to kąt α.	P	F
2.	Kąt wewnętrzny podstawy to kąt β.	P	F

Zadanie 335. 0–2 pkt

Wyznacz miarę kąta dwuściennego między ścianami bocznymi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.

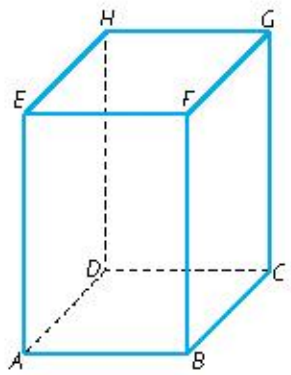
Zadanie 336. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
W ostrosłupie na rysunku kąt między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy to kąt:
A. α B. β C. γ D. δ



Zadanie 337. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
W prostopadłościanie na rysunku krawędzie *EF* i *FG*, *i FB* są:
A. równoległe B. prostopadłe C. skośne D. przecinające się



Zadanie 338. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Graniastosłup, który ma 27 krawędzi, ma:
A. 9 wierzchołków B. 18 wierzchołków C. 27 wierzchołków D. 54 wierzchołki

Zadania dłuższe

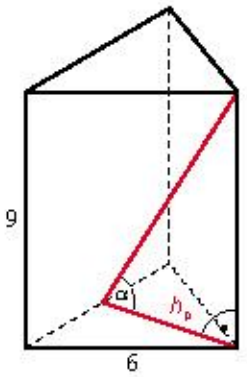
Zadanie 339. 0–1 pkt

Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 4 cm, a wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa ma 5 cm.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Pole podstawy tego ostrosłupa wynosi 9 cm^2.	P	F
2.	Tangens kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy wynosi $1\frac{1}{3}$.	P	F

Zadanie 340. 0–2 pkt

Oblicz miarę kąta nachylenia odcinka łączącego jeden z wierzchołków górnej podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ze środkiem przeciwległej krawędzi dolnej podstawy na podstawie danych z rysunku.



Zadanie 341. 0–1 pkt

Prostopadłościan o podstawie kwadratu przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.
Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–G.
341.1. Otrzymany przekrój jest:
A. prostokątem B. trójkątem równobocznym
C. trójkątem równoramiennym D. kwadratem
341.2. Jeśli krawędź podstawy tego graniastosłupa ma 4 cm, a wysokość graniastosłupa jest dwa razy dłuższa, to obwód otrzymanego przekroju wynosi:
E. $2\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ cm F. $2\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ cm G. $2\left(\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)$ cm

Zadanie 342. 0–1 pkt

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 36 cm^3, a krawędź podstawy tego ostrosłupa wynosi 6 cm.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wysokość tego ostrosłupa jest równa:

A. $6\sqrt{3}$ cm B. 8 cm C. 6 cm D. $4\sqrt{3}$ cm

Zadanie 343. 0–1 pkt

Powierzchnią boczną stożka jest półkole o promieniu 10 cm.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Kąt rozwarcia tego stożka jest kątem prostym.	P	F
2.	Promień podstawy stożka ma 10 cm długości.	P	F

Zadanie 344. 0–1 pkt

Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ma miarę 60°, a wysokość ściany bocznej ostrosłupa poprowadzona na krawędź boczną jest równa 8 cm.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole podstawy tego ostrosłupa jest równe:

A. 32 cm^2 B. 64 cm^2 C. 16 cm^2 D. $16\sqrt{3}$ cm^2

Zadanie 345. 0–2 pkt

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi tak, aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.
Wartość tangensa kąta α jest równa 2 wówczas, gdy kąt α jest kątem nachylenia:

A. przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny podstawy, wysokość walca ma 2 cm, a promień podstawy ma 1 cm.
B. tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy, wysokość stożka ma 10 cm, a promień podstawy ma 5 cm.
C. przekątnej sześcianu o krawędzi 4 cm do płaszczyzny podstawy.
D. krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego do płaszczyzny podstawy, a wysokość ostrosłupa i przekątna podstawy mają długość 8 cm.
E. przekątnej ściany bocznej do krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wszystkie krawędzie są równe 5 cm.
F. przekątnej przekroju osiowego walca do tworzącej walca, wysokość walca ma 6 cm, a promień podstawy ma 1 cm.

Zadanie 346. 0–1 pkt

Dane są dwa sześciany S_1 i S_2 o polach powierzchni całkowitych odpowiednio równych P_1 i P_2. Stosunek długości krawędzi tych sześcianów jest równy $2:3$, a suma ich pól powierzchni całkowitych wynosi $312\ cm^2$.
Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.
Aby wyznaczyć pola P_1 i P_2, należy rozwiązać układ równań:

A.	$\begin{cases} P_1+P_2=312 \\ \frac{P_1}{P_2}=\frac{2}{3} \end{cases}$	ponieważ stosunek pól powierzchni tych sześcianów jest równy	1.	stosunkowi długości krawędzi tych sześcianów.
B.	$\begin{cases} P_1+P_2=312 \\ \frac{P_1}{P_2}=\frac{4}{9} \end{cases}$		2.	kwadratowi stosunku długości krawędzi tych sześcianów.
C.	$\begin{cases} P_1+P_2=312 \\ \frac{P_1}{P_2}=\frac{8}{27} \end{cases}$		3.	trzeciej potędze stosunku długości krawędzi tych sześcianów.

Zadanie 347. 0–3 pkt

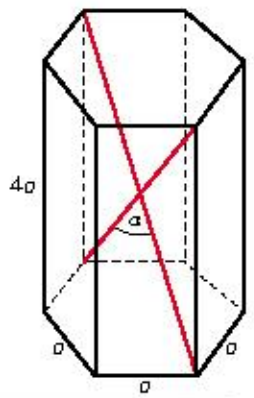
Podstawą ostrosłupa trójkątnego jest trójkąt równoboczny o boku długości 8 cm. Jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i ma długość 6 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadanie 348. 0–3 pkt

Promień podstawy stożka o objętości $18\pi\ cm^3$ jest dwa razy krótszy od jego wysokości. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

Zadanie 349. 0–3 pkt

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy a i krawędzi bocznej $4a$. Oblicz miarę kąta między przekątnymi tego graniastosłupa (rysunek).



Zadanie 350. 0–3 pkt

Pole powierzchni bocznej stożka jest trzy razy większe od jego pola podstawy. Oblicz objętość tego stożka, jeśli wysokość stożka jest równa 8 cm.

Zadanie 351. 0–3 pkt

Powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła o promieniu l i kącie środkowym α. Oblicz miarę kąta α, jeśli wiadomo, że wysokość stożka jest równa $10\sqrt{2}$ cm, a pole przekroju osiowego tego stożka wynosi $50\sqrt{2}$ cm^2.

Zadanie 352. 0–3 pkt

W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi ma miarę 90°, a wysokość tego ostrosłupa jest równa 6 cm. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa.

Zadanie 353. 0–3 pkt

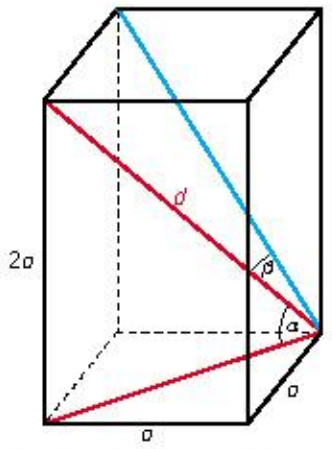
Pole powierzchni bocznej walca jest równe sumie pól obu podstaw. Oblicz miarę kąta między przekątną przekroju osiowego tego walca i tworzącą.

Zadanie 354. 0–3 pkt

Ostrosłup prawidłowy trójkątny ma krawędź podstawy długości 6 i krawędź boczną długości 9.
Oblicz miarę kąta nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

Zadanie 355. 0–3 pkt

Oblicz różnicę $\alpha-\beta$ kątów zaznaczonych w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przedstawionym na rysunku.



Zadanie 356. 0–3 pkt

Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy w czworościanie foremnym.

Zadanie 357. 0–3 pkt

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna d tworzy ze ścianą boczną kąt 30°.
Wyznacz wzór na objętość tego graniastosłupa w zależności od d.

Zadanie 358. 0–3 pkt

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Oblicz objętość stożka, jeśli wiadomo, że tworząca stożka jest równa 10 cm.

Zadanie 359. 0–3 pkt

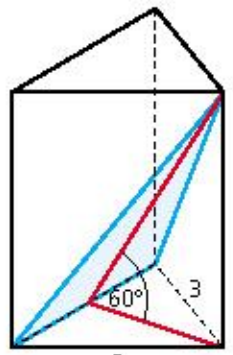
Dany jest walec o objętości 54π cm^3. Po rozwinięciu powierzchni bocznej tego walca na płaszczyźnie otrzymano prostokąt. Oblicz tangens kąta, jaki tworzy przekątna tego prostokąta, i bok, który jest wysokością walca, jeśli wiadomo, że wysokość walca jest dwa razy dłuższa od promienia. W obliczeniach przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.

Zadanie 360. 0–3 pkt

W ostrosłupie $ABCDS$ o podstawie kwadratowej ściana ADS, która jest trójkątem równobocznym, jest prostopadła do podstawy. Punkt E to środek krawędzi AD, a odcinek ES to wysokość ostrosłupa. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDS$, jeśli pole trójkąta ADS jest równe $9\sqrt{3}$ cm^2.

Zadanie 361. 0–3 pkt

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny jak na rysunku. Oblicz wysokość trójkąta w przekroju oraz wysokość graniastosłupa.



Zadanie 362. 0–4 pkt

Graniastosłup prosty czworokątny ma w podstawie romb o obwodzie 24. Jeden z kątów dwuściennych ma miarę 60°. Wysokość graniastosłupa jest równa trzykrotności długości krawędzi podstawy. Oblicz długość przekątnych tego graniastosłupa.

Zadanie 363. 0–4 pkt

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°, a wysokość ostrosłupa wynosi 6. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.



Kombinatoryka

Teoria z przykładami

przypominam najważniejsze treści

Doświadczeniem losowym (eksperymentem, zjawiskiem losowym) nazywamy takie działanie, które można powtarzać wiele razy w takich samych warunkach, ale jego kolejnych wyników nie potrafimy przewidzieć, np. rzut monetą, rzut kostką do gry czy wyciągnięcie karty z talii.

W doświadczeniu losowym możemy określić zbiór wszystkich możliwych wyników. Na przykład przy jednokrotnym rzucie monetą może wypaść orzeł lub reszka.

Każdy możliwy wynik doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym**, a ich zbiór – **przestrzenią zdarzeń elementarnych**.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Rzucamy dwukrotnie monetą. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego.

Rozwiązanie:

Wyrzucenie orła oznaczamy jako O, a wyrzucenie reszki – jako R.

$\Omega = \{(O,O),(O,R),(R,O),(R,R)\}$

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi

Zdarzeniem losowym nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Zdarzenia losowe, zwane krótko zdarzeniami, oznaczamy wielkimi literami: A, B, C itd.

Liczbę elementów zbioru A oznaczamy $\overline{\overline{A}}$ (lub $|A|$).

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Ile różnych trzyznakowych haseł można utworzyć z cyfr 0 i 1 oraz litery M, jeśli pierwsze dwa znaki to cyfry, a kolejny znak to litera.

Rozwiązanie:

Oznaczamy jako A zbiór sprzyjający zdarzeniu, że pierwsze dwa znaki to cyfry, a kolejny znak to litera, zatem $A = \{(00M),(01M),(10M),(11M)\}$.

Określamy liczbę możliwych wyników: $\overline{\overline{A}} = 4$.

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi

Zbiór Ω nazywamy **zdarzeniem pewnym**, natomiast zbiór pusty nazywamy **zdarzeniem niemożliwym**. Elementy zdarzenia A nazywamy **wynikami sprzyjającymi zdarzeniu A**.

Wszystkie zdarzenia elementarne, które nie sprzyjają zdarzeniu A, sprzyjają zdarzeniu A', które nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia A.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Rzucamy jednokrotnie sześcienną kostką do gry. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniu A – wypadła parzysta liczba oczek. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniu przeciwnemu A' do zdarzenia.

Rozwiązanie:

$A = \{2,4,6\}$, $A' = \{1,3,5\}$

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi

Reguła mnożenia dla dwóch czynności

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei dwóch czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k sposobów, druga – na jeden z n sposobów, jest równa kn.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

W urnie znajduje się 10 kul ponumerowanych od 1 do 10. Z urny losujemy dwie kule bez zwracania, zapisując numery kul w kolejności ich wylosowania. Określ liczbę wyników tego doświadczenia.

Rozwiązanie:

Obliczenie liczby możliwych wyników tego doświadczenia: $10 \cdot 9 = 90$

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi

Reguła mnożenia

Liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia, które polega na wykonaniu po kolei k czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z n_1 sposobów, druga – na jeden z n_2 sposobów, trzecia – na jeden z n_3 sposobów i tak dalej do k-tej czynności, która może zakończyć się na jeden z n_k sposobów, jest równa $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Jeśli doświadczenie losowe polega na podjęciu jednej z dwóch decyzji wyboru, pochodzących z dwóch różnych zbiorów, które nie mają wspólnych elementów, przy czym pierwszą decyzję wyboru możemy podjąć na n sposobów, a drugą – na k sposobów, to całą czynność możemy podjąć na $n + k$ sposobów.

Taki sposób zliczania elementów o określonych własnościach nazywamy **regułą dodawania**.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, których cyfra setek jest mniejsza od 3 lub równa 9?

Rozwiązanie:

Liczby trzycyfrowe z cyfrą setek mniejszą od 3 to: 100, 101, 102, ... 299. Takich liczb trzycyfrowych jest 200.

Liczby trzycyfrowe z cyfrą setek równą 9, to: 900, 901, 902, ..., 999. Takich liczb trzycyfrowych jest 100.

Liczb trzycyfrowych z cyfrą setek mniejszą od 3 lub równą 9 jest: $200 + 100 = 300$

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi

Często w zadaniach stosujemy **regułę mnożenia i regułę dodawania łącznie**.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–1 pkt**

Pewna drużyna siatkówki ma do dyspozycji 2 różne koszulki w kolorze czerwonym i 3 różne w kolorze niebieskim oraz 4 różne pary spodenek w kolorze czerwonym i 3 różne pary spodenek w kolorze niebieskim. Na ile sposobów reprezentant drużyny może skompletować strój składający się z koszulki i spodenek w jednakowym kolorze?

Rozwiązanie:

Liczba możliwości wyboru stroju w kolorze czerwonym to: $2 \cdot 4 = 8$

Liczba możliwości wyboru stroju w kolorze niebieskim to: $3 \cdot 3 = 9$

Liczba możliwości wyboru stroju w kolorze czerwonym lub niebieskim to: $8 + 9 = 17$

1 pkt – odpowiedź poprawna
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi

uczę się rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 364. 0–1 pkt

Ile różnych układów liter (mających sens lub nie), rozpoczynających się od litery *O*, można utworzyć ze wszystkich liter wyrazu ZERO?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

Zadanie 365. 0–1 pkt

Ze zbioru cyfr $\{6, 7, 8, 9\}$ wylosowano kolejno dwie cyfry ze zwracaniem i utworzono z nich liczbę dwucyfrową tak, że pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A – wylosowania liczba jest podzielna przez 3 opisuje zbiór:
A. $A = \{69, 78, 87, 96\}$ B. $A = \{66, 69, 78, 87, 96\}$ C. $A = \{66, 69, 78, 96, 99\}$ D. $A = \{66, 69, 78, 87, 96, 99\}$

Zadanie 366. 0–1 pkt

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie monetą.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Zdarzenie A – w drugim rzucie monetą wypadła reszka lub wypadł orzeł jest zdarzeniem pewnym.	P	F
2.	Zdarzenie B – w pierwszym rzucie nie wypadł orzeł jest zdarzeniem niemożliwym.	P	F

Zadanie 367. 0–1 pkt

Z talii zawierającej 24 karty losujemy dwa razy po jednej karcie (bez zwracania wylosowanej karty) i układamy w kolejności wylosowania, tworząc pary (1. karta, 2. karta).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba wyników losowania dwóch kart takich, że obie są pikami, jest równa:
A. 156 B. 25 C. 30 D. 11

Zadanie 368. 0–1 pkt

Ze zbioru $\{1, 4, 7, 9\}$ losujemy trzy cyfry i tworzymy w ten sposób liczbę trzycyfrową, przy czym cyfry w liczbie mogą się powtarzać.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	W ten sposób utworzymy 64 liczby trzycyfrowe.	P	F
2.	Liczb, których tylko cyfra setek jest nieparzysta lub wszystkie cyfry są nieparzyste, jest 30.	P	F

Zadanie 369. 0–1 pkt

Na półce znajduje się 18 różnych książek, w tym są 4 książki biograficzne, 6 książek z gatunku fantastyka, a pozostałe książki to kryminały.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wyboru trzech książek, z których wszystkie 3 są tego samego gatunku (to znaczy albo biograficzne, albo fantastyka, albo kryminał), można dokonać na:
A. 24 sposoby B. 336 sposobów C. 480 sposobów D. 144 sposoby

Zadanie 370. 0–1 pkt

Z talii zawierającej 52 karty losujemy jedną kartę. W talii są 4 kolory: pik, trefl, kier i karo. W każdym z tych kolorów jest 13 kart. Każdy z kolorów zawiera 9 kart numerowanych od 2 do 10 oraz 3 figury: król, dama, walet, a także dodatkową kartę, którą jest as.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające wylosowaniu figury, która nie jest kierem ani karo, opisuje zbiór:
A. {król trefl, król kier, dama trefl, dama pik, walet pik, walet trefl}
B. {król trefl, król pik, dama trefl, dama pik, walet trefl, walet kier}
C. {król trefl, król pik, dama trefl, dama pik, walet trefl, walet pik}
D. {król trefl, król pik, dama karo, dama pik, walet trefl, walet pik}

Zadanie 371. 0–1 pkt

W urnie znajdują się trzy kule: biała, czerwona i zielona. Losujemy kolejno bez zwracania 3 kule. Które zdanie jest fałszywe?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. Wśród wylosowanych kul co najmniej jedna jest czerwona.
B. Wylosowanie kuli białej jest niemożliwe.
C. Wylosowanie kuli zielonej jest pewne.
D. Każda z wylosowanych kul jest innego koloru.

Zadanie 372. 0–1 pkt

W pewnej szkole postanowiono oznaczyć szafki czterocyfrowymi kodami utworzonymi z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, że każda cyfra może się powtarzać.
Odpowiedz na pytanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Dla ilu uczniów wystarczy tak utworzonych kodów?
A. 1296 B. 360 C. 900 D. 1000

Zadanie 373. 0–1 pkt

Z cyfr od 0 do 9 tworzono liczby trzycyfrowe takie, że cyfry w liczbie mogą się powtarzać.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczb naturalnych trzycyfrowych, w których cyfra setek jest parzysta, a cyfry dziesiątek i jedności są nieparzyste, jest:
A. 125 B. 100 C. 900 D. 1000

Zadanie 374. 0–1 pkt

Na jednej prostej zaznaczono 4 punkty, a na drugiej – 5 punktów.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba odcinków, których końcami są punkty leżące na różnych prostych, jest równa:
A. 81 B. 72 C. 20 D. 9

Zadanie 375. 0–1 pkt

Karol może dojechać z domu do szkoły bezpośrednio autobusem o numerze: 112, 122 lub 132. Może również dojechać z przesiadką, najpierw tramwajem o numerze: 11, 12 lub 13, a następnie autobusem o numerze: 110, 115 lub 120.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Karol może dojechać do szkoły z przesiadką na 3 różne sposoby.	P	F
2.	Karol może jechać do szkoły bez przesiadki lub z przesiadką na 12 różnych sposobów.	P	F

Zadanie 376. 0–1 pkt

Rzucamy 10 razy symetryczną monetą i zapisujemy wynik każdego rzutu.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba możliwych wyników tego doświadczenia jest równa:
A. 2 B. 10 C. 20 D. 1024

Zadanie 377. 0–1 pkt

Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych {20, 21, 22,... , 39, 40} losujemy jedną liczbę.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu „wylosowana liczba jest podzielna przez 4" opisuje zbiór:
A. $\{20, 40\}$ B. $\{20, 24, 36, 40\}$ C. $\{20, 24, 28, 36, 40\}$ D. $\{20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

Zadanie 378. 0–1 pkt

Ze zbioru liczb $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie, a następnie zapisujemy ich iloczyn.
Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.
378. 1. Jeśli wylosowane liczby zwracamy do zbioru A, to przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

A. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20, 25\}$

B. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20\}$

C. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 15, 16, 20, 25\}$

D. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 18, 20\}$

378.2. Jeśli zdarzenie B polega na wylosowaniu pary liczb, których iloczyn jest liczbą podzielną przez 3, to zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia B jest:

E. $B' = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

F. $B' = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25\}$

G. $B' = \{4, 5, 8, 10, 16, 20, 25\}$

H. $B' = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 25\}$

Zadanie 379. 0–1 pkt

Za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 zapisano liczby czterocyfrowe tak, że żadna z cyfr się nie powtarza.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wszystkich zapisanych w ten sposób liczb całkowitych mniejszych od 4000 lub większych od 8000 jest:
A. 600 B. 360 C. 240 D. 840

Zadanie 380. 0–1 pkt

Czworo przyjaciół poszło do kina. Mają do dyspozycji 8 sąsiednich miejsc w jednym rzędzie, które mogą zająć w dowolny sposób.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba sposobów, w jakie mogą zająć miejsca, jest równa:
A. 24 B. 4096 C. 224 D. 1680

Zadania dłuższe

Zadanie 381. 0–2 pkt

Ile różnych wyników można otrzymać przy rzucie kostką do gry i monetą?
Przedstaw wyniki tego doświadczenia w postaci drzewka i wypisz wszystkie możliwe wyrazy.

Zadanie 382. 0–2 pkt

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek. Zdarzenie A polega na tym, że co najmniej jeden raz wypadnie ścianka z sześcioma oczkami. Podaj zdarzenie przeciwne do zdarzenia A.

Zadanie 383. 0–2 pkt

Współrzędne punktu $P=(x, y)$ są dobierane ze zbioru $A=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ i ze zbioru $B=\{1,2,3,4,5\}$ w następujący sposób: współrzędna x jest liczbą ze zbioru A, a współrzędna y jest liczbą ze zbioru B. Oblicz, ile punktów o tak utworzonych współrzędnych znajduje się w II ćwiartce układu współrzędnych.

Zadanie 384. 0–2 pkt

Z wyrazu ILORAZ tworzono różne słowa mające sens lub nie. Ile różnych słów zaczynających się samogłoską można utworzyć?

Zadanie 385. 0–2 pkt

Dane są dwa zbiory $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{a,b,c\}$.

Ile różnych napisów złożonych z cyfry i litery można otrzymać, wybierając po jednym symbolu z każdego ze zbiorów?
Przedstaw wyniki tego doświadczenia w postaci drzewka i wypisz wszystkie możliwe wyniki.

Zadanie 386. 0–2 pkt

Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} losujemy 2 razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych sprzyjającą zdarzeniu polegającemu na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

Zadanie 387. 0–2 pkt

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – na obu kostkach wypadła nieparzysta liczba oczek,
B – suma oczek na obu kostkach jest większa od 10,
C – na każdej z kostek wypadła liczba oczek mniejsza od 8.

Zadanie 388. 0–2 pkt

Z urny, w której są 3 ponumerowane kule od 1 do 3, losujemy kolejno ze zwracaniem 2 kule.
Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – pierwsza wylosowana kula ma numer parzysty lub nieparzysty,
B – druga wylosowana kula ma numer mniejszy niż pierwsza,
C – iloczyn numerów wylosowanych kul jest równy 10.
Które ze zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, a które – niemożliwym?

Zadanie 389. 0–2 pkt

W każdym z 3 pojemników znajduje się para kul, z których jedna jest czerwona, a druga – niebieska. Z każdego pojemnika losujemy jedną kulę. Ile możliwych wyników zawiera zdarzenie *A* polegające na tym, że dokładnie 2 z 3 wylosowanych kul będą czerwone?

Zadanie 390. 0–2 pkt

Ze zbioru 24 kolejnych liczb naturalnych od 1 do 24 losujemy jedną liczbę. Ile możliwych wyników zawiera zdarzenie *A* polegające na tym, że wylosowana liczba będzie dzielnikiem liczby 24?

Zadanie 391. 0–2 pkt

Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Podaj zdarzenie przeciwne do zdarzenia A – w drugim lub trzecim rzucie wypadł orzeł.

Zadanie 392. 0–2 pkt

Doświadczenie losowe polega na wylosowaniu bez zwracania dwóch elementów należących do zbioru $A = \{a, b, c, d, e\}$, a następnie dwóch elementów (też bez zwracania) należących do zbioru $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Z wylosowanych liter i liczb są tworzone czteroelementowe kody. Oblicz, ile jest możliwych sposobów wylosowania dwóch liter, które są spółgłoskami, i dwóch liczb, które są liczbami pierwszymi.

Zadanie 393. 0–2 pkt

Ile różnych wyników można otrzymać przy dwukrotnym rzucie monetą?
Przedstaw wyniki tego doświadczenia w postaci drzewka i wypisz wszystkie możliwe wyniki.

Zadanie 394. 0–2 pkt

W pudełku znajdują się dwie kule: czarna i biała. Czterokrotnie losujemy ze zwracaniem jedną kulę z tego pudełka. Ile możliwych wyników zawiera zdarzenie A polegające na wylosowaniu dokładnie 3 razy w 4 losowaniach kuli koloru białego?

Zadanie 395. 0–2 pkt

Rzucamy 2 razy sześcienną kostką do gry. Podaj wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – suma otrzymanych oczek jest nie większa od 12,
B – iloczyn liczb oczek jest liczbą nieparzystą,
C – iloczyn liczb oczek jest wielokrotnością liczby 11,
D – wartość bezwzględna różnicy liczby oczek jest liczbą pierwszą.
Które ze zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, a które – niemożliwym?

Zadanie 396. 0–2 pkt

W urnie znajdują się kule ponumerowane liczbami naturalnymi jednocyfrowymi. Doświadczenie polega na losowaniu 2 kul ze zwracaniem. Wyniki zapisujemy w kolejności wylosowania, otrzymując w ten sposób liczby dwucyfrowe. Ile jest liczb, w których cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności?

Zadanie 397. 0–3 pkt

Losujemy 2 razy ze zwracaniem po jednej kuli z urny, w której znajdują się 3 kule oznaczone odpowiednio liczbami 1, 6, 9. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – co najmniej jedna z wylosowanych kul jest oznaczona liczbą nieparzystą,
B – suma liczb na wylosowanych kulach jest równa co najwyżej 7.
Podaj zdarzenia przeciwne do zdarzeń *A* i *B* oraz określ liczbę zdarzeń sprzyjających tym zdarzeniom.

Zadanie 398. 0–3 pkt

Tosia ma 6 różnych mazaków, 24 różnokolorowe kredki, 5 różnych ołówków i 3 różne długopisy. Oblicz, ile może utworzyć zestawów składających się z mazaka i ołówka lub kredki i długopisu.

Zadanie 399. 0–3 pkt

W klasie 4a jest 9 dziewcząt i 2 razy więcej chłopców, a w klasie 4b – 16 dziewcząt i 2 razy mniej chłopców. Wybieramy jedną osobę, która jest uczniem klasy 4a, i jedną osobę z klasy 4b. Oblicz, na ile sposobów można wybrać 2 dziewczyny lub 2 chłopców.

Zadanie 400. 0–3 pkt

W 2 urnach o numerach I i II znajdują się ponumerowane kule. W pierwszej urnie znajdują się kule z numerami: 0, 1, 2, 3, 4, 5, a w drugiej – z numerami 6, 7, 8, 9. Wybieramy jedną kulę z urny I, a następnie – jedną z urny II. Oblicz, na ile sposobów można wybrać te kule tak, aby ich suma była liczbą parzystą.

Zadanie 401. 0–3 pkt

Numer rejestracyjny składa się z dwóch liter wybranych spośród: W, A, R, po których występuje liczba pięciocyfrowa utworzona z cyfr: 0, 2, 4, 6, przy czym zarówno litery, jak i cyfry w liczbie mogą się powtarzać. Oblicz, ile numerów rejestracyjnych można utworzyć w taki sposób.

Zadanie 402. 0–3 pkt

Rzucamy 3 razy sześcienną kostką do gry i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby trzycyfrowej. Ile liczb podzielnych przez 2 lub 5 można w ten sposób otrzymać?

Zadanie 403. 0–5 pkt

W dwóch urnach znajdują się kolorowe kule. W pierwszej z nich są 3 ponumerowane kule niebieskie, 6 ponumerowanych kul czerwonych i 4 ponumerowane kule zielone, a w drugiej są 4 ponumerowane kule niebieskie, 5 ponumerowanych kul czerwonych i 8 ponumerowanych kul zielonych. Wybieramy losowo po jednej kuli z każdej urny. Oblicz, na ile sposobów można wybrać kule tak, aby obie były jednakowego koloru.

12

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Prawdopodobieństwo klasyczne

Jeżeli wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne (zdarzają się równie często), mówimy, że mamy do czynienia z prawdopodobieństwem klasycznym.

Jeśli Ω jest zbiorem skończonym i niepustym, to **prawdopodobieństwem** zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę: $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek podzielnej przez 3 przy jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

Rozwiązanie:

Określamy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego polegającego na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}} = 6$

Wypisujemy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, że wypadła liczba oczek podzielna przez 3: $A = \{3,6\}$

Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $\overline{\overline{A}} = 2$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2 pkt – poprawne obliczenie prawdopodobieństwa
1 pkt – poprawne wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych i liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Wartość oczekiwana

Jeśli rozważymy grę, w której możliwe jest n wyników liczbowych: $x_1, x_2, ..., x_n$, i prawdopodobieństwo otrzymania wyniku x_i jest równe p_i dla $i = 1, ..., n$, to **wartością oczekiwaną gry** nazywamy liczbę:

$x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$.

Grę nazywamy **sprawiedliwą**, jeśli jej wartość oczekiwana jest równa 0.

PRZYKŁAD ZADANIA MATURALNEGO

Przykład **0–2 pkt**

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Jeżeli iloczyn jest równy 3, otrzymujemy 25 zł, jeśli większy od 20 otrzymujemy 10 zł, jeśli równy 12, otrzymujemy 2 zł. W pozostałych przypadkach tracimy 5 zł. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej. Czy ta gra jest sprawiedliwa?

Rozwiązanie

Wyznaczamy liczbę zdarzeń sprzyjających rzutowi dwiema sześciennymi kostkami do gry: $\overline{\overline{\Omega}} = 36$.

Prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu oczek równego 3 w rzucie dwiema sześciennymi kostkami wynosi $\frac{2}{36}$, iloczynu oczek większego od 20 wynosi $\frac{6}{36}$, iloczynu oczek równego 12 wynosi $\frac{4}{36}$, pozostałych iloczynów oczek wynosi $\frac{24}{36}$.

Obliczamy wartość oczekiwaną wygranej:

$25 \cdot \frac{2}{36} + 10 \cdot \frac{6}{36} + 2 \cdot \frac{4}{36} - 5 \cdot \frac{24}{36} = -\frac{2}{36} = -\frac{1}{18}$

Wartość oczekiwana jest różna od 0.

Odpowiedź: Ta gra nie jest sprawiedliwa.

2 pkt – poprawne obliczenie prawdopodobieństw oraz wartości oczekiwanej wygranej i poprawna odpowiedź
1 pkt – poprawne obliczenie prawdopodobieństw, ale niepoprawne obliczenie wartości oczekiwanej wygranej lub brak jej obliczenia i odpowiedzi
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Skala centylowa

Skala centylowa to skala pozycyjna wyników uporządkowanych rosnąco i zawiera 99 centyli.

Centyl to jedna ze 100 równych części, na które można podzielić zakres wartości zestawu danych, aby pokazać rozkład tych wartości.

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład

Ewa uzyskała następujące wyniki egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym:
język polski – 82% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 45% zdających;
język angielski – 90% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 64% zdających;
matematyka – 48% pkt; wynik taki sam lub niższy uzyskało 49% zdających.
a) Podaj, jaki procent maturzystów piszących egzamin z matematyki ma wynik taki sam lub niższy niż Ewa.
b) Podaj, jaki procent maturzystów piszących egzamin z języka angielskiego ma wynik lepszy niż Ewa.
c) Z ilu egzaminów Ewa uzyskała wynik poniżej 50 centyla?

Rozwiązanie:

a) Odczytujemy, jaki procent uczniów ma taki sam lub niższy wynik z egzaminu z matematyki: 49%

Odpowiedź: Wynik taki sam lub niższy niż Ewa z egzaminu z matematyki uzyskało 49% maturzystów.

b) Odczytujemy, jaki procent uczniów ma taki sam lub niższy wynik z egzaminu z języka angielskiego: 64%

Obliczamy, jaki procent uczniów piszących egzamin z języka angielskiego ma wynik lepszy niż Ewa:

$100\% - 64\% = 36\%$

Odpowiedź: 36% maturzystów uzyskało wynik lepszy niż Ewa z egzaminu z języka angielskiego.

c) Odczytujemy wyniki Ewy z kolejnych egzaminów wyrażone w skali centylowej: 45%, 64% i 49%.

Odpowiedź: Z dwóch egzaminów Ewa uzyskała wynik poniżej 50%.

Wartości średnie

Średnią arytmetyczną liczb: $x_1, x_2, ..., x_n$, nazywamy liczbę: $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład

Trzej zawodnicy sumo ważą odpowiednio: 159 kg, 152 kg, 154 kg. Oblicz średnią wagę tych zawodników.

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią arytmetyczną: $\frac{159+152+154}{3} = 155$

Odpowiedź: Średnia waga wynosi 155 kg.

Średnią ważoną liczb $x_1, x_2, ..., x_n$ z odpowiednimi wagami $n_1, n_2, ..., n_n$, będącymi liczbami dodatnimi, określamy wzorem:
$\overline{x}_w = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_n \cdot n_n}{n_1 + n_2 + ... + n_n}$.

Gdy wszystkie wagi są równe, średnia ważona jest równa średniej arytmetycznej.

Przykład

Oblicz średnią ważoną ocen 5, 2, 4 z wagami odpowiednio 0,2, 0,3, 0,5.

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią ważoną: $\frac{5 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,5}{0,2 + 0,3 + 0,5} = \frac{1 + 0,6 + 2}{1} = 3,6$

Odpowiedź: Średnia ważona ocen wynosi 3,6.

Mediana i dominanta

Mediana to środkowy wynik w danym zbiorze uporządkowanym niemalejąco.

Jeśli liczba elementów zbioru danych jest równa n i jest to liczba nieparzysta, to medianą jest liczba o numerze $\frac{n+1}{2}$.

Jeżeli liczba elementów w zbiorze jest równa n i jest to liczba parzysta, to mediana jest równa średniej arytmetycznej dwóch środkowych liczb (liczbami środkowymi są liczby o numerach $\frac{n}{2}$ i $\frac{n}{2}+1$).

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład

Wyznacz medianę danych: 8, 11, 3, 5, 3, 4.

Rozwiązanie:

Porządkujemy zbiór danych w kolejności niemalejącej: 3, 3, 4, 5, 8, 11

Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą parzystą i wynosi $n = 6$. Zatem znajdujemy dwie środkowe liczby. Są to liczby o numerze trzecim $\left(\frac{n}{2}=\frac{6}{2}\right)$ i o numerze czwartym $\left(\frac{n}{2}+1=\frac{6}{2}+1\right)$, czyli dane: 4 i 5.

Mediana jest średnią arytmetyczną tych dwóch danych, czyli liczba $\frac{4+5}{2}=4{,}5$.

Odpowiedź: Mediana tego zestawu danych jest równa 4,5.

Dominanta to liczba, która w zbiorze danych występuje najczęściej.

Jeśli w zbiorze danych jest kilka wartości, które występują z taką samą liczebnością i większą niż pozostałe wartości, to każda z tych wartości jest dominantą. Jeśli natomiast w zbiorze danych wszystkie wartości występują z taką samą liczebnością, to mówimy, że w tym zbiorze danych nie ma dominanty.

Przykład

Określ dominantę wśród ocen uczniów ze sprawdzianu z biologii: 4, 5, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 6, 4, 3, 1, 5, 3.

Rozwiązanie:

Odczytujemy ocenę, która w tym zestawie danych występuje najczęściej. Jest to ocena dostateczna (3 powtórzyło się 4 razy).

Odpowiedź: Dominantą tego zestawu danych jest ocena dostateczna.

Odchylenie standardowe

Wariancją liczb $x_1, x_2, ..., x_n$ nazywamy liczbę: $\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n}$, gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, ..., x_n$.

Odchyleniem standardowym liczb $x_1, x_2, ..., x_n$ nazywamy liczbę σ określoną za pomocą wzoru:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

PRZYKŁADY ZADAŃ MATURALNYCH

Przykład

W pięciu rzutach sześcienną kostką do gry otrzymano następujące liczby oczek: 3, 4, 5, 2, 6. Oblicz odchylenie standardowe otrzymanych wyników.

Rozwiązanie:

Obliczamy średnią liczbę otrzymanych oczek: $\frac{3+4+5+2+6}{5}=4$

Obliczamy wariancję zestawu danych:

$$\bar{x}=\frac{(2-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(2-4)^2+(6-4)^2}{5}=\frac{4+0+1+4+4}{5}=\frac{16}{5}=3{,}2$$

Obliczamy odchylenie standardowe: $\sigma=\sqrt{3{,}2}\approx 1{,}8$

Odpowiedź: Odchylenie standardowe od średniej liczby otrzymanych oczek wynosi ok. 1,8.

uczęsię rozwiązywać zadania

Zadania krótsze

Zadanie 404. 0–1 pkt

W pudełku są kule białe i czarne. Stosunek liczby kul białych do liczby kul czarnych jest równy 3 : 7.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Prawdopodobieństwo wyciągnięcia z pudełka kuli czarnej jest równe:

A. 0,1 B. 0,3 C. 0,7 D. 0,9

Zadanie 405. 0–1 pkt

Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest 5 razy mniejsze niż prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia *A*.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest równe:

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{4}{5}$

Zadanie 406. 0–1 pkt

Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb 3, 1, 4, 1, 5, x, 1, 4, 1, 5 jest równa 3.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wartość x wynosi:

A. 1 B. 5 C. 3 D. 4

Zadanie 407.

Na wykresie przedstawiono liczbę trafień do tarczy uzyskanych przez łucznika podczas treningów.



Zadanie 407.1. 0–1 pkt

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Dominantą tego zestawu danych są liczby:

A. 2 i 4 B. 1 i 5 C. 3 i 4 D. 0 i 2

Zadanie 407.2. 0–1 pkt

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Mediana liczby trafień uzyskanych przez łucznika jest równa ..... .

Zadanie 407.3. 0–2 pkt

Oblicz średnią trafień łucznika do tarczy.

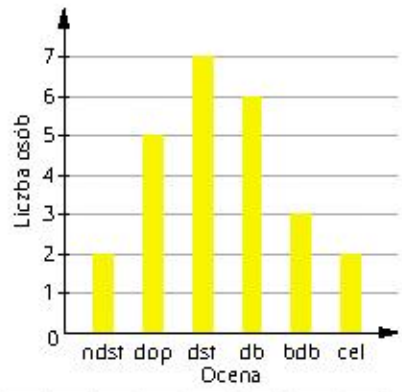
Zadanie 408. 0–1 pkt

Pewna gra polega na jednoczesnym rzucie sześcienną kostką do gry i monetą. Liczba zdobytych punktów równa się sumie wyrzuconych oczek oraz uzyskanych orłów.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Prawdopodobieństwo, że w jednym rzucie uzyskamy 5 punktów, jest równe:

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{6}$

Zadanie 409. 0–1 pkt

Na diagramie przedstawiono oceny semestralne z fizyki uczniów pewnej klasy.
Które zdanie jest fałszywe?
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
A. Mediana ocen semestralnych jest równa 3.
B. Dominanta ocen semestralnych wynosi 3.
C. Mediana ocen jest równa średniej tych ocen.
D. Średnia jest o 2,64 niższa od najwyższej uzyskanej oceny.



Zadanie 410. 0–1 pkt

Troje rodzeństwa ma wzrost równy odpowiednio: 140 cm, 165 cm i 175 cm. Oblicz odchylenie standardowe od średniej wzrostu.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Średnia wzrostu rodzeństwa jest równa 158 cm.	P	F
2.	Odchylenie standardowe od średniej wzrostu wynosi około 15 cm.	P	F

Zadanie 411. 0–1 pkt

Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Prawdopodobieństwo zdarzenia, że w pierwszym rzucie wypadła liczba oczek większa niż w drugim rzucie, jest równe $\frac{5}{12}$.	P	F
2.	Prawdopodobieństwo wylosowania iloczynu oczek podzielnego przez 3 wynosi $\frac{5}{9}$.	P	F

Zadanie 412. 0–1 pkt

Ze zbioru liczb $\{0, 1, 2, 3, ..., 24\}$ wybieramy losowo jedną liczbę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo, że wybierzemy liczbę, której dzielnikiem jest liczba 3, wynosi:

A. $\frac{5}{24}$ B. $\frac{8}{24}$ C. $\frac{6}{25}$ D. $\frac{8}{25}$

Zadanie 413. 0–1 pkt

Średnia arytmetyczna liczb: $x+8$, $x+10$, $x-3$, x, 3, jest równa 2.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejsza z tych liczb jest równa:

A. 3 B. -5 C. -2 D. 6

Zadania dłuższe

Zadanie 414. 0–2 pkt

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania nieparzystej liczby oczek przy jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

Zadanie 415. 0–2 pkt

Dane są dwa zbiory $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 5.

Zadanie 416. 0–2 pkt

W pewnej klasie jest 15 dziewcząt i 10 chłopców. Na pytanie „czy lubisz matematykę?" twierdząco odpowiedziało 40% dziewcząt i 90% chłopców. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba z tej klasy lubi matematykę.

Zadanie 417. 0–2 pkt

Ocena semestralna z matematyki jest ustalana na podstawie średniej ważonej ocen ucznia (zaokrąglonej zgodnie z zasadami matematycznymi do pełnych ocen). Oceny cząstkowe i ich wagi podano w tabeli.

	waga	oceny
sprawdziany	6	4, 2, 5
kartkówki	2	5, 3, 3, 4
odpowiedzi ustne	4	2, 4

Oblicz ocenę semestralną dla podanych ocen cząstkowych i ich wag.

Zadanie 418. 0–2 pkt

W urnie jest 6 kul białych, 3 kule niebieskie i n kul czarnych.
Dokończ zdania. Wybierz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H

418.1. Jeśli prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z tej urny wynosi $\frac{1}{3}$, to w urnie kul czarnych jest:

A. 3 B. 9 C. 6 D. 12

418.2. Jeśli prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej z tej urny jest nie większe od $\frac{1}{4}$, to w urnie kul czarnych jest co najwyżej:

E. 4 F. 3 G. 5 H. 2

Zadanie 419. 0–2 pkt

W tabeli przedstawiono skalę centylową wyników z matematyki na poziomie podstawowym dla egzaminu maturalnego przeprowadzonego w maju 2016 r. (cke.gov.pl).

Wynik procentowy	Wartość centyla
0	1
2	1
4	1
6	1
8	1
10	2
12	3
14	4
16	6
18	8
20	10
22	12
24	14
26	16
28	18
30	20
32	23

Wynik procentowy	Wartość centyla
34	25
36	28
38	30
40	33
42	35
44	38
46	40
48	43
50	45
52	48
54	50
56	53
58	55
60	58
62	60
64	62
66	65

Wynik procentowy	Wartość centyla
68	67
70	69
72	71
74	73
76	75
78	77
80	79
82	81
84	83
86	85
88	87
90	89
92	92
94	94
96	96
98	98
100	100

Odpowiedz na pytania.
a) Ile procent uczniów napisało egzamin lepiej niż Kuba, który uzyskał z egzaminu 62% punktów?
b) Ile procent punktów mogła uzyskać Magda, jeśli jej wynik to 40 centyl?

Zadanie 420. 0–2 pkt

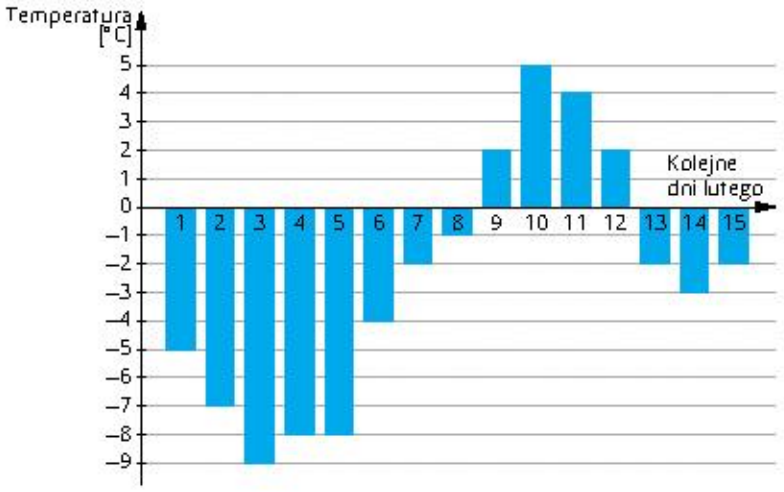
Średnia płaca w firmie A zatrudniającej 14 pracowników wynosi 3200 zł, a w firmie B zatrudniającej 20 pracowników wynosi 3600 zł. Oblicz średnią płacę pracowników obydwu firm.

Zadanie 421. 0–2 pkt

Producent truskawek sprzedał 30% zbioru truskawek po 12 zł za kilogram, 40% po 8,50 zł za kilogram, 25% po 4,40 zł za kilogram i 5% po 2,60 zł za kilogram. Jaka była średnia cena kilograma truskawek?

Zadanie 422. 0–2 pkt

Na wykresie przedstawiono wartość temperatury mierzonej rano w pierwszych 15 dniach lutego.

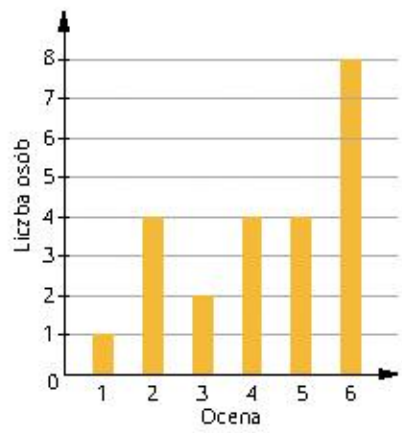


Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

1. Medianą temperatury w pierwszych 15 dniach lutego jest ....°C.
2. Średnia temperatura 15 dni lutego była o mniej więcej ....°C niższa od dominanty tych temperatur.

Zadanie 423. 0–2 pkt

Wyniki sprawdzianu z matematyki przedstawiono na diagramie.
Wyznacz różnicę między dominantą a medianą tego zestawu danych.



Zadanie 424. 0–3 pkt

Do księgarni dostarczono paczkę zawierającą 20 książek, z których 5 było historycznych. Księgarz wyjął losowo 3 książki. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wyjętych książek dokładnie 2 były historyczne.

Zadanie 425. 0–3 pkt

Uczeń otrzymał siedem ocen: 4, 5, 3, 4, 6, x, 3. Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 4. Wyznacz wartość x, medianę i dominantę tych ocen.

Zadanie 426. 0–3 pkt

Sprawdzono ceny jagodzianek w różnych cukierniach. Otrzymano następujące wyniki: 4 zł, 4,50 zł, 6,50 zł, 7 zł, 8 zł. Oblicz odchylenie standardowe ceny jagodzianki od średniej. Wynik podaj z dokładnością do 1 grosza.

Zadanie 427. 0–3 pkt

Ze zbioru liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5 i mniejszych od 300 wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to liczba podzielna przez 10.

Zadanie 428. 0–3 pkt

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy liczbę, która jest podzielna przez liczbę 8 i nie jest podzielna przez liczbę 16.

Zadanie 229. 0–3 pkt

Wśród 25 hulajnóg 20 jest sprawnych, a 5 – uszkodzonych. Losowo wybieramy 3 hulajnogi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej 2 spośród wybranych hulajnóg są sprawne?

Zadanie 430. 0–3 pkt

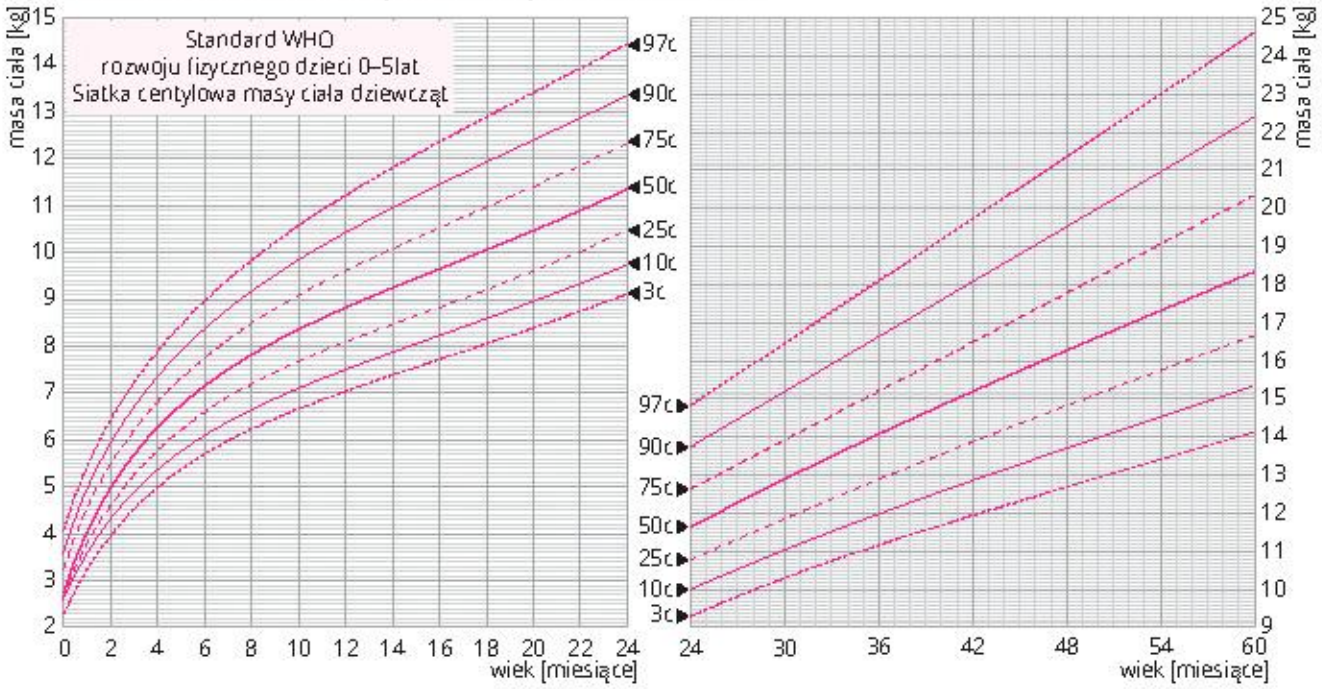
W urnie znajduje się jedna kula biała i n kul czarnych. Losujemy z urny jedną kulę, zatrzymujemy ją, a następnie losujemy drugą. Ile powinno być kul czarnych w urnie, aby prawdopodobieństwo wylosowania 2 kul czarnych było równe $\frac{4}{5}$?

Zadanie 431. 0–3 pkt

W dwóch konkursach można wygrać nagrody pieniężne w wysokości 20 000 zł, 5000 zł, 200 zł. W pierwszym konkursie szansa wygrania poszczególnych nagród wynosi odpowiednio: 0,1, 0,5, 0,7, a w drugim konkursie odpowiednio: 0,2, 0,2, 0,5. W którym konkursie powinien wziąć udział zawodnik, aby mieć większą szansę wygranej?

Zadanie 432. 0–3 pkt

Na rysunku przedstawiono siatkę centylową masy ciała dziewcząt.



Odpowiedz na pytania.

a) Półroczna dziewczynka waży 8100 g. W jakim centylu znajduje się jej waga?

b) Dziewczynka mająca 4,5 roku znalazła się pod względem wagi w 50 centylu. Jaką wagę miała ta dziewczynka?

c) Amelia ma 22 miesiące, Natalia jest od niej o 10 miesięcy młodsza, a Klara jest od niej o 10 miesięcy starsza. Każda z dziewczynek waży 12 kg. Czy waga każdej z nich znajduje się w granicach normy?

Zadanie 433. 0–3 pkt

W tabeli przedstawiono odpowiedzi pewnej grupy osób na pytanie: „Ile razy byłaś/byłeś w kinie w ciągu ostatniego miesiąca?".

Liczba osób	6	8	11	15	17	3
Liczba wyjść do kina	0	1	2	3	4	5

Oblicz średnią arytmetyczną wyjść do kina. Wyznacz medianę i dominantę tych danych.

Zadanie 434. 0–3 pkt

Warunkiem dopuszczenia studenta do egzaminu jest zaliczenie trzech testów, za które powinien uzyskać średnio co najmniej 15 punktów. Za rozwiązanie dwóch testów student uzyskał odpowiednio 12 punktów i 16 punktów. Ile punktów musi uzyskać z trzeciego testu, aby móc przystąpić do egzaminu?

Zadanie 435. 0–3 pkt

Dziewięciu pracowników zarobiło w maju po 4300 zł, a ich szef – 7500 zł. Oblicz średnią arytmetyczną płac oraz odchylenie standardowe od niej. Wynik podaj z dokładnością do 1 grosza.

Zadanie 436. 0–3 pkt

W pięciu kolejnych dniach stopy zysku akcji X były odpowiednio równe: 6%, 9%, −4%, −7%, 11%. Oblicz średnią stopę zysku oraz odchylenie standardowe od niej. Wynik zaokrąglij do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 437. 0–3 pkt

Firma zatrudnia 4 razy tyle pracowników na stanowiskach produkcyjnych niż na stanowiskach administracyjnych. W kwietniu średnia płaca w tej firmie wynosiła 4800 zł, przy czym płaca w grupie pracowników administracyjnych była równa 5200 zł. Oblicz, jaka była średnia płaca w kwietniu w grupie pracowników produkcyjnych.

Zadanie 438. 0–3 pkt

Zważono 100 losowo wybranych kostek masła produkowanego przez pewien zakład mleczarski. Wyniki badania przedstawiono w tabeli.

Masa kostki masła w dekagramach	16	18	19	20	21
Liczba kostek masła	4	5	16	63	12

Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oblicz odchylenie standardowe masy kostki masła. Wynik podaj z dokładnością do 1 g.

Zadanie 439. 0–4 pkt

Rzucamy dwa razy czterościenną kostką do gry, która ma na każdej ściance cyfrę odpowiednio: 1, 2, 3, 4.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia, że liczba 5 jest sumą oczek na obu kostkach.

Zadanie 440. 0–3 pkt

Wśród 80 losów jest 54 przegrywających. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując 3 razy po jednym losie, wygramy dokładnie 3 razy? Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Zadanie 441. 0–4 pkt

Rzucamy 4 razy symetryczną monetą. Co jest bardziej prawdopodobne: wyrzucenie jednego orła czy wyrzucenie reszki w co drugim rzucie?

Zadanie 442. 0–5 pkt

W bębnie maszyny losującej są kule białe i 15 kul czarnych. Oblicz, ile może być kul białych w urnie, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest większe od $\frac{1}{3}$ i mniejsze od $\frac{2}{5}$.

Zadanie 443. 0–5 pkt

Na świadectwie Piotra znalazło się 15 ocen, przy czym każda ocena to ocena dobra lub bardzo dobra. Ile ocen bardzo dobrych otrzymał na koniec roku Piotr, jeżeli wariancja jego ocen wynosiła $\frac{6}{25}$?

DOBRE PRAKTYKI W PRACY Z ARKUSZEM

O tym pamiętaj, jeśli chcesz rozwiązać arkusz PP i uzyskać maksimum punktów:

1. Zawsze wnikliwie czytaj polecenia, które precyzują, jakie czynności masz wykonać i jaki zakres materiału uwzględnić.
2. Rozwiązuj najpierw te zadania, które dobrze rozumiesz i potrafisz wykonać.
3. Podany czas 170 minut jest przewidziany na wykonanie poleceń i zaznaczenie odpowiedzi do zadań zamkniętych na karcie odpowiedzi. Zaplanuj czas swojej pracy nad całym arkuszem.
4. Nie ulegaj stresowi. Skoncentruj się na zadaniu, które masz wykonać.

OPERON
Edukacja jest podróżą

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD | **PESEL**

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

ARKUSZ V

TERMIN: .....

Czas pracy: **170 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **46**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 17 stron (zadania 1.–26.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Symbol ▭✎ zamieszczony w nagłówku zadania oznacza, że rozwiązanie zadania zamkniętego musisz przenieść na kartę odpowiedzi.
6. Odpowiedzi do zadań zamkniętych zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ◉ i zaznacz właściwe.
7. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
8. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
9. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

Arkusz opracowany przez Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON.
Kopiowanie w całości lub we fragmentach bez zgody wydawcy zabronione.

Zadanie 1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Ułamek $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$ jest równy:

A. -1 **B.** $4\sqrt{3}-7$ **C.** 1 **D.** $7-4\sqrt{3}$

Rozwiązanie:

Przy przekształceniu wyrażenia musisz usunąć niewymierność z mianownika.

$$\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}-\frac{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)}-\frac{3-4\sqrt{3}+4}{3-2}-\frac{7-4\sqrt{3}}{1}-7-4\sqrt{3}$$

Odpowiedź: B

Zadanie 2. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Liczba $\sqrt[3]{(-27)^{-1}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}=-9$.	**P**	**F**
2.	Wartość wyrażenia $\left(\frac{2^{-1}\cdot\left(3^2\right)^3}{2^{-4}\cdot\left(3^6\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^0$ wynosi 6^3.	**P**	**F**

Do obliczenia wartości tego wyrażenia zastosuj własności pierwiastków oraz związek pierwiastkowania z potęgowaniem.
Aby ocenić prawdziwość tego zdania, musisz wiedzieć, że zerowa potęga dowolnej liczby rzeczywistej różnej od 0 jest zawsze równa 1.
Aby zdobyć 1 punkt, musisz właściwie ocenić prawdziwość obydwu zdań.

Rozwiązanie:

$$\sqrt[3]{(-27)^{-1}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}\cdot\left(\sqrt[4]{81}\right)^3=-\frac{1}{3}\cdot 3^3=-9$$

$$\left(\frac{2^{-1}\cdot\left(3^2\right)^3}{2^{-4}\cdot\left(3^6\right)^{\frac{1}{2}}}\right)^0=1$$

Odpowiedź: PF

Zadanie 3. (0–1)

Na którym rysunku przedstawiono zbiór liczb spełniających nierówność $\left|x-1\frac{3}{4}\right|\geq 9\frac{1}{2}$?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A.



B.



C.



D.



Rozwiązanie:

$\left|x-1\frac{3}{4}\right| \geq 9\frac{1}{2}$

$x-1{,}75 \geq 9{,}5$ lub $x-1{,}75 \leq -9{,}5$

$x \geq 9{,}5+1{,}75$ lub $x \leq -9{,}5+1{,}75$

$x \geq 11{,}25$ lub $x \leq -7{,}75$, stąd $x \in (-\infty, -7{,}75\rangle \cup \langle 11{,}25, \infty)$

Odpowiedź: C

Aby wybrać poprawną odpowiedź, musisz rozwiązać nierówność z wartością bezwzględną, a następnie rozwiązanie przedstawić za pomocą przedziału liczbowego i wybrać odpowiedni przedział zaznaczony na osi liczbowej.

Zadanie 4. (0–1)

Po dwukrotnej obniżce, za każdym razem o 5% w stosunku do ceny obowiązującej w chwili obniżki, książka kosztuje 43,32 zł.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Książka przed tymi obniżkami kosztowała:

A. 46 zł **B.** 48 zł **C.** 52 zł **D.** 54 zł

Rozwiązanie:

Oznaczmy jako x cenę towaru przed obniżkami.

$0{,}95 \cdot (0{,}95x) - 43{,}32$

$x = 48$

Odpowiedź: B

Zadanie sprowadza się do obliczenia liczby, gdy dany jest jej procent. Pamiętaj o zamianie procentu na ułamek, np. dziesiętny.

Zadanie 5. (0–2)

Dany jest wielomian $w(x) = \frac{2x^2+4x}{2x+6} : \frac{x^2-4}{x^2+6x+9}$ dla $x \neq -3$, $x \neq 2$, $x \neq -2$.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

5.1. Wyrażenie $w(x)$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia:

A. $\frac{x^2-4}{x+3}$ **B.** $\frac{x(x+3)}{x-3}$ **C.** $\frac{x(x+3)}{x-2}$ **D.** $\frac{x^2-3}{x+3}$

5.2. Wartość wyrażenia $w(x)$ dla $x = 1\frac{1}{2}$ jest równa:

E. 13,5 **F.** −9 **G.** 9 **H.** −13,5

Rozwiązanie:

$$w(x) - \frac{2x^2+4x}{2x+6} : \frac{x^2-4}{x^2+6x+9} - \frac{2x(x+2)}{2(x+3)} \cdot \frac{(x+3)^2}{(x-2)\cdot(x+2)} - \frac{x(x+3)}{x-2}$$

$$w\left(1\frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}+3\right)}{\frac{3}{2}-2} - \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{2}}{-\frac{1}{2}} - -\frac{27}{4}\cdot\frac{2}{1} - -\frac{27}{2} - -13{,}5$$

Odpowiedź: 5.1. C, 5.2. H

Przy przekształceniu wyrażenia musisz wiedzieć, w jaki sposób wykonuje się dzielenie wyrażeń wymiernych. Potrzebna jest ci również wiedza dotycząca mnożenia i dzielenia w zbiorze liczb rzeczywistych.
Aby poprawnie i szybko obliczyć wartość tego wielomianu dla podanej liczby, wykorzystaj przekształcony do najprostszej postaci wielomian w.
Jeden punkt otrzymasz także wtedy, gdy poprawnie obliczysz wartość tego wielomianu bez doprowadzania go do najprostszej postaci. Potrzebna ci wówczas będzie tylko wiedza dotycząca wykonywania działań w zbiorze liczb rzeczywistych.
Aby zdobyć 2 punkty, musisz poprawnie dokończyć obydwa zdania.

Zadanie 6. (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, którego przyprostokątne mają długości $AC = 5$ i $BC = 12$. Które z poniższych zdań jest fałszywe?

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 6,5.

B. Promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest równy 2.

C. Dwusieczna kąta ABC dzieli bok CB na odcinki o długościach 2,4 i 2,6.

D. Wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość 5.

Aby wybrać tylko jedno zdanie spośród podanych, musisz umieć korzystać z podstawowych własności punktów szczególnych w trójkącie. Przyda ci się również znajomość twierdzenia Pitagorasa i sposób obliczania pola trójkąta prostokątnego.

Rozwiązanie:

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy przeciwprostokątną AB trójkąta ABC:

$$|AB|^2 = 5^2 + 12^2$$

$$|AB|^2 = 25 + 144$$

$$|AB|^2 = 169$$

$$AB = 13$$

Oznaczamy jako h wysokość opuszczoną z wierzchołka C. Obliczmy pole trójkąta ABC na dwa sposoby:

$P = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$ oraz $P = \frac{13 \cdot h}{2}$

Zatem $\frac{13 \cdot h}{2} = 30$, stąd $h = \frac{60}{13}$

$\frac{60}{13} \neq 5$

Odpowiedź: D

Zadanie 7. (0–1)

W równoległoboku $ABCD$ jeden z kątów ma miarę większą od miary drugiego o 30°.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kąt rozwarty równoległoboku $ABCD$ ma miarę:

A. 95° **B.** 120° **C.** 105° **D.** 150°

Zadanie sprowadza się do obliczenia miary kąta rozwartego danego równoległoboku. Musisz więc wiedzieć, że suma miar kolejnych dwóch kątów w równoległoboku wynosi 180°.

Rozwiązanie:

Oznaczamy jako α miarę kąta rozwartego równoległoboku $ABCD$.

Wtedy:

$\alpha + (\alpha - 30°) = 180°$, stąd $\alpha = 105°$

Odpowiedź: C

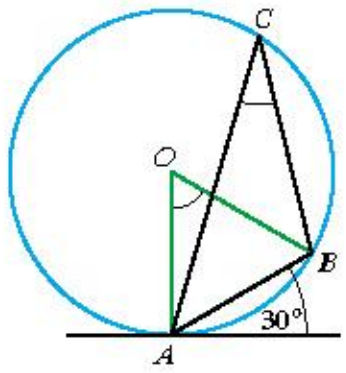
Zadanie 8. (0–3)

W okręgu o promieniu 12 cm poprowadzono cięciwę AB. Kąt między tą cięciwą a styczną do okręgu w punkcie A wynosi 30°.

Oblicz długość łuku wyznaczonego przez cięciwę AB. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności ma miarę równą mierze kąta wpisanego opartego na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy.

Zatem $|\sphericalangle ACB| - 30°$

Wyznaczamy miarę kąta środkowego AOB opartego na cięciwie AB:

$|\sphericalangle AOB| - 2 \cdot 30° - 60°$

Obliczamy długość łuku wyznaczonego przez cięciwę AB:

$$L - \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

$$L - \frac{60°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 12$$

Odpowiedź: $L = 4\pi$ (cm)

Musisz prawidłowo wyznaczyć miarę kąta *ACB*.

Wykorzystaj zależność między kątami środkowym i wpisanym opartymi na tym samym łuku.

Musisz zastosować odpowiednią metodę obliczenia długości łuku wyznaczonego przez cięciwę *AB*.
Podanie samego wyniku (bez zaprezentowania sposobu obliczeń) jest najczęściej niewystarczające.

Zadanie 9. (0–1)

Suma dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 155. Pierwszy wyraz a_1 tego ciągu jest równy 2.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wtedy:

A. $a_8 = 31$ **B.** $a_8 = 32$ **C.** $a_8 = 26$ **D.** $a_8 = 23$

Rozwiązanie:

Oznaczamy jako r różnicę ciągu arytmetycznego (a_n).

Wyznaczamy różnicę r ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $S_n - \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$:

$$155 - \frac{2 \cdot 2 + (10-1) \cdot r}{2} \cdot 10$$

$$155 - \frac{4 + 9 \cdot r}{2} \cdot 10$$

$$155 - (4 + 9 \cdot r) \cdot 5$$

$31 - 4 + 9 \cdot r$, stąd $r = 3$

Obliczamy a_8 ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego $a_n - a_1 + (n-1) \cdot r$.

Zatem $a_8 - 2 + (8-1) \cdot 3$, czyli $a_8 = 23$

Odpowiedź: D

Aby poprawnie wybrać odpowiedź, musisz prawidłowo wyznaczyć różnicę r ciągu ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego, a następnie prawidłowo obliczyć ósmy wyraz tego ciągu.

Zadanie 10.

Ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3 \cdot 2^n$ dla $n \geq 1$.

Zadanie 10.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz ciągu jest (a_n) równy:

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** -2 **C.** 2 **D.** $\frac{1}{2}$

Zdobędziesz punkt, jeśli prawidłowo wyznaczysz pierwszy i drugi wyraz ciągu, a następnie obliczysz iloraz ciągu.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy pierwszy i drugi wyraz ciągu (a_n):

$a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$

$a_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$

Wyznaczamy iloraz q ciągu (a_n):

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{6} = 2$$

Odpowiedź: C

Zadanie 10.2. (0–1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) jest

A.	rosnący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ iloraz $a_{n+1} : a_n$ jest liczbą	**1.**	większą od 1 i $a_1 < 0$.
B.	malejący,		**2.**	mniejszą od 1 i $a_1 > 0$.
C.	stały,		**3.**	większą od 1 i $a_1 > 0$.

Musisz umieć zbadać i określić monotoniczność ciągu geometrycznego.

Rozwiązanie:

Obliczamy a_1:

$a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$, zatem $a_1 > 1$

Wyznaczamy a_{n+1} wyraz ciągu (a_n):

$a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+1}$

Wyznaczamy iloraz $a_{n+1} : a_n$:

$$a_{n+1} : a_n = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \frac{3 \cdot 2^n \cdot 2}{3 \cdot 2^n} = 2, \text{ zatem } a_{n+1} : a_n > 0$$

Stąd ciąg (a_n) jest rosnący, ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ iloraz $a_{n+1} : a_n$ jest liczbą większą od 0 i $a_1 > 1$.

Odpowiedź: A3

Zadanie 10.3. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej sumę pięciu wyrazów ciągu (a_n).

Rozwiązanie:

$S_5 - 6 \cdot \frac{1-2^5}{1-2} - 186$

Zadanie wymaga prawidłowego zastosowania wzoru na n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

Zadanie 11. (0–4)

Oblicz sumę szesnastu wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) o pierwszym wyrazie 3, wiedząc, że wyrazy pierwszy, czwarty i trzynasty tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny (b_n). Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

Różnicę ciągu (a_n) oznaczamy jako r, a iloraz ciągu (b_n) jako q.

Zapisujemy pierwszy wyraz, czwarty i trzynasty ciągu (a_n):

$a_1 = 3, a_4 - 3 + 3r, a_{13} - 3 + 12r$

Wyrazy 3, $3 + 3r$, $3 + 12r$ lub $3, 3q, 3q^2$ tworzą ciąg geometryczny (b_n), więc

$(3+3r)^2 - 3 \cdot (3+12r)$

$9(1+r)^2 - 9 \cdot (1+4r)$

$1 + 2r + r^2 - 1 + 4r$

$r(r-2) - 0$, stąd $r = 0$ lub $r = 2$

albo

Wyrazy $3, 3q, 3q^2$ tworzą ciąg geometryczny, więc:

$\begin{cases} 3q - 3 + 3r \\ 3q^2 - 3 + 12r \end{cases}$

$\begin{cases} q - 1 + r \\ q^2 - 1 + 4r \end{cases}$

$(1+r)^2 - 1 + 4r$, stąd $r = 0$ lub $r = 2$

Zatem $\begin{cases} r - 0 \\ q - 1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} r - 2 \\ q - 3 \end{cases}$

Ciąg (a_n) jest rosnący zatem $r = 2$.

Obliczamy sumę szesnastu wyrazów ciągu (a_n):

$S_{16} - \frac{2 \cdot 3 + (16-1) \cdot 2}{2} \cdot 16 - \frac{6+30}{2} \cdot 16 - 36 \cdot 8 - 288$

Musisz prawidłowo zapisać pierwszy, czwarty i trzynasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n).

Zastosuj warunek dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (b_n).

Wyznacz prawidłowo różnicę r ciągu (a_n) lub iloraz q ciągu (b_n).
Pamiętaj, że ciąg (a_n) jest rosnący.

Musisz prawidłowo obliczyć sumę szesnastu wyrazów ciągu (a_n).
Podanie samego wyniku (bez zaprezentowania sposobu obliczeń) jest najczęściej niewystarczające.

Zadanie 12. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układem równań, który nie ma rozwiązania, jest układ:

A. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+y=1 \\ y-x=4 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} -2x-4=-4y \\ \frac{y-x}{2}=-2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} -x+y=4 \\ 3x-3y=12 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=2 \\ x-y=-4 \end{cases}$

Musisz prawidłowo rozwiązać układy równań dowolną metodą i określić, który z nich jest sprzeczny – czyli taki, który nie ma rozwiązania.

Rozwiązanie:

Rozwiązując układy równań, otrzymujemy:

A. $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=10 \\ y=6 \end{cases}$ C. $0=8$ układ sprzeczny

Odpowiedź: C

Zadanie 13. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=x^2+bx+c$ oraz $f(-1)=f(5)=7$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynniki b i c są równe:

A. $b=-4$ i $c=2$ **B.** $b=4$ i $c=-2$

C. $b=-4$ i $c=-2$ **D.** $b=4$ i $c=2$

Zdobędziesz punkt, jeśli obliczysz wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym. Powinieneś/Powinnaś również właściwie interpretować współczynniki we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

Rozwiązanie:

Zapisujemy warunki zadania w postaci układu równań:

$\begin{cases} (-1)^2-b+c=7 \\ 5^2+5b+c=7 \end{cases}$

$\begin{cases} -b+c=6 \quad |\cdot(-1) \\ 5b+c=-18 \end{cases}$

$\begin{cases} b-c=-6 \\ 5b+c=-18 \end{cases}$

Po dodaniu obu równań układu stronami otrzymujemy:

$6b=-24$, stąd $b=-4$

Zatem $\begin{cases} b=-4 \\ c=2 \end{cases}$

Odpowiedź: A

Zadanie 14. (0–1)

Ojciec i syn mają razem 54 lata. Za 6 lat ojciec będzie 2 razy starszy od syna.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Jeśli przez x oznaczymy obecny wiek ojca, a przez y – obecny wiek syna, to układem równań opisującym sytuację przedstawioną w zadaniu jest:

A. $\begin{cases} x+y=54 \\ y+6=2(x+6) \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x+y=54 \\ x+6=2y \end{cases}$

C. $\begin{cases} x+y=54 \\ x+6=2(y+6) \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x+y=54 \\ x+6=2y+6 \end{cases}$

Odpowiedź: C

Aby zdobyć jeden punkt, należy prawidłowo wybrać układ równań, w którym obydwa równania spełniają warunki zadania.

Zadanie 15. (0–1)

Iza ma 3 czapki: białą, niebieską i czerwoną, 5 szalików: niebieski, czerwony, brązowy, zielony i żółty, oraz 4 pary rękawiczek: niebieskie, czerwone, brązowe i czarne. Iza wybiera zestaw składający się z czapki, szalika i rękawiczek.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich możliwych, różnych zestawów, jakie może wybrać Iza, jest równa:

A. 12 **B.** 60 **C.** 19 **D.** 72

Rozwiązanie:

Stosujemy regułę mnożenia: $3 \cdot 5 \cdot 4 - 60$

Odpowiedź: B

Otrzymasz punkt, jeśli pomnożysz przez siebie liczby 3, 5 i 4.

Zadanie 16. (0–1)

Dane są punkty $A=(1,\ 1)$ i $C=(5,\ 3)$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równaniem symetralnej odcinka AC jest prosta o równaniu:

A. $-x+2y-1=0$ **B.** $-2x+4y-2=0$

C. $2x+y=0$ **D.** $2x+y-8=0$

Rozwiązanie:

$a_1 - \frac{3-1}{5-1} - \frac{2}{4} - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \cdot a_2 - -1 \qquad a_2 - -2$

$S - \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) - (3, 2)$

$y - -2x+b$

$2 - -2 \cdot 3 + b \qquad b=8$

$y - -2x+8 \qquad 2x+y-8-0$

Odpowiedź: D

Oblicz:
- współczynnik kierunkowy prostej AC,
- współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej AC,
- współrzędne środka S odcinka AC.

Następnie zapisz równanie prostej prostopadłej w postaci kierunkowej. Wstaw współrzędne punktu S i oblicz wartość b. Na koniec zapisz równanie prostej prostopadłej w postaci ogólnej.

Zadanie 17. (0–1)

Dane są funkcje liniowe f i g określone wzorami $f(x)=3x+1$ i $g(x)=-\frac{1}{2}x-3$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem rozwiązań nierówności $-1,5<f(x)+g(x)<1,5$ jest:

A. $\left(-\frac{1}{5},\ 1\frac{2}{5}\right)$ **B.** $\left\langle -\frac{1}{5},\ 1\frac{2}{5}\right\rangle$ **C.** $\left(-1\frac{2}{5},\ 1\frac{2}{5}\right)$ **D.** $\left(-\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right)$

Rozwiązanie:

Musisz wyznaczyć sumę funkcji f i g. Rozwiąż nierówność podwójną i zapisz rozwiązanie w postaci przedziału.

$$f(x)+g(x)-3x+1-\frac{1}{2}x-3-\frac{5}{2}x-2$$

$$-1,5<2,5x-2<1,5 \quad 0,5<2,5x<3,5$$

$$\frac{1}{5}<x<1\frac{2}{5} \qquad x\in\left(\frac{1}{5};1\frac{2}{5}\right)$$

Odpowiedź: A

Zadanie 18. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla kąta α, będącego kątem ostrym, wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ można zapisać w postaci:

A. $\frac{\sin\alpha+1}{1+\cos\alpha}$ **B.** $\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ **C.** $\cos\alpha$ **D.** $\frac{1}{\sin\alpha}$

Rozwiązanie:

Musisz zastosować wzór $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Przekształć wyrażenie do prostszej postaci.

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}-\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$$

Pamiętaj o zastosowaniu wzoru $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}-\frac{\cancel{1+\cos\alpha}^{\,1}}{\sin\alpha\cancel{(1+\cos\alpha)}_{\,1}}-\frac{1}{\sin\alpha}$$

Odpowiedź: D

Zadanie 19. (0–1)

Najdłuższy bok trójkąta ma długość 12 cm, a dwa kąty tego trójkąta mają miary 15° i 45°.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Najdłuższy bok tego trójkąta leży naprzeciw kąta o mierze 120°.	**P**	**F**
2.	Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $4\sqrt{3}$ cm.	**P**	**F**

Rozwiązanie:

$180^\circ-(15^\circ+45^\circ)-180^\circ-60^\circ-120^\circ$

$P-\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ-6\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-6\ \text{cm}^2$

Odpowiedź: PP

Musisz wyznaczyć miarę trzeciego kąta trójkąta. W trójkącie naprzeciw najdłuższego boku leży największy kąt.
Zastosuj wzór $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Zadanie 20. (0–2)

Trzema wierzchołkami równoległoboku $ABCD$ są punkty $A=(1,\ 3)$, $C=(7,\ 5)$ i $D=(4,\ 11)$.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–G.

20.1. Długość przekątnej AC jest równa:

A. $2\sqrt{10}$ **B.** $8\sqrt{2}$ **C.** 10 **D.** $2\sqrt{17}$

20.2. Współrzędne punktu B są równe:

E. $(4,\ -3)$ **F.** $(5,\ -3)$ **G.** $(4,\ -4)$ **H.** $(4,\ 4)$

Rozwiązanie:

$|AC|-\sqrt{(7-1)^2+(5-3)^2}-\sqrt{36+4}-\sqrt{40}-2\sqrt{10}$

20.1.

$S-\left(\frac{1+7}{2},\frac{3+5}{2}\right)-(4,4)$

$4-\frac{4+x}{2}\qquad x=4\qquad 4-\frac{11+y}{2}\qquad y--3$

$B-(4,-3)$

Odpowiedź: 20.1. A, 20.2. E

Musisz obliczyć długość przekątnej AC, stosując wzór na odległość między punktami.

Wyznacz współrzędne środka S odcinka AC. Zauważ, że punkt S jest również środkiem odcinka BD.

Oblicz współrzędne punktu B.

Zadanie 21.

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest dwa razy krótsza niż przekątna podstawy, wynosi $36\ \text{cm}^2$.

Zadanie 21.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest równa:

A. 25° **B.** 30° **C.** 45° **D.** 60°

Rozwiązanie:

$a^2=36\qquad a=6\ \text{cm}\qquad d=6\sqrt{2}\ \text{cm}\qquad H=3\sqrt{2}\ \text{cm}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=1\qquad \alpha-45^\circ$

Odpowiedź: C

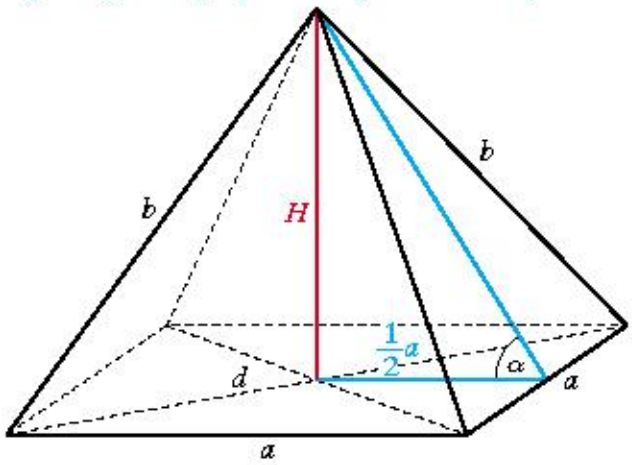
Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość ostrosłupa, korzystając ze wzoru na przekątną kwadratu. Następnie wyznacz tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy. Skorzystaj z wiadomości, że $\operatorname{tg}45^\circ=1$.

Zadanie 21.2. (0–3)

Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

Sporządzamy rysunek pomocniczy.



Obliczamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa. Korzystamy ze wzoru na pole kwadratu. Zapisujemy: $P = a^2$, stąd $36 = a^2$ więc $a = 6$ cm.

Skoro $d = a\sqrt{2}$, to $d = 6\sqrt{2}$ cm

Ponieważ wysokość jest dwa razy krótsza od przekątnej podstawy, otrzymujemy: $H = 3\sqrt{2}$ cm.

Obliczamy wysokość ściany bocznej ostrosłupa.

Zastosuj twierdzenie Pitagorasa.

Zapisujemy: $h_b^2 - H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$ stąd $h_b^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 \qquad h_b^2 - 18 + 9$

Skorzystaj z wyłączania czynnika przed znak pierwiastka.

$h_b^2 = 27 \qquad h_b = 3\sqrt{3}$ cm

Obliczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Zapisujemy: $P_c - P_p + P_b$

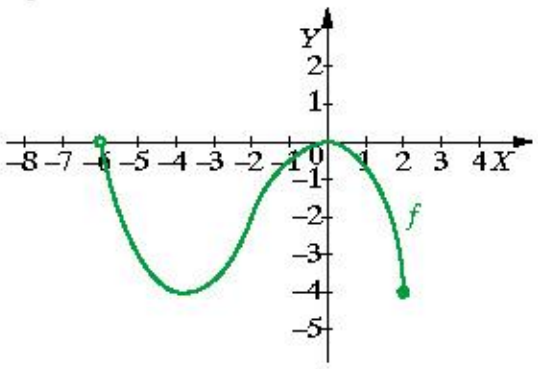
Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

$P_c - 36 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} - 36 + 36\sqrt{3} - 36\left(1 + \sqrt{3}\right)$ cm^2

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wynosi: $36\left(1 + \sqrt{3}\right)$ cm^2

Zadanie 22.

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych.



Zadanie 22.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej miejsce zerowe lub miejsca zerowe funkcji.

Rozwiązanie:

$x = 0$

Musisz znać określenie miejsca zerowego funkcji.

Zadanie 22.2. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej maksymalny przedział lub maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

Rozwiązanie:

$(-6,\ -4)$ i $\langle 0,\ 2\rangle$

Wykorzystaj wiedzę dotyczącą monotoniczności funkcji.

Zadanie 23. (0–2)

Uzasadnij, że liczba $m = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3}$, gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1, jest podzielna przez 30.

Rozwiązanie:

Jeśli liczba m jest podzielna przez 30, to możemy zapisać ją w postaci: $m - 30 \cdot k$, gdzie $k \in \{0,1,2,3,...\}$.

$m - 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} - 2^n\left(1+2+2^2+2^3\right) - 2^n \cdot 15 -$

$-2 \cdot 2^{n\ 1} \cdot 15 - 30 \cdot 2^{n\ 1}$

Po oznaczeniu przez k liczby 2^{n-1}, która należy do zbioru $\{0,1,2,3,...\}$, otrzymujemy: $m - 30 \cdot k$. Zatem liczba m jest podzielna przez 30.

Zastosuj wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias oraz własności potęgowania.

Zadanie 24. (0–3)

Pudełko zawiera jedną kulę białą i n kul czarnych. Losujemy z pudełka jedną kulę, zatrzymujemy ją, a następnie losujemy drugą.

Ile powinno być kul czarnych, aby prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych było równe $\frac{3}{4}$? Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

W pudełku znajduje się $n + 1$ kul.

Liczba możliwych wyników tego doświadczenia losowego wynosi: $\overline{\overline{\Omega}} - (n+1) \cdot n$

Oznaczamy jako A zdarzenie polegające na wylosowaniu (bez zwracania) dwóch kul czarnych.

Wyznaczamy liczbę możliwych wyników zdarzenia A: $\overline{\overline{A}} - n(n-1)$.

Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$P(A) - \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}},\ P(A) - \frac{n(n-1)}{n(n+1)} - \frac{n-1}{n+1}$

Musisz umieć wyznaczać liczbę zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego.

Zapisz wzór pozwalający wyznaczyć liczbę wyników danego zdarzenia losowego.

Skorzystaj ze wzoru na prawdopodobieństwo klasyczne.

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul czarnych ma być równe $\frac{3}{4}$, więc:

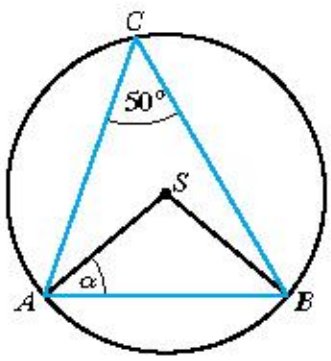
Zastosuj metodę rozwiązywania równania w postaci proporcji.

$$\frac{n-1}{n+1}=\frac{3}{4}$$

$4n-4=3n+3$, stąd $n=7$

Zadanie 25. (0–2)

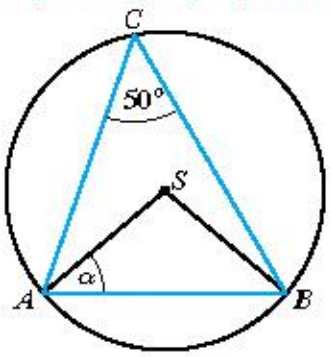
Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Miara kąta ACB wynosi 50°, a promień AS tworzy z bokiem AB kąt α.



Oblicz miarę kąta α. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy



Zastosuj twierdzenie o kątach wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku. Wykorzystaj własność trójkąta równoramiennego.

Kąt ASB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany ACB.

Stąd wynika, że $|\sphericalangle ASB|=2\cdot|\sphericalangle ACB|$, czyli $|\sphericalangle ASB|=2\cdot 50°=100°$.

Trójkąt ASB jest trójkątem równoramiennym (boki AS i BS, to promienie okręgu o środku S), więc $|\sphericalangle SAB|=|\sphericalangle ABS|$.

Zatem $\alpha=(180°-100°):2=40°$.

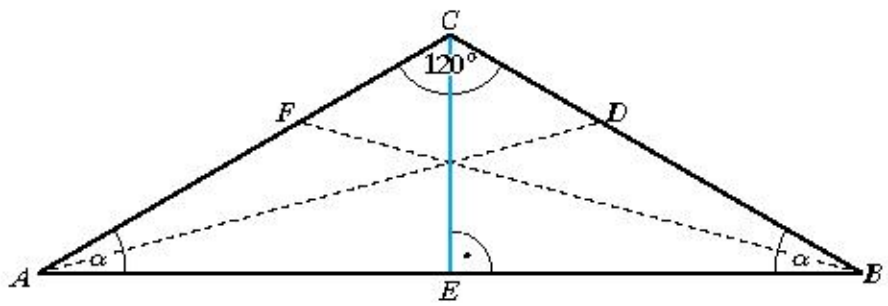
Zadanie 26. (0–4)

W trójkącie równoramiennym ABC podstawa AB ma długość 10, a miara kąta, jaki tworzą ramiona AC i BC, wynosi 120°.

Oblicz długości środkowych tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

Sporządzamy rysunek pomocniczy.



Odcinek AD jest środkową poprowadzoną na ramię CB (oraz ramię AC), a odcinek CE wysokością poprowadzoną na podstawę i jednocześnie środkową poprowadzoną na podstawę.

Wyznaczamy miarę kąta α: $\alpha - \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} - 30^\circ$

Wykorzystaj własność trójkąta równoramiennego.

Z trójkąta EBC, korzystając z funkcji trygonometrycznych, wyznaczamy długość odcinka CE: $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{|CE|}{|EB|}$

Otrzymujemy: $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{|CE|}{5}$. Stąd: $|CE| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Zastosuj funkcje trygonometryczne.

Z trójkąta EBC, korzystając z funkcji trygonometrycznych, wyznaczamy długość odcinka CB: $\cos 30^\circ = \frac{|EB|}{|CB|}$

Otrzymujemy: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{|CB|}$. Stąd: $|CB| = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Zastosuj funkcje trygonometryczne.

Wyznaczamy długość odcinka BD: $|BD| = \frac{1}{2}|CB| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Skorzystaj z własności środkowych w trójkącie.

Z trójkąta ABD, korzystając z twierdzenia cosinusów, wyznaczamy długość środkowej AD:

$|AD|^2 - |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos 30^\circ$

Zastosuj twierdzenie cosinusów.

Otrzymujemy: $|AD|^2 - 10^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, stąd: $|AD|^2 = \frac{175}{3}$

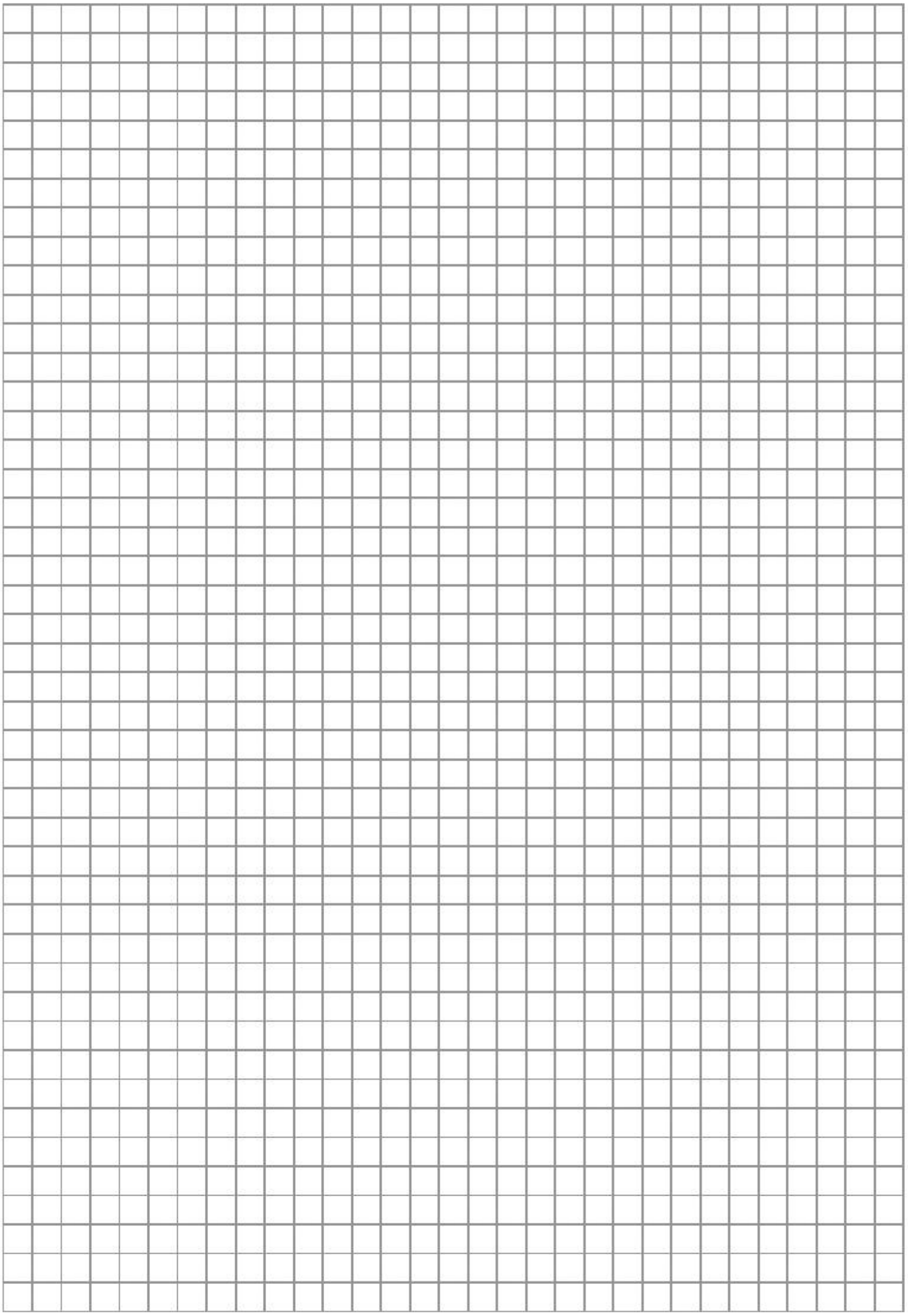
Wobec tego: $|AD| = \frac{5\sqrt{21}}{3}$

Długości środkowych AD i BF są takie same.

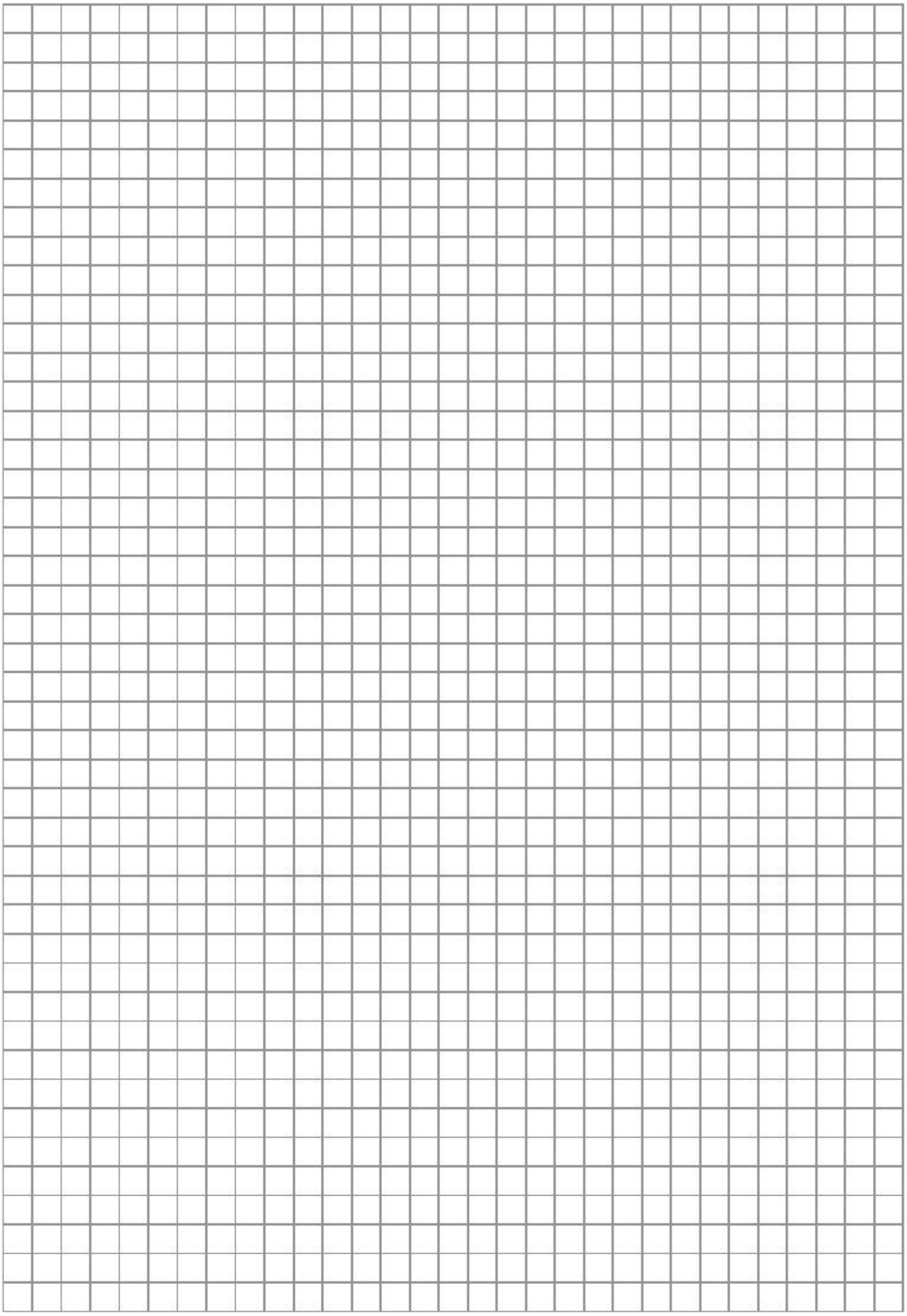
Pamiętaj o własnościach trójkątów równoramiennych.

Odpowiedź: Długość środkowej AD i środkowej BF wynosi $\frac{5\sqrt{21}}{3}$, a środkowej CE wynosi $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)



KARTA ODPOWIEDZI

WYPEŁNIA UCZEŃ

Kod ucznia ☐☐☐

PESEL ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐

Nr zad.	Odpowiedzi			
1.	A	B	C	D
2.	PP	PF	FP	FF
3.	A	B	C	D
4.	A	B	C	D
5.1.	A	B	C	D
5.2.	E	F	G	H
6.	A	B	C	D
7.	A	B	C	D
9.	A	B	C	D
10.1.	A	B	C	D
10.2.	A1	A2	A3	
	B1	B2	B3	
	C1	C2	C3	
12.	A	B	C	D
13.	A	B	C	D
14.	A	B	C	D
15.	A	B	C	D
16.	A	B	C	D
17.	A	B	C	D
18.	A	B	C	D
19.	PP	PF	FP	FF

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia ucznia do:

dostosowania zasad oceniania ☐

dostosowania w zw. z dyskalkulią ☐

nieprzenoszenia odpowiedzi na kartę ☐

WYPEŁNIA EGZAMINATOR

Nr zad.	Punkty				
	0	1	2	3	4
8.	☐	☐	☐	☐	
10.3.	☐	☐			
11.	☐	☐	☐	☐	☐
21.2.	☐	☐	☐	☐	
22.1.	☐	☐			
22.2.	☐	☐			
23.	☐	☐	☐		
24.	☐	☐	☐	☐	
25.	☐	☐	☐		
26.	☐	☐	☐	☐	☐

Nr zad.	Odpowiedzi			
20.1.	A	B	C	D
20.2.	E	F	G	H
21.1.	A	B	C	D

Karta odpowiedzi opracowana na potrzeby publikacji, zgodna ze stanem wiedzy o egzaminie maturalnym z dnia 13.07.2022.

Odpowiedzi do zadań

1. Liczby rzeczywiste

Zadania krótsze

Zadanie 1. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 2. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 3. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 4. 0–2 pkt
Odpowiedź: 1

Zadanie 5. 0–2 pkt
Odpowiedź: 360 zł

Zadanie 6.1. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 6.2. 0–2 pkt
Odpowiedź: H

Zadanie 7. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 8. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 9. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 10. 0–2 pkt
Odpowiedź: $11\cdot\left(5\cdot 7^{29}\right)$

Zadanie 11. 0–2 pkt
Odpowiedź: 2350 zł

Zadanie 12. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\log_5 108 = 2a+3b$

Zadanie 13. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadania dłuższe

Zadanie 14. 0–2 pkt
Odpowiedź: $2^{10}\cdot 467775$

Zadanie 15. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|-\left|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right|=3\sqrt{3}-4\sqrt{2}$

Zadanie 16. 0–4 pkt
Odpowiedź: a) $-\frac{2}{3}$, b) 1

Zadanie 17. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 18. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 19. 0–2 pkt
Odpowiedź: 1

Zadanie 20. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\sqrt[3]{3}$

Zadanie 21. 0–2 pkt
Odpowiedź: 5^{99}

Zadanie 22. 0–3 pkt
Odpowiedź: 50

Zadanie 23. 0–2 pkt
Odpowiedź: $33\frac{1}{3}\%$

Zadanie 24. 0–3 pkt
Odpowiedź: 360 000 zł

Zadanie 25. 0–2 pkt
Odpowiedź: 2

Zadanie 26. 0–2 pkt
Odpowiedź: $-1\in\mathbb{Z}$

Zadanie 27. 0–2 pkt
Odpowiedź: $2x-8$

Zadanie 28. 0–4 pkt
Odpowiedź: 96%

Zadanie 29. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 30. 0–1 pkt
Odpowiedź: 1. P, 2. F

Zadanie 31. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 32. 0–2 pkt
Odpowiedź: $31\cdot\left(5\cdot 13^{1313}\right)$

Zadanie 33. 0–3 pkt
Odpowiedź: 1 lub 4

Zadanie 34. 0–2 pkt
Odpowiedź: 180

Zadanie 35. 0–2 pkt
Odpowiedź: $-6\in\mathbb{Q}$

Zadanie 36. 0–4 pkt
Odpowiedź: a) 12 420 zł, b) 12 792,60 zł

2. Wielomiany

Zadania krótsze

Zadanie 37. 0–1 pkt
Odpowiedź: PF

Zadanie 38. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 39. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 40. 0–1 pkt
Odpowiedź: FP

Zadanie 41. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 42. 0–2 pkt
Odpowiedź: $m=-0{,}5$

Zadanie 43. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 44. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 45. 0–2 pkt
Odpowiedź: 210

Zadanie 46. 0–2 pkt
Odpowiedź: 2

Zadanie 47. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 48. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 49. 0–2 pkt
Odpowiedź: 16

Zadania dłuższe

Zadanie 50. 0–2 pkt
Odpowiedź: $q(x)=x^2+x-6$

Zadanie 51. 0–2 pkt
Odpowiedź: $2\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$

Zadanie 52. 0–2 pkt
Odpowiedź: $17\frac{7}{9}$

Zadanie 53. 0–2 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 54. 0–2 pkt
Odpowiedź: $a=1$ i $b=3$

Zadanie 55. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ b=\frac{4}{5} \end{cases}$

Zadanie 56. 0–2 pkt
Odpowiedź: $m>-5$

Zadanie 57. 0–2 pkt
Odpowiedź: $4\frac{3}{8}$

Zadanie 58. 0–2 pkt
Odpowiedź: $a=-2$ i $b=-1$

Zadanie 59. 0–2 pkt
Odpowiedź: $h(x)=x^2+2x-1$

Zadanie 60. 0–2 pkt
Odpowiedź: $16\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$

Zadanie 61. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\frac{2}{x+3}$

Zadanie 62. 0–2 pkt
Odpowiedź: $x(x-1)(x+1)$

Zadanie 63. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\left(x+\sqrt[3]{3}\right)\left(x^2-\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9}\right)$

Zadanie 64. 0–2 pkt
Odpowiedź: $6a^2-12a+8$

Zadanie 65. 0–3 pkt
Odpowiedź:
a) $f(2)=0$
b) $w(x)=2(x-2)(x-1)(x+1)$

Zadanie 66. 0–3 pkt
Odpowiedź: $a=1$ i $b=2$

Zadanie 67. 0–3 pkt
Odpowiedź: $p(x)=3x^3-4x^2+4x-2$

Zadanie 68. 0–3 pkt
Odpowiedź: $w(x)=-16$

Zadanie 69. 0–3 pkt
Odpowiedź: $V(x)=-2x^3+22x^2-8x-120$

Zadanie 70. 0–4 pkt
Odpowiedź:
Czynniki $n-1$, n, $n+1$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, więc wśród nich jedna jest podzielna przez 2 i jedna jest podzielna przez 3, zatem ich iloczyn jest podzielny przez 6.

Zadanie 71. 0–6 pkt
Odpowiedź:
a) $P(x)=9x^2-6x+1$
b) $P(x)=-\frac{1}{2}x^2+7x-24$
c) $P(x)=x^2-4x+4$

3. Równania i nierówności

Zadania krótsze

Zadanie 72. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 73. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 74. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 75. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 76. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 77. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 78. 0–1 pkt
Odpowiedź: A.

Zadanie 79. 0–1 pkt
Odpowiedź: PF

Zadanie 80. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 81.1. 0–1 pkt
Odpowiedź: PF

Zadanie 81.2. 0–1 pkt
Odpowiedź: $x\in\left(4{,}5,\ 4\sqrt{2}\right)$

Zadanie 82. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 83. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}$

Zadanie 84. 0–2 pkt
Odpowiedź: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 85. 0–1 pkt
Odpowiedź: B3

Zadanie 86. 0–2 pkt
Odpowiedź: $(-1,\ 4)$

Zadanie 87. 0–2 pkt
Odpowiedź: 0 i 1

Zadanie 88. 0–2 pkt
Odpowiedź: $x\in\left(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}\right)$

Zadanie 89. 0–2 pkt

Odpowiedź: $1,\ \frac{2}{3},\ 1\frac{1}{2}$

Zadanie 90. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\frac{2}{3}$

Zadanie 91. 0–2 pkt

Odpowiedź: $-1,\ -\frac{\sqrt{10}}{2},\ 1$ i $\frac{\sqrt{10}}{2}$

Zadanie 92. 0–2 pkt

Odpowiedź: -3

Zadanie 93. 0–2 pkt

Odpowiedź: $-\frac{2}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{3}$

Zadanie 94. 0–2 pkt

Odpowiedź: $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$

Zadanie 95. 0–2 pkt

Odpowiedź: $-3\frac{1}{2}$

Zadanie 96. 0–2 pkt

Odpowiedź: A, F

Zadanie 97. 0–2 pkt

Odpowiedź: $x_1=\frac{1}{3},\ x_2=2$

Zadanie 98.1. 0–1 pkt

Odpowiedź: B

Zadanie 98.2. 0–1 pkt

Odpowiedź: $B=\langle 2,\ 12\rangle$

Zadanie 98.3. 0–2 pkt

Odpowiedź: $A\cap B=\langle 6,\ 12\rangle,\ A\setminus B=(-\infty,-3)\cup(12,\ \infty)$

Zadanie 99. 0–3 pkt

Odpowiedź: dwie liczby

Zadanie 100. 0–2 pkt

Odpowiedź: -2

Zadanie 101. 0–2 pkt

Odpowiedź: DF

Zadanie 102.1. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 102.2. 0–2 pkt

Odpowiedź: Liczba b należy do zbioru rozwiązań tej nierówności.

Zadanie 103. 0–3 pkt

Odpowiedź: 3 i -3

Zadanie 104. 0–3 pkt

Odpowiedź: 13 i 2

Zadanie 105. 0–3 pkt

Odpowiedź: $-8,\ -7,\ -6$ oraz 6, 7, 8

Zadanie 106. 0–3 pkt

Odpowiedź: -2

Zadanie 107. 0–4 pkt

$x_1=2\quad x_2=-2$

Odpowiedź: -2 i 2

Zadanie 108.1. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 108.2. 0–1 pkt

Odpowiedź: $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

Zadanie 109. 0–4 pkt

Odpowiedź: $\left(-2+2\sqrt{2},\ 2\right\rangle$

4. Układy równań

Zadania krótsze

Zadanie 110. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 111. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 112. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 113. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 114. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 115. 0–1 pkt

Odpowiedź: B

Zadanie 116. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 117. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 118. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 119. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 120. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 121. 0–1 pkt

Odpowiedź: PF

Zadanie 122. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 123. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

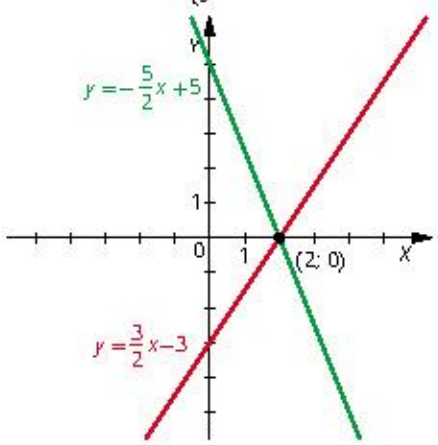
Zadanie 124. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

Zadania dłuższe

Zadanie 125. 0–3 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$



Zadanie 126. 0–1 pkt

Odpowiedź: A2

Zadanie 127. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

Zadanie 128. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$

Zadanie 129. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x=5 \\ y=-3 \end{cases}$

Zadanie 130. 0–2 pkt

Odpowiedź: Układ jest nieoznaczony.

Zadanie 131. 0–1 pkt

Odpowiedź: PP

Zadanie 132. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

Zadanie 133. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

Zadanie 134. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x=2 \\ y=-2{,}9 \end{cases}$

Zadanie 135. 0–3 pkt

Odpowiedź: 312 i 43

Zadanie 136. 0–3 pkt

Odpowiedź: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

Zadanie 137. 0–3 pkt

Odpowiedź: $\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{7}}+1=-\frac{1}{6}$

Zadanie 138. 0–3 pkt

Odpowiedź: Matka ma obecnie 32 lata, a syn ma 12 lat.

Zadanie 139. 0–3 pkt

Odpowiedź: 0,5 kg soli

Zadanie 140. 0–3 pkt

Odpowiedź:

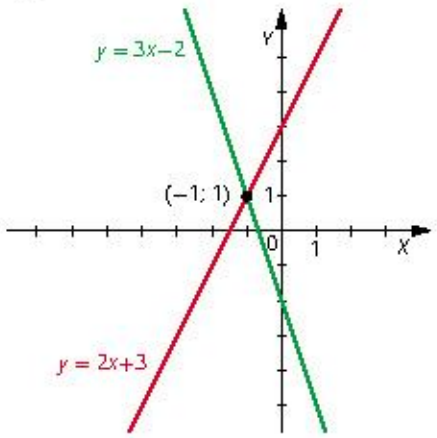
Otrzymujemy $3x^2+3=0$, więc $x^2+1=0$. Jest to równanie sprzeczne. Wobec tego układ równań nie ma rozwiązania. To oznacza, że parabola opisana równaniem $y=3x^2+3x-6$ oraz prosta o równaniu $y=3x-9$ nie mają punktów wspólnych.

Zadanie 141. 0–3 pkt

Odpowiedź: 16 i 12

Zadanie 142. 0–3 pkt

$\begin{cases} y=2x+3 \\ y=-3x-2 \end{cases}$



Zadanie 143. 0–3 pkt

Odpowiedź: 35

Zadanie 144. 0–3 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x_1=-4 \\ y_1=-8 \end{cases}$ i $\begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=-7 \end{cases}$

Zadanie 145. 0–3 pkt

Odpowiedź: 34 pytania

Zadanie 146. 0–4 pkt

Odpowiedź: $\begin{cases} x_1=10 \\ y_1=-20 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=20 \\ y_2=-10 \end{cases}$

Zadanie 147. 0–4 pkt

Odpowiedź: 2 cm i 8 cm

Zadanie 148. 0–4 pkt

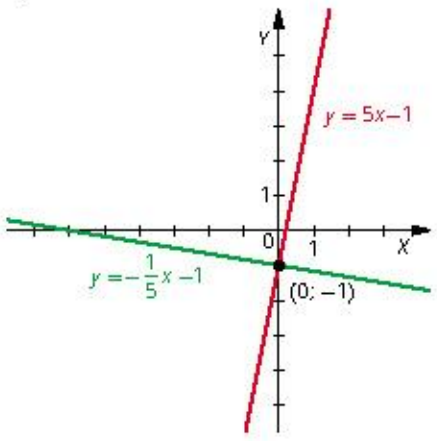
Odpowiedź: Karol biegł przez 13 s z prędkością $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadanie 149. 0–4 pkt

Odpowiedź: Rajd trwał 6 dni, a harcerze dziennie pokonywali trasę długości 15 km.

Zadanie 150. 0–3 pkt

$\begin{cases} y=-\frac{1}{5}x-1 \\ y=5x-1 \end{cases}$



5. Funkcje

Zadania krótsze

Zadanie 151. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 152. 0–1 pkt

Odpowiedź: PP

Zadanie 153. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 154. 0–2 pkt

Odpowiedź:

Sporządzamy tabelę funkcji.

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1

$ZW = \{0, 1, 2\}$

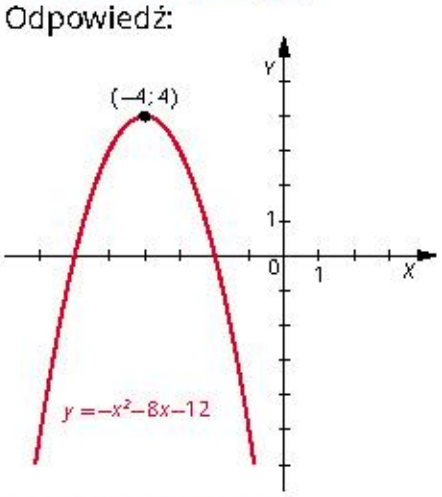
Miejsca zerowe: $x = 12$, $x = 15$, $x = 18$

Zadanie 155. 0–2 pkt

Odpowiedź: Wykresy tych funkcji są prostymi prostopadłymi dla $m_1 = \frac{1}{2}$ i $m_2 = 1$.

Zadanie 156. 0–2 pkt

Odpowiedź:



Zadanie 157. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 158. 0–2 pkt

Odpowiedź: PF

Zadanie 159. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 160. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 161. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 162. 0–1 pkt

Odpowiedź: FF

Zadanie 163. 0–1 pkt

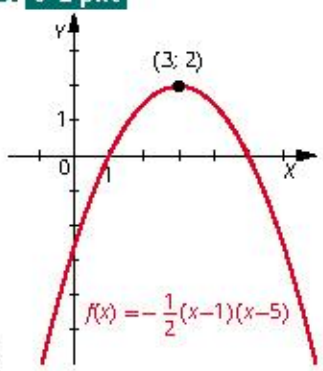
Odpowiedź: B

Zadanie 164. 0–2 pkt

Odpowiedź: $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$

Zadanie 165. 0–2 pkt

Odpowiedź:



Zadanie 166. 0–2 pkt

Odpowiedź: $f(x) = 7(x-11)^2 + 9 = 7x^2 - 154x + 856$

Zadanie 167. 0–1 pkt

Odpowiedź: A1

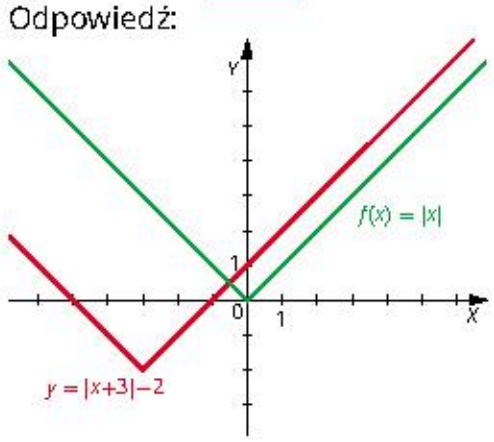
Zadanie 168. 0–2 pkt

Odpowiedź: wartość najmniejsza 7 oraz wartość największa 16

Zadania dłuższe

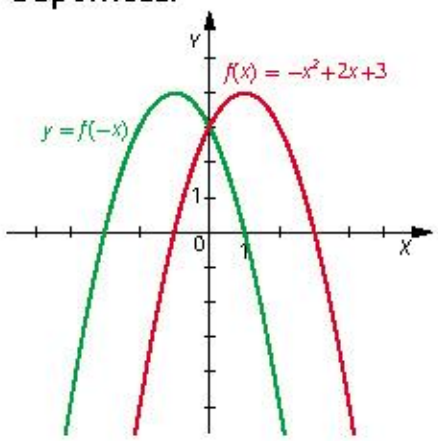
Zadanie 169. 0–2 pkt

Odpowiedź:



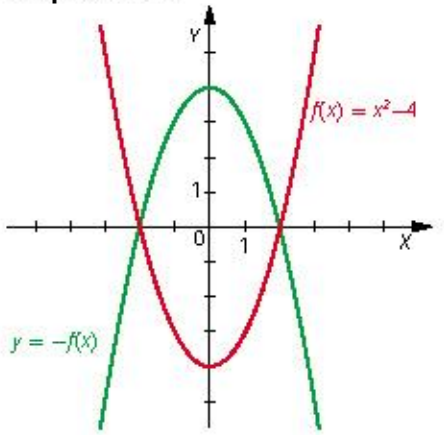
Zadanie 170. 0–2 pkt

Odpowiedź:



Zadanie 171. 0–2 pkt

Odpowiedź:



Zadanie 172. 0–1 pkt

Odpowiedź: B2

Zadanie 173. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 174. 0–2 pkt

Odpowiedź: -1

Zadanie 175. 0–2 pkt

Odpowiedź: $f(x) = -4{,}5x + 3$

Zadanie 176. 0–2 pkt

Odpowiedź: $x \in \langle -2,\ 1 \rangle$

Zadanie 177. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 178. 0–2 pkt

Odpowiedź:

Wartość najmniejsza w wierzchołku $f(3) = 5$, wartość największa wynosi 167.

Zadanie 179. 0–2 pkt

Odpowiedź:

a) $k = 15$ zł

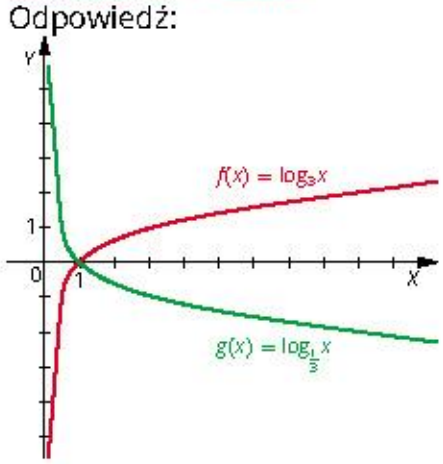
b) Można kupić 5 kg tego towaru.

Zadanie 180. 0–2 pkt

Odpowiedź: ok. 7535 lat

Zadanie 181. 0–2 pkt

Odpowiedź:



Zadanie 182. 0–3 pkt

Odpowiedź: Prostokąt będzie kwadratem o boku długości 30 m.

Pole tego kwadratu wynosi: $P = 30 \cdot 30 = 900$ m²

Zadanie 183. 0–3 pkt

Odpowiedź:

Po zapisaniu liczby dni pracy jako funkcji liczby pracowników otrzymujemy:

$$y = f(x) = \frac{10}{x}$$

Po wstawieniu za x 3 otrzymujemy:

$$y = f(3) = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ dnia pracy}$$

$$3\frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{10}{3} \cdot 8 = \frac{80}{3} = 26 \text{ h } 40 \text{ min}$$

Po wstawieniu za x 6 otrzymujemy:

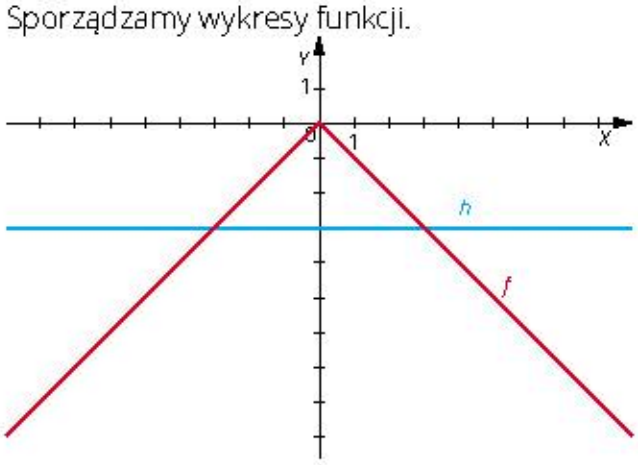
$$y = f(6) = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3} \text{ dnia pracy}$$

$$1\frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{5}{3} \cdot 8 = \frac{40}{3} = 13 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Zadanie 184. 0–3 pkt

Odpowiedź:

Sporządzamy wykresy funkcji.



Określamy monotoniczność funkcji.

Funkcja f jest rosnąca dla $x \in (-\infty, 0\rangle$ oraz malejąca dla $x \in \langle 0, \infty)$.

Funkcja h jest stała w całej dziedzinie, to znaczy dla $x \in \mathbb{R}$.

Współrzędne punktów wspólnych funkcji f i h to: $(-3, -3)$ oraz $(3, -3)$

Zadanie 185. 0–3 pkt

Odpowiedź: $m = 5$, funkcja rosnąca w całej dziedzinie to znaczy dla $x \in \mathbb{R}$, argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne: $x \geq -\frac{1}{2}$

Zadanie 186. 0–2 pkt

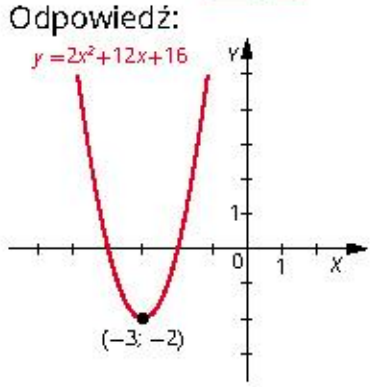
Odpowiedź: $m = -1, (3, -1)$

Zadanie 187. 0–3 pkt

Odpowiedź: wzór funkcji $f(x) = -x + 2$. Funkcja ta jest malejąca.

Zadanie 188. 0–2 pkt

Odpowiedź:



Zadanie 189. 0–3 pkt

Odpowiedź:

a) $f(t) = 100 \cdot 3^t$

b) $f(3) = 100 \cdot 3^3 = 100 \cdot 27 = 2700$

c) $t = 9$

Zadanie 190. 0–2 pkt

Odpowiedź: PP

6. Ciągi

Zadania krótsze

Zadanie 191. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 192. 0–1 pkt

Odpowiedź: FP

Zadanie 193. 0–1 pkt

Odpowiedź: B

Zadanie 194. 0–1 pkt

Odpowiedź: B

Zadanie 195. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 196. 0–1 pkt

Odpowiedź: B

Zadanie 197. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 198. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 199. 0–2 pkt

Odpowiedź: 73 466,40 zł

Zadanie 200. 0–1 pkt

Odpowiedź: B1

Zadanie 201. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 202. 0–2 pkt

Odpowiedź:

Zapisujemy wzór na $n+1$-wszy wyraz ciągu:

$$a_{n+1} = 2 \cdot (-1)^{2(n+1)}$$

Badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot (-1)^{2(n+1)} - 2 \cdot (-1)^{2n}$$

$a_{n+1}-a_n=2\cdot(-1)^{2n}\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)^{2n}$

$a_{n+1}-a_n=0$

Różnica jest równa zero, stąd wynika, że ciąg (a_n) jest ciągiem stałym.

Zadanie 203. 0–2 pkt

Odpowiedź: a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15} i a_{16}

Zadanie 204. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 205. 0–2 pkt

Odpowiedź: 54

Zadanie 206. 0–2 pkt

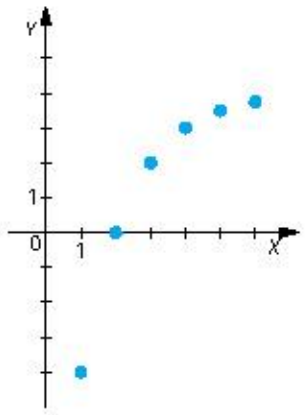
Odpowiedź: a_1, a_2 i a_3

Zadanie 207. 0–2 pkt

Odpowiedź:

Wyznaczamy wszystkie wyrazy tego ciągu i rysujemy wykres.

$$\begin{cases} a_1=-4 \\ a_2=\frac{1}{2}\cdot(-4)+2=0 \\ a_3=\frac{1}{2}\cdot 0+2=2 \\ a_4=\frac{1}{2}\cdot 2+2=3 \\ a_5=\frac{1}{2}\cdot 3+2=3\frac{1}{2} \\ a_6=\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{2}+2=3\frac{3}{4} \end{cases}$$



Zadanie 208. 0–2 pkt

Odpowiedź: $a_1=-3$

Zadania dłuższe

Zadanie 209. 0–2 pkt

Odpowiedź:

Zakładamy, że istnieje wyraz ciągu (a_n), który jest równy zero.

Zapisujemy warunek: $(n+5)(3n-10)=0$

Rozwiązujemy równania: $n+5=0$ lub $3n-10=0$

Stąd: $n=-5$ lub $n=3\frac{1}{3}$

Otrzymane liczby -5 i $3\frac{1}{3}$ nie spełniają warunków zadania, ponieważ n jest numerem wyrazu ciągu (jest liczbą naturalną dodatnią). Przyjęte założenie jest więc błędne. Stąd wnioskujemy, że żaden wyraz ciągu (a_n) nie jest równy zero.

Zadanie 210. 0–2 pkt

Odpowiedź: $a_{16}=233$

Zadanie 211. 0–2 pkt

Odpowiedź: CA

Zadanie 212. 0–2 pkt

Odpowiedź: $S_{20}=820$

Zadanie 213. 0–2 pkt

Odpowiedź:

Aby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że różnica dwóch kolejnych wyrazów $a_{n+1}-a_n$ jest stała i nie zależy od n. Wyznaczamy wzór ogólny na $n+1$ wyraz ciągu:

$a_{n+1}=7-3(n+1)=7-3n-3=4-3n$ dla $n\geq 1$

Obliczamy różnicę kolejnych dwóch wyrazów ciągu (a_n):

$a_{n+1}-a_n=4-3n-(7-3n)=4-3n-7+3n=-3$ dla każdego $n\geq 1$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r=-3$

Zadanie 214. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 215. 0–4 pkt

Odpowiedź:

a) $\begin{cases} a_1=5 \\ a_{n+1}=3+a_n \text{ dla } n\geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1=5 \\ a_{n+1}=a_n\cdot\frac{5+2n}{3+2n} \text{ dla } n\geq 1 \end{cases}$

Zadanie 216. 0–2 pkt

Odpowiedź: $a_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

Zadanie 217. 0–2 pkt

Odpowiedź: $a_n=2^{3^{n-1}}$

Zadanie 218. 0–1 pkt

Odpowiedź: FF

Zadanie 219. 0–2 pkt

Odpowiedź:

Jeżeli $m=-10$, to ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

Jeżeli $m=15$, to ciąg (a_n) jest rosnący.

Zadanie 220. 0–2 pkt

Odpowiedź: $q=2$

Zadanie 221. 0–3 pkt

Odpowiedź: $(a=8, b=4, c=2)$ lub $(a=2, b=4, c=8)$

Zadanie 222. 0–3 pkt

Odpowiedź: $a=8$, $b=72$, $c=216$

Zadanie 223. 0–5 pkt

Odpowiedź: $V=120$

Zadanie 224. 0–2 pkt

Odpowiedź:

Aby sprawdzić, czy ciąg jest geometryczny, należy wykazać, że iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stałą i nie zależy od n. Wyznaczamy wzór ogólny na $n+1$ wyraz ciągu:

$a_{n+1}=\frac{2}{3^{n+1}}$ dla $n\geq 1$

Obliczamy iloraz kolejnych dwóch wyrazów ciągu (a_n):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}}=\frac{2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2}=\frac{1}{3} \text{ dla każdego } n\geq 1$$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q=\frac{1}{3}$.

Zadanie 225. 0–3 pkt

Odpowiedź: $a_n=6n-5$

Zadanie 226. 0–4 pkt

Odpowiedź:

Aby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że różnica dwóch kolejnych wyrazów $a_{n+1}-a_n$ jest stała i nie zależy od n.

Wyznaczamy wzór ogólny na $n+1$ wyraz ciągu:
$a_{n+1}=\log_2\left(3\cdot 2^{n+1}\right)$ dla $n\geq 1$

Obliczamy różnicę kolejnych dwóch wyrazów ciągu (a_n):

$$a_{n+1}-a_n=\log_2\left(3\cdot 2^{n+1}\right)-\log_2\left(3\cdot 2^n\right)=\log_2\frac{3\cdot 2^{n+1}}{3\cdot 2^n}=\log_2 2=1$$

dla każdego $n\geq 1$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r=1$.

Wyznaczamy pierwszy wyraz a_1 ciągu (a_n):

$a_1=\log_2\left(3\cdot 2^1\right)=\log_2 6$

Zatem: $a_1=\log_2 6$, $r=1$

7. Trygonometria

Zadania krótsze

Zadanie 227. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 228. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 229. 0–3 pkt
Odpowiedź: $h\approx 9{,}39$(m)

Zadanie 230. 0–2 pkt
Odpowiedź:
$\cos 63^\circ=0{,}4540$

Zadanie 231. 0–2 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 232. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 233. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 234. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 235. 0–2 pkt
Odpowiedź:
$1+2\sqrt{3}+3-2\sqrt{3}=4\in\mathbb{Z}$

Zadanie 236. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\alpha\approx 56^\circ$

Zadanie 237. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 238. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 239. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 240. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 241. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 242. 0–1 pkt
Odpowiedź: PF

Zadanie 243. 0–2 pkt
Odpowiedź:

$$\sin 60^\circ+\cos 30^\circ-\operatorname{tg}60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}-\sqrt{3}=0\in\mathbb{N}$$

Zadanie 244. 0–1 pkt
Odpowiedź: B2

Zadanie 245. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadania dłuższe

Zadanie 246. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\sin\alpha=\frac{6}{2\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\cos\alpha=-\frac{4}{2\sqrt{13}}=-\frac{2\sqrt{13}}{13}$

Zadanie 247. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}}{2}$

Zadanie 248. 0–2 pkt
Odpowiedź:
$\sin\alpha=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

$\sin\beta=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$

Zadanie 249. 0–2 pkt
Odpowiedź: 1,9

Zadanie 250. 0–1 pkt
Odpowiedź: PF

Zadanie 251. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\frac{1}{5}$

Zadanie 252. 0–2 pkt
Odpowiedź: 10,2

Zadanie 253. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 254. 0–2 pkt
Odpowiedź:
$\sin\beta=\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{8}{4}=2$

Zadanie 255. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\gamma\approx 21^\circ$ i $\beta\approx 24^\circ$

Zadanie 256. 0–3 pkt
Odpowiedź: $6+6\sqrt{3}$

Zadanie 257. 0–3 pkt
Odpowiedź:
a) $\alpha\approx 25^\circ$, b) $\alpha\approx 48^\circ$, c) $\alpha\approx 58^\circ$

Zadanie 258. 0–3 pkt
Odpowiedź: $60+20\sqrt{3}$

Zadanie 259. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

Zadanie 260. 0–3 pkt
Odpowiedź: 1

Zadanie 261. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\frac{5\sqrt{7}}{3}$

Zadanie 262. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\sqrt{37}$ i $\sqrt{13}$

Zadanie 263. 0–3 pkt
Odpowiedź: Długość odcinka BC wynosi 2, a promień okręgu jest równy 5.

Zadanie 264. 0–3 pkt

Odpowiedź: $8\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+2\right)$

Zadanie 265. 0–4 pkt

Odpowiedź: $\frac{5\sqrt{97}}{16}$

Zadanie 266. 0–5 pkt

Odpowiedź:

wartości funkcji trygonometrycznych kątów:

$\sin\alpha=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$, $\cos\alpha=\frac{8\sqrt{3}}{14}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{8\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}$

$\sin\beta=\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos\beta=\frac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

przybliżone miary kątów ostrych:

$\sin\alpha=\frac{1}{7}\approx 0{,}1429$ stąd $\alpha\approx 8°$

$\cos\beta=\frac{1}{7}\approx 0{,}1429$ stąd $\beta\approx 82°$

Zadanie 267. 0–4 pkt

Odpowiedź: $3\sqrt{6}$

8. Planimetria

Zadania krótsze

Zadanie 268. 0–2 pkt

Odpowiedź: $|\sphericalangle AOC|=284°$, $|\sphericalangle ADC|=38°$

Zadanie 269. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 270. 0–1 pkt

Odpowiedź: B

Zadanie 271. 0–2 pkt

Odpowiedź: $P=3\sqrt{3}$

Zadanie 272. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\alpha=120°$

Zadanie 273. 0–2 pkt

Odpowiedź: $P=30\ \text{cm}^2$

Zadanie 274. 0–5 pkt

Odpowiedź: $h=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (cm)

Zadanie 275. 0–2 pkt

Odpowiedź: 12 cm

Zadanie 276. 0–2 pkt

Odpowiedź: $P=336\pi\ \left(\text{cm}^2\right)$

Zadania dłuższe

Zadanie 277. 0–3 pkt

Odpowiedź: $P=24\sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right)$

Zadanie 278. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 279. 0–1 pkt

Odpowiedź: FF

Zadanie 280. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\alpha=22°$

Zadanie 281. 0–1 pkt

Odpowiedź: PP

Zadanie 282. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 283. 0–4 pkt

Odpowiedź: $\sin\alpha=\frac{24}{25}$

Zadanie 284. 0–3 pkt

Odpowiedź: $L=3\pi$ (cm)

Zadanie 285. 0–3 pkt

Odpowiedź: $P=54\sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right)$

9. Geometria analityczna

Zadania krótsze

Zadanie 286. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 287. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 288. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 289. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 290. 0–1 pkt

Odpowiedź:C

Zadanie 291. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 292. 0–2 pkt

Odpowiedź: $y=x-5$

Zadanie 293. 0–2 pkt

Odpowiedź: $d=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 294. 0–2 pkt

Odpowiedź: $d=\frac{3}{2}$

Zadanie 295. 0–2 pkt

Odpowiedź: $d=2{,}92$

Zadanie 296. 0–1 pkt

Odpowiedź: B3

Zadanie 297. 0–1 pkt

Odpowiedź: B

Zadanie 298. 0–2 pkt

Odpowiedź: dwa punkty

Zadanie 299. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 300. 0–1 pkt

Odpowiedź: PF

Zadanie 301. 0–3 pkt

Odpowiedź: $(x-3)^2+(y-3)^2=9$, $(x+3)^2+(y+3)^2=9$, $(x+3)^2+(y-3)^2=9$ i $(x-3)^2+(y+3)^2=9$

Zadanie 302. 0–2 pkt

Odpowiedź: $C(-2,-34)$

Punkt C jest symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych.

Zadanie 303. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadania dłuższe

Zadanie 304. 0–1 pkt
Odpowiedź: PP

Zadanie 305. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 306. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 307. 0–2 pkt
Odpowiedź: $m=-5$

Zadanie 308. 0–2 pkt
Odpowiedź: $h=3\sqrt{5}$

Zadanie 309. 0–2 pkt
Odpowiedź: trzy punkty

Zadanie 310. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 311. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 312. 0–2 pkt
Odpowiedź: $h(x)=-2x+2$

Zadanie 313. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\frac{\sqrt{29}}{2}$

Zadanie 314. 0–3 pkt
Odpowiedź: $(x+3)^2+(y-1)^2=25$

Zadanie 315. 0–3 pkt
Odpowiedź: $2\sqrt{10}$ i 7

Zadanie 316. 0–3 pkt
Odpowiedź: $y=-x-6$

Zadanie 317. 0–3 pkt
Odpowiedź: $x\in(3,\infty)$

Zadanie 318. 0–3 pkt
Odpowiedź: $|AB|=6\sqrt{2}$

Zadanie 319. 0–3 pkt
Odpowiedź: $B=\left(2\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Zadanie 320. 0–3 pkt
Odpowiedź: $k: y=-\frac{3}{2}x-9$

Zadanie 321. 0–4 pkt
Odpowiedź: 48

Zadanie 322. 0–5 pkt
Odpowiedź: $x+7y-12=0$

Zadanie 323. 0–5 pkt
Odpowiedź: $h=5$, $P=25$

10. Stereometria

Zadania krótsze

Zadanie 324. 0–1 pkt
Odpowiedź: FF

Zadanie 325. 0–1 pkt
Odpowiedź: CF

Zadanie 326.1. 0–1 pkt
Odpowiedź: $P_1:P_2=9:1$

Zadanie 326.2. 0–3 pkt
Odpowiedź: $V_1=288\pi$ cm³ i $V_2=\frac{32\pi}{3}$ cm³

Zadanie 327. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 328. 0–1 pkt
Odpowiedź: FP

Zadanie 329. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 330. 0–1 pkt
Odpowiedź: BC

Zadanie 331. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\sqrt{89}$ cm

Zadanie 332. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 333. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 334. 0–1 pkt
Odpowiedź: PP

Zadanie 335. 0–2 pkt
Odpowiedź: 120°

Zadanie 336. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 337. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 338. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadania dłuższe

Zadanie 339. 0–1 pkt
Odpowiedź: FP

Zadanie 340. 0–2 pkt
Odpowiedź: $\alpha=60°$

Zadanie 341. 0–1 pkt
Odpowiedź: CG

Zadanie 342. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 343. 0–1 pkt
Odpowiedź: FF

Zadanie 344. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 345. 0–2 pkt
Odpowiedź: BD

Zadanie 346. 0–1 pkt
Odpowiedź: B2

Zadanie 347. 0–3 pkt
Odpowiedź: $8\left(6+2\sqrt{3}+\sqrt{21}\right)$ cm²

Zadanie 348. 0–3 pkt
Odpowiedź: $9\sqrt{3}\pi$ cm²

Zadanie 349. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\alpha\approx54°$

Zadanie 350. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\frac{64\pi}{3}$ cm³

Zadanie 351. 0–3 pkt
Odpowiedź: 120°

Zadanie 352. 0–3 pkt
Odpowiedź: $36\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm

Zadanie 353. 0–3 pkt
Odpowiedź: 63°

Zadanie 354. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\alpha \approx 78°$

Zadanie 355. 0–3 pkt
Odpowiedź: 31°

Zadanie 356. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\alpha \approx 55°$

Zadanie 357. 0–3 pkt
Odpowiedź: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

Zadanie 358. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\frac{250\sqrt{2}\pi}{3}$ cm³

Zadanie 359. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\frac{22}{7}$

Zadanie 360. 0–3 pkt
Odpowiedź: $36\sqrt{3}$ cm³

Zadanie 361. 0–3 pkt
Odpowiedź: Wysokość graniastosłupa wynosi 4,5, a wysokość trójkąta w przekroju to $3\sqrt{3}$.

Zadanie 362. 0–4 pkt
Odpowiedź: $6\sqrt{10}$ i $12\sqrt{3}$

Zadanie 363. 0–4 pkt
Odpowiedź: $2\sqrt{13}$

11. Kobinatoryka

Zadania krótsze

Zadanie 364. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 365. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 366. 0–1 pkt
Odpowiedź: PF

Zadanie 367. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 368. 0–1 pkt
Odpowiedź: PP

Zadanie 369. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 370. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 371. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 372. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 373. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadanie 374. 0–1 pkt
Odpowiedź: C

Zadanie 375. 0–1 pkt
Odpowiedź: FP

Zadanie 376. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadanie 377. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

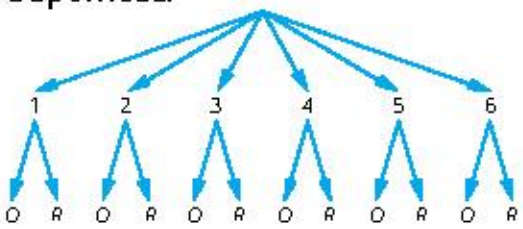
Zadanie 378. 0–1 pkt
Odpowiedź: AF

Zadanie 379. 0–1 pkt
Odpowiedź: A

Zadanie 380. 0–1 pkt
Odpowiedź: D

Zadania dłuższe

Zadanie 381. 0–2 pkt
Odpowiedź:



wszystkie możliwe wyniki:
$\{1O, 1R, 2O, 2R, 3O, 3R, 4O, 4R, 5O, 5R, 6O, 6R\}$.

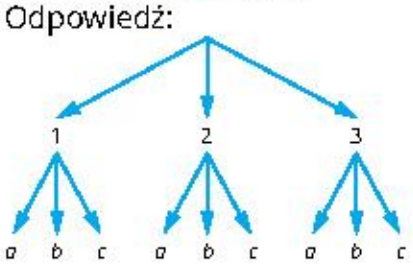
Można otrzymać 12 różnych wyników.

Zadanie 382. 0–2 pkt
Odpowiedź:
$A' = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1) (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$

Zadanie 383. 0–2 pkt
Odpowiedź: 25

Zadanie 384. 0–2 pkt
Odpowiedź: 360 słów

Zadanie 385. 0–2 pkt
Odpowiedź:



wszystkie możliwe napisy:
$\{1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c\}$.

Można otrzymać 9 różnych napisów.

Zadanie 386. 0–2 pkt
Odpowiedź:
$\Omega = \{(1,6), (2,3), (2,6), (3,2), (3,6), (4,3), (4,6), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (6,7), (7,6)\}$

Zadanie 387. 0–2 pkt
Odpowiedź:
wyniki sprzyjające zdarzeniu A:
$A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$

wyniki sprzyjające zdarzeniu B:
$B = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$

wyniki sprzyjające zdarzeniu C:
$B = \Omega$

Zadanie 388. 0–2 pkt

Odpowiedź:

Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Wyniki sprzyjające zdarzeniu A: $A = \Omega$

Zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym.

Wyniki sprzyjające zdarzeniu B:

$B = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$

Wyniki sprzyjające zdarzeniu C: $C = \varnothing$

Zdarzenie C jest zdarzeniem niemożliwym.

Zadanie 389. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\overline{\overline{A}} = 3$

Zadanie 390. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\overline{\overline{A}} = 8$

Zadanie 391. 0–2 pkt

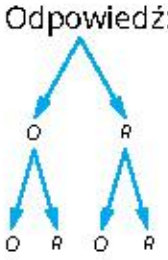
Odpowiedź: $A' = \{(ORR),(RRR)\}$

Zadanie 392. 0–2 pkt

Odpowiedź: 72

Zadanie 393. 0–2 pkt

Odpowiedź:



Wszystkie możliwe wyniki:

$\{(OO),(OR),(RO),(RR)\}$.

Można otrzymać 4 różne wyniki.

Zadanie 394. 0–2 pkt

Odpowiedź: $\overline{\overline{A}} = 4$

Zadanie 395. 0–2 pkt

Odpowiedź:

Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),$
$(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),$
$(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

Wyniki sprzyjające zdarzeniu A: $A = \Omega$

Zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym.

Wyniki sprzyjające zdarzeniu B:

$B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

Wyniki sprzyjające zdarzeniu C: $C = \varnothing$

Wyniki sprzyjające zdarzeniu D:

$D = \{(1,3),(1,4),(1,6),(2,4),(2,5),(3,1),(3,5),(3,6),(4,1),$
$(4,2),(4,6),(5,2),(5,3),(6,1),(6,3),(6,4)\}$

Zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym.

Zdarzenie C jest zdarzeniem niemożliwym.

Zadanie 396. 0–2 pkt

Odpowiedź: 36

Zadanie 397. 0–3 pkt

Odpowiedź:

Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$\Omega = \{(1,1),(1,6),(1,9),(6,1),(6,6),(6,9),(9,1),(9,6),(9,9)\}$

Wyniki sprzyjające zdarzeniu A:

$A = \{(1,1),(1,6),(1,9),(6,1),(6,9),(9,1),(9,6),(9,9)\}$

Wyniki sprzyjające zdarzeniu B:

$B = \{(1,1),(1,6),(6,1)\}$

Wydarzenie A' przeciwne do zdarzenia A:

$A' = \{(6,6)\}$

Liczba możliwych wyników: $\overline{\overline{A'}} = 1$

zdarzenie B' przeciwne do zdarzenia B:

$B' = \{(1,9),(6,6),(6,9),(9,1),(9,6),(9,9)\}$

Liczba możliwych wyników: $\overline{\overline{B'}} = 6$

Zadanie 398. 0–3 pkt

Odpowiedź: 102 zestawy

Zadanie 399. 0–3 pkt

Odpowiedź: 288 sposobów

Zadanie 400. 0–3 pkt

Odpowiedź: 12 sposobów

Zadanie 401. 0–3 pkt

Odpowiedź: 9216 sposobów

Zadanie 402. 0–3 pkt

Odpowiedź: 144

Zadanie 403. 0–5 pkt

Odpowiedź: 74

12. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Zadania krótsze

Zadanie 404. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 405. 0–1 pkt

Odpowiedź: A

Zadanie 406. 0–1 pkt

Odpowiedź: B

Zadanie 407.1. 0–1 pkt

Odpowiedź: B

Zadanie 407.2. 0–1 pkt

Odpowiedź: 2

Zadanie 407.3. 0–2 pkt

Odpowiedź: 2,4

Zadanie 408. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 409. 0–1 pkt

Odpowiedź: C

Zadanie 410. 0–1 pkt

Odpowiedź: FP

Zadanie 411. 0–1 pkt

Odpowiedź: PP

Zadanie 412. 0–1 pkt

Odpowiedź: D

Zadanie 413. 0–1 pkt
Odpowiedź: B

Zadania dłuższe

Zadanie 414. 0–2 pkt
Odpowiedź: 0,5

Zadanie 415. 0–2 pkt
Odpowiedź: 0,2

Zadanie 416. 0–2 pkt
Odpowiedź: $P(A)=\frac{3}{5}$

Zadanie 417. 0–2 pkt
Odpowiedź: 4

Zadanie 418. 0–2 pkt
Odpowiedź: BF

Zadanie 419. 0–2 pkt
Odpowiedź:
a) Wynik lepszy niż Kuba z egzaminu maturalnego z matematyki uzyskało 40% uczniów.
b) Magda mogła uzyskać 46% punktów z egzaminu maturalnego z matematyki.

Zadanie 420. 0–2 pkt
Odpowiedź: 3380 zł

Zadanie 421. 0–2 pkt
Odpowiedź: 8,23 zł

Zadanie 422. 0–2 pkt
Odpowiedź: 1. –2°C
Odpowiedź: 2. 0,5°C

Zadanie 423. 0–2 pkt
Odpowiedź: 1

Zadanie 424. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\frac{5}{114}$

Zadanie 425. 0–3 pkt
Odpowiedź: $x = 3$, mediana $= 4$, ocena dostateczna

Zadanie 426. 0–3 pkt
Odpowiedź: 1,52 zł

Zadanie 427. 0–3 pkt
Odpowiedź: 0,5

Zadanie 428. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\frac{1}{18}$

Zadanie 429. 0–3 pkt
Odpowiedź: $\frac{19}{30}$

Zadanie 430. 0–3 pkt
Odpowiedź: 9 kul czarnych

Zadanie 431. 0–3 pkt
Odpowiedź: w drugim konkursie

Zadanie 432. 0–3 pkt
Odpowiedź:
a) Waga dziewczynki znajduje się między 75 a 90 centylem.
b) Ta dziewczyna ważyła około 17 kg.
c) Waga Amelii i Klary znajduje się w granicach normy, waga Natalii jest poza granicą normy.

Zadanie 433. 0–3 pkt
Odpowiedź: średnia arytmetyczna $= 2,36$
mediana $= 2,5$, dominanta $= 3$

Zadanie 434. 0–3 pkt
Odpowiedź: co najmniej 17 punktów

Zadanie 435. 0–3 pkt
Odpowiedź: ok. 1763,67 zł

Zadanie 436. 0–3 pkt
Odpowiedź: ok. 7,18%

Zadanie 437. 0–3 pkt
Odpowiedź: 4700 zł

Zadanie 438. 0–3 pkt
Odpowiedź: ok. 1,0 dag

Zadanie 439. 0–4 pkt
Odpowiedź: 0,75

Zadanie 440. 0–3 pkt
Odpowiedź: ok. 0,03

Zadanie 441. 0–4 pkt
Odpowiedź: Bardziej prawdopodobne jest wyrzucenie jednego orła.

Zadanie 442. 0–5 pkt
Odpowiedź: 8 lub 9 kul białych

Zadanie 443. 0–5 pkt
Odpowiedź: 6 lub 9 ocen bardzo dobrych

Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki

1. Wartość bezwzględna liczby

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.

- Dla dowolnej liczby x mamy:

$$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \qquad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y mamy:

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad |x-y| \leq |x| + |y| \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

$$|x-a| \leq r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a - r \leq x \leq a + r$$
$$|x-a| \geq r \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad x \leq a - r \quad \text{lub} \quad x \geq a + r$$

2. Potęgi i pierwiastki

- Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

- Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:
  - dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$
  - dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
  - dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

- Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

- Niech x, y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.
  Jeżeli $a \in (0, 1)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x > y$.
  Jeżeli $a \in (1, +\infty)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x < y$.

3. Logarytmy

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b:

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0, y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ oraz $c > 0$, to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

4. Silnia. Współczynnik dwumianowy

- Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ prawdziwa jest równość:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

- Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Prawdziwe są równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

5. Wzór dwumianowy Newtona

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ ... + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ ... + (-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ ... + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$$

6. Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ ... + a^{n-k}b^{k-1} + \ ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad a^3 + 1 = (a+1)(a^2-a+1)$$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ ... + a + 1)$$

7. Funkcja kwadratowa

- <u>Wyróżnikiem</u> Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

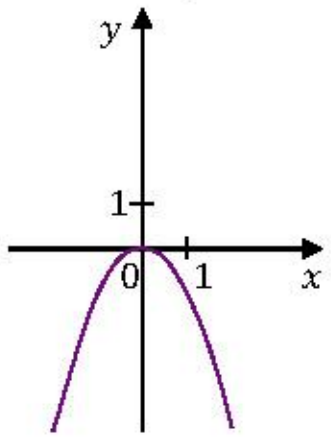
- <u>Postać ogólna funkcji kwadratowej</u>: $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ b, c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$.

- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie

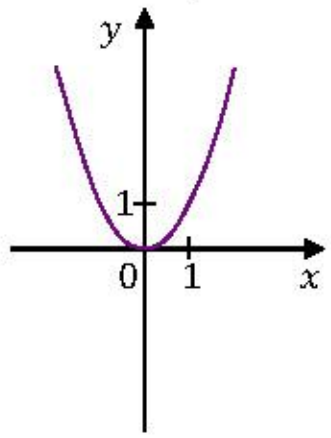
$$W = (p, q) \quad \text{gdzie} \quad p = -\frac{b}{2a}, \qquad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gdy $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi. Gdy $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze.

$a < 0$ $y = ax^2$



$a > 0$ $y = ax^2$



- <u>Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej</u> $f(x) = ax^2 + bx + c$

(liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika Δ:

1. jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. jeżeli $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3. jeżeli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- <u>Postać kanoniczna funkcji kwadratowej</u>:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

- Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można przestawić w <u>postaci iloczynowej</u>

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- <u>Wzory Viète'a</u>

  Jeżeli $\Delta \geq 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

8. Ciągi

- <u>Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego</u> (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

- <u>Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego</u>:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- <u>Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego</u> (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geq 2$$

- <u>Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego</u>:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla} \quad q \neq 1 \qquad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla} \quad q = 1$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \text{ dla } n \geq 2$$

- <u>Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego</u>

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, o ilorazie q. Niech (S_n) oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n), to znaczy ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dla $n \geq 1$.

Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg (S_n) ma granicę równą

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Granicę tę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

- <u>Twierdzenie o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych</u>

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n), określone dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, są zbieżne i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to ciągi $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$ są zbieżne, a ponadto

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto $b_n \neq 0$ dla $n \geq 1$ oraz $b \neq 0$, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

- <u>Twierdzenie o trzech ciągach</u>

Jeżeli wyrazy ciągów (a_n), (b_n) i (c_n), określonych dla $n \geq 1$, spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla $n \geq 1$, a ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do wspólnej granicy $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, to ciąg (b_n) jest zbieżny, a ponadto $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

- <u>Procent składany</u>

Jeżeli kapitał początkowy K_0 złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n jest określony wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- Wybrane granice

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \qquad \text{dla każdego } a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \qquad \text{dla każdego } q \in (-1,1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = 0 \qquad \text{dla każdego } k > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty \qquad \text{dla każdego } k > 0$$

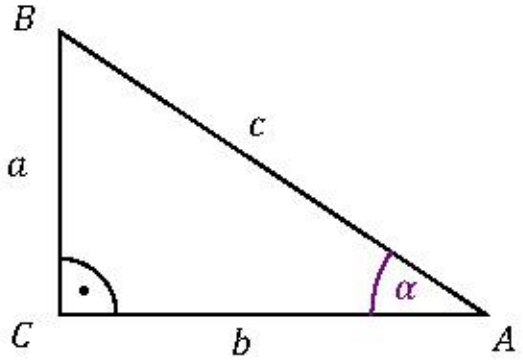
9. TRYGONOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$



- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

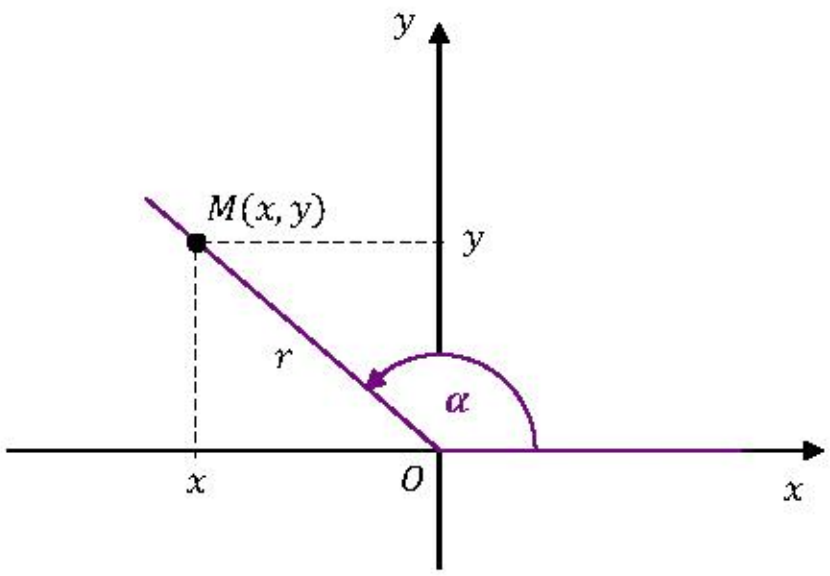
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

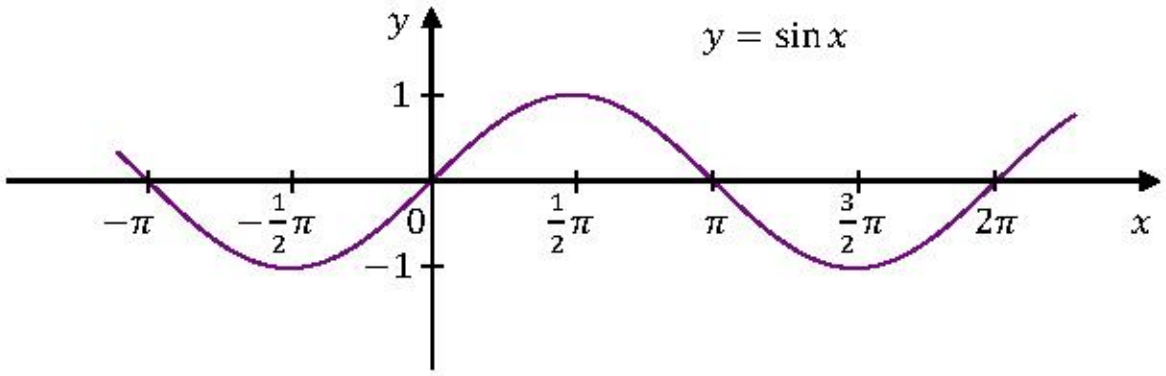
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \text{o ile } x \neq 0$$

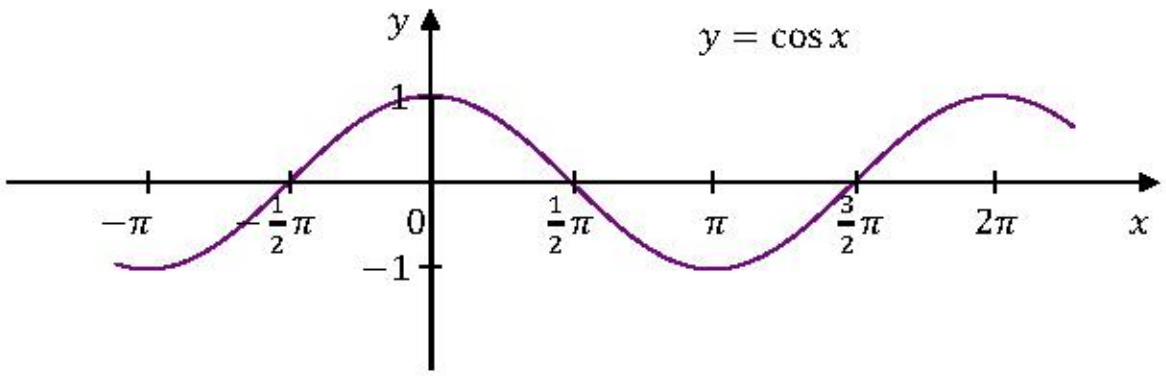
gdzie

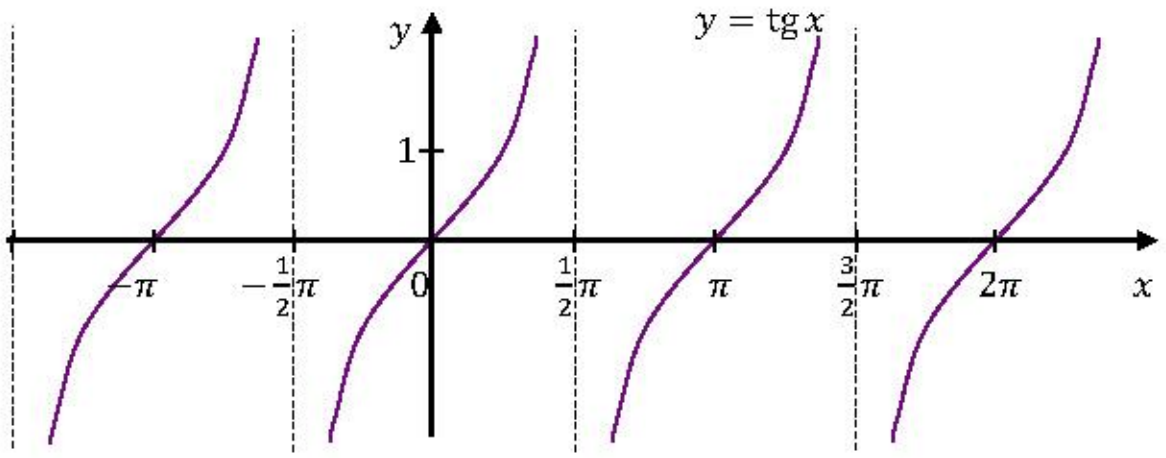
$$r = |OM| = \sqrt{x^2+y^2} > 0$$



- Wykresy funkcji trygonometrycznych







- Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- **Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów**

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- **Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów**

Dla dowolnych kątów α oraz β prawdziwe są równości:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad \text{gdy} \quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \quad \text{gdy} \quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

- **Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta**

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{o ile} \quad \operatorname{tg}\alpha \quad \text{istnieje i} \quad \operatorname{tg}^2\alpha\neq 1$$

- **Wybrane wzory redukcyjne**

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$$
$$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$

- **Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych**

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

- **Okresowość funkcji trygonometrycznych**

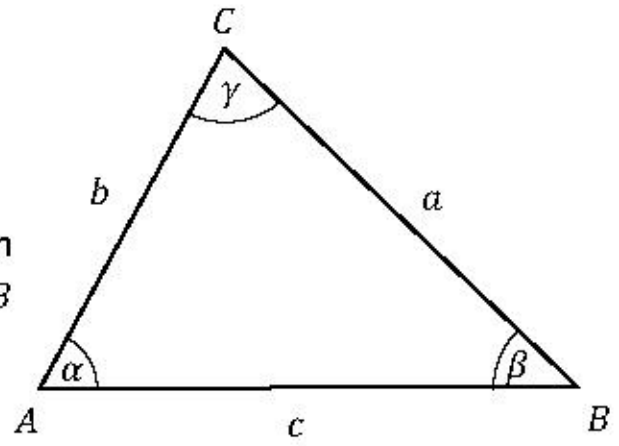
Dla każdego kąta α i liczby całkowitej k prawdziwe są związki:

$$\sin(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\sin\alpha \qquad \cos(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\cos\alpha$$

Ponadto jeżeli $\alpha\neq 90^\circ+m\cdot 180^\circ$ (gdzie $m\in\mathbb{Z}$), to:

$$\operatorname{tg}(\alpha+k\cdot 180^\circ)=\operatorname{tg}\alpha$$

10. PLANIMETRIA



Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC:

a, b, c – długości boków w trójkącie ABC

α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących – odpowiednio – przy wierzchołkach A, B oraz C

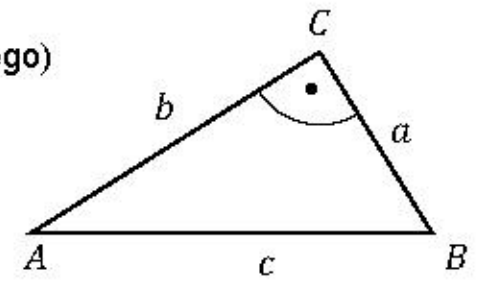
R, r – długości promieni okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC

h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta opuszczone – odpowiednio – z wierzchołków A, B i C.

p – połowa obwodu trójkąta ABC, tj.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)



Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \qquad \frac{b}{\sin\beta} = 2R \qquad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

- Wzory na pole trójkąta ABC:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ca \cdot \sin\beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \qquad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}b^2 \cdot \frac{\sin\gamma \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{2}c^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

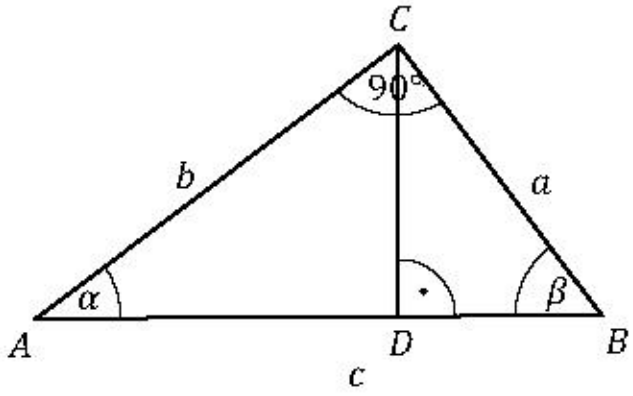
- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \qquad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \qquad R = \frac{1}{2}c$$

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta = b \cdot \operatorname{tg}\alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

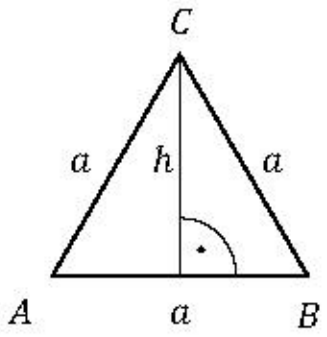


- Związki miarowe w trójkącie równobocznym

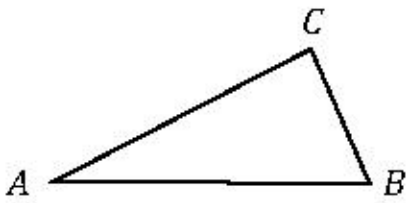
a – długość boku trójkąta równobocznego
h – wysokość trójkąta równobocznego

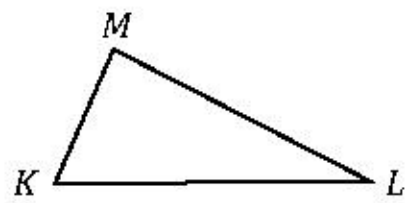
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{1}{3}h \qquad R = \frac{2}{3}h$$



- Cechy przystawania trójkątów





a) cecha przystawania „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom boków trójkąta KLM, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$, $|CA| = |ML|$.

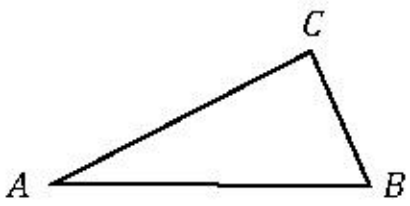
b) cecha przystawania „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

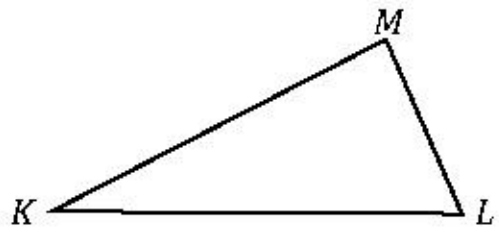
długości dwóch boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$.

c) cecha przystawania „**kąt–bok–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM:

długość jednego boku trójkąta ABC jest równa długości jednego boku trójkąta KLM i kąty przyległe do tego boku trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta KLM, np.:
$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$ i $|AB| = |KL|$.

- Cechy podobieństwa trójkątów





a) cecha podobieństwa „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości boków trójkąta KLM, np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CA|}{|MK|}$.

b) cecha podobieństwa „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości dwóch boków trójkąta ABC są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|AC|}{|KM|}$ i $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$.

c) cecha podobieństwa „**kąt–kąt–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM:

kąty trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów trójkąta KLM, np.:
$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle LKM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle KML|$.

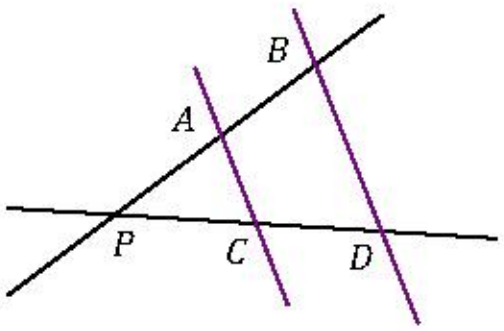
- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

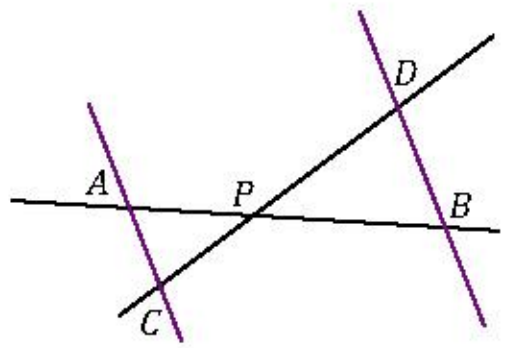
  Różne proste AB i CD przecinają się w punkcie P, przy czym spełniony jest jeden z warunków:

  – punkt A leży wewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży wewnątrz odcinka PD
  LUB
  – punkt A leży na zewnątrz odcinka PB oraz punkt C leży na zewnątrz odcinka PD.

  Jeżeli $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$, to proste AC i BD są równoległe.

  Jeżeli proste AC i BD są równoległe, to $\frac{|AB|}{|PA|} = \frac{|CD|}{|PC|}$.





- Twierdzenie o dwusiecznej kąta

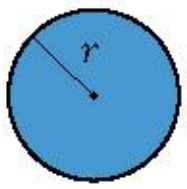
  Jeżeli dwusieczna kąta wewnętrznego (zewnętrznego) trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą zawierającą odcinek AB w punkcie D, to

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

- Koło

  Pole P koła o promieniu r jest równe:

$$P = \pi r^2$$



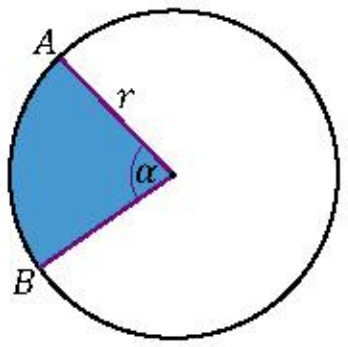
  Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L = 2\pi r$$

- Wycinek koła

Pole P wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równe:

$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$



Długość L łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równa:

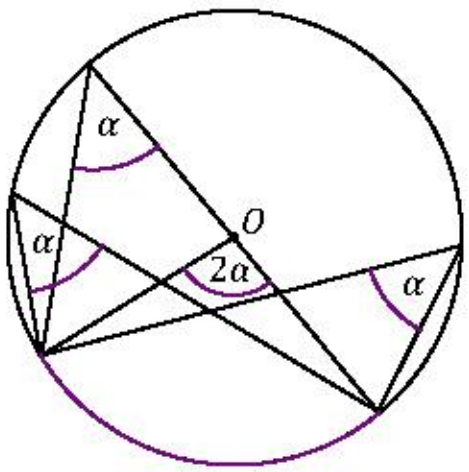
$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

- Kąty w okręgu

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O, opartych na tym samym łuku, są równe.

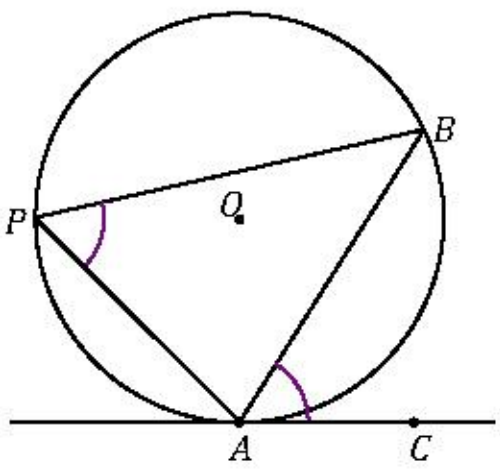


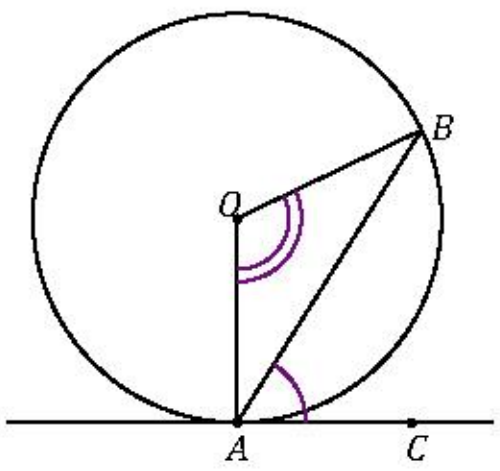
- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

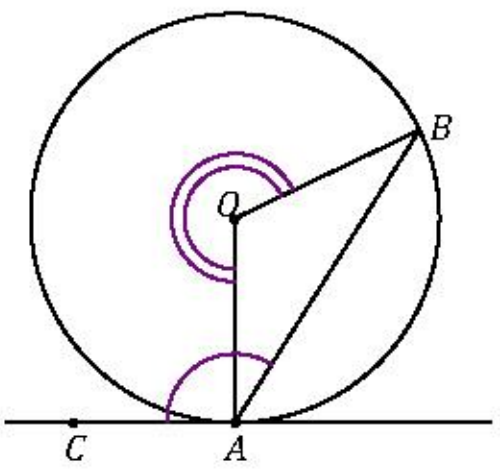
Dany jest okrąg o środku w punkcie O i cięciwa AB tego okręgu. Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A, natomiast punkt P leży na tym okręgu i nie należy do kąta CAB. Wtedy

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CAB| \quad \text{i} \quad |\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$$

przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB, który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB.



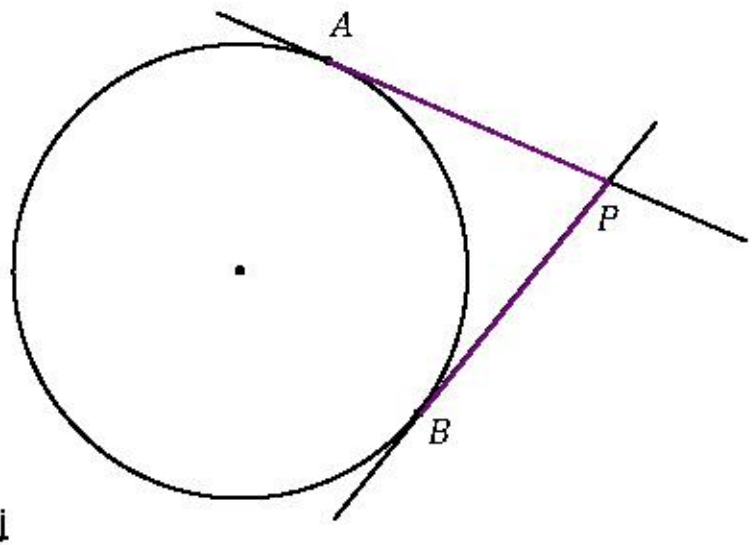




- Twierdzenie o odcinkach stycznych

  Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to

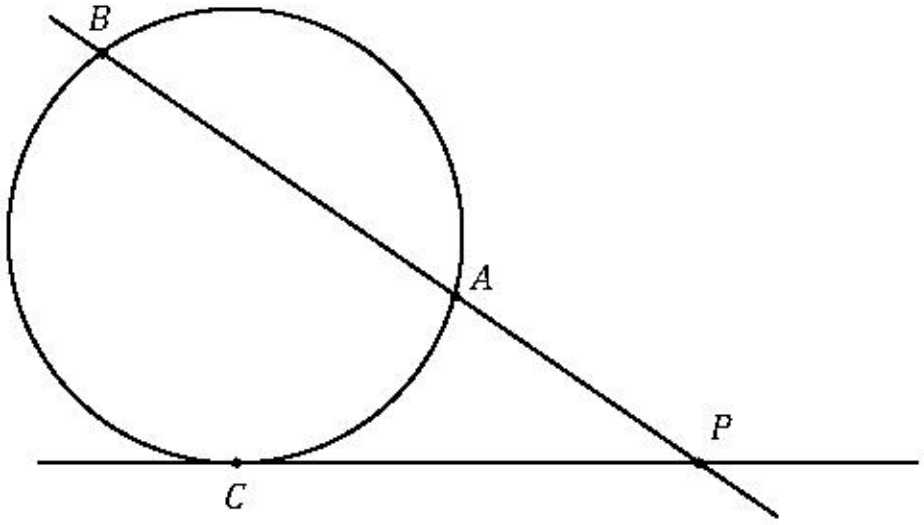
$$|PA| = |PB|$$



- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

  Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach A i B oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie C. Jeżeli proste te przecinają się w punkcie P, to

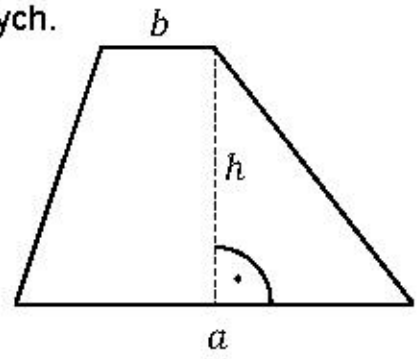
$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



- Czworokaty

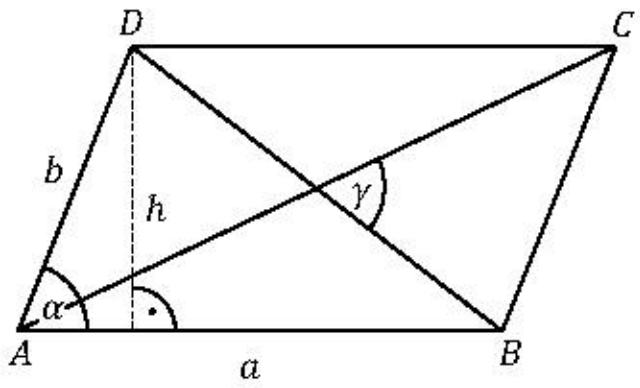
  Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
  Wzór na pole P trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



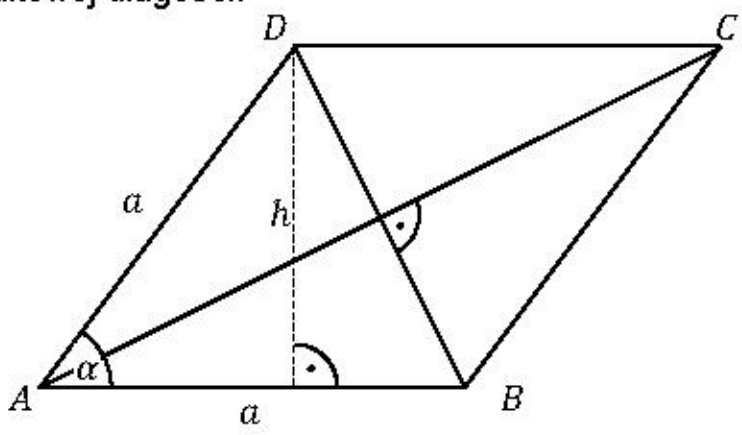
Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole P równoległoboku:

$$P = ah \qquad P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\gamma$$



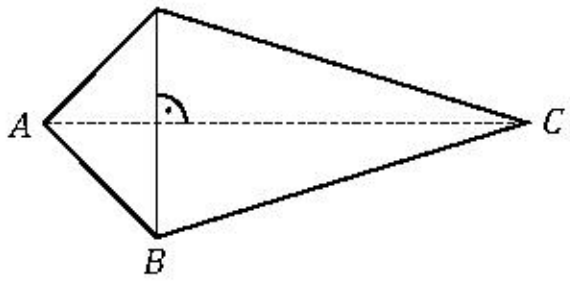
Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.
Wzory na pole P rombu:

$$P = ah \qquad P = a^2 \cdot \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



Deltoid – czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.
Wzór na pole P deltoidu:

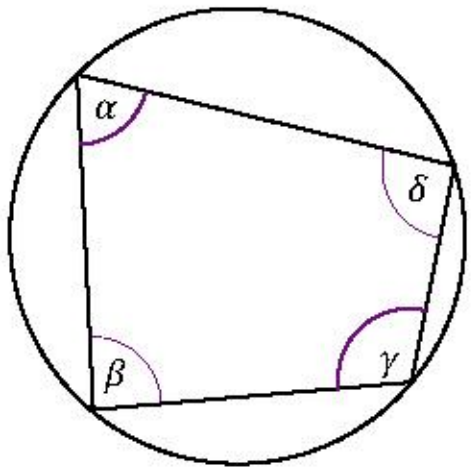
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



- <u>Okrąg opisany na czworokącie</u>

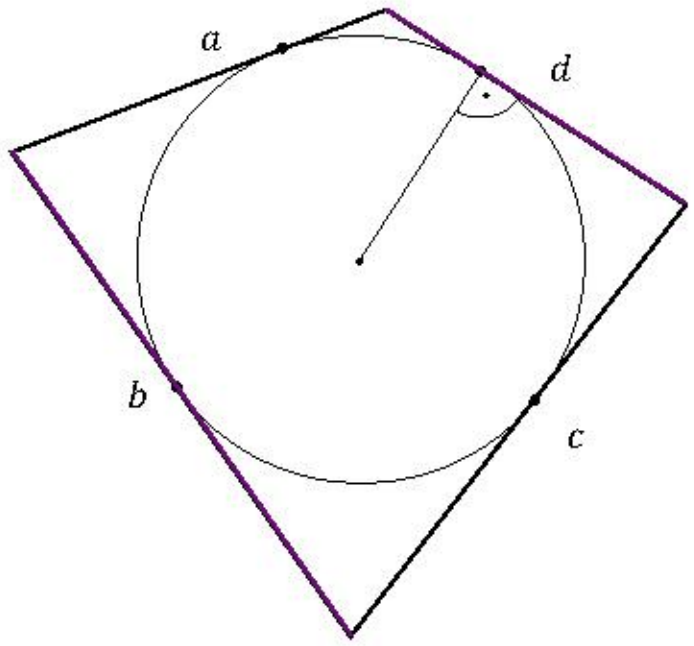
  Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$
$$\alpha + \gamma = 180° \qquad \beta + \delta = 180°$$



- Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.



$$a + c = b + d$$

- Pola figur podobnych

Jeżeli figura $\mathcal{B}$ o polu $P_{\mathcal{B}}$ jest podobna do figury $\mathcal{A}$ o polu $P_{\mathcal{A}}$ (różnym od zera) w skali k, to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

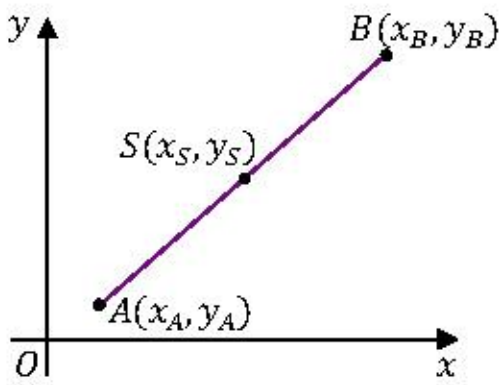
$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$$

11. GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

- Długość odcinka

Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



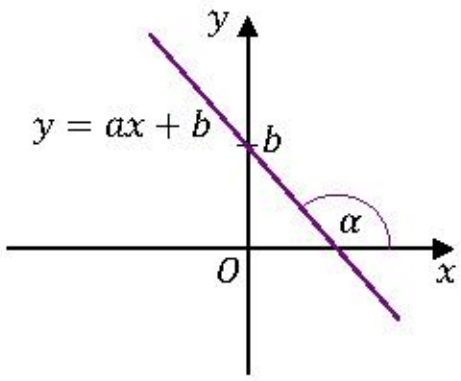
- Współrzędne środka odcinka

Współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

- <u>Równanie kierunkowe prostej</u>

  Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to można opisać ją równaniem kierunkowym:

  $$y = ax + b$$

  Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej.

  $$a = \operatorname{tg}\alpha$$

  Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$.

- Równanie kierunkowe prostej o danym współczynniku kierunkowym a, która przechodzi przez punkt $P = (x_0, y_0)$:

  $$y = a(x - x_0) + y_0$$

- Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

  $$y - y_A = a(x - x_A)$$

  gdzie

  $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \text{gdy} \quad x_B \neq x_A$$

- <u>Równanie ogólne prostej</u>

  $$Ax + By + C = 0, \quad \text{gdzie} \quad A, B, C \in \mathbb{R} \text{ i } A^2 + B^2 \neq 0$$

  Jeżeli $A = 0$, to prosta jest równoległa do osi Ox; jeżeli $B = 0$, to prosta jest równoległa do osi Oy; jeżeli $C = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

- Równanie ogólne prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

  $$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

- Proste równoległe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

- Proste prostopadłe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Dwie proste o równaniach ogólnych $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

- Odległość punktu od prostej

Odległość d punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ jest równa:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Równanie okręgu

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci ogólnej:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

gdzie $c = a^2 + b^2 - r^2$.

- <u>Współrzędne wektora, długość wektora, działania na wektorach</u>

  Dane są punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ w kartezjańskim układzie współrzędnych zaczepionego w punkcie A:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]}$$

  Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$ oraz $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami oraz $a \in \mathbb{R}$, to:

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]}$$

  Długością $|\vec{u}|$ wektora $\vec{u} = [u_1, u_2]$ nazywamy liczbę

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}}$$

- <u>Przekształcenia geometryczne</u>

  Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [a, b]$ przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x + a, y + b)$.

  Symetria osiowa S_{Ox} względem osi Ox przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (x, -y)$.

  Symetria osiowa S_{Oy} względem osi Oy przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, y)$.

  Symetria środkowa S_K względem punktu $K = (a, b)$ przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (2a - x, 2b - y)$.

  W szczególności symetria środkowa względem początku układu współrzędnych przekształca punkt $P = (x, y)$ na punkt $P' = (-x, -y)$.

- <u>Pole trójkąta</u>

  Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$ jest równe:

$$\boxed{P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|}$$

- Współrzędne środka masy trójkąta

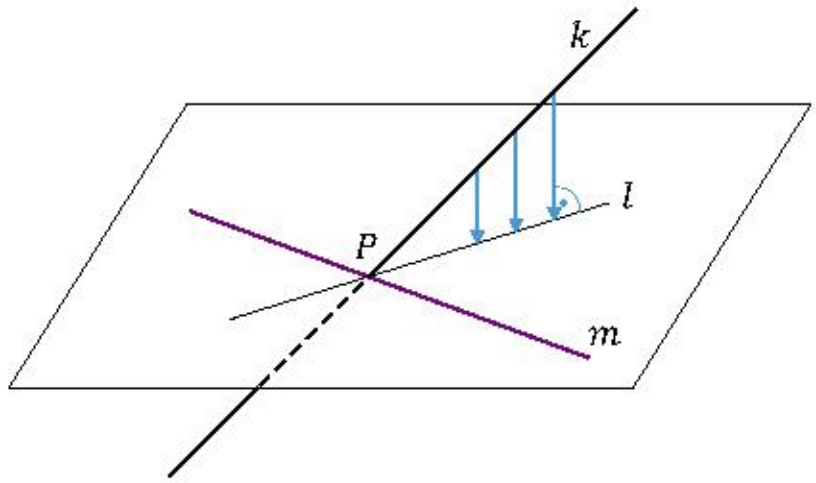
Współrzędne środka masy $S=(x_S,y_S)$ trójkąta ABC o wierzchołkach $A=(x_A,y_A)$, $B=(x_B,y_B)$ oraz $C=(x_C,y_C)$, czyli punktu przecięcia jego środkowych:

$$x_S=\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \qquad y_S=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$

12. STEREOMETRIA

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Prosta k przebija płaszczyznę w punkcie P pod kątem ostrym. Prosta l jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę. Prosta m leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt P.
Wówczas prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy m jest prostopadła do prostej l.



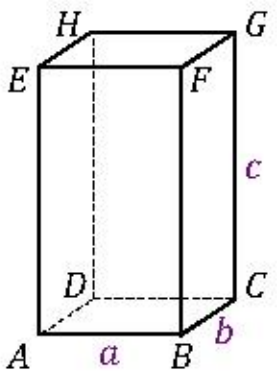
Przyjmujemy oznaczenia:

P_c – pole powierzchni całkowitej
P_b – pole powierzchni bocznej
P_p – pole podstawy
V – objętość

- Prostopadłościan

$$P_c=2(ab+bc+ca)$$
$$V=abc$$

gdzie $a,\ b,\ c$ są długościami krawędzi prostopadłościanu

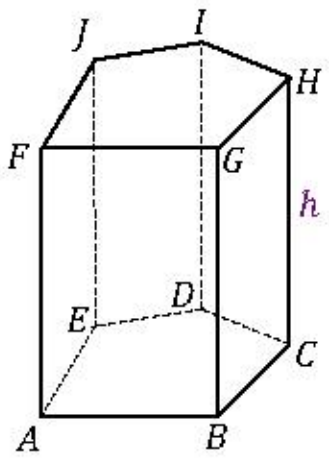


- Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

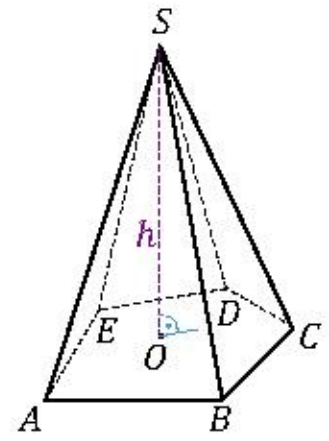
gdzie Ob jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast h – wysokością graniastosłupa.



- Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



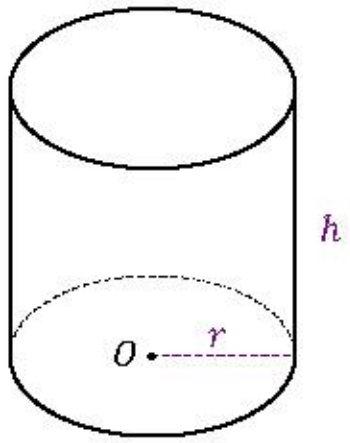
- Walec

$$P_b = 2\pi rh$$

$$P_c = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie h jest wysokością walca, O – środkiem symetrii podstawy walca, r – promieniem podstawy walca.

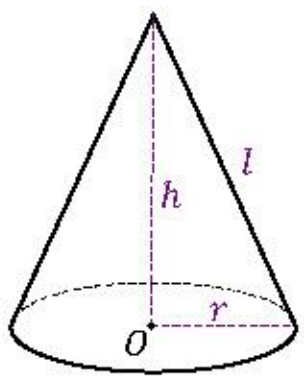


- Stożek

$$P_b = \pi rl$$

$$P_c = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

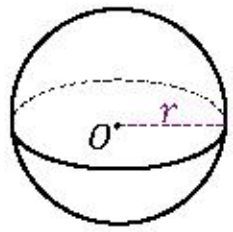


gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, natomiast l – tworzącą stożka. Punkt O jest środkiem symetrii podstawy stożka.

- Kula

$$P_c = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



gdzie r jest promieniem kuli, natomiast O – środkiem symetrii kuli.

13. KOMBINATORYKA

- Permutacje

Liczba wszystkich sposobów, na które n różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa $n!$.

- Kombinacje

Liczba wszystkich sposobów, na które spośród n różnych elementów można wybrać k elementów $(0 \leq k \leq n)$, jest równa $\binom{n}{k}$.

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k (niekoniecznie różnych) wyrazów, jest równa n^k.

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba wszystkich sposobów, na które z n różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z k różnych wyrazów $(1 \leq k \leq n)$, jest równa

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

$0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\Omega) = 1$

$P(A) \leq P(B)$ dla każdych zdarzeń A oraz B takich, że $A \subset B \subset \Omega$

$P(A') = 1 - P(A)$ gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

- Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A, natomiast $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω.

- Schemat Bernoullego

Próbą Bernoullego nazywamy doświadczenie losowe, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Jeden z nich nazywamy sukcesem, a drugi – porażką. Jeżeli prawdopodobieństwo sukcesu jest równe p, to prawdopodobieństwo porażki jest równe $q = 1 - p$.

Schematem Bernoullego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń prób Bernoullego.
W schemacie Bernoullego prawdopodobieństwo $P_n(k)$ uzyskania w n próbach dokładnie k sukcesów $(0 \leq k \leq n)$ jest równe

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

- Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, przy czym $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zdarzenia A pod warunkiem zaistnienia zdarzenia B nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:
1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$

to dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ prawdziwa jest równość

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

- Twierdzenie Bayesa

Jeżeli zdarzenia losowe $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:
1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$
4. $P(A) > 0$

to dla każdego k $(1 \leq k \leq n)$ prawdziwa jest równość

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

- Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Niech X będzie zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, określoną na zbiorze Ω, przy czym $P(\{\omega: \omega \in \Omega \text{ oraz } X(\omega) = x_i\}) = p_i$ dla $1 \leq i \leq n$. Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n$$

15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

  Średnia arytmetyczna $\bar{a}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

- Średnia geometryczna

  Średnia geometryczna $\bar{g}$ z liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\bar{g} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

- Średnia kwadratowa

  Średnia kwadratowa $\bar{k}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \cdots (a_n)^2}{n}}$$

- Nierówności między średnimi liczbowymi

  Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami nieujemnymi. Wtedy (przy powyższych oznaczeniach) prawdziwe są nierówności:

$$\bar{k} \geq \bar{a} \geq \bar{g}$$

  Ponadto równość pomiędzy tymi średnimi liczbowymi zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

- Średnia ważona

  Średnia ważona $\bar{s}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio: $w_1, w_2, \ldots, w_n$, jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \ldots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest:

– dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

– dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja σ^2 danych liczbowych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o średniej arytmetycznej $\bar{a}$ jest równa:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \ldots + (a_n - \bar{a})^2}{n}$$

Prawdziwa jest też równość:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \ldots + (a_n)^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe σ jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \ldots + (a_n - \bar{a})^2}{n}}$$

16. POCHODNA FUNKCJI

- Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Pochodna funkcji złożonej

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \quad \text{dla } c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{gdy } g(x) \neq 0$$

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

- **Pochodne wybranych funkcji**

Niech a, b, c, r będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

gdzie e jest liczbą Eulera; $e \approx 2{,}72$

- **Równanie stycznej**

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ dane jest wzorem

$$y = a(x - x_0) + f(x_0)$$

gdzie

$$a = f'(x_0)$$

17. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

α [°]	sin α	cos α	tg α
0	**0, 0000**	**1, 0000**	**0, 0000**
1	0,0175	0,9998	0,0175
2	0,0349	0,9994	0,0349
3	0,0523	0,9986	0,0524
4	0,0698	0,9976	0,0699
5	**0, 0872**	**0, 9962**	**0, 0875**
6	0,1045	0,9945	0,1051
7	0,1219	0,9925	0,1228
8	0,1392	0,9903	0,1405
9	0,1564	0,9877	0,1584
10	**0, 1736**	**0, 9848**	**0, 1763**
11	0,1908	0,9816	0,1944
12	0,2079	0,9781	0,2126
13	0,2250	0,9744	0,2309
14	0,2419	0,9703	0,2493
15	**0, 2588**	**0, 9659**	**0, 2679**
16	0,2756	0,9613	0,2867
17	0,2924	0,9563	0,3057
18	0,3090	0,9511	0,3249
19	0,3256	0,9455	0,3443
20	**0, 3420**	**0, 9397**	**0, 3640**
21	0,3584	0,9336	0,3839
22	0,3746	0,9272	0,4040
23	0,3907	0,9205	0,4245
24	0,4067	0,9135	0,4452
25	**0, 4226**	**0, 9063**	**0, 4663**
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	**0, 5000**	**0, 8660**	**0, 5774**
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	**0, 5736**	**0, 8192**	**0, 7002**
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536
38	0,6157	0,7880	0,7813
39	0,6293	0,7771	0,8098
40	**0, 6428**	**0, 7660**	**0, 8391**
41	0,6561	0,7547	0,8693
42	0,6691	0,7431	0,9004
43	0,6820	0,7314	0,9325
44	0,6947	0,7193	0,9657
45	**0, 7071**	**0, 7071**	**1, 0000**

α [°]	sin α	cos α	tg α
45	**0, 7071**	**0, 7071**	**1, 0000**
46	0,7193	0,6947	1,0355
47	0,7314	0,6820	1,0724
48	0,7431	0,6691	1,1106
49	0,7547	0,6561	1,1504
50	**0, 7660**	**0, 6428**	**1, 1918**
51	0,7771	0,6293	1,2349
52	0,7880	0,6157	1,2799
53	0,7986	0,6018	1,3270
54	0,8090	0,5878	1,3764
55	**0, 8192**	**0, 5736**	**1, 4281**
56	0,8290	0,5592	1,4826
57	0,8387	0,5446	1,5399
58	0,8480	0,5299	1,6003
59	0,8572	0,5150	1,6643
60	**0, 8660**	**0, 5000**	**1, 7321**
61	0,8746	0,4848	1,8040
62	0,8829	0,4695	1,8807
63	0,8910	0,4540	1,9626
64	0,8988	0,4384	2,0503
65	**0, 9063**	**0, 4226**	**2, 1445**
66	0,9135	0,4067	2,2460
67	0,9205	0,3907	2,3559
68	0,9272	0,3746	2,4751
69	0,9336	0,3584	2,6051
70	**0, 9397**	**0, 3420**	**2, 7475**
71	0,9455	0,3256	2,9042
72	0,9511	0,3090	3,0777
73	0,9563	0,2924	3,2709
74	0,9613	0,2756	3,4874
75	**0, 9659**	**0, 2588**	**3, 7321**
76	0,9703	0,2419	4,0108
77	0,9744	0,2250	4,3315
78	0,9781	0,2079	4,7046
79	0,9816	0,1908	5,1446
80	**0, 9848**	**0, 1736**	**5, 6713**
81	0,9877	0,1564	6,3138
82	0,9903	0,1392	7,1154
83	0,9925	0,1219	8,1443
84	0,9945	0,1045	9,5144
85	**0, 9962**	**0, 0872**	**11, 4301**
86	0,9976	0,0698	14,3007
87	0,9986	0,0523	19,0811
88	0,9994	0,0349	28,6363
89	0,9998	0,0175	57,2900
90	**1, 0000**	**0, 0000**	–

Źródło: Centralna Komisja Edukacyjna, *Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki*, cke.gov.pl, czerwiec 2022 r.

WYBRANE OZNACZENIA I SYMBOLE MATEMATYCZNE

W zadaniach z matematyki na poziomie podstawowym mogą być stosowane następujące oznaczenia i symbole matematyczne:

- $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych
- $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych
- $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych
- $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych
- $A \cup B$ – suma zbiorów A oraz B
- $A \cap B$ – iloczyn zbiorów A i B (część wspólna zbiorów A i B)
- $A \backslash B$ – różnica zbioru A i zbioru B.
- $A \subset B$ – zbiór A jest podzbiorem zbioru B
- $x \in A$ – element x należy do zbioru A
- $[a, b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x \leq b$
  $[a, b)$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a \leq x < b$
  $(a, b]$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x \leq b$
  (a, b) – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x < b$
  Krańce przedziałów domkniętych zdający może oznaczać także – odpowiednio:
  $\langle a, b\rangle, \langle a, b), (a, b\rangle$.

Źródło: Centralna Komisja Edukacyjna, *Informator o egzaminie maturalnym z matematyki*, cke.gov.pl, czerwiec 2022 r.