

matura

ZGODNE
Z WYTYCZNYMI
CKE

USZCZUPLONA PODSTAWA PROGRAMOWA

Rozwiązania krok po kroku do repetytorium

matematyka
zakres podstawowy



matura

ZGODNE
Z WYTYCZNYMI
CKE

USZCZUPLONA PODSTAWA PROGRAMOWA

Rozwiązania krok po kroku do repetytorium

matematyka
zakres podstawowy



1. Liczby rzeczywiste

Zadanie 1. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy potęgi występujące w działaniu jako potęgi o podstawie 2:

$$64^2 : 16^3 = (2^6)^2 : (2^4)^3$$

Krok 2: Wykonujemy dzielenie potęg o tej samej podstawie:

$$(2^6)^2 : (2^4)^3 = 2^{12} : 2^{12} = 2^0 = 1$$

Krok 3: Wybieramy odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 2. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy potęgi i pierwiastki występujące w działaniu jako potęgi o podstawie 6 i wykonujemy działania mnożenia oraz dzielenia potęg o tej samej podstawie.

$$\frac{6^{-2} \cdot 216}{\sqrt{6}} = \frac{6^{-2} \cdot 6^3}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{6^1}{6^{\frac{1}{2}}} = 6^{\frac{1}{2}}$$

Krok 2: Wybieramy odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 3. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy jako x pierwotną cenę towaru.

Krok 2: Wyznaczamy cenę towaru po pierwszej obniżce: $0,8x$. ($80\% = 100\% - 20\%$)

Krok 3: Wyznaczamy cenę towaru po drugiej obniżce: $0,75 \cdot 0,8x = 0,6x$. ($75\% = 100\% - 25\%$)

Krok 4: Zatem w wyniku obu obniżek cena towaru zmniejszyła się o 40%: ($40\% = 100\% - 60\%$).

Krok 5: Wybieramy odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 4. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podstawiamy w miejsce liter odpowiednie liczby:

$$\frac{(-3)^3 - 3^{-3}}{(-3)^{-3} - 3^3}$$

Krok 2: Wykonujemy działania:

$$\frac{(-3)^3 - 3^{-3}}{(-3)^{-3} - 3^3} = \frac{-27 - \frac{1}{27}}{-\frac{1}{27} - 27} = 1$$

Odpowiedź:

1

Zasady oceniania:

2 pkt – prawidłowe obliczenie wartości wyrażenia: $\frac{-27 - \frac{1}{27}}{-\frac{1}{27} - 27} = 1$.

1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci $\frac{(-3)^3 - 3^{-3}}{(-3)^{-3} - 3^3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 5. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy jako x pierwotną cenę spodni.

Krok 2: Wykonujemy obliczenia:

$$0,7x = 252 \quad (70\% = 100\% - 30\%)$$

$$x = 360$$

Krok 3: Podajemy odpowiedź: Cena spodni przed obniżką wynosiła 360 zł.

Odpowiedź:

360 zł

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie pierwotnej ceny spodni: 360 zł.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia pierwotnej ceny spodni.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 6. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy procentowe poparcie partii X w maju: 18%. ($18 = 15 + 3$)

Krok 2: Obliczamy procentowy wzrost oprocentowania: $\frac{\frac{3}{100}}{\frac{100}{15}} \cdot 100\% = 20\%$

Krok 3: Wybieramy poprawne odpowiedzi: CH

Odpowiedź:

CH

Zasady oceniania:

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: C i H.

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: C albo H.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 7. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zamieniamy pierwiastki na potęgi. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \left((2^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{24}}$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 8. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy $\log_2 81 = \log_2 3^4 = 4 \log_2 3 = 4m$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 9. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy: $\frac{9,8 \cdot 10^{-7}}{1,4 \cdot 10^{-2}} = \frac{98}{14} \cdot 10^{-5} = 7 \cdot 10^{-5}$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 10. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Upraszczamy: $7^{31} + 7^{30} - 7^{29} = 7^{29} \cdot (7^2 + 7 - 1) = 7^{29} \cdot 55$

Krok 2: Przekształcenie danego wyrażenia do postaci: $7^{29} \cdot 55 = 11 \cdot (5 \cdot 7^{29})$

Odpowiedź:

$$7^{31} + 7^{30} - 7^{29} = 7^{29} \cdot (7^2 + 7 - 1) = 7^{29} \cdot 55 \cdot 11 \cdot (5 \cdot 7^{29})$$

Zasady oceniania:

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: przekształcenie danego wyrażenia do postaci $11 \cdot (5 \cdot 7^{29})$ oraz zapisanie, że jest $(5 \cdot 7^{29})$ liczbą całkowitą.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci $7^{29} \cdot 55$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 11. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy jako x cenę roweru.

Krok 2: Wykonujemy obliczenia:

$$0,12x = 282$$

$$x = 2350$$

Krok 3: Zapisujemy odpowiedź: Cena roweru wynosi 2350 zł.

Odpowiedź:

2350 zł

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie ceny roweru: 2350 zł.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia ceny roweru.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 12. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy: $\log_5 108 = \log_5 (4 \cdot 27) = \log_5 2^2 + \log_5 3^3 = 2\log_5 2 + 3\log_5 3 = 2a + 3b$

Krok 2: Zapisujemy odpowiedź: $\log_5 108 = 2a + 3b$

Odpowiedź:

$$\log_5 108 = \log_5 (4 \cdot 27) = \log_5 2^2 + \log_5 3^3 = 2\log_5 2 + 3\log_5 3 = 2a + 3b$$

Zasady oceniania:

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: przekształcenie danego wyrażenia do postaci $2\log_5 2 + 3\log_5 3$ oraz zapisanie, że $\log_5 108 = 2a + 3b$.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci $\log_5 2^2 + \log_5 3^3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 13. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy liczbę w postaci potęgi o podstawie 2:

$$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{4\sqrt{8}}} = \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2^2 \cdot 2^3}} = \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2^7}} = \sqrt[4]{2 \cdot 2^{\frac{7}{3}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{13}{3}}} = \sqrt[4]{2^{\frac{13}{3}}} = 2^{\frac{13}{24}}$$

Krok 2: Wybieramy odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 14. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy iloczyn: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$

Krok 2: Przekształcamy iloczyn – zapisujemy liczby złożone jako iloczyny liczb pierwszych:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^{10} \cdot (3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11) = 2^{10} \cdot 467775$$

Odpowiedź:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^{10} \cdot (3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11) = 2^{10} \cdot 467775$$

Zasady oceniania:

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: przekształcenie danego wyrażenia do postaci $2^{10} \cdot (3^5 \cdot 5^2 \cdot 7)$ oraz zapisanie, że $(3^5 \cdot 5^2 \cdot 7)$ jest liczbą całkowitą.

1 pkt – przekształcenie wyrażenia do postaci $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 15. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Opuszczamy wartość bezwzględną: $\sqrt{2} - \sqrt{3} - |2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (-(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}))$

Krok 2: Obliczamy wartość wyrażenia: $-(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (-(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})) = -\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

Krok 3: Zapisujemy odpowiedź: $\sqrt{2} - \sqrt{3} - |2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}| = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

Odpowiedź:

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} - |2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (-(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})) = -\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – prawidłowe obliczenie wartości danego wyrażenia: $3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$.

1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci $-(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (-(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}))$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 16. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podpunkt a) $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_8 4 = \log_3 3^3 + \log_2 2^{-3} - \log_8 8^{\frac{2}{3}} = 3 + (-3) - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$

Krok 2: Podpunkt b) $\log_2 \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[6]{36}} = \log_2 \frac{\sqrt[3]{8 \cdot 6}}{\sqrt[6]{6^2}} = \log_2 \frac{2\sqrt[3]{6}}{(6^2)^{\frac{1}{6}}} = \log_2 \frac{2\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6}} = \log_2 2 = 1$

Krok 3: Zapisujemy odpowiedź: $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_8 4 = -\frac{2}{3}, \log_2 \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[6]{36}} = 1$

Odpowiedź:

$$\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_8 4 = -\frac{2}{3}, \log_2 \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[6]{36}} = 1$$

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne obliczenie wartości wyrażen $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_8 4$ oraz $\log_2 \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[6]{36}}$.

3 pkt – poprawne obliczenie wartości wyrażenia $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_8 4$: $5\frac{1}{3}$

oraz zapisanie wyrażenia $\log_2 \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[6]{36}}$ w postaci $\log_2 \frac{2\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6}}$

albo

zapisanie wyrażenia $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_8 4$ w postaci $3 - (-3) - \frac{2}{3}$

oraz poprawne obliczenie wartości wyrażenia $\log_2 \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[6]{36}}$: 1.

2 pkt – zapisanie wyrażenia $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_8 4$ w postaci $3 - (-3) - \frac{2}{3}$

oraz zapisanie wyrażenia $\log_2 \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[6]{36}}$ w postaci $\log_2 \frac{2\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6}}$.

1 pkt – zapisanie wyrażenia $\log_3 27 + \log_2 \frac{1}{8} - \log_8 4$ w postaci $3 - (-3) - \frac{2}{3}$

albo

zapisanie wyrażenia $\log_2 \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[6]{36}}$ w postaci $\log_2 \frac{2\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 17. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy: $|12 - 3x| = x$

Zatem: $12 - 3x = x$ lub $12 - 3x = -x$

Stąd: $x = 3$ lub $x = 6$

Krok 2: Wybieramy odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 18. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy: $x^{3,945} = x^{3 \cdot 1,315} = (x^{1,315})^3 = 5^3$

Krok 2: Wybieramy odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 19. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy: $a = 7n + 5$ i $b = 7m + 3$

Krok 2: Podstawiamy do równania $a + b = 7n + 5 + 7m + 3 = 7n + 7m + 7 + 1 = 7(n + m + 1) + 1 = 7k + 1$, gdzie $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Krok 3: Zapisujemy odpowiedź: Reszta wynosi 1.

Odpowiedź:

1

Zasady oceniania:

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: przekształcenie danej sumy wyrażenia do postaci $7(n + m + 1) + 1$ oraz zapisanie, że liczba 1 jest resztą.

1 pkt – zapisanie sumy liczb $a = 7n + 5$ i $b = 7m + 3$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ w postaci $7n + 7m + 8$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 20. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy potęgi i pierwiastki występujące w działaniu jako potęgi o podstawie 3 i wykonujemy działania mnożenia oraz dzielenia potęg o tej samej podstawie:

$$\frac{3^{-3} \cdot 27^2 \cdot \frac{1}{9}}{(\sqrt[3]{3})^2} = \frac{3^{-3} \cdot 3^6 \cdot 3^{-2}}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{3^1}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{\frac{1}{3}}$$

Krok 2: Zapisujemy wynik w postaci pierwiastka $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$.

Krok 3: Zapisujemy odpowiedź: Wartość wynosi $\sqrt[3]{3}$.

Odpowiedź:

$\sqrt[3]{3}$

Zasady oceniania:

2 pkt – prawidłowe obliczenie wartości wyrażenia i zapisanie w postaci: $\sqrt[3]{3}$.

1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci $\frac{3^{-3} \cdot 3^6 \cdot 3^{-2}}{3^{\frac{2}{3}}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 21. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy: $25^{49} + 25^{49} + 25^{49} + 25^{49} + 25^{49} = 5 \cdot 25^{49} = 5 \cdot 5^{98} = 5^{99}$

Krok 2: Zapisujemy odpowiedź: Suma jest równa 5^{99} .

Odpowiedź:

5^{99}

Zasady oceniania:

2 pkt – prawidłowe zapisanie wyrażenia w postaci: 5^{99} .

1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci $5 \cdot 25^{49}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 22. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy jako a wartość wyrażenia $\frac{3\frac{3}{4}:2,5-6\frac{2}{3}:\left(-1\frac{1}{3}\right)}{4\frac{2}{3}\cdot\frac{3^2}{8}+3,75\cdot3^{-1}}$ oraz jako b wartość szukanej liczby.

Krok 2: Wykonujemy obliczenia.

$$a = \frac{3\frac{3}{4}:2,5-6\frac{2}{3}:\left(-1\frac{1}{3}\right)}{4\frac{2}{3}\cdot\frac{3^2}{8}+3,75\cdot3^{-1}} = \frac{\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{20}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{14}{3}\cdot\frac{9}{8}+\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{2}+5}{\frac{21}{4}+\frac{5}{4}} = \frac{13}{2}\cdot\frac{2}{13} = 1$$

Krok 3: Zatem: $1:0,05 = 20$

$0,4\cdot b = 20$, stąd $b = 50$

Krok 4: Zapisujemy odpowiedź: Szukana liczba to 50.

Odpowiedź:

50

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne wyznaczenie szukanej liczby: 50.

2 pkt – poprawne wyznaczenie liczby, której 5% jest równe 1.

1 pkt – poprawne obliczenie wartości wyrażenia $\frac{3\frac{3}{4}:2,5-6\frac{2}{3}:\left(-1\frac{1}{3}\right)}{4\frac{2}{3}\cdot\frac{3^2}{8}+3,75\cdot3^{-1}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 23. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy obliczenia.

$b = 1,5a$ ($150\% = 100\% + 50\%$)

$$\frac{b-a}{b}\cdot 100\% = \frac{1,5a-a}{1,5a}\cdot 100\% = \frac{0,5}{1,5}\cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%$$

Krok 2: Zapisujemy odpowiedź: Liczba a jest o $33\frac{1}{3}\%$ mniejsza od liczby b .

Odpowiedź:

o $33\frac{1}{3}\%$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie, o ile procent liczba a jest mniejsza od liczby b : o $33\frac{1}{3}\%$.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia, o ile procent liczba a jest mniejsza od liczby b .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 24. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy jako x pierwotną cenę samochodu.

Krok 2: Wyznaczamy cenę samochodu po pierwszej podwyżce: $1,35x$. ($135\% = 100\% + 35\%$)

Krok 3: Wyznaczamy cenę samochodu po drugiej podwyżce: $1,25 \cdot 1,35x = 1,6875x$

Krok 4: Wykonujemy obliczenia.

$$1,6875x = 607\,500, \text{ stąd } x = 360\,000$$

Krok 5: Zapisujemy odpowiedź: Pierwotna cena samochodu wynosiła 360 000 zł.

Odpowiedź:

360000 zł

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie ceny samochodu po pierwszej podwyżce: 486 000 zł.

2 pkt – prawidłowe obliczenie pierwotnej ceny samochodu: 360 000 zł.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia pierwotnej ceny samochodu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 25. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy:

$$\begin{aligned} & (\log_2 1,5 + \log_2 24) - (\log_2 2 + \log_2 4,5) = \\ & = \log_2 (1,5 \cdot 24) - \log_2 (2 \cdot 4,5) = \log_2 \frac{36}{9} = \\ & = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \end{aligned}$$

Krok 2: Zapisujemy odpowiedź: $(\log_2 1,5 + \log_2 24) - (\log_2 2 + \log_2 4,5) = 2$

Odpowiedź:

2

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wartości danego wyrażenia: 2.

1 pkt – zapisanie danego wyrażenia w postaci $\log_2 4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 26. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy:

$$\begin{aligned} & \log_8 (\log_{16} 4) + \log_8 (\log_{16} 2) = \\ & = \log_8 \left(\log_{16} 16^{\frac{1}{2}} \right) + \log_8 \left(\log_{16} 16^{\frac{1}{4}} \right) = \\ & = \log_8 \frac{1}{2} + \log_8 \frac{1}{4} = \log_8 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) = \\ & = \log_8 8^{-1} = -1 \end{aligned}$$

Krok 2: Zapisujemy odpowiedź: Liczba -1 jest całkowita.

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} & \log_8 (\log_{16} 4) + \log_8 (\log_{16} 2) = \\ & = \log_8 \left(\log_{16} 16^{\frac{1}{2}} \right) + \log_8 \left(\log_{16} 16^{\frac{1}{4}} \right) = \\ & = \log_8 \frac{1}{2} + \log_8 \frac{1}{4} = \log_8 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) = \log_8 8^{-1} = -1 \end{aligned}$$

Liczba -1 jest całkowita.

Zasady oceniania:

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: przekształcenie danej liczby do postaci $\log_8 8^{-1} = -1$ oraz zapisanie, że liczba -1 jest całkowita.

Odpowiedzi krok po kroku

1 pkt – przekształcenie liczby $\log_8(\log_{16} 4) + \log_8(\log_{16} 2)$ do postaci $\log_8 \frac{1}{2} + \log_8 \frac{1}{4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 27. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy:

$$\begin{aligned} 4 - x + |x - 2| - 2|x - 5| &= \\ &= 4 - x + x - 2 - 2(-x + 5) = \\ &= 2 + 2x - 10 = 2x - 8 \end{aligned}$$

Krok 2: Formułujemy odpowiedź: $4 - x + |x - 2| - 2|x - 5| = 2x - 8$ dla $x \in (2, 4)$

Odpowiedź:

$$4 - x + |x - 2| - 2|x - 5| = 4 - x + x - 2 - 2(-x + 5) = 2 + 2x - 10 = 2x - 8$$

Zasady oceniania:

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie najprostszej postaci danego wyrażenia: $2x - 8$.

1 pkt – zapisanie danego wyrażenia w postaci $4 - x + x - 2 - 2(-x + 5)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 28. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy pole prostokąta o bokach a i b : $P = a \cdot b$

Krok 2: Wyznaczamy pole prostokąta o bokach c i d .

Skoro $c = 0,8a$ oraz $d = 1,2b$, to: $P = c \cdot d = 0,8a \cdot 1,2b = 0,96a \cdot b$

Krok 3: Wykonujemy obliczenia.

$$\frac{0,96ab}{ab} \cdot 100\% = 96\%$$

Krok 4: Pole prostokąta o bokach c i d stanowi 96% pola prostokąta o bokach a i b .

Odpowiedź:

96%

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawna metoda i wyznaczenie, ile procent drugiego pola prostokąta stanowi pole pierwszego prostokąta: 96%.

3 pkt – poprawne zapisanie pól prostokątów: $a \cdot b$ i $0,96a \cdot b$.

2 pkt – zapisanie długości boków jako $c = 0,8a$ i $d = 1,2b$.

1 pkt – zapisanie jednej długości boku jako $c = 0,8a$

albo

zapisanie jednej długości boku jako $d = 1,2b$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 29. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przekształcamy liczbę zgodnie z prawami działań na potęgach:

$$\frac{11^{-3} \cdot \frac{1}{81} \cdot 2^{-2}}{66^{-4}} = \frac{11^{-3} \cdot 3^{-4} \cdot 2^{-2}}{11^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 2^{-4}} = 11 \cdot 2^2 = 44$$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 30. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy jako x liczbę uczniów całej klasy.

Krok 2: Wyznaczamy liczbę dziewcząt: $0,2x$.

Krok 3: Wyznaczamy liczbę chłopców: $0,8x$. ($80\% = 100\% - 20\%$)

Krok 4: Wykonujemy obliczenia.

$$\frac{0,2x}{0,8x} \cdot 100\% = 25\%$$

$$\frac{0,8x}{0,2x} \cdot 100\% = 400\%$$

Krok 5: Wybieramy poprawne odpowiedzi: 1. P, 2. F.

Odpowiedź:

1. P

2. F

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 31. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy obliczenia.

$$a = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$$

$$b = \log_4 4 = 1$$

$$c = \log_4 \frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2$$

Krok 2: Zatem stwierdzamy: $c < b < a$.

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 32. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyciągamy czynnik przed nawias:

$$\begin{aligned} 13^{1315} - 13^{1314} - 13^{1313} &= 13^{1313} \cdot (13^2 - 13 - 1) = \\ &= 13^{1313} \cdot (169 - 14) \end{aligned}$$

Odpowiedzi krok po kroku

Krok 2: Przekształcamy liczbę do postaci $31 \cdot k$.

$$13^{1313} \cdot (169 - 14) = 155 \cdot 13^{1313} = 31 \cdot (5 \cdot 13^{1313})$$

Odpowiedź:

$$13^{1315} - 13^{1314} - 13^{1313} = 13^{1313} \cdot (13^2 - 13 - 1) = 13^{1313} \cdot (169 - 14) = 155 \cdot 13^{1313} = 31 \cdot (5 \cdot 13^{1313})$$

Zasady oceniania:

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: przekształcenie danego wyrażenia do postaci $31 \cdot (5 \cdot 13^{1313})$ oraz zapisanie, że $(5 \cdot 13^{1313})$ jest liczbą całkowitą.

1 pkt – przekształcenie liczby do postaci $155 \cdot 13^{1313}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 33. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Liczba niepodzielna przez 5 może przy dzieleniu przez 5 dawać resztę 1 lub 2, lub 3, lub 4, czyli dla $n \in \mathbb{N}$.

$$a = 5n + 1, b = 5n + 2, c = 5n + 3, d = 5n + 4$$

Krok 2: Sprawdzamy po kolei, jaką resztę z dzielenia przez 5 dają kwadraty tych niepodzielnych liczb.

$$a^2 = (5n + 1)^2 = 25n^2 + 10n + 1 = 5(5n^2 + 2n) + 1 \quad \text{reszta } 1$$

$$b^2 = (5n + 2)^2 = 25n^2 + 20n + 4 = 5(5n^2 + 4n) + 4 \quad \text{reszta } 4$$

$$c^2 = (5n + 3)^2 = 25n^2 + 30n + 9 = 5(5n^2 + 6n + 1) + 4 \quad \text{reszta } 4$$

$$d^2 = (5n + 4)^2 = 25n^2 + 40n + 16 = 5(5n^2 + 8n + 3) + 1 \quad \text{reszta } 1$$

Krok 3: Zapisujemy wniosek: Kwadrat liczby niepodzielnej przez 5 przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1 lub 4.

Odpowiedź:

1 lub 4.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i poprawne wyznaczenie szukanych reszt: 1 i 4.

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia reszt z dzielenia przez 5 daje kwadrat liczby a, b, c, d .

1 pkt – poprawne zapisanie kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 5: $a = 5n + 1, b = 5n + 2, c = 5n + 3, d = 5n + 4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 34. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy obliczenia.

$$\log_5 a = -1, \text{ stąd } a = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$\log_{\sqrt{3}} b = 4, \text{ stąd } b = (\sqrt{3})^4 = 9$$

$$\log_{0,1} c = -2, \text{ stąd } c = (0,1)^{-2} = 100$$

$$\textbf{Krok 2:} \text{ Wyznaczamy iloczyn: } a \cdot b \cdot c = \frac{1}{5} \cdot 9 \cdot 100 = 180$$

Krok 3: Zapisujemy odpowiedź: Iloczyn liczb a, b, c wynosi 180.

Odpowiedź:

180

Zasady oceniania:

2 pkt – prawidłowe obliczenie liczb a, b i c oraz prawidłowe obliczenie ich iloczynu: 180.

1 pkt – prawidłowe obliczenie liczb a i b

albo
prawidłowe obliczenie liczb a i c ,
albo
prawidłowe obliczenie liczb b i c .
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 35. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy obliczenia.

$$2|3-2\sqrt{3}|-4\sqrt{3}=2\cdot(-3+2\sqrt{3})-4\sqrt{3}=\\=-6+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}=-6$$

Krok 2: Zapisujemy odpowiedź: Liczba -6 jest liczbą wymierną.

Odpowiedź:

$$2|3-2\sqrt{3}|-4\sqrt{3}=2\cdot(-3+2\sqrt{3})-4\sqrt{3}=\\=-6+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}=-6$$

Liczba -6 jest liczbą wymierną.

Zasady oceniania:

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: przekształcenie danego wyrażenia do postaci -6 oraz zapisanie, że -6 jest liczbą wymierną.

1 pkt – przekształcenie liczby do postaci $2\cdot(-3+2\sqrt{3})-4\sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 36. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podpunkt a) Wyznaczamy stan konta po roku: $1,035 \cdot 12\,000$. ($103,5\% = 100\% + 3,5\%$)

Krok 2: Wykonujemy obliczenie.

$$1,035 \cdot 12\,000 = 12\,420$$

Krok 3: Po roku na koncie będzie 12 420 zł.

Krok 4: Podpunkt b) Wyznaczamy wartość oprocentowania w drugim roku: $3,5\% - 0,5\% = 3\%$.

Krok 5: Wyznaczamy stan konta po dwóch latach: $1,03 \cdot 12\,420$. ($103\% = 100\% + 3\%$)

Krok 6: Wykonujemy obliczenie.

$$1,03 \cdot 12\,420 = 12\,792,60$$

Krok 7: Po dwóch latach na koncie będzie 12 792,60 zł.

Odpowiedź:

a) 12 420 zł, b) 12 792,60 zł

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie stanu konta po dwóch latach: 12 792,60 zł.

3 pkt – poprawne wyznaczenie wartości oprocentowania w drugim roku: 3%.

2 pkt – prawidłowe obliczenie stanu konta po roku: 12 400 zł.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia stanu konta po roku.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

2. Wielomiany

Zadanie 37. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy wielomian W :

$$\begin{aligned}N(x) &= g(x) - h(x) = \\&= (x^4 + 3x^3 - 4x - 1) - (x^4 + 2x^3 + x^2 - 4) = \\&= x^4 + 3x^3 - 4x - 1 - x^4 - 2x^3 - x^2 + 4 = \\&= x^3 - x^2 - 4x + 3\end{aligned}$$

Krok 2: Wyznaczamy sumę wszystkich współczynników wielomianu W :

$$1 + (-1) + (-4) + 3 = -1$$

Krok 3: Wybieramy poprawne odpowiedzi: PF.

Odpowiedź:

PF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 38. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy wartość wielomianu w dla $x = -2$:

$$\begin{aligned}W(-2) &= -2 \cdot (-2)^5 - 3 \cdot (-2)^4 + (-2) + 2 = \\&= 64 - 48 - 2 + 2 = 16\end{aligned}$$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 39. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: W obliczeniach wykorzystujemy wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 40. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy różnicę wielomianów H i G :

$$\begin{aligned}H(x) - G(x) &= (2x^4 + 5x^3 - x + 1) - (-2x^3 + 3x^2 - 4) = \\&= 2x^4 + 5x^3 - x + 1 + 2x^3 - 3x^2 + 4 = 2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - x + 5\end{aligned}$$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 41. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy wartość parametru m – korzystamy z warunku $W(-1) = 4$:

$$-3 \cdot (-1)^5 + (-1)^4 + (1-2m) \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 3 = 4$$

Krok 2: Upraszczamy: $3 + 1 - (1 - 2m) - 1 + 3 = 4$, stąd $m = -0,5$

Odpowiedź:

-0,5

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wartości parametru $m = -\frac{1}{2}$.

1 pkt – poprawne podstawienie współrzędnych punktu P do wielomianu.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 42. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy wartość wyrażenia:

$$\frac{(\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}-5)}{(\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}-3)} = \frac{3-25}{5-9} = \frac{-22}{-4} = 5\frac{1}{2}$$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 43. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przekształcamy wyrażenie:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$

Odpowiedzi krok po kroku

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 44. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy:

$$\begin{aligned}(3\sqrt{7} - 7\sqrt{3})^2 + 42\sqrt{21} &= \\&= (3\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{7} \cdot 7\sqrt{3} + (7\sqrt{3})^2 + 42\sqrt{21} = \\&= 63 - 42\sqrt{21} + 147 + 42\sqrt{21} = 210\end{aligned}$$

Krok 2: Zapisujemy odpowiedź: Wartość wyrażenia jest równa 210.

Odpowiedź:

210

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wartości wyrażenia: 210.

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia: $(3\sqrt{7} - 7\sqrt{3})^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 45. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Upraszczamy dzięki zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}})^2 &= \\&= (\sqrt{3-\sqrt{5}})^2 - 2 \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} + (\sqrt{3+\sqrt{5}})^2 = \\&= 3 - \sqrt{5} - 2\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} + 3 + \sqrt{5}\end{aligned}$$

Krok 2: Obliczamy wartość wyrażenia:

$$\begin{aligned}3 - \sqrt{5} - 2\sqrt{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} + 3 + \sqrt{5} &= \\&= 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 4 = 2\end{aligned}$$

Odpowiedź:

2

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia i obliczenie wartości wyrażenia: $(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}})^2 = 2$

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}})^2 &= \\&= (\sqrt{3-\sqrt{5}})^2 - 2 \cdot \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} + (\sqrt{3+\sqrt{5}})^2\end{aligned}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 46. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przekształcamy wielomian W :

$$\begin{aligned} W(x) &= -x(x^3 - 2mx) + x^2(x^2 + 4) = \\ &= -x^4 + 2mx^2 + x^4 + 4x^2 = (2m + 4)x^2 \end{aligned}$$

Krok 2: Wielomian W przyjmuje wartość stałą równą 0, gdy $2m + 4 = 0$, czyli $m = -2$.

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 47. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy różnicę wielomianów W i U :

$$\begin{aligned} W(x) - U(x) &= (x^4 + 2x^2 - x) - (3x^5 - 2x^4 + 5x - 1) = \\ &= x^4 + 2x^2 - x - 3x^5 + 2x^4 - 5x + 1 = -3x^5 + 3x^4 - 6x + 1 \end{aligned}$$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 48. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Upraszczamy wyrażenie – stosujemy wzór skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned} (3\sqrt{5} - 7)^2 \cdot (3\sqrt{5} + 7)^2 &= [(3\sqrt{5} - 7)(3\sqrt{5} + 7)]^2 = \\ &= [(3\sqrt{5})^2 - 7^2]^2 = (45 - 49)^2 \end{aligned}$$

Krok 2: Upraszczamy wyrażenie: $(45 - 49)^2 = (-4)^2 = 16$

Odpowiedź:

16

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wartości: $(3\sqrt{5} - 7)^2 \cdot (3\sqrt{5} + 7)^2 = 16$.

1 pkt – poprawne przekształcenie iloczynu do postaci: $(3\sqrt{5} - 7)^2 \cdot (3\sqrt{5} + 7)^2 = [(3\sqrt{5} - 7)(3\sqrt{5} + 7)]^2 = [(3\sqrt{5})^2 - 7^2]^2$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 49. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Liczba nieparzysta: $2n + 1$.**Krok 2:** Poprzednia liczba nieparzysta: $2n - 1$.**Krok 3:** Obliczamy różnicę sześcianów tych liczb:

$$\begin{aligned}
 (2n+1)^3 - (2n-1)^3 &= \\
 &= 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 - 8n^3 + 12n^2 - 6n + 1 = \\
 &= 24n^2 + 2 = 2(12n^2 + 1) = 2 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Krok 4: Formułujemy odpowiedź: Liczba będąca iloczynem liczby całkowitej i liczby 2 dzieli się przez 2.**Odpowiedź:**

$$(2n+1)^3 - (2n-1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 - 8n^3 + 12n^2 - 6n + 1 = 24n^2 + 2 = 2(12n^2 + 1) = 2 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Liczba będąca iloczynem liczby całkowitej i liczby 2 dzieli się przez 2.

Zasady oceniania:**2 pkt** – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie różnicy sześcianów $24n^2 + 2$ i wykazanie jej podzielności przez 2.**1 pkt** – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie różnicy sześcianów $24n^2 + 2$.**0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.**Zadanie 50. 0-2 pkt****Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykonujemy działania w nawiasie:

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^2$$

Krok 2: Podstawiamy wartości a i b i obliczamy dzięki zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{(2+\sqrt{10})^2 - (2-\sqrt{10})^2}{(2+\sqrt{10})(2-\sqrt{10})}\right)^2 = \\
 &= \left(\frac{4+4\sqrt{10}+10-4+4\sqrt{10}-10}{4-10}\right)^2 = \\
 &= \left(\frac{8\sqrt{10}}{-6}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{10}}{-3}\right)^2 = \\
 &= \frac{16 \cdot 10}{9} = \frac{160}{9} = 17\frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

Krok 3: Formułujemy odpowiedź: Wartość wyrażenia wynosi $17\frac{7}{9}$.**Odpowiedź:**

$$17\frac{7}{9}$$

Zasady oceniania:**2 pkt** – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie wartości wyrażenia $17\frac{7}{9}$.

1 pkt – prawidłowe przekształcenie wyrażenia $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^2$ oraz poprawne podstawienie liczb $\left(\frac{(2+\sqrt{10})^2 - (2-\sqrt{10})^2}{(2+\sqrt{10})(2-\sqrt{10})}\right)^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 51. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy wielomian G w postaci uporządkowanej:

$$G(x) = ax^2(x+b)^2 = ax^2(x^2 + 2bx + b^2) = ax^4 + 2abx^3 + ab^2x^2$$

Krok 2: Z równości wielomianów G i H otrzymujemy równości:

$$a = 1, 2ab = 6, ab^2 = 9$$

Krok 3: Zatem $a = 1$ i $b = 3$.

Odpowiedź:

$$a = 1, b = 3$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wartości $a = 1$ i $b = 3$.

1 pkt – przekształcenie wielomianu $G(x)$ do postaci ogólnej.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 52. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy współczynniki a i b wielomianu W :

Krok 2: Skoro $W(2) = 0$ i $W(-3) = 2$, więc:

$$\begin{cases} 8a + 4 - 2b - 4 = 0 \\ -27a + 9 + 3b - 4 = 2 \end{cases} \text{ stąd } \begin{cases} 4a - b = 0 \\ -9a + b = -1 \end{cases} \text{ zatem } \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Odpowiedź:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wartości $a = \frac{1}{5}$ i $b = \frac{4}{5}$.

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań $\begin{cases} 8a + 4 - 2b - 4 = 0 \\ -27a + 9 + 3b - 4 = 2 \end{cases}$

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 53. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przekształcamy wielomian W :

$$W(x) = 4x^3 + (x-2)^2 + m = 4x^3 + x^2 - 4x + 4 + m$$

Krok 2: Wyznaczamy sumę współczynników wielomianu W :

$$4 + 1 - 4 + 4 + m = 5 + m$$

Krok 3: Wyznaczamy wartości parametru m :

$$5 + m > 0, \text{ stąd } m > -5$$

Odpowiedź:

$$m > -5$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wartości parametru $m > -5$.

1 pkt – przekształcenie wielomianu do postaci $W(x) = 4x^3 + x^2 - 4x + 4 + m$ oraz wyznaczenie sumy współczynników.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 54. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy wielomian W :

$$\begin{aligned}N(x) &= G(x) - 2H(x) = (x^3 - 2x) - 2(x^2 + 2x - 1) = \\&= x^3 - 2x - 2x^2 - 4x + 2 = x^3 - 2x^2 - 6x + 2\end{aligned}$$

Krok 2: Obliczamy wartość wielomianu W dla $x = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}N\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \\&= -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 3 + 2 = 4\frac{3}{8}\end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$4\frac{3}{8}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wartości wielomianu $W\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\frac{3}{8}$.

1 pkt – poprawne zapisanie wielomianu $W(x) = G(x) - 2H(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 55. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy sumę wielomianów G i H :

$$\begin{aligned}G(x) + H(x) &= (-2x^3 + x^2 + 3x - 2) + (ax + b) = \\&= -2x^3 + x^2 + 3x - 2 + ax + b = \\&= -2x^3 + x^2 + (3+a)x + b - 2\end{aligned}$$

Krok 2: Wyznaczamy współczynniki wielomianu H :

$$3 + a = 1 \text{ i } b - 2 = -3, \text{ stąd } a = -2 \text{ i } b = -1$$

Odpowiedź:

$$a = -2 \text{ i } b = -1$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wartości współczynników $a = -2$ i $b = -1$.

1 pkt – poprawne zapisanie sumy wielomianów $G(x) + H(x) = -2x^3 + x^2 + (3+a)x + b - 2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 56. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Niech $x = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ będzie liczbą parzystą, a $x + 2$ będzie kolejną liczbą parzystą, wtedy po zastosowaniu wzoru na różnicę n -tych potęg otrzymujemy:

$$\begin{aligned}x^4 - (x+2)^4 &= (x-x-2)\left(x^3 + x^2(x+2) + x(x+2)^2 + (x+2)^3\right) = \\&= -2(x^3 + x^3 + 2x^2 + x^3 + 4x^2 + 4x + x^3 + 6x^2 + 12x + 8) = \\&= -8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)\end{aligned}$$

Odpowiedzi krok po kroku

Krok 2: Po wstawieniu $x = 2n$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} -8(8n^3 + 12n^2 + 8n + 2) &= -16(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = \\ &= 16(-4n^3 - 6n^2 - 4n - 1) = 16 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Krok 3: Formułujemy odpowiedź: Liczba będąca iloczynem liczby całkowitej i liczby 16 dzieli się przez 16.

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} x^4 - (x+2)^4 &= (x-x-2)(x^3 + x^2(x+2) + x(x+2)^2 + (x+2)^3) = \\ &= -2(x^3 + x^3 + 2x^2 + x^3 + 4x^2 + 4x + x^3 + 6x^2 + 12x + 8) = \\ &= -8(8n^3 + 12n^2 + 8n + 2) = -16(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = \\ &= 16(-4n^3 - 6n^2 - 4n - 1) = 16 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na różnicę n -tych potęg: $-8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)$ i wykazanie podzielności przez 16.

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na różnicę n -tych potęg: $-8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 57. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Niech $a = \frac{5}{x-3}$, b – drugi bok prostokąta, wtedy:

$$P = a \cdot b$$

$$b = P : a$$

$$b = \frac{10}{x^2-9} : \frac{5}{x-3} = \frac{10}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x-3}{5} = \frac{2}{x+3}$$

Krok 2: Formułujemy odpowiedź: Drugi bok prostokąta jest równy $\frac{2}{x+3}$.

Odpowiedź:

$$\frac{2}{x+3}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie drugiego boku prostokąta: $\frac{2}{x+3}$.

1 pkt – poprawne zapisanie drugiego boku prostokąta: $b = \frac{10}{x^2-9} : \frac{5}{x-3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 58. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyciągamy czynnik przez nawias: $x^3 - x = x(x^2 - 1)$.

Krok 2: Upraszczamy – stosujemy wzór skróconego mnożenia: $x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$.

Odpowiedź:

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne zapisanie w postaci iloczynu: $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$.

1 pkt – poprawne wyłączenie x przed nawias: $x^3 - x = x(x^2 - 1)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 59. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy: $x^3 + 3 = x^3 + (\sqrt[3]{3})^3$.

Krok 2: Upraszczamy – stosujemy wzór skróconego mnożenia:

$$\begin{aligned}x^3 + (\sqrt[3]{3})^3 &= (x + \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}x + (\sqrt[3]{3})^2) = \\&= (x + \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})\end{aligned}$$

Odpowiedź:

$$x^3 + 3 = (x + \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne zapisanie w postaci iloczynu: $x^3 + 3 = (x + \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$.

1 pkt – poprawne zapisanie: $x^3 + 3 = x^3 + (\sqrt[3]{3})^3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 60. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podpunkt a) Obliczamy wartość wielomianu W dla $x = 2$:

$$F(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 8 = 8 - 8 - 8 + 8 = 0$$

Równość $F(2) = 0$ jest prawdziwa.

Krok 2: Podpunkt b) Wyznaczamy wielomian W :

$$\begin{aligned}W(x) &= F(x) + G(x) = (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) + (x^3 - 2x^2 + 2x - 4) = \\&= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 + x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4\end{aligned}$$

Krok 3: Rozkładamy wielomian w na czynniki metodą grupowania:

$$\begin{aligned}W(x) &= 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2x^2(x - 2) - 2(x - 2) = \\&= (x - 2)(2x^2 - 2) = 2(x - 2)(x^2 - 1) = 2(x - 2)(x - 1)(x + 1)\end{aligned}$$

Odpowiedź:

a) jest prawdziwa, b) $2(x - 2)(x - 1)(x + 1)$

Zasady oceniania:

3 pkt – sprawdzenie prawdziwości równości $F(2) = 0$ oraz poprawne rozłożenie wielomianu $W(x) = F(x) + G(x)$ na czynniki.

2 pkt – sprawdzenie prawdziwości równości $F(2) = 0$ i poprawne wyznaczenie wielomianu: $W(x) = F(x) + G(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.

1 pkt – sprawdzenie prawdziwości równości $F(2) = 0$ lub poprawne wyznaczenie wielomianu:

$$W(x) = F(x) + G(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 61. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy iloczyn wielomianów F i G :

$$\begin{aligned}F(x) \cdot G(x) &= (3x - 2)(x^2 + ax + b) = \\&= 3x^3 + 3ax^2 + 3bx - 2x^2 - 2ax - 2b = \\&= 3x^3 + (3a - 2)x^2 + (3b - 2a)x - 2b\end{aligned}$$

Odpowiedzi krok po kroku

Krok 2: Wyznaczamy wartości parametrów a i b :

$$3a - 2 = 1, 3b - 2a = 4 \text{ i } -2b = -4, \text{ stąd } a = 1 \text{ i } b = 2$$

Odpowiedź:

$$a = 1 \text{ i } b = 2$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne wyznaczenie wartości parametrów $a = 1$ i $b = 2$.

2 pkt – poprawne wyznaczenie iloczynu wielomianów: $F(x) \cdot G(x) = 3x^3 + (3a - 2)x^2 + (3b - 2a)x - 2b$.

1 pkt – poprawne zapisanie iloczynu wielomianów: $F(x) \cdot G(x) = (3x - 2)(x^2 + ax + b)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 62. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy wyrażenie W :

$$\begin{aligned} N &= 4H - 3U = 4(3x^2 - 2y^2 + z^2) - 3(2x^2 - y^2 + 2z^2) = \\ &= 12x^2 - 8y^2 + 4z^2 - 6x^2 + 3y^2 - 6z^2 = 6x^2 - 5y^2 - 2z^2 \end{aligned}$$

Krok 2: Wyznaczamy wartość wyrażenia W dla $x = -1, y = -2, z = -1$:

$$N = 6 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-1)^2 = 6 - 20 - 2 = -16$$

Odpowiedź:

$$W(x, y, z) = 6x^2 - 5y^2 - 2z^2, W(-1, -2, -1) = -16$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne wyznaczenie wielomianu: $W(x, y, z) = 6x^2 - 5y^2 - 2z^2$ oraz obliczenie wartości: $W(-1, -2, -1) = -16$.

2 pkt – poprawne wyznaczenie wielomianu: $W(x, y, z) = 6x^2 - 5y^2 - 2z^2$.

1 pkt – poprawne podstawienie do: $W(x, y, z) = 4H(x, y, z) - 3U(x, y, z)$ wielomianów $H(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + z^2$ i $U(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 2z^2$ bez wykonywania obliczeń.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 63. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Długości krawędzi prostopadłościanu są liczbami dodatnimi, czyli $x - 3 > 0, 2x + 4 > 0$ i $10 - x > 0$. Stąd $3 < x < 10$, czyli $x \in (3, 10)$.

Krok 2: Po wykorzystaniu wzoru na objętość $V = abc$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} V(x) &= (x - 3)(2x + 4)(10 - x) = (2x^2 + 4x - 6x - 12)(10 - x) = \\ &= (2x^2 - 2x - 12)(10 - x) = 20x^2 - 2x^3 - 20x + 2x^2 - 120 + 12x = \\ &= -2x^3 + 22x^2 - 8x - 120 \\ &= 20x^2 - 2x^3 - 20x + 2x^2 - 120 + 12x = -2x^3 + 22x^2 - 8x - 120 \end{aligned}$$

Krok 3: Zapisujemy odpowiedź: Objętość prostopadłościanu opisuje wielomian $V(x) = -2x^3 + 22x^2 - 8x - 120$ dla $x \in (3, 10)$.

Odpowiedź:

$$V(x) = -2x^3 + 22x^2 - 8x - 120$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne wyznaczenie wielomianu: $V(x) = -2x^3 + 22x^2 - 8x - 120$ dla $x \in (3, 10)$.

2 pkt – poprawne zapisanie wzoru na objętość: $V(x) = (x - 3)(2x + 4)(10 - x)$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie dziedziny wyrażenia $x \in (3, 10)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 64. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozkładamy wielomian w na czynniki z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia:

$$W(n) = n^6 - n^2 = n^2(n^4 - 1) = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^2(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$$

Krok 2: Czynniki $n - 1$, n , $n + 1$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, więc wśród nich jedna jest podzielna przez 2 i jedna podzielna przez 3, zatem ich iloczyn jest podzielny przez 6.

Odpowiedź:

$$W(n) = n^6 - n^2 = n^2(n^4 - 1) = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^2(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$$

Czynniki $n - 1$, n , $n + 1$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, więc wśród nich jedna jest podzielna przez 2 i jedna podzielna przez 3, zatem ich iloczyn jest podzielny przez 6.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne wykazanie, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ wartość wyrażenia $W(n) = n^6 - n^2$ jest podzielna przez 6.

3 pkt – zapisanie wielomianu w postaci: $W(n) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$.

2 pkt – zapisanie wielomianu w postaci: $W(n) = n^2(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$.

1 pkt – zapisanie wielomianu w postaci: $W(n) = n^6 - n^2 = n^2(n^4 - 1)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 65. 0-6 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podpunkt a) Długości przyprostokątnych są liczbami dodatnimi, czyli:

$8 - x > 0$ i $x - 6 > 0$, stąd $x < 8$ i $x > 6$, czyli $x \in (6, 8)$.

Krok 2: Wyznaczamy wielomian zmiennej x opisujący pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a , b :

$$P(x) = \frac{1}{2}(8 - x)(x - 6) = \frac{1}{2}(8x - 48 - x^2 + 6x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 24 \text{ dla } x \in (6, 8).$$

Krok 3: Podpunkt b) Długości podstaw oraz wysokość trapezu są liczbami dodatnimi, czyli:

$x - 6 > 0$, $x + 2 > 0$ i $x - 2 > 0$, stąd $x > 6$, $x > -2$ i $x > 2$, czyli $x > 6$.

Krok 4: Wyznaczamy wielomian zmiennej x opisujący pole trapezu o podstawach a i b oraz wysokości h :

$$P(x) = \frac{1}{2}(x - 6 + x + 2)(x - 2) = \frac{1}{2}(2x - 4)(x - 2) = \frac{1}{2}(2x^2 - 4x - 4x + 8) = \frac{1}{2}(2x^2 - 8x + 8)$$

$$P(x) = x^2 - 4x + 4 \text{ dla } x > 6$$

Odpowiedź:

$$\text{a) } P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 24 \text{ dla } x \in (6, 8), \text{ b) } P(x) = x^2 - 4x + 4 \text{ dla } x > 6.$$

Zasady oceniania:

6 pkt – prawidłowe wyznaczenie wielomianów:

$$\text{a) } P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 24 \text{ dla } x \in (6, 8), \text{ b) } P(x) = x^2 - 4x + 4 \text{ dla } x > 6.$$

5 pkt – prawidłowe wyznaczenie wielomianów bez założeń:

$$\text{a) } P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 24, \text{ b) } P(x) = x^2 - 4x + 4.$$

4 pkt – prawidłowe wyznaczenie wielomianów:

$$\text{a) } P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 24 \text{ dla } x \in (6, 8)$$

lub

$$\text{b) } P(x) = x^2 - 4x + 4 \text{ dla } x > 6,$$

lub

$$a) P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 24 \text{ dla } x \in (6, 8), \text{ b) } P(x) = x^2 - 4x + 4 \text{ dla } x > 6.$$

3 pkt – prawidłowe wyznaczenie wielomianów bez założeń:

$$a) P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 24$$

lub

$$b) P(x) = x^2 - 4x + 4,$$

lub

$$a) P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 24, \text{ b) } P(x) = x^2 - 4x + 4.$$

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie wielomianów:

$$a) P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 24 \text{ dla } x \in (6, 8),$$

lub

$$b) P(x) = x^2 - 4x + 4 \text{ dla } x > 6.$$

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie wielomianów bez założeń:

$$a) P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 24$$

lub

$$b) P(x) = x^2 - 4x + 4.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

3. Równania i nierówności

Zadanie 66. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Sprawdzamy odpowiedź A.

$$x\sqrt{7}-7=x\sqrt{7}-7$$

$0=0$ – równanie tożsamościowe

Krok 2: Sprawdzamy odpowiedź B.

$$2x - \frac{5-2x}{2} = 3x-5 \mid \cdot 2$$

$$4x-5+2x=6x-10$$

$0=-5$ – równanie sprzeczne

Krok 3: Sprawdzamy odpowiedź C.

$$x^2+7x-5x-35=x^2-35$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

Krok 4: Sprawdzamy odpowiedź D.

$$2(4x+1)=3(x-2)$$

$$8x+2=3x-6$$

$$5x=-8$$

$$x=-1\frac{3}{5}$$

Krok 5: Wybieramy poprawną odpowiedź: B

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 67. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Sprawdzamy odpowiedź A.

$$x^2+2x < x^2+2x$$

$0 < 0$ – nierówność sprzeczna, $x \in \emptyset$

Krok 2: Sprawdzamy odpowiedź B.

$$x^2+25 < x^2-10x+25$$

$$10x < 0$$

$$x < 0$$

Krok 3: Sprawdzamy odpowiedź C.

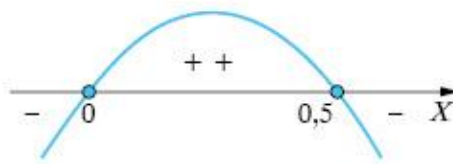
$$x-2x^2 \leq 0$$

$$x \cdot (1-2x) \leq 0$$

Wyznaczamy pierwiastki równania $x(1-2x)=0$ i szkicujemy parabolę.

$$x=0 \text{ lub } 1-2x=0$$

$$x=0 \text{ lub } x=\frac{1}{2}$$



$$x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Krok 4: Sprawdzamy odpowiedź D.

$$\pi x^2 + 3 > \pi x^2 - \pi$$

$3 > -\pi$ – nierówność tożsamościowa, $x \in \mathbb{R}$

Krok 5: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 68. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przyrównujemy każdy czynnik do zera i otrzymujemy:

$$x = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$x = \sqrt{2} \text{ lub } x = -\sqrt{2}$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$x = \sqrt{3} \text{ lub } x = -\sqrt{3}$$

$$x^2 + 4 > 0$$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 69. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przyrównujemy każdy czynnik do zera i otrzymujemy:

$$x = 0$$

$$x^2 + 2 > 0$$

$$x^2 + 3 > 0$$

$$x^2 + 4 > 0$$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 70. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy założenia: $3 - x \neq 0 \vee x \neq 0$.

Stąd: $x \neq 3 \vee x \neq 0$.

Krok 2: Zapisujemy dziedzinę: $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 71. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przyrównujemy każdy czynnik do zera i otrzymujemy:

$$x = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 72. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przyrównujemy każdy czynnik do zera i otrzymujemy:

$$x = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x^2 + 3 > 0$$

$$x^3 + 4 = 0$$

$$x^3 = -4$$

$$x = \sqrt[3]{-4}$$

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

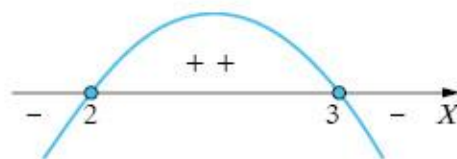
Zadanie 73. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Punkt 1. Wyznaczamy pierwiastki równania $(x-3)(2-x)=0$ i szkicujemy parabolę.

$$x-3=0 \text{ lub } 2-x=0$$

$$x=3 \text{ lub } x=2$$



$$x \in \langle 2, 3 \rangle$$

W tym zbiorze są dwie liczby naturalne. Są to liczby 2 i 3. Obie liczby są liczbami pierwszymi.

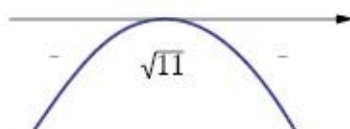
Zdanie jest prawdziwe.

Krok 2: Punkt 2. Przekształcamy nierówność $-x^2 + 2\sqrt{11}x - 11 < 0$ do postaci: $-(x - \sqrt{11})^2 < 0$.

Wyznaczamy pierwiastki równania $-(x - \sqrt{11})^2 = 0$ i szkicujemy parabolę.

$$x - \sqrt{11} = 0$$

$$x = \sqrt{11}$$



$$x \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{11}\}$$

Zdanie jest fałszywe.

Krok 3: Wybieramy poprawne odpowiedzi: PF.

Odpowiedź:

PF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 74. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przekształcamy równanie $x^2 + 16 = (x-4)^2 + 8x$.

Krok 2: Otrzymujemy: $x^2 + 16 = x^2 - 8x + 16 + 8x$, $0 = 0$.

Krok 3: Jest to równanie tożsamościowe, $x \in \mathbb{R}$.

Krok 4: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 75.

Zadanie 75.1. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozwiązujemy nierówność $\frac{x-1}{4} - \frac{x-3}{2} \leq \frac{1}{8} \cdot 8$.

$$2(x-1) - 4(x-3) \leq 1$$

$$2x - 2 - 4x + 12 \leq 1$$

$$-2x \leq -9 \quad | :(-2)$$

$$x \geq 4,5$$

Krok 2: Rozwiązujemy nierówność $x(1+\sqrt{3}) < x\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$.

$$x + x\sqrt{3} < x\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$$

$$x < 4\sqrt{2}$$

Odpowiedź:

PF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 75.2. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zaznaczamy zbiory rozwiązań na osi liczbowej i ustalamy zbiór liczb spełniających jednocześnie obie nierówności:



Krok 2: Wyznaczamy zbiór: $x \in [4,5; 4\sqrt{2})$.

Odpowiedź:

$$x \in [4,5; 4\sqrt{2})$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności i podanie przedziału $[4,5; 4\sqrt{2})$.

2 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $x \geq 4,5$ oraz $x < 4\sqrt{2}$.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $x \geq 4,5$ lub $x < 4\sqrt{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 76. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przyrównujemy mianownik do zera i ustalamy dziedzinę wyrażenia wymiernego:

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$\text{Zatem: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Krok 2: Przyrównujemy licznik do zera: $x^2 - 1 = 0$, stosujemy wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń: $(x-1)(x+1) = 0$.

Zatem licznik zapisujemy w postaci iloczynowej: $(x-1)(x+1)$.

Krok 3: Zapisujemy równanie w postaci: $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 0$.

Krok 4: Po skróceniu otrzymujemy $x + 1 = 0$, więc $x = -1$.

Krok 5: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 77. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozkładamy na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$x^2(2x-1) - \frac{4}{9}(2x-1) = 0$$

$$(2x-1)\left(x^2 - \frac{4}{9}\right) = 0$$

Krok 2: Stosujemy wzór skróconego mnożenia: $2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$.

Krok 3: Obliczamy rozwiązania równania:

$$x = \frac{1}{2} \text{ lub } x = \frac{2}{3}, \text{ lub } x = -\frac{2}{3}$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniami równania są liczby $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe rozwiązanie równania $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$.

1 pkt – prawidłowe przekształcenie równania do postaci $(2x-1)\left(x^2 - \frac{4}{9}\right) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 78. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, $t > 0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe $4t^2 - 4t + 1 = 0$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$$

Krok 2: Stwierdzamy, że skoro $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie.

Krok 3: Obliczamy $t = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Krok 4: Wracamy do podstawienia i otrzymujemy równanie kwadratowe $x^2 = \frac{1}{2}$, które rozwiązujemy dzięki zastosowaniu wzoru na różnicę kwadratów dwóch wyrażen:

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Krok 5: Obliczamy rozwiązania:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniami równania są liczby $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe rozwiązanie równania $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1 pkt – prawidłowe podstawienie i rozwiązanie równania $4t^2 - 4t + 1 = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 79. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy pierwiastki równania $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(3x + 5) = 0$.

$$x - \frac{1}{2} = 0 \text{ lub } 3x + 5 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ lub } x = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$$

Krok 2: Dla równania $\frac{2x-1}{3x+5} = 0$ wyznaczamy dziedzinę.

Założenie: $3x + 5 \neq 0$, stąd $x \neq -1\frac{2}{3}$. Dziedzina: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1\frac{2}{3}\right\}$.

Krok 3: Rozwiązujemy równanie: $\frac{2x-1}{3x+5} = 0$.

$$\text{Stąd: } 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Krok 4: Wspólnym pierwiastkiem jest $x = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź:

B3

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 80. 0-2 pkt

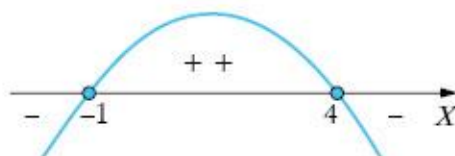
Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy założenie: $-x^2 + 3x + 4 \geq 0$

Krok 2: Obliczamy: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 25$, $\Delta > 0$, równanie $-x^2 + 3x + 4 = 0$ ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{-3-5}{-2} = 4$,

$$x_2 = \frac{-3+5}{-2} = -1$$

Krok 3: Szkicujemy parabolę.



Krok 4: Odczytujemy rozwiązanie: $x \in \langle -1, 4 \rangle$.

Odpowiedź:

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $\langle -1, 4 \rangle$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie dziedziny $x \in \langle -1, 6 \rangle$.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $-x^2 + 3x + 4 \geq 0$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 81. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Wyznaczamy sumę: $f(x) + g(x) = 2x + 3 - \frac{1}{2}x - 2$.

Krok 2: Otrzymujemy: $f(x) + g(x) = 1\frac{1}{2}x + 1$.

Krok 3: Zapisujemy nierówność podwójną: $-3 < 1\frac{1}{2}x + 1 < 3$.

$$-4 < 1\frac{1}{2}x < 2 \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$-\frac{8}{3} < x < \frac{4}{3}$$

$$-2\frac{2}{3} < x < 1\frac{1}{3}$$

Krok 3: Stwierdzamy, że do tego zbioru należą dwie liczby naturalne. Są to liczby: 0 i 1.

Odpowiedź:

Do tego zbioru należą dwie liczby naturalne. Są to liczby: 0 i 1.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie liczb naturalnych 0 i 1.

1 pkt – poprawne wyznaczenie sumy: $f(x) + g(x) = 1\frac{1}{2}x + 1$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 82. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Zapisujemy nierówność zgodną z warunkami zadania: $f(x) \geq 1$

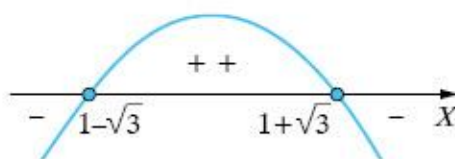
Krok 2: Otrzymujemy: $-(x-1)^2 + 4 \geq 1$
 $-x^2 + 2x + 2 \geq 0$

Krok 3: Wyznaczamy pierwiastki równania $-x^2 + 2x + 2 = 0$ i szkicujemy parabolę.

Krok 4: Obliczamy: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 12$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\Delta > 0$, równanie ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{-2} = 1 + \sqrt{3}$,

$$x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3}$$

Krok 5: Rysujemy parabolę:



Krok 6: Odczytujemy rozwiązanie: $x \in \langle 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} \rangle$.

Odpowiedź:

Funkcja przyjmuje wartości co najmniej równe 1 dla $x \in \langle 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3} \rangle$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie szukanych argumentów: $x \in \langle 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3} \rangle$.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności: $-x^2 + 2x + 2 \geq 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 83. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozkładamy równanie na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$6x^3 - 6 - 19x^2 + 19x = 0$$

$$6(x^3 - 1) - 19x(x - 1) = 0$$

Krok 2: Stosujemy wzór na różnicę sześcianów dwóch wyrażeń:

$$6(x - 1)(x^2 + x + 1) - 19x(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(6x^2 + 6x + 6 - 19x) = 0$$

$$(x - 1)(6x^2 - 13x + 6) = 0$$

Krok 3: Przyrównujemy oba wyrażenia w nawiasach do zera:

$$x - 1 = 0 \vee 6x^2 - 13x + 6 = 0$$

Krok 4: Otrzymujemy:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3} \vee x_3 = 1\frac{1}{2}$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniami równania są liczby $1, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania i wskazanie liczb $1, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}$.

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia: $6(x - 1)(x^2 + x + 1) - 19x(x - 1) = 0$.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 84. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przyrównujemy mianownik do zera i ustalamy dziedzinę wyrażenia wymiernego:

$$6x^2 + 19x + 10 = 0.$$

Krok 2: Równanie kwadratowe rozwiązujemy dzięki obliczeniu wyróżnika trójmianu:

$$\Delta = 19^2 - 4 \cdot 6 \cdot 10 = 361 - 240 = 121$$

$$\sqrt{\Delta} = 11$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-19 - 11}{2 \cdot 6} = \frac{-30}{12} = -2,5$$

$$x_2 = \frac{-19 + 11}{2 \cdot 6} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$$

Krok 3: Określamy dziedzinę: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -2,5; -\frac{2}{3} \right\}$.

Krok 4: Przyrównujemy licznik do zera:

$$6x^2 + 11x - 10 = 0$$

Krok 5: Równanie kwadratowe rozwiązujemy dzięki obliczeniu wyróżnika trójmianu:

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-10) = 121 + 240 = 361$$

$$\sqrt{\Delta} = 19$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-11-19}{2 \cdot 6} = \frac{-30}{12} = -2,5$$

$$x_2 = \frac{-11+19}{2 \cdot 6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Krok 6: Ułamek jest równy zero tylko wtedy, kiedy licznik jest równy zero, zatem po uwzględnieniu dziedziny wyrażenia:

$$x = \frac{2}{3}$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{2}{3}$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania i wskazanie liczby $\frac{2}{3}$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie dziedziny i rozwiązanie równania $6x^2 + 11x - 10 = 0$.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 85. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, $t \geq 0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

Krok 2: Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = \frac{-(-7)-3}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$t_2 = \frac{-(-7)+3}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Krok 3: Wracamy do podstawienia i otrzymujemy dwa równania kwadratowe:

$$x^2 = 1,$$

$$x^2 = \frac{5}{2},$$

które rozwiązujemy dzięki zastosowaniu wzoru na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ i } x_2 = -1$$

$$x^2 - \frac{5}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ i } x_4 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniami równania są liczby $-1, -\frac{\sqrt{10}}{2}, 1$ i $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania i wskazanie liczb $-1, -\frac{\sqrt{10}}{2}, 1$ i $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Odpowiedzi krok po kroku

1 pkt – poprawne podstawienie $x^2 = t$ i rozwiązanie równania $2t^2 - 7t + 5 = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 86. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Liczba -3 spełnia równanie. Wobec tego otrzymujemy:

$$a(2 \cdot (-3) + 1) - 2a = 3 + 2(a \cdot (-3) - 1)$$

$$\text{Stąd: } -5a - 2a = 3 - 6a - 2$$

Krok 2: Rozwiązujemy równanie z niewiadomą a : $-a = 1$.

Krok 2: Obliczamy: $a = -1$.

Odpowiedź:

Dla $a = -1$ pierwiastkiem tego równania jest liczba -3 .

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wartości $a = -1$.

1 pkt – poprawne podstawienie $a(2 \cdot (-3) + 1) - 2a = 3 + 2(a \cdot (-3) - 1)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 87. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozkładamy równanie na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$3x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 1\frac{1}{3}x + \frac{4}{27} = 0$$

$$3x^2\left(x - \frac{1}{9}\right) - \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{9}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{9}\right)\left(3x^2 - \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$3\left(x - \frac{1}{9}\right)\left(x^2 - \frac{4}{9}\right) = 0$$

$$3\left(x - \frac{1}{9}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$$

Krok 2: Przyrównujemy wyrażenia w nawiasach do zera:

$$x - \frac{1}{9} = 0, \text{ więc } x = \frac{1}{9}$$

$$x - \frac{2}{3} = 0, \text{ więc } x = \frac{2}{3}$$

$$x + \frac{2}{3} = 0, \text{ więc } x = -\frac{2}{3}$$

Krok 3: Zapisujemy $x = \frac{1}{9}$, $x = \frac{2}{3}$ i $x = -\frac{2}{3}$.

Odpowiedź:

Rozwiązaniami równania są liczby $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{3}$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania: $3x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 1\frac{1}{3}x + \frac{4}{27} = 0$ i wskazanie liczb: $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{3}$.

1 pkt – poprawne rozłożenie wielomianu: $3x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 1\frac{1}{3}x + \frac{4}{27} = 0$ na czynniki: $3\left(x - \frac{1}{9}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 88. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, $t \geq 0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe $t^2 - 2t - 3 = 0$.

Krok 2: Obliczamy $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$.

Krok 3: Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = \frac{-(-2) - 4}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$t_2 = \frac{-(-2) + 4}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Krok 4: Uwzględniając, że $t \geq 0$, otrzymujemy $t = 3$.

Krok 5: Wracamy do podstawienia i otrzymujemy równanie kwadratowe $x^2 = 3$, które rozwiązujemy dzięki zastosowaniu wzoru na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

Krok 6: Wyznaczamy rozwiązania: $x_1 = \sqrt{3}$ lub $x_2 = -\sqrt{3}$

Odpowiedź:

Rozwiązaniami równania są liczby $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania i wskazanie liczb $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{3}$.

1 pkt – poprawne podstawienie $x^2 = t$ i rozwiązanie równania $t^2 - 2t - 3 = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 89. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Przyrównujemy mianownik do zera i ustalamy dziedzinę wyrażenia wymiernego:

$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$

Krok 2: Równanie kwadratowe rozwiązujemy dzięki obliczeniu wyróżnika trójmianu:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 16 + 180 = 196, \sqrt{\Delta} = 14.$$

Krok 3: Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-(-4) - 14}{2 \cdot 3} = \frac{-10}{6} = -1\frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-4) + 14}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$$

Krok 4: Określamy dziedzinę: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-1\frac{2}{3}; 3\right\}$

Krok 5: Przyrównujemy licznik do zera:

$$2x^2 + x - 21 = 0$$

Krok 6: Równanie kwadratowe rozwiązujemy, obliczając wyróżnik trójmianu:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-21) = 1 + 168 = 169$$

$$\sqrt{\Delta} = 13$$

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-1 - 13}{2 \cdot 2} = \frac{-14}{4} = -3\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + 13}{2 \cdot 2} = \frac{12}{4} = 3$$

Krok 7: Stwierdzamy, że ułamek jest równy zero tylko wtedy, kiedy licznik jest równy zero, zatem po uwzględniając dziedzinę wyrażenia, $x = -3\frac{1}{2}$.

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba $-3\frac{1}{2}$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania i wskazanie liczby $-3\frac{1}{2}$.

1 pkt – poprawne zapisanie licznika $2x^2 + x - 21 = 0$ w postaci iloczynowej $2\left(x + 3\frac{1}{2}\right)(x - 3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 90. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Obliczamy:

$$\frac{1}{6} + \frac{x}{4} < \frac{x}{3} \cdot 12$$

$$2 + 3x < 4x$$

$$2 < x$$

Krok 2: Określamy zbiór rozwiązań: $x \in (2, \infty)$.

Krok 3: Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań tej nierówności jest liczba 3 – wobec tego zdanie A jest prawdziwe.

Krok 4: Największą liczbą całkowitą, która nie spełnia danej nierówności, jest liczba 2 – wobec tego zdanie B jest fałszywe.

Krok 5: Nie można podać najmniejszej liczby całkowitej, która nie spełnia danej nierówności – wobec tego zdanie C jest fałszywe.

Krok 6: Nie można podać największej liczby całkowitej należącej do zbioru rozwiązań danej nierówności – wobec tego zdanie D jest fałszywe.

Krok 7: Jest nieskończenie wiele liczb naturalnych spełniających tę nierówność – wobec tego zdanie E jest fałszywe.

Krok 8: Są trzy liczby naturalne, które nie spełniają tej nierówności. Są to liczby: 0, 1 i 2 – wobec tego zdanie F jest prawdziwe.

Odpowiedź:

A, F

Zasady oceniania:

2 pkt – odpowiedź poprawna: A i F.

1 pkt – odpowiedź niepełna: A lub F.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 91. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Obliczamy:

$$14x - 2x^2 - 7 + x = 4x^2 - 3x + 4x - 3$$

$$-6x^2 + 14x - 4 = 0 \quad | :(-2)$$

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

Krok 2: Obliczamy: $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$.

Krok 3: Stwierdzamy, że $\Delta > 0$, równanie ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{7+5}{6} = 2$.

Krok 4: Podajemy: $x_1 = \frac{1}{3}$ i $x_2 = 2$.

Odpowiedź:

Pierwiastki równania są równe: $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania i podanie pierwiastków $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 2$.

1 pkt – doprowadzenie równania do postaci: $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 92.

Zadanie 92.1. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy zbiór A , rozwiązując nierówność:

$$(x-2)(x-1) > 20$$

$$x^2 - 3x - 18 > 0$$

Krok 2: Obliczamy:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 81$$

$\Delta > 0$, równanie $x^2 - 3x - 18 = 0$ ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{3-9}{2} = -3, x_2 = \frac{3+9}{2} = 6$

Krok 3: Szkicujemy parabolę:



Krok 4: Zapisujemy zbiór $A: (-\infty, -3) \cup (6, \infty)$.

Krok 5: Wybieramy odpowiedź B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – poprawne wyznaczenie zbioru $A = (-\infty, -3) \cup (6, \infty)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 96.2. 0-1 pkt

Krok 1: Wyznaczamy zbiór B , rozwiązując nierówność:

$$(x-7)^2 \leq 25$$

$$(x-7)^2 - 25 \leq 0$$

Krok 2: Po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów otrzymujemy: $(x-7-5)(x-7+5) \leq 0$

Stąd: $(x-12)(x-2) \leq 0$

Krok 3: Wyznaczamy pierwiastki równania $(x-12)(x-2) = 0$ i szkicujemy parabolę.

$$x - 12 = 0 \text{ lub } x - 2 = 0$$

$$x = 12 \text{ lub } x = 2$$



Krok 4: Odczytujemy rozwiązanie: $B = \langle 2, 12 \rangle$.

Odpowiedź:

$$B = \langle 2, 12 \rangle$$

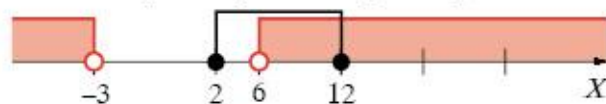
Zasady oceniania:

1 pkt – poprawne wyznaczenie zbioru $B = \langle 2, 12 \rangle$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 92.3. 0-2 pkt

Krok 1: Rysujemy na jednej osi zbiory A i B , a następnie wyznaczamy zbiory $A \cap B$ i $A \setminus B$.



Krok 2: Odczytujemy: $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = (-3, 2)$.

Odpowiedź:

$$A \cap B = \emptyset, A \setminus B = (-3, 2)$$

Zasady oceniania:

2 pkt – narysowanie na osi zbiorów A i B oraz zapisanie przedziału $A \cap B = \emptyset$ i $A \setminus B = (-3, 2)$.

1 pkt – poprawne zapisanie przedziału $A \cap B = \emptyset$

albo poprawne zapisanie przedziału $A \setminus B = (-3, 2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 93. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy niewiadome:

x – cyfra dziesiątek, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (pamiętamy, że 0 nie może być cyfrą dziesiątek w liczbie dwucyfrowej)

$9 - x$ – cyfra jedności

$10x + (9 - x)$ – liczba dwucyfrowa

$10(9 - x) + x$ – liczba dwucyfrowa po przestawieniu cyfr

Krok 2: Zapisujemy nierówność: $10(9 - x) + x < \frac{10x + (9 - x)}{2}$.

Krok 3: Obliczamy:

$$90 - 9x < \frac{9x + 9}{2}$$

$$180 - 18x < 9x + 9$$

$$-27x < -171 \quad | :(-27)$$

$$x > 6\frac{1}{3}$$

Krok 4: Zapisujemy:

	I liczba	II liczba	III liczba
Cyfra dziesiątek	7	8	9
Cyfra jedności	2	1	0
Liczba dwucyfrowa	72	81	90
Liczba o przestawionych cyfrach	27	18	09 – odrzucamy rozwiązanie, bo nie jest to liczba dwucyfrowa

Krok 5: Stwierdzamy, że są dwie takie liczby.

Odpowiedź:

Są dwie takie liczby.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne wyznaczenie liczb 72 i 81.

2 pkt – poprawne zapisanie i rozwiązanie nierówności $10(9-x) + x < \frac{10x + (9-x)}{2}$.

1 pkt – poprawna analiza zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 94. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przyporównujemy mianownik do zera i ustalamy dziedzinę wyrażenia wymiernego $x^2 - 1 = 0$.

Krok 2: Równanie kwadratowe rozwiązujemy, rozkładając lewą stronę na czynniki liniowe:

$$(x-1)(x+1) = 0, \text{ więc } x = 1 \text{ lub } x = -1$$

$$\text{Zatem: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

Krok 3: Przyporównujemy licznik do zera

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

Krok 4: Równanie kwadratowe rozwiązujemy, obliczając wyróżnik trójmianu:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 9 + 72 = 81, \sqrt{\Delta} = 9$$

Krok 5: Zauważamy, że $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-3-9}{2 \cdot 3} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$x_2 = \frac{-3+9}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$$

Krok 6: Stwierdzamy, że ułamek jest równy zero tylko wtedy, kiedy licznik jest równy zero, zatem uwzględniając dziedzinę wyrażenia, $x = -2$.

Odpowiedź:

Rozwiązaniem równania jest liczba -2 .

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe rozwiązanie równania $x = -2$.

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie dziedziny oraz przekształcenie licznika wyrażenia i przyporównanie do zera $3x^2 + 3x - 6 = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 95. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: $x^2 + 5 \geq 0$, stąd $x^2 \geq -5$, $x \in \mathbb{R}$.

Krok 2: $x(x - \sqrt{5}) \leq 0$, więc wyznaczamy pierwiastki równania $x(x - \sqrt{5}) = 0$ i szkicujemy parabolę.

$$x = 0 \text{ lub } x - \sqrt{5} = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = \sqrt{5}$$

Krok 3: Rysujemy:



Krok 4: Odczytujemy $x \in \langle 0, \sqrt{5} \rangle$.

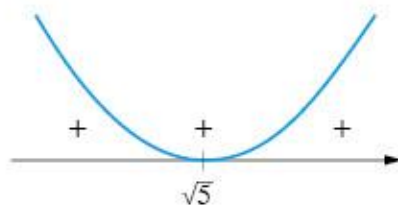
Krok 5: $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 < 0$, stąd $(x - \sqrt{5})^2 < 0$.

Krok 6: Wyznaczamy pierwiastki równania $(x - \sqrt{5})^2 = 0$ i szkicujemy parabolę.

$$x - \sqrt{5} = 0$$

$$x = \sqrt{5}$$

Krok 7: Rysujemy:



Krok 8: Odczytujemy: $x \in \emptyset$.

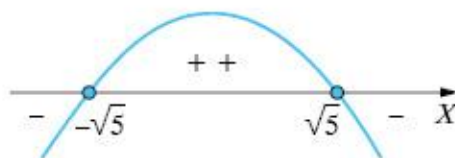
Krok 9: $5 - x^2 \geq 0$, stąd $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) \geq 0$.

Krok 10: Wyznaczamy pierwiastki równania $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) = 0$.

$$\sqrt{5} - x = 0 \text{ lub } \sqrt{5} + x = 0$$

$$x = \sqrt{5} \text{ lub } x = -\sqrt{5}$$

Krok 11: Szkicujemy parabolę:



Krok 12: Odczytujemy $x \in \langle -\sqrt{5}, \sqrt{5} \rangle$.

Krok 13: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.

Krok 14: Korzystając z rozwiązań, zauważamy, że jest jedna nierówność sprzeczna i jedna nierówność tożsamościowa.

Krok 15: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: F.

Odpowiedź:

DF

Zasady oceniania:

2 pkt – odpowiedź poprawna w obu podpunktach.

1 pkt – odpowiedź poprawna w jednym z podpunktów.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 96.

Zadanie 96.1. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy:

$$a = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 4^3}{(2^5)^2} = \frac{2^2 \cdot (2^2)^3}{2^{10}} = \frac{2^2 \cdot 2^6}{2^{10}} = 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Krok 2: Obliczamy:

$$b = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Krok 3: Wybieramy odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zadanie 96.2. 0-2 pkt

Krok 1: Rozwiązujemy nierówność $x^2 - x\sqrt{3} \geq 0$.

Krok 2: Wyciągamy czynnik przed nawias: $x(x - \sqrt{3}) \geq 0$.

Krok 3: Wyznaczamy pierwiastki równania $x(x - \sqrt{3}) = 0$ i szkicujemy parabolę.

$$x = 0 \text{ lub } x - \sqrt{3} = 0$$

Odpowiedzi krok po kroku

$$x = 0 \text{ lub } x = \sqrt{3}$$

Krok 4: Szkicujemy:



Krok 5: Odczytujemy: $x \in (-\infty, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$.

Krok 6: Sprawdzamy, która z liczb: a czy b , należy do tego zbioru. Zauważamy: $0 < a < \sqrt{3}$ oraz $b > \sqrt{3}$.

Krok 7: Wnioskujemy, że liczba b należy do zbioru rozwiązań tej nierówności.

Odpowiedź:

Liczba b należy do zbioru rozwiązań tej nierówności.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenia i wskazanie liczby b .

2 pkt – poprawne obliczenie liczb a i b oraz rozwiązanie nierówności.

1 pkt – poprawne obliczenie liczb a i b .

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 97. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą: $t = x^2$ i dziedzina: $t \geq 0$.

Krok 2: Otrzymujemy: $t^2 - 4t - 45 = 0$.

Krok 3: Obliczamy: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-45) = 196$, $\Delta > 0$, równanie ma dwa różne pierwiastki: $t_1 = \frac{4-14}{2} = -5 \notin D$, $t_2 = \frac{4+14}{2} = 9$

Krok 4: Otrzymujemy równanie z niewiadomą x : $x^2 = 9$.

Krok 5: Stąd $x = 3$ lub $x = -3$.

Odpowiedź:

Rozwiązaniem tego równania są liczby 3 i -3.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie równania $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$ i podanie rozwiązań $x = 3$ lub $x = -3$.

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $t^2 - 4t - 45 = 0$.

1 pkt – poprawne wykonanie podstawienia $t = x^2$ i określenie dziedziny.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 98. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy niewiadome:

x – pierwsza liczba

$34 - x$ – druga liczba

273 – iloczyn tych liczb

$x(34 - x)$ – iloczyn tych liczb

Krok 2: Zapisujemy równanie: $x(34 - x) = 273$.

Krok 3: Stąd: $-x^2 + 34x - 273 = 0$.

Krok 4: Obliczamy: $\Delta = 34^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-273) = 1156 - 1092 = 64$, $\Delta > 0$, równanie ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{-34-8}{-2} = 21$

$$, x_2 = \frac{-34+8}{-2} = 13.$$

Odpowiedzi krok po kroku

Krok 5: 1. Przypadek: Pierwsza liczba: 21. Druga liczba: $34 - 21 = 13$.

2. Przypadek: Pierwsza liczba: 13. Druga liczba: $34 - 13 = 21$.

Odpowiedź:

Szukane liczby to 13 i 21.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenia i wskazanie liczb 13 i 21.

2 pkt – poprawne zapisanie równania $-x^2 + 34x - 273 = 0$.

1 pkt – poprawna analiza zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 99. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy niewiadome:

x – pierwsza liczba całkowita

$x + 1$ – druga liczba całkowita

$x + 2$ – trzecia liczba całkowita

149 – suma kwadratów tych liczb

$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2$ – suma kwadratów tych liczb

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 149$$

Krok 2: Rozwiązujemy równanie:

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 149$$

$$3x^2 + 6x - 144 = 0 \quad |:3$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

Krok 3: Obliczamy: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 196$, $\Delta > 0$, równanie ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{-2-14}{2} = -8$, $x_2 = \frac{-2+14}{2} = 6$

Krok 4: 1. Przypadek: Pierwsza liczba: -8 , druga liczba: -7 , trzecia liczba: -6 .

2. Przypadek: Pierwsza liczba: 6, druga liczba: 7, trzecia liczba: 8.

Odpowiedź:

Są dwie trójki liczb spełniających warunki zadania: $-8, -7, -6$ oraz $6, 7, 8$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenia i wskazanie trójek liczb $-8, -7, -6$ i $6, 7, 8$.

2 pkt – poprawne zapisanie równania $3x^2 + 6x - 144 = 0$.

1 pkt – poprawna analiza zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 100. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy iloraz wielomianów $\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4} = 0$.

Krok 2: Przyrównujemy mianownik do zera i ustalamy dziedzinę wyrażenia wymiernego:

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$$

Krok 3: Rozkładamy na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$x^2(x - 2) + 2(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(x^2 + 2) = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x^2 + 2 > 0$$

$$\text{Zatem } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Krok 4: Przyporównujemy licznik do zera:

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$$

Krok 5: Rozkładamy na czynniki metodą grupowania wyrazów:

$$x^2(x-2) - 4(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2-4) = 0$$

$$(x-2)(x-2)(x+2) = 0$$

Krok 6: Otrzymujemy $x = 2$ lub $x = -2$.

Krok 7: Ułamek jest równy zero tylko wtedy, kiedy licznik jest równy zero, zatem uwzględniając dziedzinę wyrażenia, $x = -2$.

Odpowiedź:

Iloraz jest równy zero dla liczby -2 .

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $\frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4} = 0$ i wskazanie liczb 2 i -2 .

1 pkt – poprawne rozłożenie wielomianu $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$ na czynniki $(x-2)(x-2)(x+2) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 101. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy podstawienie $x^4 = t$, $t \geq 0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe $t^2 - 15t - 16 = 0$.

Krok 2: Obliczamy $\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 225 + 64 = 289$, $\sqrt{\Delta} = 17$.

Ponieważ $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = \frac{-(-15) - 17}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$t_2 = \frac{-(-15) + 17}{2 \cdot 1} = \frac{32}{2} = 16$$

Krok 3: Uwzględniając, że $t \geq 0$, otrzymujemy $t = 16$.

Krok 4: Wracamy do podstawienia i otrzymujemy równanie czwartego stopnia $x^4 = 16$, które rozwiązujemy, stosując wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$x^4 - 16 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$(x-2)(x+2)(x^2+4) = 0$$

Krok 5: Przyporównujemy wyrażenia w nawiasach do zera:

$$x - 2 = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x^2 + 4 > 0$$

Krok 6: Otrzymujemy:

$$x_1 = 2 \text{ i } x_2 = -2$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniami równania są liczby -2 i 2 .

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania i wskazanie liczb 2 i -2 .

1 pkt – poprawne podstawienie $x^4 = t$ i rozwiązanie równania $t^2 - 15t - 16 = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 102.

Zadanie 102.1. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Porządkujemy nierówność:

$$-5 \leq 7 - 3x < 13 \quad | -7$$

$$-12 \leq -3x < 6 \quad | :(-3)$$

$$4 \geq x > -2$$

Krok 2: Otrzymujemy $-2 < x \leq 4$.

Krok 3: Zaznaczamy odpowiedź C: $(-2, 4]$.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – wskazanie prawidłowego zbioru rozwiązań nierówności.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 102.2. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Skoro rozwiązaniem nierówności jest zbiór $(-2, 4]$, to musimy wypisać wszystkie liczby należące do niego:

$-1, 0, 1, 2, 3, 4$.

Odpowiedź:

$-1, 0, 1, 2, 3, 4$

Zasady oceniania:

1 pkt – poprawne wyznaczenie liczb całkowitych $-1, 0, 1, 2, 3, 4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 103. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy niewiadome:

x – długość krótszego boku prostokąta, dla $x > 0$

$x + 4$ – długość dłuższego boku prostokąta

$x(x + 4)$ – pole prostokąta

Krok 2: Zapisujemy nierówność podwójną wynikającą z treści zadania: $4 < x(x + 4) \leq 12$.

Krok 3: Rozwiązujemy każdą z nierówności: $4 < x(x + 4)$ i $x(x + 4) \leq 12$.

Krok 4: Rozwiązujemy nierówność:

$$4 < x(x + 4)$$

$$x^2 + 4x - 4 > 0$$

Krok 5: Wyznaczamy pierwiastki równania $x^2 + 4x - 4 = 0$.

Krok 6: Obliczamy: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 32$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $\Delta > 0$.

Krok 7: Równanie ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{-4 - 4\sqrt{2}}{2} = -2 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = \frac{-4 + 4\sqrt{2}}{2} = -2 + 2\sqrt{2}$.

Krok 8: Szkicujemy parabolę:



Krok 9: Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \in (-\infty, -2-2\sqrt{2}) \cup (-2+2\sqrt{2}, \infty)$. Po uwzględnieniu założenia, że $x > 0$ otrzymujemy $x \in (-2+2\sqrt{2}, \infty)$.

Krok 10: Rozwiązujemy nierówność: $x(x+4) \leq 12$.

$$x^2 + 4x - 12 \leq 0$$

Krok 11: Wyznaczamy pierwiastki równania $x^2 + 4x - 12 = 0$.

Krok 12: Obliczamy: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 64$, $\sqrt{64} = 8$, $\Delta > 0$.

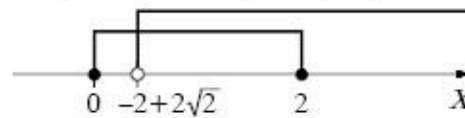
Krok 13: Równanie ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{-4-8}{2} = -6$, $x_2 = \frac{-4+8}{2} = 2$.

Krok 14: Szkicujemy parabolę:



Krok 15: Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności: $x \in (-6, 2)$. Po uwzględnieniu założenia, że $x > 0$, otrzymujemy $x \in (0, 2)$.

Krok 16: Znajdujemy część wspólną zbiorów $x \in (-2+2\sqrt{2}, \infty)$ i $x \in (0, 2)$.



Krok 17: Odczytujemy rozwiązanie: $x \in (-2+2\sqrt{2}, 2)$.

Odpowiedź:

Możliwe długości krótszego boku tego prostokąta należą do przedziału $(-2+2\sqrt{2}, 2)$.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne wyznaczenie przedziału liczbowego $(-2+2\sqrt{2}, 2)$.

3 pkt – poprawne rozwiązanie każdej z nierówności $4 < x(x+4)$ i $x(x+4) \leq 12$.

2 pkt – poprawne rozwiązanie jednej z nierówności $4 < x(x+4)$ i $x(x+4) \leq 12$.

1 pkt – poprawna analiza zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

4. Układy równań

Zadanie 104. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podstawiamy współrzędne punktu A do poszczególnych układów i sprawdzamy, czy je spełniają.

Krok 2: A.

$$\begin{cases} 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 5 \\ 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = 12 \\ -4 + 9 = 5 \\ -6 - 6 = 12 \\ 5 = 5 \\ -12 \neq 12 \end{cases}$$

Krok 3: B.

$$\begin{cases} 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 6 \\ 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -12 \\ -4 + 9 = 6 \\ -6 - 6 = -12 \\ 5 \neq 6 \\ -12 = -12 \end{cases}$$

Krok 4: C.

$$\begin{cases} 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 5 \\ 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -12 \\ -4 + 9 = 5 \\ -6 - 6 = -12 \\ 5 = 5 \\ -12 = -12 \end{cases}$$

Krok 5: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 105. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozwiązujemy układ dowolną metodą.

Krok 2: Upraszczamy nawiasy:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 3x + 3y = 5 \\ 3x + 3y - 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 5y = 5 \\ x + 5y = 5 \end{cases}$$

Krok 3: Obliczamy $\frac{10y}{10} = 10$, więc $y = 1$.

Krok 4: Obliczamy drugą niewiadomą: $x + 5 = 5$, więc $x = 0$.

Krok 5: Zapisujemy rozwiązanie: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Krok 6: Wybieramy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 106. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy: $x + y = 176$ – suma liczby dziewcząt i liczby chłopców wynosi 176.

Krok 2: Zapisujemy: $\frac{x}{y} = \frac{4}{7}$ – stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy 4: 7, stąd $7x = 4y$.

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 107. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy z pierwszego równania $y = 3x^2 + 1$ i podstawiamy do drugiego równania.

Krok 2: Otrzymujemy: $\begin{cases} y = 3x^2 + 1 \\ 2x + 3(3x^2 + 1) = 5 \end{cases}$ stąd: $\begin{cases} y = 3x^2 + 1 \\ 2x + 9x^2 + 3 = 5 \end{cases}$

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 108. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozwiązujemy układ dowolną metodą:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$$
$$\hline 2x = 4$$

$$x = 2$$

Krok 2: Zatem $2 + y = 5$, stąd $y = 3$.

Krok 3: Zapisujemy rozwiązanie: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Krok 4: Wybieramy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 109. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Podstawiamy współrzędne punktu $A(1; -1)$ do poszczególnych układów i sprawdzamy, czy je spełniają.**Krok 2:** Punkt A. $\begin{cases} 2 \cdot 1 - 1 = -1 \\ 2 \cdot 1 - (-1) = 3 \end{cases}$, więc $\begin{cases} 1 \neq -1 \\ 3 = 3 \end{cases}$ **Krok 3:** Punkt B. $\begin{cases} 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ 2 \cdot 1 - (-1) = 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

Krok 4: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.**Odpowiedź:**

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 110. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Rozwiązujemy układ dowolną metodą.**Krok 2:** Dla metody przeciwnych współczynników:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2 \quad | \cdot 2 \\ -2x + 5y = 3 \quad | \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 6y = 4 \\ -10x + 25y = 15 \end{cases}, \text{ więc } y = 1$$
$$\frac{19y = 19}{19y = 19}$$

Krok 3: Druga niewiadoma: $5x - 3 = 2$, stąd $x = 1$.**Krok 4:** Zapisujemy $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ **Krok 5:** Sprawdzamy, który układ ma takie same rozwiązania, podstawiając kolejno $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, pamiętamy, że jeśli para nie spełnia jednego z równań, to już nie spełnia układu.

$$\text{A. } \begin{cases} 1 + 3 \cdot 1 \neq 6 \\ 2 \cdot 1 - 1 \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \neq 18 \\ 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \neq 6 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} \frac{1+2}{3} + \frac{1+3}{2} = 4 \\ \frac{1-2}{2} - \frac{1-1}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2 \neq 4 \\ -\frac{1}{2} - 0 \neq 1 \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} (1+2)^2 - (1-3)^2 = 5 - (1^2 - 1^2) \\ (1-3)^2 + (1+2)^2 = 11 + (1^2 + 1^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - 4 = 5 \\ 4 + 9 = 11 + 2 \end{cases}$$

Krok 6: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 111. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy informacje podane w treści zadania.

$10x + y$ – szukana liczba dwucyfrowa

$10y + x$ – liczba dwucyfrowa po przestawieniu cyfr

$10x + y - (10y + x) = 36$ – drugie równanie

Krok 2: Zapisujemy równanie w prostszej postaci: $10x + y - 10y - x = 36$, stąd $9x - 9y = 36$.

Krok 3: Ostatecznie otrzymujemy: $x - y = 4$.

Krok 4: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 112. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy y z drugiego równania i podstawiamy do pierwszego.

$$\begin{cases} x^2 - 5x + x + 1 + 3 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Krok 2: Rozwiązujemy pierwsze równanie $x^2 - 4x + 4 = 0$, stąd $(x - 2)^2 = 0$, więc $x = 2$.

Krok 3: Zapisujemy układ równań i wyznaczamy niewiadomą y :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + 1 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ - obie liczby są dodatnie}$$

Krok 4: Wybieramy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 113. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Rozwiązujemy układ dowolną metodą.

$$\begin{cases} 3,5x - 7,5y = 5 \quad | \cdot 4 \\ -14x + 30y = 21 \end{cases}$$

Krok 2: Obliczamy:

$$\begin{cases} 14x - 30y = 20 \\ -14x + 30y = 21 \end{cases}$$

$$0 = 41$$

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.**Odpowiedź:**

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 114. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Rozwiązujemy układ dowolną metodą.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - x^2 - y^2 = -5 \\ 2x + 2 + y + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 4y = -10 \\ 2x + y = -2 \end{cases}, \text{ więc } y = 4.$$
$$-3y = -12$$

Krok 3: Druga niewiadoma: $2x + 4 = -2$, więc $x = -3$.

Krok 4: Zapisujemy rozwiązanie: $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$.

Krok 5: Sprawdzamy, który układ ma takie same rozwiązania, podstawiając kolejno $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$.

$$\text{A. } \begin{cases} 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 = 13 \\ 5 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 + 20 \neq 13 \\ -15 - 12 \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} -3 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 = 7 \\ 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 + 20 \neq 7 \\ -15 + 12 \neq 10 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} -3 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 = 12 \\ -5 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - 20 \neq 12 \\ 15 + 12 \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} -3 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 = -11 \\ -5 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 - 20 = -11 \\ 15 - 12 = 3 \end{cases}$$

Krok 6: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.**Odpowiedź:**

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 115. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wypisujemy dane: x – waga (w kilogramach) stopu miedzi z cyną o zawartości 30% cyny y – waga (w kilogramach) czystej cyny

21 – waga (w kilogramach) stopu miedzi z cyną o zawartości 60% cyny

Krok 2: Zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ 0,3x + y = 0,6 \cdot 21 \end{cases} \begin{cases} x + y = 21 \\ 0,3x + y = 12,6 \end{cases} - \text{zdanie prawdziwe}$$

Krok 3: Rozwiązujemy układ równań. Mnożymy drugie równanie przez -1 .

$$\begin{cases} x + y = 21 \\ -0,3x - y = -12,6 \end{cases}$$

Krok 4: Po dodaniu równań stronami otrzymujemy $0,7x = 8,4$, więc $x = 12$.**Krok 5:** Zapisujemy układ równań i wyznaczamy y :

$$\begin{cases} x = 12 \\ 12 + y = 21 \end{cases} \begin{cases} x = 12 \\ y = 9 \end{cases} - \text{zdanie fałszywe}$$

Krok 6: Określamy prawdziwość zdań: PF.**Odpowiedź:**

PF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 116. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Podstawiamy do pierwszego równania y podany w drugim równaniu.

$$\begin{cases} x - (x^2 - 2x + 3) - 2 = 0 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

Krok 2: Po uporządkowaniu pierwszego równania otrzymujemy:

$$\begin{cases} -x^2 + 3x - 5 = 0 \\ y = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

Krok 3: Rozwiązujemy pierwsze równanie:

$$-x^2 + 3x - 5 = 0$$

 $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = -11$, $\Delta < 0$, równanie nie ma rozwiązania, więc układ równań nie ma rozwiązania.**Krok 4:** Wybieramy poprawną odpowiedź: A.**Odpowiedź:**

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 117. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Z drugiego równania wyznaczamy niewiadomą y , pierwsze przepisujemy bez zmian.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ y = 5x - \frac{7}{12} \end{cases}$$

Krok 2: Do pierwszego równania podstawiamy w miejsce y wyrażenie z drugiego równania i wyliczamy x .

$$\begin{cases} 4x + 3\left(5x - \frac{7}{12}\right) = 3 \\ y = 5x - \frac{7}{12} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x + 15x = \frac{19}{4} \\ y = 5x - \frac{7}{12} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 19x = \frac{19}{4} \\ y = 5x - \frac{7}{12} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 5x - \frac{7}{12} \end{cases}$$

Krok 3: Obliczoną wartość x podstawiamy do drugiego równania i wyliczamy y .

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 5 \cdot \frac{1}{4} - \frac{7}{12} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{15}{12} - \frac{7}{12} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Odpowiedź:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Zasady oceniania:**2 pkt** – poprawne obliczenie wartości dwóch niewiadomych x i y .**1 pkt** – poprawne obliczenie wartości jednej niewiadomej x lub y .**0 pkt** – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.**Zadanie 118. 0-2 pkt****Rozwiązanie:****Krok 1:** Aby uzyskać przeciwne współczynniki, mnożymy obie strony pierwszego równania przez 2, a drugiego przez -3 i dodajemy stronami.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \mid \cdot 2 \\ 3x + 2y = 2 \mid \cdot (-3) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x + 6y = 16 \\ -9x - 6y = -6 \end{cases}$$
$$\hline -5x = 10$$

Odpowiedzi krok po kroku

$$x = -2$$

Krok 2: Wstawiamy obliczoną wartość do jednego z równań (pierwszego) i obliczamy y .

$$2 \cdot (-2) + 3y = 8$$

$$3y = 12$$

$$y = 4$$

Krok 3: Zapisujemy rozwiązanie: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

Odpowiedź:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wartości dwóch niewiadomych x i y .

1 pkt – poprawne obliczenie wartości jednej niewiadomej x lub y .

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 119. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Aby uzyskać przeciwne współczynniki, mnożymy obie strony pierwszego równania przez 2 i dodajemy stronami.

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - y = 3 \quad | \cdot 2 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$8x = 16$$

$$x = 2$$

Krok 2: Wstawiamy obliczoną wartość do jednego z równań (pierwszego) i obliczamy y .

$$\frac{3}{2} \cdot 2 - y = 3$$

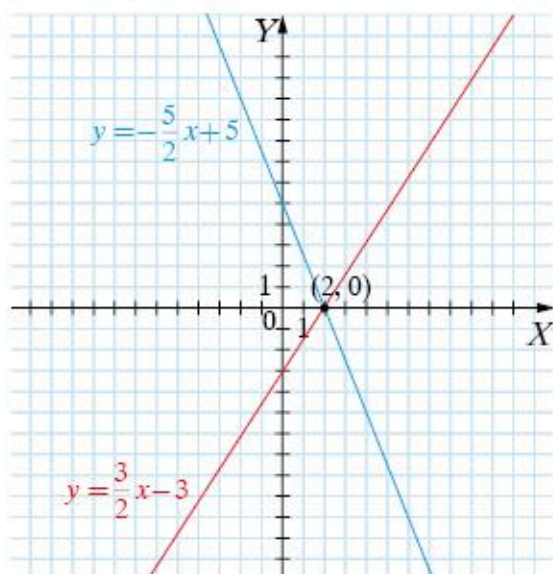
$$y = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

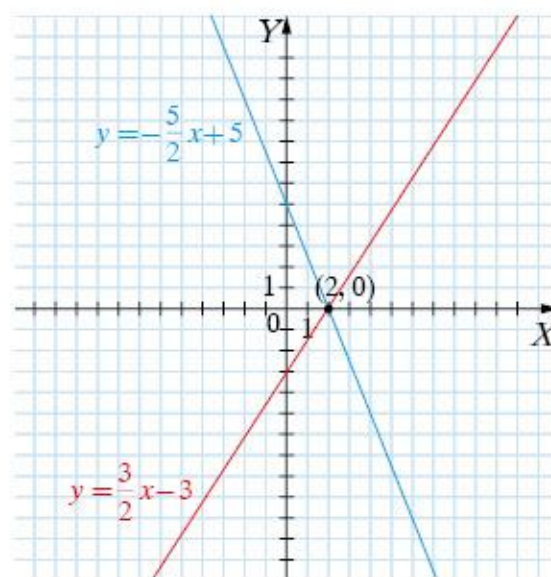
Krok 3: Oba równania zapisujemy w postaci kierunkowej.

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 3 \\ y = -\frac{5}{2}x + 5 \end{cases}$$

Krok 4: Zaznaczamy proste w układzie współrzędnych.



Odpowiedź:



Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ oraz poprawne przedstawienie ilustracji geometrycznej układu.

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

albo

poprawne przedstawienie ilustracji geometrycznej układu,

albo

poprawne wyznaczenie jednej niewiadomej $x=2$ lub $y=0$ i poprawne przedstawienie ilustracji geometrycznej układu.

1 pkt – poprawne wyznaczenie jednej niewiadomej $x=2$ lub $y=0$ i poprawne zapisanie obu równań w postaci kierunkowej

prostej $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 3 \\ y = -\frac{5}{2}x + 5 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 120. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy:

x – prędkość statku

y – prędkość prądu rzeki

Krok 2: Korzystamy z wzoru: $t \cdot V = s$.

$3(x - y) = 36$ – kurs pod prąd rzeki

$2(x + y) = 36$ – kurs z prądem rzeki

Krok 3: Zapisujemy układ równań po podzieleniu obu stron pierwszego równania przez 3, a drugiego równania przez 2.

$\begin{cases} x - y = 12 \\ x + y = 18 \end{cases}$ – punkt 2.

Krok 4: Po dodaniu stronami otrzymujemy $2x = 30$, stąd $x = 15$.

$\begin{cases} x = 15 \\ x + y = 18 \end{cases}$

Krok 5: Stąd $\begin{cases} x = 15 \\ y = 3 \end{cases}$ – punkt A

Krok 6: Zaznaczamy A2.

Odpowiedź:

A2

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

Odpowiedzi krok po kroku

Zadanie 121. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Z drugiego równania wyznaczamy niewiadomą x , pierwsze przepisujemy bez zmian.

$$\begin{cases} \frac{7}{8}x + \frac{8}{9}y = 6\frac{1}{6} \\ x = 2 + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

Krok 2: Do pierwszego równania podstawiamy w miejsce x wyrażenie z drugiego równania i wyliczamy y .

$$\begin{cases} \frac{7}{8}\left(2 + \frac{2}{3}y\right) + \frac{8}{9}y = 6\frac{1}{6} \\ x = 2 + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7}{4} + \frac{7}{12}y + \frac{8}{9}y = 6\frac{1}{6} \\ x = 2 + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{53}{36}y = \frac{53}{12} \\ x = 2 + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 2 + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

Krok 3: Obliczoną wartość y podstawiamy do drugiego równania i wyliczamy x .

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 2 + \frac{2}{3} \cdot 3 \end{cases}$$

Krok 4: Zapisujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Odpowiedź:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$

1 pkt – poprawne obliczenie jednej niewiadomej $x = 4$ lub $y = 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 122. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Aby uzyskać przeciwne współczynniki, mnożymy obie strony pierwszego równania przez $\sqrt{2}$, a drugiego przez $\sqrt{3}$ i dodajemy stronami.

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5\sqrt{2} \\ \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{6}y = 5\sqrt{2} \\ 3x - \sqrt{6}y = 0 \end{cases}$$

$$5x = 5\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2}$$

Krok 2: Wstawiamy obliczoną wartość do jednego z równań (pierwszego) i obliczamy y .

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3}y = 5$$

$$\sqrt{3}y = 3$$

$$y = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$y = \sqrt{3}$$

Krok 3: Zapisujemy rozwiązanie: $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

Odpowiedź:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

1 pkt – poprawne obliczenie jednej niewiadomej $x = \sqrt{2}$ lub $y = \sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 123. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Porządkujemy oba równania.

$$\begin{cases} -x + 5y = -20 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$$

Krok 2: Z drugiego równania wyznaczamy niewiadomą y , pierwsze przepisujemy bez zmian.

$$\begin{cases} -x + 5y = -20 \\ y = 12 - 3x \end{cases}$$

Krok 3: Do pierwszego równania podstawiamy w miejsce y wyrażenie z drugiego równania i wyliczamy x .

$$\begin{cases} -x + 5(12 - 3x) = -20 \\ y = 12 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16x = -80 : (-16) \\ y = 12 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 12 - 3x \end{cases}$$

Krok 4: Obliczoną wartość x podstawiamy do drugiego równania i wyliczamy y .

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 12 - 3 \cdot 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

Odpowiedź:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases}$

1 pkt – poprawne obliczenie jednej niewiadomej $x = 5$ lub $y = -3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 124. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Aby uzyskać przeciwne współczynniki, mnożymy obie strony drugiego równania przez 2 i dodajemy stronami.

$$\begin{cases} 12x - 7y = 8 \\ -6x + 3,5y = -4 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x - 7y = 8 \\ -12x + 7y = -8 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

Krok 2: Otrzymaliśmy prawdę, czyli układ jest nieoznaczony. Każda para liczb spełniających pierwsze równanie spełnia również drugie.

Krok 3: Zapisanie odpowiedzi, że układ jest nieoznaczony.

Odpowiedź:

Układ jest nieoznaczony.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań i określenie, że jest to układ nieoznaczony.

1 pkt – otrzymanie równania tożsamościowego i zakończenie na tym bez zinterpretowania tego faktu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 125. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy informacje podane w treści zadania.

x – liczba turystów

y – liczba dni

I sytuacja

$x + 6$ – liczba turystów

$y - 2$ – liczba dni

II sytuacja

$x - 4$ – liczba turystów

$y + 2$ – liczba dni

Krok 2: Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} (x+6)(y-2) = xy \\ (x-4)(y+2) = xy \end{cases} \text{ - zdanie prawdziwe}$$

Krok 3: Sprawdzamy, czy liczby $\begin{cases} x = 24 \\ y = 10 \end{cases}$ są rozwiązaniem układu równań zapisanego w kroku 2.

$$\begin{cases} (24+6) \cdot (10-2) = 24 \cdot 10 \\ (24-4) \cdot (10+2) = 24 \cdot 10 \end{cases} \text{ stąd } \begin{cases} 30 \cdot 8 = 240 \\ 20 \cdot 12 = 240 \end{cases} \text{ - są rozwiązaniem układu równań, zdanie prawdziwe}$$

Odpowiedź:

pp

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 126. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy y z drugiego równania i podstawiamy do równania pierwszego.

Krok 2: Otrzymujemy: $\begin{cases} x^2 + x + x + 1 = 0 \\ y = x \end{cases}$

Krok 3: Obliczamy: $\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ y = x \end{cases}$

$$\begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1=0 \\ y=x \end{cases}$$

Krok 4: Zapisujemy rozwiązanie: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem układu jest $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

1 pkt – poprawne wyznaczenie jednej niewiadomej $x = -1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 127. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Z drugiego równania wyznaczamy niewiadomą y , pierwsze przepisujemy bez zmian.

$$\begin{cases} 11x - 9y = 7 \\ y = -9x - 11 \end{cases}$$

Krok 2: Do pierwszego równania podstawiamy w miejsce y wyrażenie z drugiego równania i wyliczamy x .

$$\begin{cases} 11x - 9(-9x - 11) = 7 \\ y = -9x - 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 92x = -92 \\ y = -9x - 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -9x - 11 \end{cases}$$

Krok 3: Obliczoną wartość x podstawiamy do drugiego równania i wyliczamy y .

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -9 \cdot (-1) - 11 \end{cases}$$

Krok 4: Zapisujemy rozwiązanie: $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

Odpowiedź:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

1 pkt – poprawne obliczenie jednej niewiadomej $x = -1$ lub $y = -2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 128. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Aby uzyskać przeciwne współczynniki mnożymy obie strony pierwszego równania przez 3, a drugiego przez 4 i dodajemy stronami.

$$\begin{cases} 5x - 4y = 21,6 & | \cdot 3 \\ 4x + 3y = -0,7 & | \cdot 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 15x - 12y = 64,8 \\ 16x + 12y = -2,8 \end{cases}$$

$$31x = 62$$
$$x = 2$$

Krok 2: Wstawiamy obliczoną wartość do jednego z równań (pierwszego) i obliczamy y .

$$5 \cdot 2 - 4y = 21,6$$
$$-4y = 11,6$$
$$y = -2,9$$
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2,9 \end{cases}$$

Odpowiedź:

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wartości x i y .

1 pkt – poprawne obliczenie wartości x lub y .

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 129. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy niewiadome i zapisujemy układ równań przedstawiający zależności określone w zadaniu.

x – większa liczba naturalna

y – mniejsza liczba naturalna, $y \neq 0$

Krok 2: Zapisujemy układ równań:
$$\begin{cases} x + y = 355 \\ x = 7y + 11 \end{cases}$$

Krok 3: Podstawiamy do pierwszego równania $x = 7y + 11$.

$$\begin{cases} 7y + 11 + y = 355 \\ x = 7y + 11 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{cases} y = 43 \\ x = 7y + 11 \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} y = 43 \\ x = 312 \end{cases}$$

Krok 4: Sprawdzenie:
$$\begin{cases} 312 + 43 = 355 \\ 312 = 7 \cdot 43 + 11 \end{cases}$$

Odpowiedź:

Szukane liczby to 312 i 43.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, podanie szukanych liczb 312 i 43.

2 pkt – poprawne wyznaczenie jednej szukanej liczby.

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć szukane liczby
$$\begin{cases} x + y = 355 \\ x = 7y + 11 \end{cases}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 130. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozwiązujemy układ metodą przeciwnych współczynników.

Krok 2: Aby uzyskać przeciwne współczynniki, mnożymy obie strony pierwszego równania przez -2 , a drugiego przez 3 i dodajemy stronami.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 & | \cdot (-2) \\ 3x + 2y = 2\frac{1}{6} & | \cdot 3 \end{cases}$$

Odpowiedzi krok po kroku

$$\begin{cases} -4x - 6y = -4 \\ 9x + 6y = \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$5x = \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Krok 3: Wstawiamy obliczoną wartość do jednego z równań (pierwszego) i obliczamy y .

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 3y = 2$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Odpowiedź:

$$x + y = \frac{5}{6}$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ oraz poprawne obliczenie sumy $x + y = \frac{5}{6}$.

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie jednej niewiadomej $x = \frac{1}{2}$ lub $y = \frac{1}{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 131. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozwiązujemy układ metodą przeciwnych współczynników.

Krok 2: Aby uzyskać przeciwne współczynniki, mnożymy obie strony pierwszego równania przez 5 i dodajemy stronami.

$$\begin{cases} 6x - 7y = -8 \cdot 5 \\ 9x + 35y = 14 \end{cases}$$

$$39x = -26$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Krok 3: Wstawiamy obliczoną wartość do jednego z równań (pierwszego) i obliczamy y .

$$6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 7y = -8$$

$$-7y = -4$$

$$y = \frac{4}{7}$$

Krok 4: Zapisujemy rozwiązanie: $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$.

Krok 5: Obliczamy: $-\frac{2}{\frac{4}{7}} + 1 = -\frac{7}{6} + 1 = -\frac{1}{6}$.

Odpowiedź:

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases} + 1 = -\frac{7}{6} + 1 = -\frac{1}{6}$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$ oraz poprawne obliczenie sumy $\frac{x}{y} + 1 = -\frac{1}{6}$.

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{7} \end{cases}$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie jednej niewiadomej $x = -\frac{2}{3}$ lub $y = \frac{4}{7}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 132. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Dane z zadania zapisujemy w tabeli.

x – wiek syna obecnie

y – wiek mamy obecnie

Przed 10 laty	Obecnie	Za 10 lat
$x - 10$	x	$x + 10$
$y - 10$	y	$y + 10$
$x - 10 = 11(y - 10)$		$(x + 10) + (y + 10) = 64$

Krok 2: Zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} x - 10 = 11(y - 10) \\ (x + 10) + (y + 10) = 64 \end{cases}$$

Krok 3: Zapisujemy układ w prostszej postaci.

$$\begin{cases} x - 11y = -100 \\ x + y = 44 \end{cases}$$

Krok 4: Mnożymy pierwsze równanie przez -1 , a następnie dodajemy równania stronami.

$$\begin{cases} -x + 11y = 100 \\ x + y = 44 \end{cases} \quad \text{, stąd } 12y = 144, \text{ więc } y = 12$$

Krok 5: Zapisujemy układ równań i wyznaczamy x .

$$\begin{cases} y = 12 \\ x + 12 = 44 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 12 \\ x = 32 \end{cases}$$

Krok 6: Sprawdzamy otrzymany wynik.

	Przed 10 laty	Obecnie	Za 10 lat
Matka	$32 - 10 = 22$	$x = 32$	$32 + 10 = 42$
Syn	$12 - 10 = 2$	$y = 12$	$12 + 10 = 22$
Zależność	$22 = 11 \cdot 2$		$42 + 22 = 64$

Odpowiedź:

Matka ma obecnie 32 lata, a syn 12 lat.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, podanie obecnego wieku matki (32 lata) oraz obecnego wieku syna (12 lat).

2 pkt – poprawne wyznaczenie obecnego wieku matki (32 lata)

albo

poprawne wyznaczenie obecnego wieku syna (12 lat).

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć obecny wiek matki i syna $\begin{cases} x-10=11(y-10) \\ (x+10)+(y+10)=64 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 133. 0-3 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Zapisujemy:

x – waga (w kilogramach) roztworu soli kuchennej o stężeniu 25%

y – waga (w kilogramach) soli kuchennej

2,5 – waga (w kilogramach) roztworu soli kuchennej o stężeniu 40%

Krok 2: Zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} x+y=2,5 \\ 0,25x+y=0,4 \cdot 2,5 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2,5 \\ -0,25x-y=-1 \end{cases}$$

Krok 3: Po dodaniu stronami otrzymujemy $0,75x = 1,5$, więc $x = 2$.

Krok 4: Zapisujemy układ równań i wyznaczamy y .

$$\begin{cases} x=2 \\ 2+y=2,5 \end{cases}, \text{ więc } \begin{cases} x=2 \\ y=0,5 \end{cases}$$

Krok 5: Sprawdzenie: $\begin{cases} 2+0,5=2,5 \\ 0,25 \cdot 2+0,5=1 \end{cases}$

Odpowiedź:

Należy dosypać 0,5 kilograma soli.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, podanie, ile soli należy dosypać do roztworu (0,5 kg).

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań.

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć, ile soli należy dosypać do roztworu $\begin{cases} x+y=2,5 \\ -0,25x-y=-1 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 134. 0-3 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y=3x^2+3x-6 \\ y=3x-9 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} 3x-9=3x^2+3x-6 \\ y=3x-9 \end{cases}$

Krok 2: Rozwiązujemy pierwsze równanie $3x-9=3x^2+3x-6$.

Krok 3: Otrzymujemy $3x^2+3=0$ więc $x^2+1=0$.

Krok 4: Stwierdzamy, że jest to równanie sprzeczne. Wobec tego układ równań nie ma rozwiązania. To oznacza, że parabola opisana równaniem $y=3x^2+3x-6$ oraz prosta o równaniu $y=3x-9$ nie mają punktów wspólnych.

Odpowiedź:

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y=3x^2+3x-6 \\ y=3x-9 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} 3x-9=3x^2+3x-6 \\ y=3x-9 \end{cases}$

Rozwiązujemy pierwsze równanie $3x-9=3x^2+3x-6$.

Otrzymujemy $3x^2+3=0$, więc $x^2+1=0$.

Stwierdzamy, że jest to równanie sprzeczne. Wobec tego układ równań nie ma rozwiązania. To oznacza, że parabola opisana równaniem $y=3x^2+3x-6$ oraz prosta o równaniu $y=3x-9$ nie mają punktów wspólnych.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, uzasadnienie, że prosta i parabola nie mają punktów wspólnych.

2 pkt – zapisanie równania kwadratowego w postaci $x^2 + 1 = 0$

albo

określenie, że otrzymane równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych.

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć punkty wspólne prostej i paraboli $\begin{cases} y = 3x^2 + 3x - 6 \\ y = 3x - 9 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 135. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przekątne w rombie przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.

Krok 2: Wprowadzamy niewiadome:

x – połowa jednej przekątnej

y – połowa drugiej przekątnej

Krok 3: Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2x = 2y + 8 \\ x^2 + y^2 = 20^2 \end{cases}$$

Krok 4: Wyznaczamy x z pierwszego równania i podstawiamy do drugiego.

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ (y + 4)^2 + y^2 = 20^2 \end{cases}$$

Krok 5: Rozwiązujemy drugie równanie.

$$y^2 + 8y + 16 + y^2 - 400 = 0$$

$$2y^2 + 8y - 384 = 0$$

$$y^2 + 4y - 192 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-192) = 784, \sqrt{\Delta} = 28$$

$$y_1 = \frac{-4 - 28}{2} = -16 \notin D, y_2 = \frac{-4 + 28}{2} = 12$$

Krok 6: Zapisujemy układ równań i wyznaczamy niewiadomą x .

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ y = 12 \end{cases} \begin{cases} x = 16 \\ y = 12 \end{cases}$$

Krok 7: Sprawdzenie $\begin{cases} 2 \cdot 16 = 2 \cdot 12 + 8 \\ 16^2 + 12^2 = 20^2 \end{cases}$

Krok 8: Wyznaczamy długości przekątnych: $2 \cdot 16 = 32, 2 \cdot 12 = 24$.

Odpowiedź:

Przekątne mają długość 32 i 24.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, podanie długości przekątnych rombu 32 cm i 24 cm.

2 pkt – poprawne wyznaczenie długości jednej przekątnej rombu

albo

poprawne rozwiązanie równania kwadratowego.

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć długości przekątnych rombu $\begin{cases} 2x = 2y + 8 \\ x^2 + y^2 = 20^2 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 136. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozwiązujemy układ metodą przeciwnych współczynników.

Krok 2: Aby uzyskać przeciwne współczynniki, mnożymy obie strony pierwszego równania przez 2 i dodajemy stronami.

Odpowiedzi krok po kroku

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 6x + 2y = -4 \end{cases} \cdot 2$$

$$\begin{cases} 4x - 4y = -6 \\ 6x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$10x = -10$$

$$x = -1$$

Krok 3: Wstawiamy obliczoną wartość do jednego z równań (drugiego) i obliczamy y .

$$6 \cdot (-1) + 2y = -4$$

$$2y = 2$$

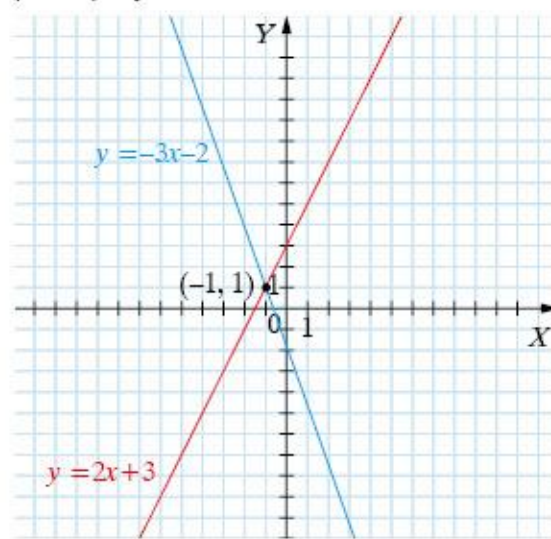
$$y = 1$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Krok 4: Oba równania zapisujemy w postaci kierunkowej.

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -3x - 2 \end{cases}$$

Krok 5: Zaznaczamy proste w układzie współrzędnych.



Odpowiedź:

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ oraz poprawne przedstawienie ilustracji geometrycznej układu.

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

albo

poprawne przedstawienie ilustracji geometrycznej układu,

albo

poprawne wyznaczenie jednej niewiadomej $x = -1$ lub $y = 1$ i poprawne przedstawienie ilustracji geometrycznej układu.

1 pkt – poprawne wyznaczenie jednej niewiadomej $x = -1$ lub $y = 1$ i poprawne zapisanie obu równań w postaci kierunkowej

prostej $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -3x - 2 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 137. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy niewiadome.

x – cyfra dziesiątek

y – cyfra jedności

Krok 2: Zapisujemy informacje podane w treści zadania.

$10x + y$ – szukana liczba dwucyfrowa

Odpowiedzi krok po kroku

$100x + 70 + y$ – otrzymana liczba trzycyfrowa

Krok 3: Zapisujemy równanie: $\begin{cases} x + y = 8 \\ 100x + 70 + y = 10x + y + 340 \end{cases}$

Krok 4: Obliczamy: $\begin{cases} x + y = 8 \\ 90x = 270 \end{cases}$ więc $\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 3 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} y = 5 \\ x = 3 \end{cases}$

Sprawdzenie: $\begin{cases} 3 + 5 = 8 \\ 375 = 35 + 340 \end{cases}$

Odpowiedź:

Szukaną liczbą dwucyfrową jest 35.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, podanie szukanej liczby dwucyfrowej 35.

2 pkt – poprawne wyznaczenie cyfry dziesiątek lub cyfry jedności szukanej liczby.

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć szukaną liczbę $\begin{cases} x + y = 8 \\ 100x + 70 + y = 10x + y + 340 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 138. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przekształcamy pierwsze równanie, stosując wzór skróconego mnożenia.

$$\begin{cases} y = x^2 + 8x + 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Krok 2: Podstawiamy y do drugiego równania.

$$\begin{cases} y = x^2 + 8x + 8 \\ x - (x^2 + 8x + 8) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 8x + 8 \\ x^2 + 7x + 12 = 0 \end{cases}$$

Krok 3: Rozwiązujemy drugie równanie $x^2 + 7x + 12 = 0$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1,$$

$\Delta > 0$, równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-7-1}{2 \cdot 1} = -4, x_2 = \frac{-7+1}{2 \cdot 1} = -3$$

Krok 4: Zapisujemy dwa układy równań.

$$\begin{cases} x_1 = -4 \\ x_1 - y_1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -3 \\ x_2 - y_2 = 4 \end{cases}$$

Krok 5: Stąd: $\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = -8 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -7 \end{cases}$$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem tego układu są dwie pary liczb $\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = -8 \end{cases}$ i $\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -7 \end{cases}$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań, podanie dwóch par liczb $\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = -8 \end{cases}$ i $\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -7 \end{cases}$

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania kwadratowego.

1 pkt – poprawne przekształcenie układu równań do postaci $\begin{cases} y = x^2 + 8x + 8 \\ x^2 + 7x + 12 = 0 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 139. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy niewiadome:

x – liczba pytań, na które Hania odpowiedziała poprawnie

y – liczba pytań, na które Hania odpowiedziała błędnie

Krok 2: Zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 10x - 5y = 310 \end{cases}$$

Krok 3: Dzielimy drugie równanie przez 5, a następnie dodajemy równania stronami.

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 2x - y = 62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 3x = 102 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x = 34 \end{cases}$$

Krok 4: Zapisujemy rozwiązanie.

$$\begin{cases} y = 6 \\ x = 34 \end{cases}$$

Krok 5: Sprawdzenie: $\begin{cases} 34 + 6 = 40 \\ 10 \cdot 34 - 5 \cdot 6 = 310 \end{cases}$

Odpowiedź:

Hania odpowiedziała poprawnie na 34 pytania.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, podanie liczby pytań, na które Hania odpowiedziała poprawnie: 34.

2 pkt – poprawne wyznaczenie jednej niewiadomej w układzie równań.

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć liczbę pytań, na które Hania odpowiedziała poprawnie

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 10x - 5y = 310 \end{cases}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 140. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy dane:

x – pierwsza liczba

y – druga liczba

Krok 2: Zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ x^2 + y^2 = 500 \end{cases}$$

Krok 3: Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} x = 30 + y \\ (30 + y)^2 + y^2 = 500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 + y \\ 900 + 60y + y^2 + y^2 = 500 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 + y \\ 2y^2 + 60y + 400 = 0 \end{cases}$$

Krok 4: Rozwiązujemy pierwsze równanie.

$$2y^2 + 60y + 400 = 0$$

$$y^2 + 30y + 200 = 0$$

$$\Delta = 30^2 - 4 \cdot 1 \cdot 200 = 100, \sqrt{\Delta} = 10$$

$$y_1 = \frac{-30-10}{2} = -20, y_2 = \frac{-30+10}{2} = -10$$

Krok 5: Zapisujemy układy równań.

$$\begin{cases} x_1 = 30 + y_1 \\ y_1 = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 30 + y_2 \\ y_2 = -10 \end{cases}$$

Krok 6: Stąd:

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ y_1 = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 20 \\ y_2 = -10 \end{cases}$$

Krok 7: Sprawdzenie: $\begin{cases} 10 - (-20) = 30 \\ 10^2 + (-20)^2 = 500 \end{cases} \quad \begin{cases} 20 - (-10) = 30 \\ 20^2 + (-10)^2 = 500 \end{cases}$

Odpowiedź:

Ten układ spełniają liczby: $\begin{cases} x_1 = 10 \\ y_1 = -20 \end{cases}$ i $\begin{cases} x_2 = 20 \\ y_2 = -10 \end{cases}$

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, podanie dwóch par szukanych liczb: $\begin{cases} x_1 = 10 \\ y_1 = -20 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 20 \\ y_2 = -10 \end{cases}$

3 pkt – poprawne rozwiązanie równania kwadratowego.

2 pkt – przekształcenie układu równań do postaci, w której jedno z równań jest równaniem kwadratowym z jedną niewiadomą: $\begin{cases} x = 30 + y \\ 2y^2 + 60y + 400 = 0 \end{cases}$

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego szukać liczb: $\begin{cases} x - y = 30 \\ x^2 + y^2 = 500 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 141. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy niewiadome:

x – długość pierwszego boku prostokąta w centymetrach

y – długość drugiego boku prostokąta w centymetrach

$x + 2$ – długość pierwszego boku drugiego prostokąta w centymetrach

$y - 4$ – długość drugiego boku drugiego prostokąta w centymetrach

Krok 2: Zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ (x + 2) \cdot (y - 4) = xy \end{cases}$$

Krok 3: Przekształcamy układ do prostszej postaci.

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy - 4x + 2y - 8 = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y = -10 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x = -6 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 + y = 10 \end{cases}$$

Krok 4: Stąd: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$

Krok 5: Sprawdzenie: $\begin{cases} 2 + 8 = 10 \\ (2 + 2) \cdot (8 - 4) = 2 \cdot 8 \end{cases}$

Odpowiedź:

Długości boków prostokąta wynoszą 2 cm i 8 cm.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, podanie długości boków prostokąta 2 cm i 8 cm.

2 pkt – poprawne wyznaczenie długości jednego boku prostokąta.

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć długości boków prostokąta $\begin{cases} x + y = 10 \\ (x + 2) \cdot (y - 4) = xy \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 142. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zamieniamy jednostki:

$$44,2 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{44200 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \approx 12,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Krok 2: Wprowadzamy niewiadome:

x – prędkość, z jaką biegł Karol na treningu $\left(w \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$

y – czas, w jakim przebiegł 78 metrów

$x + 2$ – prędkość, z jaką musiałby biec odcinek długości 120 metrów

$y + 2$ – czas w jakim miałby przebiec odcinek drogi o długości 120 metrów

Krok 3: Zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} xy = 78 \\ (x + 2) \cdot (y + 2) = 120 \end{cases}$$

Krok 4: Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} xy = 78 \\ xy + 2x + 2y + 4 = 120 \end{cases} \begin{cases} xy = 78 \\ 78 + 2x + 2y + 4 = 120 \end{cases} \begin{cases} xy = 78 \\ x + y = 19 \end{cases} \begin{cases} xy = 78 \\ x = 19 - y \end{cases} \begin{cases} (19 - y)y = 78 \\ x = 19 - y \end{cases}$$

Krok 5: Rozwiązujemy pierwsze równanie.

$$-y^2 + 19y - 78 = 0$$

$$\Delta = 19^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-78) = 361 - 312 = 49, \sqrt{\Delta} = 7$$

$$y_1 = \frac{-19 - 7}{2 \cdot (-1)} = 13 \notin D, \text{ jest to większa prędkość niż prędkość rekordzisty świata w sprincie Usaina Bolta } y_2 = \frac{-19 + 7}{2 \cdot (-1)} = 6$$

Krok 6: Zapisujemy układ równań: $\begin{cases} y = 6 \\ x = 19 - 6 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} y = 6 \\ x = 13 \end{cases}$

Krok 7: Sprawdzenie: $\begin{cases} 13 \cdot 6 = 78 \\ (13 + 2) \cdot (6 + 2) = 120 \end{cases}$

Odpowiedź:

Karol biegł przez 13 sekund z prędkością $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, podanie czasu trwania biegu (13 sekund) i prędkości z jaką poruszał się Karol ($6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$).

3 pkt – poprawne rozwiązanie równania kwadratowego.

2 pkt – poprawne przekształcenie układu równań do postaci: $\begin{cases} (19 - y)y = 78 \\ x = 19 - y \end{cases}$

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego wyznaczyć czas trwania biegu i prędkość, z jaką poruszał się Karol

$$\begin{cases} xy = 78 \\ (x+2) \cdot (y+2) = 120 \end{cases}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 143. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy niewiadome.

x – liczba dni rajdu, $x > 0$ i $x \in \mathbb{N}$

y – długość dziennego odcinka drogi w kilometrach, $y > 0$ i $y \in \mathbb{N}$

$x+3$ – liczba dni rajdu, gdyby harcerze dziennie szli krótszy odcinek drogi

$y-5$ – długość dziennego krótszego odcinka drogi

Krok 2: Zapisujemy układ równań przedstawiający zależności określone w zadaniu.

$$\begin{cases} xy = 90 \\ (x+3)(y-5) = 90 \end{cases}$$

Krok 3: Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases} xy = 90 \\ xy - 5x + 3y - 15 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 90 \\ 90 - 5x + 3y - 15 = 90 \end{cases}$$

Krok 4: Wyznaczamy x z drugiego równania i podstawiamy do pierwszego.

$$\begin{cases} xy = 90 \\ x = \frac{3}{5}y - 3 \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{5}y - 3\right)y = 90$$

$$x = \frac{3}{5}y - 3$$

Krok 5: Rozwiązujemy pierwsze równanie $\frac{3}{5}y^2 - 3y - 90 = 0$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot (-90) = 225, \sqrt{\Delta} = 15$$

$$y_1 = \frac{3-15}{2 \cdot \frac{3}{5}} = -10 \notin D, y_2 = \frac{3+15}{2 \cdot \frac{3}{5}} = 15$$

Krok 6: Zapisujemy układ równań i wyznaczamy niewiadomą x .

$$\begin{cases} y = 15 \\ x = \frac{3}{5} \cdot 15 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 15 \\ x = 6 \end{cases}$$

Krok 7: Sprawdzenie: $15 \cdot 6 = 90$.

Odpowiedź:

Rajd trwał 6 dni, a harcerze dziennie pokonywali trasę długości 15 kilometrów.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, obliczenie liczby dni trwania rajdu (6 dni) oraz długości dziennie pokonywanej trasy (15 kilometrów).

3 pkt – poprawne rozwiązanie równania kwadratowego i wybranie jednego pierwiastka spełniającego warunki zadania ($y = 15$).

2 pkt – przekształcenie układu równań do postaci, w której jedno z równań jest równaniem kwadratowym z jedną niewiadomą:

$$\text{mają: } \begin{cases} \left(\frac{3}{5}y - 3\right)y = 90 \\ x = \frac{3}{5}y - 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} \frac{3}{5}y^2 - 3y - 90 = 0 \\ x = \frac{3}{5}y - 3 \end{cases}$$

Odpowiedzi krok po kroku

1 pkt – poprawne zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć długość trwania rajdu oraz liczbę kilometrów, jakie dzień-
nie pokonywali harcerze:
$$\begin{cases} xy = 90 \\ (x+3)(y-5) = 90 \end{cases}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 144. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Rozwiązujemy układ metodą przeciwnych współczynników.

Krok 2: Porządkujemy równania.

$$\begin{cases} 3x + 3y - 2x + 2y = -5 \\ 2x + 2y + 3x - 3y = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + 5y = -5 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$$

Krok 3: Aby uzyskać przeciwne współczynniki, mnożymy obie strony drugiego równania przez 5 i dodajemy stronami.

$$\begin{cases} x + 5y = -5 \\ 5x - y = 1 \quad | \cdot 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + 5y = -5 \\ 25x - 5y = 5 \end{cases}$$

$$26x = 0$$
$$x = 0$$

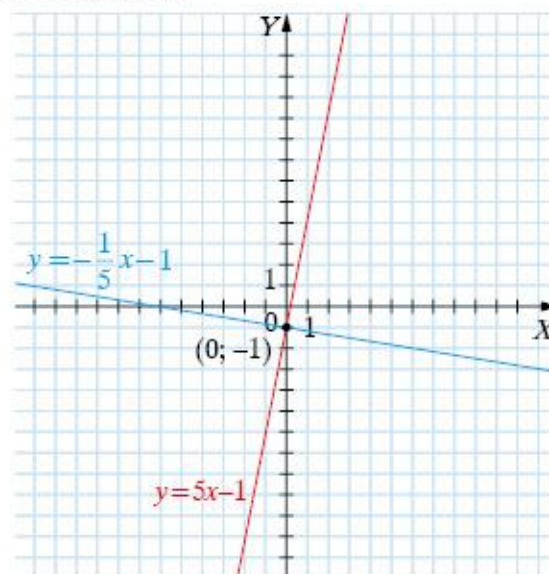
Krok 4: Wstawiamy obliczoną wartość do jednego z równań (drugiego) i obliczamy y .

$$5 \cdot 0 - y = 1$$
$$y = -1$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

Krok 5: Oba równania zapisujemy w postaci kierunkowej.

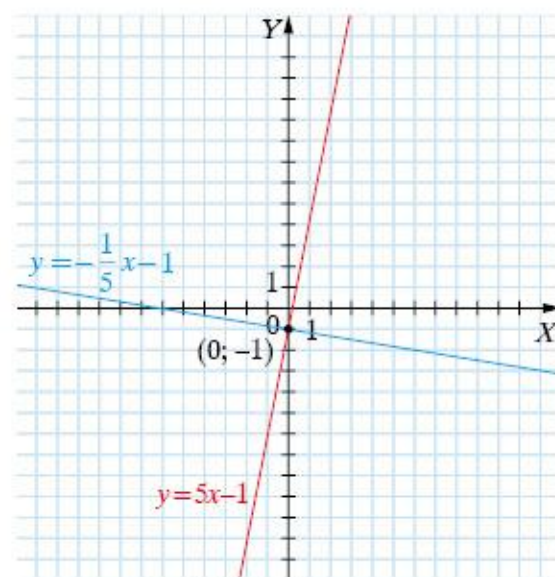
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x - 1 \\ y = 5x - 1 \end{cases}$$

Krok 6: Zaznaczamy proste w układzie współrzędnych.



Odpowiedź:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x - 1 \\ y = 5x - 1 \end{cases}$$



Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ oraz poprawne przedstawienie ilustracji geometrycznej układu.

2 pkt – poprawne rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

albo

poprawne przedstawienie ilustracji geometrycznej układu,

albo

poprawne wyznaczenie jednej niewiadomej $x=0$ lub $y=-1$ i poprawne przedstawienie ilustracji geometrycznej układu.

1 pkt – poprawne wyznaczenie jednej niewiadomej $x=0$ lub $y=-1$ i poprawne zapisanie obu równań w postaci kierunkowej

prostej $\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x - 1 \\ y = 5x - 1 \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

5. Funkcje

Zadanie 145. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Funkcją nie jest przyporządkowanie przedstawione w tabelce III, ponieważ liczbie 2 są przyporządkowane dwie wartości – liczby 1 i 3.

Krok 2: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 146. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Sporządzimy tabelę dla funkcji g .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-5	0	3	4	3	0	-5

Krok 2: Z tabeli odczytujemy dwa miejsca zerowe funkcji g . Są to liczby -3 i 1.

Krok 3: Z tabeli odczytujemy wartości funkcji. Są to liczby -5, 0, 3, 4.

Krok 4: Określamy prawdziwość zdań: PP.

Odpowiedź:

PP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 147. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy wartości funkcji dla argumentów -1, 1, 0 i -2.

Krok 2: $f(-1) = |-1-1| + 2 = 2 + 2 = 4$

Krok 3: $f(1) = |1-1| + 2 = 0 + 2 = 2$

Krok 4: $f(0) = |0-1| + 2 = 1 + 2 = 3$

Krok 5: $f(-2) = |-2-1| + 2 = 3 + 2 = 5$

Krok 6: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 148. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Sporządzamy tabelę funkcji:

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1

Krok 2: Określamy: $ZW = \{0, 1, 2\}$.**Krok 3:** Miejsca zerowe: $x = 12, x = 15, x = 18$.**Odpowiedź:**

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(x)$	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1

 $ZW = \{0, 1, 2\}$ Miejsca zerowe: $x = 12, x = 15, x = 18$ **Zasady oceniania:****2 pkt** – poprawne sporządzenie tabelki, poprawne określenie zbioru wartości funkcji oraz poprawne podanie wszystkich miejsc zerowych funkcji.**1 pkt** – poprawne sporządzenie tabelki
albo

poprawne określenie zbioru wartości funkcji oraz poprawne podanie wszystkich miejsc zerowych funkcji.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.**Zadanie 149. 0-2 pkt****Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykresy funkcji liniowej są prostymi prostopadłymi wówczas, gdy iloczyn współczynników kierunkowych tych funkcji jest równy -1 .**Krok 2:** Zapisujemy równanie: $-m(3-2m) = -1$, stąd $2m^2 - 3m + 1 = 0$.**Krok 3:** Obliczamy: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$, $m_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$, $m_2 = \frac{3+1}{4} = 1$.**Krok 4:** Zapisujemy rozwiązanie: $m_1 = \frac{1}{2}$ i $m_2 = 1$.**Odpowiedź:**Wykresy tych funkcji są prostymi prostopadłymi dla $m_1 = \frac{1}{2}$ i $m_2 = 1$.**Zasady oceniania:****2 pkt** – poprawne obliczenie wartości parametru m , dla których wykresy danych funkcji liniowych są prostymi prostopadłymi,
 $m_1 = \frac{1}{2}$ i $m_2 = 1$.**1 pkt** – poprawne zapisanie warunku pozwalającego wyznaczyć wartości parametru m , tzn. $-m(3-2m) = -1$.**0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.**Zadanie 150. 0-2 pkt****Rozwiązanie:****Krok 1:** Obliczamy współrzędne wierzchołka.

$$f(x) = -x^2 - 8x - 12$$

$$x_w = \frac{8}{2 \cdot (-1)} = -4$$

$$y_w = f(x_w) = -(-4)^2 - 8 \cdot (-4) - 12 = 4$$

Odpowiedzi krok po kroku

Krok 2: Punkty przecięcia z osią OX .

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12) = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

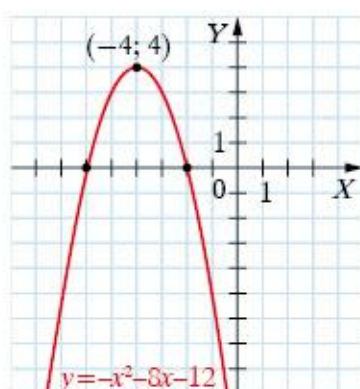
$$x_1 = \frac{8-4}{-2} = -2$$

$$x_2 = \frac{8+4}{-2} = -6$$

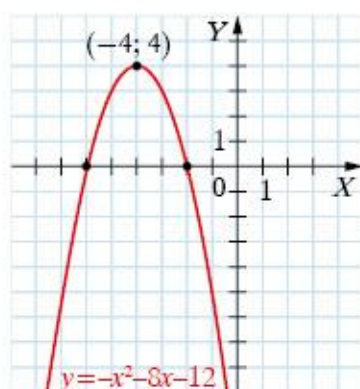
$$(-6; 0) \quad (-2; 0)$$

Krok 3: Punkt przecięcia z osią OY wynosi $(0; -12)$.

Krok 4: Szkicujemy wykres funkcji.



Odpowiedź:



Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne sporządzenie wykresu funkcji.

1 pkt – poprawne wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli ($x_w = -4$, $y_w = 4$) oraz obliczenie miejsc zerowych danej funkcji ($x_1 = -2$, $x_2 = -6$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 151. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podstawiamy odczytane z wykresu współrzędne wierzchołka $(1; 4)$ do wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $y = a(x - 1)^2 + 4$.

Krok 2: Wstawiamy odczytane z wykresu współrzędne punktu przecięcia z osią OY : $(0; 3)$.

Krok 3: Obliczamy współczynnik a .

$$3 = a(0 - 1)^2 + 4$$

$$3 = a + 4$$

$$a = -1$$

Krok 4: Zatem funkcja opisana jest wzorem $y = -(x - 1)^2 + 4$.

Krok 5: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 152. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podstawiamy do wzoru funkcji w miejsce x liczby będące końcami przedziału i obliczamy wartości funkcji:

$$f(-3) = 2 \cdot (-3 + 2)^2 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$f(3) = 2 \cdot (3 + 2)^2 + 3 = 50 + 3 = 53$$

Krok 2: Ponieważ wierzchołek o współrzędnych $(-2; 3)$ należy do przedziału $(-3; 3)$, współczynnik $a = 2$, czyli ramiona paraboli są skierowane do góry, zatem funkcja przyjmuje wartość najmniejszą w wierzchołku $f(-2) = 3$.

Krok 3: Określamy prawdziwość zdań: PF.

Odpowiedź:

PF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 153. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Mianownik ułamka jest liczbą różną od 0. Otrzymujemy $x + 5 \neq 0$ i $x^2 - 4 \neq 0$, stąd $x \neq -5$, $x \neq 2$ i $x \neq -2$.

Krok 2: Zapisujemy dziedzinę: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 2\}$.

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 154. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: A. Dziedziną funkcji jest zbiór $(-6, 2) \cup (3, \infty)$ – zdanie prawdziwe.

Krok 2: B. Funkcja jest malejąca w przedziale $(3, \infty)$ – zdanie prawdziwe.

Krok 3: C. Funkcja przyjmuje wartość największą dla argumentu 2 – zdanie prawdziwe.

Krok 4: D. Miejscem zerowym funkcji jest tylko liczba 4 – zdanie fałszywe. Funkcja ma dwa miejsca zerowe: -4 i 4 .

Krok 5: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 155. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy dziedzinę funkcji. Zapisujemy założenie $x + 5 \neq 0$, stąd $x \neq -5$.

Krok 2: Zapisujemy dziedzinę funkcji: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Krok 3: Wyznaczamy miejsca zerowe. $\frac{x^2 - 25}{x + 5} = 0$, więc $\frac{(x - 5)(x + 5)}{x + 5} = 0$. Otrzymujemy $x - 5 = 0$, czyli $x = 5$.

Krok 4: Funkcja ma jedno miejsce zerowe.

Krok 5: Wybieramy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 156. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zdanie 1. Funkcja liniowa jest malejąca, gdy współczynnik kierunkowy jest ujemny. Zapisujemy $2 + \sqrt{2}m < 0$.

Krok 2: Otrzymujemy $2 < -\sqrt{2}m$.

Krok 3: Zdanie 2. Zapisujemy wzór funkcji g dla $m = 0$. Otrzymujemy $g(x) = 2x - 3$.

Krok 4: Wykresy funkcji g i funkcji f nie są prostymi równoległymi, gdyż funkcje te mają różne współczynniki kierunkowe.

Krok 5: Określamy prawdziwość zdań: FF.

Odpowiedź:

FF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 157. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Funkcja opisana tym wzorem ma tylko trzy wartości: $\{-2, 0, 2\}$.

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 158. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy miejsca zerowe funkcji. Zapisujemy równania $|x| - 1 = 0$ oraz $x^2 - 4 = 0$.

Krok 2: Rozwiązaniem pierwszego równania są liczby $x = -1$ oraz $x = 1$. Obie liczby należą do zbioru $(-\infty, 2)$, więc obie liczby są miejscami zerowymi funkcji.

Krok 3: Rozwiązaniem drugiego równania są liczby $x = -2$ oraz $x = 2$. Tylko jedna liczba, to znaczy liczba 2, należy do zbioru $(2, 5)$, więc tylko ona jest miejscem zerowym funkcji.

Krok 4: Ostatecznie zapisujemy, że funkcja ma trzy miejsca zerowe: $x = -1$, $x = 1$ oraz $x = 2$.

Odpowiedź:

Funkcja ma trzy miejsca zerowe: $x = -1$, $x = 1$ oraz $x = 2$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie trzech miejsc zerowych tej funkcji $x = -1$, $x = 1$ oraz $x = 2$.

1 pkt – poprawne obliczenie miejsc zerowych dla jednego z wzorów opisujących funkcję, np. dla $f_1(x) = |x| - 1$ są to $x = -1$ i $x = 1$, a dla $f_2(x) = x^2 - 4$ jest to $x = 2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 159. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Odczytujemy ze wzoru miejsca zerowe funkcji: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Krok 2: Przekształcamy wzór funkcji do postaci ogólnej i obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$$

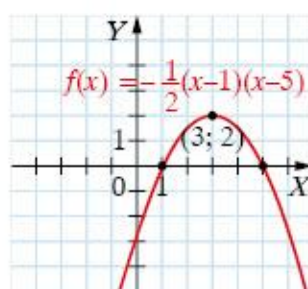
$$x_w = \frac{-3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 3$$

$$y_w = f(x_w) = -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - \frac{5}{2} = 2$$

Krok 3: Punkt przecięcia z osią OY wynosi $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$.

Krok 4: Szkicujemy wykres funkcji:

Odpowiedź:



Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne sporządzenie wykresu funkcji.

1 pkt – poprawne odczytanie miejsc zerowych danej funkcji ($x_1 = 1$, $x_2 = 5$) oraz wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli ($x_w = 3$, $y_w = 2$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 160. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ i wstawiamy współrzędne wierzchołka, otrzymując $f(x) = a(x - 11)^2 + 9$.

Krok 2: Następnie wstawiamy współrzędne punktu A i obliczamy a :

$$261 = a(5 - 11)^2 + 9$$

$$252 = 36a$$

$$a = 7$$

Krok 3: Wzór tej funkcji: $f(x) = 7(x - 11)^2 + 9 = 7x^2 - 154x + 856$.

Odpowiedź:

$$f(x) = 7(x - 11)^2 + 9 = 7x^2 - 154x + 856$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wzoru funkcji $f(x) = 7(x - 11)^2 + 9$ lub $f(x) = 7x^2 - 154x + 856$.

1 pkt – poprawne zapisanie wzoru funkcji w postaci kanonicznej po podstawieniu współrzędnych wierzchołka paraboli ($f(x) = a(x - 11)^2 + 9$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 161. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wartość wyrażenia $\Delta = b^2 + 24$ jest zawsze liczbą dodatnią bez względu na wartość liczby b .

Krok 2: Wybieramy poprawną odpowiedź: A1.

Odpowiedź:

A1

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 162. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podstawiamy do wzoru funkcji w miejsce x liczby będące końcami przedziału i obliczamy wartości funkcji:

$$f(-2) = -(-2 - 5)(-2 + 3) = 7$$

$$f(2) = -(2 - 5)(2 + 3) = 15$$

Krok 2: Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli.

$$x = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$y = f(1) = -(1-5)(1+3) = 16$$

Krok 3: Ponieważ wierzchołek o współrzędnych $(1; 16)$ należy do przedziału $(-2; 2)$, współczynnik $a = -1$, czyli ramiona paraboli są skierowane do dołu, zatem funkcja przyjmuje wartość największą w wierzchołku $f(1) = 16$.

Krok 4: Wartość najmniejsza wynosi 7.

Odpowiedź:

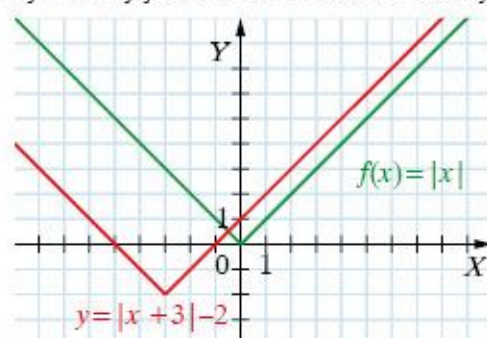
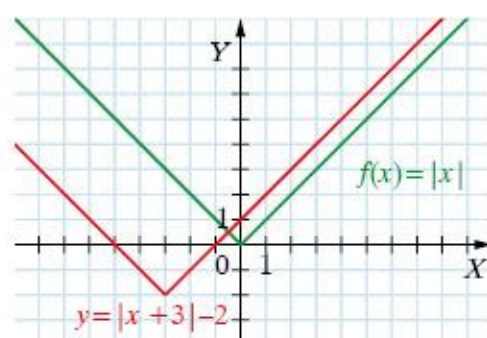
Wiedząc, że funkcja kwadratowa opisana jest wzorem $f(x) = -(x - 5)(x + 3)$, możemy obliczyć w przedziale $(-2; 2)$ wartość najmniejszą, która wynosi 7 oraz wartość największą 16.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne uzupełnienie obu luk (która wynosi 7 oraz wartość największą 16).

1 pkt – poprawne uzupełnienie jednej luki.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 163. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Szkicujemy wykres funkcji $f(x) = |x|$.**Krok 2:** Przesuwamy go o wektor $[-3; -2]$, czyli o trzy jednostki w lewo i o dwie jednostki w dół, otrzymując:**Odpowiedź:****Zasady oceniania:**2 pkt – poprawne naszkicowanie wykresu funkcji $y = f(x+3) - 2$.1 pkt – poprawne naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 164. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Funkcje przyjmują tę samą wartość, to znaczy $f(x) = g(x)$ – jest to równanie zapisane w podpunkcie 2.**Krok 2:** Rozwiązujemy to równanie $2x + 3 = -3x + 1$, stąd $x = -0,4$.**Krok 3:** Wybieramy poprawną odpowiedź: B2**Odpowiedź:**

B2

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 165. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wyznaczamy dziedzinę funkcji. Zapisujemy nierówność $x + m > 0$, stąd $x > -m$.**Krok 2:** Ponieważ dziedziną jest zbiór $(-3, \infty)$, to $m = 3$.**Krok 3:** Wybieramy poprawną odpowiedź: C.**Odpowiedź:**

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 166. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x - 2b$ przecina oś Y w punkcie, którego rzędna jest równa 6, to $-2b = 6$, czyli $b = -3$.**Krok 2:** Otrzymujemy więc wzór funkcji liniowej $g(x) = -3x - 1$.**Krok 3:** Stąd wynika, że rzędna punktu przecięcia wykresu funkcji g z osią Y jest równa -1 .**Odpowiedź:**

-1

Zasady oceniania:2 pkt – poprawne wyznaczenie rzędnej punktu przecięcia wykresu funkcji $g(x)$ z osią y . Jest ona równa -1 .1 pkt – poprawne obliczenie wartości parametru $b = -3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 167. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Liczba $\frac{2}{3}$ jest miejscem zerowym tej funkcji. Zapisujemy równanie $0 = a \cdot \frac{2}{3} + b$.**Krok 2:** Do wykresu tej funkcji należy punkt $(0, 3)$. Zapisujemy więc równanie $3 = a \cdot 0 + b$.**Krok 3:** Otrzymaliśmy układ równań $\begin{cases} 0 = \frac{2}{3}a + b \\ 3 = b \end{cases}$, którego rozwiązaniem jest $\begin{cases} a = -4,5 \\ b = 3 \end{cases}$.**Krok 4:** Zapisujemy wzór funkcji $f(x) = -4,5x + 3$.**Odpowiedź:** $f(x) = -4,5x + 3$ **Zasady oceniania:**2 pkt – poprawne wyznaczenie wzoru funkcji spełniającej zadane warunki $f(x) = -4,5x + 3$.1 pkt – poprawne wyznaczenie współczynnika $b = 3$

albo

poprawne zapisanie układu równań pozwalającego na wyznaczenie obu współczynników funkcji $\begin{cases} 0 = a \cdot \frac{2}{3} + b \\ 3 = a \cdot 0 + b \end{cases}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 168. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Zapisujemy nierówność $2x + 1 \leq -2x^2 + 5$.**Krok 2:** Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$\Delta = 9, x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2, x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Krok 3: Wobec tego rozwiązaniem nierówności jest zbiór $x \in (-2, 1)$.

Odpowiedź:

$$x \in (-2, 1)$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie przedziału argumentów, dla których spełniony jest zadany warunek.

1 pkt – poprawne wyznaczenie warunku danego w zadaniu w postaci $x^2 + x - 2 \leq 0$ oraz poprawne wyznaczenie $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 169. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Odczytujemy ze wzoru funkcji współrzędne wierzchołka $(-2; -2)$.

Krok 2: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 170. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podstawiamy do wzoru funkcji w miejsce x liczby będące końcami przedziału i obliczamy wartości funkcji:

$$f(-6) = 2 \cdot (-6)^2 - 12 \cdot (-6) + 23 = 72 + 72 + 23 = 167$$

$$f(6) = 2 \cdot 6^2 - 12 \cdot 6 + 23 = 72 - 72 + 23 = 23$$

Krok 2: Wyznaczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x = \frac{12}{4} = 3$$

$$y = f(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 23 = 18 - 36 + 23 = 5$$

Krok 3: Ponieważ wierzchołek o współrzędnych $(3; 5)$ należy do przedziału $(-6; 6)$, współczynnik $a = 2$, czyli ramiona paraboli są skierowane do góry, zatem funkcja przyjmuje wartość najmniejszą w wierzchołku $f(3) = 5$.

Krok 4: Wartość największa wynosi 167.

Odpowiedź:

167

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wartości najmniejszej (5) i największej (167) danej funkcji w podanym przedziale.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wartości najmniejszej (5) danej funkcji w podanym przedziale albo

poprawne wyznaczenie wartości największej (167) danej funkcji w podanym przedziale.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 171. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podpunkt a) Obliczamy iloczyn $3 \cdot 5 = 15$. Kwota $k = 15$ zł.

Krok 2: Podpunkt b) Zapisujemy wzór funkcji $f(x) = \frac{15}{x}$.

Krok 3: Obliczamy wartość dla argumentu 3: $f(3) = \frac{15}{3} = 5$.

Krok 4: Można kupić 5 kg tego towaru.

Odpowiedź:

15 zł i 5 kg

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wartości k (15) oraz wagi towaru, jaki można kupić za kwotę k (5 kg).

1 pkt – poprawne obliczenie wartości k (15).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 172. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Korzystamy ze wzoru $m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, gdzie $T = 5700$ lat.

Krok 2: $40\% = 0,4$, zatem $m = 0,4m_0$.

Krok 3: Otrzymujemy równanie $0,4m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$, które po skróceniu przez m_0 rozwiązujemy, logarytmując obustronnie.

Krok 4: Obliczamy: $\log 0,4 = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$.

$$\log 0,4 = \frac{t}{5700} \cdot \log 0,5$$

$$\frac{t}{5700} = \frac{\log 0,4}{\log 0,5}$$

$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0,4}{\log 0,5}$$

$$t \approx 5700 \cdot 1,32 \approx 7535$$

Krok 5: Znaleźisko ma około 7524 lat.

Odpowiedź:

7524 lat.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wieku znaleziska (7535 lat).

1 pkt – poprawne zapisanie warunku pozwalającego wyliczyć wiek znaleziska $0,4m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

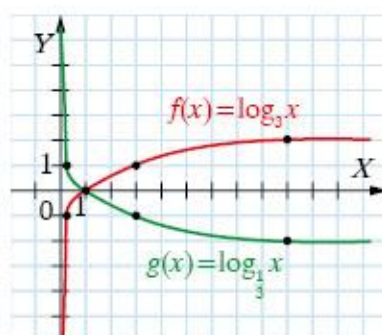
Zadanie 173. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

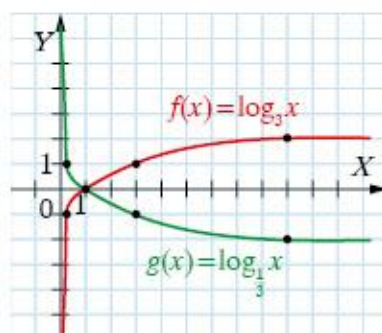
Krok 1: Rysujemy tabelkę dla obu funkcji:

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$f(x)$	-1	0	1	2
$g(x)$	1	0	-1	-2

Krok 2: Szkicujemy wykresy:



Odpowiedź:



Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne naszkicowanie wykresów obu funkcji.

1 pkt – poprawne naszkicowanie wykresu jednej funkcji

albo

poprawne sporządzenie tabel dla obu funkcji.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania

Zadanie 174. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy boki prostokąta przez x i y .

Krok 2: Wtedy mamy $2x + 2y = 120$, czyli $x + y = 60$. Po wyznaczeniu y otrzymujemy $y = 60 - x$ oraz $P = x \cdot y$.

Krok 3: Po wstawieniu $y = 60 - x$ otrzymujemy pole jako funkcję zmiennej x :

$$P(x) = x \cdot (60 - x) = -x^2 + 60x$$

Krok 4: Wykres funkcji ma ramiona do dołu, zatem wartość największą funkcja osiąga w wierzchołku.

Krok 5: Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli:

$$x = \frac{-60}{-2} = 30$$

$$y = 60 - 30 = 30$$

Krok 6: Prostokąt będzie kwadratem o boku długości 30 metrów.

Krok 7: Pole tego kwadratu wynosi $P = 30 \cdot 30 = 900 \text{ m}^2$.

Odpowiedź:

$$P = 30 \cdot 30 = 900 \text{ m}^2$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie boków tego prostokąta (kwadrat o boku 30 m) oraz poprawne obliczenie pola prostokąta (900 m^2).

2 pkt – poprawne wyznaczenie największej wartości funkcji opisującej pole prostokąta ($x = 30$).

1 pkt – poprawne zapisanie funkcji jednej zmiennej opisującej pole prostokąta $P(x) = x \cdot (60 - x)$ lub $P(x) = -x^2 + 60x$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 175. 0-3 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Oznaczamy: x – liczba pracowników, y – liczba dni pracy, a – współczynnik proporcjonalności.

Krok 2: Otrzymujemy wzór proporcjonalności odwrotnej $a = x \cdot y$, czyli $y = \frac{a}{x}$.

Krok 3: Wstawiając dane z zadania, obliczamy współczynnik a .

$$a = 2 \cdot 5 = 10$$

Krok 4: Zapisując liczbę dni pracy jako funkcję liczby pracowników, otrzymujemy:

$$y = f(x) = \frac{10}{x}$$

Krok 5: Wstawiając w miejsce x trzy, otrzymujemy:

$$y = f(3) = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ dnia pracy}$$

$$3\frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{10}{3} \cdot 8 = \frac{80}{3} = 26\text{h } 40\text{min}$$

Krok 6: Wstawiając w miejsce x sześć, otrzymujemy:

$$y = f(6) = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3} \text{ dnia pracy}$$

$$1\frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{5}{3} \cdot 8 = \frac{40}{3} = 13\text{h } 20\text{min}$$

Odpowiedź:

$$y = f(x) = \frac{10}{x}, 26 \text{ h } 40 \text{ min}, 13 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne rozwiązanie zadania, zapisanie wzoru funkcji ($f(x) = \frac{10}{x}$) oraz podanie czasów pracy z dokładnością do minuty dla trzech i dla sześciu pracowników ($26\text{h}40\text{min}$, $1\frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{5}{3} \cdot 8 = \frac{40}{3} = 13\text{h } 20\text{min}$).

2 pkt – poprawne obliczenie czasu pracy (w godzinach) dla trzech i dla sześciu pracowników albo poprawne obliczenie czasu pracy z dokładnością do minuty dla trzech pracowników albo

poprawne obliczenie czasu pracy z dokładnością do minuty dla sześciu pracowników.

1 pkt – poprawne zapisanie liczby dni pracy jako funkcji liczby pracowników $y = f(x) = \frac{10}{x}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 176. 0-3 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Skoro punkt A należy do wykresu funkcji, to jego współrzędne spełniają wzór funkcji. Otrzymujemy $-6 = (m-1) \cdot (-2) + 2$, stąd $-8 = (m-1) \cdot (-2)$, czyli $m = 5$.

Krok 2: Zapisujemy wzór funkcji dla $m = 5$. Otrzymujemy $f(x) = 4x + 2$.

Krok 3: Funkcja liniowa, dla której współczynnik kierunkowy jest dodatni, jest funkcją rosnącą w całej dziedzinie to znaczy dla $x \in \mathbb{R}$.

Krok 4: Wyznaczamy argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne. Zapisujemy nierówność $4x + 2 \geq 0$.

Krok 5: Otrzymujemy $x \geq -\frac{1}{2}$.

Odpowiedź:

$$m = 5, \text{ funkcja rosnąca oraz } x \geq -\frac{1}{2}.$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne wyznaczenie parametru $m = 5$, poprawne określenie monotoniczności funkcji (funkcja rosnąca) oraz po-

prawne argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne ($x \geq -\frac{1}{2}$).

2 pkt – poprawne określenie monotoniczności funkcji (funkcja rosnąca)
albo

poprawne argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne ($x \geq -\frac{1}{2}$).

1 pkt – poprawne wyznaczenie parametru $m = 5$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 177. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykresy funkcji liniowych są prostymi prostopadłymi, gdy iloczyn współczynników kierunkowych funkcji jest równy -1 .
Otrzymujemy $\frac{1}{3}(2m-1) = -1$. Stąd $m = -1$.

Krok 2: Wyznaczamy współrzędne punktu wspólnego wykresów funkcji $f(x) = -3x + 8$ i $g(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

Krok 3: Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -3x + 8 \\ y = \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = -3x + 8 \\ -3x + 8 = \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$$

Krok 4: Zapisujemy rozwiązanie: $\begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ dla $m = -1$.

Odpowiedź:

Dla $m = -1$ wykresy tych funkcji liniowych są prostymi prostopadłymi i przecinają się w punkcie o współrzędnych $(3, -1)$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie parametru $m = -1$ i poprawne wyznaczenie współrzędnych punktu wspólnego tych prostych $(3, -1)$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie parametru $m = -1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 178. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Skoro funkcja liniowa f o wzorze $f(x) = ax + b$ przyjmuje wartości ujemne wyłącznie dla argumentów większych od 2, to liczba 2 jest miejscem zerowym tej funkcji. Zapisujemy równanie $0 = a \cdot 2 + b$.

Krok 2: Do wykresu tej funkcji należy punkt $(-2, 4)$. Zapisujemy więc równanie $4 = a \cdot (-2) + b$.

Krok 3: Otrzymaliśmy układ równań $\begin{cases} 0 = 2a + b \\ 4 = -2a + b \end{cases}$ którego rozwiązaniem jest $\begin{cases} b = 2 \\ a = -1 \end{cases}$.

Krok 4: Zapisujemy wzór funkcji $f(x) = -x + 2$. Funkcja ta jest malejąca, ponieważ współczynnik kierunkowy jest ujemny.

Odpowiedź:

$f(x) = -x + 2$, funkcja jest malejąca.

Zasady oceniania:

3 pkt – zapisanie poprawnego wzoru funkcji $f(x) = -x + 2$ i określenie jej monotoniczności (malejąca).

2 pkt – poprawne wyznaczenie jednego współczynnika (a lub b).

1 pkt – poprawne zapisanie obu warunków pozwalających wyznaczyć wzór funkcji $\begin{cases} 0 = 2a + b \\ 4 = -2a + b \end{cases}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 179. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Obliczamy współrzędne wierzchołka:

$$f(x) = 2x^2 + 12x + 16$$

$$x_w = \frac{-12}{2 \cdot 2} = -3$$

$$y_w = f(x_w) = 2(-3)^2 + 12 \cdot (-3) + 16 = -2$$

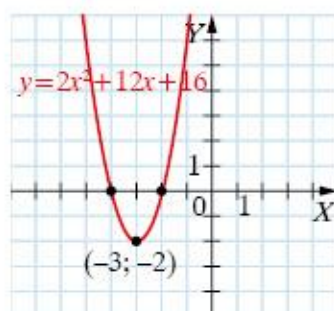
Krok 2: Punkty przecięcia z osią OX :

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{-12 - 4}{4} = -4$$

$$x_2 = \frac{-12 + 4}{4} = -2$$

Więc punkty to: $(-4; 0)$ i $(-2; 0)$.**Krok 3:** Punkt przecięcia z osią OY wynosi $(0; 16)$.**Krok 4:** Szkicujemy wykres funkcji:**Odpowiedź:****Zasady oceniania:**2 pkt – poprawne naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 + 12x + 16$.1 pkt – poprawne obliczenie współrzędnych wierzchołka i przecięcia z osią OX .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 180. 0-3 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Podpunkt a) Wzór funkcji: $f(t) = 100 \cdot 3^t$.**Krok 2:** Podpunkt b) Obliczamy wartość funkcji dla argumentu 3: $f(3) = 100 \cdot 3^3 = 100 \cdot 27 = 2700$.**Krok 3:** Podpunkt c) Obliczamy argument dla wartości funkcji 1 968 300:

$$1968300 = 100 \cdot 3^t$$

$$3^t = 19683$$

$$3^t = 3^9$$

$$t = 9$$

Odpowiedź:

a) $f(t) = 100 \cdot 3^t$.

b) $f(3) = 100 \cdot 3^3 = 100 \cdot 27 = 2700$.

c) $t = 9$

Zasady oceniania:3 pkt – poprawne zapisanie wzoru funkcji $f(t) = 100 \cdot 3^t$, poprawne wyznaczenie liczby bakterii po upływie 3 godzin doświadczenia (8100) oraz poprawne wyznaczenie czasu, po którym liczba bakterii wynosi 1 968 300, jest to 9 godzin.

2 pkt – poprawne zapisanie wzoru funkcji $f(t) = 100 \cdot 3^t$ i poprawne wyznaczenie liczby bakterii po upływie 3 godzin doświadczenia (8100)
albo
poprawne zapisanie wzoru funkcji $f(t) = 100 \cdot 3^t$ i oraz poprawne wyznaczenie czasu, po którym liczba bakterii wynosi 1 968 300, to znaczy 9 godzin.
1 pkt – poprawne zapisanie wzoru funkcji $f(t) = 100 \cdot 3^t$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 181. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zdanie 1.: Odczytujemy współrzędne wierzchołka funkcji (0, -2) i podstawiamy do wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, a następnie obliczamy wartość współczynnika kierunkowego dla odczytanego z wykresu punktu (1, 0).

Krok 2: Zdanie 2.: Odczytujemy współrzędne wierzchołka funkcji (0, 2) i podstawiamy do wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, a następnie obliczamy wartość współczynnika kierunkowego dla odczytanego z wykresu punktu (2, 0).

Krok 3: Określamy prawdziwość zdań: PP.

Odpowiedź:

PP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

6. Ciągi

Zadanie 182. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy piąty wyraz ciągu: $a_5 = 5 - 5^3 = 5 - 125 = -120$.

Krok 2: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 183. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy pięć początkowych wyrazów ciągu:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 1 + 3 - 2 = 2 \\ a_4 = 3 + 2 - 2 = 3 \\ a_5 = 2 + 3 - 2 = 3 \end{cases}$$

Krok 2: Zdanie fałszywe, bo trzeci wyraz jest liczbą parzystą.

Krok 3: Obliczamy różnicę $a_5 - a_4 = 3 - 3 = 0$.

Krok 4: Zdanie prawdziwe.

Krok 5: Określamy prawdziwość zdań: FP.

Odpowiedź:

FP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 184. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy wzór ogólny ciągu w postaci: $a_n = 1 - n^2$.

Krok 2: Zapisujemy wzór na a_{n+1} : $a_{n+1} = 1 - (n+1)^2$. Otrzymujemy: $a_{n+1} = 1 - n^2 - 2n - 1 = -n^2 - 2n$.

Krok 3: Badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$: $a_{n+1} - a_n = -n^2 - 2n - (1 - n^2)$

Krok 4: Otrzymujemy: $a_{n+1} - a_n = -2n - 1$.

Krok 5: Dla $n \geq 1$ liczba $-2n - 1 < 0$. Wobec tego $a_{n+1} - a_n < 0$. Stąd wnioskujemy, że ciąg (a_n) jest malejący.

Krok 6: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

Odpowiedzi krok po kroku

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 185. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy wzór ogólny na $n + 1$ wyraz ciągu (a_n) :

$$a_{n+1} = \frac{4-3(n+1)}{2} = \frac{4-3n-3}{2} = \frac{1-3n}{2}$$

Krok 2: Obliczamy różnicę kolejnych dwóch wyrazów ciągu:

$$\begin{aligned} r = a_{n+1} - a_n &= \frac{1-3n}{2} - \frac{4-3n}{2} = \frac{(1-3n)-(4-3n)}{2} = \\ &= \frac{1-3n-4+3n}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Krok 3: Zaznaczamy odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 186. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy dwudziesty i dziesiąty wyraz ciągu (a_n) :

$$a_{20} = a_1 \cdot 3^{19} \text{ i } a_{10} = a_1 \cdot 3^9$$

Krok 2: Wyznaczamy iloraz wyrazów a_{20} i a_{10} :

$$\frac{a_{20}}{a_{10}} = \frac{a_1 \cdot 3^{19}}{a_1 \cdot 3^9} = 3^{10}$$

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 187. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy warunek: $\frac{3n+8}{2n-1} = 2$.

Krok 2: Rozwiązujemy równanie: $3n + 8 = 4n - 2$, $n = 10$. Stąd $a_{10} = 2$.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 188. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Ciąg określony jest wzorem rekurencyjnym, dlatego wyznaczamy kolejne wyrazy ciągu aż do czwartego wyrazu:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 5 - 0 = 5 \\ a_3 = 5 - 5 = 0 \\ a_4 = 5 - 0 = 5 \end{cases}$$

Krok 2: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 189. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Ciąg jest ciągiem skończonym, sześciowyrazowym. Wyznaczamy wyrazy tego ciągu:

$$a_1 = (-1)^{1-1} + 2 = 3$$

$$a_2 = (-1)^{2-1} + 2 = 1$$

$$a_3 = (-1)^{3-1} + 2 = 3$$

$$a_4 = (-1)^{4-1} + 2 = 1$$

$$a_5 = (-1)^{5-1} + 2 = 3$$

$$a_6 = (-1)^{6-1} + 2 = 1$$

Krok 2: Sprawdzamy, na którym wykresie przedstawiono ten ciąg. Jest to wykres przedstawiony na rysunku C.

Krok 3: Zaznaczamy odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 190. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wypisujemy dane: $k = 50\,000$ zł, $r = 8\%$, $n = 5$.

Krok 2: Wyznaczamy kwotę po 5 latach: $50\,000(1 + 0,08)^5 \approx 73\,466,40$ (zł).

Odpowiedź:

Należy spłacić 73 466,40 zł.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie kwoty do spłacenia.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia kwoty do spłacenia.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 191. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Aby wyznaczyć wzór na n -ty wyraz ciągu, korzystamy z zależności: $a_n = S_n - S_{n+1}$.

Krok 2: Zapisujemy: $S_{n+1} = 3(n+1)^2 + 1$.

Krok 3: Stąd: $S_n = 3n^2 - 6n + 4$.

Krok 4: Wyznaczamy a_n : $a_n = 3n^2 + 1 - (3n^2 - 6n + 4)$.

Krok 5: Stąd: $a_n = 6n - 3$.

Krok 6: Zaznaczamy B1.

Odpowiedź:

B1

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 192. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = -2 \cdot 3^1 = -6$.

Krok 2: Zapisujemy wyraz a_{n+1} : $a_{n+1} = -2 \cdot 3^{n+1}$.

Krok 3: Wyznaczamy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2 \cdot 3^{n+1}}{-2 \cdot 3^n}$.

Krok 4: Czyli: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$.

Krok 5: Stąd: $a_{n+1} = 3a_n$.

Krok 6: Zapisujemy wzór rekurencyjny: $\begin{cases} a_1 = -6 \\ a_{n+1} = 3a_n \end{cases}$ dla $n \geq 1$

Krok 7: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 193. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy wzór na $n+1$ -wszy wyraz ciągu: $a_{n+1} = 2 \cdot (-1)^{2(n+1)}$.

Krok 2: Badamy znak różnicy $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot (-1)^{2(n+1)} - 2 \cdot (-1)^{2n}$$

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot (-1)^{2n} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1)^{2n}$$

$$a_{n+1} - a_n = 0$$

Krok 3: Różnica jest równa zero, z tego wynika, że ciąg (a_n) jest ciągiem stałym.

Odpowiedź:

$$a_{n+1} = 2 \cdot (-1)^{2(n+1)}$$

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot (-1)^{2(n+1)} - 2 \cdot (-1)^{2n}$$

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot (-1)^{2n} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1)^{2n}$$

$$a_{n+1} - a_n = 0$$

Różnica jest równa zero, z czego wynika, że ciąg (a_n) jest ciągiem stałym.

Zasady oceniania:

2 pkt – prawidłowe uzasadnienie, że ciąg jest stały

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wyraz ciągu (a_n) , który jest stały

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 194. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy warunek wynikający z treści zadania: $16 < \frac{5n+1}{3} \leq 27$.

Krok 2: Rozwiązujemy nierówność: $48 < 5n+1 \leq 81$.

$$47 < 5n \leq 80$$

$$9\frac{2}{5} < n \leq 16$$

Krok 3: Stąd otrzymujemy $n \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$.

Krok 4: Zapisanie odpowiedzi: Do przedziału $(16, 27)$ należą wyrazy: $a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$ i a_{16} .

Odpowiedź:

Do przedziału $(16, 27)$ należą wyrazy: $a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$ i a_{16} .

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wyrazów, które należą do przedziału.

1 pkt – poprawna metoda i poprawnie wyznaczona nierówność.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 195. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 24$.

$$\Delta = 100, \sqrt{\Delta} = 10$$

$$x_1 = \frac{2-10}{2} = -4 \text{ oraz } x_2 = \frac{2+10}{2} = 6$$

Krok 2: Ponieważ ciąg (a_n) jest rosnący, więc $a_1 = -4$ oraz $a_3 = 6$.

Krok 3: Wyznaczamy drugi wyraz ciągu (a_n) :

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 196. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy sześć początkowych wyrazów ciągu $a_n = 2 + (-2)^n$:

$$a_1 = 2 + (-2)^1 = 0$$

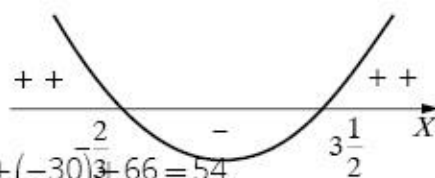
$$a_2 = 2 + (-2)^2 = 6$$

$$a_3 = 2 + (-2)^3 = -6$$

$$a_4 = 2 + (-2)^4 = 18$$

$$a_5 = 2 + (-2)^5 = -30$$

$$a_6 = 2 + (-2)^6 = 66$$



Krok 2: Wyznaczamy S_6 .

Krok 3: Otrzymujemy: $S_6 = 0 + 6 + (-6) + 18 + (-30) + 66 = 54$.

Odpowiedź:

Suma sześciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 54.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie sumy sześciu kolejnych wyrazów ciągu (a_n) : 54.

1 pkt – prawidłowe obliczenie wartości sześciu kolejnych wyrazów ciągu (a_n) .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 197. 0-2 pkt

Krok 1: Zapisujemy warunek: $6n^2 - 17n - 14 < 0$.

Krok 2: Rozwiązujemy nierówność kwadratową: $\Delta = 625$, $\sqrt{\Delta} = 25$.

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{17 - 25}{12} = -\frac{2}{3}$$

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{17 + 25}{12} = \frac{42}{12} = 3\frac{1}{2}$$

Krok 3: Rysujemy parabolę:

Krok 4: Odczytujemy: $n \in \left(-\frac{2}{3}, 3\frac{1}{2}\right)$ i $n \in \mathbb{N}_+$. Stąd otrzymujemy: $n \in \{1, 2, 3\}$.

Krok 5: Zapisujemy odpowiedź: a_1, a_2 i a_3 .

Odpowiedź:

Ujemne wyrazy tego ciągu to: a_1, a_2 i a_3 .

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i poprawne wypisanie ujemnych wyrazów ciągu (a_n) : a_1, a_2 i a_3 .

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia liczby wyrazów ujemnych ciągu (a_n) .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

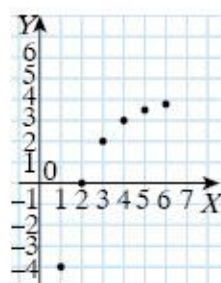
Zadanie 198. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

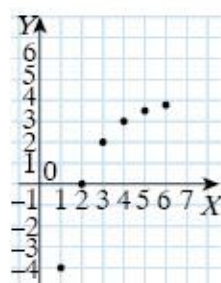
Krok 1: Wyznaczamy wszystkie wyrazy tego ciągu i rysujemy wykres.

$$\begin{cases} a_1 = -4 \\ a_2 = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 2 = 0 \\ a_3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2 \\ a_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3 \\ a_5 = \frac{1}{2} \cdot 3 + 2 = 3\frac{1}{2} \\ a_6 = \frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} + 2 = 3\frac{3}{4} \end{cases}$$

Krok 2: Szkicujemy wykres:



Odpowiedź:



Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne naszkicowanie wykresu ciągu (a_n) .

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie wszystkich wyrazów ciągu (a_n) .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 199. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wiemy, że $a_5 = -5$, $S_5 = -20$.

Krok 2: Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu (a_n) , korzystając ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego: $-20 = \frac{a_1 + (-5)}{2} \cdot 5$.

Krok 3: Obliczamy: $a_1 - 5 = -8$, stąd $a_1 = -3$.

Odpowiedź:

$$a_1 = -3$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie pierwszego wyrazu ciągu (a_n) : $a_1 = -3$.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia pierwszego wyrazu ciągu (a_n) .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 200. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zakładamy, że istnieje wyraz ciągu (a_n) , który jest równy zero.

Krok 2: Zapisujemy warunek: $(n+5)(3n-10)=0$.

Krok 3: Rozwiązujemy równania: $n+5=0$ lub $3n-10=0$.

Krok 4: Stąd: $n=-5$ lub $n=3\frac{1}{3}$.

Krok 5: Otrzymane liczby -5 i $3\frac{1}{3}$ nie spełniają warunków zadania, ponieważ n jest numerem wyrazu ciągu (jest liczbą naturalną dodatnią). Przyjęte założenie jest więc błędne. Stąd wnioskujemy, że żaden wyraz ciągu (a_n) nie jest równy zero.

Odpowiedź:

Zakładamy, że istnieje wyraz ciągu (a_n) , który jest równy zero.

$$(n+5)(3n-10)=0$$

$$n+5=0 \text{ lub } 3n-10=0$$

$$\text{Stąd: } n=-5 \text{ lub } n=3\frac{1}{3}$$

Otrzymane liczby -5 i $3\frac{1}{3}$ nie spełniają warunków zadania, ponieważ n jest numerem wyrazu ciągu (jest liczbą naturalną dodatnią). Przyjęte założenie jest więc błędne. Stąd wnioskujemy, że żaden wyraz ciągu (a_n) nie jest równy zero.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne uzasadnienie, że żaden wyraz ciągu (a_n) nie jest równy zero.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wyrazu ciągu (a_n) , który jest równy zero.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 201. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy wyraz poprzedzający n -ty wyraz ciągu:

$$a_{n-1} = (n-1)^2 - (n-1) - 7.$$

Krok 2: Przekształcamy ten zapis do najprostszej postaci:

$$a_{n-1} = n^2 - 2n + 1 - n + 1 - 7 = n^2 - 3n - 5.$$

Krok 3: Zapisujemy warunek zadania: $a_n - a_{n-1} = 30$.

Krok 4: Otrzymujemy: $n^2 - n - 7 - (n^2 - 3n - 5) = 30$.

Krok 5: Stąd: $2n - 2 = 30$, czyli $n = 16$.

Krok 6: Obliczamy $a_{16} = 16^2 - 16 - 7 = 233$.

Odpowiedź:

Odpowiedź: $a_{16} = 233$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda wyrazu ciągu, który jest większy od poprzedniego o 30, i prawidłowe obliczenie jego wartości: $a_{16} = 233$.

1 pkt – zapisanie różnicy dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) w postaci $a_n - a_{n-1} = n^2 - n - 7 - (n^2 - 3n - 5)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 202. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wiemy, że $a_1 = -4$ oraz $r = 3$.

Krok 2: Ze wzoru na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego mamy:

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot (-4) = 3 - 4n + 4 = 7 - 4n$$

Krok 3: Zatem wzór ogólny ma postać: $a_n = 7 - 4n$.

Krok 4: Wyznaczamy dziesiąty wyraz ciągu (a_n) :

$$a_{10} = 7 - 4 \cdot 10 = 7 - 40 = -33$$

Krok 5: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: CE.

Odpowiedź:

CE

Zasady oceniania:

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: C i E.

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: C albo E.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 203. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wiemy, że $a_1 = 3$, $a_4 = 15$.

Krok 2: Wyznaczamy różnicę r ze wzoru na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego:

$$15 = 3 + (4 - 1) \cdot r$$

$$15 = 3 + 3 \cdot r, \text{ stąd } r = 4$$

Krok 3: Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego:

$$S_{20} = \frac{2 \cdot 3 + (20 - 1) \cdot 4}{2} \cdot 20 = \frac{6 + 19 \cdot 4}{2} \cdot 20 = 820$$

Odpowiedź:

$$r = 4$$

$$S_{20} = \frac{2 \cdot 3 + (20 - 1) \cdot 4}{2} \cdot 20 = \frac{6 + 19 \cdot 4}{2} \cdot 20 = 820$$

Zasady oceniania:

2 pkt – prawidłowe obliczenie sumy dwudziestu początkowych wyrazów danego ciągu: $S_{20} = 820$.

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie różnicy danego ciągu arytmetycznego: $r = 4$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 204. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Aby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że różnica dwóch kolejnych wyrazów $a_{n+1} - a_n$ jest stałą i nie zależy od n .

Krok 2: Wyznaczamy wzór ogólny na $n + 1$ wyraz ciągu:

$$a_{n+1} = 7 - 3(n + 1) = 7 - 3n - 3 = 4 - 3n \text{ dla } n \geq 1$$

Krok 3: Obliczamy różnicę kolejnych dwóch wyrazów ciągu (a_n) :

$$a_{n+1} - a_n = 4 - 3n - (7 - 3n) = 4 - 3n - 7 + 3n = -3 \text{ dla każdego } n \geq 1$$

Krok 4: To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = -3$.

Odpowiedź:

$$a_{n+1} = 7 - 3(n + 1) = 7 - 3n - 3 = 4 - 3n \text{ dla } n \geq 1$$

$$a_{n+1} - a_n = 4 - 3n - (7 - 3n) = 4 - 3n - 7 + 3n = -3 \text{ dla każdego } n \geq 1$$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = -3$.

Zasady oceniania:

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu: przekształcenie różnicy dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) do postaci $a_{n+1} - a_n = -3$ oraz zapisanie, że różnica dwóch kolejnych wyrazów $a_{n+1} - a_n$ jest stałą i nie zależy od n .

1 pkt – wyznaczenie różnicy dwóch kolejnych wyrazów ciągu (a_n) : $a_{n+1} - a_n = 4 - 3n - (7 - 3n)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 205. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: A. Ułamek $\frac{2}{n+1}$ jest zawsze dodatni, ponieważ dla $n \geq 1$ licznik i mianownik tego ułamka są liczbami dodatnimi. Zdanie A jest prawdziwe.

Krok 2: B. Badamy znak różnicy: $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{2n+2-2n-4}{(n+2)(n+1)} = \frac{-2}{(n+2)(n+1)}$

Ułamek $\frac{-2}{(n+2)(n+1)}$ jest liczbą ujemną, ponieważ licznik ułamka jest liczbą ujemną, a mianownik dla $n \geq 1$ jest liczbą dodatnią.

Stąd wnioskujemy, że ciąg (a_n) jest malejący. Zdanie B jest prawdziwe.

Krok 3: C. Wyznaczamy wyrazy a_2 , a_5 i a_9 :

$$a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_5 = \frac{2}{5+1} = \frac{1}{3}$$

$$a_9 = \frac{2}{9+1} = \frac{1}{5}$$

Krok 4: Obliczamy sumę: $a_2 + a_5 + a_9 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}$

Krok 6: Liczba $1\frac{1}{5} \in (1, 2)$. Zdanie C jest prawdziwe.

Krok 7: D. Wyznaczamy dziesiąty i setny wyraz ciągu:

$$a_{10} = \frac{2}{10+1} = \frac{2}{11}$$

$$a_{100} = \frac{2}{100+1} = \frac{2}{101}$$

Krok 8: Obliczamy iloraz: $\frac{a_{10}}{a_{100}} = \frac{2}{11} : \frac{2}{101} = \frac{101}{11} \neq 10$.

Krok 9: Zdanie D jest fałszywe.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 206. 0-4 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Obliczamy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$.

Krok 2: Zapisujemy wyraz a_{n+1} : $a_{n+1} = 3 + 2(n+1) = 5 + 2n$.

Krok 3: a) Wyznaczamy różnicę $a_{n+1} - a_n$: $a_{n+1} - a_n = 5 + 2n - (3 + 2n)$.

Stąd: $a_{n+1} - a_n = 2$, czyli: $a_{n+1} = 3 + a_n$.

Krok 4: Zapisujemy wzór rekurencyjny: $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 3 + a_n \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

Krok 5: b) Wyznaczamy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5+2n}{3+2n}$.

Stąd: $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{5+2n}{3+2n}$.

Krok 6: Zapisujemy wzór rekurencyjny: $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{5+2n}{3+2n} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$

Odpowiedź:

Odpowiedzi krok po kroku

$$a_{n+1} - a_n = 5 + 2n - (3 + 2n)$$

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{5+2n}{3+2n} \text{ dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawna metoda rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) z różnicy $a_{n+1} - a_n$ oraz poprawne zapisanie wzoru i poprawna metoda rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oraz poprawne zapisanie wzoru.

3 pkt – poprawna metoda rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) z różnicy $a_{n+1} - a_n$ oraz poprawne zapisanie wzoru albo

poprawna metoda rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oraz poprawne zapisanie wzoru.

2 pkt – poprawna metoda rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) z różnicy $a_{n+1} - a_n$ i poprawna metoda rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1 pkt – poprawna metoda rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) z różnicy $a_{n+1} - a_n$ albo

poprawna metoda rekurencyjnego określenia ciągu (a_n) z ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 207. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wiemy, że $a_5 = -\frac{32}{243}$, $a_2 = \frac{4}{9}$.

Krok 2: Wyznaczamy pierwszy wyraz a_1 oraz iloraz q ze wzoru na wyraz ogólny ciągu geometrycznego:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4, a_2 = a_1 \cdot q$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^4 = -\frac{32}{243} \\ a_1 \cdot q = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{9} \cdot q^3 = -\frac{32}{243} \\ a_1 \cdot q = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q^3 = -\frac{8}{27} \\ a_1 \cdot q = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\text{Stąd: } q = -\frac{2}{3} \text{ i } a_1 = -\frac{2}{3}$$

Krok 3: Ze wzoru na wyraz ogólny ciągu geometrycznego mamy:

$$a_n = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

Krok 4: Zatem wzór ogólny ma postać: $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

Odpowiedź:

$$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie wzoru ciągu (a_n) : $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wzoru ciągu (a_n) .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 208. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy kilka początkowych wyrazów ciągu.

$$a_1 = 2, a_2 = 2^3, a_3 = (2^3)^3, a_4 = (2^9)^3, a_5 = (2^{27})^3, a_6 = (2^{81})^3, \dots$$

Krok 2: Wyrazy ciągu możemy zapisać:

$$a_1 = 2^1, a_2 = 2^3, a_3 = 2^9, a_4 = 2^{27}, a_5 = 2^{81}, a_6 = 2^{243}, \dots$$

Krok 3: Zauważamy, że wykładnik jest potęgą liczby 3. Wobec tego zapisujemy:

$$a_1 = 2^{3^0}, a_2 = 2^{3^1}, a_3 = 2^{3^2}, a_4 = 2^{3^3}, a_5 = 2^{3^4}, a_6 = 2^{3^5}, \dots$$

Krok 4: Dodatkowo zauważamy, że wykładnik liczby 3 jest o jeden mniejszy od numeru wyrazu ciągu. Możemy więc zapisać wzór ogólny: $a_n = 2^{3^{n-1}}$.

Odpowiedź:

$$a_n = 2^{3^{n-1}}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie wzoru ciągu (a_n) : $a_n = 2^{3^{n-1}}$ $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wzoru ciągu (a_n) .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 209. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wiemy, że $q = 2$.

Krok 2: Zapisujemy warunki zadania w postaci równania:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 6$$

Krok 3: Ponieważ $a_2 = 2a_1$, więc:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2a_1} = 6$$

$$\frac{2}{2a_1} + \frac{1}{2a_1} = 6$$

$$\frac{3}{2a_1} = 6$$

$$\text{Stąd: } a_1 = \frac{1}{4}$$

Krok 4: Wyznaczamy ogólny wzór ciągu (a_n) :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} = 2^{-2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-3}$$

Krok 5: Zatem wzór ogólny ma postać: $a_n = 2^{n-3}$.

Krok 6: Określamy poprawność zdań: FF.

Odpowiedź:

FF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 210. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Ciąg o wyrazach $5, m, m + 30$ jest geometryczny, gdy spełniony jest warunek $m^2 = 5 \cdot (m + 30)$.**Krok 2:** Wyznaczamy wartość m :

$$m^2 = 5 \cdot (m + 30)$$

$$m^2 = 5m + 150$$

$$m^2 - 5m - 150 = 0$$

$$\Delta = 625, \sqrt{\Delta} = 25$$

$$m_1 = \frac{5-25}{2} = -10, m_2 = \frac{5+25}{2} = 15$$

Krok 3: Jeżeli $m = -10$, to ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.Jeżeli $m = 15$, to ciąg (a_n) jest rosnący.**Odpowiedź:**

$$m = 15$$

Zasady oceniania:**2 pkt** – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie parametru m .**1 pkt** – poprawne zapisanie warunku.**0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.**Zadanie 211. 0-2 pkt****Rozwiązanie:****Krok 1:** Wiemy, że $a_3 = 48, a_6 = 384$.**Krok 2:** Wyznaczamy iloraz q ze wzoru na wyraz ogólny ciągu geometrycznego:

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \text{ oraz } a_6 = a_1 \cdot q^5$$

$$\begin{cases} 48 = a_1 \cdot q^2 \\ 384 = a_1 \cdot q^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{48}{q^2} \\ 384 = \frac{48}{q^2} \cdot q^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{48}{q^2} \\ 48 \cdot q^3 = 384 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{48}{q^2} \\ q^3 = 8 \end{cases}$$

Krok 3: Zatem $q = 2$.**Odpowiedź:**

$$2$$

Zasady oceniania:**2 pkt** – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie ilorazu ciągu (a_n) : $q = 2$.**1 pkt** – poprawna metoda wyznaczenia ilorazu ciągu (a_n) .**0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 212. 0-3 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Zapisujemy warunki zadania w postaci układu równań:

$$\begin{cases} a+b+c=14 \\ a \cdot b \cdot c=64 \end{cases}$$

Krok 2: Ponieważ a, b, c są wyrazami ciągu (a_n) , czyli $b = a \cdot q, c = a \cdot q^2$.**Krok 3:** Zatem:

$$\begin{cases} a + a \cdot q + a \cdot q^2 = 14 \\ a \cdot a \cdot q \cdot a \cdot q^2 = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(1+q+q^2) = 14 \\ a^3 \cdot q^3 = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(1+q+q^2) = 14 \\ (a \cdot q)^3 = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(1+q+q^2) = 14 \\ a \cdot q = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(1+q+q^2) = 14 \\ a = \frac{4}{q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{q} \cdot (1+q+q^2) = 14 \\ a = \frac{4}{q} \end{cases}$$

Krok 4: Zatem:

$$4 \cdot (1+q+q^2) = 14q$$

$$4q^2 - 10q + 4 = 0$$

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

$$\Delta = 9, \sqrt{\Delta} = 3$$

$$q_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{5+3}{4} = 2$$

Krok 5: Wyznaczamy wartości a, b, c : $(a = 8, b = 4, c = 2)$ lub $(a = 2, b = 4, c = 8)$ **Odpowiedź:** $(a = 8, b = 4, c = 2)$ lub $(a = 2, b = 4, c = 8)$ **Zasady oceniania:****3 pkt** – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie wartości a, b, c : $(a = 8, b = 4, c = 2)$ lub $(a = 2, b = 4, c = 8)$.**2 pkt** – prawidłowe wyznaczenie ilorazu z układu równań: $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = 2$.**1 pkt** – zapisanie warunków zadania w postaci układu równań:
$$\begin{cases} a + a \cdot q + a \cdot q^2 = 14 \\ a \cdot a \cdot q \cdot a \cdot q^2 = 64 \end{cases}$$
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.**Zadanie 213. 0-3 pkt****Rozwiązanie:****Krok 1:** Ciąg o wyrazach 5, a , 11 jest arytmetyczny, więc $a = \frac{5+11}{2} = 8$.**Krok 2:** Ciąg o wyrazach a , 24, b jest geometryczny, więc $24^2 = a \cdot b$.**Krok 3:** Ponieważ $a = 8$, zatem $24^2 = 8 \cdot b$. Stąd $b = 72$.

Krok 4: Ciąg o wyrazach 24, b , c również jest geometryczny, więc $b^2 = 24 \cdot c$.

Krok 5: Ponieważ $b = 72$, zatem $72^2 = 24 \cdot c$. Stąd $c = 216$.

Krok 6: Zatem $a = 8$, $b = 72$, $c = 216$.

Odpowiedź:

$a = 8$, $b = 72$, $c = 216$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie wartości a , b , c : $a = 8$, $b = 72$, $c = 216$.

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie wartości a : $a = 8$ oraz poprawna metoda wyznaczenia wartości b i c .

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia wartości a , b i c .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 214. 0-5 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy przez a , $a + 4$, $a + 8$ długości trzech krawędzi prostopadłościanu.

Krok 2: Skoro a jest długością krawędzi, to $a > 0$.

Krok 3: Wyznaczamy wartość a , korzystając ze wzoru na pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu:

$$2[a(a+4) + (a+4)(a+8) + a(a+8)] = 184$$

$$a^2 + 4a + a^2 + 8a + 4a + 32 + a^2 + 8a = 92$$

$$3a^2 + 24a - 60 = 0$$

$$a^2 + 8a - 20 = 0$$

$$\Delta = 144, \sqrt{\Delta} = 12$$

$$a_1 = \frac{-8-12}{2} = -10 \quad a_2 = \frac{-8+12}{2} = 2$$

Krok 4: Ponieważ $a > 0$, zatem długości krawędzi są równe: 2, 6, 10.

Krok 5: Obliczamy objętość prostopadłościanu:

$$V = 2 \cdot 6 \cdot 10 = 120$$

Odpowiedź:

120

Zasady oceniania:

5 pkt – poprawna metoda, prawidłowe wyznaczenie długości krawędzi: 2, 6, 10 i prawidłowe obliczenie objętości prostopadłościanu: $V = 120$.

4 pkt – poprawne rozwiązanie równania $2[a(a+4) + (a+4)(a+8) + a(a+8)] = 184$: $a_1 = -10$, $a_2 = 2$.

3 pkt – poprawne zapisanie równania $2[a(a+4) + (a+4)(a+8) + a(a+8)] = 184$.

2 pkt – poprawne zapisanie długości krawędzi prostopadłościanu: a , $a + 4$, $a + 8$ oraz zapisanie warunku $a > 0$.

1 pkt – prawidłowe zapisanie długości krawędzi prostopadłościanu: a , $a + 4$, $a + 8$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 215. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Aby sprawdzić, czy ciąg jest geometryczny, należy wykazać, że iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stałą i nie zależy od n .

Krok 2: Wyznaczamy wzór ogólny na $n + 1$ wyraz ciągu:

$$a_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}} \text{ dla } n \geq 1$$

Krok 3: Obliczamy iloraz kolejnych dwóch wyrazów ciągu (a_n) :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2} = \frac{1}{3} \text{ dla każdego } n \geq 1$$

Krok 4: To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{3}$.

Odpowiedź:

$$a_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}} \text{ dla } n \geq 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2} = \frac{1}{3} \text{ dla każdego } n \geq 1$$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{3}$.

Zasady oceniania:

2 pkt – przeprowadzenie pełnego sprawdzenia.

1 pkt – poprawna metoda.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 216. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy pierwsze dwa wyrazy a_1, a_2 ciągu (a_n) :

$$a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = (3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2) - 1 = 12 - 4 - 1 = 7$$

Krok 2: Wyznaczamy różnicę r ciągu (a_n) :

$$r = a_2 - a_1 = 7 - 1 = 6$$

Krok 3: Ze wzoru na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego mamy:

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 6 = 1 + 6n - 6 = 6n - 5$$

Krok 4: Zatem wzór ogólny ma postać: $a_n = 6n - 5$.

Odpowiedź:

$$a_n = 6n - 5$$

Zasady oceniania:

3 pkt – prawidłowe obliczenie różnicy ciągu (a_n) : $r = 6$ oraz wyznaczenie wzoru ogólnego tego ciągu: $a_n = 6n - 5$.

2 pkt – prawidłowe obliczenie drugiego wyrazu ciągu (a_n) : $a_2 = 7$.

1 pkt – prawidłowe obliczenie pierwszego wyrazu ciągu (a_n) : $a_1 = 1$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 217. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Aby udowodnić, że ciąg jest arytmetyczny, należy wykazać, że różnica dwóch kolejnych wyrazów $a_{n+1} - a_n$ jest stałą i nie zależy od n . Wyznaczamy wzór ogólny na $n+1$ wyraz ciągu:

$$a_{n+1} = \log_2(3 \cdot 2^{n+1}) \text{ dla } n \geq 1.$$

Krok 2: Obliczamy różnicę kolejnych dwóch wyrazów ciągu (a_n) :

$$a_{n+1} - a_n = \log_2(3 \cdot 2^{n+1}) - \log_2(3 \cdot 2^n) = \log_2 \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \log_2 2 = 1 \text{ dla każdego } n \geq 1$$

Krok 3: To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 1$.

Krok 4: Wyznaczamy pierwszy wyraz a_1 ciągu (a_n) :

$$a_1 = \log_2(3 \cdot 2^1) = \log_2 6$$

Krok 5: Zatem $a_1 = \log_2 6$, $r = 1$.

Odpowiedź:

$$a_{n+1} = \log_2(3 \cdot 2^{n+1}) \text{ dla } n \geq 1$$

$$a_{n+1} - a_n = \log_2(3 \cdot 2^{n+1}) - \log_2(3 \cdot 2^n) = \log_2 \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \log_2 2 = 1 \text{ dla każdego } n \geq 1$$

To oznacza, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $r = 1$.

$$a_1 = \log_2 6, r = 1$$

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawna metoda i prawidłowe przeprowadzenie dowodu i obliczenie pierwszego wyrazu oraz różnicy: $a_1 = \log_2 6$, $r = 1$.

3 pkt – prawidłowe przeprowadzenie dowodu i poprawne obliczenie pierwszego wyrazu lub różnicy.

2 pkt – prawidłowe przeprowadzenie dowodu i poprawna metoda obliczenia pierwszego wyrazu oraz różnicy.

1 pkt – poprawna metoda przeprowadzenia dowodu.

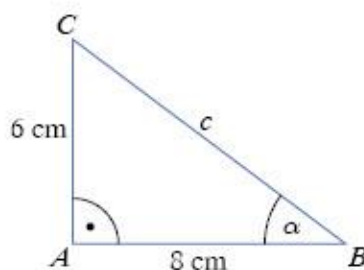
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

7. Trygonometria

Zadanie 218. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Wypisujemy dane: $|AC| = 6 \text{ cm}$, $|AB| = 8 \text{ cm}$.

Krok 3: Przeciwprostokątną trójkąta ABC oznaczamy jako c , a miarę najmniejszego kąta – jako α .

Krok 4: Obliczamy długość przeciwprostokątnej z twierdzenia Pitagorasa:

$$c^2 = 6^2 + 8^2$$

$$c^2 = 100$$

Krok 4: Ponieważ c jest długością boku trójkąta, więc $c = 10 \text{ cm}$.

Krok 5: Wyznaczamy sinus kąta α :

$$\text{Krok 6: } \sin \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Krok 7: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

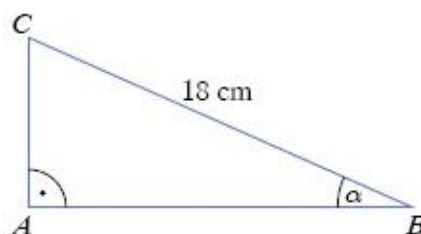
Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 219. 0-1 pkt

Rozwiązanie:



Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:

Krok 2: Wypisujemy dane: $|BC| = 18 \text{ cm}$, $\cos \alpha = 0,35$.

Krok 3: Oznaczamy miarę kąta ABC jako α .

Krok 4: Obliczamy długość przyprostokątnej:

Krok 5: Obliczamy:

$$\cos \alpha = \frac{|AB|}{18}$$

$$\frac{|AB|}{18} = 0,35$$

$$|AB| = 6,3 \text{ (cm)}$$

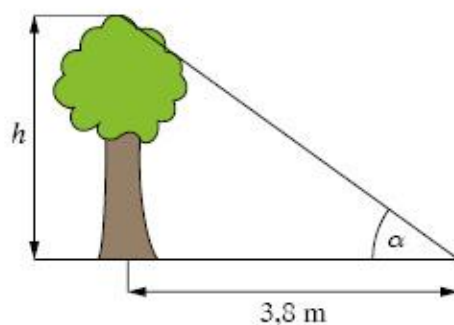
Krok 6: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 220. 0-3 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykonujemy rysunek pomocniczy:**Krok 2:** Wypisujemy dane: długość cienia – $3,8 \text{ m}$, $\alpha = 68^\circ$.**Krok 3:** Oznaczamy wysokość drzewa jako h .**Krok 4:** Obliczamy wysokość drzewa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{3,8}$$

Krok 5: Odczytujemy z tablic trygonometrycznych $\operatorname{tg} 68^\circ$.

$$\text{Zatem } \frac{h}{3,8} = 2,47, \text{ stąd } h \approx 9,39 \text{ (m).}$$

Odpowiedź:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{3,8}$$

$$\text{Zatem } \frac{h}{3,8} = 2,47, \text{ stąd } h \approx 9,39 \text{ (m).}$$

Zasady oceniania:2 pkt – poprawne wyznaczenie wysokości drzewa ($9,39 \text{ m}$).1 pkt – zapisanie poprawnej zależności pozwalającej na wyznaczenie wysokości drzewa ($\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{3,8}$, $\frac{h}{3,8} = 2,47$).

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 221. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Obliczamy wartość $\cos 63^\circ$, korzystając ze związku: $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.**Krok 2:** $\cos 63^\circ = \sin(90^\circ - 63^\circ) = \sin 27^\circ = 0,4540$ **Odpowiedź:**

$$\cos 63^\circ = \sin(90^\circ - 63^\circ) = \sin 27^\circ = 0,4540$$

Zasady oceniania:2 pkt – poprawne obliczenie wartości $\cos 63^\circ = 0,4540$.

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru redukcyjnego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 222. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Podstawiamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ i wyznaczamy $\cos \alpha$.

Krok 2: Otrzymujemy: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{2} \sin \alpha \mid : \sin \alpha$.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

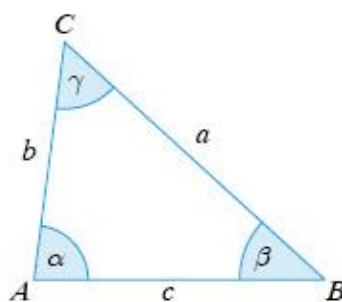
Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 223. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Obliczamy pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \angle CAB$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15$$

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

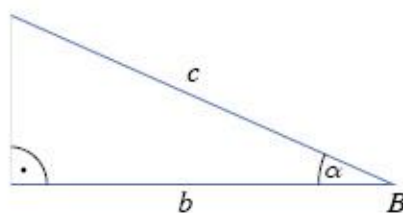
Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 224. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Wypisujemy dane: $c = 9$, $b = 3\sqrt{5}$.

Odpowiedzi krok po kroku

Krok 3: Obliczamy $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Krok 4: Wyznaczamy wartość przybliżoną $\cos \alpha$: $\cos \alpha \approx 0,7454$.

Krok 5: Odczytujemy z tablic trygonometrycznych miarę kąta α :

$$\alpha \approx 42^\circ$$

$$42^\circ \in (40^\circ, 60^\circ)$$

Krok 6: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

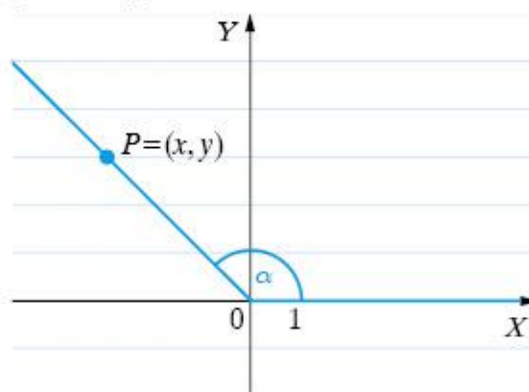
1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 225. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podpunkt A. Do ramienia końcowego należy punkt $P = (1, 3)$.



Obliczamy wartość funkcji cosinus tego kąta:

$$r = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

Krok 2: Zatem $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \neq -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Krok 3: Podpunkt B. Do ramienia końcowego należy punkt $P = (4, 2)$.

Obliczamy wartość funkcji tangens tego kąta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq 2$$

Krok 4: Podpunkt C. Do ramienia końcowego należy punkt $P = (-5, 5)$.

Obliczamy wartość funkcji sinus tego kąta:

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Krok 5: Zatem $\sin \alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Krok 6: Podpunkt D. Do ramienia końcowego należy punkt $P = (-6, 3)$.

Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ponieważ } r = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Krok 7: Zatem:

$$\sin \alpha = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Krok 8: $\cos \alpha = -\frac{6}{3\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Krok 9: Wybieramy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 226. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Odczytujemy z tablic dokładne wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Krok 2: Obliczamy wartość wyrażenia:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (\sin 30^\circ + \cos 30^\circ)^2 - 2 \operatorname{tg} 60^\circ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2\sqrt{3} = \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2\sqrt{3} = 4 \cdot \frac{(1+\sqrt{3})^2}{4} - 2\sqrt{3} = \\ &= 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3} = 4 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Krok 3: Wartość wyrażenia jest liczbą całkowitą.

Odpowiedź:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (\sin 30^\circ + \cos 30^\circ)^2 - 2 \operatorname{tg} 60^\circ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2\sqrt{3} = 4 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2\sqrt{3} = 4 \cdot \frac{(1+\sqrt{3})^2}{4} - 2\sqrt{3} = \\ &= 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3} = 4 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne i pełne uzasadnienie, że wartość tego wyrażenia jest liczbą całkowitą.

1 pkt – poprawna metoda uzasadnienia, że wartość tego wyrażenia jest liczbą całkowitą

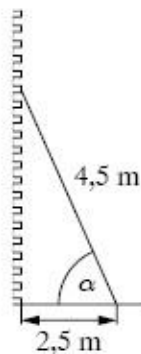
(zapisanie wyrażenia w postaci $4 \cdot (\sin 30^\circ + \cos 30^\circ)^2 - 2 \operatorname{tg} 60^\circ = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2\sqrt{3}$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 227. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Oznaczamy miarę kąta jako α .

Krok 3: Obliczamy miarę kąta α :

$$\cos \alpha = \frac{2,5}{4,5} \approx 0,5556, \text{ stąd } \alpha \approx 56^\circ$$

Krok 4: Zapisujemy odpowiedź: $\cos \alpha = \frac{2,5}{4,5} \approx 0,5556$, stąd $\alpha \approx 56^\circ$.

$$\cos \alpha = \frac{2,5}{4,5} \approx 0,5556, \text{ stąd } \alpha \approx 56^\circ$$

Odpowiedź:

$$\cos \alpha = \frac{2,5}{4,5} \approx 0,5556, \text{ stąd } \alpha \approx 56^\circ.$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie miary kąta jaki tworzy drabina z poziomem ziemi (56°).

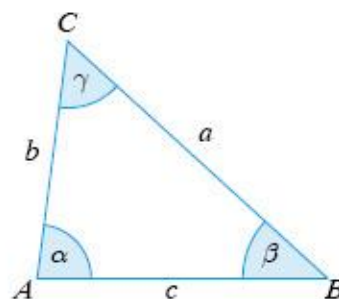
1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia miary kąta, jaki tworzy drabina z poziomem ziemi.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 228. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy i zapisujemy wzór na pole trójkąta ABC.



$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \angle CAB$$

Krok 2: Otrzymujemy: $27 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot |AC| \cdot \sin 60^\circ$. Stąd: $27 = 2\sqrt{3} \cdot |AC|$.

Krok 3: Wobec tego: $|AC| = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Krok 4: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 229. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy z tzw. jedynki trygonometrycznej wartość $\sin \alpha$. Otrzymujemy: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

Krok 2: Otrzymujemy: $\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2$, stąd: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Krok 3: Obliczamy pole równoległoboku jako dwa razy większe od pola trójkąta: $P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$.

Krok 4: Otrzymujemy: $P = 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = 3\sqrt{21}$.

Krok 5: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

Odpowiedzi krok po kroku

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 230. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Korzystamy z wzoru na pole rombu: $P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin \alpha$.

Krok 2: Otrzymujemy: $\frac{25\sqrt{2}}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, stąd: $a = 5$.

Krok 3: Obliczamy obwód rombu: $L = 4 \cdot 5 = 20$.

Krok 4: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 231. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego oznaczamy jako α, β .

Krok 2: W trójkącie prostokątnym sinus jednego kąta ostrego jest równy cosinusowi kąta drugiego.

$\sin \beta = \cos \alpha$

Krok 3: Skoro $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$, zatem $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Krok 4: Wybieramy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 232. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Do ramienia końcowego należy punkt $P = (-2, 3)$.

Krok 2: Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α :

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Krok 3: Zatem:

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Krok 4: Punkt 1. Obliczamy sumę sinusa i cosinusa kąta α :

Odpowiedzi krok po kroku

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13} + \left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

Krok 5: Punkt 2. Wyznaczamy odwrotność cosinusa kąta α :

$$\cos \alpha = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{13}}{13}} = -\frac{13}{2\sqrt{13}} = -\frac{\sqrt{13}}{2}$$

Krok 6: Poprawnie oceniamy prawdziwość zdań: PF.

Odpowiedź:

PF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 233. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Odczytujemy z tablic dokładne wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

Krok 2: Obliczamy wartość wyrażenia:

$$\sin 60^\circ + \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \in \mathbb{N}$$

Krok 3: Wartość wyrażenia $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$ jest liczbą naturalną.

Odpowiedź:

$$\sin 60^\circ + \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \in \mathbb{N}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – uzasadnienie, że wartość wyrażenia $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$ jest liczbą naturalną.

1 pkt – zapisanie wartości tego wyrażenia w postaci $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 234. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podnosimy obie strony równości $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ do kwadratu.

Krok 2: Otrzymujemy: $\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

Krok 3: Po wykorzystaniu tzw. jedynki trygonometrycznej mamy: $1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$. Jest to wyrażenie zapisane w punkcie 2.

Krok 4: Po przekształceniu go otrzymujemy: $2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{2}$, czyli $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Krok 5: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B2.

Odpowiedź:

B2

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 235. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Najmniejszy kąt trójkąta znajduje się naprzeciw najkrótszego boku. Wobec tego zapisujemy twierdzenie cosinusów:

$$5^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha.$$

Krok 2: Stąd: $96 \cos \alpha = 36 + 64 - 25$, czyli $\cos \alpha = \frac{75}{96} = \frac{25}{32}$.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

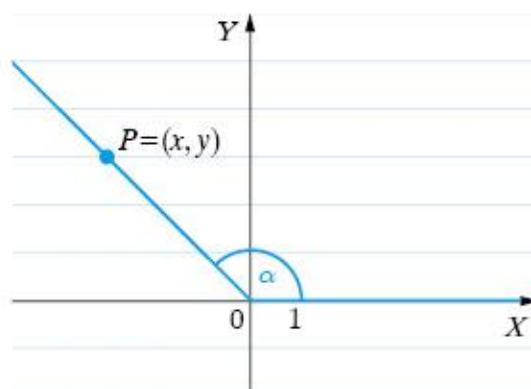
1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 236. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Do ramienia końcowego należy punkt $P = (-4, 6)$.



Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Krok 2: $r = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Krok 3: Zatem:

$$\sin \alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{2\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Krok 4: Zapisujemy odpowiedź: $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$.

Odpowiedź:

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wartości wszystkich trzech funkcji trygonometrycznych ($\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2}$).

1 pkt – poprawne obliczenie wartości dwóch funkcji trygonometrycznych albo

poprawne obliczenie jednej wartości jednej funkcji trygonometrycznej oraz poprawna metoda obliczenia pozostałych dwóch funkcji trygonometrycznych

albo

poprawna metoda obliczenia wartości wszystkich funkcji.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 237. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podstawiamy w równaniu: $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ za $\alpha = 15^\circ$ i $2\alpha = 30^\circ$.

Krok 2: Otrzymujemy: $\cos 30^\circ = 2\cos^2 15^\circ - 1$ i wyznaczamy $\cos 15^\circ$.

Krok 3: Otrzymujemy: $\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2 15^\circ - 1$.

Krok 4: Obliczamy: $\cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$, stąd: $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\sqrt{2}}{2}$.

Odpowiedź:

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\sqrt{2}}{2}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wartości $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\sqrt{2}}{2}$.

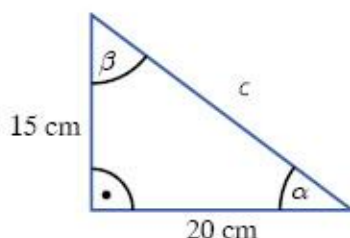
1 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości $\cos 15^\circ$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 238. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Oznaczamy jako c długość przeciwprostokątnej, a miary kątów ostrych jako α, β .

Krok 3: Obliczamy długość przeciwprostokątnej z twierdzenia Pitagorasa:

$$c^2 = 15^2 + 20^2$$

$$c^2 = 625$$

Krok 4: Ponieważ c jest długością boku trójkąta, zatem $c = 25$ (cm).

Krok 5: Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kątów:

$$\sin \alpha = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \beta = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}, \cos \beta = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} \beta = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$

Odpowiedź:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \beta = \frac{4}{5}, \cos \beta = \frac{3}{5}, \operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla obu kątów ostrych tego trójkąta.

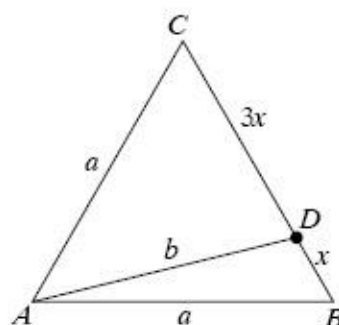
1 pkt – poprawne wyznaczenie wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla jednego kąta ostrego tego trójkąta albo

poprawna metoda wyznaczenia wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla obu kątów ostrych tego trójkąta.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 239. 0-1 pkt

Rozwiązanie:



Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy. Trójkąt ABC jest równoboczny, więc miara kąta β wynosi 60° . Ponadto obwód trójkąta ABC jest równy 12. Stąd bok a ma długość 4.

Krok 2: Skoro $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{1}{2}$, to długości tych odcinków wynoszą odpowiednio: $|BD| = 1$ i $|DC| = 2$.

Krok 3: Zdanie 1. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABD zapisujemy: $b^2 = a^2 + x^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot \cos 60^\circ$

Krok 4: Otrzymujemy: $b^2 = 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$, stąd $b = \sqrt{13}$.

Krok 5: Określamy prawdziwość zdania: Zdanie prawdziwe.

Krok 6: Zdanie 2. Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABD zapisujemy: $\frac{b}{\sin 60^\circ} = 2R$.

Krok 7: Otrzymujemy: $R = \frac{\sqrt{13}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$.

Krok 8: Określamy prawdziwość zdania: Zdanie fałszywe.

Odpowiedź:

PF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 240. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Korzystamy ze wzoru na $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. Otrzymujemy: $\frac{3}{2} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Krok 2: Wyznaczamy: $\sin \alpha = \frac{3}{2} \cos \alpha$ i wstawiamy do wzoru $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

Krok 3: Otrzymujemy: $\frac{\frac{3}{2} \cos \alpha - \cos \alpha}{\frac{3}{2} \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \cos \alpha}{\frac{5}{2} \cos \alpha} = \frac{1}{5}$.

Krok 4: Zapisujemy odpowiedź: $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{5}$.

Odpowiedź:

$$\frac{\frac{3}{2} \cos \alpha - \cos \alpha}{\frac{3}{2} \cos \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \cos \alpha}{\frac{5}{2} \cos \alpha} = \frac{1}{5}$$

Odpowiedzi krok po kroku

Zasady oceniania:

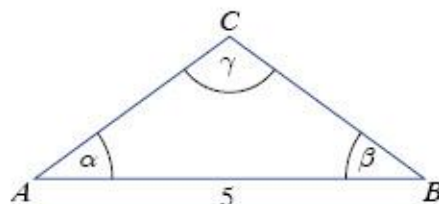
2 pkt – poprawne obliczenie wartości wyrażenia $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{5}$.

1 pkt – poprawna metoda obliczenia wartości wyrażenia.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 241. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Obliczamy miarę kąta γ . Otrzymujemy: $\gamma = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$.

Krok 3: Z twierdzenia sinusów zapisujemy: $2R = \frac{c}{\sin \gamma}$, gdzie $\sin \gamma = \sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$.

Stąd: $2R = \frac{10}{0,98} = 10,2$.

Odpowiedź:

Średnica okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 10,2.

Zasady oceniania:

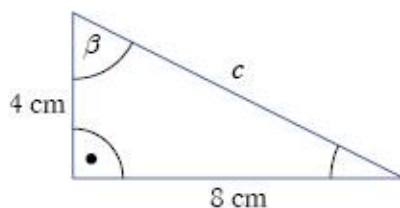
2 pkt – poprawne obliczenie średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie (10,2).

1 pkt – poprawna metoda obliczenia średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 242. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Oznaczamy długość przeciwprostokątnej jako c , miarę większego z kątów ostrych jako β .

Krok 3: Obliczamy długość przeciwprostokątnej z twierdzenia Pitagorasa:

$$c^2 = 4^2 + 8^2$$

$$c^2 = 80, \text{ stąd } c = 4\sqrt{5} \text{ lub } c = -4\sqrt{5}$$

Krok 4: Ponieważ c jest długością boku trójkąta, zatem $c = 4\sqrt{5}$.

Krok 5: Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta β :

$$\sin \beta = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} \beta = \frac{8}{4} = 2.$$

Odpowiedź:

$$\sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \operatorname{tg} \beta = 2$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla obu kątów ostrych tego trójkąta.

1 pkt – poprawne wyznaczenie wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla jednego kąta ostrego tego trójkąta.

albo

poprawna metoda wyznaczenia wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla obu kątów ostrych tego trójkąta.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 243. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Korzystając z twierdzenia sinusów, zapisujemy: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Krok 2: Otrzymujemy: $\frac{6}{\sin 135^\circ} = \frac{3}{\sin \gamma}$, gdzie $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Krok 3: $\sin \gamma = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,35$, stąd $\gamma \approx 21^\circ$.

Krok 4: Obliczamy miarę kąta β . Otrzymujemy: $\beta = 180^\circ - (135^\circ + 21^\circ) \approx 24^\circ$.

Odpowiedź:

Miary pozostałych kątów tego trójkąta to: $\gamma \approx 21^\circ$ i $\beta \approx 24^\circ$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie miar kątów tego trójkąta $\gamma = 21^\circ$ i $\beta = 24^\circ$.

2 pkt – poprawne wyznaczenie miary jednego kąta tego trójkąta.

1 pkt – poprawna metoda obliczenia miary jednego kąta tego trójkąta (zapisanie zależności $\frac{6}{\sin 135^\circ} = \frac{3}{\sin \gamma}$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 244. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Korzystając z twierdzenia cosinusów, zapisujemy: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$.

Krok 2: Otrzymujemy: $c^2 = 6^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ$.

Krok 3: Stąd: $c^2 = 12$ i $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Krok 4: Obwód trójkąta: $L = 6 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6 + 6\sqrt{3}$.

Odpowiedź:

Obwód tego trójkąta wynosi $6 + 6\sqrt{3}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie obwodu trójkąta ($6 + 6\sqrt{3}$).

2 pkt – poprawne obliczenie długości trzeciego boku trójkąta ($c = 2\sqrt{3}$).

1 pkt – poprawna metoda obliczenia trzeciego boku trójkąta (zapisanie zależności $c^2 = 6^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 245. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy przybliżoną miarę kąta ostrego, odczytując z tablic trygonometrycznych:

Krok 2: a) $7 \sin \alpha = 3$

$\sin \alpha = \frac{3}{7} \approx 0,4286$, stąd $\alpha \approx 25^\circ$

Krok 3: b) $\frac{1}{3} \cos \alpha = \frac{2}{9}$

Odpowiedzi krok po kroku

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \approx 0,6667, \text{ stąd } \alpha \approx 48^\circ$$

Krok 4: c) $2\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{10}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1,5811, \text{ stąd } \alpha \approx 58^\circ$$

Odpowiedź:

$$\alpha \approx 25^\circ, \alpha \approx 48^\circ, \alpha \approx 58^\circ$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie miary wszystkich trzech kątów ($\alpha \approx 25^\circ, \alpha \approx 48^\circ, \alpha \approx 58^\circ$).

2 pkt – poprawne obliczenie miary dwóch kątów.

1 pkt – poprawne obliczenie miary jednego kąta.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 246. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy długość boku AB jako a , długość boku BC jako c .

Krok 2: Wyznaczamy długości boków AB i BC z funkcji trygonometrycznych: $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{20}$.

Krok 3: Ponieważ $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, zatem $\frac{a}{20} = \sqrt{3}$, stąd $a = 20\sqrt{3}$.

$$\cos 60^\circ = \frac{20}{c}$$

Krok 4: Ponieważ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, zatem $\frac{20}{c} = \frac{1}{2}$, stąd $c = 40$.

Krok 5: Obliczamy obwód trójkąta ABC : $20\sqrt{3} + 20 + 40 = 60 + 20\sqrt{3}$.

Odpowiedź:

$$20\sqrt{3} + 20 + 40 = 60 + 20\sqrt{3}$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie obwodu trójkąta ($60 + 20\sqrt{3}$).

2 pkt – poprawne wyznaczenie długości drugiej przyprostokątnej oraz długości przeciwprostokątnej ($20, 20\sqrt{3}$).

1 pkt – poprawne wyznaczenie długości drugiej przyprostokątnej
albo

poprawne wyznaczenie długości przeciwprostokątnej.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 247. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Do końcowego ramienia kąta α należy punkt $P = (-5, 10)$.

Krok 2: Obliczamy wartości funkcji cosinus kąta α :

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 10^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Krok 3: Zatem $\cos \alpha = -\frac{5}{5\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Krok 4: Do końcowego ramienia kąta β należy punkt $P = (2, 4)$.

Krok 5: Obliczamy wartości funkcji cosinus kąta β :

$$r = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Krok 6: Zatem $\sin \beta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Krok 7: Obliczamy wartość wyrażenia:

$$2\cos\alpha + 3\sin\beta = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 3 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Odpowiedź:

$$2\cos\alpha + 3\sin\beta = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 3 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie wartości wyrażenia: $2\cos\alpha + 3\sin\beta = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

2 pkt – poprawne obliczenie wartości: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ oraz poprawne obliczenie wartości: $\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

1 pkt – poprawne obliczenie wartości: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

albo

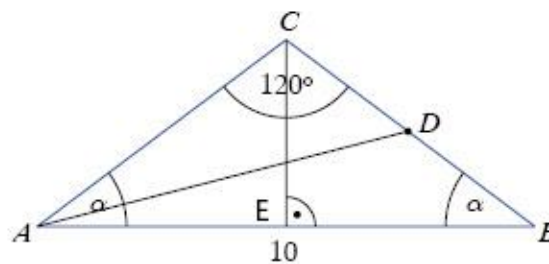
poprawne obliczenie wartości $\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 248. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Sporządzamy rysunek pomocniczy. Odcinek AD jest szukaną środkową, a odcinek CE – wysokością poprowadzoną na podstawę.



Krok 2: Wyznaczamy miarę kąta α . Otrzymujemy: $\alpha = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

Krok 3: Z trójkąta EBC , korzystając z funkcji trygonometrycznych, wyznaczamy długość odcinka CB : $\cos 30^\circ = \frac{|EB|}{|CB|}$.

Krok 4: Otrzymujemy: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{|CB|}$. Stąd: $|CB| = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Krok 5: Wyznaczamy długość odcinka BD . Otrzymujemy: $|BD| = \frac{1}{2}|CB| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Krok 6: Z trójkąta ABD , korzystając z twierdzenia cosinusów, wyznaczamy długość środkowej AD :

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BD| \cdot \cos 30^\circ$$

Krok 7: Otrzymujemy: $|AD|^2 = 10^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, stąd: $|AD|^2 = \frac{175}{3}$.

Krok 8: Wobec tego: $|AD| = \frac{5\sqrt{7}}{3}$.

Odpowiedź:

Długość środkowej AD wynosi $\frac{5\sqrt{7}}{3}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie długości środkowej $|AD| = \frac{5\sqrt{7}}{3}$.

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia długości środkowej AD (zapisanie twierdzenia cosinusów w postaci

$$|AD|^2 = 10^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1 pkt – poprawne obliczenie długości odcinka CB .

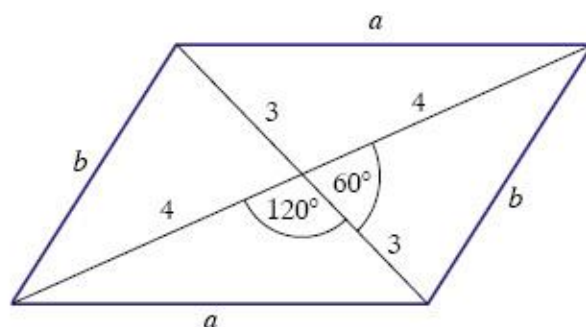
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 249. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy. Pamiętamy, że przekątne w równoległoboku dzielą się na połowy (stąd długości 3 i 4).

Krok 2: Wyznaczamy miarę kąta rozwartego, jaki tworzą przekątne: $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



Krok 3: Korzystając z twierdzenia cosinusów, wyznaczamy długość krótszego boku równoległoboku:

$$b^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ, \text{ stąd } b^2 = 13, \text{ czyli } b = \sqrt{13}.$$

Krok 4: Korzystając z twierdzenia cosinusów, wyznaczamy długość dłuższego boku równoległoboku:

$$a^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ, \text{ gdzie } \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ.$$

Krok 5: Stąd $a^2 = 37$, czyli $a = \sqrt{37}$.

Odpowiedź:

Długości boków równoległoboku wynoszą $\sqrt{37}$ i $\sqrt{13}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne wyznaczenie długości boków równoległoboku ($\sqrt{13}$, $\sqrt{37}$).

2 pkt – poprawne wyznaczenie długości jednego z boków równoległoboku albo

poprawna metoda wyznaczenia długości obu boków równoległoboku.

1 pkt – poprawne metoda wyznaczenia długości jednego z boków równoległoboku.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 250. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy oznaczenia: a – podstawa trójkąta, b – ramiona trójkąta, α – miara kąta między ramionami trójkąta.

Krok 2: Ze wzoru na pole trójkąta: $P = \frac{1}{2}b^2 \cdot \sin \alpha$ zapisujemy: $16 = \frac{1}{2}b^2 \cdot \sin 30^\circ$. Otrzymujemy: $b^2 = 64$, czyli $b = 8$.

Krok 3: Z twierdzenia cosinusów wyznaczamy podstawę trójkąta: $a^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ$. Otrzymujemy: $a^2 = 128 - 64\sqrt{3}$. Stąd $a = 8\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Krok 4: Obliczmy obwód trójkąta z wzoru: $L = a + 2b$. Otrzymujemy: $L = 8(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2)$.

Odpowiedź:

Obwód tego trójkąta wynosi $8(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2)$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie obwodu trójkąta ($8(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2)$).

2 pkt – poprawne obliczenie długości podstawy trójkąta $(8(\sqrt{2}-\sqrt{3}+2))$.

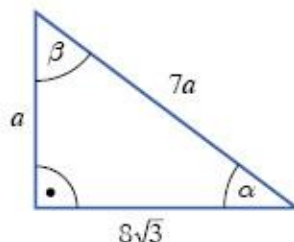
1 pkt – poprawne obliczenie długości ramion tego trójkąta (8).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 251. 0-5 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Oznaczamy długość jednej przyprostokątnej jako a , przeciwprostokątnej jako $7a$, miary kątów ostrych jako α, β .

Krok 3: Obliczamy długość przeciwprostokątnej i przeciwprostokątnej z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + (8\sqrt{3})^2 = (7a)^2$$

$$a^2 + 192 = 49a^2$$

$$a^2 = 4$$

Krok 4: Ponieważ a jest długością boku trójkąta, zatem $a = 2$, $7a = 14$.

Krok 5: Obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kątów:

$$\sin \alpha = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \quad \cos \alpha = \frac{8\sqrt{3}}{14} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\sin \beta = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad \cos \beta = \frac{1}{7} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Odpowiedź:

$$\sin \alpha = \frac{1}{7} \approx 0,1429, \text{ stąd } \alpha \approx 8^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{1}{7} \approx 0,1429, \text{ stąd } \beta \approx 82^\circ$$

Zasady oceniania:

5 pkt – obliczenie funkcji sinus, cosinus i tangens dla obu kątów ostrych tego trójkąta prostokątnego oraz poprawne obliczenie miar tych kątów.

4 pkt – obliczenie funkcji sinus, cosinus i tangens dla obu kątów ostrych tego trójkąta prostokątnego oraz poprawne obliczenie miary jednego kąta.

3 pkt – obliczenie funkcji sinus, cosinus i tangens dla obu kątów ostrych tego trójkąta prostokątnego.

2 pkt – obliczenie funkcji sinus, cosinus i tangens dla jednego kąta ostrego tego trójkąta prostokątnego.

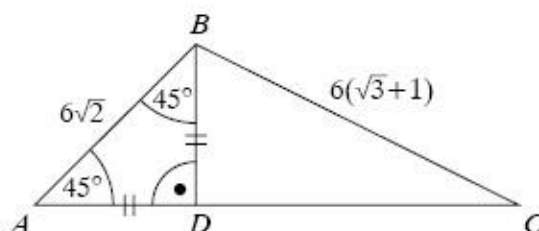
1 pkt – poprawna metoda obliczenia funkcji sinus, cosinus i tangens dla jednego kąta ostrego tego trójkąta prostokątnego.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 252. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Odcinek BD jest wysokością, a więc trójkąt ABD jest prostokątny równoramienny. Wobec tego miary kątów BAD i ABD wynoszą po 45° . Ponadto promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie przeciwprostokąt-

nej. Wobec tego: $R_{ABD} = \frac{1}{2}|AB|$. Stąd: $R_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Krok 3: Korzystając z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABC , wyznaczamy długość promienia okręgu opisanego na tym trójką-

cie: $2R_{ABC} = \frac{|BC|}{\sin 45^\circ}$. Otrzymujemy: $R_{ABC} = \frac{6(\sqrt{3}+1)}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.

Krok 4: Obliczamy różnicę długości promieni $R_{ABC} - R_{ABD}$. Otrzymujemy: $R_{ABC} - R_{ABD} = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{6}$

Odpowiedź:

Różnica długości tych promieni wynosi $3\sqrt{6}$.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne obliczenie różnicy długości promieni okręgu opisanego na trójkącie ABC i okręgu opisanego na trójkącie ABD ($3\sqrt{6}$).

3 pkt – poprawne wyznaczenie długości jednego z promieni oraz poprawna metoda wyznaczenia długości drugiego promienia okręgu.

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia długości obu promieni okręgów opisanych na trójkącie ABC i ABD .

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia długości promienia okręgu opisanego na jednym z trójkątów.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

8. Planimetria

Zadanie 253. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Kąt AOC jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany ABC .

Krok 2: Zatem $|\angle AOC| = 2 \cdot 142^\circ = 284^\circ$

Krok 3: Kąt wpisany ADC opiera się na łuku ABC .

Zatem: $|\angle ADC| = (360^\circ - 284^\circ) : 2 = 38^\circ$

Odpowiedź:

$$|\angle ADC| = (360^\circ - 284^\circ) : 2 = 38^\circ$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie miar obu kątów $|\angle AOC| = 284^\circ$ i $|\angle ADC| = 38^\circ$.

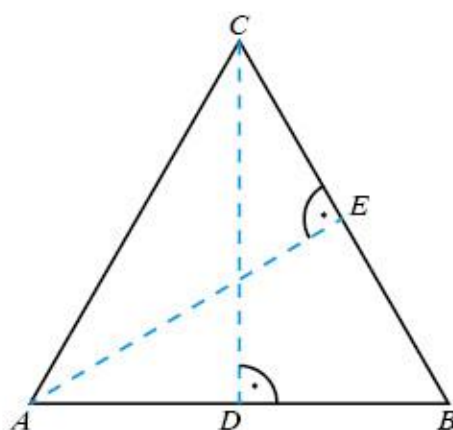
1 pkt – poprawne wyznaczenie miar jednego z kątów $|\angle AOC| = 284^\circ$ lub $|\angle ADC| = 38^\circ$.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 254. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Wypisujemy dane: $|AB| = 6\sqrt{3}$ cm, $|CD| = 6$ cm. Trójkąt DBC jest prostokątny.

Krok 3: Wyznaczamy długość ramienia BC z twierdzenia Pitagorasa.

$$|BC|^2 = |CD|^2 + |DB|^2$$

Krok 4: Zauważamy, że $|DB| = \frac{1}{2}|AB| = 3\sqrt{3}$.

$$\text{Zatem: } |BC|^2 = 6^2 + (3\sqrt{3})^2$$

$$|BC|^2 = 36 + 27, \text{ stąd } |BC| = 3\sqrt{7} \text{ cm}$$

Krok 5: Wyznaczamy pole trójkąta ABC na dwa sposoby i je porównujemy:

$$P = \frac{|AB| \cdot |DC|}{2} \text{ oraz } P = \frac{|BC| \cdot |AE|}{2}$$

$$\frac{|AB| \cdot |DC|}{2} = \frac{|BC| \cdot |AE|}{2}$$

$$\text{Krok 6: } 6\sqrt{3} \cdot 6 = 3\sqrt{7} \cdot |AE|, \text{ stąd } |AE| = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6}{3\sqrt{7}} = \frac{12\sqrt{21}}{7} \text{ (cm)}$$

Krok 7: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 255. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Kąt zawarty między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności ma miarę równą mierze kąta wpisanego opartego na łuku wyznaczonym przez końce tej cięciwy.

Krok 2: Zatem $|\angle ACB| = 26^\circ$.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

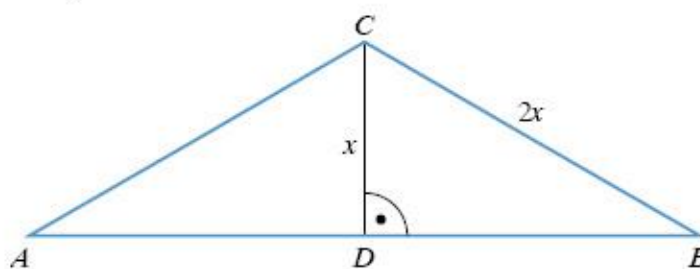
Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 256. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Wysokość trójkąta równoramiennego ABC oznaczamy jako x , długość ramienia jako $2x$.

Krok 3: Trójkąt DBC jest prostokątny.

Krok 4: Ponieważ $|DB| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (cm), zatem z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$(2x)^2 = x^2 + 3^2$$

$$3x^2 = 9, \text{ stąd } x = \sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Krok 5: Obliczamy pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Odpowiedź:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie wartości pola $P = 3\sqrt{3}$.

1 pkt – poprawne obliczenie wartości $x = \sqrt{3}$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 257. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Oznaczamy pole trójkąta jako P , długość ramienia jako a , miarę kąta rozwartego jako α .

Krok 2: Wypisujemy dane: $P = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $a = 10\sqrt{2} \text{ cm}$.

Krok 3: Wyznaczamy miarę kąta ze wzoru na pole trójkąta równoramiennego:

$$P = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin \alpha$$

$$50\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot (10\sqrt{2})^2 \cdot \sin \alpha$$

$$50\sqrt{3} = 100 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{50\sqrt{3}}{100} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Krok 4: Wiemy, że $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.

Krok 5: Zatem $\alpha = 60^\circ$ lub $\alpha = 120^\circ$.

Odpowiedź:

Odpowiedź: $\alpha = 120^\circ$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie miary kąta rozwartego $\alpha = 120^\circ$.

1 pkt – poprawne zastosowanie wzoru na pole trójkąta $50\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot (10\sqrt{2})^2 \cdot \sin \alpha$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 258. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy przekątne równoległoboku jako d_1 , d_2 , a miarę kąta między nimi jako γ .

Krok 2: Wypisujemy dane: $d_1 = 10 \text{ cm}$, $d_2 = 12 \text{ cm}$, $\gamma = 30^\circ$.

Krok 3: Obliczamy pole równoległoboku:

$$P = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \sin 30^\circ = 30 \text{ cm}^2$$

Odpowiedź:

$$P = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \sin 30^\circ = 30 \text{ cm}^2$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie pola $P = 30 \text{ cm}^2$.

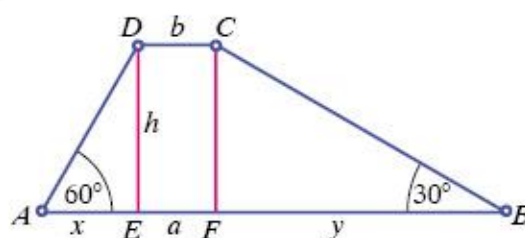
1 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole $P = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 259. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Oznaczamy: długości podstaw trapezu $ABCD$ jako a , b , wysokość jako h , długość odcinka AE jako x , długość odcinka FB

Odpowiedzi krok po kroku

jako y .

Krok 3: Wypisujemy dane: $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $|\angle DAE| = 60^\circ$, $|\angle ABC| = 30^\circ$.

Krok 4: Wyznaczamy sumę długości odcinków AE i FB :

$$x + y = a - b = 5 - 2 = 3 \text{ (cm)}$$

Krok 5: Trójkąty AED i BFC są prostokątne.

Zatem:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x} \text{ i } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{y},$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \text{ i } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{y}$$

$$\text{Czyli: } x = \frac{h}{\sqrt{3}} \text{ i } y = \frac{3h}{\sqrt{3}}$$

Krok 6: Po podstawieniu powyższych zależności do równania $x + y = 3$ otrzymujemy:

$$\frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{3h}{\sqrt{3}} = 3$$

$$\frac{4h}{\sqrt{3}} = 3, \text{ stąd } h = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ (cm)}$$

Odpowiedź:

$$h = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ (cm)}$$

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne obliczenie wysokości trapezu $h = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm.

3 pkt – poprawne wyznaczenie $x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ i $y = \frac{3h}{\sqrt{3}}$.

2 pkt – poprawne zapisanie proporcji $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ i $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{y}$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie sumy długości odcinków $x + y = a - b = 3$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 260. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wypisujemy dane: $|AB| = 2$ cm + 3 cm = 5 cm, $|CB| = 3$ cm.

Krok 2: Prosta AC jest styczna do okręgu o środku w punkcie B .

Krok 3: Zatem kąt ACB jest prosty, a więc trójkąt ABC jest prostokątny.

Krok 4: Obliczamy długość boku AC z twierdzenia Pitagorasa:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

$$|AC|^2 + 3^2 = 5^2, \text{ stąd } |AC| = 4 \text{ cm}$$

Krok 5: Obliczamy obwód trójkąta ABC : $3 + 4 + 5 = 12$ cm.

Odpowiedź:

12 cm

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wyznaczenie obwodu trójkąta 12 cm.

1 pkt – poprawne obliczenie długości boku AC z twierdzenia Pitagorasa $|AC| = 4$ cm.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 261. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Promień okręgu zewnętrznego pierścienia kołowego oznaczamy jako R , promienia wewnętrznego – jako r .

Krok 2: Wyznaczamy promienie okręgów zewnętrznego i wewnętrznego ze wzoru na długość okręgu $l = 2\pi r$:

$$40\pi = 2\pi R, \text{ stąd } R = 20 \text{ (cm)}$$

$$16\pi = 2\pi r, \text{ stąd } r = 8 \text{ (cm)}$$

Krok 3: Obliczamy pole pierścienia kołowego:

$$P = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

$$P = \pi(20^2 - 8^2) = 336\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Odpowiedź:

$$P = 336\pi \text{ cm}^2.$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie pola pierścienia $P = 336\pi \text{ cm}^2$.

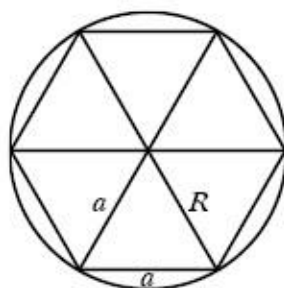
1 pkt – poprawne wyznaczenie promieni okręgów $R = 20 \text{ cm}$ i $r = 8 \text{ cm}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 262. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Długość boku sześciokąta foremnego oznaczamy jako a , promień okręgu opisanego na tym sześciokącie – jako R .

Krok 3: Średnica okręgu jest dwa razy dłuższa od promienia, zatem $R = 8 : 2 = 4 \text{ (cm)}$.

Krok 4: Długość boku sześciokąta jest taka sama, jak promień okręgu opisanego na tym sześciokącie, więc $a = R$.

Krok 5: Obliczamy pole sześciokąta:

$$P = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{3 \cdot 4^2 \sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Odpowiedź:

$$P = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie pola sześciokąta $P = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

2 pkt – poprawne obliczenie długości boku sześciokąta $a = 4 \text{ cm}$.

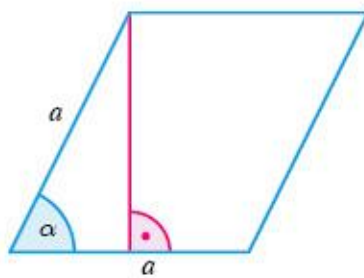
1 pkt – poprawna analiza zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 263. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Oznaczamy długość boku rombu jako a , miarę kąta ostrego jako α .

Krok 3: Wypisujemy dane: $P = 24 \text{ cm}^2$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Krok 4: Wyznaczamy wartość sinusa kąta ostrego α ze wzoru na jedynkę trygonometryczną:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{9}, \text{ stąd } \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ lub } \sin \alpha = -\frac{1}{3}$$

Krok 5: Ponieważ α jest kątem ostrym, więc $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

Krok 6: Obliczamy długość boku rombu ze wzoru na pole rombu:

$$P = a^2 \sin \alpha$$

$$24 = a^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$a^2 = 72$, stąd $a = 6\sqrt{2}$ (cm), ponieważ długość boku jest liczbą dodatnią

Krok 7: Obliczamy obwód rombu: $4 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$ (cm).

Krok 8: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 264. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Kąt BDC jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany CAB .

Zatem $|\angle CAB| = 30^\circ$.

Krok 2: Kąt wpisany ABC opiera się na średnicy, więc ma miarę 90° . Zatem trójkąt ABC jest prostokątny.

Krok 3: Wyznaczamy miarę kąta ACB :

$$|\angle ACB| = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

Krok 4: Określamy prawdziwość zdań: FF.

Odpowiedź:

FF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 265. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Odpowiedzi krok po kroku

Krok 1: Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ABC oznaczamy jako a , b , długość przeciwprostokątnej – jako c , wysokość opuszczoną na przeciwprostokątną – jako h , gdzie $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Krok 2: Wyznaczamy pole trójkąta ABC na dwa sposoby i je porównujemy:

$$P = \frac{a \cdot b}{2} \text{ oraz } P = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$$

$$a \cdot b = \frac{8\sqrt{5}}{5}c$$

Krok 3: Trójkąt ABC jest prostokątny, więc z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Krok 4: Ponieważ $a = 2b$, stąd $c^2 = (2b)^2 + b^2$, czyli $c = b\sqrt{5}$.

Zatem:

$$2b \cdot b = \frac{8\sqrt{5}}{5} \cdot b\sqrt{5}$$

$$2b^2 = 8 \cdot b$$

$$2b = 8, \text{ stąd } b = 4$$

Krok 5: Wyznaczamy a oraz c :

$$a = 8 \text{ oraz } c = b\sqrt{5}$$

Krok 6: Obliczamy pole trójkąta ABC :

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

Krok 7: Określamy prawdziwość zdań: PP.

Odpowiedź:

PP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 266. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Długość boku kwadratu $ABCD$ oznaczamy jako a , przekątną – jako d .

Krok 2: Wyznaczamy związek między bokiem a przekątną kwadratu z twierdzenia Pitagorasa:

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$

Krok 3: Wiemy, że $d = a + \sqrt{2}$. Zatem:

$$a\sqrt{2} = a + \sqrt{2}$$

$$a(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = 2 + \sqrt{2}$$

Krok 4: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

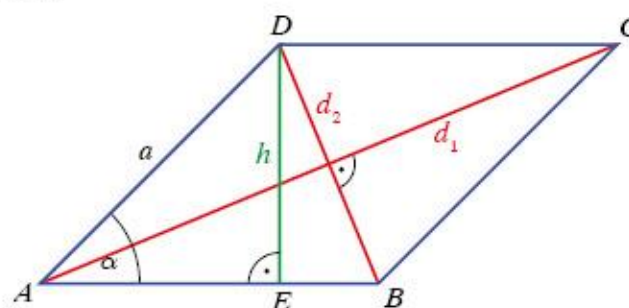
Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 267. 0-4 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykonujemy rysunek pomocniczy:**Krok 2:** Długość boku rombu $ABCD$ oznaczamy jako a , przekątne rombu – jako d_1, d_2 .**Krok 3:** Obliczamy długość przekątnej ze wzoru na pole rombu:

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Krok 4: Wiemy, że $d_1 = 8$ cm oraz $P = 24$ cm².**Krok 5:** Zatem:

$$24 = \frac{8 \cdot d_2}{2}, \text{ stąd } d_2 = 6$$

Krok 6: W rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym i dzielą się na połowy.**Krok 7:** Wyznaczamy długość boku rombu z twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 = \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2, \text{ stąd } a = 5 \text{ cm}$$

Krok 8: Wyznaczamy wysokość rombu $ABCD$ ze wzoru na pole rombu:

$$P = a \cdot h$$

$$24 = 5 \cdot h, \text{ stąd } h = 4,8 \text{ (cm)}$$

Krok 9: Trójkąt AED jest prostokątny, zatem z definicji sinusa otrzymujemy:

$$\sin \alpha = \frac{h}{a} = \frac{4,8}{5} = \frac{24}{25}$$

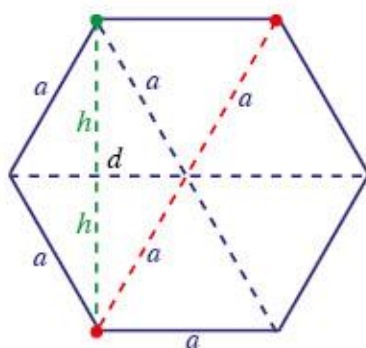
Odpowiedź:

$$\sin \alpha = \frac{24}{25}$$

Zasady oceniania:4 pkt – poprawne wyznaczenie sinusa kąta ostrego $\sin \alpha = \frac{24}{25}$.3 pkt – poprawne wyznaczenie długości boku $a = 5$ cm i wysokości rombu $h = 4,8$ cm.2 pkt – poprawne wyznaczenie długości boku $a = 5$ cm lub wysokości rombu $h = 4,8$ cm.1 pkt – poprawne wyznaczenie długości drugiej przekątnej rombu $d_2 = 6$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 268. 0-3 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykonujemy rysunek pomocniczy:



Krok 2: Długość boku sześciokąta foremnego oznaczamy jako a , krótszą przekątną jako d .

Krok 3: Krótsza przekątna sześciokąta jest dwa razy dłuższa od wysokości trójkąta równobocznego o boku długości a .

$$d = 2h, \text{ stąd } h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$$

Krok 4: Obliczamy długość boku a ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \text{ stąd } a = 6(\text{cm})$$

Krok 5: Obliczamy pole sześciokąta:

$$P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{3 \cdot 6^2\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

Odpowiedź:

$$P = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie pola sześciokąta $P = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

2 pkt – poprawne obliczenie długości boku sześciokąta $a = 6 \text{ cm}$.

1 pkt – poprawne obliczenie wysokości trójkąta równobocznego $h = 3\sqrt{3} \text{ cm}$.

9. Geometria analityczna

Zadanie 269. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy współrzędne punktu A , korzystając z faktu, że punkt O jest środkiem odcinka AB , to znaczy

$$O = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Krok 2: Otrzymujemy: $\left(\frac{x_A + 5}{2}, \frac{y_A + 5}{2} \right) = (3, 2)$.

Krok 3: Stąd $A = (1, -1)$.

Krok 4: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 270. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy odległość punktu A od prostej l ze wzoru na odległość punktu od prostej:

$$d = \frac{|3 \cdot (-4) - 4 \cdot 2 + 10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Krok 2: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 271. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy współrzędne środka S oraz promień r okręgu K : $S = (1, 3)$, $r = \sqrt{5}$.

Krok 2: Wyznaczamy odległość d środka okręgu S od osi Ox : $d = 3$.

Krok 3: Zatem $r > d$, stąd okrąg K i oś Ox nie mają punktów wspólnych.

Krok 4: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 272. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Ponieważ prosta $k: y = ax + b$ jest nachylona do dodatniej półosi Ox pod kątem 60° , to $a = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

Krok 2: Podstawiamy do równania prostej $y = ax + b$ liczbę $a = \sqrt{3}$. Otrzymujemy $y = \sqrt{3}x + b$.

Krok 3: Podstawiamy współrzędne punktu $(0, 2)$ do równania prostej i wyznaczamy współczynnik b .

Krok 4: Otrzymujemy: $2 = \sqrt{3} \cdot 0 + b$, $b = 2$.

Krok 5: Zapisujemy równanie prostej: $y = \sqrt{3}x + 2$.

Krok 6: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 273. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Prostą k o równaniu ogólnym $x + y - 2 = 0$ zapisujemy w postaci kierunkowej $y = -x + 2$.

Krok 2: Zauważamy, że postać kierunkowa tej prostej jest taka sama, jak prostej n . Stąd wnioskujemy, że proste k i n pokrywają się, a więc mają nieskończenie wiele punktów wspólnych.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 274. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy współrzędne środka okręgu S : $S = (-6, 8)$.

Krok 2: Wyznaczamy odległość środka okręgu od osi Oy : $d = 6$.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 275. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Podstawiamy do równania prostej $y = ax + b$ liczbę $b = -5$. Otrzymujemy: $y = ax - 5$.

Krok 2: Podstawiamy współrzędne punktu $A = (2, -3)$ do równania prostej i wyznaczamy współczynnik a .

$$-3 = a \cdot 2 - 5, \text{ więc } a = 1.$$

Krok 3: Zapisujemy równanie prostej $y = x - 5$.

Odpowiedź:

Prosta o równaniu $y = x - 5$ ma współczynnik $b = -5$ i przechodzi przez punkt $A = (2, -3)$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie równania prostej: $y = x - 5$.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania prostej $y = ax + b$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 276. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej:

$$y = \frac{1}{7}x - 4$$

$$7y = x - 28$$

$$x - 7y - 28 = 0$$

Krok 2: Wyznaczamy odległość punktu M od prostej l ze wzoru na odległość punktu od prostej:

$$d = \frac{|1 \cdot 6 + (-7) \cdot (-1) - 28|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \frac{15}{\sqrt{50}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Odpowiedź:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie odległości punktu M od prostej l : $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie równania prostej w postaci ogólnej: $x - 7y - 12 = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 277. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Do prostej o równaniu $5x + 12y - 10 = 0$ należy punkt $A = (2, 0)$.

Krok 2: Obliczamy odległość punktu A od prostej o równaniu $10x + 24y + 19 = 0$:

$$d = \frac{|10 \cdot 2 + 24 \cdot 0 + 19|}{\sqrt{10^2 + 24^2}} = \frac{39}{\sqrt{676}} = \frac{39}{26} = \frac{3}{2}$$

Odpowiedź:

$$d = \frac{|10 \cdot 2 + 24 \cdot 0 + 19|}{\sqrt{10^2 + 24^2}} = \frac{39}{\sqrt{676}} = \frac{39}{26} = \frac{3}{2}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie odległości.

1 pkt – poprawne wyznaczenie współrzędnych punktu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 278. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Prosta o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ jest równoległa do osi Ox wówczas, gdy spełnione są warunki: $A = 0$ i $B \neq 0$.
Wobec tego zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} m^2 + 2m - 3 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases}$$

Krok 2: 1. Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16, \sqrt{\Delta} = 4$$

$$m_1 = \frac{-2-4}{2} = -3, m_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Krok 3: 2. $m - 1 \neq 0$ wówczas, gdy $m \neq 1$

Otrzymujemy, że $\begin{cases} m^2 + 2m - 3 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases}$, gdy $m = -3$.

Krok 4: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B3.

Odpowiedź:

B3

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 279. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy punktu M :

$$M = \left(\frac{-8+5}{2}, \frac{3+7}{2} \right), \text{ stąd } M = \left(-\frac{3}{2}, 5 \right)$$

Krok 2: Wyznaczamy obraz punktu M w symetrii względem początku układu współrzędnych: $M' = \left(\frac{3}{2}, -5 \right)$.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 280. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Korzystamy z warunku: Dwie proste o równaniach ogólnych: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wówczas, gdy spełniony jest warunek: $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

Krok 2: Sprawdzamy warunek dla każdej pary prostych.

A. $2x - y + 2 = 0$ i $2x - y = 0$, sprawdzenie $2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 3 \neq 0$ – proste nie są prostopadłe.

B. $2x - y + 2 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$, sprawdzenie $2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 4 \neq 0$ – proste nie są prostopadłe.

C. $2x - y + 2 = 0$ i $x + 2y + 7 = 0$, sprawdzenie $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$ – proste są prostopadłe.

D. $2x - y + 2 = 0$ i $2x + y - 1 = 0$, sprawdzenie $2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 3 \neq 0$ – proste nie są prostopadłe.

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 281. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Punkt 1. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 6 = x - 4 \\ y = -x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Krok 2: Wspólny punkt tych prostych ma współrzędne (5, 1) – zdanie prawdziwe.

Krok 3: Punkt 2. Wiemy, że proste przecinają się, bo wyznaczyliśmy współrzędne punktu przecięcia. Sprawdzamy, czy proste są prostopadłe. Ponieważ proste zapisane są w postaci kierunkowej, to korzystamy z warunku: $a_1 \cdot a_2 = -1$. Sprawdzamy: $1 \cdot (-1) = -1$. Proste są prostopadłe.

Krok 4: Zdanie fałszywe.

Krok 5: Określamy prawdziwość zdań: PF.

Odpowiedź:

PF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 282. 0-3 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Okrąg o promieniu $r = 3$ jest styczny do obu osi układu współrzędnych, wobec tego środek okręgu może leżeć na prostej $y = x$ lub $y = -x$. Oznacza to, że współrzędne środka okręgu są albo liczbami równymi, albo przeciwnymi.

Krok 2: Skoro odległość punktu będącego środkiem tego okręgu od każdej osi wynosi 3, to są następujące cztery punkty spełniające ten warunek: (3, 3), (-3, -3), (-3, 3) i (3, -3).

Krok 3: Zapisujemy równania okręgów o promieniu 3, których środkiem jest każdy z tych punktów:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9, (x+3)^2 + (y+3)^2 = 9, (x+3)^2 + (y-3)^2 = 9, (x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$$

Odpowiedź:

Są cztery okręgi spełniające warunki zadania: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$, $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$, $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$ i $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie liczby wszystkich okręgów stycznych do obu osi układu współrzędnych i ich równań: 4, $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$, $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$, $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$, $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

2 pkt – poprawne wyznaczenie trzech równań okręgów stycznych do obu osi układu współrzędnych.

1 pkt – poprawne wyznaczenia jednego równania okręgów stycznych do obu osi układu współrzędnych: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ albo

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9,$$

albo

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9,$$

albo

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 283. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy współrzędne punktu B : $B = (2, -34)$.

Krok 2: Wyznaczamy współrzędne punktu C : $C = (-2, -34)$.

Krok 3: Punkt C jest symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych.

Odpowiedź:

$C = (-2, -34)$, punkt C jest symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne sformułowanie odpowiedzi: punkt C jest symetryczny do punktu A względem początku układu współrzędnych.

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C = (-2, -34)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 284. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Korzystamy z równania ogólnej prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ w postaci:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0.$$

Krok 2: Otrzymujemy: $(y - (-2))(1 - (-1)) - (6 - (-2))(x - (-1)) = 0$

$$(y + 2)(1 + 1) - (6 + 2)(x + 1) = 0$$

$$2(y + 2) - 8(x + 1) = 0$$

$$2y + 4 - 8x - 8 = 0$$

$$-8x + 2y - 4 = 0$$

$$-4x + y - 2 = 0$$

Krok 3: Wybieramy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 285. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zdanie 1. Okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ określony jest równaniem $x^2 + y^2 = r^2$, gdzie $r > 0$. Ale ten okrąg nie będzie styczny do osi Ox . Wobec tego punkt $(0, 0)$ nie może być środkiem okręgu.

Zdanie prawdziwe.

Krok 2: Zdanie 2. Dla okręgu: $x^2 + (y - 4)^2 = 16$ zapiszemy: $S = (0, 4)$ – leży na osi Oy , $r = 4$, okrąg jest styczny do osi Ox – warunki zadania są spełnione.

Dla okręgu: $x^2 + (y + 4)^2 = 16$ zapiszemy: $S = (0, -4)$ – leży na osi Oy , $r = 4$, okrąg jest styczny do osi Ox – warunki zadania są spełnione.

Zdanie prawdziwe

Krok 3: Określamy prawdziwość zdań: PP.

Odpowiedź:

PP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 286. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Okrąg współśrodkowy z okręgiem $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 36$ ma równanie $(x+1)^2 + (y-2)^2 = r^2$.

Krok 2: Wyznaczamy promień okręgu współśrodkowego. Punkt $P = (4, -3)$ należy do okręgu, a więc jego współrzędne spełniają równanie tego okręgu. Otrzymujemy: $(4+1)^2 + (-3-2)^2 = r^2$.

Krok 3: Wyznaczamy promień okręgu: $r^2 = 5^2 + (-5)^2$. Stąd: $r^2 = 50$.

Krok 4: Zapisujemy równanie okręgu: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 50$.

Krok 5: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 287. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy równanie prostej AB , gdzie $A = (1, 3)$, $B = (5, 5)$. Korzystamy z równania ogólnej prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ w postaci:

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0.$$

Krok 2: Otrzymujemy:

$$(y - 3)(5 - 1) - (5 - 3)(x - 1) = 0$$

$$4(y - 3) - 2(x - 1) = 0$$

$$4y - 12 - 2x + 2 = 0$$

$$-2x + 4y - 10 = 0$$

$$-x + 2y - 5 = 0$$

Krok 3: Punkt $C = (m, 0)$ należy do prostej AB , więc współrzędne tego punktu spełniają równanie prostej.

$$-m + 2 \cdot 0 - 5 = 0, \text{ więc } m = -5$$

Odpowiedź:

Punkty są współliniowe dla $m = -5$.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie wartości m : $m = -5$.

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie równania prostej AB : $-x + 2y - 5 = 0$ albo $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 288. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Zapisujemy równanie prostej / w postaci ogólnej:

$$y = 2x + 4$$

$$2x - y + 4 = 0$$

Krok 2: Wyznaczamy wysokość h równoległoboku $KLMN$ ze wzoru na odległość punktu od prostej:

$$h = \frac{|2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

Odpowiedź:

$$3\sqrt{5}$$

Zasady oceniania:**2 pkt** – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie wysokości równoległoboku: $3\sqrt{5}$.**1 pkt** – poprawne wyznaczenie równania prostej w postaci ogólnej: $2x - y + 4 = 0$.**0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.**Zadanie 289. 0-2 pkt****Rozwiązanie:****Krok 1:** Wyznaczamy długość promienia r : $r = 4$.**Krok 2:** Wyznaczamy współrzędne środka S okręgu: $S = (-4, 3)$.**Krok 3:** Odległość punktu S od osi Ox wynosi 3, więc jest mniejsza od promienia r , więc okrąg i oś Ox mają dwa punkty wspólne.
Odległość punktu S od osi Oy wynosi 4, więc jest równa promieniowi, więc okrąg i oś Oy mają jeden punkt wspólny.**Krok 4:** Zatem okrąg o równaniu $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 16$ z osiami układu współrzędnych ma trzy punkty wspólne.**Odpowiedź:**

$$3$$

Zasady oceniania:**2 pkt** – poprawne wyznaczenie liczby punktów wspólnych okręgu z osią Ox i poprawne wyznaczenie liczby punktów wspólnych okręgu z osią Oy : 3 punkty wspólne.**1 pkt** – poprawne wyznaczenie liczby punktów wspólnych okręgu z osią Ox : 2 punkty wspólne
albopoprawne wyznaczenie liczby punktów wspólnych okręgu z osią Oy : 1 punkt wspólny.**0 pkt** – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.**Zadanie 290. 0-1 pkt****Rozwiązanie:****Krok 1:** Wyznaczamy równanie przekątnej AC (która jest też prostą AO). Korzystamy z równania ogólnego prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $O = (x_O, y_O)$ w postaci: $(y - y_A)(x_O - x_A) - (y_O - y_A)(x - x_A) = 0$

$$(y - 2)(-3 - 1) - (0 - 2)(x - 1) = 0$$

$$-4(y - 2) + 2(x - 1) = 0$$

$$-4y + 8 + 2x - 2 = 0$$

$$2x - 4y + 6 = 0, \text{ więc } y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$

Krok 2: Prosta zawierająca przekątną BD jest prostopadła do prostej AC i przechodzi przez punkt O .Obliczamy wartość współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej do prostej $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$ i zapisujemy równanie prostejprostopadłej do danej prostej. Otrzymujemy: $a_1 = -\frac{1}{a_2} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$, skąd $y = -2x + b$. Wstawiamy współrzędne punktu O : $x =$

-3 i $y = 0$, a następnie obliczamy wartość współczynnika b . Otrzymujemy $0 = -2 \cdot (-3) + b$, stąd $b = -6$. Równanie prostej to: $y = -2x - 6$.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 291. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy współrzędne środka S okręgu K : $M = (1, -5)$.

Krok 2: Wyznaczamy promień r okręgu K : $r^2 = 18$, stąd $r = 3\sqrt{2}$.

Krok 3: Odległość środka okręgu S od osi Ox jest równa 5 i jest większa od promienia okręgu r . Zatem okrąg K nie ma punktów wspólnych z osią Ox .

Krok 4: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 292. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Do wykresu funkcji f należą punkty $A = (-1, 0)$ i $B = (0, 2)$.

Krok 2: Wyznaczamy obrazy punktów A i B w symetrii względem osi Oy : $A' = (1, 0)$ i $B' = (0, 2)$.

Krok 3: Wyznaczamy równanie prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty A' i B' :

$$\begin{cases} 0 = 1 \cdot a + b \\ 2 = 0 \cdot a + b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = a + b \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Stąd: } \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Krok 4: Zatem $h(x) = -2x + 2$.

Odpowiedź:

$$h(x) = -2x + 2$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie wzoru funkcji h : $h(x) = -2x + 2$.

1 pkt – poprawne odczytanie współrzędnych punktów A i B należących do wykresu funkcji f i wyznaczenie współrzędnych ich obrazów w symetrii względem osi Oy .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 293. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Odpowiedzi krok po kroku

Krok 1: Skoro trójkąt jest ograniczony osiami układu współrzędnych i prostą, to jest to trójkąt prostokątny. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy połowie przeciwprostokątnej.

Krok 2: Wyznaczamy współrzędne końców odcinka będącego przeciwprostokątną – punktów przecięcia prostej $2x + 5y - 10 = 0$ i osi układu współrzędnych.

$$\begin{cases} 2x + 5y - 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y - 10 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ – współrzędne punktu } A$$

$$\begin{cases} 2x + 5y - 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \text{ – współrzędne punktu } B$$

Krok 3: Wiedząc, że $A = (0, 2)$ i $B = (5, 0)$, obliczamy długość boku AB : $|AB| = \sqrt{(5-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{29}$

Krok 4: Obliczamy promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątny, korzystając z wzoru: $R = \frac{1}{2}|AB|$.

Krok 5: Otrzymujemy: $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Odpowiedź:

Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie promienia okręgu: $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie współrzędnych przeciwprostokątnej trójkąta: $(0, 2)$ i $(5, 0)$.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia promienia opisanego na trójkącie.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 294. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Skoro odcinek AB jest średnicą okręgu, to środek tego odcinka jest środkiem S okręgu.

Krok 2: Wyznaczamy współrzędne środka $S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ odcinka AB : $S = \left(\frac{-7+1}{2}, \frac{4-2}{2} \right)$.

Otrzymujemy: $S = (-3, 1)$.

Krok 3: Promień okręgu jest równy połowie średnicy AB .

Krok 4: Obliczamy długość odcinka AB . Otrzymujemy: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

$|AB| = \sqrt{(1+7)^2 + (-2-4)^2}$. Stąd: $|AB| = 10$.

Krok 5: Obliczamy promień okręgu: $r = \frac{|AB|}{2}$. Stąd: $r = 5$.

Krok 6: Zapisujemy równanie okręgu o środku $S = (-3, 1)$ i promieniu $r = 5$. Otrzymujemy: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Zatem: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$

Odpowiedź:

Okrąg opisany jest równaniem $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie równania okręgu: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$.

2 pkt – poprawne wyznaczenie współrzędnych środka okręgu: $S = (-3, 1)$ i poprawne wyznaczenie promienia okręgu: $r = 5$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie współrzędnych środka okręgu: $S = (-3, 1)$

albo

poprawne wyznaczenie promienia okręgu: $r = 5$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 295. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wiedząc, że $A = (1, 3)$ i $C = (7, 5)$, obliczamy długość przekątnej AC .

$$|AC| = \sqrt{(7-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$$

Krok 2: Aby obliczyć długość przekątnej BD , obliczymy najpierw długość połowy tej przekątnej, to znaczy odcinka DO .

Krok 3: Wyznaczamy współrzędne punktu O , który jest środkiem odcinka AC , to znaczy $O = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right)$.

Krok 4: Otrzymujemy: $O = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{3+5}{2} \right) = (4, 4)$.

Krok 5: Wiedząc, że $D = (4, 11)$ i $O = (4, 4)$, obliczamy długość połowy przekątnej BD .

$$\frac{1}{2}|DB| = |DO| = \sqrt{(4-4)^2 + (4-11)^2} = \sqrt{0+49} = 7. \text{ Stąd } |DB| = 7.$$

Odpowiedź:

Długości przekątnych tego równoległoboku są równe $2\sqrt{10}$ i 7.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i poprawne wyznaczenie długości przekątnych AC i BD : $2\sqrt{10}$ i 7.

2 pkt – poprawne wyznaczenie długości przekątnej AC : $S = (-3, 1)$ i poprawne wyznaczenie współrzędnych środka odcinka AC : $O = (4, 4)$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie długości przekątnej AC : $|AC| = 2\sqrt{10}$

albo

poprawne wyznaczenie współrzędnych środka odcinka AC : $O = (4, 4)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 296. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy obrazy punktów A i B w symetrii względem osi Oy :

$$A'(-1, -5) \text{ i } B'(2, -8)$$

Krok 2: Wyznaczamy równanie prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty A' i B' :

$$\begin{cases} -5 = -a + b \\ -8 = 2a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a - b \\ -8 = 2a + b \end{cases}$$

Krok 3: Dodajemy równania stronami i otrzymujemy:

$$-3 = 3a, \text{ stąd } a = -1.$$

$$\text{Zatem: } \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases}$$

Krok 4: Prostą będącą obrazem prostej AB w symetrii względem początku układu współrzędnych opisuje równanie $y = -x - 6$.

Odpowiedź:

$$y = -x - 6$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie równania prostej będącej obrazem prostej AB w symetrii względem początku układu współrzędnych: $y = -x - 6$.

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia równania prostej przechodzącej przez punkty A' i B' .

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie współrzędnych obrazów punktów A i B w symetrii względem początku układu współrzędnych: $A' = (-1, -5)$ i $B' = (2, -8)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 297. 0-3 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Do wykresu funkcji f należą punkty $A = (0, 5)$ i $B = (5, 0)$.

Krok 2: Wyznaczamy obrazy punktów A i B w symetrii względem osi Ox : $A' = (0, -5)$ i $B' = (5, 0)$.

Krok 3: Wyznaczamy równanie prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty A' i B' :

$$\begin{cases} -5 = 0 \cdot a + b \\ 0 = 5a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -5 \\ 0 = 5a - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -5 \\ 0 = 5a - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases}$$

Zatem $h(x) = x - 5$.

Krok 4: Rozwiązujemy nierówność:

$$h(x) \geq -2$$

$$x - 5 \geq -2$$

$$x \geq 3, \text{ stąd } x \in \langle 3, \infty \rangle$$

Odpowiedź:

$$x \in \langle 3, \infty \rangle$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenia wzoru funkcji liniowej h : $h(x) = x - 5$ i poprawne rozwiązanie nierówności $h(x) \geq -2$: $x \in \langle 3, \infty \rangle$.

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenia wzoru funkcji liniowej h : $h(x) = x - 5$.

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie współrzędnych obrazów dwóch dowolnych punktów A i B należących do wykresu funkcji f w symetrii względem osi Ox .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 298. 0-3 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Skoro punkt B leży na prostej o równaniu $y = -x + 2$, to jego współrzędne możemy zapisać $B = (x_B, -x_B + 2)$.

Krok 2: Obliczamy długość odcinka AB : $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Krok 3: Otrzymujemy: $|AB| = \sqrt{(x_B - 1)^2 + (-x_B + 2 - (-2))^2} = \sqrt{(x_B - 1)^2 + (4 - x_B)^2}$.

Stąd: $|AB| = \sqrt{2x_B^2 - 10x_B + 17}$.

Krok 4: Odległość pomiędzy punktami A i B będzie najmniejsza wówczas, gdy wartość funkcji $f(x) = 2x_B^2 - 10x_B + 17$ będzie najmniejsza. Funkcja kwadratowa o współczynniku $a > 0$ przyjmuje wartość najmniejszą w wierzchołku paraboli.

Krok 5: Wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu B jako pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli: $x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$.

Krok 6: Wyznaczamy drugą współrzędną punktu B : $y_B = -2\frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{2}$.

Odpowiedź:

Współrzędne szukanego punktu to: $B = \left(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie punktu B : $B = \left(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia najmniejszej wartości funkcji $f(x) = 2x_B^2 - 10x_B + 17$.

1 pkt – poprawne zapisanie współrzędnych punktu B : $B = (x_B, -x_B + 2)$ i prawidłowe wyznaczenie długości odcinka AB : $|AB| = \sqrt{2x_B^2 - 10x_B + 17}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 299. 0-3 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Wyznaczamy współrzędne środka S okręgu: $S = (-3, 2)$.

Krok 2: Zauważamy, że punkt P należy do okręgu.

Krok 3: Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej l o równaniu $y = ax + b$ przechodzącej przez punkty S i P :

$$\begin{cases} 2 = -3 \cdot a + b \\ 0 = -6 \cdot a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = -3 \cdot a + b \\ 0 = 6 \cdot a - b \end{cases}$$

Krok 4: Dodajemy równania stronami i otrzymujemy:

$$a = \frac{2}{3}$$

Krok 5: Prosta $k: y = a_1x + b_1$ styczna do okręgu jest prostopadła do prostej l , więc $a_1 = -\frac{3}{2}$.

Krok 6: Punkt P należy do prostej k , mamy więc: $0 = -\frac{3}{2} \cdot (-6) + b_1$, stąd $b_1 = -9$.

Krok 8: Zatem $k: y = -\frac{3}{2}x - 9$.

Odpowiedź:

$$y = -\frac{3}{2}x - 9$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie równania stycznej do okręgu: $y = -\frac{3}{2}x - 9$.

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej przechodzącej przez punkty S i P : $a = \frac{2}{3}$.

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie współrzędnych środka okręgu: $S = (-3, 2)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 300. 0-4 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Aby obliczyć pole rombu, skorzystamy ze wzoru $P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$.

Krok 2: Przyjmijmy, że $d_1 = |AC|$. Wiedząc, że $A = (-1, 0)$ i $C = (7, 0)$ obliczamy długość przekątnej AC .

$$|AC| = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{8^2} = 8$$

Krok 3: Przyjmijmy, że $d_2 = |BD|$. Aby obliczyć długość przekątnej BD , obliczymy najpierw długość połowy tej przekątnej, to znaczy odcinka BO .

Wyznaczamy współrzędne punktu O , który jest środkiem odcinka AC , to znaczy: $O = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right)$.

Krok 4: Otrzymujemy: $O = \left(\frac{-1+7}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (3, 0)$.

Krok 5: Wiedząc, że $B = (3, 6)$ i $O = (3, 0)$, obliczamy długość połowy przekątnej BD .

$$\frac{1}{2}|BD| = |BO| = \sqrt{(3-3)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

Krok 6: Stąd $|DB| = 12$.

Krok 7: Obliczamy pole rombu $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$.

Odpowiedź:

Pole tego rombu jest równe 48.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia długości przekątnych i poprawne obliczenie pola rombu: $P = 48$.

3 pkt – poprawna wyznaczenie długości przekątnej AC i poprawna metoda wyznaczenia długości przekątnej BD .

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie długości przekątnej AC : $|AC| = 8$ i prawidłowe wyznaczenie współrzędnych środka przekątnej AC : $(3, 0)$.

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie długości przekątnej AC : $|AC| = 8$

albo

prawidłowe wyznaczenie współrzędnych środka przekątnej AC : $(3, 0)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 301. 0-5 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Punkt C należy do osi Ox , stąd jego współrzędne zapiszemy $C = (x_C, 0)$.

Krok 2: Przyjmijmy, że odcinek AB będzie podstawą trójkąta ABC . Obliczamy długość podstawy.

$$|AB| = \sqrt{(-2-5)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$$

Krok 3: Ze wzoru na pole trójkąta zapiszemy: $P = \frac{1}{2}|AB| \cdot h$.

Otrzymujemy: $10 = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot h$, stąd $h = 2\sqrt{2}$.

Krok 4: Wysokość h trójkąta jest odległością punktu C od podstawy. Oznacza to, że jest to odległość punktu C od prostej zawierającej podstawę AB .

Krok 5: Wyznaczamy równanie prostej AB , korzystamy z równania ogólnego prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ w postaci: $(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$.

$$(y - 1)(-2 - 5) - (2 - 1)(x - 5) = 0$$

Krok 6: Obliczamy: $-7(y - 1) - (x - 5) = 0$. Stąd $x + 7y - 12 = 0$.

Odpowiedź:

$$C_1 = (32, 0)$$

Zasady oceniania:

5 pkt – poprawna metoda, prawidłowe wyznaczenie współrzędnych punktu C : $C_1 = (32, 0)$, $C_2 = (-8, 0)$.

4 pkt – poprawna metoda wyznaczenia odciętej x_C punktu C .

3 pkt – poprawne wyznaczenie wysokości trójkąta ABC opuszczonej na bok AB : $h = 2\sqrt{2}$.

2 pkt – poprawne zapisanie współrzędnych punktu C : $C = (x_C, 0)$ i poprawne obliczenie długości odcinka AB : $5\sqrt{2}$.

1 pkt – poprawne zapisanie współrzędnych punktu C : $C = (x_C, 0)$

albo

poprawne obliczenie długości odcinka AB : $5\sqrt{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

10. Stereometria

Zadanie 302. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przekątna ściany bocznej narysowana jest kolorem niebieskim. Kolor czerwony mają przekątna graniastosłupa oraz przekątna podstawy. Żaden z zaznaczonych kątów nie jest kątem między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy.

Krok 2: Przekątna graniastosłupa narysowana jest kolorem czerwonym. Nie jest oznaczony kąt między przekątną graniastosłupa a ścianą boczną.

Krok 3: Zaznaczamy odpowiedzi: FF.

Odpowiedź:

FF

Zasady oceniania:

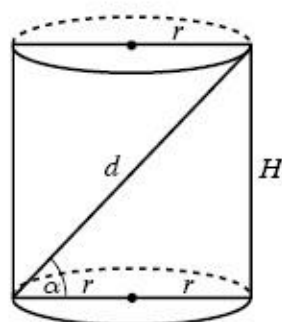
1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 303. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Z warunków zadania zapisujemy: $2r = H = 4$ cm.

Krok 3: Obliczamy pole powierzchni bocznej walca. Otrzymujemy: $P_b = 2\pi rH = \pi \cdot 4 \cdot 4 = 16\pi$ cm².

Krok 4: Obliczamy tangens kąta nachylenia przekątnej walca do płaszczyzny podstawy.

Krok 5: Otrzymujemy: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{2r} = \frac{4}{4} = 1$, stąd $\alpha = 45^\circ$.

Krok 6: Zaznaczamy: CF.

Odpowiedź:

CF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 304.

Zadanie 304.1. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zapisujemy wzór na pole powierzchni kuli K_1 oraz K_2 :

$$P_1 = 4\pi r_1^2$$

$$P_2 = 4\pi r_2^2$$

Krok 2: Zatem stosunek pól powierzchni jest równy:

$$P_1 : P_2 = 4\pi r_1^2 : 4\pi r_2^2$$

$$P_1 : P_2 = r_1^2 : r_2^2$$

Krok 3: Wiedząc, że stosunek promieni tych kul jest równy $r_1 : r_2 = 3 : 1$ zapisujemy:

$$P_1 : P_2 = 3^2 : 1^2$$

Krok 9: Zapisujemy odpowiedź: $P_1 : P_2 = 9 : 1$

Odpowiedź:

$$P_1 : P_2 = 9 : 1$$

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 304.2. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Z warunków zadania zapisujemy układ równań
$$\begin{cases} V_1 + V_2 = \frac{896\pi}{3} \\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{1} \end{cases}$$

Krok 2: Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

Krok 3: Otrzymujemy $\begin{cases} 27V_2 + V_2 = \frac{896\pi}{3} \\ V_1 = 27V_2 \end{cases}$, stąd $\begin{cases} V_2 = \frac{32\pi}{3} \\ V_1 = 27 \cdot \frac{32\pi}{3} \end{cases}$, więc $\begin{cases} V_2 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3 \\ V_1 = 288\pi \text{ cm}^3 \end{cases}$.

Odpowiedź:

Objętości tych kul są odpowiednio równe $V_1 = 288\pi \text{ cm}^3$ i $V_2 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie objętości obu kul $V_1 = 288\pi \text{ cm}^3$ i $V_2 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$.

2 pkt – poprawne obliczenie objętości kuli $V_1 = 288\pi \text{ cm}^3$ lub kuli $V_2 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$.

1 pkt – poprawne zapisanie warunków zadania
$$\begin{cases} V_1 + V_2 = \frac{896\pi}{3} \\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{1} \end{cases}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 305. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Krawędź EF jest krawędzią górnej podstawy, natomiast DH jest krawędzią boczną graniastosłupa. Widzimy, że obie krawędzie nie mają punktów wspólnych. Jeśli dwie proste nie mają punktów wspólnych i nie są równoległe (nie leżą w jednej płaszczyźnie), to proste te są skośne. Możemy zatem stwierdzić, że wskazane krawędzie są do siebie skośne.

Krok 2: Wybieramy prawidłową odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

Odpowiedzi krok po kroku

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 306. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przekątne ścian bocznych narysowane są kolorami zielonym i niebieskim. Kąt między przekątnymi sąsiednich ścian jest oznaczony jako α .

Krok 2: Przekątna graniastosłupa narysowana jest kolorem czerwonym. Przekątna podstawy też jest narysowana kolorem czerwonym. Kąt między tymi przekątnymi jest oznaczony jako β .

Krok 3: Zaznaczamy odpowiedź: FP.

Odpowiedź:

FP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 307. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Z warunków zadania zapisujemy: $2\pi R = 8\pi$, stąd $R = 4$ cm.

Krok 2: Obliczamy pole powierzchni kuli: $P = 4\pi R^2$, stąd $P = 4\pi \cdot 4^2$, więc $P = 64\pi$ cm².

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 308. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: A. Jeśli stosunek długości promieni dwóch kul jest równy 4, to skala podobieństwa tych kul jest równa 4 – nie 2.

Krok 2: B. Jeśli stosunek pól powierzchni dwóch kul jest równy 4, to skala podobieństwa tych kul jest równa 2.

Krok 3: C. Jeśli stosunek objętości dwóch kul jest równy 8, to skala podobieństwa tych kul jest równa 2.

Krok 4: D. Jeśli stosunek pola koła wielkiego pierwszej kuli do pola koła wielkiego drugiej kuli jest równy 2, to skala podobieństwa tych kul jest równa $\sqrt{2}$ – nie 2.

Krok 5: E. Jeśli stosunek obwodu koła wielkiego pierwszej kuli do obwodu koła wielkiego drugiej kuli jest równy 4, to skala podobieństwa tych kul jest równa 4 – nie 2.

Krok 6: F. Jeśli stosunek średnicy koła wielkiego pierwszej kuli do średnicy koła wielkiego drugiej kuli jest równy 8, to skala podobieństwa tych kul jest równa 8 – nie 2.

Krok 7: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: BC.

Odpowiedź:

BC.

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 309. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy długość odcinka IC , korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

Krok 2: Otrzymujemy: $|IC|^2 = |IB|^2 + |BC|^2$, stąd $|IC|^2 = 3^2 + 4^2$, więc $|IC| = 5$ cm.

Krok 3: Wyznaczamy długość odcinka JC , korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

Krok 4: Otrzymujemy: $|JC|^2 = |IC|^2 + |IJ|^2$, stąd $|JC|^2 = 5^2 + 8^2$, więc $|JC| = \sqrt{89}$ cm.

Odpowiedź:

Długość przekątnej JC wynosi $\sqrt{89}$ cm.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie długości przekątnej przekroju $\sqrt{89}$ cm.

1 pkt – poprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 310. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Krawędź EF jest krawędzią górnej podstawy, natomiast DC jest krawędzią dolnej podstawy. Obie krawędzie nie mają punktów wspólnych ze sobą, ani z tą samą ścianą boczną. Wiemy, że podstawy graniastosłupa leżą na płaszczyznach równoległych. Możemy stwierdzić, że wskazane krawędzie są do siebie równoległe.

Krok 2: Wybieramy prawidłową odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 311. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Krawędź AB jest krawędzią podstawy danego ostrosłupa, natomiast CS jest jego krawędzią boczną. Widzimy, że obie krawędzie nie mają punktów wspólnych. Jeśli dwie proste nie mają punktów wspólnych i nie są równoległe (nie leżą w jednej płaszczyźnie), to proste te są skośne. Możemy zatem stwierdzić, że wskazane krawędzie są do siebie skośne.

Krok 2: Wybieramy prawidłową odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 312. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przekątna ściany bocznej narysowana jest kolorem niebieskim. Kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią graniastosłupa jest oznaczony jako α . Zatem pierwsze zdanie jest prawdziwe.

Krok 2: Kątem wewnętrznym wielokąta nazywamy kąt, którego ramiona zawierają dwa sąsiednie boki wielokąta i dla którego

istnieje otoczenie wierzchołka takie, że wszystkie punkty kąta zawarte w tym otoczeniu są punktami wielokąta. Na przedstawionym rysunku taki kąt jest oznaczony jako β . Zatem drugie zdanie też jest prawdziwe.

Krok 3: Zaznaczamy odpowiedzi: FP.

Odpowiedź:

PP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 313. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Miara kąta dwuściennego między ścianami bocznymi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest taka sama, jak miara kąta wewnętrznego sześciokąta foremnego.

Krok 2: Obliczamy:

$$360^\circ : 6 = 60^\circ$$

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Odpowiedź:

Miara tego kąta wynosi 120° .

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie miary kąta dwuściennego $\alpha = 120^\circ$.

1 pkt – poprawne obliczenie miary kąta wewnętrznego sześciokąta $\alpha = 120^\circ$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 314. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Kąt między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy, to tak naprawdę kąt między krawędzią boczną a przekątną podstawy. Krawędzie boczne przedstawionego ostrosłupa narysowane są kolorem czarnym, a przekątne podstawy liniami przerywanymi. Zatem ten kąt jest oznaczony jako γ .

Krok 2: Zaznaczamy odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 315. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Krawędzie EF , FG i FB są trzema krawędziami wychodzącymi z jednego wierzchołka prostopadłościanu. Widzimy, że są one prostopadłe do siebie.

Krok 2: Wybieramy prawidłową odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 316. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Graniastosłup, który ma 27 krawędzi ma w podstawie dziewięciokąt ($27 : 3 = 9$).

Krok 2: Liczba wierzchołków tego graniastosłupa jest równa: $9 \cdot 2 = 18$.

Odpowiedź:

B

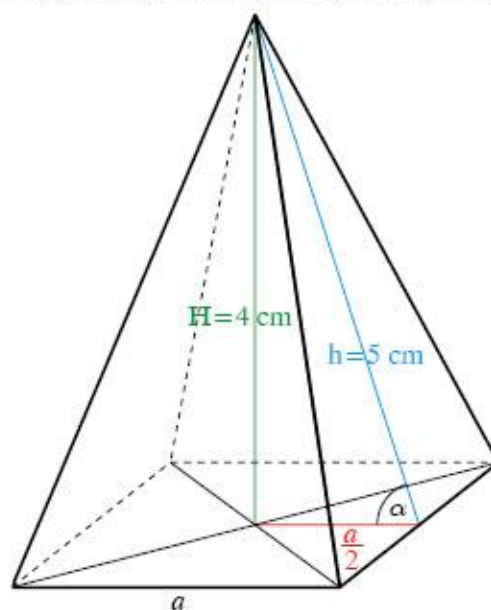
Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 317. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.



Krok 2: Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość krawędzi podstawy. Zapisujemy: $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2$, więc

$$4^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5^2, \text{ stąd } \frac{a}{2} = 3, a = 6 \text{ cm.}$$

Krok 3: Obliczamy pole podstawy: $P = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$.

Krok 4: Obliczamy tangens kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

Krok 5: Otrzymujemy: $\text{tg} \alpha = \frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Krok 6: Określamy prawdziwość zdań: FP.

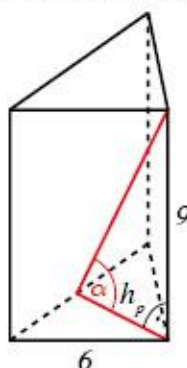
Odpowiedź:

FP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 318. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykonujemy rysunek pomocniczy. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.**Krok 2:** Obliczamy wysokość podstawy: $h_p = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.**Krok 3:** Obliczamy miarę kąta α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3 \cdot 3} = \sqrt{3}$$

Zatem: $\alpha = 60^\circ$.**Odpowiedź:**

$$\alpha = 60^\circ$$

Zasady oceniania:2 pkt – poprawne obliczenie kąta $\alpha = 60^\circ$.1 pkt – poprawne obliczenie wysokości podstawy $h_p = 3\sqrt{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 319. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Z warunków zadania zapisujemy: $\frac{1}{3}P_p \cdot H = 36$, stąd $H = \frac{108}{P_p}$.**Krok 2:** Obliczamy pole podstawy ostrosłupa. Otrzymujemy: $P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.**Krok 3:** Obliczamy wysokość ostrosłupa. Otrzymujemy: $H = \frac{108}{9\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.**Krok 4:** Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.**Odpowiedź:**

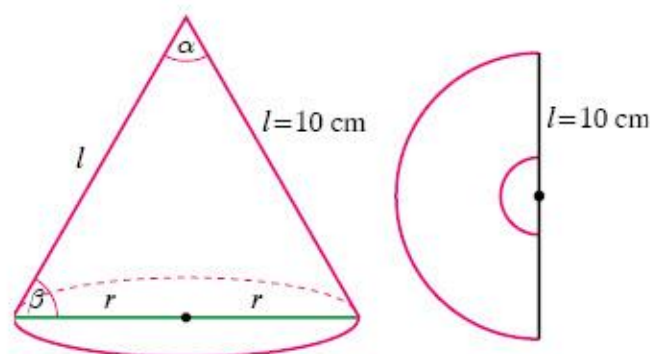
D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 320. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Sporządzamy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Zapisujemy dwoma sposobami pole powierzchni bocznej stożka. Otrzymujemy: $\frac{1}{2}\pi l^2 = \pi r l$, stąd $r = \frac{1}{2}l = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ cm

Krok 3: Zauważamy, że przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości 10 cm.

Krok 4: Wobec tego kąt rozwarcia stożka ma miarę 60° .

Krok 5: Określamy prawdziwość zdań: FF.

Odpowiedź:

FF.

Zasady oceniania:

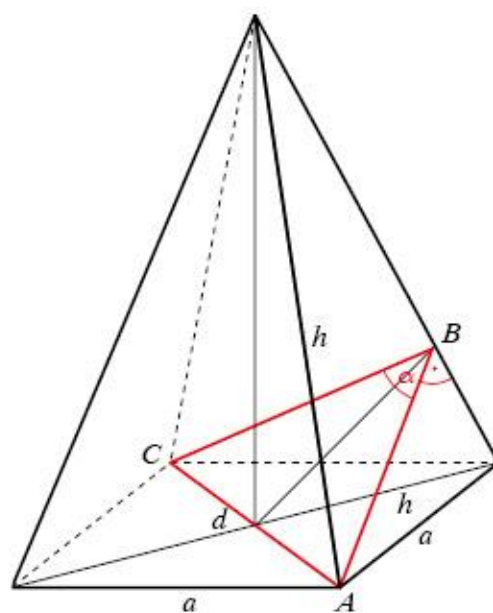
1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 321. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Obliczamy miary kątów BAC i BCA (trójkąt ABC jest równoramienny).

Krok 3: Otrzymujemy: $\angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$. Więc trójkąt ABC jest równoboczny. Stąd $d = 8$ cm.

Krok 4: Obliczamy pole podstawy. Otrzymujemy: $P = \frac{d^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32$ cm².

Krok 5: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: A.

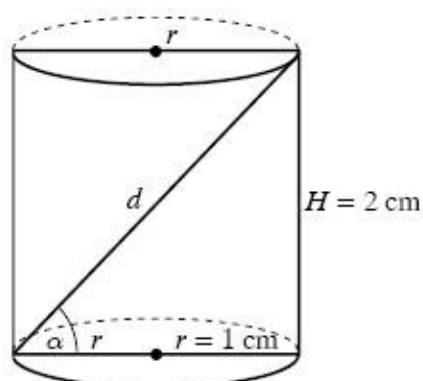
Odpowiedź:

A

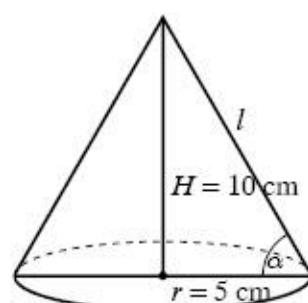
Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

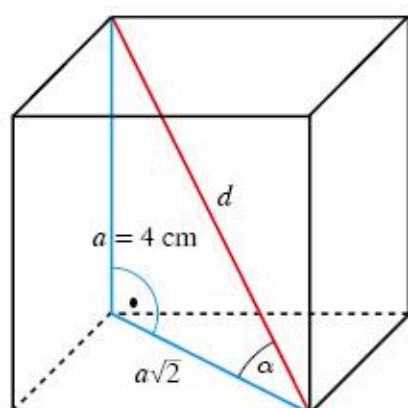
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 322. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1: A.**

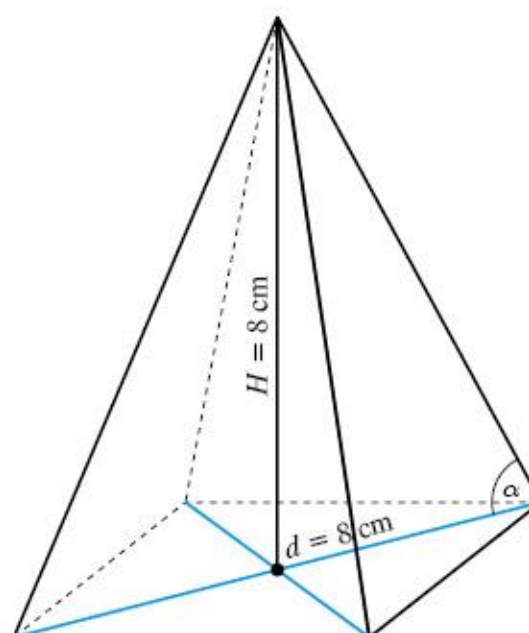
Obliczamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{2r} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1$.

Krok 2: B.

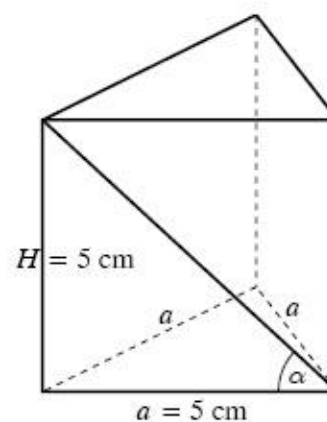
Obliczamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{r} = \frac{10}{5} = 2$.

Krok 3: C.

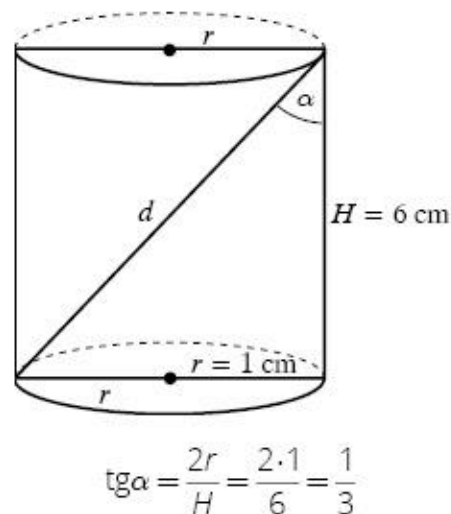
Obliczamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Krok 4: D.

Obliczamy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{\frac{1}{2}d} = \frac{8}{\frac{1}{2} \cdot 8} = 2$.

Krok 5: E.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{a} = \frac{5}{5} = 1$

Krok 6: F.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2r}{H} = \frac{2 \cdot 1}{6} = \frac{1}{3}$

Krok 7: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: BD.**Odpowiedź:**

BD

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne odpowiedzi na oba pytania.

1 pkt – poprawna odpowiedź na jedno z pytań.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

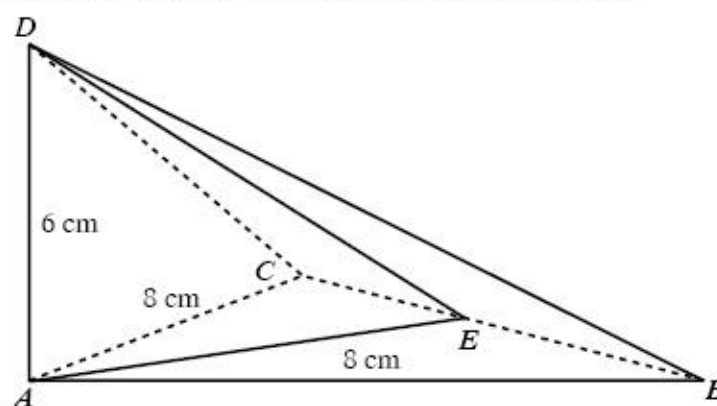
Zadanie 323. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Stosunek pól powierzchni sześciątów jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc wynosi 4 : 9.**Krok 2:** Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B2.**Odpowiedź:**

B2.

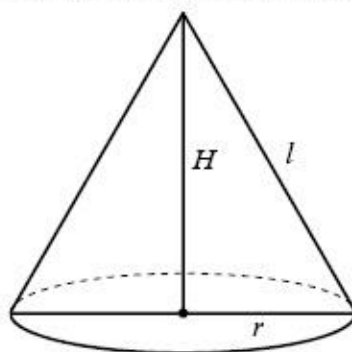
Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

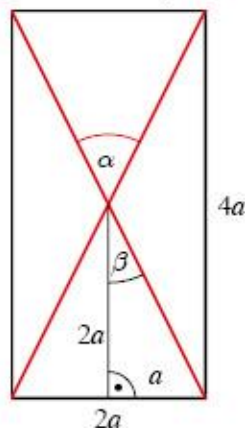
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 324. 0-3 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykonujemy rysunek pomocniczy. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.**Krok 2:** Obliczamy pole podstawy. Otrzymujemy: $P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$.**Krok 3:** Obliczamy pole trójkąta ABD i ACD.**Krok 4:** Otrzymujemy: $P_{ABD} = P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD|$, stąd: $P_{ABD} = P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$.**Krok 5:** Odcinek AE jest wysokością trójkąta równobocznego, stąd $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$.**Krok 6:** Wyznaczamy wysokość DE, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED.**Krok 7:** Otrzymujemy: $|DE|^2 = |AD|^2 + |AE|^2$, stąd $|DE|^2 = 6^2 + (4\sqrt{3})^2$, więc $|DE| = 2\sqrt{21} \text{ cm}$.**Krok 8:** Obliczamy pole trójkąta BCD. Otrzymujemy: $P_{ABD} = P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD|$, stąd: $P_{ABD} = P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$.**Krok 9:** Otrzymujemy: $P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |CB| \cdot |ED|$, stąd: $P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21} \text{ cm}^2$.**Krok 10:** Obliczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.**Krok 11:** Otrzymujemy: $P_c = 16\sqrt{3} + 2 \cdot 24 + 8\sqrt{21}$, stąd $P_c = 8(6 + 2\sqrt{3} + \sqrt{21}) \text{ cm}^2$.**Odpowiedź:**Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe $8(6 + 2\sqrt{3} + \sqrt{21}) \text{ cm}^2$.**Zasady oceniania:**3 pkt – poprawne obliczenie pola powierzchni całkowitej ostrosłupa $P_c = 8(6 + 2\sqrt{3} + \sqrt{21}) \text{ cm}^2$.2 pkt – poprawne obliczenie pola powierzchni bocznej ostrosłupa $P_b = 8(6 + \sqrt{21}) \text{ cm}^2$.1 pkt – poprawne obliczenie pola podstawy ostrosłupa $P_p = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 325. 0-3 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykonujemy rysunek pomocniczy. Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.**Krok 2:** Z warunków zadania zapisujemy układ równań:
$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = 18\pi \\ r = \frac{1}{2}H \end{cases}$$
Krok 3: Rozwiązujemy ten układ metodą podstawiania.**Krok 4:** Otrzymujemy: $\begin{cases} \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = 18\pi \\ H = 2r \end{cases}$, stąd $\begin{cases} r^3 = 27 \\ H = 2r \end{cases}$, więc $\begin{cases} r = 3 \text{ cm} \\ H = 6 \text{ cm} \end{cases}$ **Krok 5:** Obliczamy długość tworzącej stożka, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.**Krok 6:** Otrzymujemy: $l^2 = H^2 + r^2$, stąd $l^2 = 6^2 + 3^2$, więc $l = 3\sqrt{5}$ cm.**Krok 7:** Obliczamy pole powierzchni bocznej stożka: $P_b = \pi r l$, więc $P_b = 9\sqrt{3}\pi$ cm².**Odpowiedź:**Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe $9\sqrt{3}\pi$ cm².**Zasady oceniania:**3 pkt – poprawne obliczenie pola powierzchni bocznej stożka $P_b = 9\sqrt{3}\pi$ cm².2 pkt – poprawne obliczenie długości tworzącej stożka $l = 3\sqrt{5}$ cm.1 pkt – poprawne zapisanie warunków zadania
$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = 18\pi \\ r = \frac{1}{2}H \end{cases}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 326. 0-3 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykonujemy rysunek pomocniczy przekroju graniastosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną.**Krok 2:** Obliczamy miarę kąta β : $\text{tg } \beta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 0,5$. Odczytujemy z tablic $\beta \approx 27^\circ$.**Krok 3:** $\alpha = 2\beta$, zatem $\alpha \approx 54^\circ$.

Odpowiedź:

$$\alpha \approx 54^\circ$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie miary kąta $\alpha \approx 54^\circ$.

2 pkt – poprawne obliczenie miary kąta $\beta \approx 27^\circ$.

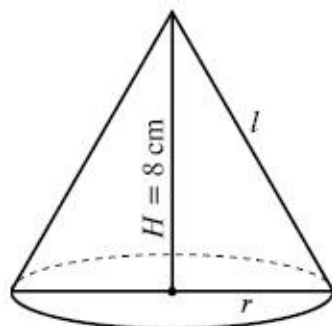
1 pkt – poprawne wykonanie rysunku pomocniczego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 327. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Sporządzamy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Z warunków zadania zapisujemy, że $\pi r l = 3\pi r^2$. Stąd $l = 3r$.

Krok 3: Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, zapisujemy: $H^2 + r^2 = l^2$. Wobec tego otrzymujemy: $8^2 + r^2 = (3r)^2$.

Stąd $r^2 = 8$, więc $r = 2\sqrt{2}$ cm.

Krok 4: Obliczamy objętość stożka. Otrzymujemy: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 \cdot 8 = \frac{64\pi}{3}$ cm³.

Odpowiedź:

Objętość stożka jest równa $\frac{64\pi}{3}$ cm³.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie objętości stożka $V = \frac{64\pi}{3}$ cm³.

2 pkt – poprawne obliczenie długości promienia podstawy stożka $r = 2\sqrt{2}$ cm.

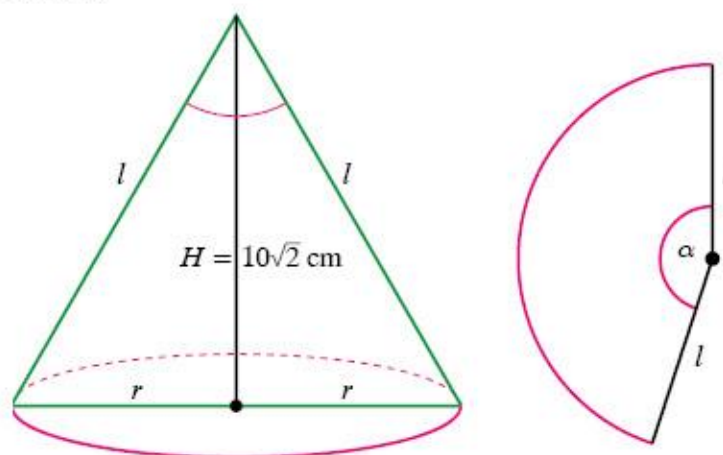
1 pkt – poprawna analiza zadania $\pi r l = 3\pi r^2$, czyli $l = 3r$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 328. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Korzystając z informacji o polu przekroju osiowego stożka, obliczamy długość promienia podstawy stożka.

Krok 3: Otrzymujemy: $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot H = 50\sqrt{2}$, więc $r = \frac{50\sqrt{2}}{H} = \frac{50\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = 5$ cm.

Odpowiedzi krok po kroku

Krok 4: Obliczamy długość tworzącej stożka. Otrzymujemy: $l^2 = H^2 + r^2$, stąd $l^2 = (10\sqrt{2})^2 + 5^2$, więc $l = 15$ cm.

Krok 5: Pole powierzchni bocznej stożka można obliczyć na dwa sposoby: jako pole wycinka koła o kącie środkowym α i z wzoru $P_b = \pi r l$. Otrzymujemy: $\pi l^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \pi r l$. Po uproszczeniu $l \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = r$.

Krok 6: Po podstawieniu danych obliczamy miarę kąta środkowego wycinka koła. Otrzymujemy: $\alpha = \frac{r \cdot 360^\circ}{l} = \frac{5 \cdot 360^\circ}{15} = 120^\circ$

Odpowiedź:

Miara kąta środkowego wynosi 120° .

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie miary kąta $\alpha = 120^\circ$.

2 pkt – poprawne obliczenie długości tworzącej $l = 15$ cm.

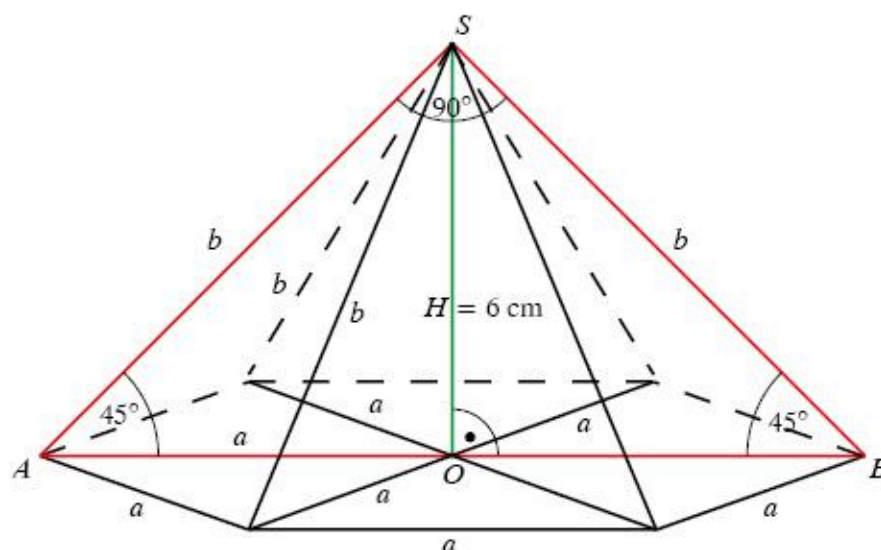
1 pkt – poprawne obliczenie długości promienia podstawy $r = 5$ cm.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 329. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Skoro kąt ASB ma miarę 90° , a trójkąt ASB jest równoramienny, to miary kątów SAB i ABS wynoszą po 45° . Również trójkąty AOS i BOS są prostokątne równoramienne.

Krok 3: Wobec tego zauważamy, że: $a = |OB| = H = 6$ cm.

Krok 4: Obliczamy długość krawędzi bocznej. Zapisujemy $b = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm.

Krok 5: Obliczamy sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa.

Krok 6: Otrzymujemy: $L = 6(a + b) = 6(6 + 6\sqrt{2}) = 36(1 + \sqrt{2})$ cm.

Odpowiedź:

Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa wynosi $36(1 + \sqrt{2})$ cm.

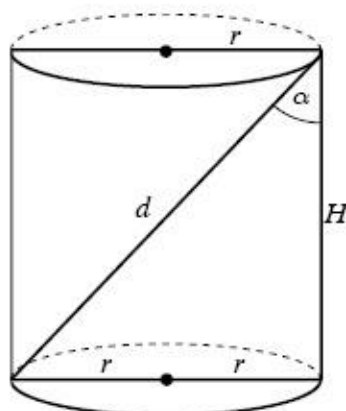
Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie sumy długości wszystkich krawędzi $36(1 + \sqrt{2})$ cm.

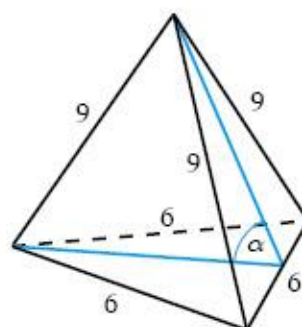
2 pkt – poprawne obliczenie długości krawędzi podstawy $a = 6$ cm i długości krawędzi bocznej $b = 6\sqrt{2}$ cm.

1 pkt – poprawne obliczenie długości krawędzi podstawy $a = 6$ cm lub długości krawędzi bocznej $b = 6\sqrt{2}$ cm.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 330. 0-3 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykonujemy rysunek pomocniczy.**Krok 2:** Zapisujemy zależność wynikającą z warunków zadania. Otrzymujemy: $2\pi rH = 2\pi r^2$, stąd $H = r$.**Krok 3:** Wyznaczamy tangens kąta pomiędzy przekątną przekroju osiowego a tworzącą walca.**Krok 4:** Otrzymujemy: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2r}{H}$, więc $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2r}{r} = 2$.**Krok 5:** Odczytujemy w tablicach funkcji trygonometrycznych miarę kąta $\alpha = 63^\circ$.**Odpowiedź:**Miara kąta pomiędzy przekątną przekroju osiowego a tworzącą walca wynosi 63° .**Zasady oceniania:**3 pkt – poprawne obliczenie miary kąta $\alpha = 63^\circ$.2 pkt – poprawne obliczenie tangensa kąta $\operatorname{tg} \alpha = 2$.1 pkt – poprawna analiza zadania $2\pi rH = 2\pi r^2$, czyli $H = r$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

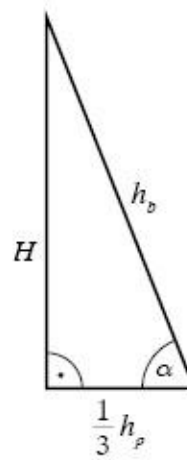
Zadanie 331. 0-3 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wykonujemy rysunek pomocniczy.**Krok 2:** Obliczamy wysokość podstawy: $h_p = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.**Krok 3:** Obliczamy wysokość ściany bocznej:

$$h_b^2 = 9^2 - 3^2$$

$$h_b^2 = 72$$

$$h_b = 6\sqrt{2}$$

Krok 4: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 5: Obliczamy $\frac{1}{3}h_p$.

$$\frac{1}{3}h_p = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Krok 6: Obliczamy miarę kąta α .

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \approx 0,2041$$

Krok 7: Odczytujemy z tablic $\alpha \approx 78^\circ$.

Odpowiedź:

$$\alpha \approx 78^\circ$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie miary kąta $\alpha \approx 78^\circ$.

2 pkt – poprawne obliczenie trzeciej części wysokości podstawy $\frac{1}{3}h_p = \sqrt{3}$.

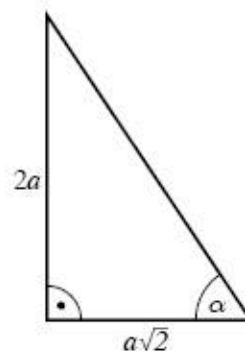
1 pkt – poprawne obliczenie wysokości ściany bocznej $h_b = 6\sqrt{2}$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 332. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.

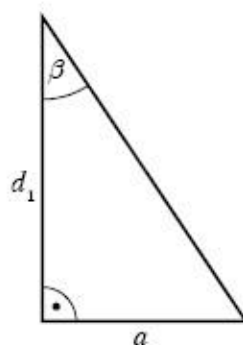


Krok 2: Obliczamy miarę kąta α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,4142$$

Krok 3: Odczytujemy z tablic $\alpha \approx 55^\circ$.

Krok 4: Wykonujemy drugi rysunek pomocniczy.



Krok 5: Obliczamy przekątną d_1 ściany bocznej:

$$d_1^2 = (2a)^2 + a^2$$

$$d_1^2 = 5a^2$$

$$d_1 = a\sqrt{5}$$

Krok 6: Obliczamy miarę kąta β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,4472$$

Krok 7: Odczytujemy z tablic $\beta \approx 24^\circ$.

Krok 8: Obliczamy różnicę $\alpha - \beta = 55^\circ - 24^\circ = 31^\circ$.

Odpowiedź:

$$\alpha - \beta = 31^\circ$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie różnicy kątów $\alpha - \beta = 31^\circ$.

2 pkt – poprawne obliczenie miary kąta $\alpha \approx 55^\circ$ i $\beta \approx 24^\circ$.

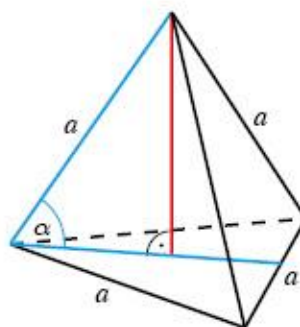
1 pkt – poprawne obliczenie miary kąta $\alpha \approx 55^\circ$ lub $\beta \approx 24^\circ$.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 333. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.

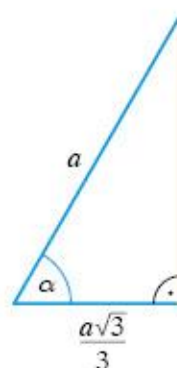


Krok 2: Wyznaczamy wysokość podstawy: $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Krok 3: Wysokość czworościanu dzieli wysokość podstawy w stosunku 2 : 1 od wierzchołka.

Krok 4:

Wykonujemy drugi rysunek pomocniczy.



Krok 5: Obliczamy wartość cosinusa kąta α :

$$\cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774$$

Krok 6: Odczytujemy z tablic miarę kąta α , $\alpha \approx 55^\circ$.

Odpowiedź:

$$\alpha \approx 55^\circ$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie miary kąta $\alpha \approx 55^\circ$.

2 pkt – poprawne obliczenie cosinusa kąta $\cos \alpha \approx 0,5774$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie dwóch trzecich wysokości podstawy $\frac{2}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

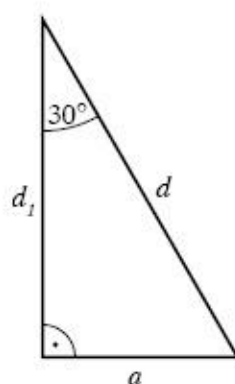
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 334. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy, H – wysokość graniastopuła, d_1 – przekątna ściany bocznej.

Krok 2: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 3: Wyznaczamy krawędź podstawy:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{d}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{d}$$

$$a = \frac{1}{2}d$$

Krok 4: Wyznaczamy kwadrat przekątnej ściany bocznej:

$$d_1^2 = d^2 - a^2$$

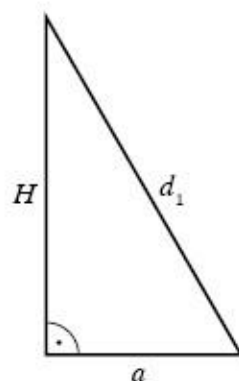
$$d_1^2 = d^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2$$

$$d_1^2 = d^2 - \frac{1}{4}d^2$$

$$d_1^2 = \frac{3}{4}d^2$$

Krok 5: Wykonujemy drugi rysunek pomocniczy.

Krok 6: Wyznaczamy wysokość graniastopuła:



$$H^2 = d_1^2 - a^2$$

$$H^2 = \frac{3}{4}d^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2$$

$$H^2 = \frac{3}{4}d^2 - \frac{1}{4}d^2$$

$$H^2 = \frac{1}{2}d^2$$

$$H = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

Krok 7: Wyznaczamy wzór na objętość graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot H$$

$$V = a^2 \cdot H$$

$$V = \left(\frac{1}{2}d\right)^2 \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{4}d^2 \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{d^3\sqrt{2}}{8}$$

Odpowiedź:

Objętość graniastosłupa opisana jest wzorem $V = \frac{d^3\sqrt{2}}{8}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – wyznaczenie wzoru na objętość graniastosłupa w zależności od przekątnej $V = \frac{d^3\sqrt{2}}{8}$.

2 pkt – poprawne wyznaczenie krawędzi podstawy $a = \frac{1}{2}d$ i wysokości graniastosłupa $H = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

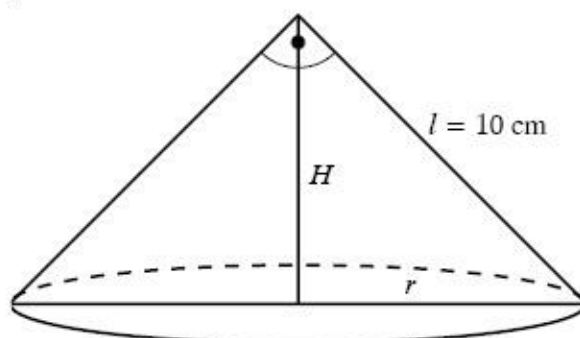
1 pkt – poprawne wyznaczenie krawędzi podstawy $a = \frac{1}{2}d$ lub wysokości graniastosłupa $H = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 335. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Z warunków zadania wynika, że $r = H$ (bo przekrój osłowy jest trójkątem prostokątnym równoramiennym).

Krok 3: Obliczamy wysokość i promień podstawy stożka. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

Krok 4: Otrzymujemy: $2r^2 = l^2$, stąd $2r^2 = 10^2$, więc $r = 5\sqrt{2}$ cm i $H = 5\sqrt{2}$ cm.

Krok 5: Obliczamy objętość stożka. Otrzymujemy: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$, więc: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (5\sqrt{2})^2 \cdot 5\sqrt{2} = \frac{250\sqrt{2}\pi}{3}$ cm³.

Odpowiedź:

Objętość stożka jest równa $\frac{250\sqrt{2}\pi}{3}$ cm³.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie objętości stożka $\frac{250\sqrt{2}\pi}{3}$ cm³.

2 pkt – poprawne obliczenie wysokości stożka $H = 5\sqrt{2}$ cm.

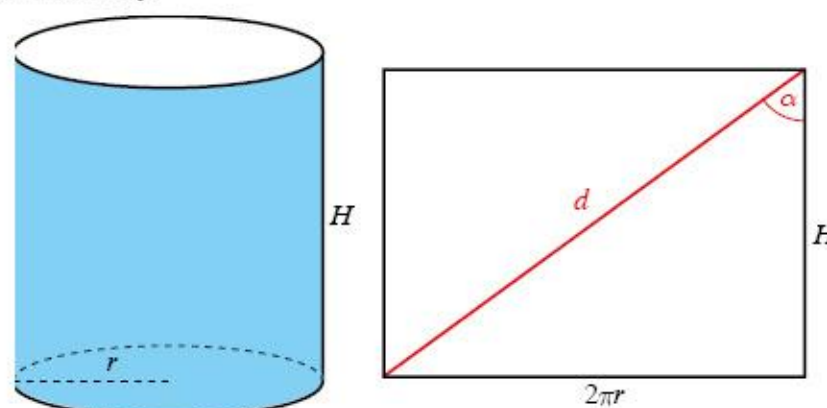
1 pkt – poprawna analiza zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 336. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 2: Z treści zadania wiemy, że $H = 2r$ oraz że $\pi r^2 \cdot H = 54\pi$. Otrzymujemy: $\pi r^2 \cdot 2r = 54\pi$, więc $r = 3$ cm oraz $H = 6$ cm.

Krok 3: Wobec tego długości boków prostokąta, który jest powierzchnią boczną walca wynoszą: $a = 2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ oraz $H = 6$ cm.

Krok 4: Obliczamy tangens kąta, jaki tworzy przekątna tego prostokąta z bokiem, który jest wysokością walca.

Krok 5: Otrzymujemy: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\pi r}{H} = \frac{6\pi}{6} = \pi = \frac{22}{7}$.

Odpowiedź:

Tangens tego kąta jest równy $\frac{22}{7}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie tangensa kąta $\operatorname{tg}\alpha = \pi = \frac{22}{7}$.

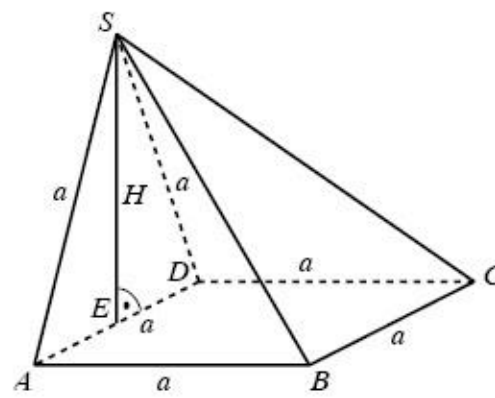
2 pkt – poprawne obliczenie wysokości walca $H = 6$ cm.

1 pkt – poprawna analiza zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 337. 0-3 pkt

Rozwiązanie:



Krok 1: Obliczamy długość krawędzi a , korzystając z pola trójkąta równobocznego.

Otrzymujemy: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, stąd $a = 6$ cm.

Krok 2: Obliczamy wysokość ostrosłupa, która jest wysokością trójkąta ADS . Otrzymujemy: $H = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm.

Krok 3: Obliczamy pole podstawy ostrosłupa. Otrzymujemy: $P_p = a^2 = 6^2 = 36$ cm².

Krok 4: Obliczamy objętość ostrosłupa. Otrzymujemy: $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$, stąd $V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ cm³.

Odpowiedź:

Objętość tego ostrosłupa wynosi $36\sqrt{3}$ cm³.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie objętości ostrosłupa $V = 36\sqrt{3}$ cm³.

2 pkt – poprawne obliczenie wysokości $H = 3\sqrt{3}$ cm i pola podstawy ostrosłupa $P_p = 36$ cm².

1 pkt – poprawne obliczenie długości krawędzi podstawy $a = 6$ cm.

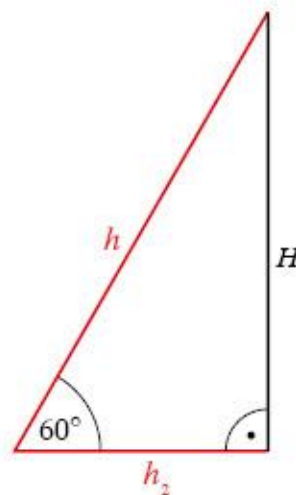
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 338. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy, H – wysokość graniastosłupa, h_1 – wysokość trójkąta w podstawie, h – wysokość trójkąta w przekroju.

Krok 2: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 3: Obliczamy wysokość trójkąta w podstawie:

$$h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$h_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Krok 4: Obliczamy wysokość trójkąta w przekroju:

$$\cos 60^\circ = \frac{h_1}{h}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{h}$$

$$h = 3\sqrt{3}$$

Krok 5: Obliczamy wysokość graniastopuła:

$$\sin 60^\circ = \frac{H}{h}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{3\sqrt{3}}$$

$$2H = 9$$

$$H = 4,5$$

Odpowiedź:

Wysokość graniastopuła wynosi 4,5, a wysokość trójkąta w przekroju $3\sqrt{3}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie wysokości trójkąta w przekroju $h = 3\sqrt{3}$ i wysokości graniastopuła $H = 4,5$.

2 pkt – poprawne obliczenie wysokości trójkąta w przekroju $h = 3\sqrt{3}$ lub wysokości graniastopuła $H = 4,5$.

1 pkt – poprawne obliczenie wysokości trójkąta w podstawie graniastopuła $h_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

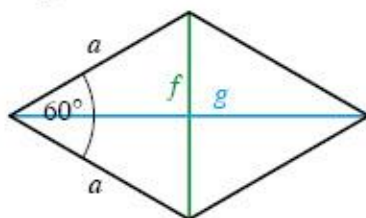
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 339. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy, H – wysokość graniastopuła, d_1 – jedna przekątna graniastopuła, d_2 – druga przekątna graniastopuła, f – jedna przekątna podstawy, g – druga przekątna podstawy.

Krok 2: Wykonujemy rysunek pomocniczy podstawy.



Kąt dwuścienny w graniastopie prostym o podstawie rombu jest taki sam, jak kąt w podstawie. Przekątna f dzieli romb na dwa trójkąty równoboczne, zatem jej długość $f = a$.

Krok 3: Długość krawędzi podstawy obliczamy z obwodu:

$$4a = 24$$

$$a = 6.$$

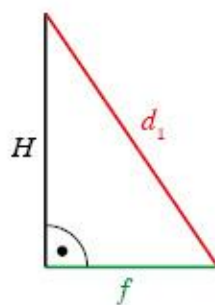
$$\text{Wysokość: } H = 3 \cdot 6 = 18.$$

$$\text{Przekątna podstawy: } f = 6.$$

Krok 4: Druga przekątna podstawy g składa się z dwóch wysokości trójkąta równobocznego o boku 6, zatem:

$$g = 2 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Krok 5: Wykonujemy drugi rysunek pomocniczy.



Krok 6: Obliczamy długość przekątnej d_1 .

$$d_1^2 = H^2 + f^2$$

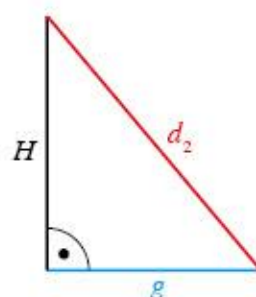
$$d_1^2 = 18^2 + 6^2$$

$$d_1^2 = 324 + 36$$

$$d_1^2 = 360$$

$$d_1 = 6\sqrt{10}$$

Krok 7: Wykonujemy trzeci rysunek pomocniczy.



Krok 8: Obliczamy długość przekątnej d_2 :

$$d_2^2 = H^2 + g^2$$

$$d_2^2 = 18^2 + (6\sqrt{3})^2$$

$$d_2^2 = 324 + 108$$

$$d_2^2 = 432$$

$$d_2 = 12\sqrt{3}$$

Odpowiedź:

Przekątne tego graniastosłupa wynoszą $6\sqrt{10}$ i $12\sqrt{3}$.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne obliczenie długości przekątnych graniastosłupa $6\sqrt{10}$ i $12\sqrt{3}$.

3 pkt – poprawne obliczenie długości jednej z przekątnych graniastosłupa.

2 pkt – poprawne obliczenie długości przekątnych podstawy $f = 6$ i $g = 6\sqrt{3}$.

1 pkt – poprawna analiza zadania.

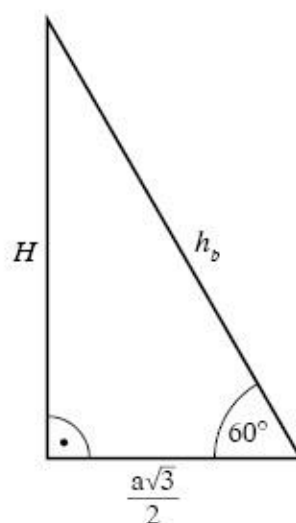
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 340. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wprowadzamy oznaczenia: a – długość krawędzi podstawy, b – długość krawędzi bocznej, H – wysokość ostrosłupa, h_b – wysokość ściany bocznej.

Krok 2: Wykonujemy rysunek pomocniczy.



Krok 3: Obliczamy długość krawędzi podstawy:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{6}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Odpowiedzi krok po kroku

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$3a = 12$$

$$a = 4$$

$$\text{Zatem: } \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Krok 4: Obliczamy wysokość ściany bocznej:

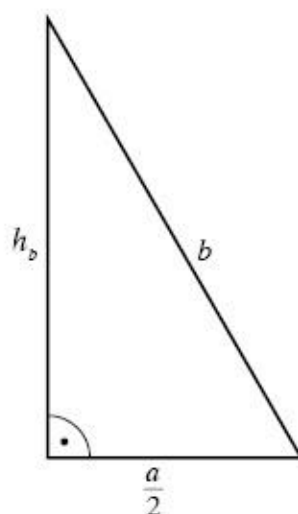
$$h_b^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2$$

$$h_b^2 = 36 + 12$$

$$h_b^2 = 48$$

$$h_b = 4\sqrt{3}$$

Krok 5: Wykonujemy drugi rysunek pomocniczy.



Krok 6: Obliczamy długość krawędzi bocznej

$$b^2 = h_b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 = (4\sqrt{3})^2 + 2^2$$

$$b^2 = 48 + 4$$

$$b^2 = 52$$

$$b = 2\sqrt{13}$$

Odpowiedź:

Krawędź boczna ma długość $2\sqrt{13}$.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne obliczenie długości krawędzi bocznej $b = 2\sqrt{13}$.

3 pkt – poprawne obliczenie długości krawędzi podstawy $a = 4$ i wysokości ściany bocznej $h_b = 4\sqrt{3}$.

2 pkt – poprawne obliczenie długości krawędzi podstawy $a = 4$ lub wysokości ściany bocznej $h_b = 4\sqrt{3}$.

1 pkt – poprawna analiza zadania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

11. Kombinatoryka

Zadanie 341. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki: $\{OZER, OZRE, ORZE, OREZ, OEZR, OERZ\}$.

Krok 2: Można otrzymać 6 różnych układów liter.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 342. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki wylosowania dwóch cyfr:

$\{66, 67, 68, 69, 76, 77, 78, 79, 86, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99\}$.

Krok 2: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A:

$A = \{66, 69, 78, 87, 96, 99\}$.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 343. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyrzucenie orła oznaczamy jako O , a wyrzucenie reszki – jako R .

Krok 2: Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki dwukrotnego rzutu monetą: $\{(OO), (OR), (RO), (RR)\}$. Zatem zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym, zaś zdarzenie B nie jest zdarzeniem niemożliwym.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: PF.

Odpowiedź:

PF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 344. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: W talii zawierającej 24 karty jest 6 pików.

Krok 2: Liczba wyników losowania dwóch kart bez zwracania, z których obie są pikami jest równa: $6 \cdot 5 = 30$.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 345. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zdanie 1. Liczba utworzonych w ten sposób liczb trzycyfrowych: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Krok 2: Zdanie 2. Liczb trzycyfrowych takich, że cyfra setek jest nieparzysta, jest: $3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$.

Krok 3: Liczb trzycyfrowych takich, że wszystkie cyfry są nieparzyste, jest: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Krok 4: Liczb spełniających obydwa warunki jest: $3 + 27 = 30$.

Krok 5: Określenie poprawności zdań: PP.

Odpowiedź:

PP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 346. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyboru trzech książek biograficznych można dokonać na $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sposoby.

Krok 2: Wyboru trzech książek z gatunku fantastyka można dokonać na $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sposoby.

Krok 3: Wyboru trzech książek z gatunku kryminał można dokonać na $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ sposoby.

Krok 4: Liczba wszystkich możliwości wyboru: $24 + 120 + 336 = 480$.

Krok 5: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 347. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu wylosowana figura, nie jest kierem ani karo: {król trefl, król pik, dama trefl, dama pik, walet pik, walet trefl}.

Krok 2: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 348. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Wylosowanie kuli białej oznaczamy jako b , czerwonej jako c , kuli zielonej jako z .

Krok 2: Wypisujemy wyniki losowania trzech kul:

$\{(bcz), (bzc), (cbz), (czb), (zbc), (zcb)\}$.

Krok 3: Wylosowanie kuli białej nie jest zdarzeniem niemożliwym.

Krok 4: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 349. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Liczba kodów jest równa $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

Krok 2: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 350. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Gdy cyfra setek jest parzysta, to może być jedną z cyfr: 2, 4, 6, 8. Są więc 4 możliwości wyboru.

Krok 2: Gdy cyfra dziesiątek i cyfra jedności są nieparzyste, to mogą być jedną z cyfr: 1, 3, 5, 7, 9. Jest więc 5 możliwości wyboru.

Krok 3: Liczbę utworzymy więc na $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ sposobów.

Krok 4: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 351. 0-1 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Liczbę odcinków, których końcami są punkty leżące na różnych prostych, wyznaczymy jako $4 \cdot 5 = 20$.

Krok 2: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 352. 0–1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Zdanie 1. Karol może dojechać z przesiadką 3 różnymi tramwajami, a potem 3 różnymi autobusami, więc dojedzie na $3 \cdot 3 = 9$ sposobów.

Krok 2: Zdanie 2. Karol może dojechać bez przesiadki – 3 różnymi autobusami – więc może dojechać na 3 różne sposoby. Z przesiadką Karol dojedzie do szkoły na 9 różnych sposobów. Wobec tego Karol może dojechać do szkoły na $3 + 9 = 12$ różnych sposobów.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: FP.

Odpowiedź:

FP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 353. 0–1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: W pojedynczym rzucie są dwa możliwe wyniki: orzeł i reszka. Ponieważ rzutów jest 10, to liczba możliwych wyników jest równa $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1024$.

Krok 2: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 354. 0–1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu wylosowana liczba jest podzielna przez 4: $\{20, 24, 28, 32, 36, 40\}$.

Krok 2: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 355. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 20, 25\}.$$

Krok 2: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu B : $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

Krok 3: Podajemy zdarzenie B' przeciwne do zdarzenia B : $B' = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25\}$.

Krok 4: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: AF.

Odpowiedź:

AF

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 356. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Liczby mniejsze od 4000 na pozycji jedności tysięcy mają jedną z cyfr 1, 2 lub 3, a na pozycji setek, dziesiątek i jedności – dowolną z pozostałych cyfr. Tych liczb jest $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360$.

Krok 2: Liczby większe od 8000 na pozycji jedności tysięcy mają jedną z cyfr 8 lub 9, a na pozycji setek, dziesiątek i jedności – dowolną z pozostałych cyfr. Tych liczb jest $2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 240$.

Krok 3: Wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest $360 + 240 = 600$.

Krok 4: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: A.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 357. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Pierwsza osoba ma do dyspozycji 8 miejsc, druga – 7 miejsc, trzecia – 6 miejsc, a czwarta – 5 miejsc.

Krok 2: Wobec tego liczba sposobów wyboru miejsca jest równa $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.

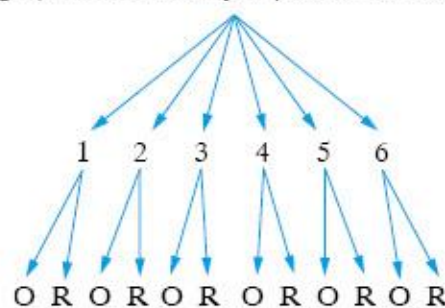
Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 358. 0-2 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Wyrzucenie orła oznaczamy jako O , a wyrzucenie reszki – jako R .**Krok 2:** Przebieg tego doświadczenia losowego przedstawiamy w postaci drzewka:**Krok 3:** Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki: $\{1O, 1R, 2O, 2R, 3O, 3R, 4O, 4R, 5O, 5R, 6O, 6R\}$.**Krok 4:** Można otrzymać 12 różnych wyników.**Odpowiedź:**

12

Zasady oceniania:**2 pkt** – poprawne narysowanie drzewka, wypisanie wszystkich możliwych wyników oraz podanie liczby wyników.**1 pkt** – poprawne narysowanie drzewka

albo

poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.**Zadanie 359. 0-2 pkt****Rozwiązanie:****Krok 1:** Przebieg tego doświadczenia losowego przedstawiamy w postaci tabeli:

	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
5	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
6	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

Krok 2: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A :

$$A = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6),$$

$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Krok 3: Podajemy zdarzenie A' przeciwne do zdarzenia A :

$$A' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5),$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5),$$

$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$$

Odpowiedź:

$$A' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5),$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$$

Zasady oceniania:**2 pkt** – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A .

1 pkt – poprawne narysowanie drzewka doświadczenia losowego
albo
poprawne sporządzenie tabeli doświadczenia losowego,
albo
poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 360. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Punkty znajdujące się w II ćwiartce układu współrzędnych mają pierwszą współrzędną ujemną, a drugą – dodatnią.

Krok 2: Liczba punktów znajdujących się w II ćwiartce układu współrzędnych wynosi $5 \cdot 5 = 25$.

Odpowiedź:

Jest 25 takich punktów.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie, ile punktów o współrzędnych utworzonych według podanej metody, znajduje się w II ćwiartce układu współrzędnych (25).

1 pkt – poprawna metoda obliczenia liczby punktów współrzędnych utworzonych według podanej metody, które znajdują się w II ćwiartce układu współrzędnych (zastosowanie reguły mnożenia lub wypisanie wszystkich zdarzeń sprzyjających).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 361. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Liczba takich słów wynosi $3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360$.

Odpowiedź:

Można utworzyć 360 słów.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne obliczenie liczby różnych słów zaczynających się samogłoską, które można utworzyć (360).

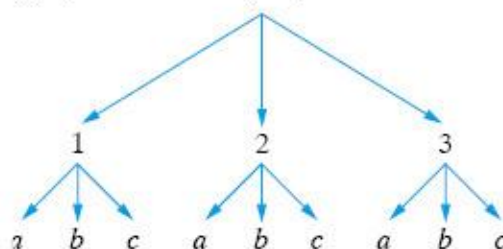
1 pkt – poprawna metoda obliczenia liczby różnych słów zaczynających się samogłoską, które można utworzyć (zastosowanie reguły mnożenia).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 362. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przebieg tego doświadczenia losowego przedstawiamy w postaci drzewka:



Krok 2: Wypisujemy wszystkie możliwe napisy: $\{1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c\}$.

Krok 3: Można otrzymać 9 różnych napisów.

Odpowiedź:

9

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne narysowanie drzewka, wypisanie wszystkich możliwych wyników oraz określenie liczby wyników.

1 pkt – poprawne narysowanie drzewka

albo

poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 363. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przestrzenią zdarzeń elementarnych sprzyjającej zdarzeniu polegającym na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6, jest zbiór:

$$\Omega = \{(1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (7, 6)\}$$

Odpowiedź:

$$\Omega = \{(1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 6), (4, 3), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (7, 6)\}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

1 pkt – poprawne narysowanie drzewka doświadczenia losowego

albo

poprawne narysowanie tabeli doświadczenia losowego,

albo

poprawne wypisanie co najmniej połowy wszystkich możliwych wyników.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 364. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Krok 2: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A:

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Krok 3: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu B: $B = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}.$

Krok 4: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu C: $C = \Omega.$

Odpowiedź:

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

$$B = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$C = \Omega$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników sprzyjających zdarzeniom A, B, C.

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników sprzyjających dwóm zdarzeniom spośród trzech A, B, C.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 365. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Krok 2: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A : $A = \Omega$.

Krok 3: Zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym.

Krok 4: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu B : $B = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$.

Krok 5: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu C : $C = \emptyset$.

Krok 6: Zdarzenie C jest zdarzeniem niemożliwym.

Odpowiedź:

$A = \Omega$, zdarzenie pewne

$$B = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

$C = \emptyset$, zdarzenie niemożliwe

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników sprzyjających zdarzeniom A , B , C oraz określenie, które ze zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, a które – niemożliwym.

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników sprzyjających zdarzeniom A , B , C albo

poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników sprzyjających dwóm spośród trzech zdarzeń i określenie przynajmniej dla jednego zdarzenia, czy jest to zdarzenie pewne czy niemożliwe.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 366. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wylosowanie wylosowania kuli czerwonej oznaczamy jako c , kuli niebieskiej – jako n .

Krok 2: Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{(ccc), (ccn), (cnc), (cnn), (ncc), (ncn), (nnc), (nnn)\}.$$

Krok 3: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A : $A = \{(ccn), (cnc), (ncc)\}$.

Krok 4: Obliczamy liczbę możliwych wyników: $\bar{A} = 3$.

Odpowiedź:

$$\bar{A} = 3$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne określenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 367. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$$

Krok 2: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A : $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

Krok 3: Obliczamy liczbę możliwych wyników: $\bar{A} = 8$.

Odpowiedź:

$$\bar{A} = 8$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne określenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 368. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyrzucenie orła oznaczamy jako O , a wyrzucenie reszki – jako R .

Krok 2: Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{(OOO), (OOR), (ORO), (ROO), (ORR), (ROR), (RRO), (RRR)\}.$$

Krok 3: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A : $A = \{(OOO), (OOR), (ORO), (ROO), (ROR), (RRO)\}.$

Krok 4: Podajemy zdarzenie A' przeciwne do zdarzenia A : $A' = \{(ORR), (RRR)\}.$

Odpowiedź:

$$A' = \{(ORR), (RRR)\}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne określenie liczby wszystkich możliwych wyników zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A .

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników sprzyjających zdarzeniu A .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 369. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Losowanie 1 litery odbywa się na 3 sposoby, a drugiej – na 2 sposoby. Zatem liczba możliwych wyników wylosowania dwóch spółgłosek jest równa $3 \cdot 2 = 6$.

Krok 2: Losowanie 1 liczby odbywa się na 4 sposoby, a drugiej na 3 sposoby. Więc liczba możliwych wyników wylosowania dwóch liczb pierwszych jest równa $4 \cdot 3 = 12$.

Krok 3: Liczba możliwych wyników wylosowania dwóch spółgłosek i dwóch liczb pierwszych jest równa $6 \cdot 12 = 72$.

Odpowiedź:

Są 72 możliwe sposoby.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne określenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

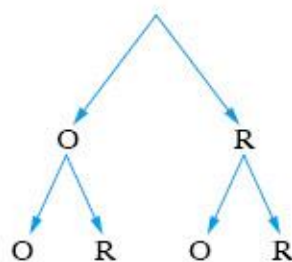
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 370. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyrzucenie orła oznaczamy jako O , a wyrzucenie reszki jako R .

Krok 2: Przebieg tego doświadczenia losowego przedstawiamy w postaci drzewka:



Krok 3: Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki: $\{(OO), (OR), (RO), (RR)\}$.

Krok 4: Można otrzymać 4 różne wyniki.

Odpowiedź:

4

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne narysowanie drzewka, wypisanie wszystkich możliwych wyników oraz podanie liczby wyników.

1 pkt – poprawne narysowanie drzewka

albo

poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 371. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wylosowanie kuli czarnej oznaczamy jako c , wylosowanie kuli niebieskiej jako n .

Krok 2: Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{(cccc), (cccb), (ccbc), (ccbb), (cbcc), (cbcb), (cbbc), (cbbb), (bccb), (bccb), (bcbb), (bbcc), (bbcb), (bbbc), (bbbb)\}$$

Krok 3: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A :

$$A = \{(cbbb), (bcbb), (bbcb), (bbbc)\}$$

Krok 4: Obliczamy liczbę możliwych wyników: $\bar{A} = 4$.

Odpowiedź:

$$\bar{A} = 4$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne określenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 372. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Krok 2: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A : $A = \Omega$.

Krok 3: Zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym.

Krok 4: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu B :

$$B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Krok 5: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu C : $C = \emptyset$.

Krok 6: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu D :

$$D = \{(1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 3), (6, 4)\}$$

Krok 7: Zdarzenie A jest zdarzeniem pewnym.

Krok 8: Zdarzenie C jest zdarzeniem niemożliwym.

Odpowiedź:

$A = \Omega$, zdarzenie pewne

$$B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

$C = \emptyset$, zdarzenie niemożliwe

$$D = \{(1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 3), (6, 4)\}$$

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników sprzyjających zdarzeniom A , B , C oraz określenie, które ze zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, a które – niemożliwym.

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników sprzyjających zdarzeniom A , B , C albo

poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników sprzyjających dwóm spośród trzech zdarzeń i określenie przynajmniej dla jednego zdarzenia, czy jest to zdarzenie pewne czy niemożliwe.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 373. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Cyfrą dziesiątek nie może być cyfra 0.

Krok 2: Jeśli cyfrą dziesiątek jest cyfra 1, to cyfrą jedności może być każda z cyfr od 2 do 9. Jest więc 8 takich cyfr.

Krok 3: Jeśli cyfrą dziesiątek jest cyfra 2, to cyfrą jedności może być każda z cyfr od 3 do 9. Jest więc 7 takich cyfr.

Krok 4: Jeśli cyfrą dziesiątek jest cyfra 3, to cyfrą jedności może być każda z cyfr od 4 do 9. Jest więc 6 takich cyfr.

Krok 5: Jeśli cyfrą dziesiątek jest cyfra 8, to cyfrą jedności może być tylko 9. Jest więc 1 taka cyfra.

Krok 6: Wobec tego liczb spełniających warunek zadania jest $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

Odpowiedź:

Jest 36 takich liczb.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawne określenie liczby wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 374. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 6), (1, 9), (6, 1), (6, 6), (6, 9), (9, 1), (9, 6), (9, 9)\}.$$

Krok 2: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A : $A = \{(1, 1), (1, 6), (1, 9), (6, 1), (6, 9), (9, 1), (9, 6), (9, 9)\}.$

Krok 3: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu B : $B = \{(1, 1), (1, 6), (6, 1)\}.$

Krok 4: Podajemy zdarzenie A' przeciwne do zdarzenia A : $A' = \{(6, 6)\}.$

Krok 5: Obliczamy liczbę możliwych wyników: $\overline{A'} = 1.$

Krok 5: Podajemy zdarzenie B' przeciwne do zdarzenia B : $B' = \{(1, 9), (6, 6), (6, 9), (9, 1), (9, 6), (9, 9)\}$.

Krok 7: Obliczamy liczbę możliwych wyników: $\overline{B'} = 6$.

Odpowiedź:

$$A' = \{(6, 6)\}, \overline{A'} = 1$$

$$B' = \{(1, 9), (6, 6), (6, 9), (9, 1), (9, 6), (9, 9)\}, \overline{B'} = 6$$

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne wypisanie wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniom A , B , A' , B' oraz określenie liczebności zbiorów A' i B' .

2 pkt – poprawne wypisanie wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniom A , B , A' , B' albo

poprawne wypisanie wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniom A i A' (lub B i B') i określenie liczebności zbioru A' (lub B').

1 pkt – poprawne wypisanie wszystkich możliwych wyników sprzyjających zdarzeniom A i B (lub A i A' , lub B i B').

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 375. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Liczba zestawów składających się z mazaka i ołówka: $6 \cdot 5 = 30$.

Krok 2: Liczba zestawów składających się z kredki i długopisu: $24 \cdot 3 = 72$.

Krok 3: Liczba wszystkich zestawów: $30 + 72 = 102$.

Odpowiedź:

Tosia może utworzyć 102 zestawy.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych zestawów, jakie może utworzyć Tosia (zastosowanie reguły mnożenia i dodawania).

2 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych zestawów, jakie może utworzyć Tosia, składających się z mazaka i ołówka oraz zestawów składających się z kredki i długopisu (zastosowanie reguły mnożenia).

1 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych zestawów, jakie może utworzyć Tosia, składających się z mazaka i ołówka albo

poprawne obliczenie liczby możliwych zestawów składających się z kredki i długopisu (zastosowanie reguły mnożenia).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 376. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Klasa 4a – 9 dziewcząt i 18 chłopców.

Krok 2: Klasa 4b – 16 dziewcząt i 8 chłopców.

Krok 2: Obliczamy, na ile sposobów można wybrać dwie dziewczyny: $9 \cdot 16 = 144$.

Krok 3: Obliczamy, na ile sposobów można wybrać dwóch chłopców: $18 \cdot 8 = 144$.

Krok 4: Obliczamy, na ile sposobów można wybrać dwie dziewczyny lub dwóch chłopców $144 + 144 = 288$.

Odpowiedź:

Można wybrać na 288 sposobów.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru dwóch dziewczyn lub dwóch chłopców (zastosowanie reguły mnożenia i dodawania).

2 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru dwóch dziewczyn oraz poprawne

obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru dwóch chłopców (zastosowanie reguły mnożenia).

1 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru dwóch dziewczyn

albo

poprawne obliczenie liczby możliwych sposobów dokonania wyboru dwóch chłopców (zastosowanie reguły mnożenia).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 377. 0–3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Aby suma była liczbą parzystą, obie liczby muszą być parzyste. Wobec tego z I urny możemy wybrać trzy kule (z numerem 0, 2 i 4), a z drugiej urny – dwie kule (z numerem 6 i 8). Możemy więc dokonać wyboru na $3 \cdot 2 = 6$ sposobów.

Krok 2: Aby suma była liczbą parzystą, obie liczby muszą być nieparzyste. Wobec tego z I urny możemy wybrać trzy kule (z numerem 1, 3 i 5), a z drugiej urny – dwie kule (z numerem 7 i 9). Możemy więc dokonać wyboru na $3 \cdot 2 = 6$ sposobów.

Krok 3: Liczba wszystkich wyborów jest równa $6 + 6 = 12$.

Odpowiedź:

Można dokonać wyboru na 12 sposobów.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru kul w taki sposób, aby suma liczb zapisanych na kulach była parzysta (zastosowanie reguły mnożenia i dodawania).

2 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru kul, gdy wybieramy dwie kule o numerach parzystych oraz gdy wybieramy obie kule o numerach nieparzystych (zastosowanie reguły mnożenia).

1 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru dwóch kul gdy wybierzemy obie kule o numerach parzystych

albo

poprawne obliczenie liczby możliwych sposobów dokonania wyboru dwóch kul, gdy wybierzemy obie kule o numerach nieparzystych (zastosowanie reguły mnożenia).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 378. 0–3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Każdą z dwóch liter można wybrać na 3 sposoby, a każdą z pięciu cyfr – na 4 sposoby. Wobec tego taki numer rejestracyjny można utworzyć na $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 9216$ sposobów.

Odpowiedź:

Na 9216 sposobów.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych numerów rejestracyjnych, jakie możemy utworzyć w podany sposób (zastosowanie reguły mnożenia i dodawania).

2 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru liter w numerze rejestracyjnym oraz poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru cyfr w numerze rejestracyjnym.

1 pkt – poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru liter w numerze rejestracyjnym

albo

poprawne obliczenie liczby wszystkich możliwych sposobów dokonania wyboru cyfr w numerze rejestracyjnym.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 379. 0–3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Liczby trzycyfrowe tworzone są z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Krok 2: Aby liczba była podzielna przez 2, na pozycji jedności musi stać jedna z cyfr 2, 4 lub 6.

Krok 3: Wobec tego liczb trzycyfrowych utworzonych z tych sześciu cyfr i podzielnych przez 2 jest $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$.

Krok 4: Aby liczba była podzielna przez 5, na pozycji jedności musi stać cyfra 5.

Krok 5: Wobec tego liczb trzycyfrowych utworzonych z tych sześciu cyfr i podzielnych przez 5 jest $6 \cdot 6 \cdot 1 = 36$.

Krok 6: Wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest: $108 + 36 = 144$.

Odpowiedź:

Jest 144 takie liczby.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne obliczenie, ile jest wszystkich liczb podzielnych przez 2 lub przez 5, utworzonych w sposób określony w zadaniu (zastosowanie reguły mnożenia i dodawania).

2 pkt – poprawne obliczenie, ile jest wszystkich liczb podzielnych przez 2 oraz ile jest wszystkich liczb podzielnych przez 5, utworzonych w sposób określony w zadaniu (zastosowanie reguły mnożenia).

1 pkt – poprawne obliczenie, ile jest wszystkich liczb podzielnych przez 2, utworzonych w sposób określony w zadaniu albo

poprawne obliczenie, ile jest wszystkich liczb podzielnych przez 5, utworzonych w sposób określony w zadaniu (zastosowanie reguły mnożenia).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 380. 0-5 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: I urna: 3 niebieskie, 6 czerwonych, 4 zielone.

Krok 2: II urna: 4 niebieskie, 5 czerwonych i 8 zielonych.

Krok 3: Liczba sposobów wyboru kuli niebieskiej: $3 \cdot 4 = 12$.

Krok 4: Liczba sposobów wyboru kuli czerwonej: $6 \cdot 5 = 30$.

Krok 5: Liczba sposobów wyboru kuli zielonej: $4 \cdot 8 = 32$.

Krok 6: Liczba sposobów wyboru kuli jednakowego koloru: $12 + 30 + 32 = 74$.

Odpowiedź:

Jest 74 możliwości wyboru.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawne obliczenie, na ile sposobów można wybrać kule, aby obie były jednakowego koloru (zastosowanie reguły mnożenia i dodawania).

3 pkt – poprawne obliczenie, na ile sposobów można wybrać kule, aby obie były czerwone, na ile sposobów można wybrać kule, aby obie były niebieskie, i na ile sposobów można wybrać kule, aby obie były zielone (zastosowanie reguły mnożenia).

2 pkt – poprawne obliczenie, na ile sposobów można wybrać kule, aby obie były czerwone albo obie niebieskie albo

na ile sposobów można wybrać kule, aby obie były czerwone lub zielone,

albo

na ile sposobów można wybrać kule, aby obie były niebieskie lub zielone (zastosowanie reguły mnożenia).

1 pkt – poprawne obliczenie, na ile sposobów można wybrać kule, aby obie były czerwone

albo

poprawne obliczenie, na ile sposobów można wybrać kule, aby obie były niebieskie,

albo

poprawne obliczenie, na ile sposobów można wybrać kule, aby obie były zielone (zastosowanie reguły mnożenia).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

12. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Zadanie 381. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: W pudełku jest $3n$ kul białych i $7n$ kul czarnych, czyli w pudełku jest $10n$ kul.

Krok 2: Obliczamy prawdopodobieństwo wyciągnięcia kuli czarnej z pudełka: $\frac{7n}{10n} = 0,7$.

Krok 3: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: C.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 382. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy jako A' zdarzenie przeciwne do zdarzenia A .

Krok 2: Wtedy $P(A) + P(A') = 1$.

Krok 3: Wiemy, że $5 \cdot P(A) = P(A')$.

Krok 4: Zatem $P(A) + 5 \cdot P(A) = 1$, czyli $6 \cdot P(A) = 1$. Stąd $P(A) = \frac{1}{6}$.

Odpowiedź:

A

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 383. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Ze średniej arytmetycznej wyznaczamy wartość x :

$$\frac{4 \cdot 1 + 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + x}{10} = 3$$

Krok 2: Obliczamy: $25 + x = 30$, stąd $x = 5$.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 384. 0-4 pkt

Zadanie 384.1. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Dominanta to liczba, która w zbiorze danych występuje najczęściej.

Krok 2: Odczytujemy liczby trafień, które w tym zestawie danych występują najczęściej: 1 i 5 (liczba 1 powtórzyła się 4 razy, liczba 5 powtórzyła się również 4 razy).

Krok 3: Zaznaczamy odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 384.2. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Porządkujemy liczby trafień w kolejności niemalejącej: 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5.

Krok 2: Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą nieparzystą i wynosi $n = 15$.

Krok 3: Medianą jest liczba o numerze ósmym $\left(\frac{15+1}{2} = 8\right)$, czyli 2.

Odpowiedź:

Mediana liczby trafień uzyskanych przez łucznika jest równa 2.

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 384.3. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Ze średniej arytmetycznej wyznaczamy średnią trafień:

Krok 2: $\bar{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4}{3 + 4 + 1 + 2 + 1 + 4} = \frac{36}{15} = 2,4$.

Odpowiedź:

Średnia jest równa 2,4.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie średniej arytmetycznej: 2,4.

1 pkt – poprawna metoda wyznaczenia średniej arytmetycznej.

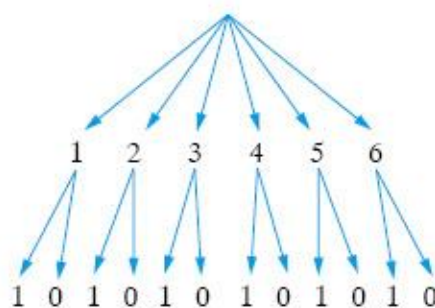
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 385. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przebieg tego doświadczenia losowego przedstawiamy w postaci drzewka.

Krok 2: Wyrzucenie orła oznaczamy liczbą 1, a wyrzucenie reszki liczbą 0.



Krok 3: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = 6 \cdot 2 = 12$.

Krok 4: Oznaczamy jako A – zdarzenie polegające na uzyskaniu 5 punktów.

Krok 5: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A : $A = \{(4, 1), (5, 0)\}$.

Krok 6: Określamy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = 2$.

Krok 7: Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Krok 8: Zaznaczamy poprawną odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 386. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: A. Obliczamy liczbę wszystkich ocen semestralnych z fizyki: $2 + 5 + 7 + 6 + 3 + 2 = 25$.

Wyznaczamy medianę. Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą nieparzystą i wynosi $n = 25$.

Medianą jest ocena o numerze trzynastym $\left(\frac{25+1}{2} = 13\right)$, czyli 3.

Zdanie jest prawdziwe.

Krok 2: B. *Dominanta* to liczba, która w zbiorze danych występuje najczęściej.

Odczytujemy ocenę, która w tym zestawie danych występuje najczęściej: 3 (wielkość powtórzyła się 7 razy).

Zdanie jest prawdziwe.

Krok 3: C. Obliczamy średnią ocen:

$$\frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{25} = \frac{84}{25} = 3,36$$

Średnia arytmetyczna ocen jest różna od mediany.

Zdanie jest fałszywe

Obliczamy średnią ważoną:

$$\frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{25} = \frac{84}{25} = 3,36$$

Krok 4: D. Wyznaczamy różnicę między najwyższą oceną a średnią: $(6 - 3,36 = 2,64)$.

Zdanie jest prawdziwe.

Odpowiedź:

C

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 387. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Obliczamy średni wzrost rodzeństwa:

$$\frac{140+165+175}{3} = \frac{480}{3} = 160 \text{ (cm)}$$

Krok 2: Obliczamy wariancję zestawu danych:

$$\frac{(140-160)^2 + (165-160)^2 + (175-160)^2}{3} = \frac{400+25+225}{3} = \frac{650}{3}$$

Krok 3: Obliczamy odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\frac{650}{3}} \approx 15 \text{ (cm)}$.**Odpowiedź:**

FP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 388. 0-1 pkt**Rozwiązanie:****Krok 1:** Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Krok 2: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu Ω : $\bar{\Omega} = 36$.**Krok 3:** Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A , że w pierwszym rzucie wypadła liczba oczek większa niż w drugim rzucie:

$$A = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$$

Krok 4: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = 15$.**Krok 5:** Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.**Krok 6:** Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu B polegającego na wylosowaniu iloczynu oczek podzielonego przez 3:

$$B = \{(1,3), (1,6), (2,3), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,6), (5,3), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Krok 7: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B : $\bar{B} = 20$.**Krok 8:** Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B : $P(B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.**Krok 9:** Zaznaczamy: PP.**Odpowiedź:**

PP

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 389. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $\Omega: \bar{\Omega} = 25$.

Krok 2: Oznaczamy jako A zdarzenie, polegające na wylosowaniu liczby, której dzielnikiem jest liczba 3.

Krok 3: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu $A: A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$.

Krok 4: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $A: \bar{A} = 8$.

Krok 5: Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A: P(A) = \frac{8}{25}$.

Krok 6: Zaznaczamy odpowiedź: D.

Odpowiedź:

D.

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 390. 0-1 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Ze średniej arytmetycznej wyznaczamy wartość x :

$$\frac{x+8+x+10+x-3+x+3}{5} = 2$$

$$4x + 18 = 10, \text{ stąd } x = -2$$

Krok 2: Wyznaczamy szukane liczby: 6, 8, -5, -2, 3.

Krok 3: Najmniejszą z tych liczb jest liczba -5.

Krok 4: Zaznaczamy odpowiedź: B.

Odpowiedź:

B

Zasady oceniania:

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 391. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Określamy zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego polegającego na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Krok 2: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = 6$.

Krok 3: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A , że wypadła nieparzysta liczba oczek: $A = \{1, 3, 5\}$.

Krok 4: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu $A: \bar{A} = 3$.

Krok 5: Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A: P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$.

Odpowiedź:

Szukane prawdopodobieństwo wynosi 0,5.

Zasady oceniania:

2 pkt – prawdopodobieństwa otrzymania nieparzystej liczby oczek przy jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry: 0,5.

Odpowiedzi krok po kroku

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych i liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 392. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych Ω : $\bar{\Omega} = 5 \cdot 9 = 45$.

Krok 2: Oznaczamy jako A zdarzenie, polegające na wylosowaniu liczb, których suma będzie podzielna przez 5.

Krok 3: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A :

$$A = \{(1, 4), (1, 9), (2, 3), (2, 8), (3, 2), (3, 7), (4, 1), (4, 6), (5, 5)\}.$$

Krok 4: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = 9$.

Krok 5: Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} = 0,2$.

Odpowiedź:

Szukane prawdopodobieństwo jest równe 0,2.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie prawdopodobieństwa sumy liczb podzielnych przez 5: 0,2.

1 pkt – poprawne obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: 45 i poprawne obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających: 9.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 393. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyznaczamy liczbę dziewcząt, które lubią matematykę: $0,4 \cdot 15 = 6$.

Krok 2: Wyznaczamy liczbę chłopców, którzy lubią matematykę: $0,9 \cdot 10 = 9$.

Krok 3: Oznaczamy jako A zdarzenie, że losowo wybrana osoba w pewnej klasie lubi matematykę.

Krok 4: Określamy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = 6 + 9 = 15$.

Krok 5: Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

Odpowiedź:

Szukane prawdopodobieństwo wynosi $P(A) = \frac{3}{5}$.

Zasady oceniania:

2 pkt – prawidłowe obliczenie prawdopodobieństwa, że losowo wybrana osoba z tej klasy lubi matematykę: $\frac{3}{5}$.

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych i liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 394. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy średnią ważoną:

Krok 2:

$$\begin{aligned} & \frac{(4+2+5) \cdot 6 + (5+3+3+4) \cdot 2 + (2+4) \cdot 4}{3 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4} = \\ & = \frac{66 + 30 + 24}{34} = 3,53 \approx 4 \end{aligned}$$

Odpowiedź:

Ocena semestralna wynosi 4.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie oceny semestralnej: 4.

1 pkt – wyznaczenia średniej ważonej.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 395. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu Ω : $\bar{\Omega} = 6 + 3 + n = 9 + n$.

Krok 2: Punkt 1. Oznaczamy jako A zdarzenie, polegające na wylosowaniu kuli białej.

Krok 3: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = 6$.

Krok 4: Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{6}{9+n}$.

Krok 5: Obliczamy liczbę kul białych:

$$\frac{6}{9+n} = \frac{1}{3}$$

$$9 + n = 18, \text{ stąd } n = 9$$

Krok 6: Punkt 2. Oznaczamy jako B zdarzenie, polegające na wylosowaniu kuli czarnej.

Krok 7: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B : $\bar{B} = n$.

Krok 8: Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B : $P(B) = \frac{n}{9+n}$.

Krok 9: Obliczamy liczbę kul czarnych:

$$\frac{n}{9+n} \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{n}{9+n} - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\frac{n-3}{9+n} \leq 0$$

$$(n-3)(9+n) \leq 0, \text{ stąd } n \in \langle -9, 3 \rangle$$

Krok 10: Z warunków zadania wynika, że $n = 3$

Krok 11: Zaznaczamy: BF

Odpowiedź:

BF

Zasady oceniania:

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: 1. B i 2. F.

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: 1. B albo 2. F.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 396. 0-2 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Obliczamy łączny zarobek wszystkich pracowników firmy A: $14 \cdot 3200 = 44\,800$.

Krok 2: Obliczamy łączny zarobek wszystkich pracowników firmy B: $21 \cdot 3500 = 73\,500$.

Krok 3: Obliczamy średnią płacę pracowników obydwu firm:

$$\frac{44\,800 + 73\,500}{15 + 20} = \frac{118\,300}{35} = 3380$$

Odpowiedź:

Średnia płaca w obu firmach wynosi 3380 zł.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie średniej płacy pracowników obydwu firm: 3380 zł.

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie łącznych zarobków w firmie A i prawidłowe wyznaczenie łącznych zarobków w firmie B.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 397. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy średnią ważoną:

$$\begin{aligned}\text{Krok 2: } & \frac{0,3 \cdot 12 + 0,4 \cdot 8,5 + 0,25 \cdot 4,4 + 0,05 \cdot 2,6}{0,3 + 0,4 + 0,25 + 0,05} = \\ & = \frac{3,6 + 3,4 + 1,1 + 0,13}{1} = 8,23 \text{ (zł)}\end{aligned}$$

Odpowiedź:

Średnia cena truskawek wynosiła 8,23 zł.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie średniej ceny kilograma truskawek: 8,23 zł.

1 pkt – poprawne zapisanie średniej ważonej: $\frac{0,3 \cdot 12 + 0,4 \cdot 8,5 + 0,25 \cdot 4,4 + 0,05 \cdot 2,6}{0,3 + 0,4 + 0,25 + 0,05}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 398. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Porządkujemy wartości temperatur w kolejności niemalejącej:

-9, -8, -8, -7, -5, -4, -3, -2, -2, -2, -1, 2, 2, 4, 5.

Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą nieparzystą i wynosi $n = 15$.

Medianą jest liczba o numerze ósmym $\left(\frac{15+1}{2} = 8\right)$, czyli liczba -2.

Krok 2: Obliczamy średnią arytmetyczną temperatur:

$$\begin{aligned}& \frac{-9 - 2 \cdot 8 - 7 - 5 - 4 - 3 - 3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 + 4 + 5}{15} = \\ & = \frac{-38}{15} \approx -2,5 \text{ (}^{\circ}\text{C)}\end{aligned}$$

Dominanta to liczba, która w zbiorze danych występuje najczęściej.

Odczytujemy temperaturę, która w tym zestawie danych występuje najczęściej: -2°C (wielkość powtórzyła się trzy razy).

Odpowiedź:

1. Medianą temperatury w pierwszych 15 dniach lutego jest -2°C .

2. Średnia temperatura 15 dni lutego była o ok. $0,5^{\circ}\text{C}$ niższa od dominanty tych temperatur.

Zasady oceniania:

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie wartości mediany i średniej.

1 pkt – poprawne wyznaczenie mediany albo poprawne wyznaczenie średniej.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 399. 0-2 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy liczbę wszystkich ocen ze sprawdzianu: $1 + 4 + 2 + 4 + 4 + 8 = 23$.

Krok 2: Wyznaczamy medianę.

Krok 3: Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą nieparzystą i wynosi $n = 23$.

Krok 4: Medianą jest ocena o numerze jedenastym $\left(\frac{23+1}{2}=12\right)$, czyli 5.

Krok 5: Dominanta to liczba, która w zbiorze danych występuje najczęściej.

Krok 6: Odczytujemy ocenę, która w tym zestawie danych występuje najczęściej: 6 (wielkość powtórzyła się 8 razy).

Krok 7: Wyznaczamy różnicę między dominantą a medianą tego zestawu danych: $6 - 5 = 1$.

Odpowiedź:

Różnica między dominantą a medianą tego zestawu danych jest równa 1.

Zasady oceniania:

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie różnicy.

1 pkt – prawidłowe obliczenie mediany i dominanty.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 400. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych Ω : $\bar{\Omega} = 20 \cdot 19 \cdot 18$.

Krok 2: Oznaczamy jako A zdarzenie, polegające na wylosowaniu dwóch książek historycznych i jednej spośród pozostałych 15.

Krok 3: Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = 5 \cdot 4 \cdot 15$.

Krok 4: Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 15}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{5}{114}$.

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wygrania dokładnie trzy razy wynosi $\frac{5}{114}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie prawdopodobieństwa: $\frac{5}{114}$.

2 pkt – prawidłowe obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu: $\bar{A} = 5 \cdot 4 \cdot 15$.

1 pkt – prawidłowe obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = 20 \cdot 19 \cdot 18$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 401. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Ze średniej arytmetycznej wyznaczamy wartość x :

$$\frac{4+5+3+4+6+x+3}{7} = 4$$

$$25 + x = 28, \text{ stąd } x = 3$$

Krok 2: Porządkujemy oceny w kolejności niemalejącej: 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6.

Krok 3: Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą nieparzystą i wynosi $n = 7$.

Krok 4: Medianą jest liczba o numerze trzecim $\left(\frac{7+1}{2} = 4\right)$, czyli liczba 4.

Krok 5: Dominanta to liczba, która w zbiorze danych występuje najczęściej.

Krok 6: Odczytujemy ocenę, która w tym zestawie danych występuje najczęściej: ocena dostateczna (liczba 3 powtórzyła się trzy razy).

Odpowiedź:

$x=3$, 4, dostateczna.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie wartości x , mediany i dominanty.
2 pkt – prawidłowe wyznaczenie mediany: 4
albo
prawidłowe wyznaczenie dominanty: 3.
1 pkt – prawidłowe wyznaczenie wartości x : $x = 3$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 402. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy średnią cenę jagodzianki:

$$\frac{4 + 4,5 + 6,5 + 7 + 8}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Krok 2: Obliczamy wariancję zestawu danych:

$$\frac{(4-6)^2 + (4,5-6)^2 + (6,5-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2}{5} = \\ = \frac{4 + 2,25 + 0,25 + 1 + 4}{5} = \frac{11,5}{5} = 2,3$$

Krok 3: Obliczamy odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{2,3} \approx 1,52$.

Odpowiedź:

Odchylenie standardowe ceny jagodzianki wynosi ok. 1,52 zł.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie odchylenia standardowego ceny jagodzianki: 1,52 zł.
2 pkt – prawidłowe wyznaczenie wariancji: 2,3.
1 pkt – prawidłowe wyznaczenie średniej ceny jagodzianki: 6 zł.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 403. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy jako Ω zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 5 i mniejszej od 300.

Krok 2: Wyznaczamy liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu Ω :

Krok 3: Elementy zbioru Ω są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 100$, $a_n = 295$, $r = 5$.

$$\text{Stąd } 295 = 100 + (n-1) \cdot 5.$$

$$\text{Zatem } \Omega = n = 40.$$

Krok 4: Oznaczamy jako A zdarzenie polegające na wylosowaniu liczby podzielnej przez 10.

Krok 5: Elementy zbioru A są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = 100$, $a_k = 290$, $r = 10$.

$$\text{Stąd } 290 = 100 + (k-1) \cdot 10.$$

$$\text{Zatem } A = k = 20.$$

Krok 6: Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{20}{40} = 0,5$.

Odpowiedź:

Szukane prawdopodobieństwo jest równe 0,5.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie prawdopodobieństwa: $P(A) = 0,5$.
2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu: $\bar{A} = 20$.
1 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = 40$.

Zadanie 404. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = 99 - 9 = 90$.

Krok 2: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A , że otrzymamy liczbę, która jest podzielna przez liczbę 8 i nie jest podzielna przez liczbę 16: $A = \{24, 40, 56, 72, 88\}$.

Krok 3: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = 5$.

Krok 4: Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.

Odpowiedź:

Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{18}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{1}{18}$.

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu: $\bar{A} = 5$.

1 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = 90$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 405. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = 25 \cdot 24 \cdot 23$.

Krok 2: Oznaczamy jako A zdarzenie, że wśród wylosowanych trzech hulajnóg co najmniej dwie są sprawne.

Krok 3: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A :

Krok 4: Wszystkie hulajnogi mogą być sprawne lub dwie hulajnogi mogą być sprawne, a jedna uszkodzona, więc:
 $\bar{A} = 20 \cdot 19 \cdot 18 + 20 \cdot 19 \cdot 5 = 20 \cdot 19 \cdot 23$.

Krok 5: Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{20 \cdot 19 \cdot 23}{25 \cdot 24 \cdot 23} = \frac{19}{30}$.

Odpowiedź:

Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{19}{30}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{19}{30}$.

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu: $\bar{A} = 20 \cdot 19 \cdot 18$.

1 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = 25 \cdot 24 \cdot 23$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 406. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = (n+1) \cdot n$.

Krok 2: Oznaczamy jako A zdarzenie, że wylosowano dwie kule czarne.

Krok 3: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = n \cdot (n-1)$.

Krok 4: Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{n(n-1)}{(n+1) \cdot n} = \frac{n-1}{n+1}$.

Krok 5: Obliczamy liczbę kul czarnych:

$$\frac{n-1}{n+1} = \frac{4}{5}$$

$$5(n-1) = 4(n+1), \text{ stąd } n = 9$$

Odpowiedź:

W urnie powinno być 9 kul czarnych.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie liczby kul czarnych: $n = 9$.

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu: $\bar{A} = n \cdot (n-1)$.

1 pkt – poprawne określenie liczby zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = (n+1) \cdot n$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 407. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Należy obliczyć wartości oczekiwane wygranych w obydwu konkursach oraz wybrać ten, którego wartość oczekiwana wygranej jest większa.

Krok 2: Obliczamy wartość oczekiwaną wygranej w pierwszym konkursie:

$$20\,000 \cdot 0,1 + 5000 \cdot 0,5 + 200 \cdot 0,7 = 2000 + 2500 + 140 = 4640$$

Krok 3: Obliczamy wartość oczekiwaną wygranej w drugim konkursie:

$$20\,000 \cdot 0,2 + 5000 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 200 = 4000 + 1000 + 100 = 5100$$

Krok 4: Wartość oczekiwana jest większa w drugim konkursie.

Odpowiedź:

Powinien wziąć udział w drugim konkursie.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i poprawne wskazanie konkursu, w którym jest większa szansa wygrania: drugi konkurs.

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenia wartości oczekiwanej wygranej w konkursie pierwszym: 4640 zł oraz prawidłowe wyznaczenie wartości oczekiwanej wygranej w konkursie drugim: 5100 zł.

1 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie wartości oczekiwanej wygranej w konkursie pierwszym: 4640 zł albo

poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenia wartości oczekiwanej wygranej w konkursie drugim: 5100 zł.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 408. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy średnią arytmetyczną wyjść do kina:

$$\frac{6 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{6 + 8 + 11 + 15 + 7 + 3} = \frac{118}{50} = 2,36$$

Krok 2: Liczba elementów tego zbioru danych jest liczbą parzystą i wynosi $n = 50$.

Krok 3: Medianą jest liczba $\frac{1}{2} \cdot (a_{25} + a_{26})$, czyli $\frac{1}{2} \cdot (2 + 3) = 2,5$.

Krok 4: Dominanta to liczba, która w zbiorze danych występuje najczęściej.

Krok 5: Odczytujemy liczbę wyjść do kina, która w tym zestawie danych występuje najczęściej: 3 (wielkość powtórzyła się 15 razy).

Krok 6: Dominantą jest liczba 3.

Odpowiedź:

Średnia arytmetyczna wyjść do kina: $\frac{6 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{6 + 8 + 11 + 15 + 7 + 3} = \frac{118}{50} = 2,36$, mediana: $\frac{1}{2} \cdot (2 + 3) = 2,5$, dominanta: 3

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawne wyznaczenie średniej arytmetycznej oraz poprawne wyznaczenie mediany i poprawne wyznaczenie dominanty.

2 pkt – poprawne wyznaczenie średniej arytmetycznej i poprawne wyznaczenie mediany albo

poprawne wyznaczenie średniej arytmetycznej i poprawne wyznaczenie dominanty, albo

poprawne wyznaczenie mediany i poprawne wyznaczenie dominanty.

1 pkt – poprawne wyznaczenie średniej arytmetycznej albo

poprawne wyznaczenie mediany, albo

poprawne wyznaczenie dominanty.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 409. 0-3 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Oznaczamy jako x liczbę punktów uzyskanych z trzeciego testu.

Krok 2: Ze średniej arytmetycznej wyznaczamy wartość x :

$$\frac{12+16+x}{3} \geq 15$$

$$28+x \geq 45, \text{ stąd } x \geq 17$$

Odpowiedź:

Student musi uzyskać z testu co najmniej 17 punktów.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe rozwiązanie nierówności pozwalające wyznaczyć liczbę uzyskanych punktów z trzeciego egzaminu: $x \geq 17$ oraz prawidłowe udzielenie odpowiedzi: co najmniej 17 punktów.

2 pkt – poprawne zapisanie nierówności pozwalającej wyznaczyć liczbę uzyskanych punktów z trzeciego egzaminu:

$$\frac{12+16+x}{3} \geq 17.$$

1 pkt – poprawne zapisanie średnie z trzech egzaminów: $\frac{12+16+x}{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 410. 0-3 pkt**Rozwiązanie:**

Krok 1: Obliczamy średnią płacę pracowników:

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot 4300 + 7500}{9+1} = \frac{38\,700 + 7500}{10} = \frac{46\,200}{10} = 4620 \text{ (zł)}$$

Krok 2: Obliczamy wariancję zestawu danych:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{9 \cdot (4300 - 4620)^2 + (7500 - 4600)^2}{3} = \\ &= \frac{921\,600 + 8\,410\,000}{3} = \frac{9\,331\,600}{3} \end{aligned}$$

Krok 3: Obliczamy odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{\frac{9\,331\,600}{3}} \approx 1763,67 \text{ (zł)}.$$

Odpowiedź:

Średnia płaca wynosi 4620 zł, a odchylenie standardowe od niej ok. 1763,67 zł.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie odchylenia standardowego: ok. 1763,67 zł.

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie wariancji zestawu danych: $\sigma^2 = \frac{9\,331\,600}{3}$.

1 pkt – prawidłowe obliczenie średniej płac 9 pracowników: 4620 zł.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 411. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy średnią stopę zysku:

$$\bar{x} = \frac{0,06 + 0,09 + (-0,04) + (-0,07) + 0,11}{5} = \\ = \frac{0,15}{5} = 0,03 = 3\%$$

Krok 2: Obliczamy wariancję zestawu danych:

$$s^2 = \frac{(0,06 - 0,03)^2 + (0,09 - 0,03)^2 + (-0,04 - 0,03)^2 + (-0,07 - 0,03)^2 + (0,11 - 0,03)^2}{5} = \\ = \frac{0,0009 + 0,0036 + 0,0049 + 0,01 + 0,0064}{5} = \frac{0,0258}{5} = 0,00516$$

Krok 3: Obliczamy odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{0,00516} \approx 0,0718 = 7,18\%$.

Odpowiedź:

Średnia stopa zysku była równa 3%, a odchylenie standardowe od niej ok. 7,18%.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie odchylenia standardowego: ok. 7,18%.

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie wariancji zestawu danych: $\sigma^2 = 0,00516$.

1 pkt – prawidłowe obliczenie średniej stopy zysku: 3%.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 412. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy jako x średnią płacę w grupie pracowników produkcyjnych, jako n liczbę pracowników administracyjnych, jako $4n$ liczbę pracowników produkcyjnych.

Krok 2: Wyznaczamy łączny zarobek pracowników produkcyjnych w kwietniu: $4n \cdot x$.

Krok 3: Wyznaczamy łączny zarobek pracowników administracyjnych w kwietniu: $n \cdot 5200$.

Krok 4: Obliczamy średnią płacę w grupie pracowników produkcyjnych ze średniej arytmetycznej:

$$\frac{4n \cdot x + n \cdot 5200}{4n + n} = 4800$$

$$\frac{4x + 5200}{5} = 4800$$

$$4x + 5200 = 24\,000$$

$$4x = 18\,800, \text{ stąd } x = 4700$$

Odpowiedź:

Średnia płaca w grupie pracowników produkcyjnych wynosiła 4700 zł.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie średniej płacy w grupie pracowników administracyjnych: 4700 zł.

2 pkt – poprawna zapisanie równania pozwalającego na wyznaczenie średniej płacy w grupie pracowników administracyjnych: $\frac{4n \cdot x + n \cdot 5200}{4n + n} = 4800$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie łącznego zarobku pracowników produkcyjnych i pracowników administracyjnych: $4n \cdot x + 5200n$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 413. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Obliczamy średnią wagę kostki masła:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{4 \cdot 16 + 5 \cdot 18 + 16 \cdot 19 + 63 \cdot 20 + 12 \cdot 21}{4 + 5 + 16 + 63 + 12} = \\ &= \frac{64 + 90 + 304 + 1260 + 252}{100} = \frac{1970}{100} = 19,7\end{aligned}$$

Krok 2: Obliczamy wariancję zestawu danych:

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{4 \cdot (16 - 19,7)^2 + 5 \cdot (18 - 19,7)^2 + 16 \cdot (19 - 19,7)^2 + 63 \cdot (20 - 19,7)^2 + 12 \cdot (21 - 19,7)^2}{100} = \\ &= \frac{4 \cdot 13,69 + 5 \cdot 2,89 + 16 \cdot 0,49 + 63 \cdot 0,09 + 12 \cdot 1,69}{100} = \frac{54,76 + 14,45 + 7,84 + 5,67 + 20,98}{100} = \\ &= \frac{54,76 + 14,45 + 7,84 + 5,67 + 20,98}{100} = \frac{103,7}{100} = 1,037\end{aligned}$$

Krok 3: Obliczamy odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{1,037} \approx 1,0$

Odpowiedź:

Odchylenie standardowe od średniej wagi wynosi ok. 1,0 dag.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie odchylenia standardowego: ok. 1,0 dag.

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie wariancji zestawu danych: $\sigma^2 = 1,037$.

1 pkt – prawidłowe obliczenie średnią wagę kostki masła: 19,7 dag.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 414. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Przestrzenią zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego jest zbiór:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

Krok 2: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu Ω : $\bar{\Omega} = 16$.

Krok 3: Oznaczamy jako A zdarzenie, że liczba 5 jest sumą oczek na obu kostkach.

Krok 4: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A : $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$.

Krok 5: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = 4$.

Krok 6: Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Krok 7: Oznaczamy jako A' zdarzenie, że liczba 5 nie jest sumą oczek na obu kostkach.

Krok 8: Zatem $P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$.

Odpowiedź:

Szukane prawdopodobieństwo jest równe 0,75.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia, że liczba 5 nie jest sumą oczek na obu kostkach: 0,75.

3 pkt – prawidłowe obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A : $P(A) = \frac{1}{4}$.

2 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu: $\bar{A} = 4$.

1 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\bar{\Omega} = 16$.

0 pkt – odpowiedź całkowicie niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Zadanie 415. 0-3 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych Ω : $\bar{\Omega} = 80 \cdot 79 \cdot 78$.

Krok 2: Oznaczamy jako A zdarzenie polegające na wylosowaniu dwukrotnie losów wygrywających.

Krok 3: Obliczamy liczbę losów wygrywających: $80 - 54 = 26$.

Krok 4: Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = 26 \cdot 25 \cdot 24$.

Krok 5: Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{80 \cdot 79 \cdot 78} = \frac{5}{158} \approx 0,03$.

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wygrania dokładnie trzy razy wynosi ok. 0,03.

Zasady oceniania:

3 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie prawdopodobieństwa trzykrotnego wylosowania losu wygrywającego: ok. 0,03.

2 pkt – prawidłowe obliczenie liczby wszystkich zdarzeń trzykrotnego wylosowania losu wygrywającego: $\bar{A} = 26 \cdot 25 \cdot 24$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie zdarzeń elementarnych i prawidłowe obliczenie ich liczby: $\bar{\Omega} = 80 \cdot 79 \cdot 78$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 416. 0-4 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Wyrzucenie orła oznaczamy jako O , wyrzucenie reszki jako R .

Krok 2: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych Ω : $\bar{\Omega} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Krok 3: Oznaczamy jako A zdarzenie, polegające na wyrzuceniu jednego orła.

Krok 4: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu A : $A = \{(ORRR), (RORR), (RROR), (RRRO)\}$.

Krok 5: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A : $\bar{A} = 4$.

Krok 6: Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Krok 7: Oznaczamy jako B zdarzenie, polegające na wyrzuceniu reszki w co drugim rzucie.

Krok 8: Wypisujemy wyniki sprzyjające zdarzeniu B : $B = \{(OROR), (RORO)\}$.

Krok 9: Określamy liczbę wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu B : $\bar{B} = 2$.

Krok 10: Wyznaczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B : $P(B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

Zatem $P(A) > P(B)$.

Odpowiedź:

Bardziej prawdopodobne jest wyrzucenie jednego orła.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawna metoda i prawidłowe obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń A oraz B i udzielenie poprawnej odpowiedzi: bardziej prawdopodobne jest wyrzucenie jednego orła.

3 pkt – prawidłowe wyznaczenie zdarzeń polegających na wyrzuceniu jednego orła i prawidłowe obliczenie ich liczby: $\bar{A} = 4$ oraz prawidłowe wyznaczenie zdarzeń polegających na wyrzuceniu reszki w co drugim rzucie i prawidłowe obliczenie ich liczby: $\bar{B} = 2$.

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie zdarzeń polegających na wyrzuceniu jednego orła i prawidłowe obliczenie ich liczby: $\bar{A} = 4$

albo
prawidłowe wyznaczenie zdarzeń polegających na wyrzuceniu reszki w co drugim rzucie i prawidłowe obliczenie ich liczby:
 $\overline{B} = 2$.

1 pkt – poprawne wyznaczenie zdarzeń elementarnych i prawidłowe obliczenie ich liczby: $\overline{\Omega} = 16$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 417. 0-5 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy, przez n liczbę kul białych, a przez $n + 15$ liczbę wszystkich kul w bębnie maszyny losującej.

Krok 2: Wyznaczamy liczbę kul białych:

$$\frac{n}{n+15} > \frac{1}{3} \text{ i } \frac{n}{n+15} < \frac{2}{5}$$

$$\frac{2n-15}{3(n+15)} > 0 \text{ i } \frac{3n-30}{5(n+15)} < 0$$

$$2n - 15 > 0 \text{ i } 3n - 30 < 0$$

$$n > 7,5 \text{ i } n < 10$$

$$\text{Stąd } n \in (7,5; 10).$$

$$\text{Zatem } n \in \{8, 9\}.$$

Odpowiedź:

W tym bębnie może być 8 lub 9 kul białych.

Zasady oceniania:

5 pkt – poprawna metoda, prawidłowe wyznaczenie liczby kul białych w urnie: 8 lub 9.

4 pkt – poprawne zapisanie warunków: $\frac{n}{n+15} > \frac{1}{3}$ i $\frac{n}{n+15} < \frac{2}{5}$, prawidłowe ich rozwiązanie i prawidłowe zapisanie rozwiązania: $n \in (7,5; 10)$.

3 pkt – poprawne zapisanie warunków: $\frac{n}{n+15} > \frac{1}{3}$ i $\frac{n}{n+15} < \frac{2}{5}$ oraz prawidłowe rozwiązanie nierówności $\frac{n}{n+15} > \frac{1}{3}$: $n > 7,5$ albo

poprawne zapisanie warunków: $\frac{n}{n+15} > \frac{1}{3}$ i $\frac{n}{n+15} < \frac{2}{5}$ oraz prawidłowe rozwiązanie nierówności $\frac{n}{n+15} < \frac{2}{5}$: $n < 10$.

2 pkt – poprawne zapisanie warunków: $\frac{n}{n+15} > \frac{1}{3}$ i $\frac{n}{n+15} < \frac{2}{5}$.

1 pkt – poprawne zapisanie prawdopodobieństwa kuli białej: $\frac{n}{n+15}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zadanie 418. 0-5 pkt

Rozwiązanie:

Krok 1: Oznaczamy jako n liczbę ocen bardzo dobrych, jako $15 - n$ liczbę ocen dobrych.

Krok 2: Wyznaczamy średnią arytmetyczną ocen:

$$\frac{5n + 4(15 - n)}{15} = \frac{5n + 60 - 4n}{15} = 4 + \frac{n}{15}$$

Krok 3: Wyznaczamy liczbę piątek z wariancji zestawu ocen:

$$\frac{n \cdot \left(5 - 4 - \frac{n}{15}\right)^2 + (15 - n) \cdot \left(4 - 4 - \frac{n}{15}\right)^2}{15} = \frac{6}{25}$$

$$\frac{n \cdot \left(1 - \frac{n}{15}\right)^2 + (15 - n) \cdot \left(-\frac{n}{15}\right)^2}{15} = \frac{6}{25}$$

$$\frac{n \cdot \left(1 - \frac{2n}{15} + \frac{n^2}{225}\right) + (15-n) \cdot \frac{n^2}{225}}{15} = \frac{6}{25}$$

$$\frac{n - \frac{2n^2}{15} + \frac{n^3}{225} + \frac{n^2}{15} - \frac{n^3}{225}}{15} = \frac{6}{25}$$

$$n - \frac{n^2}{15} = \frac{18}{5}$$

$$n^2 - 15n - 54 = 0 \text{ stąd } n = 6 \text{ lub } n = 9$$

Odpowiedź:

Piotr otrzymał sześć lub dziewięć ocen bardzo dobrych.

Zasady oceniania:

5 pkt – poprawna metoda i prawidłowe wyznaczenie liczby ocen bardzo dobrych: sześć lub dziewięć.

4 pkt – prawidłowe przekształcenie równania pozwalającego na obliczenie liczby ocen bardzo dobrych do postaci $n^2 - 15n - 54 = 0$.

3 pkt – prawidłowe zapisanie równania pozwalającego na obliczenie liczby ocen bardzo dobrych:

$$\frac{n \cdot \left(5 - 4 - \frac{n}{15}\right)^2 + (15-n) \left(4 - 4 - \frac{n}{15}\right)^2}{15} = \frac{6}{25}$$

2 pkt – prawidłowe wyznaczenie wariancji ocen: $\frac{n \cdot \left(5 - 4 - \frac{n}{15}\right)^2 + (15-n) \left(4 - 4 - \frac{n}{15}\right)^2}{15}$.

1 pkt – prawidłowe wyznaczenie średniej ocen Piotra: $4 + \frac{n}{15}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.