

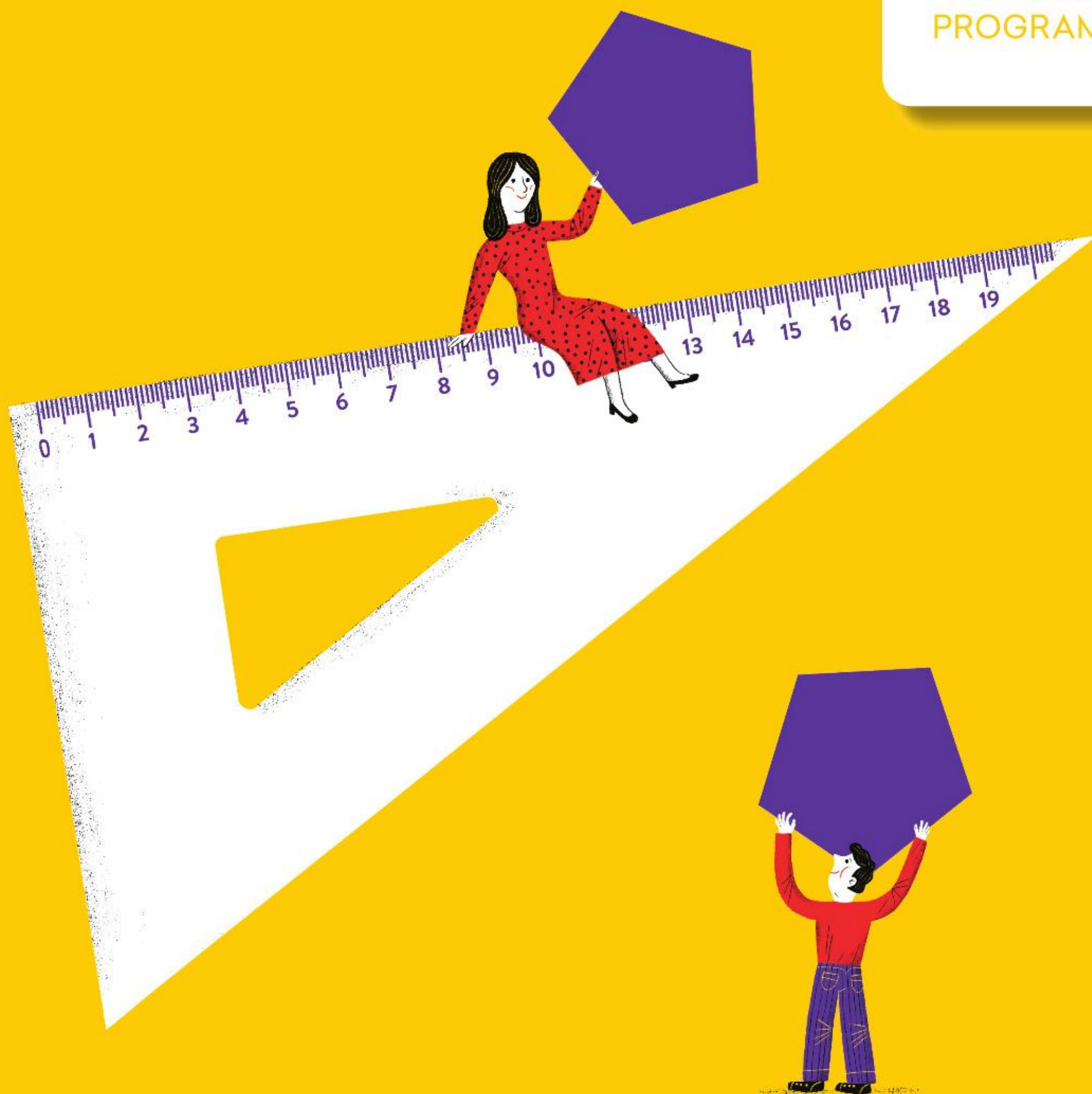
Matematyka

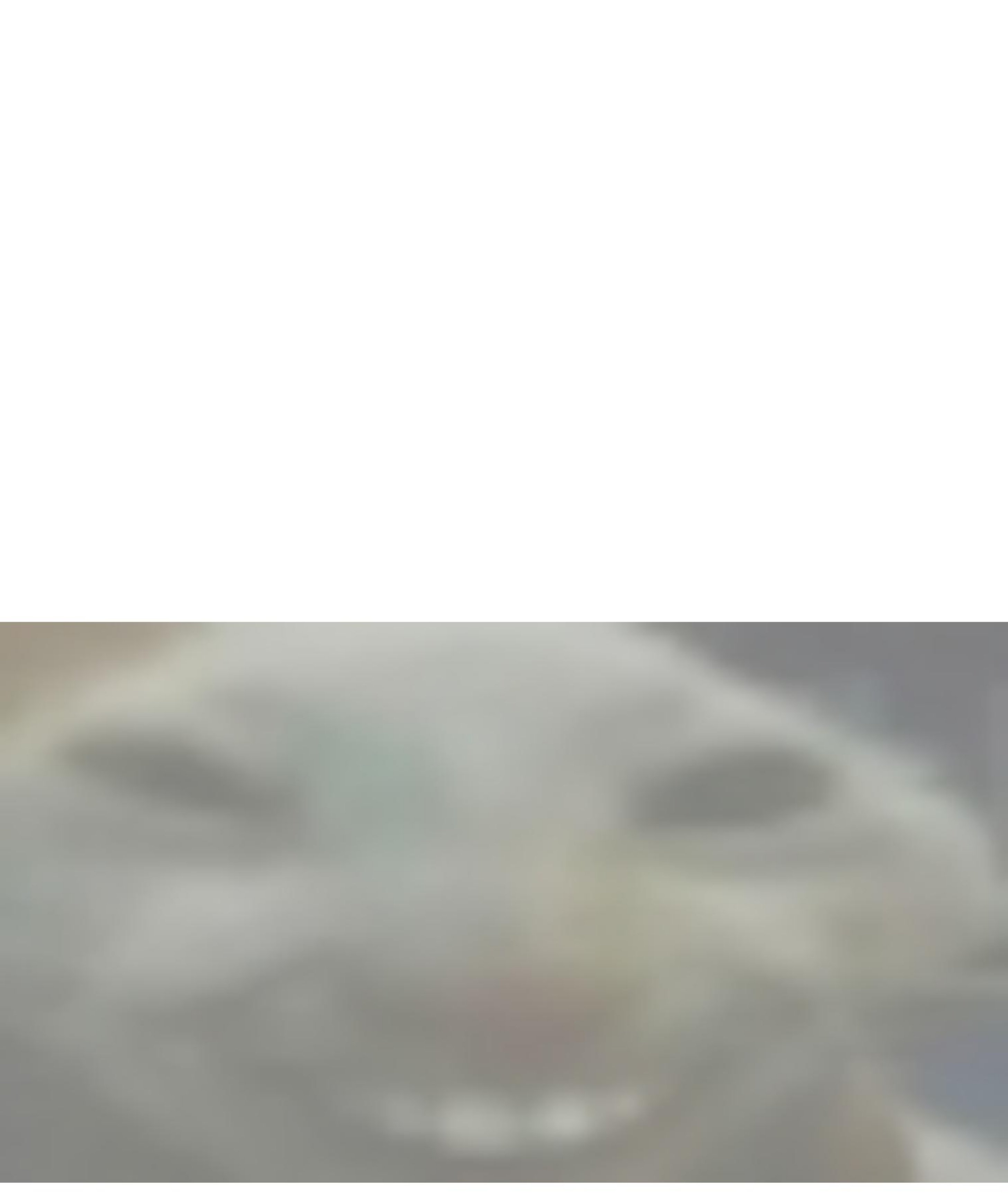
Podręcznik
część 2

7



Oznaczono zmiany
W PODSTAWIE
PROGRAMOWEJ
2024



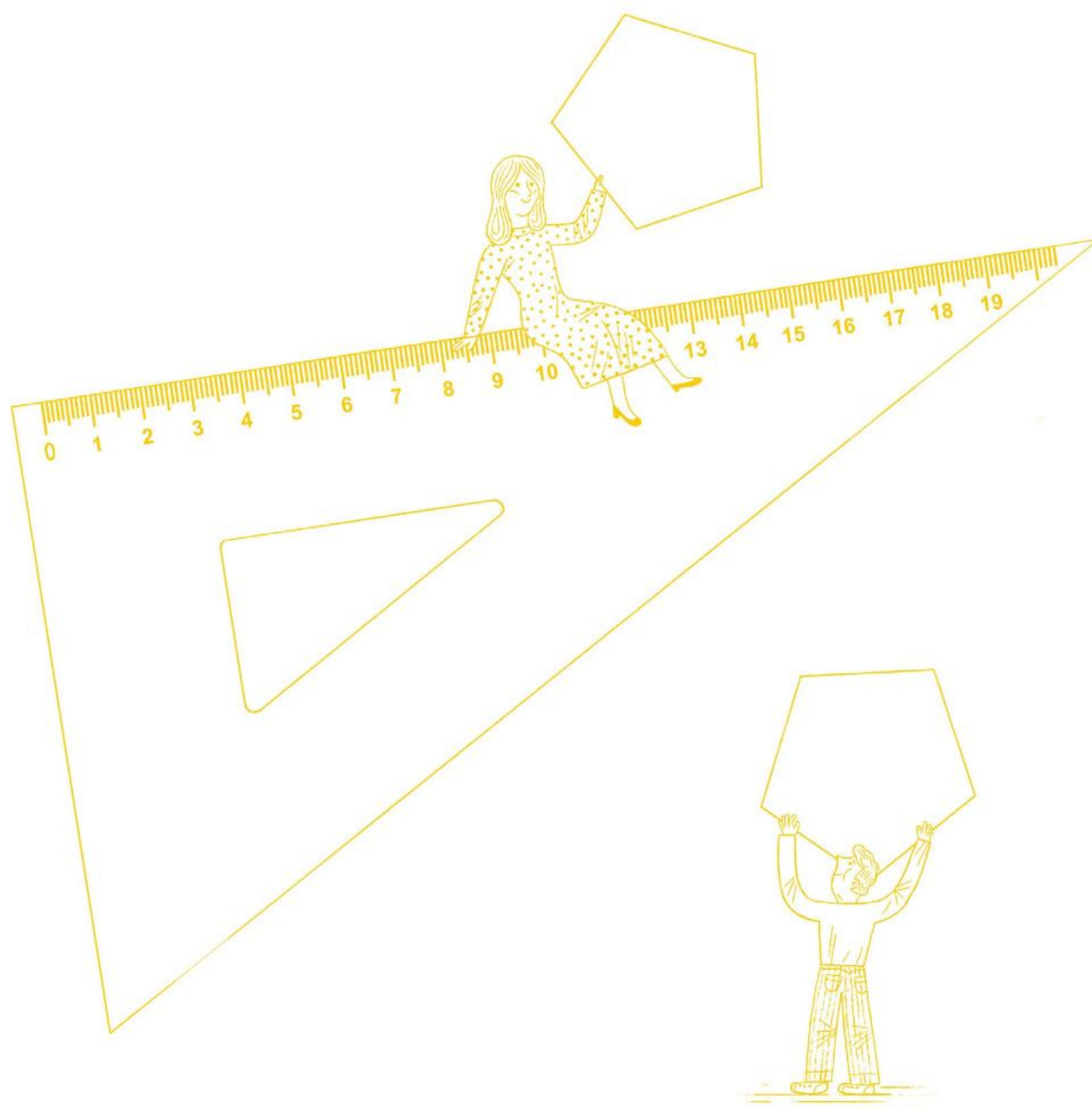


Monika Czajkowska
Małgorzata Ogłóza-Fisiak
Teresa Gwadowska

7

Matematyka

Podręcznik dla klasy siódmej szkoły podstawowej
część 2



Redaktor serii
Justyna Kubicka

Redakcja merytoryczna
Monika Czajkowska
Adam Pawłowski
Monika Brzozowska-Szcześniak

Redakcja językowa i korekta
Krystyna Bajor

Redakcja techniczna
Paweł Kowalski

Skład i łamanie
Adam Ziółkowski

Redakcja artystyczna
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska
Marcin Kot

Projekt i koncepcja artystyczna
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Koordinacja prac graficznych
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska

Projekt okładki
Futu Creative

Ilustracja na okładce, na stronie tytułowej
i ilustracje na stronach działowych
Acapulco Studio / Agata Dudek i Małgorzata Nowak-Żurek

Fotoedycja
Grzegorz Wrzecionowski

Ilustracje

Agata Zarzycka (s. 16, 32–33, 36, 61, 63, 67, 91, 118), Carto Team Chariza Krystian (s. 142), Grzegorz Kozłowski (s. 96), Olga Kawacińska (s. 6–8, 10, 19, 30, 32, 44, 46, 51, 73, 76, 81–82, 85, 87, 98–99, 114, 125, 132, 142, 145–146, 157), Marcin Kot (s. 12, 174–175/projekt *Linku do wiedzy*)

Wykaz dysponentów praw autorskich do obrazów i zdjęć zamieszczonych w publikacji

Shutterstock: RedKoala (wycinanki, witraż, s. 20), Grzegorz Czapski (woda utleniona, s. 97), ilolab (pergamin, s. 101), Tupungato (Pitagoras, s. 174), NoPainNoGain (trójkąt egipski, s. 175)

Wydawca oświadcza, że dołożył wszelkich starań, aby dotrzeć do wszystkich właścicieli i dysponentów praw autorskich. Osoby, których nie udało nam się ustalić, prosimy o kontakt z wydawnictwem.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Przestrzegaj praw, jakie im przysługują. Udostępniając książkę lub jej fragmenty, rób to wyłącznie w zakresie dozwolonego użytku, który określają przepisy prawa. Zawartość książki możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Kopując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

© Grupa MAC S.A., Kielce 2020

ISBN 978-83-8108-865-7

Grupa MAC S.A.
25-561 Kielce, ul. Witosa 76
tel. 41 366 55 55, faks: 41 366 33 02
e-mail: kontakt@mac.pl; www.mac.pl



Treści usunięte z podstawy programowej w 2024 r.

Spis treści

5. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie

5.1	Kąty i ich własności	6
5.2	Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie	12
5.3	Trójkąt i jego własności	16
5.4	Cechy przystawania trójkątów	20
5.5	Twierdzenie Pitagorasa i jego zastosowanie	26
5.6	Trójkąty o kątach 90° , 45° , 45° oraz 90° , 60° , 30°	33
5.7	Dowodzenie w geometrii (cz. 1)	36
	Podsumowanie działu 5	40

6. Wyrażenia algebraiczne

6.1	Zapisywanie i odczytywanie wyrażeń algebraicznych	44
6.2	Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego	48
6.3	Jednomian i suma algebraiczna	51
6.4	Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych	56
6.5	Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian	59
6.6	Mnożenie sum algebraicznych	63
6.7	Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Zastosowanie wyrażeń algebraicznych w zadaniach	67
	Podsumowanie działu 6	72

7. Równania z jedną niewiadomą

7.1	Przykłady równań. Liczby spełniające równania	76
7.2	Rozwiązywanie równań I stopnia z jedną niewiadomą	81
7.3	Przekształcanie wzorów	87
7.4	Zastosowanie równań do rozwiązywania zadań tekstowych	91
	Podsumowanie działu 7	102

8. Wielokąty

8.1	Jednostki pola. Zamiana jednostek	106
8.2	Trójkąty	109
8.3	Prostokąty	114
8.4	Równoległoboki	118
8.5	Trapezy	122
8.6	Wielokąty foremne	125
8.7	Pola wielokątów	130
8.8	Dowodzenie w geometrii (cz. 2)	133
	Podsumowanie działu 8	137

9. Układ współrzędnych na płaszczyźnie

9.1	Układ współrzędnych na płaszczyźnie	142
9.2	Długości odcinków w układzie współrzędnych	148
9.3	Figury w układzie współrzędnych	157
9.4	Pola figur w układzie współrzędnych	163
	Podsumowanie działu 9	169
	Link do wiedzy <i>Pitagoras i Związek Pitagorejski</i>	174
	Odpowiedzi do zadań	176
	Indeks	180

Jak korzystać z podręcznika

Numer i tytuł tematu

Podejmij temat

Wprowadzenie do tematu lekcji

Treści powtórzeniowe

Ciekawe!

Interesujące wiadomości uzupełniające temat lekcji

Treść ważna, definicja

Objaśnienie nowych terminów

Link do wiedzy

Treści, które mogą rozwinąć twoje zainteresowania

Podsumowanie działu

Powtórzenie najważniejszych treści działu

Znaczenie ikon

nawiązanie do innego przedmiotu

nawiązanie do ilustracji

zastosowanie nowoczesnych technologii

praca zespołowa

uwaga

oznaczenie polecenia trudniejszego

Więcej na temat

Treści dodatkowe

Przykłady

Przykładowe rozwiązania zadań

Ćwiczenia

Ćwiczenia do wykonania na lekcji

Zadania

Zadania utrwalające materiał

Wskazówki

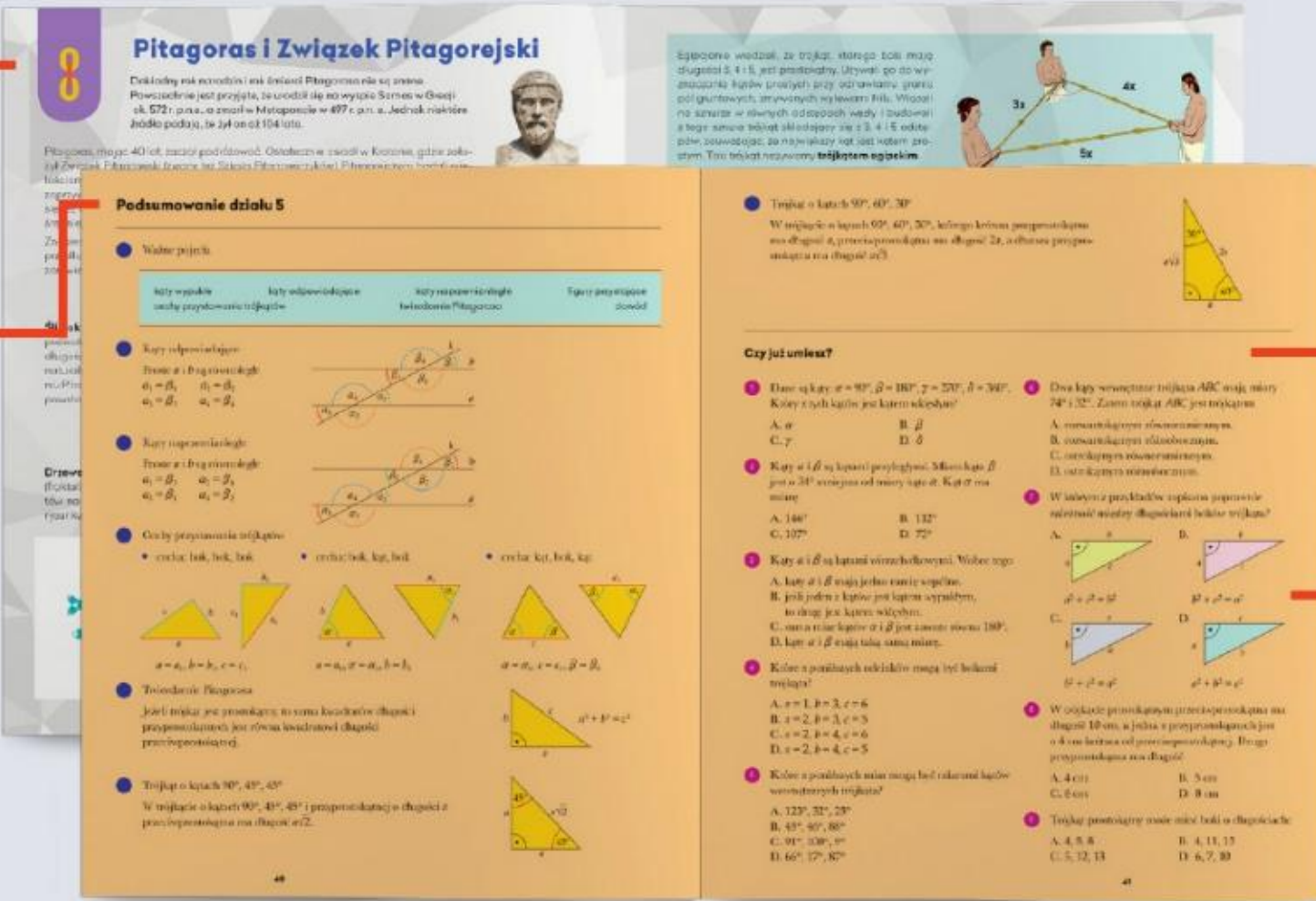
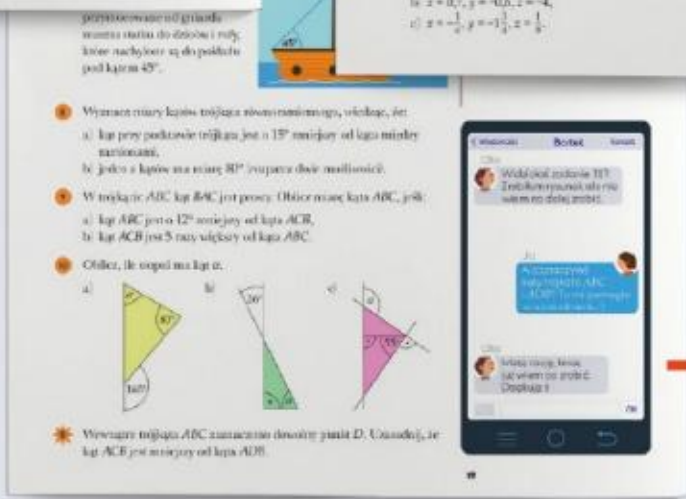
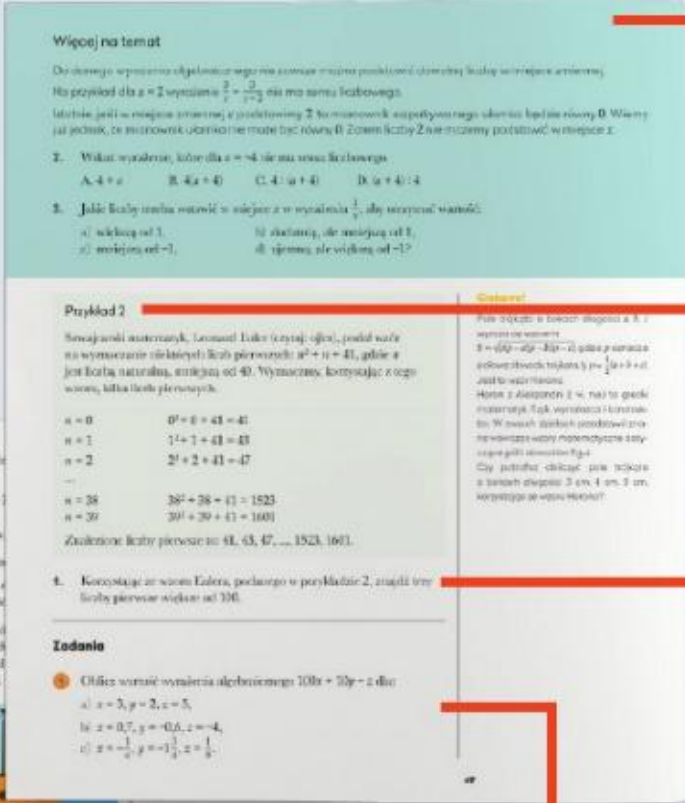
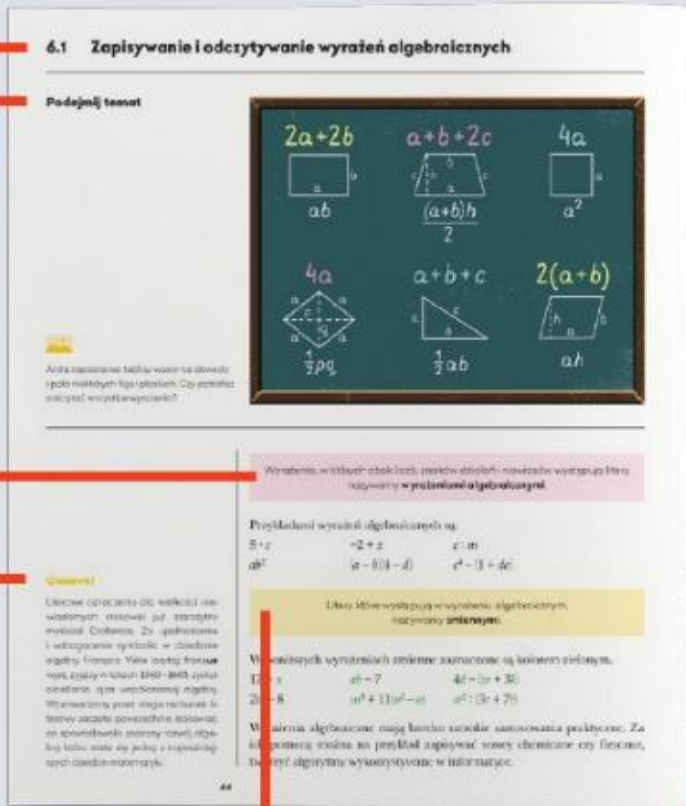
Podpowiedzi w formie rozmowy dzieci za pomocą komunikatora internetowego

Czy już umiesz?

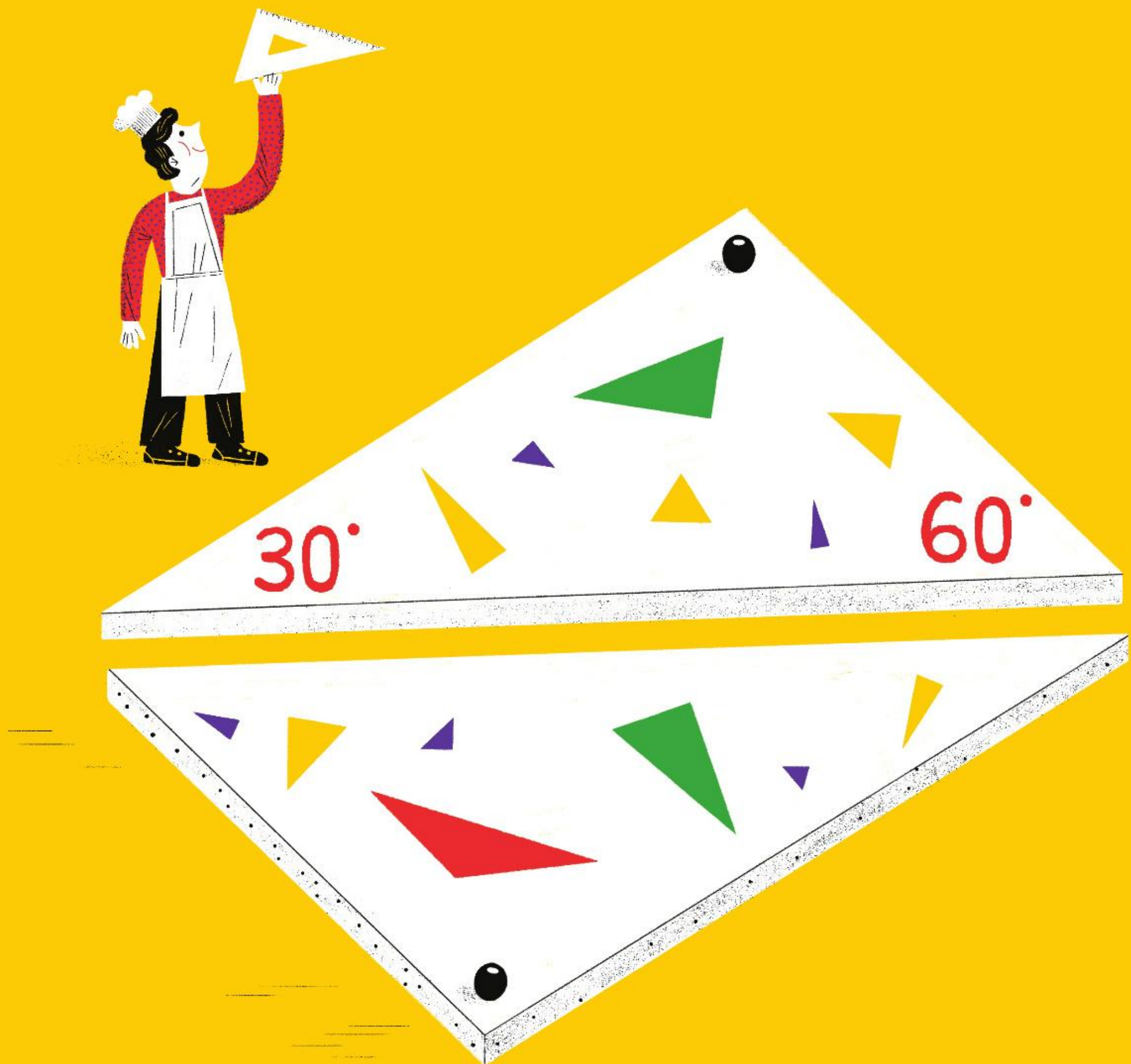
Zadania na koniec działu

Zadania wielokrotnego wyboru

Tego podręcznika będą używać inni uczniowie. Niczego w nim nie zapisuj. Przekaż go w dobrym stanie.



5. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie



1. Ile kątów ma każda z figur przedstawionych na rysunku?
2. Jakie znasz rodzaje kątów? Jakie znasz rodzaje trójkątów?
3. Przyjrzyj się bokom i kątom trójkąta, który jest pomalowany na czerwono. Jak nazywa się ten trójkąt?
4. Ile stopni wynosi suma miar kątów trójkąta? Jak się nazywa trójkąt, którego dwa kąty mają 30° i 60° ?
5. Przyjrzyj się trójkątom pomalowanym na zielono. Co zauważasz?

5.1 Kąty i ich własności

Podejmij temat



Wskazówki zegara przedstawionego na rysunku wyznaczają dwa kąty. Określ rodzaj kąta zaznaczonego na niebiesko.

Jakie miary mają kąty wyznaczone przez wskazówki zegara o godzinie 9:00?

A jakie – o 18:00?



Przypomnijmy wiadomości o podstawowych figurach geometrycznych.

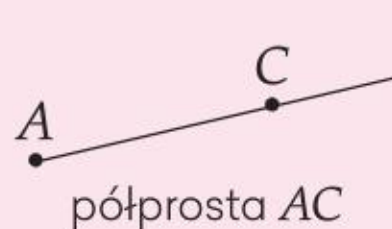
• A



prosta a



prosta AC



półprosta AC



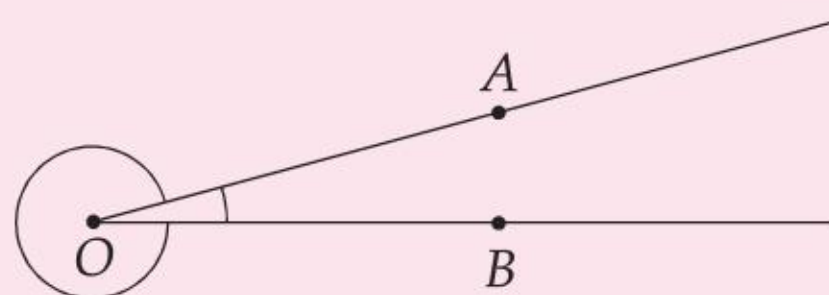
półprosta AD



odcinek a



odcinek AC



Punkty oznaczamy wielkimi literami alfabetu, np.: A , B , C .

Proste oznaczamy małymi literami, np.: a , b , c , k , l , m . Innym sposobem oznaczenia prostej jest np. AC , co oznacza, że prosta przechodzi przez punkty A i C lub inaczej – że jest wyznaczona przez punkty A i C . Przez dwa różne punkty można poprowadzić dokładnie jedną prostą.

Punkt na prostej dzieli ją na dwie **półproste**. Ten punkt należy do obu półprostych. Nazywamy go początkiem półprostych.

Odcinek AC to część prostej, która znajduje się między punktami A i C oraz te punkty. Punkty A i C nazywamy końcami odcinka. Odległość punktu A od punktu C nazywamy **długością odcinka** AC i oznaczamy $|AC|$ lub a .

Trzy punkty A , B , C mogą leżeć na jednej prostej. Mówimy wtedy, że **punkty** A , B , C **są współliniowe**. Zauważ, że jeśli punkty A , B , C są współliniowe i punkt C leży między punktami A i B , to $|AC| + |CB| = |AB|$.

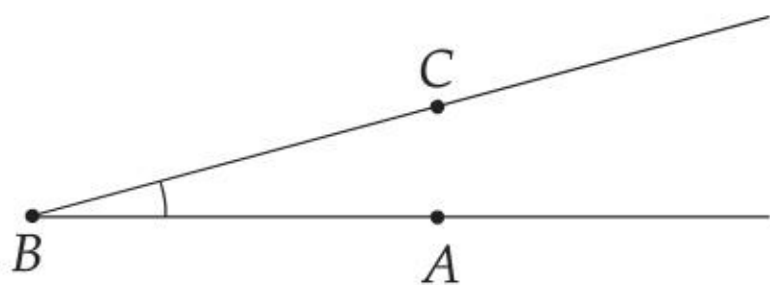
Jeśli jeden z punktów A , B , C nie leży na prostej wyznaczonej przez dwa pozostałe punkty, np. punkt C nie leży na prostej AB (tak jak na rysunku), to mówimy, że **punkty** A , B , C **nie są współliniowe**.

Dwie półproste o wspólnym początku rozcinają płaszczyznę na dwie części. Każdą z tych części, wraz z tymi półprostymi, nazywamy kątem.

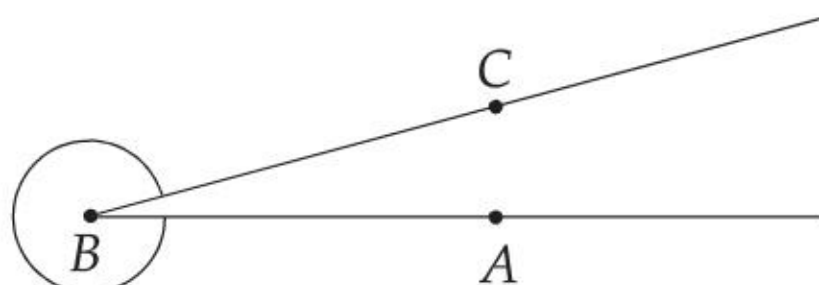
Kąt to część płaszczyzny zawarta między dwiema półprostymi o wspólnym początku oraz te półproste.

Półproste OA i OB to **ramiona kąta**, punkt O to **wierzchołek kąta**.

Kąt ABC to kąt, którego wierzchołkiem jest punkt B , punkt A leży na jednym ramieniu, a punkt C na drugim ramieniu tego kąta. Kąty oznaczamy też małymi literami alfabetu greckiego, np.: α – alfa, β – beta, γ – gamma, δ – delta, ε – epsilon. W celu ustalenia, który z kątów będziemy rozpatrywać, zaznaczamy go na rysunku łukiem.



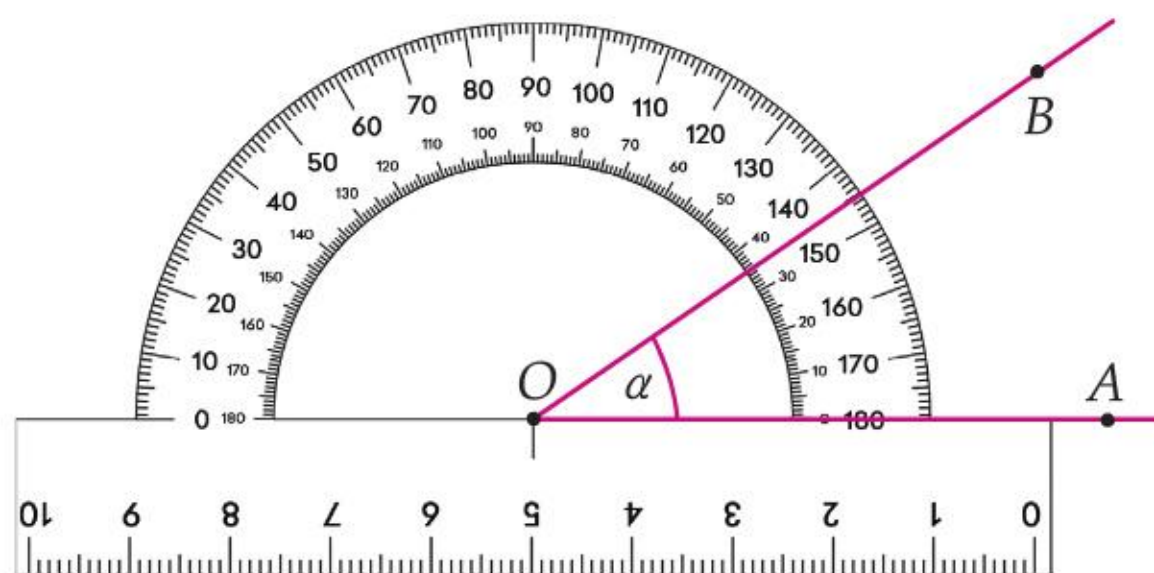
kąt ABC



kąt ABC

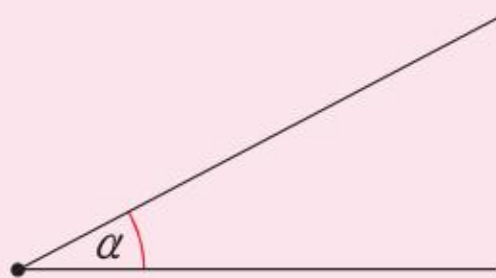
Kąty przedstawione na rysunkach mają tę samą nazwę, ale mają różne miary. Miarę kąta najczęściej wyrażamy w stopniach. Do mierzenia kątów używamy kątomierza.

Kąt BOA na rysunku poniżej ma miarę 35° .



$$\alpha = 35^\circ$$

Przypomnijmy nazwy kątów, które poznaliśmy w poprzednich klasach.



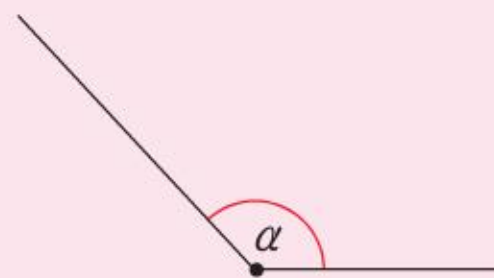
kąt ostry

jest mniejszy
od kąta prostego
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



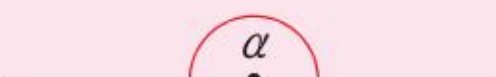
kąt prosty

ma miarę 90°
 $\alpha = 90^\circ$



kąt rozwarty

jest większy od kąta
prostego, ale mniejszy
od kąta półpełnego
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$



kąt półpełny

ma miarę 180°
 $\alpha = 180^\circ$



kąt pełny

ma miarę 360°
 $\alpha = 360^\circ$



kąt zerowy

ma miarę 0°
 $\alpha = 0^\circ$



1° to $\frac{1}{360}$ kąta pełnego

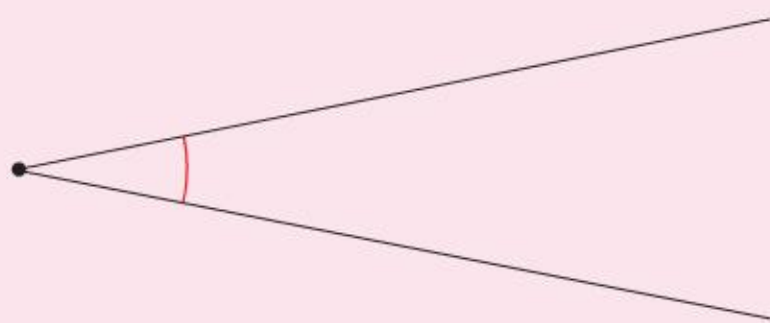
$1^\circ = 60'$ $1'$ – jedna minuta

$1' = 60''$ $1''$ – jedna sekunda

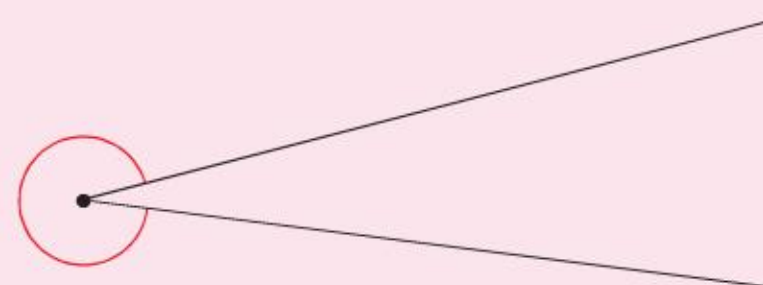


Zarówno ramiona kąta zerowego, jak i kąta pełnego nakładają się na siebie, ale do kąta zerowego należą tylko punkty znajdujące się na ramionach, natomiast do kąta pełnego należą także wszystkie punkty poza ramionami.

Kąty dzielimy również na wypukłe i wklęsłe.



Kątem wypukłym nazywamy kąt, którego miara jest mniejsza lub równa 180° albo równa 360° .



Kątem wklęsłym nazywamy kąt, którego miara jest większa od 180° i mniejsza od 360° .

1. Wskazówki zegara wyznaczają pewien kąt, zaznaczony na niebiesko. Określ rodzaj tego kąta.

a)



b)

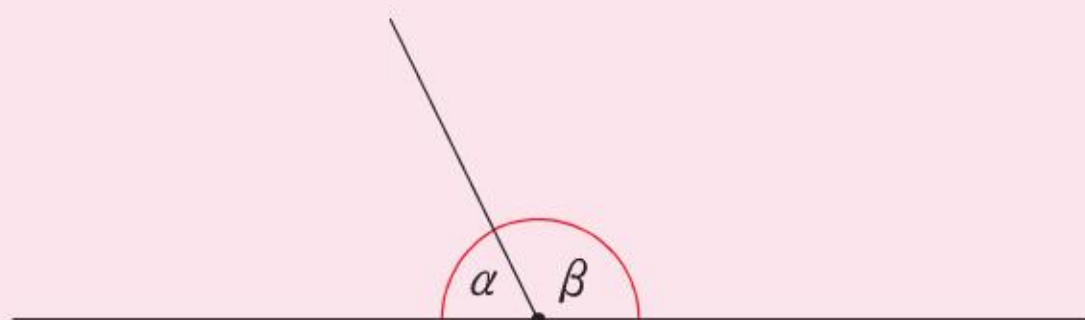


c)



W poprzednich latach poznaliśmy również kąty przyległe i wierzchołkowe.

Kąty przyległe to dwa kąty, które mają jedno wspólne ramie, a pozostałe ramiona tych kątów tworzą prostą.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Suma miar kątów przyległych jest równa 180° .

Przykład 1

Obliczmy miary kątów przyległych, jeśli jeden z nich ma miarę 3,5 razy większą od drugiego.

Oznaczmy: α – miara mniejszego z kątów.

$$3,5 \cdot \alpha + \alpha = 180^\circ$$

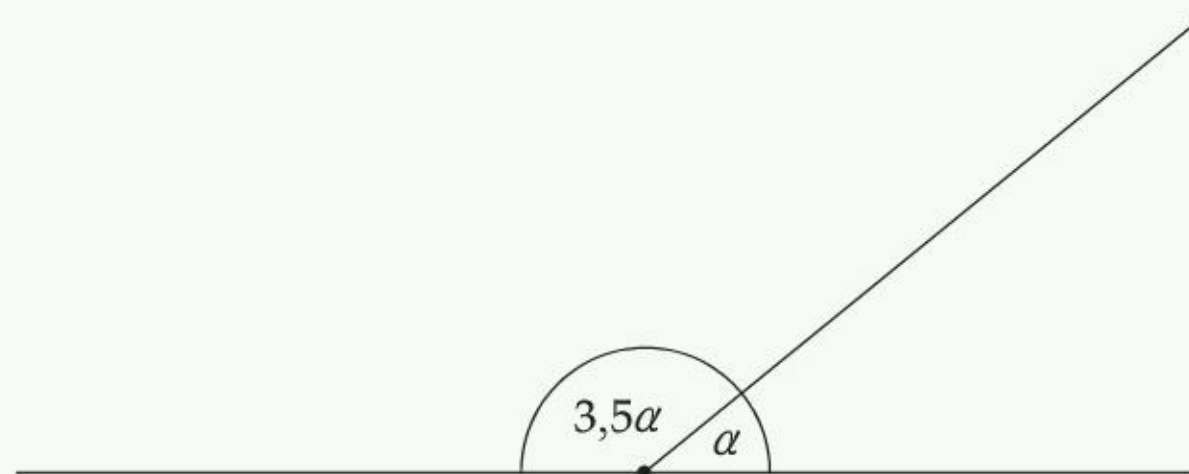
$$4,5 \cdot \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ : 4,5$$

$$\alpha = 40^\circ$$

$$3,5 \cdot \alpha = 3,5 \cdot 40^\circ = 140^\circ$$

Miary kątów przyległych są równe 40° i 140° .



2. Jeden z kątów przyległych ma miarę 1,4 razy mniejszą od drugiego kąta. Oblicz miary tych kątów.

Przykład 2

Wyznamy kąty przyległe, jeśli jeden z nich jest o 70° mniejszy od drugiego.

Oznaczmy: α – miara większego z kątów przyległych.

$$\alpha + \alpha - 70^\circ = 180^\circ$$

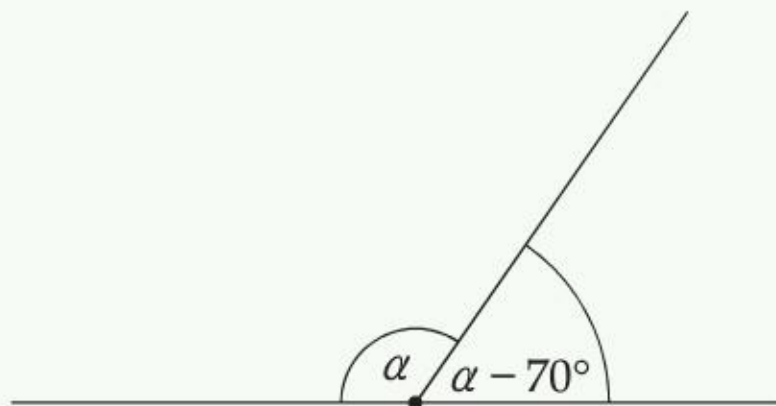
$$2 \cdot \alpha = 180^\circ + 70^\circ$$

$$2 \cdot \alpha = 250^\circ$$

$$\alpha = 250^\circ : 2$$

$$\alpha = 125^\circ$$

$$\alpha - 70^\circ = 125^\circ - 70^\circ = 55^\circ$$

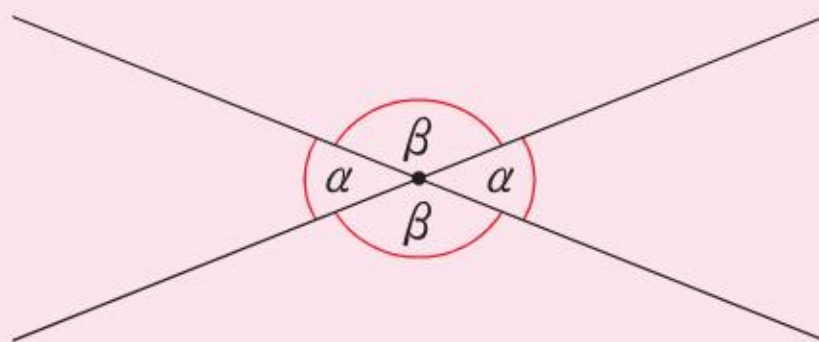


Miary kątów przyległych wynoszą 125° i 55° .

3. Jeden z kątów przyległych ma miarę o 20° większą od drugiego. Oblicz miarę mniejszego z tych kątów.

Kątami wierzchołkowymi nazywamy kąty, które mają wspólny wierzchołek, a przedłużenia ramion jednego kąta są ramionami drugiego kąta.

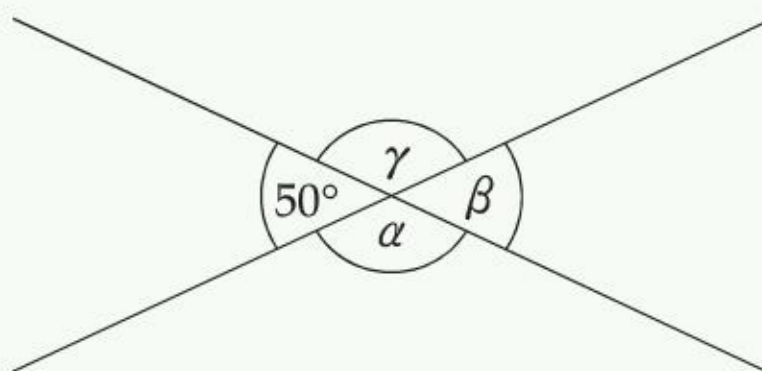
Kąty wierzchołkowe mają równe miary.



Kąty wierzchołkowe i kąty przyległe są kątami wypukłymi.

Przykład 3

Obliczmy miary kątów: α , β , γ .



$$\beta = 50^\circ$$

kąty β i dany kąt o mierze 50° to kąty wierzchołkowe

$$\alpha = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

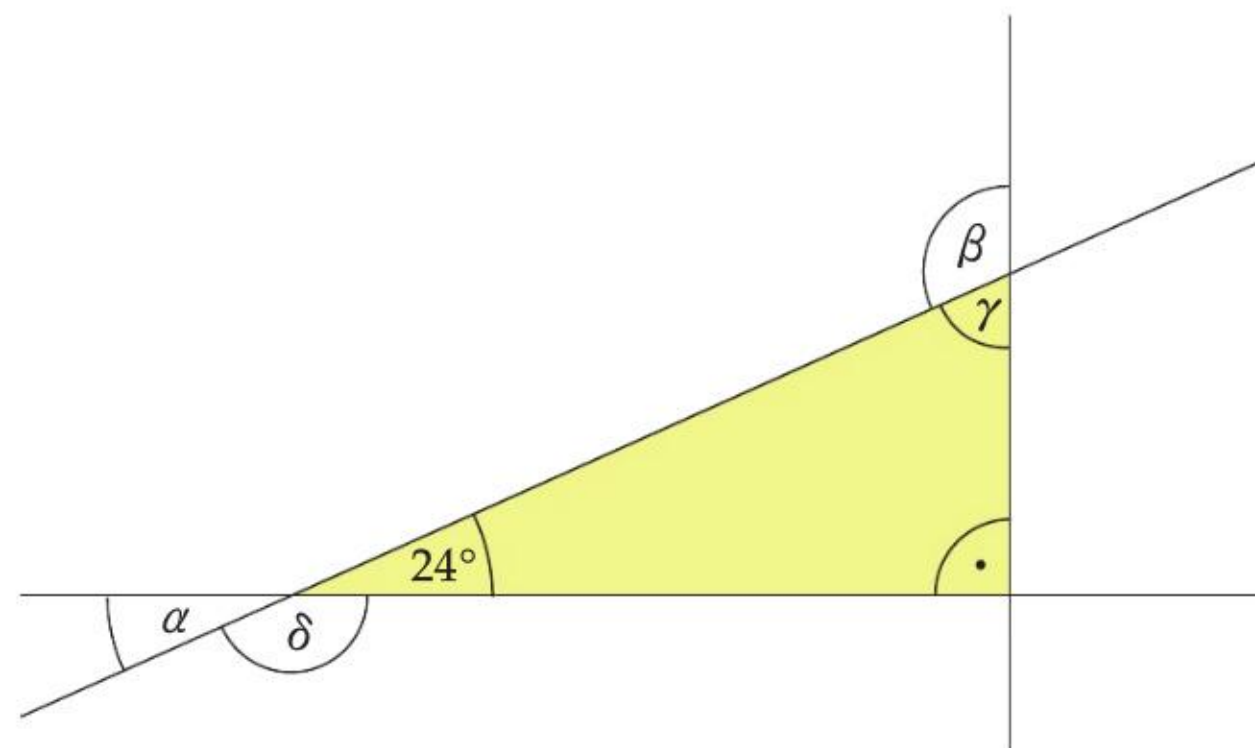
kąt α jest kątem przyległym do danego kąta o mierze 50°

$$\gamma = \alpha = 130^\circ$$

kąty α i γ to kąty wierzchołkowe

Kąty α i γ są równe i mają po 130° , a kąt β ma 50° .

4. Jeden z kątów trójkąta prostokątnego ma 24° .
Wyznacz miary kątów, zaznaczonych na rysunku, utworzonych przez proste zawierające boki tego trójkąta.



Zadania

- Podaj miarę każdego kąta zaznaczonego na rysunku kolorem niebieskim.

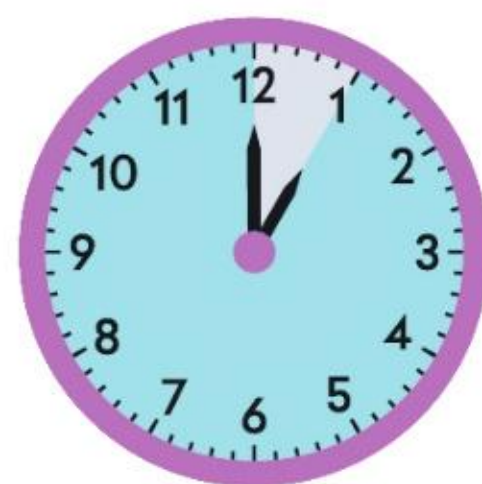
a)



b)



c)



d)



- Dane są kąty o miarach: 66° , 139° , 24° , 179° , 0° , 242° , 180° , 300° , 88° , 150° , 90° , 185° , 360° , 270° . Określ, które z nich są kątami:

a) ostrymi,

b) rozwartymi,

✱ wypukłymi,

✱ wklęsłymi.

- Oblicz, jaką miarę ma kąt, który zakreśla minutowa wskazówka zegara w ciągu:

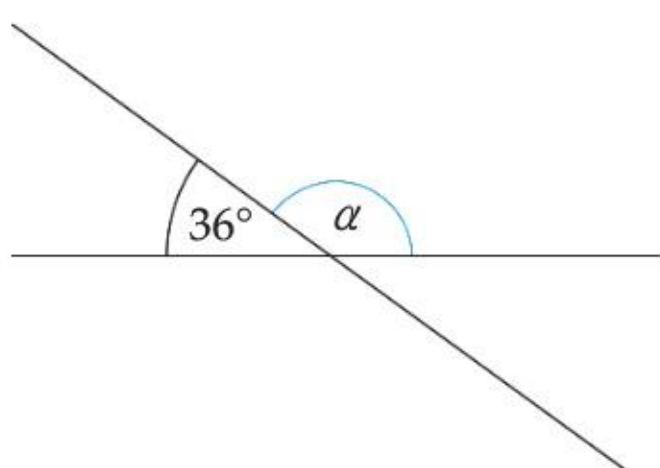
a) 5 minut, b) kwadransa, c) 35 minut, d) $\frac{3}{4}$ godziny.

- ✱ Oblicz, w ciągu jakiego czasu godzinowa wskazówka zegara zakreśla kąt o danej mierze.

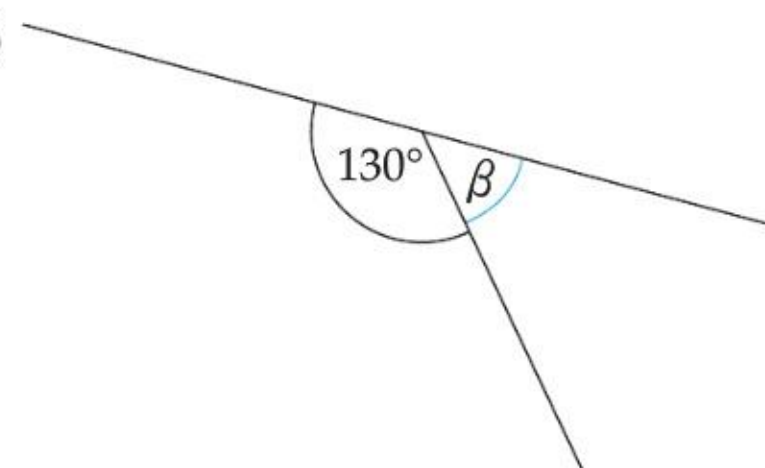
a) 30° b) 120° c) 270°

- Oblicz miary zaznaczonych kątów.

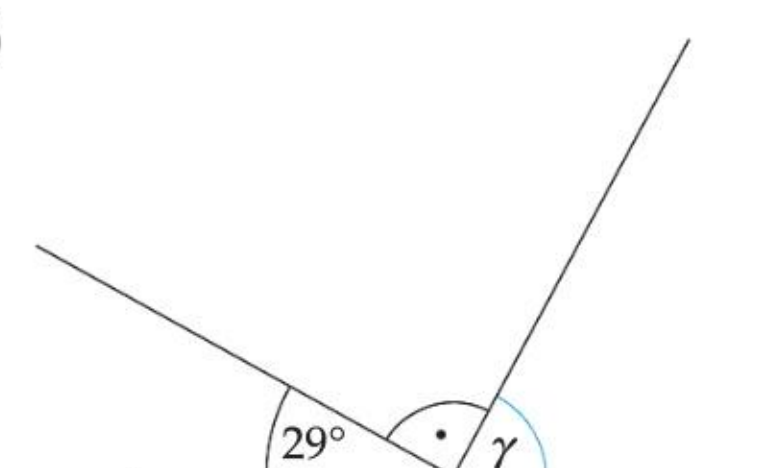
a)



b)



c)



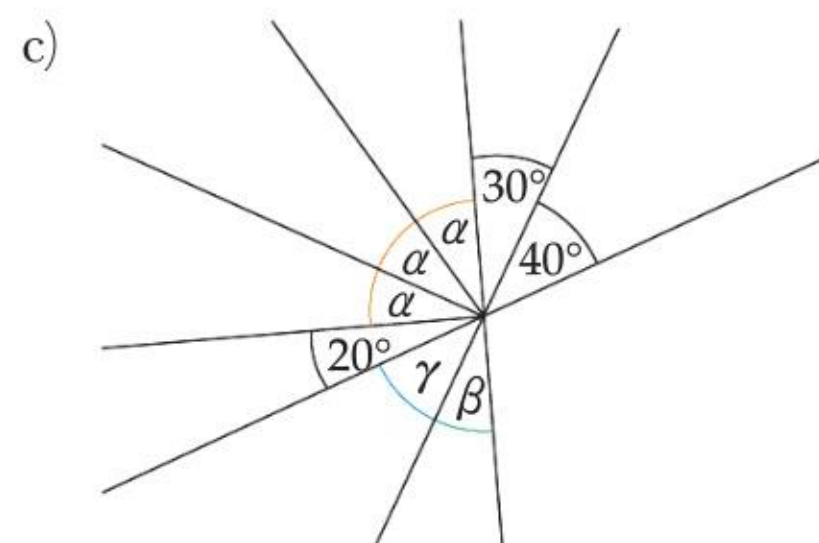
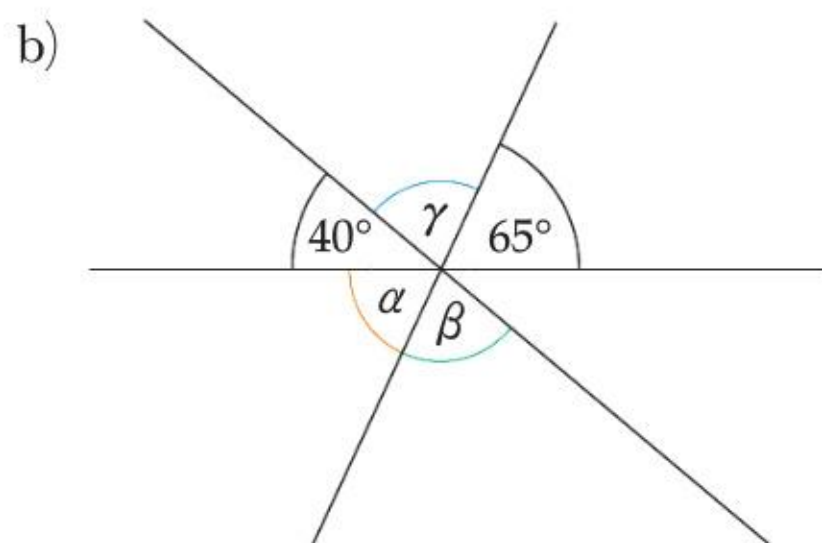
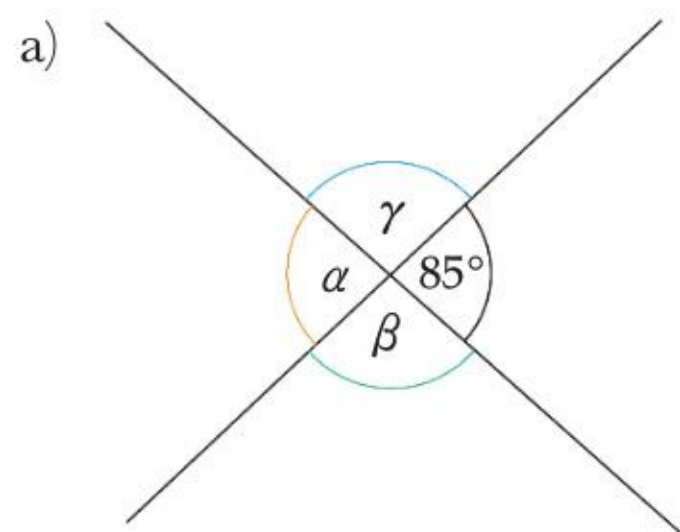
- Suma miar dwóch kątów jest równa 220° . Jeden z kątów jest trzy razy większy od drugiego. Oblicz miary tych kątów.

- Narysuj kąt ostry o mierze 40° i oznacz go przez α . Narysuj:

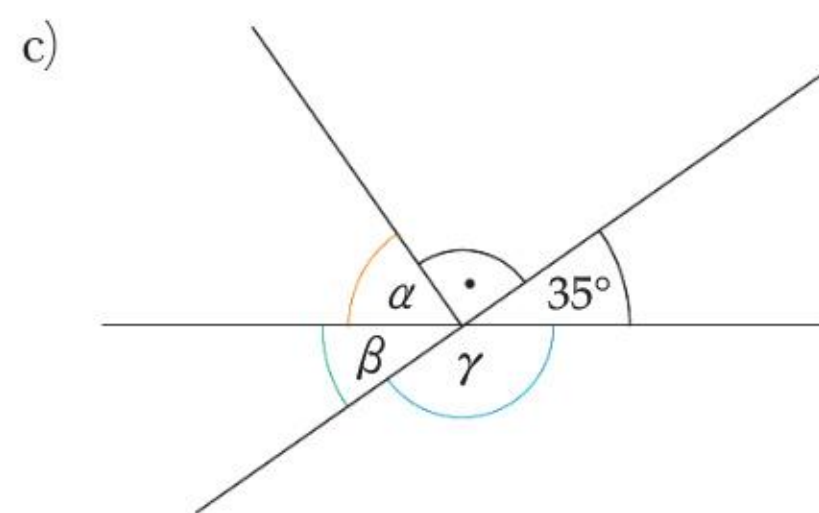
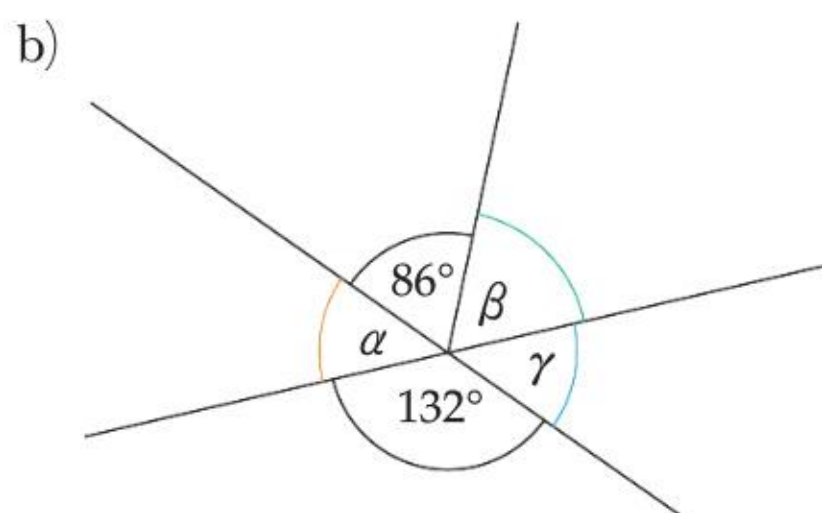
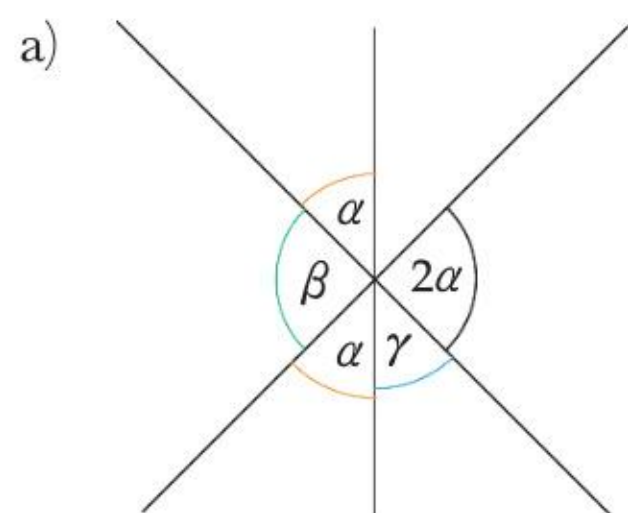
- kąt β przyległy do kąta α ,
- taki kąt γ , że kąty α i γ są kątami wierzchołkowymi.

Podaj miary kątów β i γ .

- Zapisz miary kątów: α , β , γ .



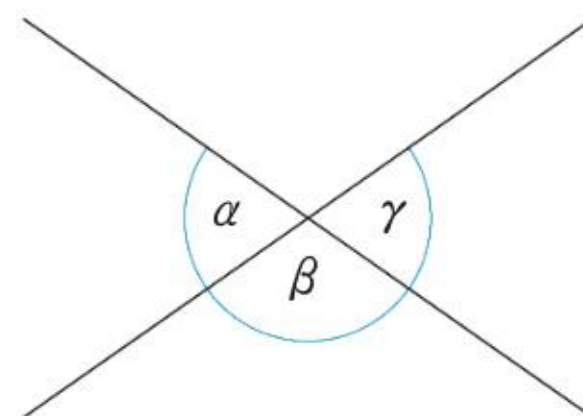
- Zapisz miary kątów: α , β , γ .



- Dwie proste przecinające się wyznaczają cztery kąty wypukłe: α , β , γ , δ . Oblicz miary tych kątów, jeśli:

- kąt α jest o 28° większy od kąta β i kąty α oraz γ są kątami wierzchołkowymi,
- kąt α ma miarę 30° , kąt β jest 5 razy większy od kąta α i kąty β oraz δ są kątami wierzchołkowymi,
- kąt α jest o 50° mniejszy od kąta β i kąty β oraz γ są kątami przyległymi.

- Suma miar kątów α , β i γ jest równa 250° . Wykaż, że $\beta - \alpha = 40^\circ$.



- Kąt zewnętrzny wielokąta to kąt przyległy do danego kąta wewnętrznego wielokąta. Oblicz sumę miar wszystkich kątów zewnętrznych:

- kwadratu,
- trójkąta równobocznego.

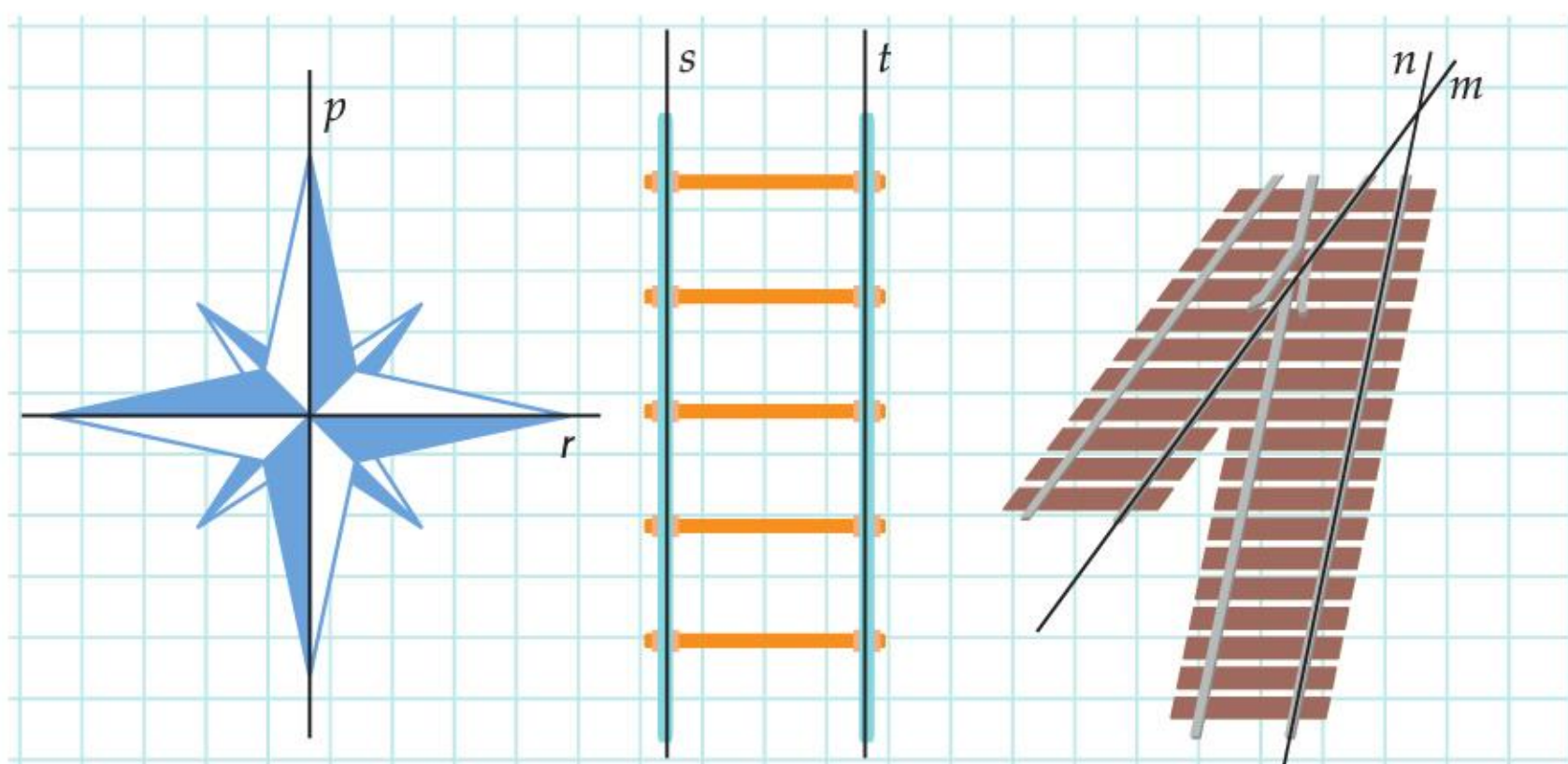
Co zauważasz?

5.2 Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie

Podejmij temat

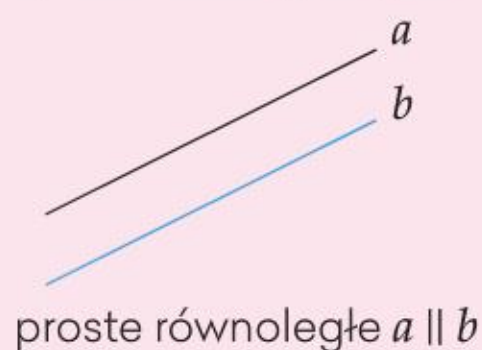


Karol sporządził kilka rysunków, na których zaznaczył proste.
Pod jakim kątem przecinają się proste p i r ?
Jakie jest wzajemne położenie prostych s i t ?
Ile punktów wspólnych mają proste m i n ?



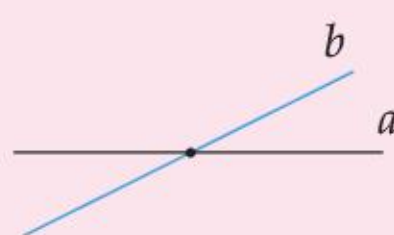
Przypomnijmy, jakie może być wzajemne położenie dwóch prostych na płaszczyźnie oraz ile punktów wspólnych mogą mieć dwie proste.

**Brak
punktów wspólnych**

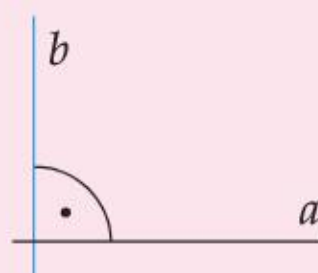


proste równoległe $a \parallel b$

**Jeden
punkt wspólny**

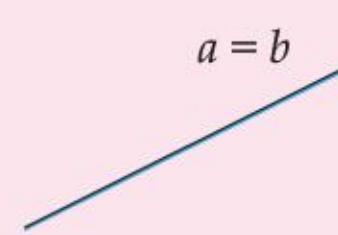


proste przecinające się



proste przecinające się pod kątem prostym (proste prostopadłe)
 $a \perp b$

**Nieskończenie
wiele punktów wspólnych**

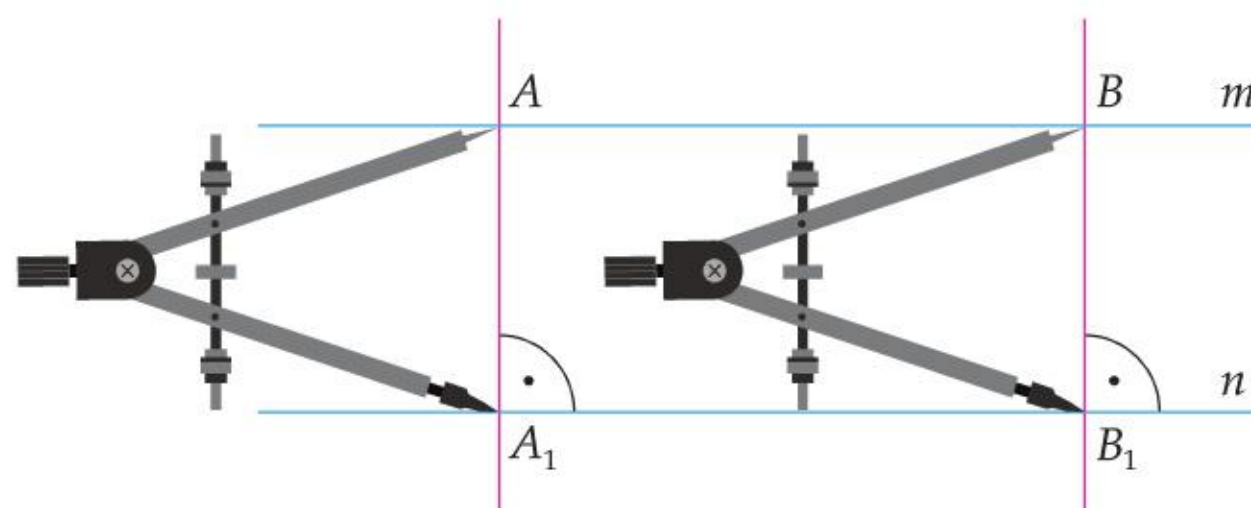


proste pokrywające się
 $a = b$

Narysujmy dwie równoległe proste m i n , a następnie dwie proste prostopadłe do prostych m i n .

Oznaczmy A, B – punkty przecięcia tych prostych z prostą m ; oraz A_1, B_1 – punkty przecięcia z prostą n .

Zauważmy, że długości odcinków AA_1 i BB_1 są równe. Odległość między prostymi równoległymi m i n jest równa długości odcinków AA_1 i BB_1 .



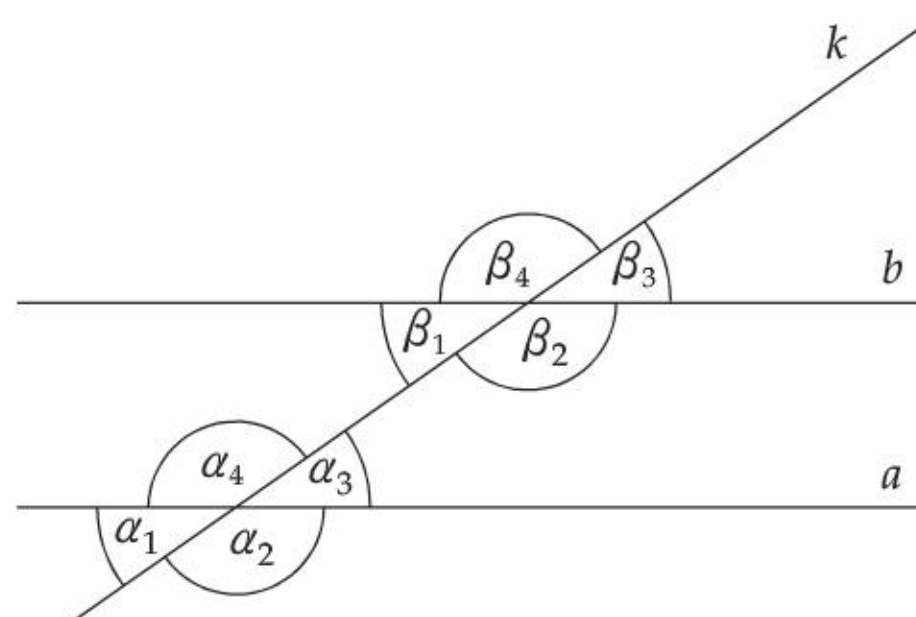
Odległość między prostymi równoległymi jest równa długości odcinka prostopadłego do obu tych prostych i takiego, że jego końce leżą na tych prostych.

Narysujmy dwie proste równoległe a i b oraz prostą k przecinającą proste a i b .

Proste: a , b i k wyznaczyły na płaszczyźnie kąty wypukłe:

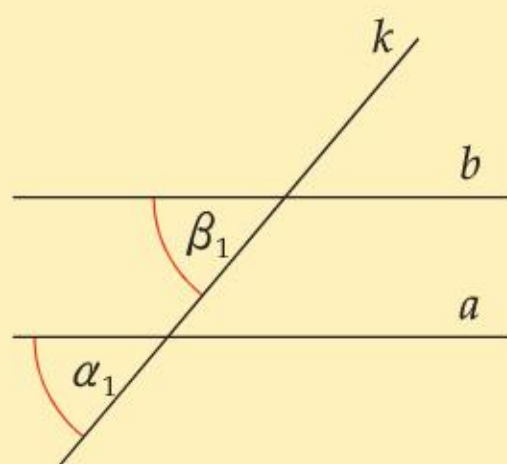
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

Kąty α_1 i β_1 , α_2 i β_2 , α_3 i β_3 , α_4 i β_4 nazywamy **kątami odpowiadającymi**.

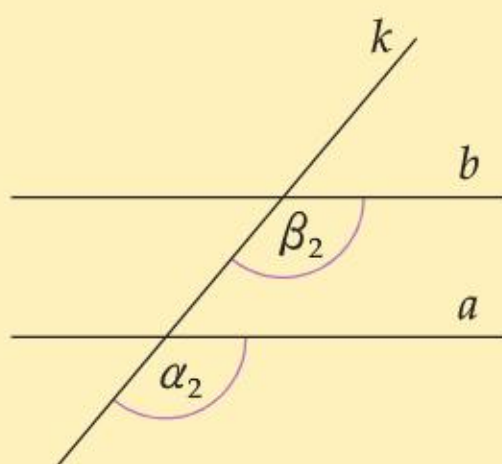


Kąty odpowiadające

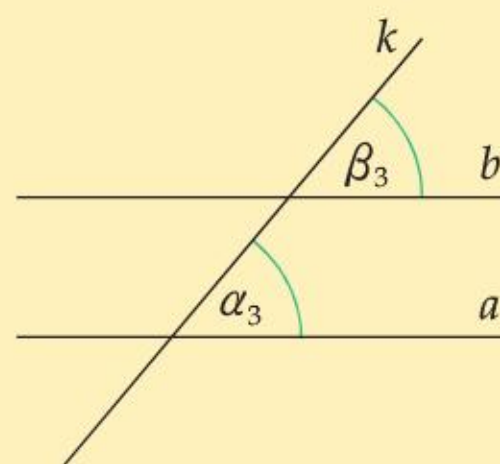
Proste a i b są równoległe ($a \parallel b$)



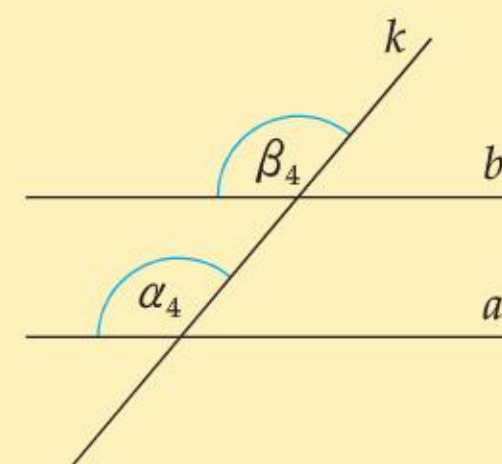
$$\alpha_1 = \beta_1$$



$$\alpha_2 = \beta_2$$



$$\alpha_3 = \beta_3$$



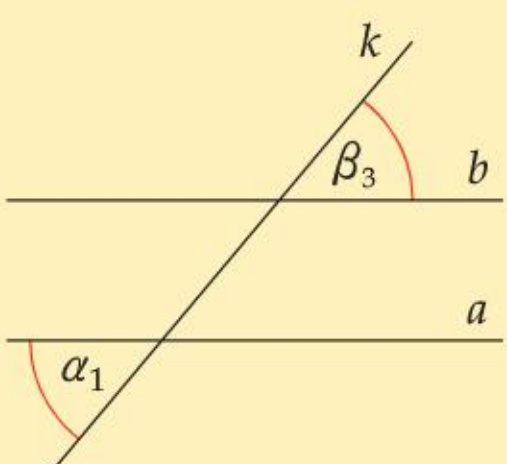
$$\alpha_4 = \beta_4$$

Kąty odpowiadające są równe.

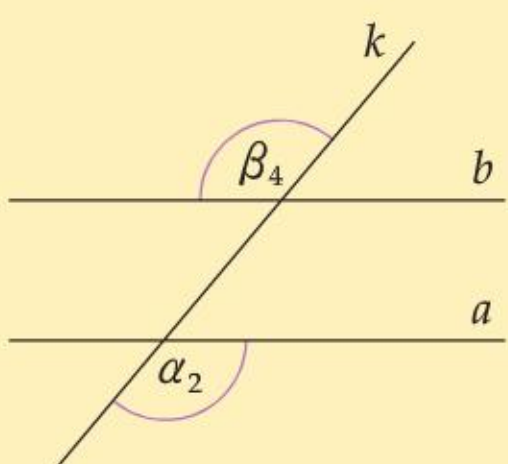
Kąty α_1 i β_3 , α_2 i β_4 , α_3 i β_1 , α_4 i β_2 nazywamy **kątami naprzemianległymi**.

Kąty naprzemianległe

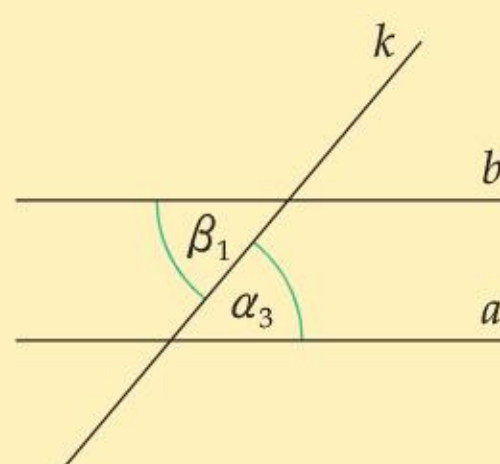
Proste a i b są równoległe ($a \parallel b$)



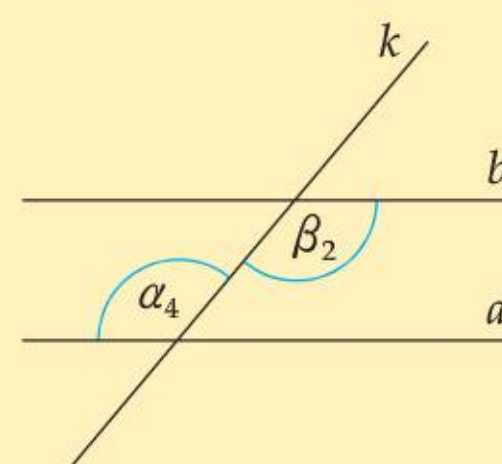
$$\alpha_1 = \beta_3$$



$$\alpha_2 = \beta_4$$



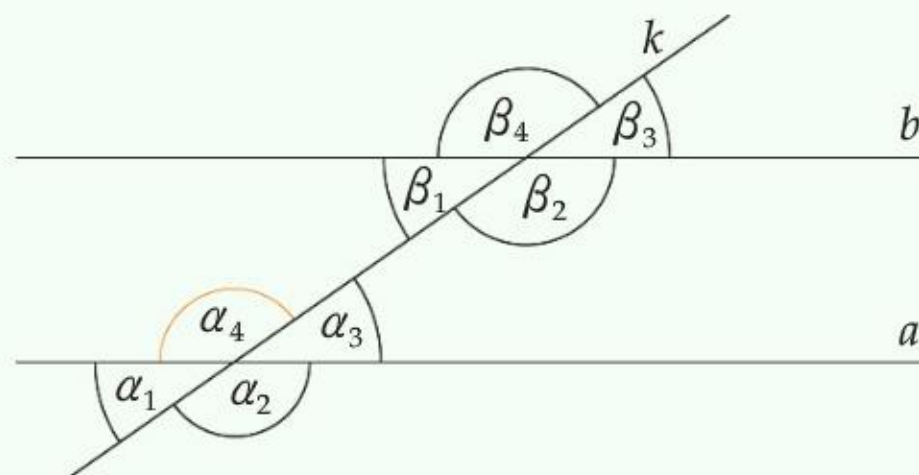
$$\alpha_3 = \beta_1$$



$$\alpha_4 = \beta_2$$

Kąty naprzemianległe są równe.

Prosta k przecina proste równoległe a i b . Kąt α_4 ma 153° .
Obliczmy miary pozostałych kątów zaznaczonych na rysunku.



$$\beta_3 = \alpha_1 = 27^\circ$$

katy β_3 i α_1 to kąty naprzemianległe

1. Dwie proste równoległe przecięto trzecią prostą, wyznaczając w ten sposób 8 kątów. Jeden z tych kątów ma miarę 69° . Wyznacz miary pozostałych kątów.

● Boki prostokąta należą do prostych a, b, c, d , tak jak na rysunku.



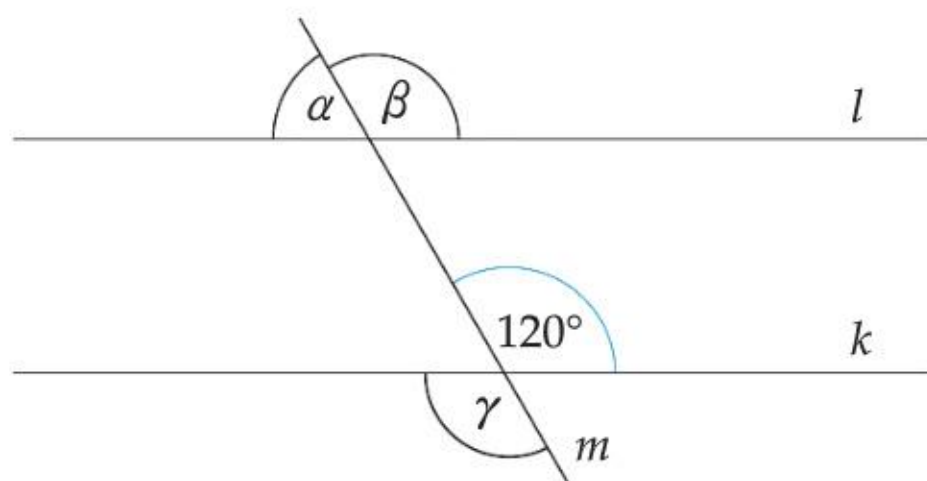
b) prostopadłe.



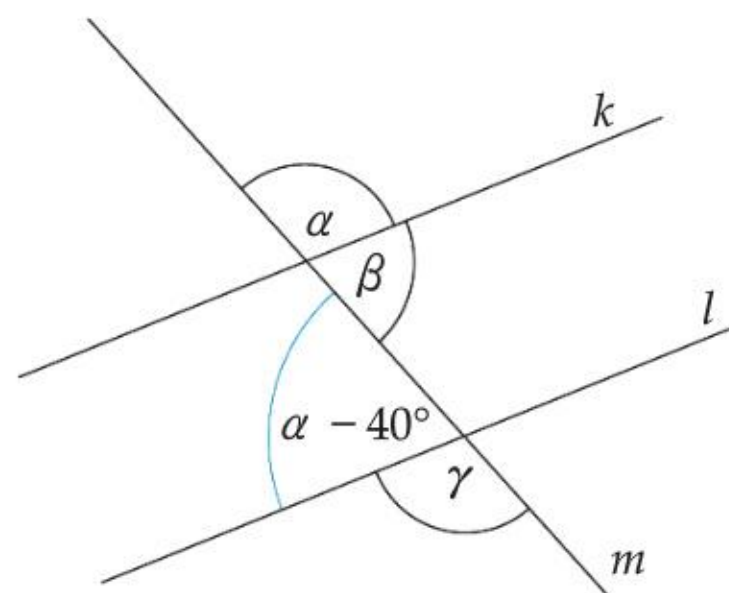
Odcinki nazywamy prostopadłymi, gdy leżą na prostych prostopadłych. Odcinki nazywamy równoległymi, gdy leżą na prostych równoległych.

- Narysuj prostą k i zaznacz dwa punkty A i B położone po różnych stronach prostej k . Porównaj długość odcinka AB z sumą odległości tych punktów od prostej k . Rozpatrz różne możliwości. W jakim przypadku długość odcinka AB jest równa sumie odległości tych punktów od prostej k ?
- Jeden z ośmiu kątów otrzymanych w wyniku przecięcia dwóch prostych równoległych trzecią prostą ma miarę:
a) 45° , b) 90° , c) 114° .
Oblicz miary pozostałych kątów.
- Proste k i l są równoległe. Oblicz miary kątów α , β , γ .

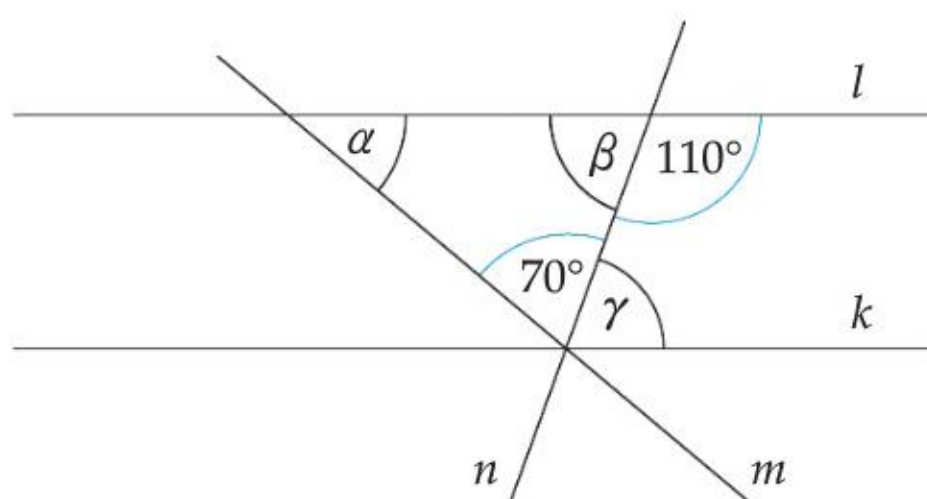
a)



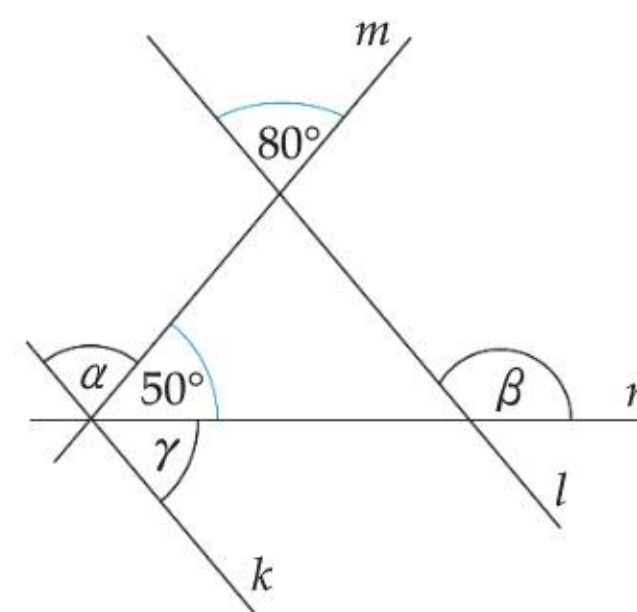
b)



c)

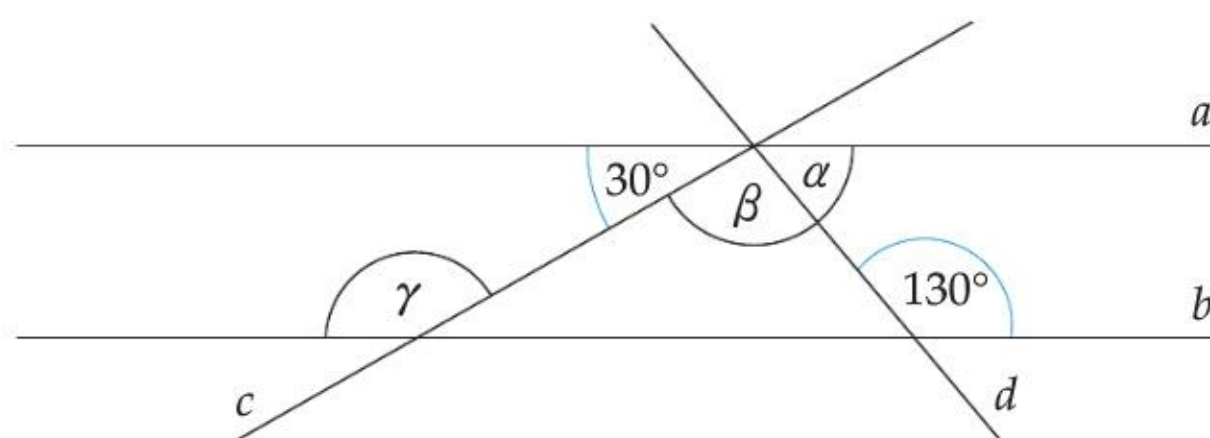


d)

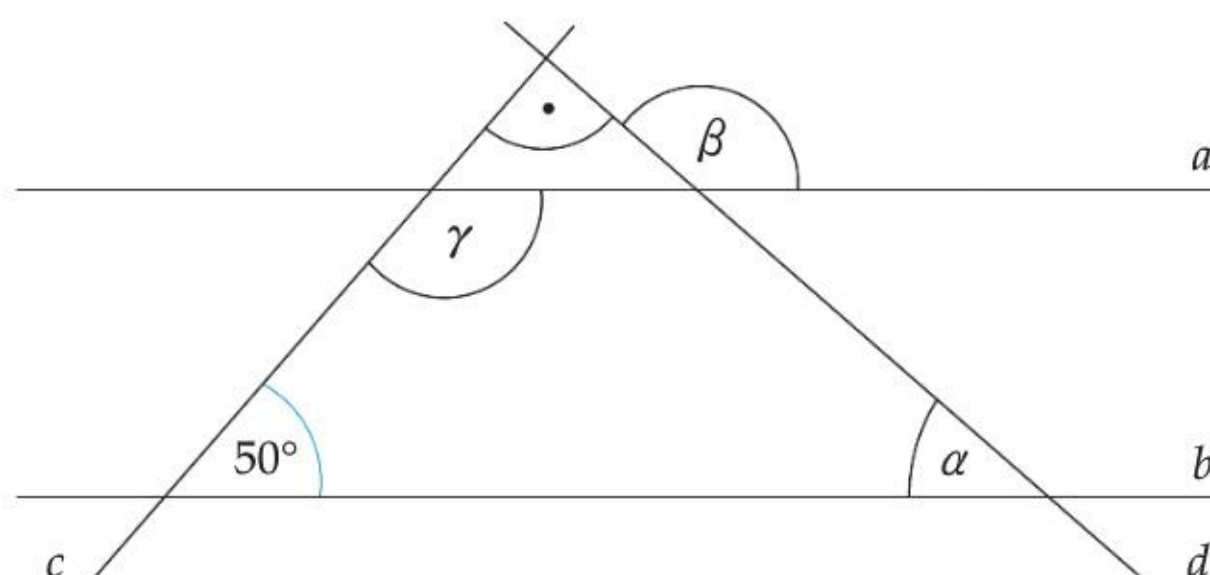


- Jeżeli proste a i b są równoległe, to:

- A. $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 150^\circ$
- B. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 150^\circ$
- C. $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 100^\circ$
- D. $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 120^\circ$

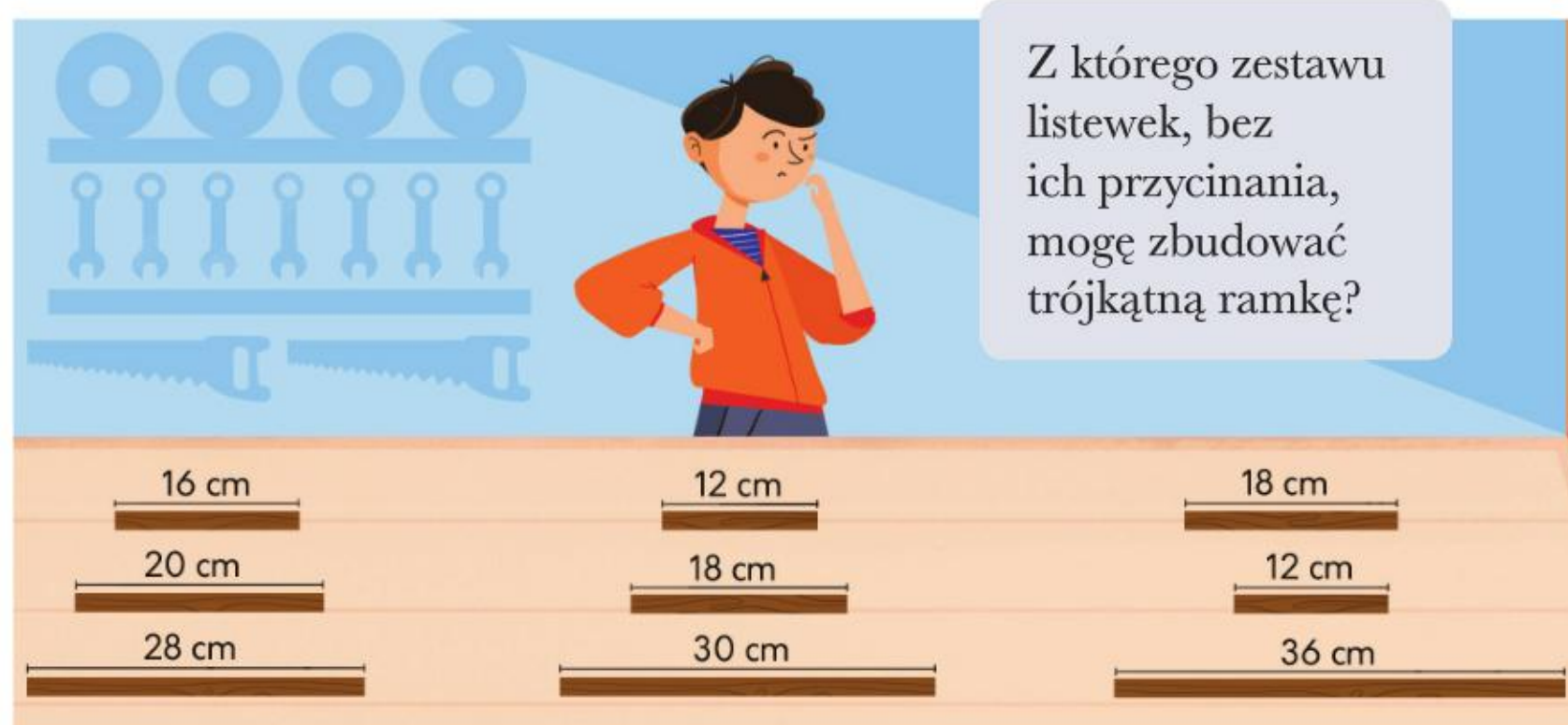


- Proste a i b są równoległe. Prosta c jest prostopadła do prostej d . Wyznacz miary kątów: α , β , γ .



5.3 Trójkąt i jego własności

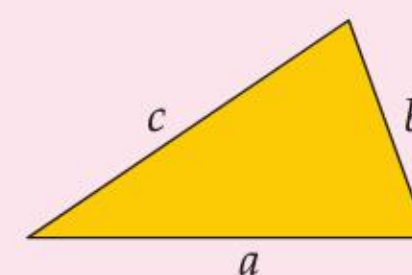
Podejmij temat



Przypomnijmy, jakie warunki spełniają długości boków trójkąta.

Suma długości dwóch dowolnych boków trójkąta jest większa od długości trzeciego boku.

$$a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$$



Przykład 1

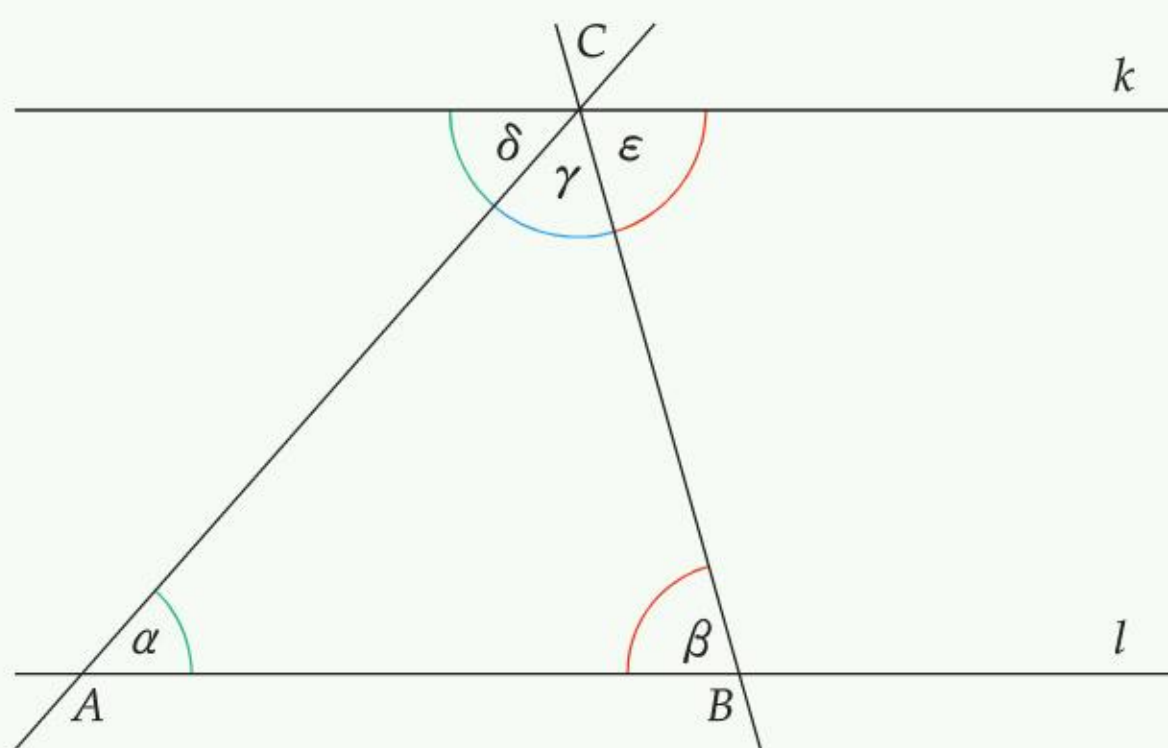
Uzasadnijmy, że suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

W trójkącie ABC zaznaczamy kąty α , β , γ , jak na rysunku obok. Rysujemy prostą l , która zawiera bok AB tego trójkąta, oraz prostą k równoległą do prostej l , przechodzącą przez wierzchołek C . Zaznaczamy kąty δ i ϵ .

Zauważmy, że kąty α i δ oraz kąty β i ϵ to kąty naprzemianległe, zatem $\alpha = \delta$ oraz $\beta = \epsilon$.

Kąty δ , γ , ϵ tworzą kąt półpełny. Kąt półpełny ma miarę 180° .

Zatem: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

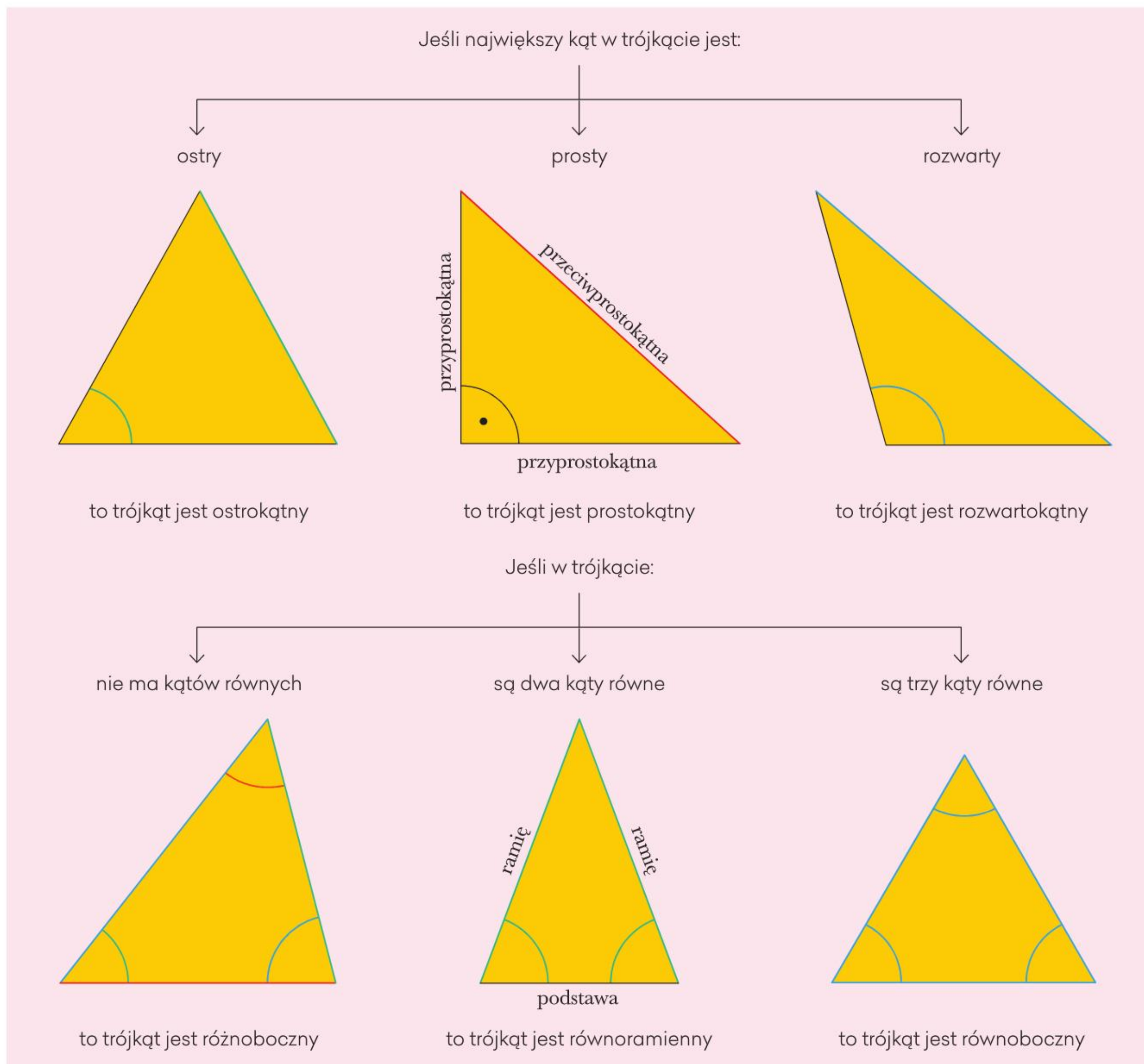


1. W trójkącie największy kąt jest o 20° większy od najmniejszego i o 4° większy od średniego kąta. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

W trójkącie zachodzą następujące zależności:

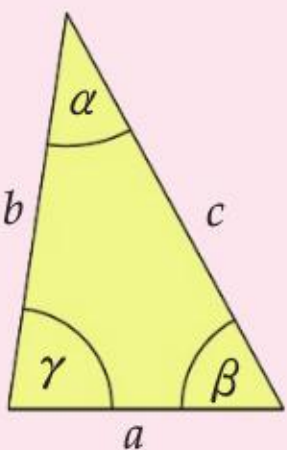
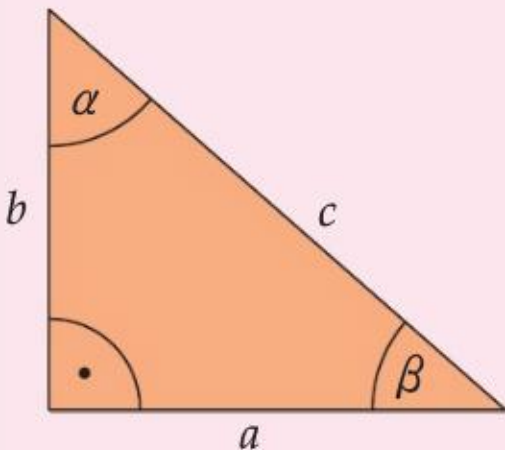
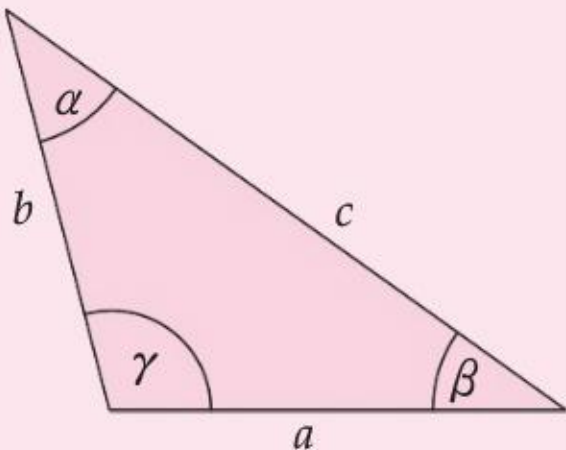
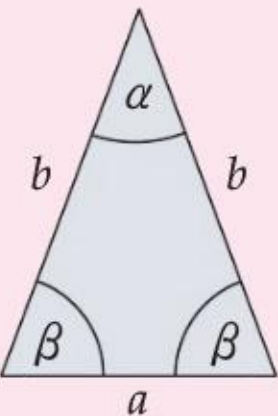
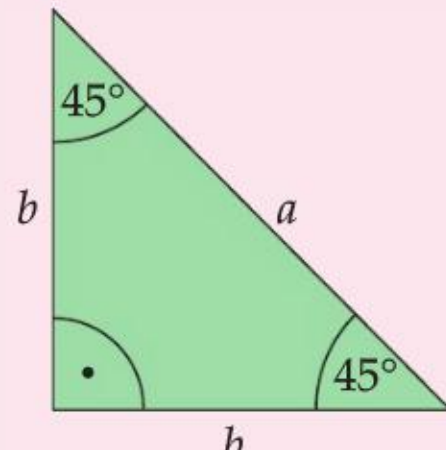
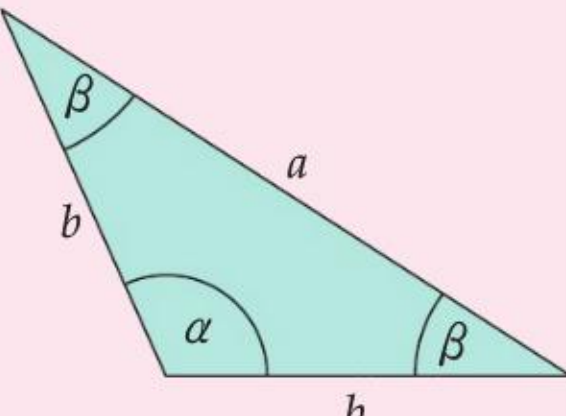
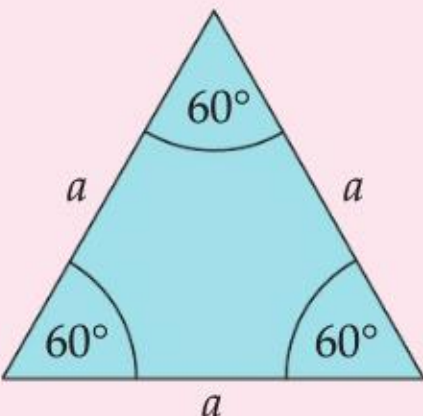
- najkrótszy bok leży naprzeciw najmniejszego kąta,
- najdłuższy bok leży naprzeciw największego kąta.

Jeśli znamy miary kątów w trójkącie, to możemy określić jego rodzaj.



Nazwa trójkąta informuje o rodzaju trójkąta. Na przykład: trójkąt prostokątny równoramienny to trójkąt, w którym jeden z kątów jest prosty i dwa boki są równe.

Podział trójkątów ze względu na boki i kąty

boki \ kąty	ostrokątny	prostokątny	rozwartokątny
różnoboczny			
równoramienny			
równoboczny		nie istnieje	nie istnieje

Zadania

- 

Określ, czy można zbudować trójkątną ramkę z listewek o podanych długościach. Odpowiedź uzasadnij.

a) 17 cm, 34 cm, 17 cm b) 0,7 m, 0,9 m, 15,5 dm

c) 8,5 dm, 5 dm, 1,2 dm d) $\frac{2}{3}$ m, 2,5 dm, 91 cm
- 

Oblicz obwód trójkąta o podanych długościach boków. Określ rodzaj tego trójkąta ze względu na boki.

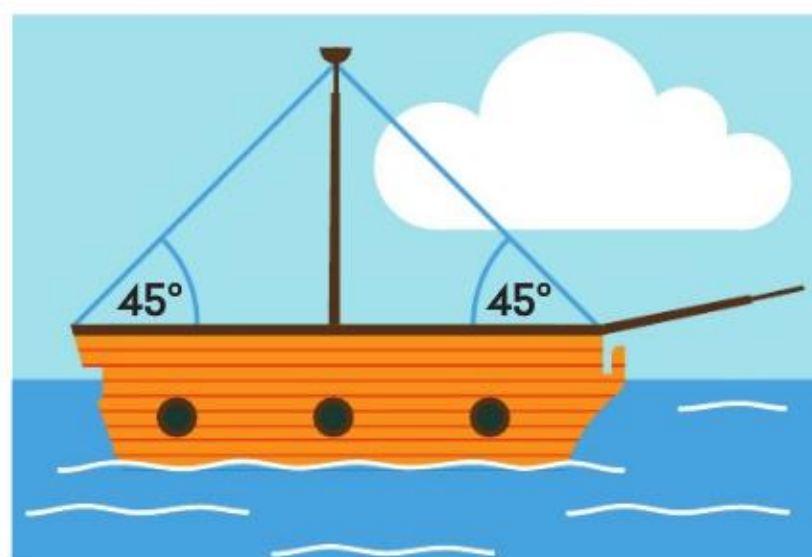
a) 17 mm, 1,7 cm, 0,017 m b) 12 cm, 370 mm, 4,5 dm

c) 3,5 dm, 0,6 m, 35 cm d) 5,5 cm, 49 mm, 0,3 dm
- 

Długości boków trójkąta równoramiennego są wyrażone liczbami naturalnymi. Obwód tego trójkąta jest równy 14 cm. Jakie mogą być długości boków tego trójkąta? Podaj wszystkie możliwości.

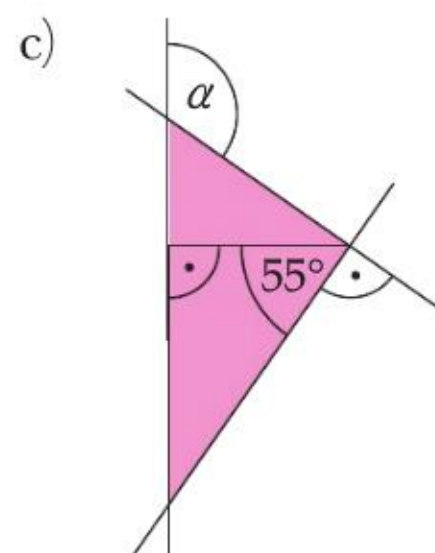
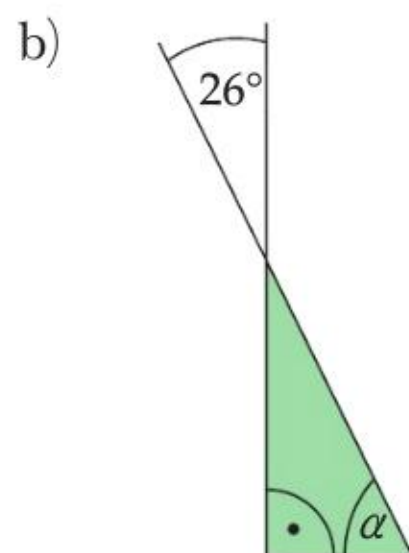
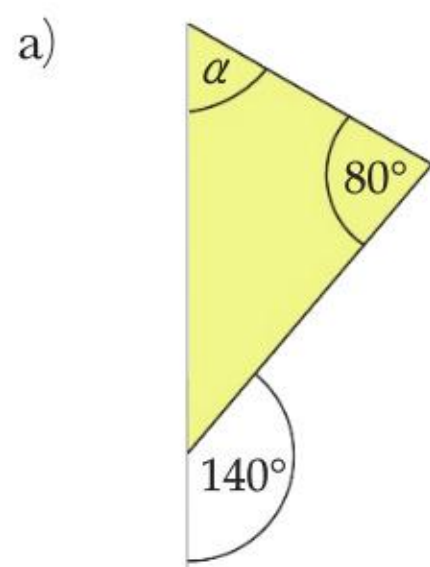
- Oblicz obwód trójkąta równoramiennego, w którym:
 - dwa boki mają długości 3 m i 6 m,
 - podstawa ma 8 cm, a ramię stanowi 75% długości podstawy,
 - kąt przy podstawie ma 60° , a podstawa jest równa 2 dm.
- Oblicz długość podstawy trójkąta równoramiennego, w którym:
 - obwód jest równy 31 cm, a ramię jest o 2 cm dłuższe od podstawy,
 - obwód jest równy 5,4 dm, a ramię ma 25 cm.
- Obwód trójkąta prostokątnego jest równy obwodowi trójkąta równobocznego. W trójkącie prostokątnym najdłuższy bok ma 10 cm, a każdy następny jest o 2 cm krótszy od poprzedniego boku. Wyznacz długość boku trójkąta równobocznego.

- Określ rodzaj trójkąta wyznaczonego przez liny przymocowane od topu masztu statku do dziobu i rufy, które nachylone są do pokładu pod kątem 45° .



- Wyznacz miary kątów trójkąta równoramiennego, wiedząc, że:
 - kąt przy podstawie trójkąta jest o 15° mniejszy od kąta między ramionami,
 - jeden z kątów ma 80° (rozpatrz dwie możliwości).
- W trójkącie ABC kąt BAC jest prosty. Oblicz miarę kąta ABC , jeśli:
 - kąt ABC jest o 12° mniejszy od kąta ACB ,
 - kąt ACB jest 5 razy większy od kąta ABC .

- Oblicz, ile stopni ma kąt α .



- ★ Wewnątrz trójkąta ABC zaznaczono dowolny punkt D . Uzasadnij, że kąt ACB jest mniejszy od kąta ADB .

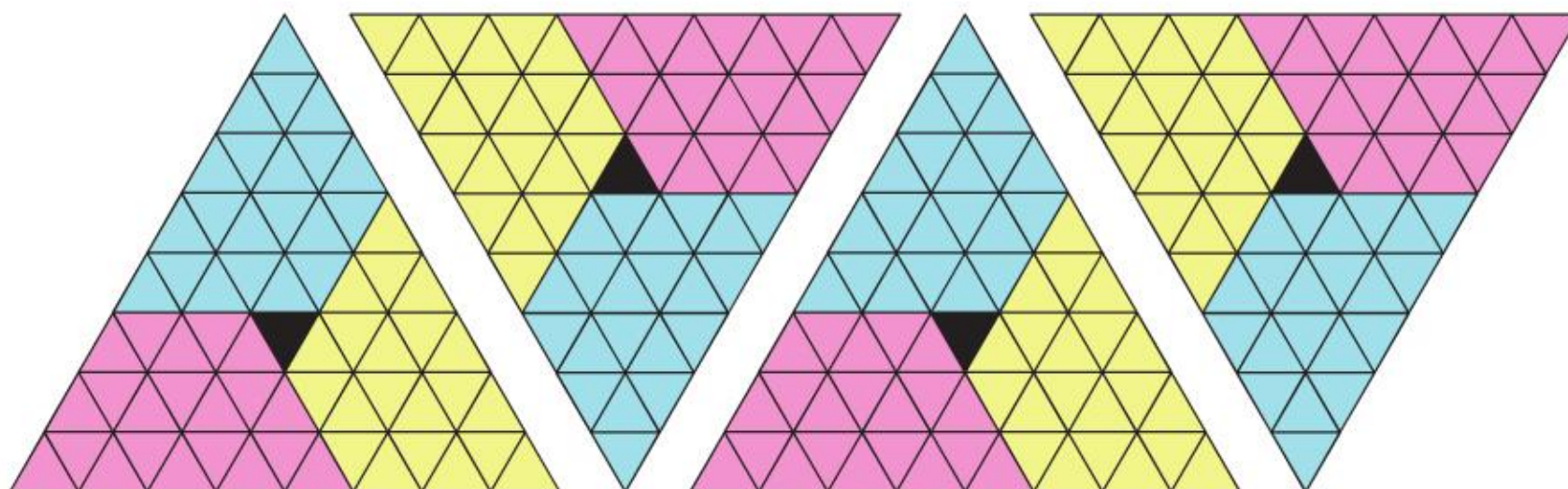


5.4 Cechy przystawania trójkątów

Podejmij temat



Rysunek przedstawia fragment mozaiki. Z jakich wielokątów zbudowana jest ta mozaika? Porównaj wielkości wielokątów, które mają ten sam kształt. Co zauważasz?



- Dwa odcinki są przystające, gdy mają równe długości.
- Dwa koła są przystające, gdy mają równe promienie.
- Dwa kąty są przystające, gdy mają równe miary.

Mozaiki, wzory na tapetach, witraże często są zbudowane z figur mających taki sam kształt i taką samą wielkość. Z figurami o tej własności spotykamy się też na co dzień, np. kopiując dokumenty, płacąc banknotami. Zwykle mówimy, że figury są takie same. Matematycy nazywają je przystającymi.

Figury przystające to figury, które mają taki sam kształt i taką samą wielkość.

Jeśli narysujemy na kartce papieru dwie figury przystające i wytniemy je, to będziemy mogli jedną z nich tak położyć na drugiej, żeby się pokryły. Oto kilka przykładów figur przystających.

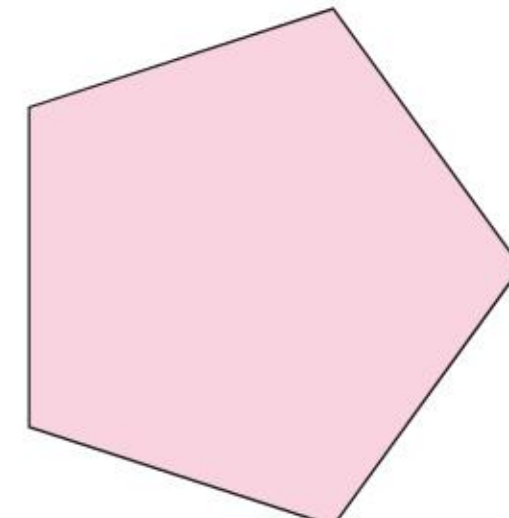
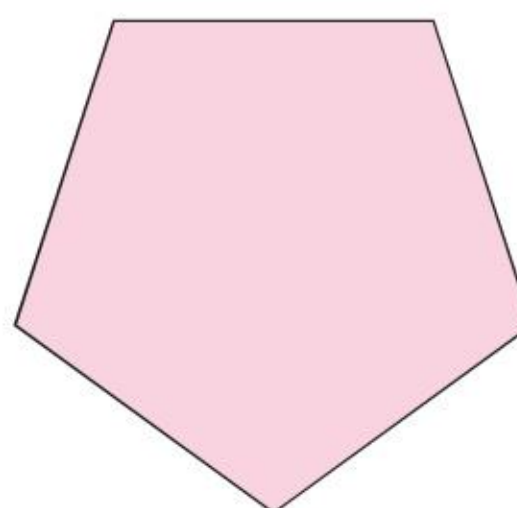
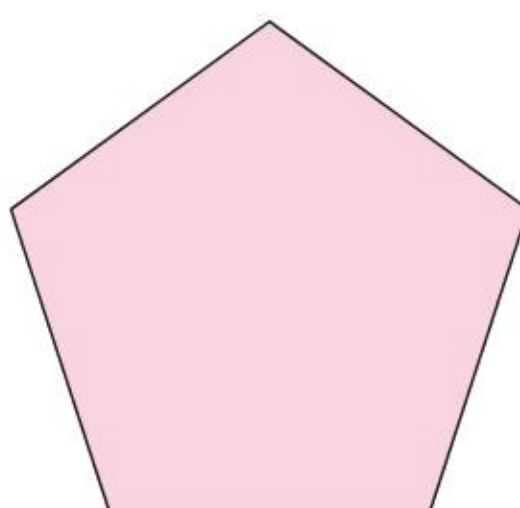


figura

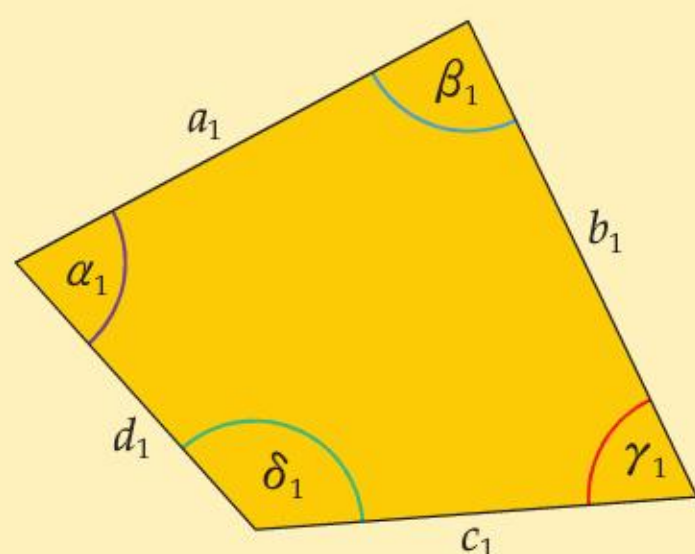
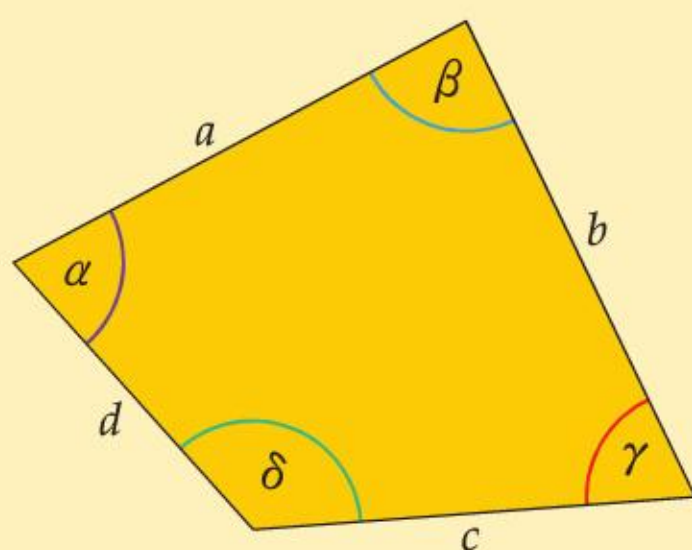
Λδπλσ



1. Wielokąty na rysunku są przystające. Porównaj długości ich boków i kątów. Co zauważasz?



Dwa wielokąty są przystające, jeśli odpowiadające sobie boki są równej długości i odpowiadające sobie kąty mają równe miary.



$$\begin{array}{ll} a = a_1 & \alpha = \alpha_1 \\ b = b_1 & \beta = \beta_1 \\ c = c_1 & \gamma = \gamma_1 \\ d = d_1 & \delta = \delta_1 \end{array}$$

Jeśli figury F i F_1 są przystające, to zapisujemy: $F \equiv F_1$
Czytamy: figura F jest przystająca do figury F_1 .

Jeśli chcemy skonstruować trójkąty przystające lub sprawdzić, czy narysowane trójkąty są przystające, możemy skorzystać z własności przystawania trójkątów, zwanych cechami przystawania trójkątów. Poznamy trzy cechy przystawania trójkątów.

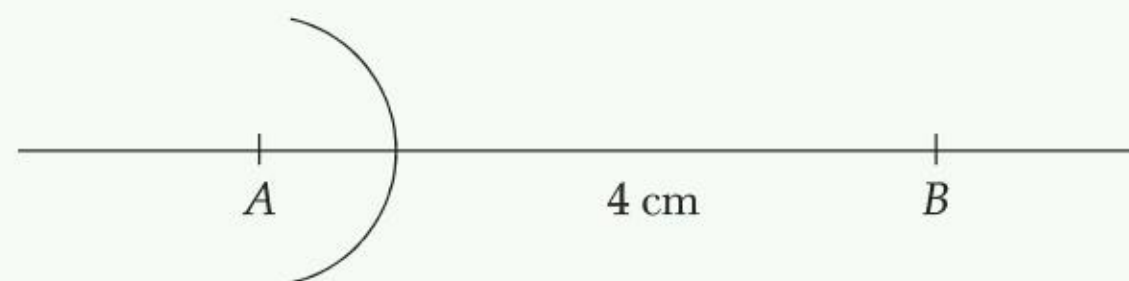
Przykład 1

Skonstruujmy trójkąt o bokach długości: 1 cm, 3,5 cm, 4 cm.

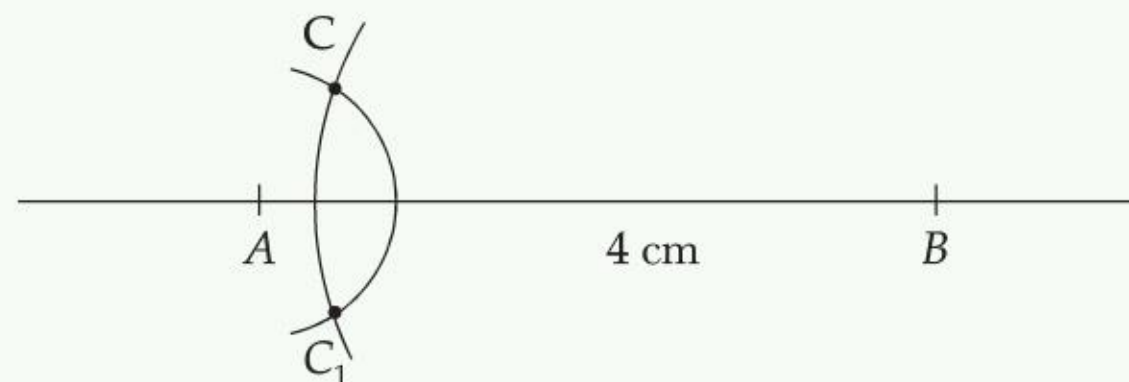
Rysujemy prostą, na której zaznaczamy odcinek AB o długości 4 cm.



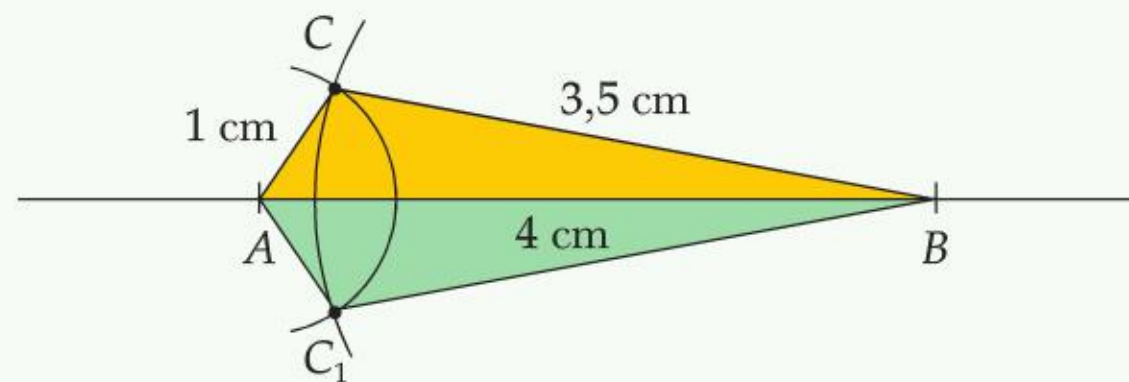
Kreślimy łuk okręgu o środku w punkcie A i promieniu 1 cm.



Kreślimy łuk okręgu o środku w punkcie B i promieniu 3,5 cm. Punkty przecięcia się łuków oznaczamy przez C i C_1 .

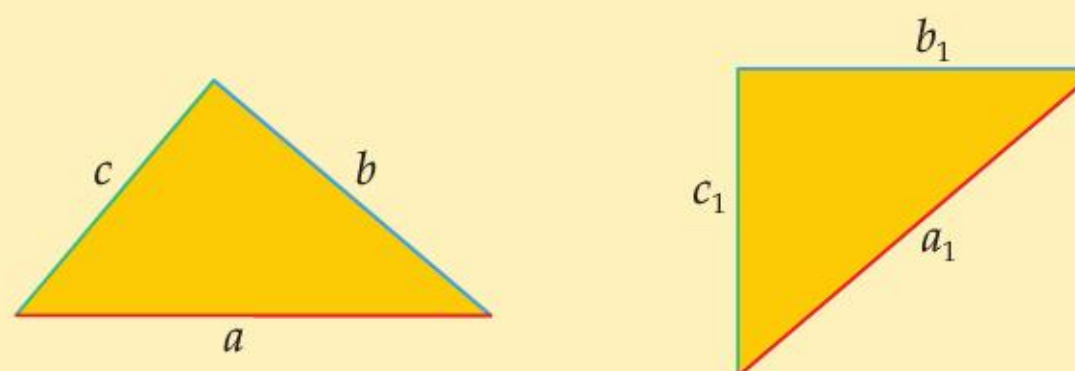


Rysujemy dwa trójkąty spełniające warunki zadania: ABC i ABC_1 .



Skonstruowane trójkąty mają boki tej samej długości. O takich trójkątach powiemy, że są przystające. Zapisujemy: $\triangle ABC \equiv \triangle ABC_1$

Pierwsza cecha przystawiania trójkątów (bok, bok, bok)



$$a = a_1, b = b_1, c = c_1$$

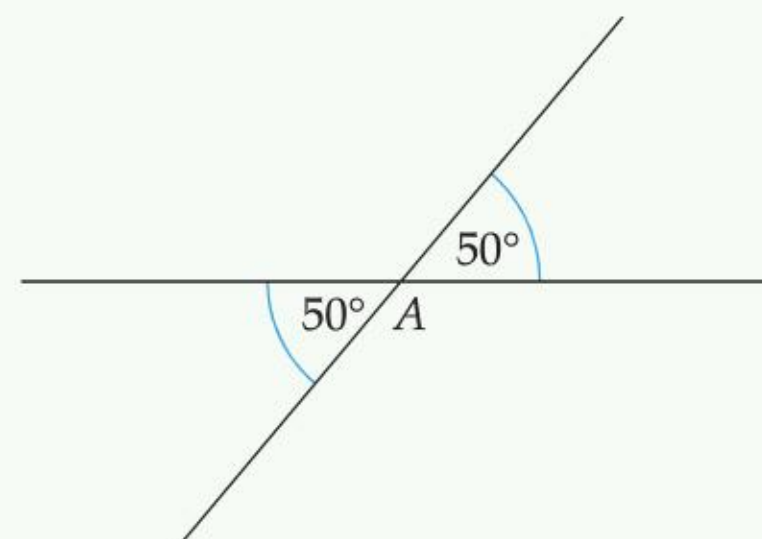
Jeżeli boki jednego trójkąta mają takie same długości jak boki drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

2. Skonstruuj dwa trójkąty o bokach długości: 2,5 cm, 4 cm, 5 cm. Czy te trójkąty są przystające? Dlaczego?

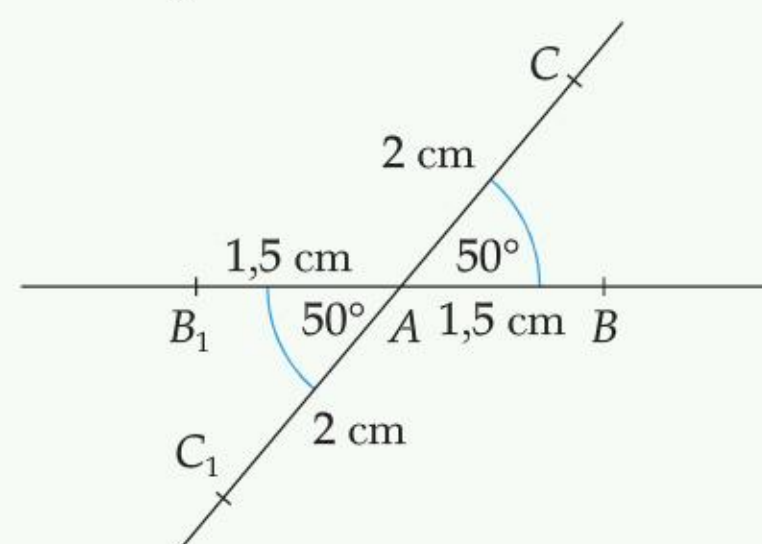
Przykład 2

Skonstruujmy trójkąt o bokach długości 2 cm i 1,5 cm oraz o kącie między tymi bokami o mierze 50° .

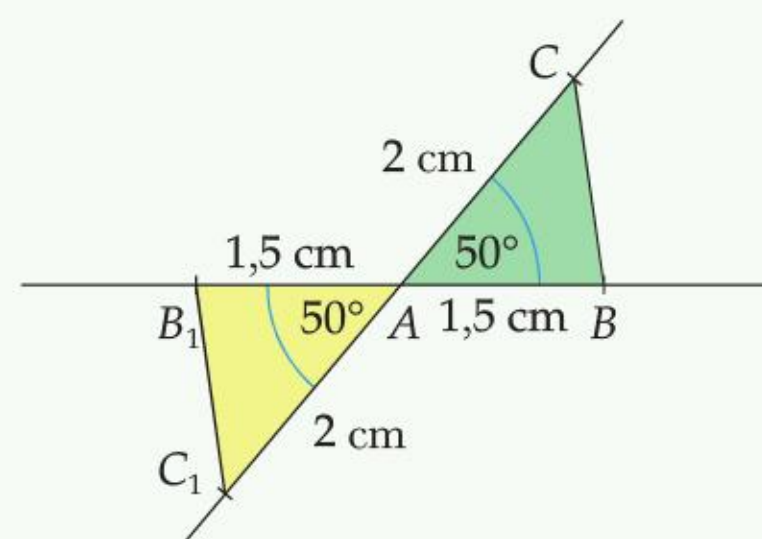
Rysujemy dwie proste przecinające się pod kątem 50° . Punkt przecięcia się tych prostych oznaczamy przez A . Zaznaczamy dwa powstałe kąty wierzchołkowe, z których każdy ma miarę 50° .



Na ramionach zaznaczonych kątów wierzchołkowych, leżących na tej samej prostej, odmieramy odcinki odpowiednio AB i AB_1 o długości 1,5 cm każdy. W podobny sposób odmieramy odcinki AC i AC_1 o długości 2 cm każdy.



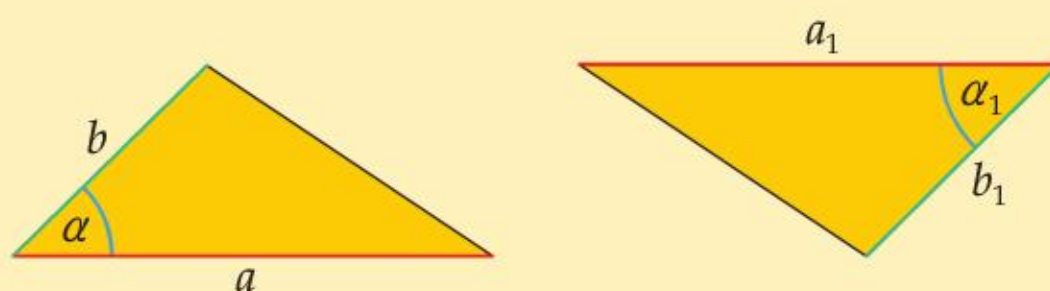
Łączymy odcinkami punkty A, B, C oraz A, B_1, C_1 i otrzymujemy trójkąty ABC i AB_1C_1 .



Narysowane trójkąty mają dwa boki tej samej długości i kąt między tymi bokami mają takie same miary.

Trójkąty te są przystające: $\triangle ABC \equiv \triangle AB_1C_1$

Druga cecha przystawania trójkątów (bok, kąt, bok)



$$a = a_1, b = b_1, \alpha = \alpha_1$$

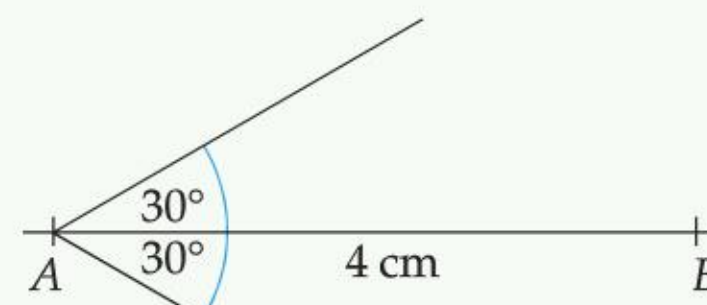
Jeżeli dwa boki jednego trójkąta mają takie same długości jak dwa boki drugiego trójkąta oraz kąty między tymi bokami mają tę samą miarę, to trójkąty są przystające.

3. Przekątne równoległoboku $ABCD$ przecinają się w punkcie E . Korzystając z własności równoległoboku oraz cechy przystawania trójkątów bok, kąt, bok, wykaż, że trójkąty AED i BEC są przystające.

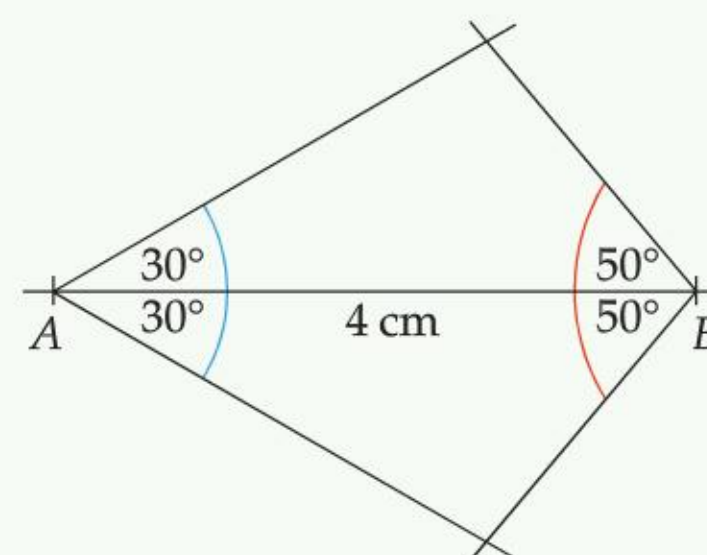
Przykład 3

Skonstruujemy trójkąt o boku długości 4 cm i kątach przy tym boku o miarach równych 30° i 50° .

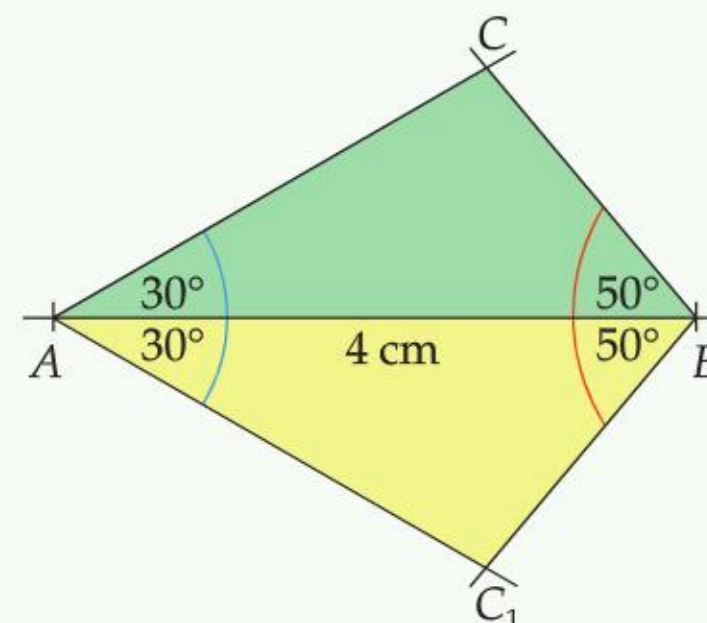
Rysujemy prostą, na której zaznaczamy odcinek AB o długości 4 cm. Po obu stronach prostej wyznaczamy kąt o wierzchołku w punkcie A i mierze 30° , którego jedno ramię zawiera odcinek AB .



Po obu stronach prostej AB wyznaczamy kąt o wierzchołku w punkcie B i mierze 50° , którego ramię zawiera odcinek AB .

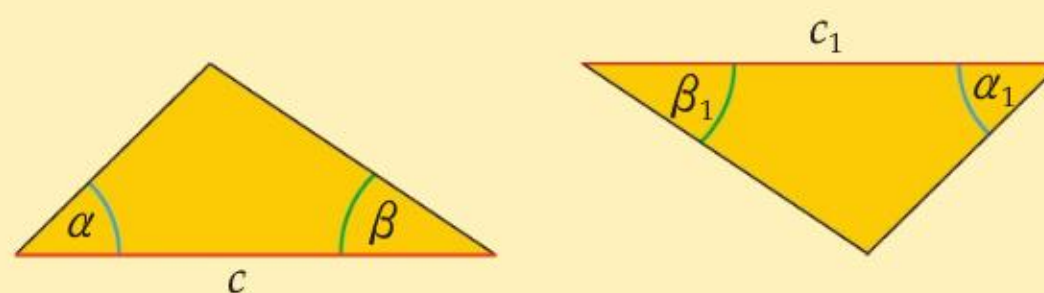


Ramiona narysowanych kątów przecięły się w punktach, które oznaczamy przez C i C_1 .



Otrzymaliśmy dwa trójkąty ABC oraz ABC_1 . Trójkąty te są przystające. Zapisujemy: $\triangle ABC \equiv \triangle ABC_1$

Trzecia cecha przystawania trójkątów (kąt, bok, kąt)



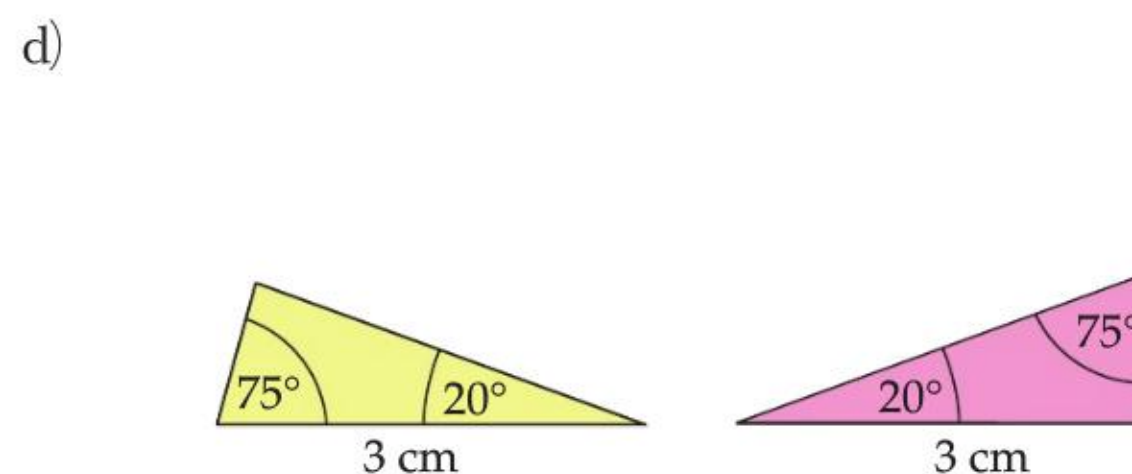
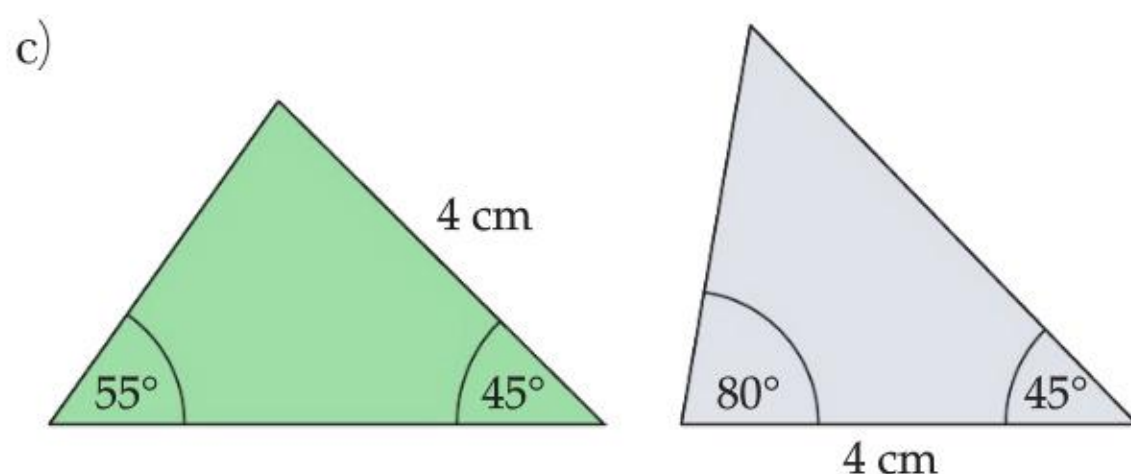
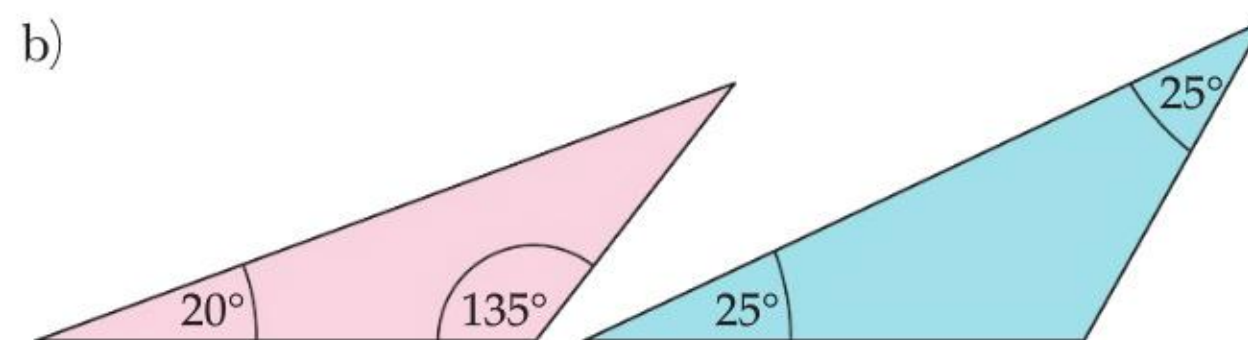
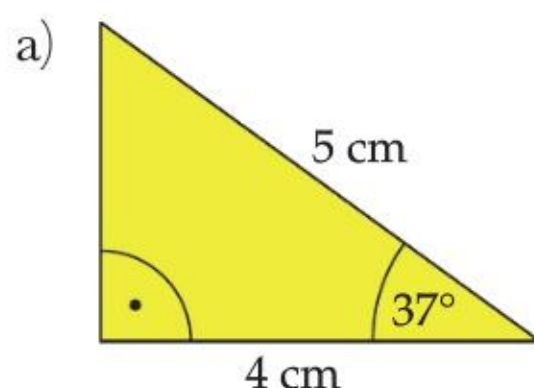
$$c = c_1, \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$$

Jeżeli bok jednego trójkąta ma taką samą długość jak bok drugiego trójkąta, a kąty leżące przy tych bokach mają takie same miary, to trójkąty są przystające.

4. W trójkącie prostokątnym ABC kąt BAC jest prosty. W trójkącie prostokątnym EFG kąt FEG jest prosty. Uzasadnij, że jeśli przyprostokątne AB i EF są równe oraz miary kątów ABC i EFG są równe, to trójkąty ABC i EFG są przystające.

Zadania

- Rozstrzygnij, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.
 - Każde dwa prostokąty o równych obwodach są przystające.
 - Każde dwa okręgi o równych promieniach są przystające.
 - Jeśli obwód kwadratu K jest równy 20, to pole kwadratu przystającego do kwadratu K jest równe 25.
- Skonstruuj dwa trójkąty przystające
 - o bokach długości 4 cm, 5 cm, 7 cm.
 - o bokach 5 cm i 4 cm oraz kącie między tymi bokami o mierze 100° .
 - o boku długości 5 cm i kątach przy tym boku o miarach równych 30° i 60° .
- Czy narysowane trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.



Narysuj trójkąt równoramienny ABC taki, że $|AC| = |BC|$. Uzasadnij, że wysokość poprowadzona z wierzchołka C dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty przystające.

Zbadaj, czy dwa trójkąty równoramienne są przystające, wiedząc, że:

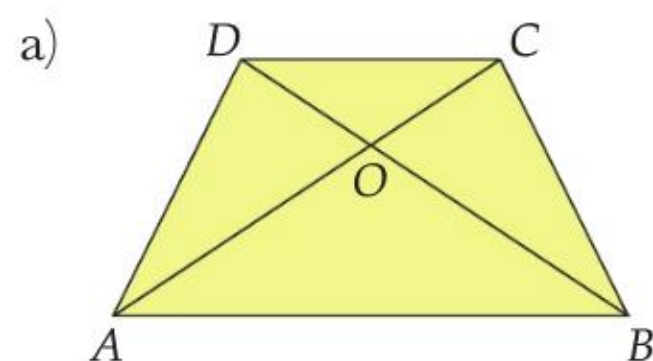
- obwód jednego trójkąta jest równy 10 cm, a drugiego 0,9 dm,
- każdy z nich ma obwód równy 18 cm (rozważ różne przypadki),
- w jednym trójkącie jeden z kątów ma 50° , a w drugim trójkącie jeden z kątów ma 65° (rozważ różne przypadki).

W prostokącie $KLMN$ wyznacz przekątne. Punkt przecięcia przekątnych oznacz literą S . Wypisz cztery pary utworzonych trójkątów przystających. Z której cechy przystawiania trójkątów wynika, że trójkąty są przystające?

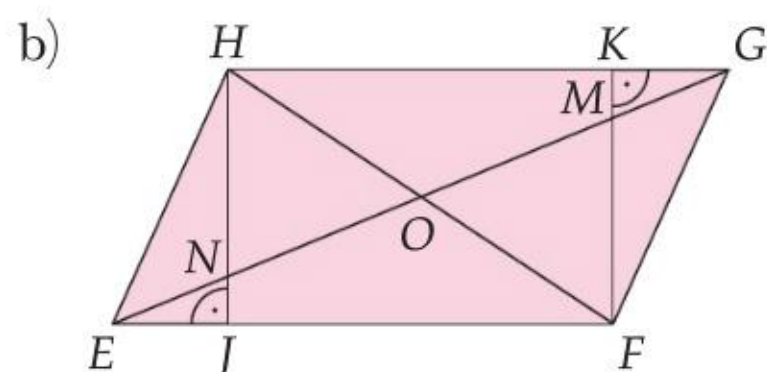
Narysuj przekątne w rombie $PRST$ i oznacz literą Z punkt przecięcia się tych przekątnych. Wypisz cztery pary otrzymanych trójkątów przystających. Z której cechy przystawiania trójkątów wynika ich przystawanie?

Narysuj trójkąt równoboczny i połącz środki boków tego trójkąta. Uzasadnij, że powstałe trójkąty są przystające. Z której cechy przystawiania trójkątów wynika, że trójkąty są przystające?

Korzystając z rysunku, wypisz trzy pary trójkątów przystających. W każdym przypadku napisz, z której cechy przystawiania trójkątów wynika, że trójkąty są przystające.



$|AD| = |BC|$, $AB \parallel DC$



$HJ \perp EJ$, $FK \perp GK$

Narysuj trójkąty ABC i PRS , w których $|AB| = |PR|$ i $|BC| = |RS|$ oraz kąty BCA i RSP są równe. Czy te dwa trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij. Porównaj trójkąty swoje i kolegi lub koleżanki.

Narysuj trójkąty ABC i DEF , w których $|AB| = |DE|$ oraz kąty BAC i EDF mają tę samą miarę oraz kąty BCA i EFD mają tę samą miarę. Czy te dwa trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij. Porównaj swoje trójkąty z trójkątami kolegi lub koleżanki.

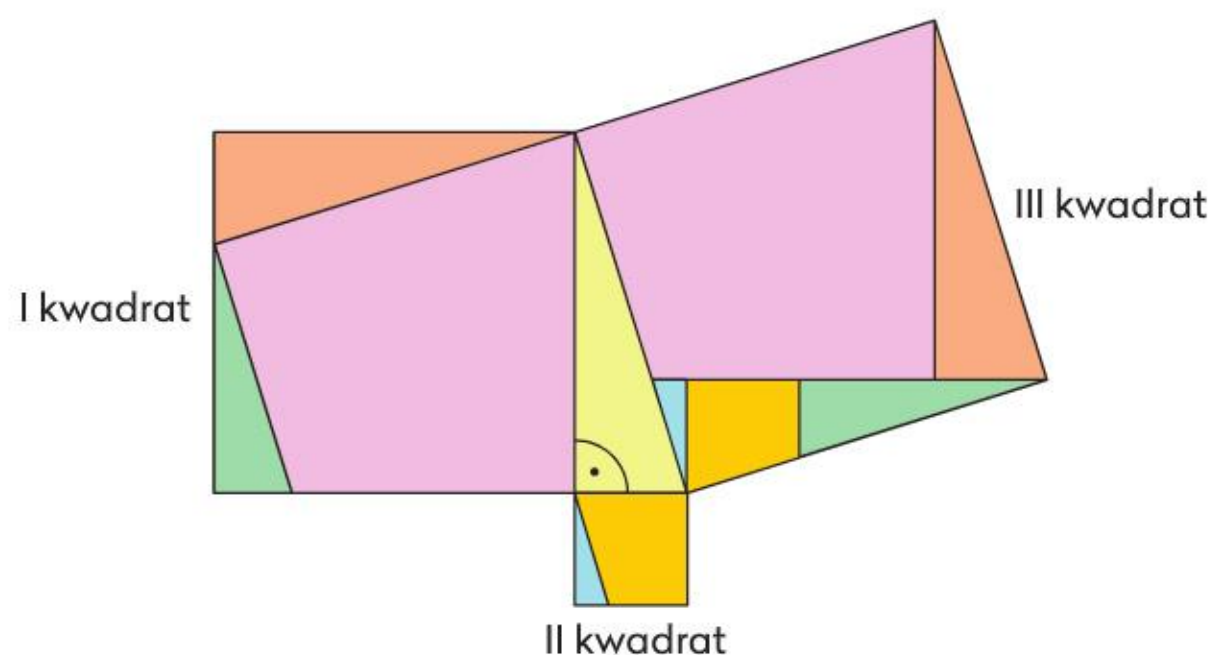
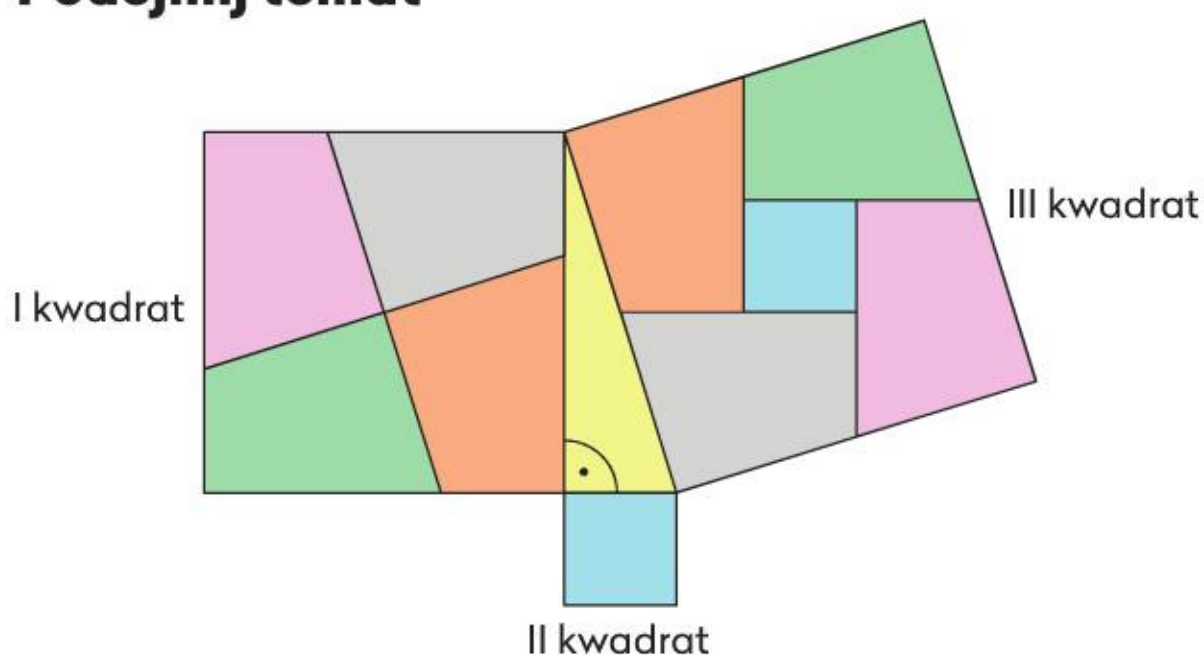
Dwa trójkąty prostokątne mają równe przeciwprostokątne. Jeden z kątów ostrych w pierwszym trójkącie ma miarę 41° , a jeden z kątów ostrych w drugim trójkącie ma miarę 49° . Czy te trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.



Jeśli jeden z kątów w trójkącie równoramiennym ma miarę 50° , może on być zarówno kątem przy podstawie, jak i między ramionami. Otrzymamy wtedy różne trójkąty.

5.5 Twierdzenie Pitagorasa i jego zastosowanie

Podejmij temat



Przyjrzyj się uważnie rysunkom. Co możesz powiedzieć o polu III kwadratu na każdym z rysunków?



Twierdzenie to każde zdanie, którego prawdziwość została udowodniona.

Ciekawe!

Pitagoras, grecki matematyk, żył w VI-V w. p.n.e. Jak świadczą zachowane tabliczki z pismem klinowym, twierdzenie zwane twierdzeniem Pitagorasa znane było Babilończykom na długo przed Pitagorasem. Nie był on odkrywcą tego twierdzenia, ale najprawdopodobniej je udowodnił. Dziś znamy ponad 300 dowodów twierdzenia Pitagorasa.

Na każdym z rysunków w *Podejmij temat* na bokach trójkąta prostokątnego zbudowane są kwadraty: I, II i III. Zauważ, że z kwadratów I i II (po odpowiednim rozcięciu i ułożeniu) można zbudować kwadrat III. Zatem pole kwadratu III jest równe sumie pól kwadratów I i II. Możemy to zapisać następująco:

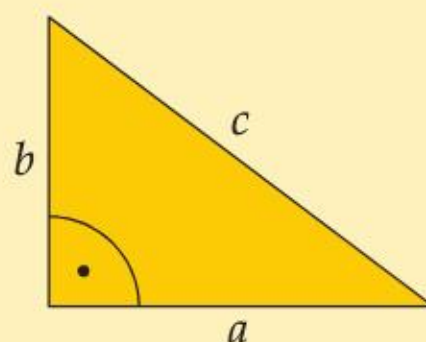
$$P_I + P_{II} = P_{III}$$

Związek pomiędzy polami kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego opisuje twierdzenie Pitagorasa, jedno z najstarszych i najważniejszych twierdzeń geometrycznych.

Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

Twierdzenie Pitagorasa można sformułować też inaczej: jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

a, b – przyprostokątne; c – przeciwprostokątna

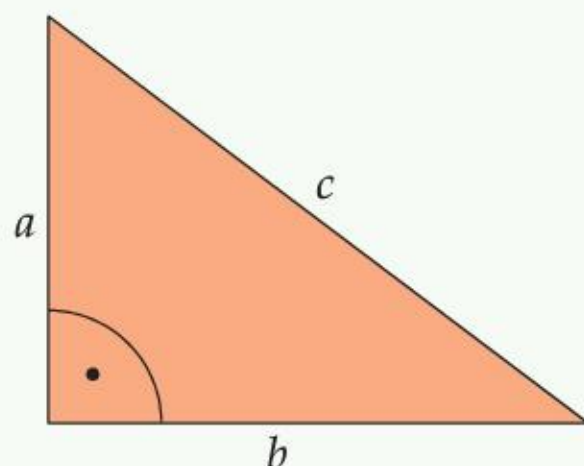
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, możemy obliczyć długość jednego z boków trójkąta prostokątnego, gdy znamy długości pozostałych boków.

Przykład 1

W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości a i b . Obliczmy długość przeciwprostokątnej, jeśli:

- a) $a = 20$ cm, $b = 21$ cm, b) $a = 4$ dm, $b = 6$ dm.

Sporządźmy rysunek pomocniczy.



- a) $a = 20$ cm, $b = 21$ cm

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$20^2 + 21^2 = c^2$$

$$400 + 441 = c^2$$

$$841 = c^2$$

$$c = \sqrt{841}$$

$$c = 29$$

Długość przeciwprostokątnej jest równa 29 cm.

Trójkąt jest prostokątny. Skorzystajmy z twierdzenia Pitagorasa i obliczmy długość przeciwprostokątnej.

Podstawmy w miejsce liter odpowiednie liczby i wykonajmy obliczenia.

Zauważmy, że $29^2 = 841$.

- b) $a = 4$ dm, $b = 6$ dm

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$4^2 + 6^2 = c^2$$

$$16 + 36 = c^2$$

$$52 = c^2$$

$$c = \sqrt{52}$$

$$c = \sqrt{4 \cdot 13}$$

$$c = 2\sqrt{13}$$

Długość przeciwprostokątnej jest równa $2\sqrt{13}$ dm.

Trójkąt jest prostokątny. Skorzystajmy z twierdzenia Pitagorasa.

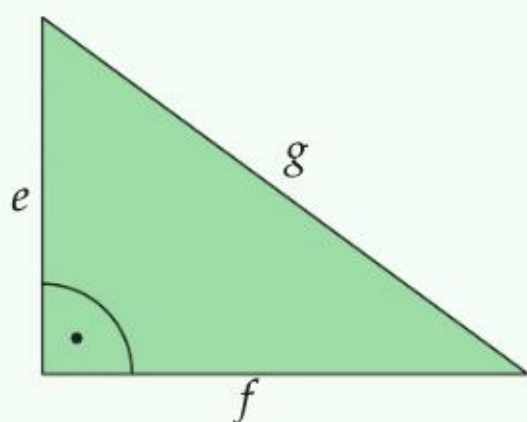
Wyłączmy czynnik przed znak pierwiastka.

1. Oblicz długość przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym, jeśli przyprostokątne mają podane długości.

- a) 3 dm i 4 dm b) 15 cm i 8 cm

Przykład 2

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 37 dm. Jedna z przyprostokątnych ma 35 dm długości. Obliczmy długość drugiej przyprostokątnej.



$$g = 37 \text{ dm}$$
$$f = 35 \text{ dm}$$

$$e^2 + f^2 = g^2$$

$$e^2 + 35^2 = 37^2$$

$$e^2 + 1225 = 1369$$

$$e = \sqrt{144}$$

$$e = 12$$

Trójkąt jest prostokątny. Skorzystajmy z twierdzenia Pitagorasa.

Podstawmy w miejsce liter odpowiednie liczby i wykonajmy obliczenia.

Długość drugiej przyprostokątnej trójkąta wynosi 12 dm.

2. Oblicz długość przyprostokątnej k w trójkącie prostokątnym, jeśli druga przyprostokątna m i przeciwprostokątna n tego trójkąta mają odpowiednio podane długości.

a) $m = 24 \text{ cm}, n = 25 \text{ cm}$

b) $m = 5 \text{ dm}, n = 10 \text{ dm}$

Więcej na temat

Znając długości boków trójkąta, możemy sprawdzić, czy jest on prostokątny. Służy nam do tego **twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa**.

Jeśli suma kwadratów długości dwóch krótszych boków trójkąta jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku, to trójkąt jest prostokątny.

Sprawdźmy, czy trójkąt o podanych długościach boków jest trójkątem prostokątnym.

a) 9 cm, 12 cm, 15 cm

b) 6 cm, 10 cm, 12 cm

a) $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

$$15^2 = 225$$

$$9^2 + 12^2 = 15^2$$

Obliczmy sumę kwadratów długości dwóch krótszych boków trójkąta.

Obliczmy kwadrat długości najdłuższego boku trójkąta.

Trójkąt o bokach: 9 cm, 12 cm, 15 cm jest trójkątem prostokątnym.

b) $6^2 + 10^2 = 36 + 100 = 136$

$$12^2 = 144$$

$$6^2 + 10^2 \neq 12^2$$

Obliczmy sumę kwadratów długości dwóch krótszych boków trójkąta.

Obliczmy kwadrat długości najdłuższego boku trójkąta.

Trójkąt o bokach: 6 cm, 10 cm, 12 cm nie jest trójkątem prostokątnym.

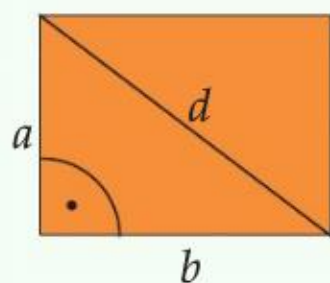
3. Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest trójkątem prostokątnym.

a) 7 cm, 9 cm, 13 cm

b) 8 cm, 15 cm, 17 cm

Przykład 3

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczmy długość przekątnej prostokąta o bokach 10 cm i 12 cm.



$$a = 10 \text{ cm}$$

$$b = 12 \text{ cm}$$

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$10^2 + 12^2 = d^2$$

$$100 + 144 = d^2$$

$$244 = d^2$$

$$d = \sqrt{244}$$

$$d = \sqrt{4 \cdot 61}$$

$$d = 2\sqrt{61}$$

Przekątna prostokąta ma $2\sqrt{61}$ cm.

Przekątna dzieli prostokąt na dwa przystające trójkąty prostokątne. Skorzystajmy z twierdzenia Pitagorasa.

Podstawmy w miejsce liter odpowiednie liczby i wykonajmy obliczenia.

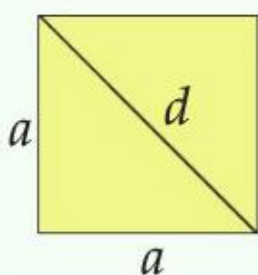
4. Oblicz długość przekątnej prostokąta, którego boki mają podane długości.

a) 5 cm i 12 cm

b) 6 dm i 9 dm

Przykład 4

Oblicz długość przekątnej kwadratu o boku $a = 7$ cm.



$$a^2 + a^2 = d^2$$

$$7^2 + 7^2 = d^2$$

$$49 + 49 = d^2$$

$$d = \sqrt{2 \cdot 49}$$

$$d = 7\sqrt{2}$$

Przekątna kwadratu ma $7\sqrt{2}$ cm.

Przekątna dzieli kwadrat na dwa przystające trójkąty prostokątne równoramienne. Oznaczmy przekątną kwadratu literą d . Obliczmy jej długość, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

Korzystamy z własności pierwiastków.

Jeżeli bok kwadratu ma długość a , to długość przekątnej d tego kwadratu określona jest wzorem:

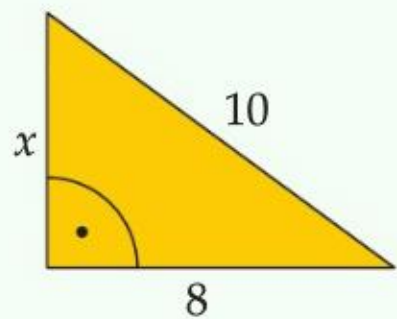
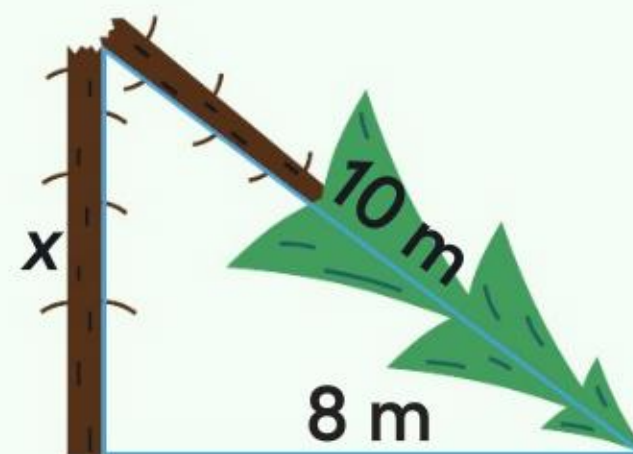
$$d = a\sqrt{2}$$

5. Oblicz długość przekątnej kwadratu, którego bok ma długość:

a) 15 cm, b) $\sqrt{2}$ dm.

Przykład 5

W czasie burzy złamało się drzewo. Jego złamana część ma długość 10 m. Wierzchołek drzewa leży w odległości 8 m od pnia. Oblicz wysokość drzewa przed złamaniem.



Oznaczmy przez x wysokość drzewa – od ziemi do miejsca złamania.

Mamy trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają 8 m i x m, a przeciwprostokątna ma 10 m. Skorzystajmy z twierdzenia Pitagorasa.

$$x^2 + 8^2 = 10^2$$

$$x^2 + 64 = 100$$

$$x^2 = 100 - 64$$

$$x^2 = 36$$

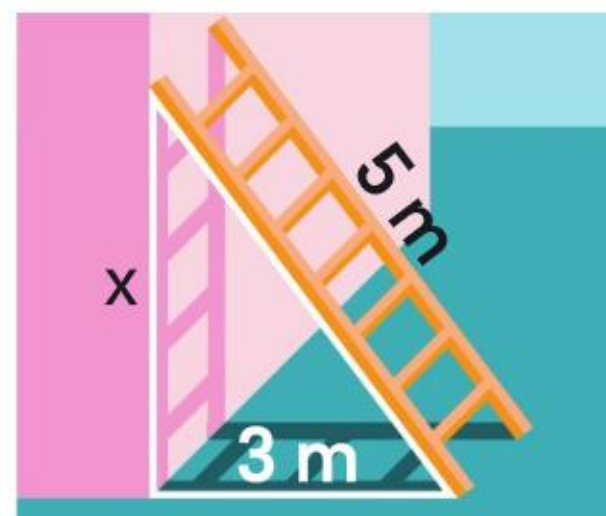
$$x = \sqrt{36}$$

$$x = 6$$

$$6 + 10 = 16$$

Wysokość drzewa przed złamaniem wynosiła 16 m.

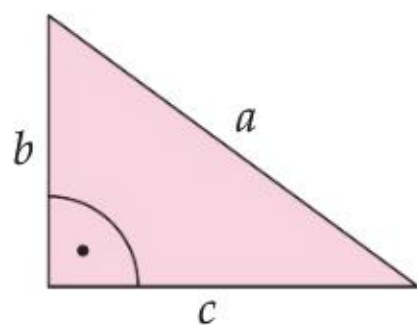
6. Drabinę o długości 5 m przystawiono do ściany, tak jak na rysunku obok. Odległość jednego końca drabiny od ściany jest równa 3 m. Oblicz wysokość, do jakiej sięga drabina.



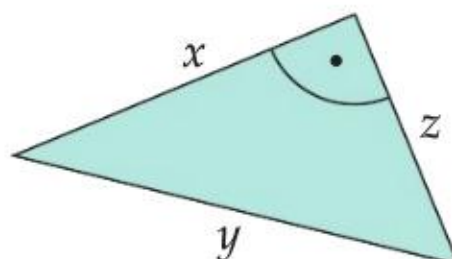
Zadania

- Czy poprawnie zapisano związek zachodzący między długościami boków narysowanych trójkątów? Odpowiedź uzasadnij.

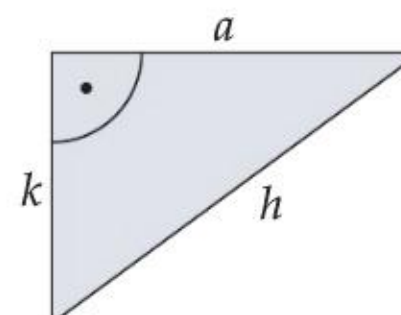
a) $a^2 + b^2 = c^2$



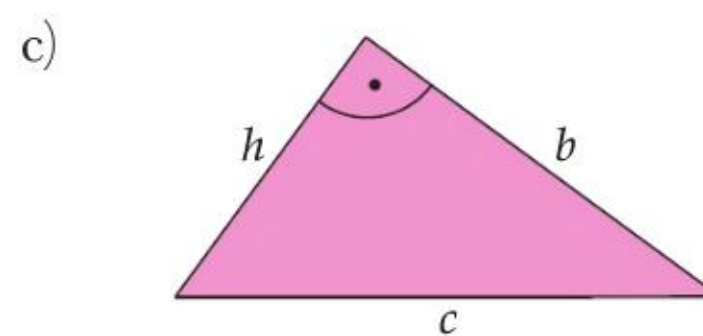
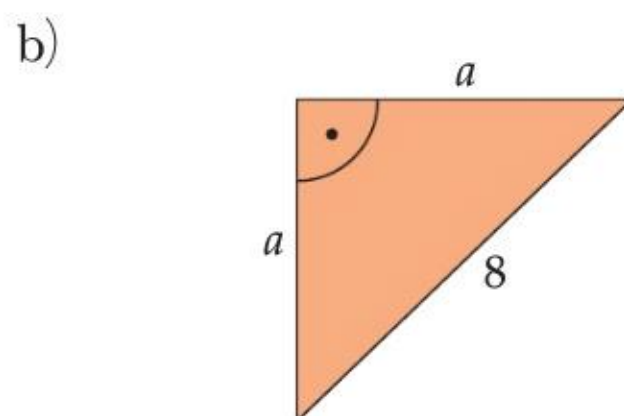
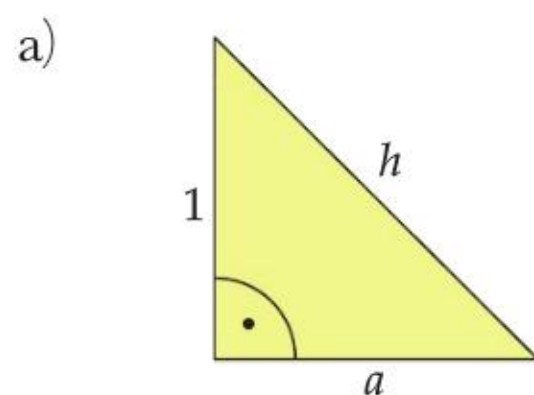
b) $y^2 + x^2 = z^2$



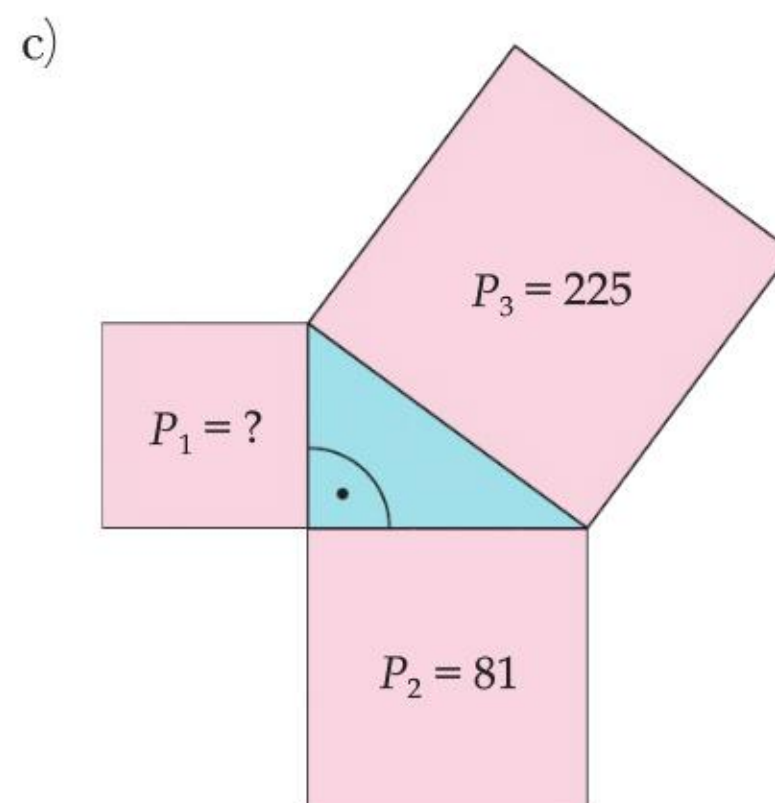
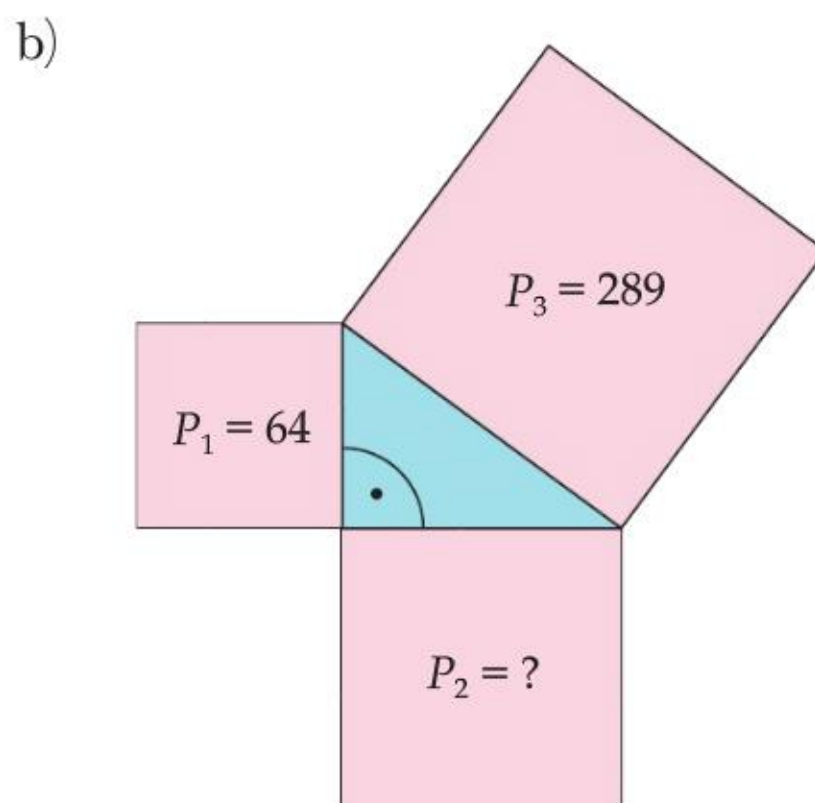
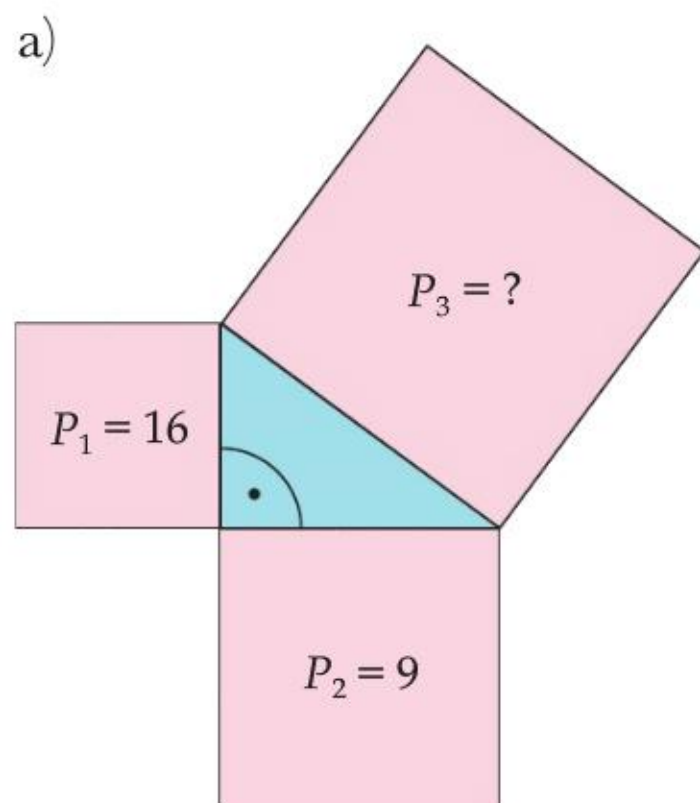
c) $k^2 + a^2 = h^2$



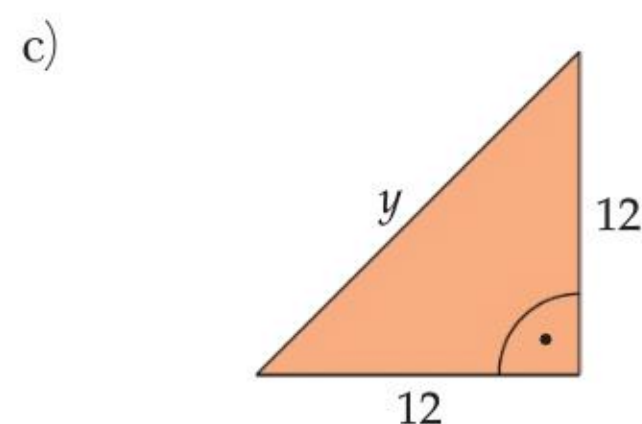
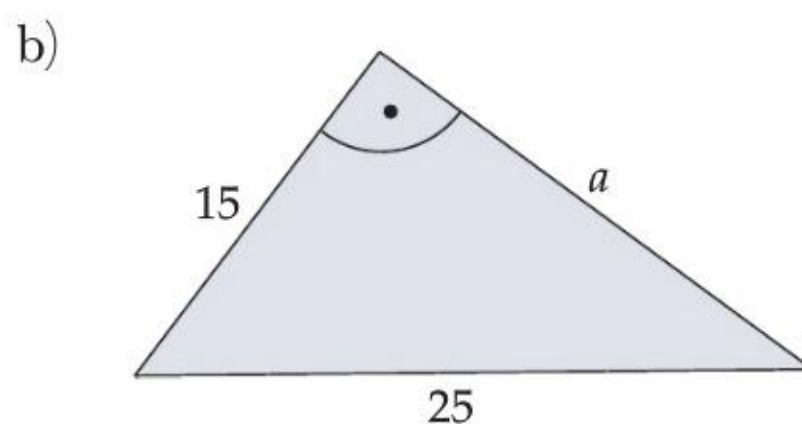
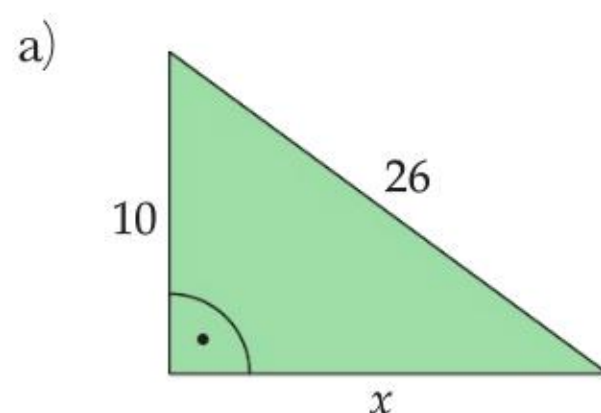
- Dla każdego z trójkątów zapisz zależność zachodzącą między długościami jego boków, wynikającą z twierdzenia Pitagorasa.



- Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, oblicz pole każdego wskazanego kwadratu.



- Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, oblicz długości boków oznaczonych literami.



- Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, jeśli przyprostokątne mają podane długości.

a) 10 dm i 24 dm

b) 9 m i 40 m

c) 16 cm i 63 cm

- Oblicz długość jednej z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeśli druga przyprostokątna ma 30 cm, a przeciwprostokątna ma 34 cm.

- Przeciwprostokątna w trójkącie prostokątnym ma 3,7 m, a jedna z przyprostokątnych jest od niej krótsza o 2 dm. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

- Oblicz długość przekątnej prostokąta, którego jeden z boków ma 6 cm, a drugi jest o 2 cm dłuższy.

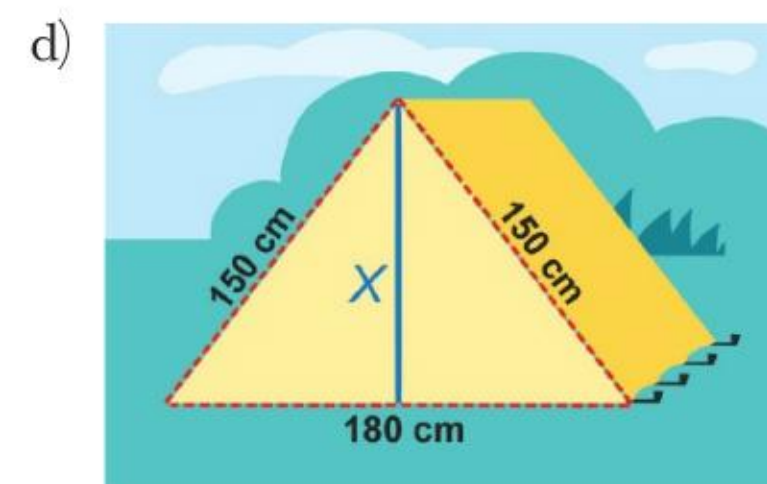
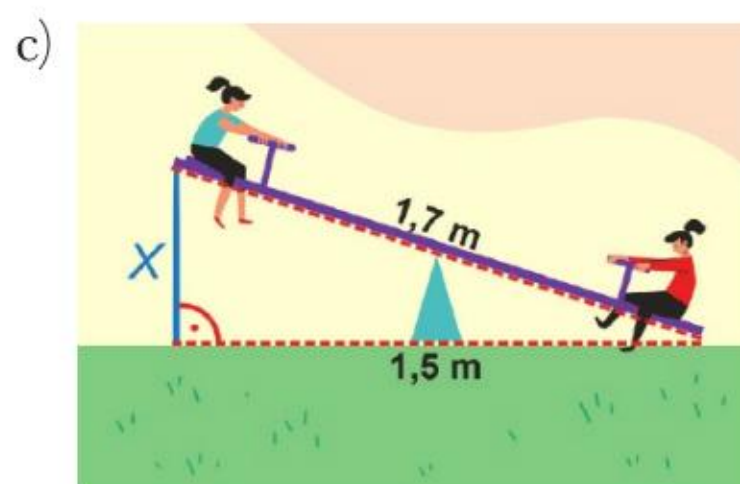
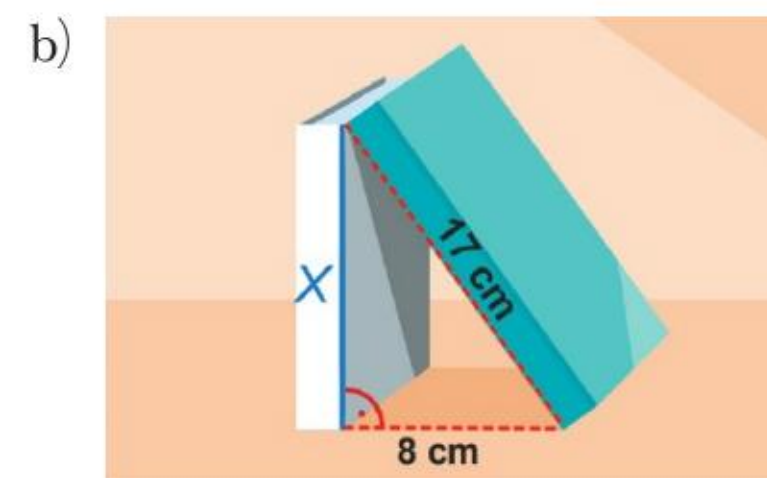
- Oblicz obwód prostokąta, którego przekątna ma 1,3 dm, a jeden z boków jest od niej krótszy o 1 cm.



Ciekawe!

Węzeł to jednostka prędkości równa 1 mili morskiej na godzinę. 1 mila morska jest równa w przybliżeniu 1852 m.

Oblicz długości odcinków oznaczonych na rysunkach kolorem niebieskim.



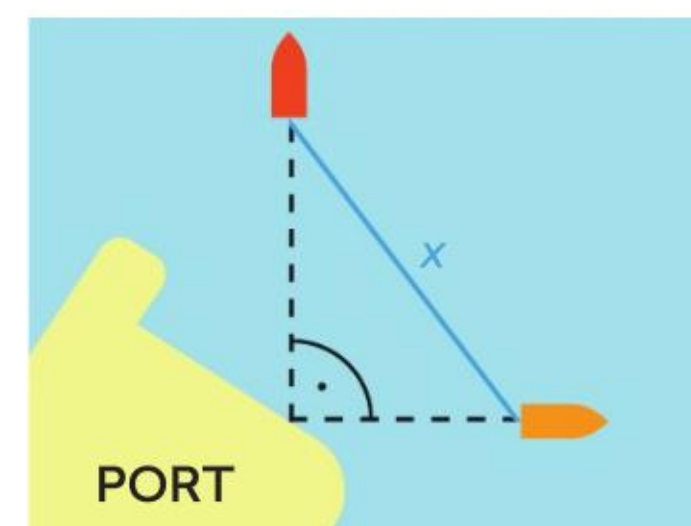
Pewien odcinek ulicy Kasztanowej wyłączono z ruchu z powodu remontu. O ile dłuższą drogę musi pokonać uczeń, aby dotrzeć z domu do szkoły, idąc ulicą Brzozową i Dębową, niż gdyby szedł ulicą Kasztanową? Potrzebne dane odczytaj z rysunku.



Odległość z miejscowości K do położonej na wschód miejscowości L jest równa 12 km. Odległość z miejscowości L do położonej na północ miejscowości M jest równa 16 km. Wykonaj rysunek pomocniczy i oblicz odległość w linii prostej między miejscowościami K i M.



Z portu wypłynęły jednocześnie dwa statki badawcze – jeden na północ, z prędkością 24 węzłów na godzinę, drugi na wschód, z prędkością 18 węzłów na godzinę. Jaka będzie odległość między statkami po dwóch godzinach żeglugi?



Wielkość monitora określamy, podając długość jego przekątnej w calach. Jakie wymiary w centymetrach ma 20-calowy monitor, jeśli stosunek jego boków jest równy 4 : 3? Przyjmij, że 1 cal = 2,54 cm. W obliczeniach możesz użyć kalkulatora. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 cm.

5.6 Trójkąty o kątach 90° , 45° , 45° oraz 90° , 60° , 30°

Podejmij temat



Przyjrzyj się obu ekierkom. Jakie miary mają kąty niebieskiej ekierki, a jakie – czerwonej?

Na dzisiejszą lekcję mieliśmy przynieść ekierki. Spójrz, twoja wygląda inaczej niż moja.



Faktycznie. Zauważ, że różnią się nie tylko kolorami.

W trójkątach o kątach 90° , 45° , 45° oraz w trójkątach o kątach 90° , 60° , 30° wystarczy znać długość jednego boku, aby obliczyć długości pozostałych boków.

Przykład 1

W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma miarę 45° , a przyprostokątna ma długość a . Obliczmy długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Wykonajmy rysunek pomocniczy trójkąta prostokątnego. Zaznaczmy w nim kąt prosty, kąt ostry o mierze 45° , a jedną z przyprostokątnych oznaczmy literą a .

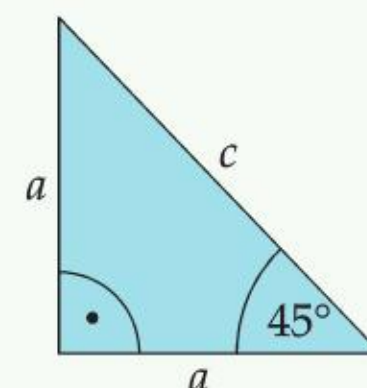
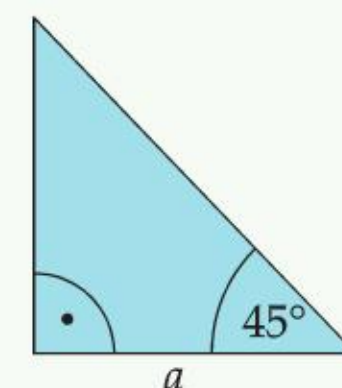
Jeśli trójkąt jest prostokątny i jeden z jego kątów ostrych ma miarę 45° , to drugi kąt ostry też musi mieć miarę 45° . Zatem trójkąt jest równoramienny.

Oznaczmy przeciwprostokątną literą c . Obliczmy jej długość, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

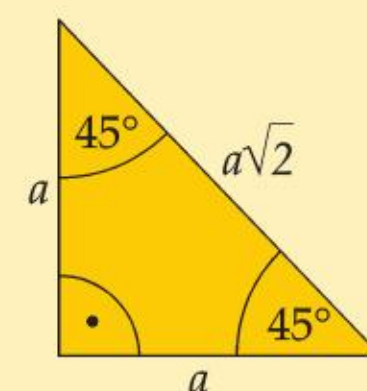
$$c^2 = a^2 + a^2$$

$$c^2 = 2a^2$$

$$c = a\sqrt{2}$$



W trójkącie o kątach 90° , 45° , 45° i przyprostokątnej o długości a przeciwprostokątna jest równa $a\sqrt{2}$.

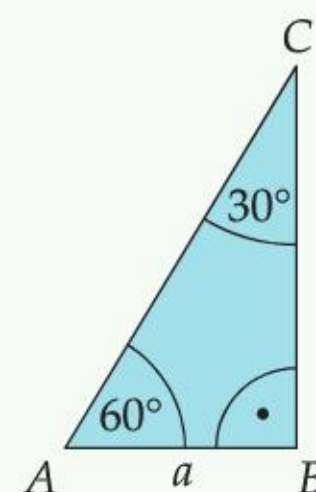


- Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego jeden z kątów ma 45° , a przyprostokątna jest równa:
 - 6 cm,
 - $3\sqrt{2}$ cm.

Przykład 2

W trójkącie prostokątnym ABC kąt CAB ma 60° , a przyprostokątna AB jest równa a . Obliczmy długość przeciwprostokątnej AC i przyprostokątnej CB tego trójkąta.

Trójkąt ABC jest prostokątny i kąt CAB ma miarę 60° , zatem kąt ACB ma miarę 30° .



Narysujmy trójkąt CBD przystający do trójkąta ABC .

Każdy z kątów trójkąta ADC ma miarę 60° , czyli trójkąt ADC jest równoboczny. Bok AC ma długość $2a$.

Obliczmy długość przyprostokątnej CB trójkąta ABC . Oznaczmy odcinek CB literą b . Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, mamy:

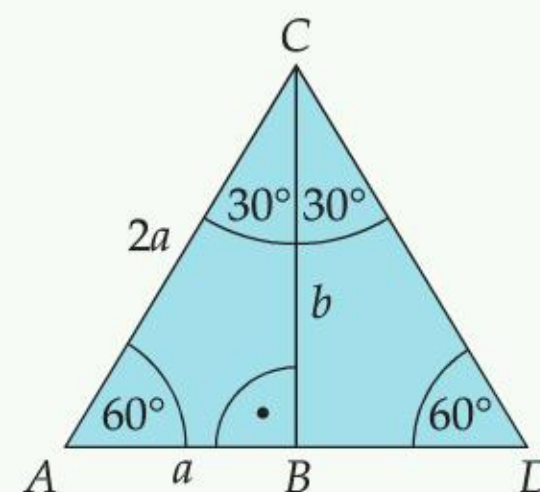
$$b^2 + a^2 = (2a)^2$$

$$b^2 + a^2 = 4a^2$$

$$b^2 = 3a^2$$

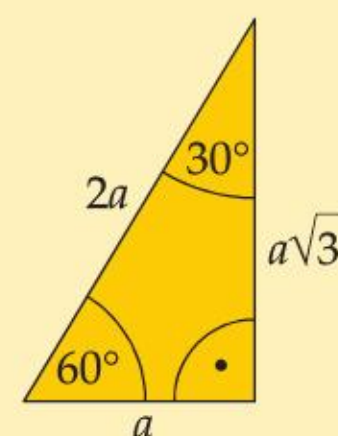
$$b = a\sqrt{3}$$

Zauważmy, że przyprostokątna CB trójkąta prostokątnego ABC jest jednocześnie wysokością trójkąta równobocznego ADC .



W trójkącie o kątach 90° , 60° , 30° , którego krótsza przyprostokątna ma długość a , przeciwprostokątna ma długość $2a$, a dłuższa przyprostokątna ma długość $a\sqrt{3}$.

Wysokość trójkąta równobocznego o boku długości $2a$ ma długość $a\sqrt{3}$.



- Oblicz wysokość trójkąta równobocznego, którego bok ma długość:
 - 8 cm,
 - $5\sqrt{3}$ cm.
- W trójkącie prostokątnym ABC kąt CAB ma 60° , a przyprostokątna BC jest równa b . Oblicz długość przeciwprostokątnej AC i przyprostokątnej AB tego trójkąta.

Zadania

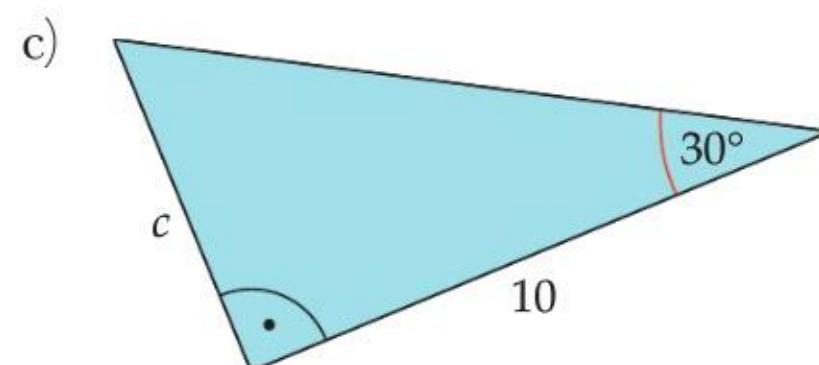
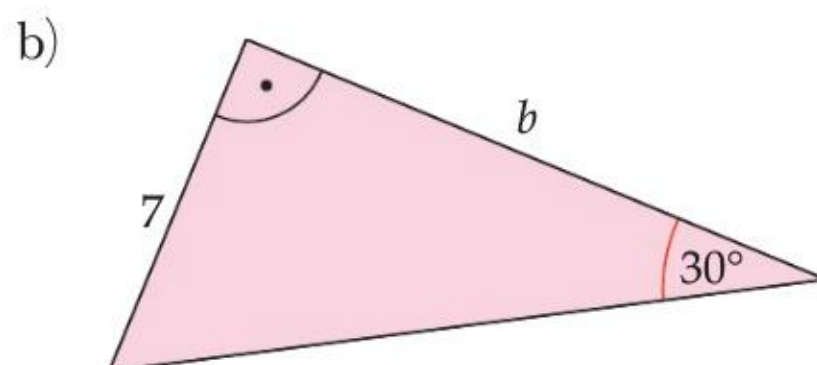
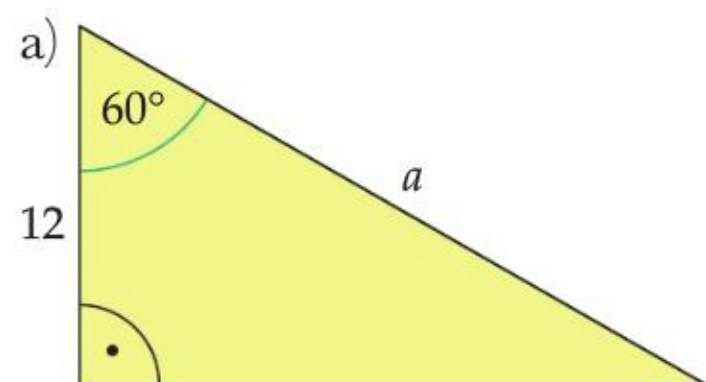
- Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego jeden z kątów ostrych ma miarę 45° , a przyprostokątna ma długość:

a) 5 cm, b) 8 dm, c) $3\sqrt{2}$ dm, d) $\sqrt{10}$ dm.

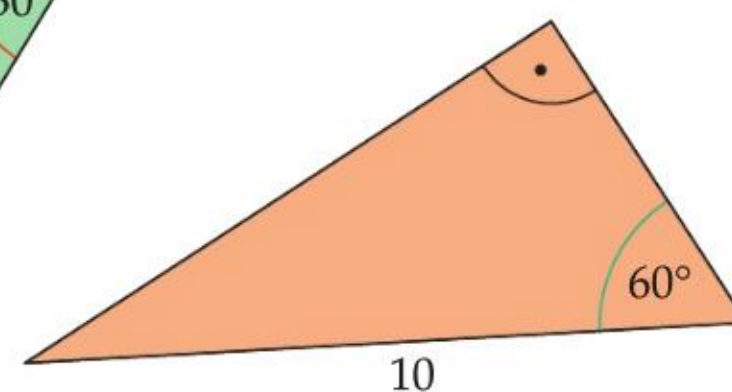
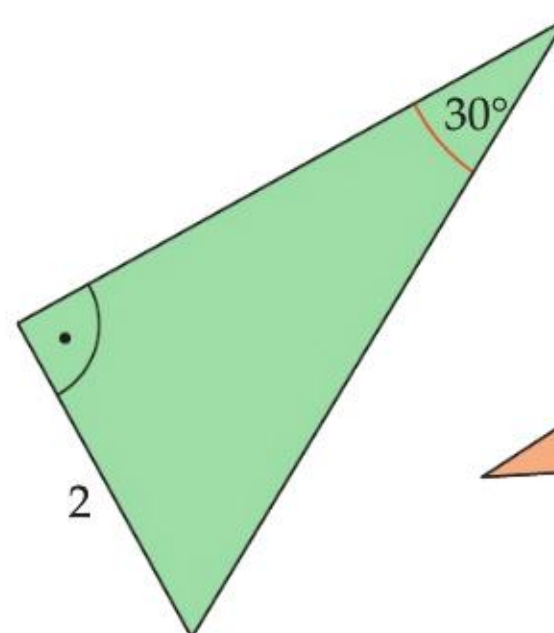
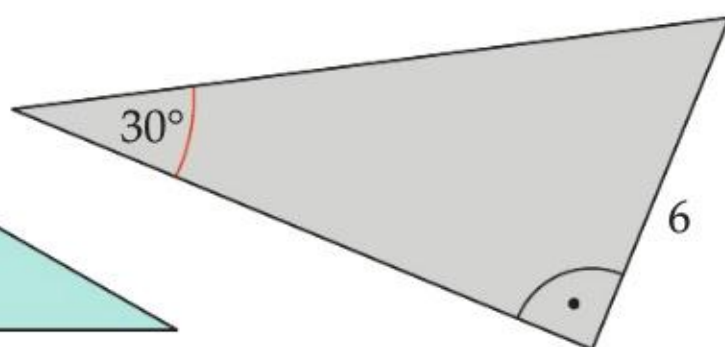
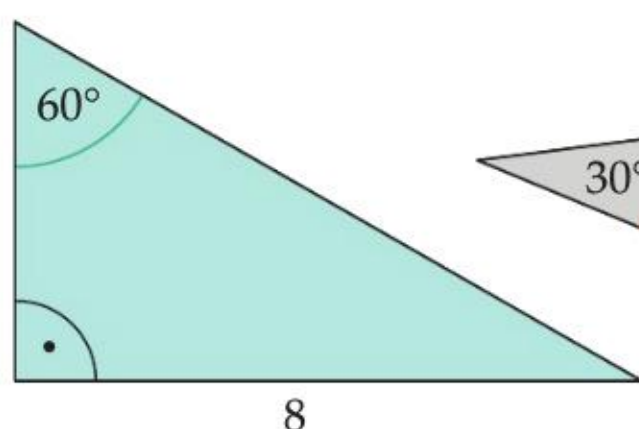
- Oblicz długość boku kwadratu, którego przekątna jest równa:

a) $5\sqrt{2}$ cm, b) 4 cm, c) $\sqrt{6}$ dm, d) $3\sqrt{14}$ dm.

- Oblicz długości boków oznaczonych literami.



- Oblicz obwody narysowanych trójkątów.



- W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ma miarę 60° . Krótsza przyprostokątna ma długość 12 cm. Oblicz obwód tego trójkąta.
- W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ma miarę 60° . Dłuższa przyprostokątna ma długość $8\sqrt{3}$ dm. Oblicz obwód tego trójkąta.
- W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ma miarę 30° , a przeciwprostokątna ma długość 4 cm. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.
- Oblicz wysokość trójkąta równobocznego, którego bok ma długość:
a) 1, b) 12, c) $\sqrt{6}$, d) $10\sqrt{3}$,
e) a , f) $4d$, g) $m\sqrt{3}$, h) $2\sqrt{6}k$.
- Oblicz długość boku trójkąta równobocznego, którego wysokość jest równa:
a) $4\sqrt{3}$, b) 2, c) $\sqrt{15}$, d) 6,
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}e$, f) $2b$, g) $k\sqrt{6}$, h) $10\sqrt{3}s$.

5.7 Dowodzenie w geometrii (cz. 1)

Podejmij temat



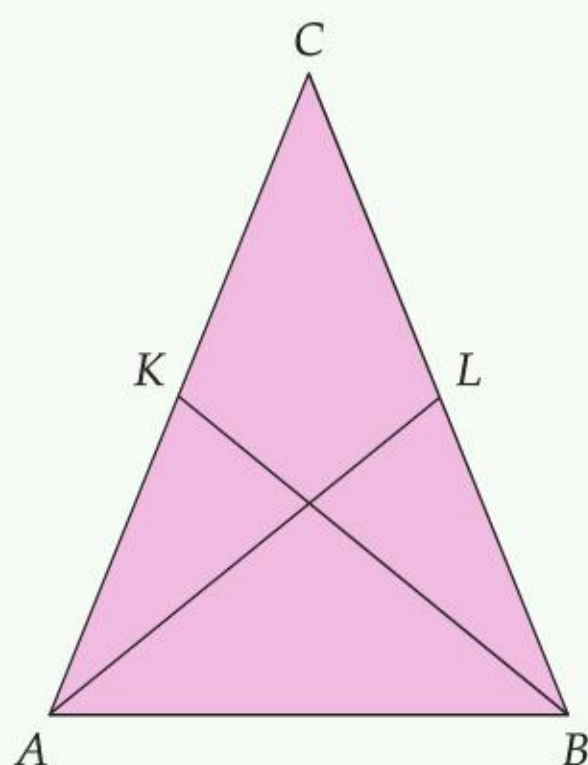
A ty jak sądzisz?



Gdy uzasadniamy pewną własność figur geometrycznych, korzystając z innych znanych już własności, to mówimy, że ją udowadniamy. Często daną własność można udowodnić na kilka sposobów.

Przykład 1

Punkty K i L są odpowiednio środkami ramion AC i BC trójkąta równoramiennego ABC . Udowodnijmy, że $|BK| = |AL|$.



Trójkąt ABC jest równoramienny i $|AC| = |BC|$. Punkty K i L są odpowiednio środkami ramion AC i BC , więc $|AK| = |BL|$ i kąty KAB i ABL mają równe miary. Na mocy cechy przystawiania trójkątów bkb (bok, kąt, bok) trójkąty ABK i ABL są przystające.

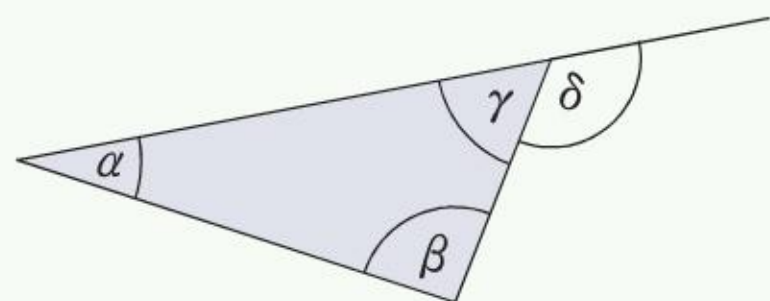
Zatem: $|BK| = |AL|$

1. Odcinki AS i BP są odpowiednio wysokościami trójkąta ostrokątnego równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Udowodnij, że $|AS| = |BP|$.

Przykład 2

Kąty trójkąta oznaczono odpowiednio: α , β i γ . Udowodnijmy, że suma miar kątów α i β jest równa mierze kąta przyległego do kąta γ .

Sporządźmy rysunek.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

$$\gamma + \delta = 180^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - \gamma$$

$$\text{Stąd } \alpha + \beta = \delta.$$

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

Kąty γ i δ są kątami przyległymi.

Udowodniliśmy, że suma miar kątów α i β jest równa mierze kąta przyległego do kąta γ .

2. Udowodnij, że suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu jest równa 180° .

Przykład 3

W równoległoboku $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy od boku AD . Punkt E jest środkiem boku AB . Udowodnimy, że trójkąt DEC jest prostokątny.

Sporządźmy rysunek. Oznaczmy kąt DAB przez α , kąt ABC przez β i kąt DEC przez γ .

$$|AD| = |AE| \text{ bo } |AB| = 2 \cdot |AD| \text{ i } |AB| = 2 \cdot |AE|$$

Trójkąt AED jest równoramienny. Z własności trójkąta równoramiennego wiemy, że kąty AED i ADE mają jednakowe miary równe: $\frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$$|EB| = |BC| \text{ bo } |AB| = 2 \cdot |EB| \text{ i } |AB| = 2 \cdot |BC|$$

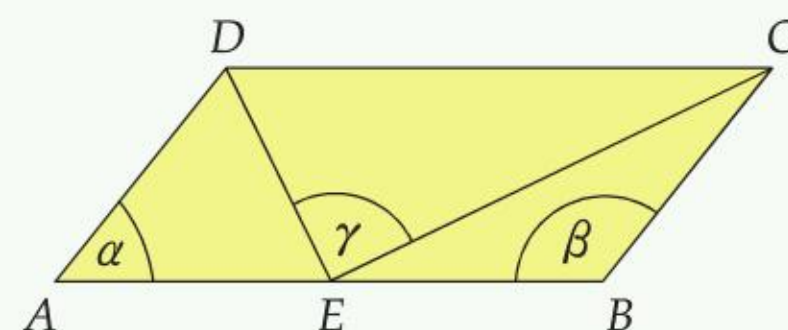
Trójkąt EBC jest równoramienny. Kąty BCE i BEC mają jednakowe miary równe: $\frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$

Suma miar trzech kątów AED , DEC i CEB jest równa 180° .

$$\text{Zatem: } 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \gamma + 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 180^\circ$$

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

W równoległoboku suma miar kątów leżących przy jednym boku jest równa 180° , czyli $\alpha + \beta = 180^\circ$. Zatem kąt DEC ma miarę 90° . Udowodniliśmy, że trójkąt DEC jest prostokątny.

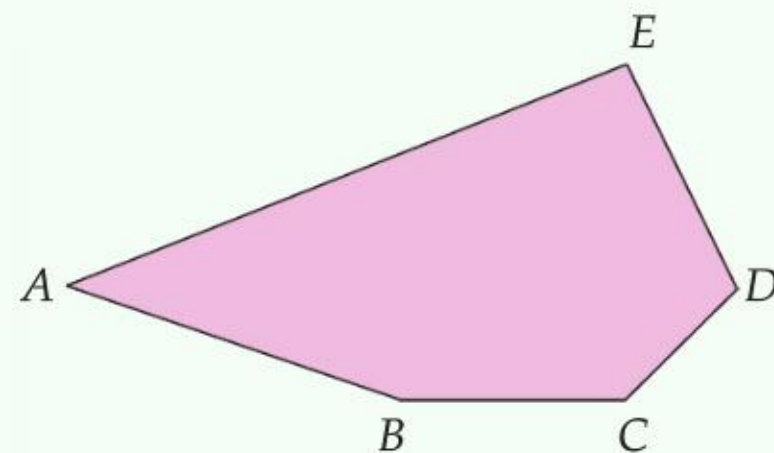


3. Kąt ABC trapezu równoramiennego $ABCD$ ma miarę 60° . Przekątna AC dzieli kąt DAB na dwa kąty o jednakowych miarach. Udowodnij, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Przykład 4

Udowodnijmy, że suma miar kątów wewnętrznych pięciokąta wypukłego jest równa 540° .

Narysujmy pięciokąt $ABCDE$. Suma miar kątów wewnętrznych pięciokąta jest równa sumie miar kątów: ABC , BCD , CDE , DEA i EAB .



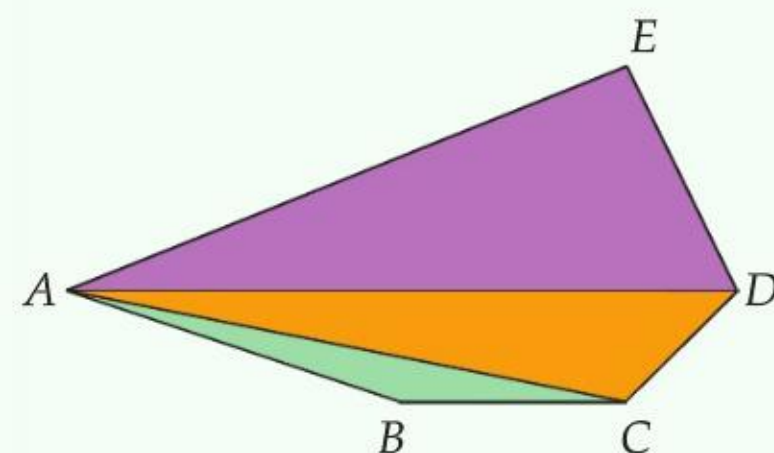
Narysujmy przekątne AC i AD .

Miara kąta EAB jest równa sumie miar kątów EAD , DAC i CAB .

Miara kąta BCD jest równa sumie miar kątów BCA i ACD .

Miara kąta CDE jest równa sumie miar kątów CDA i ADE .

Stąd suma miar kątów pięciokąta jest równa sumie miar kątów: ABC , BCA , ACD , CDA , ADE , DEA , EAD , DAC i CAB .



Przekątne AC i AD podzieliły pięciokąt na trzy trójkąty: ABC , ACD i ADE .

Kąty ABC , BCA i CAB są kątami trójkąta ABC , czyli suma ich miar jest równa 180° .

Kąty ACD , CDA i DAC są kątami trójkąta ACD , czyli suma ich miar jest równa 180° .

Kąty ADE , DEA , EAD są kątami trójkąta ADE , czyli suma ich miar jest równa 180° .

Czyli suma miar kątów pięciokąta jest równa: $180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$

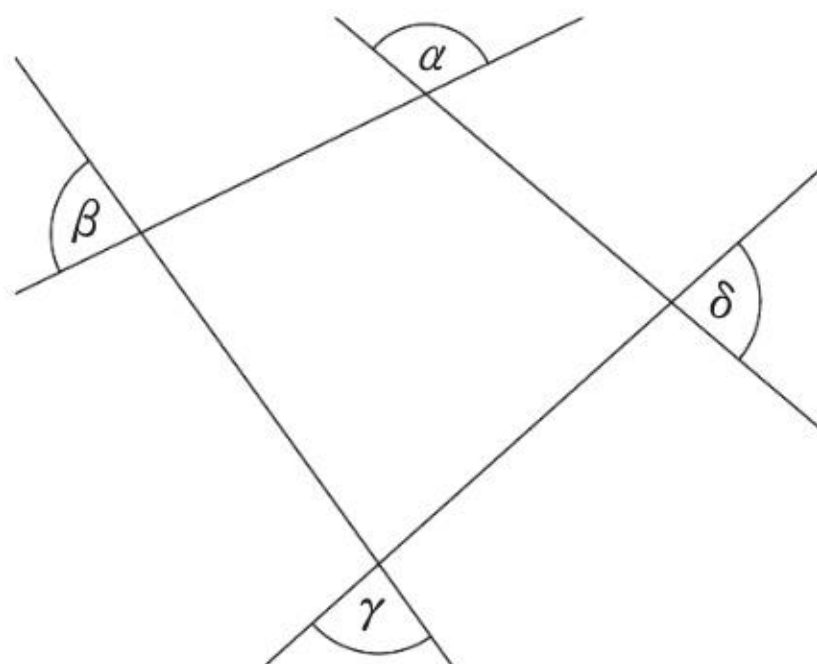
Udowodniliśmy, że suma miar kątów wewnętrznych pięciokąta wypukłego jest równa 540° .

4. Udowodnij, że suma miar kątów wewnętrznych czworokąta wypukłego jest równa 360° .

Zadania

- Punkt S jest punktem przecięcia się wysokości AL i BK trójkąta równoramiennego ostrokątnego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Udowodnij, że $|SK| = |SL|$.
- W trapezie $ABCD$ na ramieniu BC obrano punkt E taki, że $|BE| = |EC|$. Prosta DE przecina prostą AB w punkcie F . Udowodnij, że trójkąty DCE i EBF mają równe obwody.
- W trójkącie równoramiennym ABC środki boków oznaczono odpowiednio przez K , L , M . Udowodnij, że trójkąt KLM jest też równoramienny.

Udowodnij, że suma kątów α , β , γ i δ zaznaczonych na rysunku jest równa 360° .

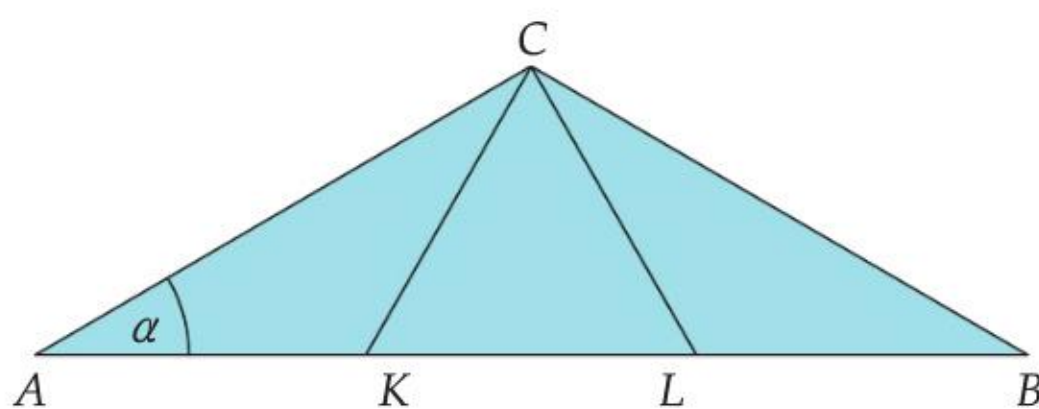


W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka kąta prostego poprowadzono wysokość BD . Udowodnij, że w trójkątach ABC , ABD i BCD odpowiednie kąty są sobie równe.

W trapezie prostokątnym $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, $AD \perp CD$ i $|AD| = |CD|$, przekątna AC tworzy z ramieniem BC kąt prosty. Udowodnij, że $|AB| = 2|CD|$.

Na ramionach AB i AC trójkąta równoramiennego ABC zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne ABD i ACE . Wiadomo, że kąt ABC ma miarę 40° . Udowodnij, że trójkąt AED jest rozwartokątny.

W trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AC| = |CB|$ i kąt CAB ma miarę α , na boku AB obrano takie dwa punkty K i L , że $|AK| = |KC| = |KL| = |LB|$, tak jak na rysunku obok. Udowodnij, że kąt KLC ma miarę 2α .

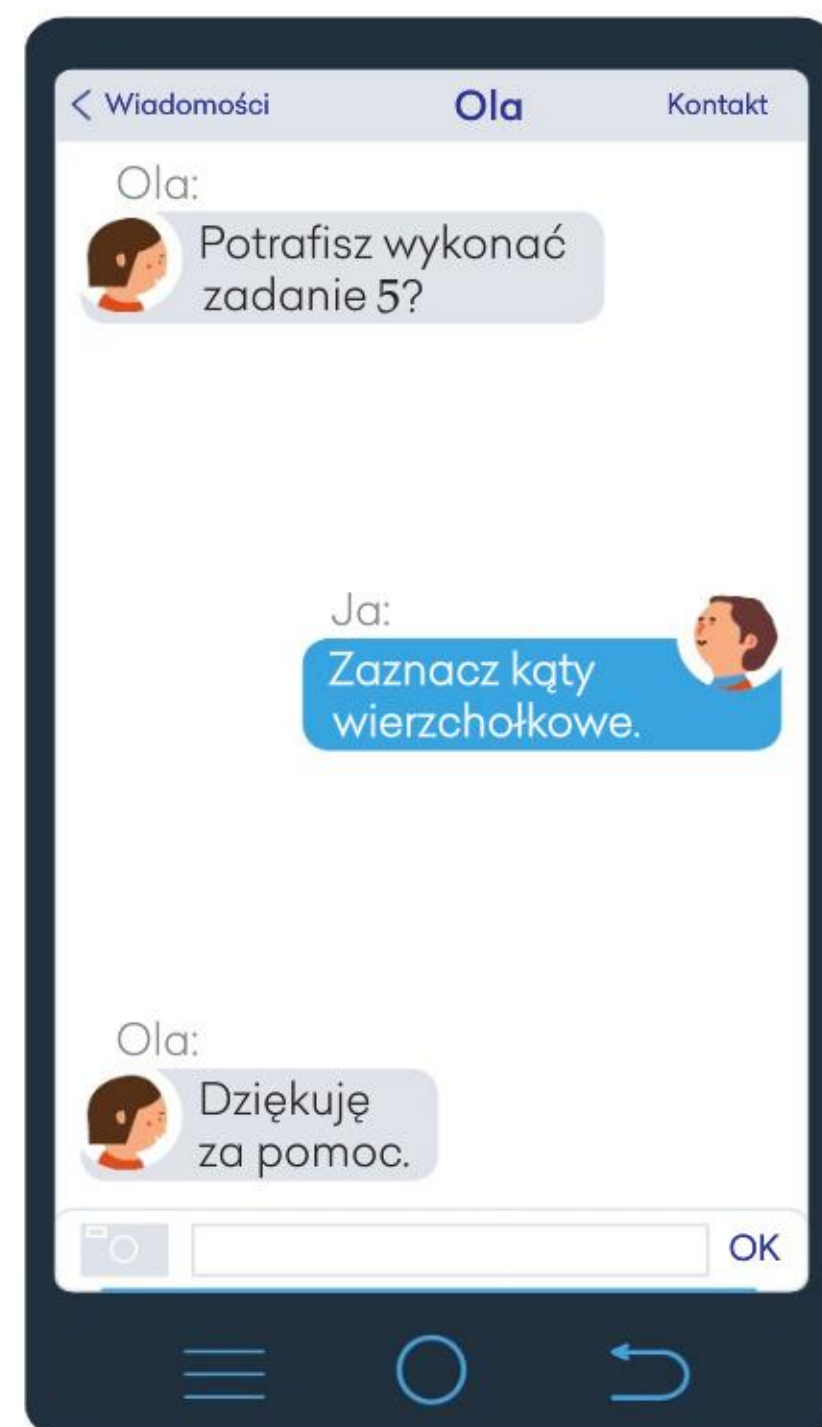


Udowodnij, że czworokąt, którego wierzchołkami są środki boków rombu, jest prostokątem.

Narysuj pięciokąt z jednym kątem wewnętrznym wklęsłym, a potem drugi pięciokąt z dwoma kątami wklęsłymi. Porównaj swoją pracę z pracą kolegi lub koleżanki. Zastanów się, czy może istnieć taki pięciokąt, który ma więcej niż dwa kąty wewnętrzne wklęsłe.

Udowodnij, że suma miar kątów wewnętrznych sześciokąta wypukłego jest równa 720° .

Udowodnij, że suma miar kątów wewnętrznych n -kąta wypukłego jest równa $(n - 2) \cdot 180^\circ$.



Podsumowanie działu 5

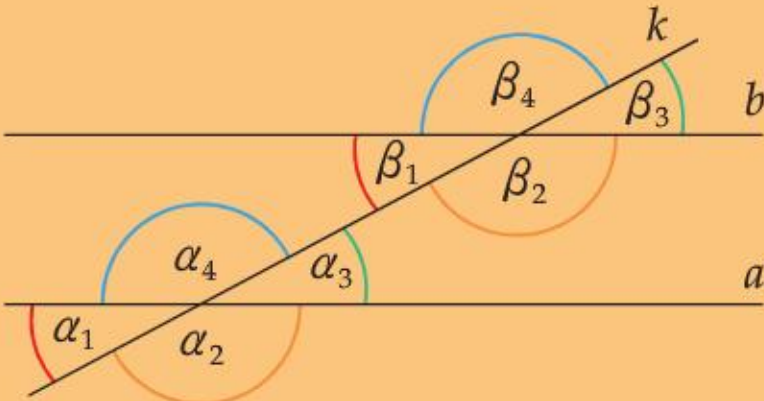
Ważne pojęcia

kąty wypukłe cechy przystawania trójkątów	kąty odpowiadające	kąty naprzemianległe twierdzenie Pitagorasa	figury przystające dowód
--	--------------------	--	-----------------------------

Kąty odpowiadające

Proste a i b są równoległe

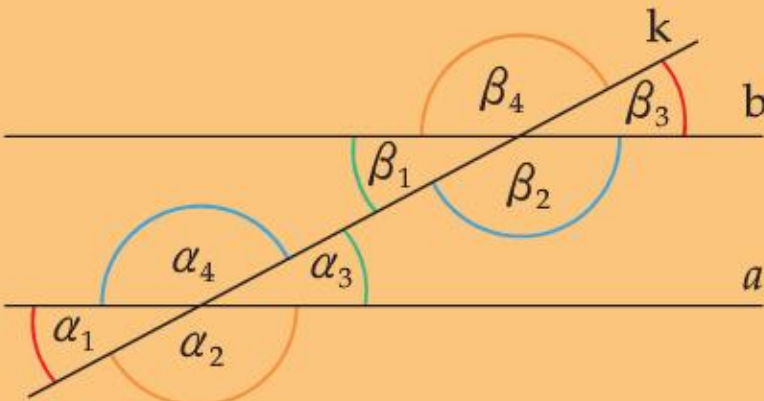
$$\alpha_1 = \beta_1 \quad \alpha_2 = \beta_2$$
$$\alpha_3 = \beta_3 \quad \alpha_4 = \beta_4$$



Kąty naprzemianległe

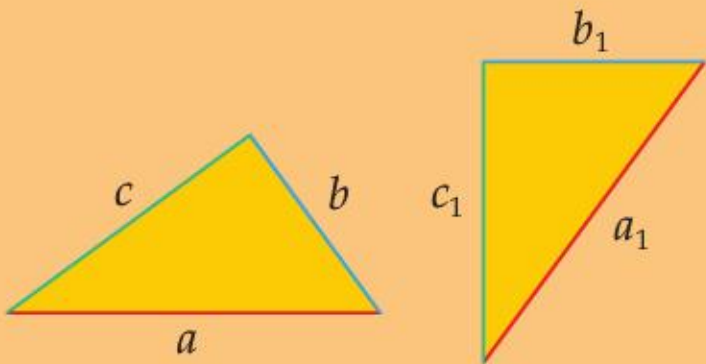
Proste a i b są równoległe

$$\alpha_1 = \beta_3 \quad \alpha_2 = \beta_4$$
$$\alpha_3 = \beta_1 \quad \alpha_4 = \beta_2$$

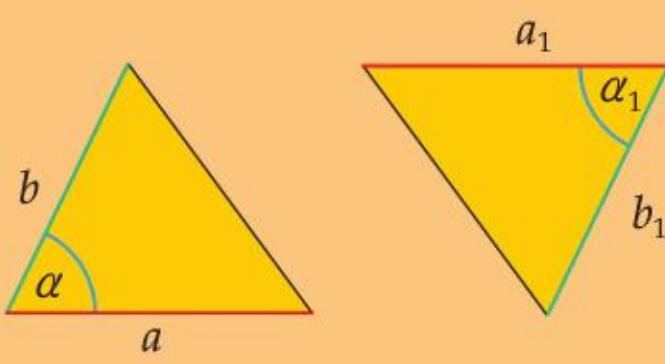


Cechy przystawania trójkątów

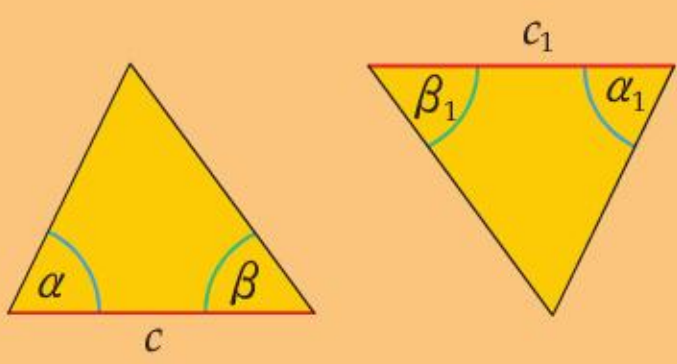
- cecha: bok, bok, bok
- cecha: bok, kąt, bok
- cecha: kąt, bok, kąt



$$a = a_1, b = b_1, c = c_1$$



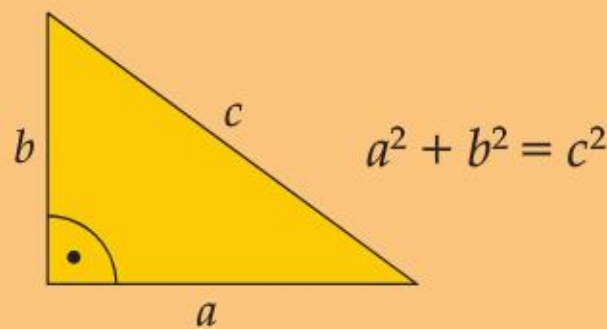
$$a = a_1, \alpha = \alpha_1, b = b_1$$



$$\alpha = \alpha_1, c = c_1, \beta = \beta_1$$

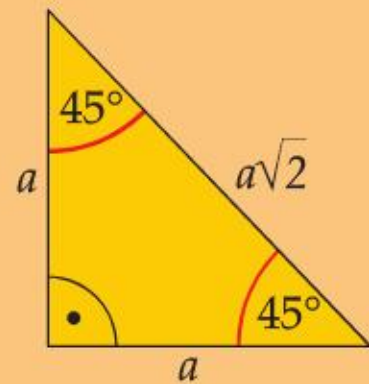
Twierdzenie Pitagorasa

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.



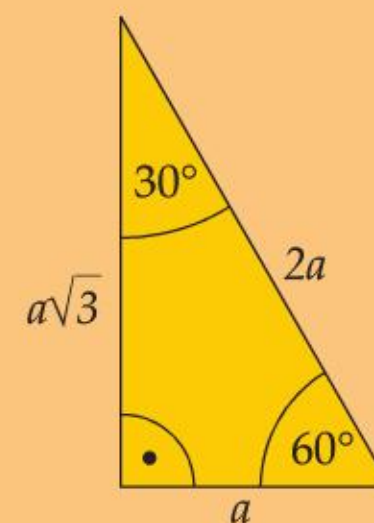
Trójkąt o kątach 90°, 45°, 45°

W trójkącie o kątach 90°, 45°, 45° i przyprostokątnej o długości a przeciwprostokątna ma długość $a\sqrt{2}$.

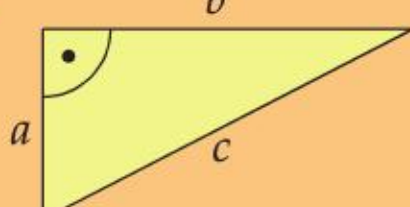
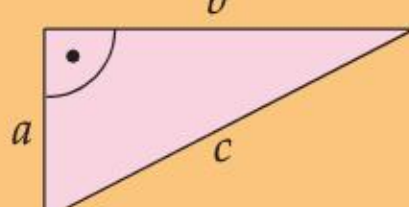
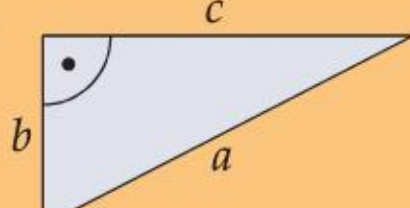
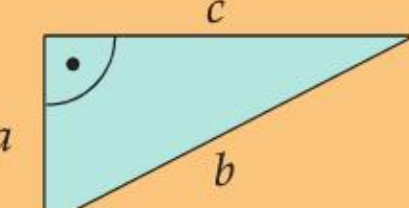


Trójkąt o kątach 90° , 60° , 30°

W trójkącie o kątach 90° , 60° , 30° , którego krótsza przyprostokątna ma długość a , przeciwprostokątna ma długość $2a$, a dłuższa przyprostokątna ma długość $a\sqrt{3}$.



Czy już umiesz?

- 1 Dane są kąty: $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 180^\circ$, $\gamma = 270^\circ$, $\delta = 360^\circ$. Który z tych kątów jest kątem wklęsłym?
- A. α B. β
C. γ D. δ
- 2 Kąty α i β są kątami przyległymi. Miara kąta β jest o 34° mniejsza od miary kąta α . Kąt α ma miarę
- A. 146° B. 112°
C. 107° D. 73°
- 3 Kąty α i β są kątami wierzchołkowymi. Wobec tego
- A. kąty α i β mają jedno ramię wspólne.
B. jeśli jeden z kątów jest kątem wypukłym, to drugi jest kątem wklęsłym.
C. suma miar kątów α i β jest zawsze równa 180° .
D. kąty α i β mają taką samą miarę.
- 4 Które z poniższych odcinków mogą być bokami trójkąta?
- A. $a = 1$, $b = 3$, $c = 6$
B. $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$
C. $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$
D. $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$
- 5 Które z poniższych miar mogą być miarami kątów wewnętrznych trójkąta?
- A. 123° , 32° , 25°
B. 45° , 46° , 88°
C. 91° , 100° , 9°
D. 66° , 17° , 87°
- 6 Dwa kąty wewnętrzne trójkąta ABC mają miary 74° i 32° . Zatem trójkąt ABC jest trójkątem
- A. rozwartokątnym równoramiennym.
B. rozwartokątnym różnobocznym.
C. ostrokątnym równoramiennym.
D. ostrokątnym różnobocznym.
- 7 W którym z przykładów zapisano poprawnie zależność między długościami boków trójkąta?
- A. 
 $a^2 + c^2 = b^2$
- B. 
 $b^2 + c^2 = a^2$
- C. 
 $b^2 + c^2 = a^2$
- D. 
 $a^2 + b^2 = c^2$
- 8 W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 10 cm, a jedna z przyprostokątnych jest o 4 cm krótsza od przeciwprostokątnej. Druga przyprostokątna ma długość
- A. 4 cm B. 5 cm
C. 6 cm D. 8 cm
- 9 Trójkąt prostokątny może mieć boki o długościach:
- A. 4, 5, 8 B. 4, 11, 13
C. 5, 12, 13 D. 6, 7, 10

- 10 Trójkątem prostokątnym jest trójkąt, którego boki mają długości:
 A. 5 cm, 0,5 dm, 50 mm B. 9 cm, 4 dm, 41 cm
 C. 0,5 dm, 7 cm, 41 mm D. 2 cm, 0,1 dm, 26 mm

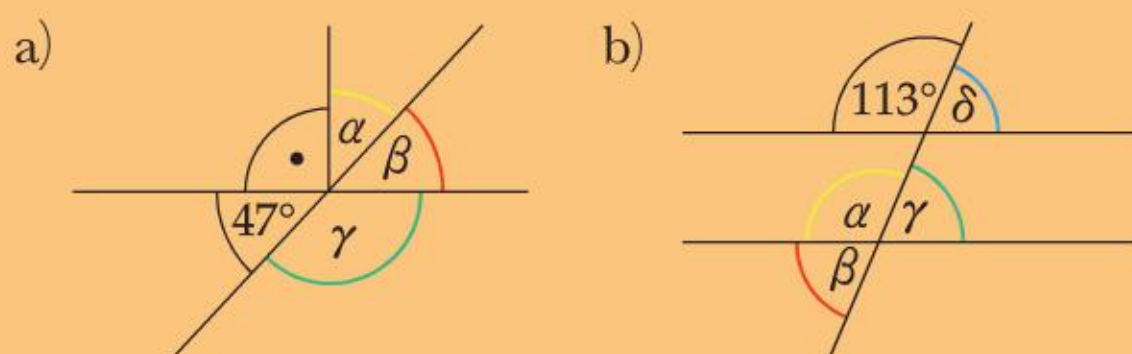
- 11 Od godziny 8:00 wskazówka godzinowa obróciła się o kąt 140° . Którą godzinę wskazuje zegar? Jaka jest miara kąta wypukłego, który tworzą wskazówki zegara o godzinie 19:20?

- 12 Różnica miar kątów przyległych stanowi $\frac{1}{3}$ miary kąta prostego. Wyznacz miary tych kątów.

- 13 Kąty α , β , γ pewnego trójkąta spełniają warunek: $2\alpha + 2\beta = 3\gamma$. Wyznacz miarę kąta γ .

- 14 Kąt α ma miarę 6,2 razy większą niż kąt do niego przyległy. Jaką miarę ma kąt α ?

- 15 Podaj miary zaznaczonych kątów:



- 16 W trójkącie ABC kąt ABC jest o 20° większy od kąta CAB , a kąt BCA jest o 20° większy od kąta ABC . Oblicz miary kątów tego trójkąta.

- 17 W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 27° . Z wierzchołka kąta prostego B tego trójkąta poprowadzono wysokość BD . Wyznacz miary kątów trójkąta ABD .

- 18 Na przeciwprostokątnej BC trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC obrano taki punkt D , że kąt DAB jest równy 50° . Które z poniższych zdań są prawdziwe?

- a) Kąt ABD ma miarę 45° .
 b) Kąt CAD ma miarę 45° .
 c) Trójkąt ADC jest rozwartokątny.
 d) Trójkąt ABD jest równoramienny.
 e) Kąty ADB i ADC są kątami przyległymi.
 f) Kąty DAB i DAC są kątami przyległymi.

- 19 Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

- a) Każdy trójkąt równoboczny jest równoramienny.
 b) Istnieje trójkąt, który ma dwa kąty rozwarte.
 c) W każdym trójkącie przynajmniej dwa kąty są ostre.
 d) Każdy trójkąt równoramienny jest równoboczny.
 e) Istnieje trójkąt prostokątny równoboczny.
 f) W każdym trójkącie prostokątnym suma miar kątów ostrych jest równa 90° .

- 20 Miara jednego kąta w trójkącie ABC jest równa $\frac{1}{3}$ miary drugiego kąta, a miara trzeciego kąta jest o 25% większa od sumy miar tych dwóch kątów. Oblicz miary kątów w tym trójkącie.

- 21 Czy trójkąt równoboczny o obwodzie 0,33 m jest przystający do trójkąta równobocznego, którego bok ma długość 1,1 dm? Odpowiedź uzasadnij.

- 22 W dwóch trójkątach prostokątnych przeciwprostokątna ma 13 cm długości. Jeden z kątów w jednym trójkącie ma miarę 28° , a w drugim trójkącie jeden z kątów ma miarę 62° . Czy te trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.

- 23 Na ramionach AB i AC trójkąta równoramiennego ABC , w którym kąt ABC ma miarę 50° , zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne ABD i ACE . Następnie narysowano trójkąt ADE . Uzasadnij, że trójkąt ADE jest równoramienny. Oblicz miary kątów trójkąta ADE .

- 24 W trójkącie równoramiennym ramię ma 5 cm, a kąt przy podstawie jest równy 80° . Czy trójkąt ten jest przystający do trójkąta równoramiennego o boku 5 cm i kącie przy podstawie równym 20° ? Odpowiedź uzasadnij.

6. Wyrażenia algebraiczne



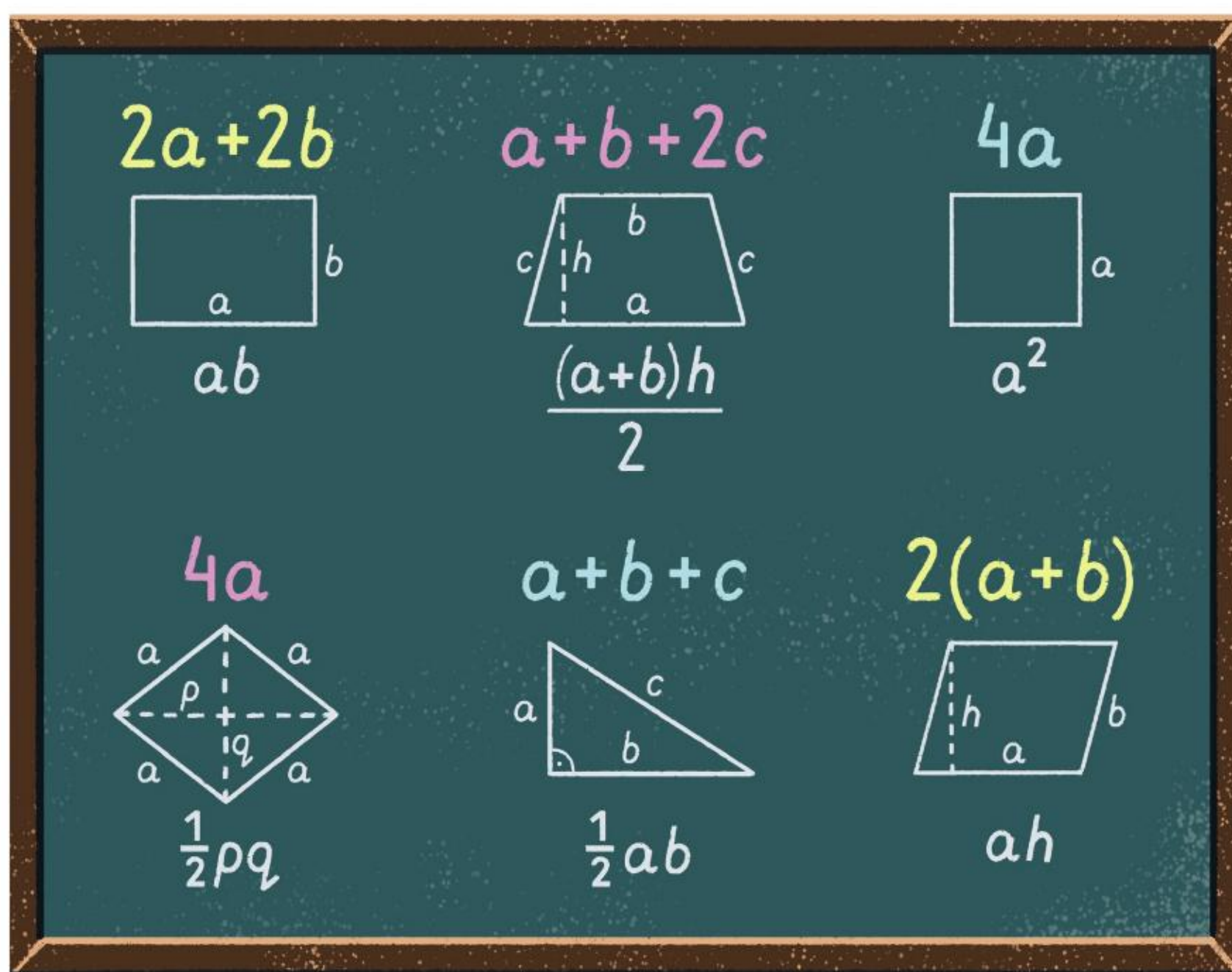
1. Pędzel kosztuje 12 zł, puszka farby 57 zł, a wałek 20 zł.
2. Ile zapłaci mężczyzna za 2 pędzle? A ile złotych zapłaci za zakup x pędzli?
3. Ile złotych zapłaci mężczyzna za zakup y puszek farby?
4. Jak zapisać całkowity koszt zakupu x pędzli, y puszek farby i jednego wałka?

6.1 Zapisywanie i odczytywanie wyrażeń algebraicznych

Podejmij temat



Anita zapisała na tablicy wzory na obwody i pola niektórych figur płaskich. Czy potrafisz odczytać wszystkie wyrażenia?



Wyrażenia, w których obok liczb, znaków działań i nawiasów występują litery, nazywamy **wyrażeniami algebraicznymi**.

Przykładami wyrażeń algebraicznych są:

$$5 \cdot c$$

$$-2 + x$$

$$c : m$$

$$ab^2$$

$$(a - b)(4 - d)$$

$$c^4 - (1 + de)$$

Litery, które występują w wyrażeniu algebraicznym, nazywamy **zmiennymi**.

W poniższych wyrażeniach zmienne zaznaczone są kolorem zielonym.

$$12 + x$$

$$ab - 7$$

$$4d - (w + 3k)$$

$$2k^2 - 8$$

$$m^3 + 11(n^2 - o)$$

$$st^2 : (3r + 7t)$$

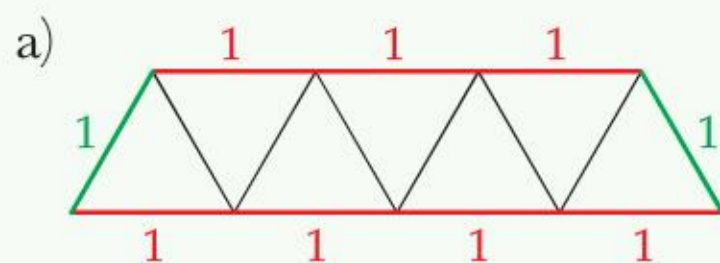
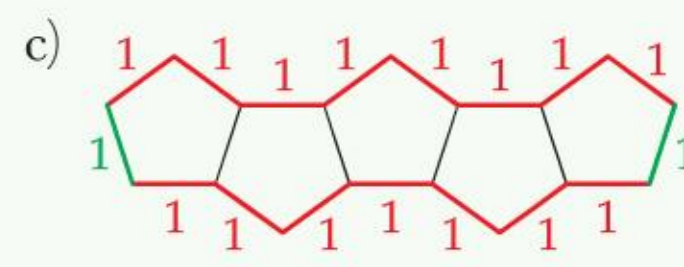
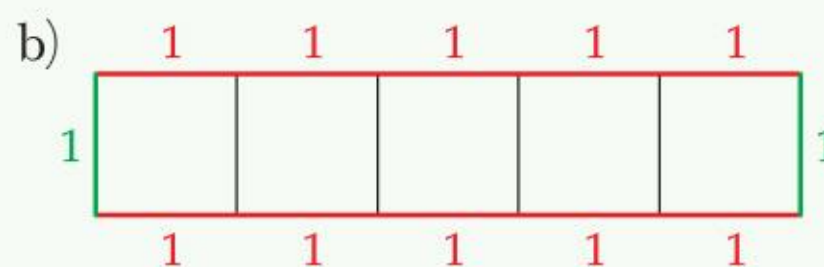
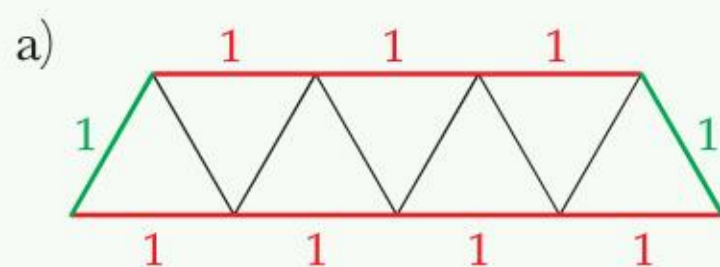
Wyrażenia algebraiczne mają bardzo szerokie zastosowania praktyczne. Za ich pomocą można na przykład zapisywać wzory chemiczne czy fizyczne, tworzyć algorytmy wykorzystywane w informatyce.

Ciekawe!

Literowe oznaczenia dla wielkości nie-wiadomych stosował już starożytny myśliciel Diofantos. Za ujednolicenie i wzbogacenie symboliki w dziedzinie algebry François Viète (czytaj: fransua wjet), żyjący w latach 1540–1603, zyskał określenie ojca współczesnej algebry. Wprowadzony przez niego rachunek literowy zaczęto powszechnie stosować, co spowodowało znaczny rozwój algebry, która stała się jedną z najważniejszych dziedzin matematyki.

Przykład 1

Zapiszmy w postaci wyrażenia algebraicznego obwody podanych figur.



Zauważmy, że figura zbudowana jest z trójkątów równobocznych, każdy o boku długości 1.

Obwód tej figury jest równy $7 \cdot 1 + 2$.

Gdy zbudujemy w ten sam sposób figurę z n trójkątów równobocznych, to jej obwód będzie równy $n \cdot 1 + 2$.

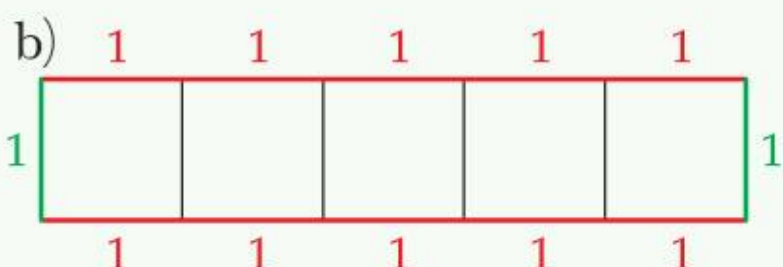


Figura zbudowana jest z kwadratów, każdy o boku długości 1.

Obwód tej figury jest równy $5 \cdot 2 + 2$.

Gdy zbudujemy w ten sam sposób figurę z n kwadratów, to jej obwód będzie równy $n \cdot 2 + 2$.

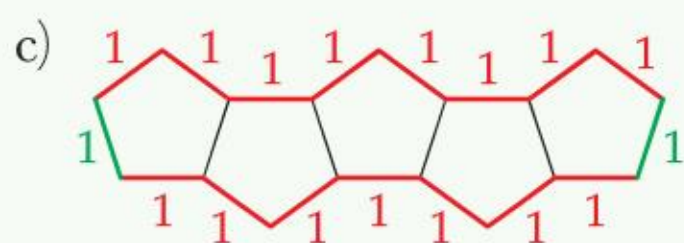


Figura zbudowana jest z pięciokątów, każdy o boku długości 1.

Obwód tej figury jest równy $5 \cdot 3 + 2$.

Gdy zbudujemy w ten sam sposób figurę z n pięciokątów, to jej obwód będzie równy $n \cdot 3 + 2$.

1. Z jakich wielokątów zbudowana jest figura, której obwód opisany jest za pomocą wyrażenia $n \cdot 4 + 2$ (przy założeniu, że wszystkie boki tego wielokąta mają długość 1)?

Przy zapisywaniu wyrażeń algebraicznych należy przestrzegać podanych niżej zasad.

- | | |
|--|---|
| 1. Znak mnożenia (kropkę) zwykle pomijamy, jeżeli nie znajduje się przed liczbą. | $5 \cdot x = 5x$ |
| 2. W iloczynie liczby i litery (lub kilku liter) na pierwszym miejscu zapisujemy liczbę. | $3 \cdot (7 - a) = 3(7 - a)$ |
| | $a \cdot (-6) \cdot b = -6ab$ |
| 3. Znak dzielenia (dwukropek) możemy zastąpić kreską ułamkową. | $(4 + k) : (1 - t) = \frac{4 + k}{1 - t}$ |

Wyrażenia algebraiczne mają swoje nazwy, podobnie jak wyrażenia arytmetyczne.

$$x + y$$

suma

$$7 - a$$

różnica

$$2x$$

iloczyn

$$\frac{m}{s}$$

iloraz

$$x^2$$

kwadrat

$$\sqrt{a}$$

pierwiastek

Nazwę wyrażenia algebraicznego określa to działanie, które należy wykonać jako ostatnie zgodnie z kolejnością wykonywania działań.

Nazywanie tych wyrażeń wydaje się skomplikowanie. Dużo lepiej mi idzie zapisywanie wyrażeń na podstawie nazwy.



Nie jest to takie trudne, wystarczy opisać działania, tylko w odwrotnej kolejności. Jak poćwiczysz, na pewno będzie ci lepiej szło.

Przykład 2

Zapiszmy, jak należy odczytać podane wyrażenia algebraiczne.

- | | | |
|---------------------------|----------------|----------------------|
| a) $5(x - y)$ | b) $3x - y$ | c) $\frac{a - b}{8}$ |
| d) $\frac{1}{2}(x + y)^2$ | e) $a^3 - b^2$ | f) $(a + 3)(b - 2)$ |

- | | |
|---------------------------|---|
| a) $5(x - y)$ | iloczyn liczby 5 i różnicy liczb x i y |
| b) $3x - y$ | różnica potrojonej liczby x i liczby y |
| c) $\frac{a - b}{8}$ | iloraz różnicy liczb a i b i liczby 8 |
| d) $\frac{1}{2}(x + y)^2$ | połowa kwadratu sumy liczb x i y |
| e) $a^3 - b^2$ | różnica sześcianu liczby a i kwadratu liczby b |
| f) $(a + 3)(b - 2)$ | iloczyn sumy liczb a i 3 oraz różnicy liczb b i 2 |

2. Zapisz, jak należy odczytać podane wyrażenia algebraiczne.

- | | | | |
|--------------|-------------------|---------------|---------------------|
| a) $6 + abc$ | b) $(2a - b) : 7$ | c) $x^2 - 2x$ | d) $(x - 1)(x + 1)$ |
|--------------|-------------------|---------------|---------------------|

Przykład 3

Zapiszmy w postaci wyrażenia algebraicznego.

- iloczyn liczby 6 i różnicy liczb x i 2
- suma podwojonej liczby m i potrojonej liczby k
- kwadrat różnicy liczb a i 7
- iloraz sumy liczb a i b i liczby 11

- | | | | |
|---------------|--------------|----------------|-------------------|
| a) $6(x - 2)$ | b) $2m + 3k$ | c) $(a - 7)^2$ | d) $(a + b) : 11$ |
|---------------|--------------|----------------|-------------------|

3. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| a) połowa liczby k | b) liczba x zwiększona o 7 |
| c) potrojona liczba m | d) kwadrat sumy liczb m i k |
| e) kwadrat liczby z | f) trzecia potęga liczby x |

Zadania

● Odczytaj podane wyrażenia algebraiczne.

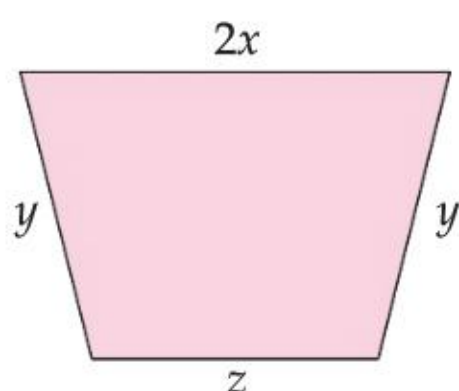
- | | | | |
|-------------------|--------------------------|----------------------------------|----------------|
| a) $m - 0,5$ | b) $a^2 + 2a$ | c) $\frac{1}{3}x + 2$ | d) $(3y)^3$ |
| e) $\sqrt{a + 6}$ | f) $\frac{a + b}{a - b}$ | g) $\left(\frac{1}{2}x\right)^2$ | h) $x^2 + y^2$ |

● Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego:

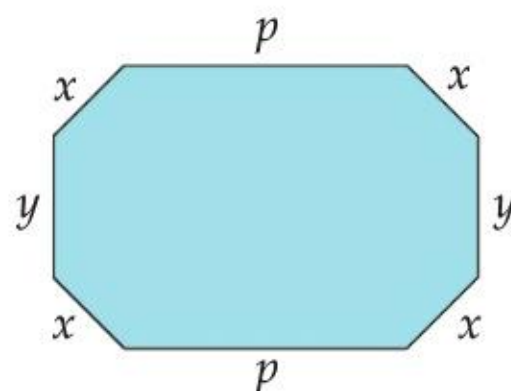
- a) łączną liczbę nóg a kur, b owiec i c kaczek,
- b) łączną liczbę kół s samochodów i m motocykli,
- c) wartość zakupu p lizaków po 1,2 zł za sztukę i t batonów po 89 gr za sztukę,
- d) łączną długość rurociągu złożonego z k rur o długości 2,5 m i p rur o długości 175 cm,
- e) łączną długość drogi przejechanej w ciągu t_1 godzin ze średnią prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i t_2 godzin ze średnią prędkością $65 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

● Zapisz obwód każdej figury w postaci wyrażenia algebraicznego.

a)



b)



● Przeczytaj podane informacje, a następnie zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego odpowiedzi na postawione pytania.

- a) Czas pobytu ucznia w szkole to p godzin. Ile to minut?
- b) Czekolada kosztuje n złotych. Ile to groszy?
- c) Stanisław ma k cm wzrostu. Ile to metrów?
- d) Litr soku w kartonie kosztuje k złotych, a w szklanej butelce jest o 1,50 zł droższy. Jaka jest cena soku w szklanej butelce?
- e) Agata ma x lat, a Jakub jest od niej o 4 lata starszy. Ile lat mają razem Jakub i Agata?
- f) Pani Jadzia kupiła 2 kg jabłek w cenie n zł za kilogram oraz 3 kg ziemniaków w cenie t zł za kilogram. Ile złotych zapłaciła za zakupy?

● Zapisz za pomocą wyrażen algebraicznych:

- a) sumę trzech kolejnych liczb naturalnych, z których n jest liczbą najmniejszą,
- b) sumę dwóch kolejnych liczb parzystych,
- c) sumę trzech kolejnych liczb nieparzystych,
- e) liczbę podzielną przez 3.

★ Liczba n jest liczbą naturalną, różną od 0. Uzasadnij, że wyrażenie:

- a) $3n + 1$ opisuje liczbę, która po podzieleniu przez 3 daje resztę 1,
- b) $10n + 7$ opisuje liczbę, która po podzieleniu przez 10 daje resztę 7.

★ Opisz za pomocą wyrażenia algebraicznego liczbę naturalną, która po podzieleniu przez 6 daje resztę 2.



Warto zapamiętać:

n – liczba naturalna

$2n$ – liczba parzysta

$2n + 1$ – liczba nieparzysta

6.2 Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego

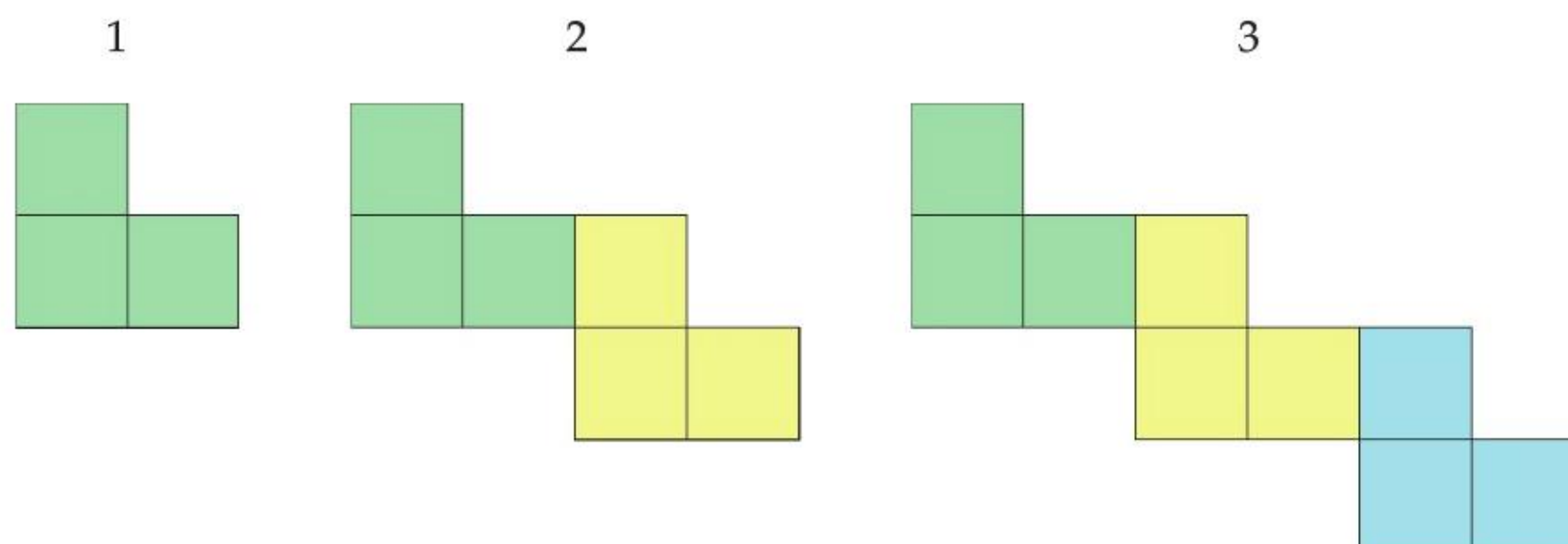
Podejmij temat



Czy potrafisz zapisać wzór, według którego można obliczyć obwód chodnika złożonego z n elementów? Oblicz obwód chodnika ułożonego z 10 elementów.

Czy potrafisz zapisać wzór, za pomocą którego można obliczyć pole powierzchni chodnika zbudowanego z n elementów? Oblicz pole powierzchni chodnika złożonego z 9 takich elementów.

Pan Edward układa chodnik z jednakowej wielkości różnokolorowych elementów, tak jak na rysunku. Każdy element jest złożony z trzech kwadratowych płyt o boku długości 0,3 m.



Podczas podstawiania liczb w miejsce zmiennych pamiętajmy o umieszczaniu ich w nawiasie, zwłaszcza gdy podstawiamy liczbę ujemną.

W poprzednim temacie przypomnieliśmy, w jaki sposób zapisujemy wyrażenia algebraiczne oraz w jaki sposób je nazywamy.

Przypomnijmy teraz, jak obliczamy wartość liczbową wyrażenia algebraicznego dla danej liczby.

Przykład 1

Obliczmy wartość liczbową wyrażenia algebraicznego: $(3a - b) + a^2$ dla $a = -2$ i $b = -\frac{1}{3}$.

Aby obliczyć wartość liczbową danego wyrażenia algebraicznego, w miejsce litery a wstawiamy liczbę -2 , a w miejsce litery b – liczbę $-\frac{1}{3}$:

$$(3a - b) + a^2 = \left(3 \cdot (-2) - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) + (-2)^2 = \left(-6 + \frac{1}{3}\right) + 4 = -5\frac{2}{3} + 4 = -1\frac{2}{3}$$

Wartość liczbową tego wyrażenia algebraicznego dla $a = -2$ i $b = -\frac{1}{3}$ jest równa $-1\frac{2}{3}$.

Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego

dla danych liczb to wynik działania, które otrzymujemy, gdy w miejsce liter wstawimy liczby, a następnie wykonamy obliczenia zgodnie z zasadą kolejności wykonywania działań.

1. Oblicz wartości liczbowe podanych wyrażeń algebraicznych.

a) $x + 1$ dla $x = -1\frac{1}{2}$

b) $y \cdot (7 - x)$ dla $x = -\frac{1}{2}$ i $y = -4$

Więcej na temat

Do danego wyrażenia algebraicznego nie zawsze można podstawić dowolną liczbę w miejsce zmiennej.

Na przykład dla $x = 2$ wyrażenie $\frac{3}{x-2}$ nie ma sensu liczbowego.

Istotnie, jeśli w miejsce zmiennej x podstawimy 2, to mianownik rozpatrywanego ułamka będzie równy 0.

Wiemy jednak, że mianownik ułamka nie może być równy 0. Zatem liczby 2 nie możemy podstawić w miejsce x .

2. Wskaż wyrażenie, które dla $a = -4$ nie ma sensu liczbowego.

- A. $4 + a$ B. $4(a + 4)$ C. $4 : (a + 4)$ D. $(a + 4) : 4$

3. Jakie liczby trzeba wstawić w miejsce x w wyrażeniu $\frac{1}{x}$, aby otrzymać wartości:

- a) większe od 1, b) dodatnie i mniejsze od 1,
c) mniejsze od -1, d) ujemne i większe od -1?

Przykład 2

Szwajcarski matematyk, Leonard Euler (czyt. ojler), podał wzór na wyznaczanie niektórych liczb pierwszych: $n^2 + n + 41$, gdzie n jest liczbą naturalną, mniejszą od 40. Wyznaczmy, korzystając z tego wzoru, kilka liczb pierwszych.

$n = 0$	$0^2 + 0 + 41 = 41$
$n = 1$	$1^2 + 1 + 41 = 43$
$n = 2$	$2^2 + 2 + 41 = 47$
...	
$n = 38$	$38^2 + 38 + 41 = 1523$
$n = 39$	$39^2 + 39 + 41 = 1601$

Znalezione liczby pierwsze to: 41, 43, 47, ..., 1523, 1601.

4. Korzystając ze wzoru Eulera, podanego w przykładzie 2, znajdź trzy liczby pierwsze większe od 100.

Zadania

● Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego $100x + 10y - z$ dla:

- a) $x = 3, y = 2, z = 5$,
b) $x = 0,7, y = -0,6, z = -4$,
c) $x = -\frac{1}{4}, y = -1\frac{3}{4}, z = \frac{1}{8}$.

Ciekawe!

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c wyraża się wzorem:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie p oznacza połowę obwodu trójkąta, tj. $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Jest to wzór Herona.

Heron z Aleksandrii (I w. n.e.) to grecki matematyk, fizyk, wynalazca i konstruktor. W swoich dziełach przedstawił znane wówczas wzory matematyczne dotyczące pól i obwodów figur.

Czy potrafisz obliczyć pole trójkąta o bokach długości: 3 cm, 4 cm, 5 cm, korzystając ze wzoru Herona?

● Oblicz wartość wyrażenia algebraicznego.

- a) $3a^2 - 11a - 6$ dla $a = -2$
- b) $x - x^2$ dla $x = \frac{2}{3}$
- c) $\sqrt{a^2 + 11}$ dla $a = -5$
- d) $(1 + x) : x$ dla $x = 0,75$
- e) $\frac{1}{2}ab$ dla $a = 2,4$ i $b = -5$
- f) $(x - y)(x + y)$ dla $x = -1$ i $y = 5$
- g) $\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^2$ dla $x = -\frac{1}{2}$ i $y = 3\frac{1}{3}$
- h) $\frac{2x - y}{x^2 + 1}$ dla $x = -\frac{1}{2}$ i $y = -1$

● Michał kupił 1,5 kg mandarynek po x zł za 1 kg oraz 75 dag winogron po y zł za 1 kg.

- a) Podaj wzór, za pomocą którego można obliczyć łączny koszt zakupów Michała.
- b) Podaj wzór, za pomocą którego można obliczyć, ile złotych reszty otrzymał chłopiec, płacąc banknotem dwudziestozłotowym.
- c) Oblicz wartość zakupów i resztę, przyjmując: $x = 4,80$ zł i $y = 6,60$ zł.

● Na zajęcia szkolnego klubu sportowego uczęszcza d dziewcząt i o 5 chłopców więcej niż dziewcząt. Pewnego dnia na zajęcia nie przyszło 3 chłopców i 2 dziewczyny. Opisz za pomocą wyrażenia algebraicznego liczbę:

- a) dziewcząt obecnych tego dnia na zajęciach,
- b) chłopców obecnych tego dnia na zajęciach.

● W medycynie do obliczania pola powierzchni skóry człowieka stosuje się wzór $A = 0,62 \cdot h^2$, gdzie h oznacza wysokość człowieka w metrach. Oblicz pole powierzchni swojej skóry.

★ Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego liczbę dwucyfrową, której cyfra dziesiątek to x , a cyfra jedności to y . Określ, jakie wartości może przyjmować zmienna x , a jakie zmienna y .

● BMI (ang. Body Mass Index) jest wskaźnikiem masy ciała, który pozwala ocenić, czy człowiek ma prawidłową masę ciała. Wskaźnik BMI liczymy według wzoru: $BMI = \frac{m}{w^2}$, gdzie m – masa ciała w kilogramach, w – wzrost w metrach. Korzystając z informacji w tabeli, oceń, czy podane osoby mają: niedowagę, nadwagę, otyłość, czy ich masa ciała jest w normie.

BMI	Masa ciała
18,4 lub mniej	niedowaga
18,5 – 24,9	norma
25 – 29,9	nadwaga
30 – 34,9	I st. otyłości
35 – 39,9	II st. otyłości
40 lub więcej	III st. otyłości

- a) Stefania – masa ciała 95 kg, wzrost 162 cm
- b) Natalia – masa ciała 53 kg, wzrost 168 cm
- c) Marek – masa ciała 89 kg, wzrost 1,94 m
- d) Anna – masa ciała 45 kg, wzrost 170 cm

● Wyznacz wszystkie liczby trzycyfrowe takie, że:

- a) suma cyfr każdej z tych liczb jest równa 7,
- ★ cyfra dziesiątek jest dwa razy większa od cyfry jedności.

★ Gęstość ciała o masie m i objętości V można wyznaczyć za pomocą wzoru: $\rho = \frac{m}{V}$, gdzie ρ – gęstość, m – masa, V – objętość.

Korzystając z tego wzoru, oblicz wartość liczbową gęstości ciała:

- a) dla $m = 75$ kg i $V = 15$ m³
- b) dla $m = 1000$ g i $V = 25$ cm³
- c) dla $m = 2400$ dag i $V = 20$ dm³
- d) dla $m = 0,5$ t i $V = 1$ dm³

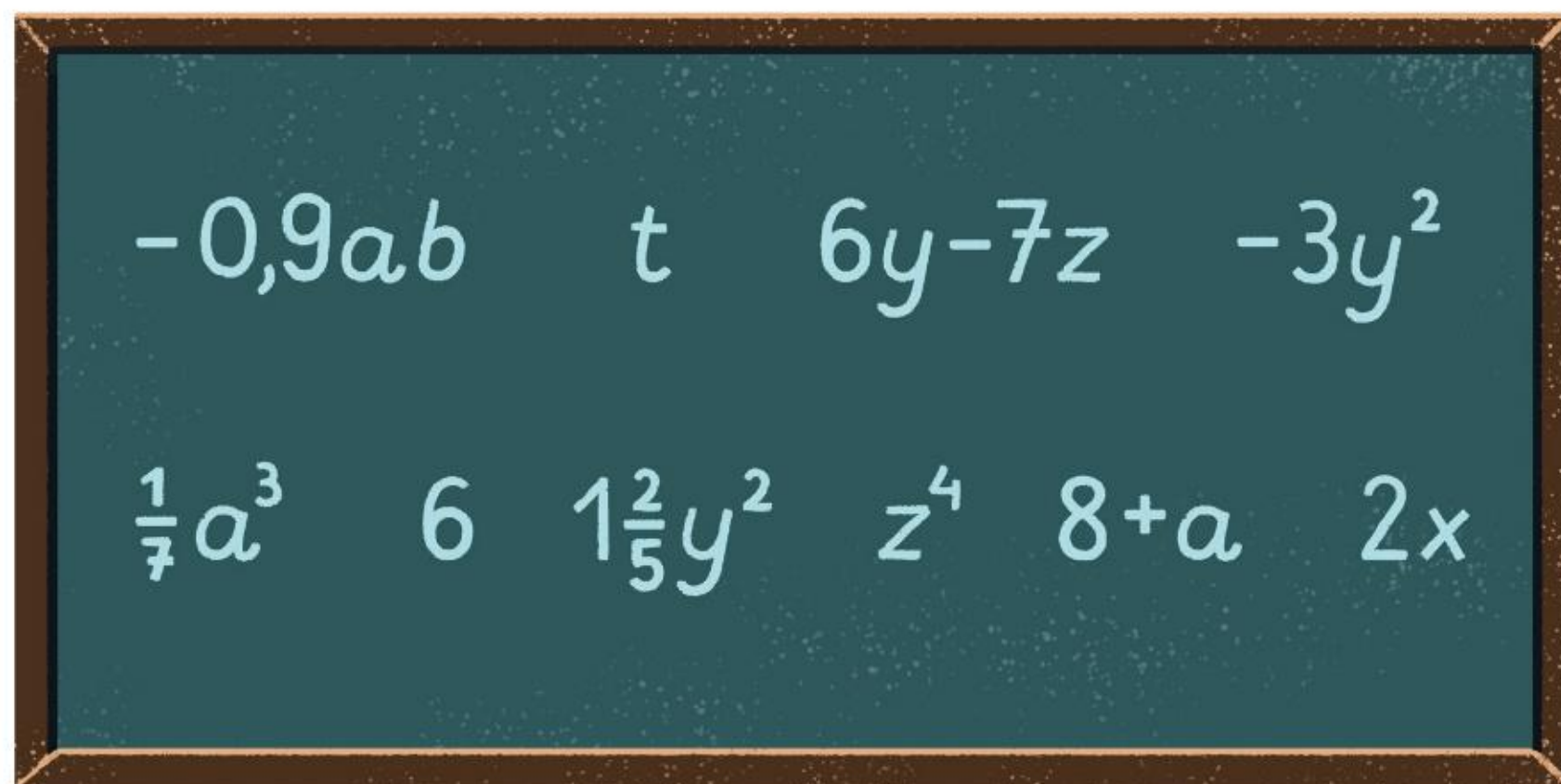
Podaj wyniki w $\frac{\text{dag}}{\text{m}^3}$.

6.3 Jednomian i suma algebraiczna

Podejmij temat



Na tablicy zapisano kilka wyrażeń algebraicznych. Czym się różnią te zapisy?



Przeanalizujmy wyrażenia z *Podejmij temat*. Zauważmy, że większość z nich to wyrażenia, w których występuje tylko liczba, litera lub iloczyn liczb i liter:

$-0,9ab$, t , $-3y^2$, $\frac{1}{7}a^3$, 6 , $1\frac{2}{5}y^2$, z^4 , $2x$.

Takie wyrażenia nazywamy **jednomianami**.

Wyrażenia: $8 + a$ (suma), $6y - 7z$ (różnica) **nie są jednomianami**.

Jednomianem nazywamy wyrażenie, które jest liczbą, literą (zmienną) lub iloczynem liczb i liter (zmiennych).

Jednomiany najczęściej zapisujemy w postaci **uporządkowanej**. Pierwszym czynnikiem jednomianu jest liczba, a następnymi czynnikami są zmienne, występujące w porządku alfabetycznym, np.: $-2ab$, $\frac{1}{4}xy^3$.

Przykład 1

Zapiszmy jednomian w postaci uporządkowanej.

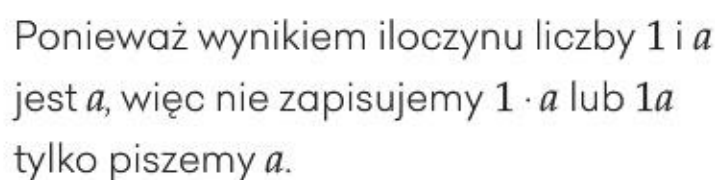
a) $-1,5abc^2 \cdot (-3)b \cdot 2a$

b) *matematyka*

a) $-1,5 \cdot abc^2 \cdot (-3)b \cdot 2 \cdot a =$
 $= -1,5 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c^2 = 9a^2b^2c^2$

Mnożymy wszystkie liczby, pamiętając o znakach. Następnie porządkujemy zmienne, zapisując je w kolejności alfabetycznej, a potem w postaci potęgi.

b) $matematyka = a \cdot a \cdot a \cdot e \cdot k \cdot m \cdot m \cdot t \cdot t \cdot y = a^3ekm^2t^2y$



- Liczbę występującą w uporządkowanym jednomianie nazywamy **współczynnikiem liczbowym jednomianu**.

3. Uporządkuj każdy jednomian i określ jego współczynnik liczbowy.

a) $5ka \cdot (-2a)$ b) $z \cdot 5m \cdot 3m \cdot 5^2$

c) $-0,4 \cdot 5 \cdot 7d$ d) $-m \cdot (-m) \cdot 3 \cdot (-6m)$

Porównajmy jednomiany.

- Zauważmy, że jednomiany różnią się tylko współczynnikiem liczbowym. O takich jednomianach mówimy, że są **podobne**.

- Te jednomiany nie są podobne.**

4. Wśród podanych jednomianów wskaż jednomiany podobne.

$$-2\frac{1}{3}ab$$

Przykład 3

Zapiszmy wyrażenie algebraiczne, które jest sumą jednomianów: $5x$, $7y$ i $-3c$.

$$5x + 7y + (-3c) = 5x + 7y - 3c$$

Zauważmy, że sumę jednomianów można zapisać, opuszczając nawiasy.

Wyrażenie, które powstaje przez dodawanie jednomianów, nazywamy **sumą algebraiczną**.
Jednomiany, które dodajemy, nazywamy **wyrazami sumy**.



Sumę algebraiczną nazywamy również **wielomianem**.

Suma algebraiczna	$-6 + 10ab$	$a + n^3 - 6cd^2$	$-abc - 2abc$
Wyrazy sumy	$-6, 10ab$	$a, n^3, -6cd^2$	$-abc, -2abc$

Wyrazy sumy algebraicznej, które różnią się tylko współczynnikami liczbowymi, nazywamy **wyrazami podobnymi**.
Wyrazy podobne możemy dodawać lub odejmować.
Przekształcanie sumy algebraicznej, które polega na zastąpieniu kilku wyrazów podobnych jednym wyrazem, nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

Przykład 4

Zredukujmy wyrazy podobne w każdej podanej sumie algebraicznej.

a) $-2,3m + 4p - 0,7m - 1\frac{1}{2}p$

b) $-2y + 5a + 2y - 3ab - 4a$

a) $-2,3m + 4p - 0,7m - 1\frac{1}{2}p =$

$= -2,3m - 0,7m + 4p - 1\frac{1}{2}p =$

$= (-2,3 - 0,7)m + (4 - 1\frac{1}{2})p =$

$= -3m + 2,5p$

W celu ułatwienia redukcji podkreślamy wyrazy podobne.
Wyrazy podobne zapisujemy obok siebie.
Wykonujemy obliczenia na współczynnikach jednomianów.

b) $-2y + 5a + 2y - 3ab - 4a =$

$= -2y + 2y + 5a - 4a - 3ab =$

$= 0 + a - 3ab = a - 3ab$

Współczynniki liczbowe w jednomianach podobnych $2y$ i $-2y$ są liczbami przeciwnymi. Suma tych jednomianów jest równa zero.

5. Zredukuj wyrazy podobne w każdej podanej sumie algebraicznej.

a) $-1,2a + 2y - 0,8a - \frac{1}{3}y$ b) $3x + 7z + y - 7z - 4y$

Zadania

● Uporządkuj podane jednomiany.

- a) algebra b) barbakan
c) mama d) kajak

● Zapisz jednomiany w postaci uporządkowanej i określ ich współczynniki liczbowe.

a) $-a \cdot a \cdot (-5) \cdot 3$ b) $\frac{1}{3}xxxxxyyy \cdot (-6)$
c) $(-2)^2 \cdot (-2)abab \cdot (-1)$ d) $1,5mp \cdot (-4)m^2pmpmp$

● Dopisz do każdego jednomianu po trzy jednomiany podobne.

a) $-m$ b) $0,5c^3$ c) ab^3

● Zapisz wyrazy podanych sum algebraicznych.

a) $5a + 4b - 11c$ b) $-0,9p - r + 7$
c) $-\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 7x - 3$ d) $-x - 2$

● Zredukuj wyrazy podobne.

a) $3a - a + 4,5a - a - 3a$ b) $7b + 4b - 13b - 4b + 7,5b$
c) $-8c + c - 5c + 7,9c$ d) $17d + d - 17d - d + 6\frac{2}{7}d$
e) $0,5e + \frac{11}{2}e - 2\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e$ f) $a + x + x + a + x + a$

● Każdą z sum algebraicznych zapisz w najprostszej postaci.

a) $2x - 7y + 3y + 4x - 7y$
b) $-2,5a + 3\frac{1}{2}a^2 + a - a^2 - 0,5a$
c) $\frac{1}{2}ab - \frac{3}{4}a^2 + 3\frac{3}{4}ab - 1,5a^2 + \frac{5}{8}a^2$
d) $1,2a - \frac{2}{3}a^2 + 0,75 - 1\frac{3}{8}a - \frac{1}{2} + \frac{2}{9}a^2$

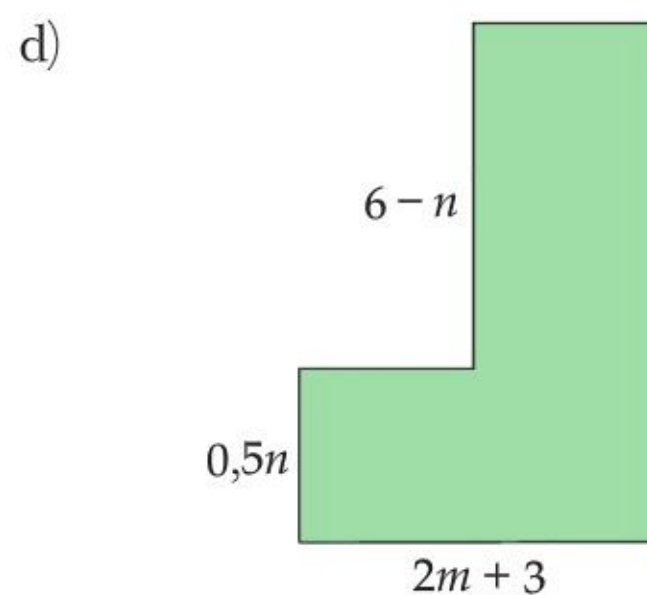
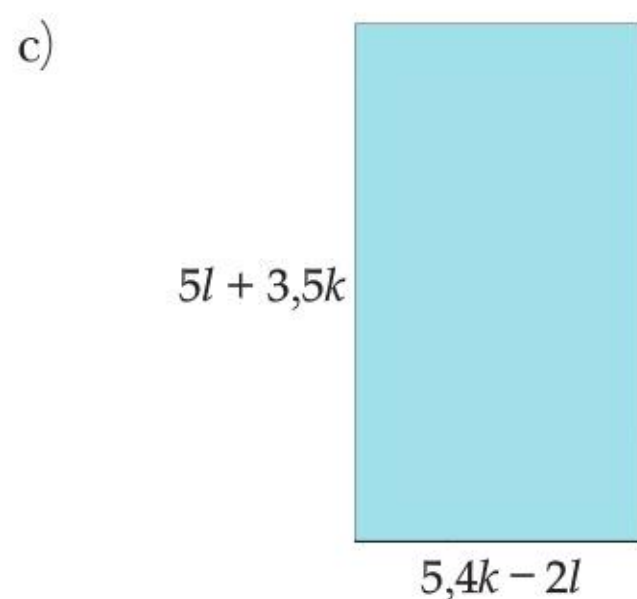
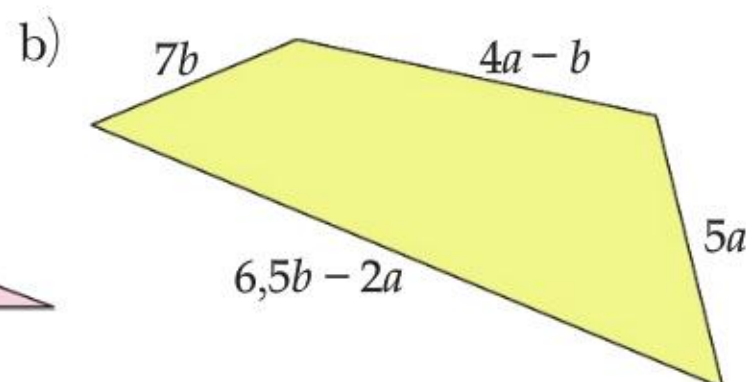
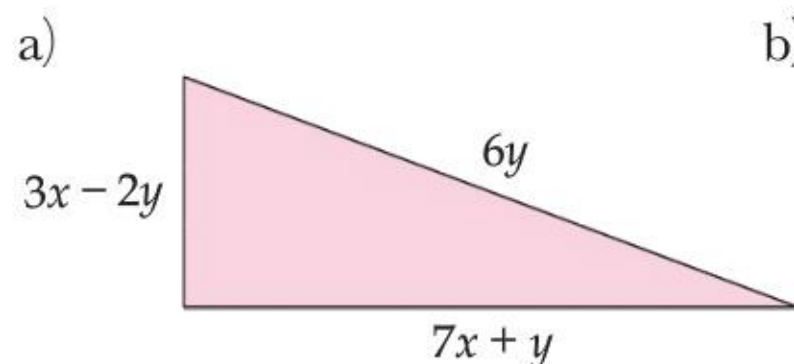
● Zapisz każdą podaną sumę algebraiczną w najprostszej postaci. Oblicz wartość liczbową otrzymanego wyrażenia algebraicznego dla danych liczb.

a) $1\frac{1}{7}a^2 - 3a - 6 + 3a - 16a - 21$ dla $a = -0,5$
b) $7x - 2y + 2x - 4y + 2$ dla $x = -1,5$ i $y = 2\frac{1}{5}$
c) $13ab - 4b + 3a + b + 7a - 12ab$ dla $a = -1,6$ i $b = 3\frac{1}{3}$



Aby zapisać wyrażenie algebraiczne w najprostszej postaci, należy wykonać wszystkie możliwe działania i wykonać redukcję wyrazów podobnych.

- Dziadek ma obecnie y lat, a babcia jest od niego młodsza o 5 lat. Zapisz odpowiedzi na poniższe pytania za pomocą odpowiednich wyrażeń algebraicznych.
 - a) Ile lat miało każde z nich 3 lata temu?
 - b) Ile lat będą mieli razem za rok?
 - ★ Ile lat miała babcia wtedy, kiedy dziadek miał ich tyle, ile babcia ma teraz?
- Do szkoły zakupiono p stolików i dwukrotnie więcej krzeseł. Każdy stół kosztował 250 zł, a krzesło o 90 zł mniej. Zapisz za pomocą jednomianów: koszt zakupu stolików, koszt zakupu krzeseł i łączną wartość zakupionego sprzętu.
- W klasie 7a jest x chłopców. W klasie 7b jest dwukrotnie więcej chłopców niż w klasie 7a. W klasie 7c jest o 4 chłopców mniej niż w klasie 7b. Liczba chłopców w klasie 7d to połowa liczby chłopców klasy 7a. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ilu chłopców łącznie jest w tych czterech klasach siódmych.
- Pomarańcze są o 30% droższe od jabłek. Zapisz za pomocą jak najprostszego wyrażenia algebraicznego, ile trzeba zapłacić za 65 dag jabłek w cenie k zł za 1 kg oraz za 30 dag pomarańczy.
- Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego obwód każdej z figur. Pamiętaj, aby wyrażenie algebraiczne zapisać w najprostszej postaci.



Aby wyznaczyć liczbę większą o 30% od danej liczby, należy daną liczbę pomnożyć przez 1,3.

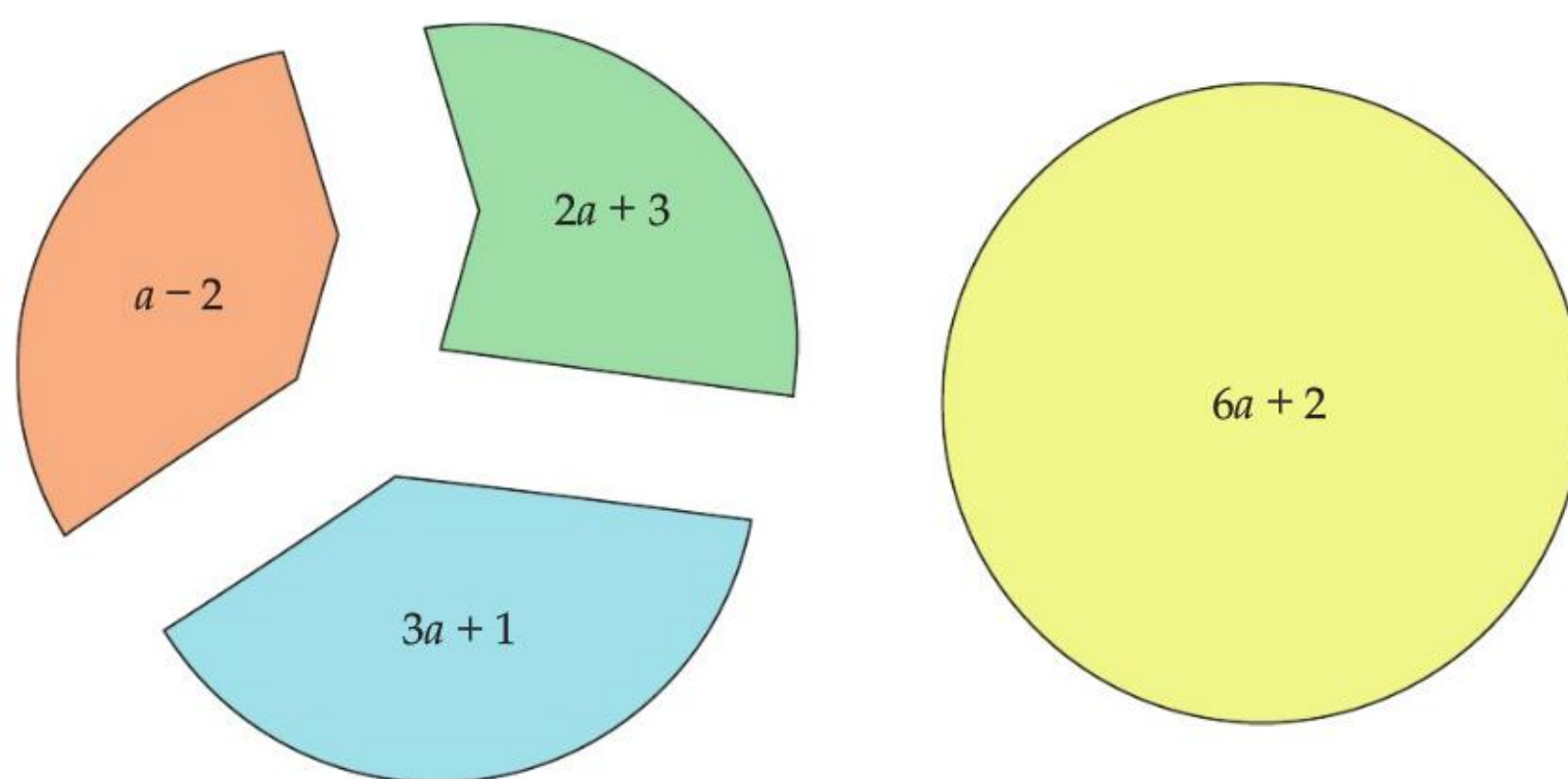
- Jeden z boków sześciokąta ma długość y cm, a każdy kolejny jest o 2 cm dłuższy od poprzedniego. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego obwód tego wielokąta. Jaką wartość liczbową może przyjmować zmienna y ?

6.4 Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych

Podejmij temat



Dodaj wyrażenia algebraiczne zapisane na kolorowych częściach koła. Porównaj wynik z wyrażeniem zapisanym na kole żółtym. Co zauważasz?



Aby odpowiedzieć na pytanie zadane w *Podejmij temat*, zapiszmy dodawanie wyrażen znajdujących się na każdej z części koła.

$$(3a + 1) + (a - 2) + (2a + 3) = 3a + 1 + a - 2 + 2a + 3 = \\ = 3a + a + 2a + 1 - 2 + 3 = 6a + 2$$

Czynność tę nazywamy **dodawaniem sum algebraicznych**.

Przykład 1

Dodajmy sumy algebraiczne: $7a + 2b - 5$ i $6 - 3b + a$.

$$(7a + 2b - 5) + (6 - 3b + a) =$$

$$= \underline{7a} + \underline{2b} - 5 + 6 - \underline{3b} + \underline{a} =$$

$$= 8a - b + 1$$

Opuszczamy nawiasy. Nie zmieniamy znaków poszczególnych wyrazów – przed pierwszym nawiasem nie jest napisany żaden znak, a przed drugim nawiasem jest znak plus.

Redukujemy wyrazy podobne (podkreślamy wyrazy podobne dla ułatwienia obliczeń).

1. Dodaj podane sumy algebraiczne.

$$3m + 9k - 8 \text{ oraz } 3 - 7k + 4m$$

Jeżeli przed nawiasem, w którym występuje suma algebraiczna, występuje znak dodawania (lub nie występuje żaden znak), to opuszczamy nawiasy, nie zmieniając znaków wyrazów sumy.

Wiemy już, że wyrażenie algebraiczne napisane na żółtym kole w *Podjmij temat* jest sumą algebraiczną wyrażen zapisanych na różnokolorowych częściach koła. Sprawdźmy, czy wyrażenie algebraiczne zapisane na zielonej części koła jest równe różnicy wyrażen algebraicznych zapisanych na niebieskiej i pomarańczowej części koła.

$$(3a + 1) - (a - 2) = 3a + 1 - a + 2 = 3a - a + 1 + 2 = 2a + 3$$

Czynność tę nazywamy **odejmowaniem sum algebraicznych**.

Przykład 2

Wykonajmy odejmowanie sum algebraicznych: $2x^2 - 3x$ i $-7x + 3x^2 - 9$.

$$(2x^2 - 3x) - (-7x + 3x^2 - 9) =$$

Opuszczamy nawiasy. Przed pierwszym nawiasem nie występuje żaden znak, więc usuwamy nawias, nie zmieniając znaków wyrazów sumy. Drugi nawias jest poprzedzony znakiem minus. Usuwamy nawias, zmieniając znak każdego z wyrazów sumy algebraicznej na przeciwny.

$$= 2x^2 - 3x + 7x - 3x^2 + 9 =$$

$$= -x^2 + 4x + 9$$

Redukujemy wyrazy podobne.

Jeżeli przed nawiasem, w którym występuje suma algebraiczna, występuje znak odejmowania, to opuszczamy nawiasy, zmieniając znak każdego z wyrazów sumy na przeciwny.

2. Wykonaj odejmowanie sum algebraicznych.

a) $5x^2 - 3 + 2x$ i $-x + 2x^2 - 7$

b) $3y - y^2 + 6$ i $9 - 5y + 2y^2$

Przykład 3

Zapiszmy w najprostszej postaci podane wyrażenie algebraiczne.

$$-(6m - 3p) + \left(-\frac{1}{2}p + 4m\right) - (10m - 2,5p)$$

$$-(6m - 3p) + \left(-\frac{1}{2}p + 4m\right) - (10m - 2,5p) =$$

$$= -6m + 3p - \frac{1}{2}p + 4m - 10m + 2,5p = -12m + 5p$$

Opuszczamy nawiasy.

Redukujemy wyrazy podobne.

3. Zapisz w najprostszej postaci podane wyrażenia algebraiczne.

a) $-(-7c^2 + 4c) - (2c - 7c^3) + (6c - 4c^3)$

b) $\left(5\frac{1}{2}d - 8d^2\right) - (-2d + 3,3d^3) + (3d^2 - 2d^3)$

Zadania

● Zapisz wyrażenia algebraiczne bez użycia nawiasów.

- a) $-(x + 1)$ b) $-(3a - 3)$
 c) $-(-7x + 2y - 8)$ d) $-(-(a + 3))$
 e) $-(-(-9a - 4))$ f) $-(-(-5x + 2 - 7y))$

● Każde z podanych wyrażeń algebraicznych zapisz w najprostszej postaci.

- a) $1 + (6a + 4) - 2a$ b) $(7,5x - 3y - 6) + 3y$
 c) $2xy + (x^2 - 5xy)$ d) $7a + (-4a - 11) + 6,3$
 e) $5a^2 + (6 - 4a^2)$ f) $(5c - 4) + (11 - 8c)$

● Zapisz bez użycia nawiasów i zredukuj wyrazy podobne.

- a) $5 - (6a + 8)$ b) $(x + y) - (x - y)$
 c) $3x - (5x - 9)$ d) $(5m - 3) - (10m - 2)$
 e) $4ab - (-2a - 3ab) - 9a$ f) $-(7x^2 - 5x + 4) - (-4x)$

● Usuń nawiasy i wykonaj redukcję wyrazów podobnych.

- a) $(7a + 2b) + (3a - 8b) - (3a - 4)$
 b) $(15m - 7) - (6m - 9) + (-8m - 4)$
 c) $(5,5a - 0,8) + (-0,5a + 1,8) - (-2a + 7)$
 d) $\left(-6\frac{1}{2}c + 3\frac{3}{4}d\right) - \left(-3\frac{3}{4}d + 7,5c\right) + \left(\frac{1}{4}d - 6c\right)$

● Sprawdź, czy każdy kwadrat jest magiczny.

a)

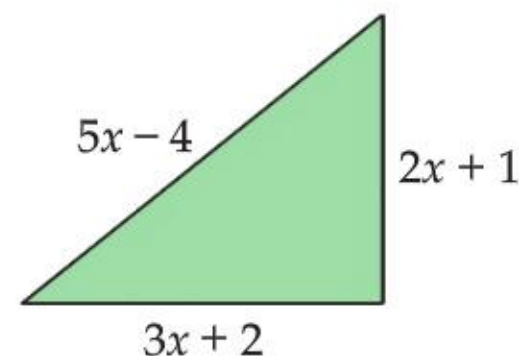
$3a + 3$	$a + 1$	$-1 - a$
$-3 - 3a$	$1 + a$	$5a + 5$
$3a + 3$	$a + 1$	$-1 - a$

b)

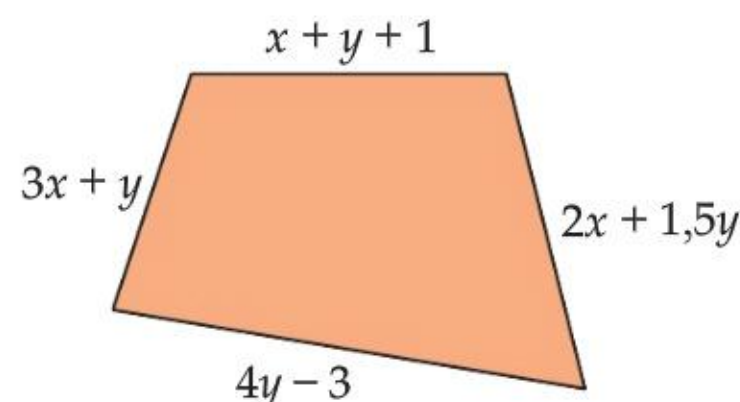
$x + 1$	$2x + 1$	x
$2x + 5$	$x - 2$	$x - 1$
$x - 2$	$x + 3$	$2x + 3$

● Zapisz w najprostszej postaci wyrażenia opisujące obwody podanych figur.

a)



b)



Czy liczby x i y mogą być dowolne? Odpowiedź uzasadnij.

● Marcin zapłacił za lody x zł, za pączki – o 7 zł więcej niż za lody, a za napój – o 50% mniej niż za lody. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile złotych zapłacił Marcin za swoje zakupy.

● Ewa zapłaciła za rękawiczki banknotem 100-złotowym. Otrzymała resztę w postaci x monet 5-złotowych i y banknotów 10-złotowych. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile kosztowały rękawiczki.

● W bibliotece państwa Czytelników jest $k + 1$ książek historycznych, $2k + 6$ dzieł z literatury pięknej, $0,5k$ encyklopedii i poradników oraz $31k - 1$ lektur szkolnych. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego łączną liczbę książek państwa Czytelników. Jaką liczbą może być k ? Odpowiedź uzasadnij.

● Katarzyna ma x lat, a Barbara jest od niej 2 razy starsza. Marek jest o 3 lata starszy od Barbary.

- a) Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące łączny wiek dzieci.
 b) Oblicz, ile lat mają razem dzieci, jeśli wiadomo, że Katarzyna ma 5 lat.

6.5 Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Podejmij temat

- Czy pamiętasz, jak można wykonać mnożenie, np. $7 \cdot 26$? Przeanalizuj oba sposoby obliczeń, a następnie wyjaśnij, w jaki sposób je wykonano.

$$7 \cdot 26 = 7 \cdot (20 + 6) = 7 \cdot 20 + 7 \cdot 6 = 140 + 42 = 182$$

$$7 \cdot 26 = 7 \cdot (30 - 4) = 7 \cdot 30 - 7 \cdot 4 = 210 - 28 = 182$$

Zaproponuj inny sposób ułatwiający obliczenie iloczynu tych liczb.

Mnożąc sumę algebraiczną przez jednomian, korzystamy z rozdzielności mnożenia względem dodawania lub rozdzielności mnożenia względem odejmowania.

Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, mnożymy każdy wyraz tej sumy przez ten jednomian.

$$a(b + c) = ab + ac \qquad a(b - c) = ab - ac$$

Przykład 1

Wykonajmy mnożenie.

a) $7(2a + b)$

b) $(3x - y) \cdot (-3)$

c) $2x\left(4x - y + \frac{1}{4}\right)$

a) $7(2a + b) =$

$$= 7 \cdot 2a + 7 \cdot b = 14a + 7b$$

Mnożymy każdy wyraz sumy przez liczbę 7.

b) $(3x - y) \cdot (-3) =$

$$= 3x \cdot (-3) - y \cdot (-3) = -9x + 3y$$

Mnożymy każdy wyraz sumy przez liczbę -3 .

c) $2x\left(4x - y + \frac{1}{4}\right) =$

$$\begin{aligned} &= 2x \cdot 4x + 2x \cdot (-y) + 2x \cdot \frac{1}{4} = \\ &= 8x^2 - 2xy + \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Mnożymy każdy wyraz sumy przez jednomian $2x$.

1. Wykonaj mnożenie.

a) $2(a - 3b)$

b) $(6c + 7d) \cdot 9$

c) $3a(-2a + 5)$

d) $(-9b)(2a - 3b + 4c)$

e) $3,5(4x + 2y - 1)$

f) $(3x + 6y - 9z) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$

Przykład 2

Zapiszmy podane wyrażenia w najprostszej postaci.

a) $-5(4a - 5b) - 6(-3b - a)$

$$\begin{aligned} & \overset{\curvearrowright}{-5(4a - 5b)} - \overset{\curvearrowright}{6(-3b - a)} = \\ & = -20a + 25b + 18b + 6a = -14a + 43b \end{aligned}$$

b) $-3a(7 + 4a) + 1,2a\left(10 - \frac{1}{12}a\right) =$

$$\begin{aligned} & = -3a \cdot 7 - 3a \cdot 4a + 1,2a \cdot 10 - 1,2a \cdot \frac{1}{12}a = \\ & = -21a - 12a^2 + 12a - 0,1a^2 = -9a - 12,1a^2 \end{aligned}$$

b) $-3a(7 + 4a) + 1,2a\left(10 - \frac{1}{12}a\right)$

Mnożymy sumy algebraiczne przez jednomiany, redukujemy wyrazy podobne.

Mnożymy sumy algebraiczne przez jednomiany, redukujemy wyrazy podobne.

2. Zapisz podane wyrażenia w najprostszej postaci.

a) $7(3a - 2b) + 4(8b - a)$

b) $-8(-3m + 9p + 2) - 5(6m - 6p - 9)$

c) $6(4p - 7r) - 2(8p - 9r)$

d) $5a(-2b + 6) - 3b(a - 4)$

e) $x(7x - 8) - 9(x^2 - 3x)$

f) $0,1m(-2p + 4m) - 0,2p(3m - 5p)$

Przykład 3

Podzielmy sumę algebraiczną przez liczbę.

a) $\frac{9a - 3b + 6}{3}$

b) $(16z^3 - 24z^2 + 32) : 8$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{9a - 3b + 6}{3} &= \frac{1}{3} \cdot (9a - 3b + 6) = \\ &= \frac{9a}{3} - \frac{3b}{3} + \frac{6}{3} = 3a - b + 2 \end{aligned}$$

Każdy składnik sumy dzielimy przez 3.

$$\begin{aligned} \text{b) } (16z^3 - 24z^2 + 32) : 8 &= (16z^3 - 24z^2 + 32) \cdot \frac{1}{8} = \\ &= \frac{2 \cdot 16z^3}{8_1} - \frac{3 \cdot 24z^2}{8_1} + \frac{4 \cdot 32}{8_1} = 2z^3 - 3z^2 + 4 \end{aligned}$$

Skracamy ułamki.



Aby podzielić sumę algebraiczną przez liczbę różną od zera, mnożymy każdy składnik tej sumy przez odwrotność liczby, przez którą dzielimy sumę.

3. Wykonaj dzielenie.

a) $\frac{4a - 36b}{4}$

b) $\frac{14m + 21p - 42r}{7}$

c) $\frac{-4ab + 12a^3 - 8b^2}{-4}$

d) $(6p^2 - 8pr) : (-2)$

e) $(x^2 + x - 1) : \left(-\frac{1}{6}\right)$

f) $\frac{3x - 6xy + 1}{-3}$

Przykład 4

Zastanówmy się, jaką liczbę należy wpisać w miejsce $?$.

$$?(2a + b - 1) = 10a + 5b - 5$$

Zauważmy, że:

$10a + 5b - 5 = 5 \cdot 2a + 5 \cdot b - 5 \cdot 1 = 5(2a + b - 1)$, bo liczba 5 jest wspólnym czynnikiem jednomianów: $10a$, $5b$ oraz -5 .

Zamianę sumy na iloczyn nazywamy
wyłączaniem wspólnego czynnika przed nawias.

4. Zapisz liczbę, którą trzeba wpisać w miejsce $?$.

$$?(3x - 5y + 7) = -6x + 10y - 14$$

Przykład 5

Zamieńmy sumę algebraiczną: $25x^3 + 30x^2 - 15x$ na iloczyn.

W sumie algebraicznej: $25x^3 + 30x^2 - 15x$ dla jednomianów: $25x^3$, $30x^2$, $-15x$ wspólnymi czynnikami, różnymi od 1, są jednomiany: 5, x , $5x$.

Zamieniając tę sumę algebraiczną na iloczyn, można wyłączyć wspólne czynniki:

$$25x^3 + 30x^2 - 15x = 5 \cdot 5x^3 + 5 \cdot 6x^2 - 5 \cdot 3x = 5(5x^3 + 6x^2 - 3x)$$

$$25x^3 + 30x^2 - 15x = x \cdot 25x^2 + x \cdot 30x - x \cdot 15 = x(25x^2 + 30x - 15)$$

$$25x^3 + 30x^2 - 15x = 5x \cdot 5x^2 + 5x \cdot 6x - 5x \cdot 3 = 5x(5x^2 + 6x - 3)$$

Wyłączając wspólny czynnik przed nawias, staramy się wyłączyć **największy wspólny czynnik** różny od 1.

5. Wyłącz największy wspólny czynnik przed nawias.

a) $17a^2 + 51a - 85$

b) $-8b^3 - 16b^2 - 4b$

Zadania

- Wykonaj mnożenie.

a) $-4(6e - 8f + 9)$

b) $\frac{2}{7}(14s - 21t + 49z)$

c) $-0,6(-5x^2 - 3x + 7)$

d) $\left(6c - 7,5d + e - \frac{1}{2}\right) \cdot 4$

e) $(-2m + 4p - 4,1r) \cdot (-0,1)$

f) $-1,8(-p + 2q - 0,1s - 10)$

Gdy wyłączam wspólny czynnik przed nawias, szukam NWD wśród współczynników jednomianów.



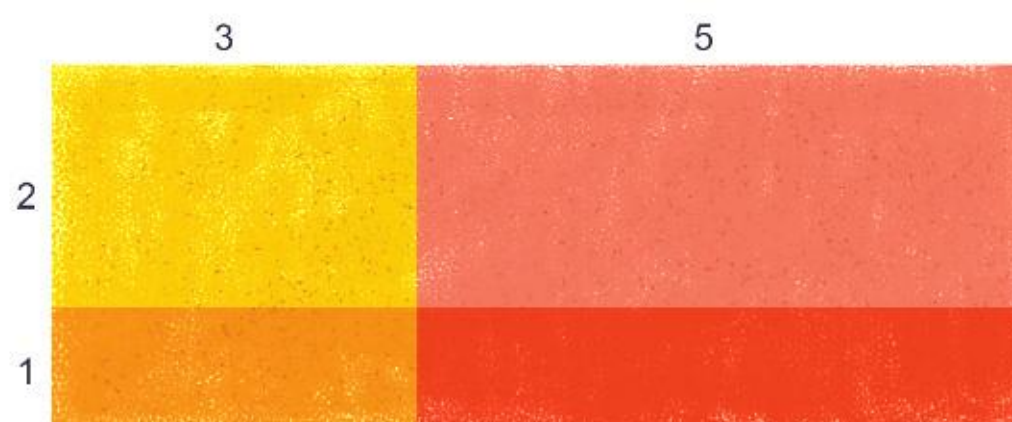
- Pomnóż sumy algebraiczne przez jednomian.
- $-4y^2(5,6 - 7y + 9y^2)$
 - $\left(-2\frac{1}{6}a - 1\frac{1}{6}b + \frac{1}{6}\right) \cdot (-6ab)$
 - $(3,5p - 1\frac{3}{4}r + 1,25) \cdot (-2p^2r^3)$
- Zapisz podane wyrażenia w najprostszej postaci.
- $(6pq - 3q - 10) : \left(-\frac{1}{2}\right)$
 - $4y(3a - 5b) + (-2y + 1) \cdot 3a + 18by$
 - $(0,8x - 8) \cdot \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}x(1,5y + 3)$
- Wykonaj mnożenie sum algebraicznych przez jednomiany, a następnie wykonaj redukcję wyrazów podobnych.
- $4(4a - 7b) - 7(3a - 5b) - 2(6b - 5a)$
 - $7x\left(\frac{x}{7} + \frac{2y}{7}\right) - 8\left(\frac{3x}{8} - \frac{5y}{8}\right)$
 - $\frac{3}{4}a(-0,4b + 8c) + 0,9(-5a + \frac{2}{3}b)$
- Jakie liczby należy wstawić w miejsce **?**?
- ?** $(-7x + 4y + 2) = 56x - 32y - 16$
 - ?** $(3x^3 - 7x^2 + 1,5) = -3x^3 + 7x^2 - 1\frac{1}{2}$
 - ?** $(-15pq + 5p^2 - q) = -3pq + p^2 - 0,2q$
- Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.
- $25 - 50a^2 + 75a$
 - $48x - 24y + 54z$
 - $-14p - 20r - 4s$
 - $4,5a^2 - 6a + 1,5$
- Dla pewnych liczb x i y wartość wyrażenia $x + 2y + 1$ jest równa 4. Oblicz dla tych samych liczb x i y wartość podanych wyrażeń.
- $3x + 6y + 3$
 - $0,5x + y + \frac{1}{2}$
 - $-x - 2y - 1$
 - $-1,5x - 3y - 1,5$
- Rysunek przedstawia cztery odcinki. Pod rysunkami zapisano za pomocą wyrażeń algebraicznych długości tych odcinków.
- 
- Jaka jest łączna długość tych odcinków?
 - Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące średnią arytmetyczną długości tych odcinków.
- Puszka farby kosztuje a -złotych netto, a pędzel do malowania b -złotych netto. Do kosztu zakupu tych produktów należy doliczyć jeszcze podatek VAT w wysokości 23%.
- Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego łączny koszt zakupu 5 takich puszek farby i 2 pędzli.
 - Czy kwota 110 zł wystarczy na te zakupy, jeśli wiadomo, że puszka farby kosztuje 16,50 zł netto, a pędzel 2,50 zł netto?
- Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego średnią arytmetyczną trzech liczb całkowitych, z których każda następna jest o 3 większa od poprzedniej, a największa z nich to $7k + 5$.
- Ze stołówki szkolnej korzysta dziennie m uczennic i o 15 uczniów więcej niż uczennic. Cena jednego obiadu jest równa 6 zł. W styczniu wydawano obiady przez 20 dni. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile złotych łącznie dzieci zapłaciły za te obiady. Załóż, że wszystkie dzieci korzystały ze stołówki.
- Zmieszano 12 kg cukierków czekoladowych w cenie x złotych za jeden kilogram i 18 kg cukierków owocowych w cenie niższej od czekoladowych o 8 zł za kilogram. Zapisz wyrażenie opisujące cenę jednego kilograma mieszanki tych cukierków.
- Zosia ma w swojej skarbonce k monet 5-złotowych, l monet 2-złotowych oraz m złotówek. Kasia w swojej skarbonce ma dwa razy więcej złotówek, o cztery mniej 2-złotówki i o dwie 5-złotowe monety więcej niż Zosia. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile pieniędzy razem mają dziewczęta.
- Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego średnią arytmetyczną trzech kolejnych liczb:
- parzystych,
 - nieparzystych.

6.6 Mnożenie sum algebraicznych

Podejmij temat

Magda chciała obliczyć pole powierzchni swojego dywanu. Zmierzyła długości boków czterech prostokątów, a następnie zapisała pole powierzchni dywanu dwoma sposobami.

Sposób I: $P = (3 + 5)(2 + 1)$



Sposób II: $P = 3(2 + 1) + 5(2 + 1)$



Jak myślisz: czy oba sposoby obliczania pola powierzchni dywanu są poprawne? Zaproponuj inny sposób obliczania pola powierzchni tego dywanu, a następnie porównaj z tymi, które zapisała Magda. Co zauważasz?

Aby pomnożyć dwie sumy algebraiczne:

- należy każdy składnik pierwszej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej sumy, a otrzymane iloczyny dodać

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

lub

- należy każdy składnik pierwszej sumy pomnożyć przez drugą sumę, a następnie wykonać mnożenie każdej z sum przez odpowiedni jednomian.

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Przykład 1

Wykonajmy mnożenie.

a) $(3a - 2b) \cdot (-7a + 4b)$

b) $(0,5x - 2y) \cdot (6x - 8y + 1)$

W obu przypadkach pomnożymy każdy składnik pierwszej sumy przez każdy składnik drugiej sumy, a następnie zredukujemy wyrazy podobne.

a) **Sposób I**

$$(3a - 2b)(-7a + 4b) = 3a \cdot (-7a) + 3a \cdot 4b - 2b \cdot (-7a) - 2b \cdot 4b = -21a^2 + 12ab + 14ab - 8b^2 = -21a^2 + 26ab - 8b^2$$

Sposób II

$$(3a - 2b) \cdot (-7a + 4b) = 3a(-7a + 4b) - 2b(-7a + 4b) = \\ = 3a \cdot (-7a) + 3a \cdot 4b - 2b \cdot (-7a) - 2b \cdot 4b = -21a^2 + 12ab + 14ab - 8b^2 = -21a^2 + 26ab - 8b^2$$

b) $(0,5x - 2y) \cdot (6x - 8y + 1) = 0,5x \cdot 6x + 0,5x \cdot (-8y) + 0,5x \cdot 1 - 2y \cdot 6x - 2y \cdot (-8y) - 2y \cdot 1 =$
 $= 3x^2 - 4xy + 0,5x - 12xy + 16y^2 - 2y = 3x^2 - 16xy + 16y^2 + 0,5x - 2y$

1. Wykonaj mnożenie.

a) $(x + 4)(2 + y)$

b) $(8a - 7)(1 - 10b)$

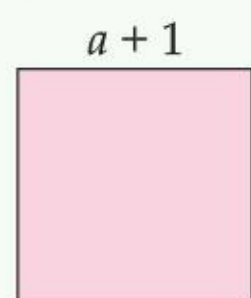
c) $\left(\frac{2}{3}m + 3\right)(9 - 3p)$

d) $(9 - 5a)(2b - 3a)$

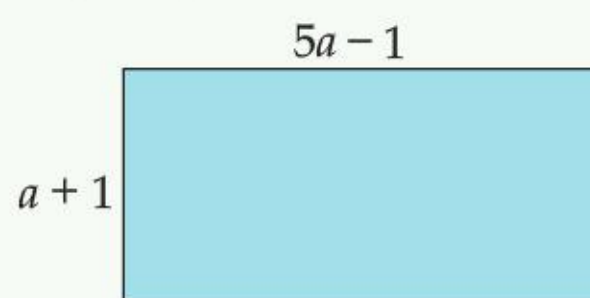
Przykład 2

Zapiszmy w postaci sumy algebraicznej:

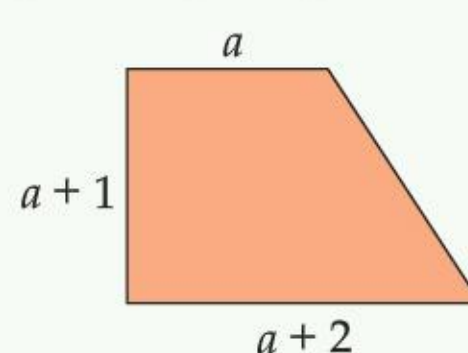
a) pole kwadratu,



b) pole prostokąta,



c) pole trapezu prostokątnego.



a) $P_{\text{■}} = (a + 1)^2$

$$P_{\text{■}} = (a + 1)(a + 1)$$

$$P_{\text{■}} = a^2 + \underline{a} + \underline{a} + 1$$

$$P_{\text{■}} = a^2 + 2a + 1$$

Pole kwadratu jest równe kwadratowi długości jego boku.

Zamieniamy kwadrat sumy na iloczyn sum, wykonujemy mnożenie i redukujemy wyrazy podobne.

b) $P_{\text{■}} = (5a - 1)(a + 1)$

$$P_{\text{■}} = 5a^2 + \underline{5a} - \underline{a} - 1$$

$$P_{\text{■}} = 5a^2 + 4a - 1$$

Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości jego boków.

Mnożymy sumy algebraiczne i redukujemy wyrazy podobne.

c) Pole trapezu jest równe połowie iloczynu wysokości trapezu i sumy długości jego podstaw.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(\underline{a} + 2 + \underline{a})(a + 1) = \frac{1}{2}(2a + 2)(a + 1) = \\ &= \frac{1}{2}(2a^2 + \underline{2a} + \underline{2a} + 2) = \frac{1}{2}(2a^2 + 4a + 2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2a^2 + \frac{1}{2} \cdot 4a + \frac{1}{2} \cdot 2 = a^2 + 2a + 1 \end{aligned}$$

W pierwszym nawiasie redukujemy wyrazy podobne, a potem mnożymy sumy algebraiczne. Po wymnożeniu redukujemy wyrazy podobne, a następnie otrzymany wynik mnożymy przez $\frac{1}{2}$.

2. Niech m będzie liczbą większą od 7. Zapisz w postaci sumy algebraicznej pola podanych figur.

- a) trójkąt o podstawie długości $(m + 3)$ i wysokości $(m - 6)$ poprowadzonej do tej podstawy
- b) kwadrat o boku długości $(3 + 2m)$
- c) romb o przekątnych długości $3m$ i $(m - 7)$

Przykład 3

Z danego wyrażenia $(a + 3)x - 5(a + 3)$ wyłączmy wspólny czynnik przed nawias.

$$\begin{aligned} (a + 3)x - 5(a + 3) &= (a + 3) \cdot x + (a + 3) \cdot (-5) = \\ &= (a + 3)(x - 5) \end{aligned}$$

Zauważmy, że wspólnym czynnikiem jest suma algebraiczna $a + 3$.

3. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

$$6(m - 2n) + m(m - 2n)$$

Zadania

Wykonaj mnożenie sum algebraicznych i uporządkuj jednomiany.

- a) $(7 + 4p)(-3q - 5)$ b) $(-5c + 2)(6d - 1)$
- c) $(1,5 - 4z)(-6w + 0,5)$ d) $(-7z - 1)(5 - 2t)$

Pomnóż sumy algebraiczne, a następnie zredukuj wyrazy podobne.

- a) $(a + 3)(a + 11)$ b) $(b - 7)(2b + 3)$
- c) $(12 + 12e)(4e - 6)$ d) $(0,25f - 2)(1 - 4f)$
- e) $(12 + p)(12p - 9)$ f) $(a - 2b)(5a + 3b)$

Zapisz w postaci sumy algebraicznej. Pamiętaj, że kwadrat sumy algebraicznej możesz zapisać w postaci iloczynu sum.

- a) $(x + 3)^2$ b) $(y - 4)^2$ c) $(6 + 2a)^2$
- d) $(7p + 9q)^2$ e) $(5 - 3c)^2$ f) $(-2d - 5)^2$



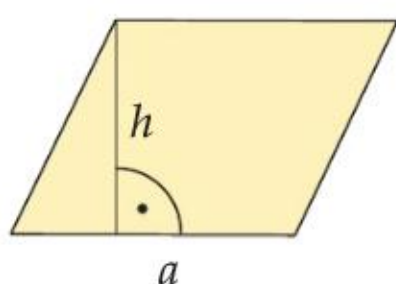
Czy pamiętasz?

- Pole równoległoboku obliczamy ze wzoru:

$$P = ah$$

a – długość podstawy

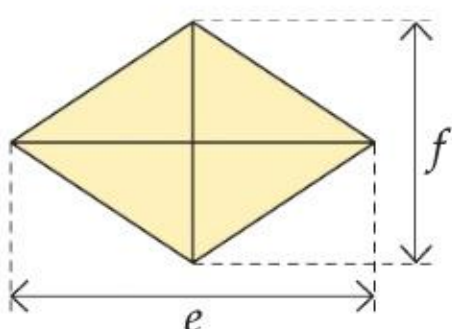
h – wysokość



- Pole rombu obliczamy ze wzoru:

$$P = \frac{ef}{2}$$

e, f – długości przekątnych



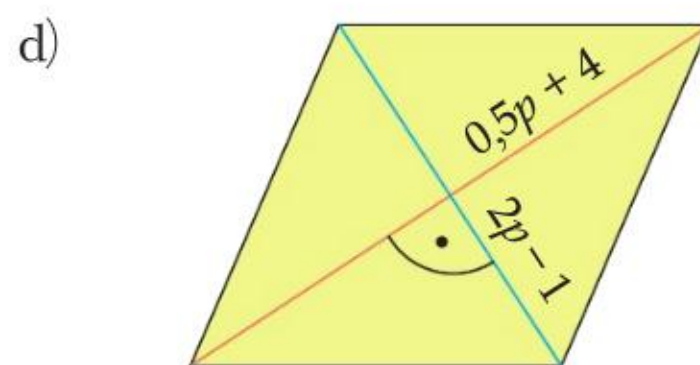
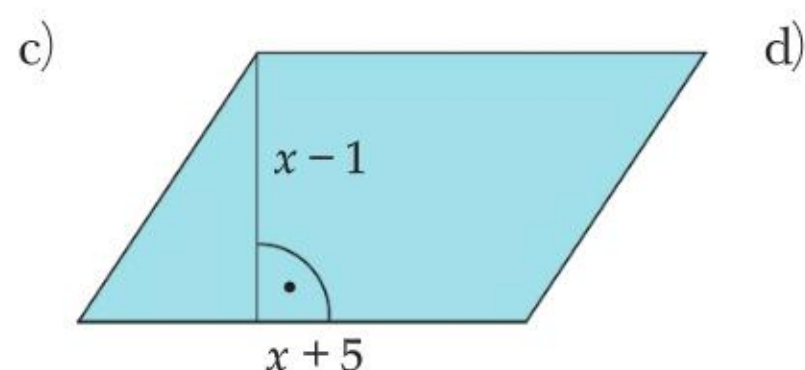
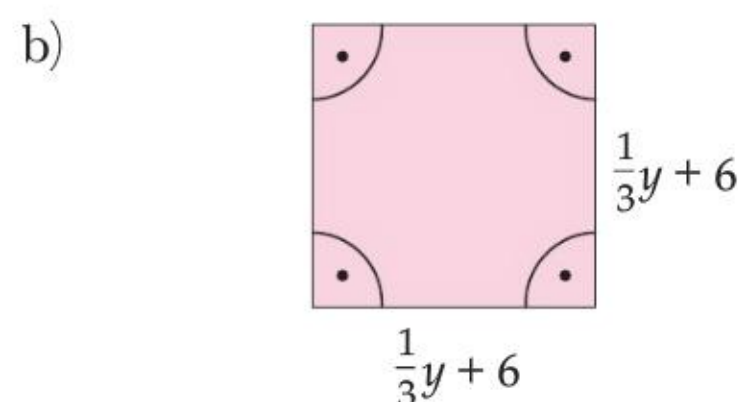
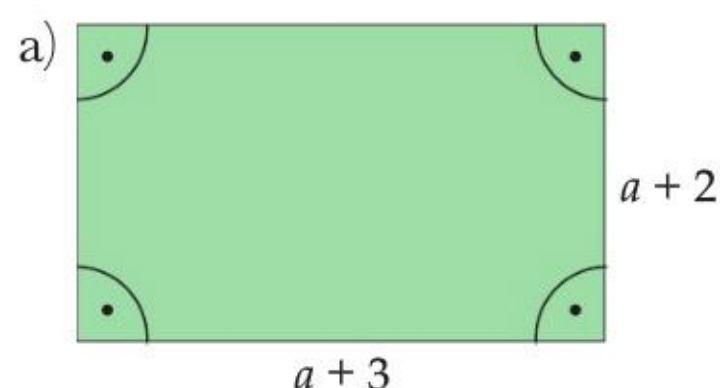
Wykonaj mnożenie.

- $(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)$
- $(\sqrt{2} - 1)(3 + \sqrt{2})$
- $(5 + 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} - 2)$
- $(4\sqrt{6} - \sqrt{3})(3\sqrt{3} + \sqrt{6})$

Jaki jednomian należy wstawić w miejsce **?**?

- $15x - 30y = ?(x - 2y)$
- $-1,5a - 4,5b - 3c = ?(a + 3b + 2c)$
- $7pq^2 + 6mp - 8ps^3 = ?(7q^2 + 6m - 8s^3)$
- $0,1x^4 - 0,2x^3 + 0,3x^2 - 0,1x = ?(x^3 - 2x^2 + 3x - 1)$

Zapisz w postaci sumy algebraicznej pole każdej figury przedstawionej na rysunku.



Wykaż, że liczba $M = (\sqrt{2} - 1)(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2\sqrt{3}$ jest liczbą całkowitą.

Dla jakich liczb m liczba $K = m + (\sqrt{8} - \sqrt{2})(2 + \sqrt{8})$ jest liczbą całkowitą?

Liczba naturalna dodatnia a po podzieleniu przez 3 daje resztę 1. Liczba naturalna dodatnia b po podzieleniu przez 3 daje resztę 2. Wykaż, że iloczyn liczb a i b po podzieleniu przez 3 daje resztę 2.

W prostokącie $ABCD$ długość krótszego boku jest równa $(x + 3)$, a dłuższego boku $(2x + 4)$. W prostokącie $EFGH$ jeden bok jest dwa razy dłuższy od krótszego boku prostokąta $ABCD$, a drugi dwa razy krótszy od dłuższego boku prostokąta $ABCD$.

- Oblicz różnicę obwodów tych prostokątów.
- Oblicz różnicę pól tych prostokątów.

6.7 Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Zastosowanie wyrażeń algebraicznych w zadaniach

Podejmij temat

Wiedząc, że $A = x^2 - 2x + 3$,
 $B = x^3 + 2x^2 + x$, $C = -3x^2 - x + 1$,
wykonaj działanie $A + B + C$.

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + 3 \\ + x^3 + 2x^2 + x \\ - 3x^2 - x + 1 \\ \hline x^3 + 0x^2 - 2x + 4 \end{array}$$



Czy potrafisz obliczyć wartość otrzymanej sumy algebraicznej dla $x = 2$?

Przykład 1

Zapiszmy wyrażenie w najprostszej postaci i obliczmy jego wartość liczbową dla podanej zmiennej.

a) $8x^2 - 2x(x - 1) - 3(2x^2 + 4)$ dla $x = 5$

$$\begin{aligned} a) \quad & 8x^2 - 2x(x - 1) - 3(2x^2 + 4) = \\ & = 8x^2 - 2x^2 + 2x - 6x^2 - 12 = 2x - 12 \\ & 2 \cdot 5 - 12 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & \left(-4a + \frac{1}{3}\right)(6 - 3a) - 2a(3 - 0,5a)(4a + 2) = \\ & = -24a + 12a^2 + 2 - a - 2a(12a + 6 - 2a^2 - a) = \\ & = 12a^2 - 25a + 2 - 2a(-2a^2 + 11a + 6) = \\ & = 12a^2 - 25a + 2 + 4a^3 - 22a^2 - 12a = \\ & = 4a^3 - 10a^2 - 37a + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4 \cdot (0,1)^3 - 10 \cdot (0,1)^2 - 37 \cdot 0,1 + 2 = \\ & = 0,004 - 0,1 - 3,7 + 2 = 2,004 - 3,8 = -1,796 \end{aligned}$$

b) $\left(-4a + \frac{1}{3}\right)(6 - 3a) - 2a(3 - 0,5a)(4a + 2)$ dla $a = 0,1$

Mnożymy jednomiany przez sumy algebraiczne, redukujemy wyrazy podobne.

W otrzymanym wyrażeniu za x podstawiamy 5 i wykonujemy obliczenia.

Mnożymy sumy algebraiczne, redukujemy wyrazy podobne.

Mnożymy sumę algebraiczną przez jednomian.

Redukujemy wyrazy podobne, porządkujemy wyrazy sumy, zaczynając od wyrazu, w którym zmienna jest w najwyższej potęgze.

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia, podstawiając za a liczbę 0,1.

1. Zapisz wyrażenie $(-(2-x) + 2(3-x) - x) : 2$ w najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $x = 4$.
2. Przekształć wyrażenie $-1,5(20x^2 - 8x + 4) - (-27x^2 + 10x - 4)$ do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $x = -1$.

Przykład 2

Jak się zmieni pole rombu, jeśli każdy z jego dwóch równoległych boków o długości $a + 5$ zmniejszymy o 1, a wysokość o długości $a + 3$ opuszczoną na jeden z tych boków zwiększymy o 1?

Pole rombu, przed zmianami, zapiszemy jako:

$$P_1 = (a + 3)(a + 5) = a^2 + 5a + 3a + 15 = a^2 + 8a + 15$$

Pole figury po zmianach:

$$P_2 = (a + 4)(a + 4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$$

$$\text{Zatem: } P_2 > P_1 \text{ czyli } (a^2 + 8a + 16) - (a^2 + 8a + 15) = \\ = a^2 + 8a + 16 - a^2 - 8a - 15 = 1$$

Pole rombu zwiększyło się o 1.

3. Jak zmieni się pole kwadratu o boku długości $x + 6$, jeśli dwa równoległe boki zwiększymy o 2, a pozostałe dwa zmniejszymy o 2?

Przykład 3

Obliczmy sumę dwóch liczb dwucyfrowych, wiedząc, że cyfra jedności w pierwszej liczbie jest o 3 większa od cyfry dziesiątek, a druga liczba powstała z przestawienia cyfr w pierwszej liczbie.

Oznaczmy przez x cyfrę w rzędzie dziesiątek pierwszej liczby. Dla ułatwienia zależności zapiszemy w tabeli.

	Cyfra w rzędzie dziesiątek	Cyfra w rzędzie jedności	Liczba	Wyrażenie po uproszczeniu
Pierwsza liczba	x	$x + 3$	$x \cdot 10 + (x + 3) \cdot 1$	$11x + 3$
Druga liczba	$x + 3$	x	$(x + 3) \cdot 10 + x \cdot 1$	$11x + 30$

Zauważmy, że cyfra x może być równa 1, 2, 3, 4, 5 lub 6.

Suma tych liczb to: $11x + 3 + 11x + 30 = 22x + 33$

Suma danych liczb dwucyfrowych jest równa $22x + 33$ (x może być równe 1, 2, 3, 4, 5 lub 6).

4. Oblicz sumę dwóch liczb dwucyfrowych, wiedząc, że cyfra dziesiątek pierwszej liczby jest o 2 mniejsza od jej cyfry jedności, a druga liczba powstała z przestawienia cyfr pierwszej.

Przykład 4

Ile lat mieli razem Marta i Tomek dwa lata temu, jeżeli Tomek jest o 3 lata starszy od Marty, a Marta za 5 lat będzie miała x lat?

Zapiszmy w tabeli informacje podane w zadaniu.

	Za 5 lat	Obecnie	2 lata temu	Wyrażenie po uproszczeniu
Wiek Marty	x	$x - 5$	$(x - 5) - 2$	$x - 7$
Wiek Tomka	$x + 3$	$(x + 3) - 5$	$((x + 3) - 5) - 2$	$x - 4$

Zauważmy, że x musi być większe od 7 lub równe 7.

Obliczamy, ile lat mieli razem dwa lata temu Marta i Tomek.

$$x - 7 + x - 4 = 2x - 11$$

Dwa lata temu Marta i Tomek mieli razem $(2x - 11)$ lat.

5. Ojciec jest obecnie 3 razy starszy od syna. Ile lat będą mieć razem
za 2 lata, jeśli obecnie syn ma x lat?
-

Przykład 5

Janek wybrał się w odwiedziny do cioci mieszkającej w innym mieście. Najpierw szedł y godzin z prędkością $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Potem jechał autobusem ze średnią prędkością o $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ większą i w czasie o pół godziny krótszym, niż szedł pieszo. Następnie jechał jeszcze taksówką w czasie o 10 minut krótszym i ze średnią prędkością o $25 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ większą, niż jechał autobusem. Zapiszmy za pomocą wyrażenia algebraicznego łączną długość drogi, którą pokonał Janek.

Zwróćmy uwagę, że $10 \text{ min} = \frac{10}{60} \text{ h} = \frac{1}{6} \text{ h}$. Zapiszmy w tabeli informacje podane w zadaniu.

Sposób podróżowania	Prędkość $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$	Czas (h)	Długość drogi (km)
pieszo	x	y	xy
autobusem	$x + 50$	$y - \frac{1}{2}$	$(x + 50)\left(y - \frac{1}{2}\right)$
taksówką	$x + 50 + 25$	$y - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$	$(x + 75)\left(y - \frac{2}{3}\right)$

Wyrażenie opisujące łączną długość drogi pokonanej przez Janka to:

$$xy + (x + 50)\left(y - \frac{1}{2}\right) + (x + 75)\left(y - \frac{2}{3}\right) = xy + xy - \frac{1}{2}x + 50y - 25 + xy - \frac{2}{3}x + 75y - 50 = 3xy - 1\frac{1}{6}x + 125y - 75$$

Janek przebył drogę o długości $(3xy - 1\frac{1}{6}x + 125y - 75)$ km.



Aby obliczyć długość pokonanej drogi, należy pomnożyć prędkość, z jaką się porusza dany obiekt, przez czas ruchu tego obiektu.

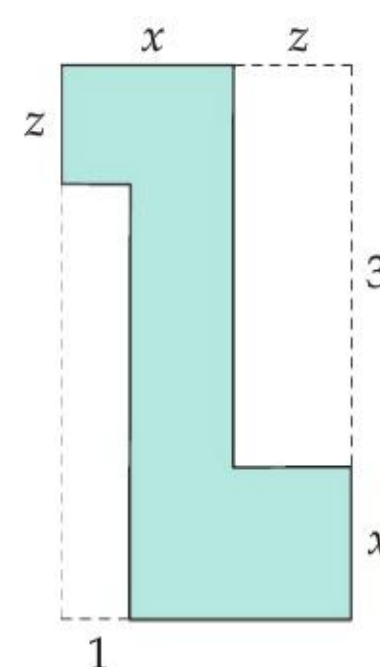
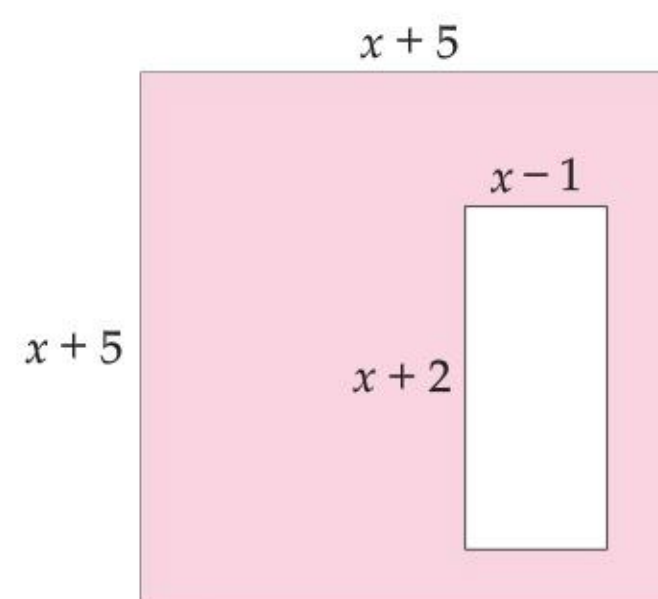
6. Odległość między miastami E i F jest równa $(x + 5)$ km. Autobus pokonuje tę trasę w ciągu 20 minut. Z jaką średnią prędkością jedzie ten autobus?

Zadania

- Zapisz każde wyrażenie w najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla podanej liczby.
 - a) $-2a(a - b) + (a + 3)(a - 3) - (b - 3a)(b + 3a) - 2ab$ dla $a = 0,5$, $b = -3$
 - b) $3(2p^2 + 1) - (2p - 3)(2p + 2) - 2p(p + 4)$ dla $p = -1\frac{1}{6}$
 - c) $-(4x + y)(y - 4x) + (x + 4y)(x - 3y)$ dla $x = -\sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$
 - d) $6(a + 3b) + 3(2a - 5b)$ dla $a = 0,5$ i $b = -\frac{1}{3}$
 - e) $3(x + y + 4) - 5(x + z - 2) + 2(y + z + 1)$ dla $x = -1\frac{1}{2}$, $y = 0,2$ i $z = 2\frac{2}{3}$
 - f) $-4(pq + p - q) + 3(qp + p) - 2(3q - 2p)$ dla $p = 1\frac{1}{3}$ i $q = 1,5$
- Wiedząc, że $P = 3a + 4$, $R = 7 - 2a$, $S = -a^2 + 2a - 3$, wykonaj podane działania.
 - a) $2S + P \cdot R$ b) $-P \cdot R - 3S$ c) $P \cdot S + 5R$ d) $R \cdot S - 2P$
- Zmieszano 3 kg ciastek maślanych po x zł za 1 kg oraz 2 kg ciastek czekoladowych, których cena za kilogram jest dwukrotnie większa niż cena ciastek maślanych. Jaka jest cena 1 kg tej mieszanki?
- Pani Ania kupiła $(m + 2)$ kg winogron, płacąc po $(m + 3)$ zł za kilogram. Następnego dnia kupiła $(m - 1)$ kg winogron w cenie $(m + 4)$ zł za kilogram. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego łączny koszt zakupu winogron.
- W bibliotece domowej państwa Rozczytanych są dwa regały, a w każdym z nich po k półek. Na każdej półce stoi po $3k + 5$ książek. Zapisz wyrażenie opisujące liczbę książek stojących na tych regałach. Jaka najmniejszą liczbę książek mogą mieć państwo Rozczytani? Odpowiedź uzasadnij.
- Ile lat mają razem Ula i Marta, jeśli Marta jest o 2 lata starsza od Uli, a Ula za pięć lat będzie miała x lat?
- ★ Ile lat będą mieć razem Staś i Piotr za 8 lat, jeśli trzy lata temu Staś był dwa razy starszy od Piotra? Obecnie Piotr ma w lat.
- Początkowo książka kosztowała a zł. W lutym cenę książki obniżono o $b\%$, a w marcu nową cenę obniżono o $c\%$.
 - a) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego cenę książki po dwukrotnej obniżce.
 - b) Pan Marcin kupił książkę w lutym – po pierwszej obniżce. Pani Adela kupiła książkę w kwietniu – po dwukrotnej obniżce. O ile złotych mniej zapłaciła pani Adela niż zapłacił pan Marcin?

Wykonaj obliczenia dla $a = 150$ zł, $b = 20\%$, $c = 10\%$.

- ☀️ Telewizor przed podwyżką kosztował c zł, a po podwyżce 2000 zł. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, o ile procent podwyższono cenę telewizora.
- ☀️ Agata i Bartek przez pół godziny płynęli kajakiem pod prąd rzeki, a potem przez kwadrans z prądem rzeki z prędkością własną $x \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Zapisz wyrażenie opisujące drogę, którą przepłynęli Agata i Bartek, przyjmując, że prędkość prądu rzeki wynosi $y \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- Obwód trójkąta jest równy $6a$. Jeden z boków ma długość $a + b$. Drugi jest od niego krótszy o $1,5a$. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.
- Jeden bok prostokąta ma $(a + 5)$ cm. Drugi bok jest o 1 cm krótszy. Jak zmieni się pole prostokąta, jeśli jeden z boków zwiększymy, a drugi zmniejszymy dwa razy? Rozpatrz dwa przypadki.
- W kwadratowym kawałku blachy wycięto prostokątny otwór tak, jak pokazano na rysunku. Oblicz pole powierzchni pozostałej części blachy.
Zapisz, jakie wartości może przyjmować x .
- Z prostokątnej wykładziny odcięto prostokątne kawałki tak, jak pokazano na rysunku. Oblicz pole powierzchni pozostałej części wykładziny.
Zapisz, jaki warunek muszą spełniać liczby x i z .
- Uzasadnij, że:
- suma czterech kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest podzielna przez 8,
 - suma trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest liczbą podzielną przez 6,
 - suma liczby naturalnej i kwadratu tej liczby jest liczbą parzystą.
- ☀️ Uzasadnij, że suma dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 4.
- Uzasadnij, że różnica kwadratu liczby naturalnej dodatniej i tej liczby jest liczbą parzystą.
- ☀️ Wykaż, że różnica liczby trzycyfrowej i liczby, która powstanie z tej liczby po przestawieniu cyfry jedności i cyfry setek, jest podzielna przez 9.
- Wykaż, że wartość wyrażenia dla $\frac{x}{6} - \left(\frac{x-4}{2} + \frac{3-x}{3}\right)$ każdej liczby wymiernej x jest liczbą dodatnią.



Podsumowanie działu 6

Ważne pojęcia

wyrażenie algebraiczne	zmienna	jednomiany podobne	jednomian	suma algebraiczna
spółczynnik liczbowy jednomianu		porządkowanie jednomianu	redukcja wyrazów podobnych	

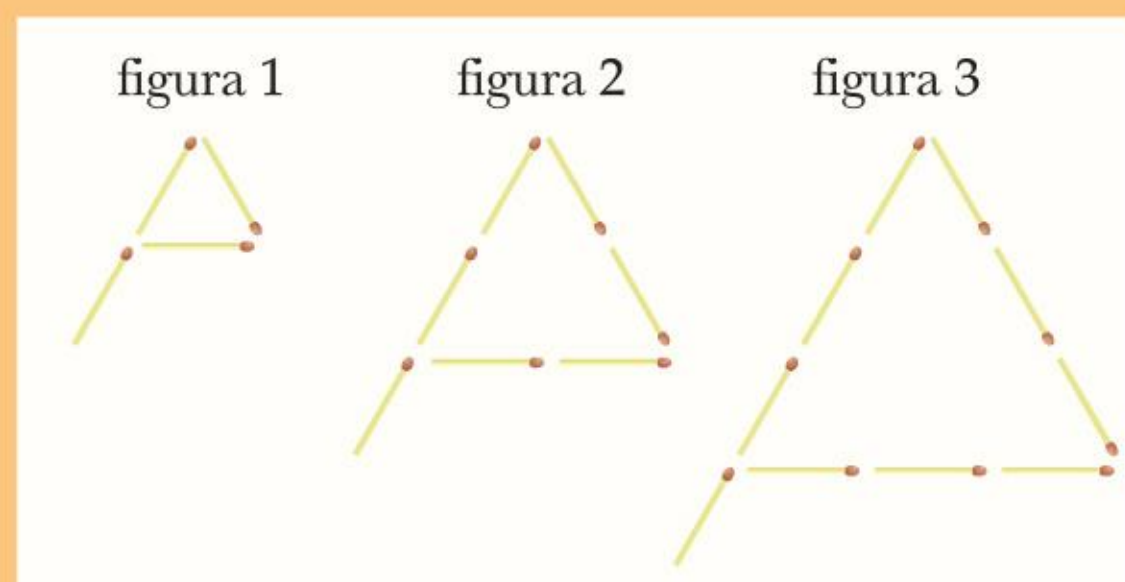
- Nazwę wyrażenia algebraicznego** określa to działanie, które należy wykonać jako ostatnie zgodnie z zasadą kolejności wykonywania działań.
 $5x + y$
 $\frac{1}{2}(x - y)^2$
suma iloczynu liczb 5 i x oraz liczby y
połowa kwadratu różnicy liczb x i y
- Jednomianem** nazywamy wyrażenie, które jest liczbą, literą (zmienną) lub iloczynem liczb i liter (zmiennych).
 $3x, -4a^2b, 0,6rs^3$
- Liczbę występującą w uporządkowanym jednomianie nazywamy **współczynnikiem liczbowym jednomianu**.
 $-7x \quad \frac{4}{9}z^2$
↑ ↑
współczynniki liczbowe
- Jednomianami podobnymi** (wyrazami podobnymi) nazywamy jednomiany, które różnią się tylko współczynnikami liczbowymi.
 $-\frac{6}{7}x^3y^2 \quad -x^3y^2$
- Wyrażenie, które powstaje przez dodawanie jednomianów, nazywamy **sumą algebraiczną**.
 $3x + 2y + z$
↑ ↑ ↑
wyrazy sumy
- Przekształcanie sumy algebraicznej, które polega na zastąpieniu kilku wyrazów podobnych jednym jednomianem, nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.
 $-\underline{3a} + \underline{7b} - 1 - \underline{5b} - 6 + \underline{2a} = -a + 2b - 7$
- Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian**
 $a(b + c) = ab + ac$
 $-2a(a - 3b + 0,6c) = -2a^2 + 6ab - 1,2ac$
- Mnożenie sum algebraicznych**
 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
 $(x - 2y)(5y + 2) = 5xy + 2x - 10y^2 - 4y$
- Zamianę sumy algebraicznej na iloczyn nazywamy **wyłączaniem wspólnego czynnika przed nawias**.
 $24a^3b - 16ab^2 + 32ab = 8ab(3a^2 - 2b + 4)$

Czy już umiesz?

- 1 Sześcian liczby x zmniejszony o 6 to
A. $3x - 6$ B. $3(x - 6)$
C. $x^3 - 6$ D. $(x - 6)^3$
- 2 Suma czterech liczb dodatnich, z których pierwsza to x , a każda następna jest 2 razy większa od poprzedniej, jest równa
A. $4x + 14$ B. $4x + 16$
C. $8x$ D. $15x$
- 3 Katarzyna miała x złotych. Wydała czwartą część posiadanych pieniędzy i jeszcze 4 zł. Ile pieniędzy jej zostało?
A. $(x - 4)$ zł B. $(\frac{1}{4}x - 4)$ zł
C. $(0,25x + 4)$ zł D. $(\frac{3}{4}x - 4)$ zł
- 4 Ile to sekund: k godzin i p minut?
A. $360k + 60p$ B. $600k + p$
C. $3600k + 60p$ D. $60k + 360p$
- 5 Za 45 dag cukierków w cenie x zł za kilogram oraz 30 dag czekoladek o 25% droższych zapłacimy
A. $0,0525x$ B. $0,0825x$
C. $0,525x$ D. $0,825x$
- 6 Wyrażenie $2(-3a + b) - (a + 4b)$ po przekształceniu ma postać:
A. $-7a - 2b$ B. $-7a + 6b$
C. $2 - 4a - 3b$ D. $2 - 4a + 5b$
- 7 Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego $2a + (-3b - a) - (-b)$ dla $a = 6$, $b = -2$ jest równa
A. 2 B. 10 C. 22 D. 26
- 8 W którym z przykładów poprawnie przekształcono wyrażenie algebraiczne?
A. $2(a - 3b) - (3a - b) = -a - 7b$
B. $-(7m - 2p) + (-3p - 2m) = -9m - 5p$
C. $6(x + y - 1) - 3(-x - y + 2) = 9x + 9y$
D. $3ab - 2(5a - 7b) - (1 - 4a + 2b) = 3ab - 6a + 12b - 1$

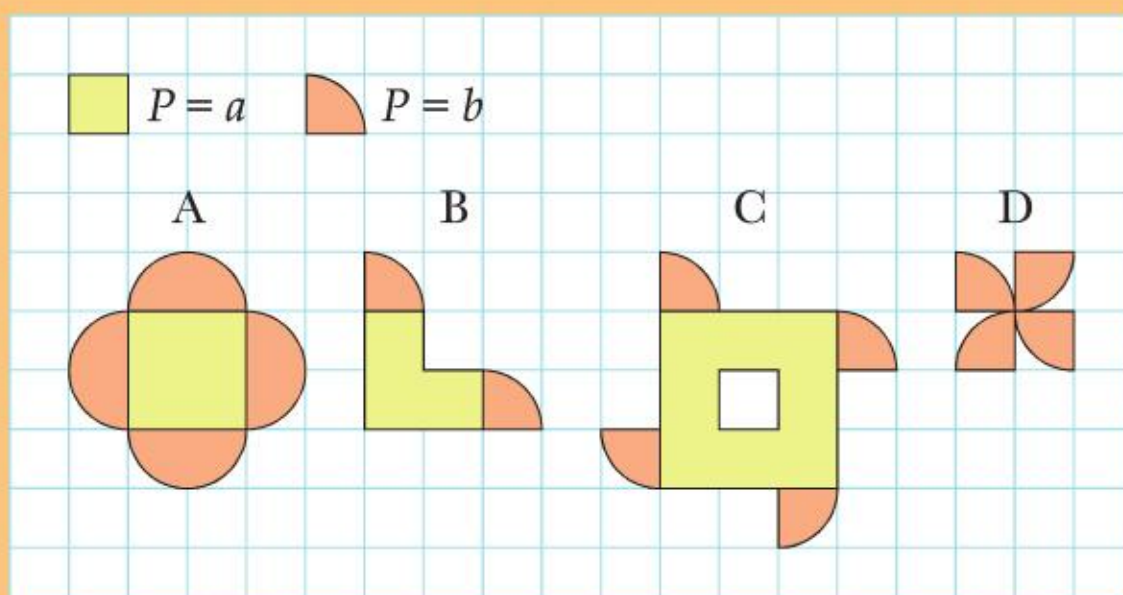
- 9 Iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 5, z których mniejsza to $x - 2$, jest równy:
A. $5x^2 - 25$ B. $x^2 + 3x - 10$
C. $x^2 - 12x + 35$ D. $x^2 + x - 6$
- 10 Kolejne figury tworzone są z zapalek, według pewnej reguły. Odkryj tę regułę, przerysuj do zeszytu tabelkę i ją uzupełnij.

Numer figury	1	2	3	4	5	6	n
Liczba zapalek	4	7	10	?	?	?	?

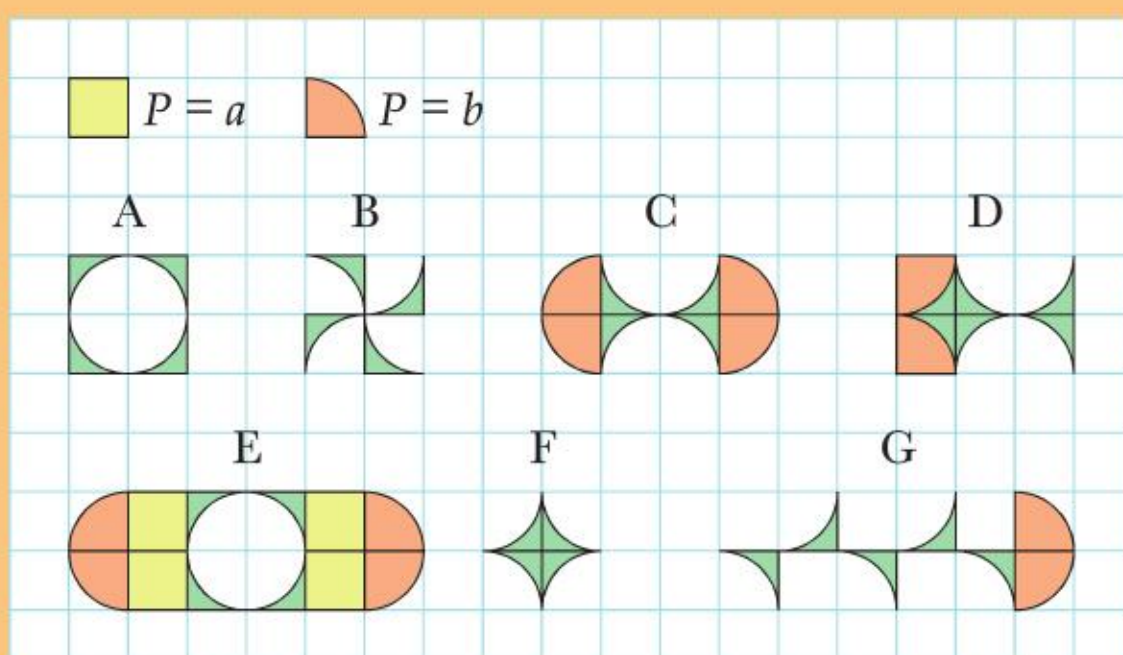


- 11 Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego obwód figury przedstawionej na rysunku. Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $c = 3,5$.
- 12 Zapisz symbolicznie sumę kwadratów liczb a i b pomniejszoną o podwojony iloczyn tych liczb. Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $a = -2$ i $b = 3$.
- 13 Oblicz sumę czterech kolejnych liczb naturalnych nieparzystych, z których największa to $2n + 1$.
- 14 Boki prostokąta mają długości x cm i y cm. Jeden z boków zwiększono o 3 cm, a drugi zwiększono o 5 cm. O ile centymetrów powiększył się obwód tego prostokąta?

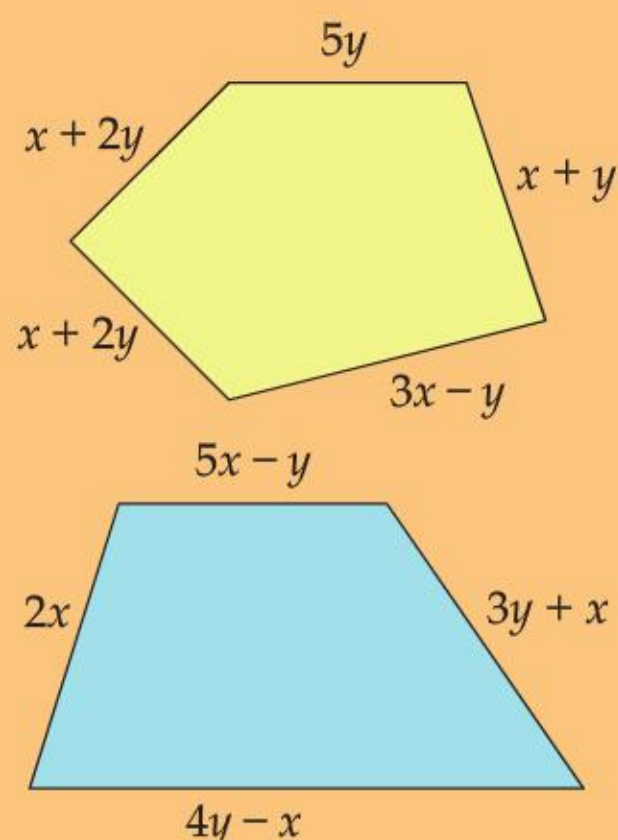
- 15 Wiedząc, że pole kwadratu zamalowanego na żółto jest równe a , a pole figury zamalowanej na pomarańczowo jest równe b , zapisz wzory na pola figur A, B, C, D.



- 16 Wiedząc, że pole kwadratu zamalowanego na żółto jest równe a , a pole figury zamalowanej na pomarańczowo jest równe b , zapisz wzory na pola figur: A, B, C, D, E, F, G.



- 17 Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego obwód każdego z wielokątów przedstawionych na rysunku. Podaj konieczne założenia.

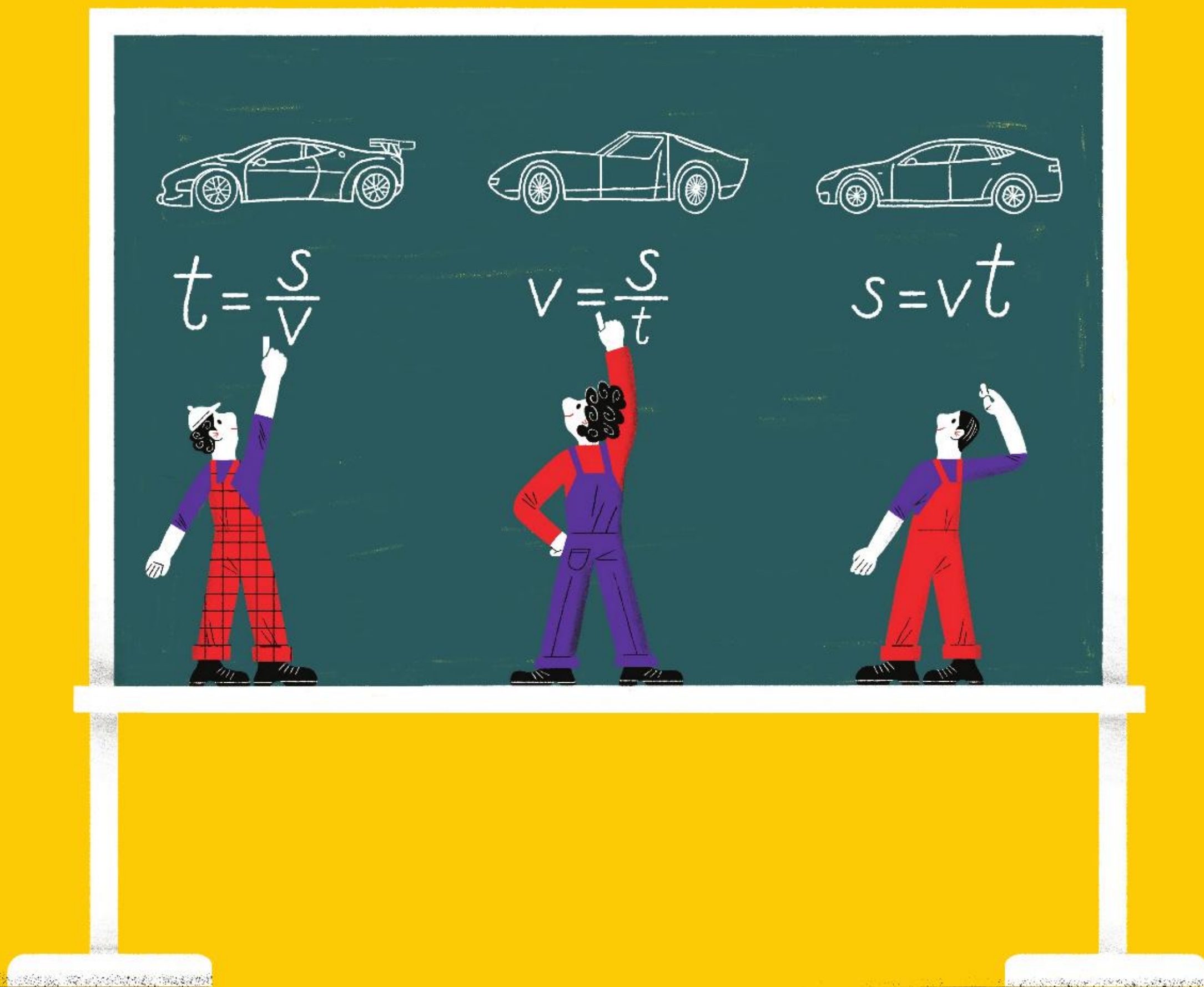


- 18 Za 0,5 kg gruszek Jacek zapłacił m złotych. Ile złotych musiałby zapłacić za 3,5 kg gruszek?
- 19 Tomek ma s samochodzików, Kuba ma ich o połowę mniej niż Tomek. Jurek ma o 5 więcej samochodzików niż Kuba, a Damian o 2 mniej niż Jurek. Ile samochodzików razem mają chłopcy?
- 20 Postępuj według podanej instrukcji.
- Pomyśl dowolną liczbę.
 - Dodaj 5.
 - Wynik zwiększ dwukrotnie.
 - Odejmij 2.
 - Podziel przez 2.
 - Odejmij pomyślaną liczbę.

Czy otrzymana przez ciebie liczba to 4? Wyjaśnij, dlaczego można było przewidzieć końcowy wynik.

- 21 Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego różnicę dwóch liczb, z których pierwsza przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2, a druga przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3.
- 22 Liczba A jest liczbą dwucyfrową niepodzielną przez 10. Po przestawieniu cyfr w tej liczbie otrzymano liczbę B . Wykaż, że liczba $C = A + B$ jest podzielna przez 11.
- 23 Ile razy wzrośnie pole powierzchni, a ile razy objętość sześcianu, którego każdą krawędź zwiększono o 20%?
- 24 Z prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach $(2x + 1)$ cm i $(4x - 1)$ cm wycięto kwadrat o boku długości $(2x - 3)$ cm. Ile cm^2 kartonu pozostało?
- 25 Wiadomo, że $(x - 1)(x + 1) = 2$. Ile jest równe $(x - 2)(x + 2)$?
- 26 Jak zmieni się obwód, a jak pole kwadratu o boku długości a , jeżeli długość boku zmniejszymy o 10%?

7. Równania z jedną niewiadomą

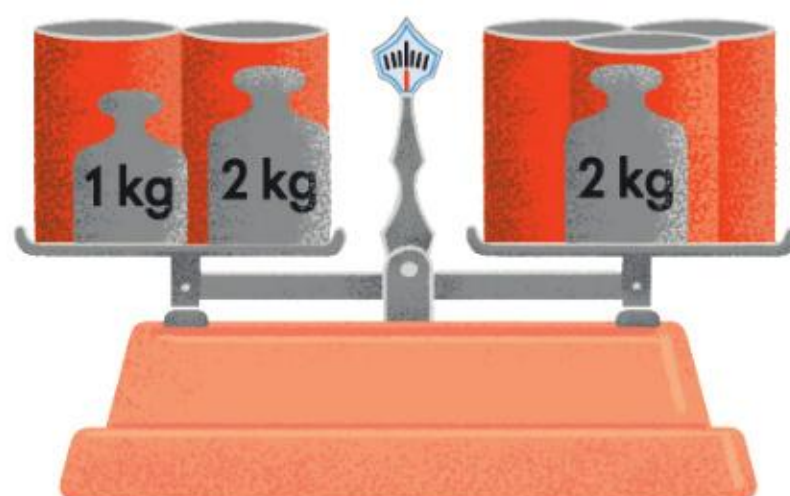


1. Czy wiesz, co oznaczają litery s , v , t w podanych wzorach?
2. Jakie przekształcenia trzeba wykonać, aby z pierwszego wzoru otrzymać drugi wzór?
3. A jakie przekształcenia trzeba wykonać, aby z drugiego wzoru otrzymać trzeci wzór?
4. Jakie znasz wzory, w których występują litery? Zapisz jeden z takich wzorów. Co możesz obliczyć za pomocą tego wzoru? Co oznaczają litery w tym wzorze?
5. Podaj przykład równania. Jaką literą jest oznaczona niewiadoma w twoim równaniu? Wyznacz tę niewiadomą.

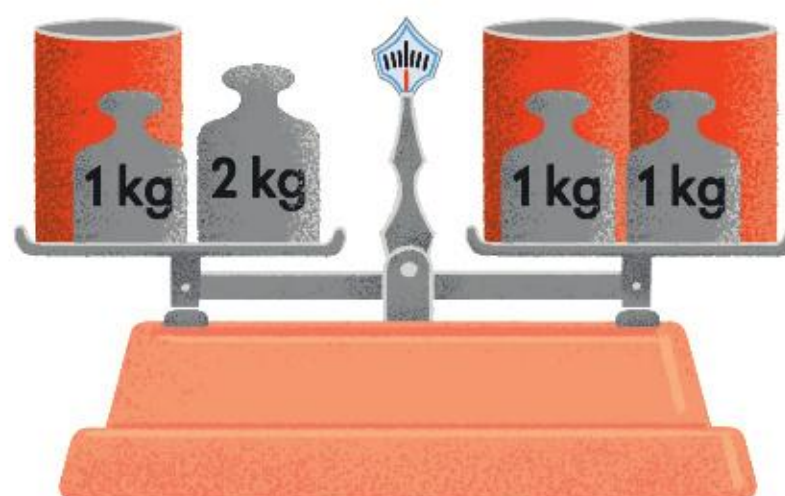
7.1 Przykłady równań. Liczby spełniające równania

Podejmij temat

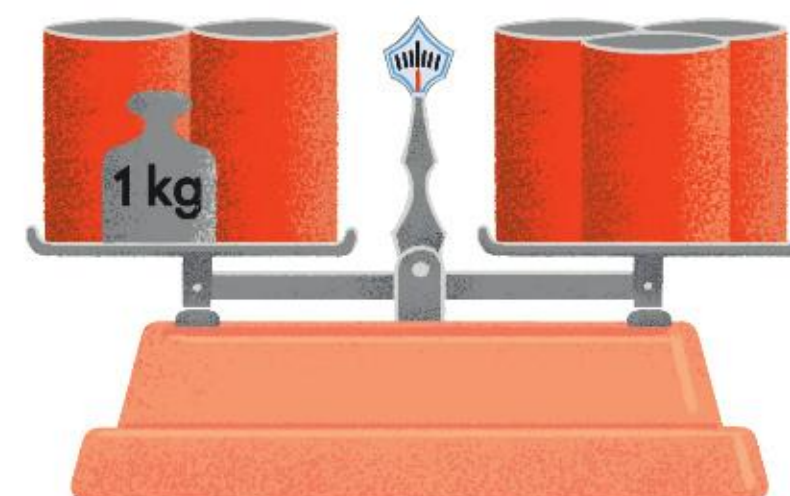
- Przyjrzyj się rysunkom. Na szalkach wagi pozostającej w równowadze umieszczone są jednakowe pojemniki oraz odważniki o masie 1 kg i 2 kg. Sytuacje przedstawione na rysunkach opisane zostały za pomocą równań.



$$2x + 3 = 3x + 2$$



$$x + 3 = 2x + 2$$



$$2x + 1 = 3x$$



Co oznacza litera x w równaniu znajdującym się pod każdą wagą?

Ile waży jeden pojemnik? W jaki sposób sprawdzisz, czy twoje przypuszczenia były słuszne?



Czy pamiętasz?

Niewiadomą w równaniu możemy oznaczać różnymi literami alfabetu, np. x, z, a, b , lub różnymi znakami, np. $?, *, \square$. Najczęściej jednak używamy litery x .

Równaniem nazywamy równość dwóch wyrażeń algebraicznych, np.: $3y + 6 = y - 2$, $81 : x = 3$, $5x + x = 48$.

Litery x, y występujące w równaniu nazywamy **niewiadomymi**.

Przykład 1

Opiszmy za pomocą równania przedstawioną poniżej sytuację.

Maksym ma w portfelu x monet 5-złotowych, 3 razy więcej monet 2-złotowych niż 5-złotowych i trzy monety 1-złotowe. Razem ma 80 zł.

Wprowadzamy oznaczenia:

x – liczba monet 5-złotowych

$3x$ – liczba monet 2-złotowych

$5x$ – kwota pieniędzy w monetach 5-złotowych

$2 \cdot 3x$ – kwota pieniędzy w monetach 2-złotowych

Układamy równanie:

$$5x + 2 \cdot 3x + 3 = 80$$

1. Opisz za pomocą równania przedstawioną poniżej sytuację.

Kilogram jabłek kosztuje y zł. Kilogram bananów jest o 3 zł droższy niż kilogram jabłek. Kilogram gruszek kosztuje 4 zł. Wojtek kupił 3 kg jabłek, po kilogramie bananów i gruszek i za wszystko zapłacił 19 zł. Ile kosztuje kilogram jabłek?

Równania:

$$x + 156 = 464 \quad 35 \cdot y^2 = 1575$$

to **równania z jedną niewiadomą**. W pierwszym równaniu niewiadoma została oznaczona przez x , w drugim przez y .

W równaniu może wystąpić więcej niż jedna niewiadoma. Na przykład:

$$k + 1 = 10w \quad x + y = 5 \quad a + b - 20 = 7$$

to **równania z dwiema niewiadomymi**.

Stopień równania to największy wykładnik potęgi niewiadomej w danym równaniu.

Przykład 2

Określmy stopień równania.

a) $x + 3 = 2x$ b) $y^5 - y = 20$ c) $-z^4 + 2 = 3z$

a) $x + 3 = 2x$ równanie pierwszego stopnia

b) $y^5 - y = 20$ równanie piątego stopnia

c) $-z^4 + 2 = 3z$ równanie czwartego stopnia

2. Określ stopień podanych równań.

a) $y^2 - 6y - 9 = 0$

b) $a + a^3 - 2a^4 = 5$

c) $6 = x^7$

d) $k - 5 = 4k$

Przypomnijmy, jak sprawdzamy, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania.

Mówimy, że **liczba spełnia** równanie (jest **rozwiązaniem równania** lub **pierwiastkiem równania**), jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej otrzymujemy równość. Wszystkie liczby spełniające równanie tworzą **zbiór rozwiązań** równania.

Ciekawe!

Szesnastowieczny walijski lekarz, fizyk i matematyk Robert Recorde (czyt rikord; ok. 1510–1558), prawdopodobnie jako pierwszy w dziejach matematyki użył znaku $=$ na oznaczenie równości. Jak twierdził, wprowadził znak $=$ dla uniknięcia ciągłego używania słów „jest równe”.

Przykład 3

Sprawdźmy, czy liczby: -3 , 5 są rozwiązaniami równania:

$$2(x - 1) = x + 3.$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{2(x-1)} & = & \boxed{x+3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{lewa strona} & & \text{prawa strona} \\ \text{równania (L)} & & \text{równania (P)} \end{array}$$

Do równania w miejsce x podstawiamy liczbę 5 .

$$\begin{array}{l} \text{Lewa strona równania: } L = 2 \cdot (5 - 1) = 2 \cdot 4 = 8 \\ \text{Prawa strona równania: } P = 5 + 3 = 8 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} L = 2 \cdot (5 - 1) = 2 \cdot 4 = 8 \\ P = 5 + 3 = 8 \end{array}} \right\} \rightarrow L = P$$

Lewa strona równania jest równa prawej stronie, zatem liczba 5 spełnia równanie $2(x - 1) = x + 3$.

Do równania w miejsce x podstawiamy liczbę -3 .

$$\begin{array}{l} \text{Lewa strona równania: } L = 2 \cdot (-3 - 1) = 2 \cdot (-4) = -8 \\ \text{Prawa strona równania: } P = -3 + 3 = 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} L = 2 \cdot (-3 - 1) = 2 \cdot (-4) = -8 \\ P = -3 + 3 = 0 \end{array}} \right\} \rightarrow L \neq P$$

Lewa strona równania nie jest równa prawej stronie, zatem liczba -3 nie spełnia równania $2(x - 1) = x + 3$.

3. Sprawdź, czy liczba 1 spełnia podane równania.

- a) $10 - 2x = x + 7$
- b) $x - 6 = 6 - x$
- c) $(x + 9) : 5 = 2$

Zauważmy, że równania:

$$10 - 2x = x + 7 \text{ i } (x + 9) : 5 = 2 \text{ (ćwiczenie 3)}$$

spełniała ta sama liczba – liczba 1 .

O takich równaniach mówimy, że są **równoważne**.

4. Zgadnij, jakie liczby spełniają podane równania. Sprawdź swoje przypuszczenia. Wskaż parę równań równoważnych.

- a) $x - 7 = 2$
- b) $2 - x = 7$
- c) $7 - x = -2$
- d) $-7 = x - 2$

Dotychczas rozważaliśmy równania, które mają tylko jedno rozwiązanie. Jednak niektóre równania mogą mieć więcej rozwiązań.

Przykład 4

Sprawdźmy, które z liczb: $-3, -1, 2, 3, 4$, spełniają podane równania.

a) $x^2 = 9$

b) $\frac{2}{x} + 1 = x$

a) $(-3)^2 = 9$

Liczba -3 spełnia dane równanie.

$(-1)^2 = 1 \neq 9$

Liczba -1 nie spełnia równania.

$2^2 = 4 \neq 9$

Liczba 2 nie spełnia równania.

$3^2 = 9$

Liczba 3 spełnia równanie.

$4^2 = 16 \neq 9$

Liczba 4 nie spełnia równania.

b) $\frac{2}{-3} + 1 = \frac{1}{3} \neq -3$

Liczba -3 nie spełnia równania.

$\frac{2}{-1} + 1 = -1$

Liczba -1 spełnia równanie.

$\frac{2}{2} + 1 = 2$

Liczba 2 spełnia równanie.

$\frac{2}{3} + 1 = 1\frac{2}{3} \neq 3$

Liczba 3 nie spełnia równania.

$\frac{2}{4} + 1 = 1\frac{1}{2} \neq 4$

Liczba 4 nie spełnia równania.

5. Sprawdź, które z liczb: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ spełniają podane równania.

a) $x^2 = 4$

b) $\frac{x^2 + 2}{3} = x$

c) $x^2 - 2x - 3 = 0$

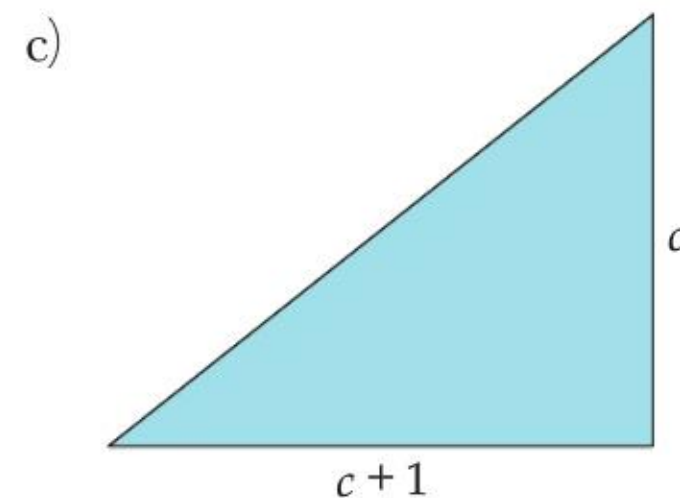
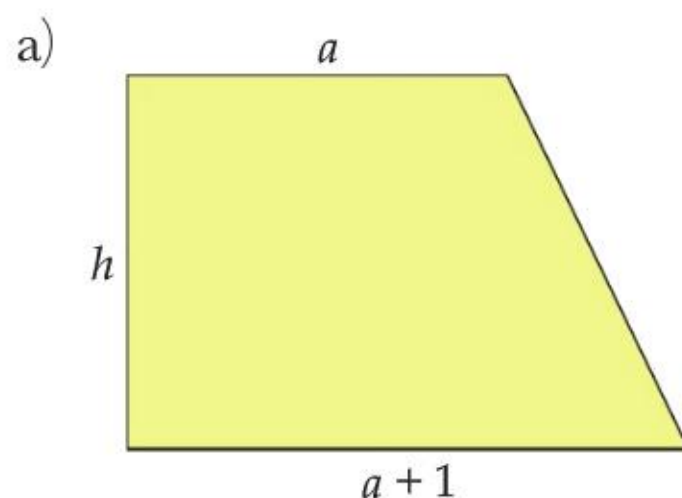
d) $\frac{4}{x^2 + 1} = x + 1$

Zadania

Opisz za pomocą równania każdą sytuację przedstawioną w zadaniu.

- Za x bułek w cenie 80 gr każda i $2x$ rogalików w cenie 2,30 zł każdy zapłacono 32,40 zł.
- Mały jogurt kosztuje x złotych. Duży jogurt jest o 1,50 zł droższy. Za trzy duże jogurty i dwa małe jogurty zapłacono 9 zł.
- Początkowo plecak kosztował x zł. Po obniżce ceny o 10% plecak kosztuje 81 zł.
- W koszyku są gruszki, jabłka i śliwki – razem 26 sztuk owoców. Gruszek jest a sztuk, jabłek jest 3 razy więcej niż gruszek, a śliwek jest o 5 więcej niż jabłek.
- W trzydziestoosobowej klasie jest p chłopców i o cztery dziewczynki więcej niż chłopców.
- Suma kwadratu liczby x i sześciastu liczby o trzy od niej mniejszej jest równa 33.

- Na rysunku przedstawiono trapez prostokątny, prostokąt i trójkąt. Pole każdej z tych figur jest równe 5. Zapisz równania opisujące pola tych figur.



- Z podanych równań wybierz równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

$x = 2x + x^4$ $x = 2x + x$ $x = 2x + y$ $x = x + 2$

- Zapisz liczbę, którą należy podstawić w miejsce x , aby otrzymać równość.

a) $x - 7 = 4$ b) $4x = -8$ c) $2x = x$ d) $2(x - 1) = 6$

- Sprawdź, która z liczb spełnia podane równanie.

a) $4a - 7 = 13$	2; 4; 5	b) $3x + 1 = 4x - 2$	-2; 1; 3
c) $(y - 5)(2 + y) = -6$	-1; 0; 4	d) $2m(m - 3) = 4m$	-6; 0; 5

- Podaj przykład równania, którego rozwiązaniem jest podana liczba.

a) -1 b) 10 c) 0 d) 0,4

- Sprawdź, czy podana liczba jest rozwiązaniem równania.

a) $-12x + 10 + 6x = -8 - 3x$	6	b) $3(17y - 9) = 12(4y - 1)$	-5
c) $12 - a - 5(a - 6) = 0$	7	d) $-(-(-5 - p) - p) = 5 + 2p$	-5

- ★ Rozwiązaniem każdego z podanych równań z niewiadomą x jest liczba 10. Zgadnij, jaką liczbą jest a .

a) $x + a = 10$	b) $2x - a = 4$
c) $(x + 6) : 2 = a$	d) $6 - x = a + 2$

- Zapisz za pomocą równania poniższe zdanie. Zgadnij, jaka liczba jest rozwiązaniem zapisanego przez ciebie równania.

- Suma pewnej liczby parzystej i liczby o 2 od niej większej jest równa 34.
- Półowa pewnej liczby zwiększona o 4 jest równa 5.
- Liczba dwa razy większa od pewnej liczby jest o 3 większa od tej liczby.
- Różnica pewnej liczby i liczby 2 jest równa -3.

- Sprawdź, które z liczb całkowitych większych od -4 i mniejszych od 4 spełniają podane równania.

a) $x^3 - 2 = x - 2x^2$ b) $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

7.2 Rozwiązywanie równań I stopnia z jedną niewiadomą

Podejmij temat



Puszka brzoskwiń waży x kilogramów. Opisz za pomocą równania sytuację przedstawioną na rysunku.

Ile puszek należy zdjąć z każdej szalki, aby waga nadal pozostała w równowadze?

Opisz za pomocą równania sytuację po zdjęciu puszek z wagi.

Ile teraz należy zdjąć odważników z każdej szalki, aby dowiedzieć się, ile waży puszka?

Czy wiesz, ile waży jedna puszka?



Wykonajmy polecenie z *Podejmij temat* i zapiszmy odpowiednie równania.

Oznaczmy: x – waga puszki (w kg)

$$x + x + 1 = x + 1 + 1$$

Równanie opisujące sytuację przedstawioną na rysunku.

$$x + x + 1 - x = x + 1 + 1 - x$$

Z każdej szalki wagi zdejmujemy po jednej puszcze.

$$x + 1 = 1 + 1$$

Na lewej szalce pozostała puszka i odważnik jednokilogramowy, na prawej – dwa odważniki jednokilogramowe.

$$x + 1 - 1 = 1 + 1 - 1$$

Z każdej szalki zdejmujemy odważnik jednokilogramowy.

$$x = 1$$

Na lewej szalce pozostała puszka, na prawej odważnik jednokilogramowy. Puszka waży 1 kilogram.

Do rozwiązywania równań często stosuje się **metodę równań równoważnych**. Polega ona na takim przekształcaniu danego równania, aby na każdym etapie otrzymywać równanie prostsze, lecz równoważne danemu. Możemy w tym celu:

- do obu stron równania dodać tę samą liczbę (lub to samo wyrażenie algebraiczne),
- od obu stron równania odjąć tę samą liczbę (lub wyrażenie algebraiczne),
- obie strony równania pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera,
- obie strony równania podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.



Zapis $| + 6$ oznacza, że do każdej ze stron równania dodajemy 6.

Zapis $| - 9$ oznacza, że od każdej ze stron równania odejmujemy 9.

Zapis $| \cdot 4$ oznacza, że każdą ze stron równania mnożymy przez liczbę 4.

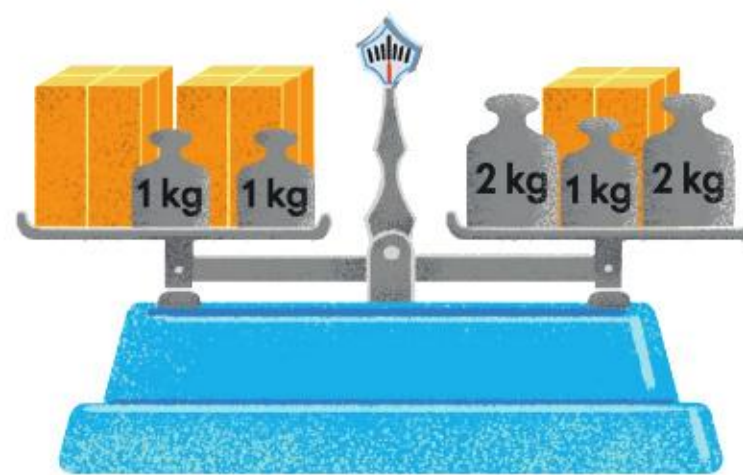
Zapis $| : (-1)$ oznacza, że każdą ze stron równania dzielimy przez liczbę -1 .

1. Opisz za pomocą równania sytuację przedstawioną na rysunku i wyznacz:

a) wagę arbuza,



b) wagę paczki.



Sposób rozwiązywania równań metodą równań równoważnych przedstawimy na kilku przykładach.

Przykład 1

Rozwiążmy równania.

a) $4 - x = 5 - 2x$

b) $3x - 4 = \frac{1}{2}x - 9$

a) $4 - x = 5 - 2x$

$$4 - x + 2x = 5 - 2x + 2x$$

$$4 + x = 5$$

$$4 + x - 4 = 5 - 4$$

$$x = 1$$

Do obu stron równania dodajemy $2x$.

Od obu stron równania odejmujemy 4.

Rozwiązaniem równania jest liczba 1.

Sprawdzenie:

$$L = 4 - 1 = 3$$

$$L = P$$

$$P = 5 - 2 \cdot 1 = 3$$

b) $3x - 4 = \frac{1}{2}x - 9$

$$3x - 4 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - 9 - \frac{1}{2}x$$

$$2\frac{1}{2}x - 4 = -9$$

$$2\frac{1}{2}x - 4 + 4 = -9 + 4$$

$$2\frac{1}{2}x = -5$$

$$2\frac{1}{2}x : 2\frac{1}{2} = -5 : 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2}x \cdot \frac{2}{5} = -5 \cdot \frac{2}{5}$$

$$x = -2$$

Od każdej ze stron równania odejmujemy $\frac{1}{2}x$.

Do każdej ze stron równania dodajemy 4.

Każdą stronę równania dzielimy przez $2\frac{1}{2}$.

Rozwiązaniem równania jest liczba -2.

Sprawdzenie:

$$L = 3 \cdot (-2) - 4 = -6 - 4 = -10$$

$$L = P$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot (-2) - 9 = -1 - 9 = -10$$

2. Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenie.

a) $x + 20 = 4$

b) $10 - 2y = 5 - 3y$

c) $m + 4 = 0,5m$

d) $2z + 6 = 7z + 1$

Przykład 2

Rozwiążmy równanie: $7 + 2(x + 1) = 3x - 4$

$$7 + 2(x + 1) = 3x - 4$$

$$7 + 2x + 2 = 3x - 4$$

Po lewej stronie równania mnożymy sumę algebraiczną przez liczbę 2.

$$9 + 2x = 3x - 4 \quad | - 3x$$

$$9 + 2x - 3x = 3x - 4 - 3x$$

Od obu stron równania odejmujemy $3x$ i redukujemy wyrazy podobne.

$$9 - x = -4 \quad | - 9$$

$$9 - x - 9 = -4 - 9$$

Od obu stron równania odejmujemy 9.

$$-x = -13 \quad | : (-1)$$

Każdą stronę równania dzielimy przez -1 .

$$x = 13$$

Rozwiązaniem równania jest liczba 13.

Sprawdzenie:

$$L = 7 + 2(13 + 1) = 7 + 2 \cdot 14 = 7 + 28 = 35$$

$$P = 3 \cdot 13 - 4 = 39 - 4 = 35$$

$$L = P$$

3. Rozwiąż równania.

a) $4(x + 2) = 3(x - 2)$

b) $4 - (x + 1) = 2(1 - x) + 1$

c) $0,2x + 0,3x = 0,6(2 + x)$

Zasady postępowania przy rozwiązywaniu równań.

- Jeżeli po jednej lub po obu stronach równania wykonamy wskazane działania, to otrzymamy równanie równoważne danemu.
- Jeżeli do każdej ze stron równania dodamy lub od każdej ze stron równania odejmiemy to samo wyrażenie, to otrzymamy równanie równoważne danemu.
- Jeżeli każdą ze stron równania pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera, to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Ciekawe!

W IX wieku arabski matematyk, astronom i geograf Muhammad ibn Musa Al-Chuwarizmi stworzył podręcznik zatytułowany *Al-dżabr waal-mukabala* będący pierwszym w historii ujęciem matematyki pod kątem jej praktycznych zastosowań, ilustrowany wieloma przykładami rozwiązywania równań. Od wyrazu w tytule tego podręcznika, który zawędrował do Europy pod nazwą zawierającą *Algebra* i *Almukabala*, powstała nazwa algebra.

Przykład 3

Rozwiążmy równanie: $2x - \frac{3x-5}{2} + 1 = \frac{2x-1}{3} + 3$.

$$\begin{aligned}2x - \frac{3x-5}{2} + 1 &= \frac{2x-1}{3} + 3 \quad | \cdot 6 \\6 \cdot 2x - \cancel{6} \cdot \frac{3x-5}{\cancel{2}_1} + 6 \cdot 1 &= \cancel{6}^2 \cdot \frac{2x-1}{\cancel{3}_1} + 6 \cdot 3 \\12x - 3(3x-5) + 6 &= 2(2x-1) + 18 \\12x - 9x + 15 + 6 &= 4x - 2 + 18 \\3x + 21 &= 4x + 16 \\3x - 4x &= 16 - 21 \\-x &= -5 \quad | : (-1) \\x &= 5\end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned}L &= 2 \cdot 5 - \frac{3 \cdot 5 - 5}{2} + 1 = 10 - \frac{10}{2} + 1 = 10 - 5 + 1 = 6 \\P &= \frac{2 \cdot 5 - 1}{3} + 3 = \frac{9}{3} + 3 = 3 + 3 = 6 \\L &= P\end{aligned}$$

Każdą ze stron równania mnożymy przez 6.

Skracamy ułamki.

Mnożymy sumy algebraiczne przez liczby.

Redukujemy wyrazy podobne.

Przekształcamy równanie tak, aby tylko po lewej stronie otrzymać wyrazy z niewiadomą. Od obu stron równania odejmujemy liczbę 21 oraz od obu stron równania odejmujemy jednomian $4x$.

4. Rozwiąż równania.

a) $\frac{x}{5} - \frac{1}{2} = 0,7x$

b) $\frac{x-1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{x}{2}$

c) $1 - \frac{3-2x}{2} = \frac{1+3x}{4}$

Przykład 4

Rozwiążmy równanie $(x-2)(x-4) + 5x = 3x - (10 - x^2)$.

$$\begin{aligned}(x-2)(x-4) + 5x &= 3x - (10 - x^2) \\x^2 - 4x - 2x + 8 + 5x &= 3x - 10 + x^2 \\x^2 - x + 8 &= 3x - 10 + x^2 \\x^2 - \cancel{x^2} - x + 8 &= 3x - 10 + x^2 - \cancel{x^2} \\-x + 8 &= 3x - 10 \\-x - 3x + 8 - 8 &= 3x - 3x - 10 - 8 \\-4x &= -18 \quad | : (-4) \\x &= 4,5\end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned}L &= (4,5 - 2)(4,5 - 4) + 5 \cdot 4,5 = 2,5 \cdot 0,5 + 22,5 = 23,75 \\P &= 3 \cdot 4,5 - (10 - 4,5^2) = 13,5 - (10 - 20,25) = 13,5 + 10,25 = 23,75 \\L &= P\end{aligned}$$

Mnożymy sumy algebraiczne.

Redukujemy wyrazy podobne.

Od obu stron równania odejmujemy x^2 .

Od obu stron równania odejmujemy $3x$ oraz liczbę 8.

Obie strony równania dzielimy przez -4 .

5. Rozwiąż podane równania.

a) $(x-1)(x+2) + 18 = (x+4)(x+1)$

b) $x^2 - 5x + 1 = (x+2)(x-8)$

Więcej na temat

Wszystkie rozwiązywane przez nas do tej pory równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą miały jedno rozwiązanie. Okazuje się, że takie równania mogą nie mieć rozwiązań albo mieć ich nieskończenie wiele.

Rozwiążmy równanie: $6(x-1) + 2 = 4 - (2-6x)$

$$6(x-1) + 2 = 4 - (2-6x)$$

$$6x - 6 + 2 = 4 - 2 + 6x$$

$$6x - 4 = 2 + 6x$$

$$6x - 6x = 2 + 4$$

$$0 = 6$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem równanie nie ma rozwiązania. Równanie takie nazywamy **równaniem sprzecznym**.

Rozwiążmy równanie: $2 - (4-x) = 3 - (5-x)$

$$2 - (4-x) = 3 - (5-x)$$

$$2 - 4 + x = 3 - 5 + x$$

$$x - 2 = -2 + x$$

$$x - x = -2 + 2$$

$$0 = 0$$

Otrzymaliśmy tożsamość, zatem równanie spełnia każda liczba rzeczywista. Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Równanie takie nazywamy **równaniem tożsamościowym**.

6. Które równanie jest równaniem sprzecznym, a które tożsamościowym?

a) $3(4x-2) = 2(6x-1)$

b) $2(4-x) + 2 = 10 - 2x$

c) $0 = 6x - 2(5 + 3x)$

Zadania

● Szalki każdej z wag są w równowadze. Oblicz, ile waży puszka i ile waży worek. Zapisz i rozwiąż odpowiednie równania.



● Do każdego z rysunków ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie.

a)

b)

c)

d)

● Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenie.

a) $-4x + 3 = 11$

b) $5y - 3 = -18$

c) $9 - 2x = 10$

d) $6 + 2y = -5 + 3y$

e) $5 - x - 2 = 3 + x - 6$

f) $3x - 1 - 4x = 6$

● Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenie.

a) $15(x + 1) = 85 + 15x$

b) $4y - 3 = 2(2y - 1,5)$

c) $x - (2x + 5) = 8$

d) $z + (9 - 2z) = 5$

e) $2(y + 4) - 3 = -5$

f) $(2x + 3) - (2x + 3) = -3$

● Rozwiąż równania.

a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}y - \frac{1}{9} = 1\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{4}z + \frac{1}{8} = -\frac{1}{2}$

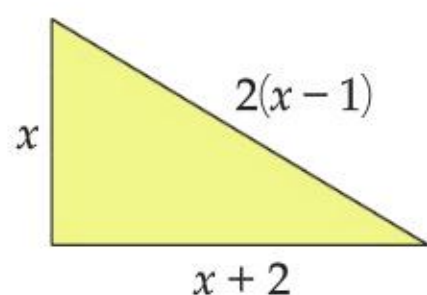
d) $\frac{1}{2}x - \frac{x}{5} + 2 = 8$

e) $\frac{3z}{3} - \frac{3z-1}{4} - \frac{1}{6} = 1$

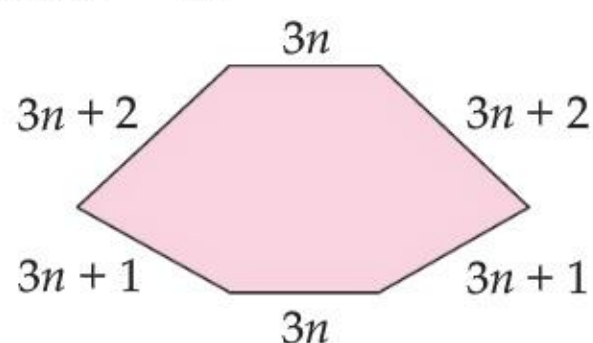
f) $\frac{x}{2} = \frac{x}{4} + \sqrt{2}$

● Zapisz i rozwiąż równania opisujące sytuacje przedstawione na rysunkach.

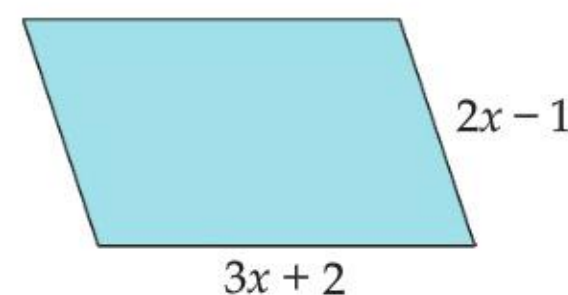
a) $Obw. = 24$



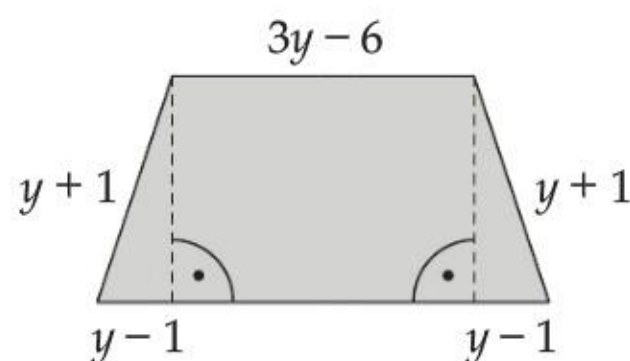
b) $Obw. = 42$



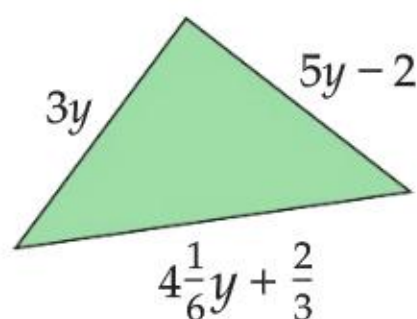
c) $Obw. = 52$



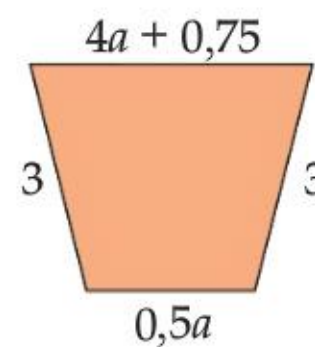
d) $Obw. = 28$



e) $Obw. = 11$



f) $Obw. = 15,75$



★ Rozwiąż równania. Wskaż równania sprzeczne i równania tożsamościowe.

a) $4 - x = 2x + 1 - 3x$

b) $7y + 8 + y = 12 + 8y - 4$

c) $3y + 5 = y + 6 + 2y$

d) $-x - 6 = 2x - 3x - 6$

e) $3z - 4 = 0,5z + 6$

f) $5,5z + 3 = 4z - 1\frac{1}{2}$

● Rozwiąż równania i wykonaj sprawdzenie.

a) $\frac{x+\sqrt{4}}{2} = \frac{-x+\sqrt{36}}{3}$

b) $(x-1)(x+1) = x(x-1)$

c) $\frac{2^3(1-x)}{8} - 5x = 6^2$

● Rozwiąż równania.

a) $(3y+4)y = y^2 + (2y+1)(y-1)$

b) $z^4 - 2z^2 + 5z + 12 = (z^2+1)(z^2-3)$

● Wskaż, w którym miejscu Ania popełniła błąd podczas rozwiązywania równania. Rozwiąż to równanie.

★ Ustal, jaką liczbą należy zastąpić literę a , żeby równanie: $11x - 2(5x + 1) = a(x - 3)$ nie miało rozwiązania.

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}x - \frac{x}{3} &= 2 - x \quad | \cdot 12 \\ 9x - 4x &= 24 - 12x \\ 5x &= 24 - 12x \\ 5x - 12x &= 24 \\ -7x &= 24 \quad | : (-7) \\ x &= -3\frac{3}{7}\end{aligned}$$

7.3 Przekształcanie wzorów

Podejmij temat



Ile kwadratów połączyła babcia, jeżeli na obszycie całej serwety zużyła L metrów ozdobnej taśmy?

Babcia Oli robi serwetę składającą się z jednakowych motywów w kształcie kwadratów o boku długości a metra. Motywy łączy w sposób przedstawiony na rysunku.

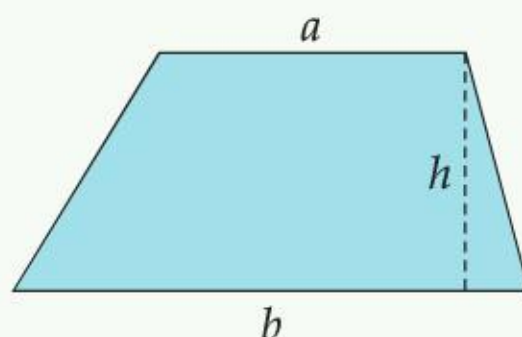


Z równaniami spotykamy się nie tylko na lekcjach matematyki. Używamy ich na lekcjach fizyki, chemii czy geografii do rozwiązywania różnych problemów z tych dziedzin. Bardzo przydatna jest wtedy umiejętność przekształcania wzorów.

Przykład 1

W trapezie przedstawionym na rysunku dłuższa podstawa ma długość b , a wysokość opuszczona na tę podstawę ma długość h . Pole trapezu jest równe P . Wyznamy długość krótszej podstawy a .

Znamy pole trapezu, jego wysokość oraz długość dłuższej podstawy. Aby wyznaczyć długość krótszej podstawy, zapiszemy i odpowiednio przekształcimy wzór na pole tego trapezu.



$$P = \frac{1}{2}(a + b)h \mid \cdot 2$$

$$2P = (a + b)h \mid : h \quad \text{Dzielimy obie strony przez } h \text{ (zauważamy, że } h \neq 0, \text{ bo } h \text{ jest wysokością trapezu).}$$

$$\frac{2P}{h} = a + b \mid - b$$

$$\frac{2P}{h} - b = a$$

$$a = \frac{2P}{h} - b$$

Krótsza podstawa trapezu ma długość $\frac{2P}{h} - b$.



Przy przekształcaniu wzorów musimy uważać przy dzieleniu przez niewiadome, ponieważ nie wolno dzielić przez liczby równe 0. Dlatego stosujemy takie założenie jak w przykładzie.

1. W trapezie krótsza podstawa ma długość a , dłuższa podstawa ma długość b . Pole trapezu jest równe P . Wyznacz wysokość h tego trapezu.

Przykład 2

Pole prostokąta, którego jeden bok jest 9 razy dłuższy od drugiego boku, jest równe P . Oblicz długość krótszego boku tego prostokąta.

Oznaczmy przez a długość krótszego boku prostokąta. Wtedy dłuższy bok ma długość równą $9a$.

$$P = a \cdot 9a$$

$$P = 9a^2 \mid : 9$$

$$\frac{P}{9} = a^2$$

$$\text{Wiemy, że } \left(\sqrt{\frac{P}{9}}\right)^2 = \frac{P}{9}.$$

$$\left(\sqrt{\frac{P}{9}}\right)^2 = a^2$$

$$\sqrt{\frac{P}{9}} = a$$

Porównujemy podstawy potęg. Wiemy, że a jest liczbą dodatnią, bo jest długością boku prostokąta.

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{9}} = a$$

Korzystamy z własności pierwiastków.

$$\frac{\sqrt{P}}{3} = a$$

$$a = \frac{\sqrt{P}}{3}$$

Krótszy bok tego prostokąta ma długość $\frac{\sqrt{P}}{3}$.

Ciekawe!

Czy wiesz, że przyspieszenie ziemskie na biegunie jest równe $9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a na równiku wynosi $9,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?



Ciśnienie możemy policzyć ze wzoru:

$p = \frac{F}{S}$, gdzie F oznacza siłę nacisku, a S pole powierzchni oddziaływania siły.

2. Pole trójkąta o wysokości 8 razy dłuższej od długości podstawy, na którą opuszczona jest ta wysokość, jest równe P . Oblicz długość tej podstawy.

Przykład 3

Oblicz masę ciała, gdy znana jest wartość siły ciężkości działającej na to ciało.

Z fizyki wiemy, że zależność między masą ciała a jego ciężarem wyraża się wzorem:

$$F_c = mg \quad (g - \text{przyspieszenie ziemskie})$$

$$F_c = mg \mid : g \quad \text{Zauważamy, że } g \neq 0.$$

$$\frac{F_c}{g} = m$$

$$m = \frac{F_c}{g}$$

Masa ciała jest równa $\frac{F_c}{g}$.

3. Wyznacz siłę nacisku, gdy znane jest ciśnienie i pole powierzchni, na którą oddziałuje ta siła.

Przykład 4

Dla ciała o masie m i prędkości v energia kinetyczna E_k określona jest wzorem $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Wyznaczmy masę ciała m z tego wzoru.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2E_k = mv^2 \quad | : v^2 \quad \text{Zakładamy, że } v \neq 0.$$

$$\frac{2E_k}{v^2} = m$$

$$m = \frac{2E_k}{v^2}$$

Masa ciała jest równa $\frac{2E_k}{v^2}$.

4. Prędkość v ciała w ruchu jednostajnie przyspieszonym określona jest wzorem $v = v_0 + at$, gdzie:

v_0 – prędkość początkowa ciała,

a – przyspieszenie ciała,

t – czas trwania ruchu.

Wyznacz z tego wzoru t . Zapisz konieczne założenia.

Przykład 5

Oblicz masę substancji rozpuszczonej w roztworze o masie m_r , jeżeli stężenie procentowe tego roztworu jest równe C_p .

Wiemy, że stężenie procentowe roztworu możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$C_p = \frac{m_s \cdot 100\%}{m_r}, \text{ gdzie } m_s \text{ to masa substancji, a } m_r \text{ to masa roztworu.}$$

$$C_p = \frac{m_s \cdot 100\%}{m_r} \quad | \cdot m_r$$

$$C_p \cdot m_r = m_s \cdot 100\% \quad | : 100\%$$

$$\frac{C_p \cdot m_r}{100\%} = m_s$$

$$m_s = \frac{C_p \cdot m_r}{100\%}$$

Masa substancji jest równa $\frac{C_p \cdot m_r}{100\%}$.

Ciekawe!

Starożytni matematycy nie znali takich wzorów, jakimi posługujemy się obecnie, ale podawali je słownie. Wzory pojawiły się dopiero w XVI wieku, gdy matematycy nauczyli się wyrażać liczby i inne wielkości za pomocą równań.

5. Oblicz masę roztworu o stężeniu procentowym równym C_p , jeżeli masa substancji rozpuszczonej w tym roztworze jest równa m_s .

Zadania

- Wyznacz wskazaną zmienną z każdego podanego wzoru.

a) $P = \frac{1}{2}pq$; p
b) $p = \frac{m}{v}$; m
c) $I = \frac{U}{R}$; R
d) $m_r = m_s + m_w$; m_s
e) $s = \frac{at^2}{2}$; a
f) $E_p = mgh$; g

- Wyznacz x z każdego podanego wzoru, wiedząc, że wszystkie niewiadome są liczbami różnymi od zera.

a) $xy = \frac{1}{3}$
b) $ax = b - 2$
c) $y + 6x = 10$
d) $m - nx = 2p$
e) $\frac{x+7}{3} = y$
f) $\frac{2x}{3} = \frac{5y}{6}$

- Z podanych wzorów wyznacz y . Zapisz konieczne założenia.

a) $x + 2y = 4 - y$
b) $p + 4y = 5y - 3$
c) $xy - 2y = 11 + x$
d) $9t + 8y = ty - 5$
e) $3(y + a) = \frac{1}{4}(16y - 12)$
f) $(y - 1)(x - 1) = x + 3$

- Ze wzoru na pole rombu $P = \frac{1}{2}ef$, gdzie e i f są długościami przekątnych rombu, wyznacz f .

- Wiadomo, że pole sześciokąta foremnego o boku długości a jest równe $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Wyznacz a z tego wzoru i zapisz wzór na obwód tego sześciokąta.

- Ze wzoru na pole powierzchni prostopadłościanu: $P = 2(ab + bc + ac)$, gdzie a , b , c są długościami krawędzi tego prostopadłościanu, wyznacz:

a) a , b) b , c) c .

- Pole kwadratu o boku długości x jest równe $P = x^2$. Wyznacz x z tego wzoru i zapisz wzór na:

a) obwód tego kwadratu,
b) przekątną tego kwadratu.

- Obwód kwadratu jest równy L . Wyznacz w zależności od L wzór na:

a) pole tego kwadratu,
b) przekątną tego kwadratu.

- Pole trójkąta o podstawie k i wysokości h opuszczonej na tę podstawę jest równe 2. Wyznacz k w zależności od pozostałych wielkości.

- Suma krawędzi sześcianu jest równa S . Wyznacz w zależności od S wzór na:

a) pole powierzchni tego sześcianu,
b) objętość tego sześcianu.

- Wzór $C = \frac{5(F - 32)}{9}$ stosuje się do obliczania temperatury w stopniach Celsjusza (C), jeśli podana jest temperatura w stopniach Fahrenheita (F). Z tego wzoru wyznacz F w zależności od C . Wyraż temperaturę topnienia lodu w stopniach Fahrenheita.

- Zależność litrów benzyny w baku b od liczby przejechanych kilometrów k wyraża się wzorem $b = 35 - \frac{1}{15}k$. Przekształć wzór, wyznaczając k w zależności od b .

- Ze wzoru $\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$ na miarę kąta wewnętrznego w wielokącie foremnym wyznacz n , gdzie n to liczba boków wielokąta foremnego. Ile boków ma wielokąt foremny, którego kąt wewnętrzny ma 160° ?

7.4 Zastosowanie równań do rozwiązywania zadań tekstowych

Podejmij temat



Ola zaprosiła koleżanki do cukierni. Każda z dziewcząt zamówiła zestaw Słodkie Szaleństwo. Ola zamówiła dla siebie jeszcze dodatkową porcję lodów, a Krysia zamówiła dodatkowo dwa napoje. Płacąc za wszystko, Ola dała kelnerce 60 zł i otrzymała 4,50 zł reszty. Oblicz, ile koleżanek Ola zaprosiła do cukierni. Ułóż i rozwiąż odpowiednie równanie.



Przykład 1

Rozwiążmy zadanie przedstawione w *Podejmij temat*.

Sposób I

- Wykonujemy analizę zadania (określamy niewiadomą i zależności między wielkościami danymi w zadaniu).

x

$4,5(x + 1)$

$3x$

$3,5(x + 2)$

$4,5(x + 1) + 3x + 3,5(x + 2)$

$60 - 4,50$

– liczba dziewcząt

– wartość zakupionych lodów (w zł)

– wartość zakupionych ciastek (w zł)

– wartość zakupionych napojów (w zł)

– wartość zakupów (w zł)

– wartość zakupów (w zł)

- Układamy równanie (porównujemy wyrażenia opisujące wartość zakupów).

$$4,5(x + 1) + 3x + 3,5(x + 2) = 60 - 4,5$$

- Rozwiązujemy równanie.

$$4,5x + 4,5 + 3x + 3,5x + 7 = 55,5$$

$$11x + 11,5 = 55,5 \quad | - 11,5$$

$$11x = 55,5 - 11,5$$

$$11x = 44 \quad | : 11$$

$$x = 4$$

$$4 - 1 = 3$$

- Wykonujemy sprawdzenie.

Sprawdzamy, czy liczba 4 spełnia ułożone równanie.

$$L = 4,5(4 + 1) + 3 \cdot 4 + 3,5(4 + 2) = 4,5 \cdot 5 + 12 + 3,5 \cdot 6 = 22,5 + 12 + 21 = 55,5$$

$$P = 60 - 4,5 = 55,5$$

$$L = P$$

Przeprowadzamy redukcję wyrazów podobnych.

Od obu stron równania odejmujemy 11,5.

Dzielimy obie strony równania przez 11.

– tyle dziewcząt było w cukierni

– tyle koleżanek Ola zaprosiła do cukierni

Sprawdzamy, czy liczba 4 spełnia warunki zadania.

x	– liczba dziewcząt	4
$4,5(x + 1)$	– wartość zakupionych lodów (w zł)	$4,5 \text{ zł} \cdot 5 = 22,5 \text{ zł}$
$3x$	– wartość zakupionych ciastek (w zł)	$3 \text{ zł} \cdot 4 = 12 \text{ zł}$
$3,5(x + 2)$	– wartość zakupionych napojów (w zł)	$3,5 \text{ zł} \cdot 6 = 21 \text{ zł}$
$4,5(x + 1) + 3x + 3,5(x + 2)$	– wartość zakupów (w zł)	$22,5 \text{ zł} + 12 \text{ zł} + 21 \text{ zł} = 55,5 \text{ zł}$
$60 - 4,50$	– wartość zakupów (w zł)	$55,5 \text{ zł}$

- Zapisujemy odpowiedź.

Ola zaprosiła do cukierni 3 koleżanki.

Sposób II

- Analiza zadania (określenie niewiadomej i zależności między wielkościami danymi w zadaniu)

x	– liczba dziewcząt
$4,5 + 3 + 3,5 = 11$	– cena jednego zestawu (w zł)
$4,5 + 2 \cdot 3,5 = 11,5$	– wartość dodatkowych lodów i napojów (w zł)
$11x + 11,5$	– wartość zakupów (w zł)
$60 - 4,5 = 55,5$	– wartość zakupów (w zł)

- Ułożenie równania (porównanie wyrażeń opisujących wartość zakupów)

$$11x + 11,5 = 55,5$$

- Rozwiązanie równania

$$11x = 55,5 - 11,5$$

$$11x = 44 \quad | : 11$$

$$x = 4$$

$$4 - 1 = 3$$

- tyle dziewcząt było w cukierni
- tyle koleżanek Ola zaprosiła do cukierni

- Sprawdzenie

$$L = 11 \cdot 4 + 11,5 \quad P = 55,5$$

$$L = P$$

- Zapisanie odpowiedzi

Ola zaprosiła do cukierni 3 koleżanki.

Etapy rozwiązywania zadania tekstowego.

1. Uważnie przeczytaj treść zadania.
2. Dokonaj analizy treści zadania – określ niewiadomą i zależności między wielkościami danymi w zadaniu.
3. Ułóż równanie.
4. Rozwiąż równanie.
5. Sprawdź poprawność rozwiązania z warunkami zadania.
6. Zapisz odpowiedź.

Przykład 2

W zagrodzie były króliki i kury. Razem zwierzęta miały 35 głów i 94 nogi. Ile było kur, a ile królików?

- Analiza zadania

x	– liczba kur
$35 - x$	– liczba królików
$2x$	– liczba nóg wszystkich kur
$4(35 - x)$	– liczba nóg wszystkich królików
94	– liczba nóg kur i królików
$2x + 4(35 - x)$	– liczba nóg kur i królików

- Ułożenie równania

$$2x + 4(35 - x) = 94$$

- Rozwiązanie równania

$$2x + 140 - 4x = 94$$

$$-2x = 94 - 140$$

$$-2x = -46 \quad | : (-2)$$

$$x = 23 \quad \text{– liczba kur}$$

$$35 - 23 = 12 \quad \text{– liczba królików}$$

- Sprawdzenie

Sprawdzamy, czy liczba 23 spełnia ułożone równanie.

$$L = 46 + 48 = 94 \quad P = 94$$

$$L = P$$

Sprawdzamy, czy liczba 23 spełnia warunki zadania.

x	– liczba kur	23
$35 - x$	– liczba królików	$35 - 23 = 12$
$2x$	– liczba nóg wszystkich kur	$2 \cdot 23 = 46$
$4(35 - x)$	– liczba nóg wszystkich królików	$4 \cdot 12 = 48$
94	– liczba nóg kur i królików	94
$2x + 4(35 - x)$	– łączna liczba nóg kur i królików	$46 + 48 = 94$

- Zapisanie odpowiedzi

W zagrodzie były 23 kury i 12 królików.

1. W szkolnej stołówce stały stoły, a przy każdym stole cztery krzesła. Każdy stół miał trzy nogi, a każde krzesło cztery nogi. Stolików i krzeseł było łącznie 80. Stoły i krzesła miały łącznie 304 nogi. Ile stolików stało w tej stołówce?

Ciekawe!

Wiedzę o matematyce starożytnego Egiptu możemy czerpać z **papirusu Rhinda**. Jest to sporządzona w XVII w. p.n.e. przez skrybę Ahmesa kopia wcześniejszego dokumentu. Dzieło to stanowi dowód wysokiej wiedzy matematycznej Egipcjan. Zawiera 87 zadań popartych przykładami i rozwiązaniami, między innymi z algebry i geometrii.

Przeanalizujmy zadanie, które znajduje się na papirusie Rhinda (czyt. rajnda).

Przykład 3

Suma pewnej liczby, jej dwóch trzecich i jeszcze jej jednej siódmej jest równa 37. Jaka to liczba?

- Analiza zadania

x	– szukana liczba
$\frac{2}{3}x$	– dwie trzecie szukanej liczby
$\frac{1}{7}x$	– jedna siódma szukanej liczby
37	– suma szukanej liczby, jej dwóch trzecich i jej jednej siódmej
$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{7}x$	– suma szukanej liczby, jej dwóch trzecich i jej jednej siódmej

- Ułożenie równania

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{7}x = 37$$

- Rozwiązanie równania

$$x + \frac{14}{21}x + \frac{3}{21}x = 37$$

$$1\frac{17}{21}x = 37 \quad | : 1\frac{17}{21}$$

$$x = 37 : 1\frac{17}{21}$$

$$x = 37 \cdot \frac{21}{38}$$

$$x = \frac{777}{38}$$

$$x = 20\frac{17}{38}$$

- Sprawdzenie

$$\begin{aligned} L &= 20\frac{17}{38} + \frac{2}{3} \cdot 20\frac{17}{38} + \frac{1}{7} \cdot 20\frac{17}{38} = 20\frac{17}{38} + \frac{2}{3} \cdot \frac{777}{38} + \frac{1}{7} \cdot \frac{777}{38} = \\ &= 20\frac{17}{38} + 13\frac{24}{38} + 2\frac{35}{38} = 35\frac{76}{38} = 37 \end{aligned}$$

$$P = 37$$

$$L = P$$

- Zapisanie odpowiedzi

Szukana liczba to $20\frac{17}{38}$.

2. Zadanie ze starożytnych Indii.

Z roju pszczoł trzecia część siadła na kwiecie katamby, piąta część na kwiecie silindy, w trzykrotnej różnicy obu ilości odleciały pszczoły do kwiecie kutaji, a jedna pozostała w powietrzu drażniona wonią jaśminu. Ile było wszystkich pszczoł?

Za pomocą równań można rozwiązywać wiele problemów związanych z prędkością, drogą i czasem.

Przykład 4

Odległość między Kurowicami a Leonowem jest równa 85 km. Samochód ciężarowy wyruszył z Kurowic i jedzie do Leonowa ze średnią prędkością $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Dwanaście minut później z Kurowic wyjechał samochód osobowy i podąża do Leonowa tą samą trasą co samochód ciężarowy. Samochód osobowy porusza się ze średnią prędkością $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po jakim czasie samochód osobowy dogoni samochód ciężarowy? W jakiej odległości od Leonowa samochód osobowy wyprzedzi samochód ciężarowy?

- Analiza zadania

- | | |
|--|---|
| t | – czas jazdy samochodu osobowego do momentu wyprzedzania (w h) |
| $12 \text{ min} = \frac{12}{60} \text{ h} = \frac{1}{5} \text{ h}$ | – zamieniamy jednostkę |
| $t + \frac{1}{5}$ | – czas jazdy samochodu ciężarowego do momentu wyprzedzania (w h) |
| $70 \cdot \left(t + \frac{1}{5}\right)$ | – długość drogi pokonanej przez samochód ciężarowy do momentu wyprzedzania (w km) |
| $90 \cdot t$ | – długość drogi pokonanej przez samochód osobowy do momentu wyprzedzania (w km) |

- Ułożenie równania

$$70 \cdot \left(t + \frac{1}{5}\right) = 90 \cdot t$$
$$70t + 14 = 90t$$

- Rozwiązanie równania

$$20t = 14$$
$$t = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

– samochód osobowy dogonił samochód ciężarowy po $\frac{7}{10}$ godziny, czyli po 42 minutach

$$90 \cdot 0,7 = 63 \text{ (km)}$$

– samochód osobowy pokonał drogę równą 63 km

$$85 - 63 = 22 \text{ (km)}$$

– w odległości 22 km od Leonowa samochód osobowy wyprzedził samochód ciężarowy

- Sprawdzenie

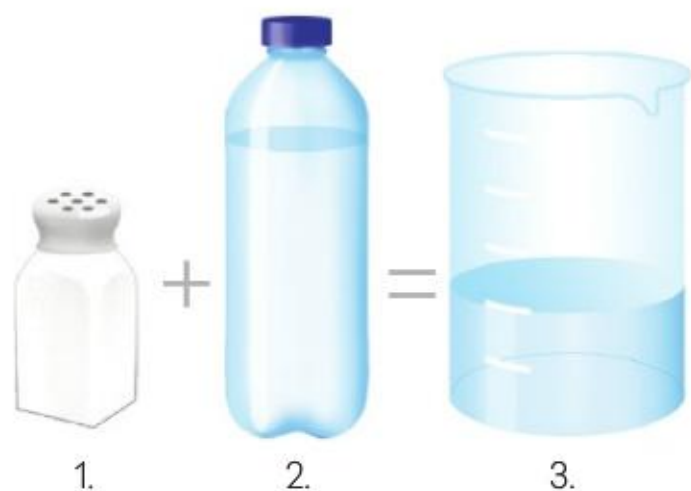
$$L = 70 \cdot \frac{7}{10} + 14 = 49 + 14 = 63$$
$$P = 90 \cdot \frac{7}{10} = 63$$
$$L = P$$

- Zapisanie odpowiedzi

Samochód osobowy wyprzedzi samochód ciężarowy po 42 minutach jazdy, w odległości 22 km od Leonowa.



Schemat przygotowywania roztworu o stężeniu 1%



1. 1 g soli – masa substancji rozpuszczonej (m_s)
2. 99 g wody – masa rozpuszczalnika (m_w)
3. 100 g roztworu – masa roztworu (m_r)

3. Patrycja i Ola mieszkają w odległości 3,5 km od siebie. Aby się spotkać, obie wyszły w tym samym czasie, każda ze swojego domu. Patrycja szła z prędkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Ola szła tą samą drogą z prędkością $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po jakim czasie koleżanki się spotkają? Oblicz długość drogi pokonanej przez Patrycję.

Roztwór to mieszanina rozpuszczalnika (najczęściej wody) i substancji rozpuszczonej. Jeżeli stężenie procentowe roztworu jest równe 15%, oznacza to, że masa substancji rozpuszczonej stanowi 15% masy roztworu.

Stężenie procentowe określa masę (wyrażoną w gramach) substancji rozpuszczonej w 100 g roztworu.

$$C_p = \frac{m_s \cdot 100\%}{m_r}$$

C_p – stężenie procentowe, m_s – masa substancji rozpuszczonej,
 m_r – masa roztworu

Przykład 5

W 2 l wody rozpuszczono 0,5 kg soli.

- a) Jakie jest stężenie procentowe tak otrzymanej solanki?
- b) Ile litrów wody trzeba dolać, aby stężenie solanki było równe 10%?

Przyjmujemy, że 1 l wody waży 1 kg.

a)

- Analiza zadania

C_p – stężenie solanki (w %)

$m_s = 0,5$ – masa soli (w kg)

$m_w = 2$ – masa wody (w kg)

$m_r = m_s + m_w$

$0,5 + 2 = 2,5$ – masa roztworu (w kg)

- Obliczenie stężenia otrzymanej solanki

$$C_p = \frac{0,5 \cdot 100\%}{2,5}$$

$$C_p = \frac{100\%}{5}$$

$$C_p = 20\%$$

- Zapisanie odpowiedzi

Stężenie procentowe otrzymanej solanki jest równe 20%.

b)

- Analiza zadania

m_w	– masa dolanej wody (w kg)
$2,5 + m_w$	– masa solanki o stężeniu 10% (w kg)
$20\% \cdot 2,5$	– masa soli w solance o stężeniu 20% (w kg)
$10\% \cdot (2,5 + m_w)$	– masa soli w solance o stężeniu 10% (w kg)

- Ułożenie równania

$$10\% \cdot (2,5 + m_w) = 20\% \cdot 2,5$$

- Rozwiązanie równania

$$0,1(2,5 + m_w) = 0,2 \cdot 2,5$$

$$0,25 + 0,1m_w = 0,5$$

$$0,1m_w = 0,25 \quad | : 0,1$$

$$m_w = 2,5$$

- Sprawdzenie

Sprawdzamy, czy liczba 2,5 spełnia ułożone równanie.

$$L = 0,1 \cdot (2,5 + 2,5) = 0,1 \cdot 5 = 0,5$$

$$P = 0,2 \cdot 2,5 = 0,5$$

$$L = P$$

Sprawdzamy, czy liczba 2,5 spełnia warunki zadania.

2,5 kg	– masa dolanej wody (w kg)
$2,5 \text{ kg} + 2,5 \text{ kg} = 5 \text{ kg}$	– masa solanki o stężeniu 10% (w kg)
$20\% \cdot 2,5 \text{ kg} = 0,5 \text{ kg}$	– masa soli w solance o stężeniu 20% (w kg)
$10\% \cdot 5 \text{ kg} = 0,5 \text{ kg}$	– masa soli w solance o stężeniu 10% (w kg)

- Zapisanie odpowiedzi

Aby stężenie procentowe solanki wynosiło 10%, należy dolać 2,5 l wody.

Ciekawe!



Bardzo często na opakowaniach środków czystości, leków, produktów spożywczych itp. umieszczone są informacje o stężeniu substancji. Na przykład woda utleniona to 3-procentowy roztwór nadtlenku wodoru, co oznacza, że w 100 g roztworu znajduje się 3 g substancji.

4. Woda morska zawiera 5% soli. Ile kilogramów wody słodkiej trzeba dolać do 24 kg wody morskiej, aby zawartość soli była równa 3%?

Więcej na temat

Jaskinia solna (grota solna) to pomieszczenie wyłożone bryłami soli, w którym panuje specyficzny mikroklimat, wpływający pozytywnie na zdrowie człowieka. Temperatura utrzymywana jest tam na poziomie 23-24°C, wilgotność nie przekracza 45%. Unoszący się w powietrzu naturalny aerozol o 3-procentowym stężeniu solanki wspomaga leczenie różnych schorzeń.

Przykład 6

Do 3,7 kg wody wsypano cukier i otrzymano roztwór o stężeniu 7,5%. Oblicz masę cukru wsypanego do wody.

$$\begin{aligned}x & \text{ -- masa cukru wsypanego do wody (w kg), } x > 0 \\x + 3,7 & \text{ -- masa roztworu (w kg)} \\ \frac{x \cdot 100\%}{x + 3,7} &= 7,5\% \\ \frac{x}{x + 3,7} &= 0,075 \quad | \cdot (x + 3,7) \\ x &= 0,075(x + 3,7) \\ x &= 0,075x + 0,075 \cdot 3,7 \quad | - 0,075x \\ x - 0,075x &= 0,2775 \\ 0,925x &= 0,2775 \quad | : 0,925 \\ x &= 0,3\end{aligned}$$

Sprawdzenie

$$L = \frac{0,3}{0,3 + 3,7} = \frac{0,3}{4} = 0,075$$

$$P = 0,075$$

$$L = P$$

Do wody wsypano 0,3 kg cukru.

Obie strony równania mnożymy przez $x + 3,7$.

Mnożymy sumę algebraiczną przez liczbę.

Od obu stron równania odejmujemy $0,075x$.

Obie strony równania dzielimy przez 0,925.

5. Do wody wsypano 1,1 kg soli i otrzymano roztwór o stężeniu 13,75%. Ile kilogramów wody jest w tym roztworze?

Przykład 7

Zmieszano 2 kilogramy 20-procentowego kwasu octowego z 1 kilogramem 35-procentowego kwasu octowego. Jakie jest stężenie tak otrzymanego kwasu?

x – stężenie procentowe kwasu po zmieszaniu

$$2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,35 = 3 \cdot x$$

$$0,4 + 0,35 = 3 \cdot x$$

$$0,75 = 3 \cdot x$$

$$0,25 = x$$

$$x = 0,25 = 25\%$$

Sprawdzenie

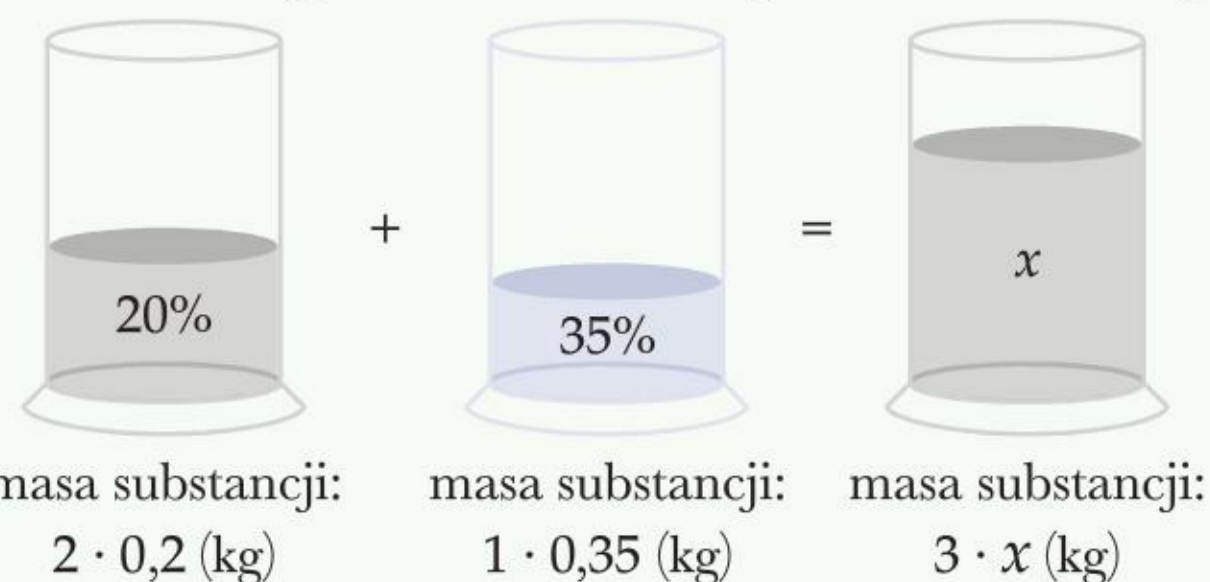
$$L = 2 \cdot 20\% + 1 \cdot 35\% = 0,4 + 0,35 = 0,75$$

$$P = 3 \cdot 25\% = 3 \cdot 0,25 = 0,75$$

$$L = P$$

Stężenie kwasu otrzymanego po zmieszaniu obu kwasów jest równe 25%.

I roztwór 2 kg II roztwór 1 kg III roztwór 3 kg



6. Zmieszano 2 kilogramy 14-procentowego syropu z 4 kilogramami 8-procentowego syropu. Jakie jest stężenie tak otrzymanego syropu?

Przykład 8

W naczyniu znajduje się 250 g 40-procentowego wodnego roztworu saletry. Ile gramów wody należy dolać do naczynia, aby otrzymać roztwór 16-procentowy?

Zauważmy, że woda nie zawiera saletry, zatem przyjmujemy, że stężenie procentowe wody jest równe 0%. Korzystając z rysunku, zapisujemy i rozwiązujemy odpowiednie równanie.

$$250 \cdot 0,4 + x \cdot 0 = (250 + x) \cdot 0,16$$

$$250 \cdot 0,4 = (250 + x) \cdot 0,16$$

$$100 = 40 + 0,16x$$

$$60 = 0,16x$$

$$x = 375$$

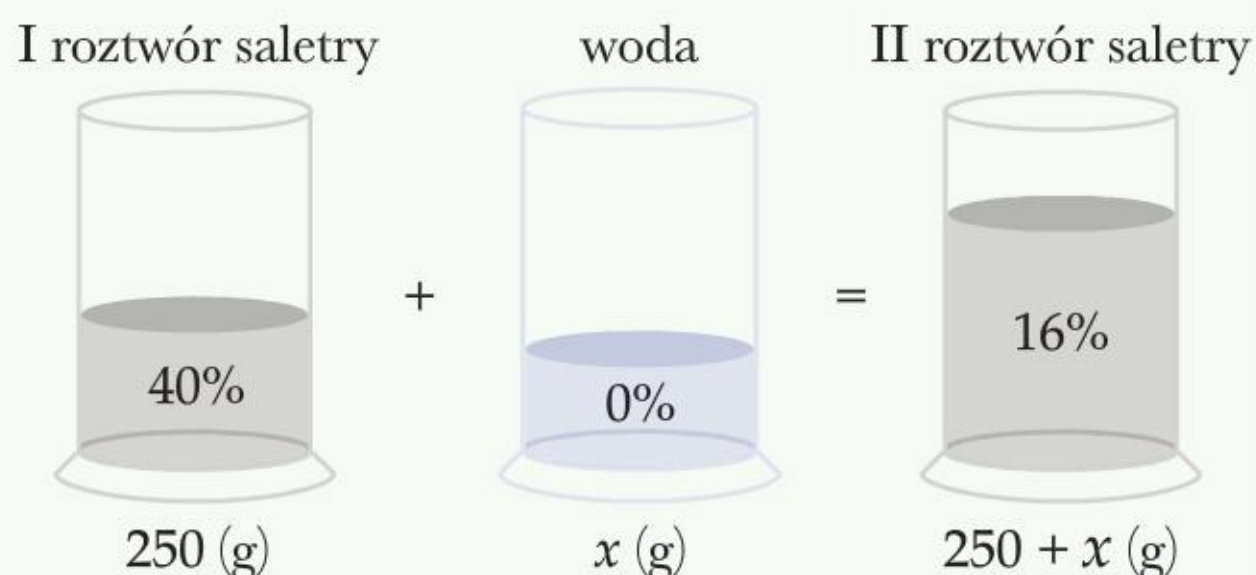
Sprawdzenie

$$L = 250 \cdot 0,4 + 375 \cdot 0 = 100$$

$$P = (250 + 375) \cdot 0,16 = 625 \cdot 0,16 = 100$$

$$L = P$$

Należy dolać 375 g wody.



Przykład 9

Ile kilogramów wody należy odparować z 2,4 kg solanki o stężeniu 15%, aby otrzymać solankę o stężeniu 18%?

x – liczba kilogramów wody, którą należy odparować

$$2,4 \cdot 0,15 - x \cdot 0 = (2,4 - x) \cdot 0,18$$

$$2,4 \cdot 0,15 = (2,4 - x) \cdot 0,18$$

$$0,36 = 0,432 - 0,18x$$

$$-0,072 = -0,18x \quad | : (-0,18)$$

$$0,4 = x$$

$$x = 0,4$$

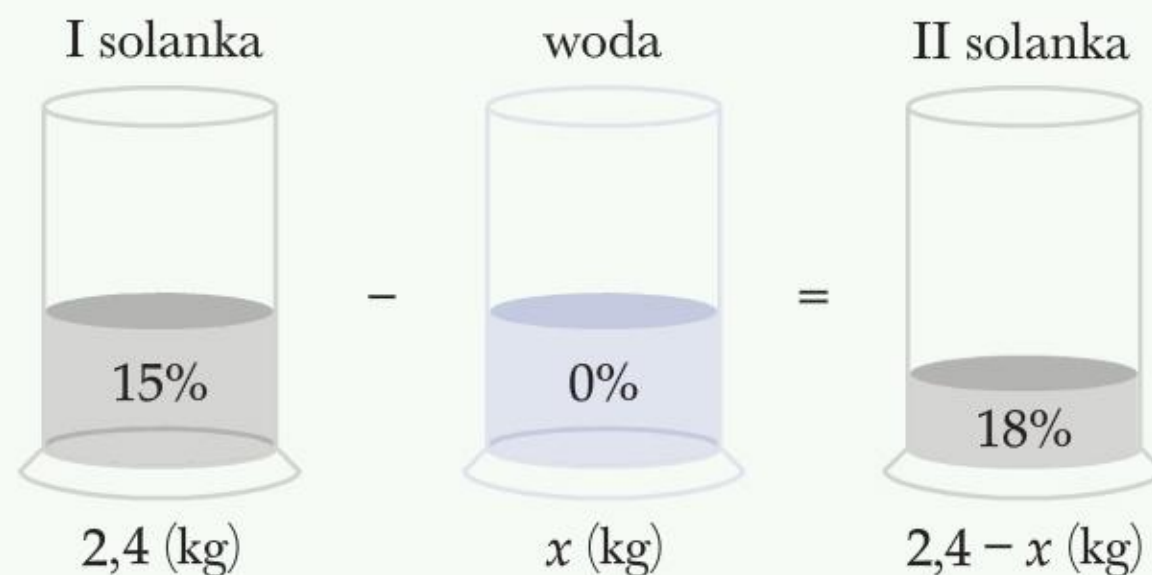
Sprawdzenie

$$L = 2,4 \cdot 0,15 - x \cdot 0 = 0,36$$

$$P = (2,4 - 0,4) \cdot 0,18 = 2 \cdot 0,18 = 0,36$$

$$L = P$$

Należy odparować 0,4 kg wody.



7. Ile kilogramów wody należy odparować z 3 kg solanki o stężeniu 8%, aby otrzymać solankę o stężeniu 10%?

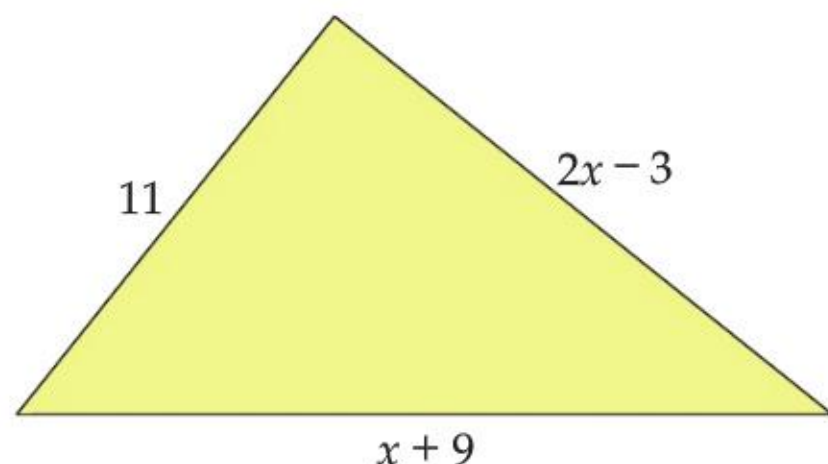
Zadania

● Znajdź liczbę x , wiedząc, że

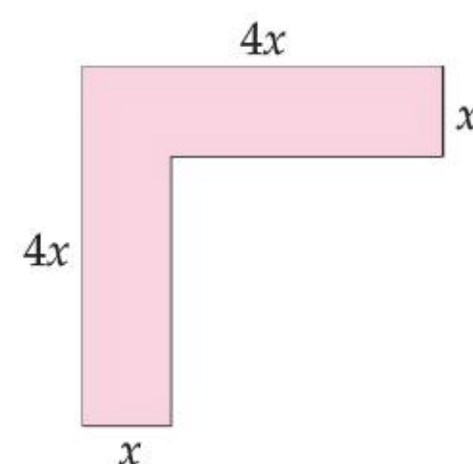
- a) liczba ta zwiększona półtora razy jest równa 33,5,
b) liczba ta zmniejszona o 20% to $3\frac{1}{5}$,
c) dwukrotność tej liczby zwiększona o 1 jest równa 8,
d) po zwiększeniu jej o 4, a następnie pomnożeniu wyniku przez 5 otrzymamy liczbę 80.

● Oblicz długości boków wielokątów przedstawionych na rysunku.

a) $Obw. = 47$



b) $Obw. = 48$



- Ignacy to najmłodszy członek rodziny. Jego siostra Ania jest od niego dwa razy starsza. Brat Jarek jest o 2 lata starszy od Ani. Rodzeństwo ma łącznie 32 lata. Ile lat ma Ignacy?
- Ojciec ma 36 lat, a syn jest o 26 lat od niego młodszy. Za ile lat obaj będą mieli razem 56 lat?
- Cenę butów obniżono najpierw o 10%, a następnie o 40 zł. Cena butów po obu obniżkach wynosi 185 zł. Ile kosztowały buty przed obniżką?
- Za 7 małych jogurtów i 3 jogurty duże zapłacono 13,10 zł. Ile kosztował mały, a ile duży jogurt, jeżeli cena dużego jogurtu była o 1,20 zł wyższa od małego?
- Dominika ma 125 zł w monetach 5-złotowych i 2-złotowych. Ile Dominika ma monet 2-złotowych, a ile 5-złotowych, jeżeli monet 5-złotowych ma więcej o 4?
- Obwód prostokąta jest równy 36. Dłuższy bok jest o 25% większy od krótszego. Znajdź pole tego prostokąta.
- W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest 8 razy mniejszy od drugiego kąta ostrego. Znajdź miarę najmniejszego z kątów tego trójkąta.
- Agnieszka obliczyła, że 15% jej kolekcji figurek stanowią aniołki, 23% to słonie. Pozostałe 5 figurek to pieski. Czy Agnieszka poprawnie wykonała obliczenia? Uzasadnij swoją odpowiedź.
- Jola, Kinga i Ewa zbierają znaczki. Jola ma o trzy znaczki więcej niż Kinga, a Ewa ma tyle znaczków, ile Kinga i Jola mają razem. Ewa stwierdziła, że ma dwa razy tyle znaczków, ile ma Kinga. Czy Ewa mówi prawdę? Odpowiedź uzasadnij.
- Tomek, Michał i Bartek zebrali razem 28 grzybów. Tomek zebrał o 10 grzybów więcej niż Michał, a Bartek tyle, ile Michał i Tomek zebrali razem. Ile grzybów zebrał każdy z chłopców?

- Duży słoik ma pojemność o 4 litry większą od pojemności małego słoika. Pojemność małego słoika jest równa 20% pojemności dużego. Jaka jest łączna pojemność obu słoików?
- ★ Dwaj rowerzyści wyjechali naprzeciw siebie w tym samym czasie z miejscowości oddległych o 52,5 km. Jeden jedzie z prędkością $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jaka jest prędkość drugiego, jeżeli spotkają się po 1 godzinie 45 minutach jazdy?
- Grupa młodzieży idzie z prędkością $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po trzech kwadransach spóźniony Jacek wyruszył za nimi tą samą drogą, z prędkością $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po jakim czasie Jacek dogoni grupę?
- Zmieszano 2 kg cukru z 3 kg wody. Jakie jest stężenie procentowe tak otrzymanego syropu? Ile kilogramów wody należy dolać, aby otrzymać syrop 25-procentowy?
- W jednym litrze wody rozpuszczono $\frac{1}{4}$ litra soku malinowego. Oblicz stężenie procentowe tak otrzymanego napoju. Ile trzeba dolać litrów wody, aby otrzymać napój 10-procentowy?
- W pojemniku jest 12 kg 25-procentowej solanki.
 - a) Ile kilogramów soli należy dosypać, aby otrzymać roztwór o stężeniu 40%?
 - b) Ile kilogramów wody należy odparować, aby otrzymać roztwór o stężeniu 60%?
- Zmieszano 4 kilogramy 5-procentowego roztworu cukru z 6 kilogramami 12-procentowego roztworu cukru. Oblicz stężenie procentowe tak uzyskanego roztworu.
- W naczyniu znajdowało się 80 g wodnego roztworu kwasu cytrynowego. Po odparowaniu wody na dnie naczynia pozostało 24 g kwasu cytrynowego. Jakie było stężenie procentowe tego roztworu?

W historii matematyki jest wiele zadań, które rozwiązujemy za pomocą równań. Przeczytaj zadania 21–24 i je rozwiąż.

- Pitagoras zapytany, ilu ma uczniów, odpowiedział: „Połowa z moich uczniów studiuje matematykę, czwarta część przyrodę, siódma część milczy, a ponadto mam jeszcze trzech uczniów”. Ilu uczniów miał Pitagoras?
- W papirusie Rhinda (XVII w. p.n.e.) jest takie zadanie: „Wędrowiec policzył, że w stadzie, które pasterz pędził na pastwisko, jest 70 sztuk bydła. Zapytał on pasterza, jaką część swego liczego stada pędzi na pastwisko. Pasterz odpowiedział: «Prowadzę na pastwisko dwie trzecie trzeciej części stada, które powierzono mojej opiece»”. Oblicz, jak wielkie stado miał pasterz.
- Matematyk i filozof Alkuin (ok. 730–804) podał takie zadanie: „Chart ujrzał zająca w odległości 150 stóp i rozpoczął za nim pościg. Po ilu skokach pies dogoni zająca, jeśli skok zająca ma 7 stóp, a skok charta w tym czasie ma 9 stóp?”.
- Stara legenda głosi, że czeska królowna Libusza obiecała oddać swą rękę temu z trzech ubiegających się o nią rycerzy, który pierwszy rozwiąże zadanie: „Ile śliwek mieści się w koszyku, z którego połowę całej zawartości i jedną śliwkę oddam pierwszemu z was, drugiemu połowę reszty i jedną śliwkę, wreszcie trzeciemu dam połowę pozostałych i trzy śliwki, przy czym kosz będzie pusty?”.

Podsumowanie działu 7

Ważne pojęcia

równanie	stopień równania	pierwiastek równania	zbiór rozwiązań równania
równania równoważne	metoda równań równoważnych	równanie tożsamościowe	równanie sprzeczne

Równaniem nazywamy równość dwóch wyrażeń algebraicznych. $2x + 6 = 3x - 4$

Rozwiązaniem równania (pierwiastkiem równania) nazywamy każdą liczbę, która spełnia to równanie.

Pierwiastkiem równania $3x - 5 = 2x - 3$ jest liczba 2, bo

$$L = 3 \cdot 2 - 5 = 1$$

$$P = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

$$L = P$$

Równania równoważne otrzymamy, gdy

- do obu stron równania dodamy tę samą liczbę (lub to samo wyrażenie algebraiczne),
- od obu stron równania odejmiemy tę samą liczbę (lub wyrażenie algebraiczne),
- obie strony równania pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera,
- obie strony równania podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera.

Etapy rozwiązywania zadania tekstowego

- Uważnie przeczytaj treść zadania.
- Dokonaj analizy treści zadania (określ niewiadomą i zależności między wielkościami danymi w zadaniu).
- Ułóż równanie.
- Rozwiąż równanie.
- Sprawdź poprawność rozwiązania z warunkami zadania.
- Zapisz odpowiedź.

Czy już umiesz?

1 Wskaż równanie, które opisuje treść następującego stwierdzenia: Potrojona liczba m jest o 4 większa od połowy liczby m .

A. $3m + 4 = \frac{1}{2}m$

B. $3m = \frac{1}{2} + 4$

C. $\frac{1}{2}m + 4 = 3m$

D. $\frac{1}{3}m + 4 = 2m$

2 Wskaż równanie, które opisuje następujące zadanie: Kwotę 94 zł wypłacono monetami 2-złotowymi i 5-złotowymi. Monet 2-złotowych było x , a 5-złotowych było o dwie więcej niż 2-złotowych.

A. $x + (x + 2) = 94$

B. $2x + 5x = 94$

C. $2x + 5(x + 2) = 94$

D. $2x + 5(x - 2) = 94$

- 3 Równanie, które **nie jest** równoważne równaniu $1 - \frac{y}{3} = 2$, to
 A. $1 - 2 = \frac{y}{3}$ B. $3 - y = 6$ C. $-\frac{1}{3}y = 2 - 1$ D. $3\left(1 - \frac{y}{3}\right) = 2$
- 4 Jeśli pewną liczbę zmniejszoną o 4 podwoimy, to otrzymamy 8. Tą liczbą jest
 A. 0 B. -8 C. 2 D. 8
- 5 Rozwiązaniem równania $2(0,5x - 1) = 2x + 2$ jest liczba
 A. -4 B. -2 C. 0 D. 4
- 6 Liczba -13 jest rozwiązaniem równania
 A. $4(x + 3) - 5 = 7$ B. $\frac{8-x}{7} = 5$
 C. $-10 - (x + 2) = 14 + x$ D. $\frac{1+x}{3} + 5 = 9$
- 7 Wskaż równanie sprzeczne.
 A. $1 - (1 - (1 - x)) = 1 + (1 + (x - 1))$ B. $1 + (-1 + (1 - x)) = 1 - ((x - 1) - 1)$
 C. $(1 - (x + 1)) : (-1) = (-1) \cdot (-1 + (1 - x))$ D. $1 + (-1) \cdot ((1 - x) + (x - 1)) = (1 - x) - (-1 + (1 - x))$
- 8 Ile litrów wody należy dolać do pół litra 15-procentowej solanki, aby otrzymać 4-procentową solankę?
 A. $1\frac{1}{8}$ litra B. 0,2 litra C. 0,4 litra D. 1,375 litra
- 9 W trójkącie ABC bok AC jest o 1 dłuższy od boku AB . Bok BC jest o 25% dłuższy od boku AC . Obwód tego trójkąta jest równy 12. Pole tego trójkąta jest równe
 A. 6 B. 12 C. 15 D. 20
- 10 Zapisz równania opisujące przedstawione sytuacje.
 a) Suma dwóch liczb różniących się o 4 jest równa 20,5.
 b) Suma czterech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 120.
 c) Suma cyfr liczby trzycyfrowej jest równa 18. Cyfra jedności tej liczby jest dwa razy mniejsza od cyfry dziesiątek, a cyfra setek jest o trzy większa od cyfry dziesiątek.
- 11 Rozwiąż równania.
 a) $\frac{2(x-6)}{5} + \frac{11}{15} = \frac{2+x}{3} + 1$ b) $5 - (x - (2 - 4x) : 2) = 3((1 - x) - 4)$
 c) $\frac{5 - 3(1 - x)}{2} = \frac{1}{4}$ d) $(x - 1)(x + 1) + 1 = (x + 2)(x - 2) + 4$

W zadaniach 12–23 zapisz odpowiednie równania i je rozwiąż.

- 12 Taśmę o długości 4 m rozcięto na trzy części, z których pierwsza jest o 80 cm dłuższa od drugiej, a trzecia jest dwa razy dłuższa od pierwszej. Oblicz długość każdej z tych części.
- 13 Szkoła kupiła 160 biletów do teatru za łączną kwotę 1520 zł. Bilet droższy kosztował 11 zł, a tańszy – o 2 zł mniej. Ile było biletów tańszych?

- 14 Turysta w pierwszym dniu rajdu przebył $\frac{7}{16}$ trasy, w drugim dniu $\frac{4}{15}$ pozostałej trasy, a w trzecim dniu 33 km. Oblicz długość trasy przebytej przez turystę w ciągu tych trzech dni.
- 15 Z miasta A w kierunku miasta B wyjechał samochód osobowy jadący z prędkością $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. W tym samym czasie z miasta B w kierunku miasta A wyruszył autobus jadący z prędkością $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po upływie jakiego czasu spotkają się te pojazdy, jeśli odległość między miastami A i B wynosi 195 km?
- 16 Odległość między dwoma miastami M i K wynosi 72 km. Bartek wyjechał z miasta M z prędkością $35 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i podąża do miasta K. Jakub w tym samym czasie wyjechał z miasta K i podąża (tą samą drogą, co Bartek) do miasta M, jadąc z prędkością o $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejszą niż Bartek. Po upływie ilu minut od chwili wyjazdu chłopcy się spotkają?
- 17 Tomek wyjechał do szkoły na rowerze, jadąc ze średnią prędkością $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gdy przejechał 5 km, z domu wyjechał za nim starszy brat Waldek, jadąc skuterem ze średnią prędkością $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Po jakim czasie starszy brat dogoni młodszego?
- 18 Kolarz w ciągu 4 sekund przejechał 35 m. Ile kilometrów przejedzie kolarz w ciągu godziny, jeśli założymy, że jedzie z tą samą średnią prędkością?
- 19 Obwód prostokąta jest równy 24 cm. Jeden z boków jest o 2 cm dłuższy od drugiego. Oblicz pole tego prostokąta.
- 20 W trójkącie każdy następny kąt jest mniejszy o 30° od poprzedniego. Oblicz miary kątów tego trójkąta.
- 21 Tata jest o 8 lat starszy od mamy. Dziesięć lat temu wiek mamy stanowił 75% wieku taty. Za ile lat będą mieli razem 100 lat?
- 22 Za 3 zeszyty i 7 ołówków zapłacono 18,20 zł. Jaka jest cena zeszytu, a jaka ołówka, jeśli ołówek jest siedem razy tańszy od zeszytu?
- 23 Ile litrów wody należy odparować z dwóch litrów 25-procentowego syropu, aby otrzymać syrop o stężeniu 40-procentowym?
- 24 Masa substancji rozpuszczonej w roztworze o stężeniu procentowym równym 8% jest równa m_s .
 Wyznacz masę wody, w której rozpuszczono tę substancję.
- 25 Do wody o masie m_w wsypano sól i otrzymano solankę o stężeniu procentowym równym 5%.
 Wyznacz masę soli m_s wsypanej do wody.

8. Wielokąty



1. Jakie wielokąty widzisz na rysunku?
2. Jak nazywamy wielokąt utworzony z pomalowanych na biało trójkątów równoramiennych?
3. Ile kwadratów widzisz na rysunku? Na jaki kolor pomalowane są kwadraty? Jakie znasz własności kwadratu?
4. Jaki trapez nazywamy trapezem równoramiennym? Ile na rysunku jest trapezów równoramiennych? Jakie własności ma trapez równoramienny?
5. Zapisz wzory na obwód i pole: trójkąta, kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu.

8.1 Jednostki pola. Zamiana jednostek

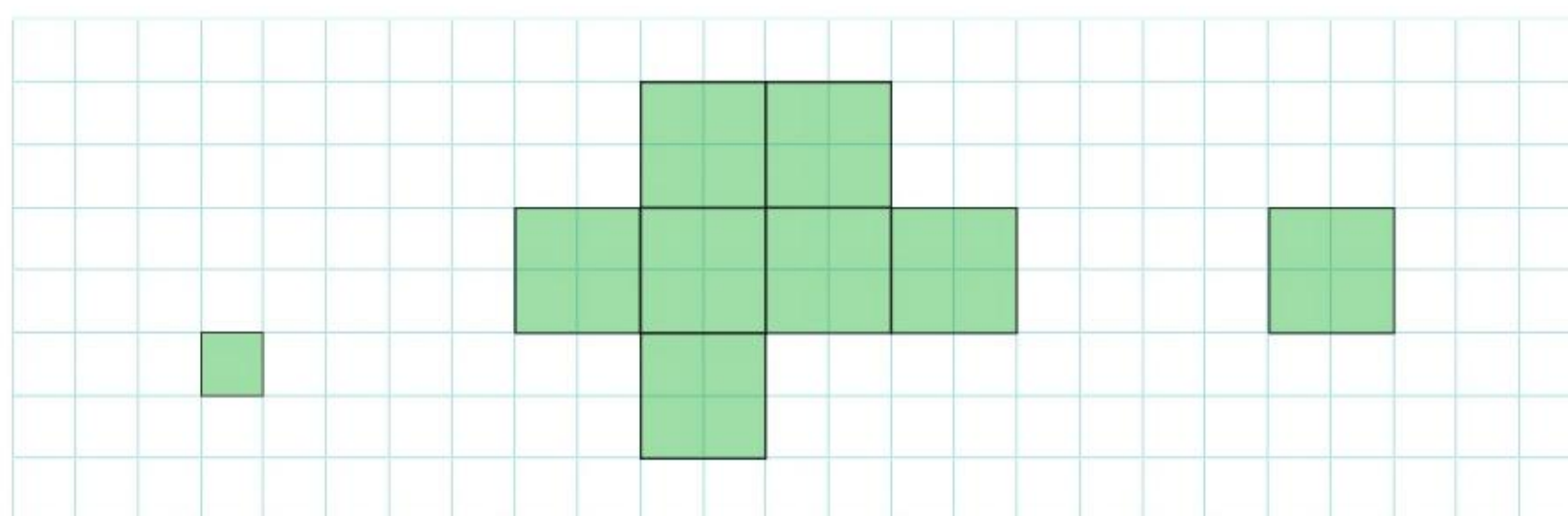
Podejmij temat



Z ilu kwadratów jednostkowych składa się figura 1 na rysunku?

Ile jest równe pole tej figury?

Czy pole tej figury zmieni się, jeżeli za jednostkę pola przyjmiemy figurę 2?



kwadrat jednostkowy

figura 1

figura 2

Wiemy już z młodszych klas, że przed wyznaczaniem pola figury musimy ustalić jednostkę, czyli ustalić, jaka figura będzie figurą jednostkową. Pole figury to liczba figur jednostkowych, które mieszczą się w danej figurze. Najczęściej za jednostkę przyjmuje się kwadrat, który nazywamy kwadratem jednostkowym.

Przypomnijmy jednostki stosowane przy obliczaniu pól powierzchni.

Najczęściej stosowane jednostki pola

1 mm² to pole kwadratu o boku 1 mm

1 cm² to pole kwadratu o boku 1 cm

1 dm² to pole kwadratu o boku 1 dm

1 m² to pole kwadratu o boku 1 m

1 km² to pole kwadratu o boku 1 km

$$P = 1 \text{ cm}^2$$



1 cm

1 cm

$$P = 100 \text{ mm}^2$$



10 mm

10 mm



100 cm² to 1 dm²

$$1 \text{ cm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1 \text{ dm}^2$$

100 dm² to 1 m²

$$1 \text{ dm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1 \text{ m}^2$$

Pole figury możemy wyrażać w różnych jednostkach. Przypomnijmy, jak zmieniamy jednostki pola.

1 cm² to pole kwadratu o boku 1 cm

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}, \text{ zatem } 1 \text{ cm}^2 = (1 \text{ cm})^2 = (10 \text{ mm})^2 = 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} = 100 \text{ mm}^2$$

Podobnie mamy:

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}, \text{ zatem } 1 \text{ dm}^2 = (1 \text{ dm})^2 = (10 \text{ cm})^2 = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}, \text{ zatem } 1 \text{ m}^2 = (1 \text{ m})^2 = (100 \text{ cm})^2 = 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}, \text{ zatem } 1 \text{ km}^2 = (1 \text{ km})^2 = (1000 \text{ m})^2 = 1000 \text{ m} \cdot 1000 \text{ m} = 1\,000\,000 \text{ m}^2$$

Niektóre zależności między jednostkami pola

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2 = 100\,000\,000 \text{ dm}^2 = 10\,000\,000\,000 \text{ cm}^2$$

Przykład 1

Zamieńmy na cm^2 .

- a) 32 dm^2 b) $8,3 \text{ m}^2$ c) $1,7 \text{ km}^2$

a) $32 \text{ dm}^2 = 32 \cdot 1 \text{ dm}^2 = 32 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 3200 \text{ cm}^2$

b) $8,3 \text{ m}^2 = 8,3 \cdot 1 \text{ m}^2 = 8,3 \cdot 10\,000 \text{ cm}^2 = 83\,000 \text{ cm}^2$

c) $1,7 \text{ km}^2 = 1,7 \cdot 1 \text{ km}^2 = 1,7 \cdot 10\,000\,000\,000 \text{ cm}^2 = 17\,000\,000\,000 \text{ cm}^2$

1. Zamień na cm^2 .

- a) 5 dm^2 b) 20 m^2 c) $1,8 \text{ km}^2$

$1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$, zatem $1 \text{ mm}^2 = (1 \text{ mm})^2 = (0,1 \text{ cm})^2 = 0,1 \text{ cm} \cdot 0,1 \text{ cm} = 0,01 \text{ cm}^2$

$1 \text{ cm} = 0,1 \text{ dm}$, zatem $1 \text{ cm}^2 = (1 \text{ cm})^2 = (0,1 \text{ dm})^2 = 0,01 \text{ dm}^2$

$1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$, zatem $1 \text{ dm}^2 = (1 \text{ dm})^2 = (0,1 \text{ m})^2 = 0,01 \text{ m}^2$

$1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$, zatem $1 \text{ m}^2 = (1 \text{ m})^2 = (0,001 \text{ km})^2 = 0,000001 \text{ km}^2$

Przykład 2

Zamieńmy na m^2 .

- a) $45\,000 \text{ mm}^2$ b) 6000 cm^2 c) $5,6 \text{ dm}^2$

a) $45\,000 \text{ mm}^2 = 45\,000 \cdot 1 \text{ mm}^2 = 45\,000 \cdot 0,000001 \text{ m}^2 = 0,045 \text{ m}^2$

b) $6000 \text{ cm}^2 = 6000 \cdot 1 \text{ cm}^2 = 6000 \cdot 0,0001 \text{ m}^2 = 0,6 \text{ m}^2$

c) $5,6 \text{ dm}^2 = 5,6 \cdot 1 \text{ dm}^2 = 5,6 \cdot 0,01 \text{ m}^2 = 0,056 \text{ m}^2$

2. Zamień na m^2 .

- a) $126\,000 \text{ mm}^2$ b) 190 cm^2 c) 70 dm^2

W życiu codziennym pola powierzchni działek, ogrodów, lasów i gruntów ornych wyrażamy w arach i hektarach.

Jeden ar (1 a) to pole kwadratu o boku 10 m, czyli:

$$1 \text{ a} = 10 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} = (10 \text{ m})^2 = 100 \text{ m}^2$$

Jeden hektar (1 ha) to pole kwadratu o boku 100 m, czyli:

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ m} \cdot 100 \text{ m} = (100 \text{ m})^2 = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a}$$



$$1 \text{ m}^2 = 0,01 \text{ a}$$

$$1 \text{ a} = 0,01 \text{ ha}$$

$$1 \text{ km}^2 = 100 \text{ ha}$$

$$1 \text{ ha} = 0,01 \text{ km}^2$$

Przykład 3

Zapiszmy w m^2 .

- a) 16 a b) 5,3 ha c) 0,4 a

a) $16 \text{ a} = 16 \cdot 100 \text{ m}^2 = 1600 \text{ m}^2$

b) $5,3 \text{ ha} = 5,3 \cdot 10\,000 \text{ m}^2 = 53\,000 \text{ m}^2$

c) $0,4 \text{ a} = 0,4 \cdot 100 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$

Przykład 4

Zapiszmy w arach.

- a) 3,6 ha b) 0,097 km^2 c) 22,8 m^2

a) $3,6 \text{ ha} = 3,6 \cdot 1 \text{ ha} = 3,6 \cdot 100 \text{ a} = 360 \text{ a}$

b) $0,097 \text{ km}^2 = 0,097 \cdot 1 \text{ km}^2 = 0,097 \cdot 10\,000 \text{ a} = 970 \text{ a}$

c) $22,8 \text{ m}^2 = 22,8 \cdot 1 \text{ m}^2 = 22,8 \cdot 0,01 \text{ a} = 0,228 \text{ a}$

3. Zapisz w m^2 .

- a) 7 a b) 12 ha
c) 6,3 a d) 0,4 ha

4. Zapisz w arach.

- a) 11 ha a) 0,8 ha
c) 126 m^2 b) 4 km^2

Zadania

● Zapisz w cm^2 .

- a) 45 mm^2 b) 5 dm^2
c) 0,8 m^2 d) 0,00009 km^2

● Zapisz w dm^2 .

- a) 18 mm^2 b) 17 cm^2
c) 1,7 m^2 d) 0,005 km^2

● Zapisz w m^2 .

- a) 245 mm^2 b) 59 cm^2
c) 6 dm^2 d) 8 km^2

● Zapisz w arach.

- a) 25 m^2 b) 8 ha
c) 6900 m^2 d) 0,006 km^2

● Jakie wymiary może mieć działka w kształcie prostokąta o polu powierzchni 3 a? Podaj co najmniej trzy możliwości.

● Pole powierzchni kwadratowej działki jest równe 16 a. Ogród zajmuje 25% powierzchni działki, trawnik 10%, a sadzawka 8 m^2 . Na pozostałej części działki znajduje się plac zabaw dla dzieci. Oblicz pole powierzchni placu zabaw dla dzieci.

● Wujek Tomka kupił działkę o powierzchni 3,5 a i zapłacił za nią 5250 zł. Jaka była cena 1 m^2 tej działki?

- a) Pole powierzchni działki rekreacyjnej jest równe 1250 m^2 . Ile to arów?
b) Pole powierzchni stadionu jest równe 10 800 m^2 . Ile to km^2 ?
c) Pole powierzchni obrazu wiszącego w pokoju Józka jest równe 2470 cm^2 . Ile to dm^2 ?

● Narysuj figury o podanych polach.

- a) 7 cm^2 b) 3,5 cm^2
c) 2 dm^2 d) 0,4 dm^2

● Wieża Eiffla zbudowana jest na działce w kształcie kwadratu o boku 125 m. Ile hektarów ma ta działka? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 ha.

★ Na planie miasta, sporządzonym w skali 1 : 1500, pole powierzchni boiska jest równe 50 cm^2 . Oblicz rzeczywiste pole powierzchni boiska. Wynik zapisz w arach.

8.2 Trójkąty

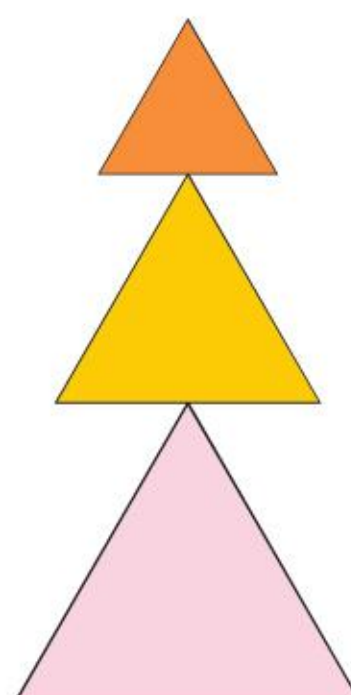
Podejmij temat



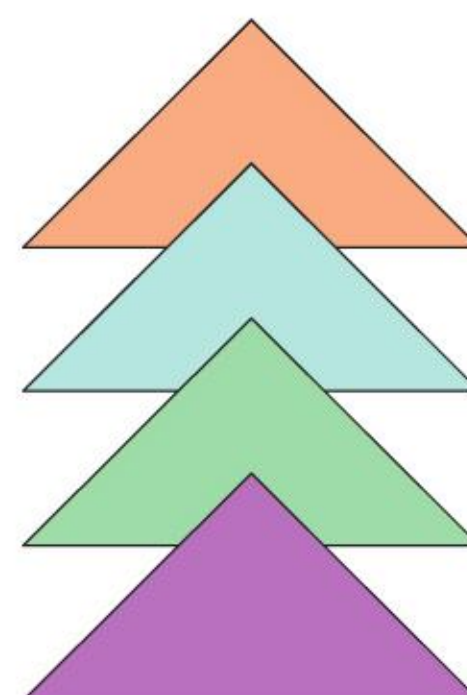
Jakie rodzaje trójkątów użyła Julka do wykonania drzewka?

Z ilu i jakiego rodzaju trójkątów Adam zbudował drzewko?

Podaj, jaką wysokość ma drzewko Julki, jeżeli wysokość największego trójkąta jest równa 10 cm, a wysokość każdego następnego trójkąta jest o 2 cm krótsza.



drzewko Julki

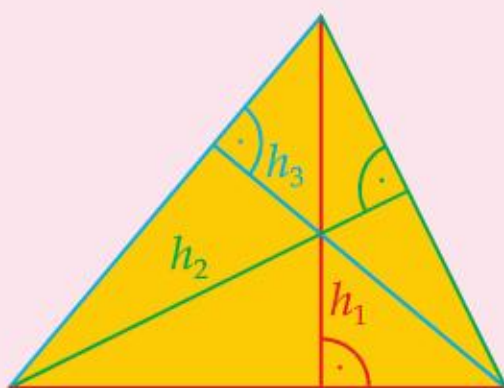


drzewko Adama

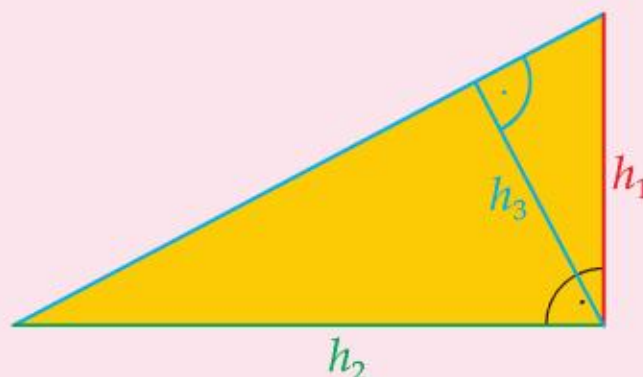
Trójkąt to wielokąt o trzech bokach.

Wysokość trójkąta to odcinek łączący wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem), prostopadły do tego boku.

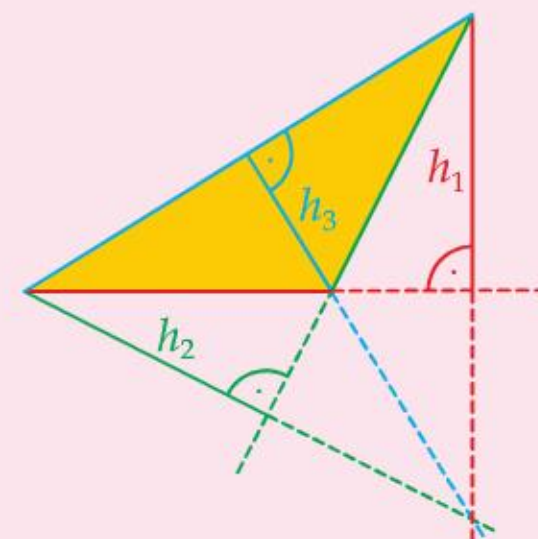
Każdy trójkąt ma trzy wysokości.



W trójkącie ostrokątnym wysokości przecinają się w jednym punkcie znajdującym się wewnątrz tego trójkąta.

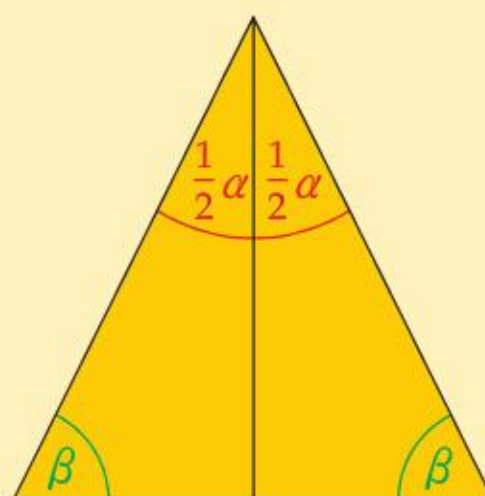


W trójkącie prostokątnym wysokości przecinają się w jednym punkcie, który jest wierzchołkiem tego trójkąta. Dwie z nich to boki tego trójkąta.



W trójkącie rozwartokątnym przedłużenia wysokości przecinają się w jednym punkcie znajdującym się na zewnątrz tego trójkąta.

W dowolnym trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta utworzonego przez ramiona tego trójkąta dzieli ten trójkąt na dwa przystające trójkąty prostokątne.



Przykład 1

Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $3\sqrt{3}$. Obliczmy obwód tego trójkąta.

Wprowadźmy takie oznaczenia jak na rysunku.

Obliczamy długość a boku trójkąta, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (3\sqrt{3})^2 = a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 + 27 = a^2$$

$$27 = \frac{3}{4}a^2$$

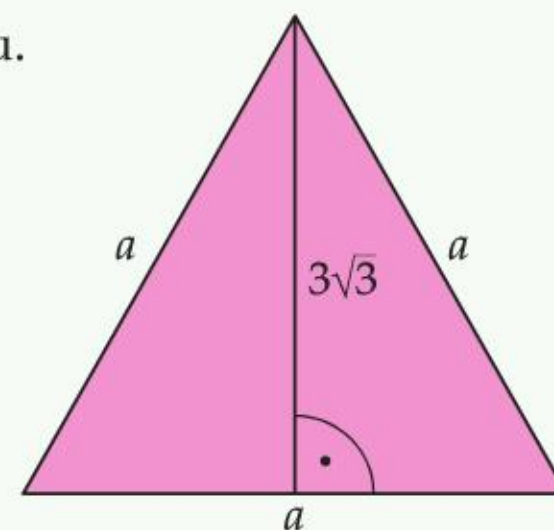
$$a^2 = 27 \cdot \frac{4}{3}$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

$$\text{Obw.} = 3 \cdot 6 = 18$$

Obwód trójkąta jest równy 18.



1. Obwód trójkąta równobocznego jest równy 36 cm. Oblicz wysokość tego trójkąta.

Przykład 2

Ramię trójkąta równoramiennego ma długość 17 dm. Wysokość poprowadzona do podstawy tego trójkąta jest równa 8 dm. Obliczmy długość tej podstawy.

Wprowadźmy takie oznaczenia jak na rysunku.

Skorzystajmy z twierdzenia Pitagorasa.

$$8^2 + b^2 = 17^2$$

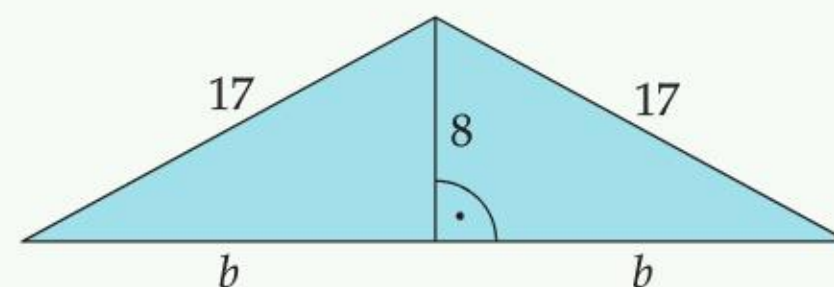
$$b^2 = 289 - 64$$

$$b^2 = 225$$

$$b = 15$$

$$2b = 2 \cdot 15 = 30$$

Podstawa trójkąta ma długość 30 dm.



2. Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 64 cm. Podstawa jest o 13 cm dłuższa od ramienia. Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną do podstawy.

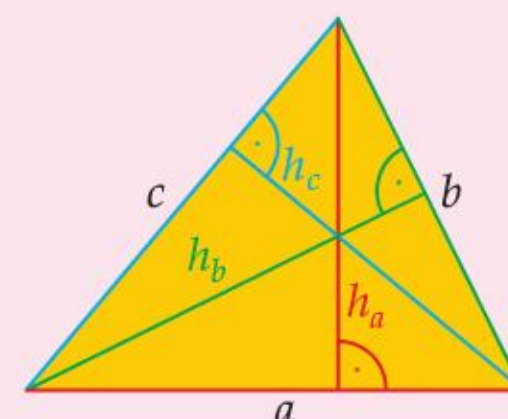
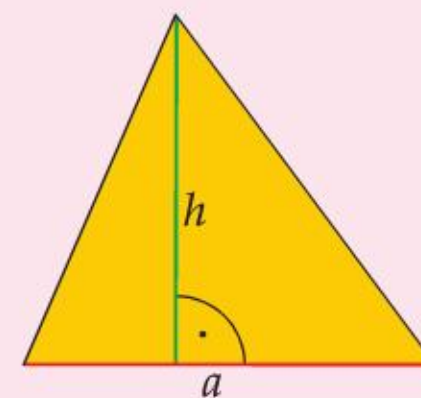
Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h$$

Wiemy, że każdy trójkąt ma trzy wysokości.

Oznaczając długości boków trójkąta literami: a, b, c oraz wysokości opuszczone odpowiednio na te boki przez: h_a, h_b, h_c , mamy:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a \quad P = \frac{1}{2} b \cdot h_b \quad P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$



Przykład 3

W trójkącie równoramiennym podstawa ma 16 cm, a wysokość na nią opuszczona jest o 1 cm krótsza. Obliczmy pole i obwód tego trójkąta.

$$a = 16$$

$$h_a = 16 - 1 = 15$$

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120$$

Z twierdzenia Pitagorasa

(dla trójkąta ADC) otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h_a^2 = b^2$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 16\right)^2 + 15^2 = b^2$$

$$64 + 225 = b^2$$

$$289 = b^2$$

$$b = \sqrt{289}$$

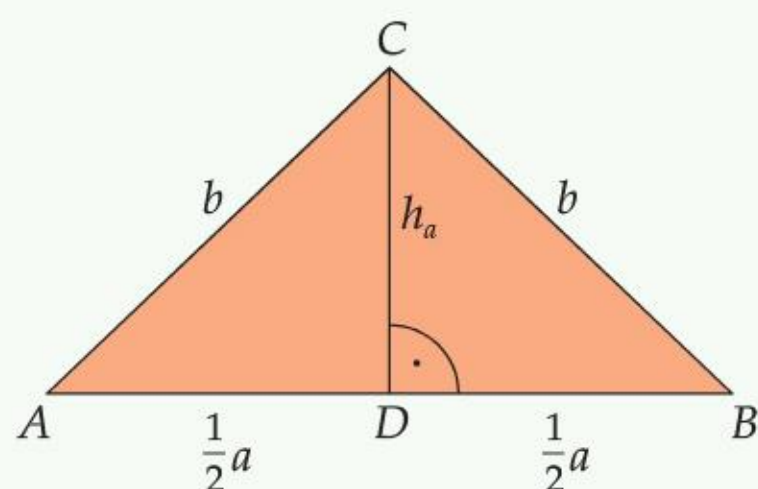
$$b = 17$$

$$\text{Obw.} = a + 2b$$

$$\text{Obw.} = 16 + 2 \cdot 17$$

$$\text{Obw.} = 50$$

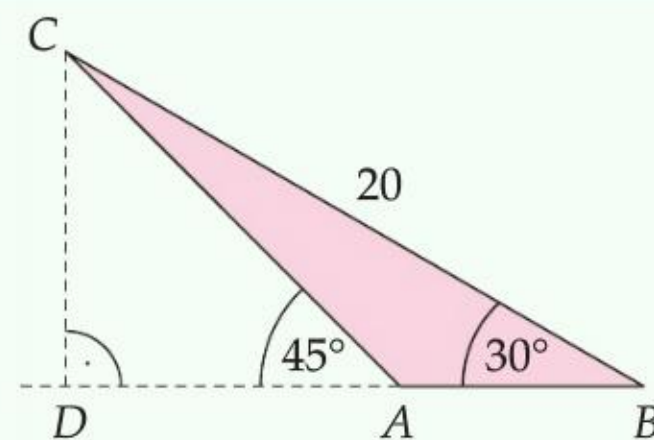
Pole tego trójkąta jest równe 120 cm^2 , zaś obwód równy jest 50 cm.



3. Pole trójkąta równoramiennego jest równe 48 dm^2 . Ramię tego trójkąta ma długość 10 dm, natomiast wysokość opuszczona na podstawę jest o 2 dm krótsza od ramienia. Oblicz obwód tego trójkąta.

Przykład 4

Obliczmy pole trójkąta ABC , korzystając z danych zapisanych na rysunku.



Trójkąt DBC jest trójkątem prostokątnym, w którym jeden z kątów ostrych ma miarę 30° . Z własności trójkąta prostokątnego, którego kąty ostre mają miary 30° i 60° wiemy, że:

$$|CD| = 20 : 2 = 10 \text{ i } |DB| = 10\sqrt{3}$$

Trójkąt ACD jest trójkątem prostokątnym równoramiennym (kąt ostry ma miarę 45°), czyli

$$|DA| = |CD| = 10$$

$$\text{Stąd: } |AB| = |DB| - |DA| = 10\sqrt{3} - 10$$

Odcinek CD jest wysokością trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C do przedłużenia boku AB . Zatem:

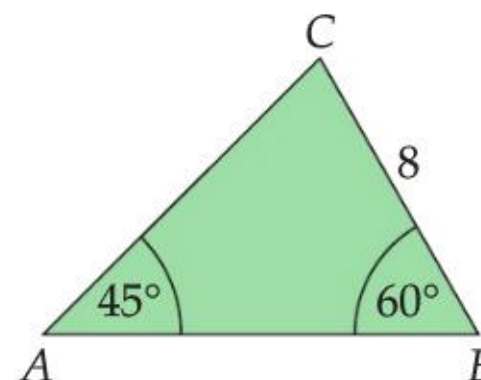
$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD|$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(10\sqrt{3} - 10) \cdot 10$$

$$P_{\triangle ABC} = 50(\sqrt{3} - 1)$$

Pole trójkąta ABC jest równe $50(\sqrt{3} - 1)$.

4. Oblicz pole trójkąta ABC przedstawionego na rysunku.



Zadania

- Narysuj wysokości w trójkącie:

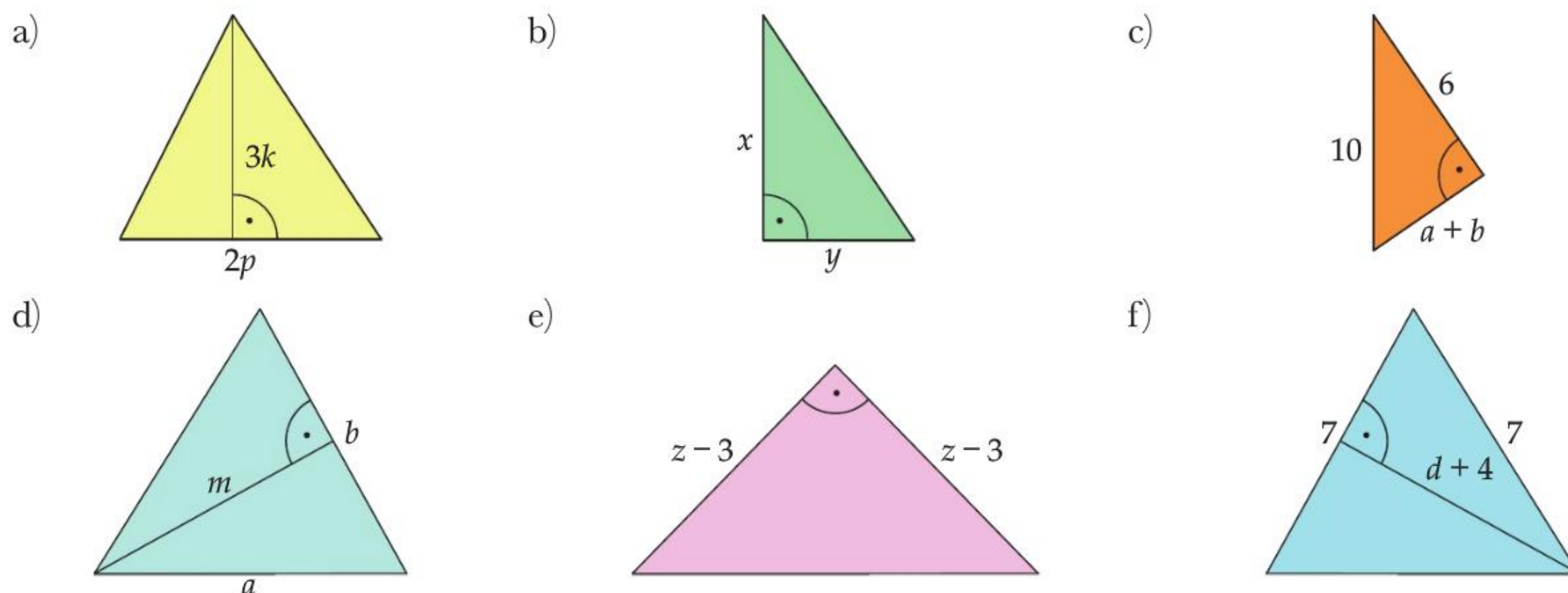
- a) równobocznym,
- b) równoramiennym,
- c) różnobocznym.

Który trójkąt ma wszystkie wysokości równej długości?

- Jaki to trójkąt, w którym punkt przecięcia się jego wysokości lub ich przedłużeń znajduje się:

- a) poza trójkątem,
- b) w wierzchołku trójkąta,
- c) wewnątrz trójkąta?

- W każdym przykładzie zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące pole trójkąta. Potrzebne informacje odczytaj z rysunku.



- Jeden z boków trójkąta ma długość 4 cm, a wysokość opuszczona ten bok stanowi $\frac{3}{4}$ jego długości. Oblicz pole trójkąta. Narysuj trzy inne trójkąty o tym samym polu.
- Narysuj trójkąt prostokątny o polu równym 12 cm^2 , którego długości przyprostokątnych wyrażone w centymetrach są liczbami naturalnymi. Ile takich trójkątów, które nie będą trójkątami przystającymi, można narysować? Podaj wszystkie możliwości.
- W trójkącie jeden z boków ma 18 cm, a wysokość poprowadzona do tego boku jest równa 0,8 dm. Oblicz pole tego trójkąta. Wynik podaj w centymetrach kwadratowych.
- W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma 10 cm. Jedna z przyprostokątnych jest o 40% krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz obwód i pole tego trójkąta.
- W trójkącie ROK bok RO ma długość 10,5 cm, a bok OK ma 8,4 cm. Wysokość KL jest równa 4 cm. Oblicz pole trójkąta i wysokość poprowadzoną do boku OK .
- W trójkącie KLM bok KM ma długość 29 cm, a bok KL ma 92 cm. Wysokość opuszczona z wierzchołka M na bok KL jest równa 21 cm. Oblicz wysokości opuszczone z wierzchołków K i L odpowiednio na bok ML i bok MK .
- Oblicz pole i obwód trójkąta równoramiennego, którego podstawa ma 10 cm, a wysokość opuszczona na tę podstawę jest o 2 cm od niej dłuższa.
- W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ma 30° , a przeciwprostokątna jest równa 2,8 dm. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.
- Oblicz pole trójkąta rozwartokątnego, którego kąty ostre mają 45° i 30° , a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego jest równa 4 cm.
- W trójkącie KLM kąt KLM ma 60° , a kąt LMK ma 75° . Bok ML ma 6 dm. Oblicz pole trójkąta KLM .

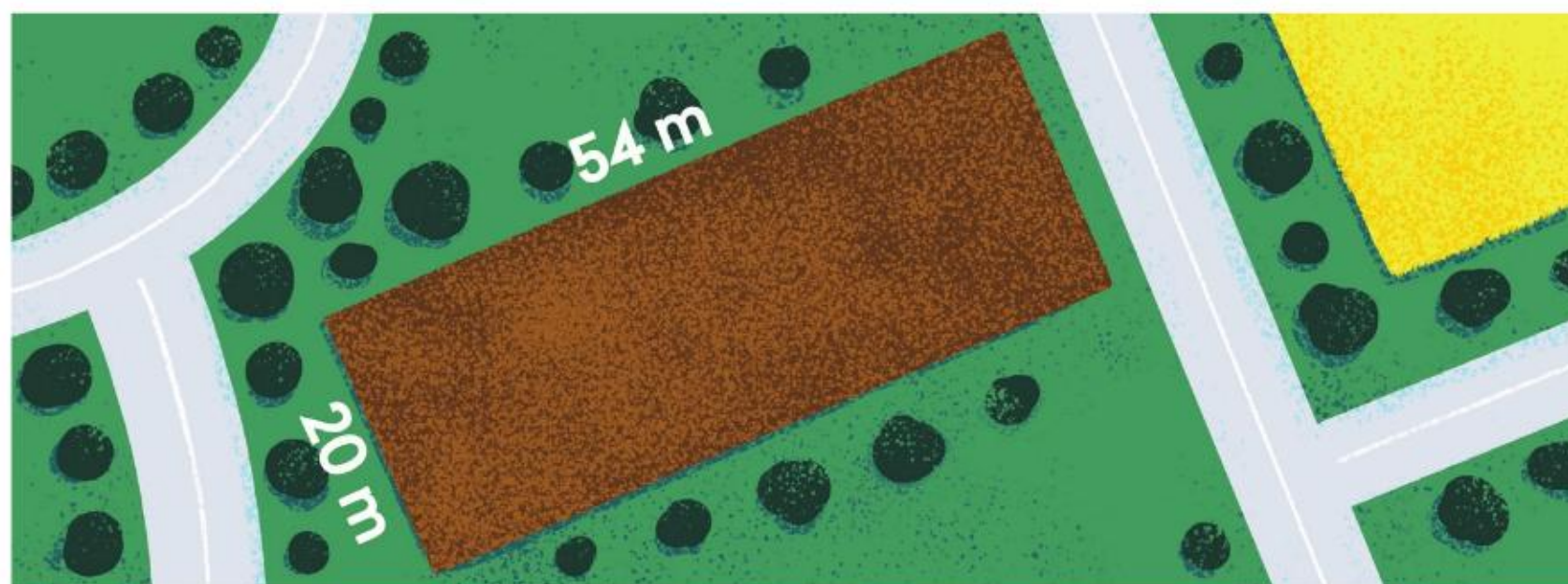
8.3 Prostokąty

Podejmij temat



Jakie pole powierzchni ma działka kupiona przez panią Iwonę? Czy pole tej działki jest większe niż 2 ary?
Ile metrów kwadratowych będzie miała część działki zajęta pod budowę domu?

Pani Iwona kupiła prostokątną działkę o wymiarach podanych na rysunku. Postanowiła na działce wybudować dom, który powstanie na planie kwadratu o boku długości 8 m.



Prostokąt to czworokąt, który ma wszystkie kąty proste.

Przekątne prostokąta są równej długości.

$$|AC| = |BD|$$

Punkt przecięcia się przekątnych dzieli je na połowy.

$$|AE| = |EC| = \frac{1}{2}|AC|$$

$$|BE| = |ED| = \frac{1}{2}|BD|$$

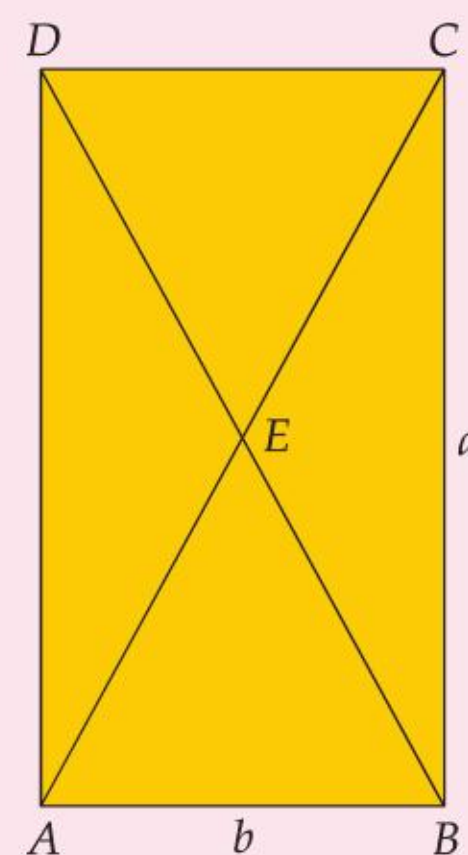
$$|AE| = |EC| = |DE| = |EB|$$

Obwód prostokąta możemy obliczyć ze wzoru:

$$Obw. = 2a + 2b = 2(a + b)$$

Pole prostokąta jest równe iloczynowi długości dwóch boków poprowadzonych z jednego wierzchołka prostokąta, wyrażonych w tej samej jednostce.

$$P = a \cdot b$$



Kwadrat to prostokąt, który ma wszystkie boki równe.

Przekątne kwadratu są równej długości i przecinają się pod kątem prostym.

$$|AC| = |BD|$$

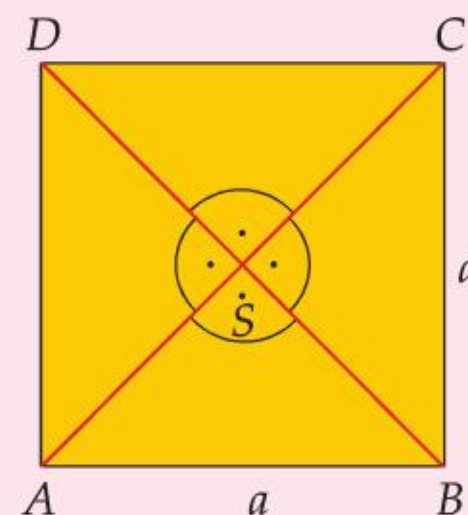
$$|AS| = |SC| = |DS| = |SB|$$

Obwód kwadratu możemy obliczyć ze wzoru:

$$Obw. = 4a$$

Pole kwadratu jest równe kwadratowi długości jego boku.

$$P = a \cdot a = a^2$$



Przykład 1

Obwód prostokąta jest równy 4 dm. Krótszy bok stanowi $\frac{2}{3}$ długości dłuższego boku tego prostokąta. Obliczmy pole tego prostokąta. Wynik zapiszmy w cm^2 .

Wprowadźmy oznaczenia:

x – długość jednego boku prostokąta (w dm)

$\frac{2}{3}x$ – długość drugiego boku prostokąta (w dm)

$$\text{Obw.} = 2 \cdot \left(x + \frac{2}{3}x\right)$$

$$4 = 2 \cdot \frac{5}{3}x$$

$$4 = \frac{10}{3}x \quad | \cdot \frac{3}{10}$$

$$x = 4 \cdot \frac{3}{10}$$

$$x = 1,2$$

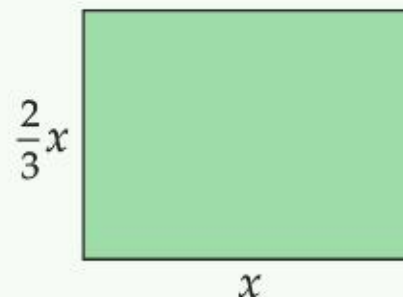
$$\frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{10} = 0,8$$

$$P = 1,2 \cdot 0,8$$

$$P = 0,96 \text{ dm}^2$$

$$0,96 \text{ dm}^2 = 0,96 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 96 \text{ cm}^2$$

Pole tego prostokąta jest równe 96 cm^2 .



1. Długość prostokąta stanowi 1,5 szerokości. Pole prostokąta jest równe 6 cm^2 . Oblicz obwód tego prostokąta.

Przykład 2

Kwadratowy plac o powierzchni $1,69 \text{ a}$ wyłożono kostką brukową. Ile metrów bieżących krawężnika potrzeba na obramowanie tego placu?

Najpierw zamieniamy jednostki:

$$1,69 \text{ a} = 1,69 \cdot 100 \text{ m}^2 = 169 \text{ m}^2$$

Obliczamy długość boku kwadratowego placu i jego obwód:

$$P = k^2$$

$$169 = k^2$$

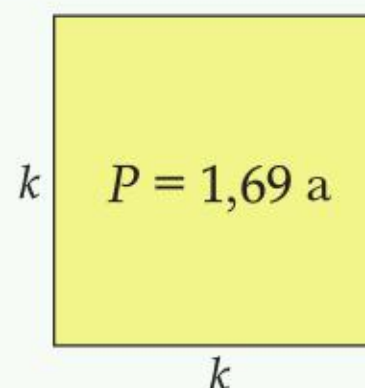
$$k = \sqrt{169}$$

$$k = 13$$

$$\text{Obw.} = 4k = 4 \cdot 13$$

$$\text{Obw.} = 52$$

Na obramowanie placu potrzeba 52 metry bieżące krawężnika.



2. Działka w kształcie kwadratu ma pole równe 2,25 a.
Oblicz pole powierzchni tej działki, na mapie wykonanej w skali
1 : 10 000.

Przykład 3

Długość prostokątnej działki jest równa 55 m. Przekątna tej działki ma długość 73 m.

- a) Obliczmy, ile metrów bieżących siatki potrzeba na ogrodzenie tej działki. Na furtkę i bramę odliczmy 5 metrów.
b) Obliczmy pole powierzchni działki. Wynik zapiszmy w arach.

- a) Obliczmy najpierw szerokość działki, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$a^2 + b^2 = d^2$$

$$a^2 + 55^2 = 73^2$$

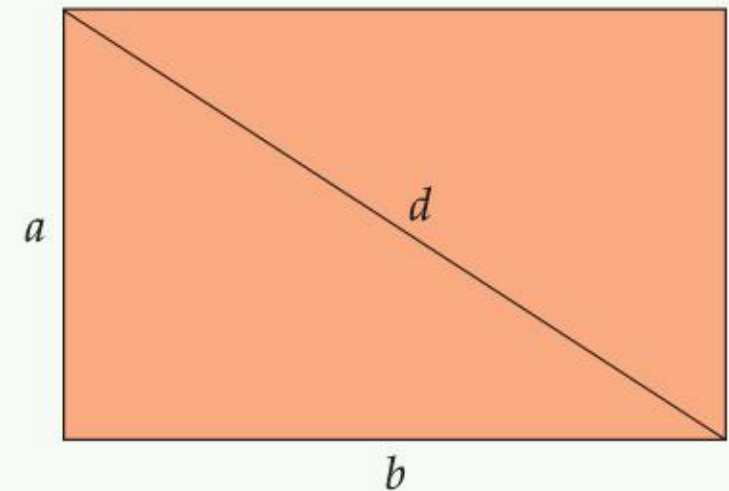
$$a^2 + 3025 = 5329$$

$$a^2 = 5329 - 3025$$

$$a^2 = 2304$$

$$a = \sqrt{2304}$$

$$a = 48$$



Szerokość działki jest równa 48 m.

Teraz obliczmy obwód.

$$\text{Obw.} = 2(a + b)$$

$$\text{Obw.} = 2 \cdot (48 + 55)$$

$$\text{Obw.} = 2 \cdot 103$$

$$\text{Obw.} = 206$$

Obwód działki jest równy 206 m.

$$206 - 5 = 201$$

Na ogrodzenie działki potrzeba 201 metrów bieżących siatki.

- b) $P = a \cdot b$

$$P = 48 \cdot 55$$

$$P = 2640$$

$$2640 \text{ m}^2 = 2640 \cdot 0,01 \text{ a} = 26,4 \text{ a}$$

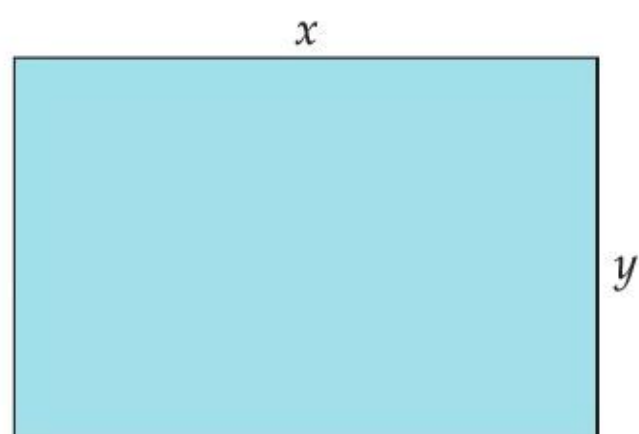
Pole powierzchni działki jest równe 26,4 a.

3. Przekątna prostokąta jest o 1 cm dłuższa od jednego z jego boków. Drugi z boków ma długość 7 cm. Oblicz obwód i pole tego prostokąta.

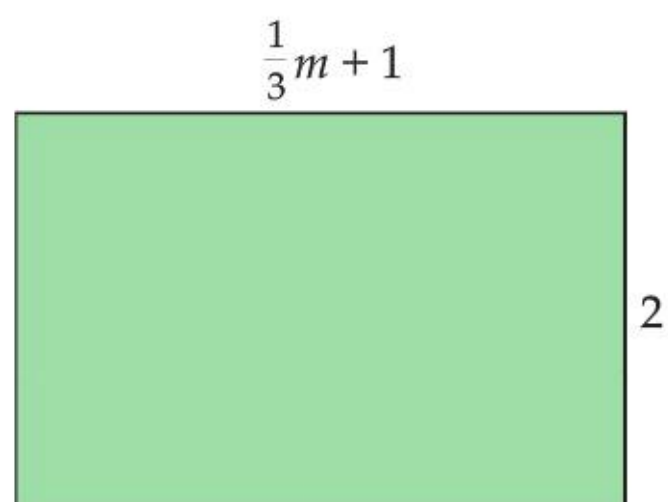
Zadania

- Zapisz pole każdego prostokąta za pomocą wyrażenia algebraicznego.

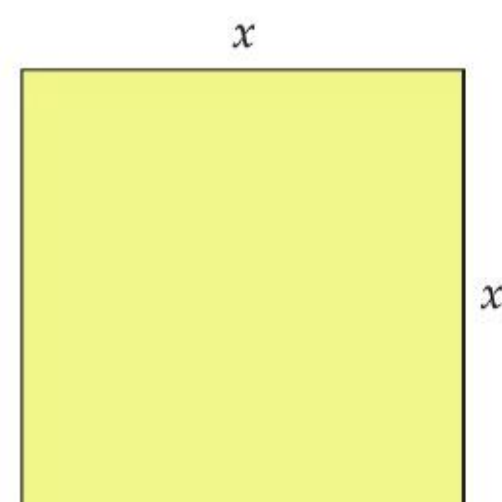
a)



b)



c)



- Rynek we Wrocławiu ma kształt prostokąta o wymiarach $205 \text{ m} \times 175 \text{ m}$. Rynek w Poznaniu ma kształt kwadratu o boku długości 141 m . Który z tych rynków ma większe pole powierzchni? O ile metrów kwadratowych więcej?
- Jakie wymiary może mieć prostokąt, którego pole jest równe 36 cm^2 ? Podaj co najmniej cztery przykłady. Który z tych prostokątów ma największy obwód?
- Drewniana podłoga w sali gimnastycznej ma kształt prostokąta o wymiarach $37 \text{ m} \times 16 \text{ m}$. Podłogę należy dwukrotnie pomalować lakierem. Ile litrów lakieru należy zakupić, jeżeli litr lakieru wystarcza na pomalowanie 6 m^2 powierzchni? Wynik zaokrąglaj do całości.
- Plac ma kształt prostokąta o wymiarach $21 \text{ m} \times 20 \text{ m}$. Oblicz długość ścieżki biegnącej wzdłuż przekątnej placu.
- Oblicz pole i obwód prostokąta, którego jeden z boków ma 2 dm długości, a drugi jest o 25% dłuższy.
- Obwód prostokąta jest równy $0,6 \text{ m}$. Jeden z boków jest dwa razy dłuższy od drugiego. Oblicz pole prostokąta.
- Oblicz długość boku kwadratu, którego pole jest równe polu prostokąta o wymiarach $9 \text{ cm} \times 1,6 \text{ dm}$.
- Obwód prostokąta jest równy 32 cm . Ile dm^2 ma pole kwadratu o takim samym obwodzie?
- Ile razy:
 - a) zwiększy się obwód kwadratu, jeżeli każdy z jego boków zwiększymy dwukrotnie?
 - b) zmniejszy się pole kwadratu, jeżeli każdy z jego boków zmniejszymy dwukrotnie?
- Na mapie sporządzonej w skali $1 : 150\,000$ prostokątny park ma wymiary $5,5 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$. Oblicz rzeczywiste pole powierzchni tego parku. Wynik podaj w arach i hektarach.
- Kwadratowa działka o boku 18 m ma pole równe
 - A. $0,0324 \text{ ha}$
 - B. $0,324 \text{ ha}$
 - C. $3,24 \text{ ha}$
 - D. $32,4 \text{ ha}$

8.4 Równoległoboki

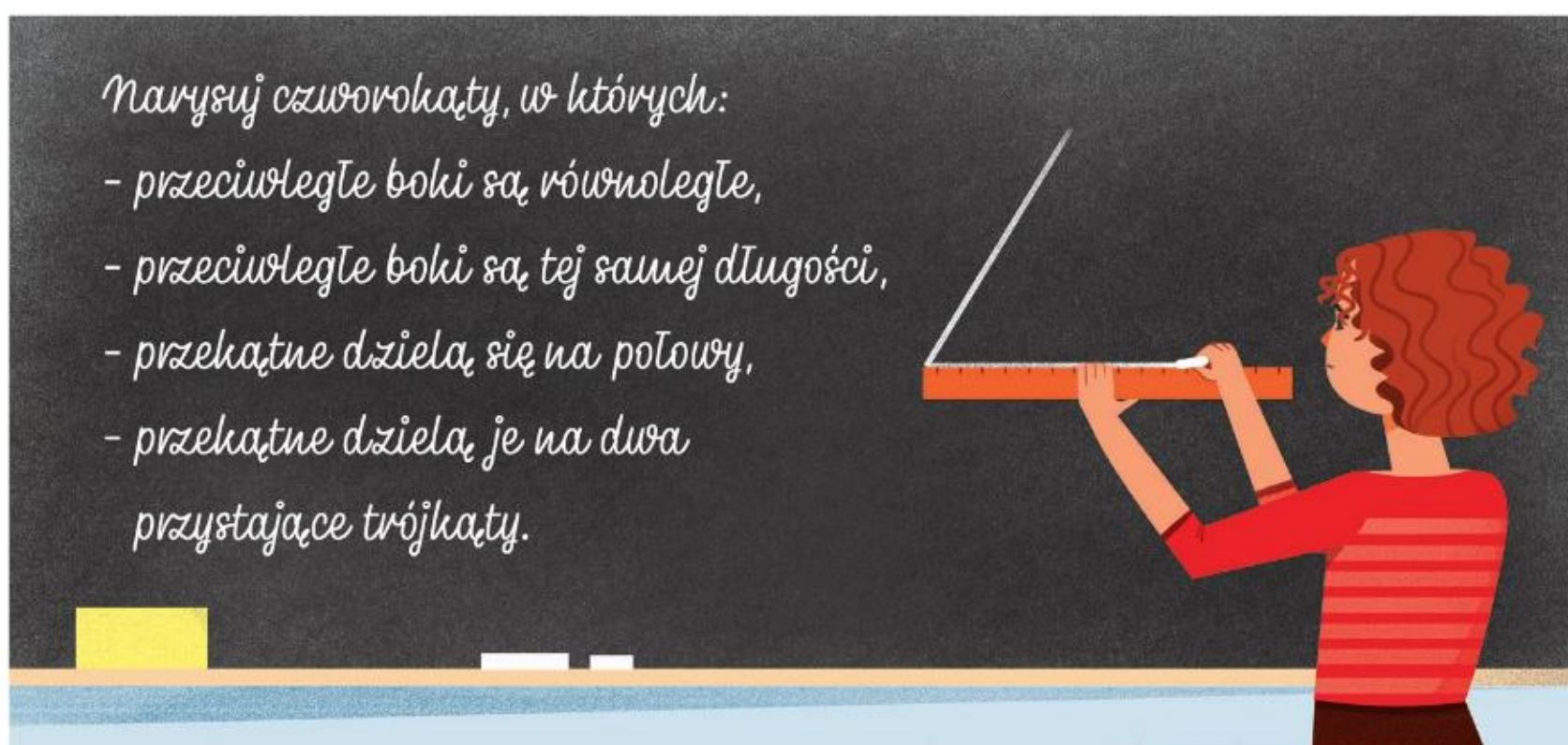
Podejmij temat



Potrafisz narysować czworokąty o podanych własnościach? Jak się nazywają te czworokąty?

Narysuj czworokąty, w których:

- przeciwległe boki są równoległe,
- przeciwległe boki są tej samej długości,
- przekątne dzielą się na połowy,
- przekątne dzielą je na dwa przystające trójkąty.



Równoległobok to czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

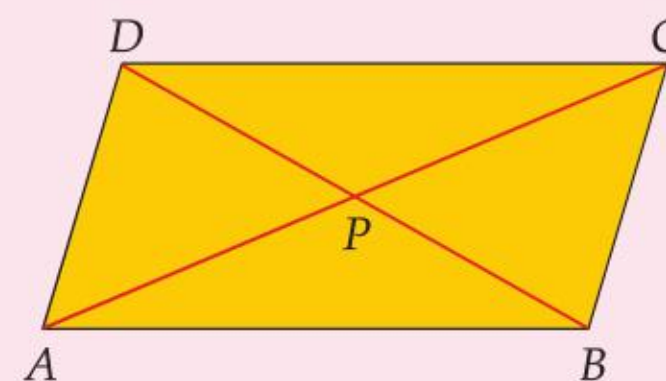
Punkt przecięcia się przekątnych dzieli te przekątne na połowy.

$$|AP| = |PC| = \frac{1}{2}|AC|$$

$$|BP| = |PD| = \frac{1}{2}|BD|$$

Suma miar kątów leżących przy jednym boku równoległoboku jest równa 180° .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



Wysokość równoległoboku to odcinek łączący przeciwległe (równoległe) boki (lub ich przedłużenia) i do nich prostopadły.

$$h_1 \perp AB$$

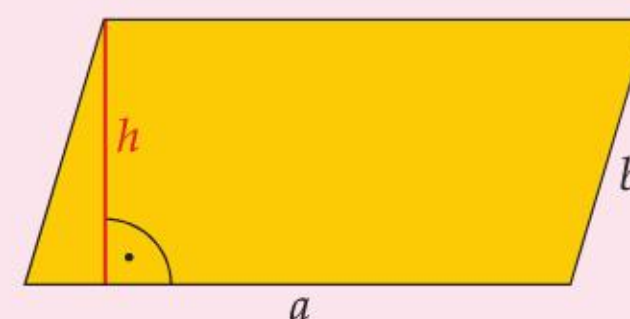
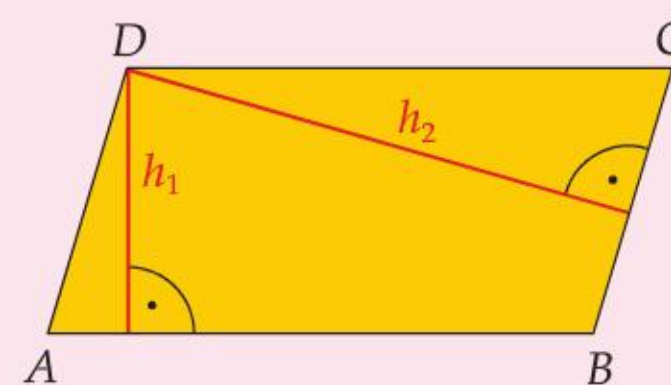
$$h_2 \perp BC$$

Obwód równoległoboku możemy obliczyć ze wzoru:

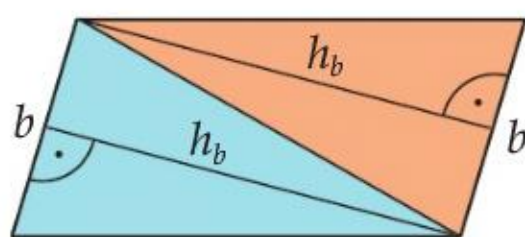
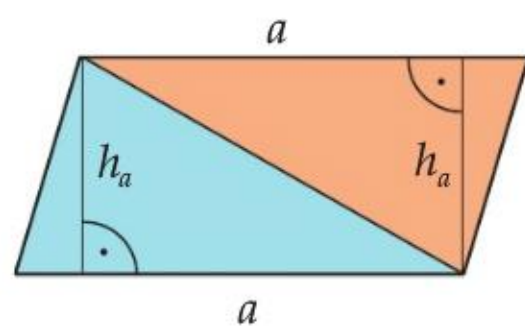
$$Obw. = 2a + 2b = 2(a + b)$$

Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości boku i wysokości opuszczonej na ten bok.

$$P = a \cdot h$$



Przekątna równoległoboku dzieli go na dwa przystające trójkąty.



Pole równoległoboku jest równe sumie pól dwóch przystających trójkątów, więc:

$$P = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} a \cdot h_a \right) \quad \text{lub} \quad P = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} b \cdot h_b \right)$$

$$P = a \cdot h_a \quad \text{lub} \quad P = b \cdot h_b$$

Przykład 1

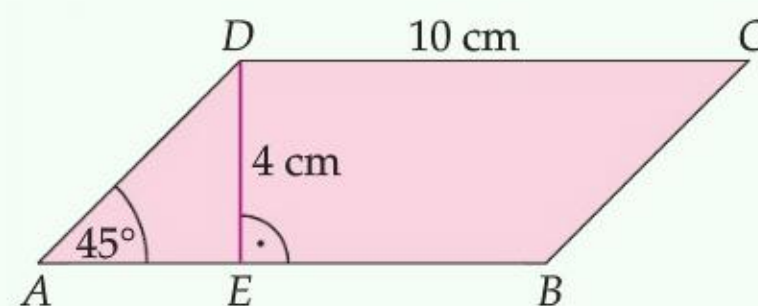
Bok AB równoległoboku $ABCD$ ma długość 10 cm. Kąt ostry ma miarę 45° , a wysokość poprowadzona do boku AB jest równa 4 cm. Obliczmy obwód równoległoboku.

Niech DE będzie wysokością równoległoboku poprowadzoną do boku AB . Wtedy trójkąt AED jest trójkątem prostokątnym równoramiennym (kąt DEA jest kątem prostym i kąt EAD ma miarę 45°).
Zatem bok AD ma długość $4\sqrt{2}$ cm.

Obwód równoległoboku jest więc równy:

$$\text{Obw.} = 2(10 + 4\sqrt{2}) = 20 + 8\sqrt{2}$$

Obwód równoległoboku jest równy $(20 + 8\sqrt{2})$ cm.



1. W równoległoboku kąt rozwarty ma miarę 135° , a krótszy bok ma długość $\sqrt{2}$. Oblicz wysokość poprowadzoną do dłuższego boku.

Przykład 2

Wysokości równoległoboku są równe 8 cm i 4 cm. Dłuższy bok równoległoboku ma 6 cm. Obliczmy pole i obwód równoległoboku.

$$P = a \cdot h_a \quad a = 6 \text{ cm}$$

$$P = 6 \cdot 4 \quad h_a = 4 \text{ cm}$$

$$P = 24$$

Pole równoległoboku jest równe 24 cm^2 .

$$P = b \cdot h_b \quad h_b = 8 \text{ cm}$$

$$24 = b \cdot 8 \quad / : 8$$

$$b = 3$$

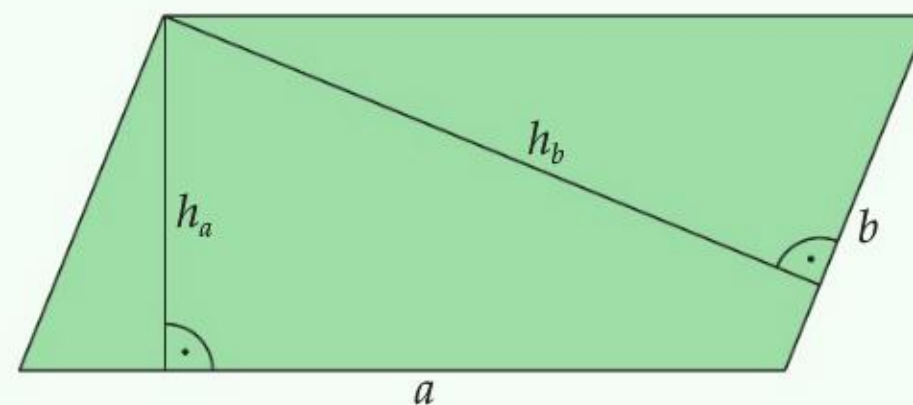
Drugi bok równoległoboku ma 3 cm.

$$\text{Obw.} = 2a + 2b$$

$$\text{Obw.} = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 12 + 6$$

$$\text{Obw.} = 18$$

Obwód równoległoboku jest równy 18 cm.



2. Wysokości w równoległoboku są równe 12 cm i 10 cm. Krótszy bok jest równy 15 cm. Oblicz pole i obwód tego równoległoboku.

Równoległobok, którego wszystkie boki są równe, nazywamy **rombem**.

W rombie wszystkie wysokości mają tę samą długość.

Pole rombu o boku długości a i wysokości h jest równe:

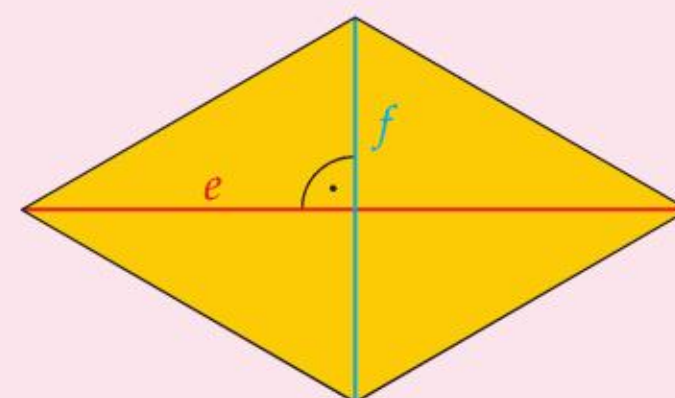
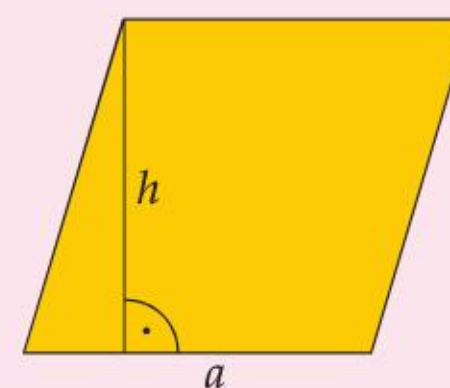
$$P = a \cdot h$$

Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym.

Dzieli on romb na cztery przystające trójkąty prostokątne.

Pole rombu o przekątnych równych e i f możemy obliczyć ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} e \cdot f$$



Przykład 3

Przekątne rombu są równe 8 cm i 6 cm. Oblicz pole i wysokość tego rombu.

$$P = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6$$

$$P = 24$$

Pole rombu jest równe 24 cm².

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość boku rombu:

$$\left(\frac{1}{2}e\right)^2 + \left(\frac{1}{2}f\right)^2 = a^2$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 8\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 6\right)^2 = a^2$$

$$16 + 9 = a^2$$

$$25 = a^2$$

$$a = \sqrt{25}$$

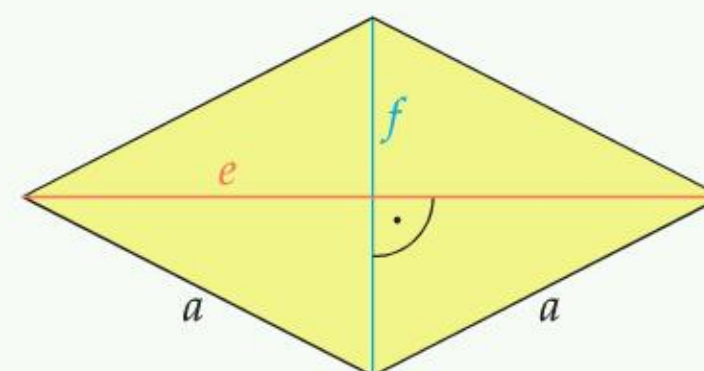
$$a = 5$$

$$P = a \cdot h$$

$$24 = 5 \cdot h \quad | :5$$

$$h = 4,8$$

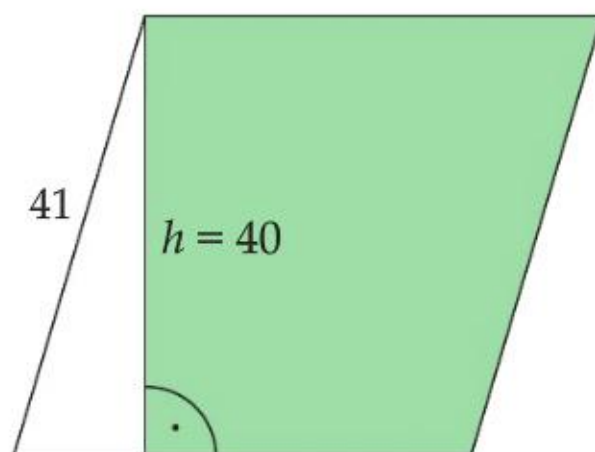
Wysokość rombu jest równa 4,8 cm.



3. Obwód rombu jest równy 40 cm, a jedna z jego przekątnych ma 16 cm. Oblicz pole tego rombu.

Zadania

- Narysuj równoległobok o boku równym 3 cm i wysokości opuszczonej na ten bok równej 5 cm.
- Narysuj równoległobok, w którym kąt ostry ma miarę 60° . Zaznacz wysokości narysowanego równoległoboku.
- Narysuj równoległobok o polu równym 12 cm^2 , którego:
a) bok ma długość 4 cm, b) wysokość ma długość 6 cm.
- Podstawa równoległoboku ma długość 12 cm, a wysokość jest $1\frac{1}{2}$ razy od niej dłuższa. Oblicz pole tego równoległoboku.
- Oblicz pole równoległoboku, wiedząc, że jego wysokość ma 6 cm i stanowi 75% długości boku, na który jest opuszczona.
- Pole równoległoboku jest równe 48 cm^2 . Oblicz obwód tego równoległoboku, wiedząc, że wysokości równoległoboku mają długości 6 cm i 4 cm.
- W równoległoboku przekątna o długości 4 dm jest prostopadła do krótszego boku. Bok ten jest o 31 cm krótszy od tej przekątnej. Oblicz pole i obwód równoległoboku.
- Narysuj romb, którego jedna z przekątnych jest równa 0,8 dm, a druga przekątna jest o 25% krótsza. Oblicz pole i obwód tego rombu.
- Pole rombu jest równe 32 a. Jedna z przekątnych tego rombu jest dwa razy dłuższa od drugiej. Ile metrów długości mają te przekątne?
- Oblicz obwód rombu, wiedząc, że jego przekątne mają długości 14 cm i 4,8 dm.
- Obwód rombu jest równy 68 cm. Jedna z przekątnych jest o 1 cm krótsza od długości boku tego rombu. Oblicz pole rombu.
- Oblicz pole zamalowanej części rombu.



- Oblicz pole powierzchni działki w kształcie kwadratu o przekątnej długości 150 m.

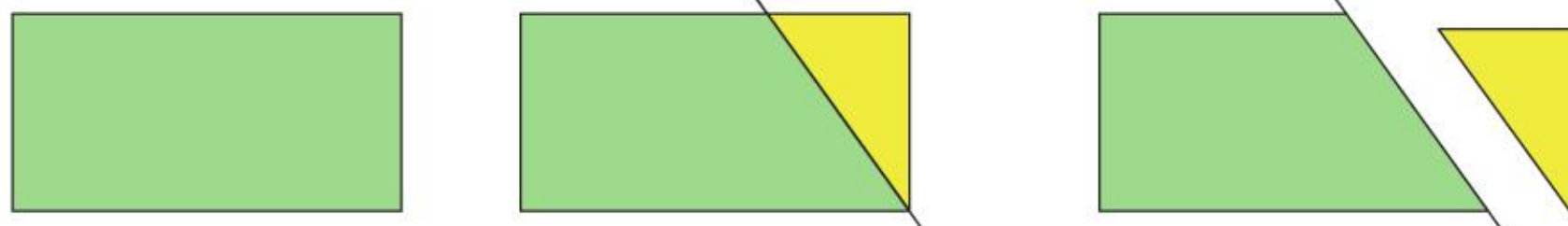
8.5 Trapezy

Podejmij temat



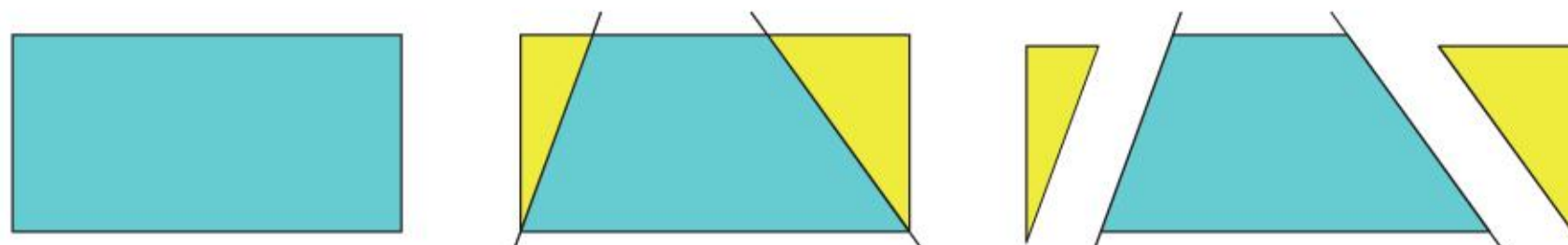
Jaki wielokąt otrzymano?
Jakie własności ma ten wielokąt?

● Z prostokątnego kartonu odcięto część w kształcie trójkąta, tak jak na rysunkach.



Z prostokątnego kartonu odcięto dwa trójkątne kawałki, tak jak na rysunkach.

Jaki wielokąt otrzymano?
Jakie własności ma ten wielokąt?
Jaki wielokąt powstanie, gdy odcięte kawałki będą jednakowe?



Trapez to czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych.

Boki równoległe nazywamy podstawami trapezu,
a pozostałe dwa boki – ramionami trapezu.

$$AB \parallel DC$$

Suma miar kątów trapezu leżących
przy jednym ramieniu jest równa 180° .

$$\alpha + \delta = 180^\circ$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ$$

Trapez, którego ramiona są tej samej długości, nazywamy
trapezem równoramiennym.

$$|AD| = |BC|$$

Trapez, którego ramię jest prostopadłe do podstaw, nazywamy
trapezem prostokątnym.

$$AD \perp AB \text{ i } AD \perp DC$$

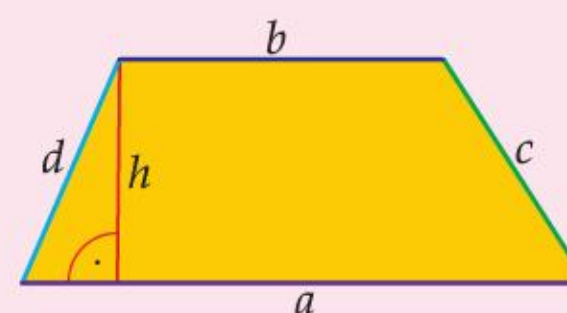
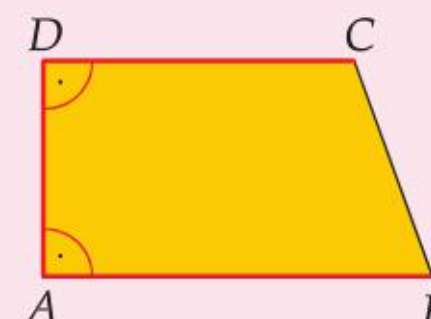
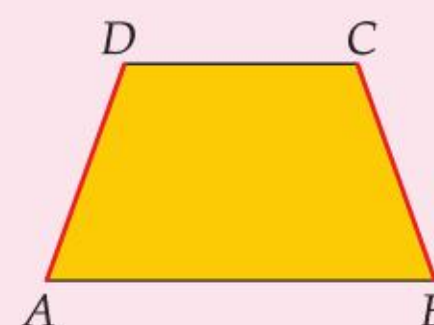
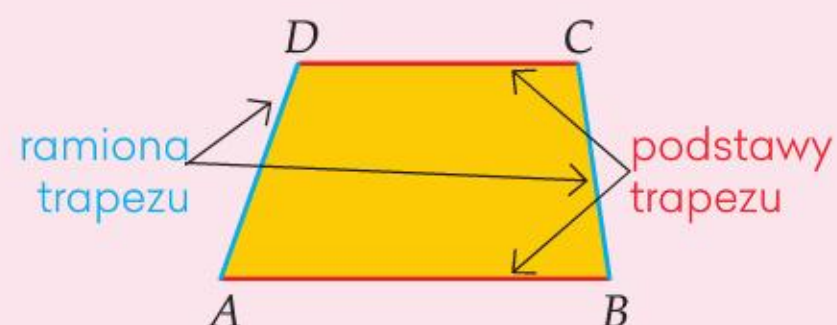
Wysokość trapezu to odcinek łączący podstawy trapezu
lub ich przedłużenia i do nich prostopadły.

Obwód trapezu to suma długości jego boków.

$$Obw. = a + b + c + d$$

Pole trapezu jest równe połowie iloczynu wysokości trapezu
i sumy długości podstaw.

$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$



Przykład 1

Obwód trapezu równoramiennego wynosi 44 cm, a długości jego podstaw są równe 4 cm i 14 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Wprowadźmy takie oznaczenia jak na rysunku.

$$\text{Obw.} = a + b + 2c$$

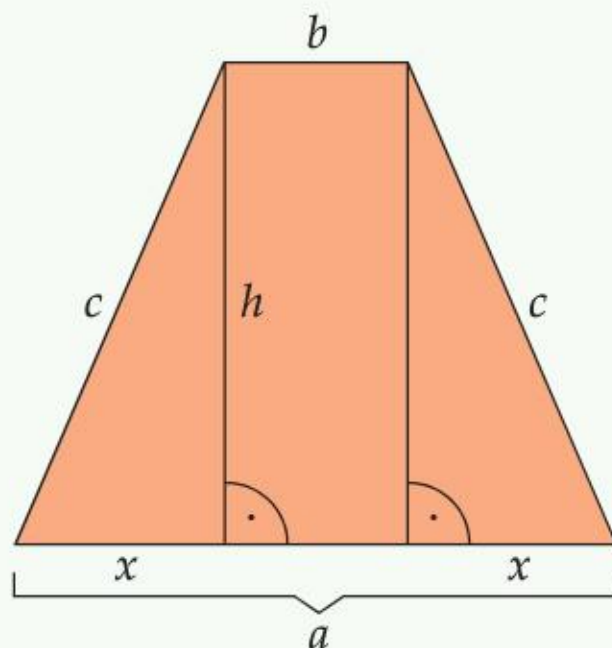
$$44 = 14 + 4 + 2c$$

$$44 = 18 + 2c$$

$$44 - 18 = 2c$$

$$26 = 2c \quad | : 2$$

$$c = 13$$



Każde z ramion tego trapezu ma długość 13 cm.

W trapezie równoramiennym wysokości poprowadzone z wierzchołków kątów rozwartych dzielą trapez na prostokąt i dwa przystające trójkąty prostokątne.

$$a = 2x + b$$

$$x = (a - b) : 2$$

$$x = (14 - 4) : 2 = 10 : 2$$

$$x = 5$$

Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$x^2 + h^2 = c^2$$

$$5^2 + h^2 = 13^2$$

$$25 + h^2 = 169$$

$$h^2 = 169 - 25$$

$$h^2 = 144$$

$$h = \sqrt{144}$$

$$h = 12$$

Wysokość trapezu jest równa
12 cm.

$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

$$P = \frac{(14 + 4) \cdot 12}{2}$$

$$P = 18 \cdot 6$$

$$P = 108$$

Pole trapezu jest równe
108 cm².

1. Pole trapezu jest równe 36 cm². Krótsza podstawa ma długość 8 cm, a wysokość jest równa 4 cm. Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu.

Przykład 2

W trapezie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli podstawę na dwie części, z których krótsza ma 2 cm długości. Oblicz pole tego trapezu, jeśli wysokość jest równa 8 cm, a krótsza podstawa ma długość 6 cm.

Z treści zadania wynika, że:

$$b = a + 2x$$

$$b = 6 + 2 \cdot 2$$

$$b = 10$$

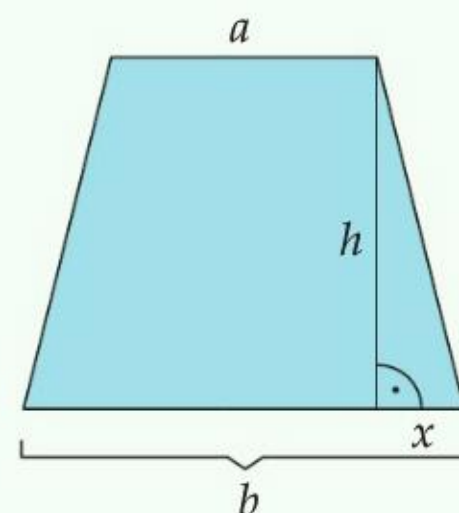
$$P = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot (6 + 10) \cdot 8$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 128$$

$$P = 64$$

Pole trapezu jest równe 64 cm².



$$a = 6 \text{ cm}$$

$$h = 8 \text{ cm}$$

$$x = 2 \text{ cm}$$

2. W trapezie równoramiennym kąt ostry ma miarę 30°, a wysokość jest równa $4\sqrt{2}$ cm. Dłuższa podstawa ma długość 48 cm. Oblicz pole tego trapezu.

Zadania

- Narysuj trapez, którego podstawy mają długości 3 cm i 5 cm, a wysokość jest równa 4 cm. Oblicz pole tego trapezu.
- Podstawy trapezu mają długości 5 cm i 3 cm, a wysokość stanowi 75% sumy długości tych podstaw. Oblicz pole tego trapezu.
- Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, w którym:
 - a) podstawy mają 18 cm i 6 cm długości, a ramię 10 cm,
 - b) dłuższa podstawa jest równa 23 cm, krótsza podstawa 5 cm i kąt ostry ma miarę 45°.
- W trapezie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego podzieliła podstawę na dwie części o długościach odpowiednio 3 cm i 12 cm. Obwód trapezu jest równy 3,4 dm. Oblicz pole tego trapezu.
- W trapezie prostokątnym wysokość równa 3 cm, poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli podstawę na dwa odcinki o długościach 4 cm każdy. Oblicz pole i obwód tego trapezu.
- W trapezie prostokątnym ramię prostopadłe do podstaw ma 8 cm długości. Jedna z podstaw jest od niego 2 razy krótsza, a druga o 1 cm dłuższa. Oblicz pole tego trapezu.
- Obwód trapezu prostokątnego jest równy 50 cm. Boki nierównoległe mają długości 0,8 dm i 1,7 dm. Krótsza podstawa ma długość 5 cm. Oblicz pole tego trapezu.
- W trapezie prostokątnym wysokość, która ma 4 cm, jest równa krótszej podstawie. Krótsza przekątna tego trapezu jest prostopadła do ramienia i tworzy z podstawą kąt 45°. Oblicz pole tego trapezu.
- Pole trapezu jest równe 140 cm². Wysokość ma 4 cm długości. Krótsza podstawa jest dwa razy dłuższa od wysokości. Oblicz długość dłuższej podstawy tego trapezu.
- Trawnik ma kształt trapezu o kątach ostrych 30° i 45°. Wysokość tego trapezu jest równa 10 m, a krótsza podstawa ma długość 6 m. Oblicz pole powierzchni tego trawnika. Wynik podaj w m² z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

8.6 Wielokąty foremne

Podejmij temat

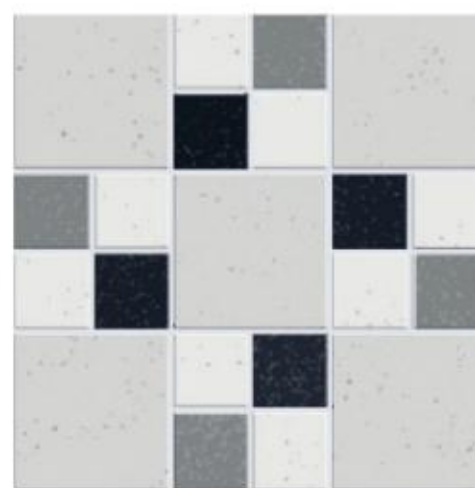


Jakie kształty mają płytki w poszczególnych zestawach?

Przyjrzyj się długościom boków i kątom wielokątów, w kształtach których są płytki.

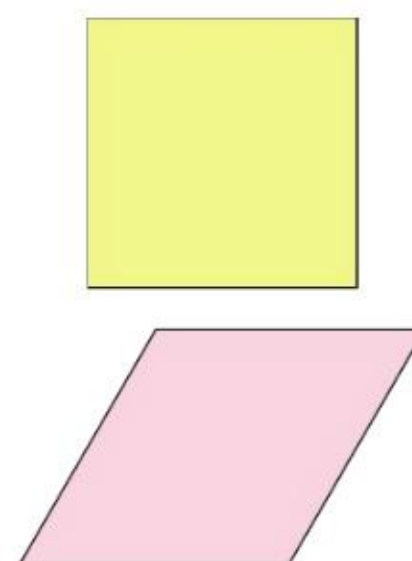
Co zauważasz?

Pani Aldona wybiera płytki ceramiczne, którymi ma zamiar wyłożyć podłogę na balkonie. Chce dokonać wyboru spośród takich płytek, jakie pokazano na rysunku.

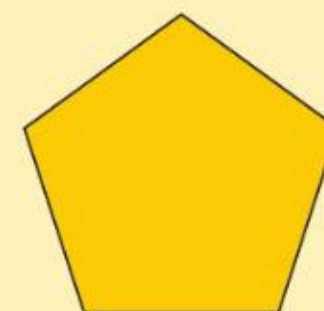


Na rysunku przedstawiono kwadrat i romb. Zarówno bok kwadratu, jak i rombu mają długość 2 cm.

Mimo że każda z tych figur jest czworokątem o bokach równej długości, mają one różne własności. W rombie tylko kąty przeciwległe są równe, a w kwadracie równe są wszystkie kąty. Kwadrat jest przykładem wielokąta foremnego.

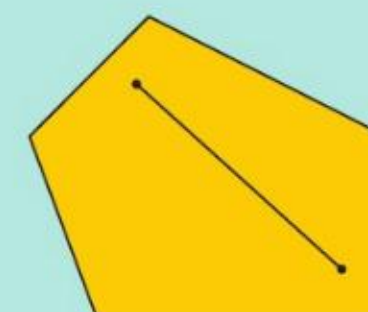


Wielokąt foremny to wielokąt, który ma wszystkie boki równej długości i wszystkie kąty wewnętrzne równe.

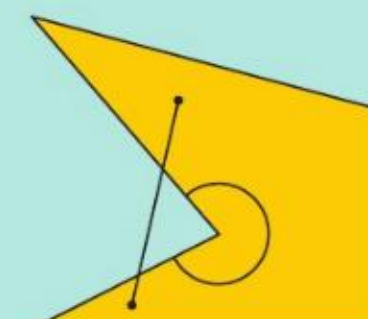


Więcej na temat

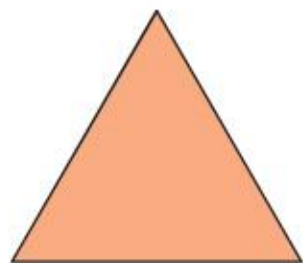
Wielokąt wypukły to wielokąt, w którym każdy odcinek, którego końcami są dwa punkty należące do tego wielokąta, zawiera się w tym wielokącie. W wielokącie wypukłym wszystkie kąty wewnętrzne są mniejsze od kąta półpełnego (mają miarę mniejszą niż 180°).



Wielokąt wklęsły to wielokąt, który nie jest wielokątem wypukłym. W wielokącie wklęsłym co najmniej jeden kąt jest kątem wklęsłym (ma miarę większą niż 180° i mniejszą niż 360°).



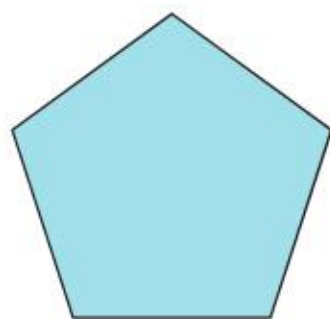
Przykłady wielokątów foremnych



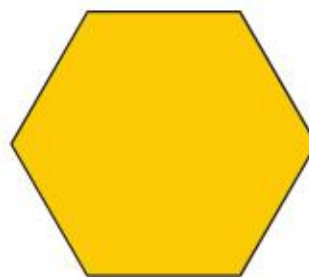
trójkąt
równoboczny



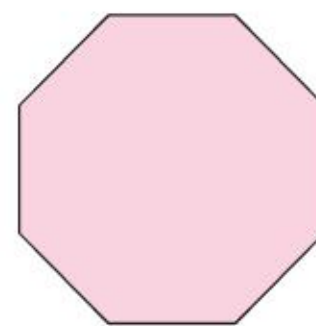
kwadrat



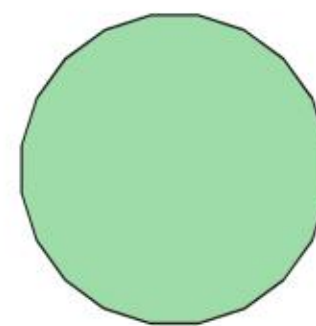
pięciokąt
foremny



sześciokąt
foremny



ośmiokąt
foremny



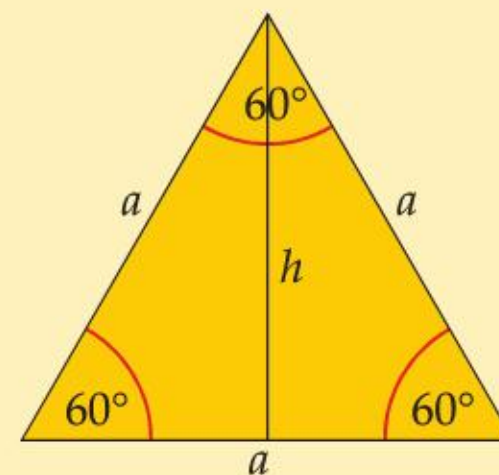
dwudziestokąt
foremny

Omówmy teraz własności niektórych wielokątów foremnych.

Trójkąt równoboczny jest wielokątem foremnym o 3 bokach.

- W trójkącie równobocznym wszystkie boki są równe.
- Każdy kąt trójkąta równobocznego ma 60° .
- Obwód trójkąta równobocznego o boku a jest równy $3a$.
- Wysokość h trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



Przykład 1

W trójkącie równobocznym ABC o obwodzie $45\sqrt{3}$ zaznaczono na boku BC punkt D tak, że odcinek AD jest wysokością trójkąta ABC . Obliczmy obwód trójkąta ADC .

a – bok trójkąta ABC

$$3a = 45\sqrt{3} \mid : 3$$

$$a = 15\sqrt{3}$$

Ponieważ AD jest wysokością trójkąta ABC , więc

$$|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

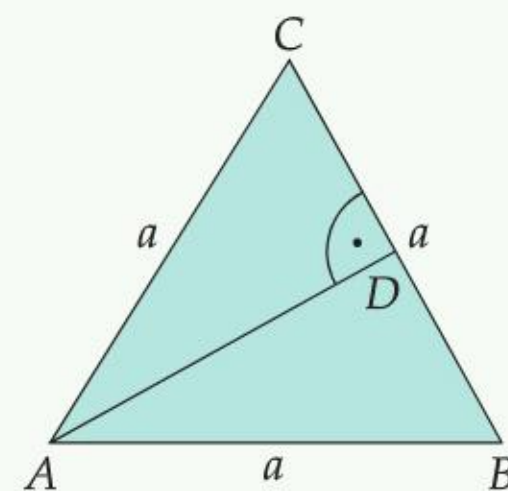
$$|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 15\sqrt{3}$$

$$|AD| = 22,5$$

$$Obw_{\triangle ADC} = 15\sqrt{3} + \frac{15\sqrt{3}}{2} + 22,5$$

$$Obw_{\triangle ADC} = 22,5\sqrt{3} + 22,5$$

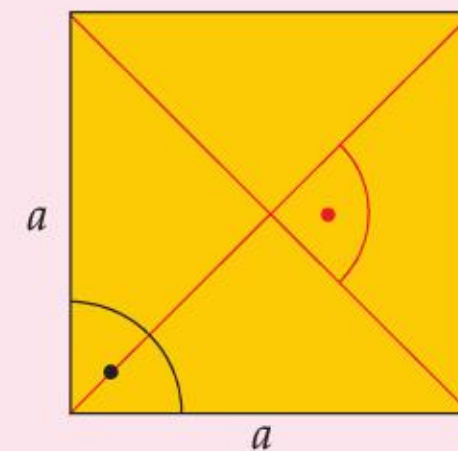
$$Obw_{\triangle ADC} = 22,5(\sqrt{3} + 1)$$



1. Wysokość trójkąta równobocznego jest równa 9. Oblicz obwód tego trójkąta.

Kwadrat jest wielokątem foremnym o 4 bokach.

- W kwadracie wszystkie boki są równe.
- Każdy kąt kwadratu ma 90° .
- Obwód kwadratu o boku a jest równy $4a$.
- Kwadrat ma dwie przekątne, które są równe i przecinają się pod kątem prostym. Punkt przecięcia dzieli je na połowy.
- Długość przekątnej kwadratu o boku a wyraża się wzorem: $d = a\sqrt{2}$



Przykład 2

Połączono środki boków kwadratu $ABCD$, tworząc kwadrat $EFGH$ o boku długości $5\sqrt{2}$ cm. Obliczmy długość przekątnej kwadratu $ABCD$.

Wierzchołki kwadratu $ABCD$ wraz z wierzchołkami kwadratu $EFGH$ wyznaczają 4 przystające trójkąty prostokątne równoramienne.

W każdym z tych trójkątów przeciwprostokątna jest równa $5\sqrt{2}$ cm.

Jeśli przez x oznaczymy przyprostokątną tego trójkąta, to, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, możemy zapisać:

$$x^2 + x^2 = a^2$$

Stąd:

$$2x^2 = (5\sqrt{2})^2$$

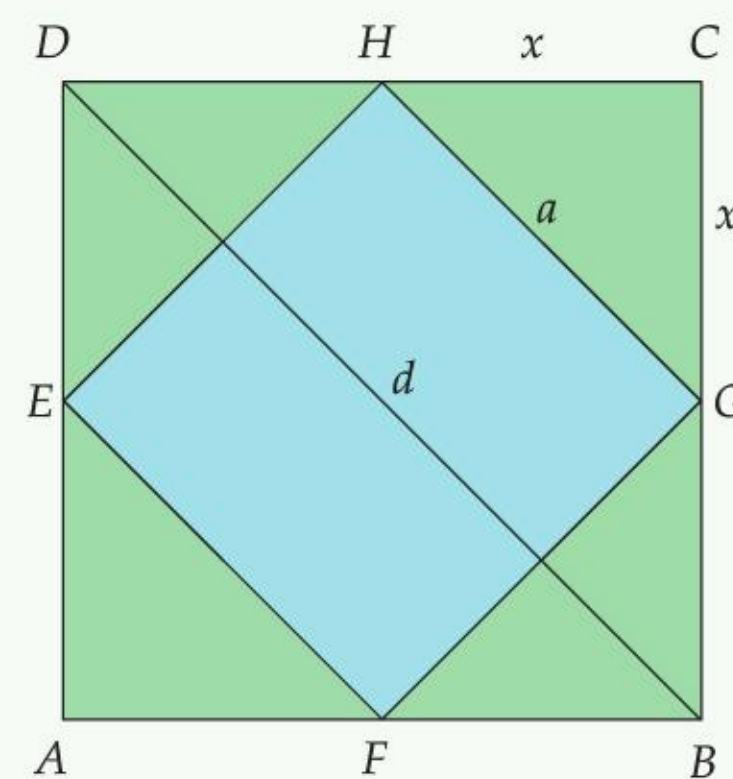
$$2x^2 = 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

Bok kwadratu $ABCD$ ma zatem długość $2 \cdot 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$.

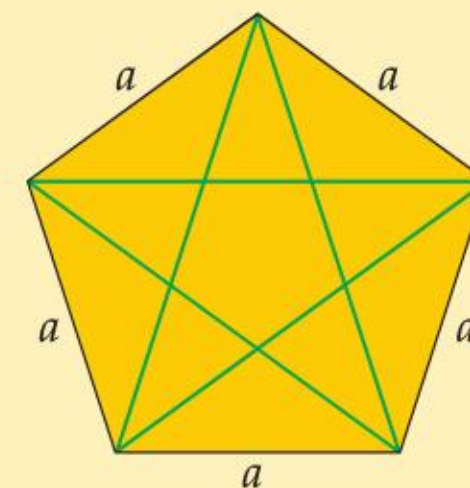
Długość przekątnej kwadratu $ABCD$ jest równa $10\sqrt{2}$ cm.



2. Oblicz długość przekątnej kwadratu $ABCD$, z przykładu 2, jako sumę długości wysokości trójkątów AFE oraz GCH i długości boku kwadratu $EFGH$.

Pięciokąt foremny to wielokąt foremny o 5 bokach.

- W pięciokącie foremnym wszystkie boki są równe.
- Każdy kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego ma 108° .
- Obwód pięciokąta foremnego o boku długości a wyraża się wzorem:
 $Obw. = 5a$.
- Pięciokąt ma 5 przekątnych równej długości.



Przykład 3

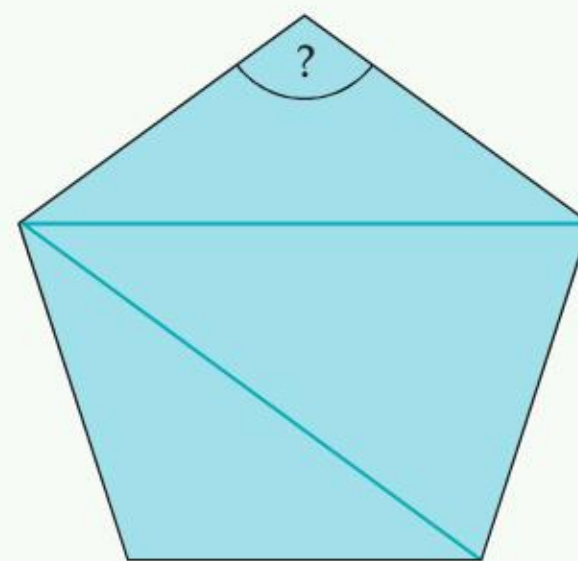
Uzasadnijmy, że każdy kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego ma miarę 108° .

Każdy pięciokąt foremny można podzielić na 3 trójkąty. Suma miar kątów każdego z tych trójkątów jest równa 180° . Zatem suma miar kątów wewnętrznych pięciokąta foremnego jest równa $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

Ponieważ w pięciokącie foremnym kąty są równe, zatem miara jednego z kątów wynosi: $540^\circ : 5 = 108^\circ$

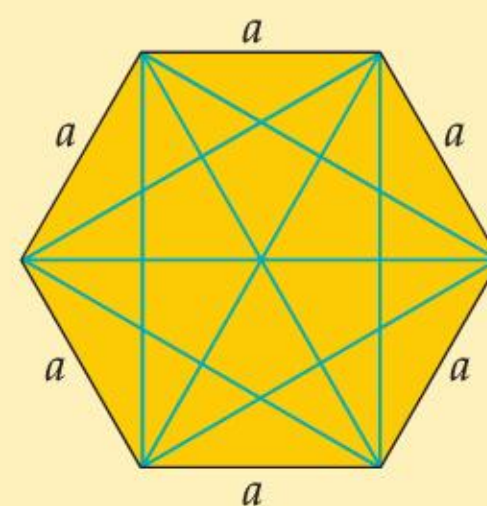
Miara jednego z kątów pięciokąta foremnego jest równa 108° .

Miarę jednego z kątów pięciokąta foremnego można też wyznaczyć ze wzoru $\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$, podstawiając za n liczbę 5: $\alpha = \frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5}$, $\alpha = 108^\circ$.



Sześciokąt foremny to wielokąt foremny o 6 bokach.

- W sześciokącie foremnym wszystkie boki są równe.
- Każdy kąt wewnętrzny sześciokąta foremnego ma miarę 120° .
- Obwód sześciokąta foremnego o boku a wyraża się wzorem: $Obw. = 6a$
- Sześciokąt ma 9 przekątnych. Są trzy dłuższe przekątne o długości $2a$ oraz sześć krótszych przekątnych o długości $a\sqrt{3}$.
- Dłuższe przekątne dzielą sześciokąt na 6 trójkątów równobocznych.



Przykład 4

Obliczmy długość krótszej przekątnej sześciokąta foremnego o boku długości 6 cm.

Wiemy, że dłuższe przekątne dzielą sześciokąt foremny na trójkąty równoboczne.

Półowa krótszej przekątnej sześciokąta foremnego jest wysokością takiego trójkąta.

Zatem, korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego o boku a , otrzymujemy:

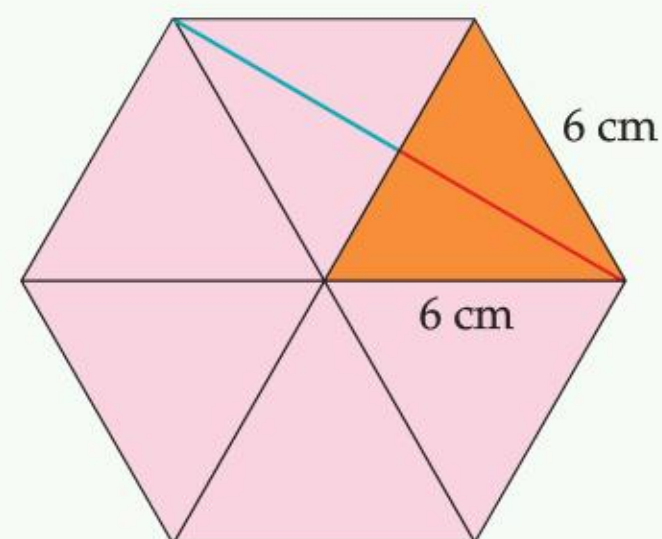
$$\frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Stąd

$$\frac{1}{2}d = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$d = 6\sqrt{3}$$

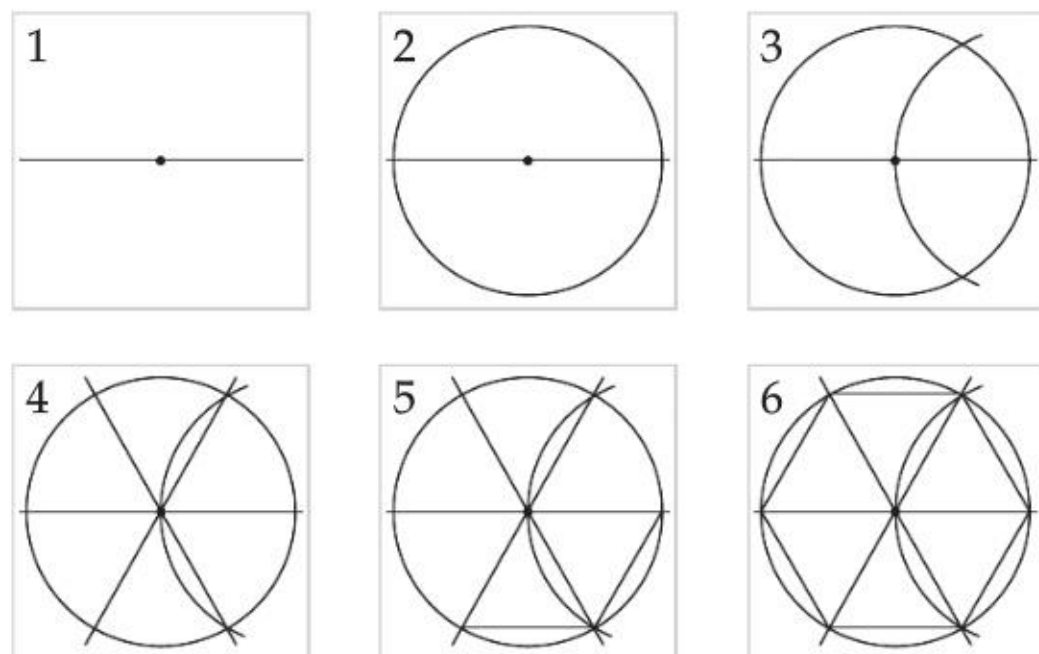
Krótsza przekątna sześciokąta foremnego ma długość $6\sqrt{3}$ cm.



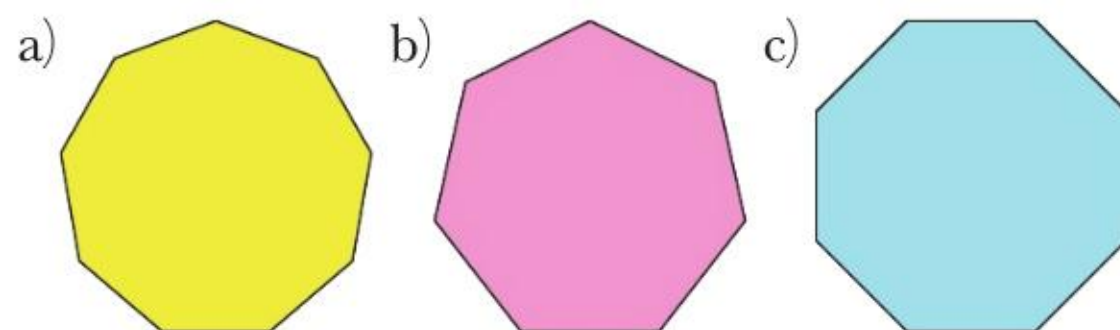
4. Uzasadnij, że miara kąta wewnętrznego sześciokąta foremnego jest równa 120° .

Zadania

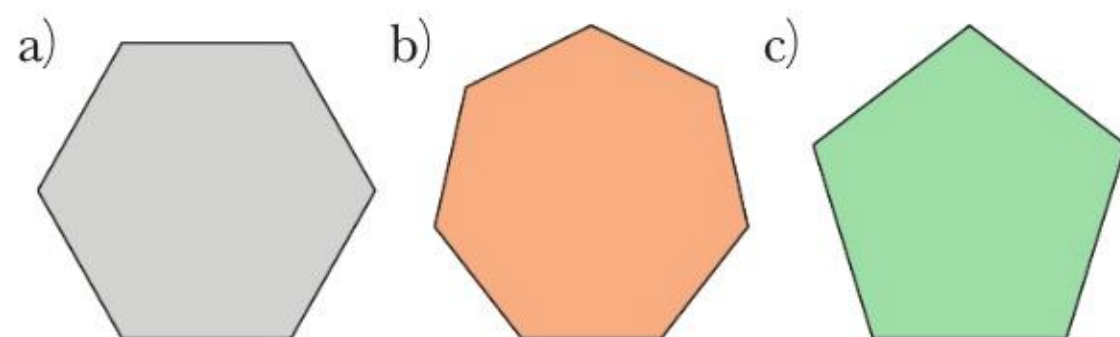
- Oblicz obwód trójkąta równobocznego, w którym
 - a) wysokość jest równa $12\sqrt{2}$ cm.
 - b) wysokość jest równa 8 cm.
- W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono wysokość, która podzieliła ten trójkąt na dwa trójkąty prostokątne. Suma obwodów tych dwóch trójkątów prostokątnych jest równa $3(1 + \sqrt{3})$ dm. Oblicz długość boku trójkąta ABC .
- Skonstruuj kwadraty:
 - a) o przekątnej długości 6 cm,
 - b) o boku długości 4 cm,
 - c) o obwodzie równym 12 cm.
- Kwadrat przecięto wzdłuż przekątnej, otrzymując dwa trójkąty. W każdym z tych trójkątów najdłuższy bok jest równy 10 cm. Oblicz obwód tego kwadratu.
- Suma miar kątów wewnętrznych pewnego wielokąta foremnego jest równa 720° . Bok tego wielokąta ma długość 2 dm. Oblicz, o ile decymetrów najdłuższa przekątna tego wielokąta jest dłuższa od najkrótszej.
- Przyjrzyj się kolejnym krokom konstrukcji sześciokąta foremnego. Wykonaj w zeszycie podobną konstrukcję. Wyszukaj w dostępnych źródłach inną konstrukcję sześciokąta foremnego.



- Oblicz obwód sześciokąta foremnego wiedząc, że
 - a) dłuższa przekątna ma długość 15 cm.
 - b) suma długości dłuższych przekątnych jest równa 24 cm.
 - c) krótsza przekątna ma długość $10\sqrt{3}$ cm.
- Oblicz miarę kąta wewnętrznego każdego z wielokątów foremnych przedstawionych na rysunku.



- Kąt zewnętrzny wielokąta to kąt przyległy do danego kąta wewnętrznego wielokąta. Wyznacz miarę kąta zewnętrznego każdego z wielokątów foremnych przedstawionych na rysunku.



- Przekątne wychodzące z jednego wierzchołka, podzieliły wielokąt foremný na 100 trójkątów. Ile boków ma ten wielokąt?
- Narysuj kwadrat o boku 9 cm i podziel każdy jego bok na 3 równe części. Połącz punkty podziału tak, aby otrzymać ośmiokąt. Uzasadnij, że ośmiokąt ten nie jest wielokątem foremnym.
- ★ Oblicz miarę kąta wewnętrznego:
 - a) dziesięciokąta foremnego.
 - b) dwudziestokąta foremnego.
 - c) pięćdziesięciokąta foremnego.

8.7 Pola wielokątów

Podejmij temat

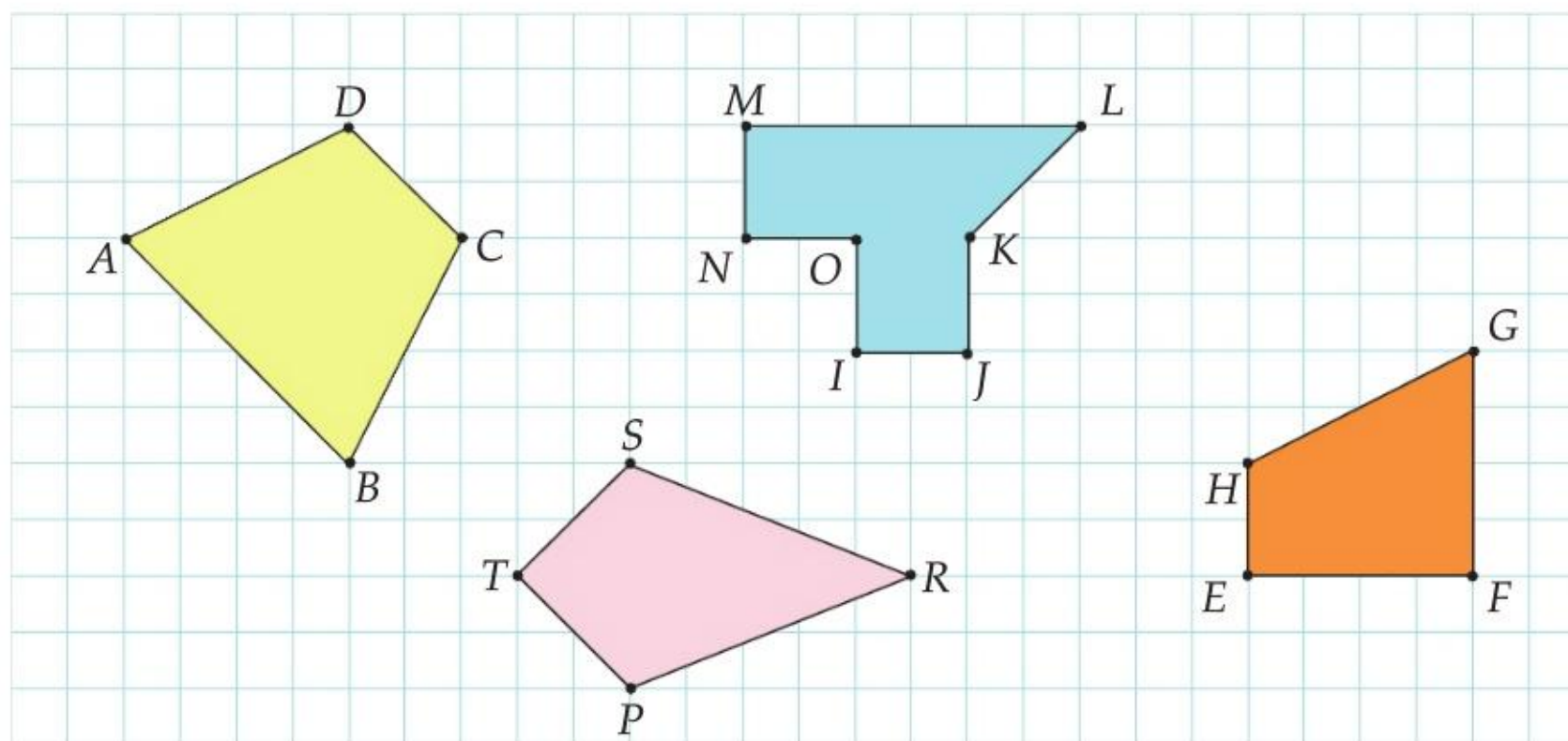


Czy potrafisz obliczyć pola narysowanych wielokątów?

W jaki sposób najłatwiej jest obliczyć pole czworokąta $ABCD$?

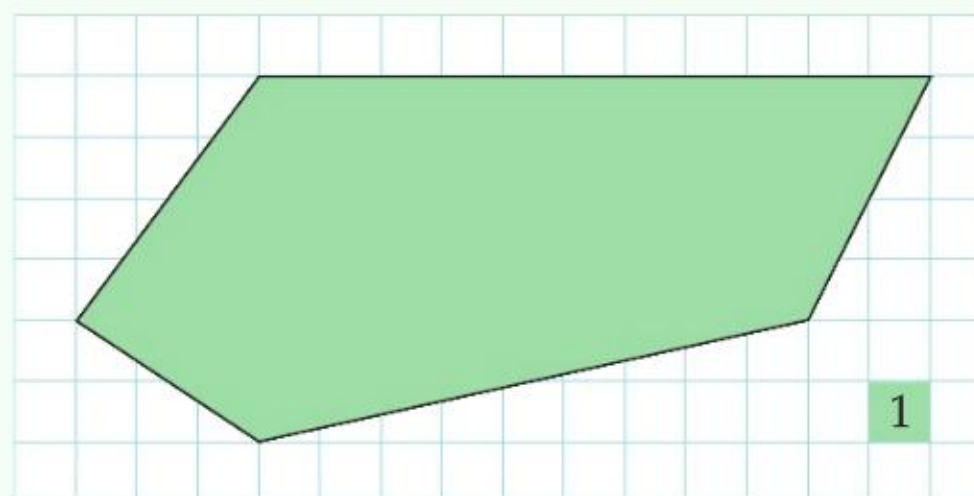
Zaproponuj co najmniej trzy sposoby obliczenia pola wielokąta $IJKLMNO$.

Wielokąt $PRST$ to deltoid. Czy potrafisz obliczyć jego pole?



Przykład 1

Obliczymy pole pięciokąta przedstawionego na rysunku, przyjmując za jednostkę kwadrat wyznaczony przez linie kratki.



Dzielimy pięciokąt na wielokąty, których pola potrafimy obliczyć, czyli na dwa trójkąty i trapez. Pole pięciokąta jest sumą pól tych figur.

Potrzebne dane odczytujemy z rysunku.

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

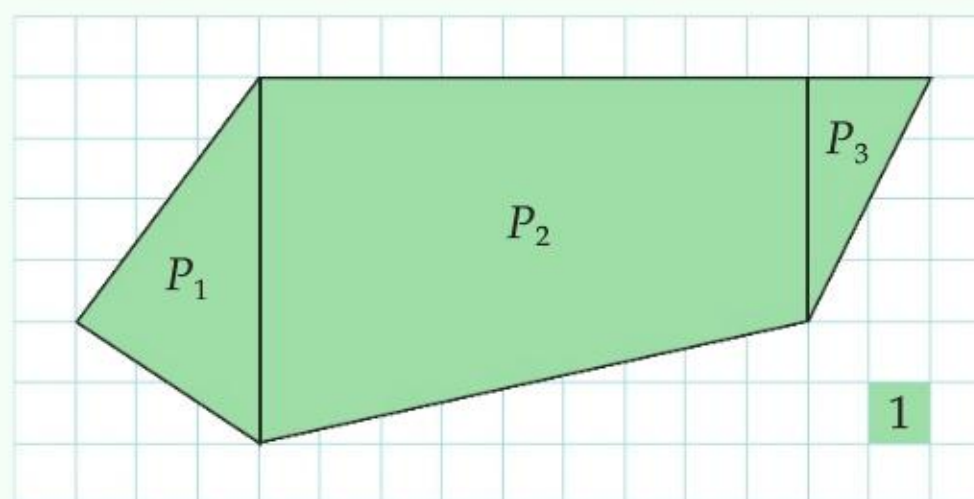
$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot (6 + 4) \cdot 9 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 45$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$$

$$P = 9 + 45 + 4 = 58$$

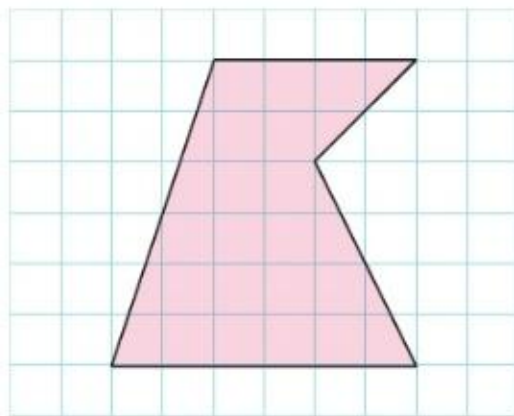
Pole tego pięciokąta jest równe 58.



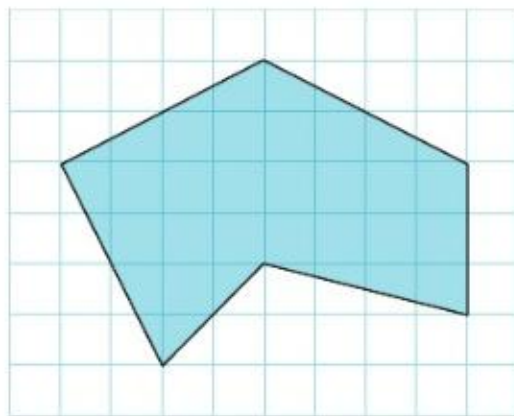
Aby obliczyć pole tego pięciokąta, mogliśmy go podzielić również w inny sposób, np. na cztery trójkąty i prostokąt lub trójkąt i trapez.

1. Oszacuj, który z wielokątów przedstawionych na rysunku ma największe pole. Sprawdź swoje przypuszczenia, wykonując odpowiednie obliczenia. Przyjmij za jednostkę kwadrat wyznaczony przez linie kratki.

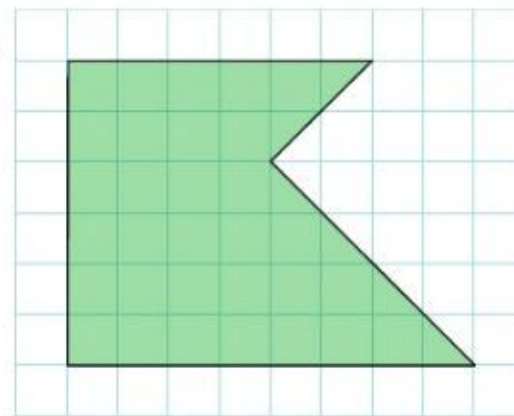
A.



B.



C.



Pole trójkąta równobocznego o boku a wyraża się wzorem:

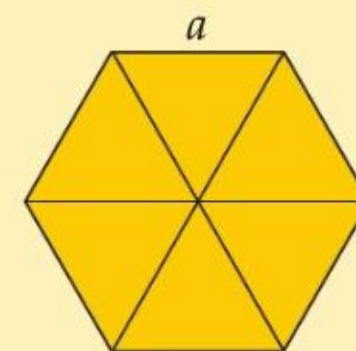
$$P = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

Znamy już wzór na pole trójkąta równobocznego. Wyznamy teraz wzór na pole sześciokąta foremnego.

Sześciokąt foremny o boku a można podzielić na 6 przystających trójkątów równobocznych.

Zatem pole tego sześciokąta jest 6 razy większe od pola trójkąta równobocznego o boku a .

$$P = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$$



Przykład 2

Obliczmy obwód wielokąta foremnego, którego kąt wewnętrzny ma 120° , a pole jest równe $\sqrt{3}$.

Z poprzedniego tematu wiemy, że wielokąt foremny, którego kąt wewnętrzny ma 120° , to sześciokąt foremny.

Korzystając ze wzoru na pole sześciokąta foremnego, obliczymy długość a boku tego wielokąta.

$$P = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$$

$$\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \quad | : \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = \frac{2}{3}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Teraz obliczmy obwód sześciokąta.

$$\text{Obw.} = 6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{36 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$$

Obwód sześciokąta jest równy $2\sqrt{6}$.

2. Sześciokąt foremny i kwadrat mają boki tej samej długości. Ile razy pole tego sześciokąta jest większe od pola kwadratu?

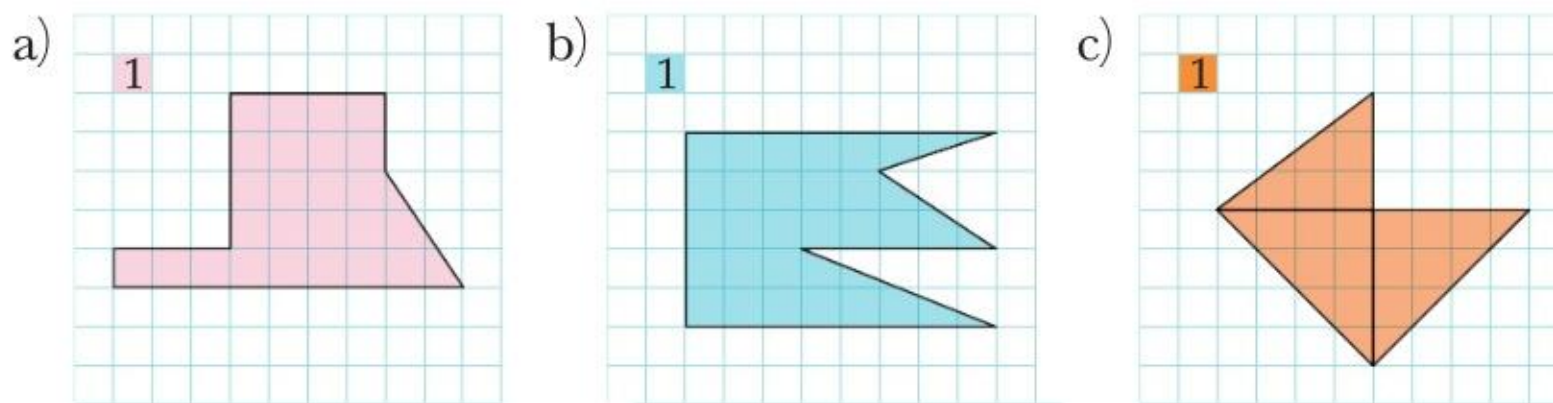


Czy pamiętasz?

Pole deltoidu o przekątnych długości e i f wyraża się takim samym wzorem jak pole rombu, czyli $P = \frac{e \cdot f}{2}$.

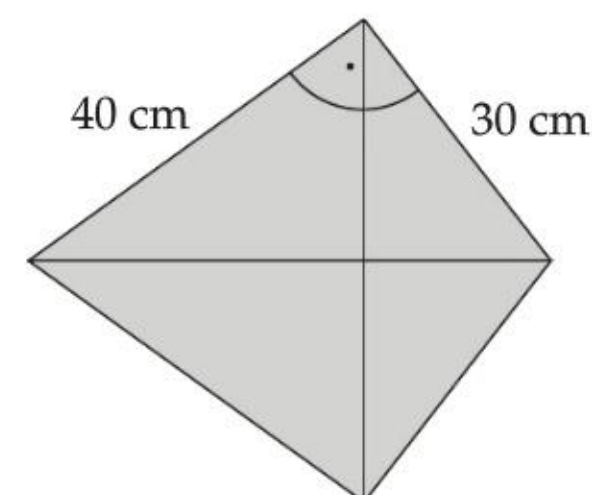
Zadania

- Oblicz pole każdej figury, przyjmując za jednostkę kwadrat wyznaczony przez linie kratki.

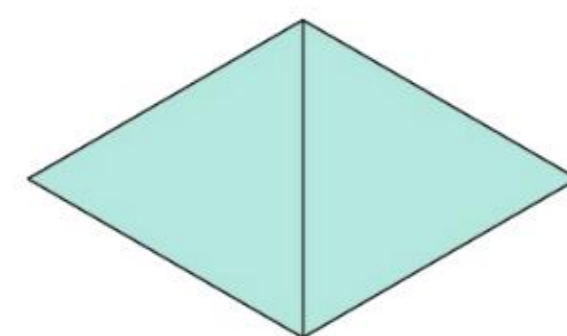


- Ile cm^2 papieru potrzeba na wykonanie latawca w kształcie deltoidu o przekątnych długości 4 dm i 6 dm?
- Oblicz pole deltoidu, wiedząc, że jedna jego przekątna ma 3 dm, a druga jest od niej o $33\frac{1}{3}\%$ krótsza.

- Paweł postanowił zbudować latawiec, wykorzystując do tego dwie listewki i papier. Rysunek przedstawia projekt tego latawca. Czy listewki o długościach 50 cm i 60 cm wystarczą do wykonania szkieletu tego latawca? Ile dm^2 papieru powinien przygotować Paweł do obklejenia listewek z obu stron?



- Z dwóch przystających trójkątów równobocznych zbudowano taki romb jak na rysunku. Oblicz długości przekątnych tego rombu, jeżeli pole tego rombu jest równe $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$.



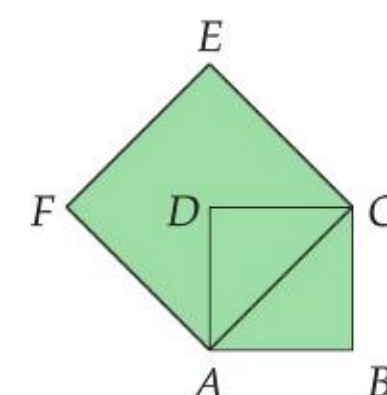
- Taras pana Pawła ma kształt kwadratu o boku długości 4 m. Pan Paweł chce wyłożyć ten taras płytkami terakoty w kształcie sześciokątów foremnych o boku długości 60 cm. Ile co najmniej płytek musi kupić?



- Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 6 cm. Oblicz pole kwadratu $ACEF$.



- Stosunek długości przekątnych deltoidu jest równy 5 : 6, zaś suma ich długości wynosi 22 cm. Oblicz pole deltoidu.

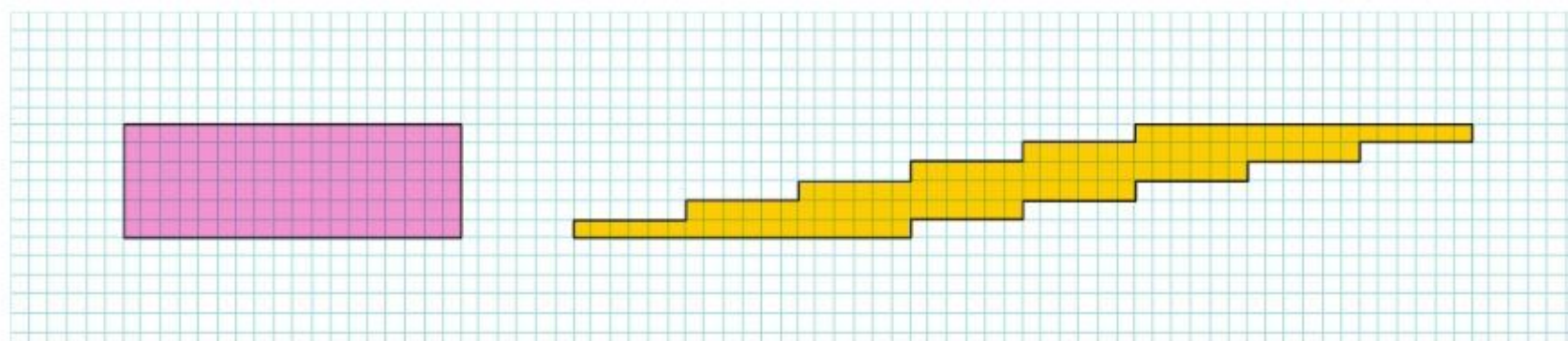


8.8 Dowodzenie w geometrii (cz. 2)

Podejmij temat



Narysowane figury mają równe pola. Jak to uzasadnić?



W poprzednich klasach poznaliśmy wzory na pola niektórych wielokątów. Udowodnijmy niektóre z tych wzorów.

Przykład 1

Korzystając ze wzoru na pole prostokąta, udowodnijmy wzór na pole trójkąta.

Pole prostokąta, którego boki mają długości a i b , jest równe $P = a \cdot b$. Zauważmy, że przekątna dzieli prostokąt na dwa przystające trójkąty prostokątne. Pole jednego z takich trójkątów jest więc równe połowie pola prostokąta.

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot P_{\square}$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot b$$

Uzasadniliśmy zatem, że **pole trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu długości jego przyprostokątnych**.

Narysujmy teraz dowolny trójkąt, a następnie podzielmy go na dwa trójkąty prostokątne. Przyjmijmy takie oznaczenia, jak na rysunku.

Jeden trójkąt ma przyprostokątne c i h , a drugi d i h oraz $a = c + d$.

$$P_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} c \cdot h, P_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} d \cdot h$$

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ADC} + P_{\Delta DBC}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} c \cdot h + \frac{1}{2} d \cdot h$$

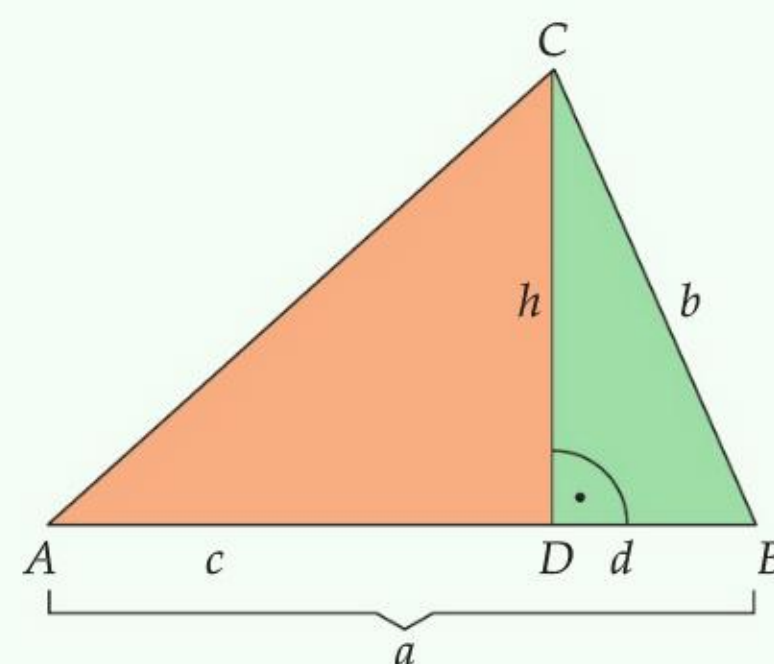
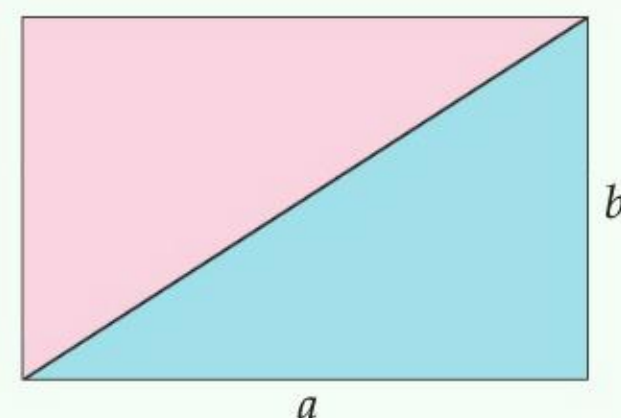
Wyłączając wspólny czynnik przed nawias, mamy:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (c + d)$$

$a = c + d$, więc:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} h \cdot a$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h$$



Przykład 2

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta, uzasadnijmy wzór na pole trapezu.

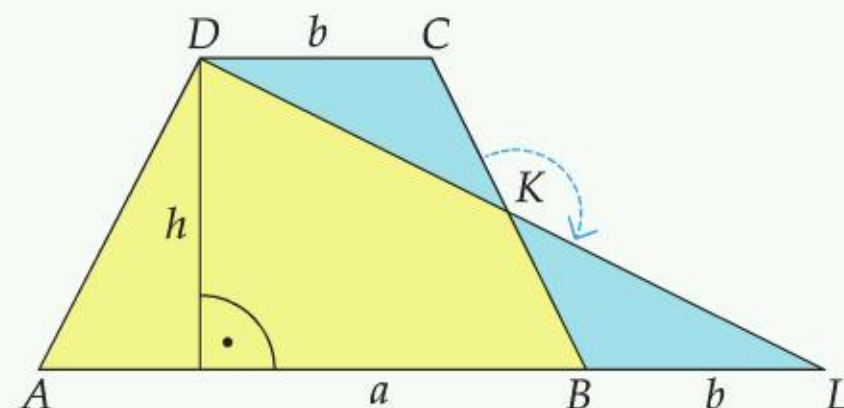
Zakładamy, że znamy wzór na pole trójkąta, a zatem możemy z niego skorzystać.

Mamy pokazać, że pole trapezu jest równe połowie iloczynu wysokości i sumy długości podstaw:

$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$

Narysujmy trapez $ABCD$. Na boku BC obierzmy punkt K taki, że $|BK| = |KC|$. Poprowadźmy proste AB i DK . Punkt przecięcia się tych prostych oznaczmy przez L .

Kąty LBK i KCD są równe, ponieważ są naprzemianległe. Kąty BKL i CKD są równe, ponieważ są kątami wierzchołkowymi. Zatem trójkąty BLK i KCD są przystające na mocy cechy kąt, bok, kąt i $|BL| = b$.



Trójkąty BLK i KCD mają równe pola, więc pole trapezu $ABCD$ jest równe polu trójkąta ALD .

Trójkąt ALD ma taką samą wysokość jak trapez, a bok, na który jest ona opuszczona, jest równy sumie podstaw trapezu.

Pole trójkąta ALD jest równe $P_{\triangle ALD} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$, więc pole trapezu też jest równe $P_{\triangle ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$, co mieliśmy udowodnić.

1. Korzystając ze wzoru na pole prostokąta i własności trójkątów przystających, uzasadnij wzór na pole równoległoboku.
2. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta, uzasadnij wzór na pole rombu.

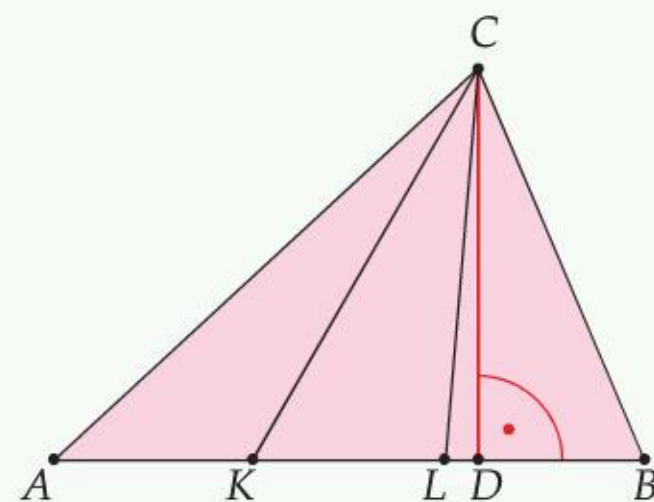
Przykład 3

W trójkącie ABC na boku AB obrano takie punkty K i L , że $|AK| = |KL| = |LB|$. Uzasadnimy, że trójkąty AKC , KLC i LBC mają równe pola.

Narysujmy trójkąt ABC i na boku AB zaznaczmy takie punkty K i L , że $|AK| = |KL| = |LB|$.

Poprowadźmy wysokość CD trójkąta ABC z wierzchołka C do boku AB .

Zauważmy, że wysokość CD jest jednocześnie wysokością każdego z trójkątów AKC , KLC , LBC , więc:



$$P_{\triangle AKC} = \frac{1}{2}|AK| \cdot |CD|, P_{\triangle KLC} = \frac{1}{2}|KL| \cdot |CD|, P_{\triangle LBC} = \frac{1}{2}|LB| \cdot |CD|$$

Ponieważ $|AK| = |KL| = |LB|$, więc $P_{\triangle AKC} = P_{\triangle KLC} = P_{\triangle LBC}$, co mieliśmy udowodnić.

3. Uzasadnij, że przekątne równoległoboku dzielą go na cztery trójkąty o równych polach.

Przykład 4

W trapezie $ABCD$ punkt przecięcia się przekątnych oznaczono przez S . Uzasadnij, że trójkąty ASD i BSC mają równe pola.

Oznaczmy wysokość trapezu przez h . Wysokość trapezu jest równa odpowiednim wysokościami w trójkątach ABD i ABC .

Pola trójkątów ABD i ABC są równe, bo mają tę samą podstawę AB i wysokość h .

$$P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABC}$$

Zauważmy, że pole trójkąta ABD jest równe sumie pól trójkątów ABS i ASD :

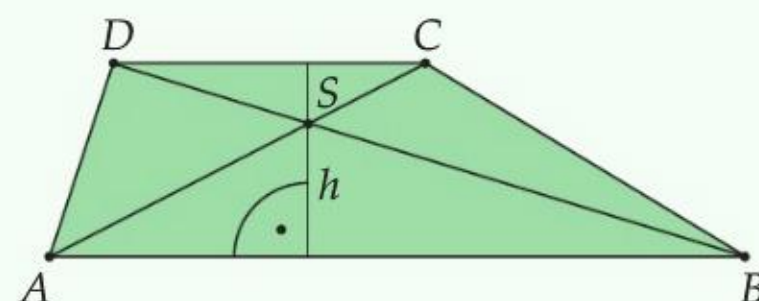
$$P_{\triangle ABD} = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle ASD}$$

Pole trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów ABS i BSC :

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle BSC}$$

$$\text{Stąd } P_{\triangle ABS} + P_{\triangle ASD} = P_{\triangle ABS} + P_{\triangle BSC}$$

$$P_{\triangle ASD} = P_{\triangle BSC}, \text{ co mieliśmy uzasadnić.}$$

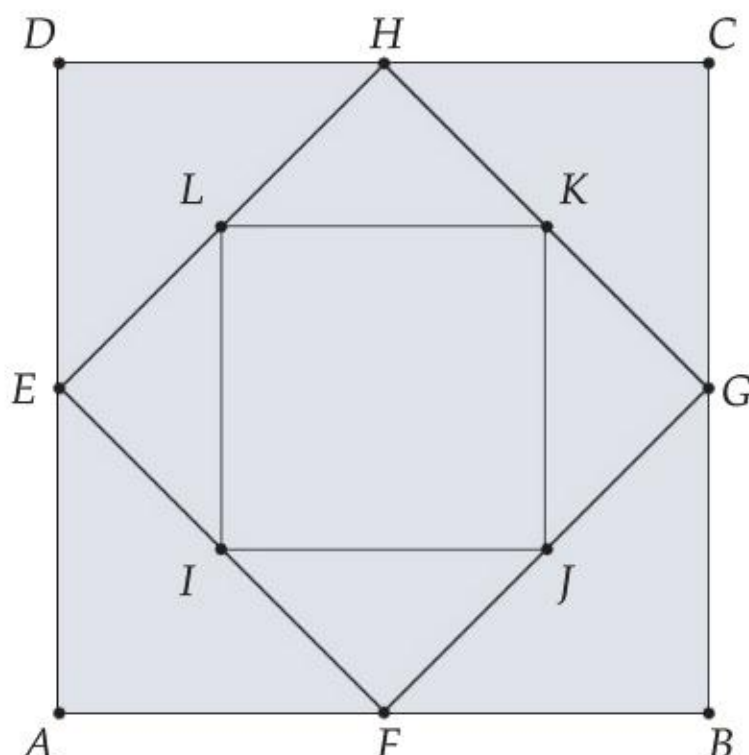


4. W równoległoboku $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, na boku AD obrano punkt K , taki że $|AK| = |KD|$. Uzasadnij, że pole czworokąta $BCDK$ jest trzy razy większe od pola trójkąta ABK .

Zadania

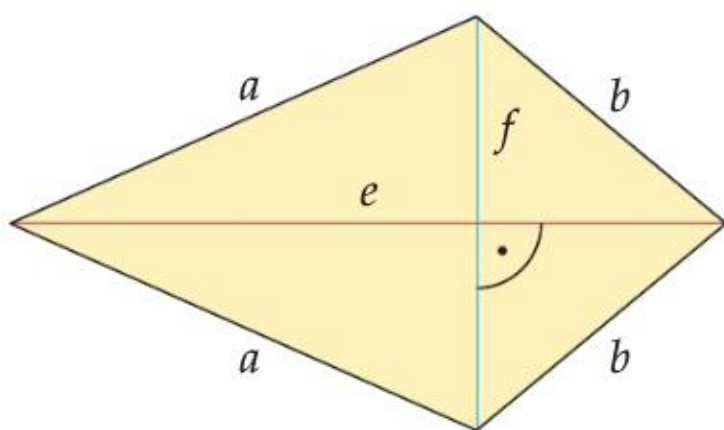
- W trójkącie ABC na boku AC obrano taki punkt D , że $|AC| = 5|AD|$.
- Uzasadnij, że pole trójkąta ABD jest cztery razy mniejsze od pola trójkąta BDC .
 - Uzasadnij, że wysokość trójkąta ABD poprowadzona z wierzchołka D do boku AB jest pięć razy mniejsza od wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C do boku AB .

- Boki kwadratu $ABCD$ mają długość $2a$. Środki boków tego kwadratu połączono odcinkami, otrzymując kwadrat $EFGH$. Następnie środki boków kwadratu $EFGH$ połączono odcinkami, otrzymując kwadrat $IJKL$. Uzasadnij, że pole kwadratu $ABCD$ jest cztery razy większe od pola kwadratu $IJKL$.

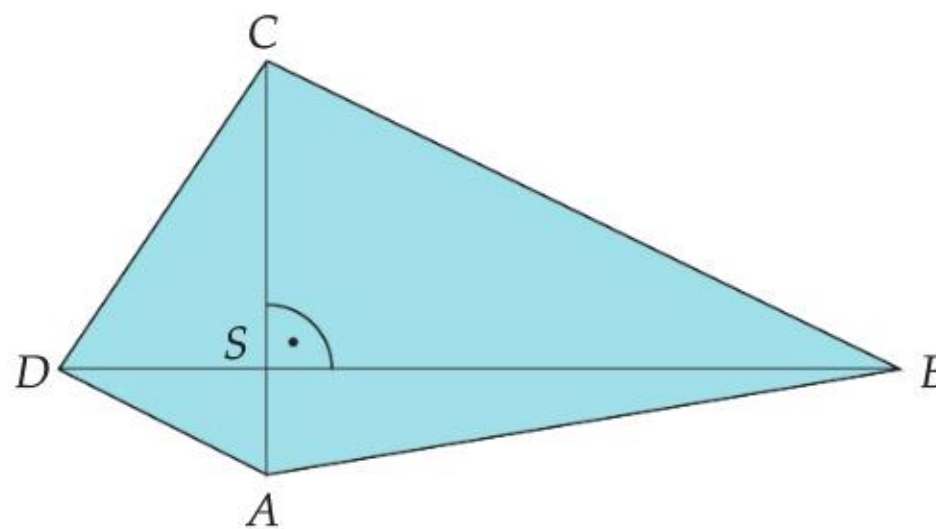




Przekątne deltoidu przecinają się pod kątem prostym.



- W równoległoboku $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, na bokach AB i CD obrano takie punkty K i L , że $|AK| = |CL|$. Uzasadnij, że czworokąty $AKLD$ i $KLCB$ mają równe pola.
- W równoległoboku $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, na boku AB obrano punkt E , na boku BC – punkt F , na boku CD – punkt G , a na boku DA – punkt H w taki sposób, że odcinek FH jest równoległy do boku AB . Uzasadnij, że pole czworokąta $EFGH$ jest równe połowie pola równoległoboku $ABCD$.
- Uzasadnij, że pole deltoidu o przekątnych e i f jest równe $P = \frac{ef}{2}$.
- Przekątne AC i BD deltoidu $ABCD$ przecinają się w punkcie S , przy czym $|AS| = 3|SC|$. Uzasadnij, że pole trójkąta ABD jest trzy razy większe od pola trójkąta ACD .
- W sześciokącie foremnym $ABCDEF$, w którym $AB \parallel DE$, na boku AB zaznaczono punkt G . Uzasadnij, że pole sześciokąta $ABCDEF$ jest trzy razy większe od pola trójkąta EDG .
- W czworokącie $ABCD$ przekątne AC i BD , które są do siebie prostopadłe, przecinają się w punkcie S . Uzasadnij, że pole tego czworokąta jest równe połowie iloczynu długości przekątnych AC i BD .



- ★ W trapezie prostokątnym $ABCD$, w którym $AB \perp AD$, $|AB| = \frac{3}{2}|CD|$ i kąt ostry ma 60° , poprowadzono wysokość CE . Uzasadnij, że pole trapezu $ABCD$ jest pięć razy większe od pola trójkąta EBC .
- Środki boków AB i AD rombu $ABCD$, którego kąt ostry DAC ma miarę 60° , oznaczono odpowiednio przez K i L . Uzasadnij, że pole rombu $ABCD$ jest $\frac{8}{3}$ razy większe od pola trapezu $KBDL$.

Podsumowanie działu 8

Ważne pojęcia

wielokąt foremny

deltoid

sześciokąt foremny

trójkąt równoboczny

Jednostki pola

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$$

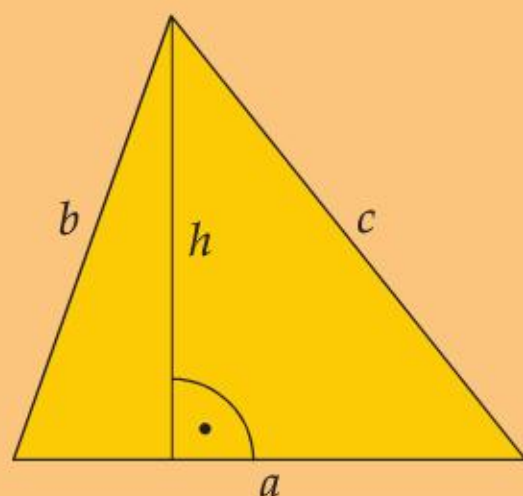
$$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2 = 100\,000\,000 \text{ dm}^2 = 10\,000\,000\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2$$

Pola i obwody wielokątów

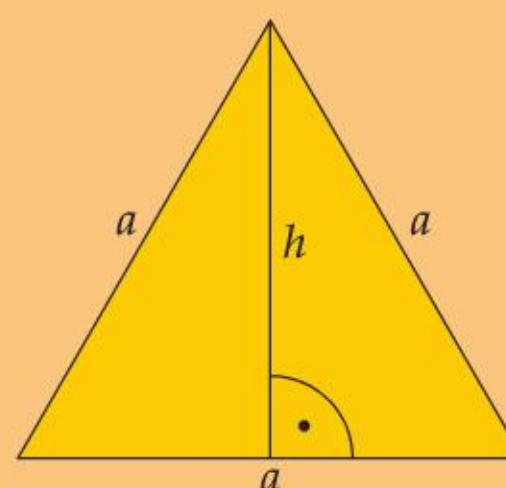
Trójkąt



$$P = \frac{1}{2}ah$$

$$\text{Obw.} = a + b + c$$

Trójkąt równoboczny

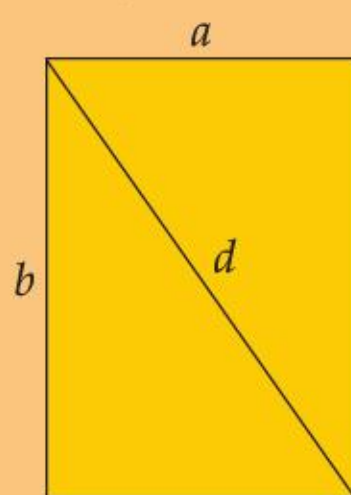


$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\text{Obw.} = 3a$$

Prostokąt

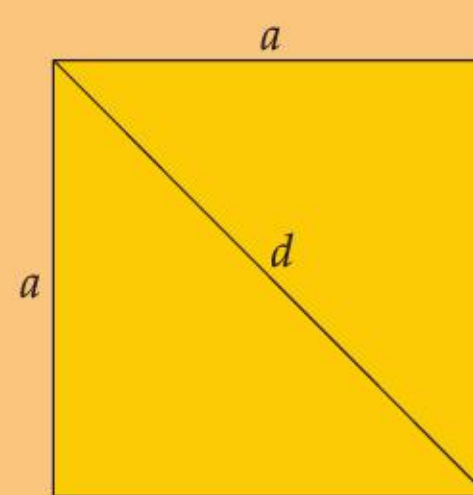


$$P = a \cdot b$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Obw.} = 2a + 2b = 2(a + b)$$

Kwadrat



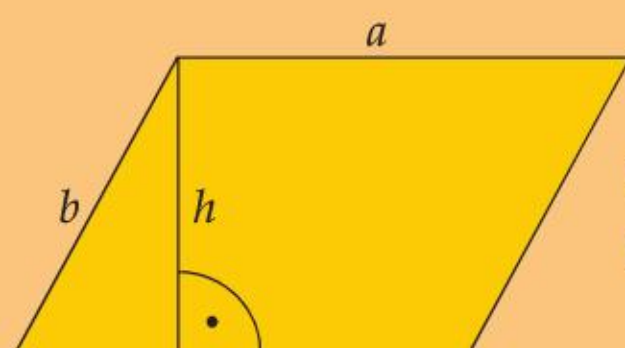
$$P = a^2$$

$$d = a\sqrt{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot d^2$$

$$\text{Obw.} = 4a$$

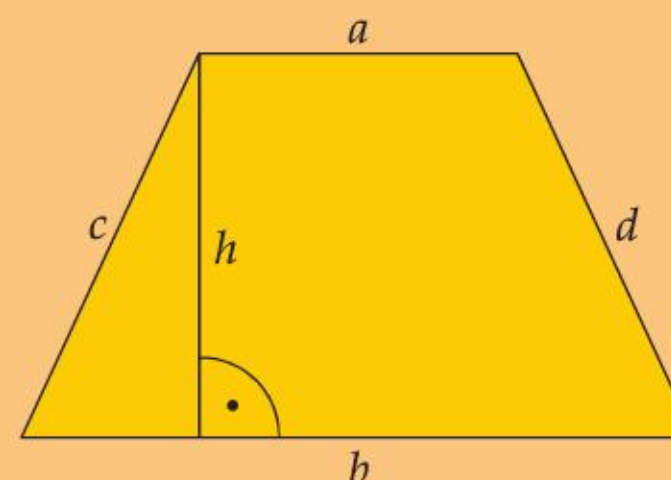
Równoległobok



$$P = ah$$

$$\text{Obw.} = 2(a + b)$$

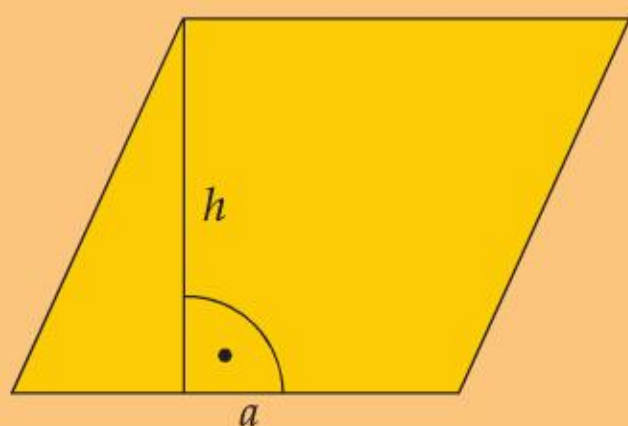
Trapez



$$P = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

$$\text{Obw.} = a + b + c + d$$

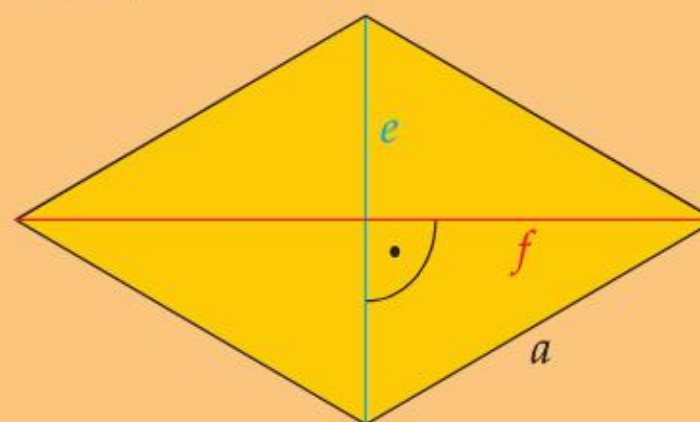
- Romb



$$P = ah$$

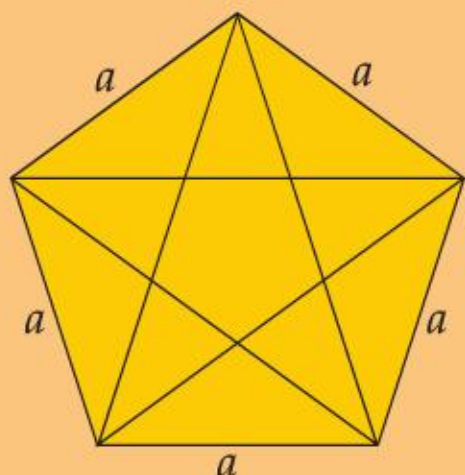
$$Obw. = 4a$$

- Romb



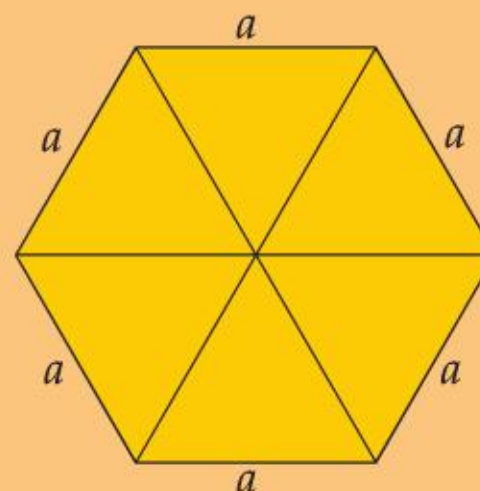
$$P = \frac{1}{2}e \cdot f$$

- Pięciokąt foremny



$$Obw. = 5a$$

- Sześciokąt foremny



$$P = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$$

$$Obw. = 6a$$

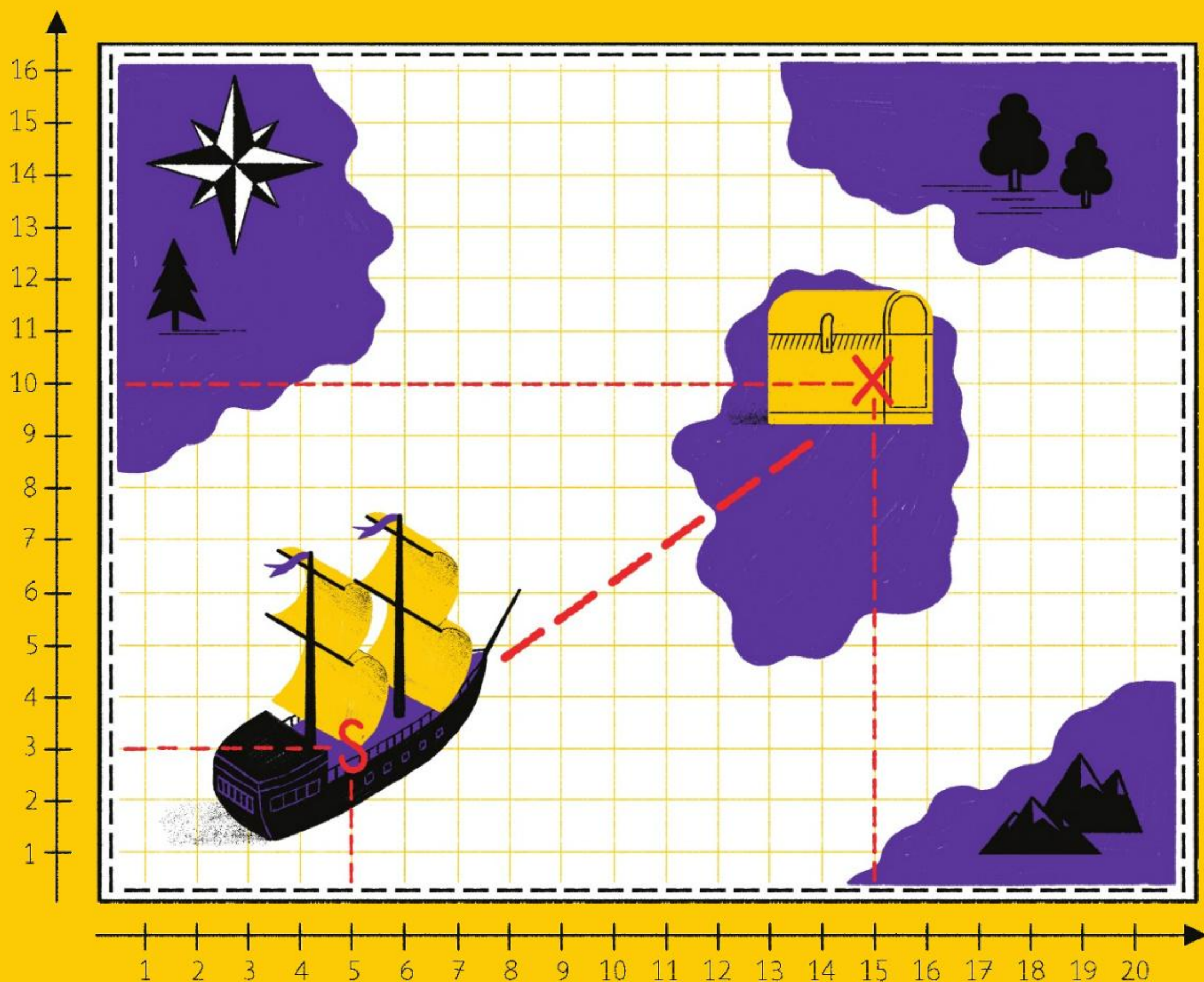
Czy już umiesz?

- 1 Dwa ary to
A. 2 m² B. 20 m² C. 200 m² D. 2000 m²
- 2 Pole powierzchni placu jest równe 0,6 ha, czyli
A. 6 a B. 60 a C. 600 a D. 6000 a
- 3 Pole powierzchni działki w kształcie kwadratu jest równe 3,24 a. Bok tego kwadratu ma długość
A. 0,18 m B. 1,8 m C. 18 m D. 180 m
- 4 Długość prostokątnego trawnika jest równa 15 m, a szerokość stanowi $\frac{1}{3}$ długości. Pole powierzchni trawnika jest równe
A. 45 m² B. 75 m² C. 150 m² D. 80 m²
- 5 Pole trójkąta prostokątnego jest równe 60 cm². Jedna z przyprostokątnych ma długość 8 cm. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość
A. 10 cm B. 15 cm C. 17 cm D. 25 cm
- 6 W trapezie prostokątnym dłuższa podstawa jest równa wysokości i ma długość 14 cm. Krótsza podstawa ma długość 10 cm. Obwód tego trapezu, obliczony z dokładnością do jedności, jest równy
A. 38 cm B. 50 cm C. 52 cm D. 53 cm
- 7 Miara kąta wewnętrznego sześciokąta foremnego jest równa
A. 60° B. 72° C. 90° D. 120°

- 8 Wielokątem foremnym jest każdy
A. kwadrat. B. równoległobok.
C. romb. D. trapez równoramienny.
- 9 W siedmiokącie foremnym liczba wszystkich przekątnych jest równa
A. 14 B. 28 C. 20 D. 21
- 10 Pole sześciokąta foremnego jest równe $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Obwód tego sześciokąta
A. wyraża się liczbą niewymierną. B. jest większy od 40 cm.
C. jest mniejszy od 20 cm. D. jest równy 24 cm.
- 11 Pani Stefania ma dwie działki. Pole powierzchni jednej z nich jest równe 6 a, a drugiej 550 m^2 . Oblicz łączne pole powierzchni działek. Wynik podaj w arach i metrach kwadratowych.
- 12 Podłoga w kuchni ma kształt prostokąta o wymiarach 4,2 m na 3,8 m. Podłogę tę wyłożono jednakowymi kwadratowymi płytkami terakoty o wymiarach 20 cm na 20 cm. Za wszystkie płytki zapłacono 598,5 zł. Ile kosztowała jedna płytka?
- 13 Prostokątny obraz o wymiarach $1,5 \text{ m} \times 0,9 \text{ m}$ jest oprawiony w ozdobną ramę. Szerokość ramy jest równa 12 cm. Ile trzeba zapłacić za odnowienie tej ramy, jeżeli odnowienie 1 dm^2 ramy kosztuje 13 zł?
- 14 Z trawnika w kształcie prostokąta o wymiarach $16 \text{ m} \times 12 \text{ m}$ wydzielono rabatę kwiatową w kształcie rombu o przekątnych długości 8 m i 6 m. Oblicz stosunek pola rabaty do pola pozostałej części trawnika.
- 15 Na jeziorze o polu powierzchni 2,7 ha wydzielono kąpielisko w kształcie prostokąta o wymiarach $36 \text{ m} \times 25 \text{ m}$. Oblicz, ile razy pole powierzchni jeziora jest większe od pola powierzchni kąpieliska.
- 16 W fabryce mebli z prostokątnej płyty o wymiarach 160 cm na 1 m wycięto prostokątny blat o długości $1,4 \text{ m} \times 60 \text{ cm}$ szerokości. Oblicz pole powierzchni pozostałej części płyty.
- 17 Pole trójkąta ABC jest równe 3600 cm^2 . Wysokość CD poprowadzona do boku AB ma długość 0,8 m. Oblicz długość tego boku.
- 18 W trójkącie równoramiennym wysokość jest równa 8 cm i stanowi $\frac{2}{3}$ długości boku, do którego została poprowadzona. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.
- 19 W trójkącie równoramiennym ramię ma długość 2,5 dm. Wysokość poprowadzona do podstawy jest o 1 cm krótsza od ramienia. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.
- 20 Z kwadratu o boku długości 10 cm wycięto trójkąt równoboczny o boku długości 10 cm. Oblicz pole pozostałej części kwadratu.
- 21 Działka pana Grzegorza ma kształt równoległoboku, w którym jeden z boków ma 32 m długości, a wysokość opuszczona na ten bok jest o 24 m krótsza od tego boku. Pan Izydor ma kwadratową działkę, której pole powierzchni jest równe polu powierzchni działki pana Grzegorza. Wzdłuż 2 boków działki pan Izydor chce ułożyć chodnik z jednakowych kwadratowych płyt o wymiarach $0,5 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$. Ile takich płyt musi kupić?

- 22 Podstawa równoległoboku jest o 4 cm dłuższa od wysokości na nią opuszczonej i ma długość 2,4 dm. Oblicz pole równoległoboku.
- 23 Pole równoległoboku jest równe 324 cm^2 . Boki równoległoboku mają długości 36 cm i 27 cm. Oblicz sumę wysokości tego równoległoboku.
- 24 Oblicz pole i obwód równoległoboku, wiedząc, że jego wysokości są równe 1,5 dm i 25 cm, a dłuższy bok ma 0,35 m długości.
- 25 Równoległobok zbudowano z dwóch przystających trójkątów o polu 20 cm^2 każdy. Jeden z boków równoległoboku ma długość 8 cm. Oblicz wysokość równoległoboku opuszczoną na ten bok.
- 26 Łakę w kształcie trapezu prostokątnego przegrodzono płotem wzdłuż krótszej przekątnej, dzieląc ją w ten sposób na dwie części. Na planie o skali 1 : 3000 podstawy trapezu mają 6 cm i 4 cm długości, zaś krótsze ramię ma 15 mm długości. O ile metrów kwadratowych jedna część tej łaki jest większa od drugiej?
- 27 Dłuższa przekątna sześciokąta foremnego ma 26 cm. Oblicz:
a) obwód tego sześciokąta, b) pole tego sześciokąta, c) długość krótszej przekątnej.
- 28 Trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny mają równe obwody. Który z tych wielokątów ma największe, a który najmniejsze pole?

9. Układ współrzędnych na płaszczyźnie



1. W jaki sposób można określić położenie statku?
2. Jak opisać kwadrat, w którym znajduje się skarb?
3. Czy jeśli powiemy, że liczby 2 i 12 wyznaczają położenie pewnego punktu na tej mapie, to możemy z pewnością stwierdzić, że znajduje się on na wyspie? Odpowiedź uzasadnij.
4. Czy punkt na mapie wyznaczony przez parę liczb (5, 7) będzie tym samym, co punkt wyznaczony przez parę liczb (7, 5)? Odpowiedź uzasadnij.

9.1 Układ współrzędnych na płaszczyźnie

Podejmij temat

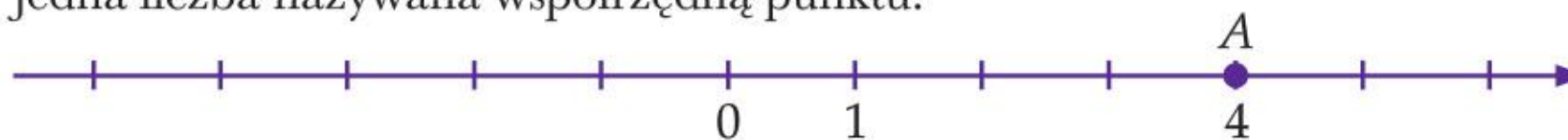


Określ położenie szkoły i poczty, podając, w jakich kwadratach znajdują się te obiekty.

Na rysunku przedstawiono fragment planu pewnego miasta. Ratusz znajduje się w kwadracie C4.



Do tej pory określaliśmy położenie punktu na osi liczbowej. Punkt określała jedna liczba nazywana współrzędną punktu.



Położenie punktów na płaszczyźnie można określać w różny sposób, np. za pomocą liczb i liter (tak jak na planie) lub tylko za pomocą liczb.

Przeanalizujmy mapę Polski. Położenie miasta na mapie wyznaczają współrzędne geograficzne – długość i szerokość.

Stolica Polski, Warszawa, ma współrzędne 21°E , 52°N (z dokładnością do 1°).



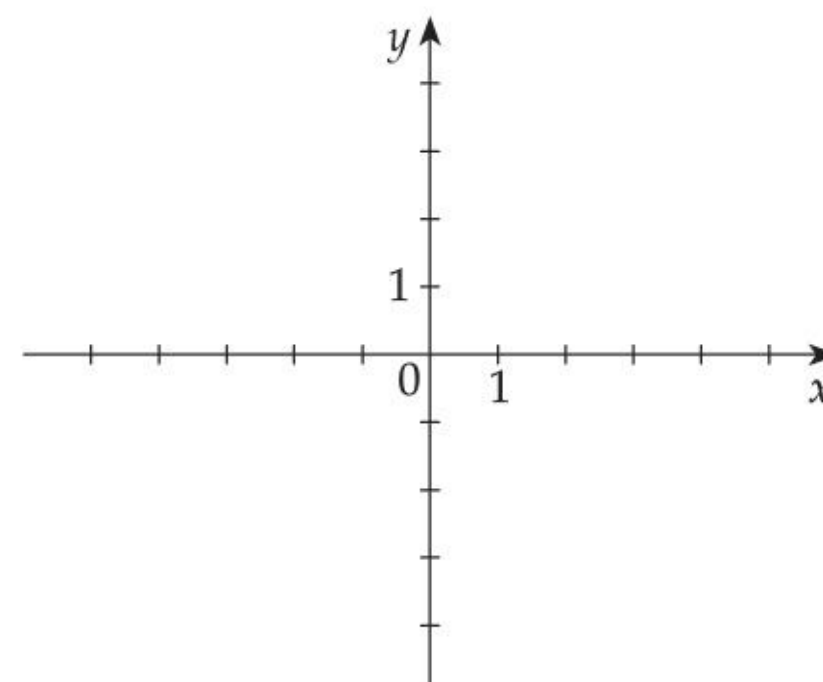
Żeby przedstawić współrzędne geograficzne z większą dokładnością, możemy dodatkowo użyć minut i sekund kątowych. Np. $51^{\circ} 24' 45''$ odczytamy jako 51 stopni, 24 minuty i 45 sekund.

$1^{\circ} = 60'$

$1' = 60''$

1. Odczytaj z mapy współrzędne (z dokładnością do 1°) następujących miast: Rzeszów, Kraków, Wrocław, Bydgoszcz.

Narysujmy na płaszczyźnie dwie prostopadłe osie liczbowe przecinające się w punkcie O , który na obu osiach odpowiada liczbie 0. Oś narysowaną w poziomie oznaczmy przez x , a oś narysowaną w pionie – przez y .



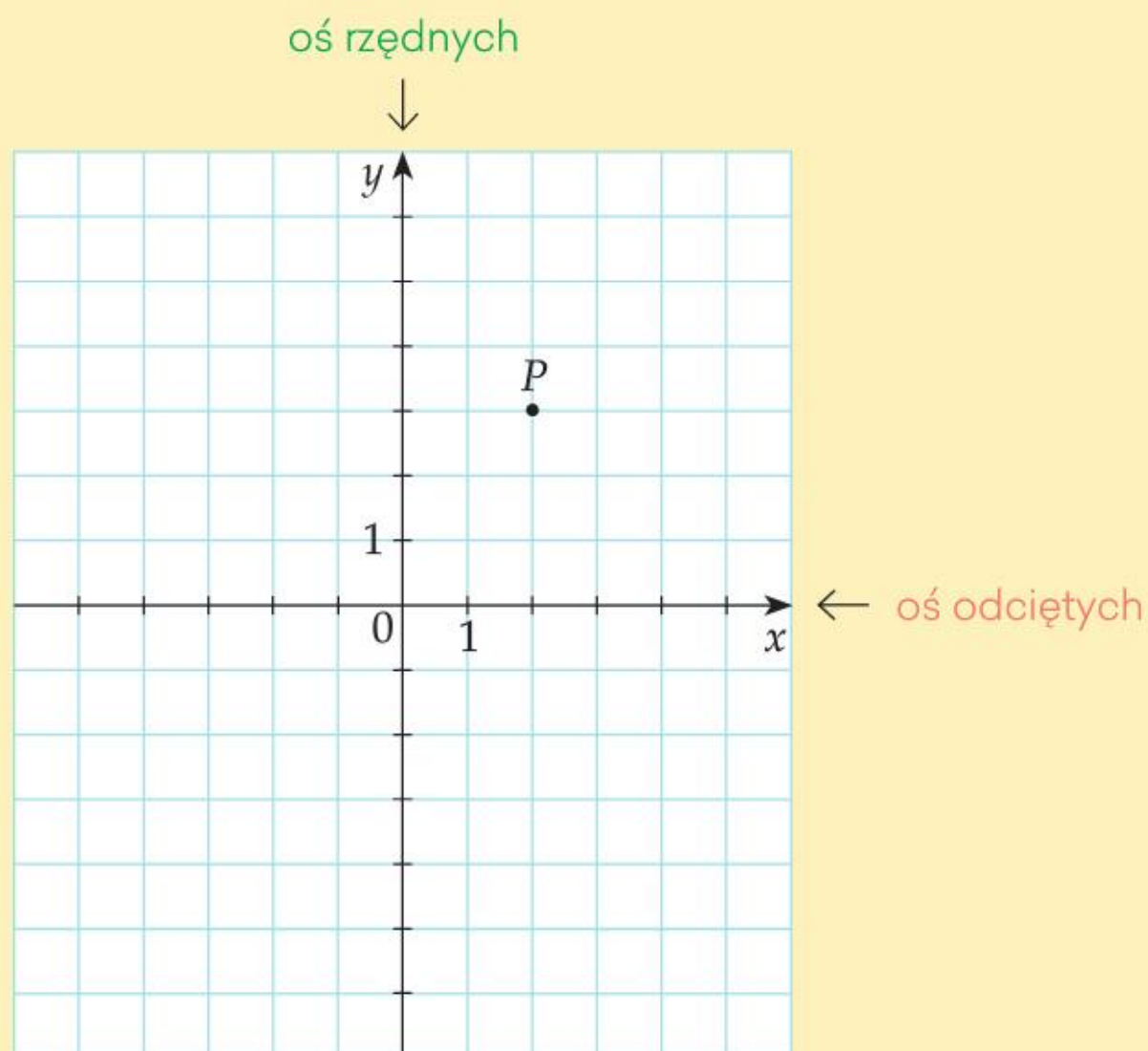
**Prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie
(kartezjański układ współrzędnych)**

tworzą dwie prostopadłe osie liczbowe.

Początkiem układu współrzędnych nazywamy punkt O ,
będący punktem przecięcia się obu osi.

Każdemu punktowi w układzie współrzędnych odpowiada pewna para liczb, przy czym dwóm różnym punktom odpowiadają dwie różne pary liczb. Każdej parze liczb odpowiada pewien punkt w układzie współrzędnych, przy czym różnym parom liczb odpowiadają różne punkty.

Współzrzednymi punktu nazywamy dwie liczby określające położenie dowolnego punktu w układzie współrzędnych. Pierwsza liczba to współrzędna x , którą odczytujemy z osi x , a druga liczba to współrzędna y , którą odczytujemy z osi y .



Poziomą oś liczbową x nazywamy **osią odciętych**,
a pionową oś liczbową y – **osią rzędnych**.

współrzędna x (odcięta punktu) współrzędna y (rzędna punktu)

$$P = (2, 3)$$

Zapis ten czytamy: punkt P ma współrzędne 2, 3.

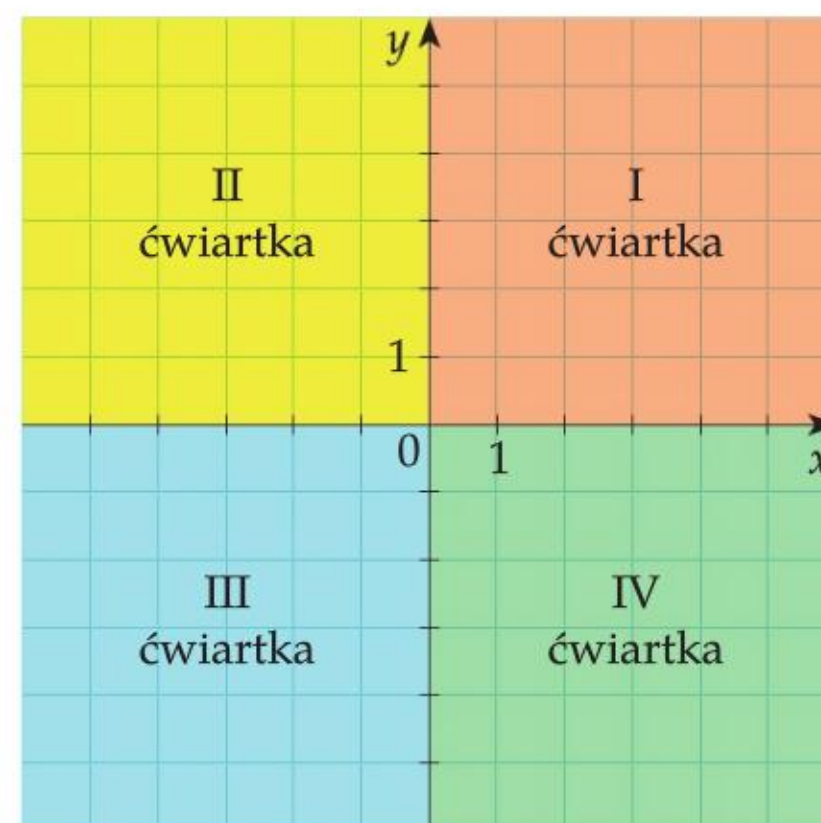


Punkt, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi, nazywamy **punktem kratowym**.

Ciekawe!

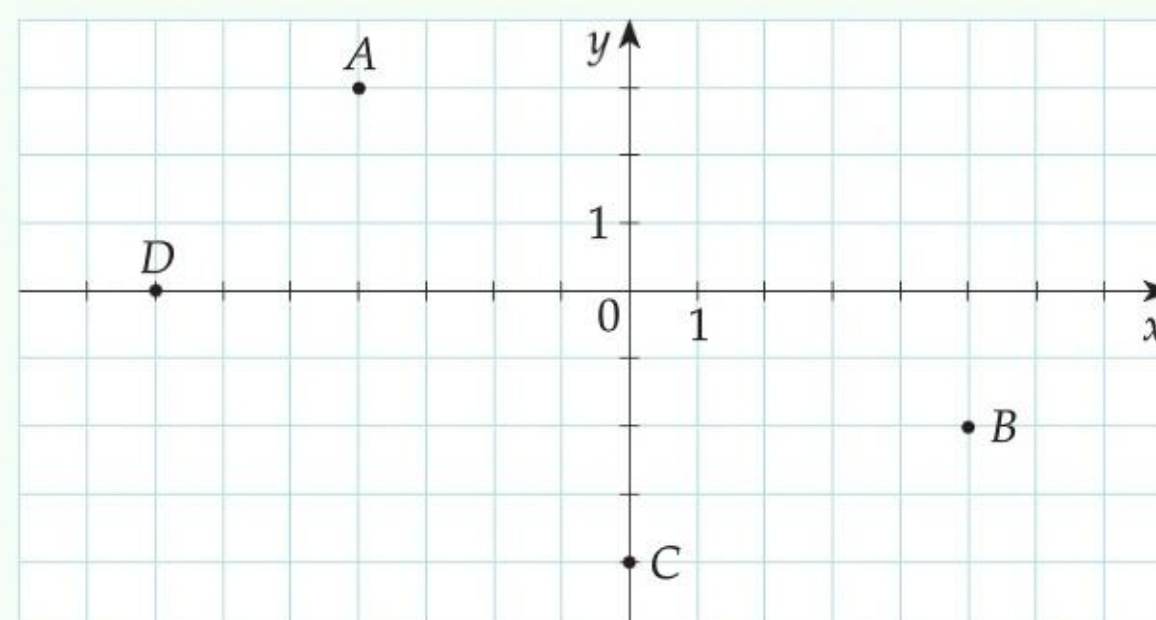
Prostokątny układ współrzędnych wprowadził francuski filozof i matematyk żyjący w XVII wieku, Rene Descartes (czyt. **rene de kart**), w Polsce nazywany Kartezjuszem. Zasłynął on także jako autor sentencji filozoficznej: „Myślę, więc jestem”.

Osie prostokątnego układu współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery części, zwane ćwiartkami.



Przykład 1

Odczytajmy współrzędne punktów zaznaczonych w układzie współrzędnych.

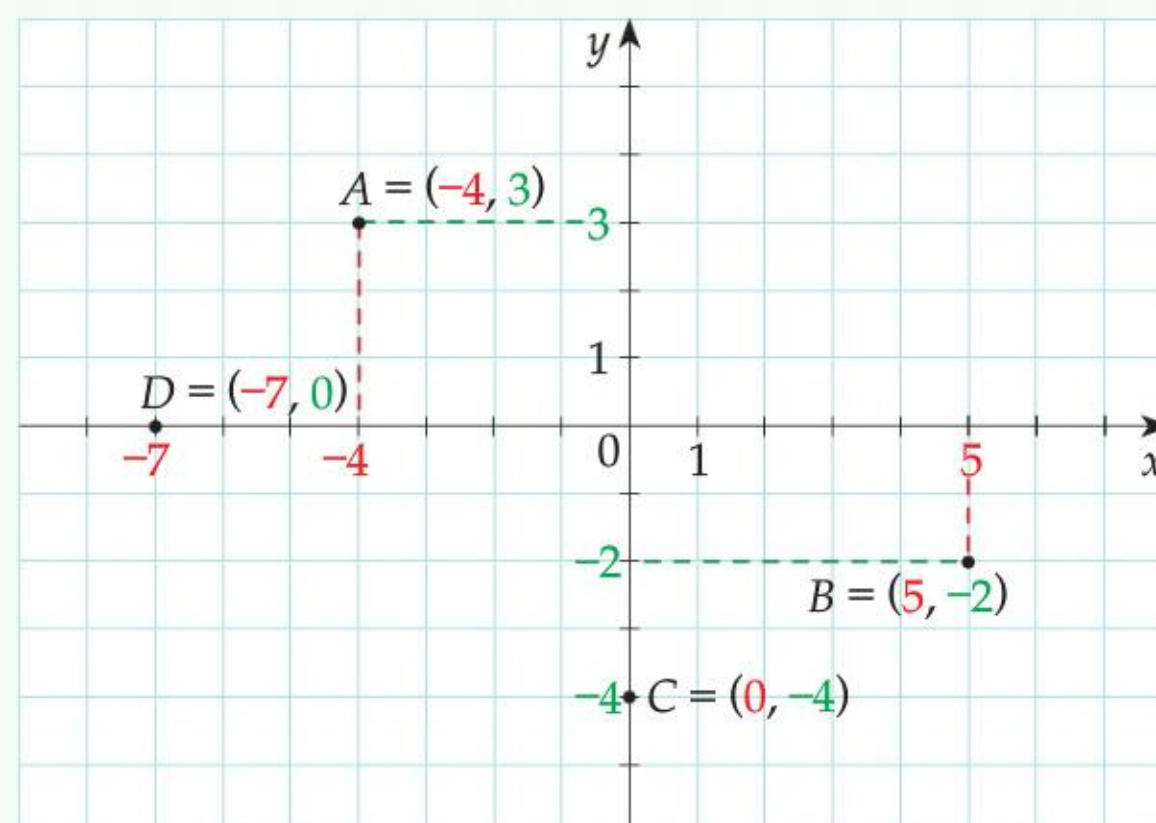


Pierwsza współrzędna (odcięta) punktu A jest równa -4 , a druga współrzędna (rzędna) jest równa 3 , więc punkt A ma współrzędne -4 i 3 , $A = (-4, 3)$.

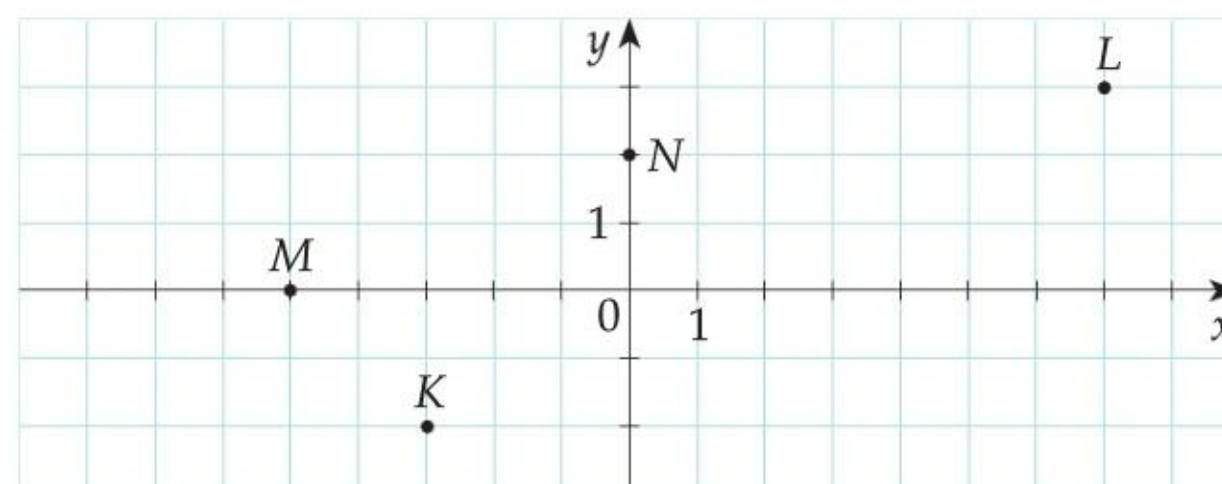
Odcięta punktu B jest równa 5 , a rzędna jest równa -2 , więc punkt B ma współrzędne 5 i -2 , $B = (5, -2)$.

Punkt C leży na osi y . Jego odcięta jest równa 0 , a rzędna to -4 . Zatem $C = (0, -4)$.

Punkt D leży na osi x . Jego odcięta jest równa -7 , a rzędna to 0 . Zatem $D = (-7, 0)$.



2. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych w układzie współrzędnych.

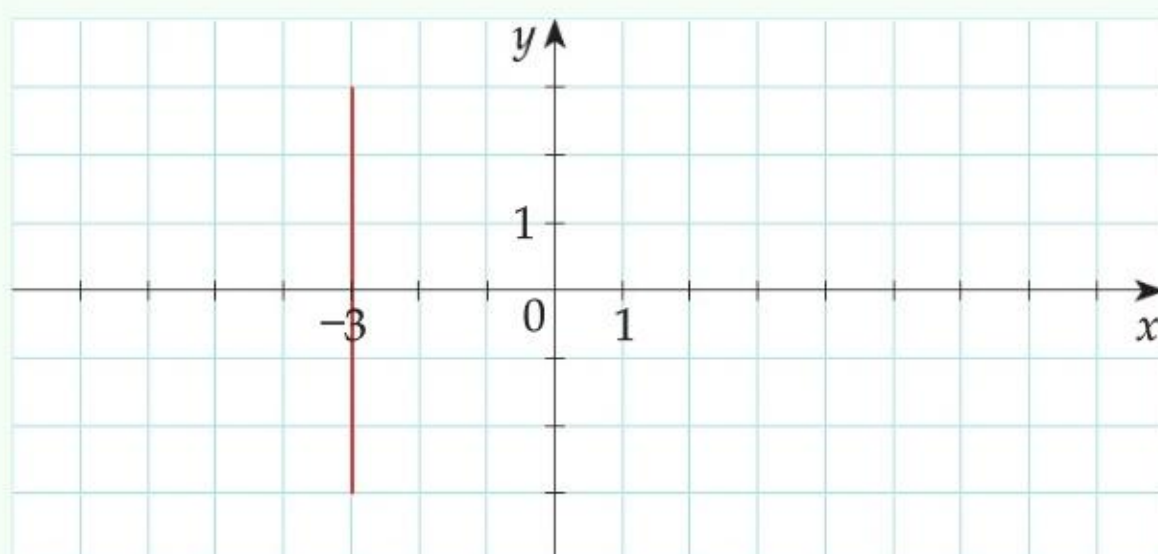


Przykład 2

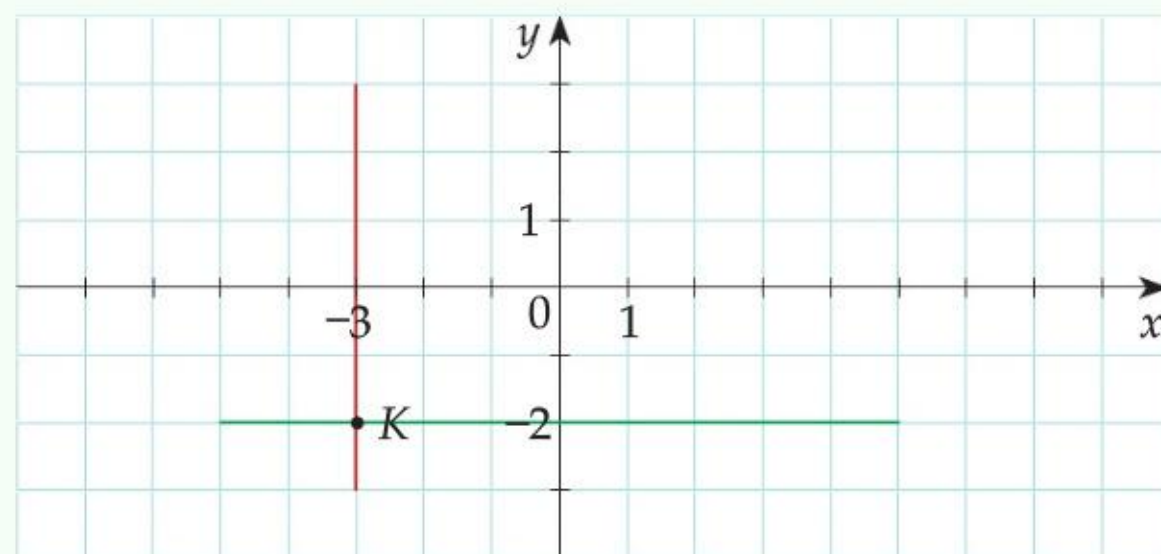
Zaznaczmy w układzie współrzędnych punkt $K = (-3, -2)$.

Sposób I

Rysujemy prostą prostopadłą do osi x , przechodzącą przez punkt -3 na osi x .

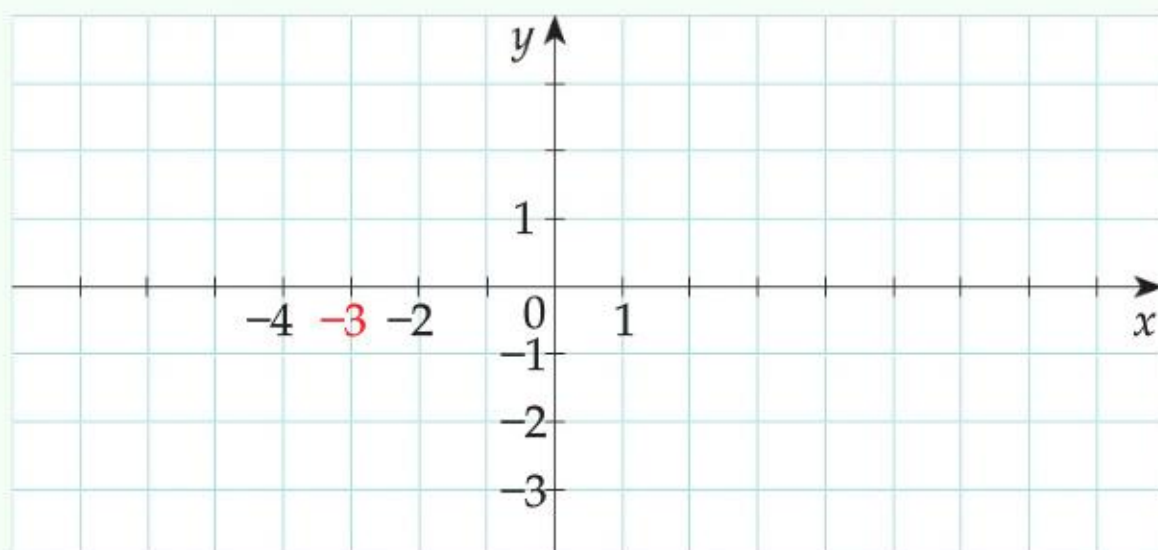


Rysujemy prostą prostopadłą do osi y , przechodzącą przez punkt -2 na osi y . Zaznaczamy punkt K będący punktem przecięcia się obu narysowanych prostych.

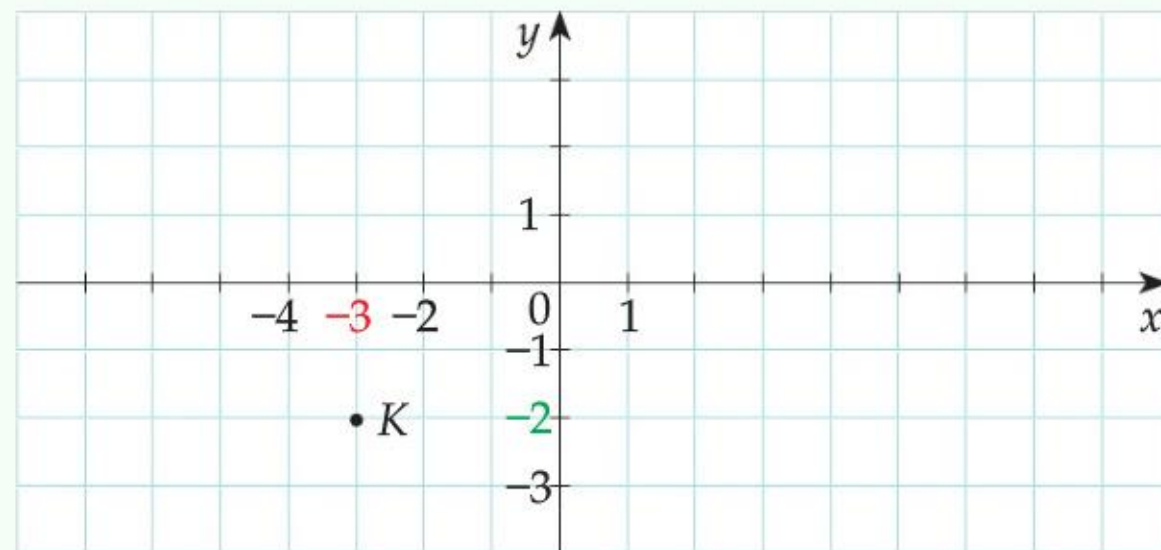


Sposób II

Odczytujemy pierwszą współrzędną -3 na osi x .



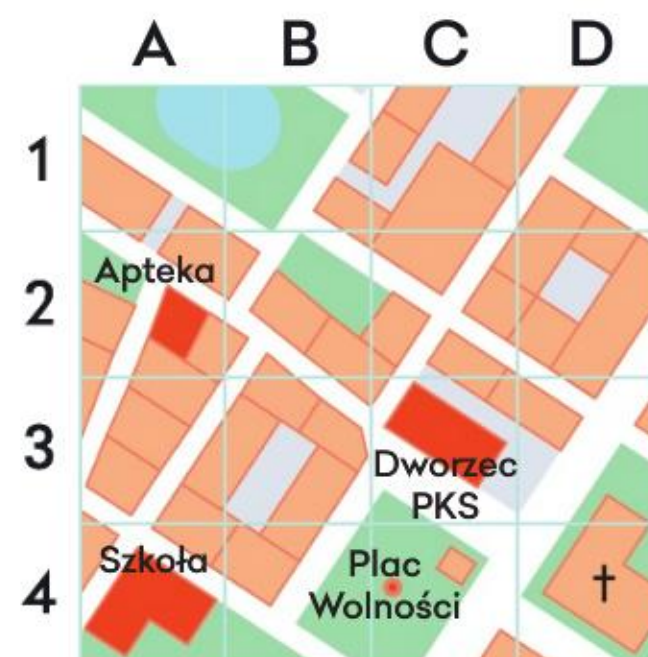
Odliczamy 2 jednostki w dół, bo druga współrzędna to -2 . Zaznaczamy punkt K .



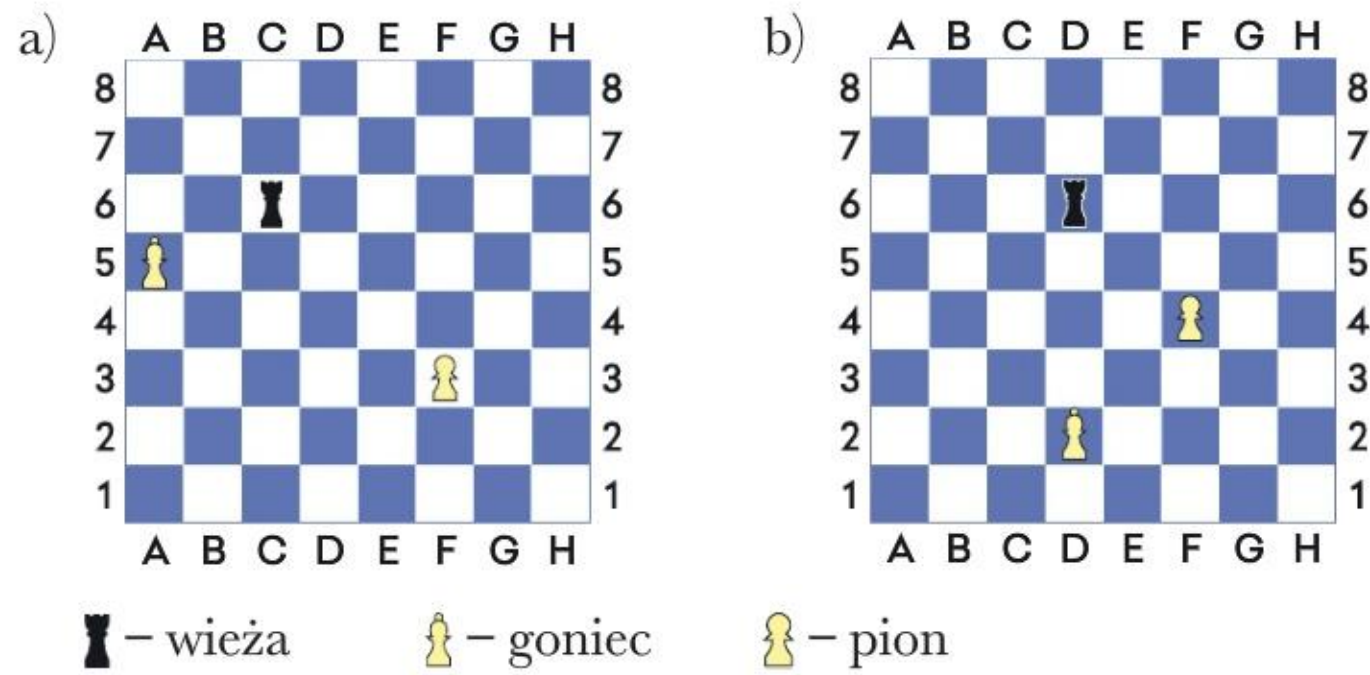
3. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (5, -1)$, $B = (-3, 4)$.

Zadania

- Rysunek przedstawia plan pewnego miasta.
- Odczytaj z planu, w którym kwadracie znajduje się apteka, a w którym – dworzec PKS.
 - Podaj, jaki obiekt znajduje się w kwadracie D4, a jaki – w kwadracie A4.
 - Odczytaj z planu miasta, w którym kwadracie znajduje się największa część placu Wolności.



- Odczytaj, jakie położenie na szachownicy mają: wieża, goniec, pion.



- Określ, w których ćwiartkach układu współrzędnych leżą punkty, których obie współrzędne mają:

- a) takie same znaki, b) różne znaki.

- Podaj odciętą każdego punktu.

$$A = (-2, 1), B = (3, -5), C = (0, -4), D = (7, 0), E = \left(\frac{1}{2}, 7\right), O = (0, 0)$$

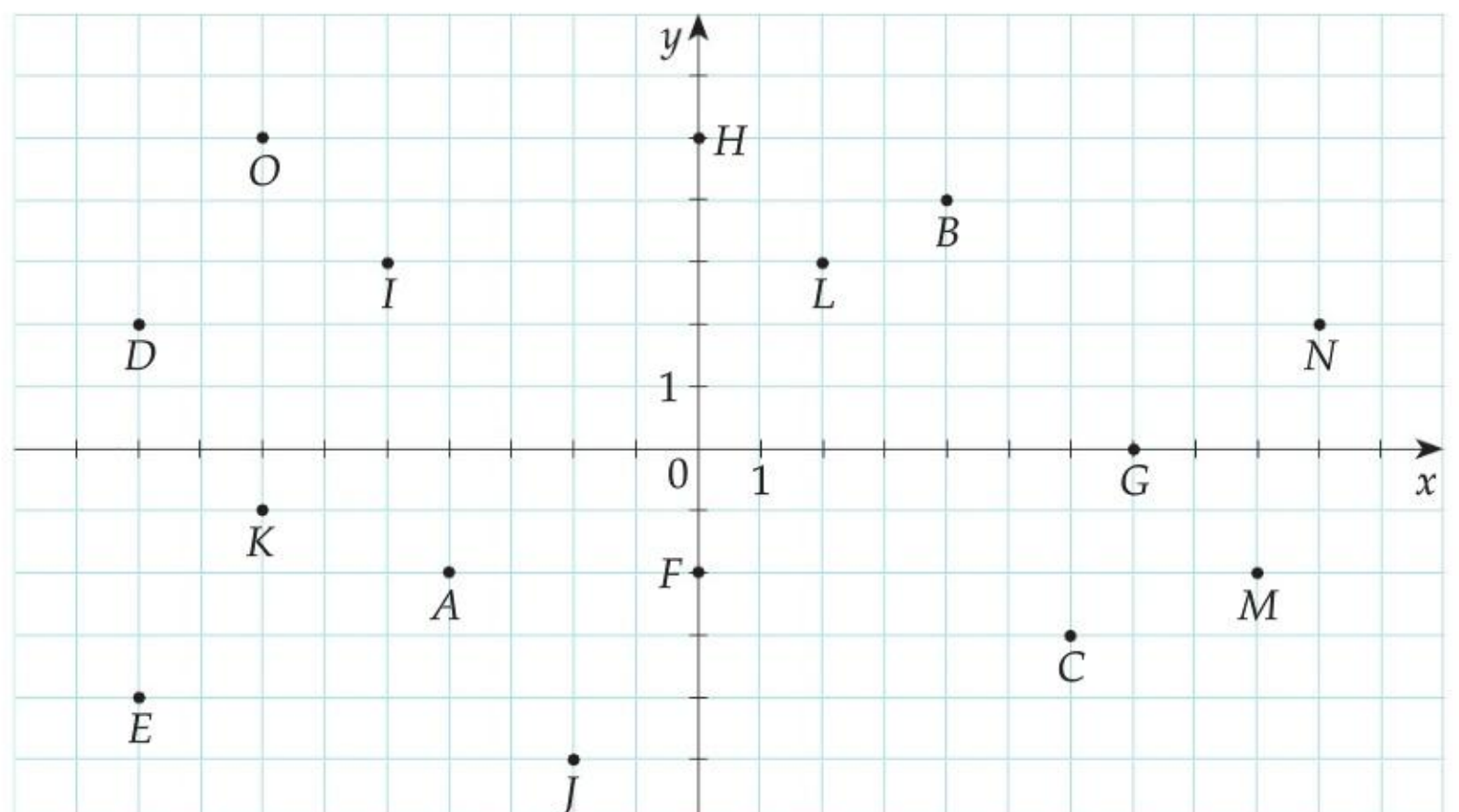
- Podaj rzędną każdego punktu.

$$K = (-8, 3), L = (5, -6), M = (0, 12), N = (-9, 0), O = (0, 0), P = \left(-14, \frac{2}{3}\right)$$

- Podaj przykłady trzech punktów, których współrzędne spełniają warunek:

- a) obie współrzędne są równe,
 b) współrzędne punktu są liczbami przeciwnymi,
 c) rzędna jest dwa razy większa od odciętej,
 d) odcięta jest nieujemna,
 e) rzędna jest niedodatnia.

- Zapisz współrzędne punktów zaznaczonych w układzie współrzędnych.



● Zaznacz w układzie współrzędnych podane punkty.

$$A = (-1, 5), B = (3, 6), C = (2, -3), D = (-4, -7), E = (0, -2), F = (1, 0), G = (-5, 0), H = (6, 0), I = (0, 0)$$

● W układzie współrzędnych zaznacz sześć punktów, których odcięte są równe rzędnym. Co zauważasz?

● W układzie współrzędnych zaznacz sześć punktów, których współrzędne są liczbami przeciwnymi. Jak położone są te punkty na płaszczyźnie? W których ćwiartkach układu współrzędnych leżą te punkty?

● Dobierając odpowiednio jednostkę, zaznacz w układzie współrzędnych podane punkty.

a) $A = (5, 15)$ $B = (-10, 10)$ $C = (-35, 20)$ $D = (-50, 0)$

★ $K = \left(\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$ $L = \left(-1\frac{1}{3}, 1\right)$ $M = \left(\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$ $N = \left(1\frac{2}{3}, 0\right)$

★ $D = (1,5, -0,5)$ $E = (-2,5, 2,5)$ $F = (0, -1,5)$ $G = (-1,5, -3)$

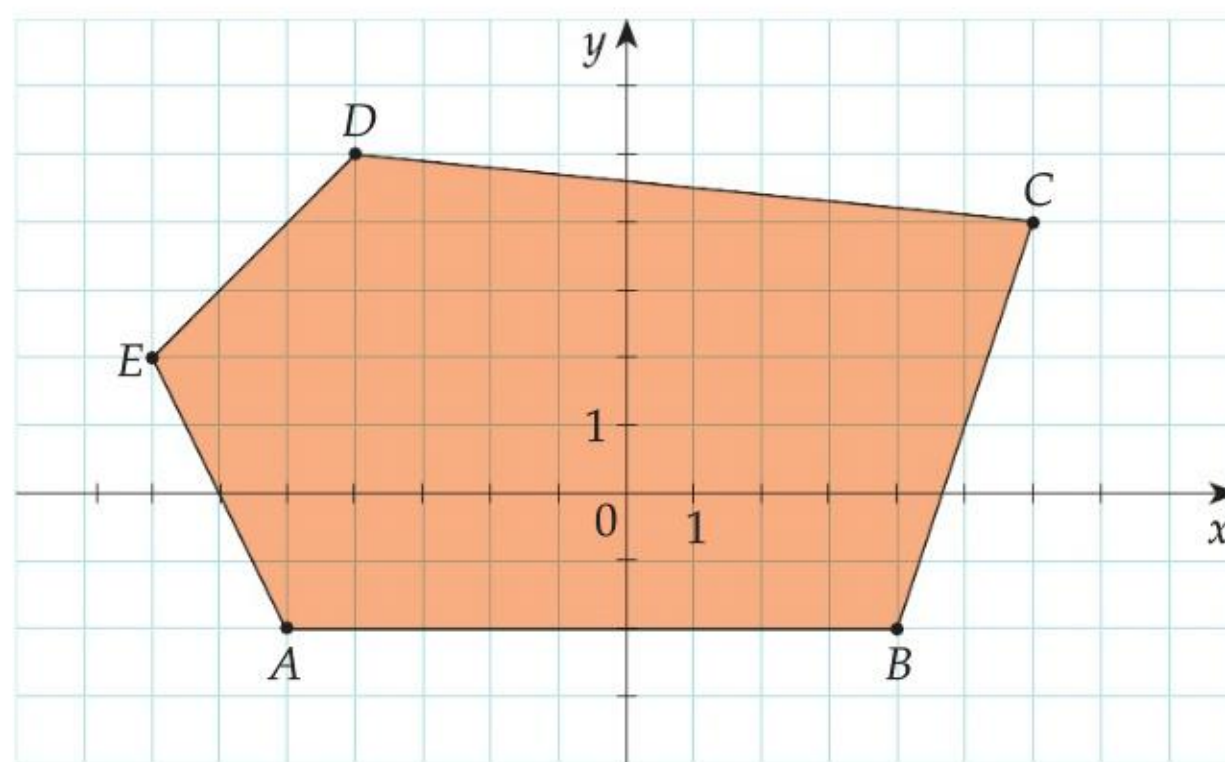
● W układzie współrzędnych narysowano wielokąt $ABCDE$.

a) Zapisz współrzędne wierzchołków wielokąta $ABCDE$.

b) Zapisz współrzędne czterech punktów, które leżą wewnątrz tego wielokąta.

c) Zapisz współrzędne czterech punktów, które leżą na bokach tego wielokąta i nie są jego wierzchołkami.

d) Zapisz współrzędne czterech punktów, które leżą poza wielokątem $ABCDE$.



● W układzie współrzędnych zaznacz podane punkty.

$$A = (-4, -2), B = (3, -2), C = (3, 2), D = (4, 2), E = (2, 4), F = (-1, 4), G = (-1, 5), H = (-2, 5), \\ I = (-2, 4), J = (-3, 4), K = (-5, 2), L = (-4, 2)$$

Zaznaczone punkty połącz odcinkami w kolejności:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow A.$$

● Zaznacz w układzie współrzędnych punkty A, B, C, D , a następnie narysuj proste AB i CD . Odczytaj współrzędne punktu przecięcia się tych prostych.

a) $A = (-1, -4), B = (4, -4), C = (-3, -2), D = (-3, 3)$

b) $A = (0, 0), B = (6, 4), C = (2, 4), D = (4, 0)$

● Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $K = (-1, -3)$ i $L = (3, 1)$, a następnie narysuj prostą KL . Podaj współrzędne punktów przecięcia tej prostej z osiami układu współrzędnych.

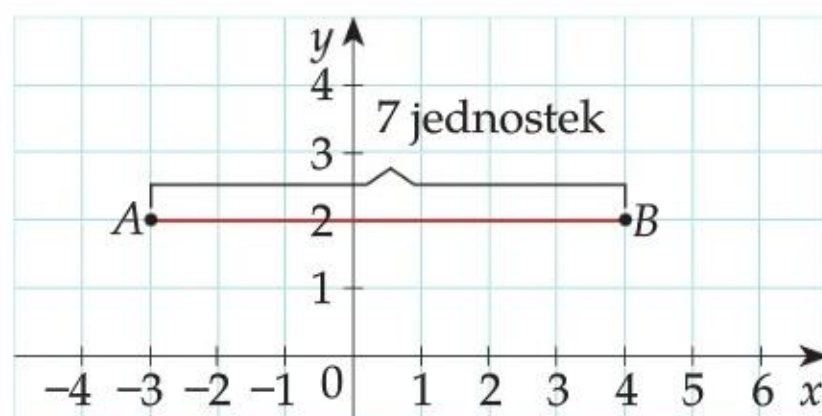
9.2 Długości odcinków w układzie współrzędnych

Podejmij temat



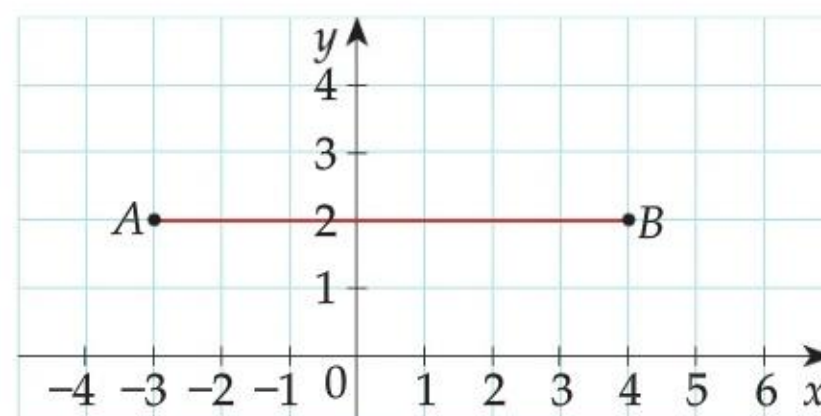
W jaki sposób długość odcinka AB obliczyła Kasia, a w jaki obliczył Grzegorz? Jak musi być położony w układzie współrzędnych odcinek, aby jego długość można było policzyć sposobem Kasi albo sposobem Grzegorza?

sposób Kasi



$$|AB| = 7$$

sposób Grzegorza



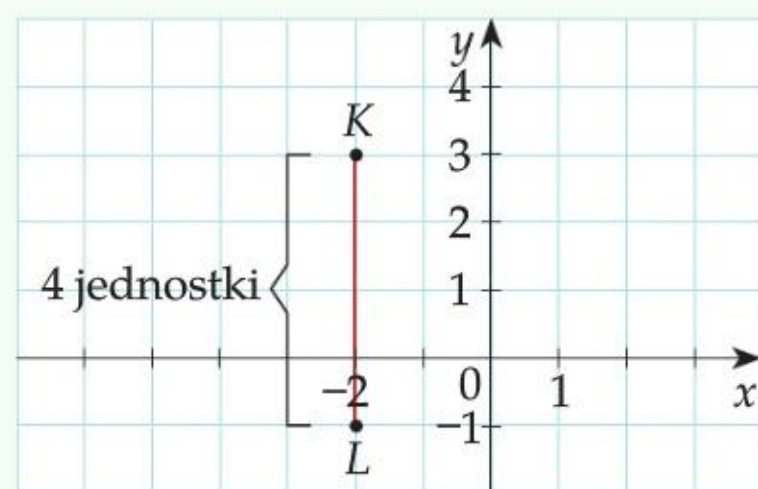
$$A = (-3, 2), B = (4, 2)$$

$$|AB| = |4 - (-3)| = 7$$

Gdy odcinki w układzie współrzędnych są równoległe do osi układu, wtedy łatwo możemy podać ich długości. Możemy postąpić podobnie, jak zrobiono to w *Podejmij temat*.

Przykład 1

Obliczmy długość odcinka KL , jeśli $K = (-2, 3)$, $L = (-2, -1)$.



Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych.

Rysujemy odcinek KL .

Pierwsze współrzędne punktów K i L są takie same. Odcinek KL jest równoległy do osi rzędnych (osi y).

Sposób I

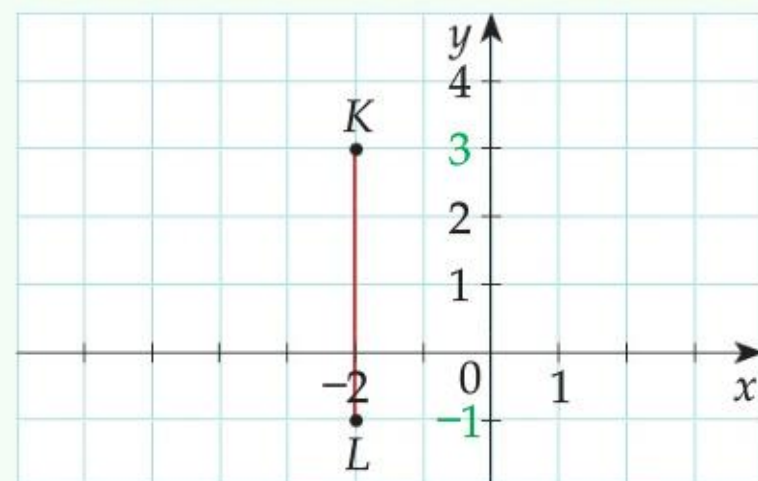
Przesuwamy się z punktu K do punktu L po linii pionowej, licząc jednostki.

$$|KL| = 4$$

Sposób II

Obliczamy wartość bezwzględną różnicy rzędnej punktu K i rzędnej punktu L .

$$|KL| = |3 - (-1)| = |3 + 1| = |4| = 4$$



1. Oblicz długość odcinka ST , jeśli:

a) $S = (1, 10)$, $T = (1, 4)$,

b) $S = (-6, -2)$, $T = (3, -2)$,

c) $S = (-4, 5)$, $T = (-10, 5)$.

Więcej na temat

Odcinek, którego końce nie znajdują się w punktach kratowych, trudno jest narysować w układzie współrzędnych. Jeżeli jednak ten odcinek jest równoległy do jednej z osi (czyli rzędne albo odcięte końców odcinka są takie same), to długość tego odcinka możemy obliczyć, korzystając z II sposobu z przykładu 1.

Obliczmy długość odcinka AB , jeśli $A = (2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$, $B = (-10\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$. Rzędne punktów są takie same.

$$|AB| = |2\sqrt{3} - (-10\sqrt{3})| = |2\sqrt{3} + 10\sqrt{3}| = 12\sqrt{3}$$

2. Oblicz długość odcinka CD , jeśli:

a) $C = (\sqrt[3]{4}, -7\sqrt{6})$, $D = (\sqrt[3]{4}, 3\sqrt{6})$, b) $C = (13\sqrt[3]{7}, -1)$, $D = (5\sqrt[3]{7}, -1)$, c) $C = (-2\sqrt{5}, \sqrt{3})$, $D = (-7\sqrt{5}, \sqrt{3})$.

Gdy odcinek w układzie współrzędnych nie jest równoległy do osi układu, wtedy możemy obliczyć jego długość, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

Przykład 2

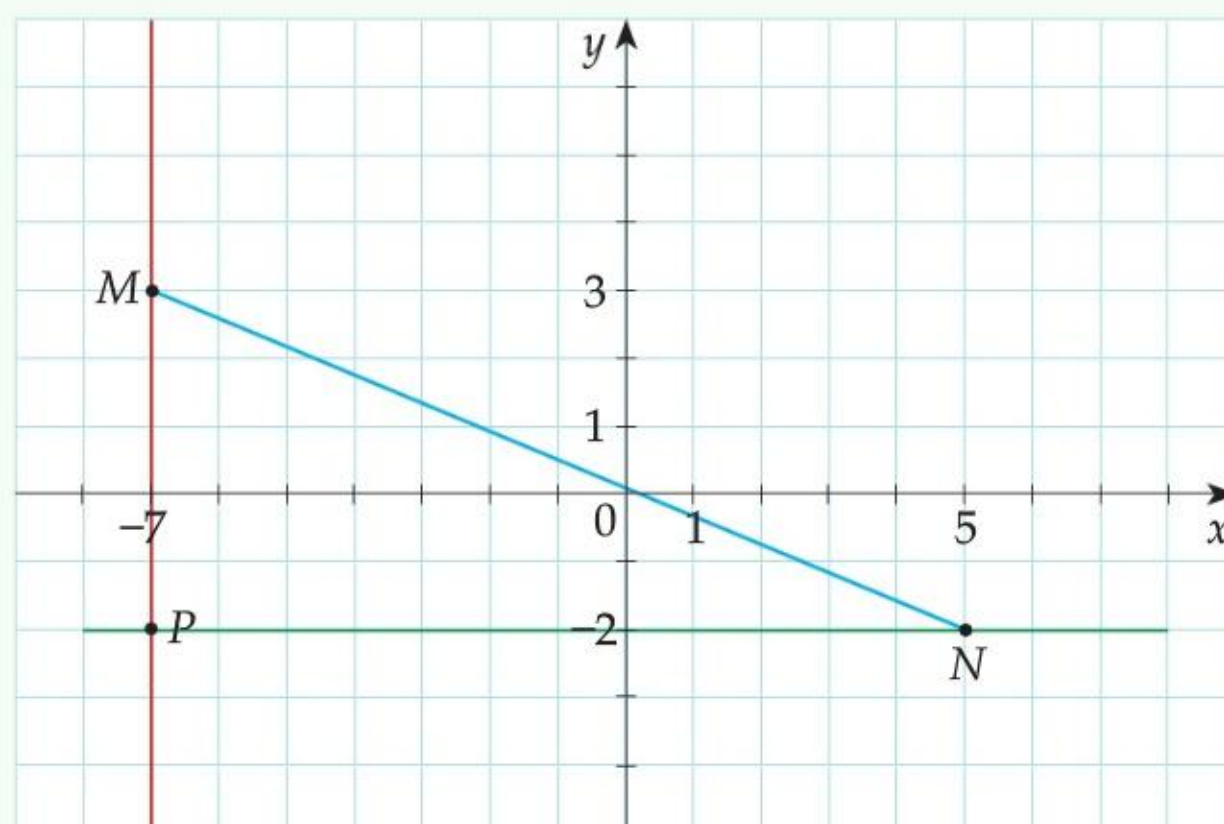
Obliczmy długość odcinka MN , jeśli $M = (-7, 3)$, $N = (5, -2)$.

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych.

Rysujemy prostą równoległą do osi x i przechodzącą przez punkt N .

Rysujemy prostą równoległą do osi y i przechodzącą przez punkt M .

Oznaczamy punkt przecięcia się tych prostych przez P .
 $P = (-7, -2)$



$$|MP| = |3 - (-2)| = |3 + 2| = 5$$
$$|PN| = |5 - (-7)| = |5 + 7| = 12$$

Trójkąt MPN jest prostokątny. Obliczamy długości przyprostokątnych MP i PN .

Obliczamy długość przeciwprostokątnej, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

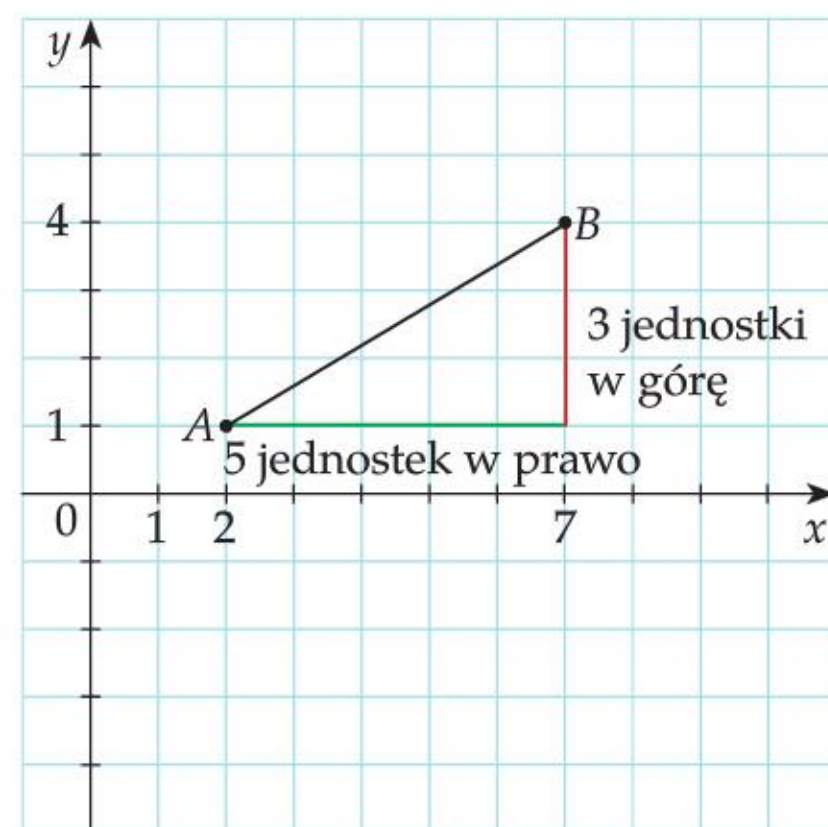
$$|MN|^2 = 5^2 + 12^2$$
$$|MN|^2 = 169$$
$$|MN| = \sqrt{169}$$
$$|MN| = 13$$

3. Oblicz długość odcinka TS , jeśli $T = (5, 2)$, $S = (-3, -4)$.

W układzie współrzędnych (lub na kartce w kratkę) możemy bez większych trudności rysować odcinki równoległe i prostopadłe do danych odcinków.

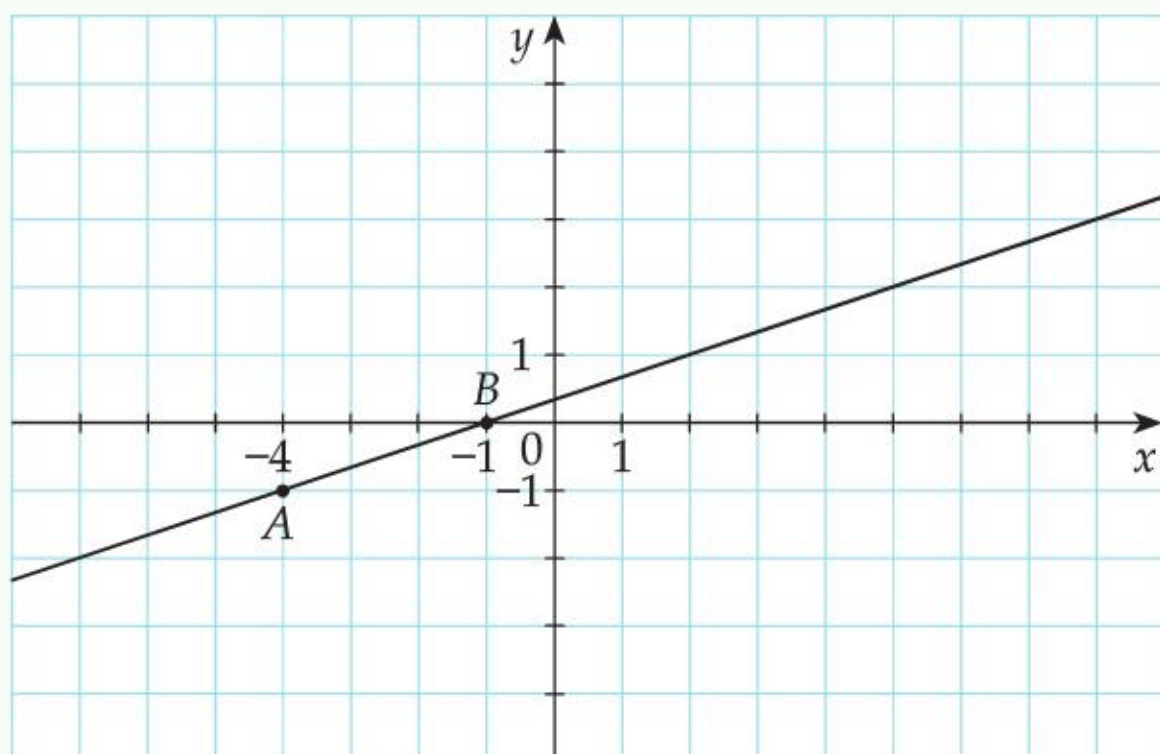
Aby dotrzeć z punktu A do punktu B , poruszając się tylko po liniach równoległych do osi układu współrzędnych, możemy przesunąć się o 5 jednostek w prawo od punktu A i 3 jednostki w górę. Możemy zrobić też odwrotnie – najpierw przesunąć się o 3 jednostki w górę od punktu A , a potem o 5 jednostek w prawo.

Aby dotrzeć z punktu B do punktu A , poruszając się tylko po liniach równoległych do osi układu współrzędnych, możemy przesunąć się o 5 jednostek w lewo od punktu B i 3 jednostki w dół. Możemy też zrobić odwrotnie – najpierw przesunąć się o 3 jednostki w dół od punktu B , a potem o 5 jednostek w lewo.

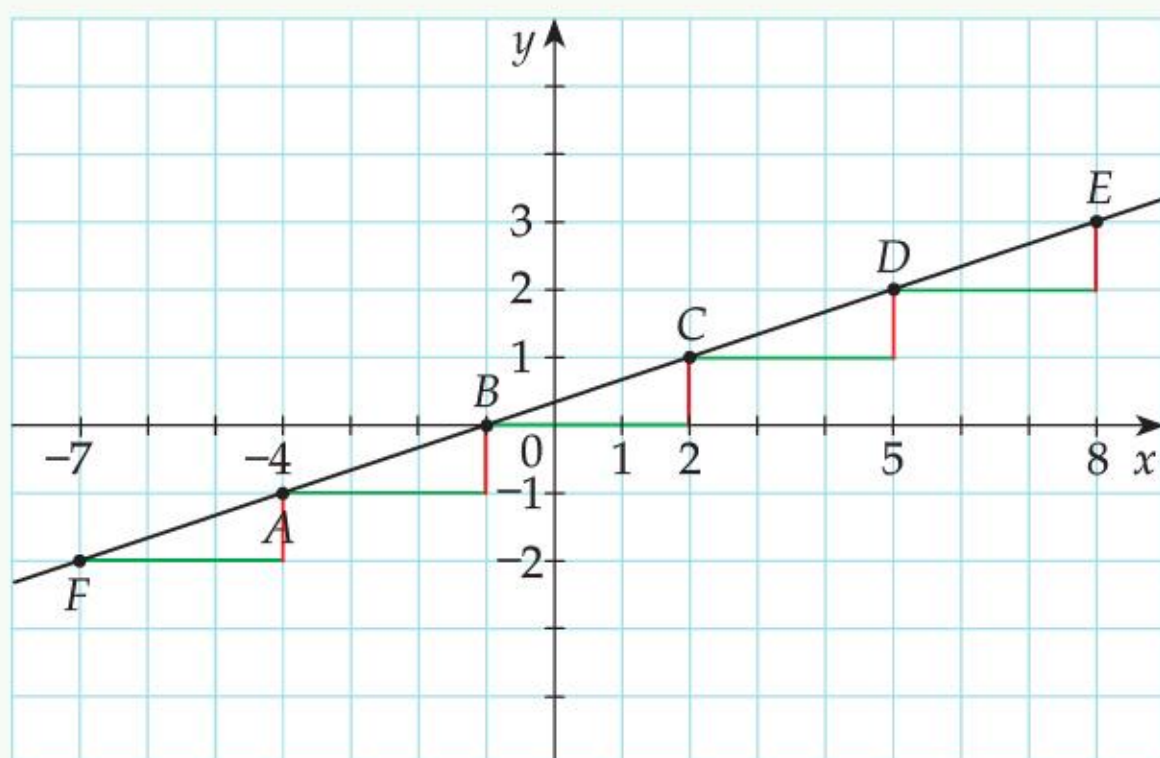


Przykład 3

Znajdźmy kilka punktów kratowych leżących na prostej wyznaczonej przez punkty: $A = (-4, -1)$, $B = (-1, 0)$.



W układzie współrzędnych zaznaczamy punkty A i B i rysujemy prostą AB .



Aby dotrzeć z punktu A do punktu B , po liniach równoległych do osi układu współrzędnych przesuwamy się o 3 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę. Punkty kratowe leżące na prostej AB znajdziemy, przesuwając się z dowolnego punktu kratowego, leżącego na prostej AB , o 3 jednostki w prawo i 1 jednostkę w górę.

Możemy też przesuwać się z dowolnego punktu kratowego, leżącego na prostej AB , o jedną jednostkę w dół i 3 jednostki w lewo.

$$C = (2, 1), D = (5, 2), E = (8, 3), F = (-7, -2)$$

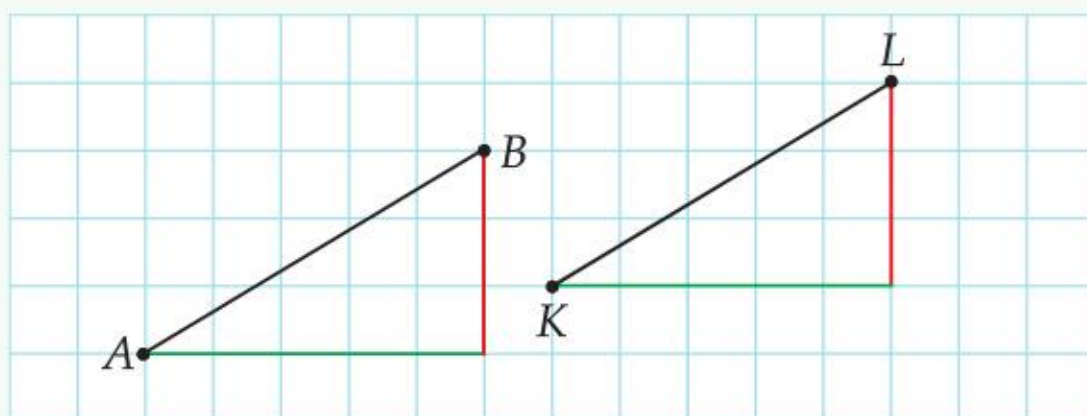
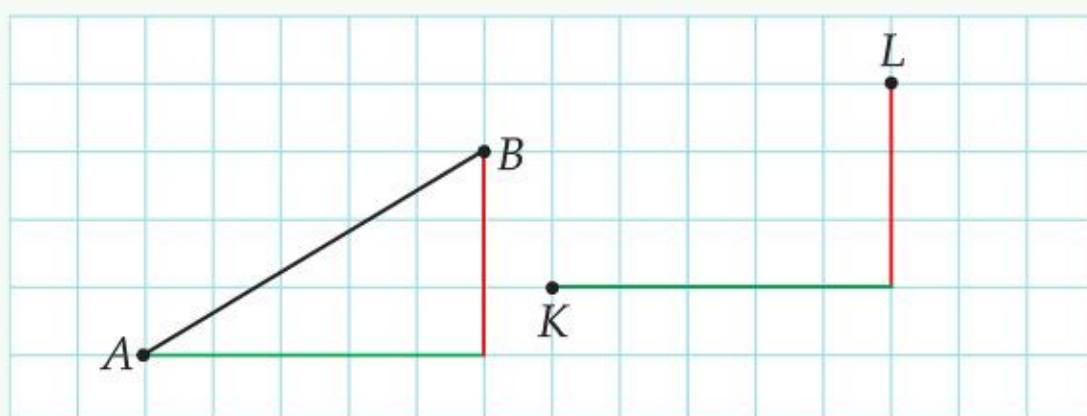
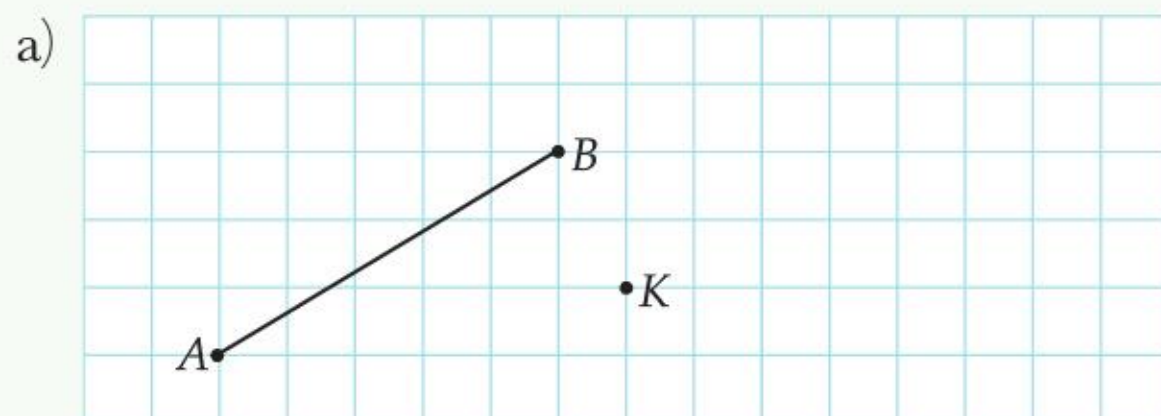
Odczytujemy współrzędne wyznaczonych punktów.

4. Podaj współrzędne kilku punktów kratowych leżących na prostej wyznaczonej przez punkty: $K = (-3, 5)$, $L = (-1, 2)$.

Przykład 4

Narysujmy odcinek równoległy do odcinka AB

a) o tej samej długości, co odcinek AB ,



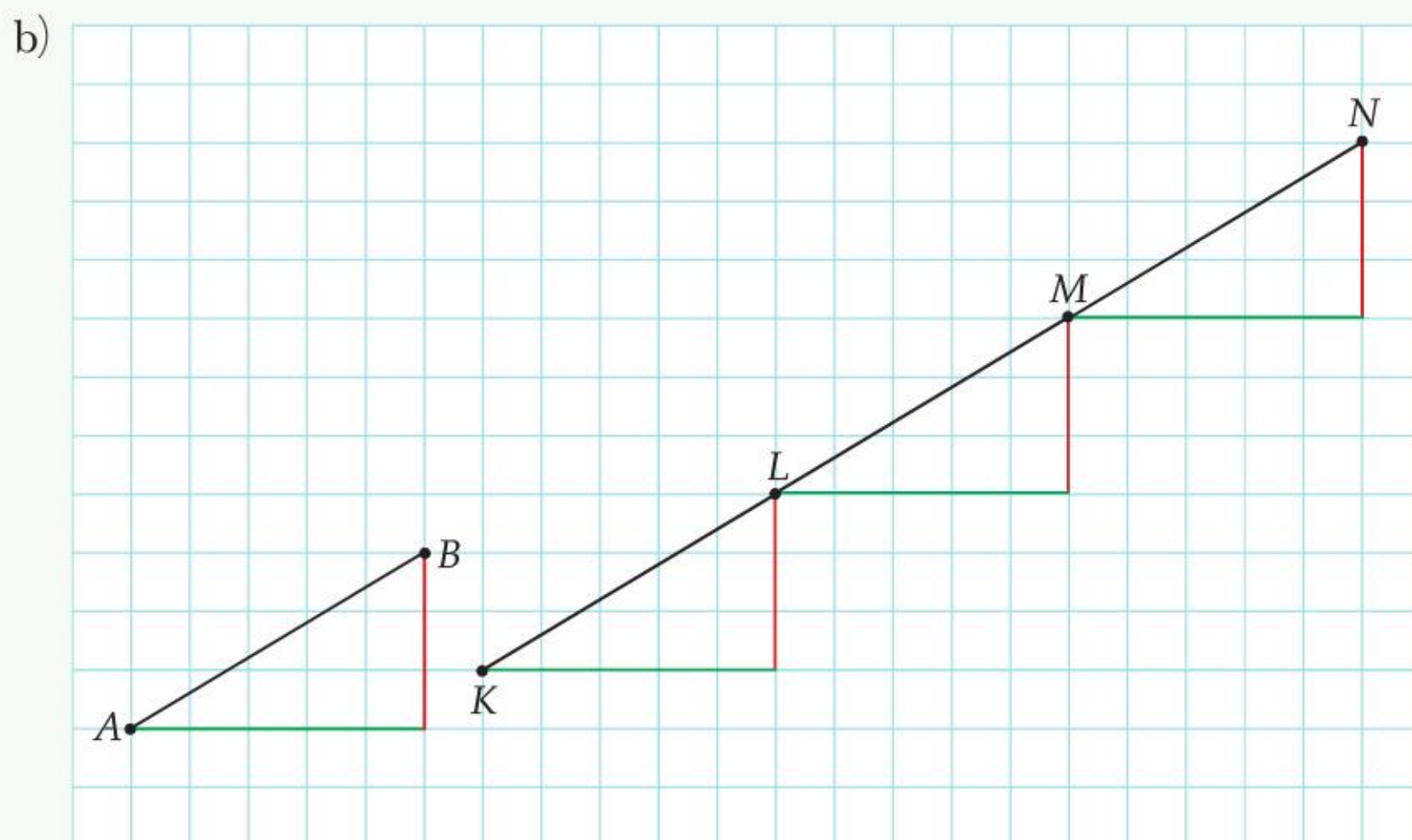
b) 3 razy dłuższy od odcinka AB .

Zaznaczmy punkt K , który będzie końcem odcinka równoległego do odcinka AB .

Z punktu K przesuwamy się o 5 jednostek w prawo i 3 jednostki w górę (bo aby „dotrzeć” z punktu A do punktu B , przesuwaliśmy się o 5 jednostek w prawo i 3 jednostki w górę).

Zaznaczamy punkt L .

Odcinek KL jest równoległy do odcinka AB i ma tę samą długość, co odcinek AB .

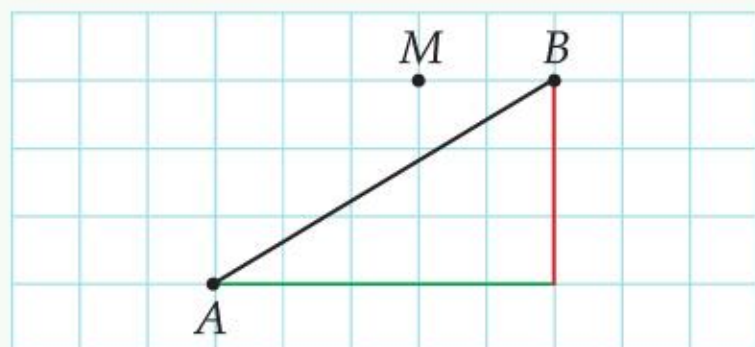


Z punktu L odliczamy 5 jednostek w prawo i 3 jednostki w górę. Zaznaczamy punkt M . Z punktu M odliczamy 5 jednostek w prawo i 3 jednostki w górę. Zaznaczamy punkt N . Odcinek KN jest równoległy do odcinka AB i 3 razy dłuższy od odcinka AB .

5. Narysuj w układzie współrzędnych odcinek EF , jeśli $E = (1, 4)$, $F = (8, 3)$. Narysuj odcinek OP równoległy do odcinka EF , o tej samej długości, co odcinek EF . Narysuj odcinek OR równoległy do odcinka EF , którego długość jest 2 razy większa od długości odcinka EF .

Przykład 5

Narysujmy odcinek prostopadły do odcinka AB o tej samej długości, co odcinek AB .

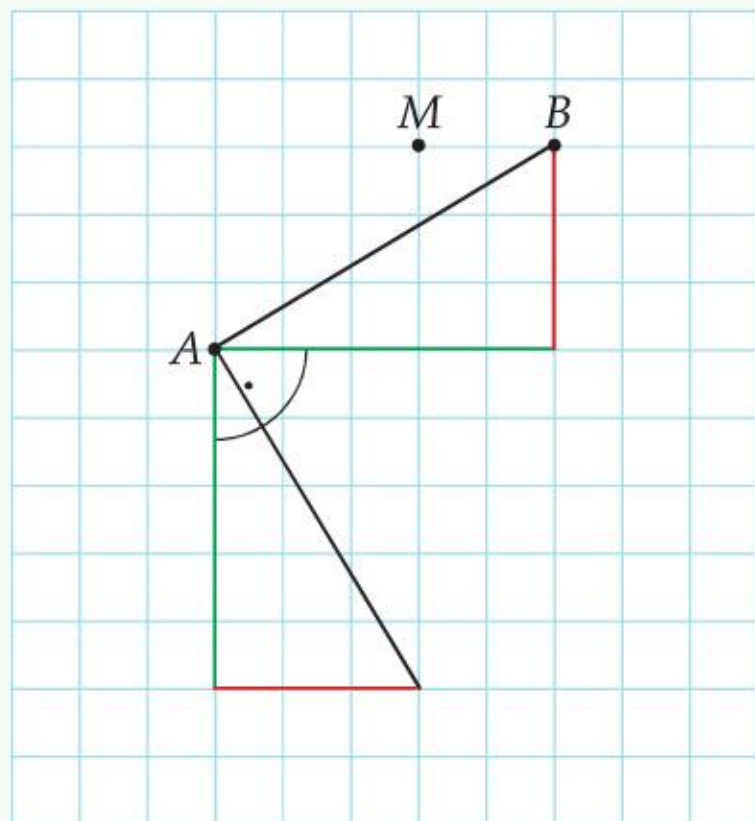


Zaznaczmy punkt M , który będzie końcem odcinka prostopadłego do odcinka AB .

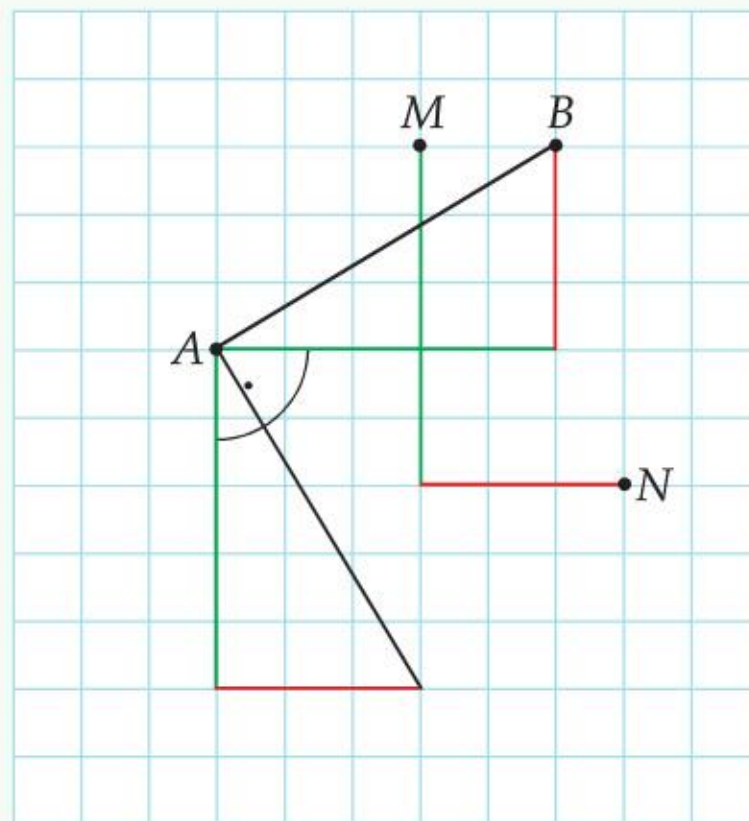
Rysujemy linie, po których „dotrzemy” z punktu A do punktu B . Powstaje trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną jest odcinek AB . Mamy dwie możliwości narysowania odcinka MN prostopadłego do odcinka AB .

Przypadek I

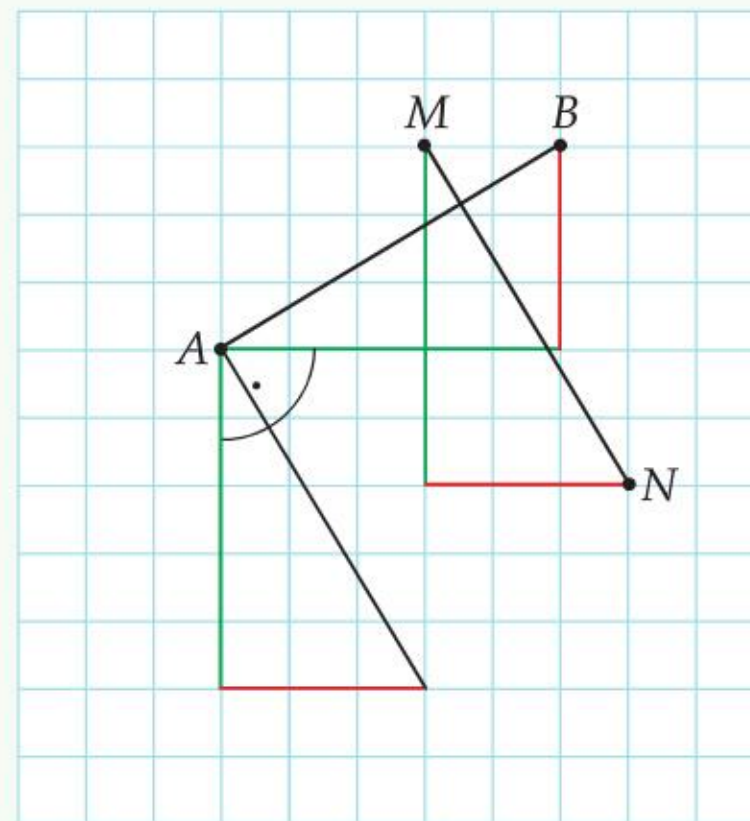
Obracamy narysowany trójkąt o kąt 90° względem punktu A , zgodnie z ruchem wskazówek zegara.



Z punktu M odliczamy 5 jednostek w dół i 3 jednostki w prawo. Zaznaczamy punkt N .

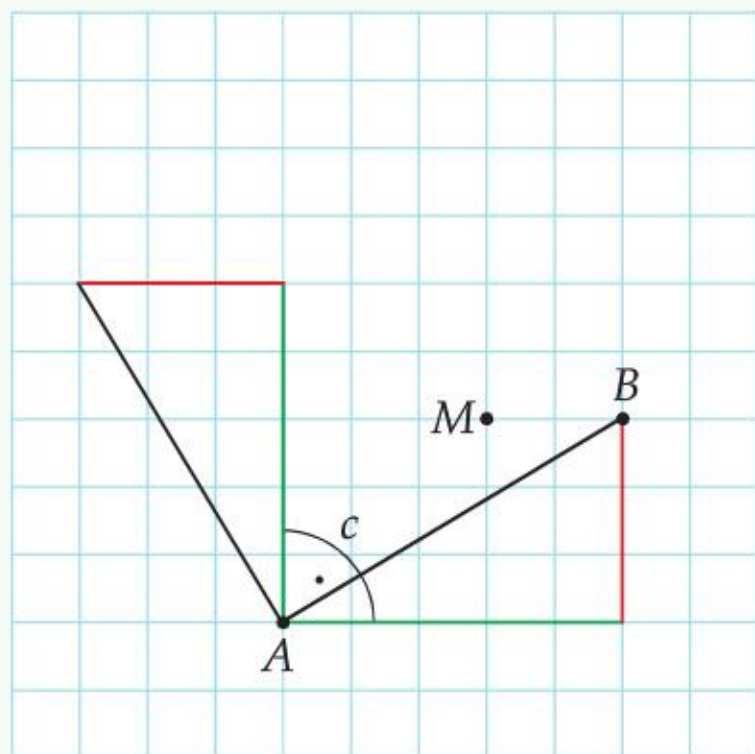


Odcinek MN jest szukany odcinkiem. Odcinek MN przecina odcinek AB .

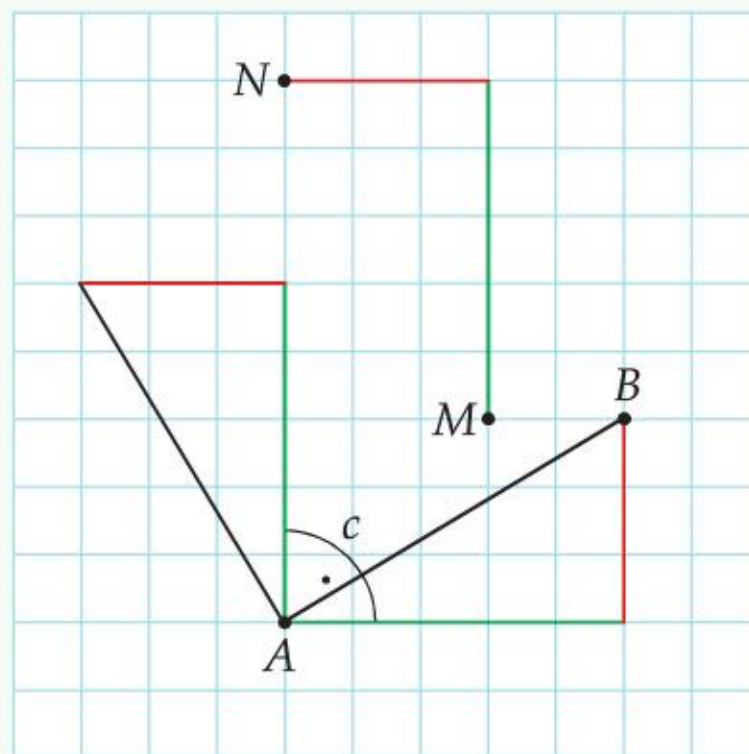


Przypadek II

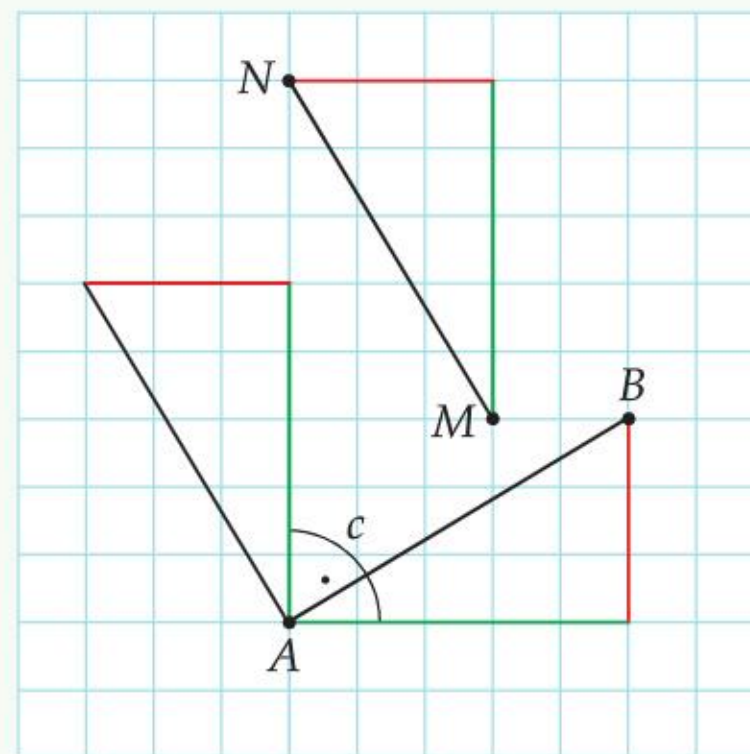
Obracamy trójkąt o kąt 90° względem punktu A , w przeciwną stronę do ruchu wskazówek zegara.



Z punktu M odliczamy 5 jednostek w górę i 3 jednostki w lewo. Zaznaczamy punkt N .



Odcinek MN jest szukany odcinkiem. Odcinek MN nie przecina odcinka AB .

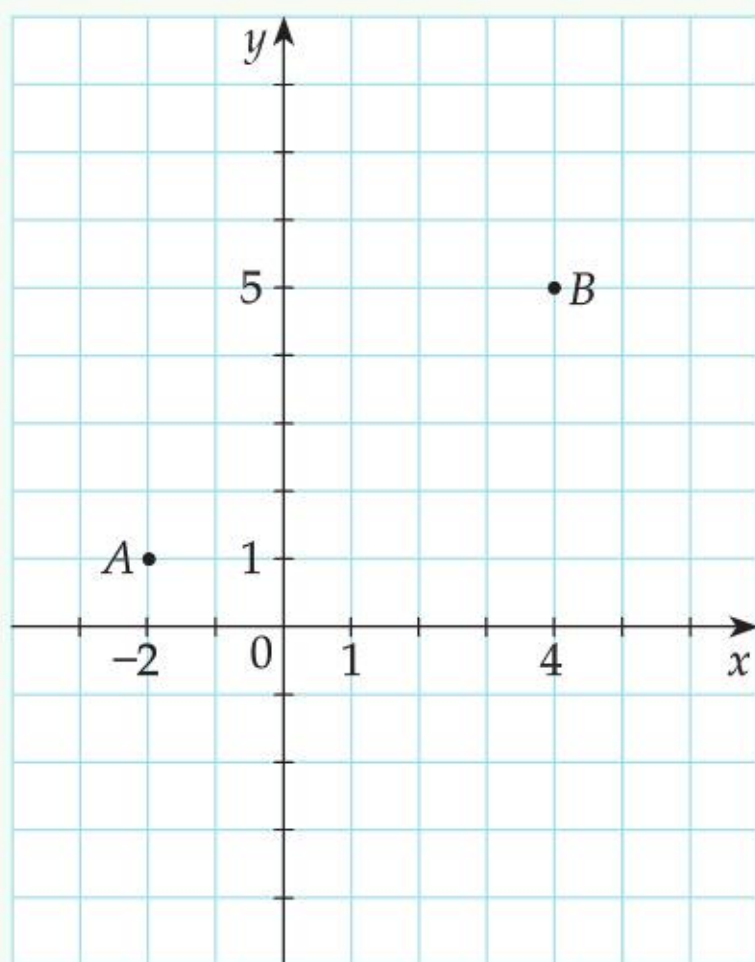


6. Narysuj w układzie współrzędnych odcinek EF , jeśli $E = (1, 4)$, $F = (8, 3)$. Narysuj odcinek RS prostopadły do odcinka EF , o tej samej długości, co odcinek EF . Sprawdź za pomocą ekierki poprawność wykonanego ćwiczenia.

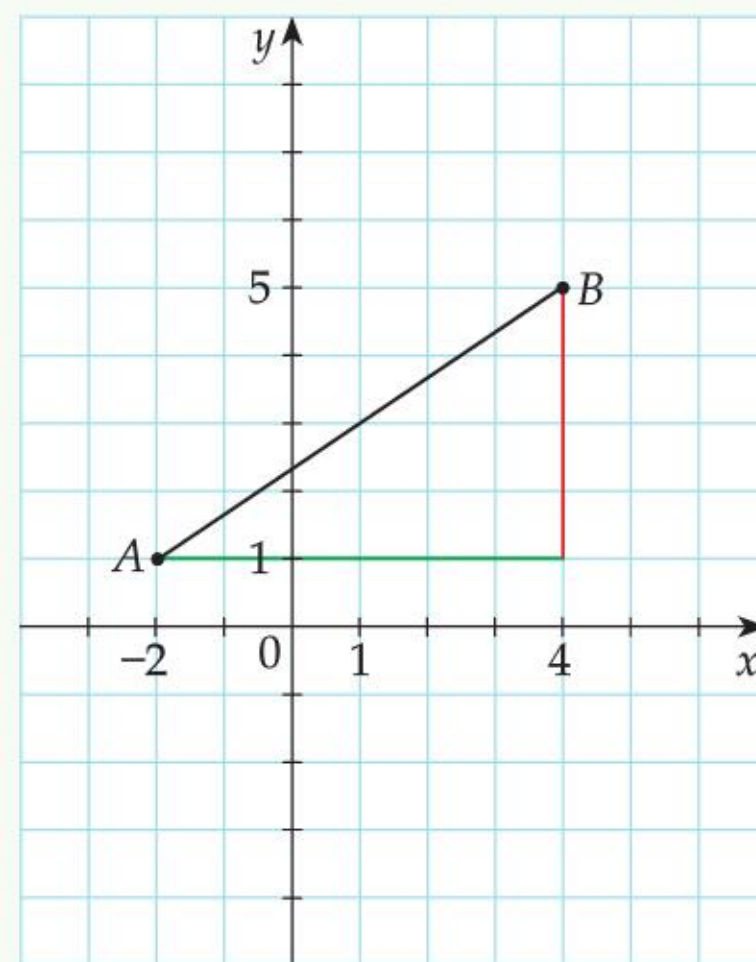
Przykład 6

Wyznamy środek odcinka AB i jego współrzędne, jeśli $A = (-2, 1)$, $B = (4, 5)$.

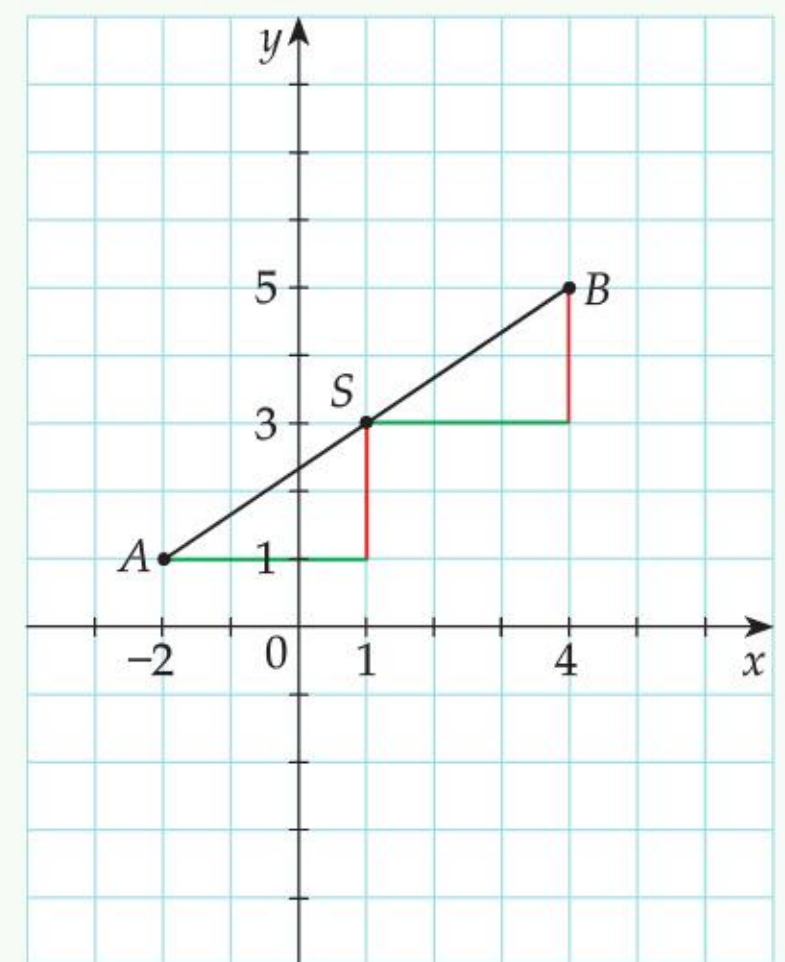
Zaznaczmy punkty A , B w układzie współrzędnych. Najpierw wyznaczmy współrzędne środka odcinka AB .



Aby „dotrzeć” z punktu A do punktu B , musimy przesunąć się o 6 jednostek w prawo i 4 jednostki w górę.



W połowie (środku) drogi będziemy, gdy przesuniemy się o 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w górę. Oznaczamy ten punkt przez S – jest on środkiem odcinka AB .



Odczytujemy współrzędne punktu S .
 $S = (1, 3)$

Pierwsza współrzędna punktu S , będącego środkiem odcinka AB , znajduje się na osi x w środku między liczbami -2 i 4 . Jest ona średnią arytmetyczną pierwszych współrzędnych punktów A i B :

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1$$

Druga współrzędna punktu S , będącego środkiem odcinka AB , znajduje się na osi y w środku między liczbami 1 i 5 . Jest ona średnią arytmetyczną drugich współrzędnych punktów A i B :

$$y = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$S = (x, y), \text{ czyli } S = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+5}{2} \right)$$

Aby wyznaczyć współrzędne środka odcinka AB , gdzie $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, należy wyznaczyć średnie arytmetyczne odpowiednich współrzędnych jego końców.

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

7. Wyznacz środek odcinka AB , jeśli $A = (-10, 3)$, $B = (-4, -5)$.

Przykład 7

Punkt $S = (1, 1)$ jest środkiem odcinka AB takiego, że $A = (-2, 3)$. Obliczmy współrzędne punktu B .

Przyjmijmy, że $B = (x_B, y_B)$.

Wiemy, że $x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$ oraz że $x_A = -2$, $y_A = 3$, $x_S = 1$, $y_S = 1$

$$\frac{-2 + x_B}{2} = 1$$

$$-2 + x_B = 2$$

$$x_B = 4$$

$$B = (4, -1)$$

$$\frac{3 + y_B}{2} = 1$$

$$3 + y_B = 2$$

$$y_B = -1$$

8. Punkt $S = (0, 3)$ jest środkiem odcinka AB takiego, że $B = (4, -1)$. Oblicz współrzędne punktu A .

Zadania

- Oblicz długość odcinka PR , jeśli:

a) $P = (-4, -7)$, $R = (-4, 3)$,

d) $P = (0, -6)$, $R = (2, 0)$,

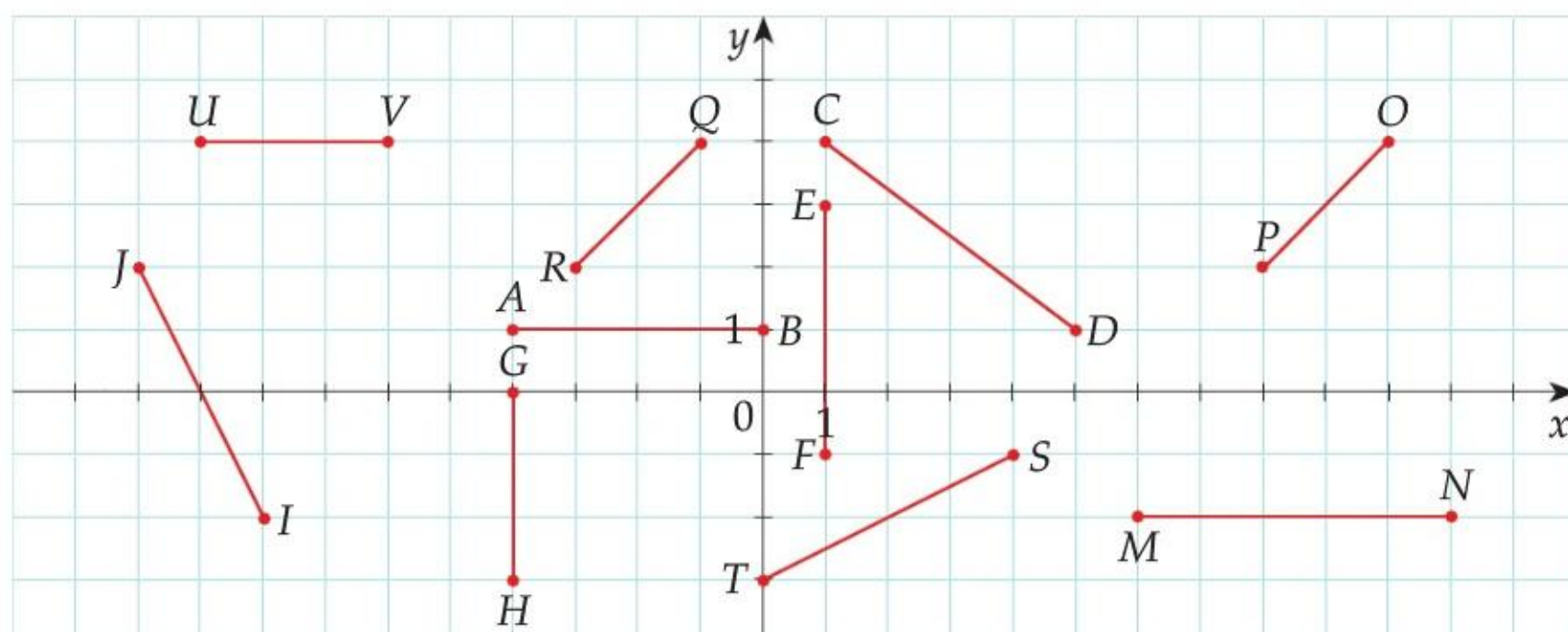
b) $P = (-5, 2)$, $R = (-3, 2)$,

e) $P = (-1, -8)$, $R = (7, 7)$,

c) $P = (2, -4)$, $R = (10, 2)$,

★ $P = (41, 83)$, $R = (34, 59)$.

- Które z odcinków na rysunku obok mają długość 4?



W układzie współrzędnych dane są punkty $X = (-1, 3)$, $Y = (1, -2)$.

Narysuj:

- a) odcinek AB równoległy do odcinka XY i o tej samej długości, co odcinek XY ,
- b) odcinek CD trzy razy dłuższy od odcinka XY i równoległy do niego,
- c) odcinek EF o tej samej długości, co odcinek XY , prostopadły do niego i go przecinający,
- d) odcinek GH o tej samej długości, co odcinek XY , prostopadły do niego i go nieprzecinający,
- e) odcinek IJ trzy razy dłuższy od odcinka XY , prostopadły do niego i go przecinający,
- f) odcinek KL dwa razy dłuższy od odcinka XY , prostopadły do niego i go nieprzecinający.

Narysuj w układzie współrzędnych prostą przechodzącą przez punkty $A = (-5, 4)$, $B = (-1, 1)$. Podaj współrzędne kilku punktów kratowych leżących na tej prostej.

W układzie współrzędnych zaznacz punkty $C = (1, -1)$, $D = (2, -4)$, $P = (-1, -3)$. Podaj współrzędne punktu R , jeśli wiadomo, że:

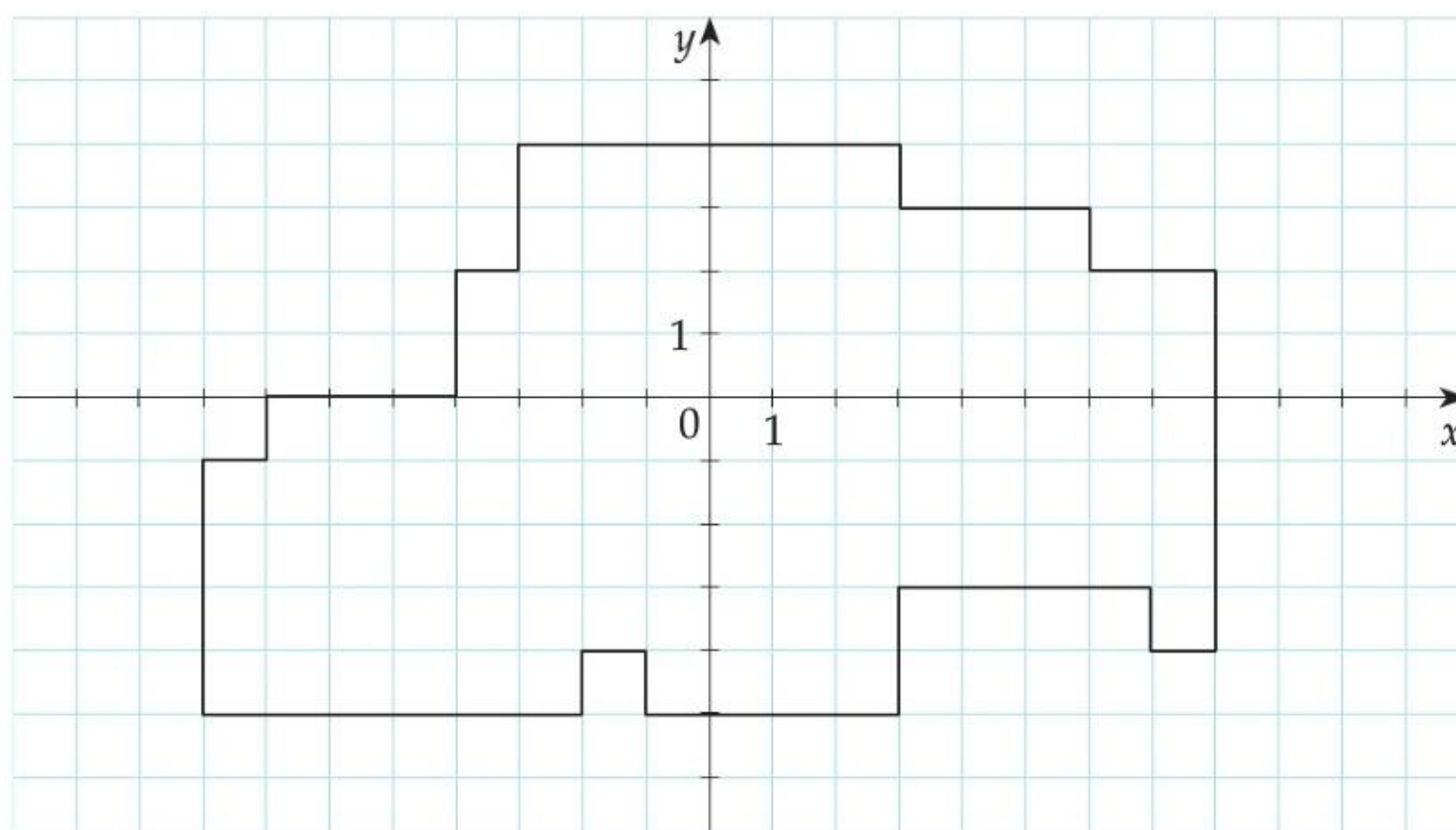
- a) odcinek PR jest równoległy do odcinka CD i jest tej samej długości, co odcinek CD (podaj obie możliwości),
- b) odcinek PR jest dwa razy dłuższy od odcinka CD i równoległy do niego (podaj obie możliwości),
- c) odcinek PR jest o tej samej długości, co odcinek CD , prostopadły do niego i go przecinający,
- d) odcinek PR jest o tej samej długości, co odcinek CD , prostopadły do niego i go nieprzecinający,
- e) odcinek PR jest cztery razy dłuższy od odcinka CD , prostopadły do niego i go przecinający,
- f) odcinek PR jest dwa razy dłuższy od odcinka CD , prostopadły do niego i go nieprzecinający.

W układzie współrzędnych zaznacz punkty $S = (-5, -2)$, $T = (-1, -1)$, $A = (0, 2)$. Podaj współrzędne punktu B , jeśli wiadomo, że:

- a) odcinek AB jest równoległy do odcinka ST i jest tej samej długości, co odcinek ST ,
- b) odcinek AB jest dwa razy dłuższy od odcinka ST i równoległy do niego,
- c) odcinek AB jest o tej samej długości, co odcinek ST i jest prostopadły do niego,
- d) odcinek AB jest dwa razy dłuższy od ST i jest prostopadły do niego.

W każdym przykładzie podaj dwie możliwości.

- Oblicz obwód figury przedstawionej na rysunku.



- Narysuj w układzie współrzędnych łamaną $ABCDE$ i oblicz jej długość, jeśli:

- a) $A = (-5, -3)$, $B = (-3, -3)$, $C = (-3, 2)$, $D = (2, 2)$, $E = (2, 6)$,
 b) $A = (-7, 4)$, $B = (-7, -2)$, $C = (-1, 6)$, $D = (0, 6)$, $E = (5, -6)$.

- Punkt Z jest środkiem odcinka CD . Wyznacz współrzędne punktu Z , jeśli:

- a) $C = (-3, -2)$, $D = (3, -8)$,
 b) $C = (2, 6)$, $D = (-5, -4)$,
 c) $C = (9, -1)$, $D = (-2, 10)$.

- Punkt S jest środkiem odcinka KL . Wyznacz współrzędne punktu L , jeśli:

- a) $K = (-1, 7)$, $S = (6, 3)$,
 b) $K = (2, 5)$, $S = (2\frac{1}{2}, -2)$,
 c) $K = (-3, -4)$, $S = (-\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$.

- Wyznacz długość odcinka, którego jednym końcem jest punkt $K = (-8, 1)$, a drugim środek odcinka AB , jeśli $A = (-3, 5)$, $B = (1, -3)$.

- Punkty $A = (-1, -4)$, $B = (3, 7)$, $C = (1, 5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Wyznacz długość odcinka CD , gdzie punkt D jest środkiem boku AB .

- ★ Oblicz długości odcinków łączących wierzchołki trójkąta ABC ze środkami przeciwległych boków, jeśli:

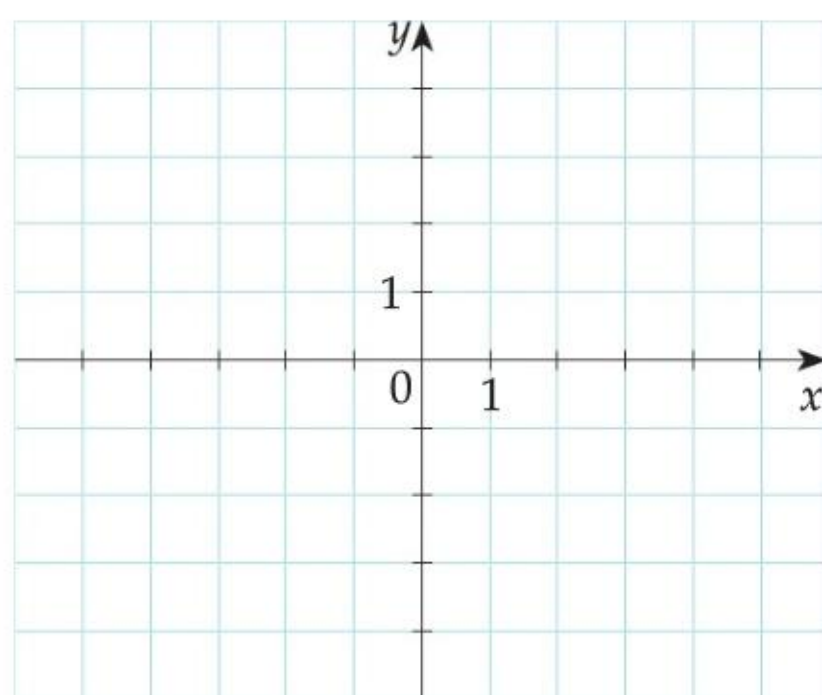
- a) $A = (-1, -2)$, $B = (5, -2)$, $C = (2, 2)$,
 b) $A = (1, 0)$, $B = (5, 2)$, $C = (-1, 8)$.

9.3 Figury w układzie współrzędnych

Podejmij temat



Co to za czworokąt, którego wierzchołkami są punkty A, B, C, D ?



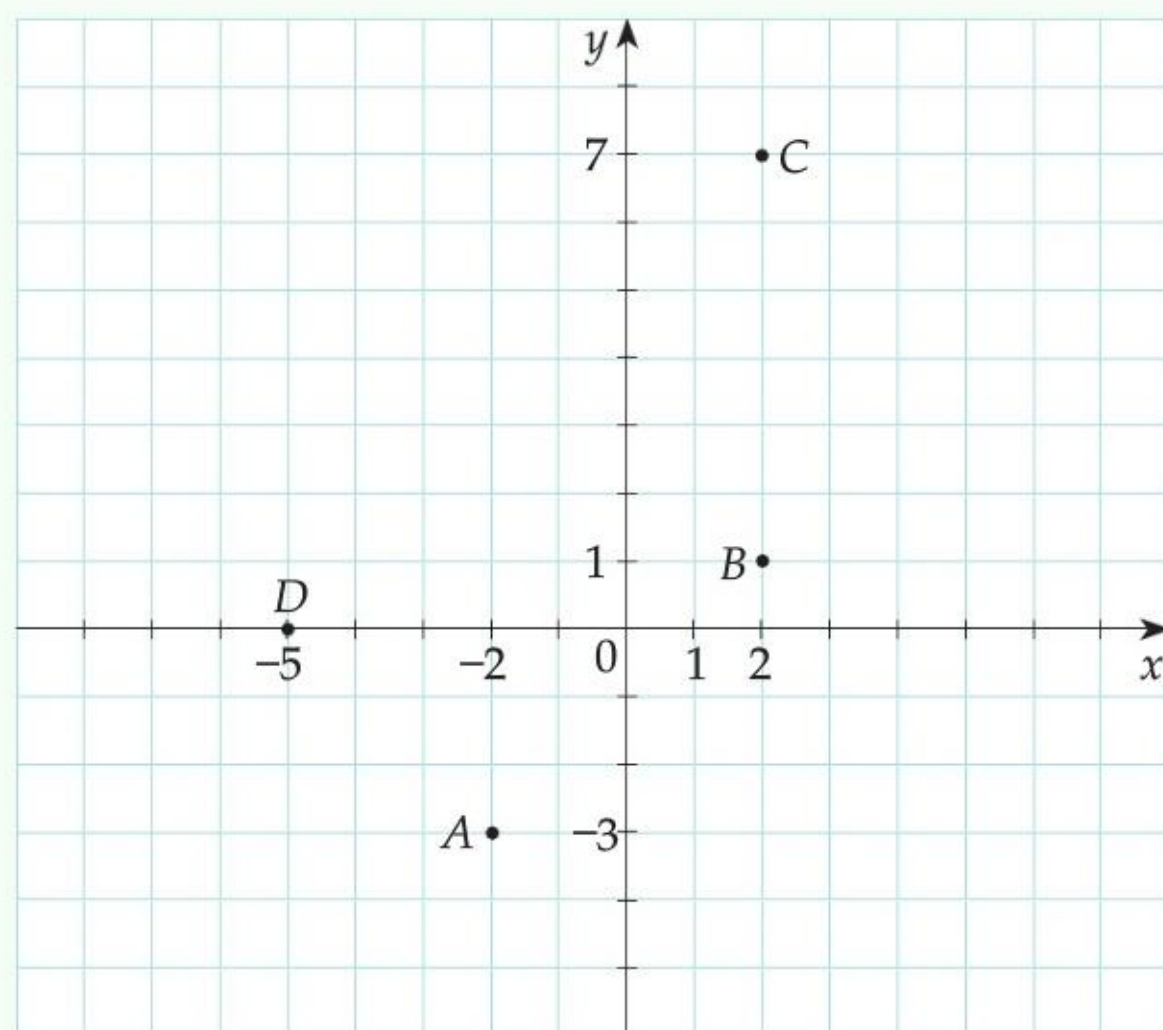
$$A = (-2, -3), B = (2, 1), C = (2, 7), D = (-5, 0)$$



Przykład 1

Narysujmy czworokąt $ABCD$, którego wierzchołkami są punkty podane w *Podejmij temat*, i podajmy jego nazwę.

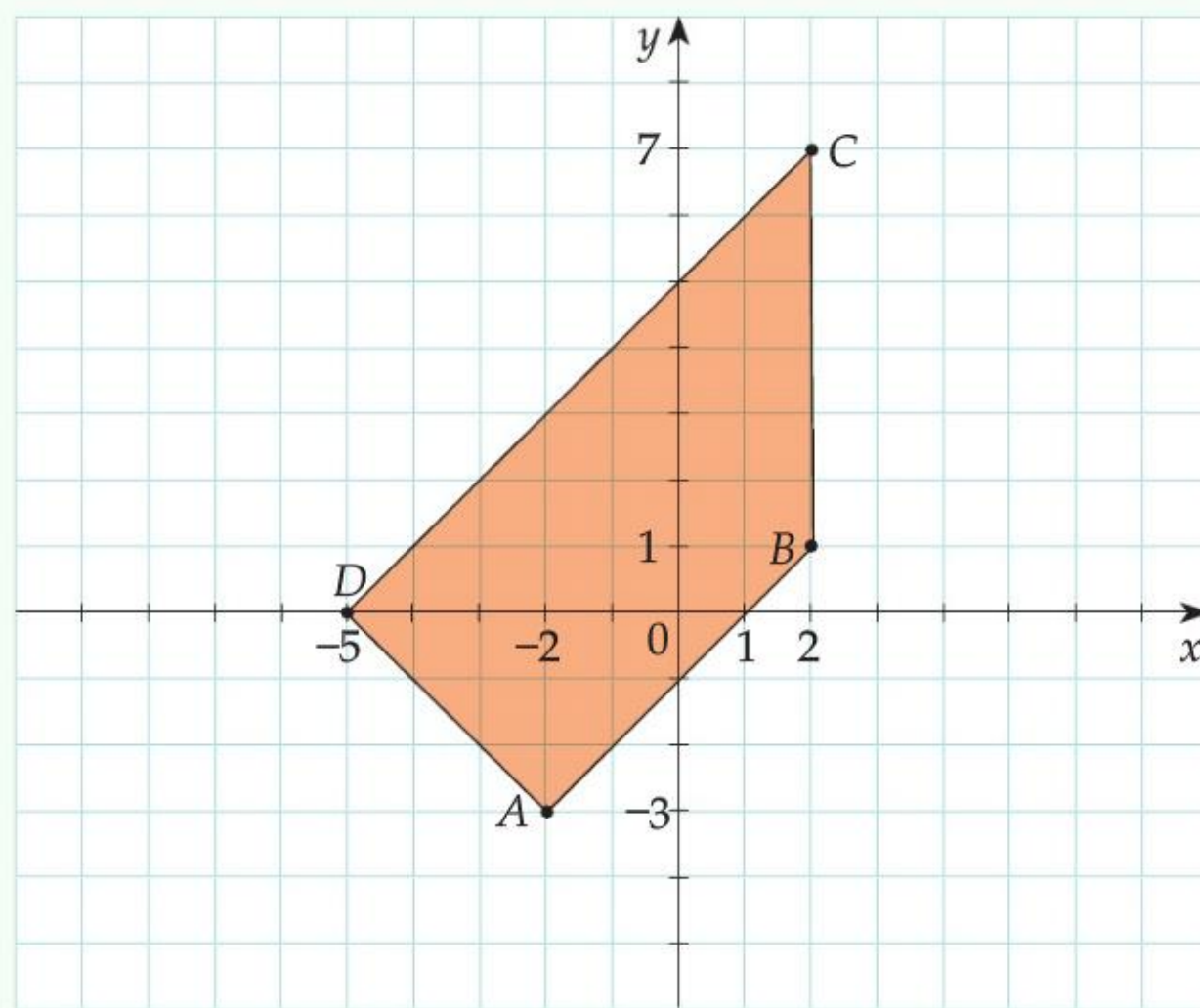
Zaznaczamy punkty A, B, C, D w układzie współrzędnych.



Rysujemy boki czworokąta $ABCD$.

Odcinki AB i CD są równoległe i kąt DAB jest kątem prostym.

Czworokąt $ABCD$ jest trapezem prostokątnym.



1. Narysuj trójkąt, którego wierzchołkami są punkty: $K = (-3, -1)$, $O = (2, -1)$, $T = (5, 3)$, i podaj jego nazwę.

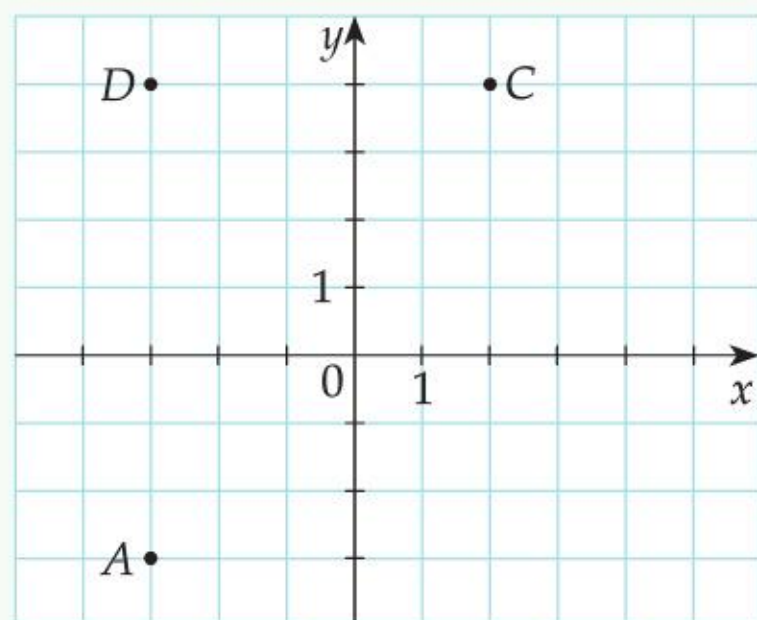
Jeżeli znamy współrzędne trzech wierzchołków prostokąta, możemy wyznaczyć współrzędne czwartego wierzchołka.

Przykład 2

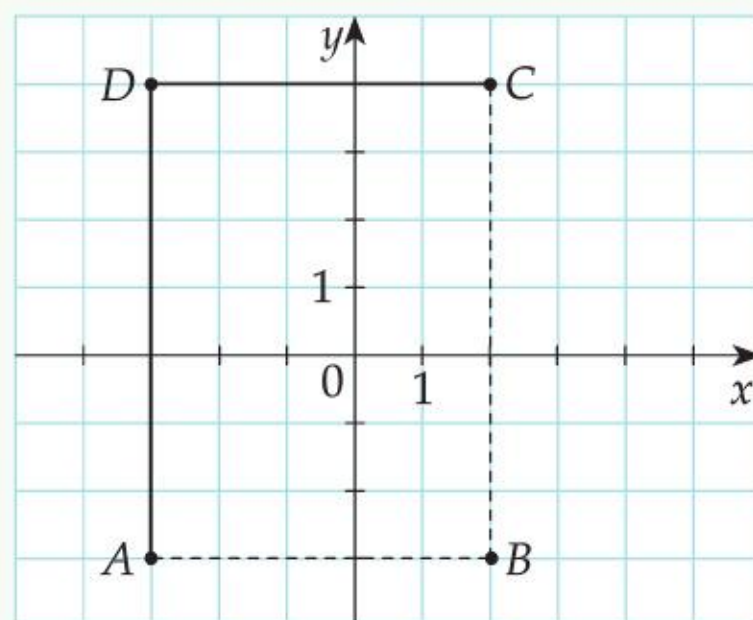
Wyznamy współrzędne wierzchołka B prostokąta $ABCD$ i obliczmy obwód tego prostokąta, jeśli:

- a) $A = (-3, -3)$, $C = (2, 4)$, $D = (-3, 4)$,
 b) $A = (-4, 1)$, $C = (4, 2)$, $D = (2, 5)$.

- a) Zaznaczamy punkty A , C , D w układzie współrzędnych.



Rysujemy boki CD i AD prostokąta $ABCD$. Rysujemy prostą równoległą do boku CD przechodzącą przez punkt A . Rysujemy prostą równoległą do boku AD przechodzącą przez punkt C . Punkt przecięcia się tych prostych jest szukany punktem B .



Odczytujemy współrzędne wierzchołka B .

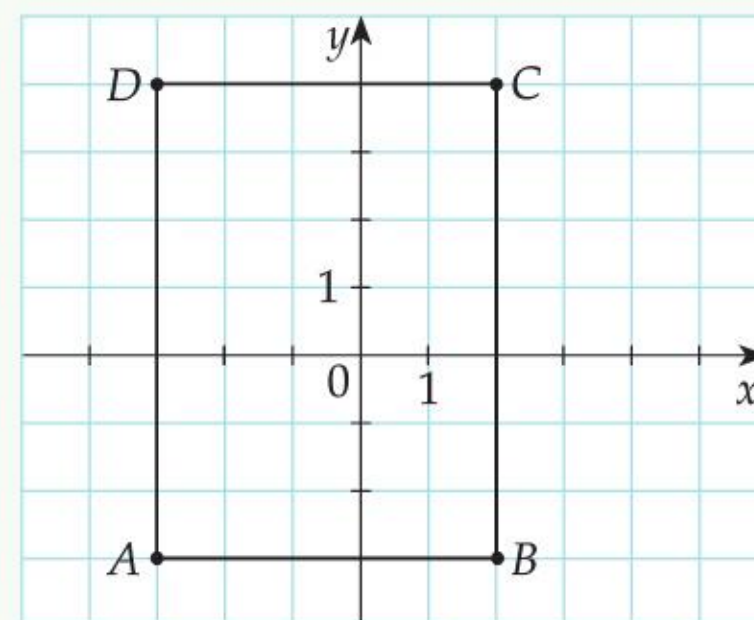
$$B = (2, -3)$$

Rysujemy prostokąt i obliczamy jego obwód.

$$|DA| = |4 - (-3)| = 7$$

$$|CD| = |2 - (-3)| = 5$$

$$\text{Obw.} = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 24$$



- b) Zaznaczamy w układzie współrzędnych trzy dane wierzchołki. Wyznamy współrzędne wierzchołka B .
 $B = (-2, -2)$

Rysujemy prostokąt $ABCD$.

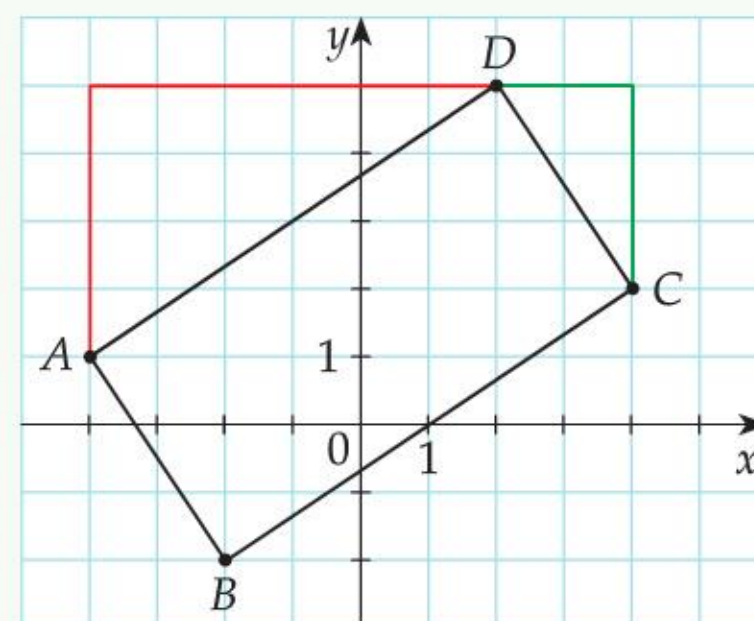
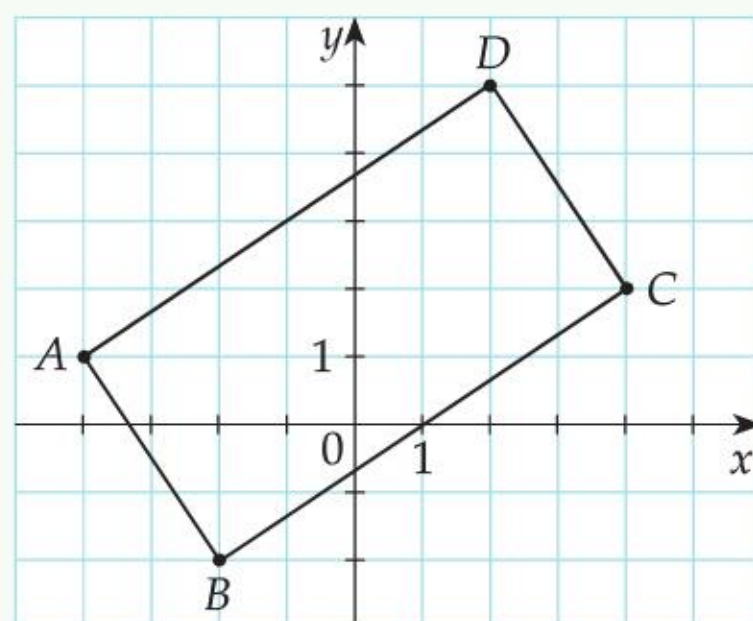
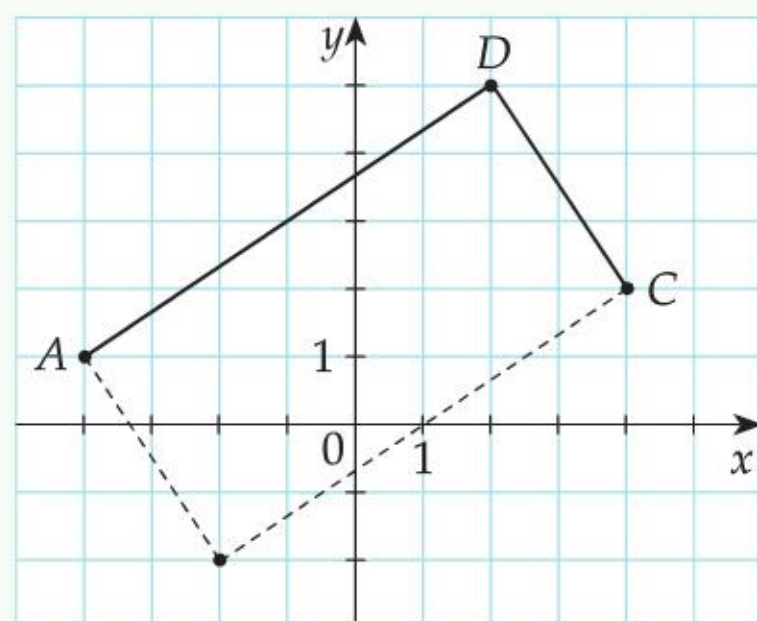
Obliczamy długości boków CD i DA , korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$|CD|^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \quad |CD| = \sqrt{13}$$

$$|DA|^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \quad |DA| = \sqrt{52}$$

$$|DA| = 2\sqrt{13}$$

$$\text{Obw.} = 2 \cdot \sqrt{13} + 2 \cdot 2\sqrt{13} = 6\sqrt{13}$$



Na podstawie przykładu 2 możemy zauważyć, że jeśli znamy współrzędne trzech wierzchołków prostokąta, to – aby obliczyć obwód tego prostokąta – nie musimy wyznaczać współrzędnych czwartego wierzchołka.

2. Wyznacz współrzędne wierzchołka B prostokąta $ABCD$ oraz oblicz obwód i pole tego prostokąta, jeśli:

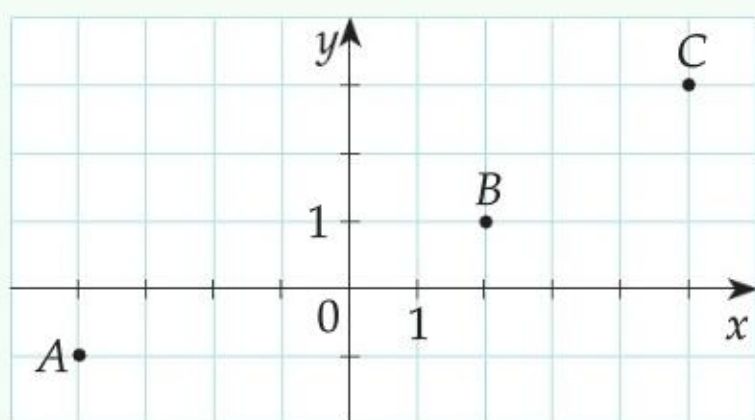
a) $A = (-1, -5)$, $C = (6, -3)$, $D = (-1, -3)$,

b) $A = (-3, -1)$, $C = (8, 1)$, $D = (5, 5)$.

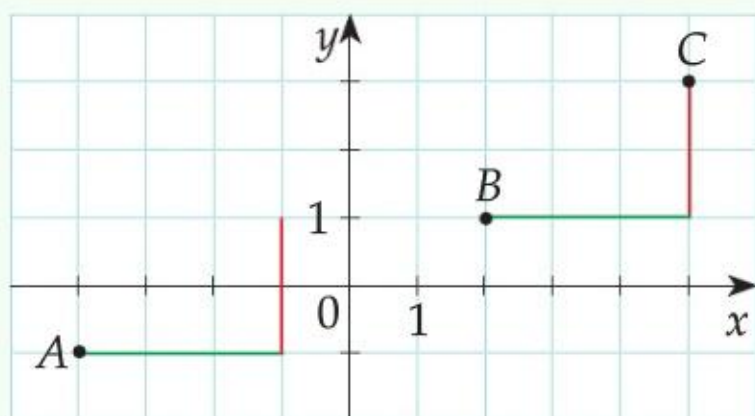
W podobny sposób, znając współrzędne trzech wierzchołków równoległoboku, możemy wyznaczyć współrzędne czwartego wierzchołka.

Przykład 3

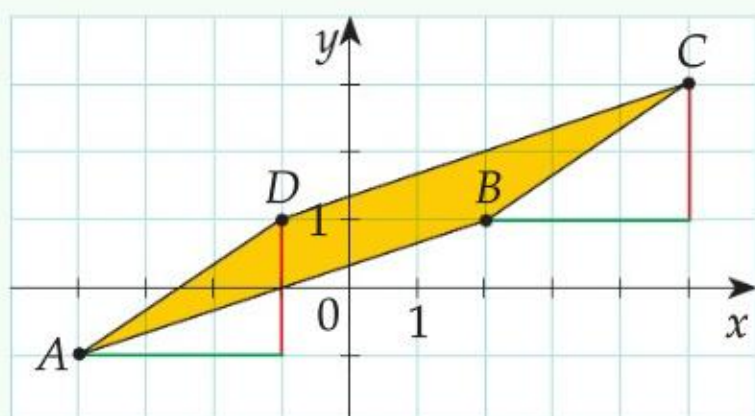
Wyznamy współrzędne wierzchołka D równoległoboku $ABCD$, jeśli: $A = (-4, -1)$, $B = (2, 1)$, $C = (5, 3)$ oraz bok AD jest równoległy do boku BC .



Zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty A , B i C .



Odcinki AD i BC są równoległe i $|AD| = |BC|$. Z punktu A odliczamy 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w górę (tak samo jak z punktu B do punktu C).

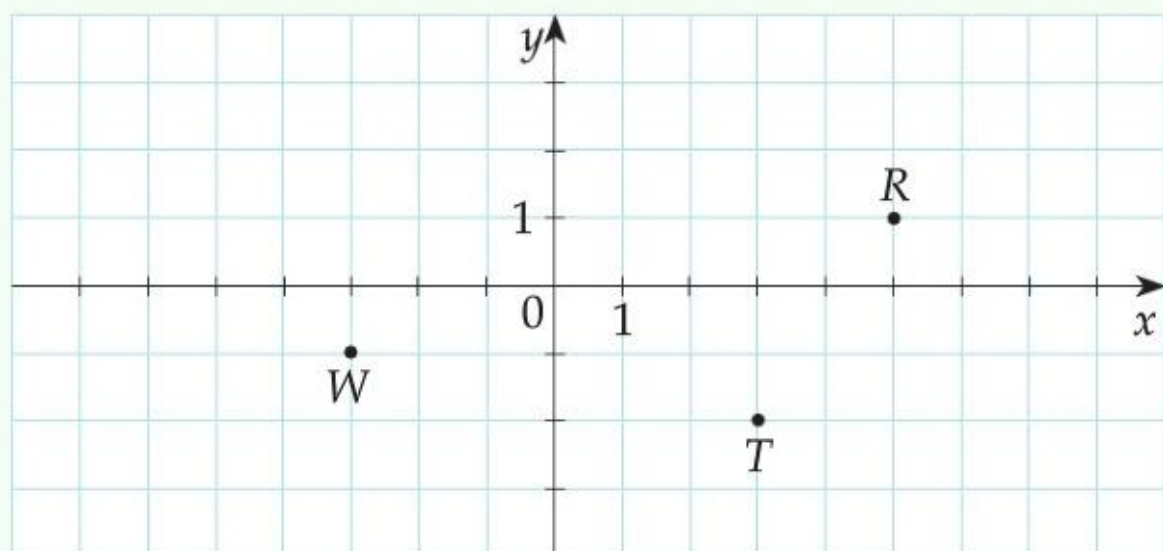


Zaznaczamy punkt D i odczytujemy jego współrzędne: $D = (-1, 1)$.

3. Wyznacz współrzędne wierzchołka C równoległoboku $ABCD$, jeśli: $A = (-2, -2)$, $B = (3, -1)$, $D = (-8, 3)$ oraz bok AD jest równoległy do boku BC .

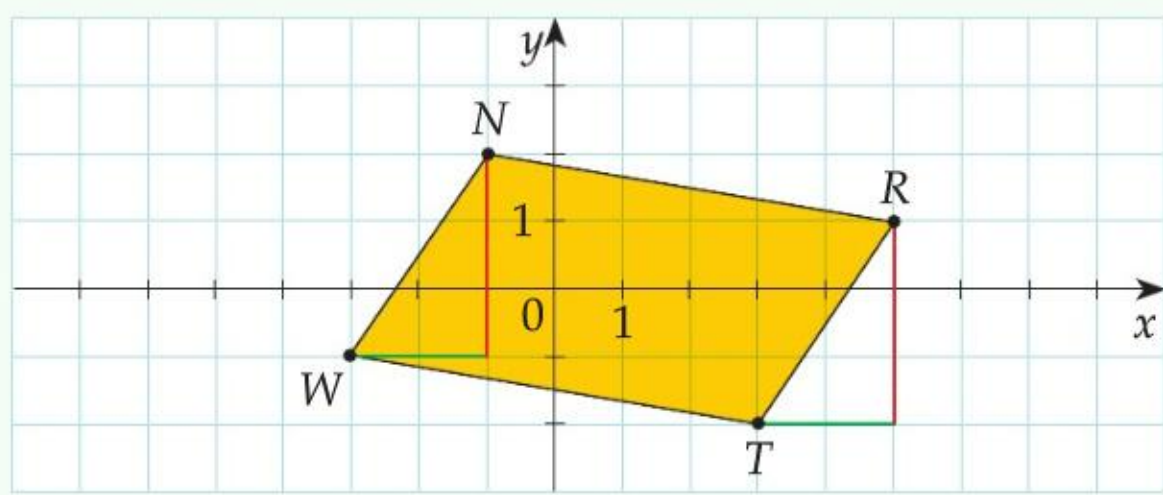
Przykład 4

Punkty: $R = (5, 1)$, $T = (3, -2)$, $W = (-3, -1)$ są trzema wierzchołkami równoległoboku. Wyznamy współrzędne czwartego wierzchołka N .



W układzie współrzędnych zaznaczamy punkty R , T i W . Nie wiemy, czy są to kolejne wierzchołki równoległoboku i dlatego musimy rozpatrzyć kilka przypadków.

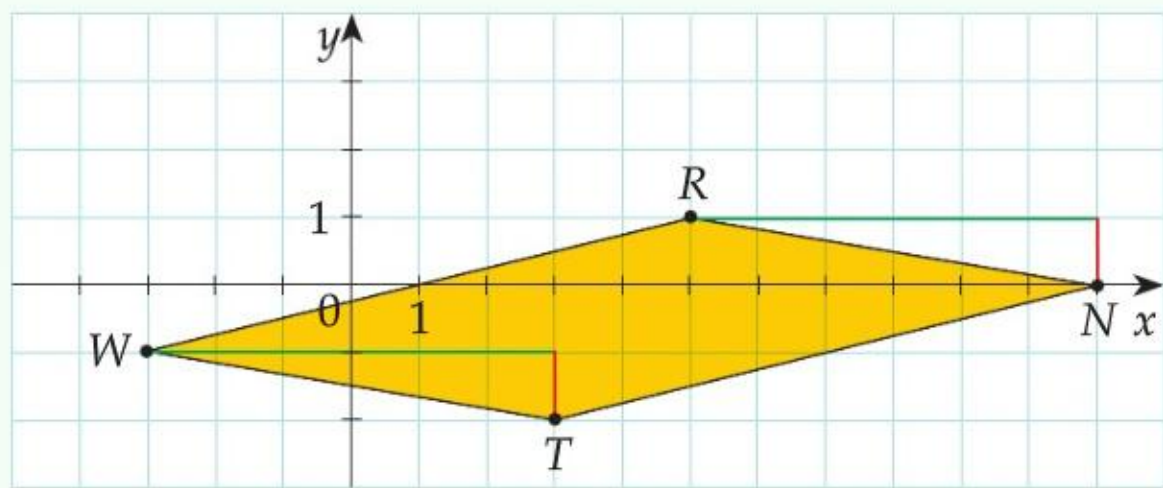
Przypadek I



Odcinek WR jest przekątną równoległoboku. Odcinki TR i WN są równoległe i $|TR| = |WN|$.

Z punktu W odliczamy 2 jednostki w prawo i 3 jednostki w górę (tak samo jak z punktu T do punktu R). Zaznaczamy punkt N i odczytujemy jego współrzędne: $N = (-1, 2)$.

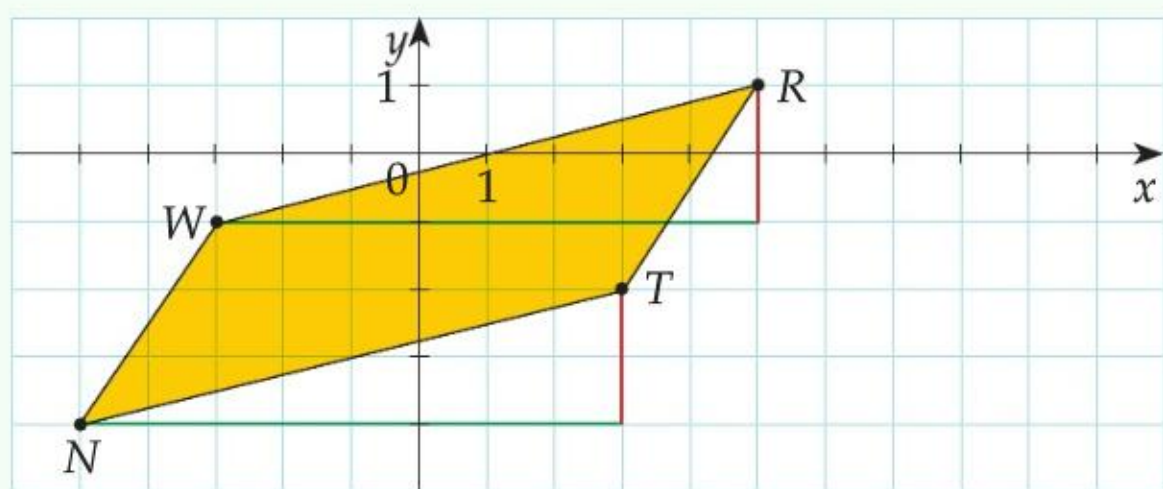
Przypadek II



Odcinek TR jest przekątną równoległoboku. Odcinki WT i RN są równoległe i $|WT| = |RN|$.

Z punktu R odliczamy 6 jednostek w prawo i 1 jednostkę w dół (tak samo jak z punktu W do punktu T). Zaznaczamy punkt N i odczytujemy jego współrzędne: $N = (11, 0)$.

Przypadek III



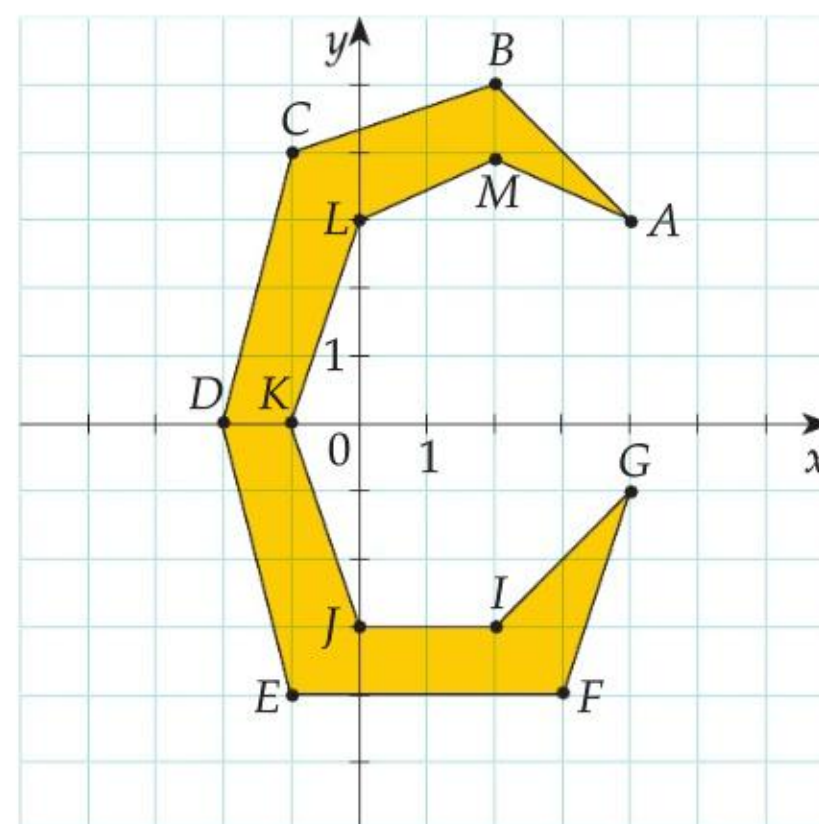
Odcinek WT jest przekątną równoległoboku. Odcinki RW i TN są równoległe i $|RW| = |TN|$.

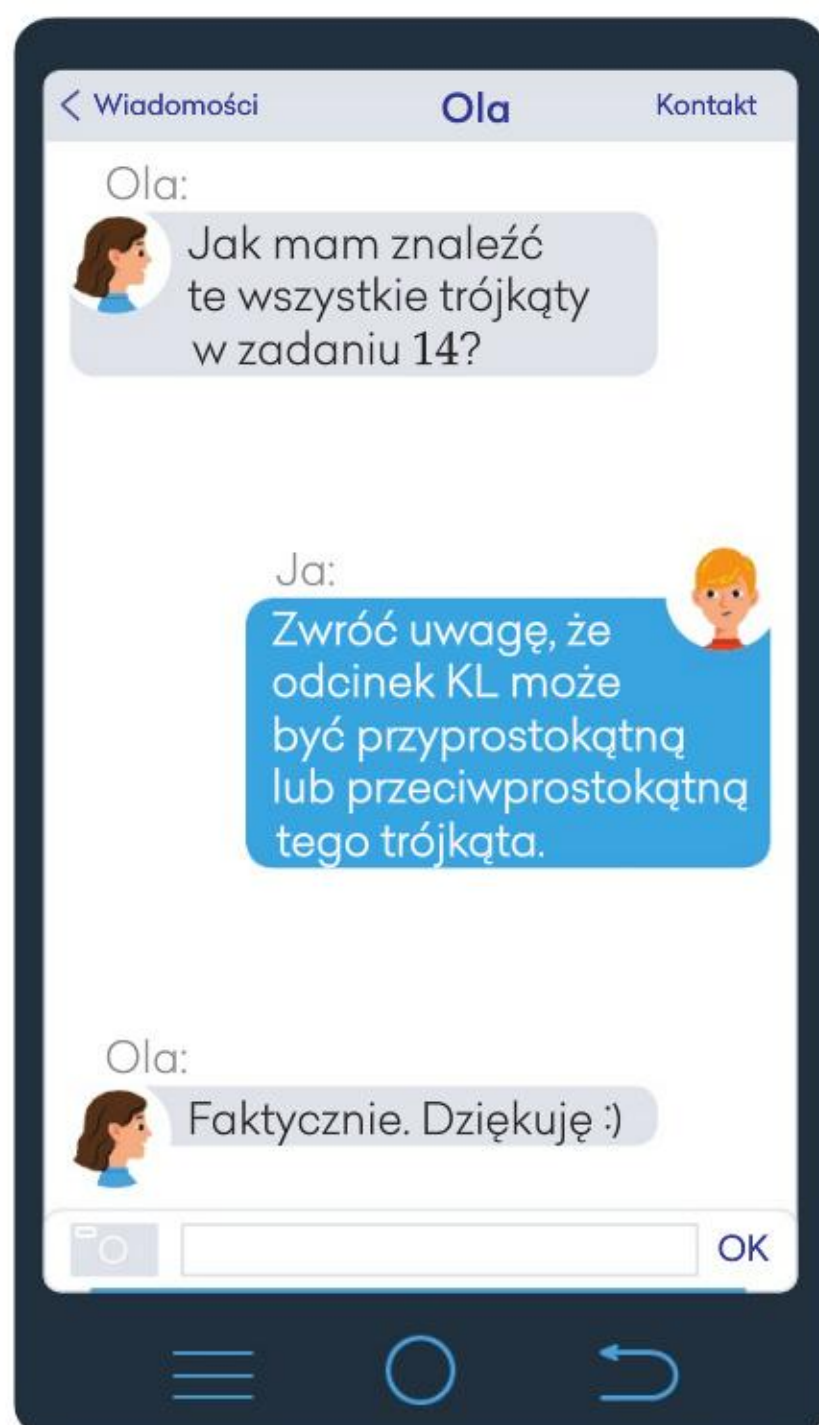
Z punktu T odliczamy 2 jednostki w dół i 8 jednostek w lewo (tak samo jak z punktu R do punktu W). Zaznaczamy punkt N i odczytujemy jego współrzędne: $N = (-5, -4)$.

4. Punkty: $A = (-2, -3)$, $B = (2, -2)$, $C = (1, 2)$ są trzema kolejnymi wierzchołkami kwadratu. Wyznacz współrzędne wierzchołka D .

Zadania

- Przerysuj do zeszytu przedstawiony na rysunku wielokąt w układzie współrzędnych.
- W układzie współrzędnych zaznacz punkty A, B, C, D . Narysuj czworokąt, którego wierzchołkami są podane punkty, i podaj, co to jest za czworokąt.
- $A = (-7, 0), B = (0, -5), C = (7, 0), D = (0, 5)$
 - $A = (-4, -3), B = (-2, -3), C = (0, 3), D = (-4, 3)$
 - $A = (-6, -3), B = (6, -3), C = (2, 2), D = (-2, 2)$
 - $A = (-2, -1), B = (3, -1), C = (3, 3), D = (-2, 5)$
 - $A = (-5, -2), B = (1, -2), C = (3, 2), D = (-3, 2)$
- Punkty: $A = (-5, 0), O = (0, 0)$ i $B = (0, -5)$ są wierzchołkami trójkąta AOB . Narysuj ten trójkąt w układzie współrzędnych i podaj jego rodzaj. Oblicz obwód tego trójkąta.
- Oblicz obwód trójkąta ABC , jeśli:
- $A = (-3, -4), B = (5, 2), C = (-3, 2)$,
 - $A = (1, 2), B = (9, 3), C = (4, 6)$.
- Punkty: $K = (-6, -3), L = (4, -3), M = (-1, 5)$ są wierzchołkami trójkąta KLM .
- Oblicz długości boków tego trójkąta.
 - Oblicz wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka M .
- Punkty A, B, C są trzema wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Narysuj w układzie współrzędnych ten kwadrat i podaj współrzędne wierzchołka A , jeśli:
- $B = (0, 4), C = (-4, 0), D = (0, -4)$,
 - $B = (2, -6), C = (2, -1), D = (-3, -1)$,
 - $B = (8, -1), C = (5, 2), D = (2, -1)$.
- Punkty: $P = (-4, -2), R = (4, -2), S = (4, 2)$ są trzema wierzchołkami prostokąta $PRST$. Narysuj w układzie współrzędnych ten prostokąt i podaj współrzędne wierzchołka T . Oblicz obwód tego prostokąta.
- Punkty: $A = (-2, -5), B = (4, -5), C = (4, 3)$ są trzema wierzchołkami prostokąta $ABCD$.
- Wyznacz współrzędne wierzchołka D tego prostokąta.
 - Oblicz obwód tego prostokąta.
 - Wyznacz współrzędne środków boków tego prostokąta.
 - Podaj rodzaj czworokąta wyznaczonego przez połączenie punktów będących środkami boków tego prostokąta. Oblicz obwód i pole tego czworokąta.
- Punkty: $A = (1, 2), K = (2, 0), S = (-2, -1)$ są trzema wierzchołkami pewnego równoległoboku. Narysuj w układzie współrzędnych ten równoległobok. Podaj wszystkie możliwe rozwiązania tego zadania.





- Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $A = (-3, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (-1, 5)$. Podaj współrzędne takiego punktu kratowego D , aby:
 - czworokąt $ABCD$ był trapezem prostokątnym,
 - czworokąt $ABDC$ był trapezem prostokątnym,
 - czworokąt $ABDC$ był trapezem równoramiennym,
 - czworokąt $ABDC$ był równoległobokiem,
 - czworokąt $ABCD$ był równoległobokiem,
 - czworokąt $ADBC$ był równoległobokiem.

- Zaznacz w układzie współrzędnych punkty: $A = (-2, -6)$, $B = (1, -3)$. Podaj współrzędne takich punktów kratowych C i D , aby:
 - odcinek AC był przekątną kwadratu,
 - odcinek AB był przekątną kwadratu.

- Wierzchołki trójkąta prostokątnego KLM są punktami kratowymi. Odcinek KM jest przeciwprostokątną tego trójkąta. Zapisz współrzędne wierzchołka L , jeśli:
 - $K = (-1, 2)$, $M = (3, 1)$ (podaj dwie możliwości),
 - $K = (-2, -1)$, $M = (-2, 3)$ (podaj dwie możliwości),
 - ★ $K = (4, 2)$, $M = (-1, 2)$ (podaj cztery możliwości),
 - ★ $K = (-1, -3)$, $M = (5, -1)$ (podaj sześć możliwości).

- ★ Wierzchołki prostokąta $RSTU$ są punktami kratowymi. Odcinek o końcach w punktach $S = (3, 0)$, $U = (-3, 4)$ jest przekątną tego prostokąta. Zapisz współrzędne dwóch pozostałych wierzchołków tego prostokąta. Rozważ trzy możliwości.

- ★ Punkty $K = (-2, 1)$ i $L = (2, 1)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego prostokątnego KLM . Podaj współrzędne wierzchołka M . Rozważ sześć przypadków.

- ★ Punkty $A = (-3, -3)$, $B = (2, -2)$ są dwoma wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Punkt $S = (3, 1)$ jest punktem przecięcia się przekątnych tego równoległoboku. Wyznacz współrzędne wierzchołków C i D .

- W układzie współrzędnych zaznacz punkty $A = (0, 0)$, $B = (8, 0)$, $C = (6, 3)$, będące wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$. Narysuj w tym samym układzie współrzędnych wszystkie trapezy przystające do trapezu $ABCD$ i mające z tym trapezem jeden bok wspólny. Określ współrzędne wierzchołków tak powstałego dwunastokąta.

9.4 Pola figur w układzie współrzędnych

Podejmij temat



Jakie pole ma trójkąt narysowany przez Magdę?

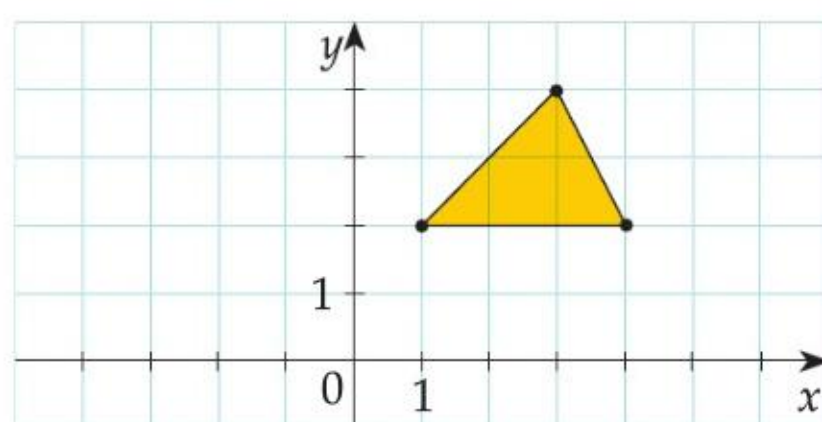
Karol w ostatnim rzucie na jednej kostce wyrzucił 2 oczka, a na drugiej 6 oczek.

Czy ma szansę wygrać z Magdą?

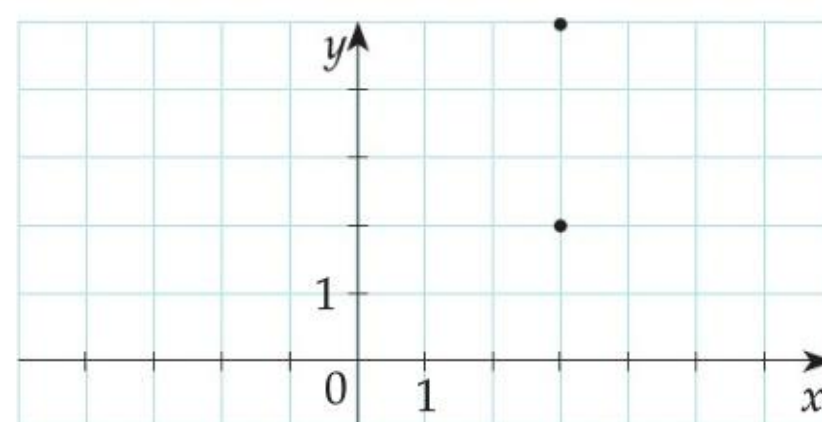
Punkt o jakich współrzędnych powinien zaznaczyć Karol, aby wygrać z Magdą?

Zasady gry

1. Gracz rzuca trzykrotnie dwiema kostkami.
2. Liczby oczek wyrzuconych na kostkach są współrzędnymi punktu w układzie współrzędnych, przy czym gracz decyduje, która liczba będzie pierwszą, a która drugą współrzędną.
3. Jeśli trzykrotnie zostanie wyrzucona ta sama para liczb, ostatni rzut powtarza się aż do momentu uzyskania innej pary liczb.
4. Zaznaczone trzy punkty są wierzchołkami trójkąta.
5. Wygrywa ten gracz, który narysuje trójkąt o większym polu.
6. Jeśli trzy punkty narysowane są w jednej linii, gracz przegrywa.



wynik Magdy



wynik Karola

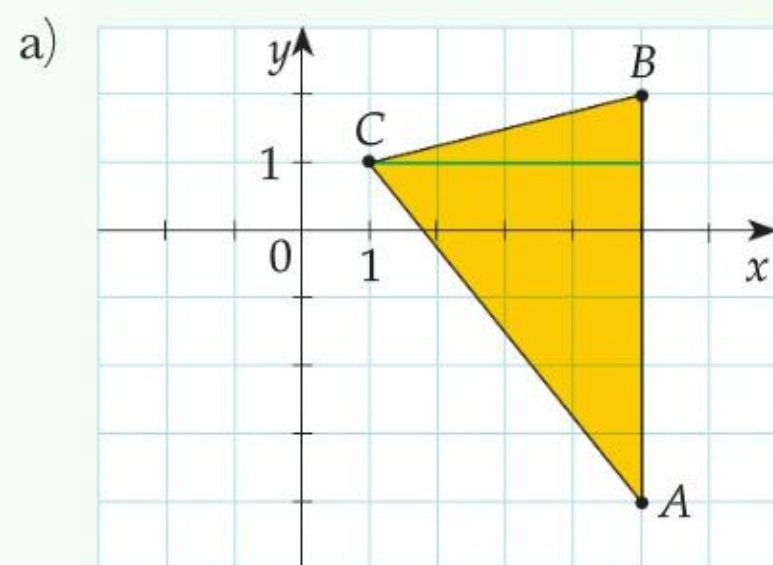
Jeśli potrafimy obliczyć długości odcinków w układzie współrzędnych, możemy obliczać pola figur w układzie współrzędnych, korzystając ze znanych wzorów.

Przykład 1

Obliczmy pola trójkątów o wierzchołkach w podanych punktach.

a) $A = (5, -4)$, $B = (5, 2)$, $C = (1, 1)$

b) $A = (1, -2)$, $B = (4, 2)$, $C = (2, 3)$



$$h = 4$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$$

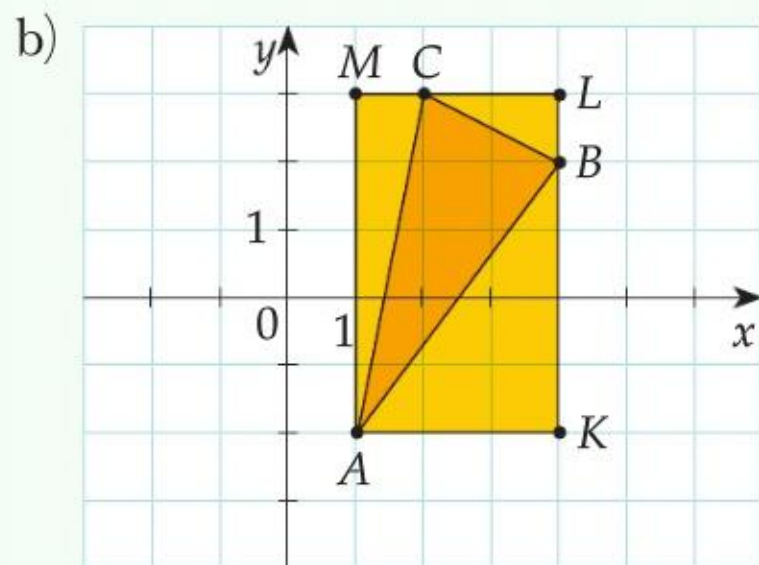
Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych. Bok AB jest równoległy do osi rzędnych.

Rysujemy wysokość opuszczoną na ten bok.

$$|AB| = |2 - (-4)| = |2 + 4| = 6$$

Obliczamy wysokość.

Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta.



Rysujemy trójkąt w układzie współrzędnych. Żaden z boków trójkąta nie jest równoległy do osi układu współrzędnych.

Rysujemy prostokąt $AKLM$ w taki sposób, aby boki tego prostokąta były równoległe do osi układu, jeden z wierzchołków trójkąta był wierzchołkiem prostokąta, a pozostałe dwa wierzchołki trójkąta leżały na bokach prostokąta.

Pole trójkąta ABC jest różnicą pola prostokąta $AKLM$ i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych: AKB , BLC i CMA , których pola łatwo obliczyć, bo ich przyprostokątne są równoległe do osi układu współrzędnych.

Obliczamy pole prostokąta $AKLM$ i pola trójkątów prostokątnych: AKB , BLC i CMA .

$$P_{\square AKLM} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$P_{\triangle AKB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

$$P_{\triangle BLC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

$$P_{\triangle CMA} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 = 2,5$$

$$P_{\triangle ABC} = 15 - (6 + 1 + 2,5) = 5,5$$

Pole trójkąta ABC jest różnicą pola prostokąta $AKLM$ i sumy pól trójkątów: AKB , BLC i CMA .

1. Oblicz pola trójkątów o wierzchołkach w podanych punktach.

a) $A = (2, 3)$, $B = (3, 7)$, $C = (-5, 7)$

b) $A = (-4, -3)$, $B = (3, -1)$, $C = (-3, 4)$

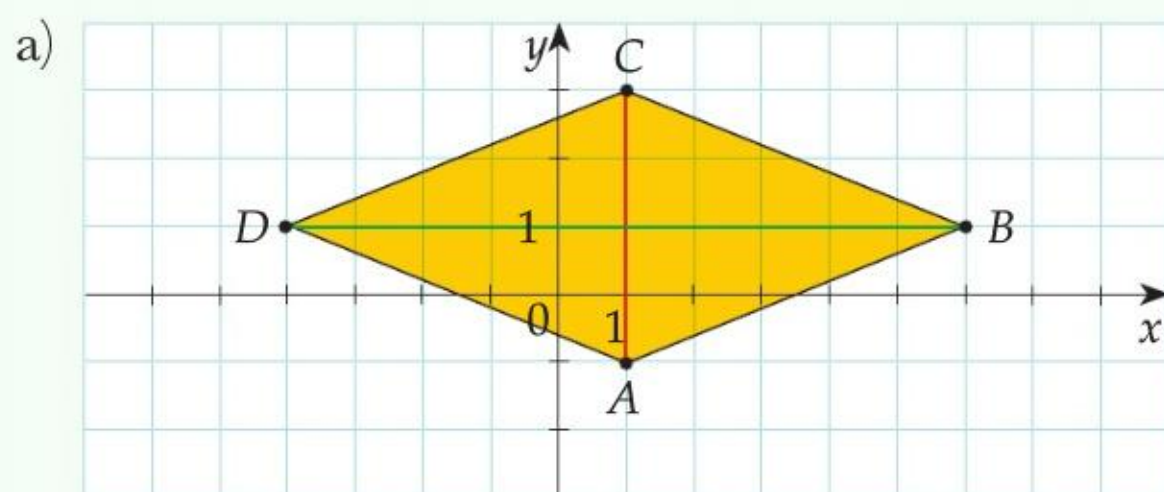
Przykład 2

Obliczmy pola czworokątów o wierzchołkach w podanych punktach.

a) $A = (1, -1)$, $B = (6, 1)$, $C = (1, 3)$, $D = (-4, 1)$

b) $A = (-1, -2)$, $B = (1, -1)$, $C = (-1, 3)$, $D = (-3, 2)$

c) $A = (-2, 2)$, $B = (5, 2)$, $C = (2, 4)$, $D = (-1, 4)$



Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych.

Czworokąt $ABCD$ jest rombem.

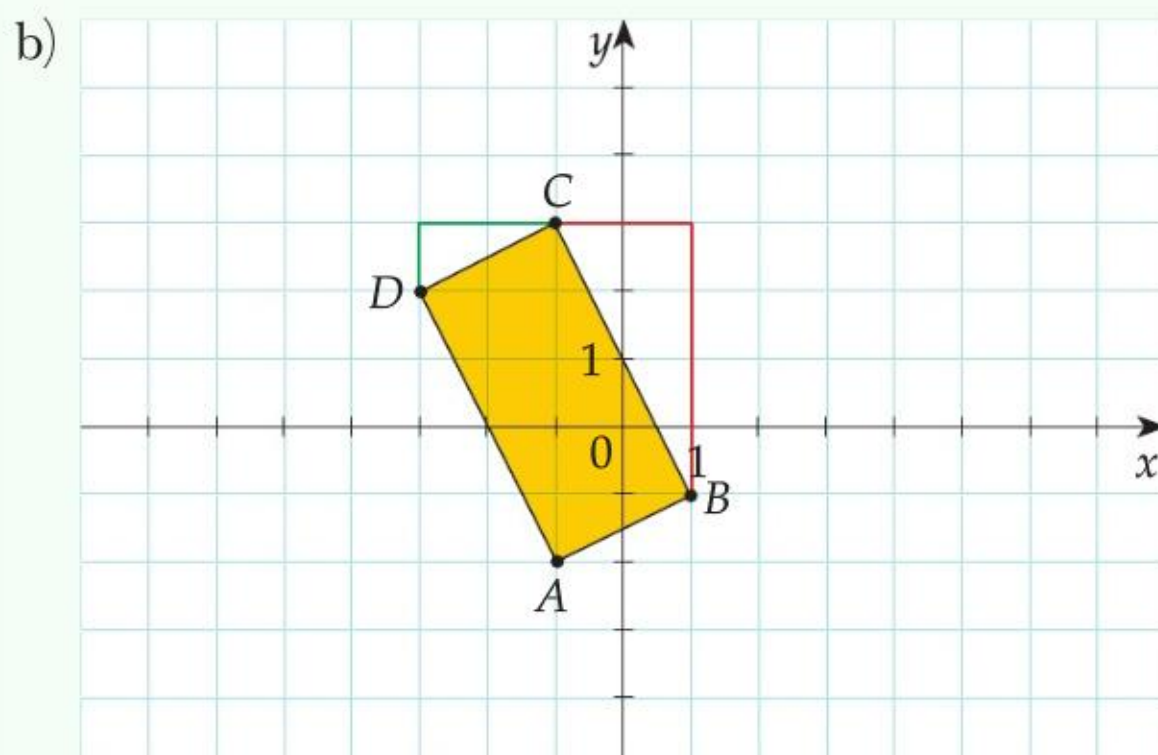
Obliczamy długości przekątnych.

Korzystamy ze wzoru na pole rombu.

$$|AC| = |3 - (-1)| = |3 + 1| = 4$$

$$|BD| = |6 - (-4)| = |6 + 4| = 10$$

$$P = \frac{4 \cdot 10}{2} = 20$$



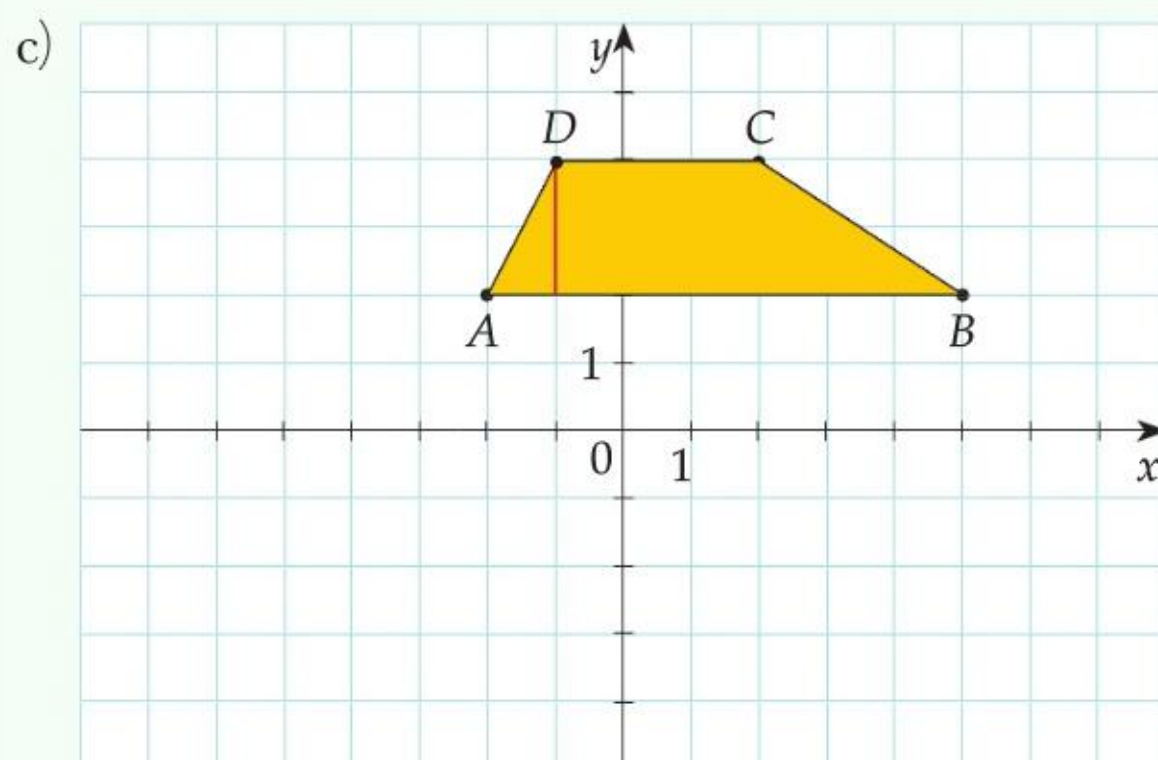
$$|BC|^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$|BC| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|CD|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$|CD| = \sqrt{5}$$

$$P = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10$$



$$|AB| = |5 - (-2)| = |5 + 2| = 7$$

$$|CD| = |2 - (-1)| = |2 + 1| = 3$$

$$h = 2$$

$$P = \frac{(3 + 7) \cdot 2}{2} = 10$$

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych.

Czworokąt $ABCD$ jest prostokątem. Jego boki nie są równoległe do osi układu współrzędnych.

Obliczamy długości boków prostokąta, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

Korzystamy ze wzoru na pole prostokąta.

Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych.

Czworokąt $ABCD$ jest trapezem, którego podstawy są równoległe do osi odciętych.

Rysujemy wysokość trapezu.

Obliczamy długości podstaw i wysokość.

Korzystamy ze wzoru na pole trapezu.

2. Oblicz pola czworokątów o wierzchołkach w podanych punktach.

a) $A = (2, 0)$, $B = (5, 3)$, $C = (2, 6)$, $D = (-1, 3)$

b) $A = (-7, -1)$, $B = (-2, -1)$, $C = (2, 3)$, $D = (-3, 3)$

c) $A = (-1, -4)$, $B = (10, -4)$, $C = (2, -1)$, $D = (-1, -1)$

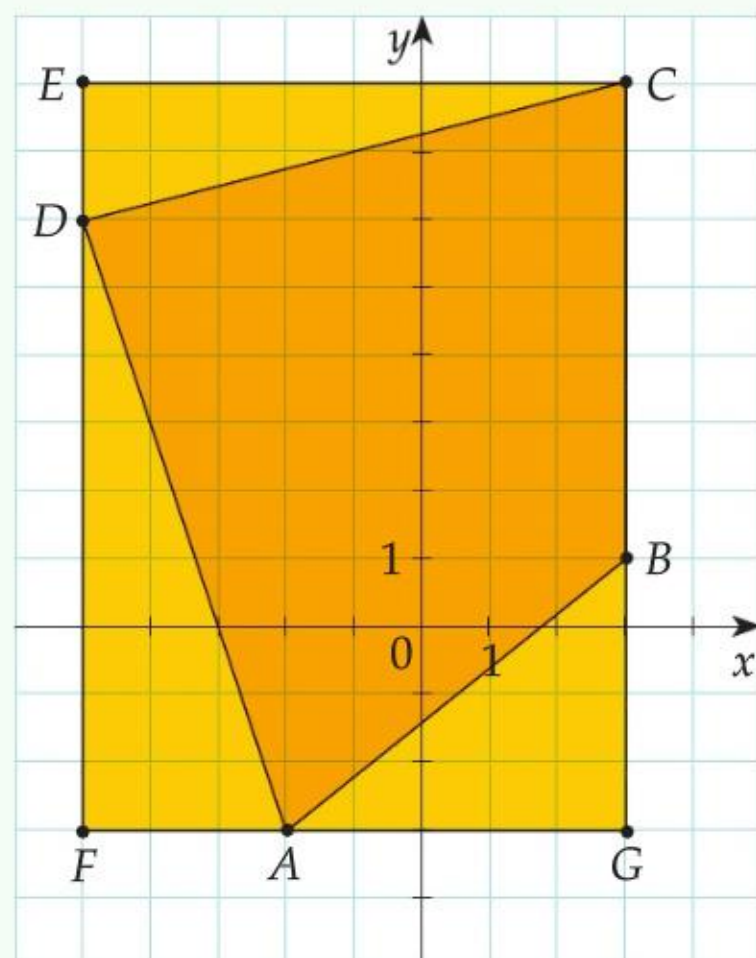
Gdy mamy obliczyć pole wielokąta, możemy go podzielić na figury, których pola potrafimy obliczyć. Warto to zrobić tak, aby wielokąty, na które dzielimy dany wielokąt, miały boki równoległe do osi układu współrzędnych, a ich wierzchołki znajdowały się w punktach kratowych.



Pamiętaj, żeby zawsze starać się rozpoznać rodzaj czworokąta i spróbować zastosować odpowiedni wzór na jego pole.

Przykład 3

Obliczmy pole czworokąta, którego wierzchołki mają współrzędne: $A = (-2, -3)$, $B = (3, 1)$, $C = (3, 8)$, $D = (-5, 6)$.



Zaznaczmy w układzie współrzędnych wierzchołki czworokąta $ABCD$. Rysujemy prostokąt w taki sposób, aby boki tego prostokąta były równoległe do osi układu, a wierzchołki czworokąta leżały na bokach prostokąta.

Pole czworokąta $ABCD$ jest różnicą pola prostokąta $CEFG$ i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych: AGB , CED , DFA .

$$|AG| = |3 - (-2)| = |3 + 2| = 5$$

$$|GB| = |1 - (-3)| = |1 + 3| = 4$$

$$|FG| = |CE| = |3 - (-5)| = |3 + 5| = 8$$

$$|ED| = |8 - 6| = 2$$

$$|DF| = |6 - (-3)| = |6 + 3| = 9$$

$$|FA| = |-2 - (-5)| = |-2 + 5| = 3$$

$$|GC| = |EF| = |8 - (-3)| = 11$$

$$P_{\square CEFG} = |FG| \cdot |GC| = 8 \cdot 11 = 88 \quad P_{\triangle AGB} = \frac{1}{2} \cdot |AG| \cdot |GB| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$$

$$P_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot |CE| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8 \quad P_{\triangle DFA} = \frac{1}{2} \cdot |DF| \cdot |FA| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = 13,5$$

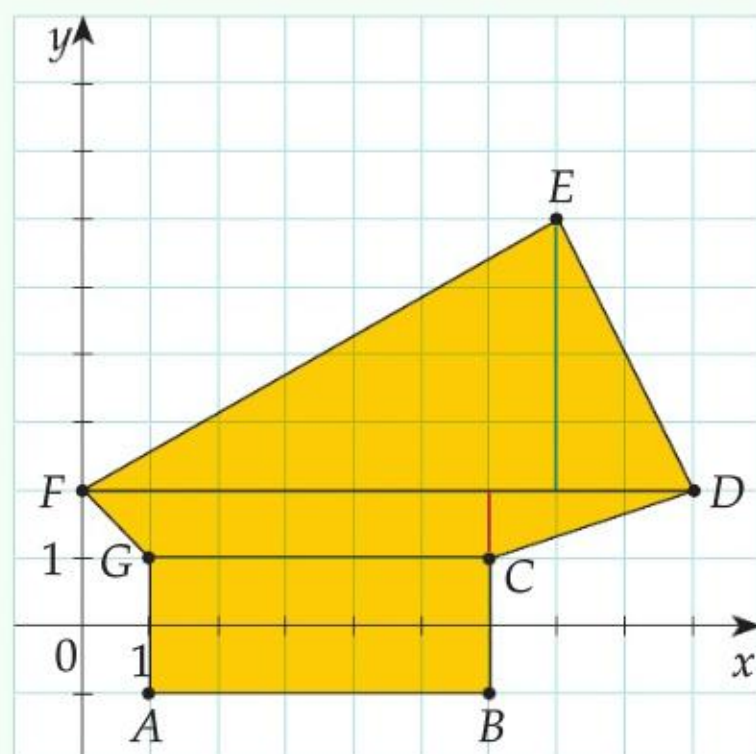
$$P_{\square ABCD} = P_{\square CEFG} - (P_{\triangle AGB} + P_{\triangle CED} + P_{\triangle DFA}) = 88 - (10 + 8 + 13,5) = 56,5$$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe 56,5.

3. Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołki mają współrzędne: $K = (2, -1)$, $L = (6, 1)$, $M = (0, 5)$, $N = (-3, -1)$.

Przykład 4

Obliczmy pole wielokąta o wierzchołkach w punktach: $A = (1, -1)$, $B = (6, -1)$, $C = (6, 1)$, $D = (9, 2)$, $E = (7, 6)$, $F = (0, 2)$, $G = (1, 1)$.



W układzie współrzędnych zaznaczamy punkty będące wierzchołkami wielokąta i rysujemy ten wielokąt.

Dzielimy wielokąt $ABCDEFG$ na figury, których pola potrafimy obliczyć: prostokąt $ABCG$, trapez $CDFG$ i trójkąt DEF .

Pole wielokąta $ABCDEFG$ jest sumą pól: prostokąta $ABCG$, trapezu $GCDF$ i trójkąta DEF .

$$P_{\square ABCG} = 5 \cdot 2 = 10$$

$$P_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 18$$

$$P_{\square GCDF} = \frac{(5 + 9) \cdot 1}{2} = 7$$

$$P = 10 + 7 + 18 = 35$$

4. Oblicz pole wielokąta $ABCDEFGG$ o wierzchołkach w punktach: $A = (-4, -1)$, $B = (2, -1)$, $C = (5, 1)$, $D = (6, 3)$, $E = (1, 1)$, $F = (-2, 3)$, $G = (-1, 1)$.

Zadania

- Oblicz pole trójkąta KLM , jeśli:

a) $K = (6, -1)$, $L = (6, 8)$, $M = (0, 5)$,

c) $K = (-1, -4)$, $L = (5, -1)$, $M = (2, 3)$,

b) $K = (-7, 3)$, $L = (2, 3)$, $M = (-2, -7)$,

d) $K = (1, 7)$, $L = (3, -2)$, $M = (7, 4)$.

- Oblicz pole czworokąta $PRST$, jeśli:

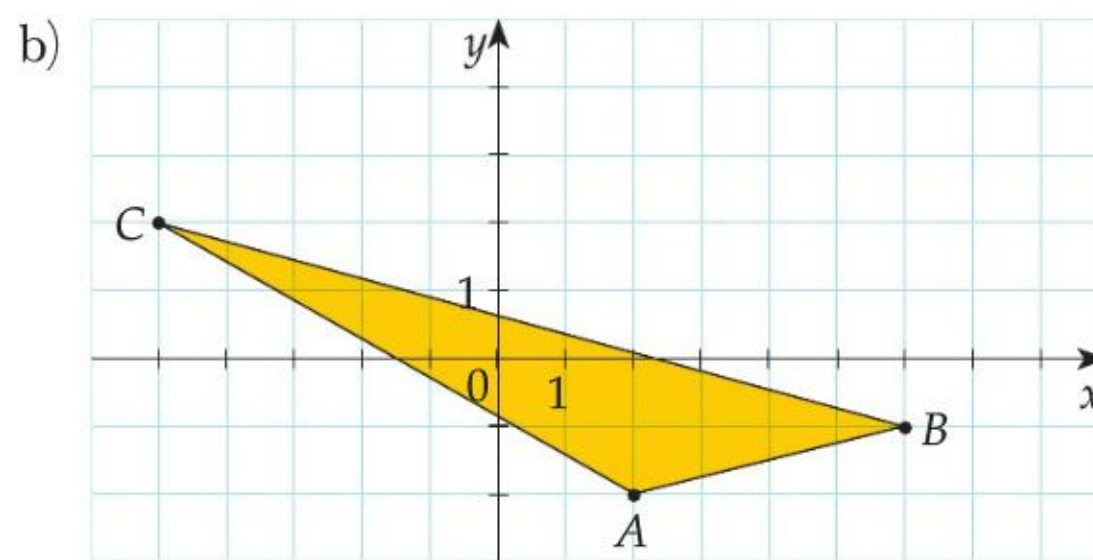
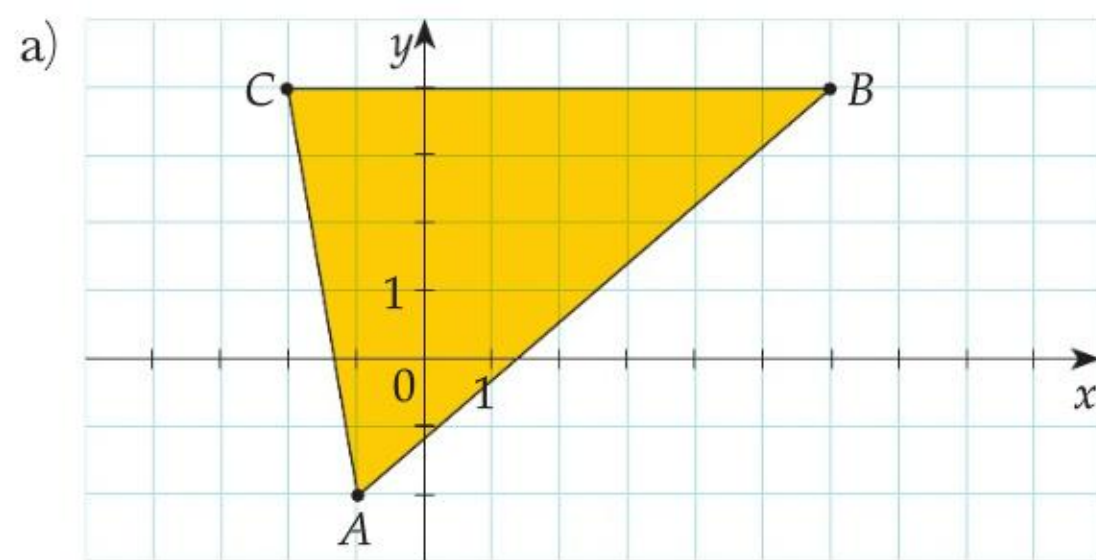
a) $P = (-5, -1)$, $R = (0, -1)$, $S = (0, 4)$, $T = (-5, 4)$,

c) $P = (-5, -2)$, $R = (3, 1)$, $S = (3, 8)$, $T = (-5, 5)$,

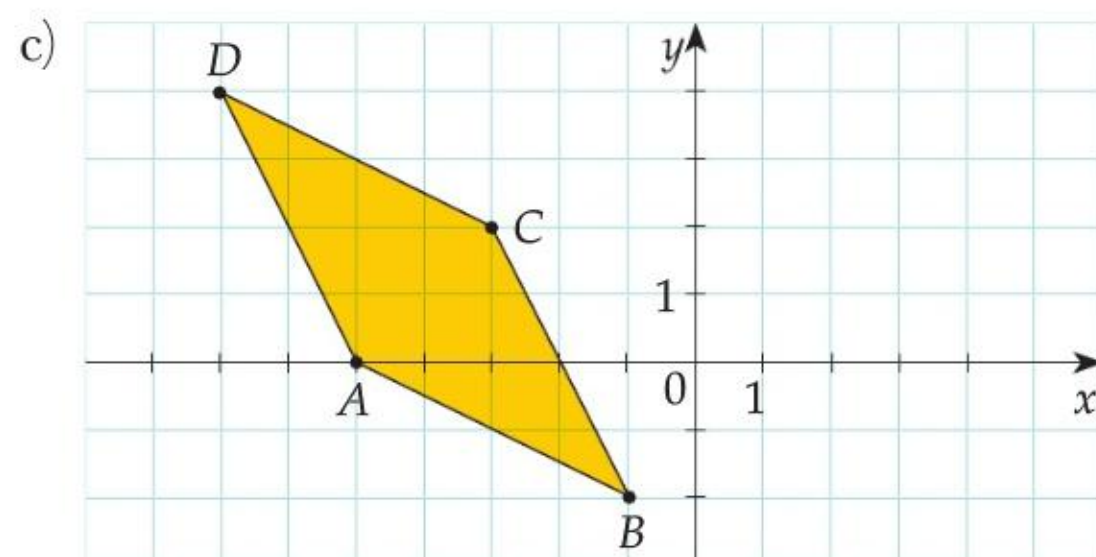
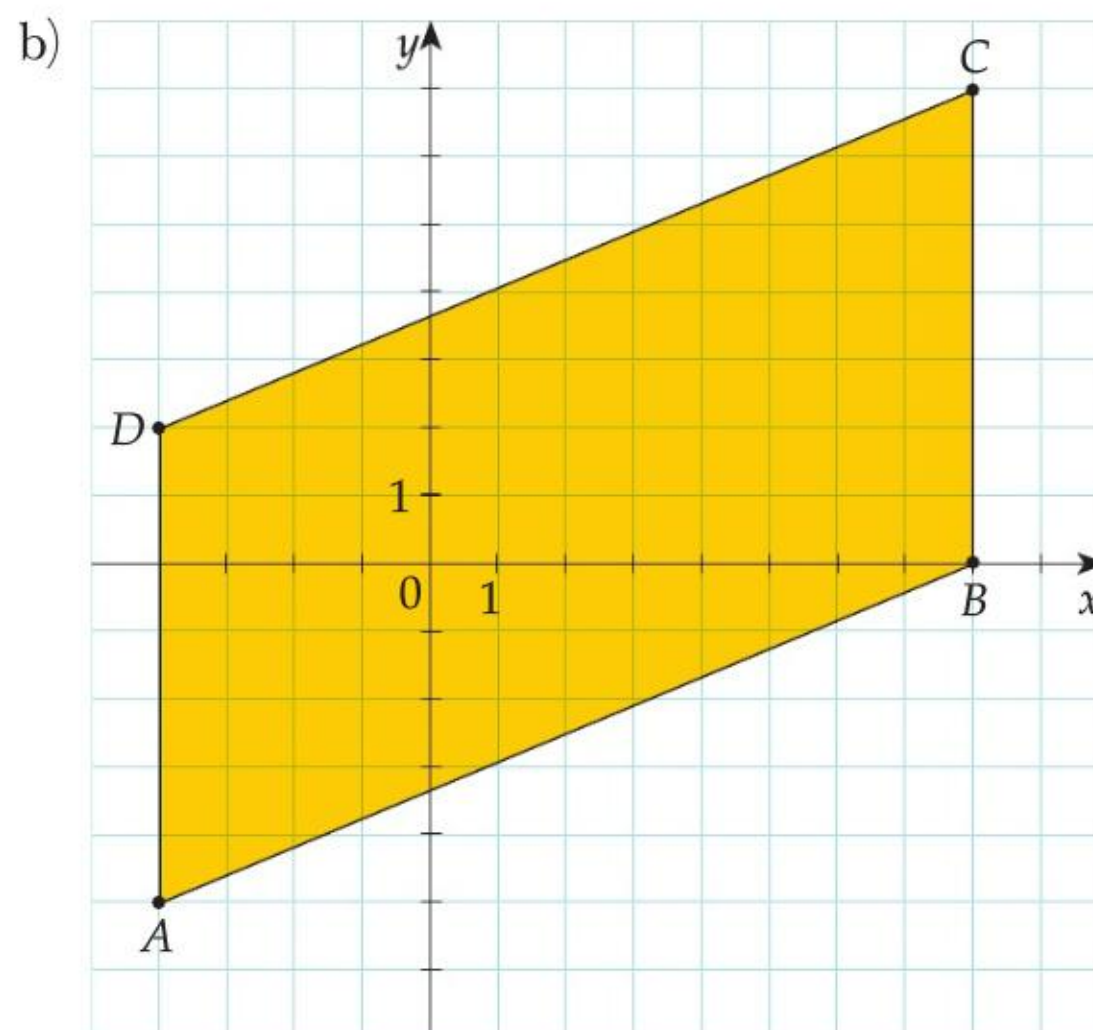
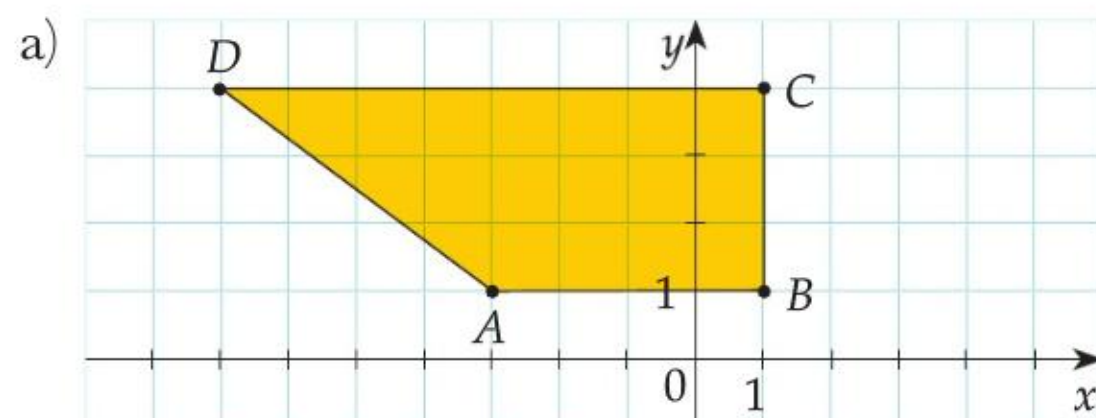
b) $P = (-3, -2)$, $R = (-2, 2)$, $S = (-2, 6)$, $T = (-4, 2)$,

d) $P = (1, -3)$, $R = (10, -3)$, $S = (4, 4)$, $T = (1, 4)$.

- Oblicz pola trójkątów przedstawionych na rysunkach.



- Oblicz pola i obwody czworokątów przedstawionych na rysunkach.

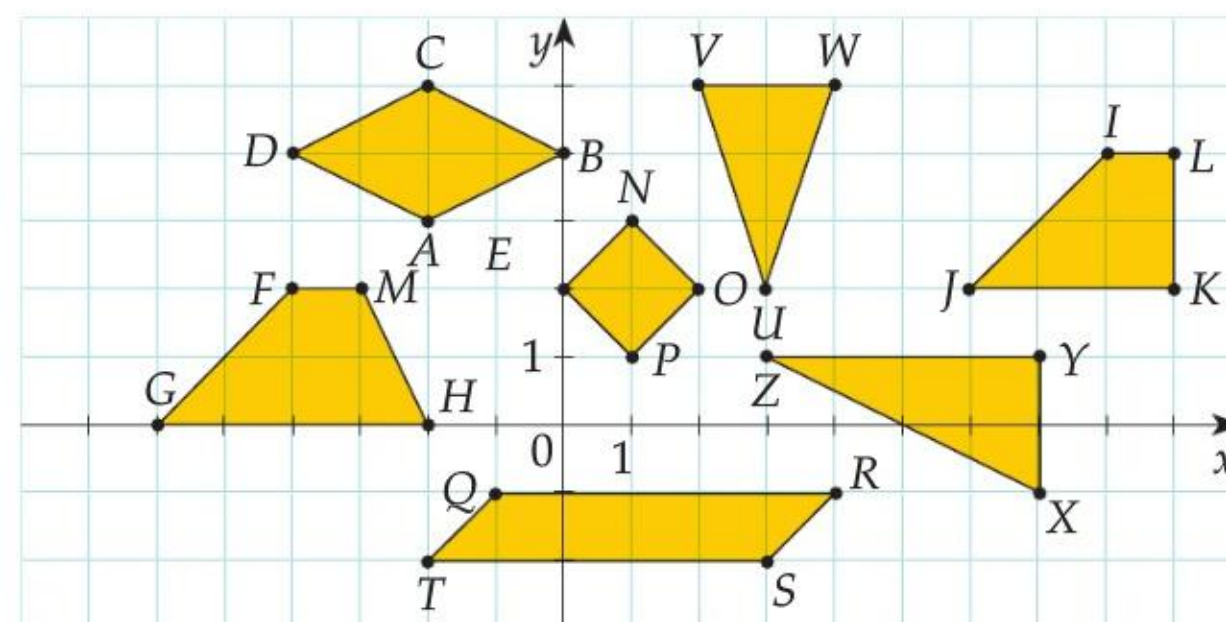


- Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (-3, 2)$ i $C = (-2, 1)$ oraz taki punkt B o współrzędnych całkowitych, aby trójkąt ABC miał pole równe:

a) 1, b) 3, c) 8.

Zapisz współrzędne wierzchołka B . Czy zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

- Które z figur na rysunku obok mają pole równe 4?
- Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $B = (4, -3)$ i $C = (3, -1)$. Narysuj równoległobok $ABCD$, którego pole jest równe 21. Podaj współrzędne wierzchołków A i D tego równoległoboku. Czy zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?



- Narysuj w układzie współrzędnych wielokąt, którego wierzchołki znajdują się w punktach kratowych i jego obwód jest równy:

a) 12, b) 30, c) 4.

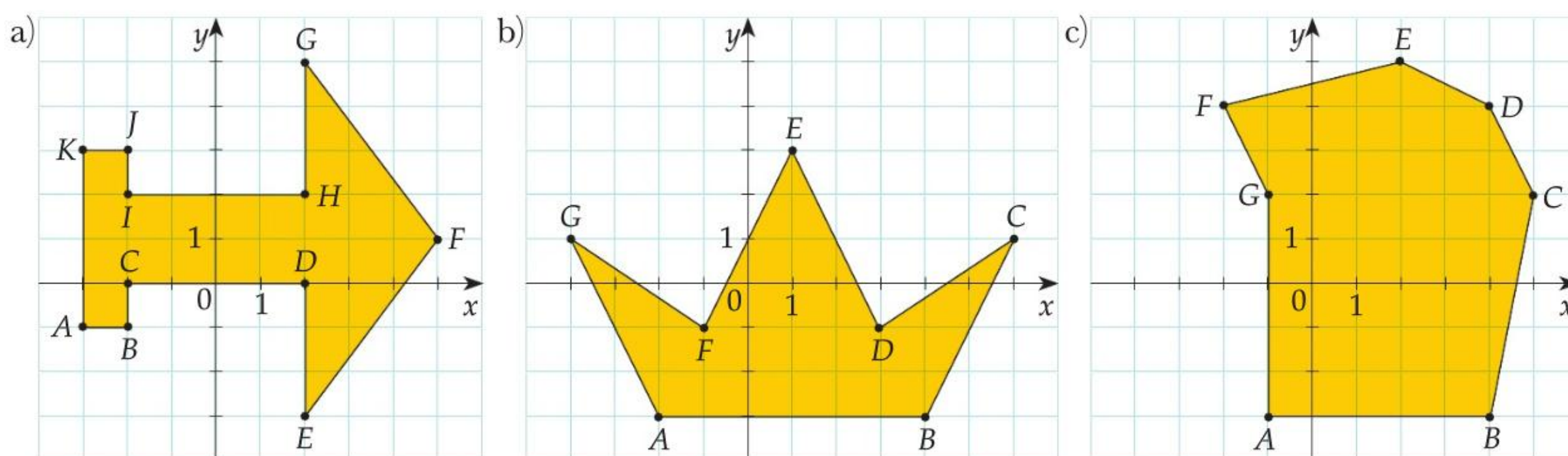
Oblicz pole narysowanego wielokąta.

- Narysuj w układzie współrzędnych wielokąt, którego wierzchołki znajdują się w punktach kratowych i jego pole jest równe:

a) 2, b) 14, ✨ 7,5.

Oblicz obwód narysowanego wielokąta.

- Oblicz pola wielokątów, dzieląc je na figury, których pola potrafisz obliczyć.

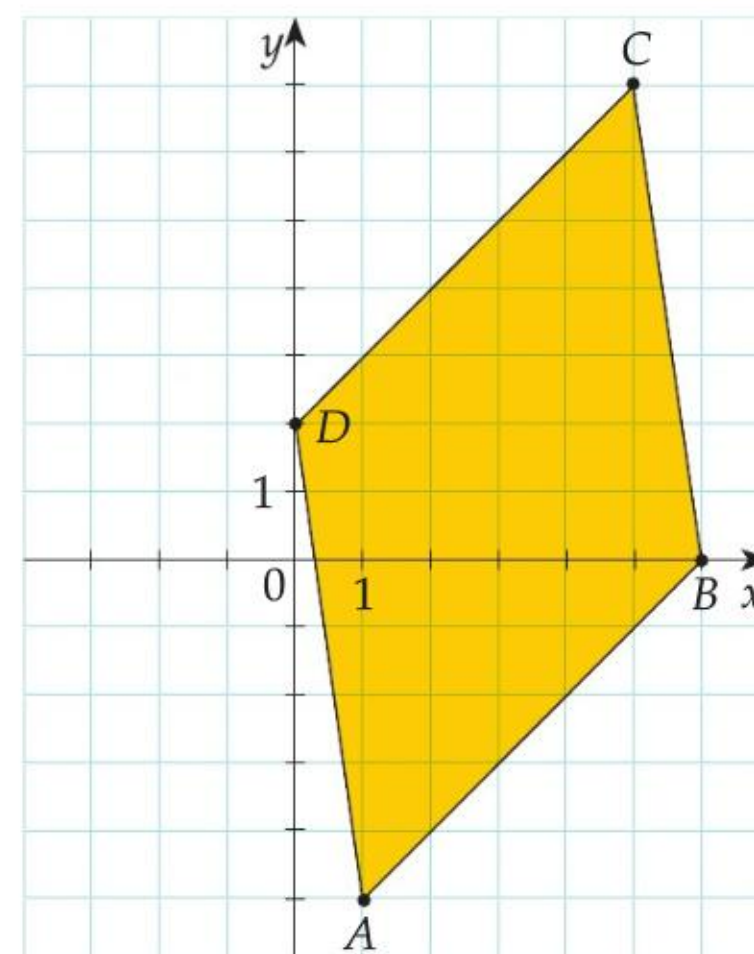


- Uzasadnij, że przedstawiony na rysunku obok czworokąt $ABCD$ jest rombem.

- Oblicz długości przekątnych tego czworokąta.
- Oblicz obwód tego czworokąta.
- Oblicz, co najmniej dwoma sposobami, pole tego czworokąta.

- ✨ Punkty $B = (-3, -7)$ i $C = (12, 1)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$ o polu równym 75. Bok AB tego równoległoboku jest równoległy do osi y .

- Oblicz obwód tego równoległoboku.
- Podaj współrzędne punktów A i D .



Podsumowanie działu 9

Ważne pojęcia

prostokątny układ współrzędnych

oś rzędnych

rzędna punktu

oś odciętych

odcięta punktu

układ kartezjański

ćwiartki układu

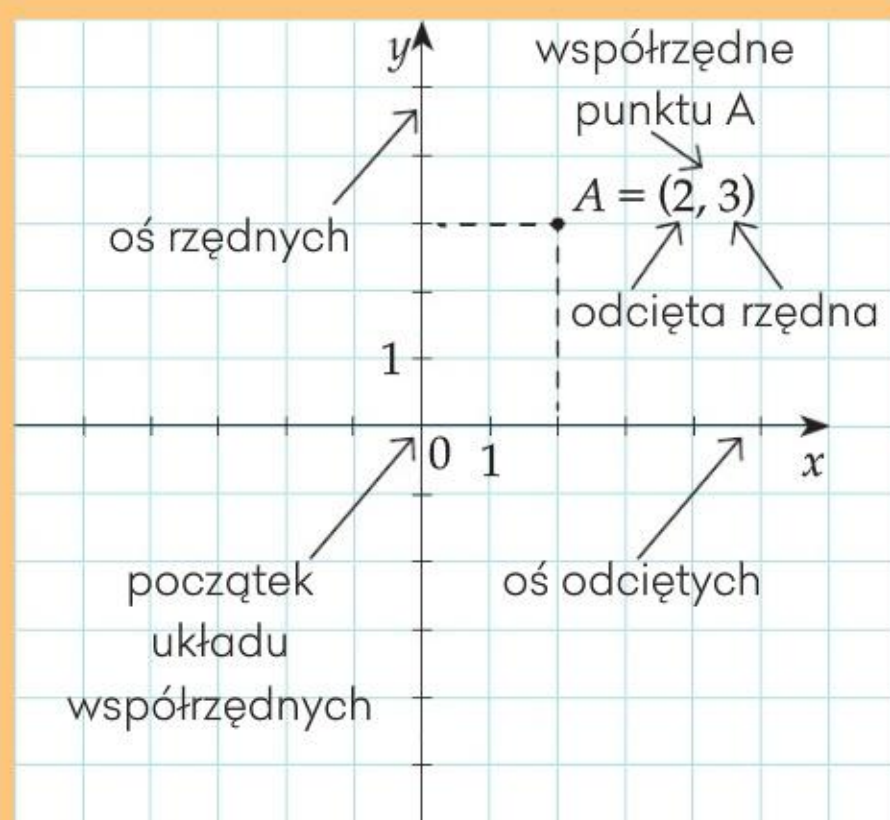
punkt kratowy

początek układu współrzędnych

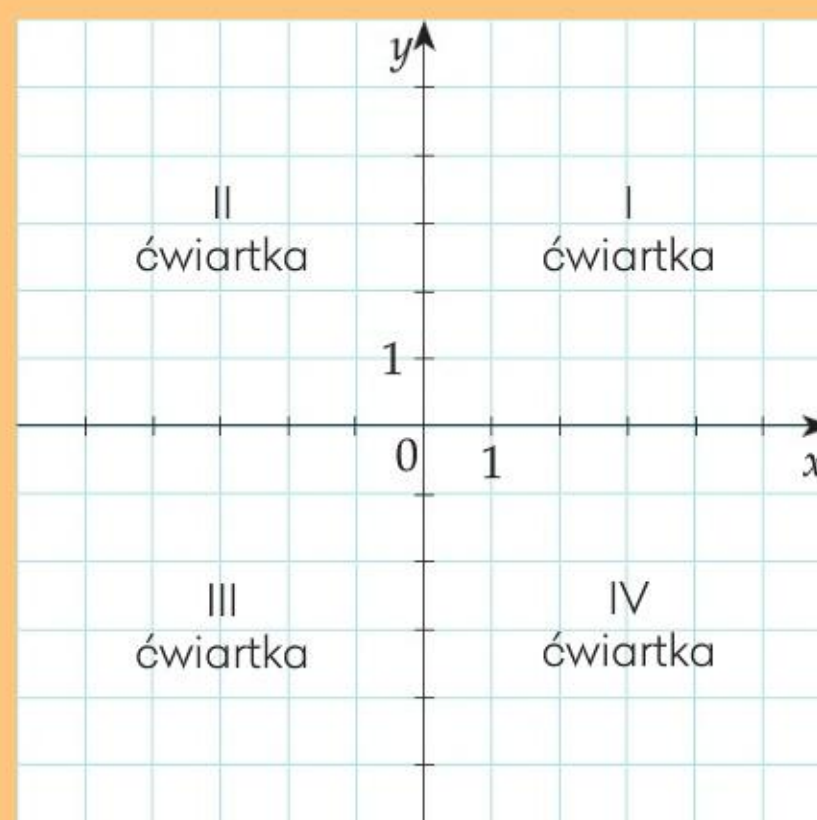
współrzędne punktu

współrzędne środka odcinka

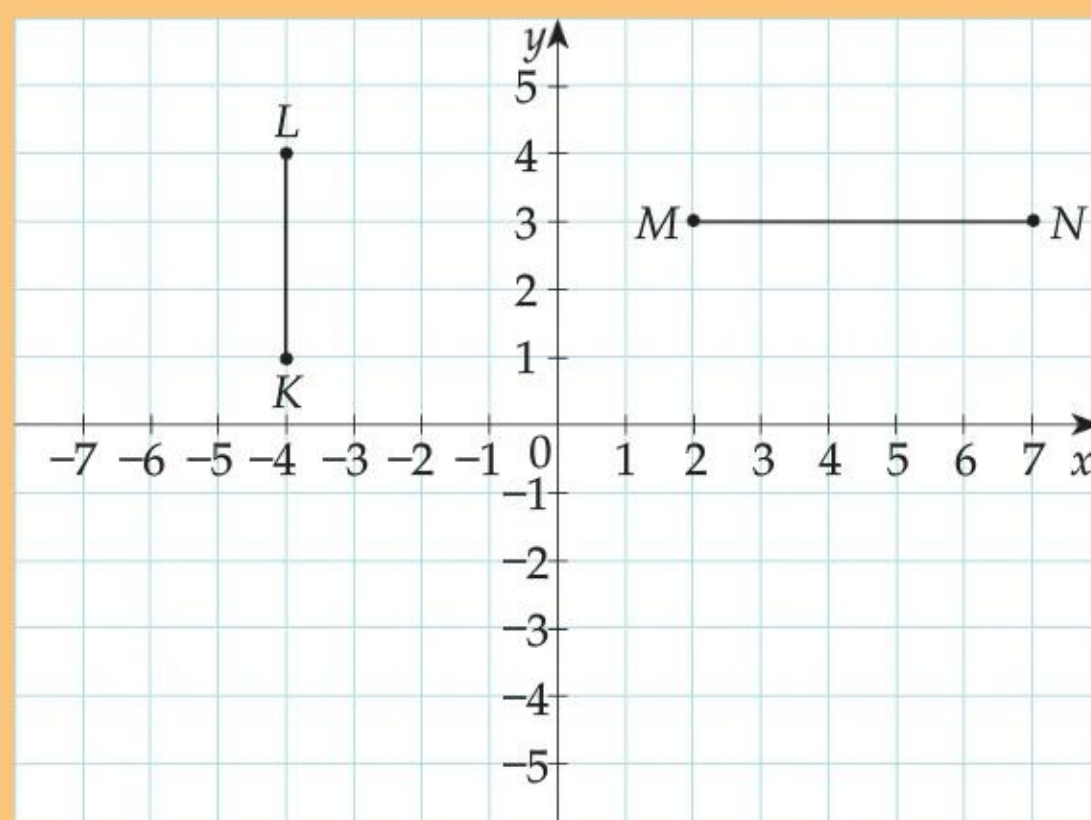
Prostokątny układ współrzędnych



Ćwiartki układu współrzędnych

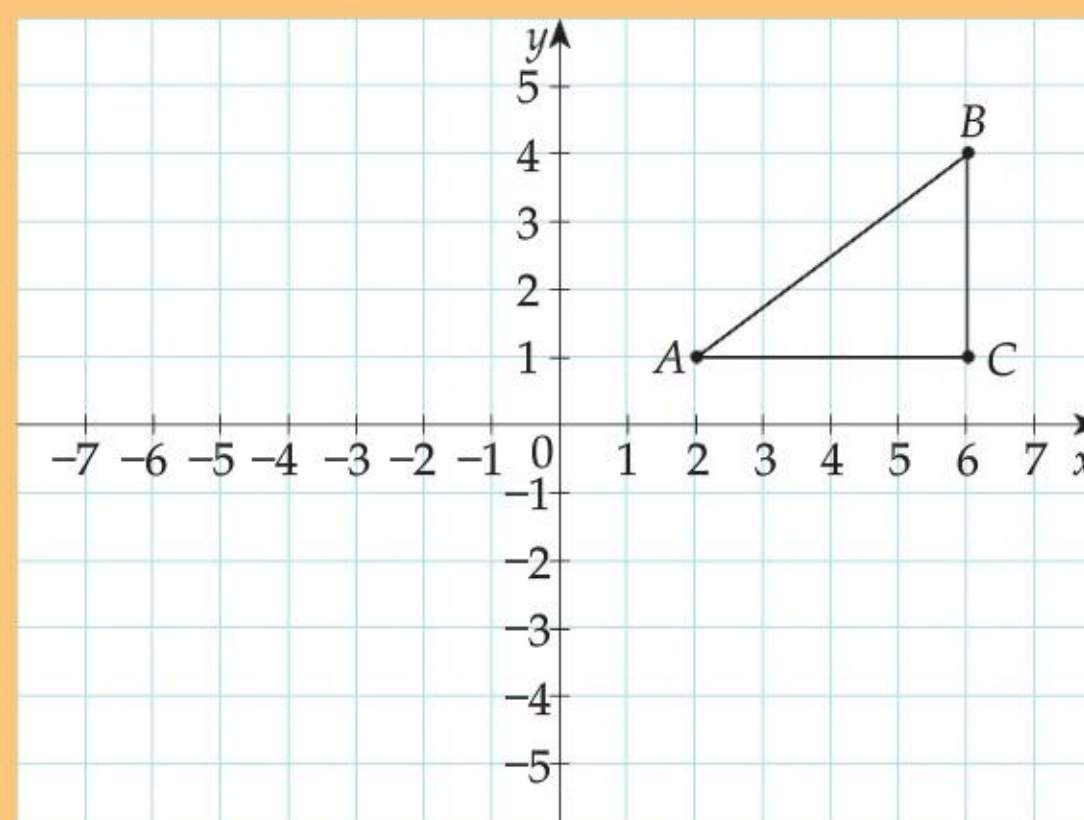


Obliczanie długości odcinka



$$|KL| = |4 - 1| = |3| = 3$$

$$|MN| = |7 - 2| = 5$$



$$|AC| = |6 - 2| = |4| = 4 \quad |BC| = |4 - 1| = |3| = 3$$

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB|^2 = 4^2 + 3^2$$

$$|AB|^2 = 16 + 9$$

$$|AB|^2 = 25$$

$$|AB| = 5$$

● Współrzędne środka odcinka

Aby wyznaczyć współrzędne środka odcinka,
należy wyznaczyć średnie arytmetyczne
odpowiednich współrzędnych jego końców.

$$\begin{aligned}A &= (2, 5), B = (8, 3) \\ S &= \left(\frac{2+8}{2}, \frac{5+3}{2} \right) \\ S &= (5, 4)\end{aligned}$$

Czy już umiesz?

- 1 W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się punkt $K = (-24, 85)$?
A. w I ćwiartce B. w II ćwiartce
C. w III ćwiartce D. w IV ćwiartce
- 2 Jeśli pomnożymy współrzędne punktu L , otrzymamy liczbę dodatnią, a jeśli je dodamy – otrzymamy liczbę ujemną. W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się punkt L ?
A. w I ćwiartce B. w II ćwiartce
C. w III ćwiartce D. w IV ćwiartce
- 3 W układzie współrzędnych zaznaczono punkt, którego odcięta jest liczbą podzieloną przez 3, a rzędna jest o 7 większa od odciętej. Który z punktów został zaznaczony w układzie współrzędnych?
A. $A = (18, 25)$ B. $B = (22, 15)$
C. $C = (21, 14)$ D. $D = (17, 24)$
- 4 Który z poniższych punktów **nie jest** punktem kratowym?
A. $A = (177, 163)$ B. $B = (-294, -3)$
C. $C = (-19, 19)$ D. $D = \left(2\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- 5 Punkty $L = (2, -2)$, $M = (2, 1)$, $N = (-1, 1)$ są wierzchołkami kwadratu $KLMN$. Punkt K ma współrzędne
A. $(-2, -1)$. B. $(-1, -2)$. C. $(1, -2)$. D. $(-2, -2)$.
- 6 Który z poniższych punktów jest odległy od punktu $K = (5, -3)$ o 8 jednostek?
A. $A = (3, -3)$ B. $B = (5, -5)$ C. $C = (5, 5)$ D. $D = (-3, 3)$
- 7 Długość odcinka o końcach w punktach: $(-3, 9)$, $(3, -9)$ jest równa
A. $3\sqrt{10}$. B. 12. C. $6\sqrt{10}$. D. 24.
- 8 Punkt B jest środkiem odcinka, którego końcami są punkty: $A = (-5, -4)$, $C = (7, 2)$. Punkt B ma współrzędne
A. $(2, -2)$. B. $(-2, 2)$. C. $(1, -1)$. D. $(-1, 1)$.
- 9 Punkt $K = (-5, 9)$ jest końcem, a punkt $C = (1, 5)$ jest środkiem odcinka KL . Punkt L ma współrzędne
A. $(7, 1)$. B. $(-3, 7)$. C. $(-4, 14)$. D. $(-1, 1)$.
- 10 Pole trójkąta o wierzchołkach w punktach: $A = (-5, 3)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 3)$ jest równe
A. 8. B. 12. C. 16. D. 24.

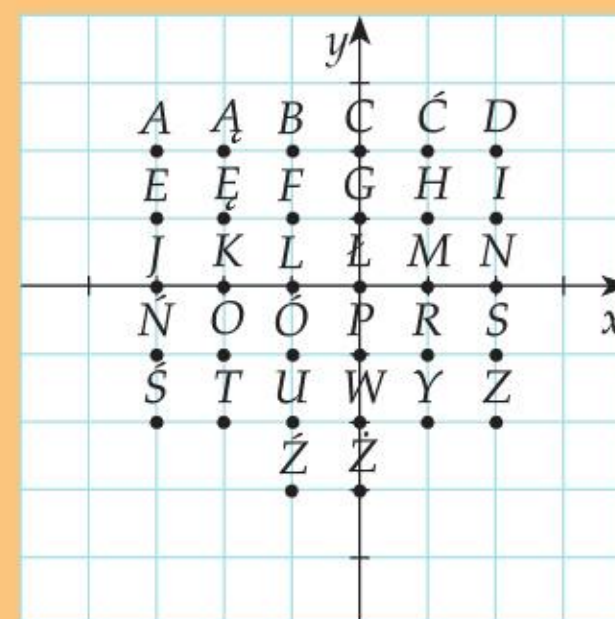
W zadaniach 11–15 oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

- 11 W układzie współrzędnych zaznaczono punkty: $A = (-7, 6)$, $B = (-3, 4)$, $C = (-5, -3)$, $D = (1, 9)$.
- Odcinki AB i CD są prostopadłe.
 - Odcinek CD jest trzy razy dłuższy od odcinka AB .
- 12 Punkt $R = (-7, -4)$ jest końcem, a punkt $S = (1, 2)$ jest środkiem odcinka RT .
- Odcinek RT ma długość 10.
 - Pierwsza współrzędna punktu T jest równa 9, a druga jest równa 8.
 - Środek odcinka ST ma współrzędne $(5, 5)$.
- 13 Punkty: $A = (-1, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (8, 4)$, $D = (2, 4)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.
- Ten równoległobok jest rombem.
 - Obwód tego równoległoboku jest równy 22 jednostkom.
- 14 Punkty: $A = (0, -3)$, $B = (7, -2)$, $C = (6, 1)$, $D = (-1, 0)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.
- Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
 - Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = (-1, 3)$.
- 15 Punkty $A = (4, 11)$, $B = (1, 5)$, $C = (4, 1)$, $D = (10, 5)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$.
- Czworokąt $ABCD$ jest trapezem.
 - Przekątne czworokąta $ABCD$ przecinają się w punkcie $S = (5, 4)$.
- 16 Narysuj w zeszycie układ współrzędnych. W narysowanym układzie zaznacz punkty o podanych współrzędnych. Pamiętaj o dobraniu odpowiedniej jednostki na osiach.
- $A = (3, -5)$, $B = (7, 3)$, $C = (-4, 0)$, $D = (-2, 7)$, $E = (-6, -7)$, $F = (5, -3)$, $G = (-5, 2)$
 - $A = (5, 15)$, $B = (-20, 0)$, $C = (-20, -25)$, $D = (-15, -10)$, $E = (25, -30)$, $F = (0, -5)$, $G = (-10, -25)$
 - $A = (-20, 0)$, $B = (-80, -40)$, $C = (60, 20)$, $D = (0, 100)$, $E = (-60, -60)$, $F = (120, -100)$, $G = (0, 40)$

- 17 Na rysunku każdy z punktów zaznaczonych w układzie współrzędnych został nazwany jedną z liter polskiego alfabetu.

Podając w odpowiedniej kolejności współrzędne punktów, możemy szyfrować słowa, np. zapis $(1, 0)$ $(-3, 2)$ $(-2, 0)$ oznacza słowo MAK, bo: $M = (1, 0)$, $A = (-3, 2)$, $K = (-2, 0)$.

- Odszyfruj słowo: $(-2, 0)$ $(-3, 2)$ $(1, -1)$ $(-2, -2)$ $(-3, 1)$ $(2, -2)$ $(-3, 0)$ $(-1, -2)$ $(2, -1)$ $(2, -2)$.
- Zaszyfruj w ten sposób słowa: MATEMATYKA, WAKACJE, PRZYGODA, RADOŚĆ.
- Zaszyfruj w ten sposób swoje imię i nazwisko.



- 18 Przerysuj do zeszytu poniższą tabelę. Określ położenie podanych punktów w układzie współrzędnych, wpisując je w odpowiednie pola tabeli zgodnie z podanym wzorem.

$A = (-2, 16)$, $B = (15, -20)$, $C = (-20, -100)$, $D = (-25, 0)$, $E = (-6, -2)$, $F = (12, 2)$, $G = (27, -3)$, $H = (0, 15)$,
 $I = (17, 0)$, $J = (3, 27)$, $K = (7, -1)$, $L = (-33, 3)$, $M = (0, -9)$, $N = (30, 40)$, $O = (8, 0)$, $P = (-21, -5)$, $R = (0, 11)$,
 $S = (-24, 8)$, $T = (-35, -35)$, $U = (7, 36)$, $W = (9, -19)$, $Y = (17, 3)$, $Z = (-4, 0)$

Oś odciętych	Oś rzędnych	Ćwiartka I	Ćwiartka II	Ćwiartka III	Ćwiartka IV
$D = (-25, 0)$			$A = (-2, 16)$		

- 19 W układzie współrzędnych zaznacz po 4 punkty, których:

- rzędna jest równa -1 , a odcięta jest liczbą nieujemną,
- odcięta jest o 3 większa od rzędnej,
- odcięta jest liczbą ujemną, a rzędna jest o 4 większa od odciętej,
- rzędna jest iloczynem liczby 2 i odciętej.

- 20 Punkty $A = (-4, 2)$ i $B = (1, -3)$ są dwoma wierzchołkami trójkąta ABC prostokątnego równoramiennego. Zapisz współrzędne trzeciego wierzchołka. Podaj wszystkie możliwości.

- 21 Narysuj w układzie współrzędnych:

- prostokąt, którego trzy wierzchołki znajdują się w punktach: $A = (6, -4)$, $B = (6, 1)$, $C = (-2, 1)$,
- równoległobok, którego trzy wierzchołki znajdują się w punktach: $A = (1, -2)$, $B = (5, -2)$, $C = (4, 6)$,
- prostokąt, którego trzy wierzchołki znajdują się w punktach: $A = (-1, -1)$, $B = (5, -3)$, $D = (0, 2)$,
- romb, którego trzy wierzchołki znajdują się w punktach: $A = (-4, -1)$, $B = (0, -3)$, $D = (-6, 4)$.

- 22 Wierzchołki rombu $ABCD$ są punktami kratowymi. Przekątne tego rombu o długościach odpowiednio 8 i 6, przecinają się w punkcie $O = (0, 0)$. Narysuj ten romb i podaj współrzędne jego wierzchołków. Ile różnych rozwiązań ma to zadanie?

- 23 Punkty $A = (-4, 5)$ i $B = (2, 5)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Zapisz współrzędne punktów C i D tak, aby czworokąt $ABCD$ był:

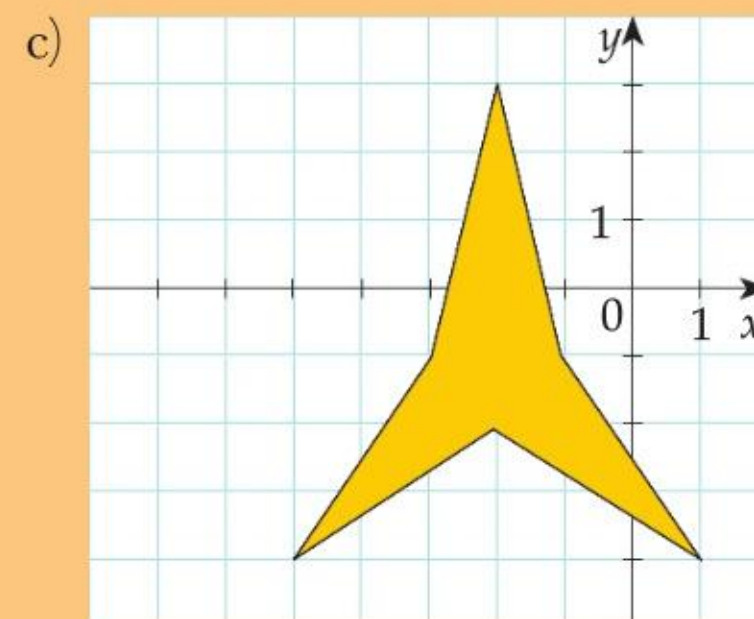
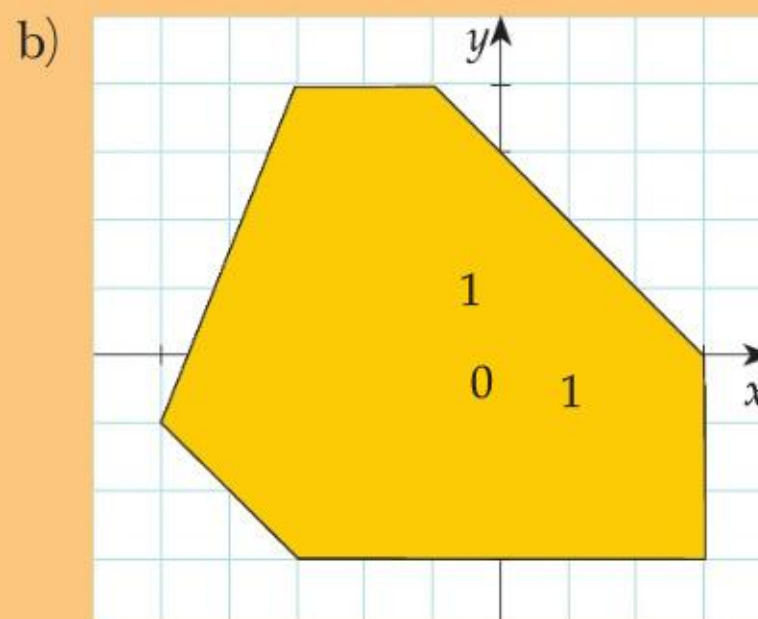
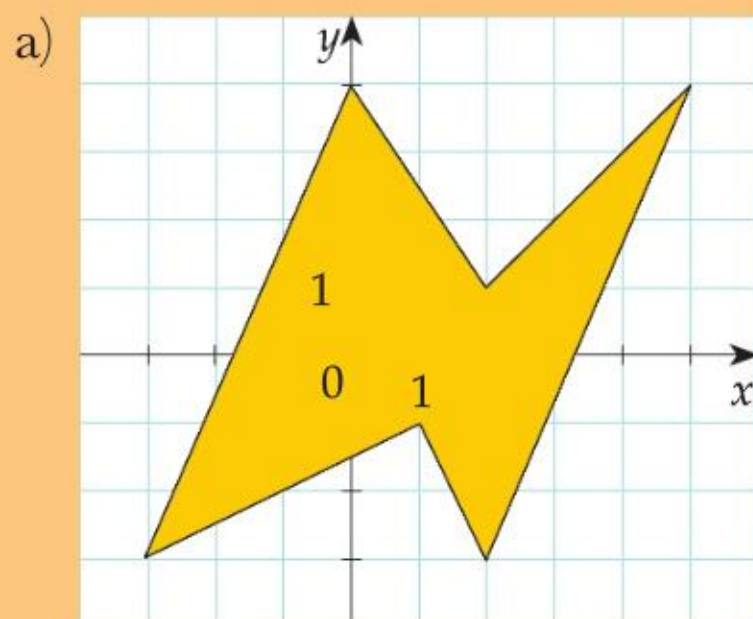
- kwadratem,
- prostokątem o obwodzie równym 18,
- prostokątem o polu równym 24.

- 24 W układzie współrzędnych zaznaczone są punkty: $K = (20, 30)$, $L = (28, 42)$, $P = (25, 35)$. Odcinek PR jest równoległy do odcinka KL i czterokrotnie krótszy od odcinka KL . Zapisz współrzędne punktu R . Podaj obie możliwości.

- 25 Punkty: $A = (-4, -11)$, $B = (4, -5)$, $C = (4, 10)$, $D = (-4, -5)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego czworokąta.

- 26 Punkty $B = (5, 4)$ i $D = (-9, 2)$ są końcami przekątnej kwadratu $ABCD$. Oblicz obwód i pole tego kwadratu.

- 27 Punkty $A = (-1, -1)$ i $B = (3, 2)$ są wierzchołkami prostokąta $ABCD$ o obwodzie równym 30. Oblicz pole tego prostokąta.
- 28 Punkty: $P = (-9, -5)$, $R = (10, -5)$, $S = (5, 7)$, $T = (-4, 7)$ są wierzchołkami trapezu $PRST$.
- Uzasadnij, że ten trapez jest równoramienny.
 - Oblicz długość przekątnej tego trapezu.
 - Oblicz obwód tego trapezu.
 - Oblicz dwoma sposobami pole tego trapezu.
- 29 Punkty: $K = (0, -10)$, $L = (2, -1)$, $M = (-4, 6)$, $N = (-6, -3)$ są wierzchołkami czworokąta $KLMN$. Uzasadnij, że ten czworokąt jest rombem. Oblicz jego obwód i pole.
- 30 Punkt $D = (-9, 4)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$, a punkt $S = (3, 4)$ punktem przecięcia się jego przekątnych. Pole tego rombu jest równe 120.
- Oblicz długości przekątnych tego rombu.
 - Oblicz obwód tego rombu.
 - Podaj współrzędne wierzchołków tego rombu.
- 31 Oblicz pola wielokątów przedstawionych na rysunkach.



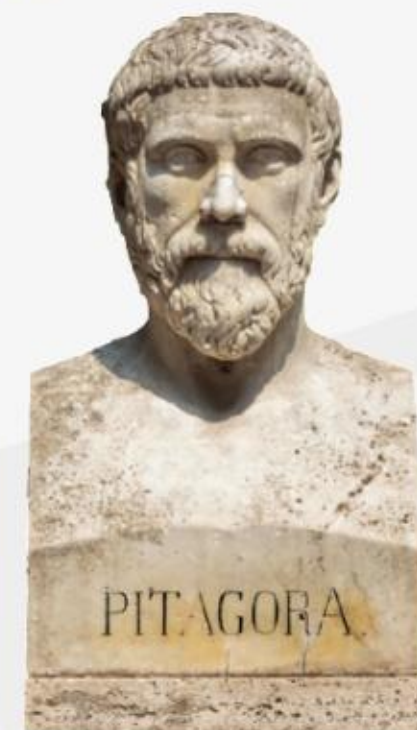


Pitagoras i Związek Pitagorejski

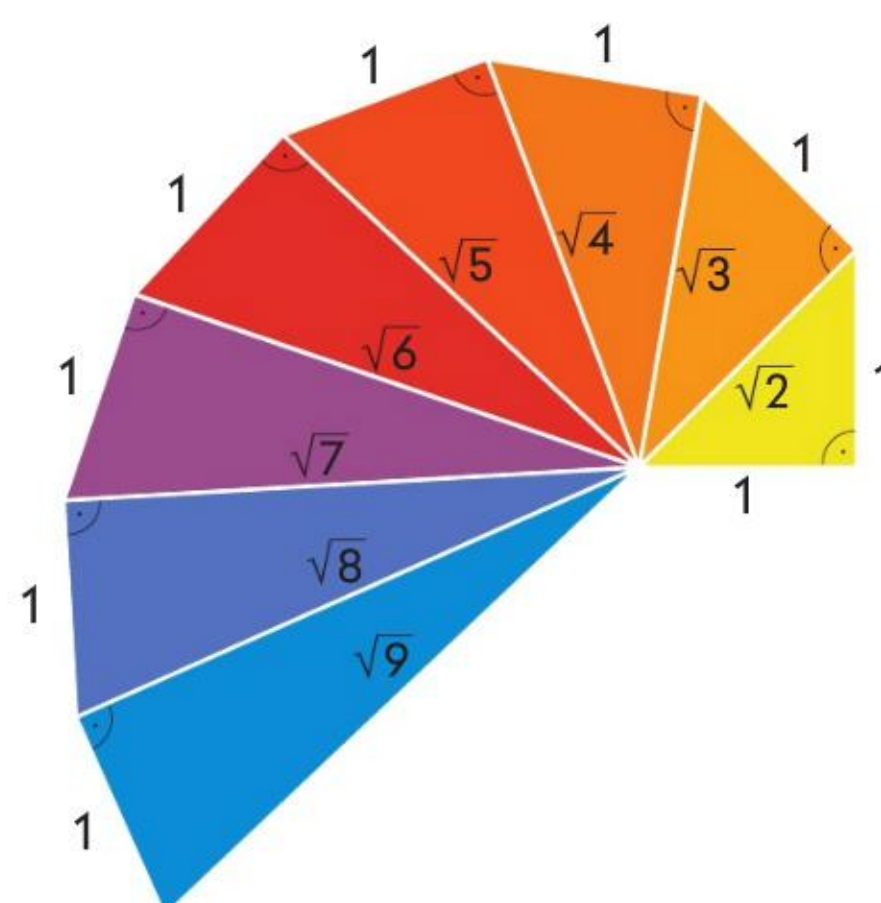
Dokładny rok narodzin i rok śmierci Pitagorasa nie są znane. Powszechnie jest przyjęte, że urodził się na wyspie Samos w Grecji ok. 572 r. p.n.e., a zmarł w Metaponcie w 497 r. p.n.e. Jednak niektóre źródła podają, że żył on aż 104 lata.

Pitagoras, mając 40 lat, zaczął podróżować. Ostatecznie osiadł w Krotonie, gdzie założył Związek Pitagorejski, zwany też Szkołą Pitagorejczyków. Pitagorejczycy badali wielościanny foremne, zajmowali się liczbami gnomicznymi, liczbami doskonałymi, liczbami zaprzyjaźnionymi oraz proporcjami. Odkryli liczby niewymierne. Do ich osiągnięć zalicza się też dowód twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta i wprowadzenie średniej arytmetycznej.

Znakiem Pitagorejczyków był **pentagram** (zwany gwiazdą pitagorejską), czyli pięciokąt foremny, którego boki przedłużone w obie strony tworzą pięciokąt gwiazdzisty. Uważali go za symbol doskonałości. Tym znakiem pozdrawiali się wzajemnie, kreśląc go na piasku.

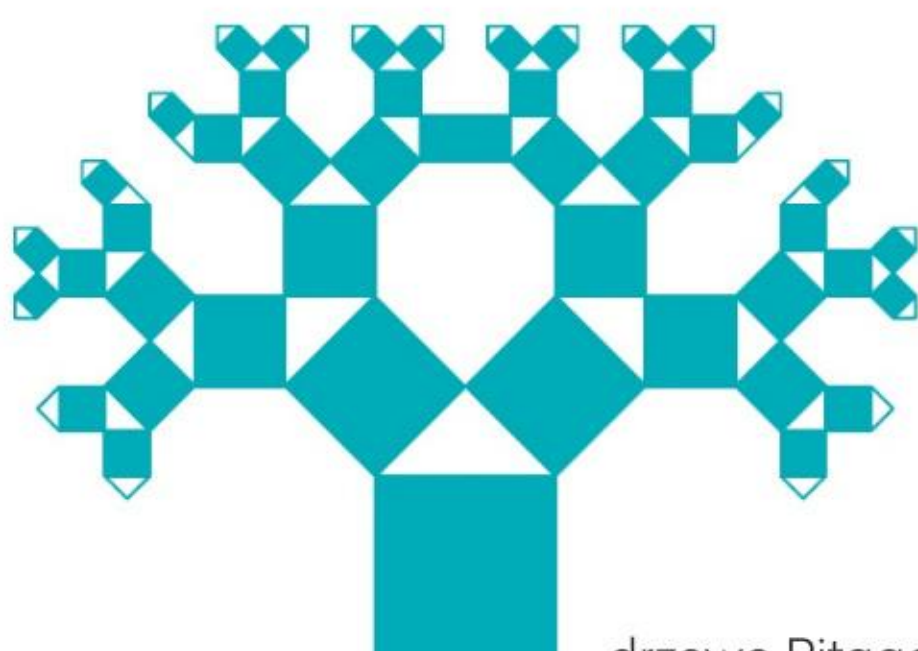


Ślimak Teodorosa to konstrukcja geometryczna, pozwalająca na narysowanie odcinka, którego długość jest równa pierwiastkowi z dowolnej liczby naturalnej. Konstrukcja ta oparta jest na twierdzeniu Pitagorasa i jej nazwa pochodzi od kształtu, jaki powstaje podczas tworzenia kolejnych elementów.



ślimak Teodorosa

Drzewo Pitagorasa to konstrukcja geometryczna (fraktal), która powstaje przez budowanie kwadratów na bokach trójkątów prostokątnych, tak jak na rysunku.



drzewo Pitagorasa



Zadanie 1

Wyszukaj w internecie informacje na temat liczb gnomicznych, doskonałych i zaprzyjaźnionych. Napisz, jakie liczby nazywamy liczbami:

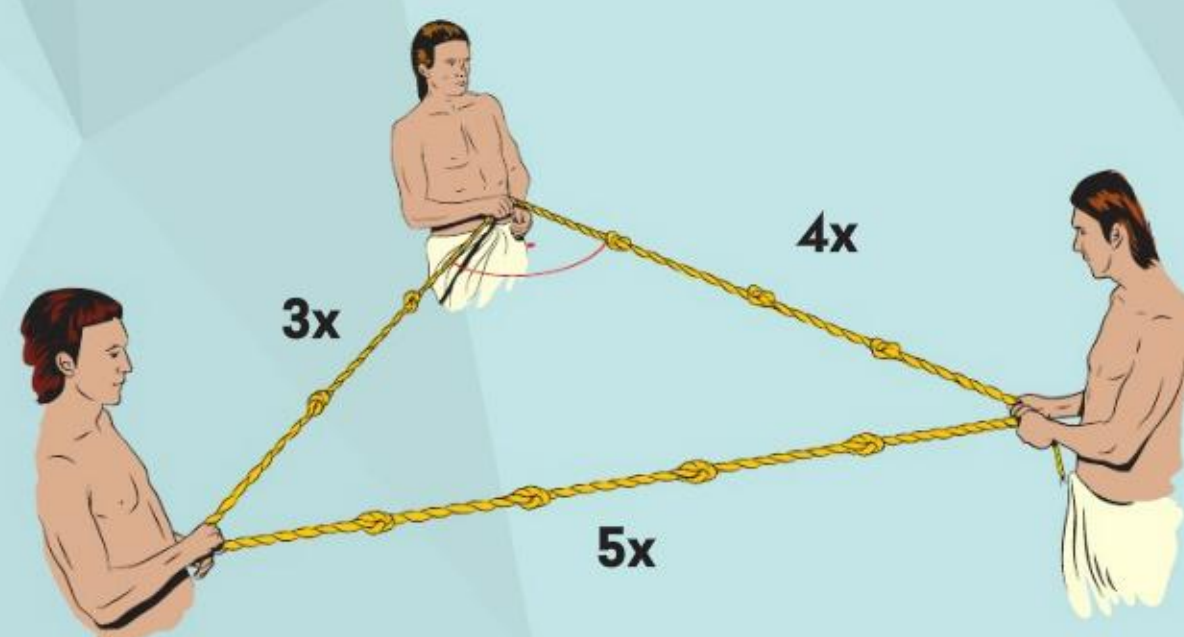
- gnomicznymi,
 - doskonałymi,
 - zaprzyjaźnionymi.
- Podaj przykłady takich liczb.



Zadanie 2

Wyszukaj w internecie przykłady fraktali. Wydrukuj lub narysuj jeden z nich.

Egipcjanie wiedzieli, że trójkąt, którego boki mają długości 3, 4 i 5, jest prostokątny. Używali go do wyznaczania kątów prostych przy odnawianiu granic pól gruntowych, zmywanych wylewami Nilu. Wiązali na sznurze w równych odstępach węzły i budowali z tego sznura trójkąt składający się z 3, 4 i 5 odstępów, zauważając, że największy kąt jest kątem prostym. Taki trójkąt nazywamy **trójkątem egipskim**.



Trójką pitagorejską nazywamy trzy liczby naturalne a , b , c , które spełniają warunek: $a^2 + b^2 = c^2$.

Jak wyznaczyć trójki pitagorejskie?

Pitagoras, poszukując innych trójkątów prostokątnych, których długości boków byłyby liczbami naturalnymi, podał wzory, dzięki którym możemy wyznaczyć niektóre z trójek pitagorejskich. Wzory te możemy zapisać następująco:

$$a = 2n + 1, b = 2n(n + 1), c = 2n^2 + 2n + 1$$

gdzie n jest liczbą naturalną. Kilka trójek pitagorejskich wyznaczonych tą metodą podanych jest w tabeli.

n	a	b	c
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61

Znane są też inne, później wynalezione metody na wyznaczanie trójek pitagorejskich. Oto jedna z nich.

Jeśli m i n są liczbami naturalnymi i $m > n$, to

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$$

jest trójką pitagorejską.

Kilka trójek pitagorejskich wyznaczonych tą metodą podanych jest w tabeli.

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20

Warto zauważyć, że jeżeli trójka liczb a , b , c jest pitagorejska i każdą z liczb a , b , c pomnożymy przez liczbę naturalną dodatnią k , to trójka liczb ka , kb , kc też będzie pitagorejska.

Znając długości boków trójkąta, równie łatwo można ustalić, czy jest to trójkąt ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

Oznaczmy długości boków trójkąta przez a , b i c w taki sposób, że $a \leq b \leq c$. Jeżeli $a^2 + b^2 > c^2$, to trójkąt jest ostrokątny.

Jeżeli $a^2 + b^2 = c^2$, to trójkąt jest prostokątny.

Jeżeli $a^2 + b^2 < c^2$, to trójkąt jest rozwartokątny.

Zadanie 3

Wyznacz kilka innych trójek pitagorejskich.

Zadanie 4

Sprawdź, czy trójkąt o podanych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny. Możesz użyć kalkulatora.

a) 60 cm, 91 cm, 109 cm

b) 28 cm, 45 cm, 50 cm

c) 24 cm, 32 cm, 41 cm

Odpowiedzi do zadań

5. Własności figur geometrycznych

5.1 Kąty i ich własności (s. 10)

1. a) 120° b) 60° c) 330° d) 270°
2. a) $24^\circ, 66^\circ, 88^\circ$ b) $139^\circ, 150^\circ, 179^\circ$ c*) $0^\circ, 24^\circ, 66^\circ, 88^\circ, 90^\circ, 139^\circ, 150^\circ, 179^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ d*) $185^\circ, 242^\circ, 270^\circ, 300^\circ$
3. a) 30° b) 90° c) 210° d) 270° 4*. a) 1 h b) 4 h c) 9 h
5. a) 144° b) 50° c) 61° 6. $55^\circ, 165^\circ$
7. $\beta = 140^\circ, \gamma = 40^\circ$ 8. a) $\alpha = 85^\circ, \beta = \gamma = 95^\circ$
b) $\alpha = 65^\circ, \beta = \gamma = 75^\circ$ c) $\alpha = \beta = 30^\circ, \gamma = 40^\circ$
9. a) $\alpha = \gamma = 45^\circ, \beta = 90^\circ$ b) $\alpha = \gamma = 48^\circ, \beta = 46^\circ$
c) $\alpha = 55^\circ, \beta = 35^\circ, \gamma = 145^\circ$ 10. a) $\alpha = \gamma = 104^\circ, \beta = \delta = 76^\circ$
b) $\alpha = \gamma = 30^\circ, \beta = \delta = 150^\circ$ c) $\alpha = \gamma = 65^\circ, \beta = \delta = 115^\circ$
12*. a) 720° b) 720°

5.2 Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie (s. 14)

1. a) $a \parallel c$ b) $a \parallel c$ 2. a) zero, jeden lub nieskończenie wiele b) zero, jeden, dwa, trzy lub nieskończenie wiele c) zero, jeden, trzy, cztery, pięć, sześć lub nieskończenie wiele
3. a) oba na prostej d b) oba na prostej b lub c
5. a) 45° i 135° b) wszystkie kąty mają po 90° c) 66° i 114°
6. a) $\alpha = 60^\circ, \beta = \gamma = 120^\circ$ b) $\alpha = \gamma = 110^\circ, \beta = 70^\circ$
c) $\alpha = 40^\circ, \beta = \gamma = 70^\circ$ d) $\alpha = 80^\circ, \beta = 130^\circ, \gamma = 50^\circ$
7. A 8*. $\alpha = 40^\circ, \beta = 140^\circ, \gamma = 130^\circ$

5.3 Trójkąt i jego własności (s. 18)

1. a) nie b) tak c) nie d) tak
2. a) $Obw. = 5,1$ cm, trójkąt równoboczny
b) $Obw. = 9,4$ dm, trójkąt różnoboczny
c) $Obw. = 13$ dm, trójkąt równoramienny
d) $Obw. = 13,4$ cm, trójkąt różnoboczny
3*. 4, 4, 6; 5, 5, 4; 6, 6, 2 4. a) $Obw. = 15$ m
b) $Obw. = 20$ cm c) $Obw. = 6$ dm 5. a) 9 cm b) 4 cm
6. 8 cm 7. Prostokątny równoramienny
8. a) $55^\circ, 55^\circ, 70^\circ$ b) $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$ lub $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$
9. a) 39° b) 15° 10. a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\alpha = 64^\circ$ c) $\alpha = 125^\circ$

5.4 Cechy przystawania trójkątów (s. 24)

1. a) F b) P c) P 3. a) tak b) nie c) tak d) nie
5. a) nie b) tak, gdy trójkąty mają taką samą długość ramion c) tak, jeśli oba trójkąty mają kąty $50^\circ, 65^\circ, 65^\circ$
6. np.: $\triangle KMN \equiv \triangle KLM, \triangle KLN \equiv \triangle MNL, \triangle KSN \equiv \triangle LSM, \triangle KSL \equiv \triangle MSN$ (cecha bok, bok, bok)
7. np.: $\triangle PRS \equiv \triangle STP, \triangle PRT \equiv \triangle RST, \triangle PZR \equiv \triangle TZS, \triangle RZS \equiv \triangle PZT$ (cecha bok, bok, bok)
9. a) np.: $\triangle AOD \equiv \triangle BOC, \triangle ABD \equiv \triangle ABC, \triangle CDA \equiv \triangle CDB$ (cecha kąt, bok, kąt)
b) np.: $\triangle EJH \equiv \triangle GKF, \triangle EOH \equiv \triangle GOF, \triangle EOF \equiv \triangle GOH$ (cecha bok, kąt, bok)
10. Tak, jeśli kąt ABC i kąt PRS są równe.
11. Tak 12. Tak, na podstawie cechy kąt, bok, kąt.

5.5 Twierdzenie Pitagorasa i jego zastosowanie (s. 30)

1. a) nie b) nie c) tak 2. a) $1^2 + a^2 = h^2$ b) $a^2 + a^2 = 8^2$
c) $h^2 + b^2 = c^2$ 3. a) $P_3 = 25$ b) $P_2 = 225$ c) $P_1 = 144$
4. a) $x = 24$ b) $a = 20$ c) $y = 12\sqrt{2}$ 5. a) 26 dm
b) 41 m c) 65 cm 6. 16 cm 7. 12 dm 8. 10 cm
9. $Obw. = 34$ cm 10. a) 12 m b) 15 cm c) 0,8 m
d) 120 cm 11. $\bigcirc$ 80 m 12. 20 km 13*. 60 mil morskich lub 111,12 km 14*. 30,48 cm, 40,64 cm

5.6 Trójkąty o kątach $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ oraz $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ (s. 35)

1. a) $Obw. = (10 + 5\sqrt{2})$ cm b) $Obw. = (16 + 8\sqrt{2})$ dm
c) $Obw. = (6 + 6\sqrt{2})$ dm d) $Obw. = (2\sqrt{5} + 2\sqrt{10})$ dm
2. a) 5 cm b) $2\sqrt{2}$ cm c) $\sqrt{3}$ dm d) $3\sqrt{7}$ dm
3. a) $a = 24$ b) $b = 7\sqrt{3}$ c) $c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ 4. $Obw. = 8 + 8\sqrt{3}$,
 $Obw. = 18 + 6\sqrt{3}$, $Obw. = 6 + 2\sqrt{3}$, $Obw. = 15 + 5\sqrt{3}$
5. $Obw. = (36 + 12\sqrt{3})$ cm 6. $Obw. = (24 + 8\sqrt{3})$ dm
7. 2 cm, $2\sqrt{3}$ cm 8. a) $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $h = 6\sqrt{3}$ c) $h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) $h = 15$ e) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ f) $h = 2\sqrt{3}d$ g) $h = \frac{3m}{2}$
h) $h = 3\sqrt{2}k$ 9. a) $a = 8$ b) $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ c) $a = 2\sqrt{5}$
d) $a = 4\sqrt{3}$ e) $a = e$ f) $a = \frac{4\sqrt{3}b}{3}$ g) $a = 2\sqrt{2}k$ h) $a = 20\sqrt{s}$

Czy już umiesz? (s. 41)

1. C 2. C 3. D 4. D 5. A 6. C 7. C
8. D 9. C 10. B 11. $12:40, 100^\circ$ 12. $105^\circ, 75^\circ$
13*. $\gamma = 72^\circ$ 14. $\alpha = 155^\circ$ 15. a) $\alpha = 43^\circ, \beta = 47^\circ, \gamma = 133^\circ$
b) $\alpha = 113^\circ, \beta = \gamma = \delta = 67^\circ$ 16. $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$
17. $27^\circ, 63^\circ, 90^\circ$ 18. a) P b) F c) P d) F e) P f) F
19. a) P b) F c) P d) F e) F f) P 20. $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$
21. Tak 22. Tak 23. $10^\circ, 10^\circ, 160^\circ$ 24. Nie

6. Wyrażenia algebraiczne

6.1 Zapisywanie i odczytywanie wyrażeń (s. 46)

2. a) $2a + 4b + 2c$ b) $4s + 2m$ c) $1,2p + 0,89t$
d) $2,5k + 1,75p$ e) $60t_1 + 65t_2$
3. a) $2x + 2y + z$ b) $4x + 2y + 2p$
4. a) $60p$ b) $100n$ c) $0,01k$ d) $k + 1,5$ e) $2x + 4$ f) $2n + 3t$
5. a) $3n + 3$ b) $4n + 2$ c) $6n + 9$ d) $3n$ 7*. $6n + 2$

6.2 Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego (s. 49)

1. a) 315 b) 68 c) $-42\frac{5}{8}$
2. a) 28 b) $\frac{2}{9}$ c) 6 d) $2\frac{1}{3}$ e) -6 f) -24 g) $\frac{25}{81}$ h) 0
3. a) $1,5x + 0,75y$ b) $20 - 1,5x - 0,75y$ c) 12,15 zł, 7,85 zł
4. a) $d - 2$ b) $d + 2$ 6*. $10x + y, x = 1, 2, \dots, 9, y = 0, 1, 2, \dots, 9$ 7. a) II stopień otyłości b) norma
c) norma d) niedowaga
8. a) 106, 115, 124, 133, 142, 151, 160, 205, 214, 223, 232, 241, 250, 304, 313, 322, 331, 340, 403, 412, 421, 430, 502, 511, 520,

601, 610, 700 b*) 100, 121, 142, 163, 184, 200, 221, 242, 263, 284, 300, 321, 342, 363, 384, 400, 421, 442, 463, 484, 500, 521, 542, 563, 584, 600, 621, 642, 663, 684, 700, 721, 742, 763, 784, 800, 821, 842, 863, 884, 900, 921, 942, 963, 984

9*. a) $\rho = 500 \frac{\text{dag}}{\text{m}^3}$ b) $\rho = 4\,000\,000 \frac{\text{dag}}{\text{m}^3}$
c) $\rho = 120\,000 \frac{\text{dag}}{\text{m}^3}$ d) $\rho = 50\,000\,000 \frac{\text{dag}}{\text{m}^3}$

6.3 Jednomian i suma algebraiczna (s. 54)

1. a) a^2b^2c b) a^3b^2knr c) a^2m^2 d) a^2jk^2
2. a) $15a^2, 15$ b) $-2x^5y^3, -2$ c) $8a^2b^2, 8$ d) $-6m^5p^4, -6$
4. a) $5a, 4b, -11c$ b) $-0,9p, -r, 7$ c) $-\frac{1}{2}x^3, -2x^2, 7x, -3$ d) $-x, -2$
5. a) $2,5a$ b) $1,5b$ c) $-4,1c$ d) $6\frac{2}{7}d$ e) $4e$ f) $3a + 3x$
6. a) $6x - 11y$ b) $2\frac{1}{2}a^2 - 2a$ c) $-1\frac{5}{8}a^2 + 4\frac{1}{4}ab$
d) $-\frac{4}{9}a^2 - \frac{7}{40}a + \frac{1}{4}$ 7. a) $1\frac{1}{7}a^2 - 16a - 27, -18\frac{5}{7}$
b) $9x - 6y + 2, -24,7$ c) $10a - 3b + ab, -31\frac{1}{3}$
8. a) dziadek: $y - 3$, babcia: $y - 8$ b) $2y - 3$ c*) $y - 10$
9. $250p$ – koszt zakupu stolików, $320p$ – koszt zakupu krzeseł, $570p$ – łączny koszt zakupów 10. $5\frac{1}{2}x - 4$
11. $1,04k$ 12. a) $10x + 5y$ b) $7a + 12,5b$ c) $17,8k + 6l$
d) $4m - n + 18$ 13. $6y + 30, y > 0$

6.4 Dodawanie i odejmowanie sum algebraicznych (s. 58)

1. a) $-x - 1$ b) $-3a + 3$ c) $7x - 2y + 8$ d) $a + 3$ e) $-9a - 4$
f) $-5x - 7y + 2$ 2. a) $4a + 5$ b) $7,5x - 6$ c) $x^2 - 3xy$
d) $3a - 4,7$ e) $a^2 + 6$ f) $-3c + 7$ 3. a) $-6a - 3$ b) $2y$
c) $-2x + 9$ d) $-5m - 1$ e) $-7a + 7ab$ f) $-7x^2 + 9x - 4$
4. a) $7a - 6b + 4$ b) $m - 2$ c) $7a - 6$ d) $-20c + 7\frac{3}{4}d$
5. a) tak b) nie 6. a) $Obw. = 10x - 1$
b) $Obw. = 6x + 7,5y - 2$ 7. $2\frac{1}{2}x + 7$ 8. $100 - 5x - 10y$
9. $34,5k + 6, k$ – liczba parzysta 10. a) $5x + 3$ b) 28 lat

6.5 Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian (s. 61)

1. a) $-24e + 32f - 36$ b) $4s - 6t + 14z$ c) $3x^2 + 1,8x - 4,2$
d) $24c - 30d + 4e - 2$ e) $0,2m - 0,4p + 0,41r$
f) $1,8p - 3,6q + 0,18s + 18$ 2. a) $-36y^4 + 28y^3 - 22,4y^2$
b) $13a^2b + 7ab^2 - ab$ c) $-7p^3r^3 + 3\frac{1}{2}p^2r^4 - 2,5p^2r^3$
3. a) $-12pq + 6q + 20$ b) $6ay - 2by + 3a$ c) $-0,1xy - x - 4y$
4. a) $5a - 5b$ b) $x^2 - 3x + 5y + 2xy$
c) $-4,5a + \frac{3}{5}b - \frac{3}{10}ab + 6ac$ 5. a) -8 b) -1 c) $\frac{1}{5}$
6. a) $25(1 - 2a^2 + 3a)$ b) $6(8x - 4y + 9z)$ c) $-2(7p + 10r + 2s)$
d) $1,5(3a^2 - 4a + 1)$ 7. a) 12 b) 2 c) -4 d) -6
8. a) $4x + 11$ b) $x + 2\frac{3}{4}$ 9. a) $6,15a + 2,46b$ b) tak
10. $7k + 2$ 11. $240m + 1800$ 12. $x - 4,8$
13. $10k + 4l + 3m + 2$ 14. a) $2n + 2$ b) $2n + 3$

6.6 Mnożenie sum algebraicznych (s. 65)

1. a) $-20p - 21q - 12pq - 35$ b) $5c + 12d - 30cd - 2$
c) $-9w - 2z + 24wz + 0,75$ d) $2t - 35z + 14tz - 5$
2. a) $a^2 + 14a + 33$ b) $2b^2 - 11b - 21$ c) $48e^2 - 24e - 72$
d) $-f^2 + 8,25f - 2$ e) $12p^2 + 135p - 108$ f) $5a^2 - 7ab - 6b^2$

3. a) $x^2 + 6x + 9$ b) $y^2 - 8y + 16$ c) $4a^2 + 24a + 36$
d) $49p^2 + 126pq + 81q^2$ e) $9c^2 - 30c + 25$ f) $4d^2 + 20d + 25$
4. a) $3\sqrt{3} + 5$ b) $2\sqrt{2} - 1$ c) $6\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 15\sqrt{2} - 10$
d) $33\sqrt{2} + 15$ 5. a) 15 b) $-1,5$ c) p d) $0,1x$

6. a) $a^2 + 5a + 6$ b) $\frac{1}{9}y^2 + 4y + 36$

c) $x^2 + 4x - 5$ d) $0,5p^2 + 3,75p - 2$

8*. $m = -2\sqrt{2} + x$, gdzie x jest liczbą całkowitą

10. a) 2 b) 0

6.7 Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Zastosowanie wyrażeń algebraicznych w zadaniach (s. 70)

1. a) $8a^2 - b^2 - 9, -16$ b) $-6p + 9, 16$
c) $17x^2 - 13y^2 + xy, -74$ d) $12a + 3b, 5$
e) $-2x + 5y - 3z + 24, 20$ f) $3p - 2q - pq, -1$
2. a) $-8a^2 + 17a + 22$ b) $9a^2 - 19a - 19$
c) $-3a^3 + 2a^2 - 11a + 23$ d) $2a^3 - 11a^2 + 14a - 29$
3. $1\frac{2}{5}x$ zł 4. $2m^2 + 8m + 2$ 5. $6k^2 + 10k, 16$ 6. $2x - 8$
7*. $3x + 13$ 8. a) $a - \frac{ab}{100} - \frac{ac}{100} + \frac{abc}{10\,000}$ b) 12 zł
9*. $\frac{2000 - x}{x} \cdot 100\%, \left(\frac{200\,000}{x} - 100\right)\%$ 10*. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y$
11. $5,5a - 2b$ 12. Nie zmieni się. 13. $9x + 27, x > 1$
14. $x^2 + 2x + z + xz - 3$

Czy już umiesz? (s. 73)

1. C 2. D 3. D 4. C 5. D 6. A 7. B 8. D
9. D 10. 13, 16, 19, $3n + 1$ 11. $6c + 42, 63$
12. $a^2 + b^2 - 2ab, 25$ 13. $8n - 8$ 14. $\bigcirc 16$ cm
15. A: $P = 4a + 8b$, B: $P = 3a + 2b$, C: $P = 8a + 4b$ D: $P = 4b$
16. A: $P = 4a - 4b$, B: $P = 4a - 4b$, C: $P = 4a$, D: $P = 6a - 4b$,
E: $P = 8a$, F: $P = 4a - 4b$, G: $P = 5a - 3b$
17. $6x + 9y, 7x + 6y$ 18. $7m$ 19. $2\frac{1}{2}s + 8$
21. $5x - 7y - 1$ 23. Pole zwiększy się 1,44 razy,
objętość zwiększy się 1,728 raza. 24. $4x^2 + 14x - 10$
25*. -1 26*. Obwód zmniejszy się o $0,4a$,
pole zmniejszy się o $0,19a^2$.

7. Równania z jedną niewiadomą

7.1 Przykłady równań. Liczby spełniające równania (s. 79)

1. a) $0,80x + 4,60x = 32,40$ b) $3(x + 1,50) + 2x = 9$
c) $0,9x = 81$ d) $7a + 5 = 26$ e) $2p + 4 = 30$
f) $x^2 + (x - 3)^3 = 33$ 2. a) $\frac{1}{2}(2a + 1)h = 5$ b) $m(m - 1) = 5$
c) $\frac{1}{2}c(c + 1) = 5$ 3. $x = 2x + x, x = x + 2$ 4. a) $x = 11$
b) $x = -2$ c) $x = 0$ d) $x = 4$ 5. a) 5 b) 3 c) $-1, 4$ d) $0, 5$
7. a) tak b) nie c) tak d) tak 9. a) $p + p + 2 = 34, p = 16$
b) $\frac{1}{2}x + 4 = 5, x = 2$ c) $2x = x + 3, x = 3$ d) $x - 2 = -3, x = -1$
10. a) $-2, -1, 1$ b) $-1, 0, 3$

7.2 Rozwiązanie równań I stopnia z jedną niewiadomą (s. 85)

1. a) $5x + 1 = x + 3, x = 0,5$ b) $3y + 5 = y + 7, y = 1$
2. a) $b + 6 = 2b + 4, b = 2$ b) $-0,5y + 10 = y + 1, y = 6$
c) $3x + 2 = 4x - 2, x = 4$ d) $4a = a + 6, a = 2$

3. a) $x = -2$ b) $y = -3$ c) $x = -\frac{1}{2}$ d) $y = 11$ e) $x = 3$
 f) $x = -7$ 4. a) równanie sprzeczne
 b) równanie tożsamościowe c) $x = -13$ d) $z = 4$
 e) $y = -5$ f) równanie sprzeczne 5. a) $x = 2$
 b) $y = 5\frac{1}{3}$ c) $z = -2\frac{1}{2}$ d) $x = 20$ e) $z = 3\frac{2}{3}$ f) $x = 4\sqrt{2}$
 6. a) $x = 6$ b) $n = 2$ c) $x = 5$ d) $y = 4$ e) $y = \frac{74}{73}$ f) $a = 2$
 7*. a) równanie sprzeczne b) równanie tożsamościowe
 c) równanie sprzeczne d) równanie tożsamościowe
 e) $z = 4$ f) $z = -3$ 8. a) $x = 1\frac{1}{5}$ b) $x = 1$ c) $x = -5\frac{5}{6}$
 9. a) $y = -\frac{1}{5}$ b) $z = -3$ 10. $1\frac{7}{17}$ 11*. $a = 1$

7.3 Przekształcanie wzorów (s. 90)

1. a) $p = 2\frac{P}{q}$ b) $m = pv$ c) $R = \frac{U}{I}$ d) $m_s = m_r - m_w$
 e) $a = \frac{2s}{t^2}$ f) $g = \frac{E_p}{mh}$ 2. a) $x = \frac{1}{3y}$ b) $x = \frac{b-2}{a}$
 c) $x = \frac{10-y}{6}$ d) $x = \frac{m-2p}{n}$ e) $x = 3y - 7$ f) $x = \frac{5y}{4}$
 3. a) $y = \frac{4-x}{3}$ b) $y = p + 3$ c) $y = \frac{11+x}{x-2}, x \neq 2$
 d) $y = \frac{9t+5}{t-1}, t \neq 8$ e) $y = 3a + 3$
 f) $y = \frac{x+3}{x-1} + 1, x \neq 1$ 4. $f = \frac{2P}{e}$
 5*. $a = \frac{\sqrt{2P\sqrt{3}}}{3}, Obw. = 2\sqrt{2P\sqrt{3}}$
 6. a) $a = \frac{P-2bc}{2(b+c)}$ b) $b = \frac{P-2ac}{2(a+c)}$ c) $c = \frac{P-2ab}{2(a+b)}$
 7. $x = \sqrt{P}$ a) $Obw. = 4\sqrt{P}$ b) $d = \sqrt{2P}$
 8. a) $P = \frac{L^2}{16}$ b) $d = \frac{L\sqrt{2}}{4}$ 9. $k = \frac{4}{h}, h \neq 0$
 10. a) $P = \frac{S^2}{24}$ b) $V = \frac{S^3}{1728}$ 11. $F = \frac{9C}{5} + 32, 32^\circ\text{F}$
 12. $k = 15(35 - b)$ 13*. $n = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}, 18 \text{ boków}$

7.4 Zastosowanie równań do rozwiązywania zadań tekstowych (s. 100)

1. a) $x = 22\frac{1}{3}$ b) $x = 4$ c) $x = 3\frac{1}{2}$ d) $x = 12$
 2. a) 11, 17, 19 b) 3, 9, 12 3. 6 lat 4. Za 5 lat
 5. 250 zł 6. 0,95 zł – jogurt mały, 2,15 zł – jogurt duży
 7. 15 monet 2-złotowych i 19 monet 5-złotowych.
 8. $P = 80$ 9. 10° 10. Nie 11. Nie
 12. Michał 2 grzyby, Tomek 12 grzybów,
 Bartek 14 grzybów 13. 6 litrów 14*. $14 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
 15. 1,5 h 16. 40%, 3 kg 17. 20%, 1,25 l
 18. a) 3 kg soli b) 7 kg wody 19. 9,2% 20. 30%
 21. 28 uczniów 22. 315 sztuk bydła
 23. po 75 skokach 24. 30 śliwek

Czy już umiesz? (s. 102)

1. C 2. C 3. D 4. D 5. A 6. C 7*. B 8. D 9. A
 10. a) $2x + 4 = 20,5$ b) $8n + 16 = 120$ c) $5c + 3 = 18$

11. a) $x = 50$ b) równanie sprzeczne
 c) $x = -\frac{1}{2}$ d) równanie tożsamościowe
 12. $4x - 80 = 400, 120 \text{ cm}, 40 \text{ cm}, 240 \text{ cm}$
 13. $9x + 11(160 - x) = 1520, 120 \text{ biletów}$
 14. $\frac{7}{16}x + \frac{3}{20}x + 33 = x, 80 \text{ km}$
 15. $70t + 60t = 195, 1,5 \text{ h}$ 16. $35t + 25t = 72, 72 \text{ min}$
 17. $15\left(t + \frac{1}{3}\right) = 20t, 1 \text{ h}$ 18. 31,5 km
 19. $4x + 4 = 24, P = 35 \text{ cm}^2$
 20. $3x + 90^\circ = 180^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
 21. $x - 10 = 75\%(x - 2), \text{ za } 12 \text{ lat}$
 22. $3 \cdot 7x + 7x = 18,20, 0,65 \text{ zł} - \text{ ołówek}, 4,55 \text{ zł} - \text{ zeszyt}$
 23. $40\%(2 - x) = 25\% \cdot 2, 0,75 \text{ l wody}$ 24. $m_w = 11,5m_s$
 25. $m_s = \frac{m_w}{19}$

8. Wielokąty

8.1 Jednostki pola. Zamiana jednostek (s. 108)

1. a) $0,45 \text{ cm}^2$ b) 500 cm^2 c) $8\,000 \text{ cm}^2$ d) $900\,000 \text{ cm}^2$
 2. a) $0,0018 \text{ dm}^2$ b) $0,17 \text{ dm}^2$ c) 170 dm^2
 d) $500\,000 \text{ dm}^2$ 3. a) $0,000245 \text{ m}^2$ b) $0,0059 \text{ m}^2$
 c) $0,06 \text{ m}^2$ d) $8\,000\,000 \text{ m}^2$ 4. a) $0,25 \text{ a}$ b) 800 a
 c) 69 a d) 60 a 6. 1032 m^2 7. $15 \frac{\text{zł}}{\text{m}^2}$ 8. a) $12,5 \text{ a}$
 b) $0,0108 \text{ km}^2$ c) $24,7 \text{ dm}^2$ 10. $1,6 \text{ ha}$ 11*. $112,5 \text{ a}$

8.2 Trójkąty (s. 112)

2. a) trójkąt rozwartokątny b) trójkąt prostokątny
 c) trójkąt ostrokątny 3. a) $3kp$ b) $\frac{1}{2}xy$ c) $3(a + b)$
 d) $\frac{1}{2}bm$ e) $\frac{1}{2}(z - 3)^2$ f) $3\frac{1}{2}(d + 4)$ 4. 6 cm^2 6. 72 cm^2
 7. $Obw. = 24 \text{ cm}, P = 24 \text{ cm}^2$ 8. $P = 21 \text{ cm}^2, h_{OK} = 5 \text{ cm}$
 9. $h_{MK} = 66\frac{18}{29} \text{ cm}, h_{ML} = 25\frac{19}{25} \text{ cm}$
 10. $P = 60 \text{ cm}^2, Obw. = 36 \text{ cm}$
 11. $P = 0,98\sqrt{3} \text{ dm}^2, Obw. = (4,2 + 1,4\sqrt{3}) \text{ dm}$
 12. $P = 2(4 + 4\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ 13. $P = \frac{3}{2}(9 + 3\sqrt{3}) \text{ dm}^2$

8.3 Prostokąty (s. 117)

1. a) xy b) $\frac{2}{3}m + 2$ c) x^2
 2. Rynek we Wrocławiu, o $15\,994 \text{ m}^2$ 4. 198 l
 5. 29 m 6. $P = 5 \text{ dm}^2, Obw. = 9 \text{ dm}$ 7. $P = 0,02 \text{ m}^2$
 8. $a = 12 \text{ cm}$ 9. $P = 0,64 \text{ dm}^2$ 10. a) 2-krotnie
 b) 4-krotnie 11. $P = 495\,000 \text{ a} = 4950 \text{ ha}$ 12. A

8.4 Równoległoboki (s. 121)

4. $P = 216 \text{ cm}^2$ 5. $P = 48 \text{ cm}^2$ 6. $Obw. = 40 \text{ cm}$
 7. $P = 360 \text{ cm}^2, Obw. = 100 \text{ cm}$ 8. $P = 0,24 \text{ dm}^2,$
 $Obw. = 2 \text{ dm}$ 9. $40\sqrt{2} \text{ m}, 80\sqrt{2} \text{ m}$ 10. $Obw. = 100 \text{ cm}$
 11. $P = 240 \text{ cm}^2$ 12. $P = 1460$ 13. $P = 11\,250 \text{ m}^2$

8.5 Trapezy (s. 124)

1. $P = 16 \text{ cm}^2$ 2. $P = 24 \text{ cm}^2$
 3. a) $P = 96 \text{ cm}^2, Obw. = 44 \text{ cm}$
 b) $P = 126 \text{ cm}^2, Obw. = (28 + 18\sqrt{2}) \text{ cm}$ 4. $P = 48 \text{ cm}^2$
 5. $P = 18 \text{ cm}^2, Obw. = 20 \text{ cm}$ 6. $P = 52 \text{ cm}^2$

7. $P = 100 \text{ cm}^2$ 8. $P = 24 \text{ cm}^2$ 9. $a = 62 \text{ cm}$
10. $P \approx 196,6 \text{ m}^2$

8.6 Wielokąty foremne (s. 129)

1. a) $Obw. = 24\sqrt{6} \text{ cm}$ b) $Obw. = 16\sqrt{3} \text{ cm}$ 2. $\sqrt{3}$
4. $Obw. = 20\sqrt{2} \text{ cm}$ 5. $(4 - 2\sqrt{3}) \text{ dm}$
7. a) $Obw. = 45 \text{ cm}$ b) $Obw. = 24 \text{ cm}$ c) $Obw. = 60 \text{ cm}$
8. a) 140° b) $128\frac{4}{7}^\circ$ c) 135° 9. a) 60° b) $51\frac{3}{7}^\circ$ c) 72°
10. 102 boki 12*. a) 144° b) 162° c) $172\frac{4}{5}^\circ$

8.7 Pola wielokątów (s. 132)

1. a) 26 b) 30,5 c) 22 2. 1200 cm^2 3. 3 dm^2
4. Tak, 24 dm^2 5. 8 cm, $8\sqrt{3} \text{ cm}$ 6. 18 płytek
7. 72 cm^2 8*. 60 cm^2

Czy już umiesz? (s. 138)

1. C 2. B 3. C 4. B 5. C 6. D 7. D 8. A
9. A 10. D 11. $P = 11,5$ a) 1150 m^2 12. 1,50 zł
13. 823,68 zł 14. 1 : 7 15. 30 razy 16. $P = 0,76 \text{ m}^2$
17. 90 cm 18. $P = 48 \text{ cm}^2$, $Obw. = 32 \text{ cm}$
19. $P = 168 \text{ cm}^2$, $Obw. = 64 \text{ cm}$ 20. $P = 100 - 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$
21. 64 płyty 22. $P = 4,8 \text{ dm}^2$ 23. 21 cm
24. $P = 525 \text{ cm}^2$, $Obw. = 112 \text{ cm}$ 25. 5 cm
26. O 1350 m^2 27. a) $Obw. = 78 \text{ cm}$
b) $P = 253,5\sqrt{3} \text{ cm}^2$ c) $13\sqrt{3} \text{ cm}$
28. Największe pole ma sześciokąt foremny,
a najmniejsze trójkąt równoboczny.

9. Układ współrzędnych

9.1 Układ współrzędnych na płaszczyźnie (s. 145)

1. a) A2 – apteka, C3 – dworzec PKS
b) D4 – cmentarz, A4 – szkoła c) C4 – plac Wolności
2. a) C6 – wieża, A5 – goniec, F3 – pion
b) D6 – wieża, D2 – goniec, F4 – pion
3. a) I i III b) II i IV 4. -2, 3, 0, 7, $\frac{1}{2}$, 0
5. 3, -6, 12, 0, 0, $\frac{2}{3}$ 7. $A = (-4, -2)$, $B = (4, 4)$, $C = (6, -3)$,
 $D = (-9, 2)$, $E = (-9, -4)$, $F = (0, -2)$, $G = (7, 0)$, $H = (0, 5)$,
 $I = (-5, 3)$, $J = (-2, -5)$, $K = (-7, -1)$, $L = (2, 3)$, $M = (9, -2)$,
 $N = (10, 2)$, $O = (-7, 5)$ 12. a) $A = (-5, -2)$, $B = (4, -2)$,
 $C = (6, 4)$, $D = (-4, 5)$, $E = (-7, 2)$ 14. a) (-3, -4) b) (3, 2)
15. (0, -2), (2, 0)

9.2 Układ współrzędnych na płaszczyźnie (s. 154)

1. a) $|PR| = 10$ b) $|PR| = 2$ c) $|PR| = 10$ d) $|PR| = 2\sqrt{10}$
e) $|PR| = 17$ f) $|PR| = 25$ 2. AB, EF
5. a) $R = (-2, 0)$, $R = (0, -6)$ b) $R = (-3, 3)$, $R = (1, -9)$
c) $R = (2, -2)$ d) $R = (-4, -4)$ e) $R = (11, 1)$ f) $R = (-7, -5)$
6. a) $B = (4, 3)$, $B = (-4, 1)$ b) $B = (8, 4)$, $B = (-8, 0)$
c) $B = (1, -2)$, $B = (-1, 6)$ d) $B = (2, -6)$, $B = (-2, 10)$
7. $Obw. = 54$ 8. a) 16 b) 30 9. a) $Z = (0, -5)$
b) $Z = (-1\frac{1}{2}, 1)$ c) $Z = (3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$ 10. a) $L = (13, -1)$
b) $L = (3, -9)$ c) $L = (2, -3)$ 11. $|KS| = 7$
12. $|CD| = 3\frac{1}{2}$ 13*. a) $|AD| = \frac{\sqrt{97}}{2}$, $|BE| = \frac{\sqrt{97}}{2}$, $|CF| = 4$
b) $|AD| = \sqrt{26}$, $|BE| = \sqrt{29}$, $|CF| = \sqrt{65}$

9.3 Figury w układzie współrzędnych (s. 161)

2. a) romb b) trapez prostokątny
c) trapez równoramienny d) trapez prostokątny
e) równoległobok
3. trójkąt prostokątny równoramienny, $Obw. = 10 + 5\sqrt{2}$
4. a) $Obw. = 24$ b) $Obw. = 5 + \sqrt{34} + \sqrt{65}$
5. a) $|KL| = 10$, $|KM| = \sqrt{89}$, $|LM| = \sqrt{89}$ b) $h = 8$
6. a) $A = (4, 0)$ b) $A = (-3, -6)$ c) $A = (5, -4)$
7. $T = (-4, 2)$, $Obw. = 24$ 8. a) $D = (-2, 3)$ b) $Obw. = 28$
c) (1, -5), (4, -1), (1, 3), (-2, -1) d) romb, $Obw. = 20$, $P = 24$
9. (-3, 1), (-1, -3), (5, 3) 10. a) $D = (-3, 5)$ b) $D = (5, 5)$
c) $D = (3, 5)$ d) $D = (7, 5)$ e) $D = (-9, 5)$ f) $D = (3, -1)$
11. a) $C = (-2, 0)$, $D = (-5, -3)$ lub $C = (4, -6)$, $D = (1, -9)$
b) $C = (-2, -3)$, $D = (1, -6)$ lub $C = (1, -6)$, $D = (-2, -3)$
12. a) $L = (-1, 1)$; $L = (3, 2)$ b) $L = (-4, 1)$; $L = (0, 1)$
c*) $L = (3, 4)$; $L = (0, 4)$; $L = (0, 0)$; $L = (3, 0)$
d*) $L = (1, -5)$; $L = (3, -5)$; $L = (5, -3)$; $L = (3, 1)$; $L = (1, 1)$;
 $L = (-1, -1)$ 13*. $R = (2, -1)$, $T = (-2, 5)$; $R = (-2, -1)$,
 $T = (2, 5)$; $R = (-3, 0)$, $T = (3, 4)$ 14*. $M = (2, 5)$; $M = (0, 3)$;
 $M = (-2, 5)$; $M = (-2, -3)$; $M = (0, -1)$; $M = (2, -3)$
15*. $C = (9, 5)$, $D = (4, 4)$ 16. (0, 0), (2, -3), (6, -3), (8, 0),
(12, 0), (14, 3), (6, 3), (8, 6), (0, 6), (2, 3), (-6, 3), (-4, 0)

9.4 Pola figur w układzie współrzędnych (s. 167)

1. a) 27 b) 45 c) 16,5 d) 24
2. a) 25 b) 8 c) 56 d) 42 3. a) 24 b) $11\frac{1}{2}$
4. a) $P = 18$, $Obw. = 20$ b) $P = 84$, $Obw. = 40$
c) $P = 12$, $Obw. = 8\sqrt{5}$ 6. ABCD, IJKL, XYZ
10. a) $P = 24$ b) $P = 26$ c) $P = 42\frac{1}{2}$
11. a) $2\sqrt{10}$, $4\sqrt{10}$ b) $Obw. = 20\sqrt{2}$ c) $P = 40$
12*. a) $Obw. = 44$ b) $A = (-3, -12)$, $D = (12, -4)$
lub $A = (-3, -2)$, $D = (12, 6)$

Czy już umiesz? (s. 170)

1. B 2. C 3. A 4. D 5. B 6. C 7. C
8. C 9. A 10. B 11. a) P b) P 12. a) F b) P c) P
13. a) F b) P 14. a) P b) F 15. a) F b) F
17. a) KARTEZJUSZ b) MATEMATYKA: (1, 0), (-3, 2),
(-2, -2), (-3, 1), (1, 0), (-3, 2), (-2, -2), (1, -2), (-2, 0), (-3, 2);
WAKACJE: (0, -2), (-3, 2), (-2, 0), (-3, 2), (0, 2), (-3, 0), (-3, 1);
PRZYGODA: (0, -1), (1, -1), (2, -2), (1, -2), (0, 1), (-2, -1), (2, 2),
(-3, 2); RADOŚĆ: (1, -1), (-3, 2), (2, 2), (-2, -1), (-3, -2), (1, 2)
20. $C = (6, 2)$; $C = (1, 2)$; $C = (1, 7)$; $C = (-9, -3)$; $C = (-4, -3)$;
 $C = (-4, -8)$ 22*. (3, 0), (0, 4), (-3, 0), (0, -4) lub (4, 0),
(0, 3), (-4, 0), (0, -3) 23. a) $C = (2, -1)$, $D = (-4, -1)$
lub $C = (2, 11)$, $D = (-4, 11)$ b) $C = (2, 2)$, $D = (-4, 2)$
lub $C = (2, 8)$, $D = (-4, 8)$ c) $C = (2, 1)$, $D = (-4, 1)$
lub $C = (2, 9)$, $D = (-4, 9)$ 24. $R = (27, 38)$; $R = (23, 32)$
25. $Obw. = 48$, $P = 84$ 26. $Obw. = 40$, $P = 100$
27. $P = 50$ 28. b) $2\sqrt{85}$ c) $Obw. = 54$ d) $P = 168$
29. $Obw. = 4\sqrt{85}$, $P = 68$
30. a) 10, 24 b) $Obw. = 52$ c) (3, -1), (15, 4), (3, 9)
31. a) $P = 22,5$ b) $P = 41$ c) $P = 10$

Indeks

C			R		
ćwiartki układu współrzędnych	144		redukcja wyrazów podobnych	53	
D			roztwór	96	
dowód	36		rozwiązanie równania	77	
druga cecha przystawania trójkątów	23		równania równoważne	78	
E			równanie	76	
etapy rozwiązywania zadań tekstowych	92		sprzeczne	85	
F			tożsamościowe	85	
figury przystające	20		z jedną niewiadomą	77	
J			rzędna punktu	143	
jednomian	51		S		
jednomiany podobne	52		stężenie procentowe	96	
K			stopień równania	77	
kąty			suma algebraiczna	53	
naprzemianległe	13		sześciokąt foremny	128	
odpowiadające	13		T		
wklęsłe	8		trójkąt równoboczny	126	
wypukłe	8		trzecia cecha przystawania trójkątów	24	
L			twierdzenie		
liczba spełniająca równanie	78		Pitagorasa	26	
M			odwrotne do twierdzenia Pitagorasa	28	
metoda równań równoważnych	81		U		
N			układ kartezjański	143	
niewiadoma	76		W		
O			wartość liczbową wyrażenia algebraicznego	48	
odcięta punktu	143		węzeł	32	
oś			wielokąt		
odciętych	143		foremny	125	
rzędnych	143		wklęsły	125	
P			wypukły	125	
pierwsza cecha przystawania trójkątów	22		wielokąty przystające	21	
pierwiastek równania	77		wielomian	52	
pięciokąt foremny	127		współczynnik liczbowy jednomianu	52	
początek układu współrzędnych	143		współrzędne		
pole sześciokąta foremnego	131		punktu	143	
porządkowanie jednomianu	51		środką odcinka	154	
prostokątny układ współrzędnych	143		wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias	61	
przeciwprostokątna	26		wyrazy		
przyprostokątna	26		podobne	53	
punkt kratowy	143		sumy	53	
			wyrażenia algebraiczne	44	
			wysokość trójkąta równobocznego	126	
			wzór Herona	49	
			Z		
			zbiór rozwiązań	77	
			zmienna	44	



Grupa MAC S.A.
ul. Witosa 76
25-561 Kielce

www.mac.pl