Matematyka

8

Podręcznik
część 1

Oznaczono zmiany
W PODSTAWIE
PROGRAMOWEJ
2024



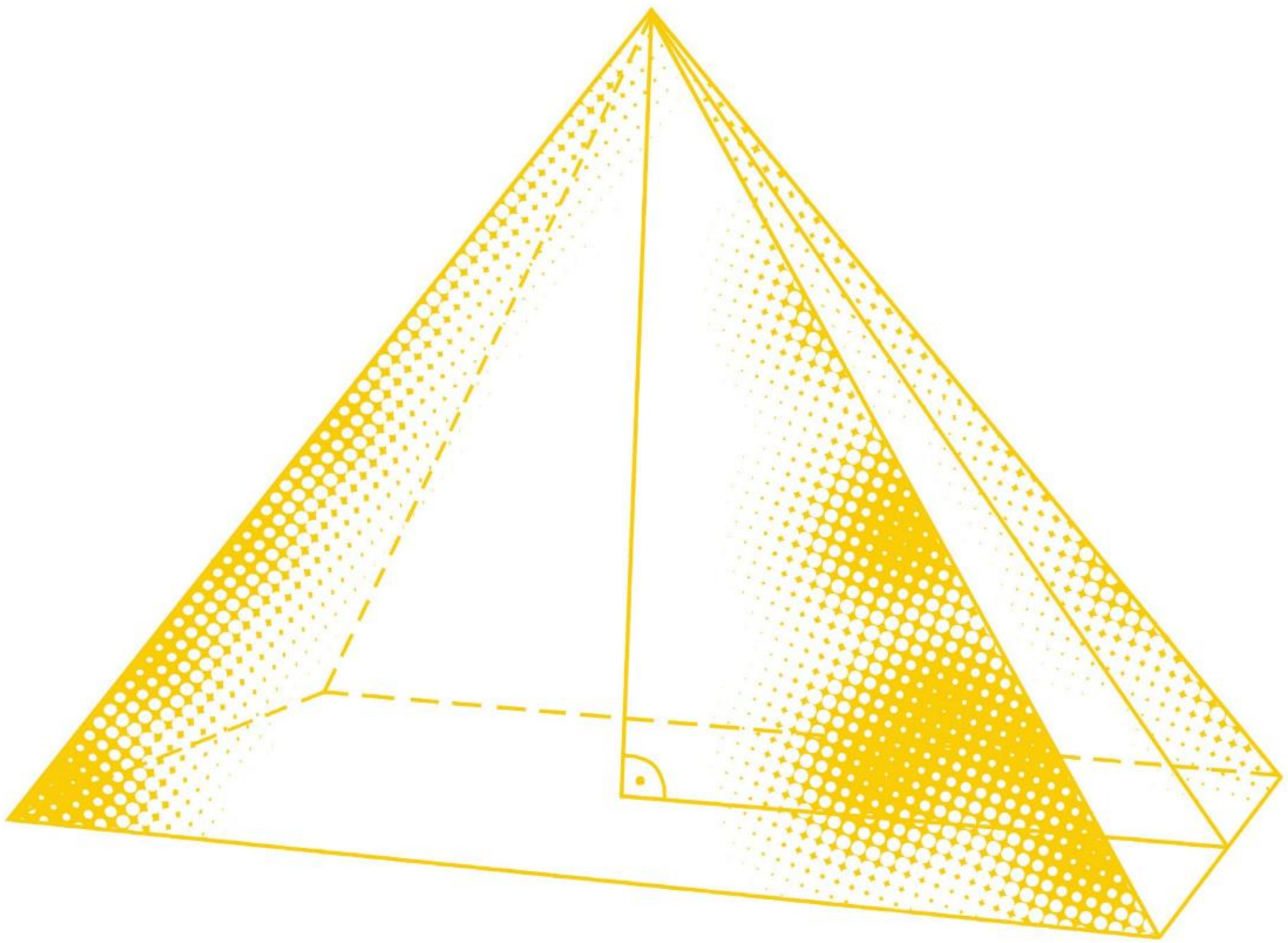
mac
EDUKACJA

Monika Czajkowska
Małgorzata Ogłoza-Fisiak
Teresa Gwadowska

8

Matematyka

Podręcznik dla klasy ósmej szkoły podstawowej
część 1



mac
EDUKACJA

Redaktor serii
Justyna Kubicka

Redakcja merytoryczna
Monika Czajkowska
Adam Pawłowski
Anna Kotwica

Redakcja językowa i korekta
Krystyna Bajor

Redakcja techniczna
Paweł Kowalski

Skład i łamanie
Adam Ziółkowski

Redakcja artystyczna
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska
Marcin Kot

Projekt i koncepcja artystyczna
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Koordynacja prac graficznych
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska

Projekt okładki
Futu Creative

Ilustracja na okładce, na stronie tytułowej
i ilustracje na stronach działowych
Acapulco Studio / Agata Dudek i Małgorzata Nowak-Żurek

Fotoedycja
Grzegorz Wrzecionowski

Ilustracje
Agata Zarzycka (s. 7, 16, 29, 50, 65), Olga Kawacińska (s. 6, 12, 23, 42, 64, 72, 90), Marcin Kot (s. 25, 28), Carto Team Chariza Krystian (s. 56, 88, 92), Katarzyna Surman-Pusz (s. 109, 117, 118, 120, 123), Joanna Majewska (s. 103, 146), Agnieszka Staniec (s. 150-151/projekt Linku do wiedzy)

Wykaz dysponentów praw autorskich do obrazów i zdjęć zamieszczonych w publikacji
Wikipedia: Szilas (parasol kościelny, s. 141), Erik16 (Kopuła geodezyjna w parku EPCOT, s. 151), Shutterstock: Kwirry (Leonardo da Vinci - człowiek witruwiański, s. 12), timquo (kostka czworościenna, s. 73), Dincer.agin (kostki do gry, s. 76), Pladaphoto (pudełko prezentowe, s. 98), Fedorov Oleksiy (pudełko prezentowe, s. 98), Dario Lo Presti (pudełko prezentowe, s. 98), Moolkum (pudełko prezentowe, s. 98), DenisMArt (opakowanie, s. 103), designisyours (opakowanie, s. 103), AlexandrBognat (opakowanie, s. 103), alexhumbertoa (opakowanie, s. 103), piczone2113 (szkatułka, s. 103), David Acosta Allely (szkatułka, s. 103), Erik Svoboda (szkatułka, s. 103), Studio Peace (szkatułka, s. 103), brulove (kawałek sera, s. 115), V.Semeniuk (wieża, s. 126), Yuriy Boyko (świeczka, s. 126), Lilkin (wigwam, s. 126), ASTroi (kostka pyraminx, s. 126), Mikael Damkier (piramidy w Egipcie, s. 127), Zhukova Valentyna (piramida w Luwrze, s. 139), Albert Russ (fluoryt, s. 144)

Wydawca oświadcza, że dołożył wszelkich starań, aby dotrzeć do wszystkich właścicieli i dysponentów praw autorskich.
Osoby, których nie udało nam się ustalić, prosimy o kontakt z wydawnictwem.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Przestrzegaj praw, jakie im przysługują. Udostępniając książkę lub jej fragmenty, rób to wyłącznie w zakresie dozwolonego użytku, który określają przepisy prawa. Zawartość książki możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

© Grupa MAC S.A., Kielce 2021

ISBN 978-83-8227-131-7

Treści usunięte z podstawy programowej w 2024 r.

Grupa MAC S.A.
25-561 Kielce, ul. Witosa 76
tel. 41 366 55 55, faks: 41 366 33 02
e-mail: kontakt@mac.pl; www.mac.pl

Spis treści

1. Proporcjonalność prosta

1.1 Proporcja i jej własności — **6**

1.2 Zastosowanie proporcji do rozwiązywania problemów — **12**

1.3 Wielkości wprost proporcjonalne — **16**

1.4 Zastosowanie wielkości wprost proporcjonalnych — **23**

1.5 Podział proporcjonalny — **29**

Podsumowanie działu 1 — **37**

2. Wprowadzenie do statystyki i rachunku prawdopodobieństwa

2.1 Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w tabelach i na diagramach — **42**

2.2. Odczytywanie i interpretowanie danych statystycznych z wykresów — **50**

2.3 Zbieranie, porządkowanie i przedstawianie danych — **58**

2.4 Średnia arytmetyczna — **65**

2.5 Doświadczenie losowe — **72**

2.6 Częstości występowania zdarzeń w doświadczeniach losowych — **77**

2.7 Prawdopodobieństwo zdarzenia — **81**

Podsumowanie działu 2 — **86**

3. Graniastosłupy

3.1 Graniastosłupy i ich własności — **98**

3.2 Pole powierzchni graniastosłupa — **104**

3.3 Objętość graniastosłupa — **110**

3.4 Pole i objętość graniastosłupa — **117**

Podsumowanie działu 3 — **121**

4. Ostrosłupy

4.1 Ostrosłupy i ich własności — **126**

4.2 Pole powierzchni ostrosłupa — **132**

4.3 Objętość ostrosłupa — **137**

4.4 Pole powierzchni i objętość ostrosłupa — **142**

Podsumowanie działu 4 — **147**

Link do wiedzy *Niezwykłe wielościany* — **150**

Odpowiedzi do zadań — **152**

Indeks — **157**

Jak korzystać z podręcznika

Numer i tytuł tematu

Podejmij temat
Wprowadzenie do tematu lekcji

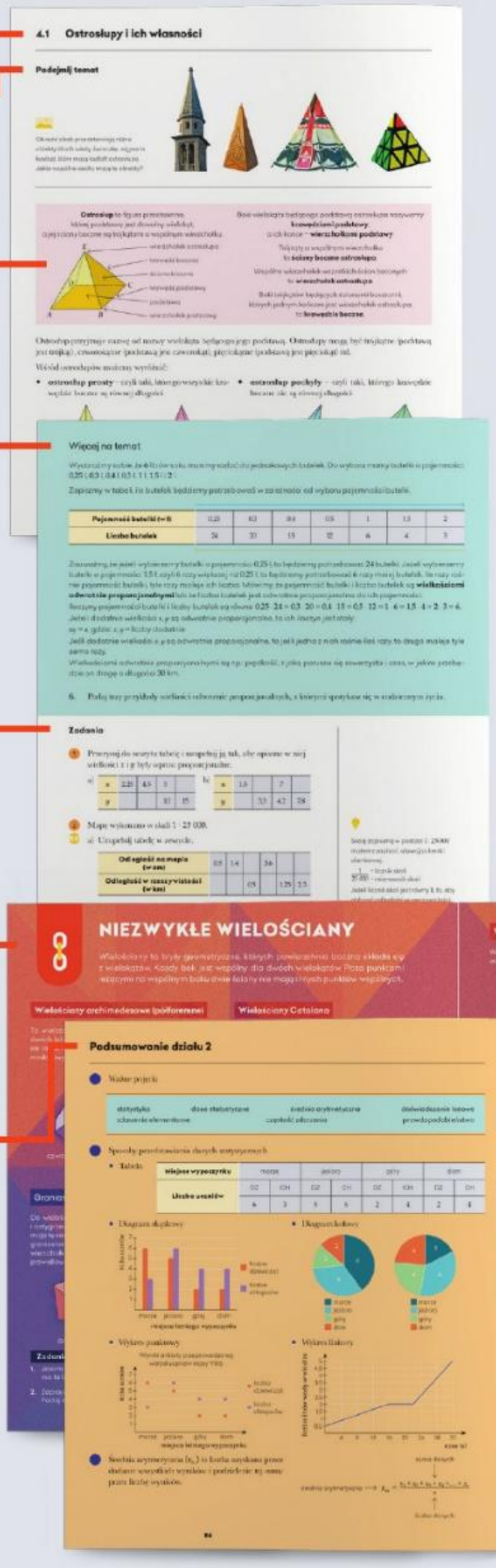
Treści powtórzeniowe

Więcej na temat
Treści dodatkowe

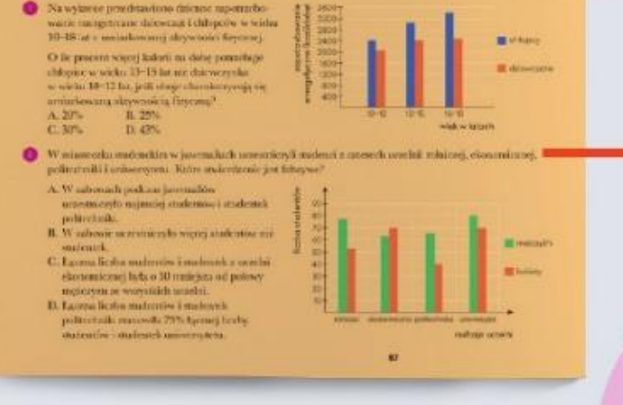
Zadania
Zadania utrwalające materiał

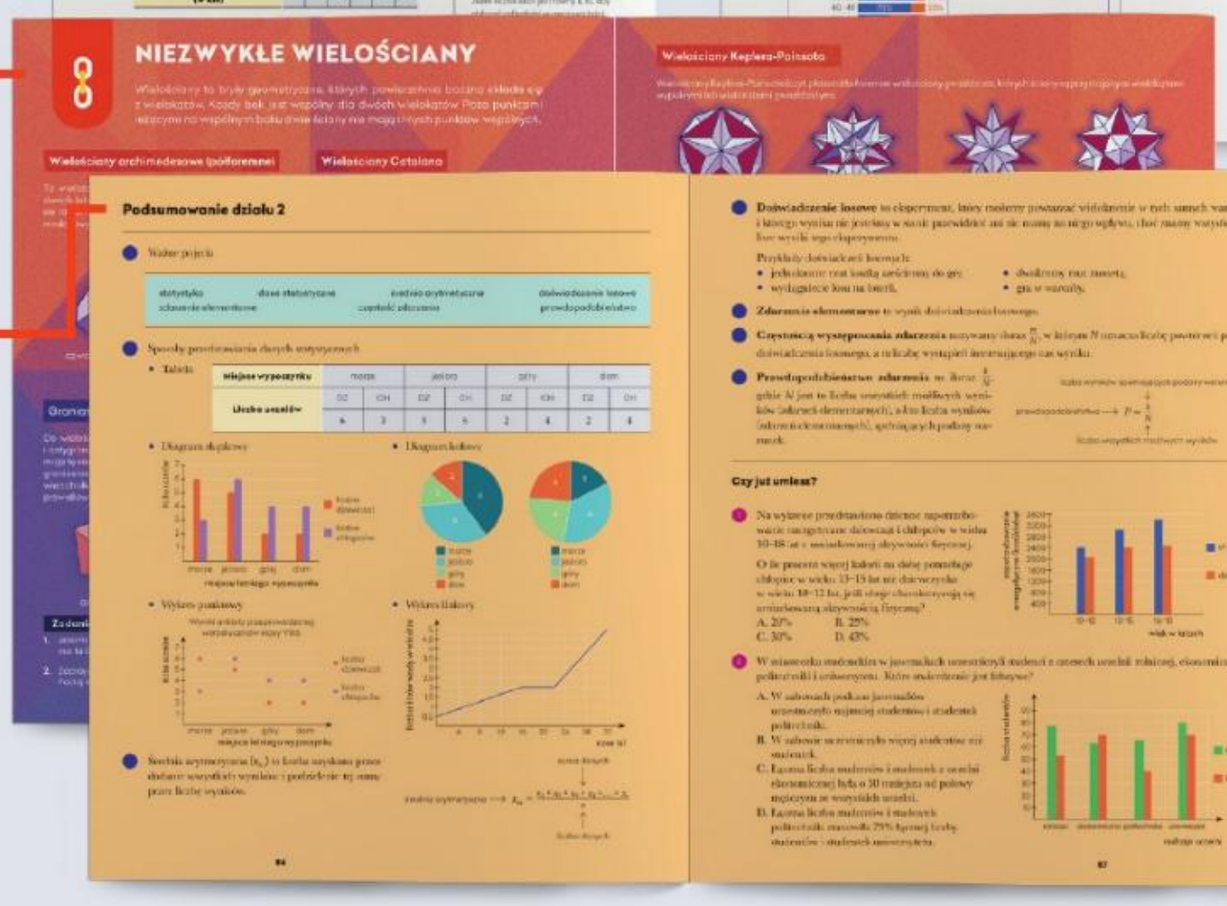
Link do wiedzy
Treści, które mogą rozwinąć twoje zainteresowania

Podsumowanie działu
Powtórzenie najważniejszych treści działu









Tego podręcznika będą używać inni uczniowie. Niczego w nim nie zapisuj. Przekaż go w dobrym stanie.

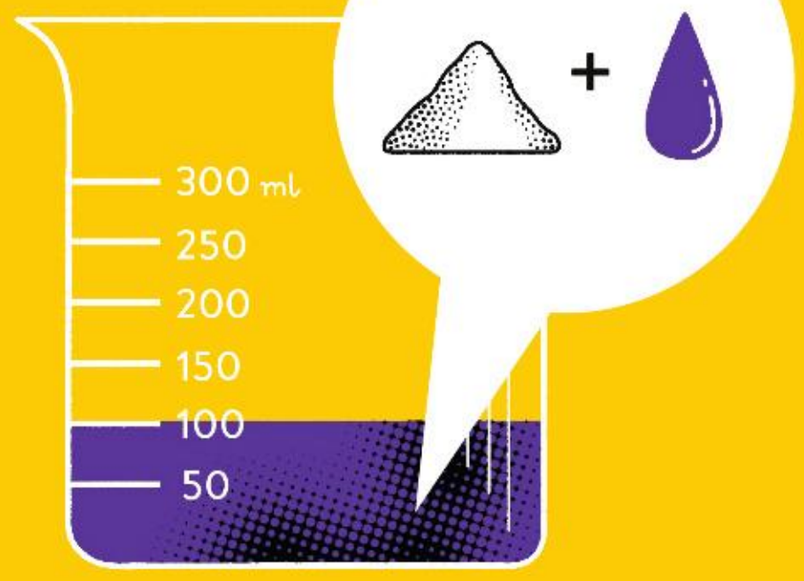
Znaczenie ikon

- nawiązanie do innego przedmiotu
- zastosowanie nowoczesnych technologii
- uwaga
- nawiązanie do ilustracji
- praca zespołowa
- polecenie trudniejsze

1. Proporcjonalność prosta

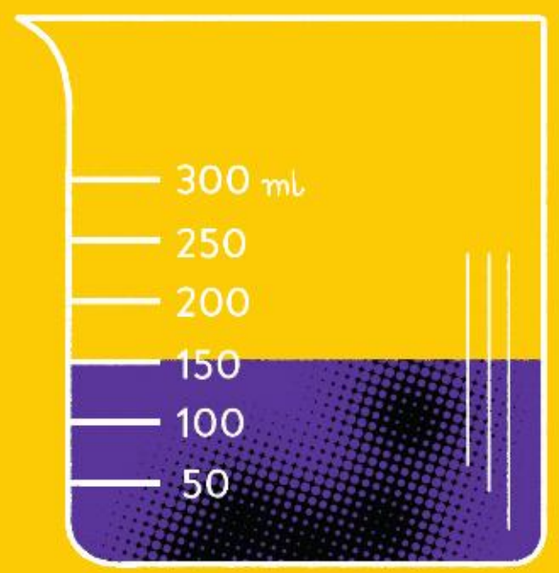


50 g





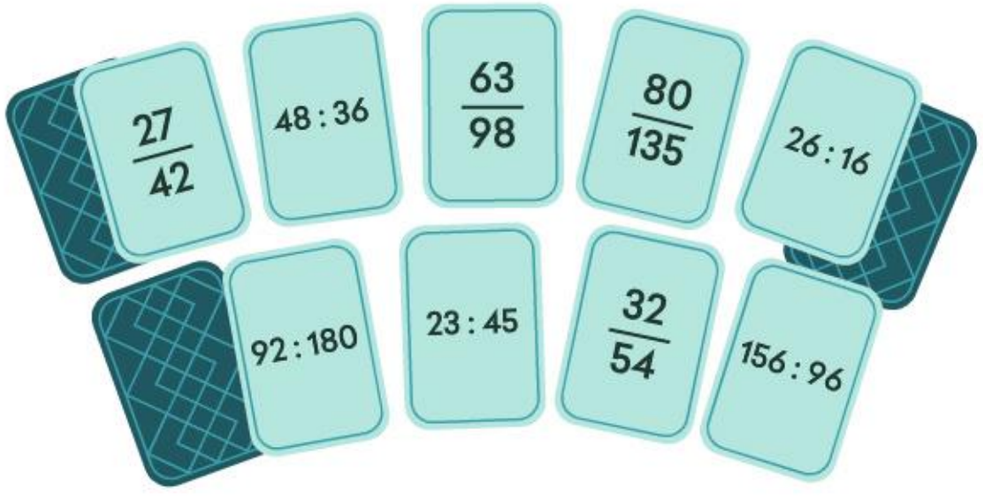
x g



1. Jaka jest masa 1 litra wody? Powiedz, jaka jest masa wody w pierwszym naczyniu, a jaka w drugim.
2. Ilu procentowy roztwór otrzymamy, jeśli do naczynia, w którym jest 100 ml wody, wsypiemy 50 g soli?
3. Ile gramów soli musimy wsypać do naczynia, w którym jest 150 ml wody, aby otrzymać roztwór o takim samym stężeniu jak poprzednio? Jaka będzie masa tego roztworu?
4. Jak myślisz, ile gramów soli i ile gramów wody będzie w 1,5 kg roztworu o takim samym stężeniu?

1.1 Proporcja i jej własności

Podejmij temat



Karty, na których ilorazy są równe, tworzą parę. Które to karty?
Która karta nie ma pary? Zapisz w zeszycie przykład ilorazu, który mógłby znajdować się na karcie tworzącej z nią parę.

Proporcją nazywamy równość dwóch ilorazów.

$$a : b = c : d \text{ lub } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$b \neq 0, d \neq 0$

Zapisy te czytamy: a ma się tak do b, jak c do d.

W proporcji występują cztery wielkości, które nazywamy wyrazami proporcji.
W proporcji $a : b = c : d \left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$ wyrazy a i d to wyrazy skrajne, b i c to wyrazy środkowe.

wyrazy skrajne

$a : b = c : d$

wyrazy środkowe

wyraz skrajny — wyraz środkowy

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

wyraz środkowy — wyraz skrajny

Przykład 1

Wskażmy wyrazy skrajne i wyrazy środkowe w podanych proporcjach.

a) $2 : 3 = 12 : 18$ b) $\frac{10{,}5}{6} = \frac{5{,}6}{3{,}2}$ c) $1\frac{3}{5} : 3 = \frac{2}{15} : \frac{1}{4}$

a) $2 : 3 = 12 : 18$ — 2 i 18 to wyrazy skrajne, 3 i 12 to wyrazy środkowe

b) $\frac{10{,}5}{6} = \frac{5{,}6}{3{,}2}$ — 10,5 i 3,2 to wyrazy skrajne, 6 i 5,6 to wyrazy środkowe

c) $1\frac{3}{5} : 3 = \frac{2}{15} : \frac{1}{4}$ — $1\frac{3}{5}$ i $\frac{1}{4}$ to wyrazy skrajne, 3 i $\frac{2}{15}$ to wyrazy środkowe

1. Wskaż wyrazy skrajne i wyrazy środkowe w podanych proporcjach.

a) $4{,}2 : 1{,}2 = 35 : 10$ b) $\frac{3}{5} = \frac{15}{25}$ c) $6 : 2\frac{1}{3} = \frac{9}{7} : \frac{1}{2}$

W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych
jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

Jeśli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ to $a \cdot d = b \cdot c$

Jeśli znamy trzy wyrazy proporcji $a : b = c : d \left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$, gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, to możemy wyznaczyć czwarty wyraz, korzystając z jednego ze wzorów:

$a = \frac{bc}{d}$, $b = \frac{ad}{c}$, $c = \frac{ad}{b}$, $d = \frac{bc}{a}$.

Wzory te znane są jako **reguła trzech**.
Powyższe własności wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań, które są zapisane w postaci proporcji.

Przy proporcjach często mówimy, że mnożymy liczby po skosie, czyli na krzyż:

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$



Przykład 2

W każdej proporcji wpiszmy w miejsce liter odpowiednie liczby.

a) $\frac{7}{15} = \frac{t}{105}$ b) $18 : s = 5{,}4 : 3{,}6$, $s \neq 0$ c) $\frac{8}{28} = \frac{6}{27 - w}$, $w \neq 27$

a) **Sposób I**

$\frac{7}{15} \times \frac{t}{105}$ Mnożymy na krzyż.

$7 \cdot 105 = 15 \cdot t$

$735 = 15t \mid : 15$ Obie strony równania dzielimy przez 15.

$t = 49$

Sposób II

$t = \frac{7 \cdot 105}{15}$ Korzystamy ze wzoru: $c = \frac{ad}{b}$

$t = 49$

Sposób III

$\frac{7}{15} = \frac{7 \cdot 7}{15 \cdot 7} = \frac{49}{105}$ Rozszerzamy ułamek $\frac{7}{15}$ tak, aby w mianowniku otrzymać liczbę równą mianownikowi drugiego ułamka, czyli 105.

$\frac{49}{105} = \frac{t}{105}$ Mianowniki ułamków są takie same, więc liczniki tych ułamków też muszą być takie same.

$t = 49$

b) **Sposób I**

$18 : s = 5{,}4 : 3{,}6$

$18 \cdot 3{,}6 = 5{,}4 \cdot s$ — Korzystamy z własności, że iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

$64{,}8 = 5{,}4s \mid : 5{,}4$ — Obie strony równania dzielimy przez 5,4.

$s = 12$

Sposób II

$s = \frac{18 \cdot 3{,}6}{5{,}4}$ — Korzystamy ze wzoru: $b = \frac{ad}{c}$

$s = 12$

c) **Sposób I**

$\frac{8}{28} = \frac{6}{27 - w}$ — Mnożymy na krzyż.

$8 \cdot (27 - w) = 6 \cdot 28$ — Mnożymy sumę algebraiczną przez 8.

$216 - 8w = 168 \mid - 216$ — Od obu stron równania odejmujemy 216.

$-8w = -48 \mid : (-8)$ — Obie strony równania dzielimy przez −8.

$w = 6$

Sposób II

$\frac{8}{28} = \frac{8 : 4}{28 : 4} = \frac{2}{7}$ — Skracamy ułamek $\frac{8}{28}$ tak, aby otrzymać ułamek nieskracalny.

$\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$ — Rozszerzamy ułamek $\frac{2}{7}$ tak, aby w liczniku otrzymać liczbę równą licznikowi drugiego ułamka, czyli 6.

$\frac{6}{21} = \frac{6}{27 - w}$ — Liczniki ułamków są równe, więc mianowniki tych ułamków też muszą być równe.

$21 = 27 - w$

$w = 6$

Przy mnożeniu na krzyż nie musimy zaznaczać kresek. Wystarczy, że ułożymy proporcję, a następnie zapiszemy, że iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych.

2. Wpisz odpowiednią liczbę w miejsce liter w każdej proporcji.

a) $4{,}2 : 7{,}7 = 30 : k,\ k \neq 0$

b) $m : 1\frac{3}{4} = 2\frac{1}{5} : 3\frac{1}{5}$

c) $\frac{3}{1{,}8} = \frac{n - 11}{39}$

d) $\frac{2}{s + 5} = \frac{9}{31{,}5},\ s \neq -5$

Podczas przekształcania równań musimy uważać przy dzieleniu przez niewiadome, ponieważ nie wolno dzielić przez 0.
Do rozwiązywania równań często stosuje się **metodę równań równoważnych**. Polega ona na takim przekształcaniu danego równania, aby na każdym etapie otrzymywać równanie prostsze, lecz równoważne danemu.

Możemy w tym celu:

- do obu stron równania dodać tę samą liczbę (lub to samo wyrażenie algebraiczne),
- od obu stron równania odjąć tę samą liczbę (lub to samo wyrażenie algebraiczne),
- obie strony równania pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera,
- obie strony równania podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Po rozwiązaniu równania warto wykonać sprawdzenie.

Przykład 3

Rozwiążmy równania. Zapiszmy konieczne założenia.

a) $\frac{x-12}{x-3} = \frac{2\frac{2}{3}}{3\frac{2}{3}}$ b) $\frac{z-4}{z-2} = \frac{z+1}{z+8}$

a) $\frac{x-12}{x-3} = \frac{2\frac{2}{3}}{3\frac{2}{3}}$

Wyrażenia w mianowniku muszą być różne od zera, więc $x \neq 3$. Mnożymy na krzyż.

$(x-12) \cdot 3\frac{2}{3} = (x-3) \cdot 2\frac{2}{3}$

Mnożymy sumy algebraiczne przez liczby.

$(x-12) \cdot \frac{11}{3} = (x-3) \cdot \frac{8}{3}$

$\frac{11}{3}x - {}^{4}\!\!\not{12} \cdot \frac{11}{\not 3_1} = \frac{8}{3}x - \not 3_1 \cdot \frac{8}{\not 3_1}$

$\frac{11}{3}x - 44 = \frac{8}{3}x - 8 \mid -\frac{8}{3}x$

Od obu stron równania odejmujemy $\frac{8}{3}x$.

$x - 44 = -8 \mid + 44$

Do obu stron równania dodajemy 44.

$x = 36$

b) $\frac{z-4}{z-2} = \frac{z+1}{z+8}$

Wyrażenia w mianowniku muszą być różne od zera, więc $z \neq 2$ i $z \neq -8$. Mnożymy na krzyż.

$(z-4) \cdot (z+8) = (z-2) \cdot (z+1)$

Mnożymy sumy algebraiczne.

$z^2 + 8z - 4z - 32 = z^2 + z - 2z - 2$

Redukujemy wyrazy podobne.

$z^2 + 4z - 32 = z^2 - z - 2 \mid -z^2$

$4z - 32 = -z - 2 \mid + z$

$5z - 32 = -2 \mid + 32$

Przekształcamy równanie tak, aby tylko po lewej stronie otrzymać wyrazy z niewiadomą. Od obu stron równania odejmujemy z^2, następnie do obu stron równania dodajemy z oraz liczbę 32.

$5z = 30 \mid : 5$

Obie strony równania dzielimy przez 5.

$z = 6$

3. Rozwiąż równania. Zapisz konieczne założenia.

a) $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-4}$ b) $\frac{y+1}{2y} = \frac{3{,}5}{4{,}2}$ c) $\frac{3+z}{12-z} = \frac{5+z}{13-z}$

Zadania

Dla każdej z poniższych proporcji oblicz iloczyn wyrazów skrajnych i iloczyn wyrazów środkowych.

a) $3 : 8 = 21 : 56$

b) $121 : 55 = 264 : 120$

c) $\frac{68}{36} = \frac{17}{9}$

d) $3 : 16 = 2{,}7 : 14{,}4$

e) $\frac{0{,}09}{0{,}81} = \frac{0{,}5}{4{,}5}$

f) $5\frac{1}{3} : 3\frac{5}{9} = \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$

Korzystając z własności proporcji, sprawdź, czy zachodzi równość między podanymi ilorazami. Wstaw w miejsce ? znak = lub ≠.

a) $\frac{3}{8} \; ? \; \frac{27}{72}$

b) $\frac{6}{15} \; ? \; \frac{15}{37{,}5}$

c) $\frac{0{,}8}{0{,}5} \; ? \; \frac{6{,}4}{0{,}4}$

d) $\frac{1\frac{7}{8}}{1\frac{1}{20}} \; ? \; \frac{25}{14}$

e) $1{,}3 : 3 \; ? \; 5{,}8 : 13{,}5$

f) $5 : 4 \; ? \; 2\frac{3}{8} : 1\frac{9}{10}$

Zapisz wszystkie możliwe proporcje, których wyrazami są podane liczby.

a) 6, 18, 23, 69

b) 0,4; 0,9; 2,8; 6,3

W zapisanych proporcjach wskaż wyrazy skrajne i środkowe.

Wpisz odpowiednie liczby w miejsce liter w każdej proporcji (zakładamy, że niewiadome w mianownikach są różne od zera).

a) $\frac{7}{8} = \frac{n}{24}$

b) $\frac{r}{5{,}4} = \frac{11}{6}$

c) $\frac{7}{w} = \frac{49}{1}$

d) $72 : p = 6 : 5$

e) $5 : 12 = k : 15{,}6$

f) $5\frac{1}{3} : 6 = 8 : z$

g) $q : 7{,}5 = 8 : 25$

h) $\frac{15}{52} = \frac{9}{m}$

Rozwiąż równania. Zapisz konieczne założenia.

a) $\frac{a-6}{55} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{3b-1} = \frac{3{,}9}{6{,}5}$

c) $\frac{3\frac{3}{4}}{5} = \frac{1}{1+c}$

d) $\frac{1+d}{5-2d} = \frac{1{,}6}{2{,}4}$

e) $\frac{4}{3e-4} = \frac{6}{4e-1}$

f) $\frac{5-2f}{4-2f} = \frac{2f-1}{2f+1}$

g) $\frac{3g+5}{3g-4} = \frac{7-3g}{6-3g}$

h) $\frac{3\frac{1}{3}}{4} = \frac{8h+3}{7-4h}$

Znajdź ułamek, w którym

a) licznik jest o 5 mniejszy od mianownika i który jest równy ułamkowi $\frac{2}{3}$.

b) licznik jest o 9 większy od mianownika i który jest równy ułamkowi $\frac{7}{4}$.

c) mianownik jest o 12 mniejszy od licznika i który jest równy ułamkowi $\frac{8}{5}$.

d) mianownik jest o 10 większy od licznika i który jest równy ułamkowi $\frac{9}{11}$.

Jeżeli pewną liczbę podzielimy przez liczbę o 3 od niej mniejszą, to otrzymamy $\frac{7}{4}$. Jaka to liczba?

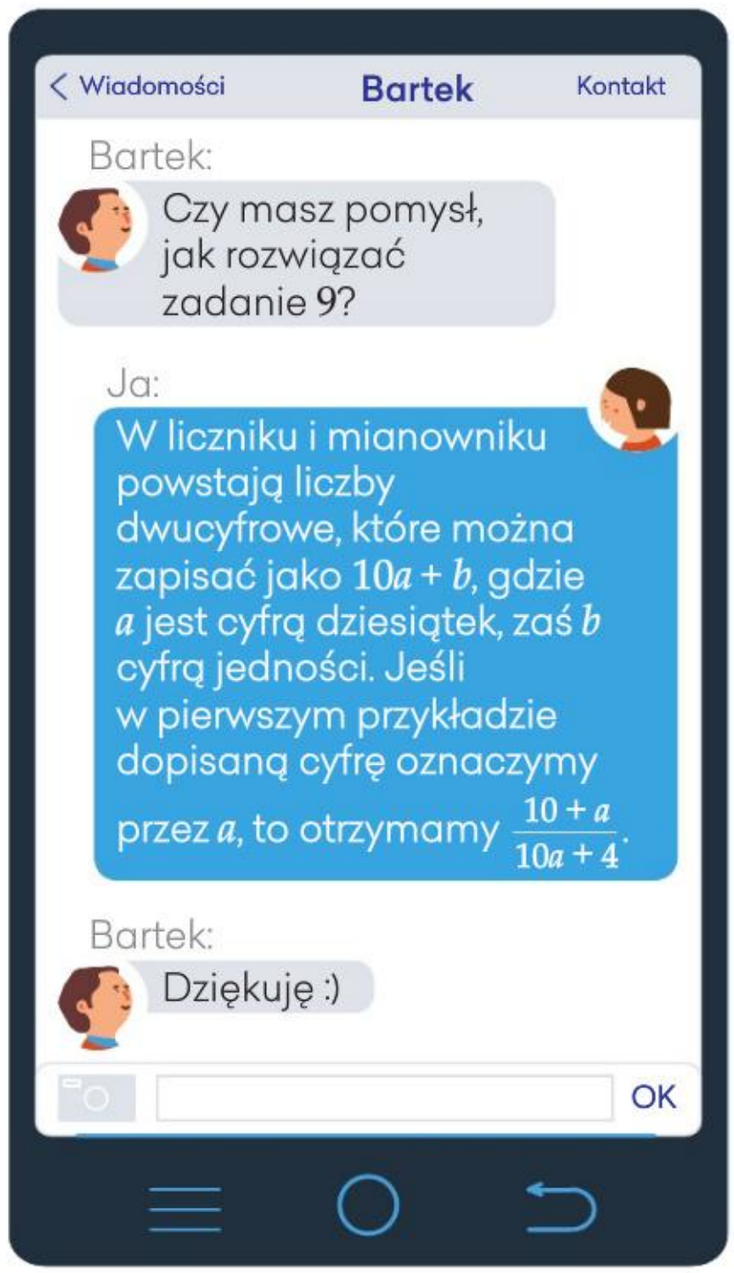
Ułamki A i B są równe. Mianownik ułamka A jest równy licznikowi ułamka B. W ułamku A licznik jest o 6 mniejszy od mianownika. W ułamku B – mianownik jest o 10 większy od licznika. Znajdź te ułamki.

Przeczytaj polecenia. Oblicz, jaką cyfrę dopisano oraz jaki ułamek otrzymano.

a) W liczniku ułamka $\frac{1}{4}$ dopisano za cyfrą 1 pewną cyfrę i tę samą cyfrę dopisano w mianowniku tego ułamka przed cyfrą 4. Otrzymano ułamek równy ułamkowi $\frac{1}{4}$.

b) W liczniku ułamka $\frac{1}{5}$ dopisano za cyfrą 1 pewną cyfrę i tę samą cyfrę dopisano w mianowniku tego ułamka przed cyfrą 5. Otrzymano ułamek równy ułamkowi $\frac{1}{5}$.

c) W liczniku ułamka $\frac{2}{5}$ dopisano za cyfrą 2 pewną cyfrę i tę samą cyfrę dopisano w mianowniku tego ułamka przed cyfrą 5. Otrzymano ułamek równy ułamkowi $\frac{2}{5}$.



Uzasadnij, że jeśli $a : b = c : d$, to prawdziwe są poniższe wzory.

a) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ $\quad b \neq 0$ i $d \neq 0$

b) $\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$ $\quad b \neq 0, d \neq 0$ i $b \neq d$

c) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ $\quad b \neq 0, d \neq 0$ i $b \neq -d$

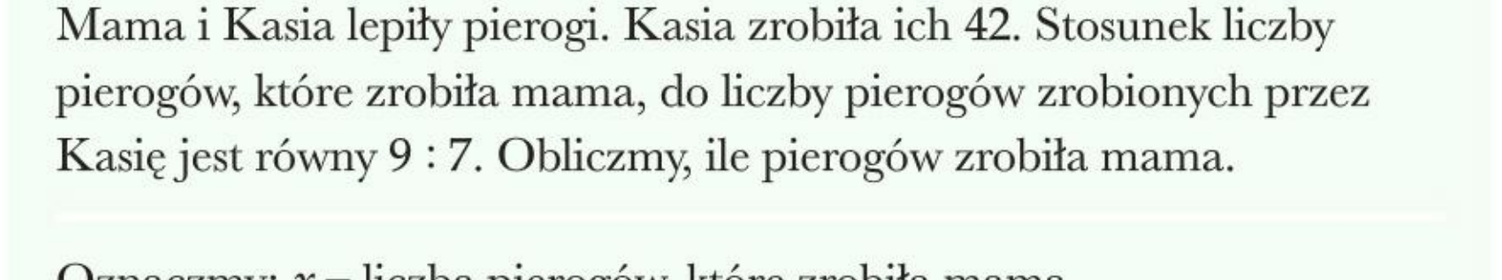
d) $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ $\quad b \neq 0, d \neq 0, a \neq -b$ i $c \neq -d$

1.2 Zastosowanie proporcji do rozwiązywania problemów

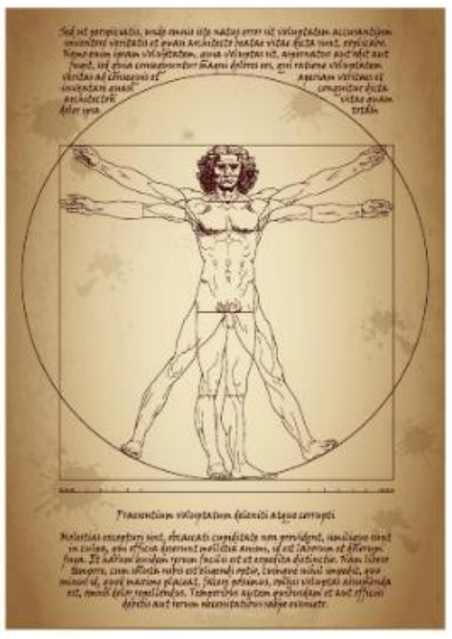
Podejmij temat

W dużym pudełku zmieści się 2,5 razy więcej klocków niż w małym. W obu pudełkach liczba klocków czerwonych jest równa $\frac{2}{3}$ liczby klocków żółtych.

Ile klocków żółtych i ile klocków czerwonych jest w małym pudełku?
Ile klocków żółtych i ile klocków czerwonych jest w dużym pudełku?



Ciekawe!



W starożytnej Grecji obowiązywały zasady zachowania określonych proporcji w architekturze i rzeźbie (kanony Polikleta i Lizypa). Uwzględnianie proporcji ważne było również w okresie renesansu. Żeby dzieło mogło być uznane za piękne (np. budowla, rzeźba, postać ludzka na obrazie), musiało spełniać warunki kanonu, tzn. części dzieła musiały pozostawać w określonych proporcjach. Np. stosunek długości głowy do długości ciała wynosił 1 : 8, stosunek długości głowy do długości twarzy – 5 : 4, stosunek wysokości budowli do długości budowli – 3 : 7. W okresie renesansu zagadnieniem proporcji zajmował się m.in. Leonardo da Vinci, który swój kanon proporcji oparł na studium ludzkiego ciała. Uznał, że ludzką sylwetkę można wpisać w kwadrat i koło, gdzie środek koła wyznacza pępek.

Proporcje często wykorzystujemy do rozwiązywania zadań tekstowych, zagadnień geometrycznych czy problemów z innych dziedzin.

Czasami zamiast mówić na przykład, że *liczba klocków czerwonych stanowi* $\frac{2}{3}$ *klocków żółtych*, mówimy: *stosunek liczby klocków czerwonych do liczby klocków żółtych jest równy 2 : 3.*

Przykład 1

Mama i Kasia lepiły pierogi. Kasia zrobiła ich 42. Stosunek liczby pierogów, które zrobiła mama, do liczby pierogów zrobionych przez Kasię jest równy 9 : 7. Obliczmy, ile pierogów zrobiła mama.

Oznaczmy: x – liczba pierogów, które zrobiła mama.

$\frac{x}{42} = \frac{9}{7}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$7x = 9 \cdot 42$

$7x = 378 \mid : 7$ Obie strony równania dzielimy przez 7.

$x = 54$

Mama zrobiła 54 pierogi.

1. W ogródku posadzono 12 krzaków róż czerwonych i kilka krzaków róż żółtych. Stosunek liczby krzaków róż czerwonych do liczby krzaków róż żółtych jest równy 3 : 2. Oblicz, ile w tym ogródku posadzono krzaków róż żółtych.

2. W międzyszkolnym konkursie matematycznym wzięło udział 108 dziewcząt. Oblicz, ilu było uczestników tego konkursu, jeśli stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców był równy 4 : 5.

Przykład 2

Jedna przyprostokątna trójkąta prostokątnego jest o 4 cm krótsza od drugiej, a stosunek długości tych przyprostokątnych jest równy 4 : 9. Obliczmy pole tego trójkąta.

Sposób I

a – dłuższa przyprostokątna trójkąta prostokątnego (w cm), $a > 4$

$b = a - 4$ – krótsza przyprostokątna trójkąta prostokątnego (w cm)

$\frac{a-4}{a} = \frac{4}{9}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

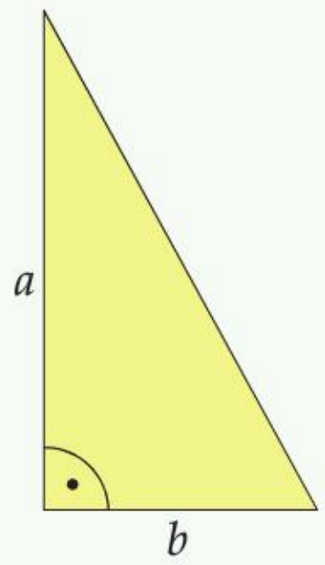
$9 \cdot (a - 4) = 4a$

$9a - 36 = 4a$

$5a = 36$

$a = 7{,}2$

$a - 4 = 7{,}2 - 4 = 3{,}2$



Przypomnijmy, że pole trójkąta prostokątnego jest równe połowie iloczynu przyprostokątnych a i b:

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 3{,}2 \cdot 7{,}2 = 11{,}52$

Sposób II

a – dłuższa przyprostokątna trójkąta prostokątnego

b – krótsza przyprostokątna trójkąta prostokątnego

$a - b = 4$ – różnica długości przyprostokątnych

Narysujmy trójkąt prostokątny. Podzielmy dłuższą przyprostokątną na 9 jednakowej długości odcinków, a krótszą przyprostokątną – na 4 takie odcinki.

Oznaczmy każdy odcinek przez x, $x > 0$

$a = 9x$, $b = 4x$

$a - b = 9x - 4x = 5x$

Zatem $5x = 4$

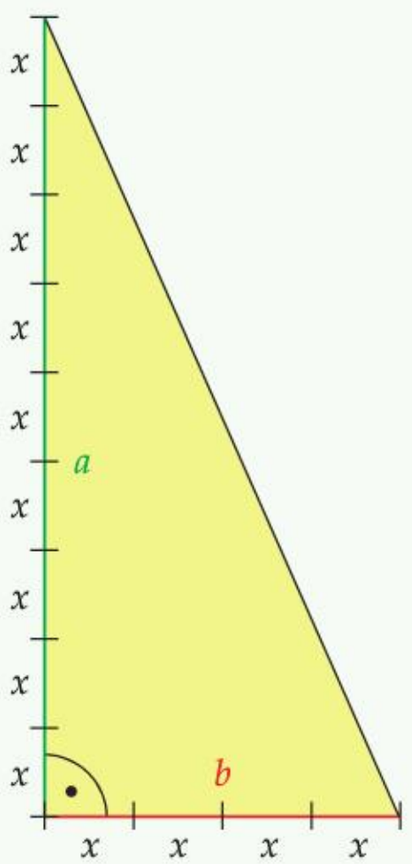
$x = 0{,}8$

$a = 9x = 9 \cdot 0{,}8 = 7{,}2$

$b = 4x = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$

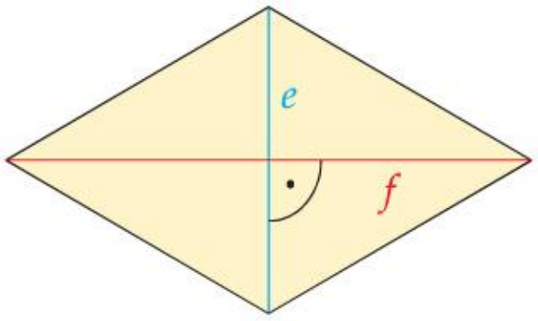
$P = \frac{1}{2} \cdot 3{,}2 \cdot 7{,}2 = 11{,}52$

Pole tego trójkąta jest równe 11,52 cm².



$b : a = 4 : 9$

Czy pamiętasz?



$P = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

Czy pamiętasz?

Stężenie procentowe określa masę (wyrażoną w gramach) substancji rozpuszczonej w 100 g roztworu.

$C_p = \frac{m_s \cdot 100\%}{m_r}$

C_p – stężenie procentowe

m_s – masa substancji rozpuszczonej

m_r – masa roztworu

Przekształcając ten wzór, możemy obliczyć masę substancji i masę roztworu:

$m_s = \frac{C_p \cdot m_r}{100\%}$

$m_r = \frac{m_s \cdot 100\%}{C_p}$

3. Jedna przekątna rombu jest o 6,3 dm dłuższa od drugiej. Stosunek długości tych przekątnych jest równy 12 : 5. Oblicz pole tego rombu.

Przykład 3

Obliczmy:

a) ile gramów soli jest w 400 gramach solanki o stężeniu 7%,
b) ile gramów wody należy dolać do 400 gramów solanki o stężeniu 7%, aby otrzymać solankę o stężeniu 5%.

a) **Sposób I**

m_s – masa substancji (w gramach)

7 g — 100 g	– masie 7 g soli odpowiada 100 g roztworu
m_s g — 400 g	– masie m_s g soli odpowiada 400 g roztworu
$\frac{7}{m_s} = \frac{100}{400}$	Układamy proporcję.
$100m_s = 7 \cdot 400$	Mnożymy na krzyż.
$100m_s = 2800$	
$m_s = 28$	– tyle gramów soli jest w 400 g solanki o stężeniu 7%

Sposób II

Korzystamy ze wzoru na stężenie procentowe:

$m_s = 400 \cdot 0{,}07$

$m_s = 28$

Roztwór zawiera 28 g soli.

b) m_w – masa wody (w gramach), którą należy dolać

Po dolaniu wody masa soli nie zmieni się, a masa roztworu będzie większa o masę dolanej wody.

5 g — 100 g	– 5 g soli odpowiada 100 g roztworu
28 g — $(400 + m_w)$ g	– 28 g soli odpowiada $(400 + m_w)$ g roztworu
$\frac{5}{28} = \frac{100}{400 + m_w}$	Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.
$5 \cdot (400 + m_w) = 28 \cdot 100$	Mnożymy sumę algebraiczną przez liczbę.
$2000 + 5m_w = 2800$	Rozwiązujemy równanie.
$5m_w = 800$	
$m_w = 160$	

Należy dolać 160 g wody.

4. Oblicz, ile gramów wody należy odparować z 600 g solanki o stężeniu 12%, aby otrzymać solankę o stężeniu 15%.

Zadania

- Żeby dojść z miejscowości A do miejscowości B, można najpierw iść duktem leśnym, a następnie 1,26 km polną drogą. Stosunek długości drogi przebytej duktem leśnym do długości drogi przebytej polną drogą jest równy 7 : 3. Ile kilometrów ma trasa z miejscowości A do miejscowości B?

- Adam miał monety 2-złotowe i 12 monet 5-złotowych. Stosunek liczby monet 2-złotowych do liczby monet 5-złotowych był równy 5 : 3. Ile złotych łącznie miał Adam w monetach 2-złotowych i 5-złotowych?

- Nikodem przez 3 godziny 15 minut grał w piłkę, a następnie sprzątał swój pokój. Stosunek czasu gry w piłkę do czasu sprzątania pokoju jest równy 13 : 11. Ile czasu Nikodem sprzątał swój pokój?

- W dużym opakowaniu jest o 2,4 kg więcej mandarynek niż w małym. Stosunek liczby kilogramów mandarynek w małym opakowaniu do liczby kilogramów mandarynek w dużym opakowaniu jest równy $\frac{4}{7}$. Ile kilogramów mandarynek jest w małym opakowaniu, a ile w dużym?

- Karolina ma o 70 zł mniej niż Magda. Stosunek oszczędności Karoliny do oszczędności Magdy jest równy $\frac{5}{6}$. Oblicz, ile złotych oszczędności ma każda z dziewczynek.

- Mama jest o 21 lat starsza od córki. Obecnie stosunek wieku mamy do wieku córki jest równy $\frac{8}{5}$. Ile obecnie lat ma mama, a ile córka?

- Jeden bok prostokąta jest o 6 cm dłuższy od drugiego boku. Stosunek długości boków tego prostokąta jest równy 4 : 9. Oblicz obwód i pole tego prostokąta.

- Stosunek długości podstawy trójkąta do wysokości opuszczonej na ten bok jest równy 7 : 2. Podstawa jest o 4,5 dm dłuższa od wysokości. Oblicz pole tego trójkąta.

- W 250 g roztworu jest 15 g soli. Ile gramów wody należy dolać do tego roztworu, aby otrzymać roztwór o stężeniu 5%?

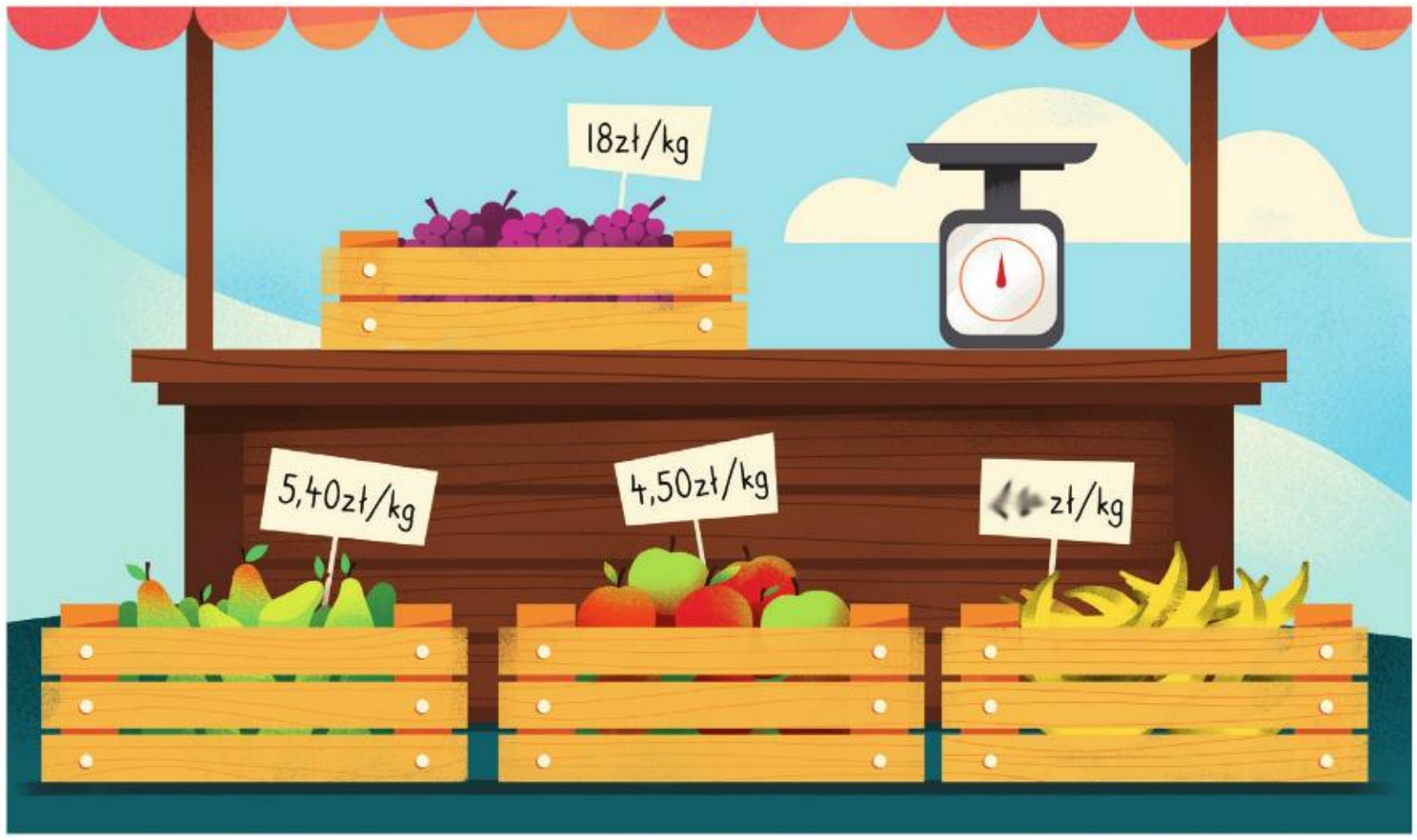
- Ile gramów cukru należy dosypać do 660 g syropu o stężeniu 10%, aby otrzymać syrop o stężeniu 12%?

Ciekawe!

Do kiszenia ogórków używa się soli kuchennej. Optymalny poziom soli w ogórkach zapewnia solanka o stężeniu od 6% do 8%. Wybór stężenia roztworu zależy od ułożenia ogórków. Jeśli ogórki są ściśle ułożone, potrzeba mniej solanki, jednak musi ona mieć wyższe stężenie soli.

1.3 Wielkości wprost proporcjonalne

Podejmij temat



Ile zapłacimy za 1,5 kg, ile za 2 kg, a ile za 4 kg gruszek?
Jaka jest cena kilograma bananów, jeśli za 3 kg zapłacimy 20,70 zł?
Czy 50 zł wystarczy na zakup 2,5 kg winogron?

Przykład 1

Kilogram winogron kosztuje 18 zł. Obliczmy, ile zapłacimy za: 0,5 kg, 1,5 kg, 2 kg, 2,7 kg, 3 kg, 5 kg tych winogron.

x – masa winogron (w kg)
y – koszt zakupu winogron (w zł)

Zapiszmy dane w tabeli.

x	0,5	1	1,5	2	2,7	3	5
y	9	18	27	36	48,60	54	90

W przykładzie 1. rozważaliśmy dwie wielkości: masę (w kg) i koszt (w zł) zakupu winogron. Zauważmy, że za pół kilograma winogron zapłacimy 9 zł. Jeżeli kupimy ich 1,5 kg, czyli 3 razy więcej niż 0,5 kg, to zapłacimy 3 razy więcej. Jeżeli kupimy ich 2 kg, czyli 4 razy więcej, to zapłacimy 4 razy więcej. Zauważmy, że koszt zakupu winogron wzrasta tyle samo razy, ile razy wzrasta masa winogron. Możemy powiedzieć, że masa i koszt zakupu winogron są wielkościami wprost proporcjonalnymi lub że koszt zakupu winogron jest wprost proporcjonalny do ich masy.

Mówimy, że wielkości dodatnie są wprost proporcjonalne wtedy, gdy wraz ze wzrostem jednej wielkości druga wielkość rośnie tyle samo razy.

Obliczmy ilorazy wartości zakupów przez ich masę.

$\frac{9}{0,5} = 18 \quad \frac{18}{1} = 18 \quad \frac{27}{1,5} = 18 \quad \frac{36}{2} = 18 \quad \frac{48,6}{2,7} = 18 \quad \frac{54}{3} = 18 \quad \frac{90}{5} = 18$

Zauważmy, że ilorazy są równe i wynoszą 18.

$\frac{9}{0,5} = \frac{18}{1} = \frac{27}{1,5} = \frac{36}{2} = \frac{48,6}{2,7} = \frac{54}{3} = \frac{90}{5} = 18$

Wiedząc, że x to masa zakupionych winogron, a y – koszt ich zakupu, możemy zapisać:

$\frac{y}{x} = 18$ lub $y = 18x$

Liczba 18 jest współczynnikiem proporcjonalności prostej.

Dodatnie wielkości x, y są wprost proporcjonalne, jeśli ich iloraz jest stały.

$$\frac{y}{x} = a$$

a, x, y – liczby dodatnie

Iloraz ten (liczbę a) nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności prostej**.

Zauważmy, że wyrażenie $\frac{y}{x} = a$ jest równoważne wyrażeniu $y = ax$.

Ilorazy kosztów zakupu winogron przez ich masę są równe, więc jeżeli weźmiemy pod uwagę dwa ilorazy (np. $\frac{36}{2}$ i $\frac{90}{5}$), to możemy zapisać proporcję:

$\frac{36}{2} = \frac{90}{5}$

Zachodzą też inne proporcje: $\frac{36}{90} = \frac{2}{5}$, $\frac{90}{36} = \frac{5}{2}$, $\frac{2}{36} = \frac{5}{90}$

Jeżeli $\frac{y}{x} = \frac{t}{s}$, to zachodzą też proporcje:

$$\frac{y}{t} = \frac{x}{s}, \quad \frac{t}{y} = \frac{s}{x}, \quad \frac{x}{y} = \frac{s}{t}$$

1. Bochenek chleba kosztuje 3 zł. Oblicz, ile zapłacisz za: pół bochenka, półtora bochenka, 2 bochenki, 4 bochenki, 5 bochenków chleba. Czy liczba bochenków chleba i koszt ich zakupu są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

2. Do przygotowania 4 naleśników potrzeba 250 g mąki. Czy liczba naleśników i liczba gramów mąki potrzebnych do ich przygotowania są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

Przykład 2

Sprawdźmy, czy wielkości x i y opisane w tabeli są wprost proporcjonalne.

a)

x	0,25	2	5	10
y	$\frac{1}{40}$	0,2	$\frac{1}{2}$	1

b)

x	2	3,2	12	15,6
y	0,5	0,8	4	3,9

a) Obliczamy ilorazy $\frac{y}{x}$.

$\frac{\frac{1}{40}}{0{,}25} = \frac{1}{40} : \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$\frac{0{,}2}{2} = 0{,}1$

$\frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$\frac{1}{10} = 0{,}1$

$\frac{\frac{1}{40}}{0{,}25} = \frac{0{,}2}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Wszystkie ilorazy są równe, więc wielkości x i y są wprost proporcjonalne.

b) Obliczamy ilorazy $\frac{y}{x}$.

$\frac{0{,}5}{2} = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$

$\frac{0{,}8}{3{,}2} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$\frac{0{,}8}{3{,}2} \neq \frac{4}{12}$

Wielkości x i y nie są wprost proporcjonalne.

3. Sprawdź, czy wielkości x i y opisane w tabeli są wprost proporcjonalne.

a)

x	1,2	6	8,5	15
y	9,6	48	68	120

b)

x	0,8	1,2	4,3	6,5
y	2,4	4,2	12,9	19,5

Z przykładami wielkości wprost proporcjonalnych często możemy spotkać się w codziennym życiu. Przeanalizujmy kilka.

Założenie	Wielkości wprost proporcjonalne	
• Cena jednego litrowego kartonu z sokiem jabłkowym jest równa 5,50 zł.	Liczba zakupionych litrowych kartonów z sokiem jabłkowym (n) i koszt ich zakupu (k) w złotych: $\frac{k}{n} = 5{,}5$, $k = 5{,}5n$	Ile razy więcej kupimy litrowych kartonów z sokiem jabłkowym, tyle razy więcej za nie zapłacimy.
• Masa netto ciastek w jednym opakowaniu jest równa 150 g.	Liczba opakowań ciastek (n) i ich łączna masa netto (m) w gramach: $\frac{m}{n} = 150$, $m = 150n$	Ile razy więcej mamy opakowań ciastek, tyle razy większa jest ich łączna masa.

• Puszka farby wystarcza na pomalowanie 4 m^2 powierzchni.	Liczba puszek farby (n) i pole powierzchni (p) w m^2: $\frac{p}{n} = 4$, $p = 4n$	Ile razy więcej puszek farby kupimy, tyle razy większą powierzchnię będziemy mogli pomalować.
• Prędkość pojazdu jest stała i wynosi 60 $\frac{km}{h}$.	Czas jazdy (t) w godzinach i liczba przejechanych kilometrów (s): $\frac{s}{t} = 60$, $s = 60t$	Ile razy czas jazdy będzie dłuższy, tyle razy więcej kilometrów przejedziemy.
• Do usmażenia jednego omleta potrzebne są 3 jajka.	Liczba omletów (n) i liczba jajek (j): $\frac{n}{j} = 3$, $n = 3j$	Ile razy więcej jajek zużyjemy do zrobienia omletów, tyle razy więcej omletów zrobimy.
• Mapa została wykonana w skali 1 : 180 000.	Długość odcinka na mapie (x) w cm i długość odcinka w rzeczywistości (y) w cm: $\frac{y}{x} = 180\,000$, $y = 180\,000x$	Ile razy dłuższy będzie odcinek na mapie, tyle razy dłuższy będzie odcinek w rzeczywistości.

Przykład 3

Na taśmach ozdobnych co 5 cm przyszyte są kokardki. Kokardki znajdują się też na początku i na końcu taśmy. Taśmy, będące w sprzedaży, mają długości: 50 cm, 80 cm, 1 m, 1,2 m, 1,5 m. Uzasadnijmy, że liczba przyszytych kokardek i długość taśmy nie są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

Ustalmy, ile kokardek znajduje się na każdej taśmie. Sporządźmy rysunek pomocniczy dla najkrótszej taśmy.



Liczbę odstępów między kokardkami ustalimy, dzieląc długość taśmy (t) przez 5 cm.
Kokardki znajdują się na początku i na końcu taśmy, więc będzie ich o jedną więcej niż odstępów.
Liczba kokardek k jest więc równa:

$k = \frac{t}{5} + 1$

Sporządźmy tabelę.

Długość taśmy t (w cm)	50	80	100	120	150
Liczba kokardek k	11	17	21	25	31

Zauważmy, że $\frac{11}{50} \neq \frac{17}{80}$, zatem liczba przyszytych kokardek i długość taśmy nie są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

4. Ojciec jest starszy od syna o 25 lat. Uzasadnij, że wiek ojca i wiek syna nie są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

Przykład 4

Sprawdźmy, czy:

a) długość boku pięciokąta foremnego i jego obwód są wielkościami wprost proporcjonalnymi,
b) długość boku kwadratu i jego pole są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

a) Obwód pięciokąta foremnego o boku a wyraża się wzorem: $Obw. = 5a$.

Pięciokąt foremny to pięciokąt, którego wszystkie boki są równe i kąty wewnętrzne mają równe miary. Sporządźmy tabelę.

Długość boku pięciokąta foremnego	1	2	3	3,5	6	a
Obwód pięciokąta foremnego	5	10	15	17,5	30	$5a$

Zauważmy, że jeżeli bok pięciokąta foremnego zwiększymy 2 razy, to jego obwód też zwiększy się 2 razy. Jeżeli bok zwiększymy 6 razy, to jego obwód też zwiększy się 6 razy.

Ile razy zwiększymy bok pięciokąta foremnego, tyle samo razy zwiększy się jego obwód.

$$\frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{17,5}{3,5} = \frac{30}{6} = \frac{5a}{a} = 5$$

Iloraz obwodu pięciokąta foremnego i jego boku jest stały, równy 5.

Długość boku pięciokąta foremnego i jego obwód są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Współczynnik proporcjonalności prostej jest równy 5.

b) Pole kwadratu o boku b wyraża się wzorem: $P = b^2$.

Sporządźmy tabelę.

Długość boku kwadratu	1	1,5	2	3	b
Pole kwadratu	1	2,25	4	9	b^2

Pole kwadratu o boku 1 jest równe 1.

Jeżeli bok kwadratu zwiększymy 2 razy, to jego pole zwiększy się 4 razy. Jeżeli bok kwadratu zwiększymy 3 razy, to jego pole zwiększy się 9 razy. Pole kwadratu nie zwiększy się tyle samo razy, ile razy zwiększymy bok kwadratu.

Długość boku kwadratu i jego pole nie są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

5. Sprawdź, czy:

a) długość boku kwadratu i długość jego przekątnej są wielkościami wprost proporcjonalnymi,
b) długość boku trójkąta równobocznego i jego pole są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

Więcej na temat

Wyobraźmy sobie, że 6 litrów soku musimy rozlać do jednakowych butelek. Do wyboru mamy butelki o pojemności: 0,25 l, 0,3 l, 0,4 l, 0,5 l, 1 l, 1,5 l i 2 l.

Zapiszmy w tabeli, ile butelek będziemy potrzebować w zależności od wyboru pojemności butelki.

Pojemność butelki (w l)	0,25	0,3	0,4	0,5	1	1,5	2
Liczba butelek	24	20	15	12	6	4	3

Zauważmy, że jeżeli wybierzemy butelki o pojemności 0,25 l, to będziemy potrzebować 24 butelki. Jeżeli wybierzemy butelki o pojemności 1,5 l, czyli 6 razy większej niż 0,25 l, to będziemy potrzebować 6 razy mniej butelek. Ile razy rośnie pojemność butelki, tyle razy maleje ich liczba. Mówimy, że pojemność butelki i liczba butelek są **wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi** lub że liczba butelek jest odwrotnie proporcjonalna do ich pojemności.

Iloczyny pojemności butelki i liczby butelek są równe: $0{,}25 \cdot 24 = 0{,}3 \cdot 20 = 0{,}4 \cdot 15 = 0{,}5 \cdot 12 = 1 \cdot 6 = 1{,}5 \cdot 4 = 2 \cdot 3 = 6$.

Jeżeli dodatnie wielkości x, y są odwrotnie proporcjonalne, to ich iloczyn jest stały:

$xy = a$, gdzie: x, y – liczby dodatnie

Jeśli dodatnie wielkości x, y są odwrotnie proporcjonalne, to jeśli jedna z nich rośnie ileś razy, to druga maleje tyle samo razy.

Wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi są np.: prędkość, z jaką porusza się rowerzysta i czas, w jakim przebędzie on drogę o długości 30 km.

6. Podaj trzy przykłady wielkości odwrotnie proporcjonalnych, z którymi spotykasz się w codziennym życiu.

Zadania

Przerysuj do zeszytu tabelę i uzupełnij ją tak, aby opisane w niej wielkości x i y były wprost proporcjonalne.

a)

x	2,25	4,5	5	
y			10	15

b)

x	1,5		7	
y		3,3	4,2	7,8

Mapę wykonano w skali 1 : 25 000.

a) Uzupełnij tabelę w zeszycie.

Odległość na mapie (w cm)	0,8	1,4		3,6		
Odległość w rzeczywistości (w km)			0,5		1,25	2,3

b) Czy odległość w rzeczywistości (w km) i odległość na mapie (w cm) są wielkościami wprost proporcjonalnymi?

Skalę zapisaną w postaci 1 : 25 000 możemy zapisać, używając kreski ułamkowej.

$\frac{1}{25\,000}$ – licznik skali / mianownik skali

Jeżeli licznik skali jest równy 1, to aby obliczyć odległość w rzeczywistości, należy pomnożyć długość odcinka na mapie przez mianownik skali.

Do upieczenia 20 pączków potrzeba m.in. 250 ml mleka, 50 g świeżych drożdży, 500 g mąki pszennej i 4 jajka. Uzupełnij tabelę w zeszycie i odpowiedz na pytania. Uzasadnij swoje odpowiedzi.

Liczba pączków		15				
Mleko (w ml)					500	
Drożdże (w g)			50			
Mąka (w g)	250					1500
Liczba jaj				6		

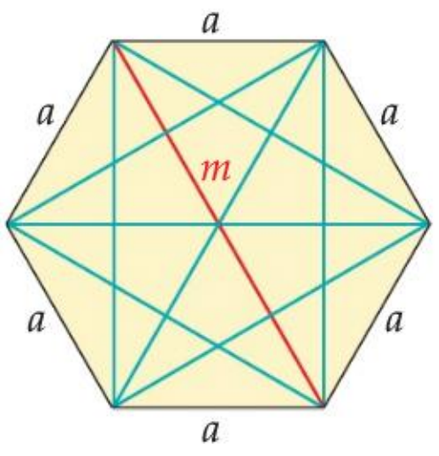
a) Czy liczba pączków jest wprost proporcjonalna do masy mąki?
b) Czy liczba pączków jest wprost proporcjonalna do objętości mleka?
c) Czy objętość mleka jest wprost proporcjonalna do masy drożdży?
d) Czy masa mąki jest wprost proporcjonalna do liczby jaj?
e) Czy liczba jaj jest wprost proporcjonalna do masy drożdży?

Czy pamiętasz?
Prędkość = $\frac{\text{droga}}{\text{czas}}$, czyli $v = \frac{s}{t}$

Sprawdź, czy opisane wielkości są wprost proporcjonalne.

a) Prędkość samochodu i długość drogi, którą przejedzie ten samochód w ciągu 3 godzin.
b) Prędkość samochodu i czas, w jakim przejedzie ten samochód drogę równą 200 km.
c) Liczba jednakowych słoików zawierających łącznie 3 kg dżemu i pojemność jednego słoika.
d) Liczba wypełnionych słoików o pojemności 0,5 l i łączna masa dżemu w tych słoikach.

Jeżeli a jest bokiem sześciokąta foremnego, zaś m jest dłuższą przekątną sześciokąta foremnego, to:
$m = 2a$ i $P = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2$



Wyjaśnij, dlaczego podane wielkości nie są wprost proporcjonalne:

a) wzrost człowieka i jego waga,
b) wyniki sportowca i czas poświęcony przez niego na treningi.

Podaj kilka przykładów wielkości wprost proporcjonalnych, z którymi spotykasz się w życiu codziennym, i uzasadnij swoją odpowiedź.

Sprawdź, czy opisane wielkości są wprost proporcjonalne.

a) Wysokość trójkąta równobocznego i długość jego boku.
b) Obwód trójkąta równoramiennego o podstawie równej 3 cm i długość jego ramienia.
c) Obwód sześciokąta foremnego i długość jego dłuższej przekątnej.
d) Pole sześciokąta foremnego i długość jego boku.

1.4 Zastosowanie wielkości wprost proporcjonalnych

Podejmij temat



Ile gramów mąki, ile gramów masła, ile mililitrów mleka, a ile jajek potrzebuje kucharka do zrobienia 18 gofrów?

W życiu codziennym jest wiele sytuacji, w których występują wielkości wprost proporcjonalne. Często, aby rozwiązać jakiś problem, wystarczy zauważyć, które wielkości są wprost proporcjonalne, a następnie ułożyć odpowiednią proporcję. Przy układaniu proporcji należy pamiętać, by odpowiednie wielkości podawać w tej samej jednostce.

Przykład 1

Zgodnie z przepisem podanym w *Podejmij temat*, obliczmy:

a) ilu mililitrów mleka potrzeba, aby zrobić 27 gofrów,
b) ile gofrów można zrobić, wykorzystując 1 kg 5 dag mąki,
c) ilu gramów mąki potrzeba, aby zrobić gofry, wykorzystując 175 g masła.

a) Oznaczmy: x – liczba mililitrów mleka.

Liczba gofrów i liczba mililitrów mleka potrzebnych do ich przygotowania są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Na przygotowanie 6 gofrów potrzeba 250 ml mleka. Na przygotowanie 27 gofrów potrzeba x ml mleka.

Zapisujemy:

6 gofrów — 250 ml	– 6 gofrom odpowiada 250 ml mleka
27 gofrów — x ml	– 27 gofrom odpowiada x ml mleka

$\frac{6}{27} = \frac{250}{x}$ Układamy proporcję.

$6x = 250 \cdot 27$ Mnożymy na krzyż.

$x = 1125$

Do przygotowania 27 gofrów potrzeba 1125 ml mleka.

b) Oznaczmy: y – liczba gofrów.

1 kg 5 dag = 1050 g

Liczba gofrów i liczba gramów mąki potrzebnej do ich przygotowania są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

6 gofrów — 150 g – 6 gofrom odpowiada 150 g mąki
y gofrów — 1050 g – y gofrom odpowiada 1050 g mąki

$\frac{6}{y} = \frac{150}{1050}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$6 \cdot 1050 = 150y$

$y = 42$

Z 1 kg 5 dag mąki można przygotować 42 gofry.

c) Oznaczmy: t – liczba gramów mąki.

Liczba gramów masła i liczba gramów mąki potrzebne do przygotowania gofrów są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

50 g — 150 g – 50 gramom masła odpowiada 150 g mąki
175 g — t g – 175 gramom masła odpowiada t g mąki

$\frac{50}{175} = \frac{150}{t}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$50t = 150 \cdot 175$

$t = 525$

Do zrobienia tych gofrów potrzeba 525 g mąki.

1. Aby przygotować 20 babeczek z kremem, potrzeba m.in. 0,5 kg mąki pszennej, 7 dag cukru, 20 dag masła. Oblicz:

a) ile babeczek można zrobić, zużywając 875 gramów mąki,
b) ile gramów cukru potrzeba, aby zrobić babeczki, zużywając 45 dag masła.

Przykład 2

Kasia przejechała samochodem 360 km i zużyła 34,2 l paliwa. Obliczmy, ile kilometrów Kasia może jeszcze przejechać, jeśli w baku zostało 26,6 l paliwa. Zakładamy, że średnie zużycie paliwa na 100 km jest takie samo.

Oznaczmy: x – liczba kilometrów, które Kasia może jeszcze przejechać.

Liczba kilometrów i liczba litrów paliwa potrzebnego do przejechania są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Na przejechanie 360 km potrzeba 34,2 l paliwa. Na przejechanie x km potrzeba 26,6 l paliwa.

360 km — 34,2 l – 360 km odpowiada 34,2 l paliwa
x km — 26,6 l – x km odpowiada 26,6 l paliwa

$\frac{360}{x} = \frac{34{,}2}{26{,}6}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

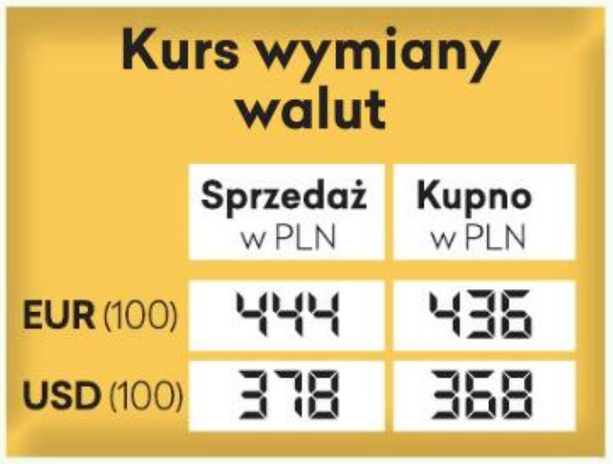
$34{,}2x = 360 \cdot 26{,}6$

$x = 280$ – tyle kilometrów może jeszcze Kasia przejechać samochodem

2. Samochód Pawła spalił 16,8 l paliwa na trasie 150 km. Oblicz, ile litrów paliwa spali samochód Pawła na trasie 500 km. Przyjmij, że średnie zużycie paliwa na 100 km jest takie samo.

Przykład 3

Ilustracja obok przedstawia fragment tablicy informacyjnej znajdującej się w pewnym kantorze, na której zapisano aktualne kursy wymiany walut.



Obliczmy:

a) ile złotych zapłacimy za zakup 385 euro,

b) ile USD możemy kupić za 1701 zł.

a) Oznaczmy: x – kwota w zł, którą zapłacimy za zakup 385 euro.

Chcemy kupić walutę, więc kantor ją sprzedaje – dlatego patrzymy na kolumnę *Sprzedaż*.

Liczba euro i liczba złotych są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Za 100 euro zapłacimy 444 zł. Za 385 euro zapłacimy x zł.

100 euro — 444 zł – 100 euro odpowiada 444 zł

385 euro — x zł – 385 euro odpowiada x zł

$\frac{100}{385} = \frac{444}{x}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$100x = 444 \cdot 385$

$100x = 170\,940$

$x = 1709{,}4$

Za zakup 385 euro zapłacimy 1709 zł 40 gr.

b) Oznaczmy: y – kwota w USD, którą otrzymamy za 1701 zł.

Chcemy kupić walutę, dlatego patrzymy na kolumnę *Sprzedaż*.

Liczba USD i liczba złotych są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Za 100 USD zapłacimy 378 zł. Za y USD zapłacimy 1701 zł.

100 USD — 378 zł – 100 USD odpowiada 378 zł

y USD — 1701 zł – y USD odpowiada 1701 zł

$\frac{100}{y} = \frac{378}{1701}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$378y = 100 \cdot 1701$

$378y = 170\,100$

$y = 450$

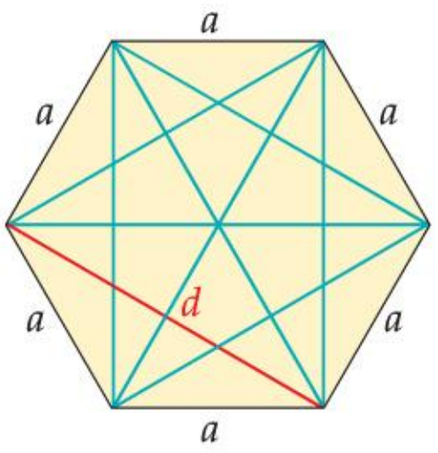
Za 1701 zł możemy kupić 450 USD.

3. Korzystając z ilustracji w przykładzie 3, oblicz:

a) ile złotych otrzymasz za sprzedaż 260 euro,

b) ile euro możesz kupić za 1998 zł.

Jeżeli a jest bokiem sześciokąta foremnego, zaś d jest krótszą przekątną sześciokąta foremnego, to:
$d = a\sqrt{3}$ i $a = \frac{d\sqrt{3}}{3}$



Przykład 4

Krótsza przekątna sześciokąta foremnego *ABCDEF* jest o 12 cm dłuższa od krótszej przekątnej sześciokąta foremnego *KLMNOP*. Bok sześciokąta foremnego *KLMNOP* jest równy $2\sqrt{3}$ cm. Obliczmy długość boku sześciokąta foremnego *ABCDEF*.

Oznaczmy: x – krótsza przekątna sześciokąta foremnego *ABCDEF*.

Sposób I

Długość krótszej przekątnej sześciokąta foremnego i długość boku są wielkościami wprost proporcjonalnymi.

x cm — $\frac{x\sqrt{3}}{3}$ cm – krótszej przekątnej sześciokąta foremnego *ABCDEF* o długości x cm odpowiada bok o długości $\frac{x\sqrt{3}}{3}$ cm

$(x - 12)$ cm — $2\sqrt{3}$ cm – krótszej przekątnej sześciokąta foremnego *KLMNOP* o długości $(x - 12)$ cm odpowiada bok o długości $2\sqrt{3}$ cm

$\frac{x}{x-12} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$2\sqrt{3}x = (x - 12) \cdot \frac{x\sqrt{3}}{3} \mid : x, x > 0$

$2\sqrt{3} = (x - 12) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \mid : \frac{\sqrt{3}}{3}$

$6 = x - 12$

$x = 18$ – tyle cm ma krótsza przekątna sześciokąta foremnego *ABCDEF*

$\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ – tyle cm ma bok sześciokąta foremnego *ABCDEF*

Sposób II

Oznaczmy: y – krótsza przekątna sześciokąta foremnego *KLMNOP*.

Korzystamy ze wzoru na krótszą przekątną sześciokątna foremnego:
$y = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$

Krótsza przekątna sześciokąta foremnego *ABCDEF* jest o 12 cm dłuższa od krótszej przekątnej sześciokąta foremnego *KLMNOP*, więc

$x = y + 12 = 6 + 12 = 18$

$\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$

Bok sześciokąta foremnego *ABCDEF* ma $6\sqrt{3}$ cm.

5. Przekątna kwadratu *EFGH* jest 4 o cm dłuższa od przekątnej kwadratu *ABCD*. Bok kwadratu *ABCD* jest równy $2{,}5\sqrt{2}$ cm. Oblicz bok kwadratu *EFGH*.

Zadania

Trzy jednakowe opakowania z pomidorami ważą 1,95 kg. Ile takich opakowań z pomidorami waży 4,55 kg?

Kasia robi jednakowe gofry z kremem i owocami. Na 4 gofry zużywa 24 maliny, 32 jagody i 3 brzoskwinie. Na przygotowanych gofrach Kasia położyła łącznie 184 jagody.

a) Ile gofrów zrobiła Kasia?
b) Ile malin i brzoskwiń zużyła Kasia?

Jajka sprzedawane są w opakowaniach po 6, po 10, po 15 sztuk i po 24 sztuki. W każdym z tych opakowań cena jednostkowa jajka jest taka sama. Opakowanie zawierające 15 jajek kosztuje 10 zł 80 gr. Ile kosztuje każde z pozostałych opakowań jajek?

Na mapie w skali 1 : 50 000 odległość między dwoma miastami w linii prostej jest równa 2,7 cm. Jaka jest rzeczywista odległość w linii prostej między tymi miastami?

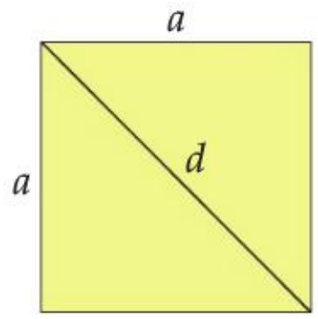
Kserokopiarka drukuje 7 stron w ciągu 15 sekund. Ile stron wydrukuje ta drukarka w ciągu kwadransa? W jakim czasie ta kserokopiarka wydrukuje 350 stron?

W baku samochodu jest 13,5 l benzyny, która wystarczy na przejechanie 150 km. Ile litrów benzyny trzeba dokupić, aby pokonać 480 km? Zakładamy, że samochód spala cały czas taką samą liczbę litrów benzyny na 100 km.

Pociąg przejechał 330 km ze średnią prędkością 55 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Jaką przebyłby drogę w tym samym czasie, jadąc z prędkością o 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ większą?

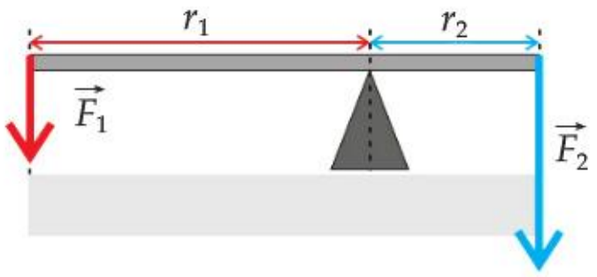
Pociąg pospieszny, jadący ze średnią prędkością 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, przebywa w pewnym czasie drogę o 50 km dłuższą niż pociąg osobowy. Oblicz długość drogi, jaką przebył każdy z pociągów i czas jazdy, jeśli prędkość pociągu osobowego jest o 25% mniejsza od prędkości pociągu pospiesznego.

Czy pamiętasz?
Długość przekątnej kwadratu o boku a wyraża się wzorem: $d = a\sqrt{2}$



Ciekawe!

Archimedes z Syrakuz – ok. 287–ok. 212 p.n.e. Wybitny fizyk i matematyk starożytnej Grecji, określił zasadę dźwigni. Zauważył bowiem, że im dłuższe ramię dźwigni, tym mniejszej siły trzeba użyć, by podnieść ciało. Archimedesowi przypisuje się słowa: „Dajcie mi punkt podparcia, a poruszę Ziemię".
Prawo dźwigni Archimedesa



F_1, F_2 – wartość sił działających na dźwignię
r_1, r_2 – ramiona dźwigni, określają odległość między punktem podparcia a punktami przyłożenia sił
Dźwignia znajduje się w równowadze, gdy: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1}$

Kurs wymiany walut

Funt brytyjski GBP (100)

Sprzedaż	493,00 zł
Kupno	479,00 zł

Frank szwajcarski GHF (100)

Sprzedaż	418,00 zł
Kupno	403,50 zł

Rupia maurytyjska MUR (100)

Sprzedaż	10,20 zł
Kupno	8,10 zł

- Magdzie po wakacjach zostało 4650 MUR. Chce je sprzedać i za otrzymaną za nie kwotę w PLN kupić funty brytyjskie. Korzystając z podanego kursu wymiany walut, oblicz, ile funtów brytyjskich otrzyma Magda. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

- Michał przed wakacjami kupił franki szwajcarskie za 2000 zł. Na wakacjach nie wydał wszystkich pieniędzy i zostało mu 89 GHF, które po powrocie odsprzedał do kantoru. Korzystając z podanego kursu wymiany walut, oblicz:

  a) ile franków szwajcarskich zakupił Michał (wynik podaj z dokładnością do 0,01),
  b) ile złotych stracił Michał na zakupie, a potem odsprzedaniu 89 GHF.

  Zakładamy, że kurs sprzedaży i kupna był taki sam podczas obu wizyt Michała w kantorze.

- Oblicz, ile gramów tłuszczu jest w 320 g śmietany o zawartości tłuszczu 18%.

Wartość odżywcza (100 g)

Wartość energetyczna	971 kJ 232 kcal
Tłuszcz	24 g
Węglowodany	3,2 g
Białka	6,7 g
Sól	0,45 g

- Na opakowaniu serka podano informację o wartości odżywczej 100 g produktu.

  a) Oblicz, ile gramów tłuszczów, węglowodanów i białek znajduje się w 30 g tego serka.
  b) Oblicz, w ilu gramach serka znajduje się 4 g węglowodanów.
  c) Dzienne zapotrzebowanie młodzieży w wieku 13–16 lat na białko wynosi 90 g. Oblicz, jaki procent dziennego zapotrzebowania na białko zaspokoi czternastolatek, gdy zje 65 g tego serka.

  Do obliczeń możesz użyć kalkulatora.

- Wysokość trójkąta równobocznego DEF jest o $3{,}4\sqrt{3}$ cm dłuższa od wysokości trójkąta równobocznego ABC. Bok trójkąta ABC jest równy 5,2 cm. Oblicz długość boku trójkąta DEF.

- Przekątna kwadratu $ABCD$ jest równa $6{,}5\sqrt{2}$ cm. Obwód kwadratu $ABCD$ jest o 52 cm krótszy od obwodu kwadratu $KLMN$. Oblicz długość przekątnej kwadratu $EFGH$.

- Babcia przygotowała 21 litrów przecieru pomidorowego. Połowę przecieru rozlała do 35 małych słoików, a pozostałą część do słoików o pojemności większej o $66\frac{2}{3}\%$ od pojemności małych słoików. Jaką pojemność mają małe, a jaką – większe słoiki? Do ilu większych słoików rozlała babcia przecier?

1.5 Podział proporcjonalny

Podejmij temat



Listewka została przecięta na dwie części, które mają odpowiednio długości 8 cm i 32 cm. W jakim stosunku są długości tych części?

Jak przeciąć listewkę na dwie części, aby stosunek ich długości był równy 3 : 5? Jakie długości będą miały te części, jeśli listewka ma 40 cm?

Czasami musimy jakąś wielkość (np. przebytą drogę, listewkę, kwotę pieniędzy, pizzę, odcinek) podzielić w odpowiednim stosunku. Wtedy również możemy posłużyć się proporcjami.

Przykład 1

Rowerzysta w ciągu dwóch dni przejechał 151,2 km. Stosunek liczby kilometrów przejechanych pierwszego dnia do liczby kilometrów przejechanych drugiego dnia jest równy 5 : 3. Obliczmy, ile kilometrów przejechał rowerzysta pierwszego, a ile drugiego dnia.

Sposób I

x – liczba kilometrów przejechanych przez rowerzystę pierwszego dnia

$151{,}2 - x$ – liczba kilometrów przejechanych przez rowerzystę drugiego dnia

$\frac{x}{151{,}2 - x} = \frac{5}{3}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$3x = 5 \cdot (151{,}2 - x)$

$3x = 756 - 5x$

$8x = 756$

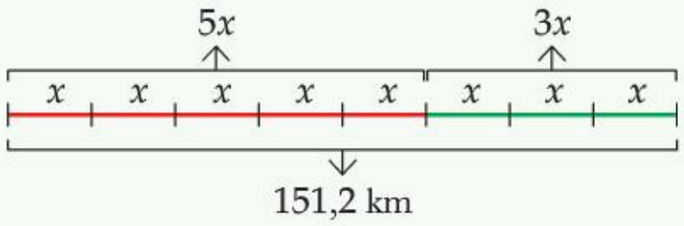
$x = 94{,}5$

$151{,}2 - 94{,}5 = 56{,}7$

Pierwszego dnia rowerzysta przejechał 94,5 km, a drugiego 56,7 km.

Sposób II

Całą trasę dzielimy na 8 równych odcinków (5 + 3 = 8). Pięć tych odcinków przejechał rowerzysta pierwszego dnia, a 3 – drugiego dnia.



x – pewna liczba dodatnia

$\frac{5}{3} = \frac{5x}{3x}$

$5x$ – liczba kilometrów przejechanych pierwszego dnia

$3x$ – liczba kilometrów przejechanych drugiego dnia

$5x + 3x = 151{,}2$

$8x = 151{,}2$

$x = 18{,}9$

$5x = 5 \cdot 18{,}9 = 94{,}5$ – liczba kilometrów przejechanych pierwszego dnia

$3x = 3 \cdot 18{,}9 = 56{,}7$ – liczba kilometrów przejechanych drugiego dnia

Sposób III

Całą trasę dzielimy na 8 równych odcinków (5 + 3 = 8).

Obliczamy długość jednego odcinka.

$151{,}2 : 8 = 18{,}9$ – długość jednego odcinka w kilometrach

$5 \cdot 18{,}9 = 94{,}5$ – liczba kilometrów przejechanych pierwszego dnia

$3 \cdot 18{,}9 = 56{,}7$ – liczba kilometrów przejechanych drugiego dnia

Sposób IV

Całą trasę dzielimy na 8 równych odcinków. Pierwszego dnia rowerzysta przejechał $\frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$, a drugiego $\frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$ całej trasy.

$\frac{5}{8}$ z 151,2 km to 94,5 km

$\frac{3}{8}$ z 151,2 km to 56,7 km

Pierwszego dnia rowerzysta przejechał 94,5 km, a drugiego 56,7 km.

1. W pudełku są łącznie 333 klocki żółte i niebieskie. Stosunek liczby klocków żółtych do liczby klocków niebieskich wynosi 7 : 2.

a) Ile klocków żółtych jest w tym pudełku?
b) Ile klocków niebieskich jest w tym pudełku?

Przykład 2

Natalia i Daria kupiły wspólnie jeden los na loterię za 8 zł. Natalia przeznaczyła na ten zakup 3,6 zł, a Daria pozostałą kwotę. Dziewczynki wygrały 300 zł. Postanowiły podzielić się wygraną proporcjonalnie do wkładu w zakup losu. Obliczmy, ile złotych wygranej dostanie każda z dziewcząt.

Sposób I

x	– część wygranej, którą otrzyma Natalia
8 zł — 300 zł	– cenie losu odpowiada wygrana
3,60 zł — x zł	– kwocie, którą Natalia przeznaczyła na zakup losu, odpowiada część wygranej, którą otrzyma
$\frac{8}{3,6} = \frac{300}{x}$	Układamy proporcję.
$8x = 3,6 \cdot 300$ $8x = 1080$	Mnożymy na krzyż.
$x = 135$	– tyle złotych otrzyma Natalia
$300 - 135 = 165$	– tyle złotych otrzyma Daria

Sposób II

8 zł – 3,6 zł = 4,4 zł	– kwota, którą przeznaczyła Daria na zakup losu
x	– część wygranej, którą otrzyma Natalia
$300 - x$	– część wygranej, którą otrzyma Daria
3,6 zł — x zł	– kwocie, którą Natalia przeznaczyła na zakup losu, odpowiada część wygranej, którą otrzyma
4,4 zł — $(300 - x)$ zł	– kwocie, którą Daria dała na zakup losu, odpowiada część wygranej, którą otrzyma
$\frac{3,6}{4,4} = \frac{x}{300 - x}$	Układamy proporcję.
$4,4x = 3,6 \cdot (300 - x)$ $4,4x = 1080 - 3,6x$ $8x = 1080$	Mnożymy na krzyż.
$x = 135$	– tyle złotych otrzyma Natalia
$300 - 135 = 165$	– tyle złotych otrzyma Daria

Sposób III

Natalia zapłaciła $\frac{3,6}{8} = 0,45$, a Daria $\frac{4,4}{8} = 0,55$ ceny losu.

0,45 z 300 zł to 135 zł	– tyle złotych otrzyma Natalia
0,55 z 300 zł to 165 zł	– tyle złotych otrzyma Daria

Sposób IV

Stosunek kwoty, którą przeznaczyła Natalia, do kwoty, którą przeznaczyła Daria w zakup losu, jest równy:

$\frac{3{,}6}{4{,}4} = \frac{9}{11}$

x – pewna liczba dodatnia

$\frac{9}{11} = \frac{9x}{11x}$

$9x$ – tyle złotych otrzyma Natalia

$11x$ – tyle złotych otrzyma Daria

$9x + 11x = 20x$

$20x = 300 \mid : 20$

$x = 15$

$9x = 9 \cdot 15 = 135$ $\qquad$ $11x = 11 \cdot 15 = 165$

Natalia otrzyma 135 zł, a Daria 165 zł.

2. Wymieszano 57 g rodzynek z orzechami, otrzymując 150 g mieszanki bakaliowej. Ilu gramów rodzynek i ilu gramów orzechów trzeba użyć, aby otrzymać 210 g mieszanki, w której stosunek masy rodzynek do masy orzechów będzie taki sam jak w przygotowanej mieszance?

Przykład 3

Obliczmy, ilu gramów soli i ilu gramów wody należy użyć do przygotowania 1,3 kg solanki o stężeniu 6%.

Oznaczmy: m_s – masa soli.

1,3 kg = 1300 g

W 100 g solanki o stężeniu 6% jest 6 g soli i 94 g wody.

100 g — 6 g – 100 g roztworu odpowiada 6 g soli

1300 g — m_s g – 1300 g roztworu odpowiada m_s g soli

$\frac{100}{1300} = \frac{6}{m_s}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$100m_s = 1300 \cdot 6$

$m_s = 78$ $\qquad$ $m_w = 1300 - 78 = 1222$

Do przygotowania 1,3 kg solanki należy użyć 78 g soli i 1222 g wody.

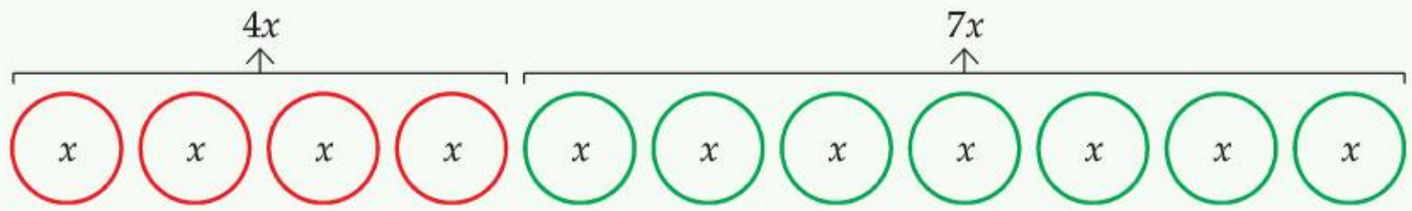
3. Oblicz, ilu gramów soli i ilu gramów wody należy użyć do przygotowania 2,4 kg solanki o stężeniu 15%.

Przykład 4

W dwóch skrzynkach są jabłka. Stosunek liczby jabłek w pierwszej skrzynce do liczby jabłek w drugiej skrzynce wynosi 4 : 7. Gdyby z drugiej skrzynki przełożyć 16 jabłek do pierwszej, to stosunek liczby jabłek w pierwszej skrzynce do liczby jabłek w drugiej skrzynce byłby równy 4 : 5. Obliczmy, ile jabłek jest w pierwszej, a ile w drugiej skrzynce.

Sposób I

Wszystkie jabłka dzielimy na 11 równych części. Pierwszej skrzynce odpowiadają 4 części. Drugiej skrzynce odpowiada 7 części.



x – pewna liczba dodatnia

$4x$ – liczba jabłek w pierwszej skrzynce

$7x$ – liczba jabłek w drugiej skrzynce

$4x + 16$ – liczba jabłek w pierwszej skrzynce po przełożeniu (dołożeniu) 16 jabłek

$7x - 16$ – liczba jabłek w drugiej skrzynce po przełożeniu (zabraniu) 16 jabłek

$\frac{4x+16}{7x-16} = \frac{4}{5}$ Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$4 \cdot (7x - 16) = 5 \cdot (4x + 16)$

$28x - 64 = 20x + 80$

$x = 18$

$4x = 4 \cdot 18 = 72$ – liczba jabłek w pierwszej skrzynce

$7x = 7 \cdot 18 = 126$ – liczba jabłek w drugiej skrzynce

Sposób II

x – liczba wszystkich jabłek

$\frac{4}{4+7}x = \frac{4}{11}x$ – liczba jabłek w pierwszej skrzynce na początku

$\frac{4}{11}x + 16$ – liczba jabłek w pierwszej skrzynce po przełożeniu 16 jabłek

$\frac{4}{4+5}x = \frac{4}{9}x$ – liczba jabłek w pierwszej skrzynce po przełożeniu 16 jabłek

$\frac{4}{11}x + 16 = \frac{4}{9}x \mid \cdot 99$ Układamy równanie.

$36x + 1584 = 44x$

$x = 198$

$\frac{4}{11}x = \frac{4}{11} \cdot 198 = 72$ – liczba jabłek w pierwszej skrzynce

$198 - 72 = 126$ – liczba jabłek w drugiej skrzynce

W pierwszej skrzynce są 72 jabłka, a w drugiej jest 126 jabłek.

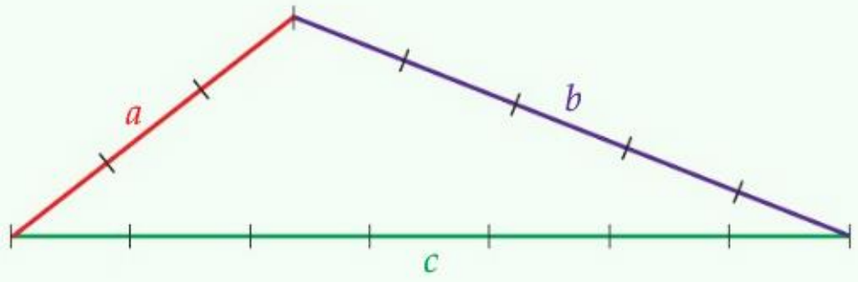
4. Mama zrobiła pierogi z serem i pierogi z jagodami. Stosunek liczby pierogów z serem do liczby pierogów z jagodami wynosi 3 : 4. Gdyby mama zrobiła o 10 pierogów z serem więcej, to stosunek liczby pierogów z serem do liczby pierogów z jagodami byłby równy 7 : 6. Ile pierogów z serem i ile pierogów z jagodami zrobiła mama?

Przykład 5

Obwód trójkąta jest równy 180 cm. Stosunek długości boków tego trójkąta jest równy 3 : 5 : 7. Obliczmy, jaką długość ma każdy z boków tego trójkąta.

Sposób I

Sporządźmy rysunek pomocniczy.



3 : 5 : 7

Bok a składa się z 3 jednakowych części, bok b z 5 i bok c z 7.
Wszystkich części jest: $3 + 5 + 7 = 15$.
Stosunek długości boku a do obwodu trójkąta jest równy liczbie części, z których składa się bok a, do liczby wszystkich części.

Układamy proporcję. Mnożymy na krzyż.

$\frac{a}{180} = \frac{3}{15}$
$15a = 3 \cdot 180$ 15
$a = 36$

$\frac{b}{180} = \frac{5}{15}$
$b = 5 \cdot 180$
$b = 60$

$\frac{c}{180} = \frac{7}{15}$
$15c = 7 \cdot 180$
$c = 84$

Boki trójkąta mają długości: 36 cm, 60 cm, 84 cm.

Sposób II

x – pewna liczba dodatnia
$3x$ – długość najkrótszego boku
$5x$ – długość średniego boku
$7x$ – długość najdłuższego boku

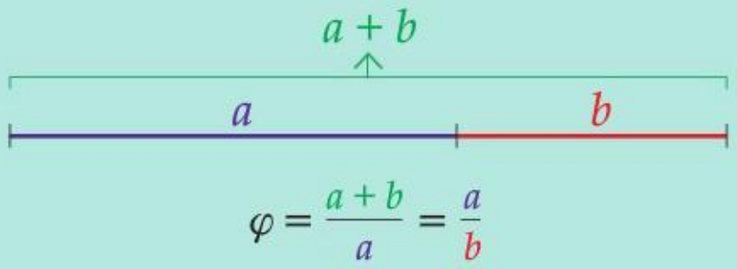
$3x + 5x + 7x = 180$
$15x = 180$
$x = 12$
$3x = 3 \cdot 12 = 36$
$5x = 5 \cdot 12 = 60$
$7x = 7 \cdot 12 = 84$

Boki trójkąta mają długości: 36 cm, 60 cm, 84 cm.

5. Obwód trójkąta jest równy 84 cm. Stosunek długości boków tego trójkąta jest równy 4 : 9 : 11. Oblicz, jaką długość ma każdy z boków tego trójkąta.

Więcej na temat

Podział odcinka na dwie części tak, by stosunek długości dłuższej z nich do krótszej był taki sam, jak stosunek całego odcinka do części dłuższej, nazywany jest **złotą proporcją** lub **boską proporcją** i oznaczany grecką literą φ (czyt. fi). Obliczono, że: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

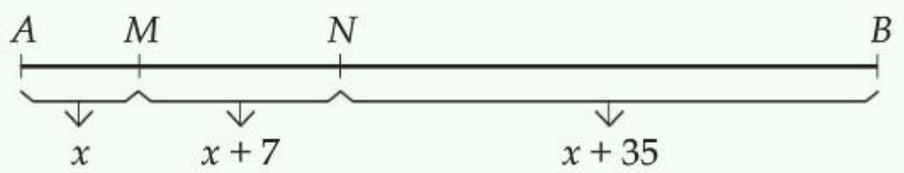
Starożytni Grecy uważali *złotą proporcję* za proporcję idealną i chętnie wykorzystywali ją w architekturze. Wielu późniejszych artystów tworzyło swoje dzieła, również wykorzystując tę proporcję, np. przy konstrukcji *złotego prostokąta,* w którym stosunek dłuższego boku do krótszego jest równy liczbie φ.

6. Wyszukaj w internecie informacji na temat związku złotej liczby z pięciokątem foremnym i gwiazdą pitagorejską.

Przykład 6

Na odcinku AB zaznaczono punkty M i N. Odcinek AM jest o 7 cm krótszy od odcinka MN i o 35 cm krótszy od odcinka NB. Stosunek długości odcinka AN do długości odcinka MB jest równy 1 : 2. Obliczmy długość odcinka AB oraz wyznaczmy stosunek długości odcinków, na które podzielono odcinek AB.

Oznaczmy przez x długość odcinka AM i sporządźmy rysunek pomocniczy.



$|MN| = x + 7$ – długość odcinka MN

$|NB| = x + 35$ – długość odcinka NB

$|AN| = x + x + 7 = 2x + 7$ – długość odcinka AN

$|MB| = x + 7 + x + 35 = 2x + 42$ – długość odcinka MB

$\frac{2x+7}{2x+42} = \frac{1}{2}$ Układamy proporcję.

$2(2x + 7) = 2x + 42$ Mnożymy na krzyż.

$4x + 14 = 2x + 42$

$2x = 28$

$|AM| = x = 14$ – długość odcinka AM w cm

$|MN| = x + 7 = 14 + 7 = 21$ – długość odcinka MN w cm

$|NB| = x + 35 = 14 + 35 = 49$ – długość odcinka NB w cm

$|AB| = 14 + 21 + 49 = 84$ – długość odcinka AB w cm

$|AM| : |MN| : |NB| = 14 : 21 : 49 = 2 : 3 : 7$ Aby uprościć zapis, każdą z liczb 14, 21 i 49 możemy podzielić przez 7.

Odcinek AB jest równy 84 cm. Został on podzielony w stosunku 2 : 3 : 7.

7. Na odcinku *CD* zaznaczono punkty *K* i *L*. Odcinek *KL* jest o 45 cm krótszy od odcinka *CK* i o 18 cm dłuższy od odcinka *LD*. Stosunek długości odcinka *CK* do długości odcinka *KD* jest równy 3 : 2. Oblicz długość odcinka *CD* oraz wyznacz stosunek długości odcinków, na które podzielono odcinek *CD*.

Zadania

W pewnej szkole jest 885 uczniów. Stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców wynosi 2 : 3. Oblicz, ile dziewcząt i ilu chłopców jest w tej szkole.

Książka ma 432 strony. Michał postanowił, że codziennie będzie czytał po 6 stron. Pewnego dnia zauważył, że stosunek liczby stron, które już przeczytał, do liczby stron, które ma przeczytać, wynosi 5 : 3. Ile stron Michał już przeczytał? Przez ile dni Michał będzie jeszcze czytał tę książkę, jeśli wytrwa w swoim postanowieniu?

Oliwka, Milan i Sylwia złożyli się na wspólny prezent dla taty. Oliwka dała 120 zł, Milan 135 zł, a Sylwia 165 zł. W trakcie zakupów okazało się, że obowiązują ceny promocyjne i otrzymali 21 zł reszty. Postanowili podzielić resztę proporcjonalnie do wkładu każdego z nich na zakup prezentu. Oblicz, ile złotych dostanie każde dziecko.

Stosunek oszczędności Ilony do pieniędzy zaoszczędzonych przez Justynę był równy 3 : 7. Ilona dała Justynie 5 zł i teraz stosunek kwoty pieniędzy, którą ma Ilona, do kwoty pieniędzy, którą ma Justyna, jest równy 2 : 5. Ile złotych ma teraz każda z dziewcząt?

Oblicz, ile gramów soli i ile gramów wody jest w 37,5 dag solanki o stężeniu 22%.

W stopie złota i miedzi stosunek masy złota do masy miedzi jest równy 9 : 1. Oblicz, ile gramów złota i ile gramów miedzi jest w 125 g tego stopu.

Wojtek przygotował napój, mieszając syrop malinowy z wodą w stosunku 1 : 7. Oblicz, ile mililitrów syropu i ile mililitrów wody jest w 1,2 l tego napoju.

Która jest obecnie godzina, jeśli stosunek liczby minut, które upłynęły od północy, do liczby minut, które pozostały do końca doby, jest równy 19 : 21?

Oblicz,

a) w którym dniu roku zwykłego stosunek liczby dni, które już upłynęły przed tym dniem, do liczby dni tego roku, które nadejdą po tym dniu, jest równy 1 : 3, a w którym 3 : 1,
b) w którym dniu roku przestępnego stosunek liczby dni, które już upłynęły przed tym dniem, do liczby dni tego roku, które nadejdą po tym dniu, jest równy 25 : 48, a w którym 48 : 25.

Na odcinku *AC* równym 72 cm zaznaczono punkt *B* tak, że stosunek długości odcinka *AB* do długości odcinka *BC* jest równy 5 : 3. Oblicz długości odcinków *AB* i *BC*.

W prostokącie o obwodzie 21 cm stosunek długości boków jest równy 2 : 5. Oblicz długości boków i pole tego prostokąta.

W trójkącie równoramiennym o obwodzie 9 dm stosunek długości ramienia do długości podstawy jest równy 7 : 4. Oblicz długości boków i pole tego trójkąta.

W trójkącie prostokątnym o obwodzie 210 cm stosunek długości przyprostokątnych jest równy 5 : 12. Oblicz długości boków i pole tego trójkąta.

Najkrótszy bok trójkąta jest krótszy o 8 cm od średniego boku i o 20 cm od najdłuższego boku tego trójkąta. Stosunek długości najdłuższego boku do długości średniego boku jest równy stosunkowi długości średniego boku do długości najkrótszego boku. Oblicz obwód tego trójkąta. Wyznacz stosunek długości boków tego trójkąta.

Podsumowanie działu 1

Ważne pojęcia

proporcja	wyrazy skrajne	wyrazy środkowe
wielkości wprost proporcjonalne		współczynnik proporcjonalności

- **Proporcją** nazywamy równość dwóch ilorazów.

  $a : b = c : d$ lub $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad b \neq 0, d \neq 0$

  wyrazy skrajne: $a : b = c : d$

  wyrazy środkowe: $a : b = c : d$

  wyraz skrajny: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

  wyraz środkowy: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

  wyraz środkowy: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

  wyraz skrajny: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

- W każdej proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych (mnożymy na krzyż):

  Jeśli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ to $a \cdot d = b \cdot c$

- Jeśli znamy trzy wyrazy proporcji $a : b = c : d \left(\text{lub } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$, gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, to możemy wyznaczyć czwarty wyraz, korzystając z jednego ze wzorów:

  $a = \frac{bc}{d}$, $b = \frac{ad}{c}$, $c = \frac{ad}{b}$, $d = \frac{bc}{a}$

- Mówimy, że wielkości dodatnie są wprost proporcjonalne wtedy, gdy wraz ze wzrostem jednej wielkości druga wielkość rośnie tyle samo razy.

- Dodatnie wielkości x, y są wprost proporcjonalne, jeśli ich iloraz jest stały.

  $\frac{y}{x} = a$ (co możemy też zapisać w postaci: $y = ax$), a, x, y – liczby dodatnie

  Iloraz ten (liczbę a) nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności prostej**.

- Jeżeli $\frac{y}{x} = \frac{t}{s}$, to zachodzą też proporcje: $\frac{y}{t} = \frac{x}{s}$, $\frac{t}{y} = \frac{s}{x}$, $\frac{x}{y} = \frac{s}{t}$

Czy już umiesz?

1 Który zapis jest błędny?

A. $10{,}5 : 24{,}5 = 4{,}5 : 10{,}5$ B. $\frac{3}{6{,}3} = \frac{2{,}7}{7}$ C. $\frac{1\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}} = \frac{9}{21}$ D. $\frac{3}{5} : 1\frac{2}{5} = 1 : 2\frac{1}{3}$

2 Z proporcji $\frac{x-1}{x+2} = \frac{6{,}2}{15{,}5}$ wynika, że

A. $6{,}2(x-1) = 15{,}5(x+2)$ B. $(x-1)(x+2) = 6{,}2 \cdot 15{,}5$

C. $15{,}5x - 1 = 6{,}2x + 2$ D. $15{,}5(x-1) = 6{,}2(x+2)$

3 Która z podanych liczb jest rozwiązaniem równania $\frac{x-10}{x+10} = \frac{x-4}{x+24}$?

A. 0,2 B. 0,4 C. 5 D. 25

4 Wielkości x i y w tabeli są wprost proporcjonalne. Którą z podanych liczb należy wpisać do tabeli?

x	0,25	2
y	1	

A. 8 B. 4 C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{8}$

5 Z proporcji $m : s = n : t$ wynika, że wielkość s jest równa

A. $\frac{n}{mt}$ B. $\frac{nt}{m}$ C. $\frac{mt}{n}$ D. $\frac{t}{mn}$

6 Na przygotowanie 21 kruchych ciasteczek potrzeba 6 jajek. Ilu jajek potrzeba na przygotowanie 56 takich ciasteczek?

A. 12 B. 16 C. 20 D. 24

7 Kasia i Grzegorz kupili mandarynki i podzielili je między siebie w stosunku 3 : 4. Jaką część wszystkich mandarynek otrzymał Grzegorz?

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{4}{7}$

8 Pierwszego dnia rowerzysta przejechał o 18 km więcej niż drugiego dnia. Stosunek długości drogi, którą pokonał rowerzysta drugiego dnia, do długości drogi, którą pokonał pierwszego dnia, jest równa 3 : 5. Ile kilometrów przejechał rowerzysta pierwszego dnia?

A. 72 km B. 45 km C. 36 km D. 27 km

9 Wojtek i Michał mają razem 540 zł oszczędności. Stosunek oszczędności Michała do oszczędności Wojtka jest równy 2 : 3. Ile złotych ma Wojtek?

A. 360 zł B. 324 zł C. 240 zł D. 216 zł

10 Na odcinku AB zaznaczono punkt C i w ten sposób podzielono go na dwa odcinki, których długości pozostają w stosunku 7 : 3. Odcinek AC jest o 36 cm dłuższy od odcinka CB. Odcinek AB jest równy:

A. 90 cm B. 84 cm C. 76 cm D. 70 cm

11 W pudełku jest łącznie 350 kulek. Kulki białe stanowią $\frac{2}{7}$ wszystkich kulek, a pozostałe kulki są niebieskie.

Oceń prawdziwość poniższych zdań.

a) Stosunek kulek białych do niebieskich jest równy 2 : 5.
b) W pudełku jest 210 kulek niebieskich.
c) Kulek białych jest o 150 mniej niż niebieskich.
d) Kulek niebieskich jest o 150% więcej niż białych.
e) Gdyby w tym pudełku było o 50 kulek niebieskich więcej, to stosunek kulek białych do niebieskich byłby równy 1 : 2.

12 Porcja twarożku o zawartości tłuszczu 4% waży 50 g.

Oceń prawdziwość poniższych zdań.

a) 12 porcji tego twarożku waży 0,6 kg.
b) Z 75 dag tego twarożku można zrobić 150 porcji.
c) W 3 porcjach tego twarożku jest 12% tłuszczu.
d) W 4 porcjach tego twarożku jest 8 g tłuszczu.
e) W 125 g tego twarożku jest 5 g tłuszczu.

13 Wstaw w miejsce liter odpowiednie liczby.

a) $\frac{9}{a} = \frac{72}{24}$
b) $3\frac{1}{2} : 4 = 1\frac{3}{4} : b$
c) $(13 + c) : 15 = 0{,}72 : 0{,}4$
d) $27 : (d + 5) = 36 : 16$

14 Rozwiąż równania.

a) $\frac{32}{3a - 2} = \frac{8}{7}$
b) $\frac{7{,}2}{6{,}3} = \frac{b + 7}{7}$
c) $\frac{144}{108} = \frac{c - 3}{12}$
d) $\frac{2\frac{1}{2}}{9 - 5d} = \frac{1\frac{7}{8}}{3}$
e) $\frac{3e}{5{,}6} = \frac{e - 2}{0{,}7}$
f) $\frac{f + 1}{2f} = \frac{3{,}5}{4{,}2}$
g) $\frac{g - 2}{g - 3} = \frac{g + 1}{g - 1}$
h) $\frac{h}{h + 2} = \frac{4h - 3}{4h + 3}$

15 Przeczytaj polecenia, a następnie zapisz, jakie ułamki otrzymano.

a) Wpisano tę samą cyfrę między cyfry licznika i mianownika ułamka $\frac{12}{21}$ i otrzymano ułamek równy ułamkowi $\frac{12}{21}$. Jaką cyfrę wpisano?
b) Wpisano tę samą cyfrę między cyfry licznika i mianownika ułamka $\frac{14}{32}$ i otrzymano ułamek równy ułamkowi $\frac{14}{32}$. Jaką cyfrę wpisano?
c) Wpisano tę samą cyfrę między cyfry licznika i mianownika ułamka $\frac{18}{54}$ i otrzymano ułamek równy ułamkowi $\frac{18}{54}$. Jaką cyfrę wpisano?

16 Właściciel restauracji zauważył, że średnio 8 na 26 gości zamawia sałatkę z kurczakiem. Ile dziennie sałatek z kurczakiem powinien przygotować właściciel, jeśli przeciętnie każdego dnia jego restaurację odwiedza 91 osób?

17 Sztabka mosiądzu w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 1 cm × 2 cm × 3 cm waży 48 g. Ile łącznie waży najmniejsza możliwa liczba takich sztabek potrzebna do ułożenia z nich kostki sześciennej?

18 Drukarka laserowa PROLASER drukuje 9 stron w ciągu 20 sekund, a drukarka laserowa LUXDRUK 2 strony w ciągu 5 sekund. Do wydrukowania są 972 strony. Ile czasu zajmie ich drukowanie na drukarce PROLASER, a ile na drukarce LUXDRUK?

19 Na przygotowanie 150 rogalików mama potrzebuje 1,2 kg mąki. Ile kilogramów mąki zużyje mama na wykonanie o $\frac{1}{3}$ mniej takich rogalików?

20 Na odcinku *CD* zaznaczono punkty *M* i *N*. Odcinek *CM* jest o 12 cm dłuższy od odcinka *MN* i o 18 cm dłuższy od odcinka *ND*. Stosunek długości odcinka *CM* do długości odcinka *MN* jest równy stosunkowi długości odcinka *MN* do długości odcinka *ND*. Oblicz długość odcinka *CD*. Wyznacz stosunek długości odcinków, na które podzielono odcinek *CD*.

21 Maksym jest 3 lata młodszy od Wojtka. 5 lat temu stosunek wieku Maksyma do wieku Wojtka był równy 2 : 3. Ile obecnie lat ma Maksym, a ile Wojtek?

22 Pięć orzechów nerkowca waży 6,8 g.

a) Jedno małe opakowanie orzechów nerkowca zawiera ich 150 g. Oszacuj, ile orzechów jest w tym opakowaniu. Wynik zaokrąglij do jedności.

b) Do ciasta orzechowego zużyto 98 orzechów, co stanowi $\frac{2}{3}$ orzechów z dużego opakowania. Oszacuj, ile gramów orzechów zawiera duże opakowanie. Wynik zaokrąglij do jedności.

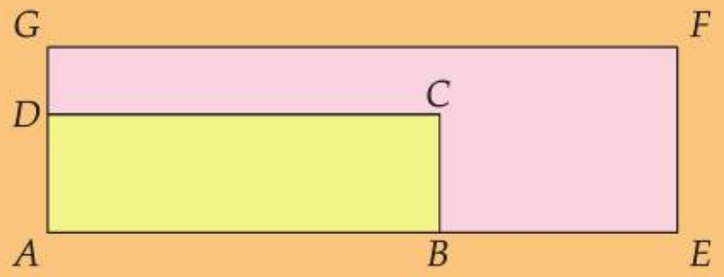
23 W pierwszym pudełku jest dwa razy więcej klocków niż w drugim. Jeżeli z drugiego pudełka przełożymy 15 klocków do pierwszego pudełka, to w pierwszym pudełku będzie 7 razy więcej klocków niż w drugim. Ile klocków jest w pierwszym, a ile w drugim pudełku?

24 Oblicz, ile gramów soli i ile gramów wody jest w 27 dag solanki o stężeniu 15%.

25 W prostokącie o obwodzie 9 dm stosunek długości boków jest równy 4 : 11. Oblicz długości boków i pole tego prostokąta.

26 W rombie o polu 240 cm² stosunek długości przekątnych jest równy 8 : 15. Oblicz długości tych przekątnych.

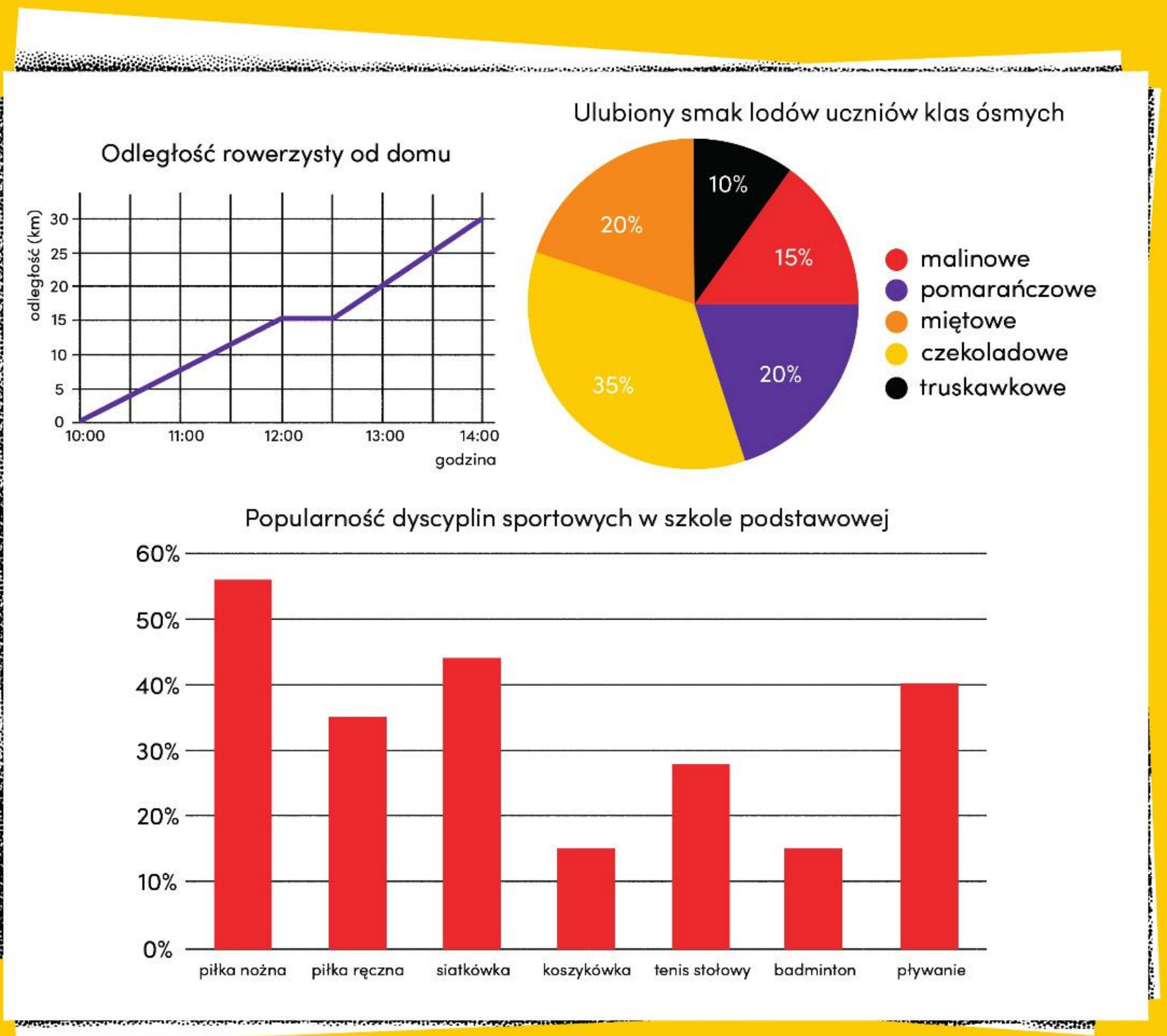
27 Każdy z boków prostokąta *ABCD* o obwodzie 22 cm wydłużono tyle samo razy i otrzymano prostokąt *AEFG* o obwodzie 35,2 cm. Krótszy bok prostokąta *AEFG* jest o 1,5 cm dłuższy od krótszego boku prostokąta *ABCD*. Oblicz długości boków obu prostokątów.



28 Przekątna kwadratu *ABCD* jest o 9,6 dm krótsza od przekątnej kwadratu *KLMN*. Stosunek obwodu kwadratu *ABCD* do obwodu kwadratu *KLMN* jest równy 3 : 5. Oblicz długości boków i pola obu kwadratów.

29 Na odcinku *AB* zaznaczono punkty *K* i *L*. Odcinek *KL* jest o 8 cm dłuższy od odcinka *AK* i o 24 cm krótszy od odcinka *LB*. Stosunek długości odcinka *KL* do długości odcinka *AK* jest równy stosunkowi długości *LB* odcinka do długości odcinka *KL*. Oblicz długość odcinka *AB*. Wyznacz stosunek długości odcinków, na które podzielono odcinek *AB*.

2. Wprowadzenie do statystyki i rachunku prawdopodobieństwa



1. Powiedz, w jaki sposób przedstawiono informacje na ilustracji. Jak myślisz, jak można pozyskać takie dane?
2. Przez ile minut rowerzysta nie przemieszczał się? Jaka była średnia prędkość rowerzysty w ciągu pierwszych dwóch godzin jazdy? Jakie inne informacje możesz odczytać z tego wykresu?
3. Jakie lody najbardziej lubią ósmoklasiści, a jakie najmniej?
4. Przyjrzyj się diagramowi słupkowemu. Następnie powiedz, która dyscyplina sportowa jest najbardziej, a która najmniej popularna wśród uczniów szkoły podstawowej. Co jeszcze możesz odczytać z tego diagramu?

2.1 Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w tabelach i na diagramach

Podejmij temat





Z której klasy w I turze wyborów do Samorządu Uczniowskiego startowało najwięcej uczniów?
Ile łącznie oddano głosów?
Podaj imiona uczniów, którzy przejdą do II tury wyborów.

Ciekawe!

Główny Urząd Statystyczny (GUS), utworzony w 1918 roku, to naczelny organ statystyki państwowej w Polsce. Działania GUS obejmują przede wszystkim statystyczne badania życia gospodarczego, społecznego i kulturalnego oraz opracowywanie i ogłaszanie wyników badań. Misją Głównego Urzędu Statystycznego jest jak najlepsze zaspokajanie potrzeb wszystkich krajowych i międzynarodowych użytkowników danych i analiz statystycznych, od szczebla administracji rządowej aż po uczniów i studentów.

Źródło: https://stat.gov.pl/

Aby właściwe ocenić sytuację lub podejmować słuszne decyzje, potrzebujemy wielu różnych informacji. Możemy je gromadzić np. za pomocą ankiet, wywiadów, sondaży lub spisów. Otrzymywane w ten sposób informacje nazywamy **danymi statystycznymi**, a proces ich zbierania – **badaniem statystycznym**.

Dane statystyczne dzielimy na **ilościowe** i **jakościowe**. Dane ilościowe są wyrażone za pomocą liczb, często z odpowiednią jednostką (np. wzrost, liczba komputerów, pole powierzchni, gęstość zaludnienia). Dane jakościowe opisywane są słownie (np. kolor oczu, stan cywilny, ulubiony przedmiot).

Statystyka jest nauką, która zajmuje się gromadzeniem, porządkowaniem, opracowywaniem i analizowaniem danych.

Dane statystyczne mogą być opracowywane i prezentowane w różny sposób. Najczęściej przedstawia się je w tabeli lub graficznie (np. na diagramie słupkowym, kołowym, pierścieniowym lub na wykresie).

Przedstawmy w różny sposób wyniki ankiety, którą przeprowadzono wśród uczniów klasy VIIIb w pewnej szkole. W ankiecie pytano o miejsce wypoczynku w czasie ostatnich wakacji (morze, jezioro, góry, dom).

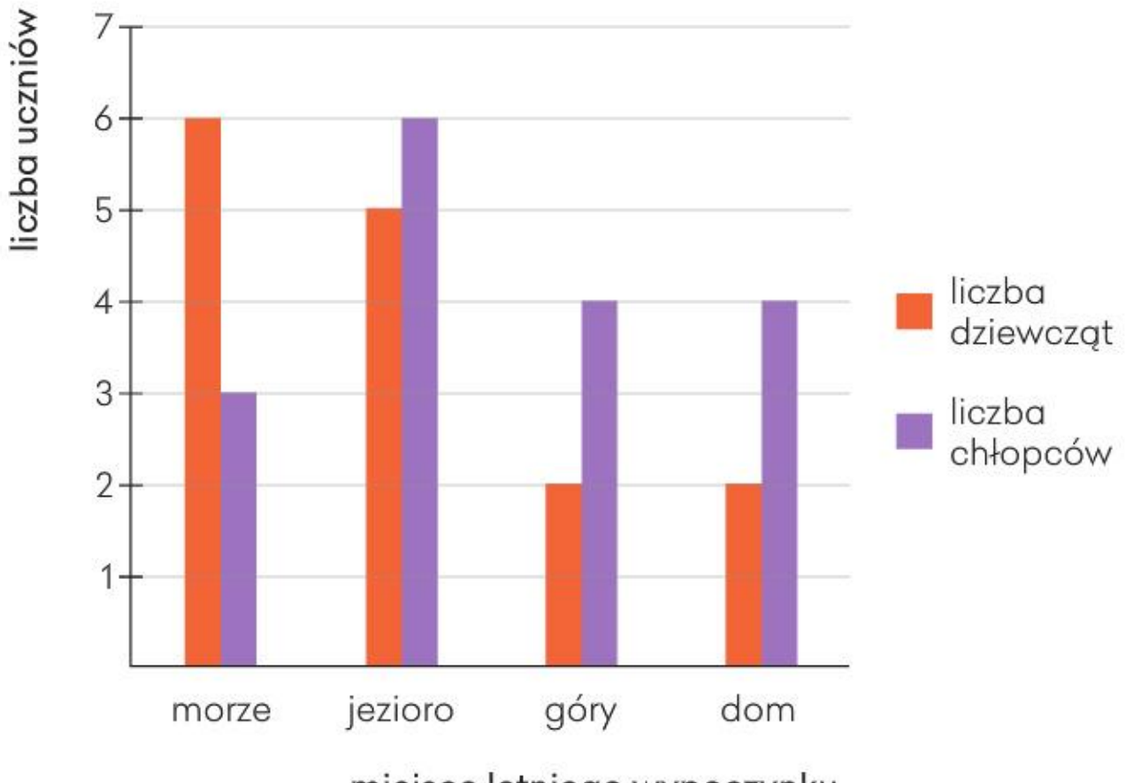
- Tabela

Miejsce wypoczynku	morze		jezioro		góry		dom	
Liczba uczniów	DZ	CH	DZ	CH	DZ	CH	DZ	CH
	6	3	5	6	2	4	2	4

- Diagramy kołowe



- Diagram słupkowy



Przykład 1

Z informacji podanych w *Podejmij temat* wynika, że do II tury wyborów do Samorządu Uczniowskiego przeszło czterech kandydatów: Bartek, Dominika, Weronika i Konrad. Osoba, która w II turze wyborów otrzymała najwięcej głosów, zostanie przewodniczącym Samorządu Uczniowskiego, a osoba z drugim wynikiem – zastępcą przewodniczącego. W II turze wyborów każdy z uczniów klas IV–VIII mógł oddać tylko jeden głos. W tabeli obok przedstawiono wyniki tego głosowania. Zastanówmy się, jakie dane możemy odczytać z tabeli i jak możemy je zinterpretować.

Kandydaci na przewodniczącego	Liczba oddanych ważnych głosów
Bartek	75
Dominika	58
Weronika	74
Konrad	53

Z tabeli możemy odczytać m.in., że:

- Bartek zdobył największą liczbę głosów,
- Weronika otrzymała o 1 głos mniej niż Bartek,
- każdy z kandydatów otrzymał co najmniej 53 głosy.
- najmniej głosów otrzymał Konrad,
- oddano łącznie 260 ważnych głosów,

Interpretując te dane, możemy stwierdzić m.in., że:

- Bartek, który zdobył największą liczbę głosów, zostanie przewodniczącym Samorządu Uczniowskiego, a Weronika – jego zastępcą,
- w II turze wyborów najmniej popularnym kandydatem na przewodniczącego był Konrad,
- gdyby w II turze wyborów jedna spośród osób głosujących na Dominikę albo Konrada oddała swój głos na Weronikę, to musiałaby się odbyć kolejna tura wyborów z Bartkiem i Weroniką jako kandydatami.

Z tabeli nie możemy dowiedzieć się np., czy:

- Dominika i Weronika są przyjaciółkami,
- Konrad interesuje się historią,
- Bartek ma ocenę wzorową z zachowania,
- Bartek ma rodzeństwo.

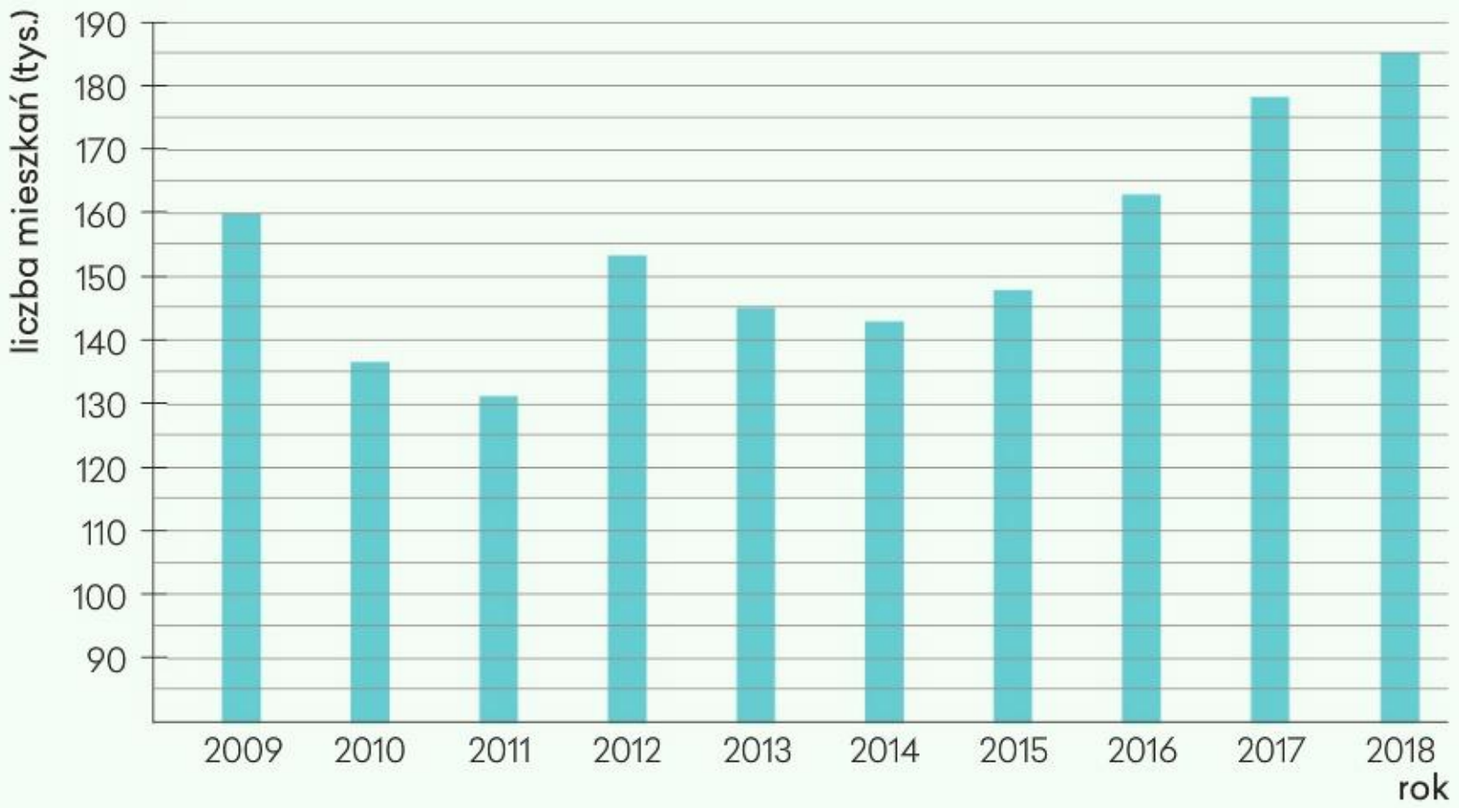
1. Przeanalizuj dane z tabeli w *Podejmij temat* oraz z tabeli w przykładzie 1 i odpowiedz na pytania.

- W której turze wyborów wzięło udział więcej – i o ilu więcej – uczniów?
- Jakie byłyby wyniki II tury wyborów, gdyby jedna z osób głosujących na Bartka oddała swój głos na Weronikę?
- Jakie byłyby wyniki II tury wyborów, gdyby dwie z osób głosujących na Bartka oddały swój głos na Dominikę?

Przykład 2

Na diagramie słupkowym przedstawiono dane dotyczące liczby mieszkań oddanych do użytkowania w Polsce w latach 2009–2018.

Zastanówmy się, jakie dane możemy odczytać z diagramu i jak możemy je zinterpretować.



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Z diagramu, na którym przedstawiono dane dotyczące liczby mieszkań oddanych do użytkowania w Polsce w latach 2009–2018, możemy wywnioskować m.in., że:

- w latach 2014–2018 rosła liczba mieszkań oddanych do użytkowania,
- największy wzrost liczby mieszkań oddanych do użytkowania w stosunku do roku poprzedniego nastąpił w 2012 r.,
- ponad 170 tys. mieszkań oddano do użytkowania zarówno w 2017, jak i w 2018 r.,
- w 2010 r. nastąpił spadek liczby mieszkań oddanych do użytkowania w odniesieniu do roku 2009,
- liczba mieszkań oddanych do użytkowania w 2013 r. jest zbliżona do liczby mieszkań oddanych do użytkowania w roku 2014.

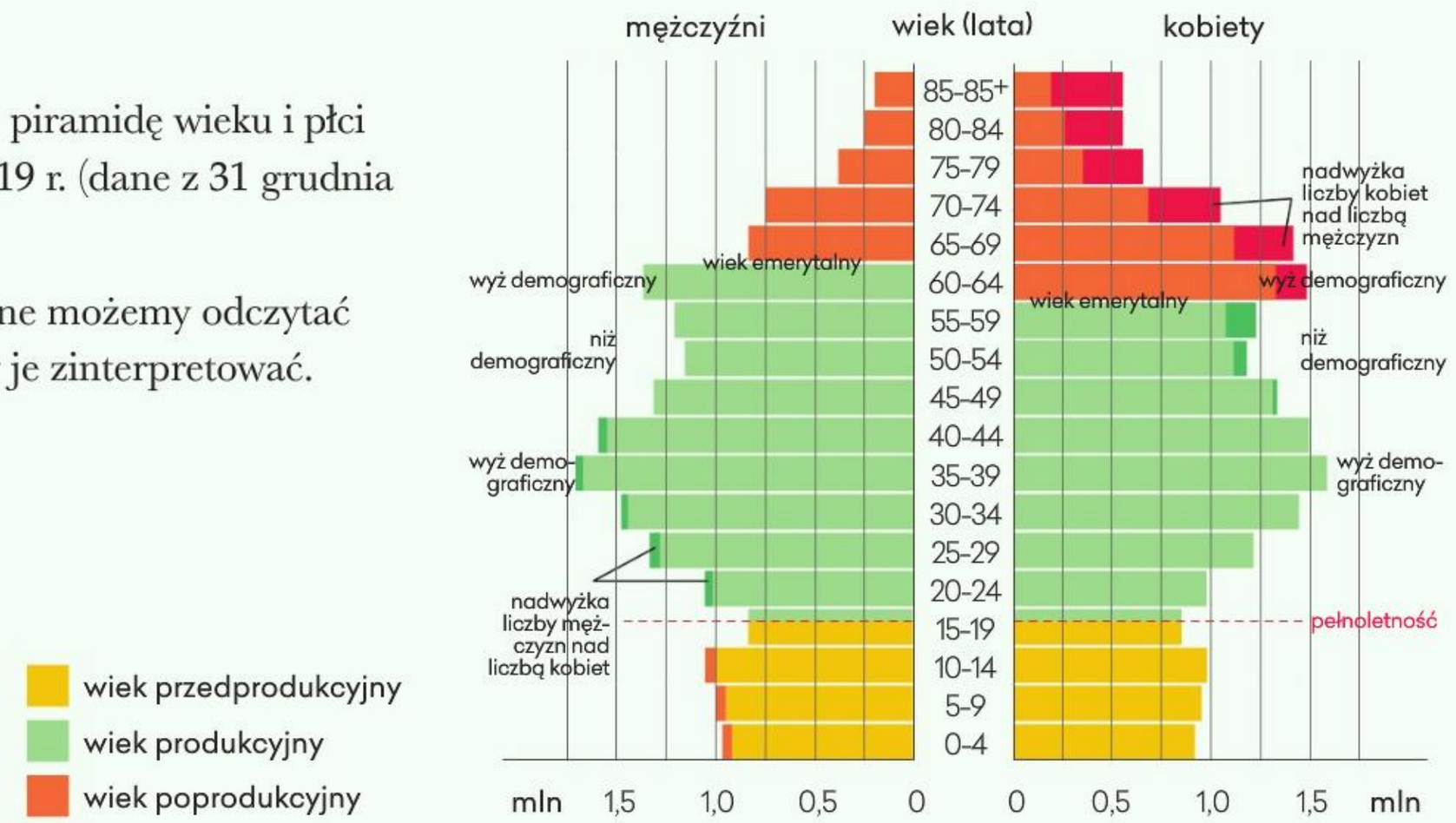
2. Przeanalizuj dane z diagramu w przykładzie 2 i odpowiedz na pytania.

- W którym roku oddano w Polsce do użytkowania najwięcej mieszkań, a w którym oddano ich najmniej?
- W jakich latach oddano w Polsce do użytkowania mniej niż 150 tys. mieszkań?
- O ile tysięcy mniej mieszkań oddano do użytkowania w 2013 niż w 2018 r.?

Przykład 3

Obok przedstawiono tzw. piramidę wieku i płci mieszkańców Polski w 2019 r. (dane z 31 grudnia 2019 r.).

Zastanówmy się, jakie dane możemy odczytać z diagramu i jak możemy je zinterpretować.



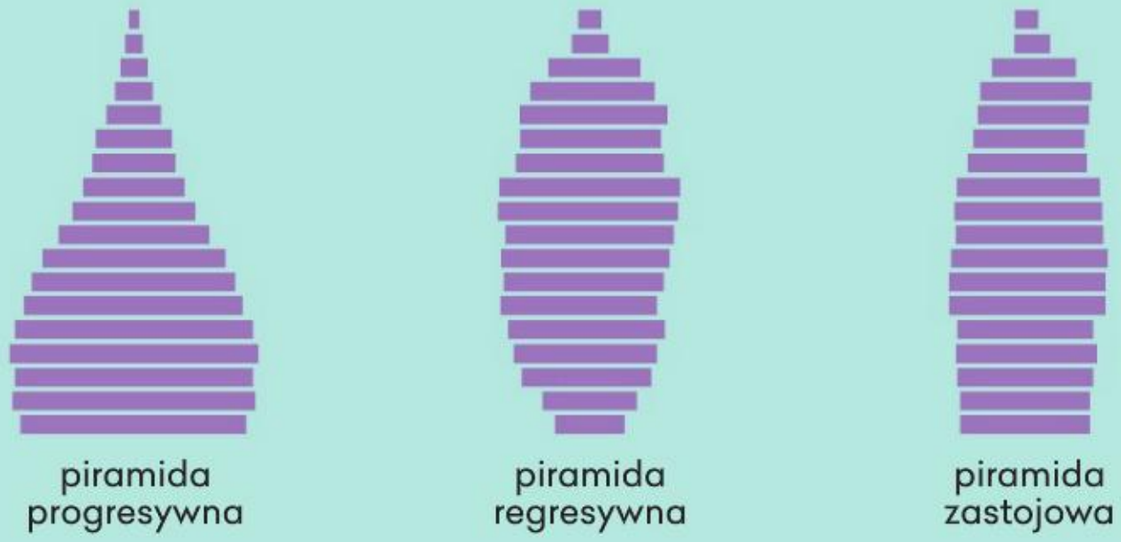
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Z danych przedstawionych na piramidzie wieku i płci możemy m.in. wywnioskować, że wśród mieszkańców Polski w dniu 31 grudnia 2019 r.:

- najwięcej, zarówno mężczyzn, jak i kobiet, było w wieku 35–39, czyli osoby w wieku 35–39 lat były w wyżu demograficznym,
- w wieku powyżej 85 lat było więcej niż 500 000 kobiet,
- w wieku 10–14 lat było więcej chłopców niż dziewczynek,
- osoby w wieku 50–54 lata znajdowały się w niżu demograficznym,
- mniej niż 2 000 000 dzieci urodziło się w latach 2015–2019.

Więcej na temat

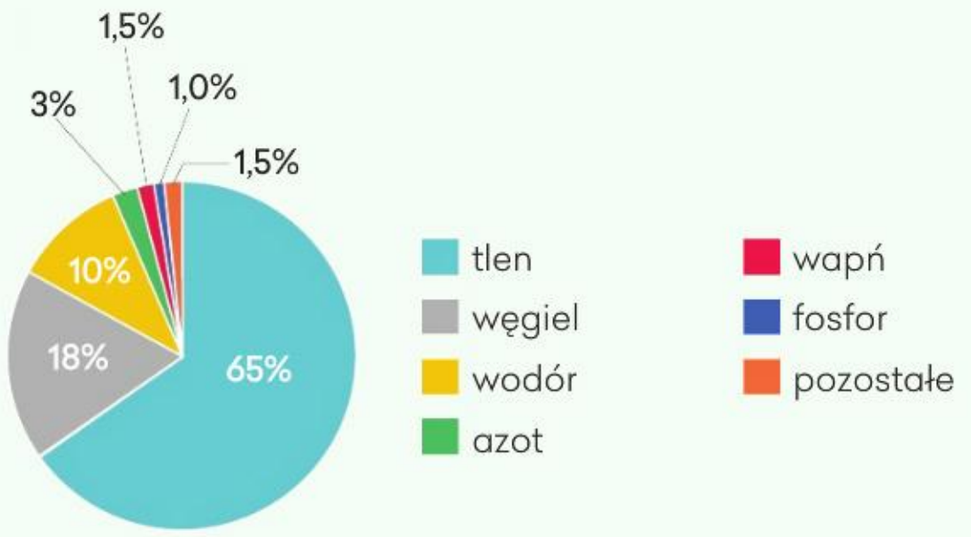
Kształt piramidy obrazuje strukturę wieku społeczeństwa. Pozwala to m.in. na prognozowanie zmian liczby ludności w ciągu kilkudziesięciu lat.
Na przykład znaczne pogrubienie piramidy u podstawy wskazuje na wysoki przyrost naturalny (społeczeństwo młode). Z kolei wąski dół piramidy sugeruje niski przyrost naturalny, prowadzący do starzenia się społeczeństwa. Według tego kryterium piramidy wiekowe można podzielić na progresywne, regresywne i zastojowe.



3. Zastanów się, czy piramida z przykładu 3 jest progresywna, regresywna czy zastojowa. Na podstawie kształtu tej piramidy określ, czy polskie społeczeństwo jest młode, czy się starzeje.

Przykład 4

Diagram kołowy przedstawia skład poszczególnych pierwiastków w organizmie człowieka. Obliczmy, o ile więcej kilogramów tlenu niż kilogramów azotu zawiera ciało człowieka o masie 70 kg.



Sposób I

Z diagramu odczytujemy, że:

- tlen stanowi 65% masy ciała, czyli:
  65% z 70 kg to $0{,}65 \cdot 70$ kg $= 45{,}5$ kg
- azot stanowi 3% masy ciała, czyli:
  3% z 70 kg to $0{,}03 \cdot 70$ kg $= 2{,}1$ kg
  $45{,}5$ kg $- 2{,}1$ kg $= 43{,}4$ kg

Sposób II

$(65\% - 3\%) \cdot 70 = 0{,}62 \cdot 70 = 43{,}4$

W ciele człowieka ważącego 70 kg jest o 43,4 kg więcej tlenu niż azotu.

4. Korzystając z diagramu w przykładzie 4 oblicz, ile kilogramów węgla i ile kilogramów wapnia zawiera ciało człowieka o masie 85 kg.

Zadania

W grupie ósmoklasistów przeprowadzono sondaż dotyczący gier komputerowych. Jedno z pytań brzmiało: „Ile masz przygodowych gier komputerowych?”. Wyniki sondażu przedstawia tabela.

Liczba gier	1	2	3	4 i więcej
Liczba uczniów	15	25	20	40

Odpowiedz na pytania.

a) Ilu uczniów brało udział w sondażu?

b) Jaka część liczby ankietowanych ósmoklasistów ma przynajmniej 3 przygodowe gry komputerowe?

c) Jaki procent badanych uczniów ma co najwyżej 2 przygodowe gry komputerowe?

W tabeli podano zestawienie najdłuższych rzek w Polsce.

Nazwa rzeki	Wisła	Odra	Warta	Bug	Narew	San
Długość (km)	1047	854	808	772	484	443

Odpowiedz na pytania.

a) O ile kilometrów Warta jest krótsza od Wisły, a o ile – od Odry?

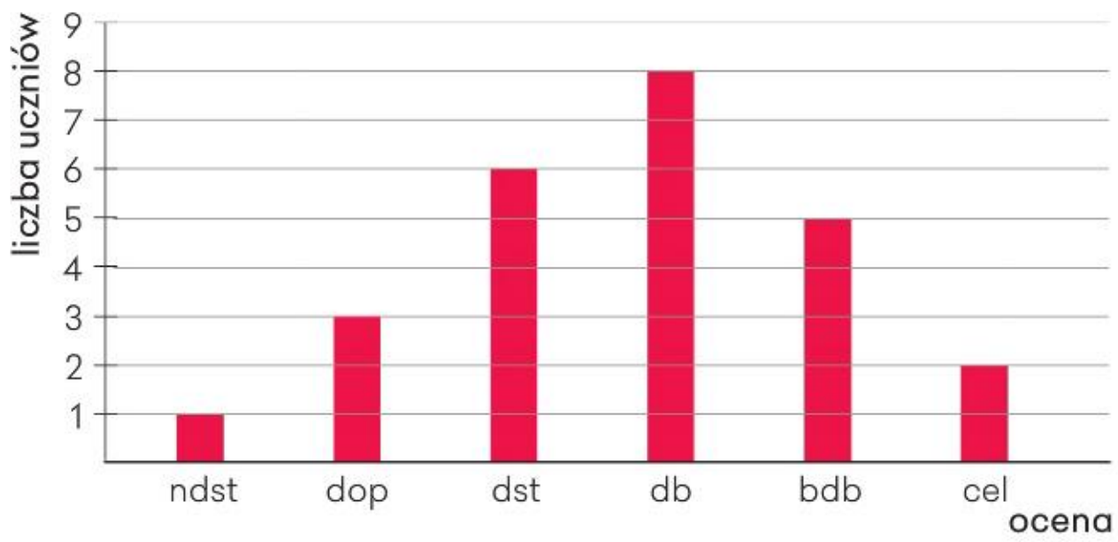
b) Jaką częścią długości Odry jest długość Sanu? Wynik podaj z dokładnością do 0,1.

c) Czy łączna długość rzek podanych w tabeli jest większa od najdłuższej rzeki Europy?

Diagram przedstawia uzyskane przez uczniów wyniki testu z historii.

Wykorzystując dane zamieszczone na diagramie, odpowiedz na pytania.

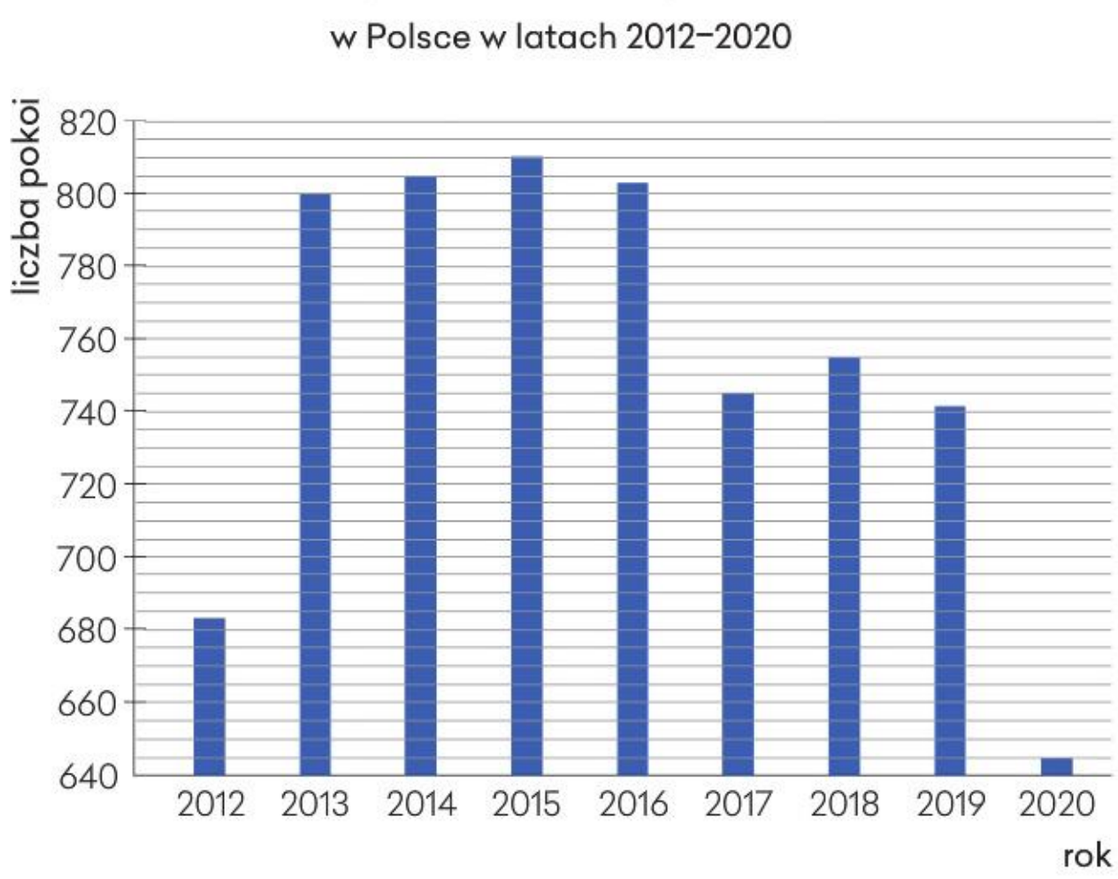
a) Ilu uczniów pisało test z historii?
b) Których ocen było najwięcej, a których najmniej?
c) Jaką część uczniów piszących test stanowią ci, którzy uzyskali ocenę co najmniej dobrą?
d) Jaki procent piszących test stanowią uczniowie, którzy uzyskali ocenę dopuszczającą?



Na diagramie słupkowym przedstawiono dane dotyczące liczby pokoi w gospodarstwach agroturystycznych w Polsce w latach 2012–2020 (dane z 31 lipca każdego roku).

Odpowiedz na pytania.

a) W którym roku, spośród podanych lat, oferowano 31 lipca w Polsce najwięcej, a w którym roku najmniej pokoi w gospodarstwach agroturystycznych?
b) W jakich latach 31 lipca oferowano w Polsce mniej niż 750 pokoi w gospodarstwach agroturystycznych?
c) O ile mniej, w przybliżeniu, pokoi w gospodarstwach agroturystycznych oferowano 31 lipca 2020 r. niż 31 lipca 2015 r.?
d) W którym roku nastąpił gwałtowny wzrost, a w którym zanotowano spadek liczby oferowanych w Polsce pokoi w gospodarstwach agroturystycznych w stosunku do ich liczby z poprzedniego roku?

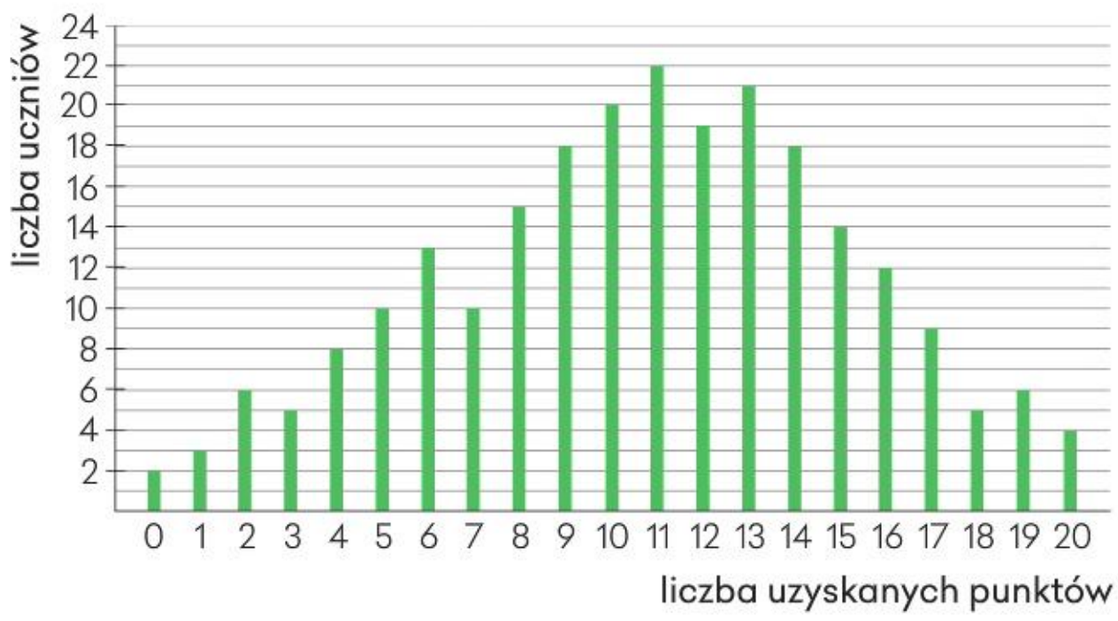


Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

W pierwszym etapie konkursu matematycznego wzięło udział 240 uczniów. Każdy uczestnik mógł uzyskać maksymalnie 20 punktów. Na diagramie pokazano, ilu uczniów uzyskało poszczególne liczby punktów.

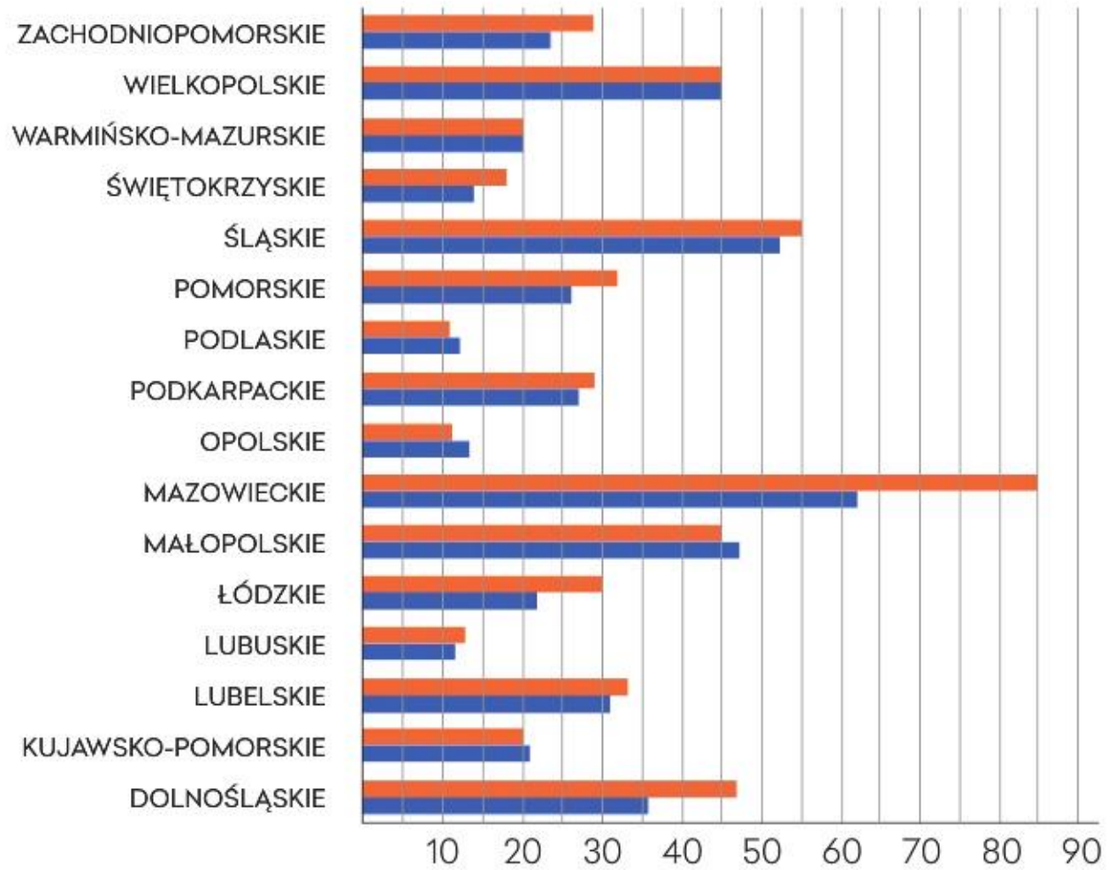
Zgodnie z regulaminem konkursu do finału przechodzi 15% uczestników pierwszego etapu, którzy uzyskali najlepsze wyniki.

a) Krzyś uzyskał 15 punktów, a Michał 16 punktów. Czy przejdą do finału?
b) Wynik lepszy niż Ania otrzymało 68 uczniów. Ile punktów otrzymała Ania?
c) Tomkowi zabrakło 5 punktów, aby przejść do finału. Jaki wynik uzyskał Tomek? Ilu uczniów otrzymało wynik niższy niż wynik Tomka?



Na wykresie przedstawiono łączną liczbę kin w poszczególnych województwach w roku 2014 i 2019.

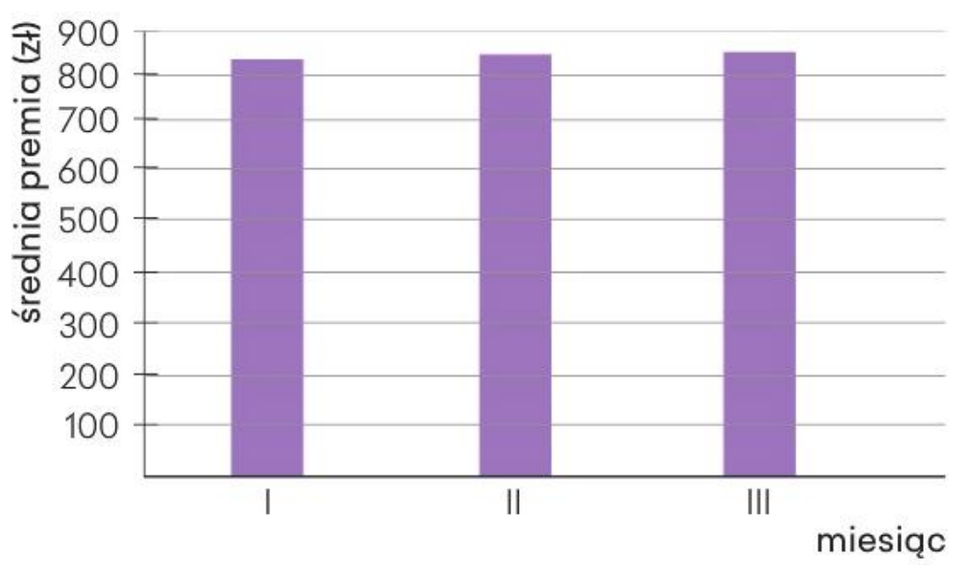
a) W których województwach w 2019 r. było mniej kin niż w 2014 r.?
b) W których województwach w 2019 r. było nie więcej niż 15 kin?
c) W których województwach w 2014 r. było więcej niż 30 kin?
d) W 2014 r. w Polsce były łącznie 463 kina, a w roku 2019 – 523 kina. Jaki procent wszystkich kin w Polsce w 2014, a jaki w 2019 r. stanowiły kina w województwie warmińsko-mazurskim?



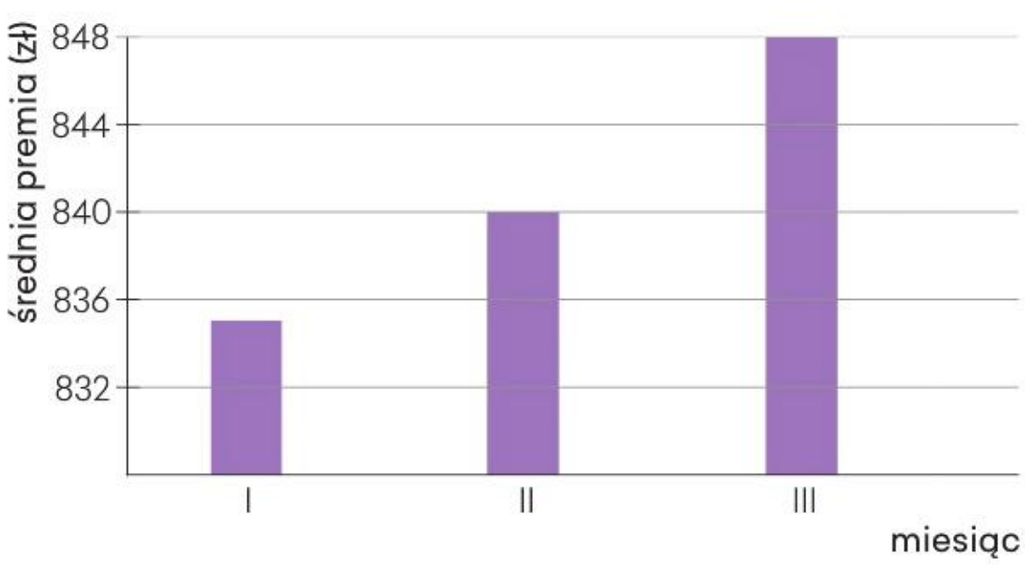
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Poniższe diagramy słupkowe przedstawiają te same dane dotyczące średnich premii w firmie A&Z w pierwszym kwartale pewnego roku. Dokonaj analizy tych diagramów. Porównaj wzrost średnich premii na obu diagramach. Wyjaśnij, dlaczego informacje z diagramu b) mogą wprowadzić nas w błąd.

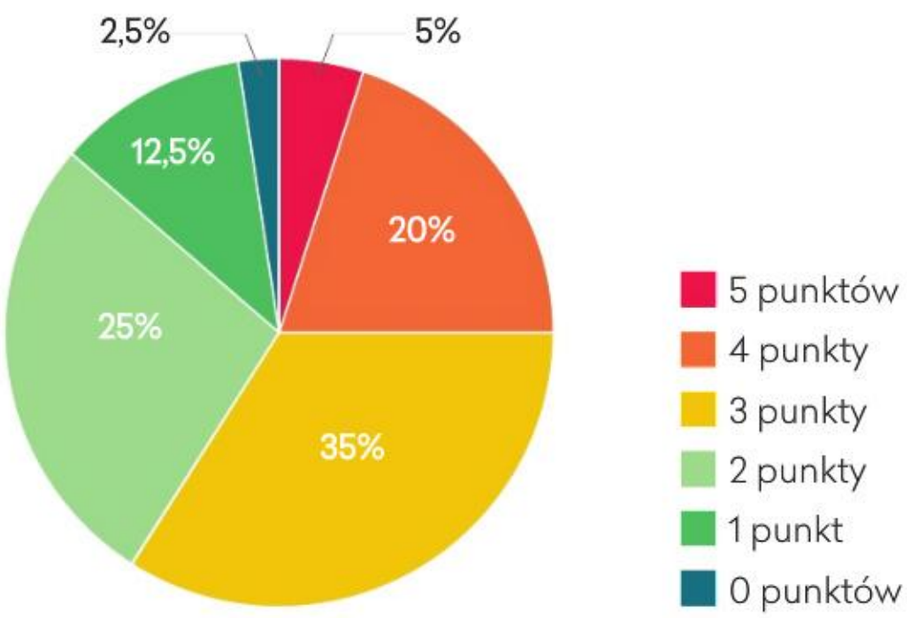
a)



b)



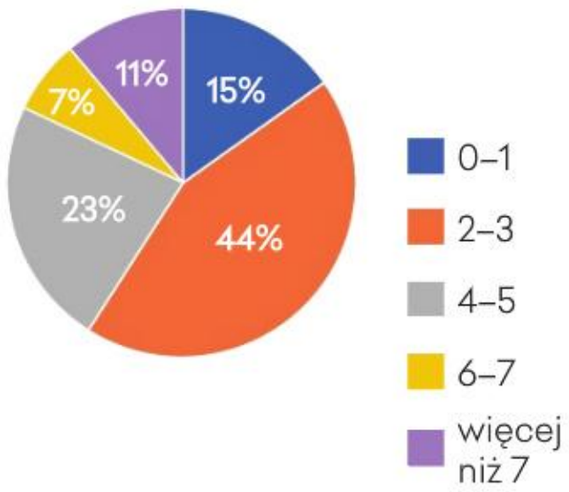
Procentowy diagram kołowy przedstawia wyniki pewnego konkursu chemicznego. Każdy zawodnik otrzymał do rozwiązania 5 zadań. Za poprawne rozwiązanie zadania uczestnik konkursu otrzymywał 1 punkt, a za błędne – 0 punktów.



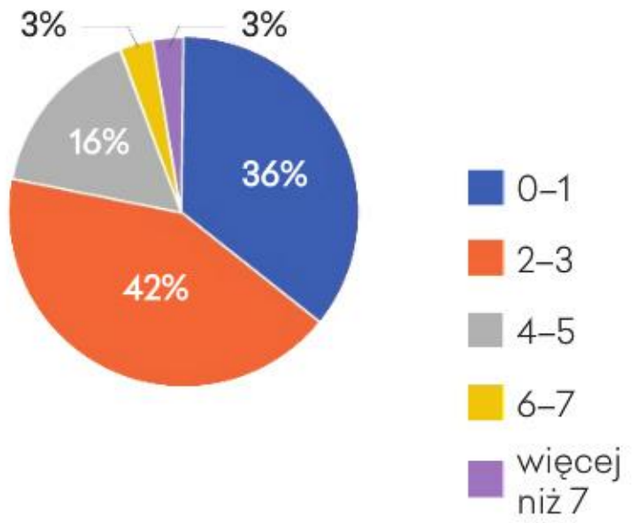
a) Oblicz, ilu było uczestników konkursu, jeśli wszystkie zadania rozwiązało poprawnie tylko dwóch zawodników.
b) Ilu zawodników rozwiązało poprawnie 4 zadania?
c) Podaj, ilu zawodników rozwiązało poprawnie co najmniej 2 zadania.
d) Ewa, która rozwiązała poprawnie 3 zadania, stwierdziła, że oprócz niej 3 punkty otrzymało 14 zawodników. Sprawdź, czy Ewa ma rację.

Zapytano 320 chłopców i 200 dziewcząt w wieku 13–15 lat, ile godzin dziennie serfują po internecie. Wyniki przedstawiono na diagramach kołowych.

a) Chłopcy

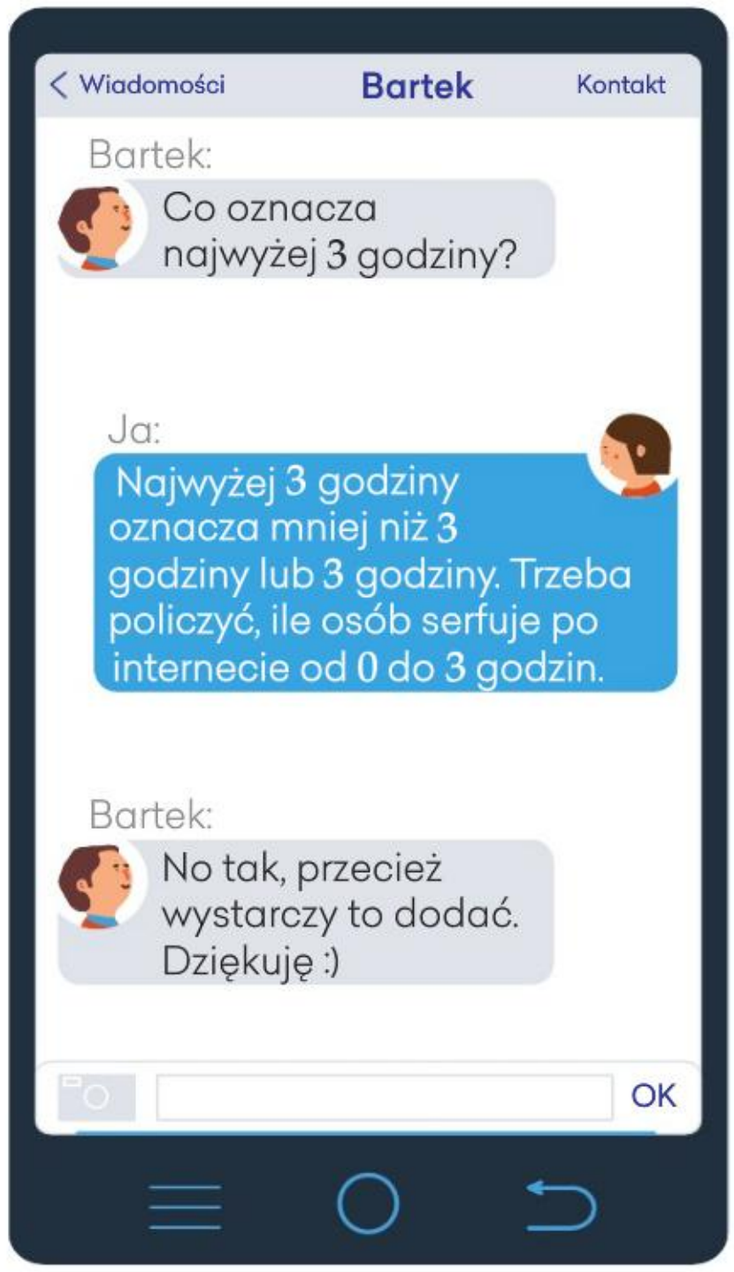


b) Dziewczęta

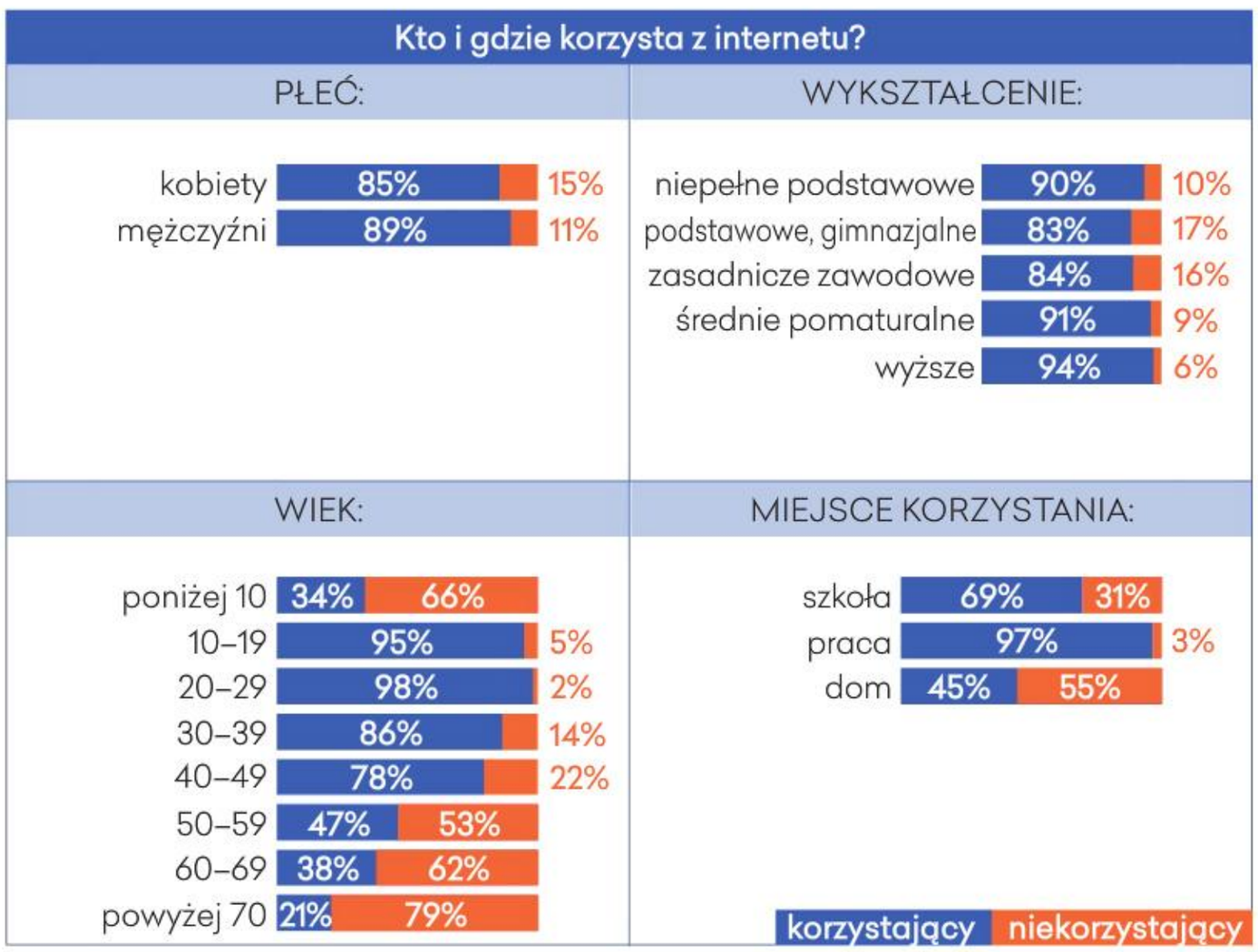


Odpowiedz na pytania.

a) Ilu chłopców i ile dziewcząt serfuje po internecie nie więcej niż jedną godzinę dziennie?
b) Ile dziewcząt serfuje po internecie najwyżej 3 godziny dziennie?
c) O ile więcej chłopców niż dziewcząt serfuje po internecie od 4 do 7 godzin dziennie?



Wśród mieszkańców osiedla w pewnym mieście przeprowadzono ankietę na temat: „Kto i gdzie korzysta z internetu?”. Diagramy przedstawiają dane otrzymane z tej ankiety.



Zinterpretuj dane przedstawione na każdym diagramie.

2.2 Odczytywanie i interpretowanie danych statystycznych z wykresów

Podejmij temat

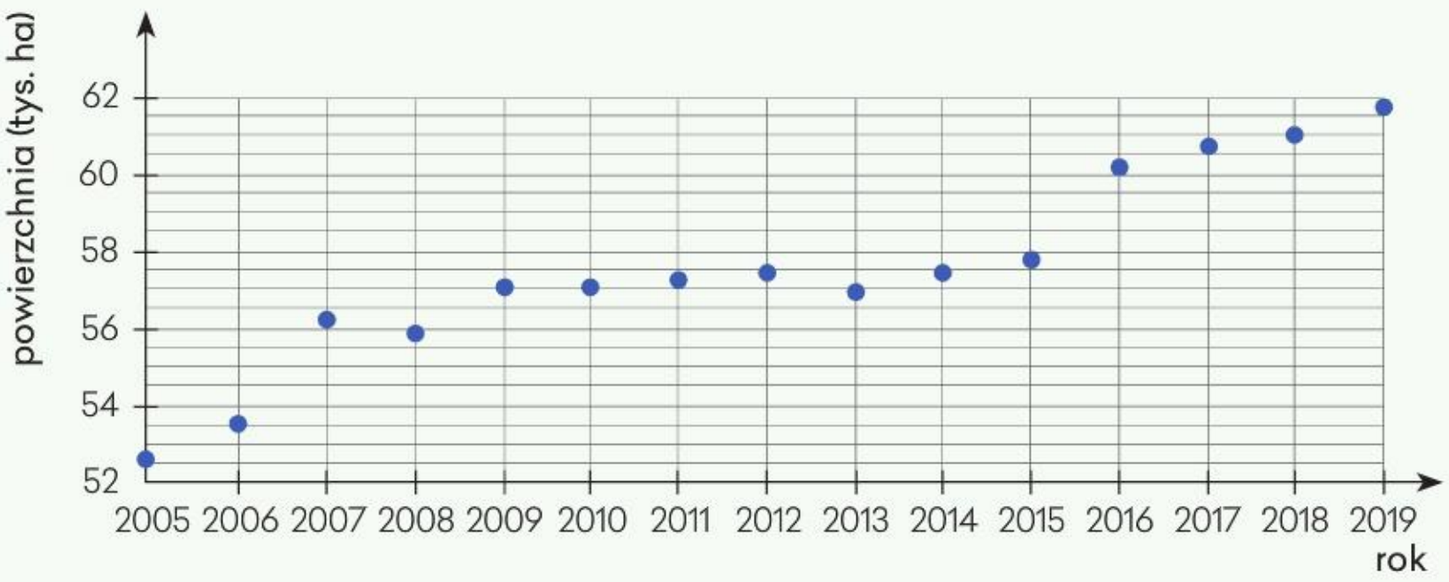


Jaka zależność została przedstawiona na wykresie?
Ile siewek wykiełkowało w temperaturze otoczenia 15°C? A ile w temperaturze 35°C?
Jak sądzisz, dlaczego Natalia stwierdziła, że temperatura, w której wykiełkuje najwięcej nasion, powinna wynosić 25°C?

Jednym z graficznych sposobów przedstawiania informacji jest wykres liniowy lub punktowy. Wykresy stosujemy zwłaszcza wtedy, gdy obserwujemy, jak zmienia się w czasie np. prędkość jazdy, długość przebytej drogi, temperatura powietrza, liczba urodzeń, zysk osiągany przez pewną firmę.

Przykład 1

Na wykresie punktowym zamieszczono informacje dotyczące łącznego pola powierzchni (w tys. ha) zajmowanego przez parki, zieleńce i tereny zieleni osiedlowej.
Zastanówmy się, jakie informacje możemy odczytać z tego wykresu.



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

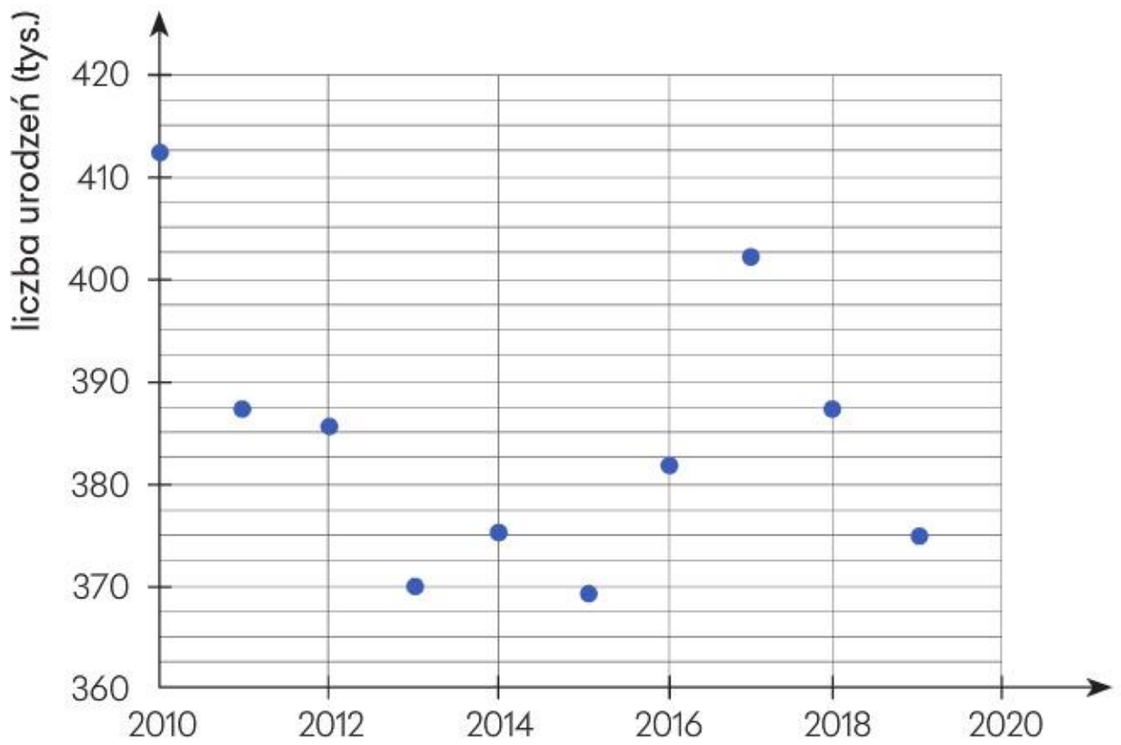
Z wykresu możemy odczytać np., że:

- w 2005 r. powierzchnia parków, zieleńców i terenów zieleni osiedlowej była równa ok. 52,5 tys. ha, a w 2019 r. – 62 tys. ha, zatem w okresie od 2005 do 2019 r. powierzchnia parków, zieleńców i terenów zieleni osiedlowej zwiększyła się o ok. 9,5 tys. ha,
- na przestrzeni lat 2005–2019 jedynie w roku 2008 i 2013 powierzchnia parków, zieleńców i terenów zieleni osiedlowej zmniejszyła się w stosunku do roku poprzedniego,
- w latach 2009–2012 wielkość pola powierzchni parków, zieleńców i terenów zieleni osiedlowej była na podobnym poziomie i wynosiła ok. 57 tys. ha,
- w latach 2005–2019 obserwujemy tendencję wzrostową powierzchni parków, zieleńców i terenów zieleni osiedlowej.

1. Wykres punktowy przedstawia liczbę urodzeń w Polsce w latach 2010–2019.

Odpowiedz na pytania.

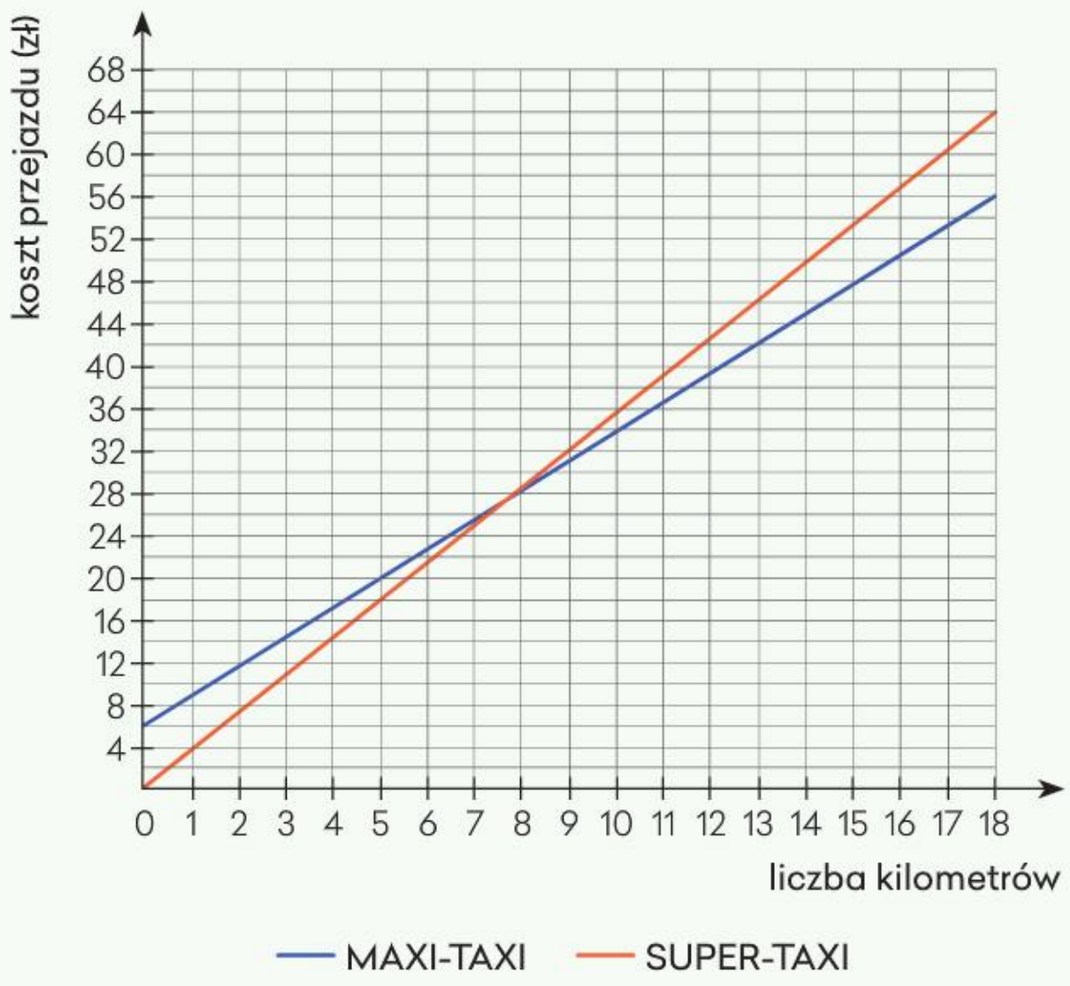
- Ile dzieci urodziło się w 2017 r.?
- W którym roku urodziło się najwięcej dzieci, a w którym roku najmniej?
- W którym roku urodziło się ok. 382 000 dzieci?
- W jakich latach, w omawianym okresie, urodziło się więcej niż 400 000 dzieci?
- O ile więcej dzieci urodziło się w 2018 niż w 2014 r.?



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Przykład 2

Na wykresach liniowych przedstawiono opłaty za przejazd taksówkami dwóch korporacji taksówkarskich: MAXI-TAXI i SUPER-TAXI na małych odległościach (do 18 km) w zależności od liczby przebytych kilometrów.
Zastanówmy się, jakie informacje możemy odczytać z tych wykresów.



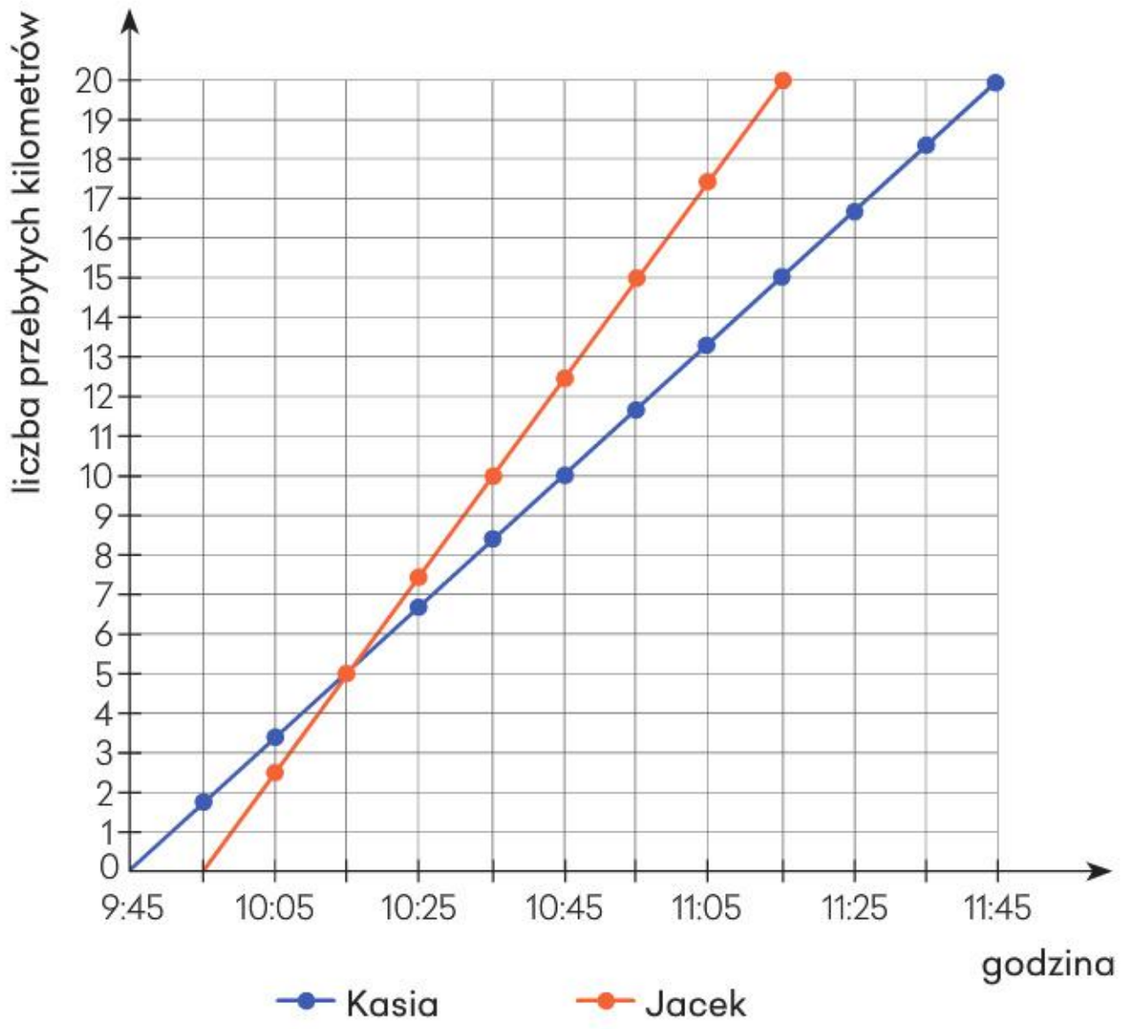
Z wykresów możemy dowiedzieć się np., że:

- korporacja MAXI-TAXI pobiera opłatę za rozpoczęcie kursu – opłata wynosi 6 zł; takiej opłaty nie pobiera korporacja SUPER-TAXI,
- za przejechanie 18 km taksówką korporacji MAXI-TAXI zapłacimy 56 zł, a taksówką korporacji SUPER-TAXI – 64 zł,
- za przejechanie 8 km zapłacimy 28 zł, bez względu na to, którą korporację wybierzemy,
- przy odległościach do 8 km opłaca się klientowi wybrać korporację SUPER-TAXI, przy odległościach większych niż 8 km – korporację MAXI-TAXI.

2. Kasia i Jacek postanowili pojechać na hulajnogach do babci, która mieszka w odległości 20 km od ich miejsca zamieszkania. Kasia wyjechała o godz. 9:45, a Jacek 10 minut później. Na wykresie przedstawiono zależności między czasem jazdy a liczbą kilometrów przebytych przez Kasię i Jacka.

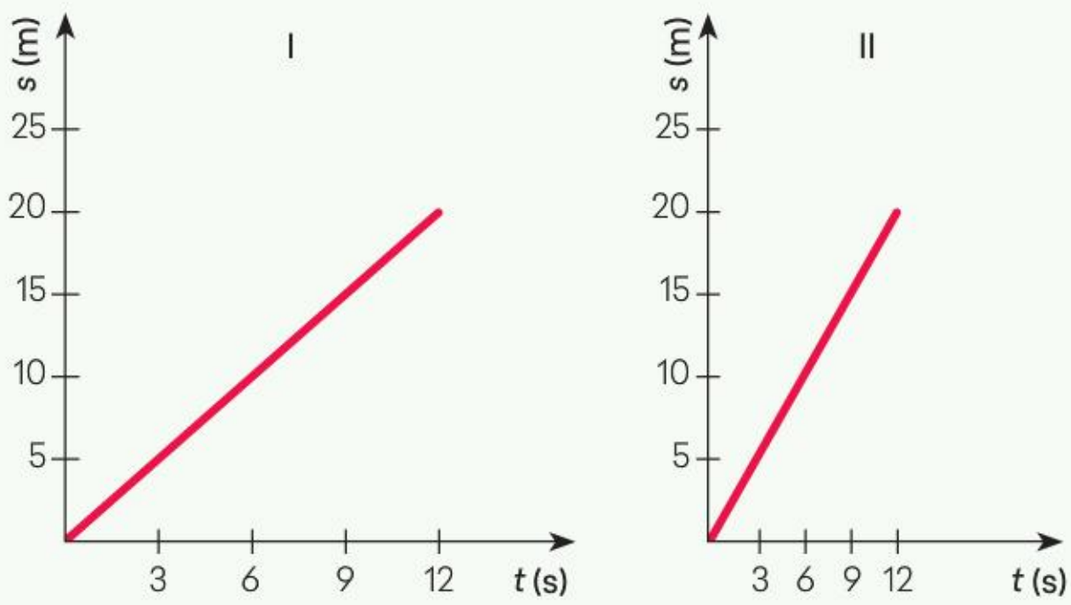
Odpowiedz na pytania.

- O której godzinie Jacek dogonił Kasię? W jakiej to było odległości od miejsca zamieszkania ich babci?
- O której godzinie Kasia przyjechała do babci, a o której przyjechał Jacek?
- Z jaką prędkością jechała Kasia, a z jaką jechał Jacek?



Przykład 3

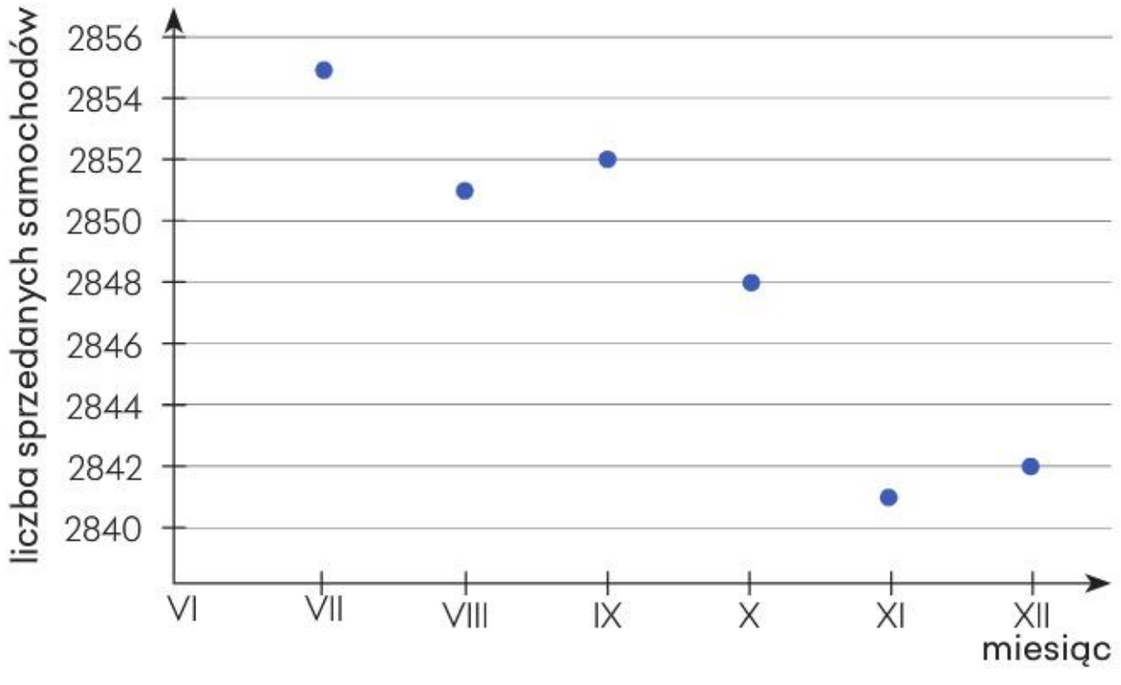
Na wykresach obok przedstawiono zależność drogi s przebytej przez pewnego rowerzystę od czasu jazdy t. Przyjrzyjmy się tym wykresom i je przeanalizujmy.



Oba wykresy przedstawiają te same dane, jednak na osi czasu na drugim wykresie odcinek jednostkowy jest krótszy niż na wykresie pierwszym. Taki zabieg spowodował, że wykres drugi sugeruje większą prędkość, z jaką poruszał się rowerzysta, w porównaniu z prędkością na wykresie pierwszym.

3. Tomek, na podstawie danych przedstawionych na wykresie punktowym, stwierdził, że sprzedaż samochodów pewnej marki w ciągu drugiego półrocza 2019 r. drastycznie spadła. Michał nie zgodził się z nim, mówiąc, że sprzedaż samochodów w tym okresie była prawie na takim samym poziomie.

Jak sądzisz, który z chłopców ma rację? Jaki element wykresu może wprowadzać w błąd?



Przykład 4

Na wykresie przedstawiono zmiany prędkości biegu Darii w trakcie porannego 30-minutowego joggingu.



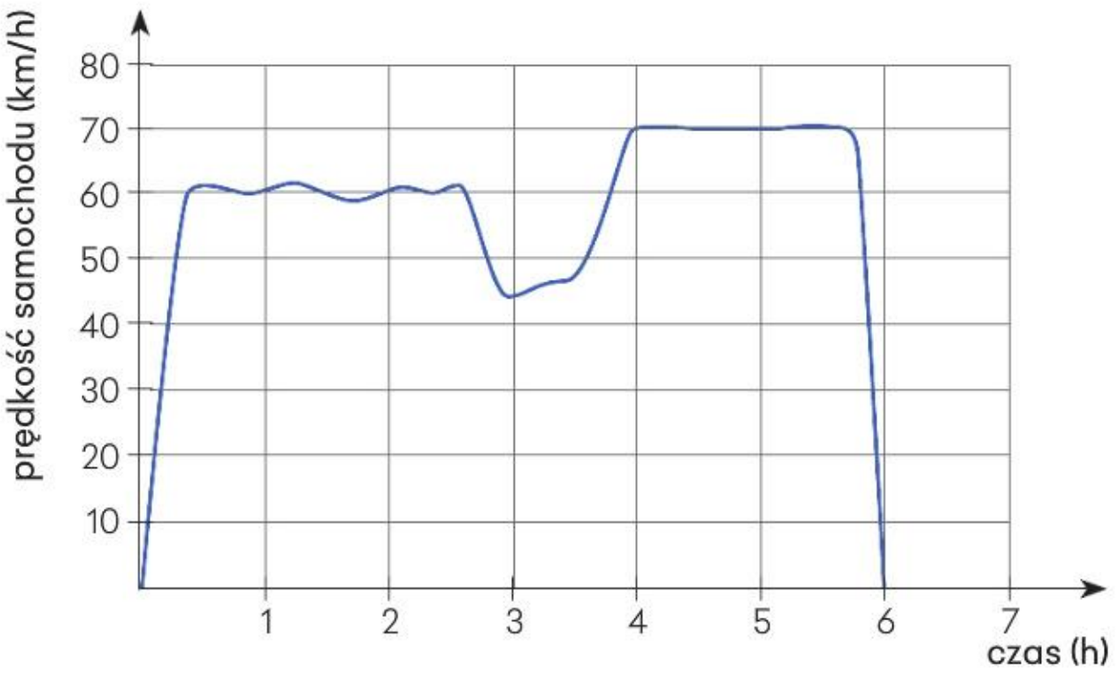
Patrząc na wykres, możemy stwierdzić, że:

- na początku Daria rozpędziła się i już w drugiej minucie uzyskała prędkość 110 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$,
- między drugą i piątą minutą prędkość Darii nieco malała,
- przez następne dwie minuty Daria biegła ze stałą prędkością równą 100 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$, czyli 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$:
  100 m $\longrightarrow$ 1 min
  6000 m $\longrightarrow$ 60 min, 6000 m = 6 km, 60 min = 1 h
  6 km $\longrightarrow$ 1 h,
- w 10. minucie joggingu Daria zaczęła gwałtownie zwalniać, aż do momentu zatrzymania się, i nie przemieszczała się przez minutę,
- potem znów się rozpędziła, osiągając po 12 minutach od rozpoczęcia joggingu prędkość 90 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$, czyli 5,4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$; następnie biegła coraz szybciej, ale już jej prędkość nie rosła tak szybko; po 18 minutach od rozpoczęcia joggingu prędkość, z jaką biegła Daria, była największa i wynosiła ok. 135 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ $\left(\text{ok. } 8{,}1 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$; w ciągu następnej minuty prędkość, z jaką biegła Daria, zaczęła spadać aż do ok. 130 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ $\left(\text{ok. } 7{,}8 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$,
- z prędkością ok. 7,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ Daria biegła przez ok. 10 minut, potem zaczęła gwałtownie zwalniać, aż do momentu zatrzymania się.

Z wykresu możemy odczytać również, że np.:

- trzykrotnie prędkość chwilowa Darii była równa 110 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ – w momencie gdy od rozpoczęcia joggingu upłynęły 2, 14 i 29 minut,
- czterokrotnie prędkość chwilowa Darii była równa 90 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$, choć nie zawsze możemy podać dokładnie, ile minut upłynęło od rozpoczęcia joggingu – pierwszy raz było to tuż przed upływem minuty, drugi raz między 9. a 10. minutą, trzeci raz – po upływie 12 minut i czwarty raz – tuż przed zakończeniem treningu (między 29. a 30. minutą).

4. Przyjrzyj się wykresowi obok i opowiedz, jak zmieniała się prędkość, z jaką poruszał się samochód w ciągu 6 godzin jazdy.

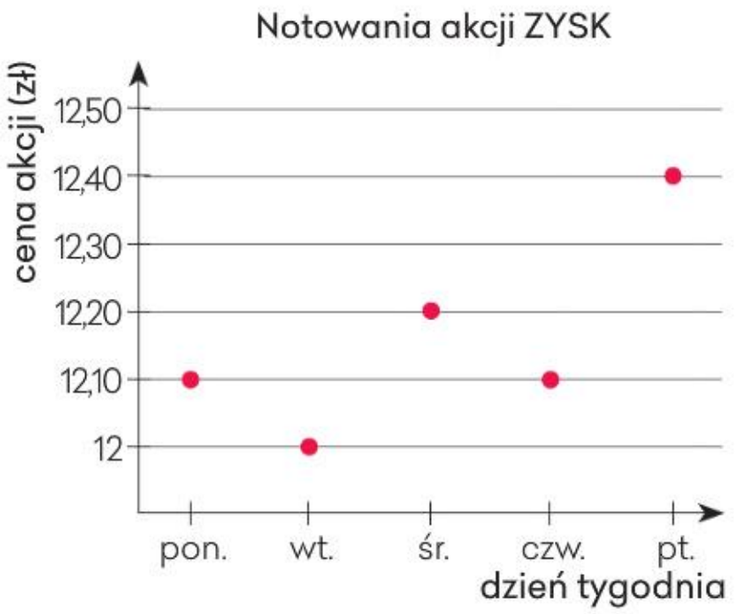


Zadania

Wykres punktowy przedstawia notowania akcji firmy ZYSK w ciągu tygodnia.

Wykorzystując dane zamieszczone na diagramie punktowym, odpowiedz na pytania.

a) Którego dnia tygodnia cena akcji była najwyższa?
b) Którego dnia tygodnia opłacało się kupić akcje tej firmy, a którego warto było je sprzedać, aby uzyskać największy zysk?
c) Ile wynosi różnica między ceną akcji z poniedziałku a ceną z piątku?
d) Czy można z diagramu odczytać cenę akcji w sobotę?



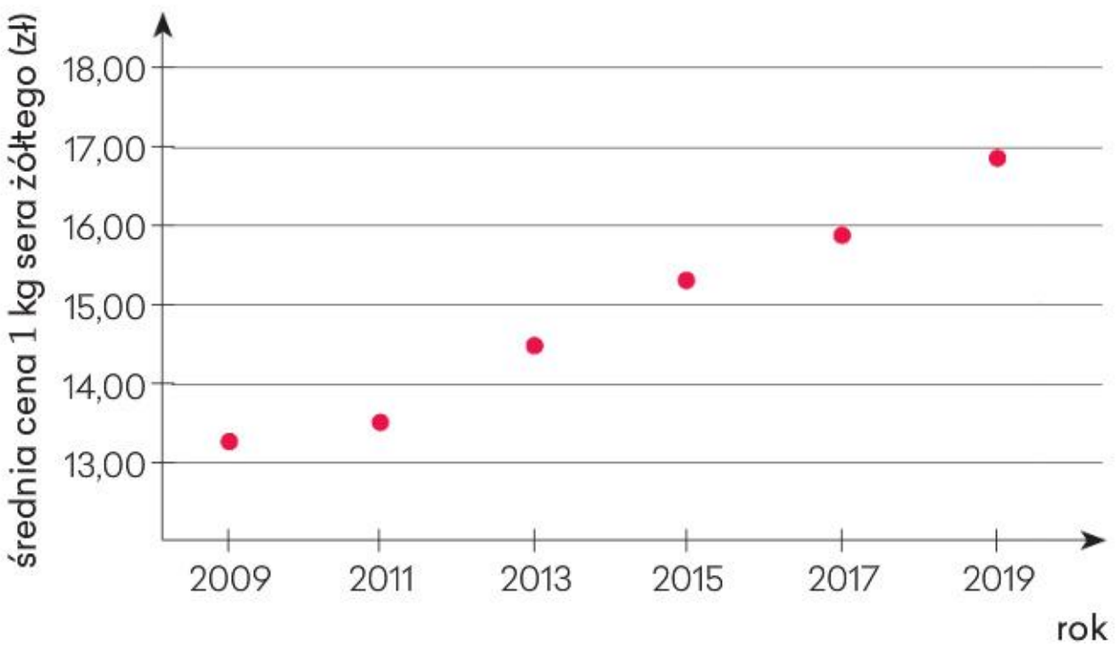
Kamil na podstawie tabeli znalezionej w internecie sporządził wykres punktowy.

Rok	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Średnia cena 1 kg sera żółtego (zł)	13,19	14,84	13,42	16,40	14,50	14,00	15,40	14,52	15,90	18,80	16,80

Michał, analizując wykres Kamila, stwierdził: „w latach 2009–2019 średnia cena za 1 kg sera żółtego stale rosła".

a) Czy stwierdzenie Michała jest prawdziwe?
b) Jakie elementy wykresu mogły Michała wprowadzić w błąd?

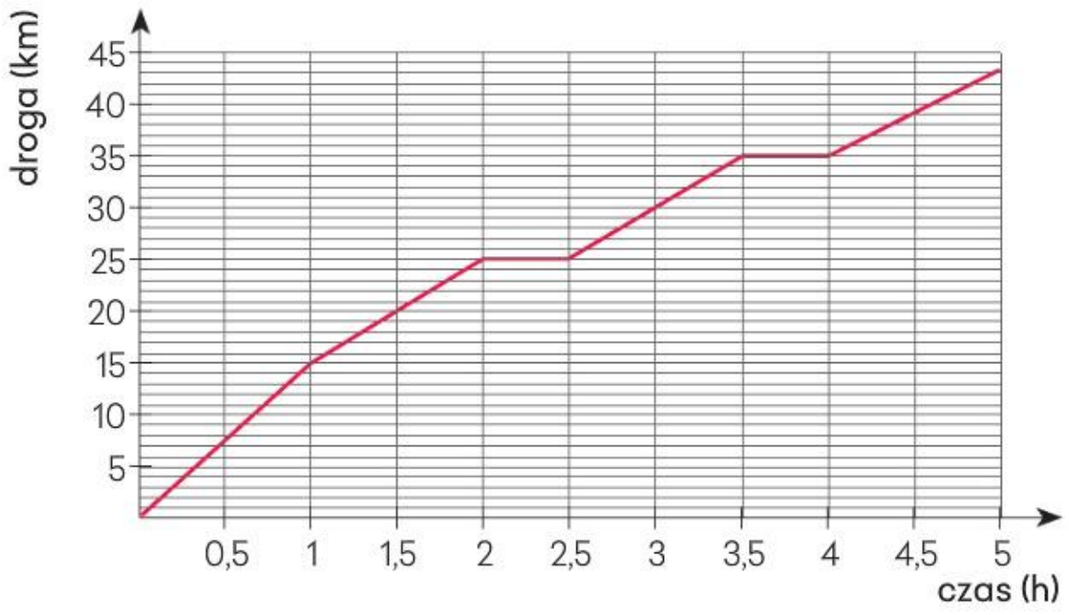
Uzasadnij swoje odpowiedzi.



Grupa amatorów kolarstwa rozpoczęła o godzinie 8:00 wycieczkę rowerową. Wykres przedstawia zależność długości przebytej drogi przez tę grupę od czasu trwania wycieczki.

Odpowiedz na pytania.

a) Jaką długość miała trasa wycieczki rowerowej?
b) O której godzinie zakończył się pierwszy odpoczynek?
c) Ile kilometrów przejechali uczestnicy do godziny 12:00?
d) Z jaką średnią prędkością jechali rowerzyści przez ostatnią godzinę?
e) Jaka jest różnica pomiędzy średnimi prędkościami w pierwszej i w ostatniej godzinie wycieczki?



Wykres przedstawia zależność długości drogi przebytej przez rowerzystę w zależności od czasu. Rowerzysta wyjechał z domu o godzinie 10:00 i powrócił do niego o godz. 13:30.

Odpowiedz na pytania.

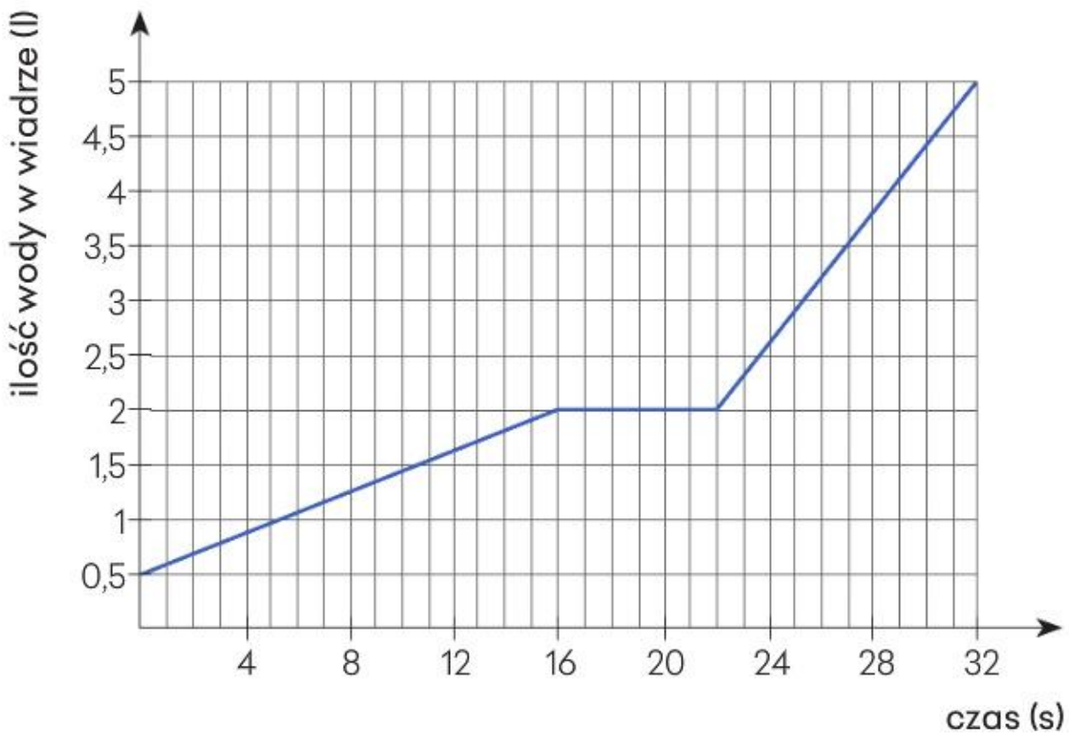
a) Ile kilometrów rowerzysta przejechał w ciągu 3,5 godziny?
b) Jaka była średnia prędkość jazdy rowerzysty na całej trasie?
c) Jaka była średnia prędkość jazdy rowerzysty na trasie, którą przebył między godziną 12:30 a 13:00?
d) Jaka była średnia prędkość jazdy rowerzysty na trasie, którą przebył w ciągu ostatniego kwadransa przejażdżki?
e) Od której do której godziny rowerzysta się nie przemieszczał?



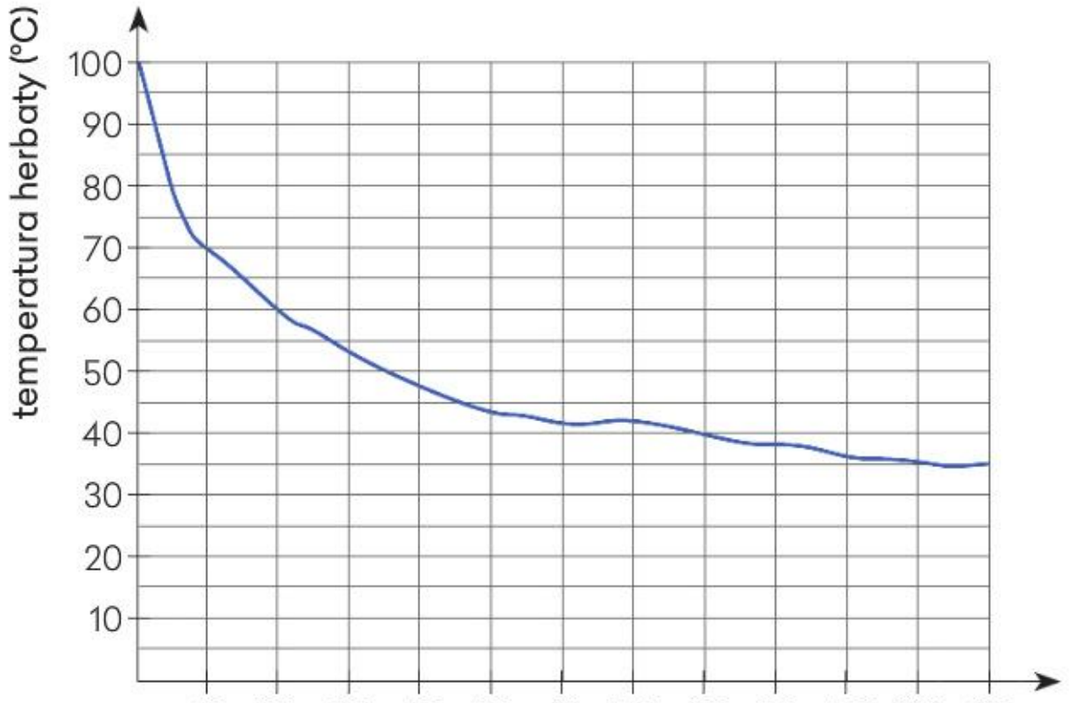
Do wiadra o pojemności 5 litrów, w którym już było trochę wody, zaczęto nalewać wodę z kranu. W pewnym momencie na chwilę zakręcono kran, a następnie znowu go odkręcono. Na wykresie przedstawiono zależność liczby litrów wody, która znajdowała się w wiadrze, od czasu jej nalewania do wiadra.

Odpowiedz na pytania.

a) Ile wody było w wiadrze, zanim zaczęto do niego wlewać wodę?
b) Na ile sekund zakręcono kran?
c) Z jaką prędkością wlewano wodę przez pierwszych 16 sekund?
d) Z jaką prędkością wlewano wodę po ponownym odkręceniu kranu?
e) Ile wody było w wiadrze, po upływie 27 sekund, licząc od momentu, gdy zaczęto do niego wlewać wodę z kranu?
f) Po ilu sekundach w wiadrze było 1,5 litra wody?



Do kubka termicznego o pojemności 0,3 l i średnicy 8 cm wlano herbatę o temperaturze 100°C, jednak go nie zamknięto. Wykres przedstawia, jak stygła herbata w tym kubku w ciągu dwóch pierwszych godzin.



Odpowiedz na pytania.

a) Jaka była temperatura herbaty po upływie 20 minut, a jaka po upływie 80 minut?

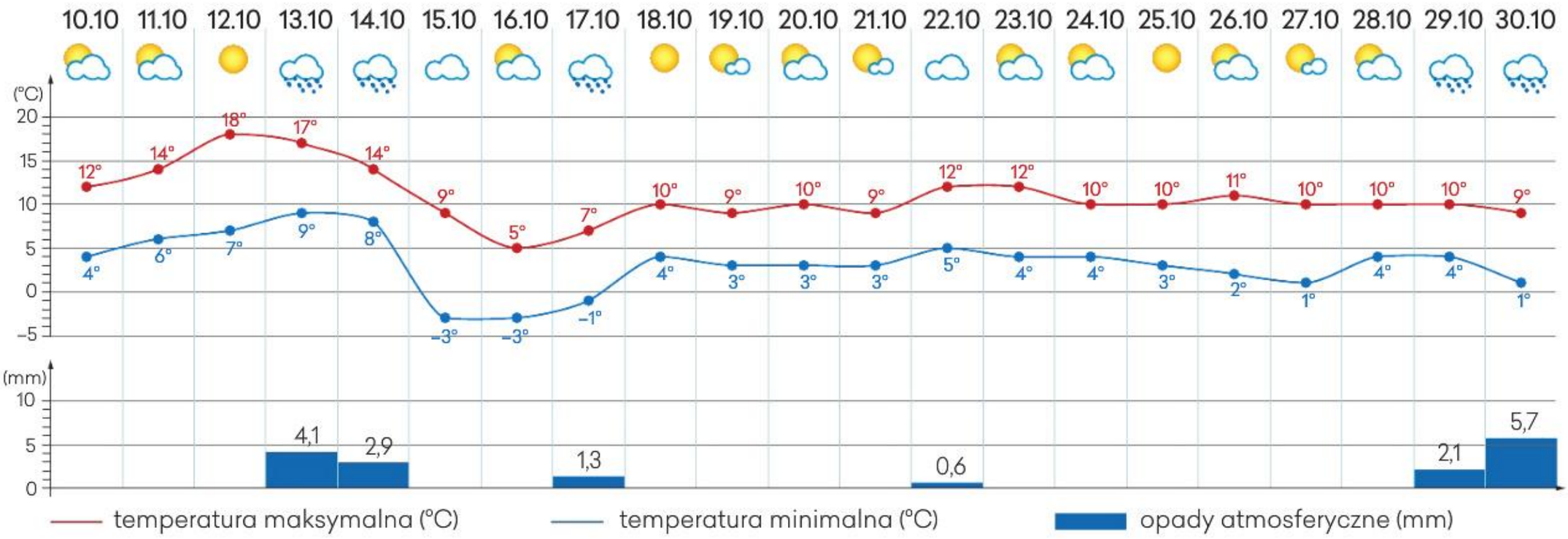
b) Co możesz powiedzieć o szybkości stygnięcia herbaty w ciągu 10 pierwszych minut po jej wlaniu do kubka i po upływie 1,5 godziny?

c) Jaka była średnia prędkość stygnięcia herbaty w ciągu pierwszych 10 minut, a jaka w czasie od 80 do 120 minut po wlaniu herbaty do kubka?

d) Janek powiedział „średnia prędkość stygnięcia herbaty jest równa 0,5 $\frac{°C}{min}$”. Czy informacja podana przez Janka jest rzetelna? Odpowiedź uzasadnij.

e) Jak sądzisz, jeśli herbata będzie stygła w takich samych warunkach jak wcześniej, to czy po upływie 3 godzin temperatura herbaty będzie niższa niż 15°C? Odpowiedź uzasadnij.

Wykres przedstawia prognozę pogody przewidywaną na najbliższe trzy tygodnie października.



Odpowiedz na pytania.

a) W których dniach prognozowana maksymalna temperatura powietrza ma być wyższa od 12°C?

b) Jaka będzie maksymalna i jaka będzie minimalna prognozowana temperatura w dniu 22 października? Czy w tym dniu przewidywane są opady deszczu?

c) Jaka będzie najwyższa i jaka będzie najniższa prognozowana maksymalna temperatura powietrza? W których dniach przewidywane są te temperatury?

d) W których dniach prognozowane są przymrozki?

e) W których dniach prognozowane są opady deszczu? Którego dnia opady mają być największe?

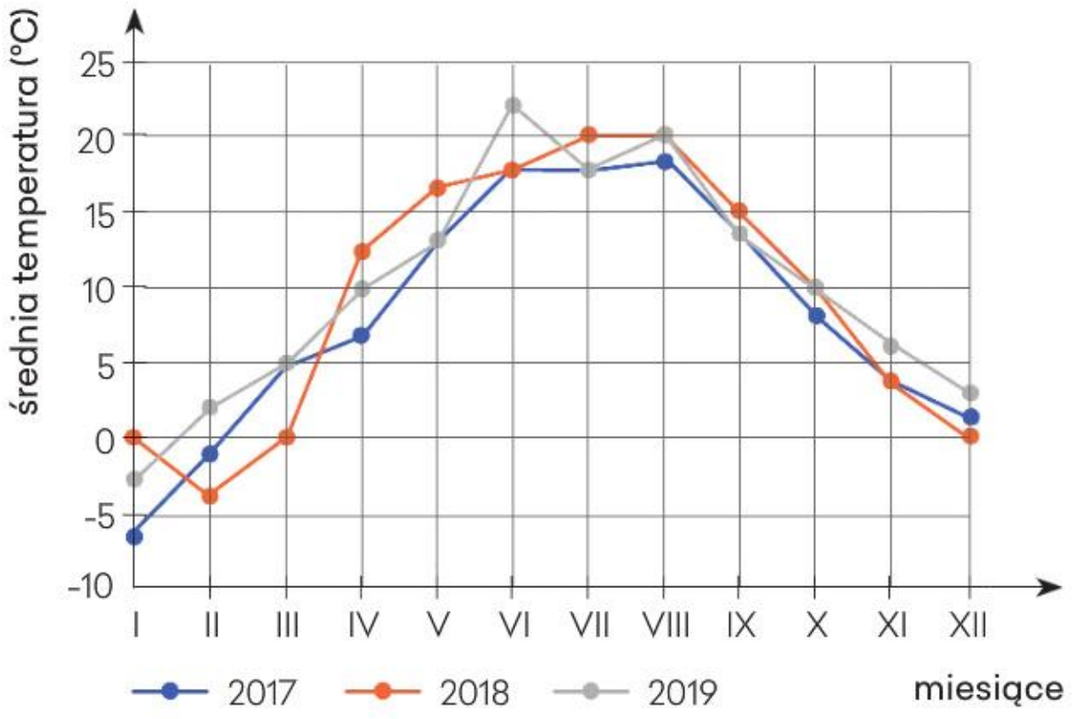
f) Ile dni, w przedstawionej prognozie, będzie bezchmurnych?

g) Czy, według prognozy, w ciągu tych trzech tygodni pogoda ma często się zmieniać, czy będzie raczej stała? Odpowiedź uzasadnij.

Na wykresie przedstawiono średnie temperatury powietrza w kolejnych miesiącach w latach 2017–2019.

Odpowiedz na pytania.

a) W którym roku średnia temperatura powietrza w lutym była powyżej zera?
b) W którym roku średnia temperatura powietrza w styczniu była wyższa niż w lutym?
c) W których miesiącach w 2017 r. średnia temperatura powietrza była wyższa niż 10°C i jednocześnie niższa niż 15°C?
d) W których miesiącach średnia temperatura powietrza w 2019 r. była wyższa niż w 2018 r.?
e) W których miesiącach średnia temperatura powietrza w 2018 r. była taka sama jak w 2017 r.?

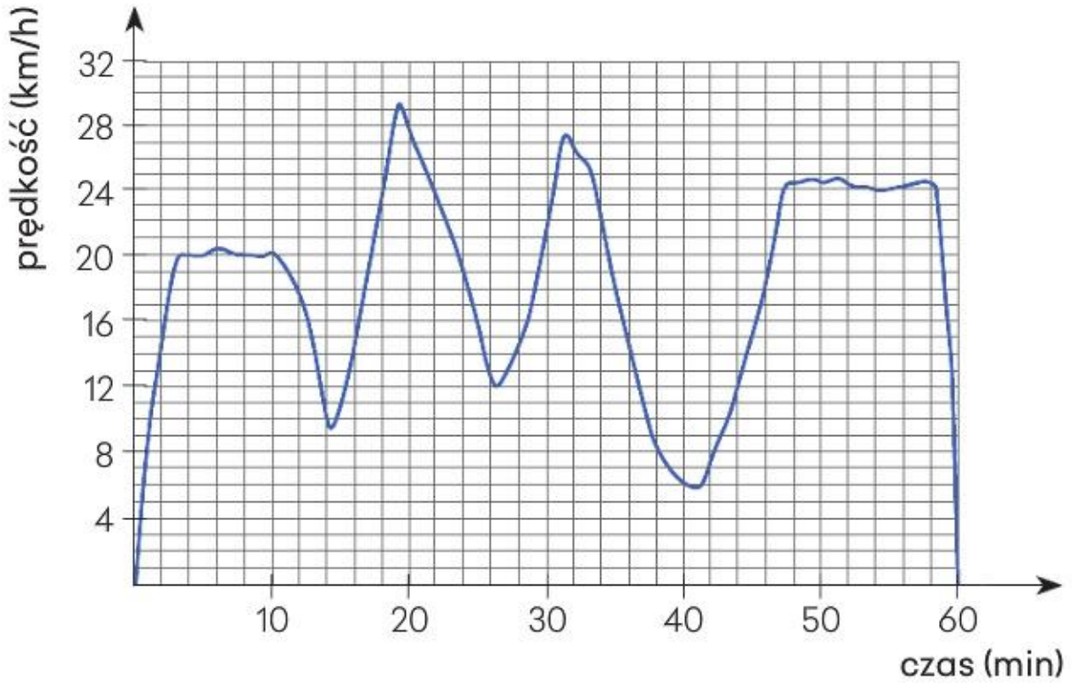


f) W których miesiącach w 2018 r. średnia temperatura powietrza była równa 0°C?
g) W których miesiącach w 2019 r. średnia temperatura powietrza była wyższa niż 15°C?
h) W których miesiącach i w jakich latach średnia temperatura powietrza była równa 10°C?

Pewien rowerzysta najpierw jechał po płaskim, następnie po bardzo górzystym, a potem znowu po płaskim terenie. W terenie górzystym, gdy jechał pod górę, prędkość jego jazdy malała, a gdy jechał z górki – rosła. Jadąc po płaskim terenie, utrzymywał stałą prędkość, o ile nie rozpoczynał jazdy lub się nie zatrzymywał. Na wykresie przedstawiono, z jaką prędkością jechał rowerzysta w kolejnych minutach, licząc od momentu rozpoczęcia jazdy.

Przyjrzyj się temu wykresowi i na jego podstawie opowiedz, jak mogła wyglądać wycieczka rowerzysty, a następnie odpowiedz na pytania.

a) Dlaczego w ciągu pierwszych 3 minut prędkość jazdy rowerzysty gwałtownie rosła, a w ostatnich 2 minutach gwałtownie malała?
b) Na ile górek wjechał rowerzysta?
c) Przez ile minut rowerzysta jechał po płaskim terenie przed wjechaniem w teren górzysty, a przez ile minut po wyjechaniu z tego terenu?
d) Ile razy prędkość chwilowa rowerzysty była równa $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?



e) Ile minut upłynęło od momentu rozpoczęcia jazdy do momentu, gdy prędkość chwilowa rowerzysty była równa $29 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Wyszukaj w internecie wykres liniowy. Jakie dane zamieszczono na tym wykresie? Co zaznaczono na osi pionowej, a co na poziomej? Jakie informacje możesz odczytać z tego wykresu?

2.3 Zbieranie, porządkowanie i przedstawianie danych

Podejmij temat

Przeprowadźcie podobną ankietę w swojej klasie i przedstawcie wyniki w postaci tabeli lub diagramu.
Jakie lody lubicie najbardziej?

Uczniów klasy VIIIe zapytano, jakie lody każdy z nich najbardziej lubi. Wyniki przedstawiono na diagramie słupkowym.



Przykład 1

Uczniowie klasy VIIIb, przygotowując się do egzaminu ósmoklasisty, otrzymali do rozwiązania 40 zadań. Spośród tych zadań 3 okazały się dla uczniów bardzo łatwe. Zadań łatwych było 3 razy więcej niż bardzo łatwych. Zadań umiarkowanie trudnych było o 7 więcej niż zadań łatwych, a zadań trudnych było o połowę mniej niż umiarkowanie trudnych. Pozostałe zadania były dla uczniów bardzo trudne.
Przedstawmy powyższe informacje w tabeli, na diagramie słupkowym oraz na diagramie kołowym.

Ustalamy liczbę zadań poszczególnych rodzajów:

- zadania bardzo łatwe: 3
- zadania łatwe: $3 \cdot 3 = 9$
- zadania umiarkowanie trudne: $9 + 7 = 16$
- zadania trudne: $16 : 2 = 8$
- zadania bardzo trudne: $40 - (3 + 9 + 16 + 8) = 4$

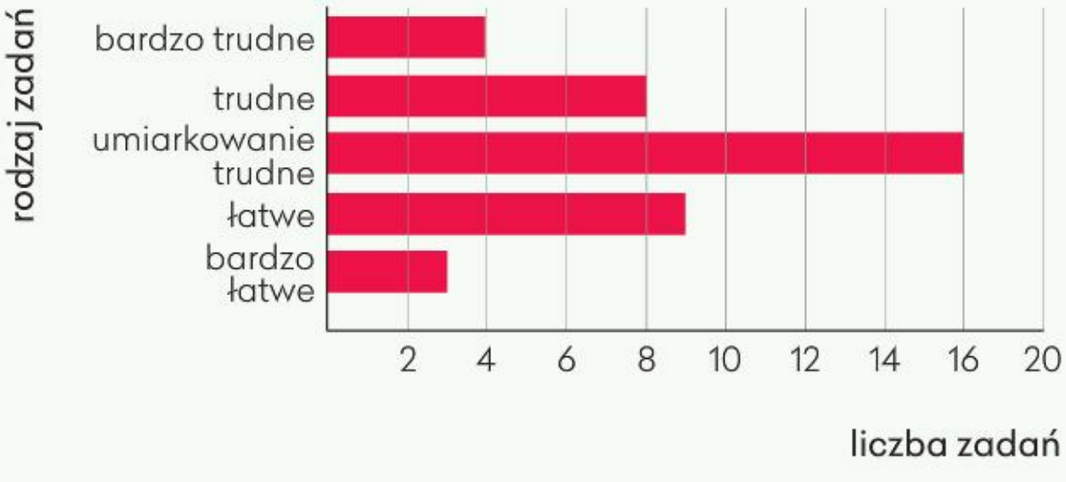
Przedstawmy dane w tabeli.

Rodzaj zadań	Liczba zadań
bardzo łatwe	3
łatwe	9
umiarkowanie trudne	16
trudne	8
bardzo trudne	4

Teraz narysujmy **diagram słupkowy pionowy**. Na osi poziomej opisujemy rodzaje zadań, a na osi pionowej zaznaczamy ich liczbę.



Jeśli na osi poziomej określimy liczbę zadań, a na pionowej ich rodzaje, otrzymamy **diagram słupkowy poziomy**.

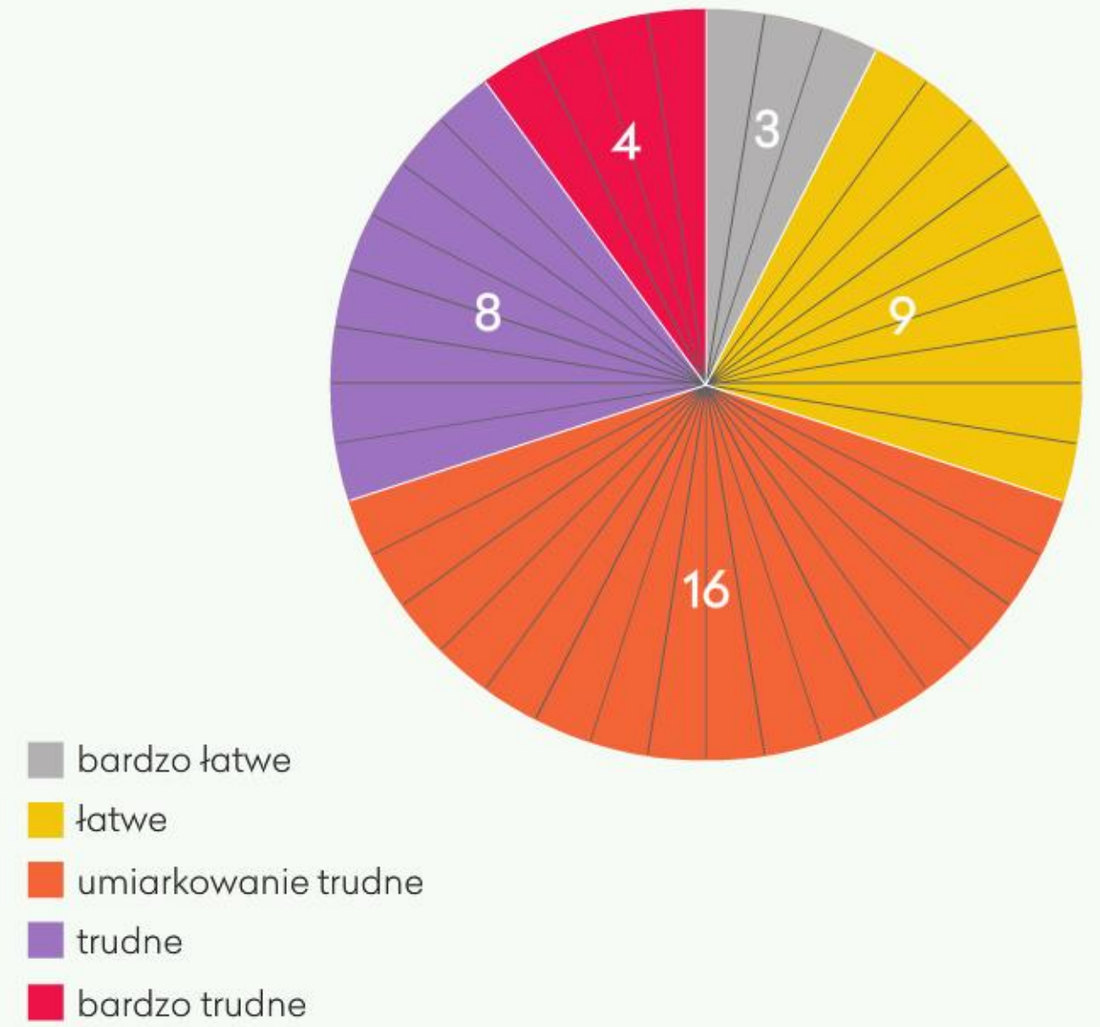


Przedstawmy te dane na **diagramie kołowym**.
Rysujemy koło. Następnie rysujemy 40 promieni tak, aby podzielić koło na 40 przystających (jednakowych) części. Każda część odpowiada jednemu zadaniu.
Kąt, jaki wyznaczają promienie jednej części koła, jest równy $\frac{360°}{40} = 9°$.

Wśród 40 zadań 3 były bardzo łatwe, więc trzeba wziąć 3 części koła. Kąt, który będzie odpowiadał części koła symbolizującym zadania bardzo łatwe, ma miarę $3 \cdot 9° = 27°$.

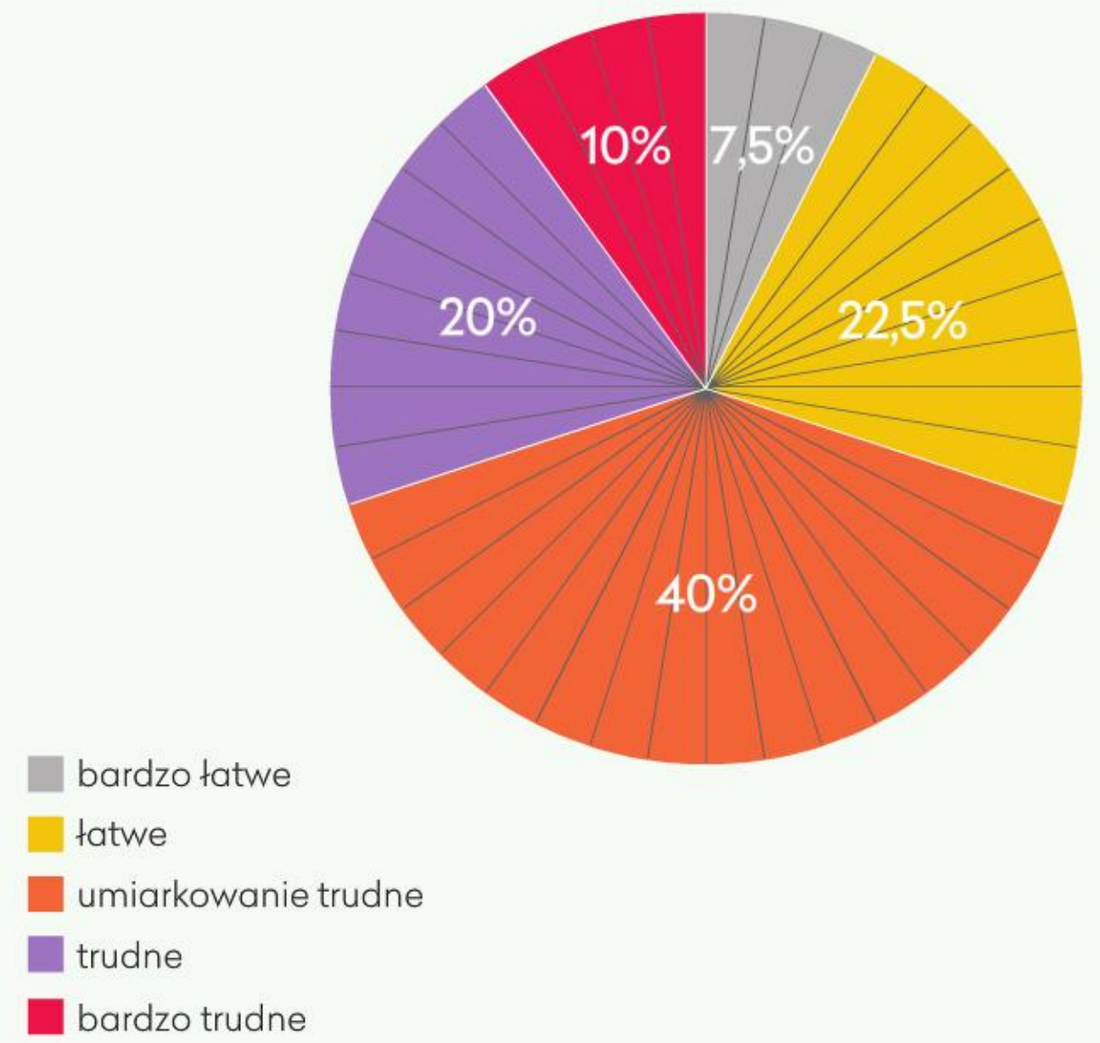
W ten sam sposób obliczymy miary kątów, które odpowiadają pozostałym rodzajom zadań:

- zadania łatwe: $9 \cdot 9° = 81°$
- zadania umiarkowanie trudne: $16 \cdot 9° = 144°$
- zadania trudne: $8 \cdot 9° = 72°$
- zadania bardzo trudne: $4 \cdot 9° = 36°$



Jeśli części diagramu kołowego opiszemy w procentach, to otrzymamy **procentowy diagram kołowy**.
Obliczmy, jaki procent wszystkich zadań stanowią zadania każdego rodzaju:

- zadania bardzo łatwe: $\frac{3}{40} \cdot 100\% = 7{,}5\%$
- zadania łatwe: $\frac{9}{40} \cdot 100\% = 22{,}5\%$
- zadania umiarkowanie trudne: $\frac{16}{40} \cdot 100\% = 40\%$
- zadania trudne: $\frac{8}{40} \cdot 100\% = 20\%$
- zadania bardzo trudne: $\frac{4}{40} \cdot 100\% = 10\%$



1. Zapytano grupę uczniów, jakie książki najbardziej lubią czytać. Każda osoba mogła podać tylko jeden ulubiony rodzaj. Okazało się, że 27 osób lubi czytać komiksy, 20 osób książki przygodowe, po 12 osób książki przyrodnicze i historyczne, 15 osób – science-fiction, 9 osób – fantasy, a 5 osób – poezję. Przedstaw te dane w tabeli, na diagramie słupkowym i na diagramie kołowym.

Na liczbowym diagramie kołowym i na procentowym diagramie kołowym można przedstawić te same dane. Różna jest wtedy tylko forma opisu tych danych.

Przykład 2

Pewna piekarnia ma sklepy firmowe w Kajetanach, Wrzosowie i Jamkach. W poniedziałek w sklepie w Kajetanach sprzedano 32 chleby pszenno-żytnie, 36 chlebów gruboziarnistych i 14 chlebów tostowych, w sklepie we Wrzosowie: 35 chlebów pszenno-żytnich, 24 chleby gruboziarniste i 9 chlebów tostowych, a w Jamkach: 23 chleby pszenno-żytnie, 16 chlebów gruboziarnistych i 11 chlebów tostowych.

a) Wykonajmy diagram słupkowy przedstawiający wyniki sprzedaży chlebów w poniedziałek, w poszczególnych sklepach.
b) Wykonajmy procentowy diagram kołowy przedstawiający łączną sprzedaż każdego typu chleba w poniedziałek, bez uwzględnienia miejscowości, w której znajduje się sklep.

a) Na osi poziomej opisujemy rodzaje chlebów, a na osi pionowej zaznaczamy ich liczbę (diagram I). Przy każdym rodzaju chleba rysujemy trzy słupki określające, ile bochenków tego chleba sprzedano w każdej z trzech miejscowości. Pod wykresem podajemy legendę.



Możemy też zrobić inaczej – na osi poziomej opisać miejscowości, a na osi pionowej zaznaczyć liczbę każdego rodzaju sprzedanych chlebów (diagram II).

b) Obliczamy, ile łącznie sprzedano chlebów każdego rodzaju i jaki procent wszystkich sprzedanych chlebów stanowią sprzedane każdego rodzaju chleby: $32 + 36 + 14 + 35 + 24 + 9 + 23 + 16 + 11 = 200$

chleby pszenno-żytnie: $32 + 35 + 23 = 90$

$\frac{90}{200} \cdot 100\% = 45\%$

chleby gruboziarniste: $36 + 24 + 16 = 76$

$\frac{76}{200} \cdot 100\% = 38\%$

chleby tostowe: $14 + 9 + 11 = 34$

$\frac{34}{200} \cdot 100\% = 17\%$

Obliczamy miarę kąta, jaki odpowiada części koła symbolizującej jeden chleb:

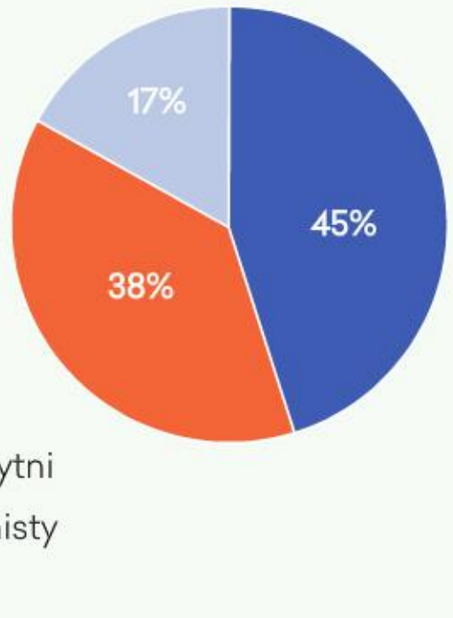
$\frac{360^\circ}{200} = 1{,}8^\circ$

Obliczamy miary kątów, jakie odpowiadają częściom koła symbolizującym poszczególne rodzaje chlebów:

chleby pszenno-żytnie: $90 \cdot 1{,}8^\circ = 162^\circ$

chleby gruboziarniste: $76 \cdot 1{,}8^\circ = 136{,}8^\circ$

chleby tostowe: $34 \cdot 1{,}8^\circ = 61{,}2^\circ$



2. Zapytano grupę losowo wybranych osób, do czego, poza pracą, wykorzystują internet. Każda osoba spośród podanych pięciu odpowiedzi mogła wybrać tylko jedną. Wyniki zamieszczono w tabeli.

	Pozyskiwanie informacji	**Kontaktowanie się z innymi**	**Dokonywanie zakupów**	**W celu rozrywki**	**Inne**
Kobiety	23	18	16	10	5
Mężczyźni	22	21	14	14	7

a) Przedstaw te dane na diagramie słupkowym.
b) Sporządź diagram kołowy pokazujący, do czego najczęściej, poza pracą, badane osoby (bez uwzględniania płci) wykorzystują internet.

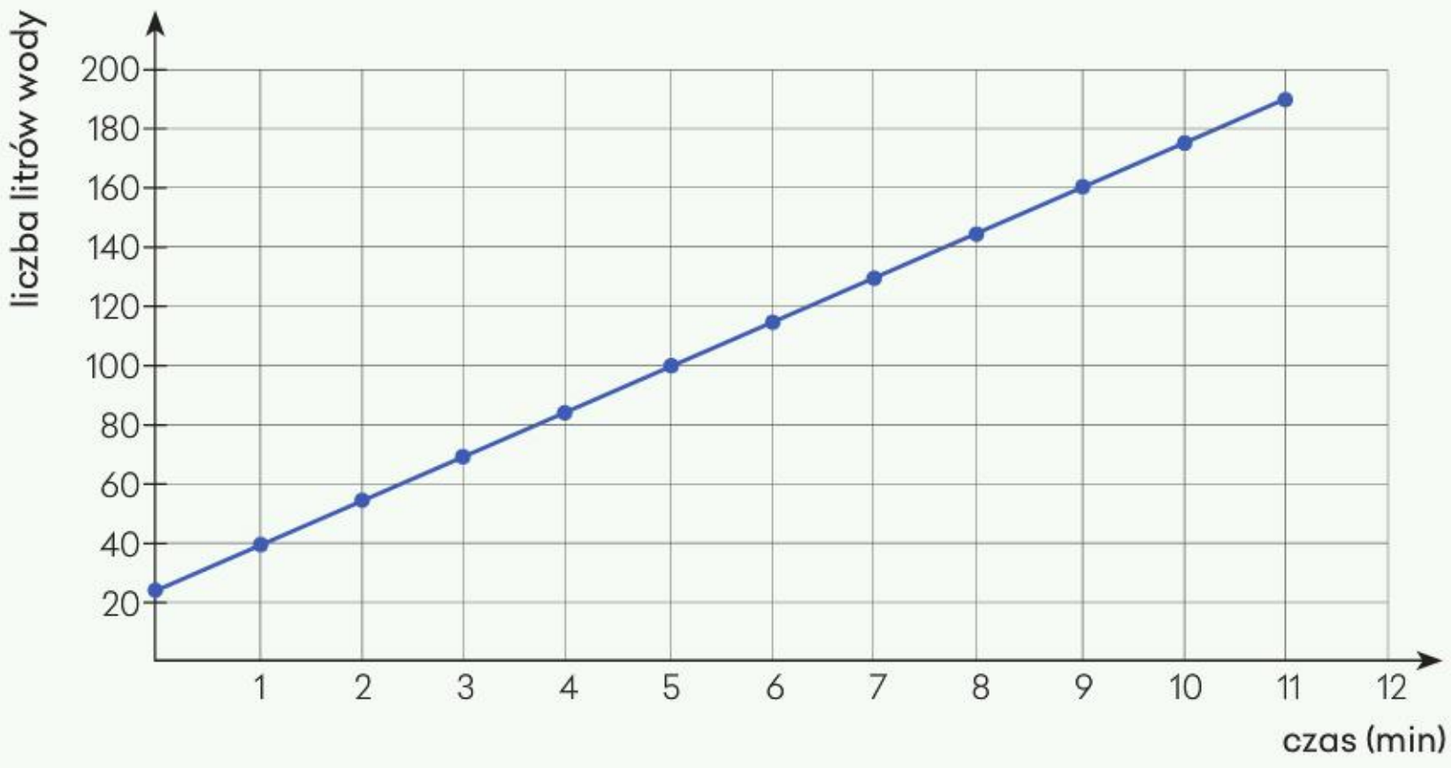
Przykład 3

W wannie o pojemności 190 litrów znajdowało się 25 litrów wody. Po odkręceniu kurków do wanny wpływało w ciągu minuty 15 litrów wody. Przedstawmy na wykresie liniowym liczbę litrów wody w wannie w zależności od czasu.

Obliczmy, ile litrów wody było w wannie po upływie kolejnych minut i wyniki zamieśćmy w tabeli.

Minuty	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Liczba litrów wody w wannie	25	40	55	70	85	100	115	130	145	160	175	190

Sporządzamy wykres. Na osi poziomej zaznaczamy czas, a na osi pionowej – liczbę litrów wody w wannie.



3. Okazało się, że w zbiorniku, do którego nalano 40 litrów wody, jest dziura, przez którą w ciągu minuty wycieka 5 litrów wody.

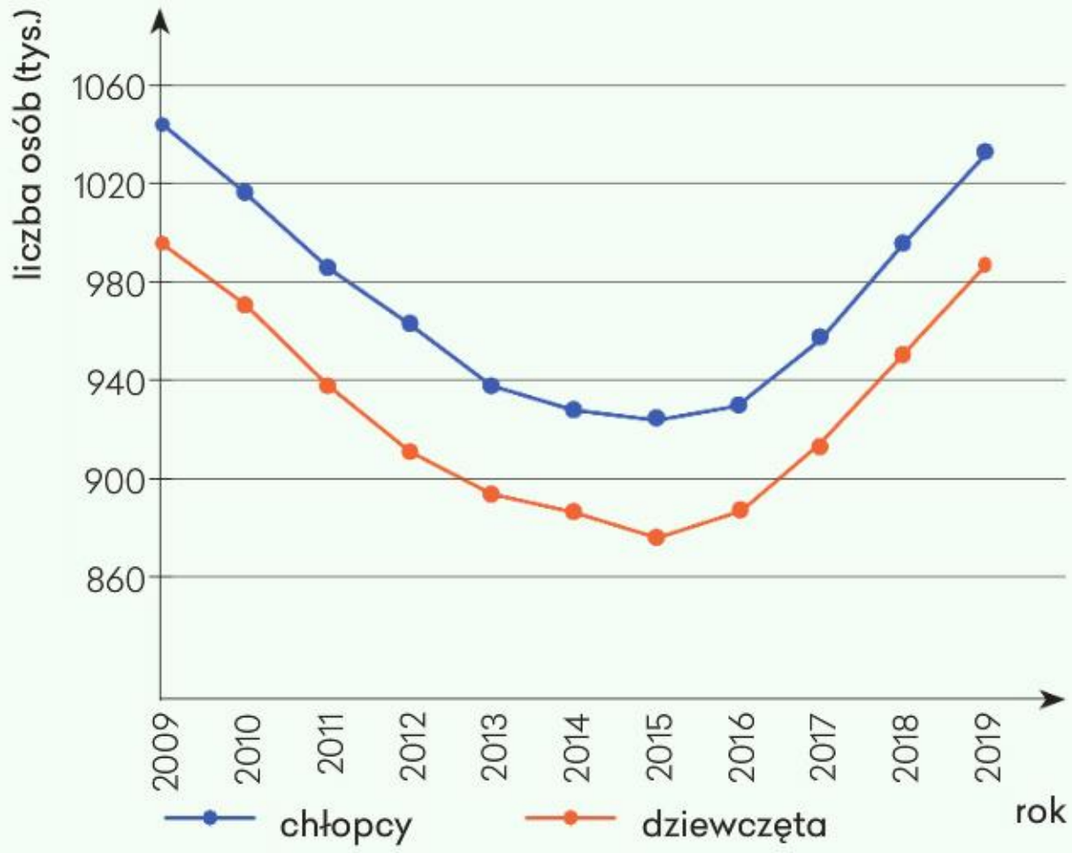
a) Przedstaw na wykresie liniowym liczbę litrów wody w zbiorniku w zależności od czasu.
b) Po ilu minutach ze zbiornika wycieknie cała woda?

Przykład 4

Korzystając z danych zamieszczonych w tabeli poniżej, przedstawmy na wykresie liniowym, jak w latach 2009–2019 zmieniały w Polsce liczba chłopców i dziewcząt w wieku 10–14 lat.

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Chłopcy	1 045 121	1 018 328	988 215	960 702	938 818	926 882	921 955	930 261	955 199	996 097	1 034 753
Dziewczęta	994 831	967 340	938 882	912 066	892 041	879 759	875 384	883 144	907 259	946 721	984 724

Na osi poziomej zaznaczamy poszczególne lata, a na osi pionowej liczbę dziewcząt liczbę i chłopców. Ponieważ liczby te są bardzo duże, więc trzeba je odpowiednio zaokrąglić, np. do tysięcy. Warto też na osi pionowej zacząć zachowywać jednostkę dopiero od pewnego miejsca (np. od 860 tys.). Rysując wykres, trzeba pamiętać o opisaniu osi i podaniu legendy.



4. Korzystając z danych zamieszczonych w internecie (np. na stronie GUS), przedstaw na wykresie liniowym, jak zmieniały się w latach 2009–2019 w województwie, w którym mieszkasz, liczba chłopców i liczba dziewcząt w wieku 10–14 lat. Porównaj kształty narysowanych przez ciebie wykresów z wykresami w przykładzie 4.

Zadania

Do sklepiku osiedlowego przywieziono 100 bułek, w tym: 20 z serem, 15 z dżemem, dwa razy więcej bułek z budyniem niż z dżemem i o 5 więcej bułek z jagodami niż z serem. Pozostałe bułki były z makiem. Na podstawie tekstu ułóż tabelę i sporządź odpowiedni diagram słupkowy.

Weronika notowała w tabeli, ile wydaje tygodniowo, korzystając ze swojego kieszonkowego.

a) W którym tygodniu Weronika wydała najmniej?
b) Przedstaw dane z tabeli na diagramie słupkowym i na diagramie kołowym.

Tydzień	I	II	III	IV
Wydatki (zł)	31	28	34	27

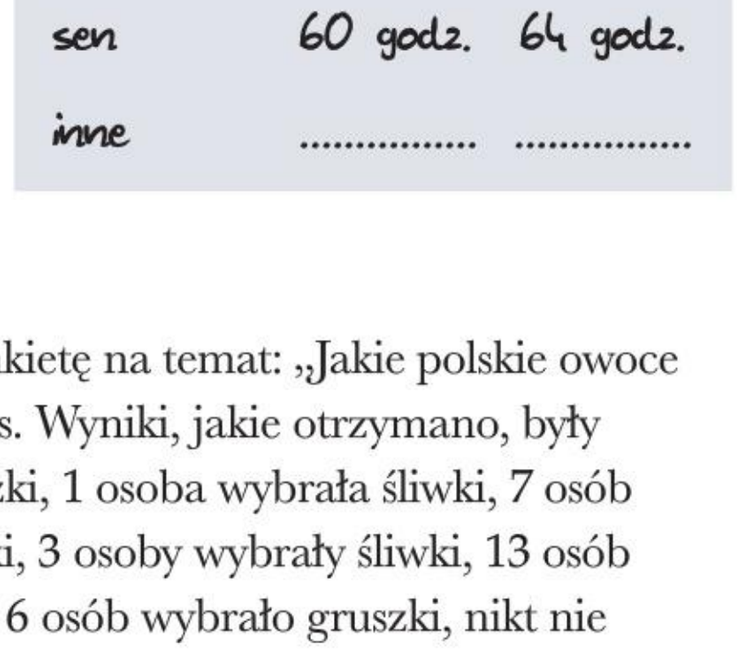
Uczestnicy akcji „Aby Ziemia była czysta” zbierali odpady. Wyniki swojej pracy przedstawili w tabeli.

a) Ile ton ważyły wszystkie odpady?
b) Ile razy więcej zebrano papieru niż metali?
c) Które odpady łącznie stanowią 75% wszystkich odpadów?
d) Dane z tabeli przedstaw na procentowym diagramie kołowym.

Rodzaj odpadu	Ilość zebranych odpadów
szkło	0,22 t
papier	0,3 t
metale	80 kg
tworzywa sztuczne	0,16 t
inne	40 kg

Diagram przedstawia wyniki ankiety przeprowadzonej wśród grupy ósmoklasistów na temat ich zainteresowań muzycznych. Każdy z uczniów mógł wybrać tylko jedną odpowiedź.

a) Oblicz, ilu uczniów liczyła ankietowana grupa, jeśli hip-hop wybrało 60 osób spośród wszystkich ankietowanych ósmoklasistów.
b) Jaką muzyką interesuje się więcej niż 40 osób?
c) Ilu uczniów częściej słucha rocka niż bluesa?
d) Przedstaw te dane na diagramie słupkowym.



Karolina i Łukasz postanowili, że będą zapisywać, ile godzin w ciągu pewnego tygodnia poświęcą na naukę, ile na uprawiane sportu, ile na sprzątanie, ile na rozrywkę, ile na sen i ile na inne czynności. Oto zapiski Karoliny i Łukasza po upływie tego tygodnia.

a) Oblicz, ile godzin poświęciła Karolina, a ile poświęcił Łukasz na wykonywanie innych czynności.
b) Na podstawie zapisków Karoliny i Łukasza wykonaj diagram słupkowy.
c) Przedstaw na dwóch procentowych diagramach kołowych, jaki procent wszystkich godzin w tygodniu zajęło Karolinie, a jaki zajęło Łukaszowi wykonanie każdej z wymienionych czynności.

Do obliczeń użyj kalkulatora.

	Karolina	Łukasz
nauka	41 godz.	37 godz.
sport	12 godz.	15 godz.
sprzątanie	15 godz.	15 godz.
rozrywka	20 godz.	28 godz.
sen	60 godz.	64 godz.
inne	.....	.....

We wszystkich trzech klasach ósmych w pewnej szkole przeprowadzono ankietę na temat: „Jakie polskie owoce lubisz najbardziej?”. W ankiecie wzięli udział wszyscy uczniowie z tych klas. Wyniki, jakie otrzymano, były następujące: w klasie VIIIa – 9 osób wybrało jabłka, 4 osoby wybrały gruszki, 1 osoba wybrała śliwki, 7 osób wybrało truskawki; w klasie VIIIb – 7 osób wybrało jabłka, 9 osób – gruszki, 3 osoby wybrały śliwki, 13 osób wybrało truskawki; w klasie VIIIc – po 12 osób wybrało jabłka i truskawki, 6 osób wybrało gruszki, nikt nie wybrał śliwek.

a) Wykonaj diagram słupkowy przedstawiający wyniki tej ankiety w poszczególnych klasach.
b) Wykonaj diagram kołowy przedstawiający, jakie owoce lubią najbardziej ósmoklasiści w tej szkole. Nie uwzględniaj podziału uczniów na klasy.
c) Odczytaj, które owoce cieszą się największą popularnością wśród ósmoklasistów w tej szkole.

Zbadano, jaką grupę krwi mają losowo wybrane osoby, i okazało się, że 52 mężczyzn i 48 kobiet miało grupę 0 Rh+; 10 mężczyzn i 12 kobiet – grupę 0 Rh–; 40 mężczyzn i 42 kobiety – A Rh+; 8 mężczyzn i 10 kobiet – A Rh–; 22 mężczyzn i 24 kobiety – B Rh+; 4 mężczyzn i 2 kobiety – B Rh–; 10 mężczyzn i 12 kobiet – AB Rh+; 2 mężczyzn i 2 kobiety – AB Rh–.

a) Przedstaw te dane na diagramie słupkowym.
b) Sporządź procentowy diagram kołowy pokazujący podział badanych osób (bez uwzględnienia płci) ze względu na grupę krwi. Do obliczeń użyj kalkulatora.
c) Jaka grupa krwi była wystąpiła najczęściej, a jaka najrzadziej wśród badanych osób?



Tomek wybrał się na przejażdżkę rowerową. O godz. 10:00 wyjechał z domu i wrócił do niego o godzinie 12:30. Na rysunku obok są przedstawione dane z aplikacji: trasa Tomka oraz liczba kilometrów, które chłopiec przejechał w ciągu ostatniego kwadransa.

a) Na podstawie danych z aplikacji Tomka sporządź wykres liniowy przedstawiający zależność liczby przejechanych przez niego kilometrów od czasu.
b) Oblicz średnią prędkość, z jaką jechał Tomek.

Korzystając z danych zamieszczonych w internecie (np. ze strony GUS), przedstaw na wykresie liniowym, jak zmieniała się w Polsce liczba osób w miastach i na wsi w latach 2009–2019.

Właściciel kawiarni poprosił 20 klientów o wypełnienie ankiety. Chciał w ten sposób zbadać poziom zadowolenia klientów w trzech kategoriach: 1 – serwowane desery, 2 – wystrój wnętrza, 3 – kompetencje obsługi. Każdy z klientów mógł przyznać od 0 do 10 punktów w każdej kategorii. Aż 8 klientów przyznało w 1 i 2 kategorii po 10 punktów, a w 3 po 2 punkty. 25% klientów przyznało po 6 punktów w 1 kategorii, a w pozostałych po 3 punkty. Połowa pozostałych przyznała po 4 punkty w każdej z kategorii, a reszta przyznała w każdej kategorii po 2 punkty.

a) Przedstaw zebrane dane na jednym wykresie.
b) W której kategorii przyznano najwięcej punktów, a w której najmniej?

Przygotuj ankietę złożoną z trzech pytań na temat: „Zainteresowania sportowe ósmoklasistów". Przeprowadź tę ankietę wśród uczniów twojej klasy. Zebrane wyniki przedstaw na diagramach lub wykresach.

2.4 Średnia arytmetyczna

Podejmij temat



Przyjrzyj się wynikom uzyskanym w skoku w dal przez Tomka, Pawła i Filipa. Którego z uczniów, twoim zdaniem, powinien wybrać nauczyciel? Dlaczego?

Gdy mamy dużo różnych wyników tego samego badania, doświadczenia itp., często trudno coś z nich wywnioskować. Dlatego wyznacza się pewne liczby chrakteryzujące te wyniki, ulatwiające ocenę sytuacji lub podejmowanie decyzji. Jedną z takich liczb jest średnia arytmetyczna.
Przeanalizujmy z *Podejmij temat* wyniki uzyskane w skoku w dal przez Tomka.

Średnia arytmetyczna ($x_{śr.}$) to liczba uzyskana przez dodanie wszystkich wyników i podzielenie tej sumy przez liczbę wyników.

suma danych

$$x_{śr.} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n}{n}$$

średnia arytmetyczna — liczba danych

Innym sposobem oznaczania średniej arytmetycznej jest $\overline{x}$.

Zapiszmy kolejno:
$x_1 = 3{,}8,\ x_2 = 3{,}2,\ x_3 = 4,\ x_4 = 3{,}6,\ x_5 = 3{,}4$

Obliczmy średnią arytmetyczną długości pięciu skoków w dal Tomka.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{3{,}8 + 3{,}2 + 4 + 3{,}6 + 3{,}4}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6$$

Średnia arytmetyczna może, ale nie musi, być równa jednemu z wyników.

1. Oblicz średnią arytmetyczną długości skoków Pawła i Filipa.

Przykład 1

W pewnej klasie test składający się z 10 zadań zamkniętych pisało 21 uczniów. Z testu można było otrzymać maksymalnie 10 punktów. Uzyskali oni następujące liczby punktów: 1, 3, 5, 1, 7, 6, 9, 8, 8, 10, 10, 7, 6, 5, 9, 9, 8, 1, 2, 8, 10. Patrząc na te dane, trudno stwierdzić, ile średnio punktów otrzymali uczniowie tej klasy. Spróbujmy to określić, wyznaczając średnią arytmetyczną.

Sumujemy wszystkie punkty uzyskane przez uczniów.
$1 + 3 + 5 + 1 + 7 + 6 + 9 + 8 + 8 + 10 + 10 + 7 + 6 + 5 + 9 + 9 + 8 + 1 + 2 + 8 + 10 = 133$
Dzielimy sumę przez liczbę uczniów piszących test: $\frac{133}{21} = 6\frac{1}{3}$

$x_{śr.} = 6\frac{1}{3}$

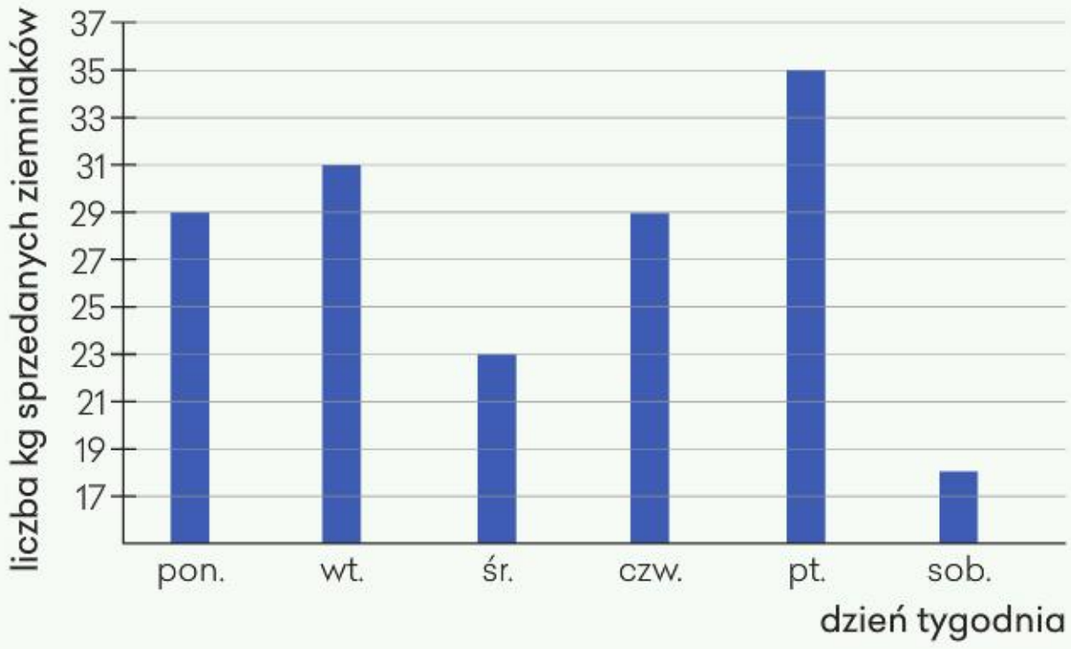
Średnia arytmetyczna wyników z testu wynosi $6\frac{1}{3}$ punktu. Oznacza to, że przeciętnie każdy uczeń w tej klasie napisał test na około 63%, bo $\frac{6\frac{1}{3}}{10} \cdot 100\% \approx 63\%$. Zauważmy, że żaden z uczniów nie mógł otrzymać dokładnie takiej liczby punktów z testu. Dwunastu uczniów uzyskało wynik wyższy od średniej, a dziewięciu – niższy.

2. Zmierzono wzrost sześciu ósmoklasistów grających w szkolnej drużynie siatkówki i otrzymano następujące wyniki w cm: 167, 163, 170, 169, 170, 163. Oblicz średni wzrost w tej grupie uczniów. Czy któryś z uczniów ma wzrost równy średniej arytmetycznej?

Średnią arytmetyczną możemy obliczyć również wtedy, gdy wyniki przedstawione są w postaci diagramu lub tabeli.

Przykład 2

W pewnym sklepie z warzywami przez 5 kolejnych dni odnotowywano liczbę kilogramów sprzedanych ziemniaków. Wyniki przedstawiono na diagramie. Obliczmy, jaka jest średnia dzienna liczba kilogramów sprzedanych ziemniaków.



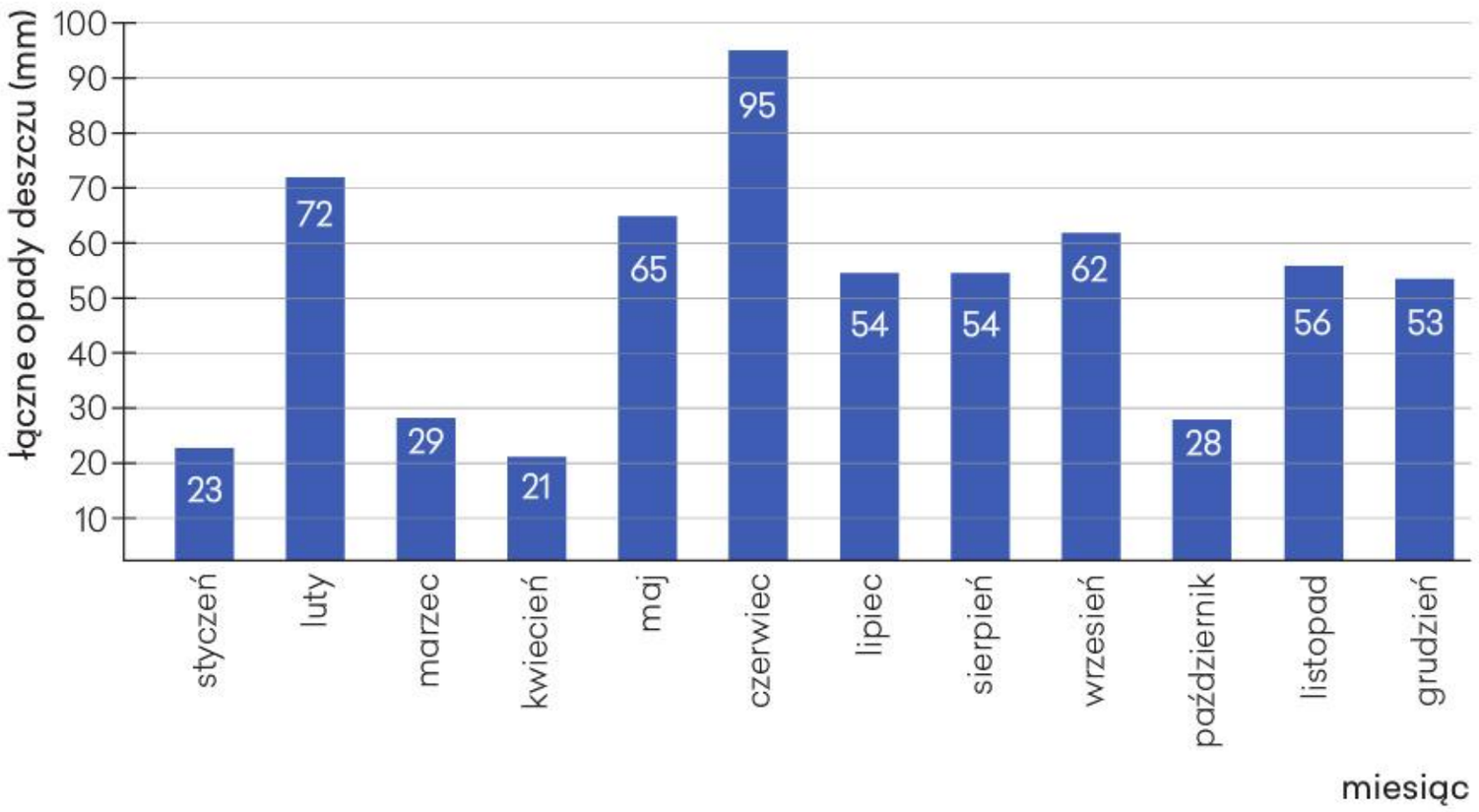
$29 + 31 + 23 + 29 + 35 + 18 = 165$
$165 : 6 = 27{,}5$

Obliczamy łączną liczbę kilogramów ziemniaków sprzedanych w ciągu tygodnia, a następnie otrzymaną sumę dzielimy przez liczbę dni.

Średnio dziennie sprzedawano 27,5 kg ziemniaków.

3. Na diagramie przedstawiono łączne opady deszczu odnotowane w kolejnych miesiącach roku przez jedną ze stacji meteo.

Oblicz średnią miesięcznych opadów deszczu.



Przykład 3

Zapytano losowo wybranych ósmoklasistów, ile godzin w ciągu ubiegłego tygodnia każdy z nich poświęcił na uprawianie sportu. Wyniki zamieszczono w tabeli.

Obliczmy średnią liczby godzin poświęconą na uprawianie sportu w ubiegłym tygodniu.

Liczba godzin	3	4	5	6	7	8
Liczba uczniów	2	6	3	1	3	1

Z danych w tabeli możemy się dowiedzieć np., że w ubiegłym tygodniu 2 uczniów uprawiało sport 3 godziny, a 3 uczniów – 5 godzin. Wypiszmy kolejne wyniki: 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8.

Obliczamy średnią arytmetyczną.

Sposób I

$3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 7 + 7 + 7 + 8 = 80$ — Sumujemy wszystkie wyniki.

$x_{śr.} = \frac{80}{16} = 5$ — Dzielimy sumę przez liczbę składników sumy (liczbę uczniów).

Sposób II

$2 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 8 = 80$ — Obliczamy łączną liczbę godzin poświęconych na uprawianie sportu.

$2 + 6 + 3 + 1 + 3 + 1 = 16$ — Obliczamy liczbę uczniów.

$x_{śr.} = \frac{80}{16} = 5$

W ubiegłym tygodniu na uprawianie sportu uczeń poświęcił średnio 5 godzin.

4. Zapytano uczniów klasy VIIIa, ile książek przygodowych przeczytał każdy z nich w ciągu ostatniego kwartału. Wyniki zamieszczono w tabeli.

Liczba książek	0	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	1	2	4	5	7	4	2

Oblicz średnią liczby książek przygodowych przeczytanych przez ucznia tej klasy.

Przykład 4

W badaniu dotyczącym zdrowego odżywiania się jedno z pytań dotyczyło liczby litrów wody mineralnej wypitej poprzedniego dnia przez respondenta. Wyniki zamieszczono na diagramie.

Obliczmy, ile średnio litrów wody mineralnej wypiła jedna osoba.



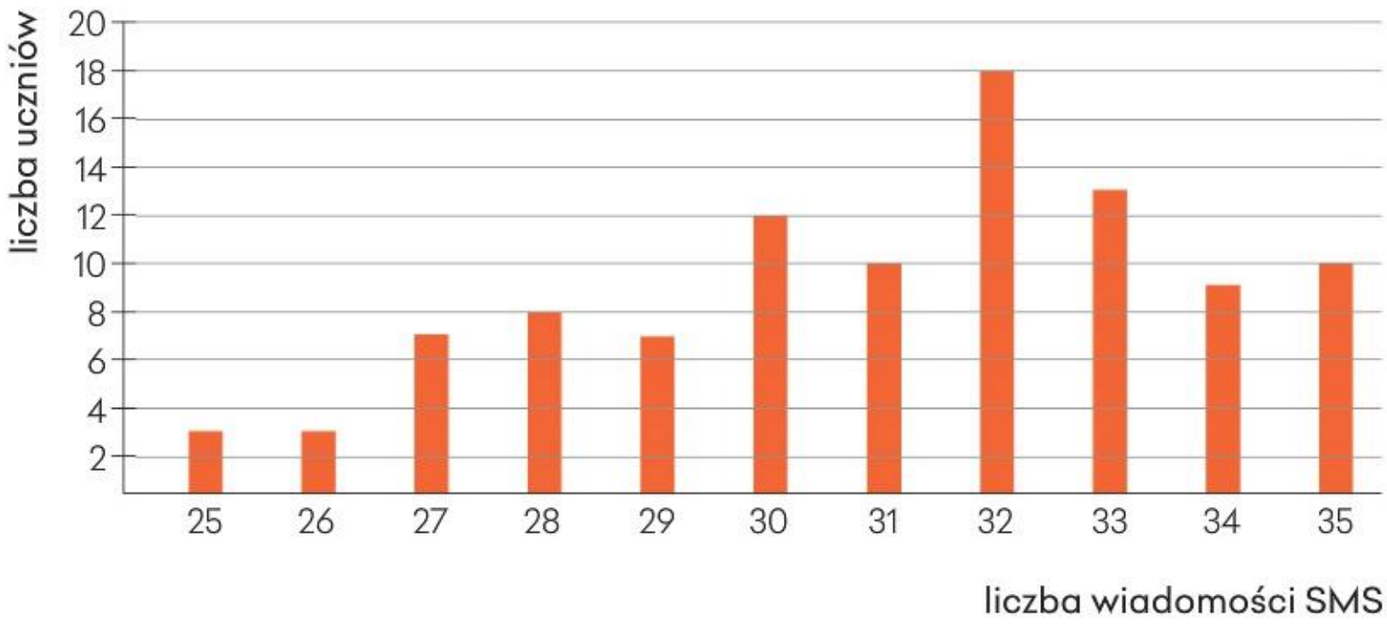
$6 \cdot 0{,}25 + 11 \cdot 0{,}5 + 14 \cdot 1 + 19 \cdot 1{,}5 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2{,}5 + 1 \cdot 3 = 72$ Obliczamy łączną liczbę wypitych litrów wody.

$6 + 11 + 14 + 19 + 6 + 3 + 1 = 60$ Obliczamy liczbę osób.

$x_{śr.} = \frac{72}{60} = 1{,}2$

Jedna osoba wypiła poprzedniego dnia średnio 1,2 litra wody mineralnej.

5. Zapytano grupę ósmoklasistów, ile wiadomości SMS wysłali w ciągu ostatniego tygodnia. Wyniki zamieszczono na diagramie.



Oblicz, ile średnio wiadomości SMS wysłał w ciągu ostatniego tygodnia jeden uczeń.

Więcej na temat

Innymi liczbami charakteryzującymi zbiór wyników są: **mediana**, **moda** i **rozstęp**.
Aby wyznaczyć medianę, musimy najpierw wyniki uporządkować niemalejąco (lub nierosnąco).
Mediana dla nieparzystej liczby danych to środkowa liczba uporządkowanego niemalejąco (lub nierosnąco) zbioru danych. **Mediana dla parzystej liczby danych** to średnia arytmetyczna dwóch liczb środkowych wyników uporządkowanych niemalejąco (lub nierosnąco). *Medianus*, z łaciny, oznacza 'środkowy'.
Moda (inaczej zwana **dominantą** lub **modalną**) to liczba, która wśród wyników występuje najczęściej. Jeżeli nie ma takiej liczby, to mówimy, że nie ma mody. **Rozstęp** to różnica między największą a najmniejszą liczbą wśród danych.

Obliczmy medianę, modę i rozstęp dla danych z przykładu 1. Uporządkujmy dane niemalejąco:

1, 1, 1, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10

Wybieramy środkowy, czyli jedenasty wynik spośród 21 wyników.

1, 1, 1, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10

10 liczb | 10 liczb

Mediana jest równa 7. Oznacza ona, że co najmniej połowa uczniów osiągnęła z testu nie mniej niż 7 punktów i co najmniej połowa uczniów w tej klasie osiągnęła nie więcej niż 7 punktów. Najwięcej uczniów otrzymało 8 punktów, więc moda jest równa 8. Największa liczba zdobytych punktów w teście to 10, a najmniejsza to 1. Rozstęp jest równy 9, bo $10 - 1 = 9$.

Teraz obliczmy medianę, modę i rozstęp dla danych z przykładu 3. Ponieważ mamy 16 wyników, więc mediana będzie średnią arytmetyczną dwóch liczb środkowych uporządkowanych niemalejąco wyników:

3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8

7 liczb | 7 liczb

$$\frac{4+5}{2} = 4{,}5$$

Mediana jest równa 4,5. Oznacza ona, że co najmniej połowa uczniów poświęciła na uprawianie sportu nie mniej niż 4,5 godziny i co najmniej połowa uczniów poświęciła nie więcej niż 4,5 godziny. Moda jest równa 4, ponieważ najliczniejsza grupa uczniów poświęciła 4 godziny na uprawianie sportu. Rozstęp jest równy 5, bo $8 - 3 = 5$.

6. Zapytano uczniów klasy VIIIc, w której jest 13 dziewcząt i 7 chłopców, ile czasu poświęcili w ostatni weekend na swoje hobby. Wyniki przedstawiono w tabeli.

Nr ucznia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Płeć	ch	dz	dz	dz	ch	ch	dz	dz	dz	dz	ch	dz	ch	ch	dz	dz	dz	dz	ch	dz
Liczba godzin	8	4	7	7	11	3	5	2	9	6	16	4	7	5	5	3	7	12	6	7

Wyznacz średnią arytmetyczną, medianę, modę i rozstęp liczby godzin, jaką w ostatni weekend na swoje hobby:
a) poświęciła dziewczynka z tej klasy,
b) poświęcił chłopiec z tej klasy,
c) poświęciła osoba z tej klasy.

Przykład 5

W pewnej firmie pracują kierownik i 7 pracowników. Pensje pracowników są równe: 3600 zł, 2800 zł, 4000 zł, 3800 zł, 3250 zł, 4200 zł, 2850 zł, a średnia zarobków wszystkich osób pracujących w tej firmie wynosi 3875 zł. Obliczmy pensję kierownika.

x – pensja kierownika

$\frac{x + 3600 + 2800 + 4000 + 3800 + 3250 + 4200 + 2850}{8} = 3875$ Układamy równanie.

$\frac{x + 24\,500}{8} = 3875 \mid \cdot 8$

$x + 24\,500 = 31\,000 \mid - 24\,500$

$x = 6500$

Kierownik zarabia 6500 zł.

7. Kasia miała siedem ocen z matematyki: 3, 4, 6, 3, 5, 5, 4. Gdy otrzymała ósmą ocenę, średnia jej ocen była równa 4,25. Oblicz, jaka była ósma ocena Kasi.

Zadania

- W pewnej bibliotece szkolnej sprawdzono czytelnictwo wśród uczniów. W tym celu sprawdzono, ile książek wypożyczył w ciągu miesiąca każdy z 20 losowo wybranych uczniów. Otrzymano wyniki: 5, 4, 0, 1, 3, 4, 2, 2, 1, 8, 3, 6, 3, 0, 2, 5, 4, 2, 1, 4. Oblicz średnią arytmetyczną liczby wypożyczonych książek w danym miesiącu.

- Podczas letniego turnieju piłkarskiego rozegrano sześć meczów, które zakończyły się wynikami: 1 : 3, 2 : 1, 1 : 0, 4 : 2, 3 : 4, 1 : 2. Oblicz średnią liczbę strzelonych bramek.

- Na basenie sprzedano 380 biletów w poniedziałek, 415 – we wtorek, 380 – w środę, 270 – w czwartek, 365 – w piątek, 300 – w sobotę, a 340 – w niedzielę. Ile średnio dziennie sprzedawano biletów?

- W Kielcach w kolejnych dniach września 2020 r. codziennie o godzinie 12:00 mierzono temperaturę powietrza. Wyniki zapisano w tabeli.

Dzień miesiąca	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Temperatura °C	20	18	22	25	28	18	16	21	26	21	23	27	27	27	28	30	20	17	21	22	24	26	26	26	24	20	15	19	16	13

Oblicz średnią temperatur w Kielcach w południe we wrześniu 2020 r.

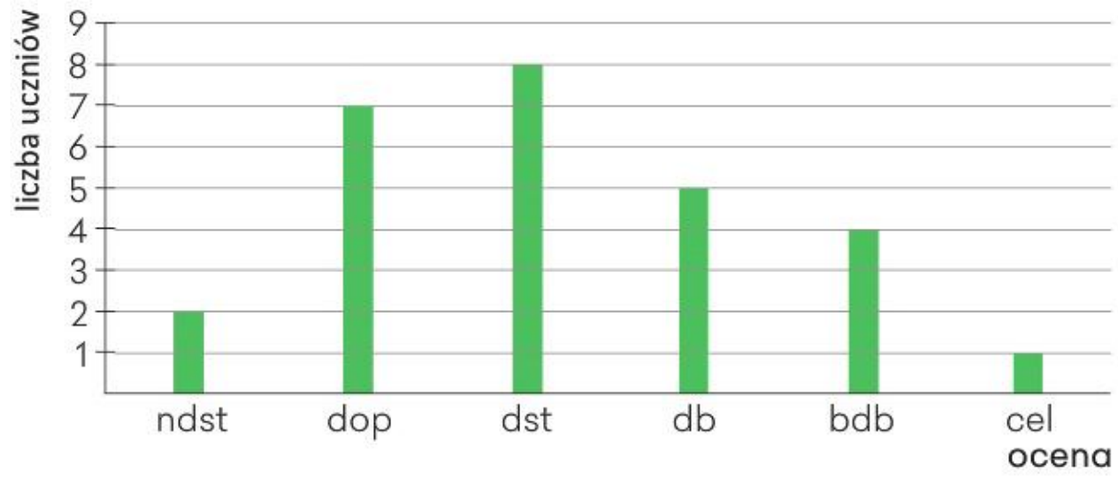
W pewnej ankiecie jedno z pytań dotyczyło wieku badanych osób. Wyniki zamieszczono w tabeli.

Wiek badanych osób	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Liczba osób	7	12	15	31	27	25	14	9	6	3	1

Oblicz średni wiek osób biorących udział w tym badaniu ankietowym.

Diagram słupkowy przedstawia oceny z fizyki za I półrocze klasy VIIIb.

Oblicz średnią arytmetyczną ocen z tego przedmiotu. Wynik podaj z dokładnością do części setnych.



Właścicielka kwiaciarni notowała liczbę sprzedanych róż w zależności od ceny jednej róży. Wyniki zapisała w tabeli.

Oblicz średnią cen sprzedanych róż w tej kwiaciarni.

Cena róży (zł)	2,5	3	4	4,5	6
Liczba sprzedanych róż	30	32	23	22	18

W firmie usługowo-handlowej jest zatrudnionych 20 sprzedawców, 2 sprzątaczki, jedna sekretarka i jedna księgowa oraz dyrektor i jego zastępca. W tabeli podane są kwoty netto miesięcznych wynagrodzeń pracowników zatrudnionych w tej firmie.

a) Wyznacz średnie wynagrodzenie miesięczne w tej firmie.
b) Ile osób zarabia powyżej wartości średniego wynagrodzenia tej firmy?

Stanowisko	**Kwota wynagrodzenia (zł)**
dyrektor	7200
zastępca dyrektora	5400
księgowa	4800
sekretarka	1800
sprzedawca	2780
sprzątaczka	1600

Średnia wieku 11 piłkarzy jest równa 19 lat, a średnia wieku 11 piłkarzy i ich trenera jest równa 21 lat. Ile lat ma trener?

Na tablicy napisanych jest 7 liczb w kolejności rosnącej. Średnia arytmetyczna pierwszych czterech liczb jest równa 10,5, a średnia arytmetyczna czterech ostatnich jest równa 22. Średnia arytmetyczna wszystkich liczb jest równa 16. Ile jest równa liczba zapisana jako czwarta?

2.5 Doświadczenie losowe

Podejmij temat



Wyszukaj w internecie informacje na temat kolorów i figur w kartach do gry. Ile jest kart w jednym kolorze w talii liczącej 52 karty? A ile jest jednakowych figur w takiej talii?
Czy chłopiec może wylosować króla pik? A czy może wylosować jedynkę kier?

Ciekawe!

W większości gier karcianych, zwyczajem jest częste tasowanie talii. Po potasowaniu standardowej talii składającej się z 52 kart otrzymujemy jeden z $8{,}0658 \cdot 10^{67}$ możliwych sposobów ułożenia wszystkich kart. Jest to ogromna liczba. Dla porównania: liczba atomów na Ziemi to około 10^{50}.

Doświadczenie losowe to eksperyment, który możemy powtarzać wielokrotnie w tych samych warunkach i którego wyniku nie jesteśmy w stanie przewidzieć ani nie mamy na niego wpływu, choć znamy wszystkie możliwe wyniki tego eksperymentu.
Przykładami doświadczeń losowych są:

- jednokrotny rzut monetą,
- jednokrotny rzut kostką sześcienną do gry,
- dwukrotny rzut monetą,
- losowanie jednej karty z talii liczącej 52 karty,
- wyciąganie jednego losu z pudełka.

Na przykład w doświadczeniu losowym polegającym na jednokrotnym rzucie monetą, jeżeli moneta jest symetryczna (czyli wykonana z jednego metalu lub stopu metali, nie jest obciążona z żadnej strony, ma tak niewielką grubość, że nie jest możliwe, aby stanęła na sztorc itp.), możemy uzyskać tylko jeden z wyników: „wypadł orzeł” (oznaczamy ten wynik przez O) lub „wypadła reszka” (oznaczamy ten wynik przez R). Choć wiemy, jakimi wynikami może zakończyć się rzut monetą, to przed wykonaniem tego rzutu nie jesteśmy w stanie przewidzieć, czy wypadnie orzeł czy reszka, i nie mamy wpływu na ten wynik. Wyniki: „wypadł orzeł”, „wypadła reszka” to wszystkie możliwe wyniki doświadczenia polegającego na jednokrotnym rzucie monetą. Nazywamy je **zdarzeniami elementarnymi**.

Przykład 1

Wypiszmy wszystkie zdarzenia elementarne w doświadczeniu losowym polegającym na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

Wypiszmy wszystkie możliwe wyniki jednokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry:

- wypadło 1 oczko,
- wypadły 2 oczka,
- wypadły 3 oczka,
- wypadły 4 oczka,
- wypadło 5 oczek,
- wypadło 6 oczek.

Są to wszystkie możliwe zdarzenia elementarne. Jest ich 6.

1. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne przy jednokrotnym rzucie czworościenną kostką do gry, na ściankach której zapisane są liczby: 10, 20, 30, 40.

Doświadczenia losowe mogą być jednoetapowe (np. jednokrotny rzut kostką do gry, wyciągnięcie jednej karty z talii kart) lub kilkuetapowe (np. dwukrotny rzut monetą, trzykrotny rzut sześcienną kostką do gry, jednokrotny rzut monetą, a potem jednokrotny rzut sześcienną kostką do gry). Gdy doświadczenia są wieloetapowe, do wyznaczenia liczby wszystkich możliwych wyników (liczby wszystkich zdarzeń elementarnych) warto posłużyć się drzewkiem lub tabelą.

Jeżeli wyrzucimy ściankę np. z dwoma oczkami, to możemy powiedzieć, że wypadły 2 oczka lub wyrzuciliśmy liczbę 2.

Kostka czworościenna to kostka, która ma kształt ostrosłupa o czterech ścianach będących trójkątami równobocznymi. W zależności od rodzaju kostki mogą się na niej znaleźć liczby zapisane na różne sposoby.

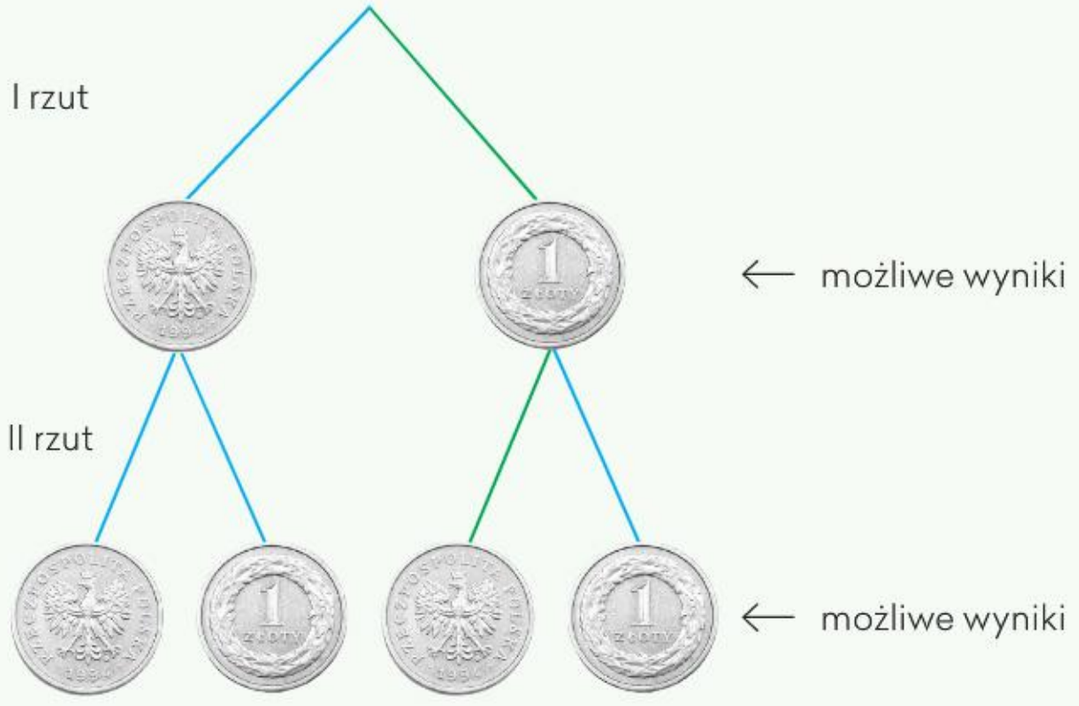


Przykład 2

Rzucamy dwa razy monetą. Opiszmy wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia za pomocą drzewka i wypiszmy wszystkie zdarzenia elementarne (wszystkie możliwe wyniki).

Wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia losowego to: (O, O), (O, R), (R, O), (R, R)

Przez zapis (R, O) rozumiemy, że w pierwszym rzucie monetą „wypadła reszka", a w drugim rzucie „wypadł orzeł". Każda gałąź drzewka przedstawia jeden z czterech możliwych wyników dwukrotnego rzutu monetą, czyli zdarzenia elementarne: „wypadły dwa orły" – (O, O), „wypadły orzeł i reszka" – (O, R), „wypadły reszka i orzeł" – (R, O), „wypadły dwie reszki" – (R, R). Wynik (R, O) zaznaczono na gałęzi drzewka kolorem zielonym.



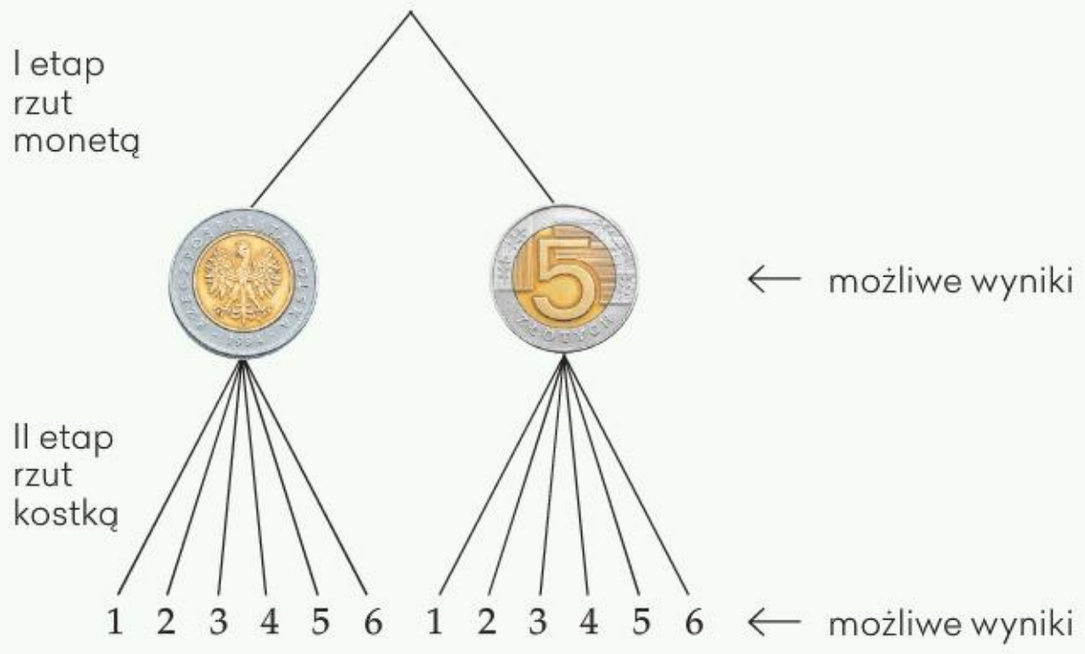
2. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne przy dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

Przykład 3

Wypiszmy i opiszmy za pomocą drzewka wszystkie możliwe wyniki doświadczenia losowego polegającego na rzucie monetą, a następnie sześcienną kostką do gry.

Wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia (zdarzenia elementarne) to pary wyników:
(O, 1), (O, 2), (O, 3), (O, 4), (O, 5), (O, 6), (R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 5), (R, 6).
Wszystkich możliwych wyników jest 12.

Przez zapis np. (R, 3) rozumiemy, że w I rzucie monetą „wypadła reszka", a w II rzucie kostką „wypadły 3 oczka".



3. Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne w doświadczeniu losowym polegającym na rzucie najpierw sześcienną kostką do gry, a potem monetą.

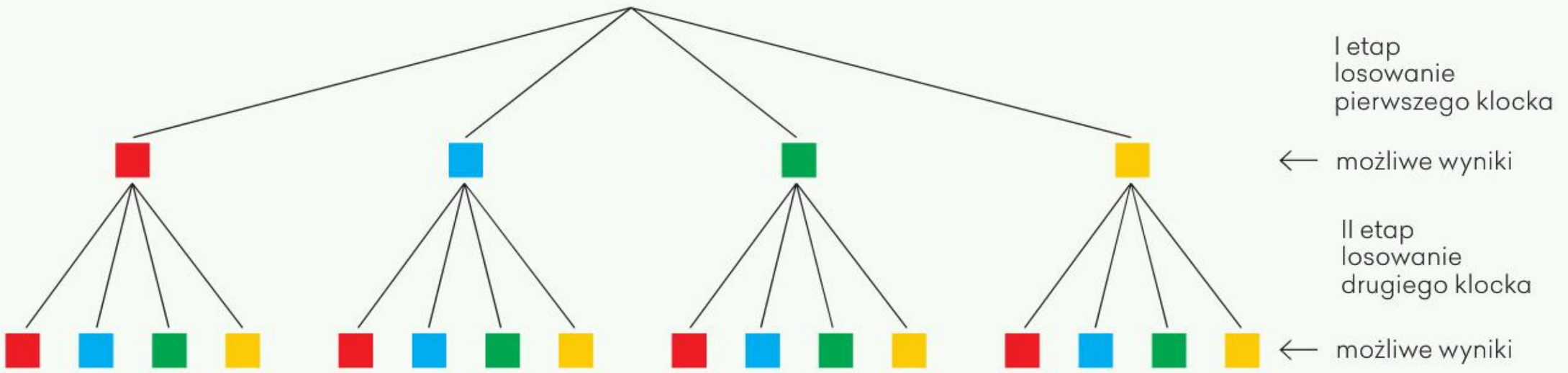
Przykład 4

W pudełku są cztery klocki: czerwony (oznaczamy go przez c), niebieski (n), zielony (z) i pomarańczowy (p). Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym losowaniu klocka z pudełka, przy czym:

a) po wylosowaniu jednego klocka zapisujemy jego kolor, wrzucamy klocek do pudełka, losujemy drugi raz i zapisujemy kolor wylosowanego klocka,
b) po wylosowaniu jednego klocka zapisujemy jego kolor, odkładamy klocek na bok, losujemy drugi raz i zapisujemy kolor wylosowanego klocka.

W każdym z tych przypadków wszystkie możliwe wyniki przedstawmy za pomocą drzewka i tabeli, a następnie wypiszmy te wyniki (wszystkie zdarzenia elementarne).

a) Sporządźmy drzewko dla tego doświadczenia.



Przedstawmy wyniki losowania w tabeli.

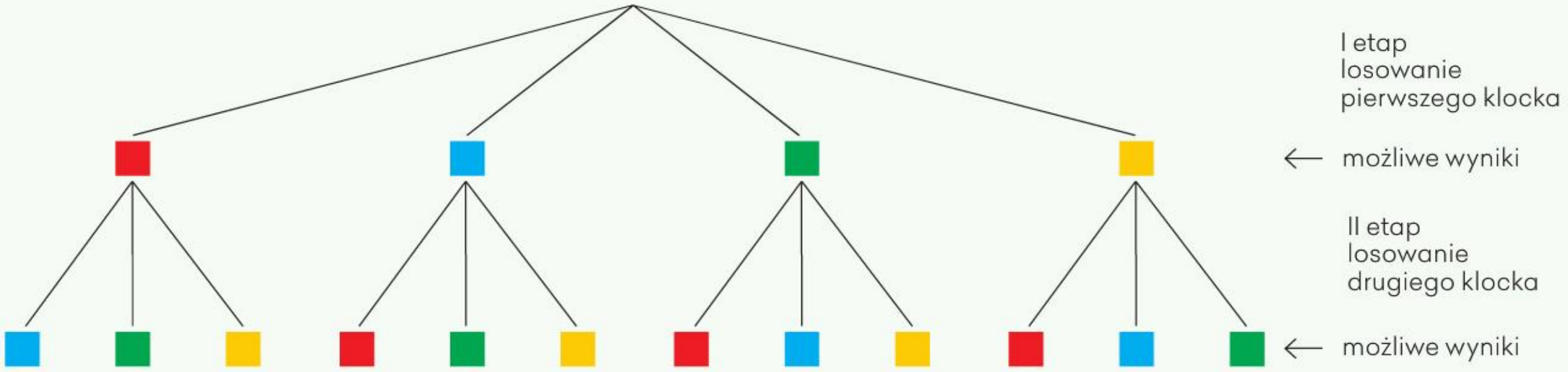
I losowanie \ II losowanie	🟥	🟦	🟩	🟨
🟥	(c, c)	(c, n)	(c, z)	(c, p)
🟦	(n, c)	(n, n)	(n, z)	(n, p)
🟩	(z, c)	(z, n)	(z, z)	(z, p)
🟨	(p, c)	(p, n)	(p, z)	(p, p)

Wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia (zdarzenia elementarne) to pary wyników: (c, c), (c, n), (c, z), (c, p), (n, c), (n, n), (n, z), (n, p), (z, c), (z, n), (z, z), (z, p), (p, c), (p, n), (p, z), (p, p).

Pary, np. (z, n) i (n, z), są różne; (z, n) oznacza, że w I losowaniu wyciągnięto z pudełka klocek zielony, a w II losowaniu – klocek niebieski, zaś (n, z), oznacza, że w I losowaniu wyciągnięto z pudełka klocek niebieski, a w II losowaniu – klocek zielony.

Jest 16 różnych wyników (zdarzeń elementarnych) tego doświadczenia losowego.

b) Sporządźmy drzewko dla tego doświadczenia.



Przedstawmy wyniki losowania w tabeli.

I losowanie \ II losowanie	🟥	🟦	🟩	🟨
🟥		(c, n)	(c, z)	(c, p)
🟦	(n, c)		(n, z)	(n, p)
🟩	(z, c)	(z, n)		(z, p)
🟨	(p, c)	(p, n)	(p, z)	

Wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia (zdarzenia elementarne) to pary wyników: (c, n), (c, z), (c, p), (n, c), (n, z), (n, p), (z, c), (z, n), (z, p), (p, c), (p, n), (p, z).

Jest 12 różnych wyników (zdarzeń elementarnych) tego doświadczenia losowego.

4. W woreczku są trzy kule. Na jednej narysowano buźkę (b), na drugiej serduszko (s), a na trzeciej – gwiazdkę (g). Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym losowaniu kuli z woreczka, przy czym:

a) po wylosowaniu jednej kuli, zapisaniu znaczka, jaki się na niej znajduje, wrzucamy kulę do woreczka i losujemy drugi raz,

b) po wylosowaniu jednej kuli, zapisaniu znaczka, jaki się na niej znajduje, kulę odkładamy na bok i losujemy drugi raz.

W każdym z tych przypadków opisz za pomocą drzewka możliwe wyniki i je wypisz.

Ciekawe!



Kości do gry to wielościany z umieszczonymi na ich ściankach liczbami (oczkami). Najbardziej rozpowszechnione są kostki sześcienne. Suma liczb znajdujących się na przeciwległych ściankach typowej kostki sześciennej jest równa 7. Również na innych kostkach wielościennych, o ile jest to możliwe, stosuje się zasadę, że suma liczb na przeciwległych ścianach jest zawsze większa o jeden od łącznej liczby ścian (np. dla kości ośmiościennej suma ta jest równa 9, a dwudziestościennej 21).

Zadania

- Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie dwunastościenną kostką, na której ściankach zapisano kolejne wielokrotności liczby 12, z których najmniejsza to 36. Opisz za pomocą drzewka wszystkie możliwe wyniki i je wypisz.

- Michał miał w portfelu po jednej monecie: 10-groszowej, 20-groszowej, 50-groszowej, 1-złotowej, 2-złotowej, 5-złotowej. W sposób losowy wyciągnął z portfela jedną monetę. Opisz za pomocą drzewka, jaką monetę mógł wyciągnąć Michał. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia losowego? Wypisz je.

- Zapoznaj się z zasadami gry „papier, kamień, nożyce". Maksym i Wojtek chcą rozegrać jedną turę tej gry, wystawiając dłonie w sposób losowy. Ile jest różnych możliwych wyników tego doświadczenia losowego? Opisz je za pomocą drzewka i je wypisz.

- Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie czworościenną kostką, na której ściankach zapisano jednocyfrowe liczby pierwsze. Opisz za pomocą drzewka możliwe wyniki i je wypisz.

- Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne dla doświadczenia losowego polegającego na:

  a) rzucie monetą, a następnie rzucie czworościenną kostką do gry, na której ściankach są zapisane liczby: 1, 2, 3, 4,
  b) rzucie czworościenną kostką do gry, na której ściankach są zapisane liczby 1, 2, 3, 4, a następnie rzucie monetą.

- Przedstaw za pomocą drzewka wszystkie możliwe wyniki doświadczenia losowego polegającego na dwukrotnym losowaniu kuli z pudełka zawierającego 1 kulę białą, 1 czerwoną, 1 niebieską, 1 zieloną i 1 fioletową, jeśli losujemy:

  a) zwracając kulę do pudełka, b) nie zwracając kuli do pudełka.

- Mama miała w siatce owoce: jabłka, gruszki i banany. W sposób losowy wybrała jeden owoc i dała go Monice, a potem w sposób losowy wybrała drugi owoc i dała go Kasi. Przedstaw za pomocą drzewka wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia losowego, jeśli:

  a) mama miała w siatce tylko po jednym owocu każdego rodzaju,
  b) mama miała w siatce przynajmniej po dwa owoce każdego rodzaju.

- Ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych w doświadczeniu polegającym na rzucie trzema monetami? Opisz za pomocą drzewka wszystkie możliwe wyniki i je wypisz.

2.6 Częstości występowania zdarzeń w doświadczeniach losowych

Podejmij temat

- Rzuć 30 razy sześcienną kostką do gry. Zanotuj, ile razy wypadła ścianka z 1 oczkiem, ile razy ścianka z 2 oczkami, ile razy z 3, ile razy z 4, ile razy z 5, a ile razy z 6 oczkami. Przedstaw te dane na wykresie słupkowym.

Jeżeli pewne doświadczenie losowe powtarzamy N razy i interesujący nas wynik wystąpi m razy, to **iloraz** $\frac{m}{N}$ nazywamy **częstością występowania tego wyniku** (czyli danego zdarzenia). Częstość występowania zdarzenia możemy zapisać za pomocą ułamka lub podać w procentach.

Przykład 1

Kuba 20 razy rzucił monetą i otrzymał kolejno wyniki: O, O, R, R, R, O, R, O, O, O, O, R, R, O, R, O, R, R, O, O.

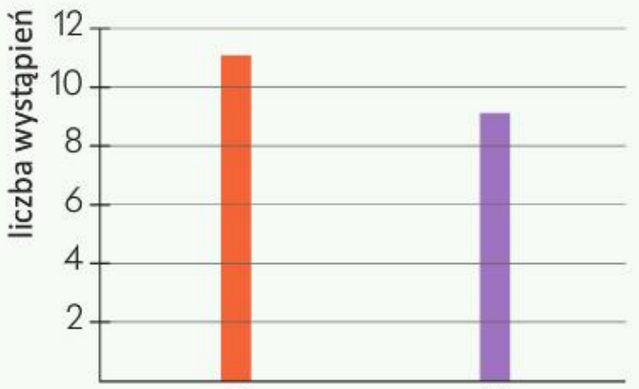
a) Opiszmy za pomocą tabeli i diagramu słupkowego ile razy wypadł każdy z wyników.
b) Opiszmy za pomocą tabeli i kołowego diagramu procentowego częstość występowania każdego z wyników.

a) Kuba przy dwudziestokrotnym rzucie monetą 11 razy wyrzucił orła i 9 razy reszkę.

- Tabela liczebności

Wynik (zdarzenie elementarne)	O (wypadł orzeł)	R (wypadła reszka)
Liczba otrzymania danego wyniku	11	9

- Diagram słupkowy



b) $N = 20$ – tyle razy Kuba rzucał monetą

$m_O = 11$ – tyle razy Kuba wyrzucił orła

$m_R = 9$ – tyle razy Kuba wyrzucił reszkę

Częstość wyrzucenia orła w tym doświadczeniu jest równa $\frac{11}{20}$, bo na 20 rzutów monetą 11 razy Kuba wyrzucił orła. Obliczmy, jaki procent wszystkich rzutów stanowią wyrzucone orły.

$\frac{11}{20} \cdot 100\% = 55\%$

Częstość wyrzucenia reszki jest równa $\frac{9}{20}$, bo na 20 rzutów monetą 9 razy Kuba wyrzucił reszkę.

$\frac{9}{20} \cdot 100\% = 45\%$

- Tabela częstości

Wynik (zdarzenie elementarne)	O (wypadł orzeł)	R (wypadła reszka)
Częstość występowania (w ułamku)	$\frac{11}{20}$	$\frac{9}{20}$
Częstość występowania (w procentach)	55%	45%

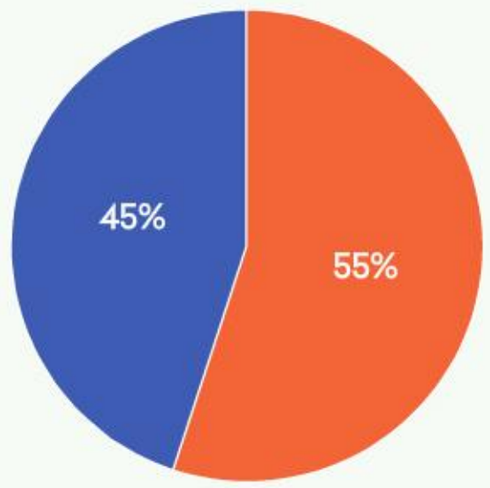
- Kołowy diagram procentowy

Obliczamy miary kątów odpowiadającym częściom koła symbolizującym, jaki procent wszystkich rzutów stanowią te, w których wypadł orzeł, i jaki te, w których wypadła reszka:

$360° : 20 = 18°$

orzeł: $11 \cdot 18° = 198°$

reszka: $9 \cdot 18° = 162°$



1. Wykonaj doświadczenie polegające na 40 rzutach monetą. Opisz za pomocą tabeli i diagramu częstość występowania każdego z wyników. Porównaj częstość otrzymania orła w swoim doświadczeniu z częstością podaną w przykładzie 1.

Przykład 2

Magda rzuciła 30 razy monetą i 12 razy wyrzuciła orła. Obliczmy częstość występowania reszki.

Magda rzuciła 30 razy monetą i 12 razy wyrzuciła orła, więc reszkę wyrzuciła 18 razy.

Częstość występowania reszki jest równa: $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

2. Paweł 30 razy rzucił sześcienną kostką do gry. Informacje, ile razy wypadły: 1 oczko, 2, 3, 4 oczka lub 5 oczek, podano w tabeli.

Wynik	1	2	3	4	5
Liczba otrzymania danego wyniku	3	6	5	7	5

a) Oblicz, ile razy wypadło 6 oczek.
b) Opisz za pomocą tabeli i diagramu częstość występowania każdego z wyników.

Przykład 3

W woreczku jest 6 kul: czerwona (c), pomarańczowa (p), brązowa (b), żółta (z), granatowa (g) i fioletowa (f). Doświadczenie polega na losowaniu jednej kuli z woreczka, zapisaniu jej koloru i ponownym włożeniu jej do woreczka. Zuzia powtórzyła to doświadczenie 20 razy i otrzymała wyniki: f, p, p, c, z, p, f, g, c, b, c, z, c, p, f, b, f, z, p, g. Obliczmy:

a) częstość wylosowania kuli pomarańczowej,
b) częstość wylosowania kuli w barwach zimnych (granatowej lub fioletowej).

a) Kulę pomarańczową Zuzia wylosowała 5 razy.
$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
Częstość wylosowania kuli pomarańczowej jest równa $\frac{1}{4}$.

b) Kulę granatową Zuzia wylosowała 2 razy, a fioletową 4 razy. Zatem Zuzia 6 razy wylosowała kule w barwach zimnych.
$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
Częstość wylosowania kuli w barwach zimnych jest równa $\frac{3}{10}$.

3. W woreczku jest 5 płaskich klocków w kształcie: koła (k), trójkąta równobocznego (t), prostokąta, który nie jest kwadratem (p), rombu, który nie jest kwadratem (r), siedmiokąta foremnego (s). Doświadczenie polega na losowaniu jednego klocka z woreczka, zapisaniu, w jakim jest kształcie, i ponownym włożeniu go do woreczka. Maciek powtórzył to doświadczenie 28 razy i otrzymał wyniki: r, t, t, p, k, p, t, s, p, r, s, s, t, k, t, k, t, s, p, p, t, s, k, r, r, s, p, r. Oblicz:

a) częstość wylosowania klocka w kształcie koła,
b) częstość wylosowania klocka trójkątnego,
c) częstość wylosowania klocka w kształcie czworokąta,
d) częstość wylosowania klocka w kształcie wielokąta foremnego.

Czy pamiętasz?
Wielokąt foremny to wielokąt, który ma wszystkie boki równej długości i wszystkie kąty wewnętrzne równe.

Przykład 4

Sylwia rzuciła 60 razy sześcienną kostką do gry i obliczyła, że częstość wyrzucenia 2 oczek jest równa $\frac{3}{10}$. Obliczmy, ile razy Sylwia wyrzuciła 2 oczka.

Jeśli Sylwia rzuciła 60 razy sześcienną kostką do gry i $\frac{3}{10}$ z nich zakończyło się wyrzuceniem 2 oczek, to znaczy, że takich rzutów było $60 \cdot \frac{3}{10} = 18$.
Sylwia 18 razy wyrzuciła 2 oczka.

4. Karol 40 razy rzucił czworościenną kostką do gry, na której ściankach były napisane liczby: 1, 2, 3 i 4. Oblicz, ile razy Karol wyrzucił ściankę z liczbą 1, jeżeli częstość występowania ścianki z liczbą 1 jest równa 20%.

Zadania

Doświadczenie losowe polega na rzucie sześcienną kostką do gry. W 20 kolejnych rzutach otrzymano liczbę oczek: 2, 4, 5, 2, 3, 1, 1, 6, 4, 3, 1, 2, 5, 5, 4, 6, 3, 2, 1, 2.

a) Opisz za pomocą tabeli i diagramu słupkowego liczebności każdego z wyników.
b) Opisz za pomocą tabeli i kołowego diagramu procentowego częstości występowania każdego z wyników.

Wykonaj 30 rzutów sześcienną kostką do gry.

a) Opisz za pomocą tabeli i diagramu słupkowego liczebności każdego z wyników.
b) Opisz za pomocą tabeli i kołowego diagramu procentowego częstości występowania każdego z wyników.

Tabela liczebności opisuje doświadczenie losowe polegające na pięćdziesięciokrotnym rzucie czworościenną kostką, na której ściankach są zapisane liczby: 1, 2, 3 i 4. Przedstaw na kołowym diagramie procentowym częstości występowania każdego z wyników.

Wynik	1	2	3	4
Liczba wystąpień	11	13	12	14

W urnie są trzy kule: czerwona – c, zielona – z i biała – b. Doświadczenie polega na losowaniu jednej kuli z urny, zapisaniu jej koloru i ponownym włożeniu jej do urny. Dorota, powtarzając doświadczenie 15 razy, otrzymała następujące wyniki: z, c, z, b, b, z, c, c, z, z, z, b, c, z, b. Sporządź tabelę częstości dla każdego koloru wylosowanej kuli.

Igor 40 razy rzucił czworościenną kostką do gry, na której ściankach były napisane liczby: 10, 20, 30 i 40. Niektóre wyniki podano w tabeli.

a) Oblicz, ile razy wypadła ścianka z liczbą 30.
b) Opisz za pomocą kołowego diagramu procentowego częstości występowania każdego z wyników.

Wynik	10	20	30	40
Liczba wystąpień	10	12		8

W woreczku są kule oznaczone numerami od 1 do 10. Doświadczenie polega na losowaniu jednej kuli z woreczka, zapisaniu jej numeru i ponownym włożeniu jej do woreczka. Czarek powtórzył to doświadczenie 30 razy i otrzymał wyniki: 10, 8, 4, 10, 1, 5, 5, 3, 10, 2, 6, 10, 7, 1, 3, 7, 2, 4, 9, 6, 5, 1, 3, 8, 5, 6, 10, 2, 1, 7.

a) Oblicz częstość wylosowania kuli z numerem 10.
b) Oblicz częstość wylosowania kuli z numerem 2.
c) Oblicz częstość wylosowania kuli z numerem będącym liczbą pierwszą.
d) Oblicz częstość wylosowania kuli z numerem nieparzystym.

Oliwia 60 razy wylosowała po jednej karcie z talii składającej się z 52 kart, przy czym po każdym losowaniu zapisywała informację o wylosowanej karcie i wkładała ją z powrotem do talii.

a) Oblicz, ile razy Oliwia wylosowała kiera, jeżeli częstość wylosowania kiera była równa $\frac{7}{30}$.
b) Oblicz, ile razy Oliwia wylosowała asa, jeżeli częstość wylosowania asa była równa $\frac{1}{12}$.
c) Oblicz, ile razy Oliwia wylosowała figurę (króla, damę lub waleta), jeżeli częstość wylosowania figury była równa $\frac{4}{15}$.

2.7 Prawdopodobieństwo zdarzenia

Podejmij temat

- Rzuć 60 razy monetą i zapisz wyniki rzutów. Sporządź tabelę częstości każdego z wyników. Porównaj swoje wyniki z wynikami koleżanek i kolegów. Co zauważasz?

Doświadczenie polegające na jednokrotnym rzucie monetą może się zakończyć jednym z dwóch wyników: wyrzuceniem orła lub wyrzuceniem reszki. Jeżeli moneta jest symetryczna, to szansa otrzymania (wyrzucenia) orła jest taka sama jak szansa wyrzucenia reszki. Często mówimy, że oba wyniki są jednakowo prawdopodobne i **prawdopodobieństwo** P wyrzucenia np. orła w jednokrotnym rzucie monetą jest równe $\frac{1}{2}$. Również prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki jest równe $\frac{1}{2}$. Aby obliczyć prawdopodobieństwo jakiegoś zdarzenia, musimy ustalić, ile jest zdarzeń elementarnych, czyli wszystkich możliwych wyników (N), czy wszystkie z nich mają jednakową szansę zajścia (są jednakowo prawdopodobne), i ile z nich spełnia podany warunek (k), a następnie obliczyć iloraz $\frac{k}{N}$.

$$P = \frac{k}{N}$$

P – prawdopodobieństwo, N – liczba wszystkich możliwych wyników
k – liczba wyników spełniających podany warunek

Ciekawe!

Rozwój rachunku prawdopodobieństwa jako nowej dziedziny matematyki zapoczątkowało dostrzeżenie pewnych prawidłowości występujących w grach losowych. Pierwszy dostrzegł je włoski matematyk Gieronimo Cardano (czyt. dżeronimo kardano; XVI w.), a następnie matematycy francuscy Pierre de Fermat (czyt. pier de fer**ma**) i Blaise Pascal (czyt. blez pas**kal**, XVII w.). Za twórcę rachunku prawdopodobieństwa uważa się matematyka szwajcarskiego Jakoba Bernoulliego (czyt. jakoba bernuliego; początek XVIII w.).
Na podstawie: *Encyklopedia szkolna. Matematyka*, WSiP, Warszawa 1988

Przykład 1

Rzucamy jeden raz sześcienną kostką do gry. Obliczmy prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wypadło 5 oczek,
b) wypadła nieparzysta liczba oczek,
c) wypadła liczba oczek nie mniejsza niż 3.

W jednokrotnym rzucie kostką sześcienną do gry może wypaść: 1 oczko, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek. Zatem doświadczenie takie może się zakończyć jednym z 6 wyników: $N = 6$. Każdy z tych wyników jest jednakowo prawdopodobny.

a) Jest tylko jeden wynik, który spełnia warunek „wypadło 5 oczek”: $k = 1$, zatem $P = \frac{1}{6}$

b) Warunek: „wypadła nieparzysta liczba oczek” spełniają trzy wyniki: 1, 3, 5: $k = 3$, zatem $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) Warunek: „wypadła liczba oczek nie mniejsza niż 3” oznacza, że wypadły 3 oczka lub więcej.
Warunek ten spełniają 4 wyniki: 3, 4, 5, 6: $k = 4$, zatem $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

1. Rzucono jeden raz sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

a) wypadło 1 oczko,
b) wypadła liczba oczek będąca liczbą pierwszą,
c) wypadła liczba podzielna przez 3.

Przykład 2

W woreczku znajduje się 5 kul białych, 6 czerwonych i 4 zielone. Doświadczenie polega na jednokrotnym losowaniu kuli z woreczka. Obliczmy prawdopodobieństwo wylosowania:

a) kuli białej, b) kuli czerwonej, c) kuli zielonej.

Oznaczmy przez b – kulę białą, przez c – kulę czerwoną, a przez z – kulę zieloną. Wypiszmy wszystkie wyniki tego doświadczenia:
$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, z_1, z_2, z_3, z_4$

Zatem nasze doświadczenie może zakończyć się jednym z 15 wyników: $N = 15$.

a) Warunek: „wylosowano kulę białą” spełnia 5 wyników: b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

$k = 5 \qquad P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

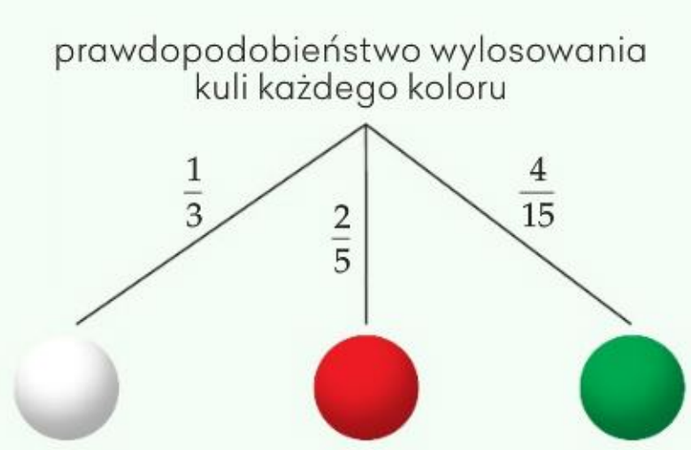
b) Warunek: „wylosowano kulę czerwoną” spełnia 6 wyników: $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$.

$k = 6 \qquad P = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

c) Warunek: „wylosowano kulę zieloną” spełniają 4 wyniki: z_1, z_2, z_3, z_4.

$k = 4 \qquad P = \frac{4}{15}$

To doświadczenie można opisać za pomocą drzewka.



2. W pudełku znajduje się 6 klocków żółtych, 7 zielonych, 2 klocki czerwone i 3 niebieskie. Doświadczenie polega na jednokrotnym losowaniu klocka z pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

a) klocka zielonego,
b) klocka niebieskiego,
c) klocka żółtego lub czerwonego.

Przykład 3

Na loterię przygotowano 70 losów, w tym 3 losy, w których wygrana była równa 100 zł, i 7 z wygraną równą 10 zł. Pozostałe losy były przegrywające. Z tej loterii wylosowano już 6 losów przegrywających i 1 jeden los wygrywający 10 zł. Obliczmy prawdopodobieństwo tego, że kolejny wylosowany los będzie losem:

a) wygrywającym 100 zł, b) wygrywającym, c) przegrywającym.

Obecnie możemy losować z 63 losów, bo $70 - 7 = 63$. Wśród tych losów są:

- 3 losy po 100 zł
- 6 losów po 10 zł, bo:

  $7 - 1 = 6$
- 54 losy przegrywające, bo:

  $70 - (3 + 7) = 60$

  $60 - 6 = 54$

a) Prawdopodobieństwo, że wylosujemy los wygrywający 100 zł, jest równe:

$$P = \frac{3}{63} = \frac{1}{21}$$

b) Losów wygrywających jest $3 + 6 = 9$. Prawdopodobieństwo, że wylosujemy los wygrywający, jest równe:

$$P = \frac{9}{63} = \frac{1}{7}$$

c) Prawdopodobieństwo, że wylosujemy los przegrywający, jest równe:

$$P = \frac{54}{63} = \frac{6}{7}$$

3. W pojemniku były kartki z numerami od 1 do 6, po 3 z każdym z numerów. Każdy z 18 uczniów miał wylosować jedną kartkę – napisany na niej numer oznaczał numer grupy, w której uczeń miał pracować na lekcji. Kasia wylosowała kartkę z numerem 2, a Wojtek kartkę z numerem 5. Sylwia losuje jako trzecia. Oblicz prawdopodobieństwo, tego, że:

a) Sylwia wylosuje kartkę z numerem 1,
b) Sylwia będzie w jednej grupie z Kasią.

Zadania

W koszu są trzy jabłka czerwone i dwa zielone. Z tego kosza w sposób losowy wybieramy jedno jabłko. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania jabłka:

a) zielonego, b) czerwonego?

Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wyrzuceniu:

a) parzystej liczby oczek,
b) liczby oczek nie większej niż 5,
c) liczby oczek będącej liczbą złożoną.

Na 10 kartkach zapisano po jednej literze tak, że po ułożeniu tych kartek w rzędzie w odpowiedniej kolejności można utworzyć wyraz MATEMATYKA. Kartki pomieszano i wrzucono do pudełka. Z tego pudełka losujemy jedną kartkę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kartki:

a) z literą T,
b) z literą A,
c) z samogłoską,
d) ze spółgłoską?

Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania:

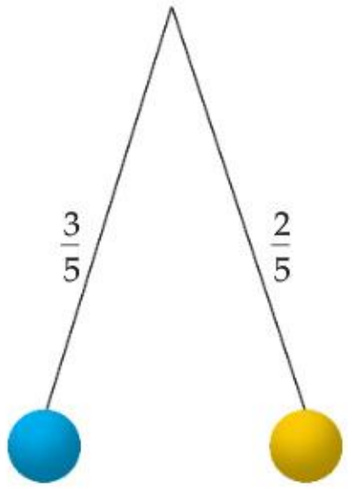
a) karty koloru pik,
b) dziesiątki,
c) figury (waleta, damy lub króla),
d) asa pik lub asa trefl,
e) karty niższej niż dziewiątka?

W pudełku jest po 5 kul w trzech kolorach: białym, czerwonym i niebieskim. Kule w jednym kolorze są ponumerowane od 1 do 5. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

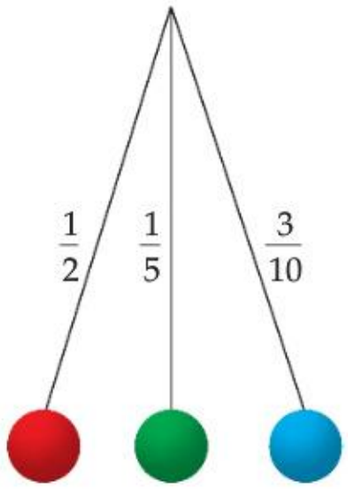
a) kuli białej,
b) kuli z numerem 2,
c) kuli czerwonej lub niebieskiej,
d) kuli białej z numerem parzystym,
e) kuli z numerem nieparzystym.

Za pomocą drzewka przedstawiono doświadczenie losowe polegające na losowaniu jednej kuli spośród 10. Oblicz, ile było kul każdego koloru.

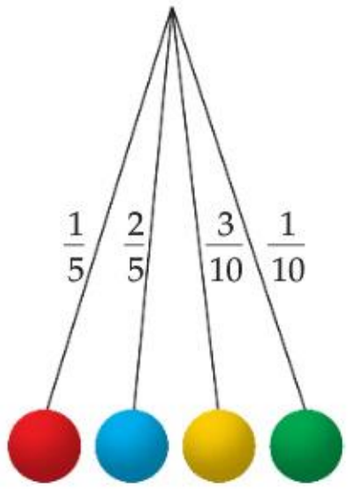
a)



b)



c)



Gra „Układanka matematyczna” zawiera 42 tabliczki z cyframi, 3 tabliczki puste i 5 tabliczek ze znakami działań. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoba, która rozpoczyna grę, losując jedną tabliczkę, wylosuje tabliczkę pustą.

W loterii liczącej 50 losów 35 jest przegrywających, a pozostałe to losy wygrywające. Wyciągamy jeden los. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięty los jest:

a) wygrywający,
b) przegrywający?

Gdy Michał postanowił zagrać na loterii, w urnie było 100 losów, w tym 75 przegrywających, 10 uprawniających do powtórnego losowania, a pozostałe były losami wygrywającymi. Michał kupił jeden los i okazało się, że jest to los uprawniający do dalszego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że drugi wyciągnięty przez Michała los jest:

a) wygrywający,
b) przegrywający,
c) uprawniający do dalszego losowania?

Wśród 26 ponumerowanych kopert 1 zawierała informację o nagrodzie głównej, 5 zawierało informacje o nagrodach pocieszenia, a pozostałe koperty były puste. Pierwsza osoba wylosowała pustą kopertę, a druga – nagrodę pocieszenia.

a) Czy po wylosowaniu kopert przez te dwie osoby prawdopodobieństwo wylosowania nagrody głównej jest większe czy mniejsze niż na początku?
b) Czy po wylosowaniu kopert przez te dwie osoby prawdopodobieństwo wylosowania pustej koperty jest większe czy mniejsze niż na początku?
c) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania nagrody pocieszenia na początku loterii, po wylosowaniu koperty przez pierwszą osobę i po wylosowaniu kopert przez dwie osoby.

W siatce było 5 rodzajów owoców: jabłka, gruszki, banany, mandarynki i morele; po 3 każdego rodzaju. Owoce te rozdawane są dzieciom, przy czym każde dziecko dostaje jeden owoc wybrany w sposób losowy. Rozdano już 1 jabłko i 2 mandarynki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że czwarte dziecko dostanie:

a) gruszkę,
b) jabłko,
c) owoc, którego nazwa zaczyna się na literę *m*,
d) owoc, w którego nazwie występuje litera *b*.

Podsumowanie działu 2

Ważne pojęcia

statystyka | dane statystyczne | średnia arytmetyczna | doświadczenie losowe
zdarzenie elementarne | częstość zdarzenia | prawdopodobieństwo

Sposoby przedstawiania danych statystycznych

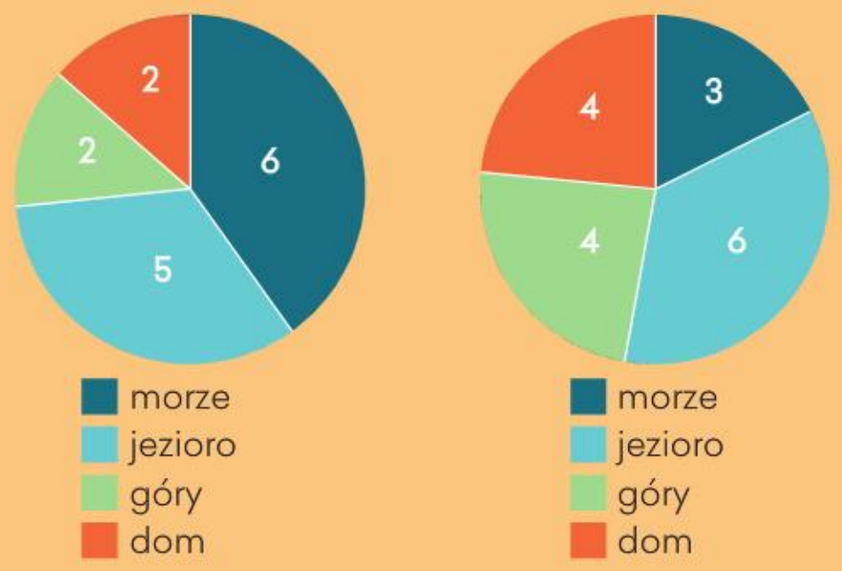
- Tabela

Miejsce wypoczynku	morze		jezioro		góry		dom	
Liczba uczniów	DZ	CH	DZ	CH	DZ	CH	DZ	CH
	6	3	5	6	2	4	2	4

- Diagram słupkowy



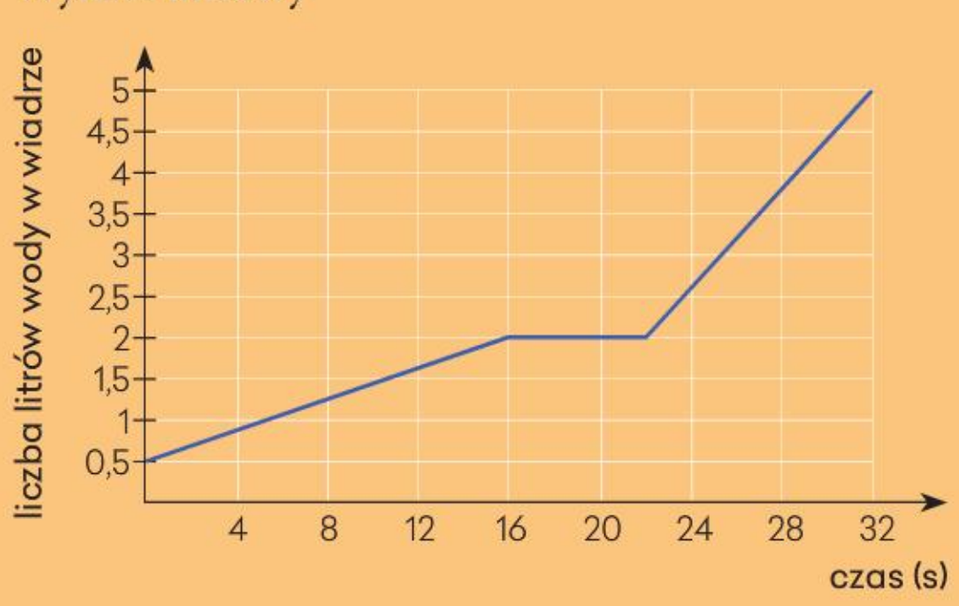
- Diagram kołowy



- Wykres punktowy



- Wykres liniowy



Średnia arytmetyczna ($x_{śr.}$) to liczba uzyskana przez dodanie wszystkich wyników i podzielenie tej sumy przez liczbę wyników.

suma danych

średnia arytmetyczna $\longrightarrow$ $x_{śr.} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n}{n}$

liczba danych

- **Doświadczenie losowe** to eksperyment, który możemy powtarzać wielokrotnie w tych samych warunkach i którego wyniku nie jesteśmy w stanie przewidzieć ani nie mamy na niego wpływu, choć znamy wszystkie możliwe wyniki tego eksperymentu.

  Przykłady doświadczeń losowych:
  - jednokrotny rzut kostką sześcienną do gry,
  - wyciągniecie losu na loterii,
  - dwukrotny rzut monetą,
  - wyciągnięcie 3 kart z talii 52 kart.

- **Zdarzenie elementarne** to wynik doświadczenia losowego.

- **Częstością występowania zdarzenia** nazywamy iloraz $\frac{m}{N}$, w którym N oznacza liczbę powtórzeń pewnego doświadczenia losowego, a m liczbę wystąpień interesującego nas wyniku.

- **Prawdopodobieństwo zdarzenia** to iloraz $\frac{k}{N}$, gdzie N jest to liczba wszystkich możliwych, mających takie same szanse zajścia (jednakowo prawdopodobnych), wyników (zdarzeń elementarnych), a k to liczba wyników (zdarzeń elementarnych), spełniających podany warunek.

liczba wyników spełniających podany warunek

prawdopodobieństwo $\longrightarrow P = \frac{k}{N}$

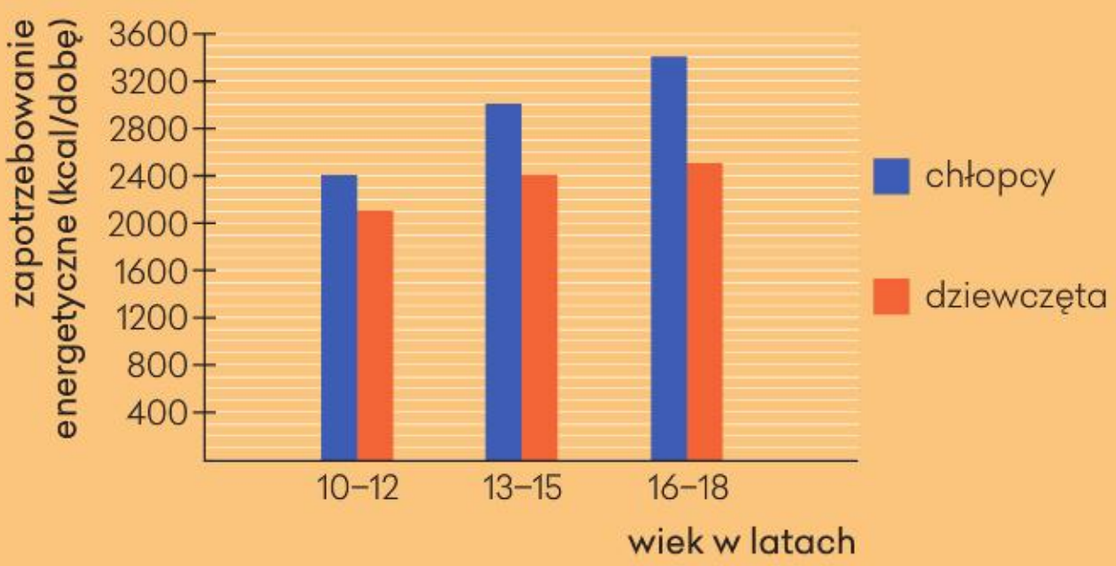
liczba wszystkich możliwych wyników

Czy już umiesz?

1 Na wykresie przedstawiono dzienne zapotrzebowanie energetyczne dziewcząt i chłopców w wieku 10–18 lat o umiarkowanej aktywności fizycznej.

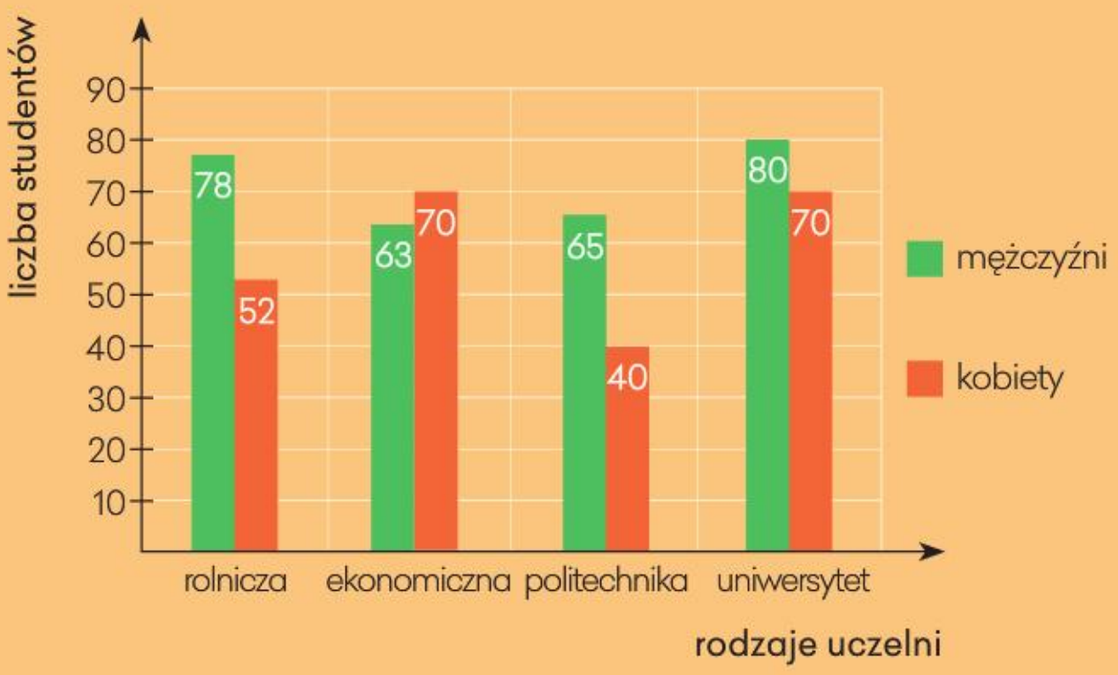
O ile procent więcej kalorii na dobę potrzebuje chłopiec w wieku 13–15 lat niż dziewczynka w wieku 10–12 lat, jeśli oboje charakteryzują się umiarkowaną aktywnością fizyczną?

A. 20% B. 25%
C. 30% D. 43%



2 W miasteczku studenckim w juwenaliach uczestniczyli studenci z czterech uczelni: rolniczej, ekonomicznej, politechniki i uniwersytetu. Które stwierdzenie jest fałszywe?

A. W zabawach podczas juwenaliów uczestniczyło najmniej studentów i studentek politechniki.
B. W zabawie uczestniczyło więcej studentów niż studentek.
C. Łączna liczba studentów i studentek z uczelni ekonomicznej była o 10 mniejsza od połowy mężczyzn ze wszystkich uczelni.
D. Łączna liczba studentów i studentek politechniki stanowiła 75% łącznej liczby studentów i studentek uniwersytetu.



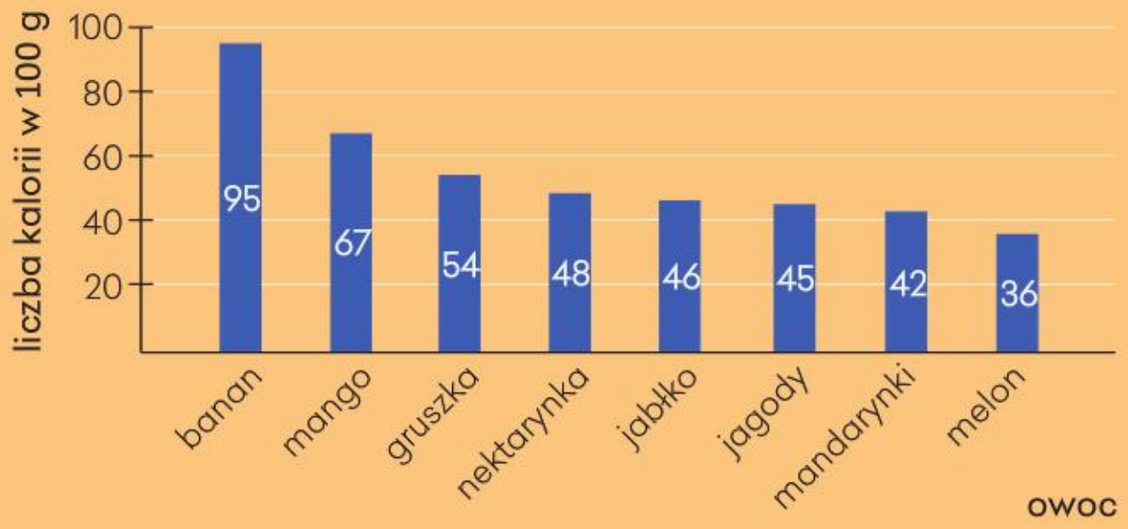
3 Na diagramie przedstawiono kaloryczność niektórych owoców (w 100 g produktu). Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Spożywając 100 g jagód, dostarczamy organizmowi o A/B mniej kalorii, niż spożywając 100 g nektarynek.

A. 6,25% B. $6\frac{2}{3}\%$

Spożywając 200 g gruszek, dostarczamy organizmowi o C/D więcej kalorii, niż spożywając 200 g nektarynek.

C. 25% D. 12,5%



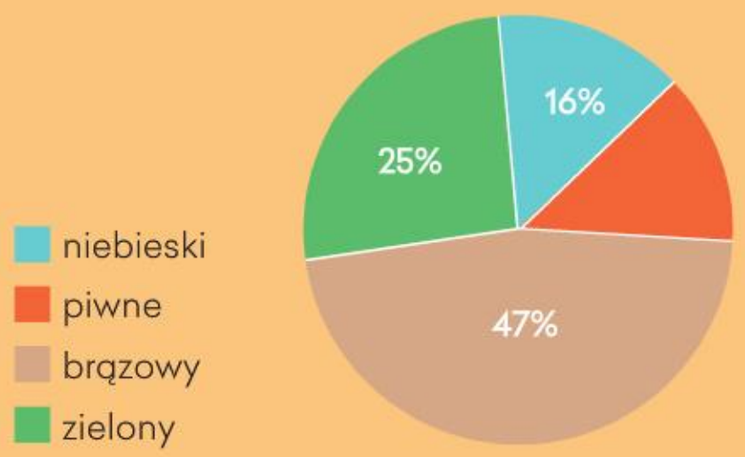
4 Procentowy diagram kołowy przedstawia wyniki ankiety na temat: „Jaki masz kolor oczu?”. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedzi spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Oczy piwne ma A/B ankietowanych osób.

A. $\frac{7}{50}$ B. $\frac{3}{25}$

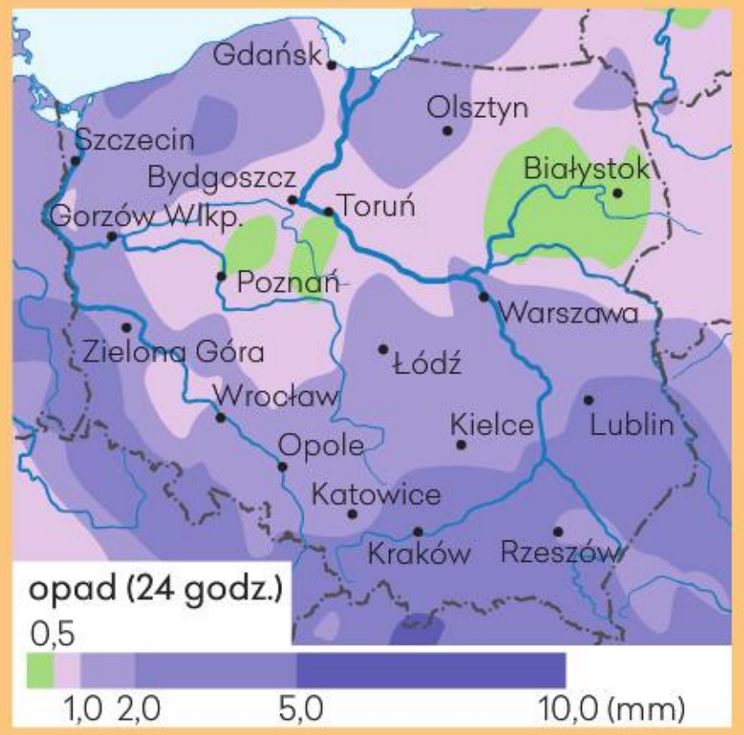
Spośród ankietowanych 24 osoby miały oczy niebieskie, więc grupa badanych osób liczyła C/D osób.

C. 100 D. 150



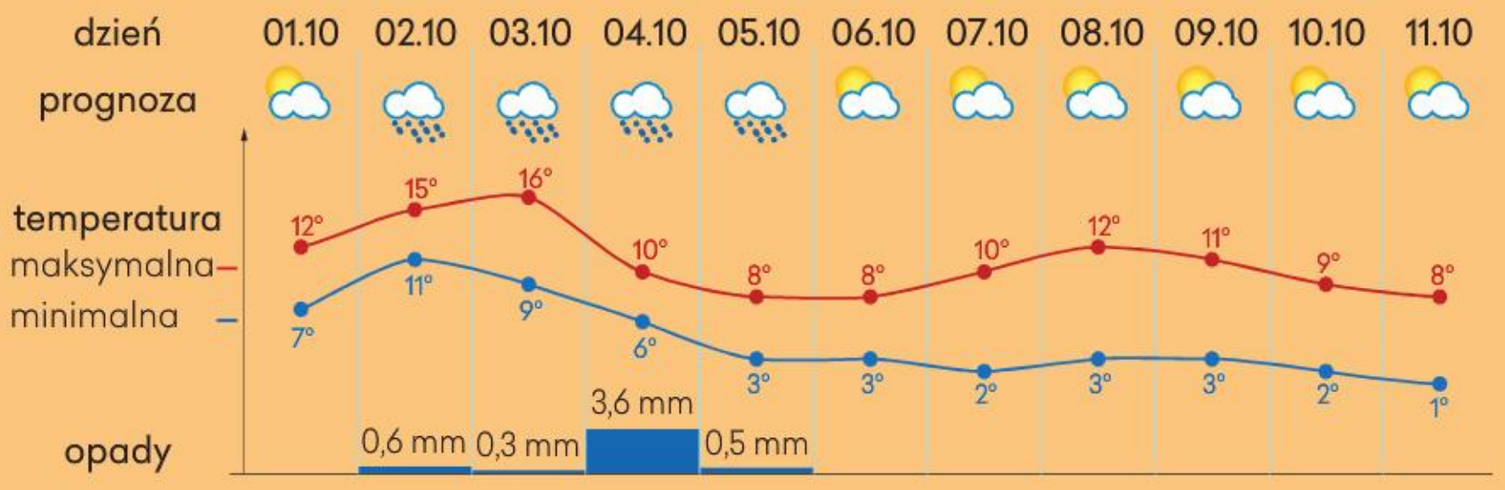
5 Na mapie obok przedstawiono mapę dobowych opadów w Polsce. W której z wymienionych miejscowości opady dobowe były największe?

A. Białystok
B. Katowice
C. Kraków
D. Warszawa



6 W którym dniu różnica między maksymalną a minimalną temperaturą była największa?

A. 3 października
B. 4 października
C. 8 października
D. 11 października



7 Paulina, rzucając 15 razy sześcienną kostką do gry, otrzymała następujące wyniki: 3, 1, 4, 5, 5, 6, 2, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 2, 6. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Średnia arytmetyczna wyników jest równa 2.
B. Średnia arytmetyczna wyników jest równa 2,3.
C. Średnia arytmetyczna wyników jest równa 2,5.
D. Średnia arytmetyczna wyników jest równa 3.

8 Staś, grając w lotki, notował wyniki rzutów w tabeli.

Liczba rzutów	1	2	1	3	2	1
Liczba punktów	5	6	7	8	9	10

Ile wynosi średnia arytmetyczna liczby punktów zdobytych przez Stasia?

A. 4,5 B. 7,5 C. 7,6 D. 7,9

9 Diagram przedstawia dane dotyczące odpowiedzi ósmoklasistów na pytanie: „Ile razy w ciągu zeszłego roku byłeś/byłaś w muzeum?”.



Czy prawdą jest, że średnio jeden uczeń był w ciągu zeszłego roku w muzeum 2 razy? Wybierz odpowiedź I/II oraz uzasadnienie A/B/C.

I. TAK	ponieważ	A. suma liczb: 0, 1, 2, 3, 4 jest równa 10
II. NIE		B. najwięcej uczniów było w muzeum 1 lub 2 razy
		C. 20 uczniów było w muzeum łącznie 40 razy

10 Kartkówkę pisało 28 uczniów. Średnia arytmetyczna ocen uzyskanych z tej kartkówki była równa 3,75. Tylko jeden uczeń otrzymał ocenę niedostateczną i tylko jeden ocenę celującą. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Każdy z pozostałych 26 uczniów otrzymał ocenę dobrą.
B. Średnia arytmetyczna ocen uczniów, którzy z tej kartkówki nie otrzymali ani oceny niedostatecznej, ani celującej, jest większa niż 3,75.
C. Średnia arytmetyczna ocen uczniów, którzy otrzymali ocenę co najmniej dopuszczającą, jest równa 4.
D. Średnia arytmetyczna ocen uczniów, którzy otrzymali ocenę co najwyżej bardzo dobrą, jest równa 3,54.

11 Na każdej z kartek zapisano inną liczbę pierwszą, mniejszą od 50. Następnie kartki wrzucono do pudełka, wymieszano i wylosowano jedną kartkę. Ile jest różnych możliwych wyników tego losowania?

A. 14 B. 15 C. 16 D. 17

12 Mama przygotowała na piknik rodzinny dwie kanapki z wędliną, dwie z serem, dwie z jajkiem i dwie z pasztetem. W sposób losowy wyciągnęła jedną kanapkę i dała ją synowi, a potem w sposób losowy wyciągnęła drugą kanapkę i dała ją córce. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia losowego?

A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

13 Krzysztof zapisał w tabeli wyniki rzutów sześcienną kostką do gry. Wskaż zdanie prawdziwe.

A. Krzysztof rzucił kostką 32 razy.
B. Częstość wyrzucenia trzech oczek jest równa $\frac{3}{16}$.
C. Częstość wyrzucenia czterech i sześciu oczek jest taka sama.
D. Krzysztof wyrzucił dwa oczka z częstością 0,1.

Wynik rzutu	1	2	3	4	5	6
Liczba wystąpień	3	3	6	4	8	6

14 Prawdopodobieństwo otrzymania liczby oczek podzielnej przez 2 przy jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry jest równe

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{6}$

15 Prawdopodobieństwo wylosowania damy kier lub damy karo przy jednokrotnym losowaniu karty z talii 52 kart jest równe

A. $\frac{1}{13}$ B. $\frac{2}{13}$ C. $\frac{1}{26}$ D. $1\frac{1}{52}$

16 Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie kostką ośmiościenną, na której ściankach zapisane są wszystkie dzielniki liczby 24. Na każdej ściance jest zapisany jeden dzielnik.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby pierwszej jest równe A/B.

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{8}$

Prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby podzielnej przez 4 jest C/D niż prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby podzielnej przez 6.

C. mniejsze D. większe

17 W tabeli podano zawartość składników odżywczych w płatkach śniadaniowych, w 100 g gotowego produktu.

Oblicz, z dokładnością do 0,1 g, zawartość poszczególnych składników odżywczych w porcji płatków ważącej 250 g.

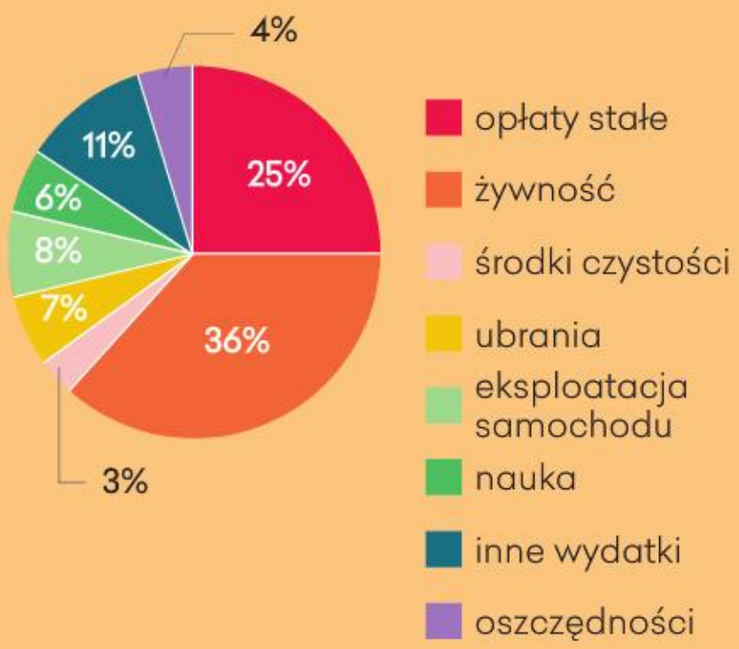
PŁATKI ŚNIADANIOWE

Składnik odżywczy	Masa na 100 g
białko	9,8 g
tłuszcz	3,7 g
węglowodany	71,7 g
błonnik	14,6 g
sód	0,2 g

18 Diagram kołowy przedstawia rozkład procentowy miesięcznych wydatków na jedną osobę w rodzinie państwa Kowalskich.

Wiedząc, że miesięczny dochód netto na jedną osobę wynosi 1450 zł, oblicz:

a) łączną kwotę, którą miesięcznie dysponuje rodzina państwa Kowalskich licząca 6 osób,
b) ile pieniędzy wydaje rodzina państwa Kowalskich na naukę, a ile na ubrania,
c) o ile więcej pieniędzy przeznacza ta rodzina na żywność niż na opłaty stałe.



19 W salonie samochodowym zbadano opinię klientów na temat różnych reklam. Wyniki sondażu przeprowadzonego wśród 800 osób przedstawiono na diagramie procentowym.

Odpowiedz na pytania.

a) Ile osób nie ma zdania na temat reklam?

b) O ilu mniej jest klientów nieakceptujących reklam w stosunku do liczby osób je akceptujących?



20 Diagram przedstawia dane dotyczące struktury 6,5 mln czytelników zarejestrowanych w bibliotekach publicznych, według wieku.

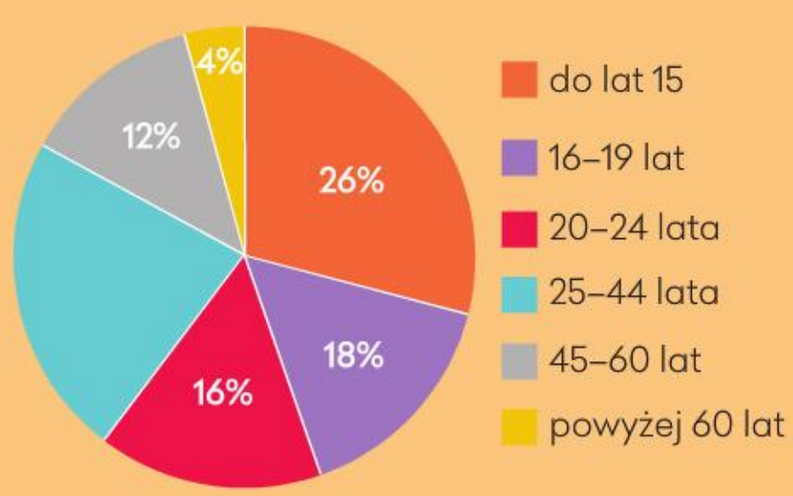
a) Ile procent stanowią czytelnicy w wieku 25–44 lata zarejestrowani w bibliotekach publicznych? Ilu ich jest?

b) Ilu czytelników w wieku powyżej 45 lat jest zarejestrowanych w bibliotekach publicznych?

c) O ile więcej czytelników zarejestrowanych w bibliotekach publicznych jest w wieku 16–19 lat niż w wieku 20–24 lat?

d) Czytelnicy w jakim wieku stanowią najliczniejszą grupę wszystkich zarejestrowanych? Ilu ich jest?

e) Ile procent stanowią czytelnicy poniżej 25 lat zarejestrowani w bibliotekach publicznych? Ilu ich jest?



21 Zapytano dorosłych klientów małego sklepu osiedlowego: „Co wpływa na to, że robisz zakupy w tym sklepie?”. Każda osoba miała podać tylko jeden, najistotniejszy powód.

Diagram przedstawia wyniki badań.
Odpowiedz na te pytania, na które można udzielić odpowiedzi, odczytując i interpretując informacje podane na diagramie. Uzasadnij swoje odpowiedzi lub wyjaśnij, dlaczego nie można odpowiedzieć na pytanie.

a) Jaki procent osób spośród ankietowanych robi zakupy w małych sklepach osiedlowych ze względu na życzliwego sprzedawcę?

b) Czy liczba badanych osób ceniących małe kolejki i różnorodność asortymentu przekracza połowę wszystkich ankietowanych?

c) Który z czynników ma największy wpływ na wybór sklepu osiedlowego przez dorosłych mieszkańców tego osiedla?

d) Czy postawa sprzedawcy ma wpływ na wybór sklepu, w którym Polacy robią zakupy?

e) Jakie czynniki mające wpływ na wybór sklepu osiedlowego wskazała więcej niż $\frac{1}{4}$ dorosłych mieszkańców tego osiedla?

f) O ile więcej badanych osób ceni w sklepikach osiedlowych małą odległość od miejsca zamieszkania niż małe kolejki?

g) Ile razy więcej badanych osób ceni w sklepikach osiedlowych różnorodny asortyment niż życzliwego sprzedawcę?



22 Na podstawie poniższych map przygotuj wystąpienie prezentera pogody.



Maksymalna temperatura



Zachmurzenie i opady



Wiatr



Jakość powierza

23 Długość trasy Michała ze szkoły do domu jest równa 750 m. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się odległość Michała od domu w drodze ze szkoły.

Odpowiedz na pytania.

a) O której godzinie Michał wyszedł ze szkoły i o której dotarł do domu? Ile minut zajęło mu dojście do domu ze szkoły?

b) W trakcie drogi ze szkoły do domu Michał spotkał mamę, która szła na zakupy, i chwilę z nią porozmawiał. O której godzinie Michał spotkał mamę? Ile minut z nią rozmawiał?

c) Ile minut zajęło Michałowi pokonanie ostatnich 300 metrów do domu?

d) Z jaką średnią prędkością pokonał Michał całą trasę ze szkoły do domu, a z jaką – ostatnie 300 metrów?



24 Na wykresie przedstawiono temperaturę godzinową w trzech miastach.

Odpowiedz na pytania.

a) O której godzinie w tych trzech miastach była taka sama temperatura?

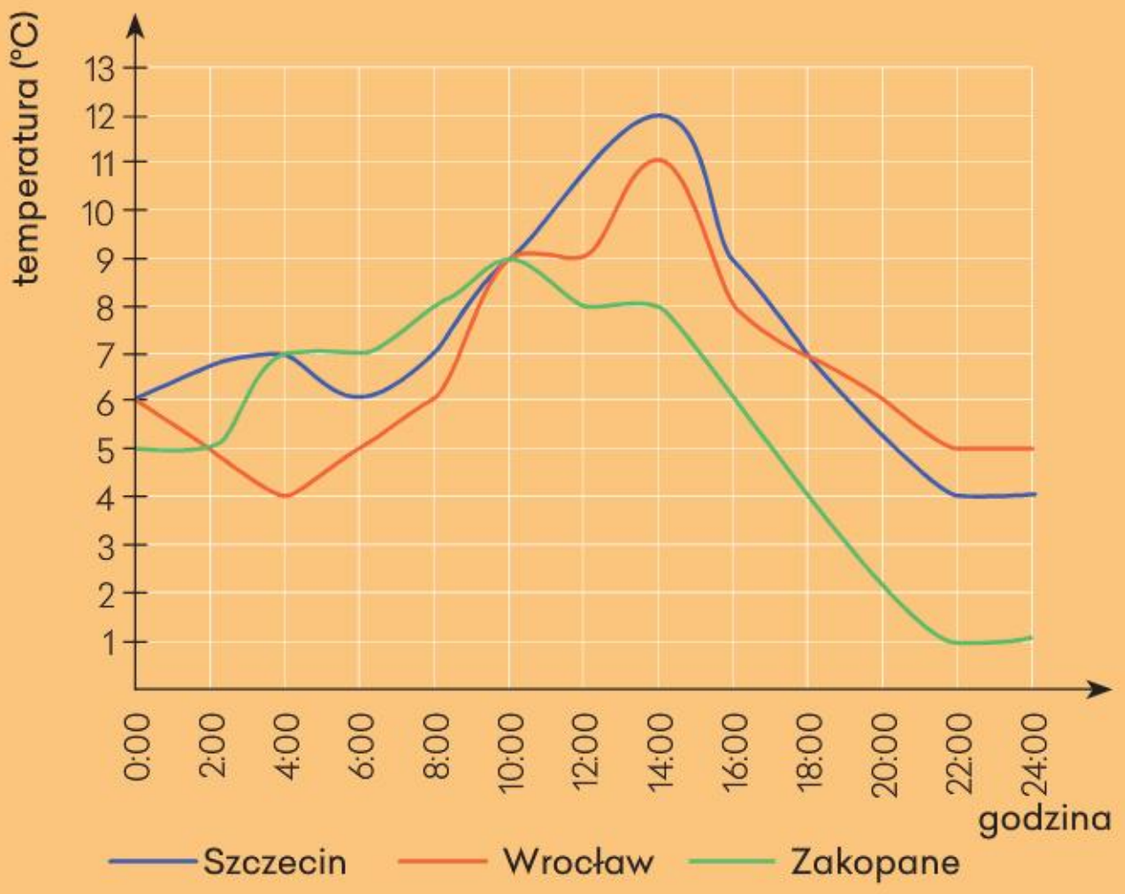
b) Jaka temperatura była w każdym z tych trzech miast o godzinie 6:00? A jaka o godzinie 22:00?

c) W jakich godzinach temperatura we Wrocławiu była równa 6°C?

d) W jakich godzinach temperatura w Zakopanem była wyższa niż temperatura we Wrocławiu o tych samych godzinach?

e) W jakich godzinach temperatura w Szczecinie była wyższa lub taka sama jak we Wrocławiu?

f) W którym mieście między 4:00 a 6:00 rano utrzymywała się jednakowa temperatura?



25 Z dwóch miejscowości – z Szyszkowa i Jarzębinowa – o godz. 9:00 jednocześnie wyjechali naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Każdy z nich poruszał się ze stałą prędkością, ale każdy z inną. Ten rowerzysta, który jechał z większą prędkością, wyjechał z Jarzębinowa. Na wykresie przedstawiono, jak zmieniała się odległość między rowerzystami w zależności od czasu.

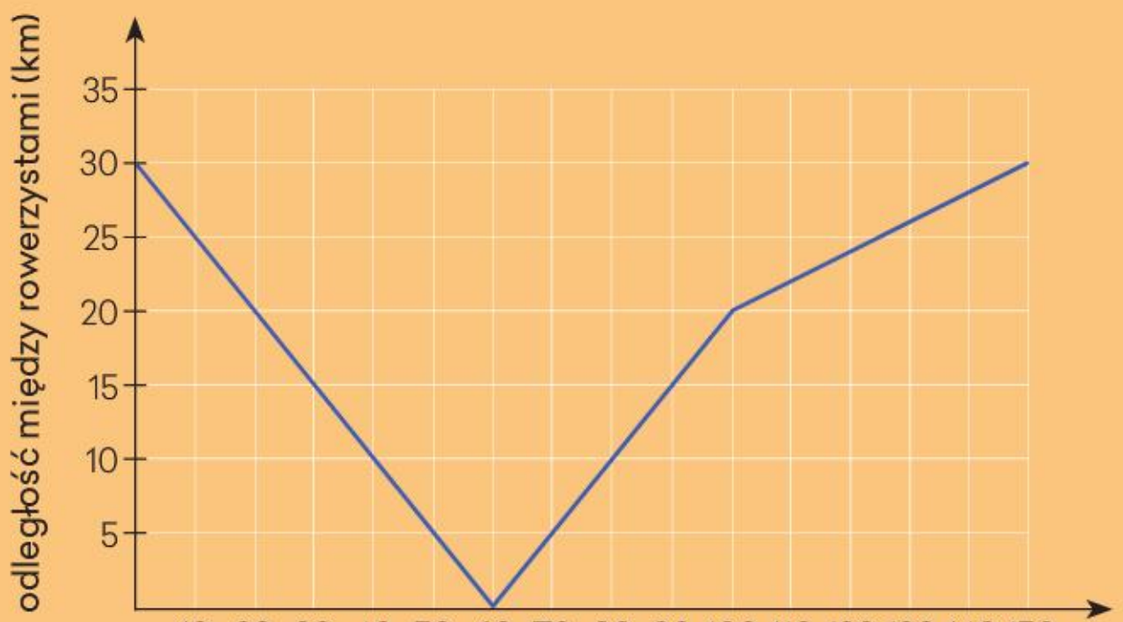
Odpowiedz na pytania.

a) Jaka jest odległość między Szyszkowem a Jarzębinowem?

b) Ile minut zajęło przejechanie trasy temu rowerzyście, który jechał wolniej? Z jaką prędkością jechał ten rowerzysta?

c) O której godzinie rowerzyści się minęli? W jakiej to było odległości od Jarzębinowa?

d) Z jaką prędkością jechał ten rowerzysta, który jechał szybciej? O której godzinie osiągnął on cel podróży?



26 W pewnej szkole podstawowej w drugiej turze wyborów na przewodniczącego Samorządu Uczniowskiego znalazło się dwóch kandydatów – Michał Gospodarny i Zosia Pomocnicka. W tabeli zamieszczono informację o wynikach wyborów w poszczególnych klasach (w procentach) oraz o liczbie uczniów, którzy nie wzięli udziału w drugiej turze wyborów.

Klasa	Procent osób z klasy, które oddały głos na Michała Gospodarnego	Procent osób z klasy, które oddały głos na Zosię Pomocnicką	Liczba osób, które nie głosowały	Liczba osób w klasie
IVa	35%	55%	2	
IVb	40%	44%	4	
Va	36%	64%	0	25
Vb	50%	40%	3	
VIa	32%	64%	1	
VIb	50%	38%	3	
VIIa	50%	50%	0	22
VIIb	75%	25%	0	24
VIIIa	36%	48%	4	
VIIIb	15%	80%	1	

Uzupełnij tabelę, wpisując, ilu uczniów jest w każdej klasie, a następnie odpowiedz na pytania.

a) Jaki procent uczniów klasy IVb stanowią ci uczniowie, którzy nie wzięli udziału w drugiej turze wyborów?

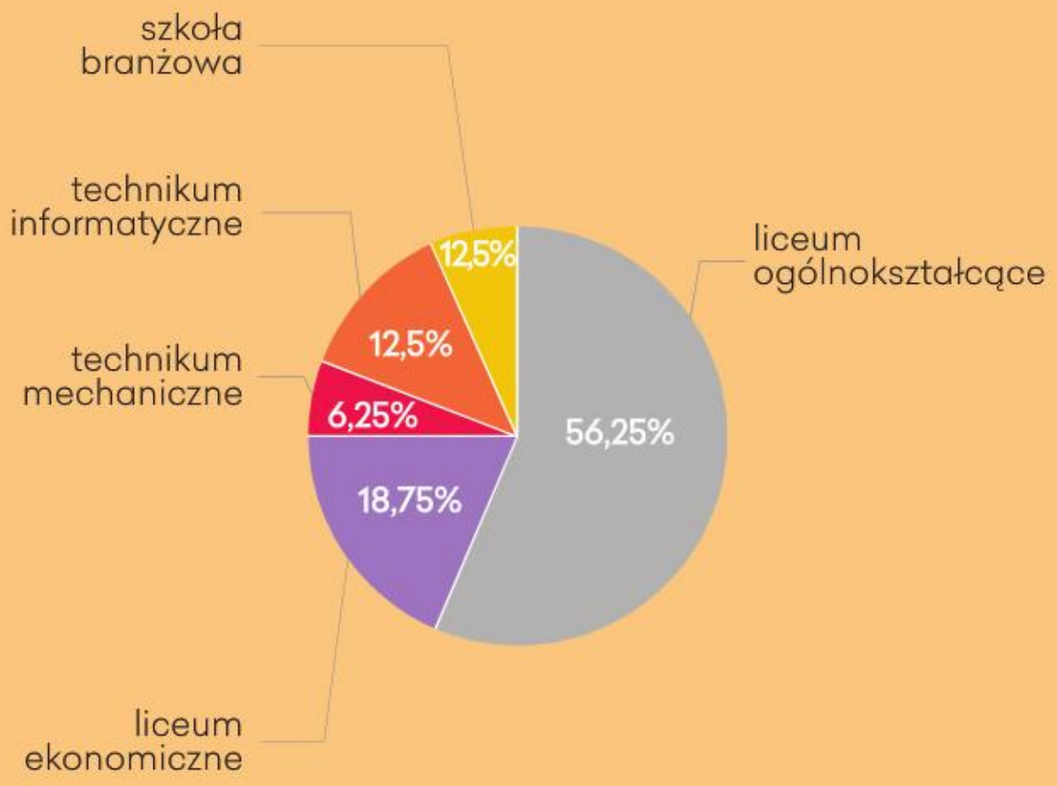
b) Ilu uczniów w całej szkole głosowało na Michała Gospodarnego?

c) Kto wygrał wybory i z przewagą ilu głosów?

d) Jaki procent wszystkich uczniów ze szkoły nie wzięło udziału w drugiej turze wyborów?

27 Wśród 32 uczniów ósmoklasistów przeprowadzono ankietę: „W jakiej szkole średniej planujesz kontynuować naukę po skończeniu szkoły podstawowej?”. Procentowy diagram kołowy przedstawia wyniki tej ankiety.

a) Ilu uczniów zadeklarowało chęć nauki w liceum ogólnokształcącym?
b) O ilu uczniów więcej chce się uczyć w technikum informatycznym niż w technikum mechanicznym?
c) Sporządź diagram słupkowy dla podanych danych.



28 W ramach zajęć pozalekcyjnych z wychowania fizycznego każdy z uczniów klasy VIIId zadeklarował udział w jednej sekcji sportowej. Wyniki deklaracji zestawiono w tabeli.

Rodzaj dyscypliny sportowej	piłka siatkowa	piłka koszykowa	piłka ręczna	piłka nożna	tenis stołowy	badminton	pływanie
Liczba uczniów	6	4	3	7	3	5	2

a) Która dyscyplina sportowa cieszyła się wśród uczniów największym powodzeniem, a która – najmniejszym?
b) Oblicz, jaki procent uczniów tej klasy wybrało tenis stołowy.
c) Sporządź diagram kołowy liczbowy dla danych zestawionych w tabeli.

29 Sporządź diagram kołowy procentowy składu chemicznego ciała człowieka, wiedząc, że woda stanowi 65% jego masy, tłuszcze – 10%, białka – 20%, węglowodany – 1%, sole mineralne – 4%.

a) Oblicz, ile gramów waży tkanka tłuszczowa człowieka, który waży 63 kg.
b) Oblicz, ile gramów waży woda w twoim organizmie.

30 Znajdź w internecie dane dotyczące liczby osób w wieku produkcyjnym w Polsce w latach 1999–2019. Sporządź wykres liniowy tych danych (odpowiednio zaokrąglonych). Spróbuj wyjaśnić, skąd się biorą znaczne różnice w liczbie urodzin (tzw. wyże i niże demograficzne).

31 W tabeli zestawiono liczby obiadów wydanych w stołówce szkolnej w ciągu jednego tygodnia.

Dzień tygodnia	poniedziałek	wtorek	środa	czwartek	piątek
Liczba wydanych obiadów	126	140	147	154	133

a) Sporządź diagram kołowy procentowy dla liczby obiadów wydanych w szkolnej stołówce w ciągu tygodnia.
b) Oblicz średnią liczb obiadów wydanych w ciągu jednego dnia.

32 Pani Janina w ciągu dnia haftuje maszynowo obrus, 3 bieżniki i 2 razy więcej serwetek niż bieżników.

a) Oblicz, ile obrusów, bieżników i serwetek wyhaftuje pani Janina w ciągu 5 dni pracy (zakładając, że pracuje z taką samą wydajnością).
b) Przedstaw na procentowym diagramie kołowym dane otrzymane w punkcie a).
c) Oblicz, ile średnio minut haftuje pani Janina jedną rzecz, jeśli obrus haftuje w ciągu 3 godzin, bieżnik w czasie o 25% krótszym niż obrus, a serwetkę 3 razy krócej niż bieżnik.

33 Uczniowie klas ósmych pewnej szkoły podstawowej przystąpili do konkursu ortograficznego. W tabeli zestawiono liczby błędów popełnionych przez uczniów w dyktandzie.

Liczba uczniów	4	26	35	14	8	3
Liczba błędów	1	2	3	4	5	6

a) Oblicz średnią błędów ortograficznych w tym konkursie popełnionych przez jednego ucznia.
b) Oblicz, jaki procent uczniów popełnił mniej błędów od średniej arytmetycznej błędów popełnionych w tym konkursie.

34 Oceny z matematyki po I semestrze w klasach ósmych przedstawiono na diagramie.

a) W której klasie było najwięcej ocen co najmniej dobrych?
b) Wyznacz średnią arytmetyczną ocen z matematyki, jaką otrzymali uczniowie każdej z klas, i średnią arytmetyczną ocen z matematyki wszystkich ósmoklasistów. Której klasy średnia ocen z matematyki była najbardziej zbliżona do średniej ocen z matematyki wszystkich ósmoklasistów?



35 W sześcioosobowej drużynie siatkarzy średnia arytmetyczna wieku jest równa $15\frac{1}{3}$ lat. Gdyby doliczyć jeszcze do grupy wiek trenera, to średnia wieku wynosiłaby 19 lat. Oblicz wiek trenera tej drużyny.

36 Na loterię fantową przygotowano 100 losów przegrywających, 40 losów wygrywających jabłko, 8 losów wygrywających komplet mazaków, jeden los wygrywający robot kuchenny i jeden los wygrywający opiekacz do kanapek. Adam jako pierwszy wziął udział w tej loterii i wylosował jeden los. Drugi los na tej loterii wylosowała Justyna. Przedstaw za pomocą drzewka wszystkie możliwe wyniki losowania przez Adama i Justynę.

37 W pudełku znajduje się pięć klocków: jeden w kształcie sześcianu, jeden – czworościanu, jeden – graniastosłupa o podstawie sześciokąta foremnego, jeden – walca i jeden – stożka. Przedstaw za pomocą drzewka wszystkie możliwe wyniki doświadczenia losowego polegającego na dwukrotnym losowaniu klocka z pudełka jeśli po pierwszym losowaniu:

a) wrzucamy klocek do pudełka,
b) odkładamy na bok wylosowany klocek.

38 Wyszukaj na stronach internetowych dwie pieśni Jana Kochanowskiego.

a) Policz liczbę wystąpień każdej litery alfabetu polskiego w każdej pieśni. Możesz to zrobić, zapisując tekst pieśni na przykład w programie Word, a następnie zamieniając każdą literę na przykład na gwiazdkę (użyj: Zamień, a następnie Zamień wszystko); podana przez komputer liczba dokonanych zmian jest równa liczbie wystąpień zamienianej litery w całym tekście.
b) Oblicz częstość występowania każdej litery alfabetu polskiego w każdej pieśni i sporządź dwa diagramy słupkowe wyznaczonych częstości występowania liter.
c) Czy częstości występowania liter są takie same?

39 Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie dwunastościenną kostką do gry, na które ściankach zapisane są liczby od 1 do 12.

Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia:
a) parzystej liczby oczek,
b) liczby oczek nie większej niż 5,
c) liczby oczek podzielnej przez 3,
d) co najwyżej 11 oczek,
e) co najmniej jednego oczka.

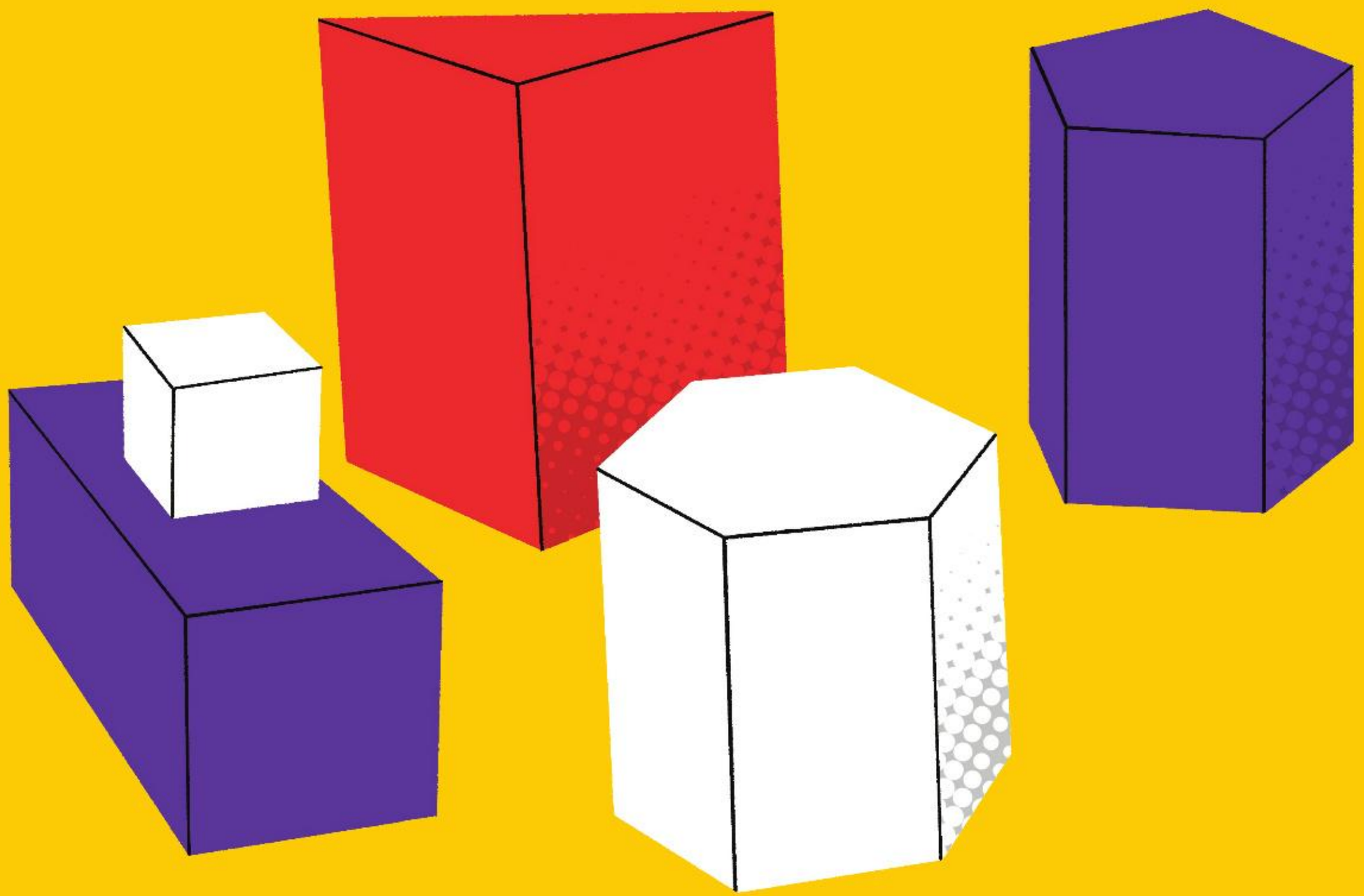
40 W pudełku są trzy kule żółte, dwie zielone i pięć niebieskich. Doświadczenie polega na jednokrotnym losowaniu kuli. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli:

a) żółtej,
b) zielonej,
c) niebieskiej?

41 W grupie liczącej 80 dzieci jest 17 chłopców w wieku od 7 do 13 lat, 28 chłopców w wieku 14–17 lat i 10 dziewczynek w wieku od 7 do 13 lat. Pozostałe osoby to dziewczynki w wieku 14–17 lat. Z tej grupy wybieramy losowo jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to:

a) chłopiec,
b) dziewczynka,
c) osoba w wieku 7–13 lat,
d) osoba w wieku 14–17 lat,
e) chłopiec w wieku 7–13 lat,
f) dziewczynka w wieku 14–17 lat?

3. Graniastosłupy



1. Powiedz, ile prostopadłościanów widzisz na rysunku. Jakimi wielokątami są ściany prostopadłościanu?
2. Na jaki kolor pomalowany jest sześcian? Jakie własności ma ta bryła? Jakich danych potrzebujemy, aby obliczyć pole powierzchni i objętość sześcianu?
3. Przyjrzyj się ilustracji. Następnie powiedz, ile ścian, ile krawędzi i ile wierzchołków ma bryła pomalowana na czerwono.
4. Ile krawędzi i wierzchołków ma bryła, która ma ścianę w kształcie sześciokąta?
5. Czy wiesz, jaką wspólną nazwę mają wszystkie bryły przedstawione na rysunku?

3.1 Graniastosłupy i ich własności

Podejmij temat






Każda bombonierka na ilustracji ma kształt bryły zwanej graniastosłupem. Jakie cechy wspólne mają graniastosłupy? Czym się różnią?

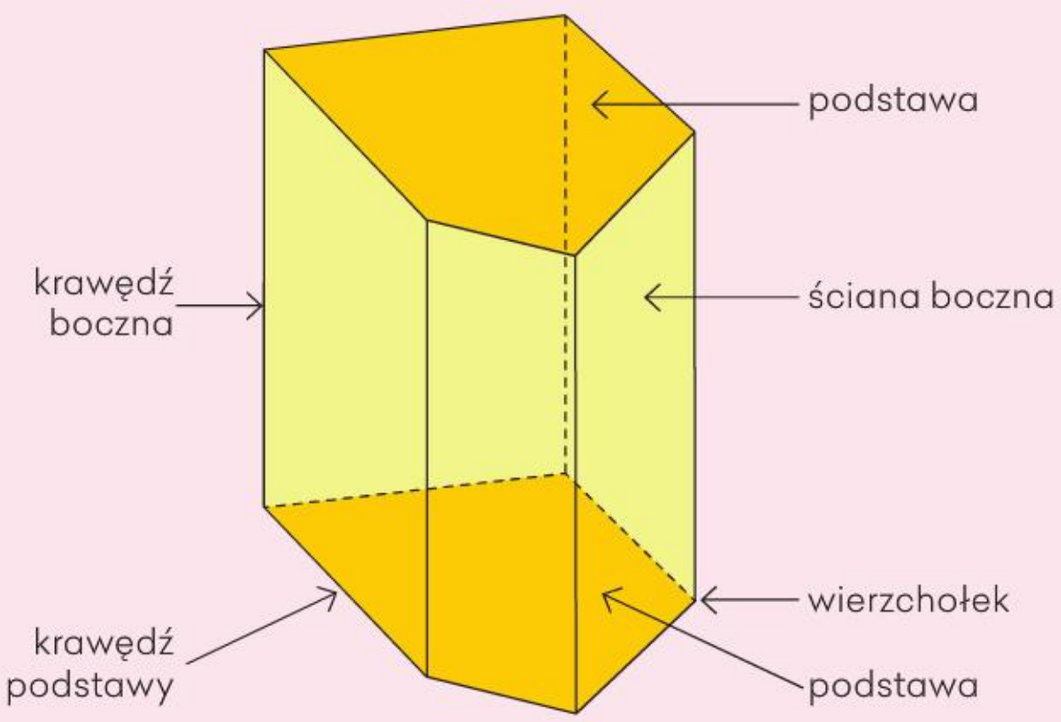
Graniastosłup to bryła,
której dwie ściany (podstawy) są przystające
i równoległe do siebie, a pozostałe ściany (ściany boczne)
są równoległobokami.

Graniastosłup ma **dwie podstawy**.

Krawędź podstawy
to każdy bok wielokąta, który jest podstawą.

Ściana boczna to każda ze ścian, która nie jest podstawą.

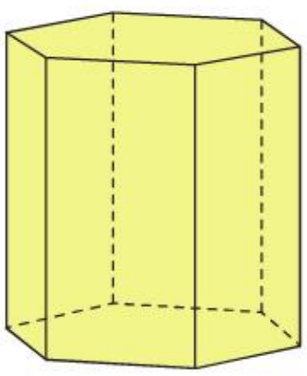
Krawędź boczna to każda krawędź,
która nie jest krawędzią podstawy.
Krawędzie boczne graniastosłupa
są równe i równoległe.



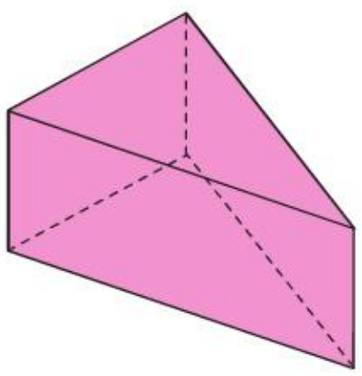
Graniastosłup przyjmuje nazwę od nazwy wielokąta będącego jego podstawą. Graniastosłupy mogą być trójkątne (podstawą jest trójkąt), czworokątne (podstawą jest czworokąt), pięciokątne (podstawą jest pięciokąt) itd.

Wśród graniastosłupów wyróżniamy:

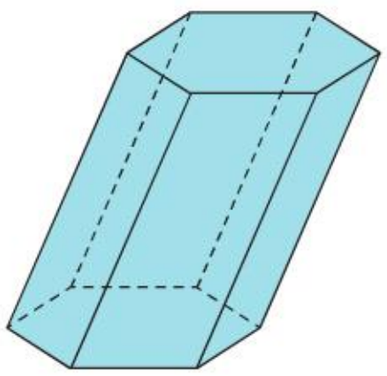
- **graniastosłup prosty** – czyli taki, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy; każda ściana boczna takiego graniastosłupa jest prostokątem,
- **graniastosłup pochyły** – czyli taki, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstawy.



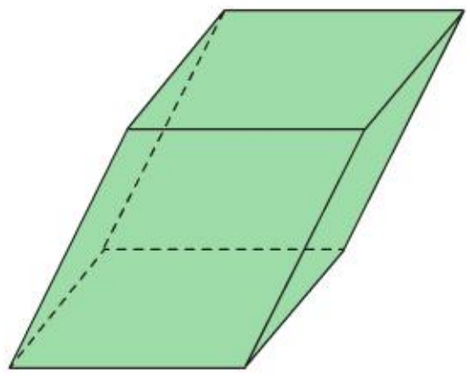
graniastosłup
prosty sześciokątny



graniastosłup
prosty trójkątny



graniastosłup
pochyły sześciokątny

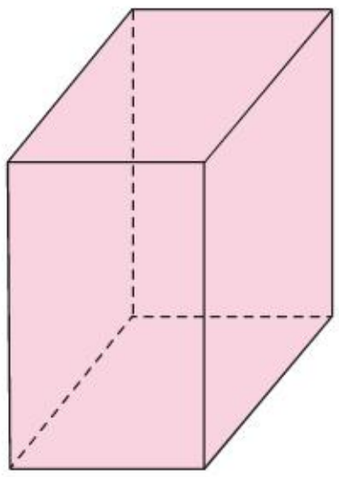


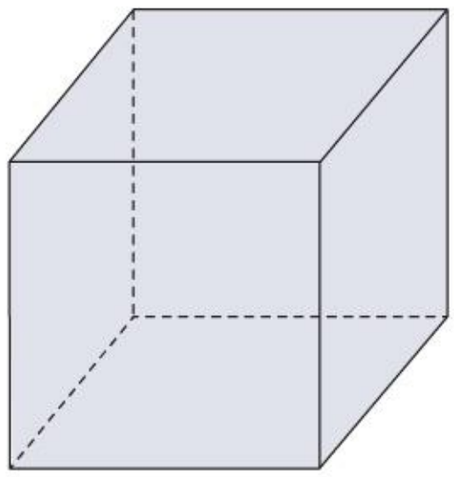
graniastosłup
pochyły czworokątny

W poprzednich latach poznaliśmy już prostopadłościan i sześcian.

Prostopadłościan to graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami. Każda ściana prostopadłościanu może być traktowana jako podstawa.

Prostopadłościan, którego wszystkie ściany są kwadratami, nazywamy **sześcianem**.



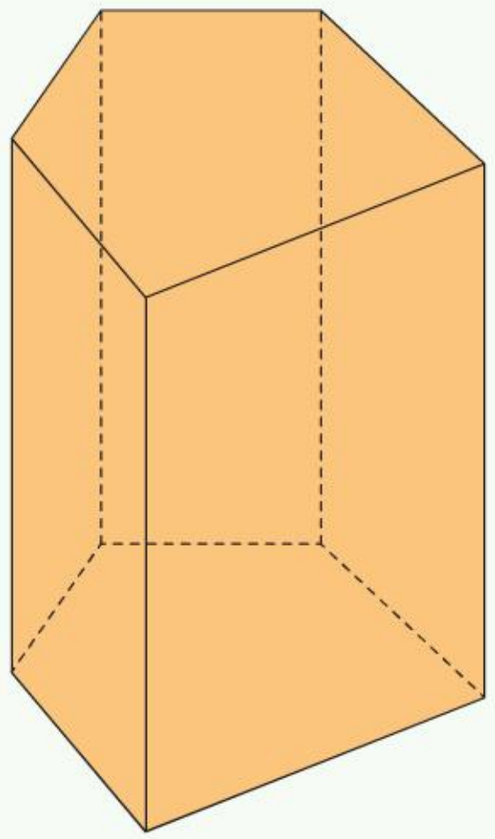


Przykład 1

Określmy, ile wierzchołków, krawędzi i ścian bocznych ma graniastosłup prosty o podstawie pięciokąta.

Graniastosłup ma dwie podstawy, które są pięciokątami, zatem

- graniastosłup ma 5 wierzchołków jednej podstawy i 5 wierzchołków drugiej podstawy, czyli łącznie ma 10 wierzchołków,
- graniastosłup ma 5 krawędzi jednej podstawy i 5 wierzchołków drugiej podstawy, czyli łącznie ma 10 krawędzi podstaw,
- każda krawędź boczna łączy dwa wierzchołki, zatem tych krawędzi jest tyle, ile wierzchołków jednej z podstaw; graniastosłup pięciokątny ma więc 5 krawędzi bocznych,
- graniastosłup pięciokątny ma 10 krawędzi podstaw i 5 krawędzi bocznych, ma więc łącznie 15 krawędzi,
- każde dwie równoległe krawędzie obu podstaw są bokami prostokąta będącego jedną ze ścian bocznych graniastosłupa; graniastosłup pięciokątny ma więc 5 ścian bocznych.



1. Podaj, ile wszystkich wierzchołków, krawędzi i ścian bocznych ma graniastosłup siedmiokątny.

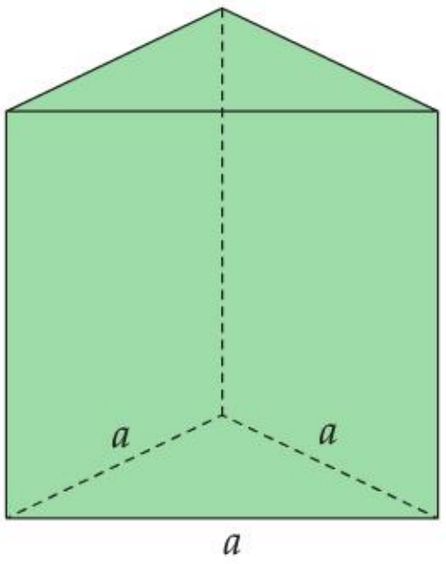
Graniastosłup n-kątny ma:

- 2 podstawy,
- $2n$ wierzchołków,
- n krawędzi bocznych,
- $n + 2$ wszystkich ścian.
- n ścian bocznych,
- $2n$ krawędzi podstaw,
- $3n$ wszystkich krawędzi,

Wśród graniastosłupów wyróżniamy **graniastosłupy prawidłowe**.

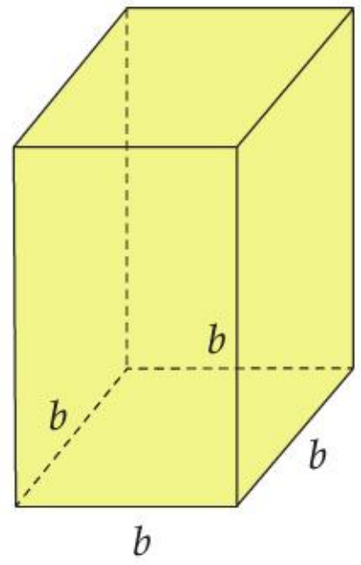
Graniastosłup prawidłowy
to graniastosłup prosty, którego podstawa
jest wielokątem foremnym.

Graniastosłup
prawidłowy trójkątny



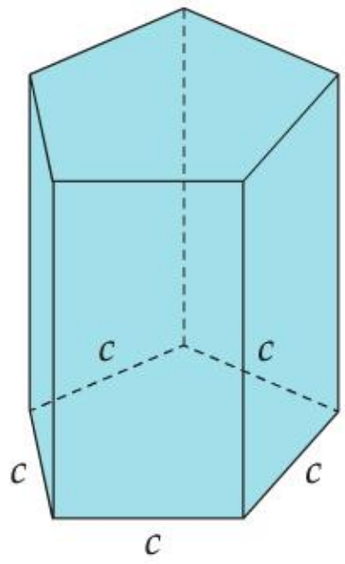
Podstawą graniastosłupa
jest trójkąt równoboczny

Graniastosłup
prawidłowy czworokątny



Podstawą graniastosłupa
jest kwadrat

Graniastosłup
prawidłowy pięciokątny

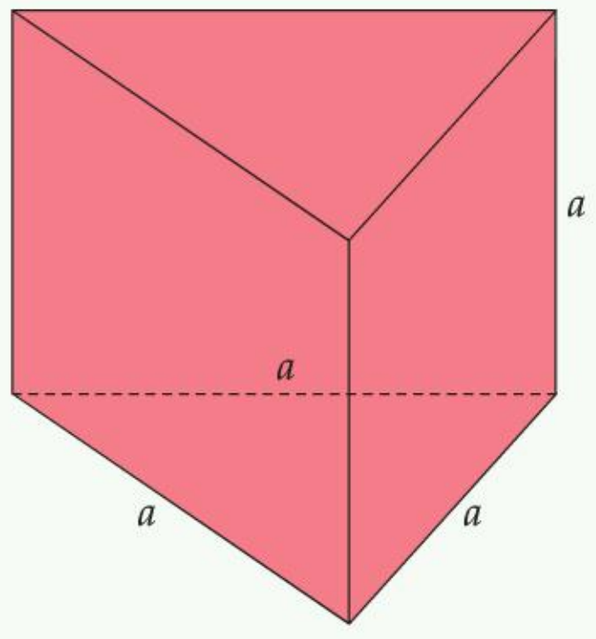


Podstawą graniastosłupa
jest pięciokąt foremny

Przykład 2

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wszystkie krawędzie są równe. Pole podstawy wynosi $\sqrt{3}$. Obliczmy sumę długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa.

Sporządźmy rysunek pomocniczy. Oznaczmy:
a – długość krawędzi graniastosłupa $(a > 0)$



W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym podstawą jest trójkąt równoboczny. Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego i wyznaczamy długość a krawędzi podstawy.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \sqrt{3} \mid : \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a^2 = \sqrt{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$a^2 = 4$$

$a = 2$, bo $a > 0$

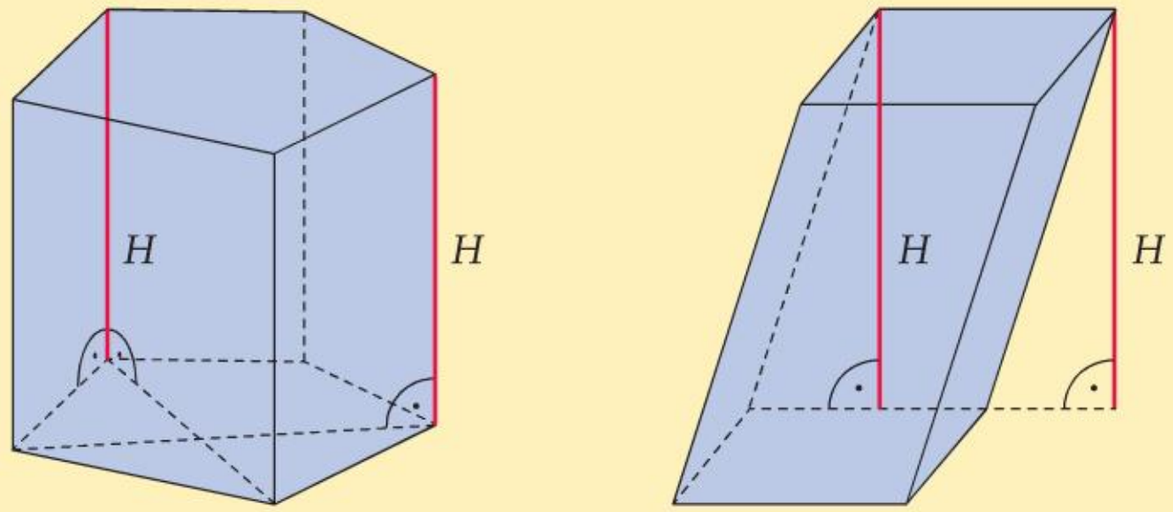
Graniastosłup trójkątny ma 9 krawędzi. Jak wynika z obliczeń, każda z krawędzi ma długość 2. Obliczamy sumę długości wszystkich krawędzi.

$9 \cdot 2 = 18$

Suma długości wszystkich krawędzi jest równa 18.

2. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa 168 cm. Oblicz pole podstawy i pole ściany bocznej tego graniastosłupa.

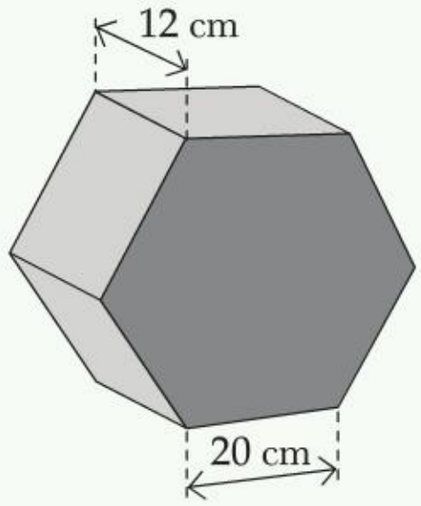
Wysokość H graniastosłupa to odcinek prostopadły do płaszczyzn zawierających podstawy tego graniastosłupa.



Niezależnie od rodzaju graniastosłupa jego wysokość jest zawsze prostopadła do podstawy. Wysokość jest równa odległości między podstawami. Wysokość graniastosłupa prostego jest równa długości krawędzi bocznej.

Przykład 3

Trylinka to płyta betonowa w kształcie graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, najczęściej używana do budowy nawierzchni parkingów lub dróg tymczasowych. Firma pana Romana przewozi trylinki na paletach, po 54 sztuki na każdej palecie. Masa palety jest równa 25 kg, a łączna masa palety razem z płytami wynosi 1537 kg.



Obliczmy:

a) ile wynosi masa jednej trylinki,
b) jaką wysokość miałby stos ułożony z tych płyt w taki sposób, że dwie, kolejno położone płyty, przylegałyby do siebie podstawami.

a) Obliczamy masę jednej trylinki.

$1537 - 25 = 1512$ – od łącznej masy palety z trylinkami odejmujemy masę palety

$1512 : 54 = 28$ – dzielimy otrzymaną masę przez liczbę płyt betonowych

Masa jednej trylinki wynosi 28 kg.

b) Z rysunku odczytujemy grubość trylinki: 12 cm

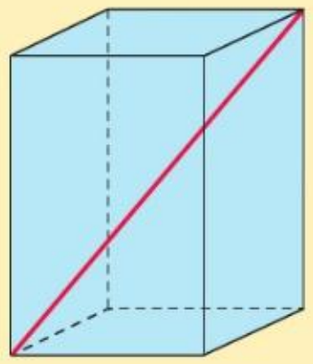
$12 \cdot 54 = 648$

Stos miałby wysokość 648 cm.

3. Podstawą graniastosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 8 m i 10 cm. Wysokość graniastosłupa jest o 2 cm większa od obwodu podstawy. Wyznacz sumę długości krawędzi tego graniastosłupa.

W graniastosłupie przekątne mogą mieć różną długość.
Graniastosłup czworokątny ma cztery przekątne.
Graniastosłup trójkątny nie ma przekątnych.

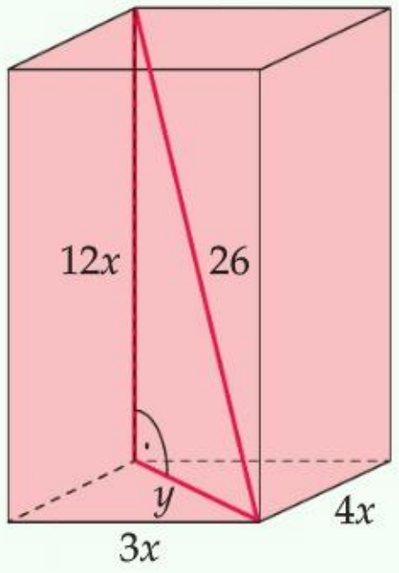
Przekątna graniastosłupa
to odcinek łączący wierzchołki obu podstaw, które nie należą do tej samej ściany graniastosłupa.



Przykład 4

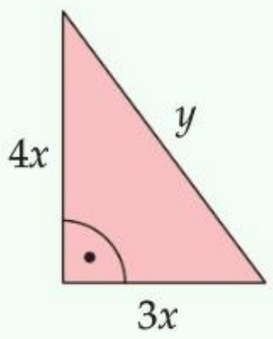
Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu, wychodzących z jednego wierzchołka, jest równy 3 : 4 : 12. Przekątna prostopadłościanu ma długość 26, a jego wysokość jest równa najdłuższej krawędzi. Obliczmy wysokość tego prostopadłościanu.

Sporządźmy rysunek pomocniczy. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu $a : b : c$ jest równy $3 : 4 : 12$. Długości krawędzi możemy więc zapisać jako: $3x$, $4x$, $12x$, gdzie x jest pewną liczbą dodatnią. Aby obliczyć wysokość prostopadłościanu, skorzystamy z trójkąta prostokątnego utworzonego przez przekątną podstawy, przekątną prostopadłościanu i wysokość prostopadłościanu.



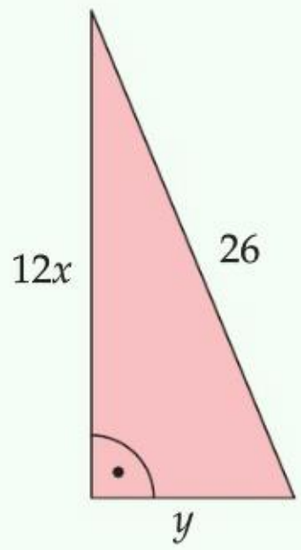
Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość y przekątnej podstawy prostopadłościanu.

$y^2 = (3x)^2 + (4x)^2$
$y^2 = 9x^2 + 16x^2$
$y^2 = 25x^2$
$y = 5x$



Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy x.

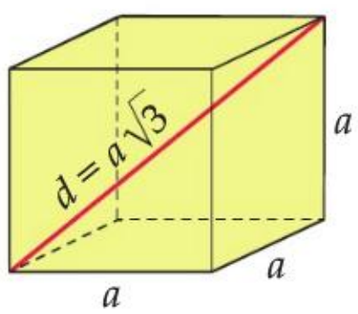
$(12x)^2 + y^2 = 26^2$
$(12x)^2 + (5x)^2 = 26^2$
$144x^2 + 25x^2 = 676$
$169x^2 = 676 \mid : 169$
$x^2 = 4$
$x = 2$



Obliczamy wysokość prostopadłościanu.
$12 \cdot 2 = 24$

Wysokość prostopadłościanu jest równa 24.

Przekątna d sześcianu, w którym każda krawędź jest równa a, ma długość $a\sqrt{3}$.



4. Przekątna sześcianu ma długość $8\sqrt{3}$. Oblicz długość przekątnej ściany bocznej tego sześcianu.

5. Podstawą graniastosłupa jest prostokąt, którego stosunek długości boków jest równy 8 : 15. Przekątna podstawy ma długość 34 cm. Stosunek wysokości tego graniastosłupa do krótszej krawędzi podstawy jest równy 2 : 1. Oblicz wysokość graniastosłupa.

Zadania

Które z opakowań **nie jest** w kształcie graniastosłupa?

A. 

B. 

C. 

D. 

Określ, w kształcie jakiego graniastosłupa jest każda ze szkatułek.

a) 

b) 

c) 

d) 

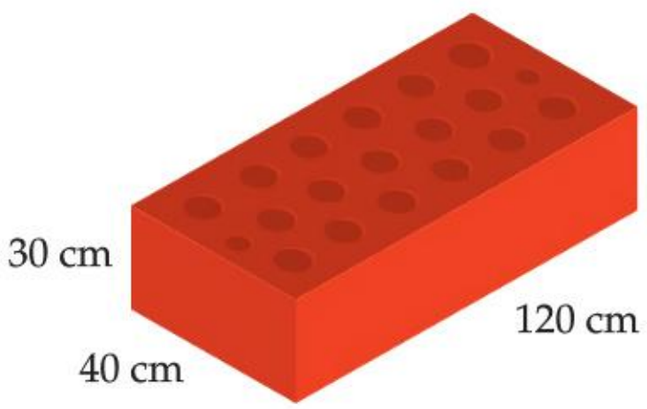
Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 12 większa od liczby jego ścian bocznych. Stąd wynika, że podstawą tego graniastosłupa jest

A. trójkąt. B. czworokąt. C. sześciokąt. D. ośmiokąt.

Graniastosłup ma 21 krawędzi. Ile wierzchołków ma ten graniastosłup?

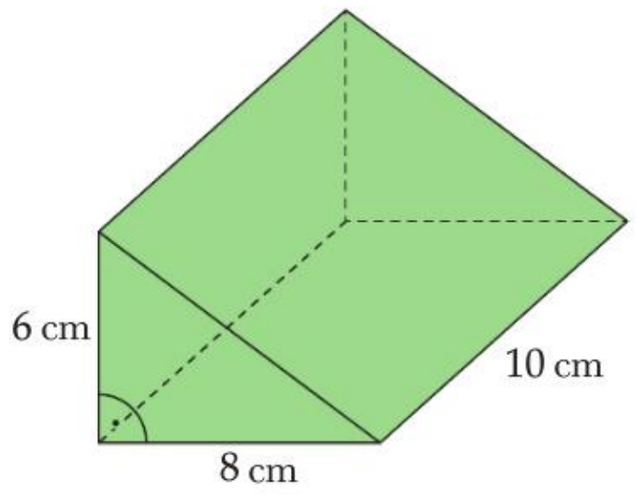
A. 3 B. 4 C. 8 D. 14

Oblicz przekątną prostopadłościennego klocka przedstawionego na rysunku obok. Czy przekątna tego klocka jest dłuższa niż 1,2 m?



Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 24 cm, a przekątna ściany bocznej ma długość 26 cm. Oblicz długość przekątnej podstawy tego graniastosłupa.

Oblicz, ile co najmniej centymetrów drutu użyto do wykonania modelu szkieletowego graniastosłupa, takiego jak na rysunku obok.



Długość krawędzi sześcianu jest równa 2 cm.

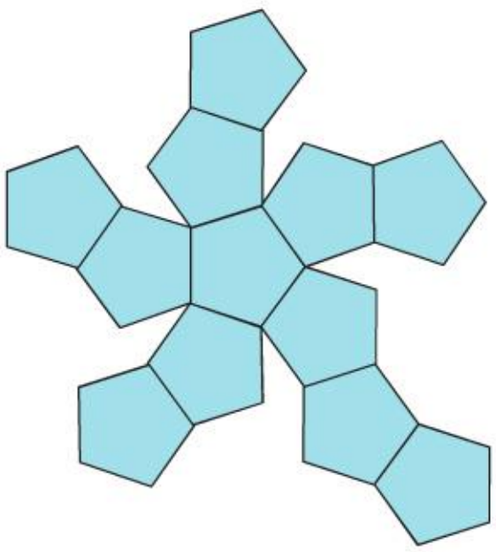
a) Oblicz długość przekątnej ściany.
b) Oblicz długość przekątnej bryły.

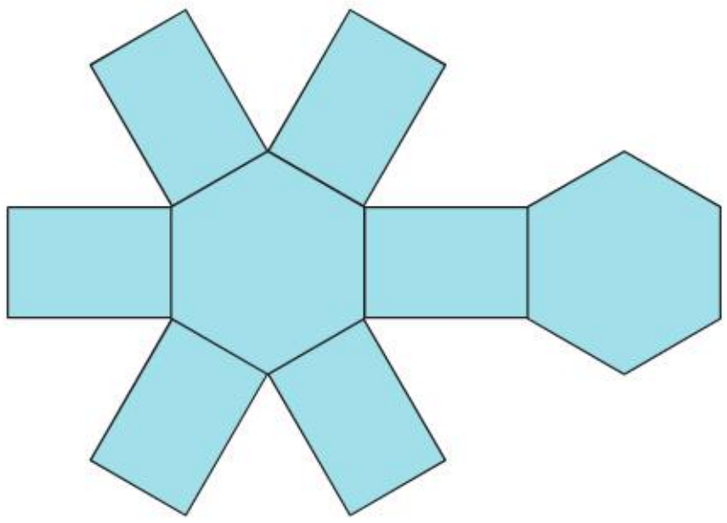
Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 4 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa dłuższej przekątnej podstawy. Oblicz sumę długości krawędzi graniastosłupa.

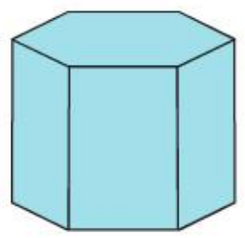
W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym wszystkie krawędzie są równe. Suma długości tych krawędzi jest równa 72 cm. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego graniastosłupa.

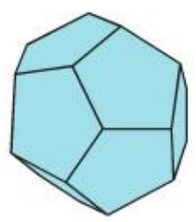
3.2 Pole powierzchni graniastosłupa

Podejmij temat





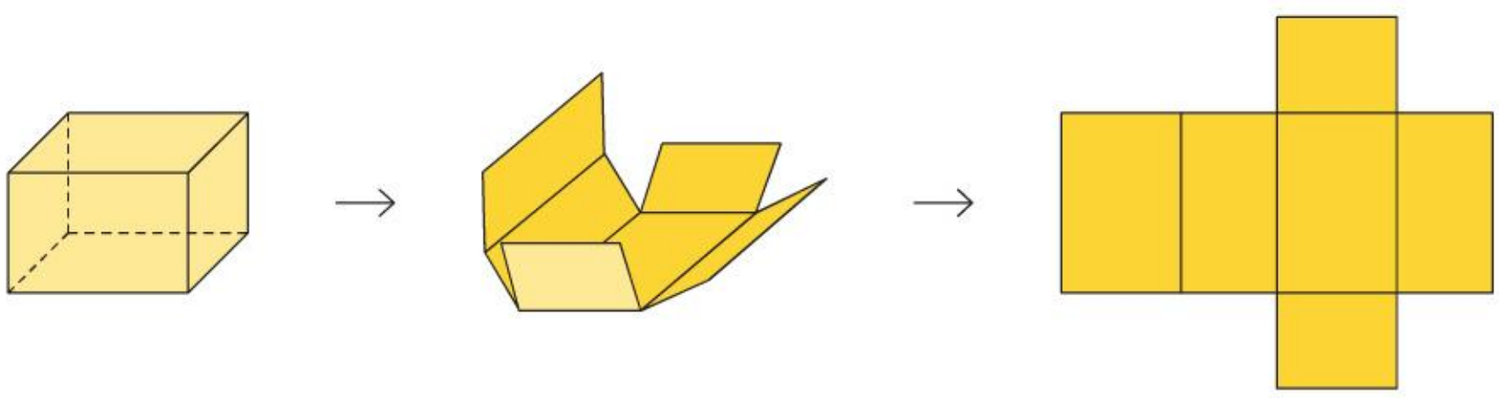




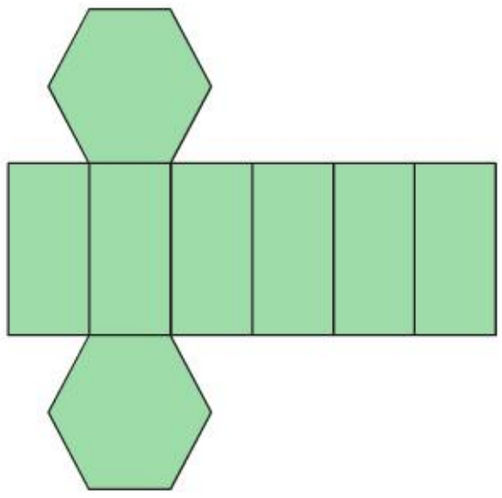
Po wycięciu z papieru i sklejeniu dwóch figur, takich jak narysowane po stronie lewej, otrzymano bryły takie jak na rysunkach po stronie prawej. Dopasuj każdą z brył do figury, z której ona powstała.
Na którym rysunku jest graniastosłup? Po czym można rozpoznać figurę, z której możemy zbudować graniastosłup?

Siatkę sześcianu można utworzyć aż na 11 sposobów. Narysuj te siatki w zeszycie.

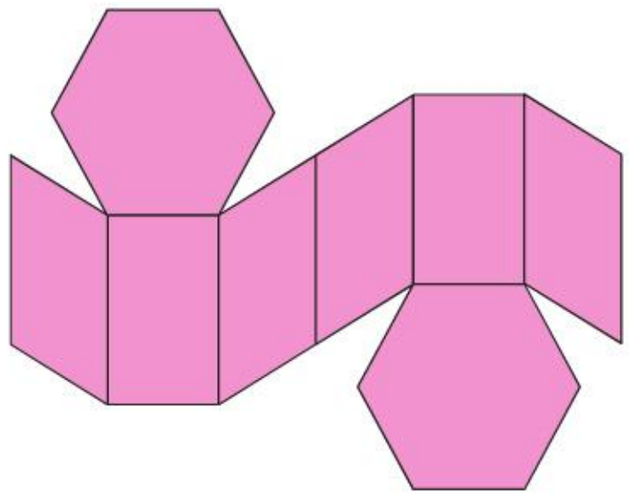
Rozcinając niektóre krawędzie modelu graniastosłupa, tak aby dało się rozłożyć ściany na płaszczyźnie, otrzymujemy figurę zwaną **siatką graniastosłupa**. Siatkę graniastosłupa można otrzymać na wiele sposobów.



Narysowaną na kartonie siatkę można wyciąć i, sklejając odpowiednie krawędzie, utworzyć z nich model graniastosłupa. Siatka graniastosłupa składa się z dwóch przystających wielokątów, odpowiadających podstawom danego graniastosłupa, i prostokątów (w przypadku graniastosłupów prostych) lub równoległoboków (w przypadku graniastosłupów pochyłych), odpowiadających ścianom bocznym.

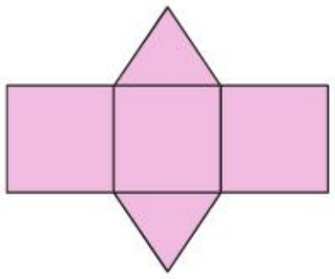


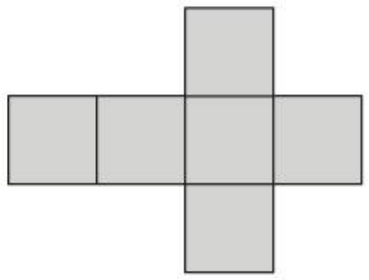
Siatka graniastosłupa prostego sześciokątnego

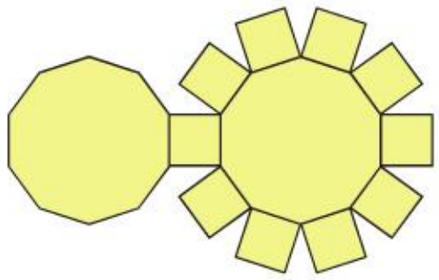


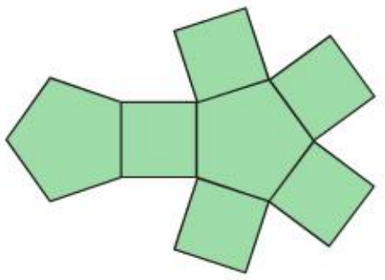
Siatka graniastosłupa pochyłego sześciokątnego

1. Na rysunku przedstawiono siatki graniastosłupów. Określ w każdym przypadku rodzaj graniastosłupa.

a) 

b) 

c) 

d) 

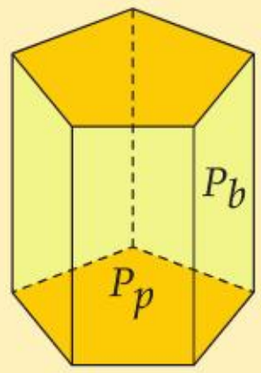
Mając siatkę graniastosłupa, łatwo obliczyć pole powierzchni tego graniastosłupa.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa
jest sumą pola powierzchni podstaw i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

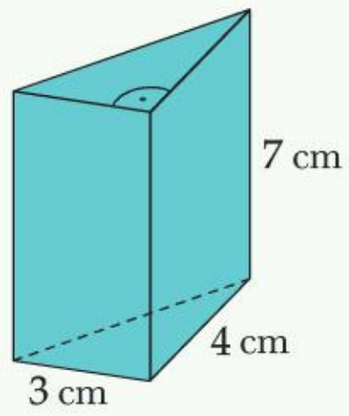
P_c – pole powierzchni całkowitej,

P_p – pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej



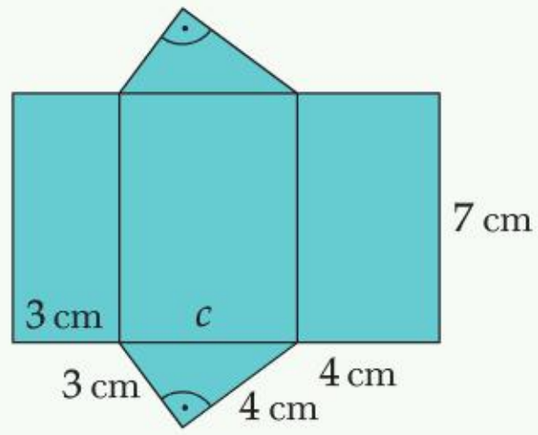
Przykład 1

Obliczmy pole powierzchni graniastosłupa prostego o wymiarach podanych na rysunku.



Narysujmy siatkę tego graniastosłupa. Podstawą graniastosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 cm i 3 cm. Pole podstawy jest więc równe:

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$



Obliczamy długość c trzeciej krawędzi podstawy korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$c^2 = 3^2 + 4^2$

$c^2 = 25$

$c = 5$

Powierzchnia boczna graniastosłupa składa się z trzech prostokątów o wymiarach odpowiednio: 3 cm × 7 cm, 4 cm × 7 cm i 5 cm × 7 cm. Zatem pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa to:

$P_b = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 7$

$P_b = 84$

Pole powierzchni całkowitej jest sumą pól podstaw i pola powierzchni bocznej.

$P_c = 2 \cdot P_p + P_b = 2 \cdot 6 + 84$

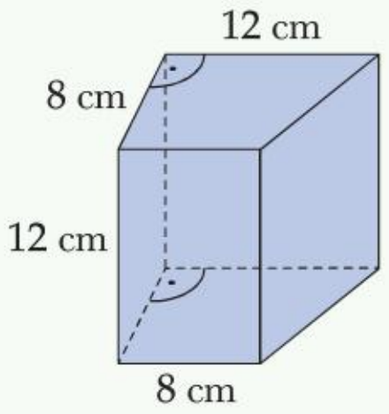
$P_c = 96$

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe 96 cm^2.

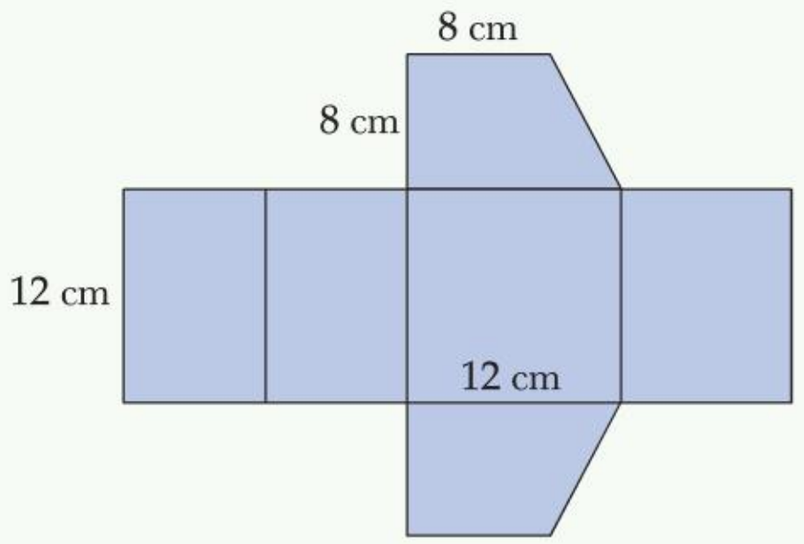
2. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 10 cm jest trójkąt prostokątny o kącie ostrym 45° i przeciwprostokątnej równej $6\sqrt{2}$ cm. Oblicz pole powierzchni tego graniastosłupa.

Przykład 2

Obliczmy, ile centymetrów kwadratowych papieru potrzeba na wykonanie modelu graniastosłupa o podstawie trapezu prostokątnego o wymiarach podanych na rysunku. Wynik zapiszmy z dokładnością do 1 cm^2.



Aby obliczyć, ile papieru potrzeba na wykonanie modelu graniastosłupa, należy obliczyć pole powierzchni całkowitej bryły, czyli sumę pól dwóch podstaw i czterech ścian bocznych. Narysujmy siatkę tego graniastosłupa.

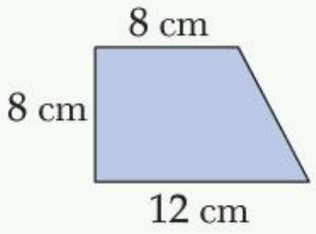


Obliczymy pole podstawy graniastosłupa.

Podstawą jest trapez prostokątny o wysokości 8 cm i podstawach długości 8 cm i 12 cm.

$P_p = \frac{8+12}{2} \cdot 8 = 80$

$P_p = 80$

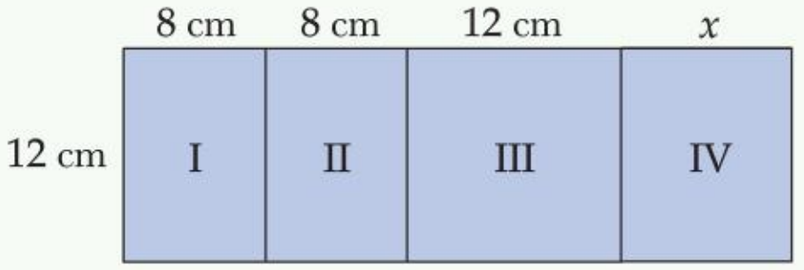


Pole powierzchni bocznej to suma pól czterech ścian bocznych graniastosłupa (czyli pól czterech prostokątów).

Obliczamy pole pierwszej ściany bocznej.

$P_I = 8 \cdot 12$

$P_I = 96$



Obliczamy pole drugiej ściany bocznej.

$P_{II} = 8 \cdot 12$

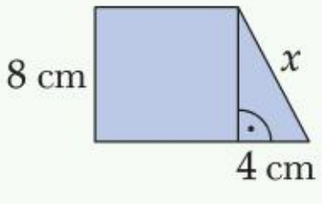
$P_{II} = 96$

Obliczamy pole trzeciej ściany bocznej.

$P_{III} = 12 \cdot 12$

$P_{III} = 144$

Zauważmy, że długość x boku prostokąta, będącego czwartą ścianą boczną, jest równa długości dłuższego ramienia trapezu będącego podstawą tego graniastosłupa. Wyznaczamy długość tego ramienia, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.



$x^2 = 8^2 + 4^2$
$x^2 = 64 + 16$
$x^2 = 80$
$x = \sqrt{80}$, bo $x > 0$
$x = 4\sqrt{5}$

Obliczamy pole czwartej ściany.
$P_{IV} = 12 \cdot 4\sqrt{5}$
$P_{IV} = 48\sqrt{5}$

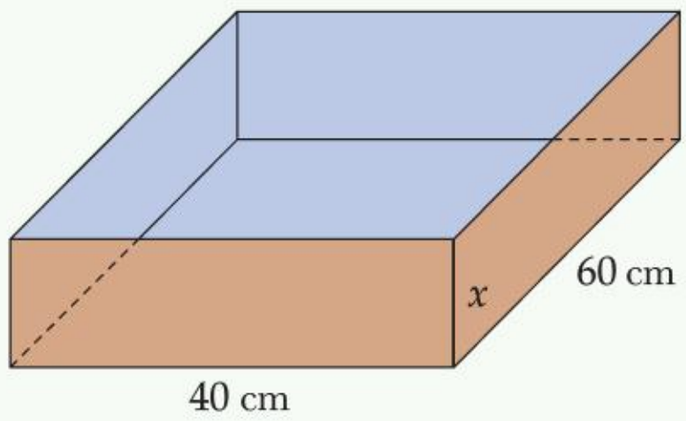
Możemy już obliczyć pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.
$P_c = 2 \cdot P_p + P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV}$
$P_c = 2 \cdot 80 + 96 + 96 + 144 + 48\sqrt{5}$
$P_c = (496 + 48\sqrt{5})$
$P_c \approx 603$

Na wykonanie modelu graniastosłupa potrzeba około 603 cm^2 papieru.

3. Podłoga w pokoju Ani ma kształt kwadratu o boku 4 m. Wysokość pokoju jest równa 2,5 m. Oblicz, ile rolek tapety należy kupić do wytapetowania tego pokoju, jeżeli jedna rolka tapety wystarcza na wytapetowanie 5 m^2 powierzchni. Na drzwi i okno odlicz 3,5 m^2.

Przykład 3

Pan Eryk wykonał prostopadłościenną skrzynkę na kwiaty. Pole zewnętrznej powierzchni tej skrzynki jest równe 74 dm^2. Korzystając z danych na rysunku, obliczmy, jaką wysokość ma ta skrzynka.



Oznaczmy: x – wysokość skrzynki (w cm)
Skrzynka ma kształt prostopadłościanu (bez podstawy górnej). Pole zewnętrznej powierzchni tej skrzynki jest równe 74 dm^2, czyli 7400 cm^2. Zauważmy, że pole zewnętrznej powierzchni skrzynki składa się z pola powierzchni dwóch ścian bocznych, o wymiarach x i 40 cm, dwóch ścian bocznych, o wymiarach x i 60 cm, oraz pola podstawy o wymiarach 40 cm i 60 cm.

Zapisujemy odpowiednie równanie, z którego wyznaczymy x – wysokość skrzynki.
$2 \cdot 40 \cdot x + 2 \cdot 60 \cdot x + 60 \cdot 40 = 7400$
$80x + 120x + 2400 = 7400$
$200x = 5000 \mid : 200$
$x = 25$

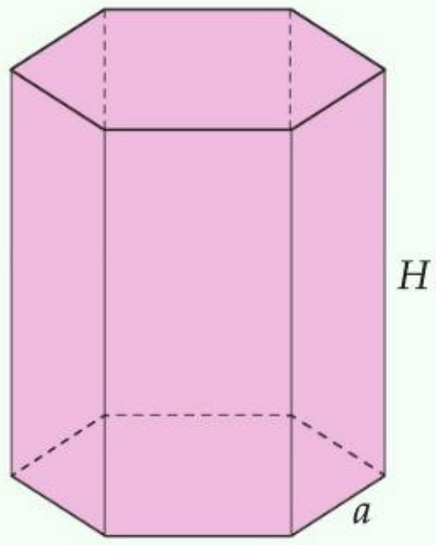
Wysokość skrzynki jest równa 25 cm.

4. Maja wykonała pudełko w kształcie graniastosłupa prostego o wysokości 8 cm. Podstawą tego graniastosłupa jest romb o przekątnych 10 cm i 24 cm. Oblicz pole powierzchni pudełka bez przykrywki.

Przykład 4

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym iloraz pola powierzchni bocznej i pola powierzchni podstaw jest równy $10\sqrt{3}$. Obliczmy, ile razy dłuższa jest wysokość graniastosłupa od krawędzi podstawy.

Sporządźmy rysunek pomocniczy i oznaczmy:
H – wysokość graniastosłupa
a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa



Podstawą graniastosłupa jest sześciokąt foremny. Obliczmy pola powierzchni obu podstaw.

P_p – pole podstawy graniastosłupa

$$2P_p = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = 3\sqrt{3} \cdot a^2$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej – czyli sumę pól sześciu przystających prostokątów o bokach H i a.

$$P_b = 6 \cdot a \cdot H$$

Z treści zadania mamy:

$$\frac{P_b}{2P_p} = \frac{6 \cdot a \cdot H}{3\sqrt{3} \cdot a^2}$$

$$10\sqrt{3} = \frac{2 \cdot H}{\sqrt{3} \cdot a} \mid \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

$$30a = 2H \mid : 2$$

$$H = \frac{30}{2}a$$

$$H = 15a,\ H > 0,\ a > 0$$

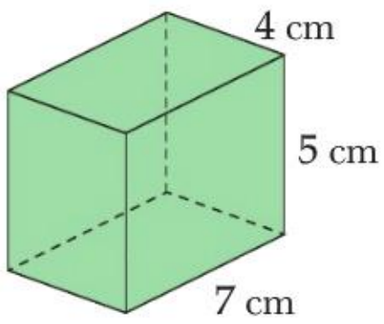
Wysokość graniastosłupa jest 15 razy dłuższa od krawędzi podstawy.

5. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego każda krawędź ma długość 2 cm.

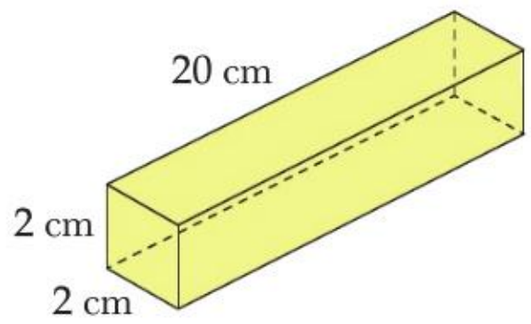
Zadania

Który z prostopadłościanów ma największe pole powierzchni całkowitej?

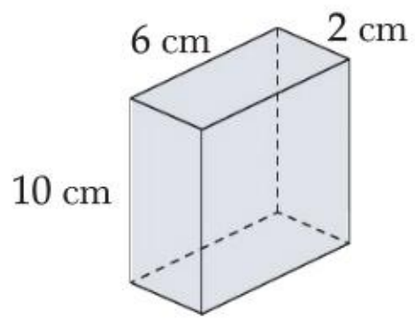
A.



B.



C.



Część siatki graniastosłupa prawidłowego czworokątnego odpowiadająca ścianom bocznym jest kwadratem o polu 900 cm². Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

Przekątna prostopadłościanu jest równa 26 cm. Pole podstawy, która jest kwadratem, wynosi 50 cm². Oblicz pole powierzchni bocznej tej bryły.

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 96 dm². Oblicz długość

a) przekątnej ściany bocznej, b) przekątnej sześcianu.

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego o wysokości 10 cm, którego podstawą jest wielokąt przedstawiony na rysunku. Krawędź podstawy graniastosłupa jest równa 4 cm.

a) b) c)

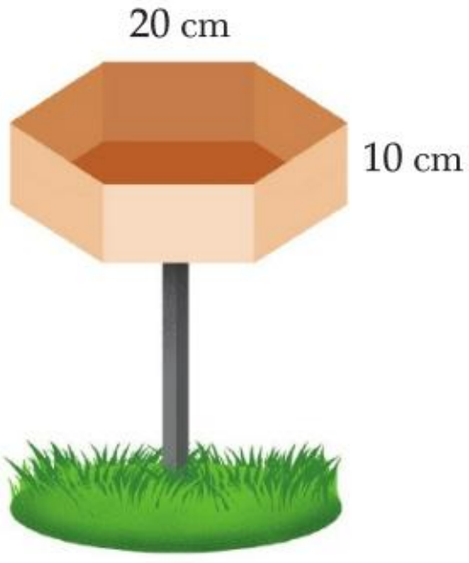


Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 30 cm i 16 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa 15 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

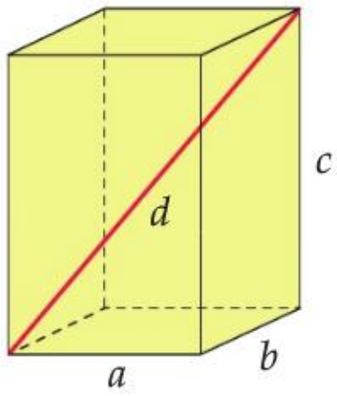
Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 12 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, wiedząc, że

a) przekątna ściany bocznej ma długość 13 cm,
b) wysokość trójkąta, będącego podstawą graniastosłupa jest równa $3\sqrt{3}$ cm,
c) pole ściany bocznej jest równe 48 cm²,
d) pole podstawy jest równe $\sqrt{3}$ cm².

Pani Grażyna dwukrotnie impregnuje zewnętrzne strony jednakowych poideł dla ptaków. Poidło ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego (bez podstawy górnej). Pojemnik impregnatu wystarcza na pomalowanie 4 m² powierzchni. Ile poideł dla ptaków będzie mogła zaimpregnować pani Grażyna, zużywając jeden pojemnik impregnatu?



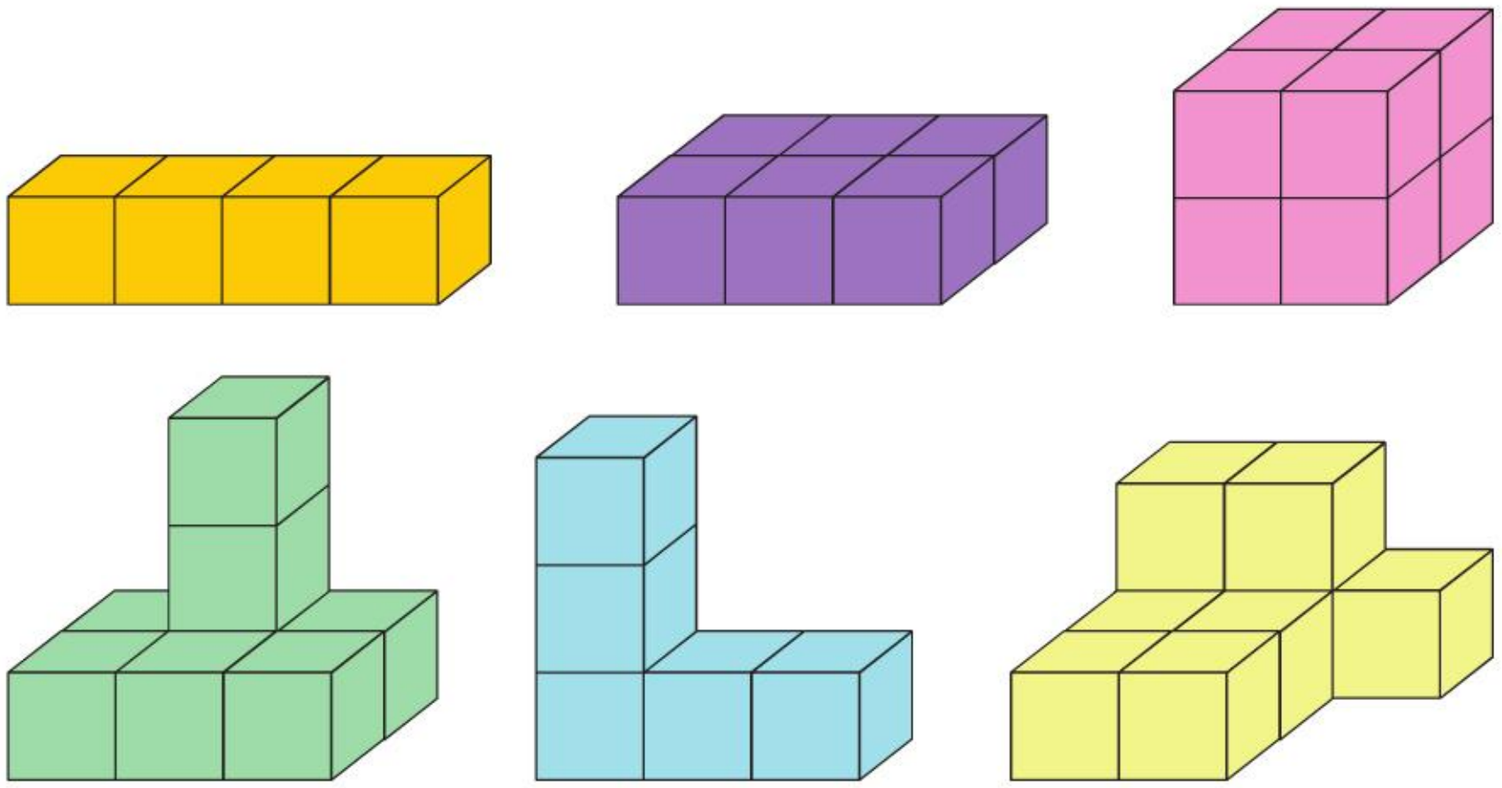
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 120 dm². Wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz wysokość tego graniastosłupa.



Długość przekątnej d prostopadłościanu o krawędziach a, b, c wyraża się wzorem: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

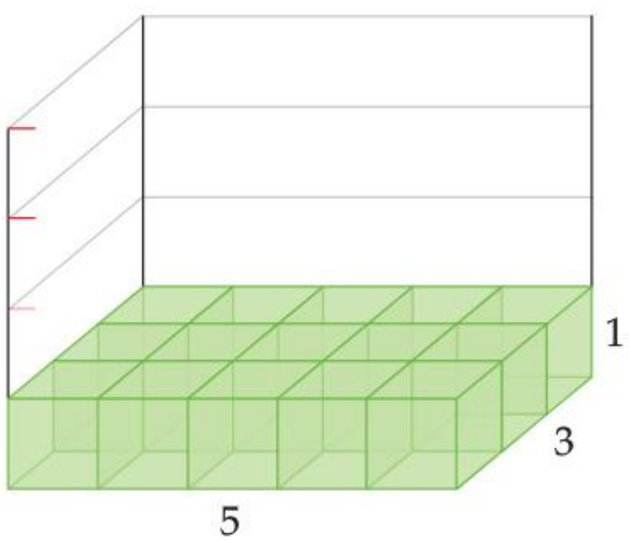
3.3 Objętość graniastosłupa

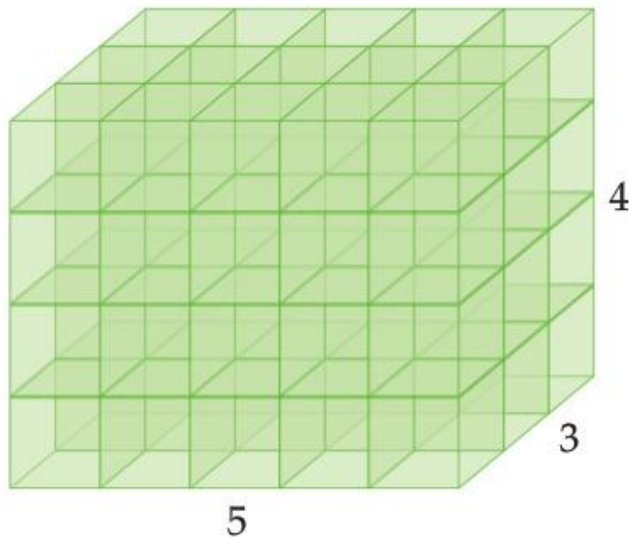
Podejmij temat



Z jednakowych sześciennych klocków wykonano budowle takie jak na rysunkach. Określ objętość każdej budowli, przyjmując za jednostkę jeden klocek sześcienny. Oblicz, jaką objętość wyrażoną w cm^3 ma każda budowla, jeśli objętość jednego klocka jest równa 8 cm^3.

Najczęściej za jednostkę objętości przyjmuje się sześcian, którego długość krawędzi odpowiada przyjętej jednostce długości.





Jeśli za jednostkę objętości przyjmiemy jeden sześcian, to objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku jest równa 60 takim sześcianom. Prostopadłościan jest „wypełniony” przez $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ sześcianów jednostkowych.

Przypomnijmy poznane już jednostki objętości.

Najczęściej stosowane jednostki objętości

1 mm^3 to objętość sześcianu o krawędzi 1 mm
1 cm^3 to objętość sześcianu o krawędzi 1 cm
1 dm^3 to objętość sześcianu o krawędzi 1 dm
1 m^3 to objętość sześcianu o krawędzi 1 m
1 km^3 to objętość sześcianu o krawędzi 1 km

Ciekawe!

Paradoks to twierdzenie logiczne prowadzące do zaskakujących lub sprzecznych wniosków. Jednym z bardziej znanych paradoksów jest paradoks rozkładu kuli, sformułowany w 1924 r. przez polskich matematyków Stefana Banacha i Alfreda Tarskiego. Twierdzenie głosi, że kulę można „rozciąć” na skończoną liczbę części (wystarczy ich sześć), a następnie, używając wyłącznie przesunięć i obrotów, można złożyć z tych części dwie kule o takich samych promieniach jak promień kuli wyjściowej. Prawda, że wydaje się to całkowicie sprzeczne z intuicyjnym pojęciem objętości?

Przykład 1

Zapiszmy:

a) $5\ dm^3$ w mm^3 b) $12\ m^3$ w cm^3 c) $456\ km^3$ w m^3

a) $1\ dm^3 = 100\ mm \cdot 100\ mm \cdot 100\ mm = 1\,000\,000\ mm^3$
$5\ dm^3 = 5 \cdot 1\,000\,000\ mm^3 = 5\,000\,000\ mm^3$

b) $1\ m^3 = 100\ cm \cdot 100\ cm \cdot 100\ cm = 1\,000\,000\ cm^3$
$12\ m^3 = 12 \cdot 1\,000\,000\ cm^3 = 12\,000\,000\ cm^3$

c) $1\ km^3 = 1000\ m \cdot 1000\ m \cdot 1000\ m = 1\,000\,000\,000\ m^3$
$456\ km^3 = 465 \cdot 1\,000\,000\,000\ m^3 = 456\,000\,000\,000\ m^3$

Niektóre zależności między jednostkami objętości

$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$
$1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = 1\,000\,000\ mm^3$
$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3$
$1\ km^3 = 1\,000\,000\,000\ m^3$

1. Zapisz:

a) $2\ dm^3$ w mm^3 b) $18\ m^3$ w cm^3 c) $114\ km^3$ w m^3

Przykład 2

Zapiszmy:

a) $6000\ mm^3$ w cm^3 b) $46\ cm^3$ w dm^3 c) $8\ m^3$ w km^3

a) $1\ mm^3 = 0{,}1\ cm \cdot 0{,}1\ cm \cdot 0{,}1\ cm = 0{,}001\ cm^3$
$6000\ mm^3 = 6000 \cdot 0{,}001\ cm^3 = 6\ cm^3$

b) $1\ cm^3 = 0{,}1\ dm \cdot 0{,}1\ dm \cdot 0{,}1\ dm = 0{,}001\ dm^3$
$46\ cm^3 = 46 \cdot 0{,}001\ dm^3 = 0{,}046\ dm^3$

c) $1\ m^3 = 0{,}001\ km \cdot 0{,}001\ km \cdot 0{,}001\ km = 0{,}000000001\ km^3$
$8\ m^3 = 8 \cdot 0{,}000000001\ km^3 = 0{,}000000008\ km^3$

$1\ mm^3 = 0{,}001\ cm^3$ $1\ cm^3 = 0{,}001\ dm^3$
$1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3$ $1\ m^3 = 0{,}000000001\ km^3$

2. Zapisz:

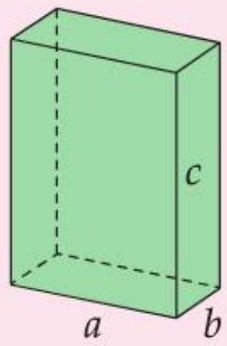
a) $9000\ mm^3$ w cm^3 b) $76\ cm^3$ w dm^3 c) $4\ m^3$ w km^3

Ciekawe!

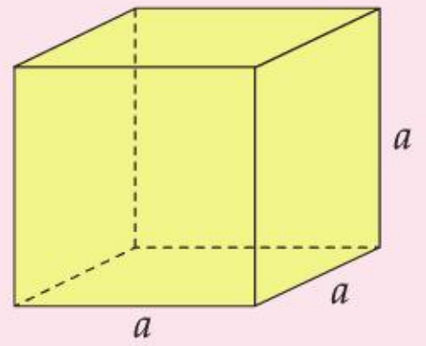
W leśnictwie do określenia objętości drewna (bez pustej przestrzeni między kłodami) stosuje się jednostkę zwaną kubikiem. Jeden metr sześcienny to w zależności od gatunku drewna – od 0,25 kubika do 0,75 kubika. Oznacza to, że jeden kubik zajmować może nawet cztery metry sześcienne.

Czy pamiętasz?
Obliczając objętości brył, należy pamiętać, aby długości krawędzi wyrażać w jednakowych jednostkach.

Przypomnijmy, jak obliczamy objętość prostopadłościanu i sześcianu.



Objętość prostopadłościanu
jest równa iloczynowi długości jego trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.
$V = a \cdot b \cdot c$

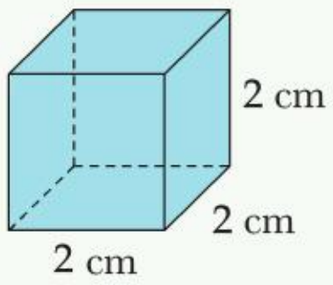


Objętość sześcianu
jest równa trzeciej potędze długości krawędzi tego sześcianu.
$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

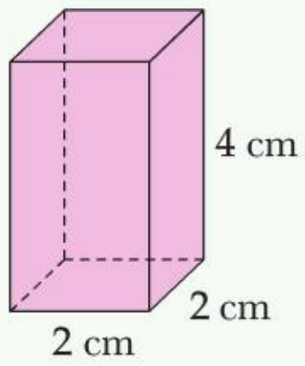
Przykład 3

Obliczmy objętość każdego prostopadłościanu.

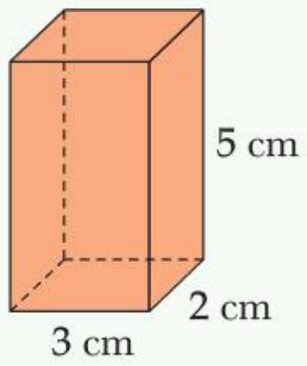
a)



b)



c)



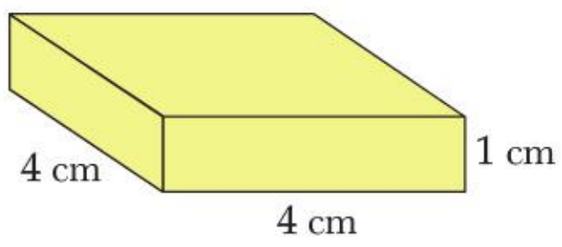
a) Narysowana bryła to sześcian o krawędzi długości 2 cm. Obliczmy jego objętość.
$V = 2^3 = 8$
Objętość sześcianu jest równa 8 cm^3.

b) Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku długości 2 cm. Wysokość prostopadłościanu jest równa 4 cm.
$V = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$
Objętość prostopadłościanu jest równa 16 cm^3.

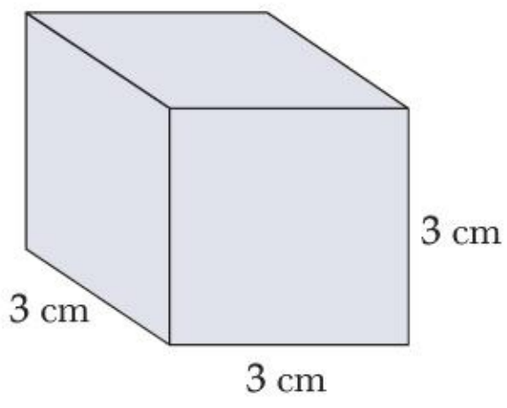
c) Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o wymiarach 3 cm × 2 cm. Wysokość bryły jest równa 5 cm.
$V = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$
Objętość prostopadłościanu jest równa 30 cm^3.

3. Oblicz objętość prostopadłościanu.

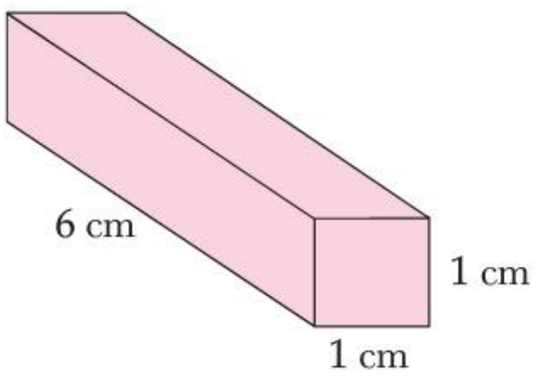
a)



b)



c)



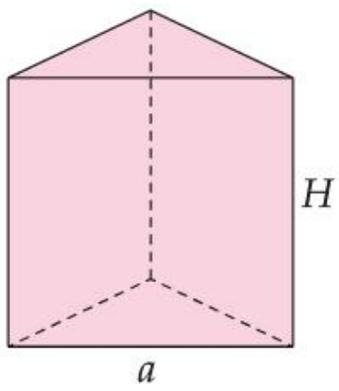
Objętość graniastosłupa

jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości tego graniastosłupa.

$$V = P_p \cdot H$$

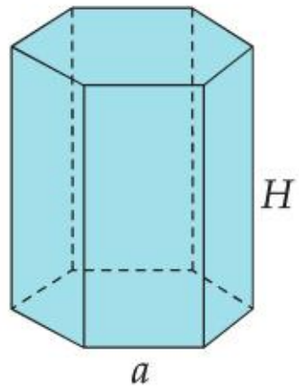
V – objętość, P_p – pole podstawy, H – wysokość

Objętość graniastosłupa prawidłowego obliczamy, pamiętając, że podstawa takiego graniastosłupa jest wielokątem foremnym.



Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości H i krawędzi podstawy a.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot H$$

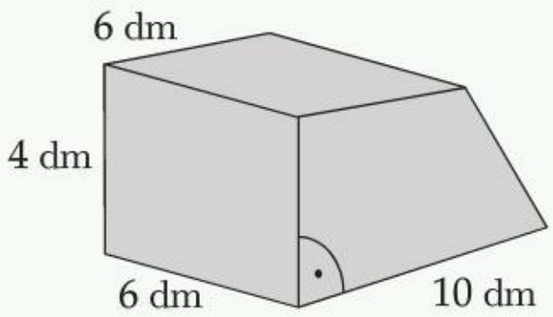


Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości H i krawędzi podstawy a.

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot H$$

Przykład 4

Obliczmy, jaką objętość ma betonowy element w kształcie graniastosłupa prostego o podstawie trapezu prostokątnego.



Podstawa betonowego elementu jest w kształcie trapezu prostokątnego. Pole podstawy jest równe:

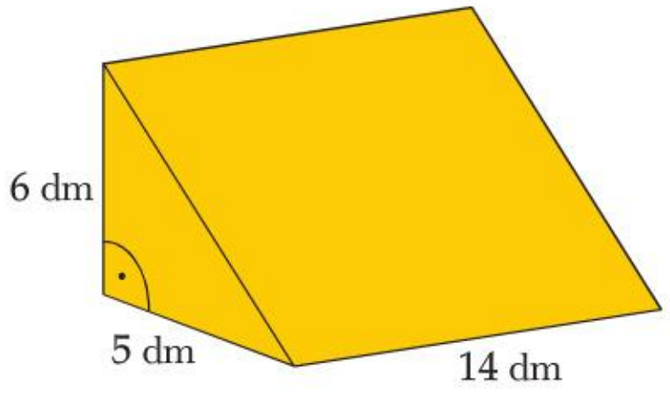
$P_p = \frac{6+10}{2} \cdot 4 = 32$

Wysokość betonowego elementu jest równa 6 dm. Obliczmy objętość tego elementu.

$V = 32 \cdot 6 = 192$

Objętość betonowego elementu jest równa 192 dm^3.

4. Oblicz objętość drewnianego elementu w kształcie graniastosłupa prostego. Skorzystaj z danych przedstawionych na rysunku.



Przykład 5

Objętość graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego jest równa 120 cm^3, a pole podstawy 20 cm^2. Obliczmy wysokość tego graniastosłupa.

Oznaczmy:
H – wysokość graniastosłupa (w cm), $H > 0$

Korzystamy ze wzoru na objętość graniastosłupa.
$V = 20 \cdot H$
$120 = 20 \cdot H$
$H = 6$

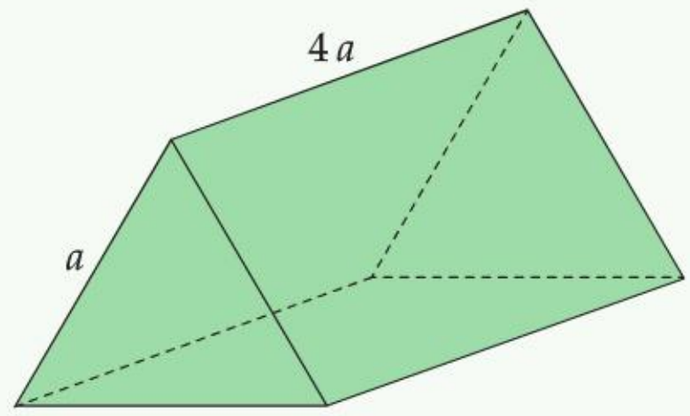
Wysokość graniastosłupa jest równa 6 cm.

5. Oblicz pole podstawy graniastosłupa prostego, którego wysokość jest równa 8 cm, a objętość 56 cm^3.

Przykład 6

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość jest czterokrotnie większa od długości krawędzi podstawy. Objętość graniastosłupa jest równa $216\sqrt{3}$ dm^3. Obliczmy długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Wykonajmy rysunek pomocniczy i oznaczmy:
a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa (w dm), $a > 0$
$4a$ – wysokość graniastosłupa (w dm)



Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, którego pole jest równe: $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$. Podstawiając dane do wzoru na objętość graniastosłupa, obliczmy długość krawędzi podstawy.

$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot 4a = 216\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{1} \cdot a^3 = 216\sqrt{3} \mid : \sqrt{3}$

$a^3 = 216$
$a = \sqrt[3]{216}$
$a = 6$

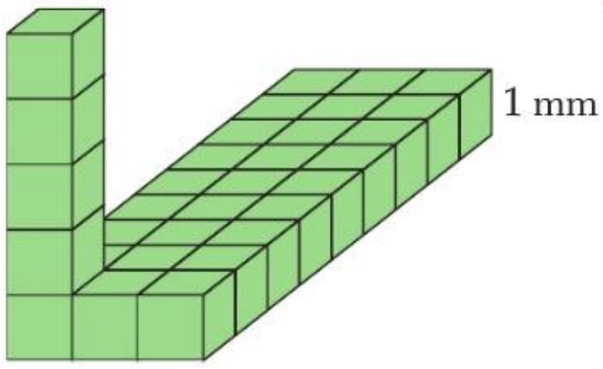
Długość krawędzi podstawy graniastosłupa jest równa 6 dm.

6. Oblicz długość krawędzi bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli jego objętość jest równa 375 cm^2, a krawędź boczna jest trzykrotnie większa od krawędzi podstawy.

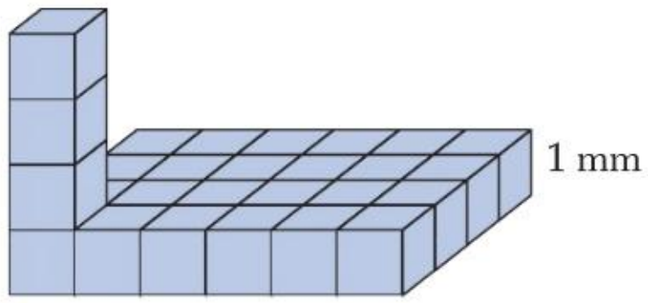
Zadania

Narysowana bryła jest zbudowana z jednakowych sześcianów. Oblicz jej objętość. Ile najmniej jednakowych sześcianów należy dołożyć do tej bryły, aby zbudować prostopadłościan? Zakładamy, że nie można zmieniać położenia klocków ułożonej bryły.

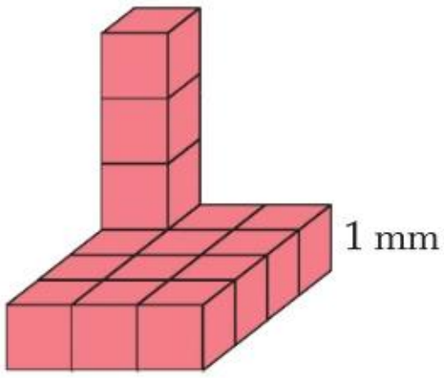
a)



b)



c)



Zapisz w decymetrach sześciennych.

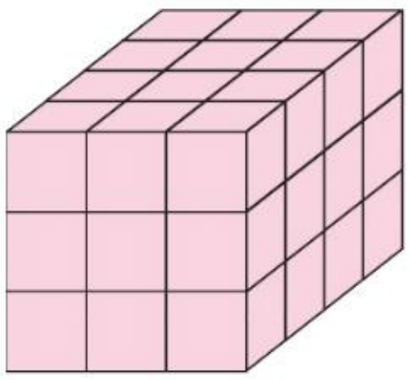
a) $4\ m^3$, $18\ m^3$, $400\ m^3$, $0{,}2\ m^3$ b) $7000\ cm^3$, $860\ cm^3$, $77\ cm^3$

Ile to centymetrów sześciennych?

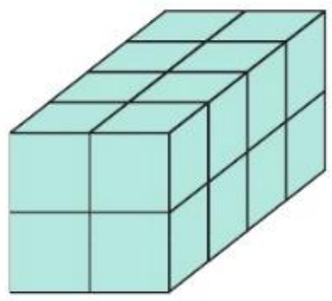
a) $5\ m^3$ b) $4000\ mm^3$ c) $6\ mm^3$ d) $8\ dm^3$

Każdy z prostopadłościanów na rysunku składa się z jednakowych sześcianów o krawędzi długości 3. Oblicz objętość każdej z brył.

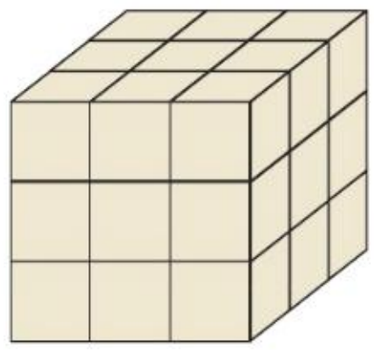
a)



b)

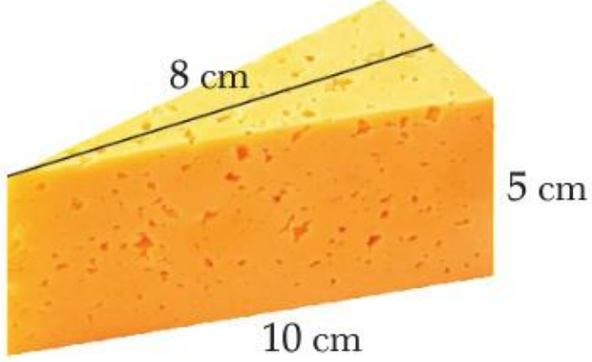


c)



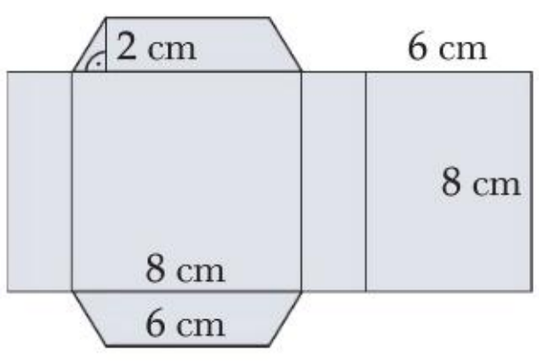
Podstawą graniastosłupa jest romb o boku $4\sqrt{3}$ cm i kącie ostrym 60°. Wysokość graniastosłupa jest równa 20 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Asia kupiła kawałek sera w kształcie graniastosłupa prostego o podstawie trójkąta równoramiennego, takiego jak na rysunku. Jaką objętość miał ten ser?

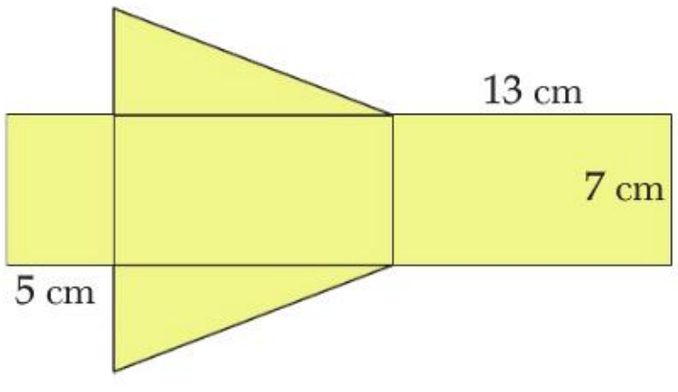


Oblicz objętość graniastosłupa, korzystając z jego siatki.

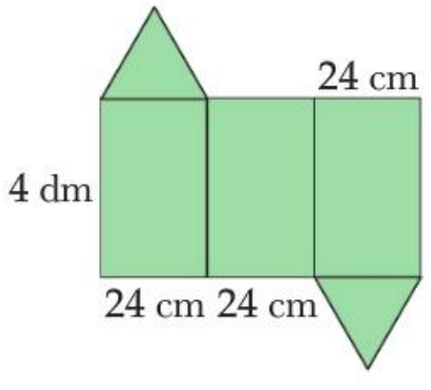
a)



b)



c)



Oblicz objętość sześcianu, którego

a) pole podstawy jest równe 6,25 cm^2,
b) suma długości krawędzi jest równa 36 cm,
c) przekątna ściany bocznej ma długość $8\sqrt{2}$ dm,
d) przekątna sześcianu ma długość 9 m.

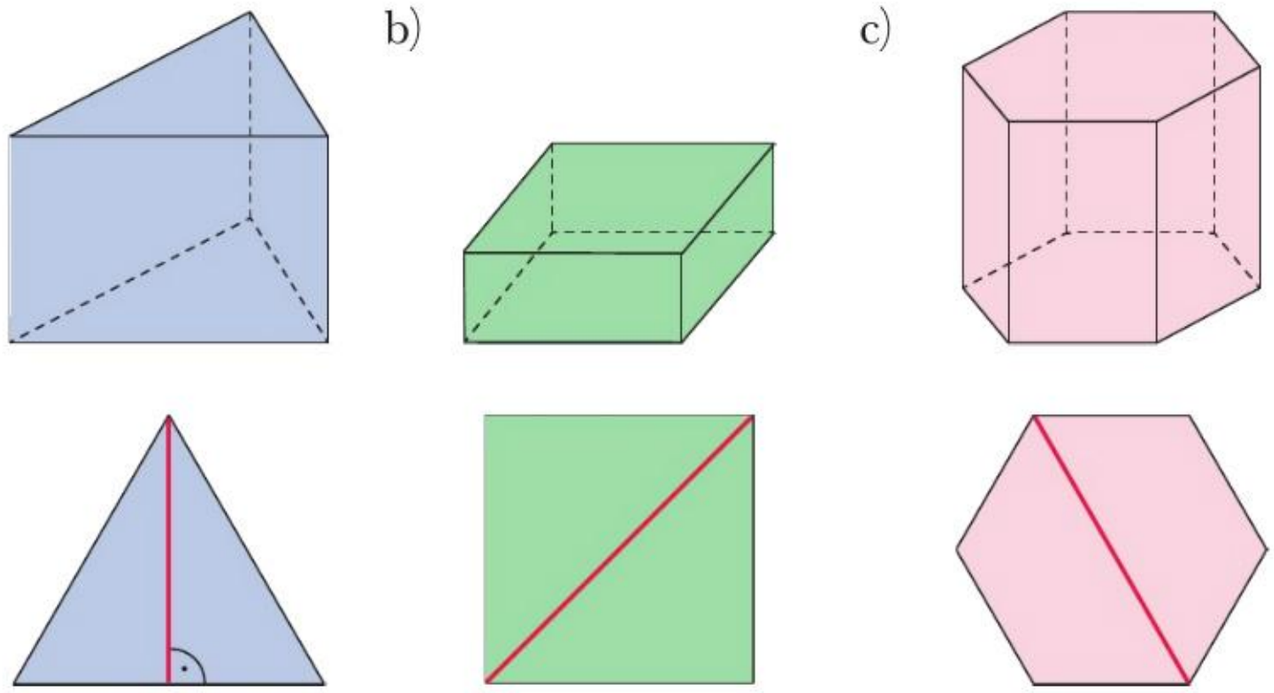
Oblicz długości krawędzi podstawy graniastosłupa o objętości 360 cm^3 i wysokości 10 cm, którego podstawą jest

a) kwadrat,
b) prostokąt, w którym boki pozostają w stosunku 4 : 1.

Objętość każdego z graniastosłupów prawidłowych przedstawionych na rysunku jest równa 96 cm^3. Na każdym rysunku pod graniastosłupem narysowano jego podstawę i zaznaczono na czerwono odcinek równy 12 cm.

Oblicz wysokość każdego z graniastosłupów.

a) b) c)

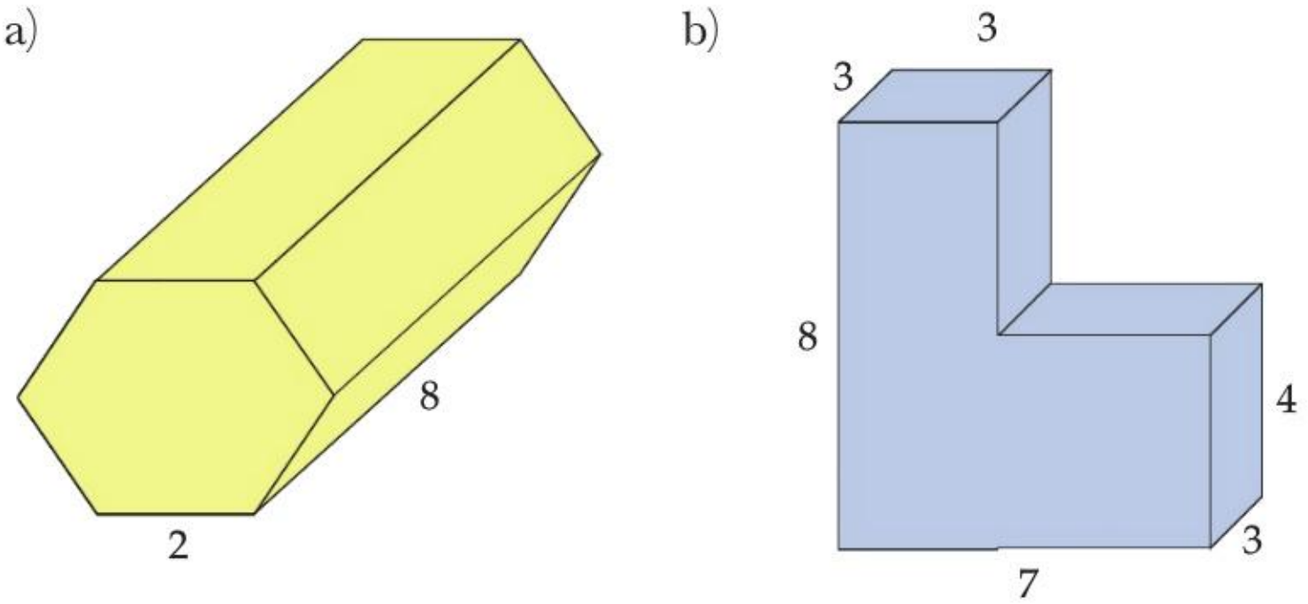


Gęstością danej substancji nazywamy iloraz jej masy i objętości.

$d = \frac{m}{V}$

Na każdym rysunku przycisku do papieru podane są jego wymiary w centymetrach. Oblicz, ile waży ten przycisk, jeżeli gęstość mosiądzu, z którego jest wykonany, jest równa 8 $\frac{g}{cm^3}$. Wynik zaokrąglij do jednego miejsca po przecinku.

a) b)



3.4 Pole powierzchni i objętość graniastosłupa

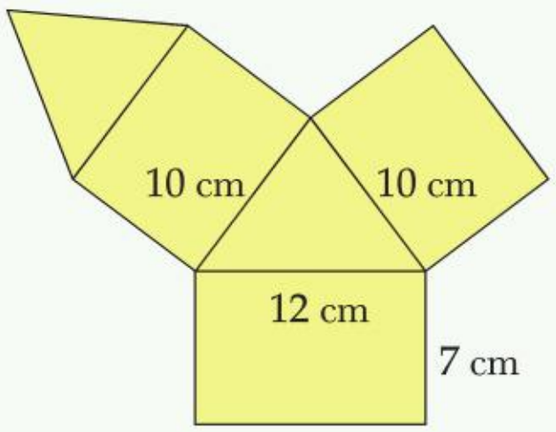
Podejmij temat

Antek chce zapakować do prostopadłościennego pudełka cztery jednakowe sześcienne kostki do gry – każda o objętości 64 cm^3. Jakie wymiary może mieć pudełko, którego całą przestrzeń wypełnią te kostki? Czy jest tylko jedno rozwiązanie?

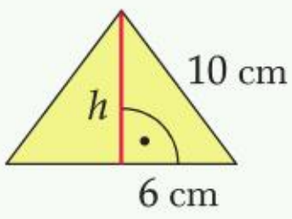


Przykład 1

Producent soku jabłkowego testuje nowe opakowanie w kształcie graniastosłupa o podstawie trójkąta. Po rozcięciu i rozłożeniu na płaszczyźnie kartonowego opakowania otrzymano siatkę, taką jak na rysunku. Obliczmy, ile cm^3 soku zmieści się w takim kartoniku.



Z rysunku odczytujemy, że wysokość H graniastosłupa jest równa 7 cm. Podstawą jest trójkąt równoramienny o podstawie 12 cm i ramieniu długości 10 cm. Aby obliczyć pole tego trójkąta, wyznaczymy najpierw jego wysokość. Wysokość h dzieli trójkąt na dwa przystające trójkąty prostokątne, o przeciwprostokątnej długości 10 cm i jednej z przyprostokątnych długości 6 cm.



h – wysokość, $h > 0$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$h^2 + 6^2 = 10^2$

$h^2 + 36 = 100$

$h^2 = 100 - 36$

$h^2 = 64$

$h = 8$

Obliczamy pole podstawy.

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8$

$P_p = 48$

Obliczamy objętość graniastosłupa.

$V = P_p \cdot H$

$V = 48 \cdot 7$

$V = 336\ cm^3$

W takim kartoniku zmieści się 336 cm^3 soku.

1. Mleko sprzedawane jest w pojemnikach w kształcie prostopadłościanów. Podstawą takiego prostopadłościanu jest kwadrat o polu 25 cm^2 i przekątnej ściany bocznej długości 13 cm. Oblicz, ile cm^3 mleka znajduje się w takim opakowaniu.

Ciekawe!

W Anglii i Szkocji często stosuje się zwyczajowe jednostki pojemności.
Przykłady miar pojemności płynów:
1 pinta = 0,568 l (pół kwarty)
1 kwarta = 1,136 l (kwarta)
1 galon = 4,546 l (4 kwarty)

Jeśli chcemy określić, ile można np. wlać czy wsypać czegoś do naczynia (pudełka), musimy sprawdzić, jaką pojemność ma to naczynie. W życiu codziennym częściej spotykamy się z pojęciem pojemności niż objętości. Na opakowaniach, np. mleka, soku czy wody mineralnej, zapisane są odpowiednie jednostki. Zwyczajowo używane jednostki pojemności to: **litr** (l), **mililitr** (ml) i **hektolitr** (hl). Do oznaczania objętości wody w dużych zbiornikach wodnych (np. jeziorach, morzach) używa się jednostki km^3.

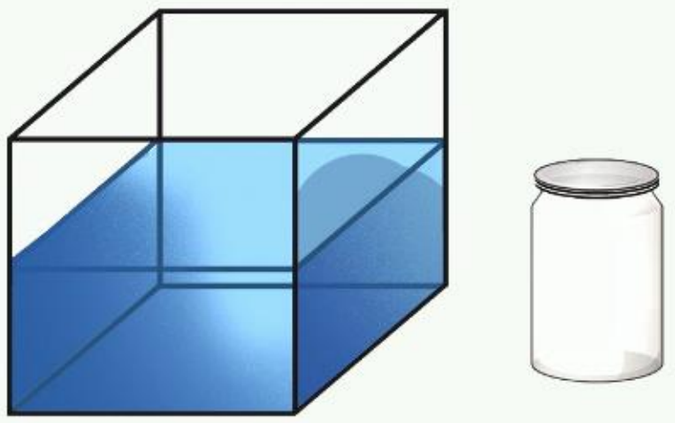
Jednostki pojemności

$1\ l = 1\ dm^3$
$1\ ml = 1\ cm^3$
$1\ hl = 100\ l$
$1\ m^3 = 1000\ l$

$1\ l = 1000\ ml$
$1\ ml = 0{,}001\ l = 0{,}000001\ m^3$
$1\ hl = 100\ dm^3 = 0{,}1\ m^3$
$1\ l = 1000\ cm^3 = 0{,}001\ m^3$

Przykład 2

Akwarium w kształcie sześcianu o krawędzi długości 40 cm napełniono wodą do połowy wysokości. Obliczmy, ile jednakowych słoików o pojemności 800 ml wypełnionych w całości wodą należy użyć, aby napełnić akwarium do wysokości 30 cm.



Aby akwarium było wypełnione wodą do wysokości 30 cm, poziom wody w akwarium powinien podnieść się o 10 cm.

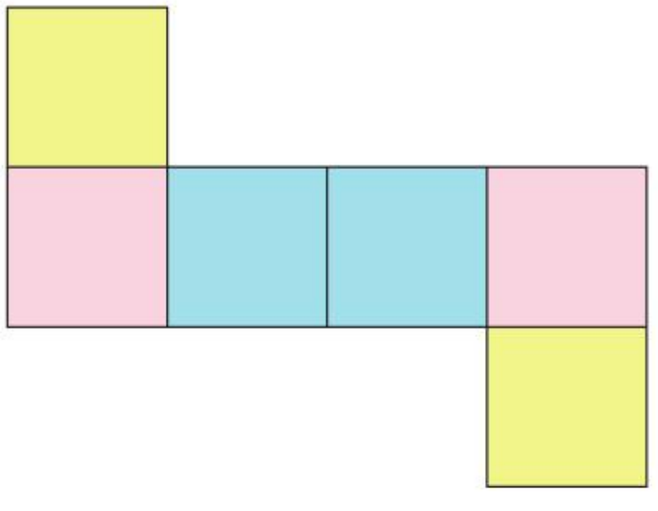
Obliczamy objętość wody, którą należy dolać.
$V = 40 \cdot 40 \cdot 10$
$V = 16\,000\ cm^3 = 16\,000\ ml$

Zatem należy dolać 16 000 ml wody.

Obliczamy, z ilu słoików należy przelać wodę aby napełnić akwarium.
$16\,000 : 800 = 20$

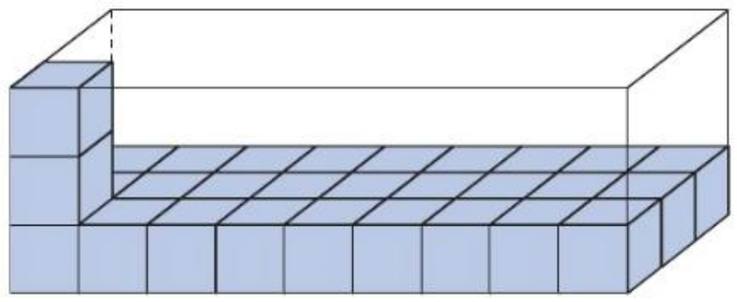
Do akwarium należy przelać wodę z 20 słoików.

2. Pole powierzchni siatki, takiej jak na rysunku, jest równe $3{,}375\ dm^2$. Z siatki tej wykonano pojemnik na śmietankę. Ile litrów śmietanki zmieści się w tym pojemniku? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 l.



Zadania

Ile klocków Adrian musi jeszcze dołożyć, aby wypełnić nimi pojemnik w całości?



Ile arkuszy papieru formatu A3 (297 mm × 420 mm) trzeba kupić na oklejenie sześciennego pudełka o krawędzi 1 m?

Przekątna podstawy sześcianu ma długość $9\sqrt{2}$. Oblicz objętość tego sześcianu.

Zapisz w centymetrach sześciennych:

a) 4 ml, 80 ml, 800 ml, 8,9 ml,
b) 2 dm^3, 14 dm^3, 81 dm^3, 4,5 dm^3,
c) 4 l, 7 l, 13 l, 0,4 l.

Pole podstawy graniastosłupa prostego jest równe 19 cm^2, a objętość jest równa 209 cm^3. Oblicz wysokość bryły.

Co ma większą masę: 8 ml rtęci czy 120 cm^3 nafty? Skorzystaj z podanej tabeli gęstości.

Oblicz masę benzyny znajdującej się w 5-litrowej bańce. Skorzystaj z podanej tabeli gęstości.

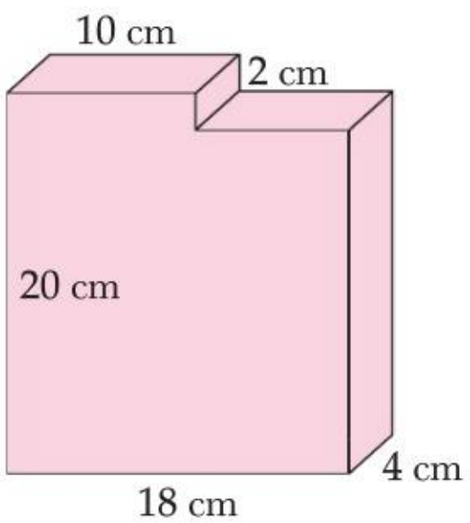
Substancja	Gęstość $\left(\frac{g}{cm^3}\right)$
nafta	0,8
rtęć	13,5
benzyna	0,7

Z trzech jednakowych kwadratowych kawałków płótna uszyto podłogę i dwie ściany namiotu. Zużyto na to 12 m^2 płótna. Czy w tym namiocie może stanąć wyprostowany chłopiec o wzroście 170 cm?

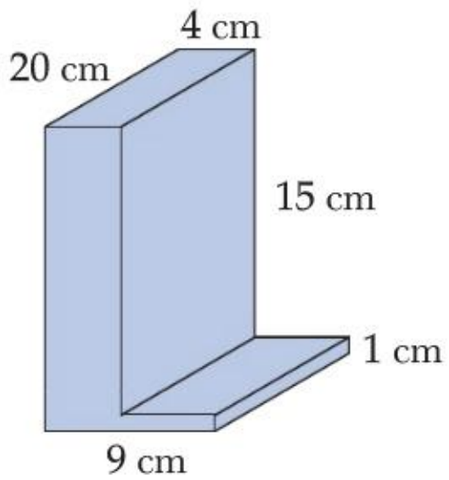
W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym każda krawędź ma długość 1. Oblicz pole powierzchni i objętość tego graniastosłupa.

Oblicz pole powierzchni i objętość bryły przedstawionej na rysunku.

a)



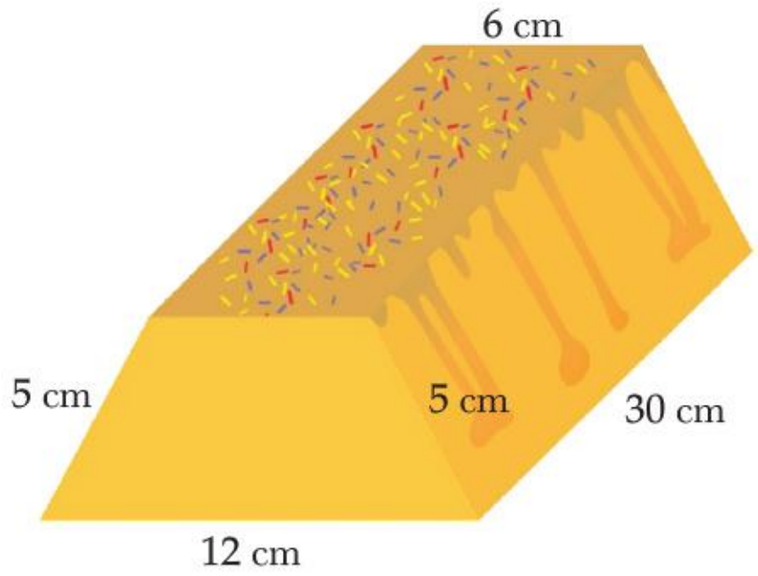
b)



Każda z krawędzi prostopadłościanu jest dwa razy większa od następnej krawędzi. Przekątna tego prostopadłościanu jest równa $4\sqrt{21}$ cm. Oblicz objętość tej bryły.

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość wynosi 10 cm i krawędź podstawy jest równa 4 cm. Narysuj siatkę tego graniastosłupa w skali 1 : 2.

Babcia upiekła ciasto, takie jak na rysunku.



a) Oblicz objętość ciasta.
b) Oblicz pole powierzchni wewnętrznej części foremki do tego ciasta. Przyjmij, że ciasto wypełniło całą foremkę.

Do basenu w kształcie prostopadłościanu o długości 25 m, szerokości 15 m i głębokości 3 m wlano 1000 l wody.

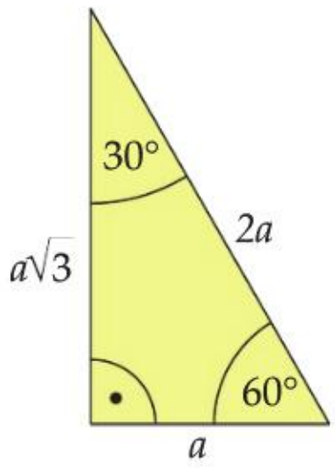
a) Oblicz, na jaką wysokość sięga woda.
b) Jak długo napełniano ten basen wodą wypływającą z dwóch kranów z szybkością 4 l na sekundę?

Świeca ma kształt graniastosłupa prawidłowego czworokątnego. Wysokość świecy jest równa 1 dm, a krawędź podstawy 0,4 dm. Oblicz, jak długo będzie paliła się świeca, jeżeli 1 dm^3 substancji, z której wykonano świecę, spala się w ciągu 50 minut.

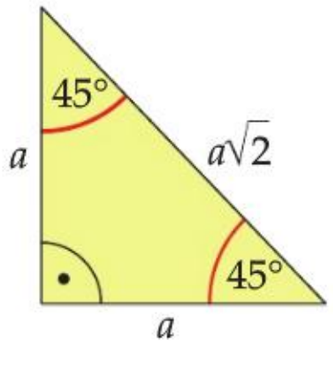
Podstawa graniastosłupa prostego jest trójkątem prostokątnym, w którym jeden z kątów ostrych ma miarę 30°. Krótsza przyprostokątna tego trójkąta jest równa 2 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa, jeśli wysokość jest równa 8 cm.

Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym 60° i boku długości $10\sqrt{3}$ cm. Wysokość graniastosłupa jest równa bokowi rombu. Oblicz objętość graniastosłupa.

Czy pamiętasz?
Jeżeli w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych 30°, 60° krótsza przyprostokątna ma długość a, to dłuższa przyprostokątna ma długość $a\sqrt{3}$ i przeciwprostokątna ma długość $2a$.



Jeżeli w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych 45°, 45° przyprostokątne mają długości równe a, to przeciwprostokątna ma długość $a\sqrt{2}$.

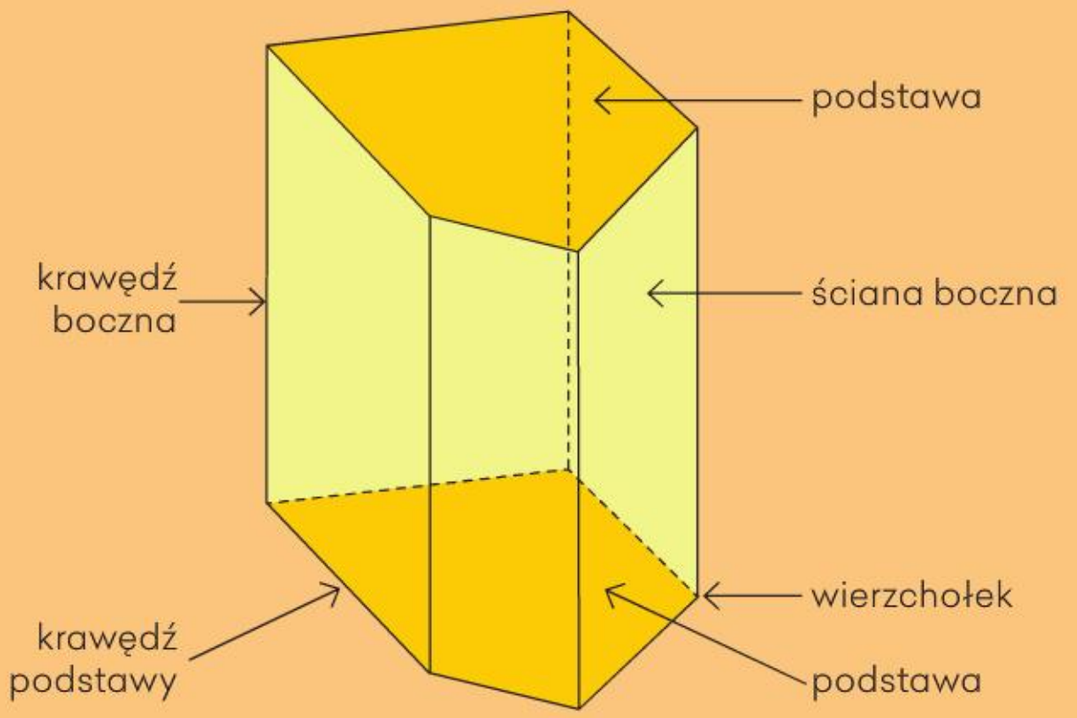


Podsumowanie działu 3

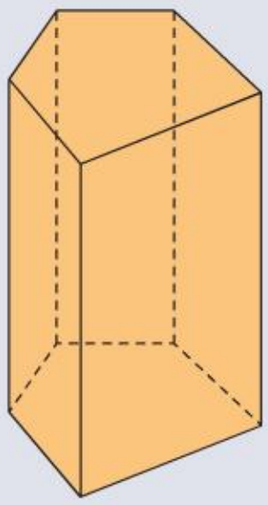
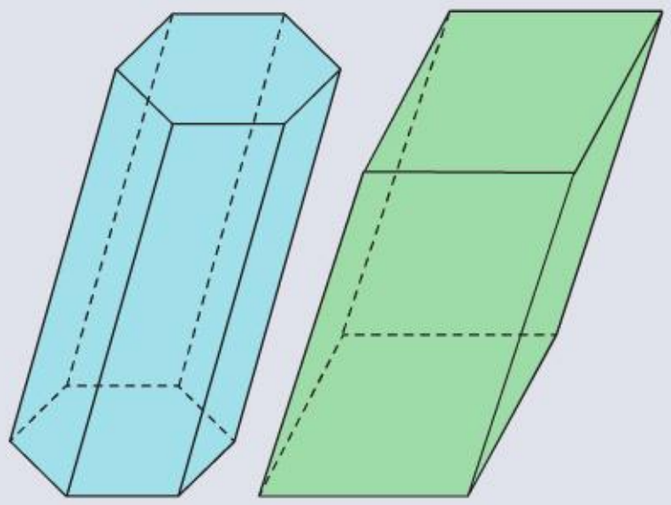
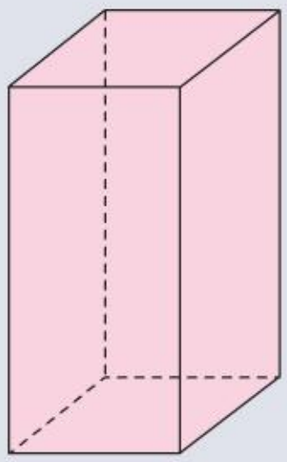
Ważne pojęcia

graniastosłup prosty	graniastosłup pochyły	graniastosłup prawidłowy
wysokość graniastosłupa	siatka bryły	przekątna graniastosłupa

Graniastosłup to figura przestrzenna, której dwie ściany (podstawy) są przystające i równoległe do siebie, a pozostałe ściany (ściany boczne) są równoległobokami.



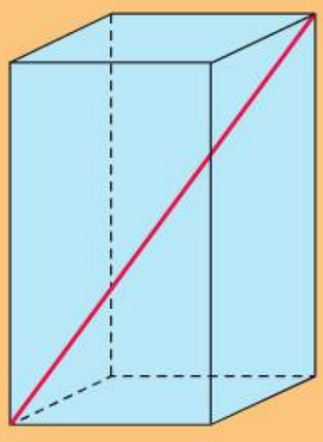
Rodzaje graniastosłupów

Graniastosłup prosty	Graniastosłup pochyły	Graniastosłup prawidłowy
to graniastosłup, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy; każda ściana boczna takiego graniastosłupa jest prostokątem.	to graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstawy.	to graniastosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym.
		

Graniastosłup n-kątny ma:

- 2 podstawy
- $2n$ krawędzi podstaw
- $2n$ wierzchołków
- n ścian bocznych
- n krawędzi bocznych
- $n + 2$ wszystkich ścian
- $3n$ wszystkich krawędzi

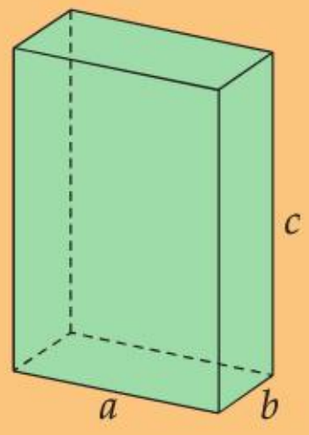
- **Przekątna graniastosłupa** to odcinek łączący wierzchołki obu podstaw, które nie należą do tej samej ściany graniastosłupa.



- **Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa** jest sumą pola podstaw i pola powierzchni bocznej.

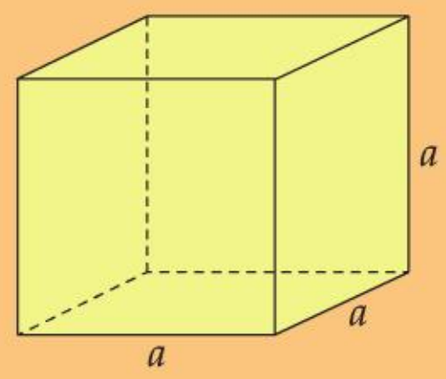
$P_c = 2P_p + P_b$, gdzie
P_c – pole powierzchni całkowitej
P_p – pole podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej

- **Objętość prostopadłościanu** jest równa iloczynowi długości jego trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.



$V = a \cdot b \cdot c$

- **Objętość sześcianu** jest równa trzeciej potędze długości krawędzi tego sześcianu.

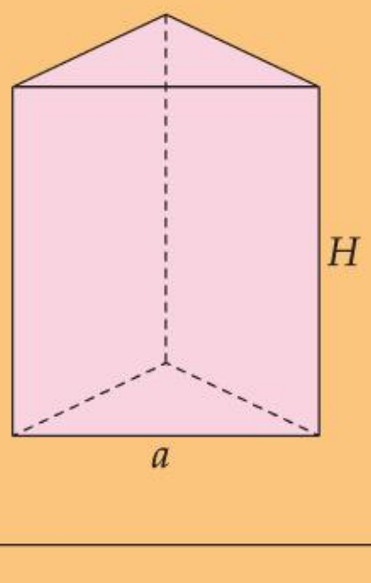


$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

- **Objętość graniastosłupa** jest równa iloczynowi pola podstawy i wysokości tego graniastosłupa.

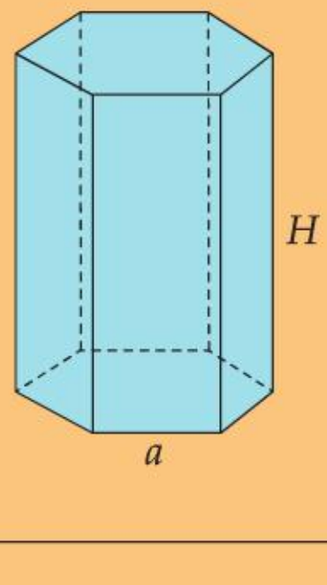
$V = P_p \cdot H$, gdzie: V – objętość, P_p – pole podstawy, H – wysokość

- Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości H i krawędzi podstawy a



$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot H$

- Objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości H i krawędzi podstawy a



$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot H$

Czy już umiesz?

1. Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa jest o 14 większa od liczby wszystkich jego krawędzi bocznych. Wynika stąd, że podstawą graniastosłupa jest

A. czworokąt. B. sześciokąt. C. siedmiokąt. D. dziewięciokąt.

2 Graniastosłup ma $2n + 4$ wierzchołki. Ile wszystkich krawędzi ma ten graniastosłup?

A. $n + 2$ B. $3n + 6$ C. $4n + 8$ D. $6n + 12$

3 Przekątna ściany bocznej pudełka, w kształcie sześcianu, ma długość $\sqrt{2}$ dm. Biedronka obeszła dwukrotnie wszystkie krawędzie tego sześcianu. Długość drogi, jaką pokonała biedronka, jest równa

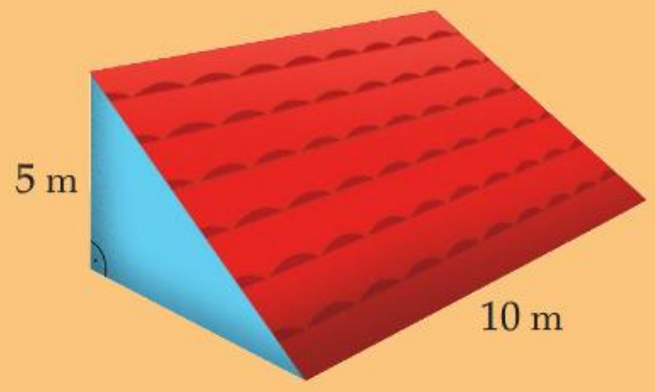
A. $120\sqrt{2}$ cm B. 120 cm C. 240 cm D. $240\sqrt{2}$ cm

4 Przekątna podstawy prostopadłościanu ma długość $3a$. Wysokość tego prostopadłościanu jest równa $4a$, zatem przekątna prostopadłościanu ma długość

A. $5a$ B. $6a$ C. $7a$ D. $25a$

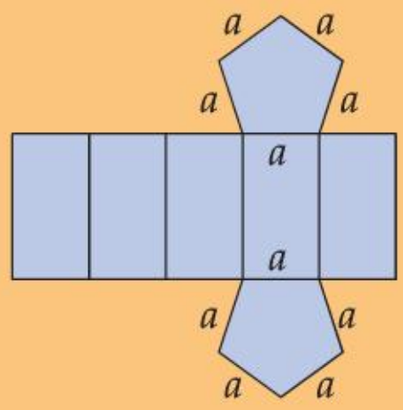
5 Pole powierzchni dachu jest równe 130 m². Pole powierzchni niebieskiej ściany jest równe

A. 30 m² B. 40 m² C. 60 m² D. 20 m²



6 Rysunek przedstawia siatkę

A. prostopadłościanu.
B. graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego.
C. graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego.
D. graniastosłupa prawidłowego siedmiokątnego.



7 Z 2 kg marchewki można otrzymać 1,5 l soku. Ile kilogramów marchewki potrzeba, aby napełnić pojemnik na sok taki, jak na rysunku?

A. mniej niż 200 g
B. 200 g
C. 250 g
D. więcej niż 250 g



8 Ile najwięcej kubków o pojemności 250 ml można w całości napełnić sokiem z prostopadłościennego kartonu o wymiarach: 15 cm × 8 cm × 20 cm?

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

9 Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 24 cm i 10 cm. Wszystkie krawędzie tego graniastosłupa są równe. Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

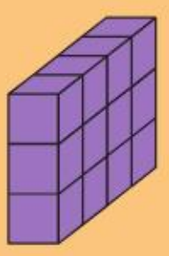
a) Wysokość graniastosłupa jest równa 26 cm.
a) Stosunek długości krawędzi graniastosłupa wychodzących z jednego wierzchołka jest równy 13 : 12 : 5.
c) Przekątna ściany bocznej graniastosłupa tworzy z krawędzią podstawy kąt 45°.

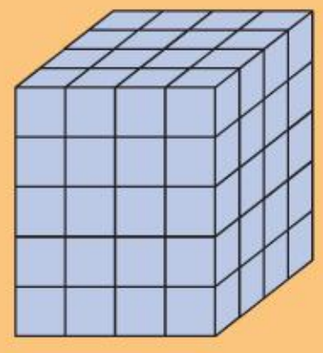
10 Julka z jednakowych sześciennych klocków ma zbudować prostopadłościan, którego wysokość ma być trzykrotnie większa od dłuższej krawędzi podstawy. Ma 30 klocków, z których każdy ma krawędź równą 1. Podaj wymiary wszystkich prostopadłościanów, jakie może w ten sposób zbudować i liczbę klocków, z których będą one zbudowane. Julka nie musi użyć wszystkich klocków.

11 Górna część wieży zamkowej ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Krawędź podstawy tego graniastosłupa jest równa 2 m, a wysokość ściany bocznej wynosi 8 m. Oblicz, ile metrów kwadratowych blachy potrzeba na pokrycie ścian bocznych i dachu (będącego podstawą graniastosłupa) tej części wieży. Na odpady dolicz 6% pola powierzchni ścian bocznych i dachu. Wynik podaj z dokładnością do 0,1 m^2. Do obliczeń możesz użyć kalkulatora.

12 Przekrój poprzeczny rowu melioracyjnego jest trapezem równoramiennym o podstawach 2 m i 4 m. Głębokość rowu jest równa 1,8 m, a długość rowu jest równa 10 m. Oblicz, ile metrów sześciennych ziemi wydobyto, wykopując rów.

13 Oblicz objętość każdego z prostopadłościanów na rysunkach a) i b), przyjmując za jednostkę objętości najpierw prostopadłościan I, a następnie prostopadłościan II.

a) 

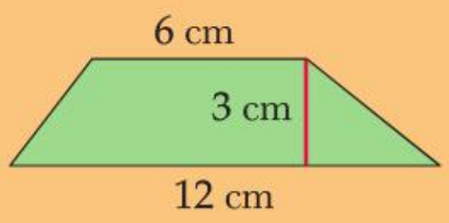
b) 

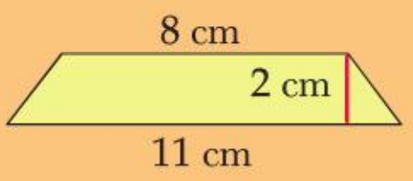
I. 

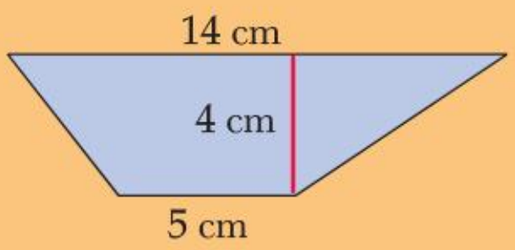
II. 

14 Ile sześcianów o krawędzi 1 cm zmieści się w sześcianie o krawędzi 1 m?

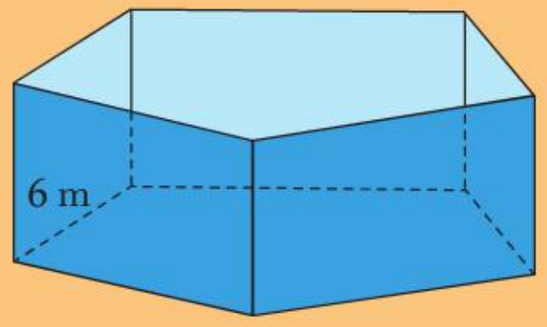
15 Każdy z podanych graniastosłupów ma podstawę w kształcie trapezu i wysokość równą $12\sqrt{3}$ cm. Wskaż, która podstawa należy do graniastosłupa o największej objętości.

A. 

B. 

C. 

16 Zbiornik na wodę ma kształt graniastosłupa – takiego jak na rysunku. Pole podstawy jest równe 120 m^2. Oblicz, ile hektolitrów wody zmieści się w tym zbiorniku, jeżeli woda ma sięgać do $\frac{3}{4}$ wysokości zbiornika.



17 Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, w którym:
a) dwie krawędzie mają długości odpowiednio 2 dm i 3 dm, a przekątna prostopadłościanu ma długość 7 dm,
b) dwie krawędzie mają długości odpowiednio 1 dm i 4 dm, a przekątna prostopadłościanu ma długość 9 dm,
c) podstawa jest kwadratem o boku 4 cm, a przekątna prostopadłościanu ma długość 9 cm.

18 Wysokość graniastosłupa jest równa najdłuższej krawędzi podstawy. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły, jeżeli jej
a) podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości: 9 cm, 12 cm.
b) podstawą jest trójkąt równoramienny o polu równym 12 cm^2 i ramieniu długości 5 cm i wysokości 3 cm.
c) podstawą jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnej 8 cm i przeciwprostokątnej 17 cm.

4. Ostrosłupy



1. Namioty przedstawione na rysunku przypominają indiańskie przenośne budowle. Czy wiesz, jak nazywają się takie budowle i do czego służą?
2. Jak myślisz, jaki kształt ma podłoga w czerwonym namiocie?
3. Określ, jaki kształt mają podłogi w pozostałych namiotach.
4. Jaki kształt mają ściany każdego namiotu?
5. Powiedz, jak nazywają się bryły, w kształcie których są namioty.

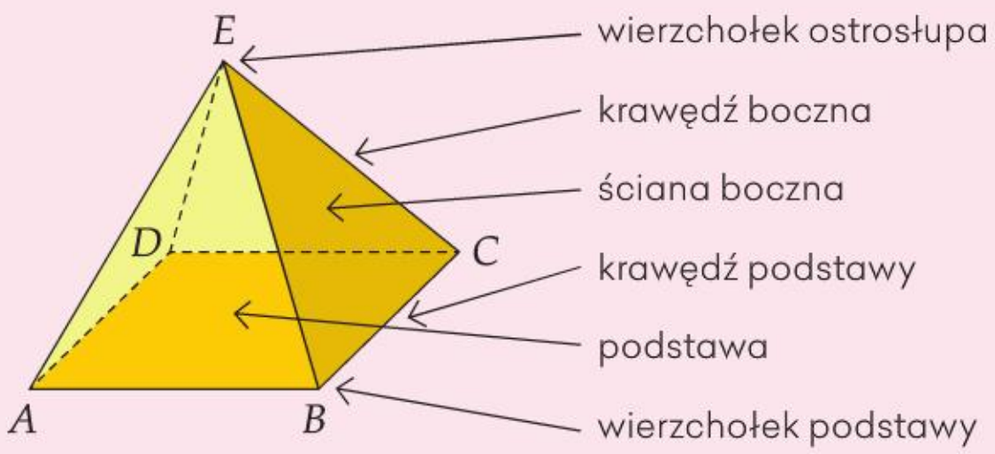
4.1 Ostrosłupy i ich własności

Podejmij temat

Obrazki obok przedstawiają różne obiekty (dach wieży, świeczkę, tipi, kostkę), które mają kształt ostrosłupa.
Jakie wspólne cechy mają te obiekty?



Ostrosłup to figura przestrzenna, której podstawą jest dowolny wielokąt, a jej ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.



Boki wielokąta będącego podstawą ostrosłupa nazywamy **krawędziami podstawy**, a ich końce – **wierzchołkami podstawy**.

Trójkąty o wspólnym wierzchołku to **ściany boczne ostrosłupa**.

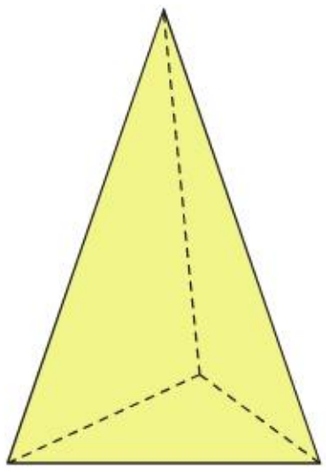
Wspólny wierzchołek wszystkich ścian bocznych to **wierzchołek ostrosłupa**.

Boki trójkątów będących ścianami bocznymi, których jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, to **krawędzie boczne**.

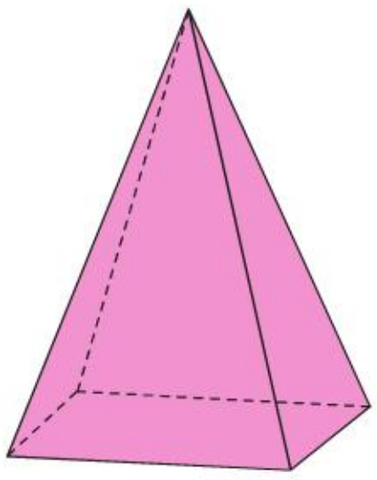
Ostrosłup przyjmuje nazwę od nazwy wielokąta będącego jego podstawą. Ostrosłupy mogą być trójkątne (podstawą jest trójkąt), czworokątne (podstawą jest czworokąt), pięciokątne (podstawą jest pięciokąt) itd.

Wśród ostrosłupów możemy wyróżnić:

- **ostrosłup prosty** – czyli taki, którego wszystkie krawędzie boczne są równej długości

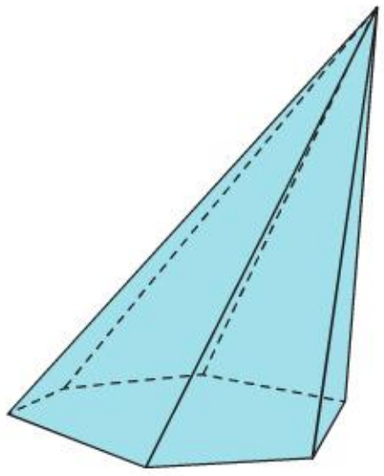


ostrosłup prosty trójkątny

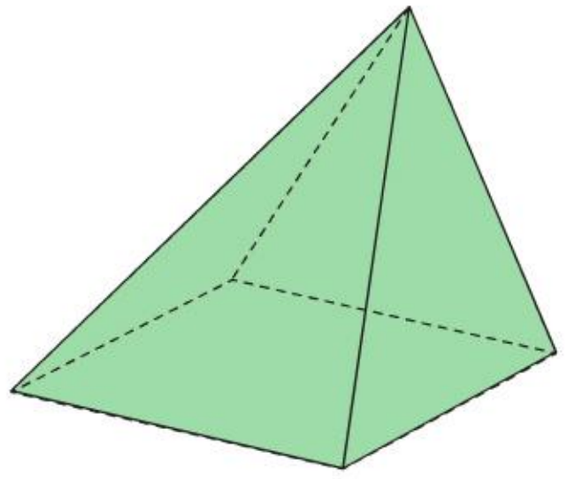


ostrosłup prosty czworokątny

- **ostrosłup pochyły** – czyli taki, którego krawędzie boczne nie są równej długości



ostrosłup pochyły sześciokątny



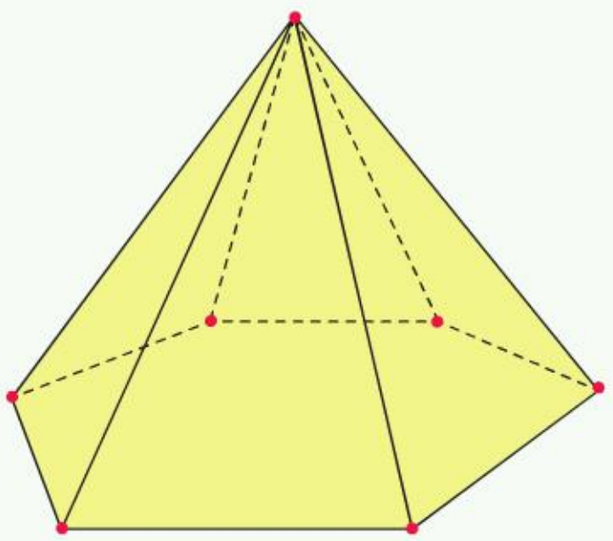
ostrosłup pochyły czworokątny

Przykład 1

Określmy, ile wierzchołków, ile krawędzi i ile wszystkich ścian ma ostrosłup o podstawie sześciokąta.

Podstawa tego ostrosłupa jest sześciokątem, zatem:

- ostrosłup ma 6 wierzchołków podstawy i jeden wierzchołek ostrosłupa, czyli łącznie ma 7 wierzchołków,
- ostrosłup ma 6 krawędzi podstawy i 6 krawędzi bocznych, czyli łącznie ma 12 krawędzi,
- ostrosłup ma 6 ścian bocznych i jedną podstawę, czyli 7 wszystkich ścian.



1. Określ, ile wierzchołków, ile krawędzi i ile wszystkich ścian ma ostrosłup o podstawie dziewięciokąta.

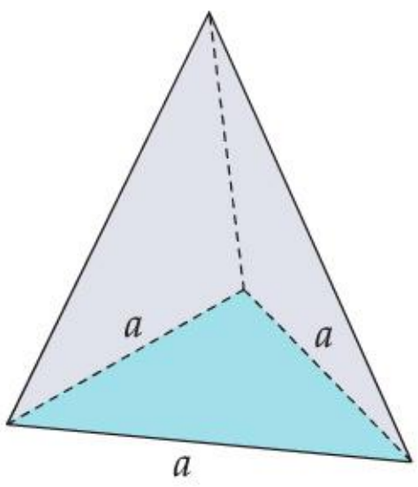
Ostrosłup n-kątny ma:

- 1 podstawę,
- 1 wierzchołek ostrosłupa,
- n wierzchołków podstawy,
- $n + 1$ wszystkich wierzchołków,
- n krawędzi bocznych,
- n ścian bocznych,
- n krawędzi podstawy,
- $2n$ wszystkich krawędzi.

Wśród ostrosłupów rozróżniamy ostrosłupy prawidłowe.

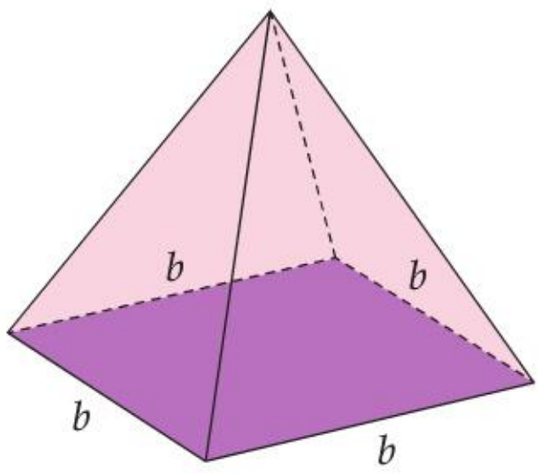
Ostrosłup prawidłowy to ostrosłup prosty, którego podstawa jest wielokątem foremnym. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

Ostrosłup prawidłowy trójkątny



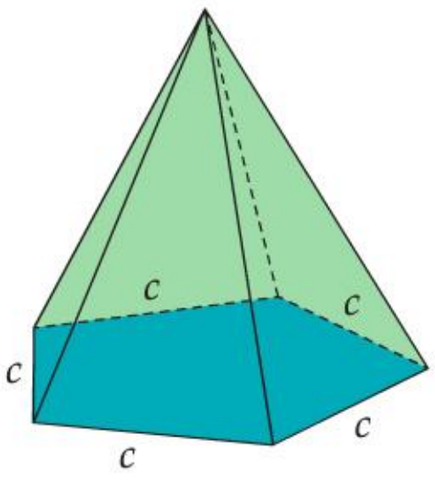
Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny.

Ostrosłup prawidłowy czworokątny



Podstawą ostrosłupa jest kwadrat.

Ostrosłup prawidłowy pięciokątny



Podstawą ostrosłupa jest pięciokąt foremny.

Ciekawe!

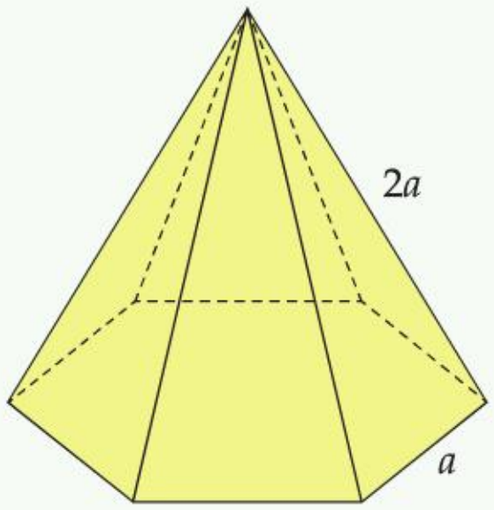


Najczęściej ostrosłupy kojarzą się z piramidami. Piramida to budowla w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Najbardziej znane piramidy – faraonów Cheopsa i Chefrena – powstały ponad 4 tysiące lat temu w starożytnym Egipcie. Pełniły funkcję królewskich grobowców. Budowle te od lat fascynują archeologów, którzy uważają, że kryją one jeszcze wiele tajemnic.

Przykład 2

W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędzie boczne są dwukrotnie dłuższe od krawędzi podstawy. Pole podstawy wynosi $24\sqrt{3}$. Obliczmy sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa.

Sporządźmy rysunek pomocniczy. Oznaczmy:
a – długość krawędzi podstawy $(a > 0)$
$2a$ – długość krawędzi bocznej



W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym podstawą jest sześciokąt foremny. Korzystamy ze wzoru na pole sześciokąta foremnego.

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = 24\sqrt{3}$$

Z zapisanego równania wyznaczamy długość a krawędzi podstawy.

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = 24\sqrt{3} \mid \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}}$$
$$a^2 = 24\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}}$$
$$a^2 = 16$$
$$a = \sqrt{16}$$
$$a = 4$$

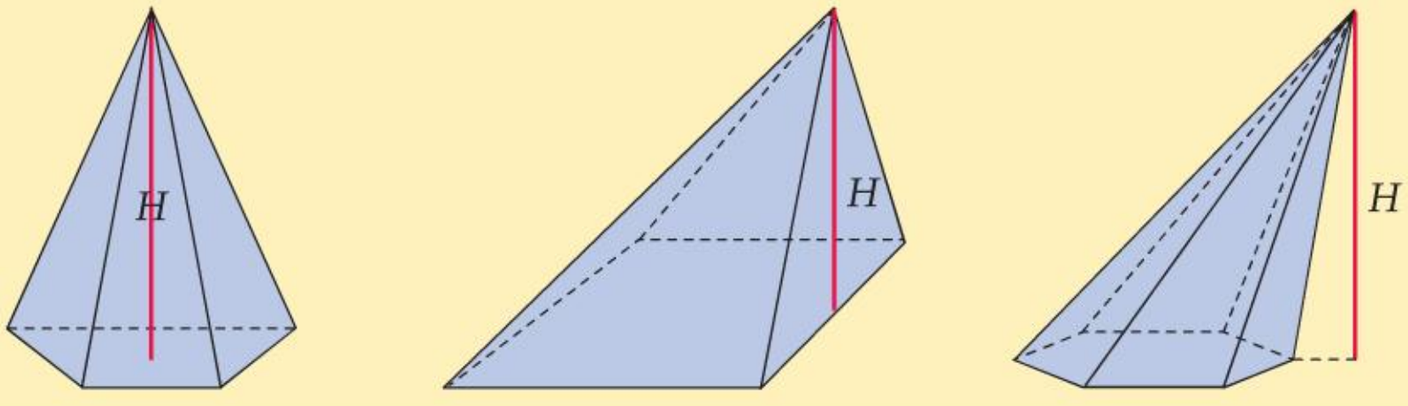
Zatem
$2a = 8$

Ostrosłup sześciokątny ma 6 krawędzi bocznych i 6 krawędzi podstawy. Każda krawędź boczna ma długość 8, a krawędź podstawy ma długość 4.

Suma długości wszystkich krawędzi jest więc równa:
$8 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 48 + 24 = 72$

2. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędzie boczne są dwa razy dłuższe od krawędzi podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa 36 cm. Oblicz pole podstawy tego ostrosłupa.

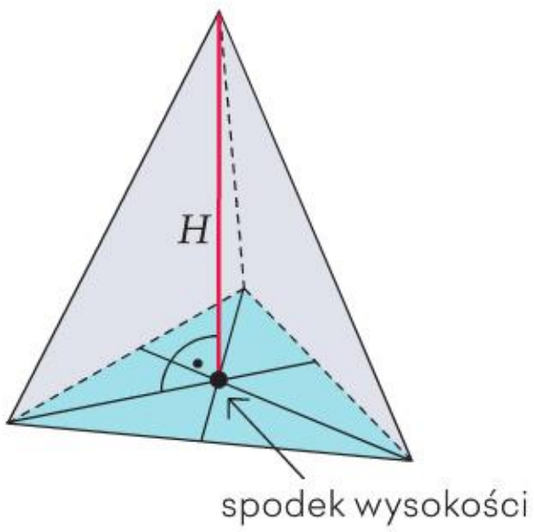
Wysokość H ostrosłupa to odległość wierzchołka ostrosłupa od płaszczyzny zawierającej podstawę tego ostrosłupa. Wysokość ostrosłupa można utożsamiać z odcinkiem łączącym wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną zawierającą podstawę i prostopadłym do tej płaszczyzny.



Spodkiem wysokości nazywamy punkt wspólny wysokości ostrosłupa i płaszczyzny zawierającej podstawę ostrosłupa.

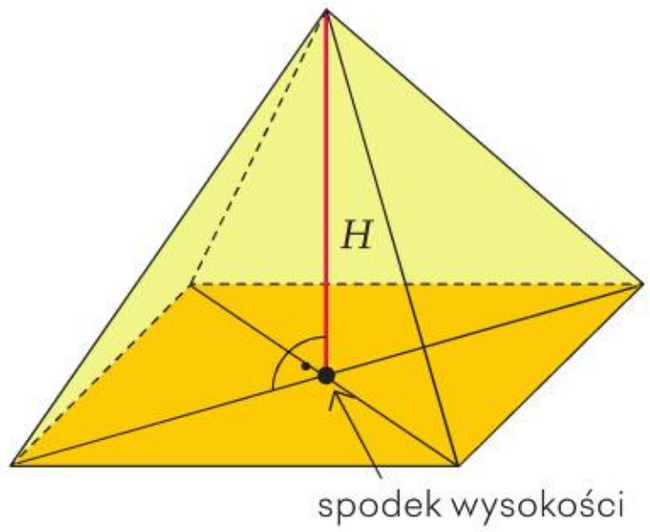
Wysokość w ostrosłupie prawidłowym

trójkątnym



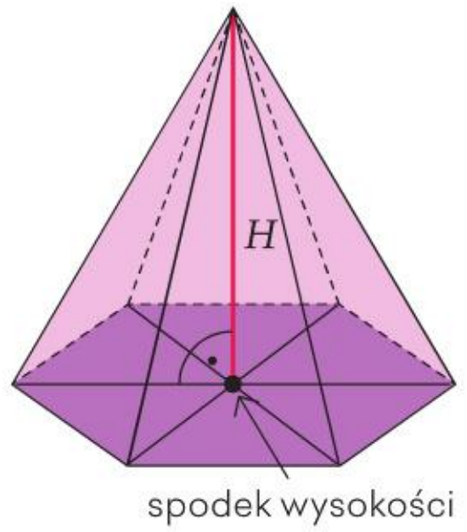
Spodek wysokości to punkt przecięcia wysokości podstawy.

czworokątnym



Spodek wysokości to punkt przecięcia przekątnych podstawy.

sześciokątnym

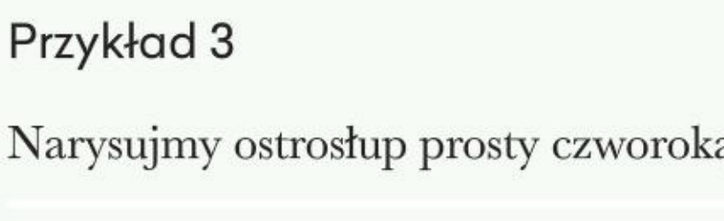


Spodek wysokości to punkt przecięcia przekątnych podstawy.

Przykład 3

Narysujmy ostrosłup prosty czworokątny o podstawie prostokąta.

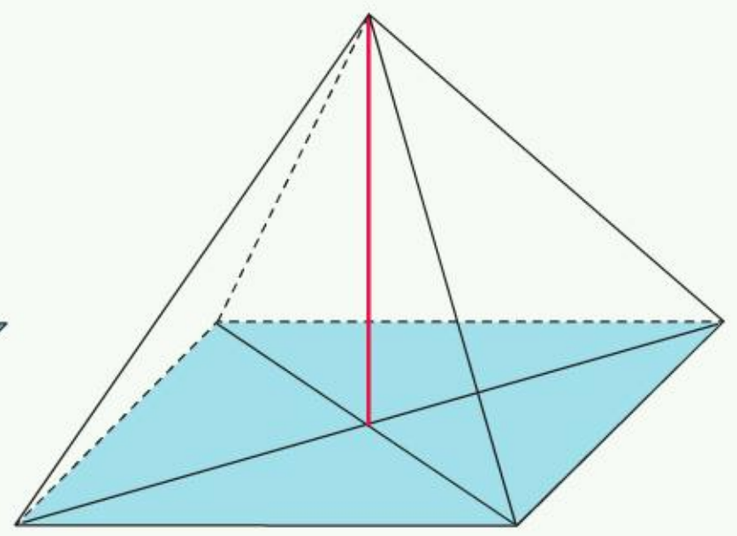
1. Rysujemy podstawę ostrosłupa.



2. Zaznaczamy przekątne czworokąta, a następnie z punktu ich przecięcia wyznaczamy wysokość ostrosłupa.



3. Łączymy koniec wysokości nieleżący na podstawie z wierzchołkami podstawy. Krawędzie niewidoczne zaznaczamy liniami przerywanymi.



3. Narysuj ostrosłup prosty o podstawie:

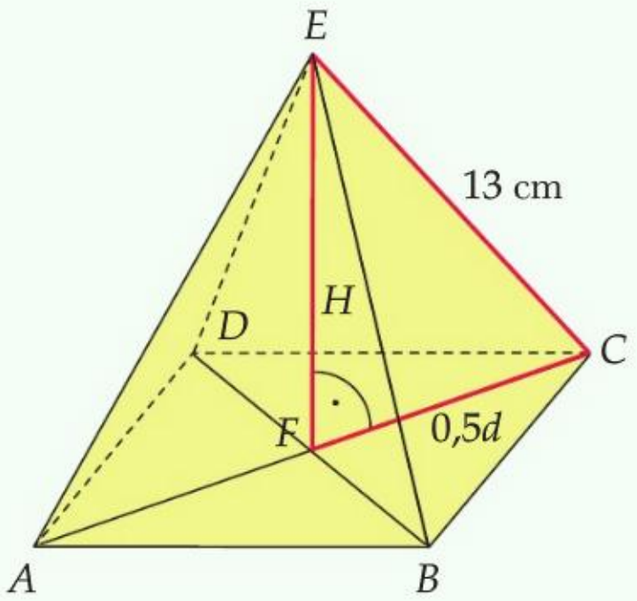
a) sześciokąta foremnego,
b) ośmiokąta foremnego,
c) trójkąta równobocznego.

Zaznacz wysokość każdego ostrosłupa.

Przykład 4

Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat o polu 50 cm². Krawędź boczna ma długość 13 cm. Obliczmy wysokość tego ostrosłupa.

Sporządźmy rysunek pomocniczy. Oznaczmy:
d – długość przekątnej podstawy ostrosłupa (w cm), $d > 0$
H – wysokość ostrosłupa (w cm), $H > 0$



Zauważmy, że trójkąt CEF utworzony przez krawędź boczną, wysokość ostrosłupa i połowę przekątnej podstawy jest trójkątem prostokątnym.

Wyznaczmy najpierw długość przekątnej podstawy ostrosłupa.

$P = \frac{1}{2}d^2$

$50 = \frac{1}{2}d^2 \mid \cdot 2$

$100 = d^2$

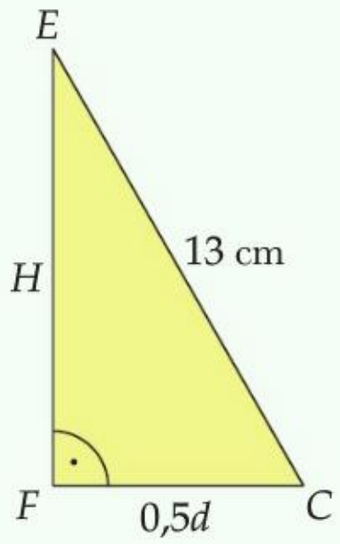
$d = \sqrt{100}$

$d = 10$

Zatem

$\frac{1}{2}d = 5$

Obliczamy wysokość H, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CEF.



$H^2 + 5^2 = 13^2$

$H^2 = 169 - 25$

$H^2 = 144$

$H = \sqrt{144}$

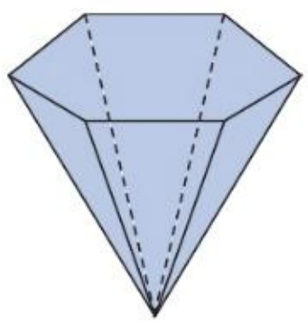
$H = 12$

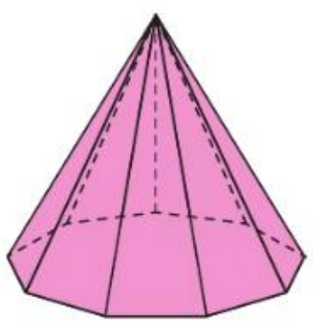
Wysokość ostrosłupa jest równa 12 cm.

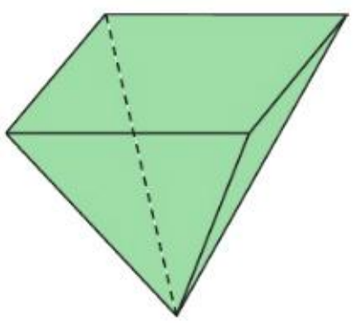
4. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa $12\sqrt{2}$ cm, a krawędź boczna ma długość 20 cm. Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

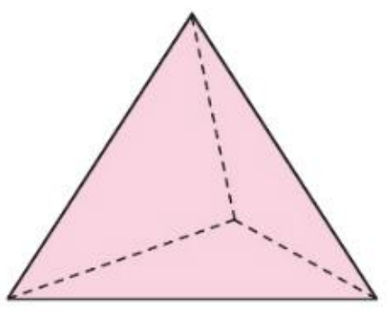
Zadania

Zapisz nazwę każdego ostrosłupa.

a) 

b) 

c) 

d) 

Przerysuj do zeszytu tabelę i ją wypełnij.

Nazwa ostrosłupa	ostrosłup trójkątny					
Wielokąt będący podstawą		czworokąt				
Liczba wierzchołków					13	
Liczba krawędzi			10			
Liczba ścian bocznych						15
Liczba wszystkich ścian				9		

Ile wszystkich wierzchołków, krawędzi i ścian bocznych ma ostrosłup stukątny?

Narysuj ostrosłup, który ma

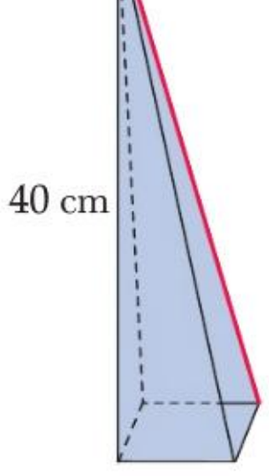
a) osiem wszystkich krawędzi,
b) sześć wszystkich wierzchołków,
c) sześć ścian bocznych.

Narysuj taki ostrosłup, aby spodek jego wysokości leżał poza podstawą ostrosłupa.

Każda z krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 9 cm, a każda krawędź boczna ma długość 20 cm. Jaką długość powinna mieć listewka, z której należy wykonać model szkieletowy tego ostrosłupa?

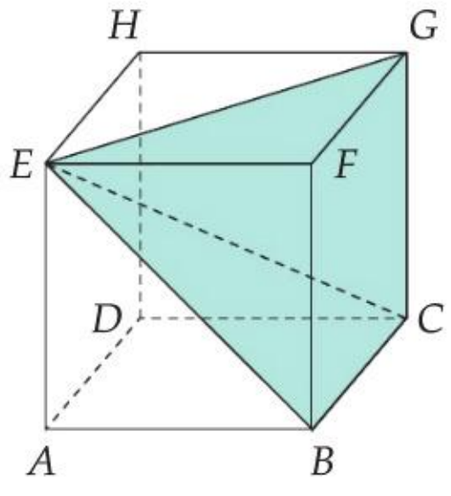
W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym wysokość jest równa 12 cm, a obwód podstawy ma długość 96 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

W ostrosłupie czworokątnym jedna z krawędzi bocznych ma długość 40 cm i jest wysokością ostrosłupa. Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o polu 40,5 cm^2. Oblicz długość krawędzi zaznaczonej czerwonym kolorem (rysunek obok).



W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzie są równe. Suma długości tych krawędzi jest równa 48 dm. Oblicz wysokość ostrosłupa.

Z sześcianu *ABCDEFGH* o krawędzi długości 12 wycięto taki ostrosłup jak na rysunku. Oblicz długości krawędzi tego ostrosłupa.

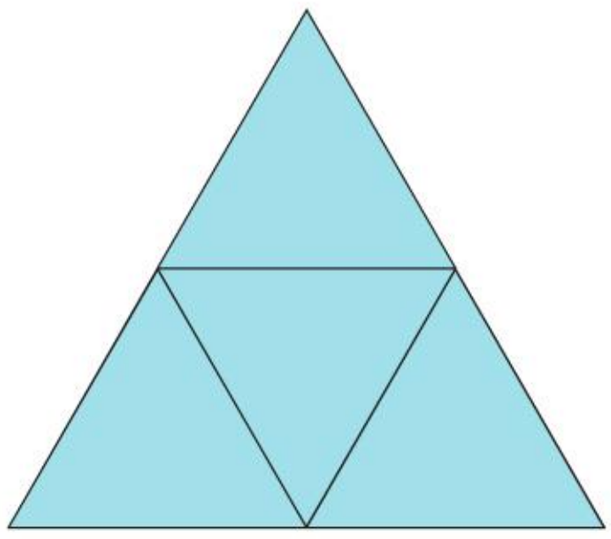


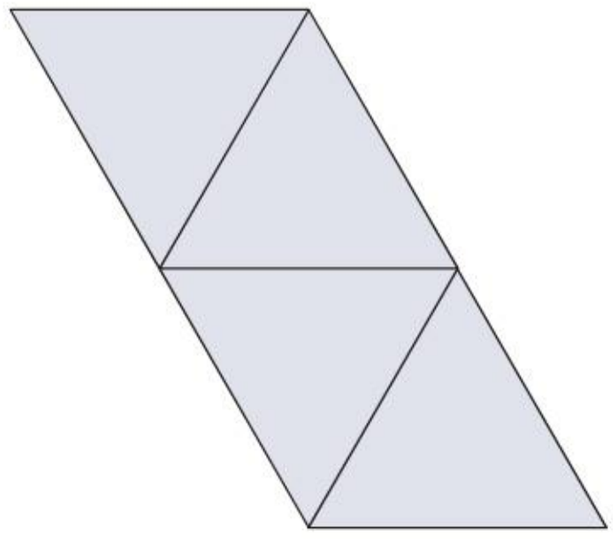
4.2 Pole powierzchni ostrosłupa

Podejmij temat

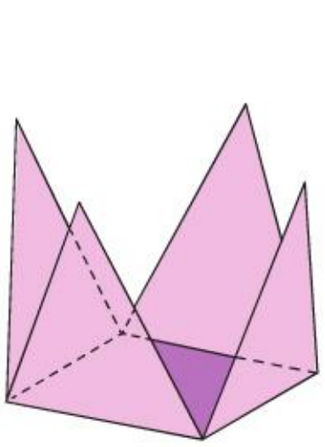


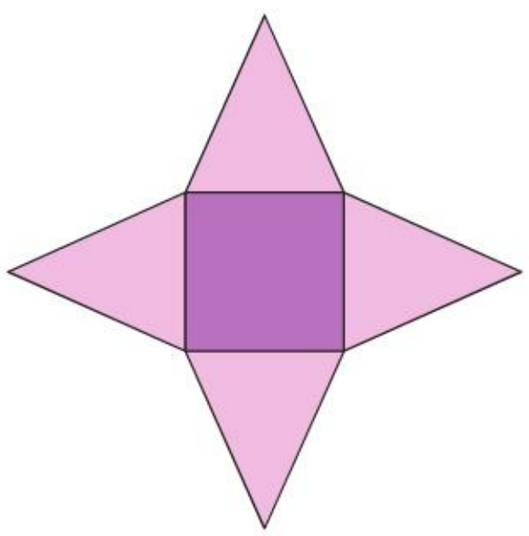
Po wycięciu z papieru, odpowiednim zgięciu i sklejeniu każdej z siatek powstaną dwie bryły. Porównaj długości krawędzi brył. Czy w tych bryłach można jednoznacznie określić podstawę i ściany boczne?

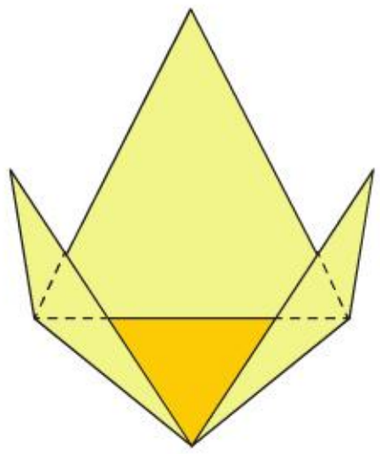


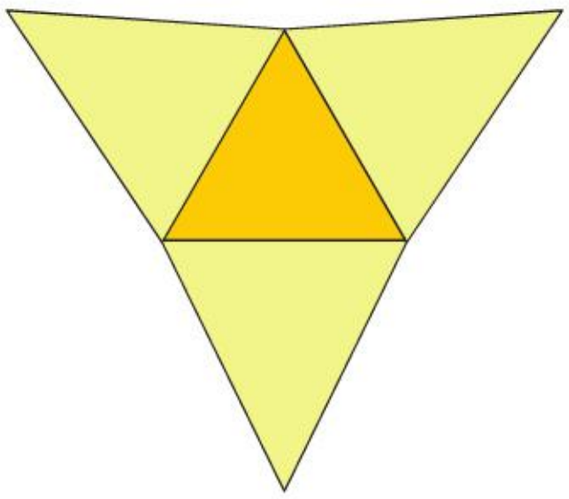


Rozcinając niektóre krawędzie modelu ostrosłupa tak, aby dało się rozłożyć ściany na płaszczyźnie, otrzymujemy figurę zwaną siatką ostrosłupa.

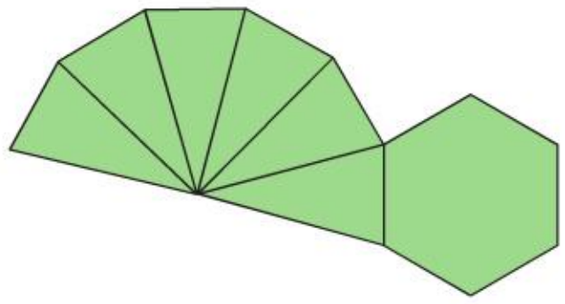




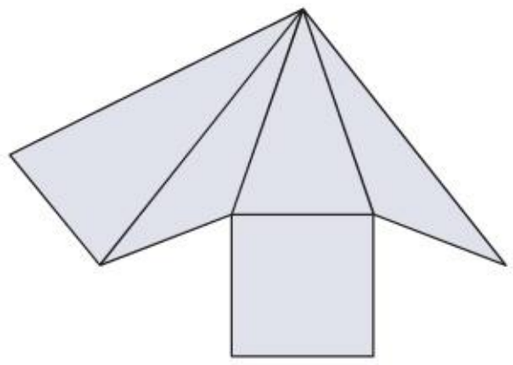




Narysowaną na kartonie siatkę można wyciąć i po sklejeniu odpowiednich krawędzi utworzyć model ostrosłupa. Siatka ostrosłupa składa się z wielokąta, który jest podstawą danego ostrosłupa, i z trójkątów będących ścianami bocznymi. Boki trójkątów, które po złożeniu modelu utworzą jedną krawędź, muszą mieć taką samą długość. W przypadku ostrosłupów prawidłowych ściany boczne są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

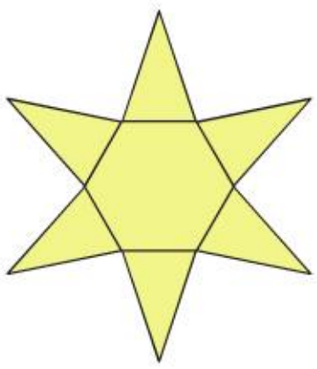


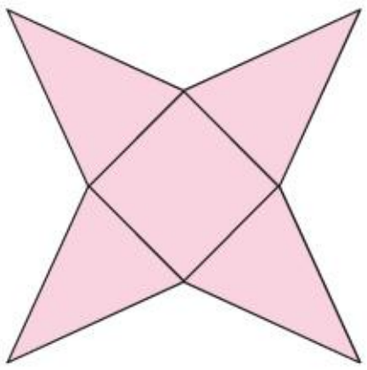
Siatka ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego

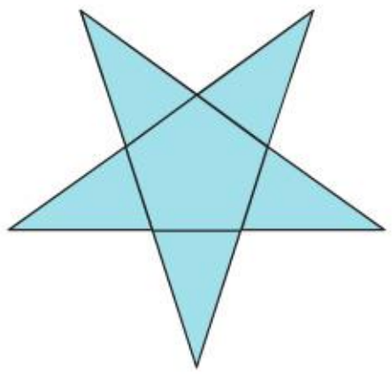


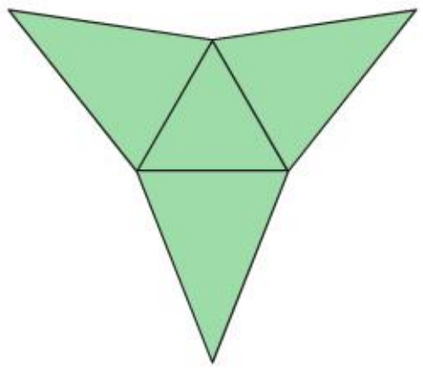
Siatka ostrosłupa pochyłego czworokątnego

1. Na rysunku przedstawiono siatki ostrosłupów. Określ w każdym przypadku rodzaj ostrosłupa.

a) 

b) 

c) 

d) 

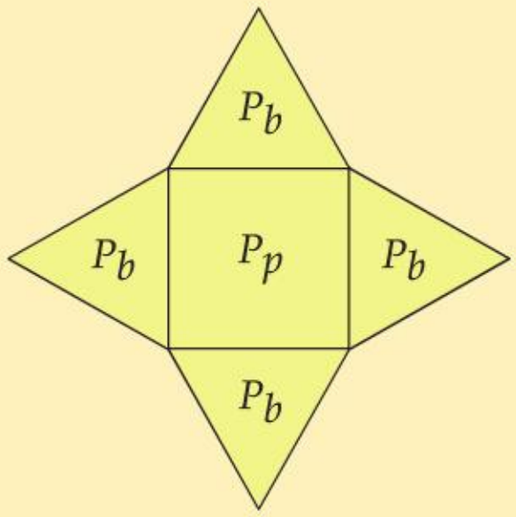
Pole powierzchni ostrosłupa można obliczyć jako sumę pól wielokątów stanowiących siatkę bryły.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa
jest sumą pola powierzchni podstawy i pola powierzchni bocznej.

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa
to suma pól trójkątów tworzących ściany boczne ostrosłupa.

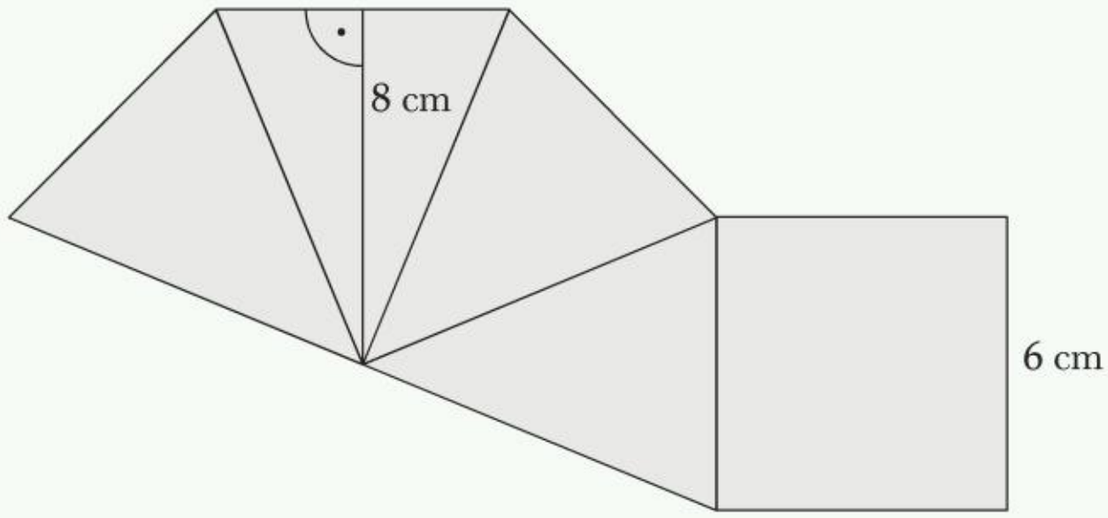
$$P_c = P_p + P_b$$

P_c – pole powierzchni całkowitej
P_p – pole podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej



Przykład 1

Obliczmy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, korzystając z danych zamieszczonych na rysunku.



Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku długości 6 cm. Obliczamy pole podstawy tego ostrosłupa.
$P_p = 6 \cdot 6$
$P_p = 36$

Powierzchnia boczna ostrosłupa składa się z czterech przystających trójkątów. Podstawa każdego z tych trójkątów jest równa 6 cm, a wysokość 8 cm.

Zatem pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa to:
$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8$
$P_b = 96$

Wiemy, że pole powierzchni całkowitej jest sumą pola podstawy i pola powierzchni bocznej.
$P_c = P_p + P_b$
$P_c = 36 + 96$
$P_c = 132$

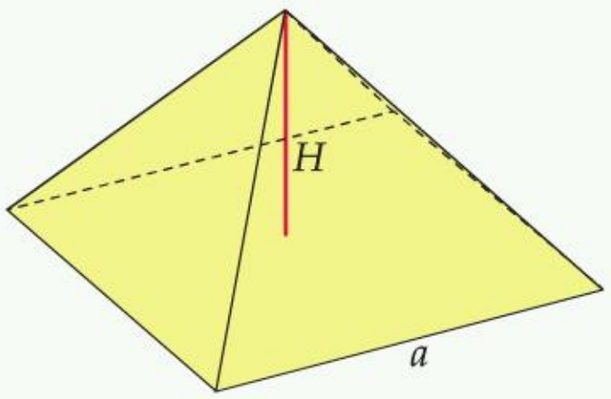
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe 132 cm^2.

2. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego podstawą jest kwadrat o przekątnej długości $10\sqrt{2}$ cm. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 20 cm.

Przykład 2

Obliczmy, ile cm^2 kolorowego papieru potrzebował Jurek na wykonanie siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, wiedząc, że krawędź podstawy tego ostrosłupa jest równa 16 cm, a wysokość ostrosłupa ma 6 cm.

Sporządźmy rysunek pomocniczy. Oznaczmy:
a – krawędź podstawy ostrosłupa (w cm), $a > 0$
H – wysokość ostrosłupa (w cm), $H > 0$

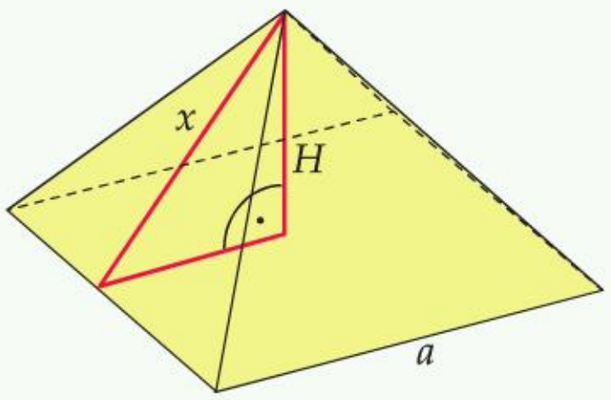


Aby dowiedzieć się, ile cm^2 papieru potrzebował Jurek na sporządzenie siatki ostrosłupa, musimy obliczyć pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

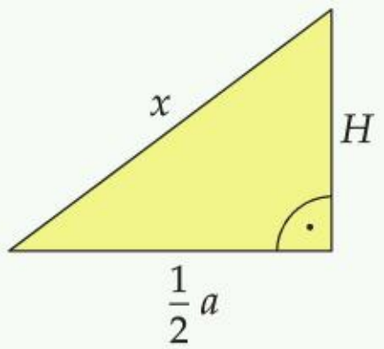
$P_c = P_p + 4 \cdot P_s$, gdzie:
P_c – pole powierzchni całkowitej (w cm^2)
P_p – pole podstawy (w cm^2)
P_s – pole powierzchni ściany bocznej (w cm^2)

Obliczamy pole podstawy, czyli pole kwadratu.
$P_p = a^2$
$P_p = 16^2$
$P_p = 256$

Aby obliczyć pole powierzchni ściany bocznej, obliczymy najpierw wysokość ściany bocznej. Zauważamy, że – łącząc spodek wysokości ostrosłupa ze spodkiem wysokości ściany bocznej – otrzymujemy trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną jest wysokość ściany bocznej. Obliczamy tę wysokość, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.



x – wysokość ściany bocznej (w cm)
$x^2 = H^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$
$x^2 = 6^2 + 8^2$
$x^2 = 100$
$x = 10$



Obliczamy pole powierzchni ściany bocznej.
$P_s = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10$
$P_s = 80$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej.
$P_c = 256 + 4 \cdot 80$
$P_c = 576$

Jurek potrzebował 576 cm^2 kolorowego papieru na sporządzenie siatki ostrosłupa.

3. Namiot ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Każda ściana boczna ma pole 3 m^2, a pole podstawy jest równe 4 m^2. Oblicz wysokość namiotu.

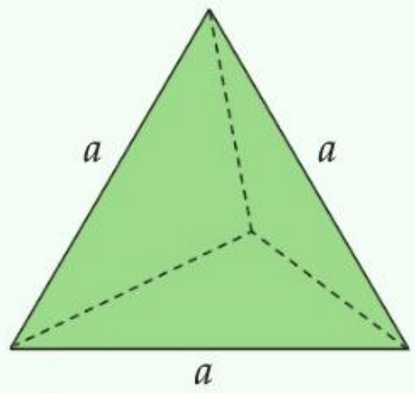
Ostrosłup, którego siatkę przedstawiono w *Podejmij temat*, to **czworościan foremny** – czyli ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.

Przykład 3

Obliczmy pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi długości a.

Sposób I

Czworościan ma cztery ściany. Każda ściana czworościanu jest trójkątem równobocznym o boku długości a. Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego.

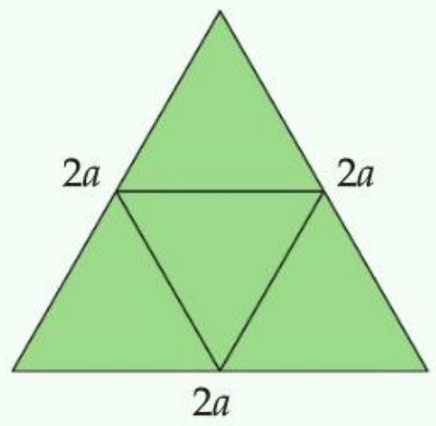


$$P_c = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

$$P_c = \sqrt{3} \cdot a^2$$

Sposób II

Pole powierzchni czworościanu jest równe polu jego siatki, czyli polu trójkąta równobocznego o boku $2a$.



$$P_c = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2a)^2$$

$$P_c = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot a^2$$

$$P_c = \sqrt{3} \cdot a^2$$

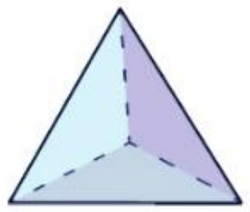
Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o boku długości a jest równe $\sqrt{3} \cdot a^2$.

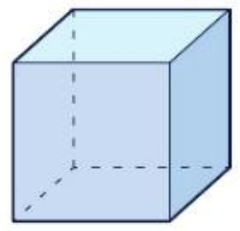
4. Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość 2 cm.

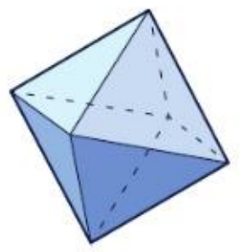
Ciekawe!

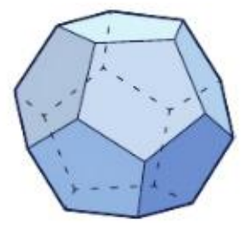
Czworościan foremny to jeden z wielościanów foremnych zwanych bryłami platońskimi. Platon utożsamiał ogień z czworościanem, ziemię z sześcianem, powietrze z ośmiościanem i wodę z dwudziestościanem. Dwunastościan uważał za symbol całego wszechświata.

Bryły platońskie


czworościan


sześcian


ośmiościan

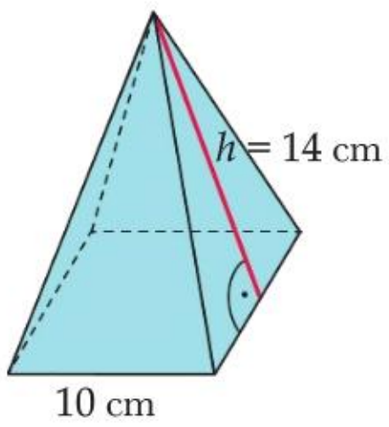

dwunastościan


dwudziestościan

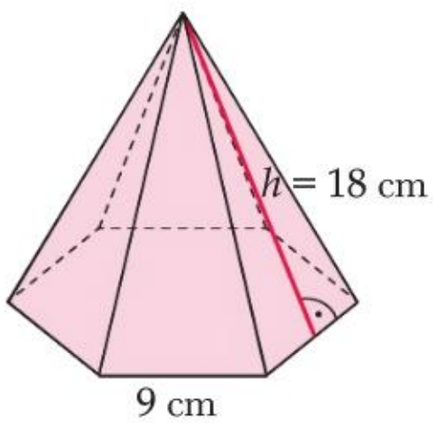
Zadania

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego, korzystając z danych przedstawionych na rysunku.

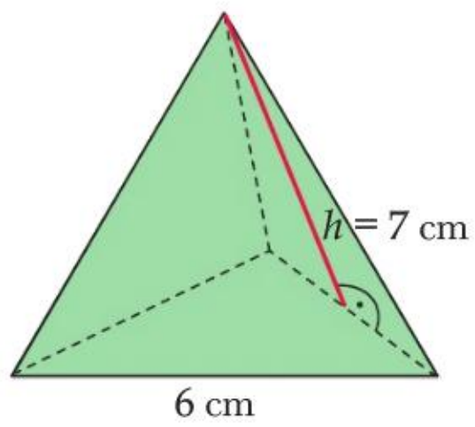
a)



b)



c)



Pole pięciokąta foremnego o boku x wyraża się wzorem: $P = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} \cdot x^2$

- Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego ośmiokątnego jest równe 40 cm². Pole powierzchni całkowitej jest równe 296 cm². Oblicz pole jednej ściany bocznej tego ostrosłupa.

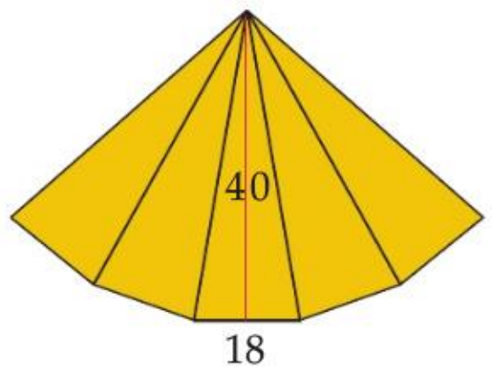
- W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym każda krawędź ma długość 4 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

- Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego jest równe $49\sqrt{3}$ dm². Oblicz długość krawędzi tego czworościanu.

- W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy jest równa 2 cm, a wysokość ściany bocznej jest równa 12 cm. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

- Dach karmnika dla ptaków ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość 0,5 m. Oblicz, ile co najmniej metrów kwadratowych płyty pilśniowej użyto na wykonanie tego dachu, jeżeli wysokość ściany bocznej ma 80 cm.

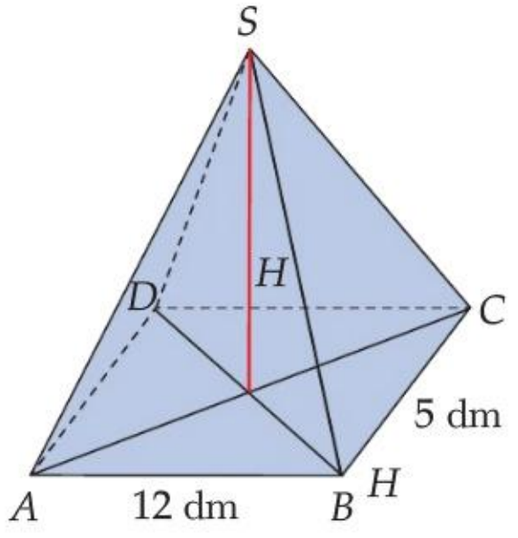
- Oblicz pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę powierzchni bocznej przedstawiono na rysunku obok. Krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 18, a wysokość ściany bocznej 40.



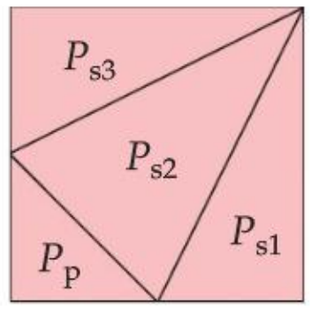
- W ostrosłupie prawidłowym wszystkie krawędzie są równe. Oblicz, ile razy pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest większe od pola jego podstawy, jeżeli ostrosłup ten jest

  a) trójkątny, b) czworokątny.

- W ostrosłupie $ABCD$, podstawą jest prostokąt $ABCD$, a wysokość ostrosłupa jest równa przekątnej podstawy. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.



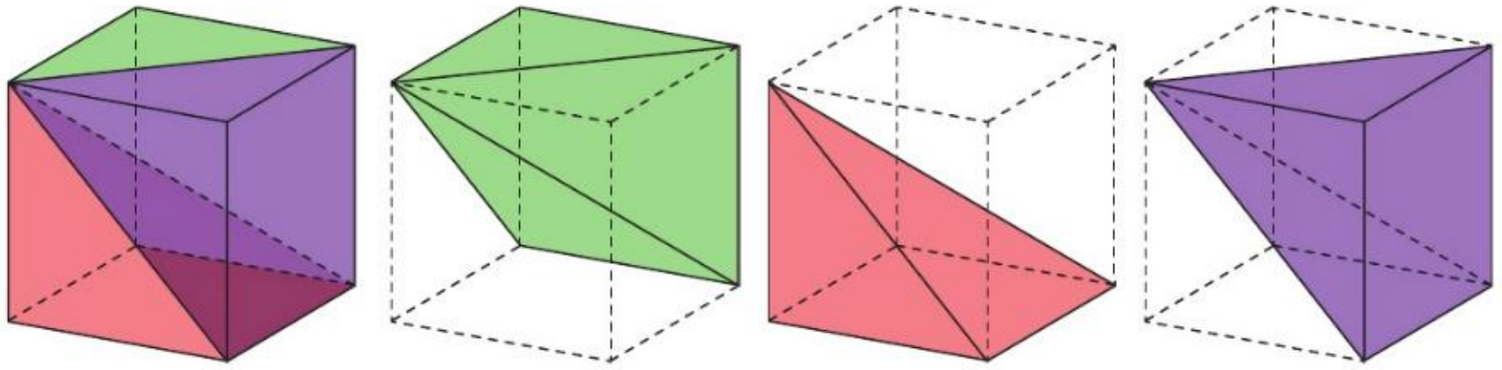
- Tomek z kawałka kolorowego papieru w kształcie kwadratu o polu 144 cm² wyciął siatkę ostrosłupa, taką jak na rysunku. Oblicz pole podstawy P_p tego ostrosłupa oraz pole każdej ze ścian bocznych P_{s1}, P_{s2} i P_{s3}.



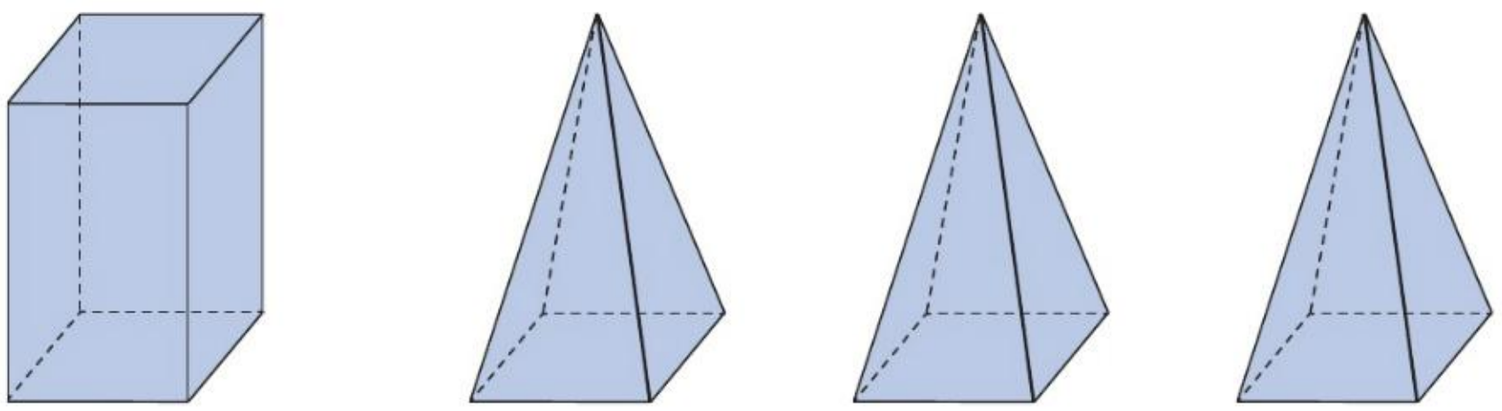
4.3 Objętość ostrosłupa

Podejmij temat

Sześcian rozcięto na trzy jednakowe części. Jaki kształt mają bryły, które otrzymano? Porównaj pola podstawy i wysokości otrzymanych trzech brył. Co zauważasz?



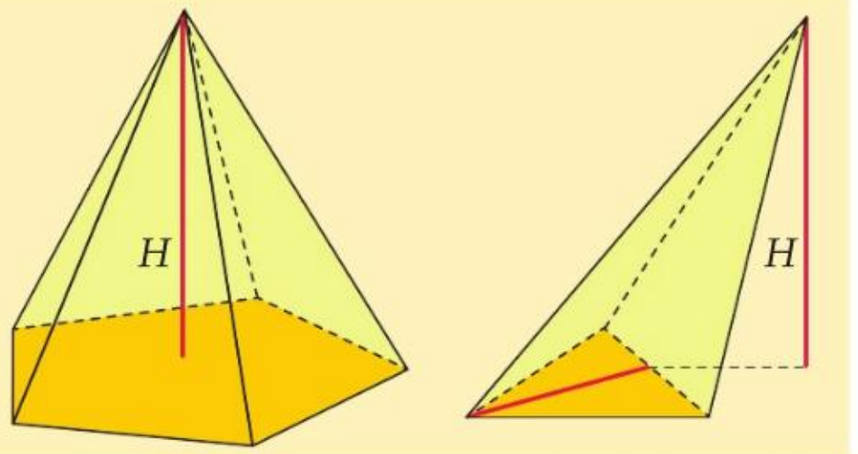
Objętość ostrosłupa jest trzy razy mniejsza od objętości graniastosłupa o tej samej podstawie i tej samej wysokości.



Objętość ostrosłupa jest równa trzeciej części iloczynu pola podstawy i wysokości tego ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

V – objętość ostrosłupa
P_p – pole podstawy ostrosłupa
H – wysokość ostrosłupa



Przykład 1

Podstawą ostrosłupa jest pięciokąt o polu 15 cm². Wysokość ostrosłupa jest równa 10 cm. Obliczmy objętość tej bryły.

Obliczmy objętość ostrosłupa, korzystając ze wzoru:

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$

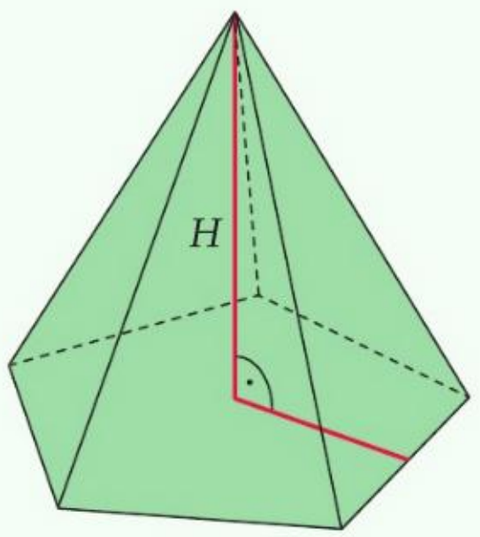
$P_p = 15 \text{ cm}^2$

$H = 10 \text{ cm}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 10$

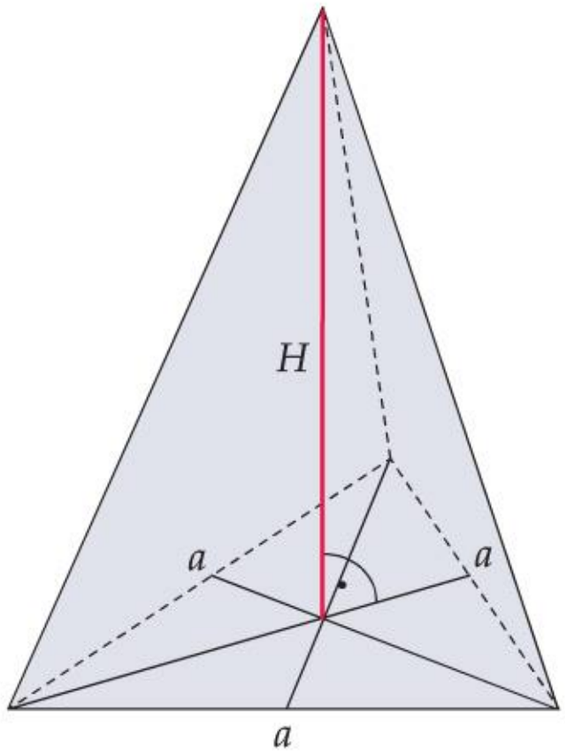
$V = 50$

Objętość ostrosłupa jest równa 50 cm³.



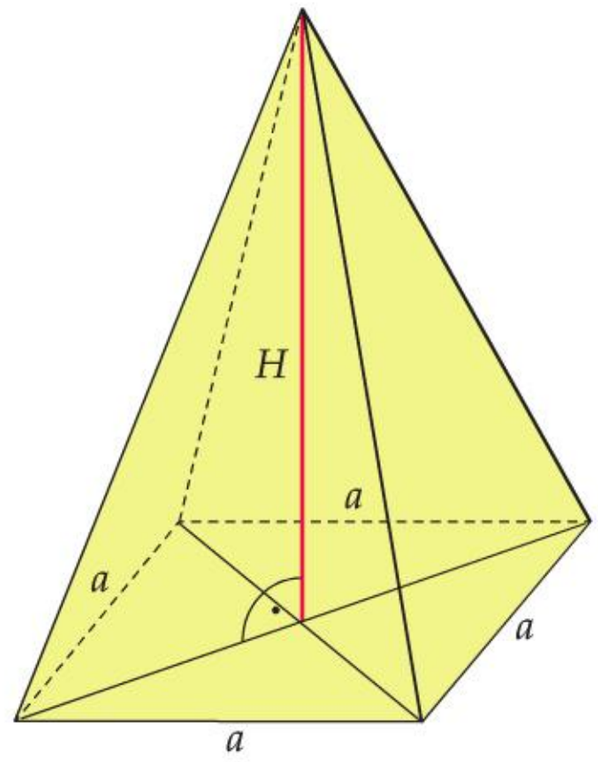
1. Pole podstawy ostrosłupa jest równe 75 cm^2, a wysokość 21 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Wyznaczmy wzory na objętości ostrosłupów prawidłowych, pamiętając, że podstawa każdego z takich ostrosłupów jest wielokątem foremnym.



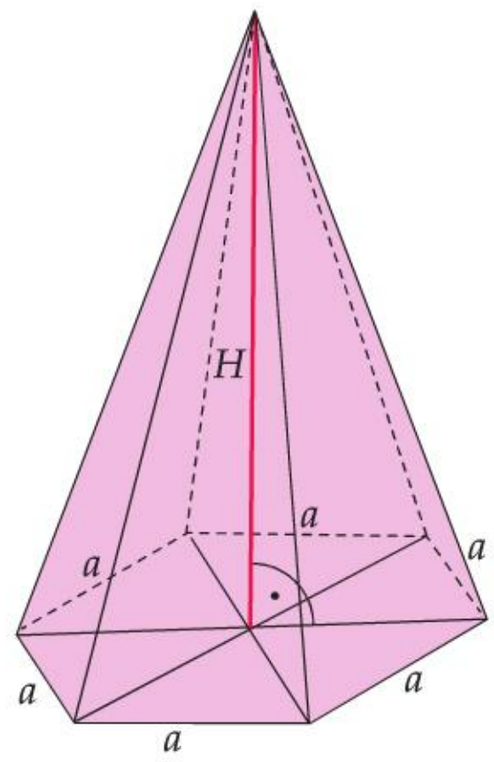
Objętość V ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 \cdot H$$



Objętość V ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H$$



Objętość V ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy a i wysokości H

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot H$$

Przykład 2

Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa $250\sqrt{3}$ cm^3. Wysokość ostrosłupa jest równa 20 cm. Obliczmy długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

Oznaczmy:
a – długość krawędzi ostrosłupa (w cm), $a > 0$
$V = 250\sqrt{3}$ cm^3
$H = 20$ cm

Korzystamy ze wzoru na objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot H$$
$$250\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot 20 \mid \cdot \frac{2}{20 \cdot \sqrt{3}}$$
$$25 = a^2$$
$$a = 5$$

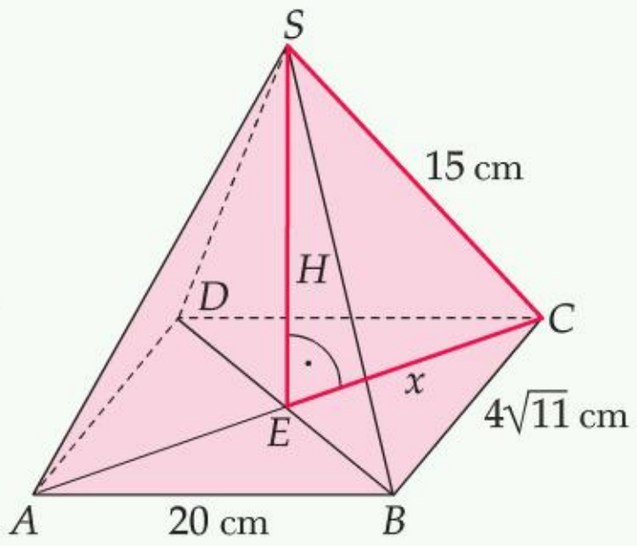
Długość krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa 5 cm.

2. Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $27\sqrt{3}$ cm^3. Krawędź podstawy ostrosłupa jest równa 3 cm. Oblicz wysokość ostrosłupa.

Przykład 3

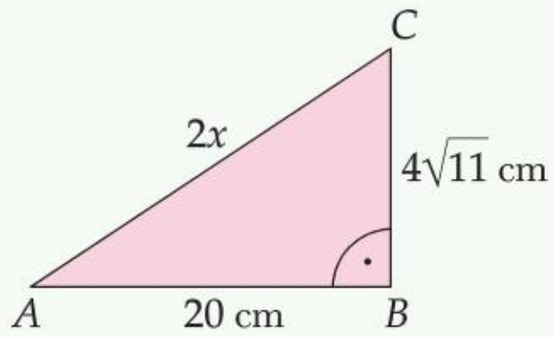
Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 20 cm i $4\sqrt{11}$ cm, a każda krawędź boczna ma długość 15 cm. Obliczmy objętość tego ostrosłupa.

Sporządźmy rysunek pomocniczy.



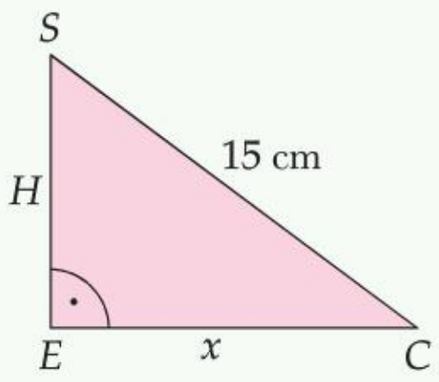
Oznaczmy:
$2x$ – długość przekątnej podstawy ostrosłupa (w cm), $x > 0$
H – wysokość ostrosłupa (w cm), $H > 0$
V – objętość ostrosłupa (w cm^3)

Obliczmy najpierw długość przekątnej podstawy ostrosłupa. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC.



$(2x)^2 = 20^2 + \left(4\sqrt{11}\right)^2$
$4x^2 = 400 + 176$
$4x^2 = 576$
$x^2 = 144$
$x = 12$

Aby obliczyć wysokość ostrosłupa, korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ECS.



$H^2 + x^2 = 15^2$
$H^2 + 12^2 = 15^2$
$H^2 = 225 - 144$
$H^2 = 81$
$H = 9$

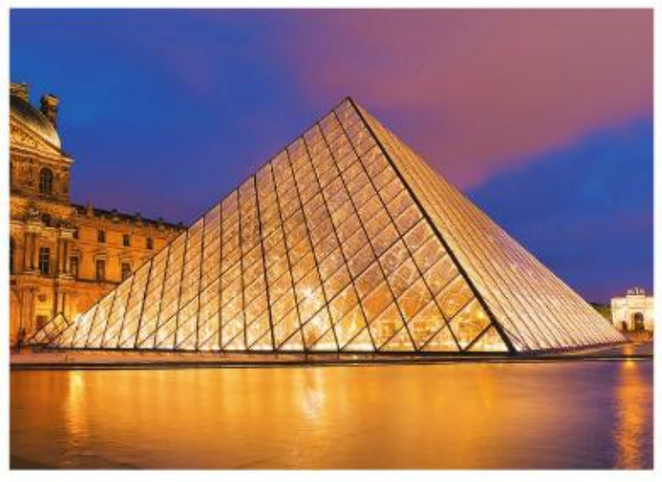
Obliczamy objętość ostrosłupa.

$V = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 4\sqrt{11} \cdot 9$
$V = 240\sqrt{11}$

Objętość ostrosłupa jest równa $240\sqrt{11}$ cm^3.

3. Podstawą ostrosłupa jest romb o boku długości $10\sqrt{3}$ cm i kącie ostrym 60°. Wysokość ostrosłupa jest dwukrotnie większa od wysokości rombu. Oblicz objętość ostrosłupa.

Ciekawe!



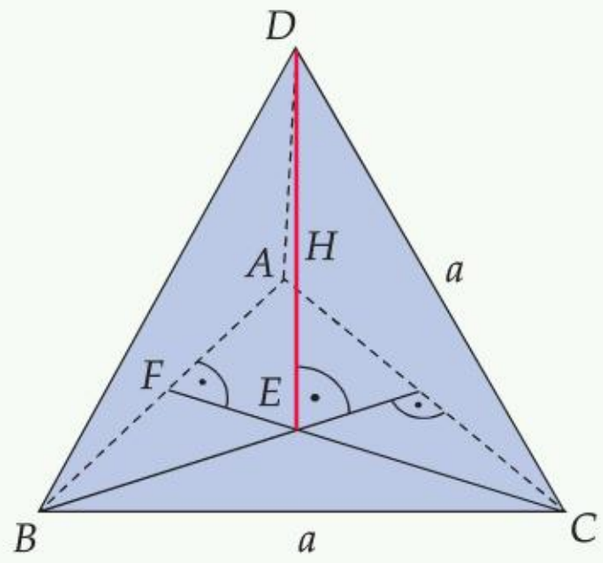
W Europie kształt ostrosłupa ma budowla wzniesiona ze szkła na dziedzińcu Luwru w Paryżu. Mieszczą się w niej wejścia do muzeum, a także liczne sklepy i restauracje.

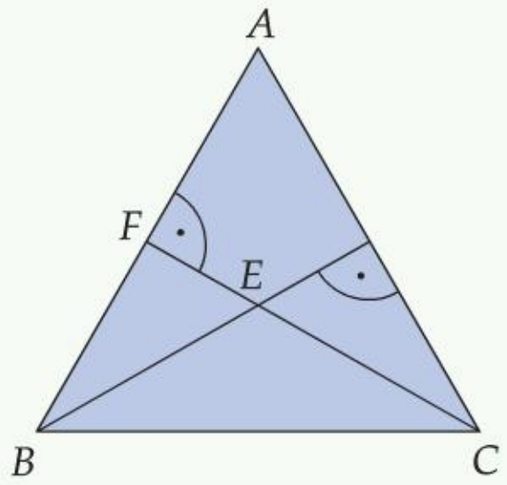
Przykład 4

Obliczmy objętość czworościanu foremnego o krawędzi a.

Przyjmijmy takie oznaczenia jak na rysunku.

Spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w punkcie E przecięcia wysokości trójkąta będącego podstawą ostrosłupa. Wysokości trójkąta równobocznego przecinają się w stosunku 2 : 1. Obliczamy długość odcinka CE.



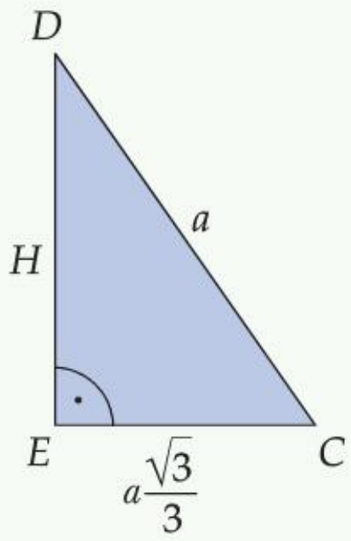


$$|CE| = \frac{2}{3} \cdot |CF|$$

$$|CF| = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|CE| = \frac{2}{3} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Wysokość H ostrosłupa obliczamy, korzystając z trójkąta prostokątnego CDE.
W czworościanie foremnym wszystkie krawędzie są równe.



$$|CE|^2 + |DE|^2 = |CD|^2$$

$$\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + H^2 = a^2$$

$$\frac{3a^2}{9} + H^2 = a^2$$

$$H^2 = \frac{3a^2 - a^2}{3}$$

$$H^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$H = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Mnożymy licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{3}$, aby w mianowniku nie było pierwiastka.

Wyznaczamy pole podstawy ostrosłupa – jest to pole trójkąta równobocznego o boku długości a.

$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

Obliczamy objętość czworościanu.

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot P_p$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{18}}{36} \cdot a^3 = \frac{3\sqrt{2}}{36} \cdot a^3$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

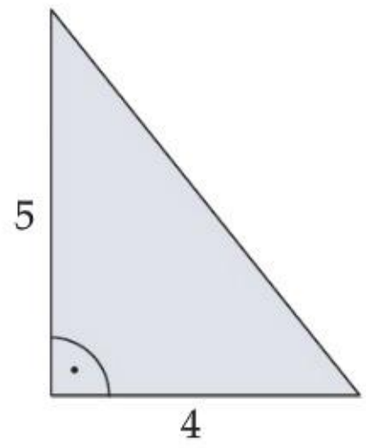
Objętość czworościanu foremnego o krawędzi a jest równa $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

4. Oblicz objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości 6 dm.

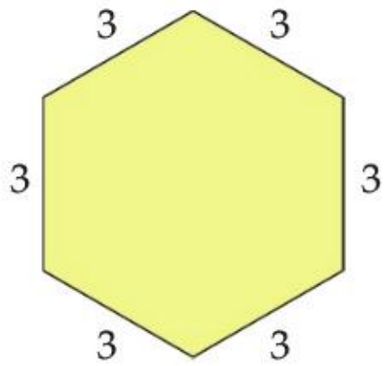
Zadania

Oblicz objętość ostrosłupa, którego wysokość jest równa 20 cm, a podstawą jest wielokąt przedstawiony na rysunku.

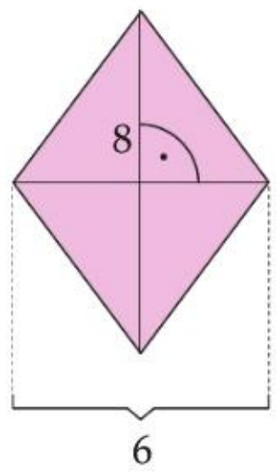
a)



b)



c)



Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa wysokości podstawy tego ostrosłupa i wynosi $\sqrt{3}$ cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krótsza przekątna podstawy jest równa 12 cm. Wysokość ostrosłupa jest równa 30 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Oblicz obwód podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest równa 12 cm, a objętość 64 cm^3.

Jedna krawędź boczna ostrosłupa jest prostopadła do podstawy i ma długość 30 cm. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 5 cm i 7 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o obwodzie 20 cm. Stosunek długości boków podstawy jest równy 3 : 2. Objętość ostrosłupa jest równa 88 cm^3. Oblicz wysokość ostrosłupa.

Objętość ostrosłupa jest równa 120 dm^3. Oblicz wysokość tego ostrosłupa, jeżeli podstawą tej bryły jest

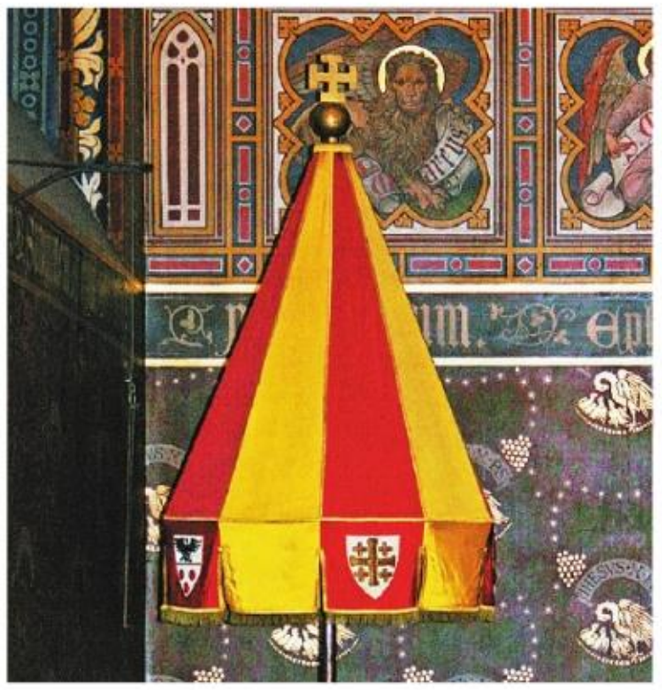
a) trójkąt prostokątny o kątach ostrych 30° i 60° i najdłuższym boku długości 6 dm,
b) trapez o wysokości 4 dm i podstawach długości 10 dm i 6 dm.

Objętość czworościanu foremnego jest równa $18\sqrt{2}$ cm^3. Oblicz

a) długość krawędzi bocznej tej bryły,
b) wysokość tej bryły,
c) pole podstawy tej bryły.

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wszystkie krawędzi mają długość $2a$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Ciekawe!

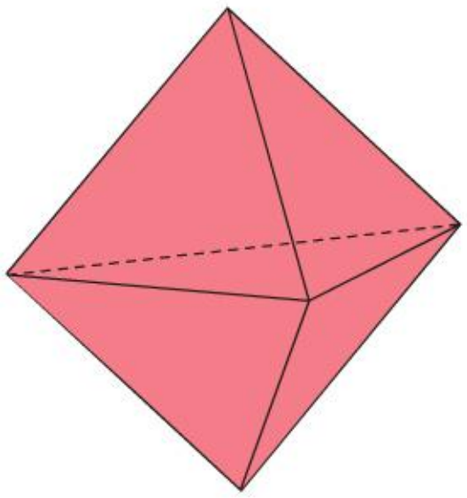


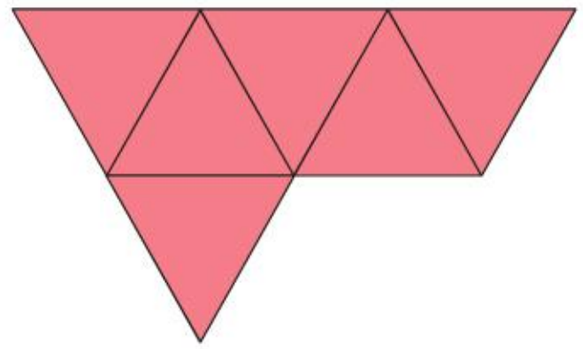
Pierwsze parasole używane były już w starożytnym Egipcie, do osłony przed palącym słońcem. Wykonane były z liści palmowych lub ptasich piór. W Europie parasole spopularyzowali Grecy. Składany parasol opatentował w 1715 r. Francuz Jean (czyt. żan) Marius. Każdego roku na świecie 10 lutego obchodzony jest Dzień Parasola . Obecne parasole mają różne kształty i przeznaczenie. Chronią przed deszczem, słońcem, służą jako elementy dekoracyjne, także jako baldachimy w ceremoniach państwowych i kościelnych. Część górna niektórych z nich ma kształt ostrosłupa.

4.4 Pole i objętość ostrosłupa

Podejmij temat

Wielościan na rysunku zwany jest sześciościanem lub dwupiramidą trójkątną. Można go zbudować z dwóch jednakowych czworościanów lub wykorzystać narysowaną obok siatkę.





Jakie dwa ostrosłupy sklejono podstawami, aby uzyskać wielościan na rysunku obok? Ile wierzchołków, ile krawędzi i ile ścian ma ta bryła? Czy wiesz, w jaki sposób policzyć pole powierzchni i objętość tej bryły?

Czy pamiętasz?
$\sqrt{3} \approx 1{,}73$

Przykład 1

Kartonowe opakowanie na cukierki ma kształt sześciościanu. Długość każdej krawędzi tego sześciościanu jest równa 6 cm. Obliczmy, ile centymetrów kwadratowych kartonu potrzeba na wykonanie takiego opakowania. Na zakładki doliczmy 10% pola powierzchni sześciościanu. Wynik podajmy z dokładnością do 0,1 cm^2.

Każda ściana sześciościanu, w kształcie którego jest opakowanie, ma kształt trójkąta równobocznego.

Obliczamy pole powierzchni jednej ściany, czyli pole trójkąta równobocznego o boku długości 6 cm.

$P = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36$

$P = 9\sqrt{3}$

Całkowite pole powierzchni sześciościanu jest sumą pól sześciu jego ścian.

$P_c = 54\sqrt{3}$

Obliczamy, ile kartonu zużyto na zakładki.

$10\% \cdot 54\sqrt{3} = 5{,}4\sqrt{3}$

Na zakładki zużyto $5{,}4\sqrt{3}$ cm^2 kartonu. Zatem na wykonanie całego opakowania potrzeba kartonu:

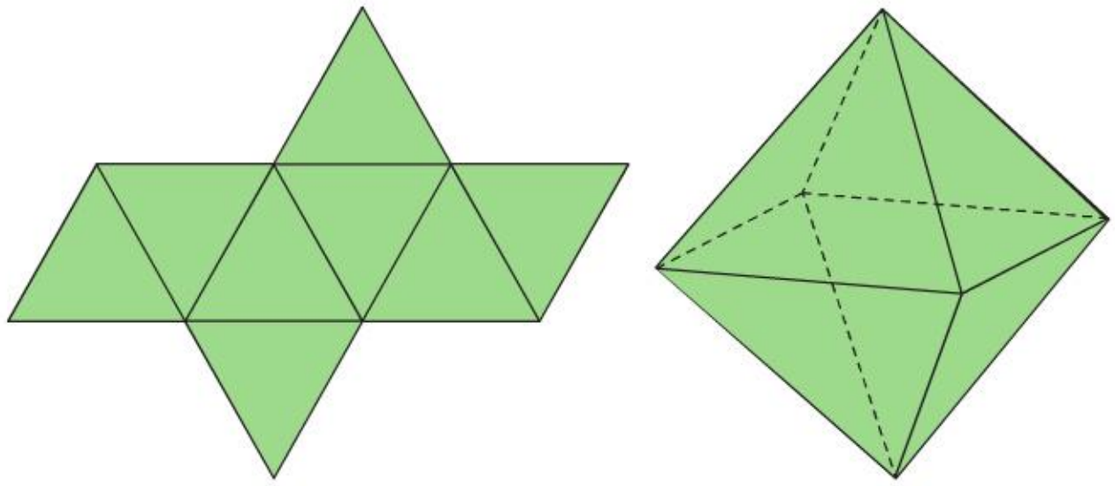
$54\sqrt{3}\ cm^2 + 5{,}4\sqrt{3}\ cm^2 = 59{,}4\sqrt{3}\ cm^2 \approx 102{,}9\ cm^2$

1. Oblicz pole powierzchni sześciościanu, w którym każda krawędź boczna ma długość 12 cm.

Ciekawe!

Bryła zaprezentowana w *Podejmij temat* – deltaedr – zbudowana z dwóch jednakowych czworościanów foremnych, jest jednym z wielościanów wypukłych zwanych bryłami Johnsona, od nazwiska Normana Johnsona, który opisał te wielościany w swojej pracy doktorskiej w 1966 roku.

„Składać” bryły można nie tylko z czworościanów, ale również z dowolnych ostrosłupów. Jedną z najbardziej znanych brył „złożonych” z ostrosłupów jest ośmiościan foremny. Zbudowany jest z dwóch takich samych ostrosłupów prawidłowych czworokątnych. Ośmiościan foremny ma: osiem ścian w kształcie przystających trójkątów równobocznych, cztery pary ścian równoległych, 12 krawędzi, 6 wierzchołków.



Przykład 2

Obliczmy pole powierzchni całkowitej i objętość ośmiościanu foremnego o krawędzi długości a.

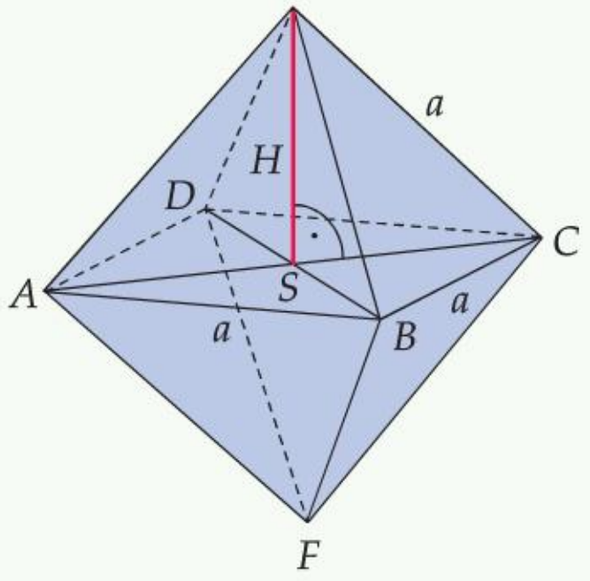
Pole powierzchni ośmiościanu foremnego o krawędzi a jest sumą pól ośmiu przystających trójkątów równobocznych.

$$P_c = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

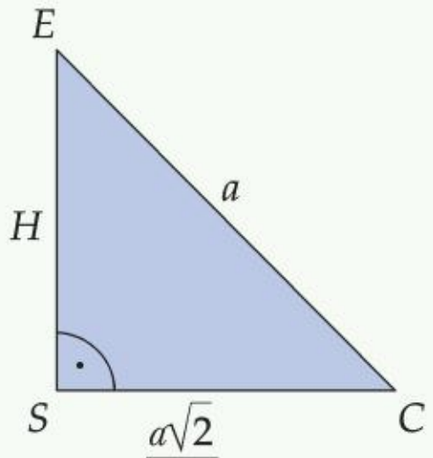
$$P_c = 2\sqrt{3}a^2$$

Objętość ośmiościanu foremnego o krawędzi a jest sumą objętości dwóch jednakowych ostrosłupów prawidłowych czworokątnych. Zapisujemy:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$$



Wyznaczmy wysokość H dla ostrosłupa $ABCDE$.
Wiemy, że odcinek SC to połowa długości przekątnej kwadratu $ABCD$, czyli $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ESC.



$$H^2 + |SC|^2 = a^2$$

$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$$

$$H^2 = a^2 - \frac{2}{4}a^2$$

$$H^2 = \frac{2}{4}a^2$$

$$H = \sqrt{\frac{2}{4}a^2}$$

$$H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Wysokość H dla ostrosłupa $ABCDE$ jest równa wysokości ostrosłupa $ABCDF$.

Wyznaczmy objętość ośmiościanu foremnego $FABCDE$.

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$$

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

Pole powierzchni ośmiościanu foremnego o krawędzi a jest równe $2\sqrt{3}a^2$, natomiast objętość takiego ośmiościanu to $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Czy pamiętasz?
$\sqrt{2} \approx 1{,}41$

Ciekawe!



Fluoryt, jeden z szeroko rozpowszechnionych w przyrodzie minerałów, występuje w postaci sześciennych lub ośmiościennych kryształów. Ma zastosowanie w przemyśle szklarskim, ceramicznym czy chemicznym.

Przykład 3

Karolina wykonała 10 modeli ośmiościanów foremnych o krawędzi długości 3 cm. Obliczmy, jaką łączną objętość miały wszystkie te modele. Wynik podajmy z dokładnością do 0,1 cm^3.

Korzystamy ze wzoru na objętość ośmiościanu foremnego o krawędzi a:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

W naszym przypadku $a = 3$ cm. Obliczamy objętość jednego ośmiościanu.

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 3^3 = 9\sqrt{2} \approx 12{,}69$$

$$V \approx 12{,}69$$

Karolina zrobiła 10 modeli, zatem mamy:
$10 \cdot 12{,}69\ cm^3 = 126{,}9\ cm^3$

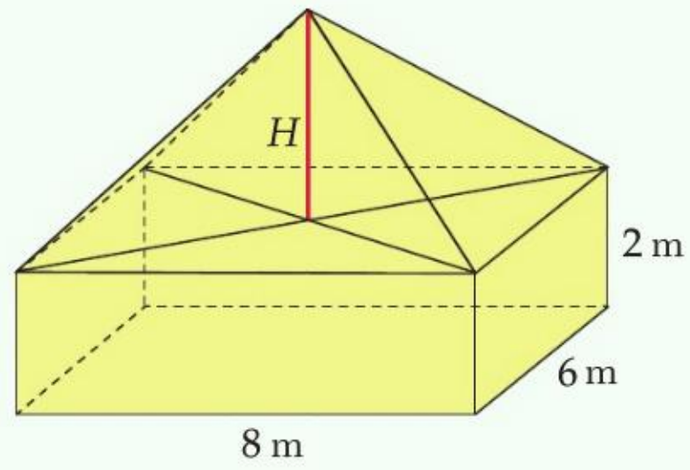
Łączna objętość wszystkich modeli równa jest około 126,9 cm^3.

2. Objętość ośmiościanu foremnego jest równa $72\sqrt{3}$ cm^3. Oblicz długość krawędzi tego ośmiościanu.

W życiu codziennym często spotykamy obiekty utworzone z brył, np. graniastosłupów i ostrosłupów. Są to m.in. elementy zdobnicze, rzeźby, budynki.

Przykład 4

Stodoła ma kształt prostopadłościanu, na którym zbudowano dach w kształcie ostrosłupa. Krawędzie boczne dachu mają tę samą długość. Gdyby stodoła była wypełniona w całości sianem, to zmieściłoby się w niej 176 m^3 siana. Korzystając z danych na rysunku, obliczmy, jaką wysokość ma stodoła.



Objętość bryły, w kształcie której jest stodoła, jest równa sumie objętości prostopadłościanu i ostrosłupa.
Obliczamy najpierw objętość części w kształcie prostopadłościanu.

$$V_p = 8 \cdot 6 \cdot 2$$

$$V_p = 96$$

Teraz obliczamy objętość dachu, który ma kształt ostrosłupa. Jego podstawą jest prostokąt o bokach 8 m i 6 m, a wysokość ostrosłupa jest równa H.

$$V_o = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8 \cdot H$$

$$V_o = 16H$$

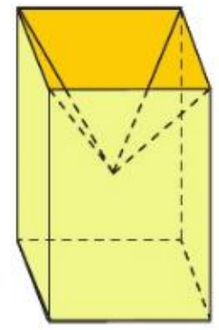
Wyznaczamy objętość całej bryły.
$V = V_p + V_o$
$V = 96 + 16H$

Wyznaczamy wysokość stodoły.
$5\text{ m} + 2\text{ m} = 7\text{ m}$

Stodoła ma wysokość równą 7 m.

Wiemy, że $V = 176\text{ m}^3$, zatem możemy obliczyć wysokość H ostrosłupa:
$176 = 96 + 16H$
$80 = 16H \mid : 16$
$H = 5\text{ m}$

3. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat. Wysokość prostopadłościanu wynosi 12 cm, a objętość 768 cm^3. Z prostopadłościanu wycięto ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości 6 cm. Oblicz objętość pozostałej części prostopadłościanu.

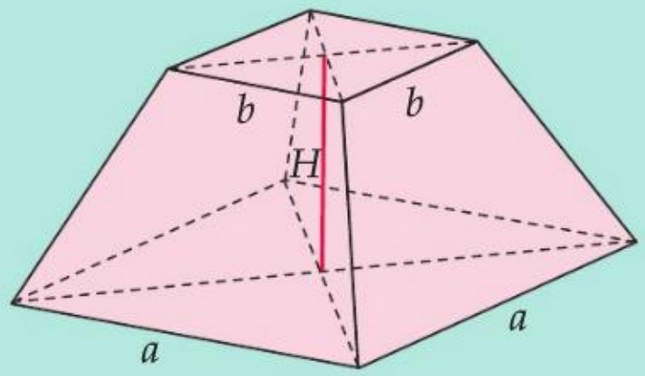


Więcej na temat

Ostrosłup ścięty to bryła, której ściany boczne mają kształt trapezów. Dwie równoległe podstawy ostrosłupa ściętego są wielokątami podobnymi. Wielokąty podobne to takie, z których jeden powstaje z drugiego poprzez powiększenie lub zmniejszenie w pewnej skali. Bryły w kształcie ostrosłupów ściętych są często fragmentami obelisków czy postumentów pod pomniki.

Przykład 5

Pomnik stoi na marmurowym postumencie w kształcie ostrosłupa ściętego (rysunek obok). Podstawy tego ostrosłupa ściętego są kwadratami o bokach odpowiednio równych $a = 12$ dm i $b = 6$ dm. Wysokość tego ostrosłupa ściętego jest równa 4 dm. Obliczmy masę tego postumentu, jeśli gęstość marmuru jest równa $2670\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.



Objętość ostrosłupa ściętego, którego podstawy są kwadratami o bokach odpowiednio równych a i b $(a > b)$, można obliczyć ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2) \cdot H$$

$$V = \frac{12^2 + 12 \cdot 6 + 6^2}{3} \cdot 4 = \frac{144 + 72 + 36}{3} \cdot 4$$

$V = 336\text{ dm}^3 = 0{,}336\text{ m}^3$

Obliczamy masę postumentu.

$0{,}336\text{ m}^3 \cdot 2670\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 897{,}12\text{ kg}$

Masa postumentu jest równa 897,12 kg.

4. Oblicz wysokość przycisku do papieru w kształcie ostrosłupa ściętego o objętości 196 cm^3. Podstawy tej bryły mają kształt kwadratów o bokach długości odpowiednio 5 cm i 3 cm.

Zadania

Piramida ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Wysokość ściany bocznej piramidy jest równa ok. 180 m, a krawędź podstawy 230 m. Oblicz pole powierzchni bocznej tej piramidy.

Oblicz długość krawędzi bocznej:

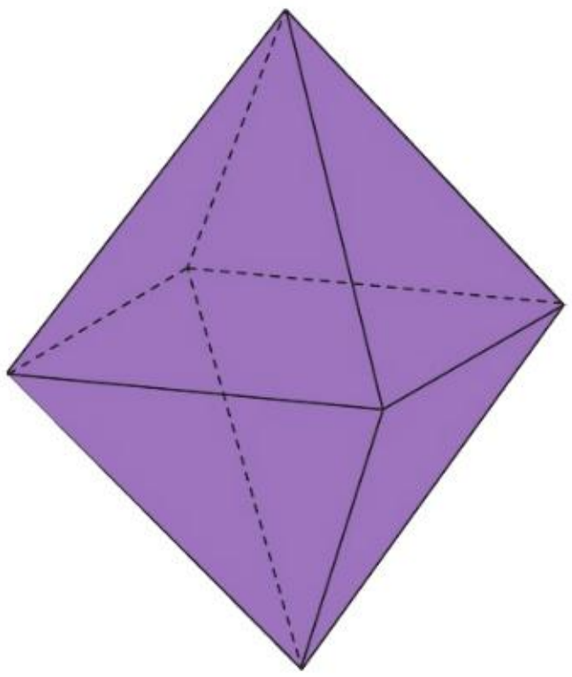
a) ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego pole podstawy jest równe $24\sqrt{3}$ cm^2, a pole powierzchni bocznej jest równe 36 cm^2,

b) czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $16\sqrt{3}$ cm^2.

Dach ma kształt ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 2 m, a krawędź boczna ma długość 7 m. Ile puszek farby potrzeba na pomalowanie dachu, jeśli jedna puszka farby wystarczy na pomalowanie 5 m^2 powierzchni?

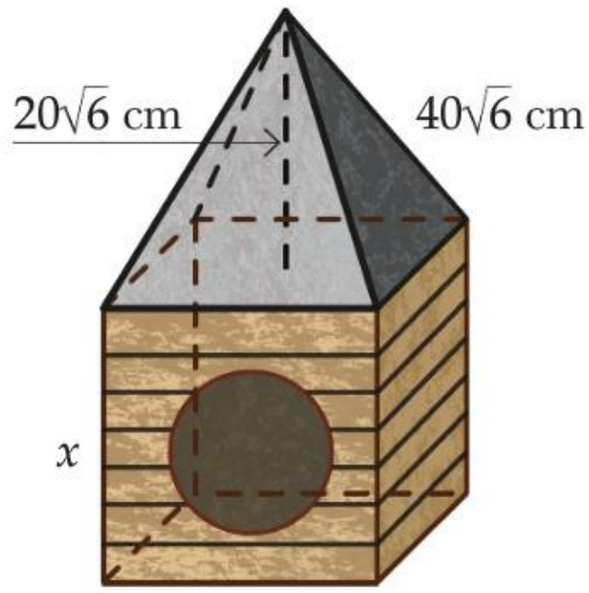
Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego są trójkątami równobocznymi. Pole powierzchni bocznej jest równe $125\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz obwód podstawy tej bryły.

Matylda wykonała z drutu i kolorowej bibułki 10 jednakowych lampionów. Każdy lampion ma kształt ośmiościanu foremnego. Matylda na wykonanie tych lampionów zużyła $80\sqrt{3}$ dm^2 bibułki. Oblicz, ile metrów drutu zużyła Matylda na wykonanie szkieletów wszystkich lampionów.



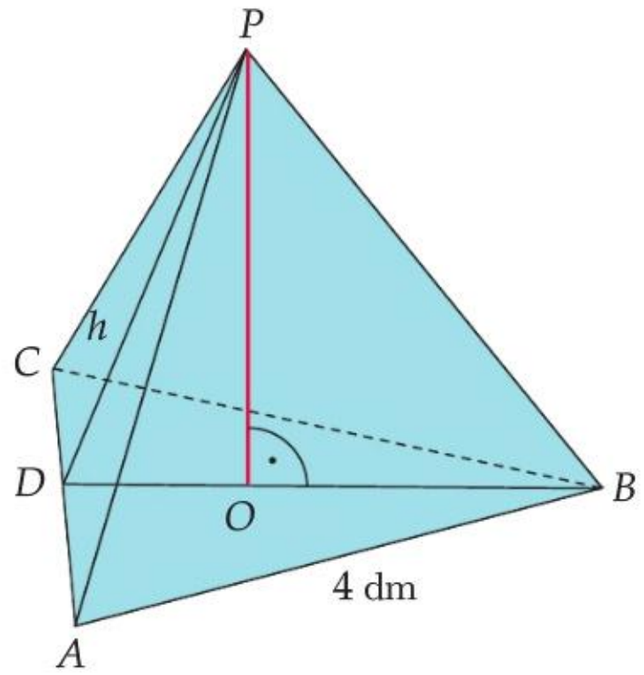
Buda dla psa ma kształt sześcianu, a dach budy ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Ostrosłup, w kształcie którego jest dach budy ma wysokość równą $20\sqrt{6}$ cm, a jego krawędź boczna jest równa $40\sqrt{6}$ cm.

Oblicz, ile decymetrów kwadratowych mają ściany boczne tej budy.
Na otwór wejściowy odlicz 1875 cm^2.



Stopiono 6 jednakowych świec w kształcie ostrosłupów prawidłowych trójkątnych o wysokości 14 cm i krawędzi podstawy 4 cm. Z otrzymanego wosku sporządzono jedną świecę w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości $7\sqrt{3}$ cm. Oblicz długość krawędzi podstawy tej świecy.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCP$ o krawędzi podstawy równej 4 cm jest równa $24\sqrt{3}$ dm^3. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

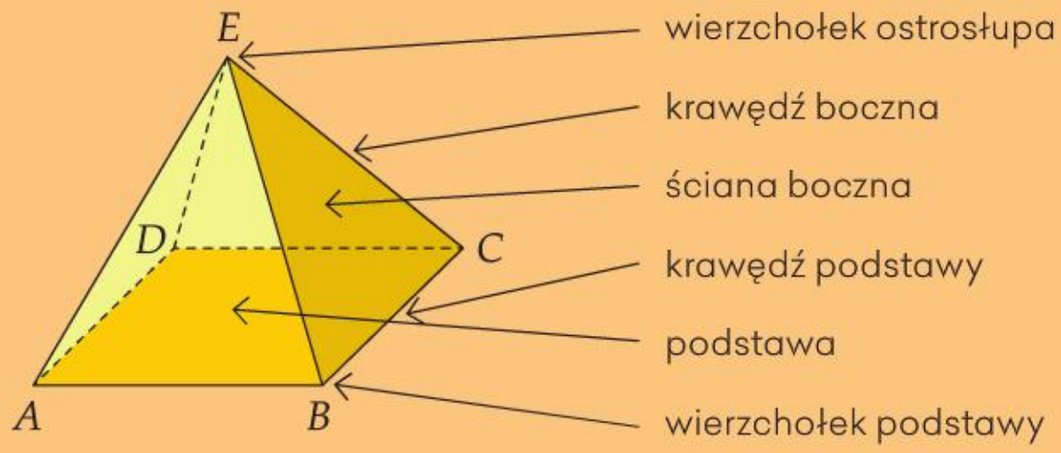


Podsumowanie działu 4

Ważne pojęcia

wierzchołek ostrosłupa	ostrosłup prosty	ostrosłup prawidłowy
ostrosłup pochyły	spodek wysokości	czworościan foremny

Ostrosłup to figura przestrzenna, której podstawą jest dowolny wielokąt, a jej ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.



Ostrosłup n-kątny ma:

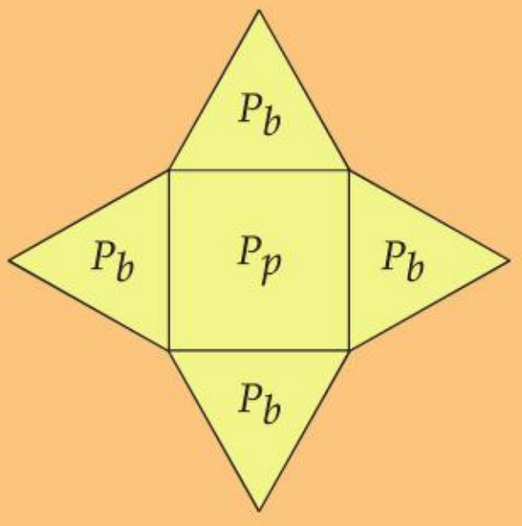
- 1 podstawę,
- 1 wierzchołek ostrosłupa,
- n wierzchołków podstawy,
- $n + 1$ wszystkich wierzchołków,
- n krawędzi bocznych,
- n ścian bocznych,
- n krawędzi podstawy,
- $2n$ wszystkich krawędzi.

Ostrosłup prosty to taki, którego wszystkie krawędzie boczne są równe.

Ostrosłup pochyły to taki, którego krawędzie boczne nie są równej długości.

Ostrosłup prawidłowy to taki, którego wszystkie krawędzie boczne są równe, a podstawa jest wielokątem foremnym.

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa to suma pól wszystkich ścian bocznych tego ostrosłupa.



Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest sumą pola powierzchni podstawy i pola powierzchni bocznej.

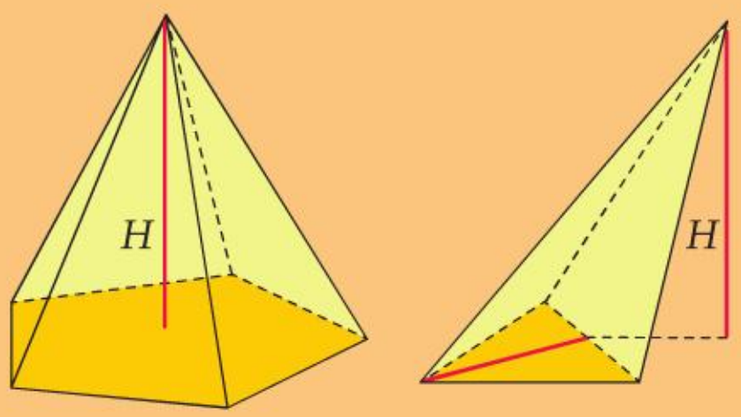
$P_c = P_p + P_b$

gdzie: P_c – pole powierzchni całkowitej, P_p – pole podstawy, P_b – pole powierzchni bocznej

Objętość ostrosłupa jest równa trzeciej części iloczynu pola podstawy i wysokości tego ostrosłupa.

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$

gdzie: V – objętość, P_p – pole podstawy, H – wysokość

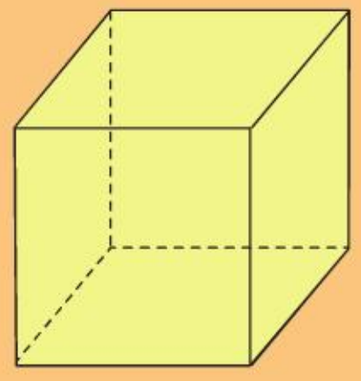


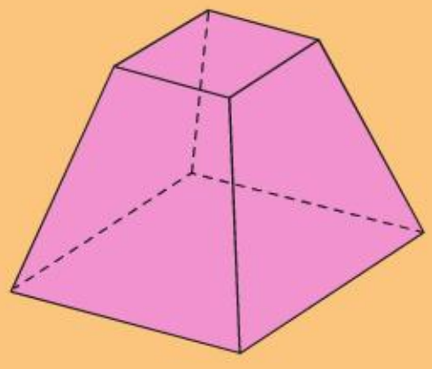
Czy już umiesz?

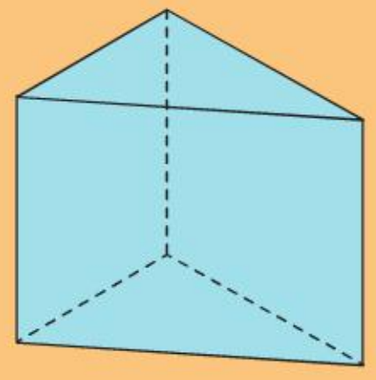
1 Piramida Cheopsa ma kształt ostrosłupa prawidłowego

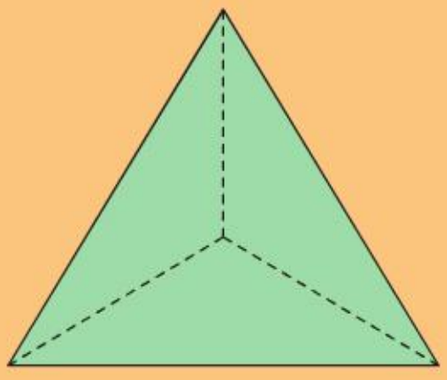
A. trójkątnego. B. czworokątnego. C. pięciokątnego. D. sześciokątnego.

2 Wskaż bryłę, która jest ostrosłupem.

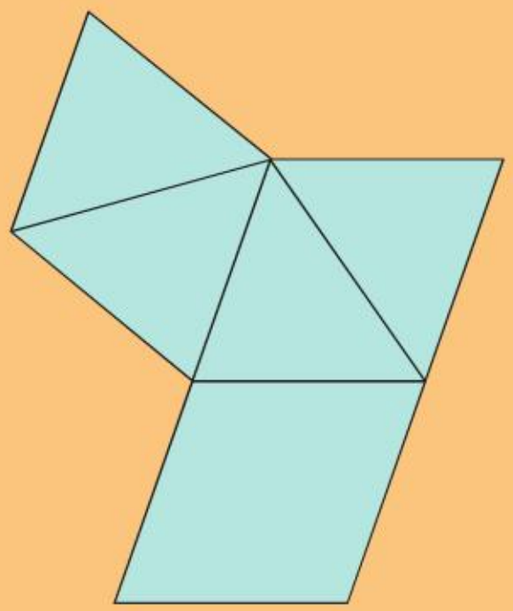
A. 

B. 

C. 

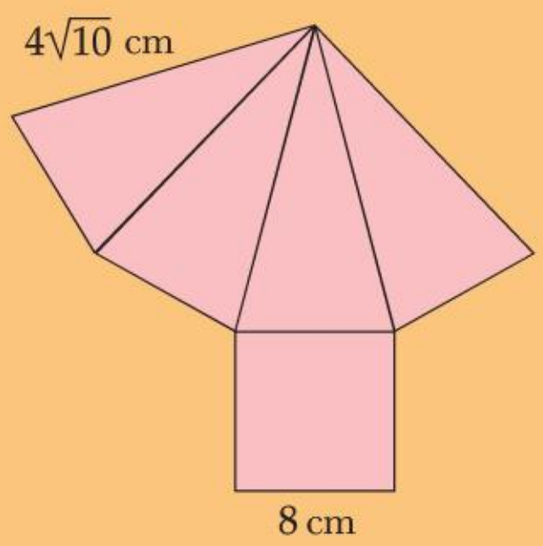
D. 

3 Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa. Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.



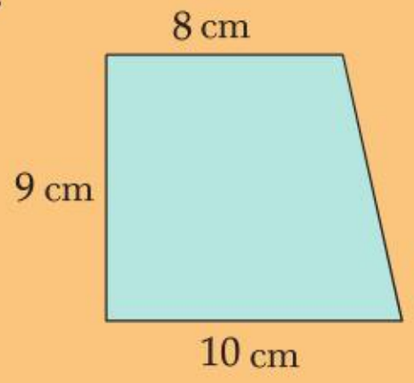
A. Ostrosłup ten ma 4 wierzchołki.
B. Podstawą tego ostrosłupa jest romb.
C. Ostrosłup ten ma 6 krawędzi bocznych.
D. Ostrosłup ten ma 4 ściany boczne.

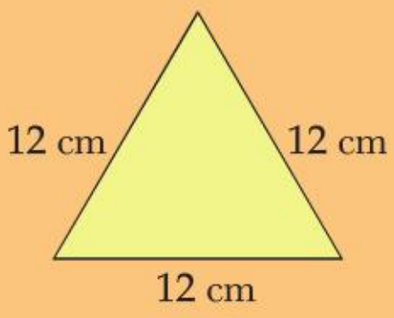
4 Na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 8 cm i krawędzi bocznej $4\sqrt{10}$ cm. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe

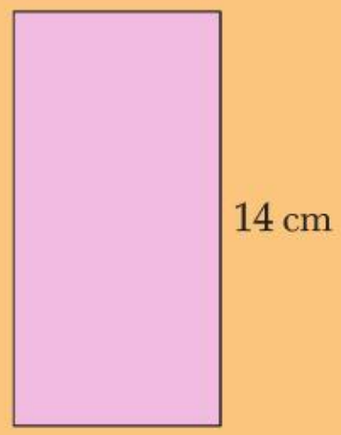


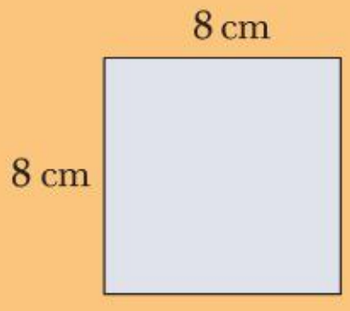
A. 112 cm^2
B. 160 cm^2
C. 256 cm^2
D. 448 cm^2

5 Rysunek przedstawia podstawy ostrosłupów. Wysokości tych ostrosłupów są równe. Który z ostrosłupów ma największą objętość?

A. 

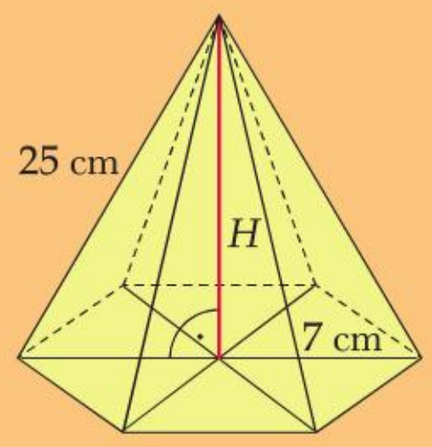
B. 

C. 

D. 

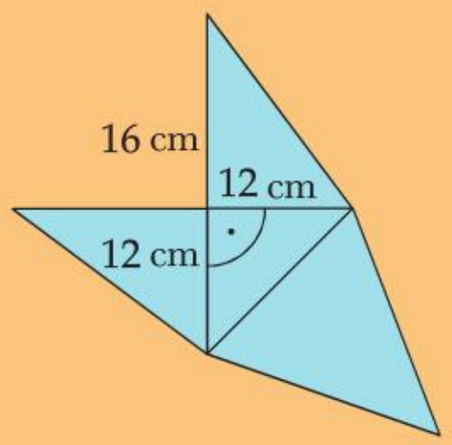
6 Objętość ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku jest równa

A. $294\sqrt{3}$ cm^3
B. $588\sqrt{3}$ cm^3
C. $1764\sqrt{3}$ cm^3
D. $84\sqrt{3}$ cm^3

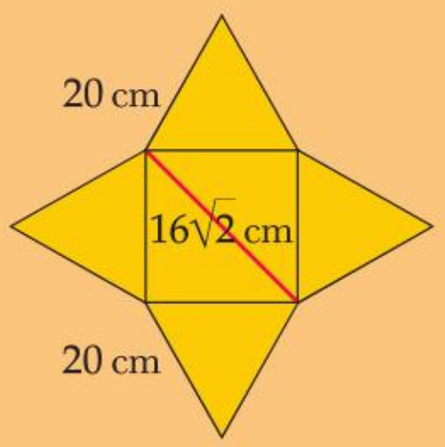


7 Darek i Arek sporządzili z papieru kolorowego modele ostrosłupów. Oblicz, który chłopiec zużył więcej papieru na wykonanie swojego modelu. Na każdy model dolicz 10% papieru na zakładki.

Darek



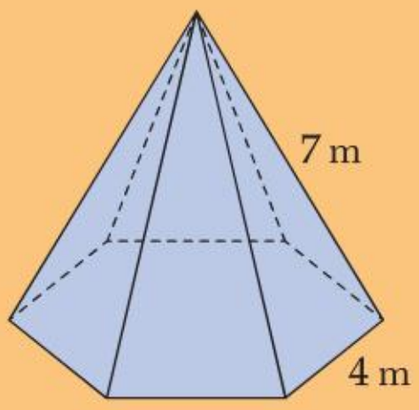
Arek



8 Pole powierzchni bocznej pomnika w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 256 dm^2, a pole powierzchni całkowitej jest dwa razy większe. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

9 Dach wieży ma kształt ostrosłupa prawidłowego dziesięciokątnego o krawędzi podstawy 1,4 m i krawędzi bocznej długości 2,5 m. Oblicz, ile metrów kwadratowych blachy zużyto na wykonanie tego dachu.

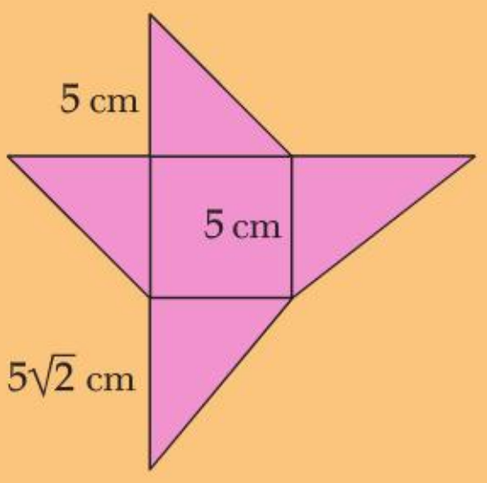
10 Namiot ma kształt ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o wymiarach takich jak na rysunku. Oblicz, ile metrów kwadratowych płótna zużyto na wykonanie tego namiotu.



11 Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 6 cm i 2 cm. Objętość ostrosłupa jest równa 44 cm^3. Oblicz wysokość ostrosłupa.

12 Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 10 cm. Wysokość ostrosłupa jest równa 15 cm. Oblicz pole powierzchni i objętość tego ostrosłupa.

13 Oblicz objętość ostrosłupa o podstawie kwadratu, którego siatka przedstawiona jest na rysunku.



NIEZWYKŁE WIELOŚCIANY

Wielościany to bryły geometryczne, których powierzchnia boczna składa się z wielokątów. Każdy bok jest wspólny dla dwóch wielokątów. Poza punktami leżącymi na wspólnym boku dwie ściany nie mają innych punktów wspólnych.

Wielościany archimedesowe (półforemne)

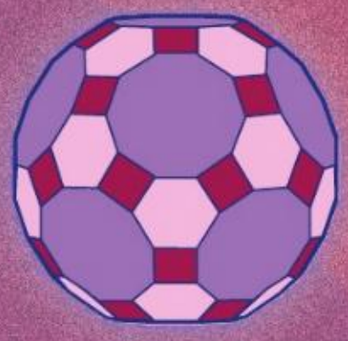
To wielościany, których ściany są wielokątami foremnymi dwóch lub trzech rodzajów i w każdym wierzchołku schodzi się ta sama liczba krawędzi. Istnieje 13 wielościanów archimedesowych. Oto przykłady dwóch takich wielościanów.

Wielościany Catalana

Zastępując w wielościanie archimedesowym każdą ścianę wierzchołkiem, a każdy wierzchołek ścianą, otrzymujemy wielościany zwane wielościanami Catalana, od nazwiska belgijskiego matematyka Eugène Catalana (czyt. yżena katalana), który opisał je w 1865 roku.



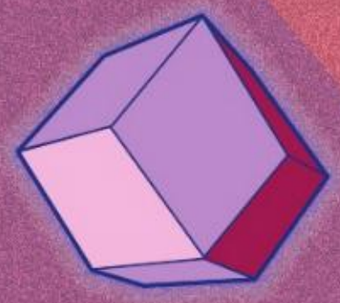
czworościan ścięty



dwudziesto-dwunastościan rombowy wielki



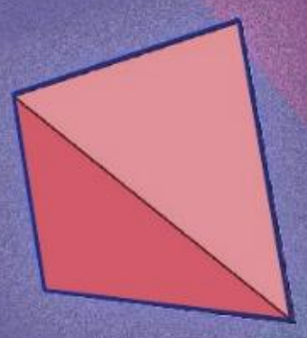
czworościan potrójny



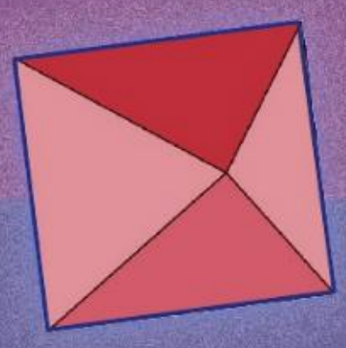
dwunastościan rombowy

Graniastosłupy archimedesowe i antygraniastosłupy prawidłowe

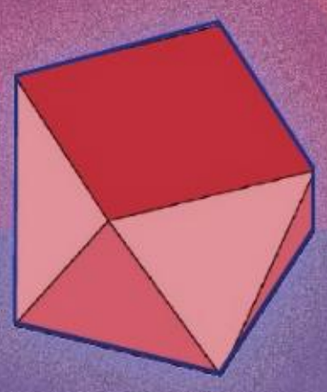
Do wielościanów półforemnych czasami zalicza się również dwie niekończące się serie: graniastosłupy archimedesowe i antygraniastosłupy prawidłowe. Graniastosłup archimedesowy to graniastosłup prawidłowy, którego wszystkie krawędzie mają tę samą długość. Podstawą takiego graniastosłupa jest wielokąt foremny, a ściany boczne są kwadratami. Jeśli w takim graniastosłupie „skręcimy" jedną z podstaw o odpowiedni kąt, to ściany boczne będą trójkątami równobocznymi, a w każdym wierzchołku będą się schodziły jedna podstawa i trzy ściany boczne. Takie wielościany nazywamy antygraniastosłupami prawidłowymi.



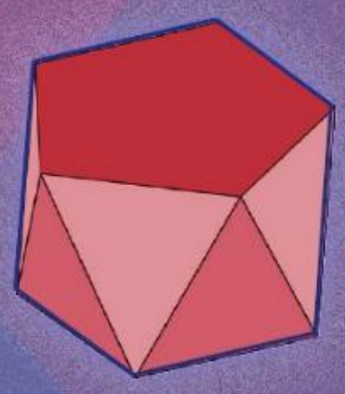
antypryzmat



trygonalny antypryzmat



kwadratowy antypryzmat



pięciokątny antypryzmat

Zadania

1. Jakimi wielokątami są ściany czworościanu ściętego? Ile jest ścian każdego rodzaju? Ile wierzchołków i ile krawędzi ma ta bryła?

2. Zaprojektuj (lub znajdź w internecie) siatkę dowolnego antygraniastosłupa prawidłowego i wykonaj model bryły. Podaj kilka własności tego antygraniastosłupa.

Wielościany Keplera-Poinsota

Wielościany Keplera-Poinsota (czyt. płasota) to foremne wielościany gwiaździste, których ściany są przystającymi wielokątami wypukłymi lub wielokątami gwiaździstymi.



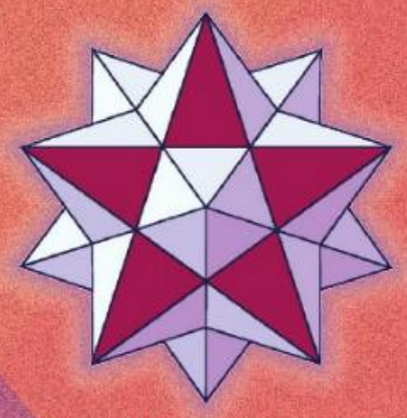
wielki dwunastościan



wielki dwudziestościan



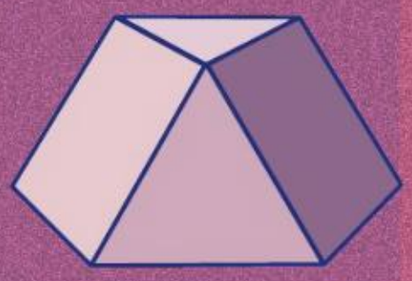
wielki dwunastościan gwiaździsty



mały dwunastościan gwiaździsty

Bryły Johnsona

Bryły Johnsona to wielościany o ścianach będących wielokątami foremnymi i wierzchołkach, w których schodzą się różne liczby krawędzi. Norman Johnson, od którego pochodzi nazwa tych wielościanów, opublikował w 1966 roku listę przedstawiającą wszystkie 92 bryły. Kilka lat później inny matematyk dowiódł, że lista ta jest kompletna.



trójkątna kopuła



dwupiramida czworokątna wydłużona



rozszerzony dwunastościan



wydłużona pięciokątna kopuła

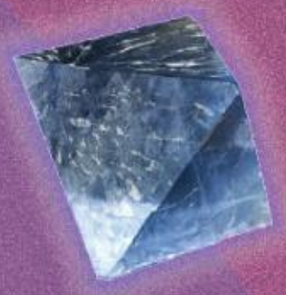
Wielościany w przyrodzie



piryt – oktaedr



piryt – sześcian



fluoryt – oktaedr



granat – dwunastościan rombowy

Budowle w kształcie wielościanów



Kopuła geodezyjna w parku EPCOT na Florydzie – budowla, w kształcie wielościanu. Z daleka jej kształt przypomina kulę.



Wieże KIO w Madrycie – budowle w kształcie graniastosłupów pochyłych.

3. Wskaż w swoim otoczeniu kilka przedmiotów w kształcie wielościanów. Czy są wśród nich przedmioty w kształcie wielościanów półforemnych?

4. Poszukaj informacji na temat niezwykłych budowli w kształcie wielościanów.

Odpowiedzi do zadań

1. Proporcjonalność prosta

1.1 Proporcja i jej własności (s. 10)

1. a) 168 b) 14 520 c) 612 d) 43,2 e) 0,405 f) $2\frac{2}{3}$

2. a) = b) = c) ≠ d) = e) ≠ f) =

3. a) 6 : 18 = 23 : 69; 18 : 6 = 69 : 23; 6 : 23 = 18 : 69; 23 : 6 = 69 : 18 b) 0,4 : 2,8 = 0,9 : 6,3; 2,8 : 0,4 = 6,3 : 0,9; 0,4 : 0,9 = 2,8 : 6,3; 0,9 : 0,4 = 6,3 : 2,8

4. a) 21 b) 9,9 c) $\frac{1}{7}$ d) 60 e) 6,5 f) 9 g) 2,4 h) 31,2

5. a) $a = 50$ b) $b = 2, b \neq \frac{1}{3}$ c) $c = \frac{1}{3}, c \neq -1$ d) $d = 1, d \neq \frac{5}{2}$ e) $e = 10, e \neq \frac{4}{3}, e \neq \frac{1}{4}$ f) $f = 4{,}5, f \neq 2, f \neq -\frac{1}{2}$ g) $g = 1\frac{14}{15}, g \neq \frac{4}{3}, g \neq 2$ h) $h = 0{,}25, h \neq \frac{7}{4}$ **6.** a) $\frac{10}{15}$ b) $\frac{21}{12}$ c) $\frac{32}{20}$ d) $\frac{45}{55}$

7. 7 **8*.** $\frac{9}{15}, \frac{15}{25}$ **9*.** a) $6, \frac{16}{64}$ b) $9, \frac{19}{95}$ c) $6, \frac{26}{65}$

1.2 Zastosowanie proporcji do rozwiązywania problemów (s. 15)

1. 4,2 km **2.** 100 zł **3.** 2 godziny 45 minut

4. 3,2 kg – małe opakowanie; 5,6 kg – duże opakowanie

5. Karolina ma 350 zł, a Magda 420 zł

6. Mama 56 lat, córka 35 lat

7. $Obw. = 31{,}2$ cm, $P = 51{,}84$ cm²

8. $P = 5{,}67$ dm² **9.** 50 g **10.** 15 g

1.3 Wielkości wprost proporcjonalne (s. 21)

1. a) górny wiersz: 7,5; dolny wiersz: 4,5; 9

b) górny wiersz: 5,5; 13; dolny wiersz: 0,9

2. a) górny wiersz: 2, 5, 9,2; dolny wiersz: 0,2; 0,35; 0,9

b) tak **3.** liczba pączków: 10; 15; 20; 30; 40; 60;

mleko: 125; 187,5; 250; 375; 500; 750;

drożdże: 25; 37,5; 50; 75; 100; 150;

mąka: 250; 375; 500; 750; 1000; 1500;

liczba jaj: 2; 3; 4; 6; 8; 12 a) tak b) tak c) tak d) tak e) tak

4. a) tak b) nie c) nie d) tak

7. a) tak b) nie c) tak d) nie

1.4 Zastosowanie wielkości wprost proporcjonalnych (s. 27)

1. 7 **2.** a) 23 b) 138 malin; 17,25 brzoskwiń

3. 4,32 zł; 7,20 zł; 17,28 zł **4.** 1 km 350 m

5. 420 stron, 12 minut 30 sekund **6.** 29,7 l **7.** 360 km

8*. 150 km – osobowy; 200 km – pospieszny; 2,5 h

9. 76,40 GBP **10.** a) 478,47 GHF b) 12,91 zł **11.** 57,6 g

12. a) 7,2 g – tłuszczów; 0,96 g – węglowodanów; 2,01 g – białka b) 125 g c) ok. 4,84%

13. 12 cm **14.** $19{,}5\sqrt{2}$ cm

15. 0,3 l – mały słoik; 0,5 l – większy słoik; 21

1.5 Podział proporcjonalny (s. 36)

1. 354 dziewcząt, 531 chłopców **2.** 270 stron, 27 dni

3. Oliwka – 6 zł, Milan – 6,75 zł, Sylwia – 8,25 zł

4. Ilona – 100 zł, Justyna – 250 zł

5. 82,5 g – sól; 292,5 g – woda

6. 112,5 g – złoto; 12,5 g – miedzi

7. 150 ml – syrop, 1050 ml – woda **8*.** 11 : 24

9. a) 2 kwietnia – 1 : 3, 1 października – 3 : 1

b) 5 maja – 25 : 48, 28 sierpnia – 48 : 25

10. $|AB| = 45$ cm, $|BC| = 27$ cm

11. 3 cm, 7,5 cm; $P = 22{,}5$ cm²

12. 3,5 dm, 3,5 dm, 2 dm; $P = 1{,}5\sqrt{5}$ dm²

13. 35 cm, 84 cm, 91 cm; $P = 1470$ cm²

14. $Obw. = 76$ cm; 4 : 6 : 9

Czy już umiesz? (s. 38)

1. B **2.** D **3.** D **4.** A **5.** C **6.** B **7.** D **8.** B

9. B **10.** A **11.** a) P b) F c) P d) P e) F

12. a) P b) F c) F d) P e) P **13.** a) 3 b) 2 c) 14 d) 7

14. a) $a = 10$ b) $b = 1$ c) $c = 19$ d) $d = 1$ e) $e = 3{,}2$ f) $f = 1{,}5$ g) $g = 5$ h) $h = 3$ **15.** a*) 3 b*) 5 c*) 9

16. 28 **17.** 1728 g **18.** 36 minut – PROLASER, 40 minut 30 sekund – LUXDRUK **19.** 0,8 kg

20. $|CD| = 42$ cm, $|CM| : |MN| : |ND| = 4 : 2 : 1$

21. Wojtek – 14 lat, Maksym – 11 lat

22. a) 110 b) 200 g **23.** 48 – pierwsze pudełko, 24 – drugie pudełko **24.** 40,5 g – sól; 229,5 g – woda

25. 1,2 dm, 3,3 dm; $P = 3{,}96$ dm² **26.** 16 cm, 30 cm

27. $ABCD$: 2,5 cm, 8,5 cm; $AEFG$: 4 cm, 13,6 cm

28. $ABCD$: $a = 7{,}2\sqrt{2}$ dm, $P = 103{,}68$ dm²; $KLMN$: $a = 12\sqrt{2}$ dm, $P = 288$ dm²

29. $|AB| = 52$ cm, $|AK| : |KL| : |LB| = 1 : 3 : 9$

2. Wprowadzenie do statystyki i rachunku prawdopodobieństwa

2.1 Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w tabelach i na diagramach (s. 46)

1. a) 100 b) $\frac{3}{5}$ c) 40%

2. a) od Wisły – 239 km, od Odry – 46 km b) 0,5 c) tak

3. a) 25 b) najwięcej – dobrych, najmniej – niedostatecznych c) $\frac{3}{5}$ d) 12%

4. a) najwięcej – 2015, najmniej – 2020

b) 2012, 2017, 2019, 2020

c) 165 d) wzrost – 2013, spadek – 2017 i 2020

5. a) Krzyś – nie, Michał – tak b) 13 c) 11, 110 uczniów

6. a) podlaskie, opolskie, małopolskie, kujawsko-pomorskie b) podlaskie, opolskie, lubuskie

c) wielkopolskie, śląskie, mazowieckie, małopolskie, lubelskie, dolnośląskie d) 2014 – 4,3%, 2019 – 3,8%

8. a) 40 b) 8 c) 34 d) nie **9.** a) chłopców – 48, dziewcząt – 72 b) 156 c) o 58

2.2. Odczytywanie i interpretowanie danych statystycznych z wykresów (s. 54)

1. a) wtorek b) Kupić we wtorek i sprzedać w piątek.

c) 0,3 zł d) nie

2. a) nie b) pominięcie danych z parzystych lat

3. a) 43 km b) 10:30 c) 35 km d) 8 km/h e) 7 km/h

4. a) 56 km b) 16 km/h c) 20 km/h d) 28 km/h

e) od 12:00 do 12:30

5. a) 0,5 l b) 6 s c) $\frac{3}{32}$ l/s d) $\frac{3}{10}$ l/s e) 3,5 l f) ok. 11 s

6. a) 60°C, 40°C b) W ciągu pierwszych 10 minut herbata stygnie gwałtownie, a po upływie 1,5 godziny – wolno. c) 3 °C/min, ok. 0,1 °C/min

7. a) 11.10–14.10 b) maksymalna 12°, minimalna 5°, tak

c) najwyższa: 18° – 12.10, najniższa: 3° – 15.10 i 16.10

d) 15.10–17.10 e) 13.10, 14.10, 17.10, 22.10, 29.10, 30.10, największe: 30.10 f) 3 g) zmienna

8. a) 2019 b) 2018 c) V, IX d) II, III, VI, XI, XII

e) VIII, X f) I, III, XII

g) VI, VII, VIII h) IV – 2019, X – 2018, X – 2019

9. a) Gdy rowerzysta rusza z miejsca, zawsze jego prędkość rośnie, gdy hamuje – prędkość maleje.

b) 3 c) 10 minut, 13 minut d) 8 razy e) 19 min

2.3 Zbieranie, porządkowanie i przedstawianie danych (s. 62)

2. a) IV **3.** a) 0,8 t b) 3,75 razy c) szkło, papier, metale **4.** a) 200 b) rock, hip-hop c) 30 osób

5. a) Karolina – 20 h, Łukasz – 9 h **6.** c) truskawki

7. c) najczęściej – 0 Rh+, najrzadziej – AB Rh–

8. b) 15,2 km/h

2.4 Średnia arytmetyczna (s. 70)

1. 3 **2.** 4 **3.** 350 **4.** 22,2°C **5.** 24 **6.** 3,19

7. 3,76 **8.** a) 3000 zł b) 3 **9.** 43 **10*.** 18

2.5 Doświadczenie losowe (s. 76)

1. 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168

2. 10 gr, 20 gr, 50 gr, 1 zł, 2 zł, 5 zł

3. p – papier, k – kamień, n – nożyce; najpierw zapisujemy to, co pokazała pierwsza osoba, potem to, co druga: (p, p), (p, k), (p, n), (k, p), (k, k), (k, n), (n, p), (n, k), (n, n)

4. (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 2), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (7, 2), (7, 3), (7, 5), (7, 7)

5. a) (O, 1), (O, 2), (O, 3), (O, 4), (R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4)

b) (1, O), (1, R), (2, O), (2, R), (3, O), (3, R), (4, O), (4, R)

8. (O, O, O), (O, R, O), (O, O, R), (O, R, R), (R, R, R), (R, O, O), (R, O, R), (R, R, O)

2.6 Częstości występowania zdarzeń w doświadczeniach losowych (s. 80)

5. a) 10 **6.** a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{13}{30}$ d) $\frac{1}{2}$

7. a) 14 b) 5 c) 16

2.7 Prawdopodobieństwo zdarzenia (s. 83)

1. a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ **2.** a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{3}$

3. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

4. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{13}$ c) $\frac{3}{13}$ d) $\frac{1}{26}$ e) $\frac{7}{13}$

5. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{3}{5}$

6. a) niebieskie – 6, żółte – 4 b) czerwone – 5, zielone – 2, niebieskie – 3 c) czerwone – 2, niebieskie – 4, żółte – 3, zielone – 1

7. $\frac{1}{14}$ **8.** a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{7}{10}$ **9.** a) $\frac{5}{33}$ b) $\frac{25}{33}$ c) $\frac{1}{11}$

10. a) większe b) większe c) $\frac{5}{26}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

11. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{12}$

Czy już umiesz? (s. 87)

1. D **2.** D **3.** A, D **4.** B, D **5.** C **6.** C
7. D **8.** C **9.** I, C **10.** B **11.** B **12.** D **13.** D
14. A **15.** C **16.** A, D **17.** białko – 24,5 g, tłuszcz – 9,3 g, węglowodany – 179,3 g, błonnik – 36,5 g, sód – 0,5 g
18. a) 8700 zł b) nauka – 522 zł, ubrania – 609 zł c) 957 zł **19.** a) 136 b) 248
20. a) 24% b) 1,04 mln c) 0,13 mln d) do 15 lat – 1,69 mln e) 60% – 3,9 mln
21. a) 13% b) nie c) mała odległość od miejsca zamieszkania d) Nie można odpowiedzieć na to pytanie, ponieważ nie dotyczy tylko badanych osób. e) mała odległość od miejsca zamieszkania oraz różnorodny asortyment f) Nie można odpowiedzieć na to pytanie, ponieważ nie wiemy, ile osób brało udział w badaniu. g) 2 razy
23. a) 13:50, 16 min b) 13:56, 5 min c) 3 min d) 2,8 km/h, 6 km/h
24. a) 10:00 b) 6:00: Szczecin – 6°C, Wrocław – 5°C, Zakopane – 7°C; 22:00: Szczecin – 4°C, Wrocław – 5°C, Zakopane – 1°C c) 0:00, 8:00, 20:00 d) 4:00, 6:00, 8:00 e) od 0:00 do 18:00 f) Zakopane
25*. a) 30 km b) 150 min = 2,5 h; 0,2 km/min = 12 km/h c) 10:00; 18 km d) 0,3 km/min = 18 km/h; 10:40
26. IVa – 20, IVb – 25, Vb – 30, VIa – 25, VIb – 24, VIIIa – 25, VIIIb – 20 a) 16% b) 102 c) Zosia Pomocnicka otrzymała 18 głosów więcej. d) 7,5% **27.** a) 18 b) 2
28. a) największe – piłka nożna, najmniejsze – pływanie b) 10%
29. a) 6300 g **31.** b) 140 **32.** a) 5 obrusów, 15 bieżników, 30 serwetek c) 2 h **33.** a) 3,06% b) 72,2% **34.** a) Jest tyle samo. b) VIIIa – $3\frac{3}{26}$, VIIIb – $3\frac{1}{7}$, VIIIc – $3\frac{7}{26}$, $3\frac{7}{40}$, VIIIb **35.** 41 lat
39. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{11}{12}$ e) 1
40. a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{2}$
41. a) $\frac{9}{16}$ b) $\frac{7}{16}$ c) $\frac{27}{80}$ d) $\frac{53}{80}$ e) $\frac{17}{80}$ f) $\frac{5}{16}$

3. Graniastosłupy

3.1 Graniastosłupy i ich własności (s. 103)

1. C **2.** a) graniastosłup prawidłowy ośmiokątny

b) graniastosłup prawidłowy sześciokątny

c) graniastosłup prosty czworokątny

d) graniastosłup prawidłowy trójkątny

3. C **4.** D **5.** 13 dm, tak **6.** $d = 10\sqrt{2}$ cm

7. 78 cm **8.** a) $2\sqrt{2}$ cm b) $2\sqrt{3}$ cm **9.** 96 cm

10. $d = 4\sqrt{5}$ cm

3.2 Pole powierzchni graniastosłupa (s. 108)

1. C **2.** $P_c = 1012{,}5$ cm^2 **3.** $P_b = 480\sqrt{2}$ cm^2

4. a) $d = 4\sqrt{2}$ dm b) $d = 4\sqrt{3}$ dm

5. a) $P_c = (120 + 8\sqrt{3})$ cm^2 b) $P_c = 192$ cm^2

c) $P_c = (240 + 48\sqrt{3})$ cm^2

6. $P_b = 1020$ cm^2

7. a) $P_c = (180 + 12{,}5\sqrt{3})$ cm^2 b) $P_c = (216 + 18\sqrt{3})$ cm^2

c) $P_c = (144 + 8\sqrt{3})$ cm^2 d) $P_c = (72 + 2\sqrt{3})$ cm^2

8. 8 **9.** $H = 4\sqrt{3}$ dm

3.3 Objętość graniastosłupa (s. 115)

1. a) $V = 31; 104$ b) $V = 27; 69$ c) $V = 15; 33$

2. a) 4000 dm^3; 18 000 dm^3; 400 000 dm^3; 200 dm^3

b) 7 dm^3; 0,86 dm^3; 0,077 dm^3

3. a) 5 000 000 cm^3 b) 4 cm^3 c) 0,006 cm^3 d) 8000 cm^3

4. a) $V = 972$ b) $V = 432$ c) $V = 729$

5. $V = 480\sqrt{3}$ cm^3 **6.** $V = 240$ cm^3

7. a) $V = 112$ cm^3 b) $V = 210$ cm^3 c) $V = 5760\sqrt{3}$ cm^3

8. a) $V = 15{,}625$ cm^3 b) $V = 27$ cm^3 c) $V = 512$ cm^3

d) $V = 81\sqrt{3}$ m^3

9. a) 6 cm b) 3 cm, 12 cm

10. a) $H = \frac{2}{\sqrt{3}}$ cm b) $H = \frac{4}{3}$ cm c) $H = \frac{16}{9\sqrt{3}}$ cm

11. a) $384\sqrt{3}$ g b) 960 g

3.4 Pole i objętość graniastosłupa (s. 119)

1. 52 **2.** 49 **3.** $V = 729$ **4.** a) 4 cm^3; 80 cm^3; 800 cm^3;

8,9 cm^3 b) 2000 cm^3; 14 000 cm^3; 81 000 cm^3; 4500 cm^3

c) 4000 cm^3; 7000 cm^3; 13 000 cm^3; 400 cm^3

5. $H = 11$ cm **6.** 8 ml rtęci ma większą masę.

7. 3,5 kg **8.** tak **9.** $P_c = 3 + 0{,}5\sqrt{3}$, $V = 0{,}25\sqrt{3}$

10. a) $P_c = 992$ cm^2, $V = 1376$ cm^3 b) $P_c = 1138$ cm^2,

$V = 1380$ cm^3 **11.** $V = 512$ cm^3

12. $P_c = (120 + 8\sqrt{3})$ cm^2, $V = 40\sqrt{3}$ cm^3

13. a) $V = 1080$ cm^3 b) 552 cm^2

14. a) $2\frac{2}{3}$ mm b) około 39 h **15.** 8 minut

16. $V = 16\sqrt{3}$ cm^3, $P_b = (48 + 16\sqrt{3})$ cm^2

17. $V = 4500$ cm^3

Czy już umiesz? (s. 122)

1. C **2.** B **3.** C **4.** A **5.** A **6.** C

7. D **8.** C **9.** a) F b) F c) P

10. 1, 2, 6 (użyje 12 klocków) lub 1, 3, 9 (użyje 27 klocków)

11. 112,8 m^2 **12.** 54 m^3 **13.** a) 2,4; 2 b) 16; $13\frac{1}{3}$

14. 1 000 000 **15.** C **16.** 5400 hl

17. a) $V = 36$ dm^3, $P_c = 72$ dm^2

b) $V = 32$ dm^3, $P_c = 88$ dm^2

c) $V = 112$ cm^3, $P_c = 144$ cm^2

18. a) $V = 810$ cm^3, $P_c = 648$ cm^2

b) $V = 96$ cm^3, $P_c = 168$ cm^2

c) $V = 1020$ cm^3, $P_c = 800$ cm^2

4. Ostrosłupy

4.1 Ostrosłupy i ich własności (s. 130)

1. a) ostrosłup prawidłowy sześciokątny

b) ostrosłup prawidłowy dziewięciokątny

c) ostrosłup prawidłowy czworokątny

d) ostrosłup prawidłowy trójkątny

3. wierzchołki – 101, krawędzie – 200, ściany boczne – 100

6. 116 cm **7.** 20 cm **8.** 41 cm **9*.** $3\sqrt{2}$ dm

10*. $|BC| = |CG| = |GF| = |BF| = |EF| = 12$,

$|BE| = |GE| = 12\sqrt{2}$, $|CE| = 12\sqrt{3}$

4.2 Pole powierzchni ostrosłupa (s. 135)

1. a) $P_c = 380$ cm^2 b) $P_c = \left(\frac{243\sqrt{3}}{2} + 486\right)$ cm^2

c) $P_c = (9\sqrt{3} + 63)$ cm^2 **2.** $P_s = 32$ cm^2

3. $P_c = (16 + 16\sqrt{3})$ cm^2

4. $a = 7$ dm **5.** $P_b = 72$ cm^2 **6.** 0,8 m^2

7*. $P_c = 81\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} + 1800$

8. a) 4 razy b) $(1 + \sqrt{3})$ raza

9*. $P_b = (6\sqrt{701} + 5\sqrt{205})$ cm^2

10. $P_p = 18$ cm^2, $P_{s1} = 36$ cm^2, $P_{s2} = 54$ cm^2, $P_{s3} = 36$ cm^2

4.3 Objętość ostrosłupa (s. 141)

1. a) $V = \frac{200}{3}$ cm^3 b) $V = 90\sqrt{3}$ cm^3 c) $V = 160$ cm^3

2. $V = 1$ cm^3 **3.** $V = 720\sqrt{3}$ cm^3 **4.** $Obw_p = 16$ cm

5. $V = 350$ cm^3 **6.** $H = 11$ cm

7. a) $H = \frac{80\sqrt{3}}{3}$ dm b) $H = \frac{45}{4}$ dm

8. a) $a = 6$ cm b) $H = 2\sqrt{6}$ cm c) $P_p = 9\sqrt{3}$ cm^2

9*. $V = \frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$

4.4 Pole powierzchni i objętość ostrosłupa (s. 146)

1. $P_b = 82\,800$ m^2 **2.** a) $\sqrt{13}$ cm b) 4 cm

3. 9 puszek farby **4.** $Obw_p = 50$ cm

5. 24 m **6.** $P = 557{,}25$ dm^2

7. $a = 4\sqrt{3}$ cm **8.** $(4\sqrt{3} + 8\sqrt{183})$ dm^2

Czy już umiesz? (s. 148)

1. B **2.** D **3.** B, D **4.** C **5.** C **6.** B

7. Arek zużył więcej papieru.

8. $b = 8\sqrt{2}$ dm **9.** $P_b = 16{,}8$ m^2

10. $P_b = 48\sqrt{5}$ m^2 **11.** $H = 11$ cm

12. $P_c = (100 + 100\sqrt{10})$ cm^2, $V = 500$ cm^3

13. $V = \frac{125}{3}$ cm

Indeks

B

badanie statystyczne **42**

C

częstość zdarzenia **77**
czworościan foremny **135**

D

dane statystyczne **42**
diagram kołowy **43**
diagram słupkowy **43**
doświadczenie losowe **72**

G

graniastosłup **98**
  pochyły **98**
  prawidłowy **100**
  prosty **98**

J

jednostki objętości **111**
jednostki pojemności **118**

M

mediana **69**
moda **69**

O

objętość
  graniastosłupa **113**
  ostrosłupa **137**
  prostopadłościanu **112**
  sześcianu **112**
ostrosłup **126**
  pochyły **126**
  prawidłowy **127**
  prosty **126**

P

pole powierzchni bocznej ostrosłupa **133**
pole powierzchni całkowitej graniastosłupa **105**
pole powierzchni całkowitej ostrosłupa **133**
prawdopodobieństwo **81**
proporcja **6**
prostopadłościan **99**
przekątna graniastosłupa **102**

R

reguła trzech **7**
rozstęp **69**

S

siatka graniastosłupa **104**
siatka ostrosłupa **132**
spodek wysokości **128**
statystyka **42**
sześcian **99**

Ś

średnia arytmetyczna **65**

W

wielkości odwrotnie proporcjonalne **21**
wielkości wprost proporcjonalne **17**
wierzchołek ostrosłupa **126**
współczynnik proporcjonalności prostej **17**
wykres liniowy **51**
wykres punktowy **50**
wyrazy skrajne **6**
wyrazy środkowe **6**
wysokość graniastosłupa **101**
wysokość ostrosłupa **128**

Z

zdarzenia elementarne **72**

Polski Wydawca
od 1989 r.

Grupa MAC S.A.
ul. Witosa 76
25-561 Kielce

www.mac.pl

ISBN 978-83-8227-131-7

9 788382 271317

indeks 881447