

Matematyka

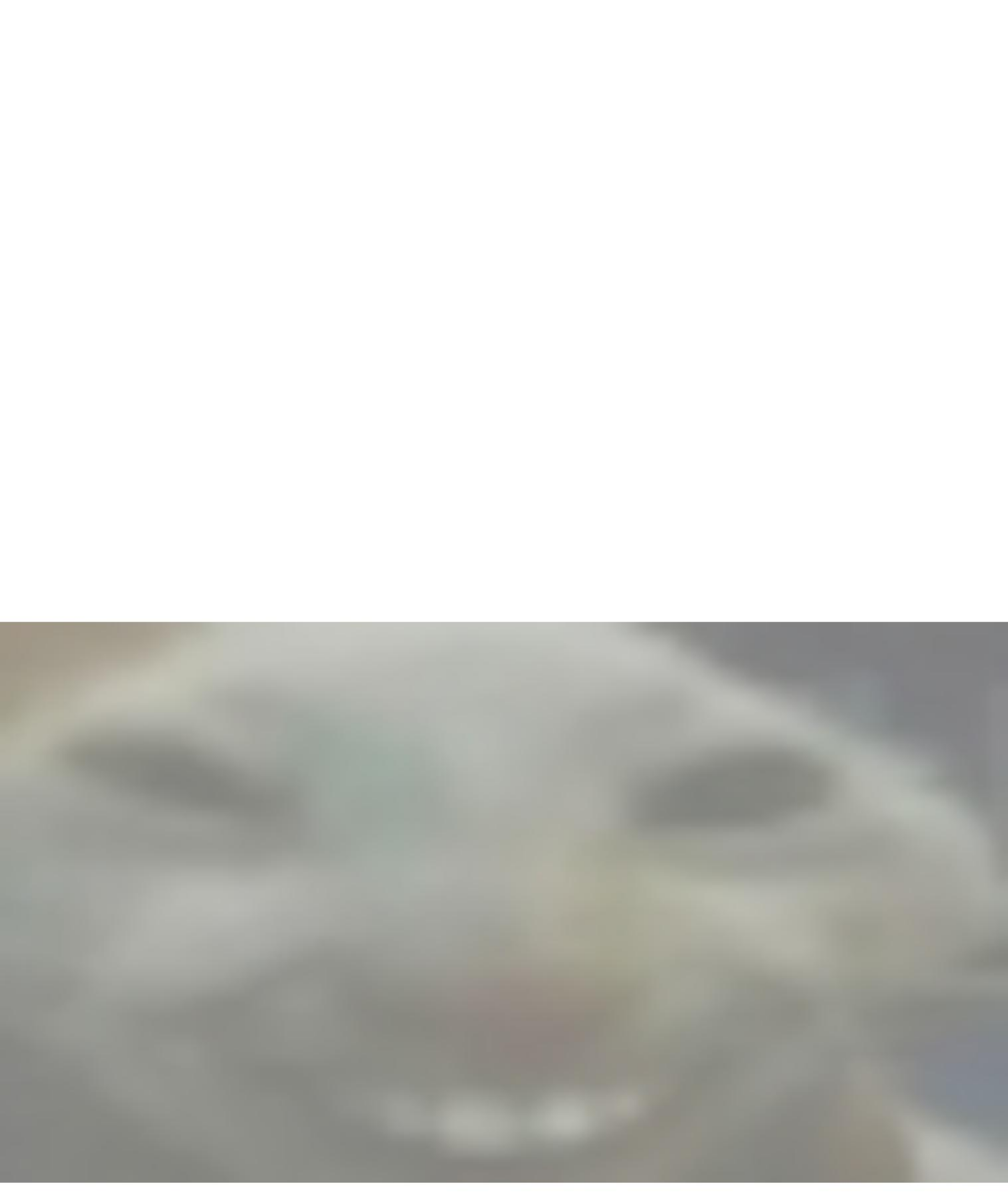
Podręcznik
część 1

7

×

Oznaczono zmiany
W PODSTAWIE
PROGRAMOWEJ
2024



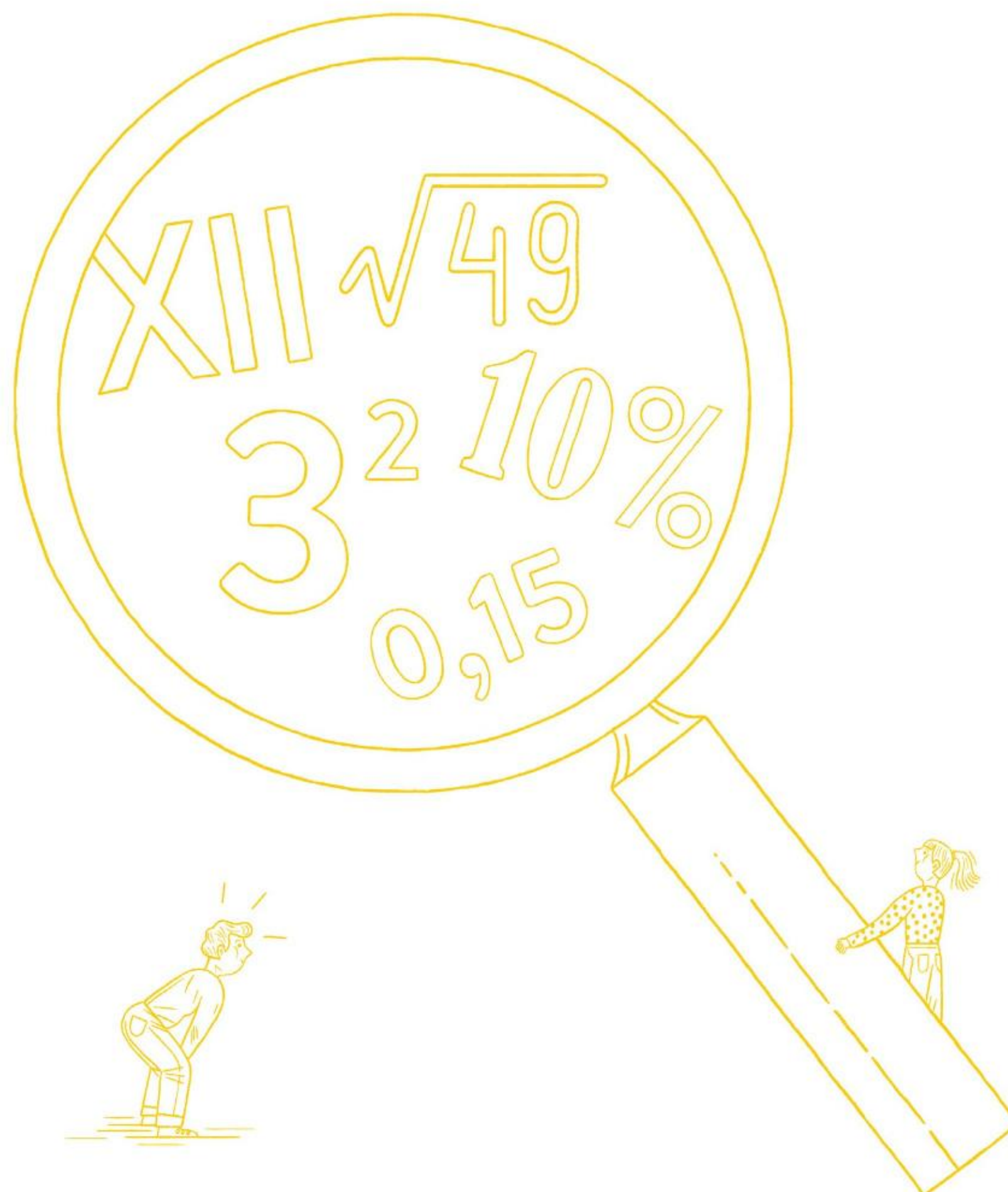


Monika Czajkowska
Małgorzata Ogłóza-Fisiak
Teresa Gwadowska

7

Matematyka

Podręcznik dla klasy siódmej szkoły podstawowej
część 1



Redaktor serii
Justyna Kubicka

Redakcja merytoryczna
Monika Czajkowska
Adam Pawłowski
Monika Brzozowska-Szcześniak

Redakcja językowa i korekta
Krystyna Bajor

Redakcja techniczna
Paweł Kowalski

Skład i łamanie
Adam Ziółkowski

Redakcja artystyczna
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska
Marcin Kot

Projekt i koncepcja artystyczna
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Koordinacja prac graficznych
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska

Projekt okładki
Futu Creative

Ilustracja na okładce, na stronie tytułowej
i ilustracje na stronach działowych
Acapulco Studio / Agata Dudek i Małgorzata Nowak-Żurek

Fotoedycja
Grzegorz Wrzecionowski

Ilustracje

Agata Zarzycka (s. 6, 8, 12, 26, 33, 34, 52, 60, 63, 64, 66, 78, 86, 94, 97, 102, 113, 133), Katarzyna Surman-Pusz (s. 29), Olga Kawacińska (s. 8, 9, 22, 28, 57, 58, 59, 60, 66, 75, 90, 101, 121), Marcin Kot (144–145/projekt *Linku do wiedzy*)

Wykaz dysponentów praw autorskich do obrazów i zdjęć zamieszczonych w publikacji

Wikipedia: Sophie Gengembre Anderson (Szeherezada, s. 144), Shutterstock: irisphoto1 (Morze Martwe, s. 55)

Wydawca oświadcza, że dołożył wszelkich starań, aby dotrzeć do wszystkich właścicieli i dysponentów praw autorskich.
Osoby, których nie udało nam się ustalić, prosimy o kontakt z wydawnictwem.

Nabyta przez Ciebie publikacja jest dziełem twórcy i wydawcy. Przestrzegaj praw, jakie im przysługują. Udostępniając książkę lub jej fragmenty, rób to wyłącznie w zakresie dozwolonego użytku, który określają przepisy prawa. Zawartość książki możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

© Grupa MAC S.A., Kielce 2020

ISBN 978-83-8108-864-0

Grupa MAC S.A.
25-561 Kielce, ul. Witosa 76
tel. 41 366 55 55, faks: 41 366 33 02
e-mail: kontakt@mac.pl; www.mac.pl



Treści usunięte z podstawy programowej w 2024 r.

Spis treści

1. Liczby

1.1	Zapis liczb w systemie rzymskim	6
1.2	Dzielniki i wielokrotności. Podzielność liczb	9
1.3	Liczby pierwsze i liczby złożone	12
1.4	Liczby całkowite i działania na liczbach całkowitych	17
1.5	Rozwinięcia dziesiętne	22
1.6	Szacowanie. Zaokrąglanie liczb	26
1.7	Odległość liczb na osi liczbowej. Wartość bezwzględna	29
1.8	Liczby wymierne. Porównywanie liczb wymiernych	34
1.9	Działania na liczbach wymiernych	39
	Podsumowanie działu 1	44

2. Procenty

2.1	Procenty a ułamki	52
2.2	Obliczanie procentu danej liczby	57
2.3	Obliczanie liczby na podstawie danego jej procentu	60
2.4	Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba	64
2.5	Obliczenia procentowe w praktyce	67
	Podsumowanie działu 2	73

3. Potęgi

3.1	Potęga liczby wymiernej o wykładniku naturalnym	78
3.2	Mnożenie i dzielenie potęg o jednakowych podstawach	86
3.3	Potęga potęgi	90
3.4	Mnożenie i dzielenie potęg o jednakowych wykładnikach	94
3.5	Działania na potęgach	97
3.6	Notacja wykładnicza	102
	Podsumowanie działu 3	106

4. Pierwiastki

4.1	Pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny	110
4.2	Szacowanie wielkości pierwiastków kwadratowych i pierwiastków sześciennych	117
4.3	Iloczyn pierwiastków i pierwiastek iloczynu. Iloraz pierwiastków i pierwiastek ilorazu	121
4.4	Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka. Włączanie czynnika pod znak pierwiastka	125
4.5	Porównywanie wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki	129
4.6	Przekształcanie wyrażeń zawierających pierwiastki	133
	Podsumowanie działu 4	139
	Link do wiedzy <i>Liczba Szeherezady</i>	144
	Odpowiedzi do zadań	146
	Indeks	151

Jak korzystać z podręcznika

Numer i tytuł tematu

Podejmij temat

Wprowadzenie do tematu lekcji

Ciekawe!

Interesujące wiadomości uzupełniające temat lekcji

Treści powtórzeniowe

Przykłady

Przykładowe rozwiązania zadań

Ćwiczenia

Ćwiczenia do wykonania na lekcji

Link do wiedzy

Treści, które mogą rozwinąć twoje zainteresowania

Podsumowanie działu

Powtórzenie najważniejszych treści działu

Znaczenie ikon

nawiązanie do innego przedmiotu

nawiązanie do ilustracji

zastosowanie nowoczesnych technologii

praca zespołowa

uwaga

oznaczenie polecenia trudniejszego

Treść ważna, definicja

Objaśnienie nowych terminów

Więcej na temat

Treści dodatkowe

Zadania

Zadania utrwalające materiał

Wskazówki

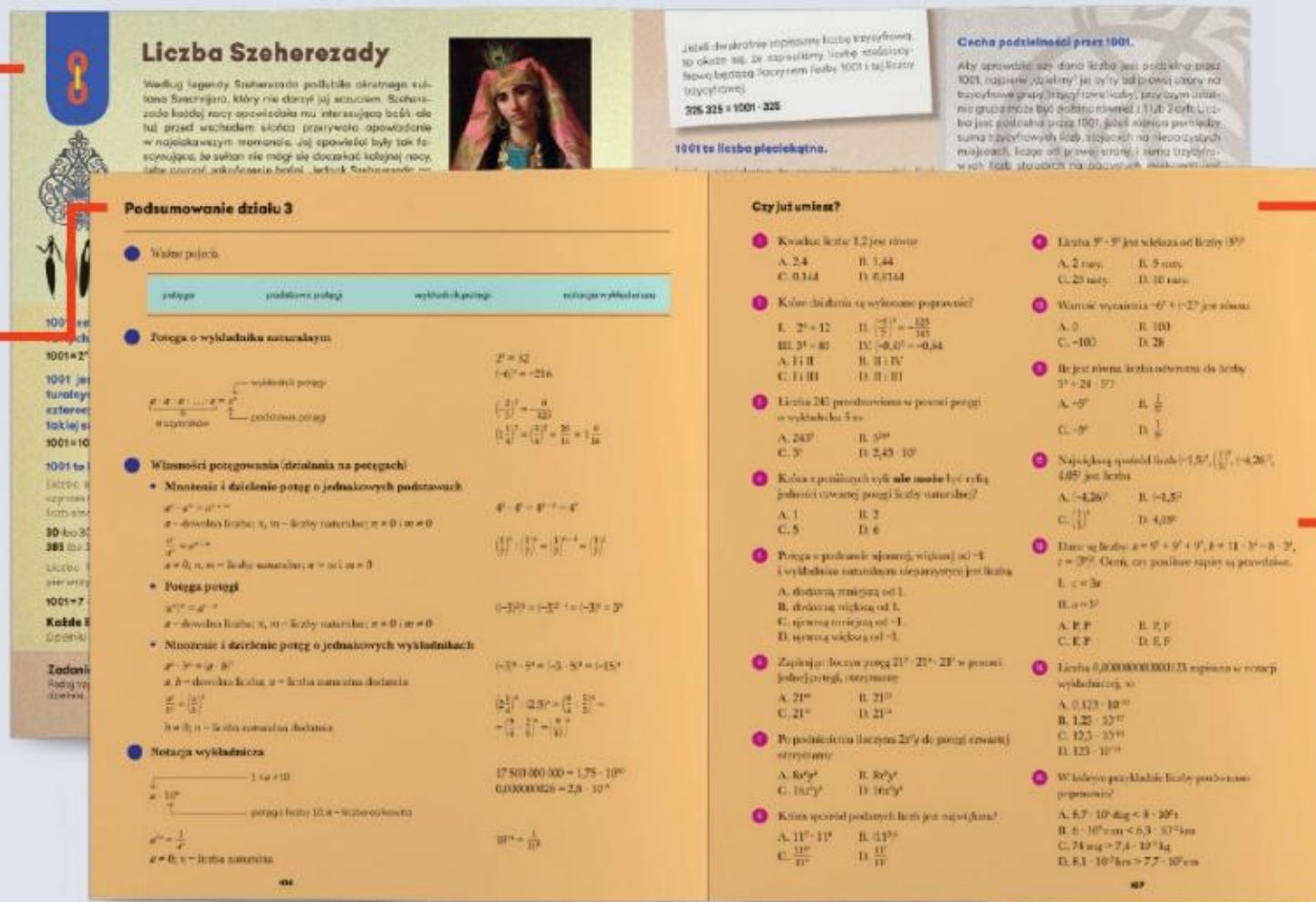
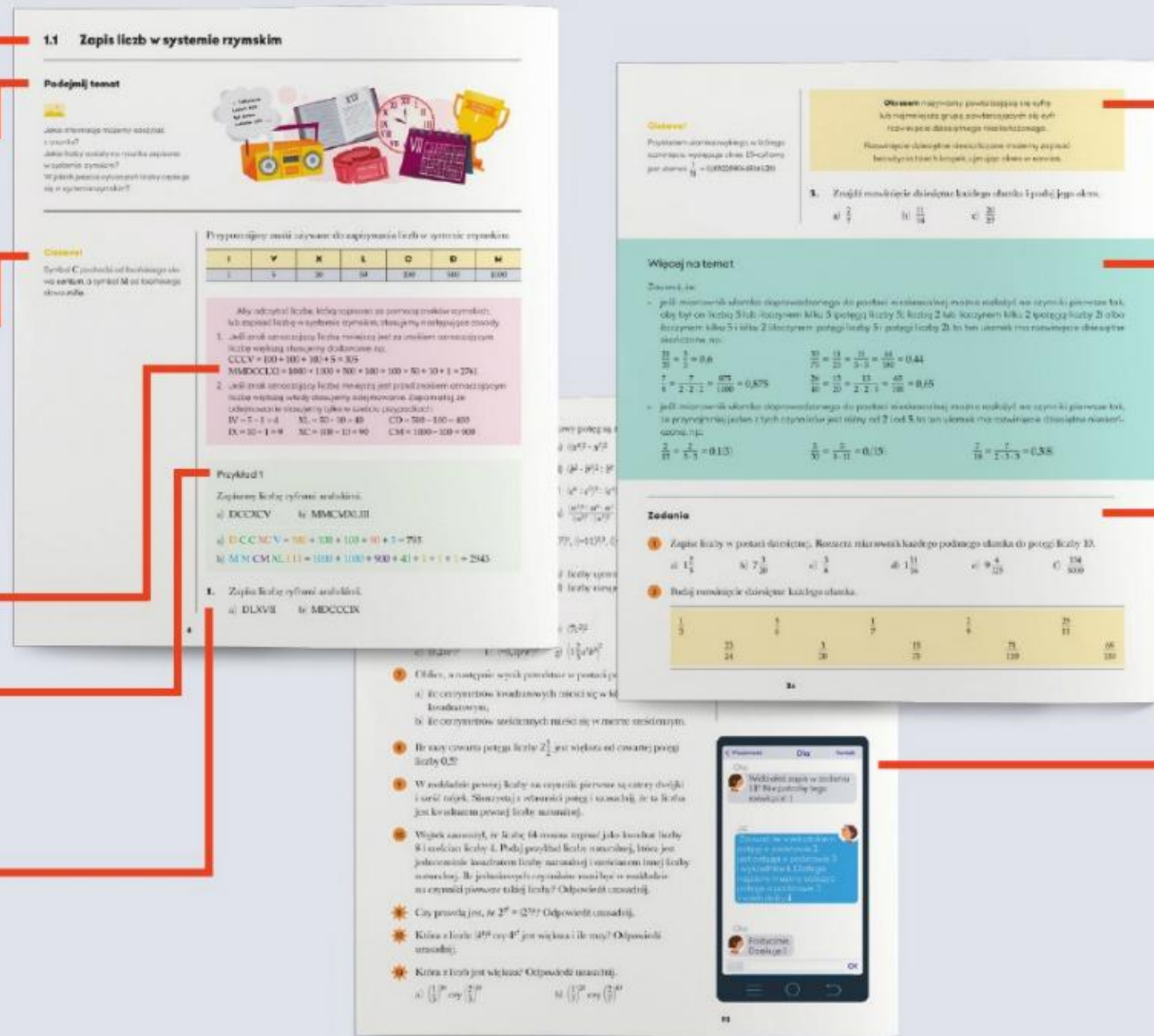
Podpowiedzi w formie rozmowy dzieci za pomocą komunikatora internetowego

Czy już umiesz?

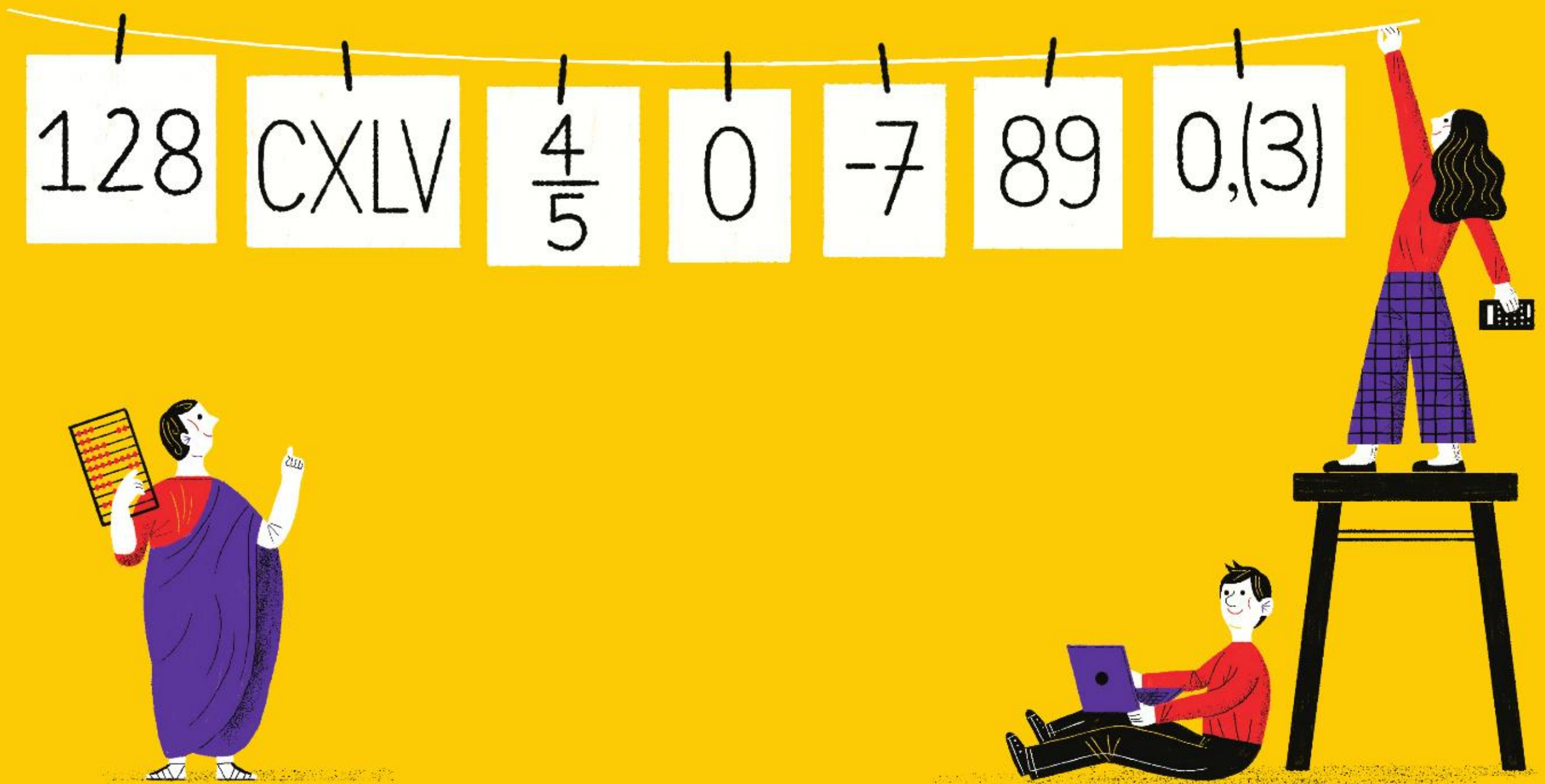
Zadania na koniec działu

Zadania wielokrotnego wyboru

Tego podręcznika będą używać inni uczniowie. Niczego w nim nie zapisuj. Przekaż go w dobrym stanie.



1. Liczby



1. Które z liczb zapisanych na kartkach zamieszonych na sznurze to liczby naturalne?
2. Która z zapisanych liczb jest największa, a która najmniejsza?
3. W jakim systemie napisana jest liczba na drugiej kartce, licząc od lewej strony? Zapisz w tym systemie liczbę 128.
4. W jakich sytuacjach w życiu codziennym spotykamy się z ułamkami? A jakich – z liczbami ujemnymi?
5. Co oznacza zapis 0,(3)? Czy wiesz jak inaczej zapisać tę liczbę?

1.1 Zapis liczb w systemie rzymskim

Podejmij temat



Jakie informacje możemy odczytać z rysunku?
Jakie liczby zostały na rysunku zapisane w systemie rzymskim?
W jakich jeszcze sytuacjach liczby zapisuje się w systemie rzymskim?



Ciekawe!

Symbol **C** pochodzi od łacińskiego słowa *centum*, a symbol **M** od łacińskiego słowa *mille*.

Przypomnijmy znaki używane do zapisywania liczb w systemie rzymskim:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Aby odczytać liczbę, którą zapisano za pomocą znaków rzymskich, lub zapisać liczbę w systemie rzymskim, stosujemy następujące zasady.

- Jeśli znak oznaczający liczbę mniejszą jest za znakiem oznaczającym liczbę większą, stosujemy dodawanie, np.:
 $CCCV = 100 + 100 + 100 + 5 = 305$
 $MDCCLXI = 1000 + 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 10 + 1 = 2761$
- Jeśli znak oznaczający liczbę mniejszą jest przed znakiem oznaczającym liczbę większą, wtedy stosujemy odejmowanie. Zapamiętaj, że odejmowanie stosujemy tylko w sześciu przypadkach:
 $IV = 5 - 1 = 4$ $XL = 50 - 10 = 40$ $CD = 500 - 100 = 400$
 $IX = 10 - 1 = 9$ $XC = 100 - 10 = 90$ $CM = 1000 - 100 = 900$

Przykład 1

Zapiszmy liczby cyframi arabskimi.

- a) DCCXCV b) MMCMXLIII

- a) $DCCXCV = 500 + 100 + 100 + 90 + 5 = 795$
b) $MMCMXLIII = 1000 + 1000 + 900 + 40 + 1 + 1 + 1 = 2943$

1. Zapisz liczby cyframi arabskimi.
a) DLXVII b) MDCCCIX

Przykład 2

Zapiszmy liczby w systemie rzymskim.

- a) 1897 b) 2409

a) $1897 = 1000 + 800 + 90 + 7 = 1000 + (500 + 100 + 100 + 100) + (100 - 10) + 5 + 1 + 1 = \text{MDCCCXCVII}$

b) $2409 = 2000 + 400 + 9 = \text{MMCDIX}$

2. Zapisz liczby w systemie rzymskim.

- a) 1405 b) 3596

Zapisując liczby w systemie rzymskim,
musimy pamiętać o następujących zasadach:

- 1. Bezpośrednio przed znakiem V lub X można zapisać tylko znak I.
- 2. Bezpośrednio przed znakiem L lub C można zapisać tylko znak X.
- 3. Bezpośrednio przed znakiem D lub M można zapisać tylko znak C.
- 4. Jednakowe znaki I, X, C lub M można zapisać obok siebie najwyżej trzy razy.
- 5. Znaki V, L i D nie mogą być powtórzone obok siebie.

Przykład 3

Sprawdźmy i wyjaśnijmy, który zapis liczby w systemie rzymskim jest poprawny – A czy B.

Liczba	Zapis A	Zapis B
972	CMLXXII	DCCCCLXXII
1450	MLD	MCDL

Liczba 972. Zapis A jest poprawny: $972 = (1000 - 100) + 50 + 10 + 10 + 1 + 1 = \text{CMLXXII}$.
Zapis B jest błędny, bo znak C można zapisać obok siebie najwyżej trzy razy.

Liczba 1450. Znak L oznaczający liczbę 50 nie może stać przed znakiem D oznaczającym liczbę 500, więc zapis A jest błędny. Poprawny zapis to B: $1450 = 1000 + (500 - 100) + 50 = \text{MCDL}$

3. Wyjaśnij, który zapis liczby w systemie rzymskim jest poprawny – A czy B.

Liczba	Zapis A	Zapis B
999	CMXCIX	IM
1495	MCCCCLXXXV	MCDXCV
1648	MCDLXVIII	MDCXLVIII
2990	MMCMXC	MMXM

Zadania

- Odczytaj z fasady domu, w którym roku został on zbudowany.



- Zapisz liczby cyframi arabskimi.

a) CCXXVIII b) CDXLIV c) MCXLIV d) LXXVI e) MDIX f) CMLXIX

- Zapisz liczby w systemie rzymskim.

a) 397 b) 242 c) 1465 d) 1623 e) 1071 f) 2008

- Zapisz w systemie rzymskim:

a) swój rok urodzenia, b) rok, w którym skończysz 18 lat, c) rok, w którym skończysz 35 lat.

- Podane daty historyczne zapisz w systemie rzymskim.

- Rok 966 przyjmuje się za początek państwa polskiego, bo wówczas książę Mieszko przyjął chrześcijaństwo.
- Koronacja Bolesława Chrobrego na króla Polski odbyła się w 1025 roku.
- Bitwa pod Grunwaldem była w 1410 roku.
- Hołd pruski miał miejsce w roku 1525.
- Pierwsza wojna światowa zakończyła się w 1918 roku.
- Druga wojna światowa wybuchła w 1939 roku.
- Karol Wojtyła został wybrany na papieża w 1978 roku.
- Stan wojenny w Polsce ogłoszono w 1981 roku.

- Sprawdź, czy dane liczby są poprawnie zapisane w systemie rzymskim. Jeśli zapis jest błędny, zapisz liczbę poprawnie.

495 = VD 99 = XCIX 640 = DCXL 404 = CCCCIV 1999 = MIM 2449 = MMCDIL

- Spośród zapisów wybierz te, które są poprawne, i zapisz liczby cyframi arabskimi.

DD	MMM	IXIX	DMCXXI	CMXL	IC	CD	DC
----	-----	------	--------	------	----	----	----

- Ile zapalek wystarczy przestawić, aby zachodziła równość?



- Jaka jest zapisana za pomocą cyfr arabskich najmniejsza liczba czterocyfrowa? Zapisz tę liczbę w systemie rzymskim.

- Jaka jest zapisana za pomocą cyfr arabskich największa liczba trzycyfrowa? Zapisz tę liczbę za pomocą znaków rzymskich.

- Liczby MDXI, MMMX są zapisane za pomocą czterech znaków rzymskich.

- Jaką najmniejszą liczbę i jaką największą liczbę możesz zapisać za pomocą czterech znaków rzymskich, jeśli znaki w liczbie nie mogą się powtarzać? Zapisz te liczby za pomocą znaków rzymskich i cyfr arabskich.
- Jaką najmniejszą liczbę i jaką największą liczbę możesz zapisać za pomocą czterech znaków rzymskich, jeśli znaki w liczbie mogą się powtarzać? Zapisz te liczby za pomocą znaków rzymskich i cyfr arabskich.

1.2 Dzielniki i wielokrotności. Podzielność liczb

Podejmij temat



Jak szybko ustalić, bez wykonywania dzielenia, czy 270 żetonów można podzielić po równo między 6 osób? A czy tę liczbę żetonów można podzielić po równo między 12 osób? A między 15 osób?



Liczby naturalne to liczby: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...

Dzieląc liczbę naturalną a przez liczbę naturalną $b \neq 0$, otrzymujemy iloraz k oraz resztę r , co możemy zapisać: $a : b = k$ reszta r lub $a = b \cdot k + r$.

Na przykład: $59 : 7 = 8$ r 3 lub $59 = 7 \cdot 8 + 3$

Reszta r jest zawsze liczbą naturalną mniejszą od liczby, przez którą dzielimy.

Na przykład: przy dzieleniu liczby naturalnej przez 4, reszta z dzielenia może być równa 0, 1, 2 lub 3.



Dla ułatwienia zapisu „różne od zera” stosujemy oznaczenie: $\neq$.

Przykład 1

Wyznaczmy resztę z dzielenia podanych liczb.

- a) $77 : 9$ b) $243 : 6$ c) $2817 : 25$

- a) Wykonajmy dzielenie z resztą.

$$77 : 9 = 8 \text{ r } 5, \text{ inaczej } 77 = 9 \cdot 8 + 5$$

Reszta z dzielenia liczby 77 przez 9 jest równa 5.

- b) Wykonajmy dzielenie z resztą.

$$243 : 6 = 40 \text{ r } 3, \text{ inaczej } 243 = 6 \cdot 40 + 3$$

Reszta z dzielenia liczby 243 przez 6 jest równa 3.

- c) Sprawdźmy, ile razy liczba 25 „mieści się” w liczbie 2817.

Sposób I

$$2800 = 25 \cdot 112$$

$$2817 = 2800 + 17 = 25 \cdot 112 + 17$$

Reszta z dzielenia liczby 2817 przez 25 jest równa 17.

Sposób II

Wykonajmy dzielenie sposobem pisemnym.

$$\begin{array}{r} 112 \\ 25 \overline{) 2817} : 25 \\ \underline{-25} \\ 31 \\ \underline{-25} \\ 67 \\ \underline{-50} \\ 17 \leftarrow \text{reszta} \end{array}$$

1. Wyznacz resztę z dzielenia podanych liczb.

- a) $52 : 6$ b) $325 : 4$ c) $4590 : 31$



Czy pamiętasz?



Liczba 1 jest dzielnikiem każdej liczby, ale ma tylko jeden dzielnik – liczbę 1. Liczba 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby, ale ma nieskończenie wiele dzielników. Dzielnikiem liczby 0 jest każda liczba naturalna większa od 0.

Gdy reszta z dzielenia liczby naturalnej a przez liczbę naturalną $b \neq 0$ jest równa 0, wtedy piszemy: $a : b = k$ lub $a = b \cdot k$. Mówimy, że **liczba a jest podzielna przez liczbę b** .

Na przykład reszta z dzielenia liczby 91 przez 13 jest równa 0, więc napiszemy: $91 : 13 = 7$ lub $91 = 13 \cdot 7$ i powiemy, że liczba 91 jest podzielna przez 13.

Dzielnikami liczby naturalnej nazywamy liczby, przez które jest ona podzielna.

Na przykład dzielnikami liczby 36 są liczby: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Zapisujemy: $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

2. Wypisz wszystkie dzielniki podanych liczb.

- a) 34 b) 60 c) 76

Wielokrotności danej liczby otrzymamy, jeśli pomnożymy tę liczbę przez kolejne liczby naturalne.

Na przykład wielokrotnościami liczby 7 są liczby: 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 48, ...

Zapisujemy: $W_7 = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 48, \dots\}$

3. Wypisz 10 wielokrotności podanej liczby.

- a) 3 b) 8 c) 12

Jeśli reszta z dzielenia liczby naturalnej a przez liczbę naturalną $b \neq 0$ jest równa 0, to mówimy, że:

liczba a jest podzielna przez liczbę b .

liczba a dzieli się przez liczbę b .

liczba b jest dzielnikiem liczby a .

liczba a jest wielokrotnością liczby b .

Przypomnijmy **cechy podzielności liczb**, które są pomocne przy ustalaniu, czy dana liczba naturalna jest podzielna przez inną liczbę naturalną.

Liczba jest podzielna przez:

- 2 – gdy jej cyfrą jedności jest 0, 2, 4, 6 lub 8,
- 3 – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3,
- 4 – gdy jej dwie ostatnie cyfry (cyfra dziesiątek i cyfra jedności) tworzą liczbę podzielną przez 4,
- 5 – gdy jej cyfrą jedności jest 0 lub 5,
- 9 – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9,
- 10 – gdy jej cyfrą jedności jest 0,
- 25 – gdy jej dwie ostatnie cyfry (cyfra dziesiątek i cyfra jedności) tworzą liczbę podzielną przez 25,
- 100 – gdy jej dwie ostatnie cyfry (cyfra dziesiątek i cyfra jedności) to 00.

Przykład 2

Sprawdźmy, korzystając z cech podzielności, czy liczba 8765 jest podzielna przez 2, 3, 4, 5, 9.

Liczba 8765:

- nie jest podzielna przez 2, bo jej cyfra jedności to 5,
- nie jest podzielna przez 3, bo suma jej cyfr jest równa 26, a liczba 26 nie jest podzielna przez 3,
- nie jest podzielna przez 4, bo liczba 65, utworzona z jej cyfry dziesiątek i cyfry jedności, nie jest podzielna przez 4,
- jest podzielna przez 5, bo jej cyfrą jedności jest 5,
- nie jest podzielna przez 9, bo suma jej cyfr równa 26 nie jest podzielna przez 9.

4. Ustal, nie wykonując dzielenia, czy każda podana liczba jest podzielna przez 2, 3, 4, 5, 9, 10.

- a) 708 b) 16 785

Zadania

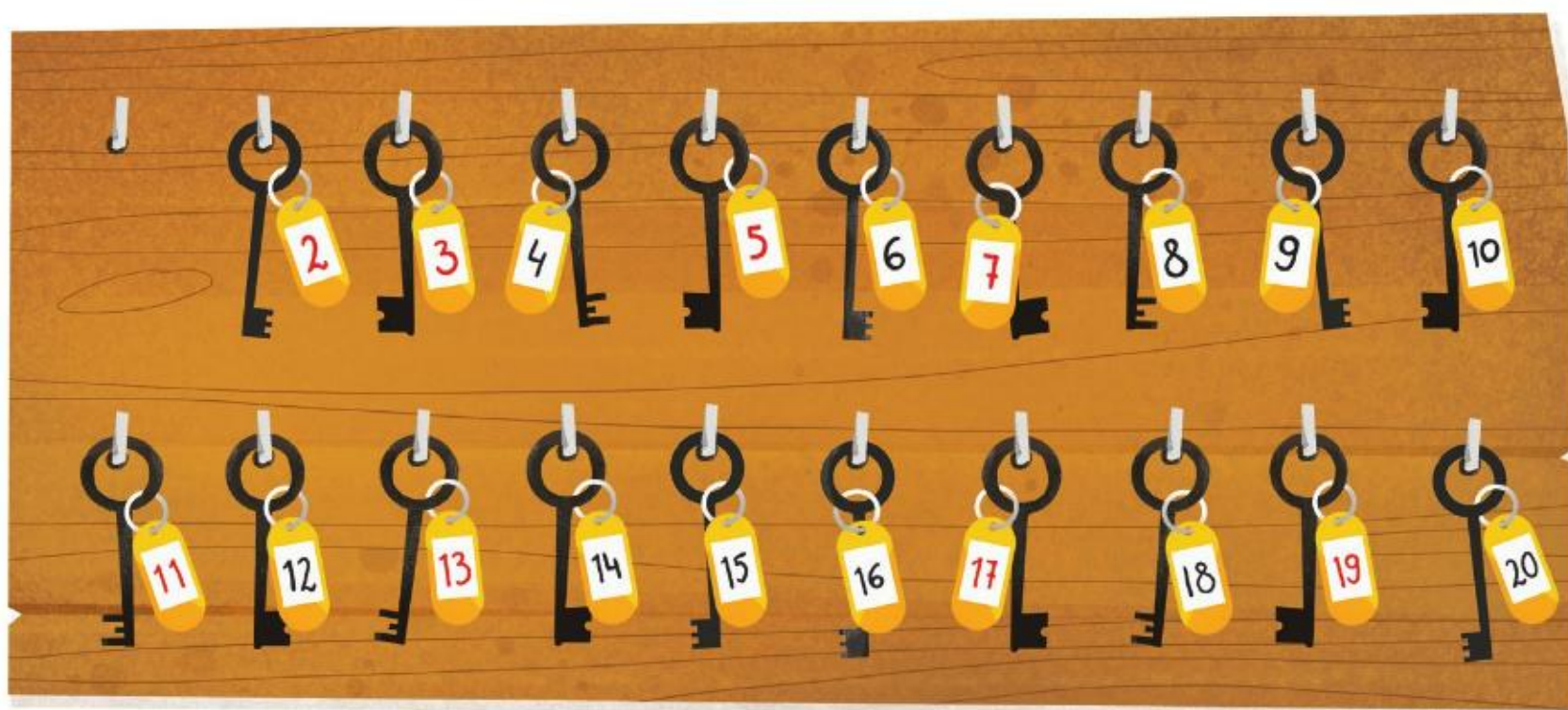
- Wyznacz resztę z dzielenia liczby 587 przez: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
 - Wykonaj dzielenie z resztą.
a) $437 : 3$ b) $1706 : 8$
c) $2575 : 13$ d) $9600 : 27$
 - Wypisz wszystkie dzielniki każdej z podanych liczb.
a) 48 b) 67
c) 81 d) 99
e) 125 f) 132
 - Podaj przykład liczby, która ma dokładnie:
a) jeden dzielnik,
b) dwa dzielniki,
c) pięć dzielników,
d) osiem dzielników,
e) dziewięć dzielników,
f) dwanaście dzielników.
 - Wypisz wszystkie trzycyfrowe wielokrotności każdej z podanych liczb.
a) 255 b) 124 c) 77
 - Ustal, korzystając z cech podzielności, które spośród liczb: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 są dzielnikami podanych liczb.
a) 3096 b) 36 270
c) 3 502 074 d) 62 721 000
 - Ustal, nie wykonując dzielenia, które spośród liczb: 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 są dzielnikami liczb będących wynikiem każdego z podanych działań.
a) $8725 + 91\,187$
b) $37\,003 - 9508$
c) $50 \cdot 20 - 64$
d) $20 \cdot 400 + 1$
 - ★  *Liczba doskonała* to liczba naturalna, która jest równa sumie wszystkich swoich dzielników mniejszych od niej samej. Sprawdź, które z podanych liczb są liczbami doskonałymi.
a) 6 b) 20
c) 28 d) 111
- Sprawdź w dostępnych ci źródłach, ile do dziś znaleziono liczb doskonałych.

1.3 Liczby pierwsze i liczby złożone

Podejmij temat



Jak nazywamy liczby zapisane kolorem czerwonym na zawieszki przy kluczach, a jak te zapisane kolorem czarnym? Ile dzielników ma każda z tych liczb? Podaj jeszcze kilka innych liczb, które mają tyle samo dzielników, co liczba 7. Czy oprócz liczby 2 istnieje jeszcze inna liczba parzysta, która ma tyle samo dzielników, co liczba 7?



Przypomnijmy poznane w poprzednich klasach wiadomości o liczbach pierwszych i złożonych.

Liczba pierwsza to liczba naturalna, większa od 1, która ma dokładnie dwa różne dzielniki: liczbę 1 i samą siebie.
Liczby pierwsze to np. 2, 3, 5, 7, 11, ..., 89, 97, 101, 103, 107, ...

Liczba złożona to liczba naturalna, większa od 1, która ma więcej niż dwa różne dzielniki.
Liczby złożone to np. 4, 6, 8, 9, ..., 99, 100, 102, 104, ..., 2000, 2001, 2002, ...

Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani liczbami złożonymi.

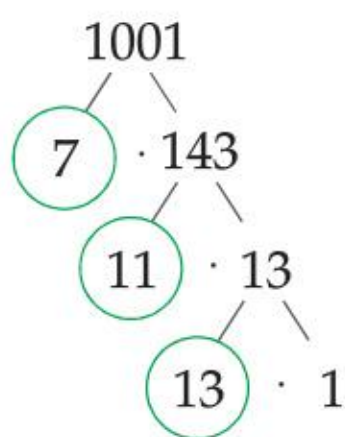
Liczbę złożoną możemy przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. Mówimy wtedy, że tę liczbę **rozkładamy na czynniki pierwsze**.

Na przykład rozkład liczby 252 na czynniki pierwsze to zapisanie tej liczby w postaci:

$$252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Przypomnijmy, w jaki sposób możemy rozłożyć liczby złożone na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{r|l} 176 & 2 \\ 176 : 2 \rightarrow & 88 \\ 88 : 2 \rightarrow & 44 \\ 44 : 2 \rightarrow & 22 \\ 22 : 2 \rightarrow & 11 \\ 11 : 11 \rightarrow & 1 \end{array}$$



$$176 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 2^4 \cdot 11$$

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

1. Rozłóż każdą z podanych liczb na czynniki pierwsze dowolnym sposobem.

a) 150

b) 192

c) 525

Rozkład liczby złożonej na czynniki pierwsze wykorzystujemy do wyznaczania największego wspólnego dzielnika (**NWD**) oraz najmniejszej wspólnej wielokrotności (**NWW**) dwóch liczb.

Największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b nazywamy największą liczbę naturalną, która jest dzielnikiem liczby a i liczby b . Największy wspólny dzielnik liczb a i b oznaczamy **NWD(a, b)**.

Na przykład:

$$D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

$$D_{90} = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$$

Wspólne dzielniki to: 1, 2, 3, 6, 9, 18, ale największym z nich jest liczba **18**.

Możemy zatem zapisać: $\text{NWD}(72, 90) = 18$

Przykład 1

Wyznamy największy wspólny dzielnik liczb.

- a) 45 i 117 b) 40 i 99

- a) Rozkładamy na czynniki pierwsze liczby 45 i 117.

45	3	117	3
15	3	39	3
5	5	13	13
1		1	

Znajdujemy dzielniki, które powtarzają się w rozkładach obu liczb (zaznaczone jednakowymi kolorami).

W tym przykładzie są to liczby 3.

Aby obliczyć największy wspólny dzielnik danych liczb, należy pomnożyć zaznaczone jednakowe dzielniki tych liczb.

Otrzymujemy zatem: $\text{NWD}(45, 117) = 3 \cdot 3 = 9$.

- b) Wyznamy wszystkie dzielniki liczb 40 i 99.

$$D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$$

$$D_{99} = \{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$$

$$\text{NWD}(40, 99) = 1$$



Dwie liczby naturalne są **względnie pierwsze**, jeżeli ich największy wspólny dzielnik jest równy 1.
Np.: liczby 40 i 99 są względnie pierwsze, bo $\text{NWD}(40, 99) = 1$.

2. Wyznamy NWD podanych par liczb.

- a) 70 i 84 b) 65 i 121

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i b nazywamy najmniejszą liczbę naturalną różną od 0, która jest wielokrotnością liczby a i jednocześnie jest wielokrotnością liczby b . Najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b oznaczamy $\text{NWW}(a, b)$.

Na przykład:

$$W_6 = \{0, 6, 12, 18, \underline{24}, 30, 36, 42, \underline{48}, 54, \dots\},$$

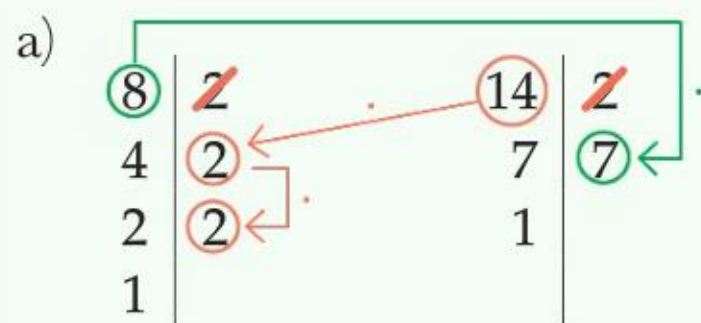
$$W_8 = \{0, 8, 16, \underline{24}, 32, 40, \underline{48}, 56, \dots\}.$$

Możemy zatem zapisać: $\text{NWW}(6, 8) = 24$

Przykład 2

Wyznamy najmniejszą wspólną wielokrotność liczb.

- a) 8 i 14 b) 120 i 132



Rozkładamy na czynniki pierwsze liczby 8 i 14.

Skreślamy dzielniki powtarzające się w rozkładach obu liczb (skreślone jednakowym kolorem).

W tym przykładzie jest to liczba 2.

Aby obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność danych liczb, należy pierwszą z liczb pomnożyć przez nieskreślone dzielniki drugiej liczby (czyli $8 \cdot 7$) lub drugą liczbę pomnożyć przez nieskreślone dzielniki pierwszej liczby (czyli $14 \cdot 2 \cdot 2$).

Otrzymujemy zatem: $\text{NWW}(8, 14) = 8 \cdot 7 = 14 \cdot 2 \cdot 2 = 56$.

- b) Rozkładamy na czynniki pierwsze liczby 120 i 132.

120	2	132	2
60	2	66	2
30	2	33	3
15	3	11	11
5	5	1	
1			

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$$

Aby obliczyć NWW podanych liczb, postępujemy podobnie, jak w przykładzie a).

$$\text{NWW}(120, 132) = 120 \cdot 11 = 132 \cdot 2 \cdot 5 = 1320$$

3. Wyznacz NWW podanych liczb.

- a) 9 i 12 b) 18 i 24

4. Ustal, nie wykonując dzielenia, czy każda podana liczba jest podzielna przez 2, 3, 4, 5, 9, 10.

- a) 708 b) 16 785

Jeśli liczba naturalna jest podzielna np. przez 18, to jest też podzielna przez każdy z dzielników liczby 18, czyli przez liczby 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Zwróćmy uwagę, że odwrotna zależność nie zawsze zachodzi.

Jeśli liczba jest np. podzielna przez 2 i przez 9, to jest też podzielna przez iloczyn tych liczb, czyli przez liczbę 18. Zauważ, że liczby 2 i 9 są względnie pierwsze.

Jeśli jednak liczba jest podzielna przez 3 i przez 6, to nie musi być podzielna przez 18. Np. liczba 12 choć jest podzielna przez 3 i przez 6, to nie jest podzielna przez 18. Zauważ, że liczby 3 i 6 nie są względnie pierwsze.

5. Rozłóż podane liczby na czynniki pierwsze, a następnie wyznacz NWD i NWW tych liczb.

- a) 45 i 105 b) 147 i 196 c) 216 i 594

Przykład 3

Sprawdźmy, nie wykonując dzielenia, czy:

- a) liczba 2154 jest podzielna przez 6,
b) liczba 5196 jest podzielna przez 18.

- a) Liczba 2154 jest podzielna przez 2, bo cyfra jedności tej liczby to 4, i jest podzielna przez 3, bo suma jej cyfr (12) jest liczbą podzielną przez 3. Ponieważ liczba 2154 jest liczbą podzielną przez 2 i przez 3, to jest liczbą podzielną przez 6.
- b) Liczba 5196 jest podzielna przez 2, bo cyfra jedności tej liczby to 6. Jednak nie jest podzielna przez 9, bo suma jej cyfr (21) nie jest liczbą podzielną przez 9. Zatem liczba 5196 nie jest podzielna przez 18.

6. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy:

- a) liczba 2332 jest podzielna przez 12.
b) liczba 4035 jest podzielna przez 15.

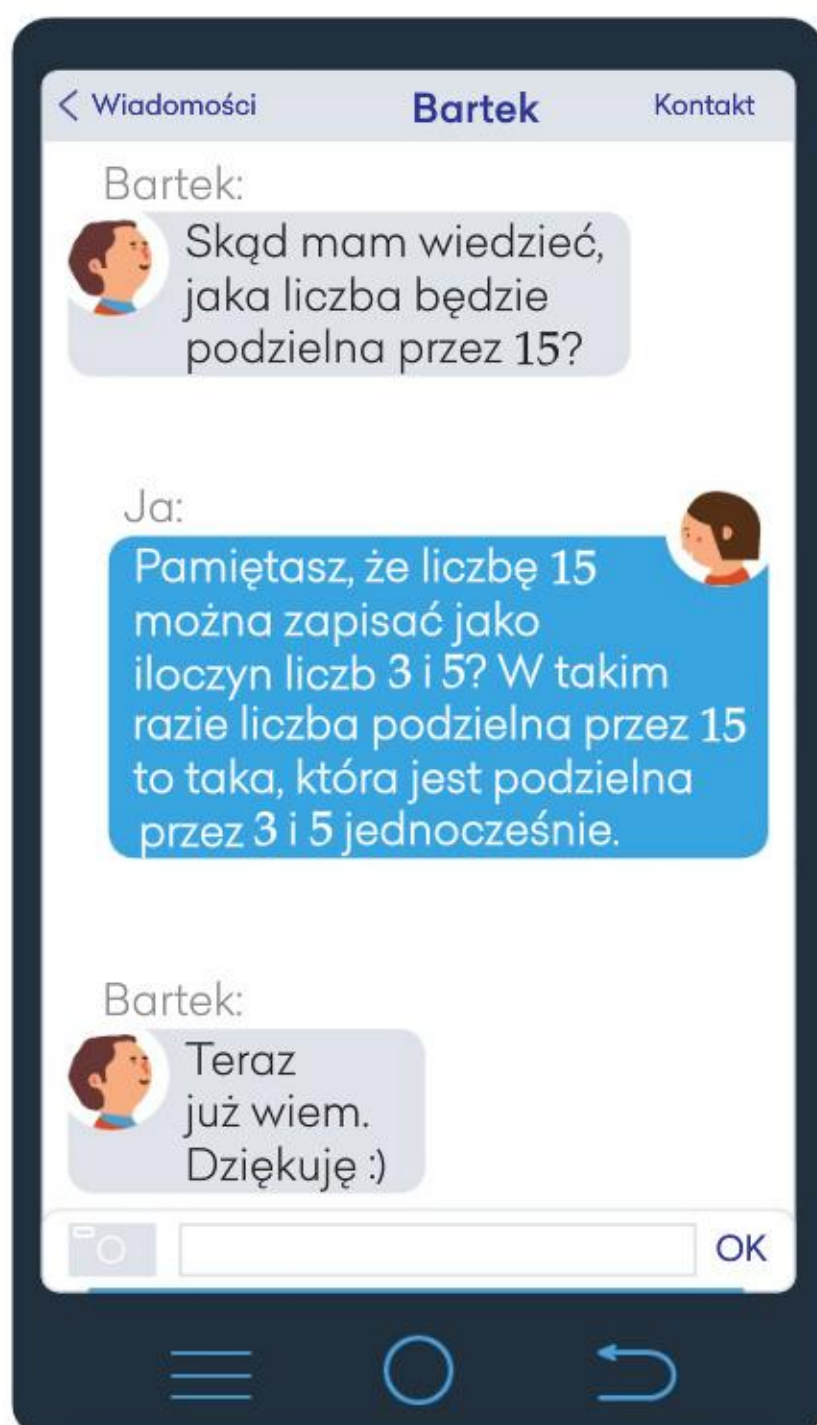
Zadania

- Wypisz liczby:
- a) złożone większe od 75 i mniejsze od 95,
b) pierwsze większe od 100 i mniejsze od 120.
- Uzasadnij, że każda podana liczba jest złożona.
- a) 1102 b) 3535 c) 5997 d) 7469



Jeżeli dwie liczby są względnie pierwsze, to ich NWW jest równa iloczynowi tych liczb.

Np.: $NWW(2, 9) = 18$, bo 2 i 9 są liczbami względnie pierwszymi.



- Rozłóż każdą podaną liczbę na czynniki pierwsze.

a) 135	b) 318	c) 468	d) 576
e) 1410	f) 2025	g) 4806	h) 14 112 ✕
- Wyznacz największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność podanych par liczb.

a) 110 i 726	b) 256 i 640	c) 279 i 248	d) 1200 i 1740 ✕
--------------	--------------	--------------	------------------
- Uzasadnij, że podane liczby są względnie pierwsze.

a) 18 i 35	b) 77 i 144	c) 484 i 441	d) 1377 i 3920 ✕
------------	-------------	--------------	------------------
- Wyznacz NWD i NWW podanych par liczb.

a) 30 i 50	b) 16 i 40	c) 21 i 49
d) 18 i 35	e) 24 i 120	f) 250 i 300
- ★ Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną k taką, że iloczyn liczb 68 i k jest kwadratem pewnej liczby naturalnej n .
Podaj, ile jest równa liczba n .
- ★ Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną s taką, że iloraz liczb 896 i s jest kwadratem pewnej liczby naturalnej m .
Podaj, ile jest równa liczba m .
- ★ Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną t taką, że iloczyn liczb 200 i t jest sześcianem pewnej liczby naturalnej p . Podaj, ile jest równa liczba p .
- Oceń prawdziwość podanych zdań. Zdania prawdziwe przepisuj do zeszytu.

a) Jeśli liczba jest podzielna przez 49, to jest podzielna przez 7.
b) Jeśli liczba jest podzielna przez 5, to jest podzielna przez 25.
c) Jeśli liczba jest podzielna przez 42, to jest podzielna przez 7 i przez 6.
d) Jeśli liczba jest podzielna przez 4 i przez 5, to jest podzielna przez 20.
e) Jeśli liczba jest podzielna przez 6 i przez 8, to jest podzielna przez 48.
- Zosia na swoje urodziny kupiła 18 lizaków, 36 batonów i 27 pączków. Ilu maksymalnie gości może Zosia zaprosić na urodziny, aby każdy dostał po równo lizaków, batonów i pączków?
- ★ Uzasadnij, nie wykonując dzielenia, że liczba 17 034 jest podzielna przez 6, ale nie jest podzielna przez 12.
- ★ Jaką cyfrę należy wpisać w $\triangle$, a jaką w $\square$, aby liczba $1\triangle 73\square$ była podzielna przez 15? Podaj wszystkie możliwości.

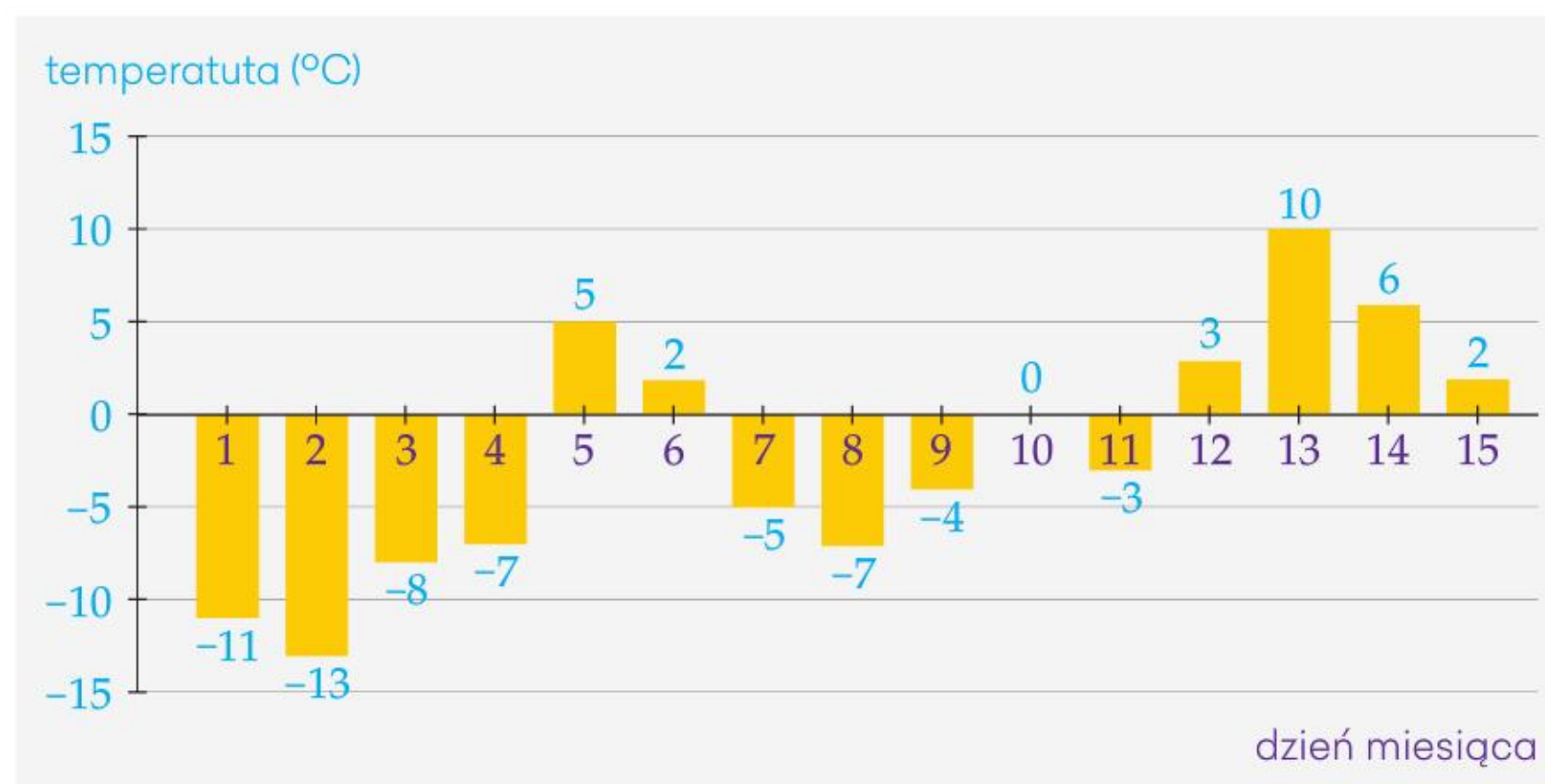
1.4 Liczby całkowite i działania na liczbach całkowitych

Podejmij temat

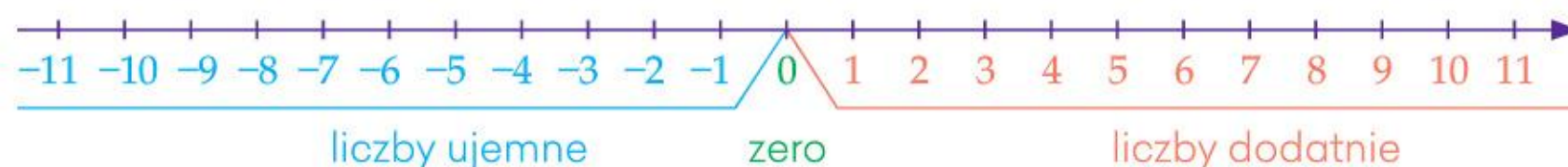


Jaką temperaturę zanotowano 5 marca, a jaką 7 marca? Jaka była różnica temperatur między najcieplejszym a najzimniejszym dniem w ciągu tych 15 dni marca?

Diagram przedstawia wyniki pomiarów temperatury dokonywanych w ciągu pierwszych piętnastu dni marca o godz. 12.00.



W poprzednich klasach poznaliśmy liczby dodatnie i liczby ujemne. Narysujmy oś liczbową i zaznaczmy na niej takie liczby.



Zero nie jest ani liczbą dodatnią, ani ujemną.

Liczby nieujemne to liczby, które nie są ujemne, czyli są to liczby dodatnie i zero.

Liczby niedodatnie to liczby, które nie są dodatnie, czyli są to liczby ujemne i zero.

Liczby przeciwne to liczby, które leżą na osi liczbowej w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych jego stronach, np.: 5 i -5, -16 i 16.

Zauważmy, że dwie liczby są przeciwne, jeśli ich suma jest równa 0.

Na przykład liczby -7 i 7 są przeciwne, bo $-7 + 7 = 0$.

Zwróćmy uwagę, że jeśli liczba a jest dodatnia, to liczba $-a$ jest ujemna, np. jeśli $a = 10$, to $-a = -10$ (liczbą przeciwną do liczby 10 jest liczba -10).

Jeśli liczba a jest ujemna, to liczba $-a$ jest dodatnia, np. jeśli $a = -10$, to $-a = -(-10) = 10$ (liczbą przeciwną do liczby -10 jest liczba 10).

Liczby całkowite to liczby naturalne i liczby do nich przeciwne, np.: ..., -51, -50, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., 50, 51, ...

Ciekawe!

Pierwsze wzmianki o liczbach ujemnych pojawiły się w chińskim traktacie *Matematyka w dziewięciu księgach* w II w. p.n.e. Jednak dopiero około V w. n.e. matematycy hinduscy zastosowali liczby ujemne do określania stanu majątkowego oraz rozliczeń handlowych, takich jak zapis długu. W powszechnym użyciu znalazły się w połowie XVIII wieku. (Na podst.: *Encyklopedia szkolna*, red. prof. dr hab. W. Waliszewski, WSiP, Warszawa 1997, s. 196).



Liczba przeciwna do liczby a to $-a$.
 $a + (-a) = 0$ i $-a + a = 0$.



Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą, ale nie każda liczba całkowita jest liczbą naturalną. Na przykład liczba -7 jest liczbą całkowitą, ale nie jest liczbą naturalną.

Przypomnijmy, jak wykonujemy dodawanie i odejmowanie liczb całkowitych.

$$2 + 13 + 35 + 40 = 90$$

$$-17 + (-18) + (-26) = -(17 + 18 + 26) = -61$$

$$15 + (-4) = 11 \quad -5 + 13 = 8$$

$$11 + (-17) = -6 \quad -15 + 3 = -12$$

$$36 - 53 = -(53 - 36) = -17$$

$$5 - 7 = 5 + (-7) = -2$$

$$5 - (-7) = 5 + 7 = 12$$

$$-9 - (-20) = -9 + 20 = 11$$

$$-17 - 13 = -17 + (-13) = -30$$

Suma liczb dodatnich jest zawsze liczbą dodatnią.

Suma liczb ujemnych jest zawsze liczbą ujemną.

Suma dwóch liczb o różnych znakach
może być liczbą dodatnią lub liczbą ujemną.

Jeżeli od liczby mniejszej mamy odjąć liczbę większą, to
możemy od liczby większej odjąć liczbę mniejszą i wynik
zapisać ze znakiem minus.

Odejmowanie liczb można zastąpić dodawaniem liczby
przeciwnej do odjemnika.

Przykład 1

Wykonajmy działanie: $-25 - (-14) - 34 - 15 - (-8) + 62 - 4$

$$-25 - (-14) - 34 - 15 - (-8) + 62 - 4 =$$

$$= -25 + 14 + (-34) + (-15) + 8 + 62 + (-4) =$$

$$= 8 + 62 + 14 + (-25) + (-15) + (-34) + (-4) =$$

$$= 84 + (-78) = 6$$

Zastępujemy odejmowanie dodawaniem liczb
przeciwnych.

Sumujemy liczby dodatnie i liczby ujemne.

Obliczamy sumę dwóch liczb o różnych znakach.

1. Oblicz.

a) $-14 - 37 + 23 - 56 + 85$

b) $52 - (-19) - 46 + (-77) - (-56) - 29$

Przykład 2

Wykonajmy działanie: $33 - 47 - 33 + 72$

$$33 - 47 - 33 + 72 =$$

$$= \underbrace{33 + (-33)}_0 + \underbrace{(-47) + 47}_0 + 25 = 25$$

Zastępujemy odejmowanie dodawaniem liczb
przeciwnych.

Zapisujemy liczbę 72 jako sumę liczb 47 i 25.
Korzystamy z własności liczb przeciwnych.

2. Oblicz, wykorzystując własności liczb przeciwnych.

a) $-67 - 85 + 67 + 35$

b) $-113 - 54 + 115 - (-62) + 2$

Przypomnijmy, jakie zasady obowiązują przy mnożeniu i dzieleniu liczb całkowitych.

Iloczyn/iloraz	Liczba dodatnia	Liczba ujemna
Liczba dodatnia	+	-
Liczba ujemna	-	+

$$-12 \cdot 5 = -60 \quad 12 \cdot (-5) = -60$$

$$60 : (-5) = -12 \quad -60 : 5 = -12$$

$$12 \cdot 5 = 60 \quad -12 \cdot (-5) = 60$$

$$60 : 5 = 12 \quad -60 : (-5) = 12$$

$$-3 \cdot (-7) = 3 \cdot 7 = 21$$

$$-2 \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-12) = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 12 = 720$$

$$-3 \cdot (-7) \cdot (-2) = -3 \cdot 7 \cdot 2 = -42$$

$$-2 \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-10) = -2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 = -1200$$

Iloczyn lub iloraz dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą ujemną.

Iloczyn lub iloraz dwóch liczb o tych samych znakach jest liczbą dodatnią.

Iloczyn parzystej liczby czynników ujemnych jest liczbą dodatnią.

Iloczyn nieparzystej liczby czynników ujemnych jest liczbą ujemną.

Przykład 3

Ustalmy, bez wykonywania działań, znak iloczynu.

a) $17 \cdot (-48) \cdot (-34) \cdot 36 \cdot 51 \cdot (-24) \cdot (-72) \cdot (-12)$

b) $-25 \cdot (-20) \cdot (-15) \cdot (-10) \cdot (-5) \cdot 0 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 15$

a) Iloczyn liczb dodatnich jest zawsze liczbą dodatnią, więc to, czy wynik będzie liczbą ujemną czy dodatnią, zależy od liczby czynników ujemnych. Mamy pięć czynników ujemnych; są nimi liczby: $-48, -34, -24, -72, -12$. Jest nieparzysta liczba czynników ujemnych, więc iloczyn będzie liczbą ujemną.

b) Zauważmy, że jeden czynnik jest równy 0. Wynik tego iloczynu jest równy 0, czyli nie jest ani dodatni, ani ujemny.

3. Ustal, bez wykonywania działań, znak iloczynu.

a) $-13 \cdot (-10) \cdot (-7) \cdot (-4) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14$

b) $-2 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot 3 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

Przykład 4

Obliczmy iloczyny.

a) $-7 \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot 2$

b) $5 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-2) \cdot 5$

a) Są cztery czynniki ujemne, więc wynik będzie liczbą dodatnią.

$$-7 \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot 2 = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1 = 10 \cdot 21 = 210$$

b) Są trzy czynniki ujemne, zatem wynik będzie liczbą ujemną.

$$5 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-2) \cdot 5 = -5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = -5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = -5000$$

4. Oblicz.

a) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1)$ b) $-6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-4)$

Przykład 5

Wykonajmy działania.

a) $-5 \cdot (-12) : (-15) \cdot 4$ b) $-51 : 3 \cdot (-48 : (-12))$

Wykonując działania, musimy pamiętać o kolejności ich wykonywania. Mnożenie i dzielenie wykonujemy w takiej kolejności, w jakiej te działania są zapisane (od strony lewej do prawej).

a) $-5 \cdot (-12) : (-15) \cdot 4 =$	Iloczyn dwóch liczb ujemnych -5 i -12 jest liczbą dodatnią.
$= 60 : (-15) \cdot 4 =$	Iloraz liczby dodatniej 60 i ujemnej -15 jest liczbą ujemną.
$= -4 \cdot 4 = -16$	Iloczyn liczby ujemnej -4 i dodatniej 4 jest liczbą ujemną.
b) $-51 : 3 \cdot (-48 : (-12)) =$	Iloraz dwóch liczb ujemnych -48 i -12 jest liczbą dodatnią.
$= -51 : 3 \cdot 4 =$	Iloraz liczby ujemnej -51 i dodatniej 3 jest liczbą ujemną.
$= -17 \cdot 4 = -68$	Iloczyn liczby ujemnej -17 i dodatniej 4 jest liczbą ujemną.

5. Oblicz.

a) $-8 \cdot (-54) : (-12) : 6$ b) $-72 : (-18) : (8 \cdot (-1) : (-4))$

Zadania

● Oblicz.

a) $18 + 27 + (-18)$	b) $-12 + (-23) + (-5)$	c) $-56 - 24 - 45$
d) $-36 - 25 - 8$	e) $15 - 9 + (-11)$	f) $26 + (-32) + 32$

● Podaj liczby o 9 większe od podanych liczb.

a) -13 b) -25 c) -7 d) 0 e) 21

● Oblicz, korzystając z własności liczb przeciwnych.

a) $14 - 7 - 14 + 7 + 9$	b) $-44 + (-71) + 44 + 71 + (-11)$
c) $-35 + 25 + (-24) + 10 + 24 + 35$	d) $-8 - 22 + 30 + 18 - 17$
e) $-49 - 1 - 64 + 54 + 10$	f) $89 + (-27) + 81 + 24 + 3 + (-89)$

● Ile jest równa suma wszystkich liczb całkowitych:

- a) większych od -3 i mniejszych od 3 ,
b) większych od -4 i mniejszych od 6 ,
c) większych od -100 i mniejszych od 98 ?

- a) $-12 - (-23) - 23 - (-12)$ b) $40 - (-35) - (-21) - 56$
c) $-100 - (-12) - (-27) - (-41) - (-19)$ d) $55 - (-34) - (-16) - 5 - (-15)$

- a) -9 b) -5 c) -17 d) 3 e) 25



- a) 19 b) 36 c) -11 d) -89 e) 0



- a) $-36 - 12 - (-24) + 35$ b) $-71 - 2 - (-33) + 10 - (-11)$
c) $-93 - 31 - 46 + 3 - (-5)$ d) $-50 - (-17) - 8 - 60 - (-6)$

- a) $-21 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot (-43) \cdot (-11) \cdot (-3) \cdot 5$
b) $16 \cdot (-32) \cdot (-51) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot 31$
c) $51 \cdot (-50) \cdot (-49) \cdot (-48) \cdot (-47) \cdot 46 \cdot (-45)$
d) $128 \cdot (-23) \cdot (-34) \cdot 0 \cdot (-49) \cdot (-11) \cdot 87$

- a) $-48 : 6 \cdot (-2)$ i $-48 : (6 \cdot (-2))$
b) $160 : (-40) : (-8)$ i $160 : ((-40) : (-8))$
c) $180 : (-60) : (-3)$ i $180 : ((-60) : (-3))$

- a) $34 : (-17)$ b) $0 : (-51)$ c) $-36 : (-9)$
d) $-100 : (-2) : 5$ e) $240 : (-4) : (-12) : (-5)$ f) $-1000 : (-8) : (-5) : 5$



- a) 4, b) 6.



- a) $-2, 4, -8, 16, -32, ?$ b) $-1, 4, -16, ?, -256$ c) $480, -240, 120, -60, ?, -15$
d) $?, 23, -23, 23, -23, 23$ e) $-15, -10, -5, ?, 5, 10$ f) $11, 5, ?, -7, -13, -19$

1.5 Rozwinięcia dziesiętne

Podejmij temat



Spróbuj zamienić ułamki zwykłe: $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{4}{15}$ na ułamki dziesiętne, dzieląc licznik ułamka przez jego mianownik sposobem pisemnym. Co zauważasz?



Pojęcie rozwinięcia dziesiętnego jest ściśle związane z zamianą ułamka zwykłego na ułamek dziesiętny. Ułamek zwykły można zamienić na ułamek dziesiętny dwiema metodami.

Jedną z nich jest rozszerzenie ułamka zwykłego tak, aby w mianowniku otrzymać potęgę liczby 10, tzn. 10, 100, 1000 itd.

Przykład 1

Zamieńmy ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne.

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{7}{25}$

c) $\frac{3}{8}$

a) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0,4$

b) $\frac{7}{25} = \frac{7 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{28}{100} = 0,28$

c) $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0,375$

1. Zamień każdy podany ułamek zwykły na ułamek dziesiętny.

a) $\frac{7}{20}$

b) $\frac{19}{125}$

c) $\frac{37}{250}$

Jeśli taka zamiana jest uciążliwa lub niemożliwa, stosujemy inną metodę zamiany ułamka zwykłego na dziesiętny – dzielimy licznik ułamka przez jego mianownik sposobem pisemnym.

Przykład 2

Zamieńmy ułamek zwykły $\frac{29}{32}$ na ułamek dziesiętny.

$$\begin{array}{r} 0,90625 \\ 29 : 32 \\ - 0 \\ \hline 290 \\ - 288 \\ \hline 20 \\ - 0 \\ \hline 200 \\ - 192 \\ \hline 80 \\ - 64 \\ \hline 160 \\ - 160 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ułamki takie, jak np.: $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{20}$,
 $\frac{19}{125}$, $\frac{37}{250}$, $\frac{29}{32}$ mają **rozwiniecie
dziesiętne skończone**.

Rozwiniecie to otrzymujemy,
gdy dzielenie da się zakończyć
w skończonej liczbie kroków.

2. Zamień każdy podany ułamek zwykły na ułamek dziesiętny.

a) $\frac{7}{16}$

b) $\frac{21}{24}$

c) $\frac{28}{35}$

Przykład 3

Podzielmy licznik przez mianownik w każdym podanym ułamku.

a) $\frac{5}{9}$

b) $\frac{3}{11}$

c) $\frac{7}{12}$

$$\begin{array}{r} 0,555... \\ 5 : 9 \\ - 0 \\ \hline 50 \\ - 45 \\ \hline 50 \\ - 45 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,2727... \\ 3 : 11 \\ - 0 \\ \hline 30 \\ - 22 \\ \hline 80 \\ - 77 \\ \hline 30 \\ - 22 \\ \hline 80 \\ - 77 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,5833... \\ 7 : 12 \\ - 0 \\ \hline 70 \\ - 60 \\ \hline 100 \\ - 96 \\ \hline 40 \\ - 36 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\frac{5}{9} = 0,555... = 0,(\overline{5}) - \text{okresem ułamka jest cyfra } 5$$

$$\frac{3}{11} = 0,2727... = 0,(\overline{27}) - \text{okresem ułamka jest grupa cyfr } 27$$

$$\frac{7}{12} = 0,5833... = 0,58(\overline{3}) - \text{okresem ułamka jest cyfra } 3$$

Ułamki: $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{12}$ mają **rozwiniecie dziesiętne nieskończone okresowe**.

Ciekawe!

Przykładem ułamka zwykłego, w którego rozwinięciu występuje okres 15-cyfrowy, jest ułamek $\frac{1}{31} = 0,032258064516129$

Okresem nazywamy powtarzającą się cyfrę lub najmniejszą grupę powtarzających się cyfr rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego.

Rozwinięcie dziesiętne nieskończone możemy zapisać bez użycia trzech kropek, ujmując okres w nawias.

3. Znajdź rozwinięcie dziesiętne każdego ułamka i podaj jego okres.

a) $\frac{2}{7}$

b) $\frac{11}{18}$

c) $\frac{20}{27}$

Więcej na temat

Zauważ, że:

- jeśli mianownik ułamka doprowadzonego do postaci nieskracalnej można rozłożyć na czynniki pierwsze tak, aby był on liczbą 5 lub iloczynem kilku 5 (potęgą liczby 5), liczbą 2 lub iloczynem kilku 2 (potęgą liczby 2) albo iloczynem kilku 5 i kilku 2 (iloczynem potęgi liczby 5 i potęgi liczby 2), to ten ułamek ma rozwinięcie dziesiętne skończone, np.:

$$\frac{21}{35} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\frac{33}{75} = \frac{11}{25} = \frac{11}{5 \cdot 5} = \frac{44}{100} = 0,44$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{875}{1000} = 0,875$$

$$\frac{26}{40} = \frac{13}{20} = \frac{13}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{65}{100} = 0,65$$

- jeśli mianownik ułamka doprowadzonego do postaci nieskracalnej można rozłożyć na czynniki pierwsze tak, że przynajmniej jeden z tych czynników jest różny od 2 i od 5, to ten ułamek ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone, np.:

$$\frac{2}{15} = \frac{2}{3 \cdot 5} = 0,1(3)$$

$$\frac{5}{33} = \frac{5}{3 \cdot 11} = 0,(15)$$

$$\frac{7}{18} = \frac{7}{2 \cdot 3 \cdot 3} = 0,3(8)$$

Zadania

- Zapisz liczby w postaci dziesiętnej. Rozszerz mianownik każdego podanego ułamka do potęgi liczby 10.

a) $1\frac{2}{5}$

b) $7\frac{3}{20}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $1\frac{11}{16}$

e) $9\frac{4}{125}$

f) $\frac{154}{5000}$

- Podaj rozwinięcie dziesiętne każdego ułamka.

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{7}$$

$$\frac{2}{9}$$

$$\frac{25}{11}$$

$$\frac{23}{24}$$

$$\frac{3}{30}$$

$$\frac{15}{75}$$

$$\frac{71}{110}$$

$$\frac{69}{150}$$

- Spośród działań wybierz to, którego wynik ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone.
- A. $\frac{2}{5} + \frac{5}{16}$ B. $\frac{13}{18} - \frac{19}{45}$ C. $\frac{7}{18} + \frac{9}{16}$ D. $\frac{11}{12} - \frac{7}{15}$
- Wskaż działanie, którego wynik jest najmniejszy.
- A. $\frac{1}{6} + \frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ C. $\frac{7}{11} - \frac{9}{25}$ D. $\frac{5}{16} + \frac{5}{24}$
- Porównaj liczby.
- a) $\frac{4}{12}$ i 0,(3) b) 0,4 i $\frac{1}{3}$ c) $3\frac{1}{2}$ i 3,(5)
d) $1\frac{3}{4}$ i 1,(75) e) $4\frac{2}{3}$ i 4,66 f) $13\frac{2}{9}$ i 13,(2)
- Jakie liczby można wpisać zamiast **?**, aby otrzymane ułamki miały rozwinięcie dziesiętne nieskończone okresowe?
- a) $\frac{10 \cdot \text{?}}{2 \cdot 3 \cdot 5}$ b) $\frac{18 \cdot 2 \cdot \text{?}}{2 \cdot 5 \cdot 7}$ c) $\frac{8 \cdot 15 \cdot 9}{5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \text{?}}$
- Spośród podanych ułamków wypisz te, które mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone. Czy musisz wykonać dzielenie?
- | | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $\frac{5}{18}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{17}{6}$ | $\frac{6}{33}$ | $\frac{5}{20}$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
- Zapisz rozwinięcie dziesiętne każdego podanego ułamka, zapisując okres w nawiasie.
- a) 1,33333... b) 0,77777... c) 0,151515...
d) 0,20454545... e) 1,4444... f) 1,142857142857...
- Wiedząc, że:
- a) $\frac{1}{3} = 0,333...$ podaj rozwinięcie dziesiętne nieskończone ułamka $\frac{2}{3}$,
b) $\frac{1}{9} = 0,111...$ zapisz ułamek, którego rozwinięcie dziesiętne nieskończone to 0,555...
c) $\frac{1}{11} = 0,0909...$ podaj rozwinięcie dziesiętne nieskończone ułamka $\frac{4}{11}$,
d) $\frac{1}{33} = 0,0303...$ zapisz ułamek, którego rozwinięcie dziesiętne nieskończone to 0,1515...
- Zapisz rozwinięcia dziesiętne ułamków: $\frac{13}{18}$, $\frac{6}{37}$, $\frac{29}{22}$, $\frac{79}{27}$. Określ, ile cyfr ma okres rozwinięcia dziesiętnego każdego ułamka.
- Zapisz:
- a) dwunastą cyfrę i czterdziątą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{4}{27}$,
b) dwudziestą cyfrę i pięćdziesiątą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{131}{135}$,
c) piętnastą cyfrę i sześćdziesiątą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{5}{7}$.

1.6 Szacowanie. Zaokrąglanie liczb

Podejmij temat



Czy pani Hani wystarczy 190 zł na zakup trzykilogramowego tortu? A czy 100 zł wystarczy jej na zakup 2,4 kg sernika? Czy potrafisz odpowiedzieć na te pytania bez wykonywania dokładnych obliczeń?



Zapewne pamiętasz, że umiejętność sprawnego **szacowania** jest bardzo potrzebna w życiu codziennym.

Przykład 1

Przeanalizujmy cennik z *Podejmij temat* i odpowiedzmy na pytania.

- Ile zapłacimy za 40 dag ciasteczek maślanych?
- Czy 12 zł wystarczy na zakup 40 dag ciasteczek maślanych oraz 2 bułek z jagodami?

a) $0,40 \cdot 12,4 \text{ zł} = 4,96 \text{ zł}$

Obliczamy kwotę potrzebną do zapłacenia za 40 dag ciasteczek.

b) $2,89 \text{ zł} \approx 3 \text{ zł}$
 $4,96 \text{ zł} \approx 5 \text{ zł}$
 $2 \cdot 3 \text{ zł} + 5 \text{ zł} = 11 \text{ zł}$

Przybliżamy ceny do pełnych złotych i szacujemy koszt zakupów.

$11 \text{ zł} < 12 \text{ zł}$, zatem 12 zł wystarczy na zakupy.

1. Odpowiedz na pytania.

- Ile zapłacimy za 2,23 kg bananów w cenie 5,99 zł za kilogram?
- Czy 25 zł wystarczyłoby na zakup 2,23 kg bananów w cenie 5,99 zł za kilogram i 1 kg truskawek w cenie 8,20 zł za kilogram?

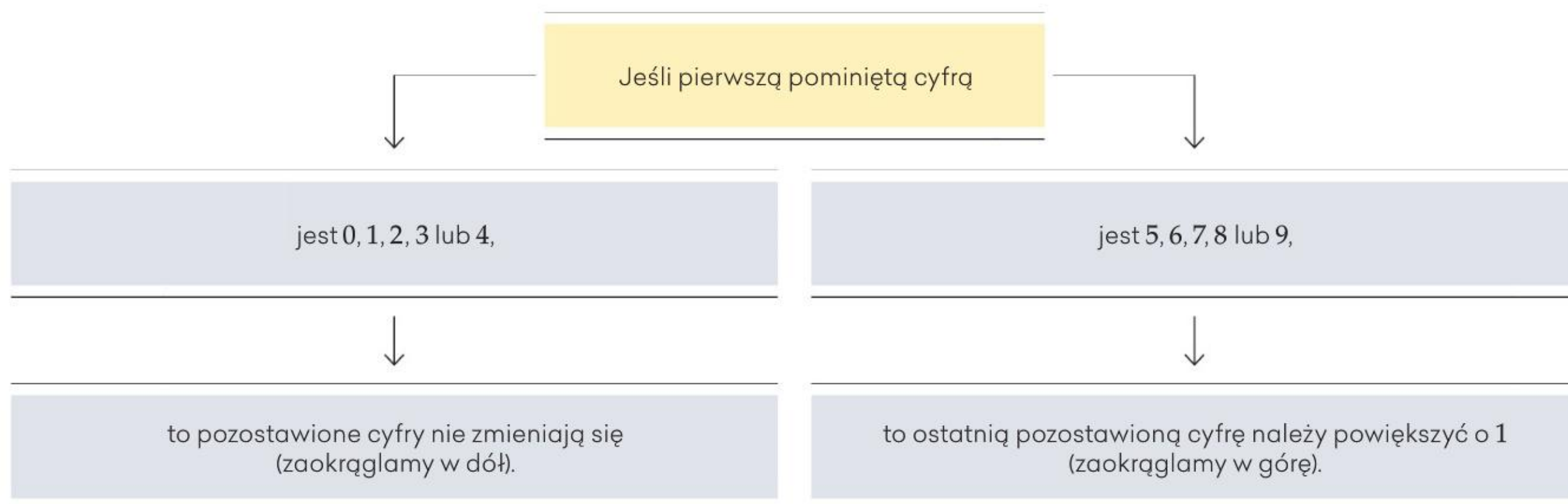


1 kg = 100 dag
1 dag = 0,01 kg
1 zł = 100 gr
1 gr = 0,01 zł

Przypomnijmy, w jaki sposób **zaokrąglamy** liczby.

$461,9254 \approx 500$	– zaokrąglanie do setek (z dokładnością do 100); o wyniku zaokrąglania decyduje cyfra dziesiątek	
$461,9254 \approx 460$	– zaokrąglanie do dziesiątek (z dokładnością do 10); o wyniku zaokrąglania decyduje cyfra jedności	
$461,9254 \approx 462$	– zaokrąglanie do jedności (z dokładnością do 1); o wyniku zaokrąglania decyduje cyfra części dziesiątych	
$461,9254 \approx 461,9$	– zaokrąglanie do części dziesiątych (z dokładnością do 0,1); o wyniku zaokrąglania decyduje cyfra części setnych	
$461,9254 \approx 461,93$	– zaokrąglanie do części setnych (z dokładnością do 0,01); o wyniku zaokrąglania decyduje cyfra części tysięcznych	
$461,9254 \approx 461,925$	– zaokrąglanie do części tysięcznych (z dokładnością do 0,001); o wyniku zaokrąglania decyduje cyfra części dziesięciotysięcznych	×

Aby zaokrąglić liczbę dziesiętną do pewnego rzędu, cyfry niższych rzędów zastępujemy zerami.



Zaokrąglając do 10, 100, 1000 itd., musimy pamiętać o zapisaniu zer, którymi zastąpiliśmy cyfry w liczbie, np.:

$35\,487 \approx 35\,490$	– zaokrąglanie do dziesiątek (z dokładnością do 10)
$35\,487 \approx 35\,500$	– zaokrąglanie do setek (z dokładnością do 100)
$35\,487 \approx 35\,000$	– zaokrąglanie do tysięcy (z dokładnością do 1000)
$35\,487 \approx 40\,000$	– zaokrąglanie do dziesiątek tysięcy (z dokładnością do 10 000)

Zaokrąglając do jedności, części dziesiątych, części setnych itd., zazwyczaj nie piszemy po przecinku zer, którymi zastąpiliśmy cyfry w liczbie, np.:

$7,1972 \approx 7,0000$ czyli $7,1972 \approx 7$	– zaokrąglanie do jedności (z dokładnością do 1)	
$7,1972 \approx 7,2000$ czyli $7,1972 \approx 7,2$	– zaokrąglanie do części dziesiątych (z dokładnością do 0,1)	
$7,1972 \approx 7,2000$ czyli $7,1972 \approx 7,20$	– zaokrąglanie do części setnych (z dokładnością do 0,01)	
$7,1972 \approx 7,1970$ czyli $7,1972 \approx 7,197$	– zaokrąglanie do części tysięcznych (z dokładnością do 0,001)	×

Zadania

● Zaokrąglj liczbę 351,72854 do:

- a) setek, b) dziesiątek, c) jedności,
d) części dziesiątych, e) części setnych, f) części tysięcznych.

● Podaj przybliżenia podanych liczb z dokładnością do:

- a) dziesiątek, b) jedności, c) części dziesiątych

0,299

53,8

72,(6)

512,6(2)

31896

0,955

● Sprawdź, czy poniższe zapisy są poprawne. Możesz korzystać z kalkulatora.

- a) $1\frac{3}{4} = 1,175$ b) $5\frac{1}{9} = 5,111$ c) $\frac{2}{3} = 0,(6)$

● Podaj rozwinięcia dziesiętne podanych ułamków i zapisz ich przybliżenia z podaną dokładnością.

- a) $\frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{5}{21}, \frac{7}{9}$ z dokładnością do 0,1
b) $\frac{9}{24}, \frac{1}{16}, \frac{4}{26}$ z dokładnością do 0,01
c) $\frac{7}{24}, \frac{35}{13}, \frac{12}{21}$ z dokładnością do 0,001

● Tort urodzinowy, który ważył 3 kg, podzielono na 18 równych części. Ile ważyła jedna część tortu? Wynik podaj z dokładnością do 1 grama.

● Oblicz, ile zapłacisz za 32 dag pierników po 16,50 zł za 1 kg oraz 18 dag wafli po 14,50 zł za 1 kg. Wynik podaj z dokładnością do:

- a) 1 złotówki, b) 10 groszy.

● Pan Paweł chce kupić telewizor, którego przekątna ekranu miałaby w przybliżeniu 124 cm. Ilu calowy telewizor powinien kupić pan Paweł? Wynik podaj z dokładnością do jednego cala.

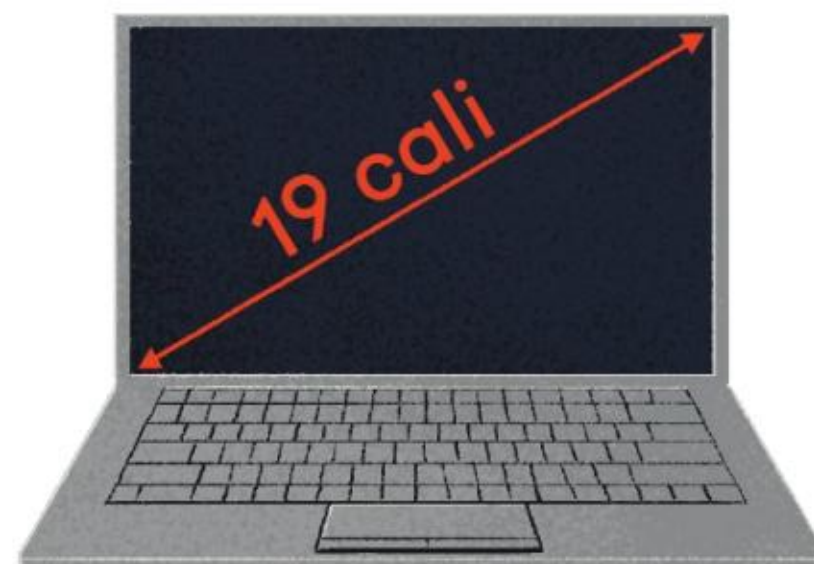
$$1 \text{ cal} \approx 2,54 \text{ cm}$$

● Ile centymetrów ma przekątna ekranu laptopa? Wynik podaj z dokładnością do 0,1 cm.

● Pani Kasia dostała prezent na urodziny obwiązany kolorową wstążką. Oszacuj w centymetrach długość tej wstążki, która ma więcej niż 15,5 cala, ale mniej niż 16,1 cala długości.

● Wskaż, w którym przykładzie błędnie zaokrąglono liczbę.

- A. $0,(27) \approx 0,273$ B. $0,6(5) \approx 0,656$
C. $0,2(3) \approx 0,233$ D. $0,(78) \approx 0,787$

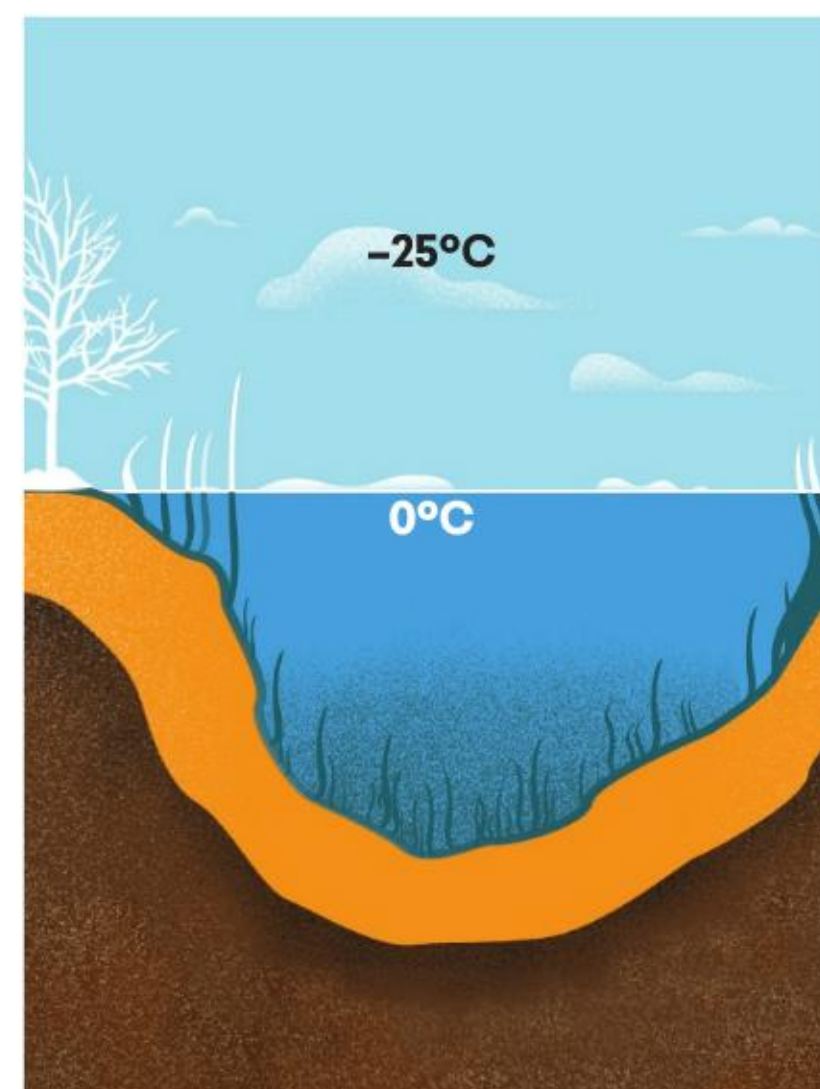
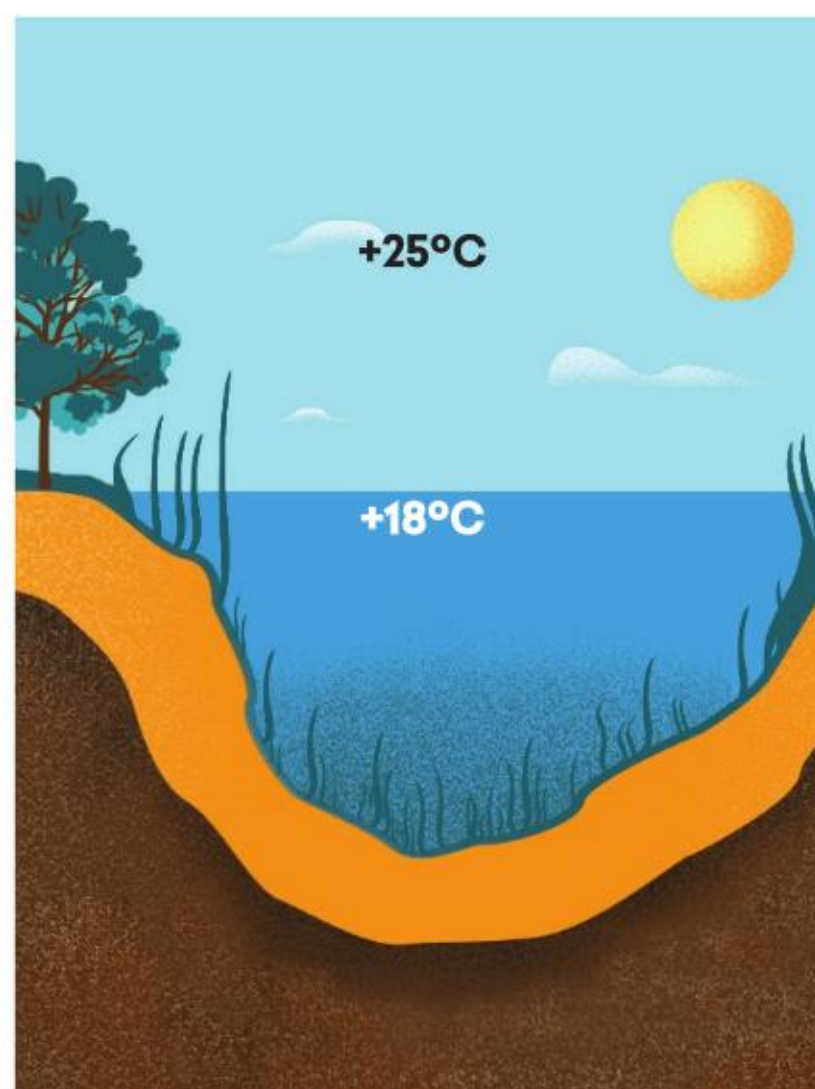


1.7 Odległość liczb na osi liczbowej. Wartość bezwzględna

Podejmij temat



Rysunki przedstawiają przekrój jeziora w dwóch porach roku. Jaką średnią temperaturę powietrza zanotowano latem, a jaką – zimą? Czy potrafisz zaznaczyć liczby określające temperatury powietrza na osi liczbowej? Jaka jest odległość między tymi liczbami na osi liczbowej? Jaka jest różnica między średnią temperaturą powietrza i średnią temperaturą pod powierzchnią wody panującą latem? A zimą?

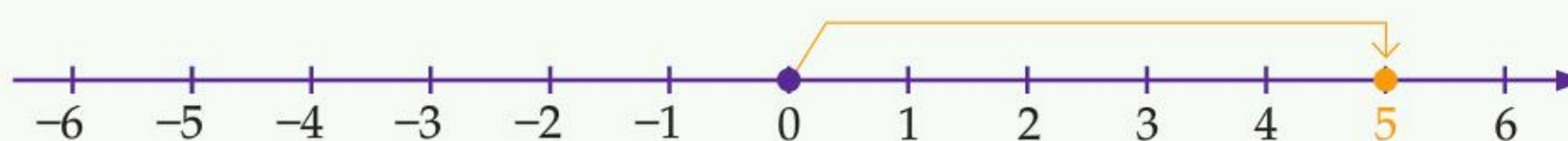


Wiemy już, że liczby przeciwne to liczby, które na osi liczbowej leżą w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych stronach.

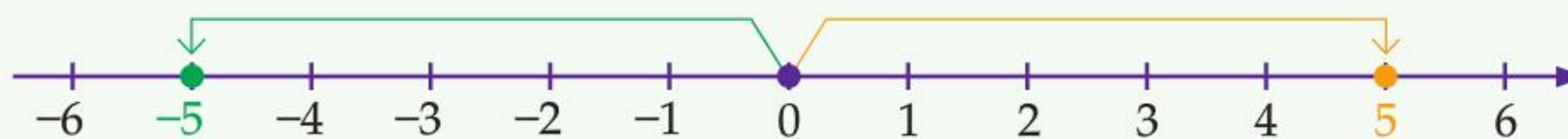
Przykład 1

Wyznamy liczby, których odległość na osi liczbowej od liczby 0 jest równa 5.

Rysujemy oś liczbową. Odliczamy 5 jednostek w prawo od liczby 0. Zaznaczamy liczbę 5.



Następnie odliczamy 5 jednostek w lewo od liczby 0. Zaznaczamy liczbę -5.



Liczby -5 i 5 są liczbami przeciwnymi.

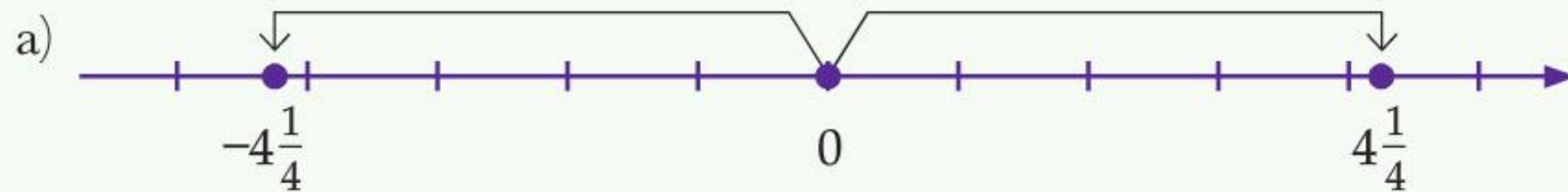
1. Znajdź liczby, których odległość na osi liczbowej od 0 jest równa $2\frac{2}{3}$ jednostki. Podaj trzy przykłady innych par liczb, których odległości od zera są równe.

Przykład 2

Zaznaczmy na osi liczbowej liczby przeciwne do podanych liczb.

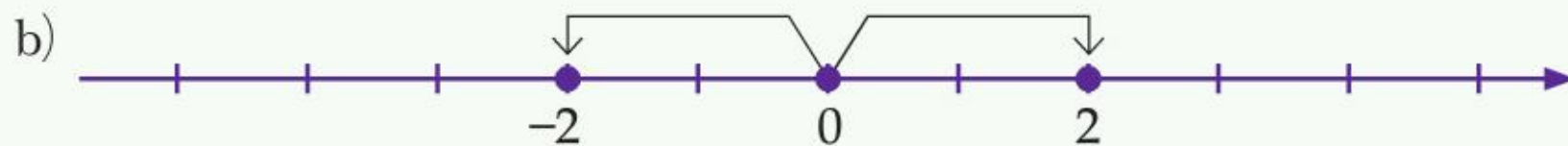
a) $4\frac{1}{4}$

b) -2



Zauważmy, że liczba $4\frac{1}{4}$ leży na prawo od liczby 0 w odległości $4\frac{1}{4}$ jednostki.

Odliczamy $4\frac{1}{4}$ jednostki w lewo od liczby 0 . Otrzymujemy liczbę $-4\frac{1}{4}$, która jest liczbą przeciwną do liczby $4\frac{1}{4}$.



Zauważmy, że liczba -2 leży na lewo od liczby 0 w odległości 2 jednostek.

Odliczamy 2 jednostki w prawo od liczby 0 . Otrzymujemy liczbę 2 , która jest liczbą przeciwną do liczby -2 .



Wartość bezwzględna liczby a jest równa wartości bezwzględnej liczby przeciwnej do liczby a .

$$|a| = |-a|$$

2. Zaznacz na osi liczbowej liczby przeciwne do podanych liczb.

a) $-3,5$

b) 8

Wartość bezwzględna liczby to odległość tej liczby od zera na osi liczbowej.
Wartość bezwzględną liczby a oznaczamy $|a|$.

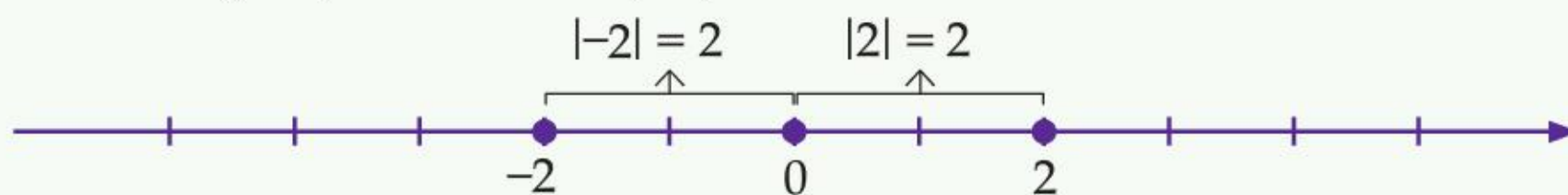
Przykład 3

Obliczmy:

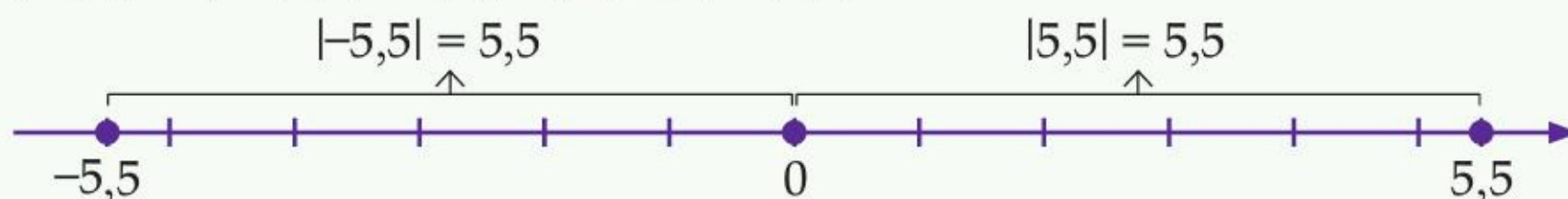
a) $|-2|$ oraz $|2|$

b) $|-5,5|$ oraz $|5,5|$

a) Zauważmy, że $|-2| = 2$ i $|2| = 2$, czyli $|-2| = |2|$.



b) $|-5,5| = 5,5$ i $|5,5| = 5,5$, czyli $|-5,5| = |5,5|$.



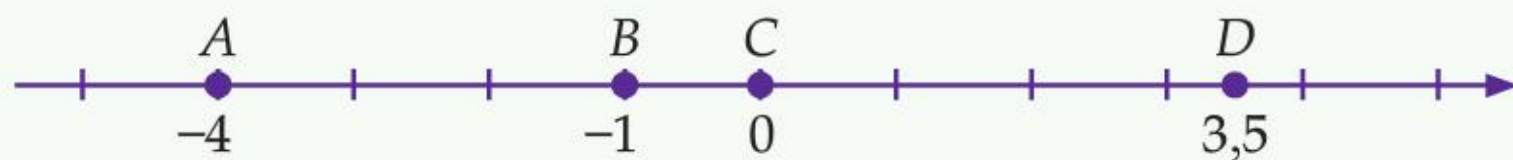
3. Oblicz.

a) $|-2,2|$

b) $\left|3\frac{4}{7}\right|$

Przykład 4

Punktom na osi liczbowej, oznaczonym na rysunku literami, odpowiadają liczby. Ustalmy odległości między punktami A i C , D i C , A i B , D i A .



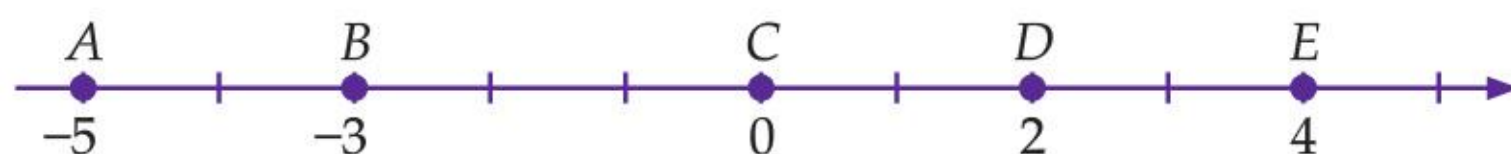
Punkt A leży w odległości 4 jednostek od punktu C , dlatego odległość między punktami A i C jest równa 4.

Punkt D leży w odległości 3,5 jednostki od punktu C , dlatego odległość między punktami D i C jest równa 3,5.

Punkt A leży w odległości 3 jednostek od punktu B , dlatego odległość między punktami A i B jest równa 3.

Punkt D leży w odległości 7,5 jednostki od punktu A , dlatego odległość między punktami D i A jest równa 7,5.

4. Punktom A, B, C, D, E na osi liczbowej odpowiadają liczby $-5, -3, 0, 2, 4$. Podaj odległości między punktami: A i B , B i D , C i E , E i A .



Przykład 5

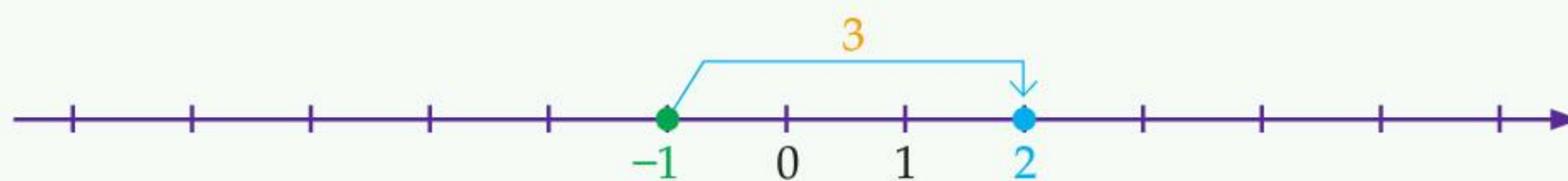
Wyznamy liczby, których odległość na osi liczbowej:

- a) od liczby -1 jest równa 3, b) od liczby $1\frac{1}{3}$ jest równa $2\frac{1}{2}$, c) od liczby $-3,3$ jest równa $0,8$.

- a) Rysujemy oś liczbową, zaznaczamy na niej punkt o współrzędnej -1 .

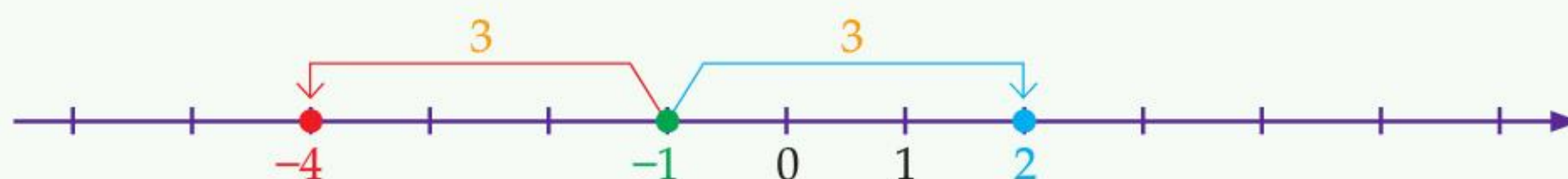
Odliczamy 3 jednostki w prawo od liczby -1 .

Zapisujemy: $-1 + 3 = 2$. Jedną z szukanych liczb jest liczba 2.



Odliczamy 3 jednostki w lewo od liczby -1 .

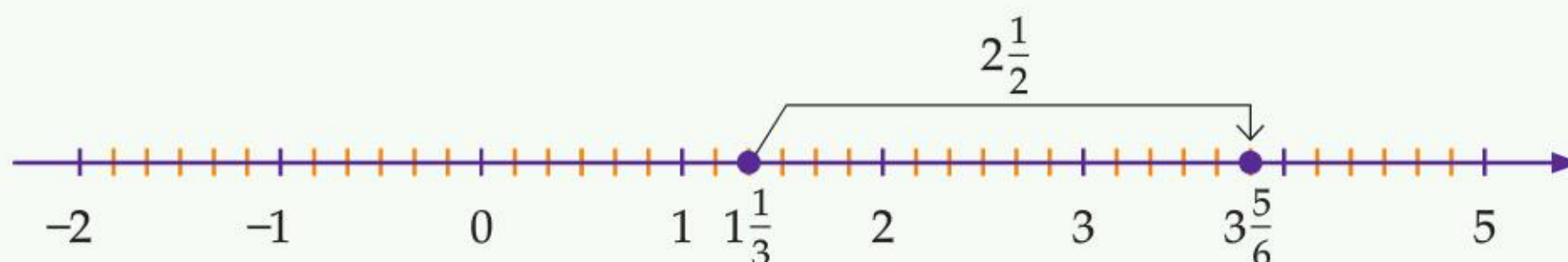
Zapisujemy: $-1 - 3 = -4$. Drugą liczbą jest liczba -4 .



Są dwie liczby: -4 i 2 , których odległość na osi liczbowej od liczby -1 jest równa 3.

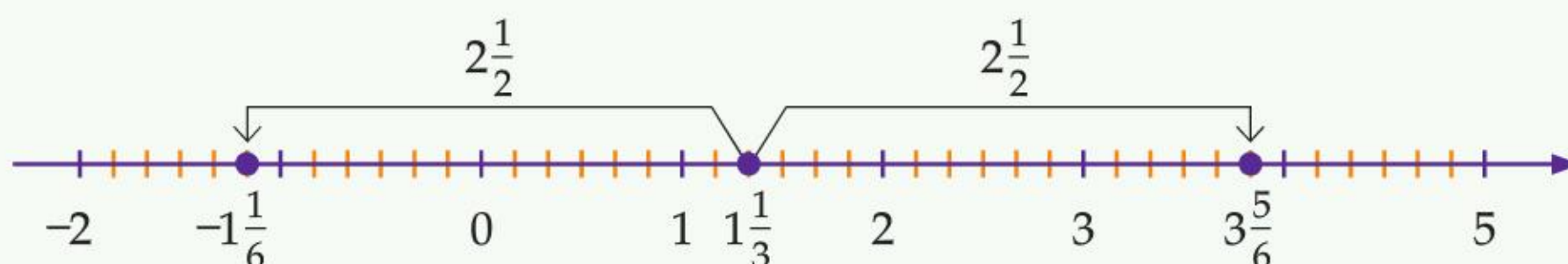
b) Odliczamy $2\frac{1}{2}$ jednostki w prawo od liczby $1\frac{1}{3}$.

$$1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} = 3\frac{5}{6}. \text{ Jedną z szukanych liczb jest liczba } 3\frac{5}{6}.$$



Odliczamy $2\frac{1}{2}$ jednostki w lewo od liczby $1\frac{1}{3}$.

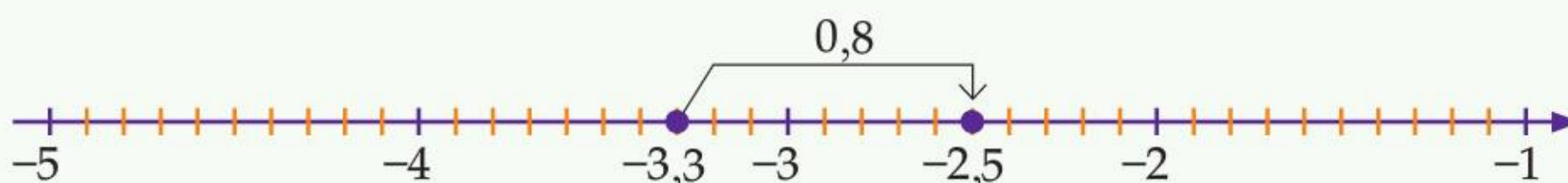
$$1\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} = -1\frac{1}{6}. \text{ Drugą liczbą jest liczba } -1\frac{1}{6}.$$



Są dwie liczby: $-1\frac{1}{6}$ i $3\frac{5}{6}$, których odległość na osi liczbowej od liczby $1\frac{1}{3}$ jest równa $2\frac{1}{2}$.

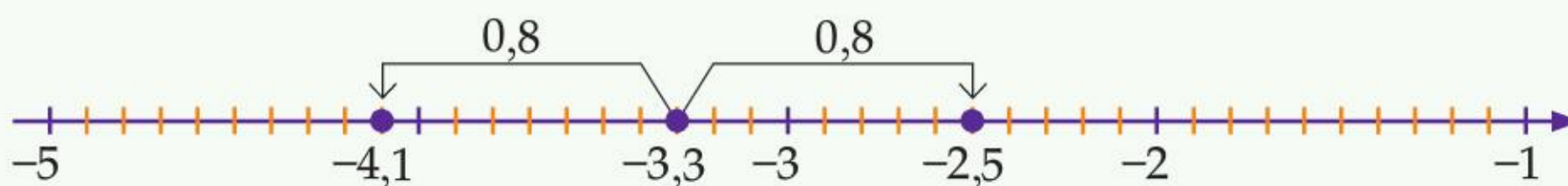
c) Odliczamy 0,8 jednostki w prawo od liczby $-3,3$.

$$-3,3 + 0,8 = -2,5. \text{ Jedną z szukanych liczb jest liczba } -2,5.$$



Odliczamy 0,8 jednostki w lewo od liczby $-3,3$.

$$-3,3 - 0,8 = -4,1. \text{ Drugą liczbą jest liczba } -4,1.$$



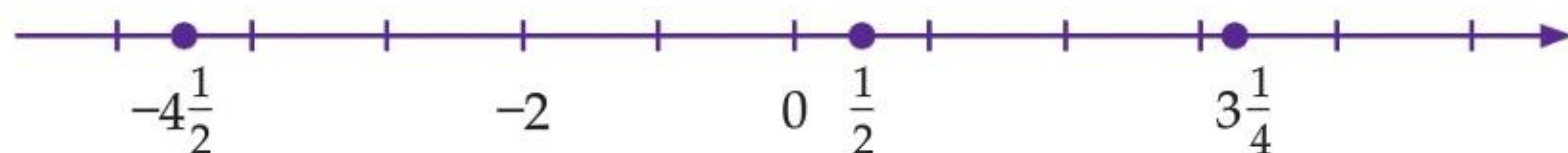
Są dwie liczby: $-4,1$ i $-2,5$, których odległość na osi liczbowej od liczby $-3,3$ jest równa 0,8.

5. Znajdź liczby, których odległość na osi liczbowej:

- a) od liczby -3 jest równa 7,
- b) od liczby $-4\frac{1}{4}$ jest równa $1\frac{3}{4}$,
- c) od liczby 1,2 jest równa 2,6.

Zadania

- Na osi liczbowej zaznaczono kilka liczb. Podaj ich odległości od liczby zero.



- Zaznacz na osi liczbowej liczby, których odległość od liczby zero jest równa:

a) 8, b) $\frac{3}{4}$, c) 1,9, d) 0, e) $2\frac{1}{2}$.

- Zaznacz na osi liczbowej liczby przeciwne do danych liczb.

4,87	-3	-0,5	$-15\frac{3}{8}$	1,167	$2\frac{1}{3}$	$\frac{11}{4}$	$-(-\frac{2}{7})$
------	----	------	------------------	-------	----------------	----------------	-------------------

- Zaznacz na osi liczbowej liczby, których odległość od liczby 2 jest równa:

a) 3, b) 2,5, c) 1,3.

- Wyznacz odległość między liczbami:

a) 3 i -1, b) -4 i -1, c) 2 i 9, d) -3 i 7.

- Oblicz wartości bezwzględne podanych liczb.

-100	-26	$-7\frac{3}{7}$	-0,125	0	0,32	18	$45\frac{4}{5}$
------	-----	-----------------	--------	---	------	----	-----------------

- Oblicz.

a) $ 5 + -8 $	b) $ -17 - 12 $	c) $ 6 - -14 $
d) $13 \cdot -2 + -7 $	e) $ -10 + (-2) \cdot 9 $	f) $5 \cdot 7 - (-3) \cdot -6 $
g) $ -15 + -11 - 18 $	h) $4 \cdot 3 + 16 - 3 \cdot -9 $	

- Oblicz.

a) $ 2 - -7 $	b) $ -11 + -6 $	c) $ 10 - 7 - 10 $
d) $ 4 - 5 - 6 $	e) $ 15 - 9 - 9 - 15 $	f) $ 7 - 13 - 9 + 11 $

Czy ważna jest kolejność, w jakiej obliczamy wartości bezwzględne?



Oczywiście! Zasada jest taka, że najpierw liczymy te wartości bezwzględne, w których nie ma zawartych innych wartości bezwzględnych.

1.8 Liczby wymierne. Porównywanie liczb wymiernych

Podejmij temat



Przyjrzyjmy się następującym zapisom liczb.
Czy potrafisz w podobny sposób zapisać
liczby: 5; -8; 0,12; $-\frac{5}{8}$?

$7 = \frac{7}{1}$	$7 = \frac{14}{2}$	$7 = \frac{-63}{-9}$
$-4 = -\frac{4}{1}$	$-4 = \frac{12}{-3}$	$-4 = \frac{-16}{4}$
$2,75 = \frac{275}{100}$	$2,75 = \frac{11}{4}$	$2,75 = \frac{-22}{-8}$
$-11\frac{1}{2} = -\frac{23}{2}$	$-11\frac{1}{2} = \frac{46}{-4}$	$-11\frac{1}{2} = \frac{-69}{6}$
$0 = \frac{0}{5}$	$0 = \frac{0}{-7}$	$0 = \frac{0}{19}$



Wśród liczb wymiernych wyróżniamy liczby:

- wymierne dodatnie,
- wymierne ujemne,
- wymierne niedodatnie,
- wymierne nieujemne,
- zero.

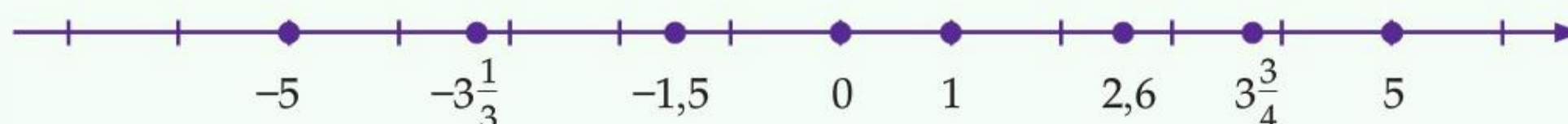
Zauważmy, że każda liczba z *Podejmij temat* została przedstawiona w postaci ułamka zwykłego.

Liczbą wymierną nazywamy każdą liczbę,
którą można przedstawić w postaci ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$,
gdzie p, q są liczbami całkowitymi i q jest różne od zera.

Przykład 1

Odczytajmy, które z liczb zaznaczonych na osi liczbowej, są:

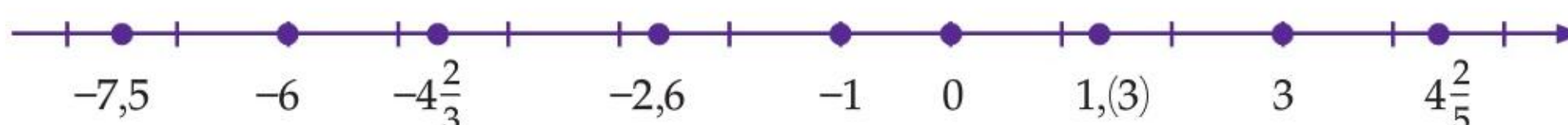
- a) naturalne, b) całkowite, c) dodatnie, d) nieujemne, e) niedodatnie całkowite.



- a) Liczby naturalne zaznaczone na osi liczbowej to: 0; 1; 5.
b) Liczby całkowite zaznaczone na osi liczbowej to: -5; 0; 1; 5.
c) Liczby dodatnie zaznaczone na osi liczbowej to: 1; 2,6; $3\frac{3}{4}$; 5.
d) Liczby nieujemne zaznaczone na osi liczbowej to: 0; 1; 2,6; $3\frac{3}{4}$; 5.
e) Liczby niedodatnie całkowite zaznaczone na osi liczbowej to: -5; 0.

1. Które z liczb zaznaczonych na osi liczbowej są:

- a) całkowite, b) dodatnie, c) ujemne całkowite, d) niedodatnie, e) nieujemne?



Więcej na temat

Zauważmy, że $\frac{2}{3} = 0,6$. Zatem liczba $0,6$ jest liczbą wymierną, ponieważ można ją przedstawić w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych: 2 i 3 (w postaci ułamka zwykłego $\frac{2}{3}$).

2. Czy podane liczby są wymierne? Uzasadnij swoją odpowiedź.

- a) $0,(3)$ b) $0,(1)$

Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone albo nieskończone okresowe.

Jeżeli rozwinięcie dziesiętne pewnej liczby jest skończone lub nieskończone okresowe, to ta liczba jest liczbą wymierną.

Przykład 2

Porównajmy liczby.

- a) -3 i $-4,5$ b) $1,(3)$ i $1\frac{1}{4}$

a) Narysujmy oś liczbową i zaznaczmy na niej liczby -3 i $-4,5$.



Ponieważ liczba -3 na osi liczbowej znajduje się bliżej zera niż liczba $-4,5$, więc liczba -3 jest większa niż liczba $-4,5$.

$$-4,5 < -3$$

- b) $1,(3) = 1,333\dots$ i $1\frac{1}{4} = 1,25$

$1,25 < 1,333\dots$ bo cyfra części dziesiątych rozwinięcia dziesiętnego liczby $1\frac{1}{4}$ jest mniejsza od cyfry części dziesiątych liczby $1,(3)$:

$$1\frac{1}{4} < 1,(3)$$

3. Porównaj liczby.

- a) $3,6$ i $-5\frac{4}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ i $0,(6)$

Spośród dwóch liczb dodatnich ta jest większa, która na osi liczbowej znajduje się dalej od zera.

Spośród dwóch liczb ujemnych ta jest większa, która na osi liczbowej znajduje się bliżej zera.

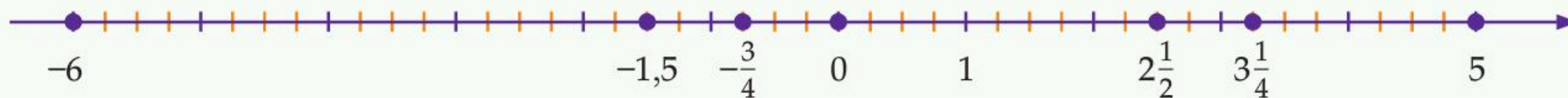


Żeby porównać ułamek zwykły i ułamek dziesiętny, najpierw musimy zapisać ułamek zwykły w postaci dziesiętnej lub zapisać ułamek dziesiętny w postaci ułamka zwykłego.

Przykład 3

Uporządkujmy rosnąco liczby: $3\frac{1}{4}$; 0; -1,5; -6; 5; $2\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$.

Narysujmy oś liczbową i zaznaczmy na niej podane liczby.



Zauważmy, że: $-6 < -1,5 < -\frac{3}{4} < 0 < 2\frac{1}{2} < 3\frac{1}{4} < 5$

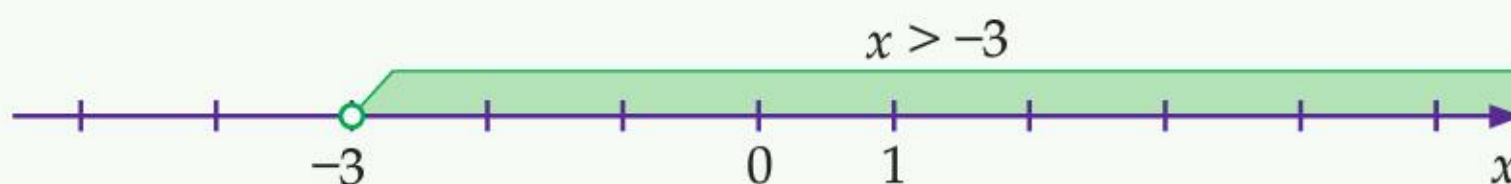
4. Uporządkuj malejąco liczby: $6\frac{1}{2}$; 4; $-2\frac{3}{4}$; -3; 1,5; -2,5; 2.

Przykład 4

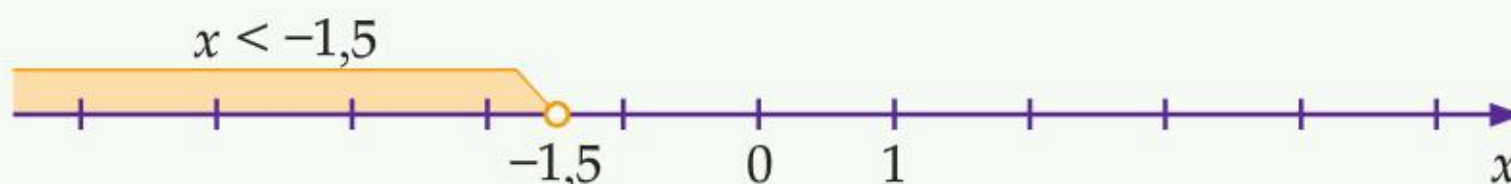
Zaznaczmy na osi liczbowej wszystkie liczby, które:

- a) są większe od liczby -3, b) są mniejsze od liczby -1,5,
c) są większe od 2 lub równe 2, d) są mniejsze od $1\frac{1}{3}$ lub równe $1\frac{1}{3}$.

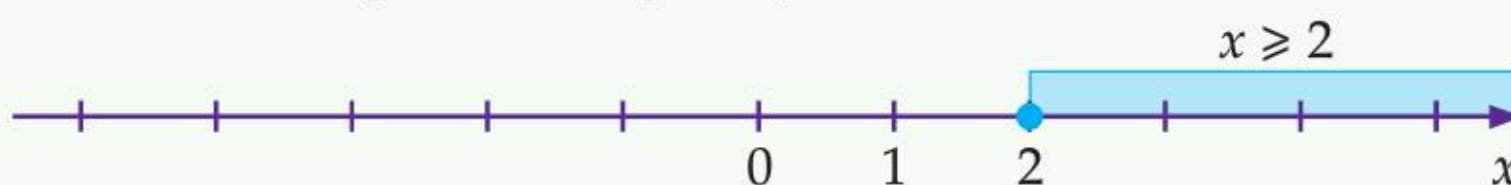
- a) **Liczby większe od liczby -3** to te liczby, które na osi liczbowej są na prawo od liczby -3, czyli te, które spełniają **nierówność**: $x > -3$.



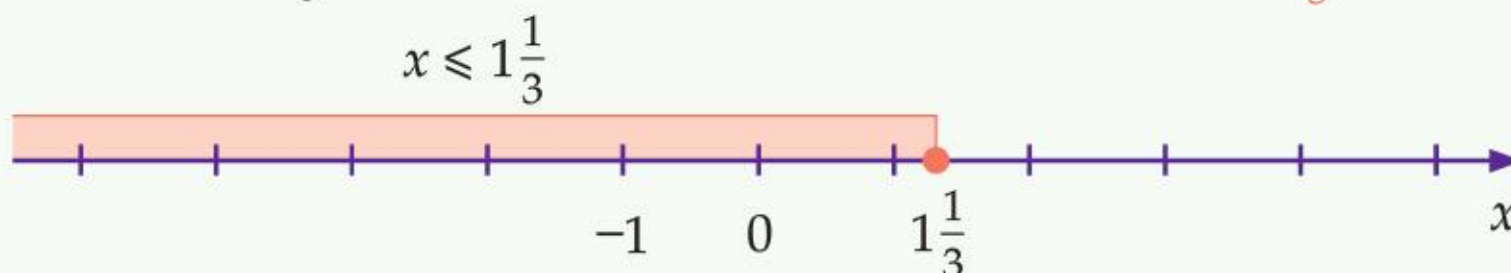
- b) **Liczby mniejsze od liczby -1,5** to te liczby, które na osi liczbowej są na lewo od liczby -1,5, czyli te, które spełniają **nierówność**: $x < -1,5$.



- c) **Liczby, które są większe od 2 lub równe 2**, to te liczby, które na osi liczbowej są na prawo od liczby 2, oraz liczba 2, czyli te, które spełniają **nierówność**: $x \geq 2$.



- d) **Liczby, które są mniejsze od $1\frac{1}{3}$ lub równe $1\frac{1}{3}$** , to te liczby, które na osi liczbowej są na lewo od liczby $1\frac{1}{3}$, oraz liczba $1\frac{1}{3}$, czyli te, które spełniają **nierówność**: $x \leq 1\frac{1}{3}$.



5. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które:

a) są mniejsze od liczby 5,

b) są większe od liczby $3\frac{1}{2}$,

c) są mniejsze od $-1,5$ lub równe $-1,5$,

d) są większe od -3 lub równe -3 .

Zapisz odpowiednie nierówności.

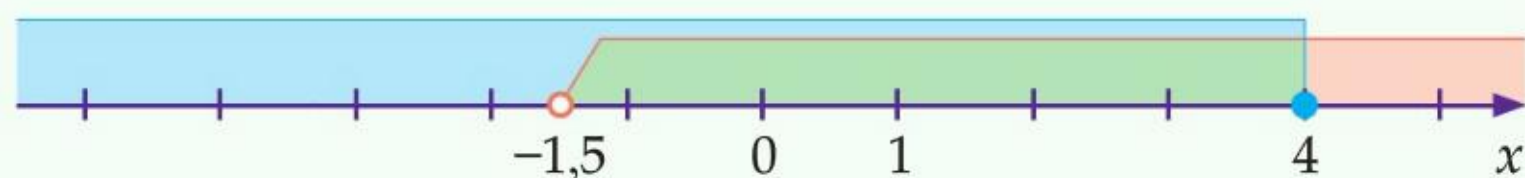
Przykład 5

a) Zaznaczmy na osi liczbowej wszystkie liczby, które są większe od liczby $-1,5$ i jednocześnie mniejsze od 4 lub równe 4.

b) Zaznaczmy na osi liczbowej wszystkie liczby, które są większe od liczby -7 lub równe -7 i jednocześnie mniejsze od -1 lub równe -1 .

a) Liczby większe od liczby $-1,5$ to te liczby, które na osi liczbowej są na prawo od liczby $-1,5$.

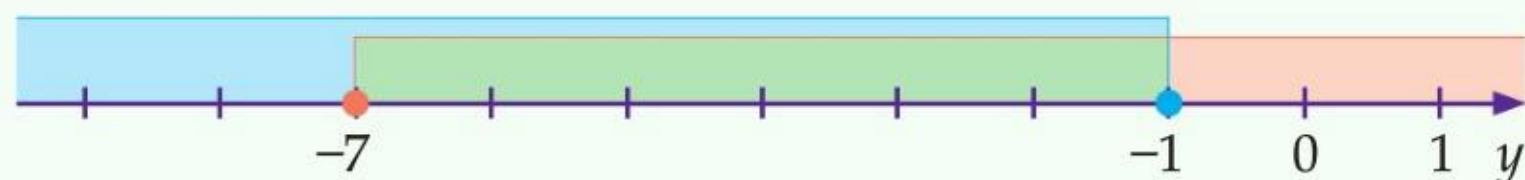
Liczby mniejsze od liczby 4 lub równe 4 to te liczby, które na osi liczbowej są na lewo od liczby 4, oraz liczba 4.



Liczba x , która jest większa od liczby $-1,5$ i jednocześnie mniejsza od 4 lub równa 4, spełnia warunek: $-1,5 < x \leq 4$.

b) Liczby większe od liczby -7 lub równe -7 to te liczby, które na osi liczbowej są na prawo od liczby -7 , oraz liczba -7 .

Liczby mniejsze od liczby -1 lub równe -1 to te liczby, które na osi liczbowej są na lewo od liczby -1 , oraz liczba -1 .



Liczba y , która jest większa od liczby -7 lub równa -7 i jednocześnie mniejsza od liczby -1 lub równa -1 , spełnia warunek: $-7 \leq y < -1$.

6. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, które:

a) są większe od liczby -5 i jednocześnie mniejsze od liczby 3,

b) są większe od liczby -4 i jednocześnie mniejsze od liczby -1 lub równe liczbie -1 .

Zadania

Podane liczby zapisz w postaci ułamków zwykłych.

-9	$4\frac{3}{4}$	$0,1$	$-2\frac{3}{5}$	$5,32$	11	-17
------	----------------	-------	-----------------	--------	------	-------

● Spośród podanych liczb wypisz liczby:

- | | |
|---------------|-----------------|
| a) naturalne, | b) ujemne, |
| c) całkowite, | d) niedodatnie, |
| e) dodatnie, | f) nieujemne. |

$10\frac{1}{3}$	$-16,95$	17	$-28\frac{3}{4}$	0
$-2\frac{3}{8}$	$25\frac{1}{2}$	-36	$-25,5$	$28,75$

● Zaznacz na osi liczbowej liczby:

- a) naturalne mniejsze od $7,25$,
- b) całkowite ujemne większe od $-8,2$,
- c) całkowite niedodatnie większe od $-5\frac{1}{2}$,
- d) całkowite dodatnie mniejsze lub równe 6 ,
- e) całkowite większe od -6 i jednocześnie mniejsze od 4 .

● Porównaj liczby.

- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| a) $2,5$ i $-2\frac{1}{3}$ | b) $-\frac{1}{6}$ i $-0,2$ |
| c) $-5\frac{3}{4}$ i $-5,25$ | d) $1,1$ i $1,(1)$ |

● Ustal, ile jest liczb:

- a) naturalnych mniejszych od 7 ,
- b) całkowitych ujemnych większych od $-10,3$,
- c) całkowitych nieujemnych mniejszych od $8\frac{1}{8}$,
- d) całkowitych niedodatnich większych od $-5,2$,
- e) naturalnych mniejszych od $0,6$,
- f) naturalnych mniejszych od $-3,1$,
- g) całkowitych większych od -4 i jednocześnie mniejszych od 15 ,
- h) naturalnych większych od -11 i jednocześnie mniejszych od 5 ,
- i) całkowitych niedodatnich większych od $-8,4$ i jednocześnie mniejszych od $2\frac{3}{5}$.

● Zaznacz na osi liczbowej podane liczby. Zapisz te liczby rosnąco.

$-2,25$	$1\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$2,5$	-3	$0,25$	$3,75$
---------	----------------	----------------	-------	------	--------	--------

● Podaj przykład liczby, która jest:

- a) większa od $0,5$ i jednocześnie mniejsza od $0,(5)$,
- b) większa od $-5,34$ i jednocześnie mniejsza od $-5,33$,
- c) większa od $-\frac{1}{2}$ i jednocześnie mniejsza od $-\frac{1}{3}$.

● Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające podane warunki i zapisz odpowiednie nierówności.

- a) Liczba jest mniejsza od 6 .
- b) Liczba jest większa od -7 .
- c) Liczba jest mniejsza od $-0,5$.
- d) Liczba jest większa od $-6,5$ lub równa $-6,5$.
- e) Liczba jest większa od $1,25$ lub równa $1,25$.
- f) Liczba jest dodatnia.
- g) Liczba jest nieujemna.

● Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające podane nierówności.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $x < 7$ | b) $x \geq 8,5$ |
| c) $x > -16$ | d) $x \leq -20$ |
| e) $x \leq \frac{5}{8}$ | f) $x > -1\frac{2}{5}$ |
| g) $x < 2\frac{2}{3}$ | h) $x \geq -\frac{9}{4}$ |



Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające podane warunki.

- a) Liczba x jest większa od liczby -1 i jednocześnie mniejsza od liczby 7 lub równa 7 .
- b) Liczba y jest większa od liczby -14 i jednocześnie mniejsza od liczby -8 .
- c) Liczba z jest większa od liczby -3 lub równa -3 i jednocześnie mniejsza od liczby $4,5$ lub równa $4,5$.



Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające podane warunki.

- | | |
|--|---|
| a) $-2 < x < 5$ | b) $3 \leq x \leq 9$ |
| c) $3,5 < x \leq 8,5$ | d) $-3,4 \leq x < -2,6$ |
| e) $-2\frac{1}{3} \leq x \leq -1\frac{1}{4}$ | f) $-3\frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}$ |

1.9 Działania na liczbach wymiernych

Podejmij temat



Czy Michał i Natalia poprawnie wykonali działania?

Rozwiązanie Michała:

$$2\frac{1}{6} - 5\frac{5}{6} = -\left(5\frac{5}{6} - 2\frac{1}{6}\right) = -3\frac{4}{6} = -3\frac{2}{3}$$

Rozwiązanie Natalii:

$$1\frac{4}{7} - 3\frac{6}{7} = 1\frac{4}{7} - 1\frac{4}{7} - 2\frac{2}{7} = -2\frac{2}{7}$$

Wykonując działania na liczbach wymiernych, stosujemy te same reguły, jak przy wykonywaniu działań na ułamkach i liczbach całkowitych.

Przypomnijmy, jak dodajemy, odejmujemy, mnożymy i dzielimy ułamki.

Aby dodać lub odjąć ułamki zwykłe o jednakowych mianownikach, dodajemy lub odejmujemy ich liczniki, a mianowniki pozostawiamy bez zmian. Na przykład:

$$4\frac{3}{7} + 3\frac{6}{7} = 7\frac{9}{7} = 8\frac{2}{7}$$

$$10\frac{2}{45} - 6\frac{37}{45} = 9\frac{47}{45} - 6\frac{37}{45} = 3\frac{10}{45} = 3\frac{2}{9}$$

Aby dodać lub odjąć ułamki zwykłe o różnych mianownikach, najpierw rozszerzamy ułamki, sprowadzając je do wspólnego mianownika. Na przykład:

$$6\frac{19}{22} + 5\frac{1}{4} = 6\frac{38}{44} + 5\frac{11}{44} = 11\frac{49}{44} = 12\frac{5}{44}$$

$$7\frac{5}{9} - 1\frac{7}{12} = 7\frac{20}{36} - 1\frac{21}{36} = 6\frac{56}{36} - 1\frac{21}{36} = 5\frac{35}{36}$$

Wykonując działania na ułamkach zwykłych lub liczbach mieszanych, należy pamiętać o tym, aby wynik zawsze przedstawić w najprostszej postaci – jako ułamek nieskracalny lub liczbę mieszaną.

Dodając lub odejmując ułamki dziesiętne, postępujemy podobnie jak w przypadku liczb naturalnych. W prostych przykładach dodawanie lub odejmowanie możemy wykonać w pamięci, np.: $2,6 + 3,1 = 5,7$; $8,5 - 0,3 = 8,2$.

W trudniejszych przykładach dodawanie lub odejmowanie możemy wykonać sposobem pisemnym. Dodając lub odejmując ułamki dziesiętne sposobem pisemnym, musimy pamiętać, by przecinek zapisać pod przecinkiem, np.:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2,8 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \\ + \quad 4,1 \quad 8 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 7,0 \quad 5 \quad 7 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 12 \quad 14 \quad 6 \quad 9 \quad 10 \\ 1 \quad 3 \quad 4,7 \quad 0 \quad 0 \\ - \quad 9 \quad 7,0 \quad 9 \quad 2 \\ \hline 3 \quad 7,6 \quad 0 \quad 8 \end{array}$$



Jeśli chcemy znaleźć wspólny mianownik na potrzeby dodawania lub odejmowania ułamków zwykłych, najlepszym rozwiązaniem jest znalezienie NWW tych mianowników.

Przykład 1

Obliczmy.

a) $3\frac{7}{9} - 5$ b) $-2,5 + 4\frac{2}{3}$

a) $3\frac{7}{9} - 5 = -(5 - 3\frac{7}{9}) = -(4\frac{9}{9} - 3\frac{7}{9}) = -1\frac{2}{9}$

Od liczby mniejszej mamy odjąć liczbę większą, więc wynik będzie liczbą ujemną.

b) $-2,5 + 4\frac{2}{3} = 4\frac{2}{3} + (-2,5) = 4\frac{2}{3} - 2,5 = 4\frac{2}{3} - 2\frac{5}{10} = 4\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = 4\frac{4}{6} - 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{6}$



Wykonując mnożenie ułamków zwykłych, możemy uprościć sobie obliczenia, skracając liczniki z mianownikami przez wspólne dzielniki.

1. Wykonaj działania. Wyniki przedstaw w najprostszej postaci.

a) $8\frac{3}{4} + (-2\frac{5}{6})$ b) $-6\frac{6}{7} + 10,25$

Mnożąc dwa ułamki zwykłe, mnożymy licznik pierwszego ułamka przez licznik drugiego ułamka oraz mianownik pierwszego ułamka przez mianownik drugiego ułamka. Aby rachunki były łatwiejsze, warto pamiętać o skracaniu.

Na przykład:

$$\frac{1\cancel{2}}{1\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{2}1^3}{\cancel{2}2_{11}} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 11} = \frac{3}{11}$$

Aby pomnożyć liczby mieszane, zamieniamy je na ułamki niewłaściwe i następnie mnożymy.

$$1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{8} = \frac{8}{5} \cdot \frac{17}{8} = \frac{1 \cdot 17}{5 \cdot 1} = \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$$

Ułamki dziesiętne mnożymy sposobem pisemnym, tak jak liczby naturalne, a w iloczynie zapisujemy tyle cyfr po przecinku, ile łącznie cyfr po przecinku mają czynniki, np.:

$$\begin{array}{r} 3,06 \\ \cdot 2,7 \\ \hline 2142 \\ +612 \\ \hline 8,262 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 61,34 \\ \cdot 4500 \\ \hline 30670 \\ +24536 \\ \hline 276030,00 \end{array}$$

Przy mnożeniu ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000 itd., wystarczy w danym ułamku przesunąć przecinek w prawo o tyle miejsc, ile jest zer w liczbie, przez którą mnożymy ułamek.

Na przykład:

$$4,02 \cdot 10 = 40,2$$

$$7,41 \cdot 100 = 741$$

$$12,83 \cdot 1000 = 12\,830$$

Przykład 2

Wykonajmy działania.

$$a) \left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{11}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{5}\right)$$

$$b) (-1,1) \cdot (-1,1) \cdot 5,4$$

$$\begin{aligned} a) \left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{11}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{5}\right) &= \\ &= -1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{11} \cdot 2\frac{1}{5} = \\ &= -\frac{3}{12} \cdot \frac{12^6}{11} \cdot \frac{11^1}{5} = -\frac{18}{5} = -3\frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (-1,1) \cdot (-1,1) \cdot 5,4 &= \\ &= 1,21 \cdot 5,4 = 6,534 \end{aligned}$$

Iloczyn nieparzystej liczby czynników ujemnych jest liczbą ujemną.

Zamieniamy liczby mieszane na ułamki zwykłe.

Iloczyn dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.

2. Oblicz.

$$a) -3\frac{3}{5} \cdot \left(-1\frac{1}{9}\right)$$

$$b) -4,5 \cdot (-1,8) \cdot (-0,2)$$

Aby podzielić liczbę przez ułamek zwykły, należy tę liczbę pomnożyć przez odwrotność ułamka. Przypomnijmy, że liczbą odwrotną do liczby $a \neq 0$ (odwrotnością liczby a) jest liczba $b \neq 0$ taka, że $a \cdot b = 1$. Na przykład liczby 5 i $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{7}$ i $\frac{7}{3}$, $-2\frac{1}{5}$ i $-\frac{5}{11}$, $-\frac{1}{13}$ i -13 są parami liczb odwrotnych. Liczbą odwrotną do liczby 1 jest liczba 1, a liczbą odwrotną do liczby -1 jest liczba -1 .

Poniższy przykład ilustruje sposób dzielenia ułamków zwykłych.

$$2\frac{1}{3} : 1\frac{3}{4} = \frac{7}{3} : \frac{7}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Dzielenie ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną sposobem pisemnym wykonujemy tak jak dzielenie liczb naturalnych, pamiętając o postawieniu przecinka w ilorazie nad przecinkiem dzielnej. Dzielenie ułamków dziesiętnych sprowadza się do dzielenia ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną. Aby to wykonać, mnożymy dzielną i dzielnik przez 10, 100, 1000 itd.

$$33,3 : 4 = 8,325$$

$$3,645 : 2,7 = 36,45 : 27 = 1,35$$

$$\begin{array}{r} 8,325 \\ 33,3 : 4 \\ -32 \\ \hline 13 \\ -12 \\ \hline 10 \\ -8 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,35 \\ 36,45 : 27 \\ -27 \\ \hline 94 \\ -81 \\ \hline 135 \\ -135 \\ \hline 0 \end{array}$$

Przy dzieleniu ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000 itd. postępujemy analogicznie do mnożenia, z tą różnicą, że przesuwamy przecinek w lewo.



Liczba odwrotna do liczby a różnej od zera to taka liczba b różna od zera, że $a \cdot b = 1$. Zatem liczbą odwrotną do a jest $\frac{1}{a}$.

Przykład 3

Wykonajmy działania.

$$\text{a) } 2\frac{3}{4} : \left(-4\frac{1}{8}\right)$$

$$\text{b) } -3,5 : 2\frac{1}{4}$$

$$\text{a) } 2\frac{3}{4} : \left(-4\frac{1}{8}\right) = -2\frac{3}{4} : 4\frac{1}{8} =$$

$$= -\frac{11}{4} : \frac{33}{8} = -\frac{11^1}{4^1} \cdot \frac{8^2}{33^1} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{b) } -3,5 : 2\frac{1}{4} = -\frac{35}{10} : 2\frac{1}{4} = -\frac{7}{2} : \frac{9}{4} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{4^2}{9^1} = -\frac{14}{9} = -1\frac{5}{9}$$

Iloraz dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą ujemną.

Zamieniamy liczby mieszane na ułamki.

Skracamy ułamki.

3. Wykonaj działania.

$$\text{a) } -2\frac{4}{9} : \left(-3\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{b) } 4,8 : \left(-7\frac{1}{5}\right)$$

Kolejność wykonywania działań

1. Najpierw wykonujemy działania w tych nawiasach, w których już nie ma innych nawiasów.
2. Potem wykonujemy mnożenie i dzielenie w kolejności występowania, czyli od strony lewej do prawej.
3. Na końcu wykonujemy dodawanie i odejmowanie w kolejności występowania, czyli od strony lewej do prawej.

Przykład 4

Obliczmy.

$$\text{a) } 13\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(6\frac{3}{4} - 1\frac{5}{6}\right)$$

$$\text{c) } \left(3,6 - 1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(2\frac{4}{5} - 3,7\right)$$

$$\text{a) } 13\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2} + \frac{2^1}{1^1} \cdot \frac{3^1}{2^1} = 13\frac{1}{2} + 2 = 15\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(6\frac{3}{4} - 1\frac{5}{6}\right) = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(6\frac{9}{12} - 1\frac{10}{12}\right) = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(5\frac{21}{12} - 1\frac{10}{12}\right) = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4\frac{11}{12} = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{59}{12} = 2\frac{1}{2} - \frac{59}{24} = \\ = 2\frac{12}{24} - 2\frac{11}{24} = \frac{1}{24}$$

$$\text{c) } \left(3,6 - 1\frac{1}{3}\right) \cdot \left(2\frac{4}{5} - 3,7\right) = \left(3\frac{3}{5} - 1\frac{1}{3}\right) \cdot (2,8 - 3,7) = \left(3\frac{9}{15} - 1\frac{5}{15}\right) \cdot (-0,9) = 2\frac{4}{15} \cdot (-0,9) = \frac{17^1}{5^1} \cdot \frac{34^1}{15^1} \cdot \left(-\frac{9^3}{10^3}\right) = \\ = -\frac{51}{25} = -2\frac{1}{25}$$

4. Oblicz.

$$\text{a) } \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) : \frac{5}{18}$$

$$\text{b) } 4,1 \cdot \left(\frac{3}{5} - 0,4 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

Zadania

● Oblicz.

a) $6,34 - 4,2 - 7,036$

b) $5\frac{3}{4} + (-1\frac{2}{3}) + (-7\frac{3}{5})$

c) $-3 + 4\frac{5}{7} - 6,75$

d) $2,5 - 6\frac{1}{4} - (-3,75)$

● Oblicz.

a) $0,3 \cdot (-0,15)$

b) $\frac{7}{8} \cdot (-2\frac{1}{5}) \cdot (-\frac{8}{11}) \cdot (-2\frac{1}{7})$

c) $4,4 : (-0,01) : (-110) : (-0,5)$

d) $-\frac{3}{7} \cdot 2,7 : (-3\frac{3}{54}) : (-3\frac{6}{7})$

● Od sumy liczb $1\frac{1}{4}$ i $1\frac{1}{5}$ odejmij iloczyn liczb $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{4}$.

● Od iloczynu liczb $1\frac{2}{3}$ i $4\frac{1}{2}$ odejmij iloraz liczb $3\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{2}$.

● Wyznacz dzielną, jeśli dzielnik jest równy $2\frac{3}{4}$, a iloraz jest równy 1,5.

● Iloczyn dwóch liczb jest równy -9. Jeden czynnik jest równy 4,2. Oblicz drugi czynnik.

● Oblicz, pamiętając o kolejności wykonywania działań.

a) $4\frac{1}{2} + 3 \cdot 2\frac{3}{4}$

b) $\frac{17}{40} - \frac{1}{5} : 1\frac{3}{5}$

c) $1\frac{2}{10} : \frac{3}{5} - 1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}$

d) $(\frac{3}{4} + \frac{7}{8}) \cdot (2\frac{3}{8} - \frac{6}{16})$

e) $32 - 2 \cdot (7\frac{2}{5} \cdot 5 - 2\frac{1}{2} : 10) : 6$

f) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}) : \frac{1}{2}$

g) $(6,3 - 0,5 \cdot \frac{4}{5}) : (-0,59)$

h) $4,7 - (-0,35 : 7 + 2,4 : (-24))$

i) $9,25 : (-\frac{1}{8}) + 0,75 : (-0,125)$

j) $\frac{9}{27} : \frac{4}{12} + 1,6 \cdot (-100)$

● Oblicz.

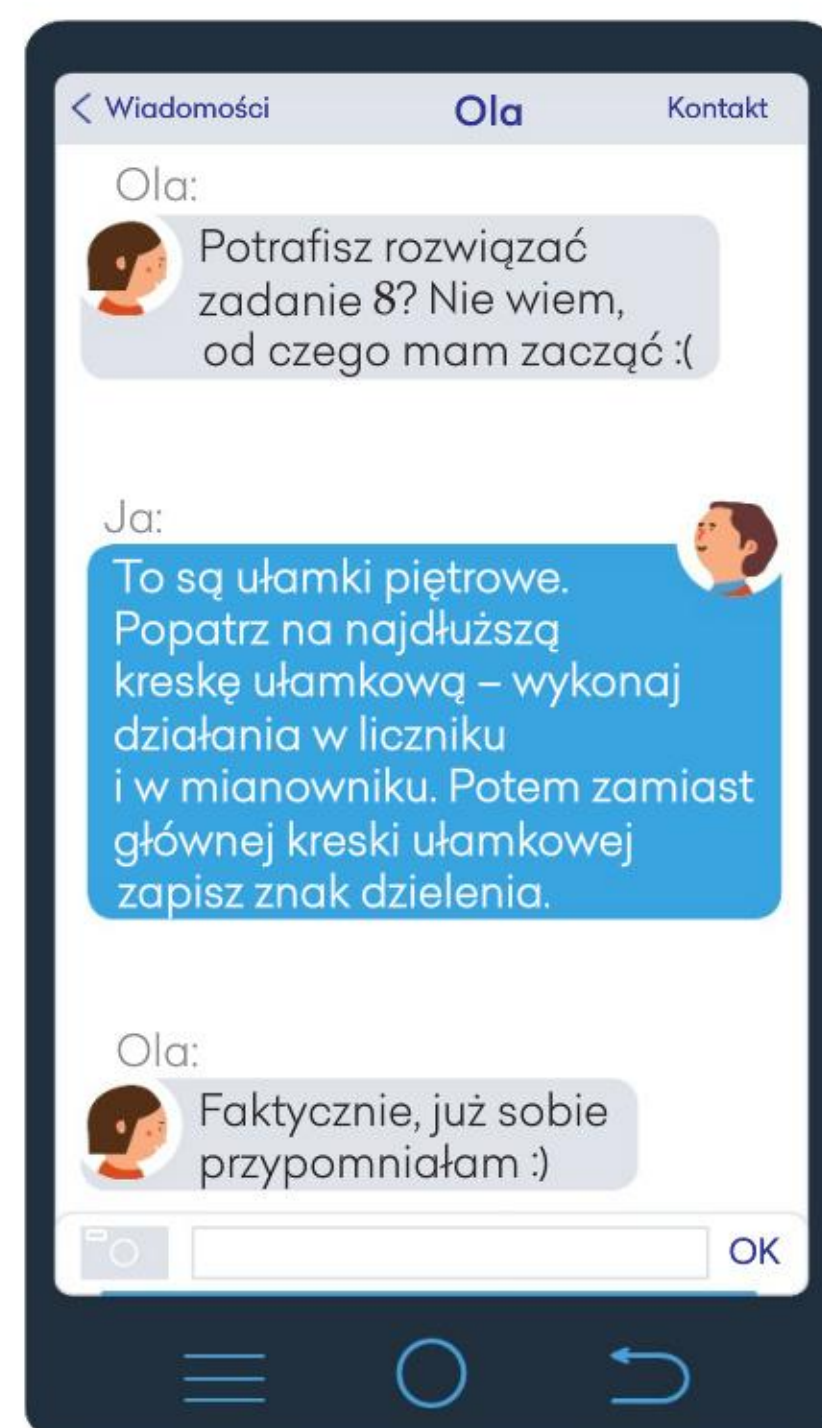
a) $\frac{3\frac{3}{4}}{(3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}) : 1\frac{3}{4}}$

b) $\frac{1\frac{3}{4} : \frac{7}{8} - \frac{3}{8} \cdot 1\frac{3}{5}}{\frac{1}{5} : 5}$

c) $\frac{(3\frac{2}{3} - 2\frac{3}{4}) : 2\frac{1}{12}}{1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{7}{9} - \frac{2}{3}}$

● Podaj liczbę przeciwną oraz liczbę odwrotną do liczby, którą otrzymamy po wykonaniu działań: $-\frac{4}{5} + (\frac{9}{25} + \frac{27}{125}) : (-\frac{3}{5})$

● Znajdź liczbę, która jest 3,9 razy mniejsza od wartości wyrażenia: $1,3 + 2,7 : 0,9 + \frac{5}{6} \cdot (-3,6)$.



Podsumowanie działu 1

Ważne pojęcia

liczby względnie pierwsze	okres ułamka	liczba wymierna	nierówność
rozwiniecie dziesiętne ułamka nieskończone okresowe		rozwiniecie dziesiętne ułamka nieskończone nieokresowe	

Liczby w systemie rzymskim

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

MDCCLXXI = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 1 = 1771
CMLXIV = 1000 - 100 + 50 + 10 + 5 - 1 = 964

Podzielność liczb

Dzielenie z resztą

Jeżeli podczas dzielenia liczby a przez liczbę b (różną od zera) otrzymujemy resztę r , czyli $a : b = k$ reszta r , to liczbę a możemy zapisać jako:
 $a = b \cdot k + r$.

Cechy podzielności liczb

- Liczba jest podzielna przez:
- 2 – gdy jej cyfrą jednościami jest 0, 2, 4, 6 lub 8,
 - 3 – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3,
 - 4 – gdy jej dwie ostatnie cyfry (cyfra dziesiątek i cyfra jednościami) tworzą liczbę podzielną przez 4,
 - 5 – gdy jej cyfrą jednościami jest 0 lub 5,
 - 9 – gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9,
 - 10 – gdy jej cyfrą jednościami jest 0,
 - 25 – gdy jej dwie ostatnie cyfry (cyfra dziesiątek i cyfra jednościami) tworzą liczbę podzielną przez 25,
 - 100 – gdy jej dwie ostatnie cyfry (cyfra dziesiątek i cyfra jednościami) to 00.

Rozkład liczb na czynniki pierwsze

Liczba pierwsza ma dokładnie dwa dzielniki.

Liczba złożona ma więcej niż dwa dzielniki.

Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.

Zapis liczb w dzieleniu z resztą

$$733 : 3 = 244 \text{ r } 1$$

$$733 = 3 \cdot 244 + 1$$

Dzielniki i wielokrotności liczb

$$D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$$
$$D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$$
$$W_{42} = \{0, 42, 84, 126, 168, 210, 252, \dots\}$$
$$W_{105} = \{0, 105, 210, 315, \dots\}$$

152	2	228	2
76	2	114	2
38	2	57	3
19	19	19	19
1		1	

$$\text{NWD}(152, 228) = 2 \cdot 2 \cdot 19 = 76$$

152	2	228	2
76	2	114	2
38	2	57	3
19	19	19	19
1		1	

$$\text{NWW}(152, 228) = 3 \cdot 152 = 2 \cdot 228 = 456$$

Liczby są **względnie pierwsze**, jeżeli ich największy wspólny dzielnik jest równy 1.

$$\text{NWD}(21, 55) = 1$$

Liczby całkowite



Działania na liczbach całkowitych

Suma liczb dodatnich jest zawsze liczbą dodatnią.

Suma liczb ujemnych jest zawsze liczbą ujemną.

Suma dwóch liczb o różnych znakach może być liczbą dodatnią lub liczbą ujemną.

Odejmowanie liczb można zastąpić dodawaniem liczby przeciwnej do odjemnika.

Iloczyn lub iloraz dwóch liczb o tych samych znakach jest liczbą dodatnią.

Iloczyn lub iloraz dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą ujemną.

Iloczyn parzystej liczby czynników ujemnych jest liczbą dodatnią.

Iloczyn nieparzystej liczby czynników ujemnych jest liczbą ujemną.

Dodawanie liczb całkowitych

$$14 + 8 = 22$$

$$-25 + (-37) = -62$$

$$-45 + 89 = 44$$

$$-62 + 21 = -41$$

Odejmowanie liczb całkowitych

$$73 - 85 = 73 + (-85) = -12$$

$$14 - (-18) = 14 + 18 = 32$$

$$-93 - (-28) = -93 + 28 = -65$$

Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych

$$-6 \cdot (-7) = 42 \quad -35 : (-5) = 7$$

$$-4 \cdot 12 = -48 \quad -56 : 7 = -8$$

$$9 \cdot (-3) = -27 \quad 24 : (-8) = -3$$

$$(-5) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-7) = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

$$-9 \cdot (-3) \cdot (-2) = -9 \cdot 3 \cdot 2 = -54$$

Rozwinięcia dziesiętne liczb

Rozwinięcia dziesiętne skończone

$$5\frac{7}{32} = 5,21875$$

Rozwinięcia dziesiętne nieskończone

$$8\frac{7}{11} = 8,636363\dots = 8,(63) - \text{okresem ułamka jest grupa cyfr 63}$$

Okresem nazywamy powtarzającą się cyfrę lub najmniejszą grupę powtarzających się cyfr rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego.

Zaokrąglanie liczb

Gdy pierwszą pomijaną cyfrą jest:

- 0, 1, 2, 3 lub 4, to ostatnia pozostawiona cyfra się nie zmienia,
- 5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnia pozostawiona cyfra powiększa się o 1.

Zaokrąglanie liczb

$$971,283 \approx 1000 \text{ (do setek)}$$

$$971,283 \approx 970 \text{ (do dziesiątek)}$$

$$971,283 \approx 971 \text{ (do jedności)}$$

$$971,283 \approx 971,3 \text{ (do części dziesiątych)}$$

$$971,283 \approx 971,28 \text{ (do części setnych)}$$

● **Liczby przeciwne** to dwie liczby, które leżą na osi liczbowej w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych jego stronach.

● **Wartość bezwzględna**

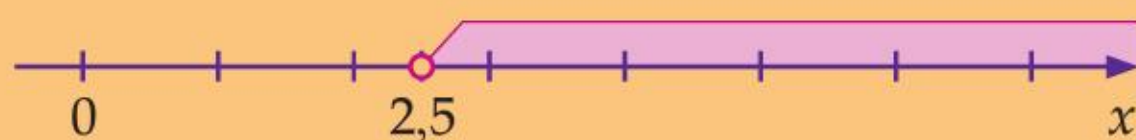
Wartość bezwzględna liczby to odległość tej liczby od zera na osi liczbowej.

● **Liczba wymierna**

Liczbą wymierną nazywamy każdą liczbę, którą można przedstawić w postaci ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi i q jest liczbą różną od zera.

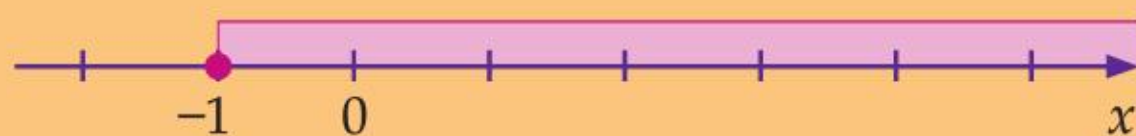
Zaznaczanie liczb na osi liczbowej

- liczby większe od 2,5



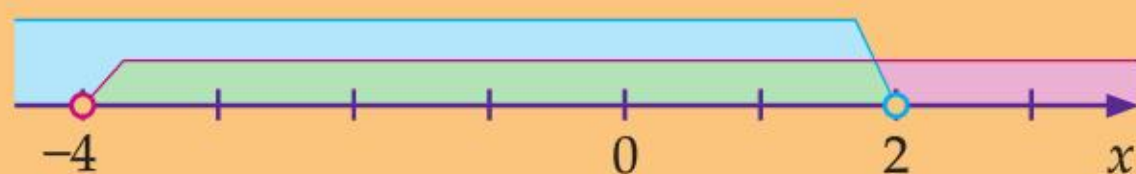
$$x > 2,5$$

- liczby większe od -1 lub równe -1



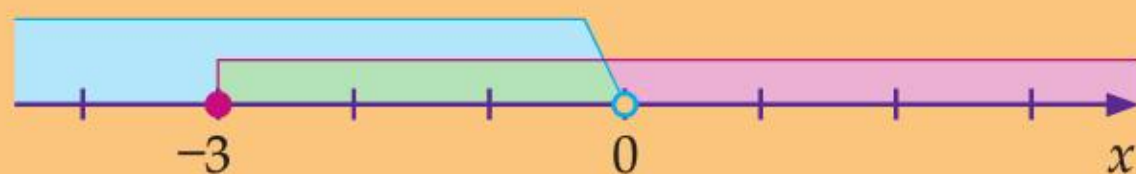
$$x \geq -1$$

- liczby większe od -4 i jednocześnie mniejsze od 2



$$-4 < x < 2$$

- liczby większe od -3 lub równe -3 i jednocześnie mniejsze od 0



$$-3 \leq x < 0$$

Pary liczby przeciwnych

$$7 \text{ i } -7$$

$$-15,2 \text{ i } 15,2$$

$$\frac{1}{2} \text{ i } -\frac{1}{2}$$

Obliczanie wartości bezwzględnej

$$|7| = 7$$

$$|-3,4| = 3,4$$

$$|0| = 0$$

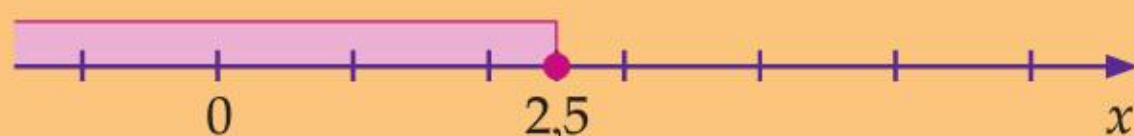
$$12, -5, \frac{27}{3}, -\frac{1}{5}$$

- liczby mniejsze od 3



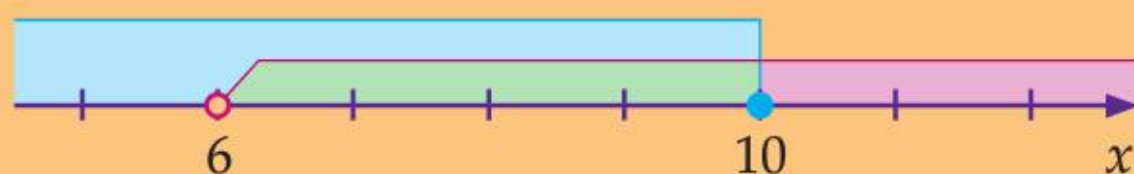
$$x < 3$$

- liczby mniejsze od 2,5 lub równe 2,5



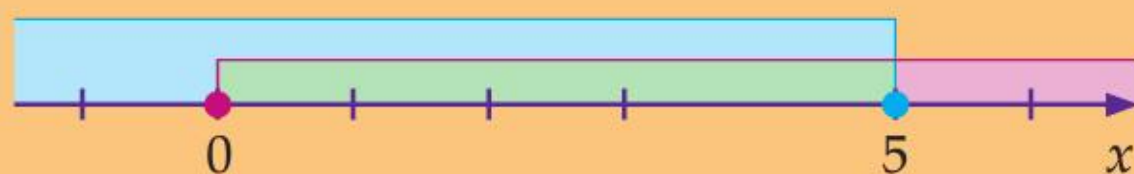
$$x \leq 2,5$$

- liczby większe od 6 i jednocześnie mniejsze od 10 lub równe 10



$$6 < x \leq 10$$

- liczby większe od 0 lub równe 0 i jednocześnie mniejsze od 5 lub równe 5



$$0 \leq x \leq 5$$

Czy już umiesz?

- 1 Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 55?
A. 15 B. 16 C. 17 D. 18
- 2 Dane są liczby:
 $a = 10\,000 + 18$, $b = 10\,000 + 26$, $c = 10\,000 - 55$, $d = 10\,000 - 100$.
Która z tych liczb **nie jest** podzielna przez 9?
A. liczba a B. liczba b C. liczba c D. liczba d
- 3 Liczba s jest równa sumie wszystkich dzielników liczby 117. Przez którą z liczb jest podzielna liczba s ?
A. 4 B. 5 C. 9 D. 13
- 4 Która z podanych liczb jest liczbą pierwszą?
A. 1 B. 51 C. 101 D. 711
- 5 Iloczyn trzech liczb naturalnych, z których każda jest większa od 1, jest równy 255. Ile jest równa suma tych liczb?
A. 25 B. 33 C. 57 D. 89
- 6 Dwunastą cyfrą po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{2}{7}$ jest
A. 1 B. 4 C. 2 D. 7
- 7 Które zdanie jest fałszywe?
A. Istnieją liczby wymierne, które są liczbami całkowitymi.
B. 0 nie jest liczbą wymierną.
C. Nie każda liczba wymierna jest liczbą naturalną.
D. Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą.
- 8 Ile jest wszystkich liczb naturalnych n spełniających warunek: $\frac{11}{12} < \frac{n}{8} < \frac{11}{6}$?
A. 1 B. 7 C. 20 D. 22
- 9 Liczby: $a = -1\frac{11}{111}$; $b = -1,1$; $c = -1(1)$; $d = -1\frac{1}{11}$ uporządkowane rosnąco to:
A. $c < b < a < d$ B. $d < c < a < b$
C. $b < c < d < a$ D. $a < d < b < c$
- 10 Liczbą odwrotną do liczby $-3\frac{1}{4}$ jest
A. $-\frac{4}{13}$ B. $\frac{4}{13}$ C. $\frac{13}{4}$ D. $-4\frac{1}{3}$
- 11 Zapisz w systemie rzymskim:
a) liczbę o 657 większą od liczby 1733, b) liczbę o 7565 mniejszą od liczby 10101,
c) liczbę siedmiokrotnie większą od liczby 348, d) liczbę trzykrotnie mniejszą od liczby 9447.

12 Przyjmijmy, że np. liczby II, XC, MM są zapisane za pomocą dwóch znaków, a np. liczby XII, CXL, MMM są zapisane za pomocą trzech znaków.

- a) Wypisz wszystkie liczby, które w systemie rzymskim są zapisane za pomocą dwóch znaków, jeśli:
- znak w zapisie liczby nie może się powtarzać,
 - znak w zapisie liczby musi się powtarzać.
- b) Wypisz wszystkie liczby, większe od 500 i mniejsze od 1000, które w systemie rzymskim są zapisane za pomocą trzech znaków, jeśli:
- znak w zapisie liczby nie może się powtarzać,
 - znak w zapisie liczby musi się powtarzać.

13 Pierwszy zapis o zamku w Oleśnicy pochodzi z MCCXCII roku. Od MDCXLVII do MDCCXCII jego właścicielami byli Wirtembergowie, następnie do MDCCCLXXXIV roku – Welfowie. W MCMXXVI roku zamek stał się prywatną własnością rodziny von Hohenzollernów i do MCMXLV roku był ich letnią rezydencją.

- a) Ile lat upłynęło od pierwszego zapisu o zamku w Oleśnicy do dziś?
- b) Ile lat upłynęło od pierwszego zapisu o zamku w Oleśnicy do roku, w którym właścicielem zamku został członek rodziny Wirtembergów?
- c) Ile łącznie lat właścicielami zamku byli Wirtembergowie i Welfowie?
- d) Ile lat upłynęło od roku, w którym Welfowie przestali być właścicielami zamku, do roku, kiedy zamek stał się prywatną własnością rodziny von Hohenzollernów?
- e) Przez ile lat zamek w Oleśnicy był letnią rezydencją rodziny von Hohenzollernów?

14 Wyznacz NWD i NWW podanych liczb.

- a) 21 i 15 b) 16 i 56 c) 65 i 91 d) 153 i 117 e) 264 i 120 f) 270 i 450

15 Rozłóż na czynniki pierwsze liczby: 448, 513, 1044, 2800, 2925. ✕

16 W tabeli podano temperatury topnienia niektórych substancji.

Substancja	cyna	żelazo	gliceryna	rtęć	azot	srebro	woda	tlen	siarka
Temperatura w °C	232	1536	-17	-38,8	-210	982	0	-218,8	120

- a) Która z podanych substancji ma najwyższą, a która najniższą temperaturę topnienia?
- b) Uporządkuj podane temperatury w kolejności rosnącej.

17 Dorosły człowiek oddycha przeciętnie 16 razy na minutę. Ile waży powietrze przefiltrowane przez płuca człowieka w ciągu kwadransa, jeśli za każdym razem wdycha on 0,6 litra powietrza? Jeden litr powietrza waży około 0,0012 kg (wynik podaj z dokładnością do części dziesiątych).

18 Zapisz rozwinięcia dziesiętne ułamka $\frac{62}{27}$. Określ, ile cyfr ma okres rozwinięcia dziesiętnego tego ułamka.
Zaokrąglaj rozwinięcie dziesiętne tego ułamka do części tysięcznych, części setnych i części dziesiątych. ✕

19 Zaokrąglaj liczby: 42,7203; 16,5454; 9,4996; 8,1937; 6,0026; 3,9971; 0,7004; 0,0003 do: ✕

- a) jedności, b) części dziesiątych,
c) części setnych, d) części tysięcznych.

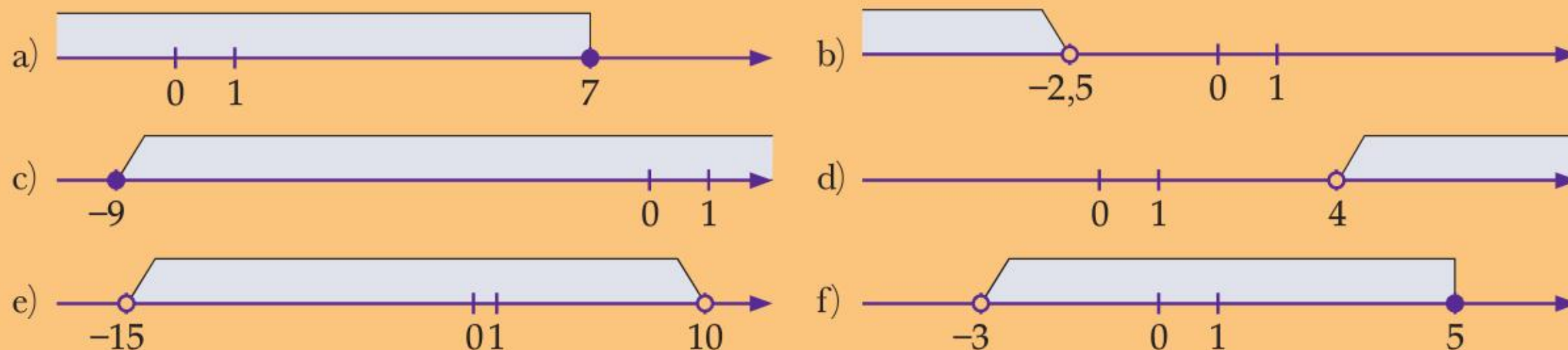
20 Wykonaj polecenia i odpowiedz na pytania.

- a) Liczbę 764 zaokrąglij do setek. Ile jest liczb naturalnych, które mają takie samo zaokrąglenie do setek?
b) Liczbę 3358 zaokrąglij do tysięcy. Ile jest liczb naturalnych, które mają takie samo zaokrąglenie do tysięcy?

21 Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby spełniające podane nierówności.

- a) $x \leq -4$ b) $x < 5\frac{1}{3}$ c) $x \geq \frac{3}{4}$ d) $x > 6,5$ e) $-7 \leq x \leq -2$ f) $-1 \leq x < 9$

22 Zapisz nierówności, które są spełniane przez liczby zaznaczone na każdej z osi.



23 Najniższa temperatura powietrza zanotowana w Polsce to -41°C w Siedlcach w 1940 r. Najwyższą zaś temperaturę powietrza w Polsce zanotowano w Prószkowie (koło Opola) w 1921 r., wyniosła ona $40,2^{\circ}\text{C}$.

- a) Jaka jest różnica między najwyższą a najniższą zanotowaną temperaturą powietrza w Polsce?
b) Jaka jest różnica między najwyższą zanotowaną temperaturą powietrza a temperaturą w dniu, w którym rozwiązujesz to zadanie?

24 Podaj rozwinięcia dziesiętne ułamków: $\frac{2}{3}$; $\frac{25}{36}$; $\frac{65}{99}$; $\frac{73}{110}$; $\frac{87}{135}$. Uporządkuj ułamki malejąco.

25 Spośród liczb: $a = \frac{1}{9}$, $b = -9$, $c = 0,(1)$, $d = 9$, $e = 0,1$ wybierz:

- a) liczby równe,
b) liczby przeciwne,
c) liczby odwrotne.

Które z liczb leżą w tej samej odległości od zera?

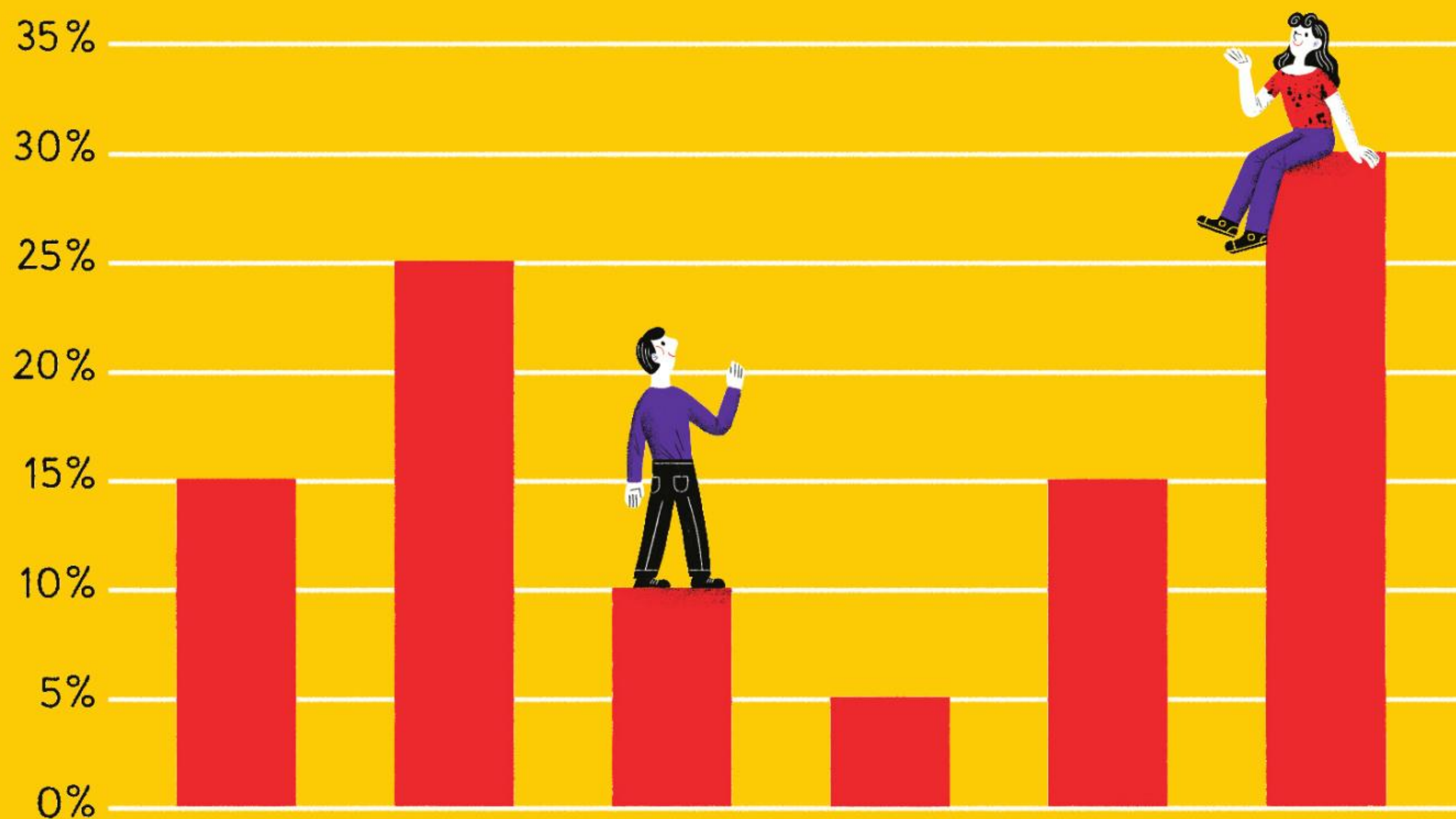
26 Oblicz.

- a) $-\frac{3}{5} \cdot (-15)$ b) $-4,5 \cdot (-2) \cdot (-1)$
c) $9\frac{2}{15} \cdot (-1,234) \cdot 15\frac{2}{3} \cdot 0 \cdot (-17,3) \cdot 8\frac{1}{23}$ d) $-7 \cdot (-0,2) \cdot \frac{5}{14} \cdot 3,4 \cdot \left(-\frac{10}{17}\right)$
e) $\frac{-4,5}{9}$ f) $-0,7 : 2\frac{4}{5}$
g) $-15 : \left(-\frac{3}{4}\right)$ h) $\frac{2\frac{2}{3} : \left(-\frac{6}{7}\right) : \left(-\frac{4}{9}\right)}{-2\frac{4}{5} : 3\frac{1}{3}}$

27 Turysta miał do pokonania w ciągu 3 dni trasę długości 50 km. Pierwszego dnia przebył 0,3 drogi, drugiego dnia 1,2 drogi, którą przeszedł pierwszego dnia. Ile kilometrów turysta przeszedł trzeciego dnia? Którego dnia przeszedł najdłuższy odcinek?

- 28 Wzór $C = 5 \cdot \frac{F - 32}{9}$ stosuje się do obliczania temperatury w stopniach Celsjusza (C), jeśli podana jest temperatura w stopniach Fahrenheita (F) (czyt. farenhajta). Podane temperatury przedstaw w stopniach Celsjusza.
- a) 5°F b) 41°F c) -22°F d) 32°F
- 29 Na pewnym egzaminie student za każde dobrze rozwiązane zadanie otrzymuje 5 punktów, natomiast traci 3 punkty za źle rozwiązane zadanie, a za zadanie opuszczone – czyli takie, którego nie próbował rozwiązać – odejmuje mu się 1 punkt. Egzamin zostaje zaliczony, gdy student otrzyma co najmniej 60% wszystkich możliwych punktów do uzyskania. Czy student zdał egzamin, jeśli wszystkich zadań było 25, a poprawnie rozwiązał 18, źle rozwiązał $\frac{5}{18}$ tego, co rozwiązał dobrze, i nie zdążył rozwiązać reszty?
- 30 Uporządkuj rosnąco liczby: $2,(67725)$; $2,6(7725)$; $2,67(725)$; $2,677(25)$; $2,6772(5)$.
- 31 Oblicz.
- a) $-2\frac{2}{9} - (-1\frac{1}{3}) - 5\frac{5}{18} - (-2\frac{1}{6})$ b) $-12 - (-2,5) - 1\frac{1}{3} - \frac{4}{5} - (-3\frac{5}{12})$
- c) $-3,75 - (-8,125) - 6,001 - (-5,25)$ d) $35,8 - (-11\frac{1}{5}) - (-12,75) - 47\frac{3}{4}$
- 32 W dwóch kanistrach jest $18\frac{1}{2}$ litra benzyny. Po ile litrów benzyny jest w każdym kanistrze, jeżeli w jednym jest o $3\frac{1}{2}$ litra mniej niż w drugim?
- 33 Rowerzysta przejechał $\frac{2}{5}$ trasy i pozostało mu do przejechania o 50 km więcej niż już przejechał. Ile kilometrów ma długość trasy rowerzysty?
- 34 Gołąb przefrunął 72,45 km w ciągu 45 minut. Z jaką prędkością leciał gołąb? Odpowiedź podaj w kilometrach na godzinę.

2. Procenty



1. Czy wiesz co oznacza symbol %?
2. Podaj przykłady sytuacji z życia codziennego, w których wykorzystuje się procenty.
3. Jak sądzisz, dlaczego dane często przedstawia się na diagramach procentowych?

2.1 Procenty a ułamki

Podejmij temat



Jakie informacje zapisane są za pomocą procentów?
W jakich jeszcze sytuacjach można się spotkać z zastosowaniem procentów?

OKAZJA!

Wszystko 25% taniej

KOSZULA MĘSKA

SKŁAD:

70% BAWĘŁNA

30% POLIESTER

18%

śmietana

18%

FAKTURA VAT

DH/2020/04/1254

Nazwa towaru lub usługi	J. m.	Ilość	Cena netto	Wartość netto	VAT [%]	Wartość VAT	Wartość brutto
Farby plakatowe	szt.	20	18 zł	360 zł	23	82,80 zł	442,80 zł

WARTOŚĆ ODŻYWCZA 100 G PRODUKTU

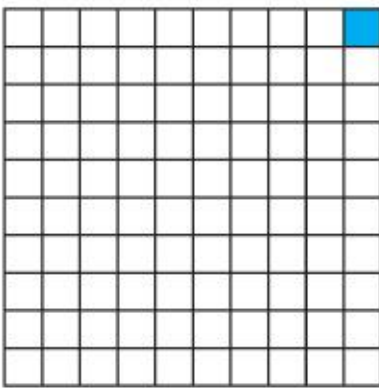
Wartość energetyczna 1430 kJ

Białko 9,2%

węglowodany 74,9%

tłuszcze 1,2%

Przypomnijmy, że procent to pewna część danej wielkości, zatem to ułamek tej wielkości. W obliczeniach często zastępujemy zapis procentowy ułamkiem. Jednak należy pamiętać, że procent odnosi się zawsze do pewnej wielkości.



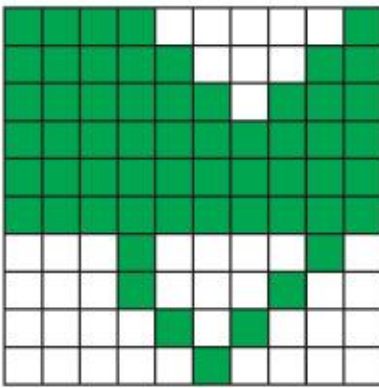
Na rysunku zamalowano $\frac{1}{100}$ całej figury.
Możemy też zapisać, że zamalowano 0,01 lub 1% figury.
1% pewnej wielkości odpowiada $\frac{1}{100}$ tej wielkości

Jeden procent to jedna setna danej wielkości.

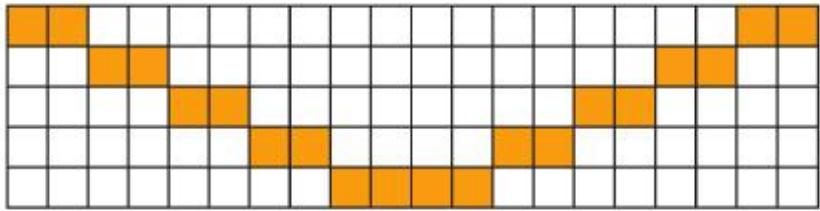


Czy pamiętasz?

- 10% to $0,1 = \frac{1}{10}$
- 20% to $0,2 = \frac{1}{5}$
- 25% to $0,25 = \frac{1}{4}$
- 50% to $0,5 = \frac{1}{2}$
- 75% to $0,75 = \frac{3}{4}$
- 100% to $1 = \frac{100}{100}$



Zamalowano 58% kwadratu, czyli $\frac{58}{100} = 0,58$ figury.



Zamalowano 20% prostokąta, czyli $\frac{20}{100} = 0,20$ figury.

Przykład 1

Zamieńmy procent na ułamek zwykły.

- a) 4% b) 95% c) $1\frac{1}{7}\%$ d) $66\frac{2}{3}\%$

$$\text{a) } 4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$\text{b) } 95\% = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$$

$$\text{c) } 1\frac{1}{7}\% = \frac{1\frac{1}{7}}{100} = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{100} = \frac{8}{700} = \frac{2}{175}$$

$$\text{d) } 66\frac{2}{3}\% = \frac{66\frac{2}{3}}{100} = \frac{200}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

Aby procent zapisać w postaci ułamka zwykłego,
należy liczbę znajdującą się przed symbolem procentu (%)
podzielić przez 100.



$p\%$ pewnej wielkości to $\frac{p}{100}$ tej wielkości

1. Zapisz w postaci ułamków zwykłych.

- a) 14% b) 130% c) $2\frac{1}{5}\%$ d) $10\frac{5}{8}\%$

Przykład 2

Zamieńmy procent na ułamek dziesiętny.

- a) 19% b) 4,3% c) 250,7% d) 72,55%

$$\text{a) } 19\% = 19 \cdot 1\% = 19 \cdot 0,01 = 0,19$$

$$\text{b) } 4,3\% = 4,3 \cdot 1\% = 4,3 \cdot 0,01 = 0,043$$

$$\text{c) } 250,7\% = 250,7 \cdot 1\% = 250,7 \cdot 0,01 = 2,507$$

$$\text{d) } 72,55\% = 72,55 \cdot 1\% = 72,55 \cdot 0,01 = 0,7255$$

Aby procent zapisać w postaci ułamka dziesiętnego,
należy liczbę znajdującą się przed symbolem procentu (%)
pomnożyć przez 0,01.

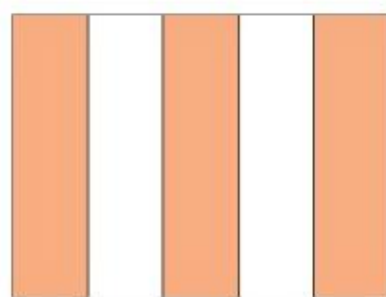


$p\%$ pewnej wielkości to $p \cdot 0,01$ tej wielkości

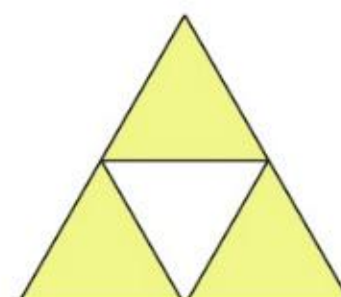
2. Zapisz w postaci ułamków dziesiętnych.

- a) 8% b) 10,5% c) 20,65% d) 182%

Spójrzmy na zamalowane części każdej figury. Zapiszmy, jaki to procent danej figury.



Zamalowano
 $\frac{3}{5} = \frac{60}{100}$
 prostokąta,
 czyli 60% figury.



Zamalowano
 $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$
 trójkąta,
 czyli 75% figury.

Przykład 3

Zapiszmy liczbę w postaci procentu.

- a) $\frac{19}{20}$ b) $1\frac{2}{5}$ c) 0,07 d) 2,156

a) $\frac{19}{20} = \frac{19}{20} \cdot 100\% = 95\%$ b) $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5} \cdot 100\% = 140\%$

c) $0,07 \cdot 100\% = 7\%$ d) $2,156 \cdot 100\% = 215,6\%$

Aby zapisać liczbę w postaci procentu,
 należy tę liczbę pomnożyć przez 100%.

3. Zapisz liczby w postaci procentów.

- a) $\frac{2}{50}$ b) $1\frac{1}{4}$ c) 0,85 d) 4,37



$$a = a \cdot 100\%$$

Przykład 4

Kolarz przejechał $\frac{7}{20}$ zaplanowanej trasy. Jaki procent całej trasy ma jeszcze do przejechania?

Sposób I

Kolarz przejechał $\frac{7}{20}$ całej trasy. Zatem do przejechania zostało mu: $1 - \frac{7}{20} = \frac{20}{20} - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$ całej trasy.

Obliczmy, jaki to procent całej trasy.

$$\frac{13}{20} = \frac{13}{20} \cdot 100\% = 65\%$$

Kolarzowi pozostało jeszcze do przejechania 65% trasy.

Sposób II

$$\frac{7}{20} = \frac{35}{100}, \text{ czyli } 35\%$$

Tyle procent trasy przejechał kolarz.

$$100\% - 35\% = 65\%$$

Tyle procent trasy pozostało kolarzowi do przejechania.

Kolarzowi pozostało jeszcze do przejechania 65% trasy.

4. Lucjan zjadł $\frac{2}{5}$ tabliczki czekolady. Ile procent tabliczki czekolady pozostało?

Więcej na temat

Promil (oznaczamy go symbolem ‰) to inny zapis ułamka o mianowniku 1000. Nazwa „promil” pochodzi od łacińskich słów *pro mille* oznaczających ‘na tysiąc’.

$$1‰ = 0,001 = \frac{1}{1000}$$

$$2‰ = 0,002 = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$$

$$50‰ = 0,050 = \frac{50}{1000} = \frac{1}{20}$$

$$1000‰ = \frac{1000}{1000} = 1$$

Zobaczmy, gdzie możemy zastosować promile.

- Dienne zapotrzebowanie naszego organizmu na wapń to 0,8–1,2 g. Mleko zawiera 1,2 promila wapnia.
- Ze względów praktycznych wskazane jest, aby w akwarium utrzymywać stałe stężenie kwasu humusowego (0,02–0,1 promila), co uniemożliwi rozwijanie się glonów pomimo dużego oświetlenia. Stosowanie stężenia powyżej 0,2 promila jest toksyczne dla wszystkich roślin.
- Średnie zasolenie Morza Bałtyckiego wynosi 7,8 promila.

5. Wyszukaj w internecie, a następnie podaj dwa inne zastosowania promili.

6. Co jest większe: promil czy procent? Ile razy?



Zasolenie Morza Martwego 7-krotnie przewyższa zasolenie Morza Czerwonego, 14,5-krotnie Morza Czarnego oraz aż 40-krotnie Morza Bałtyckiego. Średnie zasolenie Morza Bałtyckiego wynosi 7,8‰. Oblicz, ile wynosi zasolenie każdego z wymienionych mórz.

Zadania

- Zapisz procenty w postaci ułamków dziesiętnych oraz ułamków zwykłych nieskracalnych.

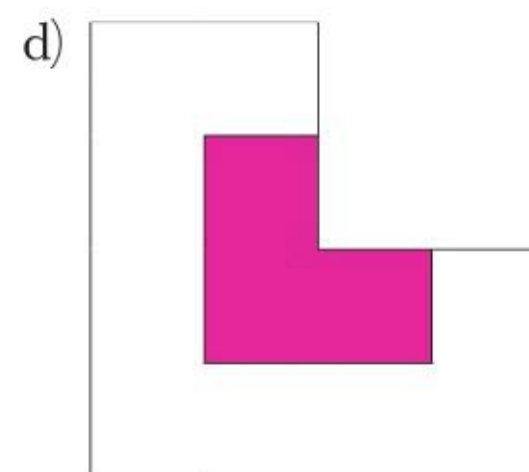
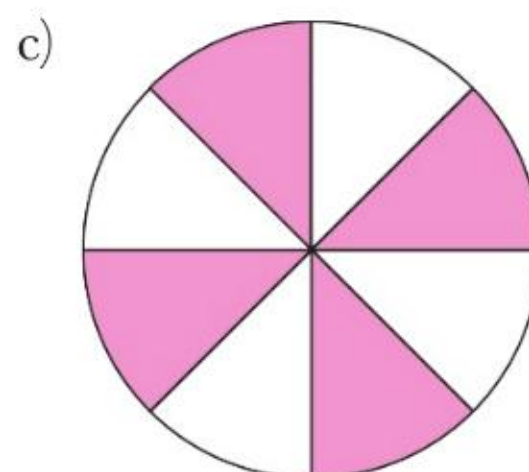
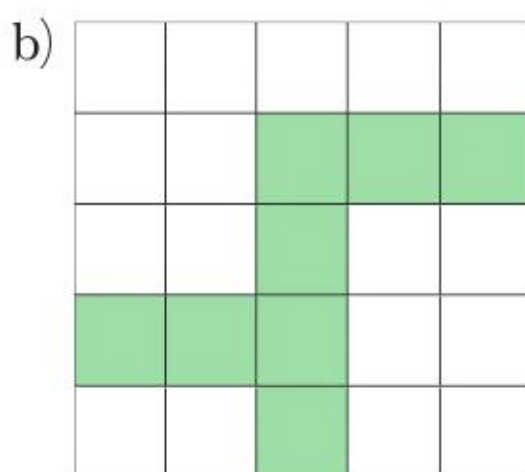
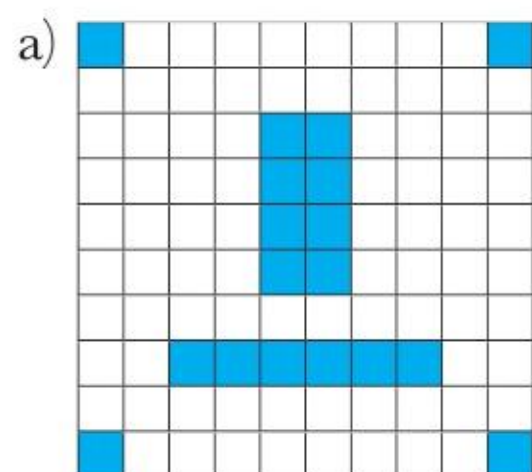
a) 7%, 49%, 21%, 129%

b) 40%, 1,5%, 0,6%, 12,12%

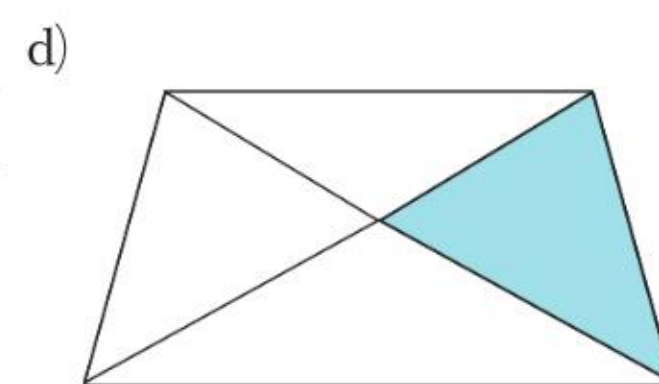
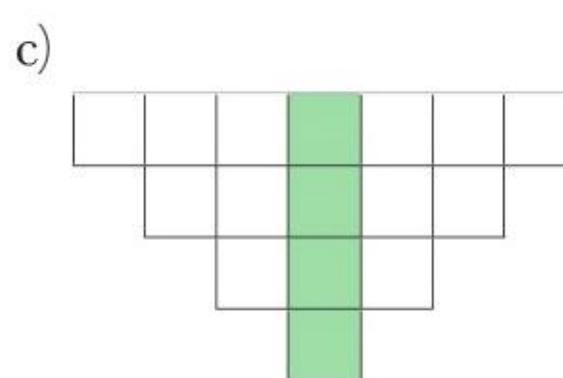
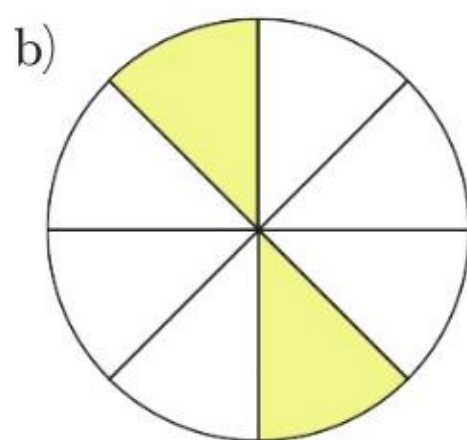
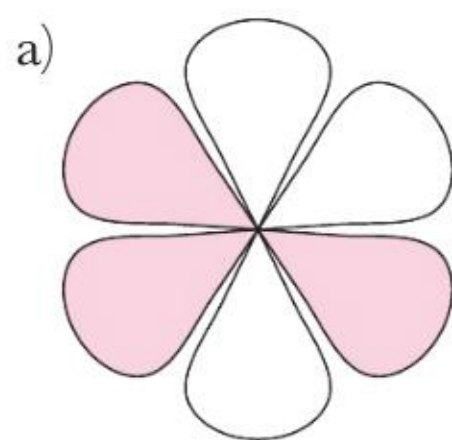
c) $\frac{7}{20}\%$, $\frac{13}{50}\%$, $1\frac{7}{10}\%$, $\frac{112}{40}\%$

d) $3\frac{1}{4}\%$, $\frac{5}{8}\%$, $\frac{11}{3}\%$, $12\frac{1}{15}\%$

- Jaki procent każdej z figur zamalowano?



Na których rysunkach zamalowano 25% figury?



Zapisz liczby w postaci procentów.

a) $\frac{21}{100}, \frac{3}{25}, \frac{9}{8}, \frac{126}{40}$

b) $1\frac{1}{6}, 3\frac{2}{9}, 2\frac{3}{7}, 1\frac{2}{11}$

c) 0,08, 1,4, 0,105, 209

Zapisz podane informacje, używając symbolu %.

a) Drużyna wygrała 7 meczów spośród 10 przez nią rozegranych.

b) W ciągu minionej doby przez 4 godziny padał deszcz.

c) Zawodnik wykonał 125 rzutów piłką do kosza i tylko 5 z nich było nietrafionych.

Podane informacje zapisz za pomocą ułamków.

a) Śmietana, którą kupiła Ewa, zawiera 18% tłuszczu.

b) W klasie 7a tylko 5% uczniów umie pływać.

c) Oceny bardzo dobre stanowią 20% wszystkich ocen Marka z fizyki.

Paweł i Adam rozwiązyli test z matematyki. Paweł rozwiązał $\frac{4}{5}$ wszystkich zadań, a Adam 85% wszystkich zadań. Który z chłopców rozwiązał więcej zadań?

Karolina wykonała poprawnie 45 spośród 50 ćwiczeń z historii i 6 spośród 10 ćwiczeń z geografii. Czy Karolina rozwiązała poprawnie większy procent ćwiczeń z historii czy z geografii?

W głosowaniu na przewodniczącego samorządu szkolnego wzięło udział $\frac{3}{4}$ wszystkich uczniów z klas siódmych. Jaki procent uczniów klas siódmych nie brało udziału w głosowaniu?

Oceń prawdziwość podanych zdań. Przepisz do zeszytu zdania prawdziwe.

a) Jedna trzecia metra to więcej niż 33% metra.

b) Dziesięć minut to 10% jednej godziny.

c) Litery M stanowią ponad 20% wszystkich liter w wyrazie MATEMATYKA.

d) Osiemnaście godzin to ponad 80% doby.

e) 45 dekagramów to 45% kilograma.

f) 6 centymetrów to 6% metra.

Marzena odpowiedziała na 20 pytań spośród 50 pytań konkursowych. Jaki procent wszystkich pytań stanowią te, na które Marzena nie udzieliła odpowiedzi?

A. 20%

B. 40%

C. 60%

D. 80%

Co piąty uczeń w klasie 7b ma niebieskie oczy. Jaki procent osób w tej klasie ma niebieskie oczy?

A. 5%

B. 20%

C. 50%

D. 95%

2.2 Obliczanie procentu danej liczby

Podejmij temat

W klasie 7b dziewczęta stanowią 75% wszystkich uczniów.



Ile w takim razie jest dziewcząt, jeśli klasa liczy 20 osób?

Przeanalizujemy wypowiedzi dzieci z *Podejmij temat*.

Wiemy, że 75% pewnej wielkości to $\frac{3}{4}$ tej wielkości. Aby obliczyć 75% liczby wszystkich uczniów danej klasy, możemy obliczyć $\frac{3}{4}$ tej liczby.

$\frac{3}{4}$ liczby 20 to $\frac{3}{4} \cdot 20 = 15$. Zatem 75% liczby 20 to 15.

W klasie 7b jest 15 dziewcząt.

Aby obliczyć procent danej liczby, zapisujemy ten procent w postaci ułamka, a następnie obliczamy ułamek tej liczby.

Przykład 1

Do szuflady wrzucono białe kulki i niebieskie kulki – razem 200 sztuk. Niebieskie kulki stanowiły 94% wszystkich kulek. Obliczmy, ile białych kulek wrzucono do szuflady.

Sposób I

Obliczamy liczbę niebieskich kulek, a następnie liczbę białych kulek.

$$94\% \cdot 200 = 0,94 \cdot 200 = 188$$

$$200 - 188 = 12$$

Do szuflady wrzucono 12 białych kulek.

Sposób II

Wszystkie kulki (200 sztuk) to 100% (całość).

Niebieskie kulki stanowiły 94% wszystkich kulek, więc białych kulek było:

$$100\% - 94\% = 6\%$$

$$6\% \cdot 200 = 0,06 \cdot 200 = 12$$

Aby obliczyć procent danej liczby, wystarczy pomnożyć procent przez tę liczbę.



$p\%$ liczby a to $p\% \cdot a = \frac{p}{100} \cdot a$

1. W 25-osobowej klasie chłopcy stanowią 40% wszystkich uczniów. Oblicz, ilu chłopców jest w tej klasie.

Przykład 2

Aby zakwalifikować się do drugiego etapu konkursu matematycznego, należało rozwiązać poprawnie co najmniej 45 z 50 zadań konkursowych. Marcin rozwiązał poprawnie 82% wszystkich zadań. Czy zakwalifikował się do drugiego etapu konkursu?

Obliczmy, ile zadań rozwiązał Marcin.

$$82\% \cdot 50 = \frac{82}{100} \cdot 50 = 41$$

Marcin rozwiązał 41 zadań.

$$41 < 45$$

Marcin nie zakwalifikował się do drugiego etapu konkursu.

2. Praca klasowa z matematyki składała się z 5 zadań. Za każde z nich można było uzyskać maksymalnie 8 punktów. Jadwiga uzyskała maksymalną liczbę punktów za 60% wszystkich zadań, a za każde z pozostałych zadań otrzymała po 2 punkty. Ile punktów łącznie otrzymała Jadwiga z klasówki?

Przykład 3

Buty kosztowały 220 zł. Obliczmy cenę butów:

a) po podwyżce o 20%,

b) po obniżce o 30%.

a) **Sposób I**

220 zł to 100%

Cenę butów **podwyższono** o 20%,
zatem do 100% **dodajemy** 20%.

$$100\% + 20\% = 120\%$$

Obliczamy 120% ceny początkowej butów.

$$120\% \cdot 220 \text{ zł} = 1,2 \cdot 220 \text{ zł} = 264 \text{ zł}$$

Buty po podwyżce kosztują 264 zł.

Sposób II

Obliczamy, o ile złotych podwyższono cenę butów.

$$20\% \cdot 220 \text{ zł} = 0,2 \cdot 220 \text{ zł} = 44 \text{ zł}$$

Dodajemy otrzymaną kwotę do początkowej ceny butów.

$$44 \text{ zł} + 220 \text{ zł} = 264 \text{ zł}$$

b) **Sposób I**

220 zł to 100%

Cenę butów **obniżono** o 30%,
zatem od 100% **odejmujemy** 30%.

$$100\% - 30\% = 70\%$$

Obliczamy 70% ceny początkowej butów.

$$70\% \cdot 220 \text{ zł} = 0,7 \cdot 220 \text{ zł} = 154 \text{ zł}$$

Buty po obniżce kosztują 154 zł.

Sposób II

Obliczamy, o ile złotych obniżono cenę butów.

$$30\% \cdot 220 \text{ zł} = 0,3 \cdot 220 \text{ zł} = 66 \text{ zł}$$

Odejmujemy otrzymaną kwotę od początkowej ceny butów.

$$220 \text{ zł} - 66 \text{ zł} = 154 \text{ zł}$$

3. Przeczytaj fragment informacji zamieszczonej w gazecie, a następnie odpowiedz na pytania.
- a) Jaki zysk osiągnęła firma Grakomp w 2019 roku?
- b) O ile złotych zyski firmy Grakomp były wyższe w 2019 roku od zysków w roku 2018?

Znana przede wszystkim ze sprzedaży gier komputerowych firma Grakomp ma za sobą udany sezon. W 2019 r. jej zyski wzrosły aż o 20% w porównaniu do zysków z 2018 r., kiedy to zarobiła 340 000 zł.

Zadania

- Oblicz w pamięci.
- a) 1% liczby 100 b) 10% liczby 20
c) 30% liczby 500 d) 50% liczby 50
e) 5% liczby 500 f) 20% liczby 135
- Oblicz: 7%, 23%, 40%, 65% podanych liczb.
a) 200 b) 480 c) 1500
- Wiedząc, że 10% pewnej liczby jest równe 35, oblicz w pamięci: 1%, 5%, 20%, 70% tej liczby.
- Bilet normalny do kina kosztuje 36 zł. Cena biletu ulgowego stanowi 75% ceny biletu normalnego. Ile wynosi cena biletu ulgowego?
- Pani Kasia otrzymała podwyżkę w wysokości 12% jej pensji. Ile będzie wynosiła pensja po podwyżce, jeśli pani Kasia do tej pory zarabiała 2260 zł?
- Ile złotych można zaoszczędzić, kupując po obniżce cen:
a) sukienkę, b) bluzkę, c) torebkę?
- Cenę roweru w wysokości 1680 zł obniżono o 10%, a po sezonie o kolejne 10%. Czy nowa cena roweru będzie o 20% niższa od początkowej? Dlaczego?
- W pierwszym roku istnienia technikum uczęszczało do niego 60 uczniów. W drugim roku istnienia tej szkoły liczba uczniów wzrosła o 120%, a w trzecim o 75% w stosunku do roku poprzedniego. Oblicz, ilu uczniów uczęszczało do tej szkoły w drugim, a ilu w trzecim roku jej istnienia.
- Sprawdzian z matematyki pisało 32 uczniów. Stopień celujący otrzymało $6\frac{1}{4}\%$ uczniów, bardzo dobry otrzymało 12,5% uczniów, dobry otrzymało 0,25 uczniów, a dostateczny – połowa uczniów. Nikt nie otrzymał stopnia niedostatecznego. Ilu uczniów otrzymało stopień dopuszczający?
- Każdy bok kwadratu długości 20 cm zmniejszono o 40%. O ile centymetrów zmniejszył się obwód tego kwadratu?
A. o 32 cm B. o 48 cm C. o 80 cm D. o 128 cm
- Napoje jabłkowe z obydwu opakowań przelano do jednego dzbanka. Ile litrów soku znajduje się w dzbanku?
A. 3,4 l B. 2,55 l C. 2,5 l D. 1,7 l



2.3 Obliczanie liczby na podstawie danego jej procentu

Podejmij temat



Najbardziej podoba mi się ten trzeci sposób obliczania. Taki sam widziałam w podręczniku do chemii.



Tak, to są proporcje. Wystarczy pomnożyć liczby „na krzyż”. Dokładniej będziemy się uczyć o proporcjach w klasie ósmej.

Przykład 1

Przeanalizujmy zadanie z *Podejmij temat*.

Sposób I

Konie spacerujące na wybiegu stanowią 40% wszystkich koni.

$$\begin{array}{l} : 4 \left\{ \begin{array}{l} 40\% \text{ liczby wszystkich koni to } 12 \text{ koni} \\ 10\% \text{ liczby wszystkich koni to } 3 \text{ konie} \end{array} \right. \\ \cdot 10 \left\{ \begin{array}{l} 100\% \text{ liczby wszystkich koni to } 30 \text{ koni} \end{array} \right. \end{array}$$

W stadninie jest 30 koni.

Sposób II

Oznaczmy: x – liczba wszystkich koni w stadninie.

Z treści zadania wynika, że 40%, czyli 0,4 liczby x , to 12. Układamy i rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą.

$$0,4 \cdot x = 12$$

$$x = 12 : 0,4$$

$$x = 120 : 4$$

$$x = 30$$

Sposób III

$$12 \text{ ————— } 40\%$$

$$x \text{ ————— } 100\%$$

$$\begin{array}{cc} 12 & 40\% \\ & \times \\ x & 100\% \end{array}$$

$$x \cdot 40\% = 12 \cdot 100\%$$

$$x = 12 \cdot 100\% / 40\%$$

$$x = 30$$

Mnożymy liczby po skosie („na krzyż”).

Układamy równanie.

Przykład 2

Wyznaczmy liczbę, której $1\frac{1}{3}\%$ to 12.

Sposób I

Oznaczmy: x – szukana liczba.

$$1\frac{1}{3}\% = \frac{4}{3}\% = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{4}{300} \quad \text{Zamieniamy procent na ułamek.}$$

Wiedząc, że $1\frac{1}{3}\%$ liczby x to 12, układamy i rozwiązujemy równanie.

$$\frac{4}{300} \cdot x = 12$$

$$x = 12 : \frac{4}{300}$$

$$x = 12 \cdot \frac{300}{4}$$

$$x = 900$$

Sposób II

$$\begin{array}{l} : 1\frac{1}{3}\% \left\{ \begin{array}{l} 1\frac{1}{3}\% \text{ szukanej liczby to } 12 \\ 1\% \text{ to } 12 : 1\frac{1}{3} = 12 : \frac{4}{3} = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9 \\ 100\% \text{ szukanej liczby to } 9 \cdot 100 = 900 \end{array} \right. \\ \cdot 100 \end{array}$$

Szukana liczba to 900.

1. Znajdź liczbę, której 34% to 119.

Przykład 3

Konrad wykonał już 85% liczby wszystkich zaplanowanych rzutów do kosza. Zostało mu jeszcze 12 rzutów do wykonania. Ile wszystkich rzutów miał wykonać Konrad podczas tego treningu?

Oznaczmy: x – liczba wszystkich rzutów do kosza.

$$100\% - 85\% = 15\%$$

Tyle procent wszystkich rzutów zostało jeszcze Konradowi do wykonania.

Dwanaście rzutów to 15%, czyli 0,15 wszystkich rzutów. Zatem:

$$0,15 \cdot x = 12$$

$$x = 12 : 0,15$$

$$x = 80$$

Konrad miał wykonać podczas treningu 80 rzutów do kosza.

Ciekawe!

Rekord świata na najdłuższy rzut do kosza został ustanowiony w 2014 roku przez Elana Bullera i wynosi 34,29 m, czyli więcej niż długość boiska do koszykówki równa 28 m.

Aby wyznaczyć liczbę na podstawie danego jej procentu, wystarczy:

najpierw obliczyć 1%
szukanej liczby,
a następnie obliczyć jej 100%,

ułożyć i rozwiązać równanie,
w którym niewiadoma
oznacza szukaną liczbę,

oznaczyć niewiadomą
i ułożyć odpowiednią
proporcję.

2. Paweł wyprał już 2 swetry, co stanowi 20% wszystkich jego swetrów przeznaczonych do prania. Ile jeszcze swetrów zostało mu do wyprania?

Zadania

- Wyznacz kolejno liczbę, której:
 - a) 25% jest równe 150,
 - b) 80% jest równe 96,
 - c) 40% jest równe $38\frac{2}{5}$,
 - d) 25% jest równe $10\frac{1}{6}$.
- Znajdź liczbę, której $66\frac{2}{3}\%$ wynosi:
 - a) 15,
 - b) 78,
 - c) 213,
 - d) 516.
- Po obniżce o 20% skuter kosztuje 3200 zł. Jaka była cena skutera przed obniżką?
- Cenę towaru obniżono o 25% i teraz jest równa 192 zł. Jaka była cena tego towaru przed obniżką?
- Cena telewizora z 15-procentowym rabatem wynosi 2176 zł. Jaka jest cena telewizora bez rabatu?
- Pewnego dnia na lekcjach było nieobecnych 6 uczniów, którzy stanowili 20% uczniów całej klasy. Ilu uczniów liczy ta klasa?
- Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zapisz w zeszycie P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F – jeśli jest fałszywe.
 - a) Liczba m , której 2% jest równe 3, jest większa od liczby k , której 3% jest równe 2.
 - b) Jeśli 120% pewnej liczby wynosi 6, to 140% tej liczby wynosi 7.
- Turysta przejechał 24% planowanej trasy i do celu zostało mu jeszcze 228 km. Ile kilometrów przejechał już ten turysta?
- W sadzie rosną jabłonie i grusze. Grusze stanowią 40% wszystkich drzew, a jabłoni jest 90. Ile drzew rośnie w tym sadzie?
- Andrzej wydał 16 zł na kwiaty dla mamy. Kwota ta stanowi 20% jego miesięcznego kieszonkowego. Oblicz, ile złotych zostało Andrzejowi z kieszonkowego.

W pewnym mieście dla uczniów klas siódmych zorganizowano konkurs. Uczniowie rozwiązywali zadania z języka polskiego, z języka angielskiego i z matematyki. W tabeli przedstawiono niektóre dane na temat zadań zamkniętych, przygotowanych na konkurs.

Przedmiot konkursowy	Maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania za zadania zamknięte	Procent wszystkich punktów możliwych do uzyskania za zadania zamknięte
język polski	15	30%
matematyka	15	50%
język angielski	36	60%

- a) Ile maksymalnie punktów można było uzyskać za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań z matematyki?
- b) Julek rozwiązał poprawnie wszystkie zadania z języka polskiego i wszystkie zadania z języka angielskiego. Z którego przedmiotu otrzymał większą liczbę punktów?
- c) Za rozwiązanie wszystkich zadań z matematyki (otwartych i zamkniętych) konkursowicze uzyskali średnio 45% punktów możliwych do zdobycia. Ile średnio punktów uzyskali?

Korzystając z tabeli, oblicz masę każdego z ozdobnych przedmiotów.

Przedmiot	Masa cynku zawartego w figurce	Procentowa zawartość cynku w figurce
	0,48 kg	32%
	1,8 kg	45%
	0,18 kg	20%
	2,3 kg	40%

Ciekawe!

Mosiądz jest często używany do wytwarzania wyrobów kolekcjonerskich, np. figurek czy statuetek. Pod względem chemicznym jest to stop metali, głównie miedzi i cynku, w którym zawartość procentowa tego drugiego wynosi od 10% do 45%.

2.4 Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

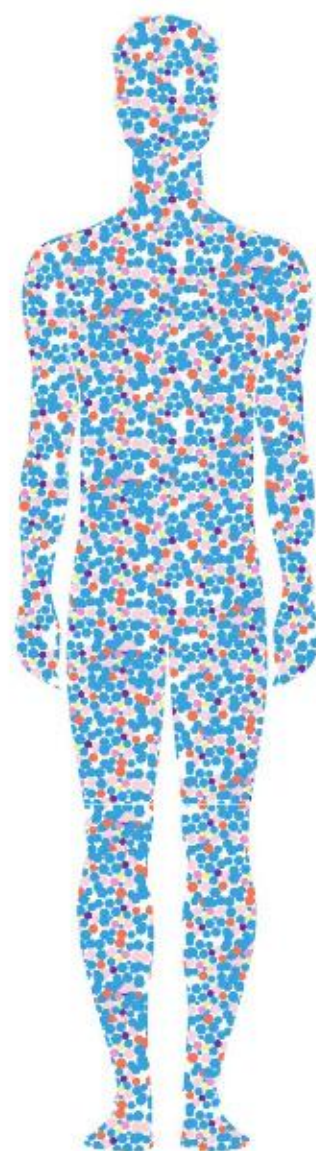
Podejmij temat

Ilustracja przedstawia procentowy udział poszczególnych związków chemicznych w organizmie człowieka.



W organizmie pewnego dorosłego człowieka (75 kg) znajduje się 46,5 kg wody i 10,5 kg tłuszczu. Czy potrafisz powiedzieć, jakim procentem masy ciała tego człowieka jest woda, a jakim tłuszcz?

Dowiedz się, jaka jest właściwa procentowa zawartość wody w organizmie człowieka w twoim wieku.



	kwasy nukleinowe	ok. 1%
	cukry	2%
	sole mineralne	5%
	tłuszcze	?
	białka	16%
	woda	?

Przykład 1

Na półmisku leży 12 jabłek dojrzałych i 13 niedojrzałych. Obliczmy, jakim procentem wszystkich jabłek są jabłka dojrzałe, a jakim – niedojrzałe.

Zauważmy, że jabłka dojrzałe stanowią $\frac{12}{25}$ wszystkich jabłek.

Aby obliczyć, jakim procentem wszystkich jabłek są jabłka dojrzałe, ułamek $\frac{12}{25}$ zapisujemy w postaci procentu.

$$\frac{12}{25} \cdot 100\% = 48\% \text{ lub } \frac{12}{25} = \frac{48}{100}, \text{ czyli } 48\%$$

W podobny sposób obliczymy, jakim procentem wszystkich jabłek są jabłka niedojrzałe.

$$\frac{13}{25} \cdot 100\% = 52\% \text{ lub } \frac{13}{25} = \frac{52}{100}, \text{ czyli } 52\%$$

Możemy również zapisać: $100\% - 48\% = 52\%$.

Jabłka dojrzałe stanowią 48% wszystkich jabłek leżących na półmisku, a jabłka niedojrzałe to 52%.

1. Uczniowie klasy 7a podczas zwiedzania Warszawy wysłali 60 kartek z pozdrowieniami. 24 kartki były do znajomych ze szkoły. Jaki procent wszystkich wysłanych kartek stanowią te do znajomych ze szkoły?

Przykład 2

Obliczmy, jakim procentem liczby 56 jest liczba 14.

Liczba 14 to $\frac{14}{56}$ liczby 56. Zamieńmy ułamek $\frac{14}{56}$ na procent.

$$\frac{14}{56} \cdot 100\% = \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$$

Liczba 14 stanowi 25% liczby 56.

Aby obliczyć, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba,
należy podzielić drugą liczbę przez pierwszą
i otrzymany wynik pomnożyć przez 100%.

2. Oblicz, jakim procentem liczby 50 jest każda podana liczba:

- a) 4 b) 7 c) 21 d) 120

Przykład 3

W lutym sukienka kosztowała 120 zł. W marcu, po obniżce, za sukienkę płacono 90 zł. Natomiast w maju po podwyżce cena sukienki wynosiła 117 zł. O ile procent obniżono, a następnie o ile procent podwyższono cenę sukienki?

Obliczmy, jakim procentem początkowej ceny sukienki jest cena po obniżce.

$$\frac{90}{120} \cdot 100\% = \frac{3}{4} \cdot 100\% = 0,75 \cdot 100\% = 75\%$$

Obliczmy, o ile procent obniżono cenę sukienki.

$$100\% - 75\% = 25\%$$

Cenę sukienki obniżono o 25%.

Obliczmy teraz, jakim procentem ceny po obniżce jest cena po podwyżce.

$$\frac{117}{90} \cdot 100\% = 1,3 \cdot 100\% = 130\%$$

Obliczmy, o ile procent podwyższono cenę sukienki.

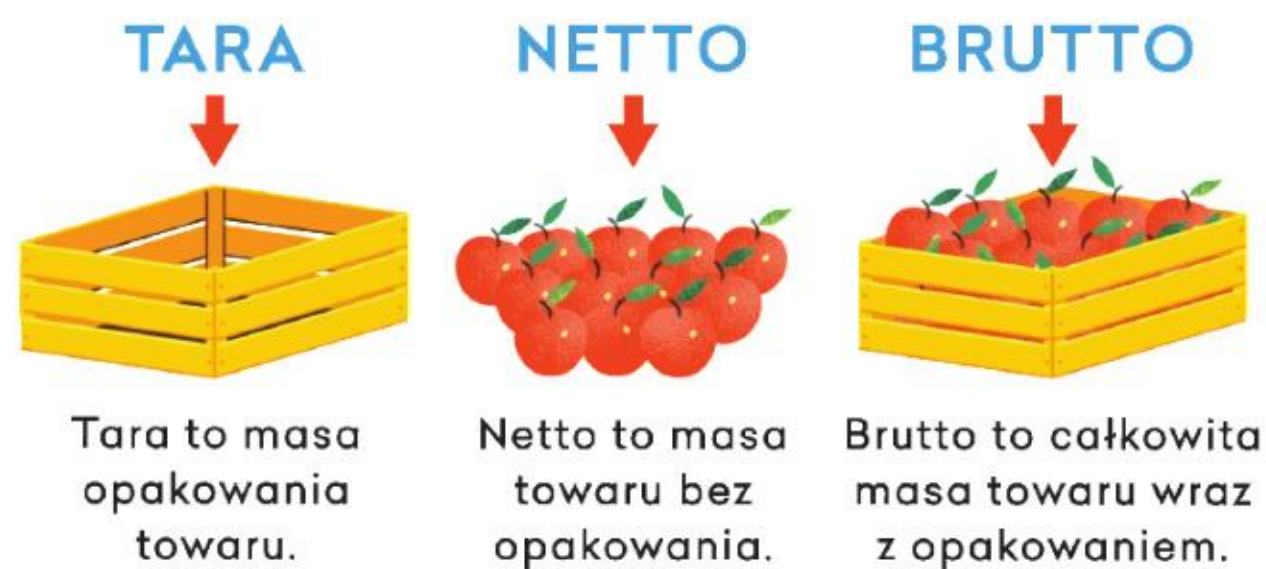
$$130\% - 100\% = 30\%$$

Cenę sukienki podwyższono o 30%.

3. W lutym żelazko kosztowało 340 zł. W lipcu podwyższono jego cenę do 391 zł. Oblicz, o ile procent podwyższono cenę żelazka.

Zadania

- Oblicz, jakim procentem liczby:
- a) 224 jest liczba 56, b) 12 jest liczba 48.
- Skrzynka z jabłkami waży 12,5 kg.
Waga netto jabłek wynosi 11 kg. Jaki procent:
- a) wagi brutto stanowi waga netto,
b) wagi brutto stanowi tara,
c) wagi netto stanowi tara?
- Autokarem liczącym 50 miejsc pojechało na wycieczkę 43 uczniów, pod opieką trojga nauczycieli.
- a) Jakim procentem wszystkich miejsc w autokarze są miejsca zajęte przez uczniów oraz nauczycieli?
b) Jakim procentem wszystkich miejsc są wolne miejsca w autokarze?
- Pan Baltazar zarabia miesięcznie 3600 zł netto. Otrzymał kwartalną premię w wysokości 720 zł netto. Jakim procentem jego miesięcznej pensji jest premia?
- Bilet ulgowy do filharmonii kosztuje 48 zł, a normalny 72 zł.
- a) Jakim procentem ceny biletu normalnego jest cena biletu ulgowego?
b) Jakim procentem ceny biletu ulgowego jest cena biletu normalnego?
- Cenę spodni w wysokości 145 zł obniżono do kwoty 141,52 zł. O ile procent obniżono cenę spodni?
- Cenę telefonu komórkowego równą 250 zł podwyższono o 25 zł. O ile procent podwyższono cenę tego telefonu?
- Oblicz za pomocą kalkulatora procentową zawartość poszczególnych składników ciasteczek maślanych. Wyniki podaj z dokładnością do jednego procenta.
- Marcin i Tomek ścigają się na stadionie. Marcin pokonuje jedno okrążenie bieżni w czasie 20% dłuższym niż czas Tomka, który pokonuje je w czasie 3 minut. Jakim procentem czasu pokonania jednego okrążenia przez Marcina jest czas, który osiągnął Tomek?
- Przeczytaj wypowiedzi dzieci, a następnie sprawdź, czy poprawnie wykonały obliczenia.



Mam 184 cm wzrostu, a ty masz 160 cm wzrostu. Jestem od ciebie o 15% wyższy.

Czyli ja jestem od ciebie o 15% niższa?



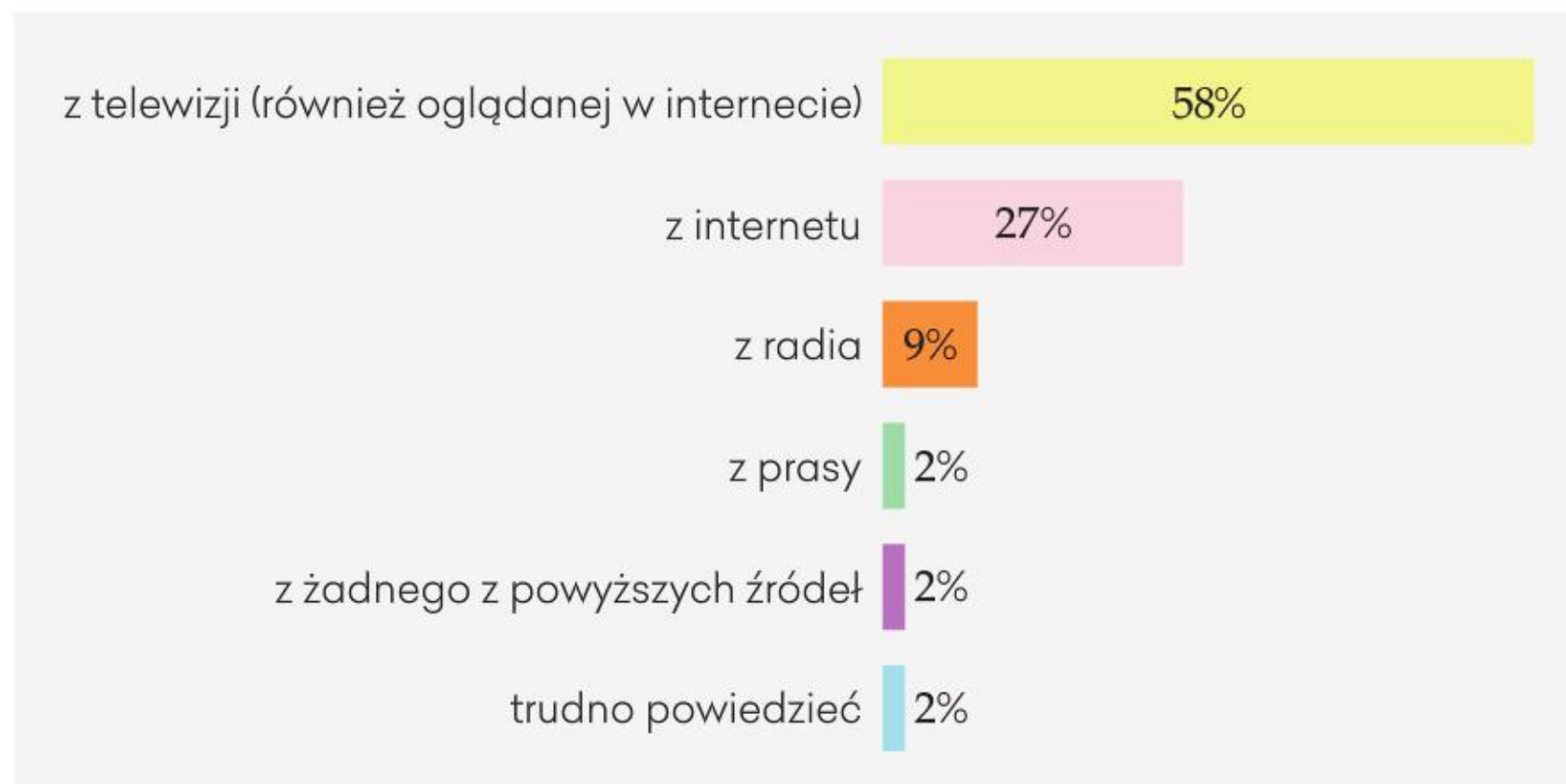
2.5 Obliczenia procentowe w praktyce

Podejmij temat

- W kwietniu 2019 r. przedstawiciele Centrum Badania Opinii Społecznej zadali grupie Polaków pytanie – *Skąd przede wszystkim czerpie Pan(i) informacje o wydarzeniach w kraju i na świecie?* Wyniki badań przedstawiono na diagramie.

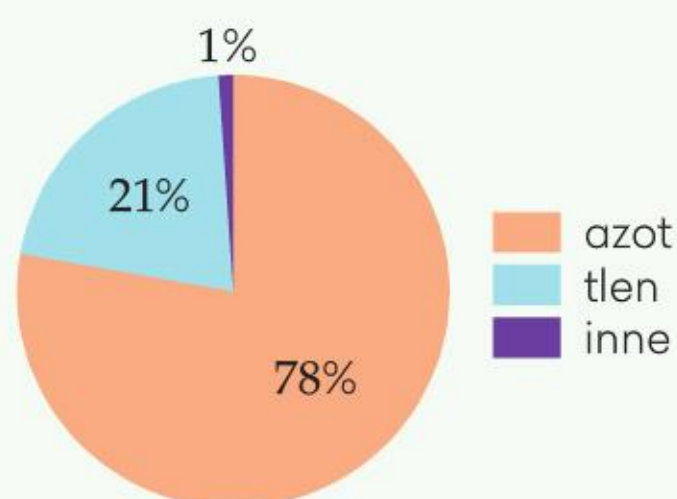


Co jest głównym źródłem informacji o wydarzeniach w kraju i na świecie dla największej grupy badanych? Jakie źródło informacji jest na drugim miejscu pod względem częstości wskazań?



Przykład 1

Na podstawie przybliżonego procentowego składu powietrza przedstawionego na diagramie kołowym obliczmy, ile metrów sześciennych tlenu znajduje się w sali lekcyjnej w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $6\text{ m} \times 4\text{ m} \times 3\text{ m}$.



Obliczamy, ile metrów sześciennych powietrza znajduje się w sali lekcyjnej.

$$V = 6\text{ m} \cdot 4\text{ m} \cdot 3\text{ m} = 72\text{ m}^3$$

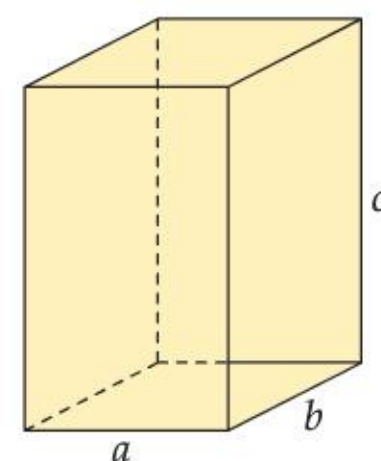
Z diagramu odczytujemy, że tlen stanowi około 21% powietrza. Obliczamy objętość tlenu w tej sali lekcyjnej.

$$21\% \cdot 72\text{ m}^3 = 0,21 \cdot 72\text{ m}^3 = 15,12\text{ m}^3$$

W sali lekcyjnej znajduje się około $15,12\text{ m}^3$ tlenu.



Czy pamiętasz?
Objętość prostopadłościanu jest iloczynem długości jego trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

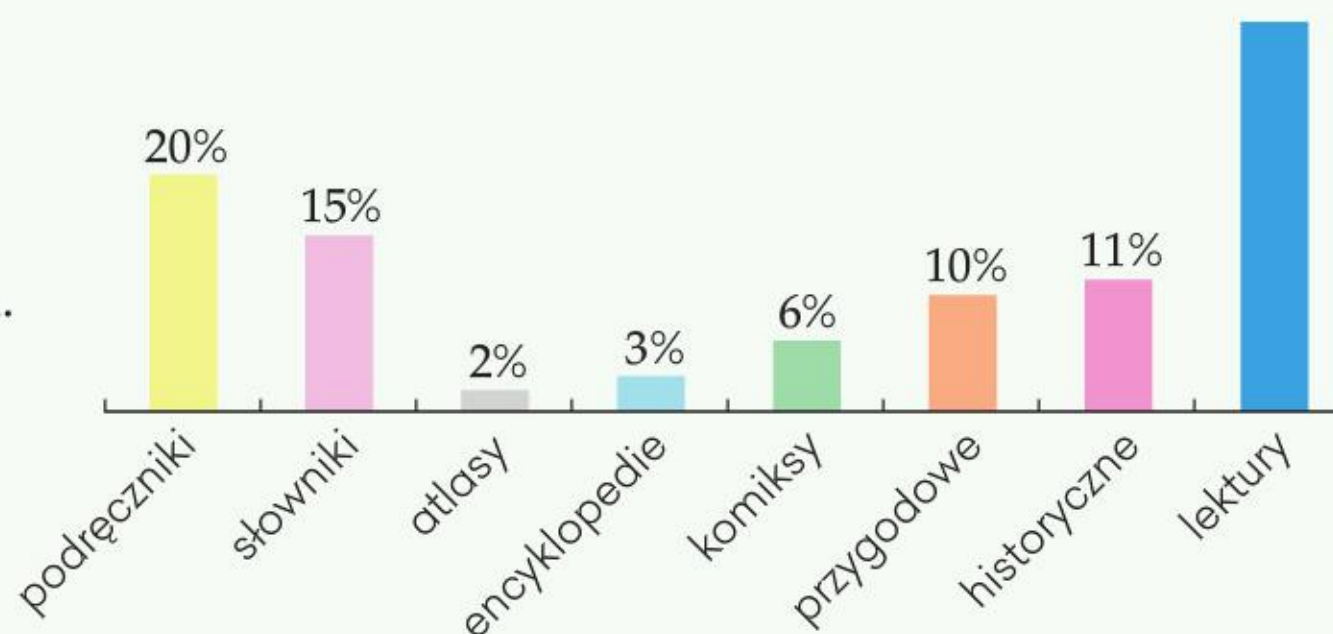


Objętość V obliczamy ze wzoru:
 $V = a \cdot b \cdot c$

- Korzystając z diagramu w przykładzie 1 oblicz, o ile więcej m^3 azotu niż tlenu znajduje się w twojej sali lekcyjnej.

Przykład 2

Na diagramie pokazano zawartość procentową poszczególnych rodzajów książek w bibliotece pewnej szkoły. Cały księgozbiór liczy 3800 pozycji. Obliczmy, ile egzemplarzy lektur jest w tej bibliotece.



Najpierw obliczamy, jaki procent księgozbioru biblioteki szkolnej stanowią lektury, czyli:

$$100\% - (20\% + 15\% + 2\% + 3\% + 6\% + 10\% + 11\%) = 100\% - 67\% = 33\%$$

Lektury stanowią 33% księgozbioru tej biblioteki.

Teraz obliczamy liczbę egzemplarzy lektur:

$$33\% \cdot 3800 = 0,33 \cdot 3800 = 1254$$

W bibliotece jest 1254 egzemplarzy lektur.

2. Dowiedz się, ile jest wszystkich książek w bibliotece twojej szkoły i ile jest słowników. Oblicz, jakim procentem wszystkich książek są słowniki.

Przykład 3

Obok przedstawiono procentowy system oceniania prac klasowych, obowiązujący w pewnej szkole podstawowej.

Ze sprawdzianu z chemii Ania otrzymała 15 punktów na 25 możliwych, z pracy klasowej z matematyki uzyskała 16 punktów na 20 możliwych, zaś z testu z geografii miała 35 punktów z 37 możliwych do zdobycia.

Jakie stopnie otrzymała Ania z tych sprawdzianów?

0%–29%	niedostateczny
30%–49%	dopuszczający
50%–69%	dostateczny
70%–89%	dobry
90%–99%	bardzo dobry
100%	celujący

Uzyskane przez Anię punkty zamieniamy na procenty.

$$\frac{15}{25} \cdot 100\% = 60\% \quad \text{Odczytujemy, że Ania uzyskała ze sprawdzianu z chemii stopień dostateczny.}$$

$$\frac{16}{20} \cdot 100\% = 80\% \quad \text{Ania uzyskała ze sprawdzianu z matematyki stopień dobry.}$$

$$\frac{35}{37} \cdot 100\% \approx 95\% \quad \text{Ania ze sprawdzianu z geografii otrzymała stopień bardzo dobry.}$$

Ania ze sprawdzianu z chemii otrzymała stopień dostateczny, z matematyki dobry, a z geografii – bardzo dobry.

3. Antek ma następujące oceny z matematyki: 4, 2, 4, 5, 5. Oblicz średnią ocen Antka z tego przedmiotu. Jaki procent ocen stanowią oceny poniżej średniej?

Innym przykładem praktycznego zastosowania procentów jest obliczanie frekwencji ucznia na zajęciach lekcyjnych.

Przykład 4

Maciek w marcu był nieobecny na 6 godzinach lekcyjnych. Obliczmy frekwencję Maćka na zajęciach lekcyjnych w tym miesiącu, jeśli liczba wszystkich godzin, na których powinien być obecny, jest równa 120.

Wyznaczamy liczbę godzin lekcyjnych, na których Maciek był obecny:
 $120 - 6 = 114$

Frekwencja ucznia na zajęciach lekcyjnych to stosunek liczby godzin, na których był obecny, do liczby wszystkich obowiązkowych godzin w danym okresie. Najczęściej ten stosunek wyrażany jest w procentach.

$$\frac{114}{120} \cdot 100\% = 95\%$$

Frekwencja Maćka na zajęciach lekcyjnych w marcu była równa 95%.

4. Oblicz, jaka była twoja frekwencja w zeszłym miesiącu na wszystkich zajęciach lekcyjnych.

Z zastosowaniem procentów spotykamy się również przy okazji operacji bankowych.

Przykład 5

Pani Monika wpłaciła do banku 18 000 zł na roczną lokatę oprocentowaną 0,5% w skali roku. Podatek od zysku z oszczędności jest równy 19%. Ile złotych będzie miała na koncie pani Monika po upływie roku?

Obliczamy wysokość odsetek, które naliczy bank po upływie roku.

$$0,5\% \cdot 18\,000\text{ zł} = 0,005 \cdot 18\,000\text{ zł} = 90\text{ zł}$$

Od odsetek pobierany jest podatek w wysokości 19%, zatem rzeczywista kwota, którą zyska pani Monika, to:

$$90\text{ zł} - 19\% \cdot 90\text{ zł} = 90\text{ zł} - 0,19 \cdot 90\text{ zł} = 90\text{ zł} - 17,10\text{ zł} = 72,90\text{ zł}$$

lub krócej: $(100\% - 19\%) \cdot 90\text{ zł} = 81\% \cdot 90\text{ zł} = 0,81 \cdot 90\text{ zł} = 72,90\text{ zł}$

Wartość wpłaconej kwoty powiększona o kwotę zysku:

$$18\,000\text{ zł} + 72,90\text{ zł} = 18\,072,90\text{ zł}$$

Po upływie roku pani Monika będzie mogła wypłacić z banku 18 072,90 zł.



Jeśli klient wpłaci do banku pewną kwotę (**kapitał**) na roczną **lokatę** oprocentowaną $p\%$ w skali roku, to po upływie tego czasu bank doliczy do kapitału **odsetki**. Kwota odsetek zostanie zmniejszona przez bank o 19-procentowy podatek od zysku.

Kapitał – posiadana suma pieniędzy, którą można wpłacić np. na lokatę bankową.

Lokata – kwota wpłacona do banku na ustalony czas i konkretne oprocentowanie.

Oprocentowanie – procent, o jaki suma złożona w banku powiększa się po upływie określonego czasu, lub procent, o jaki zwiększa się spłata zaciągniętego kredytu po upływie określonego czasu (*Słownik języka polskiego PWN*).

Odsetki – kwota, którą bank dolicza do pieniędzy wpłaconych (do kapitału), np. na lokatę, po okresie, na który lokata ta została założona; także kwota, którą spłacamy podczas spłaty kredytu.



Jeśli klient zaciągnie w banku **kredyt** na określony czas, to po upływie tego czasu musi zwrócić kwotę kredytu wraz z ustalonymi odsetkami.

Kredyt – suma pieniędzy pożyczana od banku na określony cel oraz czas. Osoba zaciągająca kredyt w banku zobowiązuje się do oddania pożyczonej kwoty razem z naliczonymi odsetkami od kredytu.



Podatek VAT (z ang. *Value Added Tax* – podatek od wartości dodanej) – jest wliczony w cenę towaru lub usługi, która jest opodatkowana podatkiem VAT.

5. Pan Grzegorz wpłacił do banku 9000 zł na roczną lokatę oprocentowaną 4% w skali roku. Podatek od zysku z oszczędności jest równy 19%. Jaką kwotę będzie miał na koncie pan Grzegorz po upływie danego okresu oszczędzania?

Przykład 6

Pan Michał zaciągnął w banku kredyt w wysokości 5000 zł, który po roku musi jednorazowo spłacić wraz z należnymi odsetkami. Jaką kwotę po roku musi wpłacić do banku pan Michał, jeśli roczne oprocentowanie kredytu wynosi 21%?

Najpierw obliczymy wysokość odsetek, jakie pobierze od pana Michała bank za udzielenie kredytu:

$$21\% \cdot 5000 \text{ zł} = 0,21 \cdot 5000 \text{ zł} = 1050 \text{ zł}$$

Kwota ta zostanie przez bank doliczona do kredytu, czyli pan Michał zapłaci po roku:

$$5000 \text{ zł} + 1050 \text{ zł} = 6050 \text{ zł}$$

Możemy to zapisać również tak:

$$(100\% + 21\%) \cdot 5000 \text{ zł} = 121\% \cdot 5000 \text{ zł} = 1,21 \cdot 5000 \text{ zł} = 6050 \text{ zł}$$

Pan Michał po roku powinien wpłacić do banku 6050 zł.

6. Pani Joanna zaciągnęła w banku kredyt w wysokości 8000 zł. Ile wynosi roczna stopa procentowa tego kredytu, jeśli po roku pani Joanna wpłaciła do banku 9440 zł?

Przykład 7

Cena netto roweru jest równa 4800 zł. Obliczmy, ile wynosi cena brutto tego roweru po uwzględnieniu podatku VAT w wysokości 23%.

Obliczmy najpierw wartość podatku VAT:

$$23\% \cdot 4800 \text{ zł} = 0,23 \cdot 4800 \text{ zł} = 1104 \text{ zł}$$

Przypomnijmy, że **cena netto + podatek VAT = cena brutto**, zatem cena brutto roweru to:

$$4800 \text{ zł} + 1104 \text{ zł} = 5904 \text{ zł}$$

Cena brutto roweru wynosi 5904 zł.

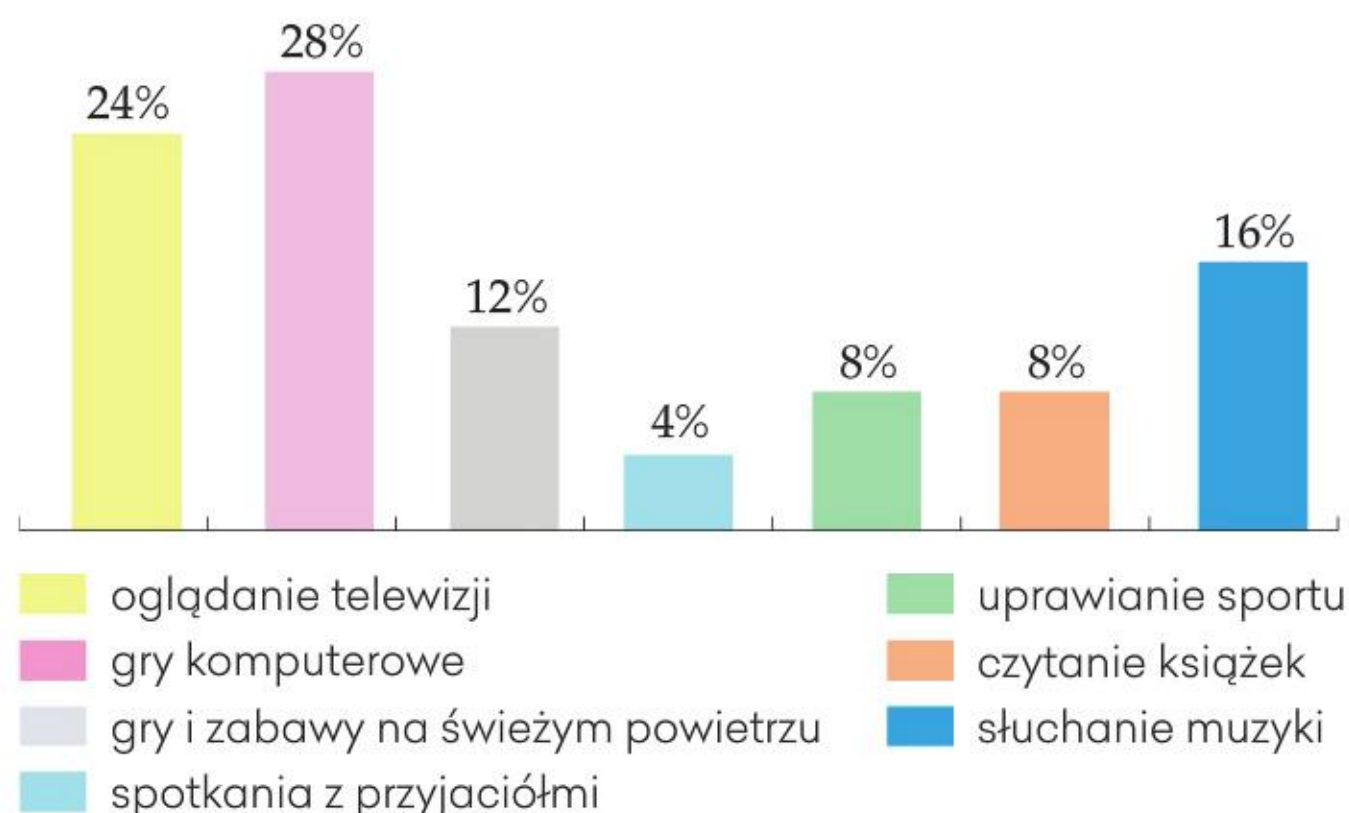
7. Cena netto książki jest równa 32 zł. Oblicz cenę książki z podatkiem VAT wynoszącym 5%.

Zadania

- Wśród 225 uczniów pewnej szkoły przeprowadzono ankietę na temat sposobów spędzania wolnego czasu. Każdy uczeń mógł podać tylko jeden sposób. Wyniki tej ankiety zestawiono na diagramie.

Ilu uczniów tej szkoły w czasie wolnym

- a) uprawia sport,
- b) słucha muzyki,
- c) ogląda telewizję?



- W pewnej szkole uczeń otrzymuje z pracy pisemnej ocenę pozytywną, jeśli uzyska powyżej 40% sumy punktów możliwych do zdobycia. Marek otrzymał 21,5 punktów na 50 możliwych do uzyskania. Jaka ocenę – pozytywną czy negatywną – powinien otrzymać?

- Oblicz wartość odsetek należnych po roku oszczędzania, jeśli wysokość oprocentowania w skali roku wynosi 6%, a kwota wpłacona do banku to:

- a) 2500 zł,
- b) 10 000 zł,
- c) 15 000 zł.

W obliczeniach uwzględnij 19-procentowy podatek.

- Oblicz, jaką kwotę wpłacił pan Henryk na roczną lokatę oprocentowaną 4,5% w skali roku, jeśli odsetki przed odliczeniem podatku przez bank wynosiły:

- a) 900 zł,
- b) 72 zł,
- c) 22,50 zł.

Sprawdź poprawność obliczeń za pomocą kalkulatora.

- Pani Ada wzięła w banku pożyczkę w wysokości 2000 zł, którą po roku musi jednorazowo spłacić wraz z należnymi odsetkami. Jaką kwotę po roku musi wpłacić do banku pani Ada, jeśli oprocentowanie kredytu w skali roku wynosiło 9%?

- Po doliczeniu 23% podatku VAT cenę wanny zwiększono o 115 zł. Jaka była cena wanny przed doliczeniem podatku VAT?

- Cena netto towaru wynosi 152 zł. Oblicz cenę brutto tego towaru, uwzględniając podatek VAT w wysokości 23%.

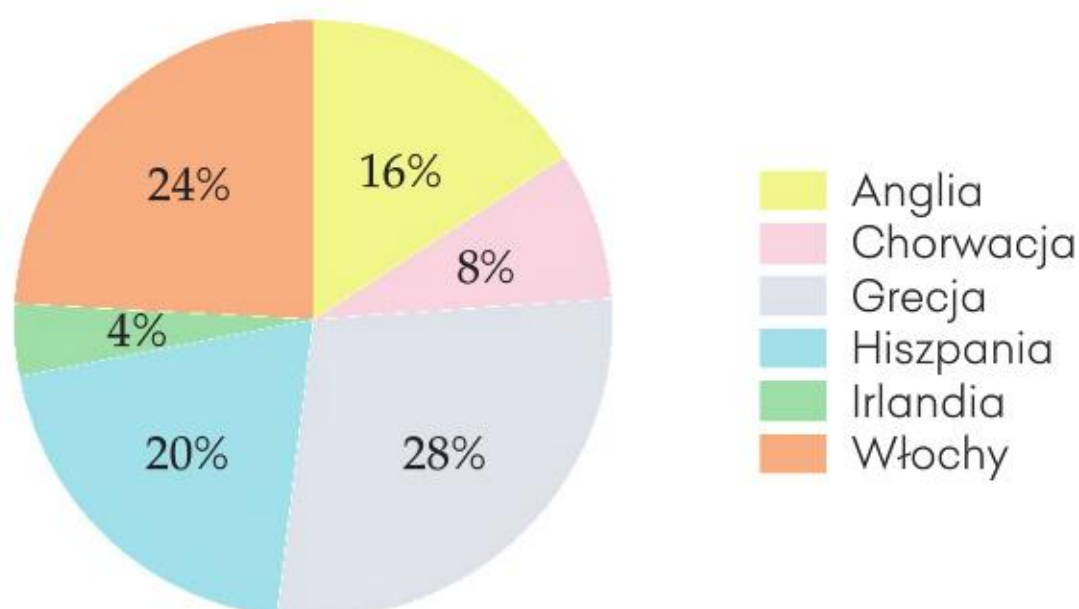
- Cena netto pewnego leku wynosi 75 zł. Wyznacz cenę brutto tego leku, doliczając 7% podatku VAT.

- Jaka jest cena brutto jednego kilograma pomidorów, jeśli cena netto wynosi 4 zł za 1 kg, a stawka podatku VAT na nieprzetworzone produkty rolne wynosi 8%?



Obligacje skarbowe – papiery wartościowe emitowane przez ministra finansów. Minister finansów pożycza od nabywcy obligacji określoną sumę pieniędzy i zobowiązuje się ją zwrócić w określonym czasie, wykupując obligacje wraz z należnymi odsetkami.

- Ile w rzeczywistości musisz zapłacić za miesięczny abonament telefoniczny, jeśli w reklamie jest informacja, że cena netto to 25 zł? Dolicz podatek VAT w wysokości 23% kwoty netto.
- Oblicz, ile złotych zyska pan Stefan, jeśli wpłaci na rok do banku Wymarzona Przyszłość kwotę 25 000 zł. Oprocentowanie roczne wynosi 2%. Pamiętaj o odliczeniu 19-procentowego podatku od odsetek.
- Co jest bardziej opłacalne: roczna lokata kwoty 12 000 zł na 8% czy roczna lokata w wysokości 15 000 zł na 6%?
- Pan Jan kupił obligacje skarbowe. Oblicz, za jaką kwotę pan Jan kupił obligacje, jeżeli po roku odsetki wyniosły 425,25 zł już po odliczeniu 19-procentowego podatku od odsetek, a roczne oprocentowanie było równe 3,5%.
- Liczba a jest 5 razy większa od liczby dodatniej b . Jakim procentem liczby a jest liczba b ?
A. 500% B. 50% C. 20% D. 2%
- Cena towaru z 8% podatkiem VAT wynosi 486 zł. Jaka będzie cena tego towaru, gdy podatek VAT zostanie zmniejszony do 5%?
A. 427,50 zł B. 472,50 zł C. 471,42 zł D. 461,70 zł
- Biuro podróży Guliwer zaproponowało turystom podróże po Europie w okresie wakacji. Z oferty biura skorzystało 1875 polskich turystów. Korzystając z diagramu, odpowiedz na pytania.
 - a) Do jakiego kraju najczęściej wyjeżdżali Polacy?
 - b) Ilu Polaków zwiedziło Włochy?
 - c) Jaki procent polskich turystów odpoczywało na południu Europy?



d) Ilu Polaków zwiedziło Irlandię?

Podsumowanie działu 2

Ważne pojęcia

procent	promil	podwyżka	obniżka	kapitał	lokata
oprocentowanie	odsetki		kredyt	podatek VAT	cena brutto

Jeden procent danej wielkości to jedna setna tej wielkości.

$$1\% = 0,01 = \frac{1}{100}$$

Zamiana procentu na ułamek

Aby procent zapisać w postaci ułamka dziesiętnego, należy liczbę znajdującą się przed symbolem procentu (%) pomnożyć przez 0,01, czyli podzielić przez 100.

$$p\% = p \cdot 0,01 = \frac{p}{100}$$

$$100\% = 1$$

$$50\% = \frac{1}{2}$$

$$25\% = \frac{1}{4}$$

$$15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

Zamiana ułamka na procent

Aby ułamek wyrazić w postaci procentu, należy ten ułamek pomnożyć przez 100%.

$$a = a \cdot 100\%$$

$$2,7 = 2,7 \cdot 100\% = 270\%$$

$$\frac{9}{25} = \frac{9}{25} \cdot 100\% = 36\%$$

Obliczanie procentu danej liczby

Aby obliczyć procent danej liczby, wystarczy pomnożyć ten procent przez tę liczbę.

$$p\% \text{ liczby } a \text{ to } p\% \cdot a = \frac{p}{100} \cdot a$$

$$4\% \text{ liczby } 20 \text{ to } 4\% \cdot 20 = \frac{4}{100} \cdot 20 = \frac{4}{5}$$

Obliczanie liczby na podstawie danego jej procentu

Aby wyznaczyć liczbę na podstawie danego jej procentu, wystarczy

najpierw obliczyć 1% szukanej liczby, a następnie obliczyć jej 100%, $\begin{array}{l} : 20 \rightarrow 20\% \text{ to } 80 \\ \rightarrow 1\% \text{ to } 4 \\ \cdot 100 \rightarrow 100\% \text{ to } 400 \end{array}$	ułożyć i rozwiązać równanie, w którym niewiadoma oznacza szukaną liczbę, Liczba, której 20% jest równe 80, to: $20\% \cdot x = 80$ $\frac{1}{5} \cdot x = 80$ $x = 400$	oznaczyć niewiadomą i ułożyć odpowiednią proporcję. $\begin{array}{cc} 80 & 20\% \\ x & 100\% \end{array}$ $20\%x = 80 \cdot 100\%$ $x = 80 \cdot 100\% / 20\%$ $x = 400$
--	---	--

Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba

Aby obliczyć, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, należy podzielić pierwszą liczbę przez drugą i otrzymany wynik pomnożyć przez 100%.

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y} \cdot 100\%$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot 100\% = 60\%$$

Liczba 3 stanowi 60% liczby 5.

Czy już umiesz?

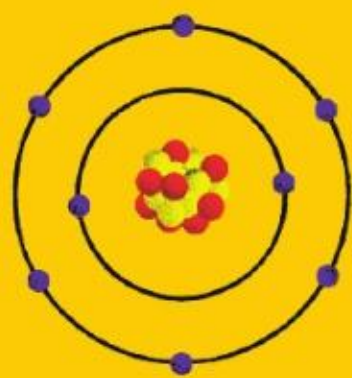
- 1 $\frac{4}{5}$ pewnej liczby to
A. 45% tej liczby. B. 450% tej liczby.
C. 20% tej liczby. D. 80% tej liczby.
- 2 Marek zjadł 48% całej pizzy, a Ewa zjadła połowę pozostałej części. Wynika z tego, że pozostało
A. 0,26 całej pizzy. B. 0,02 całej pizzy.
C. 0,52 całej pizzy. D. 0,22 całej pizzy.
- 3 Pierwsza rata stanowi 5% ceny telewizora, druga rata to 0,34 ceny telewizora. Trzecia, ostatnia rata, jest równa
A. 16% ceny telewizora. B. 39% ceny telewizora.
C. 61% ceny telewizora. D. 84% ceny telewizora.
- 4 1% liczby 2000 wynosi
A. 2 B. 0,2 C. 20 D. 0,02
- 5 Liczba o 25% mniejsza od liczby 80 to
A. 55 B. 60 C. 64 D. 79,75
- 6 Bluza kosztowała 80 zł. Jej cenę obniżono o 20%. Ile złotych zaoszczędzisz, kupując bluzę po obniżce?
A. 16 zł B. 64 zł C. 60 zł D. 20 zł
- 7 Chleb razowy kosztuje o 40% więcej niż chleb pszenny. Za 2 chleby razowe i 3 chleby pszenne trzeba zapłacić 14,50 zł. Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.
- | | | |
|--|--------------|--------------|
| Za 3 chleby razowe i 2 chleby pszenne trzeba zapłacić A/B | A. 13 zł | B. 15,50 zł |
| Chleb pszenny jest o C/D procent tańszy od chleba razowego | C. o ok. 30% | D. o ok. 70% |
- 8 Liczba, której $33\frac{1}{3}\%$ jest równe 5, to
A. $38\frac{1}{3}$ B. 0,15 C. $\frac{500}{3}$ D. 15
- 9 Jola odpowiedziała poprawnie na 34 pytania testu, co stanowiło 85% wszystkich pytań. Oblicz, ile wszystkich pytań było w teście.
A. 91 B. 169 C. 195 D. 40
- 10 Ile kosztował przed obniżką o 35% aparat fotograficzny, którego obecna cena wynosi 520 zł?
A. 555 zł B. 1486 zł C. 800 zł D. 693 zł
- 11 W sadzie rośnie o 30% więcej wiśni niż czereśni. Razem jest 69 drzew. Liczba wiśni jest równa
A. 23 B. 29 C. 30 D. 39

12. Jeśli cenę książki obniżono z 80 zł na 60 zł, to obniżka wynosi
A. 25% B. 20% C. 40% D. $33\frac{1}{3}\%$
13. Do ceny mieszkania doliczono 8-procentowy VAT w wysokości 15 200 zł. Jaka jest cena netto tego mieszkania?
A. 176 700 zł B. 193 100 zł C. 190 000 zł D. 203 300 zł
14. Na trzydniowym rajdzie harcerze przeszli pierwszego dnia $\frac{2}{5}$ całej trasy. Drugiego dnia pokonali 30% całej trasy. Jaki procent trasy został im do przebycia trzeciego dnia?
15. Jędrzek chwalił się kolegom, że w sobotę $\frac{1}{10}$ czasu wolnego przeznaczył na czytanie książki, 35% tego czasu zajęła mu gra komputerowa, a $\frac{1}{4}$ czasu poświęcił na oglądanie filmów. Przez $\frac{2}{5}$ wolnego czasu odrabiał lekcje. Sprawdź, czy to możliwe, aby chłopiec mógł w podany sposób spędzić wolny czas.
16. Znajdź liczbę o $33\frac{1}{3}\%$ mniejszą od liczby 300.
17. Oblicz pole powierzchni działki budowlanej w kształcie prostokąta, której długość jest równa 150 m, a szerokość stanowi 80% długości.
18. Pralka kosztowała 1300 zł. Najpierw jej cenę obniżono o 20%, a potem podwyższono o 20%. Jaka jest ostateczna cena pralki?
19. Państwo Więckowscy planują wycieczkę do ogrodu zoologicznego. Bilet normalny jest o 100% droższy od ulgowego. Ile za wstęp do zoo zapłaci rodzina Więckowskich, czyli rodzice oraz troje dzieci w wieku: 9 lat, 7 lat i 2,5 roku?
20. Właściciel kamienicy, chcąc zmniejszyć opłaty za energię elektryczną, dokonał trzech usprawnień, które obniżyły wydatki kolejno o 20%, 25% oraz 15%. O ile procent łącznie zmniejszyły się wydatki za energię?
21. Jaka to liczba, której $66\frac{2}{3}\%$ jest równe 14?
22. W badaniu ankietowym aż 260 osób, co stanowi 65% wszystkich ankietowanych, odpowiedziało, że ich ulubionym dniem tygodnia jest sobota. Ile osób wzięło udział w badaniu ankietowym?
23. Klasa 7c liczy 32 osoby. Jaka jest liczba uczniów w całej szkole, jeżeli liczba uczniów klasy 7c stanowi 8% wszystkich uczniów?
24. Cena towaru po podwyżce o 10% jest równa 385 zł. Oblicz cenę tego towaru przed podwyżką.
25. Jakim procentem liczby 30 jest liczba 10?
26. Jaki procent godziny zegarowej stanowi 5 minut?
27. Jaki procent liczb naturalnych mniejszych od 30 jest podzielnych przez 3?

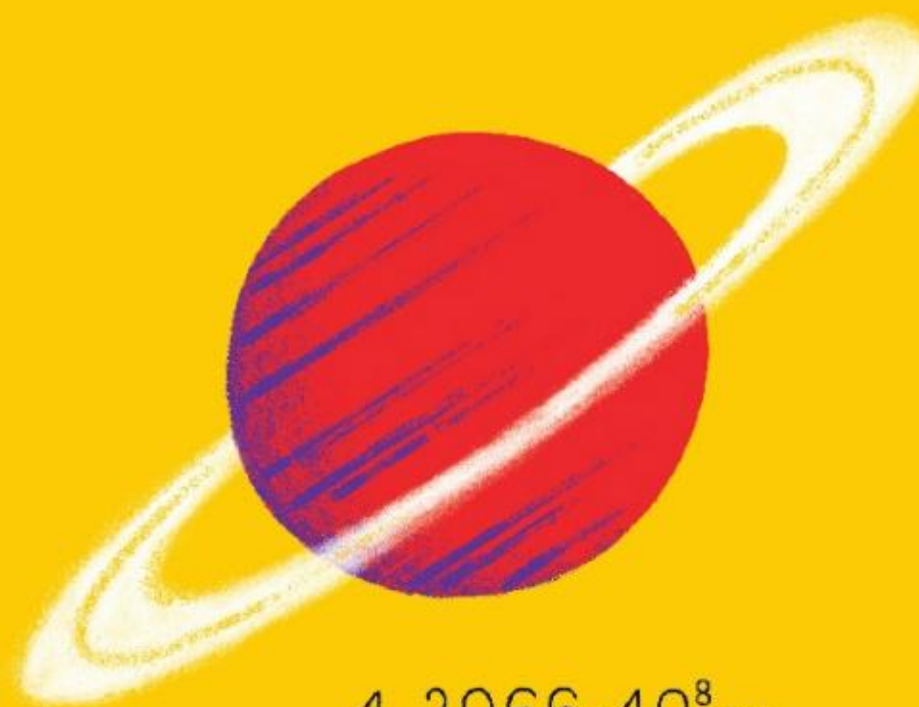


- 28 Na egzaminie ósmoklasiści rozwiązali poprawnie łącznie 1518 zadań, spośród 1725 wszystkich zadań. Oblicz, jakim procentem wszystkich zadań są zadania:
- rozwiązane poprawnie przez ósmoklasistów,
 - nierozwiązane poprawnie przez ósmoklasistów.
- 29 Klasa liczy 28 uczniów, w tym 13 dziewcząt.
- Jaki procent uczniów całej klasy stanowią chłopcy?
 - Siedmiu uczniów tej klasy pisze artykuły do gazetki szkolnej. Jaki procent uczniów stanowią autorzy artykułów do gazetki szkolnej?
 - W konkursach matematycznych wzięło udział $28\frac{4}{7}\%$ uczniów tej klasy. Ilu uczniów uczestniczyło w tych konkursach?
- 30 Pani Marta otrzymała w styczniu 1858,00 zł pensji, a w lutym, po podwyżce, dostała 2136,70 zł. Oblicz, o ile procent podwyższono pensję pani Marty.
- 31 Mycie pod prysznicem wymaga użycia mniejszej ilości wody niż kąpiel w wannie. Oblicz, ile procent wody zaoszczędzi twoja rodzina, jeśli każdy pod prysznicem zużyje 40 l wody. Przyjmij, że na kąpiel w wannie zużylibyście po 100 l wody na osobę.
- 32 Pani Izabela wpłaciła do banku 5000 zł. Oprocentowanie w skali roku wynosiło 5,5%. Ile pieniędzy będzie miała pani Izabela po upływie roku? W obliczeniach uwzględnij 19-procentowy podatek.
- 33 Jaką kwotę ulokowała na lokacie pani Krystyna, skoro po roku, przed odliczeniem podatku, odsetki były równe 180 zł, a roczne oprocentowanie wynosiło 6%?
- 34 Rolnik pożyczył w banku 8000 zł na rok. Oprocentowanie kredytu jest równe 22%. Ile złotych odsetek zapłaci rolnik po roku?
- 35 Komputer kosztuje netto 2300 zł. Stawka VAT wynosi 23%. Ile złotych brutto kosztuje ten komputer?
- 36 Pani Ania na zakup leków w aptece może przeznaczyć 120 zł. Czy wystarczy jej pieniędzy, jeżeli do ceny netto leków, która wynosi 105 zł, musi doliczyć jeszcze 8% podatku VAT?

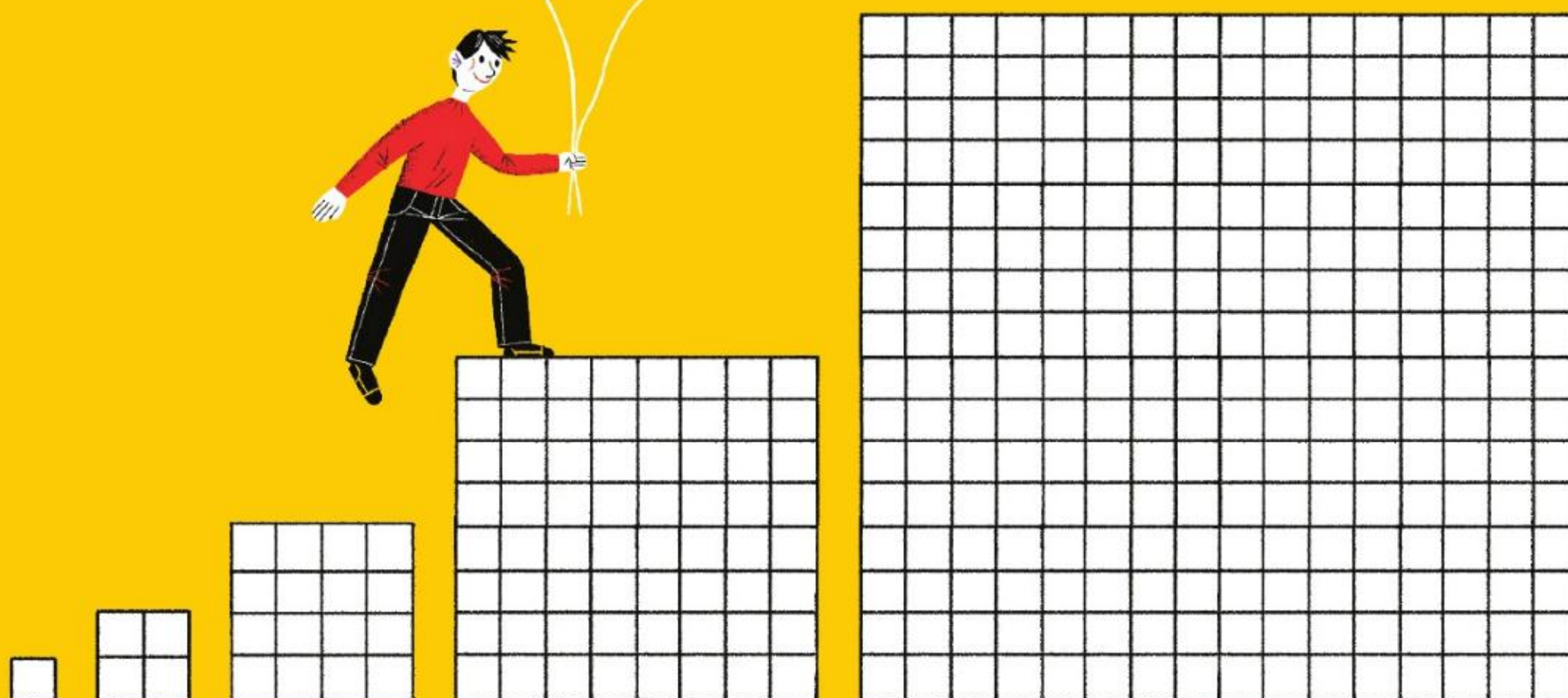
3. Potęgi



$$6 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$



$$1,2066 \cdot 10^8 \text{ m}$$



1. Przyjrzyj się rysunkom kwadratów, które są zbudowane z małych kwadracików. Z ilu małych kwadracików zbudowany jest czwarty z kolei duży kwadrat? A piąty? A z ilu małych kwadracików byłby zbudowany zgodnie z tą regułą piętnasty duży kwadrat? A kwadrat dwudziesty pierwszy?
2. Podaj przykłady z życia codziennego, w których posługujemy się bardzo małymi lub bardzo dużymi liczbami. Czy wiesz jak zapisać te liczby?

3.1 Potęga liczby wymiernej o wykładniku naturalnym

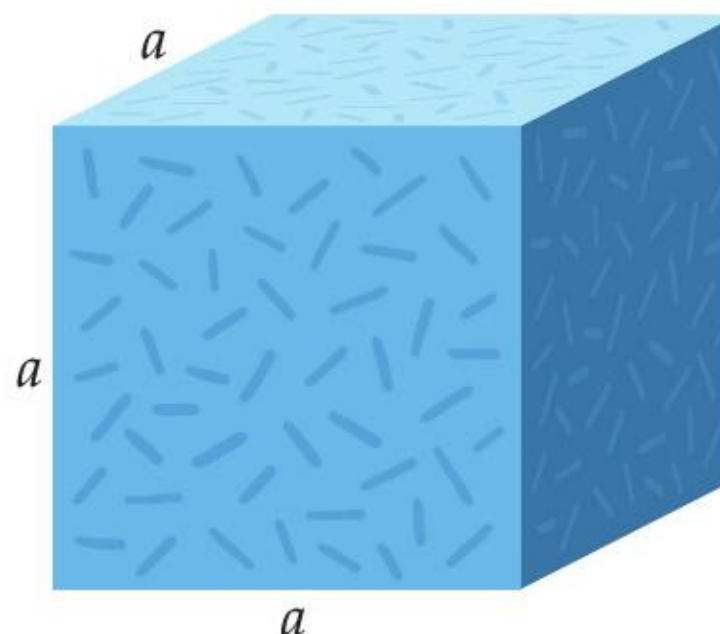
Podejmij temat



Na rysunku przedstawiono sześciennie pudełko, którego krawędź ma długość a .
W jaki sposób obliczyć pole powierzchni jednej ściany tego pudełka?

A w jaki sposób obliczyć objętość tego pudełka?

Z jakich wzorów można skorzystać?



Czy pamiętasz?

Potęgowanie to obliczanie iloczynu jednakowych czynników.



Przyjmujemy, że:

$a^1 = a$ dla dowolnej liczby a

$a^0 = 1$ dla dowolnej liczby a różnej od zera ($a \neq 0$)

Wartość 0^0 nie jest określona, czyli nie oznacza żadnej liczby (jest to tzw. symbol nieoznaczony).

W młodszych klasach nauczyliśmy się, że mnożenie jednakowych czynników możemy zapisać w postaci potęgi.

$$\underbrace{8 \cdot 8}_{2 \text{ czynniki}} = 8^2$$

Czytamy:

- 8 do potęgi drugiej
- druga potęga liczby 8
- kwadrat liczby 8
- 8 do kwadratu

$$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{3 \text{ czynniki}} = 7^3$$

Czytamy:

- 7 do potęgi trzeciej
- trzecia potęga liczby 7
- sześćcian liczby 7
- 7 do sześciangu

$$\underbrace{13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13}_{4 \text{ czynniki}} = 13^4$$

Czytamy:

- 13 do potęgi czwartej
- czwarta potęga liczby 13

Jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 1, to iloczyn n jednakowych czynników równych a zapisujemy jako a^n i nazywamy potęgą o podstawie a i wykładniku n .

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}} = a^n$$

wykładnik potęgi
podstawa potęgi

Zapis a^n czytamy: n -ta potęga liczby a lub a do potęgi n .

Przykład 1

Zapiszmy iloczyn w postaci potęgi.

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

b) $\left(-2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right)$

c) $0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1$

d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$

Podstawą potęgi jest liczba 5, a wykładnikiem potęgi jest liczba 4.

b) $\left(-2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{2}\right) = \left(-2\frac{1}{2}\right)^3$

Podstawą potęgi jest liczba $-2\frac{1}{2}$, a wykładnikiem potęgi jest liczba 3.

c) $0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,1^5$

Podstawą potęgi jest liczba 0,1, a wykładnikiem potęgi jest liczba 5.

d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$

Podstawą potęgi jest liczba $\frac{1}{3}$, a wykładnikiem potęgi jest liczba 6.

1. Zapisz każdy iloczyn w postaci potęgi. Wskaż podstawę i wykładnik potęgi.

a) $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$

b) $7\frac{2}{3} \cdot 7\frac{2}{3} \cdot 7\frac{2}{3}$

c) $(-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5)$

d) $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7}$

Przykład 2

Zapiszmy potęgę, a następnie ją obliczmy:

a) kwadrat liczby -3

b) sześćcian liczby -6

c) -12 do potęgi pierwszej

d) czwartą potęgę liczby $\frac{4}{5}$

e) $1\frac{1}{2}$ do potęgi piątej

f) trzecią potęgę liczby 0,2

a) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

b) $(-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = -216$

→ Podstawa potęgi jest liczbą ujemną, dlatego zapisujemy ją w nawiasie.

c) $(-12)^1 = -12$

W przypadku gdy wykładnik potęgi jest równy 1, to wynik potęgowania jest równy podstawie potęgi.

d) $\left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} =$
 $= \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{256}{625}$

Podstawę potęgi, która jest ułamkiem zwykłym lub liczbą mieszaną, zapisujemy w nawiasie.

e) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} =$
 $= \frac{243}{32} = 7\frac{19}{32}$

Liczbę mieszaną przed wykonaniem potęgowania zamieniamy na ułamek niewłaściwy.

f) $0,2^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$

2. Oblicz.

a) kwadraty liczb: $8, -\frac{2}{7}, 0,3$

c) czwarte potęgi liczb: $-1, -\frac{1}{5}, 3$

b) sześciany liczb: $-3, \frac{1}{4}, -0,2$

d) piąte potęgi liczb: $1, \frac{1}{2}, -0,1$

Przykład 3

Obliczmy kilka potęg podanych liczb. Porównajmy potęgi w każdym podpunkcie.

a) 2

a) podstawa potęgi równa 2

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

...

$$2^{10} = 1024$$

$$2^{11} = 2048$$

$$2^{12} = 4096$$

Jeśli obliczamy kolejne potęgi liczby 2 (podstawa potęgi jest liczbą większą od 1), to liczby są coraz większe.

Iloczyn takich samych czynników większych od 1 jest tym większy, im więcej ma czynników.

$$2^1 < 2^2 < 2^3 < 2^4 < 2^5 < \dots < 2^{10} < 2^{11} < 2^{12}$$

b) $\frac{1}{2}$

b) podstawa potęgi równa $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

...

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{1}{4096}$$

Jeśli obliczamy kolejne potęgi liczby $\frac{1}{2}$

(podstawa potęgi jest liczbą dodatnią, mniejszą od 1), to otrzymujemy bardzo małe liczby, które są dodatnie, ale coraz bliższe 0. Iloczyn takich samych dodatnich czynników mniejszych od 1 jest tym większy, im mniej ma czynników.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4 > \left(\frac{1}{2}\right)^5 > \dots > \left(\frac{1}{2}\right)^{10} > \left(\frac{1}{2}\right)^{11} > \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$



Jeśli wiemy, ile jest równa potęga a^n o podstawie a i wykładniku n , to aby obliczyć potęgę a^{n+1} o podstawie a i wykładniku o 1 większym od n , wystarczy obliczyć iloczyn potęgi a^n i liczby a , czyli $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Z dwóch potęg o jednakowych podstawach większych od 1 i wykładnikach naturalnych ta jest większa, która ma większy wykładnik.

Z dwóch potęg o jednakowych, dodatnich i mniejszych od 1 podstawach i wykładnikach naturalnych ta jest większa, która ma mniejszy wykładnik.

- 3.** Oblicz potęgi, których podstawą jest podana liczba i wykładniki są liczbami naturalnymi mniejszymi od 5. Porównaj potęgi w każdym podpunkcie.

a) 5

b) $\frac{1}{5}$

Przykład 4

Zapiszmy liczbę 64 w postaci potęgi:

- a) o podstawie 4, b) o wykładniku 6.

- a) Podstawa ma być równa 4. Szukamy takiej liczby, do której podniesiemy liczbę 4, aby otrzymać 64.

$$64 = 4^?$$

Wiemy, że $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$, zatem $64 = 4^3$.

- b) Wykładnik potęgi ma być równy 6. Szukamy takiej liczby, której szósta potęga jest równa 64.

$$64 = \boxed{?}^6$$

Ponieważ $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, więc $64 = 2^6$.

4. Zapisz liczbę 256 w postaci potęgi:

- o podstawie 4,
- o wykładniku 8.

Przykład 5

Wyznaczmy cyfrę jedności liczby 9^{99} .

Wypiszmy kilka potęg liczby 9 i przyjrzyjmy się cyfrom jedności.

$$9^1 = 9$$

$$9^2 = 81$$

$$9^3 = 729$$

$$9^4 = 6561$$

$9^5 = 59\,049$

Jeśli wykładnik potęgi jest liczbą **nieparzystą**,
to cyfrą jedności jest 9.

Jeśli wykładnik potęgi jest liczbą **parzystą**,
to cyfrą jedności jest 1.

Wykładnik potęgi 9^{99} jest nieparzysty, więc cyfrą jedności liczby 9^{99} jest 9.

- 5.** Wyznacz cyfrę jedności podanych liczb.

a) 5^{55}

b) 4^{44}

Ciekawe!

W jednym z najstarszych ze znanych dokumentów matematycznych – Papiirusie Rhinda (czyt. rajnda) zwanym też papiрусem Ahmesa, sporządzonym w XVII w. p.n.e. przez egipskiego pisarza królewskiego – znajdujemy zadanie zwane „drabiną liczb”. Mowa jest w nim o liczbach: **7, 49, 343, 2401, 16 807**, które są potęgami liczby **7**. Obok nich umieszczone są hieroglify oznaczające słowa: osoba, kot, mysz, jęczmień, miara. Prawdopodobnie treść tego zadania jest następująca: „Siedem osób ma po siedem kotów. Każdy kot zjadł siedem myszy. Każda mysz zjadła siedem kłosów jęczmiennych. Z każdego kłosa może wyrosnąć siedem miar ziarna. Jaki jest ciąg liczb wynikający z tego zadania i ile wynosi ich suma?”.

Więcej na temat

Z pewnością niejedną raz zastanawialiście się, jak w prosty sposób obliczyć kwadraty niektórych liczb. Poniżej przedstawiony jest jeden ze sposobów obliczania kwadratów kilku liczb, których cyfra w rzędzie jedności jest równa 5. Na przykład: aby obliczyć 25^2 , należy cyfrę stojącą przed cyfrą 5 pomnożyć przez cyfrę o 1 od niej większą, a do otrzymanego wyniku dopisać liczbę 25.

$$\begin{array}{c} 2 \cdot 3 \quad 5^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 25^2 = 625 \end{array}$$

Podobnie postępujemy z innymi liczbami:

$$\begin{array}{c} 1 \cdot 2 \quad 5^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 15^2 = 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \cdot 4 \quad 5^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 35^2 = 1225 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 4 \cdot 5 \quad 5^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 45^2 = 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 10 \cdot 11 \quad 5^2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 105^2 = 11025 \end{array}$$

6. Wyznacz kwadraty liczb: 55, 65, 85, 95, 115 w taki sposób, jak pokazano powyżej. Czy tę metodę można stosować do obliczania kwadratu dowolnej liczby? Odpowiedź uzasadnij.

W zapisie potęg ważną rolę odgrywają nawiasy. Przy obliczaniu potęg najpierw należy ustalić, czy podstawą potęgi jest liczba dodatnia czy ujemna.

Przykład 6

Wykonajmy potęgowanie i porównajmy otrzymane wyniki.

a) $(-7)^2$ i -7^2

b) $(-2)^3$ i -2^3

a) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$

Podstawą potęgi jest zapisana w nawiasie liczba -7 . Wykładnikiem potęgi jest liczba parzysta. W wyniku otrzymujemy liczbę dodatnią.

$$\begin{aligned} -7^2 &= (-1) \cdot 7^2 = (-1) \cdot 7 \cdot 7 = \\ &= (-1) \cdot 49 = -49 \end{aligned}$$

Podstawą potęgi jest liczba 7. Liczbę -7^2 możemy zapisać jako iloczyn liczb -1 i 7^2 . W wyniku otrzymujemy liczbę ujemną.

b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Podstawą potęgi jest zapisana w nawiasie liczba -2 . Wykładnikiem potęgi jest liczba nieparzysta. W wyniku otrzymujemy liczbę ujemną.

$$\begin{aligned} -2^3 &= (-1) \cdot 2^3 = (-1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \\ &= (-1) \cdot 8 = -8 \end{aligned}$$

Podstawą potęgi jest liczba 2. Liczbę -2^3 możemy zapisać jako iloczyn liczb -1 i 2^3 . W wyniku otrzymujemy liczbę ujemną.



Potęga liczby ujemnej o wykładniku parzystym jest liczbą dodatnią.
Potęga liczby ujemnej o wykładniku nieparzystym jest liczbą ujemną.

Jeżeli podstawa potęgi jest liczbą ujemną, to wynik potęgowania może być liczbą dodatnią lub ujemną w zależności od tego, czy wykładnik jest liczbą parzystą czy nieparzystą.

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 5 \cdot 5 = 5^2$$

$$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -5 \cdot 5 \cdot 5 = -5^3$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^7 = -\left(\frac{2}{5}\right)^7$$

$$(-0,7)^{10} = 0,7^{10}$$

$$(-0,7)^{11} = -0,7^{11}$$

7. Ustal bez wykonywania obliczeń, czy podana liczba jest dodatnia czy ujemna.

- a) $(-5)^8$ b) -74^5 c) $(-13)^7$ d) -38^{12} e) -121^3

Przykład 7

Porównajmy potęgi, których podstawy są liczbami ujemnymi.

- a) $(-6)^9$ i $(-6)^4$ b) $(-5)^3$ i $(-5)^5$ c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ i $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$

a) $(-6)^9$ i $(-6)^4$

Zauważmy, że $(-6)^4 > 0$, a $(-6)^9 < 0$, zatem $(-6)^9 < (-6)^4$.

b) $(-5)^3$ i $(-5)^5$

$$(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -5^3$$

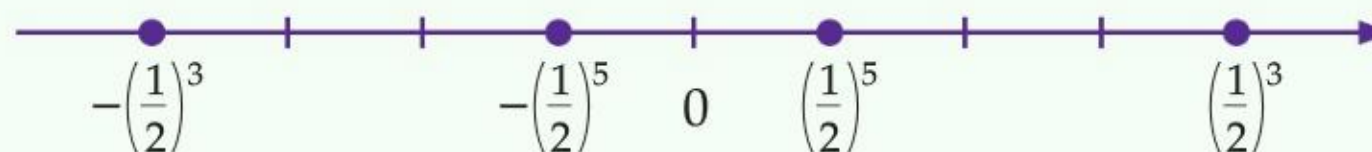
$$(-5)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -5^5$$

$$(-5)^3 > (-5)^5, \text{ bo } 5^3 < 5^5$$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ i $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ i } \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 < \left(-\frac{1}{2}\right)^5, \text{ bo } \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^5$$



8. Porównaj potęgi, których podstawy są liczbami ujemnymi.

- a) $(-3)^8$ i $(-3)^3$ b) $(-4)^5$ i $(-4)^7$ c) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$ i $\left(-\frac{1}{6}\right)^4$

Przykład 8

Wykonajmy potęgowanie.

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

b) $\frac{(-2)^3}{5}$

c) $\frac{2}{(-5)^3}$

$$a) \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$$

Podstawą potęgi jest zapisany w nawiasie ułamek $-\frac{2}{5}$, dlatego wykonujemy mnożenie $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$.

$$b) \frac{(-2)^3}{5} = \frac{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}{5} = -\frac{8}{5} = -1\frac{3}{5}$$

W liczniku ułamka jest trzecia potęga liczby -2 , dlatego wykonujemy mnożenie $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$.

$$c) \frac{2}{(-5)^3} = \frac{2}{(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)} = -\frac{2}{125}$$

W mianowniku ułamka jest trzecia potęga liczby -5 , dlatego wykonujemy mnożenie $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$.

9. Oblicz.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

b) $\frac{6}{7^2}$

c) $\frac{2^5}{9}$

Zadania

Oblicz.

a) kwadraty liczb: -9 ; $-\frac{6}{7}$; $-1\frac{3}{8}$; $-0,9$; 0 ; $0,12$

b) sześciiany liczb: -4 ; $-1,2$; $-\frac{1}{2}$; -1 ; $0,03$; $\frac{2}{5}$; $1\frac{1}{6}$

Oblicz.

a) 1^7

b) $(-1)^5$

c) $(-5)^3$

d) $\left(1\frac{3}{7}\right)^2$

e) $(-0,3)^4$

f) $(-0,2)^5$

Zapisz podane liczby w postaci potęg o podstawie 2.

a) 16

b) 2

c) 32

d) 128

e) 8

f) 512

Przedstaw liczby:

a) 16 w postaci potęgi o podstawie 4,

b) -32 w postaci potęgi o podstawie -2 ,

c) $\frac{1}{16}$ w postaci potęgi o podstawie $\frac{1}{2}$,

d) $11\frac{1}{9}$ w postaci potęgi o podstawie $3\frac{1}{3}$,

e) $-0,064$ w postaci potęgi o podstawie $-0,4$,

f) $3,375$ w postaci potęgi o podstawie $1,5$.

Zapisz liczbę 256 w postaci potęgi o podanym wykładniku.

a) 2

b) 4

c) 8

d) 1

Zapisz liczby w postaci potęg o wykładniku równym 3.

a) 1

b) -27

c) -343

d) 1000

e) 8

f) -125

Przedstaw każdą podaną liczbę w postaci potęgi o wykładniku naturalnym. Czy w każdym przykładzie jest tylko jedno rozwiązanie?

a) 32

b) -8000

c) 64

d) 16

e) 144

f) $-10\,000\,000$

Porównaj liczby. Zamiast pytajnika wstaw znaki: $<$, $=$ lub $>$.

a) $(-4)^3$? $(-4)^2$

b) $\left(-\frac{1}{9}\right)^4$? $\left(-\frac{1}{9}\right)^5$

c) -6^2 ? $(-6)^2$

d) $-(-1)^7$? $(-1)^6$

e) 5^3 ? 8^3

f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$? $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

g) $\left(-\frac{2}{7}\right)^5$? $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$

h) $(-5)^6$? 2^6

i) $-\left(\frac{5}{9}\right)^3$? $\left(-\frac{5}{9}\right)^3$

Które z podanych liczb to liczby dodatnie? Wypisz je.

$(-3)^5$

4^3

-5^2

$-\left(\frac{5}{11}\right)^7$

$\left(-3\frac{2}{5}\right)^5$

-9^3

$(-0,9)^4$

$(-5)^2$

0^9

$-(-7)^2$

$-(-6)^3$

Oblicz.

a) $\left(\frac{3}{7}\right)^2$, $\left(-\frac{3}{7}\right)^2$, $-\left(\frac{3}{7}\right)^2$, $-\left(-\frac{3}{7}\right)^2$

b) $\frac{2}{(-3)^2}$, $\frac{2}{-3^2}$, $\frac{-2^2}{3}$, $-\frac{2}{3^2}$

- Liczby: 144, 175, 216, 360, 400, 900, 4900, 1575, 2880 rozłóż na czynniki pierwsze, a następnie zapisz je, według wzoru, w postaci iloczynu potęg liczb pierwszych.

$$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$



Czy pamiętasz?

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

- Czy można rozlać całą porcję soku z półtoralitrowej butelki do sześciu jednakowych kubków, każdy w kształcie sześcianu o krawędzi długości 6 cm?
- Kinga pożyczyła od cioci 310 zł. Obiecała, że odda je, spłacając pierwszego dnia 10 zł, a każdego następnego dnia – dwa razy więcej niż poprzedniego. W ciągu ilu dni Kinga odda cioci pieniądze?
- Liczba bakterii w pewnej populacji podwaja się co 24 godziny. Ile razy zwiększy swoją liczebność ta populacja po 96 godzinach, a ile – po dwóch tygodniach? W której dobie liczba bakterii tej populacji zwiększy się 64-krotnie?
- W pracowni bombek w każdej z sześciu sal pracuje sześć dekoratorek, które każdego dnia malują ręcznie po sześć kompletów bombek. Każdy komplet zawiera sześć bombek.
- a) Czy w ciągu dnia dekoratorki pomalują 1300 bombek? Odpowiedź uzasadnij.
- b) Ile bombek pomalują wszystkie dekoratorki w ciągu 6 dni?
- c) Oszacuj, ile dni zajmie wszystkim dekoratorkom pomalowanie 30 000 bombek. Obliczenia wykonaj za pomocą kalkulatora.
- Ustal cyfrę jedności każdej podanej liczby.
- a) 10^{12} b) 5^{27} c) 11^{20}  2^{45}
-  Oblicz sumę cyfr liczby, która jest wynikiem odejmowania $10^{98} - 2$.
-  Oblicz kolejne potęgi liczby 4 o wykładnikach naturalnych dodatnich i mniejszych od 9. Przyjrzyj się, jaka jest cyfra jedności w każdym z otrzymanych wyników. Co zauważasz? Podaj cyfrę jedności liczb: a) 4^{2020} , b) 4^{9999} .
-  Oblicz kolejne potęgi liczby 3 o wykładnikach naturalnych dodatnich i mniejszych od 9. Przyjrzyj się, jaka jest cyfra jedności w każdym z otrzymanych wyników. Co można zauważyć? Podaj cyfrę jedności liczb: a) 3^{120} , b) 3^{555} .
-  Znajdź cyfrę jedności liczby a , jeśli $a = 2^{22} + 5^{20} + 10^{15}$.

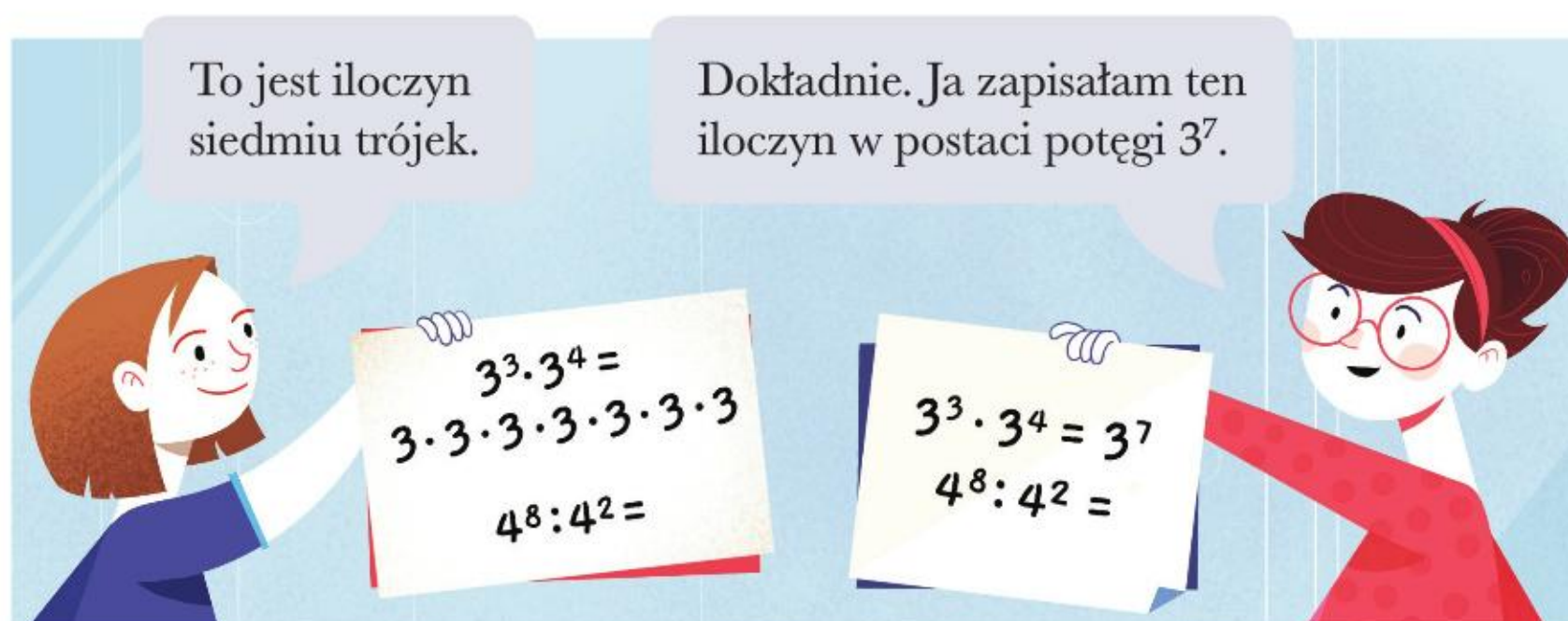
3.2 Mnożenie i dzielenie potęg o jednakowych podstawach

Podejmij temat



Czy, twoim zdaniem, oba zapisy iloczynów są poprawne?

Jakie wyniki dziewczynki powinny wpisać przy ilorazach?



| Znajomość własności potęg ułatwia wykonywanie działań na potęgach.

Przykład 1

Zapiszmy iloczyn w postaci jednej potęgi.

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^5$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-0,75)^3$

c) $8,3^6 \cdot 8,3$

d) $x^2 \cdot x \cdot x^6$

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ czynniki}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2 \text{ czynniki}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ czynników}} = 2^{3+2+5} = 2^{10}$ Wykładniki dodajemy, podstawa się nie zmienia.

b) Sposób I

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-0,75)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^{2+3} = \left(-\frac{3}{4}\right)^5$$

Sposób II

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-0,75)^3 = (-0,75)^2 \cdot (-0,75)^3 = (-0,75) \cdot (-0,75) \cdot (-0,75) \cdot (-0,75) \cdot (-0,75) = (-0,75)^{2+3} = (-0,75)^5$$

c) $8,3^6 \cdot 8,3 = 8,3^6 \cdot 8,3^1 = 8,3 \cdot 8,3 \cdot 8,3 \cdot 8,3 \cdot 8,3 \cdot 8,3 \cdot 8,3 = 8,3^{6+1} = 8,3^7$

d) $x^2 \cdot x \cdot x^6 = \underbrace{x \cdot x}_{2 \text{ czynniki}} \cdot \underbrace{x}_{1 \text{ czynnik}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{6 \text{ czynników}} = x^{2+1+6} = x^9$

Gdy mnożymy potęgi o tej samej podstawie, dodajemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmian. Mówimy, że iloczyn potęg o jednakowych podstawach jest równy potędze o tej samej podstawie i wykładniku równym sumie wykładników tych potęg.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$a \neq 0$; n, m – liczby naturalne

1. Zapisz każdy iloczyn w postaci jednej potęgi.

a) $(-5)^6 \cdot (-5)^3$

b) $1,25^7 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^8$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

d) $y^4 \cdot y^9 \cdot y^5$

Przyjrzyjmy się, jak wykonujemy dzielenie potęg o tych samych podstawach.

Przykład 2

Zapiszmy iloraz w postaci jednej potęgi.

a) $5^4 : 5^2$

b) $\frac{\left(-3\frac{1}{3}\right)^5}{\left(-3\frac{1}{3}\right)^4}$

c) $1,7^{21} : 1,7^9$

d) $p^7 : p^3, p \neq 0$

a) **Sposób I**

$$5^4 : 5^2 = \frac{5^4}{5^2} = \frac{\overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{4 \text{ czynniki}}}{\underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ czynniki}}} = 5^{4-2} = 5^2$$

Znak dzielenia zastępujemy kreską ułamkową.
Wykładniki odejmujemy, podstawa się nie zmienia.

Sposób II

$$5^4 : 5^2 = \frac{5^4}{5^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = 5 \cdot 5 = 5^2$$

Znak dzielenia zastępujemy kreską ułamkową.
Skracamy ułamek.

$$\text{b) } \frac{\left(-3\frac{1}{3}\right)^5}{\left(-3\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{\overbrace{\left(-3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right)}^{5 \text{ czynników}}}{\underbrace{\left(-3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right)}_{4 \text{ czynniki}}} = \left(-3\frac{1}{3}\right)^{5-4} = \left(-3\frac{1}{3}\right)^1 = -3\frac{1}{3}$$

c) $1,7^{21} : 1,7^9 = 1,7^{21-9} = 1,7^{12}$

d) $p^7 : p^3 = p^{7-3} = p^4$ dla $p \neq 0$

Gdy dzielimy potęgi o tej samej podstawie, odejmujemy ich wykładniki, a podstawę pozostawiamy bez zmian.
Mówimy, że iloraz potęg o jednakowych podstawach jest równy potędze o tej samej podstawie i wykładniku równym różnicy wykładników tych potęg.

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$a \neq 0; n, m$ – liczby naturalne; $n > m$

2. Zapisz każdy podany iloraz w postaci jednej potęgi.

a) $(-16)^{12} : (-16)^8$

b) $0,2^{27} : 0,2^{23}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^9 : \left(\frac{2}{3}\right)^8$

d) $b^{15} : b^6, b \neq 0$

Przykład 3

Zapiszmy wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^9 \cdot \frac{27}{125}$ b) $0,9^8 : 0,81$

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{3}{5}\right)^9 \cdot \frac{27}{125} &= \left(\frac{3}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^{9+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{12} \end{aligned}$$

Liczbę $\frac{27}{125}$ zapisujemy jako potęgę o podstawie $\frac{3}{5}$ i wykładniku równym 3.

Dodajemy wykładniki potęg.

b) $0,9^8 : 0,81 = 0,9^8 : 0,9^2 = 0,9^{8-2} = 0,9^6$



Milion to milion jedności.

Miliard to tysiąc milionów.

Bilion to milion milionów.

Biliard to tysiąc bilionów.

Trylion to milion bilionów.

Tryliard to tysiąc trylionów.

Kwadrylion to milion trylionów.

Kwadryliard to tysiąc kwadrylionów.

Kwintylion to milion kwadrylionów.

Kwintyliard to tysiąc kwintylionów.

3. Zapisz każde wyrażenie w postaci jednej potęgi.

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{17} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)$ b) $(-3)^7 : (-243)$ c) $-64 : (-4)^2$ d) $0,5^8 : 0,125$

Przykład 4

Zapiszmy w postaci potęgi liczby 10:

a) miliard, b) biliard.

a) $10^3 \cdot 10^6 =$ Miliard to tysiąc milionów. Tysiąc to trzecia potęga liczby 10, a milion to szósta potęga liczby 10.

$= 10^{3+6} = 10^9$ Dodajemy wykładniki potęg.

b) $10^3 \cdot 10^{12} =$ Biliard to tysiąc bilionów. Bilion to dwunasta potęga liczby 10.

$= 10^{3+12} = 10^{15}$ Dodajemy wykładniki potęg.

4. Zapisz w postaci potęgi liczby 10:

a) trylion, b) kwintylion.

Więcej na temat

Jeszcze w ubiegłym stuleciu w Niemczech, w Anglii i w niektórych krajach na północy Europy za podstawę liczenia przyjmowano grupy sześciocyfrowe, tj. milion to 10^6 , bilion to 10^{12} , trylion to 10^{18} .

Natomiast w Stanach Zjednoczonych, Francji i w krajach na południu Europy podstawą liczenia były grupy trzyocyfrowe, tj. tysiąc to 10^3 , milion to 10^6 , bilion to 10^9 , trylion to 10^{12} . Zauważmy, że bilion niemiecki jest równy trylionowi francuskiemu.

W Polsce stosuje się grupy sześciocyfrowe.

Zadania

● Zapisz każdy podany iloczyn w postaci jednej potęgi i oblicz.

- | | | |
|---------------------------------------|---|--|
| a) $3^2 \cdot 3^2$ | b) $(-2)^2 \cdot (-2)^3$ | c) $(-10)^2 \cdot (-10)^3 \cdot (-10)$ |
| d) $(-1)^5 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^4$ | e) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ | f) $0,2^2 \cdot 0,2 \cdot 0,2^2$ |

● Przedstaw każdy podany iloczyn potęg w postaci jednej potęgi.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $(-5)^6 \cdot (-5)^3$ | b) $\left(\frac{8}{13}\right)^4 \cdot \left(\frac{8}{13}\right)^7$ | c) $(-1,3)^6 \cdot (-1,3)^2 \cdot (-1,3)$ |
| d) $(-0,75)^5 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^4$ | e) $(-3y)^4 \cdot (-3y)^5 \cdot (-3y)^2$ | f) $\left(\frac{z}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{z}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{z}{5}\right)^9$ |

● Zapisz każde wyrażenie w postaci iloczynu potęg o jednakowych podstawach, a następnie jako potęgę.

- | | | |
|---|----------------------------------|--|
| a) $2^{11} \cdot 16$ | b) $3^{17} \cdot 9$ | c) $0,81 \cdot 0,9^8$ |
| d) $(-3)^6 \cdot (-243)$ | e) $0,5^8 \cdot 0,125$ | f) $-64 \cdot (-4)^7$ |
| g) $\left(\frac{2}{7}\right)^5 \cdot \frac{8}{343}$ | h) $27 \cdot 9 \cdot 81 \cdot 3$ | i) $10\,000 \cdot 1000 \cdot 100\,000 \cdot 100$ |

● Zapisz każdy podany iloraz w postaci jednej potęgi i oblicz.

- | | | |
|--|---------------------------|--------------------------|
| a) $2^8 : 2^4$ | b) $(-2)^{10} : (-2)^5$ | c) $3^7 : 3^3$ |
| d) $(-3)^9 : (-3)^5 : (-3)^3$ | e) $(-10)^{11} : (-10)^7$ | f) $0,1^{17} : 0,1^{13}$ |
| g) $\left(\frac{2}{3}\right)^9 : \left(\frac{2}{3}\right)^6$ | h) $(-1)^{21} : (-1)^8$ | i) $5^{14} : 5^{11}$ |

● Przedstaw każdy podany iloraz potęg w postaci jednej potęgi.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $3,9^{19} : 3,9^{11}$ | b) $\left(4\frac{1}{3}\right)^{15} : \left(4\frac{1}{3}\right)^6 : \left(4\frac{1}{3}\right)^3$ | c) $\frac{6^{14} : 6^3}{6^{12} : 6^8}$ |
| d) $(a^{15} : a^3) : (a^8 : a^2), a \neq 0$ | e) $\frac{m^{16} : m^4}{m^8}, m \neq 0$ | f) $\frac{b^9}{b^7 : b^2}, b \neq 0$ |

● Zapisz podane wyrażenia w najprostszej postaci.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $(4^5 \cdot 4^2) : 4^4$ | b) $(-2)^{11} : ((-2)^5 \cdot (-2)^2)$ | c) $((-1)^{12} \cdot (-1)^4) : ((-1)^{20} : (-1)^7)$ |
| d) $(6^{14} \cdot 6^3) : (6^8 \cdot 6^7) \cdot 6$ | e) $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) : \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4\right)$ | f) $\frac{\left(2\frac{1}{3}\right)^6 : \left(2\frac{1}{3}\right)}{\left(2\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)}$ |

● Ile razy iloczyn $4^6 \cdot 4^3$ jest większy od ilorazu $4^7 : 4^2$?

● Odpowiedz na pytania. Każdy wynik zapisz w postaci potęgi liczby 10.

- | | |
|---|---|
| a) Ile milimetrów mieści się w 100 m? | b) Ile decymetrów mieści się w 10 km? |
| c) Ile centymetrów mieści się w 100 km? | d) Ile gramów mieści się w 10 kg? |
| e) Ile miligramów mieści się w 1 tonie? | f) Ile dekagramów mieści się 10 tonach? |

★ Odpowiedz na pytania i uzasadnij swoje odpowiedzi.

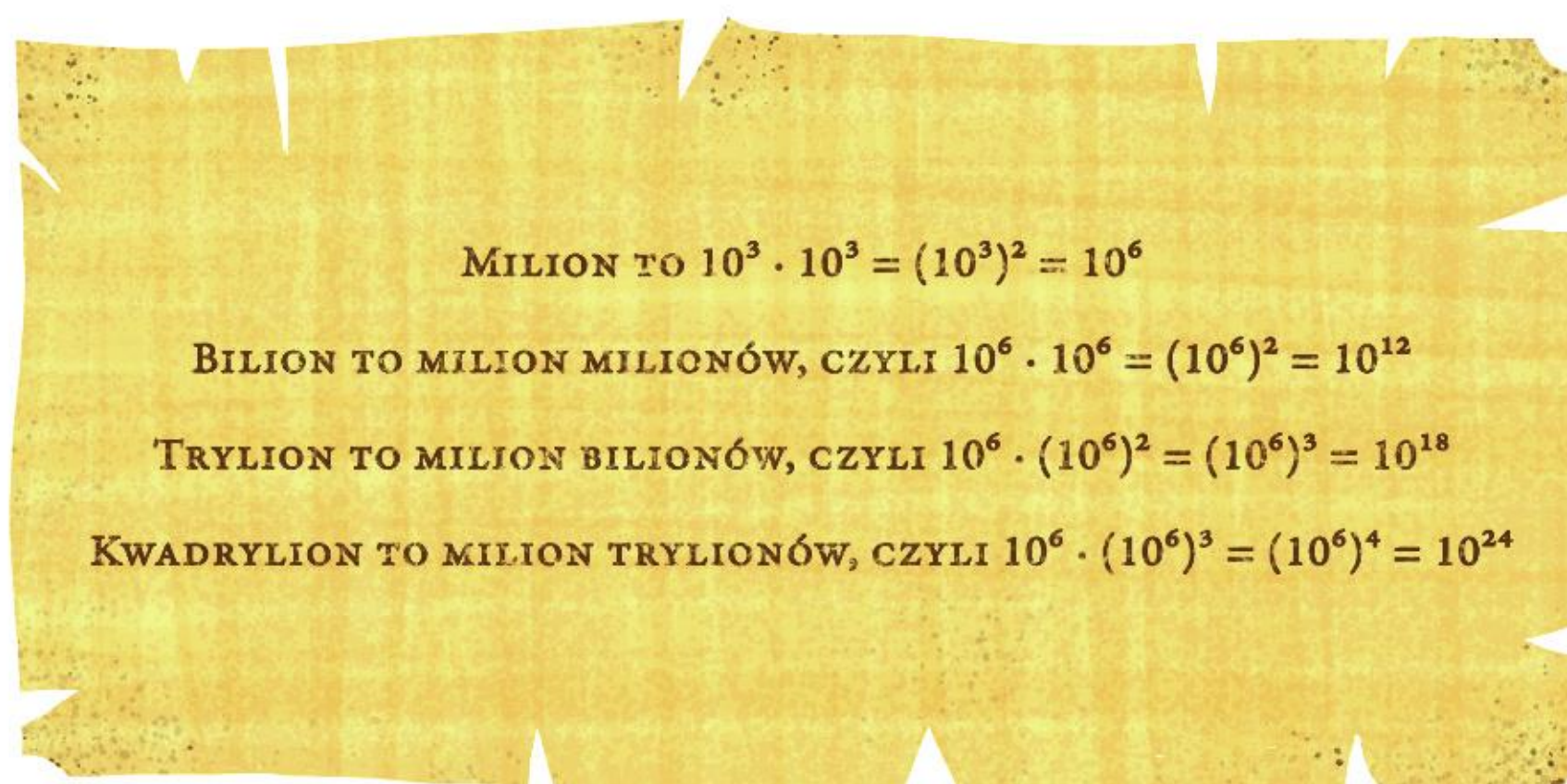
- | | |
|--|---|
| a) Czy kwadrylion to bilion bilionów? | b) Czy kwintylion to biliard biliardów? |
| c) Czy kwadryliard to tryliard tryliardów? | |

3.3 Potęga potęgi

Podejmij temat



Przyjrzyj się zapisom na papirusie.
Co zauważasz?



| Liczby $(10^2)^4$, $(5^3)^3$ to przykłady potęgi potęg.

Przykład 1

Zapiszmy w postaci jednej potęgi.

a) $(2^3)^4$ b) $((-0,5)^2)^3$ c) $((x^5)^2)^3$

a) $(2^3)^4 = \underbrace{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3}_{4 \text{ czynniki}} = 2^{\overbrace{3+3+3+3}^4} = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$

Wykładniki mnożymy, a podstawę pozostawiamy bez zmian.

b) $((-0,5)^2)^3 = (-0,5)^2 \cdot (-0,5)^2 \cdot (-0,5)^2 = (-0,5)^{2+2+2} = (-0,5)^{3 \cdot 2} = (-0,5)^6$

c) $((x^5)^2)^3 = (x^5 \cdot x^5)^3 = (x^{5+5})^3 = (x^{10})^3 = x^{10} \cdot x^{10} \cdot x^{10} = x^{10+10+10} = x^{3 \cdot 10} = x^{30}$

Gdy podnosimy potęgę do potęgi, wykładniki mnożymy,
a podstawę pozostawiamy bez zmian.
Potęga o podstawie a^n i wykładniku m jest równa potędze o podstawie a
i wykładniku równym iloczynowi $n \cdot m$.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$a \neq 0; n, m$ – liczby naturalne

1. Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $((-2)^2)^3$ b) $(0,1^2)^2$ c) $((10^3)^4)^5$ d) $(x^9)^3$

Przykład 2

Zapiszmy:

- a) liczbę 25^6 w postaci potęgi o podstawie 5,
- b) liczbę $(-8)^{11}$ w postaci potęgi o podstawie -2 ,
- c) liczbę trzy razy większą od liczby 27^4 w postaci potęgi o podstawie 3.

- | | |
|---|---|
| a) $25^6 = (5 \cdot 5)^6 = (5^2)^6 = 5^{12}$ | Liczba 25 to druga potęga liczby 5. Mnożymy wykładniki potęg. |
| b) $(-8)^{11} = ((-2)^3)^{11} = (-2)^{33}$ | Liczba -8 to trzecia potęga liczby -2 . |
| c) $3 \cdot 27^4 = 3 \cdot (3^3)^4 = 3 \cdot 3^{12} =$
$= 3^1 \cdot 3^{12} = 3^{13}$ | Liczba 27 to trzecia potęga liczby 3.
Liczbę 3 zapisujemy jako 3^1 . |

2. Zapisz:

- a) liczbę 64^7 w postaci potęgi o podstawie 2,
- b) liczbę 49^{10} w postaci potęgi o podstawie 7,
- c) liczbę dwa razy większą od liczby 16^3 w postaci potęgi o podstawie 2.

Przykład 3

Zapiszmy w najprostszej postaci.

- | | | |
|--|--|------------------------------------|
| a) $(x^4)^3 \cdot x$ | b) $(y^3)^5 : (y^7)^2$ | c) $((z^2)^5 \cdot (z^4)^2) : z^3$ |
| a) $(x^4)^3 \cdot x = x^{12} \cdot x =$
$= x^{12} \cdot x^1 = x^{13}$ | Stosujemy wzór na potęgę potęgi.
Podstawy potęg są takie same, więc dodajemy wykładniki. | |
| b) $(y^3)^5 : (y^7)^2 = y^{15} : y^{14} =$
$= y^{15-14} = y$ | Obliczamy $(y^3)^5$, mnożąc wykładniki potęg.
W ten sam sposób obliczamy $(y^7)^2$.
Podstawy potęg są takie same, więc odejmujemy wykładniki. | |
| c) $((z^2)^5 \cdot (z^4)^2) : z^3 =$
$= (z^{10} \cdot z^8) : z^3 =$
$= z^{18} : z^3 = z^{18-3} = z^{15}$ | Obliczamy $(z^2)^5$, mnożąc wykładniki potęg.
W ten sam sposób obliczamy $(z^4)^2$.
Podstawy potęg zapisanych w nawiasie są takie same, więc dodajemy wykładniki.
Podstawy potęg są takie same, więc odejmujemy wykładniki. | |

3. Zapisz w najprostszej postaci.

- | | |
|----------------------------------|----------------------------|
| a) $a^3 \cdot (a^2)^5$ | b) $(b^3)^7 : b^{15}$ |
| c) $((c^6)^3 : c) \cdot (c^4)^4$ | d) $(d^6 : d^2) \cdot d^4$ |

Przykład 4

Zapiszmy potęgę iloczynu w postaci iloczynu potęg.

a) $(c^3 \cdot d^2)^2$

b) $(x \cdot (-y)^3 \cdot z^4)^3$

a) $(c^3 \cdot d^2)^2 = (c^3 \cdot d^2) \cdot (c^3 \cdot d^2) =$

$$= c^3 \cdot d^2 \cdot c^3 \cdot d^2 = (c^3 \cdot c^3) \cdot (d^2 \cdot d^2) = c^6 \cdot d^4$$

b) $(x \cdot (-y)^3 \cdot z^4)^3 = (x \cdot (-y)^3 \cdot z^4) \cdot (x \cdot (-y)^3 \cdot z^4) \cdot (x \cdot (-y)^3 \cdot z^4) =$

$$= (x \cdot x \cdot x) \cdot ((-y)^3 \cdot (-y)^3 \cdot (-y)^3) \cdot (z^4 \cdot z^4 \cdot z^4) = x^3 \cdot (-y)^9 \cdot z^{12}$$

Korzystamy z definicji potęgi oraz przemienności i łączności mnożenia.

Korzystamy z własności potęg o tych samych podstawach – dodajemy wykładniki, a podstawa zostaje bez zmian.

Korzystamy z definicji potęgi oraz przemienności i łączności mnożenia.

Korzystamy z własności potęg o tych samych podstawach – dodajemy wykładniki, a podstawa zostaje bez zmian.

4. Zapisz każdą podaną potęgę iloczynu w postaci iloczynu potęg.

a) $((x \cdot y^2)^5$

b) $((-k)^5 \cdot m^4)^3$

c) $((-a) \cdot (-b) \cdot c^6)^4$

Zadania

● Zapisz w postaci jednej potęgi.

a) $(4^6)^3$

b) $((-10)^2)^4$

c) $(-x^3)^5$

d) $((-p)^9)^2$

e) $((m^2)^3)^9$

f) $(((-t)^3)^5)^2$

● Zapisz każdą z podanych liczb jako potęgę potęgi.

a) 2^{10}

b) 4^8

c) $(-3)^{12}$

d) $\left(\frac{1}{25}\right)^3$

e) $(-0,6)^{20}$

f) 64^2

● Zapisz:

a) liczbę $(-125)^3$ w postaci potęgi o podstawie -5 ,

b) liczbę osiem razy większą od liczby 512^2 w postaci potęgi o podstawie 2 ,

c) czwartą część liczby $\left(\frac{1}{16}\right)^3$ w postaci potęgi o podstawie $\frac{1}{2}$,

d) piątą część liczby $\left(\frac{1}{125}\right)^3$ w postaci potęgi o podstawie $\frac{1}{5}$.

- Wykonaj działania. Załóż, że podstawy potęg są różne od zera.
- a) $(a^3)^5 \cdot a^4$ b) $((x^4)^2 \cdot x^3)^2$
- c) $\frac{(z^2)^4 \cdot (z^3)^2}{(z^2)^5}$ d) $(b^2 \cdot b^5)^2 : b^8$
- e) $((x^5)^4 \cdot (x^3)^2)^2$ f) $(c^8 : c^3)^3 : (c^4)^3$
- g) $(y^{14} : y^{11})^3 : (y^2 \cdot y)^2$ h) $\frac{(m^3)^6 : m^8 \cdot m^3}{(m^2)^7 : (m^5)^2}$
- Spośród podanych potęg: $((-7)^7)^2$, $(0^3)^9$, $((-11)^5)^3$, $((-1,23)^6)^4$, $(((-1)^3)^3)^5$, $-((-5)^8)^2$, $-((-10)^3)^7$ wypisz:
- a) liczby dodatnie, b) liczby ujemne,
c) liczby niedodatnie, d) liczby nieujemne.
- Zapisz w postaci iloczynów potęg.
- a) $(2a)^2$ b) $(-3b)^3$ c) $(7c^2)^2$ d) $(-4d^5)^3$
- e) $(0,2m^3)^3$ f) $(-0,1p^2r^3)^3$ g) $(1\frac{2}{3}a^5b^3)^2$ h) $(-2\frac{1}{2}x^4y^3z^5)^3$
- Oblicz, a następnie wynik przedstaw w postaci potęgi liczby 10:
- a) ile centymetrów kwadratowych mieści się w kilometrze kwadratowym,
b) ile centymetrów sześciennych mieści się w metrze sześciennym.
- Ile razy czwarta potęga liczby $2\frac{1}{2}$ jest większa od czwartej potęgi liczby 0,5?
- W rozkładzie pewnej liczby na czynniki pierwsze są cztery dwójki i sześć trójek. Skorzystaj z własności potęg i uzasadnij, że ta liczba jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.
- Wojtek zauważył, że liczbę 64 można zapisać jako kwadrat liczby 8 i sześcian liczby 4. Podaj przykład liczby naturalnej, która jest jednocześnie kwadratem liczby naturalnej i sześcianem innej liczby naturalnej. Ile jednakowych czynników musi być w rozkładzie na czynniki pierwsze takiej liczby? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy prawdą jest, że $2^{3^4} = (2^3)^4$? Odpowiedź uzasadnij.
- Która z liczb: $(4^4)^4$ czy 4^{4^4} jest większa i ile razy? Odpowiedź uzasadnij.
- Która z liczb jest większa? Odpowiedź uzasadnij.
- a) $(\frac{1}{3})^{20}$ czy $(\frac{2}{3})^{10}$ b) $(\frac{1}{7})^{20}$ czy $(\frac{2}{7})^{40}$

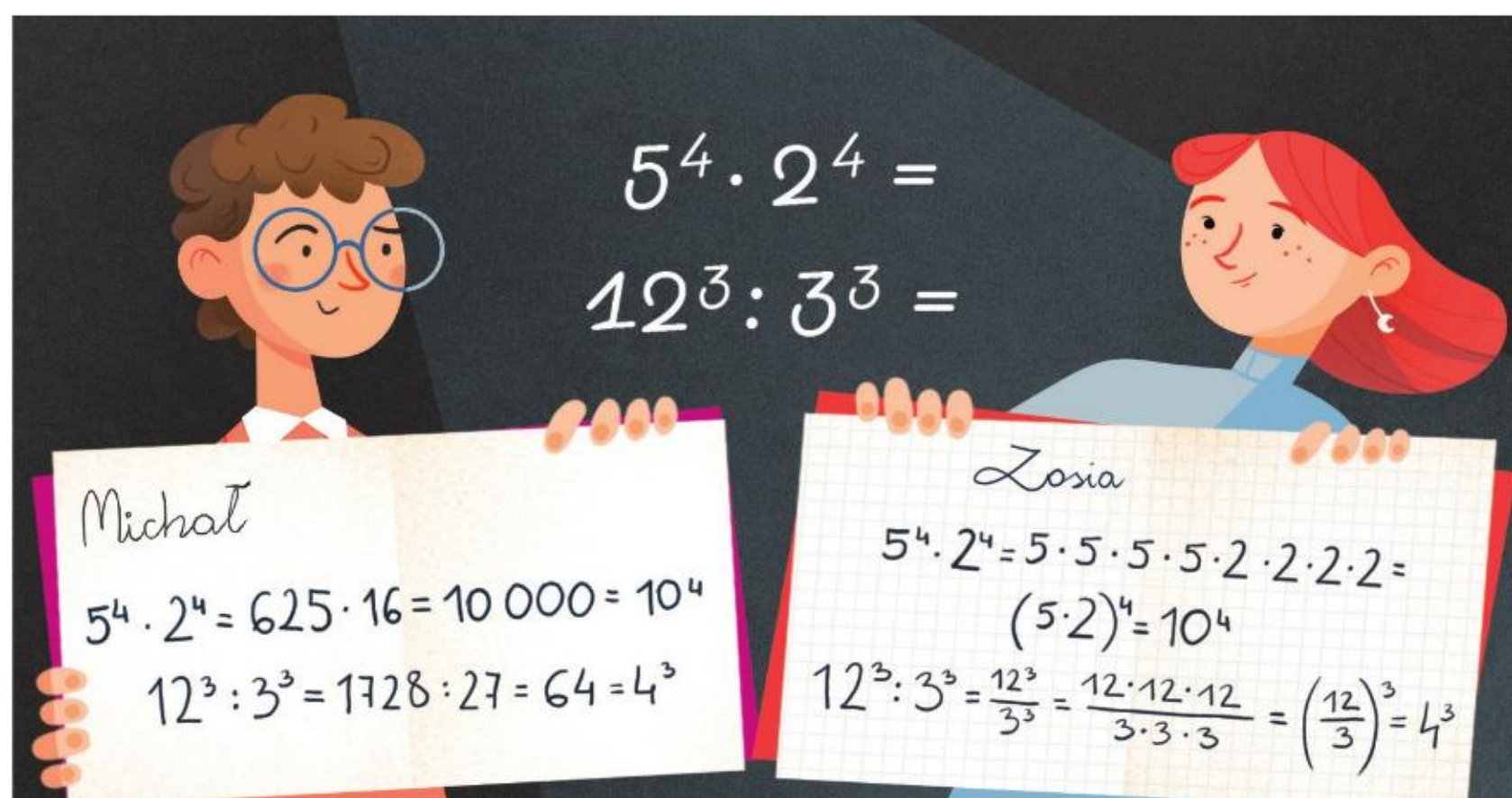


3.4 Mnożenie i dzielenie potęg o jednakowych wykładnikach

Podejmij temat



Czy obliczenia Michała i Zosi są poprawne?
Z którego sposobu skorzystasz, żeby zapisać iloczyn $3^7 \cdot 4^7$ w postaci jednej potęgi?
A z którego sposobu skorzystasz, żeby zapisać iloraz $18^4 : 9^4$ w postaci jednej potęgi?



Przykład 1

Zapiszmy iloczyn potęg o jednakowych wykładnikach w postaci jednej potęgi.

a) $9^5 \cdot 4^5$

b) $2^3 \cdot 0,4^3 \cdot (-5)^3$

c) $k^{10} \cdot m^{10} \cdot n^{10}$

a) $9^5 \cdot 4^5 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$
 $= 9 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4 =$
 $= (9 \cdot 4)^5 = 36^5$

Korzystamy z definicji potęgi oraz z przemienności i łączności mnożenia.

b) $2^3 \cdot 0,4^3 \cdot (-5)^3 = (2 \cdot 0,4 \cdot (-5))^3 = (-4)^3$

Mnożymy podstawy potęg, wykładnik pozostawiamy bez zmian.

c) $k^{10} \cdot m^{10} \cdot n^{10} = (kmn)^{10}$

Gdy obliczamy iloczyn potęg o tym samym wykładniku, podstawy mnożymy, a wykładnik pozostawiamy bez zmian.
Mówimy, że iloczyn potęg o jednakowych wykładnikach
jest równy potędze o tym samym wykładniku i podstawie równej iloczynowi podstaw.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

iloczyn potęg $\uparrow$ $\uparrow$ potęga iloczynu

$a \neq 0$ i $b \neq 0$; n – liczba naturalna

1. Przedstaw iloczyn potęg o jednakowych wykładnikach w postaci jednej potęgi.

a) $4^2 \cdot (-3)^2$

b) $1,5^7 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^7$

c) $(-2,1)^5 \cdot a^5 \cdot b^5$

d) $0,0002^4 \cdot 1000^4$

Przykład 2

Zapiszmy potęgę iloczynu w postaci iloczynu potęg o jednakowych wykładnikach.

a) $(3 \cdot 10)^3$

b) $((-7) \cdot 5,1 \cdot 1,3)^3$

c) $(5 \cdot x \cdot y)^7$

a) $(3 \cdot 10)^3 = (3 \cdot 10) \cdot (3 \cdot 10) \cdot (3 \cdot 10) =$
 $= (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10) = 3^3 \cdot 10^3$

Korzystamy z definicji potęgi oraz z przemienności i łączności mnożenia.

b) $((-7) \cdot 5,1 \cdot 1,3)^3 = ((-7) \cdot 5,1 \cdot 1,3) \cdot ((-7) \cdot 5,1 \cdot 1,3) \cdot ((-7) \cdot 5,1 \cdot 1,3) =$
 $= ((-7) \cdot (-7) \cdot (-7)) \cdot (5,1 \cdot 5,1 \cdot 5,1) \cdot (1,3 \cdot 1,3 \cdot 1,3) = (-7)^3 \cdot (5,1)^3 \cdot (1,3)^3$

c) $(5 \cdot x \cdot y)^7 = 5^7 \cdot x^7 \cdot y^7$

2. Zapisz każdą podaną potęgę iloczynu w postaci iloczynu potęg o jednakowych wykładnikach.

a) $(5 \cdot 17)^8$

b) $(5,3 \cdot 19 \cdot (-\frac{3}{4}))^9$

c) $((-0,2) \cdot 3,7 \cdot c)^3$

Przyjrzyjmy się teraz, jak dzielimy potęgi o jednakowych wykładnikach.

Przykład 3

Zapiszmy iloraz potęg w postaci jednej potęgi.

a) $8^5 : 3^5$

b) $0,5^4 : (\frac{1}{10})^4$

c) $(-d)^5 : a^5$

a) $8^5 : 3^5 = \frac{8^5}{3^5} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} =$
 $= \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} = (\frac{8}{3})^5 = (2\frac{2}{3})^5$

Korzystamy z definicji potęgi oraz z własności działań na ułamkach.

b) $0,5^4 : (\frac{1}{10})^4 = 0,5^4 : 0,1^4 = (0,5 : 0,1)^4 = 5^4$

c) $(-d)^5 : a^5 = \frac{(-d)^5}{a^5} = \frac{(-d) \cdot (-d) \cdot (-d) \cdot (-d) \cdot (-d)}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = (-\frac{d}{a}) \cdot (-\frac{d}{a}) \cdot (-\frac{d}{a}) \cdot (-\frac{d}{a}) \cdot (-\frac{d}{a}) = (-\frac{d}{a})^5, a \neq 0$

Gdy obliczamy iloraz potęg o tym samym wykładniku, podstawy dzielimy, a wykładnik pozostawiamy bez zmian.

Mówimy, że iloraz potęg o jednakowych wykładnikach jest równy potędze o tym samym wykładniku i podstawie równej ilorazowi podstaw.

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a : b)^n$$

iloraz potęg $\uparrow$
potęga ilorazu $\uparrow$

$a \neq 0$ i $b \neq 0$; n – liczba naturalna

3. Przedstaw każdy podany iloraz potęg o jednakowych wykładnikach w postaci jednej potęgi.

a) $32^{11} : 8^{11}$

b) $1,44^4 : (3\frac{3}{5})^4$

c) $b^8 : k^8$

Przykład 4

Zapiszmy potęgę w postaci ilorazu potęg o jednakowych wykładnikach.

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$

b) $3,6^7$

c) $(a : b)^9$

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{2^3}{7^3}$

b) $3,6^7 = \left(\frac{36}{10}\right)^7 = \left(\frac{18}{5}\right)^7 = \frac{18^7}{5^7}$

c) $(a : b)^9 = a^9 : b^9, b \neq 0$

4. Zapisz każdą podaną potęgę w postaci ilorazu potęg o jednakowych wykładnikach.

a) $\left(\frac{-3}{4}\right)^6$

b) $0,7^{10}$

c) $(k : (-l))^9$

Zadania

● Zapisz każdy podany iloczyn w postaci jednej potęgi, a następnie oblicz tę potęgę.

a) $(-5)^2 \cdot (-3)^2$

b) $(-10)^3 \cdot (-1)^3$

c) $\left(-\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4$

d) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^6$

e) $3,5^3 \cdot (-2)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot (-6)^4 \cdot 0,75^4$

● Zapisz każdy podany iloraz w postaci jednej potęgi, a następnie oblicz tę potęgę.

a) $6^4 : 3^4$

b) $9^5 : (-18)^5$

c) $0,8^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^7$

d) $\left(-4\frac{1}{6}\right)^3 : \left(\frac{5}{6}\right)^3$

e) $\frac{350^2}{70^2}$

f) $\frac{2,4^4}{(-1,6)^4}$

● Przedstaw każdy podany iloraz potęg w postaci potęgi ilorazu, zakładając, że mianowniki są różne od zera.

a) $\frac{a^7}{b^7}$

b) $\frac{4a^2}{25}$

c) $\frac{64c^3}{125}$

d) $\frac{16x^4}{y^4}$

● Wykonaj potęgowanie. Przyjmij, że mianowniki są różne od zera.

a) $\left(\frac{a}{7}\right)^2$

b) $\left(\frac{x^7}{3}\right)^2$

c) $\left(\frac{-5}{p^5}\right)^3$

d) $\left(\frac{3a^2}{5b}\right)^2$

● W miejsce liter wstaw odpowiednie liczby.

a) $5^4 \cdot 8^4 = a^4$

b) $7^b \cdot 0,3^5 = 2,1^5$

c) $8^{10} \cdot k^{10} = 48^m$

d) $42^7 : 7^d = 6^7$

e) $1,92^9 : e^9 = 0,8^9$

f) $102^y : 3^{13} = z^{13}$

● Ile razy zmniejszy się objętość sześcianu o krawędzi długości pół metra, jeśli tę długość zmniejszymy dwukrotnie?

★ Ile zer jest w zapisie dziesiętnym liczby będącej wynikiem iloczynu liczb 5^{15} i 2^{15} ?

★ Podaj cyfrę jedności liczby będącej wynikiem:

a) iloczynu liczb 10^{20} i $0,6^{20}$,

b) ilorazu liczb 4^{18} i $0,8^{18}$.

3.5 Działania na potęgach

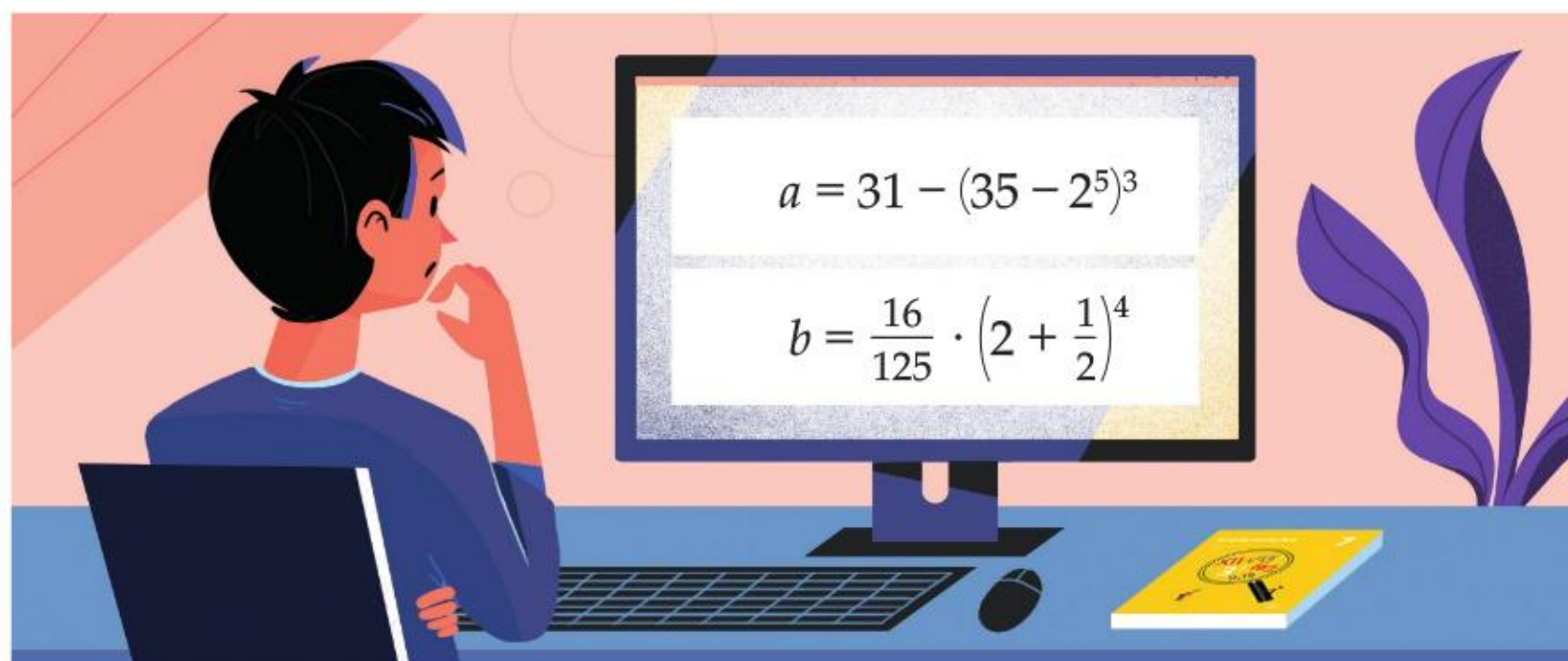
Podejmij temat



Gdy obliczamy liczbę a , które z działań wykonamy jako pierwsze, a które jako ostatnie?

Gdy obliczamy liczbę b , które z działań wykonamy jako pierwsze, a które jako ostatnie?

Czy potrafisz obliczyć sumę kwadratów liczb a i b oraz kwadrat sumy liczb a i b ?



Kolejność wykonywania działań

1. Najpierw wykonujemy działania w tych nawiasach, w których już nie ma innych nawiasów.
2. Następnie wykonujemy potęgowanie.
3. Potem wykonujemy mnożenie i dzielenie w kolejności występowania, czyli od strony lewej do prawej.
4. Na końcu wykonujemy dodawanie i odejmowanie w kolejności występowania, czyli od strony lewej do prawej.

Przykład 1

Wykonajmy działania.

a) $(-5)^{10} \cdot 25^3 : 5^{13}$

b) $\frac{256^5}{64^7 : 4^3}$

c) $5 \cdot 6^7 : 3^6$

$$\begin{aligned} \text{a) } (-5)^{10} \cdot 25^3 : 5^{13} &= 5^{10} \cdot (5^2)^3 : 5^{13} = \\ &= 5^{10} \cdot 5^6 : 5^{13} = 5^{10+6} : 5^{13} = \\ &= 5^{16-13} = 5^3 = 125 \end{aligned}$$

Zauważamy, że $(-5)^{10} = 5^{10}$. Liczbę 25 zapisujemy jako 5^2 .

Korzystamy ze wzoru na potęgę potęgi, następnie ze wzoru na iloczyn potęg o tych samych podstawach, a potem ze wzoru na iloraz potęg o tych samych podstawach.

b) $\frac{256^5}{64^7 : 4^3} = \frac{(4^4)^5}{(4^3)^7 : 4^3} =$

$$= \frac{4^{20}}{4^{21} : 4^3} = \frac{4^{20}}{4^{21-3}} =$$

$$= \frac{4^{20}}{4^{18}} = 4^{20-18} = 4^2 = 16$$

Liczby 256 i 64 zapisujemy w postaci potęg o podstawie 4.
W mianowniku obliczamy potęgę potęgi.

Korzystamy ze wzoru na iloraz potęg o tych samych podstawach – odejmujemy wykładniki potęg.

$$\begin{aligned} \text{c) } 5 \cdot 6^7 : 3^6 &= 5 \cdot (2 \cdot 3)^7 : 3^6 = \\ &= 5 \cdot 2^7 \cdot 3^7 : 3^6 = 5 \cdot 2^7 \cdot 3^{7-6} = \\ &= 5 \cdot 128 \cdot 3 = 1920 \end{aligned}$$

Zapisujemy liczbę 6 jako iloczyn liczb 2 i 3.

Korzystamy ze wzoru na potęgę iloczynu, a następnie ze wzoru na iloraz potęg o tych samych podstawach – odejmujemy wykładniki potęg.

1. Wykonaj działania.

a) $(-343)^4 \cdot (-7)^4 : 49^5$ b) $\frac{27^6 \cdot 3^{10}}{81^4 \cdot 9^5}$ c) $\frac{14^{12}}{4^5 \cdot 7^{11}}$

Przykład 2

Obliczmy wartości wyrażeń.

a) $18 - (-4)^2 - (-2)^3$ b) $\frac{(5-8)^2}{(-5)^2 - 6^2}$ c) $((-2)^2 + (2^3 - 3^2)^3)^2$

a) $18 - (-4)^2 - (-2)^3 =$
 $= 18 - 16 - (-8) =$
 $= 18 - 16 + 8 = 10$

b) $\frac{(5-8)^2}{(-5)^2 - 6^2} =$
 $= \frac{(-3)^2}{25 - 36} = \frac{9}{-11} = -\frac{9}{11}$

c) $((-2)^2 + (2^3 - 3^2)^3)^2 =$
 $= ((-2)^2 + (8 - 9)^3)^2 =$
 $= ((-2)^2 + (-1)^3)^2 =$
 $= (4 + (-1))^2 = 3^2 = 9$

Obliczamy potęgi.

Odejmowanie liczby ujemnej -8 zastępujemy dodawaniem liczby przeciwnej do niej.

W liczniku wyrażenia wykonujemy działanie w nawiasie, a w mianowniku – potęgowanie.

W liczniku wyrażenia obliczamy kwadrat liczby -3 , a w mianowniku różnicę liczb 25 i 36.

Zgodnie z zasadą kolejności wykonywania działań najpierw obliczamy sześćcian liczby 2 i kwadrat liczby 3, a następnie ich różnicę.

Obliczamy kwadrat liczby -2 i sześćcian liczby -1 , a następnie ich sumę.

2. Oblicz, pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $((-0,8)^2 \cdot (\frac{1}{2})^6) : ((\frac{1}{3})^4 \cdot 3^2)$ b) $(\frac{4}{5})^2 \cdot (-5)^3 - (-2)^4 \cdot (1\frac{1}{2})^3 + (-4)^1$

Przykład 3

Porównajmy podane liczby.

a) $(-7)^4$ i 2^{11} b) $(\frac{2}{3})^3$ i $0,75^4$ c) $(-2)^5$ i $(-3,2)^3$

a) $(-7)^4 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = 2401$
 $2048 < 2401$, zatem $2^{11} < (-7)^4$

b) $(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
 $\frac{8}{27} \approx 0,296$, $\frac{81}{256} \approx 0,316$
 $\frac{8}{27} < \frac{81}{256}$, zatem $(\frac{2}{3})^3 < 0,75^4$

$2^{11} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2048$

$0,75^4 = (\frac{3}{4})^4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$

Znajdujemy rozwinięcia dziesiętne liczb $\frac{8}{27}$ i $\frac{81}{256}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } (-2)^5 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32 \\ (-3,2)^3 &= (-3,2) \cdot (-3,2) \cdot (-3,2) = -32,768 \\ -32,768 &< -32, \text{ zatem } (-3,2)^3 < (-2)^5 \end{aligned}$$

3. Porównaj podane liczby.

- a) 3^5 i $(-15)^2$
- b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ i $(0,4)^3$
- c) $(-2,5)^3$ i $\left(-\frac{7}{4}\right)^5$
- d) $(-8)^4$ i 16^3

Przykład 4

Przedstawmy sumę w postaci potęgi.

a) $2^{19} + 2^{19}$

b) $9^5 + 9^5 + 9^5$

c) $7^{14} + 7^{14} + 7^{14} + 7^{14} + 7^{14} + 7^{14} + 7^{14}$

a) $2^{19} + 2^{19} = 2 \cdot 2^{19} =$

$$= 2^1 \cdot 2^{19} = 2^{1+19} = 2^{20}$$

b) $9^5 + 9^5 + 9^5 = 3 \cdot 9^5 = 3 \cdot (3^2)^5 =$

$$= 3^1 \cdot 3^{10} = 3^{1+10} = 3^{11}$$

c) $7^{14} + 7^{14} + 7^{14} + 7^{14} + 7^{14} + 7^{14} + 7^{14} =$

$$= 7 \cdot 7^{14} = 7^1 \cdot 7^{14} = 7^{1+14} = 7^{15}$$

Sumę dwóch jednakowych składników zapisujemy jako iloczyn liczb 2 i 2^{19} . Liczbę 2 zapisujemy jako 2^1 .

Korzystamy ze wzoru na iloczyn potęg o tych samych podstawach – dodajemy wykładniki potęg.

Sumę trzech jednakowych składników zapisujemy jako iloczyn liczb 3 i 9^5 .

Liczbę 9 zapisujemy jako 3^2 .

Korzystamy ze wzoru na potęgę potęgi, a potem ze wzoru na iloczyn potęg o tych samych podstawach.

Sumę siedmiu jednakowych składników zapisujemy jako iloczyn liczb 7 i 7^{14} .

Liczbę 7 zapisujemy jako 7^1 .

Korzystamy ze wzoru na iloczyn potęg o tych samych podstawach – dodajemy wykładniki potęg.

4. Wykonaj działania.

a) $3^{17} + 3^{17} + 3^{17}$

b) $4^{25} + 4^{25} + 4^{25} + 4^{25}$

c) $25^9 + 25^9 + 25^9 + 25^9 + 25^9$

d) $(-6)^4 + (-6)^4 + (-6)^4 + (-6)^4 + (-6)^4 + (-6)^4$



Dla każdej naturalnej parzystej liczby n
 $(-a)^n = a^n$

Zadania

Oblicz, stosując własności potęg. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $14^5 : 28^5 \cdot (-2)^5$

b) $15^3 : 5^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$

c) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4 \cdot 2,5^4 : 0,5^4$

d) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1,5 : 0,75^6$

e) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{14} : \left(3\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)^{10}$

f) $3^2 \cdot 3^3 : 3^4$

g) $4^4 : 2^3 : 2^2$

h) $\left(3\frac{1}{3}\right)^2 : \left(1\frac{3}{9}\right)^2$

i) $\frac{1}{\left(1\frac{2}{3}\right)^4} : \left(\frac{3}{5}\right)^6$

Oblicz. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $0,5^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$

b) $(-2,5)^2 + 1,5^2 + (-0,5)^3$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

d) $(3-4)^3 - (2-3)^2$

e) $3^4 - (4^2 - 5^2)$

f) $\frac{1}{3} \cdot (2-5)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (-2)^2$

g) $(-0,5) \cdot (-1)^3 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-2)$

h) $-2^3 - (2 \cdot (1-3)^3 + (-4)^2)^5$

i) $(9 : (-2)^2 - (-0,5)^2)^3$

Oblicz. Skorzystaj z własności działań na potęgach.

a) $\frac{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2 + 2^9 : 2^4}{(2^3)^2}$

b) $\frac{128^9 : 32^{11}}{4^2}$

c) $(0,2^7)^2 : (0,2^3 : 0,2)^5 \cdot 0,2^2$

d) $\frac{81^4 : 27^2}{27^5 : 3^7}$

e) $\frac{(t^3)^4 \cdot (t^2)^3}{(t^5)^2 \cdot t^3}$

f) $\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^3}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^2}$

Oblicz, o ile kwadrat wartości wyrażenia $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (-3)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^2\right) : \left(-1\frac{2}{9}\right)$ jest większy od sześciannu wartości tego wyrażenia.

Oblicz.

a) 12,5% wartości wyrażenia: $\frac{4 \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^7 \cdot 0,2^7 - \left(\frac{1}{3}\right)^9 : \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{7}{12}\right)^6 : \left(1\frac{3}{4}\right)^6}$

b) 80% wartości wyrażenia: $\frac{(-2)^2 + 2^6 : (2 \cdot 2^5) - 2^6 : 2^4}{2^5 - 2^3 \cdot 3 - 6}$

Oblicz.

a) $\frac{1}{32}$ liczby 2^3

b) 125% liczby $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{3^2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$

c) liczbę, której 27,5% stanowi $(2,5 + 5^2) \cdot \frac{1}{10^2}$

Oblicz:

a) sumę kwadratów kolejnych pięciu liczb całkowitych, z których najmniejszą jest liczba 2,

b) sumę sześciannów kolejnych pięciu liczb całkowitych, z których najmniejszą jest liczba 2,

c) kwadrat sumy kolejnych siedmiu liczb całkowitych, z których najmniejszą jest liczba 2,

d) sześciann sumy kolejnych siedmiu liczb całkowitych, z których najmniejszą jest liczba 2.

- Wykonaj działania zgodnie z podanym wzorem.

$$(30^3 - 15^3) : 15^3 = 30^3 : 15^3 - 15^3 : 15^3 = 2^3 - 1 = 7$$

- a) $(32^5 - 16^5) : 16^5$ b) $(0,75^3 - 1,5^3) : 0,75^3$
c) $\left(\left(-1\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^4\right) : \left(\frac{3}{4}\right)^4$ d) $(7^5 + 3,5^5) : 3,5^5$

Oblicz.

- a) $\frac{5^{125} \cdot 5^{15} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{34}}{(5^{25})^3 \cdot (5^3)^5 \cdot 5^{12}}$ b) $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{12} : \left(\frac{1}{4}\right)^8}{4^4 : 4^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}$

- Przedstaw każdą podaną sumę w postaci potęgi.

- a) $2^5 + 2^5$ b) $3^4 + 3^4 + 3^4$
c) $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3$ d) $6^7 + 6^7 + 6^7 + 6^7 + 6^7 + 6^7$
e) $5^8 + 5^8 + 5^8 + 5^8 + 5^8$ f) $2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6$

- Zapisz wyrażenia w postaci potęgi według podanego wzoru:

$$3 \cdot 4^5 + 4^5 = 3 \cdot 4^5 + 1 \cdot 4^5 = 4^5 \cdot (3 + 1) = 4^5 \cdot 4 = 4^6$$

- a) $3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^3$ b) $8 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3^2$
c) $2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^4 - 2^4$ d) $6 \cdot 7^9 + 7^9$
e) $8 \cdot 3^7 + 3^7$ f) $6^3 + 2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^3$

Mateusz miał uzasadnić, że liczba $2^{25} + 2^{26} + 2^{27}$ jest podzielna przez 7. Zobacz, jak to zrobić.

$2^{25} + 2^{26} + 2^{27} =$
 $= 2^{25} \cdot (1 + 2 + 2^2) = 2^{25} \cdot 7$
Liczba $2^{25} + 2^{26} + 2^{27}$
jest równa iloczynowi liczb
 2^{25} i 7. To oznacza, że jest
ona podzielna przez 7.



Uzasadnij, że:

- a) liczba $5^{10} + 5^{11} + 5^{12}$ jest podzielna przez 31,
b) liczba $3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}$ jest podzielna przez 120.

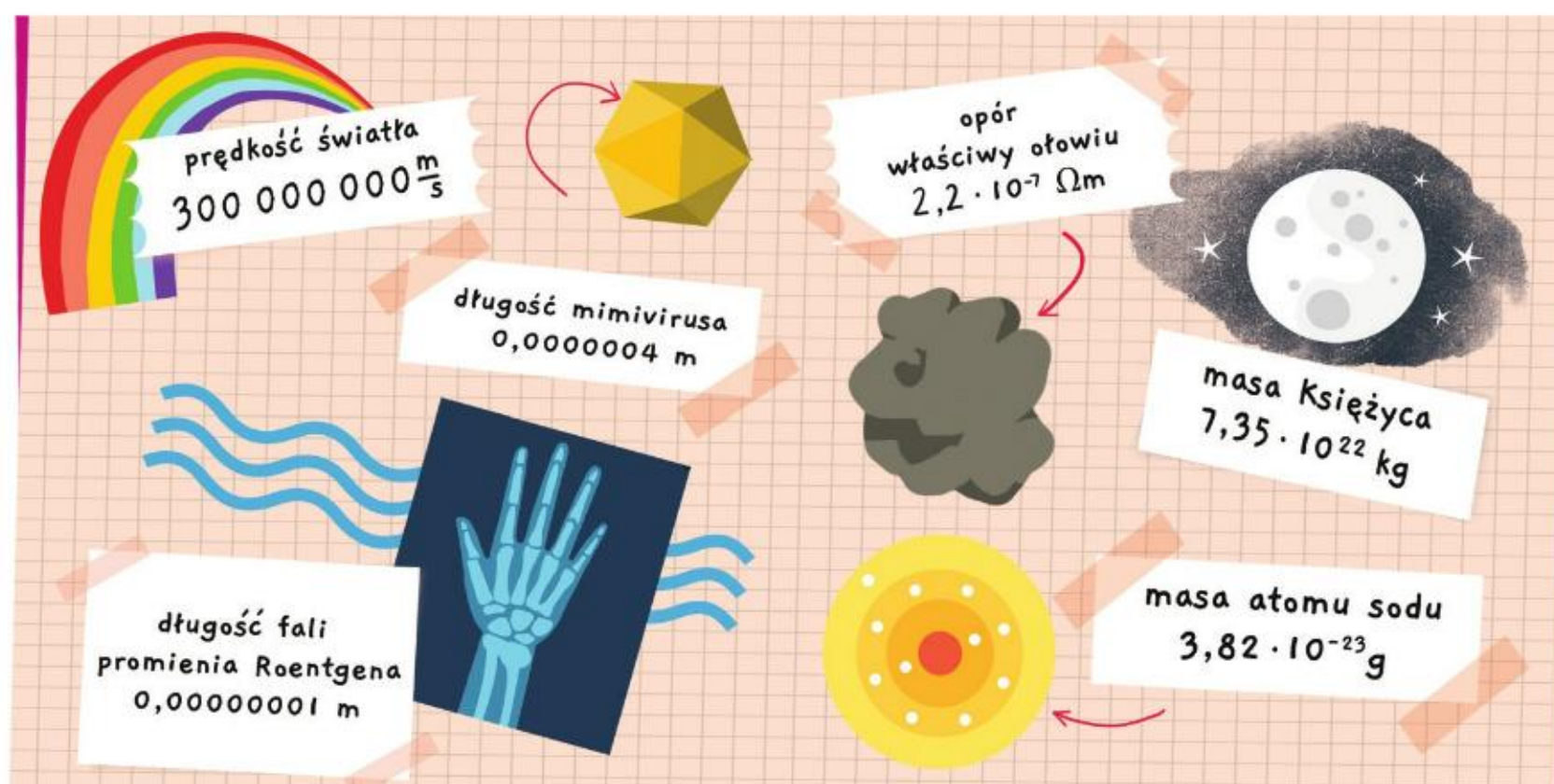
Zapisz liczbę, której sześćian jest równy sumie sześćcianów trzech kolejnych liczb jednocyfrowych.

3.6 Notacja wykładnicza

Podejmij temat



Czy potrafisz przeczytać wszystkie liczby znajdujące się na ilustracji?
Czy wiesz, dlaczego wykładnik niektórych liczb jest liczbą całkowitą ujemną?
Podaj kilka przykładów sytuacji z życia codziennego, w których można się spotkać z bardzo dużymi lub bardzo małymi liczbami.



Bardzo małe lub bardzo duże liczby dla wygody zapisu i łatwiejszego ich czytania przedstawiamy w postaci tzw. **notacji wykładniczej (notacji naukowej)**.

Liczba zapisana w notacji wykładniczej jest iloczynem liczby a , spełniającej warunek $1 \leq a < 10$, oraz potęgi liczby 10 o wykładniku n będącym liczbą całkowitą.

$$a \cdot 10^n$$

$1 \leq a < 10$ — potęga liczby 10

Przykład 1

Zapiszmy masę Ziemi podaną w kilogramach (w przybliżeniu) w notacji wykładniczej.

Sposób I

$$5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 5\,970 \cdot 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 =$$

21 cyfr

$$= 5\,970 \cdot 10^{21} = 5,97 \cdot 1000 \cdot 10^{21} = 5,97 \cdot 10^3 \cdot 10^{21} = 5,97 \cdot 10^{3+21} = 5,97 \cdot 10^{24}$$

3 cyfry liczba większa od 1 i mniejsza od 10 potęga liczby 10

Sposób II

$$5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 5,97 \cdot 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 5,97 \cdot 10^{24}$$

24 cyfry liczba większa od 1 i mniejsza od 10 potęga liczby 10

1. Zapisz podane liczby w notacji wykładniczej.

a) długość półosi wielkiej Ziemi (w przybliżeniu)
149 600 000 000 m

b) masę planety Wenus
4 867 000 000 000 000 000 000 000 kg

Przykład 2

Zapiszmy długość mimiwirusa (z *Podnij temat*) w notacji wykładniczej.

$$0,\underbrace{0000004}_{7 \text{ cyfr}} = 4 \cdot 0,\underbrace{0000001}_{7 \text{ cyfr}} = 4 \cdot \frac{1}{10\,000\,000} = 4 \cdot \frac{1}{10^7}$$

W zapisie $4 \cdot \frac{1}{10^7}$ potęga liczby 10 znajduje się w mianowniku ułamka. Możemy jednak zapisać ten iloczyn w inny sposób: $4 \cdot \frac{1}{10^7} = 4 \cdot 10^{-7}$

Zauważmy, że wykładnikiem potęgi może być również liczba całkowita ujemna.

$$0,\underbrace{0000004}_{7 \text{ cyfr}} = 4 \cdot 10^{-7}$$

Przyjmujemy, że:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ oraz } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$a \neq 0; n - \text{liczba naturalna}$



$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$$

$$0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

Ciekawe!

Liczba olbrzym 9^9 to hiperkolos.
Odwrotność tej liczby, czyli $\frac{1}{9^9} = (9^9)^{-1}$
to superliliput liczbowy.

2. Zapisz podane liczby w notacji wykładniczej.

a) średnica wirusa zapalenia wątroby typu A
0,000000027 m

b) masa atomu sodu
0,000000000000000000000000382 g

Przykład 3

Obliczmy, ile razy masa protonu jest większa od masy elektronu.

$$\frac{1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = \frac{1,672}{9,108} \cdot \frac{10^{-27}}{10^{-31}} \approx 0,18 \cdot \frac{10^{-27}}{\frac{1}{10^{31}}} = 0,18 \cdot \frac{10^{31}}{10^{-27}} = 0,18 \cdot 10^{31 - (-27)} = 0,18 \cdot 10\,000 = 1800$$

Masa protonu jest około 1800 razy większa od masy elektronu.

3. Masa tlenu zawartego w atmosferze ziemskiej jest równa $1,2 \cdot 10^{18}$ kg. Stanowi ona 23% całej masy atmosfery. Masa Ziemi wynosi w przybliżeniu $6 \cdot 10^{24}$ kg. Oblicz, ile razy masa Ziemi jest większa od masy atmosfery ziemskiej.

Ciekawe!

Prędkość światła jest jedną z wielkości fizycznych, które od wieków budziły zainteresowanie ludzkości. Pierwszego jej pomiaru dokonał Galileusz za pomocą eksperymentu z użyciem latarni. Doświadczenie przeprowadził na wzgórzach nieopodal miasta, a pomiar opierał się na zasłanianiu i odsłanianiu światła latarni. Galileuszowi nie udało się dokonać dokładnego pomiaru prędkości, ponieważ eksperyment obarczony był dużym błędem. Była to jednak pierwsza w historii próba zmierzenia prędkości światła.

Zadania

- Przedstaw liczbę w postaci potęgi liczby 10.
 - a) 100 b) 10 000 c) 1 000 000
 - d) 0,001 e) 0,00001 f) 0,000000001
- Zapisz liczby bez użycia notacji wykładniczej.
 - a) $3,12 \cdot 10^6$ b) $1,025 \cdot 10^{12}$ c) $2,38 \cdot 10^{-3}$ d) $8,888 \cdot 10^{-8}$
- Oblicz i wyniki podaj w notacji wykładniczej.
 - a) $0,35 \cdot 2^{14} \cdot 0,8 \cdot 5^{12}$ b) $129 \cdot 2^{13} \cdot 0,025 \cdot 5^{12}$
 - c) $3,6 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^7$ d) $4,8 \cdot 10^{12} : (1,6 \cdot 10^3)$
 - e) $5,6 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{7} \cdot 10^{-6}$ f) $5,4 \cdot 10^{-2} \cdot 0,45 \cdot 10^{-4}$
 - g) $7,5 \cdot 10^{-7} : (2,5 \cdot 10^{-10})$ h) $6,3 \cdot 10^{-13} : (2,1 \cdot 10^{-17})$
- Przepisz do zeszytu podane informacje, zapisując liczby w notacji wykładniczej.
 - a) Linia brzegowa Europy (bez linii brzegowej wysp) wynosi ok. 38 000 000 m.
 - b) Powierzchnia Europy wynosi około 10 500 000 km².
 - c) W 2018 r. w Europie żyło około 720 000 000 osób.
- Prędkość światła w powietrzu wynosi około $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, a prędkość dźwięku w powietrzu to około $330 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ile razy prędkość światła jest większa od prędkości dźwięku w powietrzu?
- Prędkość światła jest równa $3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a odległość Ziemi od Słońca jest równa $1,5 \cdot 10^8$ km. Oblicz, w jakim czasie światło dociera ze Słońca na Ziemię.
- W czasopiśmie dla ogrodników podano, że na jednym metrze kwadratowym gleby żyje około $3 \cdot 10^8$ pierwotniaków oraz $2,9 \cdot 10^{12}$ bakterii. Ile razy więcej bakterii niż pierwotniaków żyje na metrze kwadratowym gleby? Do obliczeń użyj kalkulatora.
- Jeden tom encyklopedii ma 944 strony. Jego grubość jest równa 0,45 dm (twardej oprawy nie wliczamy do grubości). Oblicz, korzystając z kalkulatora, grubość kartki papieru w milimetrach. Wynik przedstaw w notacji wykładniczej.
- Mniszek pospolity w ciągu roku wysiewa około 3000 nasion. Ile nasion wysieje milion takich mniszków w ciągu 10 lat? Wynik podaj w notacji wykładniczej.



1 mikrometr = 10^{-6} metra

1 nanometr = 10^{-9} metra

Najmniejsza bakteria z rodzaju *Mycoplasma* ma ok. 0,3 mikrometra średnicy, a jeden z największych wirusów – mimiwirus – ma średnicę 390 nanometrów.

- Ile milimetrów średnicy ma *Mycoplasma*, a ile mimiwirus? Zapisz liczby w notacji wykładniczej.
- Który z organizmów – bakteria czy wirus – ma większą średnicę i ile razy?

Wyraź w kilometrach podane wielkości. Zapisz liczby w notacji wykładniczej. Oblicz, ile razy odległość Ziemi od Księżyca jest większa od średnicy Ziemi. Wynik podaj z dokładnością do jedności.

Średnica Ziemi jest równa 12 756 000 m,
a średnia odległość Ziemi od Księżyca
jest równa 384 400 000 m.

Skorzystaj z informacji podanych w tabeli i odpowiedz na pytania. Liczby zapisz w notacji wykładniczej.

Nazwa jednostki masy	Oznaczenie	Przelicznik
pikogram	pg	1 pg = 10^{-15} kg
nanogram	ng	1 ng = 10^{-12} kg
mikrogram	μg	1 μg = 10^{-9} kg
gigagram	Gg	1 Gg = 10^6 kg
teragram	Tg	1 Tg = 10^9 kg
petagram	Pg	1 Pg = 10^{12} kg
eksagram	Eg	1 Eg = 10^{15} kg
zettagram	Zg	1 Zg = 10^{18} kg
jottagram	Yg	1 Yg = 10^{21} kg

- 12 petagramów – ile to dekagramów?
- 16,5 teragramów – ile to gramów?
- 250 jottagramów – ile to teragramów?
- 0,06 zettagramów – ile to ton?
- 36 kilogramów – ile to jottagramów?
- 24 nanogramy – ile to gigagramów?
- 78 ton – ile to eksagramów?
- 805 pikogramów – ile to mikrogramów?

Podsumowanie działu 3

Ważne pojęcia

potęga	podstawa potęgi	wykładnik potęgi	notacja wykładnicza
--------	-----------------	------------------	---------------------

Potęga o wykładniku naturalnym

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}} = a^n$$

↓
wykładnik potęgi
↑
podstawa potęgi

$2^5 = 32$

$(-6)^3 = -216$

$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{8}{125}$

$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$

Własności potęgowania (działania na potęgach)

Mnożenie i dzielenie potęg o jednakowych podstawach

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a \neq 0$; n, m – liczby naturalne

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a \neq 0$; n, m – liczby naturalne; $n > m$

$4^2 \cdot 4^5 = 4^{2+5} = 4^7$

$\left(\frac{1}{7}\right)^6 : \left(\frac{1}{7}\right)^4 = \left(\frac{1}{7}\right)^{6-4} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$

Potęga potęgi

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a \neq 0$; n, m – liczby naturalne

$((-3)^2)^4 = (-3)^{2 \cdot 4} = (-3)^8 = 3^8$

Mnożenie i dzielenie potęg o jednakowych wykładnikach

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a \neq 0$ i $b \neq 0$; n – liczba naturalna

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

$a \neq 0$ i $b \neq 0$; n – liczba naturalna

$(-3)^4 \cdot 5^4 = (-3 \cdot 5)^4 = (-15)^4$

$\left(2\frac{1}{4}\right)^6 : (2,5)^6 = \left(\frac{9}{4} : \frac{5}{2}\right)^6 = \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{5}\right)^6 = \left(\frac{9}{10}\right)^6$

Notacja wykładnicza

$$\underbrace{a \cdot 10^n}_{\substack{1 \leq a < 10 \\ \text{potęga liczby } 10; n \text{ – liczba całkowita}}}$$

$17\,500\,000\,000 = 1,75 \cdot 10^{10}$

$0,000000028 = 2,8 \cdot 10^{-8}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a \neq 0$; n – liczba naturalna

$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$

Czy już umiesz?

- 1 Kwadrat liczby 1,2 jest równy
A. 2,4 B. 1,44
C. 0,144 D. 0,0144
- 2 Które działania są wykonane poprawnie?
I. $2^6 = 12$ II. $\left(\frac{-5}{7}\right)^3 = -\frac{125}{343}$
III. $3^4 = 81$ IV. $(-0,4)^3 = -0,64$
A. I i II B. II i IV
C. I i III D. II i III
- 3 Liczba 243 przedstawiona w postaci potęgi o wykładniku 5 to
A. 243^5 B. 5^{243}
C. 3^5 D. $2,43 \cdot 10^5$
- 4 Która z poniższych cyfr **nie może** być cyfrą jedności czwartej potęgi liczby naturalnej?
A. 1 B. 2
C. 5 D. 6
- 5 Potęga o podstawie ujemnej, większej od -1 i wykładniku naturalnym nieparzystym jest liczbą
A. dodatnią mniejszą od 1.
B. dodatnią większą od 1.
C. ujemną mniejszą od -1 .
D. ujemną większą od -1 .
- 6 Zapisując iloczyn potęg $21^3 \cdot 21^4 \cdot 21^5$ w postaci jednej potęgi, otrzymamy
A. 21^{60} B. 21^{23}
C. 21^{17} D. 21^{12}
- 7 Po podniesieniu iloczynu $2x^2y$ do potęgi czwartej otrzymamy
A. $8x^6y^4$ B. $8x^8y^4$
C. $16x^6y^4$ D. $16x^8y^4$
- 8 Która spośród podanych liczb jest największa?
A. $11^3 \cdot 11^4$ B. $(11^2)^4$
C. $\frac{11^{15}}{11^9}$ D. $\frac{11^7}{11^2}$
- 9 Liczba $5^8 \cdot 5^9$ jest większa od liczby $(5^3)^5$
A. 2 razy. B. 5 razy.
C. 25 razy. D. 10 razy.
- 10 Wartość wyrażenia $-6^2 + (-2)^6$ jest równa
A. 0 B. 100
C. -100 D. 28
- 11 Ile jest równa liczba odwrotna do liczby $5^5 + 24 \cdot 5^5$?
A. -5^7 B. $\frac{1}{5^7}$
C. -5^6 D. $\frac{1}{5^6}$
- 12 Największą spośród liczb $(-1,5)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $(-4,26)^3$, $4,05^1$ jest liczba
A. $(-4,26)^3$ B. $(-1,5)^2$
C. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ D. $4,05^1$
- 13 Dane są liczby: $a = 9^7 + 9^7 + 9^7$, $b = 11 \cdot 3^4 - 8 \cdot 3^4$, $c = (3^8)^2$. Oceń, czy poniższe zapisy są prawdziwe.
I. $c = 3a$
II. $a = b^3$
A. P, P B. P, F
C. F, P D. F, F
- 14 Liczba 0,000000000000123 zapisana w notacji wykładniczej, to
A. $0,123 \cdot 10^{-12}$
B. $1,23 \cdot 10^{-13}$
C. $12,3 \cdot 10^{-14}$
D. $123 \cdot 10^{-15}$
- 15 W którym przykładzie liczby porównano poprawnie?
A. $8,7 \cdot 10^6 \text{ dag} < 8 \cdot 10^2 \text{ t}$
B. $6 \cdot 10^5 \text{ mm} < 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ km}$
C. $74 \text{ mg} > 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$
D. $8,1 \cdot 10^{-3} \text{ km} > 7,7 \cdot 10^3 \text{ cm}$

- 16 Uporządkuj rosnąco podane liczby.
 a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2, \frac{3^2}{4}, \frac{3}{4^2}$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^3, \frac{3}{2^3}, \frac{3^2}{2}$ c) $\frac{-1}{5^2}, \left(-\frac{1}{5}\right)^2, \frac{(-1)^2}{5}$

- 17 Zapisz ilorazy potęg w postaci jednej potęgi.

- a) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{18} : \left(3\frac{3}{8}\right)^8 : \left(3\frac{3}{8}\right)^3$
 b) $a^{17} : \frac{a^{12}}{a^7}$
 c) $(11^{16} : 11^4) : (11^9 : 11^3)$

- 18 Ogrodnik sadi na jednym metrze kwadratowym 5 sadzonek krzewów. Ile krzewów ogrodnik zasadzi na kwadratowej rabacie o obwodzie 20 m? Ile krzewów trzeba zasadzić na pięciu takich rabatach?

- 19 Podane liczby zapisz w postaci jednej potęgi:

- a) połowa liczby 64^3 ,
 b) czwarta część liczby 16^5 ,
 c) piąta część liczby 625^2 ,
 d) trzecia część liczby 81^4 .

- 20 Czy liczba 2^{22} jest większa od 10^5 ? Obliczenia wykonaj na kalkulatorze.

- 21 Wiedząc, że $7^3 \cdot 2^2 = 1372$, oblicz:

- a) $5^2 \cdot 7^3 \cdot 2^4$ b) $7 \cdot 14^2$
 c) $\frac{1372}{7^3}$ d) $7^4 \cdot \frac{2^3}{1372}$

- 22 Oblicz pole kwadratu o boku długości 5 cm, a następnie oblicz pole kwadratu o boku trzy razy większym. Ile razy pole drugiego kwadratu jest większe od pola pierwszego kwadratu?

- 23 Przedstaw w postaci jednej potęgi.

- a) $3^3 + 3^3 + 3^3$
 b) $8 \cdot (2^5 + 2^5)$
 c) $9^6 + 9^6 + 9^6$
 d) $4^5 + 4^5$
 e) $(8^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2) \cdot 16$
 f) $125 \cdot (5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4 + 5^4)$

- 24 Zapisz iloczyn potęg w postaci potęgi iloczynu.

- a) $(2a)^9 \cdot (5b)^9$
 b) $(-3k)^7 \cdot (8k)^7$
 c) $(0,1x)^{10} \cdot (10y)^{10} \cdot z^{10}$

- 25 Dane są trzy liczby:

$$a = 8 \cdot 4^{50}, \quad b = 64 \cdot 4^{49}, \quad c = 4 \cdot 16^{25}.$$

Wybierz wszystkie zdania prawdziwe.

- I. Najmniejszą liczbą spośród tych liczb jest liczba c .
 II. Liczba b jest większa od liczby a .
 III. Liczba b jest dwa razy większa od liczby c .
 IV. Iloczyn liczb b i c jest równy kwadratowi liczby a .

- 26 Zapisz w najprostszej postaci. Skorzystaj z własności potęg o tych samych wykładnikach.

- a) $(-5)^7 \cdot (-2)^7$ b) $\left(\frac{14}{15}\right)^2 \cdot \left(1\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(4\frac{1}{6}\right)^2$
 c) $\left(\frac{3}{5}\right)^6 : \left(\frac{3}{10}\right)^6$ d) $\frac{(45 \cdot x^2 \cdot z)^{12}}{(5 \cdot x \cdot z^2)^{12}}, x \neq 0, z \neq 0$

- 27 Przepisz pary liczb i zamiast ? wstaw znak $<$ lub $>$.

- a) $16^2 ? 4^3$ b) $100^3 ? 10^5$ c) $9^5 ? 27^4$
 d) $32^2 ? 4^4$ e) $8^4 ? 64^3$ f) $36^2 ? 6^3$

- 28 Uzasadnij, że liczba $10^6 + 10^4 + 10^2$ jest podzielna przez:

- a) 2 b) 3
 c) 5 d) 6

- 29 Ile razy 8 GB jest większe od 1 KB?



- 30 Oblicz, ile bajtów informacji zmieści się na dysku o pojemności 250 GB.



- 31 Bakteria ma rozmiar 10 mikrometrów. Jaką wielkość będzie miała ta bakteria na zdjęciu wykonanym przez mikroskop elektronowy, w powiększeniu 10^4 -krotnym?

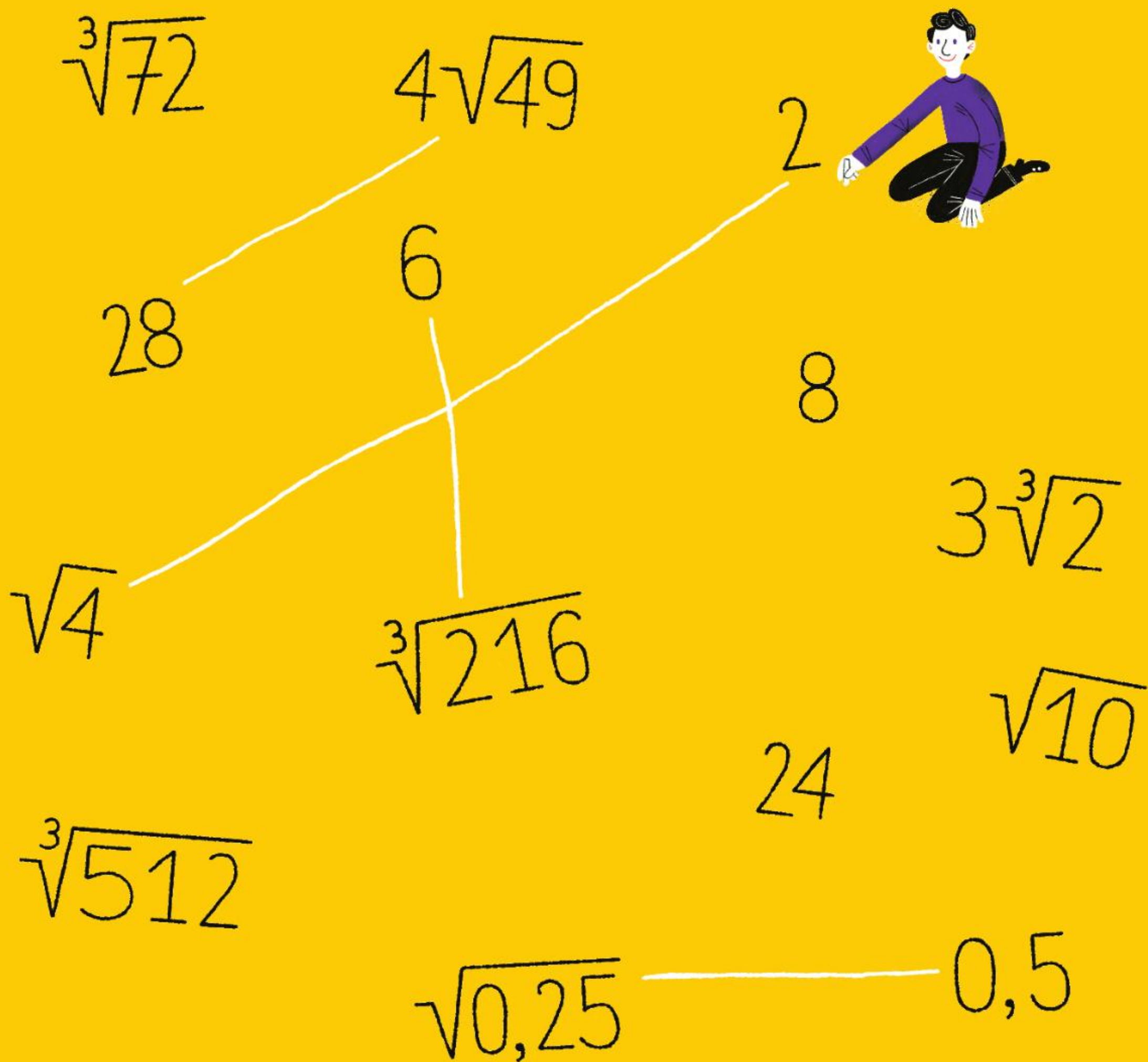
- 32 Masa Słońca jest równa $1,991 \cdot 10^{30}$ kg, a masa Jowisza to $1,90 \cdot 10^{27}$ kg. Zapisz w notacji wykładniczej różnicę tych mas.

- 33 Do wyrażenia masy atomu stosowana jest atomowa jednostka masy (u), gdzie $u = 1,66 \cdot 10^{-24}$ g. Ile gramów waży jeden atom ołowiu, którego masa atomowa jest równa $207u$?



$$\begin{aligned} 1 \text{ GB} &= 2^{10} \text{ MB} \\ 1 \text{ MB} &= 2^{10} \text{ KB} \\ 1 \text{ KB} &= 2^{10} \text{ B} \end{aligned}$$

4. Pierwiastki



1. Czy potrafisz podać liczbę, której kwadrat jest równy 4? A liczbę, której kwadrat jest równy 49 lub 0,25?
2. Czy potrafisz podać liczbę, której trzecia potęga jest równa 216?
3. Przyjrzyj się liczbom połączonym na rysunku białymi liniami. Co zauważasz?
4. Czy potrafisz podać liczbę naturalną, której kwadrat jest równy 10?

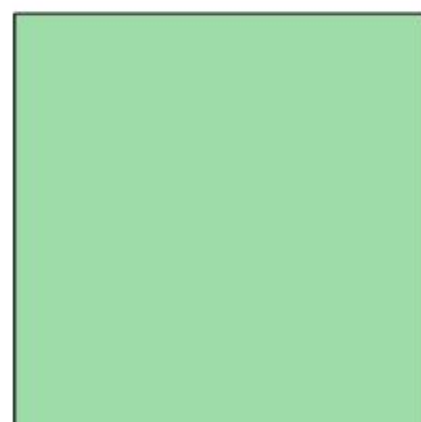
4.1 Pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny

Podejmij temat

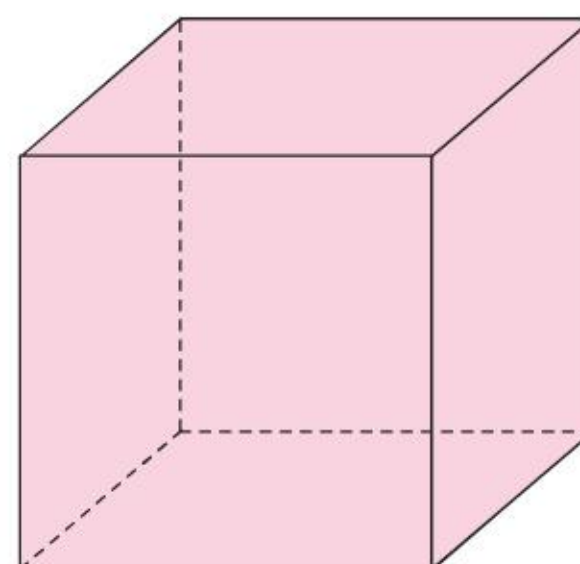


Czy potrafisz obliczyć długość boku kwadratu, znając jego pole?

Czy potrafisz obliczyć długość krawędzi sześcianu, znając jego objętość?



$$P = 25$$



$$V = 64$$

Ciekawe!

W XIII wieku włoski matematyk Leonardo z Pizy, zwany Fibonaccim (czyt. fibonaczim), do oznaczania pierwiastka używał symbolu przypominającego literę R (od łacińskiego słowa *radix*, 'pierwiastek'). Używany dziś znak pierwiastka wprowadził niemiecki matematyk Christoff Rudolff w 1525 roku, jednak nie zastosował on jeszcze poziomej kreski. Po raz pierwszy symbol pierwiastka z górną poziomą kreską został użyty przez Kartezjusza, francuskiego filozofa i matematyka, w 1637 roku.



Czy pamiętasz?

Liczby nieujemne to liczby dodatnie i zero. Jeśli liczba a jest nieujemna, to symbolicznie zapisujemy tak: $a \geq 0$.

Aby odpowiedzieć na pierwsze pytanie w *Podejmij temat*, przypomnijmy wzór na pole kwadratu, którego bok ma długość a .

$$P = a \cdot a, \text{ czyli } P = a^2$$

Możemy zatem zapisać: $a^2 = 25$.

Musimy odgadnąć liczbę, której kwadrat jest równy 25. Są dwie takie liczby: 5 i -5 , bo $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ oraz $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$. Długość nie może być liczbą ujemną, więc bok tego kwadratu jest równy 5. Mówimy, że liczba 5 jest pierwiastkiem kwadratowym z liczby 25.

Zapisujemy to symbolicznie: $\sqrt{25} = 5$.

Zapis $\sqrt{25}$ możemy odczytywać w różny sposób:

- pierwiastek drugiego stopnia z liczby 25,
- pierwiastek kwadratowy z 25,
- pierwiastek z 25.

Poszukiwanie takiej liczby nieujemnej, której kwadrat jest równy danej liczbie nieujemnej a , nazywamy w matematyce obliczaniem pierwiastka kwadratowego z liczby a (pierwiastkowaniem).

Pierwiastkiem kwadratowym

(pierwiastkiem drugiego stopnia lub pierwiastkiem) z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , której kwadrat jest równy liczbie a .

symbol pierwiastka kwadratowego



$$\sqrt{a} = b, \text{ bo } b^2 = a, \quad a \geq 0, b \geq 0$$

liczba podpierwiastkowa
(liczba nieujemna)

Przykład 1

Obliczmy pierwiastek.

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{\frac{49}{81}}$ c) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ d) $\sqrt{0,36}$

a) $\sqrt{121} = 11$, bo $11^2 = 121$

Szukamy takiej liczby dodatniej, która po podniesieniu do potęgi drugiej jest równa 121. Tą liczbą jest 11.

b) $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$, bo $\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}$

Szukamy takiego dodatniego ułamka zwykłego, którego kwadrat jest równy $\frac{49}{81}$. Ten ułamek to $\frac{7}{9}$.

c) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, bo $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

Najpierw liczbę podpierwiastkową, która jest liczbą mieszaną, zamieniamy na ułamek niewłaściwy. Następnie postępujemy tak jak przy wyznaczaniu pierwiastka z ułamka zwykłego.

d) $\sqrt{0,36} = 0,6$, bo $0,6^2 = 0,36$

Szukamy takiego ułamka w postaci dziesiętnej, który po podniesieniu do potęgi drugiej jest równy 0,36. Ten ułamek to 0,6.

$$\sqrt{0,36} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Możemy również liczbę podpierwiastkową zapisać w postaci ułamka zwykłego, a następnie postępować tak jak przy wyznaczaniu pierwiastka z ułamka zwykłego.

Pierwiastkowanie i potęgowanie liczb nieujemnych są działaniami wzajemnie odwrotnymi.

Jeśli mamy dwie liczby nieujemne a i b , to zapisy $\sqrt{a} = b$ oraz $b^2 = a$ są równoważne.

Mówimy, że liczba b jest pierwiastkiem drugiego stopnia z liczby a .



Warto zapamiętać, że:

$$\sqrt{1} = 1, \text{ bo } 1^2 = 1$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ bo } 0^2 = 0$$

1. Oblicz pierwiastki.

a) $\sqrt{144}$ b) $\sqrt{\frac{9}{64}}$ c) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$ d) $\sqrt{1,69}$

Aby odpowiedzieć na drugie pytanie w *Podějmiy temat*, przypomnijmy wzór na objętość sześcianu, którego krawędź ma długość a .

$$V = a \cdot a \cdot a, \text{ czyli } V = a^3$$

Możemy zapisać: $a^3 = 64$

Musimy odgadnąć liczbę, która podniesiona do potęgi trzeciej jest równa 64.

Szukaną liczbą jest 4, bo $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$, czyli $4^3 = 64$. Zatem długość krawędzi sześcianu jest równa 4.

Zapisujemy to symbolicznie: $\sqrt[3]{64} = 4$

Zapis $\sqrt[3]{64}$ możemy odczytywać w różny sposób:

- pierwiastek trzeciego stopnia z liczby 64,
- pierwiastek sześcienny z 64.

Pierwiastkiem sześciennym

(pierwiastkiem trzeciego stopnia) z dowolnej liczby a nazywamy taką liczbę b , której sześcián jest równy liczbie a .

stopień pierwiastka



$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ bo } b^3 = a$$



liczba podpierwiastkowa

Przykład 2

Wyznaczmy takie liczby, które podniesione do potęgi trzeciej są równe podanym liczbom.

- a) 8 b) $-\frac{27}{125}$ c) $5\frac{23}{64}$ d) 0,216

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$

Szukamy takiej liczby, która po podniesieniu do potęgi trzeciej jest równa 8. Tą liczbą jest 2.

b) $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}} = -\frac{3}{5}$, bo $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$

Liczba podpierwiastkowa jest ujemna. Szukamy takiego ujemnego ułamka zwykłego, który po podniesieniu do potęgi trzeciej jest równy $-\frac{27}{125}$. Ten ułamek to $-\frac{3}{5}$.

c) $\sqrt[3]{5\frac{23}{64}} = \sqrt[3]{\frac{343}{64}} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$,
bo $\left(1\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64} = 5\frac{23}{64}$

Liczbę podpierwiastkową, która jest liczbą mieszaną, zamieniamy na ułamek niewłaściwy. Następnie postępujemy tak jak przy wyznaczaniu pierwiastka sześciennego z ułamka zwykłego.

d) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$, bo $(0,6)^3 = 0,216$

Szukamy takiego ułamka dziesiętnego, który po podniesieniu do potęgi trzeciej jest równy 0,216. Ten ułamek to 0,6.

$$\sqrt[3]{0,216} = \sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Możemy również liczbę podpierwiastkową zapisać w postaci ułamka zwykłego, a następnie postępować tak jak przy wyznaczaniu pierwiastka sześciennego z ułamka zwykłego.

Jeśli mamy dwie dowolne liczby a i b , to zapisy

$$\sqrt[3]{a} = b \text{ oraz } b^3 = a \text{ są równoważne.}$$

Mówimy, że liczba b jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby a .

2. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{512}$

b) $\sqrt[3]{\frac{8}{729}}$

c) $\sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}$

d) $\sqrt[3]{0,001}$

Przykład 3

Obliczmy.

a) $(\sqrt{144})^2$ b) $\left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^2$ c) $\left(\sqrt{6\frac{1}{4}}\right)^2$ d) $(\sqrt{2,56})^2$

Zauważmy, że:

a) $(\sqrt{144})^2 = 12^2 = 144$

b) $\left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

c) $\left(\sqrt{6\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{25}{4}}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

d) $(\sqrt{2,56})^2 = \left(\sqrt{\frac{256}{100}}\right)^2 = \left(\frac{16}{10}\right)^2 = \frac{256}{100} = 2,56$
lub $(\sqrt{2,56})^2 = (1,6)^2 = 2,56$

Przykład 4

Obliczmy.

a) $\sqrt{13^2}$ b) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$ c) $\sqrt{\left(1\frac{1}{11}\right)^2}$ d) $\sqrt{2,1^2}$

Zauważmy, że:

a) $\sqrt{13^2} = \sqrt{169} = 13$

b) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

c) $\sqrt{\left(1\frac{1}{11}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{12}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{121}} = \frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}$

d) $\sqrt{2,1^2} = \sqrt{4,41} = 2,1$, czyli $\sqrt{2,1^2} = 2,1$

Dla dowolnej liczby nieujemnej a :

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a, \quad \sqrt{a^2} = a$$

3. Oblicz.

a) $(\sqrt{196})^2$ b) $\left(\sqrt{\frac{16}{81}}\right)^2$ c) $\left(\sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^2$ d) $(\sqrt{1,21})^2$

4. Oblicz.

a) $\sqrt{17^2}$ b) $\sqrt{\left(\frac{7}{9}\right)^2}$ c) $\sqrt{\left(1\frac{3}{8}\right)^2}$ d) $\sqrt{3,5^2}$

Zauważyłeś, że jeśli podnosimy pierwiastek kwadratowy do potęgi drugiej, to wynikiem jest liczba podpierwiastkowa?



Masz rację. A jeśli pierwiastkujemy nieujemną liczbę podniesioną do kwadratu, to wynikiem jest podstawa potęgi.



Warto zapamiętać, że dla dowolnej liczby a :

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Na przykład:

$$\sqrt{4^2} = 4$$

$$\sqrt{(-1)^2} = |-1| = 1$$

Ciekawe!

Istnieją takie pierwiastki sześciennne, które są równe sumie cyfr liczby podpierwiastkowej. Jest ich 7 i są to:

$$\sqrt[3]{0} = 0$$

$$\sqrt[3]{1} = 1$$

$$\sqrt[3]{512} = 5 + 1 + 2 = 8$$

$$\sqrt[3]{4913} = 4 + 9 + 1 + 3 = 17$$

$$\sqrt[3]{5832} = 5 + 8 + 3 + 2 = 18$$

$$\sqrt[3]{17576} = 1 + 7 + 5 + 7 + 6 = 26$$

$$\sqrt[3]{19683} = 1 + 9 + 6 + 8 + 3 = 27$$

Przykład 5

Obliczmy.

a) $(\sqrt[3]{512})^3$ b) $(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}})^3$ c) $(\sqrt[3]{2\frac{10}{27}})^3$ d) $(\sqrt[3]{0,343})^3$

Zauważmy, że:

a) $(\sqrt[3]{512})^3 = 8^3 = 512$

b) $(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}})^3 = (-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$

c) $(\sqrt[3]{2\frac{10}{27}})^3 = (\sqrt[3]{\frac{64}{27}})^3 = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$

d) $(\sqrt[3]{0,343})^3 = (\sqrt[3]{\frac{343}{1000}})^3 = (\frac{7}{10})^3 = \frac{343}{1000} = 0,343$

Przykład 6

Obliczmy.

a) $\sqrt[3]{6^3}$ b) $\sqrt[3]{(\frac{1}{5})^3}$ c) $\sqrt[3]{(-2\frac{3}{4})^3}$ d) $\sqrt[3]{(-0,7)^3}$

Zauważmy, że:

a) $\sqrt[3]{6^3} = \sqrt[3]{216} = 6$

b) $\sqrt[3]{(\frac{1}{5})^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$

c) $\sqrt[3]{(-2\frac{3}{4})^3} = \sqrt[3]{(-\frac{11}{4})^3} = \sqrt[3]{-\frac{1331}{64}} = -\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4}$

d) $\sqrt[3]{(-0,7)^3} = \sqrt[3]{-0,343} = -0,7$

Dla dowolnej liczby a :

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a, \quad \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a, \quad \sqrt[3]{a^3} = a$$

5. Oblicz.

a) $(\sqrt[3]{-64})^3$ b) $(\sqrt[3]{1\frac{271}{729}})^3$ c) $(\sqrt[3]{0,027})^3$ d) $(\sqrt[3]{-\frac{1}{216}})^3$

6. Oblicz.

a) $\sqrt[3]{(-9)^3}$ b) $\sqrt[3]{(\frac{3}{4})^3}$ c) $\sqrt[3]{(-1\frac{2}{3})^3}$ d) $\sqrt[3]{(1,2)^3}$

Zadania

Podaj pierwiastki:

- a) kwadratowe z liczb: 9, 25, 36, 144, 169, 625, 361, 289, 900, 40 000,
b) sześciennie z liczb: 1, 8, -27, 216, 343, 729, -1000, 125 000.

Oblicz.

- a) $\sqrt{\frac{1}{49}}$ b) $\sqrt{\frac{25}{169}}$ c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ d) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$
e) $\sqrt{0,04}$ f) $\sqrt{0,0016}$ g) $\sqrt{1,69}$ h) $\sqrt{10,24}$

Oblicz.

- a) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{64}{343}}$ c) $\sqrt[3]{-\frac{125}{512}}$ d) $\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$
e) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$ f) $\sqrt[3]{-0,008}$ g) $\sqrt[3]{0,064}$ h) $\sqrt[3]{1,331}$

W którym przykładzie **błędnie** obliczono pierwiastek kwadratowy?

- A. $\sqrt{0,0036} = 0,06$ B. $\sqrt{3,24} = 1,8$
C. $\sqrt{0,0441} = 0,021$ D. $\sqrt{29,16} = 5,4$

W którym przykładzie **błędnie** obliczono pierwiastek sześcienny?

- A. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$ B. $\sqrt[3]{\frac{125}{729}} = \frac{5}{9}$
C. $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = 1\frac{1}{3}$ D. $\sqrt[3]{8\frac{1}{8}} = 2\frac{1}{2}$

Wykonaj potęgowanie.

- a) $(\sqrt{256})^2$ b) $(\sqrt{\frac{3}{8}})^2$ c) $(\sqrt{2\frac{1}{4}})^2$ d) $(\sqrt{6,25})^2$
e) $(\sqrt[3]{8})^3$ f) $(\sqrt[3]{4\frac{17}{27}})^3$ g) $(\sqrt[3]{0,729})^3$ h) $(\sqrt[3]{\frac{343}{1000}})^3$

Oblicz.

- a) $\sqrt{22^2}$ b) $\sqrt{(\frac{6}{17})^2}$ c) $\sqrt{(9\frac{1}{9})^2}$ d) $\sqrt{0,007^2}$
e) $\sqrt[3]{100^3}$ f) $\sqrt[3]{(\frac{2}{11})^3}$ g) $\sqrt[3]{(-2\frac{1}{4})^3}$ h) $\sqrt[3]{(-3,1)^3}$

Podane liczby uporządkuj rosnąco.

$\sqrt{0,49}$ $\sqrt{1}$ $\sqrt{\frac{16}{25}}$ $\sqrt{0,25}$ $\sqrt{\frac{16}{100}}$ $\sqrt{\frac{9}{25}}$ $\sqrt{2,25}$



Pamiętaj, że aby policzyć pierwiastek z liczby mieszanej, najpierw należy zamienić ją na ułamek niewłaściwy.



Podane liczby uporządkuj malejąco.

$$\sqrt[3]{0,343} \quad \sqrt[3]{-1,331} \quad \sqrt[3]{1\frac{91}{125}} \quad \sqrt[3]{0,000064} \quad \sqrt[3]{-1} \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \quad \sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}$$

W każdym przykładzie symbol $\sqrt{?}$ zastąp odpowiednią liczbą.

a) $\sqrt{?} = 9$ b) $\sqrt{?} = \frac{3}{5}$ c) $\sqrt{?} = \frac{7}{12}$ d) $\sqrt{?} = 2,8$
e) $\sqrt[3]{?} = 0,8$ f) $\sqrt[3]{?} = \frac{4}{7}$ g) $\sqrt[3]{?} = -5$ h) $\sqrt[3]{?} = -0,1$

Skróć liczby podpierwiastkowe i oblicz.

a) $\sqrt{\frac{27}{48}}$ b) $\sqrt{\frac{8}{50}}$ c) $\sqrt{\frac{128}{162}}$ d) $\sqrt{\frac{98}{200}}$
e) $\sqrt[3]{\frac{16}{54}}$ f) $\sqrt[3]{-\frac{128}{250}}$ g) $\sqrt[3]{\frac{24}{375}}$ h) $\sqrt[3]{\frac{256}{500}}$

Oblicz długość boku kwadratu o podanym polu.

a) 49 m^2 b) $1,96 \text{ cm}^2$ c) $7\frac{1}{9} \text{ dm}^2$ d) $5,29 \text{ cm}^2$

Bok kwadratu, którego pole jest równe $0,0169 \text{ m}^2$, ma długość

A. $0,0013 \text{ m}$ B. $0,13 \text{ dm}$ C. 13 cm D. 1300 mm

Oblicz długość krawędzi sześcianu o podanej objętości.

a) 125 cm^3 b) $0,216 \text{ dm}^3$ c) $0,001 \text{ m}^3$ d) 512 dm^3

Krawędź sześcianu, którego objętość jest równa 64 dm^3 , ma długość

A. 4 m B. 40 dm C. 4 cm D. 40 cm

Które z poniższych zdań jest prawdziwe?

A. Krawędź sześcianu o objętości $0,8 \text{ dm}^3$ jest równa $0,2 \text{ dm}$.
B. Krawędź sześcianu o objętości 64 cm^3 jest równa 4 mm .
C. Krawędź sześcianu o objętości $0,125 \text{ m}^3$ jest równa 5 dm .
D. Krawędź sześcianu o objętości $1,331 \text{ m}^3$ jest równa 11 cm .

Oblicz, ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia działki w kształcie kwadratu o polu $6,25 \text{ a}$. Odlicz $4,8 \text{ m}$ na bramę i furtkę.

Czy prostokątny obrus o wymiarach $1,6 \text{ m} \times 1,3 \text{ m}$ zakryje blat stołu w kształcie kwadratu o polu równym $1,96 \text{ m}^2$? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Pan Władysław ma dwie kwadratowe działki, których pola powierzchni są odpowiednio równe $3,24 \text{ a}$ i 81 m^2 . Każdą z nich chce ogrodzić siatką. Na ogrodzenie której działki potrzebuje więcej metrów siatki? O ile metrów więcej? Odlicz po 2 m na każdą furtkę.

4.2 Szacowanie wielkości pierwiastków kwadratowych i pierwiastków sześciennych

Podejmij temat

- Korzystając z kalkulatora, oblicz $\sqrt{5}$. Czy potrafisz podać, między jakimi dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się $\sqrt{5}$?
- Spróbuj bez użycia kalkulatora podać, między jakimi dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się $\sqrt{17}$. Sprawdź za pomocą kalkulatora, czy twoja odpowiedź jest poprawna.

W rozpatrywanych dotychczas pierwiastkach kwadratowych liczby podpierwiastkowe były kwadratami, a w pierwiastkach sześciennych – sześcianami liczb wymiernych.

Jednak nie zawsze tak jest. Na przykład liczby: 2, 3, 5, $\frac{1}{2}$, 0,7 nie są kwadratami liczb wymiernych. Dlatego w przypadku pierwiastków, np. takich jak: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{0,7}$, nie możemy wskazać liczby wymiernej, której kwadrat byłby równy liczbie podpierwiastkowej.

Możemy jednak oszacować wartość takiego pierwiastka, czyli wskazać dwie liczby wymierne, między którymi na osi liczbowej znajduje się ten pierwiastek.



Liczby: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{0,7}$ to przykłady

liczb niewymiernych. Liczba niewymierna ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe. Np.:

$$\sqrt{2} = 1,41421356237...$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508075688...$$

Przykład 1

Wyznamy, między jakimi liczbami naturalnymi znajduje się $\sqrt{34}$.

Aby oszacować wartość tego pierwiastka, określimy między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się liczba $\sqrt{34}$.

Liczba podpierwiastkowa musi znajdować się między kwadratami kolejnych liczb naturalnych.

$$25 < 34 < 36, \text{ czyli } 5^2 < 34 < 6^2, \text{ więc } \sqrt{5^2} < \sqrt{34} < \sqrt{6^2}$$

$$\text{Zatem: } 5 < \sqrt{34} < 6$$



Ponieważ na osi liczbowej odległość między liczbami 34 i 36 jest mniejsza niż między liczbami 25 i 34, więc liczba $\sqrt{34}$ na osi liczbowej znajduje się bliżej liczby 6 niż liczby 5.

Przy szacowaniu pierwiastków pamiętajmy, aby liczba podpierwiastkowa na osi liczbowej była między **kwadratami kolejnych liczb naturalnych**.



Warto zapamiętać, że:

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{225} = 15$



Warto zapamiętać, że:

$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$\sqrt[3]{216} = 6$
$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{512} = 8$	$\sqrt[3]{729} = 9$



$\sqrt{2} \approx 1,41$	$\sqrt{3} \approx 1,73$	$\sqrt{5} \approx 2,24$
$\sqrt{6} \approx 2,45$	$\sqrt{7} \approx 2,65$	

1. Oszacuj wartości podanych pierwiastków.

a) $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{50}$ c) $\sqrt{111}$

Analogicznie postępujemy przy szacowaniu wartości pierwiastków sześciennych.

Przykład 2

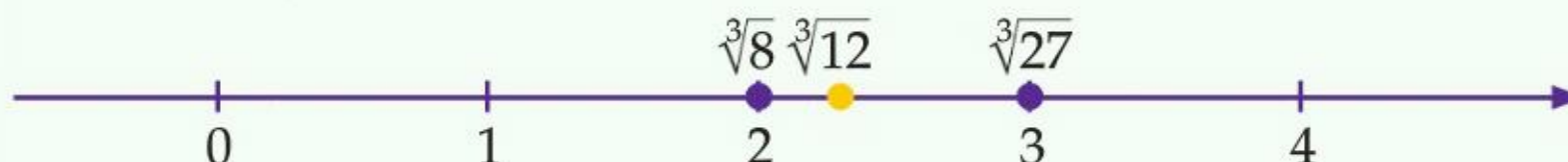
Oszacujmy wartość liczby $\sqrt[3]{12}$.

Wyznamy, między jakimi kolejnymi liczbami naturalnymi na osi liczbowej znajduje się liczba $\sqrt[3]{12}$.

Liczba podpierwiastkowa musi znajdować się między sześcianami kolejnych liczb naturalnych.

$$8 < 12 < 27, \text{ czyli } 2^3 < 12 < 3^3, \text{ więc } \sqrt[3]{2^3} < \sqrt[3]{12} < \sqrt[3]{3^3}$$

$$\text{Zatem: } 2 < \sqrt[3]{12} < 3$$



Ponieważ na osi liczbowej odległość między liczbami 8 i 12 jest mniejsza niż między liczbami 12 i 27, więc liczba $\sqrt[3]{12}$ na osi liczbowej znajduje się bliżej liczby 2 niż liczby 3.

Przy szacowaniu pierwiastków sześciennych pamiętajmy, aby liczba podpierwiastkowa znajdowała się na osi liczbowej między **sześcianami kolejnych liczb naturalnych**.

2. Oszacuj wartości podanych liczb.

a) $\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt[3]{30}$ c) $\sqrt[3]{75}$

Przykład 3

Obliczmy przybliżoną wartość wyrażenia $4\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 1$.

Zauważmy, że $4\sqrt{2}$ to liczba będąca wynikiem iloczynu liczb 4 i $\sqrt{2}$, czyli $4\sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$.

Podobnie $5\sqrt{3}$ to wynik iloczynu liczb 5 i $\sqrt{3}$, czyli $5\sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$.

Skorzystajmy z poznanych przybliżeń:

$$4\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 1 = 4 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{3} - 1 \approx 4 \cdot 1,41 + 5 \cdot 1,73 - 1 = 5,64 + 8,65 - 1 = 13,29$$

3. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia $3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 2$.

Przykład 4

Oszacujmy wartość $\sqrt{7}$ z dokładnością do części dziesiątych.

Zauważmy, że liczba 7 jest większa od 4 i mniejsza od 9, czyli $4 < 7 < 9$, zatem $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$, więc $2 < \sqrt{7} < 3$.

Znajdujemy pierwszą cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{7}$.

$$\begin{array}{llll} 2,1^2 = 4,41 & 2,2^2 = 4,84 & 2,3^2 = 5,29 & 2,4^2 = 5,76 \\ 2,5^2 = 6,25 & 2,6^2 = 6,76 & 2,7^2 = 7,29 & \end{array}$$

Na podstawie wykonanych obliczeń możemy stwierdzić, że $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$.

Znajdujemy drugą cyfrę po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\sqrt{7}$.

$$\begin{array}{lll} 2,61^2 = 6,8121 & 2,62^2 = 6,8644 & 2,63^2 = 6,9169 \\ 2,64^2 = 6,9696 & 2,65^2 = 7,0225 & \end{array}$$

$2,64 < \sqrt{7} < 2,65$, więc $\sqrt{7}$ z dokładnością do części dziesiątych jest równy 2,6.

W ten sposób możemy szukać kolejnych cyfr po przecinku, uzyskując coraz dokładniejsze przybliżenia liczby $\sqrt{7}$.

Przybliżoną wartość liczby $\sqrt{7}$ możemy też znaleźć za pomocą kalkulatora lub komputera:

$$\sqrt{7} = 2,6457513110645\dots$$

W obliczeniach praktycznych zwykle przyjmujemy, że $\sqrt{7} \approx 2,6$ lub $\sqrt{7} \approx 2,65$.

4. Podaj przybliżenie każdej podanej liczby z dokładnością do części dziesiątych. Skorzystaj z kalkulatora.

a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{55}$ c) $\sqrt{87}$

Więcej na temat

Gdy nie było komputerów ani nawet kalkulatorów, ludzie szukali różnych sposobów znajdowania przybliżeń pierwiastków. Przy użyciu jednego z takich sposobów (zwanego metodą Bakhshali) znajdziemy przybliżenia kilku pierwiastków:

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1} \approx 3 + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1^2}{8 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3 \cdot 1} = 3 \frac{37}{228} \approx 3,162$$

$$\sqrt{19} = \sqrt{4^2 + 3} \approx 4 + \frac{3}{2 \cdot 4} - \frac{3^2}{8 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4 \cdot 3} = 4 \frac{201}{560} \approx 4,359$$

$$\sqrt{146} = \sqrt{12^2 + 2} \approx 12 + \frac{2}{2 \cdot 12} - \frac{2^2}{8 \cdot 12^3 + 4 \cdot 12 \cdot 2} = 12 \frac{1160}{13968} \approx 12,083$$



$\sqrt{2}$ możemy przedstawić jako ułamek $\frac{577}{408}$, który w przybliżeniu wynosi **1,4142157** i tym samym zapis ten jest dokładny do pięciu miejsc po przecinku.

Zadania

- Znajdź takie dwie kolejne liczby naturalne, między którymi na osi liczbowej znajduje się podana liczba.

a) $\sqrt{13}$ b) $\sqrt{70}$ c) $\sqrt[3]{35}$ d) $\sqrt[3]{48}$

- W którym przykładzie **błędnie** oszacowano wartość pierwiastka?

A. $7 < \sqrt{55} < 8$ B. $12 < \sqrt{140} < 13$
C. $15 < \sqrt{232} < 16$ D. $21 < \sqrt{476} < 22$

- Podaj przybliżenia podanych pierwiastków: $\sqrt{8}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{39}$ z dokładnością do części:

a) dziesiątych, b) setnych.

- Przybliżenie pierwiastka $\sqrt[3]{43}$ do części dziesiątych jest równe

A. 3,1 B. 3,5 C. 3,7 D. 3,8

- Wiedząc, że: $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\sqrt{3} \approx 1,73$, $\sqrt{5} \approx 2,24$, $\sqrt{6} \approx 2,45$, oblicz przybliżoną wartość liczb:

a) $7\sqrt{2}$ b) $21\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{6}$

- Porównaj podane liczby. Zamiast ? wstaw znak $<$ lub $>$.

a) $9 ? \sqrt{79}$ b) $2\sqrt{37} ? \sqrt{140}$
c) $\frac{1}{4}\sqrt{123} ? \frac{2}{3}\sqrt{27}$ d) $13 ? 6\sqrt[3]{5}$
e) $\sqrt[3]{60} ? \sqrt{30}$ f) $\sqrt[3]{345} ? 2\sqrt[3]{130}$

- Uporządkuj malejąco podane liczby.

$\sqrt{11}-4$	$3+\sqrt{17}$	$-\sqrt{8}$	$2-\sqrt{39}$	$7+\sqrt{2}$
---------------	---------------	-------------	---------------	--------------

- Uporządkuj rosnąco podane liczby.

$1,5\sqrt{3}$	$\sqrt{26}$	$0,5\sqrt{40}$	$3\sqrt{11}$	$2\sqrt{13}$
---------------	-------------	----------------	--------------	--------------

- Podaj przykład liczby naturalnej spełniającej podany warunek.

a) $3 < \sqrt{n} < 4$ b) $7 < \sqrt{n} < 8$

Ile liczb naturalnych spełnia każdy z tych warunków?

- Podaj przykład liczby naturalnej spełniającej podany warunek.

a) $2 < \sqrt[3]{n} < 3$ b) $4 < \sqrt[3]{n} < 5$

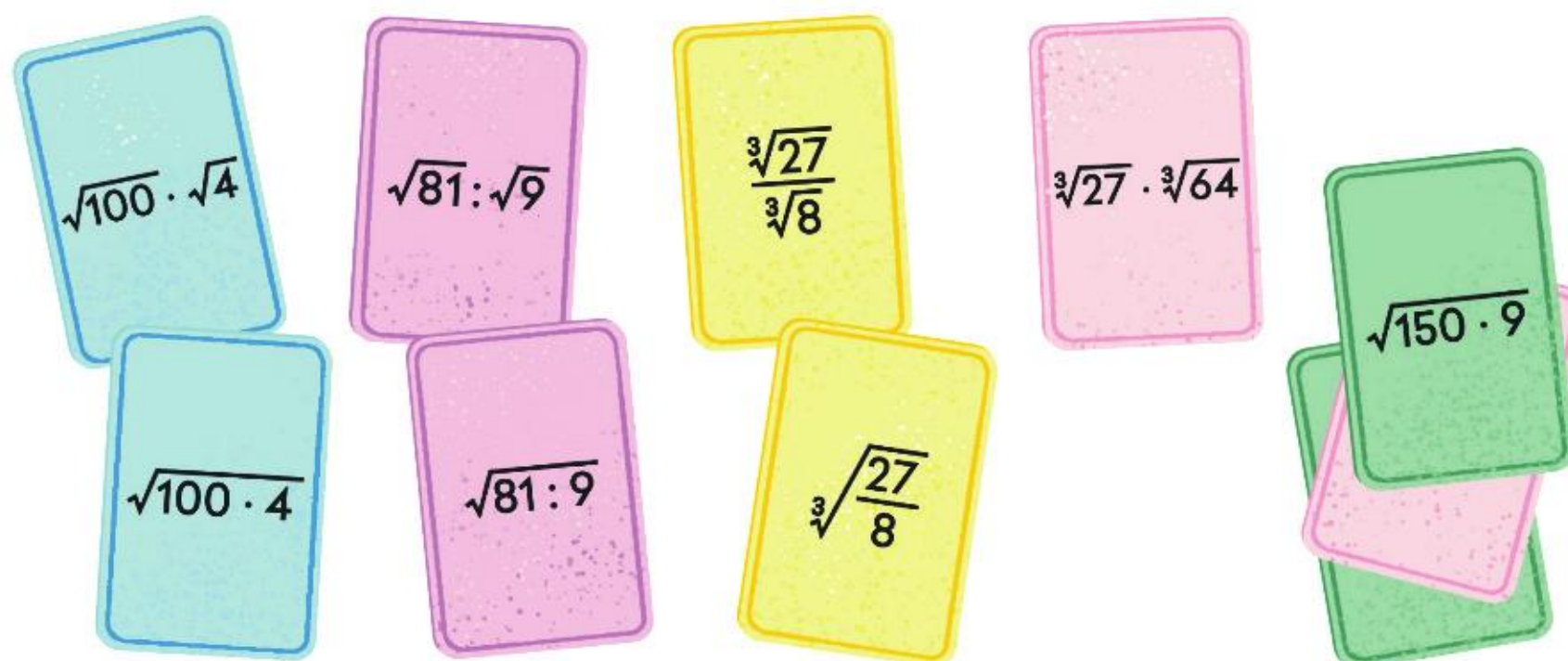
Ile liczb naturalnych spełnia każdy z tych warunków?

4.3 Iloczyn pierwiastków i pierwiastek iloczynu. Iloraz pierwiastków i pierwiastek ilorazu

Podjmij temat



Przyjrzyj się działaniom zapisanym na parach kilku kart do gry. Co zauważasz? Jak sądzisz, jakie działanie powinno być napisane na karcie, która tworzy parę z kartą, na której jest napisane: $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64}$?



Przykład 1

Obliczmy.

a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$ i $\sqrt{4 \cdot 25}$

b) $\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ i $\sqrt[3]{64 \cdot \frac{1}{8}}$

a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$ i $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$

b) $\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ i $\sqrt[3]{64 \cdot \frac{1}{8}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$$\begin{array}{c} \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{4 \cdot 25} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \text{iloczyn} \quad \text{pierwiastek} \\ \text{pierwiastków} \quad \text{z iloczynu} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{64 \cdot \frac{1}{8}} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \text{iloczyn} \quad \text{pierwiastek} \\ \text{pierwiastków} \quad \text{z iloczynu} \end{array}$$

Iloczyn pierwiastków tego samego stopnia
jest równy pierwiastkowi z iloczynu liczb podpierwiastkowych.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b} \quad \text{dla dowolnych liczb } a \text{ i } b$$

1. Oblicz.

a) $\sqrt{8100}$ oraz $\sqrt{81} \cdot \sqrt{100}$

b) $\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{36}$ oraz $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 36}$

c) $\sqrt[3]{27000}$ oraz $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1000}$

d) $\sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{8}$ oraz $\sqrt[3]{125 \cdot 8}$

Więcej na temat

Pierwiastek z iloczynu liczb występuje we wzorze na średnią geometryczną.

Średnią geometryczną dwóch liczb dodatnich a i b nazywamy liczbę $\sqrt{a \cdot b}$, zaś średnią geometryczną trzech liczb dodatnich a, b, c nazywamy liczbę $\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$.

2. Oblicz średnią geometryczną podanych liczb.
a) 12 i 3 b) 20, 10, 5
3. Podaj dwie różne liczby naturalne, których średnia geometryczna jest równa 6. Ile jest różnych rozwiązań?
4. Podaj trzy różne liczby naturalne, których średnia geometryczna jest równa 10. Czy jest tylko jedno rozwiązanie?

Przykład 2

Obliczmy.

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{12} \cdot \sqrt{27} &= \sqrt{12 \cdot 27} = \\ &= \sqrt{324} = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{24 \cdot \frac{1}{3}} = \\ &= \sqrt[3]{8} = 2 \end{aligned}$$

b) $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

Iloczyn pierwiastków jest równy pierwiastkowi z iloczynu.

Wykonujemy mnożenie i obliczamy pierwiastek.

Iloczyn pierwiastków jest równy pierwiastkowi z iloczynu.

Wykonujemy mnożenie i obliczamy pierwiastek.

2. Oblicz.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48}$

b) $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{21}$

c) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$

d) $\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

Przykład 3

Obliczmy.

a) $\sqrt{400} : \sqrt{25}$ i $\sqrt{400 : 25}$

$$\text{a) } \sqrt{400} : \sqrt{25} = 20 : 5 = 4 \text{ i } \sqrt{400 : 25} = \sqrt{16} = 4$$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{400} : \sqrt{25} & = & \sqrt{400 : 25} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{iloraz} & & \text{pierwiastek} \\ \text{pierwiastków} & & \text{z ilorazu} \end{array}$$

Mozemy również zapisać: $\frac{\sqrt{400}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{400}{25}} = \sqrt{16} = 4$

b) $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{64}$ i $\sqrt[3]{512 : 64}$

$$\text{b) } \sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{64} = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{8}{4} = 2 \text{ i } \sqrt[3]{512 : 64} = \sqrt[3]{\frac{512}{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}} & = & \sqrt[3]{\frac{512}{64}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{iloraz} & & \text{pierwiastek} \\ \text{pierwiastków} & & \text{z ilorazu} \end{array}$$

Iloraz pierwiastków tego samego stopnia
jest równy pierwiastkowi z ilorazu liczb podpierwiastkowych.

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a : b} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

$$\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{a : b} \quad \text{dla dowolnej liczby } a \text{ i } b \neq 0$$

3. Oblicz.

a) $\sqrt{196} : \sqrt{4}$ i $\sqrt{196} : 4$

b) $\sqrt{1,44} : \sqrt{0,09}$ i $\sqrt{1,44} : 0,09$

c) $\sqrt[3]{1000} : \sqrt[3]{125}$ i $\sqrt[3]{1000} : 125$

d) $\sqrt[3]{64} : \frac{1}{27}$ i $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

Przykład 4

Obliczmy.

a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{45}}$

b) $\sqrt[3]{10,8} : \sqrt[3]{0,4}$

a) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{80}{45}} =$
 $= \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Iloraz pierwiastków jest równy pierwiastkowi z ilorazu.

Skracamy ułamek przez 5 i obliczamy pierwiastek.

b) $\sqrt[3]{10,8} : \sqrt[3]{0,4} = \sqrt[3]{10,8 : 0,4} =$
 $= \sqrt[3]{108 : 4} = \sqrt[3]{27} = 3$

Iloraz pierwiastków jest równy pierwiastkowi z ilorazu.

Wykonujemy dzielenie liczb 108 i 4, a następnie obliczamy pierwiastek.

4. Oblicz.

a) $\sqrt{48,6} : \sqrt{5,4}$ b) $\frac{\sqrt{44}}{\sqrt{99}}$

c) $\sqrt[3]{12,8} : \sqrt[3]{1,6}$ d) $\frac{\sqrt[3]{189}}{\sqrt[3]{56}}$

Wiemy już, że np.: $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{16 \cdot 9}$ oraz $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}}$.

Sprawdźmy, czy w przypadku dodawania i odejmowania pierwiastków analogiczne wzory są prawdziwe.

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

$$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$$

$$\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16 + 9}$$

$$\sqrt{25} - \sqrt{9} \neq \sqrt{25 - 9}$$

Suma pierwiastków nie jest równa pierwiastkowi z sumy.

Różnica pierwiastków nie jest równa pierwiastkowi z różnicy.



Zdarza się, że iloczyn lub iloraz liczb niewymiernych jest liczbą wymierną. Liczby $\sqrt{8}$ i $\sqrt{2}$ to przykłady liczb niewymiernych, ale ich iloczyn $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$ jest liczbą wymierną. Iloraz $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \sqrt{8 : 2} = \sqrt{4} = 2$ jest też liczbą wymierną.

Zadania

- Zapisz w postaci iloczynu pierwiastków i oblicz.

a) $\sqrt{2,25 \cdot 1,44}$

b) $\sqrt{36 \cdot 169 \cdot 441}$

c) $\sqrt{\frac{25}{121} \cdot \frac{361}{289}}$

d) $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{27}\right) \cdot (-64)}$

e) $\sqrt[3]{\frac{27}{512} \cdot \frac{729}{1000}}$

f) $\sqrt[3]{0,216 \cdot 0,064}$

- Liczbę podpierwiastkową zapisz w postaci iloczynu dwóch liczb naturalnych, będących kwadratami innych liczb naturalnych, a następnie oblicz podany pierwiastek.

a) $\sqrt{4900}$

b) $\sqrt{3600}$

c) $\sqrt{1296}$

d) $\sqrt{2704}$

- Liczbę podpierwiastkową zapisz w postaci iloczynu dwóch liczb naturalnych, będących sześcianami innych liczb naturalnych, a następnie oblicz podany pierwiastek.

a) $\sqrt[3]{216000}$

b) $\sqrt[3]{2744}$

c) $\sqrt[3]{1728}$

d) $\sqrt[3]{3375}$

- Oblicz, korzystając z poznanych własności.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{0,3} \cdot \sqrt{2,7}$

d) $\sqrt[3]{0,08} \cdot \sqrt[3]{12\frac{1}{2}}$

e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{45}}$

f) $\sqrt[3]{4,9} \cdot \sqrt[3]{0,56}$

- Zapisz w postaci pierwiastka ilorazu i oblicz.

a) $\sqrt{75} : \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{250} : \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{245} : \sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{192} : \sqrt[3]{3}$

e) $\sqrt{128} : \sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{448} : \sqrt[3]{7}$

- Oblicz, korzystając z poznanych własności liczb.

a) $\frac{\sqrt{129}}{\sqrt{1,29}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{3,2}}{\sqrt[3]{0,4}}$

c) $\frac{\sqrt{1,25}}{\sqrt{0,05}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{72,9}}{\sqrt[3]{100}}$

e) $\frac{\sqrt{\frac{5}{7}}}{\sqrt{2\frac{11}{35}}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{3\frac{1}{8}}}{\sqrt[3]{1,6}}$

- Którą z podanych liczb należy wpisać w miejsce **?**, aby zachodziła równość: $\sqrt{?} \cdot \sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$?

A. $1\frac{1}{14}$

B. $1\frac{3}{7}$

C. $\frac{5}{14}$

D. $\frac{5}{7}$

- Którą z podanych liczb należy wpisać w miejsce **?**, aby zachodziła równość: $\sqrt[3]{3\frac{3}{4}} : \sqrt[3]{?} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$?

A. $\frac{1}{10}$

B. 10

C. $\frac{1}{5}$

D. 5

- Która z liczb: $a = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt[3]{125}$, $b = \sqrt[3]{\frac{81}{700}} \cdot \sqrt[3]{6\frac{3}{10}}$, $c = \sqrt[3]{\frac{4}{15}} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{25}}$, $d = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{27}{64}}$ jest największa?

A. liczba a

B. liczba b

C. liczba c

D. liczba d

4.4 Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka. Włączanie czynnika pod znak pierwiastka

Podejmij temat



Przyjrzyj się zapisanym działaniom.
Z jakich własności działań na pierwiastkach
korzystano, wykonując te obliczenia?

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{1125} = \sqrt[3]{125 \cdot 9} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{9} = 5 \cdot \sqrt[3]{9} = 5\sqrt[3]{9}$$

Zauważmy, że: $\sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{1125} = 5 \cdot \sqrt[3]{9}$

Każdy z pierwiastków zapisaliśmy w postaci iloczynu liczby wymiernej i pierwiastka kwadratowego lub sześciennego, w którym liczba podpierwiastkowa nie jest odpowiednio kwadratem lub sześcianem liczby wymiernej. Mówimy, że **wyłączyliśmy czynnik przed znak pierwiastka**.

Przykład 1

Wyłączmy czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt{125}$

b) $\sqrt{1,08}$

c) $\sqrt{1350}$

a) $\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Liczbę podpierwiastkową zapisujemy jako iloczyn takich liczb, z których przynajmniej jedna jest kwadratem liczby naturalnej. Liczba, która nie jest kwadratem liczby naturalnej, powinna być możliwie najmniejsza.

b) $\sqrt{1,08} = \sqrt{0,36 \cdot 3} = \sqrt{0,36} \cdot \sqrt{3} = 0,6\sqrt{3}$

Liczbę podpierwiastkową zapisujemy jako iloczyn takich liczb, z których przynajmniej jedna jest kwadratem liczby wymiernej.

c)
$$\begin{array}{r|l} 1350 & 2 \\ 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} \\ \rightarrow 3^2 \\ \\ \rightarrow 5^2 \end{array}$$

Liczbę podpierwiastkową rozkładamy na czynniki pierwsze, a potem korzystamy z poznanych własności pierwiastków.

$$1350 = 2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 6$$

$$\sqrt{1350} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 6} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{6} = 15\sqrt{6}$$

1. Wyłącz czynnik przed znak każdego podanego pierwiastka.

a) $\sqrt{48}$

b) $\sqrt{175}$

c) $\sqrt{363}$

W analogiczny sposób wyłączamy czynnik przed znak pierwiastka trzeciego stopnia.

Przykład 2

Wyłączmy czynnik przed znak pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{0,081}$

b) $\sqrt[3]{-40}$

c) $\sqrt[3]{3250}$

a) $\sqrt[3]{0,081} = \sqrt[3]{0,027 \cdot 3} = \sqrt[3]{0,027} \cdot \sqrt[3]{3} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{3} = 0,3\sqrt[3]{3}$

Liczbę podpierwiastkową zapisujemy jako iloczyn takich liczb, z których przynajmniej jedna jest sześcianem liczby wymiernej.

b) $\sqrt[3]{-40} = \sqrt[3]{-8 \cdot 5} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{5} = -\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = -2\sqrt[3]{5}$

c)
$$\begin{array}{r|l} 3250 & 2 \\ 1625 & 5 \\ 325 & 5 \rightarrow 5^3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Liczba podpierwiastkowa jest liczbą naturalną, więc możemy rozłożyć ją czynniki pierwsze, a następnie skorzystać z poznanych własności pierwiastków.

$$3250 = 2 \cdot 5^3 \cdot 13 = 5^3 \cdot 2 \cdot 13 = 5^3 \cdot 26$$

$$\sqrt[3]{3250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 26} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{26} = 5\sqrt[3]{26}$$

Zauważ, że:

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125}$$

2. Wyłącz czynnik przed znak każdego podanego pierwiastka.

a) $\sqrt[3]{3000}$

b) $\sqrt[3]{864}$

c) $\sqrt[3]{-2125}$

Czynnością odwrotną do wyłączania czynnika przed znak pierwiastka jest **włączanie czynnika pod znak pierwiastka**.

Przykład 3

Włączmy czynnik pod znak pierwiastka.

a) $0,4\sqrt{2}$

b) $-2\sqrt[3]{3}$

a) $0,4\sqrt{2} = \sqrt{0,4^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{0,16} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{0,32}$
lub

$$0,4\sqrt{2} = \sqrt{0,16} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{0,16 \cdot 2} = \sqrt{0,32}$$

Liczbę 0,4 zapisujemy jako $\sqrt{0,4^2}$ lub $\sqrt{0,16}$, a następnie korzystamy z własności iloczynu pierwiastków.

b) $-2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{-8 \cdot 3} = \sqrt[3]{-24}$
lub

$$-2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{-8 \cdot 3} = \sqrt[3]{-24}$$

Liczbę -2 zapisujemy w postaci $\sqrt[3]{(-2)^3}$ lub $\sqrt[3]{-8}$ i stosujemy znane własności pierwiastków.

3. Włącz liczbę pod znak każdego podanego pierwiastka.

a) $3\sqrt{7}$

b) $7\sqrt{0,1}$

c) $0,7\sqrt[3]{6}$

d) $-5\sqrt[3]{4}$

Przykład 4

Obliczmy obwód kwadratu, którego przekątna ma długość $10\sqrt{3}$.

Wiemy, że każdy kwadrat jest rombem, którego przekątne są równej długości.

Korzystamy ze wzoru na pole rombu: $P = \frac{e \cdot f}{2}$, gdzie e i f to przekątne rombu.

Oznaczmy przez d przekątną kwadratu. Mamy $P = \frac{d^2}{2}$.

Podstawiamy dane z zadania do wzoru:

$$P = \frac{(10\sqrt{3})^2}{2} = \frac{10^2 \cdot (\sqrt{3})^2}{2} = \frac{100 \cdot 3}{2} = \frac{300}{2}$$

$$P = 150$$

Obliczamy długość boku kwadratu, korzystając ze wzoru na pole kwadratu:

$$P = a^2$$

$$a = \sqrt{P}$$

$$a = \sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}$$

Obliczamy obwód kwadratu.

$$\text{Obw.} = 4 \cdot 5\sqrt{6} = 20\sqrt{6}$$

4. Obwód kwadratu jest równy $32\sqrt{5}$. Oblicz długość przekątnej tego kwadratu.

Zadania

- Wyłącz czynnik przed znak każdego podanego pierwiastka.

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt{250}$ d) $\sqrt{242}$

e) $\sqrt[3]{32}$ f) $\sqrt[3]{-72}$ g) $\sqrt[3]{162}$ h) $\sqrt[3]{256}$

- Wyłącz czynnik przed znak każdego podanego pierwiastka.

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 7}$ b) $\sqrt{5^2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2}$

c) $\sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 11}$ d) $\sqrt{3^5 \cdot 0,1^2}$

e) $\sqrt[3]{11^4 \cdot 4^4}$ f) $\sqrt[3]{3^3 \cdot 6^4 \cdot 10^3}$

- Liczbę podpierwiastkową rozłóż na czynniki pierwsze, a następnie wyłącz czynnik przed znak każdego podanego pierwiastka.

a) $\sqrt{216}$ b) $\sqrt{396}$ c) $\sqrt{468}$ d) $\sqrt{3150}$

e) $\sqrt[3]{432}$ f) $\sqrt[3]{3584}$ g) $\sqrt[3]{6000}$ h) $\sqrt[3]{10\,125}$

W którym przykładzie poprawnie wyłączono czynnik przed znak pierwiastka?

A. $\sqrt{50} = 5\sqrt{10}$ B. $\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$ C. $\sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}$ D. $\sqrt[3]{96} = 4\sqrt[3]{6}$

Włącz czynnik pod znak każdego podanego pierwiastka.

a) $3\sqrt{5}$ b) $8\sqrt{0,2}$ c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ d) $0,9\sqrt{2}$ e) $1,2\sqrt{3}$ f) $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$
g) $5\sqrt[3]{4}$ h) $-3\sqrt[3]{2}$ i) $0,4\sqrt[3]{10}$ j) $-10\sqrt[3]{1,1}$ k) $-4\sqrt[3]{0,125}$ l) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$

W którym przykładzie **błędnie** włączono czynnik pod znak pierwiastka?

A. $9\sqrt{2} = \sqrt{162}$ B. $5\sqrt{7} = \sqrt{175}$ C. $3\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{243}$ D. $6\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{180}$

Iloczyn dwóch spośród liczb: $\sqrt{30}$, $\sqrt{42}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{50}$ jest równy $15\sqrt{6}$. Które to liczby?

A. $\sqrt{30}$ i $\sqrt{42}$ B. $\sqrt{42}$ i $\sqrt{50}$ C. $\sqrt{30}$ i $\sqrt{45}$ D. $\sqrt{45}$ i $\sqrt{50}$

W każdym przykładzie w miejsce **?** wpisz odpowiednią liczbę naturalną.

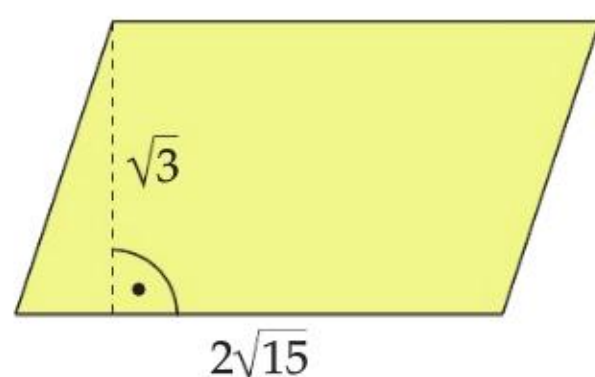
a) $2\sqrt{5} = \sqrt{?}$ b) $? \sqrt{2} = \sqrt{72}$ c) $4\sqrt{?} = \sqrt{96}$ d) $? \sqrt{3} = \sqrt{243}$ e) $? \sqrt{5} = \sqrt{180}$

Czy podane liczby są równe? Odpowiedź uzasadnij.

a) $\sqrt{54}$ i $3\sqrt{6}$ b) $8\sqrt{7}$ i $\sqrt{56}$ c) $\sqrt[3]{375}$ i $5\sqrt[3]{3}$ d) $2\sqrt[3]{3}$ i $\sqrt[3]{24}$ e) $6\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{108}$

Oblicz pola narysowanych czworokątów.

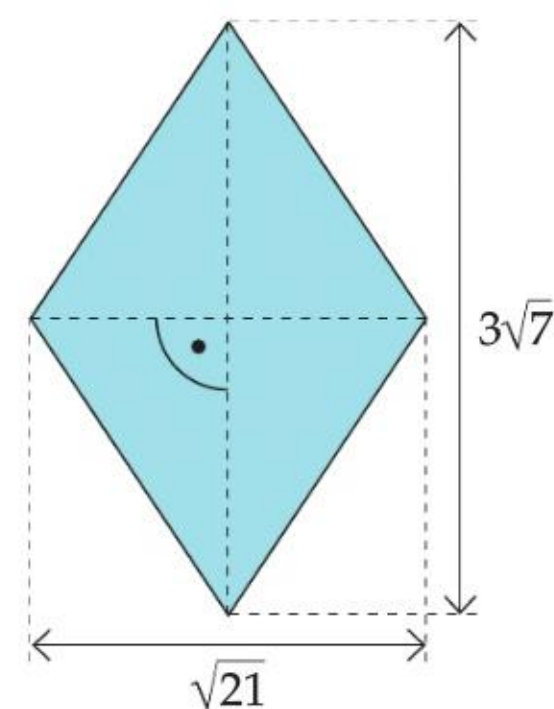
a)



b)



c)



Oblicz długości boków kwadratów o podanych polach.

a) 98 cm^2 b) 2420 cm^2 c) 1728 dm^2 d) $8,32 \text{ dm}^2$

Pole trójkąta, którego jeden bok ma długość $\sqrt{10}$ i wysokość opuszczona na ten bok ma długość $\sqrt{6}$, jest równe

A. $2\sqrt{15}$ B. $\sqrt{15}$ C. $6\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{5}$

Pole rombu, którego jedna przekątna ma długość $\sqrt{45}$, jest równe $6\sqrt{15}$. Druga przekątna ma długość

A. $4\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{5}$

Pierwszy kwadrat ma pole równe 112 cm^2 , a drugi 1372 cm^2 . Ile razy długość boku pierwszego kwadratu jest mniejsza od długości boku drugiego kwadratu?

Oblicz objętość sześcianu, którego pole powierzchni całkowitej jest równe 672 cm^2 .

4.5 Porównywanie wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki

Podejmij temat



Ania i Ewa porównywały liczby $5\sqrt{2}$ i $\sqrt{75}$.
Z jakich własności działań na pierwiastkach korzystały?

Ania

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$$
$$50 < 75$$
$$5\sqrt{2} < \sqrt{75}$$

Ewa

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$
$$5\sqrt{2} < 5\sqrt{3} \text{ bo } \sqrt{2} < \sqrt{3}$$
$$5\sqrt{2} < \sqrt{75}$$

Zauważmy, że w *Podejmij temat* obie dziewczynki poprawnie wykonały obliczenia. Ania w pierwszej liczbie włączyła czynnik pod znak pierwiastka. Ewa postąpiła odwrotnie – w drugiej liczbie wyłączyła czynnik przed znak pierwiastka. Dzięki temu każda z dziewczynek mogła porównać obie liczby.

Z dwóch pierwiastków tego samego stopnia ten jest większy, którego liczba podpierwiastkowa jest większa. Na przykład:

$$\sqrt{14} < \sqrt{22}, \text{ bo } 14 < 22$$

$$\sqrt[3]{-3,5} < \sqrt[3]{-2,5}, \text{ bo } -3,5 < -2,5$$

$$\sqrt{2\frac{1}{4}} < \sqrt{3\frac{1}{2}}, \text{ bo } 2\frac{1}{4} < 3\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{7}} < \sqrt[3]{\frac{8}{9}}, \text{ bo } \frac{3}{7} < \frac{8}{9}$$

Przykład 1

Uporządkujmy liczby rosnąco.

a) $3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, \sqrt{33}, \frac{1}{2}\sqrt{26}$

b) $\sqrt[3]{19}, 2\sqrt[3]{4}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{45}, 2\frac{1}{2}\sqrt[3]{1\frac{7}{25}}$

a) Aby uporządkować podane liczby, w każdej liczbie włączamy czynnik pod znak pierwiastka.

$$3\sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

$$2\sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{26} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 26} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 26} = \sqrt{6\frac{1}{2}}$$

Uporządkujmy liczby rosnąco, porównując liczby podpierwiastkowe.

$$\sqrt{6\frac{1}{2}} < \sqrt{12} < \sqrt{18} < \sqrt{33}$$

$$\text{Zatem: } \frac{1}{2}\sqrt{26} < 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} < \sqrt{33}$$

- b) Porównując pierwiastki sześciennie, postępujemy analogicznie jak przy porównywaniu pierwiastków kwadratowych.

$$2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{32}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{45} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 45} = \sqrt[3]{\frac{8}{27} \cdot 45} = \sqrt[3]{\frac{8}{27} \cdot 45} = \sqrt[3]{\frac{40}{3}} = \sqrt[3]{13\frac{1}{3}}$$

$$2\frac{1}{2}\sqrt[3]{1\frac{7}{25}} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{32}{25}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \frac{32}{25}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8} \cdot \frac{32}{25}} = \sqrt[3]{\frac{125}{8} \cdot \frac{32}{25}} = \sqrt[3]{20}$$

$$\sqrt[3]{13\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{19} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{32}$$

$$\text{Zatem: } \frac{2}{3}\sqrt[3]{45} < \sqrt[3]{19} < 2\frac{1}{2}\sqrt[3]{1\frac{7}{25}} < 2\sqrt[3]{4}$$

1. Uporządkuj liczby rosnąco.

a) $\sqrt{41}, 8\sqrt{\frac{1}{2}}, 5\sqrt{2}, \frac{6}{7}\sqrt{42}$

b) $2\sqrt{8}, 6\sqrt{2}, \sqrt{40}, 3\sqrt{6}$

c) $\sqrt[3]{0,8}, \frac{1}{4}\sqrt[3]{192}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, 3\sqrt[3]{2}$

d) $5\sqrt[3]{0,2}, 2\sqrt[3]{3}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{320}, \sqrt[3]{30}$

Przykład 2

Uporządkujmy liczby malejąco.

a) $\sqrt{54}, 7\sqrt{6}, \sqrt{150}, \frac{1}{4}\sqrt{96}$

b) $\frac{1}{16}\sqrt[3]{16}, \frac{3}{8}\sqrt[3]{128}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt[3]{2}$

- a) Zauważmy, że wszystkie liczby podpierwiastkowe są równe iloczynowi liczby 6 i liczby będącej kwadratem pewnej liczby naturalnej.

$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3 \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5 \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{96} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{16 \cdot 6} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{6}$$

Możemy teraz uporządkować liczby malejąco, porównując liczby, przez które mnożymy liczbę $\sqrt{6}$.

$$7\sqrt{6} > 5\sqrt{6} > 3\sqrt{6} > \sqrt{6}$$

$$\text{Zatem: } 7\sqrt{6} > \sqrt{150} > \sqrt{54} > \frac{1}{4}\sqrt{96}$$

- b) Postępujemy analogicznie jak przy pierwiastkach kwadratowych.

$$\frac{1}{16}\sqrt[3]{16} = \frac{1}{16} \cdot \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} = \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{2} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{3}{8}\sqrt[3]{128} = \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{64 \cdot 2} = \frac{3}{8} \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{2} > \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} > \frac{1}{8}\sqrt[3]{2}$$

$$\text{Zatem: } \frac{3}{8}\sqrt[3]{128} > \sqrt[3]{2} > \sqrt[3]{\frac{1}{4}} > \frac{1}{16}\sqrt[3]{16}$$

2. Uporządkuj liczby malejąco.

a) $\frac{1}{8}\sqrt{12}, \sqrt{\frac{3}{25}}, \sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{27}$

b) $\frac{3}{4}\sqrt{80}, 0,7 \cdot \sqrt{125}, 2\sqrt{5}, \frac{41}{55} \cdot \sqrt{605}$

c) $\sqrt[3]{108}, 3\sqrt[3]{32}, 5\sqrt[3]{4}, \frac{1}{4}\sqrt[3]{256}$

d) $\sqrt[3]{24}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{81}, 5\sqrt[3]{\frac{3}{64}}, 4\sqrt[3]{3}$

Przykład 3

Porównajmy liczby.

a) $\frac{1}{\sqrt{17}}$ oraz $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ b) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt[3]{100}}$ oraz $\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{-7}{\sqrt{74}}$ oraz $\frac{-7}{5\sqrt{3}}$

a) $\frac{1}{\sqrt{17}}$ oraz $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Zauważmy, że obie liczby są dodatnie oraz że liczniki ułamków są takie same. Jeżeli liczniki dwóch ułamków są takie same, to ten ułamek jest większy, który ma mniejszy mianownik. Porównajmy mianowniki ułamków.

$$2\sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$$

$$\sqrt{17} < \sqrt{20}$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}} > \frac{1}{\sqrt{20}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}} > \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

b) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt[3]{100}}$ oraz $\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt[3]{3}}$

Liczniki tych ułamków są takie same, równe $\sqrt{11}$. Porównajmy mianowniki tych ułamków.

$$3\sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{81}$$

$$\sqrt[3]{100} > \sqrt[3]{81}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{\sqrt[3]{100}} < \frac{\sqrt{11}}{3\sqrt[3]{3}}$$

c) $\frac{-7}{\sqrt{74}}$ oraz $\frac{-7}{5\sqrt{3}}$

Zauważmy, że obie liczby są ujemne oraz że liczniki ułamków są takie same. Porównajmy najpierw liczby dodatnie: $\frac{7}{\sqrt{74}}$ oraz $\frac{7}{5\sqrt{3}}$, postępując analogicznie jak w poprzednich przykładach.

$$5\sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$\sqrt{74} < \sqrt{75}$$

$$\frac{7}{\sqrt{74}} > \frac{7}{\sqrt{75}}$$

$$\frac{-7}{\sqrt{74}} < \frac{-7}{5\sqrt{3}}$$

3. Porównaj podane liczby.

a) $\frac{5}{\sqrt{330}}$ oraz $\frac{5}{9\sqrt{4}}$ b) $\frac{9}{\sqrt[3]{55}}$ oraz $\frac{9}{2\sqrt[3]{7}}$ c) $\frac{-2}{\sqrt{75}}$ oraz $\frac{-2}{3\sqrt{8}}$

Więcej na temat

Czasami musimy porównać pierwiastki różnych stopni, np. pierwiastki drugiego i trzeciego stopnia: $\sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{5}$.

Możemy to zrobić w następujący sposób:

- najpierw obliczamy drugie potęgi liczb $\sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{5}$
 $(\sqrt{3})^2 = 3$
 $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 5} = \sqrt[3]{25}$
- następnie wyniki podnosimy do potęgi trzeciej i porównujemy otrzymane liczby
 $3^3 = 27$
 $(\sqrt[3]{25})^3 = 25$
Ponieważ $25 < 27$, to $\sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$.

Możemy też zrobić odwrotnie:

- najpierw podnosimy obie liczby do potęgi trzeciej
 $(\sqrt{3})^3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
 $(\sqrt[3]{5})^3 = 5$
- następnie otrzymane liczby podnosimy do potęgi drugiej i porównujemy otrzymane wyniki
 $(3\sqrt{3})^2 = (\sqrt[3]{3^2 \cdot 3})^2 = (\sqrt{27})^2 = 27$
 $5^2 = 25$

4. Porównaj liczby: $\sqrt{10}$ i $\sqrt[3]{30}$.

Zadania

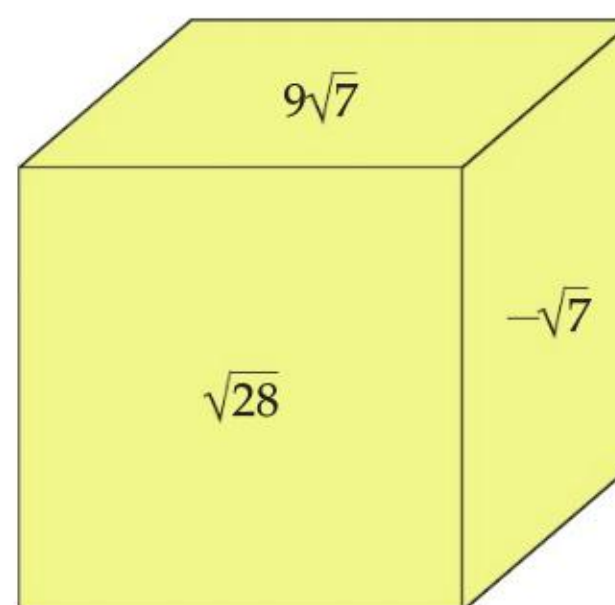
- Uporządkuj liczby rosnąco.
a) $4\sqrt{5}$, $3\sqrt{10}$, $6\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$
b) $10\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{15}$, $3\sqrt[3]{3}$, $5\sqrt[3]{4}$
- Uporządkuj liczby malejąco.
a) $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $-\frac{3}{\sqrt{7}}$, $-\frac{12}{\sqrt{32}}$, $\frac{6}{\sqrt{48}}$, $-\frac{6}{\sqrt{24}}$, $\frac{9}{\sqrt{45}}$
b) $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{50}}$, $-\frac{1}{2\sqrt[3]{5}}$, $\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt[3]{35}}$, $-\frac{1}{\sqrt[3]{43}}$
- Porównaj liczby. Zamiast ? wstaw znak $<$, $=$ lub $>$.
a) $\sqrt{6}$? $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$? $\sqrt{20}$
c) $2\sqrt{6}$? $\sqrt{63}$ d) $4\sqrt{3}$? $\sqrt{42}$
e) $\sqrt[3]{40}$? $2\sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[3]{3000}$? $10\sqrt[3]{3}$
- Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
A. Liczba $2\sqrt{10}$ jest większa niż liczba $10\sqrt{2}$.
B. Liczba $6\sqrt{3}$ jest mniejsza niż liczba $\sqrt{108}$.
C. Liczba $\sqrt{125}$ jest większa niż liczba $5\sqrt{6}$.
D. Liczba $\sqrt{77}$ jest mniejsza niż $4\sqrt{5}$.
- Która z liczb: $a = \sqrt[3]{96}$, $b = \sqrt[3]{192}$, $c = \sqrt[3]{384}$, $d = \sqrt[3]{768}$ jest równa liczbie $4\sqrt[3]{6}$?
A. liczba a B. liczba b
C. liczba c D. liczba d
- Ile spośród liczb: $5\sqrt{6}$; $4\sqrt{11}$; $3\sqrt{13}$ jest większych od $\sqrt{150}$?
A. 0 B. 1
C. 2 D. 3
- Która spośród liczb: $9\sqrt{2}$; $6\sqrt{3}$; $4\sqrt{6}$; $3\sqrt{11}$ na osi liczbowej jest najbliżej 0?
A. $9\sqrt{2}$ B. $6\sqrt{3}$
C. $4\sqrt{6}$ D. $3\sqrt{11}$
- Podaj przykład liczby naturalnej n takiej, że
a) $3\sqrt{2} < \sqrt{n} < 4\sqrt{2}$
b) $2\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{n} < 3\sqrt[3]{3}$
Ile liczb naturalnych spełnia podane warunki?
- Wypisz wszystkie liczby całkowite k spełniające podane warunki.
a) $3\sqrt{7} < k < 7\sqrt{3}$
b) $-2\sqrt{2} < k < 3\sqrt{3}$
c) $-5\sqrt{2} < k < -2\sqrt{5}$
- Porównaj liczby. Zamiast ? wstaw znak $<$, $=$ lub $>$.
a) $\sqrt{3}$? $\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt{5}$? $\sqrt[3]{11}$ c) $2\sqrt{2}$? $\sqrt[3]{23}$

4.6 Przekształcanie wyrażeń zawierających pierwiastki

Podejmij temat



Na ścianach kostki sześciennej zapisano sześć liczb tak, że sumy liczb znajdujących się na przeciwległych ścianach są równe $7\sqrt{7}$. W jaki sposób wyznaczyć liczby zapisane na ścianach, które na rysunku są niewidoczne? Czy wiesz, jakie to są liczby?



Aby wyznaczyć liczby znajdujące się na niewidocznych ścianach kostki, opisanej w *Podejmij temat*, musimy obliczyć trzy różnice: $7\sqrt{7} - 9\sqrt{7}$, $7\sqrt{7} - \sqrt{28}$ i $7\sqrt{7} - (-\sqrt{7})$.

Wyrażenia będące iloczynami liczb wymiernych i pierwiastków tego samego stopnia o tej samej liczbie podpierwiastkowej możemy dodawać lub odejmować. Aby to zrobić, dodajemy lub odejmujemy liczby wymierne, występujące w wyrażeniach, a wynik mnożymy przez pierwiastek.

$$7\sqrt{7} - 9\sqrt{7} = 7 \cdot \sqrt{7} - 9 \cdot \sqrt{7} = (7 - 9) \cdot \sqrt{7} = -2 \cdot \sqrt{7} = -2\sqrt{7}$$

$$7\sqrt{7} - \sqrt{28} = 7 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{4 \cdot 7} = 7 \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot \sqrt{7} = (7 - 2) \cdot \sqrt{7} = 5 \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$$

$$7\sqrt{7} - (-\sqrt{7}) = 7\sqrt{7} + \sqrt{7} = 8 \cdot \sqrt{7} = 8\sqrt{7}$$

Przekształcanie wyrażeń zawierających pierwiastki pozwala na zapisywanie tych wyrażeń w prostszej postaci. Podczas przekształcania wyrażenia korzystamy z własności działań. Musimy też pamiętać o kolejności wykonywania działań.

1. Działania w nawiasach.
2. Potęgowanie i pierwiastkowanie.
3. Mnożenie i dzielenie od lewej do prawej (w kolejności zapisu).
4. Dodawanie i odejmowanie od lewej do prawej (w kolejności zapisu).

Czy pamiętasz? Czasami działania w nawiasach ujmuje się w kolejne nawiasy.



Ciekawe!

Jeśli podzielimy długość dłuższego boku kartki A4 przez długość krótszego boku, otrzymamy liczbę $\sqrt{2}$. To samo jest prawdziwe dla innych formatów kartek, takich jak B5 czy C3. Dzięki temu możemy połączyć dwie kartki tego samego formatu, aby uzyskać jedną większą, np. dwie kartki A4 dają nam jedną A3.

Pamiętam. Wówczas dla wygody stosuje się zwykle różne wielkości nawiasów lub różne kształty nawiasów, np.:
 $(((2 + 6) \cdot 3 + 1) - 20) : 5$
albo $\{ [(2 + 6) \cdot 3 + 1] - 20 \} : 5$.
Obliczenia zaczyna się wtedy od działania w nawiasie, w którym nie ma już innych nawiasów.

Przykład 1

Zapiszmy wyrażenie w prostszej postaci.

a) $-2,5\sqrt{10} + 4,5\sqrt{10}$

b) $13\sqrt{6} - 9\sqrt{5} - 8\sqrt{6} - 3\sqrt{5}$

c) $\frac{1}{12}\sqrt[3]{4} + \frac{5}{12}\sqrt[3]{4}$

a) $-2,5\sqrt{10} + 4,5\sqrt{10} = -2,5 \cdot \sqrt{10} + 4,5 \cdot \sqrt{10} =$
 $= (-2,5 + 4,5) \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

Dodajemy liczby $-2,5$ i $4,5$. Wynik tego dodawania mnożymy przez $\sqrt{10}$.

b) $13\sqrt{6} - 9\sqrt{5} - 8\sqrt{6} - 3\sqrt{5} =$
 $= 13 \cdot \sqrt{6} - 9 \cdot \sqrt{5} - 8 \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot \sqrt{5} =$
 $= 13 \cdot \sqrt{6} - 8 \cdot \sqrt{6} - 9 \cdot \sqrt{5} - 3 \cdot \sqrt{5} =$
 $= (13 - 8) \cdot \sqrt{6} + (-9 - 3) \cdot \sqrt{5} =$
 $= 5 \cdot \sqrt{6} + (-12) \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{6} - 12\sqrt{5}$

Dla ułatwienia obliczeń podkreślamy wyrażenia zawierające pierwiastki tego samego stopnia o tej samej liczbie podpierwiastkowej.

Odejmujemy liczby całkowite pomnożone przez $\sqrt{6}$ i osobno odejmujemy liczby całkowite pomnożone przez $\sqrt{5}$. Wyniki mnożymy odpowiednio przez $\sqrt{6}$ lub $\sqrt{5}$.

c) $\frac{1}{12}\sqrt[3]{4} + \frac{5}{12}\sqrt[3]{4} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt[3]{4} + \frac{5}{12} \cdot \sqrt[3]{4} =$
 $= \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{12}\right) \cdot \sqrt[3]{4} = \frac{6}{12} \cdot \sqrt[3]{4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$

Dodajemy ułamki $\frac{1}{12}$ i $\frac{5}{12}$.

Wynik mnożymy przez $\sqrt[3]{4}$.

1. Zapisz każde podane wyrażenie w prostszej postaci.

a) $2\sqrt{11} + 5\sqrt{11} - 8\sqrt{11}$

b) $6\sqrt{3} - 2\sqrt{7} - 7\sqrt{3} + 4\sqrt{7}$

c) $\frac{13}{15}\sqrt[3]{5} - \frac{4}{15}\sqrt[3]{5}$

Przykład 2

Zapiszmy wyrażenie w prostszej postaci.

a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{8}$

b) $-2\sqrt{28} + 0,5\sqrt{63}$

c) $5\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24}$

a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{8} = \sqrt{2} + 3\sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{2} = (1 + 6) \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b) $-2\sqrt{28} + 0,5\sqrt{63} = -2\sqrt{4 \cdot 7} + 0,5\sqrt{9 \cdot 7} = -2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} + 0,5 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = -2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7} + 0,5 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} =$
 $= -4\sqrt{7} + 1,5\sqrt{7} = (-4 + 1,5) \cdot \sqrt{7} = -2,5\sqrt{7}$

c) $5\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} = 5\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{27 \cdot 2} - \sqrt[3]{8 \cdot 3} = 5 \cdot \sqrt[3]{3} + 2 \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 5 \cdot \sqrt[3]{3} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{3} =$
 $= 5 \cdot \sqrt[3]{3} + 6 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{3} = 5 \cdot \sqrt[3]{3} - 2 \cdot \sqrt[3]{3} + 6 \cdot \sqrt[3]{2} = (5 - 2) \cdot \sqrt[3]{3} + 6 \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{3} + 6\sqrt[3]{2}$

2. Zapisz każde podane wyrażenie w prostszej postaci.

a) $5\sqrt{3} + \sqrt{12}$

b) $\frac{1}{3}\sqrt{99} - 3\sqrt{1331}$

c) $4\sqrt[3]{40} + 5\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{135}$

Przykład 3

Zapiszmy wyrażenie w prostszej postaci.

a) $6\sqrt{3} \cdot 2,5\sqrt{6}$

b) $24\sqrt{14} : 8\sqrt{2}$

c) $3,2\sqrt[3]{15} : 0,4\sqrt[3]{3}$

a) $6\sqrt{3} \cdot 2,5\sqrt{6} = 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 2,5 \cdot \sqrt{6} =$
 $= (6 \cdot 2,5) \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}) = 15 \cdot \sqrt{3 \cdot 6} = 15 \cdot \sqrt{18} =$
 $= 15 \cdot \sqrt{9 \cdot 2} = 15 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 15 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 45\sqrt{2}$

b) $24\sqrt{14} : 8\sqrt{2} = \frac{24\sqrt{14}}{8\sqrt{2}} = \frac{24 \cdot \sqrt{14}}{8 \cdot \sqrt{2}} =$
 $= \frac{24}{8} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{14}{2}} = 3\sqrt{7}$

c) $3,2\sqrt[3]{15} : 0,4\sqrt[3]{3} = \frac{3,2\sqrt[3]{15}}{0,4\sqrt[3]{3}} = \frac{3,2 \cdot \sqrt[3]{15}}{0,4 \cdot \sqrt[3]{3}} =$
 $= \frac{3,2}{0,4} \cdot \frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{32}{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{15}{3}} = 8\sqrt[3]{5}$

Korzystamy z przemienności i łączności mnożenia.

Iloczyn pierwiastków jest równy pierwiastkowi z iloczynu.

Zastępujemy znak dzielenia kreską ułamkową.

Iloraz pierwiastków jest równy pierwiastkowi z ilorazu.

Zastępujemy znak dzielenia kreską ułamkową.

Iloraz pierwiastków jest równy pierwiastkowi z ilorazu.

3. Zapisz każde podane wyrażenie w prostszej postaci.

a) $5\sqrt{21} \cdot 2\sqrt{7}$

b) $36\sqrt{10} : 12\sqrt{5}$

c) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{6} \cdot \frac{8}{9}\sqrt[3]{9}$

Przykład 4

Obliczmy.

a) $\sqrt{5} \cdot (6\sqrt{10} - 2\sqrt{20})$

b) $(\sqrt[3]{24} - 4\sqrt[3]{6}) \cdot \sqrt[3]{9}$

a) $\sqrt{5} \cdot (6\sqrt{10} - 2\sqrt{20}) = 6 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} =$

 $= 6 \cdot \sqrt{50} - 2 \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot \sqrt{25 \cdot 2} - 2 \cdot 10 =$
 $= 6 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - 20 = 6 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 20 = 30\sqrt{2} - 20$

Każdą z liczb w nawiasie mnożymy przez $\sqrt{5}$.

b) $(\sqrt[3]{24} - 4\sqrt[3]{6}) \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} - 4 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9} =$

 $= \sqrt[3]{24 \cdot 9} - 4 \cdot \sqrt[3]{6 \cdot 9} = \sqrt[3]{216} - 4 \cdot \sqrt[3]{54} =$
 $= 6 - 4 \cdot \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 6 - 4 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 6 - 12\sqrt[3]{2}$

Każdą z liczb w nawiasie mnożymy przez $\sqrt[3]{9}$.

4. Oblicz.

a) $2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{15} \cdot 7\sqrt{12})$

b) $(2\sqrt[3]{6} - 0,5\sqrt[3]{48}) \cdot \sqrt[3]{36}$

c) $3\sqrt[3]{2} \cdot (7\sqrt[3]{2} - 2,5\sqrt[3]{32})$

Przykład 5

Obliczmy wartość wyrażenia. Pamiętajmy o kolejności wykonywania działań.

a) $7\sqrt{15} + \sqrt{60} - 6\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{5}$

b) $(2,5\sqrt{12} + 0,7\sqrt{12}) : \sqrt{6}$

c) $30\sqrt{22} : 5\sqrt{11} \cdot \sqrt{2}$

a) $7\sqrt{15} + \sqrt{60} - 6\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{5} =$

$$= 7 \cdot \sqrt{15} + \sqrt{60} - 6 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} =$$

$$= 7 \cdot \sqrt{15} + \sqrt{4 \cdot 15} - 18 \cdot \sqrt{15} =$$

$$= 7 \cdot \sqrt{15} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{15} - 18 \cdot \sqrt{15} =$$

$$= 7 \cdot \sqrt{15} + 2 \cdot \sqrt{15} - 18 \cdot \sqrt{15} =$$

$$= (7 + 2 - 18) \cdot \sqrt{15} = -9\sqrt{15}$$

Obliczamy iloczyn liczb $6\sqrt{3}$ i $3\sqrt{5}$.

Korzystamy z poznanych własności działań. Liczba 60 jest iloczynem liczb 4 i 15. Pierwiastek iloczynu jest równy iloczynowi pierwiastków.

Dodajemy i odejmujemy liczby, przez które mnożymy $\sqrt{15}$.

b) $(2,5\sqrt{12} + 0,7\sqrt{12}) : \sqrt{6} =$

$$= (2,5 \cdot \sqrt{12} + 0,7 \cdot \sqrt{12}) : \sqrt{6} =$$

$$= (2,5 + 0,7) \cdot \sqrt{12} : \sqrt{6} =$$

$$= 3,2 \cdot \sqrt{12} : \sqrt{6} = 3,2 \cdot \sqrt{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} =$$

$$= 3,2 \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}} = 3,2 \cdot \sqrt{\frac{12}{6}} = 3,2\sqrt{2}$$

Wykonujemy działanie w nawiasie.

Zastępujemy dzielenie przez $\sqrt{6}$ mnożeniem przez odwrotność tej liczby.

Iloraz pierwiastków jest równy pierwiastkowi z ilorazu.

c) $30\sqrt{22} : 5\sqrt{11} \cdot \sqrt{2} = \frac{30\sqrt{22}}{5\sqrt{11}} \cdot \sqrt{2} =$

$$= \frac{30 \cdot \sqrt{22}}{5 \cdot \sqrt{11}} \cdot \sqrt{2} = \frac{30}{5} \cdot \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{2} =$$

$$= 6 \cdot \sqrt{\frac{22}{11}} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} =$$

$$= 6 \cdot 2 = 12$$

Najpierw wykonujemy dzielenie liczb $30\sqrt{22}$ i $5\sqrt{11}$. Zastępujemy znak dzielenia kreską ułamkową.

Iloraz pierwiastków jest równy pierwiastkowi z ilorazu.

5. Oblicz wartość każdego podanego wyrażenia. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $3\sqrt{18} - 8\sqrt{2} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}$

b) $(2\sqrt{15} + 7\sqrt{15}) : 3\sqrt{5}$

c) $4\sqrt{21} : \sqrt{3} + \sqrt{14} \cdot \sqrt{2}$

Przykład 6

Obliczmy wartość wyrażenia.

a) $\sqrt{5\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{-125}$

b) $5 - \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 8^2}$

c) $\sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{25}}}$

a) $\sqrt{5\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{-125} = \sqrt{\frac{49}{9}} - (-5) = \frac{7}{3} + 5 = 2\frac{1}{3} + 5 = 7\frac{1}{3}$

b) $5 - \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 8^2} = 5 - \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64} = 5 - \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5 - \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 - 5 = 0$

c) $\sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt{25}}} = \sqrt{5 \cdot \sqrt{5 \cdot 5}} = \sqrt{5 \cdot \sqrt{25}} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$

6. Oblicz wartość każdego podanego wyrażenia. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

a) $-6\sqrt{2\frac{7}{9}} + 7\sqrt{1,44}$

b) $\sqrt{13^2 - 5^2} - (-4)\sqrt[3]{2 \cdot 6^2 - 2^3}$

c) $\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{9}}}}$

Więcej na temat

Wyrażenia typu $\frac{4}{\sqrt{2}}$ lub $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ możemy przekształcać tak, by w mianownikach nie było pierwiastków. Aby w mianowniku nie było pierwiastka, rozszerzamy ułamek, mnożąc licznik i mianownik ułamka przez pierwiastek, który znajduje się w mianowniku. Mówimy, że usuwamy niewymierność mianownika.

Zobacz, jak usuwamy niewymierność mianownika w wyrażeniach $\frac{4}{\sqrt{2}}$ oraz $\frac{3}{2\sqrt{3}}$.

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt{2}$.

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Mnożymy licznik i mianownik przez $\sqrt{3}$.

7. Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$

8. Rozstrzygnij, jaką liczbę trzeba wpisać w miejsce litery.

a) $\frac{6}{\sqrt{5}} = a\sqrt{3}$

b) $\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{b\sqrt{5}}{5}$

c) $\frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{c}$

Zadania

● Zapisz w prostszej postaci.

a) $17\sqrt{3} - 23\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - 17\sqrt{5}$

c) $-3,6\sqrt{11} + 7,5\sqrt{11}$

d) $32,75\sqrt{13} - 9\sqrt{13} - 21,5\sqrt{13}$

e) $-5\sqrt[3]{12} - 19\sqrt[3]{12}$

f) $3\frac{2}{9}\sqrt[3]{4} - \frac{7}{9}\sqrt[3]{4}$

● Które z poniższych zdań są prawdziwe?

a) Wyrażenie $8\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$ po sprowadzeniu do prostszej postaci jest równe 8.

b) Wyrażenie $10\sqrt[3]{10} - 6\sqrt[3]{4}$ po sprowadzeniu do prostszej postaci jest równe $4\sqrt[3]{6}$.

c) Wyrażenie $7\sqrt[3]{3} - 8\sqrt[3]{3}$ po sprowadzeniu do prostszej postaci jest równe $-\sqrt[3]{3}$.

d) Wyrażenie $-6,5\sqrt[3]{10} + 7,2\sqrt[3]{10}$ po sprowadzeniu do prostszej postaci jest równe $0,7\sqrt[3]{10}$.

● Którą z poniższych liczb należy odjąć od liczby $-1,7\sqrt{15}$, aby otrzymać liczbę $3\sqrt{15}$?

A. $2,3\sqrt{15}$

B. $-2,3\sqrt{15}$

C. $4,7\sqrt{15}$

D. $-4,7\sqrt{15}$

● Zapisz w prostszej postaci.

a) $3\sqrt{6} - 4\sqrt{7} - 9\sqrt{6} + 11\sqrt{7}$

b) $7\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

c) $15,6 - \sqrt{10} - 9,25 - 2\sqrt{10} + 4\sqrt{10}$

d) $1,5\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{9} - 2,7\sqrt[3]{9}$

e) $27\sqrt[3]{5} - 15\sqrt[3]{4} - 33\sqrt[3]{5} + 9\sqrt[3]{4}$

f) $6\sqrt[3]{2} - \sqrt{2} - 3\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + 5\frac{3}{4}\sqrt{2}$

Na ścianach kostki sześcienniej zapisano sześć liczb w taki sposób, że sumy liczb znajdujących się na przeciwległych ścianach są równe $2\sqrt[3]{10}$. Jaka liczba jest zapisana na ścianie przeciwległej do ściany, na której jest liczba $5 - 2\sqrt[3]{10}$?

- A. 5 B. $4\sqrt[3]{10} - 5$
C. -5 D. $-4\sqrt[3]{10} + 5$

Wyrażenie $3\sqrt{6}$ jest prostszą postacią jednego z poniższych wyrażen. Którego?

- A. $3\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{18}$
B. $2\sqrt{12} - \sqrt{24} : \sqrt{2}$
C. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 4\sqrt{6}$
D. $5\sqrt{6} - 2\sqrt{30} : \sqrt{5}$

Sprawdź, czy podane kwadraty są magiczne.

a)

$\frac{1}{4}(5 - 2\sqrt{3})$	$\frac{5}{2}\sqrt{3}$	$1\frac{3}{4} - 2\sqrt{3}$
$-\frac{3}{2}(1 - \sqrt{3})$	1	$\frac{1}{2}(1 - 3\sqrt{3})$
$\frac{1}{4} + 2\sqrt{3}$	$2 - \frac{5}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{4}(3 + 2\sqrt{3})$

b)

$\frac{1}{3}(4\sqrt{5} - 1)$	$3 + \frac{2}{3}\sqrt{5}$	$\sqrt{5} - \frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{5})$	$\frac{2}{3} + \sqrt{5}$	$1 + \frac{4}{3}\sqrt{5}$
$2 + \sqrt{5}$	$\frac{1}{3}(4\sqrt{5} - 5)$	$\frac{1}{3}(5 + 2\sqrt{5})$

Sprowadź wyrażenie do najprostszej postaci.

- a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50}$
b) $3\sqrt{12} - 1,4\sqrt{75} + \frac{1}{8}\sqrt{48}$
c) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128}$
d) $1\frac{1}{2}\sqrt[3]{24} + 1\frac{1}{3}\sqrt[3]{81} - 7,5\sqrt[3]{3}$

Oblicz wartość wyrażenia.

- a) $2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} - 5\sqrt{10} + \sqrt{40}$
b) $\sqrt{2}(3\sqrt{6} - \sqrt{150}) + 2\sqrt{48}$
c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$
d) $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{320}) \cdot \sqrt[3]{40}$

Oblicz wartość wyrażenia. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

- a) $\sqrt{64 + 225}$
b) $\sqrt{10^2 - 8^2}$
c) $\sqrt{2^2 + \sqrt{441}}$
d) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{216} + 7\sqrt[3]{27}}$
e) $(\sqrt{6})^2 - \sqrt{\frac{4}{9}} + (\sqrt[3]{5})^3$
f) $\sqrt{121} - \sqrt[3]{8} + \sqrt{225} - \sqrt[3]{64}$
g) $\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^2 - \sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2}$
h) $(\sqrt{548})^2 - \sqrt{\frac{1}{12^2}}$
i) $\sqrt{11\sqrt{11\sqrt{81 + 36 + 4}}}$

Które z działań zostało wykonane błędnie?

- A. $\sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 12$
B. $(\sqrt{5})^2 + (\sqrt[3]{25})^3 = 30$
C. $\sqrt{5^2 + 12^2} = 17$
D. $\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{8} = 3$

W miejsce liter wstaw taką liczbę, aby zachodziły podane równości.

- a) $\sqrt{20} - \sqrt{45} = a\sqrt{5}$
b) $\sqrt{192} + 2\sqrt{243} = b\sqrt{3}$
c) $0,5\sqrt[3]{32} - 13\sqrt[3]{108} = c\sqrt[3]{4}$
d) $3\sqrt{147} - \sqrt{108} = d\sqrt{3}$

Podsumowanie działu 4

Ważne pojęcia

pierwiastek kwadratowy

stopień pierwiastka

pierwiastek sześcienny

liczba podpierwiastkowa
liczby niewymierne

Działania na pierwiastkach

Pierwiastek kwadratowy i sześcienny

$$\sqrt{a} = b, \text{ bo } b^2 = a \quad a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ bo } b^3 = a \quad a, b - \text{dowolna liczba}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad a \geq 0$$

$$\sqrt{a^2} = a \quad a \geq 0$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a \quad a - \text{dowolna liczba}$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a \quad a - \text{dowolna liczba}$$

$$\sqrt{121} = 11, \text{ bo } 11^2 = 121$$

$$\sqrt[3]{343} = 7, \text{ bo } 7^3 = 343$$

$$(\sqrt{0,28})^2 = 0,28$$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2} = \frac{5}{7}$$

$$(\sqrt[3]{5,5})^3 = 5,5$$

$$\sqrt[3]{-15^3} = -15$$

Mnożenie pierwiastków kwadratowych i sześciennych

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b} \quad a, b - \text{dowolna liczba}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{25}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$$

Dzielenie pierwiastków kwadratowych i sześciennych

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad a \geq 0, b > 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad a - \text{dowolna liczba}, b \neq 0$$

$$\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka

$$\sqrt{2,88} = \sqrt{1,44 \cdot 2} = \sqrt{1,44} \cdot \sqrt{2} = 1,2\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \cdot 3 = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} \cdot \sqrt[3]{3} = \frac{\sqrt[3]{3}}{4}$$

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

Liczbę podpierwiastkową przedstawiamy w postaci iloczynu czynników, z których przynajmniej jeden jest kwadratem liczby wymiernej.

Liczbę podpierwiastkową przedstawiamy w postaci iloczynu czynników, z których przynajmniej jeden jest sześcianem liczby wymiernej.

$$\sqrt[3]{-15} = -\sqrt[3]{15}$$

Włączanie czynnika pod znak pierwiastka

$$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$$

Czynnik będący liczbą wymierną dodatnią zapisujemy jako pierwiastek z kwadratu tej liczby i korzystamy z tego, że iloczyn pierwiastków jest równy pierwiastkowi iloczynu.

$$0,2\sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{0,2^3} \cdot \sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{0,2^3 \cdot 50} = \sqrt[3]{0,4}$$

Czynnik będący liczbą wymierną zapisujemy jako pierwiastek sześcienny z sześcianu tej liczby i korzystamy z tego, że iloczyn pierwiastków jest równy pierwiastkowi iloczynu.

Czy już umiesz?

- 1 Błędnie obliczono pierwiastek w przykładzie
A. $\sqrt{169} = 13$ B. $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ C. $\sqrt{16\frac{4}{9}} = 4\frac{2}{3}$ D. $\sqrt{6\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$
- 2 Pierwiastek sześcienny z liczby $11\frac{25}{64}$ jest równy
A. $2\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{11}$ C. $2\frac{5}{8}$ D. $\frac{5}{8}\sqrt[3]{11}$
- 3 Krawędź sześciennego akwarium o objętości 64 litrów ma długość
A. 8 dm B. 40 cm C. 0,08 m D. 0,4 dm
- 4 Wartość wyrażenia $(\sqrt{3})^2 - (\sqrt[3]{2})^3$ jest liczbą
A. ujemną. B. pierwszą.
C. odwrotną do liczby -1. D. przeciwną do liczby -1.
- 5 Wartość wyrażenia $25 - 2 \cdot \sqrt[3]{64} + 0,25 \cdot \sqrt{64}$ jest równa
A. 19 B. 18 C. 15 D. 11
- 6 Błędnie oszacowano wartość pierwiastka w przykładzie
A. $10 < \sqrt{102} < 11$ B. $1 < \sqrt[3]{7} < 2$
C. $7 < \sqrt{50} < 8$ D. $8 < \sqrt[3]{65} < 9$
- 7 Wyrażenie: $\sqrt{\left(-2\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2}$ ma wartość równą
A. 0,75 B. 1,25 C. 3,75 D. 5,25
- 8 Spośród wyrażeń:
I. $\sqrt{111} - 12$ II. $10 - \sqrt{75}$ III. $\sqrt[3]{40} - 4$ IV. $5 - \sqrt[3]{100}$
najmniejszą wartość ma wyrażenie
A. I B. II C. III D. IV



Spośród wyrażeń:

I. $\sqrt{130} - \sqrt{30}$ II. $\sqrt{32} + \sqrt[3]{60}$ III. $\sqrt{125} - \sqrt[3]{55}$ IV. $\sqrt[3]{59} + \sqrt[3]{61}$

największą wartość ma wyrażenie

- A. I B. II C. III D. IV

- 10 Pole trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna ma długość $4\sqrt{5}$, a druga ma długość $3\sqrt{10}$, jest równe

- A. $60\sqrt{2}$ B. 60 C. $30\sqrt{2}$ D. 30

- 11 Liczba 2 jest równa

A. $\sqrt{\frac{1}{3}} : \sqrt{12}$ B. $\frac{\sqrt[3]{200}}{\sqrt[3]{100}}$ C. $\sqrt{1\frac{1}{3}} : \sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt[3]{-800} \cdot \sqrt[3]{0,01}$

- 12 Poprawnie wyłączono czynnik przed znak pierwiastka w przykładzie

A. $\sqrt{300} = 3\sqrt{10}$ B. $\sqrt{320} = 16\sqrt{10}$
C. $\sqrt{325} = 5\sqrt{15}$ D. $\sqrt{363} = 11\sqrt{3}$

- 13 Poprawny zapis jest w przykładzie

A. $\sqrt{512} = 32\sqrt{2}$ B. $0,3 \cdot \sqrt{20} = \sqrt{1\frac{4}{5}}$
C. $0,4 \cdot \sqrt[3]{100} = \sqrt{\frac{4}{5}}$ D. $\sqrt[3]{80} = 4\sqrt[3]{5}$

- 14 Wyrażenie $\sqrt{80} + \sqrt{45}$ zapisane w najprostszej postaci jest równe

- A. $7\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{5}$ C. $7\sqrt{10}$ D. $5\sqrt{10}$

- 15 Spośród poniższych zdań wybierz zdanie fałszywe, jeśli wiadomo, że: $a = \sqrt{\frac{120}{3}}$, $b = \sqrt{\frac{216}{4}}$, $c = \sqrt{\frac{270}{5}}$.

- A. Liczba c jest większa od 3. B. Liczby a, b, c spełniają warunki: $b > a > c$.
C. Iloczyn liczb a i b jest większy od 12. D. Iloczyn liczb a i c jest równy $12\sqrt{15}$.

- 16 Wyrażenie $3\sqrt{5} + \sqrt[3]{4} - \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{4} - 2\sqrt{5}$ jest równe

- A. $2\sqrt{5} + 4\sqrt[3]{4}$ B. $2\sqrt{5} - 2\sqrt[3]{4}$ C. $4\sqrt{5}$ D. $4\sqrt[3]{4}$



Liczbą odwrotną do liczby $\sqrt[3]{5}$ jest liczba

A. $-\sqrt[3]{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$ D. 5^3



Usuając niewymierność z mianownika ułamka $\frac{10}{\sqrt{5}}$, otrzymamy

- A. $5\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{5}$

- 19 Z podanych liczb wypisz te, które nie są liczbami wymiernymi.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$$

$$2\frac{1}{3}$$

$$\sqrt{26}$$

$$\sqrt{144}$$

$$-5\frac{3}{7}$$

$$\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}$$

- 20 Wykonaj działania. Wyniki zapisz w najprostszej postaci.
- a) $4\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{27})$ b) $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{81})\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt{3}(\sqrt{8} + \sqrt{12}) - \sqrt{2}(2\sqrt{18} - \sqrt{3})$
- 21 Podaj liczbę odwrotną i liczbę przeciwną do liczby $\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 + \frac{4}{9}}\right)^2$.
- 22 Oblicz średnią arytmetyczną liczb: $5\sqrt{5} + \sqrt{8}$, $13 - \sqrt{45}$, $8 - \sqrt{20}$, $3(\sqrt{72} - 7)$, $\sqrt{50}$.
- 23 Wiadomo, że $b = 5\frac{1}{3} + 6\frac{2}{3}\sqrt{3\frac{1}{16}} - \frac{1}{3} \cdot (-3)^2 - (\sqrt{7^2} + \sqrt{(-3)^2})$.
- a) Wyznacz liczbę odwrotną i liczbę przeciwną do b .
b) Oblicz 80% liczby b .
- 24 Na tablicy napisanych jest pięć liczb w kolejności malejącej. Każda kolejna liczba jest mniejsza od poprzedniej o $1 + 2\sqrt{3}$. Najmniejsza z tych liczb jest równa $4 + \sqrt{3}$.
- a) Zapisz liczby, które są zapisane na tablicy.
b) Oblicz sumę tych liczb.
- 25 Oblicz.
- a) $\sqrt{7 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{7 \cdot \sqrt{49}}}}}}}$ b) $\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{27}}}}}}$
- c) $\sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a^2}}}}}}}$, $a \geq 0$ d) $\sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt[3]{b^3}}}}}}$
- 26 Oblicz, ile najmniej decymetrów kwadratowych kolorowego papieru potrzeba na obklejenie nim sześciennego pudełka, którego objętość jest równa 448 dm^3 . Przyjmij, że $\sqrt[3]{7} \approx 1,91$.
- 27 Po włączeniu komputera na jego ekranie wyświetlana jest liczba 1. Po upływie pięciu sekund liczba 1 znika, a pojawia się inna liczba. Po upływie kolejnych pięciu sekund wyświetlona liczba znika i pojawia się następna, itd. Kolejne liczby są iloczynem liczby $\sqrt[3]{3}$ i poprzednio wyświetlonej liczby.
- a) Jaka liczba będzie wyświetlona na ekranie monitora po upływie 20 sekund od momentu włączenia komputera?
b) Jaka liczba będzie wyświetlona na ekranie monitora po upływie 33 sekund od momentu włączenia komputera?
c) Po upływie ilu sekund, licząc od momentu włączenia komputera, na jego ekranie pojawi się liczba $9\sqrt[3]{9}$?
d) Jaka liczba będzie szesnastą liczbą, która pojawi się na ekranie tego komputera?
- 28 Oblicz pole i obwód prostokąta, którego boki mają długości odpowiednio równe $\sqrt{10} \text{ m}$ i $\sqrt{90} \text{ m}$.
- 29 Oblicz objętość prostopadłościanu o długościach krawędzi równych odpowiednio: $3\sqrt{6}$, $3\sqrt{15}$, $4\sqrt{15}$.
- 30 Rozwiąż podane równania.
- a) $a\sqrt{3} = 9$ b) $b\sqrt{2} = \sqrt{10}$ c) $d\sqrt{7} - 2 = 5$
- 31 Pole prostokąta, którego jeden bok jest pięciokrotnie dłuższy od drugiego boku, jest równe 270 cm^2 . Oblicz obwód tego prostokąta.

- 32 Oblicz pole prostokąta, którego jeden bok ma długość $5\sqrt{2}$ cm, a drugi jest trzy razy dłuższy. Jaka długość ma bok kwadratu, którego pole jest równe polu tego prostokąta?
- 33 Oblicz długość boku kwadratu, który ma pole dwa razy większe od pola kwadratu o boku długości 6 cm.
- 34 Oblicz pole i obwód kwadratu, którego przekątna ma długość $3\sqrt{14}$.
- 35 Wyznacz różnicę obwodów dwóch kwadratowych działek o polach równych 20 a i 45 a.
- 36 Zakłada się, że na 1 metrze kwadratowym powierzchni mogą stać cztery osoby. Na pewnym kwadratowym placu może stać 196 tys. osób. Ile metrów obwodu ma ten plac?
- 37 Wyznacz długość przekątnej kwadratu o boku:
a) 12 cm z dokładnością do 0,1, b) 0,3 m z dokładnością do 0,001.
- 38 Wyznacz długość boku kwadratu, którego przekątna ma długość
a) $1,5\sqrt{2}$ cm **b) 8 cm** c) $2\sqrt{6}$ m
- 39 Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu jest równa $48\sqrt{3}$ dm. Oblicz pole powierzchni i objętość tego sześcianu.
- 40 Wysokość prostopadłościanu o podstawie kwadratu jest trzykrotnie dłuższa od krawędzi podstawy. Objętość tego prostopadłościanu jest równa 120 cm^3 . Oblicz:
a) sumę długości krawędzi tego prostopadłościanu,
b) pole powierzchni tego prostopadłościanu.
- 41 Oblicz, ile metrów bieżących siatki potrzeba na ogrodzenie kwadratowej działki, której przekątna ma długość 50 m. Przyjmij, że na bramę należy odliczyć 3 m. Jaki będzie koszt zakupu siatki, jeżeli cena jednego metra bieżącego siatki jest równa 24,60 zł? Wyniki podaj z dokładnością do 0,01.
- 42 Kwadratowa działka o polu powierzchni 4,48 a ogrodzona jest siatką, której wysokość jest równa 1,8 m. Furtka, znajdująca się na jednym z boków tej działki, ma szerokość równą 0,8 m. Oblicz pole powierzchni siatki z dokładnością do 0,01. Do obliczeń możesz wykorzystać kalkulator.
- 43** Krawędzie prostopadłościennego pudełka pozostają w stosunku: 1 : 3 : 4. Objętość tego pudełka jest równa 1296 cm^3 . Oblicz:
a) pole powierzchni tego pudełka z dokładnością do 0,01,
b) sumę długości wszystkich krawędzi tego pudełka z dokładnością do 0,1.
Przyjmij, że $\sqrt[3]{4} = 1,5874$.



Liczba Szeherezady

Według legendy Szeherezada poślubiła okrutnego sułtana Szachrijara, który nie darzył jej uczuciem. Szeherezada każdej nocy opowiadała mu interesującą baśń, ale tuż przed wschodem słońca przerywała opowiadanie w najciekawszym momencie. Jej opowieści były tak fascynujące, że sułtan nie mógł się doczekać kolejnej nocy, żeby poznać zakończenie baśni. Jednak Szeherezada po skończeniu jednej opowieści zaczynała następną. Tak było przez 1001 nocy, aż do momentu, gdy sułtan Szachrijar zakochał się w swojej żonie.



Legenda o Szeherezadzie zamieszczona jest w prologu *Baśni z tysiąca i jednej nocy*, pochodzących z IX–X w. i zaliczanych do arcydzieł literatury światowej.

Ponieważ, według legendy, Szeherezada opowiadała baśnie przez 1001 nocy, więc liczba 1001 nazywana jest jej imieniem.

1001 jest sumą kwadratów trzech liczb naturalnych.

$$1001 = 2^2 + 6^2 + 31^2$$

1001 jest sumą sześciątów dwóch liczb naturalnych. Jest najmniejszą liczbą naturalną czterocyfrową, którą można zapisać w postaci takiej sumy.

$$1001 = 10^3 + 1^3$$

1001 to liczba sfeniczna.

Liczba sfeniczna to liczba naturalna, która jest iloczynem trzech różnych liczb pierwszych. Przykładami liczb sfenicznych są:

30 (bo $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$), **105** (bo $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$),

385 (bo $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$).

Liczba 1001 jest iloczynem trzech kolejnych liczb pierwszych:

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Każda liczba sfeniczna ma 8 dzielników.

Dzielniki liczby 1001: **1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001.**

1001 to liczba palindromiczna.

Liczba palindromiczna to liczba, która przy czytaniu z lewej strony do prawej i odwrotnie (wspak) jest jednakowa. Na przykład: 12321, 758857, 121 to liczby palindromiczne. Liczbami palindromicznymi są:

- potęgi liczby 11, których wykładnik jest liczbą naturalną dodatnią, mniejszą od 5:

$$11^1 = 11$$

$$11^2 = 121$$

$$11^3 = 1\,331$$

$$11^4 = 14\,641$$

- kolejne kwadraty liczb zapisanych za pomocą samych 1:

$$1^1 = 1$$

$$11^2 = 121$$

$$111^2 = 12\,321$$

$$1111^2 = 1\,234\,321$$

Każda liczba palindromiczna zapisana za pomocą parzystej liczby cyfr jest podzielna przez 11.

$$3\,553 : 11 = 323$$

$$483\,384 : 11 = 43\,944$$

Zadanie 1

Podaj trzy liczby sfeniczne większe od 1001 i wypisz ich dzielniki.

Zadanie 2

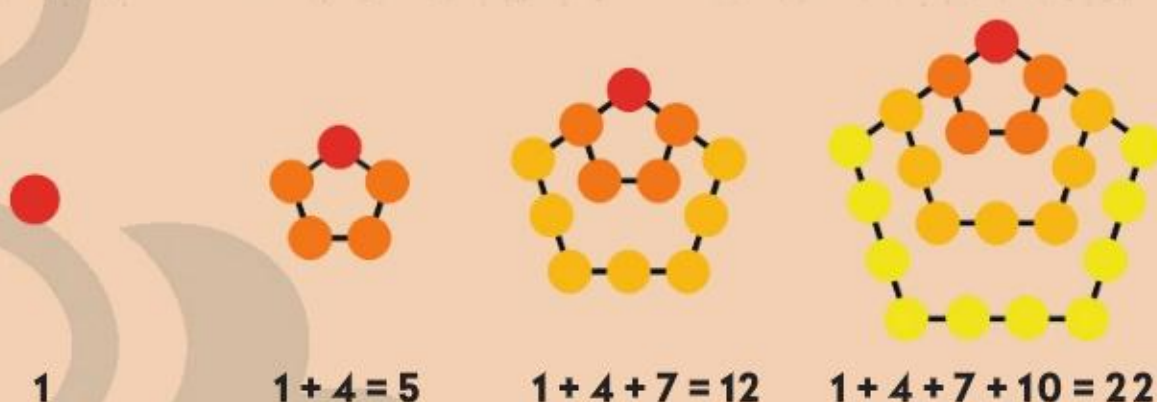
Znajdź wszystkie liczby palindromiczne sześciocyfrowe, których suma cyfr jest równa 6.

Jeżeli dwukrotnie zapiszemy liczbę trzycyfrową, to okaże się, że zapisaliśmy liczbę sześciocyfrową będącą iloczynem liczby 1001 i tej liczby trzycyfrowej.

$$325\ 325 = 1001 \cdot 325$$

1001 to liczba pięciokątna.

Liczy pięciokątne to szczególny przypadek liczb wielokątnych. Zostały one stworzone przez Pitagorejczyków, którzy uważali, że każda liczba naturalna dodatnia jest zbiorem jedności oraz że można ją sobie wyobrazić jako zbiór punktów położonych tak, że tworzą one wielokąt foremny (czyli wielokąt o jednakowych długościach boków i jednakowych kątach).



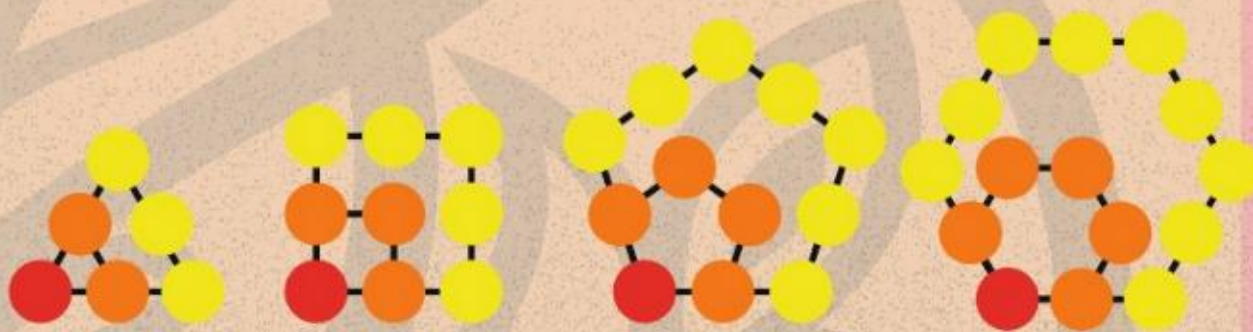
Pierwsze liczby pięciokątne to: 1, 5, 12, 22.

Liczy pięciokątne można wyznaczyć, korzystając ze wzoru:

$$\frac{3n(n-1)}{2} + n \quad \text{gdzie } n \text{ to numer liczby pięciokątnej.}$$

Liczba 1001 to 26. liczba pięciokątna, ponieważ:

$$\frac{3 \cdot 26 \cdot (26-1)}{2} + 26 = \frac{78 \cdot 25}{2} + 26 = 975 + 26 = 1001$$



Zadanie 3

Znajdź w internecie więcej informacji na temat liczb wielokątnych. Podaj wzory na wyznaczanie liczb trójkątnych, czworokątnych i sześciokątnych.

Cecha podzielności przez 1001.

Aby sprawdzić, czy dana liczba jest podzielna przez 1001, najpierw „dzielimy” jej cyfry od prawej strony na trzycyfrowe grupy (trzycyfrowe liczby), przy czym ostatnia grupa może być złożona również z 1 lub 2 cyfr. Liczba jest podzielna przez 1001, jeżeli różnica pomiędzy sumą trzycyfrowych liczb stojących na nieparzystych miejscach, licząc od prawej strony, i sumą trzycyfrowych liczb stojących na parzystych miejscach jest równa zero lub jest wielokrotnością 1001.

Na przykład:

„dzielimy” liczbę na grupy, zaczynając od prawej strony
807 030 605 381

obliczamy sumy liczb stojących na miejscach parzystych i na miejscach nieparzystych

$$807 + 605 = 1412 \quad 30 + 381 = 411$$

różnica jest podzielna przez 1001

$$1412 - 411 = 1001$$

Możemy postąpić w inny sposób:

od liczby „odcinamy” trzycyfrową liczbę znajdującą się po prawej stronie

$$807\ 030\ 605\ 381$$

od otrzymanej liczby odejmujemy „odciętą” liczbę

$$807\ 030\ 605 - 381 = 807\ 030\ 224$$

od otrzymanej liczby ponownie „odcinamy” trzycyfrową liczbę znajdującą się po prawej stronie

$$807\ 030\ 224$$

od otrzymanej liczby odejmujemy liczbę „odciętą”

$$807\ 030 - 224 = 806\ 806$$

od otrzymanej liczby ponownie „odcinamy” trzycyfrową liczbę znajdującą się po prawej stronie

$$806\ 806$$

odejmujemy liczby z powstałych grup

$$806 - 806 = 0$$

Różnica otrzymana w każdym z tych sposobów jest liczbą podzielną przez 1001, więc liczba **807 030 605 381** jest podzielna przez 1001.

Zadanie 4

Sprawdź, czy numer twojego telefonu i twój numer PESEL są liczbami podzielnymi przez 1001.

Odpowiedzi do zadań

1. Liczby

1.1 Zapis liczb w systemie rzymskim (s. 8)

1. 1944 2. a) 228 b) 444 c) 1144 d) 76 e) 1509 f) 969

3. a) CCCXCVII b) CCXLII c) MCDLXV

d) MDCXXIII e) MLXXI f) MMVIII

5. a) CMLXVI b) MXXV c) MCDX d) MDXXV

e) MCMXVIII f) MCMXXXIX g) MCMLXXVIII

h) MCMLXXXI

7. MMM = 3000, CMXL = 940, CD = 400, DC = 600

8. Jedną 9. 1000 = M 10. CMXCIX

11. a) XLIV – 44, MDCL – 1650

b) VIII – 8, MMMD – 3500

1.2 Dzielniki i wielokrotności. Podzielność liczb (s. 11)

1. 1, 2, 3, 2, 5, 6, 3, 2, 7

2. a) 145 r 2 b) 213 r 2 c) 198 r 1 d) 355 r 15

3. a) $D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

b) $D_{67} = \{1, 67\}$ c) $D_{81} = \{1, 3, 9, 27, 81\}$

d) $D_{99} = \{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$ e) $D_{125} = \{1, 5, 25, 125\}$

f) $D_{132} = \{1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132\}$

5. a) $W_{255} = \{255, 510, 765\}$

b) $W_{124} = \{124, 248, 372, 496, 620, 744, 868, 992\}$

c) $W_{77} = \{154, 231, 308, 385, 462, 539, 616, 693, 770, 847, 924\}$

6. a) 2, 3, 4, 6, 9 b) 2, 3, 5, 6, 9, 10 c) 2, 3, 6

d) 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 7. a) 2, 3, 4, 6 b) 3, 5, 9 c) 2, 3, 4, 6, 9

d) 3, 9 8*. a) Tak b) Nie c) Tak d) Nie

1.3 Liczby pierwsze i liczby złożone (s. 15)

1. a) 76, 77, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 92, 93, 94

b) 101, 103, 107, 109, 113

3. a) $135 = 3^3 \cdot 5$ b) $318 = 2 \cdot 3 \cdot 53$ c) $468 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$

d) $576 = 2^6 \cdot 3^2$ e) $1410 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 47$ f) $2025 = 3^4 \cdot 5^2$

g) $4806 = 2 \cdot 3^3 \cdot 89$ h) $14\,112 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

4. a) $NWD(110, 726) = 22$, $NWW(110, 726) = 3630$

b) $NWD(256, 640) = 128$, $NWW(256, 640) = 1280$

c) $NWD(279, 248) = 31$, $NWW(279, 248) = 2232$

d) $NWD(1200, 1740) = 60$, $NWW(1200, 1740) = 34\,800$

6. a) $NWD(30, 50) = 10$, $NWW(30, 50) = 150$

b) $NWD(16, 40) = 8$, $NWW(16, 40) = 80$

c) $NWD(21, 49) = 7$, $NWW(21, 49) = 147$

d) $NWD(18, 35) = 1$, $NWW(18, 35) = 630$

e) $NWD(24, 120) = 24$, $NWW(24, 120) = 120$

f) $NWD(250, 300) = 50$, $NWW(250, 300) = 1500$

7*. $k = 17$, $n = 34$ 8*. $s = 14$, $m = 8$ 9*. $t = 5$, $p = 10$

10. a) P b) F c) P d) P e) F 11. 9

13*. 12 735, 15 735, 18 735, 11 730, 14 730, 17 730

1.4 Liczby całkowite i działania na liczbach całkowitych (s. 20)

1. a) 27 b) -40 c) -125 d) -69 e) -5 f) 26

2. a) -4 b) -16 c) 2 d) 9 e) 30

3. a) 9 b) -11 c) 35 d) 1 e) -50 f) 81

4. a) 0 b) 9 c) -197 5. a) 0 b) 40 c) -1 d) 115

6. a) 11 b) 15 c) 3 d) 23 e) 45

7. a) -26 b) -9 c) -56 d) -134 e) -45

8. a) 11 b) -19 c) -162 d) -95 9. a) + b) + c) - d) 0

10. a) > b) < c) < 11. -115 zł 12. 1165 zł

13. a) -2 b) 0 c) 4 d) 10 e) -1 f) -5

14. -315 15. 384 16. a) 40 b) 0

17. a) 64 b) 64 c) 30 d) -23 e) 0 f) -1

1.5 Rozwinięcia dziesiętne (s. 24)

1. a) 1,4 b) 7,15 c) 0,375 d) 1,6875 e) 9,032 f) 0,0308

2. 0,(3), 0,8(3), 0,(142857), 0,(2), 2,(27), 0,958(3), 0,1, 0,2, 0,6(45), 0,46

3. C 4. C 5. a) = b) > c) < d) < e) > f) =

6. a) np. 2 b) np. 4 c) np. 7 7. $\frac{5}{18}, \frac{4}{15}, \frac{17}{6}, \frac{6}{33}$

8. a) 1,(3) b) 0,(7) c) 0,(15) d) 0,20(45) e) 1,(4) f) 1,(142857)

9. a) 0,666... b) $\frac{5}{9}$ c) 0,3636... d) $\frac{5}{33}$

10. $\frac{13}{18} = 0,7222... = 0,7(2)$, $\frac{6}{37} = 0,162162... = 0,(162)$,

$\frac{29}{22} = 1,31818... = 1,3(18)$, $\frac{79}{27} = 2,925925... = 2,(925)$

11. a) dwunasta cyfra to 8, czterdziesta cyfra to 1

b) dwudziesta cyfra to 7, pięćdziesiąta cyfra to 7

c) piętnasta cyfra to 4, sześćdziesiąta cyfra to 5

1.6 Szacowanie. Zaokrąglanie liczb (s. 28)

1. a) 400 b) 350 c) 352 d) 351,7 e) 351,73 f) 351,729

2. a) 0, 50, 70, 510, 31 900, 0 b) 0, 54, 73, 513, 31 896, 1

c) 0,3; 53,8; 72,7; 512,6; 31 896; 1 3. a) nie b) nie c) tak

4. a) 0,3, 0,4, 0,2, 0,8 b) 0,38, 0,06, 0,15

c) 0,292, 2,692, 0,571 5. 0,167 kg 6. a) 8 zł b) 7,90 zł

7. 49 cali 8. 48,3 cm 9. 40 cm 10. D

1.7 Odległość liczb na osi liczbowej (s. 33)

2. a) -8 i 8 b) $-\frac{3}{4}$ i $\frac{3}{4}$ c) -1,9 i 1,9 d) 0 e) $-2\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{2}$

4. a) -1 i 5 b) -0,5 i 4,5 c) 0,7 i 3,3 5. a) 4 b) 3 c) 7

d) 10 6. 100, 26, $7\frac{3}{7}$, 0,125, 0, 0,32, 18, $45\frac{4}{5}$

7. a) 13 b) 5 c) -8 d) 33 e) -8 f) 53 g) 8 h) 1

8. a) 5 b) 5 c) 7 d) 3 e) 0 f) -14

1.8 Liczby wymierne. Porównywanie liczb wymiernych (s. 37)

1. $-\frac{9}{1}, \frac{19}{4}, \frac{1}{10}, -\frac{13}{5}, \frac{532}{100}, \frac{22}{2}, -\frac{34}{2}$

2. a) 0, 17 b) -36, $-28\frac{3}{4}$, -25,5, -16,95, $-2\frac{3}{8}$

c) -36, 0, 17 d) -36, $-28\frac{3}{4}$, -25,5, -16,95, $-2\frac{3}{8}$, 0

e) $10\frac{1}{3}$, 17, $25\frac{1}{2}$, 28,75 f) 0, $10\frac{1}{3}$, 17, $25\frac{1}{2}$, 28,75

3. a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 b) -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1

c) -5, -4, -3, -2, -1, 0 d) 1, 2, 3, 4, 5, 6

e) -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 4. a) > b) > c) < d) <

5. a) 7 b) 10 c) 9 d) 6 e) 1 f) 0 g) 18 h) 5 i) 9
 6. $-3 < -2,25 < -\frac{1}{2} < 0,25 < 1\frac{3}{4} < 2,5 < 3,75$
 7. a) np. 0,52 b) np. -5,335 c) np. $-\frac{2}{5}$
 8. a) $x < 6$ b) $x > -7$ c) $x < -0,5$ d) $x \geq -6,5$
 e) $x \geq 1,25$ f) $x > 0$ g) $x \geq 0$
 10. a) $-1 < x \leq 7$ b) $-14 < y < -8$ c) $-3 \leq z \leq 4,5$

1.9 Działania na liczbach wymiernych (s. 43)

1. a) -4,896 b) $-3\frac{31}{60}$ c) $-5\frac{1}{28}$ d) 0
 2. a) -0,045 b) -3 c) -8 d) $-\frac{27}{275}$
 3. $2\frac{13}{40}$ 4. $6\frac{1}{10}$ 5. $4\frac{1}{8}$ 6. $-2\frac{1}{7}$
 7. a) $12\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $1\frac{3}{5}$ d) $3\frac{1}{4}$ e) $19\frac{3}{4}$ f) $1\frac{1}{4}$
 g) -10 h) 4,85 i) -80 j) -159
 8. a) $1\frac{1}{8}$ b) 35 c) $\frac{11}{50}$
 9. liczba przeciwna $1\frac{19}{25}$, liczba odwrotna $-\frac{25}{44}$ 10. $\frac{1}{3}$

Czy już umiesz? (s. 47)

1. C 2. A 3. D 4. C 5. A 6. B 7. B
 8. B 9. A 10. A
 11. a) MMCCCXC b) MMDXXXVI
 c) MMCDXXXVI d) MMMCXLIX
 12. a) • IV, VI, IX, XI, XV, XL, LI, LV, LX, XC, CI, CV, CX, CL, CD, DI, DV, DX, DL, DC, CM, MI, MV, MX, ML, MC, MD, • II, XX, CC, MM
 b) • DIV, DVI, DIX, DXI, DXV, DXL, DLI, DLV, DLX, DXC, DCI, DCV, DCX, DCL, CMI, CMV, CMX, CML, • DII, DXX, DCC
 13. b) 355 lat c) 237 lat d) 42 lata e) 19 lat
 14. a) $NWD(21, 15) = 3$ $NWW(21, 15) = 105$
 b) $NWD(16, 56) = 8$ $NWW(16, 56) = 112$
 c) $NWD(65, 91) = 13$ $NWW(65, 91) = 455$
 d) $NWD(153, 117) = 9$ $NWW(153, 117) = 1989$
 e) $NWD(264, 120) = 24$ $NWW(264, 120) = 1320$
 f) $NWD(270, 450) = 90$ $NWW(270, 450) = 1350$
 15. $448 = 2^6 \cdot 7$, $513 = 3^3 \cdot 19$,
 $1044 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 29$, $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, $2925 = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 13$
 16. a) najwyższą żelazo, najniższą tlen
 b) $-218,8 < -210 < -38,8 < -17 < 0 < 120 < 232 < 982 < 1536$
 17. 0,2 kg 18. $\frac{62}{27} = 2,296$, 2,296, 2,30, 2,3
 19. a) 43, 17, 9, 8, 6, 4, 1, 0
 b) 42,7, 16,5, 9,5, 8,2, 6, 4, 0,7, 0
 c) 42,72, 16,55, 9,5, 8,19, 6, 4, 0,70, 0
 d) 42,720, 16,545, 9,500, 8,194, 6,003, 3,997, 0,700, 0
 20. a) 800; Takich liczb jest 100
 b) 3000; Takich liczb jest 1000
 22. a) $x \leq 7$ b) $x < -2,5$ c) $x \geq -9$ d) $x > 4$
 e) $-15 < x < 10$ f) $-3 < x \leq 5$ 23. a) $81,2^\circ\text{C}$
 24. $\frac{2}{3} = 0,6$, $\frac{25}{36} = 0,69(4)$, $\frac{65}{99} = 0,65$, $\frac{73}{110} = 0,66(36)$,
 $\frac{87}{135} = 0,6(4)$, $\frac{25}{36} > \frac{2}{3} > \frac{73}{110} > \frac{65}{99} > \frac{87}{135}$
 25. a) a i c b) b i d c) a i d, c i d; a i c oraz b i d

26. a) 9 b) -9 c) 0 d) -1 e) $-\frac{1}{2}$ f) -0,25
 g) 20 h) $-8\frac{1}{3}$ 27. 17 km, drugiego dnia
 28. a) -15°C b) 5°C c) -30°C d) 0°C 29. Nie
 30. $2,677(25) < 2,6772(5) < 2,67725 < 2,67(725) < 2,6(7725)$
 31. a) -4 b) $-8\frac{13}{60}$ c) 3,624 d) 12
 32. 11 i $7\frac{1}{2}$ l 33. 250 km 34. 96,6 km/h

2. Procenty

2.1 Procent a ułamek (s. 55)

1. a) $0,07 = \frac{7}{100}$, $0,49 = \frac{49}{100}$, $0,21 = \frac{21}{100}$, $1,29 = \frac{129}{100}$
 b) $0,4 = \frac{2}{5}$, $0,015 = \frac{3}{200}$, $0,006 = \frac{3}{500}$, $0,1212 = \frac{303}{2500}$
 c) $0,0035 = \frac{7}{2000}$, $0,0026 = \frac{13}{5000}$, $0,017 = \frac{17}{1000}$,
 $0,028 = \frac{7}{250}$ d) $0,0325 = \frac{13}{400}$, $0,00625 = \frac{1}{160}$,
 $0,03(6) = \frac{11}{300}$, $0,120(6) = \frac{181}{1500}$
 2. a) 18% b) 32% c) 50% d) 25% 3. b), c)
 4. a) 21%, 12%, 112,5%, 315%
 b) $116\frac{2}{3}\%$, $322\frac{2}{9}\%$, $242\frac{6}{7}\%$, $118\frac{2}{11}\%$
 c) 8%, 140%, 10,5%, 20 900%
 5. a) 70% b) $16\frac{2}{3}\%$ c) 4%
 6. a) 0,18 lub $\frac{9}{50}$ b) 0,05 lub $\frac{1}{20}$ c) 0,2 lub $\frac{1}{5}$
 7. Adam 8. z historii 9. 25%
 10. a) P b) F c) F d) F e) P f) P 11. C 12. B

2.2 Obliczanie procentu danej liczby (s. 59)

1. a) 1 b) 2 c) 150 d) 25 e) 25 f) 27
 2. a) 14, 46, 80, 130 b) 33,6, 110,4, 192, 312
 c) 105, 345, 600, 975 3. 3,5, 17,5, 70, 245
 4. 27 zł 5. 2531,20 zł 6. a) 37,50 zł b) 15 zł c) 8,25 zł
 7. Nie 8. W drugim roku 132 uczniów, a w trzecim roku 231 uczniów. 9. 2 uczniów 10. A 11. A

2.3 Obliczanie liczby na podstawie danego jej procentu (s. 62)

1. a) 600 b) 120 c) 96 d) $40\frac{2}{3}$
 2. a) 22,5 b) 117 c) 319,5 d) 774
 3. 4000 zł 4. 256 zł 5. 2560 zł 6. 30 uczniów
 7. a) P b) P 8. 72 km 9. 150 drzew 10. 64 zł
 11. a) 30 punktów b) język angielski c) 13,5 punktów
 12. 1,5 kg, 4 kg, 0,9 kg, 5,75 kg

2.4 Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba (s. 66)

1. a) 25% b) 400% 2. a) 88% b) 12% c) $13\frac{7}{11}\%$
 3. a) 92% b) 8% 4. 20% 5. a) $66\frac{2}{3}\%$ b) 150%
 6. 2,4% 7. 10%
 8. masło 30%, cukier 20%, mąka 40%, sól 0%, jajko 10%
 9. $83\frac{1}{3}\%$ 10. Chłopiec tak, dziewczynka nie.

2.5 Obliczania procentowe w praktyce (s. 71)

1. a) 18 b) 36 c) 54 2. pozytywną
 3. a) 121,50 zł b) 486 zł c) 729 zł
 4. a) 20 000 zł b) 1600 zł c) 500 zł 5. 2180 zł
 6. 500 zł 7. 186,96 zł 8. 80,25 zł 9. 4,32 zł
 10. 30,75 zł 11. 405 zł 12. 12 000 zł na lokatę 8%
 13. 15 000 zł 14. C 15. B
 16. a) Grecja b) 450 Polaków c) 80% d) 75 turystów

Czy już umiesz? (s. 74)

1. D 2. A 3. C 4. C 5. B 6. A 7. B, C
 8. D 9. D 10. C 11. D 12. A 13. C 14. 30%
 15. Nie 16. 200 17. 18 000 m² 18. 1248 zł
 19. 36 zł 20. 49% 21. 21 22. 400 osób
 23. 400 uczniów 24. 350 zł 25. $33\frac{1}{3}\%$ 26. $8\frac{1}{3}\%$
 27. 30% 28. a) 88% b) 12%
 29. a) $53\frac{4}{7}\%$ b) 25% c) 8 uczniów
 30. 15% 31. 60% 32. 5222,75 zł 33. 3000 zł
 34. 1760 zł 35. 2829 zł 36. Tak

3. Potęgi

3.1 Potęga liczby wymiernej o wykładniku naturalnym (s. 84)

1. a) 81, $\frac{36}{49}$, $\frac{121}{64}$, 0,81, 0, 0,0144
 b) -64, -1,728, $-\frac{1}{8}$, -1, 0,000027, $\frac{8}{125}$, $\frac{343}{216}$
 2. a) 1 b) -1 c) -125 d) $\frac{100}{49}$ e) 0,0081 f) -0,00032
 3. a) 2⁴ b) 2¹ c) 2⁵ d) 2⁷ e) 2³ f) 2⁹
 4. a) 4² b) -2⁵ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ d) $\left(\frac{10}{3}\right)^2$ e) -0,4³ f) 1,5³
 5. a) 16² b) 4⁴ c) 2⁸ d) 256¹
 6. a) 1³ b) -3³ c) -7³ d) 10³ e) 2³ f) -5³
 7. a) 2⁵ b) -20³ c) 2⁶, (-2)⁶, 4³, 8², (-8)² d) 2⁴, 4², (-2)⁴, (-4)²
 e) 12², (-12)² f) -10⁷
 8. a) < b) > c) < d) = e) < f) > g) > h) > i) =
 9. 4³, (-0,9)⁴, (-5)², -(-6)³
 10. a) $\frac{9}{49}$, $\frac{9}{49}$, $-\frac{9}{49}$, $-\frac{9}{49}$ b) $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{-9}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{9}$
 11. $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $175 = 5^2 \cdot 7$, $216 = 2^3 \cdot 3^3$, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$,
 $400 = 2^4 \cdot 5^2$, $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, $4900 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$,
 $1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, $2800 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$
 12. Tak 13. 5 dni 14. 16 razy, 2¹⁴, w 6 dobie
 15. a) Nie b) 7776 c) 24 dni 16. a) 0 b) 5 c) 1 d) 2
 17*. 881 18*. a) 6 b) 4 19*. a) 1 b) 7 20*. 9

3.2 Mnożenie i dzielenie potęg o jednakowych podstawach (s. 89)

1. a) 3⁴ = 81 b) (-2)⁵ = -32 c) (-10)⁶ = 1 000 000
 d) (-1)¹¹ = -1 e) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$ f) 0,2⁵ = 0,00032
 2. a) (-5)⁹ b) $\left(\frac{8}{13}\right)^{11}$ c) (-1,3)⁹
 d) $\left(-\frac{3}{4}\right)^9$ e) (-3y)¹¹ f) $\left(\frac{z}{5}\right)^{21}$
 3. a) 2¹¹ · 2⁴ = 2¹⁵ b) 3¹⁷ · 3² = 3¹⁹
 c) 0,9² · 0,9⁸ = 0,9¹⁰ d) (-3)⁶ · (-3)⁵ = (-3)¹¹

$$e) 0,5^8 \cdot 0,5^3 = 0,5^{11} \quad f) (-4)^3 \cdot (-4)^7 = (-4)^{10}$$

$$g) \left(\frac{2}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{2}{7}\right)^8 \quad h) 3^3 \cdot 3^2 \cdot 3^4 \cdot 3 = 3^{10}$$

$$i) 10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^5 \cdot 10^2 = 10^{14}$$

$$4. a) 2^4 = 16 \quad b) (-2)^5 = -32 \quad c) 3^4 = 81$$

$$d) (-3)^1 = -3 \quad e) (-10)^4 = 10\,000 \quad f) 0,1^4 = 0,0001$$

$$g) \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \quad h) (-1)^{13} = -1 \quad i) 5^3 = 125$$

$$5. a) 3,9^8 \quad b) \left(4\frac{1}{3}\right)^6 \quad c) 6^7 \quad d) a^6, a \neq 0$$

$$e) m^4, m \neq 0 \quad f) b^4, b \neq 0$$

$$6. a) 4^3 \quad b) (-2)^4 \quad c) (-1)^3 \quad d) 6^3 \quad e) \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \quad f) \left(2\frac{1}{3}\right)^2$$

$$7. 256 \text{ razy} \quad 8. a) 10^5 \text{ mm} \quad b) 10^5 \text{ dm} \quad c) 10^7 \text{ cm}$$

$$d) 10^4 \text{ g} \quad e) 10^9 \text{ mg} \quad f) 10^6 \text{ dag}$$

$$9^*. a) \text{ Tak} \quad b) \text{ Tak} \quad c) \text{ Nie}$$

3.3 Potęga potęgi (s. 92)

$$1. a) 4^{18} \quad b) (-10)^8 \quad c) (-x)^{15} \quad d) (-p)^{18} \quad e) m^{54} \quad f) (-t)^{30}$$

$$2. a) (2^2)^5 \quad b) (4^2)^4 \quad c) ((-3)^3)^4, ((-3)^2)^6$$

$$d) \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^3 \quad e) ((0,6)^4)^5, ((0,6)^2)^{10} \quad f) (2^6)^2, (4^3)^2, (8^2)^2$$

$$3. a) (-5)^3 \quad b) 2^{21} \quad c) \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \quad d) \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

$$4. a) a^{19} \quad b) x^{22} \quad c) z^4 \quad d) b^6 \quad e) x^{52} \quad f) c^3 \quad g) y^3 \quad h) m^9$$

$$5. a) ((-7)^7)^2, ((-1,23)^6)^4, -((-10)^3)^7$$

$$b) ((-11)^5)^3, (((-1)^3)^3)^5, -((-5)^8)^2$$

$$c) (0^3)^9, ((-11)^5)^3, (((-1)^3)^3)^5, -((-5)^8)^2$$

$$d) (0^3)^9, ((-7)^7)^2, ((-1,23)^6)^4, -((-10)^3)^7$$

$$6. a) 2^2 a^2 \quad b) -3^3 b^3 \quad c) 7^2 c^4 \quad d) -4^3 d^{15} \quad e) 0,2^3 m^9$$

$$f) (-0,1)^3 p^6 r^9 \quad g) \left(1\frac{2}{3}\right)^2 a^{10} b^6 \quad h) \left(-2\frac{1}{2}\right)^3 x^{12} y^9 z^{15}$$

$$7. a) 10^{10} \quad b) 10^6 \quad 8. 625 \text{ razy}$$

$$10. \text{ np. } 729, \text{ sześć czynników} \quad 11^*. \text{ Nie, } 2^{81} \neq 2^{12}$$

$$12^*. 4^{240} \text{ razy} \quad 13^*. a) \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \quad b) \left(\frac{1}{7}\right)^{20}$$

3.4 Mnożenie i dzielenie potęg o jednakowych wykładnikach (s. 96)

$$1. a) 15^2 = 225 \quad b) 10^3 = 1000 \quad c) \left(-\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$$

$$d) 1^6 = 1 \quad e) (-2)^3 = -8 \quad f) (-3)^4 = 81$$

$$2. a) 2^4 = 16 \quad b) -\frac{1}{32} = -\frac{1}{32} \quad c) 1^7 = 1$$

$$d) (-5)^3 = -125 \quad e) 5^2 = 25 \quad f) \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

$$3. a) \left(\frac{a}{b}\right)^7 \quad b) \left(\frac{2a}{5}\right)^2 \quad c) \left(\frac{4c}{5}\right)^3 \quad d) \left(\frac{2x}{y}\right)^4$$

$$4. a) \frac{a^2}{49} \quad b) \frac{x^{14}}{9} \quad c) -\frac{125}{p^{15}} \quad d) \frac{9a^4}{25b^2}$$

$$5. a) a = 40 \quad b) b = 5 \quad c) k = 6, m = 10$$

$$d) d = 7 \quad e) e = 2,4 \quad f) y = 13, z = 34$$

$$6. 8 \text{ razy} \quad 7^*. 15 \text{ zer} \quad 8^*. a) 6 \quad b) 5$$

3.5 Działania na potęgach (s. 100)

$$1. a) -1 \quad b) \frac{1}{8} \quad c) 16 \quad d) 64 \quad e) 1 \quad f) 3 \quad g) 8 \quad h) \frac{25}{4} \quad i) \frac{25}{9}$$

$$2. a) \frac{1}{16} \quad b) 8\frac{3}{8} \quad c) \frac{1}{9} \quad d) -2$$

$$e) 90 \quad f) -9\frac{1}{2} \quad g) 1\frac{5}{6} \quad h) -8 \quad i) 8$$

$$3. a) 1 \quad b) 16 \quad c) \left(\frac{1}{5}\right)^6 \quad d) 9 \quad e) t^5 \quad f) \frac{8}{27} \quad 4. o 12$$

$$5. a) 0,125 \quad b) \frac{2}{5} \quad 6. a) \frac{1}{4} \quad b) 1 \quad c) 1$$

7. a) 90 b) 440 c) 1225 d) 42 875

8. a) 31 b) -7 c) 17 d) 33 9*. a) 625 b) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

10. a) 2^6 b) 3^5 c) 4^4 d) 6^8 e) 5^9 f) 2^8

11. a) 5^4 b) 3^3 c) 2^6 d) 7^{10} e) 3^9 f) 6^4 13*. 6

3.6 Notacja wykładnicza (s. 104)

1. a) 10^2 b) 10^4 c) 10^6 d) 10^{-3} e) 10^{-5} f) 10^{-9}

2. a) 3 120 000 b) 1 025 000 000 000

c) 0,00238 d) 0,00000008888

3. a) $1,12 \cdot 10^{12}$ b) $6,45 \cdot 10^{12}$ c) $1,8 \cdot 10^{13}$ d) $3 \cdot 10^9$

e) $8 \cdot 10^{-12}$ f) $2,43 \cdot 10^{-6}$ g) $3 \cdot 10^3$ h) $3 \cdot 10^4$

4. a) $3,8 \cdot 10^7$ b) $1,05 \cdot 10^7$ c) $7,2 \cdot 10^8$ 5. ok 909 091 razy

6. 500 s 7. 9667 razy 8. $4,8 \cdot 10^{-2}$ 9. $3 \cdot 10^{10}$

10. a) *Mycoplasma* $3 \cdot 10^{-4}$ mm,

mimiwirus $3,9 \cdot 10^{-4}$ mm b) 1,3 razy

11. ok 30 razy 12. a) $1,2 \cdot 10^{15}$ dag b) $1,65 \cdot 10^{13}$ g

c) $2,5 \cdot 10^{14}$ Tg d) $6 \cdot 10^{13}$ t e) $3,6 \cdot 10^{-20}$ Yg

f) $2,4 \cdot 10^{-17}$ Gg g) $7,8 \cdot 10^{-11}$ Eg h) $8,05 \cdot 10^{-4}$ μ g

Czy już umiesz? (s. 107)

1. B 2. D 3. C 4. B 5. D 6. D 7. D 8. B

9. C 10. D 11. B 12. D 13. A 14. B 15. D

16. a) $\frac{3}{4^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^2 < \frac{3^2}{4}$ b) $\frac{3}{2^3} < \left(\frac{3}{2}\right)^3 < \frac{3^3}{2}$

c) $-\frac{1}{5^2} < \left(-\frac{1}{5}\right)^2 < \frac{(-1)^2}{5}$ 17. a) $\left(3\frac{3}{8}\right)^7$ b) a^{22} c) 11^6

18. 125 krzewów 19. a) 2^{17} b) 4^9 c) 5^7 d) 3^{15}

20*. Nie 21. a) 137 200 b) 1372 c) 4 d) 14

22. 9 razy 23. a) 3^4 b) 2^9 c) 3^{13} d) 2^{11} e) 2^{12} f) 5^8

24. a) $(10ab)^9$ b) $(-24k^2)^7$ c) $(xyz)^{10}$ 25*. I, II, IV

26. a) 10^7 b) 7^2 c) 2^6 d) $\left(\frac{9x}{z}\right)^{12}$

27. a) > b) > c) < d) > e) < f) > 29. 2^{23} razy

30. $125 \cdot 2^{31}$ B 31. 10 cm 32. $1,9891 \cdot 10^{30}$ kg

33. $343,62 \cdot 10^{-24}$ g

4. Pierwiastki

4.1 Pierwiastek kwadratowy i pierwiastek sześcienny (s. 115)

1. a) 3, 5, 6, 12, 13, 25, 19, 17, 30, 200

b) 1, 2, -3, 6, 7, 9, -10, 50

2. a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{5}{13}$ c) $1\frac{1}{4}$ d) $2\frac{1}{5}$ e) 0,2 f) 0,04 g) 1,3 h) 3,2

3. a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $-\frac{5}{8}$ d) $1\frac{1}{4}$ e) $2\frac{1}{2}$ f) -0,2 g) 0,4 h) 1,1

4. C 5. D 6. a) 256 b) $\frac{3}{8}$ c) $2\frac{1}{4}$ d) 6,25

e) 8 f) $4\frac{17}{27}$ g) 0,729 h) $\frac{343}{1000}$

7. a) 22 b) $\frac{6}{17}$ c) $9\frac{1}{9}$ d) 0,007

e) 100 f) $\frac{2}{11}$ g) $-2\frac{1}{4}$ h) -3,1

8. $\sqrt{\frac{16}{100}} < \sqrt{0,25} < \sqrt{\frac{9}{25}} < \sqrt{0,49} < \sqrt{\frac{16}{25}} < \sqrt{1} < \sqrt{2,25}$

9. $\sqrt[3]{1\frac{91}{125}} > \sqrt[3]{0,343} > \sqrt[3]{\frac{8}{27}} > \sqrt[3]{0,000064} >$

$> \sqrt[3]{-1} > \sqrt[3]{-1,331} > \sqrt[3]{-1\frac{61}{64}}$

10. a) 81 b) $\frac{9}{25}$ c) $\frac{49}{144}$ d) 7,84

e) 0,512 f) $\frac{64}{343}$ g) -125 h) -0,001

11. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{8}{9}$ d) $\frac{7}{10}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $-\frac{4}{5}$ g) $\frac{2}{5}$ h) $\frac{4}{5}$

12. a) 7 m b) 1,4 cm c) $2\frac{2}{3}$ dm d) 2,3 cm 13. C

14. a) 5 cm b) 0,6 dm c) 0,1 m d) 8 dm 15. D

16. C 17. 95,2 m 18. nie 19. o 36 m

4.2 Szacowanie wielkości pierwiastków kwadratowych i pierwiastków sześciennych (s. 120)

1. a) 3 i 4 b) 8 i 9 c) 3 i 4 d) 3 i 4 2. B

3. a) 2,8, 4,1, 6,2 b) 2,83, 4,12, 6,24 4. B

5. a) 9,87 b) 47,04 c) 3,46 d) 7,35

6. a) > b) > c) < d) > e) < f) <

7. $7 + \sqrt{2} > 3 + \sqrt{17} > \sqrt{11} - 4 > -\sqrt{8} > 2 - \sqrt{39}$

8. $1,5\sqrt{3} < 0,5\sqrt{40} < \sqrt{26} < 2\sqrt{13} < 3\sqrt{11}$

9. a) np. 10, 11; 6 liczb b) np. 50, 51; 14 liczb

10. a) np. 9, 11; 19 liczb b) np. 65, 71; 60 liczb

4.3 Iloczyn pierwiastków i pierwiastek iloczynu. Iloraz pierwiastków i pierwiastek ilorazu (s. 124)

1. a) 1,8 b) 1638 c) $\frac{95}{187}$ d) $1\frac{1}{3}$ e) $\frac{27}{80}$ f) 0,24

2. a) 70 b) 60 c) 36 d) 52 3. a) 60 b) 14 c) 12 d) 15

4. a) 6 b) 4 c) 0,9 d) 1 e) $\frac{1}{3}$ f) 1,4

5. a) 5 b) 5 c) 7 d) 4 e) 8 f) 4

6. a) 10 b) 2 c) 5 d) 0,9 e) $\frac{5}{9}$ f) $1\frac{1}{4}$

7. A 8. B 9. A

4.4 Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka. Włączanie czynnika pod znak pierwiastka (s. 127)

1. a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{10}$ d) $11\sqrt{2}$

e) $2\sqrt[3]{4}$ f) $-2\sqrt[3]{9}$ g) $3\sqrt[3]{6}$ h) $4\sqrt[3]{4}$

2. a) $6\sqrt{21}$ b) $15\sqrt{10}$ c) $6\sqrt{22}$ d) $0,9\sqrt{3}$ e) $44\sqrt[3]{44}$

f) $180\sqrt[3]{6}$ 3. a) $6\sqrt{6}$ b) $6\sqrt{11}$ c) $6\sqrt{13}$ d) $15\sqrt{14}$

e) $6\sqrt[3]{2}$ f) $8\sqrt[3]{7}$ g) $10\sqrt[3]{6}$ h) $15\sqrt[3]{3}$ 4. C

5. a) $\sqrt{45}$ b) $\sqrt{12,8}$ c) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ d) $\sqrt{1,62}$ e) $\sqrt{4,32}$ f) $\sqrt[3]{2}$

g) $\sqrt[3]{500}$ h) $-\sqrt[3]{54}$ i) $\sqrt[3]{0,64}$ j) $-\sqrt[3]{1100}$ k) $-\sqrt[3]{8}$ l) $\sqrt[3]{\frac{16}{27}}$

6. D 7. C 8. a) 20 b) 6 c) 6 d) 9 e) 6

9. a) Tak b) Nie c) Tak d) Tak e) Nie

10. a) $6\sqrt{5}$ b) 9 c) $10,5\sqrt{3}$

11. a) $7\sqrt{2}$ cm b) $22\sqrt{5}$ cm c) $24\sqrt{3}$ dm d) $0,8\sqrt{13}$ dm

12. B 13. A 14. 3,5 raza 15. $448\sqrt[3]{7}$ cm³

4.5 Porównywanie wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki (s. 132)

1. a) $6\sqrt{2} < 5\sqrt{3} < 4\sqrt{5} < 3\sqrt{10}$ b) $3\sqrt[3]{3} < 2\sqrt[3]{15} < 5\sqrt[3]{4} < 10\sqrt[3]{2}$

2. a) $\frac{9}{\sqrt{45}} > \frac{3}{\sqrt{10}} > \frac{6}{\sqrt{48}} > -\frac{3}{\sqrt{7}} > -\frac{6}{\sqrt{24}} > -\frac{12}{\sqrt{32}}$

b) $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}} > \frac{1}{\sqrt[3]{50}} > \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} > -\frac{1}{\sqrt[3]{43}} > -\frac{1}{2\sqrt[3]{5}} > -\frac{1}{\sqrt[3]{35}}$

3. a) < b) = c) < d) > e) > f) =

4. D 5. C 6. B 7. C

8. a) np. 19, 20; 13 liczb b) np. 25, 26; 56 liczb
 9. a) 8, 9, 10, 11, 12 b) -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 c) -7, -6, -5
 10*. a) > b) > c) <

4.6 Przekształcanie wyrażeń zawierających pierwiastki (s. 137)

1. a) $-6\sqrt{3}$ b) $-5\sqrt{5}$ c) $3,9\sqrt{11}$
 d) $2,25\sqrt{13}$ e) $-24\sqrt[3]{12}$ f) $2\frac{4}{9}\sqrt[3]{4}$ 2. c) i d) 3. D
 4. a) $-6\sqrt{6} + 7\sqrt{7}$ b) $6\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$ c) $6,35 + \sqrt{10}$
 d) $-0,2\sqrt[3]{9}$ e) $-6\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{4}$ f) $2\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + 4\frac{3}{4}\sqrt{2}$
 5. B 6. D 7. a) nie b) tak
 8. a) 0 b) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ c) $-\sqrt[3]{2}$ d) 0
 9. a) $3\sqrt{10}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $5\sqrt[3]{3} - 3$ d) $10\sqrt[3]{25}$
 10. a) 17 b) 6 c) 5 d) 3 e) $10\frac{1}{3}$
 f) 20 g) $\frac{2}{7}$ h) $547\frac{11}{12}$ i) 11
 11. C 12. a) $a = -1$ b) $b = 26$ c) $c = -38$ d) $d = 15$

Czy już umiesz? (s. 140)

1. C 2. A 3. B 4. D 5. A 6. D 7. C
 8. A 9*. B 10. C 11. C 12. D 13. B 14. A
 15. B 16. D 17*. C 18*. D 19. $\sqrt{26}, \sqrt[3]{1\frac{1}{8}}$
 20. a) $4\sqrt{15} + 36$ b) $2 + 3\sqrt[3]{6}$ c) $3\sqrt{6} - 6$
 21. liczba odwrotna $\frac{3}{22}$, liczba przeciwna $-7\frac{1}{3}$
 22. $5\sqrt{2}$ 23. a) liczba odwrotna $\frac{1}{4}$,
 liczba przeciwna -4 b) 3,2
 24. a) $8 + 9\sqrt{3}, 7 + 7\sqrt{3}, 6 + 5\sqrt{3}, 5 + 3\sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}$
 b) $30 + 25\sqrt{3}$ 25. a) 7 b) 3 c) a d) b
 26. 351 dm^2 27. a) $3\sqrt[3]{3}$ b) 9 c) 40 s d) 243
 28. $P = 30 \text{ m}^2$, $Obw. = 8\sqrt{10} \text{ m}$ 29. $540\sqrt{6}$
 30. a) $a = 3\sqrt{3}$ b) $b = \sqrt{5}$ c) $d = \sqrt{7}$
 31. $Obw. = 36\sqrt{6} \text{ cm}$ 32. $P = 150 \text{ cm}^2$, $a = 5\sqrt{6} \text{ cm}$
 33. $a = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ 34. $P = 63$, $Obw. = 12\sqrt{7}$
 35. $40\sqrt{5} \text{ m}$ 36. $280\sqrt{10} \text{ m}$ 37. a) 17,0 cm b) 0,424 m
 38. a) 1,5 cm b*) $4\sqrt{2} \text{ cm}$ c) $2\sqrt{3} \text{ m}$
 39. $P = 288 \text{ dm}^2$, $V = 192\sqrt{3} \text{ dm}^3$
 40. a) $40\sqrt[3]{5}$ b) $P = 56\sqrt[3]{25}$
 41. długość siatki 138,42 m, koszt siatki 3405,13 zł
 42. $150,96 \text{ m}^2$ 43*. a) $P = 861,78 \text{ cm}^2$ b) 152,4 cm

Indeks

C		R	
cechy podzielności liczb	10	rozkład na czynniki pierwsze	14
cena brutto	70	rozwiniecie dziesietne	
cena netto	70	skończone	23
		nieskończone okresowe	23
D		S	
dzielniki	10	stopień pierwiastka	112
		szacowanie	26
K		Ś	
kapitał	69	średnia geometryczna	122
kredyt	70		
L		W	
liczba		wartość bezwzględna	30
pierwsza	12	wielokrotności	10
podpierwiastkowa	110	włączanie czynnika pod znak pierwiastka	126
wymierna	34	wykładnik potęgi	78
złożona	12	wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka	125
liczby		Z	
całkowite	17	zaokrąglanie	27
naturalne	9		
niedodatnie	17		
nieujemne	17		
niewymierne	117		
przeciwne	17		
względnie pierwsze	10		
lokata	69		
N			
najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)	14		
największy wspólny dzielnik (NWD)	13		
nierówność	36		
notacja wykładnicza	102		
O			
obligacje skarbowe	72		
obniżka	58		
odsetki	69		
okres	24		
oprocentowanie	69		
P			
pierwiastek			
kwadratowy	110		
sześcienny	112		
podatek VAT	70		
podstawa potęgi	78		
podwyżka	58		
potęga	78		
potęgowanie	78		
promil	55		



Grupa MAC S.A.
ul. Witosza 76
25-561 Kielce

www.mac.pl

ISBN 978-83-8108-864-0



indeks 881445