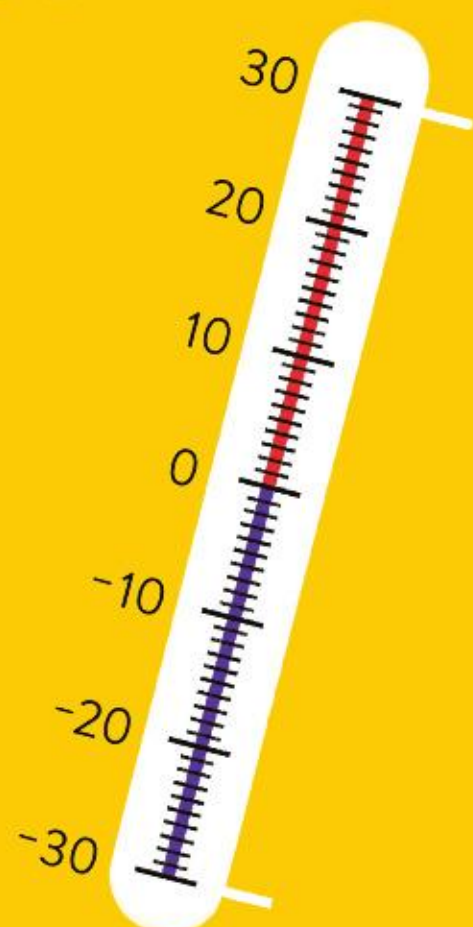


Matematyka

6

Podręcznik
część 1

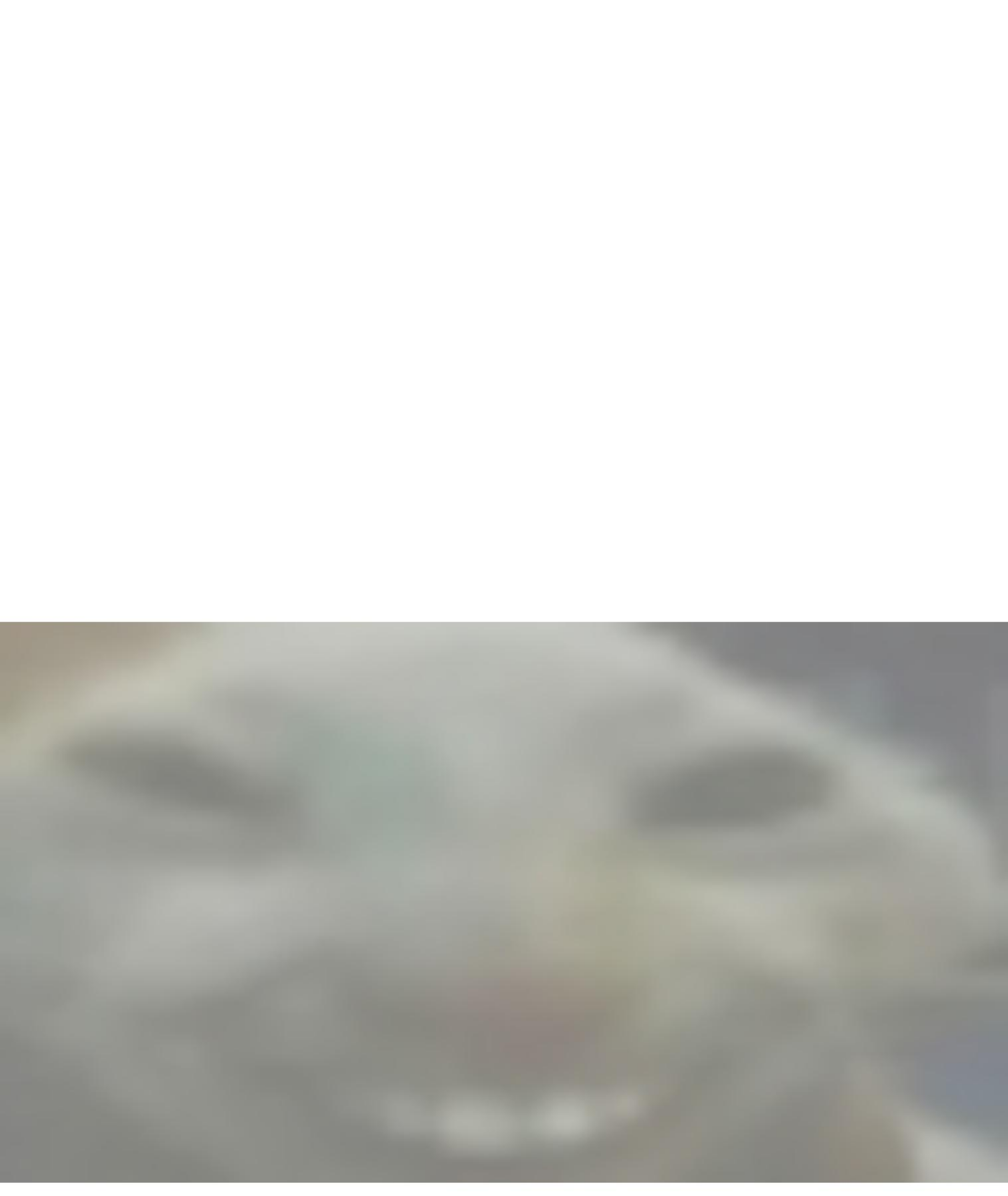


×

Oznaczono zmiany
W PODSTAWIE
PROGRAMOWEJ
2024

$$-\frac{3}{4} + 0,1$$



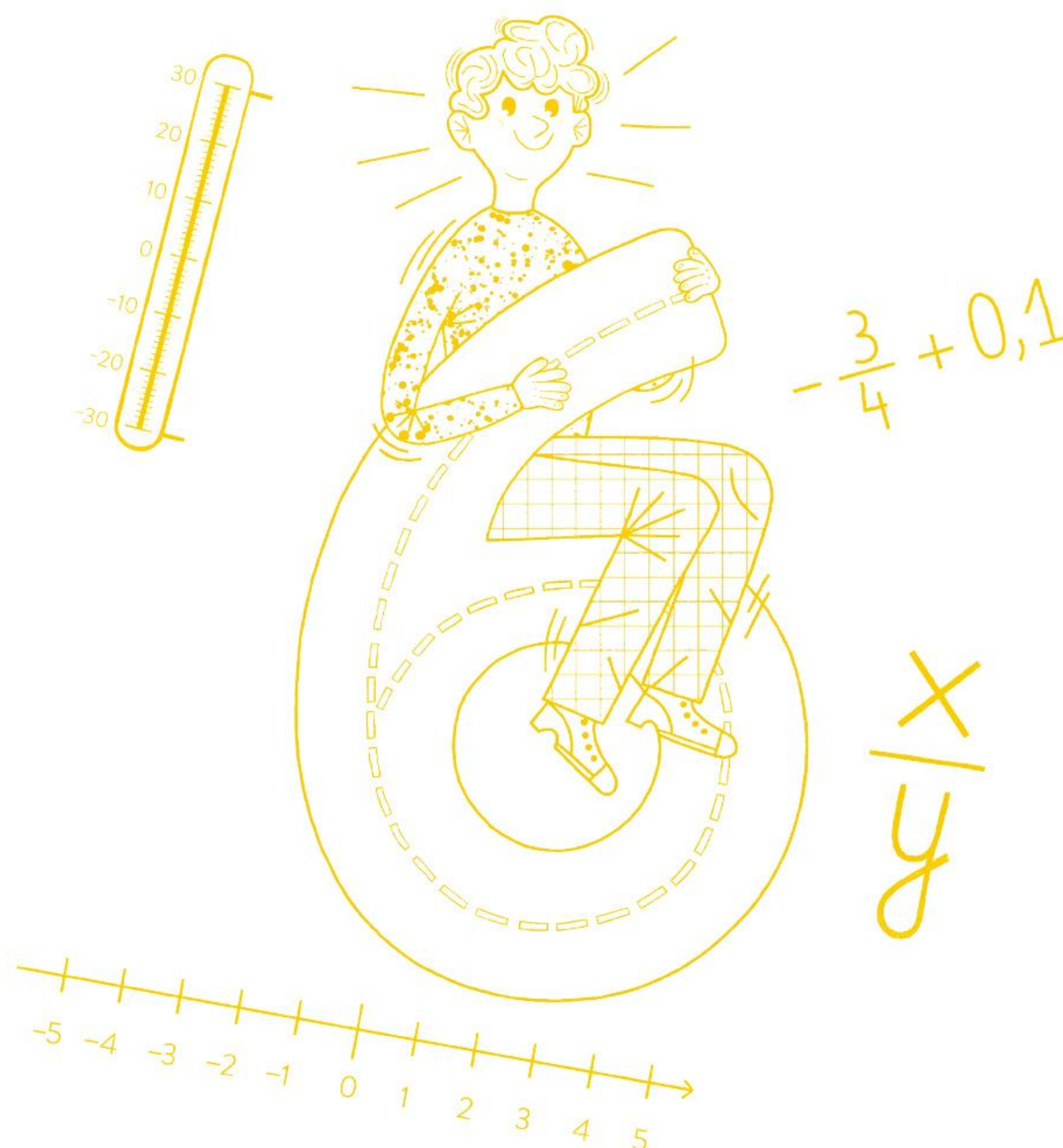


Jolanta Borzyszkowska
Maria Stolarska-Walkowiak



Matematyka

Podręcznik dla klasy szóstej szkoły podstawowej
część 1



Redaktor serii
Anna Parzęcka

Redaktor prowadzący
Ewa Kowalik

Redakcja merytoryczna
Ewa Kowalik

Redakcja językowa i korekta
Anna Kołat

Redakcja techniczna
Paweł Kowalski

Skład i łamanie
Adam Ziółkowski

Redakcja artystyczna
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska, Marcin Kot

Projekt i koncepcja artystyczna
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Koordinacja prac graficznych
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska

Projekt okładki
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Ilustracja na okładce i ilustracje na stronach działowych
Acapulco Studio / Agata Dudek, Małgorzata Nowak

Opracowanie kartograficzne
Carto Team

Fotoedycja
Grzegorz Wrzecionowski

Wydawca oświadcza, że dołożył wszelkich starań, aby dotrzeć do wszystkich właścicieli i dysponentów praw autorskich. Osoby, których nie udało nam się ustalić, prosimy o kontakt z wydawnictwem.

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Przestrzegaj praw, jakie im przysługują. Udostępniając książkę lub jej fragmenty, rób to wyłącznie w zakresie dozwolonego użytku, który określają przepisy prawa. Zawartość książki możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

© Grupa MAC S.A., Kielce 2019

ISBN 978-83-65463-32-6

Grupa MAC S.A.
25-561 Kielce, ul. Witosa 76
tel. 41 366 55 55, faks: 41 366 33 02
e-mail: kontakt@mac.pl; www.mac.pl



×

Treści usunięte z podstawy programowej w 2024 r.

Spis treści

1. Liczby całkowite

1.1	Powtórzenie wiadomości o liczbach naturalnych	6
1.2	Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych	12
1.3	Praca z kalkulatorem	16
1.4	Zaokrąglanie liczb naturalnych	19
1.5	Liczby całkowite	23
1.6	Porównywanie liczb całkowitych	28
1.7	Dodawanie liczb całkowitych	31
1.8	Odejmowanie liczb całkowitych	37
1.9	Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych	43
	Podsumowanie działu 1	48

2. Ułamki

2.1	Powtórzenie wiadomości o ułamkach zwykłych	52
2.2	Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych	59
2.3	Mnożenie ułamków zwykłych	62
2.4	Dzielenie ułamków zwykłych	68
2.5	Działania na ułamkach zwykłych	73
2.6	Powtórzenie wiadomości o ułamkach dziesiętnych	77
2.7	Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych	81
2.8	Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne	85
2.9	Mnożenie ułamków dziesiętnych	90
2.10	Dzielenie ułamków dziesiętnych	94
2.11	Działania na ułamkach dziesiętnych	97
2.12	Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych	100
2.13	Przedstawianie ułamków dziesiętnych w postaci ułamków zwykłych i odwrotnie	104
2.14	Działania na ułamkach zwykłych i ułamkach dziesiętnych	110
2.15	Ułamki dziesiętne dodatnie i ujemne	113
2.16	Ułamki zwykłe dodatnie i ujemne	119
2.17	Liczby wymierne	125
	Podsumowanie działu 2	129

3. Elementy algebry

3.1	Tworzenie wyrażeń algebraicznych	134
3.2	Nazywanie wyrażeń algebraicznych	139
3.3	Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych	142
3.4	Działania na prostych wyrażeniach algebraicznych	146
	Link do wiedzy <i>Jak mierzymy temperaturę</i>	150
	Podsumowanie działu 3	152
	Odpowiedzi do zadań	156
	Indeks	159

Jak korzystać z podręcznika

Numer i temat

Podejmij temat

Wprowadzenie do tematu lekcji

Ćwiczenia

Ćwiczenia do wykonania na lekcji

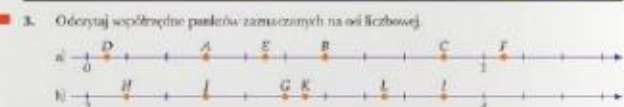
Treści powtórzeniowe

Więcej na temat

Treści dodatkowe

2.4 Dzielenie ułamków zwykłych

Podejmij temat



Więcej na temat

Dwie liczby zapisane w postaci ułamków zwykłych, ale w odwrotnej kolejności (jak przytłaczają) dają ten sam wynik. W matematyce nazywamy je **liczbami odwrotnymi**. Są nimi np. $\frac{1}{2}$ oraz $\frac{2}{1}$ oraz $\frac{1}{100}$ oraz 100 .

2. Zapisz dwie liczby liczone jedna po drugiej tak, aby uzyskać jedną liczbę, np. 237732. Spróbuj, czy udało się osiągnąć 31. Powtórz to dla kilku innych liczb liczonej po kolei.

Przykłady

Przykładowe rozwiązania zadań

Przykład 4
Obliczmy: $\frac{2}{5} : \frac{7}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{16}{35}$

Przykład 5
Obliczmy: $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Przykład 6
Obliczmy: $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

Przykład 7
Obliczmy: $\frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$

Przykład 8
Obliczmy: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Przykład 9
Obliczmy: $\frac{1}{4} : \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Przykład 10
Obliczmy: $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$

Przykład 11
Obliczmy: $\frac{4}{6} : \frac{1}{2} = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Przykład 12
Obliczmy: $\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{21}$

Przykład 13
Obliczmy: $\frac{6}{8} : \frac{2}{3} = \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$

Przykład 14
Obliczmy: $\frac{7}{9} : \frac{4}{5} = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{36}$

Przykład 15
Obliczmy: $\frac{8}{10} : \frac{1}{3} = \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{1} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

Przykład 16
Obliczmy: $\frac{9}{11} : \frac{2}{7} = \frac{9}{11} \cdot \frac{7}{2} = \frac{63}{22}$

Przykład 17
Obliczmy: $\frac{10}{12} : \frac{3}{4} = \frac{10}{12} \cdot \frac{4}{3} = \frac{40}{36} = \frac{10}{9}$

Przykład 18
Obliczmy: $\frac{11}{13} : \frac{5}{6} = \frac{11}{13} \cdot \frac{6}{5} = \frac{66}{65}$

Przykład 19
Obliczmy: $\frac{12}{14} : \frac{7}{8} = \frac{12}{14} \cdot \frac{8}{7} = \frac{96}{98} = \frac{48}{49}$

Przykład 20
Obliczmy: $\frac{13}{15} : \frac{9}{10} = \frac{13}{15} \cdot \frac{10}{9} = \frac{130}{135} = \frac{26}{27}$

Przykład 21
Obliczmy: $\frac{14}{16} : \frac{11}{12} = \frac{14}{16} \cdot \frac{12}{11} = \frac{168}{176} = \frac{21}{22}$

Przykład 22
Obliczmy: $\frac{15}{17} : \frac{13}{14} = \frac{15}{17} \cdot \frac{14}{13} = \frac{210}{221}$

Przykład 23
Obliczmy: $\frac{16}{18} : \frac{15}{16} = \frac{16}{18} \cdot \frac{16}{15} = \frac{256}{270} = \frac{128}{135}$

Przykład 24
Obliczmy: $\frac{17}{19} : \frac{17}{18} = \frac{17}{19} \cdot \frac{18}{17} = \frac{18}{19}$

Przykład 25
Obliczmy: $\frac{18}{20} : \frac{19}{19} = \frac{18}{20} \cdot \frac{19}{19} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

Przykład 26
Obliczmy: $\frac{19}{21} : \frac{20}{20} = \frac{19}{21} \cdot \frac{20}{20} = \frac{19}{21}$

Przykład 27
Obliczmy: $\frac{20}{22} : \frac{21}{21} = \frac{20}{22} \cdot \frac{21}{21} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11}$

Przykład 28
Obliczmy: $\frac{21}{23} : \frac{22}{22} = \frac{21}{23} \cdot \frac{22}{22} = \frac{21}{23}$

Przykład 29
Obliczmy: $\frac{22}{24} : \frac{23}{23} = \frac{22}{24} \cdot \frac{23}{23} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$

Przykład 30
Obliczmy: $\frac{23}{25} : \frac{24}{24} = \frac{23}{25} \cdot \frac{24}{24} = \frac{23}{25}$

Przykład 31
Obliczmy: $\frac{24}{26} : \frac{25}{25} = \frac{24}{26} \cdot \frac{25}{25} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

Przykład 32
Obliczmy: $\frac{25}{27} : \frac{26}{26} = \frac{25}{27} \cdot \frac{26}{26} = \frac{25}{27}$

Przykład 33
Obliczmy: $\frac{26}{28} : \frac{27}{27} = \frac{26}{28} \cdot \frac{27}{27} = \frac{26}{28} = \frac{13}{14}$

Przykład 34
Obliczmy: $\frac{27}{29} : \frac{28}{28} = \frac{27}{29} \cdot \frac{28}{28} = \frac{27}{29}$

Przykład 35
Obliczmy: $\frac{28}{30} : \frac{29}{29} = \frac{28}{30} \cdot \frac{29}{29} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$

Przykład 36
Obliczmy: $\frac{29}{31} : \frac{30}{30} = \frac{29}{31} \cdot \frac{30}{30} = \frac{29}{31}$

Przykład 37
Obliczmy: $\frac{30}{32} : \frac{31}{31} = \frac{30}{32} \cdot \frac{31}{31} = \frac{30}{32} = \frac{15}{16}$

Przykład 38
Obliczmy: $\frac{31}{33} : \frac{32}{32} = \frac{31}{33} \cdot \frac{32}{32} = \frac{31}{33}$

Przykład 39
Obliczmy: $\frac{32}{34} : \frac{33}{33} = \frac{32}{34} \cdot \frac{33}{33} = \frac{32}{34} = \frac{16}{17}$

Przykład 40
Obliczmy: $\frac{33}{35} : \frac{34}{34} = \frac{33}{35} \cdot \frac{34}{34} = \frac{33}{35}$

Przykład 41
Obliczmy: $\frac{34}{36} : \frac{35}{35} = \frac{34}{36} \cdot \frac{35}{35} = \frac{34}{36} = \frac{17}{18}$

Przykład 42
Obliczmy: $\frac{35}{37} : \frac{36}{36} = \frac{35}{37} \cdot \frac{36}{36} = \frac{35}{37}$

Przykład 43
Obliczmy: $\frac{36}{38} : \frac{37}{37} = \frac{36}{38} \cdot \frac{37}{37} = \frac{36}{38} = \frac{18}{19}$

Przykład 44
Obliczmy: $\frac{37}{39} : \frac{38}{38} = \frac{37}{39} \cdot \frac{38}{38} = \frac{37}{39}$

Przykład 45
Obliczmy: $\frac{38}{40} : \frac{39}{39} = \frac{38}{40} \cdot \frac{39}{39} = \frac{38}{40} = \frac{19}{20}$

Przykład 46
Obliczmy: $\frac{39}{41} : \frac{40}{40} = \frac{39}{41} \cdot \frac{40}{40} = \frac{39}{41}$

Przykład 47
Obliczmy: $\frac{40}{42} : \frac{41}{41} = \frac{40}{42} \cdot \frac{41}{41} = \frac{40}{42} = \frac{20}{21}$

Przykład 48
Obliczmy: $\frac{41}{43} : \frac{42}{42} = \frac{41}{43} \cdot \frac{42}{42} = \frac{41}{43}$

Przykład 49
Obliczmy: $\frac{42}{44} : \frac{43}{43} = \frac{42}{44} \cdot \frac{43}{43} = \frac{42}{44} = \frac{21}{22}$

Przykład 50
Obliczmy: $\frac{43}{45} : \frac{44}{44} = \frac{43}{45} \cdot \frac{44}{44} = \frac{43}{45}$

Przykład 51
Obliczmy: $\frac{44}{46} : \frac{45}{45} = \frac{44}{46} \cdot \frac{45}{45} = \frac{44}{46} = \frac{22}{23}$

Przykład 52
Obliczmy: $\frac{45}{47} : \frac{46}{46} = \frac{45}{47} \cdot \frac{46}{46} = \frac{45}{47}$

Przykład 53
Obliczmy: $\frac{46}{48} : \frac{47}{47} = \frac{46}{48} \cdot \frac{47}{47} = \frac{46}{48} = \frac{23}{24}$

Przykład 54
Obliczmy: $\frac{47}{49} : \frac{48}{48} = \frac{47}{49} \cdot \frac{48}{48} = \frac{47}{49}$

Przykład 55
Obliczmy: $\frac{48}{50} : \frac{49}{49} = \frac{48}{50} \cdot \frac{49}{49} = \frac{48}{50} = \frac{24}{25}$

Przykład 56
Obliczmy: $\frac{49}{51} : \frac{50}{50} = \frac{49}{51} \cdot \frac{50}{50} = \frac{49}{51}$

Przykład 57
Obliczmy: $\frac{50}{52} : \frac{51}{51} = \frac{50}{52} \cdot \frac{51}{51} = \frac{50}{52} = \frac{25}{26}$

Przykład 58
Obliczmy: $\frac{51}{53} : \frac{52}{52} = \frac{51}{53} \cdot \frac{52}{52} = \frac{51}{53}$

Przykład 59
Obliczmy: $\frac{52}{54} : \frac{53}{53} = \frac{52}{54} \cdot \frac{53}{53} = \frac{52}{54} = \frac{26}{27}$

Przykład 60
Obliczmy: $\frac{53}{55} : \frac{54}{54} = \frac{53}{55} \cdot \frac{54}{54} = \frac{53}{55}$

Przykład 61
Obliczmy: $\frac{54}{56} : \frac{55}{55} = \frac{54}{56} \cdot \frac{55}{55} = \frac{54}{56} = \frac{27}{28}$

Przykład 62
Obliczmy: $\frac{55}{57} : \frac{56}{56} = \frac{55}{57} \cdot \frac{56}{56} = \frac{55}{57}$

Przykład 63
Obliczmy: $\frac{56}{58} : \frac{57}{57} = \frac{56}{58} \cdot \frac{57}{57} = \frac{56}{58} = \frac{28}{29}$

Przykład 64
Obliczmy: $\frac{57}{59} : \frac{58}{58} = \frac{57}{59} \cdot \frac{58}{58} = \frac{57}{59}$

Przykład 65
Obliczmy: $\frac{58}{60} : \frac{59}{59} = \frac{58}{60} \cdot \frac{59}{59} = \frac{58}{60} = \frac{29}{30}$

Przykład 66
Obliczmy: $\frac{59}{61} : \frac{60}{60} = \frac{59}{61} \cdot \frac{60}{60} = \frac{59}{61}$

Przykład 67
Obliczmy: $\frac{60}{62} : \frac{61}{61} = \frac{60}{62} \cdot \frac{61}{61} = \frac{60}{62} = \frac{30}{31}$

Przykład 68
Obliczmy: $\frac{61}{63} : \frac{62}{62} = \frac{61}{63} \cdot \frac{62}{62} = \frac{61}{63}$

Przykład 69
Obliczmy: $\frac{62}{64} : \frac{63}{63} = \frac{62}{64} \cdot \frac{63}{63} = \frac{62}{64} = \frac{31}{32}$

Przykład 70
Obliczmy: $\frac{63}{65} : \frac{64}{64} = \frac{63}{65} \cdot \frac{64}{64} = \frac{63}{65}$

Przykład 71
Obliczmy: $\frac{64}{66} : \frac{65}{65} = \frac{64}{66} \cdot \frac{65}{65} = \frac{64}{66} = \frac{32}{33}$

Przykład 72
Obliczmy: $\frac{65}{67} : \frac{66}{66} = \frac{65}{67} \cdot \frac{66}{66} = \frac{65}{67}$

Przykład 73
Obliczmy: $\frac{66}{68} : \frac{67}{67} = \frac{66}{68} \cdot \frac{67}{67} = \frac{66}{68} = \frac{33}{34}$

Przykład 74
Obliczmy: $\frac{67}{69} : \frac{68}{68} = \frac{67}{69} \cdot \frac{68}{68} = \frac{67}{69}$

Przykład 75
Obliczmy: $\frac{68}{70} : \frac{69}{69} = \frac{68}{70} \cdot \frac{69}{69} = \frac{68}{70} = \frac{34}{35}$

Przykład 76
Obliczmy: $\frac{69}{71} : \frac{70}{70} = \frac{69}{71} \cdot \frac{70}{70} = \frac{69}{71}$

Przykład 77
Obliczmy: $\frac{70}{72} : \frac{71}{71} = \frac{70}{72} \cdot \frac{71}{71} = \frac{70}{72} = \frac{35}{36}$

Przykład 78
Obliczmy: $\frac{71}{73} : \frac{72}{72} = \frac{71}{73} \cdot \frac{72}{72} = \frac{71}{73}$

Przykład 79
Obliczmy: $\frac{72}{74} : \frac{73}{73} = \frac{72}{74} \cdot \frac{73}{73} = \frac{72}{74} = \frac{36}{37}$

Przykład 80
Obliczmy: $\frac{73}{75} : \frac{74}{74} = \frac{73}{75} \cdot \frac{74}{74} = \frac{73}{75}$

Przykład 81
Obliczmy: $\frac{74}{76} : \frac{75}{75} = \frac{74}{76} \cdot \frac{75}{75} = \frac{74}{76} = \frac{37}{38}$

Przykład 82
Obliczmy: $\frac{75}{77} : \frac{76}{76} = \frac{75}{77} \cdot \frac{76}{76} = \frac{75}{77}$

Przykład 83
Obliczmy: $\frac{76}{78} : \frac{77}{77} = \frac{76}{78} \cdot \frac{77}{77} = \frac{76}{78} = \frac{38}{39}$

Przykład 84
Obliczmy: $\frac{77}{79} : \frac{78}{78} = \frac{77}{79} \cdot \frac{78}{78} = \frac{77}{79}$

Przykład 85
Obliczmy: $\frac{78}{80} : \frac{79}{79} = \frac{78}{80} \cdot \frac{79}{79} = \frac{78}{80} = \frac{39}{40}$

Przykład 86
Obliczmy: $\frac{79}{81} : \frac{80}{80} = \frac{79}{81} \cdot \frac{80}{80} = \frac{79}{81}$

Przykład 87
Obliczmy: $\frac{80}{82} : \frac{81}{81} = \frac{80}{82} \cdot \frac{81}{81} = \frac{80}{82} = \frac{40}{41}$

Przykład 88
Obliczmy: $\frac{81}{83} : \frac{82}{82} = \frac{81}{83} \cdot \frac{82}{82} = \frac{81}{83}$

Przykład 89
Obliczmy: $\frac{82}{84} : \frac{83}{83} = \frac{82}{84} \cdot \frac{83}{83} = \frac{82}{84} = \frac{41}{42}$

Przykład 90
Obliczmy: $\frac{83}{85} : \frac{84}{84} = \frac{83}{85} \cdot \frac{84}{84} = \frac{83}{85}$

Przykład 91
Obliczmy: $\frac{84}{86} : \frac{85}{85} = \frac{84}{86} \cdot \frac{85}{85} = \frac{84}{86} = \frac{42}{43}$

Przykład 92
Obliczmy: $\frac{85}{87} : \frac{86}{86} = \frac{85}{87} \cdot \frac{86}{86} = \frac{85}{87}$

Przykład 93
Obliczmy: $\frac{86}{88} : \frac{87}{87} = \frac{86}{88} \cdot \frac{87}{87} = \frac{86}{88} = \frac{43}{44}$

Przykład 94
Obliczmy: $\frac{87}{89} : \frac{88}{88} = \frac{87}{89} \cdot \frac{88}{88} = \frac{87}{89}$

Przykład 95
Obliczmy: $\frac{88}{90} : \frac{89}{89} = \frac{88}{90} \cdot \frac{89}{89} = \frac{88}{90} = \frac{44}{45}$

Przykład 96
Obliczmy: $\frac{89}{91} : \frac{90}{90} = \frac{89}{91} \cdot \frac{90}{90} = \frac{89}{91}$

Przykład 97
Obliczmy: $\frac{90}{92} : \frac{91}{91} = \frac{90}{92} \cdot \frac{91}{91} = \frac{90}{92} = \frac{45}{46}$

Przykład 98
Obliczmy: $\frac{91}{93} : \frac{92}{92} = \frac{91}{93} \cdot \frac{92}{92} = \frac{91}{93}$

Przykład 99
Obliczmy: $\frac{92}{94} : \frac{93}{93} = \frac{92}{94} \cdot \frac{93}{93} = \frac{92}{94} = \frac{46}{47}$

Przykład 100
Obliczmy: $\frac{93}{95} : \frac{94}{94} = \frac{93}{95} \cdot \frac{94}{94} = \frac{93}{95}$

Przykład 101
Obliczmy: $\frac{94}{96} : \frac{95}{95} = \frac{94}{96} \cdot \frac{95}{95} = \frac{94}{96} = \frac{47}{48}$

Przykład 102
Obliczmy: $\frac{95}{97} : \frac{96}{96} = \frac{95}{97} \cdot \frac{96}{96} = \frac{95}{97}$

Przykład 103
Obliczmy: $\frac{96}{98} : \frac{97}{97} = \frac{96}{98} \cdot \frac{97}{97} = \frac{96}{98} = \frac{48}{49}$

Przykład 104
Obliczmy: $\frac{97}{99} : \frac{98}{98} = \frac{97}{99} \cdot \frac{98}{98} = \frac{97}{99}$

Przykład 105
Obliczmy: $\frac{98}{100} : \frac{99}{99} = \frac{98}{100} \cdot \frac{99}{99} = \frac{98}{100} = \frac{49}{50}$

Przykład 106
Obliczmy: $\frac{99}{101} : \frac{100}{100} = \frac{99}{101} \cdot \frac{100}{100} = \frac{99}{101}$

Przykład 107
Obliczmy: $\frac{100}{102} : \frac{101}{101} = \frac{100}{102} \cdot \frac{101}{101} = \frac{100}{102} = \frac{50}{51}$

Przykład 108
Obliczmy: $\frac{101}{103} : \frac{102}{102} = \frac{101}{103} \cdot \frac{102}{102} = \frac{101}{103}$

Przykład 109
Obliczmy: $\frac{102}{104} : \frac{103}{103} = \frac{102}{104} \cdot \frac{103}{103} = \frac{102}{104} = \frac{51}{52}$

Przykład 110
Obliczmy: $\frac{103}{105} : \frac{104}{104} = \frac{103}{105} \cdot \frac{104}{104} = \frac{103}{105}$

Przykład 111
Obliczmy: $\frac{104}{106} : \frac{105}{105} = \frac{104}{106} \cdot \frac{105}{105} = \frac{104}{106} = \frac{52}{53}$

Przykład 112
Obliczmy: $\frac{105}{107} : \frac{106}{106} = \frac{105}{107} \cdot \frac{106}{106} = \frac{105}{107}$

Przykład 113
Obliczmy: $\frac{106}{108} : \frac{107}{107} = \frac{106}{108} \cdot \frac{107}{107} = \frac{106}{108} = \frac{53}{54}$

Przykład 114
Obliczmy: $\frac{107}{109} : \frac{108}{108} = \frac{107}{109} \cdot \frac{108}{108} = \frac{107}{109}$

Przykład 115
Obliczmy: $\frac{108}{110} : \frac{109}{109} = \frac{108}{110} \cdot \frac{109}{109} = \frac{108}{110} = \frac{54}{55}$

Przykład 116
Obliczmy: $\frac{109}{111} : \frac{110}{110} = \frac{109}{111} \cdot \frac{110}{110} = \frac{109}{111}$

Przykład 117
Obliczmy: $\frac{110}{112} : \frac{111}{111} = \frac{110}{112} \cdot \frac{111}{111} = \frac{110}{112} = \frac{55}{56}$

Przykład 118
Obliczmy: $\frac{111}{113} : \frac{112}{112} = \frac{111}{113} \cdot \frac{112}{112} = \frac{111}{113}$

Przykład 119
Obliczmy: $\frac{112}{114} : \frac{113}{113} = \frac{112}{114} \cdot \frac{113}{113} = \frac{112}{114} = \frac{56}{57}$

Przykład 120
Obliczmy: $\frac{113}{115} : \frac{114}{114} = \frac{113}{115} \cdot \frac{114}{114} = \frac{113}{115}$

Przykład 121
Obliczmy: $\frac{114}{116} : \frac{115}{115} = \frac{114}{116} \cdot \frac{115}{115} = \frac{114}{116} = \frac{57}{58}$

Przykład 122
Obliczmy: $\frac{115}{117} : \frac{116}{116} = \frac{115}{117} \cdot \frac{116}{116} = \frac{115}{117}$

Przykład 123
Obliczmy: $\frac{116}{118} : \frac{117}{117} = \frac{116}{118} \cdot \frac{117}{117} = \frac{116}{118} = \frac{58}{59}$

Przykład 124
Obliczmy: $\frac{117}{119} : \frac{118}{118} = \frac{117}{119} \cdot \frac{118}{118} = \frac{117}{119}$

Przykład 125
Obliczmy: $\frac{118}{120} : \frac{119}{119} = \frac{118}{120} \cdot \frac{119}{119} = \frac{118}{120} = \frac{59}{60}$

Przykład 126
Obliczmy: $\frac{119}{121} : \frac{120}{120} = \frac{119}{121} \cdot \frac{120}{120} = \frac{119}{121}$

Przykład 127
Obliczmy: $\frac{120}{122} : \frac{121}{121} = \frac{120}{122} \cdot \frac{121}{121} = \frac{120}{122} = \frac{60}{61}$

Przykład 128
Obliczmy: $\frac{121}{123} : \frac{122}{122} = \frac{121}{123} \cdot \frac{122}{122} = \frac{121}{123}$

Przykład 129
Obliczmy: $\frac{122}{124} : \frac{123}{123} = \frac{122}{124} \cdot \frac{123}{123} = \frac{122}{124} = \frac{61}{62}$

Przykład 130
Obliczmy: $\frac{123}{125} : \frac{124}{124} = \frac{123}{125} \cdot \frac{124}{124} = \frac{123}{125}$

Przykład 131
Obliczmy: $\frac{124}{126} : \frac{125}{125} = \frac{124}{126} \cdot \frac{125}{125} = \frac{124}{126} = \frac{62}{63}$

Przykład 132
Obliczmy: $\frac{125}{127} : \frac{126}{126} = \frac{125}{127} \cdot \frac{126}{126} = \frac{125}{127}$

Przykład 133
Obliczmy: $\frac{126}{128} : \frac{127}{127} = \frac{126}{128} \cdot \frac{127}{127} = \frac{126}{128} = \frac{63}{64}$

Przykład 134
Obliczmy: $\frac{127}{129} : \frac{128}{128} = \frac{127}{129} \cdot \frac{128}{128} = \frac{127}{129}$

Przykład 135
Obliczmy: $\frac{128}{130} : \frac{129}{129} = \frac{128}{130} \cdot \frac{129}{129} = \frac{128}{130} = \frac{64}{65}$

Przykład 136
Obliczmy: $\frac{129}{131} : \frac{130}{130} = \frac{129}{131} \cdot \frac{130}{130} = \frac{129}{131}$

Przykład 137
Obliczmy: $\frac{130}{132} : \frac{131}{131} = \frac{130}{132} \cdot \frac{131}{131} = \frac{130}{132} = \frac{65}{66}$

Przykład 138
Obliczmy: $\frac{131}{133} : \frac{132}{132} = \frac{131}{133} \cdot \frac{132}{132} = \frac{131}{133}$

Przykład 139
Obliczmy: $\frac{132}{134} : \frac{133}{133} = \frac{132}{134} \cdot \frac{133}{133} = \frac{132}{134} = \frac{66}{67}$

Przykład 140
Obliczmy: $\frac{133}{135} : \frac{134}{134} = \frac{133}{135} \cdot \frac{134}{134} = \frac{133}{135}$

Przykład 141
Obliczmy: $\frac{134}{136} : \frac{135}{135} = \frac$

1. Liczby całkowite



Część świata	Najwyższy punkt względem poziomu morza		Najniższy punkt względem poziomu morza	
	● Wysokość	Położenie	● Wysokość	Położenie
Azja	8848 m n.p.m.	Mount Everest	−431 m n.p.m.	Morze Martwe
Ameryka Północna	6194 m n.p.m.	Denali (dawniej Mount McKinley)	−86 m n.p.m.	Dolina Śmierci
Ameryka Południowa	6962 m n.p.m.	Aconcagua	−105 m n.p.m.	Laguna del Carbón
Afryka	5895 m n.p.m.	Kibo (masyw Kilimandżaro)	−153 m n.p.m.	jeziro Asal
Europa	4810 m n.p.m.	Mont Blanc	−28 m n.p.m.	Nizina Nadkaspjska
Australia i Oceania	4884 m n.p.m.	Puncak Jaya	−15 m n.p.m.	jeziro Eyre



Odpowiedz na pytania, korzystając z mapy oraz informacji zawartych w tabeli.

1. Jaką wysokość ma najwyższy szczyt Europy?
2. Jaka jest wysokość góry Kibo?
3. Jak się nazywa najwyższa góra wymieniona w tabeli? Gdzie się znajduje? Czy to także najwyższa góra świata?
4. Czy nazwy gór w tabeli są podane w kolejności od najwyższej do najniższej?
5. Jak rozumiesz zapis liczby −431 albo −86? Czy udało ci się kiedyś spotkać z takim zapisem liczby, w którym przed liczbą znajduje się minus? Jaka to była sytuacja?

1.1 Powtórzenie wiadomości o liczbach naturalnych

Podejmij temat

W wielu krajach europejskich obowiązującą walutą jest euro (€).

Banknoty mają nominały: 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500 euro,

a monety: 1 i 2 euro oraz 1, 2, 5, 10, 20 i 50 centów.

1 euro = 100 centów

Tak wyglądają banknoty:

A tak monety:



Ile centów można otrzymać za każdy z banknotów? Na ile monet o najwyższym nominale można rozmienić banknot o najwyższym nominale?

W klasach czwartej i piątej, a nawet wcześniej, uczyliśmy się wykonywać działania na liczbach naturalnych. Wiemy, że dodawać, odejmować, mnożyć czy dzielić można w pamięci lub sposobem pisemnym.

Przykład 1

Obliczmy.

a) $754 + 46\,275 + 9\,538$

b) $5\,604 - 936$

c) $45\,800 \cdot 630$

d) $27\,588 : 38$

a)

$$\begin{array}{r} 754 \\ 46\,275 \\ + 9\,538 \\ \hline 56\,567 \end{array}$$

Aby dodać lub odjąć liczby sposobem pisemnym, należy zapisać je tak, aby jednościami znajdowały się pod jednościami, dziesiątkami pod dziesiątkami, setkami pod setkami itd.

Następnie dodajemy lub odejmujemy cyfry w kolejnych rzędach. Zaczynamy zawsze od rzędu jedności.

b)

$$\begin{array}{r} 5\,604 \\ - 936 \\ \hline 4\,668 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{c)} \quad \begin{array}{r} 458 \overline{)00} \\ \cdot \quad 63 \overline{)0} \\ \hline 1374 \overline{)0} \\ + 2748 \\ \hline 28854 \overline{)000} \end{array}
 \end{array}$$

Aby pomnożyć liczby sposobem pisemnym, należy zapisać je tak jak przy dodawaniu i odejmowaniu. Wyjątek stanowią liczby zakończone zerami – zapisujemy je w sposób pokazany w przykładzie obok. Końcowych zer nie mnożymy, tylko dopisujemy je wszystkie do ostatecznego wyniku.

$$\begin{array}{r}
 \text{d)} \quad \begin{array}{r} 726 \\ 27588 : 38 \\ - 266 \\ \hline 98 \\ - 76 \\ \hline 228 \\ - 228 \\ \hline === \end{array}
 \end{array}$$

Gdy wykonujemy dzielenie sposobem pisemnym, zaczynamy od lewej strony dzielnej.

Niektóre działania na liczbach wielocyfrowych możemy wykonywać w pamięci, wykorzystując tabliczkę mnożenia i stosując poprawną kolejność wykonywania działań.

Przykład 2

Obliczmy.

a) $348 + 156 + 252$

b) $836 \cdot 4$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 348 + 156 + 252 = \\
 & = (348 + 252) + 156 = \\
 & = 600 + 156 = 756
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & 836 \cdot 4 = \\
 & = 800 \cdot 4 + 30 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = \\
 & = 3200 + 120 + 24 = 3200 + (120 + 24) = \\
 & = 3200 + 144 = 3344
 \end{aligned}$$

Podczas wykonywania tego działania wykorzystaliśmy prawa przemienności i łączności dodawania.

Podczas wykonywania tego działania wykorzystaliśmy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania oraz prawo łączności dodawania.

1. Oblicz w pamięci lub sposobem pisemnym.

a) $1 + 144 + 255$

b) $102 - 35$

c) $754 \cdot 7$

d) $8118 : 33$

$74 + 328 + 913$

$2854 - 1992$

$254 \cdot 138$

$2400 : 4$

$458 + 945 + 45 + 10$

$7600 - 800$

$92 \cdot 467$

$4312 : 14$

$1357 + 200 + 3$

$5491 - 756$

$560 \cdot 80$

$7232 : 8$

$266 + 457 + 5778$

$458 - 61$

$90 \cdot 300$

$48\,000 : 600$

2. Spośród podanych liczb wybierz i zapisz pary liczb, których:

a) suma wynosi 342,

b) różnica wynosi 162,

c) iloczyn wynosi 832,

d) iloraz wynosi 66.

164	38	52	15	278	92	990	178	16	25	4	254
-----	----	----	----	-----	----	-----	-----	----	----	---	-----

Aby ustrzec się błędów w obliczeniach, warto przed wykonaniem działania oszacować jego wynik.

Przykład 3

Czy działanie zostało wykonane poprawnie? Aby odpowiedzieć na to pytanie, oszacujmy wynik.

a) $5172 + 768 = 12\ 852$

b) $7254 - 338 = 3874$

c) $51 \cdot 32 = 512$

d) $420 : 5 = 104$

a) Nie, ponieważ wynik nie powinien przekroczyć liczby 6000.

b) Nie, ponieważ wynik powinien być większy niż 6000, a mniejszy niż 7000.

c) Nie, ponieważ wynik powinien być większy niż 1500 (bo $50 \cdot 30 = 1500$).

d) Nie, ponieważ wynik powinien być mniejszy niż 100 (bo $500 : 5 = 100$).

3. W każdym punkcie tylko jedno działanie zostało wykonane poprawnie. Znajdź je (nie obliczaj dokładnie, ale oszacuj wynik) i przepisuj do zeszytu wraz z wynikiem.

a) $764 + 1256 = 2020$

$764 + 1256 = 920$

$764 + 1256 = 8896$

b) $1832 - 1674 = 1242$

$1832 - 1674 = 258$

$1832 - 1674 = 158$

c) $82 \cdot 36 = 3612$

$82 \cdot 36 = 2142$

$82 \cdot 36 = 2952$

d) $1611 : 9 = 89$

$1611 : 9 = 179$

$1611 : 9 = 219$

Kolejnym działaniem, którego uczyliśmy się we wcześniejszych klasach, jest potęgowanie, czyli wielokrotne mnożenie jednakowych czynników.

tyle jednakowych czynników mnożymy

$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$

ta liczba jest wielokrotnym czynnikiem

Przykład 4

Obliczmy.

a) 8^2 b) 5^3 c) 10^5

a) $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$

b) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

c) $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$

Pamiętasz, jak odczytywało się działanie z punktu a) w przykładzie 4? Osiem do potęgi drugiej albo kwadrat liczby osiem.



Oczywiście. W punkcie b) czytamy: pięć do potęgi trzeciej albo sześcian liczby pięć.

4. Oblicz:

- a) kwadrat każdej z liczb: 1, 8, 12, 34, 40, 100, b) sześcian każdej z liczb: 1, 2, 4, 9, 11, 30.

Często w szkole i poza nią można spotkać się z takimi określeniami jak:

- co najwyżej,
- co najmniej,
- nie więcej niż.

Co one oznaczają?

– co najmniej 7

– nie mniej niż 7

– więcej niż 7

– ponad 7

– co najwyżej 10

– nie więcej niż 10

– mniej niż 10

– poniżej 10

→ to 7 i więcej niż 7, czyli 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

→ to 8, 9, 10, 11, 12, ...

→ to 10 i mniej niż 10, czyli 10, 9, 8, 7, 6, 5, ...

→ to 9, 8, 7, 6, 5, ...

5. Spośród liczb: 12, 23, 31, 37, 38, 57, 63, 70, wypisz:

- mniejsze niż 38,
- nie większe niż 38,
- większe niż 38,
- nie mniejsze niż 38,
- większe niż 31 i mniejsze niż 38,
- nie mniejsze niż 23 i jednocześnie nie większe niż 57.

6. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej jak najwięcej punktów o współrzędnych:

- nie mniejszych niż 4 (kolorem zielonym) i nie większych niż 4 (kolorem czerwonym),
- równych co najwyżej 6 (kolorem zielonym) i równych co najmniej 6 (kolorem czerwonym),
- mniejszych niż 5 (kolorem zielonym) i nie większych niż 5 (kolorem czerwonym),
- większych niż 8 (kolorem zielonym) i równych co najmniej 8 (kolorem czerwonym).

Zadania

Skorzystaj z mapy na s. 5 i oblicz różnicę wysokości najwyższych szczytów:

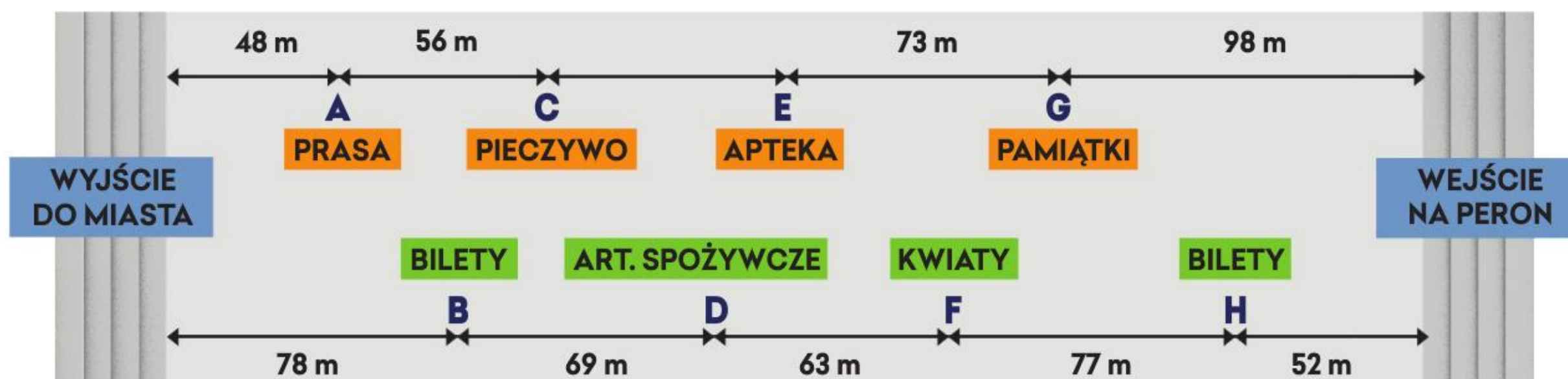


- Azji i Europy,
- Ameryki Północnej i Europy,
- Afryki i Europy,
- Ameryki Południowej i Europy,
- Australii i Oceanii oraz Europy.

Na szkolną wycieczkę pojechało 87 uczniów klas czwartych, 66 klas piątych i 59 klas szóstych.

- Ilu uczniów wzięło udział w wycieczce?
- Podczas wycieczki jeden nauczyciel powinien mieć pod opieką nie więcej niż 15 uczniów. Ilu co najmniej nauczycieli musiało pojechać na tę wycieczkę?
- W jednym autokarze jest 48 miejsc siedzących. Ile co najmniej autokarów wynajęto na ten wyjazd?

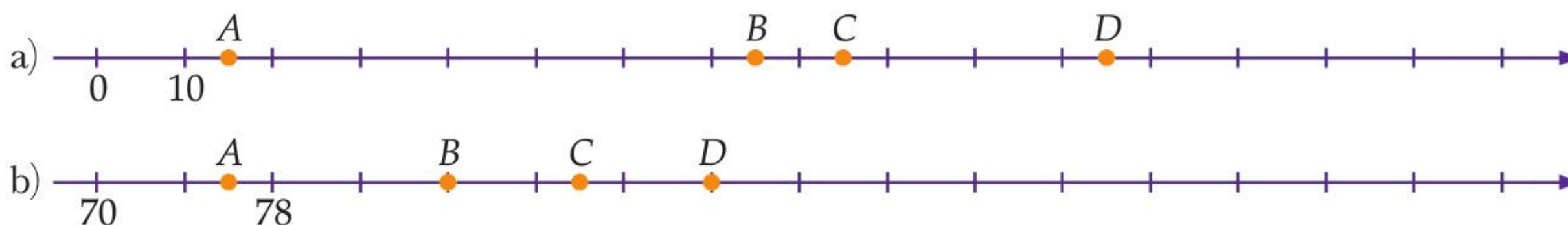
W przejściu podziemnym pod dworcem kolejowym znajdują się punkty handlowe.



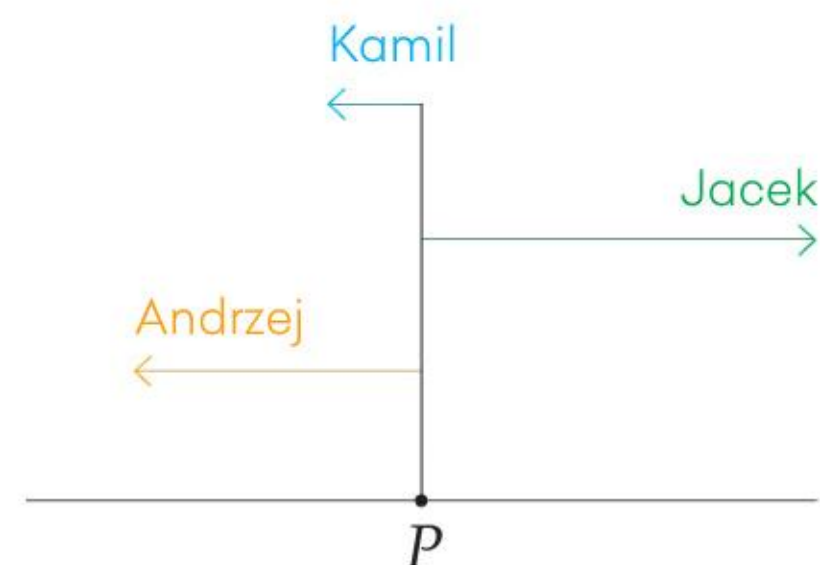
Skorzystaj z rysunku i odpowiedz na pytania.

- Jaka jest długość przejścia podziemnego?
- Jaka jest odległość między kioskiem z prasą a sklepem z pamiątkami?
- Jaka jest odległość między dwoma punktami sprzedaży biletów?
- Jaka jest odległość między sklepem z pieczywem a apteką?
- Który z punktów, E czy F , znajduje się dalej od wyjścia do miasta? O ile metrów dalej?
- Który z punktów, C czy D , znajduje się bliżej wejścia na peron? O ile metrów bliżej?

Oblicz iloczyn liczb będących współrzędnymi punktów A i B oraz sumę liczb będących współrzędnymi punktów C i D .



Trzej chłopcy wyruszyli z tego samego miejsca oznaczonego na rysunku punktem P . Andrzej i Kamil poruszali się w jednym kierunku, a Jacek – w przeciwnym. Kamil szedł pieszo, pozostali chłopcy jechali na rowerach. W ciągu godziny Kamil przeszedł 5427 m, a Jacek przejechał 22 365 m. Droga przebyta w tym czasie przez Andrzeja była 3 razy dłuższa od tej, którą pokonał Kamil.



- Ile metrów w ciągu godziny przejechał Andrzej?
- Który z chłopców, Andrzej czy Jacek, przejechał więcej metrów i o ile więcej?
- Oblicz odległości dzielące poszczególnych chłopców po godzinie od wyruszenia z punktu P (kolejno odległości między: Andrzejem a Kamilem, Andrzejem a Jackiem, Kamilem a Jackiem).

Każdy listek ręcznika papierowego jest kwadratem o boku 23 cm. Natomiast listek papieru toaletowego jest prostokątem o długości 12 cm. Która „ścieżka” byłaby dłuższa: z całkowicie rozwiniętego papieru czy z ręcznika? O ile centymetrów dłuższa?



Liczbę 4116 podzielono przez 7, otrzymany iloraz podzielono ponownie przez 7 i wynik podzielono przez 7 po raz trzeci. Ile razy otrzymana na końcu liczba jest mniejsza od początkowej? A o ile jest mniejsza?

- 343 razy mniejsza. O 4128 mniejsza.
- 49 razy mniejsza. O 4128 mniejsza.

- 343 razy mniejsza. O 4104 mniejsza.
- 49 razy mniejsza. O 4104 mniejsza.

Zapisz:

- dzielniki liczby 100, które są nie mniejsze niż 25,
- wielokrotności liczby 8, nie większe niż 32,
- liczby pierwsze nie większe niż 17.

Jaką liczbę należy:

- dodać do 325, aby otrzymać 520,
- odjąć od 450, aby otrzymać 167,
- pomnożyć przez 32, aby otrzymać 512,
- podzielić przez 25, aby otrzymać 48?

Znajdź dwie różne liczby, których iloczyn jest 2 razy większy od ich sumy.



Czy pamiętasz?

Liczby, przez które dana liczba naturalna dzieli się bez reszty, nazywamy jej dzielnikami.

Liczby, które otrzymamy przez pomnożenie pewnej liczby przez dowolne liczby naturalne, nazywamy jej wielokrotnościami.

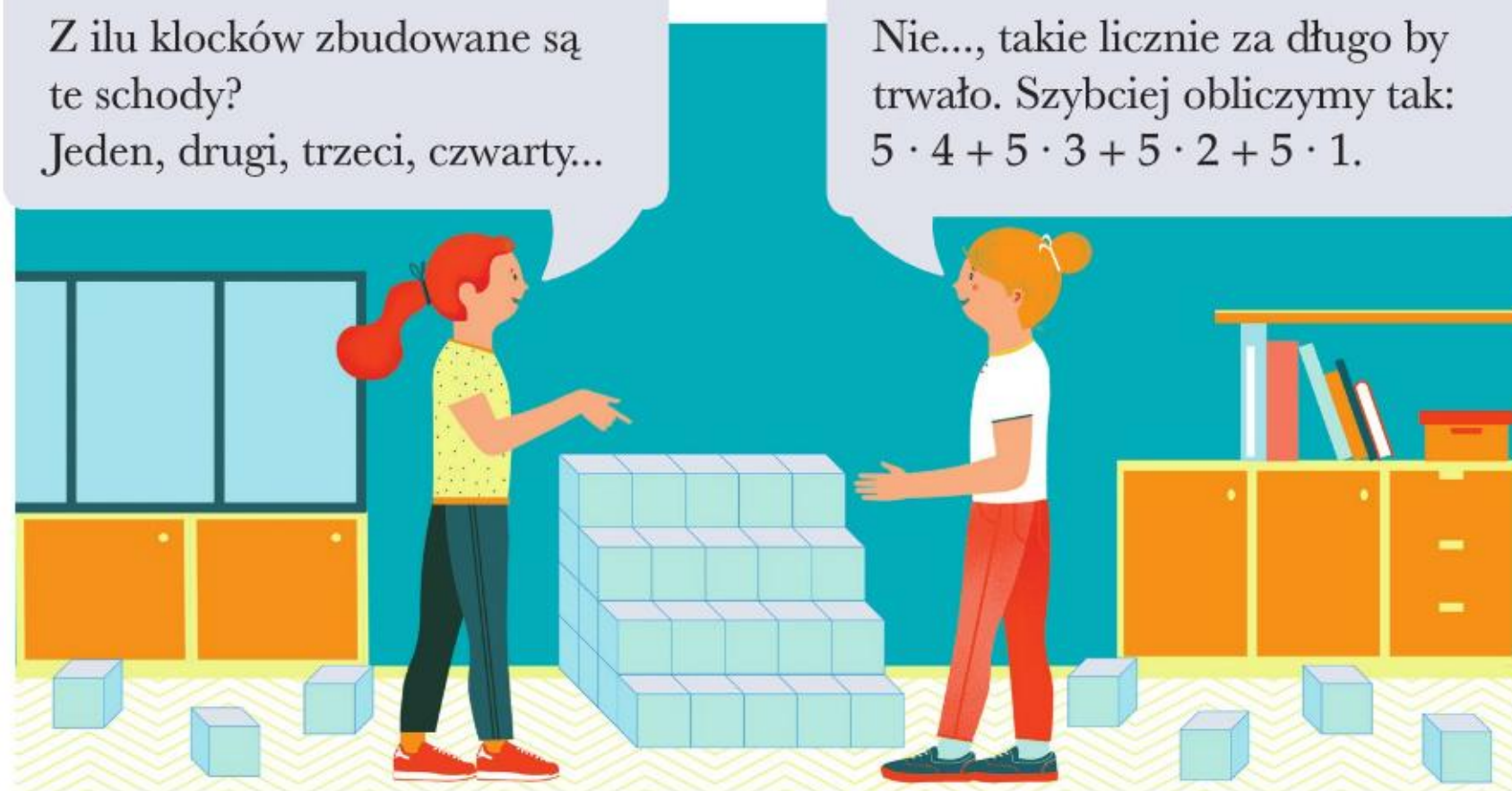
Liczba pierwsza to liczba naturalna większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki: liczbę 1 i samą siebie.

1.2 Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych

Podejmij temat



Ile najmniej klocków trzeba dołożyć, żeby z tych schodów powstał prostopadłościan? Jak to obliczyć? Jak zapisać takie wyrażenie? A ile klocków trzeba dołożyć, aby powstał sześciąt?



Jeżeli w wyrażeniu arytmetycznym występuje więcej niż jedno działanie, należy te działania wykonywać w odpowiedniej kolejności.

Przykład 1

Obliczmy wartość wyrażenia.

a) $56 - 32 + 17$

b) $12 \cdot 4 : 6$

c) $28 + 36 : 4$

d) $11 \cdot 6 - 21$

e) $4^3 \cdot 5$

f) $84 - 8^2$

g) $(38 - 25) \cdot 3$

h) $4 \cdot (56 : 7)$

a) $56 - 32 + 17 = 24 + 17 = 41$

b) $12 \cdot 4 : 6 = 48 : 6 = 8$

c) $28 + 36 : 4 = 28 + 9 = 37$

d) $11 \cdot 6 - 21 = 66 - 21 = 45$

e) $4^3 \cdot 5 = 64 \cdot 5 = 320$

f) $84 - 8^2 = 84 - 64 = 20$

g) $(38 - 25) \cdot 3 = 13 \cdot 3 = 39$

h) $4 \cdot (56 : 7) = 4 \cdot 8 = 32$

Jeżeli w wyrażeniu występuje tylko dodawanie i odejmowanie lub tylko mnożenie i dzielenie, to działania wykonujemy w takiej kolejności, w jakiej są one zapisane, czyli od strony lewej do prawej.

Jeżeli w wyrażeniu oprócz dodawania i odejmowania występuje mnożenie i dzielenie, to obliczenia zaczynamy od mnożenia i dzielenia.

Jeżeli w wyrażeniu występuje potęgowanie, to wykonujemy je przed pozostałymi działaniami.

Jeżeli w wyrażeniu występują nawiasy, to obliczenia zaczynamy od działań w nawiasach.

1. Oblicz wartość wyrażenia. Pamiętaj o poprawnej kolejności wykonywania działań.

a) $75 - 33 - 15$
 $28 + 46 - 53 + 9$
 $58 - 25 + 41 - 36$

b) $240 : 30 \cdot 4$
 $25 \cdot 3 : 5 \cdot 5$
 $144 : 6 \cdot 72 : 9$

c) $200 - 153 : 3$
 $47 + 12 \cdot 5 - 78$
 $132 : 11 + 18 \cdot 7 - 99$

d) $7^2 - 2^3$
 $10^3 : 5^2$
 $6^2 : 4$

e) $27 + 3^3$
 $13^2 - 125$
 $20^2 - 4^3$

f) $(58 + 38) : 8$
 $(42 - 36) \cdot (15 + 16)$
 $121 - (125 + 85) : (61 - 54)$

2. Maciek ma 3 banknoty 20-złotowe, 6 monet 5-złotowych i 4 monety 2-złotowe. Chce kupić książkę za 42 zł.

- a) Działanie, które pozwoli obliczyć, ile pieniędzy pozostanie Maćkowi po zakupie książki, ma postać
- A. $3 \cdot 20 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 42$
B. $42 - 3 \cdot 20 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2$
C. $(20 + 5 + 2) \cdot (3 + 6 + 4) - 42$
D. $42 - (20 + 6 + 4)$

-  b) Ułóż podobne zadanie dla kolegi lub koleżanki. Podaj cztery odpowiedzi, z których tylko jedna będzie poprawna.



Jeżeli w treści zadania występują jednakowe jednostki lub różne jednostki zostały zamienione na jednakowe przed rozpoczęciem rozwiązywania, wówczas nie piszemy ich w działaniach, czyli np. zamiast $2 \text{ zł} + 5 \text{ zł}$ napiszemy $2 + 5$, a zamiast $7 \cdot 3 \text{ cm} + 8 \text{ cm}$ napiszemy $7 \cdot 3 + 8$.

Zadania

● Zapisz w postaci jednego wyrażenia i oblicz.

- a) Do liczby 5287 dodaj iloraz liczb 8970 i 26.
b) Od iloczynu liczb 76 i 45 odejmij 564.
c) Sumę liczb 426, 184 i 361 zmniejsz o iloczyn liczb 28 i 16.
d) Sumę liczb 835 i 799 pomnóż przez różnicę tych liczb.

● Oblicz.

- a) $3 \cdot [27 : (4 + 5)]$ b) $42 - [6 + (21 - 13) \cdot 2]$
c) $2 \cdot [30 - (17 - 9)] \cdot 3$ d) $19 - [5 + (25 + 17) : 6]$
e) $\{[25 - (8 - 5) \cdot 7] + 4\} : 2$ f) $5 + \{[6 + 2 \cdot (9 + 5)] - 2\} : 8$

-  Polska graniczy z siedmioma krajami. W nawiasach podano długości granic z poszczególnymi sąsiadami: Niemcy (467 km), Czechy (796 km), Słowacja (541 km), Ukraina (535 km), Białoruś (418 km), Litwa (104 km), Rosja (210 km). Na północy granica Polski przebiega wzdłuż wybrzeża Bałtyku. Łączna długość granic naszego kraju wynosi 3511 km. Ile kilometrów ma granica morska?

Ciekawe!

Granica morska Polski jest znacznie krótsza od linii brzegowej, która ma długość ok. 770 km. Wynika to z faktu, że granica ta nie przebiega wzdłuż brzegu, ale tworzy ją umowna linia leżąca na obszarze morza. Jest ona oddalona od brzegu o ok. 22 km i nie uwzględnia linii brzegowej nadmorskich zatok i zalewów.

Ciekawe!



Najstarszą polską latarnią morską jest latarnia w Rozewiu. Uru-
chomiono ją w 1822 r. Do dziś
pełni funkcję nawigacyjną.

- Dwie grupy harcerzy idą na wycieczkę do latarni morskiej. Starsza grupa przeszła już 2379 m, a młodsza 2173 m. Cała zaplanowana trasa jest 3 razy dłuższa niż droga przebyta przez grupę młodszą. Przepisz wyrażenie, za pomocą którego można obliczyć, ile metrów pozostało do przejścia grupie starszej. Oblicz wartość tego wyrażenia.
A. $3 \cdot 2379 - 2173$ B. $(2379 - 2173) \cdot 3$
C. $2173 \cdot 3 - 2379$ D. $2379 \cdot 3 - 2173 \cdot 3$
- Michał, Jacek i Tomek to trzech bracia. Michał ma 136 zł, Jacek 2 razy mniej niż Michał, a Tomek o 28 zł więcej niż Jacek.
a) Przepisz działanie opisujące, ile pieniędzy ma Tomek. Wykonaj je.
A. $136 + 136 : 2 + 28$ B. $136 + 28$
C. $136 : 2 + 28$ D. $136 - 2 + 28$
b) Przepisz działanie pozwalające obliczyć, ile pieniędzy mają razem trzech bracia, a następnie wykonaj to działanie.
A. $136 + 136 : 2 + 136 : 2 + 28$
B. $136 + 136 : 2 + 28$
C. $136 : 2 + 136 : 2 + 26$
D. $136 \cdot 3 : 2 + 28$
- Na najniższej półce regału stoi 68 książek, na wyższej o 16 książek więcej, a na najwyższej 2 razy mniej książek niż na dwóch pozostałych razem. Przepisz wyrażenie, za pomocą którego można obliczyć, ile jest książek na wszystkich trzech półkach, a następnie oblicz jego wartość.
A. $68 + 16 + (68 + 16) : 2$
B. $68 + 68 + 16 + (68 + 68 + 16) : 2$
C. $68 + 68 + 16 + 68 : 2$
D. $(2 \cdot 68 + 16) : 2$
- Marcin pracuje, roznosząc gazetki promocyjne. Jednego dnia rozdał 84 gazetki sklepu Alfa i 224 gazetki sklepu Beta. Każda gazetka pierwszego sklepu ważyła 8 dag, a drugiego – 6 dag.
a) Ile ważyły razem gazetki rozdane tego dnia przez Marcina? Obliczenia zapisz za pomocą jednego wyrażenia.
b) O ile więcej ważyły rozdane gazetki sklepu Beta od gazetek sklepu Alfa?

W domu kultury odbywają się dwa kursy językowe. Na pierwszy uczęszczają 23 osoby dorosłe i 9 dzieci, a na drugi – 28 osób dorosłych i 5 dzieci. Każdy kurs osoby dorosłej kosztuje 800 zł, a dziecko – 500 zł. Które wyrażenie pozwoli obliczyć:

- a) kwotę wpłaconą organizatorom za uczestników pierwszego kursu,
 A. $23 \cdot 800 + 5 \cdot 500$ B. $23 \cdot 800 + 9 \cdot 500$
 C. $23 \cdot 800 \cdot 9 \cdot 500$ D. $(23 + 9) \cdot (800 + 500)$
- b) kwotę wpłaconą organizatorom za kursy dzieci,
 A. $500 \cdot 9 \cdot 5$ B. $800 \cdot (9 + 5)$
 C. $500 \cdot (9 + 5)$ D. $(23 + 9) \cdot 500$
- c) o ile złotych więcej wpłacono za uczestników drugiego kursu,
 A. $(28 \cdot 800 + 5 \cdot 500) - (23 \cdot 800 + 9 \cdot 500)$ B. $28 \cdot 800 + 5 \cdot 500 - 23 \cdot 800 + 9 \cdot 500$
 C. $28 \cdot 800 + 5 \cdot 500$ D. $(28 \cdot 800 + 9 \cdot 500) - (23 \cdot 800 + 5 \cdot 500)$
- d) różnicę kwot wpłaconych za kursy dorosłych i za kursy dzieci?
 A. $23 \cdot 800 + 28 \cdot 800 - 9 \cdot 500 + 5 \cdot 500$ B. $(23 + 28 - 9 - 5) \cdot (800 - 500)$
 C. $(23 + 28) \cdot 800 - (9 + 5) \cdot 500$ D. $(23 + 28 + 9 + 5) \cdot (800 - 500)$

Skorzystaj z ilustracji i odpowiedz na pytania. Obliczenia zapisz za pomocą jednego wyrażenia.

- a) Ile trzeba zapłacić za 3 storczyki i 4 kaktusy?
 b) Ile reszty ze 100 zł otrzyma klientka kupująca 1 paproć i 2 kaktusy?
 c) O ile droższe są 3 paprocie od 2 storczyków?
 d) Ile złotych zabraknie klientowi mającemu 82 zł, jeżeli będzie chciał on kupić 2 storczyki, 2 paprocie i 2 kaktusy?



Uczniowie klasy VIa w poniedziałki i środy mają po 7 lekcji, we wtorki i czwartki – po 6, a w piątki – 5. Skorzystaj z kalendarza na bieżący rok i oblicz, ile lekcji będą mieli we wrześniu tego roku.

Za nocleg w szkolnym schronisku młodzieżowym osoba dorosła płaci 36 zł, natomiast uczeń lub student – 27 zł. Dodatkowo za wypożyczenie pościeli należy jednorazowo zapłacić 5 zł.

- a) Ile zapłaci za 1 nocleg grupa 17 studentów mających własne śpiwory?
 b) Ile zapłaci za 4 noclegi grupa 5 osób dorosłych, jeżeli każda z nich wypożyczy pościel?
 c) Ile zapłaci za 1 nocleg grupa 23 uczniów z dwoma nauczycielami, jeżeli wszyscy mają własne śpiwory?
 d) Ile zapłaci za 1 nocleg grupa 8 studentów, z których połowa chce wypożyczyć pościel?
 e) Ile zapłaci za 3 noclegi grupa 12 uczniów z nauczycielem, jeżeli tylko 3 uczniów ma śpiwory, a pozostałe osoby muszą wypożyczyć pościel?
 f) O ile więcej zapłaci za 5 noclegów osoba dorosła niż uczeń, jeżeli uczeń śpi we własnym śpiworze, a opiekun wypożycza pościel?

1.3 Praca z kalkulatorem

Podjmij temat

Wieża Eiffla [czyt. ajfla] mierzy 300 m wysokości, a razem z anteną – 324 m. Wieża ma tarasy widokowe na trzech poziomach. Na każdy z nich prowadzą schody. Na pierwszy taras (od samej ziemi) prowadzi 347 stopni, z tarasu pierwszego na drugi jest 327 stopni, a z drugiego na trzeci – 1036.



To ile jest wszystkich stopni? Czeka... mam w telefonie kalkulator, zaraz obliczę.

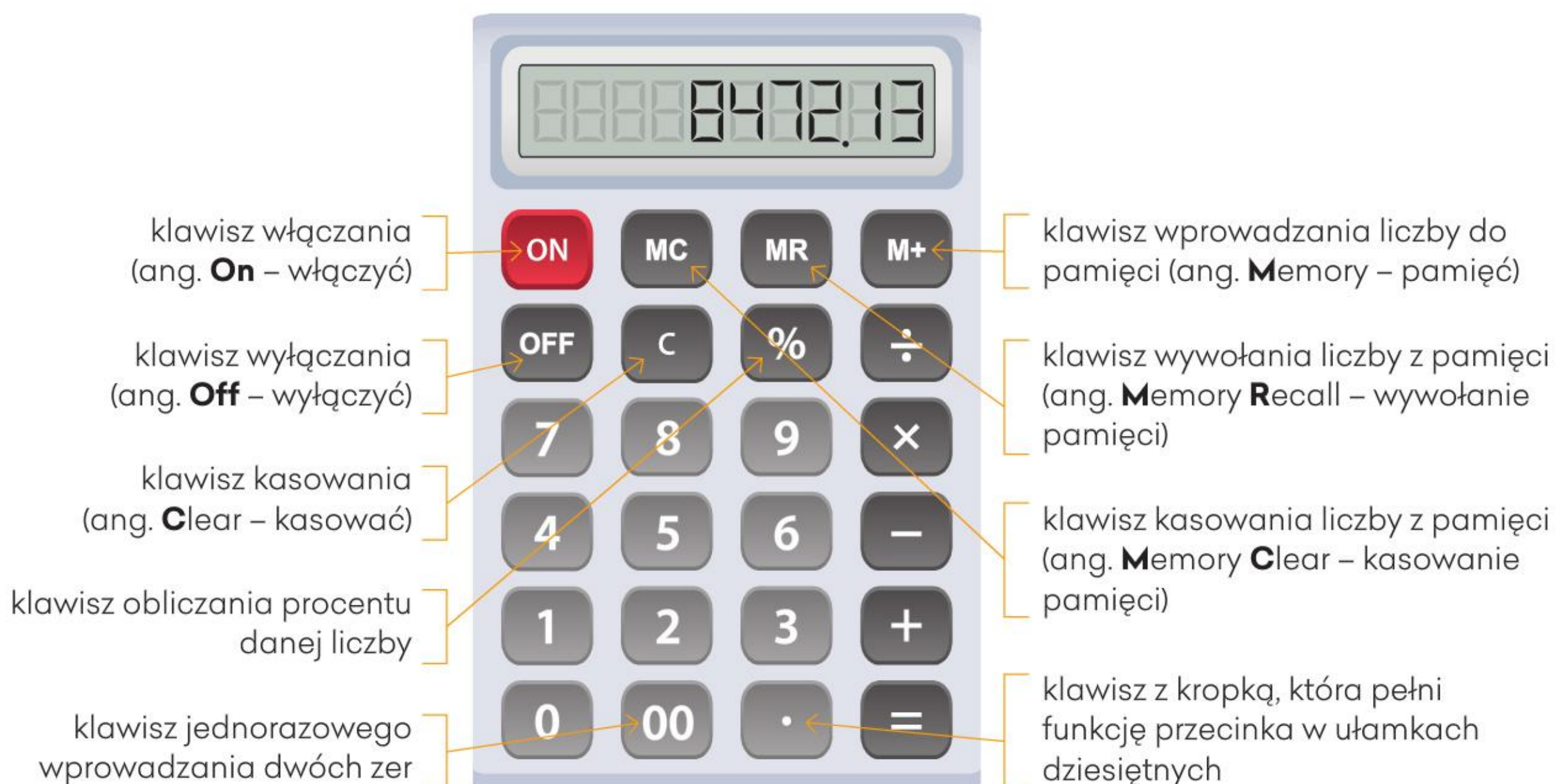


Oblicz liczbę stopni w pamięci lub pisemnie. Ile czasu ci to zajęło? W jaki sposób wynik można uzyskać szybciej?

Najczęściej używanymi klawiszami kalkulatora (oprócz tych z cyframi) są klawisze ze znakami czterech podstawowych działań i znakiem równości:



Zwykle gdy korzystamy z kalkulatora, wykonujemy obliczenia zawierające te działania. Popularny kalkulator (zwany kalkulatorem prostym) ma również inne klawisze – jak na ilustracji poniżej.



Teraz poznamy zastosowanie klawiszy oznaczonych literą M, które mają związek z zapamiętywaniem wybranych liczb.

Przykład 1

Obliczmy z użyciem kalkulatora.

a) $35 \cdot 49 + 13 \cdot 42$ b) $524 - 3654 : 9$

a)	Wykonywana czynność	Klawisze	Wyświetlacz
	Mnożymy $35 \cdot 49$.		
	Wprowadzamy liczbę do pamięci kalkulatora.		
	Kasujemy wynik na wyświetlaczu.		
	Mnożymy $13 \cdot 42$.		
	Dodajemy liczbę wywołaną z pamięci kalkulatora.		
	Usuwanie z pamięci liczbę 1715.		

Zauważmy, że dla ułatwienia obliczeń zmieniliśmy kolejność dodawanych liczb – do wyniku 546 dodaliśmy zapamiętany wynik wcześniejszego mnożenia, tj. 1715. Pozwala nam na to prawo przemienności dodawania.

b)	Wykonywana czynność	Klawisze	Wyświetlacz
	Dzielimy $3654 : 9$.		
	Wprowadzamy liczbę do pamięci kalkulatora.		
	Kasujemy wynik na wyświetlaczu.		
	Od 524 odejmujemy liczbę wywołaną z pamięci kalkulatora.		
	Usuwanie z pamięci liczbę 406.		

1. Oblicz z użyciem kalkulatora prostego. Podkreślone działania w punkcie b) należy wykonać w pierwszej kolejności i zastosować funkcję zapamiętywania.

a) $256 \cdot 83 - 3928$
 $1342 + 2876 - 599$
 $(3762 - 1794) \cdot 35$
 $1272 : 53 + 1888$
 $(3452 + 3716) : 128$

b) $4568 - (654 + 2566)$
 $547 + 2014 : 53$
 $18\,094 - 38 \cdot 49$
 $4781 + (7352 - 2456)$
 $(7320 - 5024) : (184 + 144)$

Więcej na temat

Dwie liczby zapisane za pomocą tych samych cyfr, ale w odwrotnej kolejności (jak gdyby były odbiciem w lustrze), nazywamy **liczbami lustrzanymi**. Są nimi np. 37 i 73 oraz 156 i 651.

2. Zapisz dowolne liczby lustrzane jedna po drugiej tak, aby utworzyły jedną liczbę, np. 237732. Sprawdź, czy dzieli się ona przez 11. Powtórz to dla kilku innych liczb lustrzanych. Co zauważasz?

Zadania

- Oblicz sumę pięciu kolejnych liczb parzystych, z których najmniejszą jest 396.

- Oblicz iloczyn największej liczby trzycyfrowej i największej liczby czterocyfrowej.

- Oblicz sześćcian liczby pierwszej większej od 11 i jednocześnie mniejszej od 17.

- Zapisz działanie, jakie wykonasz, jeśli będziesz przyciskać kolejno klawisze:

a) $7 \ 4 \ + \ 3 \ 8 \ 5 \ : \ 5 \ =$

b) $3 \ 8 \ 7 \ : \ 9 \ + \ 1 \ 6 \ 8 \ =$

c) $4 \ 8 \ - \ 3 \ 9 \ = \text{M+} \ \text{C} \ 2 \ 6 \ - \ \text{MR} \ = \ \text{MC}$

d) $2 \ 0 \ 7 \ : \ 2 \ 3 \ = \ \text{M+} \ \text{C} \ 1 \ 7 \ 2 \ 8 \ : \ \text{MR} \ = \ \text{MC}$

- Zapisz działanie i oblicz, ile dni minęło od 1 stycznia 2000 r. do 31 grudnia 2018 r. Które lata w tym okresie były latami przestępnymi?

- Liczbę 142 857 pomnóż kolejno przez: 3, 2, 6, 4, 5. Czy zauważasz jakąś ciekawą własność tej liczby? Opisz tę własność.



1.4 Zaokrąglanie liczb naturalnych

Podejmij temat



Czy potrafisz powiedzieć, ile dokładnie osób było na stadionie?

Mecz OLIMPIA – START zgromadził na stadionie około 40 000 widzów, z czego około 12 000 to kibice gości, a pozostali – gospodarzy. Jedyna bramka padła w drugiej połowie. Celnym strzałem z około 22 m popisał się Paweł Świerkowski.

Wyraz *około* oznacza, że podane liczby nie są identyczne jak te w rzeczywistości, ale do nich zbliżone. To liczby podane w zaokrągleniu, czyli wartości przybliżone. Zatem **zaokrąglenie liczby** to wartość zbliżona do rzeczywistej, ale mniej dokładna.

W rzeczywistości pani Anna z rysunku obok otrzymuje pensję wysokości 3852 zł, a pan Michał 3345 zł. Kobieta podała nieco wyższą kwotę, a mężczyzna – trochę niższą. Można powiedzieć, że oboje podali swoje wynagrodzenie w zaokrągleniu do pełnych tysięcy złotych.

Zarabiam w zaokrągleniu 4000 zł miesięcznie.

A ja zarabiam około 3000 zł miesięcznie.

1. W tabeli przedstawiono zarobki kilku osób pracujących z panią Anną i panem Michałem. Kto z nich podał w zaokrągleniu kwotę wyższą od rzeczywistej, a kto niższą? Jak sądzisz, dlaczego?

Imię	Dokładna kwota wynagrodzenia (w zł)	Kwota wynagrodzenia w zaokrągleniu do tysięcy (w zł)
Roman	4020	4000
Ewelina	3952	4000
Marta	3247	3000
Wojciech	2854	3000
Adam	6113	6000
Danuta	5925	6000



Symbolem zaokrąglenia jest $\approx$.

Czytamy:

równa się w zaokrągleniu

lub

równa się w przybliżeniu.

2. Jaką kwotę w zaokrągleniu do tysięcy podaliby:

- a) pan Marek zarabiający 3728 zł,
- b) pan Robert zarabiający 4121 zł,
- c) pani Joanna zarabiająca 5317 zł,
- d) pan Jacek zarabiający 6999 zł?

Czy potrafisz podać zasadę, według której należało udzielić odpowiedzi?

Zaokrąglamy zawsze do pewnego rzędu, np. do dziesiątek, setek, tysięcy.



Rysunek pokazuje zasadę zaokrąglania (w tym przypadku do dziesiątek). Liczby 21, 22, 23, 24 zaokrąglamy do 20, a liczby 25, 26, 27, 28, 29 – do 30. Następnie liczby 31, 32, 33, 34 zaokrąglamy do 30 itd.

- Jeśli zaokrąglamy liczbę do dziesiątek, to cyfrę jedności zastępujemy zerem (chyba że już jest ona zerem), natomiast cyfra dziesiątek może zostać zmieniona lub nie w zależności od tego, jaka jest cyfra jedności tej liczby.
- Jeżeli cyfrą jedności liczby jest 1, 2, 3 lub 4, to aby zaokrąglić ją do dziesiątek, zmniejszamy tę liczbę do najbliższej pełnej dziesiątki (mówimy wtedy, że zaokrąglamy w dół).
 $23 \approx 20$
 $141 \approx 140$
 $3274 \approx 3270$
- Jeżeli cyfrą jedności liczby jest 5, 6, 7, 8 lub 9, to aby zaokrąglić ją do dziesiątek, powiększamy tę liczbę do najbliższej pełnej dziesiątki (mówimy wtedy, że zaokrąglamy w górę).
 $28 \approx 30$
 $377 \approx 380$
 $5165 \approx 5170$
- Jeśli zaokrąglamy liczbę do setek, to cyfry dziesiątek i jedności zastępujemy zerami.
- Jeżeli cyfrą dziesiątek liczby jest 0, 1, 2, 3 lub 4, to aby zaokrąglić ją do setek, zmniejszamy tę liczbę do najbliższej pełnej setki (mówimy wtedy, że zaokrąglamy w dół).
 $725 \approx 700$
 $3508 \approx 3500$
 $125441 \approx 125400$
- Jeżeli cyfrą dziesiątek liczby jest 5, 6, 7, 8 lub 9, to aby zaokrąglić ją do setek, powiększamy tę liczbę do najbliższej pełnej setki (mówimy wtedy, że zaokrąglamy w górę).
 $362 \approx 400$
 $2583 \approx 2600$
 $74890 \approx 74900$
- W podobny sposób zaokrąglamy liczbę do tysięcy, dziesiątek tysięcy itd.

Zasadę zaokrąglania wyjaśnimy jeszcze dokładniej na przykładzie.

Przykład 1

Zaokrąglijmy liczby 54 163 i 27 842 do tysięcy.

Skoro mamy zaokrąglić podane liczby do tysięcy, to szczególnie ważne są dla nas cyfry tysięcy i rzędów wyższych. Cyfry setek i rzędów niższych zastępujemy zerami.

Jeżeli cyfrą **setek** jest 0, 1, 2, 3 lub 4,
to cyfra **tysięcy** pozostaje bez zmian.

54 163
te cyfry zastępujemy zerami

$$54 \text{ 163} \approx 54 \text{ 000}$$

Jeżeli cyfrą **setek** jest 5, 6, 7, 8 lub 9,
to cyfra **tysięcy** musi być powiększona o 1.

27 842
te cyfry zastępujemy zerami

$$27 \text{ 842} \approx 28 \text{ 000}$$

W przypadku zaokrąglania do innych rzędów postępujemy analogicznie jak w powyższym przykładzie.

3. Zaokrąglij liczby 192, 247, 364, 453, 529, 638, 271, 885:

- a) do dziesiątek, b) do setek.

Przykład 2

Zaokrąglijmy liczbę:

- a) 399 do dziesiątek, b) 952 do setek, c) 38 do setek.

a) Ponieważ cyfrą jedności liczby 399 jest 9, to zgodnie z zasadą zaokrąglania cyfrę dziesiątek należy powiększyć o 1. W ten sposób otrzymujemy 10 dziesiątek, czyli 1 setkę. W rzędzie dziesiątek wpisujemy zatem 0, a cyfrę setek powiększamy o 1.
 $399 \approx 400$

b) Ponieważ cyfrą dziesiątek liczby 952 jest 5, to cyfrę setek należy powiększyć o 1. W ten sposób otrzymujemy 10 setek, czyli 1 tysiąc. W rzędzie setek wpisujemy zatem 0, a w rzędzie tysięcy 1.
 $952 \approx 1000$

c) Ponieważ cyfrą dziesiątek liczby 38 jest 3, to cyfra setek pozostaje bez zmiany, czyli jest równa 0. Cyfrę dziesiątek i jedności zastępujemy zerami, otrzymujemy zatem 0 setek, 0 dziesiątek i 0 jedności.
 $38 \approx 0$

1.5 Liczby całkowite

Podejmij temat



Jakimi liczbami są oznaczone piętra, jaką parter, a jakimi – poziomy poniżej parteru? Wymień te liczby.



Liczby, które w *Podejmij temat* wskazują piętra poniżej powierzchni ziemi, to liczby ujemne. Zapisujemy je ze znakiem minus, np. -1 , -3 , -7 .

Liczby ujemne to liczby mniejsze od zera.

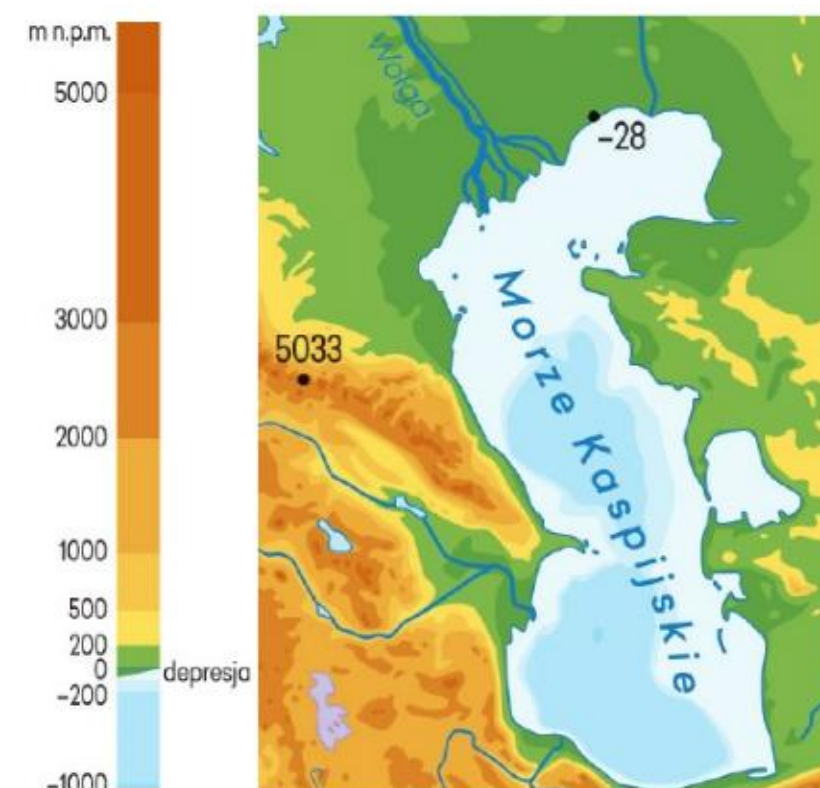
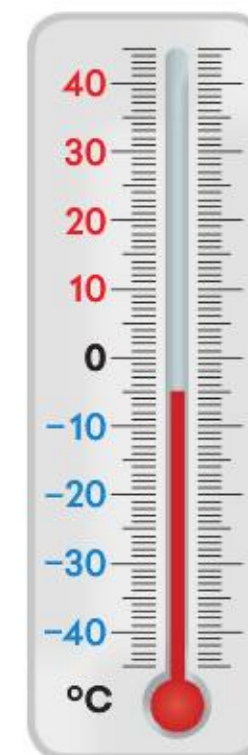
Liczby ujemne mają wiele różnych zastosowań.

Jaką temperaturę wskazuje pokazany obok termometr?
Potocznie mówi się: „5 stopni poniżej zera”, a prawidłowo: „minus 5 stopni Celsjusza”, co zapisuje się: -5°C .

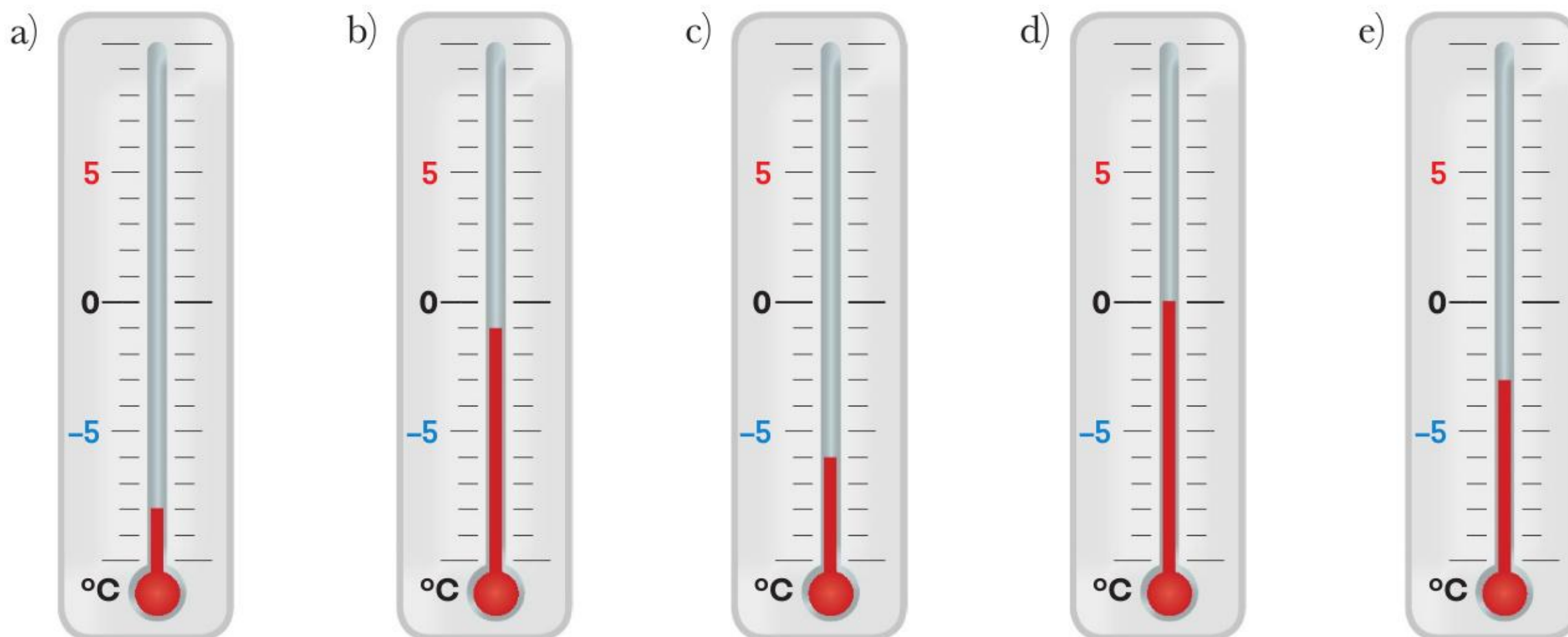
Zatem liczby ujemne służą też do podawania temperatur.

Niektóre mapy przedstawiają wysokość terenu za pomocą kolorów. Dodatkowo mogą być na nich zaznaczone punkty wysokościowe w odniesieniu do poziomu morza, np. liczba 5033 oznacza 5033 m n.p.m. (nad poziomem morza). Istnieją jednak miejsca położone poniżej poziomu morza (depresje). Czy wiesz, jakie liczby podane są na mapach w miejscach, gdzie występuje depresja? Miejsca te są oznaczane liczbami ze znakiem minus, np. -28 oznacza 28 m p.p.m. (poniżej poziomu morza).

Obejrzyj mapę zamieszczoną na s. 5. Znajdziesz tam informacje o największych depresjach świata.



1. Zapisz, jaką temperaturę wskazuje termometr.

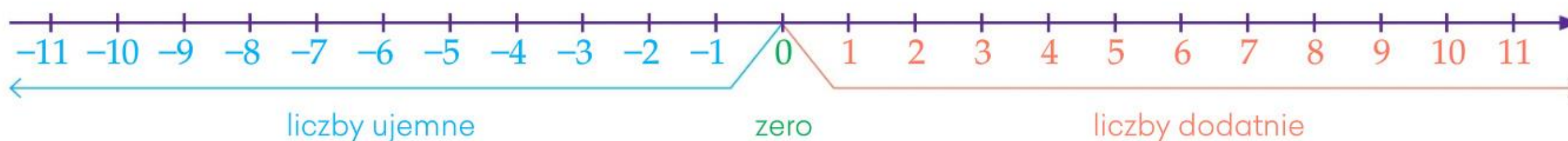


2. Spośród liczb: -5, 7, 4, -12, 0, 6, -8, wypisz liczby ujemne.

3. W południe 1 stycznia w wybranych miastach zanotowano panujące tam temperatury. Zapisz je, stosując (tam, gdzie można) liczby ujemne.

Miasto	Temperatura
Warszawa	2°C poniżej zera
Gdańsk	1°C poniżej zera
Szczecin	3°C poniżej zera
Poznań	2°C powyżej zera
Olsztyn	6°C poniżej zera
Kraków	11°C poniżej zera

Jeżeli położymy termometr tak, aby rosnące temperatury były skierowane w prawą stronę, to układ liczb na termometrze będzie analogiczny jak na osi liczbowej.



Zero nie jest ani liczbą dodatnią, ani ujemną.

Liczby nieujemne to liczby, które nie są ujemne, czyli liczby dodatnie i zero.

Liczby niedodatnie to liczby, które nie są dodatnie, czyli liczby ujemne i zero.

4. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej trzy punkty o współrzędnych dodatnich oraz trzy punkty o współrzędnych ujemnych.

5. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej punkty o współrzędnych: -10, -7, -1, 0, 2, 8.

6. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej dwa punkty leżące po przeciwnych stronach punktu 0, w równych od niego odległościach. Zapisz współrzędne tych punktów.

Liczby, które są rozwiązaniem ćwiczenia 6, to para liczb przeciwnych.

Liczby przeciwne to dwie liczby, które leżą na osi liczbowej w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych jego stronach.



Liczbą przeciwną do 0 jest 0.

7. Zapisz liczbę przeciwną do podanej liczby.

- | | | |
|---------|-------|--------|
| a) -10 | b) 6 | c) -2 |
| d) -154 | e) 18 | f) -47 |

Liczby naturalne i liczby do nich przeciwnie tworzą **zbiór liczb całkowitych**.

8. Zapisz 15 liczb całkowitych mniejszych od 10. Jeśli występują wśród nich pary liczb przeciwnych, podkreśl każdą parę innym kolorem.

9. O ile jednostek od punktu 0 są oddalone zaznaczone punkty?



Z odległością na osi liczbowej związane jest nowe pojęcie matematyczne: wartość bezwzględna.

W ćwiczeniu 9 punkt $A = -5$ jest oddalony od punktu 0 o 5 jednostek (na lewo).

Mówimy, że wartość bezwzględna liczby -5 równa się 5.

$$|-5| = 5$$



czytamy: wartość bezwzględna

Punkt $B = -2$ jest oddalony od punktu 0 o 2 jednostki (na lewo).

$$|-2| = 2$$

Punkt $C = 3$ jest oddalony od punktu 0 o 3 jednostki (na prawo).

$$|3| = 3$$

Punkt $D = 8$ jest oddalony od punktu 0 o 8 jednostek (na prawo).

$$|8| = 8$$

Wartość bezwzględna liczby to jej odległość na osi liczbowej od zera.

10. Podaj wartość bezwzględną liczby.

- a) -6
- b) 6
- c) -9
- d) -15
- e) 25
- f) 0



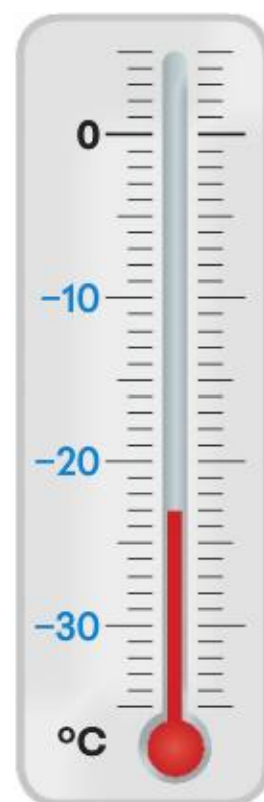
Czyli wartością bezwzględną liczby ujemnej jest liczba do niej przeciwna?

Tak, natomiast wartością bezwzględną liczby dodatniej jest ta sama liczba.

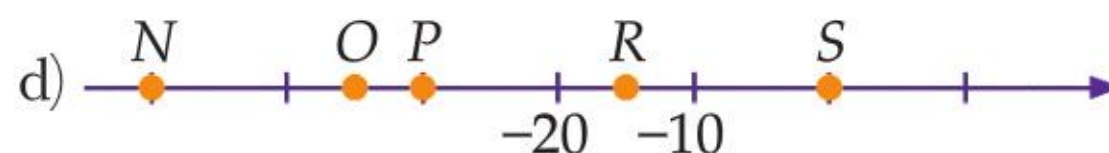
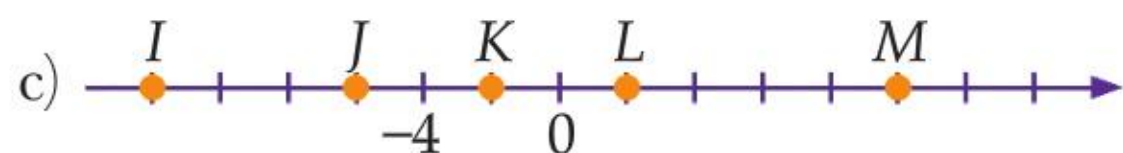
Zadania

Jaką temperaturę pokazuje termometr?

- A. -27°C
- B. -23°C
- C. -37°C
- D. -33°C



Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej punkty o podanych współrzędnych.

a) $A = 1$, $B = -13$, $C = -3$, $D = -7$

b) $E = -25$, $F = 10$, $G = 0$, $H = -35$

O ile stopni Celsjusza wzrosła temperatura:

- a) od -4°C do 0°C ,
- c) od -3°C do 7°C ,
- e) od -20°C do -8°C ,

- b) od -5°C do -1°C ,
- d) od -16°C do 0°C ,
- f) od -11°C do 11°C ?

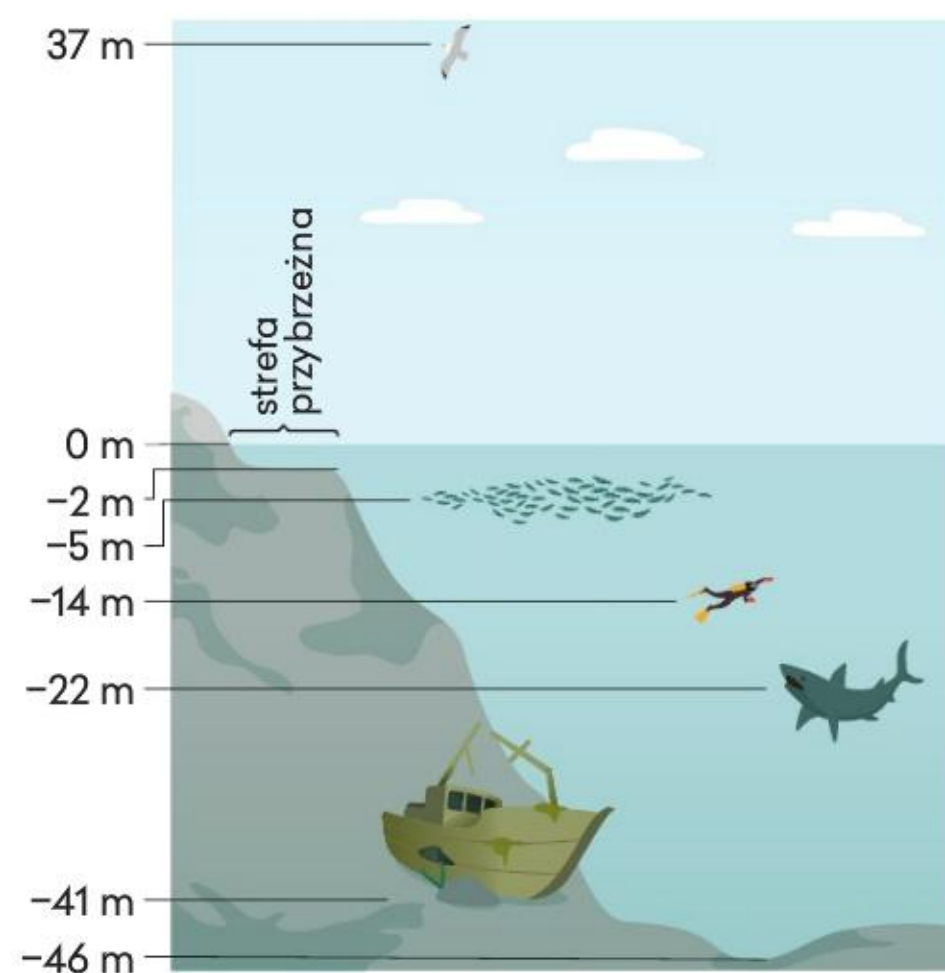
Przez kolejne dni marca Janek mierzył i notował temperaturę powietrza.

Data	5 III	6 III	7 III	8 III	9 III	10 III	11 III	12 III	13 III	14 III	15 III	16 III	17 III	18 III
Temperatura (°C)	5	0	-3	-1	0	-6	-2	-7	0	2	-4	1	-3	-5

- Przez ile dni Janek mierzył temperaturę?
- W których dniach Janek zanotował najniższą, a w których najwyższą temperaturę?
- Ile razy Janek zanotował temperaturę ujemną, a ile razy dodatnią?

Rysunek przedstawia tzw. przekrój jeziora. Przyjrzyj mu się i odpowiedz na pytania.

- Co na rysunku oznacza wysokość 0 m?
- Jaka jest odległość płetwonurka od poziomu wody?
- Na jakiej głębokości leży wrak łodzi?
- Jaka jest największa pokazana na rysunku głębokość jeziora?
- Jaka jest głębokość jeziora w strefie przybrzeżnej?
- Jaka jest odległość (w pionie) między ptakiem a ławicą ryb?

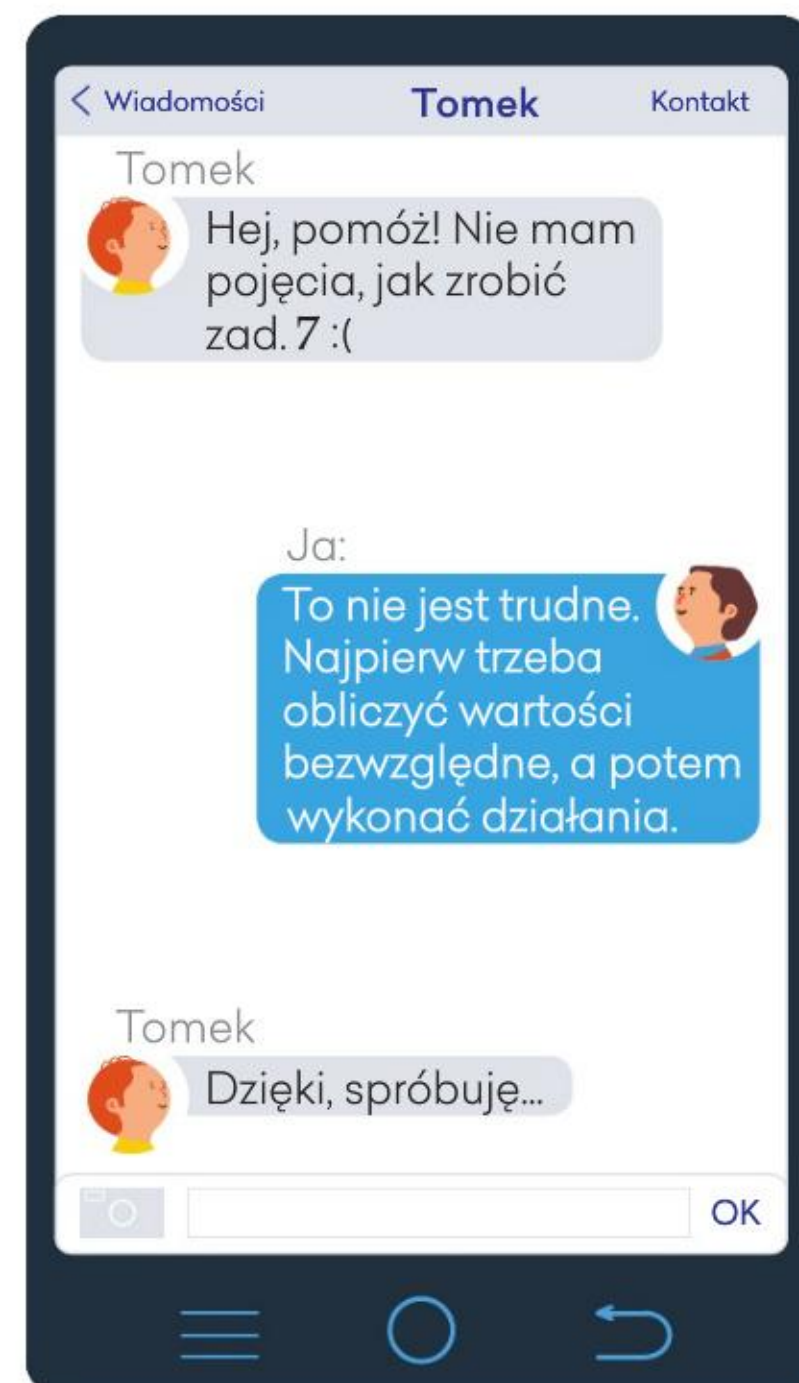


Oblicz.

- $|24| + 32$
- $|-18| + |-16|$
- $53 - |-25|$
- $|-84| - |-31|$
- $8 \cdot |-5|$
- $9 \cdot |-6| - |-3| \cdot 8$
- $|-7| \cdot |-8| - |45| : |-5|$
- $\frac{|24|}{|-8|}$
- $\frac{|-36|}{|-6|} - |2|$
- $\frac{|13| + |-27|}{|-5|}$
- $\frac{|-6| \cdot |5|}{|-10|}$
- $(|-8| + 7) : |-3|$

Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

- Zero jest liczbą dodatnią.
- Liczby przeciwne są sobie równe.
- Zero jest liczbą całkowitą.
- Wartość bezwzględna liczby zawsze jest liczbą dodatnią.
- Dla każdej liczby istnieje liczba przeciwna.
- Zero jest najmniejszą liczbą całkowitą.
- Wartości bezwzględne liczb przeciwnych są równe.



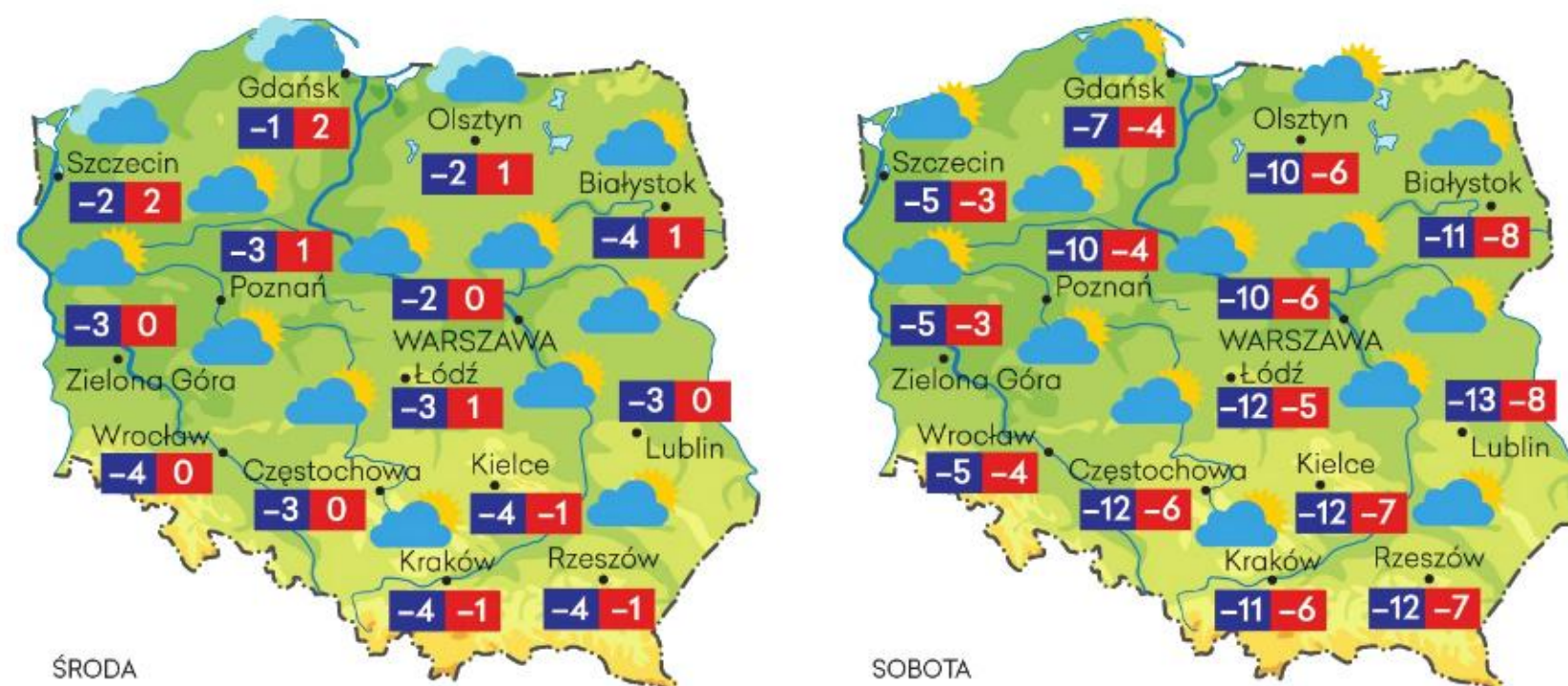
1.6 Porównywanie liczb całkowitych

Podejmij temat



Którego dnia w Szczecinie, według prognozy pogody, miało być chłodniej – w środę czy w sobotę? Którego dnia w całej Polsce miały panować wyższe temperatury? Czy któregoś dnia możliwe było pójście na ślizgawkę? Odpowiedź uzasadnij.

Mapy przedstawiają prognozę pogody dla Polski na dwa różne dni: środę i sobotę. Na niebieskich polach widzimy przewidywane średnie temperatury w nocy, a na czerwonych polach – w dzień.



Jeżeli przyjrzymy się liczbom na osi liczbowej, to możemy łatwo określić, która z nich jest większa, a która mniejsza. Zwrot osi (strzałka) pokazuje, w którą stronę liczby rosną: na poniższej osi im liczba jest bardziej położona na prawo, tym jest większa.



Jeżeli musimy porównywać liczby mniejsze lub większe od tych pokazanych na osi liczbowej, możemy wyobrażać sobie np. termometr i temperatury: im cieplej, tym liczba jest większa.

Przykład 1

Porównajmy podane liczby.

a) -16 i -2

b) 7 i -7

a) Wyobraźmy sobie temperatury -16°C i -2°C . Zimniej jest wtedy, gdy temperatura wynosi -16°C , czyli niższa z temperatur to -16°C , a zatem liczba -16 jest mniejsza niż liczba -2 .

$$-16 < -2$$

b) Wyższą temperaturą jest 7°C , niższą jest -7°C .

$$7 > -7$$

1. Przepisz pary liczb i zamiast pytajnika wstaw znak $<$ lub $>$.

a) $-9 \text{ ? } 16$
 $-28 \text{ ? } 4$
 $35 \text{ ? } -15$
 $-12 \text{ ? } 7$
 $10 \text{ ? } -10$

b) $-14 \text{ ? } -17$
 $-6 \text{ ? } -25$
 $-30 \text{ ? } -10$
 $-52 \text{ ? } -49$
 $-15 \text{ ? } -16$

c) $-8 \text{ ? } 0$
 $4 \text{ ? } 0$
 $0 \text{ ? } -20$
 $0 \text{ ? } -19$
 $-65 \text{ ? } 0$

2. Uporządkuj podane liczby w kolejności rosnącej.

a) $-16, -9, 6, -8, 0, -12, 3, -7$

b) $-10, 0, -2, 4, -20, -11, -1, -5$

c) $15, -42, -15, 5, -51, -35, -24, -56$

d) $-9, 10, -4, -8, 5, -16, -6, 2$

3. Jaka liczba całkowita ujemna jest największa?

Zadania

Skorzystaj z map umieszczonych w *Podejmij temat* i odpowiedz na pytania.

a) Jaką dzienną temperaturę prognozowano dla Krakowa na środę, a jaką na sobotę?

b) Czy w środę w nocy cieplej miało być w Rzeszowie, czy w Częstochowie?

c) W jakim mieście w środową noc miało być najcieplej?

d) Dla którego miasta przewidywano najniższą temperaturę na sobotni dzień, a dla którego – na sobotnią noc?

e) W których miastach w sobotę miało być cieplej w ciągu dnia niż w Łodzi?

 f) Zadaj koledze lub koleżance pięć innych pytań dotyczących porównywania temperatur. Jeśli nie masz pewności, czy udzielona odpowiedź jest poprawna, poproś o pomoc nauczyciela.

Napisz pięć liczb całkowitych:

a) większych od -20 ,

b) mniejszych od -20 ,

c) większych od -3 ,

d) ujemnych większych od -6 ,

e) większych od -40 i jednocześnie
mniejszych od -30 ,

f) mniejszych od -15 i jednocześnie
większych od -21 .

Napisz pięć następujących po sobie liczb całkowitych w kolejności rosnącej, takich że:

a) najmniejszą z nich jest liczba -3 ,

b) największą z nich jest liczba 2 .

Zapisz wszystkie liczby całkowite:

a) większe od -8 i jednocześnie mniejsze od 3 ,

b) ujemne większe od -6 ,

c) nieujemne mniejsze od 3 ,

d) niedodatnie większe od -2 .

- Które z liczb: $-7, -18, 7, -23, -15, 0, -43, -2, 8, -9$, są:
 - a) mniejsze od -15 ,
 - b) większe od -10 ,
 - c) większe od -8 i jednocześnie mniejsze od 0 ,
 - d) mniejsze od -14 i jednocześnie większe od -25 ?

- Na terenie stacji meteorologicznej wykonuje się m.in. pomiary temperatury powietrza. Oto wyniki pomiarów notowane przez tydzień, trzy razy dziennie: o godzinie 6.00, 12.00 i 24.00.

- a) Jaka była najwyższa, a jaka najniższa odnotowana temperatura?
- b) Kiedy zanotowano temperaturę niższą niż -10°C ?
- c) Ile razy odnotowano temperaturę wyższą niż -3°C ?
- d) Porównaj wszystkie temperatury zanotowane o godzinie 6.00. Którego dnia temperatura była najniższa?
- e) Porównaj wszystkie temperatury zanotowane w południe. Kiedy temperatura była najniższa?
- f) Porównaj wszystkie temperatury z godziny 24.00. Kiedy temperatura była najwyższa?

Dzień	Godzina		
	6.00	12.00	24.00
poniedziałek	-9°C	-1°C	-6°C
wtorek	-11°C	0°C	-9°C
środa	-13°C	-3°C	-12°C
czwartek	-10°C	-4°C	-8°C
piątek	-8°C	-1°C	-4°C
sobota	-6°C	0°C	-5°C
niedziela	-3°C	2°C	-2°C

- Znak zapytania w podanej nierówności zastępuje cyfrę. Przepisz nierówność i zamiast pytajnika wstaw cyfrę tak, by zapis był prawdziwy. Na ile sposobów możesz to zrobić? Podaj je wszystkie.

- a) $-3? > -34$
- b) $-26 < -?3$

- Zapisz:

- a) największą liczbę całkowitą mniejszą od -7 ,
- b) największą liczbę całkowitą mniejszą od 1 ,
- c) najmniejszą liczbę całkowitą większą od -4 ,
- d) najmniejszą liczbę całkowitą większą od -1 .

- Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

- a) Największą trzycyfrową liczbą ujemną jest -999 .
- b) Najmniejszą czterocyfrową liczbą ujemną jest -1000 .
- c) Najmniejszą dwucyfrową liczbą ujemną jest -99 .
- d) Największą jednocyfrową liczbą ujemną jest 0 .

1.7 Dodawanie liczb całkowitych

Podejmij temat

W zeszłym tygodniu za aktywność na lekcjach dostałam 2 minusy i 5 plusów. To chyba dobrze...



Jeżeli za 5 plusów uczeń otrzymuje ocenę bardzo dobrą, za 4 plusy – dobrą, a za 3 – dostateczną, i każdy plus likwiduje jeden minus, to jaką ocenę nauczyciel powinien postawić dziewczynce za aktywność?



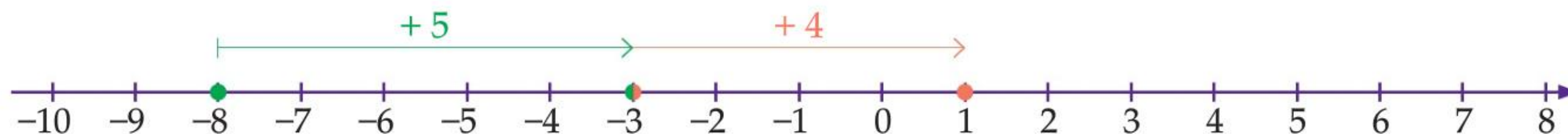
Pewnego dnia o godzinie 8.00 temperatura wynosiła -8°C . Po dwóch godzinach wzrosła o 5°C , a po następnych dwóch powiększyła się jeszcze o 4°C . Jaką temperaturę wskazywał termometr o godzinie 10.00, a jaką o 12.00?

Spójrzmy na rysunek termometru. Możemy łatwo obliczyć, że o godzinie 10.00 były -3°C , a w południe temperatura wynosiła już 1°C .

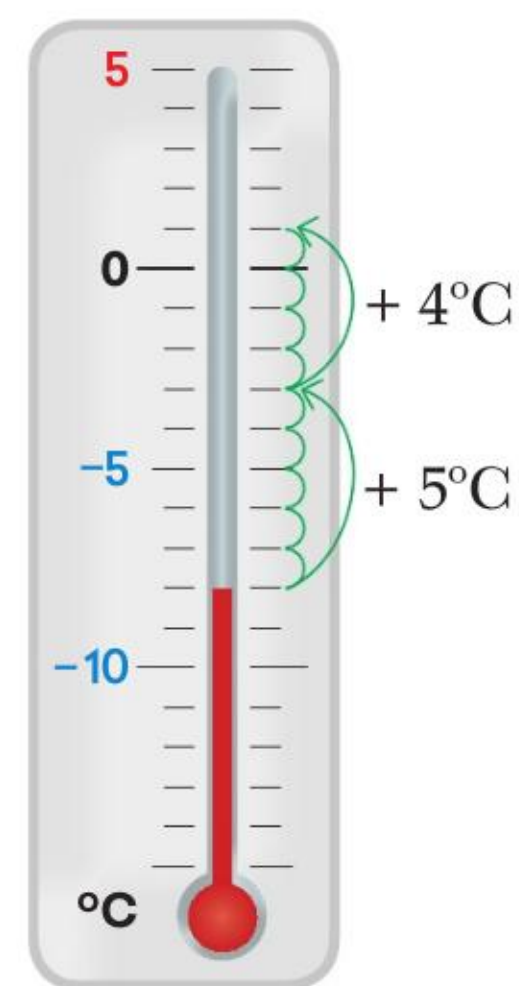
Działania odpowiadające tym obliczeniom to:

$$-8 + 5 = -3 \text{ oraz } -3 + 4 = 1.$$

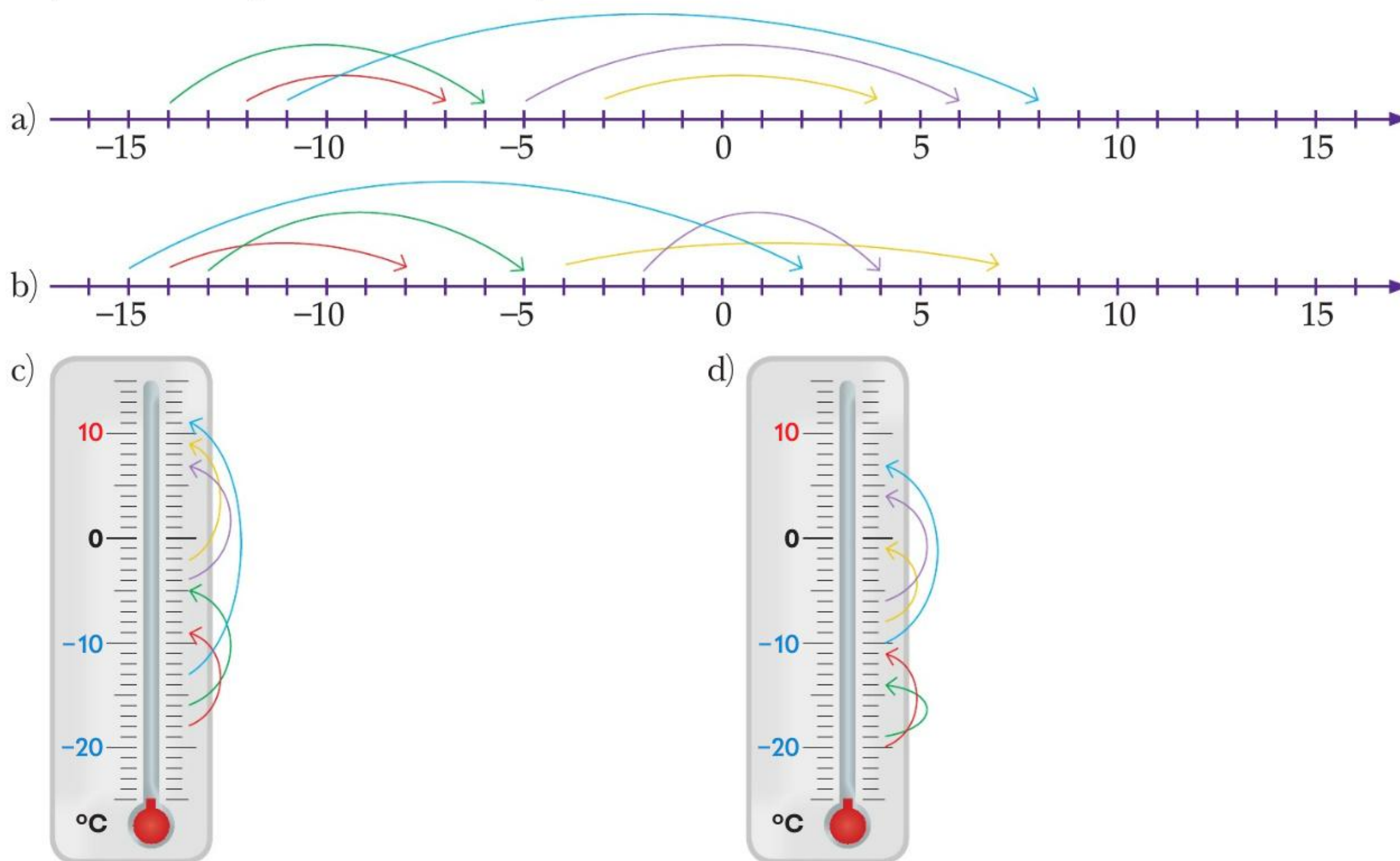
Działania podobne do powyższych można wykonać intuicyjnie, wyobrażając sobie termometry. Można też początkowo pomagać sobie rysunkiem termometru lub osi liczbowej. Przedstawione wcześniej dodawanie wygląda na osi liczbowej następująco:



Jak widać, dodawanie liczby dodatniej do liczby ujemnej można zilustrować przesunięciem punktu na osi liczbowej w prawo (zgodnie ze zwrotem osi), podobnie jak dodawanie liczby dodatniej do liczby dodatniej.



1. Zapisz działania przedstawione na rysunku.



Zwróćmy uwagę na zapis liczby ujemnej w działaniu $2 + (-7)$.

Nawias nie jest informacją o kolejności wykonywania działań, ale oddziela liczbę ujemną od pozostałej części działania. Liczbę ujemną zapisujemy w nawiasie wtedy, gdy znak działania i znak liczby znajdują się bezpośrednio obok siebie.

Zapis $(-7) + 2$ można uprościć do zapisu $-7 + 2$, bo nawias jest tu zbędny.

Jeżeli już znamy sposób dodawania liczby dodatniej do liczby ujemnej, możemy też dodawać liczbę ujemną do liczby dodatniej.

Pokażemy to na przykładzie działania $2 + (-7)$.

$$2 + (-7) =$$

Korzystamy z prawa przemienności dodawania.

$$= (-7) + 2 =$$

Takie dodawanie możemy zapisać jeszcze prościej, bez nawiasu.

$$= -7 + 2 =$$

To działanie potrafimy już wykonać, rozumując następująco:

$$= -5$$

jeśli temperatura wynosiła -7°C i wzrosła o 2°C , to termometr wskazuje teraz -5°C .

2. Oblicz sumy liczb. W punktach c) i d) zastosuj prawo przemienności dodawania.

a) $-9 + 5$

b) $-6 + 9$

c) $2 + (-1)$

d) $6 + (-7)$

$-6 + 4$

$-4 + 10$

$7 + (-3)$

$4 + (-9)$

$-8 + 7$

$-5 + 8$

$8 + (-6)$

$5 + (-11)$

$-3 + 3$

$-2 + 6$

$10 + (-8)$

$2 + (-8)$

$-10 + 4$

$-1 + 7$

$5 + (-2)$

$9 + (-10)$

Pokażemy teraz inny sposób rozumowania, jaki można zastosować, aby dodać liczby całkowite.

Przykład 1

Na I etapie konkursu matematycznego uczestnikom zadano po 20 pytań. Za poprawną odpowiedź każdy z nich otrzymywał punkt dodatni (1), za niepoprawną punkt ujemny (−1), a za brak odpowiedzi uczestnik nie otrzymywał żadnego punktu. Tabela pokazuje liczbę punktów zdobytych na I etapie przez wybranych uczestników.

Imię	Punkty dodatnie	Punkty ujemne	Graficzne przedstawienie punktów	Rezultat
Michał	8	−11	+++++++ -----	---
Agnieszka	6	−10	+++++ -----	---
Iwona	6	−7	+++++ -----	-
Maciek	8	−10	+++++++ -----	--
Paulina	11	−8	+++++++ -----	+++
Jacek	10	−2	+++++++ --	+++++
Aby mieć szansę zakwalifikować się do II etapu, należało odpowiedzieć na co najmniej 10 pytań.				

Zastanówmy się, w jaki sposób otrzymano rezultat punktowy każdego zawodnika.

Wyszczególnione w tabeli plusy i minusy można zapisać krócej działaniami, w których występują liczby dodatnie (zamiast plusów) i ujemne (zamiast minusów).

Michał	$8 + (-11) = -3$
Agnieszka	$6 + (-10) = -4$
Iwona	$6 + (-7) = -1$
Maciek	$8 + (-10) = -2$
Paulina	$11 + (-8) = 3$
Jacek	$10 + (-2) = 8$

Zatem dodając liczbę dodatnią i liczbę ujemną, możemy wyobrazić sobie odpowiednią liczbę plusów i minusów. Wystarczy wówczas zastanowić się, ile z nich zniknie (plus i minus likwidują się wzajemnie), a ile pozostanie, i których było więcej na początku: jeśli więcej było plusów, to wynikiem jest liczba dodatnia, a jeśli minusów – to liczba ujemna.

3. Wykonaj dodawanie.

- a) $12 + (-9)$
 $24 + (-13)$
 $31 + (-20)$
 $16 + (-4)$
 $25 + (-19)$
- b) $14 + (-20)$
 $35 + (-38)$
 $17 + (-27)$
 $48 + (-50)$
 $27 + (-35)$
- c) $-22 + 11$
 $-100 + 30$
 $-54 + 21$
 $-62 + 60$
 $-47 + 17$
- d) $-31 + 40$
 $-45 + 56$
 $-84 + 100$
 $-19 + 20$
 $-50 + 73$

Przykład 2

Podczas II etapu konkursu matematycznego opisanego w przykładzie 1 uczestnicy ponownie odpowiadali na pytania na takich samych zasadach. Wyniki obu etapów przedstawiono w tabeli.

Imię	I etap	II etap	Graficzne przedstawienie punktów	Rezultat
Michał	-3	-2	-----	-----
Agnieszka	-4	-5	-----	-----
Iwona	-1	4	++++	+++
Maciek	-2	-4	-----	-----
Paulina	3	-5	+++-----	--
Jacek	8	-2	+++++++-	++++++

Przyjrzyjmy się ostatecznym wynikom konkursu. Zastanówmy się, w jaki sposób otrzymano rezultat punktowy każdego zawodnika.

Zapiszmy działania pokazujące liczbę punktów zdobytych przez poszczególnych uczestników konkursu oraz dla każdego jego ostateczny wynik (rezultat).

Michał $-3 + (-2) = -5$
Agnieszka $-4 + (-5) = -9$
Iwona $-1 + 4 = 3$
Maciek $-2 + (-4) = -6$
Paulina $3 + (-5) = -2$
Jacek $8 + (-2) = 6$

Działania dotyczące punktów zdobytych przez Michała, Agnieszkę i Maćka pokazują, w jaki sposób dodajemy do siebie dwie liczby ujemne.

4. Oblicz podane sumy dwóch liczb ujemnych.

- a) $-5 + (-8)$
 $-12 + (-4)$
 $-9 + (-8)$
 $-2 + (-2)$
 $-10 + (-12)$
- b) $-8 + (-6)$
 $-7 + (-13)$
 $-6 + (-11)$
 $-20 + (-3)$
 $-15 + (-5)$
- c) $-16 + (-5)$
 $-24 + (-13)$
 $-45 + (-21)$
 $-60 + (-13)$
 $-38 + (-20)$
- d) $-28 + (-9)$
 $-16 + (-37)$
 $-27 + (-15)$
 $-44 + (-36)$
 $-68 + (-14)$

5. Podaj przykład dwóch liczb:

- a) całkowitych, których suma wynosi -32 ,
- b) całkowitych ujemnych, których suma wynosi -45 ,
- c) z których tylko jedna jest ujemna, a ich suma wynosi -10 ,
- d) z których tylko jedna jest dodatnia, a ich suma wynosi 14 .

6. Oblicz.

a) $-6 + 6$

b) $18 + (-18)$

c) $-38 + 38$

d) $25 + (-25)$

Ile wynosi suma liczb przeciwnych?

Jeżeli wśród dodawanych liczb znajdują się liczby przeciwne, to możemy je wykreślić i nie brać pod uwagę przy obliczaniu, np. jak w poniższym działaniu:

$$\cancel{-12} + \cancel{12} + (-3) + \cancel{3} + (-4) + \cancel{4} = -3 + (-4) = -7.$$

Podobnie robimy, jeśli mamy obliczyć $1 + (-5) + 9 + (-4)$. Ponieważ $(-5) + (-4) = -9$, to:

$$1 + \cancel{(-5)} + \cancel{9} + \cancel{(-4)} = 1.$$

7. Oblicz.

a) $-8 + 2 + (-5) + (-2) + 8$

b) $9 + (-1) + (-4) + (-5)$

c) $6 + (-10) + 8 + (-3) + 2$

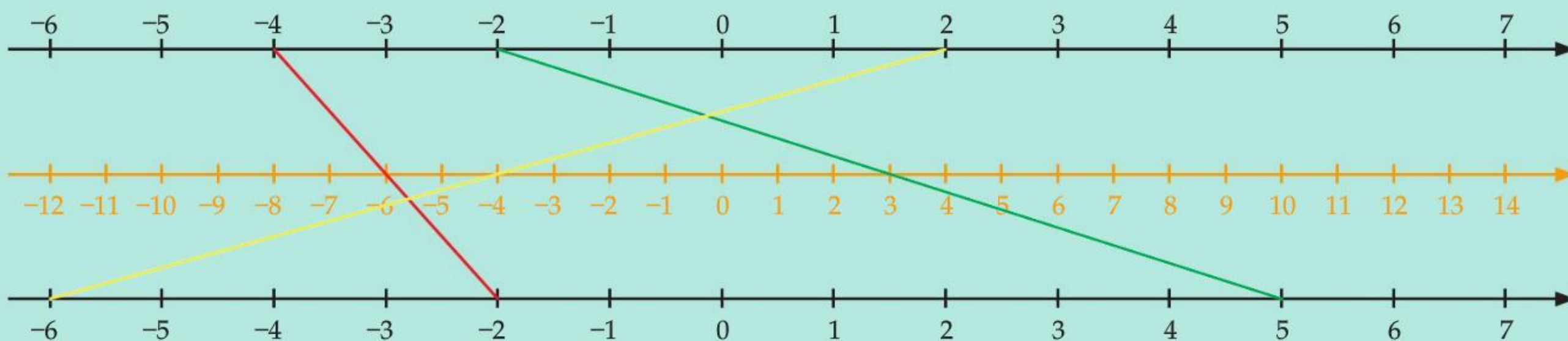
d) $-4 + (-15) + 8 + (-3) + 7$

Więcej na temat

W jaki sposób można sobie pomóc podczas dodawania liczb całkowitych?

Narysujmy trzy osie liczbowe: dwie (czarne) jednakowe oraz jedną (pomarańczową) o odcinku jednostkowym dwa razy krótszym niż na pozostałych osiach. Muszą być one ułożone w równych odległościach od siebie i tak, żeby ich punkty zerowe znajdowały się dokładnie jeden pod drugim. Jak wykorzystać te osie do dodawania?

Jeśli chcemy wykonać działanie $-4 + (-2)$, znajdujemy na górnej osi pierwszy składnik (-4) , a na dolnej drugi składnik (-2) i łączymy je odcinkiem (na rysunku jest on oznaczony kolorem czerwonym). Ten odcinek przecina środkową oś w punkcie, którego współrzędna jest szukany wynik. Zatem $-4 + (-2) = -6$. Podobnie, jeśli chcemy obliczyć sumę $-2 + 5$, znajdujemy składniki na górnej i dolnej osi, a potem łączymy je odcinkiem (na rysunku jest on oznaczony kolorem zielonym). Punkt przecięcia tego odcinka ze środkową osią pokazuje wynik równy 3.



8. Jakie działanie i jaki wynik wskazuje żółty odcinek?

Zadania

- Stan konta bankowego może być liczbą dodatnią (jeśli właściciel konta ma zgromadzone na nim oszczędności), ujemną (jeśli ma w banku dług, czyli debet) lub zerem (jeśli wypłaci wszystkie oszczędności). W tabeli są podane stany kont czterech osób.

Imię	Stan konta (w zł)
Aleksander	400
Bogdan	-600
Czesław	100
Dariusz	-300

a) Oblicz sumę stanów kont:

- pana Aleksandra i pana Bogdana,
- pana Bogdana i pana Czesława,
- pana Czesława i pana Dariusza,
- wszystkich wymienionych osób.

b) Ile wyniesie stan konta pana Bogdana, jeśli wpłynie na nie 1100 zł?



Debet to ujemny stan konta bankowego. Powstaje wówczas, gdy właściciel konta wypłaci z niego więcej pieniędzy, niż na nim zgromadził (i ma wtedy w banku dług).

- Znajdź takie dwie liczby całkowite, których suma jest równa podanej liczbie.

a) 1 b) -1 c) 0 d) -8

- Pani Magdalena miała w banku 600 zł długu, a stan konta pani Anety wynosił -300 zł. Każda z nich wpłaciła do swojego banku 200 zł. Jaki był stan konta każdej z pań po tych wpłatach?

- O ile stopni wzrosła temperatura, jeżeli nad ranem było -13°C , a w południe:

a) -8°C , b) -4°C , c) 0°C , d) 2°C ?

- W poniedziałek Kamila pożyczyła od Ani 12 zł. We wtorek oddała Ani 3 zł, ale już w środę znów pożyczyła od niej 7 zł. W czwartek oddała 8 zł. Zapisz, posługując się liczbami całkowitymi, działanie pozwalające obliczyć końcowy dług Kamili.

- Które działanie daje wynik równy -10?

A. $5 + (-5)$ B. $-10 + 20$ C. $-4 + (-6)$ D. $-20 + (-30)$

- Która suma jest dodatnia, a która ujemna?

I. $-526 + 378$ II. $743 + (-499)$ III. $-164 + (-359)$ IV. $-185 + 148$
V. $567 + (-821)$ VI. $-111 + (-110)$ VII. $-294 + 302$ VIII. $186 + (-516)$

- Przepisz i uzupełnij. Zamiast znaków zapytania wpisz odpowiednie liczby.

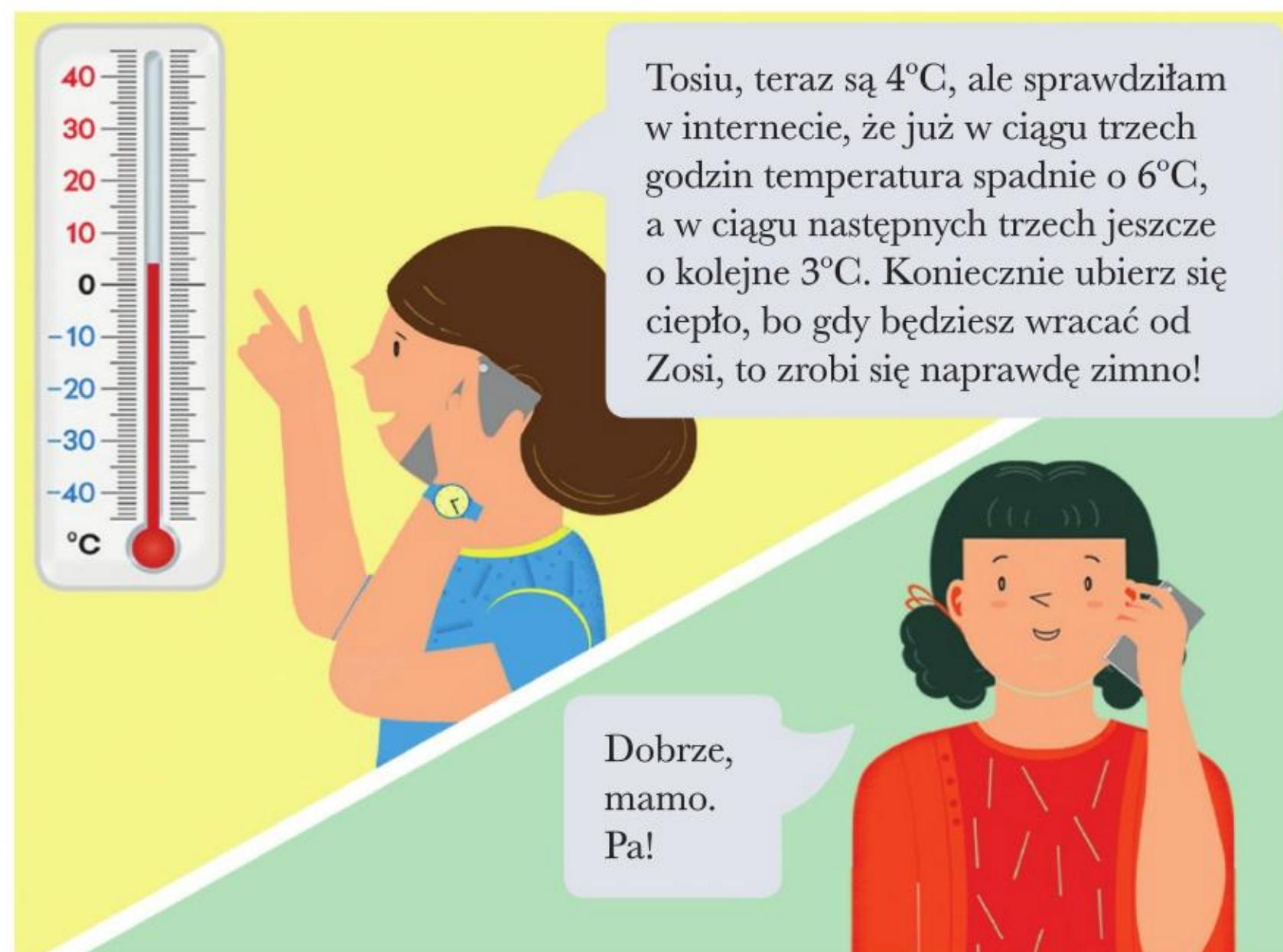
a) $-2 + ? = 6$ b) $6 + ? = 1$ c) $? + (-5) = -9$ d) $-7 + ? = -10$
 $-2 + ? = 0$ $6 + ? = -2$ $? + (-5) = 0$ $-7 + ? = -4$
 $-2 + ? = -3$ $6 + ? = 0$ $? + (-5) = 3$ $-7 + ? = -1$
 $-2 + ? = -1$ $6 + ? = -8$ $? + (-5) = -2$ $-7 + ? = 2$

1.8 Odejmowanie liczb całkowitych

Podejmij temat



Spróbuj powiedzieć, jaką temperaturę pokaże termometr po trzech godzinach, a jaką – po sześciu.



Gdy patrzymy na rysunek termometru (lub na rzeczywisty termometr), łatwo nam podać temperaturę, gdy wyobrazimy sobie jej spadek.

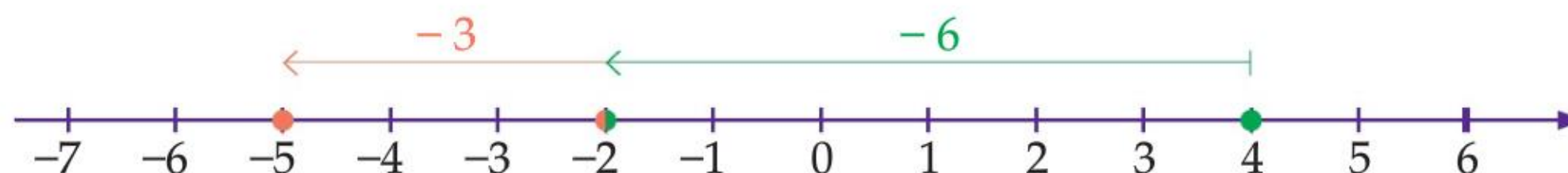
W sytuacji opisanej w *Podejmij temat* możemy odczytać z termometru, że po trzech godzinach temperatura wyniesie -2°C , a po kolejnych trzech -5°C .

Działania odpowiadające tym obliczeniom to:

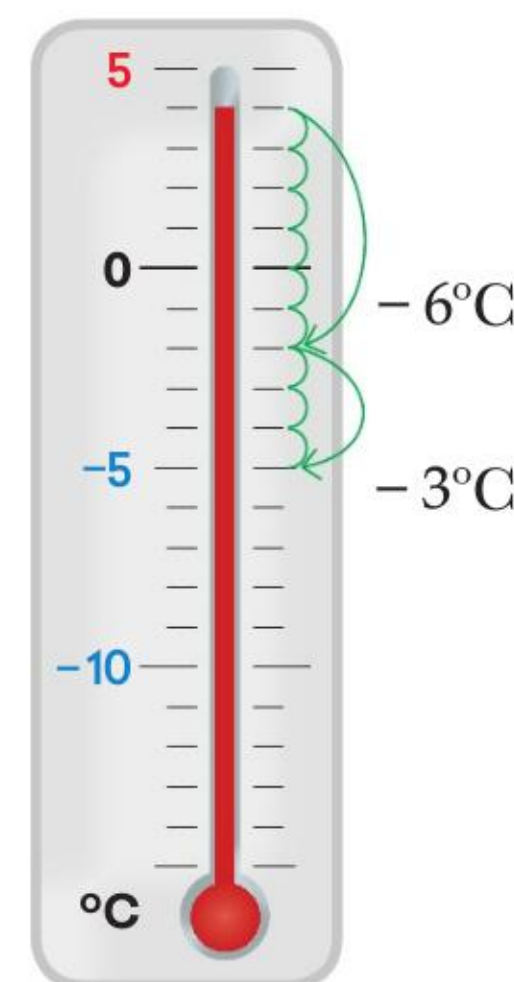
$$4 - 6 = -2 \text{ oraz } -2 - 3 = -5.$$

Powyższe zagadnienie pokazuje, w jaki sposób, wyobrażając sobie termometr, od liczby całkowitej (dodatniej lub ujemnej) odejmujemy liczbę dodatnią.

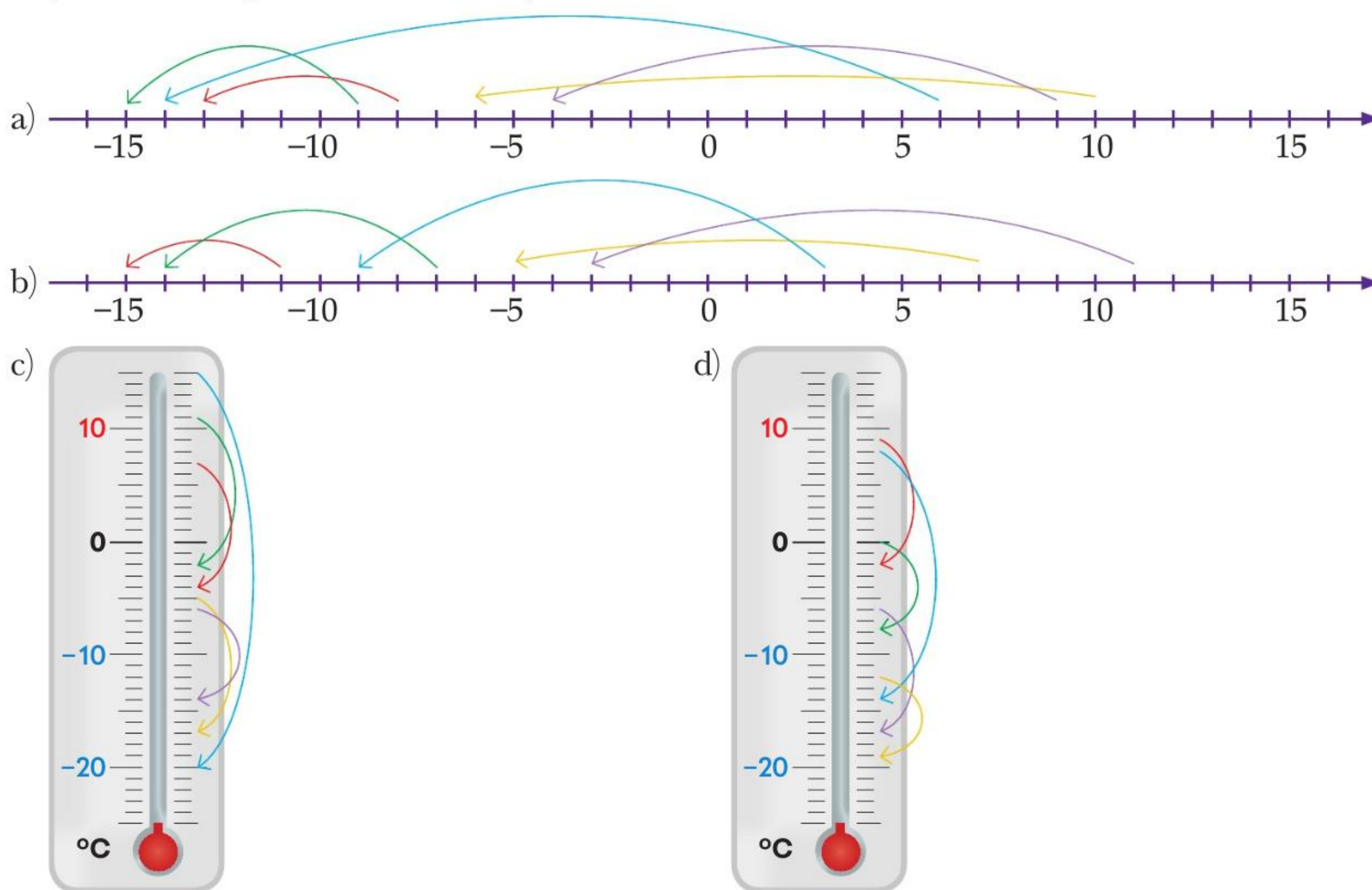
Jeśli chcemy wykonać takie odejmowanie, pomocna okaże się też oś liczbowa.



Odejmowaniu liczby dodatniej odpowiada przesunięcie punktu na osi liczbowej w lewo (przeciwnie do zwrotu osi).



1. Zapisz działania przedstawione na rysunku.



2. Oblicz różnice.

a) $4 - 7$
 $6 - 10$
 $1 - 9$
 $5 - 8$
 $0 - 3$

b) $-2 - 6$
 $-3 - 4$
 $-10 - 2$
 $-5 - 7$
 $-4 - 6$

c) $-15 - 4$
 $9 - 20$
 $-1 - 45$
 $-14 - 6$
 $27 - 30$

d) $24 - 50$
 $-24 - 50$
 $-48 - 6$
 $-16 - 12$
 $34 - 43$

3. Wykonaj podane działania.

a) $-10 - 2$ i $-10 + (-2)$
c) $7 - 13$ i $7 + (-13)$

b) $20 - 4$ i $20 + (-4)$
d) $-3 - 9$ i $-3 + (-9)$

W ramach każdego punktu z ćwiczenia 3 oba działania dają ten sam wynik. Podobnie jak para działań: $4 - 6$ i $4 + (-6)$, dających taki sam wynik: $4 - 6 = -2$; $4 + (-6) = -2$. Pierwszym z tych działań jest odejmowanie liczby 6, a drugim – dodawanie liczby przeciwnej do 6, czyli dodawanie liczby -6 . Z ćwiczenia 3 wynika poniższe stwierdzenie.



Odjąć daną liczbę oznacza to samo co dodać liczbę przeciwną do danej liczby.

Zgodnie z ostatnim stwierdzeniem wykonujemy też odejmowanie liczby ujemnej.

Przykład 1

Obliczmy.

a) $-12 - (-7)$

b) $-10 - (-16)$

c) $7 - (-4)$

a) $-12 - (-7) =$
 $= -12 + 7 =$
 $= -5$

Zamiast odejmować liczbę -7 ,
dodamy liczbę przeciwną do -7 , czyli 7 .

b) $-10 - (-16) =$
 $= -10 + 16 =$
 $= 6$

Zamiast odejmować liczbę -16 ,
dodamy liczbę przeciwną do -16 , czyli 16 .

c) $7 - (-4) =$
 $= 7 + 4 =$
 $= 11$

Zamiast odejmować liczbę -4 ,
dodamy liczbę przeciwną do -4 , czyli 4 .

4. Zamień odejmowanie na dodawanie liczby przeciwnej i oblicz.

a) $-3 - (-5)$
 $-8 - (-12)$
 $-7 - (-20)$
 $-12 - (-18)$
 $-9 - (-16)$

b) $-13 - (-4)$
 $-10 - (-19)$
 $-24 - (-13)$
 $-15 - (-8)$
 $-6 - (-6)$

c) $4 - (-5)$
 $1 - (-9)$
 $0 - (-3)$
 $16 - (-15)$
 $50 - (-23)$

Wiem!
Nawiasy
można
opuścić!



Nawiasy opuszczamy zgodnie z regułami:

$\dots + (-\dots) = \dots - \dots$ np. $2 + (-3) = 2 - 3$, $-4 + (-5) = -4 - 5$

oraz

$\dots - (-\dots) = \dots + \dots$ np. $2 - (-3) = 2 + 3$, $-4 - (-5) = -4 + 5$

5. Opuść nawiasy i wykonaj działania.

a) $6 + (-13)$
 $-5 - (-9)$
 $-4 + (-15)$
 $7 - (-13)$
 $8 + (-7)$

b) $-4 + (-6) - (-7)$
 $2 - (-8) + (-4)$
 $-6 - (-5) + (-10)$
 $10 + (-12) - (-5)$
 $-7 - (-7) + (-7)$



Tak, ale
musisz się
zastanowić,
jaki znak ma
być przed
liczbą: plus
czy minus.

W każdym działaniu ćwiczenia 5b) występowały trzy liczby. Jeżeli w wyrażeniu mamy trzy lub więcej liczb, zamiast wykonywać obliczenia po kolei, możemy zrobić to szybciej. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 2

Obliczmy wartość wyrażenia: $-2 + (-13) - (-6) + 7 - 8 - (-3)$.

Sposób I

$$-2 + (-13) - (-6) + 7 - 8 - (-3) =$$

$$= \underline{-2} + \underline{(-13)} + \underline{6} + \underline{7} + \underline{(-8)} + \underline{3} =$$

$$= 16 + (-23) =$$

$$= -7$$

Sposób II

$$-2 + (-13) - (-6) + 7 + (-8) - (-3) =$$

$$= \underline{-2} - \underline{13} + \underline{6} + \underline{7} - \underline{8} + \underline{3} =$$

$$= 16 - 23 =$$

$$= -7$$

Opuszczamy nawiasy przy odejmowanych liczbach -6 oraz -3 , a odejmowanie liczby 8 zamieniamy na dodawanie liczby przeciwnej.

Jedynym działaniem w tym wyrażeniu jest teraz dodawanie.

Dodajemy osobno liczby dodatnie i osobno ujemne. Dla ułatwienia możemy je podkreślić dwoma kolorami, jak pokazano obok.

Na koniec dodajemy jedną liczbę dodatnią i jedną ujemną.

Opuszczamy wszystkie nawiasy.

Grupujemy liczby, przed którymi stoi znak $+$, oraz liczby, przed którymi znajduje się znak $-$ (dla ułatwienia możemy je podkreślić dwoma kolorami), i tak jak w sposobie I osobno dodajemy liczby z jednej grupy oraz osobno z drugiej. Przed sumą liczb ujemnych stawiamy znak $-$.

Na koniec wykonujemy odejmowanie.

6. Zamień na dodawanie i oblicz.

a) $-4 + 7 - (-12) - 10$

c) $-15 - 4 - (-4) - 2$

b) $-6 - (-9) + 1 - 8$

d) $5 - 6 - (-11) - 2 - (-1)$

7. Oblicz.

a) $-8 + (-4) - (-9) + 6 + (-8)$

c) $-12 - (-5) + (-7) - (-2)$

b) $16 - (-3) - 20 + (-18)$

d) $1 - 3 + 5 - 7 + 2$

Zadania

- W czasie bardzo mroźnej doby obserwowano temperaturę powietrza i zapisywano jej zmiany. Podaj wskazania termometru w wymienionych godzinach.

6.00 temperatura wynosiła -24°C

10.00 wzrost o 8°C

14.00 wzrost o 6°C

18.00 spadek o 3°C

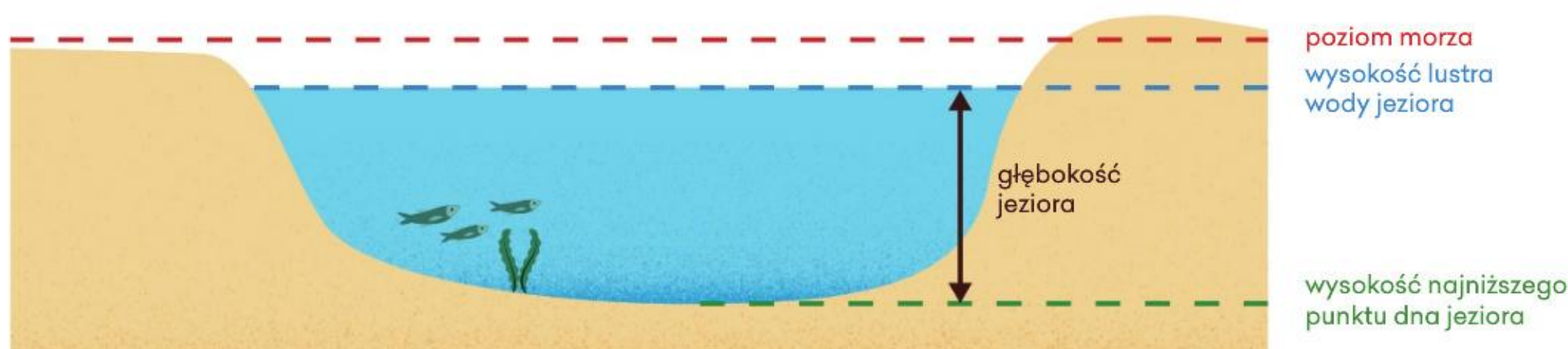
22.00 spadek o 4°C

2.00 spadek o 7°C

- Dla każdego z miast na mapie oblicz różnicę temperatur w dzień i w nocy. W którym mieście ta różnica jest największa, a w którym – najmniejsza?



- Powierzchnia niektórych jezior (ich lustro wody) znajduje się poniżej poziomu morza.



- Morze Kaspjskie ma lustro wody na wysokości -28 m n.p.m., a jego najgłębszy punkt znajduje się na wysokości -1053 m n.p.m. Jaka jest głębokość Morza Kaspjskiego?
- Lustro wody Morza Martwego znajduje się na wysokości -431 m n.p.m., a jego najniżej położony punkt jest na wysokości -735 m n.p.m. Oblicz głębokość Morza Martwego.
- Jezioro Miedwie (Polska) ma lustro wody powyżej poziomu morza, na wysokości 14 m n.p.m. Wykonaj odpowiedni rysunek pomocniczy i oblicz, na jakiej wysokości znajduje się jego najniżej położony punkt, jeżeli wiadomo, że głębokość jeziora wynosi 44 m.

Ciekawe!

Jeziora, w odróżnieniu od mórz, nie łączą się z żadnym oceanem. Mają zwykle mniejszą powierzchnię niż morza i najczęściej występuje w nich woda słodka. Istnieje kilka wyjątkowych jezior o dużej powierzchni i słonej wodzie. Niektóre z nich, jak Morze Kaspjskie czy Morze Martwe, nazywa się jednak zwyczajowo morzami.

Ciekawe!

Największą głębokość na Ziemi jest Rów Mariański na Oceanie Spokojnym. Jego głębokość według ostatnich pomiarów to 10 994 m. Ten najgłębszy rów oceaniczny na kuli ziemskiej znajduje się między Japonią leżącą na północy, Filipinami położonymi na zachodzie a Papuą-Nową Gwineą – na południu. W jego najgłębszym punkcie panuje ciśnienie 1100 razy większe niż na powierzchni. Pierwszy raz ludzie osiągnęli ten poziom w 1960 roku, w batyskafie Trieste [czyt. trijest]. Zanurzenie się na taką głębokość i powrót z niej jest niezwykle wyzwaniem dla konstruktorów i badaczy. Bardzo trudno jest bowiem zbudować załogowy statek podwodny, który wytrzyma tak wysokie ciśnienie i zapewni bezpieczeństwo załodze znajdującej się w środku.



Czy pamiętasz?

Aby rozwiązać równanie, należy zapisać działanie odwrotne do działania występującego w równaniu.



Oblicz różnicę wysokości między najwyższym szczytem na Ziemi (to Mount Everest znajdujący się w Himalajach) a miejscem położonym najgłębiej (czyli rowem oceanicznym leżącym na Pacyfiku – nazywanym Rowem Mariańskim). Skorzystaj z informacji podanej obok na marginesie oraz z danych na s. 5.

Przez cały tydzień pani Anna notowała na koniec dnia stan swojego konta bankowego.

Dzień tygodnia	pn.	wt.	śr.	czw.	pt.	sob.	niedz.
Stan konta	-320 zł	-365 zł	-200 zł	-130 zł	-450 zł	500 zł	360 zł

a) Co oznacza ujemny stan konta?

b) Wskaż zdania prawdziwe.

- I. We wtorek pani Anna wypłaciła z banku 45 zł.
- II. W środę pani Anna wypłaciła z konta 165 zł.
- III. W czwartek pani Anna wpłaciła do banku 70 zł.
- IV. W piątek pani Anna wpłaciła na konto 1000 zł.
- V. W niedzielę stan konta był wyższy niż w czwartek.
- VI. W środę stan konta był wyższy niż w poniedziałek.
- VII. W piątek stan konta był niższy niż we wtorek.
- VIII. W poniedziałek stan konta był niższy niż -300 zł.
- IX. Najwyższy stan konta był w sobotę.
- X. Najniższy stan konta był w czwartek.

Zapisz odpowiednie działanie i wykonaj je.

- a) Do sumy liczb 15 i -24 dodaj -16.
- b) Od sumy liczb -9 i -13 odejmij -10.
- c) Do różnicy liczb 5 i -11 dodaj -25.
- d) Od różnicy liczb -2 i 8 odejmij -18.
- e) Od -18 odejmij różnicę liczb -8 i 5.
- f) Do sumy liczb -13 i -9 dodaj różnicę liczb 4 i -12.
- g) Od różnicy liczb -12 i -3 odejmij różnicę liczb -5 i -1.

Rozwiąż równania.

a) $x + 8 = -1$

$$x + (-4) = 5$$

$$x + (-3) = -2$$

$$x + 6 = -10$$

b) $x - 4 = -9$

$$x - (-3) = -2$$

$$x - 7 = -1$$

$$x - (-5) = 8$$

c) $6 - x = -4$

$$-2 - x = 5$$

$$-6 - x = -1$$

$$8 - x = -10$$

1.9 Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych

Podejmij temat



Czy wiesz, ile Ania uzyskała punktów dodatnich, a ile ujemnych? Za pomocą jakich działań można zapisać te obliczenia?

Żle napisałam ten test...

Ania Kowalska klasa VIa

Odpowiedzi		
dobra	zła	brak
7	11	3

$-6 - 4 = -10$
 $-2 - (-5) = -7$
 $-4 + 16 = 12$
 $8 - 10 = -2$
 $1 - (-6) = 7$

Nie tak źle. Za każdą dobrą odpowiedź dostajemy 5 punktów, a za każdą złą -3 punkty. Masz więcej punktów dodatnich niż ujemnych. Naprawdę!

Przypomnijmy sobie poznane w klasie czwartej sposoby mnożenia liczby przez sumę liczb.

Sposób I

$$5 \cdot \underbrace{(3 + 6)}_{=9} = 5 \cdot 9 = 45$$

Sposób II

$$5 \cdot (3 + 6) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = 15 + 30 = 45$$

Te same sposoby wykorzystamy do wyjaśnienia, jak należy mnożyć liczby całkowite.

Przykład 1

Obliczmy iloczyn: $4 \cdot (-2)$.

Wykonajmy najpierw działanie $4 \cdot (2 + (-2))$ dwoma sposobami (oba muszą dać taki sam wynik).

Sposób I polega na wykonaniu w pierwszej kolejności działania w nawiasie. Ponieważ $2 + (-2) = 0$, to również $4 \cdot (2 + (-2)) = 0$.

Sposób II polega na zastosowaniu prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Otrzymujemy wówczas sumę dwóch iloczynów, z których pierwszy to $4 \cdot 2 = 8$, a drugi to $4 \cdot (-2)$. Ten drugi to iloczyn liczby dodatniej i ujemnej – nie potrafimy go jeszcze obliczyć. Zauważmy, że to nasz wyjściowy iloczyn, którego wyniku szukamy.

Ponieważ suma obu iloczynów ($4 \cdot 2$ oraz $4 \cdot (-2)$) musi wynosić zero (wiemy to dzięki obliczeniom sposobem I), to wynik mnożenia $4 \cdot (-2)$ musi być równy -8 .

Przedstawione rozumowanie pokażemy jeszcze za pomocą działań.

Sposób I

$$4 \cdot \underbrace{(2 + (-2))}_{=0} = 4 \cdot 0 = 0$$

Czyli liczba dodatnia pomnożona przez liczbę ujemną daje liczbę ujemną?

Tak. I pamiętaj, że podczas mnożenia można zmieniać kolejność liczb.



Sposób II

$$4 \cdot (2 + (-2)) = \underbrace{4 \cdot 2}_{=8} + \underbrace{4 \cdot (-2)}_{=?} = 0$$

Jaką liczbę należy dodać do liczby 8, aby otrzymać liczbę 0?

Odpowiedź: -8.

Zatem $4 \cdot (-2) = -8$.

Iloczyn dwóch liczb o różnych znakach (liczby dodatniej i liczby ujemnej) jest liczbą ujemną.

W podobny sposób pokażemy, jak pomnożyć dwie liczby ujemne.

Przykład 2

Obliczmy iloczyn: $-5 \cdot (-3)$.

Wykonamy dwoma sposobami działanie $-5 \cdot (3 + (-3))$ i przeprowadzimy rozumowanie analogiczne do poprzedniego.

Sposób I

$$-5 \cdot \underbrace{(3 + (-3))}_{=0} = -5 \cdot 0 = 0$$

Wiem! Dwie liczby mnożę tak, jakby były dodatnie, i dopiero przy wyniku ustalam, czy zapisać przed nim minus, czy plus.

Tak. A znak przy wyniku ustalasz zgodnie z podanymi regułami.



Sposób II

$$-5 \cdot (3 + (-3)) = \underbrace{-5 \cdot 3}_{=-15} + \underbrace{(-5) \cdot (-3)}_{=?} = 0$$

Jaką liczbę należy dodać do liczby -15, aby otrzymać liczbę 0?

Odpowiedź: 15.

Zatem $-5 \cdot (-3) = 15$.

Iloczyn dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.

1. Oblicz iloczyny.

a) $-3 \cdot 7$
 $-6 \cdot 8$
 $-5 \cdot 9$
 $-10 \cdot 6$
 $-13 \cdot 3$

b) $8 \cdot (-7)$
 $4 \cdot (-6)$
 $9 \cdot (-3)$
 $12 \cdot (-4)$
 $25 \cdot (-3)$

c) $-4 \cdot (-7)$
 $-3 \cdot (-8)$
 $-9 \cdot (-9)$
 $-15 \cdot (-3)$
 $-7 \cdot (-11)$

d) $-13 \cdot 9$
 $26 \cdot (-8)$
 $-55 \cdot (-5)$
 $16 \cdot (-4)$
 $-9 \cdot (-22)$

Jeśli wiemy już, jak się mnoży dwie liczby całkowite, możemy też obliczać iloczyny więcej niż dwóch liczb całkowitych.

Przykład 3

Obliczmy: $-4 \cdot (-2) \cdot (-10) \cdot 7 \cdot (-2)$.

Sposób I

Mnożenie wykonujemy w kolejności zapisu:

$$\begin{aligned} -4 \cdot (-2) \cdot (-10) \cdot 7 \cdot (-2) &= \underbrace{8}_{=8} \cdot (-10) \cdot 7 \cdot (-2) = \underbrace{-80}_{=-80} \cdot 7 \cdot (-2) = \underbrace{-560}_{=-560} \cdot (-2) = 1120 \end{aligned}$$

Sposób II

$$-4 \cdot (-2) \cdot (-10) \cdot 7 \cdot (-2) = \underbrace{4 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 2}_{=1120} = 1120$$

ustalamy znak wyniku:
ujemna $\cdot$ ujemna $\cdot$ ujemna $\cdot$ ujemna
daje wynik dodatni
(znaku + nie zapisujemy)

mnożymy liczby tak,
jakby wszystkie były dodatnie

2. Oblicz.

a) $5 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-4)$

c) $-4 \cdot (-4) \cdot (-4)$

e) $-10 \cdot (-5) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (-3)$

g) $(-3)^3$

b) $3 \cdot (-7) \cdot 2 \cdot (-100)$

d) $-5 \cdot (-6) \cdot 2 \cdot (-20)$

f) $(-6)^2$

h) $(-1)^3 \cdot (-8)^2$

3. Jaką liczbą, dodatnią czy ujemną, jest iloczyn:

a) trzech czynników ujemnych,

c) siedmiu czynników ujemnych,

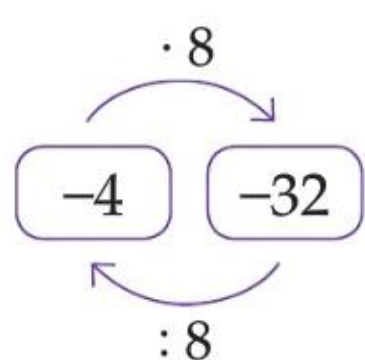
e) nieparzystej liczby czynników ujemnych,

b) czterech czynników ujemnych,

d) dziesięciu czynników ujemnych,

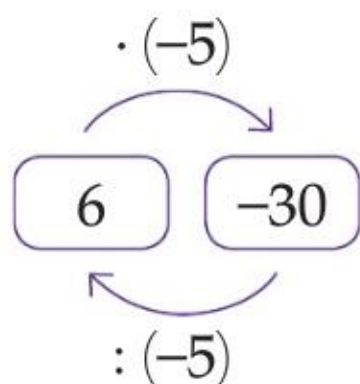
f) parzystej liczby czynników ujemnych?

Aby dowiedzieć się, kiedy iloraz dwóch liczb jest dodatni, a kiedy ujemny, wystarczy przyrzeć się grafom ilustrującym fakt, że dzielenie jest działaniem odwrotnym do mnożenia.



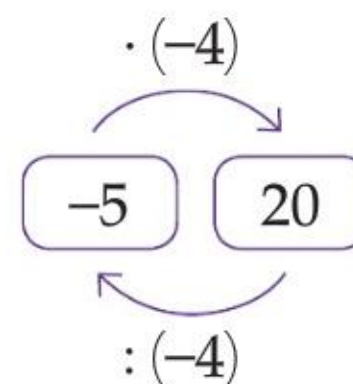
$$-32 : 8 = -4$$

dzielna ujemna
dzielnik dodatni
iloraz ujemny



$$-30 : (-5) = 6$$

dzielna ujemna
dzielnik ujemny
iloraz dodatni



$$20 : (-4) = -5$$

dzielna dodatnia
dzielnik ujemny
iloraz ujemny

Iloraz dwóch liczb o różnych znakach (liczby dodatniej i liczby ujemnej) jest liczbą ujemną. Iloraz dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.

Łatwe! Dzielę liczby bez zwracania uwagi na znaki. I potem przy wyniku albo dopisuję minus, albo nie.

Oczywiście zgodnie z podanymi regułami.



4. Oblicz ilorazy.

a) $-15 : 3$

$-28 : 7$

$-56 : 8$

$-140 : 20$

$-88 : 11$

b) $36 : (-4)$

$72 : (-9)$

$100 : (-25)$

$350 : (-7)$

$60 : (-4)$

c) $-42 : (-6)$

$-54 : (-9)$

$-137 : (-1)$

$-320 : (-80)$

$-84 : (-4)$

d) $-840 : 60$

$338 : (-13)$

$-850 : (-25)$

$744 : (-31)$

$-630 : (-42)$

Zadania

● Znajdź i zapisz pary równych iloczynów.

$4 \cdot (-6)$

$8 \cdot (-2)$

$-4 \cdot (-6)$

$5 \cdot (-9)$

$-9 \cdot (-5)$

$-7 \cdot 8$

$-7 \cdot (-8)$

$-8 \cdot (-2)$

$-9 \cdot 5$

$-8 \cdot 2$

$-8 \cdot 7$

$6 \cdot (-4)$

- Porównaj wyniki działań bez wykonywania obliczeń. Zamiast pytajnika wstaw znak $<$, $=$ lub $>$.

a) $-18 \cdot (-7) ? -18 \cdot 7$	b) $-162 : (-18) ? 162 : (-18)$	c) $-54 \cdot 6 ? -54 : (-6)$
$-32 \cdot (-16) ? 32 \cdot 16$	$126 : (-9) ? -126 : 9$	$-120 : (-24) ? -120 \cdot 24$
$45 \cdot (-8) ? -45 \cdot 8$	$-141 : 47 ? -141 : (-47)$	$0 : (-47) ? 0 \cdot (-47)$
$17 \cdot (-15) ? -17 \cdot (-15)$	$-208 : (-8) ? 208 : 8$	$-188 \cdot (-4) ? 188 : (-4)$

- Wiadomo, że $48 \cdot 16 = 768$. Zapisz wyniki działań bez wykonywania obliczeń.

a) $-48 \cdot 16$	b) $-16 \cdot 48$	c) $768 : (-16)$	d) $768 : (-48)$
$16 \cdot (-48)$	$48 \cdot (-16)$	$-768 : 48$	$-768 : 16$
$-48 \cdot (-16)$	$-16 \cdot (-48)$	$-768 : (-16)$	$-768 : (-48)$

- Zapisz opisane działanie i wykonaj je.

- Do iloczynu liczb -8 i 12 dodaj iloczyn liczb -6 i -7 .
- Iloczyn liczb 21 i -6 podziel przez -9 .
- Iloczyn liczb 2 , -3 , 4 i -5 podziel przez -10 .
- Różnicę liczb -46 i -24 pomnóż przez -1 .

- Oblicz wartość wyrażenia.

a) $(-5)^2 - (-10)^2$	b) $(5 - 7)^3$
c) $(9 - 15) : (-2) - 14$	d) $24 : (-8) - 2 \cdot (-6)$
e) $4 + (-3) \cdot (-5) \cdot (-2) : 6$	f) $(-4) \cdot 5 + (-30) : (-3) - (-2) \cdot 5$

- Zosia codziennie przez tydzień o tej samej godzinie mierzyła temperaturę panującą na dworze i notowała ją.

Dzień tygodnia	pn.	wt.	śr.	czw.	pt.	sob.	niedz.
Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	-4	-6	-1	3	-2	1	-5

Jaka była różnica między najwyższą a najniższą temperaturą zanotowaną przez Zosię?

Ciekawe!

Najniższa zanotowana temperatura naturalnie występująca na Ziemi wynosiła $-89,2^{\circ}\text{C}$ i została zmierzona 21 lipca 1983 roku na stacji polarnej Wostok na Antarktydzie.

Natomiast najwyższa odnotowana temperatura powietrza wynosiła $56,7^{\circ}\text{C}$ i zmierzono ją 10 lipca 1913 roku w Dolinie Śmierci w Stanach Zjednoczonych.

- Oblicz:

- iloczyn liczb przeciwnych do -4 , 5 , -6 , 7 i podziel go przez $|-12|$,
- iloczyn wartości bezwzględnych liczb -4 , 5 , -6 , 7 i podziel go przez liczbę przeciwną do liczby 12 .

- Podczas wakacyjnego wyjazdu Mateusz oceniał każdy dzień pod względem pogody i przyznawał mu odpowiednią liczbę punktów. Dzień słoneczny otrzymywał 3 punkty, pochmurny (ale bez deszczu) 0 punktów, a deszczowy dostawał punkty ujemne: -3 . Po trzech tygodniach obliczył sumę wszystkich punktów i otrzymał liczbę -12 . Których dni w tym czasie było więcej: deszczowych czy słonecznych? O ile więcej?

Podsumowanie działu 1

Ważne pojęcia

liczba całkowita	liczba ujemna	liczba nieujemna	liczba niedodatnia
liczby przeciwne	zaokrąglenie liczby	wartość bezwzględna liczby	zbiór liczb całkowitych

Zaokrąglanie liczb naturalnych

Jeśli chcemy zaokrąglić daną liczbę do określonego rzędu, to cyfrę tego rzędu:

- pozostawiamy bez zmian, jeżeli w następnym rzędzie występuje 0, 1, 2, 3 lub 4, albo
- powiększamy o 1, jeżeli w następnym rzędzie występuje 5, 6, 7, 8 lub 9, a cyfry rzędów niższych zastępujemy zerami.

Liczby przeciwne



Reguły dotyczące znaku iloczynu i ilorazu liczb całkowitych

$$\begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix} : \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix} : \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix} : \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{dodatnia} \end{matrix} : \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{liczba} \\ \text{ujemna} \end{matrix}$$

Czy już umiesz?

1 Która cyfra wyniku jest **błędna**?

$$\begin{array}{r} \text{I.} \quad 7925 \\ \quad 468 \\ + \quad 339 \\ \hline 9732 \end{array}$$

A. 9
C. 3

B. 7
D. 2

$$\begin{array}{r} \text{II.} \quad 59110 \\ \quad 6020 \\ - 1357 \\ \hline 4673 \end{array}$$

A. 4
C. 7

B. 6
D. 3

2 Oblicz:

- a) sumę sześciastu liczby 56 i sześciastu liczby 27, b) różnicę sześciastów liczb 100 i 82,
c) iloczyn kwadratu liczby 3 i jej sześciastu, d) iloraz sześciastu liczby 6 i kwadratu tej liczby.

3 Które działania są wykonane poprawnie?

I. $9 + 6 - 5 + 4 = 15 - 9 = 6$
III. $7 + 8 \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$

II. $8 \cdot 5 : 4 \cdot 2 = 40 : 4 \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20$
IV. $28 : 2 + 2 = 28 : 4 = 7$

A. II i IV.

B. Tylko II.

C. I i III.

D. I, II i III.

4 Wskaż działanie, które jest obliczane na kalkulatorze prostym w poniższy sposób.

1 5 + 3 7 5 × 4 0 0 =

A. $15 + 375 \cdot 400$
C. $15 + (375 \cdot 400)$

B. $(15 + 375) \cdot 400$
D. $375 \cdot 400 + 15$

5 Ile wynosi zaokrąglenie do setek liczby 7989?

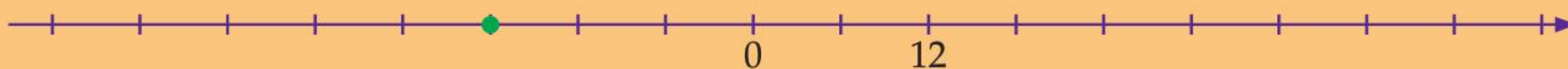
A. 7900

B. 7000

C. 8000

D. 7800

6 Jaka jest współrzędna punktu zaznaczonego na osi liczbowej kolorem zielonym?



A. -3

B. -6

C. -12

D. -18

7 Podaj trzy przykłady liczb całkowitych, które:

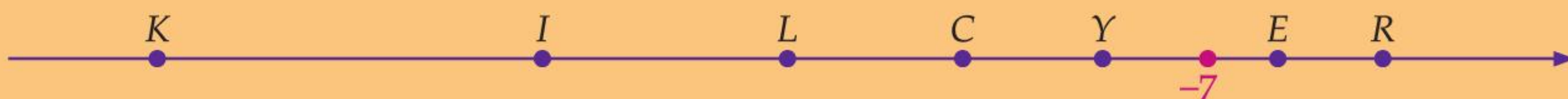
- a) nie są naturalne, b) są naturalne.

8 Które ze zdań są prawdziwe? Wskaż poprawną odpowiedź.

- I. Wartość bezwzględna liczby nie może być liczbą ujemną.
- II. Najmniejszą liczbą całkowitą ujemną jest liczba -1 .
- III. Wartość bezwzględna liczby nie może być zerem.
- IV. Najmniejszą liczbą całkowitą jest 0 .

A. Wszystkie. B. Tylko I. C. Tylko II. D. I, II i IV.

9 Liczby: $-14, -10, -2, -37, -26, -5, -19$, są współrzędnymi punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



Przyporządkuj punktom odpowiednie współrzędne. Potem przerysuj tabelę do zeszytu i ją uzupełnij. Litery w drugim wierszu tabeli utworzą hasło.

Liczba	-14	-10	-2	-37	-26	-5	-19
Litera							

10 Która liczba wpisana zamiast znaku zapytania da równość prawdziwą?

$$-16 + ? = -21$$

A. -5 B. 5 C. -37 D. 37

11 Które wyrażenie ma wartość dodatnią?

A. $-24 + 56 - 100$ B. $4 - 2 + 15 + 2$ C. $1 - 8 - 36 + 40$ D. $-13 + 1 + 2 + 10$

12 W którym przypadku znak nierówności jest zapisany poprawnie?

A. $-6 - 7 < 0$ B. $-6 - (-7) < 0$ C. $6 - 7 > 0$ D. $-6 + (-7) > 0$

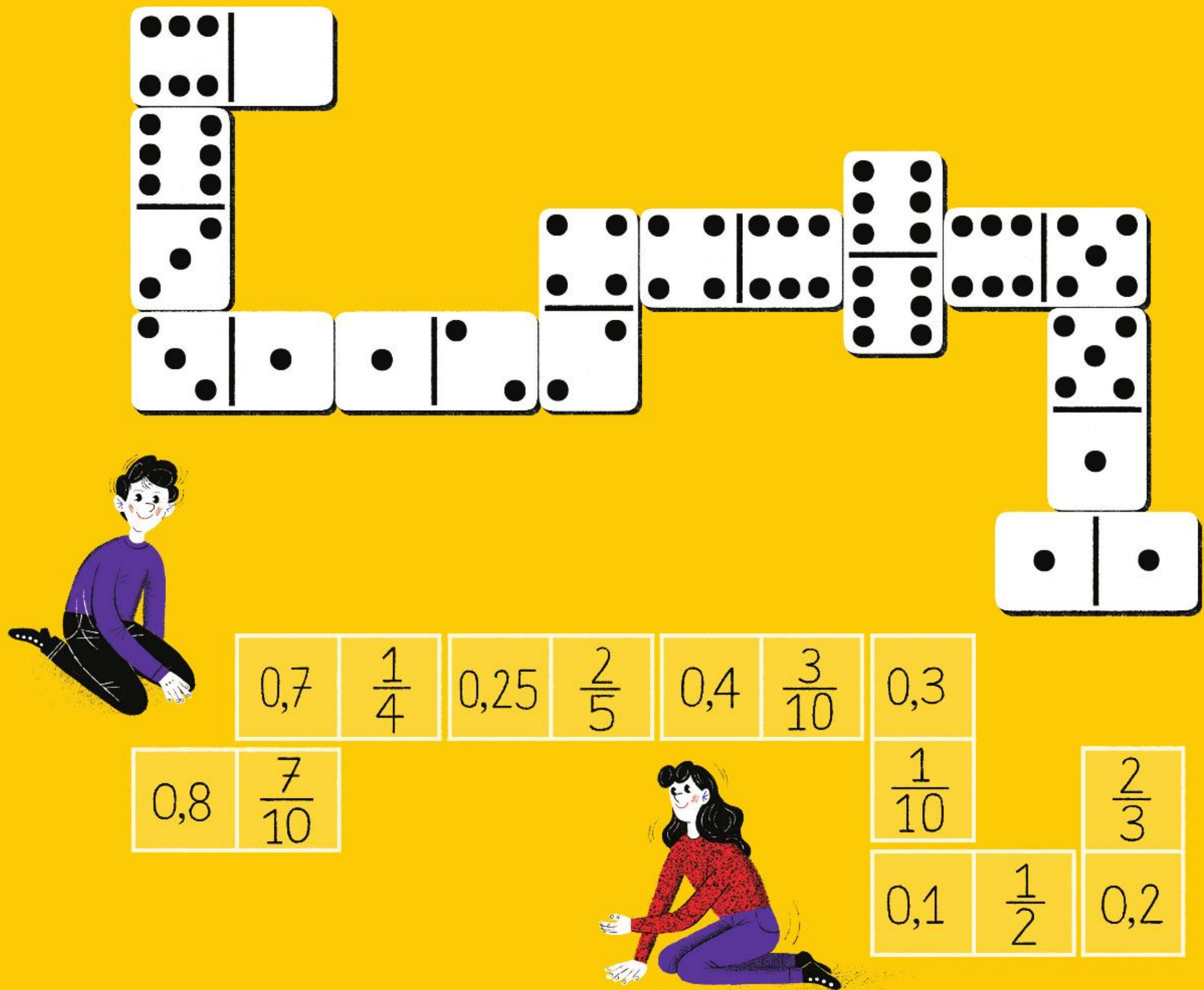
13 Który iloraz ma wartość ujemną? Odpowiedz bez wykonywania obliczeń.

A. $-144 : (-3) : (-1) : (-2)$ B. $144 : (-3) : (-1) : 2$
 C. $-144 : 3 : (-1) : (-2)$ D. $-144 : 3 : (-1) : 2$

14 Oblicz wartość podanego działania.

- a) $-1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) : (-1)$ b) $-2 \cdot (-2) : 2 : (-2) \cdot 2$
- c) $3 : (-1) \cdot (-3) : (-1) : (-3)$ d) $4 \cdot (-4) : 4 : (-4) \cdot (-4)$
- e) $-5 \cdot (-5) : (-1) : 5 \cdot (-1)$ f) $-6 : (-6) \cdot (-6) : (-6)$
- g) $7 : (-1) \cdot (-7) \cdot (-1) : 7$ h) $-8 : (-8) \cdot (-8) : (-1) : (-8)$
- i) $-9 : 9 \cdot (-1) : (-1) \cdot (-9)$ j) $-10 \cdot 10 : (-1) : (-1) : 10$

2. Ułamki



Na ilustracji widzimy tradycyjne domino, poniżej zaś kostki domina matematycznego. Po dokładnym obejrzeniu rysunków odpowiedz na pytania i wykonaj polecenia.

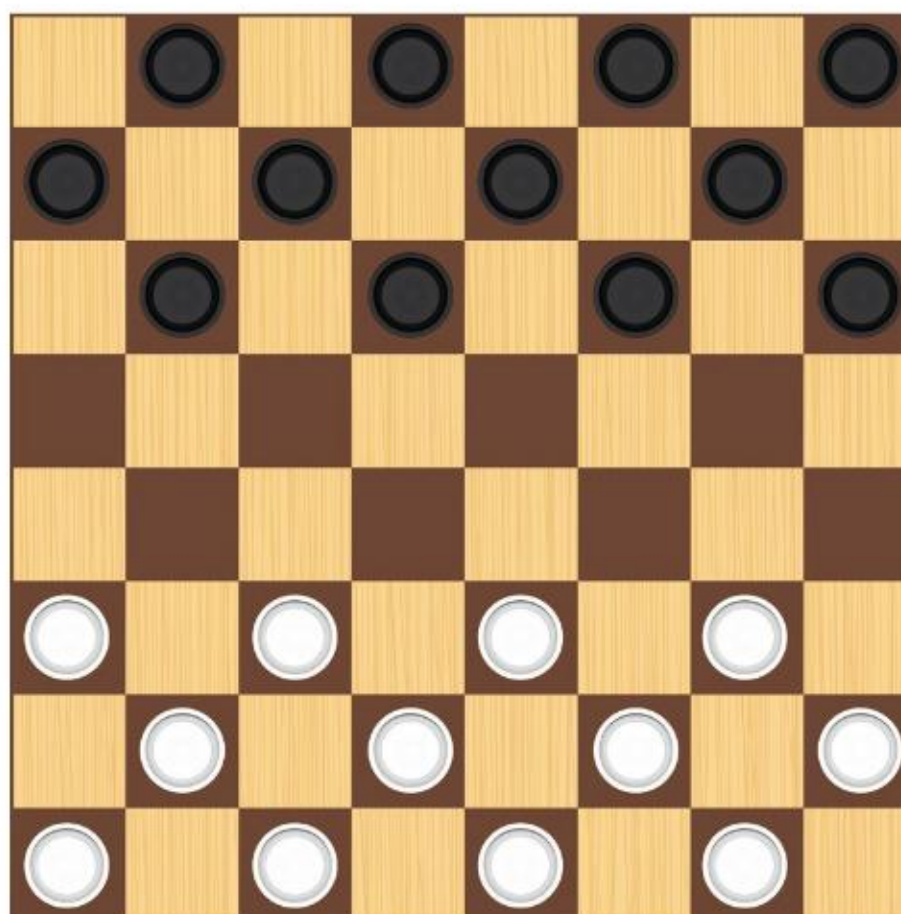
1. Jak się nazywają liczby widoczne na kostkach domina matematycznego?
2. Kostki tego domina są połączone zgodnie z pewną zasadą. Czy wiesz, jaka to zasada? Spróbuj ją sformułować.
3. Która kostka jest położona nieprawidłowo?
4. Jaka liczba powinna być na kostce dołożonej po lewej stronie, przy liczbie 0,8?
5. Czy potrafisz powiedzieć, jaką kostkę należałoby umieścić po prawej stronie, przy liczbie $\frac{2}{3}$?
6. Zagrajcie parami w domino matematyczne – narysujcie kilka innych kostek połączonych zgodnie z tą samą zasadą.



2.1 Powtórzenie wiadomości o ułamkach zwykłych

Podejmij temat

W warcaby gra się 24 pionami, które przesuwają się na szachownicy. Każdy gracz ma 12 pionów – zwykle w kolorze białym lub czarnym.



Jaki ułamek szachownicy stanowią wszystkie pola jasne, a jaki – ciemne?
Jaki ułamek szachownicy zajmują pola, na których są białe piony?
Czy wiesz, w jakie inne gry można grać na szachownicy?

Przypomnijmy sobie wiadomości o ułamkach zwykłych zdobyte w klasach czwartej i piątej.

ułamek zwykły

licznik $\longrightarrow \frac{4}{5}$ $\longleftarrow$ kreska ułamkowa
mianownik $\longrightarrow$

liczba mieszana

$2 \frac{3}{4}$
część całkowita część ułamkowa

Ułamki zwykłe dzielimy na właściwe i niewłaściwe.

Ułamek nazywamy **właściwym**, jeżeli jego licznik jest mniejszy od mianownika.

Pozostałe ułamki nazywamy **niewłaściwymi**.

1. Spośród podanych ułamków wybierz ułamki właściwe i zapisz je.

a) $\frac{3}{7}, \frac{15}{16}, \frac{16}{15}, \frac{4}{4}, \frac{6}{11}, \frac{12}{5}, \frac{9}{1}, \frac{1}{4}, \frac{15}{2}, \frac{7}{5}$

b) $\frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{13}{8}, \frac{5}{5}, \frac{8}{9}, \frac{3}{17}, \frac{12}{11}, \frac{45}{57}, \frac{83}{11}, \frac{24}{1}$

Z ułamka niewłaściwego można wyłączyć całości, czyli zamienić go na liczbę mieszaną lub naturalną. Wykorzystujemy przy tym fakt, że ułamek zwykły można traktować jako iloraz dwóch liczb (oczywiście liczba w mianowniku nie może być zerem). Przypomnimy, jak się wykonuje te czynności.

Przykład 1

Wyłączmy całości z podanego ułamka.

a) $\frac{25}{7}$

b) $\frac{42}{7}$

a) $\frac{25}{7} =$

Zapisujemy ułamek w postaci ilorazu.

$= 25 : 7 =$

Wykonujemy dzielenie z resztą.

$= 3 \text{ r } 4 = 3\frac{4}{7}$

Zapisujemy resztę w postaci ułamka o mianowniku równym dzielnikowi.

b) $\frac{42}{7} =$

Zapisujemy ułamek w postaci ilorazu.

$= 42 : 7 = 6$

Wykonujemy dzielenie.

2. Wyłącz całości z podanych ułamków niewłaściwych.

a) $\frac{15}{8}, \frac{28}{3}, \frac{15}{2}, \frac{47}{6}, \frac{36}{5}, \frac{51}{10}, \frac{55}{9}$

b) $\frac{28}{4}, \frac{40}{8}, \frac{63}{7}, \frac{55}{11}, \frac{3}{3}, \frac{7}{1}, \frac{27}{9}$

Często konieczne jest wykonanie odwrotnej czynności, czyli zamiany liczby mieszanej (lub naturalnej) na ułamek niewłaściwy.

Przykład 2

Zamieńmy podaną liczbę na ułamek niewłaściwy.

a) $4\frac{3}{8}$

b) 6

a) $4\frac{3}{8} =$

Mnożymy liczbę całości, czyli 4, przez liczbę z mianownika, czyli 8,

$= \frac{4 \cdot 8 + 3}{8} =$

a następnie dodajemy liczbę z licznika części ułamkowej, czyli 3.

$= \frac{35}{8}$

Otrzymany wynik zapisujemy w liczniku, a mianownik pozostawiamy bez zmian.

b) $6 =$

Liczbę naturalną zapisujemy w postaci ułamka o dowolnej (lub wymaganej) liczbie w mianowniku.

$= \frac{6}{1} =$

Należy tak dobrać liczby w liczniku i mianowniku, aby po zamianie ułamka na iloraz otrzymać jako wynik liczbę 6.

$= \frac{12}{2} = \frac{18}{3} =$

$= \frac{24}{4} = \text{itd.}$

3. Zamień podane liczby mieszane na ułamki niewłaściwe.

a) $1\frac{4}{9}$, $1\frac{5}{6}$, $2\frac{7}{8}$, $4\frac{2}{5}$, $8\frac{3}{10}$, $5\frac{2}{7}$

b) $3\frac{5}{9}$, $2\frac{1}{4}$, $7\frac{4}{7}$, $6\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, $10\frac{3}{8}$

Zanim zaczniemy wykonywać działania na ułamkach, przypomnijmy sobie skracanie i rozszerzanie ułamków oraz sprowadzanie ich do wspólnego mianownika.

Skracanie ułamka polega na podzieleniu licznika oraz mianownika przez tę samą liczbę różną od 0 i 1.

Rozszerzanie ułamka polega na pomnożeniu licznika oraz mianownika przez tę samą liczbę różną od 0 i 1.

Przykład 3

Skróćmy podany ułamek.

a) $\frac{28}{63}$

b) $\frac{30}{75}$

a) $\frac{28}{63} =$

Liczby w liczniku i mianowniku są podzielne przez 7.

$$= \frac{28 : 7}{63 : 7} =$$

Wykonujemy dzielenie w liczniku i mianowniku przez 7.

$$= \frac{4}{9}$$

Otrzymujemy ułamek nieskracalny.

b) $\frac{30}{75} =$

Liczby w liczniku i mianowniku są podzielne przez 5.

$$= \frac{30 : 5}{75 : 5} = \frac{6}{15} =$$

Dzielimy liczby w liczniku i mianowniku przez 5.

$$= \frac{6 : 3}{15 : 3} =$$

W liczniku i mianowniku otrzymanego ułamka są liczby podzielne przez 3, więc dzielimy je przez 3.

$$= \frac{2}{5}$$

Otrzymujemy ułamek nieskracalny.

$$\frac{30 : 15}{75 : 15} = \frac{2}{5}$$

Oczywiście ułamek $\frac{30}{75}$ można też skrócić jednokrotnie, w jednym kroku, przez liczbę 15 (ponieważ $5 \cdot 3 = 15$).

4. Zapisz podane ułamki w postaci ułamków nieskracalnych.

a) $\frac{25}{40}$, $\frac{15}{24}$, $\frac{28}{63}$, $\frac{16}{20}$, $\frac{14}{18}$, $\frac{33}{55}$

b) $\frac{6}{72}$, $\frac{36}{60}$, $\frac{40}{100}$, $\frac{8}{96}$, $\frac{28}{70}$, $\frac{36}{54}$

Jeżeli w liczniku i w mianowniku ułamka są duże liczby, to możemy skracać ten ułamek etapami jak w przykładzie 3b), ale możemy też skrócić go jednokrotnie. Aby to zrobić, musimy znać największy wspólny dzielnik (NWD) liczb w liczniku i mianowniku.

Jeżeli skrócimy ułamek przez największy wspólny dzielnik licznika i mianownika, to otrzymamy ułamek nieskracalny.

Przykład 4

Skróćmy ułamek $\frac{126}{210}$.

Sposób I – skracanie wielokrotne

$$\frac{126}{210} \begin{smallmatrix} :2 \\ :2 \end{smallmatrix} = \frac{63}{105} \begin{smallmatrix} :3 \\ :3 \end{smallmatrix} = \frac{21}{35} \begin{smallmatrix} :7 \\ :7 \end{smallmatrix} = \frac{3}{5}$$

Sposób II – skracanie jednokrotne

Szukamy NWD licznika i mianownika.

W tym celu rozkładamy na czynniki pierwsze liczby 126 oraz 210 i zaznaczamy powtarzające się dzielniki, które następnie mnożymy.

$$\begin{array}{r|l} 126 & \textcircled{2} \\ 63 & \textcircled{3} \\ 21 & 3 \\ 7 & \textcircled{7} \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 210 & \textcircled{2} \\ 105 & \textcircled{3} \\ 35 & 5 \\ 7 & \textcircled{7} \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{NWD}(126, 210) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42.$$

Teraz skracamy ułamek $\frac{126}{210}$ przez 42.

$$\text{Otrzymujemy: } \frac{126}{210} \begin{smallmatrix} :42 \\ :42 \end{smallmatrix} = \frac{3}{5}.$$

Wydaje mi się, że sposób I jest łatwiejszy: można dzielić w pamięci. A w sposobie II... tu muszę podzielić 126 przez 42! Pisemnie trzeba :)

Nieprawda. Spójrz na liczby tworzące skracany ułamek i na te, które nie są zaznaczone w rozkładach na czynniki. W ogóle nie musisz dzielić :)



5. Skróć podany ułamek.

a) $\frac{30}{135}$

b) $\frac{48}{176}$

c) $\frac{189}{315}$

d) $\frac{112}{128}$

e) $\frac{144}{168}$

f) $\frac{175}{420}$

g) $\frac{240}{432}$

h) $\frac{297}{351}$

Przykład 5

- a) Rozszerzmy ułamek $\frac{3}{8}$ tak, aby w mianowniku otrzymać liczbę 48.
b) Rozszerzmy ułamki $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{4}$ tak, aby w mianownikach otrzymać taką samą (najmniejszą) liczbę.

$$\text{a) } \frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{18}{48}$$

Aby w mianowniku otrzymać liczbę 48, należy go pomnożyć przez 6. Skoro mianownik mnożony jest przez 6, to również przez 6 należy pomnożyć licznik.

$$\text{b) } \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$$

Dodatknie wielokrotności liczby 5 to: 5, 10, 15, 20, 25, ..., a liczby 4 to: 4, 8, 12, 16, 20, 24, Wspólnym mianownikiem obu ułamków powinna być zatem liczba 20.

$$\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

Rozszerzamy zatem $\frac{2}{5}$ przez 4, a $\frac{3}{4}$ przez 5.

Jeżeli rozszerzyliśmy dwa ułamki tak, aby w mianownikach znalazła się taka sama liczba, to mówimy, że ułamki zostały **sprowadzone do wspólnego mianownika**.

Rozszerzanie ułamków opisane w przykładzie 5b) to sprowadzanie ułamków do najmniejszego wspólnego mianownika.

6. Rozszerz ułamki: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{12}$ tak, aby w każdym mianowniku otrzymać liczbę 24.

7. Sprowadź ułamki do najmniejszego wspólnego mianownika.

a) $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$

b) $\frac{5}{6}$ i $\frac{2}{7}$

c) $\frac{4}{9}$ i $\frac{1}{5}$

d) $\frac{4}{9}$ i $\frac{1}{6}$

e) $\frac{3}{8}$ i $\frac{7}{10}$

f) $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{6}$

g) $\frac{9}{10}$ i $\frac{2}{5}$

h) $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{8}$

Jeżeli liczby w mianownikach ułamków są niewielkie, to znalezienie najmniejszego wspólnego mianownika tych ułamków jest łatwe. W przypadku dużych liczb trudno jest go znaleźć w pamięci. Można wtedy sobie pomóc obliczeniem najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW) liczb w mianownikach ułamków.

Najmniejszy wspólny mianownik dwóch (lub większej liczby) ułamków jest równy najmniejszej wspólnej wielokrotności mianowników tych ułamków.

Przykład 6

Sprowadźmy ułamki do wspólnego mianownika.

a) $\frac{7}{12}$ i $\frac{11}{18}$

b) $\frac{5}{8}$ i $\frac{9}{14}$

c) $\frac{3}{28}$ i $\frac{5}{12}$

a) Szukamy NWW(12, 18) poprzez wypisanie dodatnich wielokrotności obu liczb:

$$W_{12} = \{12, 24, \underline{36}, 48, 60, 72, \dots\}, \quad W_{18} = \{18, \underline{36}, 54, \dots\}.$$

Z powyższych zapisów odczytujemy, że $\text{NWW}(12, 18) = 36$.

Sprowadzamy zatem ułamki $\frac{7}{12}$ i $\frac{11}{18}$ do wspólnego mianownika równego 36.

$$\frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{21}{36} \quad \text{i} \quad \frac{11 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{22}{36}$$

b) Szukamy NWW(8, 14) poprzez rozkład obu liczb na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{c|c} \textcircled{8} & \cancel{2} \\ 4 & \textcircled{2} \\ 2 & \textcircled{2} \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \textcircled{14} & \cancel{2} \\ 7 & \textcircled{7} \\ 1 & \end{array}$$

Skreślamy dzielniki powtarzające się w rozkładach obu liczb (liczba 2). Aby obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 8 i 14, pierwszą z liczb mnożymy przez nieskreślone dzielniki drugiej liczby (czyli $8 \cdot 7$) lub drugą liczbę mnożymy przez nieskreślone dzielniki pierwszej liczby (czyli $14 \cdot 2 \cdot 2$).

Otrzymujemy zatem: $\text{NWW}(8, 14) = 8 \cdot 7 = 14 \cdot 2 \cdot 2 = 56$.

Sprowadzamy więc ułamki $\frac{5}{8}$ i $\frac{9}{14}$ do wspólnego mianownika równego 56.

$$\frac{5 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{35}{56} \quad \text{i} \quad \frac{9 \cdot 4}{14 \cdot 4} = \frac{36}{56}$$

c) Szukamy NWW(28, 12) poprzez rozkład obu liczb na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{c|c} \textcircled{28} & \cancel{2} \\ 14 & \cancel{2} \\ 7 & \textcircled{7} \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \textcircled{12} & \cancel{2} \\ 6 & \cancel{2} \\ 3 & \textcircled{3} \\ 1 & \end{array}$$

Skreślamy dzielniki powtarzające się w rozkładach obu liczb (dwukrotnie liczba 2). Aby obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 28 i 12, mnożymy $28 \cdot 3$ lub $12 \cdot 7$.
Otrzymujemy zatem: $\text{NWW}(28, 12) = 84$.

Sprowadzamy więc ułamki $\frac{3}{28}$ i $\frac{5}{12}$ do wspólnego mianownika równego 84.

$$\frac{3 \cdot 3}{28 \cdot 3} = \frac{9}{84} \quad \text{i} \quad \frac{5 \cdot 7}{12 \cdot 7} = \frac{35}{84}$$

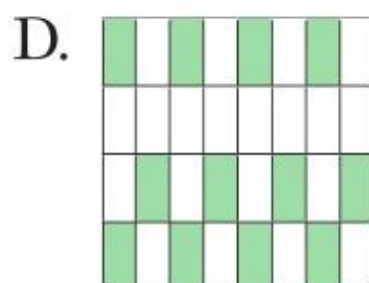
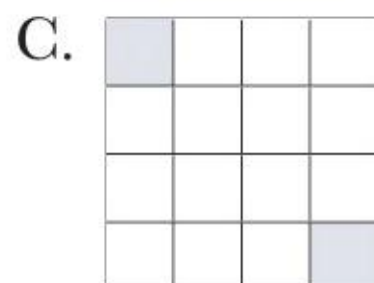
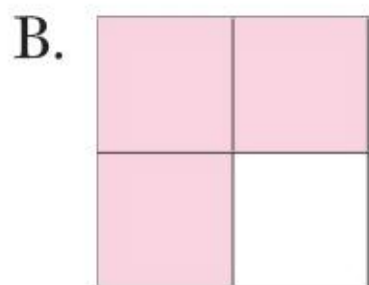
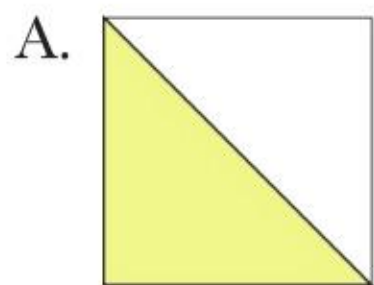
Obie metody zastosowane w rozwiązaniu przykładu – jedna w punkcie a) oraz druga w punktach b) i c) – pozwalają obliczać najmniejszą wspólną wielokrotność, ale bardziej uniwersalna, niezawodna i szybsza (szczególnie w przypadku dużych liczb) jest metoda druga, wykorzystująca rozkład na czynniki pierwsze.

8. Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika.

a) $\frac{8}{45}$ i $\frac{7}{30}$ b) $\frac{1}{60}$ i $\frac{5}{42}$ c) $\frac{3}{44}$ i $\frac{7}{20}$

Zadania

Dopasuj rysunek do ułamka opisującego zamalowaną część rysunku.



I. $\frac{6}{8}$

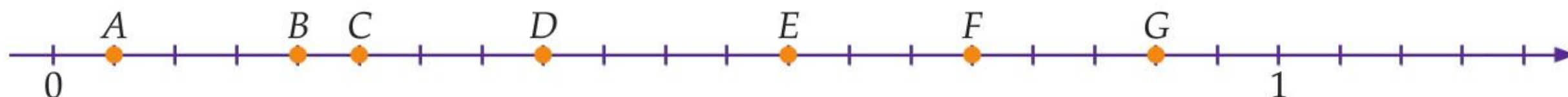
II. $\frac{3}{8}$

III. $\frac{4}{8}$

IV. $\frac{1}{8}$



Jakie współrzędne mają punkty przedstawione na osi liczbowej? Zapisz je w postaci ułamków nieskracalnych.



Jakie współrzędne mają punkty przedstawione na osi liczbowej? Zapisz je w postaci liczb mieszanych, a następnie w postaci ułamków niewłaściwych.



Sprowadź ułamki do wspólnego mianownika i zapisz je w kolejności rosnącej.

a) $\frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{15}$ b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{7}, \frac{3}{10}, \frac{27}{70}$ d) $\frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{13}{24}$ e) $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{29}{40}$ f) $\frac{13}{15}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}$

Która liczba jest najmniejszym wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{9}{16}$ i $\frac{23}{24}$?

A. 32

B. 48

C. 64

D. 96

2.2 Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych

Podejmij temat



W jaki sposób można obliczyć, czy do podanej ilości składników ciasta należy dodać całe opakowanie proszku do pieczenia?



Czy pamiętasz?

Przed dodawaniem lub odejmowaniem ułamków należy je sprowadzić do wspólnego mianownika.

Wynik działania należy zawsze podawać w postaci nieskracalnego ułamka właściwego.

Przykład 1

Obliczmy.

a) $3\frac{2}{5} + 4\frac{5}{7}$

b) $5\frac{3}{8} - 2\frac{5}{6}$

$$\begin{aligned} \text{a) } 3\frac{2}{5} + 4\frac{5}{7} &= \\ &= 3\frac{14}{35} + 4\frac{25}{35} = \\ &= 7\frac{39}{35} = 8\frac{4}{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 5\frac{3}{8} - 2\frac{5}{6} &= \\ &= 5\frac{9}{24} - 2\frac{20}{24} = \end{aligned}$$

$$= 4\frac{33}{24} - 2\frac{20}{24} = 2\frac{13}{24}$$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika (liczba 35).

Dodajemy całości do całości, licznik do licznika, a wspólny mianownik przepisujemy.

Wyłączamy 1 całość z otrzymanego ułamka niewłaściwego i dodajemy ją do 7 całości.

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika (liczba 24).

Nie możemy wykonać odejmowania, ponieważ $\frac{9}{24} < \frac{20}{24}$.

Zamieniamy zatem 1 całość (z 5 całości) na ułamek $\frac{24}{24}$ i dołączamy do ułamka $\frac{9}{24}$.

Odejmujemy całości od całości, licznik od licznika, a wspólny mianownik przepisujemy.

1. Wykonaj działania.

a) $5\frac{2}{3} + 3\frac{4}{7}$

$1\frac{4}{5} + 5\frac{5}{6}$

$4\frac{7}{9} + \frac{1}{6}$

$3\frac{7}{10} + 1\frac{4}{15}$

$\frac{2}{21} + \frac{6}{7}$

b) $3\frac{5}{6} - 1\frac{2}{3}$

$6\frac{3}{7} - 6\frac{1}{10}$

$4\frac{5}{12} - \frac{3}{8}$

$\frac{7}{9} - \frac{1}{6}$

$1\frac{3}{5} - 1\frac{1}{4}$

c) $7\frac{2}{5} - 2\frac{5}{7}$

$3 - 1\frac{7}{9}$

$1\frac{3}{11} - \frac{1}{2}$

$5\frac{3}{10} - 2\frac{7}{8}$

$1\frac{3}{4} - \frac{11}{12}$

d) $8 - 2\frac{7}{12}$

$6\frac{5}{9} - 5\frac{3}{8}$

$4\frac{5}{6} + 8\frac{3}{4}$

$2\frac{7}{12} + 1\frac{5}{8}$

$1\frac{9}{16} - 1\frac{1}{6}$

Zadania

Do sumy liczb $2\frac{5}{8}$ i $1\frac{4}{7}$ dodaj różnicę tych liczb.

Sumę liczb $7\frac{3}{4}$ i $2\frac{5}{9}$ zmniejsz o ich różnicę.

Oblicz, o ile:

a) liczba $13\frac{1}{2}$ jest większa od liczby $7\frac{5}{9}$,

b) liczba $4\frac{6}{7}$ jest mniejsza od liczby $6\frac{3}{8}$,

c) różnica liczb $8\frac{1}{5}$ i $3\frac{5}{6}$ jest mniejsza od 7,

d) suma liczb $5\frac{2}{3}$ i $1\frac{3}{4}$ jest większa od ich różnicy.

Aleksandra ma dokładnie 15 lat, jej siostra Paulina jest od niej młodsza o $2\frac{3}{4}$ roku, a ich brat Maksymilian jest młodszy od Pauliny o $1\frac{3}{4}$ roku. Oblicz wiek Maksymiliana. Ile to jest lat i miesięcy?

Która waga pokazuje większą masę? Oblicz różnicę mas wskazywanych przez wagi.

waga I



waga II



- Przeziębiony Marek przyjmuje lekarstwa dwa razy dziennie. Rano bierze tabletkę przeciwgorączkową ważącą $1\frac{2}{15}$ g i witaminę C ważącą $\frac{9}{20}$ g. Wieczorem połyka tylko witaminę C. Ile razem ważą leki przyjmowane przez Marka w ciągu całego dnia?

- Dywan w pokoju Karoliny ma kształt prostokąta o długości $3\frac{1}{4}$ m i szerokości $2\frac{3}{5}$ m. Dywan w pokoju Anety ma kształt kwadratu o boku krótszym o $\frac{3}{10}$ m od długości dywanu Karoliny.

- Oblicz różnicę długości i szerokości dywanu Karoliny.
- Ile metrów ma bok dywanu Anety?
- Który z dywanów ma dłuższy obwód? O ile metrów?

- Kamil wydał $\frac{3}{8}$ swoich pieniędzy na książkę, $\frac{2}{5}$ na sportową koszulkę i $\frac{1}{10}$ na paczkę orzeszków. Czy wydał wszystkie pieniądze? Odpowiedź uzasadnij za pomocą odpowiedniego działania.

- Do sporządzenia napoju jogurtowo-owocowego Anna zużyła $1\frac{3}{5}$ l jogurtu, $\frac{1}{3}$ l soku jabłkowego i $\frac{1}{6}$ l soku wiśniowego. Wypiła $\frac{1}{5}$ l napoju, a resztę wlała do dzbanka o pojemności 2 l.
- Ile litrów napoju jogurtowo-owocowego przygotowała Anna?
 - Ile litrów napoju wlała do dzbanka?
 - Ile litrów zmieściłoby się jeszcze w tym dzbanku?

- Znajdź nieznaną liczbę x w grafie lub równaniu.

a)

$$x + \frac{4}{7} = 2\frac{3}{4}$$

?

b)

$$x - 2\frac{4}{5} = 6\frac{3}{4}$$

?

c) $x + 1\frac{5}{6} = 4\frac{1}{2}$

d) $x - 1\frac{5}{8} = 4$

e) $8\frac{3}{10} + x = 9\frac{1}{4}$

f) $2\frac{2}{9} - x = 1\frac{1}{3}$



Czy pamiętasz?

Grafy z punktów a) i b) pomagają w ustaleniu, jakie działanie należy zastosować, aby rozwiązać równanie. Możesz również samodzielnie narysować grafy do równań z punktów c)–f).

2.3 Mnożenie ułamków zwykłych

Podejmij temat



Lina do wspinaczki zamocowana jest na hakach wbitych w skałę co $1\frac{3}{4}$ m. W takiej samej odległości od najniższego haka trzyma linę osoba ubezpieczająca.

Za pomocą jakiego działania można obliczyć długość wykorzystanej liny? Czy pamiętasz, jak należy wykonać to działanie?

Nie wiem. Mogę zaraz obliczyć długość wykorzystanej liny, ale to oczywiście nie będzie twoja dokładna wysokość.



Hej! Jak wysoko jestem?

W klasie piątej zajmowaliśmy się mnożeniem ułamków zwykłych i liczb mieszanych przez liczby naturalne. Przypomnijmy sobie, jak wykonuje się te działania.

Przykład 1

Obliczmy.

a) $\frac{7}{8} \cdot 5$

b) $4 \cdot 2\frac{1}{3}$

c) $2\frac{4}{9} \cdot 6$

a) $\frac{7}{8} \cdot 5 =$

$$= \frac{7 \cdot 5}{8} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8}$$

Mnożymy licznik ułamka przez liczbę naturalną, a mianownik przepisujemy.

Wyłączamy całości z otrzymanego ułamka niewłaściwego.

b) $4 \cdot 2\frac{1}{3} =$

$$= 4 \cdot \frac{7}{3} =$$

Zamieniamy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy.

Mnożymy tak jak w punkcie a): liczbę naturalną przez licznik ułamka, a mianownik przepisujemy.

$$= \frac{4 \cdot 7}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$$

Wyłączamy całości.

$$c) 2\frac{4}{9} \cdot 6 =$$

Zamieniamy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy.

$$= \frac{22}{9} \cdot 6 =$$

Zapisujemy mnożenie.

$$= \frac{22 \cdot \cancel{6}^2}{\cancel{9}_3} =$$

Ponieważ liczba 6 z licznika i liczba 9 z mianownika są podzielne przez 3, wykonujemy skracanie (dzielimy je przez 3 i zapisujemy obok wyniki), a następnie mnożymy otrzymane liczby.

$$= \frac{44}{3} =$$

$$= 14\frac{2}{3}$$

Wyłączamy całości.



Czy pamiętasz?

Mnożenie jest jedynym działaniem, w którym dozwolone jest skracanie **przed** wykonaniem właściwych obliczeń.

1. Oblicz iloczyny. Jeżeli jest to możliwe, skracaj przed pomnożeniem. Pamiętaj, aby wynik nie pozostał ułamkiem niewłaściwym.

$$a) \frac{7}{9} \cdot 4$$

$$2\frac{3}{4} \cdot 3$$

$$1\frac{1}{8} \cdot 7$$

$$2 \cdot 4\frac{1}{3}$$

$$b) \frac{4}{5} \cdot 27$$

$$\frac{7}{25} \cdot 5$$

$$\frac{5}{18} \cdot 12$$

$$35 \cdot \frac{13}{10}$$

$$c) 1\frac{3}{10} \cdot 5$$

$$2\frac{1}{6} \cdot 9$$

$$3\frac{1}{8} \cdot 6$$

$$12 \cdot 1\frac{5}{8}$$

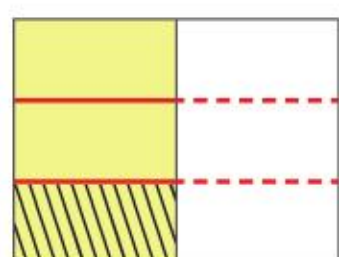
$$d) 6 \cdot 1\frac{3}{5}$$

$$48 \cdot \frac{5}{18}$$

$$15 \cdot 2\frac{3}{10}$$

$$3\frac{7}{10} \cdot 4$$

Pokażemy teraz, w jaki sposób mnoży się ułamek przez ułamek.



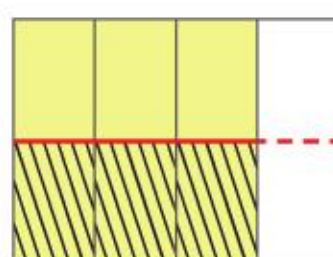
Zamalowano $\frac{1}{2}$ prostokąta.

Zakreskowano $\frac{1}{3}$

z $\frac{1}{2}$ prostokąta,

czyli $\frac{1}{6}$ prostokąta.

$$\text{Zatem } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$



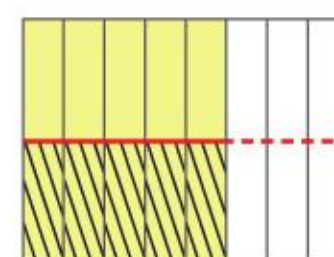
Zamalowano $\frac{3}{4}$ prostokąta.

Zakreskowano $\frac{1}{2}$

z $\frac{3}{4}$ prostokąta,

czyli $\frac{3}{8}$ prostokąta.

$$\text{Zatem } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$



Zamalowano $\frac{5}{8}$ prostokąta.

Zakreskowano $\frac{1}{2}$

z $\frac{5}{8}$ prostokąta,

czyli $\frac{5}{16}$ prostokąta.

$$\text{Zatem } \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{16}.$$

Przyjrzyj się powyższym działaniom. Zwróć uwagę, jak się zmieniają liczniki i mianowniki. Czy potrafisz wywnioskować, w jaki sposób należy mnożyć dwa ułamki zwykłe?

Aby obliczyć iloczyn dwóch ułamków zwykłych, należy pomnożyć licznik pierwszego ułamka przez licznik drugiego ułamka oraz mianownik pierwszego ułamka przez mianownik drugiego ułamka.

Łatwo zapamiętać!
Licznik razy licznik,
a mianownik razy mianownik.



Tak! I wcale nie trzeba
sprowadzać do wspólnego
mianownika :)

Przykład 2

Obliczmy iloczyn.

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$

b) $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4}$

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} =$ Mnożymy liczniki i mianowniki.
 $= \frac{15}{28}$

b) $2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{4} =$ Zamieniamy liczby mieszane na ułamki niewłaściwe.

$= \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{4} =$ Mnożymy liczniki i mianowniki.

$= \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$ Wyłączamy całości.



Jeżeli jednym lub dwoma czynnikami są liczby mieszane, to przed wykonaniem mnożenia należy zamienić je na ułamki niewłaściwe.

2. Oblicz iloczyny.

a) $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}$

$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{11}$

$\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8}$

b) $1\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$

$2\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}$

$\frac{1}{6} \cdot 3\frac{1}{4}$

$1\frac{3}{13} \cdot \frac{2}{3}$

c) $1\frac{1}{6} \cdot 1\frac{2}{5}$

$2\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{2}$

$2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{2}{5}$

$2\frac{2}{9} \cdot 1\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}$

$\frac{1}{4} \cdot 3\frac{2}{7}$

$2\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{3}$

$1\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{9}$

Podobnie jak w przypadku mnożenia ułamka przez liczbę, tak samo podczas mnożenia dwóch ułamków można je skracać przed wykonaniem mnożenia.

Przykład 3

Wykonajmy mnożenie.

$$a) \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{7}$$

$$b) 2\frac{2}{5} \cdot 1\frac{7}{8}$$

$$a) \frac{4}{\cancel{9}^3} \cdot \frac{\cancel{6}_2}{7} =$$

Ponieważ liczba 6 z licznika i liczba 9 z mianownika mają wspólny dzielnik równy 3, to wykonujemy skracanie (obie te liczby dzielimy przez 3 i zapisujemy wyniki obok).

$$= \frac{8}{21}$$

Mnożymy otrzymane liczby.

$$b) 2\frac{2}{5} \cdot 1\frac{7}{8} =$$

$$= \frac{\cancel{12}^3}{5} \cdot \frac{15}{\cancel{8}_2} =$$

Zamieniamy liczby mieszane na ułamki niewłaściwe.

Ponieważ liczby 12 i 8 mają wspólny dzielnik równy 4, to wykonujemy skracanie przez 4.

$$= \frac{\cancel{3}_1}{5} \cdot \frac{\cancel{15}^3}{2} =$$

Ponieważ liczby 5 i 15 mają wspólny dzielnik równy 5, to wykonujemy skracanie przez 5.

$$= \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Mnożymy liczniki i mianowniki, a następnie z otrzymanego ułamka wyłączamy całości.

$$2\frac{2}{5} \cdot 1\frac{7}{8} = \frac{\cancel{12}^3}{\cancel{5}_1} \cdot \frac{\cancel{15}^3}{\cancel{8}_2} =$$

Oba skracania ułamków można wykonać w jednym kroku – obliczenia zapisujemy wówczas w sposób pokazany obok.

$$= \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Dalej postępujemy tak samo jak poprzednio.

3. Oblicz iloczyny. Skróć przed wykonaniem mnożenia.

$$a) \frac{7}{8} \cdot \frac{10}{11}$$

$$b) \frac{2}{35} \cdot 2\frac{1}{7}$$

$$c) 1\frac{1}{10} \cdot 1\frac{5}{7}$$

$$d) \frac{15}{36} \cdot \frac{27}{40}$$

$$\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{18}$$

$$3\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{24}$$

$$4\frac{2}{7} \cdot 1\frac{1}{20}$$

$$\frac{18}{49} \cdot 6\frac{2}{9}$$

$$\frac{3}{16} \cdot \frac{12}{13}$$

$$\frac{4}{21} \cdot 2\frac{4}{5}$$

$$2\frac{1}{24} \cdot 1\frac{5}{27}$$

$$3\frac{22}{25} \cdot 2\frac{3}{16}$$

$$\frac{8}{27} \cdot \frac{9}{10}$$

$$1\frac{7}{35} \cdot \frac{5}{36}$$

$$1\frac{5}{22} \cdot 2\frac{3}{4}$$

$$3\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9}$$

Jeżeli mnożymy kilka ułamków zwykłych, możemy je skracać, dzieląc dowolny licznik i dowolny mianownik (oczywiście pod warunkiem, że mają one wspólny dzielnik).

Przykład 4

Obliczmy: $\frac{2}{25} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{33}{49}$.

$$\overset{1}{\cancel{2}} \overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{1}{\cancel{7}} \overset{2}{\cancel{8}} \cdot \overset{2}{\cancel{10}} \overset{1}{\cancel{11}} \cdot \overset{3}{\cancel{33}} \overset{7}{\cancel{49}} =$$

$$= \frac{3}{70}$$

Dzielimy 10 i 25 przez 5.

Dzielimy 7 i 49 przez 7.

Dzielimy 2 i 8 przez 2.

Dzielimy 11 i 33 przez 11.

Dzielimy 4 i 2 przez 2.

4. Oblicz iloczyn. Tam, gdzie to możliwe, skracaj przed pomnożeniem.

a) $\frac{15}{16} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{6}{25}$

b) $\frac{4}{21} \cdot \frac{27}{32} \cdot \frac{14}{45}$

c) $\frac{8}{9} \cdot \frac{21}{40} \cdot \frac{15}{42}$

Zadania

● Oblicz:

a) $\frac{5}{6}$ liczby 72,

b) $\frac{3}{8}$ liczby 60,

c) $\frac{4}{9}$ liczby 30,

d) $1\frac{3}{4}$ liczby 28,

e) $1\frac{2}{5}$ liczby $1\frac{1}{4}$,

f) $\frac{2}{3}$ liczby $1\frac{1}{5}$.

● Ania znalazła w lodówce $\frac{1}{2}$ arbuza i zjadła $\frac{2}{5}$ tej części.

a) Jaką część całego arbuza zjadła Ania?

b) Jaka część całego arbuza została?

● Ogródek warzywny zajmuje $\frac{3}{5}$ powierzchni działki pani Beaty.

Na $\frac{1}{6}$ tego ogródka rosną warzywa strączkowe. Jaką część powierzchni całej działki zajmują uprawy warzyw strączkowych?



- Jeden dzień stanowi $\frac{1}{7}$ tygodnia. Jaką częścią tygodnia jest $\frac{2}{3}$ dnia?
- Pani Justyna wydała na zakupy 120 zł, z czego $\frac{3}{8}$ wydała w sklepie spożywczym, $\frac{1}{6}$ w aptece, $\frac{5}{24}$ w księgarni, $\frac{1}{10}$ w kiosku, a pozostałe pieniądze w cukierni. Ile pieniędzy wydała w poszczególnych sklepach?
- Karat to jednostka masy używana do określania wielkości pereł i kamieni szlachetnych w jubilerstwie:
1 karat to około $\frac{1}{5}$ g.
Oblicz i odpowiedz na pytania.
 - a) W złotym pierścionku pani Magdaleny znajdują się diamenty o łącznej masie $2\frac{1}{2}$ karata. Ile gramów ważą te diamenty?
 - b) Największy znaleziony dotychczas diament ważył 3106 karatów. Ile to gramów?
- W poniedziałek o godzinie 14.00 większość uczniów pewnej szkoły podstawowej już skończyła lekcje i poszła do domu. W budynku przebywała jeszcze $\frac{1}{4}$ wszystkich uczniów, spośród których $\frac{2}{5}$ stanowili uczniowie klas siódmych, a $\frac{8}{15}$ młodzież klas ósmych. Pozostałe osoby to dzieci z klas najmłodszych, które w świetlicy czekały na przyjscie rodziców. Jaką częścią wszystkich uczniów tej szkoły byli znajdujący się w niej uczniowie klas:
 - a) siódmych, b) ósmych, c) najmłodszych?
- Ze skrzynki śliwek ważących netto $10\frac{1}{2}$ kg sprzedano w poniedziałek $\frac{3}{7}$ masy śliwek, a we wtorek $\frac{2}{3}$ pozostałej ilości owoców. Resztę sprzedano w środę. Ile kilogramów śliwek sprzedano każdego dnia?
- W niektórych krajach długość mierzy się w jardach i milach. Skorzystaj z informacji podanej na marginesie i oblicz, ile jardów stanowi 500 m. A 12 km – ile to mil?

Ciekawie!

Nazwa „karat” pochodzi z języka arabskiego i oznacza „maleńka waga” albo „maleńki odważnik”. Takimi właśnie odważnikami posługiwano się na Bliskim Wschodzie przy wazeniu cennych kamieni, które były bardzo małych rozmiarów. Funkcję odważników pełniły nasiona występującego tam licznie drzewa świętojańskiego. Takie nasiono waży około $\frac{1}{5}$ g, dlatego jest dobrze dopasowane do wielkości sprzedawanych kamieni. Karat jako jednostka masy kamieni szlachetnych został z czasem przyjęty najpierw w Europie, a potem na całym świecie.



1 metr to około $1\frac{23}{250}$ jarda.
1 kilometr to około $\frac{5}{8}$ mili.

2.4 Dzielenie ułamków zwykłych

Podejmij temat

Mamy $12\frac{1}{2}$ l kompotu.
Teraz trzeba ponalewać
go do kubków.

Ile kubków mam przygotować?
Zaraz... W każdym zmieści się $\frac{1}{4}$ l,
więc... Nie, nie wiem :(



Czy potrafisz rozwiązać ten problem i odpowiedzieć na pytanie, które zadała sobie kucharka? Jakie działanie opisuje tę sytuację?



W klasie piątej uczyliśmy się dzielenia ułamków zwykłych przez liczby naturalne. Przypomnijmy, jak się wykonuje to działanie.

Przykład 1

Obliczmy iloraz.

a) $\frac{4}{5} : 9$

b) $2\frac{3}{4} : 5$

c) $\frac{6}{7} : 4$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{4}{5} : 9 &= \\ &= \frac{4}{5 \cdot 9} = \frac{4}{45} \end{aligned}$$

Aby wykonać dzielenie ułamka zwykłego przez liczbę naturalną, należy pomnożyć mianownik ułamka przez tę liczbę.

$$\begin{aligned} \text{b) } 2\frac{3}{4} : 5 &= \\ &= \frac{11}{4} : 5 = \\ &= \frac{11}{4 \cdot 5} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

Zamieniamy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy.

Wykonujemy dzielenie według reguły zapisanej w punkcie a).

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{6}{7} : 4 &= \\ &= \frac{3 \cancel{6}}{7 \cdot \cancel{4}_2} = \frac{3}{14} \end{aligned}$$

Zapisujemy odpowiedni iloczyn w mianowniku ułamka.

Ponieważ liczby 6 i 4 w liczniku i mianowniku ułamka mają wspólny dzielnik równy 2, wykonujemy skracanie, a następnie mnożymy otrzymane liczby.

1. Oblicz ilorazy. Tam, gdzie jest to możliwe, skracaj przed pomnożeniem.

a) $\frac{3}{5} : 5$

b) $\frac{9}{10} : 6$

c) $3\frac{1}{2} : 6$

d) $4\frac{2}{7} : 12$

$\frac{7}{9} : 3$

$\frac{8}{11} : 4$

$2\frac{2}{3} : 5$

$3\frac{1}{9} : 21$

$\frac{5}{7} : 8$

$\frac{6}{7} : 12$

$3\frac{3}{4} : 8$

$10\frac{4}{5} : 9$

$\frac{3}{4} : 7$

$\frac{12}{13} : 8$

$4\frac{3}{8} : 4$

$5\frac{5}{8} : 15$

$\frac{5}{6} : 6$

$\frac{25}{31} : 10$

$1\frac{7}{10} : 5$

$3\frac{3}{7} : 32$

Poznamy teraz nowe pojęcie – **odwrotność liczby**.

Będziemy je wykorzystywać do dzielenia ułamków zwykłych.

Odwrotnością liczby $\frac{3}{4}$ jest liczba $\frac{4}{3}$ (czyli $1\frac{1}{3}$).

Odwrotnością liczby $\frac{1}{7}$ jest liczba $\frac{7}{1}$ (czyli 7).

Odwrotnością liczby 5 (czyli $\frac{5}{1}$) jest liczba $\frac{1}{5}$.

Odwrotnością liczby $5\frac{1}{6}$ (czyli $\frac{31}{6}$) jest liczba $\frac{6}{31}$.



Aby znaleźć odwrotność liczby mieszanej, najpierw należy ją zamienić na ułamek niewłaściwy.

Jeżeli w ułamku zamienimy miejscami licznik z mianownikiem, to otrzymamy **odwrotność ułamka**.

Mówimy, że dany ułamek i jego odwrotność (np. $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{3}$) to **liczby odwrotne**.

2. Podaj odwrotności liczb.

a) $\frac{2}{7}, \frac{8}{11}, \frac{4}{9}, \frac{7}{15}$

b) $\frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}, \frac{1}{13}$

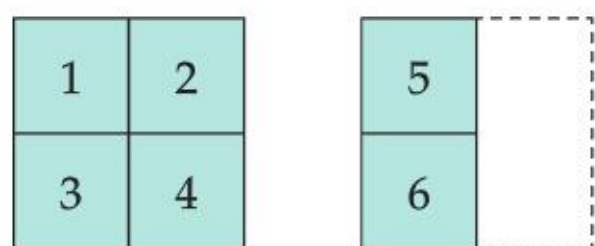
c) 6, 4, 20, 3

d) $2\frac{2}{3}, 4\frac{3}{5}, 5\frac{1}{8}, 3\frac{5}{7}$

Przejdźmy teraz do dzielenia ułamka przez ułamek. Jak można zilustrować takie działanie?

$1\frac{1}{2}$ kwadratu podzielono na ćwiartki.

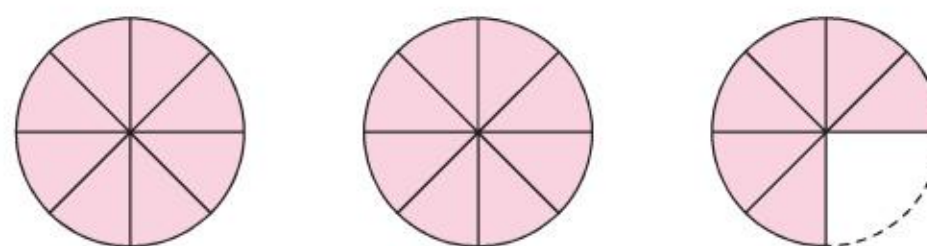
Ile części otrzymano?



$1\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 6$

$2\frac{3}{4}$ koła podzielono na części ósme.

Ile części otrzymano?



$2\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = 22$

Aby liczbę podzielić przez ułamek zwykły, nie trzeba oczywiście każdorazowo wykonywać rysunku. W jaki sposób można ustalić reguły postępowania przy wykonywaniu takiego działania? Wystarczy przypomnieć sobie, że dzielenie i mnożenie to działania odwrotne.

Aby wykonać dzielenie: $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$,
 należy znaleźć taką liczbę, że: $\frac{5}{7} \cdot \text{?} = \frac{2}{3}$.

Ponieważ trudno jest znaleźć taką liczbę, możemy podzielić jej poszukiwanie na dwa etapy.

I. Dopiszmy do pierwszego czynnika dwa ułamki w sposób pokazany poniżej.

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$\swarrow$ $\nwarrow$
 aby iloczyn aby iloczyn
 był równy 1 był równy $\frac{2}{3}$

II. Mnożenie przez $\frac{7}{5}$, a następnie przez $\frac{2}{3}$ można zastąpić jednym działaniem – mnożeniem przez $\frac{14}{15}$ (bo $\frac{7}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{15}$).
 Zatem szukaną liczbą jest $\frac{14}{15}$.

W jaki prostszy sposób można znaleźć tę liczbę?

Aby wykonać dzielenie $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$, wykonaliśmy mnożenie $\frac{7}{5} \cdot \frac{2}{3}$.

Czynniki możemy zapisać w odwrotnej kolejności: $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$.

Zauważmy, że liczba $\frac{7}{5}$ to odwrotność liczby $\frac{5}{7}$, czyli naszego dzielnika.

Zamiast więc dzielić liczbę przez $\frac{5}{7}$, mnożymy ją przez odwrotność $\frac{5}{7}$, czyli przez $\frac{7}{5}$.

Aby podzielić liczbę przez ułamek, należy ją pomnożyć przez odwrotność tego ułamka.

Przykład 2

Obliczmy iloraz.

a) $\frac{4}{9} : \frac{3}{7}$

b) $\frac{7}{8} : 5$

c) $2\frac{2}{5} : 5\frac{1}{3}$

a) $\frac{4}{9} : \frac{3}{7} =$

Zamiast dzielić liczbę $\frac{4}{9}$ przez ułamek $\frac{3}{7}$, mnożymy ją przez odwrotność tego ułamka, czyli przez $\frac{7}{3}$.

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{3} = \frac{28}{27} = 1\frac{1}{27}$$

Wykonujemy mnożenie, a następnie wyłączamy całości.

$$b) \frac{7}{8} : 5 =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{40}$$

$$c) 2\frac{2}{5} : 5\frac{1}{3} = \frac{12}{5} : \frac{16}{3} =$$

$$= \frac{12}{5} \cdot \frac{3}{16} = \frac{9}{20}$$

Dzielenie zamieniamy na mnożenie przez odwrotność dzielnika.

Wykonujemy mnożenie.

Zamieniamy liczby mieszane na ułamki niewłaściwe.

Dzielenie zamieniamy na mnożenie przez odwrotność dzielnika, skracamy i wykonujemy mnożenie.

3. Oblicz ilorazy.

$$a) \frac{2}{3} : \frac{6}{7}$$

$$\frac{6}{11} : \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{32} : \frac{1}{24}$$

$$\frac{9}{10} : \frac{18}{35}$$

$$b) \frac{2}{7} : 6$$

$$5\frac{1}{4} : 14$$

$$4\frac{2}{3} : 7$$

$$3\frac{3}{13} : 12$$

$$c) 2\frac{1}{5} : \frac{3}{4}$$

$$1\frac{3}{10} : \frac{4}{5}$$

$$2\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{18} : 2\frac{4}{9}$$

$$d) 3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{7}$$

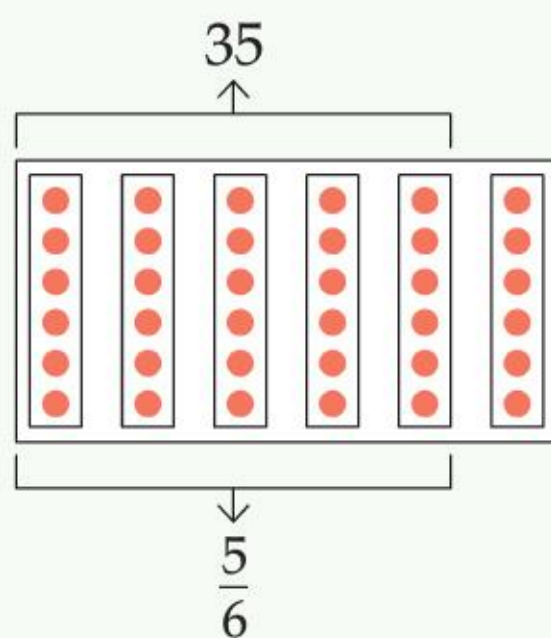
$$9\frac{1}{3} : 4\frac{9}{10}$$

$$3\frac{3}{8} : 1\frac{5}{16}$$

$$1\frac{17}{25} : 10\frac{4}{5}$$

Przykład 3

Obliczmy liczbę, której $\frac{5}{6}$ jest równe 35.



$\frac{5}{6}$ liczby x to 35

$$\frac{5}{6} \cdot x = 35$$

$$x = 35 : \frac{5}{6}$$

$$x = 35 \cdot \frac{6}{5} = 42$$

Zapisujemy polecenie tak, jak w przypadku obliczania ułamka danej liczby. Nieznaną liczbę wskazującą całość oznaczamy literą x .

Obliczanie zapisujemy za pomocą mnożenia i otrzymujemy równanie.

Równanie rozwiązujemy za pomocą działania odwrotnego, czyli dzielenia.

Dzielenie zamieniamy na mnożenie przez odwrotność dzielnika i wykonujemy mnożenie.

Aby obliczyć liczbę, której ułamek jest podany, należy podzielić liczbę wskazującą tę część przez ułamek. Aby obliczyć np. liczbę x , której ułamek $\frac{5}{6}$ wynosi 35, dzielimy 35 przez $\frac{5}{6}$.

4. W klasie jest 15 dziewcząt. Stanowią one $\frac{3}{5}$ klasy. Ilu uczniów jest w tej klasie?
5. Michał wydał 18 zł, czyli $\frac{4}{9}$ swoich pieniędzy. Jaką kwotę miał przed tymi zakupami?

Zadania

- Zapisz odwrotność liczby $2\frac{3}{4}$. Oblicz różnicę liczby $2\frac{3}{4}$ i jej odwrotności.
- Oblicz, ile razy liczba $5\frac{5}{6}$ jest większa niż liczba $5\frac{1}{4}$.
- Maciek waży $42\frac{1}{2}$ kg, jego pies Atos waży $25\frac{1}{2}$ kg, natomiast jego szczur Pimpek waży $\frac{9}{40}$ kg.
a) Ile razy Maciek jest cięższy od Atosa? b) Ile razy Pimpek jest lżejszy od Atosa?
- Na zabawę klasową zakupiono między innymi $4\frac{4}{5}$ kg sernika. Podzielono go na porcje, z których każda ważyła $\frac{3}{20}$ kg. Ile porcji sernika otrzymano?
- Sznur o długości $15\frac{3}{4}$ m pocięto na części, z których każda miała długość $2\frac{5}{8}$ m. Na ile części został pocięty sznur?
- Roleta okienna o długości 120 cm zajmuje $\frac{4}{5}$ wysokości okna. Jaka jest wysokość szyby w oknie?
- Urlop Eli trwał 8 dni, co stanowiło $\frac{2}{7}$ pewnego miesiąca. W jakim miesiącu Ela miała urlop?
- Iza kupiła ogórki po $3\frac{3}{4}$ zł za kilogram i pomidory po $5\frac{2}{5}$ zł za kilogram. Za ogórki zapłaciła $10\frac{1}{2}$ zł, a za pomidory $20\frac{1}{4}$ zł. Ile kupiła ogórków, a ile pomidorów? Ile razem ważyły zakupy?



ilość towaru · cena = koszt towaru

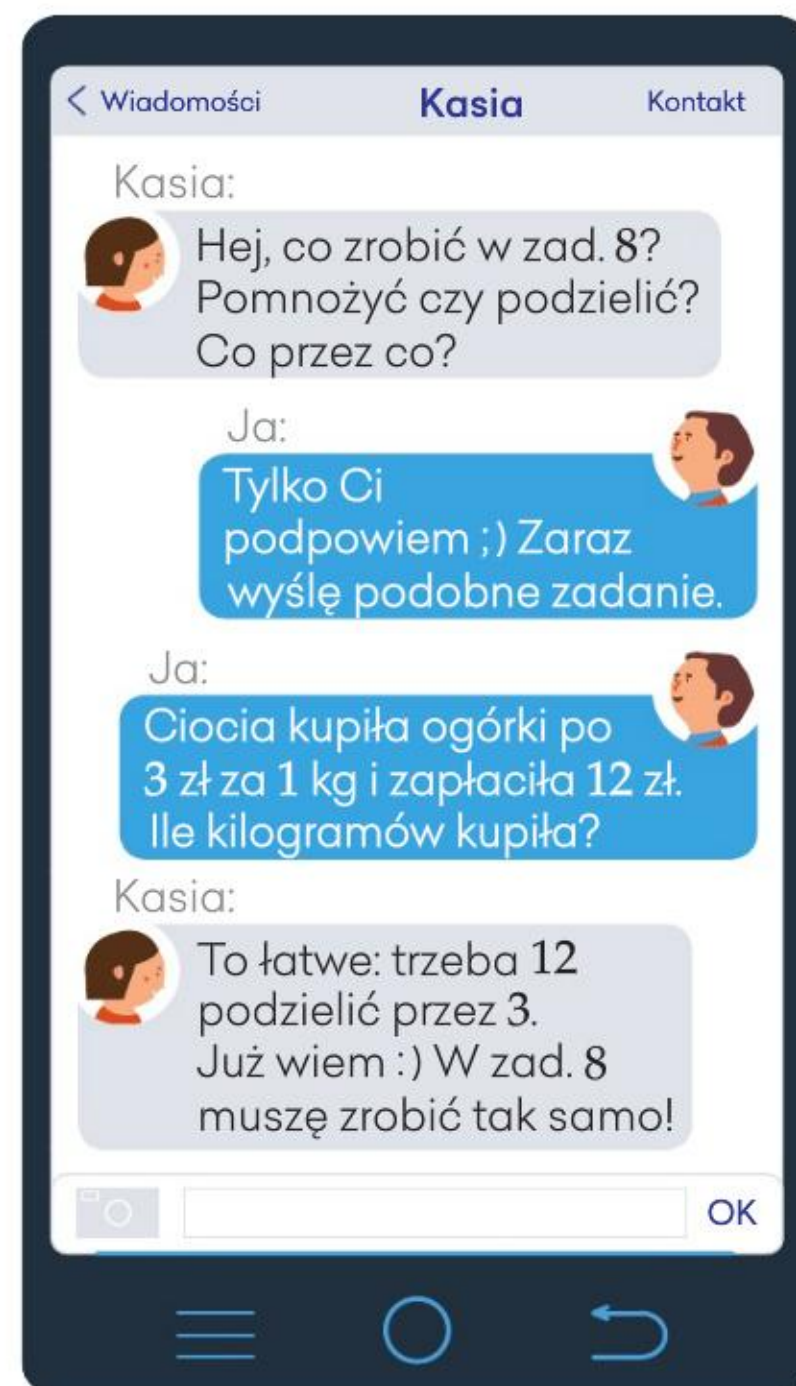
koszt towaru : cena = ilość towaru

- Rozwiąż równanie.

a) $1\frac{5}{7} \cdot x = 5\frac{1}{5}$

b) $4\frac{1}{2} : x = 5\frac{3}{4}$

c) $x : \frac{3}{4} = 5\frac{2}{5}$



2.5 Działania na ułamkach zwykłych

Podejmij temat

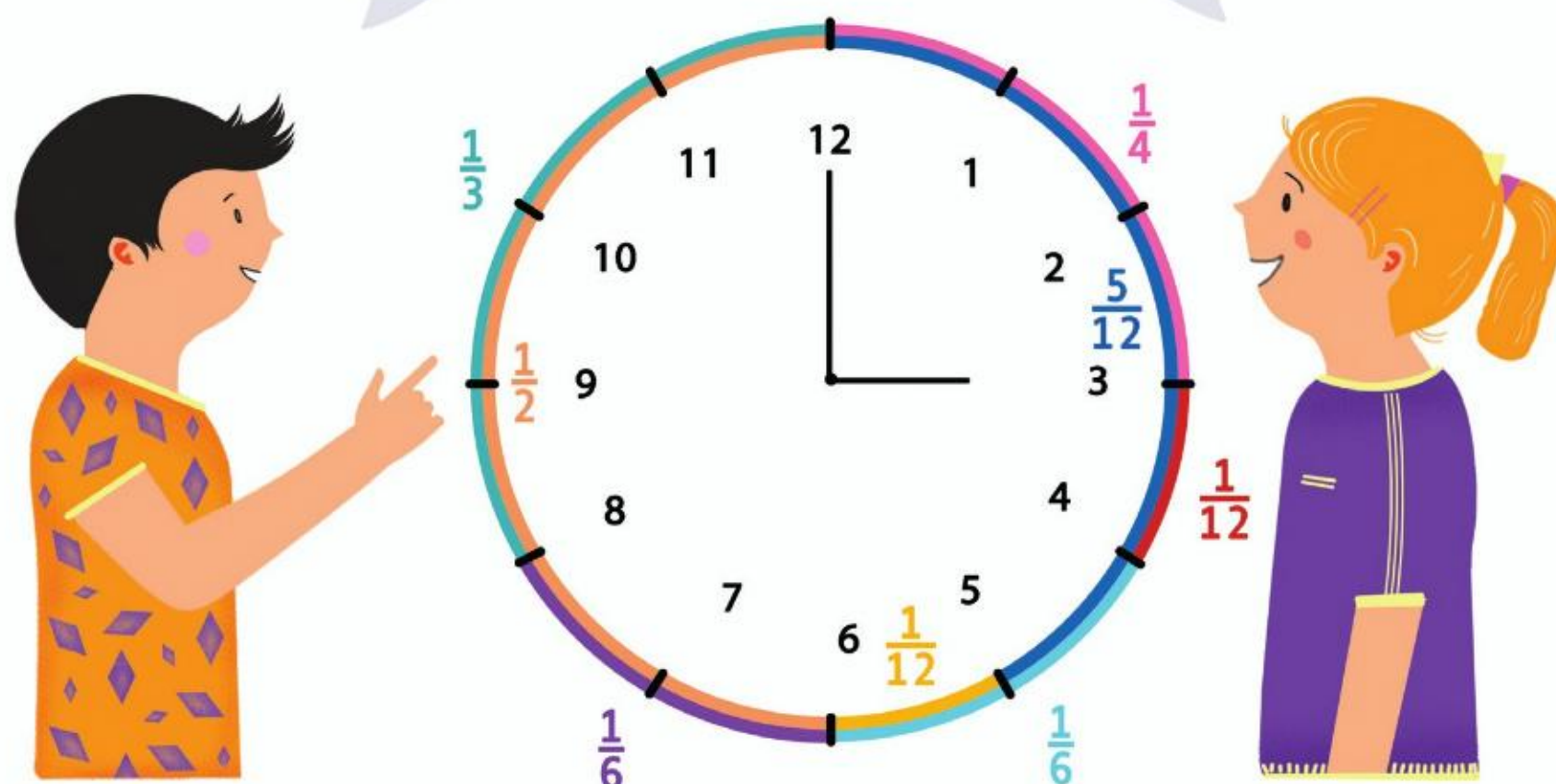


Ułóż zadanie o treści związanej z zegarem. W zadaniu ma występować:

- a) jedno działanie,
- b) dwa różne działania,
- c) trzy różne działania.

Nie wiedziałem, że na tarczy zegara można zobaczyć aż tyle ułamków!

A ile różnych zadań można o nich ułożyć!



1. Oblicz. Pamiętaj o poprawnej kolejności wykonywania działań.

a) $1\frac{3}{4} + 4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}$

b) $5\frac{2}{5} - 2\frac{3}{10} + 4\frac{1}{2}$

c) $\frac{7}{8} \cdot 1\frac{1}{7} : \frac{3}{10}$

d) $2\frac{4}{5} : \frac{7}{10} \cdot 3\frac{2}{3}$

e) $\left(1\frac{1}{6} + 1\frac{1}{4}\right) : \frac{5}{6}$

f) $\left(\frac{8}{9} - \frac{7}{8}\right) \cdot 7\frac{1}{5}$

g) $\frac{4}{9} \cdot 1\frac{4}{5} + 3\frac{1}{3} : 1\frac{2}{3}$

h) $5 - 3\frac{3}{4} : 2$

i) $1\frac{7}{8} : \left(2\frac{2}{3} - 1\frac{5}{12}\right)$

j) $3\frac{4}{5} - 1\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{8}$



Czy pamiętasz?

Kolejność wykonywania działań:

1. Działania w nawiasach.
2. Potęgowanie.
3. Mnożenie i dzielenie (w kolejności zapisu).
4. Dodawanie i odejmowanie (w kolejności zapisu).



Ułamek piętrowy to takie wyrażenie w postaci ułamka, które w liczniku lub w mianowniku zamiast liczby naturalnej ma ułamek lub liczbę mieszaną (może tak być i w liczniku, i w mianowniku).

Oto przykłady:

$$\frac{\frac{2}{5}}{11}$$

$$\frac{1\frac{3}{4}}{7}$$

$$\frac{\frac{2}{5}}{6}$$

$$\frac{\frac{12}{29}}{\frac{129}{217}}$$

$$\frac{3\frac{1}{9}}{2\frac{1}{3}}$$

Aby zapisać taki ułamek w prostszej postaci, należy główną kreskę ułamkową zastąpić znakiem dzielenia i obliczyć otrzymany iloraz.

Przykład 1

Obliczmy wartość ułamka piętrowego $\frac{3\frac{1}{9}}{2\frac{1}{3}}$.

$$\frac{3\frac{1}{9}}{2\frac{1}{3}} =$$

Główną kreskę ułamkową zastępujemy znakiem dzielenia i wykonujemy dzielenie zgodnie z poznanymi wcześniej regułami.

$$= 3\frac{1}{9} : 2\frac{1}{3} =$$

Liczby mieszane zapisujemy w postaci ułamków niewłaściwych.

$$= \frac{28}{9} : \frac{7}{3} =$$

Zapisujemy dzielenie jako mnożenie przez odwrotność ułamka $\frac{7}{3}$.

$$= \frac{4\cancel{28}}{3\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{7}_1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Skracamy ułamki, mnożymy je i z wyniku wyłączamy całości.

2. Oblicz wartość ułamka piętrowego.

a) $\frac{8\frac{2}{3}}{\frac{2}{5}}$

b) $\frac{15\frac{2}{5}}{2\frac{1}{5}}$

c) $\frac{5\frac{2}{3}}{2\frac{1}{6}}$

d) $\frac{2\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}}$

Istnieją ułamki piętrowe, w których liczniku lub mianowniku (albo tu i tu) występuje działanie.

Przykład 2

Obliczmy wartość wyrażenia $\frac{2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{5}}{\frac{3}{8} \cdot 2\frac{1}{3}}$.

Sposób I

$$\frac{2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{5}}{\frac{3}{8} \cdot 2\frac{1}{3}} = \frac{2\frac{5}{15} - 1\frac{6}{15}}{\frac{1\cancel{3}}{8} \cdot \frac{7}{\cancel{3}_1}} = \frac{\frac{14}{15}}{\frac{7}{8}} =$$

Aby obliczyć wartość takiego wyrażenia, trzeba w pierwszej kolejności wykonać działania, które znajdują się w liczniku i w mianowniku.

$$= \frac{14}{15} : \frac{7}{8} = \frac{2\cancel{14}}{15} \cdot \frac{8}{\cancel{7}_1} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$$

Zamiast głównej kreski ułamkowej zapisujemy znak dzielenia i kontynuujemy obliczenia.

Sposób II

$$\frac{2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{5}}{\frac{3}{8} \cdot 2\frac{1}{3}} = \left(2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{5}\right) : \left(\frac{3}{8} \cdot 2\frac{1}{3}\right) =$$

Zamiast głównej kreski ułamkowej zapisujemy znak dzielenia. Ponieważ w pierwszej kolejności należy wykonać działania, które znajdowały się w liczniku i w mianowniku, musimy te działania zapisać w nawiasach.

$$= \left(2\frac{5}{15} - 1\frac{6}{15}\right) : \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{7}{3}\right) =$$

Wykonujemy działania w nawiasach i kontynuujemy obliczenia.

$$= \frac{14}{15} : \frac{7}{8} = \frac{14}{15} \cdot \frac{8}{7} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$$

3. Oblicz wartość podanego wyrażenia. W punktach a) i b) zacznij od wykonania działań w liczniku i w mianowniku, natomiast w c) i d) – od zapisania ułamka w postaci ilorazu.

a) $\frac{6\frac{2}{3} : 4}{3\frac{2}{3} : 11}$

b) $\frac{4\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}}{2\frac{1}{3} : 1\frac{2}{5}}$

c) $\frac{\frac{5}{7} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}$

d) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{3}{5}}$

Zadania

- Zapisz odpowiednie wyrażenie i oblicz.
 - a) Iloczyn ułamków $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$ powiększ o $\frac{1}{2}$.
 - b) Różnicę ułamków $\frac{5}{12}$ i $\frac{1}{4}$ zmniejsz o $\frac{1}{12}$, a następnie powiększ o $\frac{2}{3}$.
 - c) Sumę ułamków $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ podziel przez $\frac{5}{12}$.
 - d) Iloraz ułamków $\frac{3}{8}$ i $\frac{9}{10}$ powiększ o iloraz ułamków $\frac{3}{4}$ i $\frac{6}{7}$.
 - e) Iloczyn ułamków $4\frac{4}{5}$ i $1\frac{7}{8}$ zmniejsz o ich iloraz.
 - f) O ile różnica ułamków $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ jest mniejsza od ich sumy?
 - g) Ułóż dwa podobne zadania z wykorzystaniem ułamków zapisanych przy tarczy zegara w *Podjmij temat* (s. 73). Następnie wykonaj obliczenia.
- Długość prostokąta wynosi $12\frac{1}{2}$ cm, a szerokość stanowi $\frac{3}{10}$ długości. Oblicz, ile centymetrów ma krótszy bok, a następnie ile wynosi obwód prostokąta.

- Dwie koleżanki, Magda i Ala, zanotowały jednego dnia czas, jaki zajęło im odrabianie lekcji.

Przedmiot	j. polski	matematyka	historia	informatyka	j. angielski
Czas Magdy (w godz.)	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
Czas Ali (w godz.)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- a) Jak długo odrabiała lekcje Magda, a jak długo – Ala?
 b) O ile dłużej odrabiała lekcje Magda?
 c) Ile razy krócej odrabiała lekcje Ala?

- Dodaj ułamki. Otrzymałą sumę podziel przez 3.

- a) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}$ b) $2\frac{1}{2}, 3\frac{2}{3}, 4\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{15}$

Podczas rozwiązywania zadań 5–9 obliczenia zapisz za pomocą jednego wyrażenia.

- Wstążka miała 8 m długości. Odcięto z niej $2\frac{3}{4}$ m, a pozostałą część pocięto na 7 równych kawałków. Jaka była długość każdego kawałka?
- W sklepie było 20 kg marchwi. Przed jego otwarciem dowieziono 3 skrzynki marchwi po $4\frac{1}{2}$ kg i 5 skrzynek po $3\frac{1}{4}$ kg. Ile kilogramów marchwi było w sklepie po dowiezieniu towaru?
- Piłeczka pingpongowa zrzucona z okna wysokiego budynku w czasie pierwszej sekundy przelatuje około $4\frac{9}{10}$ m, a w czasie każdej następnej sekundy o około $9\frac{4}{5}$ m więcej niż w poprzedniej. Jaką drogę pokona piłeczka w czasie 3 sekund od momentu rzucenia?
- Asia, Zosia i Marysia wybrały się na jagody. Zbierały je do słoików, których zawartość po napełnieniu przesypywały do wiadra. Asia zebrała 3 słoiki o pojemności $\frac{3}{4}$ l, Zosia 9 słoików o pojemności $\frac{2}{5}$ l, a Marysia 9 słoików o pojemności $\frac{3}{8}$ l. Ile litrów jagód muszą jeszcze zebrać, aby napełnić 10-litrowe wiadro?



$$1 \text{ cal} = 2\frac{27}{50} \text{ cm}$$

- Bartek ma telewizor o przekątnej ekranu długości $81\frac{7}{25}$ cm i monitor o przekątnej, która ma 20 cali. Skorzystaj z informacji podanej powyżej i oblicz, o ile centymetrów dłuższa jest przekątna telewizora od przekątnej monitora?

2.6 Powtórzenie wiadomości o ułamkach dziesiętnych

Podejmij temat

Bardzo lubię sok bananowy...
W którym opakowaniu jest go najwięcej?



Jak się nazywają liczby występujące na ilustracji? Czy spotykasz się poza szkołą z tak zapisanymi liczbami? Jeśli tak, to gdzie?

Jak sądzisz, czy sok ze wszystkich opakowań można przelać do jednej litrowej butelki? A do butelki o pojemności 1,5 l?



Ułamki dziesiętne są nam znane już od klasy czwartej. To ułamki, które mają w mianownikach potęgi liczby 10, czyli 10, 100, 1000, 10 000 itd.

Można je zapisywać za pomocą kreski ułamkowej, np. $\frac{3}{1000}$, $\frac{67}{100\,000}$, ale również (i tak robimy najczęściej) za pomocą przecinka, czyli w postaci dziesiętnej, np. 0,013; 2,7. Przypomnimy sobie, w jaki sposób odczytuje się ułamek dziesiętny.



Pamiętasz? Jeśli nazwa brzmi „części setne”, to w zapisie są dwie cyfry po przecinku.



Jasne, bo setka ma dwa zera.

1. Liczbę podaną słownie zapisz za pomocą cyfr.



- | | |
|---|---|
| a) zero i siedem dziesiątych | b) cztery i trzydzieści pięć setnych |
| c) dwa i siedem setnych | d) zero i sto osiemdziesiąt dwie tysięczne |
| e) piętnaście i czterdzieści sześć tysięcznych | f) osiem i pięć milionowych |
| g) trzy tysiące i trzy tysiące osiemset
pięćdziesiąt jeden dziesięciotysięcznych | h) dwadzieścia siedem i dwieście
dwadzieścia siedem stutysięcznych |
| i) trzy i pięćset siedemdziesiąt stutysięcznych | j) osiemset i osiemset dwa tysiące sześć milionowych |

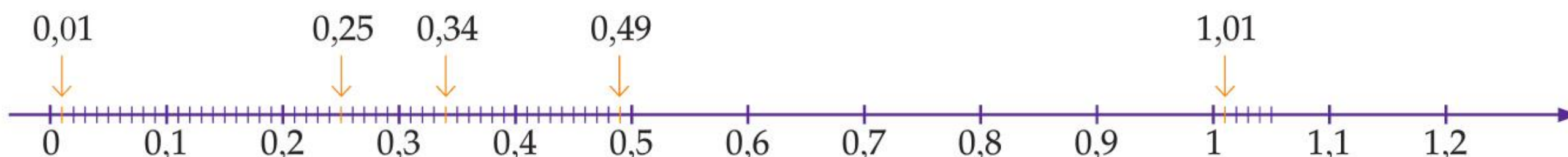
2. Zapisz słowami.



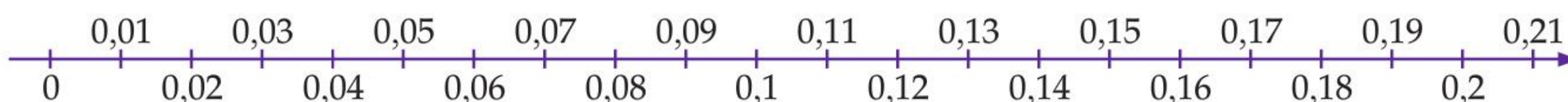
- | | | | |
|------------|-----------|-------------|----------|
| a) 4,006 | b) 0,05 | c) 3,1004 | d) 5,9 |
| e) 0,00005 | f) 3,0018 | g) 0,000206 | h) 2,407 |

A teraz przypomnimy sobie, jak przedstawia się ułamki dziesiętne na osi liczbowej.

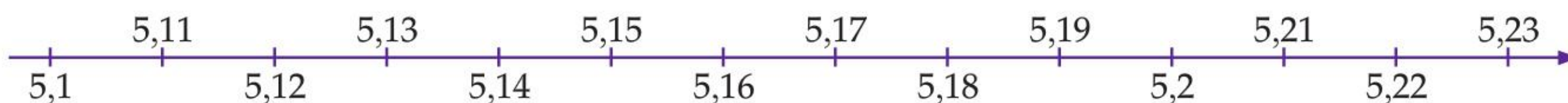
Można to zrobić następująco:



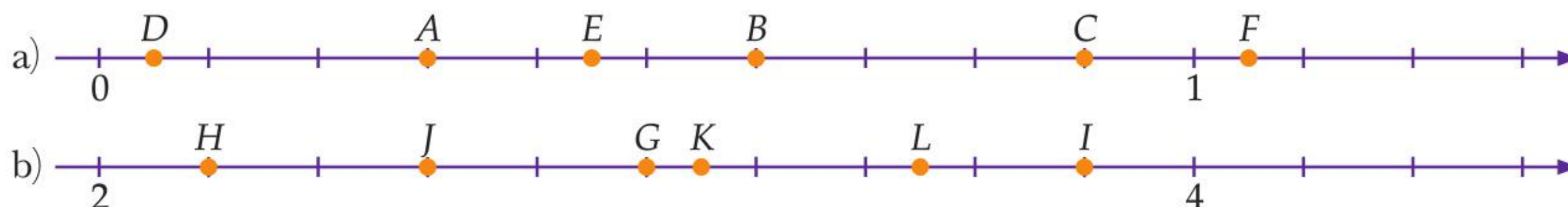
lub tak – po wyborze jednostki innej długości:



albo tak – jeżeli rysujemy fragment osi bez punktu zerowego:



3. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



4. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej punkty o podanych współrzędnych.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a) 2,5 2,65 2,8 3 3,2 3,35 3,5 | b) 7,4 7,43 7,46 7,5 7,52 |
|--|-----------------------------------|

Przypomnijmy sobie, jak porównywać ułamki dziesiętne. Najlepiej patrzeć na ich kolejne cyfry.

Przykład 1

Porównajmy podane liczby.

a) 4,17 i 2,8

b) 3,148 i 3,1467

c) 2,7 i 2,700

a) 4,17 > 2,8

b) 3,148 > 3,1467

c) 2,7 = 2,700

Ta liczba jest większa, której większa jest część całkowita, zatem $4,17 > 2,8$.

Części całkowite (3) są równe, zatem porównujemy części ułamkowe.

Pierwsze cyfry po przecinku (1) są równe. Podobnie drugie (4).

Porównajmy trzecie cyfry po przecinku: $8 > 6$, zatem $3,148 > 3,1467$.

Części całkowite są równe, zatem porównujemy części ułamkowe.

Pierwsze cyfry po przecinku są równe.

Zera na drugim i trzecim miejscu po przecinku nie mają żadnej wartości, zatem $2,7 = 2,700$.

5. Porównaj pary ułamków dziesiętnych.

- a) 4,24 i 5,5

b) 6,7 i 6,54
- 7,02 i 7,2

0,0004 i 0,004
- 0,02 i 0,021

3,92 i 3,911
- 3,57 i 3,8

5,8 i 5,80
- 0,4000 i 0,4

0,356 i 0,365



Za pomocą ułamków dziesiętnych łatwo można zapisać np. długość, cenę, masę.

Zapis za pomocą wyrażenia dwumianowanego	Uzasadnienie	Zapis za pomocą ułamka dziesiętnego
Odcinek ma długość 5 cm 3 mm.	Ponieważ 1 cm = 10 mm, więc milimetr to dziesiąta część centymetra, czyli w zapisie podanej długości w postaci ułamka dziesiętnego musi być 1 cyfra po przecinku.	Odcinek ma długość 5,3 cm.
Banany kosztują 4 zł 55 gr.	Ponieważ 1 zł = 100 gr, więc grosz to setna część złotego, czyli w zapisie podanej ceny w postaci ułamka dziesiętnego muszą być 2 cyfry po przecinku.	Banany kosztują 4,55 zł.
Ładunek waży 17 t 56 kg.	Ponieważ 1 t = 1000 kg, więc kilogram to tysięczna część tony, czyli w zapisie podanej masy w postaci ułamka dziesiętnego muszą być 3 cyfry po przecinku.	Ładunek waży 17,056 t.

Zadania

Spośród podanych liczb wybierz trzy największe i zaznacz je na osi liczbowej.

a)	7,6	7,38	8,1	7,4	7,21	7,8	7,52
b)	3,335	3,9	3,184	3,7	3,35	3,5	3,49

Ustaw ułamki dziesiętne w kolejności rosnącej. Najmniejszy i największy ułamek zapisz słownie.



a)	2,35	2,042	2,245	2,0459	2,04	2,014
b)	5,03	5,045	5,256	5,2	5,0047	5,1

Uczniowie ze Szkolnego Klubu Sportowego trenowali przed zbliżającymi się zawodami. Czasy, jakie uzyskali w ostatniej próbie biegu na 60 m, przedstawiono w tabeli. Uporządkuj imiona uczniów zgodnie z kolejnością, w jakiej przekraczali oni linię mety.

Imię	Czas (w sekundach)
Jędrrek	10,85
Maja	11,43
Franek	10,8
Agata	12,44
Ewa	11,5
Zuzia	12,6
Janek	10,9

Basia miała zrobić zakupy w sklepie spożywczym. Mama poprosiła ją, żeby zapisała, ile kosztowały poszczególne produkty. Kwoty zanotowane przez Basię zapisz w postaci ułamków dziesiętnych.

chleb	2 zł 15 gr
żółty ser	8 zł 44 gr
mleko	2 zł 9 gr
masło	5 zł 25 gr
wędlina	13 zł 4 gr

Pielęgniarka przeprowadza szkolny bilans zdrowia. W tym celu musi zważyć każdego ucznia. Najpierw zważyła cztery dziewczynki. Zapisz za pomocą ułamków dziesiętnych, jaka jest masa każdej z uczennic.

Marta	37 kg 253 g
Dorota	34 kg 56 dag
Gosia	35 kg 4 dag
Karolina	35 kg 18 g

Podaj swój wzrost:

- a) w centymetrach, b) w decymetrach, c) w kilometrach.

2.7 Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych

Podejmij temat

Mój tir waży tylko 13,8 t, więc mogę jechać. Dobrze, że mam pustą naczepę. Gdybym chciał wziąć ładunek, mógłby on ważyć maksymalnie... No właśnie..., ile?



Jakie działanie powinien wykonać kierowca, aby obliczyć największą możliwą do przewiezienia przez most masę ładunku?



Ułamki dziesiętne w prostych przypadkach możemy dodawać i odejmować w pamięci, w trudniejszych – robimy to sposobem pisemnym. Należy przy tym pamiętać, że dodajemy całości do całości, części dziesiąte do części dziesiątych, części setne do części setnych itd. W podobny sposób postępujemy przy odejmowaniu – odejmujemy całości od całości, części dziesiąte od części dziesiątych, części setne od części setnych itd.

Przypomnijmy sobie te działania, które poznaliśmy już w klasie piątej.

Przykład 1

Obliczmy w pamięci.

a) $3,42 + 5,3$

b) $16,58 - 2,45$

c) $27,35 - 6,28$

a) $3,42 + 5,3 = 8,72$



b) $16,58 - 2,45 = 14,13$



c) $27,35 - 6,28 = 21,07$



1. Oblicz w pamięci.

a) $5,6 + 1,27$

$5,62 + 4$

$3,125 + 0,34$

$6,3 + 2,5$

$0,48 + 7,4$

b) $6,35 - 2,11$

$7,82 - 4,7$

$0,365 - 0,13$

$4,73 - 4,5$

$2,58 - 2,52$

c) $4,25 - 1,09$

$6,35 + 2,27$

$3,36 - 3,28$

$0,44 + 0,26$

$7,4 - 2,16$

Przykład 2

Obliczmy sposobem pisemnym.

a) $4,372 + 5,68 + 0,74$ b) $8,25 - 1,427$

c) $4,4 - 2,678$

a)

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 4,3\ 7\ 2 \\ 5,6\ 8 \\ + 0,7\ 4 \\ \hline 1\ 0,7\ 9\ 2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 7\ 12\ 4\ 10 \\ 8,2\ 5\ 0 \\ - 1,4\ 2\ 7 \\ \hline 6,8\ 2\ 3 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 9 \\ 3\ 13\ 10\ 10 \\ 4,4\ 0\ 0 \\ - 2,6\ 7\ 8 \\ \hline 1,7\ 2\ 2 \end{array}$$

2. Przepisz i oblicz.

a)

$$\begin{array}{r} 0,3\ 2\ 4 \\ 3,2\ 7 \\ 1\ 5,6 \\ + 7,0\ 8 \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 1,5\ 2 \\ 3\ 8,4 \\ 0,0\ 7\ 4 \\ + 2\ 8,5\ 6 \\ \hline \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 0,7 \\ 0,6\ 3 \\ 0,5\ 2\ 8 \\ + 0,0\ 6\ 9\ 2 \\ \hline \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} 2,5\ 6\ 3 \\ - 0,7\ 7 \\ \hline \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{r} 6,5\ 2 \\ - 3,6\ 5 \\ \hline \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{r} 8 \\ - 4,2\ 8 \\ \hline \end{array}$$

A co zrobić z liczbą 8 w punkcie f) ćwiczenia 2?



Wyobraź sobie, że to: osiem, przecinek, zero, zero.

3. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $6,2 - 2,78$

c) $5,426 - 0,53$

e) $17 - 8,416$

b) $6,9 + 0,545 + 23,7$

d) $0,95 + 8 + 0,068 + 5,7$

f) $35,78 + 0,625 + 8,5$

Podczas dodawania sposobem pisemnym można stosować ułatwienia polegające na wykorzystaniu prawa przemienności dodawania.

$$\begin{array}{r} 3,7\ 2 \\ 5,6\ 7 \\ 2,0\ 8 \\ 3,5\ 3 \\ + 7,7 \\ \hline 2\ 2,7\ 0 \end{array}$$

Zamiast dodawać w tym działaniu części setne w kolejności zapisu: $2 + 7 + 8 + 3$, wygodniej jest zmienić kolejność i dodawać: $(2 + 8) + (7 + 3)$.
Podczas dodawania części dziesiątych, warto zauważyć, że $7 + 7 + 6 = 20$, i do tego wyniku dodać pozostałe cyfry części dziesiątych.

W podobny sposób można sobie czasem ułatwić również dodawanie pamięciowe.

Aby np. obliczyć sumę $3,6 + 5,28 + 7 + 4,4 + 0,72 + 0,8$, warto zauważyć, że $0,4 + 0,6 = 1$ oraz $0,28 + 0,72 = 1$, i dodawać liczby w pamięci w sposób podany poniżej.

$$3,6 + 5,28 + 7 + 4,4 + 0,72 + 0,8 = 8 + 6 + 7 + 0,8 = 21,8$$

Zadania

- Trzy największe jeziora w Polsce to: Śniardwy, Mamry i Łebsko, a trzy najgłębsze to: Hańcza, Drawsko i Wielki Staw Polski. Dane dotyczące tych jezior zamieszczono w tabeli.

Jezioro	Powierzchnia (km ²)	Maksymalna głębokość (m)
Śniardwy	114,875	23,4
Mamry	98,51	43,8
Łebsko	70,2	6,3
Hańcza	2,916	106,2
Drawsko	17,975	82,2
Wielki Staw Polski	0,3	80,3

- a) Oblicz różnice powierzchni:
 - jeziora Śniardwy i jeziora Mamry,
 - jeziora Mamry i jeziora Hańcza,
 - jeziora Łebsko i jeziora Drawsko.

b) Oblicz różnice głębokości jeziora Hańcza i pozostałych jezior.

c) Oblicz różnicę powierzchni największego i najgłębszego jeziora.
- W grudniu 2016 roku Polacy mieli aż 54,7 mln telefonów komórkowych i tylko 4,6 mln telefonów stacjonarnych.
- a) O ile więcej telefonów komórkowych niż stacjonarnych mieli Polacy w 2016 roku?

b) Ile w 2016 roku telefonów obu rodzajów łącznie mieli Polacy?

c) Znajdź w internecie ubiegłoroczne dane dotyczące liczby telefonów i porównaj je z tymi dotyczącymi 2016 roku. Jak zmieniły się liczby telefonów obu rodzajów, a jak ich różnica?

Zapisz dowolny ułamek dziesiętny. Dodaj do niego 5,4, od otrzymanej sumy odejmij 4,68, następnie dodaj 3,82, odejmij 3,035, dodaj 0,635 i odejmij 2,14. Jaka liczba jest ostatecznym wynikiem? Jak myślisz, dlaczego?

Na liczniku przejechanych kilometrów kierowca zauważył liczbę 3456,72. Ile kilometrów musi jeszcze przejechać, aby na liczniku pokazała się liczba 4444,44?

Pusty słoik waży 0,336 kg. Mama włożyła do niego 0,42 kg owoców i zalała syropem o masie 0,19 kg. Ile ważył słoik wraz z zawartością? Jaka była masa brutto, jeżeli Michał przed zamknięciem słoika zjadł 0,18 kg jego zawartości?

Marta zjadła na śniadanie bułkę z masłem ważącą 0,086 kg, 0,06 kg wędliny i pomidor ważący 0,12 dag. Wypiła też kubek jogurtu. Jaka była masa jogurtu wypitego przez Martę, jeżeli całe jej śniadanie ważyło 0,54 kg?



- Uczestnicy obozu wędrownego postanowili zwiedzić okolicę. Podzielili się na cztery grupy. Każda grupa miała zobaczyć trzy wybrane atrakcje. Poszczególne zespoły szły następującymi trasami:

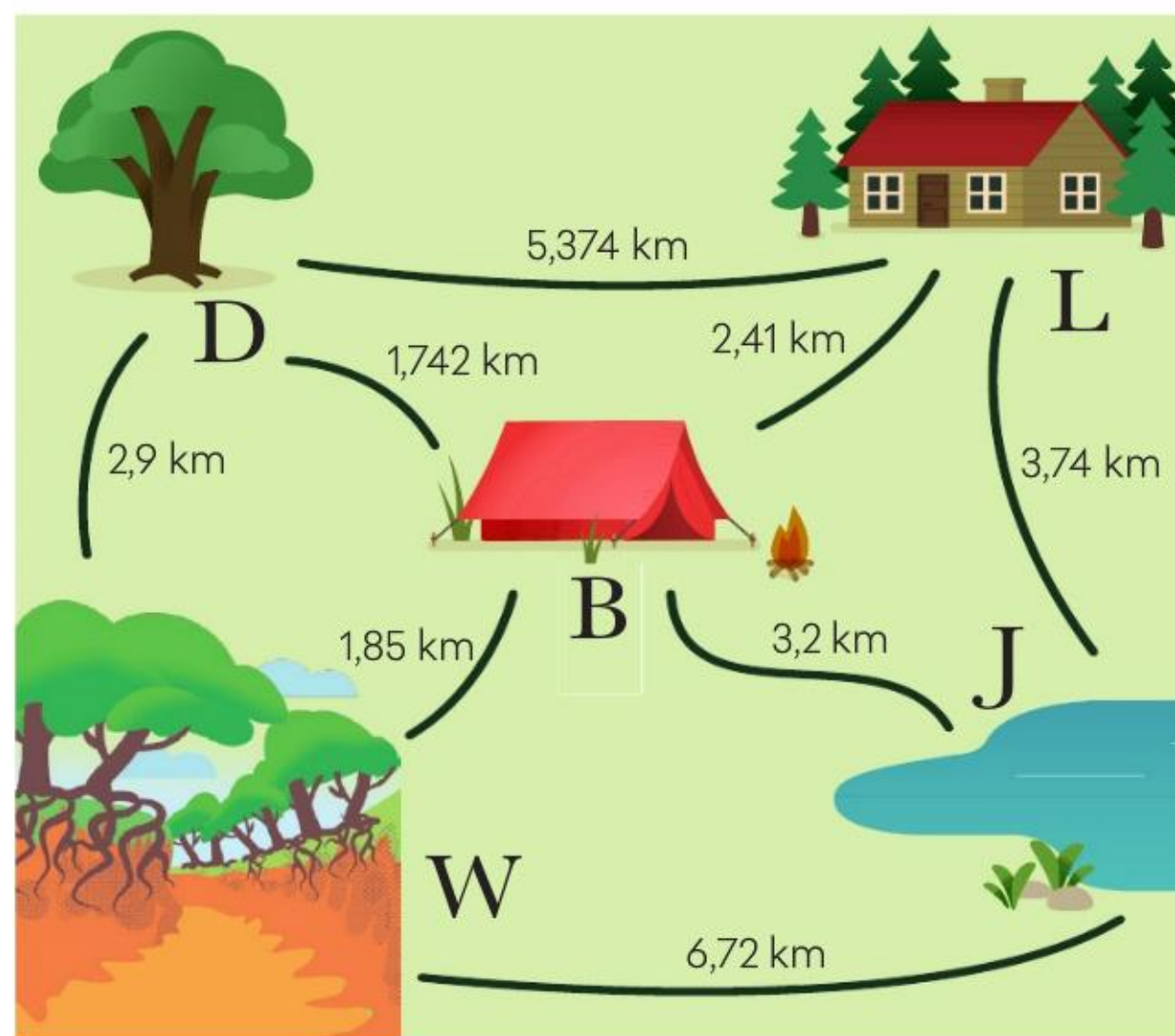
Grupa I: B, W, J, L, B,

Grupa II: B, J, L, D, B,

Grupa III: B, L, D, W, B,

Grupa IV: B, D, W, J, B.

- Oblicz, ile kilometrów przeszła każda grupa.
- O ile kilometrów dalej od miejsca biwakowania leży jezioro niż leśniczówka?
- Oblicz różnicę odległości między leśniczówką a dębem i leśniczówką a jeziorem.



D – dąb
(pomnik przyrody)

J – jezioro
W – wąwóz

L – leśniczówka
B – biwak

- Trójmiasto to związek trzech miast leżących blisko siebie: Gdańska, Gdyni i Sopotu. Poniżej przedstawiono, jaka była liczba ludności w poszczególnych miastach w roku 2017.

Gdańsk: 464,254 tys.

Gdynia: 246,306 tys.

Sopot: 36,533 tys.

- Ile osób mieszkało w Trójmieście w 2017 roku?
- Tego samego roku liczba ludności Krakowa wynosiła 767,3 tys. Czy więcej ludzi mieszkało w Trójmieście, czy w Krakowie? O ile więcej?

Ciekawe!

Trójskok to konkurencja lekkoatletyczna, w której zawodnik wykonuje trzy następujące po sobie, ale różne skoki. Dwa pierwsze skoki odbywają się na twardej bieżni, trzeci kończy się na piasku.

- Skok pierwszy – odbicie z jednej nogi i lądowanie na nogę odbijającą.
- Skok drugi – odbicie z jednej nogi i lądowanie na nogę przeciwną.
- Skok trzeci – odbicie z jednej nogi i lądowanie obunóż.

- Łamana ma cztery boki. Pierwszy z nich mierzy 23,4 cm, a każdy kolejny jest o 2,9 cm krótszy od poprzedniego.
- Oblicz długość tej łamanej.
 - O ile dłuższa byłaby łamana powstała w taki sam sposób, ale składająca się z sześciu odcinków?

- Kolejne skoki trójskoczka podczas treningu miały długości: 5,8 m, 5,12 m i 6,68 m.

- Jaka była ich łączna długość?
- Sprawdź w internecie, jaki jest rekord świata w trójskoku i kiedy został ustanowiony.
- Oblicz, ile metrów zabrakło trenującemu zawodnikowi do rekordu świata.

- Rozwiąż równanie.

a) $x + 5,62 = 8,9$

c) $x - 24,88 = 16,4$

b) $0,48 + x = 2,146$

d) $25 - x = 17,31$

2.8 Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne

Podejmij temat



Jak myślisz, który chłopiec niesie większą ilość wody? Jak obliczyć ilość wody niesioną przez każdego z nich?

Ja mam
cztery butelki
po 1,5 l.



A ja mam
aż dwanaście
butelek po 0,33 l.



W klasie piątej mnożyliśmy ułamki dziesiętne przez liczby naturalne. Iloczyny obliczaliśmy w pamięci lub sposobem pisemnym. Przypomnijmy to na przykładach.

Przykład 1

Obliczmy.

a) $0,42 \cdot 3$

b) $3,428 \cdot 46$

a) $0,42 \cdot 3 = 1,26$

↑ ↑
dwie cyfry
po przecinku

Podczas mnożenia ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną postępujemy tak samo jak podczas mnożenia dwóch liczb naturalnych. Mnożymy $42 \cdot 3 = 126$.

Ponieważ w mnożonym ułamku dziesiętnym są dwie cyfry po przecinku, to w zapisie wyniku przecinek wstawiamy tak, aby w nim również były dwie cyfry po przecinku.

b)

$$\begin{array}{r} 3,428 \\ \cdot 46 \\ \hline 20568 \\ +13712 \\ \hline 157,688 \end{array}$$

↑ ↑ ↑
trzy
cyfry po
przecinku

Mnożymy sposobem pisemnym tak jak liczby naturalne, czyli $3428 \cdot 46$.

W iloczynie stawiamy przecinek w takim miejscu, by i w nim, i w mnożonym ułamku było tyle samo cyfr po przecinku.

1. Przepisz i oblicz iloczyn.

a) $\begin{array}{r} 42,57 \\ \cdot 26 \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{r} 345 \\ \cdot 0,37 \\ \hline \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 2,846 \\ \cdot 900 \\ \hline \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 0,5628 \\ \cdot 305 \\ \hline \end{array}$

2. Oblicz w pamięci lub sposobem pisemnym.

a) $3,5 \cdot 2$

$0,08 \cdot 9$

$1,5 \cdot 3$

$5 \cdot 0,2$

$4 \cdot 0,125$

b) $1,6 \cdot 20$

$0,007 \cdot 40$

$0,3 \cdot 60$

$25 \cdot 0,4$

$7 \cdot 0,009$

c) $14,5 \cdot 92$

$0,864 \cdot 55$

$108 \cdot 0,627$

$0,46 \cdot 34$

$320 \cdot 0,0593$

Przypomnijmy sobie teraz sposób dzielenia ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne i, związane z tym, pewne przypadki dzielenia dwóch liczb naturalnych. Sposoby te poznaliśmy już w klasie piątej.

Przykład 2

Wykonajmy dzielenie.

a) $219,44 : 8$

b) $35,7 : 4$

c) $351 : 6$

a)
$$\begin{array}{r} 27,44 \\ 8 \overline{) 219,44} \\ \underline{-16} \\ 59 \\ \underline{-56} \\ 34 \\ \underline{-32} \\ 24 \\ \underline{-24} \\ 00 \\ \hline \end{array}$$

Dzielenie wykonujemy sposobem pisemnym.

Podczas dzielenia ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną postępujemy tak samo jak podczas dzielenia pisemnego dwóch liczb naturalnych.

W otrzymanym ilorazie stawiamy przecinek w takim miejscu, żeby znajdował się dokładnie nad przecinkiem dzielnej.

b)
$$\begin{array}{r} 8,925 \\ 4 \overline{) 35,700} \\ \underline{-32} \\ 37 \\ \underline{-36} \\ 10 \\ \underline{-8} \\ 20 \\ \underline{-20} \\ 00 \\ \hline \end{array}$$

Dzielenie wykonujemy sposobem pisemnym.

Istnieją takie przypadki, w których po wyczerpaniu cyfr dzielnej dzielenie nie jest zakończone. Wówczas należy dopisać do dzielnej odpowiednią liczbę zer (lub tylko wyobrazić je sobie) i kontynuować dzielenie aż do uzyskania wyniku.

c)
$$\begin{array}{r} 58,5 \\ 6 \overline{) 351,0} \\ \underline{-30} \\ 51 \\ \underline{-48} \\ 30 \\ \underline{-30} \\ 00 \\ \hline \end{array}$$

Dzielenie wykonujemy sposobem pisemnym.

Zdarza się, że podczas dzielenia dwóch liczb naturalnych otrzymujemy resztę z dzielenia.

Ponieważ znamy ułamki dziesiętne, możemy w takim przypadku kontynuować obliczenia. Zapisujemy dzielną w postaci ułamka dziesiętnego – dopisujemy do niego (lub tylko wyobrażamy sobie) przecinek i odpowiednią liczbę zer ($351 = 351,0$).

3. Oblicz ilorazy.

a) $362,4 : 6$
 $0,4788 : 9$
 $2,674 : 7$
 $7,293 : 13$
 $14,85 : 33$

b) $7,85 : 4$
 $52,3 : 8$
 $6,31 : 20$
 $27,9 : 45$
 $0,381 : 12$

c) $25 : 4$
 $7 : 8$
 $48 : 25$
 $567 : 12$
 $9 : 16$

Dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne w prostych przypadkach możemy oczywiście wykonywać w pamięci, jak w poniższych przykładach.

$$3,2 : 8 = 0,4$$

$$0,56 : 7 = 0,08$$

$$1,5 : 2 = 1,50 : 2 = 0,75$$

W klasie piątej nauczyliśmy się też mnożyć i dzielić ułamki dziesiętne przez 10, 100, 1000 itd. Obliczenia te są bardzo proste – podczas ich wykonywania zmieniamy tylko położenie przecinka w zapisie liczby.

Przykład 3

- a) Pomnóżmy 4,721 przez 10, 100, 1000 i 10 000.
b) Podzielmy 125,4 przez 10, 100, 1000 i 10 000.

Pamiętam!
Przesuwam
przecinek o tyle
miejsc, ile jest zer
w liczbie, przez
którą mnożę.



I tak samo jest
z dzieleniem,
tylko przecinek
przesuwasz
w drugą stronę.

- a) Podczas mnożenia przez 10, 100, 1000 itd. przecinek przesuwamy w prawą stronę.

$$4,721 \cdot 10 = 47,21$$

$$4,721 \cdot 100 = 472,1$$

$$4,721 \cdot 1000 = 4721$$

$$4,721 \cdot 10\,000 = 47\,210$$

Jeśli mnożymy przez 10, przecinek przesuwamy o 1 miejsce.

Jeśli mnożymy przez 100, przecinek przesuwamy o 2 miejsca.

Jeśli mnożymy przez 1000, przecinek przesuwamy o 3 miejsca.

Jeśli mnożymy przez 10 000, przecinek przesuwamy o 4 miejsca (co wymaga potraktowania liczby 4,721 jak 4,7210, czyli dopisania zera).

- b) Podczas dzielenia przez 10, 100, 1000 itd. przecinek przesuwamy w lewą stronę.

$$125,4 : 10 = 12,54$$

$$125,4 : 100 = 1,254$$

$$125,4 : 1000 = 0,1254$$

$$125,4 : 10\,000 = 0,01254$$

Jeśli dzielimy przez 10, przecinek przesuwamy o 1 miejsce.

Jeśli dzielimy przez 100, przecinek przesuwamy o 2 miejsca.

Jeśli dzielimy przez 1000, przecinek przesuwamy o 3 miejsca (co wymaga dopisania zera przed liczbą).

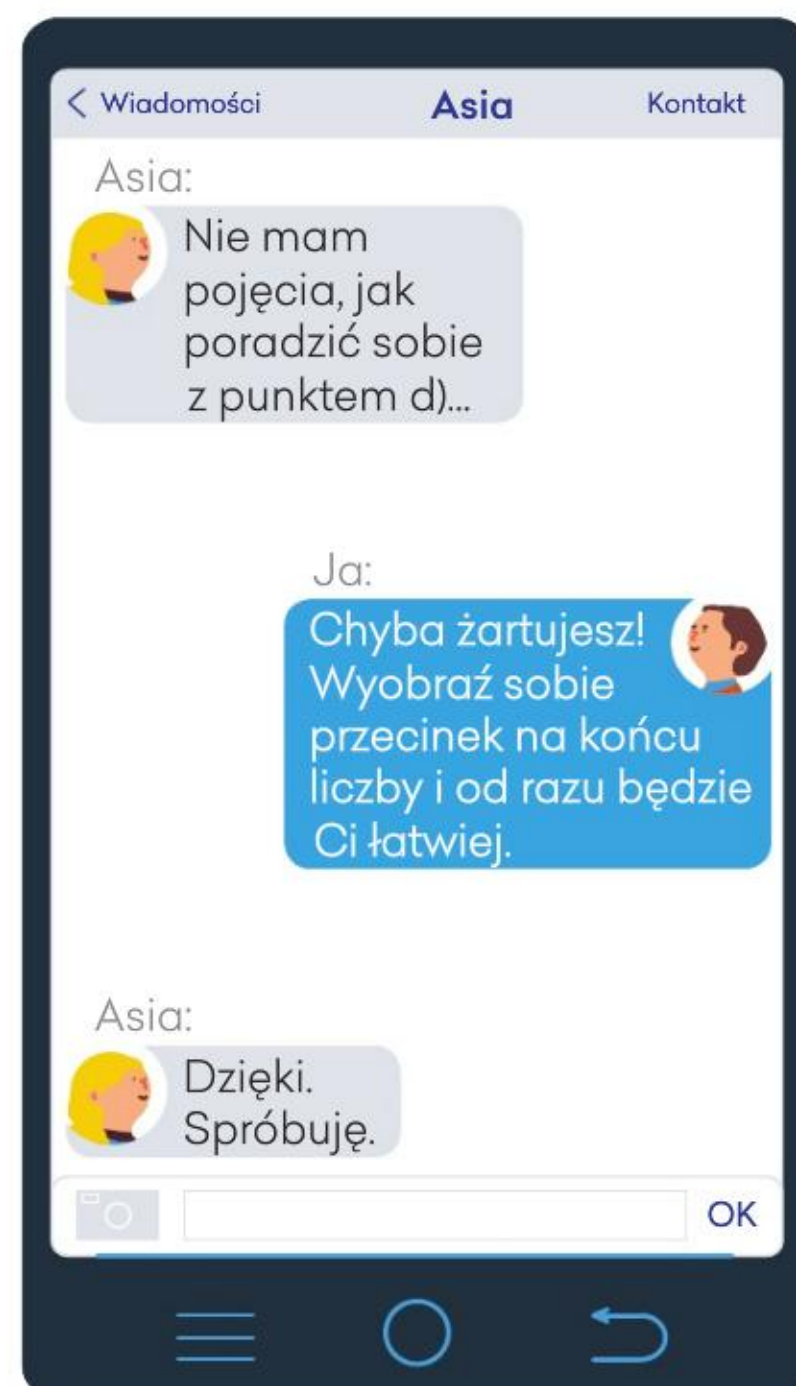
Jeśli dzielimy przez 10 000, przecinek przesuwamy o 4 miejsca (co wymaga dopisania dwóch zer przed liczbą).

4. Oblicz w pamięci.

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| a) $54,26 \cdot 10$ | b) $54,26 : 10$ |
| $54,26 \cdot 100$ | $54,26 : 100$ |
| $54,26 \cdot 1000$ | $54,26 : 1000$ |
| $54,26 \cdot 10\,000$ | $54,26 : 10\,000$ |
| $54,26 \cdot 1\,000\,000$ | $54,26 : 1\,000\,000$ |
| c) $0,0005 \cdot 100$ | d) $48 : 10$ |
| $0,2 : 10$ | $5 : 10$ |
| $0,0016 \cdot 1000$ | $74 : 100$ |
| $0,04 : 100$ | $2 : 100$ |
| $0,001 \cdot 10$ | $138 : 100\,000$ |

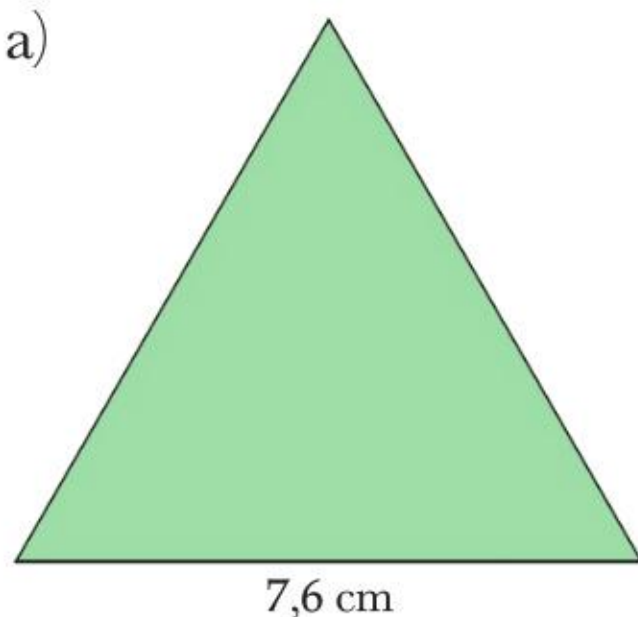
Zadania

- Liczbę 59,22:
 - a) powiększ 36 razy,
 - b) zmniejsz 7 razy.
- Ile razy liczba 99 jest większa od liczby 12?
- Ile razy liczba 35 jest mniejsza od liczby 168?
- Marek ma 67,50 zł, a jego siostra Marta 27 zł. Ile razy większa jest kwota chłopca?
- Prostokąt ma wymiary $54,6\text{ cm} \times 28\text{ cm}$. Ile razy szerokość tego prostokąta jest mniejsza od jego długości?
- Oblicz:
 - a) 0,4 kwoty 57 zł,
 - b) 0,56 masy 320 kg,
 - c) 0,07 długości 700 m.
- Ela i Patrycja kupowały materiał na zasłony. Ela kupiła 3 m tkaniny i zapłaciła 53,85 zł. Patrycja nabyła 5 m takiego samego materiału. Ile zapłaciła?
- Ryza papieru (500 arkuszy) ma grubość 5,4 cm.
 - a) Jaką grubość ma 1 arkusz tego papieru?
 - b) Jaką grubość miałyby łącznie 1800 arkuszy tego papieru?
 - c) Zmierz grubość swojego podręcznika do matematyki (bez okładek) i oblicz grubość 1 kartki podręcznika. Wynik zaokrąglij do części setnych milimetra.

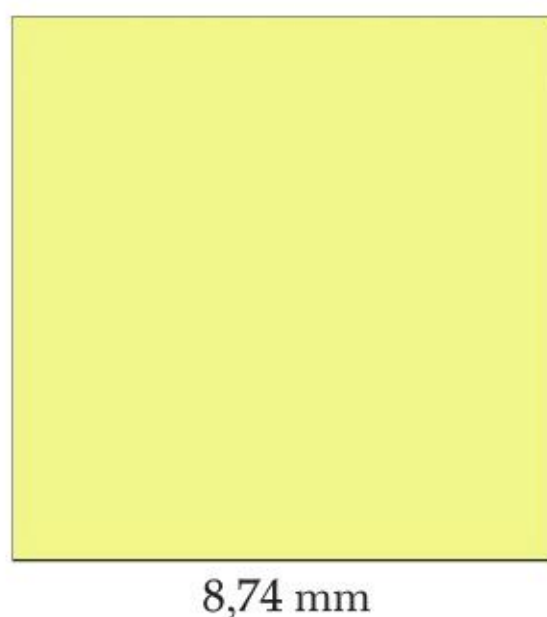


- Wszystkie boki narysowanego wielokąta mają tę samą długość (odczytasz ją z rysunku). Oblicz obwód wielokąta.

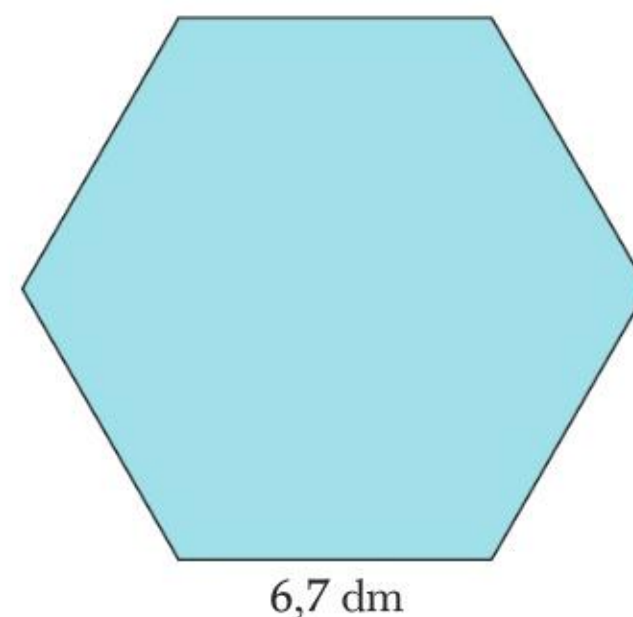
a)



b)



c)



- W sadzie, w którym rośnie 480 drzew owocowych, jabłonie stanowią 0,65 wszystkich drzew, a grusze 0,15. Ile jabłoni, a ile grusz rośnie w tym sadzie?

- Jeden zeszyt 96-kartkowy waży 0,245 kg. Magda ma w plecaku 6 takich zeszytów. Michał używa zeszytów 60-kartkowych. Jego 6 zeszytów zabranych do szkoły waży razem 0,936 kg.

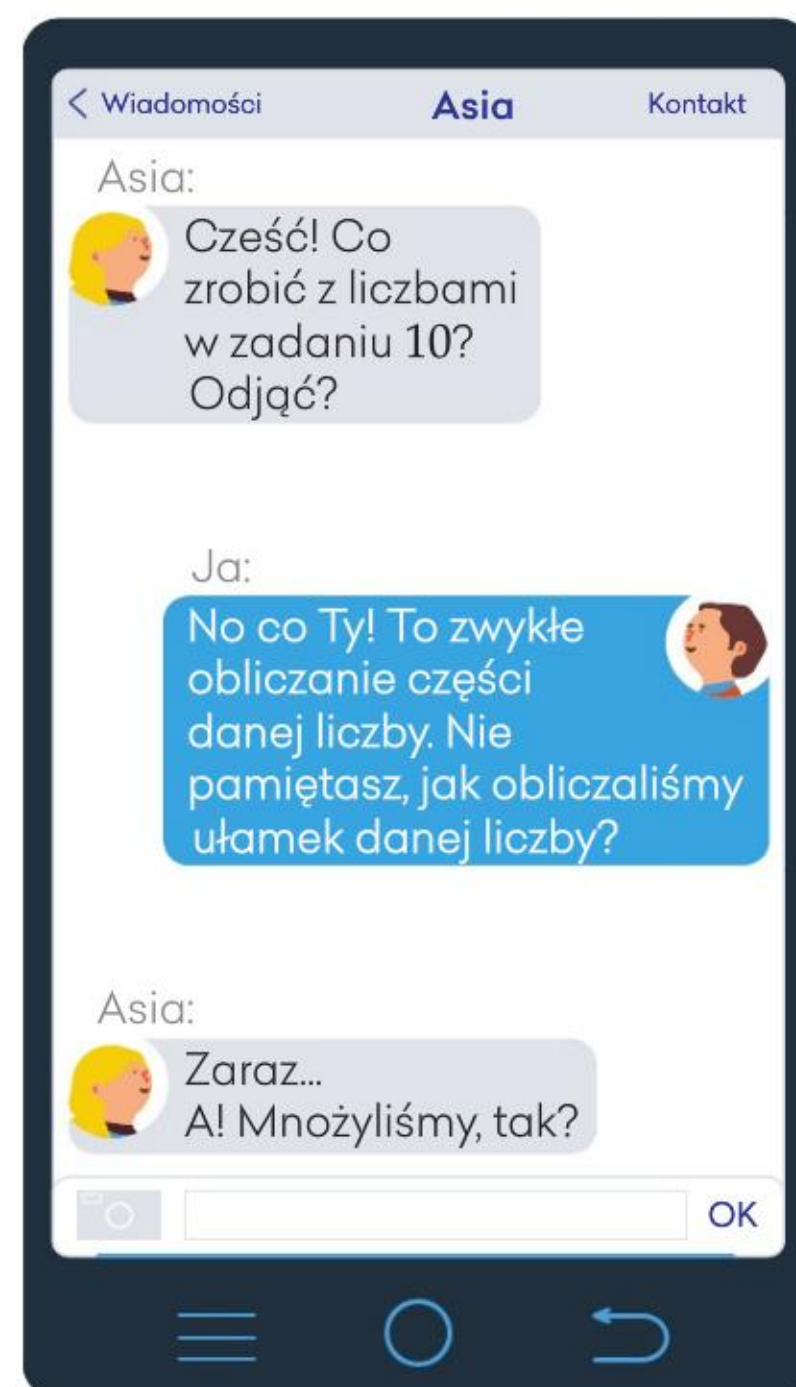
- Ile razem ważą zeszyty Magdy?
- Ile waży jeden zeszyt Michała?
- O ile więcej ważą zeszyty Magdy niż zeszyty Michała?
- O ile lżejszy jest jeden zeszyt Michała od jednego zeszytu Magdy?
- Oszacuj, czy 9 zeszytów 96-kartkowych waży mniej czy więcej niż 2 kg.
- Oszacuj, czy 9 zeszytów 60-kartkowych waży mniej czy więcej niż 1,5 kg.

- Przepisz zdania. Liczby zapisz bez użycia skrótów tys. i mln.

Terytorium Polski jest podzielone na 16 województw, 0,38 tys. powiatów i 2,478 tys. gmin.
Długość granic Polski wynosi 3,511 tys. km, z czego 0,44 tys. km przypada na granicę morską.
W 1911 roku ludność Polski wynosiła 22,11 mln, a w roku 2017 aż 38,4 mln.

- Wiadomo, że $156 \cdot 48 = 7488$. Skorzystaj z tej informacji i podaj wyniki działań.

- $1,56 \cdot 48$
 $156 \cdot 0,48$
 $0,0156 \cdot 48$
- $748,8 : 156$
 $7,488 : 48$
 $0,7488 : 156$



2.9 Mnożenie ułamków dziesiętnych

Podejmij temat



Jakie działania należy wykonać, aby dowiedzieć się, ile kosztuje 0,25 kg czereśni, a ile 0,3 kg tych owoców?



Poznamy teraz metodę obliczania iloczynu dwóch ułamków dziesiętnych. W tym celu najpierw zapiszemy iloczyny dwóch ułamków podanych w postaci zwykłej, a następnie porównamy je z odpowiednimi iloczynami tych samych ułamków zapisanych w postaci dziesiętnej.

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{100} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0,3 \cdot 0,7 = 0,21 & & \\ \swarrow & \uparrow & \nwarrow \\ \text{1 cyfra} & \text{1 cyfra} & \text{2 cyfry} \\ \text{po przecinku} & \text{po przecinku} & \text{po przecinku} \\ \hline & \downarrow & \\ \text{razem 2 cyfry po przecinku} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{100} = \frac{99}{1000} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0,9 \cdot 0,11 = 0,099 & & \\ \swarrow & \uparrow & \nwarrow \\ \text{1 cyfra} & \text{2 cyfry} & \text{3 cyfry} \\ \text{po przecinku} & \text{po przecinku} & \text{po przecinku} \\ \hline & \downarrow & \\ \text{razem 3 cyfry po przecinku} & & \end{array}$$

Aby pomnożyć przez siebie dwa ułamki dziesiętne, mnożymy je tak, jak mnoży się liczby naturalne. W iloczynie stawiamy przecinek w takim miejscu, by po przecinku otrzymać tyle cyfr, ile jest ich razem po przecinku w obu czynnikach.

Przykład 1

Wykonajmy mnożenie.

a) $0,3 \cdot 2,2$

b) $5,32 \cdot 2,7$

c) $3,6 \cdot 0,008$

a)

$$0,3 \cdot 2,2 = 0,66$$

Diagram illustrating the decimal places in the multiplication:

- $0,3$ has 1 digit after the decimal point.
- $2,2$ has 1 digit after the decimal point.
- The product $0,66$ has 2 digits after the decimal point.

razem 2 cyfry po przecinku

Mnożymy w pamięci $3 \cdot 22 = 66$.

W pierwszym czynniku jest 1 cyfra po przecinku, w drugim również 1 cyfra po przecinku, zatem w iloczynie po przecinku muszą być $1 + 1 = 2$ cyfry.

Po przecinku muszą więc znaleźć się cyfry 6 i 6, dlatego należy dopisać 0 całości.

Otrzymujemy wynik 0,66.

b)

$$\begin{array}{r} 5,32 \\ \cdot 2,7 \\ \hline 3724 \\ + 1064 \\ \hline 14,364 \end{array}$$

Diagram illustrating the decimal places in the multiplication:

- $5,32$ has 2 digits after the decimal point.
- $2,7$ has 1 digit after the decimal point.
- The product $14,364$ has 3 digits after the decimal point.

razem 3 cyfry po przecinku

Mnożymy sposobem pisemnym, tak jak liczby 532 i 27. W iloczynie przecinek stawiamy w takim miejscu, by po przecinku znalazły się 3 cyfry (ponieważ tyle cyfr mają razem po przecinku oba czynniki).

c)

$$\begin{array}{r} 3,6 \\ \cdot 0,008 \\ \hline 0,0288 \end{array}$$

Po wymnożeniu $36 \cdot 8$ otrzymujemy liczbę trzycyfrową, a po przecinku w iloczynie powinno być więcej cyfr ($1 + 3 = 4$).

W takich przypadkach w iloczynie należy dopisać zero lub kilka zer.

W tym przykładzie dopisujemy 0 części dziesiątych (i już mamy 4 cyfry po przecinku) i 0 całości.

1. Oblicz iloczyny.

a) $0,2 \cdot 0,3$

$0,4 \cdot 0,7$

$0,08 \cdot 0,9$

$2,3 \cdot 0,002$

$1,2 \cdot 0,5$

b) $0,1 \cdot 0,36$

$0,1 \cdot 4,52$

$35,7 \cdot 0,01$

$108,4 \cdot 0,01$

$0,01 \cdot 0,03$

c) $2,65 \cdot 0,28$

$45,7 \cdot 0,07$

$0,362 \cdot 8,6$

$23,4 \cdot 0,91$

$17,5 \cdot 0,232$

d) $72,4 \cdot 0,016$

$3,18 \cdot 0,309$

$45,5 \cdot 0,333$

$0,83 \cdot 0,65$

$0,007 \cdot 0,268$

2. Wiadomo, że $685 \cdot 24 = 16\,440$. Skorzystaj z tej informacji i podaj wynik działania.

a) $6,85 \cdot 2,4$

b) $68,5 \cdot 0,24$

c) $0,0685 \cdot 2,4$

d) $0,24 \cdot 6,85$

3. Zapisz każdą potęgę w postaci iloczynu i oblicz ją podanym sposobem.

a) w pamięci

$0,3^2$	$0,6^2$	$0,1^3$	$0,2^3$	$0,08^2$
---------	---------	---------	---------	----------

b) sposobem pisemnym

$2,5^2$	$1,04^2$	$6,2^2$	$0,5^3$	$0,07^3$
---------	----------	---------	---------	----------

★ dowolnym sposobem

$0,1^6$	$0,2^5$	$0,3^4$	$1,5^4$	$0,04^4$
---------	---------	---------	---------	----------

A ja potrafię jedną dziesiątą podnieść do potęgi piątej!



Przecież to nic trudnego, to w końcu iloczyn pięciu jednakowych czynników.

Zadania

- Jeżeli 1 kg ziemniaków kosztuje 1,75 zł, to ile zapłacisz za:
- a) 5 kg ziemniaków, b) 3,2 kg ziemniaków, c) 4,84 kg ziemniaków?
- Na półce w sklepie obok towaru znajduje się zwykle plakietka zawierająca m.in. informację o cenie produktu za kilogram. Skorzystaj z informacji podanych na rysunku, wykonaj polecenie i odpowiedz na pytania.
- a) Oblicz niewidoczną cenę każdej paczki wafli.
b) Ile złotych trzeba zapłacić za 4 paczki wafli pomorskich?
c) Co jest droższe: 5 paczek wafli mazurskich czy 7 paczek wafli śląskich?
d) O ile złotych droższy jest 1 kg wafli mazurskich od 1 kg wafli śląskich?
e) O ile złotych tańsza jest paczka wafli pomorskich od paczki wafli mazurskich?
- Gołąb pocztowy przelatuje w ciągu minuty 1,7 km. Ile kilometrów może przelecieć w ciągu 4,5 minuty?
- Karol wykonuje średnio 17 wdechów na minutę. Za każdym razem wdycha około 0,5 l powietrza. Przyjmij, że 1 l powietrza waży 0,00129 kg.
- a) Ile waży powietrze wdychane przez Karola w ciągu minuty?
b) Ile kilogramów powietrza zużywa Karol w ciągu godziny?

WAFLE MAZURSKIE WAFLE MAZURSKIE	WAFLE MAZURSKIE Masa netto 0,45 kg Cena za 1 kg 16,20 zł	Cena
WAFLE ŚLĄSKIE WAFLE ŚLĄSKIE	WAFLE ŚLĄSKIE Masa netto 0,3 kg Cena za 1 kg 14,80 zł	Cena
WAFLE POMORSKIE WAFLE POMORSKIE	WAFLE POMORSKIE Masa netto 0,25 kg Cena za 1 kg 15,44 zł	Cena

Oblicz:

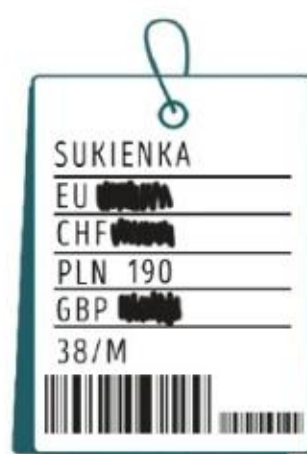
- a) 0,7 liczby 45, b) 0,26 liczby 158,
c) 0,52 liczby 7,4, d) 0,9 liczby 58,6.

Statek przepłynął w ciągu godziny 26,5 mil morskich. Skorzystaj z informacji umieszczonej na marginesie i oblicz, ile to kilometrów.

Marcin miał w skarbonce 72,45 zł. Na czasopisma wydał 0,2 tej kwoty, a 0,6 przeznaczył na grę planszową. Ile kosztowały czasopisma, a ile – gra? Ile złotych pozostało Marcinowi?

W sklepie spożywczym na początku tygodnia było 328,45 kg wędlin. W poniedziałek sprzedano 0,4 całej masy wędlin, we wtorek 0,32, a w środę 0,2. Ile kilogramów wędlin sprzedano każdego dnia i ile kilogramów pozostało jeszcze w sklepie?

W niektórych dużych sklepach sieciowych na metkach towarów możemy zobaczyć ceny danego artykułu w różnych walutach. Spójrz na narysowane metki i odczytaj, ile kosztują spodnie w euro, frankach szwajcarskich, złotych i funtach brytyjskich. Jeśli porównamy ceny obu towarów w złotych, możemy zauważyć, że sukienka jest 3,8 razy droższa od spodni. Skorzystaj z tej informacji i oblicz, ile zapłacimy za tę sukienkę w Manchesterze [czyt. menczesterze], ile w Bratysławie, a ile w Genewie? Jeśli potrzebujesz dodatkowych informacji, skorzystaj z internetu.



Ile stopni Celsjusza pokazuje dziś termometr zaokienny? Skorzystaj z informacji podanej na marginesie i oblicz, ile to stopni Fahrenheita [czyt. farenhajta].

Która liczba jest większa: $0,1^5$ czy $0,01^5$? Oblicz wartości tych potęg i porównaj je.



Mila morska jest jednostką długości stosowaną w nawigacji morskiej oraz w lotnictwie.

1 mila morska = 1,852 km

Ciekawe!



W Stanach Zjednoczonych temperaturę mierzy się w stopniach Fahrenheita ($^{\circ}\text{F}$), a nie w stopniach Celsjusza ($^{\circ}\text{C}$), jak w Polsce. Aby temperaturę zmierzoną w stopniach Celsjusza podać w stopniach Fahrenheita, należy liczbę stopni Celsjusza pomnożyć przez 1,8 i powiększyć o 32.

2.10 Dzielenie ułamków dziesiętnych

Podejmij temat



Za pomocą jakiego działania najprościej byłoby obliczyć, ile chłopiec może kupić pączków? Czy da się odpowiedzieć na pytanie chłopca, wykorzystując działania, które już znasz? Jakże to mogą być działania?

Mam 10 zł. O... jeszcze mam 20 gr. Czyli mam 10,20 zł. To ile pączków mogę kupić?



Kolejną umiejętnością, jaką zdobędziemy w klasie szóstej, jest dzielenie dwóch ułamków dziesiętnych. Wiemy już, jak dzielić ułamek dziesiętny przez liczbę naturalną. W podobny sposób wykonamy teraz dzielenie ułamka dziesiętnego przez ułamek dziesiętny.

Przykład 1

Wykonajmy dzielenie.

a) $3,45 : 0,6$ b) $0,056 : 0,08$

a) $3,45 : 0,6 =$ Najpierw zamienimy to dzielenie na takie, w którym dzielnik będzie liczbą naturalną (takie dzielenie umiemy już wykonać). Aby wynik dzielenia pozostał niezmienny, musimy pomnożyć dzielną i dzielnik przez tę samą liczbę.

Ułamki dziesiętne najłatwiej mnoży się przez liczby 10, 100, 1000 itd., więc wybieramy spośród tych liczb odpowiednią i mnożymy przez nią dzielną i dzielnik (czyli przesuwamy oba przecinki o tyle samo miejsc w prawo).

$= 3,45 : 0,6 =$ Aby dzielnik 0,6 stał się liczbą naturalną, wystarczy pomnożyć go przez 10. Aby wynik dzielenia się nie zmienił, przez tyle samo należy pomnożyć dzielną.

$$\begin{array}{r} 5,75 \\ 34,5 : 6 \\ - 30 \\ \hline 45 \\ - 42 \\ \hline 30 \\ - 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dzielenie dwóch ułamków dziesiętnych sprowadziliśmy zatem do znanego nam już dzielenia ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną, które w tym przypadku wykonujemy sposobem pisemnym.

$$b) 0,056 : 0,08 =$$

Powiększamy tyle samo razy dzielną i dzielnik.

Aby dzielnik 0,08 przekształcić w liczbę naturalną, należy pomnożyć go przez 100. Dzielną również mnożymy przez 100, żeby wynik dzielenia się nie zmienił.

$$= 5,6 : 8 = 0,7$$

Otrzymane liczby dzielimy w pamięci.

1. Oblicz w pamięci. W tym celu przesun odpowiednio przecinki.

$$a) 4,5 : 0,9$$

$$b) 0,42 : 0,6$$

$$c) 12,5 : 0,1$$

$$d) 4,8 : 0,006$$

$$0,32 : 0,08$$

$$0,072 : 0,8$$

$$3,64 : 0,001$$

$$0,003 : 0,03$$

$$25 : 0,5$$

$$0,054 : 0,09$$

$$0,52 : 0,01$$

$$4,92 : 0,0001$$

$$0,56 : 0,007$$

$$0,0045 : 0,05$$

$$0,008 : 0,01$$

$$0,36 : 0,0004$$

2. Oblicz.

$$a) 6,503 : 0,7$$

$$b) 57,2 : 0,04$$

$$c) 0,3 : 0,024$$

$$d) 58,8 : 0,07$$

$$37,92 : 0,06$$

$$0,6241 : 0,005$$

$$1,728 : 1,2$$

$$0,0827 : 0,05$$

$$73,53 : 0,9$$

$$0,92 : 0,8$$

$$37,2 : 0,15$$

$$122,4 : 5,1$$

$$0,5673 : 0,003$$

$$0,15 : 0,6$$

$$7,48 : 0,025$$

$$10,08 : 2,8$$

Zadania

- Martyna ma w domu trzy klatki z ptakami. Jej kanarek waży 0,03 kg, papużka nimfa 0,09 kg, a gołąb 0,3 kg.
 - a) Ile razy gołąb jest cięższy od kanarka?
 - b) Ile razy kanarek jest lżejszy od papużki?
- W mleczarni Masełko z litra śmietany wyrabia się około 0,35 kg masła.
 - a) Ile kilogramów masła otrzyma się z 2,5 l śmietany?
 - b) Ile litrów śmietany potrzeba, aby otrzymać 5,25 kg masła?
- Krawcowa pocięła ozdobną taśmę o długości 36,4 m na kawałki, z których każdy ma 2,8 m. Na ile kawałków pocięła tę taśmę?
- Jeden cienkopis kosztuje 3,20 zł. Ile takich cienkopisów kupiła Ela, jeżeli zapłaciła za nie 25,60 zł?
- Drewniany prostopadłościan waży 13,3 kg. Na ile takich samych części należy go przepiłować, aby każda z nich ważyła 0,95 kg?

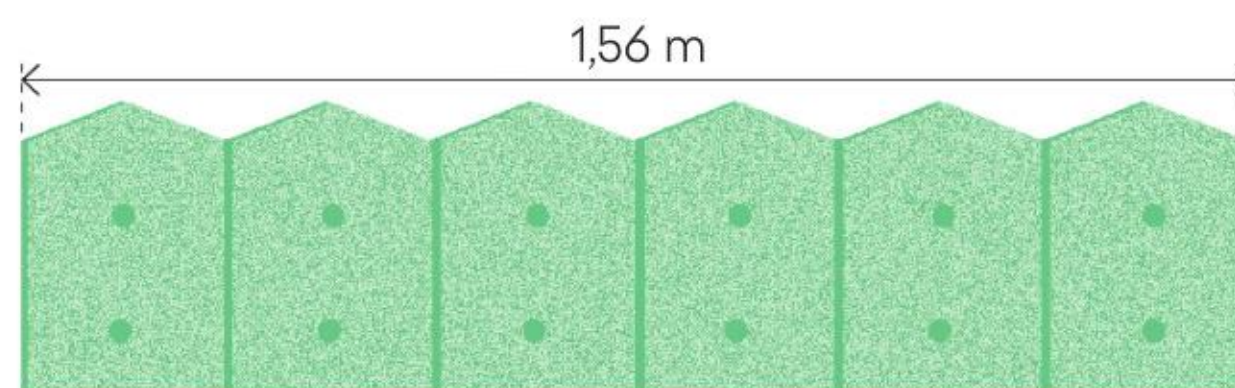
- Pan Adam i jego sąsiad, pan Tomasz, kupili ogórki po 6,20 zł za kilogram. Pan Adam zapłacił 16,12 zł, a jego sąsiad 9,30 zł. Ile kilogramów ogórków kupił pan Adam, a ile – pan Tomasz?
- Pani Beata kupiła 0,9 kg pomidorów malinowych, za które zapłaciła 7,56 zł, oraz 0,8 kg pomidorów paprykowych, które kosztowały 6 zł. Jaka była cena 1 kg pomidorów każdego rodzaju?
- Szymon ma 23,40 zł. Ile sztuk pieczywa każdego rodzaju może kupić?



- Pojemność wanny wynosi 270 l. W ciągu 1 sekundy z kranu leci 0,25 l wody. Ile czasu potrzeba, żeby napełnić wannę do połowy jej pojemności?

- Cały płot, którego fragment pokazano na rysunku, ma długość 45,5 m. Odczytaj potrzebne informacje i oblicz:

- jaka jest szerokość jednej sztachety,
- z ilu sztachet składa się cały płot.



- Glukoza i fruktoza to cukry proste, które występują na przykład w miodzie. Miód ważący 2,5 kg zawiera 0,95 kg fruktozy i 0,85 kg glukozy. Ile tych cukrów znajduje się w 1 kg miodu?

- Rozwiąż równanie.

a) $x \cdot 2,8 = 9,576$ b) $0,33 \cdot x = 6,006$ c) $4,368 : x = 0,08$ d) $x : 0,14 = 0,58$

- Pewną liczbę naturalną podzielono przez ułamek dziesiętny i otrzymano iloraz o 1 większy od dzielnej. Znajdź dzielną, dzielnik oraz iloraz spełniające te warunki. Czy istnieje tylko jedno rozwiązanie tego zadania?

2.11 Działania na ułamkach dziesiętnych

Podejmij temat



Czy pamiętasz, w jakiej kolejności należy wykonywać działania?


$$(3,4 - 3,377)^2 \cdot 2,1 + (4,25 - 3,75)^2 : 2^3 + (5,4 - 4,8)^2 - (4,8 - 4,75) + \frac{1,4 - 0,7^2}{(3 - 2,8)^2} \cdot 3,4 - 1,9 =$$



Najpierw obliczamy działania w nawiasach.



Później wykonujemy potęgowanie.



Następnie mnożenie i dzielenie, a na końcu dodawanie i odejmowanie.



1. Razem z kolegą lub koleżanką wykonajcie wszystkie działania (I–X). Spośród liczb zapisanych poniżej danego działania wybierzcie poprawną odpowiedź i odpowiadającą jej literę. Wszystkie litery, zapisane kolejno, utworzą imię słynnego starożytnego filozofa i matematyka.

I. $2,45 - 0,671 + 4,47$

6,249	0,921	7,591
A	L	K

II. $16,5 + 8,22 - 4,88$

14,75	29,6	19,84
E	O	R

III. $3,6 - 2,7 + 0,8 - 0,09$

1,61	0,01	1,8
C	A	O

IV. $0,786 + 4,9 \cdot 0,365$

2,07539	2,5745	2,6745
N	H	W

V. $3,7^2 - 3,68$

3,72	0,04	10,01
A	L	I

VI. $6,62 - 0,6888 : 2,1$

6,292	2,824	0,334
M	S	V

VII. $53,56 : 6,5 + 0,761$

1,585	9,001	7,376
R	E	I

VIII. $3,16 \cdot 0,48 - 0,647 \cdot 0,9$

0,78282	0,9345	1,0745
K	D	O

IX. $0,925 : 0,25 - 0,228 : 0,8$

4,34	3,415	38,739
D	E	J

X. $22,68 : 3,5 + 4,9^2$

16,28	22,76	30,49
E	A	S

2. Wykonaj działania umieszczone w tabeli. Zapisz ich wyniki w kolejności rosnącej, a pod każdym wynikiem wpisz literę odpowiadającą danemu działaniu. Litery czytane kolejno utworzą nazwę miasta, gdzie żył uczony, którego imię jest rozwiązaniem ćwiczenia 1.

R	$0,75 \cdot (0,76 + 4,9)$
Y	$(3,4 - 0,624) : 0,016$
K	$(0,572 + 6,828) \cdot (4,1 - 2,58)$
A	$1,344 : (1,6 \cdot 0,15)$
Y	$0,95 + (88,11 - 7 : 0,08)$
Z	$8,3^2 + (14,6 - 5,9)$
S	$0,73 + (2,9 \cdot 0,14 - 0,35)$
U	$4,2 \cdot (0,5^3 + 7,805)$

3. Wykonaj działania w liczniku i mianowniku każdego spośród ułamków I–VI, używając kalkulatora. Następnie podziel (pisemnie lub w pamięci) licznik przez mianownik. Znajdź w tabeli wynik danego działania i wpisz obok tego działania literę odpowiadającą wynikowi. Litery czytane kolejno utworzą nazwę państwa, w którym kiedyś znajdowało się miasto z ćwiczenia 2.

$$\begin{array}{lll} \text{I. } \frac{(1,238 + 2,762) \cdot 0,1}{(36,487 - 34,237) : 2,8125} & \text{II. } \frac{0,49224 : 0,056}{3,2 \cdot 0,625} & \text{III. } \frac{34,68 \cdot 15,4}{6,8 \cdot 3,57} \\ \text{IV. } \frac{3,125 \cdot (4,36 - 1,16)}{0,004 \cdot (27,8 - 25,55) : 0,225} & \text{V. } \frac{7,13397 + 8,6287}{100,6 + 42,697} & \text{VI. } \frac{(2,1 - 1,965) : 0,054}{0,00325 : 0,013} \end{array}$$

1,1	10	439,5	2,5	4,395	0,005	22	0,5	250	0,1	0,11
W	A	H	Ł	R	Y	E	G	C	O	J

4. Literze A przyporządkowano pewien ułamek dziesiętny, a kolejnym literom alfabetu łacińskiego (znajdziesz go w ciekawostce poniżej) – takie liczby, że każda następna jest o 0,3 większa od poprzedniej. Utworzono w ten sposób szyfr. Odczytaj zapisane tym szyfrem imiona trzech innych starożytnych matematyków żyjących w kraju, którego nazwa jest rozwiązaniem ćwiczenia 3.

$$6,2 \cdot 0,5 \cdot 3,8 \cdot 1,7 \cdot 5,9$$

$$5 \cdot 2,9 \cdot 6,2 \cdot 0,5 \cdot 2,3 \cdot 4,7 \cdot 5,6 \cdot 0,5 \cdot 5,9$$

$$1,7 \cdot 6,5 \cdot 3,5 \cdot 3,8 \cdot 2,9 \cdot 1,4 \cdot 1,7 \cdot 5,9$$

Wskazówka: w jednym imieniu nie ma litery A.

Ciekawe!

Współczesny alfabet łaciński																									
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Alfabet łaciński to system 26 znaków służących do zapisu większości języków europejskich. Jest to najbardziej rozpowszechniony alfabet na świecie – posługuje się nim blisko 35% ludzkości.

Współczesny alfabet polski																															
A	Ą	B	C	Ć	D	E	Ę	F	G	H	I	J	K	L	Ł	M	N	Ń	O	Ó	P	R	S	Ś	T	U	W	Y	Z	Ż	Ź

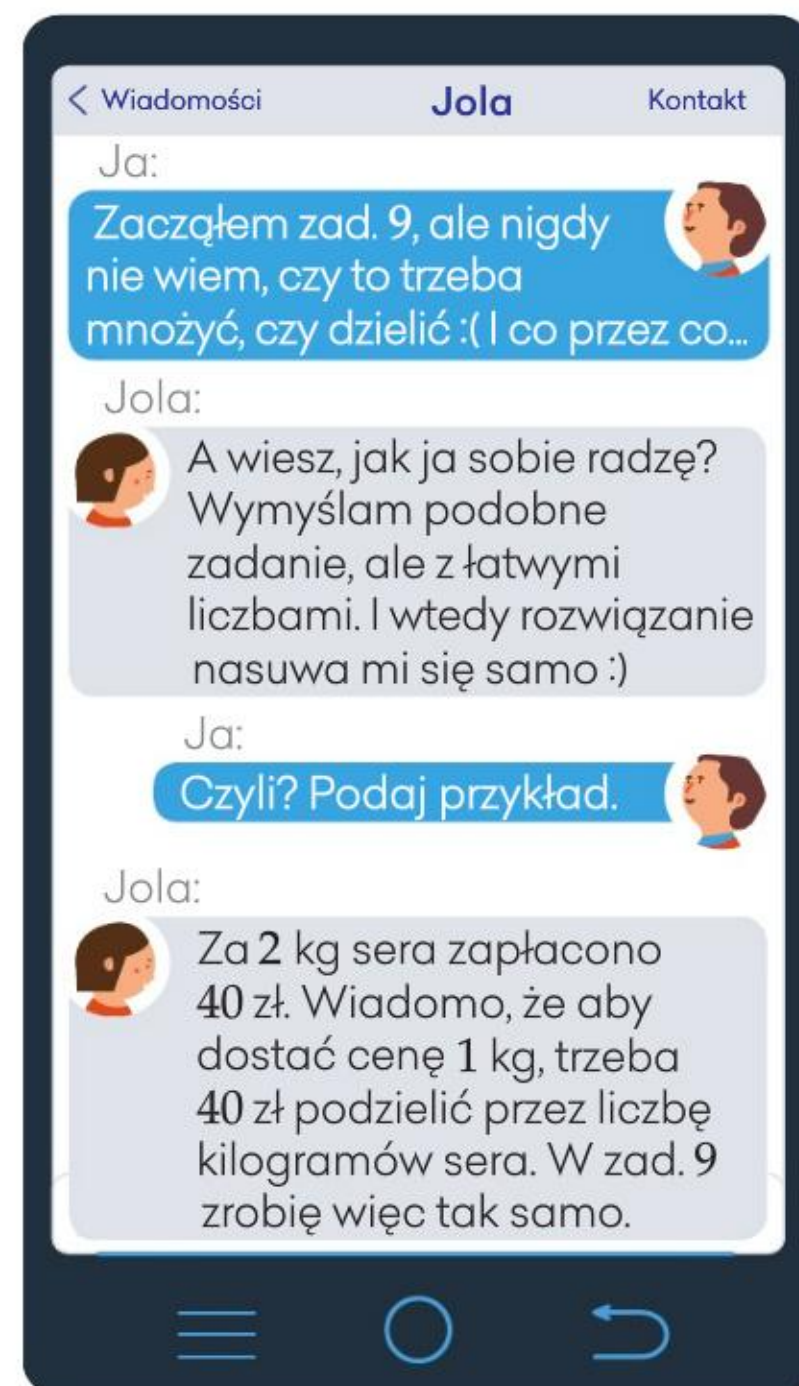
Współczesny alfabet polski jest oparty na alfabecie łacińskim i składa się z 32 liter. W wyrazach zapożyczonych stosuje się dodatkowo litery Q, V i X, mimo że nie należą one do polskiego alfabetu.

Zadania

- Liczbę 333 podziel przez sumę liczb 2,7 i 4,7.
- Sumę liczb 124,8 i 118,2 podziel przez 1,62.
- Liczby 25,6 i 24,96 dodaj, a następnie odejmij. Otrzymaną sumę podziel przez różnicę tych liczb.
- Sumę liczb 75,2 i 3,41 powiększ 2,5 razy.
- Iloczyn liczb 8,5 i 10,6 zmniejsz o iloraz liczb 3,654 i 0,42.
- Sumę trzech liczb: 0,63, 2,9 i 2,352, zmniejsz 1,7 razy.
- Końcówka dłuższej wskazówki zegara w ciągu godziny przemierza drogę o długości 62,8 cm. Jaką drogę przebędzie w czasie jednej lekcji, czyli przez 0,75 godziny?
- Pusty kanister waży 1,36 kg. Po nalaniu do niego oleju napędowego waży 7,66 kg. Ile litrów oleju wlano do kanistra, jeżeli wiadomo, że litr tego oleju waży 0,84 kg?
- Za 0,42 kg żółtego sera pani Karolina zapłaciła 9,87 zł, a za 0,6 kg wędliny 10,53 zł. Co było droższe: 1 kg żółtego sera czy 1 kg wędliny? O ile?
- Pani Magdalena zdecydowała się uszyć nowe franki do dwóch pokoiów. Kupiła 4,25 m tiulu po 28,60 zł za metr i 7,8 m tiulu po 18,30 zł za metr. Ile zapłaciła razem za obie tkaniny?
- Ania i Marek postanowili zmierzyć stopami szkolny korytarz o długości 39,9 m. Szli wzdłuż niego, stawiając swoje stopy jedna za drugą. Marek otrzymał wynik 95, a Ania – 105. O ile dłuższa jest stopa Marka od stopy Ani? Wynik podaj w metrach.



Za książkę, 5 zeszytów i 4 długopisy zapłacono 44 zł.
Za książkę, 6 zeszytów i 4 długopisy zapłacono 47,40 zł,
a za książkę, 5 zeszytów i 3 długopisy – 41,30 zł. Wszystkie książki, zeszyty i długopisy, o których jest mowa, były jednakowe. Oblicz cenę książki.



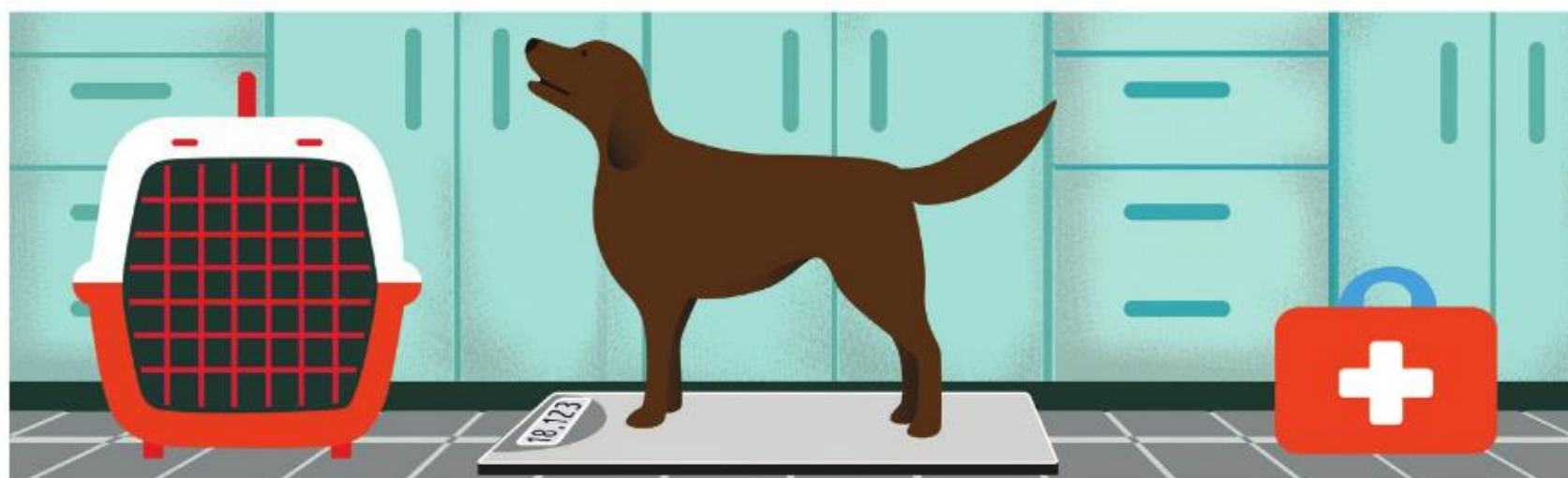
2.12 Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych

Podejmij temat



1. Jak myślisz, czy Martyna spytana, ile waży jej pies, odpowiada z taką dokładnością? Czy 3 g są bardzo ważne przy podawaniu masy psa?

Pies Martyny waży dokładnie 18,123 kg, czyli 18 kg 12 dag 3 g.



Pani Ewa, idąc do sklepu, zastanawia się, czy wystarczy jej gotówki na wszystkie zaplanowane zakupy. Ma przy sobie 73,12 zł, czyli 73 zł 12 gr.

2. Jak sądzisz, czy 12 gr ma duże znaczenie dla pani Ewy przy planowaniu zakupów?



Pan Jan przed wprowadzeniem się do nowego mieszkania zmierzył dokładnie długość i szerokość pokoju. Podłoga jest prostokątem o wymiarach 3,98 m $\times$ 4 m, czyli szerokość pokoju wynosi 3 m 98 cm.

3. Jak uważasz, czy 2 cm brakujące do 4 m mają istotny wpływ na wielkość pokoju w mieszkaniu pana Jana?



W codziennym życiu bardzo często nie zależy nam na podawaniu liczb z dużą dokładnością. Martyna powie, że jej pies waży 18 kg lub trochę ponad 18 kg. Pani Ewa, robiąc zakupy, musi pamiętać, że może wydać około 70 zł. Pan Jan przed pomiarami pewnie nawet nie dostrzegł, że podłoga w pokoju nie jest kwadratem. Z pewnością zauważasz, że w praktyce bardzo często posługujemy się liczbami podanymi w zaokrągleniu. Wcześniej uczyliśmy się zaokrąglać liczby naturalne. Według takich samych zasad zaokrągla się (w górę lub w dół) ułamki dziesiętne.

Ułamek dziesiętny możemy zaokrągać do różnych rzędów, na przykład:

- do całości – zmniejszamy lub powiększamy go wówczas do najbliższej liczby całości, czyli w liczbie pozostają całości, a nie zapisujemy części ułamkowych;

$$3,28 \approx 3 \qquad 25,1 \approx 25 \qquad 17,824 \approx 18 \qquad 0,7 \approx 1$$

- do części dziesiątych (do pierwszego miejsca po przecinku) – w liczbie pozostają części dziesiąte, a nie zapisujemy części setnych, tysięcznych i kolejnych;

$$7,83 \approx 7,8 \qquad 0,215 \approx 0,2 \qquad 3,854 \approx 3,9 \qquad 0,56 \approx 0,6$$

- do części setnych (do drugiego miejsca po przecinku) – w liczbie pozostają części setne, a nie zapisujemy części tysięcznych, dziesięciotysięcznych i kolejnych;

$$2,583 \approx 2,58 \qquad 14,3421 \approx 14,34 \qquad 0,128 \approx 0,13 \qquad 5,0072 \approx 5,01$$

- do części tysięcznych (do trzeciego miejsca po przecinku) – w liczbie pozostają części tysięczne, a nie zapisujemy części dziesięciotysięcznych, stutysięcznych i kolejnych.

$$0,0233 \approx 0,023 \qquad 5,18546 \approx 5,185 \qquad 2,5237 \approx 2,524 \qquad 0,92654 \approx 0,927$$

Aby zatem zaokrąglić ułamek dziesiętny, nie piszemy pewnych cyfr, np. zaokrąglając liczbę 28,7524 lub 28,7564 do części setnych, pozostawiamy rzędy całości oraz rzędy części dziesiątych i setnych, natomiast pomijamy rzędy części tysięcznych i dziesięciotysięcznych.

pozostawiamy | pomijamy
 28,7524
 ↑ ↑
 ostatniej | pierwsza
 pozostawionej | pominięta
 cyfry | cyfra
 nie zmienia się

pozostawiamy | pomijamy
 28,75⁺¹64
 ↑ ↑
 ostatnią | pierwsza
 pozostawioną | pominięta
 cyfrę powiększa | cyfra
 się o 1



Jeżeli pierwszą pominiętą cyfrą jest 0, 1, 2, 3 lub 4, to pozostawione cyfry nie zmieniają się (zaokrąglamy w dół).

Jeżeli pierwszą pominiętą cyfrą jest 5, 6, 7, 8 lub 9, to ostatnią pozostawioną cyfrę należy powiększyć o 1 (zaokrąglamy w górę).

Przykład 1

Zaokrąglimy podaną liczbę do części dziesiątych.

a) 4,548

b) 0,3845

a) 4,548

Pozostawiamy całości i części dziesiąte, a pomijamy części setne i tysięczne.

$$4,5|48 \approx 4,5$$

Ponieważ pierwszą pominiętą cyfrą jest 4, to pozostawione cyfry nie zmieniają się.

b) 0,3845

Pozostawiamy całości i części dziesiąte, a pomijamy części setne, tysięczne i dziesięciotysięczne.

$$0,3|845 \approx 0,4$$

Ponieważ pierwszą pominiętą cyfrą jest 8, to ostatnią pozostawioną cyfrę 3 powiększamy o 1.

1. Każdą z podanych liczb zaokrąglij do:

- a) części dziesiątych, b) części setnych, c) całości.

0,7245	5,848	37,085	29,943	23,4152	7,538	3,0067
--------	-------	--------	--------	---------	-------	--------

2. Zapisz pięć liczb, których zaokrąglenie do:

- a) całości wynosi 7, b) całości wynosi 0,
c) części dziesiątych wynosi 0,2, d) części dziesiątych wynosi 5,9,
e) części setnych wynosi 5,15, f) części setnych wynosi 2,7.

3. Zaokrąglij liczbę 9,9999 do różnych rzędów: do części dziesiątych, do części setnych, do części tysięcznych, do jedności i do dziesiątek. Co możesz powiedzieć o wynikach zaokrąglania?

Zadania

● Która z liczb w zaokrągleniu do części setnych wynosi 1,65?

- A. 1,661 B. 1,655 C. 1,645 D. 1,642

● Spośród ułamków dziesiętnych mających dokładnie dwie cyfry po przecinku wybierz takie, których zaokrąglenie do części dziesiątych wynosi 2,7. Ile jest tych ułamków?

● Na wyświetlaczu GPS kierowca odczytał informację, że do miejsca docelowego ma 426 km. W rzeczywistości odległość ta może wynosić

- A. 425,521 km B. 426,8 km C. 426,625 km D. 425,18 km

● Tabela pokazuje masy paczek nadanych przez firmę zajmującą się sprzedażą wysyłkową.

Numer paczki	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Masa (w kg)	0,738	1,221	4,806	2,155	7,081	3,296	8,344	6,555	0,895	3,720

Zaokrąglij podane masy do części setnych i zapisz otrzymane liczby w postaci wyrażeń dwumianowanych lub, jeśli nie jest to możliwe, w dekagramach.

● Tabela pokazuje, jaka jest długość drogi do szkoły różnych uczniów. Zaokrąglij podane odległości do części dziesiątych kilometra.

Imię	Ela	Jacek	Iwona	Michał	Ola	Kamil	Beata	Mateusz
Długość (w km)	0,845	2,107	3,002	1,862	0,976	2,458	2,314	3,152

● Dawniej w Wielkiej Brytanii przy mierzeniu długości posługiwano się m.in. następującymi miarami:

- 1 stopa = 0,3048 m,
- 1 jard = 0,9144 m,
- 1 pręt = 5,0292 m,
- 1 mila angielska = 1609,344 m.

Zapisz podane długości z dokładnością do setnych części metra.

● Które liczby w zaokrągleniu do części dziesiątych wynoszą 2,4? ✕

I. 2,45	II. 2,4475
III. 2,4007	IV. 2,349
V. 2,3511	VI. 2,482

- A. Wszystkie.

C. I, II, III, V.
- B. I, II, III, VI.

D. II, III, V.

● W gabinecie weterynaryjnym pacjent przed badaniem zazwyczaj jest ważony. Pewnego dnia w poczekalni weterynarza spotkało się pięć psów. Lekarz zważył każdego z nich i zapisał masy ich ciała w komputerze. Oto one:

jamnik Sznurówka	8,628 kg
seter Sweter	28,932 kg
wyżeł Spryciarz	29,461 kg
spaniel Lord	13,356 kg
pudel Pompon	10,68 kg

- Zaokrąglaj wskazania wagi:
- a) do części dziesiątych kilograma,
 - b) do całości kilograma.

● Jedna z najdłuższych na świecie tras kolei linowej prowadzi na szczyt góry Tianmen w Chinach. Ma 7,455 km. Jest to najdłuższa na świecie trasa turystyczna. W Polsce trasa kolejki na Gubałówkę ma długość 1,338 km, a na Kasprowy Wierch – „jedynie” 4,291 km.

Zaokrąglaj powyższe liczby do dziesiątych części kilometra.

Ciekawe!

Pierwsze jednostki długości pochodziły od części ciała człowieka. W starożytnym Egipcie długość mierzono w łokciach (od łokcia do końca środkowego palca), w dłoniach i w palcach. W starożytnym Rzymie do mierzenia długości służył kciuk (jego szerokość), stopa i krok. Jednostką długości była również mila licząca tysiąc kroków rzymskiego żołnierza. Z kolei w dawnej Polsce stosowano w rolnictwie jednostki długości związane z przedmiotami codziennego użytku, były to więc: ławka (44,665 mm), pręt (100 ławek), sznur (10 prętów), oraz zagon (3 sznury).

Ciekawe!



Najdłuższa trasa kolei linowej na świecie przebiega w mieście La Paz w Boliwii. Obecnie ma ponad 17 km (stan na 2018 rok). Kolej linowa pełni tam funkcję nadziemnego metra.

2.13 Przedstawianie ułamków dziesiętnych w postaci ułamków zwykłych i odwrotnie

Podejmij temat



Czy pamiętasz, jakiemu ułamkowi dziesiętnemu jest równy ułamek zwykły $\frac{3}{4}$?



Aby liczbę zapisaną w postaci dziesiętnej przedstawić w postaci ułamka zwykłego (lub liczby mieszanej), wystarczy prawidłowo ją odczytać.

Wiemy, że:

- jedna cyfra po przecinku to części dziesiąte,
- dwie cyfry po przecinku to części setne,
- trzy cyfry po przecinku to części tysięczne itd.

Pamiętam: ile cyfr po przecinku, tyle zer w mianowniku.

Zgadza się. Mielśmy to już w czwartej klasie.



Przykład 1

Przedstawmy ułamek dziesiętny w postaci ułamka zwykłego lub liczby mieszanej.

a) 0,364

b) 4,85

a) 0,364 =

$$= \frac{364}{1000} = \frac{91}{250}$$

b) 4,85 =

$$= 4\frac{85}{100} = 4\frac{17}{20}$$

Czytamy: zero i trzysta sześćdziesiąt cztery tysięczne.

Ułamek ten zapisujemy następnie za pomocą kreski ułamkowej.

Skracamy ułamek, dzieląc licznik i mianownik przez 4.

Czytamy: cztery i osiemdziesiąt pięć setnych.

Liczbę tę zapisujemy następnie w postaci liczby mieszanej.

Skracamy część ułamkową, dzieląc licznik i mianownik przez 5.

1. Zapisz każdy z podanych ułamków dziesiętnych w postaci ułamka zwykłego lub liczby mieszanej.

a) 0,6

3,44

0,525

4,08

0,0002

b) 5,025

4,008

0,015

0,604

0,00045

c) 0,018

0,125

1,0016

7,0005

8,64

Aby wykonać czynność odwrotną, tzn. ułamek zwykły zapisać w postaci dziesiętnej, można (jeżeli jest to wykonalne) najpierw rozszerzyć ułamek tak, żeby w mianowniku otrzymać potęgę liczby 10, czyli: 10 lub 100, lub 1000, lub 10 000 itd.

Przykład 2

Zapiszmy w postaci dziesiętnej podany ułamek

a) $\frac{3}{25}$

b) $\frac{1}{16}$

a) $\frac{3}{25} \cdot \frac{4}{4} =$

$= \frac{12}{100} = 0,12$

Ten ułamek można rozszerzyć tak, aby w mianowniku otrzymać liczbę 100.

Taki ułamek łatwo zapisać w postaci dziesiętnej (części setne to dwie cyfry po przecinku).

b) $\frac{1}{16} \cdot \frac{625}{625} =$

$= \frac{625}{10000} = 0,0625$

Tego ułamka nie da się rozszerzyć tak, aby w mianowniku otrzymać 100 czy 1000 (stwierdzamy to po wykonaniu dzielenia $100 : 16$ i $1000 : 16$ – nie otrzymujemy całkowitego ilorazu).

Sprawdźmy, czy 16 jest dzielnikiem 10 000.

Tak, $10\,000 : 16 = 625$, zatem ułamek można rozszerzyć przez 625.

Taki ułamek łatwo zapisać w postaci dziesiętnej (części dziesięciotysięczne to cztery cyfry po przecinku).

2. Zapisz podany ułamek zwykły w postaci dziesiętnej.
Odpowiedź wybierz spośród liczb podanych w ramce.

a) $\frac{19}{25}$

b) $\frac{47}{50}$

c) $\frac{159}{200}$

d) $\frac{383}{250}$

e) $\frac{841}{500}$

1,532

0,76

1,682

0,532

0,795

0,94

3. Każdy ułamek lub liczbę mieszaną zapisz w postaci dziesiętnej. W tym celu rozszerz dany ułamek do odpowiedniego mianownika.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{3}{20}, \frac{4}{25}$

b) $7\frac{13}{50}, 2\frac{7}{200}, 4\frac{11}{500}, 3\frac{9}{250}, 8\frac{3}{40}$

Punkt b) przykładu 2 pokazuje, że czasem trudno zauważyć, jak rozszerzyć ułamek (przez jaką liczbę pomnożyć mianownik), aby łatwo go było zamienić na ułamek dziesiętny. Wówczas można skorzystać z drugiej metody zmiany ułamka zwykłego na dziesiętny. Polega ona na podzieleniu licznika ułamka przez jego mianownik.

Przykład 3

Zapiszmy podaną liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{7}{8}$

b) $4\frac{5}{16}$

a) $\frac{7}{8} = 7 : 8$

Zapisujemy ułamek zwykły w postaci ilorazu i wykonujemy dzielenie sposobem pisemnym.

$$\begin{array}{r} 0,875 \\ \underline{7,000 : 8} \\ -0 \\ \underline{70} \\ -64 \\ \underline{60} \\ -56 \\ \underline{40} \\ -40 \\ \hline == \end{array}$$

W wyniku dzielenia otrzymujemy ułamek w postaci dziesiętnej.

Zatem $\frac{7}{8} = 0,875$.

b) $4\frac{5}{16}$

Liczbę mieszaną przed dzieleniem pisemnym można zamienić na ułamek niewłaściwy (sposób I), można też zamienić na postać dziesiętną samą część ułamkową (sposób II), wówczas trzeba pamiętać o dodaniu całości do wyniku dzielenia.

Sposób I

$$4\frac{5}{16} = \frac{69}{16} = 4,3125$$

$$\begin{array}{r} 4,3125 \\ \underline{69,0000 : 16} \\ -64 \\ \underline{50} \\ -48 \\ \underline{20} \\ -16 \\ \underline{40} \\ -32 \\ \underline{80} \\ -80 \\ \hline == \end{array}$$

Sposób II

$$4\frac{5}{16} = 4 + 0,3125 = 4,3125$$

$$\begin{array}{r} 0,3125 \\ \underline{5,0000 : 16} \\ -0 \\ \underline{50} \\ -48 \\ \underline{20} \\ -16 \\ \underline{40} \\ -32 \\ \underline{80} \\ -80 \\ \hline == \end{array}$$

4. Każdy ułamek lub liczbę mieszaną zapisz w postaci dziesiętnej. W tym celu podziel licznik odpowiedniego ułamka przez jego mianownik.

a) $\frac{3}{5}, \frac{17}{20}, \frac{3}{8}, \frac{21}{25}, \frac{3}{4}$

b) $2\frac{7}{8}, 1\frac{53}{80}, 1\frac{41}{50}, 2\frac{15}{16}, 2\frac{74}{125}$

5. Przepisz i uzupełnij. Zamiast znaku zapytania wstaw odpowiednią liczbę.

a) $\frac{?}{5} = 0,8$

b) $\frac{3}{?} = 0,75$

c) $\frac{?}{20} = 0,45$

d) $\frac{11}{?} = 0,44$

e) $\frac{?}{50} = 0,86$

f) $\frac{8}{?} = 0,32$

Każdy ułamek zwykły można zapisać w postaci dziesiętnej. Taki zapis nazywa się **rozwinieciem dziesiętnym** ułamka zwykłego.

Przykład 4

Znajdźmy rozwinięcie dziesiętne ułamka $\frac{5}{11}$.

$$\begin{array}{r} \frac{5}{11} = 5 : 11 = \\ 0,4\,5\,4\,5\,4\ldots \\ \underline{5,0 : 11} \\ - 0 \\ \hline 5\,0 \\ - 4\,4 \\ \hline 6\,0 \\ - 5\,5 \\ \hline 5\,0 \\ - 4\,4 \\ \hline 6\,0 \\ - 5\,5 \\ \hline 5\,0 \\ - 4\,4 \\ \hline 6\ldots \\ = 0,45454\ldots \end{array}$$

Dzielimy sposobem pisemnym licznik przez mianownik ułamka.

W trakcie dzielenia zauważamy, że nie ma możliwości zakończenia dzielenia i że w ilorazie powtarza się pewna grupa cyfr, która będzie tak się powtarzała w nieskończoność. Czyli w rozwinięciu dziesiętnym ułamka $\frac{5}{11}$ jest nieskończona liczba cyfr.

Rozwinięcie takiego ułamka zapisujemy z wielokropkiem (czyli z trzema kropkami) po ostatniej zapisanej przez nas cyfrze.



O ułamkach, których rozwinięcie dziesiętne ma skończoną liczbę cyfr, mówimy, że mają **rozwinięcie dziesiętne skończone**, np. $\frac{5}{16} = 0,3125$.

O ułamkach, których rozwinięcie dziesiętne ma nieskończoną liczbę cyfr, mówimy, że mają **rozwinięcie dziesiętne nieskończone**, np. $\frac{12}{99} = 0,121212\ldots$.

6. Poniższe ułamki mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone. Zapisz je. W tym celu wykonaj dzielenie licznika przez mianownik do czterech cyfr po przecinku.

a) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{1}{9}, \frac{8}{13}$

b) $\frac{5}{12}, \frac{1}{15}, \frac{10}{17}, \frac{20}{21}, \frac{52}{53}$

7. Znajdź rozwinięcie dziesiętne nieskończone podanego ułamka, a następnie zaokrąglij to rozwinięcie do części setnych. Zastanów się, ile cyfr po przecinku musisz zapisać w ilorazie podczas dzielenia.

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{7}{15}$

c) $\frac{8}{9}$

d) $\frac{15}{26}$

Więcej na temat

Aby stwierdzić, czy ułamek (nieskracalny) ma rozwinięcie dziesiętne skończone, czy nieskończone, należy sprawdzić, przez jakie liczby pierwsze jest podzielny mianownik tego ułamka.

Jeżeli jedynymi liczbami pierwszymi, przez które dzieli się mianownik, są liczby 2 i 5, to ułamek ma rozwinięcie skończone.

Pozostałe ułamki (te, których mianownik jest podzielny przez inne liczby pierwsze oprócz 2 i 5) mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone.

8. Podaj przykład pięciu ułamków zwykłych, które mają rozwinięcie dziesiętne skończone oraz pięciu, które mają rozwinięcie dziesiętne nieskończone. Staraj się, aby podane przez ciebie przykłady nie występowały wcześniej w podręczniku.

Zadania

- Przedstaw ułamki w postaci dziesiętnej i porównaj je. Dla każdej pary ułamków zamiast pytajnika wpisz znak $<$, $=$ lub $>$.

a) $\frac{3}{5} ? 0,6$

$0,4 ? \frac{1}{2}$

$0,45 ? \frac{3}{4}$

$0,125 ? \frac{8}{25}$

$\frac{9}{50} ? 0,16$

b) $2,18 ? 2\frac{9}{20}$

$4\frac{5}{8} ? 4,625$

$8,8 ? 8\frac{13}{20}$

$1\frac{3}{250} ? 1,004$

$6,132 ? 6\frac{1}{8}$

c) $4\frac{7}{8} ? 4,625$

$5\frac{1}{25} ? 5,4$

$0,5 ? \frac{17}{40}$

$3,45 ? 3\frac{9}{200}$

$\frac{321}{500} ? 0,0642$

- Wśród podanych trzech liczb znajdź liczbę największą i najmniejszą. Zapisz je w zeszycie.

a) $\frac{4}{5}$, $0,82$, $\frac{5}{8}$

b) $0,43$, $\frac{21}{500}$, $0,403$

c) $0,98$, $\frac{47}{50}$, $\frac{7}{8}$

d) $0,01$, $0,007$, $\frac{1}{125}$

e) $\frac{23}{25}$, $0,9$, $\frac{7}{8}$

f) $\frac{9}{25}$, $\frac{7}{20}$, $0,38$

- Jaki ułamek zwykły należy wpisać zamiast znaku zapytania, aby nierówność była prawdziwa?

a) $0,5 < ? < 0,6$

b) $0,1 < ? < 0,13$

c) $0,72 < ? < 0,73$

- Jaki ułamek dziesiętny należy wpisać zamiast znaku zapytania, aby nierówność była prawdziwa?

a) $\frac{3}{50} < ? < \frac{2}{25}$

b) $\frac{3}{4} < ? < \frac{4}{5}$

c) $\frac{1}{8} < ? < \frac{1}{4}$

- Zapisz podaną liczbę w postaci dziesiętnej i zaokrąglij ją do części setnych.

a) $2\frac{11}{16}$ b) $5\frac{241}{250}$ c) $\frac{1279}{5000}$

- Podaj dziesiątą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego ułamka. Czy w tym celu musisz wykonywać dzielenie, aż otrzymasz 10 cyfr po przecinku?

a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{8}{11}$ c) $\frac{1}{6}$

- Znajdź i zapisz rozwinięcie dziesiętne ułamka (do siedmiu cyfr po przecinku). Użyj kalkulatora.

a) $\frac{35}{75}$ b) $\frac{80}{123}$ c) $\frac{1}{501}$

- Porównaj podane liczby.

a) $\frac{5}{6}$ i 0,83 b) 0,36 i $\frac{4}{11}$ c) $\frac{7}{12}$ i 0,58

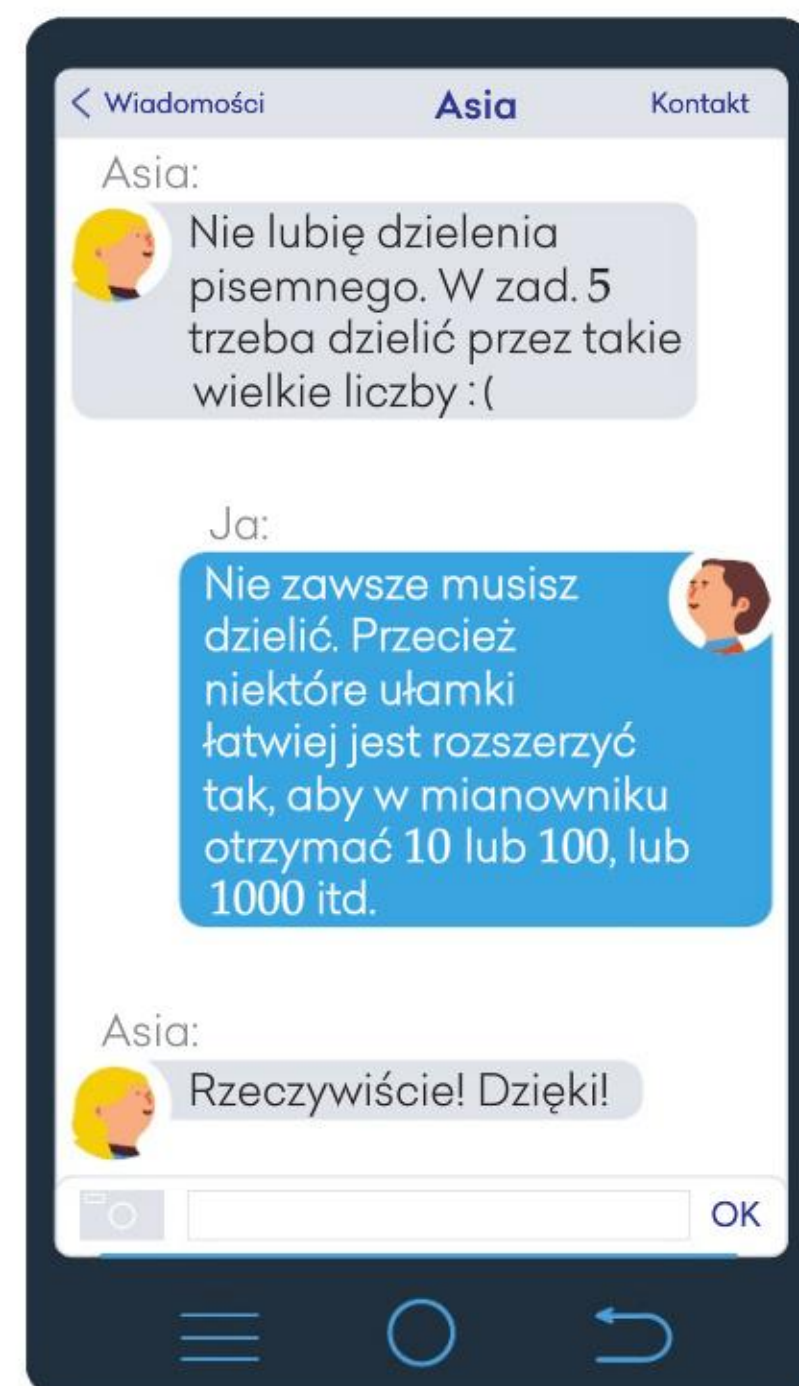
- Wśród podanych ułamków znajdź pary ułamków równych i zapisz je przy użyciu znaku =. Ile ułamków zwykłych, a ile dziesiętnych pozostało bez pary?

$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{33}{50}$	$\frac{7}{250}$	$\frac{21}{200}$	$\frac{1}{500}$
0,52	0,028	0,105	0,28	0,375	0,66	0,002	0,45

- Zapisz wszystkie liczby w postaci dziesiętnej i oblicz ich średnią arytmetyczną.

a) $\frac{3}{4}$, 0,28, $\frac{7}{20}$ b) $\frac{23}{25}$, $\frac{4}{5}$, 0,82, $\frac{11}{50}$
c) 0,36, $\frac{1}{8}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{3}{5}$, 0,7 d) $\frac{1}{20}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{50}$, $3\frac{1}{8}$, $4\frac{1}{25}$

- Do restauracji w Londynie zakupiono cztery rodzaje oliwy w różnych słojach, o pojemnościach: 0,5 galona, $\frac{4}{9}$ galona, $\frac{8}{15}$ galona i $\frac{7}{12}$ galona. Oblicz, w którym słoju znajduje się najwięcej, a w którym najmniej oliwy.



Ciekawe!

Galon to miara objętości płynów i substancji sypkich stosowana w krajach anglosaskich.
galon angielski = 4,54609 litra

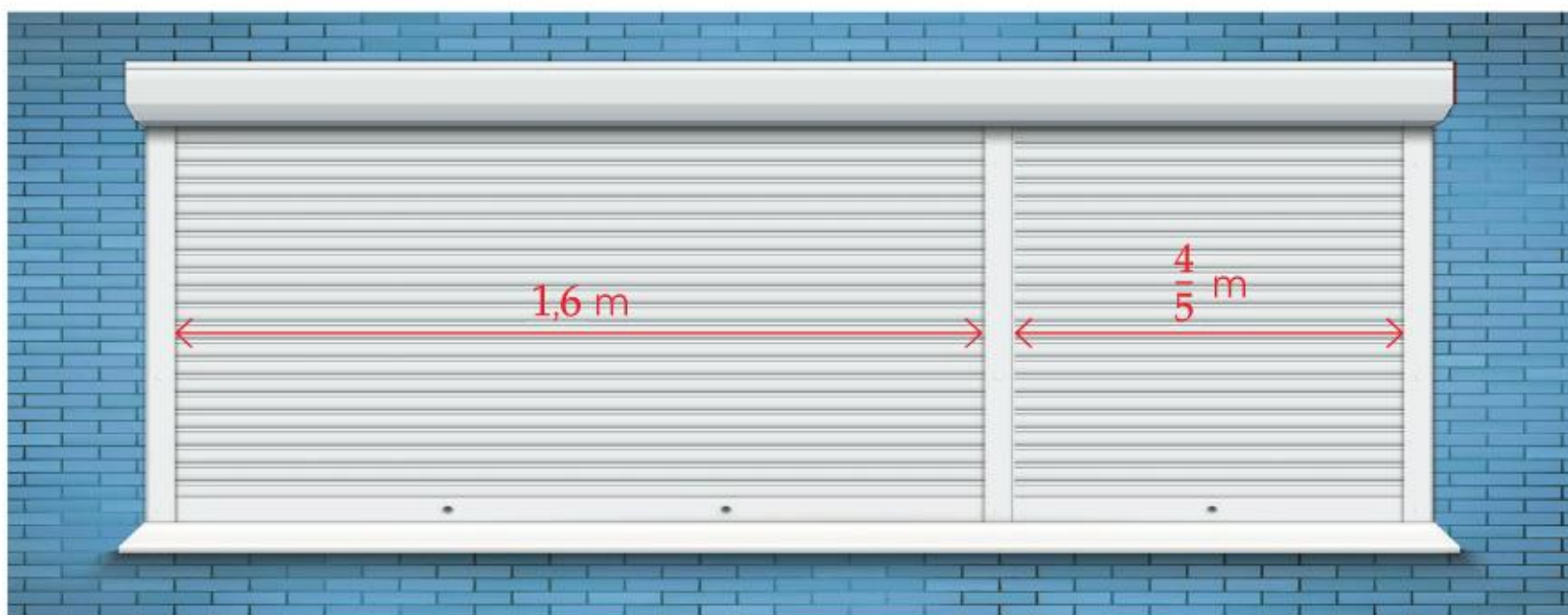
2.14 Działania na ułamkach zwykłych i ułamkach dziesiętnych

Podejmij temat

Na oknie zamontowano dwie zewnętrzne rolety.



Czy potrafisz obliczyć szerokość okna, jeśli szerokości rolet są takie, jak podano na zdjęciu?



Jeżeli w wyrażeniu występują ułamki dwojakiemu rodzaju (zwykłe i dziesiętne), to przed wykonaniem obliczeń należy zamienić je tak, aby otrzymać liczby w jednakowej postaci (albo same ułamki zwykłe, albo same dziesiętne). Czasami nie ma znaczenia, na który rodzaj ułamków się zdecydujemy, bo w obu przypadkach obliczenia będą miały podobny stopień trudności. Czasami jednak wybór ma znaczenie.

Przykład 1

Wykonajmy działanie.

a) $5\frac{3}{4} + 7,487$

b) $1\frac{7}{25} \cdot 7,5$

a) Sposób I

Obie liczby zapisujemy w postaci ułamków zwykłych, sprowadzamy je do wspólnego mianownika i dodajemy.

$$\begin{aligned} 5\frac{3}{4} + 7\frac{487}{1000} &= \\ &= 5\frac{3 \cdot 250}{4 \cdot 250} + 7\frac{487}{1000} = \\ &= 5\frac{750}{1000} + 7\frac{487}{1000} = \\ &= 12\frac{1237}{1000} = 13\frac{237}{1000} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 750 \\ + 487 \\ \hline 1237 \end{array}$$

Sposób II

Obie liczby zapisujemy w postaci ułamków dziesiętnych i dodajemy (np. sposobem pisemnym).

$$5,75 + 7,487 = 13,237$$

$$\begin{array}{r} 0,75 \\ 3,0 : 4 \\ - 28 \\ \hline 20 \\ - 20 \\ \hline = = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,75 \\ + 7,487 \\ \hline 13,237 \end{array}$$

b) Sposób I

Obie liczby zapisujemy w postaci ułamków zwykłych i je mnożymy.

$$1\frac{7}{25} \cdot 7\frac{5}{10} = \frac{16}{1} \frac{32}{25} \cdot \frac{75}{10} \frac{3}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$$

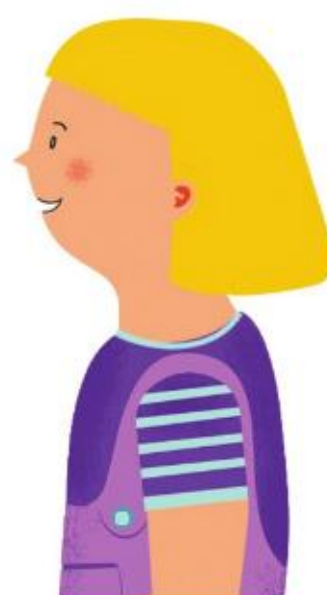
Sposób II

Obie liczby zapisujemy w postaci ułamków dziesiętnych i je mnożymy (np. sposobem pisemnym).

$$1\frac{7}{25} \cdot 7,5 = 1\frac{28}{100} \cdot 7,5 = 1,28 \cdot 7,5 = 9,6$$

$$\begin{array}{r} 1,28 \\ \cdot 7,5 \\ \hline 640 \\ + 896 \\ \hline 9,600 \end{array}$$

Łatwiej i szybciej dodaje się i odejmuje ułamki dziesiętne, bo ułamki zwykłe trzeba sprowadzać do wspólnego mianownika.



Też tak uważam. Z kolei mnożyć i dzielić łatwiej jest ułamki zwykłe, bo można je skracać.

Przeanalizujemy poniższe działania.

$$\frac{2}{3} + 0,8 \quad 7,45 - \frac{1}{6} \quad 8\frac{5}{12} \cdot 0,25 \quad 1,8 : \frac{6}{11}$$

Wszystkie występujące w nich ułamki zwykłe mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone. Zatem obliczenia musimy wykonywać, korzystając z ułamków zwykłych. Gdybyśmy bowiem zdecydowali się na postać dziesiętną tych ułamków, do obliczeń musielibyśmy użyć ułamków zaokrąglonych (czyli niedokładnych), a wtedy otrzymane wyniki byłyby również niedokładne.



Jeżeli ułamek zwykły ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone, to w obliczeniach musi on występować jako ułamek zwykły.

1. Oblicz sumy i różnice ułamków.

a) $1\frac{1}{4} + 0,9$

$$3,15 + 2\frac{5}{6}$$

$$0,8 + \frac{5}{9}$$

$$4\frac{3}{5} + 5,78$$

b) $2\frac{2}{7} - 1,2$

$$5,62 - 4\frac{3}{20}$$

$$3,74 - 2\frac{1}{8}$$

$$6\frac{1}{25} - 0,003$$

c) $5,3 + 1\frac{1}{7}$

$$2\frac{1}{3} + 8,6$$

$$7,4 + 4\frac{5}{8}$$

$$6\frac{7}{50} + 3,181$$

d) $4,45 - 1\frac{4}{5}$

$$0,8 - \frac{13}{40}$$

$$2\frac{5}{6} - 1,15$$

$$3\frac{3}{4} - 2,548$$



Niektóre liczby łatwo jest mnożyć przez ułamki zwykłe o liczniku 1. Mnożenie przez $\frac{1}{2}$ to dzielenie przez 2, mnożenie przez $\frac{1}{3}$ to dzielenie przez 3 itd., zatem:

$$0,48 \cdot \frac{1}{2} = 0,48 : 2 = 0,24$$

$$0,055 \cdot \frac{1}{5} = 0,055 : 5 = 0,011$$

2. Oblicz iloczyny i ilorazy ułamków.

a) $2\frac{2}{3} \cdot 1,2$

$$0,49 \cdot 2\frac{6}{7}$$

$$0,32 \cdot 5\frac{5}{8}$$

b) $0,56 : 1\frac{7}{25}$

$$0,16 : 1\frac{19}{21}$$

$$\frac{3}{40} : 0,9$$

c) $8\frac{1}{6} : 0,42$

$$0,63 \cdot 6\frac{3}{7}$$

$$4,8 : 2\frac{2}{5}$$

3. Wykonaj działania.

a) $0,63 \cdot \left(1 - \frac{5}{7}\right)$

$$5\frac{3}{4} - 2,4 \cdot \frac{2}{3}$$

$$6,3 \cdot \frac{1}{3} + 7\frac{3}{4}$$

$$2\frac{2}{5} : 4,8 + \frac{3}{4}$$

b) $1\frac{24}{25} - 3\frac{1}{4} \cdot 0,2$

$$2,4 : \frac{6}{7} + 1,3$$

$$\left(1\frac{1}{3} - 1\frac{2}{15}\right) \cdot 2,5$$

$$\left(7,5 - 6\frac{1}{4}\right) \cdot 0,48$$

c) $\left(3,5 - 2\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{9}{26}$

$$\frac{5}{21} \cdot 2,8 \cdot \frac{3}{5}$$

$$\frac{5}{8} : 6\frac{1}{4} \cdot 0,72$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 0,2^2$$

Zadania

- Kilogram orzechów kosztuje 20,80 zł. Ile trzeba zapłacić za podaną ilość orzechów?
a) $\frac{1}{2}$ kg b) $\frac{1}{4}$ kg c) $\frac{3}{4}$ kg d) $2\frac{1}{4}$ kg
- Za $\frac{3}{5}$ kg mięsa trzeba zapłacić 9,45 zł. Ile kosztuje 1 kg tego mięsa?
- Litry śmietany waży 1,08 kg, a litr mleka 1,02 kg. Ile waży $1\frac{3}{4}$ l śmietany, a ile $4\frac{1}{4}$ l mleka?
- Bochenek chleba ważył $1\frac{1}{3}$ kg, ale rodzina zjadła na śniadanie 0,375 kg. Ile chleba zostało?
- Ania, idąc do szkoły, pokonuje 2,15 km. W porównaniu z trasą Ani droga Ewy jest o $\frac{1}{8}$ km dłuższa, a Marty – dłuższa o $1\frac{3}{4}$ km. Jaką odległość do szkoły ma Ewa, a jaką – Marta?
- Jeśli do $2\frac{1}{8}$ l wody dolejemy 0,725 l soku, to ile litrów napoju otrzymamy? Ile szklanek o pojemności 0,15 l można nim napełnić?
- Rozwiąż równanie.
a) $x + \frac{4}{9} = 1,1$ b) $x - 1\frac{5}{8} = 0,32$ c) $4,6 - x = 1\frac{1}{3}$
d) $1\frac{5}{9} \cdot x = 0,8$ e) $3,6 : x = 2\frac{4}{5}$ f) $x : 5,6 = 1\frac{4}{21}$

2.15 Ułamki dziesiętne dodatnie i ujemne

Podejmij temat



Mapy, na których ukształtowanie terenu i jego wysokość względem poziomu morza przedstawia się za pomocą określonych kolorów, nazywamy mapami hipsometrycznymi. Poniżej znajduje się fragment hipsometrycznej mapy Polski.



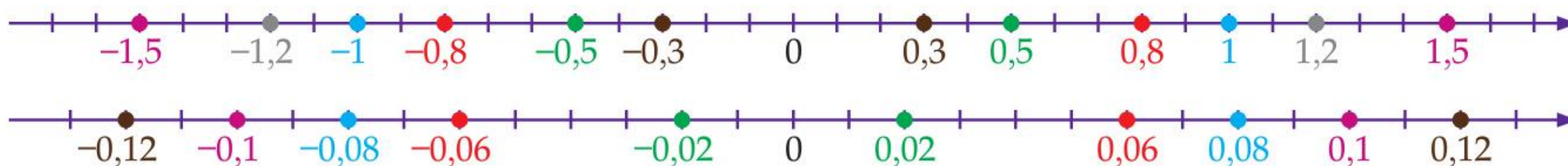
Przyjrzyj się liczbom na mapie. Jak sądzisz, co oznaczają? Jakie liczby są na obszarach oznaczonych kolorem ciemnozielonym? Jak się nazywa taki obszar?



Podobnie jak w przypadku liczb naturalnych, również dla każdego ułamka dziesiętnego istnieje liczba przeciwna. Liczbami przeciwnymi są np. pary ułamków:

2,56 i -2,56, -12,1 i 12,1, 18,9 i -18,9, -0,145 i 0,145.

Jak pamiętamy, liczby przeciwne na osi liczbowej znajdują się w tej samej odległości od zera, ale po przeciwnych jego stronach. Zgodnie z tą zasadą umieszczamy również na osi liczbowej ujemne ułamki dziesiętne.



Jeżeli wyobrazimy sobie odpowiedni fragment osi liczbowej z dodatnimi ułamkami dziesiętnymi, to możemy rysować dowolne, potrzebne nam części osi liczbowych.



Mając w pamięci oś liczbową z zaznaczonymi na niej ułamkami dziesiętnymi, możemy je porównywać: $-1,5 < -0,8$, $-0,13 < -0,02$, $-3,31 > -3,32$, $-3,28 > -3,35$.

To jest całkiem proste: jeśli mam porównać liczby ujemne, to najpierw porównuję liczby bez minusów.

Czyli porównujesz ich wartości bezwzględne.



Tak, a ponieważ z liczbami ujemnymi jest na odwrót, to też na odwrót stawiam znak nierówności.



Przykład 1

Porównajmy podane liczby.

a) $-8,5$ i $-7,28$

b) $-0,168$ i $-0,19$

a) $8,5 > 7,28$

$-8,5 < -7,28$

b) $0,168 < 0,19$

$-0,168 > -0,19$

Porównujemy wartości bezwzględne liczb $-8,5$ i $-7,28$.

Miedzy porównywane liczby ujemne wstawiamy znak przeciwny do tego, który wstawiliśmy dla wartości bezwzględnych.

Porównujemy wartości bezwzględne liczb $-0,168$ i $-0,19$.

Miedzy porównywane liczby ujemne wstawiamy znak przeciwny do tego, który wstawiliśmy dla wartości bezwzględnych.

1. Porównaj podane pary liczb.

a) $-0,15$ i $-0,6$

$-3,9$ i $-3,74$

$-2,361$ i $-2,38$

b) $-4,5$ i $-2,8$

$-0,273$ i $-0,52$

$-1,84$ i $-6,3$

c) -9 i $-8,4$

$-6,57$ i $-7,4$

$-3,82$ i -2

Przypomnijmy sobie dodawanie liczb całkowitych. Sumę traktowaliśmy jako rezultat zdobytych plusów i minusów.

$-6 + (-4) = -10$

ponieważ

----- i -----

to razem

$-6 + 4 = -2$

ponieważ

----- i + + + +

to razem

--

$6 + (-4) = 2$

ponieważ

+ + + + + i -----

to razem

+ +

Gdy dodajemy dwie liczby ujemne, to można na chwilę zakryć minusy, dodać liczby i przy wyniku postawić minus.



Chyba nie powinniśmy mówić: zakrywamy minus, tylko: obliczamy wartość bezwzględną...

Przykład 2

Obliczmy.

a) $-36 + (-12)$ b) $-8,3 + (-1,5)$ c) $-3,58 + (-6,93)$

a) $-36 + (-12) =$

Obliczamy wartości bezwzględne składników i dodajemy je:
 $36 + 12 = 48$.

$= -48$

Do wyniku dopisujemy minus.

b) $-8,3 + (-1,5) =$

Obliczamy wartości bezwzględne składników i dodajemy je:
 $8,3 + 1,5 = 9,8$.

$= -9,8$

Do wyniku dopisujemy minus.

c) $-3,58 + (-6,93) =$

Obliczamy wartości bezwzględne składników i dodajemy je (w pamięci lub sposobem pisemnym): $3,58 + 6,93 = 10,51$.

$= -10,51$

Do wyniku dopisujemy minus.



W taki sam sposób wykonujemy odejmowanie typu $-5 - 7$, ponieważ $-5 - 7 = -5 + (-7)$. Jeżeli taka zamiana odejmowania na dodawanie pomaga nam w obliczeniach, warto ją zrobić. Oczywiście tej zamiany nie musimy zapisywać, można ją wykonać w pamięci.

I odwrotnie – działania takie, jak pokazano w przykładzie 2, można zapisać, opuszczając nawiasy, czyli:

a) $-36 + (-12) = -36 - 12$

b) $-8,3 + (-1,5) = -8,3 - 1,5$

c) $-3,38 + (-6,93) = -3,38 - 6,93$

Oczywiście, sposób obliczania jest przy obu zapisach taki sam.

2. Oblicz.

a) $-4,2 + (-1,13)$

$-7,54 + (-0,2)$

$-2,5 + (-4,3)$

$-0,63 + (-2,25)$

$-7,47 + (-6,1)$

b) $-2,3 - 0,6$

$-6,25 - 4,3$

$-0,4 - 3,2$

$-5,7 - 6,3$

$-2,41 - 0,35$

Gdy dodajemy liczbę ujemną i dodatnią, to też możemy na chwilę zakryć minus, od większej liczby odjąć mniejszą, a przy wyniku postawić taki znak, jaki był wcześniej przy większej z odejmowanych liczb.



Już ci mówiłam...
Nie: zakrywamy minus,
tylko: obliczamy wartość
bezwzględną... Pamiętaj!



Podobnie jak w przykładzie 2 działania można zapisywać bez użycia nawiasów, czyli

$$c) 5,7 + (-8,6) = 5,7 - 8,6$$

Zasadą opuszczania nawiasów możemy się też posłużyć do wykonywania odejmowania typu:

$$3 - 10,$$

$$\text{ponieważ } 3 - 10 = 3 + (-10)$$

oraz typu:

$$-7 - (-6),$$

$$\text{ponieważ } -7 - (-6) = -7 + 6.$$

Przykład 3

Obliczmy.

$$a) -13 + 58$$

$$b) -2,9 + 0,6$$

$$c) 5,7 + (-8,6)$$

$$a) -13 + 58 =$$

Obliczamy wartości bezwzględne składników (dostajemy 13 i 58) i od większej otrzymanej liczby odejmujemy mniejszą: $58 - 13 = 45$.

$$= 45$$

Patrzymy, jaki znak jest zapisany przed większą z tych liczb w pierwotnym działaniu. Jest to +, zatem wynik też jest dodatni (plusa nie musimy zapisywać).

$$b) -2,9 + 0,6 =$$

Obliczamy wartości bezwzględne składników (2,9 i 0,6) i od większej otrzymanej liczby odejmujemy mniejszą: $2,9 - 0,6 = 2,3$.

$$= -2,3$$

Patrzymy, jaki znak jest zapisany przed większą z tych liczb w pierwotnym działaniu. Jest to -, zatem wynik też jest ujemny. Przed otrzymaną różnicą stawiamy znak minus.

$$c) 5,7 + (-8,6) =$$

Obliczamy wartości bezwzględne składników (5,7 i 8,6) i od większej otrzymanej liczby odejmujemy mniejszą (w pamięci lub sposobem pisemnym): $8,6 - 5,7 = 2,9$.

$$= -2,9$$

Patrzymy, jaki znak jest zapisany przed większą z tych liczb w pierwotnym działaniu. Jest to -, zatem wynik też jest ujemny. Przed otrzymaną różnicą stawiamy znak minus.

3. Oblicz.

$$a) -4,7 + 3,5$$

$$-1,6 + 5,9$$

$$-7,85 + 3,21$$

$$-2,5 + 4,1$$

$$b) 1,4 + (-5,6)$$

$$5,38 + (-2,17)$$

$$6,52 + (-1,81)$$

$$4,75 + (-4,2)$$

$$c) 3,3 - 10,6$$

$$2,7 - 3,94$$

$$0,3 - 2,17$$

$$3,42 - 8,5$$

$$d) -5,4 - (-6,9)$$

$$-2,63 - (-0,4)$$

$$-1,8 - (-3,5)$$

$$-4,27 - (-3,17)$$

Podobnie jak w przypadku mnożenia i dzielenia liczb całkowitych, również dla ułamków dziesiętnych prawdziwe są poniższe zasady.

Iloczyn i iloraz:

- dwóch ujemnych ułamków dziesiętnych jest liczbą dodatnią,
- ułamka dziesiętnego ujemnego i ułamka dziesiętnego dodatniego (lub odwrotnie) jest liczbą ujemną.

$$-2,8 \cdot (-3,45) = 9,66 \quad \text{oraz} \quad 17,2 : (-0,5) = -34,4$$

4. Oblicz.

a) $-2,4 \cdot 0,02$
 $5,1 \cdot (-0,6)$
 $-3,54 \cdot 0,07$

b) $-4,3 \cdot (-7)$
 $-2,8 \cdot (-0,62)$
 $-7,8 \cdot (-0,34)$

c) $6,5 : (-5)$
 $-0,84 : 0,4$
 $24,5 : (-7)$

d) $0,67 \cdot (-0,5)$
 $-1,5 : (-0,6)$
 $-1,13 \cdot (-0,8)$

Zadania

- Ustaw podane liczby w kolejności rosnącej.

-2,7	-7,56	-3,8	-9,12	-3,156	-7,7	-9,8	-2,34
------	-------	------	-------	--------	------	------	-------

- Podaj pięć liczb większych od -4 i jednocześnie mniejszych od -2 .

- Liczbę $-23,86$ powiększ o $54,9$, a wynik zmniejsz o $9,9$.

- Oblicz:

- a) sumę wszystkich liczb całkowitych większych od $-4,75$ i jednocześnie mniejszych od $3,9$,
b) iloczyn wszystkich liczb całkowitych większych od $-16,56$ i jednocześnie mniejszych od $9,4$.

- Wykonaj potęgowanie.

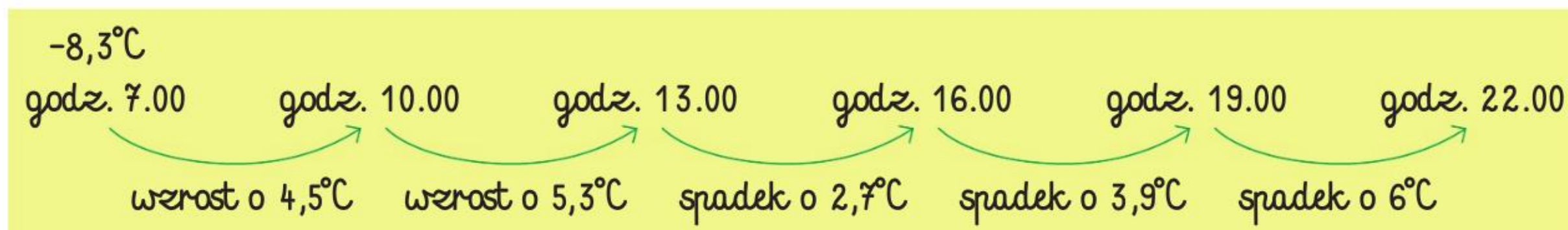
a) $(-0,8)^2$ b) $(-0,07)^2$ c) $(-0,4)^3$ d) $(-1,2)^3$
 $(-2,7)^2$ $(-3,02)^2$ $(-0,03)^3$ $(-0,002)^3$

- Jaką liczbę należy dodać do $-5,62$, aby otrzymać podaną liczbę?

a) 0 b) 10 c) 4,8 d) -6



- Ile jest równa suma liczb $-2,7$ i $0,56$ pomnożona przez $-5,8$?
 A. $-18,908$ B. $-12,412$ C. $12,412$ D. $18,908$
- Ile jest równy iloraz liczby $-0,47$ i liczby $-0,5$ zmniejszony o 2 ?
 A. $-2,94$ B. $-2,235$ C. $-1,765$ D. $-1,06$
- Termometr elektroniczny pokazuje wartości temperatur z dokładnością do dziesiątych części stopnia Celsjusza. Marcin odczytywał wskazania termometru i zapisywał zmiany, jakie nastąpiły. Oto notatki Marcina:



- a) Jakie temperatury odczytał Marcin?
 b) Ile razy Marcin odczytał temperaturę dodatnią, a ile razy – ujemną?
 c) O godzinie 13.00 było cieplej niż o godzinie 7.00. O ile stopni?
 d) O godzinie 19.00 było chłodniej niż o godzinie 10.00. O ile stopni?
 e) Czy o godzinie 22.00 było cieplej, czy chłodniej niż o godzinie 7.00? O ile stopni?
- Gra polega na rzucaniu kostką i monetą. W każdym ruchu gracz rzuca kostką, a następnie monetą. Kostka wskazuje liczby od 1 do 6. Jeżeli przy rzucie monetą wypadnie orzeł, liczbę oczek na kostce należy pomnożyć przez $0,6$, a jeżeli wypadnie reszka, to trzeba pomnożyć przez $-0,4$. Wyniki otrzymane w poszczególnych ruchach należy na koniec rozgrywki zsumować.
- a) Amelka i Jacek zapisali wyniki trzech ruchów w tabelce. Kto wygrał tę rozgrywkę? Ile miał punktów przewagi?
-  b) Zagraj w tę grę z kolegą lub koleżanką. Wykonajcie po 5 ruchów. Zanotujcie w zeszytach wyniki i obliczcie łączną sumę punktów. Na koniec obliczcie, ile wynosiła przewaga osoby wygranej.

Amelka	Jacek
5 oczek, reszka	1 oczko, orzeł
2 oczka, orzeł	5 oczek, orzeł
3 oczka, orzeł	6 oczek, reszka

- Oblicz. Pamiętaj o poprawnej kolejności wykonywania działań.
- a) $-2 - (-4,3) + 7,92$ b) $0,2 \cdot (-4,6) : (-0,1)$ c) $-5 + (-0,8) \cdot (-4)$ d) $4,052 - 1,57 - 6,5$
 $0,5 - 8,48 + 6,7$ $2,25 : (-0,5) : 0,5$ $7 - 3,3 \cdot 3$ $-0,54 : (-0,9) \cdot (-0,4)$
 $7,4 + (-3,5) - 1,1$ $-2,6 \cdot 0,2 : (-1,3)$ $-0,4 + (-0,6)^2$ $(-4,8 + 6) : (-0,3)$
- Oblicz.
- a) $|4,32 - 5,1|$ b) $|-0,7 - 1,64|$ c) $|-9| + (-6,42)$ d) $|-2,8| - |3,6| \cdot |-0,4|$
 e) $|-3,1 \cdot 0,5 + 1,18|$ f) $|-1,3| \cdot 0,7 - |-1|$ g) $|-8,6| \cdot |2,1| \cdot |-1|$ h) $|2,7 - 3,4| \cdot |-5,58 + 3,78|$

2.16 Ułamki zwykłe dodatnie i ujemne

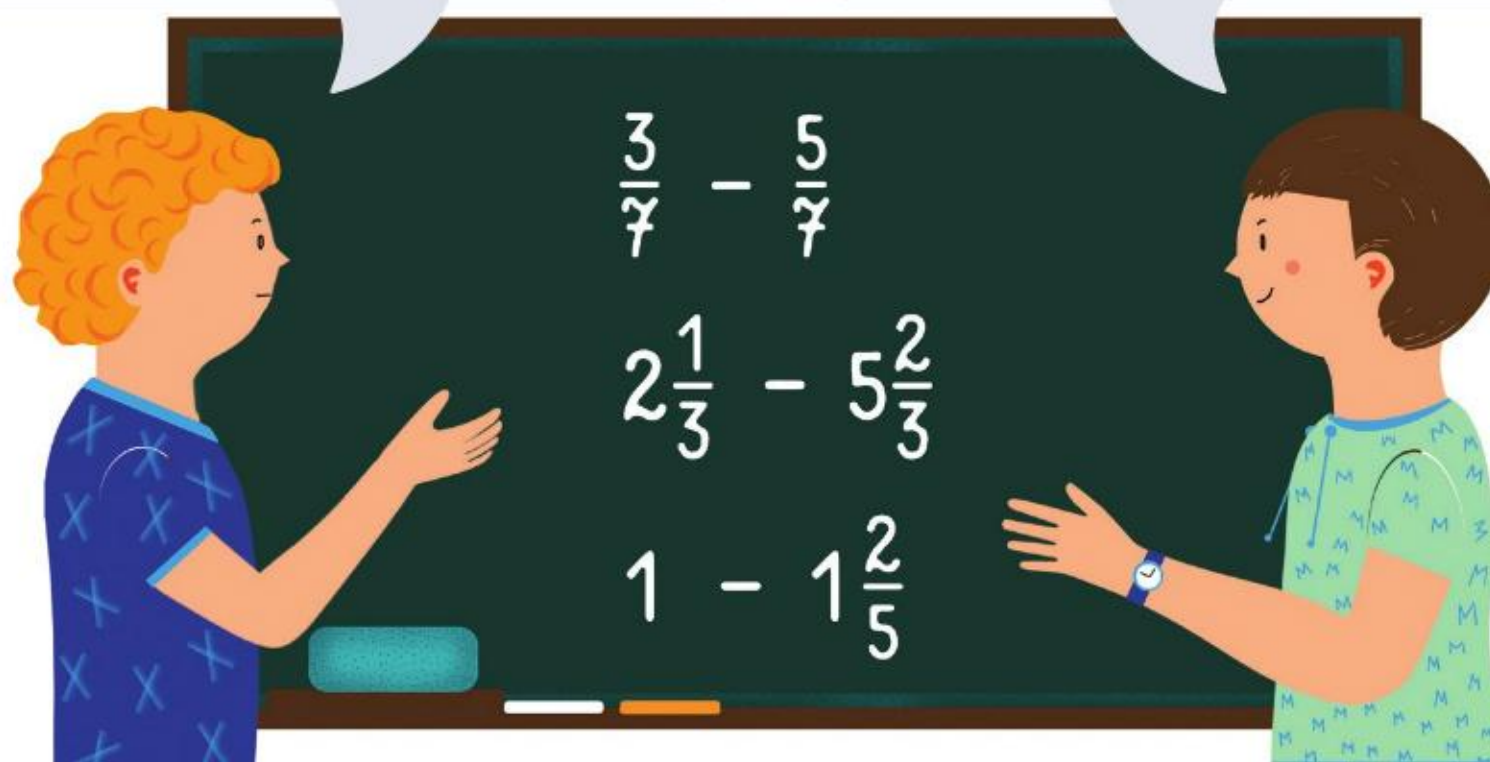
Podejmij temat



Czy potrafisz stwierdzić, jakiego rodzaju liczby są wynikami tych działań?

Ktoś się chyba pomylił.
Przecież tego nie da się obliczyć!

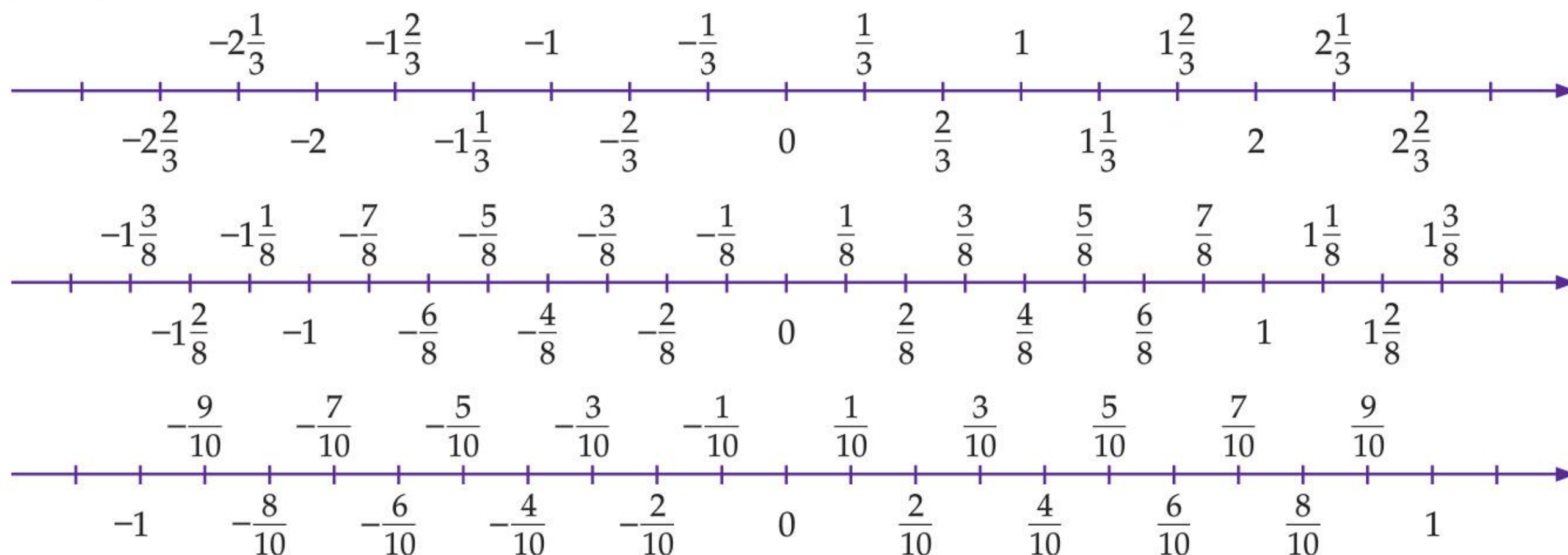
To samo mówiłeś kiedyś,
gdy miałeś obliczyć $2 - 5$.
A okazało się, że jednak można :)



Podobnie jak w przypadku liczb naturalnych oraz ułamków dziesiętnych, także dla każdego ułamka zwykłego oraz dla każdej liczby mieszanej istnieje liczba przeciwna. Liczbami przeciwnymi są np. pary:

$\frac{3}{7}$ i $-\frac{3}{7}$, $-2\frac{5}{9}$ i $2\frac{5}{9}$, $4\frac{8}{15}$ i $-4\frac{8}{15}$.

Dodatnie ułamki zwykłe wraz z liczbami do nich przeciwnymi układają się na osi liczbowej w następujący sposób:



Zauważ, że w miejscu liczby $\frac{2}{8}$ można było wpisać liczbę $\frac{1}{4}$, w miejscu liczby $\frac{5}{10}$ liczbę $\frac{1}{2}$ itp.

1. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej punkty o podanych współrzędnych.
Dla ułatwienia ułamki z punktu a) możesz rozszerzyć do mianownika 6, z punktu b) – do mianownika 4, a z punktu c) – do mianownika 15.

a)	0	1	-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
b)	0	1	-1	2	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{4}$	$-1\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{4}$			
c)	0	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{7}{15}$	$-\frac{11}{15}$	$-\frac{14}{15}$			

Zasady dodawania i odejmowania ułamków dziesiętnych dodatnich i ujemnych, które poznaliśmy w temacie 2.15, dotyczą również ułamków zwykłych i liczb mieszanych.

Przykład 1

Obliczmy.

$$a) -\frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$b) \frac{1}{6} + \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$c) -1\frac{1}{3} + 7\frac{4}{5}$$

$$d) 1\frac{4}{7} + \left(-3\frac{1}{2}\right)$$

$$a) -\frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right) =$$

$$= -\frac{10}{15} + \left(-\frac{12}{15}\right) =$$

$$= -\frac{22}{15} = -1\frac{7}{15}$$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika, który wynosi 15.

Obliczamy wartości bezwzględne składników (czyli mamy $\frac{10}{15}$ i $\frac{12}{15}$), dodajemy je,

a przed wynikiem stawiamy znak $-$.

$$b) \frac{1}{6} + \left(-\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{12} + \left(-\frac{9}{12}\right) =$$

$$= -\frac{7}{12}$$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika, który wynosi 12.

Obliczamy wartości bezwzględne składników ($\frac{2}{12}$ i $\frac{9}{12}$) i od większej z nich odejmujemy mniejszą: $\frac{9}{12} - \frac{2}{12}$.

Ponieważ większą wartością bezwzględną jest $\frac{9}{12}$, a przed liczbą $\frac{9}{12}$ w działaniu znajdował się znak $-$, to stawiamy go również w wyniku.

$$\text{c) } -1\frac{1}{3} + 7\frac{4}{5} =$$

$$= -1\frac{5}{15} + 7\frac{12}{15} =$$

$$= 6\frac{7}{15}$$

Części ułamkowe liczb mieszanych sprowadzamy do wspólnego mianownika, który wynosi 15.

Obliczamy wartości bezwzględne składników ($1\frac{5}{15}$ i $7\frac{12}{15}$) i od większej z nich odejmujemy mniejszą: $7\frac{12}{15} - 1\frac{5}{15}$.

Ponieważ większą wartością bezwzględną jest $7\frac{12}{15}$, a przed liczbą $7\frac{12}{15}$ w działaniu znajdował się znak +, to wynik również jest dodatni.

$$\text{d) } 1\frac{4}{7} + \left(-3\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 1\frac{8}{14} + \left(-3\frac{7}{14}\right) =$$

$$= 1\frac{8}{14} + \left(-2\frac{21}{14}\right) =$$

$$= -1\frac{13}{14}$$

Części ułamkowe liczb mieszanych sprowadzamy do wspólnego mianownika, który wynosi 14.

Obliczamy wartości bezwzględne składników ($1\frac{8}{14}$ i $3\frac{7}{14}$) i od większej z nich odejmujemy mniejszą: $3\frac{7}{14} - 1\frac{8}{14}$.

Tutaj widzimy, że nie jest możliwe odjęcie części ułamkowych,

zatem zmieniamy zapis liczby $3\frac{7}{14}$ na $2\frac{21}{14}$

i wykonujemy odejmowanie: $2\frac{21}{14} - 1\frac{8}{14}$.

Ponieważ większą wartością bezwzględną jest $3\frac{7}{14}$, a przed liczbą $3\frac{7}{14}$ w działaniu znajdował się znak -, to również wynik zapisujemy jako ujemny.

Przy dodawaniu i odejmowaniu ułamków zwykłych dodatnich i ujemnych możemy oczywiście opuszczać nawiasy, według zasad omówionych dla liczb całkowitych, czyli

$$\text{a) } -\frac{2}{3} + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$$

$$\text{b) } \frac{1}{6} + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{6} - \frac{3}{4}$$

$$\text{c) } 1\frac{4}{7} + \left(-3\frac{1}{2}\right) = 1\frac{4}{7} - 3\frac{1}{2}$$

przy czym sposób obliczania pozostaje taki sam.

Ja wymyśliłam łatwiejszy sposób. Gdy muszę dodać na przykład $\frac{2}{12}$ i $-\frac{9}{12}$, to przecież dodaję tylko liczniki, czyli $2 + (-9)$. A to obliczam, myśląc o dwóch plusach i dziewięciu minusach.



Oczywiście, ale przy dużych liczbach twoja metoda może sprawiać trudności, dlatego dobrze jest znać ogólne zasady.

2. Oblicz.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & -\frac{2}{5} + \left(-\frac{3}{4}\right) \\ & -\frac{5}{6} + \left(-\frac{2}{3}\right) \\ & -\frac{4}{9} + \left(-\frac{3}{5}\right) \\ & -4\frac{2}{3} + \left(-2\frac{2}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & -\frac{5}{6} + \frac{4}{9} \\ & -\frac{4}{5} + \frac{9}{10} \\ & -\frac{4}{7} + \frac{1}{3} \\ & -2\frac{4}{9} + 2\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \frac{7}{9} + \left(-\frac{5}{12}\right) \\ & \frac{3}{8} + \left(-\frac{7}{10}\right) \\ & 3\frac{2}{5} + \left(-3\frac{5}{8}\right) \\ & 1\frac{3}{8} + \left(-2\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & -2\frac{7}{10} + \left(-1\frac{5}{6}\right) \\ & -\frac{2}{7} + 1\frac{3}{4} \\ & \frac{1}{6} + \left(-5\frac{1}{9}\right) \\ & -4\frac{6}{7} + 1\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Oczywiście odejmowanie ułamków zwykłych możemy wykonywać, wykorzystując fakt, że odejmowanie jest dodawaniem liczby przeciwnej, czyli: $\frac{4}{5} - \frac{6}{7} = \frac{4}{5} + \left(-\frac{6}{7}\right)$ oraz $-6\frac{1}{2} - \left(-2\frac{2}{5}\right) = -6\frac{1}{2} + 2\frac{2}{5}$.

3. Wykonaj odejmowanie.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & -\frac{4}{5} - \frac{2}{7} \\ & -\frac{2}{9} - \frac{7}{8} \\ & -1\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \\ & -2\frac{3}{8} - 3\frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \frac{3}{7} - \frac{8}{9} \\ & \frac{5}{8} - \frac{6}{7} \\ & \frac{2}{9} - 1\frac{5}{6} \\ & 3\frac{1}{3} - 5\frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & -\frac{3}{8} - \left(-\frac{4}{7}\right) \\ & -\frac{7}{10} - \left(-\frac{4}{5}\right) \\ & 1\frac{4}{9} - \left(-\frac{1}{5}\right) \\ & -4\frac{2}{3} - \left(-1\frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & -1\frac{1}{7} - 1\frac{5}{6} \\ & 2\frac{3}{10} - 7\frac{5}{7} \\ & -2\frac{3}{4} - \left(-3\frac{5}{6}\right) \\ & -7\frac{2}{9} - 1\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Mnożyć i dzielić ułamki zwykłe dodatnie i ujemne to już sam potrafię! To bardzo łatwe!



Ja też potrafię! Trzeba tylko pamiętać, jaki znak postawić przy wyniku.

Podobnie jak w przypadku mnożenia i dzielenia liczb całkowitych i ułamków dziesiętnych, również dla ułamków zwykłych prawdziwe są poniższe zasady.

Iloczyn i iloraz:

- dwóch ujemnych ułamków zwykłych jest liczbą dodatnią,
- ułamka zwykłego ujemnego oraz ułamka zwykłego dodatniego (lub odwrotnie) jest liczbą ujemną.

$$-\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{15}{28} \quad \text{oraz} \quad -\frac{4}{9} : \frac{3}{7} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{28}{27} = -1\frac{1}{27}$$

4. Oblicz. Pamiętaj o zamianie liczby mieszanej na ułamek niewłaściwy oraz o skracaniu ułamków przed wykonaniem mnożenia.

a) $-\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$

$-1\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$

$-3\frac{3}{4} \cdot \left(-6\frac{2}{3}\right)$

$-5\frac{1}{4} \cdot \left(-2\frac{2}{9}\right)$

$-7\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{3}{10}\right)$

b) $-\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5}$

$-3\frac{1}{33} \cdot \frac{9}{10}$

$1\frac{5}{9} \cdot \left(-3\frac{3}{7}\right)$

$-8\frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{12}$

$3\frac{1}{8} \cdot \left(-1\frac{13}{15}\right)$

c) $-\frac{7}{12} : \left(-\frac{2}{5}\right)$

$-\frac{5}{16} : \left(-2\frac{1}{12}\right)$

$-3\frac{1}{3} : \left(-7\frac{1}{2}\right)$

$-1\frac{1}{9} : \left(-2\frac{2}{3}\right)$

$-2\frac{5}{6} : \left(-1\frac{2}{3}\right)$

d) $-\frac{5}{8} : \frac{4}{9}$

$1\frac{2}{5} : \left(-2\frac{1}{10}\right)$

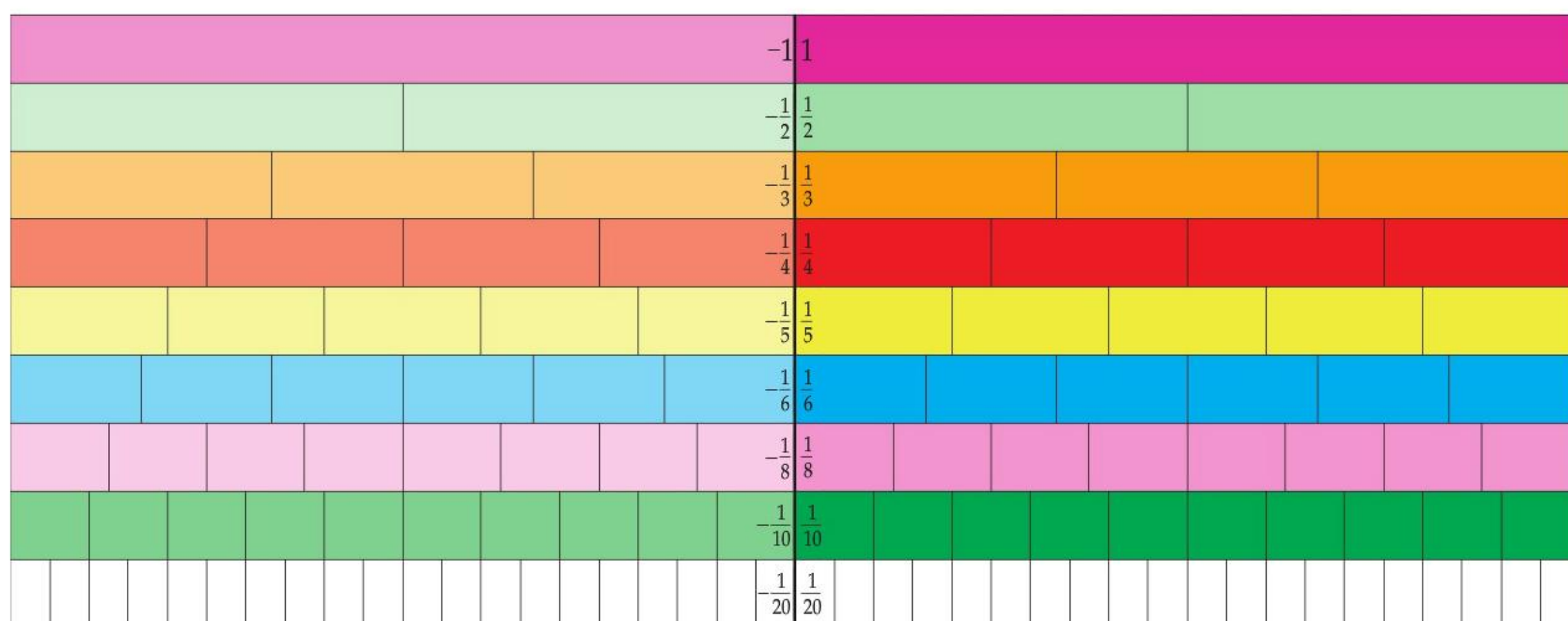
$-4\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$

$2\frac{1}{3} : \left(-2\frac{7}{9}\right)$

$-4\frac{4}{5} : 4\frac{1}{2}$

Zadania

- Tablicę ułamków, znaną ci z klasy czwartej, rozszerzono tak, aby pokazać na niej ułamki ujemne. W takiej postaci tablica ta przypomina oś liczbową.



- a) Skorzystaj z rysunku i porównaj ułamki: $-\frac{3}{4}$ i $-\frac{7}{10}$, $-\frac{2}{5}$ i $-\frac{3}{8}$, $-\frac{3}{10}$ i $-\frac{1}{3}$, $-\frac{7}{10}$ i $-\frac{5}{6}$.
- b) Ustaw ułamki $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$, $-\frac{17}{20}$ w kolejności rosnącej.

- Liczbę -1 zapisz jako:

- sumę dwóch różnych ujemnych ułamków zwykłych,
- różnicę dwóch różnych ujemnych ułamków zwykłych,
- iloczyn dwóch różnych ułamków zwykłych,
- iloraz dwóch różnych ułamków zwykłych.

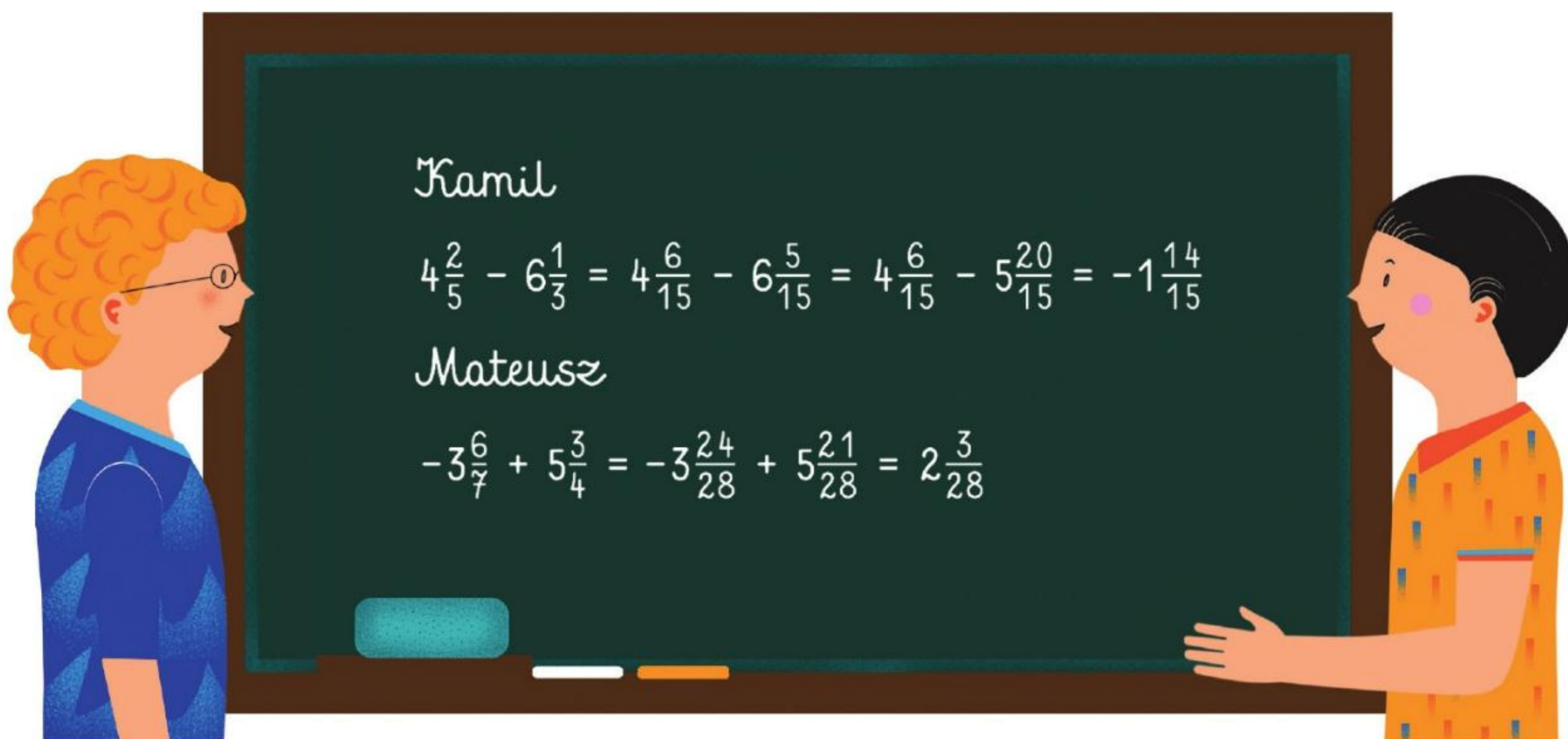
Wykonaj podane działania.

- Sumę liczb $-2\frac{1}{3}$ i $1\frac{1}{6}$ zmniejsz o $5\frac{3}{4}$.
- Różnicę liczby $2\frac{1}{8}$ i liczby $4\frac{2}{5}$ powiększ o $3\frac{9}{10}$.
- Iloczyn liczb $-3\frac{1}{5}$ i $2\frac{11}{12}$ podziel przez $-1\frac{1}{3}$.
- Iloraz liczby $-1\frac{7}{18}$ i liczby $-1\frac{7}{9}$ pomnóż przez iloraz liczby $-2\frac{2}{3}$ i liczby $\frac{5}{18}$.

Oblicz.

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|---|--|
| a) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$ | b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ | c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 16$ | d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2$ |
| $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$ | $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ | $-2\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2$ | $\left(-\frac{2}{7}\right)^2 - \left(-\frac{3}{7}\right)^2$ |
| $\left(-1\frac{2}{5}\right)^2$ | $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$ | $\left(-\frac{1}{5}\right)^3 : \frac{2}{25}$ | $\left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2$ |
| $\left(-1\frac{1}{10}\right)^2$ | $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3$ | $\left(-\frac{7}{8}\right)^2 \cdot 4^2$ | $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3$ |
| $\left(-2\frac{1}{2}\right)^2$ | $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$ | $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2$ | $-2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2$ |

Czy chłopcy poprawnie wykonali obliczenia? Jeśli znajdziesz błąd, wskaż go i popraw w zeszycie.



Która liczba leży na osi liczbowej w połowie odległości między liczbami $-4\frac{3}{5}$ i $2\frac{2}{5}$?

- A. $-3\frac{1}{2}$ B. $-1\frac{1}{10}$ C. $-3\frac{1}{5}$ D. $-1\frac{1}{5}$

2.17 Liczby wymierne

Podejmij temat



Niektóre odpowiedzi uczniów zawierały częściowo pokrywające się informacje, dlatego można nie brać ich pod uwagę. Czy ty potrafisz odpowiedzieć poprawnie, a przy tym krótko i precyzyjnie, na pytanie nauczycielki?



Wszystkie liczby, jakie poznaliśmy do tej pory, nazywają się **liczbami wymiernymi**; są to w szczególności:

- liczby całkowite, np. -54 , -28 , -6 , 0 , 3 , 12 ;
- ułamki dziesiętne dodatnie i ujemne, np. $-5,18$, $-1,387$, $-0,73$, $0,49$, $8,0001$;
- ułamki zwykłe oraz liczby mieszane, dodatnie i ujemne, np. $-5\frac{1}{100}$, $-\frac{8}{13}$, $\frac{6}{49}$, $7\frac{5}{28}$, $32\frac{3}{4}$.

Jeżeli wykonujemy jakiegokolwiek czynności z liczbami wymiernymi, musimy postępować zgodnie z poznanymi wcześniej zasadami dotyczącymi liczb całkowitych, ułamków zwykłych i dziesiętnych.

Czyli nowa jest właściwie tylko nazwa tych liczb, ale sposoby postępowania z tymi liczbami pozostają te same, tak?



Tak, ale trzeba pamiętać o wielu zasadach jednocześnie i sprawnie z nich korzystać.

Przykład 1

Obliczmy.

a) $3\frac{5}{8} + (-7,86)$

b) $-1\frac{7}{20} : (-0,18)$

a) Aby poprawnie dodać podane liczby, musimy umieć:

- zamieniać ułamki zwykłe na dziesiętne lub odwrotnie,
- dodawać liczby, z których jedna jest dodatnia, a druga ujemna,
- odejmować ułamki dziesiętne (w pamięci albo sposobem pisemnym) lub ułamki zwykłe.

$$3\frac{5}{8} + (-7,86) =$$

W tym przypadku najlepiej dążyć do tego, by w działaniu występowały same ułamki dziesiętne. Zamieniamy liczbę mieszaną na ułamek niewłaściwy $\frac{29}{8}$ i dzielimy pisemnie licznik przez mianownik.

Otrzymujemy liczbę 3,625.

$$= 3,625 + (-7,86) =$$

Obliczamy wartości bezwzględne liczb i od większej z nich odejmujemy mniejszą. Otrzymujemy 4,235.

$$= -4,235$$

Ustalamy znak wyniku.

Czy wiesz, dlaczego zamienialiśmy ułamek zwykły na dziesiętny, a nie odwrotnie? Czy zawsze przy dodawaniu lub odejmowaniu należy tak zamieniać ułamki? Czy możliwe byłoby wykonanie tego działania, gdybyśmy zamienili ułamek dziesiętny na zwykły?

b) Aby poprawnie podzielić podane liczby, musimy umieć:

- zamieniać ułamki zwykłe na dziesiętne lub odwrotnie,
- dzielić ułamki zwykłe lub ułamki dziesiętne,
- ustalać znak iloczynu i ilorazu liczb dodatnich i ujemnych.

$$-1\frac{7}{20} : (-0,18) =$$

Tym razem zamieńmy ułamek dziesiętny na zwykły.

$$= -1\frac{7}{20} : \left(-\frac{18}{100}\right) =$$

Pierwszą liczbę zapisujemy w postaci ułamka niewłaściwego.

$$= -\frac{27}{20} : \left(-\frac{18}{100}\right) =$$

Dzielenie zamieniamy na mnożenie przez odwrotność liczby.

$$= \overset{3}{\cancel{27}}_{1} \cdot \left(-\overset{5}{\cancel{100}}_{2}\right) =$$

Skracamy i wykonujemy mnożenie.

$$= \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

Ustalamy znak wyniku.

Dlaczego tym razem zamienialiśmy ułamek dziesiętny na zwykły? Czy można było wykonać to dzielenie po zapisaniu pierwszej liczby w postaci ułamka dziesiętnego?

1. Oblicz.

a) $724 + (-3895)$

$7,4 + (-0,78)$

$-2\frac{4}{5} + (-5\frac{3}{4})$

$-0,64 + 5\frac{4}{5}$

$\frac{2}{3} + (-0,63)$

b) $-55 - 342$

$6,8 - (-2,376)$

$-7,2 - 4,834$

$4\frac{2}{3} - 7,9$

$-\frac{12}{25} - 0,72$

c) $(-8)^3$

$-1,7 \cdot 2,65$

$0,16 \cdot (-4\frac{3}{8})$

$-1\frac{1}{9} \cdot (-5\frac{1}{5})$

$-24 \cdot (-0,02) \cdot (-\frac{1}{10})$

d) $-2,56 : 3,2$

$-1 : (-0,25)$

$8\frac{1}{6} : (-4\frac{2}{7})$

$-0,56 : \frac{7}{8}$

$-4\frac{3}{4} : (-0,02)$

2. Oblicz wartości wyrażeń podanych w tabeli.

Jeśli wyrażenie zawiera więcej niż jedno działanie, pamiętaj o poprawnej kolejności ich wykonywania.

Otrzymane wyniki zapisz w kolejności rosnącej. Odpowiadające im litery utworzą imię i nazwisko znanego polskiego matematyka.

Imię		Nazwisko	
N	$-5 : (\frac{4}{9} - 1)$	H	$-\frac{2}{3} \cdot (-2,7) + 0,8 \cdot (-\frac{1}{8})$
E	$(1\frac{1}{3} - 1,5) \cdot 1\frac{1}{5}$	A	$0,6 \cdot (-1 + \frac{2}{3}) - \frac{1}{3}$
F	$0,03 - 0,7 \cdot \frac{1}{7}$	B	$-4,8 \cdot 1\frac{1}{6} : 0,56$
A	$-0,8 \cdot (\frac{2}{5} - 2,3)$	C	$\frac{-0,6}{-3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}}$
T	$(-6,75 + 2\frac{3}{8}) \cdot 0,4$	A	$0,8 - 3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{4}{5}$
S	$0,9 \cdot 3,75 \cdot (-2\frac{1}{3})$	N	$-40\frac{4}{7} + 6,4 \cdot 5\frac{5}{8}$

Zadania

● Pan Mariusz przez cały rok zapisywał swoje miesięczne dochody (jako liczby dodatnie) i wydatki (jako liczby ujemne).

- Ile złotych zarobił pan Mariusz w styczniu, a ile – w kwietniu?
- W którym miesiącu pan Mariusz zarobił najwięcej, a w którym najwięcej wydał?
- W którym miesiącu zaoszczędził najwięcej pieniędzy?
- W których miesiącach jego wydatki były większe niż dochody? O ile złotych?
- Oszacuj, w którym kwartale pan Mariusz miał największe dochody, a w którym – największe wydatki.

Miesiąc	Dochody (w tys. zł)	Wydatki (w tys. zł)
styczeń	3,4	-2,9
luty	2,95	-3,1
marzec	3,1	-2,6
kwiecień	4,05	-3,5
maj	2,95	-2,65
czerwiec	3,6	-3,2
lipiec	3,25	-3,1
sierpień	3,3	-3,25
wrzesień	3,45	-3,3
październik	4,1	-3,65
listopad	3,8	-3,1
grudzień	3,95	-4,3

● Obwód trójkąta równobocznego wynosi $13\frac{1}{5}$ dm, a obwód kwadratu $14\frac{1}{2}$ dm.

- a) O ile decymetrów większy jest obwód kwadratu? Ile to centymetrów?
b) Czy dłuższy jest bok trójkąta, czy bok kwadratu? O ile decymetrów?

● Porównaj sumy bez wykonywania obliczeń – zamiast pytajnika wstaw odpowiedni znak: < lub >.

a) $-4,35 + 5$? $-0,35 + 5$

$-0,736 + 0,83$? $-0,9 + 0,83$

$-3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{6}$? $-5\frac{2}{3} + 1\frac{5}{6}$

$-2\frac{3}{5} + 4,2$? $-1\frac{5}{7} + 4,2$

b) $-2,4 + (-4,1)$? $-2,4 + (-3,5)$

$-8,356 + (-4,52)$? $-8,356 + (-4,6)$ ×

$-6,5 + (-7\frac{3}{4})$? $-6,5 + (-5\frac{2}{3})$

$-8\frac{4}{9} + (-2,7)$? $-8\frac{4}{9} + (-2,55)$

Ciekawe!

Dziesiątego sierpnia 2010 roku w najwyższych partiach lądolodu antarktycznego odnotowano temperaturę $-93,2^{\circ}\text{C}$. Pomiar ten został przeprowadzony zdalnie, przez sztucznego satelitę, i z tego powodu nie został uznany przez Światową Organizację Meteorologiczną jako rekordowy.



Najwyższa temperatura w Polsce została zanotowana w miejscowości Prószków (koło Opola) w 1921 roku. Wynosiła ona $40,2^{\circ}\text{C}$. Natomiast temperaturę najniższą, wynoszącą -41°C , zanotowano w Siedlcach w 1940 roku. Najwyższą temperaturę na świecie zmierzono 10 lipca 1913 roku w Dolinie Śmierci w Kalifornii (Stany Zjednoczone). Było to $56,7^{\circ}\text{C}$. Natomiast najniższa temperatura na Ziemi, wynosząca $-89,2^{\circ}\text{C}$, została odnotowana na antarktycznej stacji polarnej 21 lipca 1983 roku.

- a) Oblicz różnicę najwyższej i najniższej temperatury w Polsce oraz różnicę analogicznych temperatur na świecie.
b) O ile stopni Celsjusza niższa była najniższa temperatura na Antarktydzie od najniższej temperatury zarejestrowanej w Polsce?



- c) Wszystkie dane w zadaniu, dotyczące rekordowych temperatur, pochodzą z 2018 roku. Sprawdź w internecie, czy nadal są aktualne.



Spośród poniższych liczb:

$-2\frac{3}{8}$

$-1,8$

$-\frac{3}{4}$

$2,5$

$4\frac{1}{20}$

wybierz trzy takie, których suma jest najbliższa podanej liczbie.

a) -1

b) 0

c) 1

Podsumowanie działu 2

Ważne pojęcia

odwrotność liczby	liczby odwrotne	rozwiniecie dziesietne ułamka zwykłego
odwrotność ułamka	ułamek piętrowy	
rozwiniecie dziesietne skończone	rozwiniecie dziesietne nieskończone	liczba wymierna

Dzielenie ułamków zwykłych

- Jeżeli w działaniu występują liczby mieszane, to zamieniamy je na ułamki niewłaściwe.
- Pierwszy z ułamków mnożymy przez odwrotność drugiego.

$$1\frac{2}{3} : 4\frac{1}{6} = \frac{5}{3} : \frac{25}{6} = \frac{1\cancel{5}}{1\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^2}{\cancel{25}_5} = \frac{2}{5}$$

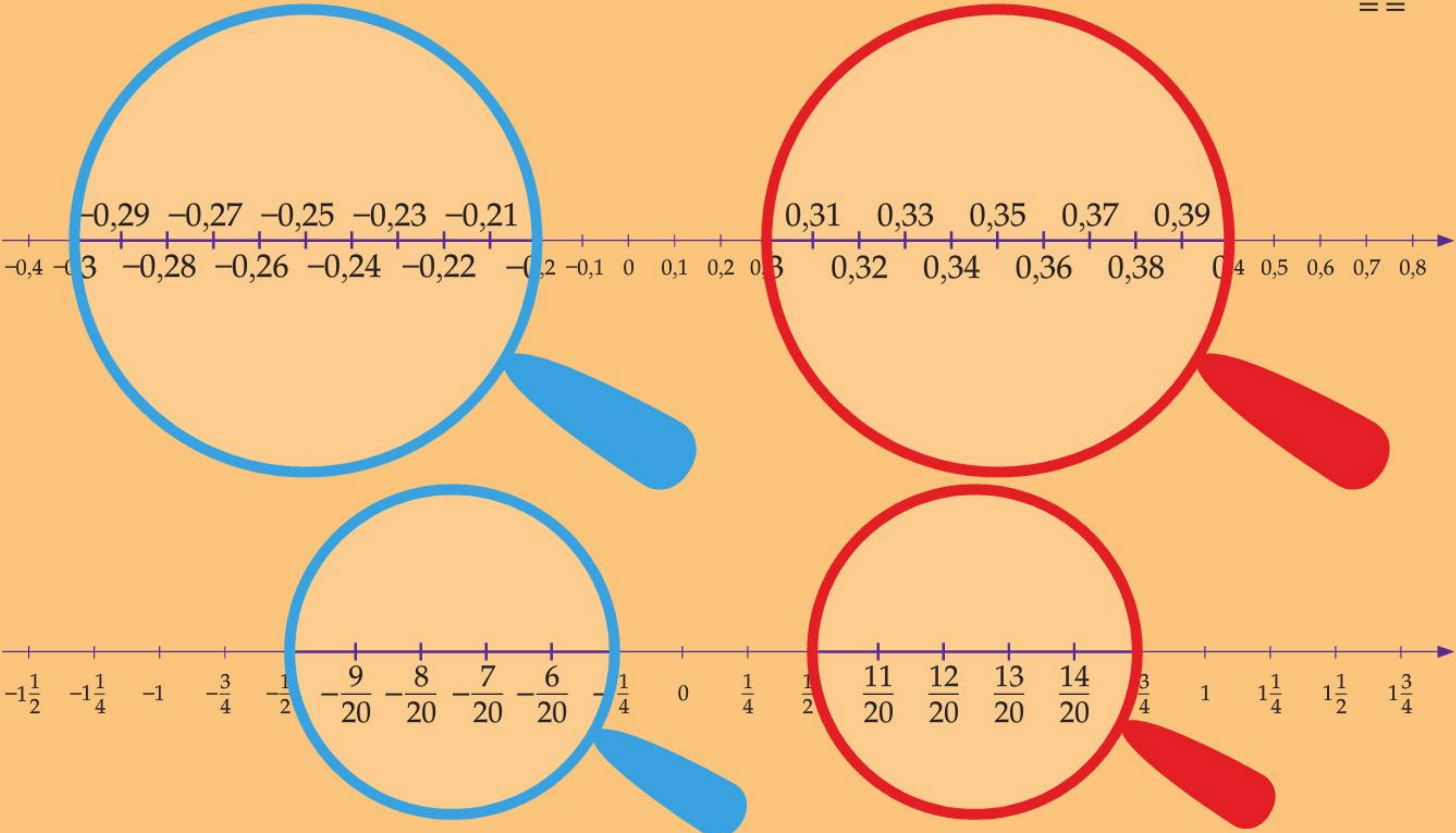
Dzielenie ułamków dziesiętnych

- Przekształcamy działanie tak, aby dzielnik był liczbą naturalną.
- Dzielimy ułamek przez liczbę naturalną (w pamięci lub pisemnie).

$$2,43 : 0,9 = 24,3 : 9 = 2,7$$

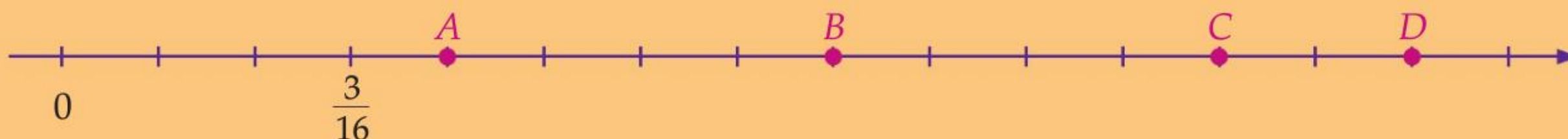
$$\begin{array}{r} 2,7 \\ 24,3 : 9 \\ - 18 \\ \hline 63 \\ - 63 \\ \hline = = \end{array}$$

Liczby wymierne na osi liczbowej



Czy już umiesz?

- 1 Który z punktów ma współrzędną równą $\frac{1}{4}$?



- A. Punkt A. B. Punkt B. C. Punkt C. D. Punkt D.

- 2 Liczba 90 jest najmniejszym wspólnym mianownikiem ułamków

- A. $\frac{5}{9}$ i $\frac{3}{5}$. B. $\frac{5}{18}$ i $\frac{1}{15}$. C. $\frac{5}{18}$ i $\frac{1}{20}$. D. $\frac{5}{36}$ i $\frac{1}{10}$.

- 3 Jeden z boków trójkąta ma $5\frac{1}{4}$ cm, drugi jest od niego o $1\frac{2}{5}$ cm krótszy, a trzeci jest dłuższy od pierwszego o $\frac{7}{10}$ cm. Oblicz długość drugiego i trzeciego boku trójkąta oraz jego obwód.

- 4 W klasie, która liczy 32 osoby, dziewczęta stanowią $\frac{3}{8}$ wszystkich uczniów. W zespole siatkarskim gra $\frac{3}{4}$ dziewcząt z tej klasy, a do drużyny piłki nożnej należy $\frac{3}{5}$ chłopców.

- a) Ile dziewcząt, a ilu chłopców jest w tej klasie?
b) Ile dziewcząt z klasy trenuje siatkówkę?
c) Ilu chłopców gra w drużynie piłki nożnej?

- 5 Oblicz i odpowiedz na pytania.

- a) Ile razy większą pojemność ma butelka wody mineralnej od butelki z sokiem wiśniowym?
b) Ile razy mniejszą pojemność ma słoik dżemu od słoika z miodem?



- 6 Które z działań zawiera **błąd**? Znajdź je i oblicz poprawnie.

A. $3\frac{5}{7} + 8\frac{4}{5} = 3\frac{25}{35} + 8\frac{28}{35} = 11\frac{53}{35} = 12\frac{18}{35}$

B. $7\frac{3}{8} - 4\frac{7}{9} = 7\frac{27}{72} - 4\frac{56}{72} = 3\frac{29}{72}$

C. $3\frac{1}{15} \cdot 7\frac{1}{2} = \frac{23}{15} \cdot \frac{15}{2} = \frac{23}{1} = 23$

D. $15\frac{2}{5} : 2\frac{1}{5} = \frac{77}{5} : \frac{11}{5} = \frac{77}{5} \cdot \frac{5}{11} = \frac{7}{1} = 7$

7 Ile wynosi wartość wyrażenia: $1\frac{5}{6} + 2\frac{4}{5} \cdot 1\frac{19}{21} - 3\frac{4}{9}$?

8 Zmniejsz trzykrotnie sumę liczb: $4\frac{3}{10}$, $2\frac{4}{5}$, $1\frac{3}{4}$.

9 Jaką współrzędną ma punkt P ?



A. 3,8

B. 6,5

C. 3,53

D. 3,35

10 Które liczby są ustawione w kolejności rosnącej?

A. 3,7 3,17 3,07 3,77

B. 2,1 2,11 2,01 2,001

C. 1,4 1,06 1,13 1,5

D. 5,03 5,106 5,16 5,3

11 Obejrzyj ilustrację i odpowiedz na pytania. W tym celu wykonaj odpowiednie obliczenia.



a) Ile kosztują razem wszystkie znaczki?

b) O ile złotych droższy jest znaczek ze słoniem od znaczka z ptakiem?

c) O ile złotych tańszy jest znaczek z rybą od znaczka z pszczołą?

12 Oblicz i odpowiedz na pytania.

a) Odcinek ma 2,7 cm. Jaką długość miałaby łamana złożona z 28 takich odcinków?

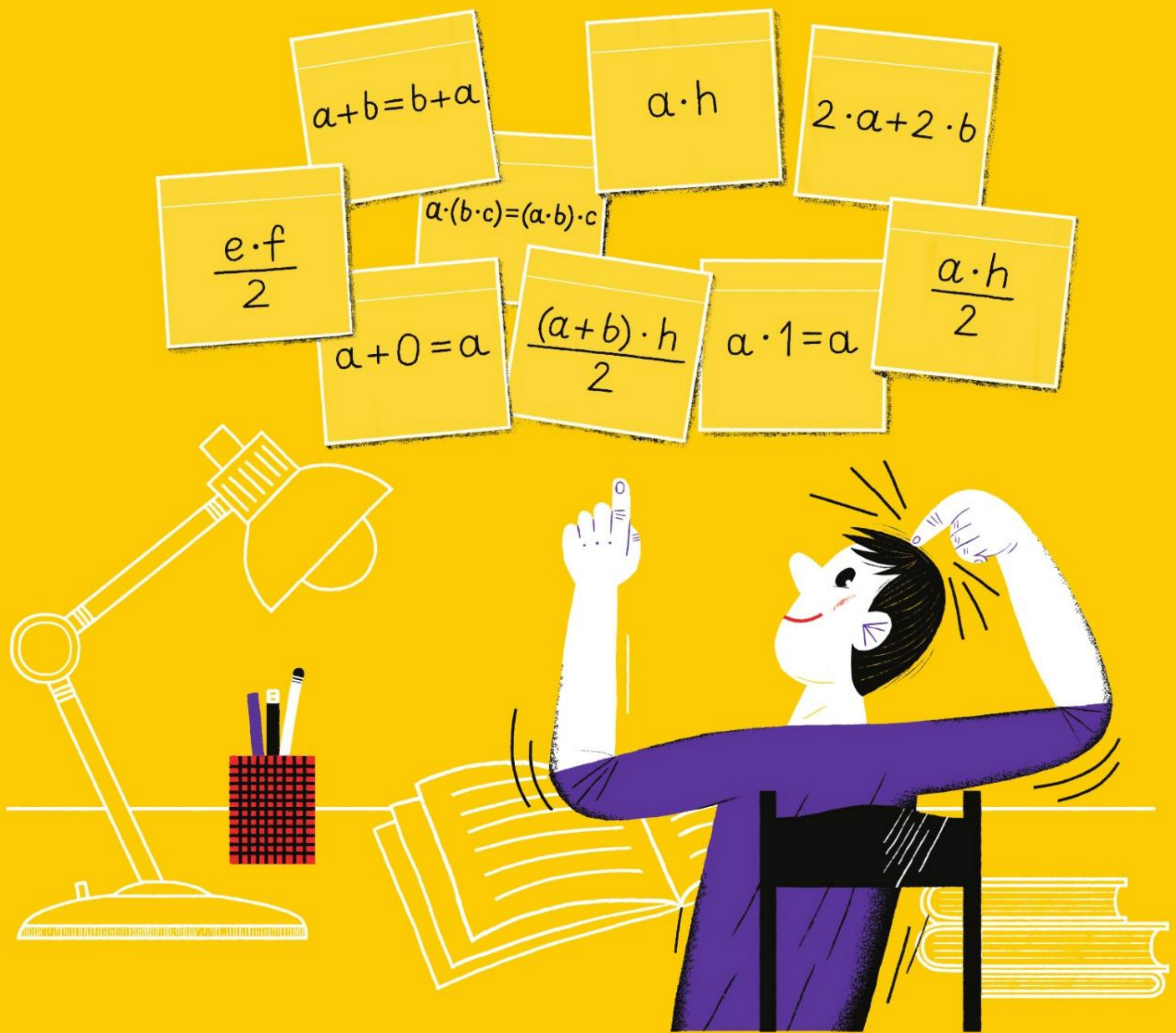
b) Łamana złożona z 45 odcinków o jednakowej długości ma 5,85 dm. Ile centymetrów mierzy jeden odcinek?

13 Kilogram jabłek kosztuje 2,65 zł, a kilogram gruszek 4,80 zł. Janek kupił 2,6 kg jabłek, a Maciek 1,85 kg gruszek. Który z nich zapłacił więcej? O ile więcej?

14 Jeden z boków równoległoboku ma 14,5 cm, a drugi jest od niego 2,5 razy krótszy. Oblicz długość drugiego boku i obwód równoległoboku.

- 15 Ile wynosi wartość wyrażenia: $22,5 : (0,5 - 4,8 : 16) + 8,9$?
- A. 120,4 B. 12,04 C. 12,14 D. 121,4
- 16 Mama kupiła 0,3 kg pierniczków po 12,60 zł za kilogram i 0,25 kg kokosanek po 18,20 zł za kilogram. Ile złotych kosztowały razem ciastka?
- Wartość którego wyrażenia jest rozwiązaniem powyższego zadania?
- A. $(12,60 + 18,20) : (0,3 + 0,25)$ B. $0,3 \cdot 12,60 + 0,25 \cdot 18,20$
 C. $(12,60 + 18,20) \cdot (0,3 + 0,25)$ D. $12,60 : 0,3 + 18,20 : 0,25$
- 17 Który z ułamków jest prawidłowo zaokrąglony do części setnych? ×
- A. $5,662 \approx 5,7$ B. $0,855 \approx 0,85$ C. $4,2828 \approx 4,28$ D. $2,995 \approx 2,9$
- 18 W którym rozwinięciu dziesiętnym jest **błąd**? Znajdź go i popraw.
- A. $\frac{9}{16} = 0,5625$ B. $4\frac{27}{40} = 4,675$ C. $8\frac{11}{12} = 8,916$ D. $\frac{27}{8} = 3,375$
- 19 Która liczba spośród: $\frac{11}{25}$, $\frac{9}{20}$, 0,42, $\frac{2}{5}$, jest największa?
- A. $\frac{9}{20}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{11}{25}$ D. 0,42
- 20 Wskaż działanie, którego wynik jest największy.
- A. $0,56 + \frac{4}{5}$ B. $5,7 - 3\frac{7}{8}$ C. $0,35 \cdot 4\frac{4}{5}$ D. $0,27 : 2\frac{1}{4}$
- 21 Agnieszka zamiast pomnożyć liczbę $-1,08$ przez 1,8 przez pomyłkę wykonała dzielenie przez 1,8. Sprawdź, czy otrzymany przez Agnieszkę wynik był większy, czy mniejszy od poprawnego. Oblicz, o ile był większy lub mniejszy.
- 22 Magda zamiast pomnożyć liczbę $-\frac{4}{15}$ przez $6\frac{3}{4}$, podzieliła ją przez liczbę przeciwną do odwrotności liczby $6\frac{3}{4}$. Wykonaj oba obliczenia i porównaj wyniki. Co można o nich powiedzieć?
- A. Wynik poprawny jest większy.
 B. Wynik błędny jest większy.
 C. Oba wyniki są równe.
 D. Działanie opisane jako dzielenie jest niemożliwe do wykonania.
- 23 Oblicz sumę wyników podanych działań.
- I. $\frac{2}{3} : 0,4 - 2$ II. $-2\frac{2}{3} \cdot 0,6 + 2$

3. Elementy algebry

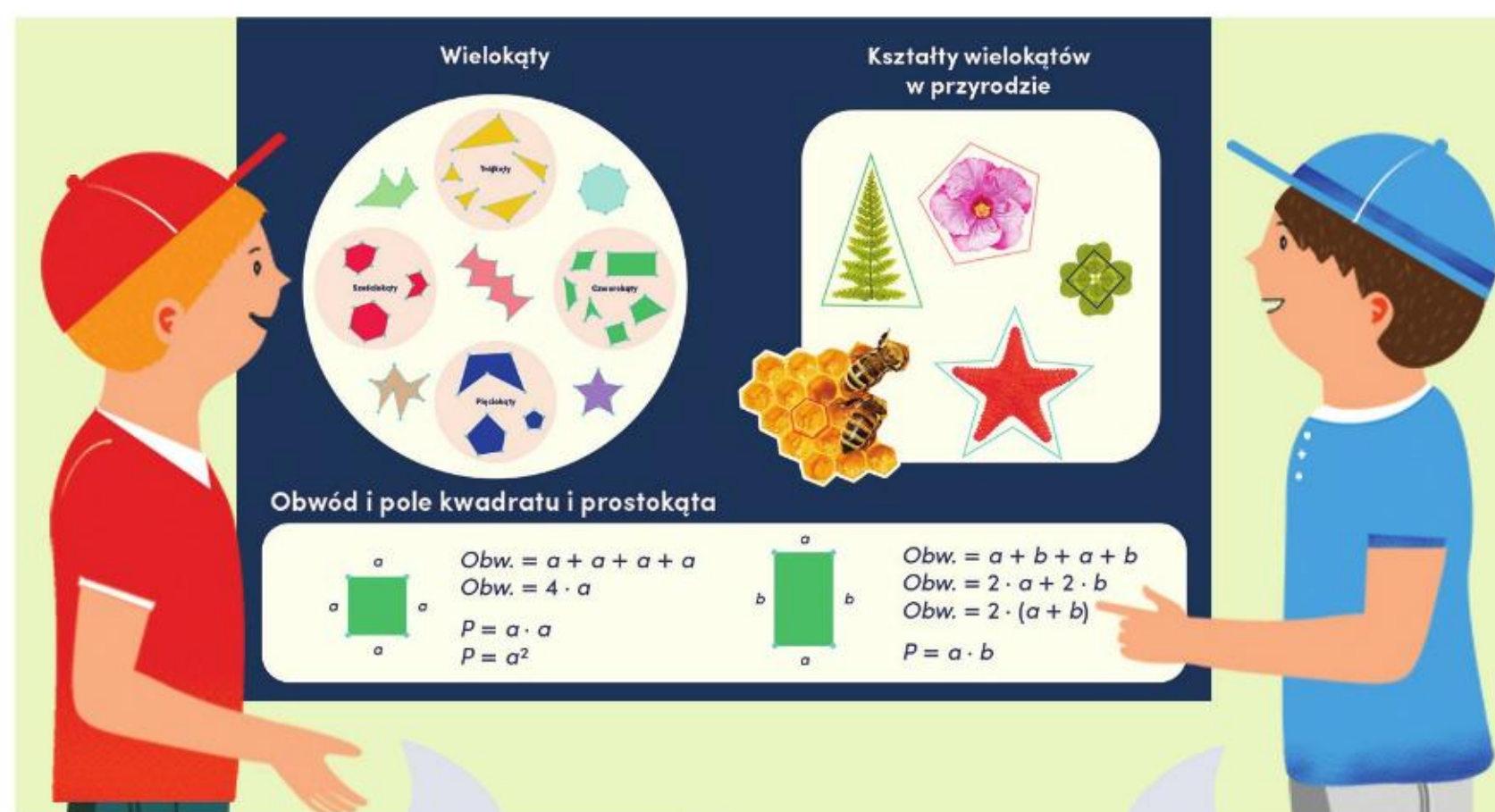


Janek jest wzrokowcem i często, aby szybciej zapamiętać różne wzory czy reguły, zapisuje je i przyczepia w widocznym miejscu. Przyjrzyj się notatkom Janka i odpowiedz na pytania.

1. Czy wiesz, co oznaczają poszczególne zapisy?
2. Dlaczego w działaniach na karteczkach znajdują się litery, a nie same liczby?
3. Które z powyższych zapisów dotyczą figur geometrycznych? Do jakich obliczeń je stosujemy?
4. Czy pamiętasz inne wzory, w których oprócz liczb występowały litery?
5. A czy ty masz swoje ulubione sposoby uczenia się i zapamiętywania?

3.1 Tworzenie wyrażeń algebraicznych

Podejmij temat



A jak ty odpowiesz na pytanie chłopca?

Wiem, że chodzi o obliczanie obwodów i pól. Ale dlaczego nie ma tu konkretnych liczb? Przecież boki tych figur można zmierzyć.

Ponieważ w ten sposób nic nie obliczamy, tylko pokazujemy, jak obliczyć pole czy obwód. Te zapisy dotyczą wszystkich kwadratów i prostokątów – o różnych wymiarach.



Wyrażenie *pewna liczba* w matematyce zastępujemy literą.

Pani Maria postanowiła ustawić na swoim tarasie zielone skrzynki z kwiatami.

W każdej skrzynce mieści się 5 sadzonek. Ile sadzonek potrzeba, aby zapełnić podaną liczbę skrzynek?

- a) 2 skrzynki
- b) 4 skrzynki
- c) n skrzynek

Odpowiedź: 10, ponieważ $5 \cdot 2 = 10$

Odpowiedź: 20, ponieważ $5 \cdot 4 = 20$

Odpowiedź: ..., ponieważ $5 \cdot n = \dots$

Punkt c) możemy interpretować następująco: „Jak obliczyć, ile sadzonek potrzeba do zapełnienia *pewnej liczby* skrzynek?”. Wtedy odpowiedź będzie brzmieć: „Jeśli wiemy, że w 1 skrzynce mieści się 5 sadzonek, to aby obliczyć, ile sadzonek nam potrzeba, należy pomnożyć 5 przez *liczbę* skrzynek”.

Oczywiście w przypadku punktu c) odpowiedź nie jest konkretną liczbą, ale wzorem, zgodnie z którym obliczana jest liczba sadzonek. Wyrażenie $5 \cdot n$ nazywamy wyrażeniem algebraicznym.

Wyrażenie algebraiczne to zapis, w którym oprócz liczb, znaków działań i nawiasów występują litery.



Wyrażenie algebraiczne nie musi zawierać wszystkich wymienionych elementów jednocześnie, musi natomiast zawierać przynajmniej jedną literę.

Przykładami wyrażeń algebraicznych są:

$$8 \cdot b \quad a + b \quad 7 - c \quad a \cdot b - 1 \quad d : e \quad 7 - (a + b)$$



Przy zapisywaniu wyrażenia algebraicznego należy przestrzegać poniższych zasad.

1. Znak mnożenia (kropkę) zwykle pomijamy, jeżeli nie znajduje się przed liczbą, czyli:
 - zamiast pisać $8 \cdot b$, piszemy $8b$,
 - zamiast pisać $a \cdot b - 1$, piszemy $ab - 1$,
 - zamiast pisać $4 \cdot (a + 5)$, piszemy $4(a + 5)$.
2. W iloczynie liczby i litery (lub kilku liter) na pierwszym miejscu zapisujemy liczbę, czyli:
 - zamiast pisać $a \cdot 5$, piszemy $5a$,
 - zamiast pisać $a \cdot (-6) \cdot b$, piszemy $-6ab$.
3. Mnożenia przez 1 zwykle nie zapisujemy, czyli:
 - zamiast pisać $1 \cdot a$ lub $a \cdot 1$, piszemy a .
4. Znak dzielenia (dwukropek) zastępujemy zwykle kreską ułamkową, czyli:
 - zamiast pisać $d : e$, piszemy $\frac{d}{e}$,
 - zamiast pisać $(1 + k) : (2 - t)$, piszemy $\frac{1 + k}{2 - t}$.

1. Zapisz wyrażenia algebraiczne według zasad podanych w uwadze.

a) $5 \cdot x \cdot y$	b) $a \cdot b \cdot c$	c) $k \cdot (-2)$	d) $z \cdot 1$
$a \cdot (2 + b)$	$4 + p \cdot s$	$a \cdot 4 \cdot b$	$5 : c$

2. Pani Maria, o której mowa na początku tematu, aby urozmaicić wystrój tarasu, kupiła na kwiaty dodatkowo mniejsze skrzynki w kolorze białym. W każdej takiej skrzynce mieszczą się 3 sadzonki. Ile sadzonek potrzeba, by zapełnić:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) 3 białe skrzynki, | b) 5 białych skrzynek, |
| c) m białych skrzynek, | d) 3 zielone i 2 białe skrzynki, |
| e) 3 zielone i m białych skrzynek, | f) k zielonych i m białych skrzynek? |

3. Ile łap ma:

- | | | | |
|------------|------------|--------------|------------------|
| a) 5 psów, | b) 8 psów, | c) t psów, | d) $t + 1$ psów? |
|------------|------------|--------------|------------------|

4. Zapisz liczbę uczniów w klasie, gdzie jest:

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) 12 dziewcząt i 23 chłopców, | b) d dziewcząt i 20 chłopców, |
| c) 18 dziewcząt i c chłopców, | d) d dziewcząt i c chłopców, |
| e) a dziewcząt i a chłopców, | f) b dziewcząt i o 2 więcej chłopców. |

5. W restauracji przy każdym stoliku stoją 4 krzesła. Ile jest stolików, jeżeli w restauracji:
- a) stoją 32 krzesła, b) stoi 40 krzesel, c) stoi n krzesel, d) stoi $n + 8$ krzesel?
6. W pewnym bloku mieszkają tylko małżeństwa z jednym dzieckiem. Ile osób mieszka w tym bloku, jeżeli mieszkań jest:
- a) 10, b) 25, c) m , d) $2m$?
7. W sadzie rosną jabłonie i grusze. Grusz jest o 5 mniej niż jabłoni. Ile grusz rośnie w tym sadzie, jeżeli jabłoni jest:
- a) 28, b) 46, c) n , d) $n + 6$?

Z wyrażeniami algebraicznymi spotkaliśmy się już wcześniej. W klasie czwartej pokazaliśmy, jak można je wykorzystać m.in. do zapisu własności dodawania. Wyglądały one następująco:

- $a + 0 = a$ Oznacza to, że po dodaniu 0 do dowolnej liczby (oznaczonej tu literą a) otrzymujemy tę samą liczbę.
- $a + b = b + a$ Oznacza to, że podczas dodawania możemy zmienić kolejność składników (oznaczonych tu literami a i b), a wynik się nie zmieni.

8. Czy znasz inne od zapisanych powyżej własności działań? Dokończ w zeszycie zapisy.

$$a + (b + c) = \quad 1 \cdot a = \quad a \cdot b = \quad (a \cdot b) \cdot c =$$

9. Co oznaczają podkreślone wyrażenia algebraiczne?

a) $Obw. = \underline{2a + 2b}$ b) $Obw. = \underline{4a}$ c) $P = \underline{ab}$

Zadania

Do każdego zadania ułóż wyrażenie (wyrażenia) algebraiczne będące jego opisem.

- Czwooro przyjaciół poszło do sklepu.
- a) Aneta kupiła c kg truskawek po 16 zł za 1 kg. Ile kosztowały truskawki?
- b) Magda kupiła b kg cukierków po 13 zł za 1 kg i a kg cukierków po 21 zł za 1 kg. Ile zapłaciła?
- c) Romek kupił 3 kg jabłek po k zł za 1 kg. Ile zapłacił?
- d) Jurek za 6 jednakowych soków zapłacił m zł. Jaka była cena 1 soku?
- Robert ma m -kartkowy zeszyt do matematyki. Zapisał w nim 23 strony.
- a) Ile jest stron w zeszycie Roberta?
- b) Ile stron pozostało czystych?

- W parku rośnie 86 drzew liściastych i o n więcej drzew iglastych.
 - a) Ile drzew iglastych jest w parku?
 - b) Ile wszystkich drzew rośnie w parku?
 - c) Ile jest w tym parku świerków, jeżeli stanowią one połowę wszystkich drzew iglastych?
 - d) Ile jodeł rośnie w parku, jeżeli stanowią one $\frac{2}{5}$ wszystkich drzew iglastych?
 - e) O ile więcej jest wszystkich drzew iglastych od jodeł?

- Na parkingu przed warsztatem samochodowym stoi s samochodów i m motocykli, których kierowcy czekają na wymianę opon. Zakładamy, że żaden pojazd nie ma koła zapasowego.
 - a) Ile razem kół mają wszystkie samochody na tym parkingu?
 - b) Ile razem kół mają wszystkie motocykle na parkingu?
 - c) Ile kół łącznie mają wszystkie pojazdy na parkingu?
 - d) Trzy auta odjechały. Ile razem kół mają samochody, które pozostały na parkingu?
 - e) Na parkingu stanęło dodatkowo 5 motocykli. Ile razem kół mają motocykle znajdujące się teraz na parkingu?

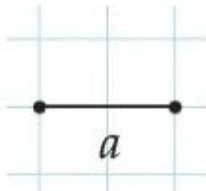
- Monika miała p zł. Najpierw kupiła zabawkę dla brata, na którą wydała $\frac{3}{5}$ swoich pieniędzy, a potem książkę dla siebie, za którą zapłaciła 0,2 początkowej kwoty.
 - a) Ile złotych wydała na zabawkę i ile pieniędzy zostało jej po tym zakupie?
 - b) Ile złotych kosztowała książka?
 - c) Ile złotych zostało Monice po całych zakupach?

- Cukiernia wypieka lubiane przez dzieci ciastka nazywane lukrowymi słoneczkami. W każdym z nich jest 5 rodzynek.
 - a) Ile rodzynek znajduje się w k upieczonych ciastkach?
 - b) Ciastko z rodzynekami waży p dag, a same rodzynki 0,5 dag. Ile ważyłoby ciastko bez rodzynek?
 - c) Ciastka pakowane są do pudełek po 6 sztuk. Puste pudełko waży 2,5 dag. Ile waży pudełko z ciastkami?
 - d) Jacek kupił 3 pudełka ciastek. Ile ważyły razem kupione przez Jacka ciastka razem z pudełkami?

- Do klasy VI jednej ze szkół w Ławie uczęszcza x uczniów.
 - a) Ilu uczniów uczęszcza do klasy V tej szkoły, jeżeli wiadomo, że jest ich o 3 mniej niż uczniów klasy VI?
 - b) Ilu uczniów uczęszcza do klasy IV tej szkoły, jeżeli wiadomo, że jest ich o 8 więcej niż uczniów klasy V?
 - c) Do klas I–III uczęszcza 2 razy więcej uczniów, niż jest ich w klasie VI. Ile to osób?
 - d) Ilu nauczycieli uczy w tej szkole, jeżeli ich liczba stanowi $\frac{1}{9}$ liczby uczniów klas I–III?

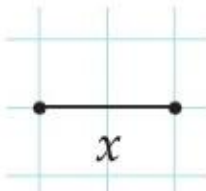
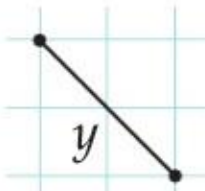
- Zamień na grosze.
- a) m zł b) k zł 20 gr c) t zł p gr

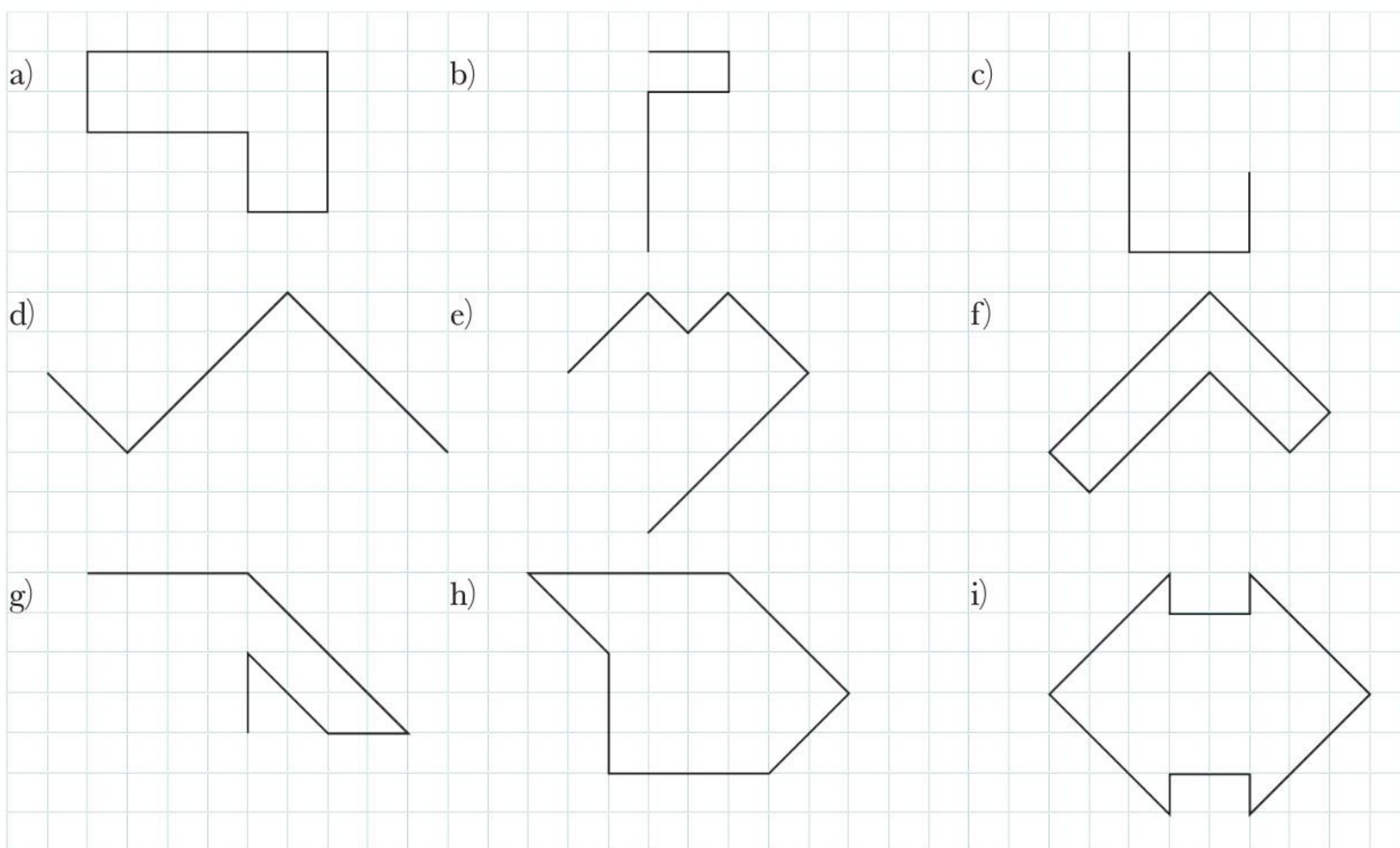
- Zamień n metrów na:
- a) centymetry, b) decymetry, c) kilometry.

- Odcinek  ma długość a cm. Jaką długość ma odcinek:

- a) 3 razy dłuższy, b) o 5 cm dłuższy, c) o 1 cm krótszy,
d) 2 razy krótszy, e) narysowany obok?



- Odcinek  ma długość x , odcinek  ma długość y . Podaj długość łamanej.



- Kwadrat o boku długości s podzielono na 4 jednakowe kwadraty, każdy z nich ponownie podzielono na 4 jednakowe kwadraty i jeszcze raz każdy z otrzymanych kwadratów podzielono na 4 jednakowe kwadraty. Jaka jest długość boku najmniejszego z otrzymanych w ten sposób kwadratów i jaki jest jego obwód?

3.2 Nazywanie wyrażeń algebraicznych

Podejmij temat

Jaki masz dziwny kalkulator!
Który klawisz trzeba przycisnąć,
żeby pomnożyć? Kropkę?



Nie! Coś ty! Przecież mnożenie
to inaczej iloczyn :)



Wyrażenia algebraiczne nazywamy tak samo jak wyrażenia arytmetyczne:

$a + b$ **suma** liczb a i b

$p - 4$ **różnica** liczb p i 4

$6x$ **iloczyn** liczb 6 i x

$\frac{7}{m} = 7 : m$ **iloraz** liczb 7 i m

s^2 **kwadrat** liczby s

k^3 **sześcian** liczby k

1. Zapisz, jak należy odczytać podane wyrażenie algebraiczne.

a) $12 + p$

b) $x + y + 4$

c) $a - b$

d) $b - a$

e) st

f) $\frac{s}{t}$

g) $2ab$

h) r^3

2. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.

a) suma liczby -4 i liczby k

b) iloczyn liczby $\frac{3}{4}$ i liczby z

c) różnica liczby w i liczby 1

d) iloraz liczby a i liczby b

e) liczba przeciwna do liczby p

f) wartość bezwzględna liczby p

3. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego i podaj nazwę tego wyrażenia.

a) liczba 7 razy większa niż liczba p

b) liczba o 8 mniejsza od liczby k

c) liczba z razy mniejsza niż 4

d) liczba o k większa od 10

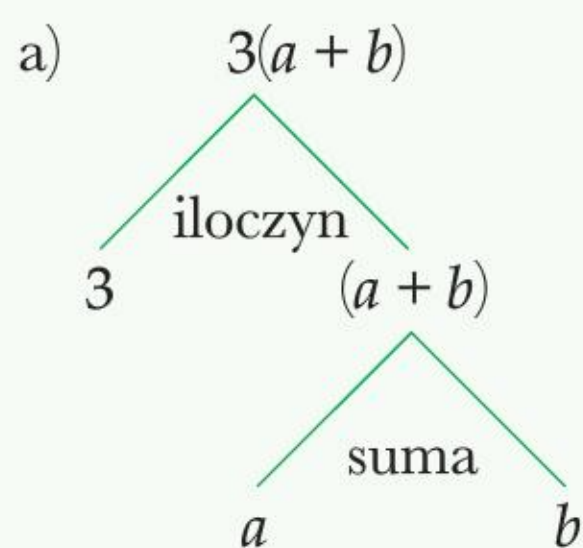
Jeżeli w wyrażeniu algebraicznym występuje więcej niż jedno działanie, to nazwa wyrażenia pochodzi od tego działania, które byłoby wykonywane jako ostatnie.

Przykład 1

Podajmy nazwę wyrażenia.

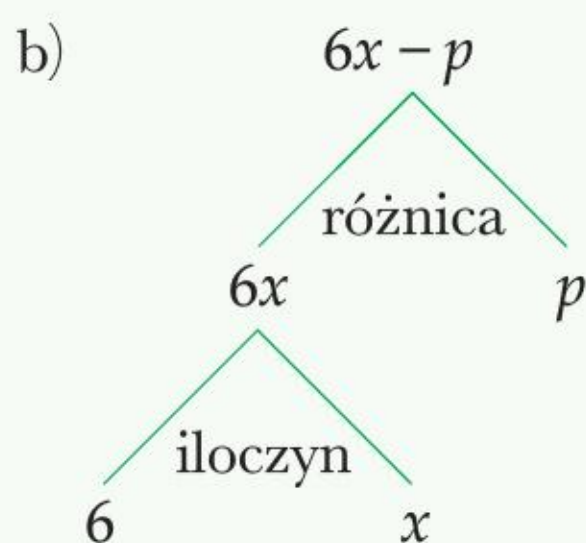
a) $3(a + b)$

b) $6x - p$



Gdyby wyrażenie to zawierało same liczby, to najpierw należałoby wykonać działanie w nawiasie, a następnie **mnożenie**. Zatem wyrażenie jest **iloczynem**.

Ponieważ $a + b$ to suma liczb a i b , więc powiemy, że jest to: **iloczyn** liczby 3 oraz sumy liczb a i b .



Najpierw należałoby wykonać mnożenie, potem **odejmowanie**, zatem wyrażenie jest **różnicą**.

Jest to zatem:

różnica iloczynu liczb 6 i x oraz liczby p .

4. Podobnie jak w przykładzie 1 narysuj drzewko z nazwami poszczególnych działań i podaj nazwę wyrażenia.

a) $\frac{m + n}{4}$

b) $4 + \frac{3}{b}$

c) $ab - c$

d) $pr + st$

e) $\frac{x}{y} - 2$

f) $\frac{x}{y} + \frac{z}{w}$

5. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.

- iloczyn liczby 8 oraz sumy liczb a i 2
- iloczyn liczb 5, c oraz d
- suma liczby b oraz iloczynu liczb 8 i a
- suma liczb a , 3 i b
- suma iloczynu liczb s i t oraz ilorazu liczb r i p
- iloraz sumy liczb 2 i x oraz różnicy liczb x i 2
- różnica ilorazu liczb k i 2 oraz liczby m
- kwadrat sumy liczb p i q
- różnica liczby 4 oraz sumy liczb s i t



Nawet jeśli nie muszę rysować drzewka, to mogę je sobie wyobrazić. Będzie mi łatwiej zapisać wyrażenie.

Zadania

- Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego i podaj jego nazwę.
- a) ćwierć liczby a
 - b) potrojona liczba b
 - c) liczba 8 razy większa od liczby c
 - d) liczba o d większa od 4
 - e) liczba 10 razy mniejsza od liczby e
 - f) liczba f razy większa od liczby p
 - g) liczba przeciwna do liczby g
 - h) odwrotność liczby h
- Zosia ma zapisanych w telefonie 136 kontaktów do znajomych, a Natalia o n mniej. Ile kontaktów ma zapisanych Natalia? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne oraz jego nazwę.
- Zapisz odpowiedź na pytanie w postaci wyrażenia algebraicznego i podaj nazwę tego wyrażenia.
- a) Ile kosztuje razem 1 opakowanie kukurydzy i 1 ananas?
 - b) Ile kosztują razem 2 opakowania kukurydzy i 2 ananasy?
 - c) Jaki jest koszt 1 kolby kukurydzy?
 - d) Ile reszty z 20 zł otrzyma klient kupujący 3 opakowania kukurydzy?
 - e) O ile droższe są 3 ananasy od 1 opakowania kukurydzy?
 - f) Ile groszy kosztuje 1 ananas?



p zł



k zł

- Kilogram gruszek kosztuje x zł, a kilogram jabłek o 3 zł mniej. Zapisz odpowiedź na pytanie w postaci wyrażenia algebraicznego i podaj nazwę tego wyrażenia.
- a) Ile kosztuje 1 kg jabłek?
 - b) Ile kosztuje w sumie 1 kg jabłek i 1 kg gruszek?
 - c) Ile kosztują 2 kg jabłek?
 - d) Ile razy więcej kosztuje 1 kg gruszek niż 1 kg jabłek?
- Paweł ma p zł, a Michał o 7 zł więcej. Zapisz odpowiedź na pytanie w postaci wyrażenia algebraicznego i podaj nazwę tego wyrażenia.
- a) Ile złotych ma Michał?
 - b) Ile groszy ma Paweł?
 - c) Ile groszy ma Michał?
 - d) Ile złotych mają razem obaj chłopcy?
- Poniższe wyrażenia algebraiczne pokazują sposób obliczania pól pięciu wielokątów. Dopasuj każde wyrażenie do odpowiedniego wielokąta. Podaj nazwy wyrażeń algebraicznych występujących w zadaniu.

I. ah

II. ab

III. $\frac{ah}{2}$

IV. a^2

V. $\frac{(a+b)h}{2}$

A. trójkąt

B. kwadrat

C. trapez

D. równoległobok

E. prostokąt

3.3 Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych

Podejmij temat



Która odpowiedź bardziej ci się podobą? Uzasadnij swój wybór.

Sprawdzian
Napisz, jak obliczamy obwód kwadratu, i w opisany sposób oblicz obwód kwadratu o boku długości 7 cm.

Maciek W.

Obw. = $4a$
Obw. = $4 \cdot 7 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$

Kasia P.

Aby obliczyć obwód kwadratu, trzeba długość jego boku pomnożyć przez 4.

Obw. = $7 \text{ cm} \cdot 4 = 28 \text{ cm}$

Pani Iwona codziennie rano kupuje świeże pieczywo dla całej rodziny. Zwykle kupuje dwa rodzaje bułek.



0,65 zł



0,42 zł

Jeżeli liczbę kupionych ciemnych bułek oznaczmy literą a , jasnych zaś – literą b , wówczas kwotę wydaną na zakup bułek zapiszemy następująco: $0,65a + 0,42b$.

W poniedziałek pani Iwona kupiła 3 ciemne bułki i 5 jasnych. Aby obliczyć, ile za nie zapłaciła, w miejsce liter a i b wstawiamy odpowiednie liczby.

$$0,65a + 0,42b = 0,65 \cdot 3 + 0,42 \cdot 5 = 1,95 + 2,1 = 4,05$$

$\uparrow$ $\uparrow$
3 5

Pani Iwona zapłaciła w poniedziałek za bułki 4,05 zł.

Jeżeli do wyrażenia algebraicznego w miejsce liter wstawimy liczby i wykonamy obliczenia, to otrzymamy **wartość liczbową** tego **wyrażenia algebraicznego**.

Przykład 1

Obliczmy wartość liczbową wyrażenia algebraicznego.

- a) $5a + 8$ dla $a = 7$
b) $30 - 4b$ dla $b = 2\frac{1}{2}$
c) $6c - d + 8$ dla $c = 5$ i $d = -7$

a) $5a + 8 =$
 $\uparrow$
 7

W miejsce litery a wstawiamy liczbę 7 .

$$= 5 \cdot 7 + 8 =$$
$$= 35 + 8 = 43$$

Wykonujemy obliczenia.

Otrzymujemy wartość liczbową wyrażenia algebraicznego.

b) $30 - 4b =$
 $\uparrow$
 $2\frac{1}{2}$

W miejsce litery b wstawiamy liczbę $2\frac{1}{2}$.

$$= 30 - 4 \cdot 2\frac{1}{2} =$$
$$= 30 - 2\cancel{4} \cdot \frac{5}{\cancel{2}_1} =$$
$$= 30 - 10 = 20$$

Wykonujemy obliczenia.

Otrzymujemy wartość liczbową wyrażenia.

c) $6c - d + 8 =$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $5 \quad -7$

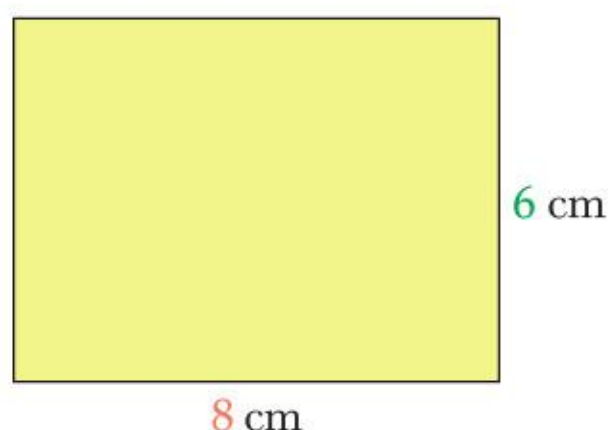
W miejsce litery c wstawiamy liczbę 5 , a w miejsce d wstawiamy liczbę -7 .

$$= 6 \cdot 5 - (-7) + 8 =$$
$$= 30 + 7 + 8 = 45$$

Wykonujemy obliczenia.

Otrzymujemy wartość liczbową wyrażenia.

Z wartościami liczbowymi wyrażeń algebraicznych mieliśmy do czynienia już w klasie piątej (choć wtedy nie nazywaliśmy tego w ten sposób), kiedy obliczaliśmy obwody i pola figur. Wzory $4a$ oraz $2a + 2b$, według których obliczane są obwody kwadratu i prostokąta, to wyrażenia algebraiczne.



Obliczanie obwodu prostokąta o wymiarach $6 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ to nic innego jak obliczanie wartości liczbowej odpowiedniego wyrażenia algebraicznego:

$$\text{Obw.} = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 12 + 16 = 28$$
$$\text{Obw.} = 28 \text{ (cm)}$$

1. Oblicz wartość liczbową wyrażenia algebraicznego.

a) $7 + 4p$ dla $p = 8$

c) $y^2 - y$ dla $y = 5$

e) $st - 2s$ dla $s = \frac{2}{3}$ i $t = 6$

g) $1 + \frac{a}{b}$ dla $a = 8$ i $b = 4$

b) $8 - \frac{6}{n}$ dla $n = 7$

d) $3d + 8$ dla $d = -2$

f) $-7x + 5z$ dla $x = 4$ i $z = -2$

h) $k + 3(u - 2)$ dla $k = 6$ i $u = 1$

Więcej na temat

Wyrażenie $2n$ oznacza w matematyce liczbę parzystą, ponieważ jeżeli w miejsce n wstawimy dowolną liczbę naturalną, to wartością liczbową takiego wyrażenia będzie zawsze liczba parzysta.

Wyrażenie $2n + 1$ oznacza natomiast liczbę nieparzystą: jeżeli będziemy obliczać wartość liczbową tego wyrażenia, to dla dowolnej liczby naturalnej n otrzymamy zawsze liczbę nieparzystą.

2. Zapisz za pomocą wyrażeń algebraicznych:

- a) dwie kolejne liczby parzyste i oblicz różnicę większej i mniejszej,
- b) trzy kolejne liczby parzyste i oblicz ich wartości liczbowe dla $n = 5$,
- c) trzy kolejne liczby nieparzyste.

Zadania

- Pani Kowalska zarabia x zł miesięcznie, a jej mąż o 100 zł mniej.
 - a) Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące, ile złotych miesięcznie zarabiają razem państwo Kowalscy.
 - b) Oblicz wartość liczbową wyrażenia z punktu a), jeżeli:
 - pani Kowalska zarabia miesięcznie 3300 zł,
 - $x = 4000$ zł.
- W skarbonce Maćka znajduje się k pięciozłotówek i o 8 więcej dwuzłotówek.
 - a) Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące:
 - liczbę dwuzłotówek w skarbonce Maćka,
 - całą kwotę w samych dwuzłotówkach,
 - łączną sumę pieniędzy w skarbonce.
 - b) Oblicz wartość wyrażenia opisującego łączną sumę pieniędzy w skarbonce, jeżeli:
 - Maciek ma 7 pięciozłotówek,
 - $k = 12$.

Podczas rozwiązywania zadań 3 i 4 skorzystaj z informacji podanej na marginesie.

- Przeczytaj tekst ludowej przysłówki.

*Miała baba kopę jajek,
poszła z nimi na jarmarek.
Mendel sztuką, trzy zgubiła,
I do domu zła wróciła.*

Oblicz, z iloma jajkami wróciła do domu baba z przysłówki.

Ciekawe!

Tuzin, mendel, kopa i gros to dawne jednostki miary używane do określania liczby sztuk, zwykle produktów rolnych.

Tuzin to 12 sztuk,

kopa – 5 tuzinów, czyli 60 sztuk,

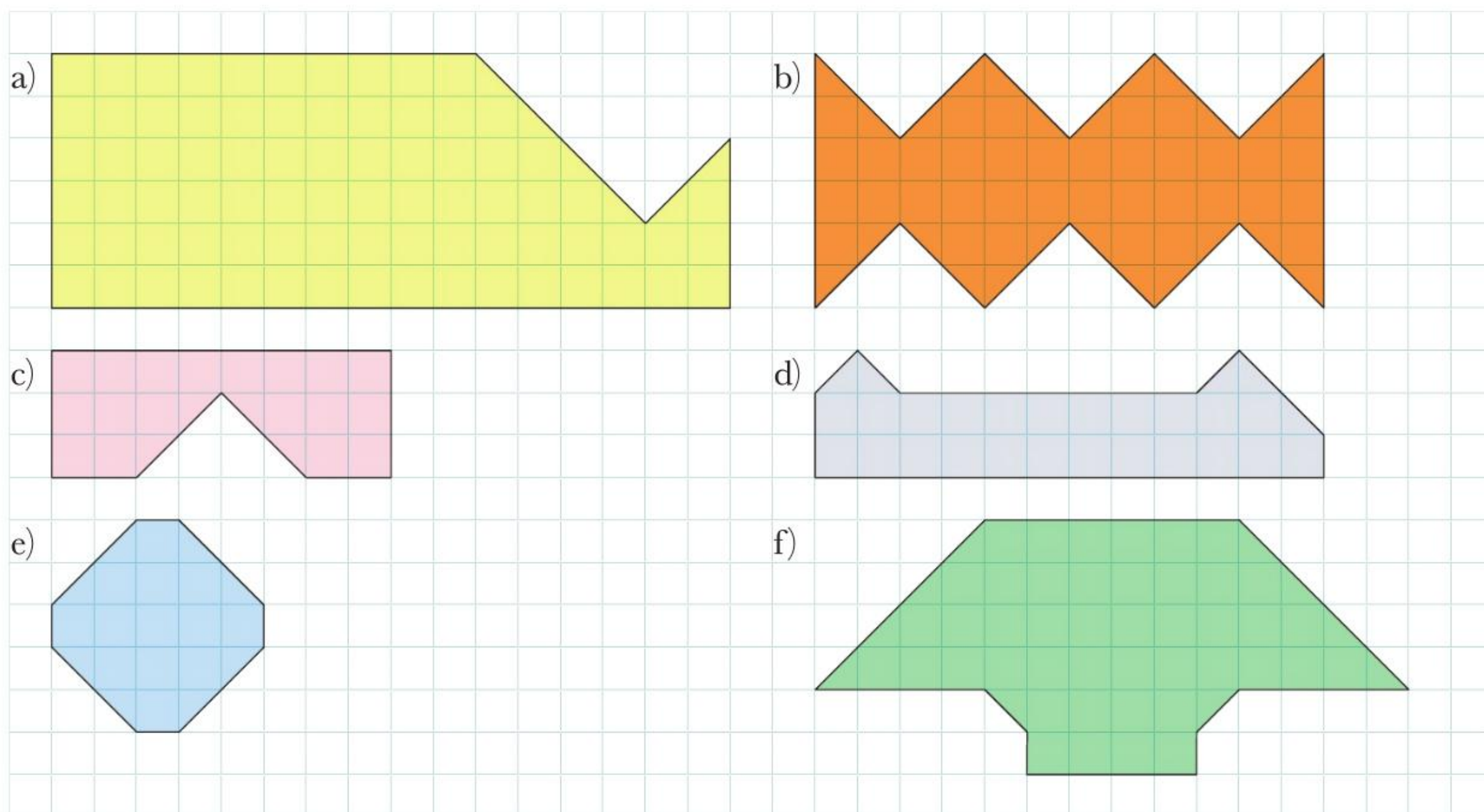
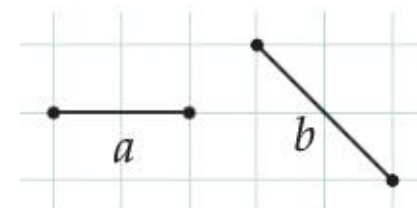
gros – tuzin tuzinów, czyli 144 sztuki,

mendel to $\frac{1}{4}$ kopy, czyli 15 sztuk.

- Kobieta sprzedająca jajka na targu przechowuje je w wytłoczkach po tuzinie i w większych opakowaniach – po mendlu.

- Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące liczbę jajek, z którymi kobieta przyszła na targ, jeżeli wiadomo, że miała x mniejszych i y większych opakowań.
- Oblicz wartość wyrażenia z punktu a) dla $x = 6$ i $y = 4$.

- Narysowane obok odcinki mają długości a i b . Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące obwód figury i oblicz jego wartość liczbową dla $a = 5$ i $b = 7$.



- Zapisz wyrażenie będące sumą trzech kolejnych liczb całkowitych, z których najmniejszą jest c . Oblicz wartość liczbową tego wyrażenia dla:

a) $c = 5$,

b) $c = 9$,

c) $c = -4$.

3.4 Działania na prostych wyrażeniach algebraicznych

Podejmij temat



Czy potrafisz zapisać liczbę wafelków tak, jak zaczęła to robić dziewczynka? A może zaproponujesz inny sposób?



Jak wykonuje się działania na najprostszych wyrażeniach algebraicznych? Wywnioskujemy to z podanych niżej przykładów.

Ponieważ nie wiemy, ile jest cukierków czekoladowych w jednej paczce, oznaczmy tę liczbę literą c .

W paczce z cukierkami miętowymi nie musi być tyle samo cukierków, więc oznaczmy ich liczbę literą m .

- Kasia ma tylko cukierki czekoladowe. W jednej ręce trzyma 2 paczki, a w drugiej – 3.
Razem ma 5 paczek cukierków czekoladowych.
- Paweł lubi tylko cukierki miętowe. W jednej ręce trzyma 1 paczkę takich cukierków, a w drugiej – 3.
Razem ma 4 paczki cukierków miętowych.
- Magda w jednej ręce trzyma 1 paczkę cukierków miętowych, a w drugiej – 4 paczki cukierków czekoladowych.
Magda ma 5 paczek, ale jakich...?
Ponieważ paczki są różnego rodzaju i zawierają niejednakowe liczby cukierków, nie możemy zapisać ich wspólną liczbą i literą.
- Tomek w jednej ręce ma 2 paczki cukierków czekoladowych, a w drugiej – 4 cukierki czekoladowe.
Nie możemy powiedzieć, ile paczek cukierków ma Tomek, ponieważ ma 2 paczki i jeszcze część (nieznany ułamek) paczki. Nie da się też powiedzieć, ile Tomek ma razem sztuk cukierków, ponieważ nie znamy liczby cukierków w paczce.



$$2c + 3c = 5c$$

$$m + 3m = 4m$$

$$m + 4c$$

Nie można zapisać w prostszy sposób.

$$2c + 4$$

Nie można zapisać w prostszy sposób.

Teraz pokażemy, jak się odejmuje wyrażenia algebraiczne.

- Janek miał 5 paczek cukierków miętowych i 2 z nich dał bratu.
Zostały mu 3 paczki cukierków miętowych.
- Julka miała 4 paczki cukierków czekoladowych. Czy może dać siostrze paczkę cukierków miętowych?
Nie, ponieważ nie ma takich cukierków.
- Maciek miał 3 paczki cukierków miętowych. Zjadł dwa cukierki.
Nie można powiedzieć, ile cukierków mu zostało, jeśli nie znamy liczby cukierków w paczce.

$$5m - 2m = 3m$$

$$4c - m$$

Nie można zapisać w prostszy sposób.

$$3m - 2$$

Nie można zapisać w prostszy sposób.

To proste! Dodawać i odejmować możemy tylko te wyrażenia algebraiczne, które mają taką samą literę.



I dodajemy albo odejmujemy tylko liczby, a do wyniku dopisujemy tę literę.

1. Przepisz do zeszytu te działania, które można wykonać, i podaj ich wyniki.

a) $5a + 8a$
 $4x + 2y$
 $7m + 4m$
 $8z + 3$

b) $13 - 7e$
 $4p - p$
 $8s - 6t$
 $10w - 9w$

c) $a + a + a$
 $7k - 7k$
 $6c - 6$
 $9 + 9z$

Według tej samej zasady dodajemy i odejmujemy wyrażenia z liczbami ujemnymi.

$$\underbrace{-4a + 6a}_{+} = 2a$$

$$7d + (-5d) = \underbrace{7d - 5d}_{-} = 2d$$

$$\underbrace{3b - 8b}_{-} = -5b$$

$$\underbrace{-3e + (-9e)}_{-} = \underbrace{-3e - 9e}_{-} = -12e$$

$$\underbrace{-4c - 2c}_{-} = -6c$$

$$\underbrace{-7f - (-4f)}_{+} = \underbrace{-7f + 4f}_{+} = -3f$$

2. Zapisz w najprostszej postaci.

a) $-9x + 3x$
 $6x - 5x$
 $10x + (-7x)$
 $2x + (-8x)$

b) $6y - 10y$
 $-4y - 5y$
 $-7y + (-12y)$
 $-y + (-y)$

c) $-6z - 8z$
 $4z - 11z$
 $-10z - (-3z)$
 $-z - (-3z)$



Aby zapisać wyrażenie algebraiczne w najprostszej postaci, należy w nim wykonać wszystkie możliwe działania.

Przykład 1

Zapiszmy w najprostszej postaci podane wyrażenie algebraiczne.

a) $3x + 7 + 5x + (-4)$

b) $-5x + 2y + 4 + 3y + x + (-10)$

a) $3x + 7 + 5x + (-4) =$

$$= 8x + 3$$

Nie wszystkie składniki można dodać.

Możliwe do wykonania jest dodanie:

- wyrażen z literą x : $3x + 5x = 8x$
- liczb: $7 + (-4) = 3$

b) $-5x + 2y + 4 + 3y + x + (-10) =$

$$= -4x + 5y + (-6) =$$
$$= -4x + 5y - 6$$

Dodajemy do siebie (osobno):

- wyrażenia z literą x : $-5x + x = -4x$
- wyrażenia z literą y : $2y + 3y = 5y$
- same liczby: $4 + (-10) = -6$

Opuszczamy nawias, aby uprościć zapis.

Oczywiście, w każdym z tych wyrażen można opuścić nawiasy, ponieważ:

a) $3x + 7 + 5x + (-4) = 3x + 7 + 5x - 4$

b) $-5x + 2y + 4 + 3y + x + (-10) = -5x + 2y + 4 + 3y + x - 10$

3. Zapisz w najprostszej postaci.

a) $5a + 6 + 7a + 9$

$$3a + 5b + 4b + a$$

$$12b + b + 7 + 3b$$

$$4 + 8c + 2 + c$$

b) $6k + (-4) + 8 + (-3k)$

$$-4m + 2k - 3m - 2k$$

$$-3 + m - 4m + 10$$

$$2p + (-4s) + 5s + (-p)$$

c) $4x + 2y + 3 - 2x - y + 3$

$$5 + (-7x) + (-8) + (-2x)$$

$$-6x + 8y + z + (-3y) + 2x + 3z$$

$$7x - 2z - 9x - z$$

Pokażemy teraz, w jaki sposób mnożyć i dzielić wyrażenie algebraiczne przez liczbę.

Pozostawmy oznaczenia literowe takie jak w przykładach z paczkami cukierków.

- Pewnego dnia 5 dzieci przyniosło do szkoły po 3 paczki takich samych cukierków czekoladowych.

Razem dzieci przyniosły 15 paczek cukierków czekoladowych.

$$5 \cdot 3c = 15c$$

lub (ze względu na przemienność mnożenia)
 $3c \cdot 5 = 15c$

- Mama rozdzieliła 8 paczek cukierków miętowych między 4 dzieci.

Każde dziecko dostało 2 paczki cukierków miętowych.

$$8m : 4 = 2m$$

Zatem aby wykonać w takim przypadku mnożenie (lub dzielenie), należy pomnożyć (lub podzielić) liczby, a literę pozostawić bez zmiany.

Oczywiście, zasada ta dotyczy też liczb ujemnych, czyli:

$$\underbrace{-5a \cdot 8}_{=} = -40a$$

$$\underbrace{-50d : 5}_{=} = -10d$$

$$\underbrace{-5 \cdot 6b}_{=} = -30b$$

$$\underbrace{36e : (-4)}_{=} = -9e$$

$$\underbrace{-8c \cdot (-3)}_{=} = 24c$$

$$\underbrace{-28f : (-7)}_{=} = 4f$$

4. Zapisz w najprostszej postaci.

a) $9x \cdot 6$

$7 \cdot 5x$

$-3 \cdot 9x$

$-8x \cdot (-5)$

b) $56y : 8$

$42y : 7$

$16y : (-2)$

$-45y : (-5)$

c) $11z \cdot 5$

$100z : (-25)$

$-z \cdot (-4)$

$-7z : 7$

Zadania

- a) Wybierz dowolną liczbę. Powiększ ją 10 razy. Zmniejsz wynik 2 razy. Odejmij wybraną przez siebie liczbę. Zmniejsz wynik 4 razy. Jaka liczba jest ostatecznym wynikiem?

b) Oznacz wybraną przez siebie liczbę literą x i zapisz kolejne polecenia z punktu a) za pomocą działań na wyrażeniach algebraicznych.
- Droga z domu Maćka do szkoły ma długość x km. Maciek przebywa tę drogę 2 razy dziennie: raz – idąc do szkoły, a potem drugi raz – wracając z niej. W piątki po lekcjach Maciek odwiedza babcię, przez co droga wydłuża się o 2 km. Zapisz w jak najprostszy sposób wyrażenie algebraiczne opisujące, ile kilometrów przebywa w ten sposób Maciek:

a) w poniedziałek, b) w piątek, c) od poniedziałku do piątku.
- W sadzie rośło n wiśni, o 5 więcej śliw, jabłoni 3 razy więcej niż wiśni i grusz o 7 mniej niż jabłoni. Zapisz wyrażenia algebraiczne pokazujące liczbę drzew każdego gatunku oraz liczbę wszystkich drzew w tym sadzie.
- W tabeli opisano zależności między liczbą uczniów w klasach pewnej szkoły.

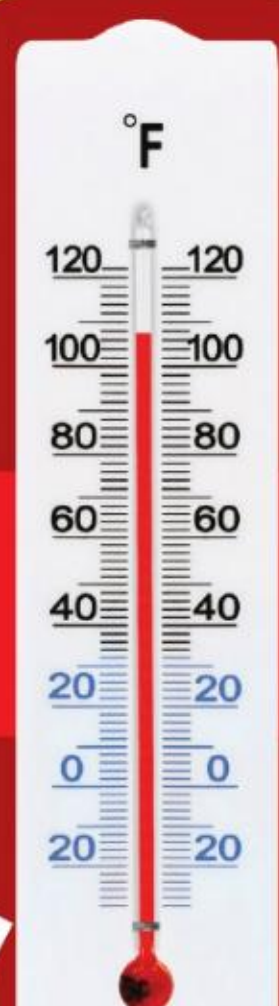
Klasa	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Liczba uczniów	n	o 7 więcej niż w kl. I	o 2 mniej niż w kl. I	2 razy więcej niż w kl. I	o 3 mniej niż w kl. IV	o 1 więcej niż w kl. IV	o 2 mniej niż w kl. VI	o 1 mniej niż w kl. VII

a) Narysuj podobną tabelę, w której liczbę uczniów, zamiast słownego opisu, zapiszesz za pomocą wyrażenia algebraicznego.

b) Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie algebraiczne pokazujące liczbę uczniów w całej szkole.
- W gospodarstwie jest n krów, $2n$ świń, $3n$ kaczek, $4n$ kur, 2 psy i 3 koty. Ile nóg mają razem wszystkie zwierzęta z tego gospodarstwa? Odpowiedź zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego.

JAK MIERZYMY TEMPERATURĘ

Termometr
ze skalą
Fahrenheita



Za wynalazcę termometru uważa się Daniela Gabriela Fahrenheita – niemieckiego fizyka urodzonego w Gdańsku – który na początku XVIII wieku skonstruował pierwszy termometr rtęciowy. Termometry ze skalą Fahrenheita są, z niewielkimi zmianami, stosowane do dziś w krajach anglosaskich, na przykład w USA.

Skalę temperatury Fahrenheit ustalił następująco:

0° – **najniższa temperatura, jaką zdołał uzyskać,**
 212° – **temperatura wrzenia wody.**

$^{\circ}\text{F}$

Mówimy, że zimą temperatura spada poniżej zera. Oznacza to, że temperatura powietrza jest liczbą ujemną. Oczywiście tak jest wtedy, gdy temperatura podawana jest w znanych nam stopniach Celsjusza.



Anders Celsjusz

Anders Celsjusz był szwedzkim astronomem i fizykiem. W wyniku prowadzonych badań zaproponował inną skalę temperatury. Swoją koncepcję przedstawił w 1742 roku. Skalę pomiaru ustalił, biorąc pod uwagę dwie temperatury – wrzenia i zamarzania wody. Przyjął, że 0° będzie oznaczało temperaturę wrzenia wody, a 100° – temperaturę jej zamarzania.

Obecnie trudno nam sobie wyobrazić taką zależność, że im jest zimniej, tym temperatura jest wyższa! Naukowcy dawno już postanowili odwrócić tę skalę – i tak jest do dzisiaj.

Termometr
ze skalą
Celsjusza

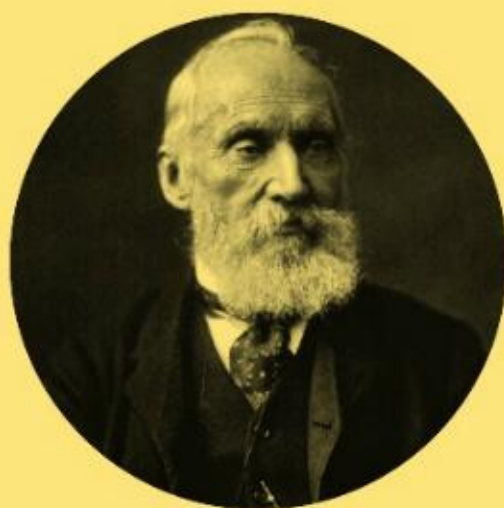


Skala Celsjusza została ustalona następująco:

0° – **temperatura zamarzania wody,**
 100° – **temperatura wrzenia wody.**

Zadanie 1

Jaką temperaturę w stopniach Celsjusza pokazuje zamieszczony obok termometr? Ile stopni pokazywałby termometr przed odwróceniem skali?



William Thomson
Kelvin

Termometr
ze skalą
Kelvina



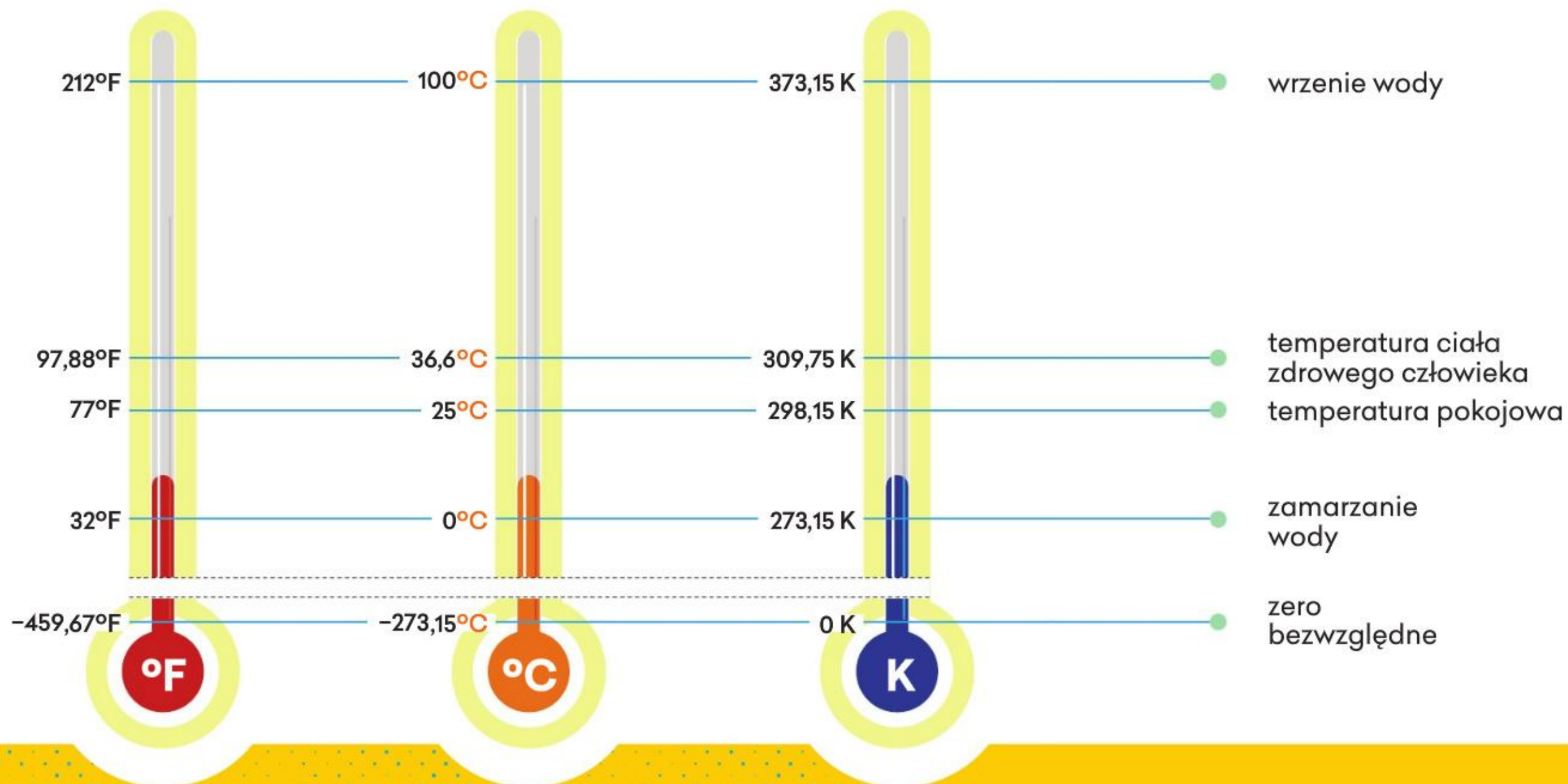
K

W nauce i technice do pomiaru temperatur obecnie używana jest na całym świecie skala Kelvina, nazwana tak na cześć lorda Williama Thomsona Kelvina [czyt. łyliama tomsona kelwina] – brytyjskiego fizyka, matematyka i przyrodnika.

W tej skali 0 oznacza **teoretycznie najniższą możliwą temperaturę**, jaką może mieć substancja (tzw. **zero bezwzględne**).

Jednostkami temperatury w opisanych skalach są:

stopnie Fahrenheita (°F) stopnie Celsjusza (°C) kelwiny (K) – nie stopnie!



Zamiana jednostek temperatury

$T = t + 273,15$ t – temperatura w stopniach Celsjusza

$t = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32)$ gdzie: T – temperatura w kelwinach

$t_F = \left(\frac{9}{5} \cdot t + 32 \right)$ t_F – temperatura w stopniach Fahrenheita

Zadanie 2

Podaną temperaturę wyraż we wskazanej jednostce.

- 10°C w kelwinach
- 20°C w stopniach Fahrenheita
- 50 K w stopniach Celsjusza
- 90°F w stopniach Celsjusza



Zadanie 3

Poszukaj informacji, gdzie się znajduje kolumna meteorologiczna Fahrenheita. Jak wygląda i co można z niej odczytać?

Podsumowanie działu 3

Ważne pojęcia

wyrażenie algebraiczne	wartość liczbową wyrażenia algebraicznego
------------------------	---

Nazwy wyrażeń algebraicznych

$x + y$	$x - y$	xy	$\frac{x}{y}$	x^2	y^3
suma liczb x i y	różnica liczb x i y	iloczyn liczb x i y	iloraz liczb x i y	kwadrat liczby x	sześcian liczby y

Obliczanie wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego

$5a + \frac{4a}{6} - 7$
dla $a = 3$

$5a + \frac{4a}{6} - 7$

$5 \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3}{6} - 7 =$

$= 15 + 2 - 7 = 10$

$-5b + 8c + 4(b - 2c)$
dla $b = 4$ i $c = 6$

$-5b + 8c + 4(b - 2c)$

$-5 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + 4 \cdot (4 - 2 \cdot 6) =$

$= -20 + 48 + 4 \cdot (4 - 12) =$

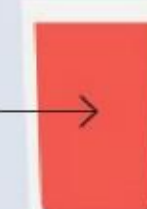
$= -20 + 48 + 4 \cdot (-8) =$

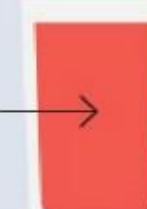
$= -20 + 48 + (-32) = -4$

Działania na wyrażeniach algebraicznych

CENNIK

a zł → 

$0,5$ zł → 

b zł → 

 +  +  = 

$a + 0,5$ + $2a + 0,5$ + $3a + 0,5$ = $6a + 1,5$

 +  +  +  =  +  + 

b + $2a + 0,5$ + $3a + 0,5$ + b = $5a + 1 + 2b$

Czy już umiesz?

1

W każdym czerwonym bukiecie jest c róż, a w każdym białym jest k róż. Zapisz wyrażenie algebraiczne będące opisem liczby róż na ilustracji.

a)



b)



c)



2 Pan Roman jest 3 razy starszy od syna, który ma y lat. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

a) ile lat ma pan Roman,

b) ile lat będzie miał pan Roman za 5 lat.

3 Cena 1 kg czereśni wynosi p zł i jest 3 razy wyższa niż cena 1 kg wiśni oraz o 8 zł wyższa od ceny 1 kg jabłek. Czy wyrażenia algebraiczne opisujące koszt owoców kupionych przez siedmioro klientów są utworzone poprawnie?

Na to pytanie dla każdego klienta zapisz w zeszycie odpowiedź: **tak** lub **nie**. Jeśli przy którymś kliencie napiszesz **nie**, utwórz wyrażenie poprawne.

Klient	Ilość i rodzaj zakupionych owoców	Koszt zakupu
I	1 kg wiśni	$3p$
II	1 kg jabłek	$p - 8$
III	3 kg jabłek i 1 kg czereśni	$3p - 8 + p$
IV	0,5 kg wiśni	$0,5 \cdot \frac{p}{3}$
V	0,5 kg czereśni i 2 kg wiśni	$0,5p + 2 \cdot \frac{p}{3}$
VI	5 kg jabłek, 1 kg wiśni i 1 kg czereśni	$5(p - 8) + 4p$
VII	1,2 kg wiśni i 0,45 kg czereśni	$1,2 \cdot \frac{p}{3} + 0,45p$

4 Zamień:

a) k minut na sekundy,

b) p godzin na sekundy,

c) m sekund na minuty,

d) t godzin na doby.

153

- 5 Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile to gramów.
a) m kg b) p dag c) n dag t g
- 6 Płot, po którym idzie kogut, ma 12 m długości. Płot jest zbudowany ze sztachet, z których każda ma t cm szerokości. Jeden krok koguta jest o 10 cm krótszy od szerokości sztachety. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:
a) z ilu sztachet składa się płot,
b) jaka jest długość kroku koguta,
c) ile kroków musi zrobić ten kogut, aby przejść po całym płocie.
- 7 Zapisz podane wyrażenie algebraiczne.
a) suma liczb -4 i x b) iloraz liczby z i liczby 8
c) różnica liczby y i liczby -2 d) iloczyn liczb $-k$ i -6
e) różnica liczby m oraz ilorazu liczb s i 3 f) iloczyn sumy liczb p i q oraz liczby t
g) suma kwadratu liczby a i sześcianu liczby b h) różnica liczby b oraz ilorazu liczb a i 7
- 8 Masa brutto bombonierki, w której jest k jednakowych czekoladek, wynosi 43 dag. Opakowanie waży 6 dag. Zapisz wyrażenie algebraiczne przedstawiające masę jednej czekoladki. Jak się nazywa to wyrażenie?
- 9 Oblicz wartość liczbową wyrażenia algebraicznego dla $a = 4$.
a) $5a$ b) $3a^2$ c) $-6a + 9$ d) a^3
e) $\frac{5a^2}{8}$ f) $0,25a - 7$ g) $-a + 0,6$ h) $-2(7 - 2a)$
- 10 Czy podana liczba jest wartością liczbową danego wyrażenia algebraicznego dla $c = -1$? Sprawdź, a następnie dla każdego wyrażenia algebraicznego zapisz w zeszycie odpowiedź: **tak** lub **nie**. Jeśli w którymś przypadku napiszesz **nie**, oblicz wartość poprawną.

Numer wyrażenia algebraicznego	I	II	III	IV	V	VI
Wyrażenie algebraiczne	$-6c$	$4c^3$	$-5 + 2c^2$	$(4 - c)(4 + c)$	$\frac{6c}{c + 2}$	$3,14 + 0,6c$
Wartość liczbową wyrażenia dla $c = -1$	6	-4	-3	-15	-6	3,74

- 11 W sali matematycznej jest m stolików, a przy każdym znajdują się 2 krzesła. W sali przyrodniczej jest p stolików: przy 2 stolikach stoją po 3 krzesła, a przy pozostałych – po 2. W sali do nauki języka angielskiego znajduje się a stolików: przy połowie stoją po 2 krzesła, przy pozostałych jest tylko po 1 krzesło.
a) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego liczbę krzeseł w każdej sali.
b) Oblicz liczbę krzeseł w każdej sali dla $m = 14$, $p = 11$ i $a = 16$.

- 12 Wyobraź sobie sumy i różnice każdego z dwóch wyrażeń spośród pięciu podanych. Tylko w przypadku jednej pary można tę sumę i różnicę zapisać w prostszy sposób. Której?

I	II	III	IV	V
$6x$	$-2y$	-2	$-7z$	$-7x$

A. IV i V B. I i V C. II i III D. III i IV

- 13 Mateusz jest o x lat młodszy od Adama, który ma 16 lat. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego (w najprostszej postaci):

a) ile lat ma Mateusz, b) ile lat miał Mateusz przed trzema laty.

- 14 Pan Wiśniewski zarabia k zł miesięcznie, a jego żona o 250 zł mniej. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego:

a) ile złotych miesięcznie zarabia pani Wiśniewska,
b) ile złotych miesięcznie małżonkowie zarabiają razem,
c) ile złotych zarobili razem państwo Wiśniewscy przez 2 lata.

- 15 Janek ma klocki w trzech kolorach. Klocków zielonych ma x sztuk, czerwonych o 50 więcej, a żółtych – o 40 więcej niż czerwonych. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego (w najprostszej postaci) liczbę:

a) klocków czerwonych, b) klocków żółtych,
c) klocków zielonych i żółtych razem, d) wszystkich klocków.

Oblicz wartości zapisanych wyrażeń dla $x = 55$.

- 16 Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego (w najprostszej postaci) wartość podanych monet w złotych.

a) x monet 1-złotowych b) y monet 2-złotowych
c) z monet 5-złotowych d) a monet 2-złotowych i b monet 5-złotowych
e) k monet 5-złotowych f) y monet 2-złotowych
i o 3 więcej monet 1-złotowych i 3 razy więcej monet 5-złotowych

- 17 Trzy klasy szóste wybrały się na wycieczkę do muzeum. Z jednej klasy poszło n uczniów, z drugiej $n - 5$ uczniów, a z trzeciej $n + 2$ uczniów. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego (w najprostszej postaci):

a) ilu uczniów poszło do muzeum,
b) ile biletów wstępu zakupiono, jeżeli każdą klasą opiekowało się dwóch nauczycieli,
c) ile osób liczyła jedna grupa, jeżeli przed rozpoczęciem zwiedzania muzeum uczniowie i nauczyciele zostali podzieleni na 3 równe grupy?

Odpowiedzi do zadań

1. Liczby całkowite

1.1 Powtórzenie wiadomości o liczbach naturalnych (s. 10)

2. a) 212 b) 15 c) 5 3. a) 339 m b) 193 m c) 209 m
d) 64 m e) F; o 42 m f) D; o 43 m 4. a) 1125; 200
b) 6536; 190 5. a) 16 281 m b) Jacek; o 6084 m
c) 10 854 m; 38 646 m; 27 792 m
6. z papieru toaletowego; o 2112 cm 7. B
9. a) 195 b) 283 c) 16 d) 1200

1.2 Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych (s. 13)

1. a) $5287 + 8970 : 26 = 5632$ b) $76 \cdot 45 - 564 = 2856$
c) $426 + 184 + 361 - 28 \cdot 16 = 523$
d) $(835 + 799) \cdot (835 - 799) = 58\,824$ 2. a) 9 b) 20
c) 132 d) 7 e) 4 f) 9 3. 440 km 4. C; 4140
5. a) C; 96 b) A; 300 6. B; 228
7. a) $84 \cdot 8 + 224 \cdot 6$; 20 kg 16 dag b) o 6 kg 72 dag
8. a) B b) C c) A d) C 9. a) $3 \cdot 24 + 4 \cdot 8 = 104$ (zł)
b) $100 - 17 - 2 \cdot 8 = 67$ (zł) c) $3 \cdot 17 - 2 \cdot 24 = 3$ (zł)
d) $(2 \cdot 24 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 8) - 82 = 16$ (zł) 11. a) 459 zł
b) 745 zł c) 693 zł d) 236 zł e) 1130 zł f) o 50 zł

1.3 Praca z kalkulatorem (s. 18)

1. 2000 2. 9 989 001 3. 2197
4. c) $26 - (48 - 39)$ d) $1728 : (207 : 23)$ 5. 6940

1.4 Zaokrąglanie liczb naturalnych (s. 22)

1. 27 000; 31 000; 20 000 2. 100; 1600; 1200
3. 1900, 18 100, 300, 100, 100, 300; 2000, 200, 100
4. a) C b) B

1.5 Liczby całkowite (s. 26)

1. B 4. a) o 4°C b) o 4°C c) o 10°C d) o 16°C
e) o 12°C f) o 22°C 7. a) 56 b) 34 c) 28 d) 53
e) 40 f) 30 g) 47 h) 3 i) 4 j) -8 k) 3 l) 5
8. a) F b) F c) P d) F e) P f) F g) P

1.6 Porównywanie liczb całkowitych (s. 29)

2. a) np. -19, -15, -1, 0, 5
b) np. -21, -22, -30, -100, -200 c) np. -2, 0, 5, 10, 15
d) -5, -4, -3, -2, -1 e) np. -39, -38, -35, -33, -31
f) -20, -19, -18, -17, -16 3. a) -3, -2, -1, 0, 1
b) -2, -1, 0, 1, 2 4. a) -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2
b) -5, -4, -3, -2, -1 c) 0, 1, 2 d) -1, 0
7. a) na cztery: 3, 2, 1, 0 b) na dwa: 1, 2
8. a) -8 b) 0 c) -3 d) 0 9. a) F b) F c) P d) F

1.7 Dodawanie liczb całkowitych (s. 36)

1. a) -200 zł; -500 zł; -200 zł; -400 zł b) 500 zł
2. a) np. 3 i -2 b) np. 3 i -4 c) np. 3 i -3 d) np. -2 i -6
3. -400 zł i -100 zł
4. a) o 5°C b) o 9°C c) o 13°C d) o 15°C
5. $-12 + 3 + (-7) + 8 = -8$ (zł) 6. C

1.8 Odejmowanie liczb całkowitych (s. 41)

1. kolejno: -16°C , -10°C , -13°C , -17°C , -24°C
2. Szczecin 15°C , Gdańsk 14°C , Białystok 17°C ,
Poznań 13°C , Warszawa 16°C , Kraków 15°C ;
największa różnica – Białystok, najmniejsza –
Poznań 3. a) 1025 m b) 304 m c) -30 m n.p.m.
4. 19 842 m 5. b) I, III, V, VI, VII, VIII, IX
6. a) -25 b) -12 c) -9 d) 8 e) -5 f) -6 g) -5

1.9 Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych (s. 46)

4. a) -54 b) 14 c) -12 d) 22 5. a) -75 b) -8 c) -11
d) 9 e) -1 f) 0 6. 9°C 7. a) 70 b) -70

Czy już umiesz? (s. 49)

1. I. A; II C 3. B 4. B 5. C 6. D 8. B
9. CYRKIEL 10. A 11. B 12. A 13. C

2. Ułamki

2.1 Powtórzenie wiadomości o ułamkach zwykłych (s. 58)

1. A-III, B-I, C-IV, D-II 2. $A = \frac{1}{20}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = \frac{1}{4}$, $D = \frac{2}{5}$,
 $E = \frac{3}{5}$, $F = \frac{3}{4}$, $G = \frac{9}{10}$ 3. $A = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $B = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$,
 $C = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$, $D = 4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$, $E = 6\frac{1}{6} = \frac{37}{6}$, $F = 6\frac{5}{6} = \frac{41}{6}$
4. a) $\frac{8}{30} < \frac{9}{30} < \frac{12}{30}$ b) $\frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$ c) $\frac{21}{70} < \frac{27}{70} < \frac{30}{70}$
d) $\frac{13}{24} < \frac{14}{24} < \frac{15}{24}$ e) $\frac{24}{40} < \frac{29}{40} < \frac{30}{40}$ f) $\frac{24}{30} < \frac{25}{30} < \frac{26}{30}$ 5. B

2.2 Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych (s. 60)

1. $5\frac{1}{4}$ 2. $5\frac{1}{9}$ 3. a) o $5\frac{17}{18}$ b) o $1\frac{29}{56}$ c) o $2\frac{19}{30}$ d) o $3\frac{1}{2}$
4. $10\frac{1}{2}$ roku, czyli 10 lat i 6 miesięcy 5. druga; $\frac{19}{20}$ kg
6. $2\frac{1}{30}$ g 7. a) $\frac{13}{20}$ m b) $2\frac{19}{20}$ m c) dywan Anety o $\frac{1}{10}$ m
9. a) $2\frac{1}{10}$ l b) $1\frac{9}{10}$ l c) $\frac{1}{10}$ l 10. a) $x = 2\frac{5}{28}$ b) $x = 9\frac{11}{20}$
c) $x = 2\frac{2}{3}$ d) $x = 5\frac{5}{8}$ e) $x = \frac{19}{20}$ f) $x = \frac{8}{9}$

2.3 Mnożenie ułamków zwykłych (s. 66)

1. a) 60 b) $22\frac{1}{2}$ c) $13\frac{1}{3}$ d) 49 e) $1\frac{3}{4}$ f) $\frac{4}{5}$ 4. $\frac{2}{21}$
5. w sklepie spożywczym 45 zł, w aptece 20 zł,
w księgarni 25 zł, w kiosku 12 zł, w cukierni 18 zł
7. a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{22}{30}$ 9. ok. 546 jardów; ok. $7\frac{1}{2}$ mili

2.4 Dzielenie ułamków zwykłych (s. 72)

1. różnica $2\frac{17}{44}$ 2. $1\frac{1}{9}$ razy 3. a) $1\frac{2}{3}$ razy b) $113\frac{1}{3}$ razy
4. 32 5. na 6 6. 150 cm
8. $2\frac{4}{5}$ kg ogórków i $3\frac{3}{4}$ kg pomidorów; razem $6\frac{11}{20}$ kg
9. a) $x = 3\frac{1}{30}$ b) $x = 6$ c) $x = \frac{3}{10}$

2.5 Działania na ułamkach zwykłych (s. 75)

1. a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 2 d) $\frac{31}{24}$ e) $6\frac{11}{25}$ f) $\frac{1}{2}$
 3. a) Magda $3\frac{2}{3}$ godz., Asia $1\frac{2}{3}$ godz. b) o 2 godz.
 c) $2\frac{1}{5}$ razy 4. a) $\frac{5}{8}$ b) $3\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{10}$ 5. $\frac{3}{4}$ m
 6. $49\frac{3}{4}$ kg 7. ok. $44\frac{1}{10}$ m 8. $\frac{31}{40}$ l 9. o $30\frac{12}{25}$ cm

2.6 Powtórzenie wiadomości o ułamkach dziesiętnych (s. 80)

2. a) $2,014 < 2,04 < 2,042 < 2,0459 < 2,245 < 2,35$;
 najmniejszy: dwa i czternaście tysięcznych,
 największy: dwa i trzydzieści pięć setnych
 b) $5,0047 < 5,03 < 5,045 < 5,1 < 5,2 < 5,256$;
 najmniejszy: pięć i czterdzieści siedem
 dziesięciotysięcznych, największy: pięć i dwieście
 pięćdziesiąt sześć tysięcznych
 3. Franek, Jędrrek, Janek, Maja, Ewa, Agata, Zuzia
 5. 37,253 kg, 34,56 kg, 35,04 kg, 35,018 kg

2.7 Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych (s. 83)

1. a) 16,365 km²; 95,594 km²; 52,225 km²
 b) Hańcza i Śniardwy 82,8 m; Hańcza i Mamry 62,4 m;
 Hańcza i Łebsko 99,9 m; Hańcza i Drawsko 24 m;
 Hańcza i Wielki Staw Polski 25,9 m c) 111,959 km²
 4. 987,72 km 5. 0,946 kg; 0,766 kg 6. 0,274 kg
 7. a) I – 14,72 km, II – 14,058 km, III – 12,536 km,
 IV – 14,562 km b) o 0,79 km c) 1,636 km
 11. a) $x = 3,28$ b) $x = 1,666$ c) $x = 41,28$ d) $x = 7,69$

2.8 Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne (s. 88)

1. a) 2131,92 b) 8,46 2. 8,25 razy 3. 4,8 razy
 4. 2,5 razy 5. 1,95 razy 6. a) 22,8 zł b) 179,2 kg
 c) 49 m 11. a) 1,47 kg b) 0,156 kg c) o 0,534 kg
 d) o 0,089 kg 12. 380, 2478; 3511, 440; 22 110 000;
 38 400 000

2.9 Mnożenie ułamków dziesiętnych (s. 92)

1. a) 8,75 zł b) 5,60 zł c) 8,47 zł 2. a) mazurskie 7,29 zł,
 śląskie 4,44 zł, pomorskie 3,86 zł b) 15,44 zł
 c) 5 paczek wafli mazurskich d) o 1,40 zł e) o 3,43 zł
 3. 7,65 km 4. a) ok. 0,010965 kg b) ok. 0,6579 kg
 5. a) 31,5 b) 41,08 c) 3,848 d) 52,74
 7. czasopisma 14,49 zł, gra 43,47 zł; pozostało 14,49 zł
 8. w pn. 131,38 kg, we wt. 105,104 kg, w śr. 65,69 kg,
 pozostało 26,276 kg

2.10 Dzielenie ułamków dziesiętnych (s. 95)

1. a) 10 razy b) 3 razy 2. a) ok. 0,875 kg b) ok. 15 l
 3. na 13 4. 8 5. na 14 6. pan Adam 2,6 kg,
 pan Tomasz 1,5 kg 7. malinowych 8,40 zł,
 paprykowych 7,50 zł 9. 540 s = 9 min
 12. a) $x = 3,42$ b) $x = 18,2$ c) $x = 54,6$ d) $x = 0,0812$

2.11 Działania na ułamkach dziesiętnych (s. 99)

1. 45 2. 150 3. 79 4. 196,525 5. 81,4 6. 3,46
 8. 7,5 l 9. ser o 5,95 zł 10. 264,29 zł 11. o 0,04 m
 12. 16,20 zł

2.12 Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych (s. 102)

7. D

2.13 Przedstawianie ułamków dziesiętnych w postaci ułamków zwykłych i odwrotnie (s. 108)

2. a) największa 0,82, najmniejsza $\frac{5}{8}$
 b) największa 0,43, najmniejsza $\frac{21}{500}$
 c) największa 0,98, najmniejsza $\frac{7}{8}$
 d) największa 0,01, najmniejsza 0,007
 e) największa $\frac{23}{25}$, najmniejsza $\frac{7}{8}$
 f) największa 0,38, najmniejsza $\frac{7}{20}$
 5. a) $2,6875 \approx 2,69$ b) $5,964 \approx 5,96$ c) $0,2558 \approx 0,26$
 6. a) 2 b) 2 c) 6
 9. jeden zwykły i jeden dziesiętny
 10. a) 0,46 b) 0,69 c) 0,537 d) 2,097

2.14 Działania na ułamkach zwykłych i ułamkach dziesiętnych (s. 112)

1. a) 10,40 zł b) 5,20 zł c) 15,60 zł d) 46,80 zł
 2. 15,75 zł 3. śmietana 1,89 kg, mleko 4,335 kg
 4. $\frac{23}{24}$ kg 5. Ewa 2,275 km, Marta 3,9 km
 6. 2,85 l; 19 szklanek
 7. a) $\frac{59}{90}$ b) 1,945 c) $3\frac{4}{15}$ d) $\frac{18}{35}$ e) $1\frac{2}{7}$ f) $6\frac{2}{3}$

2.15 Ułamki dziesiętne dodatnie i ujemne (s. 117)

3. 21,14 4. a) -4 b) 0
 6. a) 5,62 b) 15,62 c) 10,42 d) -0,38 7. C 8. D

2.16 Ułamki zwykłe dodatnie i ujemne (s. 123)

3. a) $-6\frac{11}{12}$ b) $1\frac{5}{8}$ c) 7 d) $-7\frac{1}{2}$ 5. Mateusz, $1\frac{25}{28}$
 6. B

2.17 Liczby wymierne (s. 127)

2. a) o $1\frac{3}{10}$ dm = 13 cm b) bok trójkąta o $\frac{31}{40}$ dm
 4. a) w Polsce 81,2°C, na świecie 145,9°C b) o 48,2°C
 5. a) $-2\frac{3}{8}$, -1,8 i 2,5 b) -1,8, $-\frac{3}{4}$ i 2,5 c) $-2\frac{3}{8}$, $-\frac{3}{4}$ i $4\frac{1}{20}$

Czy już umiesz? (s. 130)

3. $3\frac{17}{20}$, $5\frac{19}{20}$; $15\frac{1}{20}$ 4. a) 12 dziewcząt, 20 chłopców
 b) 9 c) 12 5. a) $4\frac{1}{2}$ razy b) $3\frac{1}{2}$ razy 6. B 7. $3\frac{13}{18}$
 8. $2\frac{19}{20}$ 11. a) 9,45 zł b) o 1,65 zł c) o 1,40 zł
 12. a) 75,6 cm b) 1,3 cm 13. Maciek o 1,99 zł
 14. 5,8 cm, 40,6 cm 15. D 18. C 19. A 20. B
 21. większy o 1,344 22. B 23. $\frac{1}{15}$

3. Elementy algebry

3.1 Tworzenie wyrażeń algebraicznych (s. 136)

1. a) $16c$ b) $13b + 21a$ c) $3k$ d) $\frac{m}{6}$
3. a) $86 + n$ b) $172 + n$ c) $\frac{86+n}{2}$ d) $\frac{2}{5}(86 + n)$
e) $86 + n - \frac{2}{5}(86 + n)$ 4. a) $4s$ b) $2m$ c) $4s + 2m$
d) $4(s - 3)$ e) $2(m + 5)$ 5. a) na zabawkę $\frac{3}{5}p$,
zostało jej $p - \frac{3}{5}p = \frac{2}{5}p$ b) $0,2p$
c) $p - \frac{3}{5}p - 0,2p = \frac{2}{5}p - 0,2p$
6. a) $5k$ b) $p - 0,5$ c) $2,5 + 6p$ d) $3(2,5 + 6p)$
7. a) $x - 3$ b) $x - 3 + 8 = x + 5$ c) $2x$ d) $\frac{1}{9} \cdot 2x = \frac{2}{9}x$
9. a) $100n$ b) $10n$ c) $0,001n$
10. a) $3a$ b) $a + 5$ c) $a - 1$ d) $\frac{a}{2}$ e) $4,5a$

3.2 Nazywanie wyrażeń algebraicznych (s. 141)

3. a) $p + k$, suma liczb p i k
b) $2p + 2k$, suma iloczynów liczb 2 i p oraz liczb 2 i k
c) $\frac{3}{p}$, iloraz liczby p i liczby 3
d) $20 - 3p$, różnica liczby 20 oraz iloczynu liczb 3 i p
e) $3k - p$, różnica iloczynu liczb 3 i k oraz liczby p
f) $100s$, iloczyn liczby 100 i liczby k
4. a) $x - 3$, różnica liczb x i 3
b) $x + (x - 3)$, suma liczby x oraz różnicy liczb x i 3
c) $2(x - 3)$, iloczyn liczby 2 oraz różnicy liczb x i 3
d) $\frac{x}{x - 3}$, iloraz liczby x oraz różnicy liczb x i 3

3.3 Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń algebraicznych (s. 144)

1. a) $x + x - 100$ b) 6500 zł; 7900 zł
2. a) $k + 8$; $2(k + 8)$; $5k + 2(k + 8)$ b) 65 zł; 100 zł
3. 42 4. a) $12x + 15y$ b) 132
5. a) $18a + 3b$; 111 b) $6a + 12b$; 114 c) $9a + 2b$; 59
d) $11a + 2,5b$; 72,5 e) $2a + 4b$; 38 f) $10a + 5b$; 85
6. $c + c + 1 + c + 2$; a) 18 b) 30 c) -9

3.4 Działania na prostych wyrażeniach algebraicznych (s. 149)

2. a) $2x$ b) $2x + 2$ c) $10x + 2$ 3. $n + 5$ śliw, $3n$ jabłoni,
 $3n - 7$ grusz, $8n - 2$ wszystkich drzew 5. $26n + 20$

Czy już umiesz? (s. 153)

1. a) $2c + 3k + 1$ b) $3c + 5$ c) $4k + 2c + 2$
2. a) $3y$ b) $3y + 5$ 6. a) $\frac{1200}{t}$ b) $t - 10$ c) $\frac{1200}{t - 10}$
9. a) 20 b) 48 c) -15 d) 64 e) 10 f) -6 g) -3,4 h) 2
11. a) $2m$, $6 + 2(p - 2)$, $2 \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2}$ b) 28, 24, 24
12. B 13. a) $16 - x$ b) $13 - x$
14. a) $k - 250$ b) $2k - 250$ c) $24(2k - 250)$
15. a) $x + 50$, 105 b) $x + 90$, 145 c) $2x + 90$, 200
d) $3x + 140$, 305 16. a) x b) $2y$ c) $5z$ d) $2a + 5b$
e) $6k + 3$ f) $17y$

Indeks

L

liczby całkowite	25
liczby niedodatnie	24
liczby nieujemne	24
liczby ujemne	23
liczby wymierne	125
liczby odwrotne	69
liczby przeciwne	25

O

odwrotność liczby	69
odwrotność ułamka	69

R

rozwiniecie dziesietne ulamka zwyklego	107
--	-----

U

ulamki pietrowy	73
-----------------	----

W

wartosc bezwzledna liczby	25
wartosc liczbowa wyrazenia algebraicznego	142
wyrazenie algebraiczne	135

Z

zaokraglenie liczby	19
zbiór liczb całkowitych	25

Ilustracje

Carto Team Chariza Krystian (s. 23/mapa, 28, 41/mapa, 113), Marcin Kot (s. 16/kalkulator, 23/termometr, 96/płot, 134, 140), Agnieszka Staniec (s. 150, 151), Katarzyna Surman-Pusz (s. 9, 11, 12, 16/dzieci, 19, 23/dzieci, 26, 31, 37, 39, 43, 44, 46, 55, 64, 68, 73, 77/dzieci, 79, 82, 85, 87, 90, 92/dzieci, 93, 94, 96/dzieci, 97/dzieci, 100, 104, 111, 114, 115, 116, 119, 121, 122, 124, 125, 139, 142, 146, 147), Kinga Trafas (s. 10, 27, 41/jezioro, 59, 60, 62, 77/dziewczynka w okularach i opakowania, 81, 84, 92/wafle, 97/chłopiec i tablica, 129, 130, 131, 152)

Wykaz dysponentów praw autorskich do obrazów i zdjęć zamieszczonych w publikacji:

Shutterstock: stepniak (latarnia morska w Rozewiu, s. 14), photka (storczyk, s. 15), Triff (kaktus, s. 15), belander (paproć, s. 15), iMoved Studio (karteczka, s. 15), Olga Bolbot (szachownica, 52), Kindlena (karteczka na notatki, s. 80), adirekjob (termometr, s. 93), Byelikova Oksana (metro w Boliwii, s. 103), VitaminCo (rolety, s. 110), Elisabeth Coelfen (kukurydza, s. 141), Max Lashcheuski (ananas, s. 141), Juan Aunion (ciemna bułka z ziarnami, s. 142), superdumb (jasna bułka z makiem, s. 142), Tomas Ragina (termometr ze skalą Fahrenheita, termometr ze skalą Celsjusza, s. 150), Nella (jedna róża, s. 153), GLandStudio (bukiet czerwonych róż, bukiet jasnych róż, s. 153)

Wikipedia: Arnomane (Anders Celsjusz, s. 150, https://pl.wikipedia.org/wiki/Anders_Celsius#/media/File:Anders-Celsius-Head.jpg), Messrs, Dickinson, London, New Bond Street (William Kelvin, s. 151, https://pl.wikipedia.org/wiki/William_Thomson#/media/File:Lord_Kelvin_photograph.jpg), Martnvl (termometr ze skalą Kelvina, s. 151, <https://pl.wikipedia.org/wiki/Kelwin#/media/File:CelsiusKelvinThermometer.jpg>)



Grupa MAC S.A.
ul. Witosa 76
25-561 Kielce

www.mac.pl

ISBN 978-83-65463-32-6



9 788365 463326

indeks 881301