

Matematyka

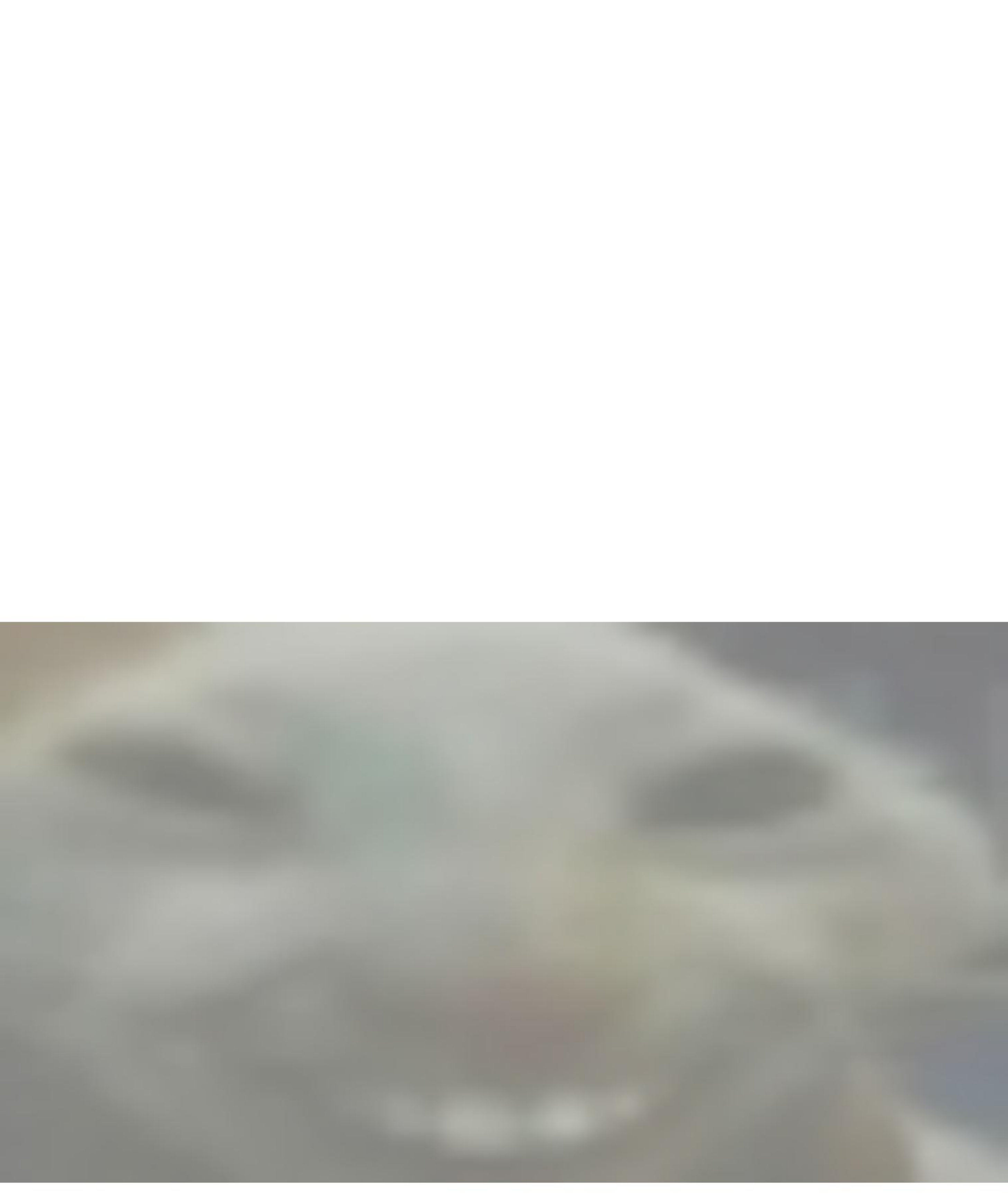
Podręcznik

część 1

5

Oznaczono zmiany
W PODSTAWIE
PROGRAMOWEJ
2024





Jolanta Borzyszkowska
Maria Stolarska-Walkowiak

5

Matematyka

Podręcznik dla klasy piątej szkoły podstawowej
część 1



Redaktor serii
Anna Parzęcka

Redaktor prowadzący
Ewa Kowalik

Redakcja merytoryczna
Ewa Kowalik, Justyna Kubicka

Redakcja językowa i korekta
Anna Kołat

Redakcja techniczna
Paweł Kowalski

Skład i łamanie
Adam Ziółkowski

Redakcja artystyczna
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska, Marcin Kot

Projekt i koncepcja artystyczna
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Koordinacja prac graficznych
Magdalena Sarnot-Wrzecionowska

Projekt okładki
Futu Creative / Kay Humelt i Rafał Kwiczor

Ilustracja na okładce i ilustracje na stronach działowych
Ładne Halo / Maciej Błażniak

Opracowanie kartograficzne
Carto Team

Fotoedycja
Grzegorz Wrzecionowski

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Przestrzegaj praw, jakie im przysługują. Udostępniając książkę lub jej fragmenty, rób to wyłącznie w zakresie dozwolonego użytku, który określają przepisy prawa. Zawartość książki możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym, ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. Kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

© Grupa MAC S.A., Kielce 2018

Wydawca oświadcza, że dołożył wszelkich starań, aby dotrzeć do wszystkich właścicieli i dysponentów praw autorskich. Osoby, których nie udało nam się ustalić, prosimy o kontakt z wydawnictwem.

ISBN 978-83-8108-375-1

Grupa MAC S.A.
25-561 Kielce, ul. Witosa 76
tel. 41 366 55 55, faks: 41 366 33 02
e-mail: kontakt@mac.pl; www.mac.pl



× Treści usunięte z podstawy programowej w 2024 r.

Spis treści

1. Liczby naturalne

1.1	Dziesiątkowy system pozycyjny	6
1.2	Porównywanie liczb. Oś liczbowa	10
1.3	Szacowanie wyników działań na liczbach naturalnych	14
1.4	Dodawanie i odejmowanie liczb naturalnych	18
1.5	Mnożenie liczb naturalnych	23
1.6	Dzielenie liczb naturalnych	29
1.7	Kolejność wykonywania działań	33
1.8	Praca z kalkulatorem	36
1.9	Odczytywanie i tworzenie tabel	40
1.10	Równania	43
1.11	Dzielniki i wielokrotności liczb naturalnych	48
1.12	Cechy podzielności liczb naturalnych	52
1.13	Liczby pierwsze i liczby złożone	56
1.14	Rozkład liczby na czynniki pierwsze	59
	Podsumowanie działu 1	63

2. Ułamki zwykłe

2.1	Ułamki i liczby mieszane	68
2.2	Ułamek jako iloraz	73
2.3	Rozszerzanie i skracanie ułamków zwykłych	76
2.4	Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika	80
2.5	Porównywanie ułamków zwykłych	84
2.6	Ułamki zwykłe na osi liczbowej	88
2.7	Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach	90
2.8	Dodawanie ułamków o różnych mianownikach	94
2.9	Odejmowanie ułamków o różnych mianownikach	97
2.10	Mnożenie ułamków zwykłych przez liczby naturalne	100
2.11	Obliczanie ułamka danej liczby	104
2.12	Dzielenie ułamków przez liczby naturalne	107
	Podsumowanie działu 2	110

3. Ułamki dziesiętne

3.1	Zapisywanie i odczytywanie ułamków dziesiętnych	114
3.2	Zamiana ułamków zwykłych na ułamki dziesiętne	118
3.3	Ułamki dziesiętne na osi liczbowej	121
3.4	Porównywanie ułamków dziesiętnych	125
3.5	Dodawanie ułamków dziesiętnych w pamięci	130
3.6	Dodawanie ułamków dziesiętnych sposobem pisemnym	133
3.7	Odejmowanie ułamków dziesiętnych w pamięci	136
3.8	Odejmowanie ułamków dziesiętnych sposobem pisemnym	139
3.9	Mnożenie ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne	142
3.10	Dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne	145
3.11	Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000 itd.	149
3.12	Szacowanie wyników działań na ułamkach dziesiętnych	153
3.13	Procenty	155
	Link do wiedzy <i>Matematyka w sporcie</i>	160
	Podsumowanie działu 3	162
	Odpowiedzi do zadań	165
	Indeks	167

Jak korzystać z podręcznika

Numer i temat

Podejmij temat

Wprowadzenie do tematu lekcji

Treści powtórzeniowe

Ćwiczenia

Ćwiczenia do wykonania na lekcji

Więcej na temat

Treści dodatkowe

1.2 Porównywanie liczb. Oś liczbowa

Podejmij temat

Przeanalizuj dane w tabeli i odpowiedz na pytania. Jaką liczbę ma samochód? Jaką liczbę ma samochód? Jaką liczbę ma samochód?

Model	Cena
Renault	45 000
Fiat	35 000
Volvo	55 000
BMW	65 000

Jeśli przeanalizujesz dane, zobaczysz, że samochody mają różne ceny. Jaką liczbę ma samochód? Jaką liczbę ma samochód? Jaką liczbę ma samochód?

Więcej na temat

Jak nazywają się liczby większe od grup milionów? Oto niektóre z nich:

Liczba	Wartość
Bilion	1 000 000 000
Trylion	1 000 000 000 000
Kwintylion	1 000 000 000 000 000
Sekstylion	1 000 000 000 000 000 000
Oktyljon	1 000 000 000 000 000 000 000
Nonilion	1 000 000 000 000 000 000 000 000
Decylion	1 000 000 000 000 000 000 000 000 000

Ciekawe!

Interesujące wiadomości uzupełniające temat lekcji

Przykłady

Przykładowe rozwiązania zadań

Najważniejsze treści matematyczne

Zadania

Zadania utrwalające materiał

Przykład 2

Składowy udział w produkcji...

Ćwiczenia

Każdy z liczb poniżej 6 narysuj...

Zadania

1. Kąty w trójkątach...

2. Mierzyliśmy, że w ciągu doby...

3. Odczytaj dane z wykresu...

Gwiazdka

Oznaczenie zadania trudniejszego

Wskazówki

Podpowiedzi w formie rozmowy dzieci za pomocą komunikatora internetowego

Link do wiedzy

Treści, które mogą rozwinąć twoje zainteresowania

MATEMATYKA W SPORCIE

Podsumowanie działu 1

Ważne pojęcia

Ważne pojęcia	Ważne pojęcia	Ważne pojęcia	Ważne pojęcia
Ważne pojęcia	Ważne pojęcia	Ważne pojęcia	Ważne pojęcia

Ciekawe!

Podsumowanie działu 1

Ćwiczenia

1. Czy już umiesz?

2. Jedno z czterech poniższych działań wykonano jest błędnie. Które?

3. 2 doby 13 godzin - ile to sekund?

4. W której przepływie małemu różnicy napięcia jest poprawna?

5. Most składający się z 14 jednokrotnych przęsał o długości 75 m. Po przejeździe mostu...

6. Na zawodach sportowych przejechało 28 uczniów. Udział wzięli uczniowie...

Czy już umiesz?

Zadania na koniec działu

Zadania wielokrotnego wyboru

Znaczenie ikon

praca zespołowa

nawiązanie do ilustracji

uwaga

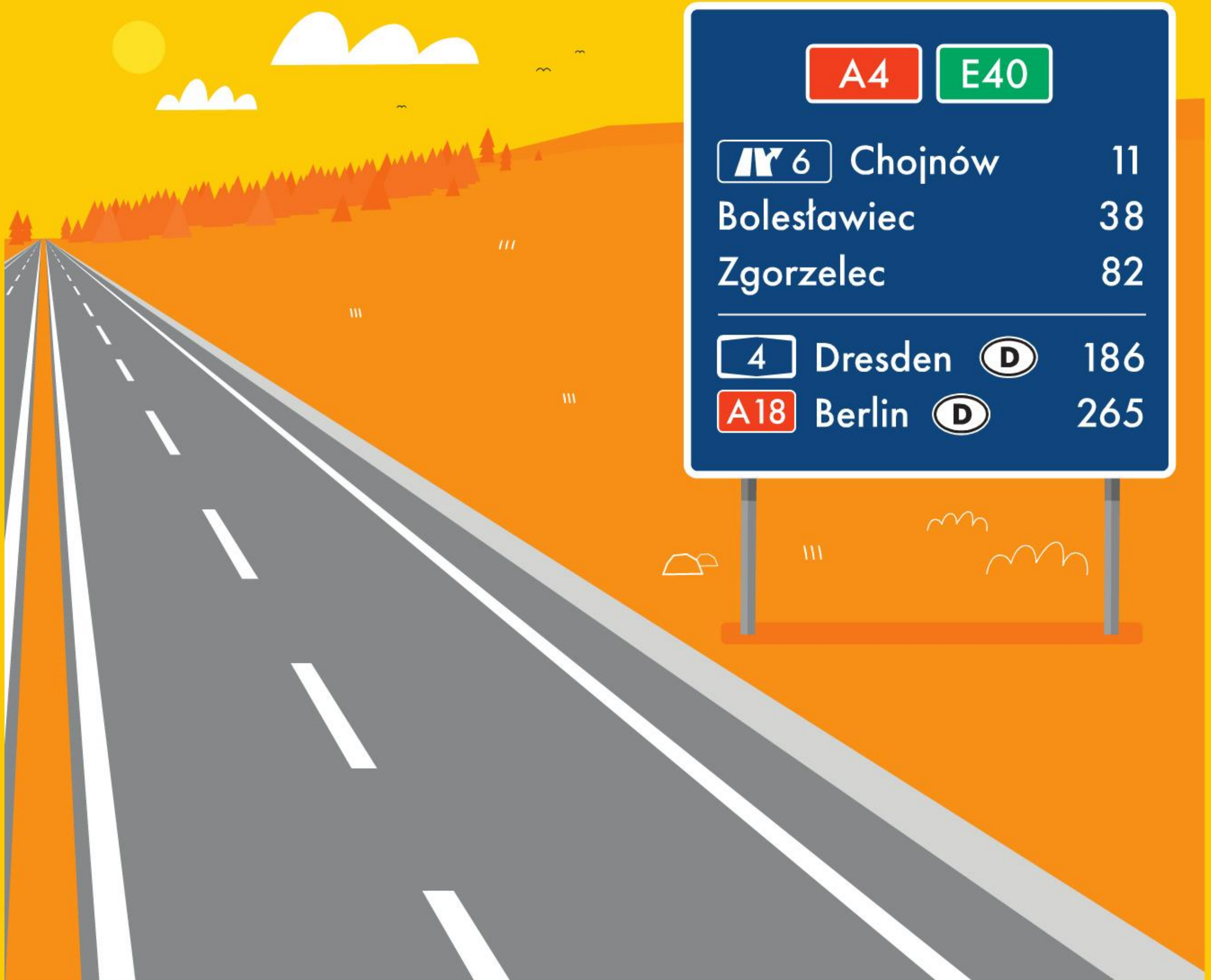
nawiązanie do innego przedmiotu

zastosowanie nowoczesnych technologii

łamigłówka, żart

Pamiętaj, że podręcznik ma służyć uczniom z kolejnych klas. Nic w nim nie zapisuj.

1. Liczby naturalne



Tablica widoczna na ilustracji to tzw. tablica szlaku drogowego. Odczytaj znajdujące się na niej informacje i odpowiedz na pytania.

1. O czym powiadają nas liczby po prawej stronie tablicy?
2. Co oznacza symbol A4, a co – symbol E40?
3. Jaki inny kolor, oprócz niebieskiego, może mieć tablica szlaku drogowego? Od czego to zależy?
4. Do granicy z jakim państwem prowadzi ta droga?



Jeśli nie znasz odpowiedzi na któreś pytanie, poszukaj jej w internecie.

1.1 Dziesiętkowy system pozycyjny

Podejmij temat



Odczytaj ceny rowerów i skuterów.



Czy pamiętasz?

W **systemie dziesiętkowym** 10 jednostek niższego rzędu tworzy jedną jednostkę kolejnego rzędu wyższego.

W **systemie pozycyjnym** znaczenie cyfry zależy od jej pozycji w liczbie.

W klasie czwartej uczyliśmy się odczytywania dużych liczb, takich jak: 52741, 300000, 176524318.

Aby poprawnie odczytać dużą liczbę, wygodnie jest podzielić jej cyfry na grupy, po trzy cyfry w każdej grupie (licząc od prawej strony). Zapis powyższych liczb wygląda wówczas następująco: 52 741, 300 000, 176 524 318.

Grupy mają określone nazwy:



Liczbę odczytujemy grupami i zawsze zaczynamy od lewej strony. Najpierw czytamy liczbę z danej grupy, po czym dopowiadamy jej nazwę. Nazwy ostatniej grupy (grupy jednostki) nie dopowiadamy. Zatem powyższą liczbę odczytujemy:

176 milionów 524 tysiące 318.

1. Przeczytaj podane liczby.

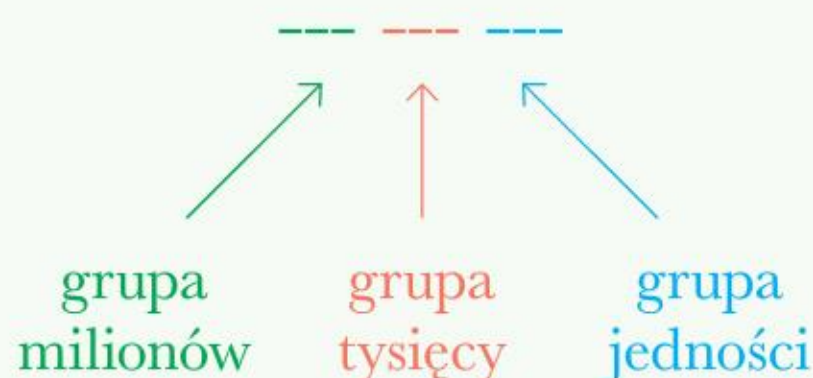
357 000 426	13 050 300	40 002 564	526 090
4 538 060	20 300 109	800 000 005	72 013 050

Aby zapisać dużą liczbę, postępujemy podobnie.

Przykład 1

Zapiszmy za pomocą cyfr liczbę: trzysta czterdzieści osiem milionów sto dziewięćdziesiąt pięć tysięcy sześćset dwadzieścia jeden.

W tej liczbie występują miliony, więc trzeba ją zapisać w trzech grupach:



trzysta czterdzieści osiem milionów	348	---	---
sto dziewięćdziesiąt pięć tysięcy	348	195	---
sześćset dwadzieścia jeden	348	195	621

W zapisie liczby mogą znajdować się zera. Przypomnijmy sobie, jak zapisujemy takie liczby.

Przykład 2

Zapiszmy za pomocą cyfr liczbę: osiemdziesiąt trzy miliony dwieście sześć tysięcy czterdzieści pięć.

osiemdziesiąt trzy miliony _ 83 --- ---

Nie ma setek milionów.

W ich miejscu nie wpisujemy zera, ponieważ jest to początek liczby.

dwieście sześć tysięcy _ 83 206 ---

Nie ma dziesiątek tysięcy.

W ich miejscu wpisujemy zero.

czterdzieści pięć _ 83 206 045

Nie ma setek, w ich miejscu wpisujemy zero.

2. Zapisz za pomocą cyfr liczbę podaną słownie.



- trzysta cztery miliony siedemset sześćdziesiąt osiem tysięcy dwieście
- osiemset dwadzieścia milionów pięćset tysięcy trzysta dwa
- dziewięćdziesiąt milionów pięćset dwanaście tysięcy trzydzieści
- sto pięć milionów czterdzieści
- dwadzieścia trzy miliony pięćdziesiąt tysięcy
- siedemset milionów
- dziesięć milionów pięć
- osiemset milionów osiemdziesiąt tysięcy osiem



W Układzie Słonecznym jest 8 planet. Na rysunku podano w kilometrach odległości poszczególnych planet od Słońca. Czy potrafisz przeczytać, w jakiej odległości od Słońca znajdują się Saturn, Uran i Neptun?

Aby odczytać np. liczbę 4 498 252 900, musimy poznać nazwę kolejnej grupy. Jest to **grupa miliardów**.



Zasada odczytywania liczb się nie zmienia – czytamy liczbę w grupie i dopowiadamy nazwę grupy. Zatem odległość Neptuna od Słońca wynosi **4 miliardy 498 milionów 252 tysiące 900** kilometrów.

3. Odczytaj podane liczby.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) 12 004 010 302 | b) 39 000 647 126 |
| 3 271 525 010 | 1 854 000 002 |
| 630 150 242 005 | 500 000 002 000 |

4. Zapisz cyframi podaną liczbę.



- 12 miliardów 8 milionów 352 tysiące 200
- 950 miliardów 305 milionów 84 tysiące
- 5 miliardów 156 tysięcy 5
- trzydzieści dwa miliardy osiemset czterdzieści milionów
- dwa miliardy sześćset tysięcy pięćset
- siedemset trzy miliardy sześć
- dwadzieścia miliardów dwa miliony pięćdziesiąt dwa tysiące

5. Liczbę podaną z użyciem skrótu zapisz za pomocą samych cyfr.

- | | | | |
|------------|----------|-----------|----------|
| a) 20 tys. | b) 4 mln | c) 30 mln | d) 7 mld |
|------------|----------|-----------|----------|



Jeżeli duża liczba kończy się zerami, to często stosuje się zapis skrócony, np:

5000 = **5 tys.** (5 tysięcy),

23 000 000 = **23 mln** (23 miliony),

1 000 000 000 = **1 mld** (1 miliard).

Więcej na temat

Jak się nazywają liczby większe od miliardów? Oto niektóre z nich.

Bilion to jedyńka i 12 zer.

Trylion to jedyńka i 18 zer.

Kwadrilion to jedyńka i 24 zera.

Kwintylion to jedyńka i 30 zer.

Sekstylion to jedyńka i 36 zer.

Septylion to jedyńka i 42 zera.

Oktylion to jedyńka i 48 zer.

Nonilion to jedyńka i 54 zera.

Decylion to jedyńka i 60 zer.

Zadania

 Przepisz do zeszytu podaną liczbę. W odpowiednich miejscach, między grupami cyfr, wstaw odstęp. Następnie zapisz tę liczbę słowami.



- a) 400000000 b) 8000000100 c) 40700000
d) 2000000040 e) 30050000000 f) 900000004000

 Na której tabliczce zapisano liczbę: dwieście tysięcy czterysta?



- A. Na zielonej. B. Na niebieskiej.
C. Na żółtej. D. Na pomarańczowej.

2 004 000	204 000
20 400	200 400

 Zapisz w zeszycie cyframi i słownie, jaka to liczba:



- a) tysiąc tysięcy, b) tysiąc milionów, c) milion tysięcy.

 Zapisz w zeszycie poniższe liczby z użyciem podanego skrótu.

a) mln

24 000 000	5 000 000 000	8000 tys.	5 mld
------------	---------------	-----------	-------

b) tys.

300 000	90 000	8 mln	2 mld
---------	--------	-------	-------

 W ciągu całego 2017 roku na Lotnisku Chopina w Warszawie obsłużono 15 752 000 pasażerów. Część z nich, czyli 2 mln 100 tys. osób, skorzystała z lotów krajowych, pozostali – z zagranicznych.



- a) Zapisz słowami występujące w powyższym tekście liczby pasażerów.
b) Czy więcej pasażerów wybrało loty krajowe, czy zagraniczne?

 Ile jest wszystkich liczb:

- a) 3-cyfrowych, b) 4-cyfrowych, c) 10-cyfrowych,
d) 2-cyfrowych zapisanych różnymi cyframi, e) 3-cyfrowych zapisanych jednakowymi cyframi?

 Do 2006 roku Układ Słoneczny liczył 9 planet. Sprawdź w internecie, jak się nazywała dziewiąta planeta, podaj jej odległość od Słońca i ustal, co się z nią stało.



 Liczbę 100 zapisz za pomocą:



- a) pięciu jedynek, b) sześciu dwójek, c) czterech dziewiątek.

Między cyfry możesz wstawiać znaki działań i/lub nawiasy.

1.2 Porównywanie liczb. Oś liczbowa

Podejmij temat

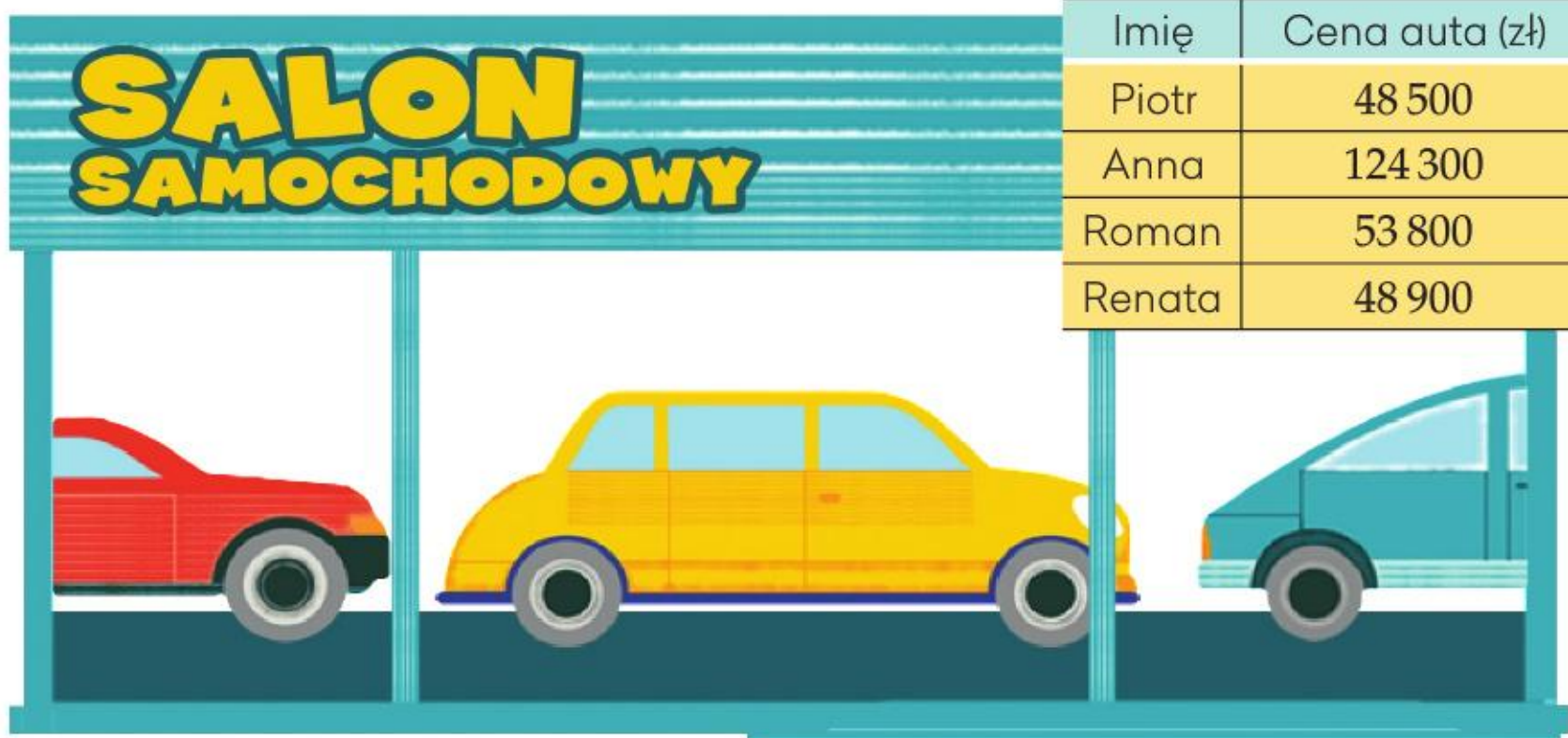


Pewnego dnia w salonie sprzedano cztery samochody. W tabeli podano imiona klientów i ceny kupionych aut.

Kto zapłacił więcej:

- a) pan Piotr czy pani Anna,
- b) pan Roman czy pani Renata,
- c) pani Renata czy pan Piotr?

SALON SAMOCHODOWY	
Imię	Cena auta (zł)
Piotr	48 500
Anna	124 300
Roman	53 800
Renata	48 900



Jeśli pamiętasz z klasy czwartej, jak się porównuje liczby naturalne, to z pewnością rozwiązanie powyższego zadania nie sprawiło ci kłopotu.

Przypomnijmy, jak porównujemy liczby.

- Jeżeli dwie liczby nie mają tyle samo cyfr, to większa jest ta liczba, która ma więcej cyfr, np. $124\,300 > 48\,500$.
- Jeżeli dwie liczby mają tyle samo cyfr, to porównujemy kolejno ich cyfry w tych samych rzędach (zaczynając od lewej strony), np. $48\,900 < 53\,800$, $48\,900 > 48\,500$.



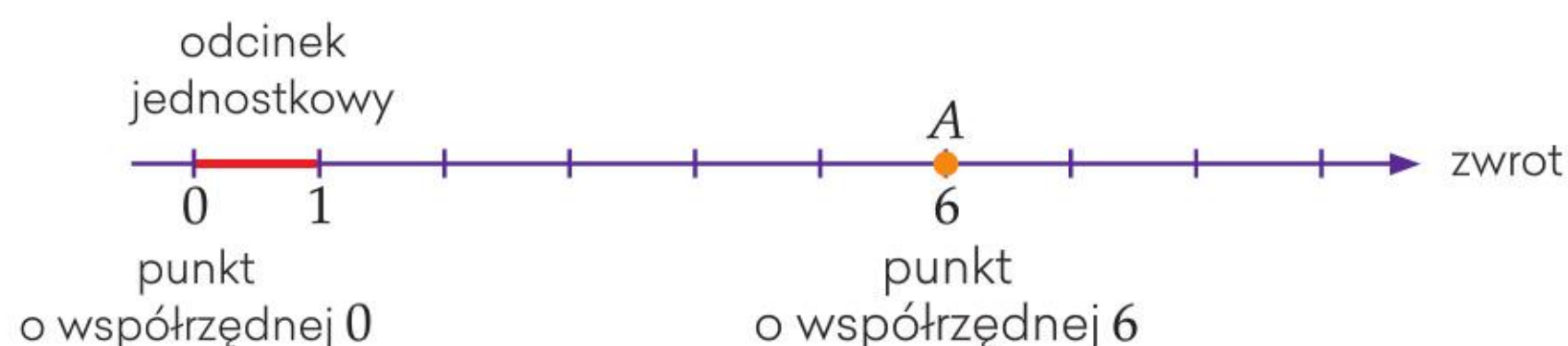
Czy pamiętasz?

Oś liczbowa to prosta (nie ma początku ani końca) z zaznaczonym **zwrotem** oraz z punktami oznaczonymi liczbami (**współrzędnymi punktu**), o ustalonym **odcinku jednostkowym**.

1. Podane liczby przepisz do zeszytu i porównaj. Zamiast pytajnika wstaw znak $<$ lub $>$.

- | | |
|-----------------------------|--------------------------|
| a) 52 703 ? 645 200 | b) 800 000 ? 80 000 |
| c) 25 378 499 ? 325 378 499 | d) 793 555 ? 812 234 |
| e) 17 128 326 ? 13 854 900 | f) 2 794 356 ? 2 784 356 |

Rysunek przedstawia oś liczbową.



Przypomnijmy, w jaki sposób umieszczamy na osi liczbowej punkty o dużych współrzędnych.

Przykład 1

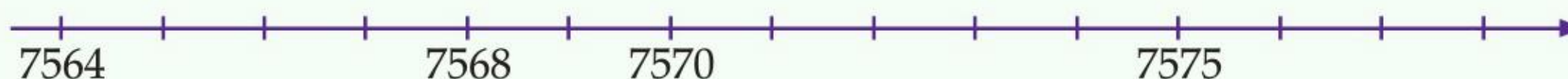
Zaznaczmy na osi liczbowej punkty o podanych współrzędnych.

- a) 300, 900, 1500, 2400 b) 7564, 7568, 7570, 7575

- a) Aby na jednej osi udało nam się zmieścić zarówno punkt o współrzędnej 300, jak i punkt o współrzędnej 2400, musimy wybrać bardzo małą jednostkę – taką, żeby np. w odcinku o długości 1,5 cm mieściło się 300 jednostek.



- b) Skrajne punkty (o najmniejszej i największej współrzędnej, czyli 7564 i 7575) dzieli tylko 11 jednostek, dlatego w tym przypadku za jednostkę możemy przyjąć odcinek o długości 1 cm. Na tej osi – inaczej niż w punkcie a) – nie będziemy zaznaczać punktu zerowego.



2. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej punkty o podanych współrzędnych. Pamiętaj o dobraniu odpowiedniej jednostki.
- a) $A = 4000$, $B = 6000$, $C = 10\,000$, $D = 18\,000$
- b) $E = 2997$, $F = 3000$, $G = 3003$, $H = 3005$

Zadania

- Skorzystaj z danych umieszczonych na początku tematu 1.1 (*Podejmij temat*) i odpowiedz na pytania.
- a) Który rower jest najtańszy, a który najdroższy?
- b) Który skuter jest najtańszy, a który najdroższy?
- c) Czy najdroższy rower jest tańszy od najtańszego skutera?
- d) Zapisz wszystkie ceny w kolejności od najniższej do najwyższej.
- W każdej z poniższych liczb jedna cyfra jest nieznana. Zapisz te liczby w kolejności od największej do najmniejszej.

5460?

56?64

542?3

5462?

57?26

543?8

Na fragmencie mapy Europy zaznaczono państwa o największej liczbie ludności, a w tabeli umieszczono odpowiednie dane liczbowe dotyczące roku 2017.



Państwo	Liczba ludności (w tys.)	Stolica	Liczba mieszkańców stolicy
Francja	67 106	Paryż	2 206 488
Hiszpania	48 958	Madryt	3 182 981
Holandia	17 085	Amsterdam	813 000
Niemcy	80 594	Berlin	3 574 830
Polska	38 476	Warszawa	1 764 615
Rosja (część europejska)	103 130	Moskwa	12 228 685
Rumunia	21 530	Bukareszt	1 877 155
Ukraina	44 034	Kijów	2 933 537
Wielka Brytania	64 769	Londyn	8 787 892
Włochy	62 138	Rzym	2 874 605

- Wypisz nazwy państw, zaczynając od tego, które miało najwięcej ludności w 2017 roku, a kończąc na tym, które miało jej najmniej (zrób to w kolumnie – jedna nazwa pod drugą). Obok każdego kraju zapisz jego liczbę ludności bez użycia skrótu: tys.
- Spośród państw wypisanych w punkcie a) wybierz i podkreśl nazwy tych, których liczba ludności przekraczała 50 mln.
- Które stolice miały mniej mieszkańców niż stolica Polski?
- W której stolicy mieszkało najwięcej osób?

Zapisz największą liczbę siedmiocyfrową złożoną:

- z różnych cyfr,
- z jednakowych cyfr.

- Zapisz wszystkie liczby czterocyfrowe, w których zapisie cyfry setek, dziesiątek i jednostki są jednakowe, a cyfra jednostki tysięcy jest mniejsza od 3. Ile jest takich liczb? Która z nich jest największa, a która – najmniejsza?

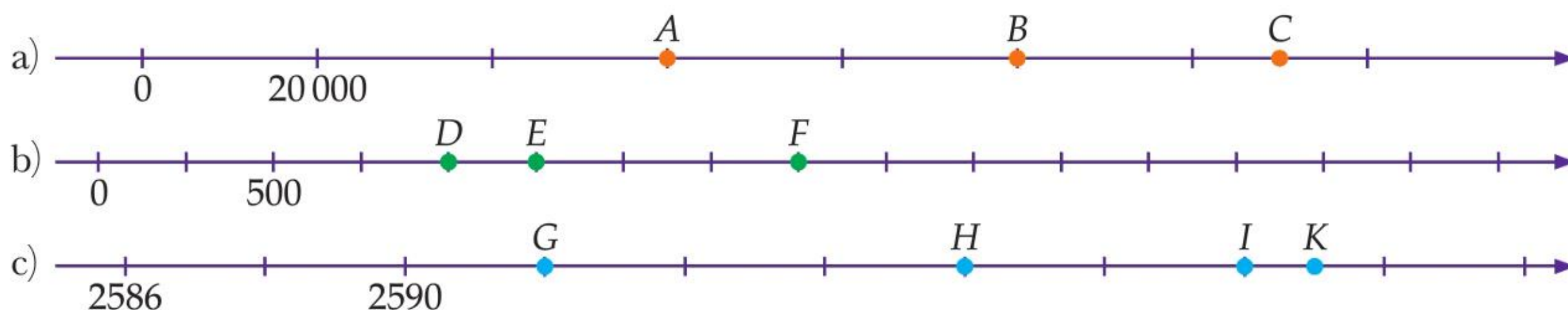
- Przepisz podaną liczbę i dopisz dwie inne liczby: o jeden mniejszą oraz o jeden większą.

- a) 35 826 b) 165 427 361 c) 78 000 540
d) 26 454 800 e) 4 000 000 f) 1 000 000 000

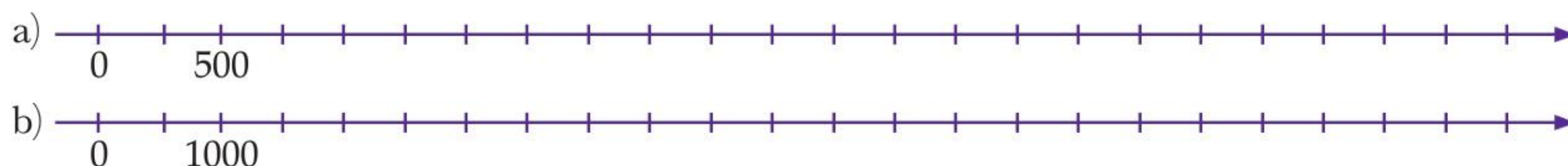
- Podaj pięć liczb:

- a) większych od 49 326 841,
b) mniejszych od 1 000 000 i jednocześnie większych od 999 100,
c) większych od 2 500 998 i jednocześnie mniejszych od 2 650 000,
d) mniejszych od 100 003 i jednocześnie większych od 99 997.

- Podaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



- Przerysuj oś liczbową do zeszytu i zaznacz na niej liczby: 5000, 2500 i 250.



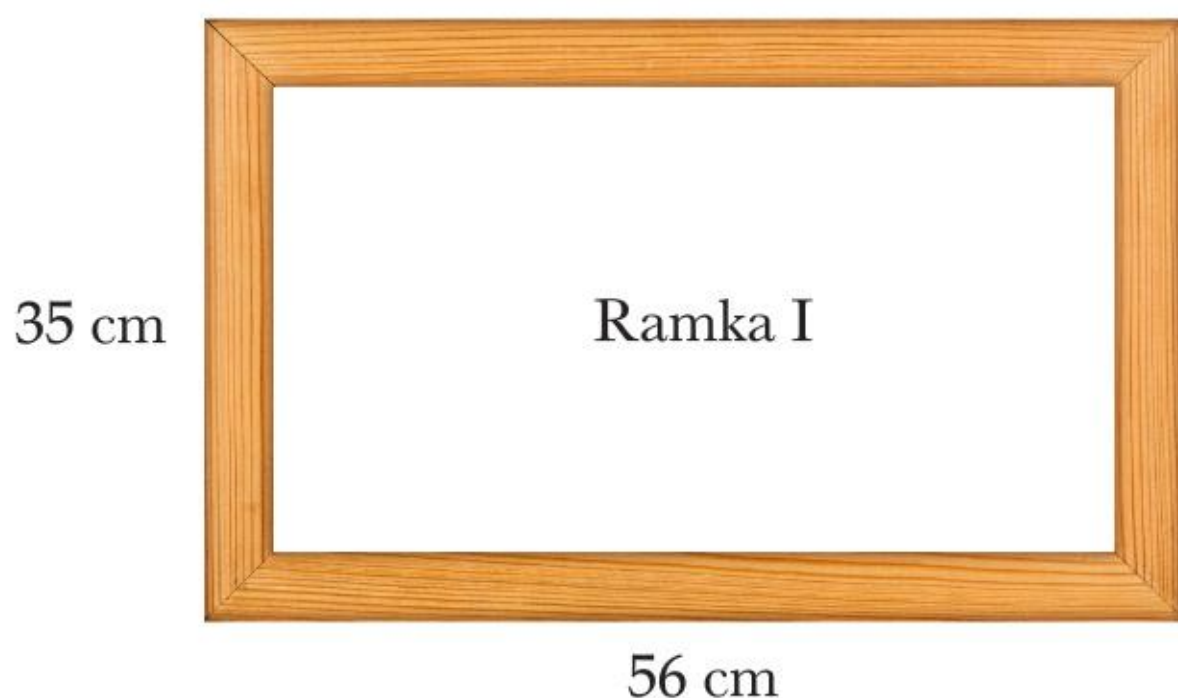
- Pani Maria odgrodziła swój dom od ulicy ozdobnym płotkiem. W tym celu musiała wbić wzdłuż ulicy 12 słupków. Odległość między sąsiednimi słupkami wynosiła 80 cm. Narysuj oś liczbową i zaznacz na niej miejsca wbicia słupków, dobierając odpowiednią jednostkę. Oblicz odległość między pierwszym a ostatnim słupkiem.

- Który dom jest najdroższy, a który – najtańszy?



1.3 Szacowanie wyników działań na liczbach naturalnych

Podejmij temat



Czy do zrobienia każdej z prostokątnych ramek o podanych wymiarach wystarczy listwa o długości 160 cm?

Potrafisz odpowiedzieć na to pytanie bez wykonywania dokładnych obliczeń?

Czy wiesz, jak się nazywa taka czynność, kiedy obliczamy coś „mniej więcej”?

Czy wynik obliczeń jest wtedy większy, czy mniejszy od określonej liczby?

W życiu codziennym nie zawsze musimy znać dokładny wynik obliczeń dotyczących np. długości, masy, czasu, ceny. Z pewnością zdarzyło ci się w sklepie oceniać w przybliżeniu, czy wystarczy ci pieniędzy na zakupy. Podobnie w przypadku powyższych ramek: nie musimy dokładnie obliczać, ile centymetrów wynosi łączna długość boków każdej z ramek. Możemy rozumować w sposób zaprezentowany niżej.

Ramka I

Suma długości dwóch sąsiednich boków przekracza 80 cm (ponieważ $30\text{ cm} + 50\text{ cm} = 80\text{ cm}$, a boki mają więcej niż 30 cm i 50 cm).

Wobec tego suma długości wszystkich czterech boków jest na pewno większa niż $2 \cdot 80\text{ cm} = 160\text{ cm}$.

Do zrobienia pierwszej ramki nie wystarczy więc listwa o długości 160 cm.

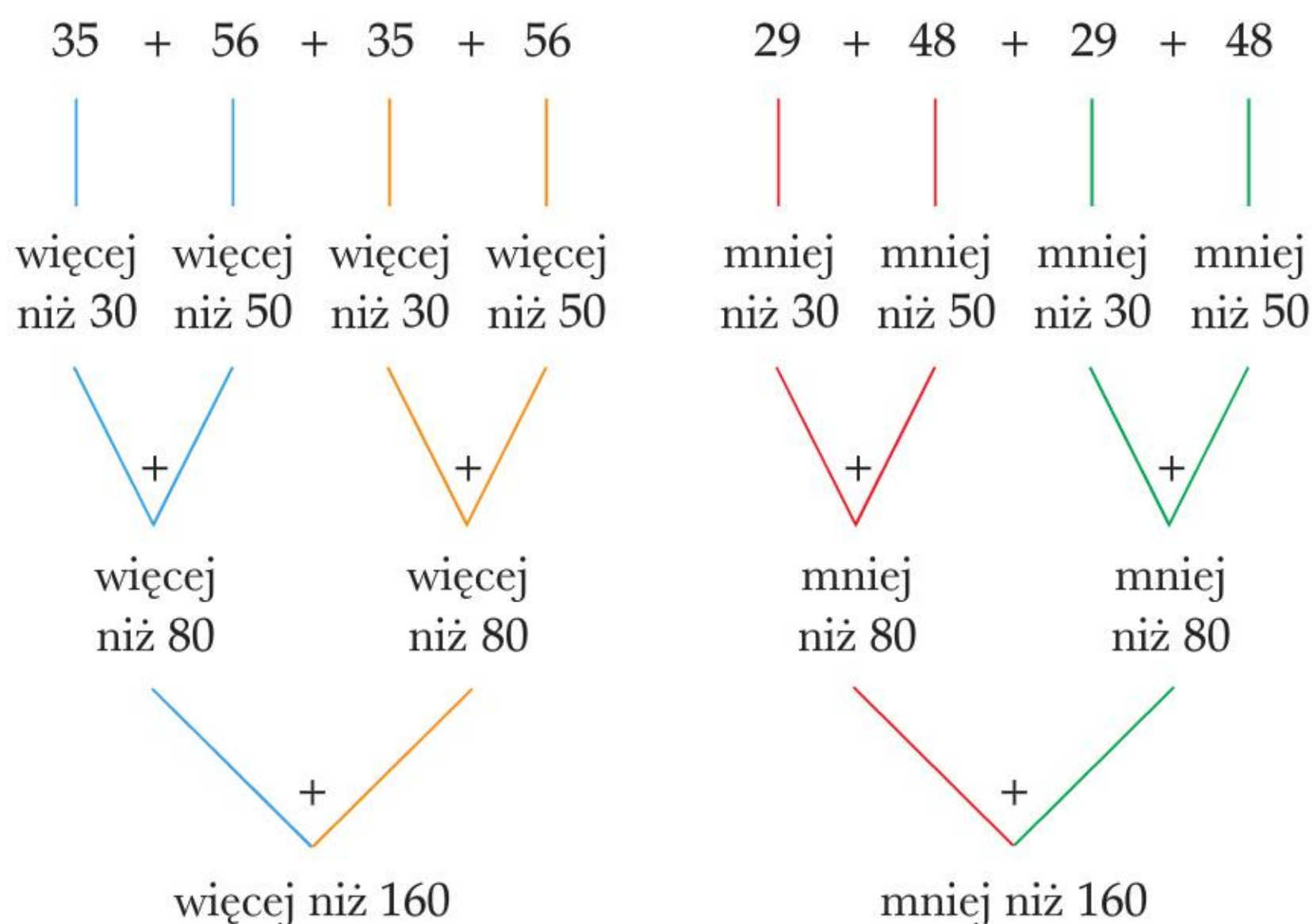
Ramka II

Krótszy bok ramki ma trochę mniej niż 30 cm, a dłuższy – trochę mniej niż 50 cm, czyli suma ich długości jest mniejsza niż 80 cm.

Wobec tego wszystkie boki ramki mają w sumie mniej niż $2 \cdot 80\text{ cm} = 160\text{ cm}$.

Listwa o długości 160 cm wystarczy zatem do zrobienia drugiej ramki.

Opisane rozważania można przedstawić za pomocą drzewek.



Czynność, którą wykonaliśmy obok, nazywamy **szacowaniem**. Szacowanie polega na określaniu przybliżonego wyniku działania.

Umiejętność sprawnego szacowania jest bardzo potrzebna w życiu codziennym. Jeśli chcemy kupić w sklepie kilka produktów, dobrze jest wiedzieć, czy wystarczy nam pieniędzy. Nie chodzi wówczas o dokładne obliczenie tego, ile zapłacimy za zakupy, ale o pewność, czy nie przekroczymy kwoty, którą dysponujemy.

1. Spójrz na zdjęcia i odpowiedz na pytania. Nie wykonuj dokładnych obliczeń, tylko oszacuj.



- Czy jeżeli mamy 100 zł, możemy kupić buty, szalik i czapkę?
- Czy jeśli mamy 200 zł, to możemy kupić kurtkę i buty?
- Czy za 50 zł można kupić szalik, czapkę i rękawiczki?
- Czy 300 zł wystarczy na zakup wszystkich tych towarów?

Szacowanie wyników pozwala czasem znaleźć błąd w wykonywanych obliczeniach.

Przykład 1

Oto kilka nieprawidłowo wykonanych obliczeń.

- a) $3758 + 864 = 12\,398$ Błąd!
- b) $234 - 156 = 178$ Błąd!
- c) $36 \cdot 8 = 528$ Błąd!
- d) $624 : 3 = 28$ Błąd!

W jaki sposób możemy szybko zauważyć błąd?

- a) $3758 + 864 = 12\,398$ Błąd!
↑ ↑ ↑
mniej niż mniej niż Wynik musi być mniejszy
4 tysiące 1 tysiąc niż 5 tysięcy.
- b) $234 - 156 = 178$ Błąd!
 $234 - 100 - 56 = 134 - 56$ Wynik musi być mniejszy niż 100.
- c) $36 \cdot 8 = 528$ Błąd!
Liczba 36 jest większa od 30 i mniejsza od 40, zatem wynik mnożenia $36 \cdot 8$ musi być większy od $30 \cdot 8 = 240$ i jednocześnie mniejszy od $40 \cdot 8 = 320$.
- d) $624 : 3 = 28$ Błąd!
Skoro $600 : 3 = 200$, to wynik $624 : 3$ musi być większy od 200.

Zadania

● Oszacuj wyniki podanych działań i przepisz do zeszytu te, których wynik jest:

a) większy od 1200,

$538 + 695$	$285 \cdot 4$	$364 + 728$	$215 \cdot 6$
-------------	---------------	-------------	---------------

b) mniejszy od 100.

$2375 - 2291$	$567 : 3$	$854 - 723$	$621 : 9$
---------------	-----------	-------------	-----------

● Oszacuj, czy żyjesz dłużej, czy krócej niż 3655 dni.

● Czy do windy przedstawionej na rysunku mogą wsiąść jednocześnie: pan Janusz ważący 96 kg, pani Irena ważąca 68 kg, pani Jolanta ważąca 85 kg, pan Maciej ważący 104 kg, pan Ryszard ważący 88 kg i pan Witold ważący 94 kg? Odpowiedz na to pytanie bez wykonywania dokładnych obliczeń.



● W tabeli przedstawiono czas odrabiania lekcji (w minutach) czterech koleżanek. Które dziewczęta odrobiły wszystkie lekcje w czasie krótszym niż 2 godziny? Oszacuj czas odrabiania lekcji każdej z koleżanek.

Przedmiot	Zosia	Magda	Patrycja	Daria
język polski	26	14	13	21
matematyka	21	25	15	22
geografia	33	28	31	25
historia	29	30	32	30
język angielski	35	15	22	32

● Uczniowie klas piątych przygotowali przedstawienie dla młodszych koleżanek i kolegów. Na widowni ustawili 160 krzeseł. Oszacuj, czy wystarczy miejsc dla wszystkich dzieci, jeżeli w klasach pierwszych jest 38 osób, w drugich – 42, w trzecich – 43, a w czwartych – 48.

● Statek może przewozić ładunki o łącznej masie 2000 t. Jeden pusty kontener waży 1600 kg, a towar – który ma się w nim znaleźć – 19 300 kg. Oszacuj, czy na statek można załadować 100 takich kontenerów wypełnionych towarem.



Czy pamiętasz?
1 t = 1000 kg

● W tabeli zamieszczono ceny sprzętu sportowego. Wskaż zdania prawdziwe bez wykonywania dokładnych obliczeń.

- I. Jeśli mam 500 zł, to mogę kupić łyżwy i hulajnogę.
- II. Trzy piłki do siatkówki kosztują więcej niż rakiety do tenisa stołowego (2 szt.).
- III. Za pieniądze przeznaczone na zakup roweru można kupić 7 par łyżew.
- IV. Na zakup roweru i kasku rowerowego wystarczy 1300 zł.
- V. Dwie pary łyżew i dwie hulajnogi kosztują łącznie ponad 1 tys. zł.
- VI. Jeżeli mam 1500 zł, to mogę kupić rower i hulajnogę.
- VII. Jeśli mam 100 zł, to mogę kupić piłkę do siatkówki i rakiety do tenisa stołowego (2 szt.).

Sprzęt sportowy	Cena (zł)
rower	1246
piłka do siatkówki	27
rakiety do tenisa stołowego (2 szt.)	69
łyżwy	218
hulajnoga	285
rolki	349
kask rowerowy	76

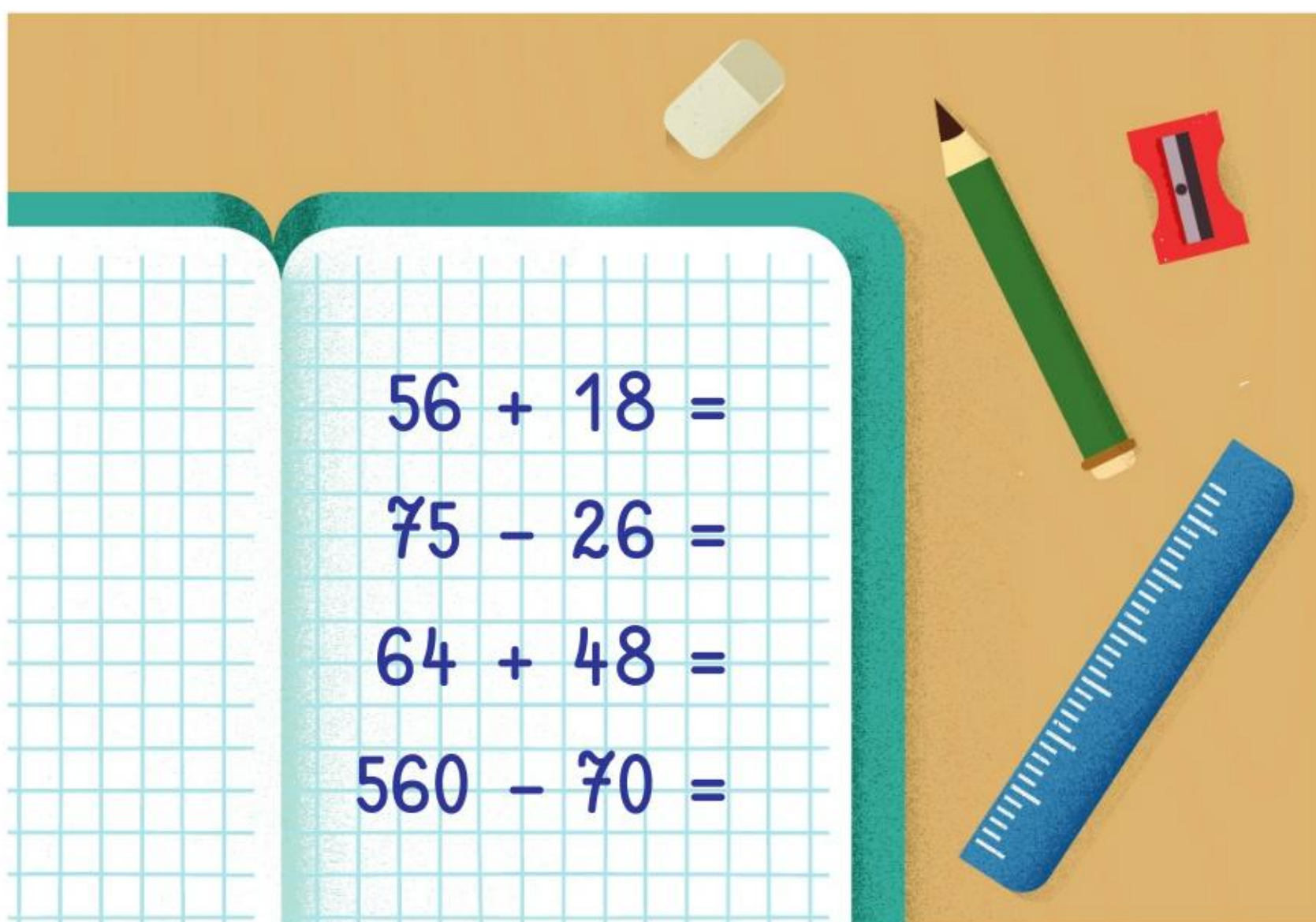
- VIII. Rower kosztuje o ponad 1000 zł więcej od hulajnogi.
- IX. Za trzy pary łyżew zapłacimy więcej niż za dwie pary rolek.
- X. Jeżeli jedna siostra ma 720 zł, a druga 690 zł, to mogą wspólnie kupić rower i dwa kaski.

1.4 Dodawanie i odejmowanie liczb naturalnych

Podejmij temat



Działania takie jak pokazane obok wykonywaliśmy w klasie czwartej. Nie są one trudne. Obliczać możemy w pamięci. Czy umiesz obliczyć podane sumy i różnice?



1. Oblicz w pamięci.

- | | | | |
|------------|------------|-----------------|-------------------|
| a) 42 + 88 | b) 54 + 78 | c) 12 + 22 + 13 | d) 95 - 25 |
| 144 + 46 | 67 + 34 | 31 + 15 + 44 | 78 - 58 |
| 145 + 45 | 78 + 77 | 236 + 23 + 27 | 92 - 42 |
| 143 + 147 | 145 + 46 | 54 + 17 + 315 | 456 - 46 |
| e) 67 - 33 | f) 70 - 52 | g) 95 - 36 | h) 54 + (30 - 14) |
| 89 - 78 | 60 - 38 | 134 - 28 | 80 - (34 + 25) |
| 657 - 134 | 380 - 37 | 86 - 49 | 50 - (47 - 35) |
| 567 - 477 | 550 - 143 | 156 - 97 | 100 - (41 + 39) |

Dodawanie i odejmowanie większych liczb zwykle wykonujemy sposobem pisemnym.

Przypomnijmy, że aby dodać (lub odjąć) liczby sposobem pisemnym, należy zapisać je tak, by jedności znajdowały się pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, setki pod setkami itd.

Dodajemy cyfrę jedności do cyfry jedności, cyfrę dziesiątek do cyfry dziesiątek itd. (lub odejmujemy cyfrę jedności od cyfry jedności, cyfrę dziesiątek od cyfry dziesiątek itd.).

$$\begin{array}{r} \text{składnik} \\ + \text{składnik} \\ \hline \text{suma} \end{array} \quad \text{np.} \quad \begin{array}{r} 1\ 2\ 5 \\ + 3\ 7\ 2 \\ \hline 4\ 9\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{odjemna} \\ - \text{odjemnik} \\ \hline \text{różnica} \end{array} \quad \text{np.} \quad \begin{array}{r} 5\ 8\ 3 \\ - 2\ 6\ 1 \\ \hline 3\ 2\ 2 \end{array}$$

Przykład 1

Wykonajmy pisemnie dodawanie: $3572 + 263 + 934$.

$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ 3\ 5\ 7\ 2 \\ + 2\ 6\ 3 \\ 9\ 3\ 4 \\ \hline 4\ 7\ 6\ 9 \end{array}$$

$2 + 3 + 4 = 9$
 $7 + 6 + 3 = 16$
 $1 + 5 + 2 + 9 = 17$
 $1 + 3 = 4$

Jeżeli podczas dodawania cyfr w danym rzędzie otrzymamy liczbę dwucyfrową, to cyfrę jedności wpisujemy w miejscu wyniku w tym samym rzędzie, a cyfrę dziesiątek dopisujemy do rzędu wyższego.

Dodawanie sposobem pisemnym znasz już z klasy czwartej. Wtedy wykonywaliśmy również odejmowanie pisemne, także z „pożyczaniem”. Trudniejsze odejmowanie z wielokrotnym „pożyczaniem” pokażemy w następnym przykładzie.

Przykład 2

Wykonajmy pisemnie odejmowanie: $7263 - 6895$.

$$\begin{array}{r} 6\ 11\ 15\ 13 \\ 7\ 2\ 6\ 3 \\ - 6\ 8\ 9\ 5 \\ \hline 3\ 6\ 8 \end{array}$$

- W rzędzie jedności nie można wykonać odejmowania $3 - 5$. Z rzędu dziesiątek zabieramy 1 dziesiątkę (zostaje 2) i zamieniamy ją na 10 jedności (razem jest 13), po czym wykonujemy odejmowanie $13 - 5 = 8$.
- W rzędzie dziesiątek nie można wykonać odejmowania $2 - 9$, dlatego teraz z rzędu setek zabieramy 1 setkę (zostaje 1) i zamieniamy ją na 10 dziesiątek (razem jest 12), po czym wykonujemy odejmowanie $12 - 9 = 3$.
- W rzędzie setek nie można wykonać odejmowania $1 - 8$, więc z rzędu tysięcy zabieramy 1 tysiąc (zostaje 6) i zamieniamy go na 10 setek (razem jest 11), po czym wykonujemy odejmowanie $11 - 8 = 3$.
- W rzędzie tysięcy możemy wykonać odejmowanie $6 - 6 = 0$. Otrzymanego zera nie zapisujemy, ponieważ byłoby ono pierwszą cyfrą po lewej stronie liczby.

2. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $574 + 1328$

$2348 + 749$

$64 + 2738 + 856$

$666 + 777 + 88 + 99$

b) $5346 - 215$

$2345 - 1227$

$6527 - 486$

$2358 - 1723$

c) $3574 - 829$

$1526 - 458$

$2357 - 1671$

$5863 - 2974$

Nauczmy się teraz odejmować pisemnie liczby w takich przypadkach, gdy w odjemnej występują zera.

Przykład 3

Wykonajmy pisemnie podane odejmowanie.

a) $5600 - 1274$

b) $7058 - 4372$

a)

			9	
	5	10	10	
5	6	0	0	
- 1	2	7	4	
4	3	2	6	

- W rzędzie jedności nie można wykonać odejmowania $0 - 4$.
- Z rzędu dziesiątek nie można jednak zabrać 1 dziesiątki (bo jest 0 dziesiątek).
- Zabieramy zatem z rzędu setek 1 setkę (zostaje 5) i zamieniamy ją na 10 dziesiątek.
- Teraz z rzędu dziesiątek możemy już zabrać 1 dziesiątkę (zostaje 9) i zamieniamy ją na 10 jedności.

b)

			9	
	6	10	15	
7	0	5	8	
- 4	3	7	2	
2	6	8	6	

- W rzędzie jedności wykonujemy odejmowanie $8 - 2 = 6$.
- W rzędzie dziesiątek nie można wykonać odejmowania $5 - 7$.
- Z rzędu setek nie można zabrać 1 setki (bo jest 0 setek).
- Zabieramy zatem z rzędu tysięcy 1 tysiąc (zostaje 6) i zamieniamy go na 10 setek.
- Z rzędu setek zabieramy teraz 1 setkę (zostaje 9) i zamieniamy ją na 10 dziesiątek (razem 15).

3. Wykonaj pisemnie odejmowanie.

a) $7370 - 828$

$2600 - 1257$

$4200 - 2574$

$13\,000 - 2566$

$67\,000 - 6471$

b) $2095 - 836$

$5005 - 1341$

$7006 - 824$

$3047 - 562$

$9403 - 4526$

Zadania

- Oblicz sumę trzech liczb: największej liczby jednocyfrowej, największej liczby dwucyfrowej i największej liczby trzycyfrowej.
- Oblicz różnicę najmniejszej liczby pięciocyfrowej i największej liczby trzycyfrowej.
- Pewnego dnia w oddziale banku wpłaty wyniosły 3 754 826 zł, a wypłaty 2 926 384 zł. O ile złotych więcej wpłacono tego dnia do banku niż z niego wypłacono?
- Stadion jest podzielony na cztery sektory (A, B, C, D) i łącznie może pomieścić 40 000 widzów. Na zawody sportowe sprzedano 14 738 biletów na miejsca w sektorze A oraz 12 385 biletów na miejsca w sektorze B. Ile biletów można jeszcze sprzedać?
- Do szkoły uczęszcza 325 chłopców i 294 dziewczynki. Pewnego dnia część uczniów pojechała do teatru. W szkole pozostało 65 dziewczynek i 136 chłopców. Ile dzieci pojechało na spektakl?
A. 418 B. 518 C. 428 D. 508
- Pan Adam i pan Jacek mieszkają w miejscowościach oddalonych od siebie o 2000 km. Wyruszyli na spotkanie – pan Adam jechał na motocyklu, a pan Jacek samochodem. Pierwszy przebył już 136 km, a drugi 428 km. Jaka ich jeszcze dzieli odległość?



136 km

?

428 km



Ciekawe!

Znane nam obecnie symbole działań matematycznych oznaczających dodawanie i odejmowanie (+ i –) pojawiły się w matematyce w XV wieku. Po raz pierwszy zaczęto ich używać w handlu. Od kupców przejęli je matematycy, aby tymi znakami zastąpić używane wcześniej w tym celu litery *p* oraz *m*. W roku 1489 Johannes Widmann [czyt. johanes widman] w swoim podręczniku do ekonomii po raz pierwszy użył znaków + i – do oznaczania działań matematycznych. Widmann nie używał jednak tych symboli systematycznie. Do powszechnego użycia znaków + i – doszło dopiero w XVI stuleciu i na początku tylko w Wielkiej Brytanii.

- Pociąg Pendolino jadący z Gdyni do Krakowa może jednorazowo przewieźć 341 pasażerów w wagonach drugiej klasy i 45 pasażerów w jednym wagonie pierwszej klasy. Pewnego dnia sprzedano 168 biletów pasażerom podróżującym od początku do końca trasy. Ile wolnych miejsc pozostało w pociągu?

- Domy Ani, Basi, Celiny i Doroty stoją przy tej samej ulicy w kolejności przedstawionej na rysunku (litery umieszczone na domach to pierwsze litery imion dziewczynek). Dom Ani znajduje się w odległości 1456 m od domu Celiny, dom Basi – w odległości 1833 m od domu Doroty, a dom Ani – w odległości 618 m od domu Basi. W jakiej odległości od siebie stoją domy Celiny i Doroty?



A. 377 m

B. 1215 m

C. 995 m

D. 885 m

- Najwyższym szczytem w Polsce są Rysy (2499 m n.p.m.), a na całej kuli ziemskiej – Mount Everest znajdujący się w Azji (8848 m n.p.m.). W tabeli przedstawione zostały informacje na temat najwyższych szczytów Europy.

Szczyt	Wysokość (m n.p.m.)	Kraj
Mont Blanc	4808	Francja, Włochy
Dufourspitze	4634	Szwajcaria
Dom	4545	Szwajcaria
Weisshorn	4506	Szwajcaria
Matterhorn	4478	Szwajcaria, Włochy

- O ile metrów poszczególne góry są wyższe od najwyższego szczytu Polski?
- O ile metrów Rysy są niższe od Mount Everestu?
- Oblicz różnicę wysokości najwyższego szczytu świata i Europy.
- Jak myślisz, dlaczego w tabeli przy nazwach niektórych gór zapisano dwa kraje?

- Jakimi liczbami należy zastąpić kwadrat, trójkąt i koło, żeby otrzymać cztery poprawnie wykonane działania? W każdym działaniu takim samym figurom odpowiadają te same liczby.

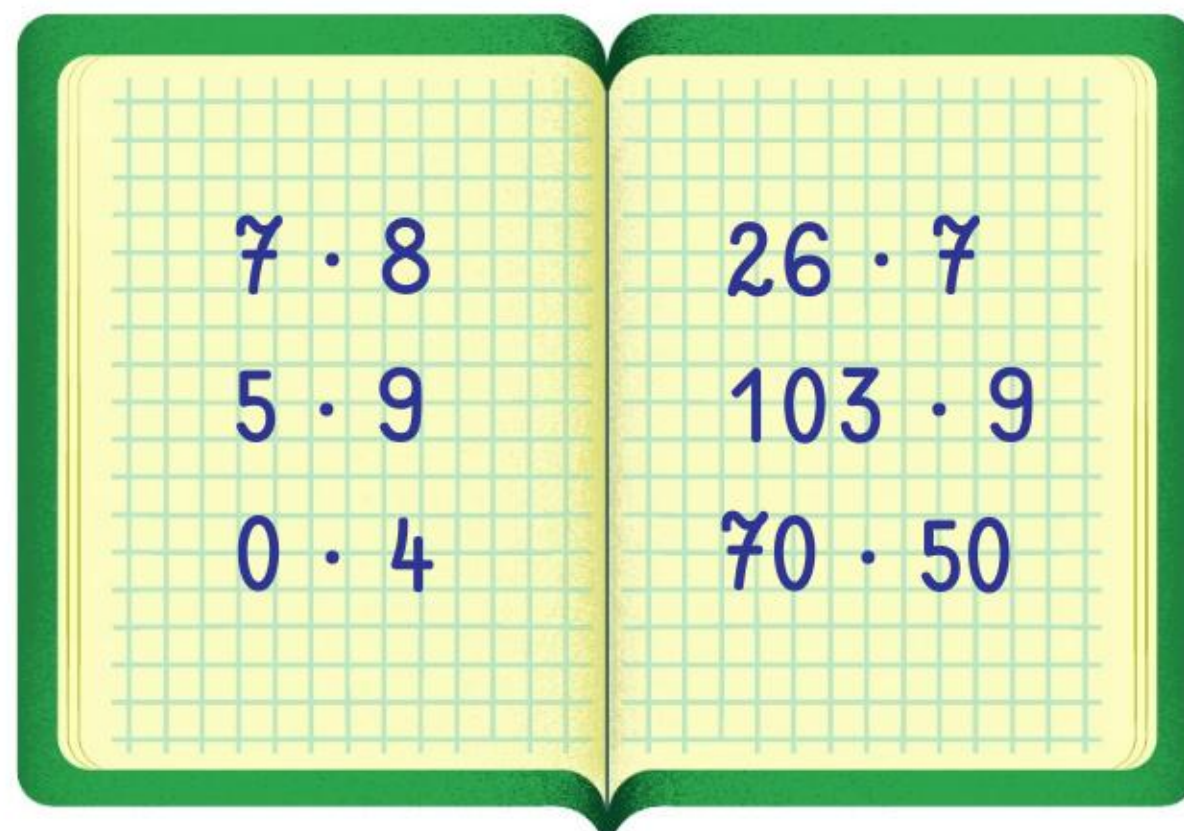
$$\begin{array}{l}
 \square + \square + \triangle + \bigcirc = 26 \\
 \square + \triangle + \triangle + \bigcirc = 24 \\
 \square + \triangle + \bigcirc + \bigcirc = 22
 \end{array}$$

1.5 Mnożenie liczb naturalnych

Podejmij temat



Iloczyny podobne do przedstawionych obok obliczaliśmy w klasie czwartej z wykorzystaniem tabliczki mnożenia oraz własności działań. Czy pamiętasz, jak się oblicza takie iloczyny?



Przypomnijmy, w jaki sposób wykonywaliśmy podobne działania.

Przykład 1

Obliczmy wynik podanego działania.

a) $26 \cdot 7$

b) $70 \cdot 50$

$$\begin{aligned} \text{a) } 26 \cdot 7 &= \\ &= (20 + 6) \cdot 7 = \\ &= 20 \cdot 7 + 6 \cdot 7 = \\ &= 140 + 42 = \\ &= 182 \end{aligned}$$

Aby podać wynik tego działania, można przedstawić liczbę 26 w postaci sumy i zapisać mnożenie, a po obliczeniu iloczynów należy je dodać.

$$\begin{aligned} \text{b) } 70 \cdot 50 &= \\ &= 3500 \end{aligned}$$

Aby podać wynik tego działania, wystarczy pomnożyć liczby 7 i 5, a następnie do iloczynu dopisać wszystkie końcowe zera czynników.

1. Oblicz iloczyny.

a) $42 \cdot 3$
 $61 \cdot 6$
 $53 \cdot 2$
 $84 \cdot 2$

b) $56 \cdot 7$
 $38 \cdot 6$
 $63 \cdot 5$
 $42 \cdot 9$

c) $70 \cdot 6$
 $40 \cdot 80$
 $500 \cdot 30$
 $300 \cdot 700$

Mnożenie dużych liczb (dwucyfrowych przez dwucyfrowe i większych) wykonujemy zazwyczaj sposobem pisemnym.

Aby pomnożyć dwie liczby sposobem pisemnym, należy zapisać je tak, by jedności znajdowały się pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, setki pod setkami itd., a następnie przez kolejne cyfry dolnego czynnika trzeba mnożyć wszystkie cyfry górnego czynnika.

$$\begin{array}{r} \text{czynnik} \\ \cdot \text{czynnik} \\ \hline \text{iloczyn} \end{array} \quad \text{np.} \quad \begin{array}{r} 132 \\ \cdot \quad 3 \\ \hline 396 \end{array}$$

Przykład 2

Obliczmy iloczyn $176 \cdot 4$.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 176 \\ \cdot \quad 4 \\ \hline 704 \end{array}$$

Kolejne cyfry liczby 176 mnożymy przez 4 (zaczynamy od prawej strony).

- $4 \cdot 6 = 24$

W wyniku, w rzędzie jedności, zapisujemy 4, a 2 zapamiętujemy.

- $4 \cdot 7 = 28$

Dodajemy zapamiętaną liczbę 2:

$28 + 2 = 30$ i w rzędzie dziesiątek wpisujemy 0, a 3 zapamiętujemy.

- $4 \cdot 1 = 4$

Dodajemy zapamiętaną liczbę 3:

$4 + 3 = 7$ i w rzędzie setek wpisujemy 7.



W jaki sposób można pomnożyć $2470 \cdot 500$?

Mnożymy pisemnie $247 \cdot 5$, a do wyniku dopisujemy wszystkie końcowe zera.



Zapis takiego mnożenia wygląda następująco:

$$\begin{array}{r} 2470 \\ \cdot \quad 500 \\ \hline 1235000 \end{array}$$

2. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $526 \cdot 4$
 $357 \cdot 8$

b) $1234 \cdot 5$
 $4958 \cdot 6$

c) $680 \cdot 70$
 $925 \cdot 300$

d) $2690 \cdot 500$
 $582\,000 \cdot 8$

Przykład 3

Obliczmy iloczyn.

a) $526 \cdot 42$

b) $835 \cdot 247$

a) Jeżeli mnożymy jakąś liczbę sposobem pisemnym przez liczbę dwucyfrową, to czynności opisane w przykładzie 2 wykonujemy dwukrotnie.

$$\begin{array}{r} 526 \\ \cdot 42 \\ \hline 1052 \\ + 2104 \\ \hline 22092 \end{array}$$

Liczbę 526 mnożymy przez **2** jedności.

Wynik zaczynamy zapisywać w rzędzie jedności.

Liczbę 526 mnożymy przez **4** dziesiątki.

Wynik zaczynamy zapisywać w rzędzie dziesiątek.

Oba wyniki cząstkowe dodajemy.

b) Przy mnożeniu przez liczby trzycyfrowe (i większe) postępujemy podobnie jak w punkcie a).

$$\begin{array}{r} 835 \\ \cdot 247 \\ \hline 5845 \\ 3340 \\ + 1670 \\ \hline 206245 \end{array}$$

Liczbę 835 mnożymy przez **7** jedności.

Wynik zaczynamy zapisywać w rzędzie jedności.

Liczbę 835 mnożymy przez **4** dziesiątki.

Wynik zaczynamy zapisywać w rzędzie dziesiątek.

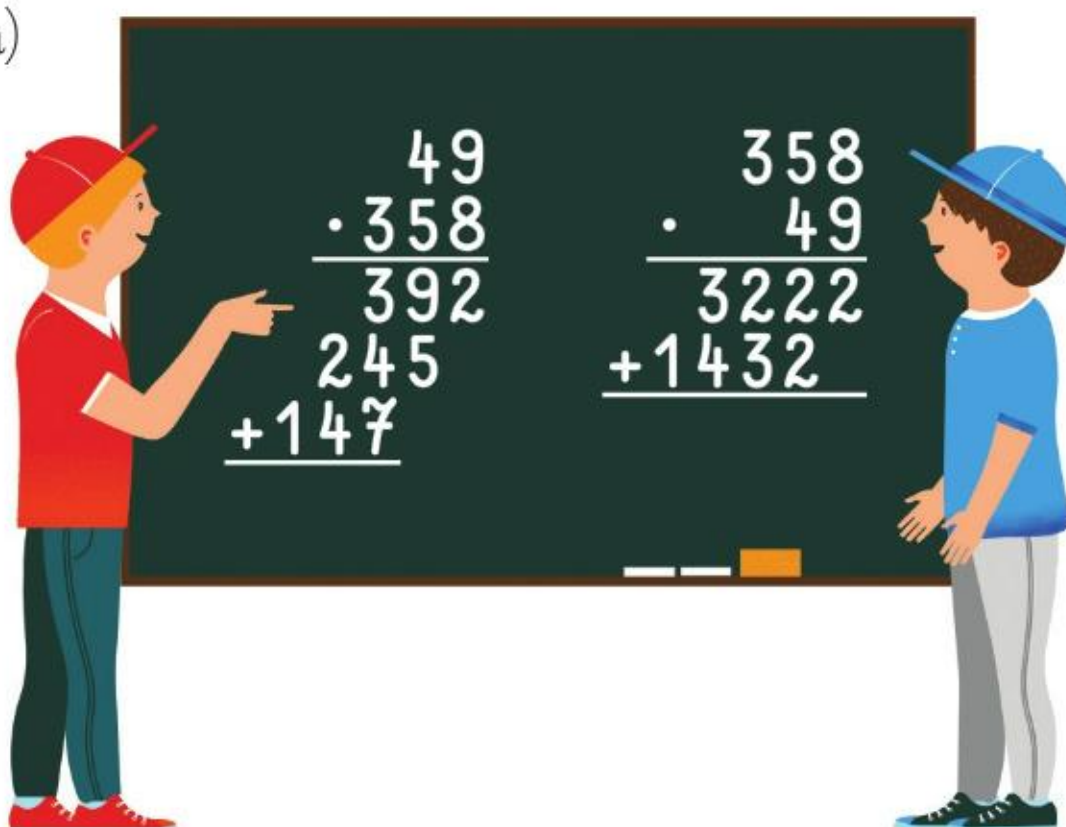
Liczbę 835 mnożymy przez **2** setki.

Wynik zaczynamy zapisywać w rzędzie setek.

Dodajemy trzy wyniki cząstkowe.

3. Michał (w czerwonej czapce) i Jacek (w niebieskiej czapce) rozwiązują na tablicy to samo zadanie. Każdy z nich wybrał inny sposób. Czyje rozwiązanie podoba ci się bardziej i dlaczego? Zapytaj nauczyciela, czy podziela twoje zdanie. Zapisz w zeszycie działanie wybranym sposobem – Michała lub Jacka – i dokończ obliczenia.

a)

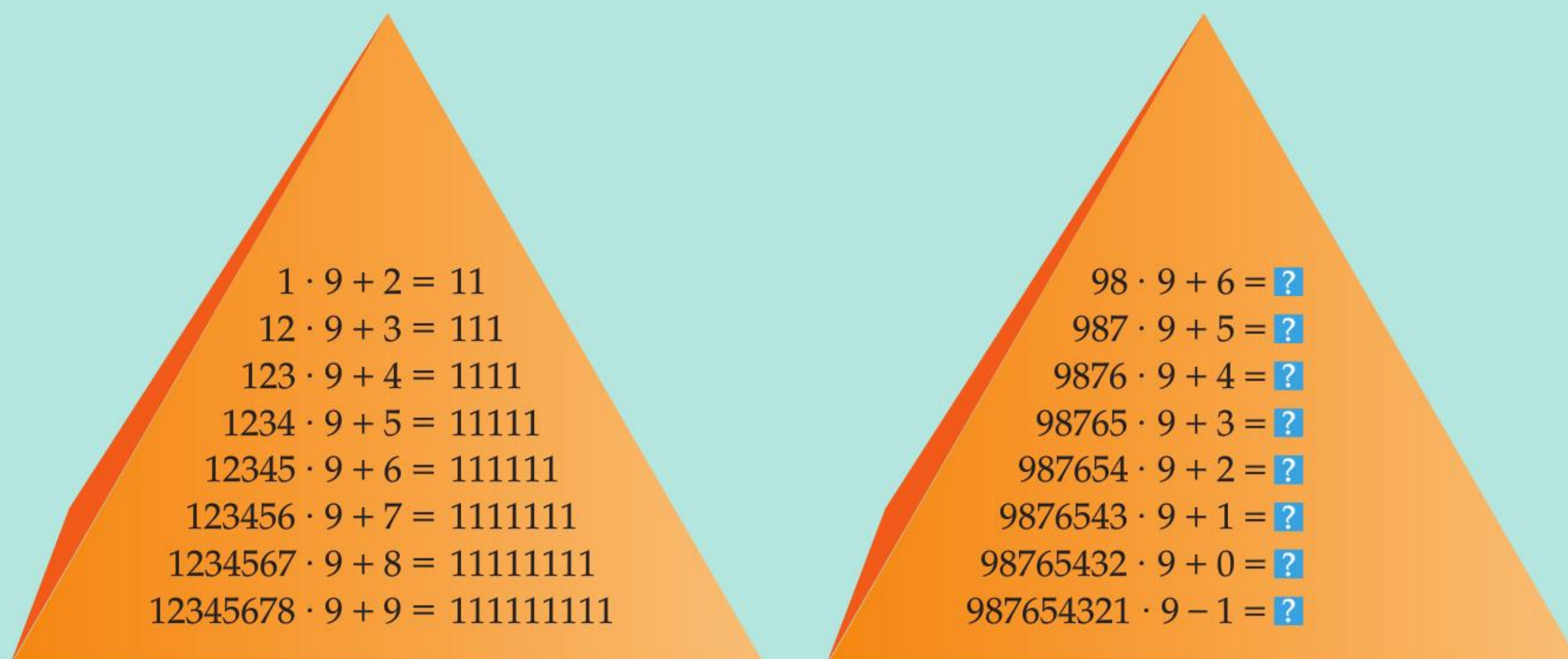


b)



Więcej na temat

Na pierwszej piramidzie przedstawiono ciekawy rezultat pewnych działań.



4. Przepisz do zeszytu działania zapisane na drugiej piramidzie. Wykonaj je i zapisz wyniki. Czy one również są do siebie podobne?

5. Oblicz.

a) $264 \cdot 45$
 $728 \cdot 360$

b) $185 \cdot 428$
 $5600 \cdot 49$

c) 36^2
 250^2

d) 17^3
 420^3

Czy działania w punktach c) i d) to potęgowanie? Pamiętaj może, jak się je oblicza?



Oczywiście, np. 5^2 to nic innego jak $5 \cdot 5$, a 4^3 to $4 \cdot 4 \cdot 4$.

Przykład 4

Obliczmy dwa iloczyny: $573 \cdot 205$ i $238 \cdot 3006$.

Jeżeli w liczbie, przez którą mnożymy, występuje zero (lub kilka zer), to jednym z wyników częściowych jest rząd samych zer (lub kilka rzędów samych zer).

$$\begin{array}{r} 573 \\ \cdot 205 \\ \hline 2865 \\ 000 \\ + 1146 \\ \hline 117465 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 238 \\ \cdot 3006 \\ \hline 1428 \\ 000 \\ 000 \\ + 714 \\ \hline 715428 \end{array}$$

W takim przypadku możemy pominąć mnożenie przez zero i działanie pisemne wygląda wówczas następująco:

$$\begin{array}{r} 573 \\ \cdot 205 \\ \hline 2865 \\ + 1146 \\ \hline 117465 \end{array} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Jest to wynik mnożenia przez } 2 \text{ setki,} \\ \text{czyli zaczynamy zapis od } \text{rzędu setek.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 238 \\ \cdot 3006 \\ \hline 1428 \\ + 714 \\ \hline 715428 \end{array} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Jest to wynik mnożenia przez } 3 \text{ tysiące,} \\ \text{czyli zaczynamy zapis od } \text{rzędu tysięcy.} \end{array}$$

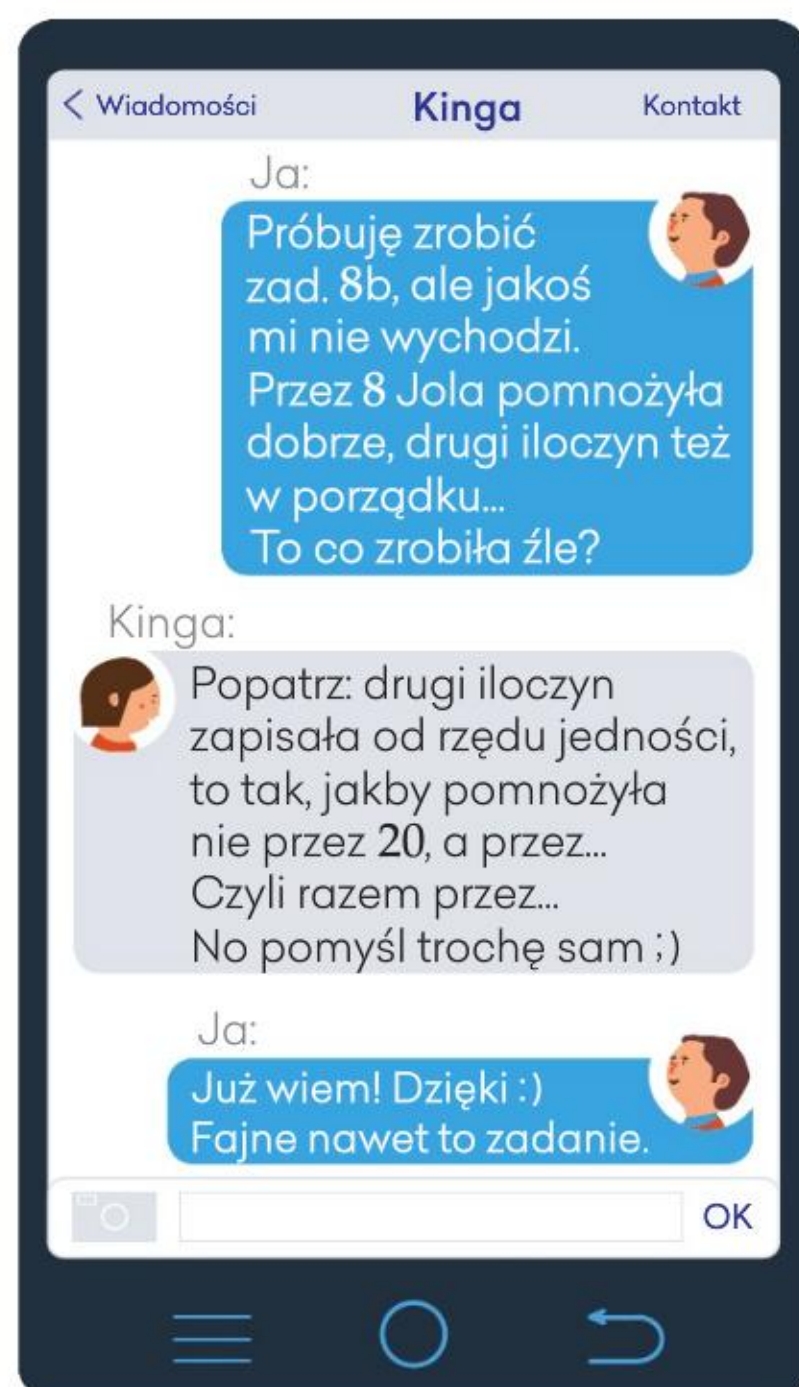
Zadania

- Widownia w hali sportowej jest podzielona na 8 sektorów. W każdym sektorze znajduje się 196 miejsc. Ile biletów maksymalnie może sprzedać organizator zawodów?
- Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.
 - a) Tydzień to 168 godzin.
 - b) Godzina to 10 000 sekund.
 - c) Kwadrans to 100 sekund.
 - d) Doba to 86 400 sekund.
- Możemy przyjąć, że puls zdrowego człowieka to 75 uderzeń na minutę. Ile razy serce człowieka kurczy się w ciągu:
 - a) godziny,
 - b) doby,
 - c) tygodnia?

Ciekawe!

W 1961 r. w USA powstał program kosmiczny Apollo, którego celem była podróż człowieka na Księżyc. Udało się to 20 lipca 1969 r., gdy na srebrnym globie wylądował statek Apollo 11. Pierwszymi ludźmi, którzy stanęli wtedy na Księżycu, byli Neil Armstrong [czyt. nil armstrong] i Edwin „Buzz” Aldrin [czyt. edlin baz oldrin].

Czy wiesz, że podczas badań w ramach programu Apollo powstało wiele wynalazków, np. miękkie, sprężyste wkładki stosowane w butach sportowych? Neil Armstrong miał takie na Księżycu! Dopiero potem weszły one do masowej produkcji.



Odległość Księżyca od Ziemi wynosi około 384 000 km. Odległość Ziemi od Słońca jest 390 razy większa. Jaka jest przybliżona odległość Ziemi od Słońca?

- A. 384 390 km B. 38 439 000 km
C. 149 760 000 km D. 14 976 000 km



Samolot leci z prędkością średnią 680 km/godz. (czytamy: kilometrów na godzinę), czyli w ciągu 1 godziny przebywa średnio 680 kilometrów. Jaką odległość pokonuje samolot w ciągu lotu, który trwa 4 godziny?



Dzisiaj Magda obchodzi swoje dziesiąte urodziny. Ile godzin już przeżyła?

- A. Ponad 87 600 godzin.
B. Dokładnie 87 600 godzin.
C. Ponad 87 840 godzin.
D. Dokładnie 87 840 godzin.



Oblicz iloczyn $9 \cdot 321$, a następnie zapisz wyniki podanych działań bez wykonywania mnożenia.

- a) $90 \cdot 321$ b) $9 \cdot 320$
 $3210 \cdot 900$ $9 \cdot 322$
 $8 \cdot 321$ $9 \cdot 323$



Rozwiąż zadania.

- a) Roztargniona Marysia pomnożyła 358 przez 126, po czym zorientowała się, że liczbę 358 należało pomnożyć przez 127. W jaki sposób dziewczynka może szybko poprawić swój błąd bez ponownego wykonywania mnożenia?
b) Jola, koleżanka Marysi, również roztargniona, miała pomnożyć pisemnie 492 przez 28. Oba iloczyny częściowe zapisała jeden pod drugim (oba od rzędu jedności), po czym je dodała. Otrzymała błędny wynik. W rzeczywistości jej wynik to iloczyn liczby 492 i pewnej innej liczby. Jakiej? Podaj wynik otrzymany przez Jolę bez dodawania jej iloczynów częściowych.



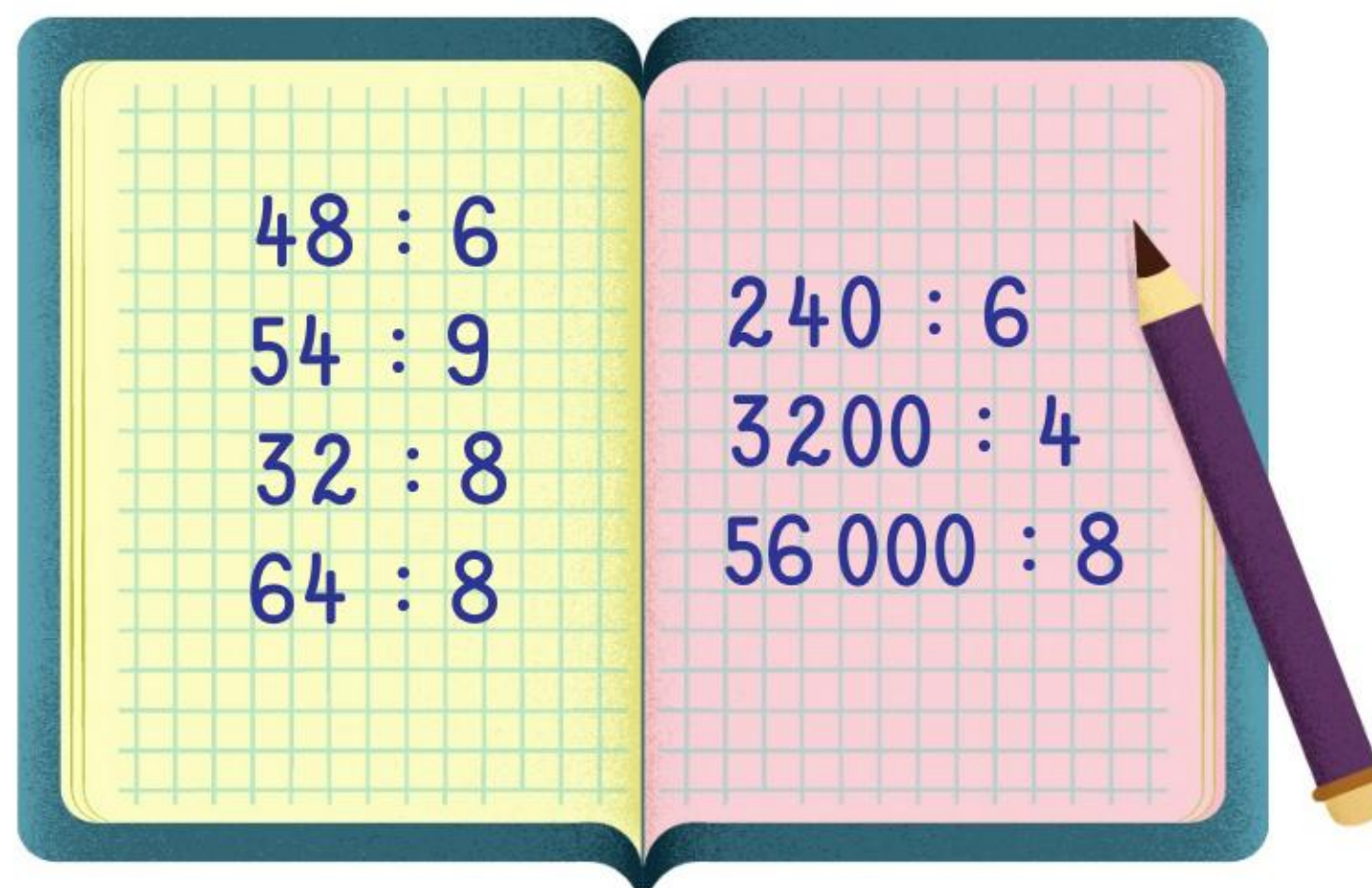
Pomnóż liczbę 77 przez każdą z liczb: 13, 26, 39, 52. Obejrzyj otrzymane iloczyny. Co zauważasz? Przez jaką liczbę należy pomnożyć 77, żeby otrzymać iloczyn 8008? Odpowiedz bez wykonywania dzielenia $8008 : 77$.

1.6 Dzielenie liczb naturalnych

Podejmij temat



Dzielenie zapisane na żółtej stronie wykonujemy w pamięci, korzystając z tabliczki mnożenia. Dzielenie liczb kończących się zerami, takie jak na stronie różowej, również w prosty sposób możemy wykonać w pamięci. Czy pamiętasz, jak obliczyć podane ilorazy?



Przykład 1

Wykonajmy dla przypomnienia kilka działań dzielenia liczb kończących się zerami.

$$360 : 6 = 60$$

$$2800 : 4 = 700$$

$$72\,000 : 9 = 8000$$

$$490\,000 : 7 = 70\,000$$

$$540 : 60 = 9$$

$$3500 : 500 = 7$$

$$2100 : 70 = 30$$

$$180\,000 : 300 = 600$$

Większe liczby wygodnie jest dzielić sposobem pisemnym.

Pamiętajmy o tym, że przy dzieleniu sposobem pisemnym zapisujemy liczby inaczej niż przy wykonywaniu pozostałych działań pisemnych:

iloraz

dzielną : dzielnik

(poniżej

działania

pomocnicze)

np.

$$\begin{array}{r} 34 \\ 136 : 4 \\ - 12 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline = = \end{array}$$

Przykład 2

Wykonajmy dzielenie $5432 : 4$ sposobem pisemnym.

$$\begin{array}{r}
 \overline{1358} \\
 5432 : 4 \\
 - 4 \\
 \hline
 14 \\
 - 12 \\
 \hline
 23 \\
 - 20 \\
 \hline
 32 \\
 - 32 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Ile razy 4 mieści się w 5?
 Odpowiedź: 1 raz (wpisujemy cyfrę 1 w wyniku), bo $1 \cdot 4 = 4$.
 Odejmujemy 4 od liczby 5:
 $5 - 4 = 1$
 Do otrzymanej cyfry 1 dopisujemy kolejną cyfrę dzielnej i uzyskujemy 14.

Ile razy 4 mieści się w 14?
 Odpowiedź: 3 razy (wpisujemy cyfrę 3 w wyniku), bo $3 \cdot 4 = 12$.
 Odejmujemy 12 od liczby 14:
 $14 - 12 = 2$
 Do otrzymanej cyfry 2 dopisujemy kolejną cyfrę dzielnej i uzyskujemy 23.

Ile razy 4 mieści się w 23?
 Odpowiedź: 5 razy (wpisujemy cyfrę 5 w wyniku), bo $5 \cdot 4 = 20$.
 Odejmujemy 20 od liczby 23:
 $23 - 20 = 3$
 Do otrzymanej cyfry 3 dopisujemy kolejną cyfrę dzielnej i uzyskujemy 32.

Ile razy 4 mieści się w 32?
 Odpowiedź: 8 razy (wpisujemy cyfrę 8 w wyniku), bo $8 \cdot 4 = 32$.
 Odejmujemy 32 od liczby 32:
 $32 - 32 = 0$
 Nie ma kolejnej cyfry, którą można byłoby dopisać. Dzielenie zakończone!

W taki sam sposób dzielimy liczby naturalne przez liczby dwucyfrowe i większe.

Przykład 3

Obliczmy sposobem pisemnym $7316 : 31$.

$$\begin{array}{r}
 \overline{236} \\
 7316 : 31 \\
 - 62 \\
 \hline
 111 \\
 - 93 \\
 \hline
 186 \\
 - 186 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

W 73 liczba 31 mieści się 2 razy.

W 111 liczba 31 mieści się 3 razy.

W 186 liczba 31 mieści się 6 razy.

1. Podziel sposobem pisemnym.

a) $2534 : 7$
 $3168 : 6$
 $3904 : 4$

b) $28\,640 : 80$
 $22\,320 : 90$
 $164\,700 : 300$

c) $9175 : 25$
 $7595 : 31$
 $3852 : 12$

d) $1260 : 45$
 $3053 : 71$
 $5544 : 56$

2. Maciek, Ala i Bartek obliczali ten sam iloraz.

Maciek

$$\begin{array}{r} 43 \\ 2821 : 7 \\ - 28 \\ \hline = = 21 \\ - 21 \\ \hline = = \end{array}$$

Ala

$$\begin{array}{r} 403 \\ 2821 : 7 \\ - 28 \\ \hline = = 2 \\ - 0 \\ \hline 21 \\ - 21 \\ \hline = = \end{array}$$

Bartek

$$\begin{array}{r} 403 \\ 2821 : 7 \\ - 28 \\ \hline = = 21 \\ - 21 \\ \hline = = \end{array}$$

a) Kto prawidłowo wykonał dzielenie?

b) Oblicz podane ilorazy jednym z poprawnych sposobów.

$2430 : 6$
 $1815 : 3$

$2045 : 5$
 $3616 : 4$

$7254 : 9$
 $4235 : 7$

3. Przerysujcie okienka do zeszytu. Znajdźcie potrzebne liczby, które są wynikami działań oznaczonych znakami rzymskimi: I, II, III, IV, i wpiszcie te liczby tak, aby w każdym okienku znajdowała się jedna cyfra. Następnie wykonajcie wskazane działania pionowo i poziomo. Zadanie zróbcie w parach, sprawiedliwie dzieląc się pracą z koleżanką lub kolegą.

I. iloczyn liczb 89 i 7

II. różnica liczb 811 i 356

III. iloraz liczb 1008 i 7

IV. różnica liczb 561 i 526

I. $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$

III. $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$
 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} : \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$

Ciekawie!

Oto inny sposób dzielenia:

$$\begin{array}{r} 864 : 36 = 24 \\ - 360 \text{ — } 10 \\ \hline 504 \\ - 360 \text{ — } 10 \\ \hline 144 \\ - 36 \text{ — } 1 \\ \hline 108 \\ - 36 \text{ — } 1 \\ \hline 72 \\ - 36 \text{ — } 1 \\ \hline 36 \\ - 36 \text{ — } 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Czy potrafisz wyjaśnić, w jaki sposób otrzymano wynik?

Zadania

- Do szkolnej świetlicy zakupiono kredki, farby i flamastry.
 - a) Jeden komplet kredek kosztuje 7 zł, a za wszystkie kredki zapłacono 112 zł. Ile kompletów kredek kupiono?
 - b) Za 24 pudełka farb zapłacono 216 zł. Ile kosztuje jedno pudełko farb?
 - c) Kupiono też 28 kompletów flamastrów w cenie 6 zł. Ile zapłacono za wszystkie flamastry?

- Podane ceny zapisz za pomocą groszy. W którym zestawie jeden flamaster jest najdroższy, a w którym – najtańszy?

I.	II.	III.	IV.
			
2 zł 70 gr	4 zł 30 gr	6 zł 90 gr	8 zł 40 gr

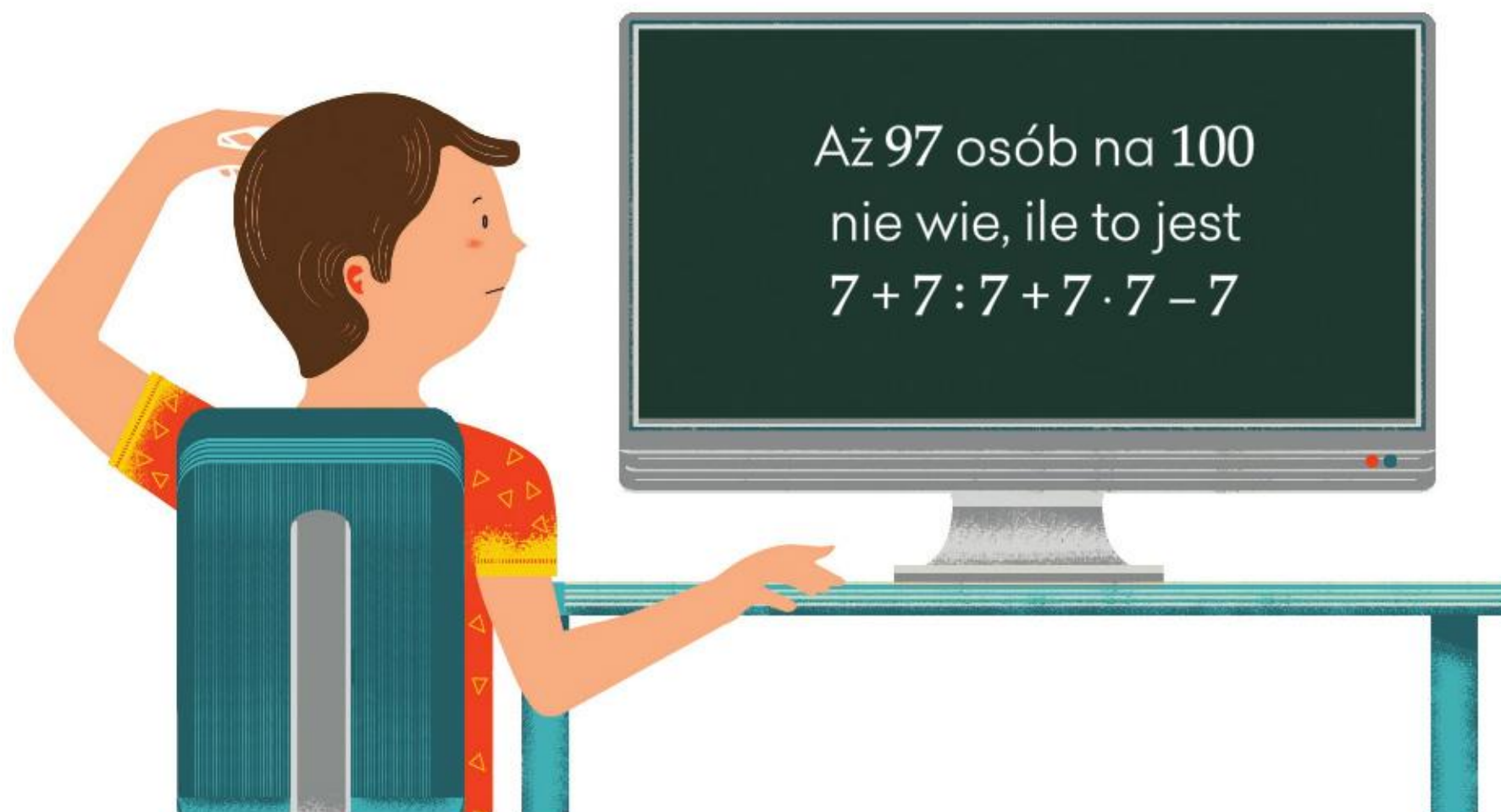
- Marek ma w skarbonce 85 dwuzłotówek. Bartek ma taką samą kwotę pieniędzy, ale w samych pięciozłotówkach. Ile monet ma Bartek?
- Na plantacji w 28 rzędach posadzono 1568 sadzonek truskawek – w każdym rzędzie tyle samo. Po ile sadzonek było w każdym rzędzie?
 - A. Po 45.
 - B. Po 46.
 - C. Po 56.
 - D. Po 66.
- Ile trwa rok zwykły (czyli taki, który nie jest rokiem przestępnym)?
 - A. 52 tygodnie.
 - B. 52 tygodnie i 1 dzień.
 - C. 52 tygodnie i 2 dni.
 - D. 53 tygodnie.
-  Pierwszym sztucznym satelitą Ziemi był umieszczony na orbicie w 1957 roku Sputnik 1. Okrążył naszą planetę 1400 razy i przebył łączną drogę około 70 mln km. Ile kilometrów pokonał podczas jednego okrążenia?
 - A. Około 50 000 km.
 - B. Około 5000 km.
 - C. Około 98 000 km.
 - D. Około 98 000 000 km.
-  Znajdź trzy takie liczby, których suma jest równa 975 i z których pierwsza jest 3 razy mniejsza od drugiej oraz równocześnie 3 razy większa od trzeciej.

1.7 Kolejność wykonywania działań

Podejmij temat



A ty wiesz?



Dodawanie i odejmowanie wykonujemy w takiej kolejności, w jakiej te działania są zapisane w wyrażeniu.

$56 + 28 - 63$ ← najpierw dodawanie

$124 - 18 + 56$ ← najpierw odejmowanie

Mnożenie i dzielenie wykonujemy w takiej kolejności, w jakiej te działania są zapisane w wyrażeniu.

$56 : 7 \cdot 3$ ← najpierw dzielenie

$28 \cdot 4 : 2$ ← najpierw mnożenie

1. Oblicz.

a) $379 + 2595 - 1367$
 $1828 - 935 + 5846$
 $256 + 831 - 649 + 943$

b) $548 \cdot 36 : 9$
 $2950 : 5 \cdot 480$
 $23 \cdot 45 : 5 \cdot 16$

Jeśli w wyrażeniu występują różne działania i nawiasy, to kolejność wykonywania tych działań jest następująca:

1. Działania w nawiasach.
2. Potęgowanie.
3. Mnożenie i dzielenie (w kolejności zapisu).
4. Dodawanie i odejmowanie (w kolejności zapisu).



Czy pamiętasz?

Czasami działania w nawiasach ujmuje się w kolejne nawiasy. Wówczas dla wygody stosuje się zwykle różne wielkości nawiasów lub różne kształty nawiasów, np.
 $((2 + 6) \cdot 3 + 1) - 20 : 5$
 albo

$\{[(2 + 6) \cdot 3 + 1] - 20\} : 5$.

Obliczenia zaczyna się wtedy od działania w nawiasie, w którym nie ma już innych nawiasów.

Przykład 1

Obliczmy wartość wyrażenia: $3 \cdot 21 - 108 : 9 \cdot 2 + (5^2 - 2^3)$.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 21 - 108 : 9 \cdot 2 + (5^2 - 2^3) &= \\ &= 3 \cdot 21 - 108 : 9 \cdot 2 + (25 - 8) = \\ &= 3 \cdot 21 - 108 : 9 \cdot 2 + 17 = \\ &= 63 - 108 : 9 \cdot 2 + 17 = \\ &= 63 - 12 \cdot 2 + 17 = \\ &= 63 - 24 + 17 = \\ &= 39 + 17 = \\ &= 56 \end{aligned}$$

Dla ułatwienia obliczeń podkreślone zostały działania, które należy wykonywać na kolejnych etapach.

2. Oblicz wartość podanego wyrażenia. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(45 + 113) \cdot (28 + 81)$ | b) $56 + 234 \cdot 81 - 72$ |
| c) $24 \cdot 63 - 558 : 9$ | d) $15^2 - 5^3$ |
| e) $4 \cdot 5^2 - 27$ | f) $125 : (124 + 1)$ |
| g) $(328 - 307)^2$ | h) $544 - 543 + (678 - 489) \cdot 0$ |

3. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $8 \cdot (30 : (5 \cdot 2))$ | b) $50 - [(17 - 9) \cdot 6]$ |
| c) $[16 - (9 + 4)] \cdot 7$ | d) $27 : (15 - (28 - 22))$ |
| e) $[10^2 + (2^3 - 8)] - 100$ | f) $4 \cdot (3 - ((57 - 55) : (25 - 24)))$ |

4. Przeczytajcie tekst.



W klasie Va jest 25 uczniów. Planują oni 2-dniową wycieczkę do Warszawy. Dowiedzieli się, że za przejazdu autokarem trzeba zapłacić 2400 zł, koszt jednego noclegu (jedna noc dla jednej osoby) wynosi 20 zł, a całodienne wyżywienie uczestnika kosztuje 25 zł. Wraz z uczniami na wycieczkę pojedzie 2 nauczycieli (koszty dla osoby dorosłej i dla dziecka są takie same).

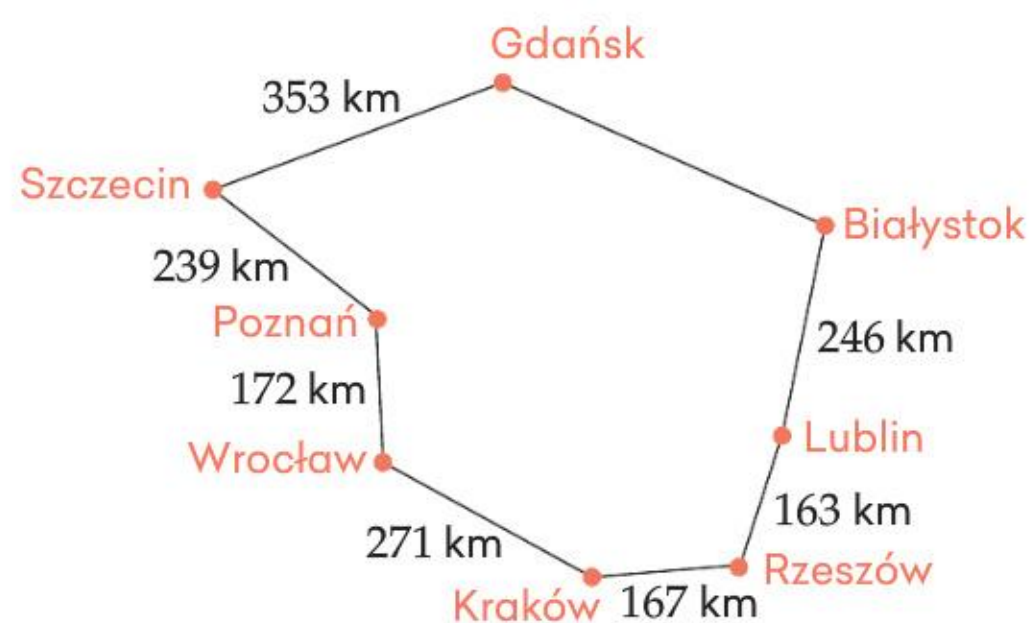
Podzielcie się na kilka zespołów. Sformułujcie w grupach jak najwięcej pytań dotyczących tekstu i przedstawcie odpowiedzi. Obliczenia do każdego pytania zapisujcie za pomocą jednego wyrażenia.

Zadania

Podczas rozwiązywania zadań 1–6 obliczenia zapisz za pomocą jednego wyrażenia.

- Sumę liczb 915 i 1425 zmniejsz 20 razy.
- Każda tabliczka czekolady jest podzielona na 18 kostek, a 7 takich tabliczek waży 630 g. Ile gramów waży jedna kostka czekolady?
- Długość pociągu wynosi 125 m. Ile wagonów jest w składzie tego pociągu, jeżeli lokomotywa ma długość 13 m, a każdy wagon 16 m?

- Grupa przyjaciół zorganizowała rajd samochodowy dookoła Polski. Trasa miała długość 2000 km. Rajd rozpoczynał się i kończył w Gdańsku. Długość poszczególnych etapów podano na rysunku. W zaznaczonych miastach znajdowały się punkty kontrolne. Jaka była odległość między punktem kontrolnym w Białymstoku a takim samym punktem w Gdańsku?



- W magazynie supermarketu znajduje się 38 kartonów ze słoikami dżemu truskawkowego, po 24 słoiki w każdym kartonie, i 46 kartonów ze słoikami dżemu wiśniowego, po 28 słoików w kartonie. Których słoików jest w tym magazynie więcej: z dżemem wiśniowym czy truskawkowym? O ile więcej?

- Falowiec to typ długiego budynku mieszkalnego, którego kształt przypomina falę. Najdłuższy polski falowiec znajduje się w Gdańsku na osiedlu Przymorze. Ma on 32 m wysokości, 13 m szerokości i aż 860 m długości. Ile najmniej kroków trzeba zrobić, żeby obejść ten budynek, przy założeniu, że jeden krok dorosłego człowieka ma długość 60 cm?

- Do podanego działania wstaw nawiasy w takich miejscach, aby otrzymać równość prawdziwą.

a) $480 - 35 + 27 + 48 = 370$ b) $154 + 126 : 127 - 99 = 10$
c) $12 + 42 \cdot 18 - 6 = 648$ d) $37 + 23 \cdot 386 - 229 = 22\,931$

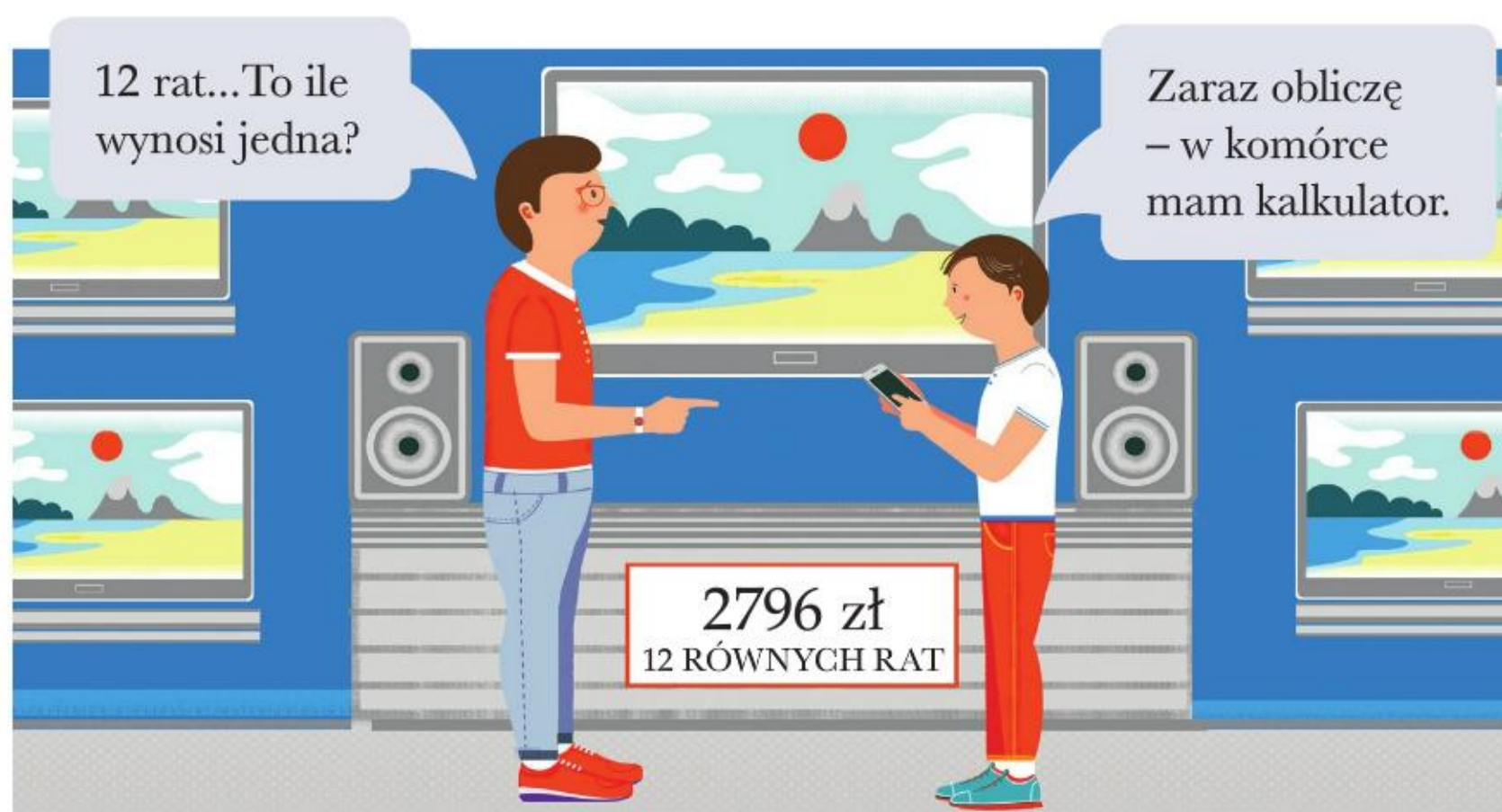
Ciekawe!



Falowiec na osiedlu Przymorze w Gdańsku powstawał w latach 1970–1973. Pierwsi mieszkańcy zasiedlali gotowe części budynku, kiedy całość nie była jeszcze ukończona – mieszkając w nim, mogli oni obserwować dobudowywanie kolejnych jego segmentów.

1.8 Praca z kalkulatorem

Podejmij temat



Ciekawe!

Niektóre kalkulatory mają koło wyświetlacza ciemne okienko – jest to bateria słoneczna. Zamienia ona energię światła na energię elektryczną. Kalkulator, w którym jest wbudowana taka bateria, działa bez dodatkowych „zwykłych” baterii, jeśli tylko ma kontakt ze źródłem światła.



Zastosowanie klawisza pamięci poznacie w klasie szóstej.

Pod koniec XX wieku kalkulator stał się bardzo popularnym urządzeniem ułatwiającym obliczenia. Dzisiaj, w XXI wieku, wiele osób korzysta na co dzień z kalkulatora w postaci aplikacji w smartfonie.

Najprostszy kalkulator ma:

- klawisze z cyframi:
- klawisze ze znakami czterech podstawowych działań i znakiem równości:
- klawisz z kropką, która pełni funkcję przecinka w ułamkach dziesiętnych:
- klawisz włączania:
- klawisz kasowania:
- klawisz pamięci:



Bardziej zaawansowane kalkulatory, w zależności od rodzaju, mogą mieć wiele innych klawiszy.

Przykład 1

Obliczmy za pomocą kalkulatora wartość podanego wyrażenia.

a) $36 \cdot 58$

b) $5375 : 25 - 197$

a) Przyciskamy kolejno klawisze:

i otrzymujemy wynik:

b) Przyciskamy kolejno klawisze:

i otrzymujemy wynik:

1. Oblicz za pomocą kalkulatora wartości podanych wyrażeń.

a) $58\,764 + 639\,467$

$34\,268 + 8573 + 4\,578\,276$

$506\,284 - 67\,829$

$1\,020\,304 - 853\,477$

b) $495 \cdot 1\,257$

$7686 \cdot 888$

$227\,469 : 2013$

$24\,453 : 209$

Na wyświetlaczu najczęściej spotykanych kalkulatorów mieści się maksymalnie 8 cyfr. Mimo to możemy za pomocą takich kalkulatorów wykonywać niektóre działania na liczbach 9-cyfrowych i większych. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 2

Obliczmy wartość podanego wyrażenia.

a) $543\,000\,000 \cdot 9200$

b) $344\,224\,000 : 69\,400$

a) Aby obliczyć podany iloczyn, wystarczy pomnożyć na kalkulatorze liczby 543 i 92, a następnie w otrzymanym wyniku uwzględnić odpowiednią liczbę zer.

Wartość podanego wyrażenia to 4 995 600 000 000.

b) Aby obliczyć podany iloraz, należy pominąć tyle samo końcowych zer w dzielnej i dzielniku, a następnie podzielić na kalkulatorze liczbę 3 442 240 przez 694.

Wartość podanego wyrażenia to 4960.

2. Oblicz wartość podanego wyrażenia.

a) $4\,956\,000 \cdot 4280$

$25\,700 \cdot 456\,700$

$1379 \cdot 590\,000$

$26\,400 \cdot 7800 \cdot 900$

b) $4\,569\,870\,000 : 345\,000$

$9\,398\,000\,000 : 1\,270\,000$

$62\,712\,000\,000 : 871\,000\,000$

$2\,288\,640\,000 : 384\,000$



Nie wszystkie kalkulatory zachowują kolejność wykonywania działań. Aby się przekonać, czy kalkulator wykonuje obliczenia we właściwej kolejności, wystarczy wprowadzić proste działanie, np. $2 + 4 : 2$, i sprawdzić wynik.

Ciekawie!



Pierwsza mechaniczna maszyna licząca została wynaleziona przez niemieckiego matematyka, Wilhelma Schickarda [czyt. wilhelma szikarda], w 1623 roku. Z jej pomocą można było wykonywać dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Kalkulator 1.

2 + 4 ÷ 2 =

888888884

Ten kalkulator wykonuje obliczenia w prawidłowej kolejności: najpierw dzielenie, potem dodawanie.

Kalkulator 2.

2 + 4 ÷ 2 =

888888883

Ten kalkulator wykonuje obliczenia w takiej kolejności, w jakiej działania zostały wprowadzone (najpierw dodawanie, potem dzielenie), czyli niezgodnie z zasadami matematycznymi.

3. Sprawdź, czy twój kalkulator oblicza zgodnie z prawidłową kolejnością wykonywania działań.

W przypadku niektórych działań nie ma znaczenia, w jaki sposób kalkulator wykonuje obliczenia, ponieważ kolejność zapisanych działań jest zgodna z kolejnością ich obliczania, np. w działaniu $45 : 5 + 3$ najpierw należy liczby podzielić, a następnie dodać, dlatego każdy kalkulator poda wynik poprawny.

Jeżeli jednak mamy wykonać działanie typu $25 \cdot 7 + 1424 : 8 - 299 : 13$ (czyli takie, w którym nie wykonujemy działań po kolei od lewej strony) i nasz kalkulator „nie umie” obliczać zgodnie z właściwą kolejnością wykonywania działań, możemy ustalić tę kolejność „za niego” i wykonywać działania cząstkowe, a ich wyniki notować, czyli:

$$25 \cdot 7 + 1424 : 8 - 299 : 13 = 175 + 178 - 23 = 330.$$

4. Wykonaj poniższe obliczenia przy użyciu kalkulatora. Jeżeli twój kalkulator nie zachowuje zasad kolejności wykonywania działań, notuj wyniki działań cząstkowych wtedy, gdy jest to konieczne.

a) $12\,463 : 121 \cdot 956$

$7689 - 3652 + 29\,468$

$(97\,645 - 88\,888) \cdot 592$

$26\,928 : 33 + 79\,851$

$746\,949 - 468 \cdot 526$

$1528 \cdot (100\,000 - 98\,998)$

b) $34\,231\,800 : 4835 - 5387$

$(3111 - 171) : 140$

$(45\,829 + 134\,856) \cdot 97$

$(1239 + 3999) : 18$

$(8\,411\,266 - 8\,367\,956) : 71$

$97\,776 : 24 - 5558 : 14$

Więcej na temat

Z pewnością niejedną raz liczyliście średnią swoich ocen. W matematyce to pojęcie nazywa się **średnią arytmetyczną**.

Aby obliczyć średnią arytmetyczną ocen z danego przedmiotu, najpierw wszystkie oceny dodajemy, a następnie otrzymaną sumę dzielimy przez liczbę ocen. Jeśli na przykład uczeń ma z języka polskiego oceny: 3, 5, 2, 4 i 1, to swoją średnią obliczy w następujący sposób: $(3 + 5 + 2 + 4 + 1) : 5 = 15 : 5 = 3$.

Oczywiście średnią arytmetyczną można liczyć nie tylko w przypadku ocen. Obliczmy np. średnią temperaturę ośmiu kolejnych dni. Załóżmy, że termometry w te dni wskazywały: 8°C , 15°C , 9°C , 13°C , 14°C , 7°C , 11°C , 7°C . Dodajemy liczby i otrzymaną sumę dzielimy przez 8 (bo tyle jest pomiarów). Do obliczeń możemy wykorzystać kalkulator. Liczymy: $(8 + 15 + 9 + 13 + 14 + 7 + 11 + 7) : 8 = 84 : 8 = 10,5$. Okazało się zatem, że średnia temperatura wynosiła $10,5^{\circ}\text{C}$.

5. Zapisz liczby i oblicz ich średnią arytmetyczną. Skorzystaj z kalkulatora.
- a) największa liczba czterocyfrowa, największa pięciocyfrowa i największa sześciocyfrowa
 - b) najmniejsza dodatnia liczba jednocyfrowa, najmniejsza dwucyfrowa, najmniejsza trzycyfrowa i najmniejsza czterocyfrowa

Zadania

- Zapisz i oblicz iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych, z których:
 - a) najmniejszą jest 329, b) największą jest 801, c) środkową jest 500.
- Zapisz i oblicz sumę dziewięciu kolejnych liczb naturalnych, z których:
 - a) najmniejszą jest 144, b) największą jest 203, c) środkową jest 451.
- Pani Katarzyna sprzedała mieszkanie w Warszawie za 295 000 zł, garaż za 28 500 zł i umeblowanie mieszkania za 8300 zł. Kupiła mieszkanie w Bydgoszczy, za które zapłaciła 183 000 zł. Remont kupionego mieszkania kosztował ją 23 600 zł, a meble do niego 18 150 zł. Ile pieniędzy zostało pani Katarzynie po dokonaniu wymienionych transakcji?
- Zapisz liczby, z których najmniejszą jest 5, a każda kolejna jest 17 razy większa od poprzedniej, ale żadna nie przekracza 10 000 000. Ile jest tych liczb?
- Poszukaj w internecie informacji na temat innych maszyn liczących niż ta zaprezentowana na poprzedniej stronie.



1.9 Odczytywanie i tworzenie tabel

Podejmij temat



W codziennym życiu bardzo często spotykamy się z informacjami zapisanymi w tabelach. Czy potrafisz odczytać i zinterpretować dane zawarte w tabelach obok?

Cennik	
butka kajzerka	0,40 zł
butka grahamka	0,70 zł
bagietka	2,10 zł
chleb mały	2,60 zł
chleb duży	4,70 zł
drożdżówka	1,50 zł

Godziny pracy biblioteki	
poniedziałek	8-18
wtorek	9-17
środa	9-17
czwartek	10-15
piątek	9-17
sobota	9-13
niedziela	nieczynne

912 dni robocze	
Teatr Muzyczny	
godz.	min
6	03 33
7	03 33
8	25
9	25
10	25
11	25
12	25
14	55
16	55
18	55
20	55
22	22

SPORT			
Zimowe Igrzyska Olimpijskie 2018			
Skocznia duża mężczyzn			
Medal	Zawodnik	Kraj	Wynik punktowy
złoty	Kamil Stoch		285,7
srebrny	Andreas Wellinger		282,3
brązowy	Robert Johansson		275,3

Przeczytaj tekst.

Do pewnej szkoły uczęszcza 411 uczniów, w tym do klas pierwszych chodzi 52 uczniów, do klas drugich – 64, do klas trzecich – 49, do klas czwartych – 55, do klas piątych – 43, do klas szóstych – 48, do klas siódmych – 53, a do klas ósmych – 47 uczniów.

Taki tekst jest mało czytelny. O wiele bardziej przejrzysty jest zapis przedstawiony poniżej.

klasy I – 52 uczniów
klasy II – 64 uczniów
klasy III – 49 uczniów
klasy IV – 55 uczniów
klasy V – 43 uczniów
klasy VI – 48 uczniów
klasy VII – 53 uczniów
klasy VIII – 47 uczniów
Razem: 411 uczniów

Takie uporządkowanie danych przypomina już zapis w tabeli.

Klasa	Liczba uczniów
I	52
II	64
III	49
IV	55
V	43
VI	48
VII	53
VIII	47
Razem	411

1. Odpowiedz na pytania dotyczące czterech tabel umieszczonych w *Podejmij temat*.
 - a) Jaka jest różnica cen dużego i małego bochenka chleba? Co kosztuje więcej: cztery kajzerki czy jedna drożdżówka?
 - b) Czy wiadomo, o której godzinie z przystanku Teatr Muzyczny odjeżdża ostatni autobus 912 w poniedziałek? A w niedzielę?
 - c) Którego dnia biblioteka jest otwarta najdłużej, a którego – najkrócej?
 - d) Który skoczek zdobył największą liczbę punktów za swoje skoki?

2. Utwórz tabelę pokazującą, ile dziewcząt i ilu chłopców z twojej klasy urodziło się w poszczególnych miesiącach. Tabele wykonaj według podanego obok wzoru.

Miesiąc	Liczba dziewcząt	Liczba chłopców
styczeń		
luty		
marzec		
kwiecień		
...		

3.  Utwórzcie tabelę pokazującą, ilu uczniów z waszej klasy ma psa, kota, kury czy inne zwierzęta domowe lub gospodarskie.

Zadania

W tabeli obok przedstawiono fragment cennika usług pocztowych. Skorzystaj z niego przy rozwiązywaniu zadań 1 i 2.

- Ile kosztuje wysłanie paczki, która waży:

- a) 17 kg, b) 25 dag,
- c) 2,15 kg, d) 10 kg?

Paczka	
Masa	Cena (zł)
do 0,5 kg	8,50
ponad 0,5 kg do 2 kg	12,00
ponad 2 kg do 5 kg	14,00
ponad 5 kg do 10 kg	18,00
ponad 10 kg do 20 kg	23,00
ponad 20 kg do 30 kg	33,00

- Pani Agnieszka przygotowała do wysłania paczkę ważącą 28 kg, ale miała trudności z zanieśieniem jej na pocztę. Zapakowała więc zawartość do dwóch mniejszych paczek, które ważyły 10 kg i 18 kg. O ile mniej zapłaciłaby za wysyłkę jednej dużej paczki niż dwóch mniejszych?

- Uczniowie trzech klas piątych rozwiązali test z matematyki. Nauczyciel zapisał wyniki w tabeli.

Klasa	Liczba ocen					
	cel.	bdb.	db.	dst.	dop.	ndst.
Va	1	6	4	7	4	2
Vb	–	5	6	4	5	1
Vc	2	3	2	8	6	2

- a) Ilu uczniów pisało test w poszczególnych klasach?
- b) Ile ocen dobrych otrzymali uczniowie z wszystkich trzech klas?
- c) Jakich ocen było więcej: bardzo dobrych czy dopuszczających?
- d) Jakich ocen uczniowie z klas piątych uzyskali najwięcej?



- zasięg światła
- wysokość latarni
- wysokość źródła światła n.p.m.

Ciekawe!

Najstarsza znana latarnia morska została zbudowana przez Egipcjan w III w. p.n.e. na wyspie Faros. Była to budowla mająca ponad 100 m! W jej najwyższej części o zmierzchu rozpalano ognisko. Zasięg światła wzmocnionego odbiciem w ogromnym lustrze wynosił około 55 km! W ciągu dnia kierunek wskazywał żeglarzom unoszący się nad latarnią dym. Budowla była kilka razy uszkodzona w wyniku trzęsień ziemi i ostatecznie uległa zniszczeniu w 1375 roku. Latarnia ta została zaliczona do siedmiu cudów starożytnego świata.



W tabeli umieszczono informacje dotyczące wszystkich latarni morskich znajdujących się obecnie na polskim wybrzeżu. Przeanalizuj te dane wraz z dołączoną na marginesie ilustracją i wykonaj polecenia.

Latarnie morskie na polskim wybrzeżu			
Miejscowość	Zasięg światła	Wysokość latarni	Wysokość źródła światła n.p.m.
Świnoujście	46 km	64 m 80 cm	68 m
Kikut	30 km	18 m 20 cm	91 m 50 cm
Niechorze	37 km	45 m	62 m 80 cm
Kołobrzeg	30 km	26 m	36 m 50 cm
Gąski	44 km	49 m 80 cm	50 m 10 cm
Darłowo	28 km	21 m	19 m 70 cm
Jarosławiec	43 km	33 m 30 cm	50 m 20 cm
Ustka	33 km	19 m 50 cm	22 m 20 cm
Czołpino	39 km	25 m 20 cm	75 m
Stilo	43 km	33 m 40 cm	75 m
Rozewie	48 km	32 m 70 cm	83 m 20 cm
Jastarnia	28 km	13 m 30 cm	22 m
Sopot	31 km	30 m	25 m
Hel	33 km	41 m 50 cm	38 m 50 cm
Gdańsk Port Północny	46 km	64 m 30 cm	56 m
Gdańsk Port Nowy	31 km	27 m	27 m 30 cm
Krynica Morska	36 km	27 m	53 m

- Wymień trzy najwyższe i trzy najniższe latarnie morskie.
- Wskaż cztery latarnie, których źródło światła znajduje się najwyżej (nad poziomem morza).
- Wymień trzy latarnie, których światło dociera najdalej.



Pracownicy stacji meteorologicznej przez tydzień zapisywali temperaturę powietrza o godzinach: 6.00, 12.00, 18.00, 24.00. Ich notatka widoczna jest obok.

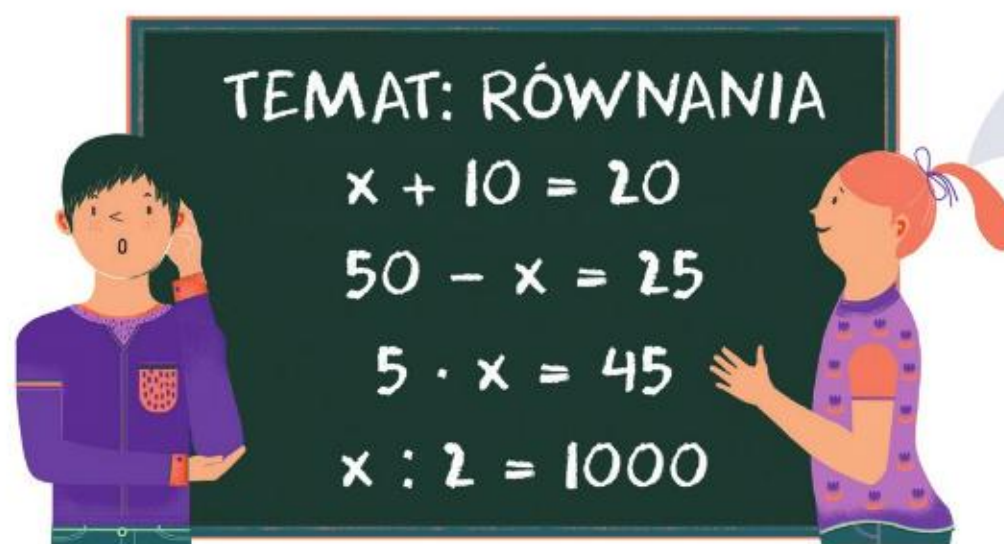
- Utwórz tabelę, z której będzie można bez trudu odczytać podane temperatury.
- Którego dnia suma temperatur była najwyższa?
- Którego dnia zanotowano najniższą temperaturę w południe, a którego dnia – o północy?
- W które dni były jednakowe temperatury o godzinie 18.00?

poniedziałek: 5°C, 12°C, 9°C, 4°C
wtorek: 8°C, 13°C, 8°C, 6°C
środa: 6°C, 8°C, 8°C, 7°C
czwartek: 5°C, 10°C, 7°C, 6°C
piątek: 7°C, 14°C, 10°C, 6°C
sobota: 4°C, 10°C, 8°C, 5°C
niedziela: 4°C, 9°C, 8°C, 3°C

1.10 Równania

Podejmij temat

Nie mam pojęcia, co się robi z tymi jakimiś równaniami. Po co tam są te ikisy?



Ja się cieszę, że wreszcie będziemy się tego uczyć. Mój tata mówi, że często łatwiej rozwiązać zadanie, jak się już zna równania 😊

Przeczytaj, co powiedziała Ola swojej koleżance Izie.

Przeczytałam o 26 stron więcej niż ty. Przeczytałam już 44 strony!

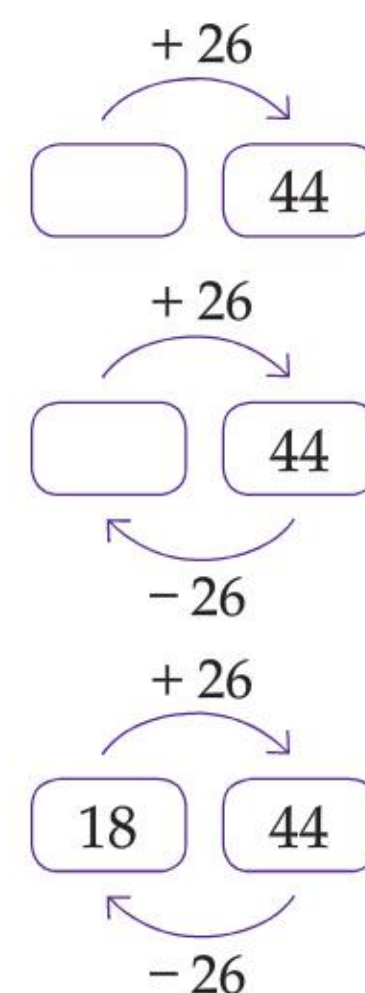


Działanie pokazujące, ile stron książki przeczytała Iza, można przedstawić za pomocą grafu.

Aby uzupełnić graf, należy wykonać działanie odwrotne do dodawania, czyli odejmowanie.

Wykonujemy zatem działanie wskazane przez dolną strzałkę i wpisujemy wynik.

Obliczyliśmy, że Iza przeczytała 18 stron książki.



Zamiast rysowania grafu opisującego powyższą sytuację można zastosować zapis:

Aby obliczyć nieznaną składnik, należy wykonać działanie odwrotne, czyli odejmowanie:

Z ostatniego zapisu wynika, że w okienku powinna się znaleźć liczba 18:

Jeszcze inny zapis, zamiast grafu i zamiast działania z okienkiem, może wyglądać tak:

$$\square + 26 = 44$$

$$\square = 44 - 26$$

$$\square = 18$$

$$x + 26 = 44$$

Litera x odgrywa w tym zapisie taką samą rolę, jak w poprzednim zapisie okienko $\square$, i oznacza liczbę stron, które przeczytała Iza.

Zapis $x + 26 = 44$ nazywamy **równaniem**, a literę x w tym równaniu – **niewiadomą**.

Polecenie *rozwiąż równanie* oznacza, że należy znaleźć taką liczbę, aby po wstawieniu jej do równania zamiast litery x otrzymać równość prawdziwą. Tę znaną liczbę nazywamy **rozwiązaniem równania**.



Niewiadomą w równaniu możemy oznaczać również innymi literami alfabetu, np. y , z , a , b , ale najczęściej, zwyczajowo, używamy litery x .

Przykład 1

Sprawdźmy, czy:

- a) liczba 27 jest rozwiązaniem równania $x + 13 = 40$,
- b) liczba 51 jest rozwiązaniem równania $14 + y = 60$.

a) Zamiast litery x wstawiamy do równania liczbę 27.
Otrzymujemy równość $27 + 13 = 40$.
Jest to równość prawdziwa. Liczba 27 jest zatem rozwiązaniem równania $x + 13 = 40$.

b) W miejsce y wstawiamy do równania liczbę 51
i otrzymujemy $14 + 51 = 60$.
Nie jest to prawda, ponieważ $14 + 51 = 65$. Liczba 51 nie jest zatem rozwiązaniem równania $14 + y = 60$.

Przykład 2

Rozwiążmy równanie $x + 138 = 245$.

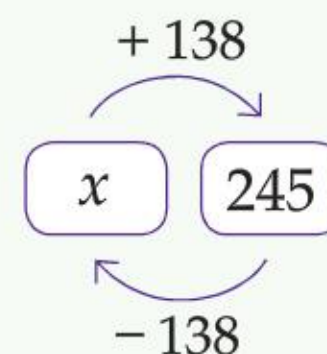
$$x + 138 = 245$$

Aby obliczyć niewiadomą liczbę x , wykonujemy działanie odwrotne, jak to pokazano na grafie.

$$x = 245 - 138$$

$$x = 107$$

Odejmowanie możemy wykonać w pamięci lub sposobem pisemnym.



Podobnie postępujemy, gdy chcemy obliczyć nieznaną czynnik, pamiętając o tym, że działaniem odwrotnym do mnożenia jest dzielenie.

Jeżeli w równaniu nieznaną jest drugi składnik lub drugi czynnik, postępujemy analogicznie jak poprzednio (dodawanie i mnożenie są przemienne).

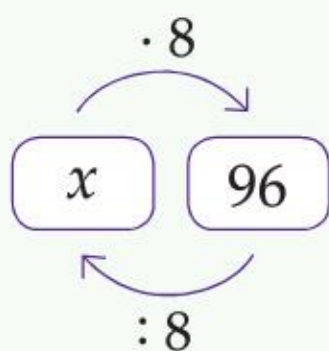
Przykład 3

Rozwiążmy równanie $x \cdot 8 = 96$.

$$x \cdot 8 = 96$$

$$x = 96 : 8$$

$$x = 12$$



Przykład 4

Rozwiążmy równania:

$$28 + x = 50$$

$$7 \cdot y = 147$$

$$28 + x = 50$$

$$x = 50 - 28$$

$$x = 22$$

$$7 \cdot y = 147$$

$$y = 147 : 7$$

$$y = 21$$

1. Rozwiąż podane równania.

a) $x + 16 = 41$

$x + 53 = 180$

$x + 137 = 525$

b) $43 + x = 70$

$27 + x = 125$

$426 + x = 512$

c) $x \cdot 6 = 48$

$x \cdot 70 = 2800$

$x \cdot 14 = 224$

d) $9 \cdot x = 99$

$12 \cdot x = 1200$

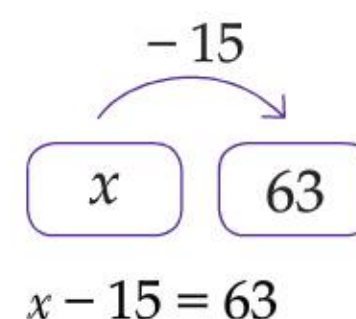
$35 \cdot x = 805$

Zajmiemy się teraz równaniami, w których niewiadomą jest odjemna lub odjemnik.

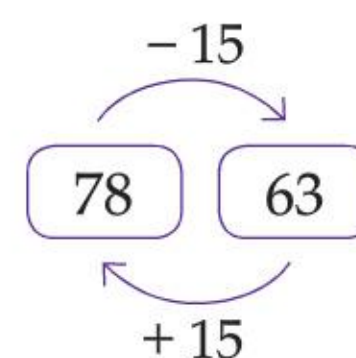
Przeczytaj, co powiedział Igor swojemu koledze Adamowi.

Przeczytałem o 15 stron mniej niż ty. Mam za sobą dopiero 63 strony.

Działanie opisujące tę sytuację można przedstawić za pomocą grafu lub równania, w którym x oznacza liczbę stron przeczytanych przez Adama.



Działaniem odwrotnym do odejmowania jest dodawanie.



$x = 63 + 15$
 $x = 78$



Obliczyliśmy, że Adam przeczytał 78 stron.

Przykład 5

Rozwiążmy równanie, w którym niewiadoma liczba x jest odjemnikiem: $46 - x = 29$.

$46 - x = 29$

Do tego działania zapiszmy działanie odwrotne, jak pokazano na grafie.

$29 + x = 46$

Taki zapis nie pokazuje jeszcze sposobu rozwiązania, ale takim równaniem już się zajmowaliśmy. Podobnie jak w przykładzie 4 skorzystajmy z prawa przemienności dodawania.

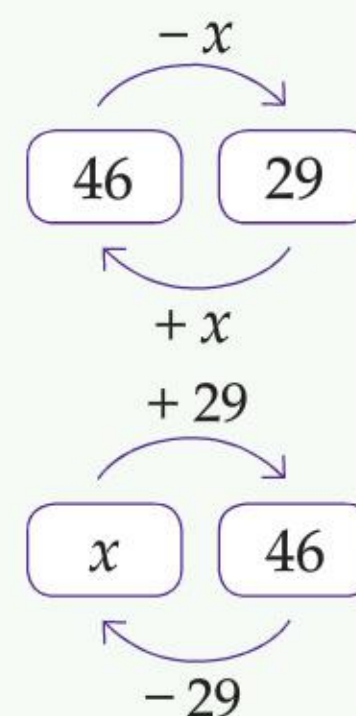
$x + 29 = 46$

Zapiszmy jeszcze raz działanie odwrotne, zgodnie z grafem.

$x = 46 - 29$

Wykonajmy odejmowanie.

$x = 17$



Teraz nauczymy się rozwiązywać równania, w których niewiadomą jest dzielna lub dzielnik.

Przeczytaj dialog żaglówek.

Dużo się dziś
napływałam!

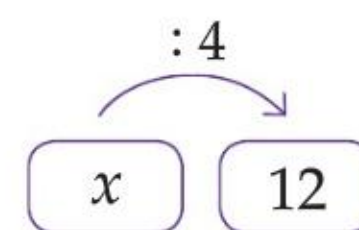
Ja przepłynęłam
4 razy krótszy
dystans niż ty –
tylko 12 km.



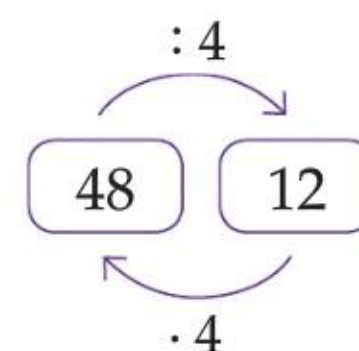
Działanie opisujące tę sytuację można przedstawić za pomocą grafu lub równania, w którym x oznacza liczbę kilometrów, które przepłynęła łódka z zielonym żaglem.

Działaniem odwrotnym do dzielenia jest mnożenie.

Obliczyliśmy, że zielona żagłówka przepłynęła 48 km.



$$x : 4 = 12$$



$$x = 12 \cdot 4$$

$$x = 48$$

Przykład 6

Rozwiążmy równanie, w którym nieznaną liczbą jest dzielnik: $96 : x = 8$.

$$96 : x = 8$$

Do tego działania zapiszmy działanie odwrotne, jak pokazano na grafie.

$$8 \cdot x = 96$$

Tego typu równanie występowało w przykładzie 4. Podobnie jak tam, tu również wykorzystajmy prawo przemienności mnożenia.

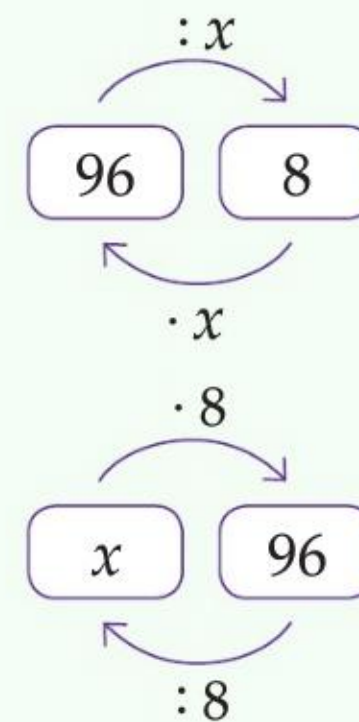
$$x \cdot 8 = 96$$

Zapiszmy jeszcze raz działanie odwrotne, zgodnie z grafem.

$$x = 96 : 8$$

Wykonajmy dzielenie.

$$x = 12$$



2. Rozwiąż równania.

a) $x - 25 = 41$

$x - 138 = 200$

$x - 367 = 133$

b) $64 - x = 23$

$72 - x = 45$

$457 - x = 281$

c) $x : 9 = 8$

$x : 4 = 25$

$x : 26 = 53$

d) $66 : x = 11$

$132 : x = 4$

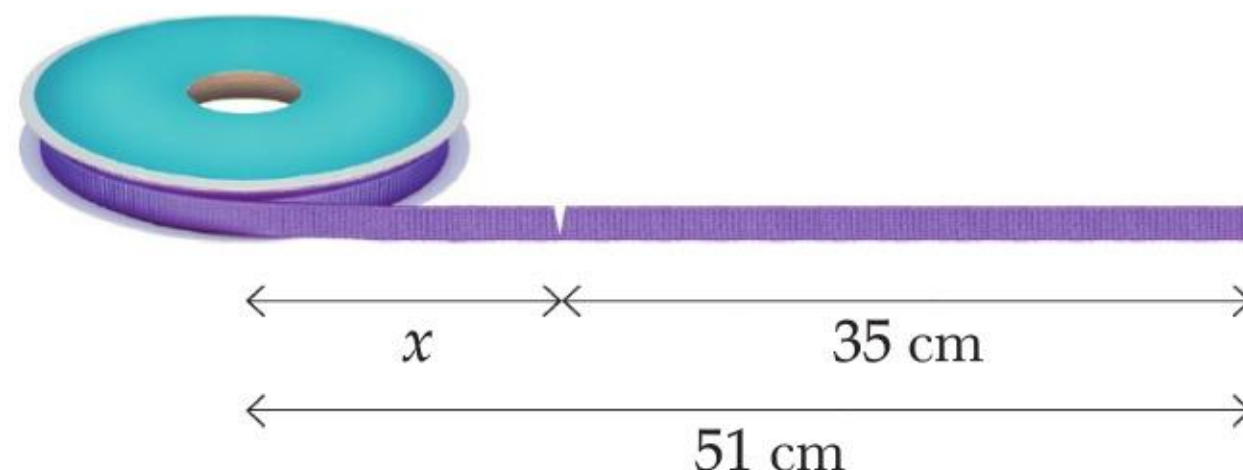
$540 : x = 15$

Zadania

- Sprawdź, która z liczb: 8, 18, 28, 38, jest rozwiązaniem podanego równania.
- a) $128 + x = 146$ b) $62 - x = 24$ c) $x \cdot 5 = 140$ d) $216 : x = 12$

- Rozwiąż równania.
- a) $x + 725 = 4251$ b) $x - 675 = 1220$ c) $x \cdot 36 = 1944$ d) $x : 72 = 35$
 $1345 + x = 2111$ $5341 - x = 18$ $8 \cdot x = 2568$ $676 : x = 52$

- Które równania poprawnie opisują ilustrację?
- I. $x + 35 = 51$ II. $35 - x = 51$
III. $51 - x = 35$ IV. $x - 35 = 51$



Podczas rozwiązywania zadań 4–10 treść każdego z nich możesz zapisać za pomocą równania.

- Do jakiej liczby należy dodać 3752, żeby otrzymać 4124?
A. 472 B. 7876 C. 7786 D. 372
- Zuzia i jej młodszy brat Tomek są w kinie – oglądają film *Ostatni smok świata*. Od rozpoczęcia filmu minęło 55 minut. Ile minut pozostało do końca, jeżeli wiadomo, że cały film trwa 134 minuty?
- W pewnej sali kinowej jest 15 rzędów, a w każdym rzędzie jest tyle samo miejsc. Wszystkich foteli na sali jest 195. Ile jest miejsc w każdym rzędzie?
- Antek miał pewną kwotę. Gdy wydał 47 zł, pozostało mu jeszcze 16 zł. Ile pieniędzy miał przed zrobieniem zakupów?
- Michał gra w grę komputerową, w której należy złowić 136 ryb pływających w stawie. Ile ryb złowił chłopiec, jeśli na koniec gry na ekranie pojawiła się informacja, że nie udało mu się złowić 52 ryb?
- Aby wyłożyć ścianę w łazience glazurą, zakupiono 136 płytek. Naklejono je w kilku rzędach, po 17 płytek w każdym. Ile było rzędów glazury?
- Wszyscy uczniowie pewnej szkoły pojechali na wycieczkę pociągiem. Siedzieli w 8-osobowych przedziałach. Zajęli 21 przedziałów i żadne miejsce nie zostało puste. Ilu uczniów chodzi do tej szkoły?

1.11 Dzielniki i wielokrotności liczb naturalnych

Podejmij temat

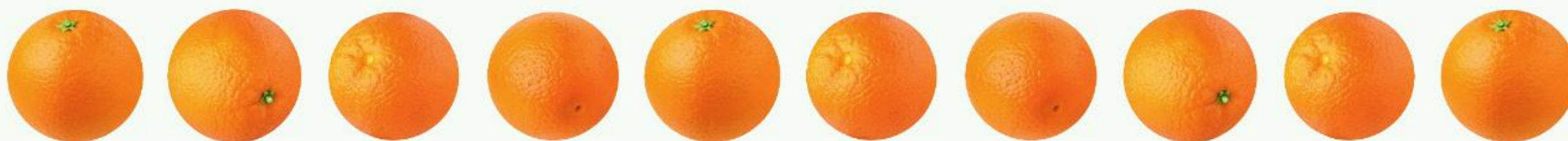


Marysia przygotowała 6 muffinek. Ile koleżanek może nimi poczęstować, jeśli każdej chce dać tyle samo? Czy na to pytanie jest tylko jedna poprawna odpowiedź?



Przykład 1

Babcia Anna kupiła 10 pomarańczy, które rozdała swoim wnukom. Każdy z wnuków dostał tyle samo pomarańczy (w całości). Ilu wnuków może mieć babcia Anna?



- Babcia Anna może mieć 1 wnuka, który dostał 10 pomarańczy: $10 : 1 = 10$
- Babcia Anna może mieć 2 wnuków, którzy dostali po 5 pomarańczy: $10 : 2 = 5$
- Babcia Anna może mieć 5 wnuków, którzy dostali po 2 pomarańcze: $10 : 5 = 2$
- Babcia Anna może mieć 10 wnuków, którzy dostali po 1 pomarańczy: $10 : 10 = 1$

Liczbę 10 można podzielić bez reszty przez 1, 2, 5 i 10.

Mówimy, że liczba 10 jest podzielna przez 1, 2, 5 i 10 oraz że dzielniki liczby 10 to: 1, 2, 5, 10.

Stosujemy zapis: $D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$.

Liczby, przez które dana liczba naturalna jest podzielna, nazywamy jej **dzielnikami**.

- a) Dziadek Zenon podzielił 15 bananów między swoje wnuczki. Każda dostała tyle samo bananów (w całości). Ile wnuczek może mieć dziadek Zenon? Przez jakie liczby jest podzielna liczba 15?
- b) Wujek Marcin kupił 20 jabłek i wszystkie rozdzielił równo (i w całości) między swoje siostrzenice. Ile siostrzenic może mieć wujek Marcin? Wypisz wszystkie dzielniki liczby 20.

2. Przez jakie liczby jest podzielna podana liczba?

- | | | |
|-------|-------|-------|
| a) 28 | b) 12 | c) 18 |
| d) 40 | e) 29 | f) 37 |

3. Wypisz wszystkie dzielniki podanej liczby.

- | | | |
|-------|-------|--------|
| a) 16 | b) 27 | c) 50 |
| d) 32 | e) 43 | f) 100 |

Przykład 2

Liczbę 1950 podzielmy przez 3, przez 2 oraz przez $3 \cdot 2$, czyli przez 6. Co można zauważyć?

$1950 : 3 = 650$, czyli liczba 3 jest dzielnikiem liczby 1950.

$1950 : 2 = 975$, czyli liczba 2 jest dzielnikiem liczby 1950.

$1950 : 6 = 325$, czyli liczba 6 jest dzielnikiem liczby 1950.

Jak widać, dzielnikami liczby 1950 są zarówno liczby 3 i 2, jak i ich iloczyn, czyli liczba 6.



Jeśli dwie liczby są dzielnikami pewnej liczby naturalnej, to również iloczyn tych liczb jest dzielnikiem tej liczby.

4. Liczby 2 i 7 są dzielnikami liczby 322. Podaj inny dzielnik tej liczby.

5. Przepisz i uzupełnij poniższe zdanie (zamiast znaku zapytania wpisz odpowiednią liczbę).

Liczba 285 jest podzielna przez 3 i przez 5, a zatem jest też podzielna przez ?.

6. Dzielnikiem liczby 810 jest liczba 30. Wymień przynajmniej dwa inne dzielniki liczby 810.

7. Wypisz dzielniki liczb 24 i 30. Podkreśl dzielniki wspólne dla obu liczb. Który z wymienionych wspólnych dzielników jest największy?

8. Wypisz dzielniki podanych liczb i znajdź ich największy wspólny dzielnik.

- | | | |
|------------|------------|-----------------|
| a) 21 i 35 | b) 20 i 70 | c) 8 i 56 |
| d) 36 i 48 | e) 14 i 15 | f) 45, 36, 18 ✕ |



Odpowiedzią na pytanie zawarte w ćwiczeniu 7 jest liczba, którą nazywamy **największym wspólnym dzielnikiem** danych liczb (w skrócie **NWD**).

Zapisujemy: $\text{NWD}(24, 30) = 6$.

Przykład 3

Litrowy karton soku ananasowego kosztuje 4 zł. Ile zapłacimy za 2, a ile za 3, 4 lub 5 takich kartonów?

Za 1 karton zapłacimy 4 zł (bo $1 \cdot 4 = 4$).

Za 2 kartony zapłacimy 8 zł (bo $2 \cdot 4 = 8$).

Za 3 kartony zapłacimy 12 zł (bo $3 \cdot 4 = 12$).

Za 4 kartony zapłacimy 16 zł (bo $4 \cdot 4 = 16$).

Za 5 kartonów zapłacimy 20 zł (bo $5 \cdot 4 = 20$).

Analogicznie można obliczać, ile zapłacimy za 6 kartonów, 7, 8 itd.

Oczywiście, rozumując podobnie, stwierdzamy, że za 0 kartonów zapłacimy 0 zł (bo $0 \cdot 4 = 0$).

Mówimy, że liczby 0, 4, 8, 12, 16, 20 to wielokrotności liczby 4.

Wielokrotnościami liczby 4 są również:

24 (bo $6 \cdot 4 = 24$),

28 (bo $7 \cdot 4 = 28$),

32 (bo $8 \cdot 4 = 32$)

oraz 36, 40, 44, 48, 52, 56, ...

Wielokrotności liczby 4 to zatem: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...

Nie możemy zapisać wszystkich wielokrotności danej liczby, ponieważ jest ich nieskończenie wiele.

Stosujemy zapis: $W_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \dots\}$.

Można zauważyć, że każda wielokrotność liczby 4 jest podzielna przez 4.

Wielokrotności liczby otrzymamy, jeśli pomnożymy ją przez dowolną liczbę naturalną.



Odpowiedzią na pytanie zawarte w ćwiczeniu 10 jest liczba, którą nazywamy **najmniejszą wspólną wielokrotnością** danych liczb (w skrócie **NWW**).
Zapisujemy: $NWW(8, 6) = 24$.

9. Wypisz 10 wielokrotności podanej liczby.

a) 5

b) 10

c) 7

10. Zapisz dziesięć kolejnych, większych od zera, wielokrotności liczby 8 oraz tyle samo wielokrotności liczby 6. Zaczynij od najmniejszych. Jakie wielokrotności są wspólne dla obu liczb? Która z nich jest najmniejsza?

11. Wypisz po kilka wielokrotności podanych liczb i znajdź ich najmniejszą wspólną wielokrotność.

a) 2, 15

b) 3, 9

c) 12, 20

d) 10, 11

e) 10, 25

f) 7, 14, 21 ✕

Zadania

● Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Liczba 6 jest dzielnikiem liczby 46.

b) Liczba 36 jest wielokrotnością liczby 12.

c) Liczba 7 jest dzielnikiem liczby 56.

d) Liczba 28 jest wielokrotnością liczby 8.

e) Liczba 75 jest podzielna przez 25.

f) Liczba 50 jest podzielna przez 20.

g) Liczba 34 jest podzielna przez 12.

h) Liczba 48 jest podzielna przez 4.

● Podaj przykład liczby, która ma dokładnie:

a) 1 dzielnik,

b) 2 dzielniki,

c) 3 dzielniki,

d) 4 dzielniki.

● Liczba D (zapisana w systemie rzymskim) jest wielokrotnością liczby

A. XL

B. LX

C. L

D. XXX

● Miesiące mają swoje nazwy i numery. Odpowiedz na pytania.

a) Który miesiąc ma numer o największej liczbie dzielników, a który – o najmniejszej?

b) Jakie są dzielniki numeru miesiąca, który występuje w twojej dacie urodzenia?

● Czy to prawda, że im większa liczba, tym ma więcej dzielników? Odpowiedz uzasadnij.

● W klasie Va podczas zabawy mikołajkowej uczniowie otrzymali jednakowe paczki przygotowane przez rodziców. Do wszystkich paczek zakupiono łącznie 48 jabłek, 96 mandarynek i 120 cukierków. Ile jest osób w klasie Va, jeśli wiadomo, że jest ich więcej niż 20?

● Magda znalazła w skrzynce na listy ulotkę reklamową nowo otwartego sklepu spożywczego. Przeczytaj tekst ulotki i odpowiedz na pytania.

a) Którzy kolejni klienci dostaną sok porzeczkowy?

b) Którzy kolejni klienci dostaną sok z owoców egzotycznych?

c) Którym klientem trzeba być, żeby otrzymać dwa prezenty?

UWAGA!

Tylko dziś, 5 października,
co trzydziesty klient
otrzymuje w prezencie
1 litr soku porzeczkowego,
a co dwudziesty –
1 litr soku z owoców egzotycznych!

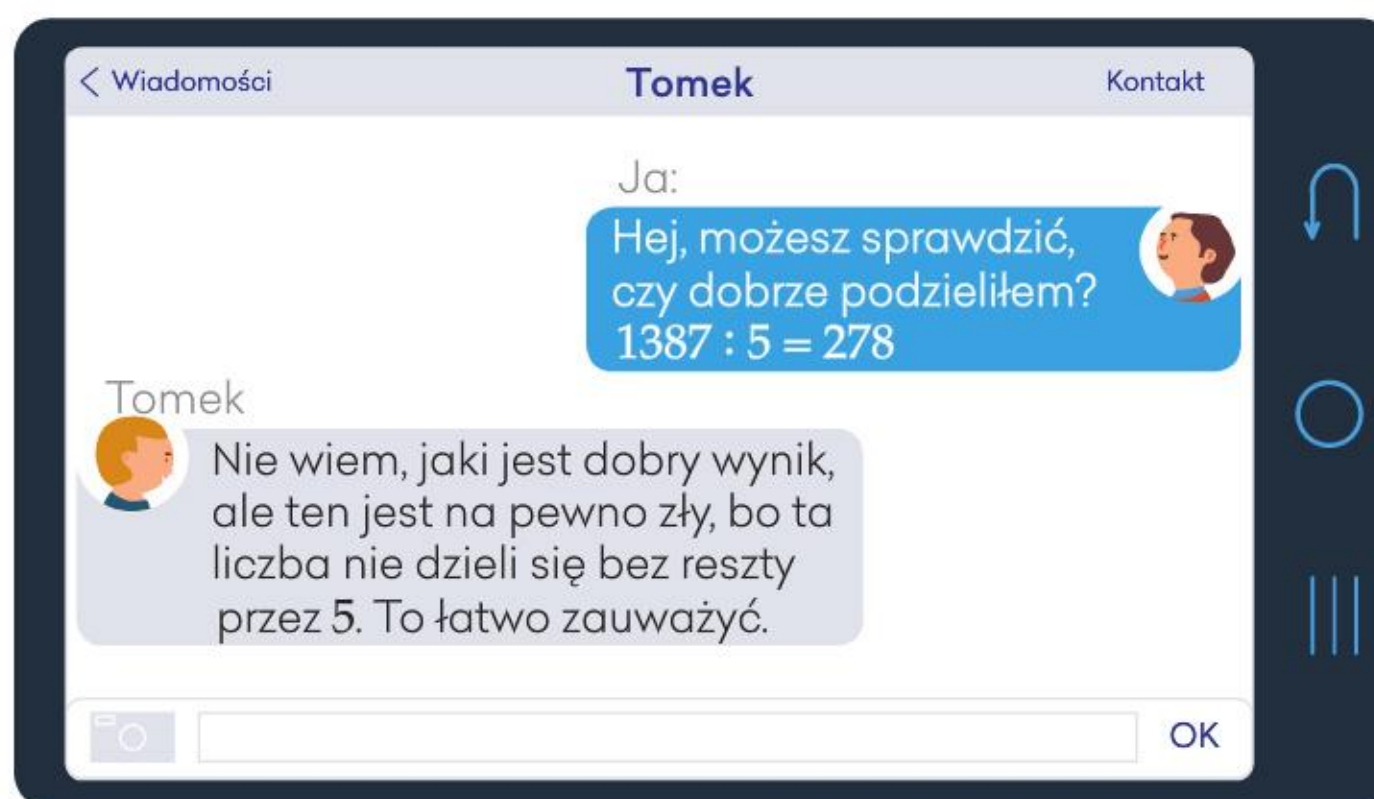


1.12 Cechy podzielności liczb naturalnych

Podejmij temat



Czy wiesz, w jaki sposób Tomek szybko ustalił, że wynik dzielenia jest zły?



Oto większe od zera wielokrotności liczby 2:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, ...

Wszystkie te liczby są podzielne przez 2.

Zauważmy, że cyfrą jedności każdej liczby podzielnej przez 2 jest 0, 2, 4, 6 lub 8. Tę prawidłowość wykorzystujemy do sprawdzania, czy dana liczba jest podzielna przez 2.

Liczbę, która jest wielokrotnością liczby 2, nazywamy **liczbą parzystą**.

Liczbę, która nie jest parzysta, nazywamy **liczbą nieparzystą**.

1. Wypisz kilkanaście wielokrotności:

- liczby 5 i w każdej z nich podkreśl cyfrę jedności,
- liczby 10 i w każdej z nich podkreśl cyfrę jedności,
- liczby 100 i w każdej z nich podkreśl cyfrę jedności i cyfrę dziesiątek.

Jakimi cyframi kończą się liczby podzielne przez 5, jakimi podzielne przez 10, a jakimi – przez 100?



Podane reguły nazywamy **cechami podzielności liczb** odpowiednio **przez 2, 5, 10 i 100**.

Liczba jest podzielna:

- **przez 2**, gdy jej cyfrą jedności jest 0, 2, 4, 6 lub 8;
- **przez 5**, gdy jej cyfrą jedności jest 0 lub 5;
- **przez 10**, gdy jej cyfrą jedności jest 0;
- **przez 100**, gdy jej cyfrą jedności i cyfrą dziesiątek jest 0.

2. Spośród liczb: 168, 395, 500, 826, 883, 1450, 1628, 2395, 5000, 7296, wybierz i zapisz liczby podzielne przez podaną liczbę.
a) 100 b) 10 c) 5 d) 2
3. Podaj trzy przykłady liczb trzycyfrowych podzielnych przez podaną liczbę.
a) 2 b) 5 c) 10 d) 100
4. Zapisz kilkanaście wielokrotności liczby 3 i kilkanaście wielokrotności liczby 9. Jakie cyfry znajdują się w rzędzie jedności wielokrotności tych liczb?

W zapisie liczb będących wielokrotnościami liczby 3 (podobnie dla liczby 9) nie zauważymy reguły podobnej do tej, która występuje w zapisie liczb będących wielokrotnościami liczb 2, 5, 10 lub 100. W rzędzie jedności wielokrotności liczby 3 (podobnie dla liczby 9) może występować każda cyfra. W jaki zatem sposób można sprawdzić podzielność liczb przez 3 lub przez 9?

5. Sprawdź za pomocą dzielenia pisemnego, która spośród liczb:
 - a) 4623, 296, 3141, 5213, jest podzielna przez 3, a następnie oblicz sumę cyfr każdej z tych liczb i sprawdź, dla których liczb suma ich cyfr również jest podzielna przez 3;
 - b) 621, 349, 8532, 2681, jest podzielna przez 9, a następnie oblicz sumę cyfr każdej z tych liczb i sprawdź, dla których liczb suma ich cyfr również jest podzielna przez 9.

Rezultaty swojej pracy z punktu a) zapisz w tabeli.

Liczba	Podzielność liczby przez 3 tak/nie	Suma cyfr liczby	Podzielność sumy cyfr przez 3 tak/nie
4623			
296			
3141			
5213			

Analogiczną tabelę przygotuj dla punktu b). Co zauważasz?

Jeśli suma cyfr danej liczby dzieli się przez 3, to ta liczba też się dzieli przez 3. I odwrotnie: jeśli suma cyfr danej liczby nie dzieli się przez 3, to ta liczba przez 3 też się nie dzieli. Zauważyłeś to?



Tak, podobnie jest z liczbą 9, ale już z żadną inną tak nie jest!

Czynności wykonywane w ćwiczeniu 5 służą do sprawdzania podzielności liczb przez 3 i 9.

Przykład 1

Sprawdźmy, czy liczba:

- a) 5214 jest podzielna przez 3,
- b) 66 783 jest podzielna przez 9.

- a) Dodajemy cyfry podanej liczby: $5 + 2 + 1 + 4 = 12$.

Liczba 12 jest podzielna przez 3, więc liczba 5214 jest również podzielna przez 3.

- b) Dodajemy cyfry podanej liczby: $6 + 6 + 7 + 8 + 3 = 30$.

Liczba 30 nie jest podzielna przez 9, więc liczba 66 783 również nie jest podzielna przez 9 (ale jest podzielna przez 3).



Podane reguły nazywamy
cechami podzielności liczb
odpowiednio **przez 3** i **9**.

Liczba jest podzielna:

- **przez 3**, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- **przez 9**, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

- 6. Sprawdź, która z podanych liczb: 2541, 2684, 3024, 5364, 6721, 4404, jest podzielna:
 - a) przez 3,
 - b) przez 9.
- 7. Sprawdź za pomocą dzielenia pisemnego, która spośród liczb: 1524, 736, 140, 534, 556, 900, 198, jest podzielna przez 4. Zapisz te liczby. W każdej z nich podkreśl cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności. Co można powiedzieć o dwucyfrowej liczbie powstałej z podkreślonych cyfr?

Liczba jest podzielna:

- **przez 4**, gdy jej cyfra dziesiątek i cyfra jedności tworzą liczbę podzielną przez 4.

- 8. Bez wykonywania dzielenia pisemnego odpowiedz, która z liczb: 814, 760, 644, 502, 1984, 3316, jest podzielna przez 4.



Podaną regułę nazywamy
cechą podzielności liczb
przez 4.

Zadania

- Zapisz najmniejszą i największą liczbę trzycyfrową podzielną przez podaną liczbę.
a) 2 b) 5 c) 10 d) 100 e) 3 f) 9 g) 4
- Wypisz wszystkie liczby podzielne przez 5, które są większe od 5732 i jednocześnie mniejsze od 5770.
- Napisz pięć kolejnych liczb podzielnych przez 9, większych od 345.
- Które sumy są podzielne przez 9?

I. $18 + 9 + 72$

II. $51 + 38 + 23$

III. $81 + 36 + 54$

IV. $26 + 16 + 48$

Czy aby odpowiedzieć na to pytanie, w każdym przypadku trzeba najpierw wykonać dodawanie?

- Które iloczyny są podzielne przez 5?

I. $3 \cdot 35 \cdot 16$

II. $13 \cdot 7 \cdot 82$

III. $17 \cdot 4 \cdot 69$

IV. $23 \cdot 8 \cdot 85$

Czy aby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba najpierw wykonać mnożenie?

- Podaj trzy przykłady takich liczb większych od 100, które:

- a) są parzyste i są podzielne przez 5,
- c) są podzielne przez 3 i przez 4,
- e) są podzielne przez 9, ale **nie** przez 5,
- g) są podzielne przez 5, ale **nie** przez 10,

- b) są parzyste i są podzielne przez 3,
- d) są podzielne przez 3 i przez 10,
- f) są podzielne przez 3, ale **nie** przez 9,
- h) są podzielne przez 10, ale **nie** przez 100.

- Rzucamy dwiema kostkami do gry w różnych kolorach i zapisujemy wyniki jako liczby dwucyfrowe według następującej zasady:



26



12



44



35

Wypisz wszystkie liczby, jakie można otrzymać w ten sposób. Które z nich są podzielne przez:

- a) 9, b) 5, c) 2?

- Jaką cyfrę należy wpisać zamiast znaku zapytania, aby otrzymana liczba była podzielna przez 36?

112234?2

1.13 Liczby pierwsze i liczby złożone

Podejmij temat



Czy wiesz, jak młody ogrodnik powinien posadzić kwiaty?



Liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi.

1. Wypisz dzielniki podanych liczb.

a) 7, 19, 23

b) 25, 21, 18

Ile dzielników mają liczby 7, 19, 23, a ile liczby 25, 21, 18?

Każda liczba z punktu a) ćwiczenia 1 jest podzielna tylko przez 1 i przez samą siebie. Takie liczby nazywamy liczbami pierwszymi. Liczby z punktu b) tego ćwiczenia mają więcej dzielników. Nazywamy je liczbami złożonymi.

Liczba pierwsza to liczba naturalna większa od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki: liczbę 1 i samą siebie.
Liczba złożona to liczba naturalna większa od 1, która ma więcej niż dwa dzielniki.



2. Drużyna Liczb Pierwszych i Drużyna Liczb Złożonych rozegrały mecz siatkówki.

a) Jakie numery mogliby mieć zawodnicy rezerwowi każdej z drużyn?



b) Jaką rolę podczas tego meczu mogą odgrywać liczby 0 i 1, które nie są ani liczbami pierwszymi, ani złożonymi?

3. a) Jaka jest najmniejsza liczba pierwsza?
 b) Zapisz wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 30.
 c) Zapisz liczby złożone większe od 20 i jednocześnie mniejsze od 50.

Więcej na temat

Liczby pierwsze znane były już w starożytności. Eratostenes – grecki uczoney żyjący na przełomie III i II w. p.n.e. – opracował prosty sposób znajdowania liczb pierwszych. Sposób ten do dziś nazywany jest **sitem Eratostenesa**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Zapisujemy kolejne liczby naturalne, wśród których chcemy znaleźć wszystkie liczby pierwsze, np. liczby od 1 do 40.

Skreślamy 1, bo 1 nie jest liczbą pierwszą.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Najmniejszą liczbą jest teraz 2.

Zostawiamy ją i **skreślamy** wszystkie pozostałe **wielokrotności liczby 2**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Kolejną liczbą jest 3.

Zostawiamy ją i z pozostałych nieskreślonych liczb **skreślamy** wszystkie **wielokrotności liczby 3**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Kolejną liczbą jest 5.

Zostawiamy ją i z pozostałych nieskreślonych liczb **skreślamy** wszystkie **wielokrotności liczby 5**.

Postępujemy tak aż do wyczerpania liczb. Liczby, które pozostaną nieskreślone, to liczby pierwsze.

4. Znajdź wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 100. Zastosuj sito Eratostenesa. Czy domyślasz się, dlaczego ta metoda została nazwana sitem?

Zadania

- Skorzystaj z informacji, że wśród liczb: 12 345, 56 572, 1999, 1600, 6543, 34 870, jest tylko jedna liczba pierwsza, i wskaż ją.
- Która różnica jest liczbą pierwszą?
A. 1645 – 1599 B. 4405 – 4358 C. 717 – 669 D. 71 325 – 71 276
- Podaj kilka przykładów iloczynów dwóch liczb pierwszych. Czy iloczyn tych liczb jest liczbą pierwszą, czy złożoną?
- Czy liczba pierwsza może być liczbą parzystą?
- Ile dwucyfrowych liczb pierwszych można utworzyć z cyfr: 3, 4, 5, 6? Zapisz te liczby.
- Podaj przykład:
 - a) trzech kolejnych liczb dwucyfrowych, z których środkowa jest liczbą pierwszą, a dwie pozostałe są liczbami złożonymi,
 - b) trzech kolejnych liczb dwucyfrowych, z których środkowa jest liczbą złożoną, a dwie pozostałe są liczbami pierwszymi,
 - c) czterech kolejnych liczb naturalnych, z których dwie są liczbami pierwszymi, a dwie – złożonymi.

Czy istnieją takie cztery kolejne liczby naturalne, z których trzy są liczbami pierwszymi, a jedna – liczbą złożoną? Odpowiedź uzasadnij.
- Znajdź takie dwie różne liczby pierwsze, których:
 - a) suma wynosi 10, b) suma wynosi 40, c) iloczyn wynosi 15, d) iloczyn wynosi 35.
- Suma największej i najmniejszej dwucyfrowej liczby pierwszej wynosi
A. 108 B. 109 C. 110 D. 111
- Sześciu kolegów wybrało się na grzybobranie. Po godzinie policzyli znalezione przez siebie okazy. Pięciu chłopców miało odpowiednio o 2, 6, 8, 12 i 14 grzybów więcej od szóstego kolegi, który znalazł ich najmniej. Ile grzybów znalazł każdy z chłopców, jeśli wiadomo, że liczba grzybów w każdym przypadku była liczbą pierwszą?
- Podaj trzy przykłady działań zgodnych z podanym schematem.
 -  a) liczba pierwsza + liczba pierwsza = liczba pierwsza
 - b) liczba pierwsza – liczba pierwsza = liczba pierwsza

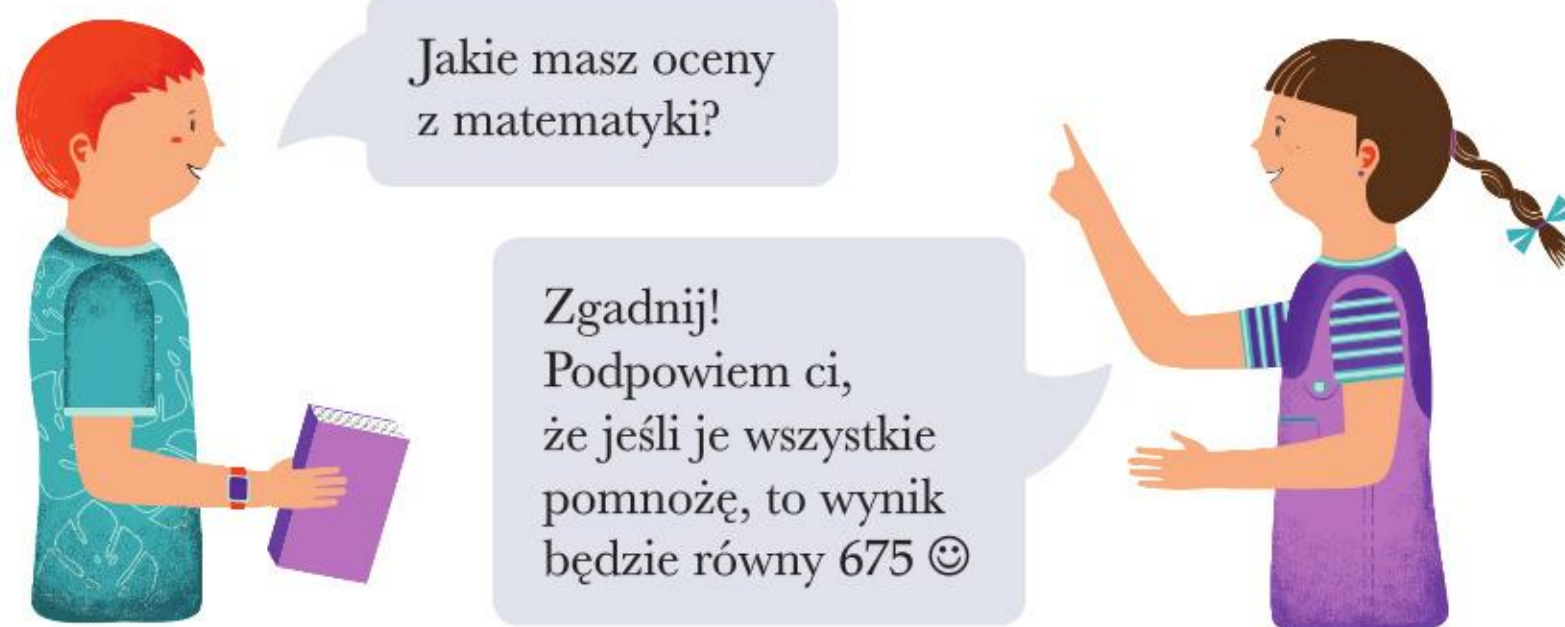
Jaka liczba występuje w każdym z tych działań? W jaki sposób wytłumaczyć ten fakt?

1.14 Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Podejmij temat



Czy na podstawie podpowiedzi można ustalić, ile dziewczynka ma ocen z matematyki i jakie to są oceny? Czy są różne możliwości?



Każdą liczbę złożoną możemy zapisać w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Mówimy wtedy, że rozłożyliśmy liczbę na czynniki pierwsze albo że wykonaliśmy rozkład liczby na czynniki pierwsze.

Przykład 1

Rozłóżmy na czynniki pierwsze liczbę 48.

Zapisujemy liczbę 48 jako iloczyn dwóch liczb naturalnych (nie bierzemy pod uwagę liczby 1), np.:

$$48 = 6 \cdot 8$$

Liczba 6 nie jest liczbą pierwszą, dlatego zamiast 6 zapisujemy iloczyn $2 \cdot 3$. Otrzymujemy zatem:

$$48 = 2 \cdot 3 \cdot 8$$

Jednak liczba 8 również nie jest liczbą pierwszą, więc zamiast 8 zapisujemy iloczyn $2 \cdot 4$. Teraz mamy:

$$48 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4$$

Zostaje jeszcze liczba 4, która także nie jest liczbą pierwszą, więc zamiast 4 zapisujemy iloczyn $2 \cdot 2$.

Ostatecznie otrzymujemy taki iloczyn:

$$48 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Całe powyższe rozumowanie możemy zapisać krótko:

$$48 = 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Po uporządkowaniu czynników w kolejności rosnącej zapis będzie wyglądał następująco:
 $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ (co możemy zapisać również z użyciem potęg jako $48 = 2^4 \cdot 3$).

1. Rozłóż na czynniki pierwsze podaną liczbę.

a) 28

b) 45

c) 50

d) 77

e) 60

f) 100

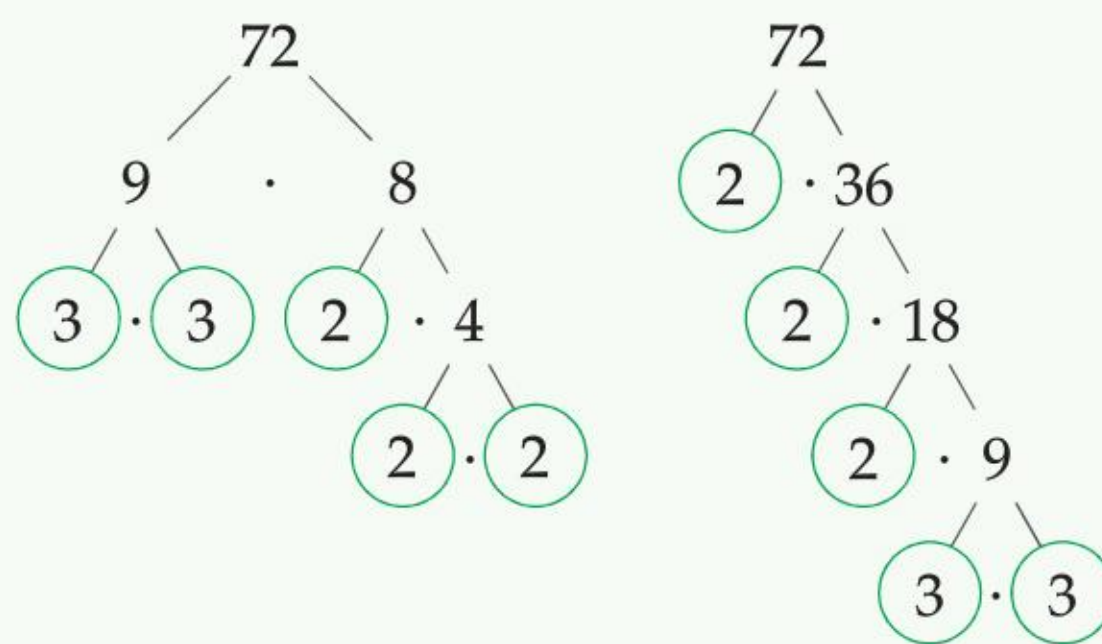
Rozkład liczby na czynniki pierwsze możemy też wykonać za pomocą drzewka.

Przykład 2

Rozłóżmy na czynniki pierwsze liczbę 72.

Liczbę 72 zapisujemy w postaci iloczynu dwóch liczb naturalnych (oprócz 1), np. 9 i 8 albo 2 i 36. Jeżeli któryś zapisany czynnik nie jest liczbą pierwszą, to zapisujemy go w postaci kolejnego iloczynu liczb naturalnych. W ten sposób postępujemy tak długo, aż na końcowych gałęziach drzewka będą same liczby pierwsze.

Rozkładana liczba jest iloczynem liczb, które są na końcach wszystkich gałęzi: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.



2. Podaną liczbę rozłóż na czynniki pierwsze za pomocą drzewka.

a) 32

b) 90

c) 126

d) 125

e) 525

f) 270

Omówimy teraz jeszcze inną metodę rozkładania na czynniki pierwsze liczby naturalnej, wygodną szczególnie wtedy, gdy rozkładana liczba jest duża.

Przykład 3

Rozłóżmy na czynniki pierwsze liczbę 300.

	300	2	←	To jest najmniejsza liczba pierwsza, przez którą dzieli się 300.
300 : 2	→ 150	2	←	To jest najmniejsza liczba pierwsza, przez którą dzieli się 150.
150 : 2	→ 75	3	←	To jest najmniejsza liczba pierwsza, przez którą dzieli się 75.
75 : 3	→ 25	5	←	To jest najmniejsza liczba pierwsza, przez którą dzieli się 25.
25 : 5	→ 5	5	←	To jest najmniejsza liczba pierwsza, przez którą dzieli się 5.
5 : 5	→ 1			

Rozkład liczby na czynniki pierwsze pokazują liczby po prawej stronie pionowej kreski. Otrzymujemy zatem: $300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

3. Podaną liczbę rozłóż na czynniki pierwsze metodą pokazaną w przykładzie 3.

a) 63

b) 88

c) 105

d) 216

e) 450

f) 3000 ^x

Metodę podobną do stosowanej w przykładzie 3 można wykorzystać do szukania największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb.

Przykład 4

Znajdźmy największy wspólny dzielnik liczb 24 i 84.

24	2	84	2
12	2	42	2
6	2	21	3
3	3	7	7
1		1	

Rozkładamy na czynniki pierwsze liczby 24 oraz 84.

Znajdujemy dzielniki powtarzające się w rozkładach obu liczb (zaznaczone jednakowymi kolorami).

W tym przykładzie są to liczby: 2, 2, 3.

Aby obliczyć największy wspólny dzielnik danych liczb, należy pomnożyć zaznaczone jednakowe dzielniki tych liczb.

Otrzymujemy zatem: $\text{NWD}(24, 84) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

4. Znajdź największy wspólny dzielnik podanych liczb. Zastosuj metodę z przykładu 4.

a) 54 i 90

b) 56 i 96

c) 135 i 180

d) 63 i 105

Przykład 5

Znajdźmy najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 30 i 24.

30	2	24	2
15	3	12	2
5	5	6	2
1		3	3
		1	

Rozkładamy na czynniki pierwsze liczby 30 i 24.

Skreślamy dzielniki powtarzające się w rozkładach obu liczb (skreślone jednakowymi kolorami).

W tym przykładzie są to liczby 2 i 3.

Aby obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność danych liczb, należy pierwszą z liczb pomnożyć przez nieskreślone dzielniki drugiej liczby (czyli $30 \cdot 2 \cdot 2$) lub drugą liczbę pomnożyć przez nieskreślone dzielniki pierwszej liczby (czyli $24 \cdot 5$).

Otrzymujemy zatem: $\text{NWW}(30, 24) = 30 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \cdot 5 = 120$.

5. Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotność podanych liczb. Zastosuj metodę z przykładu 5.

a) 12 i 18

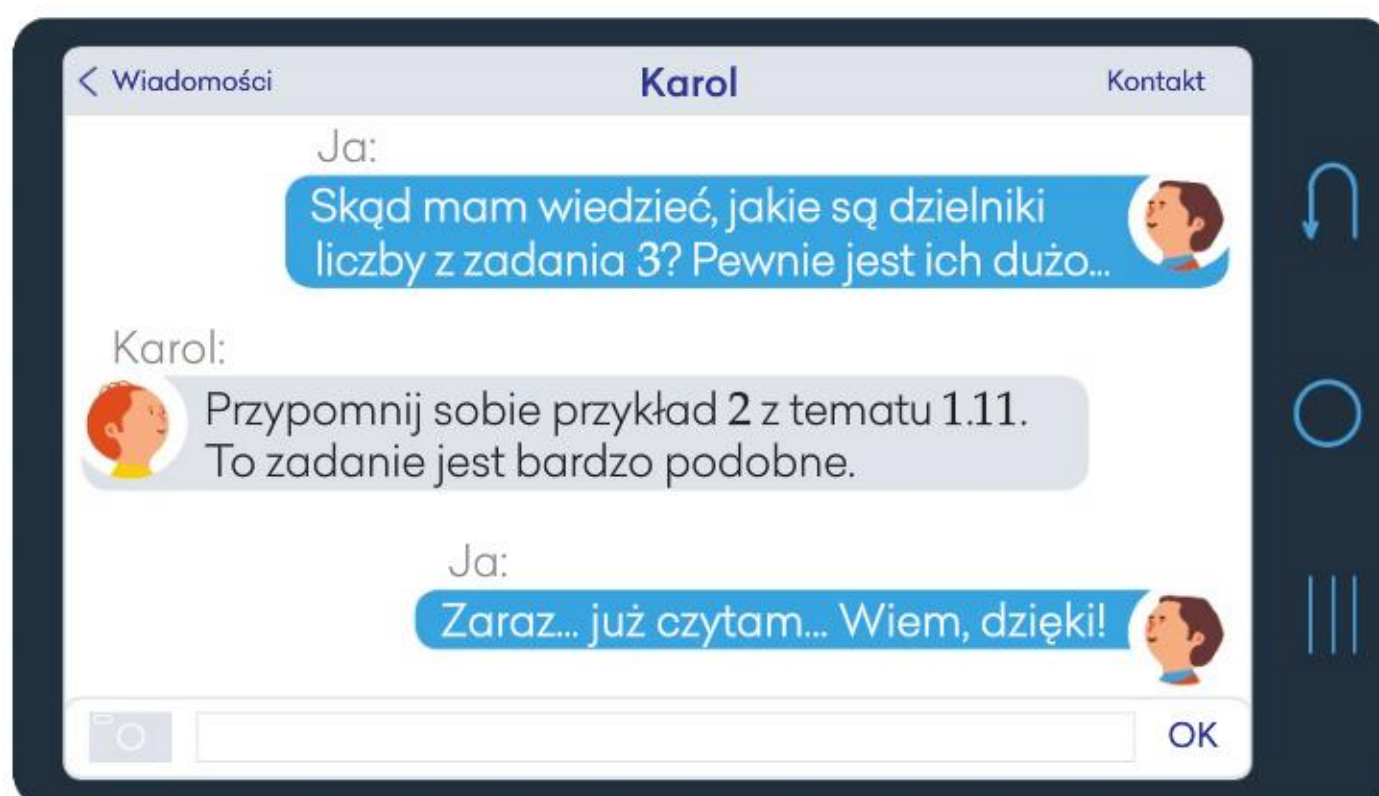
b) 16 i 24

c) 30 i 35

d) 42 i 60

Zadania

- Podaj przykład trzech liczb, które można rozłożyć:
 - a) na dwa różne czynniki pierwsze,
 - b) na trzy różne czynniki pierwsze,
 - c) na trzy jednakowe czynniki pierwsze,
 - d) na cztery czynniki pierwsze.
- Jaka liczba została rozłożona na czynniki pierwsze?
 - a) $2 \cdot 3 \cdot 5$
 - b) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
 - c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$
- ★ Podaj wszystkie dzielniki liczby, która rozłożona na czynniki pierwsze jest iloczynem $2 \cdot 5 \cdot 7$.



- Wykorzystaj rozkład na czynniki pierwsze i sprawdź, czy liczba:
 - a) 105 jest podzielna przez 15,
 - b) 168 jest podzielna przez 21,
 - c) 330 jest podzielna przez 14,
 - d) 450 jest podzielna przez 18.
- Małgosia zauważyła, że za pomocą ołówka może dokładnie zmierzyć długość i szerokość swojego biurka. Wystarczy, że kilka razy przyłoży ołówek do jego brzegów. Jaka jest największa możliwa długość jej ołówka, jeśli blat biurka ma wymiary $70 \text{ cm} \times 42 \text{ cm}$?
- W Polsce wybory prezydenckie (w których wybiera się prezydenta Rzeczypospolitej Polskiej) odbywają się co 5 lat. Natomiast wybory parlamentarne (w których obywatele wybierają swoich przedstawicieli do parlamentu – Sejmu i Senatu) odbywają się co 4 lata. W 2015 roku odbyły się zarówno wybory prezydenckie, jak i parlamentarne. Oblicz, kiedy ponownie w jednym roku dorośli Polacy pójdą zagłosować w wyborach prezydenckich i parlamentarnych (zakładamy, że w tym okresie żadna kadencja nie zostanie skrócona). Czy ty będziesz już brać udział w tych wyborach?
- Suma dwóch liczb parzystych wynosi 20, a ich iloczyn 96. Jakie to liczby?



Podsumowanie działu 1

Ważne pojęcia

szacowanie	liczba złożona	równanie	liczba parzysta
grupa miliardów	wielokrotność liczby naturalnej	rozwiązanie równania	
największy wspólny dzielnik (NWD)	liczba pierwsza	niewiadoma	
dzielnik liczby naturalnej	najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)	liczba nieparzysta	

Cechy podzielności liczb naturalnych

Liczba jest podzielna:

- **przez 2**, gdy jej cyfrą jednościami jest 0, 2, 4, 6 lub 8;
- **przez 3**, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3;
- **przez 4**, gdy jej cyfra dziesiątek i cyfra jednościami tworzą liczbę podzielną przez 4;
- **przez 5**, gdy jej cyfrą jednościami jest 0 lub 5;
- **przez 9**, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9;
- **przez 10**, gdy jej cyfrą jednościami jest 0;
- **przez 100**, gdy jej cyfrą jednościami i cyfrą dziesiątek jest 0.

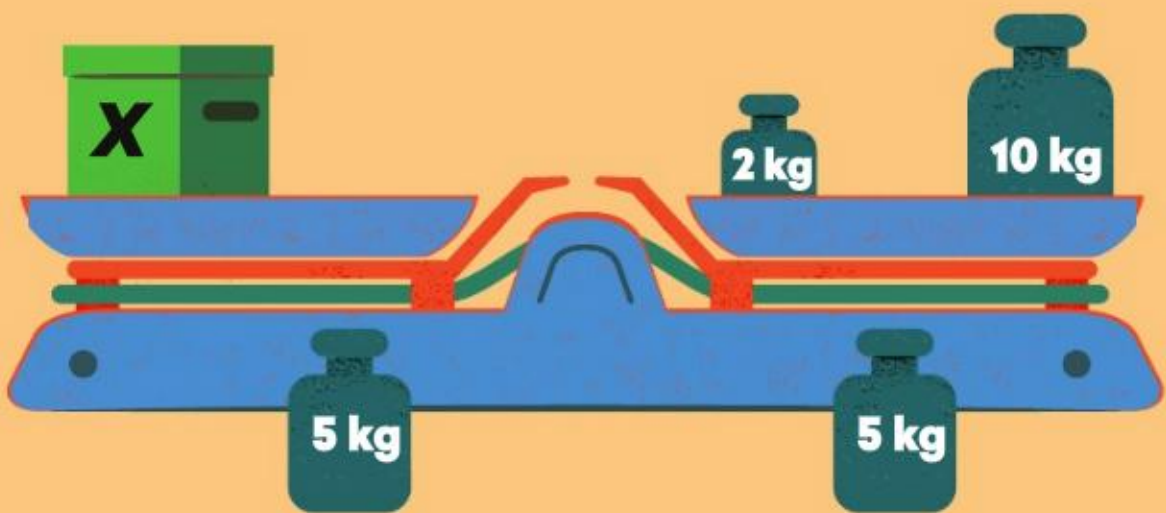
Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Każdą liczbę złożoną możemy zapisać w postaci iloczynu liczb pierwszych, czyli rozłożyć na czynniki pierwsze, np. $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Równanie na ilustracji



$$x + 5 = 17$$



$$x = 17 - 5$$

Czy już umiesz?

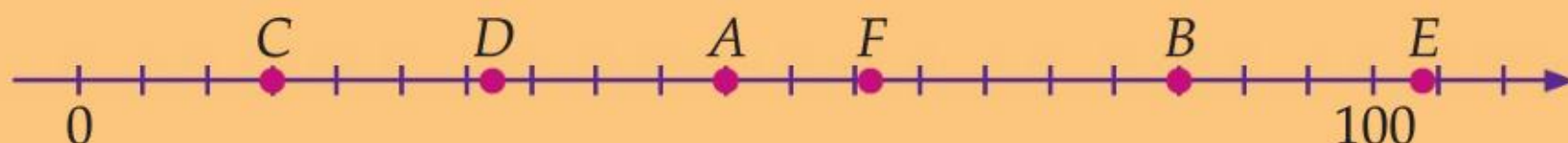
1 30 200 km – ile to milimetrów?



- A. trzy miliardy dwieście milionów
C. trzydzieści milionów dwieście

- B. trzydzieści miliardów dwieście milionów
D. trzydzieści miliardów dwieście tysięcy

2 Niektóre spośród liczb: 15, 20, 28, 30, 32, 40, 50, 60, 61, 80, 85, 101, 104, 105, są współrzędnymi punktów A , B , C , D , E , F leżących na osi liczbowej. Dopasuj do punktów ich współrzędne.



3 Jedno z czterech poniższych działań wykonane jest **błędnie**. Które?

A.
$$\begin{array}{r} 3\ 6\ 4\ 8 \\ + 7\ 9\ 5\ 4\ 2 \\ \hline 8\ 3\ 1\ 9\ 0 \end{array}$$

B.
$$\begin{array}{r} 2\ 6\ 0\ 3\ 0 \\ - 8\ 5\ 7\ 6 \\ \hline 1\ 7\ 4\ 5\ 4 \end{array}$$

C.
$$\begin{array}{r} 7\ 3\ 9\ 0\ 0 \\ \cdot 5\ 6\ 0 \\ \hline 4\ 4\ 3\ 4 \\ + 3\ 6\ 9\ 5 \\ \hline 4\ 1\ 3\ 8\ 4\ 0 \end{array}$$

D.
$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 6 \\ 9\ 9\ 1\ 2 : 4\ 2 \\ - 8\ 4 \\ \hline 1\ 5\ 1 \\ - 1\ 2\ 6 \\ \hline 2\ 5\ 2 \\ - 2\ 5\ 2 \\ \hline = = = \end{array}$$

4 2 doby i 3 godziny – ile to sekund?

A. 3060

B. 97 200

C. 360 000

D. 183 600

5 W którym przypadku znak nierówności zapisany jest poprawnie?

A. $32 \cdot 56 < 8000 - 6327$

B. $45^2 < 1652 + 279 + 86$

C. $2000 - 396 \cdot 0 > 268 + 45 \cdot 32$

D. $546 - 199 + 34 < 4927 : 13$

6 Most składał się z 14 jednakowych przęseł o długości 75 m. Po przebudowie mostu nie zmieniła się jego całkowita długość, ale składał się on już tylko z 10 jednakowych przęseł. Jaką długość miały nowe przęsła?

- A. 105 m
C. 71 m

- B. 115 m
D. 79 m



7 Na zawody sportowe przyjechało 318 uczniów. Dotarli oni pięcioma autokarami, w których było po 49 miejsc, i sześcioma busami, w których było po 16 miejsc. W autokarach oprócz uczniów jechało po troje opiekunów, a w busach – po jednym. Ile łącznie wolnych miejsc zostało we wszystkich pojazdach?

- 8 W pensjonacie Pod Lipą pobyt osoby dorosłej kosztuje 68 zł za dobę, a dziecka 35 zł. W pensjonacie Pod Sosną ceny te wynoszą odpowiednio 57 zł za osobę dorosłą i 39 zł za dziecko. Rodzina państwa Zielińskich (rodzice z czworgiem dzieci) planuje wyjazd do jednego z tych pensjonatów.
- a) Który pensjonat powinni wybrać państwo Zielińscy, żeby zapłacić mniej? Najpierw oszacuj koszt pobytu tej rodziny w obu pensjonatach, a potem wykonaj dokładne obliczenia i sprawdź, czy twoje szacunki były trafne.
- b) Jeżeli rodzina Zielińskich wybierze tańszy wariant, to o ile złotych mniej zapłaci za dobę, a o ile mniej za 2 tygodnie pobytu?

- 9 Pan Jan robił zakupy w trakcie wyprzedaży. Ceny na metkach są cenami sprzed obniżki. O ile mniej zapłaci pan Jan za kurtkę i buty teraz, niż gdyby kupował je w sezonie?

- 10 Pusty dzbanek o pojemności 1 l waży 365 g. Litr soku jabłkowego waży 1 kg 178 g. Ile waży dzbanek napełniony do połowy sokiem jabłkowym?

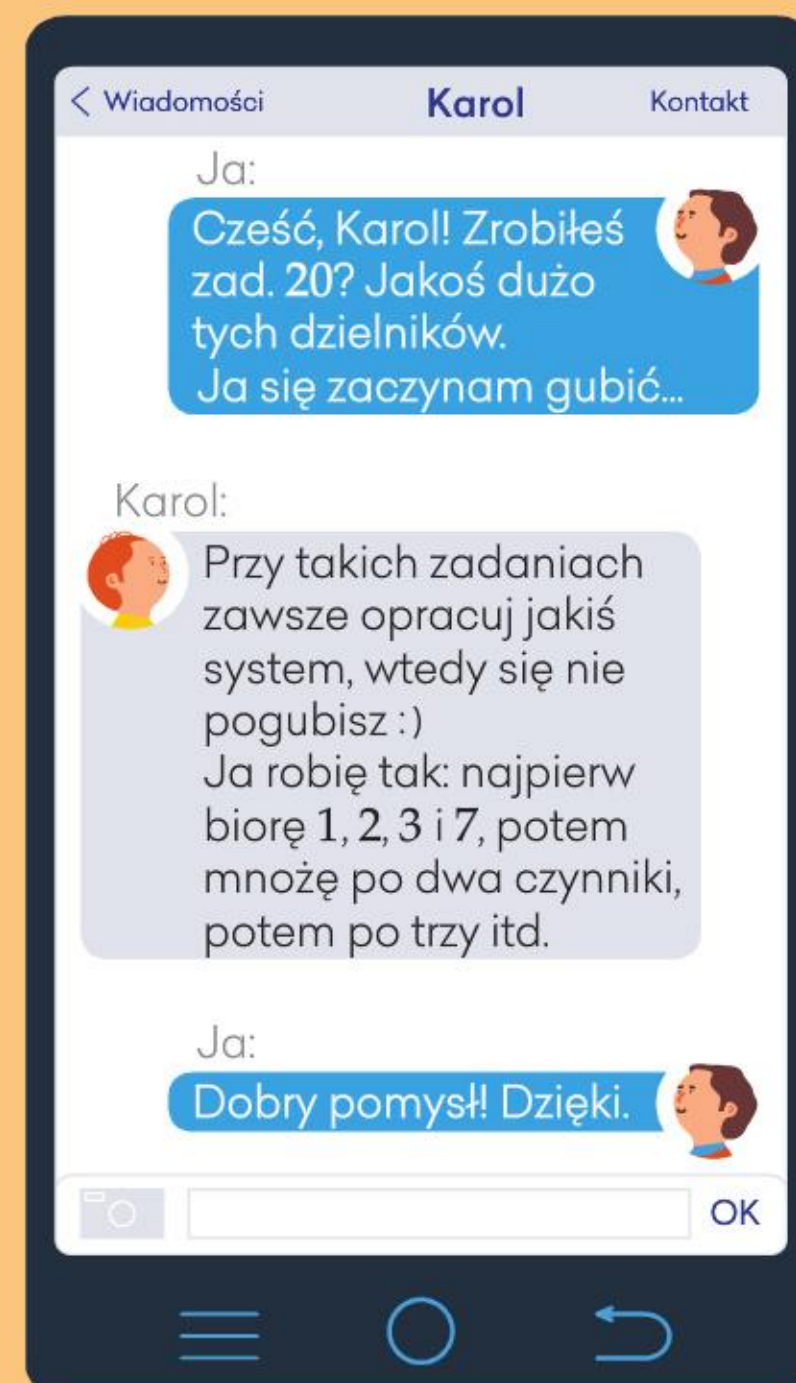
- 11 Na podstawie danych zawartych w tabeli odpowiedz na pytania (w razie potrzeby możesz skorzystać z internetu).
- a) W którym województwie w 2017 roku mieszkało najmniej osób, a w którym – najwięcej?
- b) Które województwa miały więcej niż 3 mln mieszkańców?
- c) Które województwa miały mniej niż 2 mln mieszkańców?
- d) Ilu mieszkańców liczyły razem województwa położone nad morzem (pomorskie i zachodniopomorskie)?
- e) Ilu mieszkańców liczyło województwo, w którym leży Warszawa, a ilu województwo, w którym leży Kraków?
- f) Ostatniego dnia roku 2017 w Kielcach mieszkało 196 800 osób. Odczytaj z tabeli liczbę mieszkańców województwa, którego stolicą są Kielce. Ile osób mieszkało w tym województwie poza Kielcami?

WYPRZEDAŻ!
Teraz wszystkie kurtki
2 razy tańsze!
A wszystkie buty
3 razy tańsze!



Ludność w poszczególnych województwach (dane z 31.12.2017 r.)	
Województwo	Liczba ludności
dolnośląskie	2 902 500
kujawsko-pomorskie	2 082 900
lubelskie	2 126 300
lubuskie	1 016 800
łódzkie	2 476 300
małopolskie	3 391 400
mazowieckie	5 384 600
opolskie	990 100
podkarpackie	2 129 100
podlaskie	1 184 500
pomorskie	2 324 300
śląskie	4 548 200
świętokrzyskie	1 247 700
warmińsko-mazurskie	1 433 900
wielkopolskie	3 489 200
zachodniopomorskie	1 705 500
Razem	38 433 600

- 12 Marysia kupiła na straganie czereśnie. W drodze do domu zjadła ich 14. W domu policzyła te, które jej zostały – było ich 58. Ile sztuk czereśni kupiła? Oznaczamy literą x liczbę czereśni kupionych przez Marysię. Równanie opisujące treść tego zadania to
- A. $x + 14 = 58$ B. $14 + x = 58$
 C. $x - 14 = 58$ D. $14 - x = 58$
- 13 Kinga, Ewa i Agata zbierają muszle.
- a) Kinga ma pewną liczbę muszli znad Morza Bałtyckiego i 64 muszle znad Morza Czarnego. Wszystkich muszli ma 151. Ile ma muszli znad Bałtyku?
- b) Ewa miała pewną liczbę muszli, 18 z nich dała bratu i zostało jej 96. Ile muszli miała na początku?
- c) Agata rozdała 81 muszli kolegom – każdemu po 27. Ilu kolegów obdarowała Agata?
- Każde zadanie możesz rozwiązać za pomocą równania.
- 14 Znajdź liczbę nieparzystą, której zapis w systemie rzymskim kończy się:
- a) cyframi II, b) cyfrą X.
- 15 Znajdź liczbę parzystą, której zapis w systemie rzymskim kończy się:
- a) cyfrą V, b) cyframi III.
- 16 Podaj przykład liczby trzycyfrowej, której suma cyfr wynosi 6 i która jest podzielna przez podaną liczbę.
- a) 2 b) 4 c) 5 d) 10
- 17 Która z liczb **nie** jest liczbą złożoną?
- A. 65 B. 51 C. 2 D. 87
- 18 Która z liczb **nie** jest liczbą pierwszą?
- A. 5 B. 2 C. 3 D. 1
- 19 Na ścianie u zegarmistrza wiszą dwa zegary z kukułką. W pierwszym zegarze kukułka odzywa się co 15 minut, a w drugim – uszkodzonym zegarze – co 18 minut. O godzinie 12.00 kukułki odezwały się jednocześnie. Po jakim czasie ponownie zakukają razem?
- A. Po 30 min. B. Po 90 min.
 C. Po 2 godz. D. Po 1 dobie.
- 20 Podaj wszystkie dzielniki liczby, która rozłożona na czynniki pierwsze jest iloczynem $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.



2. Ułamki zwykłe



Obejrzyj uważnie rysunek, a następnie odpowiedz na pytania i wykonaj polecenia.

1. Jakie ułamki można utworzyć z cyfr trzymanyh przez chłopca i dziewczynkę?
2. Czy wiesz, która z cyfr przyklejonych do lodówki nie może się znaleźć w mianowniku ułamka jako liczba jednocyfrowa?
3. Spośród cyfr przyklejonych do górnych drzwi wybierz taką, którą wstawisz do licznika ułamka, a spośród cyfr na dolnych drzwiach – taką, którą wstawisz do mianownika, aby:
 - a) otrzymać ułamek właściwy,
 - b) otrzymać ułamek niewłaściwy,
 - c) powstał ułamek, który jest równy liczbie naturalnej,
 - d) licznik ułamka był liczbą pierwszą, a mianownik – liczbą złożoną,
 - e) licznik był 3 razy mniejszy od mianownika,
 - f) licznik był o 8 większy od mianownika,
 - g) suma liczb w liczniku i mianowniku wynosiła 5,
 - h) iloczyn liczb w liczniku i mianowniku wynosił 36.
4. Wykonaj ponownie polecenie 3, ale z każdych drzwi lodówki wybierz po dwie cyfry tak, aby do licznika i mianownika wstawić liczby dwucyfrowe. Czy każdy punkt jest teraz możliwy do wykonania?

2.1 Ułamki i liczby mieszane

Podejmij temat



Czy chłopiec zjadł więcej, czy mniej niż $\frac{1}{2}$ ciastka?

Czy wody w butelce zostało więcej, czy mniej niż $\frac{1}{4}$ początkowej zawartości?

Fajnie, że znowu są ułamki, bo pewnie będą nowe zadania o pizzach, ciastach, napojach i innych smakołykach...

Na szczęście mogą też być o zdrowszym jedzeniu: owocach, warzywach... Nawet o wodzie mineralnej może być zadanie ;)



Przypomnijmy podstawowe wiadomości na temat ułamków zwykłych.

W zapisie ułamka zwykłego wyróżniamy:

licznik – liczbę nad kreską, **mianownik** – liczbę pod kreską i oddzielającą je **kreskę ułamkową**.

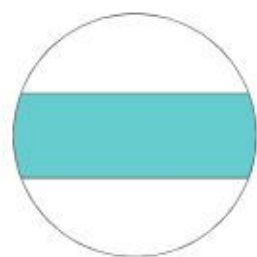
Mianownik pokazuje, na ile równych części podzielono całość, a licznik – ile tych części wzięto.

$\frac{5}{8}$
licznik
kreska ułamkowa
mianownik

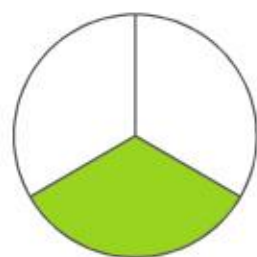
1. Na których rysunkach zamalowano:

a) $\frac{1}{3}$ figury,

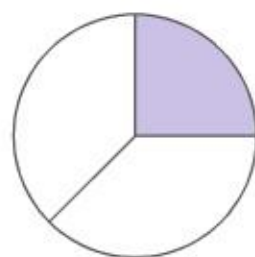
I.



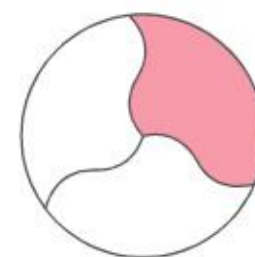
II.



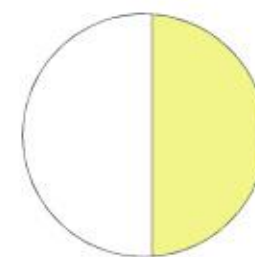
III.



IV.

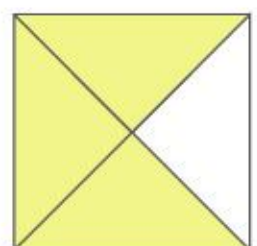


V.

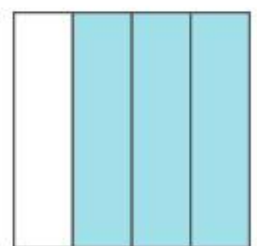


b) $\frac{3}{4}$ figury?

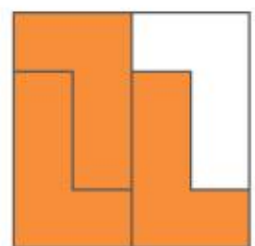
I.



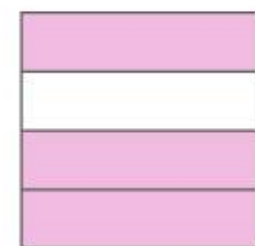
II.



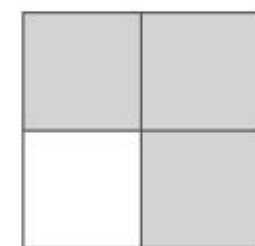
III.



IV.

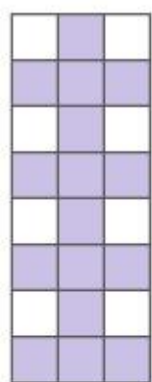


V.

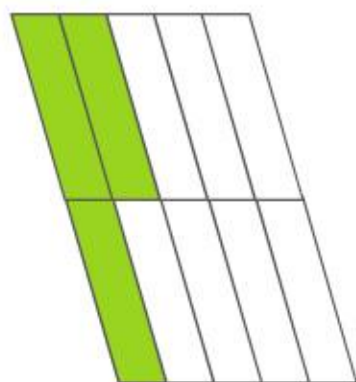


2. Dopasuj do każdego rysunku odpowiedni ułamek.

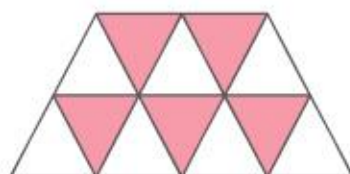
a) I.



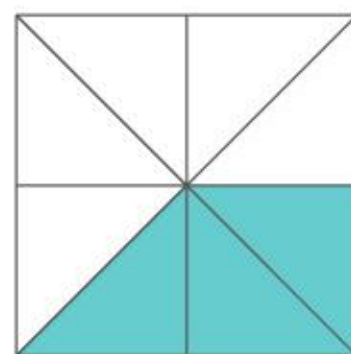
II.



III.



IV.



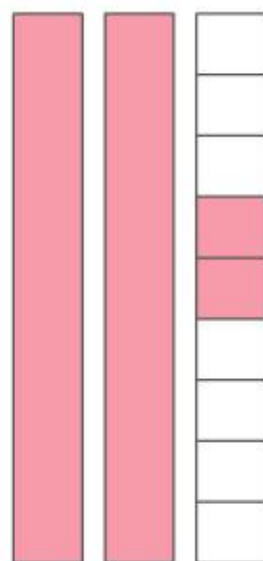
A. $\frac{5}{12}$

B. $\frac{3}{8}$

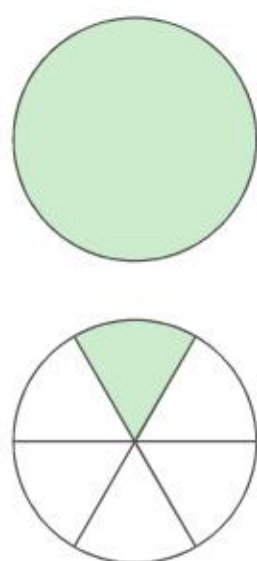
C. $\frac{3}{10}$

D. $\frac{16}{24}$

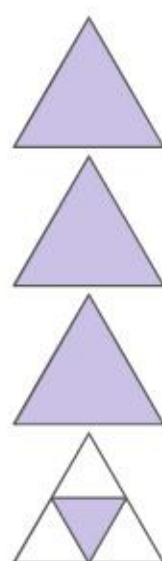
b) I.



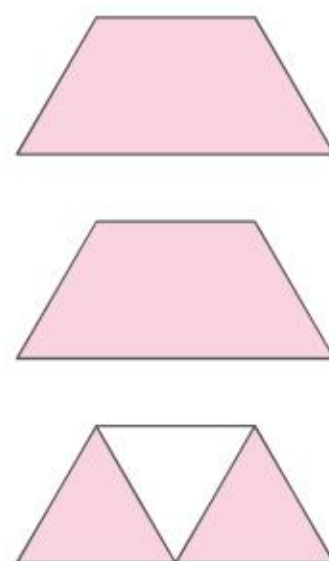
II.



III.



IV.



A. $1\frac{1}{6}$

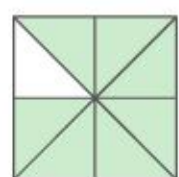
B. $2\frac{2}{3}$

C. $2\frac{2}{9}$

D. $3\frac{1}{4}$

Jeżeli licznik ułamka jest mniejszy od mianownika, to taki ułamek nazywamy **właściwym**.
Jeżeli licznik ułamka jest większy od mianownika lub równy mianownikowi, to taki ułamek nazywamy **niewłaściwym**.

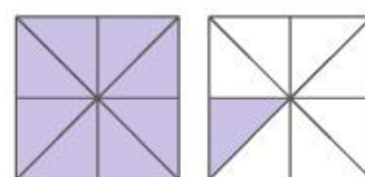
Ułamki właściwe są mniejsze od 1.



$\frac{7}{8}$ to ułamek właściwy.

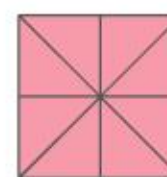
$$\frac{7}{8} < 1$$

Ułamki niewłaściwe są większe od 1 lub równe 1.



$\frac{9}{8}$ to ułamek niewłaściwy.

$$\frac{9}{8} > 1$$



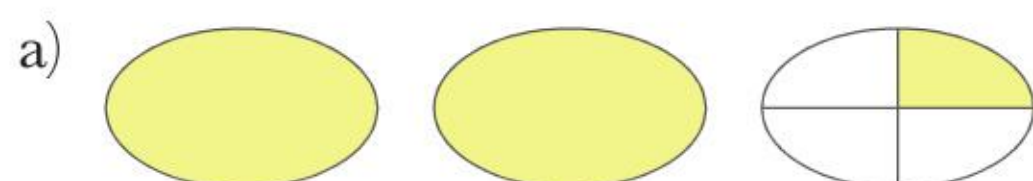
$\frac{8}{8}$ to także ułamek niewłaściwy.

$$\frac{8}{8} = 1$$

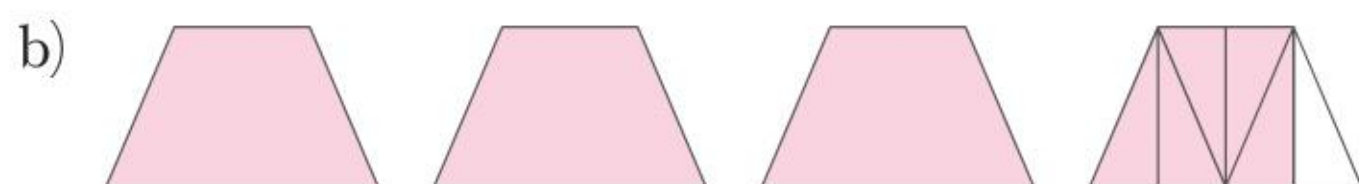
Liczba mieszana składa się z **części całkowitej** i **części ułamkowej**.

$$\begin{array}{c} \text{część całkowita} \rightarrow 5 \frac{2}{7} \leftarrow \text{część ułamkowa} \\ \text{część całkowita} \quad \text{część ułamkowa} \end{array}$$

3. Która z liczb wskazuje zamalowane części rysunków?



$\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{3}$ czy $2\frac{1}{4}$?

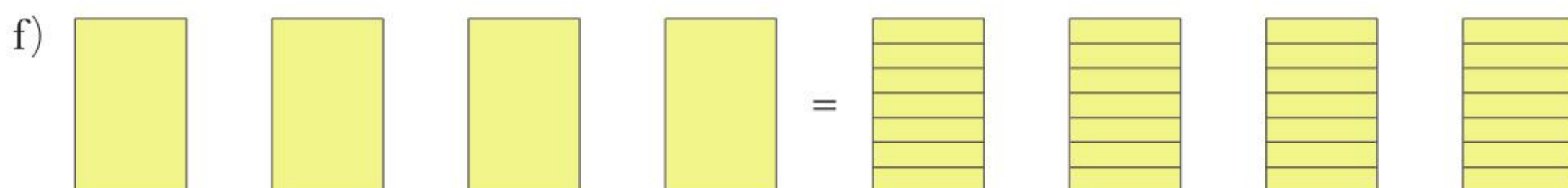
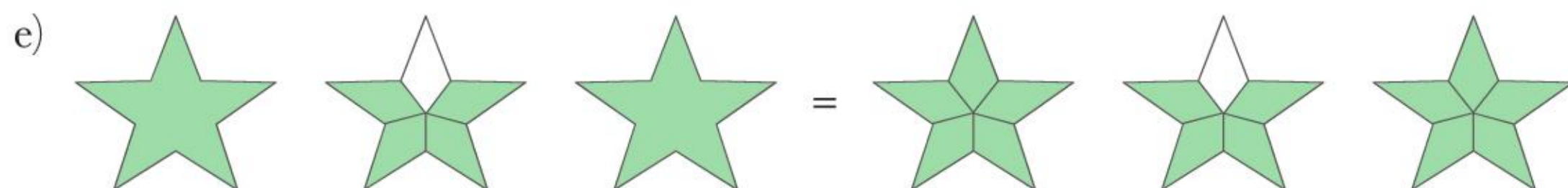
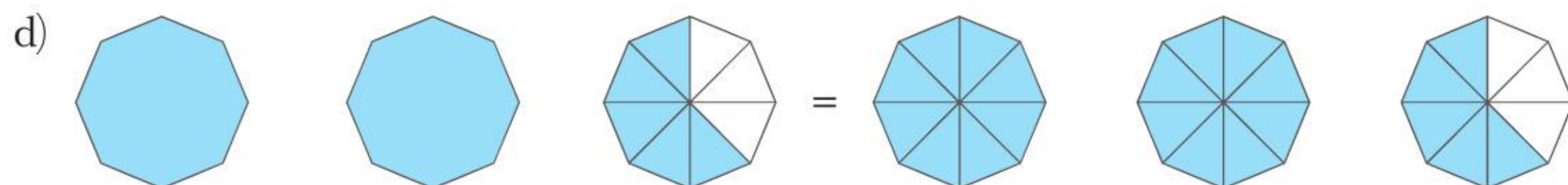
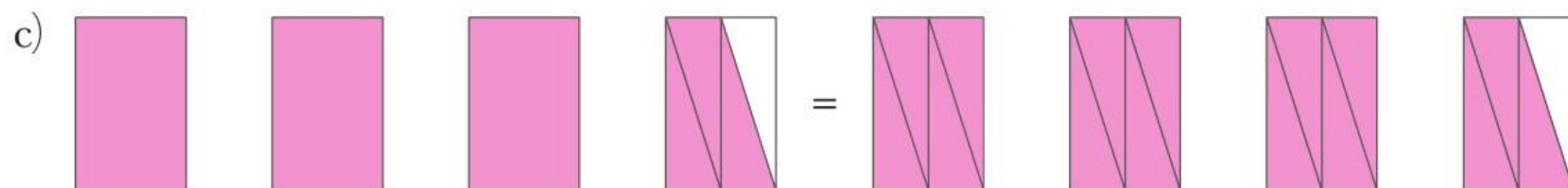
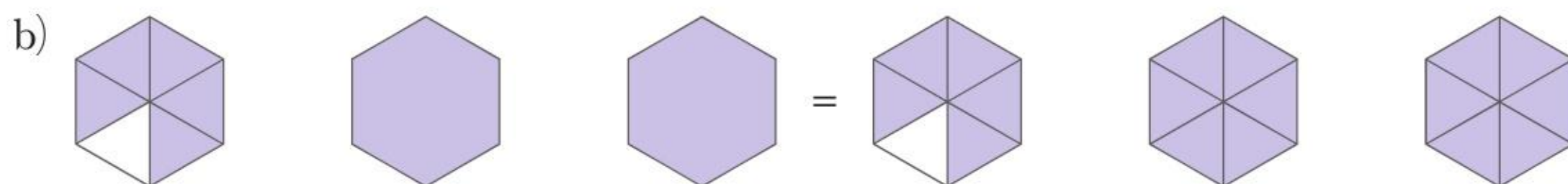
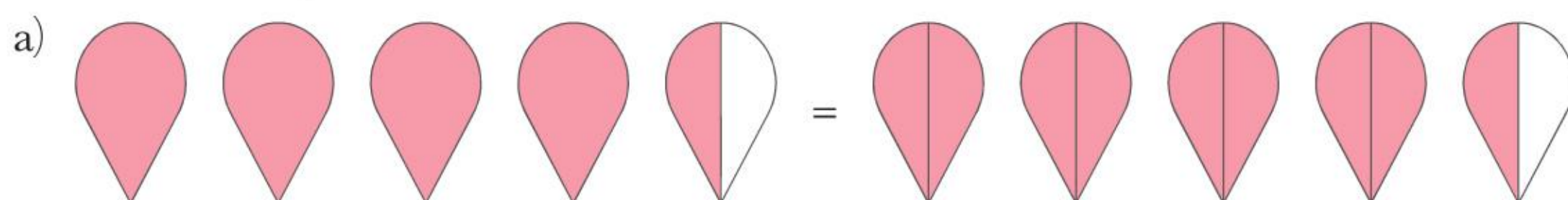


$\frac{8}{6}$, $3\frac{5}{6}$ czy $3\frac{1}{5}$?



$1\frac{4}{10}$, $\frac{5}{10}$ czy $1\frac{4}{6}$?

4. Zapisz dwoma sposobami (za pomocą liczby mieszanej oraz ułamka niewłaściwego), jaką liczbę zilustrowano za pomocą rysunku.



Ćwiczenie 4 pokazuje, że liczbę mieszaną lub liczbę naturalną można zapisać w postaci ułamka niewłaściwego. Aby to prześledzić, w przykładzie 1 posłużymy się jeszcze raz rysunkami. W przyszłości zamianę tę będziemy już wykonać bez pomocy rysunku.

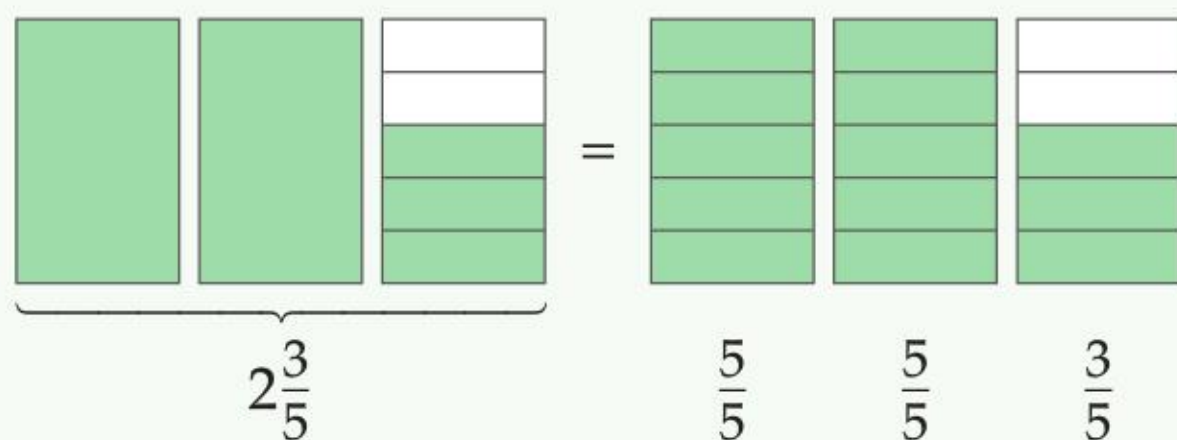
Przykład 1

Zamieńmy podaną liczbę na ułamek niewłaściwy.

a) $2\frac{3}{5}$

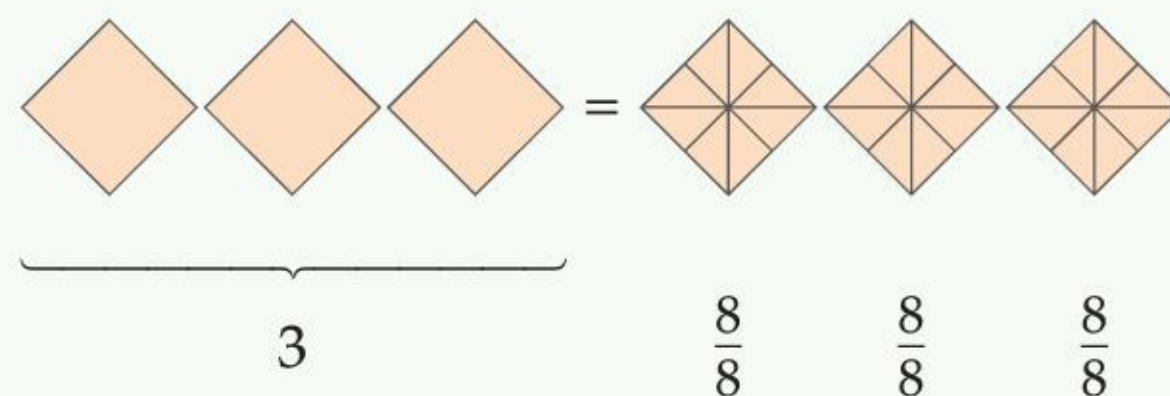
b) 3

Zamieniamy każdą z dwóch całości na ułamek o mianowniku 5 (bo taki jest w części ułamkowej).



$$2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$$

Zamieniamy każdą z trzech całości na ułamek o dowolnym mianowniku, np. 8.



$$3 = \frac{3 \cdot 8}{8} = \frac{24}{8}$$

Jeżeli zamieniamy liczbę naturalną na ułamek zwykły, musimy zdecydować (jeśli nie jest to określone), jaką liczbą ma być mianownik tego ułamka.

Przykład 2

Zamieńmy liczbę 7 na ułamek niewłaściwy.

W zależności od tego, jaki ustalimy mianownik, możemy otrzymać:

$$7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{21}{3} = \frac{28}{4} = \frac{35}{5} = \frac{42}{6} = \dots$$

Jeśli mam zamienić liczbę naturalną na ułamek niewłaściwy i mam określony mianownik, to żeby znaleźć licznik, po prostu mnożę ten mianownik przez daną liczbę naturalną, tak?



Zgadza się. A jak nie masz mianownika, to sama go sobie wybierasz.

5. Zamień na ułamki niewłaściwe:

a) liczby naturalne,

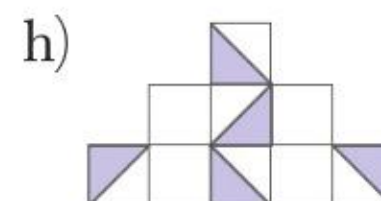
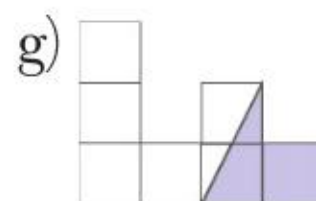
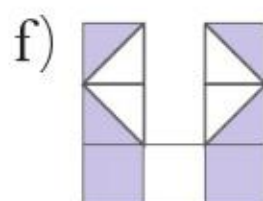
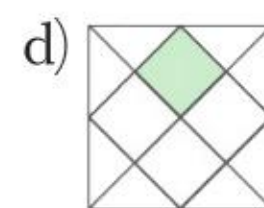
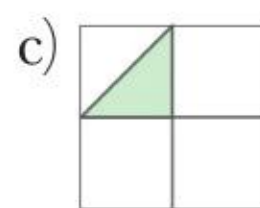
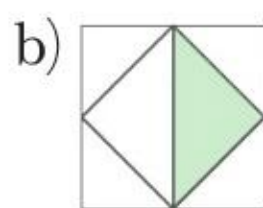
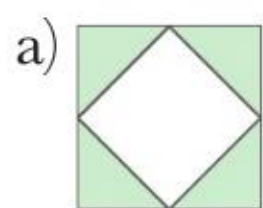
$$4 = \frac{?}{2} \quad 2 = \frac{?}{6} \quad 8 = \frac{?}{5} \quad 1 = \frac{?}{?} \quad 6 = \frac{?}{?} \quad 5 = \frac{?}{?}$$

b) liczby mieszane.

$$1\frac{3}{7} \quad 2\frac{8}{9} \quad 5\frac{3}{5} \quad 7\frac{2}{3} \quad 6\frac{5}{7} \quad 10\frac{1}{8}$$

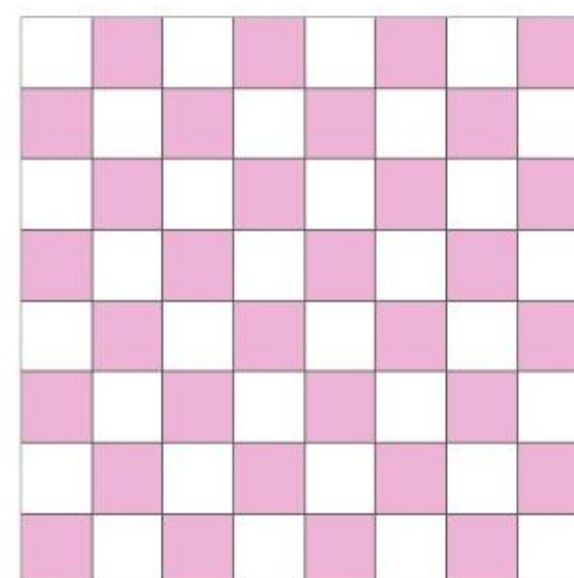
Zadania

- Jaką część figury zamalowano?



- Rysunek przedstawia szachownicę, czyli planszę do gry w szachy lub warcaby. Jaką częścią szachownicy:

- jest jedno pole,
- są wszystkie ciemne pola,
- jest jeden rząd pól,
- są jasne pola w jednym rzędzie?



- Jaką częścią (jakim ułamkiem) czasu trwania typowej lekcji jest:

- minuta,
- kwadrans,
- 5 minut?

- Jaką częścią (jakim ułamkiem) metra jest:

- 27 cm,
- 8 dm,
- 1 mm?

- Jaką częścią (jakim ułamkiem) kilograma jest:

- 73 dag,
- 9 dag,
- 1 g?

- Narysuj odcinek o długości 6 cm. Następnie pokoloruj $\frac{1}{2}$ tego odcinka na niebiesko, a $\frac{1}{3}$ na czerwono. Jaka część odcinka pozostała niezamalowana?

- Z cyfr 2, 3, 4 i 5 utwórz wszystkie możliwe ułamki, których liczniki i mianowniki są jednocyfrowe. Podziel je na ułamki właściwe i niewłaściwe. Których jest więcej i o ile więcej?

- Z trzech liczb naturalnych 5, 6 i 7 oraz dwóch ułamków $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{8}$ utwórz wszystkie możliwe liczby mieszane (liczba naturalna ma być częścią całkowitą, a ułamek – częścią ułamkową liczby mieszanej). Następnie zamień je na ułamki niewłaściwe.



2.2 Ułamek jako iloraz

Podejmij temat



Zaproponuj, w jaki sposób mogą podzielić czekoladę między siebie sprawiedliwie, czyli tak, aby każdy otrzymał tyle samo.

Czwórka rodzeństwa, Ania, Marek, Janek i Ewa, mieli wielką ochotę na coś słodkiego.
Znaleźli w domowych zapasach 3 tabliczki czekolady.



Taki podział, jak w sytuacji opisanej powyżej, można przeprowadzić w następujący sposób.

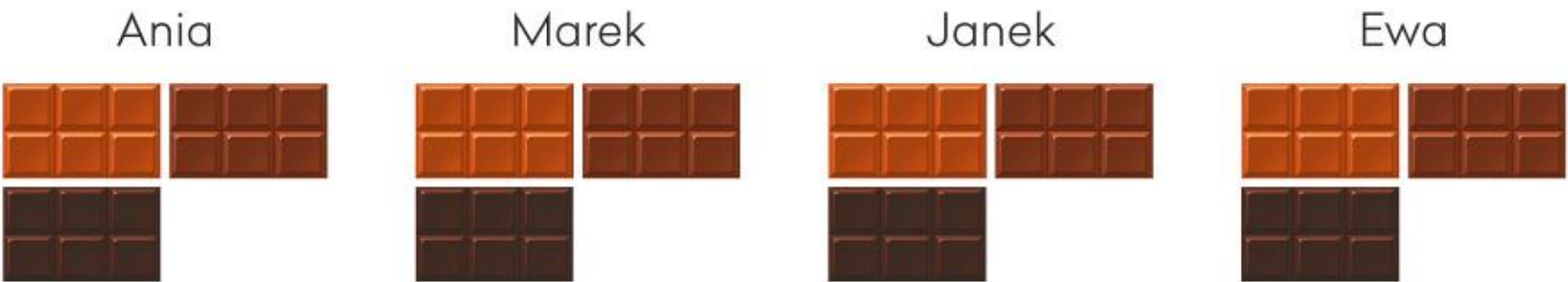
Dzieci dzielą każdą czekoladę na 4 równe części.



Każde dziecko dostaje $\frac{1}{4}$ każdej tabliczki.



Każde dziecko otrzymuje zatem po $\frac{3}{4}$ tabliczki.



Jeśli podzielimy liczbę czekolad przez liczbę dzieci, otrzymamy równość: $3 : 4 = \frac{3}{4}$.

Iloraz można zapisać w postaci ułamka. Licznik zastępuje wówczas dzielną, mianownik – dzielnik, a kreska ułamkowa – znak dzielenia, np. $5 : 8 = \frac{5}{8}$, $1 : 4 = \frac{1}{4}$.
Można też postąpić odwrotnie, czyli ułamek zapisać w postaci ilorazu, np. $\frac{4}{9} = 4 : 9$, $\frac{2}{5} = 2 : 5$.

1. Zapisz iloraz w postaci ułamka.

a) $3 : 8$

b) $6 : 19$

c) $24 : 7$

d) $1 : 6$

2. Zapisz ułamek za pomocą dzielenia.

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{23}$

c) $\frac{18}{5}$

d) $\frac{1}{13}$

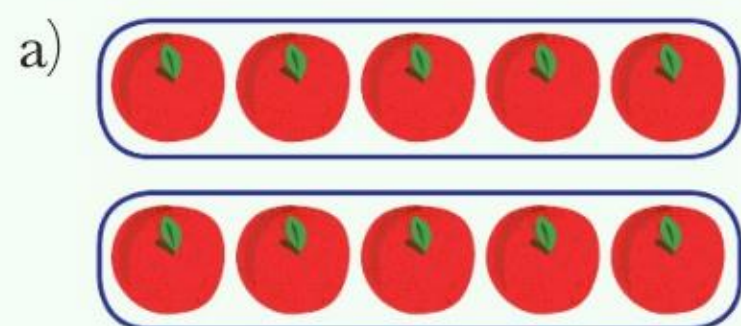
Uczyliśmy się w klasie czwartej, że jeżeli ułamek niewłaściwy zostanie zapisany za pomocą dzielenia, to łatwo jest go zamienić na liczbę naturalną lub mieszaną. Przypomnijmy to na przykładach.

Przykład 1

Podzielmy:

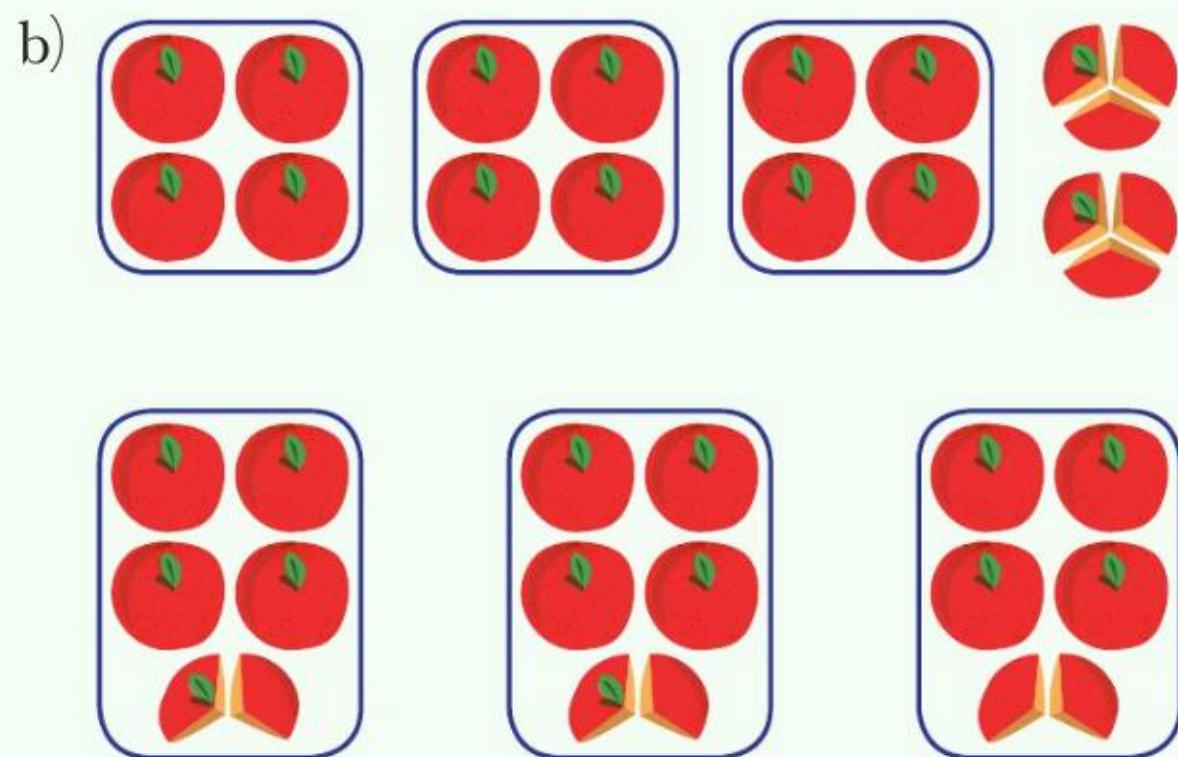
a) 10 jabłek pomiędzy 2 osoby,

b) 14 jabłek pomiędzy 3 osoby.



$$10 : 2 = 5, \text{ czyli } \frac{10}{2} = 10 : 2 = 5.$$

Każda osoba dostanie po 5 jabłek.



Liczba 14 nie dzieli się bez reszty przez 3.

$$14 : 3 = 4 \text{ r } 2$$

Każda osoba dostanie po 4 jabłka i zostaną jeszcze 2 jabłka, które należy podzielić między 3 osoby.

$$\frac{14}{3} = 14 : 3 = 4 \text{ r } 2, \text{ ale } 2 : 3 = \frac{2}{3},$$

$$\text{czyli } \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Każda osoba dostanie po $4\frac{2}{3}$ jabłka.

Wyłączanie całości z ułamka to zamiana ułamka niewłaściwego na liczbę mieszaną lub naturalną.

3. Wyłącz całości z ułamków niewłaściwych.

a) $\frac{4}{1}, \frac{15}{3}, \frac{24}{6}, \frac{9}{1}, \frac{36}{4}, \frac{56}{8}, \frac{100}{10}$

b) $\frac{10}{7}, \frac{18}{5}, \frac{26}{7}, \frac{45}{8}, \frac{32}{6}, \frac{58}{5}, \frac{43}{4}$

Zadania

- Zapisz w postaci ułamka iloraz liczby 7 i liczby podanej niżej. Jeśli powstanie ułamek niewłaściwy, wyłącz z niego całości.
- a) 2 b) 10
c) 3 d) 8
e) 4 f) 15
g) 5 h) 6
- Pani Kasia kupiła 16 jednakowych brzoskwiń. Jak sprawiedliwie może rozdzielić je między 5 osób?
- Do 8 jednakowych butelek wiano do pełna łącznie 15 litrów soku. Ile soku mieściło się w jednej butelce?
- Rowerzysta w ciągu 4 godzin przejechał 51 km. Ile kilometrów przebył podczas 1 godziny przy założeniu, że jechał ze stałą prędkością?
- Wstążkę o długości 35 dm pocięto na 4 równe części. Jaka była długość każdej z tych części? Odpowiedź podaj w decymetrach.
- Obwód kwadratowej ramki wynosi 175 cm. Jaka jest długość jednego boku ramki?
- A. $87\frac{1}{2}$ cm B. $43\frac{3}{4}$ cm
C. $43\frac{1}{4}$ cm D. 175 cm
- Sierpień trwa
- A. $4\frac{2}{7}$ tygodnia. B. $4\frac{3}{7}$ tygodnia.
C. $4\frac{2}{30}$ tygodnia. D. $4\frac{3}{31}$ tygodnia.
- Rafał zaprosił do siebie dwóch kolegów – Szymona i Antka. Z tej okazji tata Rafała zaproponował zorganizowanie dla chłopców grilla. W lodówce było 27 takich samych kiełbasek. „Na każdego z nas przypada aż 9 sztuk!” – pomyślał Rafał, wiedząc, że tata nie będzie jadł razem z nimi.
- a) Pierwszy przyszedł Szymon, a razem z nim jego brat Michał. „Niektóre kiełbaski możemy pokroić” – powiedział tata Rafała. Jak Rafał powinien sprawiedliwie podzielić kiełbaski, wiedząc o tym, że za chwilę przyjdzie Antek?
- b) Antek przyprowadził jeszcze jednego kolegę – Pawła. Ile kiełbasek przypadało w tym momencie na każdego z chłopców przy założeniu, że żadna nie została wcześniej zjedzona?
- c) Zanim Rafał przystąpił do krojenia, odwiedzili go jeszcze dwaj koledzy: Igor i Bartek. Pomóż Rafałowi podzielić kiełbaski równo między wszystkich chłopców.
- Jakie cyfry można wstawić zamiast figur, aby ułamek był równy podanej liczbie? Uwaga: taka sama figura zastępuje zawsze tę samą cyfrę. Znajdź jak najwięcej rozwiązań.

a) $\frac{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \hexagon \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \hexagon \\ \hline \end{array}} = 3$

b) $\frac{\begin{array}{|c|} \hline \triangle \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \triangle \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \triangle \\ \hline \end{array}} = 11$

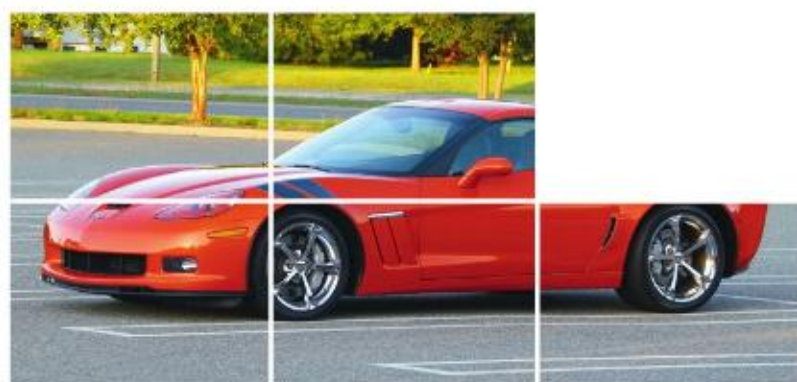
c) $\frac{\begin{array}{|c|} \hline \diamond \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \bigcirc \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \bigcirc \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \bigcirc \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \diamond \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \bigcirc \\ \hline \end{array}} = 100$

2.3 Rozszerzanie i skracanie ułamków zwykłych

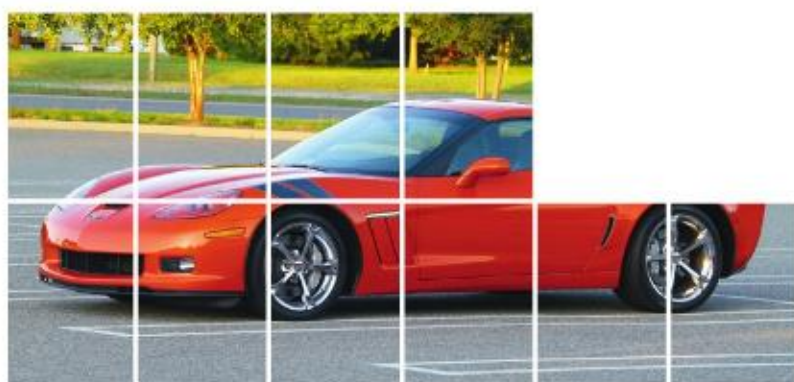
Podejmij temat



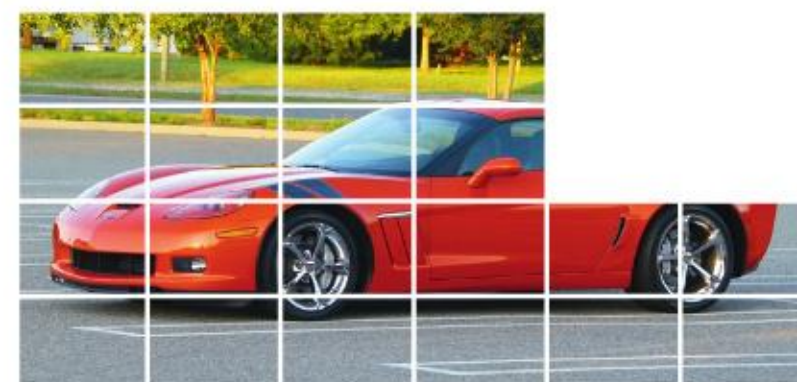
Magda kupiła pocztówkę przedstawiającą samochód wyścigowy i pocięła ją na 6 równych części. W ten sposób powstała układanka dla Jacka, jej młodszego brata.



Jacek zgubił jedną część układanki. „I tak będę się nią bawić” – postanowił. Poskładał pozostałe kawałki i uzyskał $\frac{5}{6}$ pocztówki.



Aby utrudnić Jackowi układanie, Magda każdą część przecięła jeszcze na połowę. Jacek ma teraz $\frac{10}{12}$ pocztówki.



Po pewnym czasie każdą część Magda znowu podzieliła na połowę. Układanka Jacka to teraz $\frac{20}{24}$ pocztówki.



Po tym, jak Jacek zgubił jeden kawałek układanki, cały czas ma taką samą część pocztówki.

Co można zatem powiedzieć o ułamkach $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{20}{24}$?



Czynność pokazaną na grafie strzałkami wykonujemy w pamięci. Dla ułatwienia liczbę, przez którą rozszerzamy, można zapisać w następujący sposób:

$$\frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$$

Wielkość układanki Jacka nie zmieniła się, możemy więc zapisać:

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{20}{24}$$

Czy pamiętasz z klasy czwartej, w jaki sposób otrzymać taką równość, jeśli nie mamy rysunku?

Aby z ułamka $\frac{5}{6}$ otrzymać ułamek $\frac{10}{12}$, należy jego licznik i mianownik pomnożyć przez 2. Podobnie, aby z ułamka $\frac{10}{12}$ otrzymać ułamek $\frac{20}{24}$, należy jego licznik i mianownik pomnożyć przez 2. Tę czynność nazywamy rozszerzaniem ułamka.

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

Diagram showing the expansion of the fraction 5/6 to 10/12. A green arrow points from 5 to 10 with a label ".2", and another green arrow points from 6 to 12 with a label ".2".

Rozszerzanie ułamka polega na mnożeniu licznika oraz mianownika przez tę samą liczbę różną od 0 i 1.

Przykład 1

Rozszerzmy ułamek $\frac{4}{9}$ tak, aby:

a) w mianowniku otrzymać liczbę 27,

b) w liczniku otrzymać liczbę 24.

a) $\frac{4}{9} = \frac{?}{27}$

Szukamy liczby, przez którą należy pomnożyć 9, żeby otrzymać 27.

Jest nią liczba 3, ponieważ $9 \cdot 3 = 27$.

$$\frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 3} = \frac{12}{27}$$

Zatem licznik i mianownik ułamka $\frac{4}{9}$ mnożymy przez 3.

b) $\frac{4}{9} = \frac{24}{?}$

Szukamy liczby, przez którą należy pomnożyć 4, żeby otrzymać 24.

Jest nią liczba 6, ponieważ $4 \cdot 6 = 24$.

$$\frac{4 \cdot 6}{9 \cdot 6} = \frac{24}{54}$$

Zatem mianownik i licznik ułamka $\frac{4}{9}$ mnożymy przez 6.

1. Rozszerz podany ułamek tak, aby otrzymać ułamek o wskazanym liczniku lub mianowniku.

a) $\frac{2}{7} = \frac{?}{42}$

b) $\frac{3}{8} = \frac{9}{?}$

c) $\frac{4}{7} = \frac{28}{?}$

d) $\frac{7}{9} = \frac{?}{18}$

e) $\frac{4}{15} = \frac{16}{?}$

f) $\frac{5}{8} = \frac{?}{72}$

g) $\frac{5}{6} = \frac{?}{48}$

h) $\frac{8}{9} = \frac{64}{?}$

Wróćmy do *Podejmij temat*. Spójrz na układankę Jacka pociętą na najmniejsze kawałki.

„Kiedyś ta układanka wyglądała inaczej – przypomniał sobie Jacek. – Pamiętasz, że miałem tylko pięć kawałków?” – zapytał Magdę. Siostra posklejała elementy układanki tak, aby rozmiar każdej z pięciu pojedynczych części był taki jak na początku.

Liczba elementów układanki zmniejszyła się czterokrotnie, ale wielkość całej układanki nie zmieniła się, czyli $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$.

Czy pamiętasz z klasy czwartej, w jaki sposób otrzymać taką równość, jeśli nie mamy rysunku?

Aby z ułamka $\frac{20}{24}$ otrzymać ułamek $\frac{5}{6}$, należy jego licznik i mianownik podzielić przez 4. Tę czynność nazywamy skracaniem ułamka.

$$\begin{array}{c} \text{: 4} \\ \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \\ \text{: 4} \end{array}$$



Czynność pokazaną na grafie strzałkami wykonujemy w pamięci. Dla ułatwienia liczbę, przez którą skracamy, można zapisać w następujący sposób:

$$\frac{20 \text{: 4}}{24 \text{: 4}} = \frac{5}{6}$$

Skracanie ułamka polega na podzieleniu licznika oraz mianownika przez tę samą liczbę różną od 0 i 1.

Przykład 2

Skróćmy ułamek $\frac{18}{24}$.

$$\frac{18}{24} = \frac{?}{?}$$

Szukamy liczby, przez którą można podzielić licznik i mianownik ułamka. Wspólnymi dzielnikami liczb 18 i 24 są: 1, 2, 3, 4, 6.

$$\frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4}$$

Dzielimy licznik i mianownik przez NWD(18, 24), czyli przez 6.

Po skróceniu ułamka $\frac{18}{24}$ otrzymaliśmy ułamek $\frac{3}{4}$, czyli ułamek, którego nie można już skrócić.



Ułamek nieskracalny to taki, którego nie można skrócić.

Jeżeli skrócimy ułamek przez największy wspólny dzielnik licznika i mianownika, to otrzymamy ułamek nieskracalny.

Skracanie ułamków można też wykonywać etapami.

Przykład 3

Skróćmy ułamek $\frac{18}{24}$ tak, aby otrzymać ułamek nieskracalny.

$$\frac{18}{24} = \frac{?}{?}$$

Szukamy liczby, przez którą podzielimy licznik i mianownik ułamka. Jedną z takich liczb jest 2.

$$\frac{18:2}{24:2} = \frac{9}{12}$$

Dzielimy licznik i mianownik ułamka $\frac{18}{24}$ przez 2 (przeważnie robimy to w pamięci).

Czy otrzymany ułamek $\frac{9}{12}$ jest nieskracalny?

Nie, ponieważ zarówno licznik, jak i mianownik są podzielne przez 3.

$$\frac{18}{24} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$$

Dzielimy licznik i mianownik przez 3.

Czy otrzymany ułamek jest nieskracalny?

Tak. Ułamka $\frac{3}{4}$ nie można już skrócić.

W tym przykładzie ułamek $\frac{18}{24}$ skracany był przez wspólne dzielniki licznika i mianownika, ale nie przez ich największy wspólny dzielnik.

Zauważmy, że skracanie ułamka najpierw przez 2, a następnie skróconego ułamka przez 3 (jak w przykładzie 3), daje taki sam wynik, jak skracanie wyjściowego ułamka od razu przez $2 \cdot 3$, czyli przez 6 (jak w przykładzie 2). W obu przypadkach otrzymaliśmy ułamek $\frac{3}{4}$.

2. Skróć podane ułamki tak, aby otrzymać ułamki nieskracalne.

$$\frac{16}{28}, \frac{9}{12}, \frac{27}{45}, \frac{25}{40}, \frac{49}{77}, \frac{36}{48}, \frac{8}{64}, \frac{26}{39}, \frac{30}{75}$$

3. Dla każdego podanego ułamka znajdź największy wspólny dzielnik liczb w liczniku i mianowniku, a następnie skróć te ułamki tak, żeby otrzymać ułamki nieskracalne.

$$\frac{75}{85}, \frac{48}{64}, \frac{90}{108}, \frac{84}{96}, \frac{168}{210}, \frac{189}{243}$$

Zadania

- Rozszerz podany ułamek tak, aby w liczniku otrzymać liczbę 24.

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{12}{17}$ e) $\frac{6}{11}$ f) $\frac{4}{9}$

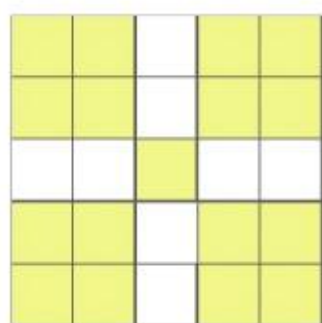
- Ułamek $\frac{4}{11}$ rozszerz tak, aby w mianowniku otrzymać liczbę większą niż 40, ale mniejszą niż 100. Zapisz wszystkie takie ułamki.

- Rozszerz podany ułamek tak, aby w mianowniku otrzymać liczbę 200.

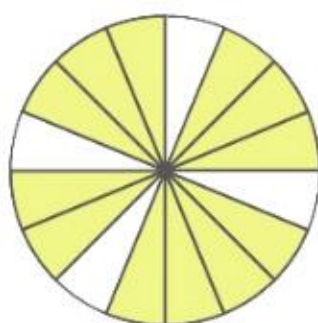
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{7}{50}$ d) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{11}{40}$ f) $\frac{29}{100}$

- Na którym rysunku zamalowano $\frac{2}{3}$ figury?

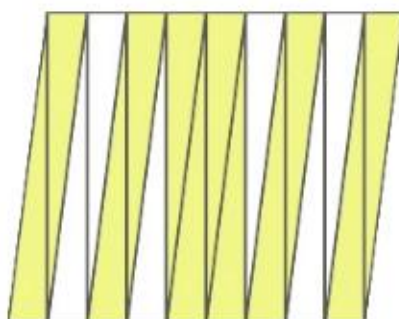
A.



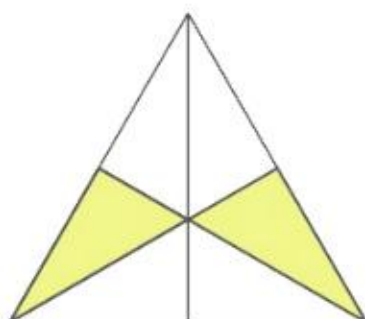
B.



C.



D.



- Które z ułamków są równe? Połącz je w pary za pomocą znaku =. Zrób to w zeszycie.

$$\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7}$$

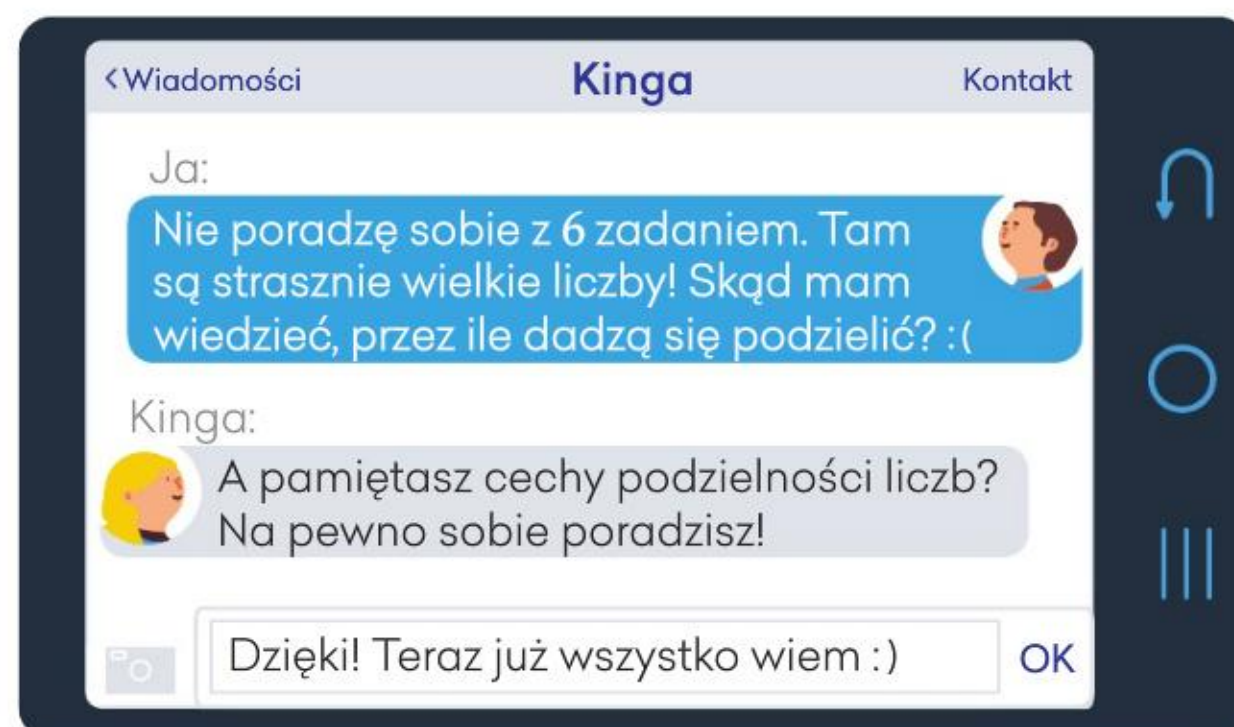
$$\frac{20}{28}, \frac{21}{49}, \frac{10}{70}, \frac{24}{42}, \frac{18}{21}, \frac{10}{35}$$

- Podany ułamek można skrócić tylko przez jedną liczbę. Jaka?

a) $\frac{355}{905}$ b) $\frac{159}{771}$ c) $\frac{218}{862}$

d) $\frac{201}{447}$ e) $\frac{934}{1318}$ f) $\frac{1565}{2305}$

Skróć dwa dowolne ułamki.



2.4 Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika

Podejmij temat



Czy potrafisz odgadnąć, na ile równych części dziewczynka podzieliła liczbę stron? Ile stron mogła mieć ta książka?

Najpierw sprawdzę, na ile równych części mogę łatwo podzielić liczbę stron, a potem zaplanuję czytanie całej książki etapami.

Dziś przeczytam $\frac{3}{10}$ książki, jutro $\frac{2}{9}$, pojutrze $\frac{1}{3}$, a resztę w przyszłym tygodniu.



1. Jakie liczby można otrzymać w mianowniku po rozszerzeniu ułamka $\frac{4}{5}$, a jakie mogą być w mianowniku po rozszerzeniu ułamka $\frac{2}{3}$? Zapisz co najmniej po 10 kolejnych takich liczb dla każdego z tych ułamków. Podkreśl te, które powtarzają się dla obu ułamków.

Jeżeli rozszerzymy dwa ułamki tak, aby w mianownikach znalazła się taka sama liczba, to mówimy, że ułamki zostały **sprowadzone do wspólnego mianownika**.

Przykład 1

Sprowadźmy do najmniejszego wspólnego mianownika ułamki $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$.

W mianowniku ułamka $\frac{3}{4}$ można po jego rozszerzeniu otrzymać liczby: 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, ..., a w mianowniku ułamka $\frac{5}{6}$ można otrzymać: 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...

Wybieramy najmniejszą z tych liczb, która powtarza się w obu mianownikach, czyli najmniejszą wspólną wielokrotność tych ułamków. W tym przykładzie jest to 12.

Rozszerzamy ułamki tak, aby w mianownikach otrzymać liczbę 12. $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{9}{12}$ i $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{2} = \frac{10}{12}$

Ułamki zostały sprowadzone do wspólnego mianownika – otrzymaliśmy $\frac{9}{12}$ i $\frac{10}{12}$.

 Najlepiej sprowadzać ułamki do najmniejszego możliwego wspólnego mianownika (jest nim NWW mianowników tych ułamków), ale nie jest błędem znalezienie innego, większego mianownika.

Najczęściej wybieramy najmniejszy wspólny mianownik ze względu na łatwiejsze obliczenia podczas rozszerzania ułamków i ewentualnych dalszych rachunków.

2. Podane pary ułamków sprowadź do najmniejszego wspólnego mianownika.

a) $\frac{3}{8}$ i $\frac{4}{5}$
 $\frac{4}{9}$ i $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{6}$ i $\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{6}$
 $\frac{5}{6}$ i $\frac{7}{8}$
 $\frac{3}{10}$ i $\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{2}$
 $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{6}$
 $\frac{5}{8}$ i $\frac{1}{4}$

d) $\frac{9}{10}$ i $\frac{2}{7}$
 $\frac{7}{8}$ i $\frac{5}{12}$
 $\frac{7}{10}$ i $\frac{2}{5}$

Zauważ, że aby sprowadzić ułamki do wspólnego mianownika w punkcie a) ćwiczenia 2, należało pomnożyć przez siebie mianowniki obu podanych ułamków.

Czy tak samo trzeba było postąpić w punktach b), c) i d)?

3. Maciek i Tomek sprowadzali ułamki $\frac{7}{15}$ i $\frac{4}{25}$ do wspólnego mianownika. Który z chłopców wykonał zadanie prawidłowo? Który obliczył szybciej?

Maciek

$$\frac{7}{15} \cdot \frac{5}{5} = \frac{35}{75}$$

$$\frac{4}{25} \cdot \frac{3}{3} = \frac{12}{75}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \cdot 5 \\ \hline 75 \end{array}$$

Tomek

$$\frac{7}{15} \cdot \frac{25}{25} = \frac{175}{375}$$

$$\frac{4}{25} \cdot \frac{15}{15} = \frac{60}{375}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \cdot 15 \\ \hline 125 \\ + 25 \\ \hline 375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \cdot 7 \\ \hline 175 \\ 15 \\ \cdot 4 \\ \hline 60 \end{array}$$

Czy już wiesz, dlaczego warto wybierać najmniejszy wspólny mianownik?

Przykład 2

Srowadźmy do wspólnego mianownika ułamki $\frac{3}{20}$ i $\frac{7}{16}$.

Zwykle, w łatwiejszych przykładach, wspólny mianownik ułamków znajdowaliśmy w pamięci, ale w tym przypadku nie widać od razu, jaka jest $\text{NWW}(20, 16)$. Gdy liczby w mianownikach ułamków są duże i trudno jest nam znaleźć szybko wspólny mianownik, możemy pomóc sobie wypisywaniem wielokrotności mianowników:

$$W_{20} = \{0, 20, 40, 60, \underline{80}, 100, 120, \dots\}, \quad W_{16} = \{0, 16, 32, 48, 64, \underline{80}, \dots\}$$

lub rozkładem mianowników na czynniki pierwsze:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \text{NWW}(20, 16) = 20 \cdot 2 \cdot 2 = 80.$$

Niezależnie od wybranego sposobu otrzymujemy ten sam mianownik: $\text{NWW}(20, 16) = 80$.

Wiemy zatem, że wspólnym mianownikiem ułamków ma być liczba 80.

Rozszerzamy więc odpowiednio oba ułamki: $\frac{3}{20} \cdot \frac{4}{4} = \frac{12}{80}$ i $\frac{7}{16} \cdot \frac{5}{5} = \frac{35}{80}$.

Ułamki zostały sprowadzone do wspólnego mianownika – otrzymaliśmy $\frac{12}{80}$ i $\frac{35}{80}$.



Do wspólnego mianownika możemy sprowadzać nie tylko dwa ułamki, ale również trzy ułamki lub więcej.

4. Srowadź ułamki do wspólnego mianownika.

a) $\frac{5}{12}$ i $\frac{11}{18}$

b) $\frac{8}{27}$ i $\frac{7}{36}$

$\frac{11}{30}$ i $\frac{5}{42}$

$\frac{2}{45}$ i $\frac{16}{63}$

c) $\frac{13}{24}$ i $\frac{7}{40}$

d) $\frac{11}{84}$ i $\frac{1}{60}$

$\frac{5}{16}$ i $\frac{11}{72}$

$\frac{5}{48}$ i $\frac{17}{108}$

5. Srowadź do wspólnego mianownika podane ułamki.

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$

d) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}$

e) $\frac{4}{9}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}$

f) $\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}$

g) $\frac{9}{10}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}$

h) $\frac{5}{8}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}$

i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

Zadania

- Narysuj prostokąt o wymiarach $6\text{ cm} \times 2\text{ cm}$. Zamaluj: $\frac{3}{8}$ prostokąta na niebiesko, $\frac{1}{6}$ na czerwono, a $\frac{1}{4}$ na żółto. W tym celu podziel go na odpowiednią liczbę równych części. Jaki ułamek prostokąta nie został zamalowany?

- Który z ułamków: $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$, leży na osi liczbowej najbliżej punktu o współrzędnej zero, a który – najdalej? Odpowiedź uzasadnij.

- Najmniejszym wspólnym mianownikiem ułamków: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, jest liczba
- A. 10 B. 100 C. 1000 D. 1 000 000

- Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Najmniejszym wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{5}{12}$ i $\frac{3}{8}$ jest liczba 48.

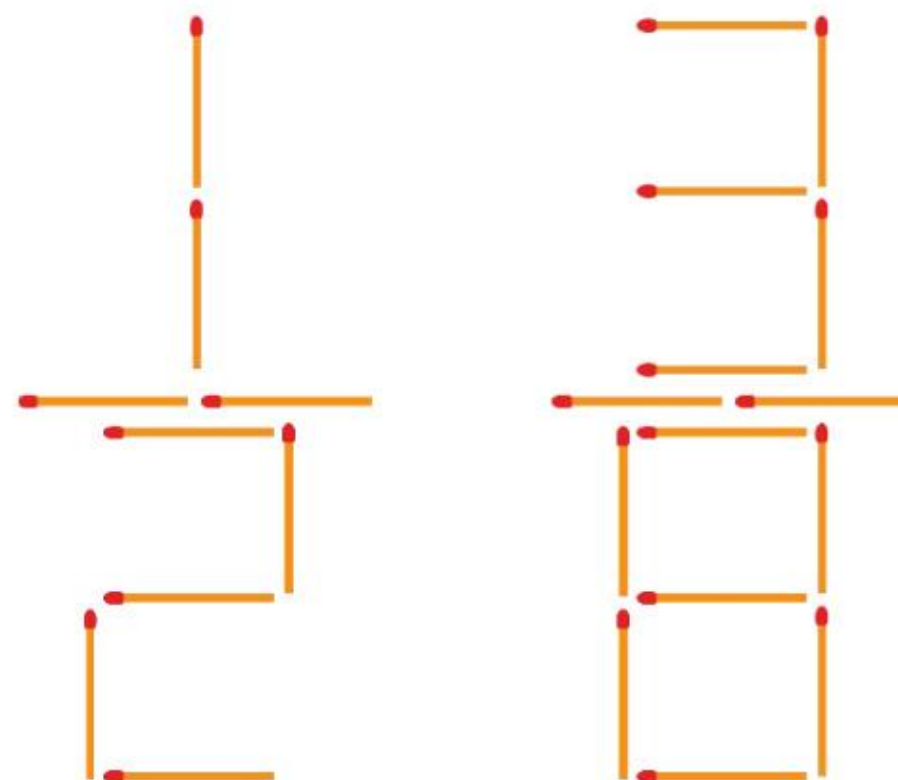
b) Najmniejszym wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{5}{9}$ i $\frac{7}{27}$ jest liczba 27.

c) Wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{15}{16}$ i $\frac{7}{8}$ może być liczba 80.

d) Wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{4}{5}$ i $\frac{3}{15}$ może być liczba 5.

- ★ Bartek i Michał chodzą razem do Vc. „W naszej klasie jest 28 uczniów, z czego $\frac{2}{5}$ to dziewczęta” – stwierdził Bartek. „Nieprawda! Dziewczęta stanowią $\frac{5}{14}$, a chłopcy $\frac{1}{2}$ klasy!” – zaprotestował Michał. Czy Bartek się pomylił? A czy Michał miał rację? Wyjaśnij, na czym polegał ewentualny błąd lub błędy.

- Ile najmniej zapalek należy dołożyć, aby powstały ułamki równe podanym, ale o wspólnym mianowniku? Przerysuj poniższe ułamki do zeszytu i kolorową kredką dorysuj brakujące zapalki.



2.5 Porównywanie ułamków zwykłych

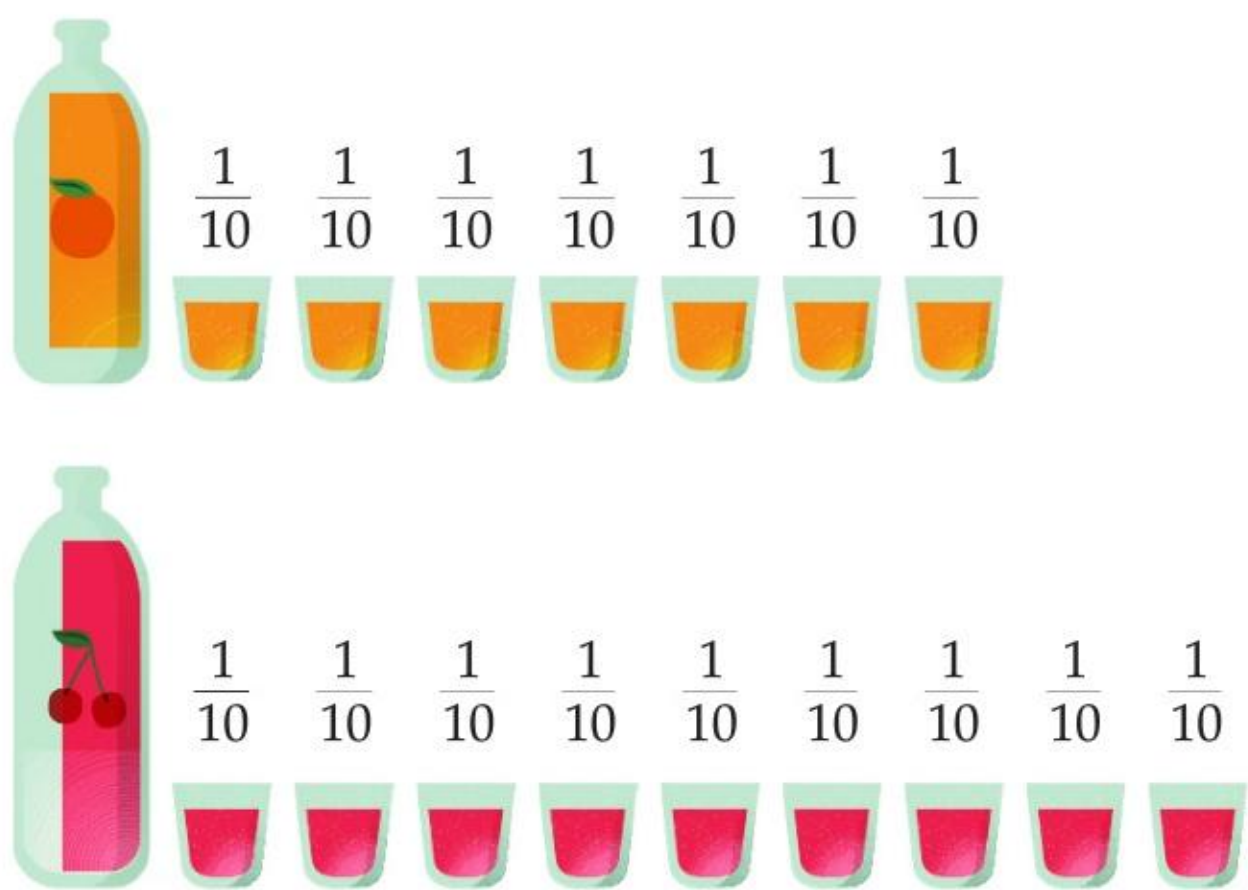
Podejmij temat



A czy ty potrafisz powiedzieć, który z chłopców – Maciek czy Jacek – rozwiązał zadania szybciej?



W której butelce mieści się więcej soku?



Oczywiście więcej soku znajduje się w butelce z sokiem wiśniowym, czyli $\frac{7}{10} < \frac{9}{10}$.

Jeżeli **porównujemy ułamki o jednakowych mianownikach**, to większy jest ten ułamek, który ma większy licznik.

Ala i Zosia kupiły dwie pizze tej samej wielkości. Ala podzieliła swoją na 16 kawałków, a Zosia – na 8.



Ala zjadła $\frac{3}{16}$ pizzy.

Zosia zjadła $\frac{3}{8}$ pizzy.

Która dziewczynka zjadła większą część pizzy? Kawałek pizzy powstały po podziale na 8 równych części jest większy od kawałka powstałego po podziale na 16 równych części, zatem więcej zjadła Zosia, czyli: $\frac{3}{16} < \frac{3}{8}$.

Jeżeli **porównujemy ułamki o jednakowych licznikach**, to większy jest ten ułamek, który ma mniejszy mianownik.

Przykład 1

Porównajmy podane liczby.

a) $3\frac{4}{9}$ i $\frac{5}{9}$

b) $4\frac{3}{7}$ i $6\frac{2}{11}$

c) $5\frac{3}{8}$ i $5\frac{7}{8}$

a) Porównujemy liczbę mieszaną $3\frac{4}{9}$ i ułamek właściwy $\frac{5}{9}$.

Liczba mieszana jest zawsze większa od 1, a ułamek właściwy jest zawsze mniejszy od 1, dlatego $3\frac{4}{9} > \frac{5}{9}$.

b) Porównujemy dwie liczby mieszane o różnych częściach całkowitych.

Większa jest ta liczba mieszana, która ma większą część całkowitą.

$4 < 6$, więc $4\frac{3}{7} < 6\frac{2}{11}$

c) Porównujemy dwie liczby mieszane o jednakowych częściach całkowitych.

Większa jest ta liczba mieszana, która ma większą część ułamkową.

$\frac{3}{8} < \frac{7}{8}$, więc $5\frac{3}{8} < 5\frac{7}{8}$

1. Porównaj podane pary liczb.

a) $\frac{5}{12}$ i $\frac{8}{12}$

$\frac{4}{9}$ i $\frac{2}{9}$

$\frac{8}{6}$ i $\frac{5}{6}$

$\frac{5}{7}$ i $\frac{10}{7}$

b) $3\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$

$\frac{2}{5}$ i $1\frac{1}{5}$

$3\frac{4}{5}$ i $\frac{19}{5}$

$4\frac{1}{8}$ i $2\frac{7}{8}$

c) $\frac{4}{7}$ i $\frac{4}{5}$

$\frac{6}{7}$ i $\frac{6}{11}$

$\frac{8}{5}$ i $\frac{8}{9}$

$\frac{3}{4}$ i $\frac{3}{2}$

d) $2\frac{4}{5}$ i $2\frac{4}{9}$

$1\frac{3}{4}$ i $1\frac{3}{5}$

$4\frac{2}{8}$ i $4\frac{2}{3}$

$8\frac{1}{15}$ i $8\frac{1}{14}$

e) $2\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{5}$

$\frac{23}{24}$ i $1\frac{1}{7}$

$9\frac{2}{9}$ i $8\frac{3}{7}$

$11\frac{5}{12}$ i $13\frac{2}{19}$

A jak porównywać ułamki, które nie mają ani takiego samego licznika, ani takiego samego mianownika?

Przykład 2

Jacek i Marek malują płot po przeciwnych stronach ogrodu. Który z chłopców pomalował większą część płotu?



Jacek pomalował $\frac{3}{4}$ płotu.



Marek pomalował $\frac{7}{8}$ płotu.

Aby porównać ułamki $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{8}$, należy sprowadzić je do wspólnego mianownika (czyli najlepiej znaleźć NWW liczb w mianownikach). Tym wspólnym mianownikiem jest liczba 8.

Aby porównać $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{8}$, możemy porównać $\frac{6}{8}$ i $\frac{7}{8}$, ponieważ $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Oczywiście $\frac{6}{8} < \frac{7}{8}$, więc $\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$.

W ten sposób ustaliliśmy, że większą część płotu pomalował Marek.

Aby porównać ułamki, które nie mają ani jednakowych liczników, ani jednakowych mianowników, najczęściej najpierw sprowadzamy je do wspólnego mianownika.

2. Porównaj podane pary ułamków. W tym celu sprowadź je do wspólnego mianownika.

a) $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$
 $\frac{3}{8}$ i $\frac{2}{7}$
 $\frac{3}{5}$ i $\frac{7}{9}$
 $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{11}$

b) $\frac{4}{5}$ i $\frac{6}{7}$
 $\frac{2}{9}$ i $\frac{1}{8}$
 $\frac{1}{6}$ i $\frac{2}{9}$
 $\frac{9}{14}$ i $\frac{3}{7}$

c) $\frac{5}{12}$ i $\frac{3}{8}$
 $\frac{7}{10}$ i $\frac{3}{5}$
 $\frac{8}{15}$ i $\frac{5}{6}$
 $\frac{5}{8}$ i $\frac{7}{10}$

d) $\frac{5}{7}$ i $\frac{3}{4}$
 $\frac{8}{9}$ i $\frac{9}{10}$
 $\frac{1}{6}$ i $\frac{3}{8}$
 $\frac{5}{12}$ i $\frac{2}{5}$

Przykład 3

Porównajmy ułamki $\frac{4}{9}$ i $\frac{10}{19}$.

Te ułamki można oczywiście sprowadzić do wspólnego mianownika i porównać je w sposób opisany w przykładzie 2, ale szukanie NWW(9, 19) w tym przypadku nie jest wygodne. Łatwiej sprowadzić je do wspólnego licznika, bo NWW(4, 10) = 20. Rozszerzamy zatem oba ułamki do ułamków o liczniku 20:

$$\frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{20}{45} \quad \text{i} \quad \frac{10 \cdot 2}{19 \cdot 2} = \frac{20}{38}$$

i porównujemy otrzymane ułamki. Skoro $\frac{20}{45} < \frac{20}{38}$, to $\frac{4}{9} < \frac{10}{19}$.



Aby porównać ułamki, można je również sprowadzić do wspólnego licznika.

Zadania

- Zapisz ułamki w kolejności rosnącej.
a) $\frac{21}{18}, \frac{7}{18}, \frac{11}{18}, \frac{16}{18}, \frac{19}{18}, \frac{5}{18}$ b) $\frac{7}{3}, \frac{7}{8}, \frac{7}{4}, \frac{7}{11}, \frac{7}{15}, \frac{7}{9}, \frac{7}{5}$
- Zapisz ułamki w kolejności malejącej.
a) $\frac{15}{24}, \frac{3}{8}, \frac{27}{48}$ b) $\frac{2}{9}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$ c) $\frac{4}{15}, \frac{2}{5}, \frac{7}{20}$
- Podaj pięć ułamków mniejszych od $\frac{7}{9}$:
a) o liczniku równym 7, b) o mianowniku równym 9.
- Znajdź ułamek większy od $\frac{1}{3}$ i jednocześnie mniejszy od $\frac{1}{2}$.
- Olek i Krzys mieszka na przeciwległych krańcach miasta. Pewnego dnia wyruszyli rowerami na umówione spotkanie. Odczytaj z rysunku potrzebne informacje i ustal, który z chłopców przebył dłuższą drogę.

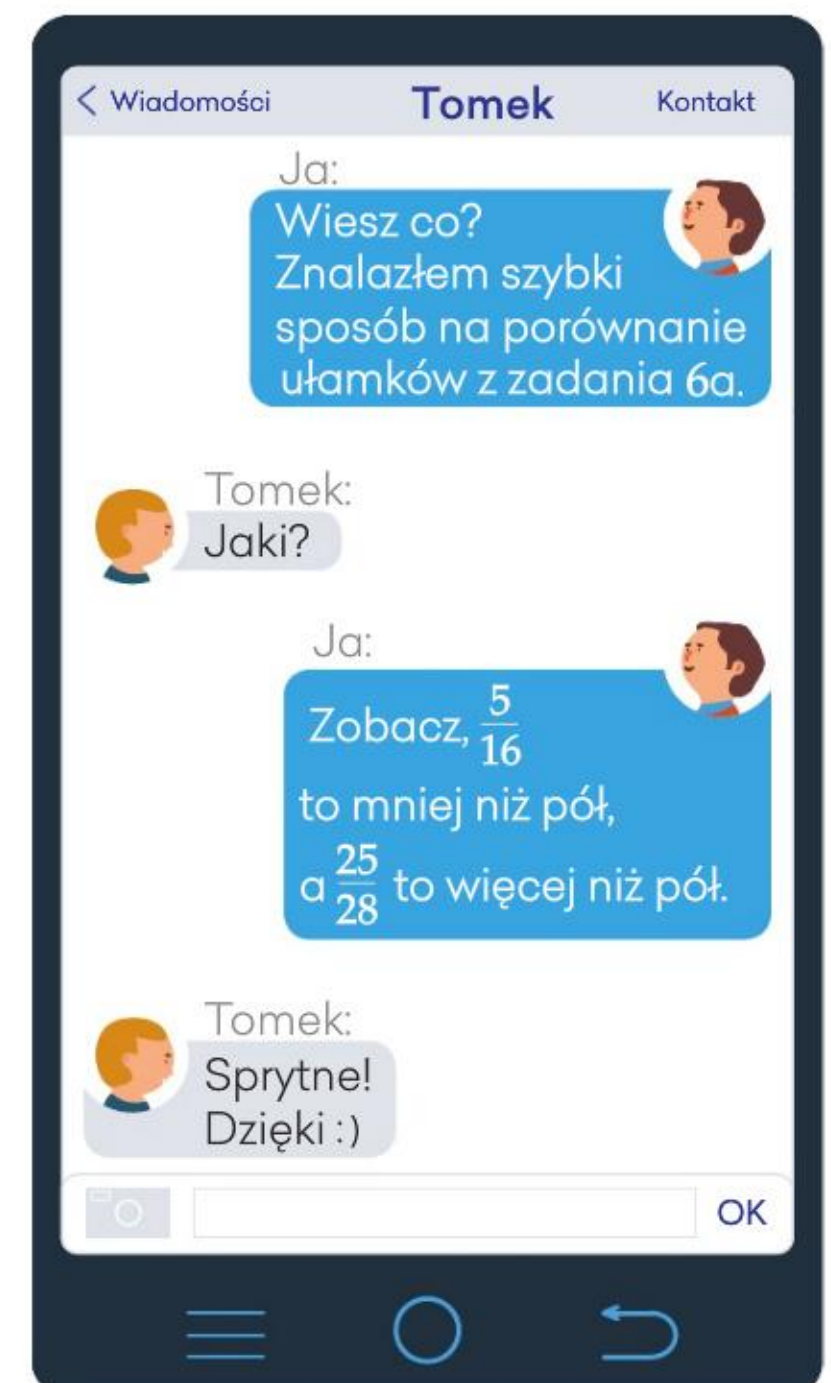


- Porównaj podane liczby bez sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika czy wspólnego licznika.
a) $\frac{5}{16}$ i $\frac{25}{28}$ b) $9\frac{2}{9}$ i $9\frac{4}{7}$
c) $15\frac{2}{3}$ i $15\frac{1}{2}$ d) $123\frac{13}{27}$ i $123\frac{16}{31}$
- Na $\frac{4}{15}$ klombu rosną bratki koloru fioletowego, na $\frac{3}{10}$ bratki białe, a na $\frac{1}{3}$ – żółte. Pozostałą część klombu zajmuje trawa. Których bratków jest najwięcej, a których – najmniej?



Czy pamiętasz?

Kolejność rosnąca to uporządkowanie od najmniejszej liczby do największej, malejąca zaś – odwrotnie.

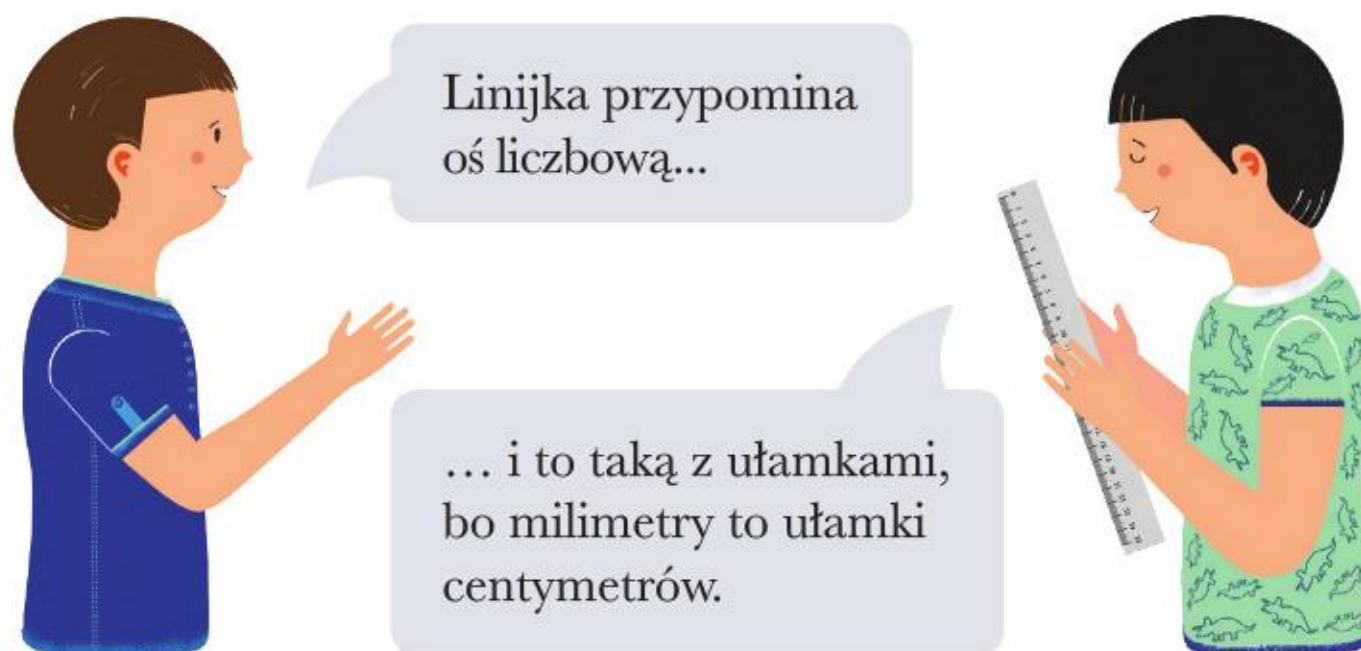


2.6 Ułamki zwykłe na osi liczbowej

Podejmij temat



Czy wiesz, jakim ułamkiem centymetra jest milimetr? A dwa milimetry?



1. Wykonaj polecenia.

- Narysuj odcinek długości 6 cm i podziel go w taki sposób, żeby od lewej strony móc pokolorować $\frac{2}{3}$ tego odcinka.
- Narysuj odcinek długości 8 cm i podziel go w taki sposób, żeby od lewej strony móc pokolorować $\frac{1}{4}$ odcinka, a od prawej (innym kolorem) $\frac{3}{4}$ odcinka.
- Narysuj trzy odcinki długości 3 cm ułożone tak jak na poniższym rysunku.



Pokoloruj $2\frac{1}{6}$ odcinka, zaczynając od lewej strony rysunku.

Aby na osi liczbowej zaznaczyć punkty o współrzędnych ułamkowych, najpierw należy podzielić odcinki jednostkowe na odpowiednie części, podobnie jak w ćwiczeniu 1.



Aby zaznaczyć: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ itd., należy odcinki jednostkowe podzielić na 4 równe części w następujący sposób:



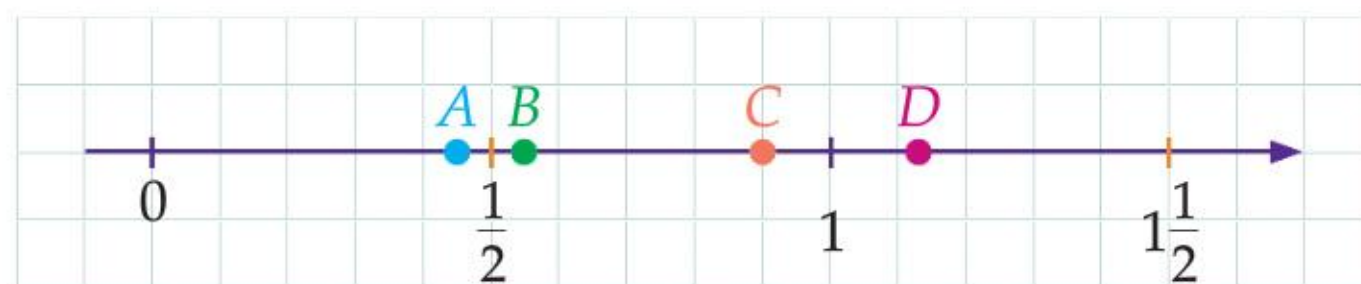
2. Narysuj oś liczbową, której odcinek jednostkowy ma długość:

- 5 cm, i zaznacz na niej punkty o współrzędnych: 0 , $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1 , $1\frac{1}{5}$, $1\frac{4}{5}$,
- 8 cm, i zaznacz na niej punkty o współrzędnych: 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, 1 .

3. Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.

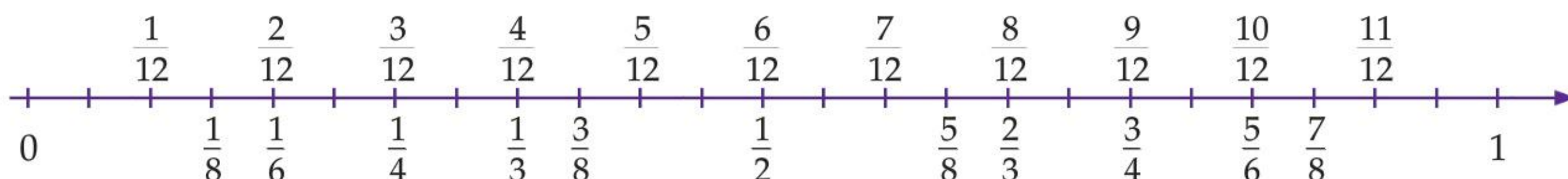


4. Która z liczb: $\frac{9}{10}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{9}{20}$, jest współrzędną punktu A, która punktu B, która punktu C, a która punktu D?



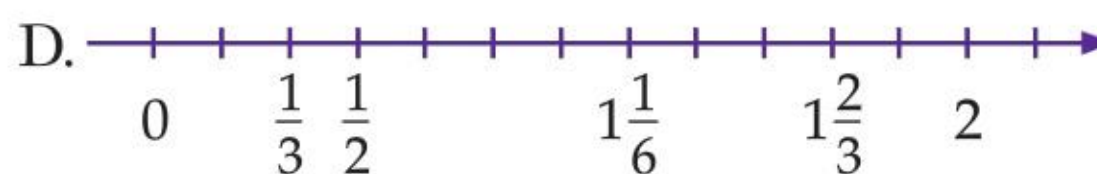
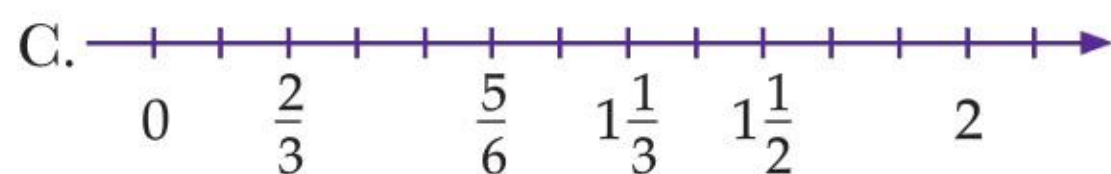
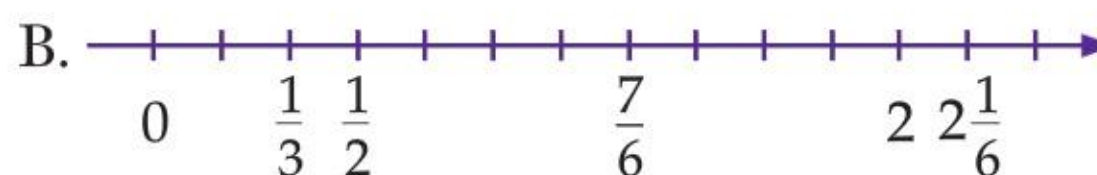
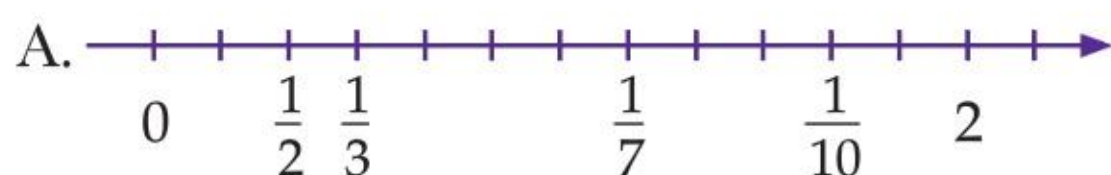
Zadania

- Spójrz na poniższą oś liczbową i odpowiedz, które z zaznaczonych liczb są:

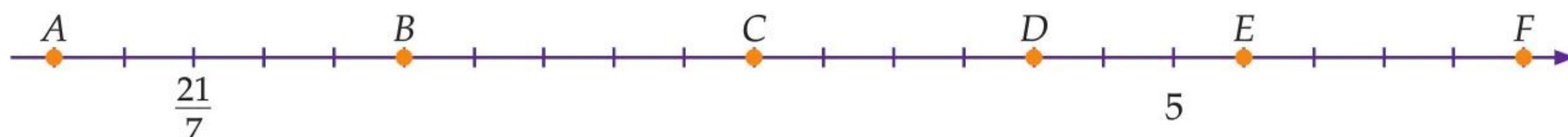


- a) mniejsze od $\frac{1}{4}$, b) większe od $\frac{2}{3}$, c) większe od $\frac{3}{12}$ i jednocześnie mniejsze od $\frac{5}{6}$.

- Na której osi liczbowej wszystkie współrzędne punktów są zapisane poprawnie?



- Podaj współrzędne zaznaczonych punktów. Zastosuj podwójny zapis: w postaci ułamków niewłaściwych oraz w postaci liczb mieszanych.



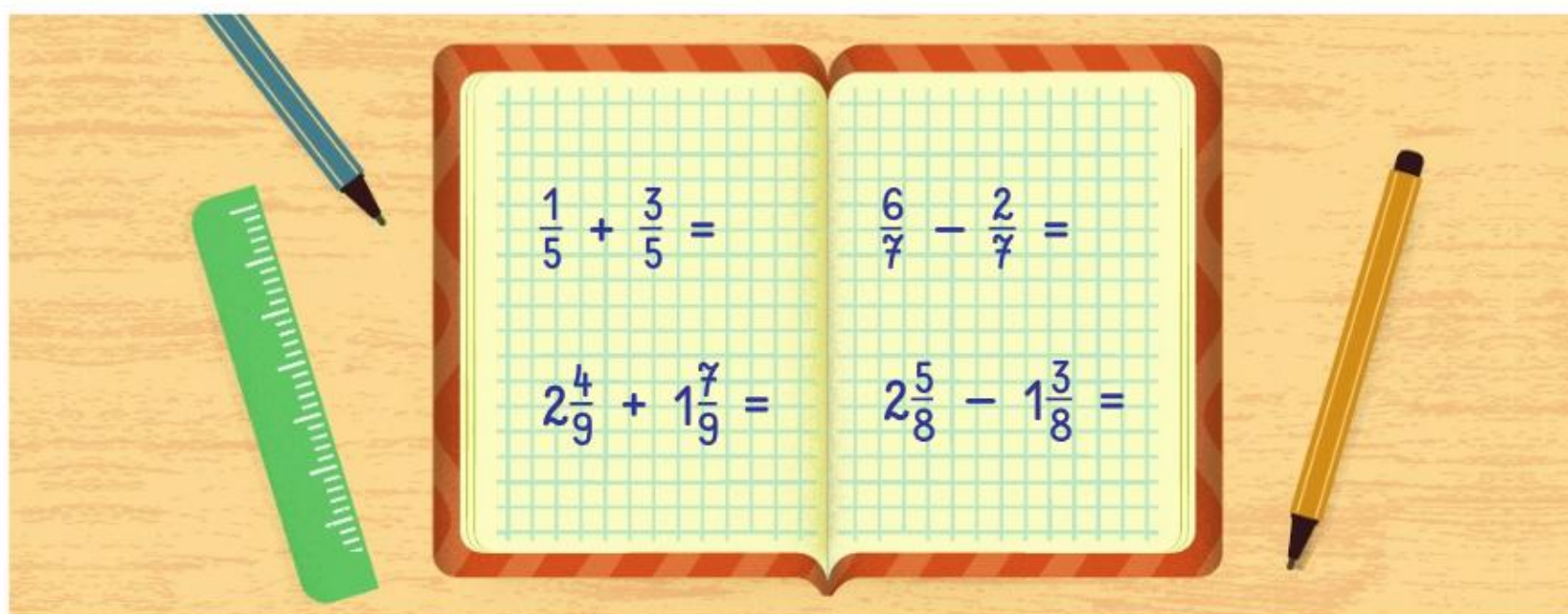
- Turysta szedł drogą o długości 5 km. Co jakiś czas przystawał na chwilę, by napić się wody; jego postoje miały miejsce po przebyciu $\frac{5}{8}$ km, $1\frac{3}{4}$ km, $2\frac{1}{4}$ km i $3\frac{1}{2}$ km (licząc od początku trasy). Narysuj oś liczbową, na której odcinek jednostkowy będzie oznaczał 1 km, i zaznacz na niej punkty odpowiadające miejscom postoju turysty.

2.7 Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach

Podejmij temat

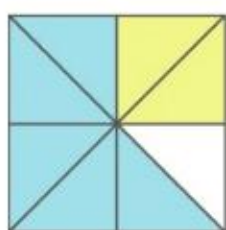


Podobne działania wykonywaliśmy w klasie czwartej. Czy pamiętasz, jak się oblicza takie sumy lub różnice?

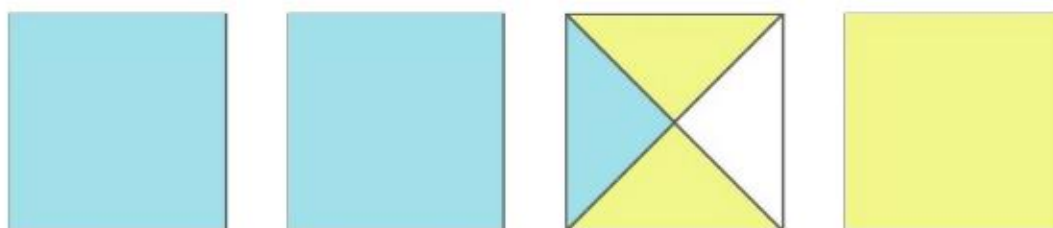


1. Wykonaj podane działanie. Zauważ, że wynik możesz odczytać z rysunku.

a) $\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$



b) $2\frac{1}{4} + 1\frac{2}{4}$



To łatwe! Do licznika dodajemy licznik, a mianownik przepisujemy.



A z odejmowaniem pewnie będzie podobnie...

Przykład 1

Wykonajmy podane dodawanie bez pomocy rysunku.

a) $\frac{3}{7} + \frac{1}{7}$

b) $3\frac{5}{9} + 1\frac{2}{9}$

a) $\frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$

Aby dodać ułamki o jednakowych mianownikach, należy obliczyć sumę liczników, a mianownik pozostawić bez zmian.

b) $3\frac{5}{9} + 1\frac{2}{9} = 4\frac{7}{9}$

Aby dodać liczby mieszane, należy obliczyć sumę części całkowitych oraz sumę części ułamkowych.

2. Oblicz podane sumy, a następnie (jeżeli to możliwe) skróć ułamki i wyłącz całości.

a) $\frac{3}{9} + \frac{2}{9}$

$\frac{5}{13} + \frac{4}{13}$

$\frac{13}{25} + \frac{18}{25}$

b) $\frac{9}{10} + \frac{1}{10}$

$\frac{7}{8} + \frac{5}{8}$

$\frac{10}{17} + \frac{9}{17}$

c) $3\frac{4}{8} + 1\frac{1}{8}$

$2\frac{4}{7} + 3\frac{5}{7}$

$8\frac{16}{20} + 1\frac{1}{20}$

d) $2\frac{4}{5} + 3\frac{3}{5}$

$1\frac{7}{8} + 3\frac{1}{8}$

$7\frac{4}{15} + 2\frac{14}{15}$

Więcej na temat

Czy pamiętasz?

Starożytni Egipcjanie znali tylko **ułamki proste**, czyli ułamki o liczniku równym 1. Każdą inną liczbę pokazującą jakąś część całości przedstawiali w postaci sumy ułamków prostych o różnych mianownikach.

Ułamki $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ często właśnie z tego powodu nazywa się też **ułamkami egipskimi**.

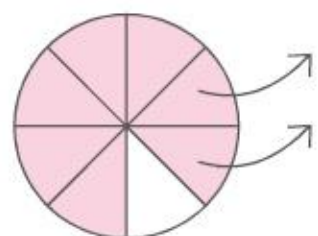
3. Przekonaj się, że:

a) ułamek $\frac{8}{15}$ można przedstawić w postaci sumy ułamków egipskich $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{3}$,

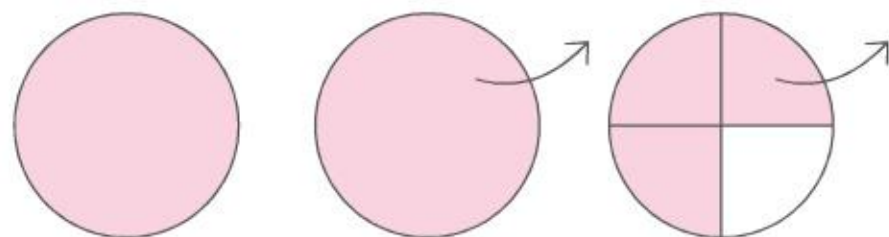
b) ułamek $\frac{3}{4}$ można przedstawić w postaci sumy ułamków egipskich $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{6}$.

4. Wykonaj podane działanie. Wykorzystaj ilustrujący je rysunek.

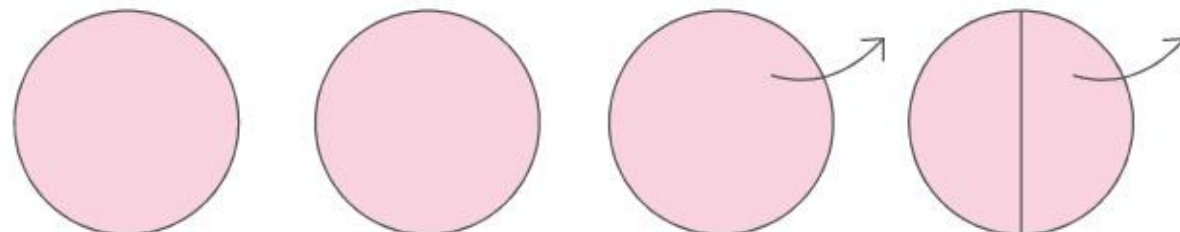
a) $\frac{7}{8} - \frac{2}{8}$



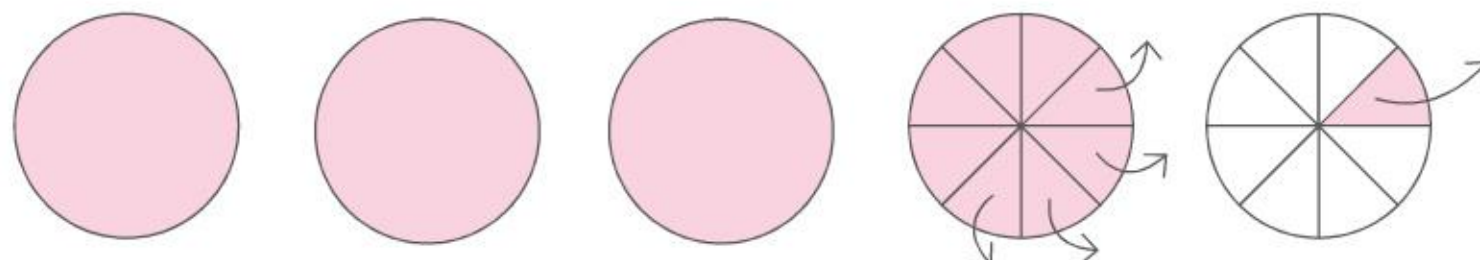
b) $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4}$



c) $4 - 1\frac{1}{2}$



d) $4\frac{1}{8} - \frac{5}{8}$



Przykład 2

Wykonajmy podane odejmowanie bez pomocy rysunku.

a) $\frac{6}{7} - \frac{2}{7}$

b) $3\frac{8}{9} - 1\frac{7}{9}$

c) $3 - \frac{3}{10}$

d) $4\frac{1}{5} - 1\frac{4}{5}$

a) $\frac{6}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$

Aby odjąć ułamki o jednakowych mianownikach, należy obliczyć różnicę ich liczników, a mianownik pozostawić bez zmiany.

b) $3\frac{8}{9} - 1\frac{7}{9} = 2\frac{1}{9}$

Aby odjąć liczby mieszane, należy obliczyć różnicę części całkowitych oraz różnicę części ułamkowych.

c) $3 - \frac{3}{10} = 2\frac{10}{10} - \frac{3}{10} = 2\frac{7}{10}$

Aby odjąć ułamek lub liczbę mieszaną od liczby naturalnej, należy zamienić jedną całość odjemnej na ułamek niewłaściwy i zapisać odjemną w postaci liczby mieszanej.

d) $4\frac{1}{5} - 1\frac{4}{5} = 3\frac{6}{5} - 1\frac{4}{5} = 2\frac{2}{5}$

W tym przypadku nie można odjąć części ułamkowych. Zapisujemy zatem odjemną w postaci innej liczby mieszanej (z mniejszą o 1 liczbą całości i ułamkiem niewłaściwym).

5. Oblicz podane różnice i zapisz wyniki w najprostszej postaci.

a) $\frac{14}{15} - \frac{8}{15}$

b) $6\frac{7}{9} - 2\frac{4}{9}$

c) $1 - \frac{5}{6}$

d) $4\frac{1}{7} - 2\frac{5}{7}$

$\frac{16}{23} - \frac{9}{23}$

$4\frac{3}{10} - \frac{2}{10}$

$2 - \frac{2}{9}$

$5\frac{4}{10} - 2\frac{7}{10}$

$\frac{23}{30} - \frac{17}{30}$

$4\frac{5}{12} - 4\frac{3}{12}$

$6 - 3\frac{12}{13}$

$3\frac{5}{8} - 2\frac{7}{8}$

Zadania

● Każdą z liczb powiększ o $2\frac{4}{7}$.

$\frac{2}{7}$

$\frac{3}{7}$

$\frac{6}{7}$

$4\frac{3}{7}$

$6\frac{5}{7}$

$2\frac{4}{7}$

● Każdą z liczb zmniejsz o $1\frac{4}{9}$.

$2\frac{5}{9}$

$4\frac{8}{9}$

$5\frac{4}{9}$

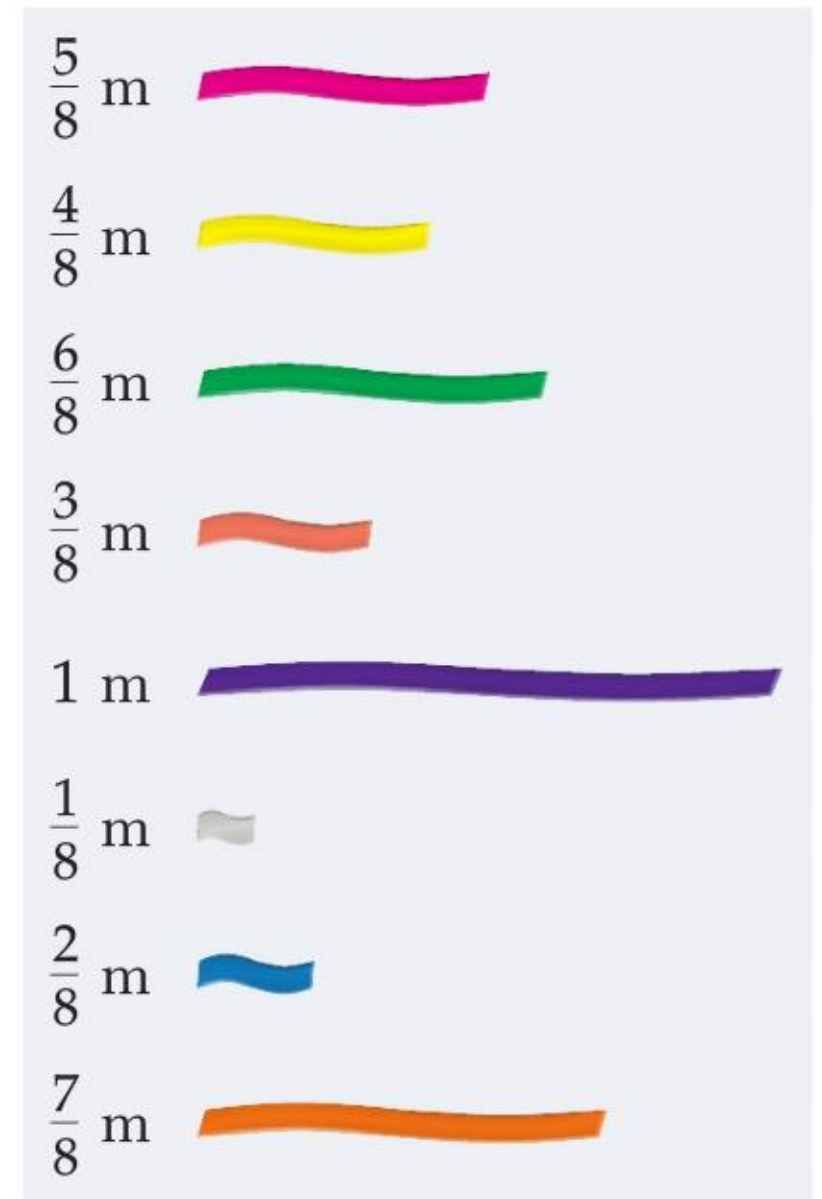
$2\frac{1}{9}$

$3\frac{2}{9}$

$12\frac{7}{9}$

Małgosia ma osiem kolorowych wstążek o długościach podanych na rysunku.

- Wybierz trzy wstążki, które razem mają długość 1 m.
- Jaką długość mają razem trzy najdłuższe wstążki, a jaką trzy najkrótsze?
- Które trzy wstążki mają łączną długość $2\frac{1}{8}$ m? Wskaż co najmniej jeden taki zestaw.



Oblicz.

- $2\frac{5}{8} + 1\frac{4}{8} - 3\frac{1}{8}$
- $7\frac{7}{10} - 3\frac{5}{10} + \frac{9}{10}$
- $10\frac{3}{13} - (2\frac{7}{13} + 5\frac{2}{13})$
- $9\frac{5}{7} - (2\frac{6}{7} - 1\frac{2}{7})$

Odczytaj masy bułek i odpowiedz na pytania.



$5\frac{9}{10}$ dag



$4\frac{7}{10}$ dag



$6\frac{3}{10}$ dag

- Ile ważą razem wszystkie trzy bułki?
- O ile cięższy jest bochenek chleba ważący 50 dag od trzech bułek widocznych na zdjęciach?

Wykonaj polecenia.

- Towar z opakowaniem waży $17\frac{29}{100}$ kg, a samo opakowanie waży $\frac{57}{100}$ kg. Ile waży towar?
- Masa netto pewnego towaru wynosi $8\frac{27}{100}$ kg, a opakowanie tego towaru waży $\frac{89}{100}$ kg. Oblicz masę towaru brutto.

Rozwiąż równanie.

- $x + 2\frac{8}{9} = 3\frac{4}{9}$
- $3\frac{4}{5} + x = 9\frac{2}{5}$
- $x - 3\frac{8}{11} = 4\frac{10}{11}$
- $6 - x = 4\frac{2}{7}$

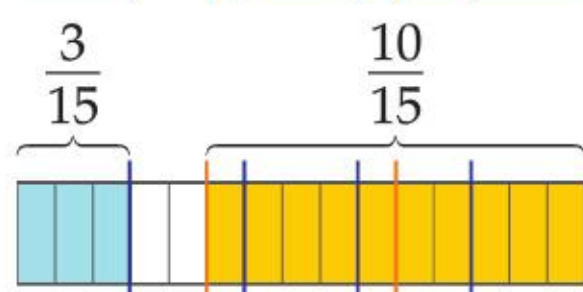
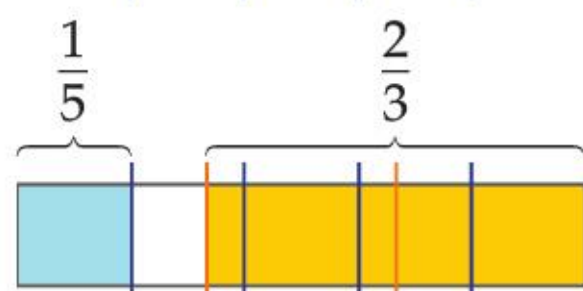
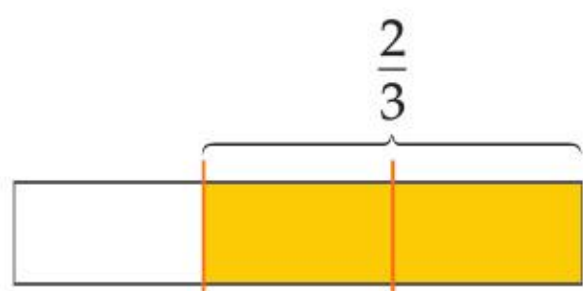


2.8 Dodawanie ułamków o różnych mianownikach

Podejmij temat



Temperatura ciała zdrowego człowieka wynosi $36\frac{6}{10}$ stopnia. Czy wiesz, ile stopni wskazał termometr chorego chłopca?



$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$$

Zaznaczamy $\frac{1}{5}$ prostokąta i (na osobnym rysunku) $\frac{2}{3}$ tego samego prostokąta.

Oba ułamki zaznaczone na jednym rysunku wyglądają tak, jak pokazano na rysunku obok.

Aby zobrazować dodawanie ułamków $\frac{1}{5}$ i $\frac{2}{3}$, prostokąt podzieliliśmy dodatkowo na 15 równych części, ponieważ $\text{NWW}(5, 3) = 15$.

Na ostatnim rysunku niebieskiej części odpowiada ułamek $\frac{3}{15}$, a żółtej części odpowiada ułamek $\frac{10}{15}$.

Zauważmy, że wyjściowe ułamki $\frac{1}{5}$ i $\frac{2}{3}$ sprowadzono do wspólnego mianownika.

Sumę tych ułamków można odczytać z rysunku – wynosi ona $\frac{13}{15}$, ale ułamki o wspólnym mianowniku potrafimy już dodawać bez pomocy rysunku.

Aby dodać ułamki o różnych mianownikach, postępujemy zatem w następujący sposób:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3}{15} + \frac{10}{15} = \frac{13}{15}.$$

Przykład 1

Obliczmy podaną sumę.

a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$

b) $4\frac{1}{2} + 2\frac{3}{7}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3}{4} + \frac{1}{6} &= \\ &= \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

Najmniejszym wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $\text{NWW}(4, 6) = 12$.

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika.

Dodajemy liczniki, a wspólny mianownik przepisujemy bez zmiany.

Aby widoczne było rozszerzanie obu ułamków, powyższe czynności możemy zapisać w następujący sposób:

$$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$$

b) $4\frac{1}{2} + 2\frac{3}{7} =$

$$\begin{aligned} &= 4\frac{7}{14} + 2\frac{6}{14} = \\ &= 6\frac{13}{14} \end{aligned}$$

Najmniejszym wspólnym mianownikiem dla części ułamkowych dodawanych liczb jest 14.

Sprowadzamy części ułamkowe do wspólnego mianownika.

Dodajemy części całkowite oraz części ułamkowe.

Czynności wykonywane podczas tego dodawania można zapisać w następujący sposób:

$$4\frac{1 \cdot 7}{2 \cdot 7} + 2\frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = 4\frac{7}{14} + 2\frac{6}{14} = 6\frac{13}{14}$$

1. Oblicz podane sumy. Wyniki podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$
 $\frac{2}{9} + \frac{1}{3}$
 $\frac{3}{5} + \frac{1}{8}$

b) $\frac{4}{9} + \frac{5}{6}$
 $\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$
 $\frac{7}{10} + \frac{3}{4}$

c) $2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6}$
 $3\frac{1}{4} + 1\frac{2}{5}$
 $7\frac{5}{9} + 2\frac{1}{4}$

d) $3\frac{1}{4} + 2\frac{6}{7}$
 $7\frac{5}{6} + 3\frac{3}{4}$
 $8\frac{5}{6} + 3\frac{3}{10}$

Czyli sprowadzanie do wspólnego mianownika przydaje się i przy porównywaniu, i przy dodawaniu ułamków.

Podejrzewam, że przy odejmowaniu również...





Czy pamiętasz?

Kwadrat magiczny to plansza składająca się z takiej samej liczby kolumn i rzędów oraz z różnych liczb, których suma w każdym rzędzie, w każdej kolumnie i wzdłuż obu przekątnych jest taka sama.



Zadania

- Każdą z liczb powiększ o $4\frac{2}{3}$.

$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{6}$	$1\frac{3}{8}$	$4\frac{2}{9}$	$5\frac{1}{12}$	$6\frac{7}{20}$
---------------	---------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------

- Kwiaty zajmują $\frac{3}{5}$ ogrodu, a warzywa $\frac{2}{7}$ ogrodu. Jaką część ogrodu zajmują razem kwiaty i warzywa?
- Kaktus Małgosi w dniu zakupu miał $12\frac{1}{2}$ cm wysokości. Przez pierwszy rok urósł $3\frac{2}{5}$ cm, a w ciągu drugiego roku $2\frac{7}{10}$ cm. Jaka jest wysokość kaktusa po dwóch latach?
A. $16\frac{7}{10}$ cm B. $17\frac{2}{5}$ cm C. $18\frac{3}{5}$ cm D. $19\frac{3}{10}$ cm

- Sprawdź, czy kwadrat jest magiczny.

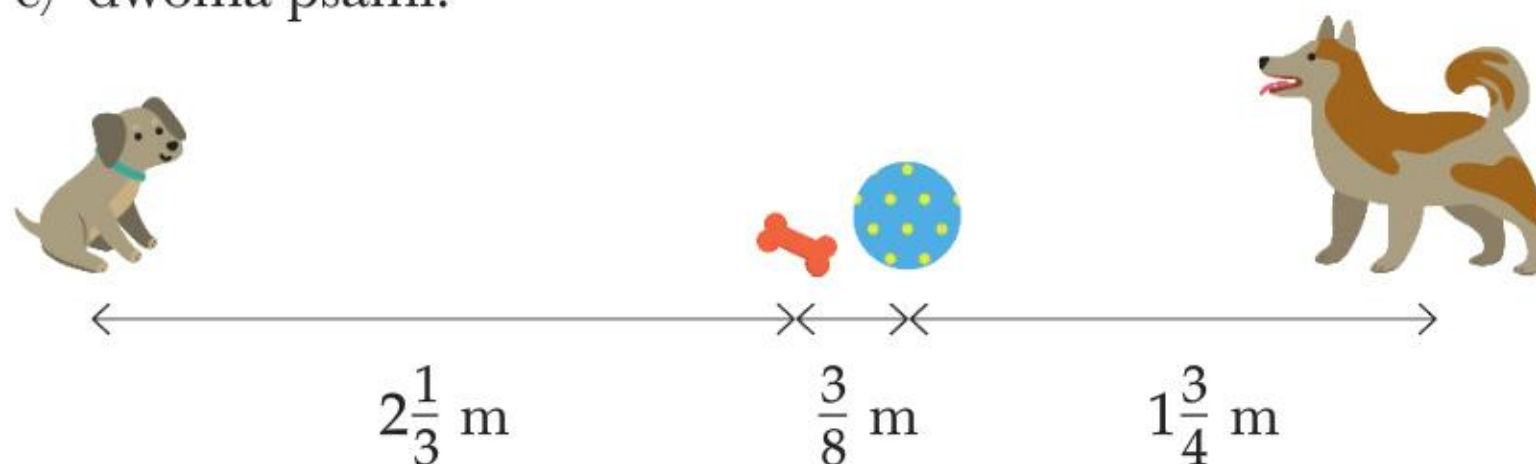
a)

$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$

b)

$3\frac{2}{5}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{10}$
$\frac{3}{4}$	$1\frac{3}{10}$	$2\frac{4}{5}$
$1\frac{7}{20}$	$3\frac{1}{5}$	$1\frac{9}{20}$

- Skorzystaj z danych na rysunku i oblicz odległość między:
a) małym psem a piłką, b) dużym psem a kością,
c) dwoma psami.



- Do dzbanka z sokiem Marysia ma dolać $\frac{5}{8}$ l wody. Odczytaj z rysunku, ile soku jest teraz w dzbanku, i oblicz, ile litrów napoju powstanie po dolaniu wody.

2.9 Odejmowanie ułamków o różnych mianownikach

Podejmij temat

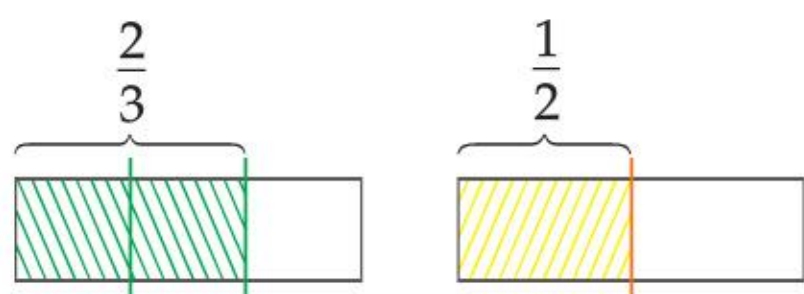


Jaki ułamek godziny stanowi lekcja? Za pomocą jakiego działania obliczymy czas, który zajęła nauka odejmowania ułamków, o której mówi chłopiec?

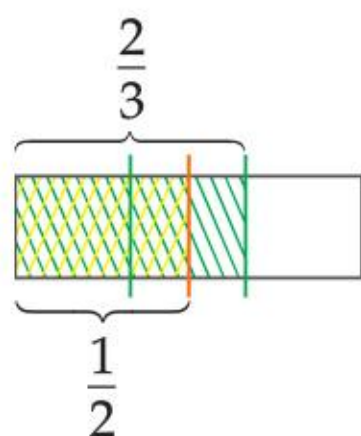


Co robiliście dziś na lekcji matematyki?

Przez $\frac{1}{3}$ godziny pisaliśmy kartkówkę. Potem uczyliśmy się odejmować ułamki.

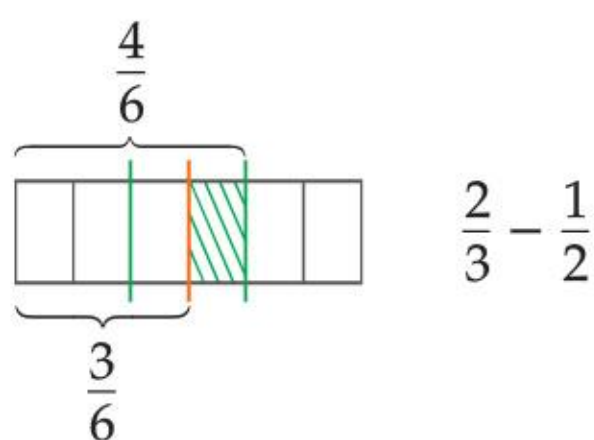


Zaznaczamy $\frac{2}{3}$ prostokąta i (na osobnym rysunku) $\frac{1}{2}$ tego samego prostokąta.



Oba ułamki zaznaczone na jednym rysunku wyglądają tak, jak pokazano na rysunku obok.

Skoro wykonujemy odejmowanie, to na rysunku z części zakreskowanej na zielono musimy „zabrać” część zakreskowaną na żółto. Wynik odejmowania to część zakreskowana tylko na zielono. Jaka to część całego prostokąta?



Aby odpowiedzieć na pytanie, czyli zobrazować odejmowanie ułamków $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$, prostokąt podzieliliśmy dodatkowo na 6 równych części, ponieważ $\text{NWW}(3, 2) = 6$.

Na ostatnim rysunku pierwotnej (całej) zielonej części odpowiada ułamek $\frac{4}{6}$, a żółtej części odpowiada ułamek $\frac{3}{6}$. Zauważmy, że wyjściowe ułamki $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$ sprowadzono do wspólnego mianownika. Różnicę tych ułamków można odczytać z rysunku – wynosi ona $\frac{1}{6}$, ale ułamki o wspólnym mianowniku potrafimy już odejmować bez pomocy rysunku.

Aby odjąć ułamki o różnych mianownikach, postępujemy zatem w następujący sposób:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}.$$

Przykład 1

Obliczmy podaną różnicę.

a) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$

b) $6\frac{5}{6} - 2\frac{1}{4}$

a) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} =$

Ustalamy wspólny mianownik dla obu ułamków. Najmniejszym jest liczba 15.

$= \frac{12}{15} - \frac{10}{15} =$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika.

$= \frac{2}{15}$

Odejmujemy liczniki, a wspólny mianownik przepisujemy bez zmiany.

Aby widoczne było sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika, powyższe czynności możemy zapisać w następujący sposób (w praktyce rozszerzanie pokazane strzałkami wykonujemy w pamięci):

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$$

b) $6\frac{5}{6} - 2\frac{1}{4} =$

Najmniejszym wspólnym mianownikiem ułamków $\frac{5}{6}$ i $\frac{1}{4}$ jest 12.

$= 6\frac{10}{12} - 2\frac{3}{12} =$

Sprowadzamy części ułamkowe do wspólnego mianownika.

$= 4\frac{7}{12}$

Odejmujemy części całkowite oraz części ułamkowe.

Powyższe odejmowanie można zapisać w następujący sposób (w praktyce rozszerzanie pokazane strzałkami wykonujemy w pamięci):

$$6\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{2} - 2\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = 6\frac{10}{12} - 2\frac{3}{12} = 4\frac{7}{12}$$

1. Oblicz podane różnice. W tym celu sprowadź ułamki do wspólnego mianownika. Wyniki podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$

b) $2\frac{3}{7} - 1\frac{2}{5}$

c) $1\frac{3}{5} - \frac{7}{10}$

$\frac{5}{6} - \frac{1}{8}$

$7\frac{3}{4} - 2\frac{1}{6}$

$4\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

$\frac{7}{9} - \frac{2}{3}$

$5\frac{5}{8} - 2\frac{1}{4}$

$5\frac{3}{8} - 1\frac{2}{5}$

Miałaś rację, że sprowadzenie do wspólnego mianownika przyda się też przy odejmowaniu.

Nietrudno było się tego domyślić 😊



Zadania

- Każdą z liczb zmniejsz o $2\frac{2}{5}$.

$$2\frac{2}{3}$$

$$3\frac{4}{9}$$

$$4\frac{5}{8}$$

$$3\frac{2}{7}$$

$$5\frac{1}{6}$$

$$6\frac{3}{10}$$

- Zawartość pudełka waży $11\frac{1}{4}$ kg, a pudełko wraz z zawartością $12\frac{1}{5}$ kg. Ile waży puste pudełko?
- Okno w pokoju Marka ma szerokość $2\frac{11}{25}$ m, a okno kuchenne jest o $\frac{7}{10}$ m węższe. Jaka szerokość ma okno w kuchni?

- Kasia odrobiła pracę domową. Znajdź działania, w których dziewczynka popełniła błąd, i wykonaj je poprawnie.

- Wykonaj polecenia.

- a) Od sumy liczb $5\frac{2}{3}$ i $3\frac{1}{2}$ odejmij $6\frac{7}{10}$.
- b) Różnicę liczb $7\frac{3}{4}$ i $2\frac{5}{6}$ powiększ o $1\frac{3}{8}$.
- c) Sumę liczb $2\frac{1}{5}$ i $4\frac{5}{6}$ pomniejsz o $3\frac{9}{10}$.
- d) Do różnicy liczb $5\frac{1}{8}$ i $2\frac{3}{5}$ dodaj $4\frac{11}{20}$.

Praca domowa

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{7}{18}$$

$$4\frac{3}{8} - 2\frac{1}{4} = 2\frac{2}{4}$$

- Jeżeli różnicę liczb $17\frac{3}{8}$ i $9\frac{5}{6}$ powiększymy o $10\frac{3}{4}$, to otrzymamy

A. $18\frac{7}{24}$

B. $17\frac{5}{24}$

C. $18\frac{5}{18}$

D. $16\frac{7}{24}$

- Wykonaj działania.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)$
 $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$

c) $1\frac{1}{2} + 1\frac{2}{5} + 1\frac{3}{4}$
 $4\frac{3}{5} + 2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{10}$

- Rozwiąż równanie.

a) $x + 7\frac{3}{4} = 10\frac{5}{6}$

b) $x - 8\frac{2}{3} = 5\frac{1}{6}$

c) $6\frac{1}{2} - x = \frac{4}{5}$

d) $\frac{5}{8} + x = 1\frac{3}{7}$

2.10 Mnożenie ułamków zwykłych przez liczby naturalne

Podejmij temat

Muszę dodać do siebie 45 takich samych ułamków. Nie mam już miejsca na kartce, żeby dokończyć to działanie ☹

Przecież zamiast dodawać, możesz pomnożyć!

Ale jak?



Przykład 1

Kredki sprzedawane są w pudełkach o różnej szerokości, w zależności od liczby kolorów. Tak jak pokazano na rysunku, jedna kredka zajmuje $\frac{3}{5}$ cm.

Obliczmy szerokość pudełka, w którym obok siebie ułożonych jest:

- a) 6 kredek, b) 10 kredek.



$$\text{a) } \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3+3+3+3+3+3}{5} = \frac{6 \cdot 3}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

Pudełko, w którym znajduje się 6 kredek, ma więc szerokość $3\frac{3}{5}$ cm.

Zauważmy, że dodawanie jednakowych liczb można zastąpić mnożeniem, zatem sumę $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}$ możemy zapisać w postaci iloczynu $6 \cdot \frac{3}{5}$.

Oba powyższe działania dają taki sam wynik, więc $6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6 \cdot 3}{5}$.

$$\text{b) } \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3+3+3+3+3+3+3+3+3+3}{5} = \frac{10 \cdot 3}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Pudełko, w którym znajduje się 10 kredek, ma szerokość 6 cm.

W tym przypadku dodawanie jednakowych składników również da się zastąpić mnożeniem, czyli sumę $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5}$ możemy zapisać w postaci iloczynu $10 \cdot \frac{3}{5}$.

Oba powyższe działania dają taki sam wynik, a zatem $10 \cdot \frac{3}{5} = \frac{10 \cdot 3}{5}$.

Przykład 1 pokazuje, w jaki sposób należy mnożyć liczbę naturalną przez ułamek:

$$6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6 \cdot 3}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

$$10 \cdot \frac{3}{5} = \frac{10 \cdot 3}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

Aby pomnożyć liczbę naturalną przez ułamek, należy tę liczbę pomnożyć przez licznik ułamka, a mianownik przepisać bez zmian.



Mnożenie jest przemienne, dlatego tak samo mnożymy ułamek przez liczbę naturalną:

$$\frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{3 \cdot 6}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{5} \cdot 10 = \frac{3 \cdot 10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

1. Wykonaj mnożenie. Jeżeli wynik jest ułamkiem niewłaściwym, wyłącz całości.

a) $\frac{3}{4} \cdot 5$

b) $\frac{5}{8} \cdot 9$

c) $8 \cdot \frac{4}{9}$

d) $\frac{4}{5} \cdot 0$

e) $4 \cdot \frac{5}{7}$

f) $10 \cdot \frac{4}{7}$

g) $\frac{2}{7} \cdot 6$

h) $4 \cdot \frac{9}{10}$

2. Wykonaj mnożenie. Wynik podaj w najprostszej postaci.

a) $1\frac{5}{6} \cdot 4$

b) $5 \cdot 2\frac{3}{10}$

c) $4\frac{2}{3} \cdot 2$

d) $1\frac{4}{5} \cdot 8$

e) $3 \cdot 2\frac{1}{4}$

f) $3\frac{1}{4} \cdot 2$

g) $1\frac{2}{9} \cdot 3$

h) $6 \cdot 1\frac{3}{4}$



Jeżeli chcemy pomnożyć liczbę mieszaną przez liczbę naturalną, musimy pamiętać o tym, aby najpierw liczbę mieszaną zamienić na ułamek niewłaściwy.

W niektórych przypadkach mnożenie ułamka zwykłego przez liczbę naturalną można sobie ułatwić przez odpowiednie skrócenie przed wykonaniem mnożenia.

Przykład 2

Wykonajmy mnożenie $\frac{4}{15} \cdot 10$.

Możemy to działanie wykonać tak jak wcześniej: $\frac{4}{15} \cdot 10 = \frac{4 \cdot 10}{15} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$,
możemy jednak ułatwić sobie zadanie, jeśli przed mnożeniem wykonamy skrócenie:

$\frac{4}{15} \cdot 10 = \frac{4 \cdot \cancel{10}^2}{\cancel{15}_3} = \frac{4 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ Skracamy, dzieląc liczby 10 i 15 przez 5. Otrzymujemy odpowiednio 2 i 3. Dopiero teraz mnożymy liczby w liczniku. Na koniec wyłączamy całości.

Można też wykonać skracanie na wcześniejszym etapie, bez zapisywania liczby naturalnej w liczniku ułamka: $\frac{4}{\cancel{15}_3} \cdot \cancel{10}^2 = \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{4 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$



Po nabraniu wprawy, podczas obliczania iloczynu ułamka zwykłego i liczby naturalnej część obliczeń możemy wykonywać w pamięci, np. $\frac{3}{\cancel{8}_1} \cdot \cancel{14}_2 = 6$.

3. Oblicz podany iloczyn. Pamiętaj o skracaniu przed wykonaniem mnożenia.

a) $8 \cdot \frac{7}{20}$

b) $12 \cdot \frac{3}{4}$

c) $25 \cdot \frac{4}{5}$

d) $\frac{5}{6} \cdot 9$

e) $\frac{11}{24} \cdot 16$

f) $\frac{4}{27} \cdot 18$

Przykład 3

Obliczmy iloczyn $5\frac{1}{6} \cdot 9$.

$$5\frac{1}{6} \cdot 9 =$$

$$= \frac{31}{6} \cdot 9 = \frac{31 \cdot \cancel{9}^3}{\cancel{6}_2} =$$

$$= \frac{93}{2} = 46\frac{1}{2}$$

Najpierw liczbę mieszaną zamieniamy na ułamek niewłaściwy.

Następnie skracamy ułamek, dzieląc liczby 9 i 6 przez 3. Otrzymujemy odpowiednio 3 i 2.

Teraz mnożymy liczby w liczniku. Na koniec wyłączamy całości.

4. Oblicz podany iloczyn. Przed pomnożeniem wykonaj skracanie.

a) $8 \cdot 1\frac{1}{12}$

b) $1\frac{3}{10} \cdot 8$

c) $20 \cdot 3\frac{7}{10}$

d) $2\frac{4}{5} \cdot 25$

e) $7 \cdot 3\frac{2}{7}$

f) $9 \cdot 6\frac{4}{9}$

Zadania

- Każdą z liczb powiększ 6 razy.

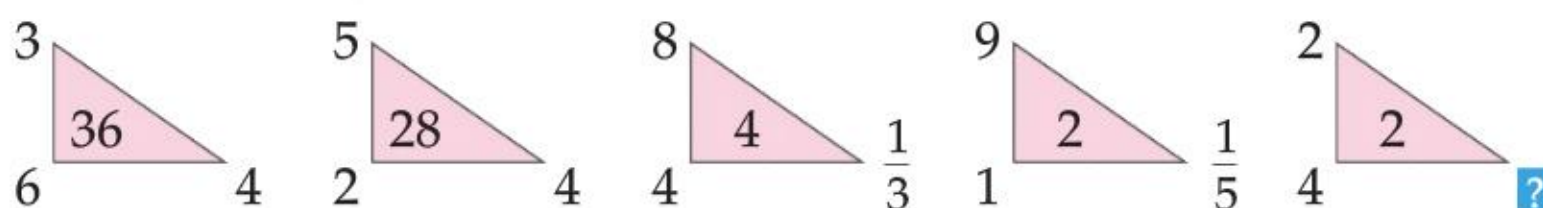
$\frac{2}{5}$	$1\frac{5}{7}$	$2\frac{1}{5}$	$\frac{7}{8}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{8}{15}$	$1\frac{11}{30}$	$2\frac{5}{9}$	$4\frac{3}{4}$
---------------	----------------	----------------	---------------	----------------	-----------------	------------------	----------------	----------------

- Liczbę $3\frac{1}{5}$ zmniejszono o $2\frac{5}{6}$, a następnie wynik powiększono 12 razy. Otrzymano liczbę
A. $19\frac{1}{5}$ B. $13\frac{19}{30}$ C. $13\frac{3}{5}$ D. $4\frac{2}{5}$
- Jeden krok Izy ma $\frac{3}{5}$ m. Jaką odległość pokona Iza po 20 krokach, a jaką – po 50?
- Monika zapisała pięć liczb, z których każda kolejna była 4 razy większa od poprzedniej. Pierwszą liczbą był ułamek $\frac{3}{20}$. Zapisz wszystkie liczby, jakie otrzymała Monika.
- Na balkonie mama ustawiła 8 jednakowych doniczek. W każdej mieści się $\frac{3}{10}$ kg ziemi. Czy do posadzenia kwiatów wystarczy mamie torebka ziemi o masie 2 kg? Odpowiedź uzasadnij.
- Możemy przyjąć, że w ciągu doby włos rośnie ok. $\frac{2}{3}$ mm.
O ile milimetrów dłuższe będą twoje włosy za tydzień?
A o ile centymetrów będą dłuższe za miesiąc?
Odpowiedz na pytania, zakładając, że w tym czasie nie będziesz obcinać włosów.

Oblicz.

- a) $2 \cdot \frac{3}{4} + 1\frac{1}{4}$ b) $5 \cdot \left(\frac{2}{3} + 3\frac{2}{3}\right)$
c) $2 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5}$ d) $6 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right)$
e) $\frac{3}{10} \cdot 4 + 2\frac{1}{5} \cdot 2$ f) $\left(1\frac{6}{7} - 1\frac{1}{3}\right) \cdot 14$

- Odkryj zasadę, zgodnie z którą powstały kolejne rysunki, i oblicz brakującą liczbę.



2.11 Obliczanie ułamka danej liczby

Podejmij temat



A jaki ty masz pomysł na rozwiązanie problemu chłopca?



Mama pozwoliła mi wydać na słodczyce tylko $\frac{1}{4}$ tej kwoty, czyli...



Przykład 1

Ania zapisała $\frac{2}{5}$ zeszytu 60-kartkowego. Ile kartek zapisała?

Jak pamiętamy z definicji ułamka, mianownik wskazuje, na ile równych części podzielono całość, a licznik – ile tych części wzięto.

Zeszyt ma 60 kartek, więc liczbę kartek dzielimy na 5 równych części.

W każdej takiej części jest zatem 12 kartek (bo $60 : 5 = 12$), a dwie takie części to 24 kartki (bo $2 \cdot 12 = 24$).

Ania zapisała więc 24 kartki.

W jaki sposób obliczenia te można zapisać krócej?

$$\frac{2}{5} \text{ liczby } 60 \text{ to } \frac{2}{5} \cdot 60 = \frac{2 \cdot \cancel{60}^{12}}{\cancel{5}_1} = \frac{24}{1} = 24$$

Aby obliczyć ułamek danej liczby, należy pomnożyć ułamek przez tę liczbę.

1. Oblicz:

a) $\frac{4}{5}$ liczby 20,

b) $\frac{5}{6}$ liczby 42,

c) $\frac{7}{8}$ liczby 0,

d) $5\frac{1}{2}$ liczby 40,

e) $1\frac{1}{6}$ liczby 54,

f) $2\frac{3}{4}$ liczby 6.

2. Zamień złote na grosze i oblicz:

- a) $\frac{7}{8}$ kwoty 4 zł, b) $\frac{4}{9}$ kwoty 4 zł 50 gr, c) $2\frac{3}{5}$ kwoty 1 zł,
d) $\frac{4}{15}$ kwoty 3 zł, e) $\frac{7}{12}$ kwoty 3 zł 60 gr, f) $1\frac{5}{6}$ kwoty 2 zł 40 gr.

3. Zamień na centymetry i oblicz:

- a) $\frac{5}{6}$ długości 3 m, b) $\frac{9}{20}$ długości 2 m, c) $\frac{3}{8}$ długości 4 dm,
d) $4\frac{7}{10}$ długości 5 dm, e) $\frac{7}{15}$ długości 3 dm, f) $1\frac{1}{25}$ długości 1 m.

Zadania

- Michał i Magda czytają książkę, która ma 270 stron. Chłopiec przeczytał już $\frac{4}{9}$ książki, a dziewczynka $\frac{5}{6}$. Ile stron przeczytał Michał, a ile – Magda?
- W sklepie znajduje się 738 butelek z wodą, z czego $\frac{7}{18}$ to butelki z wodą gazowaną. Ile butelek wody gazowanej jest w tym sklepie?
A. 5166 B. 2673 C. 287 D. 41
- Ania ma psa i kota. Oblicz, ile waży pies, a ile kot dziewczynki, jeżeli wiesz, że Ania waży 36 kg, masa psa stanowi $\frac{4}{9}$ jej masy, a masa kota to $\frac{9}{32}$ masy psa.
- Skorzystaj z informacji umieszczonej na marginesie i odpowiedz na pytania.
a) Jeśli dłuższy bok flagi Polski ma 112 cm, to ile centymetrów ma jej krótszy bok?
b) Jaki ułamek długości węgierskiej flagi stanowi jej szerokość?
- W klasach Va, Vb i Vc jest razem 84 uczniów, z czego $\frac{5}{12}$ to chłopcy. Na zajęcia zespołu tanecznego uczęszcza $\frac{2}{7}$ dziewcząt z klas piątych. Ile w klasach piątych jest dziewcząt? A ile z nich tańczy w zespole?

Ciekawe!



Flagi większości państw mają kształt prostokąta, ale szerokość różnych flag może stanowić inny ułamek ich długości. Na przykład flaga Polski jest prostokątem, którego szerokość stanowi $\frac{5}{8}$ długości, a flaga Węgier jest prostokątem, którego jeden wymiar jest 2 razy większy od drugiego.

Oblicz, ile to:

a) minut:

$\frac{3}{5}$ godziny, $\frac{2}{3}$ kwadransa, $\frac{17}{30}$ godziny, $2\frac{1}{5}$ kwadransa, $1\frac{7}{12}$ godziny;

b) centymetrów:

$\frac{2}{5}$ decymetra, $\frac{3}{4}$ metra, $2\frac{7}{10}$ decymetra, $\frac{19}{20}$ metra, $2\frac{3}{50}$ metra;

c) dni:

$\frac{2}{7}$ tygodnia, $\frac{2}{3}$ kwietnia, $\frac{1}{3}$ roku przestępnego, $\frac{3}{10}$ czerwca, $3\frac{3}{7}$ tygodnia;

d) dekagramów:

$\frac{9}{10}$ kilograma, $1\frac{1}{4}$ kilograma, $\frac{8}{25}$ kilograma, $\frac{1}{100}$ tony, $5\frac{3}{20}$ kilograma.

Pewnego roku w pensjonacie Rybitwa wynajęło pokoje 480 turystów, z których $\frac{1}{6}$ spędzała tu urlop w czerwcu, $\frac{2}{5}$ w lipcu, a $\frac{3}{10}$ w sierpniu.

a) Ilu turystów zatrzymało się w tym pensjonacie w każdym z podanych miesięcy?

b) Ilu turystów przyjechało tego roku do pensjonatu Rybitwa poza tymi miesiącami?

Trasa rajdu jeździeckiego nad morzem miała długość 28 km.

Pewna część szlaku prowadziła przez plażę, $\frac{3}{8}$ trasy – przez las, a $\frac{1}{7}$ wiodła przez park krajobrazowy. Ile kilometrów jeźdźcy przejechali konno plażą?

Pewnego dnia Hania spędziła w szkole $5\frac{1}{2}$ godziny. Lekcje zajęły $\frac{9}{11}$ tego czasu, a pozostały czas stanowiły przerwy.

Zamień godziny na minuty i oblicz, ile czasu tego dnia Hania spędziła na przerwach.

Państwo Kowalscy postanowili podzielić swoje miesięczne zarobki, wynoszące łącznie 4200 zł, w następujący sposób:

$\frac{2}{5}$ przeznaczyli na żywność, $\frac{1}{4}$ na opłaty stałe, $\frac{2}{7}$ na odzież, zaś $\frac{1}{10}$ miała być wpłacona na konto oszczędnościowe.

a) Oblicz kwotę, jaką państwo Kowalscy chcieli przeznaczyć na żywność, a jaką – na odzież.

b) Sprawdź, czy dobrze zaplanowali swoje wydatki. Odpowiedź uzasadnij.



2.12 Dzielenie ułamków przez liczby naturalne

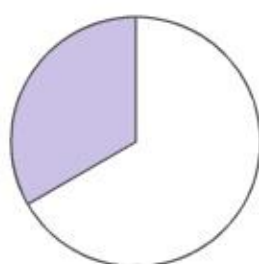
Podejmij temat



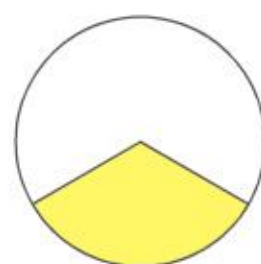
Ewa z koleżankami chciała zagrać w pewną grę. Miała notować wyniki. „Narysuj tabelkę” – poradziła Ola. Ewa zmierzyła kartkę. „Szerokość kartki to $12\frac{1}{2}$ cm. Jak ją podzielić na 5 równych części?” – zastanawiała się dziewczynka. Czy potrafisz obliczyć, jaką szerokość powinny mieć kolumny tabelki rysowanej przez Ewę?



Ania, Maciek i Romek to trojaczki, dlatego wspólnie obchodzą urodziny. Mama upiekła dla nich jeden duży tort i podzieliła go na 3 równe części. Każdy solenizant miał więc $\frac{1}{3}$ tortu.



część Ani

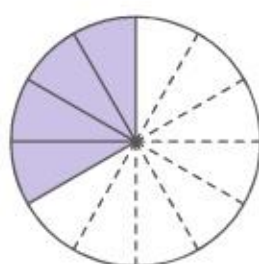


część Maćka



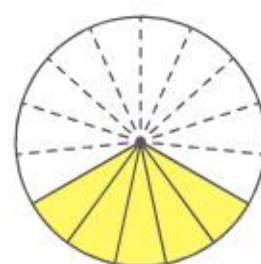
część Romka

Ania zaprosiła 3 koleżanki, zatem swój kawałek tortu podzieliła na 4 równe części. Maciek zaprosił 4 kolegów, więc swój kawałek tortu podzielił na 5 równych części, a do Romka przyszedł 1 kolega, dlatego swój kawałek tortu chłopiec podzielił na 2 równe części.



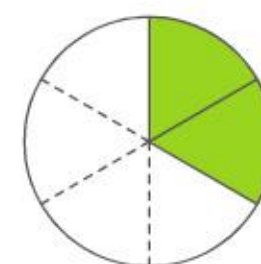
podział części Ani

$$\frac{1}{3} : 4 = \frac{1}{12}$$



podział części Maćka

$$\frac{1}{3} : 5 = \frac{1}{15}$$



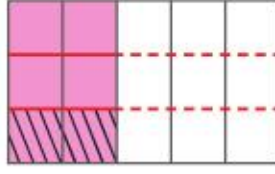
podział części Romka

$$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$$

Każda z części otrzymanych przez Anię to $\frac{1}{12}$ całego tortu, każda z części Maćka to $\frac{1}{15}$ tortu, a każda z części Romka – to $\frac{1}{6}$ tortu.

1. Wykonaj dzielenie. Pomogą ci w tym rysunki. Na każdym z nich różowym kolorem zaznaczono ułamek prostokąta (to jest dzielna). Podzielono go czerwoną linią/liniami na części (to jest dzielnik). Zakreskowano jedną z części otrzymanych z podziału, czyli wynik dzielenia (to jest szukany iloraz). Porównaj wyniki obu działań zapisanych z lewej i prawej strony każdego z rysunków.

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2}$$


$$\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5 \cdot 3}$$


$$\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{2 \cdot 4}$$


Zauważ, że dzielenie ułamka przez liczbę naturalną i mnożenie mianownika tego ułamka przez tę liczbę daje taki sam wynik:

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4 \cdot 2}$$

$$\frac{2}{5} : 3 = \frac{2}{5 \cdot 3}$$

$$\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{2 \cdot 4}$$

Aby podzielić ułamek przez liczbę naturalną, należy pomnożyć mianownik tego ułamka przez tę liczbę.

Ciekawe!

Każdy iloraz można zapisać w postaci ułamka, a zatem np. iloraz $\frac{5}{6} : 3$ można zapisać w postaci ułamka $\frac{5}{18}$.

Ułamek, w którego liczniku lub mianowniku znajdują się ułamki lub liczby mieszane (może być tak i w liczniku, i w mianowniku), nazywamy **ułamkiem piętrowym**.

$$\frac{1\frac{2}{5}}{3} \quad \frac{7}{4\frac{1}{5}} \quad \frac{2\frac{2}{3}}{5\frac{1}{2}}$$

Przykład 1

Obliczmy iloraz.

a) $\frac{3}{8} : 5$

b) $\frac{9}{10} : 6$

c) $2\frac{1}{3} : 5$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3}{8} : 5 &= \\ &= \frac{3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{40} \end{aligned}$$

Dzielenie zastępujemy mnożeniem mianownika przez 5.

Wykonujemy mnożenie.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{9}{10} : 6 &= \\ &= \frac{9}{10 \cdot 6} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Dzielenie zastępujemy mnożeniem mianownika przez 6.

Skracamy ułamek (dzielimy 9 i 6 przez 3) i wykonujemy mnożenie.

$$\begin{aligned} \text{c) } 2\frac{1}{3} : 5 &= \\ &= \frac{7}{3} : 5 = \\ &= \frac{7}{3 \cdot 5} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

Liczbę mieszaną zamieniamy na ułamek niewłaściwy.

Dzielenie zastępujemy mnożeniem mianownika przez 5.

Wykonujemy mnożenie.

2. Oblicz podane ilorazy. Wyniki podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{5}{6} : 3$

$\frac{3}{7} : 5$

$\frac{8}{9} : 7$

c) $1\frac{2}{3} : 4$

$2\frac{3}{5} : 3$

$6\frac{1}{2} : 5$

b) $\frac{3}{4} : 6$

$\frac{5}{8} : 15$

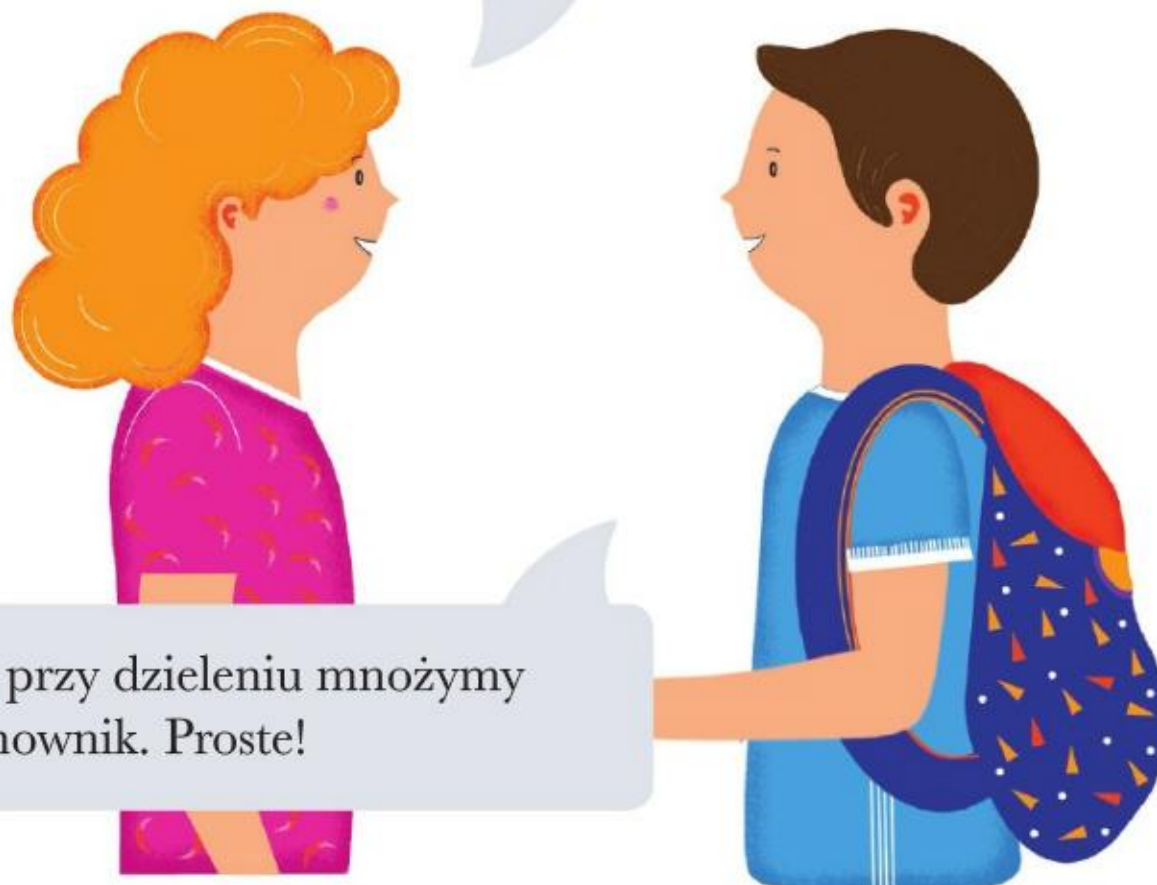
$\frac{6}{7} : 3$

d) $2\frac{4}{5} : 7$

$3\frac{1}{3} : 5$

$1\frac{1}{8} : 15$

Łatwo zapamiętać: przy mnożeniu mnożymy licznik...



... a przy dzieleniu mnożymy mianownik. Proste!

Zadania

- Każdą z liczb zmniejsz 5 razy.

$6\frac{2}{3}$

$1\frac{1}{9}$

$\frac{5}{8}$

$\frac{25}{31}$

$2\frac{2}{9}$

$\frac{10}{13}$

- Do 5 szklanek rozlano $1\frac{1}{2}$ litra soku w taki sposób, żeby w każdym naczyniu było tyle samo soku. Ile go było w każdej szklance?

- Sznurek o długości $4\frac{4}{5}$ m pocięto na 6 jednakowych kawałków. Jaka jest długość każdego z nich?

A. $\frac{2}{5}$ m

B. $\frac{3}{5}$ m

C. $1\frac{1}{5}$ m

D. $\frac{4}{5}$ m

- Liczbę $5\frac{1}{4}$ zmniejszono 3 razy. Otrzymany wynik powiększono o 3. Jaką liczbę uzyskano?

- Liczbę $1\frac{5}{7}$ zmniejszono 3 razy, a następnie wynik powiększono 8 razy. Jaką liczbę otrzymano?

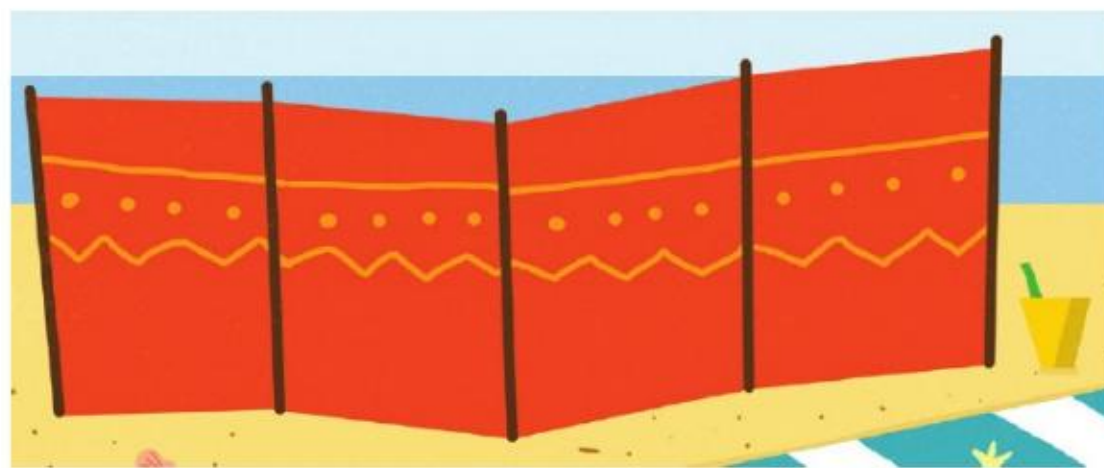
A. $\frac{32}{56}$

B. $2\frac{19}{21}$

C. $4\frac{4}{7}$

D. $8\frac{40}{21}$

- Z materiału i pięciu palików zrobiono parawan plażowy. Jego długość wynosi $3\frac{3}{5}$ m. Jaka jest odległość między palikami?



- Rozwiąż równanie.

a) $6 \cdot x = 16\frac{1}{2}$

b) $x \cdot 12 = 7\frac{1}{5}$

Podsumowanie działu 2

Ważne pojęcia

ułamek nieskracalny	wspólny mianownik ułamków	ułamek danej liczby
---------------------	---------------------------	---------------------

- Jeżeli skrócimy ułamek przez NWD licznika i mianownika, to otrzymamy ułamek nieskracalny.
 $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$
- Jeżeli rozszerzymy dwa ułamki tak, aby w mianownikach znalazła się taka sama liczba, to mówimy, że ułamki zostały sprowadzone do wspólnego mianownika.
 $\frac{1}{4} \text{ i } \frac{1}{6} \rightarrow \frac{3}{12} \text{ i } \frac{2}{12}, \frac{6}{24} \text{ i } \frac{4}{24} \text{ itd.}$
- Najmniejszy wspólny mianownik ułamków to NWW mianowników tych ułamków.
 $\frac{1}{6} \text{ i } \frac{3}{8} \rightarrow \frac{4}{24} \text{ i } \frac{9}{24}$
- Aby porównać ułamki, które nie mają ani jednakowych liczników, ani jednakowych mianowników, najczęściej trzeba najpierw sprowadzić je do wspólnego mianownika.
 $\frac{4}{5} \text{ ? } \frac{6}{7} \rightarrow \frac{28}{35} < \frac{30}{35}$
- Aby dodać lub odjąć ułamki o różnych mianownikach, najpierw należy te ułamki sprowadzić do wspólnego mianownika.
 $\frac{1}{4} + \frac{7}{12} = \frac{3}{12} + \frac{7}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$
 $\frac{9}{11} - \frac{1}{3} = \frac{27}{33} - \frac{11}{33} = \frac{16}{33}$
- Aby pomnożyć liczbę naturalną przez ułamek, trzeba tę liczbę pomnożyć przez licznik ułamka, a mianownik przepisać bez zmian.
 $3 \cdot \frac{4}{17} = \frac{3 \cdot 4}{17} = \frac{12}{17}$
- Aby obliczyć ułamek danej liczby, należy pomnożyć ułamek przez tę liczbę.
 $\frac{3}{4} \text{ liczby } 8 \text{ to } \frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{3 \cdot 8}{4} = \frac{24}{4} = 6$
- Aby podzielić ułamek przez liczbę naturalną, trzeba pomnożyć mianownik tego ułamka przez tę liczbę.
 $\frac{9}{11} : 6 = \frac{9}{11 \cdot 6} = \frac{3}{11 \cdot 2} = \frac{3}{22}$

Czy już umiesz?

- 1 Która z dziewcząt ma najbliżej do szkoły?

A. Asia
B. Beata
C. Celina
D. Danka



- 2 Który z podanych ułamków znajduje się na osi liczbowej między ułamkami $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$?



A. $\frac{10}{12}$ B. $\frac{4}{24}$ C. $\frac{19}{24}$ D. $\frac{9}{12}$

- 3 Poniżej przedstawiono dwa ułamki, których liczniki i mianowniki opisano słownie. Zastąp opisy odpowiednimi liczbami i oblicz sumę otrzymanych ułamków.

$\frac{\text{najmniejsza liczba pierwsza}}{\text{największa jednocyfrowa liczba złożona}}$

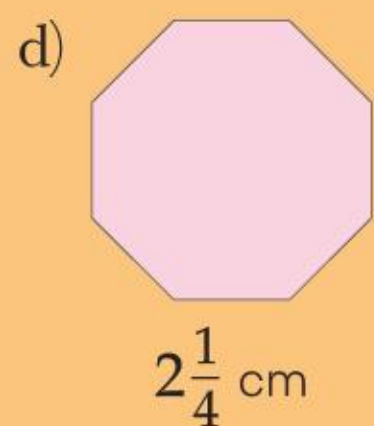
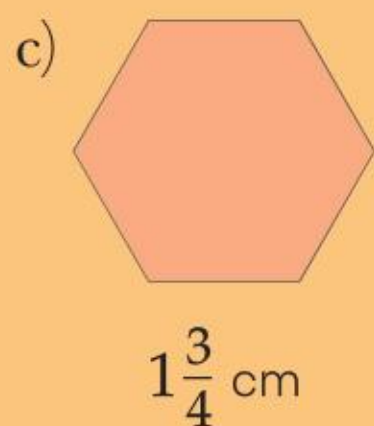
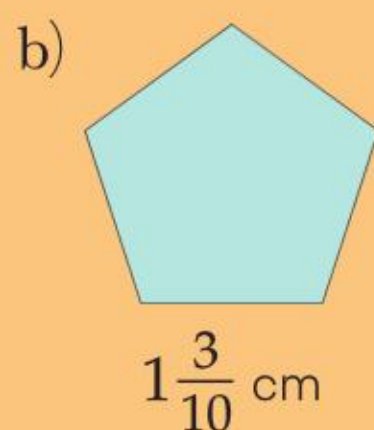
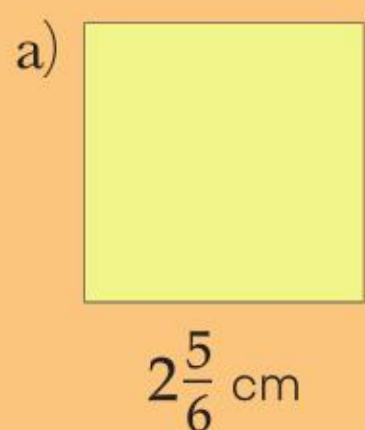
$\frac{\text{liczba jednocyfrowa większa od zera i podzielna przez pięć}}{\text{największa jednocyfrowa liczba pierwsza}}$

- 4 Z trzech liczb każda następna jest o $\frac{4}{5}$ większa od poprzedniej. Największa jest równa $4\frac{1}{3}$. Znajdź pozostałe liczby i oblicz sumę wszystkich trzech.

- 5 Harcerze ze Szczecina spędzali wakacje w Bieszczadach. Pewnego dnia, podczas wędrowki górskim szlakiem w kierunku na Halicz, dotarli do miejsca, gdzie zobaczyli dwie tablice. Odczytaj z drogowskazu potrzebne informacje i oblicz, o ile mniej czasu zajęłoby harcerzom dojście z tego miejsca do Przełęczy Bukowskiej niż na Halicz?



- 6 Wszystkie boki narysowanego wielokąta mają tę samą długość (odczytasz ją z rysunku). Oblicz obwód wielokąta. Pamiętaj, że sumę jednakowych składników możesz zastąpić mnożeniem.



- 7 Babcia Oli ma 64 lata. Wiek mamy Oli stanowi $\frac{1}{2}$ wieku babci, wiek taty dziewczynki to $\frac{5}{8}$ wieku babci, a wiek samej Oli to $\frac{3}{16}$ wieku babci. Ile lat mają mama, tata i Ola?

- 8 Które działanie jest wykonane poprawnie?

A. $3\frac{3}{4} + 1\frac{1}{3} = 4\frac{4}{7}$ B. $3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{12}$
C. $3\frac{3}{4} \cdot 4 = 15$ D. $6\frac{3}{4} : 3 = 2\frac{3}{4}$

- 9 Które działanie jest wykonane **błędnie**?

A. $3\frac{1}{5} + 1\frac{7}{8} = 5\frac{3}{40}$ B. $3\frac{1}{5} - 1\frac{7}{8} = 2\frac{13}{40}$
C. $3\frac{1}{5} \cdot 10 = 32$ D. $3\frac{1}{5} : 4 = \frac{4}{5}$

- 10 Jakie liczby należy wstawić zamiast znaków zapytania?

$\frac{3}{5} \cdot \text{?} = 4\frac{1}{5}$ $2\frac{1}{3} : \text{?} = \frac{7}{9}$
A. 7 i 3 B. 14 i 3 C. 7 i 6 D. 14 i 6

- 11 Liczbę $\frac{5}{6}$ powiększono o $2\frac{2}{3}$, a następnie wynik zmniejszono 4 razy. Jaką liczbę otrzymano?

A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{25}{36}$ C. $3\frac{1}{8}$ D. $1\frac{1}{2}$

- 12 Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

- a) Liczba $2\frac{5}{6}$ powiększona o $1\frac{4}{9}$ to $4\frac{5}{18}$.
b) Liczba o $2\frac{1}{2}$ mniejsza od $5\frac{1}{5}$ to $2\frac{7}{10}$.
c) Liczba $3\frac{1}{9}$ powiększona 6 razy to $18\frac{2}{9}$.
d) Jeżeli liczbę $4\frac{1}{3}$ powiększymy o 2, to otrzymamy $8\frac{2}{3}$.
e) Liczba 3 razy mniejsza od $9\frac{3}{7}$ to $9\frac{1}{7}$.
f) Suma $4\frac{5}{6} + 2\frac{5}{8}$ jest równa różnicy $10\frac{1}{8} - 2\frac{2}{3}$.

- 13  Antek, Bartek i Szymon to trzech bracia. Pewnego dnia mama zostawiła dla nich koszyk jabłek. „Ile jabłek zjadł każdy z was?” – zapytała synów wieczorem, gdy zobaczyła pusty koszyk. Antek lubił układać zagadki, dlatego odpowiedział: „Najpierw ja zjadłem połowę wszystkich jabłek i jeszcze $\frac{1}{2}$ jabłka, potem Bartek zjadł połowę pozostałych jabłek i jeszcze $\frac{1}{2}$ jabłka, a na koniec Szymon zjadł połowę tego, co zostawił Bartek i jeszcze $\frac{1}{2}$ jabłka”. Bartek zaprotestował: „Ale ja nie jadłem żadnej połówki jabłka!”. „Ja też nie – odezwał się Szymon. – Zjadłem tylko jedno ostatnie jabłko”. Mama uśmiechnęła się, bo już wiedziała, ile jabłek zjadł każdy z jej synów. A ty wiesz?

3. Ułamki dziesiętne



The illustration shows a person with orange curly hair and glasses standing next to a bus stop. The bus stop features a large orange ticket machine with a display and buttons. To the right of the machine is a blue sign with a white bus icon. The machine displays a price list for bus tickets.

CENY BILETÓW

BILETY JEDNORAZOWE

Bilet czasowy*	Normalny	Ulgowy
15-minutowy	3,00 zł	1,50 zł
30-minutowy	4,50 zł	2,25 zł
60-minutowy	6,00 zł	3,00 zł
120-minutowy	7,50 zł	3,75 zł

KARNETY 10-przejazdowe
(9 biletów jednorazowych + 1 gratis)

Bilet czasowy*	Normalny	Ulgowy
15-minutowy	27,00 zł	13,50 zł
30-minutowy	40,50 zł	20,25 zł
60-minutowy	54,00 zł	27,00 zł
120-minutowy	67,50 zł	33,75 zł

* Bilet czasowy jest ważny od momentu skasowania przez podaną na nim liczbę minut.



Przeanalizuj uważnie cennik umieszczony na biletomacie i odpowiedz na pytania.

1. O ile więcej kosztuje 15-minutowy bilet normalny niż ulgowy?
2. Ile razem kosztują 4 bilety normalne 30-minutowe?
3. Ile można zaoszczędzić, kupując 2 karnety biletów 30-minutowych ulgowych zamiast takich samych biletów jednorazowych?
4. Czy pamiętasz, jak nazywamy liczby widoczne w cenniku?
5. Czy w każdym zapisie ceny niezbędne są cyfry po przecinku?
6. Co możesz powiedzieć o zależności między ceną ulgową a ceną normalną każdego biletu czasowego? Czy podobna zależność występuje dla cen karnetów?

3.1 Zapisywanie i odczytywanie ułamków dziesiętnych

Podejmij temat



Czy pamiętasz, co oznacza przecinek w tak zapisanych liczbach? Przeczytaj te liczby, jeśli potrafisz.

Potrafę grać w ping-ponga, ale nie mam pojęcia, co oznaczają te liczby.

To są wymiary naszego stołu zapisane za pomocą ułamków dziesiętnych. Uczyliśmy się o nich w czwartej klasie.

$\frac{3}{10}$, $\frac{79}{100}$, $\frac{293}{1000}$ to przykłady ułamków dziesiętnych. Przypomnijmy wiadomości na temat tych ułamków.

Ułamkiem dziesiętnym nazywamy ułamek, w którego mianowniku jest liczba 10 lub jej potęga: 100, 1000, 10 000 itd.

W klasie czwartej uczyliśmy się zapisywania takich ułamków w **postaci dziesiętnej**.



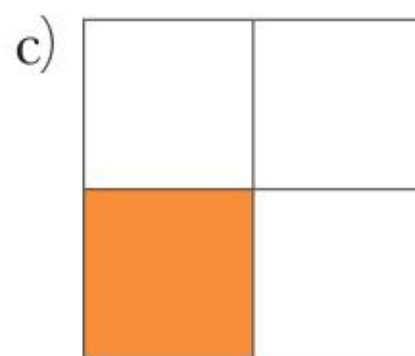
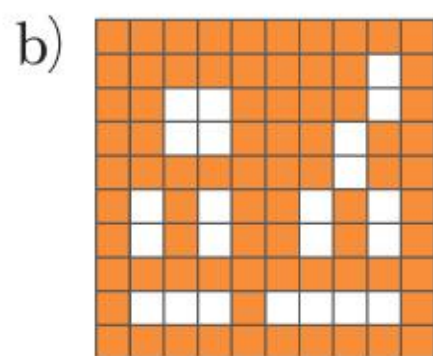
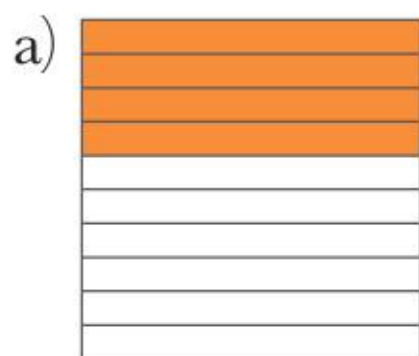
Liczba cyfr po przecinku ułamka dziesiętnego zapisanego w postaci dziesiętnej jest równa liczbie zer w mianowniku tego ułamka zapisanego w postaci zwykłej.
Zasada ta dotyczy również ułamków o mianownikach większych niż 1000.

W jaki sposób ułamki dziesiętne zapisujemy w postaci dziesiętnej?

Mianownik równy 10	Mianownik równy 100	Mianownik równy 1000
$\frac{3}{10} = 0,3$	$\frac{14}{100} = 0,14$ $\frac{1}{100} = 0,01$	$\frac{375}{1000} = 0,375$ $\frac{23}{1000} = 0,023$ $\frac{9}{1000} = 0,009$
$2\frac{5}{10} = 2,5$ jedno zero jedna cyfra po przecinku	$8\frac{57}{100} = 8,57$ dwa zera dwie cyfry po przecinku	$7\frac{42}{1000} = 7,042$ trzy zera trzy cyfry po przecinku

1. Jaką rolę w zapisie ułamka w postaci dziesiętnej odgrywa przecinek?

2. Zapisz w postaci dziesiętnej, jaką część kwadratu zamalowano.



Przykład 1

Zapiszmy podaną liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{26}{10\,000}$

b) $3\frac{7256}{100\,000}$

a) Wykonujemy kolejno następujące kroki.

- Ułamek ten nie ma całości, więc najpierw zapisujemy 0,.
- W mianowniku ułamka są cztery zera, czyli po przecinku muszą być cztery cyfry: 0, _ _ _ _.
- W liczniku ułamka jest liczba 26, musimy zatem 26 zapisać za pomocą czterech cyfr: 0,0026.

b) Postępujemy analogicznie.

- Liczba ta ma 3 całości, więc najpierw zapisujemy 3,.
- W mianowniku części ułamkowej jest pięć zer, czyli po przecinku musi być pięć cyfr: 3, _ _ _ _ _.
- Liczbę z licznika zapisujemy za pomocą pięciu cyfr: 3,07256.

3. Zapisz podane liczby w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{7}{10}$
 $\frac{26}{100}$

b) $\frac{48}{10}$
 $\frac{356}{100}$

c) $\frac{23\,456}{100\,000}$
 $4\frac{3}{10\,000}$

d) $4\frac{401}{10\,000}$
 $2\frac{29}{1\,000\,000}$

W dziesiętkowym systemie pozycyjnym każda pozycja cyfry w liczbie ma określoną nazwę.

5 6 3 7 2
↑ ↑ ↑ ↑ ↑
dziesiątki tysięcy setki dziesiątki jednostki

W ułamku dziesiętnym nazwę ma również każda pozycja cyfry po przecinku.

3,4 5 6 7 8 8
↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑
części dziesiąte części setne części tysięczne części dziesięciotysięczne części stutysięczne części milionowe

4. Podaj przykład ułamka dziesiętnego, który nie ma całości oraz ma:
- 5 cyfr po przecinku i dodatkowo jego:
 - cyfra części setnych jest równa cyfrze części tysięcznych,
 - cyfra części dziesiątych jest 5 razy większa od cyfry części dziesięciotysięcznych,
 - cyfra części stutysięcznych wynosi 6;
 - 3 cyfry po przecinku i dodatkowo:
 - suma jego cyfr części dziesiątych i tysięcznych jest równa cyfrze części setnych;
 - 4 cyfry po przecinku i dodatkowo:
 - suma jego cyfr części dziesiątych, setnych i tysięcznych jest równa cyfrze części dziesięciotysięcznych;
 - 4 cyfry po przecinku i dodatkowo:
 - każda jego kolejna cyfra (zaczynając od lewej strony) jest o 2 większa od poprzedniej.

Przykład 2

Odczytajmy liczbę 3,7524.

- W tej liczbie są 3 całości – czytamy: **trzy i...**;
- po przecinku są cztery cyfry, czyli w zapisie w postaci ułamka zwykłego w mianowniku są cztery zera;
- jedynka i cztery zera w mianowniku to 10 000;
- czytamy: **...i siedem tysięcy pięćset dwadzieścia cztery dziesięciotysięczne.**

3,7524 odczytujemy zatem: **trzy i siedem tysięcy pięćset dwadzieścia cztery dziesięciotysięczne.**



Aby odczytać ułamek zapisany w postaci dziesiętnej, można wyobrazić sobie jego zapis w postaci ułamka zwykłego, a przede wszystkim liczbę zer w mianowniku.

5. Zamień podane liczby na ułamki zwykłe lub liczby mieszane. Pamiętaj o skróceniu ułamków.

a) 0,25
0,2
0,5
0,9

b) 3,71
6,2003
0,00223
14,020407

c) 4,003
3,016
7,0005
6,00125

Zadania



Zapisz podaną liczbę w postaci ułamka zwykłego lub liczby mieszanej oraz w postaci dziesiętnej.

a) 3 i 9 setnych

b) 7 dziesiątych

c) 3 i 245 tysięcznych

d) 956 milionowych

e) 5094 stutysięcznych

f) 8 i 556 dziesięciotysięcznych

● Zapisz podane liczby w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{7}{10}, 1\frac{1}{10}, 3\frac{9}{10}, \frac{46}{10}, \frac{327}{10}$

b) $\frac{19}{100}, \frac{3}{100}, 5\frac{87}{100}, \frac{276}{100}, \frac{601}{100}$

c) $\frac{153}{1000}, \frac{7}{1000}, 4\frac{51}{1000}, \frac{2015}{1000}, \frac{7249}{1000}$

d) $\frac{2345}{10\,000}, \frac{9}{10\,000}, \frac{797}{10\,000}, \frac{31\,015}{10\,000}, 9\frac{49}{10\,000}$

● Liczba 0,00001 to



A. jedna dziesięciotysięczna.

B. jedna stutysięczna.

C. jedna milionowa.

D. jedna dziesięciomilionowa.

● Przepisz podane równości do zeszytu i zamiast znaków zapytania wstaw odpowiednie liczby.

a) $3\text{ mm} = ?\text{ cm}$

$18\text{ cm} = ?\text{ m}$

$5\text{ cm} = ?\text{ m}$

$379\text{ m} = ?\text{ km}$

$8\text{ m} = ?\text{ km}$



$7\text{ mm} = ?\text{ m}$

$125\text{ mm} = ?\text{ m}$

$3\text{ cm} = ?\text{ km}$

$52\text{ cm} = ?\text{ km}$

$4\text{ mm} = ?\text{ km}$

● Zapisz podane kwoty w złotych.

a) 37 gr

$5\text{ zł } 30\text{ gr}$

184 gr

b) 3 gr

$2\text{ zł } 7\text{ gr}$

605 gr

● Przepisz i zamiast znaków zapytania wstaw odpowiednie liczby.

a) $6\text{ g} = ?\text{ dag}$

$24\text{ dag} = ?\text{ kg}$

$5\text{ dag} = ?\text{ kg}$

$738\text{ kg} = ?\text{ t}$

$43\text{ kg} = ?\text{ t}$



$4\text{ g} = ?\text{ kg}$

$68\text{ g} = ?\text{ kg}$

$359\text{ g} = ?\text{ kg}$

$7\text{ dag} = ?\text{ t}$

$364\text{ dag} = ?\text{ t}$

● Jedna z liczb nie pasuje do pozostałych. Która i dlaczego?



0,2

0,22

2,2222

0,222

0,02

0,00022

0,0002

0,0222



Czy pamiętasz?

$1\text{ cm} = 10\text{ mm}$, czyli $1\text{ mm} = 0,1\text{ cm}$

$1\text{ m} = 100\text{ cm}$, czyli $1\text{ cm} = 0,01\text{ m}$

$1\text{ km} = 1000\text{ m}$, czyli

$1\text{ m} = 0,001\text{ km}$

$1\text{ zł} = 100\text{ gr}$, czyli $1\text{ gr} = 0,01\text{ zł}$

$1\text{ dag} = 10\text{ g}$, czyli $1\text{ g} = 0,1\text{ dag}$

$1\text{ kg} = 100\text{ dag}$, czyli

$1\text{ dag} = 0,01\text{ kg}$

$1\text{ t} = 1000\text{ kg}$, czyli $1\text{ kg} = 0,001\text{ t}$

3.2 Zamiana ułamków zwykłych na ułamki dziesiętne

Podejmij temat

W klasie jest 25 uczniów. Ze sprawdzianu z matematyki ocenę celującą dostali 3 osoby.



A ty wiesz?

Z zamianą ułamków dziesiętnych na ułamki zwykłe spotkaliśmy się już przy temacie 3.1. Aby dokonać takiej zamiany, ułamek zapisany z użyciem przecinka należy najpierw prawidłowo odczytać, a potem zapisać za pomocą kreski ułamkowej i skrócić, jeśli jest to możliwe, np. $2,85 = 2\frac{85}{100} = 2\frac{17}{20}$.

1. Ułamki w postaci dziesiętnej zamień na ułamki zwykłe lub liczby mieszane. Zapisz je w postaci nieskracalnej.

a) 0,62
1,8
3,007
0,0006

b) 0,7
9,48
2,064
1,00345

c) 0,75
3,21
0,125
5,00016

A w jaki sposób ułamek zwykły lub liczbę mieszaną można zamienić na ułamek w postaci dziesiętnej? Jeżeli w mianowniku ułamka znajduje się potęga liczby 10 (czyli 10, 100, 1000, 10 000 itd.), to zapisanie takiego ułamka w postaci dziesiętnej jest proste. Należy tylko pamiętać, aby po przecinku było tyle cyfr, ile zer jest w mianowniku ułamka. Inne ułamki zwykłe również można zapisywać w postaci dziesiętnej.

Nauczmy się teraz zamieniać na ułamki dziesiętne te ułamki zwykłe, których mianowniki dają się sprowadzić do potęgi liczby 10.

Po rozszerzeniu ułamka do mianownika równego 10 lub 100, lub 1000, lub 10 000 itd., możemy ten ułamek zapisać z użyciem przecinka, czyli w postaci dziesiętnej.

Przykład 1

Zapiszmy podaną liczbę w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{3}{5}$

b) $5\frac{1}{8}$

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{6}{10} = 0,6$

W tym przypadku najprościej rozszerzyć ułamek do mianownika równego 10.

b) $5\frac{1}{8} \cdot \frac{125}{125} = 5\frac{125}{1000} = 5,125$

Szukamy takiej potęgi liczby 10, która jest wielokrotnością liczby 8. Ani 10, ani 100 nie dzieli się przez 8. Najmniejszą taką liczbą jest 1000.

2. Zapisz podane liczby w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{1}{2}$

b) $2\frac{5}{8}$

c) $\frac{3}{500}$

d) $\frac{1}{40}$

$\frac{1}{4}$

$4\frac{3}{20}$

$\frac{9}{200}$

$\frac{241}{50\,000}$

$\frac{3}{4}$

$1\frac{12}{25}$

$\frac{1}{125}$

$\frac{3}{200\,000}$

$\frac{1}{5}$

$3\frac{7}{50}$

$\frac{33}{2500}$

$\frac{1}{16}$

Zauważmy, że nie wszystkie ułamki zwykłe można rozszerzyć tak, aby w mianowniku otrzymać 10 lub 100, lub 1000 itd. Takimi ułamkami są: $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$ i wiele innych. Ich zamianą na postać dziesiętną będziemy się zajmować w klasie szóstej.

Zadania

● Jeśli nie udało ci się odpowiedzieć na pytanie postawione w *Podjmij temat*, odpowiedz na nie teraz.

● Zamień podany ułamek zwykły na ułamek w postaci dziesiętnej.

a) $\frac{5}{4}$

b) $\frac{24}{20}$

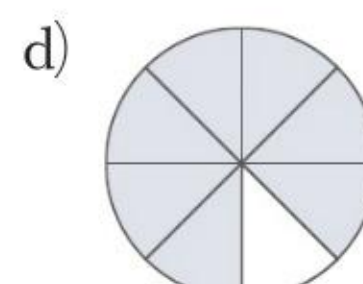
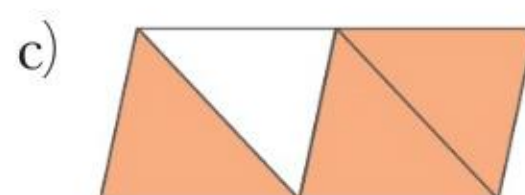
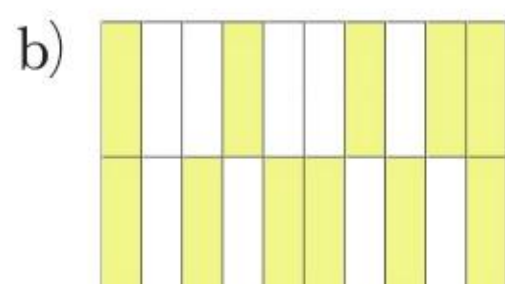
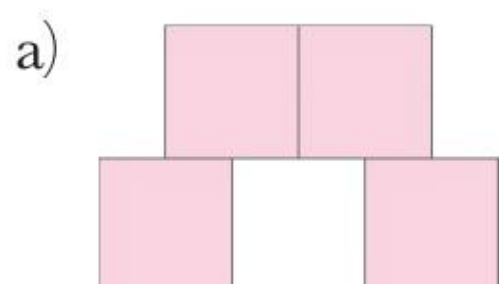
c) $\frac{125}{8}$

d) $\frac{19}{16}$

- Znajdź i zapisz pary równych liczb.

0,12	$\frac{1}{5000}$	0,75	$\frac{2}{1250}$	0,00004	$\frac{3}{25}$	0,0016	$\frac{3}{4}$	0,0002	$\frac{1}{25\,000}$
------	------------------	------	------------------	---------	----------------	--------	---------------	--------	---------------------

- Zapisz w postaci dziesiętnej, jaką część figury zamalowano oraz jaka część figury pozostała niezamalowana.



- W klasie Vc jest 20 uczniów. Ze sprawdzianu z matematyki 4 osoby otrzymały ocenę celującą, 6 osób dostało ocenę bardzo dobrą, 5 osób – ocenę dobrą, a pozostała część klasy – dostateczną. Jaka część klasy otrzymała ocenę celującą, jaka – bardzo dobrą, jaka – dobrą, a jaka – dostateczną? Odpowiedź zapisz za pomocą ułamków zwykłych oraz dziesiętnych.

- W ciągu 25 dni było 7 dni pochmurnych, 10 słonecznych, a w pozostałe dni padało. Jaki ułamek tego okresu stanowiły dni słoneczne, jaki – pochmurne, a jaki – deszczowe? Zapisz odpowiedzi w postaci ułamków dziesiętnych.

- Oceń prawdziwość podanych zdań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

a) Ułamek 4,4 można zapisać jako $\frac{44}{10}$.

b) Ułamek $\frac{27}{1000}$ jest ułamkiem dziesiętnym.

c) Liczby mieszanej $1\frac{3}{1\,000\,000}$ nie można zapisać w postaci dziesiętnej.

d) Liczba 5,07 zapisana w postaci liczby mieszanej to $\frac{507}{100}$.

e) Ułamek 0,0068 zamieniony na zwykły to $\frac{17}{250}$.

f) Ułamek $\frac{15}{16}$ zapisany w postaci dziesiętnej to 2,3.

g) Ułamek $\frac{1}{4}$ zapisany w postaci ułamka dziesiętnego to $\frac{25}{100}$.

- Ułamki: cztery dziesięciotysięczne oraz piętnaście setnych, zapisane w postaci dziesiętnej, to

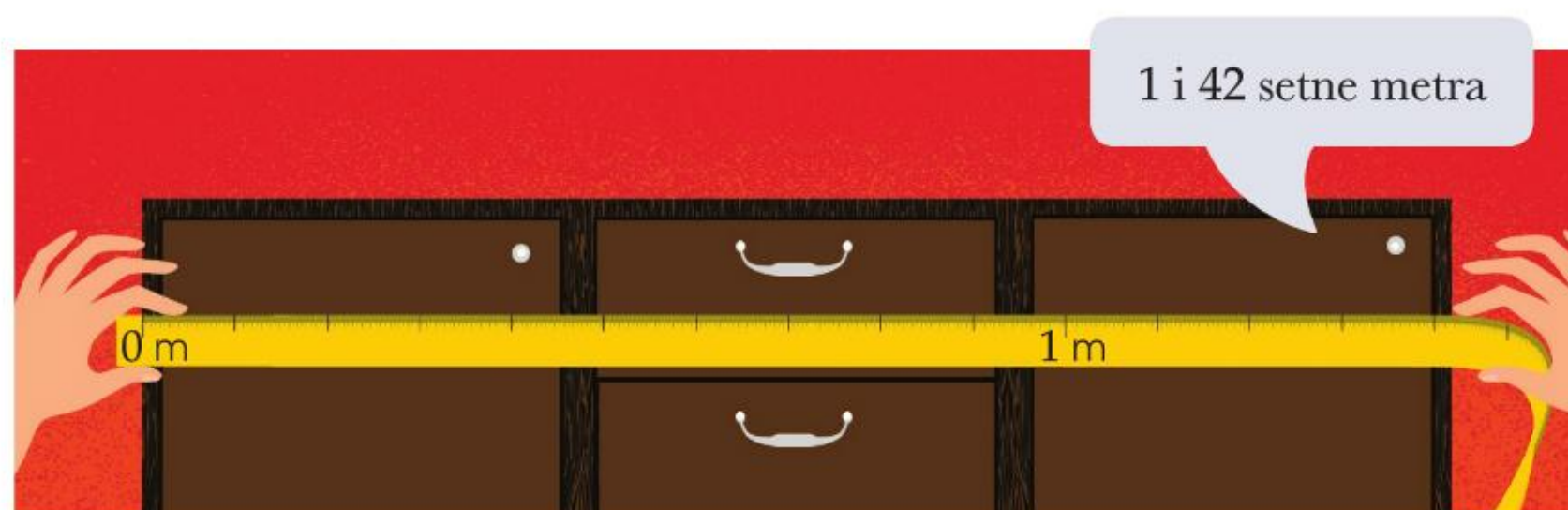
A. $\frac{4}{10\,000}$ i $\frac{15}{100}$ B. $\frac{1}{2500}$ i $\frac{3}{20}$ C. 0,004 i 0,15 D. 0,0004 i 0,15

3.3 Ułamki dziesiętne na osi liczbowej

Podejmij temat



Czy pamiętasz, że to, co w matematyce jest podobne do taśmy mierniczej, nazywamy osią liczbową? Przypomnij, co to jest odcinek jednostkowy i zwrot osi.

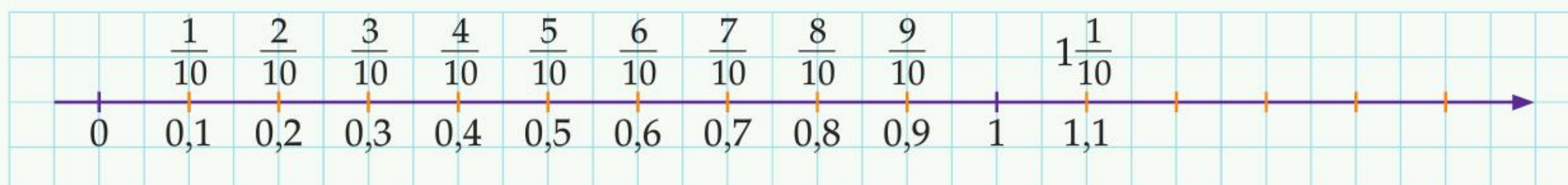


Przykład 1

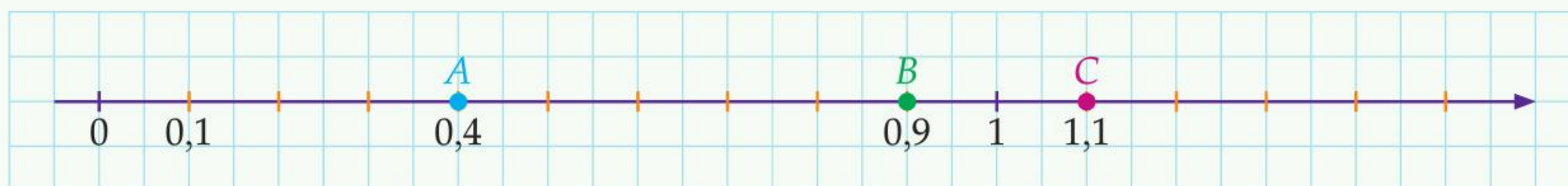
Zaznaczmy na osi liczbowej punkty o podanych współrzędnych.

a) $A = 0,4$; $B = 0,9$; $C = 1,1$ b) $D = 6,2$; $E = 6,7$; $F = 7,1$

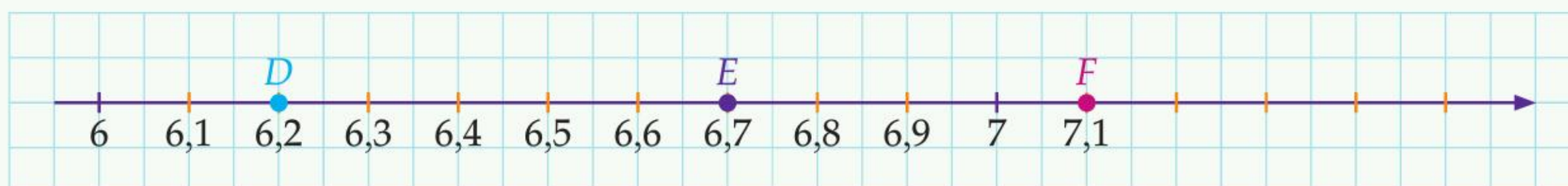
a) Ponieważ $0,4 = \frac{4}{10}$, $0,9 = \frac{9}{10}$, $1,1 = 1\frac{1}{10}$, zatem odcinek jednostkowy osi liczbowej należy podzielić na 10 równych części.



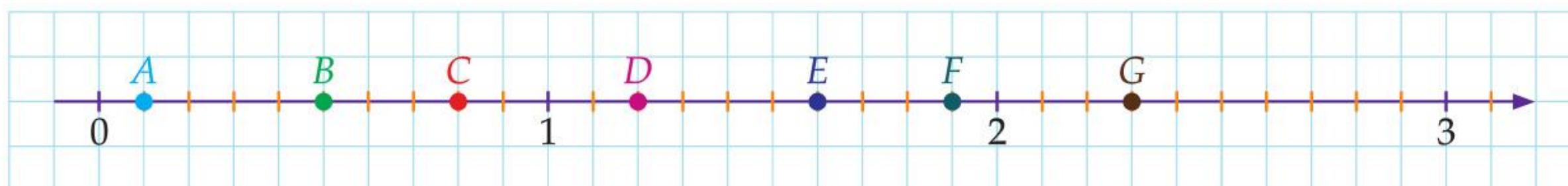
Rozwiązanie tego zadania wygląda następująco:



b) Wszystkie współrzędne są liczbami większymi od 6, dlatego możemy narysować fragment osi zaczynający się od punktu o współrzędnej 6. Następnie, podobnie jak w punkcie a), odcinek jednostkowy dzielimy na 10 równych części.



1. Zapisz w zeszycie współrzędne punktów zaznaczonych na osi liczbowej.



2. Narysuj w zeszycie oś liczbową i zaznacz na niej punkty o współrzędnych: $W = 1,9$; $U = 2,2$; $T = 1,6$; $S = 0,7$.

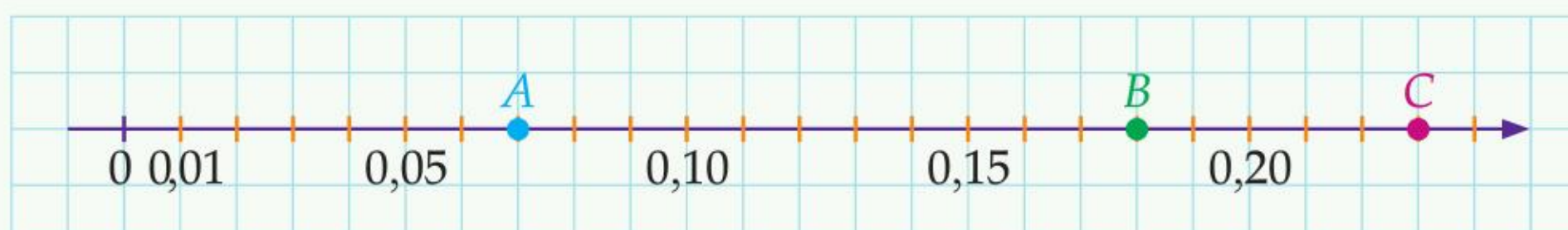
Przykład 2

Zaznaczymy na osi liczbowej punkty o podanych współrzędnych.

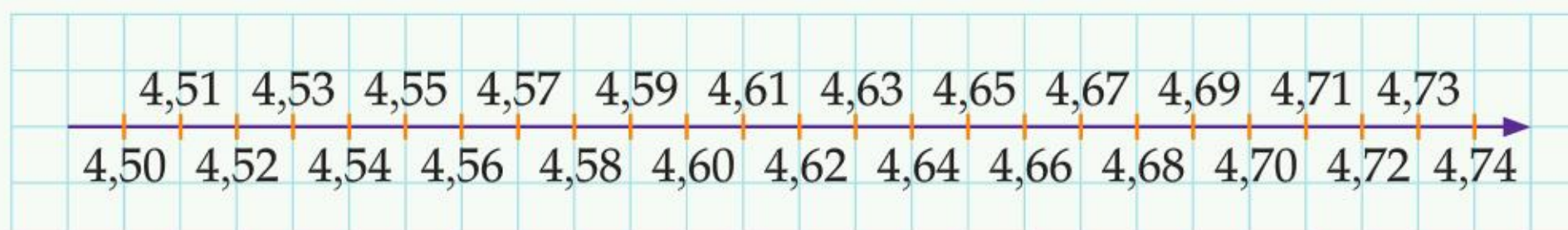
a) $A = 0,07$; $B = 0,18$; $C = 0,23$

b) $D = 4,56$; $E = 4,62$; $F = 4,68$

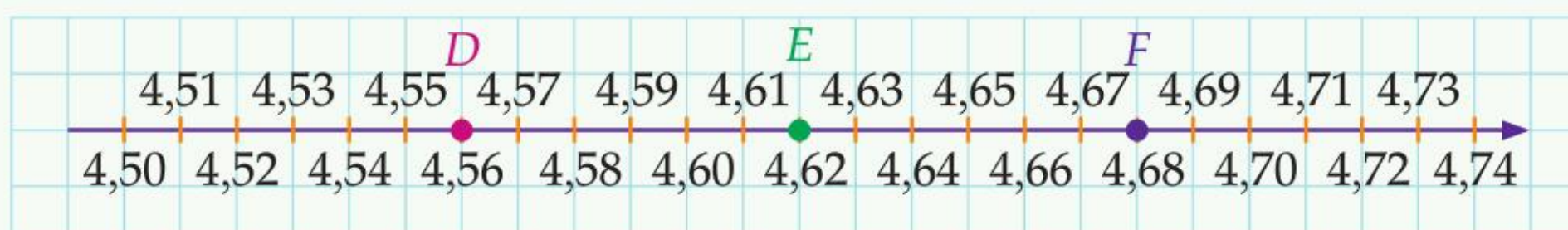
- a) Wiemy, że $0,07 = \frac{7}{100}$, $0,18 = \frac{18}{100}$, $0,23 = \frac{23}{100}$, dlatego odcinek jednostkowy osi liczbowej należy podzielić na 100 równych części. Jak zatem dobrać długość odcinka jednostkowego? Na 100 części można z łatwością podzielić np. odcinek o długości 50 cm: każda ze stu jego części (czyli jego 0,01) ma wówczas długość 5 mm, czyli długość pojedynczej kratki. Oczywiście odcinek jednostkowy o długości 50 cm nie mieści się w podręczniku, więc narysowano tylko jego fragment.



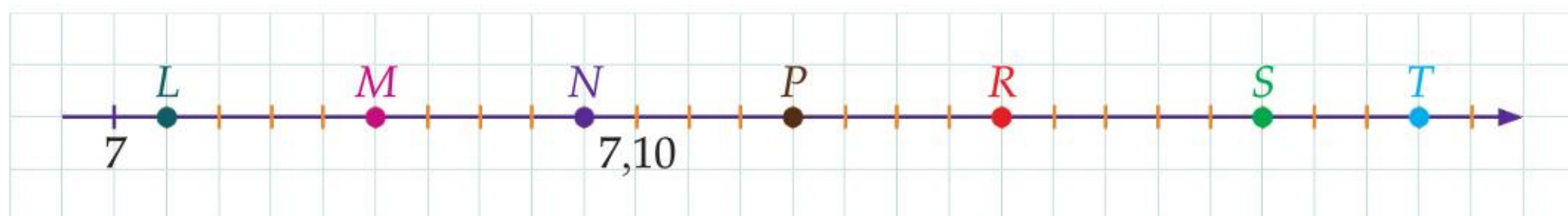
- b) W tym przypadku również wybieramy odcinek jednostkowy o długości 50 cm i wówczas odcinek o długości 5 mm będzie stanowił jego 0,01. Każda ze współrzędnych jest większa od 4,50, dlatego możemy narysować fragment osi zaczynający się od punktu o współrzędnej 4,50, a następnie zaznaczyć podane punkty.



Rozwiązanie tego zadania wygląda następująco:



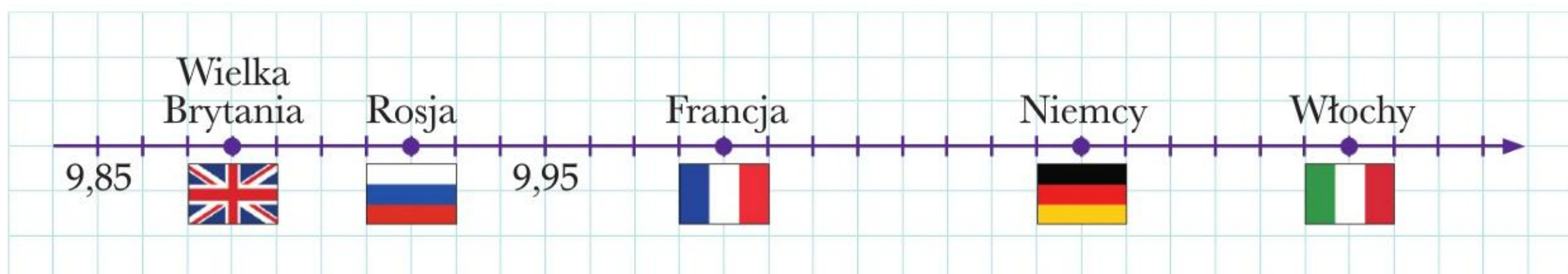
3. Jakie współrzędne mają punkty zaznaczone na osi liczbowej?



Zadania

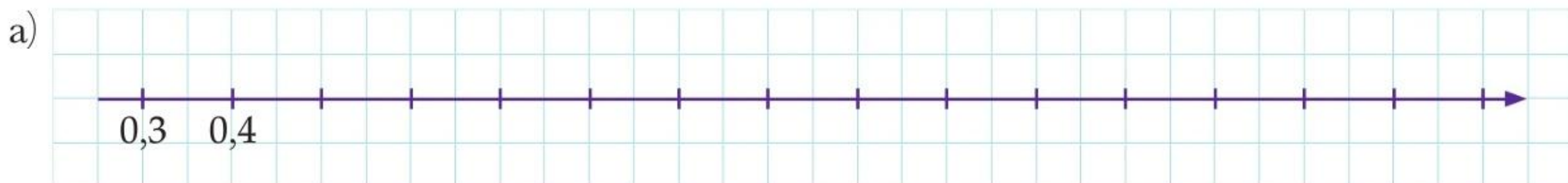
Narysuj w zeszycie oś liczbową o jednostce długości 5 cm. Zaznacz na osi punkty o współrzędnych: $A = 5$; $B = 5,6$; $C = 6,3$.

Podczas zawodów lekkoatletycznych wyniki sportowców z pięciu państw w biegu na 100 m (podane w sekundach) przedstawiono na osi liczbowej.

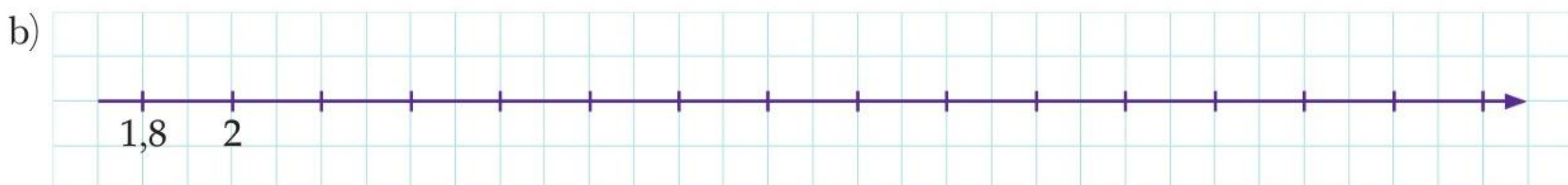


Odczytaj i zapisz czas uzyskany przez sportowców. Reprezentant którego kraju wygrał bieg?

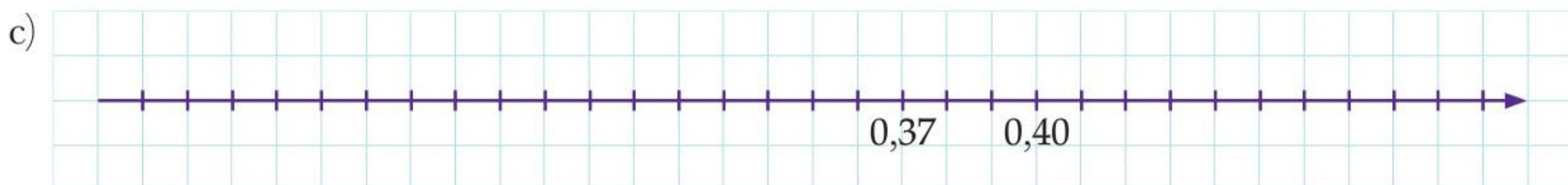
Przerysuj oś liczbową. Zaznacz na niej punkty o podanych współrzędnych.



$$A = 1; B = 0,8; C = 1,3; D = 0,6$$

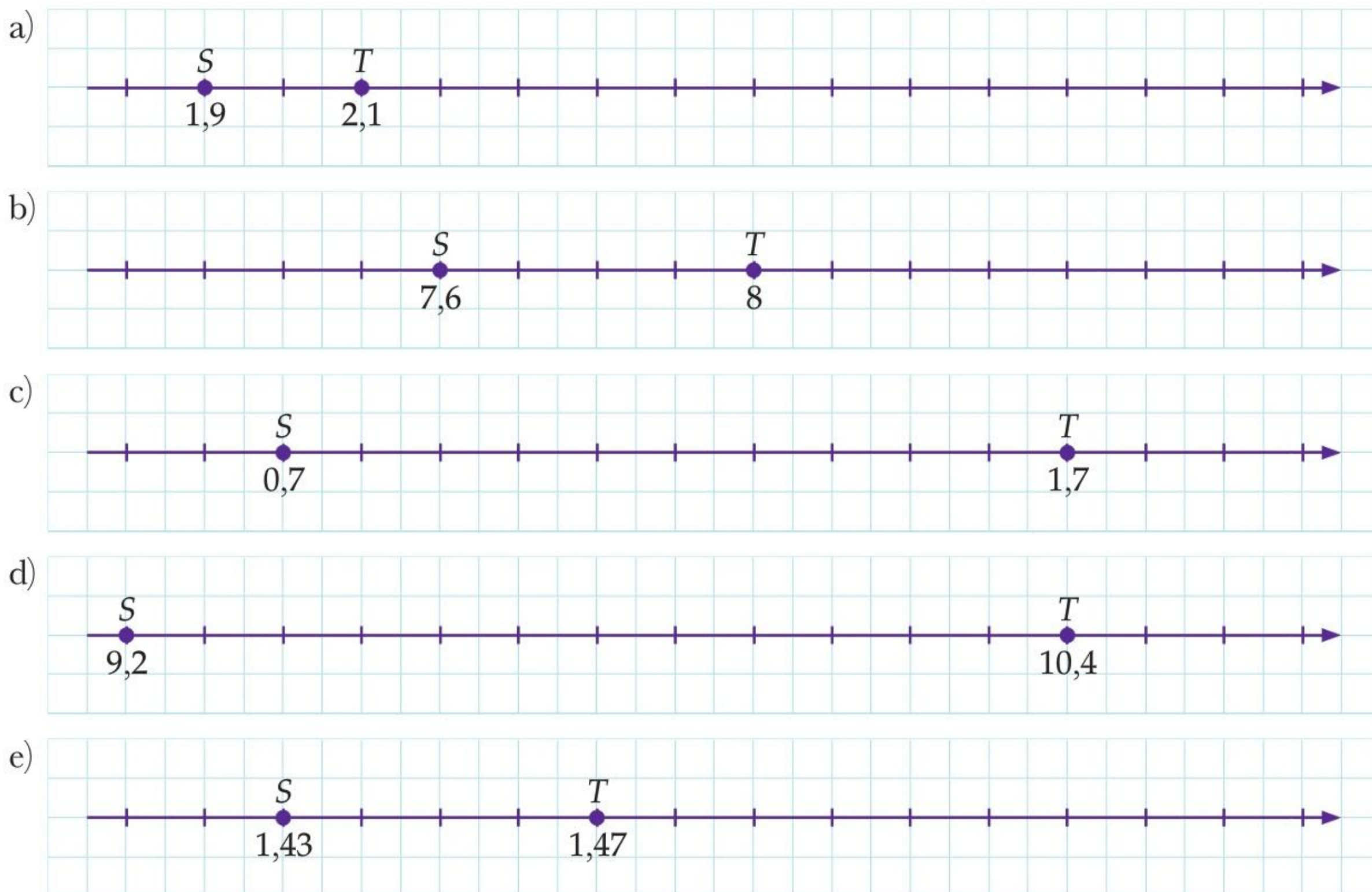


$$A = 2,6; B = 3,4; C = 3; D = 2,3$$

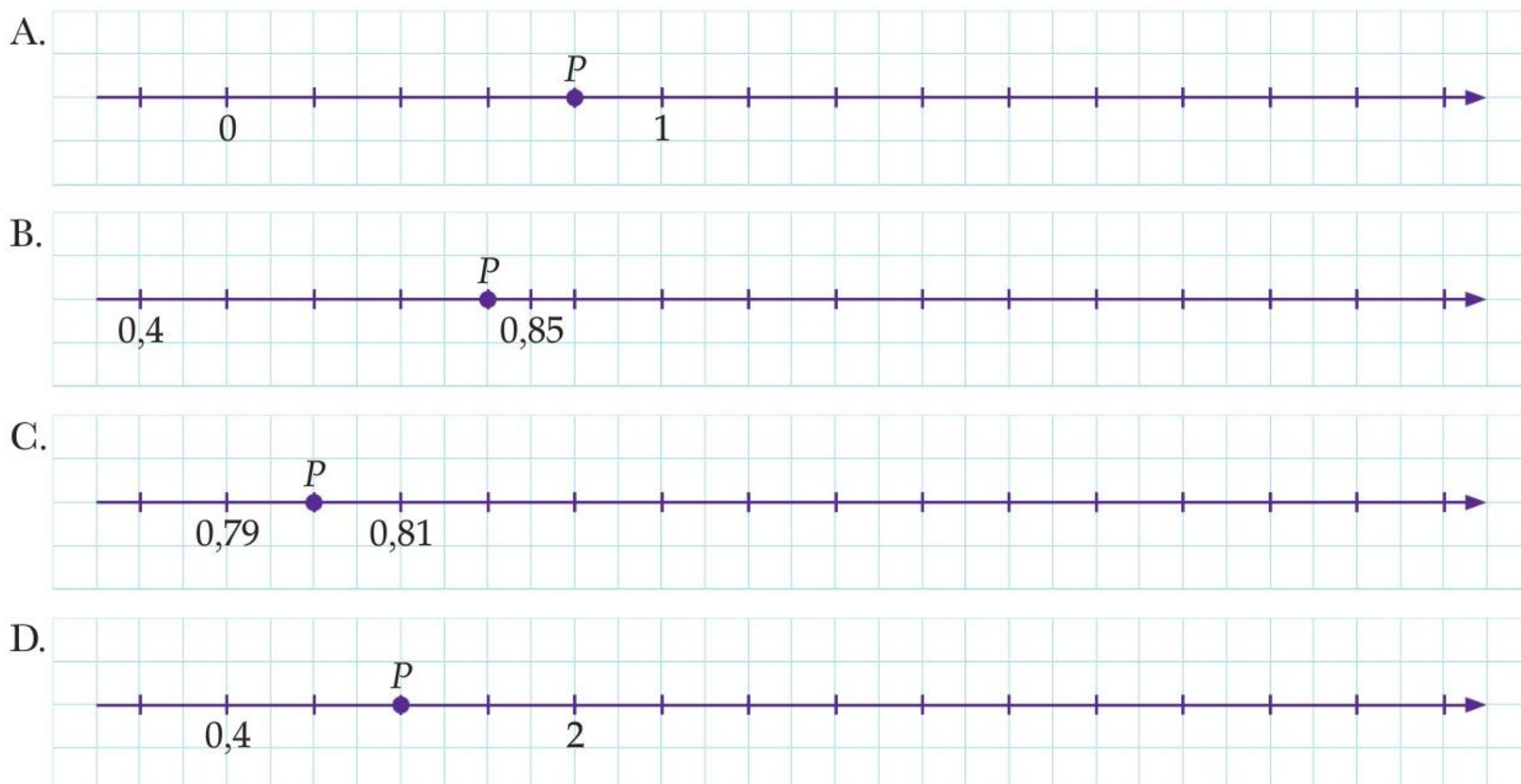


$$A = 0,34; B = 0,42; C = 0,30; D = 0,28$$

● Jaka jest współrzędna punktu X , który znajduje się dokładnie pośrodku między punktami S i T ?



★ Na której osi liczbowej punkt $P = 0,8$ zaznaczony jest **niepoprawnie**?



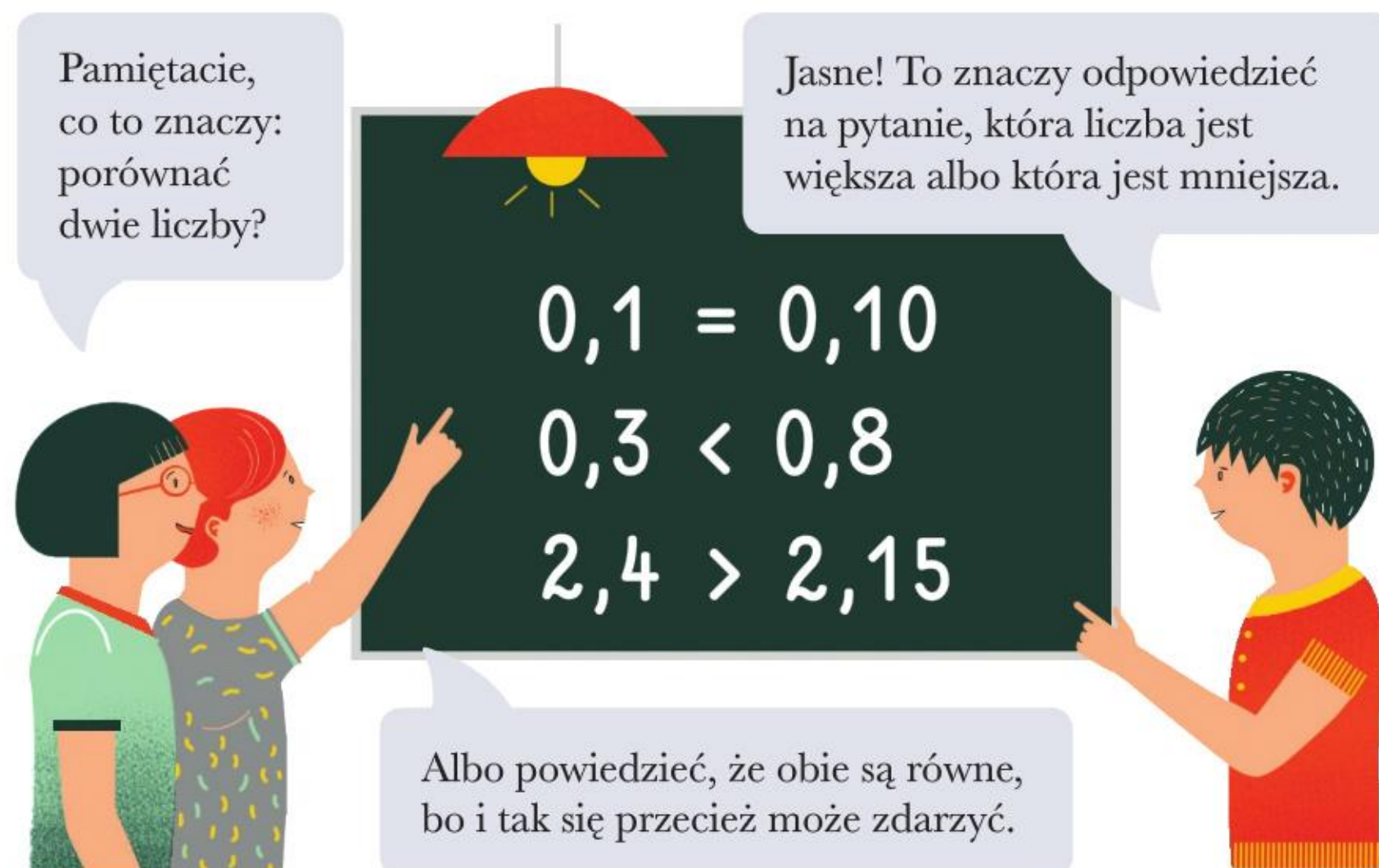
3.4 Porównywanie ułamków dziesiętnych

Podejmij temat



Przypomnij sobie, jak porównujemy ułamki zwykłe o jednakowych mianownikach.

A czy pamiętasz, że pomnożenie lub podzielenie licznika i mianownika przez tę samą liczbę (różną od zera) nie zmienia wartości ułamka? Jak nazywamy te czynności?



Jak zauważyć, że dwa ułamki dziesiętne, choć zapisane inaczej, są równe?

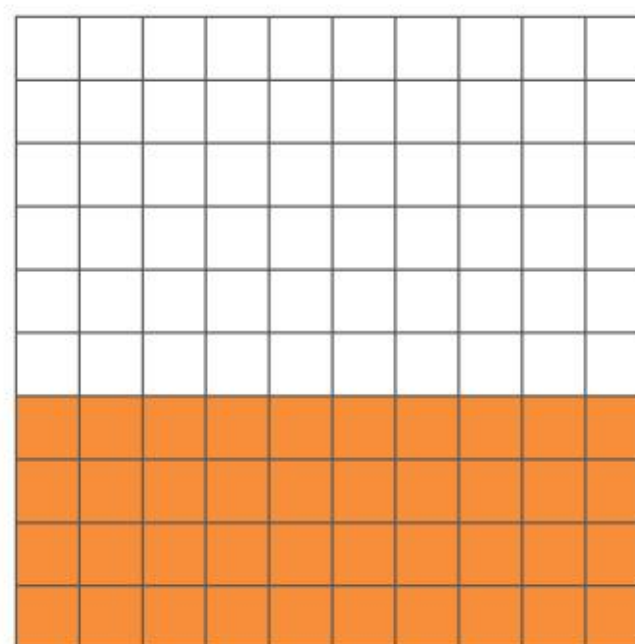
Przyjrzyjmy się narysowanym poniżej kwadratom – są one tej samej wielkości. Każdy jest podzielony na inną liczbę części, ale w każdym została zamalowana taka sama część kwadratu.



0,4

Kwadrat jest podzielony na 10 równych części, zamalowano 4 z nich, czyli zamalowano

$$\frac{4}{10} = 0,4 \text{ kwadratu.}$$



0,40

Kwadrat jest podzielony na 100 równych części, zamalowano 40 z nich, czyli zamalowano

$$\frac{40}{100} = 0,40 \text{ kwadratu.}$$

Zamalowane części są takie same, a zatem $0,4 = 0,40$.

Powyższą równość można też otrzymać za pomocą obliczeń.

Przykład 1

Rozszerzmy ułamek $\frac{4}{10}$, mnożąc licznik i mianownik kolejno przez 10, 100 i 1000. Zapiszmy otrzymane ułamki w postaci dziesiętnej.

$$\frac{4 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{40}{100}$$

$$\frac{4 \cdot 100}{10 \cdot 100} = \frac{400}{1000}$$

$$\frac{4 \cdot 1000}{10 \cdot 1000} = \frac{4000}{10\,000}$$

Powyższe równości możemy zapisać za pomocą ułamków w postaci dziesiętnej:

$$0,4 = 0,40$$

$$0,4 = 0,400$$

$$0,4 = 0,4000$$



Dopisanie zer na końcu ułamka dziesiętnego (po prawej stronie) nie zmienia jego wartości.

Przykład 1 pokazuje, że dopisywanie zer na końcu ułamka dziesiętnego nie powoduje zwiększenia ani zmniejszenia wartości tego ułamka. To jest taka sama czynność jak rozszerzenie ułamka zwykłego.

1. Zapisz podany ułamek tak, aby po przecinku występowały cztery cyfry, ale by nie zmieniła się jego wartość.

a) 0,9

b) 13,02

c) 7,456

d) 0,001

e) 2,005

f) 0,304

Przykład 2

Skróćmy ułamki: $\frac{50}{100}$, $\frac{300}{1000}$, $\frac{370\,000}{1\,000\,000}$, a otrzymane ułamki zapiszmy w postaci dziesiętnej.

$$\frac{50 : 10}{100 : 10} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{300 : 100}{1000 : 100} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{370\,000 : 10\,000}{1\,000\,000 : 10\,000} = \frac{37}{100}$$

Powyższe równości możemy zapisać za pomocą ułamków w postaci dziesiętnej:

$$0,50 = 0,5$$

$$0,300 = 0,3$$

$$0,370000 = 0,37$$



Pominięcie końcowych zer w zapisie ułamka dziesiętnego nie zmienia jego wartości.

Przykład 2 pokazuje, że opuszczenie zer na końcu ułamka dziesiętnego nie powoduje zwiększenia ani zmniejszenia wartości tego ułamka. To jest taka sama czynność jak skrócenie ułamka zwykłego.

2. Zapisz podany ułamek w prostszy (krótszy) sposób.

a) 3,070

b) 4,25000

c) 0,0200

d) 0,00300

e) 5,40000

f) 0,00100



Nie wszystkie ułamki dziesiętne są równe. Jak więc porównywać te nierówne?

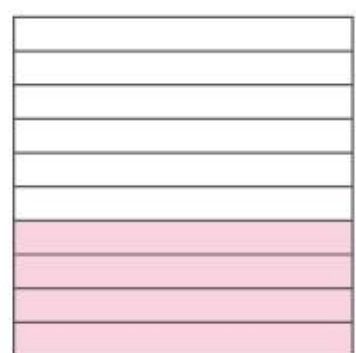


A pamiętacie, jak porównujemy ułamki zwykłe o jednakowych mianownikach?

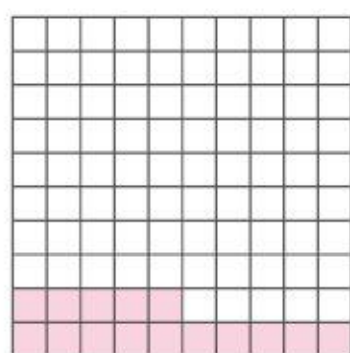


Oczywiście! Ten ułamek jest większy, który ma większy licznik.

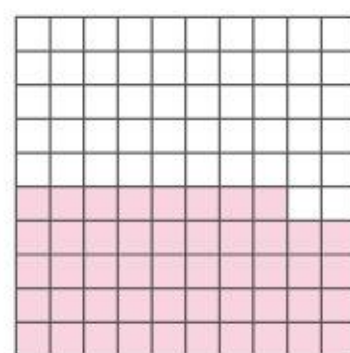
Porównajmy trzy ułamki: 0,4, 0,15 i 0,48. Przedstawmy je na rysunkach.



0,4



0,15



0,48

Z rysunków wynika, że najmniejszym ułamkiem jest 0,15, a największym 0,48, czyli $0,15 < 0,4$ i $0,4 < 0,48$ (co można zapisać krócej: $0,15 < 0,4 < 0,48$).

Zamiast porównywać ułamki na podstawie rysunków, można je oczywiście porównywać tak jak ułamki zwykłe. Zapiszmy każdy z trzech ułamków w postaci ułamka zwykłego i sprowadźmy je do wspólnego mianownika:

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100}$$

$$0,15 = \frac{15}{100}$$

$$0,48 = \frac{48}{100}$$

Teraz możemy z łatwością porównać otrzymane ułamki: $\frac{15}{100} < \frac{40}{100} < \frac{48}{100}$

i zapisać tę samą nierówność z użyciem postaci dziesiętnej rozpatrywanych ułamków: $0,15 < 0,4 < 0,48$.

Prostsze sposoby porównywania ułamków dziesiętnych (bez rysunku i bez zamiany na ułamki zwykłe) są przedstawione poniżej.

Przykład 3

Porównajmy dwa ułamki.

a) 2,47 i 2,4354

b) 4,126 i 4,1274

Porównywanie ułamków dziesiętnych możemy wykonywać na dwa sposoby. Sposób pierwszy prześledźmy na przykładzie liczb z punktu a), sposób drugi zaś – na przykładzie liczb z punktu b).

a) Zapisujemy ułamki 2,47 i 2,4354 tak, aby oba miały tyle samo cyfr po przecinku (w tym przypadku po cztery).

Otrzymujemy: $2,47 = 2,4700$ i $2,4354$.

Obie liczby mają tyle samo całości, zatem porównujemy części ułamkowe.

Ponieważ $4700 > 4354$, to $2,4700 > 2,4354$, czyli $2,47 > 2,4354$.

b) Porównujemy kolejne cyfry liczb 4,126 i 4,1274.

Porównujemy całości: $4 = 4$.

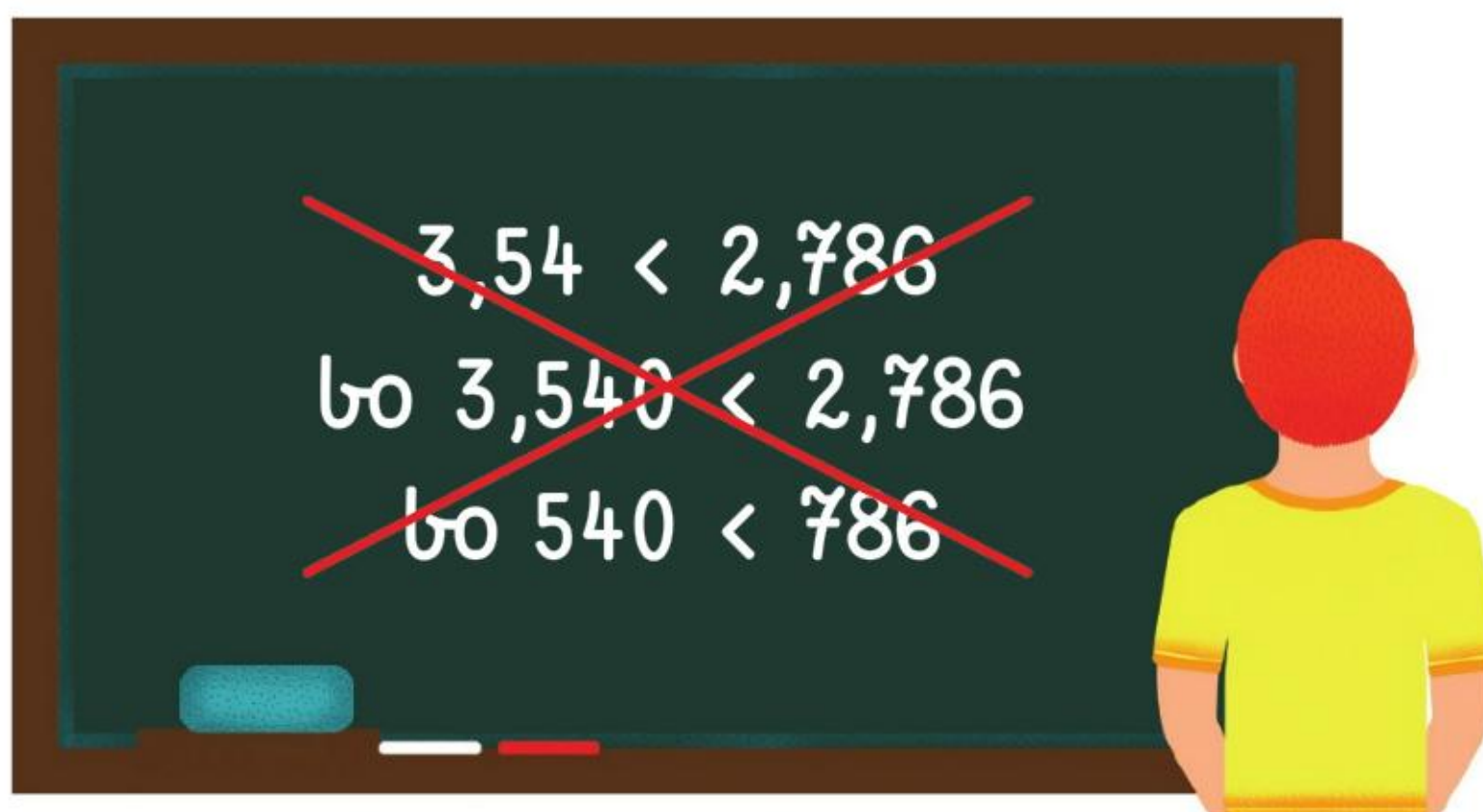
Porównujemy części dziesiąte: $1 = 1$.

Porównujemy części setne: $2 = 2$.

Porównujemy części tysięczne: $6 < 7$.

Zatem $4,126 < 4,1274$.

3. Dlaczego nauczyciel uznał, że Adam źle porównał ułamki? Uzasadnij odpowiedź.



4. Podane pary liczb przepisuj do zeszytu i porównaj. Zamiast pytajnika wstaw znak $<$ lub $>$.

a) $5,2$? $5,7$

$0,4$? $1,2$

$3,65$? $3,18$

$5,128$? $5,142$

b) $3,74$? $4,18$

$5,364$? $5,8$

$2,5$? $2,005$

$6,798$? $6,7973$

c) $4,002$? $4,02$

$0,6574$? $0,6547$

$2,76$? $2,761$

$9,999$? $9,99$

Zadania

● Zapisz ułamek równy danemu w taki sposób, żeby w jego zapisie były części tysięczne.

a) $5,1$

b) $0,7$

c) $25,5$

d) $0,62$

e) $1,05$

f) $0,27$

● Znajdź pary równych ułamków. Zapisz je w zeszycie w postaci równości.

3,2

3,002

3,02

0,32

3,02000

3,2000

0,320

3,0020

- Po powrocie z gabinetu szkolnej pielęgniarki ośmioro uczniów napisało na tablicy swój wzrost. Zapisz imiona dzieci w kolejności od najwyższego do najniższego.



- Zapisz podane liczby w kolejności rosnącej.

a)	7,3	7,03	7,35	7,05	7,53	7,035
b)	2,9	2,29	3,01	3,19	2,92	3,09

- Zapisz masy paczek w kolejności od najcięższej do najlżejszej.



2,84 kg



2,084 kg



2,9 kg



2,804 kg

- Podaj trzy przykładowe ułamki dziesiętne, które na osi liczbowej znajdują się między liczbą 7,54 a 7,55 (czyli są większe od 7,54 i jednocześnie mniejsze od 7,55).

- Zapisz poniższe liczby w kolejności malejącej i odczytaj hasło, jakie utworzą odpowiadające im litery. Hasłem jest imię człowieka, którego popiersie widzimy na rysunku. Sprawdź w dostępnych źródłach, kiedy żył ten mężczyzna i czym zasłynął.



3,45	4,53	3,405	4,003	3,0045
L	T	E	A	S



3.5 Dodawanie ułamków dziesiętnych w pamięci

Podejmij temat

To pewnie nie będzie trudne...
Chyba dodajemy podobnie jak ceny albo długości.



$$3,45 + 2,24 =$$



Oczywiście! 3 zł 45 gr + 2 zł 24 gr = 5 zł 69 gr,
czyli $3,45 + 2,24 = 5,69$. Proste 😊

Dodawanie ułamków dziesiętnych możemy wykonywać w pamięci, wyobrażając sobie, że jest to np. zapis długości lub kwot w postaci dziesiętnej. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 1

Wykonajmy dodawanie.

a) $2,5 + 1,1$

b) $4,35 + 2,13$

- a) Wyobraźmy sobie, że podana suma dotyczy długości i oznacza długości wyrażone w centymetrach. Zapiszmy zatem dodawanie z użyciem jednostek: $2,5 \text{ cm} + 1,1 \text{ cm}$.

Nad linijką narysowane są odcinki długości

$2,5 \text{ cm} = 2 \text{ cm } 5 \text{ mm}$ i $1,1 \text{ cm} = 1 \text{ cm } 1 \text{ mm}$.

Razem tworzą odcinek długości $3 \text{ cm } 6 \text{ mm}$, czyli $3,6 \text{ cm}$.

Zatem $2 \text{ cm } 5 \text{ mm} + 1 \text{ cm } 1 \text{ mm} = 3 \text{ cm } 6 \text{ mm}$.



To samo działanie zapiszmy za pomocą ułamków dziesiętnych: $2,5 \text{ cm} + 1,1 \text{ cm} = 3,6 \text{ cm}$.



- b) W tym przypadku mamy dodawać ułamki o częściach setnych, dlatego dla ułatwienia możemy sobie wyobrazić długości wyrażone w metrach. Rozumujemy analogicznie:

$$4,35 \text{ m} + 2,13 \text{ m} = 4 \text{ m } 35 \text{ cm} + 2 \text{ m } 13 \text{ cm} = 6 \text{ m } 48 \text{ cm} = 6,48 \text{ m}.$$

Wróćmy teraz do pierwotnego działania, bez jednostek. Ostatecznie otrzymujemy:

a) $2,5 + 1,1 = 3,6$

b) $4,35 + 2,13 = 6,48$



Przykład 1 pokazuje, że aby dodać ułamki dziesiętne, należy do całości dodać całości, a do części ułamkowych – części ułamkowe.

1. Oblicz.

a) $4,7 + 2,1$

b) $8,2 + 1,4$

c) $5 + 0,8$

d) $2,3 + 7$

e) $3,61 + 4,23$

f) $5,28 + 3,51$

g) $25 + 3,28$

h) $13,24 + 27,75$

Przykład 2

Obliczmy podaną sumę.

a) $0,6 + 0,4$

b) $2,71 + 1,29$

Podobnie jak w przykładzie 1 wyobraźmy sobie, że powyższe zapisy dotyczą długości.

Zapiszmy dodawanie z użyciem jednostek: w punkcie a) wykorzystamy centymetry i milimetry, a w punkcie b) – metry i centymetry.

a) $0,6 \text{ cm} + 0,4 \text{ cm} = 6 \text{ mm} + 4 \text{ mm} = 10 \text{ mm} = 1 \text{ cm}$

b) $2,71 \text{ m} + 1,29 \text{ m} = 2 \text{ m } 71 \text{ cm} + 1 \text{ m } 29 \text{ cm} = 3 \text{ m } 100 \text{ cm} = 4 \text{ m}$

Wróćmy teraz do pierwotnego działania, bez jednostek. Na koniec otrzymujemy:

a) $0,6 + 0,4 = 1$

Zamieniamy dziesięć dziesiątych na jedną całość, tak jak 10 mm zamienialiśmy na 1 cm.

b) $2,71 + 1,29 = 4$

Zamieniamy sto setnych na jedną całość, tak jak 100 cm zamienialiśmy na 1 m.

2. Wykonaj dodawanie.

a) $0,2 + 0,8$

b) $0,45 + 0,55$

c) $4,8 + 1,2$

d) $6,78 + 4,22$

Przykład 3

Wykonajmy dodawanie liczb z podanymi jednostkami długości. Następnie zarówno liczby występujące w działaniu, jak i wynik zapiszmy za pomocą ułamków dziesiętnych.

a) $5 \text{ mm} + 7 \text{ mm}$

b) $2 \text{ cm } 5 \text{ mm} + 4 \text{ cm } 7 \text{ mm}$

a) $5 \text{ mm} + 7 \text{ mm} = 12 \text{ mm} = 1 \text{ cm } 2 \text{ mm}$

$0,5 \text{ cm} + 0,7 \text{ cm} = 1,2 \text{ cm}$

b) $2 \text{ cm } 5 \text{ mm} + 4 \text{ cm } 7 \text{ mm} = 6 \text{ cm } 12 \text{ mm} = 7 \text{ cm } 2 \text{ mm}$

$2,5 \text{ cm} + 4,7 \text{ cm} = 7,2 \text{ cm}$



Jeśli po dodaniu części ułamkowych otrzymamy więcej niż 10 części dziesiątych, to zamieniamy je na całość z odpowiednią częścią ułamkową.

3. Oblicz.

a) $0,6 + 0,8$

b) $0,2 + 0,9$

c) $3,4 + 2,8$

d) $5,9 + 2,3$

e) $8,4 + 1,9$

f) $2,4 + 6,7$

g) $3,7 + 5,6$

h) $6,8 + 2,9$

W przykładzie 3 dodawaliśmy ułamki, w których występowały części dziesiąte.

W taki sam sposób dodajemy ułamki z częściami setnymi.

Przykład 4

Obliczmy podaną sumę. Następnie zapiszmy dodawanie za pomocą ułamków dziesiętnych.

a) $7 \text{ zł } 25 \text{ gr} + 1 \text{ zł } 34 \text{ gr}$

b) $5 \text{ zł } 32 \text{ gr} + 2 \text{ zł } 68 \text{ gr}$

a) $7 \text{ zł } 25 \text{ gr} + 1 \text{ zł } 34 \text{ gr} = 8 \text{ zł } 59 \text{ gr}$
 $7,25 \text{ zł} + 1,34 \text{ zł} = 8,59 \text{ zł}$

b) $5 \text{ zł } 32 \text{ gr} + 2 \text{ zł } 68 \text{ gr} = 7 \text{ zł } 100 \text{ gr} = 8 \text{ zł}$
 $5,32 \text{ zł} + 2,68 \text{ zł} = 8 \text{ zł}$
sto setnych, czyli jedna całość

4. Oblicz.

a) $0,14 + 3,55$

b) $0,38 + 0,43$

c) $3,16 + 5,45$

d) $4 + 0,15$

e) $2,48 + 6$

f) $0,72 + 0,28$

g) $7,36 + 0,64$

h) $4,69 + 2,31$

Zadania

Oblicz.

a) $3,4 + 6,3$

b) $4,25 + 1,71$

c) $3,2 + 1,8$

d) $4,56 + 5,4$

e) $3,18 + 9,72$

f) $1,48 + 2,53$

Przepisz działanie i zamiast znaku zapytania wstaw odpowiednią liczbę.

a) $1,4 + ? = 2$

b) $? + 3,9 = 10$

c) $2,3 + ? = 3$

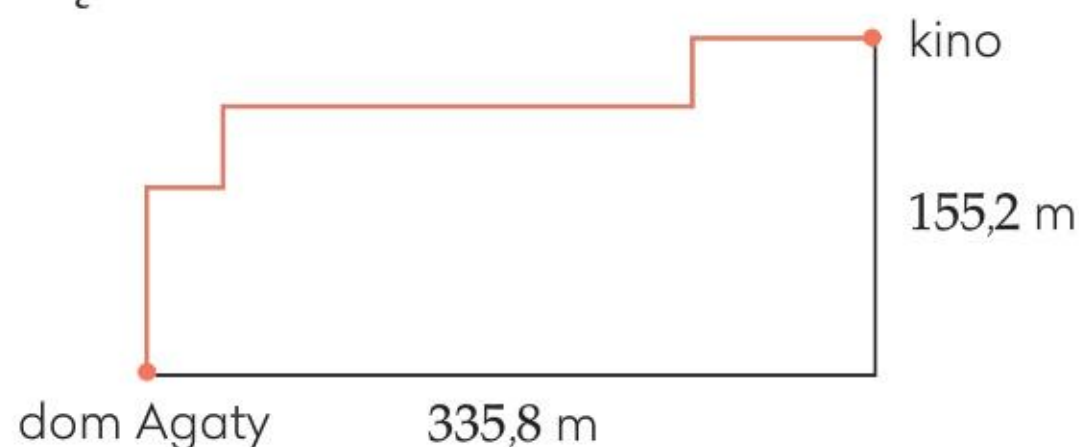
d) $? + 1,15 = 5$

Podręcznik do historii waży $0,21 \text{ kg}$, a podręcznik do języka polskiego jest o $0,13 \text{ kg}$ cięższy. Ile ważą razem obie książki? Odpowiedź podaj w kilogramach.

Za zeszyt w linie Janek zapłacił $3,35 \text{ zł}$, a za zeszyt w kratkę $4,80 \text{ zł}$. Ile kosztowały oba zeszyty razem? Odpowiedź podaj w złotych.



Od domu Agaty do kina można dojść na dwa sposoby. Dziewczynka chodzi trasą zaznaczoną na rysunku kolorem czerwonym. Oblicz długość trasy, jaką przebywa Agata, idąc do kina.



3.6 Dodawanie ułamków dziesiętnych sposobem pisemnym

Podejmij temat

Dzięki odpowiedniej aplikacji w telefonie Igor zawsze wie, jakiej długości drogę przebył. We wtorek wyszedł z domu do sklepu oddalonego o 1,964 km. Wracał nieco dłuższą trasą o długości 2,255 km.



Spróbuj powiedzieć, ile kilometrów łącznie przeszedł Igor do sklepu i z powrotem.



Przeanalizujemy zaprezentowany niżej tok myślenia. Dzięki niemu zrozumiemy metodę pisemnego dodawania ułamków dziesiętnych, którą stosujemy, gdy obliczenia pamięciowe są zbyt trudne. Posłużmy się przykładem opisanym w *Podejmij temat*.

kilometry	metry
1	964
+ 2	255
3	1219
↑	+
4	219

ale 1219 m =
= 1 km 219 m

Obie długości zapisujemy w postaci wyrażeń dwumianowanych.

Aby obliczyć drogę przebytą przez Igora, dodajemy osobno kilometry i osobno metry. Po dodaniu metrów otrzymaliśmy ich więcej niż 1000, więc zamieniamy 1000 m na 1 km.

Igor przebył zatem 4 km 219 m, czyli 4,219 km.

Zapis w tabelce przypomina działanie pisemne. W prostych przypadkach ułamki dziesiętne możemy oczywiście dodawać w pamięci, natomiast w bardziej skomplikowanych – zwykle wykonujemy je sposobem pisemnym.

Ciekawe!

W telefonie komórkowym można zainstalować specjalną aplikację, dzięki której dowiemy się, ile kilometrów (lub ile kroków) pokonujemy podczas wykonywania różnych czynności: chodzenia, biegania, sprzątania, a nawet tańczenia. Aplikacja poinformuje także o czasie naszej aktywności fizycznej i liczbie spalanych kalorii.



Czynności wykonywane podczas pisemnego dodawania ułamków dziesiętnych są takie same jak podczas pisemnego dodawania liczb naturalnych.

Działanie zapisujemy tak, by przecinki we wszystkich liczbach zapisane były dokładnie jeden pod drugim.

Jeżeli podczas dodawania w którymś rzędzie otrzymamy liczbę dwucyfrową, to jej dziesiątki przenosimy do kolejnego, wyższego rzędu.

Przykład 1

Wykonajmy dodawanie pisemne: $27,454 + 8,372$.

Zapisujemy liczbę pod liczbą tak, aby całości znajdowały się pod całościami, części ułamkowe pod częściami ułamkowymi, a przecinek pod przecinkiem.

Dodajemy:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 27,454 \\ + 8,372 \\ \hline 35,826 \end{array}$$

- części tysięczne do części tysięcznych $4 + 2 = 6$,
- części setne do części setnych $5 + 7 = 12 = 10 + 2$,
- części dziesiąte do części dziesiątych $1 + 4 + 3 = 8$,
- jedności do jedności $7 + 8 = 15 = 10 + 5$,
- dziesiątki do dziesiątek $1 + 2 = 3$.

W wyniku wstawiamy przecinek pod przecinkiem.

1. Przepisz podane działanie i oblicz sumę.

a) $\begin{array}{r} 3,742 \\ + 6,329 \\ \hline \end{array}$ ×

b) $\begin{array}{r} 0,74 \\ + 0,68 \\ \hline \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 45,6 \\ + 9,5 \\ \hline \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 3,52 \\ 0,74 \\ + 16,81 \\ \hline \end{array}$ ×

Zdarza się, że musimy dodać pisemnie ułamki dziesiętne, które mają różną liczbę cyfr po przecinku. Całości w zapisie muszą znajdować się pod całościami, przecinek pod przecinkiem, części dziesiąte pod częściami dziesiątymi, części setne pod częściami setnymi itd. Przykładowe działania poprawnie zapisane wyglądają zatem następująco:

$$\begin{array}{r} 32,567 \\ + 9,32 \\ \hline \end{array}$$
 ×

$$\begin{array}{r} 0,4 \\ + 5,567 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36,23 \\ + 8,7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,922 \\ + 48,9 \\ \hline \end{array}$$
 ×

$$\begin{array}{r} 45 \\ + 7,396 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,629 \\ + 0,8 \\ \hline \end{array}$$

W powyższych zapisach można z prawej strony ułamków dopisać (lub wyobrazić sobie) zera, bo – jak wiemy – ich dopisanie nie zmienia wartości ułamków:

$$\begin{array}{r} 32,567 \\ + 9,320 \\ \hline \end{array}$$
 ×

$$\begin{array}{r} 0,400 \\ + 5,567 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36,23 \\ + 8,70 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,922 \\ + 48,900 \\ \hline \end{array}$$
 ×

$$\begin{array}{r} 45,000 \\ + 7,396 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,629 \\ + 0,800 \\ \hline \end{array}$$

2. Przepisz powyższe działania i je wykonaj.

3. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $3,7 + 4,58$

c) $12,3825 + 45,29$ ×

e) $2,34 + 18,66$

g) $4,92 + 15,394 + 0,1763$

i) $2,56 + 7,6 + 0,368$

b) $0,56 + 18,9$

d) $36,96 + 15,4$ ×

f) $0,7283 + 0,356$

h) $1,845 + 0,27 + 45,1561$

j) $26,7 + 47,68 + 392$

Zadania

● Aby móc suszyć pranie na słońcu, babcia Hania rozciągnęła na podwórku przed domem trzy sznury. Jeden miał długość 8,37 m, drugi 5,5 m, a trzeci – 7 m. Jaka była łączna długość trzech sznurów?

● Jeśli sumę liczb 526,8 i 49,557 powiększymy o 36,246, to otrzymamy ×
A. 910,71 B. 1058,616 C. 612,603 D. 138,483

● Ola przygotowała dla mamy obrazek w kształcie kwadratu o boku długości 24,3 cm. Dorysowała na nim dookoła ozdobną ramkę, wzdłuż całego brzegu. Jaka była łączna długość tego obramowania? ×

● Pani Izabela kupiła o 1,23 kg więcej jabłek niż kiwi, a potem o 0,17 kg więcej bananów niż jabłek. Przerysuj tabelę do zeszytu i wpisz brakujące dane. ×

Kupione owoce	kiwi	jabłka	banany	
Masa owoców	2,46 kg			Razem:



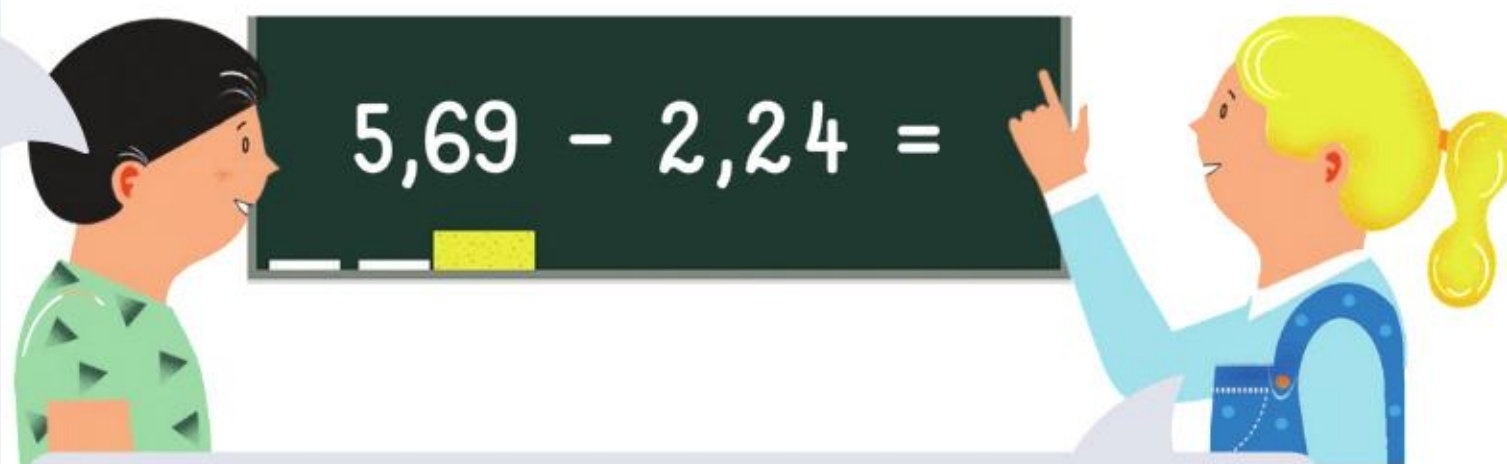
● Ołówek kosztuje 1,29 zł, długopis jest od niego o 3,70 zł droższy, a pióro jest droższe od długopisu o 12,35 zł. Ile kosztują łącznie ołówek, długopis i pióro? ×

● Rekord Polski w skoku w dal mężczyzn wynosi 8,28 m, a rekord Europy w tej dyscyplinie jest o 0,58 m lepszy. Rekord Polski w skoku w dal kobiet wynosi 6,97 m i jest on gorszy od rekordu Europy o 0,55 m (dane z 2017 roku). Ile wynoszą rekordy Europy w skoku w dal mężczyzn i kobiet? Wyniki podaj w metrach. Poszukaj w dostępnych źródłach, kiedy wymienione rekordy zostały ustanowione oraz czy są nadal aktualne.

3.7 Odejmowanie ułamków dziesiętnych w pamięci

Podejmij temat

Odejmowanie to działanie odwrotne do dodawania, więc w tym przypadku też możemy myśleć o cenach albo długościach.



Jasne! ☺ To też łatwe: 5 zł 69 gr – 2 zł 24 gr = 3 zł 45 gr, czyli $5,69 - 2,24 = 3,45$.

Odejmowanie ułamków dziesiętnych, podobnie jak dodawanie, możemy wykonywać w pamięci, wyobrażając sobie, że jest to np. zapis kwot lub długości w postaci dziesiętnej. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 1

Wykonajmy odejmowanie.

a) $0,86 - 0,24$ b) $5,78 - 2,35$ c) $0,5 - 0,2$

Wyobraźmy sobie, że powyższe zapisy dotyczą cen i oznaczają kwoty w złotych. Zapiszmy zatem odejmowanie z użyciem jednostek.

a) $0,86 \text{ zł} - 0,24 \text{ zł} = 86 \text{ gr} - 24 \text{ gr} = 62 \text{ gr} =$
 $= 0,62 \text{ zł}$

b) $5,78 \text{ zł} - 2,35 \text{ zł} = 5 \text{ zł } 78 \text{ gr} - 2 \text{ zł } 35 \text{ gr} = 3 \text{ zł } 43 \text{ gr} =$
 $= 3,43 \text{ zł}$

c) $0,5 \text{ zł} - 0,2 \text{ zł} = 0,50 \text{ zł} - 0,20 \text{ zł} = 50 \text{ gr} - 20 \text{ gr} = 30 \text{ gr} =$
 $= 0,3 \text{ zł}$

Wróćmy teraz do pierwotnego działania, bez jednostek. Ostatecznie otrzymujemy:

a) $0,86 - 0,24 = 0,62$ b) $5,78 - 2,35 = 3,43$ c) $0,5 - 0,2 = 0,3$



Przykład 1 pokazuje, że aby odjąć ułamki dziesiętne, należy od całości odjąć całości, a od części ułamkowych – części ułamkowe.

1. Oblicz.

a) $4,5 - 2,1$
e) $6,28 - 1,15$

b) $8,7 - 4,6$
f) $4,35 - 1,28$

c) $5,8 - 0,3$
g) $7,41 - 7,16$

d) $7,5 - 7,4$
h) $3,25 - 3,23$

Przykład 2

Obliczmy podaną różnicę.

a) $1 - 0,7$

b) $9 - 2,8$

c) $1 - 0,24$

d) $5 - 1,13$

Wyobraźmy sobie, że powyższe zapisy dotyczą długości, i zapiszmy odejmowanie z użyciem jednostek. W punktach a) i b) występują ułamki z częściami dziesiętymi, dlatego wygodnie nam będzie wykorzystać centymetry i milimetry. W punktach c) i d) mamy ułamki z częściami setnymi, więc wygodnie będzie wykorzystać metry i centymetry.

a) $1 \text{ cm} - 0,7 \text{ cm} = 1 \text{ cm} - 7 \text{ mm} = 10 \text{ mm} - 7 \text{ mm} = 3 \text{ mm} = 0,3 \text{ cm}$

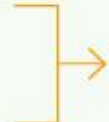
b) $9 \text{ cm} - 2,8 \text{ cm} = 9 \text{ cm} - 2 \text{ cm } 8 \text{ mm} = 8 \text{ cm } 10 \text{ mm} - 2 \text{ cm } 8 \text{ mm} = 6 \text{ cm } 2 \text{ mm} = 6,2 \text{ cm}$

c) $1 \text{ m} - 0,24 \text{ m} = 1 \text{ m} - 24 \text{ cm} = 100 \text{ cm} - 24 \text{ cm} = 76 \text{ cm} = 0,76 \text{ m}$

d) $5 \text{ m} - 1,13 \text{ m} = 5 \text{ m} - 1 \text{ m } 13 \text{ cm} = 4 \text{ m } 100 \text{ cm} - 1 \text{ m } 13 \text{ cm} = 3 \text{ m } 87 \text{ cm} = 3,87 \text{ m}$

Wróćmy teraz do pierwotnego działania, bez jednostek.

Na koniec otrzymujemy:

a) $1 - 0,7 = 0,3$
b) $9 - 2,8 = 6,2$  Zamieniamy jedną całość na dziesięć dziesiątych, tak jak 1 cm zamienialiśmy na 10 mm.

c) $1 - 0,24 = 0,76$
d) $5 - 1,13 = 3,87$  Zamieniamy jedną całość na sto setnych, tak jak 1 m zamienialiśmy na 100 cm.

2. Oblicz podobnie jak w przykładzie 2. Wynik podaj w decymetrach.

a) $1 \text{ dm} - 0,6 \text{ dm}$

b) $6 \text{ dm} - 3,7 \text{ dm}$

c) $1 \text{ dm} - 0,48 \text{ dm}$

d) $7 \text{ dm} - 3,18 \text{ dm}$

3. Wykonaj odejmowanie.

a) $1 - 0,7$

b) $5 - 0,4$

c) $3 - 1,5$

d) $9 - 8,6$

e) $1 - 0,25$

f) $6 - 0,49$

g) $4 - 2,37$

h) $10 - 5,68$

4. Przepisz działania i uzupełnij je. Zamiast każdego znaku zapytania wpisz odpowiednią liczbę.

a) $1 - \text{?} = 0,3$

b) $1 - \text{?} = 0,47$

c) $7 - \text{?} = 6,3$

d) $5 - \text{?} = 1,39$

e) $\text{?} + 0,6 = 1$

f) $0,28 + \text{?} = 1$

g) $4,7 + \text{?} = 5$

h) $3,81 + \text{?} = 8$

Przykład 3

Wykonajmy odejmowanie liczb z podanymi jednostkami długości. Następnie zarówno liczby występujące w działaniu, jak i wynik zapiszmy za pomocą ułamków dziesiętnych.

a) $6 \text{ cm } 5 \text{ mm} - 7 \text{ mm}$

b) $6 \text{ cm } 5 \text{ mm} - 1 \text{ cm } 7 \text{ mm}$

a) $6 \text{ cm } 5 \text{ mm} - 7 \text{ mm} = 5 \text{ cm } 15 \text{ mm} - 7 \text{ mm} = 5 \text{ cm } 8 \text{ mm}$

$6,5 \text{ cm} - 0,7 \text{ cm} = 5,8 \text{ cm}$

b) $6 \text{ cm } 5 \text{ mm} - 1 \text{ cm } 7 \text{ mm} = 5 \text{ cm } 15 \text{ mm} - 1 \text{ cm } 7 \text{ mm} = 4 \text{ cm } 8 \text{ mm}$

$6,5 \text{ cm} - 1,7 \text{ cm} = 4,8 \text{ cm}$



Jeśli część ułamkowa odjemnej jest mniejsza od części ułamkowej odjemnika, to jedną całość odjemnej zamieniamy na odpowiednią część ułamkową.

5. Oblicz.

a) $1,4 - 0,6$

b) $1,3 - 0,9$

c) $1,6 - 0,7$

d) $4,6 - 0,9$

e) $7,3 - 2,5$

f) $5,1 - 3,2$

g) $6,3 - 5,6$

h) $4,8 - 3,9$

Zadania

- Wykonaj odejmowanie i sprawdź jego poprawność za pomocą dodawania.

a) $3,7 - 2$

b) $5,4 - 0,6$

c) $4,8 - 2,9$

d) $8,52 - 6$

e) $9 - 2,31$

f) $3,56 - 1,14$

g) $6,43 - 0,24$

h) $4,26 - 1,09$

i) $5,39 - 2,35$

j) $17,31 - 9,26$

- Rozwiąż zadania. Wszystkie odpowiedzi podaj w złotych.

- a) Adam kupił kanapkę za 3,50 zł. Ile otrzymał reszty, jeżeli zapłacił monetą pięciozłotową?

- b) Kasia kupiła pączka za 2,20 zł. Ile reszty otrzymała, jeśli dała kasjerce 3 zł i 20 gr?

- c) Iza kupiła sok za 1,20 zł oraz jagodziankę za 2,30 zł. Ile dostała reszty z 10 zł?

- Jaką liczbę należy dodać do 8,52, żeby otrzymać 15?

- Do jakiej liczby należy dodać 3,29, żeby otrzymać 7?

- a) Ile ważą zakupy, jeśli pełna torba waży 2,46 kg, a pusta – 0,19 kg?
b) Ile waży słoik, jeśli miód w środku waży 0,75 kg, a słoik z miodem – 0,94 kg?

- Beata ma 1,46 m wzrostu, a jej koleżanka Magda – 1,42 m. O ile Beata jest wyższa od Magdy? Odpowiedź podaj w metrach.

- Arbuz waży 3,75 kg. Maciek zjadł 0,38 kg, a jego siostra Małgosia – 0,37 kg. Ile waży ta część arbuza, która pozostała?

3.8 Odejmowanie ułamków dziesiętnych sposobem pisemnym

Podejmij temat



Spróbuj powiedzieć, jaką długość ma trasa, która pozostała panu Marcinowi do przejścia.

Pan Marcin idzie do znajomego mieszkającego od niego w odległości 3,245 km. Za pomocą krokomierza zmierzył, że przeszedł już 1,527 km.



Prześledźmy poniższy tok myślenia, podobnie jak zrobiliśmy to w przypadku dodawania pisemnego. Dzięki niemu zrozumiemy metodę pisemnego odejmowania ułamków dziesiętnych stosowaną, gdy obliczenia pamięciowe są zbyt trudne. Posłużymy się przykładem z *Podejmij temat*.

kilometry	metry	
2	1 245	bo 1 km =
3	245	= 1000 m
– 1	527	
1	718	

Zamieniamy zapis długości na wyrażenia dwumianowane. Aby obliczyć długość trasy pozostałej do przejścia panu Marcinowi, odejmujemy osobno kilometry i osobno metry. Od 245 m nie można odjąć 527 m, dlatego należy 1 km zamienić na metry. Zamiast 3 km 245 m mamy więc 2 km 1245 m. Teraz już łatwo można wykonać odejmowanie.

Panu Marcinowi pozostało zatem do przejścia 1 km 718 m, czyli 1,718 km.

Podobnie jak w przypadku dodawania, zapis w tabelce przypomina działanie pisemne. Jeśli odejmowanie ułamków dziesiętnych nie jest na tyle proste, by obliczyć różnicę w pamięci, wykonujemy działanie sposobem pisemnym.

Ciekawe!



Krokomierz, inaczej pedometr, to urządzenie, które pokazuje liczbę kroków wykonanych przez noszącą go osobę. Jego dodatkowymi funkcjami mogą być: pulsometr, zegarek, radio oraz pomiary: liczby skłonów, przebytej odległości, spalonych kalorii. Nowoczesne krokomierze mają funkcję pamięci oraz transmisji danych do komputera.



Czynności wykonywane podczas pisemnego odejmowania ułamków dziesiętnych są takie same jak podczas pisemnego odejmowania liczb naturalnych.

Działanie zapisujemy tak, by przecinki we wszystkich liczbach zapisane były dokładnie jeden pod drugim.

Jeżeli w którymś rzędzie cyfra odjemnej jest mniejsza od cyfry odjemnika, to należy wykonać „pożyczanie”, czyli zamienić jedną jednostkę rzędu wyższego na 10 jednostek rzędu niższego.

Przykład 1

Wykonajmy odejmowanie pisemne: $57,293 - 3,468$.

Zapisujemy liczbę pod liczbą tak, żeby całości znajdowały się pod całościami, części ułamkowe pod częściami ułamkowymi, a przecinek pod przecinkiem.

Odejmujemy:

$$\begin{array}{r} \text{6} \text{12} \text{8} \text{13} \\ \text{5} \text{7,2} \text{9} \text{3} \\ - \text{3,4} \text{6} \text{8} \\ \hline \text{5} \text{3,8} \text{2} \text{5} \end{array}$$

- części tysięczne od części tysięcznych (z „pożyczeniem” od części setnych) $13 - 8 = 5$,
- części setne od części setnych $8 - 6 = 2$,
- części dziesiąte od części dziesiątych (z „pożyczeniem” od jednostki) $12 - 4 = 8$,
- jednostki od jednostki $6 - 3 = 3$,
- przepisujemy pozostałą cyfrę dziesiątek, czyli 5 .

W wyniku wstawiamy przecinek pod przecinkiem.

1. Przepisz podane działania i oblicz różnicę.

a) $\begin{array}{r} 23,5 \\ - 14,2 \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{r} 36,82 \\ - 29,16 \\ \hline \end{array} \times$

c) $\begin{array}{r} 3,428 \\ - 0,709 \\ \hline \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 24,356 \\ - 9,185 \\ \hline \end{array} \times$

Zdarza się, że musimy odjąć pisemnie ułamki dziesiętne, które mają różną liczbę cyfr po przecinku. Tak jak przy dodawaniu, całości w zapisie muszą znajdować się pod całościami, przecinek pod przecinkiem, części dziesiąte pod częściami dziesiątymi, części setne pod częściami setnymi itd. Poprawnie zapisane działania mogą zatem wyglądać następująco:

$$\begin{array}{r} 75,826 \\ - 14,5 \\ \hline \end{array} \times$$

$$\begin{array}{r} 2,477 \\ - 0,48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,72 \\ - 3,481 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 29,6 \\ - 22,154 \\ \hline \end{array} \times$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ - 4,12 \\ \hline \end{array}$$

W przypadku odejmowania – podobnie jak podczas dodawania – na końcu ułamka dziesiętnego możemy dopisać (lub wyobrazić sobie) zera:

$$\begin{array}{r} 75,826 \\ - 14,500 \\ \hline \end{array} \times$$

$$\begin{array}{r} 2,477 \\ - 0,480 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5,720 \\ - 3,481 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 29,600 \\ - 22,154 \\ \hline \end{array} \times$$

$$\begin{array}{r} 16,00 \\ - 4,12 \\ \hline \end{array}$$

2. Przepisz powyższe działania i wykonaj je.

3. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $92,267 - 8,6$

b) $7,45 - 2,624$

c) $502,02 - 41,414$

d) $1,5846 - 0,99$ ×

e) $48 - 3,127$

f) $21,35 - 18$

g) $34,6 - 7,92$

h) $1,234 - 0,55$

Zadania

● Klatka razem z papugą waży 2,14 kg. Ile waży papuga, jeżeli pusta klatka waży 1,9 kg?

● Latem deskorolka kosztowała 143,70 zł. W październiku obniżono jej cenę o 9,99 zł, a w grudniu jeszcze o 45,75 zł. Oblicz cenę deskorolki po obu przecenach. ×

● Dwaj studenci, Tomasz i Michał, przygotowują się do startu w maratonie. Pewnego dnia podczas treningu Tomasz przebiegł 32,21 km, a Michał o 4,38 km mniej. ×

a) Jaki dystans pokonał Michał podczas treningu?

 b) Sprawdź w dostępnych ci źródłach, jaka jest długość maratonu, i oblicz, ile kilometrów brakowało tego dnia Tomaszowi do przebiegnięcia całego dystansu. A ile Michałowi?

● Podczas wiosennej promocji pani Marta kupiła bluzkę i spodnie. Bluzka kosztowała 67,45 zł, a spodnie były o 129,30 zł droższe. Ile złotych reszty otrzymała pani Marta, jeśli płacąc za zakupy, dała ekspedientce dwa banknoty: 200 zł i 100 zł? ×

● Do sporządzenia 12 kg sałatki kucharz w restauracji użył 6,5 kg ziemniaków, 1,85 kg kiszonych ogórków, 1,5 kg marchewki, 1,45 kg kukurydzy, 0,625 kg majonezu oraz pewną ilość ziół i przypraw. Ile ważyły zioła i przyprawy?

A. 0,075 kg

B. 1,065 kg

C. 0,75 kg

D. 0,065 kg

● Zapisz równanie ilustrujące treść zadania i rozwiąż je.

a) Jaką liczbę należy dodać do 7,65, żeby otrzymać 15?

b) Do jakiej liczby należy dodać 25,44, aby otrzymać 38,3? ×

c) Jaką liczbę należy odjąć od 15,7, żeby otrzymać 2,378?

● Ułamki dziesiętne zostały zapisane według pewnej reguły.

 Odgadnij, jaka to reguła, i zapisz trzy kolejne ułamki.



5,1

5,03

4,96

4,89

4,82

4,75

3.9 Mnożenie ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne

Podejmij temat



Małgosia i jej starszy brat Janek mieli iść do kwiaciarni po kwiaty z okazji imienin mamy. Postanowili kupić 7 tulipanów. Wiedzieli, że jeden tulipan kosztuje 2,45 zł.

Czy potrafisz obliczyć, czy rodzeństwu wystarczy pieniędzy na kwiaty dla mamy?

Czy wystarczy nam pieniędzy?
Mamy tylko 20 zł.

Musimy to sprawdzić.



Działanie, które musieli wykonać Janek i Małgosia, nie jest na tyle proste, żeby móc szybko zrobić to w pamięci. Dzieci obliczały na kartkach.

Małgosia zrobiła to w taki sposób:

$$2\frac{45}{100} \cdot 7 = \frac{245}{100} \cdot 7 = \frac{245 \cdot 7}{100} = \frac{1715}{100} = 17\frac{15}{100} = 17,15$$

$$\begin{array}{r} 245 \\ \cdot \quad 7 \\ \hline 1715 \end{array}$$

Janek, który chodzi już do szóstej klasy, obliczył tak:

$$\begin{array}{r} 2,45 \\ \cdot \quad 7 \\ \hline 17,15 \end{array}$$

Oboje otrzymali taki sam wynik. Ucieszyli się, bo okazało się, że 20 zł wystarczy na zakup kwiatów.

Przyjrzyjmy się obliczeniom Małgosi i obliczeniom Janka.

Małgosia zapisała cenę tulipana jako liczbę mieszaną i pomnożyła ją przez 7. Podczas obliczeń musiała sobie pomóc mnożeniem pisemnym liczb naturalnych (żeby wiedzieć, ile to jest $245 \cdot 7$). Janek wykonał tylko mnożenie pisemne – umiał już pomnożyć ułamek dziesiętny przez liczbę naturalną.

Co jest podobnego w obu działaniach pisemnych, a czym się one różnią?

Przykład 1

Wykonajmy pisemnie podane mnożenie.

- a) $24,3 \cdot 5$ b) $3,526 \cdot 6$
c) $5,82 \cdot 34$ d) $0,374 \cdot 14$

Popatrzmy, jak poprawnie zapisać czynniki i gdzie w wyniku mnożenia (w iloczynie) wstawić przecinek.

a)
$$\begin{array}{r} 24,3 \\ \cdot \quad 5 \\ \hline 121,5 \end{array}$$
 → jedna cyfra po przecinku

b)
$$\begin{array}{r} 3,526 \\ \cdot \quad 6 \\ \hline 21,156 \end{array}$$
 → trzy cyfry po przecinku

c)
$$\begin{array}{r} 5,82 \\ \cdot \quad 34 \\ \hline 2328 \\ + 1746 \\ \hline 197,88 \end{array}$$
 → dwie cyfry po przecinku

d)
$$\begin{array}{r} 0,374 \\ \cdot \quad 508 \\ \hline 2992 \\ + 1870 \\ \hline 189,992 \end{array}$$
 → trzy cyfry po przecinku



Podczas mnożenia pisemnego ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną postępujemy tak samo jak podczas mnożenia pisemnego dwóch liczb naturalnych. Otrzymany iloczyn musi mieć tyle samo cyfr po przecinku co mnożony ułamek.

1. Przepisz podane działanie i oblicz iloczyn.

- a)
$$\begin{array}{r} 2,54 \\ \cdot \quad 4 \\ \hline \end{array}$$
 b)
$$\begin{array}{r} 25,5 \\ \cdot \quad 9 \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 3,283 \\ \cdot \quad 6 \\ \hline \end{array}$$
 d)
$$\begin{array}{r} 3,21 \\ \cdot \quad 25 \\ \hline \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r} 0,461 \\ \cdot \quad 202 \\ \hline \end{array}$$
 f)
$$\begin{array}{r} 2,037 \\ \cdot \quad 94 \\ \hline \end{array}$$

2. Wykonaj mnożenie.

- a) $24,82 \cdot 4$ b) $15,09 \cdot 23$
 $0,496 \cdot 7$ $6,35 \cdot 28$
c) $0,623 \cdot 207$ d) $0,1234 \cdot 36$
 $0,064 \cdot 555$ $0,0125 \cdot 74$

Zauważyłaś, że aby pomnożyć pisemnie liczby, zapisujemy je inaczej niż w przypadku dodawania czy odejmowania?



Oczywiście! Gdy mnożymy pisemnie, całości nie muszą być pod całościami.

Przykład 2

Obliczmy w pamięci.

- a) $0,7 \cdot 4$ b) $0,06 \cdot 9$ c) $1,2 \cdot 5$

W prostych przypadkach nie musimy mnożyć ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną sposobem pisemnym – możemy pomnożyć w pamięci.



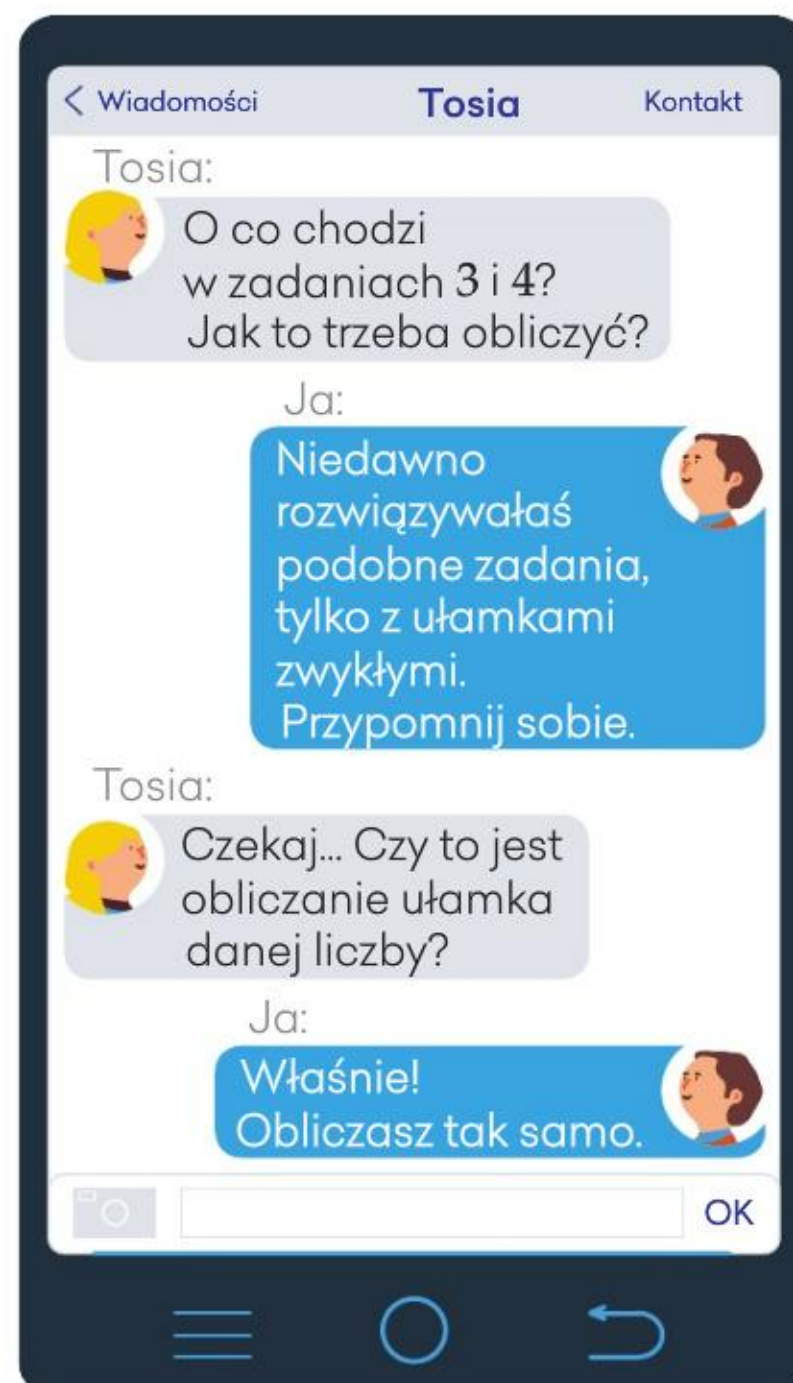
- a) $0,7 \cdot 4 = 2,8$ Wykonujemy mnożenie: $7 \cdot 4 = 28$.
W mnożonym ułamku $0,7$ jest jedna cyfra po przecinku, dlatego w zapisie wyniku przecinek wstawiamy tak, by również w nim była jedna cyfra po przecinku. Otrzymujemy więc: $2,8$.
- b) $0,06 \cdot 9 = 0,54$ Wykonujemy mnożenie: $6 \cdot 9 = 54$.
W mnożonym ułamku $0,06$ są dwie cyfry po przecinku, dlatego w zapisie wyniku przecinek wstawiamy tak, by również w nim były dwie cyfry po przecinku (musimy w tym celu dopisać 0 całości). Otrzymujemy więc: $0,54$.
- c) $1,2 \cdot 5 = 6,0 = 6$ Wykonujemy mnożenie: $12 \cdot 5 = 60$.
W mnożonym ułamku $1,2$ jest jedna cyfra po przecinku, dlatego w zapisie wyniku przecinek wstawiamy tak, by również w nim była jedna cyfra po przecinku. Otrzymujemy więc: $6,0$, czyli 6.

3. Oblicz w pamięci.

- a) $0,5 \cdot 7$ b) $2 \cdot 3,5$ c) $0,08 \cdot 7$ d) $8 \cdot 0,009$ e) $2 \cdot 0,053$ f) $1,03 \cdot 4$

Zadania

- Jaka liczba jest 57 razy większa od liczby $0,2$, a jaka od liczby $3,29$?
- Pewnego dnia do skrzynki pocztowej umieszczonej przy schronisku górskim trafiło aż 86 widokówek. Jedna pocztówka waży $0,44$ dag. Ile ważyły wszystkie kartki pocztowe znajdujące się tego dnia w skrzynce?
- Około $0,62$ masy ciała każdego człowieka stanowi woda.
 Oblicz, ile wody zawiera twój organizm.
- Pan Marian miał do pokonania samochodem 350 km. W ciągu 2 godzin przejechał $0,45$ całej trasy.
 - a) Ile kilometrów już przejechał?
 - b) Ile kilometrów ma jeszcze przed sobą?



3.10 Dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne

Podejmij temat



Mama poprosiła, żeby Marta i Antek kupili 6 butelek wody mineralnej. Rodzeństwo miało gazetkę ze sklepu, w której były podane ceny wody. Przeczytaj dialog i powiedz, czy ty potrafisz obliczyć cenę butelki ze zgrzewki.



Dzielenie $14,94 : 6$ nie jest tak proste, by szybko wykonać je w pamięci. Dzieci obliczały na kartkach.

Marta obliczała tak:

$$14,94 : 6 = 14\frac{94}{100} : 6 = \frac{1494}{100} : 6 = \frac{1494}{100 \cdot 6} = \frac{249}{100} = 2\frac{49}{100}$$

$$\begin{array}{r} 249 \\ 1494 : 6 \\ - 12 \\ \hline 29 \\ - 24 \\ \hline 54 \\ - 54 \\ \hline == \end{array}$$

Antek zrobił to inaczej:

$$\begin{array}{r} 2,49 \\ 14,94 : 6 \\ - 12 \\ \hline 29 \\ - 24 \\ \hline 54 \\ - 54 \\ \hline == \end{array}$$

Oboje otrzymali taki sam wynik. Okazało się, tak jak podejrzewali, że bardziej się opłaca kupić całą zgrzewkę wody niż 6 pojedynczych butelek.

Przyjrzyjmy się obliczeniom Marty i obliczeniom Antka.

Marta zapisała cenę zgrzewki (która była podana w postaci ułamka dziesiętnego) jako liczbę mieszaną i podzieliła ją przez 6. Podczas skracania musiała sobie pomóc dzieleniem pisemnym liczb naturalnych. Antek wykonał tylko dzielenie pisemne – podzielił ułamek dziesiętny przez liczbę naturalną.

Co jest podobnego w obu działaniach pisemnych, a czym się one różnią?



Podczas dzielenia pisemnego ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną postępujemy tak samo, jak podczas dzielenia pisemnego dwóch liczb naturalnych. W otrzymanym ilorazie stawiamy przecinek nad przecinkiem dzielnej.

Przykład 1

Obliczmy sposobem pisemnym: $450,24 : 8$.

Gdybyśmy mieli wykonać dzielenie liczb naturalnych $45\,024 : 8$, zrobilibyśmy to następująco:

$$\begin{array}{r} 5\,628 \\ 4\,5024 : 8 \\ - 40 \\ \hline 50 \\ - 48 \\ \hline 22 \\ - 16 \\ \hline 64 \\ - 64 \\ \hline == \end{array}$$

Jeżeli mamy wykonać dzielenie $450,24 : 8$, postępujemy tak samo, tylko w zapisie wyniku **przecinek** umieszczamy **nad przecinkiem**:

$$\begin{array}{r} 56,28 \\ 4\,50,24 : 8 \\ - 40 \\ \hline 50 \\ - 48 \\ \hline 22 \\ - 16 \\ \hline 64 \\ - 64 \\ \hline == \end{array}$$

1. Oblicz sposobem pisemnym.

a) $10,08 : 4$
 $8,496 : 6$

b) $1,752 : 4$
 $6,057 : 9$

c) $0,4465 : 5$
 $38,76 : 34$

d) $280,8 : 12$
 $817,5 : 25$

Wiemy już, w jaki sposób dzieli się ułamki dziesiętne przez liczby naturalne. Zajmiemy się teraz dzieleniem liczb naturalnych, podczas którego otrzymujemy resztę – można ją przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego.

Przykład 2

Obliczmy, ile to jest $357 : 4$.

$$\begin{array}{r} 89 \text{ r } 1 \\ 357 : 4 \\ - 32 \\ \hline 37 \\ - 36 \\ \hline 1 \end{array}$$

Zamiast pozostawiać resztę 1, możemy dzielną 357 zapisać w postaci ułamka dziesiętnego 357,00 i kontynuować dzielenie po dopisaniu zer.

$$\begin{array}{r} 89,25 \\ 357,00 : 4 \\ - 32 \\ \hline 37 \\ - 36 \\ \hline 10 \\ - 8 \\ \hline 20 \\ - 20 \\ \hline == \end{array}$$

Oczywiście, zamiast dopisywać zera za przecinkiem, można je sobie tylko wyobrazić.

W taki sam sposób, jak w przykładzie 2, można dopisać do dzielnej dowolną liczbę zer po przecinku (lub wyobrazić je sobie).

2. Oblicz sposobem pisemnym.

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } 179 : 5 & \text{b) } 390 : 12 & \text{c) } 658 : 8 & \text{d) } 291 : 8 & \text{e) } 36 : 32 \\ 726 : 4 & 317 : 4 & 71 : 25 & 182 : 16 & 14 : 16 \end{array}$$

Potrzeba uzupełnienia dzielnej zerami po przecinku może się też pojawić podczas dzielenia ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 3

Obliczmy iloraz.

a) $45,2 : 8$

b) $3,44 : 16$

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{array}{r} 5,65 \\ 45,2 : 8 \\ - 40 \\ \hline 52 \\ - 48 \\ \hline 40 \\ - 40 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } \begin{array}{r} 0,215 \\ 3,44 : 16 \\ - 32 \\ \hline 24 \\ - 16 \\ \hline 80 \\ - 80 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

Działania te pokazują, jak wygląda zapis dzielenia, gdy dzielną uzupełniamy zerami tylko w pamięci.

3. Oblicz sposobem pisemnym.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 16,4 : 5 & \text{b) } 6,6 : 8 & \text{c) } 4,36 : 16 & \text{d) } 17,4 : 12 \\ 1,35 : 6 & 15,3 : 5 & 1,1 : 25 & 63,66 : 24 \end{array}$$

4. Oblicz w pamięci.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 6,8 : 2 & \text{b) } 0,35 : 7 & \text{c) } 0,008 : 4 & \text{d) } 0,54 : 9 \\ 8,8 : 4 & 6,4 : 8 & 0,09 : 3 & 0,028 : 7 \end{array}$$



W najprostszych przypadkach dzielenie ułamka dziesiętnego przez liczbę naturalną możemy wykonać w pamięci. Należy przy tym pamiętać o prawidłowym wstawieniu przecinka w otrzymanym ilorazie.

5.  Patrycja zmierzyła długość i szerokość swojego pokoju stopami i stwierdziła, że ma on dokładnie 23 stopy długości i 17 stóp szerokości. Jaką długość ma stopa Patrycji, jeśli wiadomo, że jej pokój ma wymiary $4,37 \text{ m} \times 3,23 \text{ m}$?

Rozwiąż zadanie razem z koleżanką lub kolegą. Niech każdy wykona po jednym działaniu (korzystając z danych dotyczących szerokości lub długości pokoju).

Na koniec sprawdźcie, czy otrzymaliście ten sam wynik.



Więcej na temat

Wiemy już, że jeśli podczas dzielenia liczb naturalnych otrzymujemy resztę, możemy ją przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego.

W tym celu wykonujemy dzielenie pisemne.

Spróbujmy podzielić 11 przez 3.

Jak widać, w każdym kolejnym kroku otrzymamy w ilorazie cyfrę 6 i resztę 2. To dzielenie nigdy się nie skończy.

O liczbach, które po przecinku mają nieskończenie wiele cyfr, będziemy uczyć się w starszych klasach.

$$\begin{array}{r} 3,6\ 6\ 6\ \dots \\ 11 : 3 \\ - 9 \\ \hline 20 \\ - 18 \\ \hline 20 \\ - 18 \\ \hline 20 \\ - 18 \\ \hline 2 \\ \hline \dots \end{array}$$

6. Wykonaj dzielenie sposobem pisemnym.

a) $10 : 3$

b) $13 : 9$

Zadania

- Zeszyt 32-kartkowy waży 7,5 dag. Jego okładka waży 2,7 dag. Ile dekagramów waży jedna kartka?
- Za 6 kg ogórków zapłacono 20,70 zł. Ile kosztował 1 kg ogórków?
- Pan Stanisław musi pociąć listwę o długości 2,6 m na 8 równych części. Jaką długość będą miały otrzymane części? Wynik podaj w metrach.
- Pani Jadzia kupiła bilety autobusowe dla siebie i 6 koleżanek. Zapłaciła 101,50 zł. Po ile złotych powinna jej oddać każda z pań?
- ★ Ewa upiekła duży bochen wieloziarnistego chleba, który ważył 2,16 kg. Domowy chleb, odpowiednio przechowywany, długo zachowuje świeżość, więc Ewa postanowiła, że będzie go jadła przez tydzień: od poniedziałku do soboty codziennie tyle samo, a w niedzielę – dwa razy więcej. Ile chleba zje w środę, a ile w niedzielę?



3.11 Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000 itd.

Podejmij temat



Niewiele zaoszczędziłem. Mam tylko 25,83 zł.
Fajnie byłoby mieć 1000 razy więcej...
Ciekawe, ile by to było dokładnie...
To musi się dać jakoś łatwo obliczyć...

Przykład 1

Pomnóżmy liczbę 3,726 kolejno przez 10, 100, 1000, 10 000, 100 000.

$$\begin{array}{r} 3,726 \\ \cdot 10 \\ \hline 37,260 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,726 \\ \cdot 100 \\ \hline 372,600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,726 \\ \cdot 1000 \\ \hline 3726,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,726 \\ \cdot 10000 \\ \hline 37260,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,726 \\ \cdot 100000 \\ \hline 372600,000 \end{array}$$

Liczba 3,726 w każdym przypadku została pomnożona przez 1, a do wyniku dopisano odpowiednią liczbę zer i wstawiono przecinek według reguły poznanej w temacie 3.9.

Przyjrzyjmy się parom: mnożony ułamek oraz otrzymany iloczyn. Łatwo zauważyć, że w obu liczbach występują takie same cyfry, w tej samej kolejności. Iloczyn różni się od początkowego ułamka tylko miejscem przecinka (i ewentualnie dopisanymi zerami).

Patrz, tak samo zapisywaliśmy liczby naturalne podczas mnożenia! Końcowe zera jakby na zewnątrz.

I tak samo teraz nie mnożymy przez te zera, tylko dopisujemy je do otrzymanego iloczynu.



Z przykładu 1 wynika, że aby pomnożyć ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000 itd., nie trzeba wykonywać działań pisemnych. Podczas mnożenia kierujemy się poniższą zasadą.

Aby pomnożyć ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000 itd., wystarczy w tym ułamku przesunąć przecinek w prawo o tyle miejsc, ile jest zer w liczbie, przez którą mnożymy ułamek.

$$3,726 \cdot 10 = 37,26$$

$$3,726 \cdot 100 = 372,6$$

$$3,726 \cdot 1000 = 3726$$

$$3,726 \cdot 10\,000 = 37\,260$$

$$3,726 \cdot 100\,000 = 372\,600$$

Mnożymy przez 10, więc przecinek przesuwamy o 1 miejsce w prawo.

Mnożymy przez 100, więc przecinek przesuwamy o 2 miejsca w prawo.

Mnożymy przez 1000, więc przecinek przesuwamy o 3 miejsca w prawo. Po przesunięciu przecinka nie ma już cyfr, więc przecinek w zapisie nie jest potrzebny.

Mnożymy przez 10 000, więc przecinek przesuwamy o 4 miejsca w prawo. W mnożonej liczbie brakuje cyfr, należy więc z jej prawej strony dopisać zero.

Mnożymy przez 100 000, więc przecinek przesuwamy o 5 miejsc w prawo. W mnożonej liczbie brakuje cyfr, należy więc z jej prawej strony dopisać dwa zera.

1. Oblicz w pamięci podane iloczyny. W tym celu przesunij każdy przecinek w odpowiedni sposób.

a) $3,87 \cdot 10$
 $25,7 \cdot 10$

b) $26,978 \cdot 100$
 $0,5 \cdot 100$

c) $92,4567 \cdot 1000$
 $0,04 \cdot 1000$

d) $0,8472 \cdot 10\,000$
 $3,45 \cdot 10\,000$

Przykład 2

Podzielmy liczbę 145,8 kolejno przez 10, 100, 1000 i 10 000.

$$\begin{array}{r} 14,58 \\ 145,8 : 10 \\ - 10 \\ \hline 45 \\ - 40 \\ \hline 58 \\ - 50 \\ \hline 80 \\ - 80 \\ \hline == \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,458 \\ 145,8 : 100 \\ - 100 \\ \hline 458 \\ - 400 \\ \hline 580 \\ - 500 \\ \hline 800 \\ - 800 \\ \hline === \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,1458 \\ 145,8 : 1000 \\ - 1000 \\ \hline 4580 \\ - 4000 \\ \hline 5800 \\ - 5000 \\ \hline 8000 \\ - 8000 \\ \hline ==== \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,01458 \\ 145,8 : 10000 \\ - 10000 \\ \hline 45800 \\ - 40000 \\ \hline 58000 \\ - 50000 \\ \hline 80000 \\ - 80000 \\ \hline ===== \end{array}$$

Zauważ, że w dzielonym ułamku i w otrzymanym ilorazie są takie same cyfry, w tej samej kolejności, przy czym w dwóch wynikach pojawiły się po lewej stronie ilorazu dodatkowe zera. W każdym przypadku przecinek w ilorazie jest w innym miejscu, niż był w dzielnej.

Aby podzielić ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000 itd., nie trzeba zatem wykonywać działań pisemnych. Podczas dzielenia kierujemy się poniższą zasadą.

Aby podzielić ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000 itd., wystarczy w tym ułamku przesunąć przecinek w lewo o tyle miejsc, ile zer jest w liczbie, przez którą dzielimy ułamek.

$$145,8 : 10 = 14,58$$

$$145,8 : 100 = 1,458$$

$$145,8 : 1000 = 0,1458$$

$$145,8 : 10\,000 = 0,01458$$

Dzielimy przez 10, więc przecinek przesuwamy o 1 miejsce w lewo.

Dzielimy przez 100, więc przecinek przesuwamy o 2 miejsca w lewo.

Dzielimy przez 1000, więc przecinek przesuwamy o 3 miejsca w lewo. W dzielonej liczbie brakuje cyfr, należy więc po jej lewej stronie dopisać zero.

Dzielimy przez 10 000, więc przecinek przesuwamy o 4 miejsca w lewo. W dzielonej liczbie brakuje cyfr, należy więc po jej lewej stronie dopisać dwa zera.

2. Oblicz w pamięci podane ilorazy. W tym celu przesunij każdy przecinek w odpowiedni sposób.

a) $7,3 : 10$

$29,86 : 10$

b) $5,6 : 100$

$86,5 : 100$

c) $45,6 : 1000$

$364,5 : 1000$

d) $12,3 : 10\,000$

$1,0295 : 10\,000$

W podobny sposób możemy również dzielić przez 10, 100, 1000 itd. liczby naturalne.

Przykład 3

Podzielmy liczbę 482 kolejno przez 10, 100, 1000, 10 000.

$$482 : 10 = 48,2$$

$$482 : 100 = 4,82$$

$$482 : 1000 = 0,482$$

$$482 : 10\,000 = 0,0482$$

Rozumiem! Jeśli w liczbie są tylko całości, to wyobrażamy sobie przecinek na końcu liczby...



... i ten wyobrażony przecinek przesuwamy podczas dzielenia w lewo.

3. Oblicz.

a) $256 : 10$
 $9 : 10$

b) $1348 : 100$
 $14 : 100$

c) $3824 : 1000$
 $8 : 1000$

d) $149 : 10\,000$
 $28 : 10\,000$



1 mila morska = 1,852 km

Ciekawe!

Mikrometr to jednostka długości 1000 razy mniejsza od milimetra. Oznaczany ją literami μm (μ to grecka litera; czytamy ją: mi).
 $1\,\mu\text{m} = 0,001\,\text{mm}$, zatem
 $1\,\text{mm} = 1000\,\mu\text{m}$.

Włos ludzki ma grubość od $20\,\mu\text{m}$ do $80\,\mu\text{m}$, a nić pajęczyny – od $3\,\mu\text{m}$ do $7\,\mu\text{m}$.

Zadania

- Jedna mandarynka w szkolnym sklepiku kosztuje 0,45 zł. Ile trzeba byłoby zapłacić za 100 takich mandarynek?
- Słoik z dżemem waży 0,64 kg. W hurtowni na półkach stoi 1000 takich słoików – ile ważą razem?
- Statek znajduje się w odległości 10 mil morskich od portu (odległości na morzu podaje się w milach morskich). Skorzystaj z informacji podanej na marginesie i oblicz, ile to kilometrów.
- Zapisz podane liczby bez użycia skrótów. W tym celu wykonaj mnożenie odpowiednio przez 1000, 1000 000, 1000 000 000.
 - a) 3,48 tys.
0,06 tys.
 - b) 15,73 mln
0,009 mln
 - c) 5,725 mld
8,7 mld
- Przepisz podane działania i zamiast każdego znaku zapytania wstaw odpowiednią liczbę.
 - a) $380 : ? = 3,8$
 $380 : ? = 0,038$
 - b) $2,5 : ? = 0,0025$
 $2,5 : ? = 0,025$
 - c) $72,1 : ? = 0,721$
 $72,1 : ? = 0,0721$
- Odczytaj z ilustracji potrzebną informację i oblicz, ile metrów sznurka otrzymamy, jeśli podzielimy go na:
 - a) 10 części,
 - b) 100 części,
 - c) 1000 części,
 - d) 10 000 części.



Skorzystaj z informacji umieszczonych na marginesie i podaj grubość ludzkiego włosa oraz pajęczej nici w milimetrach.

3.12 Szacowanie wyników działań na ułamkach dziesiętnych

Podejmij temat



Spróbuj odpowiedzieć na pytania bez wykonywania dokładnych obliczeń.

- Czy Jacek może kupić porcję lodów i grejpfrut?
- Czy Agacie starczy pieniędzy na kupno pączka i soku?
- Czy Oli nie zabraknie pieniędzy na dwie butelki wody?

Jacek ma 8 zł, Agata ma 6 zł, a Ola – 5 zł.



4,80 zł



2,70 zł



2,65 zł



1,90 zł

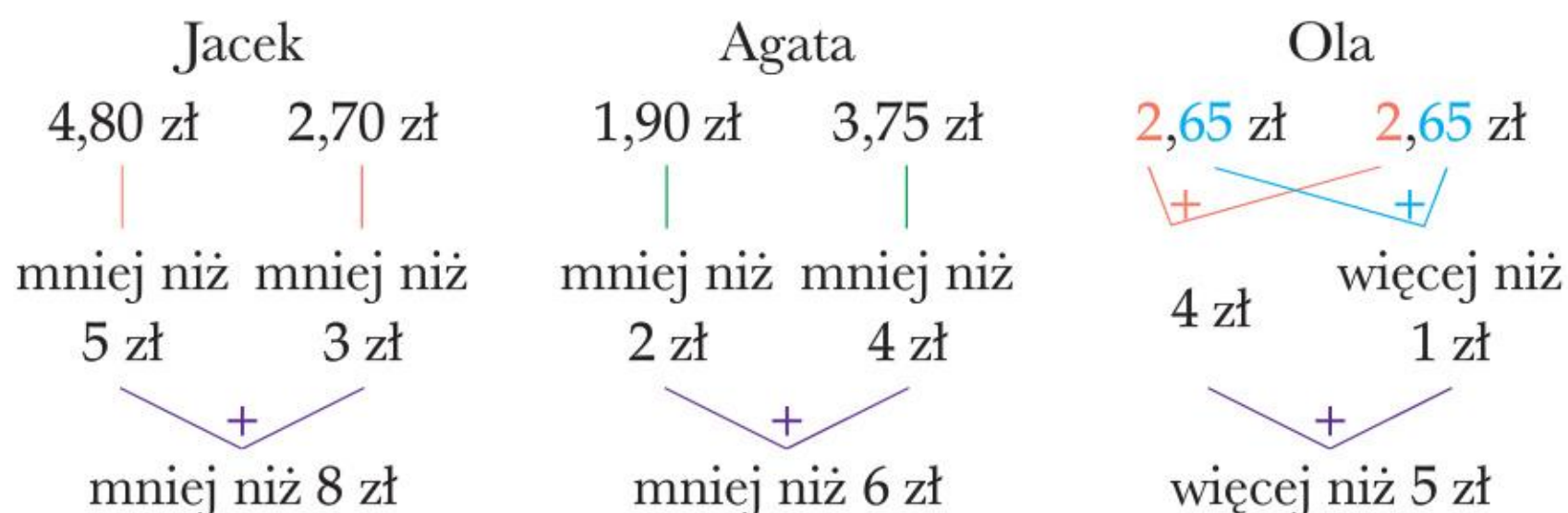


2,25 zł



3,75 zł

Szacowanie wyników działań na liczbach naturalnych omawialiśmy w dziale 1. Podobnie szacuje się wyniki działań na ułamkach. Aby odpowiedzieć na pytania postawione w *Podejmij temat*, trzeba przeprowadzić rozumowanie, które można przedstawić za pomocą drzewek.



Jak widać, tylko Jackowi i Agacie wystarczy pieniędzy na zakup wybranych przez siebie produktów.

- Odpowiedz na pytania bez wykonywania dokładnych obliczeń (ćwiczenie odnosi się do produktów z *Podejmij temat*).
 - Czy 5 zł wystarczy na zakup butelki wody i ćwiartki arbuza?
 - Czy 10 zł wystarczy na zakup dwóch porcji lodów?
 - Czy 4 zł wystarczą na zakup ćwiartki arbuza i pączka?
 - Czy 6 zł wystarczy na zakup trzech pączków?
 - Czy 5 zł wystarczy na zakup grejpfruta i wody mineralnej?
 - Czy 8 zł wystarczy na zakup trzech grejpfrutów?
 - Czy 10 zł wystarczy na zakup trzech butelek soku?

Ciekawe!

Grejpfrut to gatunek rośliny egzotycznej będącej prawdopodobnie skrzyżowaniem pomarańczy olbrzymiej (pomelo) i pomarańczy chińskiej. Drzewo, na którym rosną te duże owoce, osiąga nawet 15 m wysokości. Grejpfruty uprawiane są głównie w rejonie Morza Karaibskiego.

W języku polskim nazwa tego owocu wygląda też dość egzotycznie. Najczęściej zapisujemy ją *grejpfrut*, choć możemy także używać wersji angielskiej *grapefruit*. Pamiętajmy: inne formy zapisu są niepoprawne.

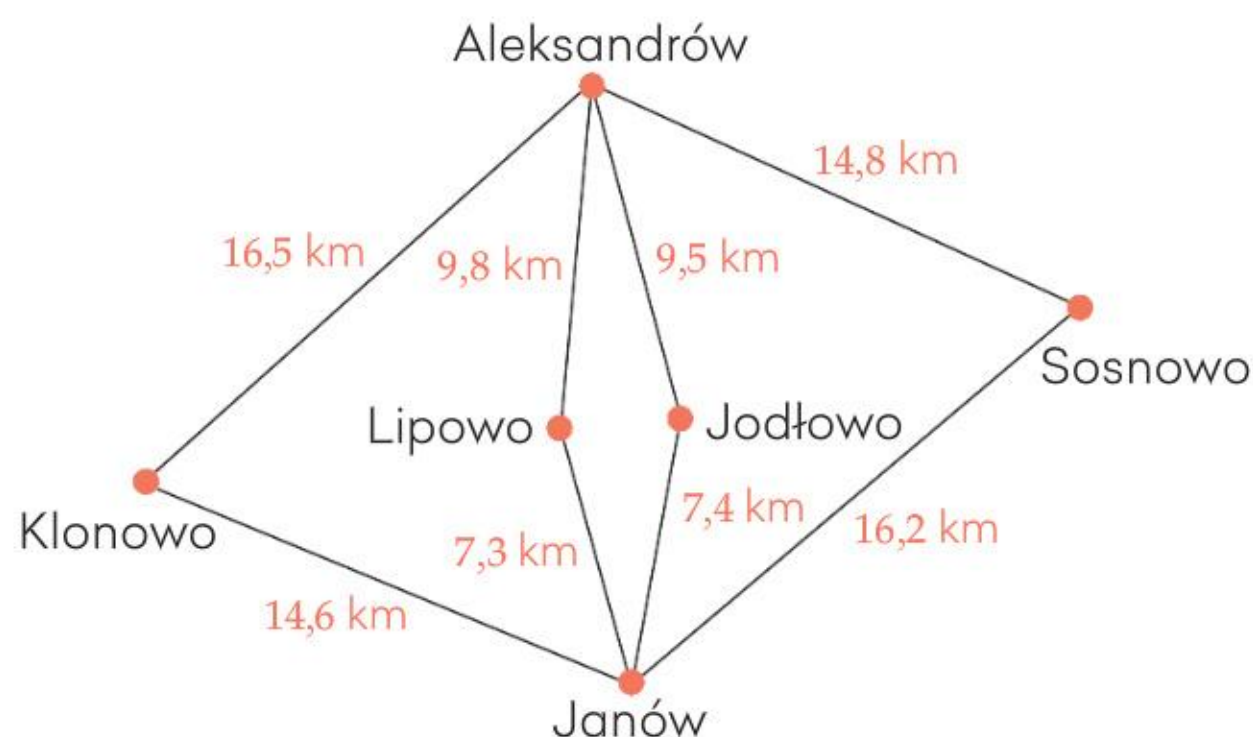
2.  Zapisz nazwy i ceny czterech dowolnych produktów i zadaj na ich temat pytania koledze lub koleżance – podobne jak w ćwiczeniu 1. Dobierz pytania do cen w taki sposób, żeby odpowiedzi nie były zbyt oczywiste.

Zadania

Zadania 1–5 rozwiąż za pomocą szacowania.

- Przyjrzyj się rysunkowi i przeanalizuj wszystkie drogi z Janowa do Aleksandrowa.

- Która jest krótsza – przez Lipowo czy przez Jodłowo?
- Która jest dłuższa – przez Klonowo czy przez Sosnowo?
- Która ma więcej niż 31 km?
- Która ma mniej niż 17 km?



- Na szkolny bal karnawałowy klasa Va miała dekorować salę własnoręcznie wykonanymi łańcuchami. Uzgodniono, że każdy łańcuch ma mieć co najmniej 3 m. Kasia, Ania i Jola chcą połączyć przygotowane przez siebie kawałki. Odczytaj z rysunku potrzebne informacje i ustal, czy otrzymają łańcuch wymaganej długości.

Mój łańcuch
ma 1,35 m.

Mój ma
aż 1,4 m.

A mój ma
tylko 80 cm.



- Każdy krok Maćka ma długość 0,48 m, a każdy krok Adama – 0,52 m.
- Czy 300 kroków Maćka to więcej niż 150 m?
 - Czy 300 kroków Adama to mniej niż 150 m?

- Wynik którego działania jest większy od 1?

a) $0,29 + 0,85$
 $0,435 + 0,623$
 $0,348 + 0,699$

b) $3,42 - 2,45$
 $8,24 - 7,02$
 $5,521 - 4,84$

c) $0,45 \cdot 2$
 $0,136 \cdot 5$
 $0,23 \cdot 4$

d) $5,63 : 5$
 $4,4 : 6$
 $2,21 : 2$

- Przepisz działania i porównaj ich wyniki. Zamiast pytajnika wstaw znak $<$ lub $>$.

a) $4,28 + 4,55$? $1,3 + 8,15$

b) $1,18 \cdot 4$? $10 - 6,33$

c) $9,25 + 3,16 + 4,2$? $34,55 : 2$

d) $15 - 13,681$? $0,33 \cdot 3$

3.13 Procenty

Podejmij temat



A czy ty wiesz, ile na wyprzedaży kosztuje kurtka, którą przymierza chłopiec?



Co oznaczają takie zapisy jak: 25%, 50%, 10%, 100%? Czy spotkaliście się w życiu codziennym z symbolem %, który czytamy *procent*? Czy słyszeliście to słowo?

„W autobusie 100% miejsc jest zajętych” – to znaczy, że wszystkie miejsca w autobusie są zajęte.

„100% właścicieli psów na osiedlu wyprowadza swoich pupili na smyczy” – to znaczy, że oni wszyscy wyprowadzają swoje psy na smyczy.

„50% osób w 24-osobowej klasie to dziewczynki” – to znaczy, że połowa uczniów, czyli $24 : 2 = 12$, to dziewczynki.

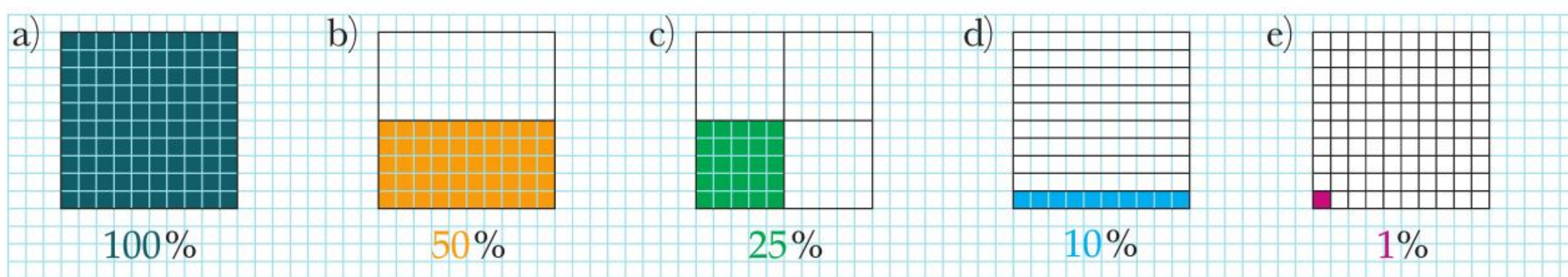
Czy wiecie już, co oznacza 100% i 50%?

1. Odpowiedz na pytania.

- Jeśli 100% członków twojej rodziny pojedzie na wycieczkę, to ile osób będzie na wycieczce?
- Ala przeczytała 100% powieści *W pustyni i w puszczy* Henryka Sienkiewicza, a książka ta ma 314 stron. Czy to oznacza, że przeczytała tylko część powieści? Ile stron przeczytała?
- 50% przedszkolaków 16-osobowej grupy – ile to dzieci?

2. Narysuj w zeszycie dowolną figurę. Pokoloruj 100% tej figury.

3. Jaki ułamek kwadratu zamalowano?



Jak wynika z ćwiczenia 3, określony procent to pewna część danej wielkości. Zapis z użyciem symbolu % to jeden ze sposobów przedstawiania ułamka.

100% danej wielkości to 100 ze 100 części, czyli jest to $\frac{100}{100}$ tej wielkości.

50% danej wielkości to 50 ze 100 części, czyli jest to $\frac{50}{100}$ tej wielkości.

25% danej wielkości to 25 ze 100 części, czyli jest to $\frac{25}{100}$ tej wielkości.

10% danej wielkości to 10 ze 100 części, czyli jest to $\frac{10}{100}$ tej wielkości.

1% danej wielkości to 1 ze 100 części, czyli jest to $\frac{1}{100}$ tej wielkości.

Procent oznacza zatem ułamek o mianowniku 100.



Jeden **procent** danej wielkości to jedna setna tej wielkości. Słowo *procent* pochodzi od łacińskiego wyrażenia *pro centum* oznaczającego: *na sto*.

Przykład 1

Przedstawmy podany procent w postaci ułamka zwykłego (nieskracalnego) oraz w postaci dziesiętnej.

a) 25%

b) 6%

$$\text{a) } 25\% = \frac{25}{100}$$

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

Zapis wynika z faktu, że 25% to 25 ze 100 części.

Skracamy otrzymany ułamek i dostajemy, że $25\% = \frac{1}{4}$.

Do zapisu procentu w postaci dziesiętnej wykorzystujemy ułamek zwykły przed skróceniem.

$$\text{b) } 6\% = \frac{6}{100}$$

$$\frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$

$$6\% = \frac{6}{100} = 0,06$$

Zapis wyniku z faktu, że 6% to 6 ze 100 części.

Po skróceniu ułamka otrzymujemy, że $6\% = \frac{3}{50}$.

Do zapisu procentu w postaci dziesiętnej wykorzystujemy ułamek zwykły przed skróceniem.

4. Przedstaw podany procent w postaci ułamka zwykłego (pamiętaj o skróceniu) oraz w postaci dziesiętnej.

a) 50%

b) 10%

c) 1%

d) 20%

e) 5%

f) 30%

g) 3%

h) 100%



• 100% to całość

• 50% to połowa

• 25% to ćwierć

Przykład 2

Przedstawmy podany ułamek w postaci procentów.

a) $\frac{1}{2}$

b) 0,9

$$\text{a) } \frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$$

Rozszerzamy ułamek do mianownika 100.

Zapisujemy ułamek w postaci procentu.

$$\text{b) } 0,9 = 0,90 = 90\%$$

Zapisujemy ułamek tak, żeby występowały w nim części setne.

Zapisujemy ułamek w postaci procentu.

5. Zapisz podany ułamek w postaci procentów.

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{7}{100}$

d) $\frac{99}{100}$

e) $\frac{1}{20}$

f) 0,35

g) 0,3

h) 0,75

i) 0,5

j) 0,8

Przykład 3

Obliczmy podany procent liczby 70.

a) 50%

b) 25%

c) 10%

d) 1%

e) 30%

a) Skoro 50% to połowa, więc 50% liczby 70 to 35.

b) Skoro 25% to ćwierć, więc 25% liczby 70 to $70 : 4 = 17,5$.

- c) Skoro 10% to $\frac{1}{10}$, więc 10% liczby 70 to $70 : 10 = 7$.
- d) Skoro 1% to $\frac{1}{100}$, więc 1% liczby 70 to $70 : 100 = 0,7$.

e) **Sposób I**

Wiemy już, że 10% liczby 70 to 7. Ponieważ $30\% = 3 \cdot 10\%$, to 30% liczby 70 wynosi $3 \cdot 7 = 21$.

Sposób II

$$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

30% liczby 70 to $\frac{3}{10}$ liczby 70.

$$\frac{3}{10} \cdot 70 = 21$$

Zapisujemy 30% w postaci ułamka.

Zamiast 30% liczby 70 obliczamy $\frac{3}{10}$ liczby 70.

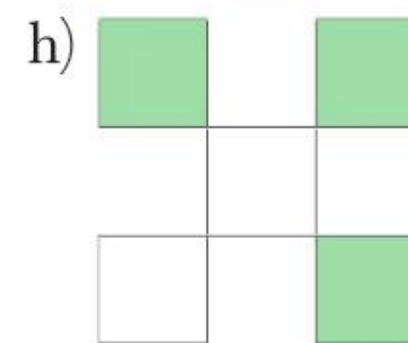
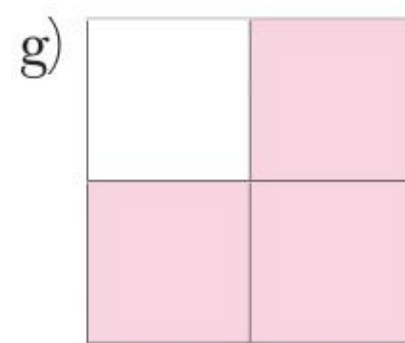
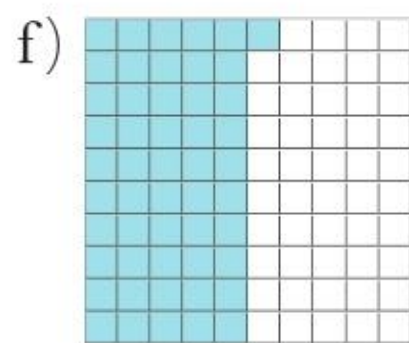
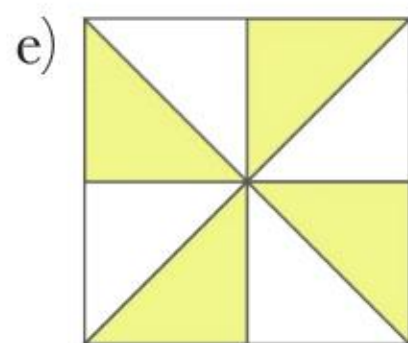
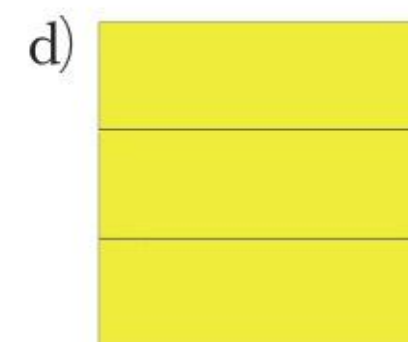
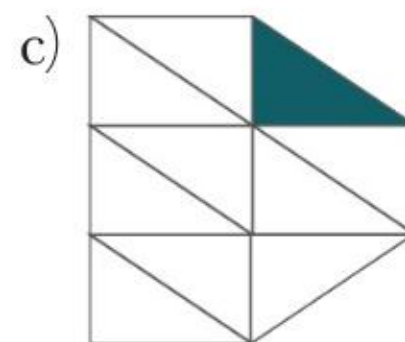
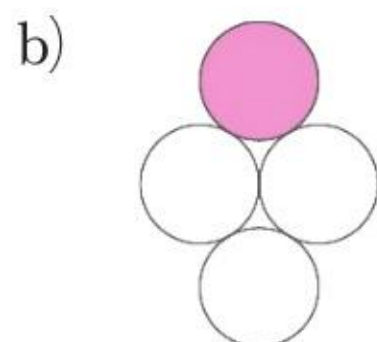
Ułamek liczby obliczamy, mnożąc ułamek przez tę liczbę.

6. Oblicz.

- | | | | |
|--------------------|-----------------------|---------------------|-------------------|
| a) 50% kwoty 30 zł | b) 25% długości 80 cm | c) 10% masy 200 dag | d) 50% kwoty 1 zł |
| 10% kwoty 30 zł | 10% długości 80 cm | 30% masy 200 dag | 1% długości 3 m |
| 80% kwoty 30 zł | 40% długości 80 cm | 75% masy 200 dag | 10% masy 25 dag |

Zadania

- Spójrz na zamalowaną część figury. Jaki to ułamek figury? A jaki to jej procent?



- W klasie Va jest 32 uczniów.
- a) Na poniedziałkowej lekcji matematyki obecnych było 100% uczniów. Ilu uczniów było na tej lekcji?
- b) Oceny bardzo dobre otrzymało 50% uczniów. Ilu uczniów otrzymało piątki?
- c) Jasne włosy ma 25% uczniów tej klasy. Ilu to uczniów?
- Wieś Kowalewo liczy 464 gospodarstwa. W 25% gospodarstw hodowane są indyki, w 50% kaczki, a w 100% – kury. W ilu gospodarstwach hodowane są indyki, w ilu hoduje się kaczki, a w ilu – kury?

- Na rysunku podano ceny ubrań przed obniżką. Odczytaj potrzebne informacje i oblicz, o ile złotych obniżono cenę poszczególnych towarów, a następnie napisz, ile kosztują obecnie.

- Oceń prawdziwość podanych zadań. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe. Rozwiąż zadanie bez wykonywania dokładnych obliczeń.

- 9% liczby 250 to więcej niż 25.
- 18% liczby 500 to mniej niż 100.
- 98% liczby 300 to więcej niż 300.
- 45% liczby 144 to mniej niż 72.



- Ania w poniedziałek spędziła w szkole 5 godzin. Tego dnia aż 30% czasu była na zajęciach wychowania fizycznego. Ile to minut? Ile lekcji wychowania fizycznego miała tego dnia Ania?

- Każdy z zawodników przedstawionych na rysunku podnosi ciężar równy 100% masy swojego ciała.



Czy to oznacza, że obie sztangi ważą tyle samo? Odpowiedź uzasadnij.

- Karolina waży 50 kg. Pewnego dnia wypła 2 litry wody, a jej tata wypił jeszcze więcej. Okazało się, że masa wody wypita przez dziewczynkę stanowiła 4% jej masy ciała, a masa wody wypitej przez tatę – tylko 3% jego masy ciała. Jak to możliwe?



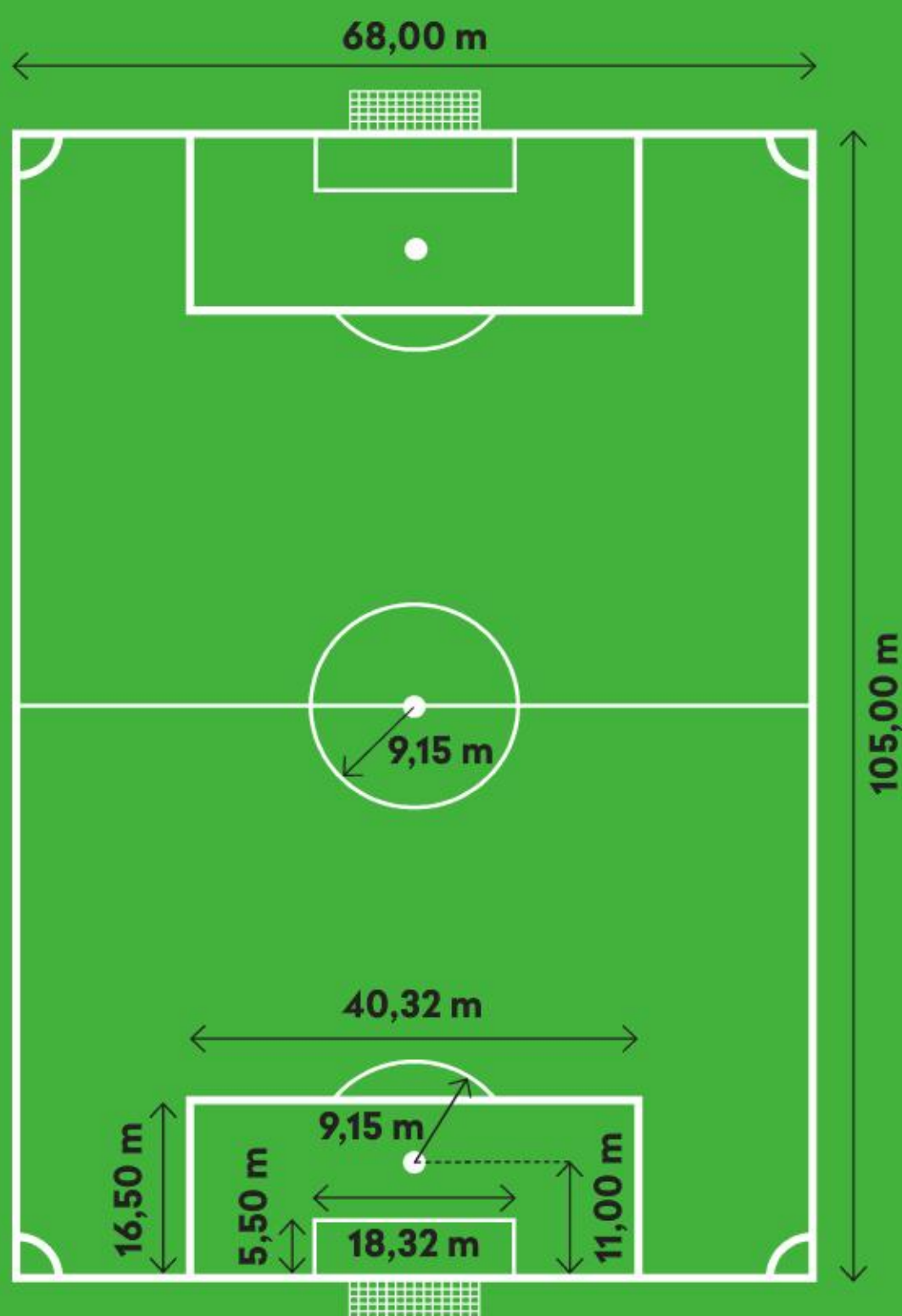
1 l wody waży 1 kg.



Igrzyska olimpijskie narodziły się w starożytnej Grecji. Pierwszymi konkurencjami były: biegi, skok w dal, rzut oszczepem, rzut dyskiem i zapasy. Obecnie dyscyplin olimpijskich jest 50 i liczba ta stale rośnie. Rywalizacja w żadnej dyscyplinie sportu nie może się obejść bez matematyki – bez liczb i różnego rodzaju pomiarów.

Na przykład w **rzucie oszczepem** albo **pchnięciu kulą** wynik zależy od uzyskanej odległości. Kula i oszczep mają określone wymiary i masy. Dorośli oszczepnicy używają sprzętu o masie 800 g i długości 260–270 cm, natomiast oszczepniczki – o masie 600 g i długości 220–230 cm. Kulomioci wykonują pchnięcie kulą o masie 4 kg (kobiety) i 7,26 kg (mężczyźni).

W dyscyplinach zespołowych także ważne są liczby. **Piłka nożna, piłka ręczna, koszykówka, siatkówka** czy **hokej** to gry, w których drużyny zdobywają punkty, na przykład za liczbę trafień do bramki lub kosza. Mecze trwają ustalony czas, a wymiary boisk zostały precyzyjnie określone. Zatem bez liczb ani rusz!



Wymiary boiska piłkarskiego

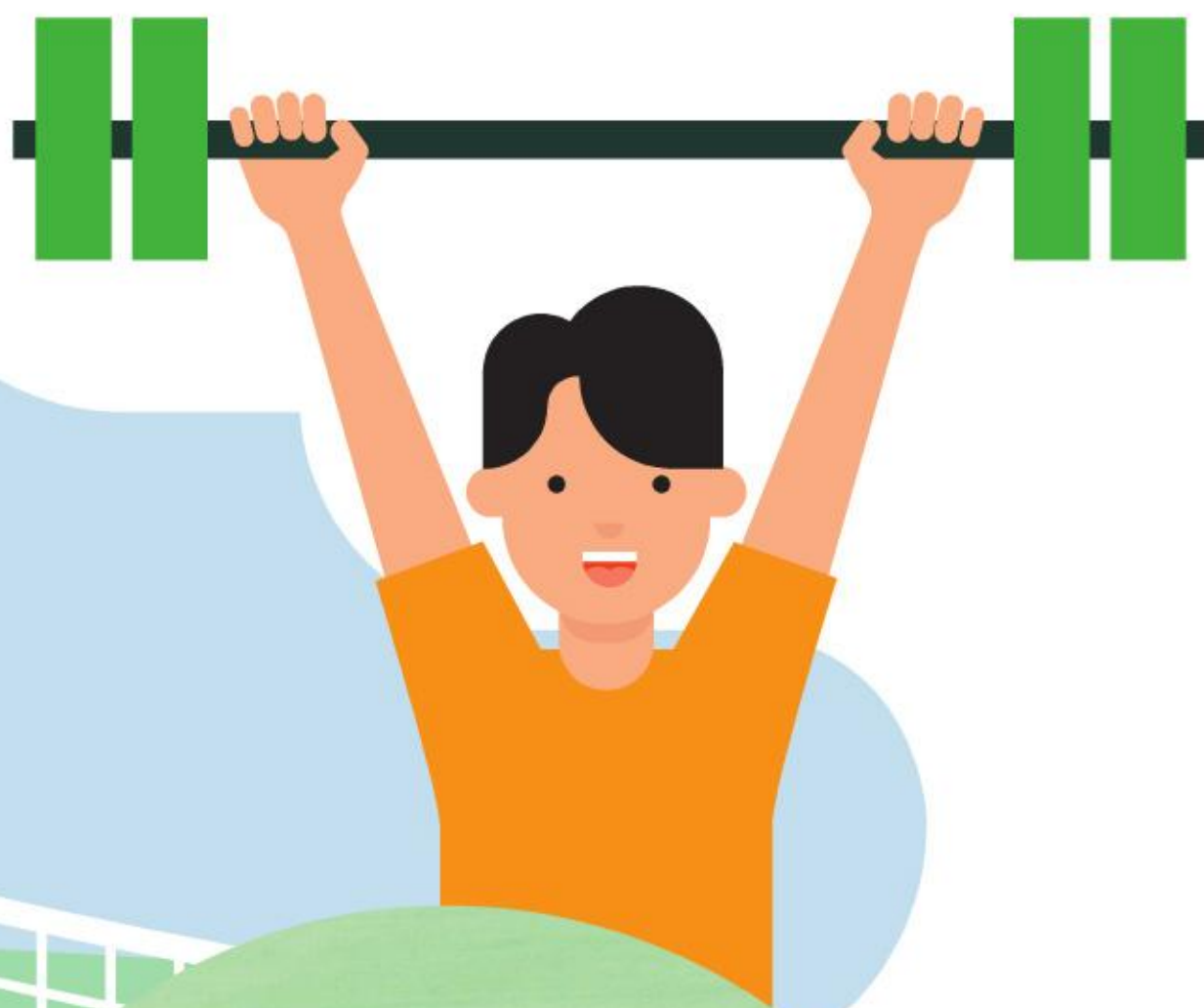


Zadanie 1

Oblicz, o ile metrów krótszy jest oszczep dla kobiet od oszczepu dla mężczyzn. Potem oblicz, o ile kilogramów lżejsza jest kula, której używają zawodniczki, od tej, której używają zawodnicy.

Zadanie 2

W internecie można znaleźć regulaminy dyscyplin zespołowych, a w nich zasady gry i dokładne wymiary boiska lub lodowiska. Wybierz 3 gry zespołowe i sprawdź, w której grze mecze trwają najdłużej, a w której – najkrócej. Jaka gra odbywa się na największym, a jaka – na najmniejszym boisku (lodowisku)?



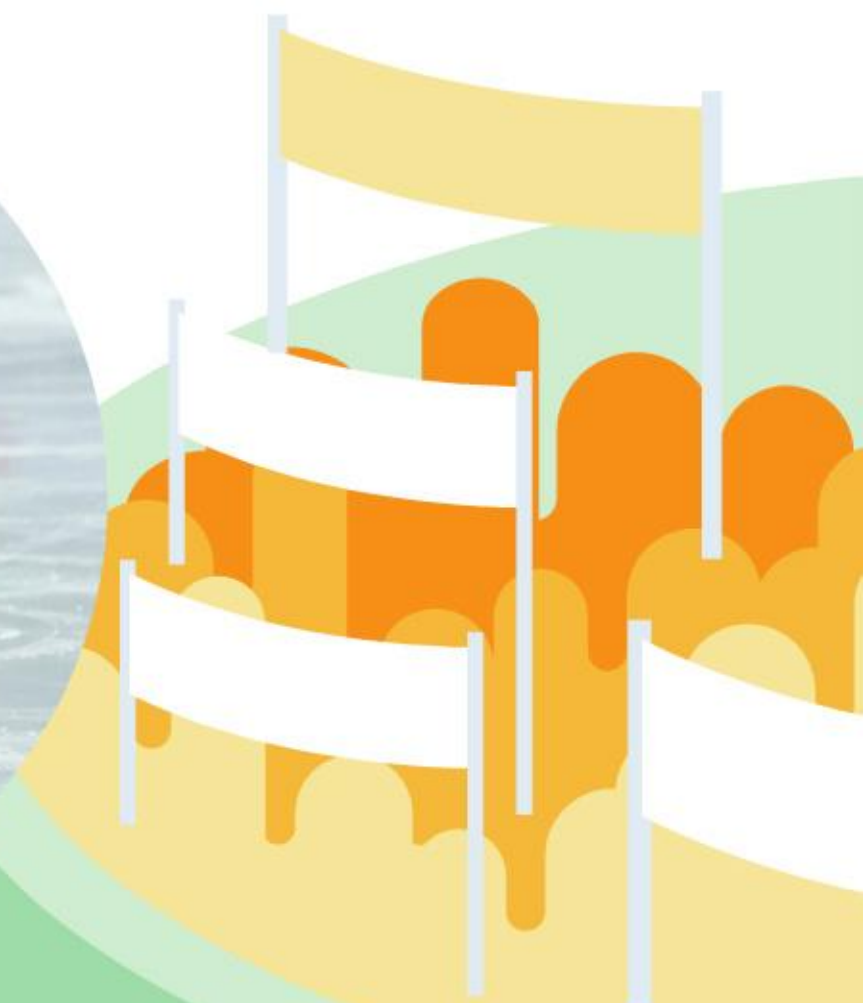
Podnoszenie ciężarów polega na podnoszeniu sztangi o określonej masie. Sztanga dla mężczyzn składa się ze stalowego pręta (gryfu) o długości 2,2 m ważącego 20 kg, natomiast sztanga dla kobiet ma 2,1 m długości i waży 15 kg. Na pręt zakładane są obciążniki o określonych masach. Wszędzie liczby!

Zawodnicy uprawiający tę dyscyplinę występują w różnych kategoriach wagowych. Czy wiesz, w jakich innych dyscyplinach istnieje podział na takie kategorie?

Jazda figurowa na lodzie, snowboard czy **gimnastyka sportowa** to dyscypliny, w których zawodnicy otrzymują punkty za stopień trudności i poprawność wykonywanych figur. Te punkty to również matematyka!

Najwięcej dyscyplin sportowych polega na pokonywaniu określonej odległości – są to **biegi** na różnych dystansach, **pływanie, kolarstwo, kajakarstwo** i wiele innych.

Najkrótszy bieg rozgrywany podczas igrzysk to sprint (100 m). Najdłuższy bieg olimpijski to maraton (42 km 195 m) – słynni biegacze pokonują jego trasę w nieco ponad 2 godziny!



Zadanie 3

Znajdź w internecie aktualnych rekordzistów świata i Polski w biegu maratońskim. Jakie czasy uzyskali?

Zadanie 4

Sprawdź, od czego pochodzi nazwa „maraton”. To bardzo ciekawa historia...

Podsumowanie działu 3

Ważne pojęcia

części milionowe	części stutysięczne	procent	części dziesięciotysięczne
------------------	---------------------	---------	----------------------------

Sposoby zapisywania liczb podczas wykonywania działań pisemnych na ułamkach dziesiętnych

dodawanie	odejmowanie	mnożenie	dzielenie
$\begin{array}{r} 25,38 \\ + 1,2057 \\ \hline \text{wy,n i k} \end{array}$	$\begin{array}{r} 105,23 \\ - 13,129 \\ \hline \text{wy,n i k} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3,127 \\ \cdot 25 \\ \hline \dots\dots \\ + \dots\dots \\ \hline \text{wy,n i k} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{wy,n i k} \\ 77,861 : 7 \\ \hline - \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$

Jak pomnożyć lub podzielić ułamek dziesiętny przez 10, 100, 1000 itd.

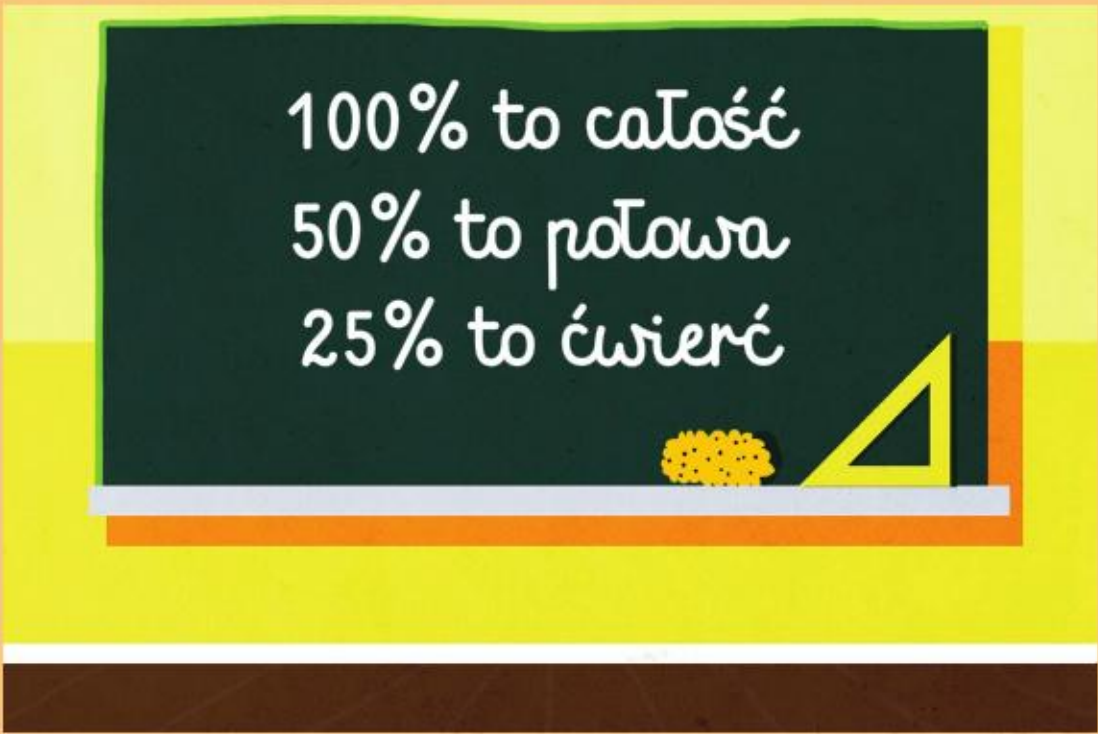
Aby **pomnożyć**, wystarczy przesunąć przecinek w mnożonej liczbie **w prawo** o tyle miejsc, ile zer jest w liczbie, przez którą mnożymy ułamek.

$123,456 \cdot 10 = 1234,56$
 $123,456 \cdot 100 = 12\,345,6$
 $123,456 \cdot 1000 = 123\,456$
 $123,456 \cdot 10\,000 = 1\,234\,560$
 $123,456 \cdot 100\,000 = 12\,345\,600$

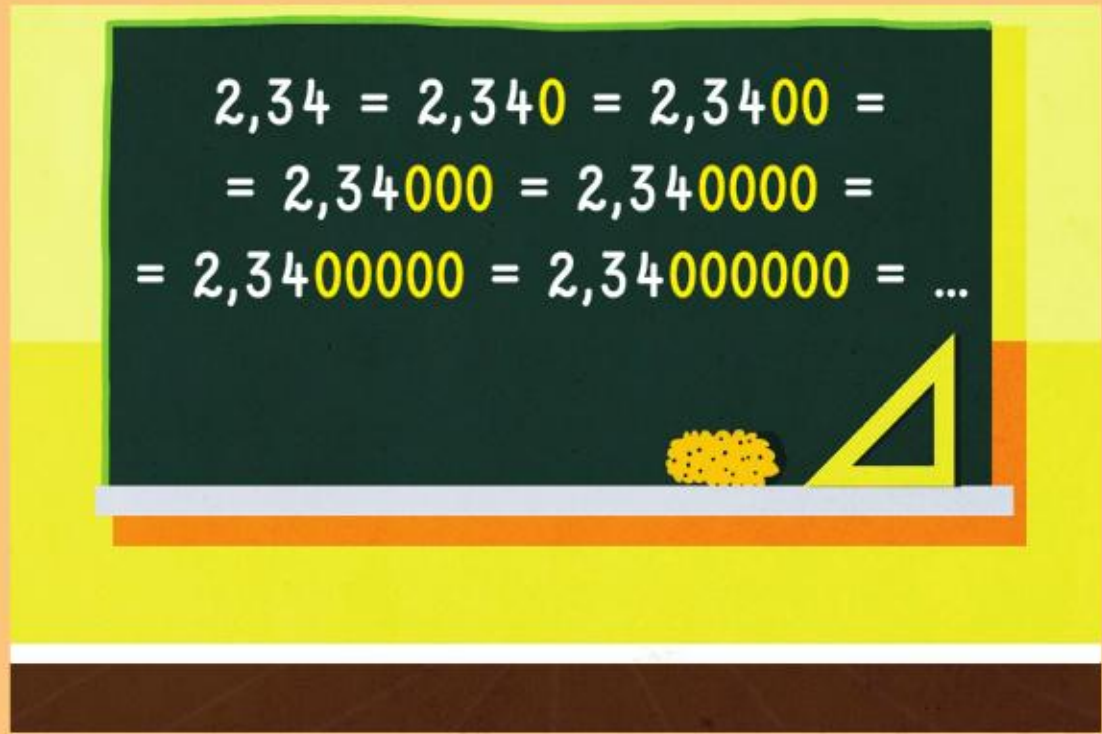
Aby **podzielić**, wystarczy przesunąć przecinek w dzielonej liczbie **w lewo** o tyle miejsc, ile zer jest w liczbie, przez którą dzielimy ułamek.

$123,456 : 10 = 12,3456$
 $123,456 : 100 = 1,23456$
 $123,456 : 1000 = 0,123456$
 $123,456 : 10\,000 = 0,0123456$
 $123,456 : 100\,000 = 0,00123456$

Procenty



Równość ułamków dziesiętnych



Czy już umiesz?

- 1 Liczba osiem i cztery dziesiętysięczne zapisana w postaci dziesiętnej to
- A. 8,004 B. 8,04 C. 8,0004 D. 8,00004

- 2 Która z liczb jest równa 1,2?
- A. $\frac{1}{2}$ B. $1\frac{1}{5}$ C. $1\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{5}$

- 3 Jaką współrzędną ma punkt A zaznaczony na osi liczbowej?



- 4 W którym punkcie liczby zapisane są w kolejności rosnącej?

- A. 0,6 0,52 0,75 B. 5,48 5,69 5,128
C. 2,75 2,8 2,99 D. 3,6 3,06 3,006

- 5 Jakie cyfry należy wstawić w miejsce znaków zapytania, żeby otrzymać poprawnie wykonane działanie?

$$6,72 + 41,? = 48,2?$$

Cyfry w odpowiedziach podano w kolejności ich występowania w działaniu.

- A. 5 i 2 B. 4 i 2 C. 5 i 1 D. 4 i 1
- 6 Jaką liczbę należy odjąć od 8, żeby otrzymać 2,493?
- A. 5,517 B. 5,507 C. 6,517 D. 6,617

- 7 Zapisz 5 liczb, z których każda jest o 0,03 mniejsza od poprzedniej. Zaczynij od liczby 10,1.

- 8 Które działanie wykonane jest poprawnie?

A.
$$\begin{array}{r} 43,8 \\ + 2,65 \\ \hline 70,3 \end{array}$$

B.
$$\begin{array}{r} 37,82 \\ + 5,794 \\ \hline 43,714 \end{array} \times$$

C.
$$\begin{array}{r} 2,78 \\ - 1,352 \\ \hline 1,432 \end{array} \times$$

D.
$$\begin{array}{r} 16 \\ - 4,36 \\ \hline 11,64 \end{array}$$

- 9 Liczbę 36,7 powiększ o 5,94, a następnie otrzymany wynik zmniejsz 8 razy. O ile otrzymana w ten sposób liczba jest mniejsza od 10?

- 10 Na szkolną zabawę kupiono 27 kg mandarynek, 13 kg bananów i 24 kg jabłek. Odczytaj z rysunku potrzebne informacje i oblicz, ile zapłacono:

- a) za każdy gatunek owoców,
b) za wszystkie owoce.



- 11 Klasa Vb, licząca 23 uczniów, wybrała się na wycieczkę do kina i muzeum. Za bilety do kina dla dzieci i nauczyciela (w tej samej cenie) Rada Rodziców zapłaciła 304,80 zł, a za bilety wstępu do muzeum 359,76 zł.

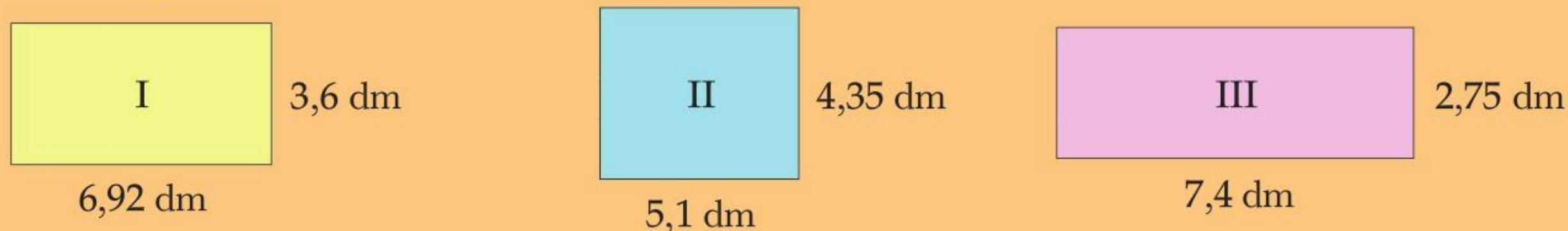
- a) Ile kosztował jeden bilet do kina, a ile – do muzeum?
b) Jaki był łączny koszt wszystkich biletów?

- 12 Zamiast pomnożyć liczbę 3,042 przez 100, Agnieszka obliczyła sumę tych liczb. O ile mniejszy jest wynik otrzymany przez Agnieszkę od wyniku poprawnego?

- 13 Który z poniższych ilorazów jest największy?

A. $45 : 1000$ B. $450 : 10\,000$ C. $4,5 : 10$ D. $0,45 : 100$

- 14 Odczytaj z rysunku potrzebne informacje i oceń prawdziwość podanych zdań bez wykonywania dokładnych obliczeń. Zapisz w zeszycie literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F, jeśli zdanie jest fałszywe.



- a) Obwód prostokąta I jest mniejszy niż 20 dm.
b) Obwód prostokąta II jest mniejszy niż 20 dm.
c) Obwód prostokąta III jest większy niż 20 dm.
d) Prostokąt III ma największy obwód.
e) Prostokąt II ma najmniejszy obwód.

- 15 Przepisz i uzupełnij zdanie. Zamiast znaku zapytania wpisz odpowiednią liczbę.

- a) 50% godziny to ? minut. b) 100% kwadransa to ? minut.
c) 25% minuty to ? sekund. d) 10% kwietnia to ? dni.

Odpowiedzi do zadań

1. Liczby naturalne

- 1.1 Dziesiątkowy system pozycyjny (s. 9)
5. b) zagraniczne 6. a) 900 b) 9000
c) 9 000 000 000 d) 81 e) 9
- 1.2 Porównywanie liczb. Oś liczbowa (s. 11)
1. a) najtańszy: czarny, najdroższy: niebieski
b) najtańszy: żółty, najdroższy: czerwony c) nie
d) 799 zł, 1300 zł, 2699 zł, 3459 zł, 3737 zł, 7349 zł
4. a) 9 876 543 b) 9 999 999 5. 20 liczb;
największa: 2999, najmniejsza: 1000 10. 880 cm
11. najdroższy: żółty, najtańszy: brązowy
- 1.3 Szacowanie wyników działań na liczbach naturalnych (s. 16)
1. a) $538 + 695$, $215 \cdot 6$ b) $2375 - 2291$, $621 : 9$ 3. tak
4. Magda, Patrycja 5. nie 6. nie 7. II, V, VII, X
- 1.4 Dodawanie i odejmowanie liczb naturalnych (s. 21)
1. 1107 2. 9001 3. o 828 442 zł 4. 12 877
5. A 6. 1436 km 7. 218 8. C
9. a) Mont Blanc o 2309 m, Dufourspitze o 2135 m,
Dom o 2046 m, Weisshorn o 2007 m,
Matterhorn o 1979 m b) o 6349 m c) 4040 m
- 1.5 Mnożenie liczb naturalnych (s. 27)
1. 1568 2. a) P b) F c) F d) P 3. a) 4500
b) 108 000 c) 756 000 4. C 5. 2720 km 6. A
7. a) 28 890, 2 889 000, 2568 b) 2880, 2898, 2907
- 1.6 Dzielenie liczb naturalnych (s. 32)
1. a) 16 b) 9 zł c) 168 zł 2. najdroższy w zestawie III,
a najtańszy w IV 3. 34 4. C 5. B 6. A
- 1.7 Kolejność wykonywania działań (s. 35)
1. 117 2. 5 g 3. 7 4. 389 km
5. z dżemem wiśniowym o 376 6. 2910
- 1.8 Praca z kalkulatorem (s. 39)
1. a) 35 936 670 b) 511 999 200 c) 124 999 500
2. a) 1332 b) 1791 c) 4059 3. 107 050 zł 4. 6 liczb
- 1.9 Odczytywanie i tworzenie tabel (s. 41)
2. o 8 zł
- 1.10 Równania (s. 47)
1. a) 18 b) 38 c) 28 d) 18 2. a) $x = 3526$; $x = 766$
b) $x = 1895$; $x = 5323$ c) $x = 54$; $x = 321$ d) $x = 2520$;
 $x = 13$ 3. I i III 4. D 5. 79 min 6. 13 6. 18
7. 63 zł 8. 84 9. 8 10. 168
- 1.11 Dzielniki i wielokrotności liczb naturalnych (s. 51)
1. a) F b) P c) P d) F e) P f) F g) F h) P
2. a) tylko liczba 1 b) 11 c) 49 d) 35 3. C
4. a) o największej – grudzień, o najmniejszej –
styczeń 6. 24 7. a) 30, 60, 90, 120, 150, 180, ...
b) 20, 40, 60, 80, 100, 120, ... c) 60, 120, 180, ...

- 1.12 Cechy podzielności liczb naturalnych (s. 55)
3. 351, 360, 369, 378, 387 7. a) 36, 45, 54, 63
b) 15, 25, 35, 45, 55, 65 c) 12, 14, 16, 22, 24, 26, 32, 34,
36, 42, 44, 46, 52, 54, 56, 62, 64, 66
- 1.13 Liczby pierwsze i liczby złożone (s. 58)
2. B 3. np. 15, 21, 35; złożoną 5. dwie: 43, 53
7. a) 3 i 7 b) np. 17 i 23 c) 3 i 5 d) 5 i 7 8. A
9. 5, 7, 11, 13, 17, 19
- 1.14 Rozkład liczby na czynniki pierwsze (s. 62)
1. a) 6, 15, 21 b) 30, 42, 70 c) 8, 27, 125 d) 16, 24, 60
3. 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70 4. a) tak b) tak c) nie d) tak
5. 14 cm 6. w 2035 r.
- Czy już umiesz? (s. 64)
1. B 2. $A = 50$, $B = 85$, $C = 15$, $D = 32$, $E = 104$, $F = 61$
3. C 4. D 5. C 6. A 7. 2 8. a) Pod Sosną
b) za dobę o 6 zł mniej, za 2 tygodnie o 84 zł mniej
9. o 395 zł 10. 954 g 12. C 13. a) $x + 64 = 151$,
 $x = 87$, b) $x - 18 = 96$, $x = 114$, c) $81 : x = 27$, $x = 3$
14. a) np. VII b) np. IX 15. a) np. IV b) np. VIII
16. a) 402 b) 312 c) 105 d) 600 17. C 18. D
19. B 20. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

2. Ułamki zwykłe

- 2.1 Ułamki i liczby mieszane (s. 72)
6. $\frac{1}{6}$ 8. $\frac{17}{3}$, $\frac{45}{8}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{53}{8}$, $\frac{23}{3}$, $\frac{61}{8}$
- 2.2 Ułamek jako iloraz (s. 75)
2. dla każdego po $3\frac{1}{5}$ kawałka 3. $\frac{15}{8} \text{ l} = 1\frac{7}{8} \text{ l}$
4. $\frac{51}{4} \text{ km} = 12\frac{3}{4} \text{ km}$ 6. B 8. a) $27 : 4 = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$
b) $27 : 5 = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$ c) $27 : 7 = \frac{27}{7} = 3\frac{6}{7}$
- 2.3 Rozszerzanie i skracanie ułamków zwykłych (s. 79)
4. C 6. a) 5 b) 3 c) 2 d) 3 e) 2 f) 5
- 2.4 Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika (s. 83)
1. $\frac{5}{24}$ 4. a) F b) P c) P d) F 5. Obaj chłopcy się
pomylili.
- 2.5 Porównywanie ułamków zwykłych (s. 87)
2. a) $\frac{15}{24} > \frac{27}{48} > \frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{6} > \frac{7}{12} > \frac{2}{9}$ c) $\frac{2}{5} > \frac{7}{20} > \frac{4}{15}$
3. a) np. $\frac{7}{10}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{14}$ b) np. $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$
4. np. $\frac{5}{12}$ 7. najwięcej żółtych, najmniej fioletowych
- 2.6 Ułamki zwykłe na osi liczbowej (s. 89)
2. D
- 2.7 Dodawanie i odejmowanie ułamków o jednakowych
mianownikach (s. 92)
1. $2\frac{6}{7}$, $3, 3\frac{3}{7}$, $7, 9\frac{2}{7}$, $5\frac{1}{7}$ 2. $1\frac{1}{9}$, $3\frac{4}{9}$, $4, \frac{2}{3}$, $1\frac{7}{9}$, $11\frac{1}{3}$

3. a) różowa, srebrna i niebieska lub żółta, czerwona i srebrna b) $2\frac{5}{8}$ m, $\frac{3}{4}$ m c) np. fioletowa, pomarańczowa i niebieska

4. a) 1 b) $5\frac{1}{10}$ c) $2\frac{7}{13}$ d) $8\frac{1}{7}$ 5. a) $16\frac{9}{10}$ dag

b) o $33\frac{1}{10}$ dag 6. a) $16\frac{18}{25}$ kg b) $9\frac{4}{25}$ kg

7. a) $x = \frac{5}{9}$ b) $x = 5\frac{3}{5}$ c) $x = 8\frac{7}{11}$ d) $x = 1\frac{5}{7}$

2.8 Dodawanie ułamków o różnych mianownikach (s. 96)

1. $4\frac{11}{12}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{24}$, $8\frac{8}{9}$, $9\frac{3}{4}$, $11\frac{1}{60}$ 2. $\frac{31}{35}$ 3. C 4. a) tak

b) nie 5. a) $2\frac{17}{24}$ m b) $2\frac{1}{8}$ m c) $4\frac{11}{24}$ m 6. $1\frac{37}{40}$ l

2.9 Odejmowanie ułamków o różnych mianownikach (s. 99)

1. $\frac{4}{15}$, $1\frac{2}{45}$, $2\frac{9}{40}$, $\frac{31}{35}$, $2\frac{23}{30}$, $3\frac{9}{10}$ 2. $\frac{19}{20}$ kg 3. $1\frac{37}{50}$ m

5. a) $2\frac{7}{15}$ b) $6\frac{7}{24}$ c) $3\frac{2}{15}$ d) $7\frac{3}{40}$ 6. A 7. a) $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{3}$ c) $4\frac{13}{20}$, $5\frac{4}{5}$ 8. a) $x = 3\frac{1}{12}$ b) $x = 13\frac{5}{6}$

c) $x = 5\frac{7}{10}$ d) $x = \frac{45}{56}$

2.10 Mnożenie ułamków zwykłych przez liczby naturalne (s. 103)

1. $2\frac{2}{5}$, $10\frac{2}{7}$, $13\frac{1}{5}$, $5\frac{1}{4}$, $10\frac{9}{5}$, $8\frac{1}{5}$, $15\frac{1}{3}$, $28\frac{1}{2}$ 2. D

3. 12 m, 30 m 4. $\frac{3}{20}$, $\frac{3}{5}$, $2\frac{2}{5}$, $9\frac{3}{5}$, $38\frac{2}{5}$ 5. Nie, ponieważ

$8 \cdot \frac{3}{10}$ kg = $2\frac{2}{5}$ kg > 2 kg. 6. o $4\frac{2}{3}$ mm; o ok. 2 cm

7. a) $2\frac{3}{4}$ b) $21\frac{2}{3}$ c) $2\frac{4}{5}$ d) $5\frac{1}{5}$ e) $5\frac{3}{5}$ f) $7\frac{1}{3}$

2.11 Obliczanie ułamka danej liczby (s. 105)

1. Michał 120, Magda 225 2. C 3. pies 16 kg, kot $4\frac{1}{2}$ kg 4. a) 70 cm b) $\frac{1}{2}$ 5. 49 dziewcząt,

14 z nich tańczy 6. a) 36, 10, 34, 33, 95 b) 4, 75, 27, 95, 206 c) 2, 20, 122, 9, 24 d) 90, 125, 32, 1000, 515

7. w czerwcu 80, w lipcu 192, w sierpniu 144; w pozostałych miesiącach 64

10. a) na żywność 1680 zł, na odzież 1200 zł b) źle

2.12 Dzielenie ułamków przez liczby naturalne (s. 109)

1. $1\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{31}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{13}$ 2. $\frac{3}{10}$ l 3. D 4. $4\frac{3}{4}$ 5. C

6. $\frac{9}{10}$ m = 90 cm 7. a) $x = 2\frac{3}{4}$ b) $x = \frac{3}{5}$

Czy już umiesz? (s. 111)

1. C 2. C 3. $\frac{59}{63}$ 5. o $\frac{3}{4}$ godz. 6. a) $11\frac{1}{3}$ b) $6\frac{1}{2}$

c) $10\frac{1}{2}$ d) 18 7. mama 32, tata 40, Ola 12 8. C

9. B 10. A 11. A 12. a) P b) P c) F d) F e) F f) P

3. Ułamki dziesiętne

3.1 Zapisywanie i odczytywanie ułamków dziesiętnych (s. 116)

3. B 4. b) 0,007 m, 0,125 m, 0,00003 km, 0,00052 km, 0,000004 km 6. b) 0,004 kg, 0,068 kg, 0,359 kg, 0,00007 t, 0,00364 t

3.2 Zamiana ułamków zwykłych na ułamki dziesiętne (s. 119)

7. a) P b) P c) F d) F e) F f) F g) P 8. D

3.3 Ułamki dziesiętne na osi liczbowej (s. 123)

2. Wielka Brytania 9,88 s, Rosja 9,92 s, Francja 9,99 s, Niemcy 10,07 s, Włochy 10,13 s; reprezentant Wielkiej Brytanii

3.4 Porównywanie ułamków dziesiętnych (s. 128)

4. a) $7,03 < 7,035 < 7,05 < 7,3 < 7,35 < 7,53$

b) $2,29 < 2,9 < 2,92 < 3,01 < 3,09 < 3,19$

6. 7,54009; 7,5402; 7,548 7. TALES

3.5 Dodawanie ułamków dziesiętnych w pamięci (s. 132)

1. a) 9,7 b) 5,96 c) 5 d) 9,96 e) 12,9 f) 4,01 2. a) 0,6

b) 6,1 c) 0,7 d) 3,85 3. 0,55 kg 4. 8,15 zł 5. 491 m

3.6 Dodawanie ułamków dziesiętnych sposobem pisemnym (s. 135)

1. 20,87 m 2. C 3. 97,2 cm 5. 23,62 zł

6. rekord mężczyzn 8,86 m, rekord kobiet 7,52 m

3.7 Odejmowanie ułamków dziesiętnych w pamięci (s. 138)

1. a) 1,7 b) 4,8 c) 1,9 d) 2,52 e) 6,69 f) 2,42 g) 6,19

h) 3,17 i) 3,04 2. a) 1,50 zł b) 1 zł c) 6,50 zł

3. 6,48 4. 3,71 6. o 0,04 m 7. 3 kg

3.8 Odejmowanie ułamków dziesiętnych sposobem pisemnym (s. 141)

1. 0,24 kg 2. 87,96 zł 3. a) 27,83 km b) Tomaszowi 9,985 km, Michałowi 14,365 km 4. 35,80 zł

5. A 6. a) $7,65 + x = 15$; $x = 7,35$ b) $x + 25,44 = 38,3$; $x = 12,86$ c) $15,7 - x = 2,378$; $x = 13,322$

3.9 Mnożenie ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne (s. 144)

1. 11,4; 187,53 2. 37,84 dag 4. a) 157,5 km

b) 192,5 km

3.10 Dzielenie ułamków dziesiętnych przez liczby naturalne (s. 148)

1. 0,15 dag 2. 3,45 zł 3. 0,325 m 4. po 14,50 zł

5. w środę 0,27 kg, w niedzielę 0,54 kg

3.11 Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000 itd. (s. 152)

1. 45 zł 2. 640 kg 3. 18,52 km

3.13 Procenty (s. 158)

1. a) 50% b) 25% c) 10% d) 100% e) 50% f) 51%

g) 75% h) 60% 4. ceny po obniżce: spodnie 96 zł, bluzka 32 zł, sukienka 184 zł, apaszka 14,40 zł

5. a) F b) P c) F d) P 6. 90 min; 2 lekcje

Czy już umiesz? (s. 163)

1. C 2. B 3. 3,48 4. C 5. A 6. B 8. D

10. a) za mandarynki 156,60 zł, za banany 59,80 zł, za jabłka 70,80 zł b) 287,20 zł 11. a) do kina 12,70 zł, do muzeum 14,99 zł b) 664,56 zł 12. o 201,158

13. C 14. a) F b) P c) P d) F e) P

Indeks

C

cecha podzielności liczb 52, 54

D

dzielnik liczby naturalnej 48

L

liczba nieparzysta 52

liczba parzysta 52

liczba pierwsza 56

liczba złożona 56

N

najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) 50

największy wspólny dzielnik (NWD) 49

niewiadoma 43

P

procent 156

R

rozkład liczby na czynniki pierwsze 59

rozwiązanie równania 43

równanie 43

S

szacowanie 15

U

ułamek nieskracalny 78

W

wielokrotność liczby naturalnej 50

Ilustracje

Marcin Kot (s. 36/kalkulator, s. 51), Tamara Kwiatkowska (s. 160, 161), Karolina Skorupska (s. 21, 56, 96/dzbanek, 109/parawan, 129, 136, 155, 162), Katarzyna Surman-Pusz (s. 6, 10, 24, 25, 26, 33, 36, 43, 45, 53, 56/ogrodnicy, 59, 68, 71, 80, 84, 85, 87, 88, 90, 94, 95, 97, 98, 104, 107, 109, 100, 114, 118, 121, 125, 127, 128, 130, 133, 135, 142, 143, 144, 145, 147, 149, 151, 154, 155/scenka w sklepie), Kinga Trafas (s. 13, 17, 18, 22, 23, 29, 42, 46, 55, 63, 64, 74, 84/sok i pizza, 90/zeszyt, 96, 111, 139, 159, 164)

Wykaz dysponentów praw autorskich do obrazów i zdjęć zamieszczonych w publikacji:

Archiwum: (flagi: Niemiec, Polski, s. 40, flagi: Polski, Węgier, s. 105, flagi: Wielkiej Brytanii, Rosji, Francji, Niemiec, Włoch, s. 123); BE&W/Alamy: (mechaniczna maszyna licząca, s. 39), (krokomierz, s. 139); Shutterstock: Aphelleon (Układ Słoneczny, s. 8), Oleksandr Kostiuhenko (drewniana ramka, s. 14), specnaz (buty, s. 15), vitaliy_73 (czapka, s. 15), Olga Popova (rękawiczki, s. 15), mimo (szalik, s. 15), Petinov Sergey Mihilovich (kurtka, s. 15), goir (etykieta, s. 15, s. 65), Zonda (flamastry, s. 32), Janis Abolins (ikona – autobus, karteczka samoprzylepna, s. 40), Grigoryeva Photo Video (szpulka ze wstążką, s. 47), yuda chen (muffiny, s. 48), Maskarad (pomarańcze, s. 48), Elnur (kurtka, s. 65), Pakhnyushchy (buty, s. 65), cache_cache (czekolada, 73), Barry Blackburn (samochód, s. 76), Julian Weber (butki, s. 93), oorka (kredka, s. 100), Okashi (pudełko z kredkami, s. 100), Christopher Elwell (kłębek, s. 152), iShift (porcja lodów, s. 153), Tim UR (grejpfrut, s. 153), AlenKadr (butelka wody mineralnej, 153), Take Photo (arbuz, s. 153), worker (pączek, s. 153), Mariyana M (butelka soku, s. 153), Leonard Zhukovsky (łyżwiarka, s. 160), StockphotoVideo (oszczepniczka, s. 160), Natursports (sprinterzy, s. 160); Wikipedia: (Johan von Nameh, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GDANSK,_Falowiec_na_Obroncow_Wybrzeza.JPG, CC BY-SA 3.0, falowiec, s. 35), (Dbenbenn, flaga Norwegii, s. 40)



Grupa MAC S.A.
ul. Witosa 76
25-561 Kielce

www.mac.pl

ISBN 978-83-8108-375-1



9 788381 083751

indeks 880802